

Bài 5. DÃY SỐ

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa dãy số

- ☑ Mỗi hàm u xác định trên tập các số nguyên dương \mathbb{N}^* được gọi là một dãy vô hạn (gọi tắt là dãy số), kí hiệu $u = u(n)$.
- ☑ Ta thường viết u_n thay cho $u(n)$ và kí hiệu dãy số $u = u(n)$ bởi (u_n) , do đó dãy số (u_n) được viết dưới dạng khai triển $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, \dots$. Số u_1 gọi là số hạng đầu, u_n gọi là số hạng thứ n và gọi là số hạng tổng quát của dãy số.
- ☑ Nếu $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = c$ thì (u_n) được gọi là dãy số không đổi.
- ☑ Mỗi hàm u xác định trên tập $M = \{1; 2; 3; \dots; m\}, \forall m \in \mathbb{N}^*$ được gọi là một dãy số hữu hạn.
- ☑ Dạng khai triển của dãy hữu hạn là $u_1, u_2, u_3, \dots, u_m$. Số u_1 gọi là số hạng đầu, số u_m gọi là số hạng cuối.

2. Các cách cho một dãy số

Một dãy số có thể cho bằng:

- ✔ Liệt kê các số hạng (chỉ dùng cho các dãy hữu hạn và có ít số hạng);
- ✔ Công thức của số hạng tổng quát;
- ✔ Phương pháp mô tả;
- ✔ Phương pháp truy hồi.

3. Dãy số tăng, dãy số giảm, dãy số bị chặn

- ☑ Dãy số (u_n) được gọi là dãy số tăng nếu ta có $u_{n+1} > u_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
- ☑ Dãy số (u_n) được gọi là dãy số giảm nếu ta có $u_{n+1} < u_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
- ☑ Dãy số (u_n) được gọi là bị chặn trên nếu tồn tại số M sao cho $u_n \leq M, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
- ☑ Dãy số (u_n) được gọi là bị chặn dưới nếu tồn tại số m sao cho $u_n \geq m, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
- ☑ Dãy số (u_n) được gọi là bị chặn nếu nó vừa bị chặn trên vừa bị chặn dưới, tức là tồn tại các số m, M sao cho $m < u_n < M, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

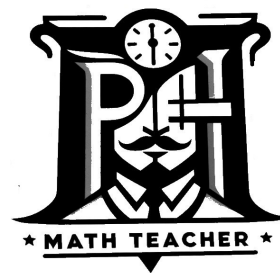
B. CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

1 Số hạng tổng quát, biểu diễn dãy số

Để tìm số hạng tổng quát của một dãy bất kỳ khi biết một vài số hạng đầu của dãy số ta làm như sau

- ☑ Phân tích các số hạng sau theo các số hạng đã biết theo một quy luật nào đó.
- ☑ Dự đoán số hạng tổng quát
- ☑ Kiểm tra bằng cách thay lần lượt các giá trị $n \in \mathbb{N}^*$ vào công thức tổng quát (Chứng minh bằng phương pháp quy nạp).

Để biểu diễn một dãy số khi biết công thức tổng quát ta lần lượt thay $n \in \mathbb{N}^*$ vào công thức tổng quát để tìm các số hạng thứ nhất, thứ hai, ...



ĐIỂM: _____

“It’s not how much time you have, it’s how you use it.”

QUICK NOTE

QUICK NOTE

1. Ví dụ minh họa

VÍ DỤ 1. Xác định số hạng đầu và số hạng tổng quát của dãy số (u_n) các số tự nhiên lẻ 1, 3, 5, 7, ...

VÍ DỤ 2. Xác định số hạng đầu và số hạng tổng quát của dãy số (v_n) các số nguyên dương chia hết cho 5: 5, 10, 15, 20, ...

2. Bài tập tự luận

BÀI 1. Xét dãy số hữu hạn gồm các số tự nhiên lẻ nhỏ hơn 20, sắp xếp theo thứ tự từ bé đến lớn. Liệt kê tất cả các số hạng của dãy số này, tìm số hạng đầu và số hạng cuối của dãy.

BÀI 2. Xét dãy số gồm tất cả các số tự nhiên chia cho 5 dư 1. Xác định số hạng tổng quát của dãy số.

BÀI 3. Viết năm số hạng đầu của dãy số gồm các số nguyên tố theo thứ tự tăng dần.

3. Câu hỏi trắc nghiệm

CÂU 1. Cho dãy số có các số hạng đầu là 5, 10, 15, 20, 25, ... Số hạng tổng quát của dãy số này là

- ☐ A $u_n = 5(n - 1)$.
- ☐ B $u_n = 5n$.
- ☐ C $u_n = 5 + n$.
- ☐ D $u_n = 5n + 1$.

CÂU 2. Cho dãy số (u_n) với $u_n = \frac{an^2}{n + 1}$, a là hằng số. u_{n+1} là số hạng nào trong các số hạng sau

- ☐ A $u_{n+1} = \frac{a(n + 1)^2}{n + 2}$.
- ☐ B $u_{n+1} = \frac{a(n + 1)^2}{n + 1}$.
- ☐ C $u_{n+1} = \frac{an^2 + 1}{n + 1}$.
- ☐ D $u_{n+1} = \frac{an^2}{n + 2}$.

CÂU 3. Cho dãy số có các số hạng đầu là 8, 15, 22, 29, 36, ... Số hạng tổng quát của dãy số này là

- ☐ A $u_n = 7n + 7$.
- ☐ B $u_n = 7n$.
- ☐ C $u_n = 7n + 1$.
- ☐ D u_n không viết được dưới dạng công thức .

CÂU 4. Cho dãy số có các số hạng đầu là $0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots$ Số hạng tổng quát của dãy số này là

- ☐ A $u_n = \frac{n + 1}{n}$.
- ☐ B $u_n = \frac{n}{n + 1}$.
- ☐ C $u_n = \frac{n - 1}{n}$.
- ☐ D $u_n = \frac{n^2 - n}{n + 1}$.

CÂU 5. Cho dãy số (u_n) với $u_1 = 1, u_{n+1} = u_n - 1$. Số hạng tổng quát u_n của dãy số là số hạng nào dưới đây?

- ☐ A $u_n = 2 - n$.
- ☐ B u_n không xác định.
- ☐ C $u_n = 1 - n$.
- ☐ D $u_n = -n$, với mọi n .

2

Tìm số hạng cụ thể của dãy số

Để tìm số hạng cụ thể của dãy số ta làm như sau

- ☒ Với trường hợp dãy số đã cho biết công thức tổng quát của dãy số thì ta chỉ cần thay giá trị tương ứng của số hạng đó vào công thức tổng quát.
- ☒ Với trường hợp dãy số cho bởi công thức truy hồi hoặc dưới dạng thì ta phải tìm lần lượt từ những số hạng đầu tiên cho đến số đứng trước số cần tìm trong dãy.

1. Ví dụ minh họa

VÍ DỤ 1. Cho dãy số (u_n) , biết $u_n = (-1)^n \cdot \frac{2^n}{n}$. Tìm số hạng u_3 .

VÍ DỤ 2. Cho dãy số (u_n) , biết $u_n = \frac{2n^2 - 1}{n^2 + 3}$. Tìm số hạng u_5 .

VÍ DỤ 3. Cho dãy số u_n bao gồm các số nguyên tố. Tìm số hạng thứ 5 của dãy số.

VÍ DỤ 4. Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $\begin{cases} u_1 = 5 \\ u_{n+1} = u_n + n \end{cases}$. Tìm số hạng thứ 5 của dãy số.

VÍ DỤ 5. Cho dãy số xác định bằng hệ thức truy hồi

$$u_1 = 1, u_n = 3u_{n-1} + 2 \text{ với } n \geq 2$$

Viết ba số hạng đầu của dãy số này.

VÍ DỤ 6. Cho dãy số (u_n) : $\begin{cases} u_1 = 5 \\ u_{n+1} = u_n + n \end{cases}$. Số 20 là số hạng thứ mấy trong dãy?

2. Bài tập tự luận

BÀI 1. Cho dãy số $u_n = \frac{1}{\sqrt{n} + 1}$. Tìm số hạng u_4 .

BÀI 2. Cho dãy số (u_n) có số hạng tổng quát: $u_n = 2n + \sqrt{n^2 + 4}$. Tìm số hạng thứ 6 của dãy số.

BÀI 3. Cho dãy số (u_n) xác định bởi: $\begin{cases} u_1 = -1; u_2 = 3 \\ u_{n+1} = 5u_n - 6u_{n-1} \forall n \geq 2 \end{cases}$. Tìm số hạng thứ 7 của dãy.

BÀI 4. Viết năm số hạng đầu của dãy số Fibonacci (F_n) cho bởi hệ thức truy hồi

$$\begin{cases} F_1 = 1, F_2 = 1 \\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad (n \geq 3). \end{cases}$$

BÀI 5. Người ta nuôi cấy 5 con vi khuẩn E-coli trong môi trường nhân tạo. Cứ 30 phút thì vi khuẩn E-coli sẽ nhân đôi 1 lần. Tính số lượng vi khuẩn thu được sau 1, 2, 3 lần nhân đôi.

BÀI 6. Cho dãy số (u_n) được xác định bởi $u_n = \frac{n^2 + 3n + 7}{n + 1}$.

- Viết năm số hạng đầu của dãy.
- Dãy số có bao nhiêu số hạng nhận giá trị nguyên.

BÀI 7. Cho dãy số (x_n) thỏa mãn điều kiện $x_1 = 1, x_{n+1} - x_n = \frac{1}{n(n+1)}, n = 1, 2, 3, \dots$
Số hạng x_{2023} bằng

BÀI 8. Cho dãy số (u_n) biết $\begin{cases} u_1 = 99 \\ u_{n+1} = u_n - 2n - 1, n \geq 1 \end{cases}$. Hỏi số -861 là số hạng thứ mấy?

3. Câu hỏi trắc nghiệm

CÂU 1. Cho dãy số (u_n) , biết $u_n = \frac{n}{3^n - 1}$. Ba số hạng đầu tiên của dãy số đó lần lượt là những số nào dưới đây?

- ☐ A $\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{16}$.
 ☐ B $\frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{3}{4}$.
 ☐ C $\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{3}{26}$.
 ☐ D $\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}$.

CÂU 2. Cho dãy số (u_n) , biết $u_n = (-1)^n \cdot 2n$. Mệnh đề nào sau đây sai?

- ☐ A $u_3 = -6$.
 ☐ B $u_2 = 4$.
 ☐ C $u_4 = -8$.
 ☐ D $u_1 = -2$.

CÂU 3. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{1}{3}(u_n + 1) \end{cases}$. Tìm số hạng u_4 .

- ☐ A $u_4 = \frac{2}{3}$.
 ☐ B $u_4 = 1$.
 ☐ C $u_4 = \frac{14}{27}$.
 ☐ D $u_4 = \frac{5}{9}$.

CÂU 4. Cho dãy số (u_n) , biết $\begin{cases} u_1 = -1 \\ u_{n+1} = u_n + 3 \end{cases}$ với $n \geq 0$. Ba số hạng đầu tiên của dãy số đó là lần lượt là những số nào dưới đây?

- ☐ A $-1; 2; 5$.
 ☐ B $-1; 3; 7$.
 ☐ C $1; 4; 7$.
 ☐ D $4; 7; 10$.

CÂU 5. Cho dãy số (u_n) , biết $u_n = \frac{2n+5}{5n-4}$. Số $\frac{7}{12}$ là số hạng thứ mấy của dãy số?

- ☐ A 9.
 ☐ B 6.
 ☐ C 10.
 ☐ D 8.

QUICK NOTE

QUICK NOTE

CÂU 6. Cho dãy (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + 2 \end{cases}$. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

(A) $u_2 = \frac{5}{2}$. (B) $u_4 = \frac{31}{8}$. (C) $u_3 = \frac{15}{4}$. (D) $u_5 = \frac{63}{16}$.

CÂU 7. Cho dãy số (u_n) , với $u_n = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{2n+3}$. Tìm số hạng u_{n+1} .

- (A) $u_{n+1} = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{2(n-1)+3}$. (B) $u_{n+1} = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{2(n+1)+3}$.
(C) $u_{n+1} = \left(\frac{n}{n+2}\right)^{2n+5}$. (D) $u_{n+1} = \left(\frac{n}{n+2}\right)^{2n+3}$.

CÂU 8. Cho dãy số (a_n) , được xác định $\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n, n \geq 1 \end{cases}$. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

- (A) $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = \frac{93}{16}$. (B) $a_{10} = \frac{3}{512}$.
(C) $a_n = \frac{3}{2^n}$. (D) $a_{n+1} + a_n = \frac{9}{2^n}$.

CÂU 9. Cho dãy số (u_n) biết $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_2 = 4 \\ u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n \end{cases}$ với mọi $n \geq 1$. Giá trị $u_{101} - u_{100}$ là

- (A) $3 \cdot 2^{102}$. (B) $3 \cdot 2^{101}$. (C) $3 \cdot 2^{100}$. (D) $3 \cdot 2^{99}$.

CÂU 10. Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $u_1 = \sqrt{2}$ và $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$ với mọi $n \geq 1$. Tìm u_{2023} .

- (A) $u_{2023} = \sqrt{2} \cos \frac{\pi}{2^{2022}}$. (B) $u_{2023} = \sqrt{2} \cos \frac{\pi}{2^{2024}}$.
(C) $u_{2023} = \sqrt{2} \cos \frac{\pi}{2^{2023}}$. (D) $u_{2023} = 2$.

3

Xét tính tăng giảm của dãy số

a) Phương pháp 1. Xét dấu của hiệu số $u_{n+1} - u_n$.

- (a) Nếu $u_{n+1} - u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$ thì (u_n) là dãy số tăng.
(b) Nếu $u_{n+1} - u_n < 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$ thì (u_n) là dãy số giảm.

b) Phương pháp 2. Nếu $u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$ thì ta có thể so sánh thương $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ với 1.

- (a) Nếu $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ thì (u_n) là dãy số tăng.
(b) Nếu $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ thì (u_n) là dãy số giảm.

Nếu $u_n < 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$ thì ta có thể so sánh thương $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ với 1.

- (a) Nếu $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ thì (u_n) là dãy số tăng.
(b) Nếu $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ thì (u_n) là dãy số giảm.

c) Phương pháp 3. Nếu dãy số (u_n) cho bởi hệ thức truy hồi thì thường dùng phương pháp quy nạp để chứng minh $u_{n+1} > u_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$ (hoặc $u_{n+1} < u_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$).

1. Ví dụ minh họa

VÍ DỤ 1. Xét sự tăng giảm của dãy số (u_n) với $u_n = (-1)^n$.

VÍ DỤ 2. Xét tính tăng giảm của dãy số sau (u_n) với $u_n = \frac{2n+1}{n+1}$.

VÍ DỤ 3. Xét tính tăng giảm của dãy số (u_n) với $u_n = \sqrt{n} - \sqrt{n+2}$.

VÍ DỤ 4. Xét tính tăng giảm của dãy số (u_n) với $u_n = \frac{n}{3^n}$.

2. Bài tập tự luận

BÀI 1. Xét tính tăng giảm của dãy số (u_n) với $u_n = \frac{\sqrt{2}}{3^n}$.

BÀI 2. Xét tính tăng giảm của dãy số (u_n) với $u_n = \frac{1}{n(n+1)}$.

BÀI 3. Xét tính tăng giảm của dãy số (u_n) với $u_n = n + \cos^2 n$.

BÀI 4. Xét tính tăng giảm của dãy số (u_n) với $u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$.

BÀI 5. Xét tính tăng giảm của dãy số (u_n) với $u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$.

3. Bài tập trắc nghiệm

CÂU 1. Cho các dãy số sau. Dãy số nào là dãy số tăng?

- ☐ A $1; 1; 1; 1; 1; 1; \dots$
☐ B $1; \frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}; \frac{1}{16}; \dots$
☐ C $1; -\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; -\frac{1}{8}; \frac{1}{16}; \dots$
☐ D $1; 3; 5; 7; 9; \dots$

CÂU 2. Với giá trị nào của a thì dãy số (u_n) với $u_n = \frac{an-1}{n+2}, \forall n \geq 1$ là dãy số tăng?

- ☐ A $a > 2$.
 ☐ B $a < -2$.
 ☐ C $a > -\frac{1}{2}$.
 ☐ D $a < -\frac{1}{2}$.

CÂU 3. Trong các dãy (u_n) sau đây dãy nào là dãy số giảm ?

- ☐ A $u_n = (-1)^n$.
 ☐ B $u_n = 2^n$.
 ☐ C $u_n = 3n + 1$.
 ☐ D $u_n = \frac{1}{3^n}$.

CÂU 4. Trong các dãy số (u_n) cho bởi số hạng tổng quát u_n sau, dãy số nào là dãy số tăng?

- ☐ A $u_n = \frac{1}{n}$.
 ☐ B $u_n = \frac{1}{2^n}$.
 ☐ C $u_n = \frac{n+5}{3n+1}$.
 ☐ D $u_n = \frac{2n-1}{n+1}$.

CÂU 5. Trong các dãy số (u_n) cho bởi số hạng tổng quát u_n sau, dãy số nào là dãy số giảm?

- ☐ A $u_n = n^2$.
 ☐ B $u_n = \frac{3n-1}{n+1}$.
 ☐ C $u_n = \sqrt{n+2}$.
 ☐ D $u_n = \frac{1}{2^n}$.

CÂU 6. Trong các dãy số (u_n) sau, hãy chọn dãy số tăng.

- ☐ A $u_n = (-1)^{2n}(5^n + 1), n \in \mathbb{N}^*$.
 ☐ B $u_n = \frac{n}{n^2+1}, n \in \mathbb{N}^*$.
☐ C $u_n = (-1)^{n+1} \sin \frac{\pi}{n}, n \in \mathbb{N}^*$.
 ☐ D $u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}+n}, n \in \mathbb{N}^*$.

CÂU 7. Trong các dãy số (u_n) cho bởi số hạng tổng quát u_n sau, dãy số nào là dãy số giảm?

- ☐ A $u_n = \frac{n^2+1}{n}$.
 ☐ B $u_n = (-1)^n \cdot (2^n + 1)$.
☐ C $u_n = \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$.
 ☐ D $u_n = \sin n$.

CÂU 8. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- ☐ A Dãy số $u_n = \frac{1}{n} - 2$ là dãy tăng.
☐ B Dãy số $u_n = 2n + \cos \frac{1}{n}$ là dãy tăng.
☐ C Dãy số $u_n = \frac{n-1}{n+1}$ là dãy giảm.
☐ D Dãy số $u_n = (-1)^n(2^n + 1)$ là dãy giảm.

CÂU 9. Mệnh đề nào sau đây sai?

- ☐ A Dãy số $u_n = \frac{1-n}{\sqrt{n}}$ là dãy giảm.
 ☐ B Dãy số $u_n = n + \sin^2 n$ là dãy tăng.
☐ C Dãy số $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ là dãy giảm.
 ☐ D Dãy số $u_n = 2n^2 - 5$ là dãy tăng.

CÂU 10. Cho dãy (u_n) : $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{n}{2(n+1)}u_n + \frac{3(n+2)}{2(n+1)} \end{cases}, n \in \mathbb{N}^*$. Nhận xét nào sau đây đúng

QUICK NOTE

QUICK NOTE

- A** Dãy số (u_n) là dãy số tăng.
- B** Dãy số (u_n) là dãy số giảm.
- C** Dãy số (u_n) là dãy số không tăng, không giảm.
- D** Tất cả các đáp án còn lại đều sai.

4

Xét tính bị chặn của dãy số

- ☑ Để chứng minh dãy số (u_n) bị chặn trên bởi M , ta chứng minh $u_n \leq M, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
- ☑ Để chứng minh dãy số (u_n) bị chặn dưới bởi m , ta chứng minh $u_n \geq m, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
- ☑ Để chứng minh dãy số bị chặn ta chứng minh nó bị chặn trên và bị chặn dưới.
 - Nếu dãy số (u_n) tăng thì bị chặn dưới bởi u_1 .
 - Nếu dãy số (u_n) giảm thì bị chặn trên bởi u_1 .

1. Ví dụ minh họa

VÍ DỤ 1. Chứng minh rằng dãy số (u_n) với $u_n = \frac{3n}{n^2 + 9}$ bị chặn trên bởi $\frac{1}{2}$.

VÍ DỤ 2. Chứng minh rằng dãy số (u_n) xác định bởi $u_n = \frac{8n + 3}{3n + 5}$ là một dãy số bị chặn.

VÍ DỤ 3. Xét tính bị chặn của dãy số (u_n) với $u_n = \frac{3n + 1}{n + 3}$.

VÍ DỤ 4. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1 = 1$ và $u_{n+1} = \frac{u_n + 2}{u_n + 1}, \forall n \geq 1$. Chứng minh rằng dãy (u_n) bị chặn trên bởi số $\frac{3}{2}$ và bị chặn dưới bởi số 1.

VÍ DỤ 5. Xét tính bị chặn của dãy số (u_n) với $u_n = \sin n + \cos n$.

2. Bài tập tự luận

BÀI 1. Xét tính bị chặn của các dãy số sau

- a) $u_n = \frac{1}{2n^2 - 1}$.
- b) $u_n = 3 \cdot \cos \frac{n\pi}{3}$.
- c) $u_n = 2n^3 + 1$.
- d) $u_n = \frac{n^2 + 2n}{n^2 + n + 1}$.
- e) $u_n = n + \frac{1}{n}$.

BÀI 2. Xét tính bị chặn của dãy số $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, n \in \mathbb{N}^*$.

BÀI 3. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1 = 0$ và $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 4, \forall n \geq 1$.

- a) Chứng minh dãy (u_n) bị chặn trên bởi số 8.
- b) Chứng minh dãy (u_n) tăng, từ đó suy ra dãy (u_n) bị chặn.

3. Câu hỏi trắc nghiệm

CÂU 1. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1 = 3$ và $u_{n+1} = \frac{u_n + 1}{2}, \forall n \geq 1$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A** Dãy số bị chặn.
- B** Dãy số bị chặn trên.
- C** Dãy số bị chặn dưới.
- D** Dãy số không bị chặn.

CÂU 2. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1 = \sqrt{2}$ và $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}, \forall n \geq 1$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A** Dãy số bị chặn trên.
- B** Dãy số bị chặn dưới.
- C** Dãy số bị chặn.
- D** Dãy số không bị chặn.

CÂU 3. Xét tính bị chặn của dãy số (u_n) với $u_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n + 1)}$.

- A** Không bị chặn.
- B** Bị chặn trên.
- C** Bị chặn dưới.
- D** Bị chặn.

QUICK NOTE

CÂU 4. Cho dãy số (u_n) với $u_n = \frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{2 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+3)}$. Dãy số (u_n) bị chặn dưới và chặn trên lần lượt bởi các số m và M nào dưới đây?

- (A) $m = 0, M = 1$. (B) $m = 1, M = \frac{1}{2}$. (C) $m = 1, M = \frac{10}{19}$. (D) $m = 0, M = \frac{11}{18}$.

CÂU 5. Cho dãy số (u_n) biết $u_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 2n}$. Dãy số (u_n) bị chặn dưới và chặn trên lần lượt bởi các số m và M . Tính giá trị biểu thức $m + M$?

- (A) $\frac{1}{\sqrt{2}}$. (B) $\frac{1}{\sqrt{3}}$. (C) $\frac{1}{\sqrt{5}}$. (D) $\frac{1}{\sqrt{7}}$.

CÂU 6. Cho dãy số (u_n) , với $u_n = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2}, \forall n = 2; 3; 4; \dots$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- (A) Dãy số bị chặn. (B) Dãy số bị chặn trên.
(C) Dãy số bị chặn dưới. (D) Dãy số không bị chặn.

CÂU 7. Cho dãy số (u_n) và đặt $u_n = \sum_{k=1}^n a_k$ với $a_k = \frac{1}{4k^2 - 1}$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- (A) $0 < u_n < 1$. (B) $0 \leq u_n \leq \frac{1}{2}$. (C) $0 < u_n < \frac{1}{2}$. (D) $0 \leq u_n \leq 1$.

CÂU 8. Cho dãy số (u_n) và đặt $u_n = \sum_{k=1}^n a_k$ với $a_k = \frac{1}{k(k+4)}$. Dãy số (u_n) bị chặn dưới và chặn trên lần lượt bởi các số m và M nào sau đây?

- (A) $m = 0, M = \frac{25}{48}$. (B) $m = 0, M = \frac{25}{12}$. (C) $m = 1, M = \frac{1}{4}$. (D) $m = 1, M = \frac{1}{2}$.

CÂU 9. Xét tính bị chặn của dãy số (u_n) và đặt $u_n = \sum_{k=1}^n a_k$ với $a_k = \frac{1}{k(k+1)}$.

- (A) Bị chặn. (B) Bị chặn dưới. (C) Bị chặn trên. (D) Không bị chặn..

CÂU 10. Cho dãy số (u_n) , xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 6 \\ u_{n+1} = \sqrt{6 + u_n}, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

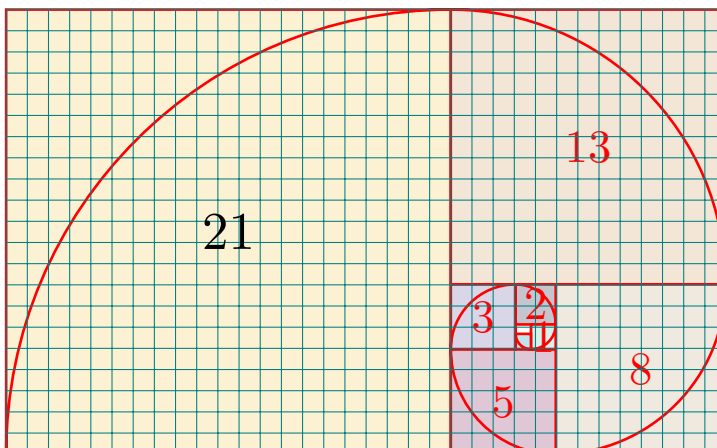
- (A) $\sqrt{6} < u_n < 2\sqrt{3}$. (B) $\sqrt{6} \leq u_n \leq 2\sqrt{3}$.
(C) $\sqrt{6} < u_n \leq 2\sqrt{3}$. (D) $\sqrt{6} \geq u_n < 2\sqrt{3}$.

5

Toán thực tế về dãy số

1. Ví dụ minh họa

VÍ DỤ 1. Trên lưới ô vuông, mỗi ô cạnh 1 đơn vị, người ta vẽ 8 hình vuông và tô màu khác nhau như hình vẽ. Tìm dãy số biểu diễn độ dài cạnh của 8 hình vuông đó từ nhỏ đến lớn. Có nhận xét gì về dãy số trên?



QUICK NOTE

VÍ DỤ 2. Chị Mai gửi tiền tiết kiệm vào ngân hàng theo thể thức lãi kép như sau. Lần đầu chị gửi 100 triệu đồng. Sau đó, cứ hết 1 tháng chị lại gửi thêm vào ngân hàng 6 triệu đồng. Biết lãi suất của ngân hàng là 0,5% một tháng. Gọi P_n (triệu đồng) là số tiền chị có trong ngân hàng sau n tháng.

- a) Tính số tiền chị có trong ngân hàng sau 1 tháng.
- b) Tính số tiền chị có trong ngân hàng sau 3 tháng.
- c) Dự đoán công thức của P_n tính theo n .

VÍ DỤ 3. Ông An gửi tiết kiệm 100 triệu đồng kì hạn 1 tháng với lãi suất 6% một năm theo hình thức tính lãi kép. Số tiền (triệu đồng) của ông An thu được sau n tháng được cho bởi công thức

$$A_n = 100 \left(1 + \frac{0,06}{12} \right)^n .$$

- a) Tìm số tiền ông An nhận được sau tháng thứ nhất, sau tháng thứ hai.
- b) Tìm số tiền ông An nhận được sau 1 năm.

2. Bài tập trắc nghiệm

CÂU 1. Nếu tỉ lệ lạm phát là 3,5% mỗi năm và giá trung bình của một căn hộ chung cư mới tại thời điểm hiện tại là 2,5 tỉ đồng thì giá trung bình của một căn hộ chung cư mới sau n năm nữa được cho bởi công thức

$$A_n = 2,5 \cdot (1,035)^n \text{ (tỉ đồng)} .$$

Tìm giá trung bình (tỉ đồng) của một căn hộ chung cư mới sau 5 năm nữa (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

KQ:

--	--	--	--

CÂU 2. Giá của một chiếc máy photocopy lúc mới mua là 50 triệu đồng. Biết rằng giá trị của nó sau mỗi năm sử dụng chỉ còn 75% giá trị trong năm liền trước đó. Tính giá trị còn lại (triệu đồng) của chiếc máy photocopy đó sau 5 năm kể từ khi mua (kết quả làm tròn đến hàng phần chục).

KQ:

--	--	--	--

CÂU 3. Một vi sinh đặc biệt X có cách sinh sản vô tính kì lạ, sau một giờ thì đẻ một lần, đặc biệt sống được tới giờ thứ n (với n là số nguyên dương) thì ngay lập tức thời điểm đó nó đẻ một lần ra 2^n con X khác, tuy nhiên do chu kì của con X ngắn nên ngay sau khi đẻ xong lần thứ 2, nó lập tức chết. Hỏi rằng, nếu tại thời điểm ban đầu có đúng 1 con thì sau 5 giờ có bao nhiêu con sinh vật X đang sống?

KQ:

--	--	--	--

CÂU 4. Bác Hưng để 10 triệu đồng trong tài khoản ngân hàng. Vào cuối mỗi năm, ngân hàng trả lãi 3% vào tài khoản của bác ấy, nhưng sau đó sẽ tính phí duy trì tài khoản hằng năm là 120 nghìn đồng. Tìm số dư trong tài khoản của bác Hưng sau 4 năm (tính bằng triệu đồng và kết quả làm tròn đến hàng phần chục).

KQ:

--	--	--	--

Bài 6. CẤP SỐ CỘNG

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa

Dãy số là cấp số cộng nếu mỗi một số hạng (kể từ số hạng thứ hai) đều bằng tổng của số hạng đứng ngay trước nó với một số không đổi d .
Dãy số (u_n) là cấp số cộng $\Leftrightarrow u_{n+1} = u_n + d, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
 d là số không đổi, gọi là **công sai** của cấp số cộng.

2. Tính chất

Nếu (u_n) là cấp số cộng thì kể từ số hạng thứ hai (trừ số hạng cuối nếu là cấp số cộng hữu hạn) đều là trung bình cộng của hai số hạng đứng kề nó trong dãy. Tức là

$$u_k = \frac{u_{k-1} + u_{k+1}}{2}, (\forall k \geq 2, k \in \mathbb{N}^*).$$

3. Số hạng tổng quát

Nếu cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu u_1 và công sai d thì số hạng tổng quát u_n được xác định bởi công thức

$$u_n = u_1 + (n - 1)d \text{ với } n \geq 2.$$

4. Tổng n số hạng đầu tiên

Cho cấp số cộng (u_n) . Tổng n số hạng đầu tiên của cấp số cộng kí hiệu là $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$.

Khi đó S_n được tính theo công thức

$$S_n = \frac{n(u_1 + u_n)}{2} = \frac{n}{2} [2u_1 + (n - 1)d].$$

B. CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

1

Nhận diện cấp số cộng, công sai d , số hạng tổng quát u_n

1. Ví dụ minh họa

VÍ DỤ 1. Dãy số hữu hạn nào là một cấp số cộng? Vì sao?

a) $-2, 1, 4, 7, 10, 13, 16$.

b) $1, -2, -4, -6, -8$.

VÍ DỤ 2. Trong các dãy số dưới đây, dãy số nào là cấp số cộng?

a) Dãy số (a_n) với $a_n = 4n - 3$;

b) Dãy số (c_n) với $c_n = 2018^n$.

VÍ DỤ 3. Cho cấp số cộng (u_n) có công thức số hạng tổng quát $u_n = 3n + 1, n \in \mathbb{N}^*$. Tìm số hạng đầu u_1 và công sai d ?

VÍ DỤ 4. Cho cấp số cộng (u_n) với $u_1 = 3, u_2 = 9$. Công sai của cấp số cộng đã cho bằng bao nhiêu?

VÍ DỤ 5. Tính số hạng đầu u_1 và công sai d của một cấp số cộng biết $u_4 = 10$ và $u_7 = 19$.

VÍ DỤ 6. Xác định số hạng tổng quát của cấp số cộng (u_n) , biết $\begin{cases} u_7 = 8 \\ d = 2. \end{cases}$

VÍ DỤ 7. Cho cấp số cộng (u_n) với $\begin{cases} u_1 = -9 \\ u_{n-1} = u_n - 5. \end{cases}$. Tìm số hạng tổng quát của cấp số cộng (u_n) .

VÍ DỤ 8. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_{20} = -52$ và $u_{51} = -145$. Hãy tìm số hạng tổng quát của cấp số cộng đó.

VÍ DỤ 9. Tìm số hạng đầu và công sai của cấp số cộng (u_n) , biết

a) $\begin{cases} u_9 = 5u_2 \\ u_{13} = 2u_6 + 5. \end{cases}$

b) $\begin{cases} u_1 - u_3 + u_5 = 10 \\ u_1 + u_6 = 7. \end{cases}$

VÍ DỤ 10. Tìm số hạng đầu và công sai của cấp số cộng (u_n) , biết

a) $\begin{cases} -u_3 + u_7 = 8 \\ u_2u_7 = 75. \end{cases}$

b) $\begin{cases} u_5 = 4u_3 \\ u_2u_6 = -11. \end{cases}$

QUICK NOTE

QUICK NOTE

2. Bài tập tự luận

BÀI 1. Trong các dãy số sau, dãy số nào là một cấp số cộng?

- a) $1, -3, -7, -11, -15, \dots$;
 b) $1, -2, -4, -6, -8, \dots$
 c) $\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}, -1, -\frac{3}{2}, \dots$

BÀI 2. Trong các dãy số sau, dãy nào là cấp số cộng. Tìm số hạng đầu và công sai của cấp số cộng đó.

- a) Dãy số (u_n) với $u_n = 19n - 5$; b) Dãy số (u_n) với $u_n = n^2 + n + 1$.

BÀI 3. Cho cấp số cộng (u_n) với $u_1 = 3, u_2 = 9$. Công sai của cấp số cộng đã cho bằng bao nhiêu?

BÀI 4. Xác định công thức tổng quát của cấp số cộng (u_n) , biết $\begin{cases} u_{11} = 5 \\ d = -6. \end{cases}$

BÀI 5. Tìm số hạng đầu và công sai của cấp số cộng (u_n) , biết $\begin{cases} u_2 + u_5 - u_3 = 10 \\ u_4 + u_6 = 26. \end{cases}$

BÀI 6. Tìm số hạng đầu và công sai của cấp số cộng, biết

- a) $\begin{cases} u_7 = 27 \\ u_{15} = 59. \end{cases}$ b) $\begin{cases} u_9 = 5u_2 \\ u_{13} = 2u_6 + 5. \end{cases}$ c) $\begin{cases} u_2 + u_4 - u_6 = -7 \\ u_8 - u_7 = 2u_4. \end{cases}$
 d) $\begin{cases} u_3 - u_7 = -8 \\ u_2 \cdot u_7 = 75. \end{cases}$ e) $\begin{cases} u_6 + u_7 = 60 \\ u_4^2 + u_{12}^2 = 1170. \end{cases}$

BÀI 7. Cho cấp số cộng (u_n) thỏa mãn $\begin{cases} u_2 + u_4 - u_6 = -7 \\ u_8 + u_7 = 2u_4 \end{cases}$. Xác định số hạng đầu u_1 và công sai d cấp số cộng.

BÀI 8. Cho cấp số cộng (u_n) thỏa mãn $\begin{cases} u_2 - u_3 + u_5 = 10 \\ u_4 + u_6 = 26 \end{cases}$. Xác định số hạng đầu u_1 và công sai d cấp số cộng.

BÀI 9. Tính số hạng đầu u_1 và công sai d của một cấp số cộng biết $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 27 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 275 \end{cases}$

3. Câu hỏi trắc nghiệm

CÂU 1. Trong các dãy số sau, dãy số nào là một cấp số cộng?

- ☐ A $1; -3; -7; -11; -15; \dots$ ☐ B $1; -3; -6; -9; -12; \dots$
☐ C $1; -2; -4; -6; -8; \dots$ ☐ D $1; -3; -5; -7; -9; \dots$

CÂU 2. Dãy số nào sau đây **không** phải là cấp số cộng?

- ☐ A $-\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}; 0; \frac{1}{3}; \frac{2}{3}; 1; \frac{4}{3}$. ☐ B $15\sqrt{2}; 12\sqrt{2}; 9\sqrt{2}; 6\sqrt{2}$.
☐ C $\frac{4}{5}; 1; \frac{7}{5}; \frac{9}{5}; \frac{11}{5}$. ☐ D $\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{2\sqrt{3}}{3}; \sqrt{3}; \frac{4\sqrt{3}}{3}; \frac{5}{\sqrt{3}}$.

CÂU 3. Cho cấp số cộng (u_n) với $u_1 = 2$ và $u_2 = 6$. Công sai của cấp số cộng đã cho là

- ☐ A 4. ☐ B -4. ☐ C 8. ☐ D 3.

CÂU 4. Cho cấp số cộng (u_n) với $u_1 = -3$ và $u_6 = 27$. Công sai d của cấp số cộng đã cho là

- ☐ A $d = 7$. ☐ B $d = 5$. ☐ C $d = 8$. ☐ D $d = 6$.

CÂU 5. Cho cấp số cộng (u_n) với $u_{17} = 33$ và $u_{33} = 65$. Công sai của cấp số cộng đã cho là

- ☐ A 1. ☐ B 3. ☐ C -2. ☐ D 2.

QUICK NOTE

CÂU 6. Cho cấp số cộng có $u_1 = -3$ và $d = 4$. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau.

- (A) $u_5 = 15$. (B) $u_4 = 8$. (C) $u_3 = 5$. (D) $u_2 = 2$.

CÂU 7. Cho cấp số cộng có $u_1 = 11$ và công sai $d = 4$. Hãy tính u_{99} .

- (A) 401. (B) 403. (C) 402. (D) 404.

CÂU 8. Một cấp số cộng (u_n) có $u_{13} = 8$ và $d = -3$. Tìm số hạng thứ ba của cấp số cộng (u_n) .

- (A) 50. (B) 28. (C) 38. (D) 44.

CÂU 9. Cho cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu $u_1 = 2$ và công sai $d = 4$. Hãy tính giá trị u_{2019} bằng

- (A) 8074. (B) 4074. (C) 8078. (D) 4078.

CÂU 10. Cho cấp số cộng (u_n) có số hạng tổng quát là $u_n = 3n - 2$. Tìm công sai d của cấp số cộng.

- (A) $d = 3$. (B) $d = 2$. (C) $d = -2$. (D) $d = -3$.

CÂU 11. Cho cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu u_1 và công sai d . Công thức tìm số hạng tổng quát u_n là

- (A) $u_n = u_1 + (n - 1)d$. (B) $u_n = u_1 + nd$.
(C) $u_n = u_1 + (n + 1)d$. (D) $u_n = nu_1 + d$.

CÂU 12. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = -3$ và $d = \frac{1}{2}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- (A) $u_n = -3 + \frac{1}{2}(n + 1)$. (B) $u_n = -3 + \frac{1}{2}n - 1$.
(C) $u_n = -3 + \frac{1}{2}(n - 1)$. (D) $u_n = -3 + \frac{1}{4}(n - 1)$.

CÂU 13. Cho cấp số cộng (u_n) xác định bởi $u_n = 2n + 1$. Xác định số hạng đầu u_1 và công sai d của cấp số cộng.

- (A) $u_1 = 3, d = 1$. (B) $u_1 = 1, d = 1$. (C) $u_1 = 3, d = 2$. (D) $u_1 = 1, d = 2$.

CÂU 14. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_4 = -12, u_{14} = 18$. Tìm số hạng đầu u_1 và công sai d của cấp số cộng (u_n) .

- (A) $u_1 = -20, d = -3$. (B) $u_1 = -22, d = 3$.
(C) $u_1 = -21, d = 3$. (D) $u_1 = -21, d = -3$.

CÂU 15. Tìm số hạng đầu và công sai của cấp số cộng (u_n) thỏa mãn $\begin{cases} u_1 + u_9 = 12 \\ u_4 - 3u_2 = 1. \end{cases}$

- (A) $u_1 = \frac{1}{2}; d = \frac{13}{8}$. (B) $u_1 = -1; d = \frac{13}{8}$.
(C) $u_1 = -\frac{1}{2}; d = \frac{13}{8}$. (D) $u_1 = -1; d = 2$.

CÂU 16. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_4 = -12$ và $u_{14} = 18$. Khi đó, số hạng đầu tiên u_1 và công sai d của cấp số cộng (u_n) lần lượt là

- (A) $u_1 = -20, d = -3$. (B) $u_1 = -22, d = 3$.
(C) $u_1 = -21, d = 3$. (D) $u_1 = -21, d = -3$.

CÂU 17. Cho cấp số cộng (u_n) có các số hạng đầu lần lượt là 5; 9; 13; 17; ... Tìm số hạng tổng quát u_n của cấp số cộng.

- (A) $u_n = 5n + 1$. (B) $u_n = 5n - 1$. (C) $u_n = 4n + 1$. (D) $u_n = 4n - 1$.

CÂU 18. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_3 = 15$ và $d = -2$. Tìm u_n

- (A) $u_n = -2n + 21$. (B) $u_n = -\frac{3}{2}n + 12$. (C) $u_n = -3n - 17$. (D) $u_n = \frac{3}{2}n^2 - 4$.

CÂU 19. Trong các dãy số được cho dưới đây, dãy số nào không phải là cấp số cộng?

- (A) $u_n = -4n + 9$. (B) $u_n = -2n + 19$. (C) $u_n = -2n - 21$. (D) $u_n = -2^n + 15$.

CÂU 20. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_4 = -12$ và $u_{14} = 18$. Tìm số hạng đầu tiên u_1 và công sai d của cấp số cộng đã cho.

- (A) $u_1 = -21; d = 3$. (B) $u_1 = -20; d = -3$.

QUICK NOTE

Ⓒ $u_1 = -22; d = 3.$

Ⓓ $u_1 = -21; d = -3.$

CÂU 21. Cho cấp số cộng (u_n) thỏa mãn $\begin{cases} u_2 - u_3 + u_5 = 10 \\ u_3 + u_4 = 17 \end{cases}$. Số hạng đầu tiên và công sai của cấp số cộng đó lần lượt là

Ⓐ 1 và 3.

Ⓑ -3 và 4.

Ⓒ 4 và -3.

Ⓓ -4 và -3.

CÂU 22. Cho cấp số cộng (u_n) có công sai $d < 0$, $u_{31} + u_{34} = 11$ và $(u_{31})^2 + (u_{34})^2 = 101$. Số hạng tổng quát của (u_n) là

Ⓐ $u_n = 86 - 3n.$

Ⓑ $u_n = 92 - 3n.$

Ⓒ $u_n = 95 - 3n.$

Ⓓ $u_n = 103 - 3n.$

2

Tổng của n số hạng đầu tiên của một cấp số cộng. Tính chất của cấp số cộng

Tổng của n số hạng đầu tiên: Đặt $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n$. Khi đó

$$\bullet S_n = \frac{n(u_1 + u_n)}{2} = \frac{n(u_2 + u_{n-1})}{2} = \frac{n(u_3 + u_{n-2})}{2} = \dots$$

$$\bullet \forall u_n = u_1 + (n-1)d \text{ nên công thức trên có thể viết lại là } S_n = \frac{n}{2} [2u_1 + (n-1)d].$$

Tính chất của cấp số cộng:

① Nếu $a; b; c$ theo thứ tự lập thành cấp số cộng thì $a + c = 2b$.

② Lưu ý:

• Nếu cho ba số liên tiếp của một cấp số cộng, ta có thể xem ba số đó là

$$a - d; \quad a; \quad a + d$$

• Nếu cho bốn số liên tiếp của một cấp số cộng, ta có thể xem ba số đó là

$$a - 3d; \quad a - d; \quad a + d; \quad a + 3d.$$

1. Ví dụ minh họa

VÍ DỤ 1. Cho một cấp số cộng (u_n) có $u_3 + u_{28} = 100$. Hãy tính tổng của 30 số hạng đầu tiên của cấp số cộng đó.

VÍ DỤ 2. Cho một cấp số cộng (u_n) có $S_6 = 18$ và $S_{10} = 110$. Tính S_{20} .

VÍ DỤ 3. Tìm số hạng đầu và công sai của cấp số cộng, biết

a) $\begin{cases} u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 155 \\ S_3 = 21. \end{cases}$

b) $\begin{cases} S_3 = 12 \\ S_5 = 35. \end{cases}$

VÍ DỤ 4. Tìm số hạng tổng quát của cấp số cộng, biết $\begin{cases} S_4 = 20 \\ \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \frac{1}{u_3} + \frac{1}{u_4} = \frac{25}{24} \end{cases}$ và cấp số cộng có công sai là một số nguyên âm.

VÍ DỤ 5. Tính các tổng sau

a) $S = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) + (2n+1).$ b) $S = 100^2 - 99^2 + 98^2 - 97^2 + \dots + 2^2 - 1^2.$

VÍ DỤ 6. Tìm ba số hạng liên tiếp của một cấp số cộng biết tổng của chúng bằng 27 và tổng các bình phương của chúng là 293.

VÍ DỤ 7. Tìm bốn số hạng liên tiếp của một cấp số cộng, biết tổng của chúng bằng 10 và tổng bình phương của chúng bằng 30.

VÍ DỤ 8. Ba góc của một tam giác vuông lập thành một cấp số cộng. Tìm ba góc đó.

VÍ DỤ 9. Xác định 4 góc của một tứ giác lồi, biết rằng 4 góc hợp thành cấp số cộng và góc lớn nhất bằng 5 lần góc nhỏ nhất.

2. Bài tập tự luận

BÀI 1. Giữa các số 10 và 64 hãy đặt thêm 17 số nữa để được một cấp số cộng.

BÀI 2. Tổng ba số hạng liên tiếp của một cấp số cộng bằng 2 và tổng các bình phương của ba số đó bằng $\frac{14}{9}$. Xác định ba số đó và tính công sai của cấp số cộng.

BÀI 3. Một cấp số cộng có 7 số hạng với công sai d dương và số hạng thứ tư bằng 11. Hãy tìm các số hạng còn lại của cấp số cộng đó, biết hiệu của số hạng thứ ba và số hạng thứ năm bằng 6.

BÀI 4. Tìm bốn số hạng liên tiếp của một cấp số cộng, biết rằng:

- Tổng của chúng bằng 10 và tổng bình phương bằng 70.
- Tổng của chúng bằng 22 và tổng bình phương bằng 66.
- Tổng của chúng bằng 36 và tổng bình phương bằng 504.
- Chúng có tổng bằng 20 và tích của chúng bằng 384.
- Tổng của chúng bằng 20, tổng nghịch đảo của chúng bằng $\frac{25}{24}$ và các số này là những số nguyên.
- Nó là số đo của một tứ giác lồi và góc lớn nhất gấp 5 lần góc nhỏ nhất.

3

Các bài toán thực tế

Các bài toán thực tế về cấp số cộng có thể được giải bằng cách sử dụng công thức của cấp số cộng. Công thức của cấp số cộng là: $u_n = u_1 + (n - 1)d$. Trong đó:

- ☑ u_n là số hạng thứ n của cấp số cộng.
- ☑ u_1 là số hạng đầu tiên của cấp số cộng.
- ☑ d là công sai của cấp số cộng.
- ☑ Một số công thức thường gặp:

$$\text{☑ } u_n = \frac{u_{n-1} + u_{n+1}}{2} = u_1 + (n - 1)d.$$

$$\text{☑ } S_n = \frac{(u_1 + u_n) \cdot n}{2} = \frac{2u_1 + (n - 1)d}{2} \cdot n.$$

1. Ví dụ minh họa

VÍ DỤ 1. Một người có một khoản tiền gửi ngân hàng với lãi suất 10% năm. Nếu sau 5 năm người đó nhận được tổng số tiền là 550 triệu đồng thì số tiền gửi ban đầu của người đó là bao nhiêu?

VÍ DỤ 2. Bạn An muốn mua một món quà tặng mẹ nhân ngày mừng 8/3. Bạn quyết định tiết kiệm từ ngày 1/2/2017 đến hết ngày 6/3/2017. Ngày đầu An có 5000 đồng, kể từ ngày thứ hai số tiền An tiết kiệm được ngày sau cao hơn ngày trước mỗi ngày 1000 đồng. Tính số tiền An tiết kiệm được để mua quà tặng mẹ.

VÍ DỤ 3. Một hội đồng quản trị quyết định tăng lương cho nhân viên hàng năm theo tỷ lệ cố định. Ví dụ, lương của một nhân viên được tăng thêm 5% so với năm trước. Hỏi nếu lương của một nhân viên là 10 triệu đồng/năm vào năm nay, thì lương của nhân viên đó sẽ là bao nhiêu vào năm thứ 5?

VÍ DỤ 4. Hùng đang tiết kiệm để mua một cây guitar. Trong tuần đầu tiên, anh ta để dành 42 đô la, và trong mỗi tuần tiếp theo, anh ta đã thêm 8 đô la vào tài khoản tiết kiệm của mình. Cây guitar Hùng cần mua có giá 400 đô la. Hỏi vào tuần thứ bao nhiêu thì anh ấy có đủ tiền để mua cây guitar đó?

VÍ DỤ 5. Hàng tháng ông An gửi vào ngân hàng một số tiền như nhau là 5000000 đồng (vào ngày đầu mỗi tháng) với lãi suất 0,5% một tháng, biết tiền lãi của tháng trước được nhập vào tiền gốc của tháng sau. Hỏi sau 36 tháng ông An nhận được số tiền vốn và lãi là bao nhiêu? (làm tròn đến hàng đơn vị).

QUICK NOTE

QUICK NOTE

VÍ DỤ 6 (VDT). Một xưởng có đang tuyển công nhân với đãi ngộ về lương như sau: Trong quý đầu tiên thì xưởng trả là 6 triệu đồng/quý và kể từ quý thứ 2 sẽ tăng lên 0,5 triệu cho 1 quý. Hỏi với đãi ngộ trên thì sau 5 năm làm việc tại xưởng, tổng số lương của công nhân đó là bao nhiêu?

2. Câu hỏi trắc nghiệm

CÂU 1. Một công ty đang cần tuyển dụng thêm nhân viên. Công ty quyết định tăng số lượng nhân viên hàng tháng theo cấp số cộng. Nếu công ty đã có 20 nhân viên và quyết định tăng thêm 2 nhân viên hàng tháng, hỏi sau bao nhiêu tháng công ty sẽ có 50 nhân viên?

- (A) 19 tháng. (B) 16 tháng. (C) 36 tháng. (D) 26 tháng.

CÂU 2. Một người đang tăng cường luyện tập thể thao hàng ngày. Anh ta quyết định tăng mức độ luyện tập theo cấp số cộng hàng tuần. Nếu anh ta bắt đầu với mức luyện tập 30 phút mỗi ngày và tăng thêm 5 phút mỗi ngày, hỏi anh ta sẽ luyện tập được bao lâu để đạt được mức luyện tập 60 phút mỗi ngày?

- (A) 16 ngày. (B) 6 ngày. (C) 9 ngày. (D) 7 ngày.

CÂU 3. Nếu một công ty công nghệ mới thành lập có số lượng người dùng ban đầu là 10 000 và mỗi tháng tăng thêm cố định 5 000 lượng người dùng, thì sau bao lâu có số lượng người dùng là 1 triệu.

- (A) 198 tháng. (B) 197 tháng. (C) 18 tháng. (D) 98 tháng.

CÂU 4. Một nhà đầu tư đang đầu tư vào một quỹ đầu tư với mức lợi nhuận cố định hàng năm. Nếu nhà đầu tư đầu tư vào quỹ đầu tư với số tiền ban đầu là 20 triệu đồng và mức lợi nhuận hàng năm là 10%, hỏi số tiền nhà đầu tư sẽ nhận được sau 7 năm?

- (A) 34 triệu đồng. (B) 14 triệu đồng. (C) 30 triệu đồng. (D) 39 triệu đồng.

CÂU 5. Một công ty sản xuất bánh kẹo tăng sản lượng sản phẩm của mình lên mỗi tháng. Nếu sản lượng ban đầu là 1 000 sản phẩm, một sản phẩm lợi nhuận 1 USD và tăng thêm 200 sản phẩm mỗi tháng, thì sau bao nhiêu tháng lợi nhuận công ty 1 triệu đô.

- (A) 8 000 tháng. (B) 7 000 tháng. (C) 9 000 tháng. (D) 5 000 tháng.

CÂU 6. Một công ty tăng lương cho nhân viên hàng năm bằng cách thêm một số tiền cố định vào lương của họ. Ví dụ: Nếu lương ban đầu của một nhân viên là 10 triệu đồng và công ty tăng lương 2 triệu đồng mỗi năm, thì lương của nhân viên sẽ là bao nhiêu nếu làm cho công ty 19 năm?

- (A) 16 triệu đồng. (B) 26 triệu đồng. (C) 28 triệu đồng. (D) 46 triệu đồng.

CÂU 7. Tài sản thường bị khấu hao khiến chúng có tuổi thọ hữu ích giới hạn. Ví dụ, nếu một công ty mua một chiếc xe tải với giá 35 000 đô la và nó bị khấu hao với tốc độ không đổi là 700 đô la mỗi tháng, thì sau bao lâu giá trị của nó còn 5 000 đô la.

- (A) $x = 23$ tháng. (B) $x = 43$ tháng. (C) $x = 41$ tháng. (D) $x = 40$ tháng.

CÂU 8. Các thiết bị điện tử như máy tính, điện thoại, hoặc máy ảnh thường bị khấu hao nhanh chóng do sự phát triển của công nghệ mới. Ví dụ, nếu một người mua một máy tính Macbook với giá 2 000 đô la và nó bị khấu hao với tốc độ không đổi là 100 đô la mỗi tháng, thì giá trị của Macbook còn lại 1 000 đô la sau bao nhiêu tháng?

- (A) $x = 12$ tháng. (B) $x = 43$ tháng. (C) $x = 11$ tháng. (D) $x = 10$ tháng.

CÂU 9. Ban đầu có 1m^2 bèo sinh sôi trên mặt hồ biết tốc độ sinh sôi ngày sau hơn ngày trước $0,5\text{m}^2$. Biết diện tích mặt hồ nước là 120m^2 hỏi sau bao lâu bèo phủ đầy mặt hồ?

- (A) $x = 120$ tháng. (B) $x = 143$ tháng. (C) $x = 238$ tháng. (D) $x = 130$ tháng.

CÂU 10. Nhà hát lớn Dạ Cổ Vĩ Lan ở An Cư có hàng ghế đầu kí hiệu dãy A là 50 chỗ hàng ghế, sau dãy B là 48 chỗ và như thế hàng sau ít hơn hàng trước 2 ghế, biết hàng cuối cùng có 10 ghế. Tính tổng số dãy ghế và tổng số chỗ ngồi?

- (A) 21 dãy và 630 chỗ. (B) 20 dãy và 630 chỗ.
(C) 11 dãy và 630 chỗ. (D) 21 dãy và 930 chỗ.

CÂU 11. Người ta trồng cây theo dạng một hình tam giác như sau: hàng thứ nhất trồng 1 cây, hàng thứ hai trồng 3 cây, hàng thứ ba trồng 5 cây,... cứ tiếp tục trồng như thế cho đến khi hết số cây là 6 561. Số hàng cây được trồng là bao nhiêu?

- (A) 81 hàng. (B) 16 hàng. (C) 100 hàng. (D) 89 hàng.

CÂU 12. Người ta thả một 1 m^2 lá bèo vào một hồ nước. Kinh nghiệm cho thấy sau x giờ, bèo sẽ sinh sôi kín cả mặt hồ 500 m^2 . Biết rằng sau mỗi giờ, lượng lá bèo tăng thêm $0,5 \text{ m}^2$ và tốc độ tăng không đổi tìm x ?

- (A) 888 giờ. (B) 777 giờ. (C) 999 giờ. (D) 700 giờ.

Bài 7. CẤP SỐ NHÂN

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa

Cấp số nhân là một dãy số (hữu hạn hoặc vô hạn) mà trong đó, kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng đều bằng tích một số đứng ngay trước nó với một số q không đổi, nghĩa là:

$$u_n = u_{n-1} \cdot q \text{ với } \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$$

Số q được gọi là công bội của cấp số nhân

2. Số hạng tổng quát của cấp số nhân

Nếu cấp số nhân (u_n) có số hạng đầu là u_1 và công bội q thì số hạng tổng quát u_n của nó được xác định bởi công thức:

$$u_n = u_1 \cdot q^{n-1}, n \geq 2$$

3. Tổng của n số hạng đầu tiên của cấp số nhân

Giả sử (u_n) là cấp số nhân có công bội $q \neq 1$. Đặt $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$, khi đó

$$S_n = u_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}.$$

A Khi $q = 1$ thì $S_n = n \cdot u_1$.

☑ Công bội của cấp số nhân: $q = \sqrt[n-1]{\frac{u_n}{u_1}}$.

☑ Số hạng đầu tiên của cấp số nhân: $u_1 = \frac{u_n}{q^{n-1}}$.

☑ a, b, c là ba số hạng liên tiếp cấp số nhân thì $a \cdot c = b^2$.

B. CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

1

Nhận diện cấp số nhân, công bội q

Để nhận diện (chứng minh) mỗi dãy số là cấp số nhân, ta làm như sau:

Chứng minh $u_{n+1} = u_n q, \forall n \in \mathbb{N}^*$ và q là một số không đổi.

Nếu $u_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$ thì ta lập tỉ số $\frac{u_{n+1}}{u_n} = k$.

☑ Nếu k là hằng số thì (u_n) là cấp số nhân với công bội $q = k$.

☑ Nếu k phụ thuộc vào n thì (u_n) không phải là cấp số nhân.

Để chứng minh dãy (u_n) không phải là một cấp số nhân. Khi đó, ta chỉ cần chỉ ra ba số hạng liên tiếp không tạo thành một cấp số nhân, chẳng hạn $\frac{u_3}{u_2} \neq \frac{u_2}{u_1}$.

Để chứng minh ba số a, b, c theo thứ tự đó lập được một cấp số nhân, thì ta chứng minh $ac = b^2$ hoặc $|b| = \sqrt{ac}$.

1. Ví dụ minh họa

VÍ DỤ 1. Dãy số $1; 1; 1; 1; \dots$ có phải là một cấp số nhân hay không?

VÍ DỤ 2. Dãy số $u_n = 3^n$ có phải là một cấp số nhân không? Nếu có, hãy tìm công bội của cấp số nhân đó.

VÍ DỤ 3. Dãy số $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{9}{u_n} \end{cases}$ có phải là một cấp số nhân không? Nếu có, hãy tìm công

bội của cấp số nhân đó.

QUICK NOTE

QUICK NOTE

VÍ DỤ 4. Cho (u_n) là cấp số nhân có công bội $q \neq 0, u_1 \neq 0$. Chứng minh rằng dãy số (v_n) với $v_n = u_n u_{2n}$ cũng là một cấp số nhân.

VÍ DỤ 5 (VDT). Cho dãy số (u_n) được xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = 4u_n + 9 \end{cases}, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Chứng minh rằng dãy số (v_n) xác định bởi $v_n = u_n + 3, \forall n \in \mathbb{N}^*$ là một cấp số nhân. Hãy xác định số hạng đầu và công bội của cấp số nhân đó.

2. Bài tập tự luận

BÀI 1. Dãy số 25; 5; 1; $\frac{1}{5}$; ... có phải là một cấp số nhân không? Nếu có hãy tìm công bội của cấp số nhân đó.

BÀI 2. Dãy số 1; n ; n^2 ; n^3 ; n^4 ; ... (với $n > 1$) có phải là một cấp số nhân không? Nếu có hãy tìm công bội của cấp số nhân đó.

BÀI 3. Cho dãy số (u_n) được xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = u_n^2 \end{cases}$. Hỏi dãy số (u_n) có là một cấp số nhân hay không?

BÀI 4. Cho dãy số (u_n) , biết $u_1 = 2$ và $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n$. Chứng minh (u_n) là một cấp số nhân và tìm số hạng u_3 .

BÀI 5. Cho (u_n) là cấp số nhân có công bội $q \neq 0, u_1 \neq 0$. Chứng minh rằng dãy số (v_n) với $v_n = \frac{u_n u_{2n+1}}{4}$ cũng là một cấp số nhân.

BÀI 6. Cho dãy số (u_n) được xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = 2u_n - 2 \end{cases}, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Chứng minh rằng dãy số (v_n) xác định bởi $v_n = 2u_n - 4, \forall n \in \mathbb{N}^*$ là một cấp số nhân. Hãy xác định số hạng đầu và công bội của cấp số nhân đó.

3. Câu hỏi trắc nghiệm

CÂU 1. Trong các dãy số sau, dãy số nào là một cấp số nhân?

- (A) 128; -64; 32; -16; 8; ... (B) $\sqrt{2}$; 2; 4; $4\sqrt{2}$; ...
(C) 5; 6; 7; 8; ... (D) 15; 5; 1; $\frac{1}{5}$; ...

CÂU 2. Dãy số nào sau đây không phải là cấp số nhân?

- (A) 1; -1; 1; -1; ... (B) 3; 3²; 3³; 3⁴; ...
(C) a ; a^3 ; a^5 ; a^7 ; ... ($a \neq 0$). (D) $\frac{1}{\pi}$; $\frac{1}{\pi^2}$; $\frac{1}{\pi^4}$; $\frac{1}{\pi^6}$; ...

CÂU 3. Dãy số 1; 2; 4; 8; 16; 32; ... là một cấp số nhân với

- (A) Công bội là 1 và số hạng đầu tiên là 2. (B) Công bội là 2 và số hạng đầu tiên là 1.
(C) Công bội là 2 và số hạng đầu tiên là 2. (D) Công bội là 1 và số hạng đầu tiên là 1.

CÂU 4. Cho cấp số nhân (u_n) với $u_1 = -2$ và công bội $q = -5$. Viết bốn số hạng đầu tiên của cấp số nhân.

- (A) -2; 10; 50; -250. (B) -2; 10; -50; 250.
(C) -2; -10; -50; -250. (D) -2; 10; 50; 250.

CÂU 5. Một cấp số nhân có hai số hạng liên tiếp là 3 và 12. Số hạng tiếp theo của cấp số nhân là

- (A) 15. (B) 21. (C) 36. (D) 48.

CÂU 6. Cho cấp số nhân (u_n) có số hạng tổng quát là $u_n = \frac{3}{2} \cdot 5^n$. Khi đó số hạng đầu u_1 và công bội q là

- (A) $u_1 = \frac{3}{2}, q = \frac{1}{5}$. (B) $u_1 = \frac{3}{2}, q = 5$. (C) $u_1 = \frac{15}{2}, q = \frac{1}{5}$. (D) $u_1 = \frac{15}{2}, q = 5$.

CÂU 7. Trong các dãy số (u_n) cho bởi số hạng tổng quát u_n sau, dãy số nào là một cấp số nhân?

- (A) $u_n = \frac{1}{3^{n-2}}$. (B) $u_n = \frac{n}{3^n}$. (C) $u_n = (n+2) \cdot 3^n$. (D) $u_n = n^2$.

CÂU 8. Trong các dãy số (u_n) cho bởi số hạng tổng quát u_n sau, dãy số nào là một cấp số nhân?

- (A) $u_n = 7 - 3n$. (B) $u_n = 7 - 3^n$. (C) $u_n = \frac{7}{3n}$. (D) $u_n = 7 \cdot 3^n$.

CÂU 9. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

- (A) Dãy số có tất cả các số hạng bằng nhau là một cấp số nhân.
 (B) Dãy số có tất cả các số hạng bằng nhau là một cấp số cộng.
 (C) Một cấp số cộng có công sai dương là một dãy số tăng.
 (D) Một cấp số nhân có công bội $q > 1$ là một dãy tăng.

CÂU 10. Cho dãy số (u_n) được xác định bởi $u_1 = 2, u_n = 2u_{n-1} + 3n - 1$. Công thức số hạng tổng quát của dãy số đã cho là biểu thức có dạng $a2^n + bn + c$, với $a, b, c \in \mathbb{Z}, n \geq 2, n \in \mathbb{N}$. Khi đó tổng $a + b + c$ có giá trị bằng

- (A) -4 . (B) 4 . (C) -3 . (D) 3 .

2

Số hạng tổng quát của cấp số nhân

Dựa vào giả thuyết, ta lập một hệ phương trình chứa công bội q và số hạng đầu u_n . Giải hệ phương trình này tìm được u_1 và q .

Nếu cấp số nhân (u_n) có số hạng đầu u_1 và công bội q thì số hạng tổng quát u_n được xác định bởi công thức

$$u_n = u_1 \cdot q^{n-1} \text{ với } n \geq 2.$$

1. Ví dụ minh họa

VÍ DỤ 1. Tìm số hạng tổng quát của dãy số 2; 4; 8; 16; 32; ..., biết dãy (u_n) là một cấp số nhân.

VÍ DỤ 2. Tìm số hạng đầu, công bội và số hạng tổng quát của cấp số nhân, biết $\begin{cases} u_1 + u_5 = 51 \\ u_2 + u_6 = 102 \end{cases}$.

VÍ DỤ 3. Tìm số hạng đầu, công bội và số hạng tổng quát của cấp số nhân, biết $\begin{cases} u_1 + u_6 = 30 \\ u_2 + u_7 = 120 \end{cases}$.

VÍ DỤ 4. Tìm số hạng đầu, công bội và số hạng tổng quát của cấp số nhân, biết $\begin{cases} u_3 = 40 \\ u_6 = 160 \end{cases}$.

VÍ DỤ 5 (VDT). Tìm số hạng đầu, công bội và số hạng tổng quát của cấp số nhân có công bội $q \in \mathbb{Z}, q \neq 0$, biết $\begin{cases} u_2 + u_4 = 10 \\ u_1 + u_3 + u_5 = -21 \end{cases}$.

2. Bài tập tự luận

BÀI 1. Tìm số hạng tổng quát của dãy số 3; 12; 48; 192; ..., biết dãy (u_n) là một cấp số nhân.

BÀI 2. Tìm số hạng tổng quát của cấp số nhân, biết $\begin{cases} u_1 + u_3 = 51 \\ u_2 + u_4 = 153 \end{cases}$.

BÀI 3. Tìm số hạng đầu, công bội và số hạng tổng quát của cấp số nhân, biết $\begin{cases} u_3 = 15 \\ u_6 = 120 \end{cases}$.

BÀI 4. Tìm số hạng tổng quát của cấp số nhân, biết $\begin{cases} u_4 = 35 \\ u_8 = 560 \end{cases}$.

3. Câu hỏi trắc nghiệm

CÂU 1. Cho cấp số nhân (u_n) có số hạng đầu là $u_1 \neq 0$ và công bội $q \neq 0$. Số hạng tổng quát của cấp số nhân bằng

- (A) $u_n = u_1 + (n-1)q$. (B) $u_n = u_1 \cdot q^{n-1}$.
 (C) $u_n = u_1 \cdot q^n$. (D) $u_n = u_1 \cdot q^{n+1}$.

CÂU 2. Cấp số nhân (u_n) có $u_n = \frac{3}{5} \cdot 2^n$. Số hạng đầu tiên và công bội q là

- (A) $u_1 = \frac{6}{5}, q = 3$. (B) $u_1 = \frac{6}{5}, q = -2$. (C) $u_1 = \frac{6}{5}, q = 2$. (D) $u_1 = \frac{6}{5}, q = 5$.

QUICK NOTE

QUICK NOTE

- CÂU 3.** Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 = -3$ và công bội $q = \frac{2}{3}$. Chọn mệnh đề đúng?
- A** $u_5 = -\frac{27}{16}$. **B** $u_5 = -\frac{16}{27}$. **C** $u_5 = \frac{16}{27}$. **D** $u_5 = \frac{27}{16}$.
- CÂU 4.** Dãy số có số hạng tổng quát $u_n = \frac{1}{\sqrt{3}^{2n}}$ là một cấp số nhân có công bội q bằng
- A** $\frac{1}{\sqrt{3}}$. **B** $\sqrt{3}$. **C** $\frac{1}{9}$. **D** $\frac{1}{3}$.
- CÂU 5.** Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 = 1, u_2 = -2$. Mệnh đề nào sau đây đúng?
- A** $u_{2024} = -2^{2023}$. **B** $u_{2024} = 2^{2023}$. **C** $u_{2024} = -2^{2024}$. **D** $u_{2024} = 2^{2024}$.
- CÂU 6.** Cho cấp số nhân có $\begin{cases} u_4 - u_2 = 54 \\ u_5 - u_3 = 108 \end{cases}$. Số hạng đầu tiên u_1 và công bội q của cấp số nhân là
- A** $u_1 = 9$ và $q = 2$. **B** $u_1 = 9$ và $q = -2$.
C $u_1 = -9$ và $q = 2$. **D** $u_1 = -9$ và $q = -2$.
- CÂU 7.** Cho cấp số nhân (u_n) biết $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 31 \\ u_1 + u_3 = 26 \end{cases}$. Giá trị u_1 và q là
- A** $u_1 = 2; q = 5$ hoặc $u_1 = 25; q = \frac{1}{5}$. **B** $u_1 = 5; q = 1$ hoặc $u_1 = 25; q = \frac{1}{5}$.
C $u_1 = 25; q = 5$ hoặc $u_1 = 1; q = \frac{1}{5}$. **D** $u_1 = 1; q = 5$ hoặc $u_1 = 25; q = \frac{1}{5}$.
- CÂU 8.** Số hạng đầu tiên và công bội của cấp số nhân thỏa mãn $\begin{cases} u_5 + u_2 = 36 \\ u_6 - u_4 = 48 \end{cases}$ (với $q > 0$) là
- A** $u_1 = 4, q = 4$. **B** $u_1 = 2, q = 4$. **C** $u_1 = 2, q = 2$. **D** $u_1 = 4, q = 2$.
- CÂU 9.** Cho cấp số nhân $u_2 = \frac{1}{4}, u_5 = 16$. Công bội và số hạng đầu tiên của cấp số nhân là
- A** $q = \frac{1}{2}; u_1 = \frac{1}{2}$. **B** $q = \frac{-1}{2}; u_1 = \frac{-1}{2}$.
C $q = 4; u_1 = \frac{1}{16}$. **D** $q = -4; u_1 = \frac{-1}{16}$.
- CÂU 10.** Người ta thiết kế một cái tháp gồm 11 tầng. Diện tích mặt trên của mỗi tầng bằng nửa diện tích mặt trên của tầng ngay bên dưới và diện tích mặt trên của tầng 1 bằng nửa diện tích của đế tháp (có diện tích là $12\,288\text{ m}^2$). Diện tích mặt trên cùng (của tầng thứ 11) có giá trị nào sau đây?
- A** 6 m^2 . **B** 8 m^2 . **C** 10 m^2 . **D** 12 m^2 .

3 Tìm số hạng cụ thể của CSN

Ta chuyển các số hạng của CSN về số hạng đầu u_1 và công bội q . Sử dụng công thức $u_n = u_1 \cdot q^{n-1}$.
Chia hai phương trình về theo u_1 ta thu được phương trình theo q .
Giải tìm q và u_1 . Từ đó tìm được số hạng cần tìm thỏa ycbt.

1. Ví dụ minh họa

- VÍ DỤ 1.** Cho u_n là CSN thỏa $u_1 = 2; u_4 = 16$. Tìm số hạng thứ 5 của CSN.
- VÍ DỤ 2.** Cho cấp số nhân (u_n) có $\begin{cases} u_4 + u_6 = -540 \\ u_3 + u_5 = 180 \end{cases}$. Tính số hạng đầu u_1 và công bội q của cấp Số nhân.
- VÍ DỤ 3.** Cho cấp số nhân có $u_1 = -3, q = \frac{2}{3}$. Số $\frac{-96}{243}$ là số hạng thứ mấy của cấp số nhân?
- VÍ DỤ 4.** Cấp số nhân (u_n) có số hạng tổng quát là $u_n = \frac{3}{5} \cdot 2^{n-1}, n \in \mathbb{N}^*$. Số hạng đầu tiên và công bội của cấp số nhân đó là

2. Bài tập tự luận

BÀI 1. Cho cấp số nhân (u_n) biết $\begin{cases} u_4 - u_2 = 25 \\ u_3 - u_1 = 50. \end{cases}$

- a) Tìm số hạng đầu và công bội của cấp số nhân (u_n) .
b) Tìm số hạng thứ 8 của cấp số nhân (u_n) .

BÀI 2. Tìm số hạng thứ 10 của cấp số nhân (u_n) biết $\begin{cases} u_4 - u_2 = 72 \\ u_5 - u_3 = 144. \end{cases}$

BÀI 3. Cho một cấp số nhân có 5 số hạng biết 2 số hạng đầu là số dương, tích số hạng đầu và số hạng thứ 3 là 1, tích số hạng thứ 3 và số hạng cuối là $\frac{1}{16}$. Tìm cấp số nhân này.

BÀI 4. Tìm số hạng đầu và công bội của cấp số nhân (u_n) biết $\begin{cases} u_2 + u_5 - u_4 = 10 \\ u_3 + u_6 - u_5 = 20. \end{cases}$

BÀI 5. Tìm 5 số lập thành một cấp số nhân có công bội bằng $\frac{1}{4}$ số thứ nhất và tổng 2 số đầu là $\frac{5}{4}$.

BÀI 6. Tìm 3 số lập thành một cấp số nhân có tổng là 63 và tích là 1728.

3. Câu hỏi trắc nghiệm

CÂU 1. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_{20} = 8u_{17}$. Công bội của cấp số nhân là

- (A) $q = 2$. (B) $q = -2$. (C) $q = 4$. (D) $q = -4$.

CÂU 2. Cho cấp số nhân (u_n) có 10 số hạng với công bội $q \neq 0$ và $u_1 \neq 0$. Đẳng thức nào sau đây là đúng?

- (A) $u_7 = u_4 \cdot q^6$. (B) $u_7 = u_4 \cdot q^3$. (C) $u_7 = u_4 \cdot q^4$. (D) $u_7 = u_4 \cdot q^5$.

CÂU 3. Cho cấp số nhân (u_n) có số hạng đầu $u_1 = 2$ và công bội $q = 3$. Giá trị u_{2019} bằng

- (A) $3 \cdot 2^{2019}$. (B) $2 \cdot 3^{2019}$. (C) $3 \cdot 2^{2018}$. (D) $2 \cdot 3^{2018}$.

CÂU 4. Cho cấp số nhân (u_n) với công bội $q < 0$ và $u_2 = 4$, $u_4 = 9$. Tìm u_1 .

- (A) $u_1 = 6$. (B) $u_1 = -\frac{8}{3}$. (C) $u_1 = -6$. (D) $u_1 = \frac{8}{3}$.

CÂU 5. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_2 = -6$, $u_3 = 3$. Công bội q của cấp số nhân đã cho bằng

- (A) 2. (B) $\frac{1}{2}$. (C) $-\frac{1}{2}$. (D) -2.

CÂU 6. Cho cấp số nhân có $u_1 = -3$, $q = \frac{2}{3}$. Tính u_5 ?

- (A) $u_5 = \frac{27}{16}$. (B) $u_5 = \frac{-16}{27}$. (C) $u_5 = \frac{-27}{16}$. (D) $u_5 = \frac{16}{27}$.

CÂU 7. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_2 = \frac{1}{4}$, $u_5 = -16$. Tìm q và số hạng đầu tiên của cấp số nhân?

- (A) $q = \frac{1}{2}$; $u_1 = \frac{1}{2}$. (B) $q = -\frac{1}{2}$, $u_1 = -\frac{1}{2}$.
(C) $q = -4$, $u_1 = \frac{1}{16}$. (D) $q = -4$, $u_1 = -\frac{1}{16}$.

CÂU 8. Cho cấp số nhân (u_n) , biết: $u_n = 81$, $u_{n+1} = 9$. Lựa chọn đáp án đúng.

- (A) $q = -\frac{1}{9}$. (B) $q = \frac{1}{9}$. (C) $q = 9$. (D) $q = -9$.

CÂU 9. Cho cấp số nhân (u_n) với $u_1 = 2$ và công bội $q = 3$. Số hạng u_2 bằng

- (A) 8. (B) 6. (C) 12. (D) 18.

CÂU 10. Cho cấp số nhân (u_n) với $u_1 = 2$ và $u_3 = 8$. Số hạng thứ hai của cấp số nhân đã cho bằng

- (A) $u_2 = 4$. (B) $u_2 = 6$. (C) $u_2 = \pm 4$. (D) $u_2 = -4$.

QUICK NOTE

QUICK NOTE

CÂU 11. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 = -1; q = \frac{-1}{10}$. Số $\frac{1}{10^{103}}$ là số hạng thứ bao nhiêu?

- (A) số hạng thứ 103. (B) số hạng thứ 105. (C) số hạng thứ 104. (D) Đáp án khác.

CÂU 12. Cho cấp số nhân (u_n) có các số hạng lần lượt là 3, 9, 27, 81, ... Khi đó u_n bằng

- (A) $3 + 3^n$. (B) 3^{n-1} . (C) 3^{n+1} . (D) 3^n .

CÂU 13. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 = 3$ và $15u_1 - 4u_2 + u_3$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tìm số hạng thứ 13 của cấp số nhân đã cho.

- (A) $u_{13} = 12288$. (B) $u_{13} = 3072$. (C) $u_{13} = 24567$. (D) $u_{13} = 49152$.

CÂU 14. Cho cấp số nhân (u_n) biết $u_1 + u_5 = 51$ và $u_2 + u_6 = 102$. Hỏi số 12288 là số hạng thứ mấy của cấp số nhân (u_n) ?

- (A) Số hạng thứ 13. (B) Số hạng thứ 10. (C) Số hạng thứ 11. (D) Số hạng thứ 12.

4

Tìm điều kiện để một dãy số lập thành CSN

Dãy số a, b, c lập thành CSN khi $b^2 = a \cdot c$.

Dãy số a, b, c, d lập thành CSN khi $\begin{cases} b^2 = a \cdot c \\ c^2 = b \cdot d. \end{cases}$

1. Ví dụ minh họa

VÍ DỤ 1. Cho dãy 3, x , 12, y . Tìm x, y để dãy là CSN.

VÍ DỤ 2. Cho dãy $x - 1, 2x, 4x + 3$. Tìm x để dãy là CSN.

VÍ DỤ 3. Các số $x + 6y, 5x + 2y, 8x + y$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số cộng, đồng thời, các số $x + \frac{5}{3}, y - 1, 2x - 3y$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân. Hãy tìm x và y .

VÍ DỤ 4. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình sau có ba nghiệm phân biệt lập thành một cấp số nhân $x^3 - 7x^2 + 2(m^2 + 6m)x - 8 = 0$.

VÍ DỤ 5. Các số $x + 6y, 5x + 2y, 8x + y$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số cộng; đồng thời các số $x - 1, y + 2, x - 3y$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân. Tính $x^2 + y^2$.

2. Bài tập tự luận

BÀI 1. Xác định x dương để $2x - 3; x; 2x + 3$ lập thành cấp số nhân.

BÀI 2. Cho cấp số nhân $x, 12, y, 192$. Tìm x và y .

BÀI 3. Tìm x để dãy số 1, $x^2, 6 - x^2$ lập thành cấp số nhân.

BÀI 4. Viết 6 số xen giữa hai số -2 và 256 để được một cấp số nhân có 8 số hạng. Tìm cấp số nhân này.

BÀI 5. Bốn góc của một tứ giác lồi lập thành một cấp số nhân, góc lớn nhất gấp 8 lần góc nhỏ nhất. Tìm 4 góc đó.

BÀI 6. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình sau có ba nghiệm phân biệt lập thành một cấp số nhân $x^3 - 7mx^2 + 2(m^2 + 6m)x - 64 = 0$.

3. Câu hỏi trắc nghiệm

CÂU 1. Xác định x để 3 số $2x - 1; x; 2x + 1$ theo thứ tự lập thành một cấp số nhân:

- (A) $x = \pm\sqrt{3}$. (B) $x = \pm\frac{1}{3}$.
(C) $x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$. (D) Không có giá trị nào của x .

CÂU 2. Cho 4 số nguyên dương, trong đó 3 số đầu lập thành cấp số cộng, 3 số cuối lập thành cấp số nhân. Biết tổng số đầu và cuối là 37, tổng 2 số hạng giữa là 36. Hỏi số lớn nhất thuộc khoảng nào sau đây?

- (A) (26; 29). (B) (24; 26). (C) (30; 33). (D) (22; 25).

CÂU 3. Ba số x, y, z theo thứ tự lập thành một cấp số nhân với công bội q khác 1 đồng thời các số $x, 2y, 3z$ theo thứ tự lập thành một cấp số cộng với công sai khác 0. Tìm giá trị của q .

QUICK NOTE

- ☐ **A** $q = -\frac{1}{3}$.
 ☐ **B** $q = \frac{1}{9}$.
 ☐ **C** $q = -3$.
 ☐ **D** $q = \frac{1}{3}$.

CÂU 4. Trong các dãy số (u_n) cho bởi số hạng tổng quát u_n sau, dãy số nào là một cấp số nhân?

- ☐ **A** $u_n = \frac{1}{3^n} - 1$.
 ☐ **B** $u_n = n + \frac{1}{3}$.
 ☐ **C** $u_n = n^2 - \frac{1}{3}$.
 ☐ **D** $u_n = \frac{1}{3^{n-2}}$.

CÂU 5. Trong các mệnh đề dưới đây, mệnh đề nào là sai?

- ☐ **A** Dãy số (a_n) , với $a_1 = 3$ và $a_{n+1} = \sqrt{a_n + 6}$, $\forall n \geq 1$, vừa là cấp số cộng vừa là cấp số nhân.
☐ **B** Dãy số (d_n) , với $d_1 = -3$ và $d_{n+1} = 2d_n^2 - 15$, $\forall n \geq 1$, vừa là cấp số cộng vừa là cấp số nhân.
☐ **C** Dãy số (b_n) , với $b_1 = 1$ và $b_{n+1}(2b_n^2 + 1) = 3$, $\forall n \geq 1$, vừa là cấp số cộng vừa là cấp số nhân.
☐ **D** Dãy số (c_n) , với $c_1 = 2$ và $c_{n+1} = 3c_n^2 - 10$, $\forall n \geq 1$, vừa là cấp số cộng vừa là cấp số nhân.

CÂU 6. Biết rằng tồn tại hai giá trị m_1 và m_2 để phương trình

$$2x^3 + 2(m^2 + 2m - 1)x^2 - 7(m^2 + 2m - 2)x - 54 = 0$$

có ba nghiệm phân biệt lập thành một cấp số nhân. Tính giá trị của biểu thức $P = m_1^3 + m_2^3$.

- ☐ **A** $P = 56$.
 ☐ **B** $P = 8$.
 ☐ **C** $P = -8$.
 ☐ **D** $P = -56$.

CÂU 7. Cho bốn số a, b, c, d biết rằng a, b, c theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân với công bội $q > 1$; còn b, c, d theo thứ tự đó lập thành cấp số cộng. Tìm q , biết rằng $a + d = 14$ và $b + c = 12$.

- ☐ **A** $q = \frac{20 + \sqrt{73}}{24}$.
 ☐ **B** $q = \frac{19 + \sqrt{73}}{24}$.
 ☐ **C** $q = \frac{21 + \sqrt{73}}{24}$.
 ☐ **D** $q = \frac{18 + \sqrt{73}}{24}$.

CÂU 8. Cho dãy số tăng a, b, c ($c \in \mathbb{Z}$) theo thứ tự lập thành cấp số nhân; đồng thời $a, b + 8, c$ theo thứ tự lập thành cấp số cộng và $a, b + 8, c + 64$ theo thứ tự lập thành cấp số nhân. Tính giá trị biểu thức $P = a - b + 2c$.

- ☐ **A** $P = 32$.
 ☐ **B** $P = \frac{92}{9}$.
 ☐ **C** $P = 64$.
 ☐ **D** $P = \frac{184}{9}$.

CÂU 9. Cho 3 số a, b, c theo thứ tự lập thành cấp số nhân với công bội khác 1. Biết cũng theo thứ tự đó chúng lần lượt là số thứ nhất, thứ tư và thứ tám của một cấp số cộng công sai là d , ($d \neq 0$). Tính $\frac{a}{d}$.

- ☐ **A** $\frac{4}{3}$.
 ☐ **B** 9.
 ☐ **C** $\frac{4}{9}$.
 ☐ **D** 3.

CÂU 10. Cho dãy số (u_n) là một cấp số nhân với $u_n \neq 0$, $n \in \mathbb{N}^*$. Dãy số nào sau đây không phải là cấp số nhân?

- ☐ **A** $u_1 + 2; u_2 + 2; u_3 + 2; \dots$
☐ **B** $3u_1; 3u_2; 3u_3; \dots$
☐ **C** $\frac{1}{u_1}; \frac{1}{u_2}; \frac{1}{u_3}; \dots$
☐ **D** $u_1; u_3; u_5; \dots$

CÂU 11. Xác định x để 3 số $x - 2; x + 1; 3 - x$ theo thứ tự lập thành một cấp số nhân

- ☐ **A** $x = \pm 1$.
 ☐ **B** Không có giá trị nào của x .
☐ **C** $x = -3$.
 ☐ **D** $x = 2$.

CÂU 12. Trong các dãy số (u_n) cho bởi số hạng tổng quát u_n sau, dãy số nào là một cấp số nhân?

- ☐ **A** $u_n = 7 \cdot 3^n$.
 ☐ **B** $u_n = \frac{7}{3n}$.
 ☐ **C** $u_n = 7 - 3^n$.
 ☐ **D** $u_n = 7 - 3n$.

CÂU 13. Số hạng thứ hai, số hạng đầu và số hạng thứ ba của một cấp số cộng với công sai khác 0 theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân với công bội q . Tìm q .

- ☐ **A** $q = -2$.
 ☐ **B** $q = -\frac{3}{2}$.
 ☐ **C** $q = \frac{3}{2}$.
 ☐ **D** $q = 2$.

CÂU 14. Ba số x, y, z lập thành một cấp số cộng và có tổng bằng 21. Nếu lần lượt thêm các số 2, 3, 9 vào ba số đó (theo thứ tự của cấp số cộng) thì được ba số lập thành một cấp số nhân. Tính $F = x^2 + y^2 + z^2$.

- ☐ **A** $F = 389$ hoặc $F = 395$.
 ☐ **B** $F = 395$ hoặc $F = 179$.

QUICK NOTE

C $F = 441$ hoặc $F = 357$.

D $F = 389$ hoặc $F = 179$.

5 Tính tổng của cấp số nhân

Phương pháp

- ☑ Xác định số hạng đầu u_1 , công bội q .
- ☑ Áp dụng công thức tính tổng các số hạng của cấp số nhân.

1. Ví dụ minh họa

VÍ DỤ 1. Tính tổng 10 số hạng đầu tiên của cấp số nhân (u_n) , biết $u_1 = -3$ và công bội $q = -2$.

VÍ DỤ 2. Tính tổng 8 số hạng đầu tiên của cấp số nhân (u_n) , biết $u_1 = 3$ và $u_2 = 6$.

VÍ DỤ 3. Tính tổng vô hạn $S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots$

VÍ DỤ 4. Tính tổng 200 số hạng đầu tiên của dãy số (u_n) biết $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = 3u_n \end{cases}$.

VÍ DỤ 5. Một cấp số nhân có số hạng đầu $u_1 = 3$, công bội $q = 2$. Biết $S_n = 765$, tìm n .

2. Bài tập tự luận

BÀI 1. Một cấp số nhân có số hạng đầu $u_1 = 3$ và công bội $q = 2$. Tính tổng 8 số hạng đầu của cấp số nhân.

BÀI 2. Tính tổng $S = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^n} + \dots$.

BÀI 3. Cho cấp số nhân có $q = -3$, $S_6 = 730$. Tính u_1 .

BÀI 4. Một cấp số nhân (u_n) có $u_3 = 8$, $u_5 = 32$ và công bội $q > 0$. Tính tổng của 10 số hạng đầu tiên của cấp số nhân.

BÀI 5. Tính tổng $S = 2 + 6 + 18 + \dots + 13122$.

BÀI 6. Tính tổng $S = 1 + 2 + 4 + 8 + \dots + 1024$.

BÀI 7. Một cấp số nhân có $u_1 = 1$, $q = 3$, biết $S_n = 3280$. Tìm n .

BÀI 8. Bốn số hạng liên tiếp của một cấp số nhân, trong đó số hạng thứ hai nhỏ hơn số hạng thứ nhất 35, còn số hạng thứ ba lớn hơn số hạng thứ tư 560. Tính tổng của bốn số hạng trên, biết công bội mang giá trị dương.

BÀI 9. Tổng của một cấp số nhân lùi vô hạn bằng $\frac{1}{4}$, tổng ba số hạng đầu tiên của cấp số nhân đó bằng $\frac{7}{27}$. Tổng của số hạng đầu và công bội của cấp số nhân đó bằng

BÀI 10. Một du khách vào trường đua ngựa đặt cược, lần đầu đặt 20.000 đồng, mỗi lần sau tiền đặt gấp đôi số tiền lần đặt trước. Người đó thua 10 lần liên tiếp và thắng ở lần thứ 11. Hỏi du khách trên thắng hay thua bao nhiêu tiền?

3. Câu hỏi trắc nghiệm

CÂU 1. Cho cấp số nhân $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n$ với công bội q ($q \neq 0$, $q \neq 1$). Đặt

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n.$$

Khẳng định nào sau đây là đúng?

A $S_n = \frac{u_1(q^n - 1)}{q - 1}$.

B $S_n = \frac{u_1(q^n + 1)}{q + 1}$.

C $S_n = \frac{u_1(q^{n-1} - 1)}{q + 1}$.

D $S_n = \frac{u_1(q^{n-1} - 1)}{q - 1}$.

CÂU 2. Cho cấp số nhân (u_n) có số hạng đầu $u_1 = 12$ và công sai $q = \frac{3}{2}$. Tổng 5 số hạng đầu của cấp số nhân bằng

A $\frac{93}{4}$.

B $\frac{633}{2}$.

C $\frac{633}{4}$.

D $\frac{93}{2}$.

CÂU 3. Cho cấp số nhân (u_n) có số hạng đầu $u_1 = 3$, công bội $q = -2$. Tính tổng 10 số hạng đầu tiên của cấp số nhân (u_n) .

- (A) -1023. (B) 1023. (C) 513. (D) -513.

CÂU 4. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_2 = -2$ và $u_5 = 54$. Tính tổng 1000 số hạng đầu tiên của cấp số nhân đã cho.

- (A) $S_{1000} = \frac{3^{1000} - 1}{2}$. (B) $S_{1000} = \frac{1 - 3^{1000}}{6}$.
(C) $S_{1000} = \frac{3^{1000} - 1}{6}$. (D) $S_{1000} = \frac{1 - 3^{1000}}{4}$.

CÂU 5. Tính tổng tất cả các số hạng của một cấp số nhân, biết số hạng đầu bằng 18, số hạng thứ hai bằng 54 và số hạng cuối bằng 39366.

- (A) 19674. (B) 59040. (C) 177138. (D) 6552.

CÂU 6. Dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n \end{cases}$ với $n \geq 1$. Tính tổng $S = u_1 + u_2 + \dots + u_{10}$.

- (A) $S = \frac{1023}{2048}$. (B) $S = \frac{5}{2}$. (C) $\frac{1023}{512}$. (D) $S = 2$.

CÂU 7. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 = -6$ và $q = -2$. Tổng n số hạng đầu tiên của cấp số nhân đã cho bằng 2046. Tìm n .

- (A) $n = 9$. (B) $n = 12$. (C) $n = 11$. (D) $n = 10$.

CÂU 8. Tổng 100 số hạng đầu của dãy số (u_n) với $u_n = 2n - 1$ là

- (A) 199. (B) $2^{100} - 1$. (C) 10000. (D) 9999.

CÂU 9. Cho dãy số (u_n) với $u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n + 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Tính $S_{2019} = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_{2019}$.

- (A) $S_{2019} = 2019 + \frac{1}{2^{2019}}$. (B) $S_{2019} = \frac{4039}{2}$.
(C) $S_{2019} = \frac{6057}{2}$. (D) $S_{2019} = 2020 - \frac{1}{2^{2019}}$.

CÂU 10. Cho $S = 11 + 101 + 1001 + \dots + \underbrace{1000\dots01}_{(n-1) \text{ chữ số } 0}$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- (A) $S = 10 \left(\frac{10^n - 1}{9} \right)$. (B) $S = 10 \left(\frac{10^n - 1}{9} \right) - n$.
(C) $S = 10 \left(\frac{10^n - 1}{9} \right) + n$. (D) $S = \left(\frac{10^n - 1}{9} \right) + n$.

CÂU 11. Gọi $S = 1 + 11 + 111 + \dots + \underbrace{111\dots1}_{(n \text{ số } 1)}$ thì S nhận giá trị nào sau đây?

- (A) $S = \frac{1}{9} \left[10 \left(\frac{10^n - 1}{9} \right) - n \right]$. (B) $S = \frac{10^n - 1}{81}$.
(C) $S = 10 \left(\frac{10^n - 1}{81} \right) - n$. (D) $S = 10 \left(\frac{10^n - 1}{81} \right)$.

CÂU 12. Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_n = 2u_{n-1} + 1, n \geq 2 \end{cases}$. Tổng $S = u_1 + u_2 + \dots + u_{20}$ là

- (A) $2^{21} - 20$. (B) $2^{21} - 22$. (C) 2^{20} . (D) $2^{20} - 20$.

CÂU 13. Biết rằng $S = 1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 3^2 + \dots + 11 \cdot 3^{10} = a + \frac{21 \cdot 3^b}{4}$. Tính $P = a + \frac{b}{4}$.

- (A) $P = 3$. (B) $P = 4$. (C) $P = 1$. (D) $P = 2$.

QUICK NOTE

6

Kết hợp cấp số cộng và cấp số nhân

Nhắc lại tính chất CSC, CSN

- ☑ 3 số a, b, c theo thứ tự lập thành CSC thì $a + c = 2b$.
☑ 3 số a, b, c theo thứ tự lập thành CSN thì $a \cdot c = b^2$.

QUICK NOTE

1. Ví dụ minh họa

VÍ DỤ 1. Ba số x, y, z theo thứ tự đó lập thành một CSN với công bội $q(q \neq 1)$, đồng thời các số $x, 2y, 3z$ theo thứ tự đó lập thành một CSC với công sai d . Hãy tìm q ?

VÍ DỤ 2. Biết rằng a, b, c là ba số hạng liên tiếp của một CSC và a, c, b là ba số hạng liên tiếp của một CSN, đồng thời $a + b + c = 30$. Tìm a, b, c .

VÍ DỤ 3. Ba số x, y, z theo thứ tự đó lập thành một CSN. Ba số $x, y - 4, z$ theo thứ tự đó lập thành CSN. Đồng thời các số $x, y - 4, z - 9$ theo thứ tự đó lập thành CSC. Tìm x, y, z .

VÍ DỤ 4. Cho a, b, c là ba số hạng liên tiếp của một CSN và $a, b, c - 4$ là ba số hạng liên tiếp của một CSC, đồng thời $a, b - 1, c - 5$ là ba số hạng liên tiếp của một CSN. Tìm a, b, c biết a, b, c là các số nguyên.

VÍ DỤ 5. Cho 4 số nguyên dương, trong đó 3 số đầu lập thành một CSC, 3 số hạng sau thành lập CSN. Biết rằng tổng của số hạng đầu và số hạng cuối là 37, tổng của hai số hạng giữa là 36. Tìm tổng 4 số đó

2. Bài tập tự luận

BÀI 1. Biết $x, y, x + 4$ theo thứ tự lập thành cấp số cộng và $x + 1, y + 1, 2y + 2$ theo thứ tự lập thành cấp số nhân với x, y là số thực dương. Tính $x + y$.

BÀI 2. Cho 3 số a, b, c theo thứ tự tạo thành một cấp số nhân với công bội khác 1. Biết cũng theo thứ tự đó chúng lần lượt là số hạng thứ nhất, thứ tư và thứ tám của một cấp số cộng với công sai $d \neq 0$. Tính $\frac{a}{d}$.

BÀI 3. Tìm tích các số dương a và b sao cho $a, a + 2b, 2a + b$ lập thành một cấp số cộng và $(b + 1)^2, ab + 5, (a + 1)^2$ lập thành một cấp số nhân.

BÀI 4. $a, b, c (a \neq b \neq c)$ là ba số hạng liên tiếp của một cấp số cộng và b, c, a là ba số hạng liên tiếp của một cấp số nhân, đồng thời $a.b.c = 125$. Tìm a, b, c .

BÀI 5. Một cấp số cộng và một cấp số nhân đều là các dãy tăng các số hạng thứ nhất của hai dãy số đều bằng 3, các số hạng thứ hai bằng nhau. Tỉ số giữa các số hạng thứ ba của CSN và CSC là $\frac{9}{5}$. Tìm tích ba số hạng của cấp số cộng thỏa mãn tính chất trên.

BÀI 6. Một CSC và CSN đều có số hạng đầu tiên là bằng 5, số hạng thứ hai của CSC lớn hơn số hạng thứ hai của CSN là 10, còn các số hạng thứ 3 của hai cấp số thì bằng nhau. Tìm tổng các số hạng của cấp số cộng biết công bội của cấp số nhân không âm.

BÀI 7. Ba số khác nhau có tổng bằng 114 có thể coi là ba số hạng liên tiếp của một CSN, hoặc coi là số hạng thứ nhất, thứ tư và thứ hai mươi lăm của một CSC. Tìm ba số đó.

BÀI 8. Ba số khác nhau có tổng là 217 có thể coi là các số hạng liên tiếp của một CSN hoặc là các số hạng thứ 2 thứ 9 và thứ 44 của một CSC. Tìm 3 số đó.

7

Bài toán thực tế

1. Ví dụ minh họa

VÍ DỤ 1. Trong một lọ nuôi cấy vi khuẩn, ban đầu có 5 000 con vi khuẩn và số lượng vi khuẩn tăng lên thêm 8% mỗi giờ. Hỏi sau 5 giờ thì số lượng vi khuẩn là bao nhiêu?

VÍ DỤ 2. Người ta thiết kế một cái tháp gồm 10 tầng theo cách: Diện tích bề mặt trên của mỗi tầng bằng nửa diện tích bề mặt trên của tầng ngay bên dưới và diện tích bề mặt của tầng 1 bằng nửa diện tích bề mặt đế tháp. Biết diện tích bề mặt đế tháp là 12 288 m², tính diện tích bề mặt trên cùng của tháp.

VÍ DỤ 3. Dân số trung bình của Việt Nam năm 2020 là 97,6 triệu người, tỉ lệ tăng dân số là 1,14%/năm.

(Nguồn: Niên giám thống kê của Việt Nam năm 2020, NXB Thống kê, 2021)

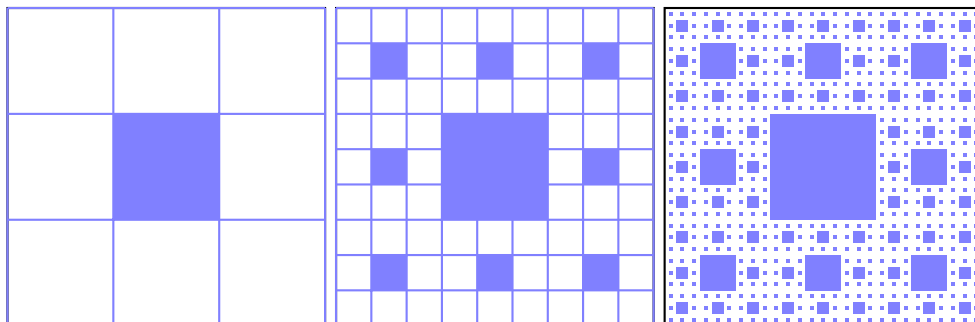
Giả sử tỉ lệ tăng dân số không đổi qua các năm.

- a) Sau 1 năm, dân số của Việt Nam sẽ là bao nhiêu triệu người (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?
- b) Viết công thức tính dân số Việt Nam sau n năm kể từ năm 2020.

QUICK NOTE

VÍ DỤ 4. Bác Linh gửi vào ngân hàng 100 triệu đồng tiền tiết kiệm với hình thức lãi kép, kì hạn 1 năm với lãi suất 6%/năm. Viết công thức tính số tiền (cả gốc và lãi) mà bác Linh có được sau n năm (giả sử lãi suất không thay đổi qua các năm).

VÍ DỤ 5. Một hình vuông có cạnh 1 đơn vị dài được chia thành chín hình vuông nhỏ hơn và hình vuông ở chính giữa được tô màu xanh như hình. Mỗi hình vuông nhỏ hơn lại được chia thành chín hình vuông con, và mỗi hình vuông con ở chính giữa lại được tô màu xanh. Nếu quá trình này được tiếp tục lặp lại năm lần, thì tổng diện tích các hình vuông được tô màu xanh là bao nhiêu?



VÍ DỤ 6. Một khay nước có nhiệt độ 23° được đặt vào ngăn đá của tủ lạnh. Biết sau mỗi giờ, nhiệt độ của nước giảm 20%. Tính nhiệt độ của khay nước đó sau 6 giờ theo đơn vị độ C.

VÍ DỤ 7. Chu kì bán rã của nguyên tố phóng xạ poloni 210 là 138 ngày, nghĩa là sau 138 ngày, khối lượng của nguyên tố đó chỉ còn một nửa (theo: <https://vi.wikipedia.org/wiki/Poloni-210>). Tính khối lượng còn lại của 20 gam poloni 210 sau:

- a) 690 ngày; b) 7314 ngày (khoảng 20 năm).

VÍ DỤ 8. Tế bào E.Coli trong điều kiện nuôi cấy thích hợp cứ 20 phút lại phân đôi một lần. Hỏi sau 24 giờ, tế bào ban đầu sẽ phân chia thành bao nhiêu tế bào?

2. Bài tập tự luận

BÀI 1. Một quốc gia có dân số năm 2011 là P triệu người. Trong 10 năm tiếp theo, mỗi năm dân số tăng $a\%$. Chứng minh rằng dân số các năm từ năm 2011 đến năm 2021 của quốc gia đó tạo thành cấp số nhân. Tìm công bội của cấp số nhân này.

BÀI 2. Vào năm 2020, dân số của một quốc gia là khoảng 97 triệu người và tốc độ tăng trưởng dân số là 0,91%. Nếu tốc độ tăng trưởng dân số này được giữ nguyên hằng năm, hãy ước tính dân số của quốc gia đó vào năm 2030.

BÀI 3. Một tỉnh có 2 triệu dân vào năm 2020 với tỉ lệ tăng dân số là 1 %/năm. Gọi u_n là số dân của tỉnh đó sau n năm. Giả sử tỉ lệ tăng dân số là không đổi.

- Viết công thức tính số dân của tỉnh đó sau n năm kể từ năm 2020.
- Tính số dân của tỉnh đó sau 10 năm kể từ năm 2020.

BÀI 4. Giả sử một thành phố có dân số năm 2022 là khoảng 2,1 triệu người và tốc độ gia tăng dân số trung bình mỗi năm là 0,75%.

- Dự đoán dân số của thành phố đó vào năm 2032;
- Nếu tốc độ gia tăng dân số vẫn giữ nguyên như trên thì ước tính vào năm nào dân số của thành phố đó sẽ tăng gấp đôi so với năm 2022?

BÀI 5. Giả sử anh Tuấn ký hợp đồng lao động trong 10 năm với điều khoản về tiền lương như sau: Năm thứ nhất, tiền lương của anh Tuấn là 60 triệu. Kể từ năm thứ hai trở đi, mỗi năm tiền lương của anh Tuấn được tăng lên 8%. Tính tổng số tiền lương anh Tuấn lĩnh được trong 10 năm đi làm (đơn vị: triệu đồng, làm tròn đến hàng phần nghìn).

BÀI 6. Một công ty xây dựng mua một chiếc máy ủi với giá 3 tỉ đồng. Cứ sau mỗi năm sử dụng, giá trị của chiếc máy ủi này lại giảm 20% so với giá trị của nó trong năm liền trước đó. Tìm giá trị còn lại của chiếc máy ủi đó sau 5 năm sử dụng.

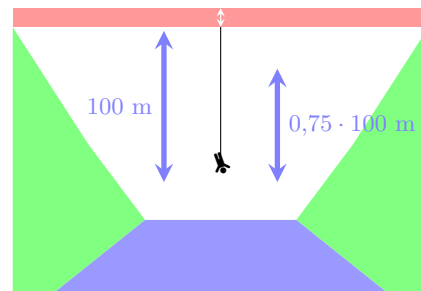
QUICK NOTE

BÀI 7. Một gia đình mua một chiếc ô tô giá 800 triệu đồng. Trung bình sau mỗi năm sử dụng, giá trị còn lại của ô tô giảm đi 4% (so với năm trước đó).

- Viết công thức tính giá trị của ô tô sau 1 năm, 2 năm sử dụng.
- Viết công thức tính giá trị của ô tô sau n năm sử dụng.
- Sau 10 năm, giá trị của ô tô ước tính còn bao nhiêu triệu đồng?

BÀI 8.

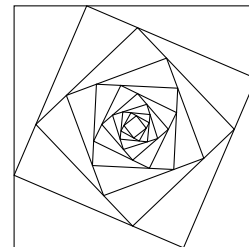
Một người nhảy bungee (một trò chơi mạo hiểm mà người chơi nhảy từ một nơi có địa thế cao xuống với dây đai an toàn buộc xung quanh người) từ một cây cầu và căng một sợi dây dài 100 m. Sau mỗi lần rơi xuống, nhờ sự đàn hồi của dây, người nhảy được kéo lên một quãng đường có độ dài bằng 75% so với lần rơi trước đó và lại bị rơi xuống đúng bằng quãng đường vừa được kéo lên. Tính tổng quãng đường người đó đi được sau 10 lần kéo lên và lại rơi xuống.



BÀI 9 (TH). Một cái tháp có 11 tầng. Diện tích của mặt sàn tầng 2 bằng nửa diện tích của mặt đáy tháp và diện tích của mặt sàn mỗi tầng bằng nửa diện tích của mặt sàn mỗi tầng ngay bên dưới. Biết mặt đáy tháp có diện tích là $12288m^2$. Tính diện tích của mặt sàn tầng trên cùng của tháp theo đơn vị mét vuông.

BÀI 10.

Cho hình vuông C_1 có cạnh bằng 4. Người ta chia mỗi cạnh hình vuông thành bốn phần bằng nhau và nối các điểm chia một cách thích hợp để có hình vuông C_2 . Từ hình vuông C_2 lại làm tiếp tục như trên để có hình vuông C_3 . Cứ tiếp tục quá trình như trên, ta nhận được dãy các hình vuông $C_1, C_2, C_3, \dots, C_n, \dots$. Gọi a_n là độ dài cạnh hình vuông C_n . Chứng minh rằng dãy số (a_n) là cấp số nhân.



BÀI 11. Một cây đàn organ có tần số âm thanh các phím liên tiếp tạo thành một cấp số nhân. Cho biết tần số phím La trung là 400 Hz và tần số của phím La cao cao hơn 12 phím là 800 Hz (nguồn: <https://vi.wikipedia.org/wiki/Organ>). Tìm công bội của cấp số nhân nói trên (làm tròn kết quả đến hàng phần nghìn).

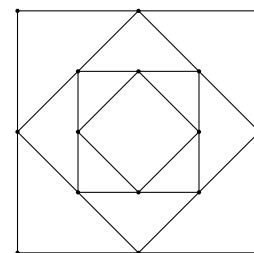
BÀI 12. Một loại thuốc được dùng mỗi ngày một lần. Lúc đầu nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân tăng nhanh, nhưng mỗi liều kế tiếp có tác dụng ít hơn liều trước đó. Lượng thuốc trong máu ở ngày thứ nhất là 50 mg, và mỗi ngày sau đó giảm chỉ còn một nửa so với ngày kế trước đó. Tính tổng lượng thuốc (tính bằng mg) trong máu của bệnh nhân sau khi dùng thuốc 10 ngày liên tiếp.

3. Câu hỏi trắc nghiệm

CÂU 1.

Cho hình vuông có cạnh là 1. Nối các trung điểm của hình vuông trên ta được một hình vuông có diện tích S_1 , tiếp tục quá trình trên với các hình vuông với diện tích là $S_2; S_3; \dots; S_n; \dots$. Tính tổng vô hạn $S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_n + \dots$.

- Ⓐ 2. Ⓑ $\frac{1}{2}$. Ⓒ 1. Ⓓ $\frac{3}{2}$.



CÂU 2. Cho n là số nguyên dương và n tam giác $A_1B_1C_1, A_2B_2C_2, \dots, A_nB_nC_n$, trong đó các điểm lần $A_{i+1}, B_{i+1}, C_{i+1}$ lượt nằm trên các cạnh B_iC_i, A_iC_i, A_iB_i ($i = 1, 2, \dots, n-1$) sao cho $A_{i+1}C_i = 3A_{i+1}B_i, B_{i+1}A_i = 3B_{i+1}C_i, C_{i+1}B_i = 3C_{i+1}A_i$. Gọi S là tổng tất cả các diện tích của tam giác $A_1B_1C_1, A_2B_2C_2, \dots, A_nB_nC_n$ biết rằng tam giác $A_1B_1C_1$ có diện tích bằng $\frac{9}{16}$. Tìm số nguyên dương sao cho $S = \frac{16^{29} - 7^{29}}{16^{29}}$.

- Ⓐ $n = 28$. Ⓑ $n = 2018$. Ⓒ $n = 30$. Ⓓ $n = 29$.

CÂU 3. Người ta thiết kế một cái tháp gồm 11 tầng. Diện tích bề mặt trên của mỗi tầng bằng nửa diện của mặt trên tầng ngay bên dưới và diện tích tầng 1 bằng nửa diện tích của đế tháp. Biết đế tháp có diện tích là 12288 m^2 . Tính diện tích mặt trên cùng.

- (A) 12 m^2 . (B) 6 m^2 . (C) 10 m^2 . (D) 8 m^2 .

CÂU 4. Cho tứ giác $ABCD$ có bốn góc tạo thành cấp số nhân có công bội $q = 2$. Góc có số đo nhỏ nhất trong bốn góc đó là

- (A) 24° . (B) 1° . (C) 12° . (D) 30° .

CÂU 5. Một du khách vào chuồng đua ngựa đặt cược, lần đầu tiên đặt 20000 đồng, mỗi lần sau tiền đặt gấp đôi lần tiền đặt cược trước. Người đó thua lần 9 liên tiếp và thắng ở lần thứ 10. Hỏi du khách đó thắng hay thua bao nhiêu tiền?

- (A) Thắng 20000 đồng. (B) Thua 40000 đồng.
(C) Hòa vốn. (D) Thua 20000 đồng.

CÂU 6. Cho tam giác ABC cân tại A có cạnh đáy BC , đường cao AH và cạnh bên AB theo thứ tự đó lập thành cấp số nhân công bội q . Giá trị của q là

- (A) $q = \frac{1}{2}\sqrt{\sqrt{2}+1}$. (B) $q = \sqrt{2}+1$.
(C) $q = \sqrt{2(\sqrt{2}+1)}$. (D) $q = \frac{1}{2}\sqrt{2(\sqrt{2}+1)}$.

CÂU 7. Giả sử một người đi làm được lĩnh lương khởi điểm là 2.000.000 đồng/tháng. Cứ 3 năm người ấy lại được tăng lương một lần với mức tăng bằng 7% của tháng trước đó. Hỏi sau 36 năm làm việc người ấy lĩnh được tất cả bao nhiêu tiền?

- (A) 1.287.968.492 đồng. (B) 10.721.769.110 đồng.
(C) $7,068289036 \cdot 10^8$ đồng. (D) 429.322.830,5 đồng.

CÂU 8. Từ độ cao 55,8 (mét) của tháp nghiêng Pisa nước Italia người ta thả một quả bóng cao su chạm xuống đất. Giả sử mỗi lần chạm đất bóng lại nảy lên độ cao bằng $\frac{1}{10}$ độ cao mà bóng đạt trước đó. Tổng độ dài hành trình (mét) của bóng được thả từ lúc ban đầu cho đến khi nó nằm yên trên mặt đất thuộc khoảng nào trong các khoảng sau đây?

- (A) (69; 72). (B) (60; 63). (C) (67; 69). (D) (64; 66).

CÂU 9. Một gia đình lập kế hoạch tiết kiệm như sau: Họ lập một sổ tiết kiệm tại một ngân hàng và cứ đầu mỗi tháng họ gửi vào sổ tiết kiệm đó 15 triệu đồng. Giả sử lãi suất tiền gửi không đổi là 0,6 %/tháng và tiền gửi được tính lãi theo hình thức lãi kép. Hỏi sau 3 năm gia đình đó tiết kiệm được số tiền gần nhất với con số nào dưới đây?

- (A) 543240000 đồng. (B) 589269000 đồng. (C) 669763000 đồng. (D) 604359000 đồng.

QUICK NOTE

MỤC LỤC

Bài 5. Dãy số	1
Ⓐ Tóm tắt lý thuyết	1
Ⓑ Các dạng toán thường gặp	1
Dạng 1. Số hạng tổng quát, biểu diễn dãy số	1
Dạng 2. Tìm số hạng cụ thể của dãy số	2
Dạng 3. Xét tính tăng giảm của dãy số	4
Dạng 4. Xét tính bị chặn của dãy số	6
Dạng 5. Toán thực tế về dãy số	7
Bài 6. Cấp số cộng	8
Ⓐ Tóm tắt lý thuyết	8
Ⓑ Các dạng toán thường gặp	9
Dạng 1. Nhận diện cấp số cộng, công sai d , số hạng tổng quát u_n	9
Dạng 2. Tổng của n số hạng đầu tiên của một cấp số cộng. Tính chất của cấp số cộng	12
Dạng 3. Các bài toán thực tế	13
Bài 7. Cấp số nhân	15
Ⓐ Tóm tắt lý thuyết	15
Ⓑ Các dạng toán thường gặp	15
Dạng 1. Nhận diện cấp số nhân, công bội q	15
Dạng 2. Số hạng tổng quát của cấp số nhân	17
Dạng 3. Tìm số hạng cụ thể của CSN	18
Dạng 4. Tìm điều kiện để một dãy số lập thành CSN	20
Dạng 5. Tính tổng của cấp số nhân	22
Dạng 6. Kết hợp cấp số cộng và cấp số nhân	23
Dạng 7. Bài toán thực tế	24

