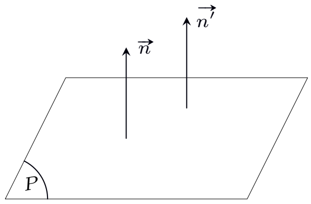
Bài 14. PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẲNG

A. LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1. Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng

Định nghĩa: Vectơ pháp tuyến $\vec{n}$ của mặt phẳng (P) là những vectơ khác $\vec{0}$ và có giá vuông góc với (P).



Chú ý:

- $\vec{n} \neq \vec{0}$ và có giá vuông với (P);
- Nếu $\vec{n}$ và $\vec{n'}$ cùng là vectơ pháp tuyến của (P) thì $\vec{n'} = k \cdot \vec{n}$ (tọa độ tỉ lệ nhau).

2. Cặp vectơ chỉ phương của mặt phẳng

Định nghĩa: Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{u}$, $\vec{v}$ được gọi là cặp vectơ chỉ phương của mặt phẳng (P) nếu chúng không cùng phương và có giá nằm trong hoặc song song với mặt phẳng (P).

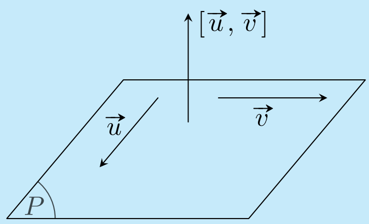
Chú ý:

- Cho hai vectơ $\vec{u} = (a; b; c)$ và $\vec{v} = (a'; b'; c')$. Khi đó

$$\vec{n} = (bc' - b'c; ca' - c'a; ab' - a'b)$$

vuông góc với cả hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$, được gọi là tích có hướng của $\vec{u}$ và $\vec{v}$, ký hiệu là $[\vec{u}, \vec{v}]$.

- Nếu $\vec{u}$, $\vec{v}$ là cặp vectơ chỉ phương của (P) thì $[\vec{u}, \vec{v}]$ là một vectơ pháp tuyến của (P).



3. Phương trình tổng quát của mặt phẳng

Công thức: Mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ và nhận $\vec{n} = (a; b; c)$ làm vectơ pháp tuyến có phương trình là

$$\boxed{a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0}$$

Thu gọn ta được dạng

$$ax + by + cz + d = 0$$

Chú ý:

① Phương trình các mặt phẳng tọa độ:

- $(Oxy)\colon z = 0$.
- $(Oxz)\colon y = 0$.
- $(Oyz)\colon x = 0$.

② Phương trình mặt phẳng (α) song song với mặt phẳng tọa độ:

- $(\alpha) \parallel (Oxy) \Rightarrow z = a \quad a \neq 0$.
- $(\alpha) \parallel (Oxz) \Rightarrow y = b \quad b \neq 0$.
- $(\alpha) \parallel (Oyz) \Rightarrow x = c \quad c \neq 0$.

ĐIỂM:

"It's not how much time you have, it's how you use it."

QUICK NOTE

QUICK NOTE

4. Vị trí tương đối giữa hai mặt phẳng

Cho hai mặt phẳng $(P)\colon a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$ và $(Q)\colon a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$. Gọi $\overrightarrow{n_1}=(a_1;b_1;c_1)$, $\overrightarrow{n_2}=(a_2;b_2;c_2)$ lần lượt là vectơ pháp tuyến của (P) và (Q).

① Nếu $\begin{cases}\overrightarrow{n_1}=k\cdot\overrightarrow{n_2}\\ d_1=k\cdot d_2\end{cases}$ thì (P) trùng (Q).

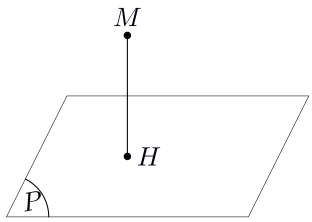
② Nếu $\begin{cases}\overrightarrow{n_1}=k\cdot\overrightarrow{n_2}\\ d_1\neq k\cdot d_2\end{cases}$ thì (P) song song (Q).

③ Nếu $\overrightarrow{n_1}$ không cùng phương với $\overrightarrow{n_2}$ thì (P) cắt (Q).

④ Nếu $\overrightarrow{n_1}\perp\overrightarrow{n_2}$ hay $a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2=0$ thì $(P)\perp(Q)$.

5. Khoảng cách từ một điểm đến mặt phẳng

Định nghĩa: Cho điểm $M(x_0;y_0;z_0)$ và mặt phẳng $(P)\colon ax+by+cz+d=0$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của điểm M lên mặt phẳng (P). Khi đó độ dài đoạn MH được gọi là khoảng cách từ điểm M đến (P). Kí hiệu $\mathrm{d}\,(M,(P))$.



Công thức tính:

$$\mathrm{d}\,(M,(P))=\frac{\left|ax_0+by_0+cz_0+d\right|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

Đặc biệt:

① $\mathrm{d}\,(M,(Oxy))=\left|z_M\right|$. ② $\mathrm{d}\,(M,(Oxz))=\left|y_M\right|$. ③ $\mathrm{d}\,(M,(Oyz))=\left|x_M\right|$.

B. PHÂN LOẠI, PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

1 Xác định vectơ pháp tuyến và điểm thuộc mặt phẳng

Cho mặt phẳng (α).

① Nếu véctơ $\vec{n}$ khác $\vec{0}$ và có giá vuông góc với (α) thì $\vec{n}$ được gọi là véctơ pháp tuyến của (α).

② Nếu hai véctơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ không cùng phương, có giá song song hoặc nằm trong (α) thì $\vec{a}$, $\vec{b}$ được gọi là cặp véctơ chỉ phương của (α). Khi đó, nếu $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$, $\vec{b}=(b_1;b_2;b_3)$ thì

$$\vec{n}=[\vec{a},\vec{b}]=\left(\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix};\begin{vmatrix}a_3 & a_1\\ b_3 & b_1\end{vmatrix};\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}\right)$$

là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P).

③ Nếu $(\alpha)\colon ax+by+cz+d=0$ thì vectơ pháp tuyến của (α) là $\vec{n}=(a;b;c)$.

BÀI TẬP TỰ LUẬN

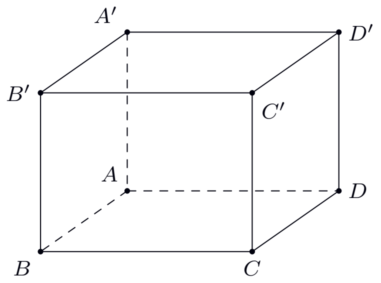
VÍ DỤ 1.

QUICK NOTE

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$.

a) Xác định vectơ pháp tuyến của các mặt phẳng $(ABCD)$, $(ABB'A')$, $(ACC'A')$, $(ADD'A')$.

b) Chứng minh $\overrightarrow{AB'}$ là một vectơ pháp tuyến của $(BCD'A')$.



VÍ DỤ 2. Cho mặt phẳng $(P): 2x - 3y + 4z + 5 = 0$. Hãy chỉ ra một vectơ pháp tuyến của (P) và hai điểm thuộc (P).

VÍ DỤ 3. Cho (P) là mặt phẳng trung trực của MN với $M(1;-2;3)$, $N(1;4;1)$. Hãy chỉ ra một vectơ pháp tuyến của (P) và một điểm thuộc (P).

VÍ DỤ 4. Chỉ ra một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (α) biết

a) (α) đi qua $A(-1;3;5)$, $B(3;2;-2)$ và $C(0;3;0)$

b) (α) đi qua $M(0;3;1)$, $N(-3;2;5)$ và $P(-2;0;0)$

VÍ DỤ 5. Cho tứ diện $ABCD$ có các đỉnh là $A(5;1;3)$, $B(1;6;2)$, $C(5;0;4)$ và $D(4;0;6)$. Gọi (α) là mặt phẳng chứa cạnh AB và song song với cạnh CD. Hãy tìm một điểm thuộc (α) và một vectơ pháp tuyến của (α).

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

CÂU 1. Cho mặt phẳng $(\alpha)\colon 2x - y + 3z - 2 = 0$. Điểm nào sau đây thuộc mặt phẳng (α)?

(A) $A(1;-3;1)$. (B) $B(2;-1;-1)$. (C) $C(2;-1;1)$. (D) $D(1;2;3)$.

CÂU 2. Cho mặt phẳng $(\alpha)\colon x + y + z - 6 = 0$. Điểm nào dưới đây **không** thuộc (α)?

(A) $M(1;-1;1)$. (B) $N(2;2;2)$. (C) $P(1;2;3)$. (D) $Q(3;3;0)$.

CÂU 3. Cho (α) vuông góc với giá của $\vec{a} = (2;-1;3)$. Vectơ nào dưới đây là vectơ pháp tuyến của (α)?

(A) $\overrightarrow{n_1} = (-2;1;3)$. (B) $\overrightarrow{n_2} = (-2;1;-3)$. (C) $\overrightarrow{n_3} = (4;2;6)$. (D) $\overrightarrow{n_4} = (4;-2;-6)$.

CÂU 4. vectơ nào sau đây **không** phải là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng $(P): x + 3y - 5z + 2 = 0$.

(A) $\vec{n}_1 = (-1;-3;5)$. (B) $\vec{n}_2 = (-2;-6;-10)$.

(C) $\vec{n}_3 = (-3;-9;15)$. (D) $\vec{n}_4 = (2;6;-10)$.

CÂU 5. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng tọa độ (Oxy) có một vectơ pháp tuyến là

(A) $\vec{n} = (0;1;0)$. (B) $\vec{n} = (0;0;1)$. (C) $\vec{n} = (1;0;0)$. (D) $\vec{n} = (1;1;0)$.

CÂU 6. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(4;-3;7)$ và $B(2;1;3)$. Một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng trung trực của đoạn AB là

(A) $\vec{n} = (1;-2;2)$. (B) $\vec{n} = (2;4;4)$. (C) $\vec{n} = (6;-2;10)$. (D) $\vec{n} = (-2;-4;4)$.

CÂU 7. Trong không gian $Oxyz$, (P) là mặt phẳng trung trực của đoạn AB, biết $A(1;3;0)$, $B(-2;1;-1)$. vectơ nào sau đây là vectơ pháp tuyến của (P)?

(A) $\vec{n}_4 = (3;-2;-1)$. (B) $\vec{n}_2 = (-3;2;-1)$. (C) $\vec{n}_3 = (-3;4;1)$. (D) $\vec{n}_1 = (3;2;1)$.

CÂU 8. Trong không gian $Oxyz$, vectơ nào sau đây là một vectơ pháp tuyến của (P). Biết $\vec{u} = (1;-2;0)$, $\vec{v} = (0;2;-1)$ là cặp vectơ chỉ phương của (P).

(A) $\vec{n} = (1;2;0)$. (B) $\vec{n} = (2;1;2)$. (C) $\vec{n} = (2;-1;2)$. (D) $\vec{n} = (0;1;2)$.

CÂU 9. Trong không gian $Oxyz$, cho (α) song song với giá của $\vec{a} = (1;-2;-3)$, $\vec{b} = (-4;2;0)$. Vectơ nào dưới đây **không phải** là vectơ pháp tuyến của (α)?

(A) $\overrightarrow{n_1} = (6;12;-6)$. (B) $\overrightarrow{n_2} = (1;2;-1)$.

(C) $\overrightarrow{n_3} = (-2;-4;2)$. (D) $\overrightarrow{n_4} = (-3;-6;-3)$.

CÂU 10. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(2;0;0)$, $B(0;-3;0)$, $C(0;0;6)$. Tọa độ một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (ABC) là

(A) $\vec{n} = (1;-2;3)$. (B) $\vec{n} = (3;2;1)$. (C) $\vec{n} = (3;-2;1)$. (D) $\vec{n} = (2;-3;6)$.

QUICK NOTE

CÂU 11. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(2;-1;3)$, $B(4;0;1)$ và $C(-10;5;3)$. vectơ nào dưới đây là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (ABC)?

A $\vec{n}=(1;2;0)$. **B** $\vec{n}=(1;-2;2)$. **C** $\vec{n}=(1;8;2)$. **D** $\vec{n}=(1;2;2)$.

CÂU 12. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;-1;5)$, $B(1;-2;3)$. Mặt phẳng (α) đi qua hai điểm A, B và song song với trục Ox có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(0;a;b)$. Khi đó tỉ số $\dfrac{a}{b}$ bằng

A -2. **B** $-\dfrac{3}{2}$. **C** $\dfrac{3}{2}$. **D** 2.

2 Lập phương trình mặt phẳng khi biết các yếu tố liên quan

Công thức: Cho (P) qua điểm $M(x_0,y_0,z_0)$ và một vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_P}=(a,b,c)$. Khi đó, phương trình (P) là

$$\boxed{(P): a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0}$$

Một số cách xác định vectơ pháp tuyến thường gặp:

① Nếu $(P)\perp AB$ thì $\overrightarrow{n_P}=\overrightarrow{AB}$;

② Nếu (P) là mặt phẳng trung trực của đoạn AB thì (P) qua trung điểm I của AB và $\overrightarrow{n_P}=\overrightarrow{AB}$;

③ Nếu (P) có cặp vectơ chỉ phương $\vec{u}$, $\vec{v}$ thì $\overrightarrow{n_P}=[\vec{u},\vec{v}]$ là một vectơ pháp tuyến của (P).

④ Nếu (P) qua ba điểm A,B,C phân biệt và không thẳng hàng thì $\overrightarrow{n_P}=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]$;

⑤ Nếu (P) qua hai điểm A,B phân biệt và song song với d thì $\overrightarrow{n_P}=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{u_d}\right]$;

⑥ Nếu (P) qua điểm A và chứa d thì $\overrightarrow{n_P}=\left[\overrightarrow{AM},\overrightarrow{u_d}\right]$, với $M\in d$.

Phương trình theo đoạn chắn: Cho (P) đi qua $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$ với $abc\neq 0$ thì $(P): \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$ (phương trình theo đoạn chắn)

BÀI TẬP TỰ LUẬN

VÍ DỤ 1. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(3;-2;-2)$, $B(3;2;0)$, $C(0;2;1)$.

a) Lập phương trình mặt phẳng qua A và vuông góc với BC.

b) Lập phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn AB.

c) Lập phương trình mặt phẳng (ABC).

VÍ DỤ 2. Cho tứ diện $ABCD$ có các đỉnh $A(5;1;3)$, $B(1;6;2)$, $C(5;0;4)$, $D(4;0;6)$.

a) Hãy viết phương trình của các mặt phẳng (ACD) và (BCD);

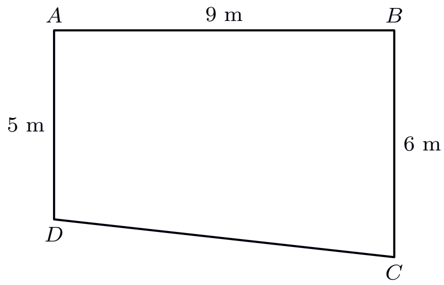
b) Hãy viết phương trình mặt phẳng (α) chứa cạnh AB và song song với cạnh CD;

c) Gọi A', B', C' lần lượt là hình chiếu vuông góc của A, B, C lên các trục Ox, Oy, Oz. Hãy viết phương trình mặt phẳng $(A'B'C')$.

VÍ DỤ 3. Viết phương trình của mặt phẳng

a) Chứa trục Ox và điểm $M(-4;1;2)$; b) Chứa trục Oz và điểm $P(3;0;-7)$.

VÍ DỤ 4. Một phần sân nhà bác An có dạng hình thang $ABCD$ vuông tại A và B với độ dài $AB=9$ m, $AD=5$ m và $BC=6$ m như Hình bên dưới. Theo thiết kế ban đầu thì mặt sân bằng phẳng và A, B, C, D có độ cao như nhau. Sau đó bác An thay đổi thiết kế để nước có thể thoát về phía góc sân ở vị trí C bằng cách giữ nguyên độ cao ở A, giảm độ cao của sân ở vị trí B và D xuống thấp hơn độ cao ở A lần lượt là 6 cm và 3,6 cm. Để mặt sân sau khi lát gạch vẫn là bề mặt phẳng thì bác An cần phải giảm độ cao ở C xuống bao nhiêu centimét so với độ cao ở A?



QUICK NOTE

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

CÂU 1. Phương trình mặt phẳng đi qua điểm $A(1;2;3)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(-2;0;1)$ là

(A) $-2x+z+1=0$. (B) $-2y+z-1=0$. (C) $-2x+z-1=0$. (D) $-2x+y-1=0$.

CÂU 2. Phương trình nào được cho dưới đây là phương trình mặt phẳng (Oyz)?

(A) $x=y+z$. (B) $y-z=0$. (C) $y+z=0$. (D) $x=0$.

CÂU 3. Cho các điểm $A(0;1;2)$, $B(2;-2;1)$, $C(-2;0;1)$. Phương trình mặt phẳng đi qua A và vuông góc với BC là

(A) $2x-y-1=0$. (B) $-y+2z-3=0$. (C) $2x-y+1=0$. (D) $y+2z-5=0$.

CÂU 4. Cho hai điểm $A(4;0;1)$ và $B(-2;2;3)$. Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB?

(A) $3x-y-z+1=0$. (B) $3x+y+z-6=0$.
(C) $3x-y-z=0$. (D) $6x-2y-2z-1=0$.

CÂU 5. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;1;1)$ và $B(1;3;5)$. Viết phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn AB.

(A) $y-2z-6=0$. (B) $y-2z+2=0$. (C) $y-3z+4=0$. (D) $y+2z-8=0$.

CÂU 6. Trông không gian $Oxyz$, phương trình mặt phẳng (P) đi qua $A(0;-1;4)$ và song song với giá của hai vectơ $\vec{u}=(3;2;1)$, $\vec{v}=(-3;0;1)$ là

(A) $x-3y+3z-15=0$. (B) $x-2y+3z-14=0$.
(C) $x-y-z+3=0$. (D) $x-3y+3z-9=0$.

CÂU 7. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(3;-2;-2)$, $B(3;2;0)$, $C(0;2;1)$. Phương trình mặt phẳng (ABC) là

(A) $2x-3y+6z+12=0$. (B) $2x+3y-6z-12=0$.
(C) $2x-3y+6z=0$. (D) $2x+3y+6z+12=0$.

CÂU 8. Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;0;0)$, $B(0;-1;-1)$, $C(5;-1;1)$. Mặt phẳng (ABC) có phương trình là

(A) $2x+3y+5z-2=0$. (B) $2x-3y-5z-2=0$.
(C) $2x-3y-5z+2=0$. (D) $2x+3y-5z-2=0$.

CÂU 9. Mặt phẳng (α) đi qua $A(-1;4;-6)$ và chứa trục Oy có phương trình là

(A) $-2x+y+z=0$. (B) $6x+z=0$.
(C) $3x-y-6z+1=0$. (D) $6x-z=0$.

CÂU 10. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng chứa trục Ox và đi qua điểm $A(1;1;-1)$ có phương trình là

(A) $y+z=0$. (B) $z+1=0$. (C) $x+z=0$. (D) $x-y=0$.

CÂU 11. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(2;1;1)$, $B(3;0;-1)$, $C(2;0;3)$. Mặt phẳng (α) đi qua hai điểm A, B và song song với đường thẳng OC có phương trình là

(A) $3x+y-2z-5=0$. (B) $4x+2y+z-11=0$.
(C) $x-y+z-2=0$. (D) $3x+7y-2z-11=0$.

CÂU 12. Mặt phẳng đi qua hai điểm $A(1;2;-1)$, $B(0;4;3)$ và song song với trục Oz có phương trình là

(A) $2x+y-4=0$. (B) $4x-4y+3z+7=0$.
(C) $x+2y-5=0$. (D) $2x+y+z-3=0$.

QUICK NOTE

CÂU 13. Cho điểm $M(1;2;-3)$. Gọi M_1, M_2, M_3 lần lượt là hình chiếu vuông góc của M lên trục Ox, Oy, Oz. Phương trình mặt phẳng đi qua ba điểm M_1, M_2, M_3 là

A $x+\frac{y}{2}-\frac{z}{3}=1$. **B** $\frac{x}{3}+\frac{y}{2}+\frac{z}{1}=1$. **C** $x+\frac{y}{2}+\frac{z}{3}=1$. **D** $x+\frac{y}{2}+\frac{z}{3}=-1$.

CÂU 14. Mặt phẳng nào sau đây cắt các trục Ox, Oy, Oz lần lượt tại các điểm A, B, C sao cho tam giác ABC nhận điểm $G(1;2;1)$ là trọng tâm?

A $x+2y+2z-6=0$. **B** $2x+y+2z-6=0$.
C $2x+2y+z-6=0$. **D** $2x+2y+6z-6=0$.

CÂU 15. Cho mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(2;-4;1)$ và chắn trên các trục tọa độ Ox, Oy, Oz theo ba đoạn có độ dài đại số lần lượt là a, b, c. Phương trình tổng quát của mặt phẳng (P) khi a, b, c theo thứ tự tạo thành một cấp số nhân có công bội bằng 2 là

A $4x+2y-z-1=0$. **B** $4x-2y+z+1=0$.
C $16x+4y-4z-1=0$. **D** $4x+2y+z-1=0$.

3 Vị trí tương đối của hai mặt phẳng

Cho hai mặt phẳng $(P)\colon a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$ và $(Q)\colon a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$.

① Nếu $\begin{cases}\overrightarrow{n_1}=k\cdot\overrightarrow{n_2}\\ d_1=k\cdot d_2\end{cases}$ thì (P) trùng (Q).

② Nếu $\begin{cases}\overrightarrow{n_1}=k\cdot\overrightarrow{n_2}\\ d_1\neq k\cdot d_2\end{cases}$ thì (P) song song (Q).

③ Nếu $\overrightarrow{n_1}$ không cùng phương với $\overrightarrow{n_2}$ thì (P) cắt (Q).

④ Nếu $\overrightarrow{n_1}\perp\overrightarrow{n_2}$ hay $a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2=0$ thì $(P)\perp(Q)$.

BÀI TẬP TỰ LUẬN

VÍ DỤ 1. Tìm các cặp mặt phẳng song song hoặc vuông góc trong các mặt phẳng sau

$(P)\colon 2x+3y-2z+7=0$ $\quad$ $(Q)\colon 3x-2y-11=0$

$(R)\colon 4x+6y-4z-9=0$ $\quad$ $(T)\colon 7x+y-z+1=0$

VÍ DỤ 2. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha)\colon 2x-3y+z+5=0$.

a) Chứng minh rằng mặt phẳng $(\alpha')\colon -4x+6y-2z+7=0$ song song với (α).

b) Viết phương trình mặt phẳng (β) đi qua điểm $M(1;-2;3)$ và song song với (α).

VÍ DỤ 3. Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(Q)\colon x+y+3z=0$, $(R)\colon 2x-y+z=0$.

a) Xét vị trí tương đối của (Q) và (R);

b) Viết trình của mặt phẳng (P) đi qua điểm $B(2;1;-3)$, đồng thời vuông góc với (Q) và (R).

VÍ DỤ 4. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(-2;4;-1)$, $B(1;1;3)$ và mặt phẳng (P) có phương trình $x-3y+2z-5=0$. Viết phương trình mặt phẳng (Q) đi qua hai điểm A, B và vuông góc với mặt phẳng (P).

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

CÂU 1. Cho mặt phẳng $(P)\colon -x+y+3z+1=0$. Mặt phẳng song song với mặt phẳng (P) có phương trình nào sau đây?

A $2x-2y-6z+7=0$. **B** $-2x+2y+3z+5=0$.
C $x-y+3z-3=0$. **D** $-x-y+3z+1=0$.

CÂU 2. Cho hai mặt phẳng $(P)\colon 2x+4y+3z-5=0$ và $(Q)\colon mx-ny-6z+2-0$. Giá trị của m,n sao cho $(P)\parallel(Q)$ là

A $m=4;n=-8$. **B** $m=n=4$. **C** $m=-4;n=8$. **D** $m=n=-4$.

QUICK NOTE

CÂU 3. Cho hai mặt phẳng $(P)\colon x+my+(m-1)z+1=0$ và $(Q)\colon x+y+2z=0$. Tập hợp tất cả các giá trị m để hai mặt phẳng này **không** song song là

(A) $(0;+\infty)$. (B) $\mathbb{R}\setminus\{-1;1;2\}$. (C) $(-\infty;3)$. (D) $\mathbb{R}$.

CÂU 4. Cho mặt phẳng $(\alpha)\colon x+y+z-1=0$. Trong các mặt phẳng sau, tìm mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng (α).

(A) $2x-y+z+1=0$. (B) $2x-y-z+1=0$.
(C) $2x+2y+2z-1=0$. (D) $x-y-z+1=0$.

CÂU 5. Cho mặt phẳng $(P)\colon 2x-y+2z-3=0$ và $(Q)\colon x+my+z-1=0$. Tìm tham số m để hai mặt phẳng P và Q vuông góc với nhau.

(A) $m=-4$. (B) $m=-\dfrac{1}{2}$. (C) $m=\dfrac{1}{2}$. (D) $m=4$.

CÂU 6. Cho hai mặt phẳng $(P)\colon x+2y-z-1=0$, $(Q)\colon 3x-(m+2)y+(2m-1)z+3=0$. Tìm m để hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau.

(A) $m=0$. (B) $m=2$. (C) $m=-2$. (D) $m=-1$.

CÂU 7. Mặt phẳng đi qua $A(1;3;-2)$ và song song với mặt phẳng $(P)\colon 2x-y+3z+4=0$ có phương trình là

(A) $2x-y+3z+7=0$. (B) $2x-y+3z-7=0$.
(C) $2x+y-3z+7=0$. (D) $2x+y+3z+7=0$.

CÂU 8. Cho điểm $A(2;-1;-3)$ và mặt phẳng $(P)\colon 3x-2y+4z-5=0$. Mặt phẳng (Q) đi qua A và song song với mặt phẳng (P) có phương trình là

(A) $(Q)\colon 3x-2y+4z+4=0$. (B) $(Q)\colon 3x+2y+4z+8=0$.
(C) $(Q)\colon 3x-2y+4z+5=0$. (D) $(Q)\colon 3x-2y+4z-4=0$.

CÂU 9. Cho mặt phẳng (P) đi qua các điểm $A(-2;0;0)$, $B(0;3;0)$, $C(0;0;-3)$. Mặt phẳng (P) vuông góc với mặt phẳng nào trong các mặt phẳng sau?

(A) $2x+2y-z-1=0$. (B) $x+y+z+1=0$.
(C) $3x-2y+2z+6=0$. (D) $x-2y-z-3=0$.

CÂU 10. Mặt phẳng qua $A(1;2;-1)$ và vuông góc với các mặt phẳng $(P)\colon 2x-y+3z-2=0$; $(Q)\colon x+y+z-1=0$ có phương trình là

(A) $x-y+z+2=0$. (B) $4x-y+z-1=0$.
(C) $x+y+2z-1=0$. (D) $4x-y-3z-5=0$.

CÂU 11. Cho hai mặt phẳng (P), (Q) lần lượt có phương trình là $x+y-z=0$, $x-2y+3z=4$ và cho điểm $M(1;-2;5)$. Tìm phương trình mặt phẳng (α) đi qua điểm M và đồng thời vuông góc với hai mặt phẳng (P), (Q).

(A) $5x+2y-z+14=0$. (B) $x-4y-3z+6=0$.
(C) $x-4y-3z-6=0$. (D) $5x+2y-z+4=0$.

CÂU 12. Cho điểm $A(-4;1;1)$ và mặt phẳng $(P)\colon x-2y-z+4=0$. Mặt phẳng (Q) đi qua điểm A và song song với mặt phẳng (P) có phương trình là

(A) $(Q)\colon x-2y-z+7=0$. (B) $(Q)\colon x-2y-z-7=0$.
(C) $(Q)\colon x-2y+z+5=0$. (D) $(Q)\colon x-2y+z-5=0$.

CÂU 13. Cho hai mặt phẳng $(P)\colon x-3y+2z-1=0$, $(Q)\colon x-z+2=0$. Mặt phẳng (α) vuông góc với hai mặt phẳng $(P),(Q)$ đồng thời cắt trục Ox tại điểm có hoành độ bằng 3. Phương trình của (α) là

(A) $-2x+z+6=0$. (B) $-2x+z-6=0$.
(C) $x+y+z-3=0$. (D) $x+y+z+3=0$.

CÂU 14. Cho $A\,(1;-1;2)$; $B\,(2;1;1)$ và mặt phẳng $(P): x+y+z+1=0$. Mặt phẳng (Q) chứa A, B và vuông góc với mặt phẳng (P). Mặt phẳng (Q) có phương trình là

(A) $3x-2y-z+3=0$. (B) $3x-2y-z-3=0$.
(C) $-x+y=0$. (D) $x+y+z-2=0$.

CÂU 15. Cho hai điểm $A(2;4;1)$, $B(-1;1;3)$ và mặt phẳng $(P)\colon x-3y+2z-5=0$. Một mặt phẳng (Q) đi qua hai điểm A, B và vuông góc với mặt phẳng (P) có dạng là $ax+by+cz-11=0$. Tính $a+b+c$.

(A) $a+b+c=-7$. (B) $a+b+c=10$. (C) $a+b+c=5$. (D) $a+b+c=3$.

QUICK NOTE

4 Khoảng cách từ một điểm đến mặt phẳng, khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song

Khoảng cách từ một điểm đến mặt phẳng: Cho điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ và mặt phẳng $(P)\colon ax+by+cz+d=0$. Khi đó

$$\mathrm{d}\left(M,(P)\right)=\frac{\left|ax_0+by_0+cz_0+d\right|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song: Cho hai mặt phẳng $(P)\colon ax+by+cz+d_1=0$ và $(Q)\colon ax+by+cz+d_2=0$ song song nhau. Khi đó

$$\mathrm{d}\left((P),(Q)\right)=\frac{\left|d_1-d_2\right|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

BÀI TẬP TỰ LUẬN

VÍ DỤ 1. Tính khoảng cách từ điểm $A(1;2;3)$ đến các mặt phẳng sau

a) $(P): 3x+4z+10=0$; b) $(Q): 2x-10=0$; c) $(R): 2x+2y+z-3=0$.

VÍ DỤ 2. Cho hai mặt phẳng $(P)\colon 2x+y+2z+12=0$, $(Q)\colon 4x+2y+4z-6=0$.

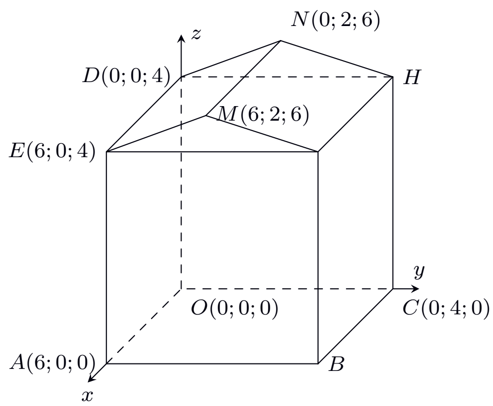
a) Chứng minh $(P) \parallel (Q)$.

b) Tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng (P) và (Q).

VÍ DỤ 3.
Một kĩ sư xây dựng thiết kế khung một ngôi nhà trong không gian $Oxyz$ như Hình 9 nhờ một phần mềm đồ họa máy tính.

a) Viết phương trình mặt phẳng mái nhà $(DEMN)$.

b) Tính khoảng cách từ điểm B đến mái nhà $(DEMN)$.



Hình 9

VÍ DỤ 4. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $DA=2$, $DC=3$, $DD'=2$. Tính khoảng cách từ đỉnh B' đến mặt phẳng $(BA'C')$.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

CÂU 1. Khoảng cách từ $A(-2;1;-6)$ đến mặt phẳng (Oxy) là

(A) 6. (B) 2. (C) 1. (D) $\dfrac{7}{\sqrt{41}}$.

CÂU 2. Cho hai điểm $A(-2;1;3)$, $B(4;1;-1)$. Khoảng cách từ trung điểm I của đoạn AB đến mặt phẳng (Oyz) là

(A) 0. (B) 2. (C) 4. (D) 1.

CÂU 3. Cho mặt phẳng $(P)\colon 2x+3y+4z-5=0$ và điểm $A(1;-3;1)$. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (P) bằng

(A) $\dfrac{8}{\sqrt{29}}$. (B) $\dfrac{8}{9}$. (C) $\dfrac{3}{\sqrt{29}}$. (D) $\dfrac{8}{29}$.

QUICK NOTE

CÂU 4. Gọi H là hình chiếu vuông góc của điểm $A(2;3;-1)$ trên mặt phẳng $(\alpha)\colon 16x+12y-15z+7=0$. Tính độ dài đoạn thẳng AH.

A $\dfrac{19}{25}$. **B** $\dfrac{12}{25}$. **C** $\dfrac{19}{625}$. **D** $\dfrac{12}{625}$.

CÂU 5. Cho hai mặt phẳng $(P)\colon x+2y-2z+3=0$ và $(Q)\colon x+2y-2z-1=0$. Khoảng cách giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) là

A $\dfrac{4}{9}$. **B** $\dfrac{2}{3}$. **C** $\dfrac{4}{3}$. **D** $-\dfrac{4}{3}$.

CÂU 6. Biết rằng hai mặt phẳng $4x-4y+2z-7=0$ và $2x-2y+z+4=0$ chứa hai mặt của hình lập phương. Thể tích khối lập phương đó bằng

A $V=\dfrac{9\sqrt{3}}{2}$. **B** $V=\dfrac{27}{8}$. **C** $V=\dfrac{81\sqrt{3}}{8}$. **D** $V=\dfrac{125}{8}$.

CÂU 7. Cho hai điểm $A(2;2;-2)$ và $B(3;-1;0)$. Đường thẳng AB cắt mặt phẳng $(P)\colon x+y-z+2=0$ tại điểm I. Tỉ số $\dfrac{IA}{IB}$ bằng

A 2. **B** 4. **C** 6. **D** 3.

CÂU 8. Cho hai mặt phẳng $(P)\colon x+y-z+1=0$ và $(Q)\colon x-y+z-5=0$. Có bao nhiêu điểm M trên trục Oy thỏa mãn M cách đều hai mặt phẳng (P) và (Q)?

A 0. **B** 1. **C** 2. **D** 3.

CÂU 9. Cho điểm $A(1;2;3)$ và mặt phẳng $(P)\colon x+y+z-2=0$. Mặt phẳng (Q) song song với mặt phẳng (P) và (Q) cách điểm A một khoảng bằng $3\sqrt{3}$. Phương trình mặt phẳng (Q) là

A $x+y+z+3=0$ và $x+y+z-3=0$.

B $x+y+z+3=0$ và $x+y+z+15=0$.

C $x+y+z+3=0$ và $x+y+z-15=0$.

D $x+y+z+3=0$ và $x+y-z-15=0$.

CÂU 10. Cho mặt phẳng $(P)\colon x+2y+z-4=0$ và điểm $D(1;0;3)$. Mặt phẳng (Q) song song với (P) và cách D một khoảng bằng $\sqrt{6}$ có phương trình là

A $\left[\begin{array}{l}x+2y-z-10=0\\x+2y-z+2=0\end{array}\right.$. **B** $x+2y+z+2=0$.

C $\left[\begin{array}{l}x+2y+z+2=0\\x+2y+z-10=0\end{array}\right.$. **D** $x+2y+z-10=0$.

CÂU 11. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. Biết $A(0;0;0)$, $D(2;0;0)$, $B(0;4;0)$, $S(0;0;4)$. Gọi M là trung điểm của SB. Tính khoảng cách từ B đến mặt phẳng (CDM).

A $d(B,(CDM))=\sqrt{2}$. **B** $d(B,(CDM))=2$.

C $d(B,(CDM))=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. **D** $d(B,(CDM))=2\sqrt{2}$.

CÂU 12. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng 2. Khoảng cách giữa hai mặt phẳng $(AB'D')$ và $(BC'D)$ bằng

A $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **B** $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$. **C** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **D** $\sqrt{3}$.

CÂU 13. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB=a$, $AD=2a$, $AA'=3a$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, $C'D'$ và DD'. Tính khoảng cách từ A đến (MNP).

A $\dfrac{15}{11}a$. **B** $\dfrac{15}{22}a$. **C** $\dfrac{9}{11}a$. **D** $\dfrac{3}{4}a$.

CÂU 14. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, $SA\perp(ABCD)$ và $SA=a\sqrt{3}$. Tính khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (SCD).

A $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **B** $\dfrac{a\sqrt{2}}{4}$. **C** $\dfrac{a\sqrt{2}}{3}$. **D** $\dfrac{a}{2}$.

CÂU 15. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, $SD=\dfrac{3a}{2}$, hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng $(ABCD)$ là trung điểm của cạnh AB. Tính khoảng cách d từ A đến mặt phẳng (SBD).

A $d=\dfrac{a}{3}$. **B** $d=\dfrac{a}{6}$. **C** $d=\dfrac{3a}{2}$. **D** $d=\dfrac{2a}{3}$.

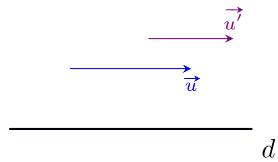
QUICK NOTE

Bài 15. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG

A. LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1. Vectơ chỉ phương của đường thẳng

Định nghĩa: Vectơ chỉ phương $\vec{u}$ của đường thẳng d là những vectơ khác $\vec{0}$ và có giá song song hoặc trùng với d.



Chú ý:

- $\vec{u} \neq \vec{0}$ và có giá song song hoặc trùng với d.
- Nếu $\vec{u}$ và $\vec{u'}$ cùng là vectơ chỉ phương của d thì $\vec{u'} = k \cdot \vec{u}$ (*tọa độ tỉ lệ nhau*).

2. Phương trình tham số của đường thẳng

Công thức: Đường thẳng d đi qua điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ và nhận $\vec{u} = (u_1; u_2; u_3)$ làm vectơ chỉ phương có phương trình là

$$\begin{cases} x = x_0 + u_1 t \\ y = y_0 + u_2 t \\ z = z_0 + u_3 t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \quad (1)$$

Chú ý:

① Phương trình các trục tọa độ:

- $Ox\colon \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$.
- $Oy\colon \begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = 0 \end{cases}$.
- $Oz\colon \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = t \end{cases}$.

② Nếu u_1, u_2 và u_3 đều khác 0 thì (1) có thể được viết dưới dạng

$$\frac{x - x_0}{u_1} = \frac{y - y_0}{u_2} = \frac{z - z_0}{u_3} \quad (2)$$

(2) được gọi là phương trình chính tắc của đường thẳng d.

3. Vị trí tương đối giữa hai đường thẳng

Cho hai đường thẳng

- Δ_1 qua điểm $M(x_0; y_0; z_0)$, vectơ chỉ phương $\vec{u} = (u_1; u_2; u_3)$;
- Δ_2 qua điểm $N(x'_0; y'_0; z'_0)$, vectơ chỉ phương $\vec{v} = (v_1; v_2; v_3)$.

Trường hợp 1: Nếu $\left[\vec{u}, \vec{v}\right] = \vec{0}$ và

- $\left[\vec{u}, \overrightarrow{MN}\right] \neq \vec{0}$ thì Δ_1 song song Δ_2;
- $\left[\vec{u}, \overrightarrow{MN}\right] = \vec{0}$ thì Δ_1 trùng Δ_2.

Trường hợp 2: Nếu $\left[\vec{u}, \vec{v}\right] \neq \vec{0}$ và

- $\left[\vec{u}, \vec{v}\right] \cdot \overrightarrow{MN} \neq 0$ thì Δ_1 chéo Δ_2;
- $\left[\vec{u}, \vec{v}\right] \cdot \overrightarrow{MN} = 0$ thì Δ_1 cắt Δ_2.

B. PHÂN LOẠI, PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

QUICK NOTE

1 Xác định điểm thuộc và vectơ chỉ phương của đường thẳng

Cho đường thẳng d.

① Nếu $\vec{u} \neq \vec{0}$ và có giá song song hoặc trùng với d thì $\vec{u}$ là vectơ chỉ phương của d.

② Nếu d qua hai điểm AB thì d có một vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$.

③ Nếu d vuông góc với giá của hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ không cùng phương thì d có một vectơ chỉ phương là $\vec{u} = [\vec{a}, \vec{b}]$.

④ Cho đường thẳng d: $\begin{cases} x = x_0 + u_1 t \\ y = y_0 + u_2 t \\ z = z_0 + u_3 t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$ thì

- Một vectơ chỉ phương của d là $\vec{u} = (u_1; u_2; u_3)$ (hệ số của t).
- Muốn xác định tọa độ một điểm thuộc d, ta chỉ cần cho trước giá trị cụ thể của tham số t, thay vào hệ phương trình tính x, y và z.

BÀI TẬP TỰ LUẬN

VÍ DỤ 1. Cho đường thẳng $d : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + 3t \\ z = 2 + t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$. Tìm một vectơ chỉ phương và hai điểm thuộc đường thẳng d.

VÍ DỤ 2. Trong không gian $Oxyz$, cho hình chóp $O.ABC$ có $A(2; 0; 0)$, $B(0; 4; 0)$ và $C(0; 0; 7)$.

a) Tìm tọa độ một vectơ chỉ phương của đường thẳng AB, AC.

b) Vectơ $\vec{v} = (-1; 2; 0)$ có là vectơ chỉ phương của đường thẳng AB không?

VÍ DỤ 3. Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng (P): $2x + y - z - 1 = 0$ và (Q): $x - 2y + z - 5 = 0$. Gọi Δ là giao tuyến của (P) và (Q). Tìm một điểm thuộc Δ và một vectơ chỉ phương của Δ.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

CÂU 1. Cho đường thẳng d: $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -t \\ z = 4 + 5t \end{cases}$. Đường thẳng d có một vectơ chỉ phương là

(A) $\vec{u_2} = (2; -1; 5)$. (B) $\vec{u_4} = (1; -1; 4)$. (C) $\vec{u_3} = (1; -1; 5)$. (D) $\vec{u_1} = (1; 0; 4)$.

CÂU 2. Cho đường thẳng d: $\dfrac{x-2}{-1} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z}{1}$. Đường thẳng d có một vectơ chỉ phương là

(A) $\vec{u} = (-1; 2; 1)$. (B) $\vec{u} = (2; 1; 0)$. (C) $\vec{u} = (-1; 2; 0)$. (D) $\vec{u} = (2; 1; 1)$.

CÂU 3. Cho đường thẳng d : $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{3} = \dfrac{z}{2}$. Điểm nào trong các điểm dưới đây nằm trên đường thẳng d?

(A) $P(5; 2; 5)$. (B) $Q(1; 0; 0)$. (C) $M(3; 2; 2)$. (D) $N(1; -1; 2)$.

CÂU 4. Cho đường thẳng d : $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + 3t \\ z = 5 - t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$. Đường thẳng d **không** đi qua điểm nào sau đây?

(A) $M(1; 2; 5)$. (B) $N(2; 3; -1)$. (C) $P(3; 5; 4)$. (D) $Q(-1; -1; 6)$.

CÂU 5. Cho hai điểm $A(2; -1; 4)$ và $B(-1; 3; 2)$. Đường thẳng AB có một vectơ chỉ phương là

(A) $\vec{u}_1 = (1; 2; 2)$. (B) $\vec{u}_3 = (1; 2; 6)$. (C) $\vec{u}_2 = (3; -4; 2)$. (D) $\vec{u}_4 = (1; -4; 2)$.

QUICK NOTE

CÂU 6. Cho tam giác ABC với $A(1;0;-2)$, $B(2;-3;-4)$, $C(3;0;-3)$. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. vectơ nào sau đây là một vectơ chỉ phương của đường thẳng OG?

Ⓐ $(-2;1;3)$. Ⓑ $(3;-2;1)$. Ⓒ $(2;1;3)$. Ⓓ $(-1;-3;2)$.

CÂU 7. Cho đường thẳng d song song với trục Oy. Đường thẳng d có một vectơ chỉ phương là

Ⓐ $\vec{u}_4 = (2019;0;2019)$. Ⓑ $\vec{u}_1 = (2019;0;0)$.
Ⓒ $\vec{u}_2 = (0;2019;0)$. Ⓓ $\vec{u}_3 = (0;0;2019)$.

CÂU 8. Cho đường thẳng Δ vuông góc với mặt phẳng $(\alpha)\colon x+2z+3=0$. Một vectơ chỉ phương của Δ là

Ⓐ $\vec{v} = (1;2;3)$. Ⓑ $\vec{a} = (1;0;2)$. Ⓒ $\vec{u} = (2;0;-1)$. Ⓓ $\vec{b} = (2;-1;0)$.

CÂU 9. vectơ chỉ phương của đường thẳng vuông góc với mặt phẳng đi qua ba điểm $A(1;2;4)$, $B(-2;3;5)$, $C(-9;7;6)$ có toạ độ là

Ⓐ $(3;4;-5)$. Ⓑ $(3;-4;5)$. Ⓒ $(-3;4;-5)$. Ⓓ $(3;4;5)$.

CÂU 10. Cho hai mặt phẳng $(P): 3x-2y+2z-5=0$, $(Q): 4x+5y-z+1=0$. Các điểm A, B phân biệt thuộc giao tuyến của hai mặt phẳng (P) và (Q). Khi đó $\overrightarrow{AB}$ cùng phương với vectơ nào sau đây?

Ⓐ $\vec{u} = (8;-11;-23)$. Ⓑ $\vec{k} = (4;5;-1)$.
Ⓒ $\vec{w} = (3;-2;2)$. Ⓓ $\vec{v} = (-8;11;-23)$.

2 Viết phương trình đường thẳng d khi biết vài yếu tố liên quan

- **Phương pháp chung:** Ta cần xác định vectơ chỉ phương $\vec{u}$ và một điểm M thuộc đường thẳng.
- **Một số kiểu xác định vectơ $\vec{u}$ thường gặp:**

① d qua hai điểm A, B thì $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$.

② d song song với Δ thì $\vec{u} = \overrightarrow{u_\Delta}$.

③ d vuông góc với (P) thì $\vec{u} = \vec{n}_P$.

④ d vuông góc với giá của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ (không cùng phương) thì $\vec{u} = [\vec{a}, \vec{b}]$.

BÀI TẬP TỰ LUẬN

VÍ DỤ 1. Lập phương trình chính tắc của đường thẳng d trong mỗi trường hợp sau

a) d đi qua điểm $A(4;-2;5)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{a} = (7;3;-9)$.

b) d đi qua hai điểm $M(0;0;1)$, $N(3;3;6)$.

c) d có phương trình tham số là $\begin{cases} x = 8+5t \\ y = 7+4t \\ z = 11+9t. \end{cases}$

VÍ DỤ 2.
Trong một khu du lịch, người ta cho du khách trải nghiệm thiên nhiên bằng cách đu theo đường trượt zipline từ vị trí A cao 15 m của tháp 1 này sang vị trí B cao 10 m của tháp 2 trong khung cảnh tuyệt đẹp xung quanh. Với hệ trucuc toạ độ $Oxyz$ cho trước (đơn vị: mét), toạ độ của A và B lần lượt là $(3;2,5;15)$ và $(21;27,5;10)$.

a) Viết phương trình đường thẳng chứa đường trượt zipline này.

b) Xác định toạ độ của du khách khi ở độ cao 12 mét.

VÍ DỤ 3. Trong không gian $Oxyz$, Lập phương trình tham số và phương trình chính tắc (nếu có) của đường thẳng d trong các trường hợp sau:

a) d đi qua điểm M và song song với đường thẳng $\Delta\colon \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z}{-1}$

b) d qua điểm $M(3;2;-1)$ và vuông góc với mặt phẳng $(P)\colon x+z-2=0$.

c) d đi qua điểm $M(1;2;1)$, đồng thời vuông góc với cả hai đường thẳng $\Delta_1\colon \dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z-1}{1}$ và $\Delta_2\colon \dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z-1}{-1}$.

VÍ DỤ 4. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;-2;0)$, mặt phẳng $(P)\colon 2x-3y+z+5=0$ và đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z+1}{1}$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua A, cắt d và song song với mặt phẳng (P).

VÍ DỤ 5. Trong Không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1\colon \dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-2}{-1}$ và $d_2\colon \begin{cases}x=t\\y=3\\z=-2+t\end{cases}$. Viết phương trình đường vuông góc chung của hai đường thẳng d_1, d_2.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

CÂU 1. Cho đường thẳng Δ đi qua điểm $M(2;0;-1)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{a}=(4;-6;2)$. Phương trình tham số của đường thẳng Δ là

Ⓐ $\begin{cases}x=-2+2t\\y=-3t\\z=1+t\end{cases}$. Ⓑ $\begin{cases}x=2+2t\\y=-3t\\z=-1+t\end{cases}$. Ⓒ $\begin{cases}x=-2+4t\\y=-6t\\z=1+2t\end{cases}$. Ⓓ $\begin{cases}x=4+2t\\y=-3t\\z=2+t\end{cases}$.

CÂU 2. Cho hai điểm $A(2;-1;3), B(3;2;-1)$. Phương trình nào sau đây là phương trình đường thẳng AB?

Ⓐ $\begin{cases}x=1+2t\\y=3-t\\z=-4+3t\end{cases}$. Ⓑ $\begin{cases}x=2+t\\y=-1+3t\\z=3-4t\end{cases}$. Ⓒ $\begin{cases}x=2+t\\y=-1+t\\z=3-4t\end{cases}$. Ⓓ $\begin{cases}x=1+2t\\y=1-t\\z=-4+3t\end{cases}$.

CÂU 3. Cho đường thẳng $\Delta : \dfrac{2x-1}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+1}{-1}$, điểm $A(2;-3;4)$. Đường thẳng qua A và song song với Δ có phương trình là

Ⓐ $\begin{cases}x=2+t\\y=-3+t\\z=4-t\end{cases}$. Ⓑ $\begin{cases}x=2-2t\\y=-3-t\\z=4+t\end{cases}$. Ⓒ $\begin{cases}x=2+2t\\y=-3+t\\z=4+t\end{cases}$. Ⓓ $\begin{cases}x=2+2t\\y=1-3t\\z=-1+4t\end{cases}$.

CÂU 4. Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm $N(2;-3;-5)$ và vuông góc với mặt phẳng $(P): 2x-3y-z+2=0$.

Ⓐ $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y+3}{-3}=\dfrac{z+5}{-1}$. Ⓑ $\dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y-3}{-3}=\dfrac{z-5}{-1}$.

Ⓒ $\dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y-3}{-3}=\dfrac{z-1}{-5}$. Ⓓ $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y+3}{-3}=\dfrac{z+1}{-5}$.

CÂU 5. Cho tam giác ABC có $A(3;2;-4), B(4;1;1)$ và $C(2;6;-3)$. Viết phương trình đường thẳng d đi qua trọng tâm G của tam giác ABC và vuông góc với mặt phẳng (ABC).

Ⓐ $d:\dfrac{x-3}{3}=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z+2}{-1}$. Ⓑ $d:\dfrac{x+12}{3}=\dfrac{y+7}{2}=\dfrac{z-3}{-1}$.

Ⓒ $d:\dfrac{x-3}{7}=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z+2}{-1}$. Ⓓ $d:\dfrac{x+7}{3}=\dfrac{y+3}{2}=\dfrac{z-2}{-1}$.

CÂU 6. Cho hai điểm $A(1;-1;1)$ và $B(-1;2;3)$ và đường thẳng $\Delta\colon \dfrac{x+1}{-2}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z-3}{3}$. Phương trình đường thẳng đi qua điểm A, đồng thời vuông góc với hai đường thẳng AB và Δ là

Ⓐ $\dfrac{x+1}{7}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z+1}{4}$. Ⓑ $\dfrac{x+1}{7}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z+1}{4}$.

Ⓒ $\dfrac{x-7}{1}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z-4}{1}$. Ⓓ $\dfrac{x-1}{7}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-1}{4}$.

QUICK NOTE

QUICK NOTE

CÂU 7. Cho điểm $A(1;2;3)$ và đường thẳng $d: \dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-3}{-2}$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua điểm A, vuông góc với đường thẳng d và cắt trục hoành. Tìm một vectơ chỉ phương $\vec{u}$ của đường thẳng Δ.

A $\vec{u}=(0;2;1)$. **B** $\vec{u}=(1;0;1)$. **C** $\vec{u}=(1;-2;0)$. **D** $\vec{u}=(2;2;3)$.

CÂU 8. Cho hai đường thẳng $d_1: \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z}{-1}$ và $d_2: \dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z+3}{2}$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm $A(1;0;2)$, cắt d_1 và vuông góc với d_2.

A $\dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z-2}{4}$.

B $\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y-3}{3}=\dfrac{z+2}{-4}$.

C $\dfrac{x-5}{-2}=\dfrac{y-6}{-3}=\dfrac{z-2}{4}$.

D $\dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z-2}{-4}$.

CÂU 9. Cho đường thẳng Δ đi qua $M(1;2;2)$, song song với mặt phẳng $(P)\colon x-y+z+3=0$ đồng thời cắt đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z-3}{1}$ có phương trình là

A $\begin{cases}x=1-t\\y=2-t\\z=2.\end{cases}$ **B** $\begin{cases}x=1\\y=2-t\\z=2-t.\end{cases}$ **C** $\begin{cases}x=1-t\\y=2+t\\z=2.\end{cases}$ **D** $\begin{cases}x=-1+t\\y=-1+2t\\z=2t.\end{cases}$

CÂU 10. Cho đường thẳng $d: x=y=z$. Viết phương trình đường thẳng d' là hình chiếu vuông góc của d lên mặt phẳng tọa độ (Oyz).

A $\begin{cases}x=0\\y=t\\z=2t\end{cases}$. **B** $\begin{cases}x=t\\y=t\\z=2t\end{cases}$. **C** $\begin{cases}x=0\\y=2+t\\z=1+t\end{cases}$. **D** $\begin{cases}x=0\\y=t\\z=t\end{cases}$.

CÂU 11. Cho đường thẳng $d: \dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-2}{1}$, mặt phẳng $(P): x+y-2z+5=0$ và điểm $A(1;-1;2)$. Viết phương trình đường thẳng Δ cắt d và (P) lần lượt tại M và N sao cho A là trung điểm của đoạn thẳng MN.

A $\Delta: \dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z-4}{2}$.

B $\Delta: \dfrac{x-1}{6}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-2}{2}$.

C $\Delta: \dfrac{x+5}{6}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z}{2}$.

D $\Delta: \dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y+4}{3}=\dfrac{z-3}{2}$.

CÂU 12. Trong không gian $Oxyz$, đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau $d_1\colon \dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-3}{3}=\dfrac{z+4}{-5}$ và $d_2\colon \dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-4}{-2}=\dfrac{z-4}{-1}$ có phương trình là

A $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y+2}{2}$.

B $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z-3}{4}$.

C $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{1}$.

D $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z-3}{-1}$.

3 Vị trí tương đối của hai đường thẳng

Cho d qua điểm M và có vectơ chỉ phương $\vec{u}$; d' qua điểm N và có vectơ chỉ phương $\vec{v}$.

① Nếu $\vec{u}$ cùng phương $\vec{v}$ $(\vec{u}=k\vec{v})$ và $M\notin d'$ thì $d \parallel d'$.

② Nếu $\vec{u}$ cùng phương $\vec{v}$ $(\vec{u}=k\vec{v})$ và $M\in d'$ thì d trùng với d'.

③ Nếu $[\vec{u},\vec{v}]\cdot\overrightarrow{MN}\neq 0$ thì d và d' chéo nhau.

④ Nếu $[\vec{u},\vec{v}]\cdot\overrightarrow{MN}=0$ thì d và d' cắt nhau.

⑤ Nếu $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$ thì d và d' vuông góc nhau.

BÀI TẬP TỰ LUẬN

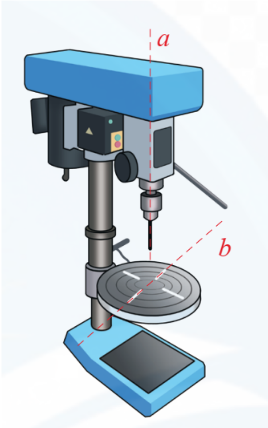
VÍ DỤ 1.

Trên phần mềm mô phỏng 3D một máy khoan trong không gian $Oxyz$, cho biết phương trình trục a của mũi khoan và một đường rãnh b trên vật cần khoan (tham khảo hình vẽ bên) lần lượt là

$$a\colon \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 3t \end{cases} \text{ và } b\colon \begin{cases} x = 1 + 4t' \\ y = 2 + 2t' \\ z = 6. \end{cases}$$

a) Chứng minh a, b vuông góc và cắt nhau.

b) Tìm giao điểm của a và b.



QUICK NOTE

VÍ DỤ 1. Trong khôn gian $Oxyz$, xét vị trí tương đối giữa hai đường thẳng d và d' trong mỗi trường hợp sau. Nếu chúng cắt nhau, hãy xác định tọa độ giao điểm.

a) $d\colon \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 3 + 2t \\ z = 4 + 2t \end{cases}$ và $d'\colon \begin{cases} x = 8 + 9t' \\ y = 7 + 6t' \\ z = 8 + 6t'; \end{cases}$

b) $d\colon \dfrac{x}{4} = \dfrac{y-3}{3} = \dfrac{z-1}{2}$ và $d'\colon \dfrac{x-5}{8} = \dfrac{y-5}{6} = \dfrac{z-3}{4}$;

c) $d\colon \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 + 2t \\ z = 1 - t \end{cases}$ và $d'\colon \dfrac{x-4}{3} = \dfrac{y-1}{4} = \dfrac{z-5}{5}$;

d) $d\colon \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y-3}{4} = \dfrac{z-2}{3}$ và $d'\colon \begin{cases} x = 5 \\ y = 7 + 2t \\ z = 5 - t. \end{cases}$

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

CÂU 1. Cho hai đường thẳng $d\colon \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2t \\ z = 2 - t \end{cases}$ và $d'\colon \begin{cases} x = 2 + 2t' \\ y = 3 + 4t' \\ z = 5 - 2t'. \end{cases}$ Mệnh đề nào sau đây đúng?

(A) d và d' chéo nhau. (B) d trùng d'.
(C) d song song d'. (D) d cắt d'.

CÂU 2. Cho hai đường thẳng $d_1\colon \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+3}{-2} = \dfrac{z+3}{-3}$ và $d_2\colon \begin{cases} x = 3t \\ y = -1 + 2t \\ z = 0 \end{cases}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

(A) d_1 cắt và không vuông góc với d_2. (B) d_1 cắt và vuông góc với d_2.
(C) d_1 song song d_2. (D) d_1 chéo d_2.

CÂU 3. Cho hai đường thẳng $d_1\colon \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 1 + t \\ z = 1 - t \end{cases}$ và $d_2\colon \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-2}{-1} = \dfrac{z}{1}$. Chọn khẳng định đúng.

(A) $d_1 \parallel d_2$. (B) $d_1 \equiv d_2$. (C) d_1, d_2 chéo nhau. (D) d_1, d_2 cắt nhau.

CÂU 4. Vị trí tương đối của hai đường thẳng $\Delta_1\colon \dfrac{x-1}{3} = y = \dfrac{z+1}{2}$ và $\Delta_2\colon \dfrac{x}{2} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z}{1}$,

(A) Trùng nhau . (B) Chéo nhau. (C) Song song. (D) Cắt nhau.

CÂU 5. Cho hai đường thẳng $d_1 : \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-1}{-m} = \dfrac{z-2}{-3}$ và $d_2 : \dfrac{x-3}{1} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z-1}{1}$. Tìm tất cả các giá trị thực của m để d_1 vuông góc d_2.

(A) $m = 5$. (B) $m = 1$. (C) $m = -5$. (D) $m = -1$.

QUICK NOTE

CÂU 6. Cho hai đường thẳng $\Delta_1\colon \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z-3}{4}$ và $\Delta_2\colon \dfrac{x-4}{1}=\dfrac{y-3}{-2}=\dfrac{z-5}{-2}$. Tọa độ giao điểm M của hai đường thẳng đã cho là

A $M(5;1;3)$. **B** $M(0;-1;-1)$. **C** $M(3;5;7)$. **D** $M(2;3;7)$.

CÂU 7. Cho hai đường thẳng $d_1\colon \begin{cases}x=1+t\\ y=2-t\\ z=3+2t\end{cases}$ và $d_2\colon \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-m}{1}=\dfrac{z+2}{-1}$ (với m là tham số). Tìm m để hai đường thẳng $d_1,\ d_2$ cắt nhau.

A $m=5$. **B** $m=7$. **C** $m=9$. **D** $m=4$.

CÂU 8. Cho hai đường thẳng $d:\begin{cases}x=1+mt\\ y=t\\ z=-1+2t\end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$ và $d':\begin{cases}x=1-t'\\ y=2+2t'\\ z=3-t'\end{cases}$ $(t'\in\mathbb{R})$. Giá trị của m để hai đường thẳng d và d' cắt nhau là

A $m=0$. **B** $m=1$. **C** $m=-1$. **D** $m=2$.

4 Vị trí tương đối của đường thẳng và mặt phẳng

Xét đường thẳng $d\colon \begin{cases}x=x_0+u_1t\\ y=y_0+u_2t\\ z=z_0+u_3t\end{cases}$ và mặt phẳng $(P)\colon Ax+By+Cz+D=0$.

Phương pháp: Xét $d\cap(P)\Rightarrow A(x_0+u_1t)+B(y_0+u_2t)+C(z_0+u_3t)+D=0 \quad (*)$

- Nếu (*) có đúng 1 nghiệm t thì d cắt (P);
- Nếu (*) vô nghiệm thì d song song (P);
- Nếu (*) nghiệm đúng với mọi t thì d nằm trong (P).

Đặc biệt: Với $\vec{u}$ là vectơ chỉ phương của d và $\vec{n}$ là vectơ pháp tuyến của (P) thì

$$d\perp(P)\Leftrightarrow \vec{u} \text{ cùng phương với } \vec{n} \text{ hay } \vec{u}=k\cdot\vec{n}$$

BÀI TẬP TỰ LUẬN

VÍ DỤ 1. Xét vị trí tương đối giữa đường thẳng và mặt phẳng được chỉ ra ở các câu sau:

a) $(\alpha)\colon y+2z=0$ và $d\colon \begin{cases}x=2-t\\ y=4+2t\\ z=1\end{cases}$.

b) $(P)\colon 3x-3y+2z-5=0$ và $d\colon \begin{cases}x=-1+2t\\ y=3+4t\\ z=3t\end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$.

c) $(P)\colon 3x-3y+2z+1=0$ và $d\colon \dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z-1}{-3}$.

VÍ DỤ 2. Tìm điều kiện của tham số m để

a) $\Delta:\dfrac{x-10}{5}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z+2}{1}$ vuông góc với $(P):10x+2y+mz+11=0$.

b) $d\colon \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{z-1}{-1}$ song song với $(\alpha)\colon -x+m^2y+mz+1=0$.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

CÂU 1. Cho đường thẳng $d:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{-2}=\dfrac{z-1}{1}$. Tìm tọa độ giao điểm M của đường thẳng d với mặt phẳng (Oxy).

A $M(-1;2;0)$. **B** $M(1;0;0)$. **C** $M(2;-1;0)$. **D** $M(3;-2;0)$.

QUICK NOTE

CÂU 2. Cho đường thẳng $d: \dfrac{x-1}{-1} = \dfrac{y+3}{2} = \dfrac{z-3}{1}$ và mặt phẳng $(P): 2x+y-2z+9=0$. Tìm toạ độ giao điểm của d và (P).

A $(2;1;1)$. **B** $(0;-1;4)$. **C** $(1;-3;3)$. **D** $(2;-5;1)$.

CÂU 3. Cho mặt phẳng $(\alpha)\colon x+2y+3z-6=0$ và đường thẳng $\Delta\colon \dfrac{x+1}{-1} = \dfrac{y+1}{-1} = \dfrac{z-3}{1}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A Δ cắt và không vuông góc với (α). **B** $\Delta \parallel (\alpha)$.
C $\Delta \subset (\alpha)$. **D** $\Delta \perp (\alpha)$.

CÂU 4. Cho đường thẳng $d: \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-1}{4} = \dfrac{z-m}{-1}$ và mặt phẳng $(P): 2x+my-(m^2+1)z+m-2m^2=0$. Có bao nhiêu giá trị của m để đường thẳng d nằm trên (P)?

A 0. **B** 1. **C** 2. **D** Vô số.

CÂU 5. Cho mặt phẳng $(\alpha): x+y+z-6=0$ và đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = m+t \\ y = -1+nt \\ z = 4+2t \end{cases}$. Tìm điều kiện của m và n để đường thẳng Δ song song với mặt phẳng (α).

A $\begin{cases} m \neq 3 \\ n = -3 \end{cases}$. **B** $\begin{cases} m = 3 \\ n \neq -3 \end{cases}$. **C** $\begin{cases} m = 3 \\ n = -3 \end{cases}$. **D** $\begin{cases} m \neq 3 \\ n \neq -3 \end{cases}$.

CÂU 6. Cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+2}{-1} = \dfrac{z+1}{1}$. Trong các mặt phẳng dưới đây mặt phẳng nào vuông góc với đường thẳng d?

A $2x-2y+2z+4=0$. **B** $4x-2y-2z-4=0$.
C $4x+2y+2z+4=0$. **D** $4x-2y+2z+4=0$.

CÂU 7. Cho đường thẳng $d\colon \begin{cases} x = 3+2t \\ y = 5-3mt \\ z = -1+t. \end{cases}$ và mặt phẳng $(P)\colon 4x-4y+2z-5=0$. Giá trị nào của m để đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (P).

A $m = -\dfrac{5}{6}$. **B** $m = \dfrac{2}{3}$. **C** $m = \dfrac{3}{2}$. **D** $m = \dfrac{5}{6}$.

CÂU 8. Cho điểm $A(1;2;3)$ và đường thẳng $d\colon \dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y+2}{-1} = \dfrac{z-3}{1}$. Phương trình mặt phẳng (P) đi qua A và vuông góc với đường thẳng d là

A $2x-y+z-3=0$. **B** $x+2y+3z-7=0$.
C $x+2y+3z-1=0$. **D** $2x-y+z=0$.

CÂU 9. Cho hai đường thẳng chéo nhau $d_1: \dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y+2}{1} = \dfrac{z-6}{-2}$; $d_2: \dfrac{x-4}{1} = \dfrac{y+2}{-2} = \dfrac{z+1}{3}$. Phương trình mặt phẳng (P) chứa d_1 và song song với d_2 là

A $(P): x+8y+5z+16=0$. **B** $(P): x+4y+3z-12=0$.
C $(P): 2x+y-6=0$. **D** $(P): x+8y+5z-16=0$.

CÂU 10. Cho hai đường thẳng $d_1\colon \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{3} = \dfrac{z-3}{-5}$ và $d_2\colon \begin{cases} x = -1+t \\ y = 4+3t \\ z = 1+t \end{cases}$. Tìm phương trình mặt phẳng chứa đường thẳng d_1 và song song với đường thẳng d_2.

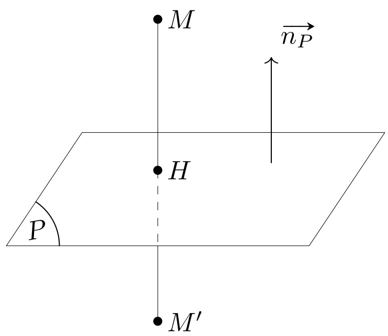
A $18x-7y+3z+34=0$. **B** $18x+7y+3z-20=0$.
C $18x+7y+3z+20=0$. **D** $18x-7y+3z-34=0$.

5 Hình chiếu, đối xứng

Bài toán 1: Tìm hình chiếu vuông góc của điểm M trên (P):

QUICK NOTE

- Viết phương trình đường thẳng MH qua M và nhận $\overrightarrow{n_P}$ làm vectơ chỉ phương;
- Giải hệ giữa đường MH với mặt phẳng (P), tìm t. Từ đó, suy ra tọa độ H.

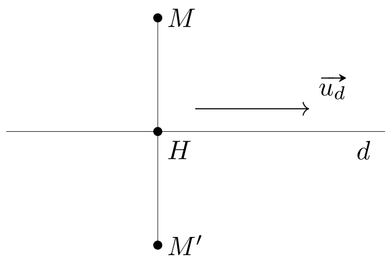


Gọi M' đối xứng với M qua mặt phẳng (P) thì

$$\begin{cases} x'_M = 2x_M - x_H \\ y'_M = 2y_M - y_H \\ z'_M = 2z_M - z_H \end{cases}.$$

Bài toán 2: Tìm hình chiếu vuông góc của điểm M trên d:

- Tham số điểm $H \in d$ theo ẩn t;
- Giải $\overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{u_d} = 0$, tìm t. Từ đó, suy ra tọa độ H.



Gọi M' đối xứng với M qua mặt phẳng d thì

$$\begin{cases} x'_M = 2x_M - x_H \\ y'_M = 2y_M - y_H \\ z'_M = 2z_M - z_H \end{cases}.$$

BÀI TẬP TỰ LUẬN

VÍ DỤ 1. Trong hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(2;-3;1)$ và đường thẳng $d\colon \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y+2}{-1} = \dfrac{z}{2}$.

a) Tìm tọa độ hình chiếu vuông góc của điểm M lên d.

b) Tìm tọa độ điểm M' đối xứng với điểm M qua d.

VÍ DỤ 2. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(2;7;-9)$ và mặt phẳng $(P)\colon x + 2y - 3z - 1 = 0$.

a) Tìm tọa độ hình chiếu vuông góc của M trên mặt phẳng (P).

b) Tìm tọa độ điểm M' đối xứng với điểm M qua (P).

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

CÂU 1. Hình chiếu vuông góc của điểm $A(3;-4;5)$ trên mặt phẳng (Oxz) là điểm

(A) $M(3;0;0)$. (B) $M(0;-4;5)$. (C) $M(0;0;5)$. (D) $M(3;0;5)$.

CÂU 2. Hình chiếu vuông góc của điểm $A(1;2;3)$ trên mặt phẳng (Oxy) là điểm

(A) $M(0;0;3)$. (B) $N(1;2;0)$. (C) $Q(0;2;0)$. (D) $P(1;0;0)$.

CÂU 3. Hình chiếu vuông góc của điểm $M(2;1;-3)$ lên mặt phẳng (Oyz) có tọa độ là

(A) $(2;0;0)$. (B) $(2;1;0)$. (C) $(0;1;-3)$. (D) $(2;0;-3)$.

CÂU 4. Hình chiếu vuông góc của điểm $A(3;2;1)$ trên trục Ox có tọa độ là

(A) $(0;2;1)$. (B) $(0;2;0)$. (C) $(3;0;0)$. (D) $(0;0;1)$.

CÂU 5. Hình chiếu của điểm $M(2;3;-2)$ trên trục Oy có tọa độ là

(A) $(2;0;0)$. (B) $(0;3;0)$. (C) $(0;0;-2)$. (D) $(2;0;-2)$.

CÂU 6. Cho điểm $M(3;2;-1)$, điểm $M'(a;b;c)$ đối xứng của M qua trục Oy, khi đó $a+b+c$ bằng

(A) 6. (B) 2. (C) 4. (D) 0.

QUICK NOTE

CÂU 7. Điểm đối xứng với điểm $A(-2;7;5)$ qua mặt phẳng (Oxz) là điểm B có tọa độ là

Ⓐ $B(2;7;-5)$. Ⓑ $B(-2;-7;5)$. Ⓒ $B(-2;7;-5)$. Ⓓ $B(2;-7;-5)$.

CÂU 8. Tọa độ hình chiếu vuông góc của điểm $A(2;-1;0)$ lên mặt phẳng $(P): 3x-2y+z+6=0$ là

Ⓐ $(5;-3;1)$. Ⓑ $(-1;1;-1)$. Ⓒ $(1;1;1)$. Ⓓ $(3;-2;1)$.

CÂU 9. Gọi hình chiếu vuông góc của điểm $A(3;-1;-4)$ lên mặt phẳng $(P): 2x-2y-z-3=0$ là điểm $H(a;b;c)$. Khi đó khẳng định nào sau đây đúng?

Ⓐ $a+b+c=-1$. Ⓑ $a+b+c=3$. Ⓒ $a+b+c=5$. Ⓓ $a+b+c=-\dfrac{5}{3}$.

CÂU 10. Cho mặt phẳng $(P): 2x+2y-z+9=0$ và điểm $A(-7;-6;1)$. Tìm tọa độ điểm A' đối xứng với điểm A qua mặt phẳng (P).

Ⓐ $A'(1;2;-3)$. Ⓑ $A'(1;2;1)$. Ⓒ $A'(5;4;9)$. Ⓓ $A'(9;0;9)$.

CÂU 11. Cho điểm $A(4;-3;2)$ và đường thẳng $d: \dfrac{x+2}{3}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z}{-1}$. Gọi điểm H là hình chiếu vuông góc của điểm A lên đường thẳng d. Tọa độ điểm H là

Ⓐ $H(5;4;-1)$. Ⓑ $H(1;0;-1)$. Ⓒ $H(-5;-4;1)$. Ⓓ $H(-2;-2;0)$.

CÂU 12. Cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z}{-1}$, $M(2;1;0)$. Gọi $H(a;b;c)$ là điểm thuộc d sao cho MH có độ dài nhỏ nhất. Tính $T=a^2+b^2+c^2$.

Ⓐ $T=\sqrt{5}$. Ⓑ $T=12$. Ⓒ $T=21$. Ⓓ $T=6$.

CÂU 13. Cho điểm $M(1;2;-6)$ và đường thẳng $d: \begin{cases} x=2+2t \\ y=1-t \\ z=-3+t \end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$. Điểm N là điểm đối xứng của M qua đường thẳng d có tọa độ là

Ⓐ $N(0;2;-4)$. Ⓑ $N(-1;2;-2)$. Ⓒ $N(1;-2;2)$. Ⓓ $N(-1;0;2)$.

CÂU 14. Cho đường thẳng $\Delta: \dfrac{x}{2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-1}{-1}$ và hai điểm $A(1;0;1)$, $B(-1;1;2)$. Biết điểm $M(a;b;c)$ thuộc Δ sao cho $\left|\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MB}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó, tổng $a+2b+4c$ bằng bao nhiêu?

Ⓐ 0. Ⓑ -1. Ⓒ 2. Ⓓ 1.

CÂU 15. Cho ba điểm $A(0;-2;-1)$, $B(-2;-4;3)$, $C(1;3;-1)$ và mặt phẳng $(P)\colon x+y-2z-3=0$. Gọi $M(a;b;c)\in(P)$ sao cho $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính $a-b+2c$.

Ⓐ 3. Ⓑ -1. Ⓒ 4. Ⓓ -2.

Bài 16. CÔNG THỨC TÍNH GÓC TRONG KHÔNG GIAN

A. LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1. Góc giữa hai mặt phẳng

Công thức: Gọi $\overrightarrow{n_1} = (a_1; b_1; c_1)$, $\overrightarrow{n_2} = (a_2; b_2; c_2)$ lần lượt là vectơ pháp tuyến của (P) và (Q); φ là góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q), với $0^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ$. Khi đó

$$\cos\varphi = \left|\cos\left(\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}\right)\right| = \frac{\left|a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2\right|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}$$

Chú ý:

- Nếu (P) song song hoặc trùng (Q) thì $\varphi = 0^\circ$.
- Nếu $(P) \perp (Q)$ thì $\varphi = 90^\circ$. Khi đó $\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2} = 0 \Leftrightarrow a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$.

2. Góc giữa hai đường thẳng

Công thức: Gọi $\vec{u} = (u_1; u_2; u_3)$, $\vec{v} = (v_1; v_2; v_3)$ lần lượt là vectơ chỉ phương của d_1 và d_2; φ là góc giữa hai đường thẳng d_1 và d_2, với $0^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ$. Khi đó

$$\cos\varphi = \left|\cos\left(\vec{u}, \vec{v}\right)\right| = \frac{\left|u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3\right|}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} \cdot \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}}$$

Chú ý:

- Nếu d_1 song song hoặc trùng d_2 thì $\varphi = 0^\circ$.
- Nếu $d_1 \perp d_2$ thì $\varphi = 90^\circ$. Khi đó $\vec{u} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 = 0$.

3. Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

Công thức: Gọi $\vec{u} = (u_1; u_2; u_3)$, $\vec{n} = (A; B; C)$ lần lượt là vectơ chỉ phương của d và vectơ pháp tuyến của (P); φ là góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (P), với $0^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ$. Khi đó

$$\sin\varphi = \left|\cos\left(\vec{u}, \vec{n}\right)\right| = \frac{\left|u_1A + u_2B + u_3C\right|}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} \cdot \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Chú ý:

- Nếu d song song hoặc trùng (P) thì $\varphi = 0^\circ$, khi đó $\vec{u} \perp \vec{n}$
- Nếu d vuông góc với (P) thì $\varphi = 90^\circ$, khi đó $\vec{u} = k \cdot \vec{n}$.

B. PHÂN LOẠI, PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

1 Tính góc trong không gian Oxyz

- Xác định vectơ chỉ phương (vectơ pháp tuyến);
- Áp dụng đúng công thức.

BÀI TẬP TỰ LUẬN

VÍ DỤ 1. Trong không gian $Oxyz$, tính góc giữa hai mặt phẳng sau:

QUICK NOTE

a) $(P)\colon x+y+4z-2=0$ và $(Q)\colon 2x-2z+7=0$.

b) $(P)\colon 2x-y-2z-9=0$ và $(Q)\colon x-y-6=0$.

VÍ DỤ 2. Trong không gian $Oxyz$, tính góc giữa hai đường thẳng sau:

a) $d:\begin{cases}x=1-t\\y=t\\z=0\end{cases}$ và $d':\dfrac{x}{-2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{-2}$.

b) $d_1\colon\begin{cases}x=2+t\\y=-1+t\\z=3\end{cases}$ và $d_2\colon\begin{cases}x=1-t'\\y=2\\z=-2+t'\end{cases}$.

VÍ DỤ 3. Trong không gian $Oxyz$, tính góc giữa đường thẳng và mặt phẳng sau:

a) $d\colon\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z+1}{-1}$ và $(P)\colon x-y+2z+1=0$.

b) $d\colon\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y-6}{3}=\dfrac{z+4}{1}$ và $(P)\colon 4x+3y-z+1=0$

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

CÂU 1. Cho mặt phẳng $(P): x+2y-2z+3=0$, mặt phẳng $(Q): x-3y+5z-2=0$. Cosin của góc giữa hai mặt phẳng (P), (Q) là

(A) $-\dfrac{\sqrt{35}}{7}$. (B) $\dfrac{5}{7}$. (C) $\dfrac{\sqrt{35}}{7}$. (D) $-\dfrac{5}{7}$.

CÂU 2. Góc giữa hai mặt phẳng $(P): x+2y+z+4=0$ và $(Q): -x+y+2z+3=0$ bằng

(A) 45°. (B) 90°. (C) 30°. (D) 60°.

CÂU 3. Tính góc α giữa mặt $(P)\colon x+z-4=0$ và mặt phẳng (Oxy).

(A) 45°. (B) 30°. (C) 90°. (D) 60°.

CÂU 4. Cho điểm $H(2;1;2)$, điểm H là hình chiếu vuông góc của gốc tọa độ O xuống mặt phẳng (P), số đo góc giữa mặt phẳng (P) và mặt phẳng $(Q): x+y-11=0$ là

(A) 45°. (B) 30°. (C) 60°. (D) 90°.

CÂU 5. Cho hai đường thẳng $d_1\colon\dfrac{x}{-1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z}{2}$, $d_2\colon\begin{cases}x=2t\\y=1\\z=1-t\end{cases}$. Gọi φ là góc giữa hai đường thẳng d_1, d_2. Tính $\cos\varphi$.

(A) $\cos\varphi=-\dfrac{4\sqrt{5}}{15}$. (B) $\cos\varphi=\dfrac{4\sqrt{5}}{15}$. (C) $\cos\varphi=\dfrac{\sqrt{6}}{9}$. (D) $\cos\varphi=-\dfrac{\sqrt{6}}{9}$.

CÂU 6. Cho đường thẳng $d_1\colon\dfrac{x}{-1}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-1}{-2}$ và $d_2\colon\dfrac{x+1}{-1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-3}{1}$. Góc giữa hai đường thẳng bằng

(A) 90°. (B) 30°. (C) 60°. (D) 45°.

CÂU 7. Cho đường thẳng d là giao tuyến của hai mặt phẳng $(P)\colon x-z\cdot\sin\alpha+\cos\alpha=0$ và $(Q)\colon y-z\cdot\cos\alpha-\sin\alpha=0$, $\alpha\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$. Góc giữa d và trục Oz là

(A) 90°. (B) 30°. (C) 45°. (D) 60°.

CÂU 8. Cho đường thẳng $d\colon\begin{cases}x=1-t\\y=2+2t\\z=3+t\end{cases}$ và mặt phẳng $(P)\colon x-y+3=0$. Tính số đo góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (P).

(A) 45°. (B) 120°. (C) 60°. (D) 30°.

CÂU 9. Cho mặt phẳng $(P)\colon 3x+4y+5z-8=0$ và đường thẳng $d\colon\begin{cases}x=2-3t\\y=-1-4t\\z=5-5t\end{cases}$. Góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (P) là

(A) 90°. (B) 45°. (C) 30°. (D) 60°.

QUICK NOTE

CÂU 10. Cho mặt phẳng $(P)\colon x+y-\sqrt{2}z+5=0$. Tính góc φ giữa mặt phẳng (P) và trục Oy.

Ⓐ $\varphi=60^\circ$. Ⓑ $\varphi=45^\circ$. Ⓒ $\varphi=90^\circ$. Ⓓ $\varphi=30^\circ$.

CÂU 11. Cho hai mặt phẳng $(P)\colon (m-1)x+y-2z+m=0$ và $(Q)\colon 2x-z+3=0$. Tìm m để (P) vuông góc với (Q).

Ⓐ $m=0$. Ⓑ $m=\dfrac{3}{2}$. Ⓒ $m=5$. Ⓓ $m=-1$.

CÂU 12. Cho mặt phẳng $(P)\colon x-3y+2z+1=0$ và $(Q)\colon (2m-1)x+m(1-2m)y+(2m-4)z+14=0$ với m là tham số thực. Tổng các giá trị của m để (P) và (Q) vuông góc nhau bằng

Ⓐ $-\dfrac{3}{2}$. Ⓑ $-\dfrac{1}{2}$. Ⓒ $-\dfrac{5}{2}$. Ⓓ $-\dfrac{7}{2}$.

CÂU 13. Cho hai mặt phẳng $(P)\colon x+2y-z+2=0$ và $(Q)\colon x-my+(m+1)z+m-2=0$, với m là tham số. Gọi S là tập hơn tất cả các giá trị của m sao cho góc giữa (P) và (Q) bằng 60°. Tính tổng các phần tử của S.

Ⓐ 1. Ⓑ $-\dfrac{1}{2}$. Ⓒ $\dfrac{3}{2}$. Ⓓ $\dfrac{1}{2}$.

CÂU 14. Hãy tìm tham số thực m để góc giữa hai đường thẳng sau bằng 60°.

$$d\colon \begin{cases} x=1+t\\ y=-\sqrt{2}t\\ z=1+t\end{cases},t\in\mathbb{R} \text{và } d'\colon \begin{cases} x=1+t'\\ y=1+\sqrt{2}t'\\ z=1+mt'\end{cases},t'\in\mathbb{R}$$

Ⓐ $\dfrac{1}{2}$. Ⓑ -1. Ⓒ $-\dfrac{1}{2}$. Ⓓ 1.

CÂU 15. Cho các điểm $A(-1;\sqrt{3};0)$, $B(1;\sqrt{3};0)$, $C(0;0;\sqrt{3})$ và điểm M thuộc trục Oz sao cho hai mặt phẳng (MAB) và (ABC) vuông góc với nhau. Tính góc giữa hai mặt phẳng (MAB) và (OAB).

Ⓐ 45°. Ⓑ 60°. Ⓒ 15°. Ⓓ 30°.

2 Tọa độ hóa một số bài toán hình không gian

BÀI TẬP TỰ LUẬN

VÍ DỤ 1. Cho hình lăng trụ đứng $OBC.O'B'C'$ có đáy là tam giác OBC vuông tại O và có $OB=3a$, $OC=a$, $OO'=2a$. Tính góc giữa

a) hai đường thẳng BO' và $B'C$;

b) hai mặt phẳng $(O'BC)$ và (OBC);

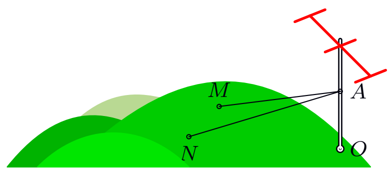
c) đường thẳng $B'C$ và mặt phẳng $(O'BC)$.

VÍ DỤ 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng 4. Mặt bên SAB là tam giác cân tại S có chiều cao bằng 6 và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy.

a) Tính góc α giữa hai đường thẳng SD và BC;

b) Tính góc β giữa hai mặt phẳng (SAD) và (SCD).

VÍ DỤ 3.
Người ta muốn dựng một cột ăng-ten trên một sườn đồi. Ăng-ten được dựng thẳng đứng trong không gian $Oxyz$ với độ dài đơn vị trên mỗi trục bằng 1 m. Gọi O là gốc cột, A là điểm buộc dây cáp vào cột ăng-ten và M, N là hai điểm neo dây cáp xuống mặt sườn đồi (hình vẽ). Cho biết toạ độ các điểm nói trên lần lượt là $O(0;0;0)$, $A(0;0;6)$, $M(3;-4;3)$, $N(-5;-2;2)$.



a) Tính độ dài các đoạn dây cáp MA và NA.

b) Tính góc tạo bởi các sợi dây cáp MA, NA với mặt phẳng sườn đồi.

QUICK NOTE

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

CÂU 1. Trong hệ trục toạ độ $Oxyz$, với mặt phẳng (Oxy) là mặt đất, một máy bay cất cánh từ vị trí $A(0;10;0)$ với vận tốc $\vec{v}=(150;150;40)$. Tính góc nâng của máy bay (góc giữa hướng chuyển động bay lên của máy bay với đường băng và làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

(A) 10°. (B) 12°. (C) 11°. (D) 9°.

CÂU 2. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$có cạnh bằng a. Tính số đo góc giữa hai mặt phẳng $(BA'C)$ và $(DA'C)$.

(A) 30°. (B) 120°. (C) 90°. (D) 60°.

CÂU 3. Cho hình lập phương $MNPQ.M'N'P'Q'$ có E, F, G lần lượt là trung điểm của NN', PQ, $M'Q'$ Tính góc giữa hai đường thẳng EG và $P'F$.

(A) 60°. (B) 90°. (C) 30°. (D) 45°.

CÂU 4. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có các cạnh $AB=2, AD=3, AA'=4$. Góc giữa hai mặt phẳng $(AB'D')$ và $(A'C'D)$ là α. Tính giá trị gần đúng của góc α.

(A) $45,2^\circ$. (B) $38,1^\circ$. (C) $61,6^\circ$. (D) $53,4^\circ$.

CÂU 5. Cho hình chóp $SABCD$ có $ABCD$ là hình vuông cạnh a, SA vuông góc $(ABCD)$, $SA=a$. Gọi E và F lần lượt là trung điểm SB, SD. Cô-sin của góc hợp bởi hai mặt phẳng (AEF) và $(ABCD)$ là

(A) $\sqrt{3}$. (B) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. (C) $\dfrac{1}{2}$. (D) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

CÂU 6. Cho hình chóp tam giác $O.ABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc và $OA=OB=OC$. Lấy M, N lần lượt là trung điểm của AB, OC. Gọi α là góc tạo bởi OA và MN. Tính $\cos\alpha$.

(A) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. (B) $\dfrac{1}{3}$. (C) $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$. (D) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

CÂU 7. Hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại B có $AB=a$, $AC=2a$. SA vuông góc với mặt phẳng đáy, $SA=2a$. Gọi ψ là góc tạo bởi hai mặt phẳng (SAC) và (SBC). Tính $\cos\psi$.

(A) $\dfrac{1}{2}$. (B) $\dfrac{\sqrt{3}}{5}$. (C) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. (D) $\dfrac{\sqrt{15}}{5}$.

CÂU 8. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB=a$, $BC=a\sqrt{3}$, $SA=a$ và SA vuông góc với đáy $ABCD$. Tính $\sin\alpha$, với α là góc tạo bởi giữa đường thẳng BD và mặt phẳng (SBC).

(A) $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$. (B) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. (C) $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$. (D) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

CÂU 9. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a, tâm O. Gọi M và N lần lượt là trung điểm SA và BC. Biết góc giữa MN và $(ABCD)$ bằng 60°, côsin góc giữa MN và mặt phẳng (SBD) bằng

(A) $\dfrac{\sqrt{41}}{41}$. (B) $\dfrac{2\sqrt{41}}{41}$. (C) $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$. (D) $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

CÂU 10. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và B, $AB=BC=a$, $AD=2a$, SA vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$, $SA=a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SB và CD. Tính cosin của góc giữa MN và (SAC).

(A) $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$. (B) $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$. (C) $\dfrac{3\sqrt{5}}{10}$. (D) $\dfrac{\sqrt{55}}{10}$.

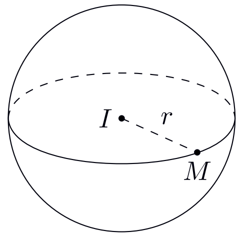
QUICK NOTE

Bài 17. PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU

A. LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1. Định nghĩa

- Trong không gian, tập hợp tất cả các điểm M cách điểm I cố định một khoảng không đổi r ($r > 0$) cho trước được gọi là mặt cầu tâm I bán kính R. Kí hiệu $S(I;r)$ hay viết tắt là (S). Vậy $S(I;R) = \{M|IM = r\}$.



- Nhận xét:
  - Nếu $IM = r$ thì M nằm trên mặt cầu.
  - Nếu $IM < r$ thì M nằm trong mặt cầu.
  - Nếu $IM > r$ thì M nằm ngoài mặt cầu.

2. Phương trình mặt cầu

- Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu (S) tâm $I(a;b;c)$ bán kính r có phương trình là

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2.$$

- Dạng khai triển: $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$, với $d = a^2 + b^2 + c^2 - r^2 > 0$.

B. PHÂN LOẠI, PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

1 Xác định tâm I, bán kính r của mặt cầu cho trước

- **Loại 1.** Cho $(S)\colon (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$. Khi đó

  ① Tâm $I\,(a;b;c)$ (đổi dấu số trong dấu ngoặc);

  ② Bán kính r (Rút căn vế phải).

- **Loại 2.** Cho $(S)\colon x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$. Khi đó

  ① Điều kiện để (*) là mặt cầu là $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$;

  ② Tâm $I\,(a,b,c)$ (đổi dấu hệ số của x, y, z và chia đôi);

  ③ Bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$.

BÀI TẬP TỰ LUẬN

VÍ DỤ 1. Trong các phương trình sau, phương trình nào là phương trình mặt cầu? Hãy xác định tâm và bán kính (nếu là phương trình mặt cầu).

a) $(x-2)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 4$.

b) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 6z - 2 = 0$.

c) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 3z + 8 = 0$.

d) $3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 6x + 12y - 9z + 1 = 0$

VÍ DỤ 2. Trong không gian $Oxyz$, tìm tất cả giá trị của tham số m để các phương trình sau là phương trình mặt cầu.

a) $x^2 + y^2 + z^2 - 2(m+2)x + 4my - 2mz + 5m^2 + 9 = 0$;

b) $x^2 + y^2 + z^2 + 2(m+2)x - 2(m-1)z + 3m^2 - 5 = 0$.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

CÂU 1. Cho mặt cầu $(S)\colon (x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 9$. Tìm tọa độ tâm I và tính bán kính R của (S).

Ⓐ $I(1;-2;-1)$ và $R = 3$.

Ⓑ $I(1;-2;-1)$ và $R = 9$.

Ⓒ $I(-1;2;1)$ và $R = 3$.

Ⓓ $I(-1;2;1)$ và $R = 9$.

QUICK NOTE

CÂU 2. Cho mặt cầu $(S)\colon (x-1)^2+(y+2)^2+z^2=9$. Mặt cầu (S) có thể tích bằng

Ⓐ $V=36\pi$. Ⓑ $V=14\pi$. Ⓒ $V=\dfrac{4}{36}\pi$. Ⓓ $V=16\pi$.

CÂU 3. Cho mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2-4x-6y+8z-7=0$. Tọa độ tâm và bán kính mặt cầu (S) lần lượt là

Ⓐ $I(-2;-3;4)$, $R=6$. Ⓑ $I(-2;-3;4)$, $R=36$.
Ⓒ $I(2;3;-4)$, $R=36$. Ⓓ $I(2;3;-4)$, $R=6$.

CÂU 4. Cho mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2-8x+2y+1=0$. Tìm tọa độ tâm và bán kính của mặt cầu (S).

Ⓐ $I(4;-1;0)$, $R=4$. Ⓑ $I(-4;1;0)$, $R=4$.
Ⓒ $I(-4;1;0)$, $R=2$. Ⓓ $I(4;-1;0)$, $R=2$.

CÂU 5. Cho mặt cầu $(S)\colon 2x^2+2y^2+2z^2+12x-4y+4=0$. Mặt cầu (S) có đường kính AB. Biết điểm $A(-1;-1;0)$ thuộc mặt cầu (S). Tọa độ điểm B là

Ⓐ $B(-5;3;-2)$. Ⓑ $B(-11;5;0)$. Ⓒ $B(-11;5;-4)$. Ⓓ $B(-5;3;0)$.

CÂU 6. Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt cầu?

Ⓐ $x^2+y^2-z^2+4x-2y+6z+5=0$. Ⓑ $x^2+y^2+z^2+4x-2y+6z+15=0$.
Ⓒ $x^2+y^2+z^2+4x-2y+z-1=0$. Ⓓ $x^2+y^2+z^2-2x+2xy+6z-5=0$.

CÂU 7. Cho phương trình $x^2+y^2+z^2-2mx-2(m+2)y-2(m+3)z+16m+13=0$. Tìm tất cả các giá trị thực của m để phương trình trên là phương trình của một mặt cầu.

Ⓐ $m<0$ hay $m>2$. Ⓑ $m\le -2$ hay $m\ge 0$.
Ⓒ $m<-2$ hay $m>0$. Ⓓ $m\le 0$ hay $m\ge 2$.

CÂU 8. Có tất cả bao nhiêu giá trị của tham số m (biết $m\in\mathbb{N}$) để phương trình $x^2+y^2+z^2+2(m-2)y-2(m+3)z+3m^2+7=0$ là phương trình của một mặt cầu?

Ⓐ 2. Ⓑ 3. Ⓒ 4. Ⓓ 5.

CÂU 9. Cho mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2-2x-4y+4z-m=0$ (m là tham số). Biết mặt cầu có bán kính bằng 5. Tìm m.

Ⓐ $m=25$. Ⓑ $m=11$. Ⓒ $m=16$. Ⓓ $m=-16$.

CÂU 10. Mặt cầu (S) : $x^2+y^2+z^2-4mx+4y+2mz+m^2+4m=0$ có bán kính nhỏ nhất khi m bằng

Ⓐ $\dfrac{1}{2}$. Ⓑ $\dfrac{1}{3}$. Ⓒ $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Ⓓ 0.

2 Lập phương trình mặt cầu và ứng dụng thực tiễn

- **Phương pháp chung:** Cần xác định được tọa độ tâm $I\,(a;b;c)$ và độ dài bán kính r.
- **Các bài toán cơ bản:**

① Mặt cầu có tâm $I\,(a;b;c)$ và đi qua điểm $A\,(x_A;y_A;z_A)$ thì bán kính

$$r=IA=\sqrt{(x_A-x_I)^2+(y_A-y_I)^2+(z_A-z_I)^2}.$$

② Mặt cầu (S) có đường kính AB thì

- Tâm $I\,(a;b;c)$ là trung điểm của AB hay $I\left(\dfrac{x_A+x_B}{2};\dfrac{y_A+y_B}{2};\dfrac{z_A+z_B}{2}\right)$.
- Bán kính $r=\dfrac{AB}{2}=\dfrac{\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}}{2}$.

③ Mặt cầu có tâm $I(a;b;c)$ và tiếp xúc với $(\alpha)\colon Ax+By+Cz+D=0$ thì bán kính

$$r=\mathrm{d}\,(I,(\alpha))=\frac{|Aa+Bb+Cc+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

④ Mặt cầu qua bốn điểm A, B, C, D không đồng phẳng (ngoại tiếp tứ diện $ABCD$)
Gọi (S) có dạng $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$ (*)
Thay tọa độ 4 điểm A, B, C, D vào (*), ta được hệ phương trình 4 ẩn số a,

QUICK NOTE

b, c, d;
Giải tìm a, b, c, d. Suy ra tâm $I(a,b,c)$, bán kính $R=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}$.

BÀI TẬP TỰ LUẬN

VÍ DỤ 1. Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt cầu (S)

a) Có tâm $I(2;-1;0)$ và đi qua điểm $M(4;1;-2)$;

b) Có đường kính AB với $A(0;1;3)$, $B(4;-5;-1)$;

c) Có tâm $I(1;-2;3)$ và tiếp xúc với trục Oy;

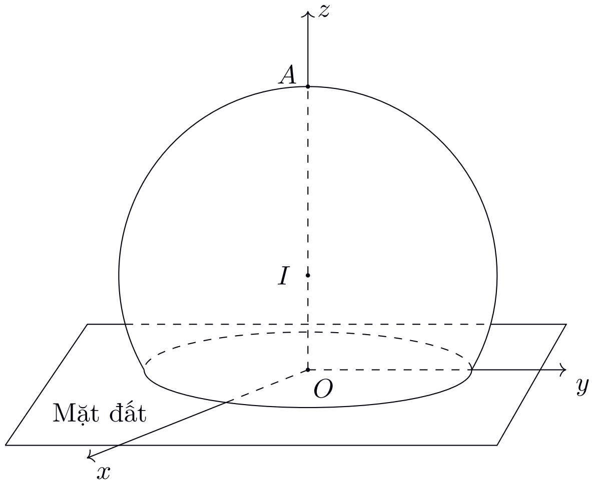
d) Có tâm $I(1;2;-1)$ và tiếp xúc với $(P)\colon x-2y-2z-8=0$.

VÍ DỤ 2. Viết phương trình mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$, biết

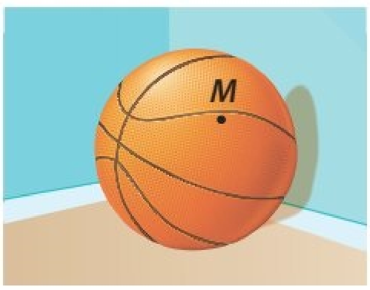
a) $A(1;1;0)$, $B(1;0;1)$, $C(0;1;1)$, $D(1;2;3)$.

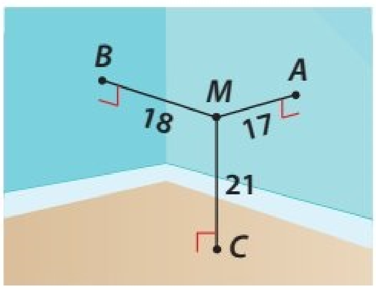
b) $A(1;2;-4)$; $B(1;-3;1)$, $C(2;2;3)$, $D(1;0;4)$.

VÍ DỤ 3. Giả sử người ta biểu diễn mô phỏng của tòa nhà Ericsson Globe ở phần Khởi động trong hệ trục tọa độ $Oxyz$ bởi một mặt cầu có tâm I, đường kính 110 m và $OA=85$ m như hình vẽ (đơn vị trên trục là mét). Hãy viết phương trình của mặt cầu này.



VÍ DỤ 4. Bạn Bình đố bạn Nam tìm được đường kính của quả bóng rổ, biết rằng nếu đặt quả bóng ở một góc căn phòng hình hộp chữ nhật, sao cho quả bóng chạm (tiếp xúc) với hai bức tường và nền nhà của căn phòng đó (khi đó khoảng cách từ tâm quả bóng đến hai bức tường và nền nhà đều bằng bán kính của quả bóng) thì có một điểm M trên quả bóng với khoảng cách lần lượt đến hai bức tường và nền nhà là 17 cm, 18 cm và 21 cm (Hình bên dưới). Hãy giúp Nam xác định đường kính của quả bóng rổ đó. Biết rằng loại bóng rổ tiêu chuẩn có đường kính từ 23 cm đến 24,5 cm.





BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

QUICK NOTE

CÂU 1. Mặt cầu tâm $I(3;-1;0)$, bán kính $R=5$ có phương trình là

Ⓐ $(x+3)^2+(y-1)^2+z^2=5$. Ⓑ $(x-3)^2+(y+1)^2+z^2=5$.
Ⓒ $(x-3)^2+(y+1)^2+z^2=25$. Ⓓ $(x+3)^2+(y-1)^2+z^2=25$.

CÂU 2. Phương trình mặt cầu tâm $I(2;-3;-4)$, bán kính bằng 4 là

Ⓐ $(x+2)^2+(y-3)^2+(z-4)^2=16$. Ⓑ $(x-2)^2+(y+3)^2+(z+4)^2=16$.
Ⓒ $(x+2)^2+(y-3)^2+(z-4)^2=4$. Ⓓ $(x-2)^2+(y+3)^2+(z+4)^2=4$.

CÂU 3. Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm $I(-1;1;-2)$ và đi qua điểm $A(2;;1;2)$.

Ⓐ $(S)\colon (x-1)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=5$.
Ⓑ $(S)\colon (x-2)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=25$.
Ⓒ $(S)\colon (x+1)^2+(y-1)^2+(z+2)^2=25$.
Ⓓ $(S)\colon x^2+y^2+z^2+2x-2y+4z+1=0$.

CÂU 4. Mặt cầu tâm $I(-3;0;4)$ và đi qua điểm $A(-3;0;0)$ có phương trình là

Ⓐ $(x-3)^2+y^2+(z+4)^2=4$. Ⓑ $(x-3)^2+y^2+(z+4)^2=16$.
Ⓒ $(x+3)^2+y^2+(z-4)^2=16$. Ⓓ $(x+3)^2+y^2+(z-4)^2=4$.

CÂU 5. Phương trình mặt cầu (S) đường kính AB với $A\,(4;-3;5)$, $B\,(2;1;3)$ là

Ⓐ $x^2+y^2+z^2+6x+2y-8z-26=0$. Ⓑ $x^2+y^2+z^2-6x+2y-8z+20=0$.
Ⓒ $x^2+y^2+z^2+6x-2y+8z-20=0$. Ⓓ $x^2+y^2+z^2-6x+2y-8z+26=0$.

CÂU 6. Cho hai điểm $A(2;4;1)$ và $B(-2;2;-3)$. Phương trình mặt cầu đường kính AB là

Ⓐ $x^2+(y-3)^2+(z-1)^2=9$. Ⓑ $x^2+(y+3)^2+(z-1)^2=9$.
Ⓒ $x^2+(y-3)^2+(z+1)^2=3$. Ⓓ $x^2+(y-3)^2+(z+1)^2=9$.

CÂU 7. Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm $I(-1;4;2)$, biết thể tích khối cầu tương ứng là $V=972\pi$.

Ⓐ $(x+1)^2+(y-4)^2+(z-2)^2=81$. Ⓑ $(x+1)^2+(y-4)^2+(z-2)^2=9$.
Ⓒ $(x-1)^2+(y+4)^2+(z-2)^2=9$. Ⓓ $(x-1)^2+(y+4)^2+(z+2)^2=81$.

CÂU 8. Mặt cầu (S) có tâm $I(2;1;-1)$, tiếp xúc với mặt phẳng tọa độ (Oyz). Phương trình của mặt cầu (S) là

Ⓐ $(x+2)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=4$. Ⓑ $(x-2)^2+(y-1)^2+(z+1)^2=1$.
Ⓒ $(x-2)^2+(y-1)^2+(z+1)^2=4$. Ⓓ $(x+2)^2+(y-1)^2+(z+1)^2=2$.

CÂU 9. Mặt cầu có tâm $I(1;2;-3)$ và tiếp xúc với trục Oy có bán kính bằng

Ⓐ 2. Ⓑ $\sqrt{5}$. Ⓒ $\sqrt{10}$. Ⓓ $\sqrt{13}$.

CÂU 10. Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu tâm $I(-1;0;3)$ tiếp xúc với mặt phẳng $(\alpha)\colon 4y-3z+19=0$ có phương trình là

Ⓐ $(x-1)^2+y^2+(z+3)^2=4$. Ⓑ $(x+1)^2+y^2+(z-3)^2=2$.
Ⓒ $(x+1)^2+y^2+(z-3)^2=4$. Ⓓ $(x-1)^2+y^2+(z+3)^2=2$.

CÂU 11. Viết phương trình mặt cầu (S) đi qua $A(-1;2;0)$, $B(-2;1;1)$ và có tâm nằm trên trục Oz.

Ⓐ $x^2+y^2+z^2-z-5=0$. Ⓑ $x^2+y^2+z^2+5=0$.
Ⓒ $x^2+y^2+z^2-x-5=0$. Ⓓ $x^2+y^2+z^2-y-5=0$.

CÂU 12. Cho mặt cầu (S) tâm I nằm trên mặt phẳng (Oxy) đi qua ba điểm $A(1;2;-4)$, $B(1;-3;1)$, $C(2;2;3)$. Tìm tọa độ điểm I.

Ⓐ $I(2;-1;0)$. Ⓑ $I(0;0;1)$. Ⓒ $I(0;0;-2)$. Ⓓ $I(-2;1;0)$.

CÂU 13. Cho 3 điểm $A(2;3;0)$, $B(0;-4;1)$, $C(3;1;1)$. Mặt cầu đi qua ba điểm A,B,C và có tâm I thuộc mặt phẳng (Oxz), biết $I(a;b;c)$. Tính tổng $T=a+b+c$.

Ⓐ $T=3$. Ⓑ $T=-3$. Ⓒ $T=-1$. Ⓓ $T=2$.

CÂU 14. Cho các điểm $A(1;0;0)$, $B(0;2;0)$, $C(0;0;-2)$. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $OABC$ là

Ⓐ $\dfrac{7}{2}$. Ⓑ $\dfrac{1}{2}$. Ⓒ $\dfrac{3}{2}$. Ⓓ $\dfrac{5}{2}$.

CÂU 15. Cho điểm $D(3;4;-2)$. Gọi A,B,C lần lượt là hình chiếu vuông góc của D trên các trục tọa độ Ox,Oy,Oz. Gọi (S) là mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$. Tính diện tích mặt cầu (S).

Ⓐ $\dfrac{4\sqrt{29}\pi}{3}$. Ⓑ $\dfrac{29\sqrt{29}\pi}{6}$. Ⓒ 116π. Ⓓ 29π.

QUICK NOTE

3 Vị trí tương đối của điểm, của mặt phẳng với mặt cầu

Bài toán 1: Xét điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ và mặt cầu $S: (x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2-r^2=0$ (1). Thay tọa độ điểm M vào vế trái của (1), nếu

① Kết quả bằng 0 thì $M \in (S)$.

② Kết quả ra số âm thì M nằm trong (S).

③ Kết quả ra số dương thì M nằm trong (S).

Bài toán 2: Cho mặt cầu (S) có tâm $I(a; b; c)$, bán kính r và mặt phẳng $(P)\colon Ax+By+Cz+D=0$.

① Nếu $\mathrm{d}\left(I,(P)\right)=\dfrac{\left|Aa+Bb+Cc+D\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}>r$ thì (P) và (S) không có điểm chung.

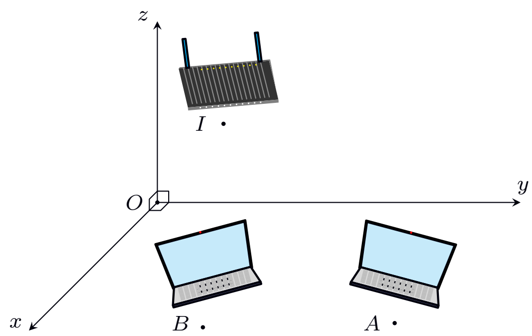
② Nếu $\mathrm{d}\left(I,(P)\right)=\dfrac{\left|Aa+Bb+Cc+D\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=r$ thì (P) tiếp xúc (S).

③ Nếu $\mathrm{d}\left(I,(P)\right)=\dfrac{\left|Aa+Bb+Cc+D\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}<r$ thì (P) cắt (S).

BÀI TẬP TỰ LUẬN

VÍ DỤ 1. Cho mặt cầu (S) có tâm $I(2; -1; 4)$ và bán kính $R=5$. Các điểm $A(3; 1; 5)$, $B(-1; 11; 14)$, $C(6; 2; 4)$ nằm trong, nằm trên hay nằm ngoài mặt cầu (S)?

VÍ DỤ 2.
Trong không gian $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục là mét), một router phát sóng wifi có đầu thu phát được đặt tại điểm $I(4; 2; 10)$.



a) Cho biết bán kính phủ sóng wifi là 40 m. Viết phương trình mặt cầu (S) biểu diễn ranh giới của vùng phủ sóng.

b) Một người sử dụng máy tính tại điểm $M(6; 12; 0)$. Hãy cho biết điểm M nằm trong hay nằm ngoài mặt cầu (S) và người đó có thể sử dụng được sóng wifi của router nói trên hay không?

c) Câu hỏi tương tự đối với người sử dụng máy tính ở điểm $N(14; 6; 50)$.

VÍ DỤ 3. Cho mặt cầu $(S)\colon (x-2)^2+y^2+(z+1)^2=9$ và mặt phẳng $(P)\colon 2x-y-2z-3=0$.

a) Chứng minh rằng mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S).

b) Biết mặt cầu (S) cắt (P) theo giao tuyến là đường tròn (C). Tính bán kính r của đường tròn (C).

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

CÂU 1. Cho điểm $M\,(1; -1; 3)$ và mặt cầu (S) có phương trình$(x-1)^2+(y+2)^2+z^2=9$. Khẳng định đúng là

(A) M nằm ngoài (S).

(B) M nằm trong (S).

(C) M nằm trên(S).

(D) M trùng với tâm của (S).

QUICK NOTE

CÂU 2. Cho mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z=0$ và ba điểm $O(0;0;0)$, $A(1;2;3)$, $B(2;-1;-1)$. Trong số ba điểm trên số điểm nằm trên mặt cầu là

A 2. **B** 0. **C** 3. **D** 1.

CÂU 3. Cho mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2-4y+6z-2=0$ và mặt phẳng $(P)\colon x+y-z+4=0$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A (P) tiếp xúc (S).

B (P) và (S) không có điểm chung.

C (P) đi qua tâm của (S).

D (P) cắt (S).

CÂU 4. Cho mặt phẳng (P) và mặt cầu (S) có phương trình lần lượt là $(P)\colon 2x+2y+z-m^2+4m-5=0$; $(S)\colon x^2+y^2+z^2-2x+2y-2z-6=0$. Giá trị của m để (P) tiếp xúc (S) là

A $m=5$.

B $m=-1$.

C $m=-1$ hoặc $m=5$.

D $m=1$ hoặc $m=-5$.

CÂU 5. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon 2x+2y+z-2=0$ và mặt cầu (S) tâm $I\,(2;1;-1)$ bán kính $R=2$. Bán kính đường tròn giao của mặt phẳng (P) và mặt cầu (S) là

A $r=\sqrt{3}$. **B** $r=\sqrt{5}$. **C** $r=1$. **D** $r=3$.

CÂU 6. Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu có phương trình $x^2+y^2+z^2-2x+2y-6z+2=0$ cắt mặt phẳng (Oxz) theo một đường tròn có bán kính bằng

A $3\sqrt{2}$. **B** $2\sqrt{2}$. **C** 5. **D** $4\sqrt{2}$.

CÂU 7. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon (x-1)^2+(y-2)^2+(z-2)^2=9$ và mặt phẳng $(P)\colon 2x-y-2z+1=0$. Biết (P) cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính r. Tính r.

A $r=3$. **B** $r=2$. **C** $r=2\sqrt{2}$. **D** $r=\sqrt{3}$.

CÂU 8. Trong không gian $Oxyz$ cho mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2-6x-4y-12z=0$ và mặt phẳng $(P)\colon 2x+y-z-2=0$. Tính diện tích thiết diện của mặt cầu (S) cắt bởi mặt phẳng (P).

A 50π. **B** $S=49\pi$. **C** 25π. **D** 36π.

CÂU 9. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $I(2;1;1)$ và mặt phẳng $(P)\colon 2x+y+2z-1=0$. Mặt cầu (S) có tâm I, cắt (P) theo một đường tròn có bán kính $r=4$. Mặt cầu (S) có phương trình là

A $(x-2)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=18$.

B $(x-2)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=2\sqrt{5}$.

C $(x-2)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=20$.

D $(x+2)^2+(y+1)^2+(z+1)^2=20$.

CÂU 10. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;1)$ và cắt mặt phẳng $(P)\colon 2x-y+2z+7=0$ theo một đường tròn có đường kính bằng 8. Phương trình mặt cầu (S) là

A $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=25$.

B $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=81$.

C $(x+1)^2+(y+2)^2+(z+1)^2=9$.

D $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=5$.

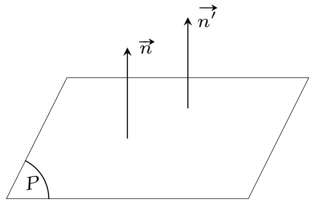
LỜI GIẢI CHI TIẾT

Bài 14. PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẲNG

A. LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1. Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng

Định nghĩa: Vectơ pháp tuyến $\vec{n}$ của mặt phẳng (P) là những vectơ khác $\vec{0}$ và có giá vuông góc với (P).



Chú ý:

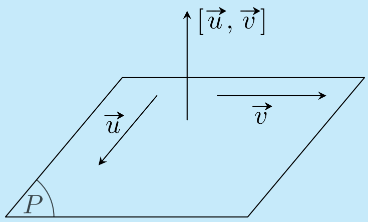
- $\vec{n} \neq \vec{0}$ và có giá vuông với (P);
- Nếu $\vec{n}$ và $\vec{n'}$ cùng là vectơ pháp tuyến của (P) thì $\vec{n'} = k \cdot \vec{n}$ (tọa độ tỉ lệ nhau).

2. Cặp vectơ chỉ phương của mặt phẳng

Định nghĩa: Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{u}$, $\vec{v}$ được gọi là cặp vectơ chỉ phương của mặt phẳng (P) nếu chúng không cùng phương và có giá nằm trong hoặc song song với mặt phẳng (P).

Chú ý:

- Cho hai vectơ $\vec{u} = (a; b; c)$ và $\vec{v} = (a'; b'; c')$. Khi đó
$$\vec{n} = (bc' - b'c; ca' - c'a; ab' - a'b)$$
vuông góc với cả hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$, được gọi là tích có hướng của $\vec{u}$ và $\vec{v}$, ký hiệu là $[\vec{u}, \vec{v}]$.
- Nếu $\vec{u}$, $\vec{v}$ là cặp vectơ chỉ phương của (P) thì $[\vec{u}, \vec{v}]$ là một vectơ pháp tuyến của (P).



3. Phương trình tổng quát của mặt phẳng

Công thức: Mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ và nhận $\vec{n} = (a; b; c)$ làm vectơ pháp tuyến có phương trình là

$$\boxed{a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0}$$

Thu gọn ta được dạng
$$ax + by + cz + d = 0$$

Chú ý:

① Phương trình các mặt phẳng tọa độ:

- $(Oxy)\colon z = 0$.
- $(Oxz)\colon y = 0$.
- $(Oyz)\colon x = 0$.

② Phương trình mặt phẳng (α) song song với mặt phẳng tọa độ:

- $(\alpha) \mathbin{/\!/} (Oxy) \Rightarrow z = a \quad a \neq 0$.
- $(\alpha) \mathbin{/\!/} (Oxz) \Rightarrow y = b \quad b \neq 0$.
- $(\alpha) \mathbin{/\!/} (Oyz) \Rightarrow x = c \quad c \neq 0$.

4. Vị trí tương đối giữa hai mặt phẳng

Cho hai mặt phẳng $(P)\colon a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ và $(Q)\colon a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$.
Gọi $\vec{n_1} = (a_1; b_1; c_1)$, $\vec{n_2} = (a_2; b_2; c_2)$ lần lượt là vectơ pháp tuyến của (P) và (Q).

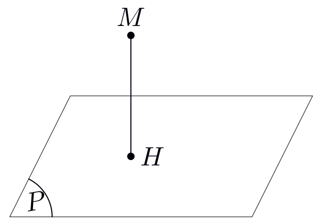
① Nếu $\begin{cases}\overrightarrow{n_1}=k\cdot\overrightarrow{n_2}\\ d_1=k\cdot d_2\end{cases}$ thì (P) trùng (Q).

② Nếu $\begin{cases}\overrightarrow{n_1}=k\cdot\overrightarrow{n_2}\\ d_1\neq k\cdot d_2\end{cases}$ thì (P) song song (Q).

③ Nếu $\overrightarrow{n_1}$ không cùng phương với $\overrightarrow{n_2}$ thì (P) cắt (Q).

④ Nếu $\overrightarrow{n_1}\perp\overrightarrow{n_2}$ hay $a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2=0$ thì $(P)\perp(Q)$.

5. Khoảng cách từ một điểm đến mặt phẳng



Định nghĩa: Cho điểm $M(x_0;y_0;z_0)$ và mặt phẳng $(P)\colon ax+by+cz+d=0$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của điểm M lên mặt phẳng (P). Khi đó độ dài đoạn MH được gọi là khoảng cách từ điểm M đến (P). Kí hiệu $\mathrm{d}\,(M,(P))$.

Công thức tính:

$$\boxed{\mathrm{d}\,(M,(P))=\frac{\left|ax_0+by_0+cz_0+d\right|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}}$$

Đặc biệt:

① $\mathrm{d}\,(M,(Oxy))=\left|z_M\right|$. ② $\mathrm{d}\,(M,(Oxz))=\left|y_M\right|$. ③ $\mathrm{d}\,(M,(Oyz))=\left|x_M\right|$.

B. PHÂN LOẠI, PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

1 Xác định vectơ pháp tuyến và điểm thuộc mặt phẳng

Cho mặt phẳng (α).

① Nếu véctơ $\vec{n}$ khác $\vec{0}$ và có giá vuông góc với (α) thì $\vec{n}$ được gọi là véctơ pháp tuyến của (α).

② Nếu hai véctơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ không cùng phương, có giá song song hoặc nằm trong (α) thì $\vec{a}$, $\vec{b}$ được gọi là cặp véctơ chỉ phương của (α). Khi đó, nếu $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$, $\vec{b}=(b_1;b_2;b_3)$ thì

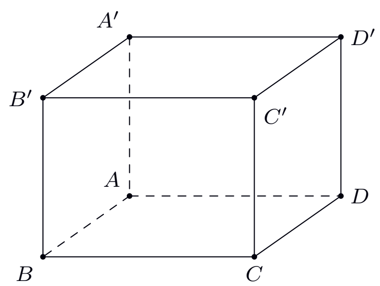
$$\vec{n}=[\vec{a},\vec{b}]=\left(\begin{vmatrix}a_2&a_3\\b_2&b_3\end{vmatrix};\begin{vmatrix}a_3&a_1\\b_3&b_1\end{vmatrix};\begin{vmatrix}a_1&a_2\\b_1&b_2\end{vmatrix}\right)$$

là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P).

③ Nếu $(\alpha)\colon ax+by+cz+d=0$ thì vectơ pháp tuyến của (α) là $\vec{n}=(a;b;c)$.

BÀI TẬP TỰ LUẬN

VÍ DỤ 1.
Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$.



a) Xác định vectơ pháp tuyến của các mặt phẳng $(ABCD)$, $(ABB'A')$, $(ACC'A')$, $(ADD'A')$.

b) Chứng minh $\overrightarrow{AB'}$ là một vectơ pháp tuyến của $(BCD'A')$.

VÍ DỤ 2. Cho mặt phẳng $(P): 2x-3y+4z+5=0$. Hãy chỉ ra một vectơ pháp tuyến của (P) và hai điểm thuộc (P).

Lời giải.

vectơ $\vec{n}=(2;-3;4)$ là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P).

VÍ DỤ 3. Cho (P) là mặt phẳng trung trực của MN với $M(1;-2;3)$, $N(1;4;1)$. Hãy chỉ ra một vectơ pháp tuyến của (P) và một điểm thuộc (P).

Lời giải.

Mặt phẳng trung trực của MN đi qua trung điểm của MN và vuông góc với MN.
Vậy $\overrightarrow{MN} = (0; 6; -2)$ là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P).

VÍ DỤ 4. Chỉ ra một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (α) biết

a) (α) đi qua $A(-1; 3; 5)$, $B(3; 2; -2)$ và $C(0; 3; 0)$

b) (α) đi qua $M(0; 3; 1)$, $N(-3; 2; 5)$ và $P(-2; 0; 0)$

Lời giải.

a) Ta có $\overrightarrow{AB} = (4; -1; -7)$, $\overrightarrow{AC} = (1; 0; -5)$.
Xét vectơ $\vec{n} = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = \left(\begin{vmatrix} -1 & -7 \\ 0 & -5 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -7 & 4 \\ -5 & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \right) = (5; 13; 1)$.
Vậy $\vec{n} = (5; 13; 1)$ là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (α).

b) Ta có $\overrightarrow{MN} = (-3; -1; 4)$, $\overrightarrow{MP} = (-2; -3; -1)$.
Xét vectơ $\vec{n} = [\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MP}] = \left(\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -3 & -1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} \right) = (13; -11; 7)$.
Vậy $\vec{n} = (13; -11; 7)$ là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (α).

VÍ DỤ 5. Cho tứ diện $ABCD$ có các đỉnh là $A(5; 1; 3)$, $B(1; 6; 2)$, $C(5; 0; 4)$ và $D(4; 0; 6)$. Gọi (α) là mặt phẳng chứa cạnh AB và song song với cạnh CD. Hãy tìm một điểm thuộc (α) và một vectơ pháp tuyến của (α).

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (-4; 5; -1)$, $\overrightarrow{CD} = (-1; 0; 2)$ nên $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$ không cùng phương.
Mà giá của $\overrightarrow{AB}$ nằm trong mặt phẳng (α) và giá của $\overrightarrow{CD}$ song song với mặt phẳng (α) nên $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ là một cặp vectơ chỉ phương của mặt phẳng (α). Vậy một vectơ pháp tuyến của (α) là

$$\begin{aligned}\vec{n} = \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right] &= \left(\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -1 & -4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -4 & 5 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \right) \\ &= (5 \cdot 2 - 0 \cdot (-1); (-1) \cdot (-1) - 2 \cdot (-4); (-4) \cdot 0 - 5 \cdot (-1)) \\ &= (10; 9; 5).\end{aligned}$$

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

CÂU 1. Cho mặt phẳng $(\alpha)\colon 2x - y + 3z - 2 = 0$. Điểm nào sau đây thuộc mặt phẳng (α)?

A $A(1; -3; 1)$. **B** $B(2; -1; -1)$. **C** $C(2; -1; 1)$. **D** $D(1; 2; 3)$.

Lời giải.

Thay tọa độ các điểm vào phương trình (α), tọa độ $B(2; -1; -1)$ thỏa mãn.
Chọn đáp án B .... □

CÂU 2. Cho mặt phẳng $(\alpha)\colon x + y + z - 6 = 0$. Điểm nào dưới đây **không** thuộc (α)?

A $M(1; -1; 1)$. **B** $N(2; 2; 2)$. **C** $P(1; 2; 3)$. **D** $Q(3; 3; 0)$.

Lời giải.

Ta có $1 - 1 + 1 - 6 = -5 \neq 0$ nên $M(1; -1; 1)$ không thuộc (α).
Chọn đáp án A .... □

CÂU 3. Cho (α) vuông góc với giá của $\vec{a} = (2; -1; 3)$. Vectơ nào dưới đây là vectơ pháp tuyến của (α)?

A $\vec{n_1} = (-2; 1; 3)$. **B** $\vec{n_2} = (-2; 1; -3)$. **C** $\vec{n_3} = (4; 2; 6)$. **D** $\vec{n_4} = (4; -2; -6)$.

Lời giải.

(α) vuông góc với giá của $\vec{a} = (2; -1; 3)$ nên $\vec{a}$ là một vectơ pháp tuyến của (α).
Do đó $\vec{n_2} = -\vec{a}$ cũng là một vectơ pháp tuyến của (α).
Chọn đáp án B .... □

CÂU 4. vectơ nào sau đây **không** phải là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng $(P) : x + 3y - 5z + 2 = 0$.

A $\vec{n}_1 = (-1; -3; 5)$. **B** $\vec{n}_2 = (-2; -6; -10)$. **C** $\vec{n}_3 = (-3; -9; 15)$. **D** $\vec{n}_4 = (2; 6; -10)$.

Lời giải.

Mặt phẳng (P) nhận vectơ $\vec{a} = (1; 3; -5)$ làm vectơ pháp tuyến.
Xét $\vec{n}_2 = (-2; -6; -10)$ có $\dfrac{-2}{1} \neq \dfrac{-6}{3} \neq \dfrac{-10}{-5}$ nên $\vec{n}_2$ không cùng phương với $\vec{a}$.
Suy ra $\vec{n}_2$ không là vectơ pháp tuyến của (P).
Chọn đáp án B .... □

CÂU 5. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng tọa độ (Oxy) có một vectơ pháp tuyến là

A $\vec{n}=(0;1;0)$. **B** $\vec{n}=(0;0;1)$. **C** $\vec{n}=(1;0;0)$. **D** $\vec{n}=(1;1;0)$.

Lời giải.

Mặt phẳng tọa độ (Oxy): $x=0 \Rightarrow 1$ vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(0;0;1)$.

Chọn đáp án B .... □

CÂU 6. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(4;-3;7)$ và $B(2;1;3)$. Một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng trung trực của đoạn AB là

A $\vec{n}=(1;-2;2)$. **B** $\vec{n}=(2;4;4)$. **C** $\vec{n}=(6;-2;10)$. **D** $\vec{n}=(-2;-4;4)$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB}(-2;4;-4)$ cùng phương với $\vec{n}=(1;-2;2)$. Suy ra $\vec{n}=(1;-2;2)$ là một vectơ pháp tuyến.

Chọn đáp án A .... □

CÂU 7. Trong không gian $Oxyz$, (P) là mặt phẳng trung trực của đoạn AB, biết $A(1;3;0)$, $B(-2;1;-1)$. vectơ nào sau đây là vectơ pháp tuyến của (P)?

A $\vec{n}_4=(3;-2;-1)$. **B** $\vec{n}_2=(-3;2;-1)$. **C** $\vec{n}_3=(-3;4;1)$. **D** $\vec{n}_1=(3;2;1)$.

Lời giải.

Mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{BA}=(3;2;1)$.

Chọn đáp án D .... □

CÂU 8. Trong không gian $Oxyz$, vectơ nào sau đây là một vectơ pháp tuyến của (P). Biết $\vec{u}=(1;-2;0)$, $\vec{v}=(0;2;-1)$ là cặp vectơ chỉ phương của (P).

A $\vec{n}=(1;2;0)$. **B** $\vec{n}=(2;1;2)$. **C** $\vec{n}=(2;-1;2)$. **D** $\vec{n}=(0;1;2)$.

Lời giải.

Ta có (P) có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=[\vec{u},\vec{v}]=\left(\begin{vmatrix}-2 & 0\\ 2 & -1\end{vmatrix};\begin{vmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{vmatrix};\begin{vmatrix}1 & -2\\ 0 & 2\end{vmatrix}\right)=(2;1;2)$.

Chọn đáp án B .... □

CÂU 9. Trong không gian $Oxyz$, cho (α) song song với giá của $\vec{a}=(1;-2;-3)$, $\vec{b}=(-4;2;0)$. Vectơ nào dưới đây **không phải** là vectơ pháp tuyến của (α)?

A $\vec{n_1}=(6;12;-6)$. **B** $\vec{n_2}=(1;2;-1)$. **C** $\vec{n_3}=(-2;-4;2)$. **D** $\vec{n_4}=(-3;-6;-3)$.

Lời giải.

(α) song song với giá của $\vec{a}=(1;-2;-3)$, $\vec{b}=(-4;2;0)$ nên $\vec{a}$, $\vec{b}$ là cặp vectơ chỉ phương của (α).

Một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (α) là

$$\begin{aligned}\vec{n}=[\vec{a},\vec{b}]&=\left(\begin{vmatrix}-2 & -3\\ 2 & 0\end{vmatrix};\begin{vmatrix}-3 & 1\\ 0 & -4\end{vmatrix};\begin{vmatrix}1 & -2\\ -4 & 2\end{vmatrix}\right)\\&=(6;12;-6).\end{aligned}$$

Ta có $\vec{n_1}=\vec{n}$; $\vec{n_2}=\dfrac{1}{6}\vec{n}$; $\vec{n_3}=-\dfrac{1}{3}\vec{n}$ là các vectơ pháp tuyến của (α).

Vậy $\vec{n_4}=(-3;-6;-3)$ không phải là vectơ pháp tuyến của (α).

Chọn đáp án D .... □

CÂU 10. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(2;0;0)$, $B(0;-3;0)$, $C(0;0;6)$. Tọa độ một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (ABC) là

A $\vec{n}=(1;-2;3)$. **B** $\vec{n}=(3;2;1)$. **C** $\vec{n}=(3;-2;1)$. **D** $\vec{n}=(2;-3;6)$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(-2;-3;0)$ $\overrightarrow{AC}=(0;3;6)$.

$\Rightarrow$ vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (ABC) là $\vec{v}=\left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right]=(-18;12;-6)$.

Ta có $\vec{v}=(-18;12;-6)$ cùng phương với $\vec{n}=(3;-2;1)$.

Chọn đáp án C .... □

CÂU 11. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(2;-1;3)$, $B(4;0;1)$ và $C(-10;5;3)$. vectơ nào dưới đây là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (ABC)?

A $\vec{n}=(1;2;0)$. **B** $\vec{n}=(1;-2;2)$. **C** $\vec{n}=(1;8;2)$. **D** $\vec{n}=(1;2;2)$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(2;1;-2)$, $\overrightarrow{AC}=(-12;6;0)$, $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(12;24;24)$.

$\Rightarrow (ABC)$ có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=\dfrac{1}{12}\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(1;2;2)$.

CÂU 12. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;-1;5)$, $B(1;-2;3)$. Mặt phẳng (α) đi qua hai điểm A, B và song song với trục Ox có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(0;a;b)$. Khi đó tỉ số $\dfrac{a}{b}$ bằng

Ⓐ -2. Ⓑ $-\dfrac{3}{2}$. Ⓒ $\dfrac{3}{2}$. Ⓓ 2.

Lời giải.

$\overrightarrow{BA}=(1;1;2)$; $\overrightarrow{i}=(1;0;0)$ là vectơ đơn vị của trục Ox.

Vì (α) đi qua hai điểm A, B và song song với trục Ox nên $\left[\overrightarrow{BA},\overrightarrow{i}\right]=(0;2;-1)$ là một vectơ pháp tuyến của (α). Do đó $\dfrac{a}{b}=-2$.

Chọn đáp án Ⓐ

2 Lập phương trình mặt phẳng khi biết các yếu tố liên quan

Công thức: Cho (P) qua điểm $M(x_0,y_0,z_0)$ và một vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_P}=(a,b,c)$. Khi đó, phương trình (P) là

$$\boxed{(P):a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0}$$

Một số cách xác định vectơ pháp tuyến thường gặp:

① Nếu $(P)\perp AB$ thì $\overrightarrow{n_P}=\overrightarrow{AB}$;

② Nếu (P) là mặt phẳng trung trực của đoạn AB thì (P) qua trung điểm I của AB và $\overrightarrow{n_P}=\overrightarrow{AB}$;

③ Nếu (P) có cặp vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ thì $\overrightarrow{n_P}=[\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}]$ là một vectơ pháp tuyến của (P).

④ Nếu (P) qua ba điểm A,B,C phân biệt và không thẳng hàng thì $\overrightarrow{n_P}=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]$;

⑤ Nếu (P) qua hai điểm A,B phân biệt và song song với d thì $\overrightarrow{n_P}=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{u_d}\right]$;

⑥ Nếu (P) qua điểm A và chứa d thì $\overrightarrow{n_P}=\left[\overrightarrow{AM},\overrightarrow{u_d}\right]$, với $M\in d$.

Phương trình theo đoạn chắn: Cho (P) đi qua $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$ với $abc\neq 0$ thì $(P):\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$ (phương trình theo đoạn chắn)

BÀI TẬP TỰ LUẬN

VÍ DỤ 1. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(3;-2;-2)$, $B(3;2;0)$, $C(0;2;1)$.

a) Lập phương trình mặt phẳng qua A và vuông góc với BC.

b) Lập phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn AB.

c) Lập phương trình mặt phẳng (ABC).

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(0;4;2)$, $\overrightarrow{AC}=(-3;4;3)$ là cặp vectơ chỉ phương của (ABC).

$\overrightarrow{n}=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(4;-6;12)$.

Chọn $\overrightarrow{n}_1=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{n}=(2;-3;6)$ là một vectơ pháp tuyến của (ABC).

Mặt phẳng (ABC) đi qua điểm $C(0;2;1)$ và có một vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n}_1=(2;-3;6)$ nên (ABC) có phương trình là

$$2(x-0)-3(y-2)+6(z-1)=0\Leftrightarrow 2x-3y+6z=0.$$

Vậy phương trình mặt phẳng cần tìm là $2x-3y+6z=0$.

VÍ DỤ 2. Cho tứ diện $ABCD$ có các đỉnh $A(5;1;3)$, $B(1;6;2)$, $C(5;0;4)$, $D(4;0;6)$.

a) Hãy viết phương trình của các mặt phẳng (ACD) và (BCD);

b) Hãy viết phương trình mặt phẳng (α) chứa cạnh AB và song song với cạnh CD;

c) Gọi A', B', C' lần lượt là hình chiếu vuông góc của A, B, C lên các trục Ox, Oy, Oz. Hãy viết phương trình mặt phẳng $(A'B'C')$.

Lời giải.

a) Ta có $\overrightarrow{AC}=(0;-1;1)$, $\overrightarrow{AD}=(-1;-1;3)$, $\overrightarrow{BC}=(4;-6;2)$, $\overrightarrow{BD}=(4;-6;4)$.

- Mặt phẳng (ACD) qua $A(5;1;3)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = \left[\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right] = (-2;-1;-1)$ có phương trình là

$$-2(x-5)-(y-1)-(z-3)=0 \Leftrightarrow 2x+y+z-14=0.$$

- Mặt phẳng (BCD) qua $B(1;6;2)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = \left[\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}\right] = (-12;-8;0)$ có phương trình là

$$-12(x-1)-8(y-6)-0(z-3)=0 \Leftrightarrow 3x+2y-15=0.$$

b) Ta có $\overrightarrow{AB} = (-4;5;-1)$, $\overrightarrow{CD} = (-1;0;2)$.
Mặt phẳng (α) chứa cạnh AB và song song với cạnh CD qua $A(5;1;3)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right] = (10;9;5)$ có phương trình là

$$10(x-5)+9(y-1)+5(z-3)=0 \Leftrightarrow 10x+9y+5z-74=0.$$

c) Ta có $A'(5;0;0)$, $B'(0;6;0)$, $C'(0;0;4)$. Phương trình mặt phẳng $(A'B'C')$ là

$$\frac{x}{5}+\frac{y}{6}+\frac{z}{4}=1.$$

VÍ DỤ 3. Viết phương trình của mặt phẳng

a) Chứa trục Ox và điểm $M(-4;1;2)$;

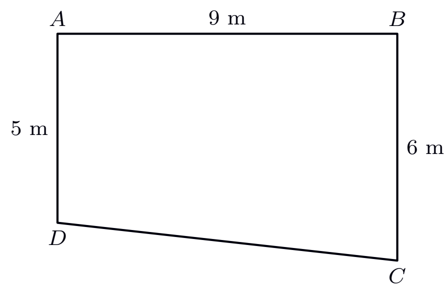
b) Chứa trục Oz và điểm $P(3;0;-7)$.

Lời giải.

a) Mặt phẳng (P) chứa trục Ox và điểm $M(-4;1;2)$ nên có vectơ pháp tuyến
$\vec{n} = \left[\vec{i}, \overrightarrow{OM}\right] = (0;-2;1)$, phương trình của (P) là $-2y+z=0$.

b) Mặt phẳng (R) chứa trục Oz và điểm $P(3;0;-7)$ nên có vectơ pháp tuyến
$\vec{n} = \left[\vec{k}, \overrightarrow{OP}\right] = (0;3;0)$, phương trình của (R) là $y=0$.

VÍ DỤ 4. Một phần sân nhà bác An có dạng hình thang $ABCD$ vuông tại A và B với độ dài $AB = 9$ m, $AD = 5$ m và $BC = 6$ m như Hình bên dưới. Theo thiết kế ban đầu thì mặt sân bằng phẳng và A, B, C, D có độ cao như nhau. Sau đó bác An thay đổi thiết kế để nước có thể thoát về phía góc sân ở vị trí C bằng cách giữ nguyên độ cao ở A, giảm độ cao của sân ở vị trí B và D xuống thấp hơn độ cao ở A lần lượt là 6 cm và 3,6 cm. Để mặt sân sau khi lát gạch vẫn là bề mặt phẳng thì bác An cần phải giảm độ cao ở C xuống bao nhiêu centimét so với độ cao ở A?



Lời giải.
Tại vị trí ban đầu A, B, C, D có độ cao như nhau, chọn hệ trục tọa độ có gốc tọa độ là điểm A và các trục tọa độ lần lượt là AD, AB và Az, với $Az \perp (ABCD)$.
Khi đó $A(0;0;0)$, $D(5;0;0)$, $B(0;9;0)$, $C(6;9;0)$.
Sau đó bác An thay đổi thiết kế để nước có thể thoát về phía góc sân ở vị trí C bằng cách giữ nguyên độ cao ở A, giảm độ cao của sân ở vị trí B và D xuống thấp hơn độ cao ở A lần lượt là 6 cm và 3,6 cm.
Khi đó, $A(0;0;0)$, $D(5;0;-3{,}6)$, $B(0;9;-6)$.
Ta có $\overrightarrow{AB} = (0;9;-6)$, $\overrightarrow{AD} = (5;0;-3{,}6)$ là cặp vectơ chỉ phương của mặt phẳng (ABD) nên một vectơ pháp tuyến của (ABD) là $\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right] = (-32{,}4;-30;-45)$.
Vậy mặt phẳng (ABD) qua $A(0;0;0)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (-32{,}4;-30;-45)$ nên có phương trình là

$$-32{,}4(x-2)-30(y+1)-45(z-3)=0 \quad \text{hay} \quad -32{,}4x-30y-45z=0.$$

Để mặt sân sau khi lát gạch vẫn là bề mặt phẳng thì bác An cần phải giảm độ cao ở C xuống k centimét so với độ cao ở A nên suy ra $C(6;9;-k)$.
Ta có A, B, C, D đồng phẳng
$\Leftrightarrow C \in (ABD)$
$\Leftrightarrow -32{,}4 \cdot 6 - 30 \cdot 9 - 45 \cdot (-k) = 0$
$\Leftrightarrow k = 10{,}32$.
Vậy bác An cần phải giảm độ cao ở C xuống 10,32 centimét so với độ cao ở A.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

CÂU 1. Phương trình mặt phẳng đi qua điểm $A(1;2;3)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(-2;0;1)$ là

Ⓐ $-2x+z+1=0$. Ⓑ $-2y+z-1=0$. Ⓒ $-2x+z-1=0$. Ⓓ $-2x+y-1=0$.

Lời giải.

Phương trình của mặt phẳng cần tìm là $-2(x-1)+0(y-2)+1(z-3)=0 \Leftrightarrow -2x+z-1=0$.

Chọn đáp án C .... □

CÂU 2. Phương trình nào được cho dưới đây là phương trình mặt phẳng (Oyz)?

Ⓐ $x=y+z$. Ⓑ $y-z=0$. Ⓒ $y+z=0$. Ⓓ $x=0$.

Lời giải.

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình của mặt phẳng (Oyz) là $x=0$.

Chọn đáp án D .... □

CÂU 3. Cho các điểm $A(0;1;2)$, $B(2;-2;1)$, $C(-2;0;1)$. Phương trình mặt phẳng đi qua A và vuông góc với BC là

Ⓐ $2x-y-1=0$. Ⓑ $-y+2z-3=0$. Ⓒ $2x-y+1=0$. Ⓓ $y+2z-5=0$.

Lời giải.

Ta có $\vec{n}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC}=(-2;1;0)$.

Vậy phương trình mặt phẳng đi qua A và vuông góc với BC có dạng $-2(x-0)+1(y-1)=0 \Leftrightarrow -2x+y-1=0$ $\Leftrightarrow 2x-y+1=0$.

Chọn đáp án C .... □

CÂU 4. Cho hai điểm $A(4;0;1)$ và $B(-2;2;3)$. Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB?

Ⓐ $3x-y-z+1=0$. Ⓑ $3x+y+z-6=0$. Ⓒ $3x-y-z=0$. Ⓓ $6x-2y-2z-1=0$.

Lời giải.

Gọi (α) là mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB. Khi đó (α) đi qua điểm $M(1;1;2)$, là trung điểm của AB, và nhận $\overrightarrow{AB}=(-6;2;2)$ làm vectơ pháp tuyến. Phương trình của mặt phẳng (α) là

$$-6(x-1)+2(y-1)+2(z-2)=0 \Leftrightarrow -6x+2y+2z=0 \Leftrightarrow 3x-y-z=0.$$

Chọn đáp án C .... □

CÂU 5. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;1;1)$ và $B(1;3;5)$. Viết phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn AB.

Ⓐ $y-2z-6=0$. Ⓑ $y-2z+2=0$. Ⓒ $y-3z+4=0$. Ⓓ $y+2z-8=0$.

Lời giải.

Ta có $I(1;2;3)$ là trung điểm của đoạn AB.

Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB đi qua I và có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{AB}=(0;2;4)=2(0;1;2)$, suy ra phương trình mặt phẳng trung trực cần tìm là

$$0(x-1)+1(y-2)+2(z-3)=0 \Leftrightarrow y+2z-8=0.$$

Chọn đáp án D .... □

CÂU 6. Trông không gian $Oxyz$, phương trình mặt phẳng (P) đi qua $A(0;-1;4)$ và song song với giá của hai vectơ $\vec{u}=(3;2;1)$, $\vec{v}=(-3;0;1)$ là

Ⓐ $x-3y+3z-15=0$. Ⓑ $x-2y+3z-14=0$. Ⓒ $x-y-z+3=0$. Ⓓ $x-3y+3z-9=0$.

Lời giải.

Mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến là $[\vec{u};\vec{v}]=(2;-6;6)$. Hay (P) có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(1;-3;3)$.

Phương trình mặt phẳng (P) là

$$1\cdot(x-0)-3\cdot(y+1)+3\cdot(z-4)=0 \text{ hay } (P)\colon x-3y+3z-15=0.$$

Chọn đáp án A .... □

CÂU 7. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(3;-2;-2)$, $B(3;2;0)$, $C(0;2;1)$. Phương trình mặt phẳng (ABC) là

Ⓐ $2x-3y+6z+12=0$. Ⓑ $2x+3y-6z-12=0$. Ⓒ $2x-3y+6z=0$. Ⓓ $2x+3y+6z+12=0$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(0;4;2)$, $\overrightarrow{AC}=(-3;4;3)$ là cặp vectơ chỉ phương của (ABC).

$\vec{n}=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(4;-6;12)$.

Chọn $\vec{n}_1 = \dfrac{1}{2}\vec{n} = (2;-3;6)$ là một vectơ pháp tuyến của (ABC).
Mặt phẳng (ABC) đi qua điểm $C(0;2;1)$ và có một vectơ pháp tuyến $\vec{n}_1 = (2;-3;6)$ nên (ABC) có phương trình là

$$2(x-0)-3(y-2)+6(z-1)=0 \Leftrightarrow 2x-3y+6z=0.$$

Vậy phương trình mặt phẳng cần tìm là $2x-3y+6z=0$.
Chọn đáp án C .... □

CÂU 8. Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;0;0), B(0;-1;-1), C(5;-1;1)$. Mặt phẳng (ABC) có phương trình là

A $2x+3y+5z-2=0$. B $2x-3y-5z-2=0$. C $2x-3y-5z+2=0$. D $2x+3y-5z-2=0$.

Lời giải.
Ta có $\overrightarrow{AB} = (-1;-1;-1), \overrightarrow{AC} = (4;-1;1)$ nên vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (ABC) là $\vec{n} = \left[\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}\right] = (2;3;-5)$, mà mặt phẳng (ABC) đi qua $A(1;0;0)$ nên có phương trình là $2x+3y-5z-2=0$.
Chọn đáp án D .... □

CÂU 9. Mặt phẳng (α) đi qua $A(-1;4;-6)$ và chứa trục Oy có phương trình là

A $-2x+y+z=0$. B $6x+z=0$. C $3x-y-6z+1=0$. D $6x-z=0$.

Lời giải.
Ta có $\overrightarrow{OA} = (-1;4;-6)$, $\vec{j} = (0;1;0)$ song song hoặc trùng với (α). Nên $\overrightarrow{OA}$ và $\vec{j}$ là cặp vectơ chỉ phương của (α).
Xét vectơ $\vec{n} = [\overrightarrow{OA}, \vec{j}] = \left(\begin{vmatrix} 4 & -6 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -6 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \right) = (6;0;-1)$.
Do đó $\vec{n} = (6;0;-1)$ là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (α).
Phương trình mặt phẳng (α) là $6x-z=0$.
Chọn đáp án D .... □

CÂU 10. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng chứa trục Ox và đi qua điểm $A(1;1;-1)$ có phương trình là

A $y+z=0$. B $z+1=0$. C $x+z=0$. D $x-y=0$.

Lời giải.
Gọi $\vec{n}$ là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) chứa trục Ox và đi qua điểm $A(1;1;-1)$.
Ta có $\begin{cases} \vec{n} \perp \overrightarrow{OA} = (1;1;-1) \\ \vec{n} \perp \vec{i} = (1;0;0) \end{cases}$.
Chọn một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) là $\vec{n} = \left[\vec{i}, \overrightarrow{OA}\right] = (0;1;1)$.
Vậy phương trình mặt phẳng là $y+z=0$.
Chọn đáp án A .... □

CÂU 11. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(2;1;1)$, $B(3;0;-1)$, $C(2;0;3)$. Mặt phẳng (α) đi qua hai điểm A, B và song song với đường thẳng OC có phương trình là

A $3x+y-2z-5=0$. B $4x+2y+z-11=0$. C $x-y+z-2=0$. D $3x+7y-2z-11=0$.

Lời giải.
Gọi $\vec{n}$ là vtpt của mặt phẳng (α).
Ta có $\begin{cases} AB \subset (\alpha) \\ OC \parallel (\alpha) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{n} \perp \overrightarrow{AB} \\ \vec{n} \perp \overrightarrow{OC} \end{cases}$ nên $\vec{n}$ cùng phương với $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{OC}$.
Ta có $\overrightarrow{AB} = (1;-1;-2)$, $\overrightarrow{OC} = (2;0;3) \Rightarrow \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{OC} = (-3;-7;2) = (-1)\cdot(3;7;-2)$. Ta chọn $\vec{n} = (3;7;-2)$.
Phương trình mặt phẳng (α) là: $3x+7y-2z-11=0$.
Chọn đáp án D .... □

CÂU 12. Mặt phẳng đi qua hai điểm $A(1;2;-1)$, $B(0;4;3)$ và song song với trục Oz có phương trình là

A $2x+y-4=0$. B $4x-4y+3z+7=0$. C $x+2y-5=0$. D $2x+y+z-3=0$.

Lời giải.
$\overrightarrow{AB} = (-1;2;4)$, $\vec{k} = (0;0;1)$. vectơ pháp tuyến của mặt phẳng cần tìm là $\vec{n} = \left[\overrightarrow{AB}, \vec{k}\right] = (2;1;0)$.
Mặt phẳng qua $A(1;2;-1)$, nhận $\vec{n} = (2;1;0)$ làm vectơ pháp tuyến có phương trình là

$$2(x-1)+1(y-2)+0(z+1)=0 \Leftrightarrow 2x+y-4=0.$$

Chọn đáp án A .... □

CÂU 13. Cho điểm $M(1;2;-3)$. Gọi M_1, M_2, M_3 lần lượt là hình chiếu vuông góc của M lên trục Ox, Oy, Oz. Phương trình mặt phẳng đi qua ba điểm M_1, M_2, M_3 là

A $x+\dfrac{y}{2}-\dfrac{z}{3}=1$. B $\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{2}+\dfrac{z}{1}=1$. C $x+\dfrac{y}{2}+\dfrac{z}{3}=1$. D $x+\dfrac{y}{2}+\dfrac{z}{3}=-1$.

Lời giải.

Ta có $M_1(1;0;0)$, $M_2(0;2;0)$, $M_3(0;0;-3)$.
Phương trình mặt phẳng đi qua M_1, M_2, M_3 là $x+\dfrac{y}{2}-\dfrac{z}{3}=1$.
Chọn đáp án (A) . . . . □

CÂU 14. Mặt phẳng nào sau đây cắt các trục Ox, Oy, Oz lần lượt tại các điểm A, B, C sao cho tam giác ABC nhận điểm $G(1;2;1)$ là trọng tâm?

A $x+2y+2z-6=0$. **B** $2x+y+2z-6=0$. **C** $2x+2y+z-6=0$. **D** $2x+2y+6z-6=0$.

CÂU 15. Cho mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(2;-4;1)$ và chắn trên các trục tọa độ Ox, Oy, Oz theo ba đoạn có độ dài đại số lần lượt là a, b, c. Phương trình tổng quát của mặt phẳng (P) khi a, b, c theo thứ tự tạo thành một cấp số nhân có công bội bằng 2 là

A $4x+2y-z-1=0$. **B** $4x-2y+z+1=0$. **C** $16x+4y-4z-1=0$. **D** $4x+2y+z-1=0$.

Lời giải.

Do giả thiết suy ra $a,b,c\neq 0$ và $b=2a$, $c=2b$. Giả sử $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$ và $C(0;0;c)$ khi đó phương trình mặt phẳng $(P)\colon \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$. Do M thuộc (P) nên

$$\frac{2}{a}-\frac{4}{b}+\frac{1}{c}=1\Leftrightarrow\frac{2}{a}-\frac{4}{2a}+\frac{1}{4a}=1\Leftrightarrow a=\frac{1}{4}.$$

Suy ra $b=\dfrac{1}{2}$ và $c=1$ do đó phương trình mặt phẳng $(P)\colon 4x+2y+z-1=0$.
Chọn đáp án (D) . . . . □

3 Vị trí tương đối của hai mặt phẳng

Cho hai mặt phẳng $(P)\colon a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$ và $(Q)\colon a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$.

① Nếu $\begin{cases}\overrightarrow{n_1}=k\cdot\overrightarrow{n_2}\\ d_1=k\cdot d_2\end{cases}$ thì (P) trùng (Q).

② Nếu $\begin{cases}\overrightarrow{n_1}=k\cdot\overrightarrow{n_2}\\ d_1\neq k\cdot d_2\end{cases}$ thì (P) song song (Q).

③ Nếu $\overrightarrow{n_1}$ không cùng phương với $\overrightarrow{n_2}$ thì (P) cắt (Q).

④ Nếu $\overrightarrow{n_1}\perp\overrightarrow{n_2}$ hay $a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2=0$ thì $(P)\perp(Q)$.

BÀI TẬP TỰ LUẬN

VÍ DỤ 1. Tìm các cặp mặt phẳng song song hoặc vuông góc trong các mặt phẳng sau

$(P)\colon 2x+3y-2z+7=0$ $(Q)\colon 3x-2y-11=0$

$(R)\colon 4x+6y-4z-9=0$ $(T)\colon 7x+y-z+1=0$

Lời giải.

Các mặt phẳng (P), (Q), (R), (T) có các vectơ pháp tuyến lần lượt là $\vec{n}_1=(2;3;-2)$, $\vec{n}_2=(3;-2;0)$, $\vec{n}_3=(4;6;-4)$, $\vec{n}_4=(7;1;-1)$.
Ta có $\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2=2\cdot 3+3\cdot(-2)+(-2)\cdot 0=0$, suy ra $(P)\perp(Q)$.
Vì $\dfrac{4}{2}=\dfrac{6}{3}=\dfrac{-4}{-2}\neq\dfrac{-9}{7}$ nên $(P)\parallel(R)$.
Ta lại có $(P)\perp(Q)$ và $(P)\parallel(R)$, suy ra $(Q)\perp(R)$.
Ta có $\dfrac{2}{7}\neq\dfrac{3}{1}$ suy ra $\vec{n}_2$ và $\vec{n}_4$ không cùng phương.
Mặt khác, $\vec{n}_1\cdot\vec{n}_4=2\cdot 7+3\cdot 1+(-2)\cdot(-1)=19\neq 0$. Suy ra (P) và (T) cắt nhau nhưng không vuông góc. Tương tự, ta cũng có (Q) và (T) cắt nhau nhưng không vuông góc.

VÍ DỤ 2. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha)\colon 2x-3y+z+5=0$.

a) Chứng minh rằng mặt phẳng $(\alpha')\colon -4x+6y-2z+7=0$ song song với (α).

b) Viết phương trình mặt phẳng (β) đi qua điểm $M(1;-2;3)$ và song song với (α).

Lời giải.

a) Xét $(\alpha)\colon 2x-3y+z+5=0$ và $(\alpha')\colon -4x+6y-2z+7=0$.
Ta có $\dfrac{2}{-4}=\dfrac{-3}{6}=\dfrac{1}{-2}\neq\dfrac{5}{7}$ nên $(\alpha)\parallel(\alpha')$.

b) Mặt phẳng (α) có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(2;-3;1)$.
Vì $(\beta)\parallel(\alpha)$ nên (β) có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(2;-3;1)$.
Vậy mặt phẳng (β) đi qua điểm $M(1;-2;3)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(2;-3;1)$ nên có phương trình là

$$2(x-1)-3(y+2)+(z-3)=0 \qquad \text{hay } 2x-3y+z-11=0.$$

VÍ DỤ 3. Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(Q)\colon x+y+3z=0$, $(R)\colon 2x-y+z=0$.

a) Xét vị trí tương đối của (Q) và (R);

b) Viết trình của mặt phẳng (P) đi qua điểm $B(2;1;-3)$, đồng thời vuông góc với (Q) và (R).

Lời giải.
vectơ pháp tuyến (P) là $n_{\vec{P}}=\left[n_{\vec{Q}},n_{\vec{R}}\right]=(4;5;-3)$.
Phương trình mặt phẳng (P) là $4(x-2)+5(y-1)-3(z+3)=0\Leftrightarrow 4x+5y-3z-22=0$.

VÍ DỤ 4. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(-2;4;-1)$, $B(1;1;3)$ và mặt phẳng (P) có phương trình $x-3y+2z-5=0$. Viết phương trình mặt phẳng (Q) đi qua hai điểm A, B và vuông góc với mặt phẳng (P).
Lời giải.
$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB}=(3;-3;4)\\ \vec{n}_{(P)}=(1;-3;2)\end{array}\right\}\Rightarrow\left[\overrightarrow{AB},\vec{n}_{(P)}\right]=(6;-2;-6)=2(3;-1;-3)$.
Mặt phẳng (Q) đi qua điểm A và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}_{(Q)}=(3;-1;-3)$ có phương trình

$$\begin{aligned}&3(x+2)-(y-4)-3(z+1)=0\\ \Leftrightarrow\ &3x-y-3z+7=0.\end{aligned}$$

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

CÂU 1. Cho mặt phẳng $(P)\colon -x+y+3z+1=0$. Mặt phẳng song song với mặt phẳng (P) có phương trình nào sau đây?
(A) $2x-2y-6z+7=0$. (B) $-2x+2y+3z+5=0$. (C) $x-y+3z-3=0$. (D) $-x-y+3z+1=0$.
Lời giải.
vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) là $\vec{n}=(-1;1;3)$ cùng phương với vectơ $\vec{n}=(2;-2;-6)$. Vì $\dfrac{2}{-1}\neq\dfrac{7}{1}$ nên phương trình mặt phẳng song song với (P) là $2x-2y-6z+7=0$.
Chọn đáp án (A) .... □

CÂU 2. Cho hai mặt phẳng $(P)\colon 2x+4y+3z-5=0$ và $(Q)\colon mx-ny-6z+2-0$. Giá trị của m,n sao cho $(P)\parallel(Q)$ là
(A) $m=4;n=-8$. (B) $m=n=4$. (C) $m=-4;n=8$. (D) $m=n=-4$.
Lời giải.
(P) có vectơ chỉ phương $\vec{u}_{(P)}=(2;4;3)$, (Q) có vectơ chỉ phương $\vec{u}_{(Q)}=(m;-n;-6)$.
Để hai mặt phẳng trên song song thì $\vec{u}_{(Q)}=k\vec{u}_{(P)}\ (k\neq0)\Leftrightarrow\begin{cases}m=2k\\-n=4k\\-6=3k\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}k=-2\\m=-4\\n=8.\end{cases}$
Chọn đáp án (C) .... □

CÂU 3. Cho hai mặt phẳng $(P)\colon x+my+(m-1)z+1=0$ và $(Q)\colon x+y+2z=0$. Tập hợp tất cả các giá trị m để hai mặt phẳng này **không** song song là
(A) $(0;+\infty)$. (B) $\mathbb{R}\setminus\{-1;1;2\}$. (C) $(-\infty;3)$. (D) $\mathbb{R}$.
Lời giải.
Ta có $A(0;0;0)\in(Q)$.
$(P)\parallel(Q)\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{1}{1}=\dfrac{m}{1}=\dfrac{m-1}{2}\\ A(0;0;0)\notin(P)\end{cases}$. Hệ này vô nghiệm. Do đó (P) không song song với (Q), với mọi giá trị của m.
Chọn đáp án (D) .... □

CÂU 4. Cho mặt phẳng $(\alpha)\colon x+y+z-1=0$. Trong các mặt phẳng sau, tìm mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng (α).

(A) $2x-y+z+1=0$. (B) $2x-y-z+1=0$. (C) $2x+2y+2z-1=0$. (D) $x-y-z+1=0$.

Lời giải.

Mặt phẳng (α) có $\vec{n}_{(\alpha)}=(1;1;1)$.
Mặt phẳng $2x-y-z+1=0$ có vectơ pháp tuyến $\vec{n}_1=(2;-1;-1)\Rightarrow \vec{n}_{(\alpha)}\cdot\vec{n}_1=0$ nên mặt phẳng (α) vuông góc với mặt phẳng $2x-y-z+1=0$.
Chọn đáp án (B) .... □

CÂU 5. Cho mặt phẳng $(P)\colon 2x-y+2z-3=0$ và $(Q)\colon x+my+z-1=0$. Tìm tham số m để hai mặt phẳng P và Q vuông góc với nhau.

(A) $m=-4$. (B) $m=-\dfrac{1}{2}$. (C) $m=\dfrac{1}{2}$. (D) $m=4$.

Lời giải.

Mặt phẳng (P) và (Q) có vectơ pháp tuyến lần lượt là $\vec{n}_1=(2;-1;2)$ và $\vec{n}_2=(1;m;1)$.
Do đó $(P)\perp(Q)\Leftrightarrow \vec{n}_1\cdot\vec{n}_2=0\Leftrightarrow 2-m+2=0\Leftrightarrow m=4$.

Chọn đáp án (D) .... □

CÂU 6. Cho hai mặt phẳng $(P)\colon x+2y-z-1=0$, $(Q)\colon 3x-(m+2)y+(2m-1)z+3=0$. Tìm m để hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau.

(A) $m=0$. (B) $m=2$. (C) $m=-2$. (D) $m=-1$.

Lời giải.

vectơ pháp tuyến của (P), (Q) lần lượt là $\vec{n}_P=(1;2;-1)$ và $\vec{n}_Q=(3;-m-2;2m-1)$.
$(P)\perp(Q)\Leftrightarrow \vec{n}_P\cdot\vec{n}_Q=0\Leftrightarrow 3-2(m+2)-2m+1=0\Leftrightarrow m=0$.
Chọn đáp án (A) .... □

CÂU 7. Mặt phẳng đi qua $A(1;3;-2)$ và song song với mặt phẳng $(P)\colon 2x-y+3z+4=0$ có phương trình là

(A) $2x-y+3z+7=0$. (B) $2x-y+3z-7=0$. (C) $2x+y-3z+7=0$. (D) $2x+y+3z+7=0$.

Lời giải.

Ta có $\vec{n}=\overrightarrow{n(P)}=(2;-1;3)$. Khi đó phương trình mặt phẳng qua $A(1;3;-2)$ và song song (P) là

$$2(x-1)-1(y-3)+3(z+2)=0\Leftrightarrow 2x-y+3z+7=0.$$

Chọn đáp án (A) .... □

CÂU 8. Cho điểm $A(2;-1;-3)$ và mặt phẳng $(P)\colon 3x-2y+4z-5=0$. Mặt phẳng (Q) đi qua A và song song với mặt phẳng (P) có phương trình là

(A) $(Q)\colon 3x-2y+4z+4=0$. (B) $(Q)\colon 3x+2y+4z+8=0$.
(C) $(Q)\colon 3x-2y+4z+5=0$. (D) $(Q)\colon 3x-2y+4z-4=0$.

Lời giải.

Do mặt phẳng (Q) song song với mặt phẳng (P) nên có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(3;-2;4)$.
Phương trình mặt phẳng $(Q)\colon 3(x-2)-2(y+1)+4(z+3)=0\Leftrightarrow 3x-2y+4z+4=0$.
Chọn đáp án (A) .... □

CÂU 9. Cho mặt phẳng (P) đi qua các điểm $A(-2;0;0)$, $B(0;3;0)$, $C(0;0;-3)$. Mặt phẳng (P) vuông góc với mặt phẳng nào trong các mặt phẳng sau?

(A) $2x+2y-z-1=0$. (B) $x+y+z+1=0$. (C) $3x-2y+2z+6=0$. (D) $x-2y-z-3=0$.

Lời giải.

Mặt phẳng $(P)\colon \dfrac{x}{-2}+\dfrac{y}{3}+\dfrac{z}{-3}=1$ hay $(P)\colon 3x-2y+2z+6=0$ có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(3;-2;2)$.
Ta có $3\cdot2-2\cdot2-2\cdot1=0$ nên (P) vuông góc với mặt phẳng $2x+2y-z-1=0$.
Chọn đáp án (A) .... □

CÂU 10. Mặt phẳng qua $A(1;2;-1)$ và vuông góc với các mặt phẳng $(P)\colon 2x-y+3z-2=0$; $(Q)\colon x+y+z-1=0$ có phương trình là

(A) $x-y+z+2=0$. (B) $4x-y+z-1=0$. (C) $x+y+2z-1=0$. (D) $4x-y-3z-5=0$.

Lời giải.

vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) và (Q) lần lượt là $\overrightarrow{n_1}=(2;-1;3)$ và $\overrightarrow{n_2}=(1;1;1)$.
Ta có $[\overrightarrow{n_1};\overrightarrow{n_2}]=(-4;1;3)$. Mặt phẳng cần tìm qua $A(1;2;-1)$ và có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(-4;1;3)$ nên có phương trình là

$$-4\cdot(x-1)+1\cdot(y-2)+3\cdot(z+1)=0\Leftrightarrow 4x-y-3z-5=0.$$

Chọn đáp án (D) .... □

CÂU 11. Cho hai mặt phẳng (P), (Q) lần lượt có phương trình là $x+y-z=0$, $x-2y+3z=4$ và cho điểm $M(1;-2;5)$. Tìm phương trình mặt phẳng (α) đi qua điểm M và đồng thời vuông góc với hai mặt phẳng (P), (Q).

A $5x+2y-z+14=0$. **B** $x-4y-3z+6=0$. **C** $x-4y-3z-6=0$. **D** $5x+2y-z+4=0$.

Lời giải.

Ta có $\vec{n}_{(P)}=(1;1;-1)$ và $\vec{n}_{(Q)}=(1;-2;3)$.
Suy ra $\left[\vec{n}_{(P)},\vec{n}_{(Q)}\right]=(1;-4;-3)$.

Do (α) vuông góc với (P) và (Q) nên $\begin{cases}\vec{n}_{(\alpha)}\perp\vec{n}_{(P)}\\ \vec{n}_{(\alpha)}\perp\vec{n}_{(Q)}\end{cases}$.

Chọn $\vec{n}_{(\alpha)}=\left[\vec{n}_{(P)},\vec{n}_{(Q)}\right]=(1;-4;-3)$. Hơn nữa, (α) đi qua $M(1;-2;5)$ nên có phương trình là

$$(x-1)-4(y+2)-3(z-5)=0\Leftrightarrow x-4y-3z+6=0.$$

Chọn đáp án B .... □

CÂU 12. Cho điểm $A(-4;1;1)$ và mặt phẳng $(P)\colon x-2y-z+4=0$. Mặt phẳng (Q) đi qua điểm A và song song với mặt phẳng (P) có phương trình là

A $(Q)\colon x-2y-z+7=0$. **B** $(Q)\colon x-2y-z-7=0$. **C** $(Q)\colon x-2y+z+5=0$. **D** $(Q)\colon x-2y+z-5=0$.

Lời giải.

Do $(Q)\parallel(P)$ nên phương trình của (Q) có dạng $x-2y-z+c=0$ $(c\neq 4)$.
Do $A\in(Q)$ nên $-4-2\cdot 1-1+c=0\Leftrightarrow c=7$ (thỏa).
Vậy $(Q)\colon x-2y-z+7=0$.
Chọn đáp án B .... □

CÂU 13. Cho hai mặt phẳng $(P)\colon x-3y+2z-1=0$, $(Q)\colon x-z+2=0$. Mặt phẳng (α) vuông góc với hai mặt phẳng $(P),(Q)$ đồng thời cắt trục Ox tại điểm có hoành độ bằng 3. Phương trình của (α) là

A $-2x+z+6=0$. **B** $-2x+z-6=0$. **C** $x+y+z-3=0$. **D** $x+y+z+3=0$.

Lời giải.

Mặt phẳng (P) có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_P=(1;-3;2)$.
Mặt phẳng (Q) có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_Q=(1;0;-1)$.
Vì mặt phẳng (α) vuông góc với hai mặt phẳng (P) và (Q) nên (α) có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_\alpha=[\vec{n}_P,\vec{n}_Q]=3(1;1;1)$.
Mà mặt phẳng (α) đi qua $A(3;0;0)$, nên suy ra phương trình là $(\alpha): x+y+z-3=0$.
Chọn đáp án C .... □

CÂU 14. Cho $A(1;-1;2)$; $B(2;1;1)$ và mặt phẳng $(P): x+y+z+1=0$. Mặt phẳng (Q) chứa A, B và vuông góc với mặt phẳng (P). Mặt phẳng (Q) có phương trình là

A $3x-2y-z+3=0$. **B** $3x-2y-z-3=0$. **C** $-x+y=0$. **D** $x+y+z-2=0$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(1;2;-1)$ và vectơ pháp tuyến của (P) là $\vec{n}_P=(1;1;1)$. Gọi vectơ pháp tuyến của (Q) là $\vec{n}_Q$.
Vì (Q) chứa A,B nên $\overrightarrow{n_Q}\perp\overrightarrow{AB}$, mặt khác $(Q)\perp(P)$ nên $\overrightarrow{n_Q}\perp\overrightarrow{n_P}$.
Từ đó suy ra $\overrightarrow{n_Q}=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{n_P}\right]=(3;-2;-1)$.
(Q) đi qua $A(1;-1;2)$ và có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_Q}=(3;-2;-1)$ nên (Q) có phương trình là

$$(Q): 3(x-1)-2(y+1)-(z-2)=0\Leftrightarrow 3x-2y-z-3=0.$$

Chọn đáp án B .... □

CÂU 15. Cho hai điểm $A(2;4;1)$, $B(-1;1;3)$ và mặt phẳng $(P)\colon x-3y+2z-5=0$. Một mặt phẳng (Q) đi qua hai điểm A, B và vuông góc với mặt phẳng (P) có dạng là $ax+by+cz-11=0$. Tính $a+b+c$.

A $a+b+c=-7$. **B** $a+b+c=10$. **C** $a+b+c=5$. **D** $a+b+c=3$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(-3;-3;2)$ và vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) là $\vec{n}_P=(1;-3;2)$.
Mặt phẳng (Q) đi qua hai điểm A, B và vuông góc với mặt phẳng (P) có một vectơ chỉ phương là

$$\vec{n}_Q=\left[\overrightarrow{AB},\vec{n}_P\right]=(0;8;12)=4\,(0;2;3)\,.$$

Phương trình mặt phẳng (Q) là

$$0\cdot(x-2)+2\cdot(y-4)+3\cdot(z-1)=0.$$

Hay $(Q)\colon 2y+3z-11=0$. Từ đó suy ra $a=0$, $b=2$, $c=3$. Do đó $a+b+c=0+2+3=5$.
Chọn đáp án C .... □

4 Khoảng cách từ một điểm đến mặt phẳng, khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song

Khoảng cách từ một điểm đến mặt phẳng: Cho điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ và mặt phẳng $(P)\colon ax+by+cz+d=0$. Khi đó

$$\boxed{\mathrm{d}\left(M,(P)\right)=\frac{\left|ax_0+by_0+cz_0+d\right|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}}$$

Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song: Cho hai mặt phẳng $(P)\colon ax+by+cz+d_1=0$ và $(Q)\colon ax+by+cz+d_2=0$ song song nhau. Khi đó

$$\boxed{\mathrm{d}\left((P),(Q)\right)=\frac{\left|d_1-d_2\right|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}}$$

BÀI TẬP TỰ LUẬN

VÍ DỤ 1. Tính khoảng cách từ điểm $A(1;2;3)$ đến các mặt phẳng sau

a) $(P): 3x+4z+10=0$; b) $(Q): 2x-10=0$; c) $(R): 2x+2y+z-3=0$.

Lời giải.

a) $\mathrm{d}\left(A;(P)\right)=\dfrac{|3\cdot 1+0\cdot 2+4\cdot 3+10|}{\sqrt{3^2+4^2}}=5.$

b) $\mathrm{d}\left(A;(Q)\right)=\dfrac{|2\cdot 1-10|}{\sqrt{2^2}}=2.$

c) $\mathrm{d}\left(A;(R)\right)=\dfrac{|2\cdot 1+2\cdot 2+1\cdot 3-3|}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}}=2.$

VÍ DỤ 2. Cho hai mặt phẳng $(P)\colon 2x+y+2z+12=0$, $(Q)\colon 4x+2y+4z-6=0$.

a) Chứng minh $(P)\parallel(Q)$.

b) Tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng (P) và (Q).

Lời giải.

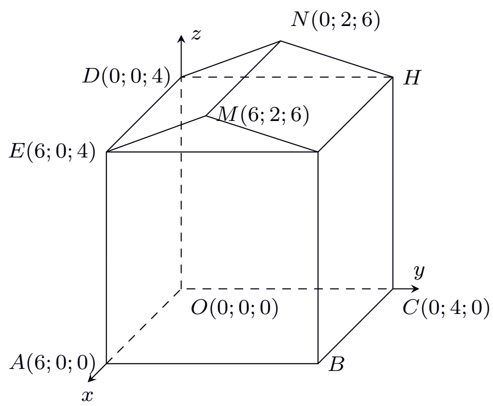
a) Xét hai mặt phẳng $(P)\colon 2x+y+2z+12=0$ và $(Q)\colon 4x+2y+4z-6=0$, ta có $\dfrac{4}{2}=\dfrac{2}{1}=\dfrac{4}{2}\neq\dfrac{-6}{12}$, suy ra $(P)\parallel(Q)$.

b) Trên mặt phẳng (Q), lấy điểm $M(0;1;1)$.
Ta có
$$\mathrm{d}((P),(Q))=\mathrm{d}(M,(P))=\frac{|2\cdot 0+1\cdot 1+2\cdot 1+12|}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}}=\frac{15}{3}=5.$$

VÍ DỤ 3.
Một kĩ sư xây dựng thiết kế khung một ngôi nhà trong không gian $Oxyz$ như Hình 9 nhờ một phần mềm đồ họa máy tính.

a) Viết phương trình mặt phẳng mái nhà $(DEMN)$.

b) Tính khoảng cách từ điểm B đến mái nhà $(DEMN)$.



Hình 9

Lời giải.

a) Mặt phẳng $(DEMN)$ có cặp vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{DE}=(6;0;0)$, $\overrightarrow{DN}=(0;2;2)$. Ta có $\left[\overrightarrow{DE},\overrightarrow{DN}\right]=(0;-12;12)$, suy ra $(DEMN)$ có vectơ pháp tuyến là

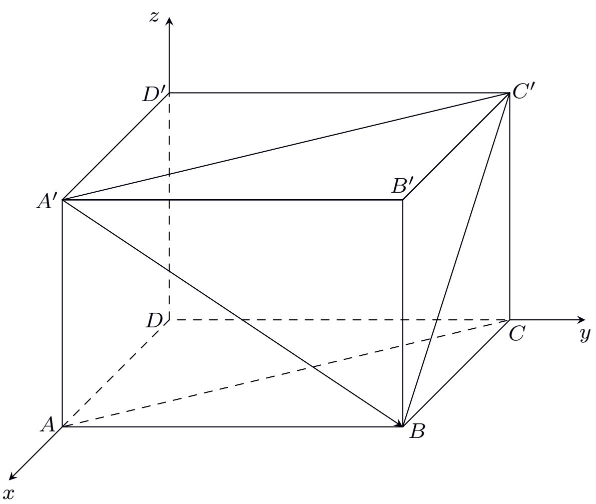
$$\vec{n}=-\frac{1}{12}\left[\overrightarrow{DE},\overrightarrow{DN}\right]=(0;1;-1).$$

Phương trình của mặt phẳng $(DEMN)$ là $y-z+4=0$.

b) $B(6;4;0)$, suy ra $\mathrm{d}(B,(DEMN))=\dfrac{|4+4|}{\sqrt{0^2+1^2+(-1)^2}}=\dfrac{8}{\sqrt{2}}=4\sqrt{2}$.

VÍ DỤ 4. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $DA=2$, $DC=3$, $DD'=2$. Tính khoảng cách từ đỉnh B' đến mặt phẳng $(BA'C')$.

Lời giải.



Chọn hệ tọa độ $Oxyz$ sao cho gốc tọa độ O trùng với điểm D.
Khi đó, tọa độ các đỉnh của hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ là $D(0,0,0)$, $A(2,0,0)$, $C(0,3,0)$, $B(2,3,0)$, $D'(0,0,2)$, $A'(2,0,2)$, $B'(2,3,2)$, $C'(0,3,2)$. Mặt phẳng $(BA'C')$ có cặp vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{BA'}=(0;-3;2)$, $\overrightarrow{BC'}=(-2;0;2)$.
Ta có $\left[\overrightarrow{BA'},\overrightarrow{BC'}\right]=(-6;-4;-6)$, suy ra $(BA'C')$ có vectơ pháp tuyến là

$$\vec{n}=-\frac{1}{2}\left[\overrightarrow{BA'},\overrightarrow{BC'}\right]=(3;2;3).$$

Phương trình của $(BA'C')$ là

$$3(x-2)+2(y-3)+3z=0 \text{ hay } 3x+2y+3z-12=0.$$

Khoảng cách từ đỉnh B' đến mặt phẳng $(BA'C')$ là

$$\mathrm{d}(B',(BA'C'))=\frac{|3\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 2-12|}{\sqrt{3^2+2^2+3^2}}=\frac{6}{\sqrt{22}}=\frac{3\sqrt{22}}{11}.$$

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

CÂU 1. Khoảng cách từ $A(-2;1;-6)$ đến mặt phẳng (Oxy) là

Ⓐ 6. Ⓑ 2. Ⓒ 1. Ⓓ $\dfrac{7}{\sqrt{41}}$.

Lời giải.

Ta có $(Oxy)\colon z=0$. Ta được $d(A,(Oxy))=\dfrac{|-6|}{1}=6$.

Chọn đáp án A .... □

CÂU 2. Cho hai điểm $A(-2;1;3)$, $B(4;1;-1)$. Khoảng cách từ trung điểm I của đoạn AB đến mặt phẳng (Oyz) là

Ⓐ 0. Ⓑ 2. Ⓒ 4. Ⓓ 1.

Lời giải.

Ta có trung điểm của đoạn AB là $I(1;1;1)$ nên $\mathrm{d}(I,(Oyz))=|x_I|=1$.

Chọn đáp án D .... □

CÂU 3. Cho mặt phẳng $(P)\colon 2x+3y+4z-5=0$ và điểm $A(1;-3;1)$. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (P) bằng

A $\dfrac{8}{\sqrt{29}}$. **B** $\dfrac{8}{9}$. **C** $\dfrac{3}{\sqrt{29}}$. **D** $\dfrac{8}{29}$.

Lời giải.

Ta có

$$\mathrm{d}(A,(P))=\frac{|2\cdot 1+3\cdot(-3)+4\cdot 1-5|}{\sqrt{2^2+3^2+4^2}}=\frac{8}{\sqrt{29}}.$$

Chọn đáp án A .... □

CÂU 4. Gọi H là hình chiếu vuông góc của điểm $A(2;3;-1)$ trên mặt phẳng $(\alpha)\colon 16x+12y-15z+7=0$. Tính độ dài đoạn thẳng AH.

A $\dfrac{19}{25}$. **B** $\dfrac{12}{25}$. **C** $\dfrac{19}{625}$. **D** $\dfrac{12}{625}$.

Lời giải.

Độ dài đoạn thẳng AH bằng $\mathrm{d}\left(A;(\alpha)\right)=\dfrac{|16\cdot 2+12\cdot(-3)-15\cdot 1+7|}{\sqrt{16^2+12^2+(-15)^2}}=\dfrac{12}{25}$.

Chọn đáp án B .... □

CÂU 5. Cho hai mặt phẳng $(P)\colon x+2y-2z+3=0$ và $(Q)\colon x+2y-2z-1=0$. Khoảng cách giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) là

A $\dfrac{4}{9}$. **B** $\dfrac{2}{3}$. **C** $\dfrac{4}{3}$. **D** $-\dfrac{4}{3}$.

Lời giải.

Lấy $M(-3;0;0)\in(P)$. Vì $(P)\parallel(Q)$ nên khoảng cách giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) bằng khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (Q).

Ta có $\mathrm{d}(M,(Q))=\dfrac{|x_M+2y_M-2z_M-1|}{\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}}=\dfrac{4}{3}$.

Chọn đáp án C .... □

CÂU 6. Biết rằng hai mặt phẳng $4x-4y+2z-7=0$ và $2x-2y+z+4=0$ chứa hai mặt của hình lập phương. Thể tích khối lập phương đó bằng

A $V=\dfrac{9\sqrt{3}}{2}$. **B** $V=\dfrac{27}{8}$. **C** $V=\dfrac{81\sqrt{3}}{8}$. **D** $V=\dfrac{125}{8}$.

Lời giải.

Khoảng cách giữa hai mặt phẳng trên bằng độ dài cạnh của hình lập phương.

Gọi $(P)\colon 4x-4y+2z-7=0$ và $(Q)\colon 2x-2y+z+4=0$.

Lấy $M(0;0;-4)\in(Q)$ và $\mathrm{d}(M,(P))=\dfrac{5}{2}$.

Vậy $V=\dfrac{125}{8}$.

Chọn đáp án D .... □

CÂU 7. Cho hai điểm $A(2;2;-2)$ và $B(3;-1;0)$. Đường thẳng AB cắt mặt phẳng $(P)\colon x+y-z+2=0$ tại điểm I. Tỉ số $\dfrac{IA}{IB}$ bằng

A 2. **B** 4. **C** 6. **D** 3.

Lời giải.

Ta có $\dfrac{IA}{IB}=\dfrac{d(A,(P))}{d(B,(P))}=\dfrac{8}{\sqrt{3}}:\dfrac{4}{\sqrt{3}}=2$.

Chọn đáp án A .... □

CÂU 8. Cho hai mặt phẳng $(P)\colon x+y-z+1=0$ và $(Q)\colon x-y+z-5=0$. Có bao nhiêu điểm M trên trục Oy thỏa mãn M cách đều hai mặt phẳng (P) và (Q)?

A 0. **B** 1. **C** 2. **D** 3.

Lời giải.

Vì $M\in Oy$ nên $M(0;y;0)$.

Ta có $\mathrm{d}(M;(P))=\dfrac{|y+1|}{\sqrt{3}}$ và $\mathrm{d}(M;(Q))=\dfrac{|-y-5|}{\sqrt{3}}$.

Theo giả thiết $\mathrm{d}(M;(P))=\mathrm{d}(M;(Q))\Leftrightarrow |y+1|=|-y-5|\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y+1=-y-5\\ y+1=y=5\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=-3\\ 0y=4\,(\text{vô nghiệm})\end{array}\right.$

$\Rightarrow M(0;-3;0)$.

Vậy có 1 điểm M thỏa mãn bài.

Chọn đáp án B .... □

CÂU 9. Cho điểm $A(1;2;3)$ và mặt phẳng $(P)\colon x+y+z-2=0$. Mặt phẳng (Q) song song với mặt phẳng (P) và (Q) cách điểm A một khoảng bằng $3\sqrt{3}$. Phương trình mặt phẳng (Q) là

A $x+y+z+3=0$ và $x+y+z-3=0$.
B $x+y+z+3=0$ và $x+y+z+15=0$.
C $x+y+z+3=0$ và $x+y+z-15=0$.
D $x+y+z+3=0$ và $x+y-z-15=0$.

Lời giải.

Do $(Q)\parallel(P)\Rightarrow(Q)\colon x+y+z+d=0,\quad d\neq-2$.

Mà $d\left(A,(Q)\right)=3\sqrt{3}\Leftrightarrow|6+d|=9\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}d=3\\d=-15.\end{array}\right.$

Vậy $(Q_1)\colon x+y+z+3=0$ và $(Q_2)\colon x+y+z-15=0$.

Chọn đáp án C .... □

CÂU 10. Cho mặt phẳng $(P)\colon x+2y+z-4=0$ và điểm $D(1;0;3)$. Mặt phẳng (Q) song song với (P) và cách D một khoảng bằng $\sqrt{6}$ có phương trình là

A $\left[\begin{array}{l}x+2y-z-10=0\\x+2y-z+2=0\end{array}\right.$.
B $x+2y+z+2=0$.
C $\left[\begin{array}{l}x+2y+z+2=0\\x+2y+z-10=0\end{array}\right.$.
D $x+2y+z-10=0$.

Lời giải.

Vì $(Q)\parallel(P)$ nên (Q) có phương trình dạng $(Q)\colon x+2y+z+D=0$ $(D\neq-4)$.

Lại có $\mathrm{d}(D,(Q))=\sqrt{6}\Leftrightarrow\dfrac{|1+3+D|}{\sqrt{1+1+4}}=\sqrt{6}\Leftrightarrow|D+4|=6\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}D=2\\D=-10\end{array}\right.$.

Vậy $(Q)\colon x+2y+z+2=0$ hoặc $(Q)\colon x+2y+z-10=0$.

Chọn đáp án C .... □

CÂU 11. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. Biết $A(0;0;0), D(2;0;0), B(0;4;0), S(0;0;4)$. Gọi M là trung điểm của SB. Tính khoảng cách từ B đến mặt phẳng (CDM).

A $d(B,(CDM))=\sqrt{2}$.
B $d(B,(CDM))=2$.
C $d(B,(CDM))=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.
D $d(B,(CDM))=2\sqrt{2}$.

Lời giải.

Do $ABCD$ là hình chữ nhật nên $C\left(2;4;0\right)$. Và M là trung điểm SB nên $M\left(0;2;2\right)$.

Phương trình mặt phẳng (CDM) đi qua M và nhận $\vec{n}=\left[\overrightarrow{MC},\overrightarrow{MD}\right]=(-8;0;-8)$ làm vectơ pháp tuyến là $x+z-8=0$.

Khi đó $\mathrm{d}\left(B,(MCD)\right)=\dfrac{|4-8|}{\sqrt{1^2+0^2+1^2}}=2\sqrt{2}$.

Chọn đáp án D .... □

CÂU 12. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng 2. Khoảng cách giữa hai mặt phẳng $(AB'D')$ và $(BC'D)$ bằng

A $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.
B $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.
C $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
D $\sqrt{3}$.

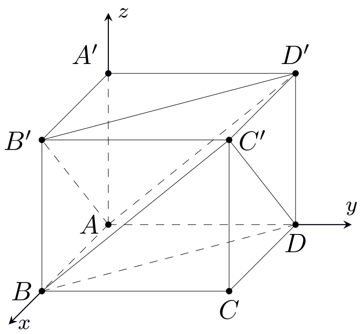
Lời giải.

Chọn hệ trục toạ độ như hình vẽ.

Ta có $A(0;0;0), B(2;0;0), C(2;2;0), D(0;2;0)$.

$A'(0;0;2), B'(2;0;2), C'(2;2;2), D'(0;2;2)$.

Mặt phẳng $(AB'D')$ qua A và có một vectơ pháp tuyến là $-\dfrac{1}{4}\left[\overrightarrow{AB'},\overrightarrow{AD'}\right]=(1;1;-1)$ nên có phương trình $x+y-z=0$.



Mặt phẳng $(BC'D)$ qua B và có một vectơ pháp tuyến là $-\dfrac{1}{4}\left[\overrightarrow{BC'},\overrightarrow{BD}\right]=(1;1;-1)$ nên có phương trình $x+y-z-2=0$.

Ta có $(AB'D')\parallel(BC'D)$ nên

$$\mathrm{d}((AB'D'),(BC'D))=\mathrm{d}(A,(BC'D))=\dfrac{|-2|}{\sqrt{1^2+1^2+t(-1)^2}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}.$$

Chọn đáp án B .... □

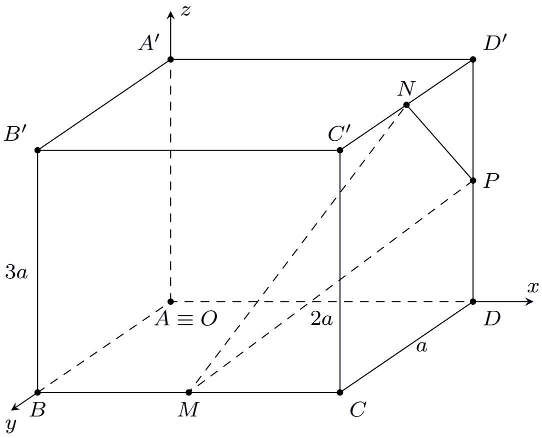
CÂU 13. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB=a$, $AD=2a$, $AA'=3a$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, $C'D'$ và DD'. Tính khoảng cách từ A đến (MNP).

A $\dfrac{15}{11}a$.
B $\dfrac{15}{22}a$.
C $\dfrac{9}{11}a$.
D $\dfrac{3}{4}a$.

Lời giải.

Gán hệ trục tọa độ như hình vẽ với độ dài đơn vị trên trục là a. Khi đó, ta tính được tọa độ các điểm như sau

$$A(0;0;0), M(1;1;0), N\left(2;\frac{1}{2};3\right), P\left(2;0;\frac{3}{2}\right).$$



Ta có $\overrightarrow{MN}=\left(1;-\frac{1}{2};3\right)$ và $\overrightarrow{MP}=\left(1;-1;\frac{3}{2}\right)$.

Chọn $\left[\overrightarrow{MN},\overrightarrow{MP}\right]=\left(\frac{9}{4};\frac{3}{2};-\frac{1}{2}\right)$ là vtpt của (MNP).

Suy ra $(MNP)\colon 9x+6y-2z-15=0$.

Do đó $\mathrm{d}(A,(MNP))=\frac{15}{11}$.

Vậy $\mathrm{d}(A,(MNP))=\frac{15a}{11}$.

Chọn đáp án A .... □

CÂU 14. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, $SA\perp(ABCD)$ và $SA=a\sqrt{3}$. Tính khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (SCD).

A $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **B** $\frac{a\sqrt{2}}{4}$. **C** $\frac{a\sqrt{2}}{3}$. **D** $\frac{a}{2}$.

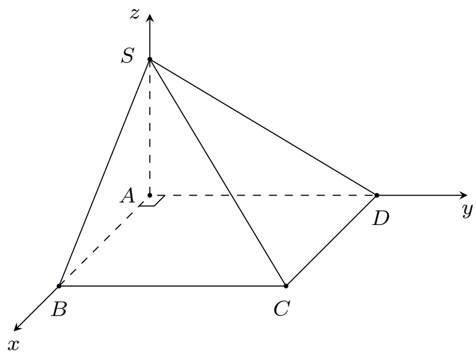
Lời giải.

Chuẩn hóa $a=1$. Với hệ trục đã chọn như hình vẽ thì $B(1;0;0)$, $S(0;0;\sqrt{3})$, $C(1;1;0)$, $D(0;1;0)$.

Ta có

a) $\overrightarrow{CD}=(-1;0;0)$, $\overrightarrow{CS}=(-1;-1;\sqrt{3})$,

b) $\overrightarrow{CB}=(0;-1;0)$; $[\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CS}]=(0;\sqrt{3};1)$



Khoảng cách từ điểm B đến (SCD) được tính theo công thức:

$$d=\frac{\left|[\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CS}]\cdot\overrightarrow{CB}\right|}{\left|[\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CS}]\right|}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Chọn đáp án A .... □

CÂU 15. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, $SD=\frac{3a}{2}$, hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng $(ABCD)$ là trung điểm của cạnh AB. Tính khoảng cách d từ A đến mặt phẳng (SBD).

A $d=\frac{a}{3}$. **B** $d=\frac{a}{6}$. **C** $d=\frac{3a}{2}$. **D** $d=\frac{2a}{3}$.

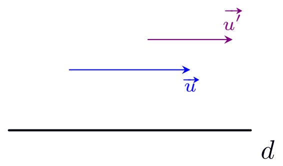
Lời giải.

Chọn đáp án D .... □

Bài 15. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG

A. LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1. Vectơ chỉ phương của đường thẳng



Định nghĩa: Vectơ chỉ phương $\vec{u}$ của đường thẳng d là những vectơ khác $\vec{0}$ và có giá song song hoặc trùng với d.

Chú ý:

- $\vec{u} \neq \vec{0}$ và có giá song song hoặc trùng với d.
- Nếu $\vec{u}$ và $\vec{u'}$ cùng là vectơ chỉ phương của d thì $\vec{u'} = k \cdot \vec{u}$ (*tọa độ tỉ lệ nhau*).

2. Phương trình tham số của đường thẳng

Công thức: Đường thẳng d đi qua điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ và nhận $\vec{u} = (u_1; u_2; u_3)$ làm vectơ chỉ phương có phương trình là

$$\boxed{\begin{cases} x = x_0 + u_1 t \\ y = y_0 + u_2 t \\ z = z_0 + u_3 t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \quad (1)}$$

Chú ý:

① Phương trình các trục tọa độ:

- $Ox\colon \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$.
- $Oy\colon \begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = 0 \end{cases}$.
- $Oz\colon \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = t \end{cases}$.

② Nếu u_1, u_2 và u_3 đều khác 0 thì (1) có thể được viết dưới dạng

$$\boxed{\frac{x - x_0}{u_1} = \frac{y - y_0}{u_2} = \frac{z - z_0}{u_3} \quad (2)}$$

(2) được gọi là phương trình chính tắc của đường thẳng d.

3. Vị trí tương đối giữa hai đường thẳng

Cho hai đường thẳng

- Δ_1 qua điểm $M(x_0; y_0; z_0)$, vectơ chỉ phương $\vec{u} = (u_1; u_2; u_3)$;
- Δ_2 qua điểm $N(x'_0; y'_0; z'_0)$, vectơ chỉ phương $\vec{v} = (v_1; v_2; v_3)$.

Trường hợp 1: Nếu $\left[\vec{u}, \vec{v}\right] = \vec{0}$ và

- $\left[\vec{u}, \overrightarrow{MN}\right] \neq \vec{0}$ thì Δ_1 song song Δ_2;
- $\left[\vec{u}, \overrightarrow{MN}\right] = \vec{0}$ thì Δ_1 trùng Δ_2.

Trường hợp 2: Nếu $\left[\vec{u}, \vec{v}\right] \neq \vec{0}$ và

- $\left[\vec{u}, \vec{v}\right] \cdot \overrightarrow{MN} \neq 0$ thì Δ_1 chéo Δ_2;
- $\left[\vec{u}, \vec{v}\right] \cdot \overrightarrow{MN} = 0$ thì Δ_1 cắt Δ_2.

B. PHÂN LOẠI, PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

1 Xác định điểm thuộc và vectơ chỉ phương của đường thẳng

Cho đường thẳng d.

① Nếu $\vec{u} \neq \vec{0}$ và có giá song song hoặc trùng với d thì $\vec{u}$ là vectơ chỉ phương của d.

② Nếu d qua hai điểm AB thì d có một vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$.

③ Nếu d vuông góc với giá của hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ không cùng phương thì d có một vectơ chỉ phương là $\vec{u} = [\vec{a}, \vec{b}]$.

④ Cho đường thẳng d: $\begin{cases} x = x_0 + u_1 t \\ y = y_0 + u_2 t \\ z = z_0 + u_3 t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$ thì

- Một vectơ chỉ phương của d là $\vec{u} = (u_1; u_2; u_3)$ (hệ số của t).
- Muốn xác định tọa độ một điểm thuộc d, ta chỉ cần cho trước giá trị cụ thể của tham số t, thay vào hệ phương trình tính x, y và z.

BÀI TẬP TỰ LUẬN

VÍ DỤ 1. Cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + 3t \\ z = 2 + t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$. Tìm một vectơ chỉ phương và hai điểm thuộc đường thẳng d.

Lời giải.

VÍ DỤ 2. Trong không gian $Oxyz$, cho hình chóp $O.ABC$ có $A(2; 0; 0)$, $B(0; 4; 0)$ và $C(0; 0; 7)$.

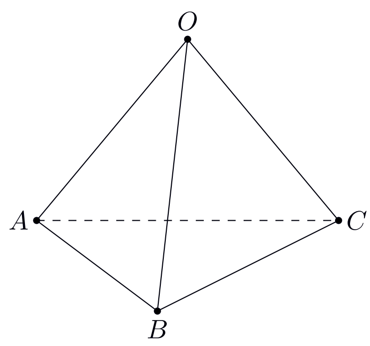
a) Tìm tọa độ một vectơ chỉ phương của đường thẳng AB, AC.

b) Vectơ $\vec{v} = (-1; 2; 0)$ có là vectơ chỉ phương của đường thẳng AB không?

Lời giải.

a) Ta có $\overrightarrow{AB} = (-2; 4; 0)$ là một vectơ chỉ phương của đường thẳng AB; $\overrightarrow{AC} = (-2; 0; 7)$ là một vectơ chỉ phương của đường thẳng AC.

b) Vì $\vec{v} = (-1; 2; 0) = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ nên $\vec{v}$ là một vectơ chỉ phương của đường thẳng AB.



Hình 2

VÍ DỤ 3. Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng (P): $2x + y - z - 1 = 0$ và (Q): $x - 2y + z - 5 = 0$. Gọi Δ là giao tuyến của (P) và (Q). Tìm một điểm thuộc Δ và một vectơ chỉ phương của Δ.

Lời giải.

Mặt phẳng (P) và (Q) có VTPT lần lượt là $\vec{n}_P = (2; 1; -1)$ và $\vec{n}_Q = (1; -2; 1)$.
Vậy vectơ chỉ phương của đường thẳng d là giao tuyến của (P) và (Q) là $\vec{u} = [\vec{n}_P, \vec{n}_Q] = (1; 3; 5)$.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

CÂU 1. Cho đường thẳng d: $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -t \\ z = 4 + 5t \end{cases}$. Đường thẳng d có một vectơ chỉ phương là

A. $\vec{u_2} = (2; -1; 5)$. B. $\vec{u_4} = (1; -1; 4)$. C. $\vec{u_3} = (1; -1; 5)$. D. $\vec{u_1} = (1; 0; 4)$.

Lời giải.

Đường thẳng d có một vectơ chỉ phương là $\vec{u} = (2; -1; 5)$.
Chọn đáp án A .... □

CÂU 2. Cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x-2}{-1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z}{1}$. Đường thẳng d có một vectơ chỉ phương là

Ⓐ $\vec{u}=(-1;2;1)$. Ⓑ $\vec{u}=(2;1;0)$. Ⓒ $\vec{u}=(-1;2;0)$. Ⓓ $\vec{u}=(2;1;1)$.

Lời giải.

Cần nhớ: Đường thẳng $d\colon \dfrac{x-x_0}{a}=\dfrac{y-y_0}{b}=\dfrac{z-z_0}{c}$ có một VTCP là $\vec{u}=(a;b;c)$ và đi qua điểm $M(x_0;y_0;z_0)$.

Đường thẳng $d\colon \dfrac{x-2}{-1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z}{1}$ có một vectơ chỉ phương là $\vec{u}=(-1;2;1)$.

Chọn đáp án (A) .... □

CÂU 3. Cho đường thẳng $d:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{z}{2}$. Điểm nào trong các điểm dưới đây nằm trên đường thẳng d?

Ⓐ $P(5;2;5)$. Ⓑ $Q(1;0;0)$. Ⓒ $M(3;2;2)$. Ⓓ $N(1;-1;2)$.

Lời giải.

Chọn đáp án (C) .... □

CÂU 4. Cho đường thẳng $d:\begin{cases}x=1+2t\\y=2+3t\\z=5-t\end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$. Đường thẳng d **không** đi qua điểm nào sau đây?

Ⓐ $M(1;2;5)$. Ⓑ $N(2;3;-1)$. Ⓒ $P(3;5;4)$. Ⓓ $Q(-1;-1;6)$.

Lời giải.

Chọn đáp án (B) .... □

CÂU 5. Cho hai điểm $A(2;-1;4)$ và $B(-1;3;2)$. Đường thẳng AB có một vectơ chỉ phương là

Ⓐ $\vec{u}_1=(1;2;2)$. Ⓑ $\vec{u}_3=(1;2;6)$. Ⓒ $\vec{u}_2=(3;-4;2)$. Ⓓ $\vec{u}_4=(1;-4;2)$.

Lời giải.

Đường thẳng AB nhận $\overrightarrow{AB}=(-3;4;-2)$ làm một vectơ chỉ phương.
Do đó $\vec{u}_2=(3;-4;2)=-\overrightarrow{AB}$ cũng là một vectơ chỉ phương của AB.
Chọn đáp án (C) .... □

CÂU 6. Cho tam giác ABC với $A(1;0;-2)$, $B(2;-3;-4)$, $C(3;0;-3)$. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. vectơ nào sau đây là một vectơ chỉ phương của đường thẳng OG?

Ⓐ $(-2;1;3)$. Ⓑ $(3;-2;1)$. Ⓒ $(2;1;3)$. Ⓓ $(-1;-3;2)$.

Lời giải.

G là trọng tâm tam giác $ABC \Rightarrow G(2;-1;-3)\Rightarrow \overrightarrow{OG}=(2;-1;-3)$.
Đường thẳng OG nhận $\vec{u}=-\overrightarrow{OG}=(-2;1;3)$ làm một vectơ chỉ phương.
Chọn đáp án (A) .... □

CÂU 7. Cho đường thẳng d song song với trục Oy. Đường thẳng d có một vectơ chỉ phương là

Ⓐ $\vec{u}_4=(2019;0;2019)$. Ⓑ $\vec{u}_1=(2019;0;0)$. Ⓒ $\vec{u}_2=(0;2019;0)$. Ⓓ $\vec{u}_3=(0;0;2019)$.

Lời giải.

Trục Oy có vectơ chỉ phương $\vec{j}=(0;1;0)$, mà $d\parallel Oy$ nên d có một vectơ chỉ phương là

$$\vec{u}_2=2019\vec{j}=(0;2019;0)$$

Chọn đáp án (C) .... □

CÂU 8. Cho đường thẳng Δ vuông góc với mặt phẳng $(\alpha)\colon x+2z+3=0$. Một vectơ chỉ phương của Δ là

Ⓐ $\vec{v}=(1;2;3)$. Ⓑ $\vec{a}=(1;0;2)$. Ⓒ $\vec{u}=(2;0;-1)$. Ⓓ $\vec{b}=(2;-1;0)$.

Lời giải.

Ta có Δ vuông góc với $(\alpha)\Rightarrow \vec{a}=(1;0;2)$ là một vectơ chỉ phương của Δ.
Chọn đáp án (B) .... □

CÂU 9. vectơ chỉ phương của đường thẳng vuông góc với mặt phẳng đi qua ba điểm $A(1;2;4)$, $B(-2;3;5)$, $C(-9;7;6)$ có toạ độ là

Ⓐ $(3;4;-5)$. Ⓑ $(3;-4;5)$. Ⓒ $(-3;4;-5)$. Ⓓ $(3;4;5)$.

Lời giải.

Gọi (P) là mặt phẳng đi qua ba điểm A, B, C.
Gọi $\vec{a}$ là vectơ chỉ phương của đường thẳng d là đường thẳng vuông góc với (P).
Ta có $\overrightarrow{AB}=(-3;1;1)$, $\overrightarrow{AC}=(-10;5;2)$.
Vì d vuông góc với (P) nên d có vectơ chỉ phương là $\vec{a}=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(-3;-4;-5)=-1(3;4;5)$.

Chọn đáp án (D) .... □

CÂU 10. Cho hai mặt phẳng $(P): 3x-2y+2z-5=0$, $(Q): 4x+5y-z+1=0$. Các điểm A, B phân biệt thuộc giao tuyến của hai mặt phẳng (P) và (Q). Khi đó $\overrightarrow{AB}$ cùng phương với vectơ nào sau đây?

A. $\vec{u}=(8;-11;-23)$. B. $\vec{k}=(4;5;-1)$. C. $\vec{w}=(3;-2;2)$. D. $\vec{v}=(-8;11;-23)$.

Lời giải.

Ta có $\vec{n}=(3;-2;2)$ và $\vec{n'}=(4;5;-1)$ lần lượt là các vectơ pháp tuyến của các mặt phẳng $(P),(Q)$. Do đó $\left[\vec{n},\vec{n'}\right]=(-8;11;23)$ là một vectơ chỉ phương của giao tuyến của (P) và (Q).

Từ đó suy ra $\overrightarrow{AB}$ cùng phương với vectơ $\vec{u}=(8;-11;-23)$.

Chọn đáp án A ....□

2 Viết phương trình đường thẳng d khi biết vài yếu tố liên quan

- **Phương pháp chung:** Ta cần xác định vectơ chỉ phương $\vec{u}$ và một điểm M thuộc đường thẳng.
- **Một số kiểu xác định vectơ $\vec{u}$ thường gặp:**

① d qua hai điểm A, B thì $\vec{u}=\overrightarrow{AB}=(x_B-x_A;y_B-y_A;z_B-z_A)$.

② d song song với Δ thì $\vec{u}=\overrightarrow{u_\Delta}$.

③ d vuông góc với (P) thì $\vec{u}=\vec{n}_P$.

④ d vuông góc với giá của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ (không cùng phương) thì $\vec{u}=[\vec{a},\vec{b}]$.

BÀI TẬP TỰ LUẬN

VÍ DỤ 1. Lập phương trình chính tắc của đường thẳng d trong mỗi trường hợp sau

a) d đi qua điểm $A(4;-2;5)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{a}=(7;3;-9)$.

b) d đi qua hai điểm $M(0;0;1)$, $N(3;3;6)$.

c) d có phương trình tham số là $\begin{cases}x=8+5t\\y=7+4t\\z=11+9t.\end{cases}$

Lời giải.

a) Đường thẳng d đi qua điểm $A(4;-2;5)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{a}=(7;3;-9)$ nên d có phương trình chính tắc là $\dfrac{x-4}{7}=\dfrac{y+2}{3}=\dfrac{z-5}{-9}$.

b) Đường thẳng d đi qua hai điểm $M(0;0;1)$, $N(3;3;6)$ nên d có vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{MN}=(3;3;5)$.
Suy ra phương trình chính tắc của đường thẳng d là $\dfrac{x}{3}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z-1}{5}$.

c) Đường thẳng d có phương trình tham số là $\begin{cases}x=8+5t\\y=7+4t\\z=11+9t\end{cases}$, suy ra d có phương trình chính tắc là $\dfrac{x-8}{5}=\dfrac{y-7}{4}=\dfrac{z-11}{9}$.

VÍ DỤ 2.
Trong một khu du lịch, người ta cho du khách trải nghiệm thiên nhiên bằng cách đu theo đường trượt zipline từ vị trí A cao 15 m của tháp 1 này sang vị trí B cao 10 m của tháp 2 trong khung cảnh tuyệt đẹp xung quanh. Với hệ trucuc toạ độ $Oxyz$ cho trước (đơn vị: mét), toạ độ của A và B lần lượt là $(3;2,5;15)$ và $(21;27,5;10)$.

a) Viết phương trình đường thẳng chứa đường trượt zipline này.

b) Xác định toạ độ của du khách khi ở độ cao 12 mét.

VÍ DỤ 3. Trong không gian $Oxyz$, Lập phương trình tham số và phương trình chính tắc (nếu có) của đường thẳng d trong các trường hợp sau:

a) d đi qua điểm M và song song với đường thẳng Δ: $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z}{-1}$

b) d qua điểm $M(3;2;-1)$ và vuông góc với mặt phẳng $(P)\colon x+z-2=0$.

c) d đi qua điểm $M(1;2;1)$, đồng thời vuông góc với cả hai đường thẳng $\Delta_1\colon \dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z-1}{1}$ và $\Delta_2\colon \dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z-1}{-1}$.

Lời giải.

a) Đường thẳng Δ có vectơ chỉ phương là $\vec{u}=(2;1;-1)$.
Đường thẳng d qua $M(2;1;0)$ và song song với đường thẳng Δ cũng nhận $\vec{u}=(2;1;-1)$ làm vectơ chỉ phương của nó.
Vậy phương trình đường thẳng cần tìm là

$$\frac{x-2}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{-1}\Leftrightarrow\frac{x-2}{4}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{-2}.$$

b) Mặt phẳng $(P)\colon x+z-2=0$ có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_{(P)}=(1;0;1)$.
Đường thẳng Δ đi qua M và vuông góc với (P) nhận $\vec{n}_{(P)}$ làm vectơ chỉ phương có phương trình là

$$\begin{cases}x=3+t\\y=2\\z=-1+t.\end{cases}$$

c) Đường thẳng Δ_1 và Δ_2 có vectơ chỉ phương là $\vec{u}_1=(1;-1;1)$ và $\vec{u}_2=(1;2;-1)$.
Vì d vuông góc với cả hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 nên d có vectơ chỉ phương là $\vec{u}=[\vec{u}_1,\vec{u}_2]=(-1;2;3)$.
Vậy phương trình đường thẳng d là $\begin{cases}x=1-t\\y=2+2t\\z=1+3t\end{cases}$.

VÍ DỤ 4. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;-2;0)$, mặt phẳng $(P)\colon 2x-3y+z+5=0$ và đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z+1}{1}$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua A, cắt d và song song với mặt phẳng (P).

Lời giải.

Mặt phẳng (P) có VTPT $\vec{n}=(2;-3;1)$.

Gọi M là giao điểm của Δ và d: $\begin{cases}x=1+2t\\y=-t\\z=-1+t\end{cases}$ là $M(1+2t;-t;-1+t)$.

Đường thẳng Δ nhận $\overrightarrow{AM}=(2t;-t+2;t-1)$ làm VTCP.
Đường thẳng Δ song song với mặt phẳng (P) nên

$$\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=0\Leftrightarrow 2t\cdot2+(-t+2)\cdot(-3)+(t-1)\cdot1=0\Leftrightarrow t=\frac{7}{8}.$$

Suy ra $\overrightarrow{AM}=\left(\dfrac{7}{4};\dfrac{9}{8};-\dfrac{1}{8}\right)=\dfrac{1}{8}(14;9;-1)$.

Đường thẳng Δ qua A và nhận $\overrightarrow{AM}=(14;9;-1)$ làm VTCP nên phương trình $\Delta\colon\begin{cases}x=1+14t\\y=-2+9t\\z=-t.\end{cases}$

VÍ DỤ 5. Trong Không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1\colon \dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-2}{-1}$ và $d_2\colon\begin{cases}x=t\\y=3\\z=-2+t\end{cases}$. Viết phương trình đường vuông góc chung của hai đường thẳng d_1,d_2.

Lời giải.

Gọi d là đường thẳng cần tìm. Gọi $A=d\cap d_1, B=d\cap d_2$
$A\in d_1\Rightarrow A(2+a;1-a;2-a)$
$B\in d_2\Rightarrow B(b;3;-2+b)$
$\overrightarrow{AB}=(-a+b-2;a+2;a+b-4)$
d_1 có vectơ chỉ phương $\vec{a}_1=(1;-1;-1)$, d_2 có vectơ chỉ phương $\vec{a}_2=(1;0;1)$

$\begin{cases}d\perp d_1\\d\perp d_2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\overrightarrow{AB}\perp\vec{a}_1\\\overrightarrow{AB}\perp\vec{a}_2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\overrightarrow{AB}\cdot\vec{a}_1=0\\\overrightarrow{AB}\cdot\vec{a}_2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=0\\b=3\end{cases}\Rightarrow A(2;1;2);B(3;3;1)$

d đi qua điểm $A(2;1;2)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{a}_d = \overrightarrow{AB} = (1;2;-1)$

Vậy phương trình của d là $\begin{cases} x = 2+t \\ y = 1+2t \\ z = 2-t \end{cases}$

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

CÂU 1. Cho đường thẳng Δ đi qua điểm $M(2;0;-1)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{a} = (4;-6;2)$. Phương trình tham số của đường thẳng Δ là

A $\begin{cases} x = -2+2t \\ y = -3t \\ z = 1+t \end{cases}$. **B** $\begin{cases} x = 2+2t \\ y = -3t \\ z = -1+t \end{cases}$. **C** $\begin{cases} x = -2+4t \\ y = -6t \\ z = 1+2t \end{cases}$. **D** $\begin{cases} x = 4+2t \\ y = -3t \\ z = 2+t \end{cases}$.

Lời giải.

Chọn đáp án D .... □

CÂU 2. Cho hai điểm $A(2;-1;3), B(3;2;-1)$. Phương trình nào sau đây là phương trình đường thẳng AB?

A $\begin{cases} x = 1+2t \\ y = 3-t \\ z = -4+3t \end{cases}$. **B** $\begin{cases} x = 2+t \\ y = -1+3t \\ z = 3-4t \end{cases}$. **C** $\begin{cases} x = 2+t \\ y = -1+t \\ z = 3-4t \end{cases}$. **D** $\begin{cases} x = 1+2t \\ y = 1-t \\ z = -4+3t \end{cases}$.

Lời giải.

Chọn đáp án B .... □

CÂU 3. Cho đường thẳng $\Delta : \dfrac{2x-1}{2} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z+1}{-1}$, điểm $A(2;-3;4)$. Đường thẳng qua A và song song với Δ có phương trình là

A $\begin{cases} x = 2+t \\ y = -3+t \\ z = 4-t \end{cases}$. **B** $\begin{cases} x = 2-2t \\ y = -3-t \\ z = 4+t \end{cases}$. **C** $\begin{cases} x = 2+2t \\ y = -3+t \\ z = 4+t \end{cases}$. **D** $\begin{cases} x = 2+2t \\ y = 1-3t \\ z = -1+4t \end{cases}$.

Lời giải.

Chọn đáp án B .... □

CÂU 4. Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm $N(2;-3;-5)$ và vuông góc với mặt phẳng $(P): 2x-3y-z+2=0$.

A $\dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y+3}{-3} = \dfrac{z+5}{-1}$. **B** $\dfrac{x+2}{2} = \dfrac{y-3}{-3} = \dfrac{z-5}{-1}$. **C** $\dfrac{x+2}{2} = \dfrac{y-3}{-3} = \dfrac{z-1}{-5}$. **D** $\dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y+3}{-3} = \dfrac{z+1}{-5}$.

Lời giải.

Chọn đáp án A .... □

CÂU 5. Cho tam giác ABC có $A(3;2;-4), B(4;1;1)$ và $C(2;6;-3)$. Viết phương trình đường thẳng d đi qua trọng tâm G của tam giác ABC và vuông góc với mặt phẳng (ABC).

A $d: \dfrac{x-3}{3} = \dfrac{y-3}{2} = \dfrac{z+2}{-1}$. **B** $d: \dfrac{x+12}{3} = \dfrac{y+7}{2} = \dfrac{z-3}{-1}$.

C $d: \dfrac{x-3}{7} = \dfrac{y-3}{2} = \dfrac{z+2}{-1}$. **D** $d: \dfrac{x+7}{3} = \dfrac{y+3}{2} = \dfrac{z-2}{-1}$.

Lời giải.

Chọn đáp án C .... □

CÂU 6. Cho hai điểm $A(1;-1;1)$ và $B(-1;2;3)$ và đường thẳng Δ: $\dfrac{x+1}{-2} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z-3}{3}$. Phương trình đường thẳng đi qua điểm A, đồng thời vuông góc với hai đường thẳng AB và Δ là

A $\dfrac{x+1}{7} = \dfrac{y-1}{-2} = \dfrac{z+1}{4}$. **B** $\dfrac{x+1}{7} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z+1}{4}$. **C** $\dfrac{x-7}{1} = \dfrac{y-2}{-1} = \dfrac{z-4}{1}$. **D** $\dfrac{x-1}{7} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z-1}{4}$.

Lời giải.

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (-2;3;2)$.

Đường thẳng Δ có vectơ chỉ phương là $\vec{u}_\Delta = (-2;1;3) \Rightarrow \left[\overrightarrow{AB}, \vec{u}_\Delta\right] = (7;2;4)$.

Đường thẳng đi qua điểm A, đồng thời vuông góc với hai đường thẳng AB và Δ có vectơ chỉ phương $\left[\overrightarrow{AB}, \vec{u}_\Delta\right]$ có phương trình là $\dfrac{x-1}{7} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z-1}{4}$.

Chọn đáp án D .... □

CÂU 7. Cho điểm $A(1;2;3)$ và đường thẳng $d: \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z-3}{-2}$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua điểm A, vuông góc với đường thẳng d và cắt trục hoành. Tìm một vectơ chỉ phương $\vec{u}$ của đường thẳng Δ.

A $\vec{u} = (0;2;1)$. **B** $\vec{u} = (1;0;1)$. **C** $\vec{u} = (1;-2;0)$. **D** $\vec{u} = (2;2;3)$.

Lời giải.

Chọn đáp án D ....

CÂU 8. Cho hai đường thẳng $d_1 : \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z}{-1}$ và $d_2 : \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z+3}{2}$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm $A(1;0;2)$, cắt d_1 và vuông góc với d_2.

A $\dfrac{x-1}{-2} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z-2}{4}$. B $\dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y-3}{3} = \dfrac{z+2}{-4}$. C $\dfrac{x-5}{-2} = \dfrac{y-6}{-3} = \dfrac{z-2}{4}$. D $\dfrac{x-1}{-2} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z-2}{-4}$.

Lời giải.

Gọi $B(1+t;-1+2t;-t) \in d_1$. Do đó $\overrightarrow{AB} = (t;2t-1;-t-2)$.
Xét $\overrightarrow{AB}.\vec{u}_{d_2} = 0 \Longleftrightarrow 1.t + 2(2t-1) + 2(-t-2) = 0 \Longleftrightarrow t = 2$.
Ta có $\overrightarrow{AB} = (2;3;-4)$ chính là vec-tơ chỉ phương của đường thẳng Δ.

Vậy phương trình đường thẳng Δ là $\begin{cases} x = 1+2t \\ y = 3t \\ z = 2-4t \end{cases}$.

Với $t = 1$ thì đường thẳng Δ đi qua điểm $C(3;3;-2)$.
Vậy phương trình đường thẳng Δ là $\dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y-3}{3} = \dfrac{z+2}{-4}$.

Chọn đáp án B ....

CÂU 9. Cho đường thẳng Δ đi qua $M(1;2;2)$, song song với mặt phẳng (P): $x - y + z + 3 = 0$ đồng thời cắt đường thẳng d: $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z-3}{1}$ có phương trình là

A $\begin{cases} x = 1-t \\ y = 2-t \\ z = 2. \end{cases}$ B $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2-t \\ z = 2-t. \end{cases}$ C $\begin{cases} x = 1-t \\ y = 2+t \\ z = 2. \end{cases}$ D $\begin{cases} x = -1+t \\ y = -1+2t \\ z = 2t. \end{cases}$

Lời giải.

Đường thẳng d có phương trình tham số là $\begin{cases} x = 1+t \\ y = 2+t \\ z = 3+t. \end{cases}$

Mặt phẳng (P) có một VTPT là $\vec{n}_P = (1;-1;1)$.
Giả sử Δ cắt d tại $A \Rightarrow A(1+t;2+t;3+t)$ và $\overrightarrow{MA} = (t;t;1+t)$.
Vì Δ song song (P) nên $\overrightarrow{MA} \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow t = -1 \Rightarrow \overrightarrow{MA} = (-1;-1;0)$.
Chọn một VTCP của Δ là $\vec{u}_\Delta = \overrightarrow{MA} = (-1;-1;0)$.

Đường thẳng Δ có phương trình tham số là $\begin{cases} x = 1-t \\ y = 2-t \\ z = 2. \end{cases}$

Chọn đáp án A ....

CÂU 10. Cho đường thẳng $d : x = y = z$. Viết phương trình đường thẳng d' là hình chiếu vuông góc của d lên mặt phẳng tọa độ (Oyz).

A $\begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = 2t \end{cases}$. B $\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 2t \end{cases}$. C $\begin{cases} x = 0 \\ y = 2+t \\ z = 1+t \end{cases}$. D $\begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = t \end{cases}$.

Lời giải.

Chọn đáp án D ....

CÂU 11. Cho đường thẳng $d : \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z-2}{1}$, mặt phẳng $(P) : x + y - 2z + 5 = 0$ và điểm $A(1;-1;2)$. Viết phương trình đường thẳng Δ cắt d và (P) lần lượt tại M và N sao cho A là trung điểm của đoạn thẳng MN.

A $\Delta : \dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y-2}{3} = \dfrac{z-4}{2}$. B $\Delta : \dfrac{x-1}{6} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z-2}{2}$.

C $\Delta : \dfrac{x+5}{6} = \dfrac{y+2}{1} = \dfrac{z}{2}$. D $\Delta : \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y+4}{3} = \dfrac{z-3}{2}$.

Lời giải.

Ta loại ngay được 1 phương án vì điểm A không thuộc đường thẳng này.

Đường thẳng d có phương trình tham số $d : \begin{cases} x = -1+2t \\ y = t \\ z = 2+t \end{cases}$

$M \in d \Rightarrow M(-1+2t;t;2+t), A$ là trung điểm $MN \Rightarrow N(3-2t;-2-t;2-t)$
$N \in (P) \Rightarrow 3 - 2t - 2 - t - 2(2-t) + 5 = 0 \Leftrightarrow t = 2 \Rightarrow N(-1;-4;0) \Rightarrow \overrightarrow{NA} = (2;3;2)$. $\Rightarrow$ Loại được hai phương án không

thỏa mãn điều kiện này.
Còn duy nhất 1 phương án cần chọn.
Chọn đáp án A .... □

CÂU 12. Trong không gian $Oxyz$, đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau $d_1\colon \dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-3}{3}=\dfrac{z+4}{-5}$ và $d_2\colon \dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-4}{-2}=\dfrac{z-4}{-1}$ có phương trình là

A $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y+2}{2}$. **B** $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z-3}{4}$. **C** $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{1}$. **D** $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z-3}{-1}$.

Lời giải.

Giả sử $M\in d_1$, $N\in d_2$ và MN là đoạn vuông góc chung.
Ta có $M(2+2t;3+3t;-4-5t)$ $N(-1+3s;4-2s;4-s)$, $\overrightarrow{MN}=(3s-2t-3;-2s-3t+1;-s+5t+8)$.
vectơ chỉ phương của d_1, d_2 lần lượt là $\vec{u}_1=(2;3;-5)$, $\vec{u}_2=(3;-2;-1)$.
Ta có MN là đoạn vuông góc chung của d_1 và d_2 khi và chỉ khi

$$\begin{cases}\overrightarrow{MN}\cdot\vec{u}_1=0\\ \overrightarrow{MN}\cdot\vec{u}_2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}5s-38t-43=0\\ 14s-5t-19=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=-1\\ s=1.\end{cases}$$

Suy ra $M(0;0;1)$, $\overrightarrow{MN}=(2;2;2)$. Ta có phương trình của đường vuông góc chung MN là

$$\frac{x}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{1}.$$

Chọn đáp án C .... □

3 Vị trí tương đối của hai đường thẳng

Cho d qua điểm M và có vectơ chỉ phương $\vec{u}$; d' qua điểm N và có vectơ chỉ phương $\vec{v}$.

① Nếu $\vec{u}$ cùng phương $\vec{v}$ ($\vec{u}=k\vec{v}$) và $M\notin d'$ thì $d\parallel d'$.

② Nếu $\vec{u}$ cùng phương $\vec{v}$ ($\vec{u}=k\vec{v}$) và $M\in d'$ thì d trùng với d'.

③ Nếu $[\vec{u},\vec{v}]\cdot\overrightarrow{MN}\neq 0$ thì d và d' chéo nhau.

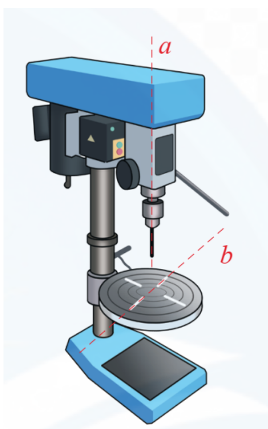
④ Nếu $[\vec{u},\vec{v}]\cdot\overrightarrow{MN}=0$ thì d và d' cắt nhau.

⑤ Nếu $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$ thì d và d' vuông góc nhau.

BÀI TẬP TỰ LUẬN

VÍ DỤ 1.
Trên phần mềm mô phỏng 3D một máy khoan trong không gian $Oxyz$, cho biết phương trình trục a của mũi khoan và một đường rãnh b trên vật cần khoan (tham khảo hình vẽ bên) lần lượt là

$$a\colon\begin{cases}x=1\\ y=2\\ z=3t\end{cases}\quad\text{và } b\colon\begin{cases}x=1+4t'\\ y=2+2t'\\ z=6.\end{cases}$$



a) Chứng minh a, b vuông góc và cắt nhau.

b) Tìm giao điểm của a và b.

Lời giải.

a) a có vectơ chỉ phương $\vec{m}=(0;0;3)$ và b có vectơ chỉ phương $\vec{n}=(4;2;0)$.
Ta có $\vec{m}\cdot\vec{n}=0\cdot4+0\cdot2+3\cdot0=0$.
Do đó $\vec{m}\perp\vec{n}$ hay $a\perp b$.

b) Gọi M là giao điểm của a và b, ta có $\begin{cases} M \in a \\ M \in b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M(1;2;3t) \\ M(1+4t';2+2t';6) \end{cases}$. Khi đó ta có

$$\begin{cases} 1 = 1+4t' \\ 2 = 2+2t' \\ 3t = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t' = 0 \end{cases} \Rightarrow M(1;2;6).$$

Vậy giao điểm của a và b là $M(1;2;6)$.

VÍ DỤ 1. Trong khôn gian $Oxyz$, xét vị trí tương đối giữa hai đường thẳng d và d' trong mỗi trường hợp sau. Nếu chúng cắt nhau, hãy xác định tọa độ giao điểm.

a) $d\colon \begin{cases} x = 2+3t \\ y = 3+2t \\ z = 4+2t \end{cases}$ và $d'\colon \begin{cases} x = 8+9t' \\ y = 7+6t' \\ z = 8+6t'; \end{cases}$

b) $d\colon \dfrac{x}{4} = \dfrac{y-3}{3} = \dfrac{z-1}{2}$ và $d'\colon \dfrac{x-5}{8} = \dfrac{y-5}{6} = \dfrac{z-3}{4}$;

c) $d\colon \begin{cases} x = 2 \\ y = 3+2t \\ z = 1-t \end{cases}$ và $d'\colon \dfrac{x-4}{3} = \dfrac{y-1}{4} = \dfrac{z-5}{5}$;

d) $d\colon \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y-3}{4} = \dfrac{z-2}{3}$ và $d'\colon \begin{cases} x = 5 \\ y = 7+2t \\ z = 5-t. \end{cases}$

Lời giải.

a) Đường thẳng d đi qua điểm $M(2;3;4)$ và nhận $\vec{a} = (3;2;2)$ làm vectơ chỉ phương.
Đường thẳng d' đi qua điểm $M'(8;7;8)$ và nhận $\vec{a'} = (9;6;6)$ làm vectơ chỉ phương.
Ta có $\overrightarrow{MM'} = (6;4;4)$, $\vec{a'} = 3\vec{a} = \dfrac{3}{2}\overrightarrow{MM'}$, suy ra ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{a'}$, $\overrightarrow{MM'}$ cùng phương. Do đó, $d \equiv d'$.

b) Đường thẳng d đi qua điểm $M(0;3;1)$ và nhận $\vec{a} = (4;3;2)$ làm vectơ chỉ phương.
Đường thẳng d' đi qua điểm $M'(5;5;3)$ và nhận $\vec{a'} = (8;6;4)$ làm vectơ chỉ phương.
Ta có $\overrightarrow{MM'} = (5;2;2)$, $\vec{a'} = 2\vec{a}$, suy ra $\vec{a}$, $\vec{a'}$ cùng phương. Mặt khác, $\dfrac{4}{5} \neq \dfrac{3}{2}$, suy ra $\vec{a}$, $\overrightarrow{MM'}$ không cùng phương.
Do đó $d \parallel d'$.

c) Đường thẳng d đi qua điểm $M(2;3;1)$ và nhận $\vec{a} = (0;2;-1)$ làm vectơ chỉ phương.
Đường thẳng d' đi qua điểm $M'(4;1;5)$ và nhận $\vec{a'} = (3;4;5)$ làm vectơ chỉ phương.
Ta có $\overrightarrow{MM'} = (2;-2;4)$, $\left[\vec{a},\vec{a'}\right] = (14;-3;-6) \neq \vec{0}$, $\left[\vec{a},\vec{a'}\right] \cdot \overrightarrow{MM'} = 10 \neq 0$, suy ra d và d' chéo nhau. item Đường thẳng d đi qua điểm $M(2;3;2)$ và nhận $\vec{a} = (3;4;3)$ làm vectơ chỉ phương.
Đường thẳng d' đi qua điểm $M'(5;7;5)$ và nhận $\vec{a'} = (0;2;-1)$ làm vectơ chỉ phương.
Ta có $\overrightarrow{MM'} = (3;4;3)$, $\left[\vec{a},\vec{a'}\right] = (-10;3;6) \neq \vec{0}$, $\left[\vec{a},\vec{a'}\right] \cdot \overrightarrow{MM'} = 0 \neq 0$, suy ra d và d' cắt nhau.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

CÂU 1. Cho hai đường thẳng $d\colon \begin{cases} x = 1+t \\ y = 2t \\ z = 2-t \end{cases}$ và $d'\colon \begin{cases} x = 2+2t' \\ y = 3+4t' \\ z = 5-2t'. \end{cases}$ Mệnh đề nào sau đây đúng?

(A) d và d' chéo nhau. (B) d trùng d'. (C) d song song d'. (D) d cắt d'.

Lời giải.

d đi qua $A = (1;0;2)$, có vectơ chỉ phương $\vec{a} = (1;2;-1)$.
d' đi qua $B = (2;3;5)$, có vectơ chỉ phương $\vec{a'} = (2;4;-2)$.
Ta có $\vec{a}$ cùng phương $\vec{a'}$ nên loại B. D.
$A \notin d'$ nên d song song d'.
Chọn đáp án C .... □

CÂU 2. Cho hai đường thẳng $d_1\colon \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+3}{-2}=\dfrac{z+3}{-3}$ và $d_2\colon \begin{cases}x=3t\\y=-1+2t\\z=0\end{cases}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A d_1 cắt và không vuông góc với d_2.
B d_1 cắt và vuông góc với d_2.
C d_1 song song d_2.
D d_1 chéo d_2.

Lời giải.

d_1 đi qua $A=(1;-3;-3)$, có vectơ chỉ phương $\vec{a}_1=(1;-2;-3)$.
d_2 đi qua $B=(0;-1;0)$, có vectơ chỉ phương $\vec{a}_2=(3;2;0)$.
Ta có $\vec{a}_1$ không cùng phương $\vec{a}_2$.
$\vec{a}_1\cdot\vec{a}_2\neq 0$.
$[\vec{a}_1,\vec{a}_2]\cdot\overrightarrow{AB}=0$ nên d_1 cắt và không vuông góc với d_2.
Chọn đáp án A .... □

CÂU 3. Cho hai đường thẳng $d_1\colon \begin{cases}x=1-2t\\y=1+t\\z=1-t\end{cases}$ và $d_2\colon \dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z}{1}$. Chọn khẳng định đúng.

A $d_1 \parallel d_2$.
B $d_1\equiv d_2$.
C d_1, d_2 chéo nhau.
D d_1, d_2 cắt nhau.

Lời giải.

Ta có d_1, d_2 có vectơ chỉ phương lần lượt là $\vec{u}_1=(-2;1;-1)$, $\vec{u}_2=(2;-1;1)$.
Và $A(1;1;1)\in d_1$, $B(-1;2;0)\in d_2\Rightarrow \overrightarrow{AB}=(-2;1;-1)$.
Khi đó $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, $\overrightarrow{AB}$ cùng phương nên $d_1\equiv d_2$.
Chọn đáp án B .... □

CÂU 4. Vị trí tương đối của hai đường thẳng $\Delta_1\colon \dfrac{x-1}{3}=y=\dfrac{z+1}{2}$ và $\Delta_2\colon \dfrac{x}{2}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z}{1}$,

A Trùng nhau .
B Chéo nhau.
C Song song.
D Cắt nhau.

Lời giải.

Đường thẳng Δ_1 đi qua điểm $M_1\,(1;0;-1)$ và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_1}=(3;1;2)$.
Đường thẳng Δ_2 đi qua điểm $M_2\,(0;1;0)$ và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_2}=(2;-1;1)$.
Ta có $\begin{cases}\overrightarrow{u_1}\wedge\overrightarrow{u_2}=(3;1;-5)\\ \overrightarrow{M_1M_2}=(-1;1;1)\end{cases}\Rightarrow (\overrightarrow{u_1}\wedge\overrightarrow{u_2})\cdot\overrightarrow{M_1M_2}=-3+1-5=-7\neq 0.$
Do đó Δ_1 và Δ_2 chéo nhau.
Chọn đáp án B .... □

CÂU 5. Cho hai đường thẳng $d_1:\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-1}{-m}=\dfrac{z-2}{-3}$ và $d_2:\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{1}$. Tìm tất cả các giá trị thực của m để d_1 vuông góc d_2.

A $m=5$.
B $m=1$.
C $m=-5$.
D $m=-1$.

Lời giải.

Chọn đáp án D .... □

CÂU 6. Cho hai đường thẳng $\Delta_1\colon \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z-3}{4}$ và $\Delta_2\colon \dfrac{x-4}{1}=\dfrac{y-3}{-2}=\dfrac{z-5}{-2}$. Tọa độ giao điểm M của hai đường thẳng đã cho là

A $M(5;1;3)$.
B $M(0;-1;-1)$.
C $M(3;5;7)$.
D $M(2;3;7)$.

Lời giải.

Phương trình tham số của đường thẳng Δ_1 là $\Delta_1\colon \begin{cases}x=1+2t\\y=2+3t\\z=3+4t\end{cases}$, thay vào phương trình Δ_2 ta được

$$\frac{2t-3}{1}=\frac{3t-1}{-2}=\frac{4t-2}{-2}\Rightarrow t=1.$$

Vậy giao điểm của Δ_1 và Δ_2 là $M(3;5;7)$.
Chọn đáp án C .... □

CÂU 7. Cho hai đường thẳng $d_1\colon \begin{cases}x=1+t\\y=2-t\\z=3+2t\end{cases}$ và $d_2\colon \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-m}{1}=\dfrac{z+2}{-1}$ (với m là tham số). Tìm m để hai đường thẳng d_1, d_2 cắt nhau.

A $m=5$.
B $m=7$.
C $m=9$.
D $m=4$.

Lời giải.

Ta có $M_1(1;2;3) \in d_1$ và vectơ chỉ phương của d_1 là $\vec{u}_1 = (1;-1;2)$, $M_2(1;m;-2) \in d_2$ và vectơ chỉ phương của d_2 là $\vec{u}_2 = (2;1;-2)$. Suy ra $\overrightarrow{M_1M_2} = (0;m-2;-5)$ và $[\vec{u}_1, \vec{u}_2] = (0;6;3)$.
Để d_1 cắt d_2 thì $[\vec{u}_1, \vec{u}_2] \cdot \overrightarrow{M_1M_2} = 0 \Leftrightarrow 6(m-2) - 15 = 0 \Leftrightarrow m = 5$.
Chọn đáp án (A) ....

CÂU 8. Cho hai đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 + mt \\ y = t \\ z = -1 + 2t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$ và $d': \begin{cases} x = 1 - t' \\ y = 2 + 2t' \\ z = 3 - t' \end{cases}$ $(t' \in \mathbb{R})$. Giá trị của m để hai đường thẳng d và d' cắt nhau là

(A) $m = 0$. (B) $m = 1$. (C) $m = -1$. (D) $m = 2$.

Lời giải.

Đường thẳng d đi qua $A(1;0;-1)$, có vectơ chỉ phương $\vec{u_1} = (m;1;2)$.
Đường thẳng d' đi qua $B(1;2;3)$, có vectơ chỉ phương $\vec{u_2} = (-1;2;-1)$.
Ta có $[\vec{u_1}, \vec{u_2}] = (-5;m-2;2m+1)$ và $\overrightarrow{AB} = (0;2;4)$.
Hai đường thẳng d và d' cắt nhau $\Leftrightarrow [\vec{u_1}, \vec{u_2}] \cdot AB = 0 \Leftrightarrow m = 0$.
Chọn đáp án (A) ....

4 Vị trí tương đối của đường thẳng và mặt phẳng

Xét đường thẳng d: $\begin{cases} x = x_0 + u_1t \\ y = y_0 + u_2t \\ z = z_0 + u_3t \end{cases}$ và mặt phẳng (P): $Ax + By + Cz + D = 0$.

Phương pháp: Xét $d \cap (P) \Rightarrow A(x_0 + u_1t) + B(y_0 + u_2t) + C(z_0 + u_3t) + D = 0 \quad (*)$

- Nếu (*) có đúng 1 nghiệm t thì d cắt (P);
- Nếu (*) vô nghiệm thì d song song (P);
- Nếu (*) nghiệm đúng với mọi t thì d nằm trong (P).

Đặc biệt: Với $\vec{u}$ là vectơ chỉ phương của d và $\vec{n}$ là vectơ pháp tuyến của (P) thì

$$d \perp (P) \Leftrightarrow \vec{u} \text{ cùng phương với } \vec{n} \text{ hay } \vec{u} = k \cdot \vec{n}$$

BÀI TẬP TỰ LUẬN

VÍ DỤ 1. Xét vị trí tương đối giữa đường thẳng và mặt phẳng được chỉ ra ở các câu sau:

a) (α): $y + 2z = 0$ và d: $\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 4 + 2t \\ z = 1 \end{cases}$.

b) (P): $3x - 3y + 2z - 5 = 0$ và d: $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 3 + 4t \\ z = 3t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$.

c) (P): $3x - 3y + 2z + 1 = 0$ và d: $\dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y}{-1} = \dfrac{z-1}{-3}$.

Lời giải.

a) Gọi $M(2-t;4+2t;1) \in d$, thay tọa độ M vào phương trình của (α) ta được $4 + 2t + 2 = 0 \Leftrightarrow t = -3$. Từ đó tìm được $M(5;-2;1)$. Suy ra d cắt (α).

b) Xét phương trình $3(-1+2t) - 3(3+4t) + 2 \cdot 3t - 5 = 0 \Leftrightarrow 0 \cdot t - 17 = 0$ (vô nghiệm).
Vậy $d \parallel (P)$.

c) Viết lại đường thẳng d ở dạng tham số $\begin{cases} x = -1 + t \\ y = -t \\ z = 1 - 3t \end{cases}$.
Xét phương trình $3 \cdot (-1+t) - 3 \cdot (-t) + 2 \cdot (1-3t) + 1 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$. Kết luận phương trình có vô số nghiệm $\Rightarrow d \subset (P)$.

VÍ DỤ 2. Tìm điều kiện của tham số m để

a) $\Delta: \dfrac{x-10}{5} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z+2}{1}$ vuông góc với $(P): 10x + 2y + mz + 11 = 0$.

b) d: $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{3} = \dfrac{z-1}{-1}$ song song với (α): $-x + m^2y + mz + 1 = 0$.

Lời giải.

a) Đường thẳng Δ có VTCP $\vec{u}_\Delta = (5; 1; 1)$.
Mặt phẳng (P) có VTPT $\vec{n}_P = (10; 2; m)$.
Để $\Delta \perp (P) \Leftrightarrow \vec{u}_\Delta \parallel \vec{n}_P \Leftrightarrow \dfrac{10}{5} = \dfrac{2}{1} = \dfrac{m}{1} \Leftrightarrow m = 2$.

b) Đường thẳng d có phương trình tham số $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + 3t \\ z = 1 - t. \end{cases}$
Xét phương trình $-(1+2t) + m^2(-1+3t) + m(1-t) + 1 = 0 \Leftrightarrow \left(3m^2 - m - 2\right)t - m^2 + m = 0$. (1)
Ta có $d \parallel (\alpha)$ khi và chỉ khi (1) vô nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} 3m^2 - m - 2 = 0 \\ -m^2 + m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = -\dfrac{2}{3}$.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

CÂU 1. Cho đường thẳng $d: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{-2} = \dfrac{z-1}{1}$. Tìm tọa độ giao điểm M của đường thẳng d với mặt phẳng (Oxy).

(A) $M(-1; 2; 0)$. (B) $M(1; 0; 0)$. (C) $M(2; -1; 0)$. (D) $M(3; -2; 0)$.

Lời giải.

Chọn đáp án (A) .... □

CÂU 2. Cho đường thẳng $d: \dfrac{x-1}{-1} = \dfrac{y+3}{2} = \dfrac{z-3}{1}$ và mặt phẳng $(P): 2x + y - 2z + 9 = 0$. Tìm toạ độ giao điểm của d và (P).

(A) $(2; 1; 1)$. (B) $(0; -1; 4)$. (C) $(1; -3; 3)$. (D) $(2; -5; 1)$.

Lời giải.

Chọn đáp án (B) .... □

CÂU 3. Cho mặt phẳng (α): $x + 2y + 3z - 6 = 0$ và đường thẳng Δ: $\dfrac{x+1}{-1} = \dfrac{y+1}{-1} = \dfrac{z-3}{1}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

(A) Δ cắt và không vuông góc với (α). (B) $\Delta \parallel (\alpha)$.
(C) $\Delta \subset (\alpha)$. (D) $\Delta \perp (\alpha)$.

Lời giải.

Mặt phẳng (α) có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (1; 2; 3)$.
Đường thẳng Δ đi qua $M(-1; -1; 3)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (-1; -1; 1)$.
Ta có $\vec{n} \cdot \vec{u} = 1 \cdot (-1) + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 1 = 0$ và $M \in (\alpha)$.
Vậy $\Delta \subset (\alpha)$.
Chọn đáp án (C) .... □

CÂU 4. Cho đường thẳng $d: \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-1}{4} = \dfrac{z-m}{-1}$ và mặt phẳng $(P): 2x + my - (m^2+1)z + m - 2m^2 = 0$. Có bao nhiêu giá trị của m để đường thẳng d nằm trên (P)?

(A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) Vô số.

Lời giải.

Chọn đáp án (B) .... □

CÂU 5. Cho mặt phẳng $(\alpha): x + y + z - 6 = 0$ và đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = m + t \\ y = -1 + nt \\ z = 4 + 2t \end{cases}$. Tìm điều kiện của m và n để đường thẳng Δ song song với mặt phẳng (α).

(A) $\begin{cases} m \neq 3 \\ n = -3 \end{cases}$. (B) $\begin{cases} m = 3 \\ n \neq -3 \end{cases}$. (C) $\begin{cases} m = 3 \\ n = -3 \end{cases}$. (D) $\begin{cases} m \neq 3 \\ n \neq -3 \end{cases}$.

Lời giải.

Chọn đáp án (A) .... □

CÂU 6. Cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{-1}=\dfrac{z+1}{1}$. Trong các mặt phẳng dưới đây mặt phẳng nào vuông góc với đường thẳng d?

Ⓐ $2x-2y+2z+4=0$.　Ⓑ $4x-2y-2z-4=0$.　Ⓒ $4x+2y+2z+4=0$.　Ⓓ $4x-2y+2z+4=0$.

Lời giải.

Đường thẳng d có vec-tơ chỉ phương $\vec{u}=(2;-1;1)$.
Xét mặt phẳng $4x-2y+2z+4=0$ có vec-tơ pháp tuyến $\vec{n}=(4;-2;2)\Rightarrow \vec{n}=2\vec{v}$.
$\Rightarrow d$ vuông góc với mặt phẳng có phương trình $4x-2y+2z+4=0$.
Chọn đáp án D .... □

CÂU 7. Cho đường thẳng $d\colon \begin{cases} x=3+2t \\ y=5-3mt \\ z=-1+t. \end{cases}$ và mặt phẳng $(P)\colon 4x-4y+2z-5=0$. Giá trị nào của m để đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (P).

Ⓐ $m=-\dfrac{5}{6}$.　Ⓑ $m=\dfrac{2}{3}$.　Ⓒ $m=\dfrac{3}{2}$.　Ⓓ $m=\dfrac{5}{6}$.

Lời giải.

- Mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(4;-4;2)$.
- Đường thẳng d có vectơ chỉ phương là $\vec{u}=(2;-3m;1)$.

Đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (P) khi và chỉ khi $\vec{n}$ cùng phương với $\vec{u}$
$\Leftrightarrow \dfrac{2}{4}=\dfrac{-3m}{-4}=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow 3m=2\Leftrightarrow m=\dfrac{2}{3}$.
Chọn đáp án B .... □

CÂU 8. Cho điểm $A(1;2;3)$ và đường thẳng $d\colon \dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y+2}{-1}=\dfrac{z-3}{1}$. Phương trình mặt phẳng (P) đi qua A và vuông góc với đường thẳng d là

Ⓐ $2x-y+z-3=0$.　Ⓑ $x+2y+3z-7=0$.　Ⓒ $x+2y+3z-1=0$.　Ⓓ $2x-y+z=0$.

Lời giải.

Đường thẳng d có một vectơ chỉ phương $\vec{u}_d=(2;-1;1)$.
Mặt phẳng (P) vuông góc với đường thẳng d nên có một vectơ pháp tuyến $\vec{n}_P=\vec{u}_d=(2;-1;1)$.
Mặt phẳng (P) đi qua $A(1;2;3)$ và có một vectơ pháp tuyến $\vec{n}_P=(2;-1;1)$ có phương trình là

$$2(x-1)-1(y-2)+1(z-3)=0\Leftrightarrow 2x-y+z-3=0.$$

Chọn đáp án A .... □

CÂU 9. Cho hai đường thẳng chéo nhau $d_1:\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z-6}{-2}$; $d_2:\dfrac{x-4}{1}=\dfrac{y+2}{-2}=\dfrac{z+1}{3}$. Phương trình mặt phẳng (P) chứa d_1 và song song với d_2 là

Ⓐ $(P): x+8y+5z+16=0$.　Ⓑ $(P): x+4y+3z-12=0$.
Ⓒ $(P): 2x+y-6=0$.　Ⓓ $(P): x+8y+5z-16=0$.

Lời giải.

d_1 đi qua điểm $M(2;-2;6)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u}_1=(2;1;-2)$.
d_2 đi qua điểm $N(4;-2;-1)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u}_2=(1;-2;3)$.
Vì mặt phẳng (P) chứa d_1 và song song với d_2 nên chọn một vectơ pháp tuyến của (P) là $\vec{n}_{(P)}=[\vec{u}_1,\vec{u}_2]=(-1;-8;-5)$.
Mặt phẳng (P) đi qua $M(2;-2;6)$ và nhận $\vec{n}_{(P)}=(-1;-8;-5)$ làm vectơ pháp tuyến nên có phương trình

$$-1\cdot(x-2)-8\cdot(y+2)-5\cdot(z-6)=0\Leftrightarrow x+8y+5z-16=0.$$

Chọn đáp án D .... □

CÂU 10. Cho hai đường thẳng $d_1\colon \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{z-3}{-5}$ và $d_2\colon \begin{cases} x=-1+t \\ y=4+3t \\ z=1+t \end{cases}$. Tìm phương trình mặt phẳng chứa đường thẳng d_1 và song song với đường thẳng d_2.

Ⓐ $18x-7y+3z+34=0$.　Ⓑ $18x+7y+3z-20=0$.　Ⓒ $18x+7y+3z+20=0$.　Ⓓ $18x-7y+3z-34=0$.

Lời giải.

Đường thẳng d_1 qua $M(1;-1;3)$ và nhận $\overrightarrow{u_1}=(2;3;-5)$ làm vectơ chỉ phương; d_2 có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_2}=(1;3;1)$.
Mặt phẳng (P) chứa d_1 và song song d_2 nên nhận vectơ $\vec{n}=[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}]=(18;-7;3)$ làm vectơ pháp tuyến.
Vậy phương trình tổng quát của (P) là

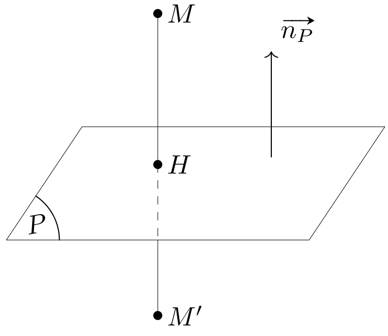
$$\begin{aligned} & 18(x-1)-7(y+1)+3(z-3)=0 \\ \Leftrightarrow\ & 18x-7y+3z-34=0. \end{aligned}$$

Chọn đáp án (D) .... □

5 Hình chiếu, đối xứng

Bài toán 1: Tìm hình chiếu vuông góc của điểm M trên (P):

- Viết phương trình đường thẳng MH qua M và nhận $\overrightarrow{n_P}$ làm vectơ chỉ phương;
- Giải hệ giữa đường MH với mặt phẳng (P), tìm t. Từ đó, suy ra tọa độ H.

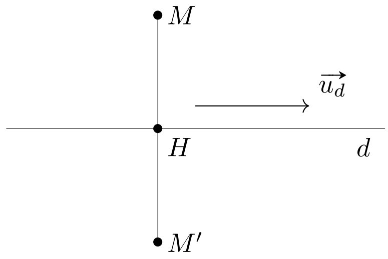


Gọi M' đối xứng với M qua mặt phẳng (P) thì

$$\begin{cases} x'_M = 2x_M - x_H \\ y'_M = 2y_M - y_H \\ z'_M = 2z_M - z_H \end{cases}.$$

Bài toán 2: Tìm hình chiếu vuông góc của điểm M trên d:

- Tham số điểm $H \in d$ theo ẩn t;
- Giải $\overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{u_d} = 0$, tìm t. Từ đó, suy ra tọa độ H.



Gọi M' đối xứng với M qua mặt phẳng d thì

$$\begin{cases} x'_M = 2x_M - x_H \\ y'_M = 2y_M - y_H \\ z'_M = 2z_M - z_H \end{cases}.$$

BÀI TẬP TỰ LUẬN

VÍ DỤ 1. Trong hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(2;-3;1)$ và đường thẳng $d\colon \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y+2}{-1} = \dfrac{z}{2}$.

a) Tìm tọa độ hình chiếu vuông góc của điểm M lên d.

b) Tìm tọa độ điểm M' đối xứng với điểm M qua d.

Lời giải.

Gọi H là điểm thuộc đường thẳng d, suy ra $H(-1+2t;-2-t;2t)$ với $t \in \mathbb{R}$.
Ta có $\overrightarrow{MH} = (2t-3;1-t;2t-1)$ và một vectơ chỉ phương của đường thẳng là $\vec{u} = (2;-1;2)$.
Điểm H là hình chiếu của M lên đường thẳng d khi $2(2t-3)-(1-t)+2(2t-1) = 0 \Leftrightarrow 9t-9=0 \Leftrightarrow t=1$.
Suy ra $H(1;-3;2)$, do đó tọa độ điểm M' đối xứng với M qua d là $M'(0;-3;3)$.

VÍ DỤ 2. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(2;7;-9)$ và mặt phẳng $(P)\colon x+2y-3z-1=0$.

a) Tìm tọa độ hình chiếu vuông góc của M trên mặt phẳng (P).

b) Tìm tọa độ điểm M' đối xứng với điểm M qua (P).

Lời giải.

Đường thẳng d đi qua M vuông góc với (P) có phương trình $\begin{cases} x = 2+t \\ y = 7+2t \\ z = -9-3t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$.
Gọi H là hình chiếu vuông góc của điểm M trên (P) thì $H = d \cap (P)$.
Xét phương trình: $2+t+2(7+2t)-3(-9-3t)-1=0 \Leftrightarrow 14t+42=0 \Leftrightarrow t=-3$.
Với $t=-3 \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=1 \\ z=0 \end{cases}$. Vậy $H(-1;1;0)$.
Từ đây, suy ra $M'(-4;-5;9)$

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

CÂU 1. Hình chiếu vuông góc của điểm $A(3;-4;5)$ trên mặt phẳng (Oxz) là điểm

A $M(3;0;0)$. B $M(0;-4;5)$. C $M(0;0;5)$. D $M(3;0;5)$.

Lời giải.

Hình chiếu vuông góc của điểm $A(3;-4;5)$ trên mặt phẳng (Oxz) là điểm $M(3;0;5)$.

Chọn đáp án D

CÂU 2. Hình chiếu vuông góc của điểm $A(1;2;3)$ trên mặt phẳng (Oxy) là điểm

A $M(0;0;3)$. B $N(1;2;0)$. C $Q(0;2;0)$. D $P(1;0;0)$.

Lời giải.

Hình chiếu vuông góc của điểm $A(1;2;3)$ trên mặt phẳng (Oxy) là điểm $N(1;2;0)$.

Chọn đáp án B

CÂU 3. Hình chiếu vuông góc của điểm $M(2;1;-3)$ lên mặt phẳng (Oyz) có tọa độ là

A $(2;0;0)$. B $(2;1;0)$. C $(0;1;-3)$. D $(2;0;-3)$.

Lời giải.

Điểm thuộc (Oyz) có tọa độ $(0;y;z)$ nên hình chiếu của M lên (Oyz) có tọa độ là $(0;-1;3)$.

Chọn đáp án C

CÂU 4. Hình chiếu vuông góc của điểm $A(3;2;1)$ trên trục Ox có tọa độ là

A $(0;2;1)$. B $(0;2;0)$. C $(3;0;0)$. D $(0;0;1)$.

Lời giải.

Hình chiếu vuông góc của điểm $A(3;2;1)$ lên trục Ox là $A'(3;0;0)$.

Chọn đáp án C

CÂU 5. Hình chiếu của điểm $M(2;3;-2)$ trên trục Oy có tọa độ là

A $(2;0;0)$. B $(0;3;0)$. C $(0;0;-2)$. D $(2;0;-2)$.

Lời giải.

Hình chiếu của điểm $M(2;3;-2)$ trên trục Oy có tọa độ là $(0;3;0)$.

Chọn đáp án B

CÂU 6. Cho điểm $M(3;2;-1)$, điểm $M'(a;b;c)$ đối xứng của M qua trục Oy, khi đó $a+b+c$ bằng

A 6. B 2. C 4. D 0.

Lời giải.

Với $M(a;b;c) \Rightarrow$ điểm đối xứng của M qua trục Oy là $M'(-a;b;-c)$

$\Rightarrow M'(-3;2;1) \Rightarrow a+b+c=0$.

Chọn đáp án D

CÂU 7. Điểm đối xứng với điểm $A(-2;7;5)$ qua mặt phẳng (Oxz) là điểm B có tọa độ là

A $B(2;7;-5)$. B $B(-2;-7;5)$. C $B(-2;7;-5)$. D $B(2;-7;-5)$.

Lời giải.

Hình chiếu vuông góc của điểm $A(-2;7;5)$ trên mặt phẳng (Oxz) là điểm $H(-2;0;5)$.

Điểm $B(-2;-7;5)$ đối xứng với điểm A qua mặt phẳng (Oxz) nên H là trung điểm của AB. Vậy điểm đối xứng với điểm $A(-2;7;5)$ qua mặt phẳng (Oxz) là điểm $B(-2;-7;5)$.

Chọn đáp án B

CÂU 8. Tọa độ hình chiếu vuông góc của điểm $A(2;-1;0)$ lên mặt phẳng $(P): 3x-2y+z+6=0$ là

A $(5;-3;1)$. B $(-1;1;-1)$. C $(1;1;1)$. D $(3;-2;1)$.

Lời giải.

Gọi $H(x;y;-6-3x+2y)$ là hình chiếu của A lên mặt phẳng P.

Ta có $\overrightarrow{AH}=(x-2;y+1;-6-3x+2y)$.

Do $\overrightarrow{AH} \perp (P)$ nên hai vectơ $\overrightarrow{AH}$ và $\vec{n}_P$ cùng phương.

Suy ra ta có hệ phương trình

$$\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{-2}=\frac{-6-3x+2y}{1}.$$

Giải hệ ta thu được một nghiệm là $(-1;1;-1)$.

Chọn đáp án B

CÂU 9. Gọi hình chiếu vuông góc của điểm $A(3;-1;-4)$ lên mặt phẳng $(P): 2x-2y-z-3=0$ là điểm $H(a;b;c)$. Khi đó khẳng định nào sau đây đúng?

A $a+b+c=-1$. B $a+b+c=3$. C $a+b+c=5$. D $a+b+c=-\dfrac{5}{3}$.

Lời giải.

- Đường thẳng AH qua $A(3;-1;-4)$ và nhận $\vec{n}=(2;-2;-1)$ làm vectơ pháp tuyến nên có phương trình là

$$\begin{cases}x=3+2t\\ y=-1-2t\\ z=-4-t\end{cases}$$

- $H(3+2t;-1-2t;-4-t)=AH\cap(P)$. Phương trình để xác định t (*thay vào phương trình của* (P)) là

$$2(3+2t)-2(-1-2t)-(-4-t)-3=0\Leftrightarrow t=-1.$$

Với $t=-1$ thì $H(1;1;-3)$. Suy ra $a+b+c=1+1-3=-1$.

Chọn đáp án A .... □

CÂU 10. Cho mặt phẳng $(P):2x+2y-z+9=0$ và điểm $A(-7;-6;1)$. Tìm tọa độ điểm A' đối xứng với điểm A qua mặt phẳng (P).

A $A'(1;2;-3)$. **B** $A'(1;2;1)$. **C** $A'(5;4;9)$. **D** $A'(9;0;9)$.

Lời giải.

Họi H là hình chiếu vuông góc của điểm A lên (P).

- Đường thẳng AH qua $A(-7;-6;1)$ và nhận $\vec{n}=(2;2;-1)$ làm vectơ pháp tuyến nên có phương trình là

$$\begin{cases}x=-7+2t\\ y=-6+2t\\ z=1-t\end{cases}$$

- $H(-7+2t;-6+2t;1-t)=AH\cap(P)$. Phương trình để xác định t (*thay vào phương trình của* (P)) là

$$2(-7+2t)+2(-6+2t)-(1-t)+9=0\Leftrightarrow t=2.$$

Với $t=2$ thì $H(-3;-2;-1)$ và H là trung điểm của đoạn AA' nên

$$\begin{cases}x_{A'}=2x_H-x_A=1\\ y_{A'}=2y_H-y_A=2\\ z_{A'}=2z_H-z_A=-3\end{cases}\Rightarrow A'(1;2;-3).$$

Chọn đáp án A .... □

CÂU 11. Cho điểm $A(4;-3;2)$ và đường thẳng $d:\dfrac{x+2}{3}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z}{-1}$. Gọi điểm H là hình chiếu vuông góc của điểm A lên đường thẳng d. Tọa độ điểm H là

A $H(5;4;-1)$. **B** $H(1;0;-1)$. **C** $H(-5;-4;1)$. **D** $H(-2;-2;0)$.

Lời giải.

d có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(3;2;-1)$.

- Gọi $H(-2+3t;-2+2t;-t)\in d$, ta có $\overrightarrow{AH}=(3t-6;2t+1;-t-2)$.
- $\overrightarrow{AH}$ vuông góc $\vec{u}$, suy ra $\overrightarrow{AH}\cdot\vec{u}=0$ hay

$$(3t-6)\cdot3+(2t+1)\cdot2+(-t-2)\cdot(-1)=0\Leftrightarrow t=1.$$

Với $t=1$ thì $H(1;0;-1)$.

Chọn đáp án B .... □

CÂU 12. Cho đường thẳng d: $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z}{-1}$, $M(2;1;0)$. Gọi $H(a;b;c)$ là điểm thuộc d sao cho MH có độ dài nhỏ nhất. Tính $T=a^2+b^2+c^2$.

A $T=\sqrt{5}$. **B** $T=12$. **C** $T=21$. **D** $T=6$.

Lời giải.

Phương trình tham số của đường thẳng d là $\begin{cases}x=1+2t\\ y=-1+t\\ z=-t.\end{cases}$

Lấy $H\in d\Rightarrow H(1+2t;-1+t;-t)$ và $\overrightarrow{MH}=(2t-1;t-2;-t)$.

MH nhỏ nhất khi và chỉ khi H là hình chiếu của M xuống d, do đó

$$\overrightarrow{MH}\cdot\vec{u}_d=0\Leftrightarrow 2(2t-1)+(t-2)+t=0\Leftrightarrow t=\frac{2}{3}.$$

Vậy $H\left(\dfrac{7}{3};-\dfrac{1}{3};-\dfrac{2}{3}\right) \Rightarrow \begin{cases} a=\dfrac{7}{3} \\ b=-\dfrac{1}{3} \\ c=-\dfrac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow T=a^2+b^2+c^2=6.$

Chọn đáp án D .... □

CÂU 13. Cho điểm $M\left(1;2;-6\right)$ và đường thẳng $d:\begin{cases} x=2+2t \\ y=1-t \\ z=-3+t \end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$. Điểm N là điểm đối xứng của M qua đường thẳng d có tọa độ là

(A) $N\left(0;2;-4\right)$. (B) $N\left(-1;2;-2\right)$. (C) $N\left(1;-2;2\right)$. (D) $N\left(-1;0;2\right)$.

Lời giải.

d có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u}=(2;-1;1)$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của m trên d.

- Ta có $H(2+2t;1-t;-3+t)\in d$ và $\overrightarrow{MH}=(2t+1;-t-1;t+3)$.
- $\overrightarrow{MH}$ vuông góc $\overrightarrow{u}$, suy ra $\overrightarrow{MH}\cdot\overrightarrow{u}=0$ hay

$$(2t+1)\cdot 2+(-t-1)\cdot(-1)+(t+3)\cdot(1)=0\Leftrightarrow t=-1.$$

Với $t=-1$ thì $H(0;2;-4)$ và H là trung điểm của đoạn MN nên

$$\begin{cases} x_N=2x_H-x_M=-1 \\ y_M=2y_H-y_M=2 \\ z_N=2z_H-z_M=-2 \end{cases} \Rightarrow N(-1;2;-2).$$

Chọn đáp án B .... □

CÂU 14. Cho đường thẳng $\Delta:\dfrac{x}{2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-1}{-1}$ và hai điểm $A(1;0;1)$, $B(-1;1;2)$. Biết điểm $M(a;b;c)$ thuộc Δ sao cho $\left|\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MB}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó, tổng $a+2b+4c$ bằng bao nhiêu?

(A) 0. (B) -1. (C) 2. (D) 1.

Lời giải.

Cách 1: Gọi I là điểm thỏa $\overrightarrow{IA}-3\overrightarrow{IB}=\overrightarrow{0}$, suy ra $I\left(-2;\dfrac{3}{2};\dfrac{5}{2}\right)$.

Theo kết quả của **Bài toán 5** thì $\left|\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MB}\right|$ nhỏ nhất khi M là hình chiếu vuông góc của điểm I lên Δ.

— Gọi $M(2t;-1+t;1-t)\in\Delta$ là hình chiếu vuông góc của I lên Δ. Ta có

$$\overrightarrow{IM}\cdot\overrightarrow{u}_\Delta=0\Leftrightarrow t=-\dfrac{1}{2}.$$

— Với $t=-\dfrac{1}{2}$ thì $M\left(-1;-\dfrac{3}{2};\dfrac{3}{2}\right)$. Suy ra $a+2b+4c=2$.

Cách 2: Ta tham số tọa độ điểm M, sau đó dùng khảo sát hàm để xử lý max - min.
Gọi $M(2m;-1+m;1-m)\in\Delta$. Ta có

$$\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MB}=(4+4m;-5+2m;-3-2m)$$

Suy ra

$$\left|\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MB}\right|=\sqrt{24m^2+24m+50}=\sqrt{24\left(m+\dfrac{1}{2}\right)^2+44}.$$

Nhận xét $\left|\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MB}\right|$ nhỏ nhất khi $m=-\dfrac{1}{2}$. Từ đó suy ra $M\left(-1;-\dfrac{3}{2};\dfrac{3}{2}\right)$.
Vậy $a+2b+4c=2$.

Chọn đáp án C .... □

CÂU 15. Cho ba điểm $A(0;-2;-1)$, $B(-2;-4;3)$, $C(1;3;-1)$ và mặt phẳng $(P)\colon x+y-2z-3=0$. Gọi $M(a;b;c)\in(P)$ sao cho $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính $a-b+2c$.

(A) 3. (B) -1. (C) 4. (D) -2.

Lời giải.

Gọi I là điểm sao cho $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+2\overrightarrow{IC}=\vec{0}\Rightarrow I(0;0;0)$. Từ đó ta có

$$\begin{aligned}\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right| &= \left|\left(\overrightarrow{IA}-\overrightarrow{IM}\right)+\left(\overrightarrow{IB}-\overrightarrow{IM}\right)+2\cdot\left(\overrightarrow{IC}-\overrightarrow{IM}\right)\right|\\ &= \left|\left(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+2\overrightarrow{IC}\right)-4\overrightarrow{IM}\right|\\ &= \left|\vec{0}-4\overrightarrow{IM}\right| = 4IM.\end{aligned}$$

Bởi vậy $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất $\Leftrightarrow IM$ đạt giá trị nhỏ nhất $\Leftrightarrow M$ là hình chiếu vuông góc của I trên mặt phẳng $(P)\Leftrightarrow M$ là giao điểm của đường thẳng d đi qua I và vuông góc với mặt phẳng (P).

Phương trình đường thẳng d là $d\colon \begin{cases}x=t\\ y=t\\ z=-2t.\end{cases}$

Tọa độ giao điểm của d và (P) ứng với t là nghiệm phương trình

$$(t)+(t)-2\cdot(-2t)-3=0\Leftrightarrow t=\frac{1}{2}.$$

Tọa độ điểm M cần tìm là $M\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};-1\right)$. Suy ra $a-b+2c=-2$

Chọn đáp án (D) .... □

Bài 16. CÔNG THỨC TÍNH GÓC TRONG KHÔNG GIAN

A. LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1. Góc giữa hai mặt phẳng

Công thức: Gọi $\overrightarrow{n_1}=(a_1;b_1;c_1)$, $\overrightarrow{n_2}=(a_2;b_2;c_2)$ lần lượt là vectơ pháp tuyến của (P) và (Q); φ là góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q), với $0^\circ \le \varphi \le 90^\circ$. Khi đó

$$\cos\varphi=\left|\cos\left(\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}\right)\right|=\frac{\left|a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2\right|}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}\cdot\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}$$

Chú ý:

- Nếu (P) song song hoặc trùng (Q) thì $\varphi=0^\circ$.
- Nếu $(P)\perp(Q)$ thì $\varphi=90^\circ$. Khi đó $\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}=0 \Leftrightarrow a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2=0$.

2. Góc giữa hai đường thẳng

Công thức: Gọi $\vec{u}=(u_1;u_2;u_3)$, $\vec{v}=(v_1;v_2;v_3)$ lần lượt là vectơ chỉ phương của d_1 và d_2; φ là góc giữa hai đường thẳng d_1 và d_2, với $0^\circ \le \varphi \le 90^\circ$. Khi đó

$$\cos\varphi=\left|\cos\left(\vec{u},\vec{v}\right)\right|=\frac{\left|u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3\right|}{\sqrt{u_1^2+u_2^2+u_3^2}\cdot\sqrt{v_1^2+v_2^2+v_3^2}}$$

Chú ý:

- Nếu d_1 song song hoặc trùng d_2 thì $\varphi=0^\circ$.
- Nếu $d_1\perp d_2$ thì $\varphi=90^\circ$. Khi đó $\vec{u}\cdot\vec{u}=0 \Leftrightarrow u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3=0$.

3. Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

Công thức: Gọi $\vec{u}=(u_1;u_2;u_3)$, $\vec{n}=(A;B;C)$ lần lượt là vectơ chỉ phương của d và vectơ pháp tuyến của (P); φ là góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (P), với $0^\circ \le \varphi \le 90^\circ$. Khi đó

$$\sin\varphi=\left|\cos\left(\vec{u},\vec{n}\right)\right|=\frac{\left|u_1A+u_2B+u_3C\right|}{\sqrt{u_1^2+u_2^2+u_3^2}\cdot\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

Chú ý:

- Nếu d song song hoặc trùng (P) thì $\varphi=0^\circ$, khi đó $\vec{u}\perp\vec{n}$
- Nếu d vuông góc với (P) thì $\varphi=90^\circ$, khi đó $\vec{u}=k\cdot\vec{n}$.

B. PHÂN LOẠI, PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

1 Tính góc trong không gian Oxyz

- Xác định vectơ chỉ phương (vectơ pháp tuyến);
- Áp dụng đúng công thức.

BÀI TẬP TỰ LUẬN

VÍ DỤ 1. Trong không gian $Oxyz$, tính góc giữa hai mặt phẳng sau:

a) $(P)\colon x+y+4z-2=0$ và $(Q)\colon 2x-2z+7=0$.

b) $(P)\colon 2x-y-2z-9=0$ và $(Q)\colon x-y-6=0$.

Lời giải.

a) Ta có $\vec{n}_P = (1;1;4)$, $\vec{n}_Q = (2;0;-2)$ lần lượt là vectơ pháp tuyến của (P) và (Q).
Suy ra $\cos((P),(Q)) = |\cos(\vec{n}_P, \vec{n}_Q)| = \dfrac{|\vec{n}_P \cdot \vec{n}_Q|}{|\vec{n}_P| \cdot |\vec{n}_Q|} = \dfrac{|2+0-8|}{\sqrt{18}\cdot\sqrt{8}} = \dfrac{1}{2}$.
Vậy góc giữa (P) và (Q) bằng 60°.

b) $(P)\colon 2x-y-2z-9=0$ có 1 vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n_1} = (2;-1;-2)$.
$(Q)\colon x-y-6=0$ có 1 vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n_2} = (1;-1;0)$.
$\cos((P);(Q)) = \dfrac{|\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}|}{|\overrightarrow{n_1}|\,|\overrightarrow{n_2}|} = \dfrac{|2\cdot 1 + (-1)(-1) + 0|}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}\cdot\sqrt{1^2+1^2+0}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow ((P);(Q)) = 45^\circ$.

VÍ DỤ 2. Trong không gian $Oxyz$, tính góc giữa hai đường thẳng sau:

a) $d: \begin{cases} x = 1-t \\ y = t \\ z = 0 \end{cases}$ và $d': \dfrac{x}{-2} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z-1}{-2}$.

b) $d_1\colon \begin{cases} x = 2+t \\ y = -1+t \\ z = 3 \end{cases}$ và $d_2\colon \begin{cases} x = 1-t' \\ y = 2 \\ z = -2+t' \end{cases}$.

Lời giải.

a) Gọi φ là góc giữa hai đường thẳng d và d'. Ta có

$$\cos\varphi = \frac{|(-1)\cdot(-2) + 1\cdot 1 + 0\cdot(-2)|}{\sqrt{(-1)^2+1^2+0^2}\cdot\sqrt{(-2)^2+1^2+(-2)^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \varphi = 45^\circ.$$

b) d_1 có VTCP $\vec{v}_1 = (1;1;0)$ và d_2 có VTCP $\vec{v}_2 = (-1;0;1)$, $|v_1| = \sqrt{2}$, $|v_2| = \sqrt{2}$.
Khi đó góc giữa hai đường thẳng d_1 và d_2 là

$$\cos(d_1, d_2) = \frac{|\vec{v}_1\cdot\vec{v}_2|}{|\vec{v}_1|\cdot|\vec{v}_2|} = \frac{1}{2}.$$

Vậy góc giữa hai đường thẳng d_1 và d_2 là 60°.

VÍ DỤ 3. Trong không gian $Oxyz$, tính góc giữa đường thẳng và mặt phẳng sau:

a) $d\colon \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z+1}{-1}$ và $(P)\colon x-y+2z+1=0$.

b) $d\colon \dfrac{x-1}{4} = \dfrac{y-6}{3} = \dfrac{z+4}{1}$ và $(P)\colon 4x+3y-z+1=0$

Lời giải.

a) Ta có $\vec{n}_{(P)} = (1;-1;2)$ và $\vec{u}_d = (1;2;-1)$.
Vậy $\sin(d;(P)) = \dfrac{|\vec{n}_{(P)}\cdot\vec{u}_d|}{|\vec{n}_{(P)}|\cdot|\vec{u}_d|} = \dfrac{|1-2-2|}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow (d;(P)) = 30^\circ$.

b) Mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (4;3;-1)$.
Đường thẳng d có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (4;3;1)$.
Gọi α là góc giữa d và (P), ta có $\sin\alpha = \dfrac{|\vec{n}\cdot\vec{u}|}{|\vec{n}|\cdot|\vec{u}|} = \dfrac{|16+9-1|}{\sqrt{16+9+1}\cdot\sqrt{16+9+1}} = \dfrac{12}{13} \Rightarrow \alpha \approx 67,38^\circ$.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

CÂU 1. Cho mặt phẳng $(P): x+2y-2z+3=0$, mặt phẳng $(Q): x-3y+5z-2=0$. Cosin của góc giữa hai mặt phẳng (P), (Q) là

Ⓐ $-\dfrac{\sqrt{35}}{7}$. Ⓑ $\dfrac{5}{7}$. Ⓒ $\dfrac{\sqrt{35}}{7}$. Ⓓ $-\dfrac{5}{7}$.

Lời giải.

Mặt phẳng (P) có ve-tơ pháp tuyến là $\vec{n}_1 = (1;2;-2)$
Mặt phẳng (Q) có vec-tơ pháp tuyến là $\vec{n}_2 = (1;-3;5)$.
Ta có $\cos[(P),(Q)] = |\cos(\vec{n}_1, \vec{n}_2)| = \dfrac{|\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2|}{|\vec{n}_1|\cdot|\vec{n}_2|} = \left|\dfrac{-15}{3\sqrt{35}}\right| = \dfrac{\sqrt{35}}{7}$.

Chọn đáp án C .... □

CÂU 2. Góc giữa hai mặt phẳng $(P): x+2y+z+4=0$ và $(Q): -x+y+2z+3=0$ bằng

Ⓐ 45°. Ⓑ 90°. Ⓒ 30°. Ⓓ 60°.

Lời giải.

Gọi φ là góc giữa (P) và (Q). Ta có

$$\cos\varphi = \frac{|1\cdot(-1)+2\cdot 1+1\cdot 2|}{\sqrt{1^2+2^2+1^2}\cdot\sqrt{(-1)^2+1^2+2^2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi = 60^\circ.$$

Chọn đáp án D ☐

CÂU 3. Tính góc α giữa mặt (P): $x+z-4=0$ và mặt phẳng (Oxy).

Ⓐ 45°. Ⓑ 30°. Ⓒ 90°. Ⓓ 60°.

Lời giải.

Ta có $\vec{n}_{(P)}=(1;0;1)$, $\vec{n}_{(Oxy)}=(0;0;1)$.

Suy ra $\cos\alpha = \dfrac{|1\cdot 0+0\cdot 0+1\cdot 1|}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{1}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Vậy $\widehat{((P);(Q))} = 45^\circ$.

Chọn đáp án A ☐

CÂU 4. Cho điểm $H(2;1;2)$, điểm H là hình chiếu vuông góc của gốc tọa độ O xuống mặt phẳng (P), số đo góc giữa mặt phẳng (P) và mặt phẳng $(Q): x+y-11=0$ là

Ⓐ 45°. Ⓑ 30°. Ⓒ 60°. Ⓓ 90°.

Lời giải.

Vì điểm H là hình chiếu vuông góc của gốc tọa độ O xuống mặt phẳng (P) nên ta chọn $\overrightarrow{OH} = \vec{n}_{(P)} = (2;1;2)$.
Phương trình mặt phẳng (P) có dạng

$$2(x-2)+(y-1)+2(z-2)=0 \Leftrightarrow 2x+y+2z-9=0.$$

Do đó, góc giữa 2 mặt phẳng $(P),(Q)$ tính như sau

$$\cos((P),(Q)) = \frac{\left|\vec{n}_{(P)}\cdot\vec{n}_{(Q)}\right|}{\left|\vec{n}_{(P)}\right|\left|\vec{n}_{Q}\right|} = \frac{|2\cdot 1+1\cdot 1+2\cdot 0|}{\sqrt{9}\cdot\sqrt{2}} = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Do đó góc giữa mặt phẳng (P) và mặt phẳng (Q) bằng $\cos 45^\circ = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Chọn đáp án A ☐

CÂU 5. Cho hai đường thẳng d_1: $\dfrac{x}{-1} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z}{2}$, d_2: $\begin{cases} x=2t \\ y=1 \\ z=1-t \end{cases}$. Gọi φ là góc giữa hai đường thẳng d_1, d_2. Tính $\cos\varphi$.

Ⓐ $\cos\varphi = -\dfrac{4\sqrt{5}}{15}$. Ⓑ $\cos\varphi = \dfrac{4\sqrt{5}}{15}$. Ⓒ $\cos\varphi = \dfrac{\sqrt{6}}{9}$. Ⓓ $\cos\varphi = -\dfrac{\sqrt{6}}{9}$.

Lời giải.

Đường thẳng d_1, d_2 lần lượt có vectơ chỉ phương là $\vec{u}_1=(-1;2;2)$ và $\vec{u}_2=(2;0;-1)$.

Vậy $\cos\varphi = |\cos(\vec{u}_1,\vec{u}_2)| = \dfrac{|(-1)\times 2+2\times 0+2\times(-1)|}{\sqrt{(-1)^2+2^2+2^2}\cdot\sqrt{2^2+0^2+(-1)^2}} = \dfrac{|-4|}{3\sqrt{5}} = \dfrac{4\sqrt{5}}{15}$.

Chọn đáp án B ☐

CÂU 6. Cho đường thẳng d_1: $\dfrac{x}{-1} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z-1}{-2}$ và d_2: $\dfrac{x+1}{-1} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z-3}{1}$. Góc giữa hai đường thẳng bằng

Ⓐ 90°. Ⓑ 30°. Ⓒ 60°. Ⓓ 45°.

Lời giải.

Đường thẳng d_1 có VTCP là $\vec{a}=(-1;1;-2)$, đường thẳng d_2 có VTCP là $\vec{b}=(-1;1;1)$.
Ta có $\vec{a}\cdot\vec{b}=0 \Rightarrow d_1\perp d_2 \Rightarrow (d_1,d_2)=90^\circ$.

Chọn đáp án A ☐

CÂU 7. Cho đường thẳng d là giao tuyến của hai mặt phẳng
(P): $x-z\cdot\sin\alpha+\cos\alpha=0$ và (Q): $y-z\cdot\cos\alpha-\sin\alpha=0$, $\alpha\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$. Góc giữa d và trục Oz là

Ⓐ 90°. Ⓑ 30°. Ⓒ 45°. Ⓓ 60°.

Lời giải.

Xét hệ phương trình $\begin{cases} x-z\cdot\sin\alpha+\cos\alpha=0 \\ y-z\cdot\cos\alpha-\sin\alpha=0 \end{cases}$.

Ta có $\vec{n}_P=(1;0;-\sin\alpha)$ và $\vec{n}_Q=(0;1;-\cos\alpha)$.

vectơ chỉ phương của d là $\vec{u}_d = [\vec{n}_P; \vec{n}_Q] = (\sin\alpha; \cos\alpha; 1)$.
vectơ chỉ phương của trục Oz là $\vec{k} = (0; 0; 1)$.
Gọi φ là góc giữa đường thẳng d và trục Oz.

Ta có $\cos\varphi = \dfrac{\left|\vec{u}_d \cdot \vec{k}\right|}{\left|\vec{u}_d\right| \cdot \left|\vec{k}\right|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Suy ra $\varphi = 45°$.

Chọn đáp án C

CÂU 8. Cho đường thẳng d: $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + 2t \\ z = 3 + t \end{cases}$ và mặt phẳng (P): $x - y + 3 = 0$. Tính số đo góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (P).

A $45°$. **B** $120°$. **C** $60°$. **D** $30°$.

Lời giải.

Ta có $\vec{u} = (-1; 2; 1)$ là vectơ chỉ phương của đường thẳng d và $\vec{n} = (1; -1; 0)$ là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P).

Suy ra $\sin(d; (P)) = |\cos(\vec{u}; \vec{n})| = \dfrac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{n}|} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Vậy $(d; (P)) = 60°$.

Chọn đáp án C

CÂU 9. Cho mặt phẳng (P): $3x + 4y + 5z - 8 = 0$ và đường thẳng d: $\begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = -1 - 4t \\ z = 5 - 5t \end{cases}$. Góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (P) là

A $90°$. **B** $45°$. **C** $30°$. **D** $60°$.

Lời giải.

Mặt phẳng (P) có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (3; 4; 5)$.
Đường thẳng d có một vectơ chỉ phương là $\vec{u} = (-3; -4; -5)$.
Ta có $\vec{n} = -\vec{u} \Rightarrow d \perp (P)$ nên góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (P) là $90°$.
Chọn đáp án A

CÂU 10. Cho mặt phẳng (P): $x + y - \sqrt{2}z + 5 = 0$. Tính góc φ giữa mặt phẳng (P) và trục Oy.

A $\varphi = 60°$. **B** $\varphi = 45°$. **C** $\varphi = 90°$. **D** $\varphi = 30°$.

Lời giải.

Ta có vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) là $\vec{n} = (1; 1; -\sqrt{2})$ và vectơ chỉ phương của trục Oy là $\vec{u} = (0; 1; 0)$. Suy ra $\sin\varphi = \dfrac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{n}|} = \dfrac{|1|}{\sqrt{4} \cdot 1} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \varphi = 30°$.

Chọn đáp án D

CÂU 11. Cho hai mặt phẳng (P): $(m-1)x + y - 2z + m = 0$ và (Q): $2x - z + 3 = 0$. Tìm m để (P) vuông góc với (Q).

A $m = 0$. **B** $m = \dfrac{3}{2}$. **C** $m = 5$. **D** $m = -1$.

Lời giải.

(P) vuông góc với (Q) khi và chỉ khi các vectơ pháp tuyến của chúng vuông góc với nhau, tức là

$$(m-1; 1; -2) \cdot (2; 0; -1) = 0 \Leftrightarrow m = 0.$$

Chọn đáp án A

CÂU 12. Cho mặt phẳng (P): $x - 3y + 2z + 1 = 0$ và (Q): $(2m-1)x + m(1-2m)y + (2m-4)z + 14 = 0$ với m là tham số thực. Tổng các giá trị của m để (P) và (Q) vuông góc nhau bằng

A $-\dfrac{3}{2}$. **B** $-\dfrac{1}{2}$. **C** $-\dfrac{5}{2}$. **D** $-\dfrac{7}{2}$.

Lời giải.

(P) có vectơ pháp tuyến $\vec{n}_P = (1; -3; 2)$.
(Q) có vectơ pháp tuyến $\vec{n}_Q = (2m-1; m(1-2m); 2m-4)$.
(P) và (Q) vuông góc với nhau khi và chỉ khi $\vec{n}_P \perp \vec{n}_Q$.

Điều này tương đương với $\vec{n}_P \cdot \vec{n}_Q = 0 \Leftrightarrow 6m^2 + 3m - 9 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = -\dfrac{3}{2}. \end{array}\right.$

Tổng các giá trị của m để (P) và (Q) vuông góc nhau bằng $1 - \dfrac{3}{2} = -\dfrac{1}{2}$.

Chọn đáp án B

CÂU 13. Cho hai mặt phẳng $(P)\colon x+2y-z+2=0$ và $(Q)\colon x-my+(m+1)z+m-2=0$, với m là tham số. Gọi S là tập hơn tất cả các giá trị của m sao cho góc giữa (P) và (Q) bằng 60°. Tính tổng các phần tử của S.

Ⓐ 1. Ⓑ $-\dfrac{1}{2}$. Ⓒ $\dfrac{3}{2}$. Ⓓ $\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) : $\vec{n}_{(P)}=(1;2;-1)$.

vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (Q) : $\vec{n}_{(Q)}=(1;-m;m+1)$.

Góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) bằng 60° nên

$$\begin{aligned}&\frac{|1-2m-m-1|}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{2m^2+2m+2}}=\cos 60^\circ\\ \Leftrightarrow\ & |3m|=\frac{1}{2}\sqrt{6}\cdot\sqrt{2m^2+2m+2}\\ \Leftrightarrow\ & 9m^2=3(m^2+m+1)\\ \Leftrightarrow\ & 2m^2-m-1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=1\\ m=-\dfrac{1}{2}.\end{array}\right.\end{aligned}$$

Do đó $S=1+\left(-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{2}$.

Chọn đáp án D ……………………………………………… □

CÂU 14. Hãy tìm tham số thực m để góc giữa hai đường thẳng sau bằng 60°.

$$d\colon\begin{cases}x=1+t\\ y=-\sqrt{2}t\\ z=1+t\end{cases},t\in\mathbb{R}\text{và } d'\colon\begin{cases}x=1+t'\\ y=1+\sqrt{2}t'\\ z=1+mt'\end{cases},t'\in\mathbb{R}$$

Ⓐ $\dfrac{1}{2}$. Ⓑ -1. Ⓒ $-\dfrac{1}{2}$. Ⓓ 1.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases}\vec{u}_d=(1;-\sqrt{2};1)\\ \vec{u}_{d'}=(1;\sqrt{2};m)\end{cases}\Rightarrow\cos\alpha=\dfrac{|-1+m|}{\sqrt{4}\cdot\sqrt{3+m^2}}$

$$\begin{aligned}\cos\alpha=\cos 60^\circ\ &\Leftrightarrow\ \frac{|-1+m|}{\sqrt{4}\cdot\sqrt{3+m^2}}=\frac{1}{2}\\ &\Leftrightarrow\ |-1+m|=\sqrt{3+m^2}\\ &\Leftrightarrow\ -2m+2=0\\ &\Leftrightarrow\ m=1\end{aligned}$$

Chọn đáp án C ……………………………………………… □

CÂU 15. Cho các điểm $A(-1;\sqrt{3};0)$, $B(1;\sqrt{3};0)$, $C(0;0;\sqrt{3})$ và điểm M thuộc trục Oz sao cho hai mặt phẳng (MAB) và (ABC) vuông góc với nhau. Tính góc giữa hai mặt phẳng (MAB) và (OAB).

Ⓐ 45°. Ⓑ 60°. Ⓒ 15°. Ⓓ 30°.

Lời giải.

$M(0;0;m)$ thuộc trục Oz.

Ta có $\overrightarrow{AM}=(1;-\sqrt{3};m)$, $\overrightarrow{AB}=(2;0;0)$, $\overrightarrow{AC}=(1;-\sqrt{3};\sqrt{3})$.

$\Rightarrow\vec{n}_1=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(0;-2\sqrt{3};-2\sqrt{3})$, $\vec{n}_2=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AM}\right]=(0;-2m;-2\sqrt{3})$.

Mặt phẳng (ABC) có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_1$, mặt phẳng (MAB) có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_2$.

Hai mặt phẳng (MAB) và (ABC) vuông góc với nhau khi và chỉ khi

$$\vec{n}_1\perp\vec{n}_2\Leftrightarrow 0\cdot 0+(-2\sqrt{3})\cdot(-2m)+(-2\sqrt{3})\cdot(-2\sqrt{3})=0\Leftrightarrow m=-\sqrt{3}.$$

Mặt phẳng (OAB) có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_3=\left[\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right]=(0;0;-2\sqrt{3})$.

Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (MAB) và (OAB). Khi đó

$$\cos\varphi=|\cos(\vec{n}_2,\vec{n}_3)|=\frac{|\vec{n}_2\cdot\vec{n}_3|}{|\vec{n}_2|\cdot|\vec{n}_3|}=\frac{12}{2\sqrt{6}\cdot 2\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Vậy góc giữa hai mặt phẳng (MAB) và (OAB) là 45°.

Chọn đáp án A ……………………………………………… □

2 Tọa độ hóa một số bài toán hình không gian

BÀI TẬP TỰ LUẬN

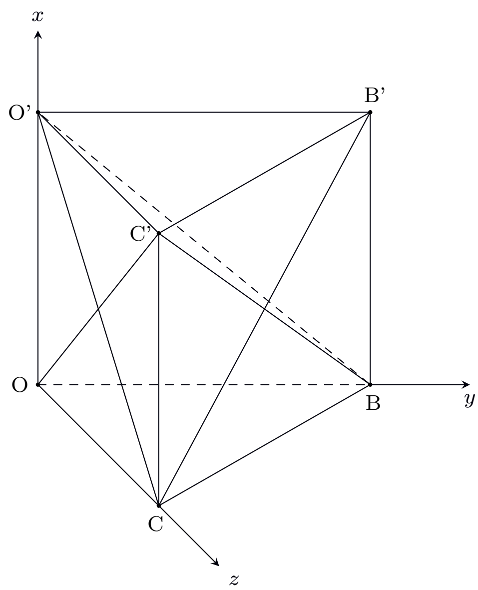
VÍ DỤ 1. Cho hình lăng trụ đứng $OBC.O'B'C'$ có đáy là tam giác OBC vuông tại O và có $OB = 3a$, $OC = a$, $OO' = 2a$. Tính góc giữa

a) hai đường thẳng BO' và $B'C$;

b) hai mặt phẳng $(O'BC)$ và (OBC);

c) đường thẳng $B'C$ và mặt phẳng $(O'BC)$.

Lời giải.



Xét hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho các điểm có tọa độ như sau: $O(0;0;0)$, $O'(2a;0;0)$, $B(0;3a;0)$, $C(0;0;1a)$.
Trong không gian $Oxyz$ vừa chọn, ta có $B'(2a;3a;0)$, $C'(2a;0;1a)$, $\overrightarrow{BO'} = (0;-3a;0)$, $\overrightarrow{CB'} = (2a;3a;-a)$.

a) Hai đường thẳng BO' và $B'C$ có vectơ chỉ phương lần lượt là $\vec{u} = (0;3;0)$, $\vec{v} = (2;3;-1)$.
Ta có

$$\cos(BO', B'C) = \frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|} = \frac{|0\cdot 2 + 3\cdot 3 + 0\cdot(-1)|}{\sqrt{3^2}\cdot\sqrt{2^2+3^2+(-1)^2}} = \frac{3}{\sqrt{14}}.$$

Suy ra $(BO', B'C) \approx 36^\circ 42'$.

b) Ta có phương trình mặt phẳng $(O'BC)$ theo đoạn chắn là $\dfrac{x}{2a}+\dfrac{y}{3a}+\dfrac{z}{a} = 1$ hay $3x + 2y + 6z - 6a = 0$.

Mặt phẳng $(O'BC)$ có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (3;2;6)$, mặt đáy (OBC) có vectơ pháp tuyến $\vec{k} = (0;0;1)$. Gọi α là góc giữa mặt phẳng $(O'BC)$ và mặt đáy.
Ta có $\cos\alpha = \dfrac{\left|\vec{n}\cdot\vec{k}\right|}{|\vec{n}|\cdot\left|\vec{k}\right|} = \dfrac{|3\cdot 0 + 2\cdot 0 + 6\cdot 1|}{\sqrt{3^2+2^2+6^2}\cdot\sqrt{1^2}} = \dfrac{6}{7}$.
Suy ra $((O'BC),(OBC)) \approx 31^\circ 1'$.

c) Gọi β là góc giữa đường thẳng $B'C$ và mặt phẳng $(O'BC)$.
Ta có $\sin\beta = \dfrac{|\vec{v}\cdot\vec{n}|}{|\vec{v}|\cdot|\vec{n}|} = \dfrac{|2\cdot 3 + 3\cdot 2 + (-1)\cdot 6|}{\sqrt{2^2+3^2+(-1)^2}\cdot\sqrt{3^2+2^2+6^2}} = \dfrac{3\sqrt{14}}{49}$.
Suy ra $(B'C,(O'BC)) \approx 13^\circ 15'$.

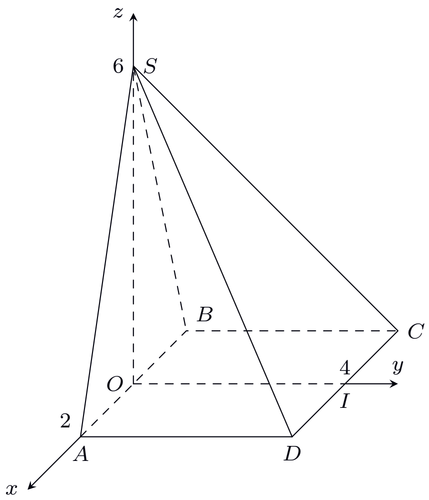
VÍ DỤ 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng 4. Mặt bên SAB là tam giác cân tại S có chiều cao bằng 6 và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy.

a) Tính góc α giữa hai đường thẳng SD và BC;

b) Tính góc β giữa hai mặt phẳng (SAD) và (SCD).

Lời giải.

Gọi O là trung điểm của AB suy ra $SO \perp (ABCD)$.
Chọn hệ trục $Oxyz$ như hình bên. Ta có: $S(0;0;6)$, $A(2;0;0)$, $B(-2;0;0)$, $C(-2;4;0)$, $D(2;4;0)$.



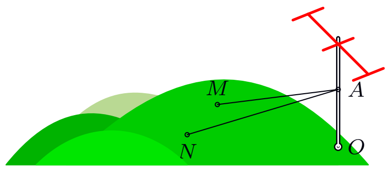
a) Ta có $\overrightarrow{SD} = (2;4;-6)$, $\overrightarrow{BC} = (0;4;0)$, suy ra

$$\cos\alpha = \frac{|\overrightarrow{SD}\cdot\overrightarrow{BC}|}{|\overrightarrow{SD}|\cdot|\overrightarrow{BC}|} = \frac{|2\cdot 0 + 4\cdot 4 - 6\cdot 0|}{\sqrt{2^2+4^2+(-6)^2}\cdot\sqrt{4^2}} = \frac{\sqrt{14}}{7} \Rightarrow \alpha = 57{,}7^\circ.$$

b) Mặt phẳng (SAD) có cặp vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{SD} = (2;4;-6)$, $\overrightarrow{SA} = (2;0;-6)$ nên có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n} = -\frac{1}{8}[\overrightarrow{SD},\overrightarrow{SA}] = (3;0;1)$.
Mặt phẳng (SCD) có cặp vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{SD} = (2;4;-6)$, $\overrightarrow{DC} = (-4;0;0)$ nên có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{u} = \frac{1}{8}[\overrightarrow{SD},\overrightarrow{DC}] = (0;3;2)$.
Suy ra $\cos\beta = \frac{|\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{u}|}{|\overrightarrow{n}|\cdot|\overrightarrow{u}|} = \frac{|3\cdot 0 + 0\cdot 3 + 1\cdot 2|}{\sqrt{3^2+1^2}\cdot\sqrt{3^2+2^2}} = \frac{2}{\sqrt{130}} \Rightarrow \beta \approx 79{,}9^\circ$.

VÍ DỤ 3.

Người ta muốn dựng một cột ăng-ten trên một sườn đồi. Ăng-ten được dựng thẳng đứng trong không gian $Oxyz$ với độ dài đơn vị trên mỗi trục bằng 1 m. Gọi O là gốc cột, A là điểm buộc dây cáp vào cột ăng-ten và M, N là hai điểm neo dây cáp xuống mặt sườn đồi (hình vẽ). Cho biết toạ độ các điểm nói trên lần lượt là $O(0;0;0)$, $A(0;0;6)$, $M(3;-4;3)$, $N(-5;-2;2)$.



a) Tính độ dài các đoạn dây cáp MA và NA.

b) Tính góc tạo bởi các sợi dây cáp MA, NA với mặt phẳng sườn đồi.

Lời giải.

a) Ta có $\overrightarrow{MA} = (-3;4;3)$, $\overrightarrow{NA} = (5;2;4)$, suy ra

- $MA = \sqrt{(-3)^2+4^2+3^2} = \sqrt{34} \approx 5{,}8$ m.
- $NA = \sqrt{5^2+2^2+4^2} = \sqrt{45} \approx 6{,}7$ m.

b) Mặt phẳng (OMN) có cặp vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{OM} = (3;-4;3)$, $\overrightarrow{ON} = (-5;-2;2)$ nên có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n} = [\overrightarrow{OM},\overrightarrow{ON}] = (-2;-21;-26)$.
Gọi α, β lần lượt là góc tạo bởi MA, NA với mặt phẳng (AMN).
Ta có

$$\sin\alpha = \frac{|\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{n}|}{|\overrightarrow{MA}|\cdot|\overrightarrow{n}|} = \frac{|-3\cdot(-2)+4\cdot(-21)+3\cdot(-26)|}{\sqrt{(-3)^2+4^2+3^2}\cdot\sqrt{(-2)^2+(-21)^2+(-26)^2}} = \frac{156}{\sqrt{38\,114}} \Rightarrow \alpha \approx 53^\circ.$$

Và

$$\sin\beta = \frac{|\overrightarrow{NA}\cdot\overrightarrow{n}|}{|\overrightarrow{NA}|\cdot|\overrightarrow{n}|} = \frac{|5\cdot(-2)+2\cdot(-21)+4\cdot(-26)|}{\sqrt{5^2+2^2+4^2}\cdot\sqrt{(-2)^2+(-21)^2+(-26)^2}} = \frac{156}{\sqrt{50\,445}} \Rightarrow \beta \approx 44^\circ.$$

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

CÂU 1. Trong hệ trục toạ độ $Oxyz$, với mặt phẳng (Oxy) là mặt đất, một máy bay cất cánh từ vị trí $A(0;10;0)$ với vận tốc $\vec{v}=(150;150;40)$. Tính góc nâng của máy bay (góc giữa hướng chuyển động bay lên của máy bay với đường băng và làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

A. $10°$. B. $12°$. C. $11°$. D. $9°$.

Lời giải.

Gọi α là góc nâng của máy bay.

$\sin\alpha=\dfrac{\left|\vec{v}\cdot\vec{k}\right|}{|\vec{v}|\cdot\left|\vec{k}\right|}\Rightarrow\alpha\approx 10°40'$.

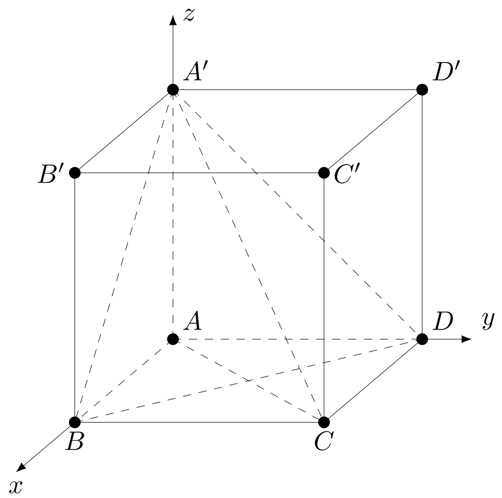
Chọn đáp án C .... □

CÂU 2. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$có cạnh bằng a. Tính số đo góc giữa hai mặt phẳng $(BA'C)$ và $(DA'C)$.

A. $30°$. B. $120°$. C. $90°$. D. $60°$.

Lời giải.

Chọn hệ tọa độ $Oxyz$ có $A\equiv O$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AA'}$ lần lượt cùng hướng với các vectơ đơn vị $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$.
Lấy $a=1$, suy ra $B(1;0;0)$, $D(0;1;0)$, $A'(0;0;1)$, $C(1;1;0)$.
Mặt phẳng $(BA'C)$ có vectơ pháp tuyến là
$\overrightarrow{n_1}=\overrightarrow{BA'}\wedge\overrightarrow{BC}=(-1;0;-1)$.
Mặt phẳng $(DA'C)$ có vectơ pháp tuyến là
$\overrightarrow{n_2}=\overrightarrow{DA'}\wedge\overrightarrow{DC}=(0;1;1)$.
Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng $(BA'C)$ và $(DA'C)$, ta có $\cos\varphi=|\cos(\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2})|=\dfrac{|\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}|}{|\overrightarrow{n_1}|\cdot|\overrightarrow{n_2}|}=\dfrac{1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\dfrac{1}{2}$.
Suy ra $\varphi=60°$.



Chọn đáp án D .... □

CÂU 3. Cho hình lập phương $MNPQ.M'N'P'Q'$ có E, F, G lần lượt là trung điểm của NN', PQ, $M'Q'$ Tính góc giữa hai đường thẳng EG và $P'F$.

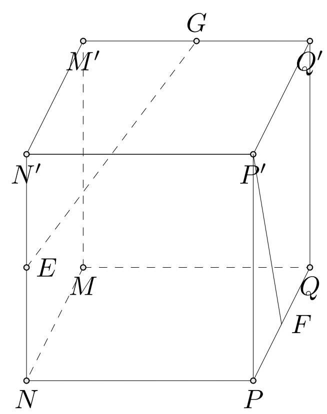
A. $60°$. B. $90°$. C. $30°$. D. $45°$.

Lời giải.

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho $M(0;0;0)$, $N(1;0;0)$, $Q(0;1;0)$ và $M'(0;0;1)$. Lúc đó $P(1;1;0)$, $N'(1;0;1)$, $Q'(0;1;1)$ và $P'(1;1;1)$.

Vì E,F,G lần lượt là trung điểm NN',PQ và $M'Q'$ nên $E\left(1;0;\dfrac{1}{2}\right)$, $F\left(\dfrac{1}{2};1;0\right)$ và $G\left(0;\dfrac{1}{2};1\right)$.

Suy ra $\overrightarrow{EG}=\left(-1;\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right)$, $\overrightarrow{P'F}=\left(-\dfrac{1}{2};0;-1\right)$, do đó $\overrightarrow{EG}\cdot\overrightarrow{P'F}=0$ hay $(EG,P'F)=90°$.



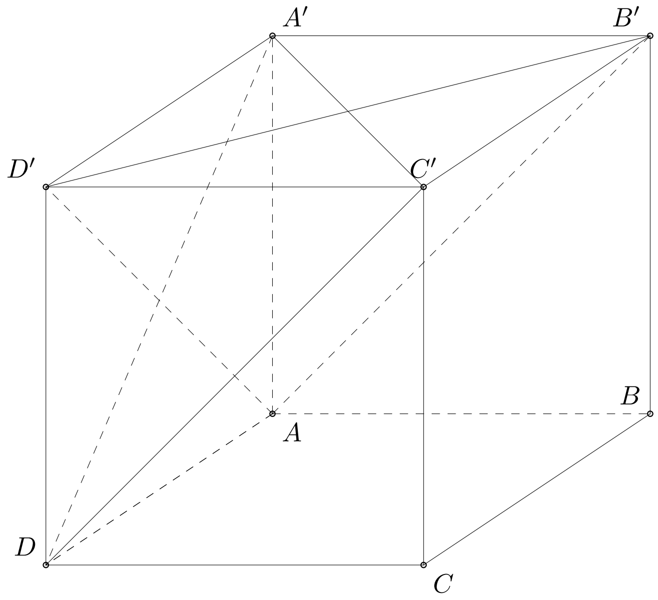
Chọn đáp án B .... □

CÂU 4. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có các cạnh $AB=2, AD=3, AA'=4$. Góc giữa hai mặt phẳng $(AB'D')$ và $(A'C'D)$ là α. Tính giá trị gần đúng của góc α.

A. $45,2°$. B. $38,1°$. C. $61,6°$. D. $53,4°$.

Lời giải.

Gắn hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ vào hệ trục tọa độ $Oxyz$. Khi đó $A(0,0,0)$, $B(0;2;0)$, $C(3;2;0)$, $D(3;0;0)$, $A'(0;0;4)$, $B'(0;2;4)$, $C'(3;2;4)$, $D'(3;0;4)$.
$\overrightarrow{AB'} = (0;2;4)$, $\overrightarrow{AD'} = (3;0;4)$, $\overrightarrow{A'C'} = (3;2;0)$, $\overrightarrow{A'D} = (3;0;-4)$.
Gọi $\vec{n}_1$ là vectơ pháp tuyến của $(AB'D')$. Ta có $\vec{n}_1 = [\overrightarrow{AB'}, \overrightarrow{AD'}] = (8;12;-6)$.
Gọi $\vec{n}_2$ là vectơ pháp tuyến của $(A'C'D)$. Ta có $\vec{n}_2 = [\overrightarrow{A'C'}, \overrightarrow{A'D}] = (-8;12;-6)$.
α là góc giữa hai mặt phẳng $(AB'D')$ và $(A'C'D)$, ta có
$\cos\alpha = \left|\dfrac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|}\right| = \dfrac{29}{61}$.
Vậy giá trị gần đúng của góc α là $61,6°$.



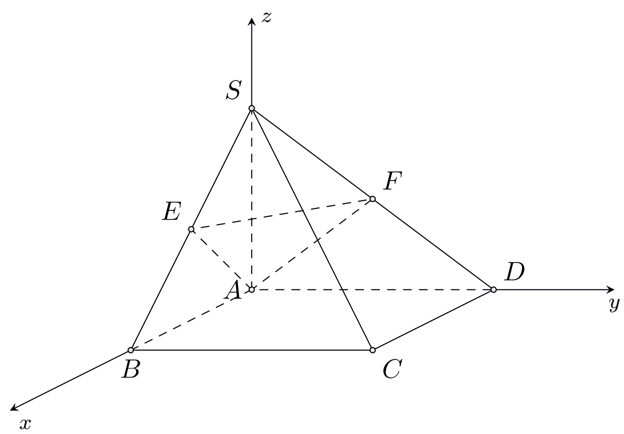
Chọn đáp án C ....

CÂU 5. Cho hình chóp $SABCD$ có $ABCD$ là hình vuông cạnh a, SA vuông góc $(ABCD)$, $SA = a$. Gọi E và F lần lượt là trung điểm SB, SD. Cô-sin của góc hợp bởi hai mặt phẳng (AEF) và $(ABCD)$ là

A. $\sqrt{3}$. B. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. C. $\dfrac{1}{2}$. D. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải.

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ. Ta có: $A(0;0;0)$, $B(a;0;0)$, $D(0;a;0)$, $S(0;0;a)$, $E\left(\dfrac{a}{2};0;\dfrac{a}{2}\right)$, $F\left(0;\dfrac{a}{2};\dfrac{a}{2}\right)$ và $\overrightarrow{AE}\left(\dfrac{a}{2};0;\dfrac{a}{2}\right)$, $\overrightarrow{AF}\left(0;\dfrac{a}{2};\dfrac{a}{2}\right)$.
$\Rightarrow \left[\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AF}\right] = \left(-\dfrac{a^2}{4};-\dfrac{a^2}{4};\dfrac{a^2}{4}\right)$.
$\Rightarrow$ Một VTPT của mặt phẳng (AEF) là $(1;1;-1)$. Phương trình mặt phẳng (AEF) : $x+y-z=0$.
Phương trình mặt phẳng $(ABCD) : z = 0$.



Góc hợp bởi hai mặt phẳng (AEF) và $(ABCD)$ là α, ta có $\cos\alpha = \left|\dfrac{-1}{\sqrt{3}\cdot 1}\right| = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Chọn đáp án D ....

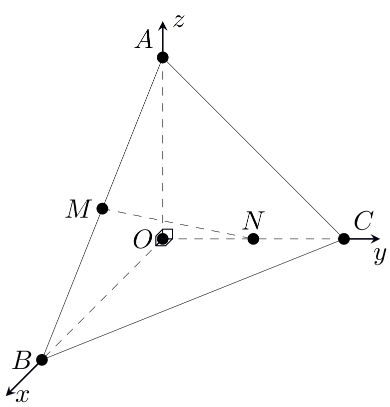
CÂU 6. Cho hình chóp tam giác $O.ABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc và $OA = OB = OC$. Lấy M, N lần lượt là trung điểm của AB, OC. Gọi α là góc tạo bởi OA và MN. Tính $\cos\alpha$.

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. B. $\dfrac{1}{3}$. C. $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$. D. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.

Do OA, OB, OC đôi một vuông góc nên chọn hệ trục toạ độ như hình vẽ. Khi đó, ta có hệ toạ độ của các điểm $O(0;0;0)$, $A(a;0;0)$, $B(0;a;0)$, $C(0;0;a)$.
Suy ra $M\left(\dfrac{a}{2};\dfrac{a}{2};0\right)$, $N\left(0;0;\dfrac{a}{2}\right)$ nên $\overrightarrow{NM} = \left(\dfrac{a}{2};\dfrac{a}{2};-\dfrac{a}{2}\right)$.

$$\text{Suy ra } \cos\alpha = \dfrac{\dfrac{a^2}{2}}{\sqrt{0^2+0^2+a^2}\sqrt{\left(\dfrac{a}{2}\right)^2+\left(\dfrac{a}{2}\right)^2+\left(-\dfrac{a}{2}\right)^2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}.$$



Chọn đáp án A ....

CÂU 7. Hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại B có $AB=a$, $AC=2a$. SA vuông góc với mặt phẳng đáy, $SA=2a$. Gọi ψ là góc tạo bởi hai mặt phẳng (SAC) và (SBC). Tính $\cos\psi$.

A $\dfrac{1}{2}$. **B** $\dfrac{\sqrt{3}}{5}$. **C** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **D** $\dfrac{\sqrt{15}}{5}$.

Lời giải.

Chọn hệ trục tọa độ $Bxyz$ như hình vẽ.

Ta tính được $B(0;0;0)$, $A(a;0;0)$, $C(0;a\sqrt{3};0)$, $S(a;0;2a)$,

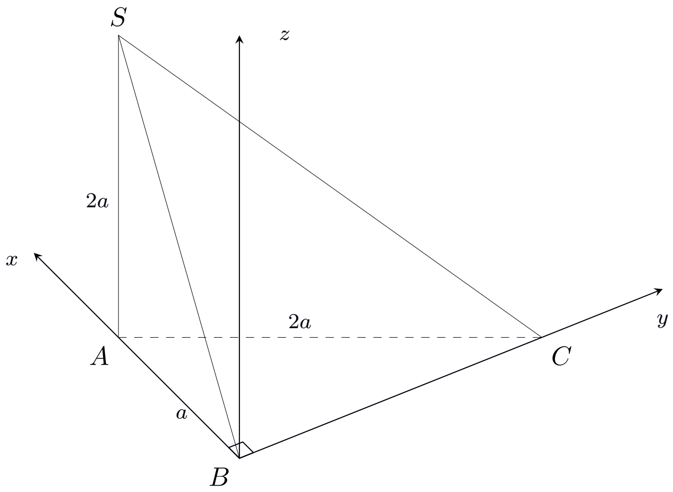
$\overrightarrow{SA}=(0;0;-2a)$, $\overrightarrow{SB}=(-a;0;-2a)$, $\overrightarrow{SC}=(-a;a\sqrt{3};-2a)$,

$\overrightarrow{n_1}=\left[\overrightarrow{SA};\overrightarrow{SC}\right]=(2a^2\sqrt{3};2a^2;0)$ là VTPT của (SAC),

$\overrightarrow{n_2}=\left[\overrightarrow{SB};\overrightarrow{SC}\right]=(2a^2\sqrt{3};0;-a^2\sqrt{3})$ là VTPT của (SBC).

Ta có

$$\cos\psi=\left|\cos\left[\overrightarrow{n_1};\overrightarrow{n_2}\right]\right|=\frac{|\overrightarrow{n_1}\overrightarrow{n_2}|}{|\overrightarrow{n_1}|\cdot|\overrightarrow{n_2}|}=\frac{\sqrt{15}}{5}.$$



Chọn đáp án (D) .... □

CÂU 8. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB=a$, $BC=a\sqrt{3}$, $SA=a$ và SA vuông góc với đáy $ABCD$. Tính $\sin\alpha$, với α là góc tạo bởi giữa đường thẳng BD và mặt phẳng (SBC).

A $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$. **B** $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **C** $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$. **D** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải.

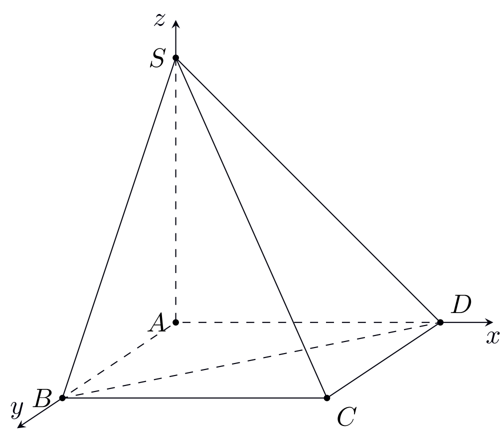
Đặt hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ. Khi đó $A(0;0;0)$, $B(a;0;0)$, $D(0;a\sqrt{3};0)$, $S(0;0;a)$.

Ta có $\overrightarrow{BD}=(-a;a\sqrt{3};0)=a(-1;\sqrt{3};0)$ nên đường thẳng BD có vectơ chỉ phương là $\vec{u}=(-1;\sqrt{3};0)$.

Ta có $\overrightarrow{SB}=(a;0;-a)$, $\overrightarrow{BC}=(0;a\sqrt{3};0)\Rightarrow\left[\overrightarrow{SB},\overrightarrow{BC}\right]=\left(a^2\sqrt{3};0;a^2\sqrt{3}\right)=a^2\sqrt{3}(1;0;1)$. Nên mặt phẳng (SBC) có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(1;0;1)$.

α là góc tạo bởi giữa đường thẳng BD và mặt phẳng (SBC) thì

$\sin\alpha=\dfrac{|\vec{u}\cdot\vec{n}|}{|\vec{u}|\cdot|\vec{n}|}=\dfrac{|(-1)\cdot1+\sqrt{3}\cdot0+0\cdot1|}{\sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2+0^2}\cdot\sqrt{1^2+0^2+1^2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}.$

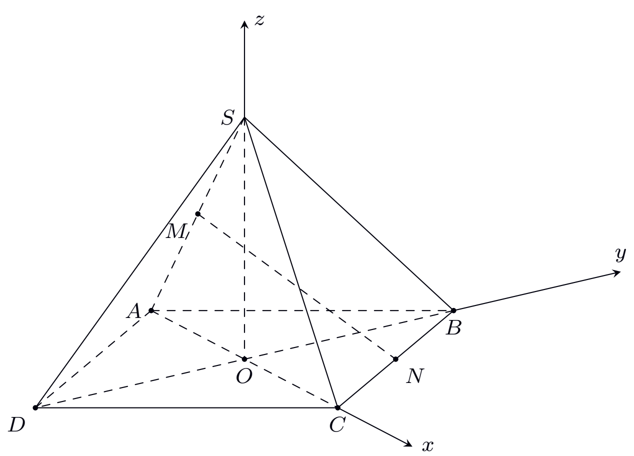


Chọn đáp án (A) .... □

CÂU 9. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a, tâm O. Gọi M và N lần lượt là trung điểm SA và BC. Biết góc giữa MN và $(ABCD)$ bằng 60°, côsin góc giữa MN và mặt phẳng (SBD) bằng

A $\dfrac{\sqrt{41}}{41}$. **B** $\dfrac{2\sqrt{41}}{41}$. **C** $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$. **D** $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

Lời giải.



Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ, đặt $OS = k$ $(k > 0)$.

Ta có $A\left(-\dfrac{a\sqrt{2}}{2}; 0; 0\right)$, $B\left(0; \dfrac{a\sqrt{2}}{2}; 0\right)$, $C\left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2}; 0; 0\right)$, $D\left(0; -\dfrac{a\sqrt{2}}{2}; 0\right)$, $S(0; 0; k)$,

$M\left(-\dfrac{a\sqrt{2}}{4}; 0; \dfrac{k}{2}\right)$ và $N\left(\dfrac{a\sqrt{2}}{4}; \dfrac{a\sqrt{2}}{4}; 0\right)$.

Ta có $\vec{u}_{MN} = \overrightarrow{MN} = \left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2}; \dfrac{a\sqrt{2}}{4}; -\dfrac{k}{2}\right)$ và $\vec{n}_{ABCD} = (0; 0; 1)$.

Ta có

$$\sin(MN; (ABCD)) = \frac{|\vec{u}_{MN} \cdot \vec{n}_{ABCD}|}{|\vec{u}_{MN}| \cdot |\vec{n}_{ABCD}|} \Leftrightarrow \sin 60^\circ = \frac{\frac{k}{2}}{\sqrt{\frac{9a^2}{16} + \frac{k^2}{4}}}$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{a\sqrt{30}}{2}.$$

Ta có $\vec{n}_{SBD} = (1; 0; 0)$, do đó

$$\sin(MN, (SBD)) = \frac{|\vec{u}_{MN} \cdot \vec{n}_{SBD}|}{|\vec{u}_{MN}| \cdot |\vec{n}_{SBD}|} \Leftrightarrow \sin(MN, (SBD)) = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{\frac{5a^2}{2}}} = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

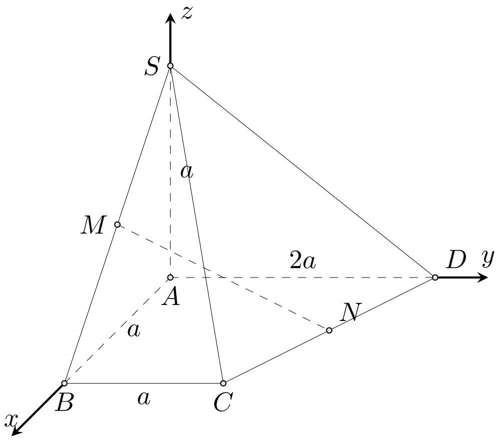
$\Rightarrow \cos(MN, (SBD)) = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$. (do góc nhọn nên cos dương)

Chọn đáp án D .... □

CÂU 10. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và B, $AB = BC = a$, $AD = 2a$, SA vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$, $SA = a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SB và CD. Tính cosin của góc giữa MN và (SAC).

A $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$. **B** $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$. **C** $\dfrac{3\sqrt{5}}{10}$. **D** $\dfrac{\sqrt{55}}{10}$.

Lời giải.



Chọn hệ trục $Oxyz$ như hình vẽ, với $O \equiv A$.

Khi đó ta có: $A(0; 0; 0)$, $B(a; 0; 0)$, $C(a; a; 0)$, $D(0; 2a; 0)$, $S(0; 0; a)$.

Khi đó: $M\left(\dfrac{a}{2}; 0; \dfrac{a}{2}\right)$, $N\left(\dfrac{a}{2}; \dfrac{3a}{2}; 0\right)$.

Ta có: $-\dfrac{1}{a}\overrightarrow{SA} = (0; 0; 1) = \vec{u}$; $\dfrac{1}{a}\overrightarrow{SC} = (1; 1; -1) = \vec{v}$.

Gọi $\vec{n}$ là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (SAC) ta có $\vec{n} = [\vec{u}, \vec{v}] = (-1; -1; 0)$.

Lại có: $\dfrac{2}{a}\overrightarrow{MN} = (0; 3; -1) = \vec{w}$.

Gọi α là góc giữa MN và (SAC) ta có: $\sin\alpha = \dfrac{|\vec{n}.\vec{w}|}{|\vec{n}|.|\vec{w}|} = \dfrac{3}{2\sqrt{5}} \Rightarrow \cos\alpha = \dfrac{\sqrt{55}}{10}$.

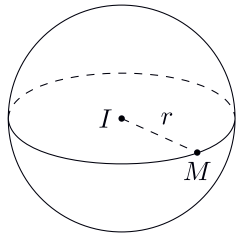
Chọn đáp án D .... □

Bài 17. PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU

A. LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1. Định nghĩa

- Trong không gian, tập hợp tất cả các điểm M cách điểm I cố định một khoảng không đổi r ($r > 0$) cho trước được gọi là mặt cầu tâm I bán kính R. Kí hiệu $S(I;r)$ hay viết tắt là (S). Vậy $S(I;R) = \{M|IM = r\}$.



- Nhận xét:
  - Nếu $IM = r$ thì M nằm trên mặt cầu.
  - Nếu $IM < r$ thì M nằm trong mặt cầu.
  - Nếu $IM > r$ thì M nằm ngoài mặt cầu.

2. Phương trình mặt cầu

- Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu (S) tâm $I(a;b;c)$ bán kính r có phương trình là

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2.$$

- Dạng khai triển: $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$, với $d=a^2+b^2+c^2-r^2>0$.

B. PHÂN LOẠI, PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

1 Xác định tâm I, bán kính r của mặt cầu cho trước

- **Loại 1.** Cho $(S)\colon (x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$. Khi đó

  ① Tâm $I\,(a;b;c)$ (đổi dấu số trong dấu ngoặc);

  ② Bán kính r (Rút căn vế phải).

- **Loại 2.** Cho $(S)\colon x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$. Khi đó

  ① Điều kiện để (*) là mặt cầu là $a^2+b^2+c^2-d>0$;

  ② Tâm $I\,(a,b,c)$ (đổi dấu hệ số của x, y, z và chia đôi);

  ③ Bán kính $R=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}$.

BÀI TẬP TỰ LUẬN

VÍ DỤ 1. Trong các phương trình sau, phương trình nào là phương trình mặt cầu? Hãy xác định tâm và bán kính (nếu là phương trình mặt cầu).

a) $(x-2)^2+y^2+(z+1)^2=4$.

b) $x^2+y^2+z^2-2x-4y+6z-2=0$.

c) $x^2+y^2+z^2-2x+4y+3z+8=0$.

d) $3x^2+3y^2+3z^2+6x+12y-9z+1=0$

Lời giải.

a)

b) Mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;-3)$ và bán kính $R=\sqrt{1^2+2^2+(-3)^2+2}=4$

c)

d) Ta có

$$\begin{aligned}
& 3x^2+3y^2+3z^2+6x+12y-9z+1=0\\
\Leftrightarrow\ & x^2+y^2+z^2+2x+4y-3z+\frac{1}{3}=0\\
\Leftrightarrow\ & (x^2+2x)+(y^2+2\cdot 2\cdot y)+\left(z^2-2\cdot\frac{3}{2}\cdot z\right)=\frac{-1}{3}\\
\Leftrightarrow\ & (x+1)^2+(y+2)^2+\left(z-\frac{3}{2}\right)^2=1+4+\frac{9}{4}-\frac{1}{3}\\
\Leftrightarrow\ & (x+1)^2+(y+2)^2+\left(z-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{83}{12}.
\end{aligned}$$

Vậy đây là phương trình mặt cầu (S) tâm $I\left(-1;-2;\dfrac{3}{2}\right)$, bán kính $r=\sqrt{\dfrac{83}{12}}=\dfrac{\sqrt{249}}{6}$.

VÍ DỤ 2. Trong không gian $Oxyz$, tìm tất cả giá trị của tham số m để các phương trình sau là phương trình mặt cầu.

a) $x^2+y^2+z^2-2(m+2)x+4my-2mz+5m^2+9=0$;

b) $x^2+y^2+z^2+2(m+2)x-2(m-1)z+3m^2-5=0$.

Lời giải.

a) Gọi phương trình đã cho có dạng $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$ với $a=m+2$, $b=-2m$, $c=m$, $d=5m^2+9$.
Để phương trình đã cho là phương trình mặt cầu thì

$$a^2+b^2+c^2-d>0 \Leftrightarrow m^2+4m+4+4m^2+m^2-5m^2-9>0 \Leftrightarrow m^2+4m-5>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m<-5\\ m>1.\end{array}\right.$$

b) Phương trình đã cho là phương trình của một mặt cầu khi và chỉ khi

$$(m+2)^2+(m-1)^2-3m^2+5>0 \Leftrightarrow m^2-2m-10<0 \Leftrightarrow 1-\sqrt{11}$$

Do $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\in\{-2;-1;0;1;2;3;4\}$. Vậy có 7 giá trị nguyên của m thỏa yêu cầu bài toán.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

CÂU 1. Cho mặt cầu $(S)\colon (x+1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=9$. Tìm tọa độ tâm I và tính bán kính R của (S).

Ⓐ $I(1;-2;-1)$ và $R=3$. Ⓑ $I(1;-2;-1)$ và $R=9$. Ⓒ $I(-1;2;1)$ và $R=3$. Ⓓ $I(-1;2;1)$ và $R=9$.

Lời giải.

Ta có mặt cầu (S) có tâm $I(-1;2;1)$ và bán kính $R=3$.

Chọn đáp án C .... □

CÂU 2. Cho mặt cầu $(S)\colon (x-1)^2+(y+2)^2+z^2=9$. Mặt cầu (S) có thể tích bằng

Ⓐ $V=36\pi$. Ⓑ $V=14\pi$. Ⓒ $V=\dfrac{4}{36}\pi$. Ⓓ $V=16\pi$.

Lời giải.

Mặt cầu $(S)\colon (x-1)^2+(y+2)^2+z^2=9$ có tâm là $(1;-2;0)$, bán kính $R=3$.

Thể tích mặt cầu $V=\dfrac{4}{3}\pi R^3=36\pi$.

Chọn đáp án A .... □

CÂU 3. Cho mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2-4x-6y+8z-7=0$. Tọa độ tâm và bán kính mặt cầu (S) lần lượt là

Ⓐ $I(-2;-3;4)$, $R=6$. Ⓑ $I(-2;-3;4)$, $R=36$. Ⓒ $I(2;3;-4)$, $R=36$. Ⓓ $I(2;3;-4)$, $R=6$.

Lời giải.

Ta có

$$x^2+y^2+z^2-4x-6y+8z-7=0 \Leftrightarrow (x-2)^2+(y-3)^2+(z+4)^2=36.$$

Nên mặt cầu (S) có tâm $I(2;3;-4)$ và bán kính $R=6$.

Chọn đáp án D .... □

CÂU 4. Cho mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2-8x+2y+1=0$. Tìm tọa độ tâm và bán kính của mặt cầu (S).

Ⓐ $I(4;-1;0)$, $R=4$. Ⓑ $I(-4;1;0)$, $R=4$. Ⓒ $I(-4;1;0)$, $R=2$. Ⓓ $I(4;-1;0)$, $R=2$.

Lời giải.

Mặt cầu (S) có tâm $I(4;-1;0)$ và bán kính $R=\sqrt{4^2+(-1)^2+0^2-1}=4$.

Chọn đáp án A .... □

CÂU 5. Cho mặt cầu $(S)\colon 2x^2+2y^2+2z^2+12x-4y+4=0$. Mặt cầu (S) có đường kính AB. Biết điểm $A(-1;-1;0)$ thuộc mặt cầu (S). Tọa độ điểm B là

Ⓐ $B(-5;3;-2)$. Ⓑ $B(-11;5;0)$. Ⓒ $B(-11;5;-4)$. Ⓓ $B(-5;3;0)$.

Lời giải.

- Viết lại phương trình $(S)\colon x^2+y^2+z^2+6x-2y+2=0$. Khi đó tâm của mặt cầu là $I(-3;1;0)$.
- Vì AB là đường kính nên I là trung điểm của AB, suy ra $B(-5;3;0)$.

Chọn đáp án D .... □

CÂU 6. Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt cầu?

(A) $x^2+y^2-z^2+4x-2y+6z+5=0$.
(B) $x^2+y^2+z^2+4x-2y+6z+15=0$.
(C) $x^2+y^2+z^2+4x-2y+z-1=0$.
(D) $x^2+y^2+z^2-2x+2xy+6z-5=0$.

Lời giải.

Phương trình $x^2+y^2+z^2+4x-2y+z-1=0$ là phương trình mặt cầu vì có dạng là $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$ và thỏa $a^2+b^2+c^2-d>0$ (dễ nhận biết vì $d=-1<0$).

Chọn đáp án (C) ☐

CÂU 7. Cho phương trình $x^2+y^2+z^2-2mx-2(m+2)y-2(m+3)z+16m+13=0$. Tìm tất cả các giá trị thực của m để phương trình trên là phương trình của một mặt cầu.

(A) $m<0$ hay $m>2$.
(B) $m\le -2$ hay $m\ge 0$.
(C) $m<-2$ hay $m>0$.
(D) $m\le 0$ hay $m\ge 2$.

Lời giải.

Phương trình đã cho là phương trình của một mặt cầu khi và chỉ khi

$$m^2+(m+2)^2+(m+3)^2-16m-13>0$$
$$\Leftrightarrow 3m^3-6m>0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m<0 \\ m>2 \end{array}\right..$$

Chọn đáp án (A) ☐

CÂU 8. Có tất cả bao nhiêu giá trị của tham số m (biết $m\in\mathbb{N}$) để phương trình $x^2+y^2+z^2+2(m-2)y-2(m+3)z+3m^2+7=0$ là phương trình của một mặt cầu?

(A) 2.
(B) 3.
(C) 4.
(D) 5.

Lời giải.

Đồng nhất hệ số của phương trình $x^2+y^2+z^2+2(m-2)y-2(m+3)z+3m^2+7=0$ (*) với phương trình $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$ ta được $a=0$, $b=2-m$, $c=m+3$ và $d=3m^2+7$.

Phương trình (*) là phương trình của một mặt cầu khi

$$a^2+b^2+c^2-d>0 \Leftrightarrow (2-m)^2+(m+3)^2-(3m^2+7)>0$$
$$\Leftrightarrow -m^2+2m+6>0$$
$$\Leftrightarrow 1-\sqrt{7}<m<1+\sqrt{7}.$$

Do $1-\sqrt{7}<m<1+\sqrt{7}$ và $m\in\mathbb{N}$ nên $m\in\{0;1;2;3\}$.

Chọn đáp án (C) ☐

CÂU 9. Cho mặt cầu (S): $x^2+y^2+z^2-2x-4y+4z-m=0$ (m là tham số). Biết mặt cầu có bán kính bằng 5. Tìm m.

(A) $m=25$.
(B) $m=11$.
(C) $m=16$.
(D) $m=-16$.

Lời giải.

- Công thức bán kính mặt cầu là $R=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}=\sqrt{1+4+4+m}$.
- Theo giả thiết $R=5\Leftrightarrow\sqrt{1+4+4+m}=5\Leftrightarrow m=16$.

Chọn đáp án (C) ☐

CÂU 10. Mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2-4mx+4y+2mz+m^2+4m=0$ có bán kính nhỏ nhất khi m bằng

(A) $\frac{1}{2}$.
(B) $\frac{1}{3}$.
(C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$.
(D) 0.

Lời giải.

- Công thức bán kính mặt cầu là

$$\begin{aligned} R &= \sqrt{a^2+b^2+c^2-d} \\ &= \sqrt{4m^2+4+m^2-(m^2+4m)} \\ &= \sqrt{4m^2-4m+4} \\ &= \sqrt{(2m-1)^2+3} \quad (1). \end{aligned}$$

- Biểu thức (1) đạt giá trị nhỏ nhất khi $m=\frac{1}{2}$.

Chọn đáp án (A) ☐

2 Lập phương trình mặt cầu và ứng dụng thực tiễn

Phương pháp chung: Cần xác định được tọa độ tâm $I(a;b;c)$ và độ dài bán kính r.

Các bài toán cơ bản:

① Mặt cầu có tâm $I(a;b;c)$ và đi qua điểm $A(x_A;y_A;z_A)$ thì bán kính

$$r = IA = \sqrt{(x_A - x_I)^2 + (y_A - y_I)^2 + (z_A - z_I)^2}.$$

② Mặt cầu (S) có đường kính AB thì

- Tâm $I(a;b;c)$ là trung điểm của AB hay $I\left(\dfrac{x_A+x_B}{2};\dfrac{y_A+y_B}{2};\dfrac{z_A+z_B}{2}\right)$.
- Bán kính $r = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}}{2}$.

③ Mặt cầu có tâm $I(a;b;c)$ và tiếp xúc với $(\alpha)\colon Ax+By+Cz+D=0$ thì bán kính

$$r = \mathrm{d}(I,(\alpha)) = \frac{|Aa+Bb+Cc+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

④ Mặt cầu qua bốn điểm A, B, C, D không đồng phẳng (ngoại tiếp tứ diện $ABCD$)
Gọi (S) có dạng $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$ (*)
Thay tọa độ 4 điểm A, B, C, D vào (*), ta được hệ phương trình 4 ẩn số a, b, c, d;
Giải tìm a, b, c, d. Suy ra tâm $I(a,b,c)$, bán kính $R=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}$.

BÀI TẬP TỰ LUẬN

VÍ DỤ 1. Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt cầu (S)

a) Có tâm $I(2;-1;0)$ và đi qua điểm $M(4;1;-2)$;

b) Có đường kính AB với $A(0;1;3)$, $B(4;-5;-1)$;

c) Có tâm $I(1;-2;3)$ và tiếp xúc với trục Oy;

d) Có tâm $I(1;2;-1)$ và tiếp xúc với $(P)\colon x-2y-2z-8=0$.

Lời giải.

a) Bán kính mặt cầu là $r = IM = \sqrt{(4-2)^2+(1+1)^2+(-2-0)^2} = \sqrt{12}$. Phương trình mặt cầu tâm $I(2;-1;0)$, bán kính $r=\sqrt{12}$ là

$$(x-2)^2+(y+1)^2+z^2=12.$$

b) Tâm của mặt cầu (S) là trung điểm I của đoạn thẳng AB, suy ra $I(2;-2;1)$. Bán kính mặt cầu (S) là $R=\dfrac{AB}{2}=\dfrac{\sqrt{4^2+(-6)^2+(-4)^2}}{2}=\sqrt{17}$. Vậy phương trình mặt cầu (S) là

$$(x-2)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=17.$$

c) Gọi M là hình chiếu của $I(1;-2;3)$ lên Oy, ta có: $M(0;-2;0)$.
$\overrightarrow{IM}=(-1;0;-3)\Rightarrow R=d(I,Oy)=IM=\sqrt{10}$ là bán kính mặt cầu cần tìm.
Phương trình mặt cầu là: $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=10$.

d) Mặt cầu có tâm $I(1;2;-1)$ và tiếp xúc với $(P)\colon x-2y-2z-8=0$ sẽ có bán kính là

$$R=\mathrm{d}(I,(P))=\frac{|1-2\cdot 2-2\cdot(-1)-8|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+(-2)^2}}=3.$$

Vậy phương trình mặt cầu là $(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=9$.

VÍ DỤ 2. Viết phương trình mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$, biết

a) $A(1;1;0)$, $B(1;0;1)$, $C(0;1;1)$, $D(1;2;3)$.

b) $A(1;2;-4)$; $B(1;-3;1)$, $C(2;2;3)$, $D(1;0;4)$.

Lời giải.

a) Giả sử phương trình mặt cầu có dạng: $(S): x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$ + Với $a^2+b^2+c^2-d>0$, ta có

$$\mathrm{A}(1;1;0),\mathrm{B}(1;0;1),\mathrm{C}(0;1;1),\mathrm{D}(1;2;3)\in(S):\Rightarrow\begin{cases}1+1+0-a-2b-0+d=0\\1+0+1-2a-0-2c+d=0\\0+1+1-0-2b-2c+d=0\\1+2^2+3^2-2a-4b-6c+d=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-2a-2b+d=-2\\-2c-2c+d=-2\\-2b-2c+d=-2\\-2a-4b-6c+d=-14\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Rightarrow(S): x^2+y^2+z^2-2\cdot\frac{3}{2}x-2\cdot\frac{3}{2}y-2\cdot\frac{3}{2}z+4=0$$
$$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-3x-3y-3z+4=0.$$

b) Gọi phương trình mặt cầu (S) :

$$x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0\left(a^2+b^2+c^2-d>0\right)$$

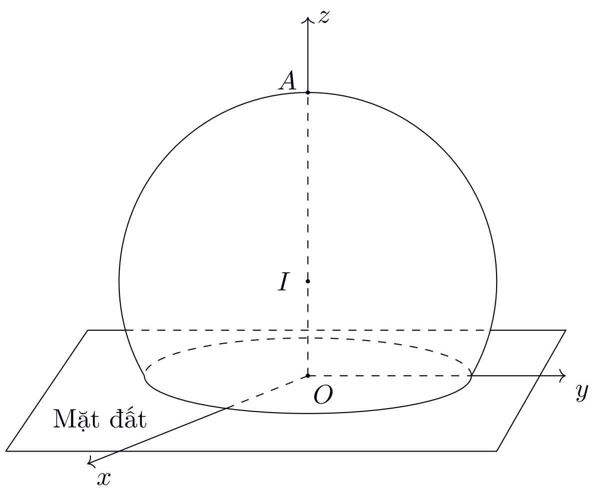
Do mặt cầu đi qua 4 điểm A,B,C,D nên tọa độ của 4 điểm thỏa mãn phương trình mặt cầu

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-2a-4b+8c+d=-21\\-2a+6b-2c+d=-11\\-4a-4b-6c+d=-17\\-2a-8c+d=-17\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}a=-2\\b=1\\c=0\\d=-21\end{cases}$$

Vậy phương trình mặt cầu cần tìm là

$$x^2+y^2+z^2+4x-2y-21=0$$

VÍ DỤ 3. Giả sử người ta biểu diễn mô phỏng của tòa nhà Ericsson Globe ở phần Khởi động trong hệ trục tọa độ $Oxyz$ bởi một mặt cầu có tâm I, đường kính 110 m và $OA=85$ m như hình vẽ (đơn vị trên trục là mét). Hãy viết phương trình của mặt cầu này.

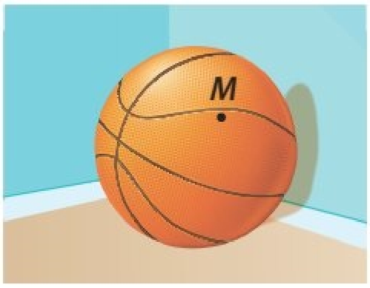


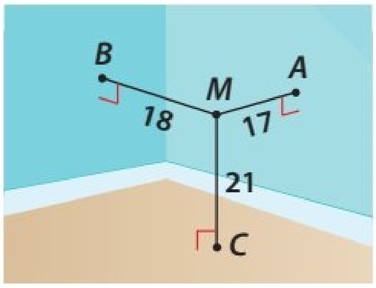
Lời giải.

- Bán kính của mặt cầu tâm I là $R=IA=\dfrac{110}{2}=55$ m.
- Ta có $OA=OI+IA\Rightarrow OI=OA-IA=85-55=30$ m.
  Vì $I\in Oz$ nên toạ độ điểm $I(0;0;30)$.
- Phương trình mặt cầu tâm $I(0;0;30)$ có bán kính $R=55$ m là

$$x^2+y^2+(z-30)^2=55^2 \text{ hay } x^2+y^2+(z-30)^2=3025.$$

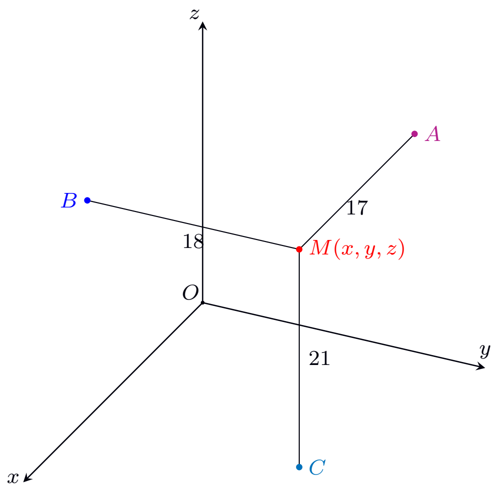
VÍ DỤ 4. Bạn Bình đố bạn Nam tìm được đường kính của quả bóng rổ, biết rằng nếu đặt quả bóng ở một góc căn phòng hình hộp chữ nhật, sao cho quả bóng chạm (tiếp xúc) với hai bức tường và nền nhà của căn phòng đó (khi đó khoảng cách từ tâm quả bóng đến hai bức tường và nền nhà đều bằng bán kính của quả bóng) thì có một điểm M trên quả bóng với khoảng cách lần lượt đến hai bức tường và nền nhà là 17 cm, 18 cm và 21 cm (Hình bên dưới). Hãy giúp Nam xác định đường kính của quả bóng rổ đó. Biết rằng loại bóng rổ tiêu chuẩn có đường kính từ 23 cm đến 24,5 cm.





Lời giải.

Xét quả bóng tiếp xúc với các bức tường và chọn hệ trục $Oxyz$ như hình vẽ bên.



Gọi $I(a; a; a)$ là tâm của mặt cầu và $r = a > 0$.

Phương trình mặt cầu của quả bóng là

$$(S)\colon (x-a)^2 + (y-a)^2 + (z-a)^2 = a^2.$$

Giả sử $M(x; y; z)$ nằm trên mặt cầu (bề mặt của quả bóng) sao cho $\mathrm{d}\left(M,(Oxy)\right) = 21$, $\mathrm{d}\left(M,(Oxz)\right) = 18$, $\mathrm{d}\left(M,(Oyz)\right) = 17$. Khi đó $z = 21, y = 18, x = 17$. Khi đó ta có phương trình

$$\begin{aligned} & (17-a)^2 + (18-a)^2 + (21-a)^2 = a^2 \\ \Leftrightarrow\ & 2a^2 - 112a + 1054 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} a \approx 11{,}97(\text{nhận}) \\ a \approx 44{,}03(\text{loại}) \end{array}\right. \end{aligned}$$

Vậy đường kính của quả bóng rổ là $2a \approx 23{,}94$ cm.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

CÂU 1. Mặt cầu tâm $I(3; -1; 0)$, bán kính $R = 5$ có phương trình là

Ⓐ $(x+3)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 5$.
Ⓑ $(x-3)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 5$.
Ⓒ $(x-3)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 25$.
Ⓓ $(x+3)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 25$.

Lời giải.

Mặt cầu tâm $I(3; -1; 0)$, bán kính $R = 5$ có phương trình là $(x-3)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 25$.

Chọn đáp án Ⓒ .... □

CÂU 2. Phương trình mặt cầu tâm $I(2; -3; -4)$, bán kính bằng 4 là

Ⓐ $(x+2)^2 + (y-3)^2 + (z-4)^2 = 16$.
Ⓑ $(x-2)^2 + (y+3)^2 + (z+4)^2 = 16$.
Ⓒ $(x+2)^2 + (y-3)^2 + (z-4)^2 = 4$.
Ⓓ $(x-2)^2 + (y+3)^2 + (z+4)^2 = 4$.

Lời giải.

Chọn đáp án Ⓑ .... □

CÂU 3. Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm $I(-1; 1; -2)$ và đi qua điểm $A(2; ; 1; 2)$.

Ⓐ $(S)\colon (x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 5$.
Ⓑ $(S)\colon (x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 25$.
Ⓒ $(S)\colon (x+1)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 25$.
Ⓓ $(S)\colon x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2y + 4z + 1 = 0$.

Lời giải.

Bán kính mặt cầu là $R = IA = \sqrt{9 + 0 + 16} = 5$.

Vậy phương trình mặt cầu là $(x+1)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 25$.

Chọn đáp án Ⓒ .... □

CÂU 4. Mặt cầu tâm $I(-3; 0; 4)$ và đi qua điểm $A(-3; 0; 0)$ có phương trình là

Ⓐ $(x-3)^2 + y^2 + (z+4)^2 = 4$.
Ⓑ $(x-3)^2 + y^2 + (z+4)^2 = 16$.
Ⓒ $(x+3)^2 + y^2 + (z-4)^2 = 16$.
Ⓓ $(x+3)^2 + y^2 + (z-4)^2 = 4$.

Lời giải.

Bán kính mặt cầu $R = IA = 4$.
Chọn đáp án C .... □

CÂU 5. Phương trình mặt cầu (S) đường kính AB với $A(4;-3;5)$, $B(2;1;3)$ là

A. $x^2+y^2+z^2+6x+2y-8z-26=0$.
B. $x^2+y^2+z^2-6x+2y-8z+20=0$.
C. $x^2+y^2+z^2+6x-2y+8z-20=0$.
D. $x^2+y^2+z^2-6x+2y-8z+26=0$.

Lời giải.

Ta có $AB = \sqrt{(2-4)^2+(1+4)^2+(3-5)^2} = 2\sqrt{6}$.

Gọi I, R là tâm và bán kính của mặt cầu (S) suy ra $R = \dfrac{AB}{2} = \sqrt{6}$ và $I(3;-1;4)$.

Khi đó phương trình mặt cầu (S) là

$$(x-3)^2+(y+1)^2+(z-4)^2=6 \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-6x+2y-8z+20=0$$

Chọn đáp án B .... □

CÂU 6. Cho hai điểm $A(2;4;1)$ và $B(-2;2;-3)$. Phương trình mặt cầu đường kính AB là

A. $x^2+(y-3)^2+(z-1)^2=9$.
B. $x^2+(y+3)^2+(z-1)^2=9$.
C. $x^2+(y-3)^2+(z+1)^2=3$.
D. $x^2+(y-3)^2+(z+1)^2=9$.

Lời giải.

Mặt cầu đường kính AB có tâm là trung điểm của đoạn thẳng AB.

Suy ra tọa độ tâm mặt cầu là $I(0;3;-1)$. Bán kính mặt cầu: $R = \dfrac{AB}{2} = 3$.

Chọn đáp án D .... □

CÂU 7. Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm $I(-1;4;2)$, biết thể tích khối cầu tương ứng là $V = 972\pi$.

A. $(x+1)^2+(y-4)^2+(z-2)^2=81$.
B. $(x+1)^2+(y-4)^2+(z-2)^2=9$.
C. $(x-1)^2+(y+4)^2+(z-2)^2=9$.
D. $(x-1)^2+(y+4)^2+(z+2)^2=81$.

Lời giải.

Thể tích khối cầu $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3 = 972\pi \Leftrightarrow R = 9$.

Phương trình mặt cầu (S): $(x+1)^2+(y-4)^2+(z-2)^2=81$.

Chọn đáp án A .... □

CÂU 8. Mặt cầu (S) có tâm $I(2;1;-1)$, tiếp xúc với mặt phẳng tọa độ (Oyz). Phương trình của mặt cầu (S) là

A. $(x+2)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=4$.
B. $(x-2)^2+(y-1)^2+(z+1)^2=1$.
C. $(x-2)^2+(y-1)^2+(z+1)^2=4$.
D. $(x+2)^2+(y-1)^2+(z+1)^2=2$.

Lời giải.

Bán kính mặt cầu: $R = d[I,(Oyz)] = |x_I| = 2$.

Chọn đáp án C .... □

CÂU 9. Mặt cầu có tâm $I(1;2;-3)$ và tiếp xúc với trục Oy có bán kính bằng

A. 2.
B. $\sqrt{5}$.
C. $\sqrt{10}$.
D. $\sqrt{13}$.

Lời giải.

Bán kính mặt cầu: $R = d[I,Oy] = \sqrt{x_I^2+z_I^2} = \sqrt{10}$.

Chọn đáp án C .... □

CÂU 10. Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu tâm $I(-1;0;3)$ tiếp xúc với mặt phẳng $(\alpha)\colon 4y-3z+19=0$ có phương trình là

A. $(x-1)^2+y^2+(z+3)^2=4$.
B. $(x+1)^2+y^2+(z-3)^2=2$.
C. $(x+1)^2+y^2+(z-3)^2=4$.
D. $(x-1)^2+y^2+(z+3)^2=2$.

Lời giải.

Mặt cầu tiếp xúc với mặt phẳng $\Leftrightarrow R = \mathrm{d}(I,(\alpha)) = \dfrac{|-3\cdot 3+19|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}} = 2$.

Vậy phương trình mặt cầu là $(x+1)^2+y^2+(z-3)^2=4$.

Chọn đáp án C .... □

CÂU 11. Viết phương trình mặt cầu (S) đi qua $A(-1;2;0)$, $B(-2;1;1)$ và có tâm nằm trên trục Oz.

A. $x^2+y^2+z^2-z-5=0$.
B. $x^2+y^2+z^2+5=0$.
C. $x^2+y^2+z^2-x-5=0$.
D. $x^2+y^2+z^2-y-5=0$.

Lời giải.

Tâm I của mặt cầu trên trục Oz có tọa độ $I(0;0;c)$.

Hai điểm A, B nằm trên mặt cầu nên

$$\begin{aligned}&IA^2 = IB^2\\ \Leftrightarrow\ &1^2+2^2+c^2 = 2^2+1^2+(1-c)^2\\ \Leftrightarrow\ &c=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Từ đó, phương trình mặt cầu là $x^2+y^2+\left(z-\frac{1}{2}\right)^2 = 1^2+2^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2$

hay $x^2+y^2+z^2-z-5=0$.

Chọn đáp án A .... □

CÂU 12. Cho mặt cầu (S) tâm I nằm trên mặt phẳng (Oxy) đi qua ba điểm $A(1;2;-4)$, $B(1;-3;1)$, $C(2;2;3)$. Tìm tọa độ điểm I.

A $I(2;-1;0)$. **B** $I(0;0;1)$. **C** $I(0;0;-2)$. **D** $I(-2;1;0)$.

Lời giải.

Vì $I \in (Oxy) \Rightarrow I(a;b;0)$. Ta có $\overrightarrow{AI}=(a-1;b-2;4)$; $\overrightarrow{BI}=(a-1;b+3;-1)$; $\overrightarrow{CI}=(a-2;b-2;-3)$.

Do I là tâm cầu nên

$$\begin{aligned}&\begin{cases}IA=IB\\IA=IC\end{cases}\\ \Leftrightarrow\ &\begin{cases}(a-1)^2+(b-2)^2+4^2=(a-1)^2+(b+3)^2+1\\(a-1)^2+(b-2)^2+4^2=(a-2)^2+(b-2)^2+9\end{cases}\\ \Leftrightarrow\ &\begin{cases}-4b+20=6b+10\\-2a+17=-4a+13\end{cases}\\ \Leftrightarrow\ &\begin{cases}b=1\\a=-2\end{cases}\\ \Rightarrow\ &I(-2;1;0).\end{aligned}$$

Chọn đáp án D .... □

CÂU 13. Cho 3 điểm $A(2;3;0)$, $B(0;-4;1)$, $C(3;1;1)$. Mặt cầu đi qua ba điểm A, B, C và có tâm I thuộc mặt phẳng (Oxz), biết $I(a;b;c)$. Tính tổng $T=a+b+c$.

A $T=3$. **B** $T=-3$. **C** $T=-1$. **D** $T=2$.

Lời giải.

Gọi phương trình mặt cầu có dạng $(S)\colon x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$.

Mặt cầu có tâm $I(a;b;c)$. Vì $I\in(Oxz)$ và $A,B,C\in(S)$ nên ta có hệ

$$\begin{cases}13-4a-6b+d=0\\17+8b-2c+d=0\\11-6a-2b-2c+d=0\\b=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}13-4a-6b+d=0\\4a+14b-2c=-4\\-2a+4b-2c=2\\b=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-1\\b=0\\c=0\\d=-17.\end{cases}$$

Vậy $T=a+b+c=-1+0+0=-1$.

Chọn đáp án C .... □

CÂU 14. Cho các điểm $A(1;0;0)$, $B(0;2;0)$, $C(0;0;-2)$. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $OABC$ là

A $\frac{7}{2}$. **B** $\frac{1}{2}$. **C** $\frac{3}{2}$. **D** $\frac{5}{2}$.

Lời giải.

- **Cách 1.** Gọi $I(x;y;z)$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $OABC$. Khi đó

$$\begin{cases}OI^2=AI^2\\OI^2=BI^2\\OI^2=CI^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+y^2+z^2=(x-1)^2+y^2+z^2\\x^2+y^2+z^2=x^2+(y-2)^2+z^2\\x^2+y^2+z^2=x^2+y^2+(z+2)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{1}{2}\\y=1\\z=-1.\end{cases}$$

Suy ra bán kính $R=OI=\frac{3}{2}$.

- **Cách 2.**
  - Gọi mặt cầu (S) có dạng $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$ (1).

- Thay lần lượt tọa độ 4 điểm O, A, B, C vào (1) và giải hệ, ta tìm được a, b, c, d.
- Tính $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$.

Chọn đáp án C ....

CÂU 15. Cho điểm $D(3; 4; -2)$. Gọi A, B, C lần lượt là hình chiếu vuông góc của D trên các trục tọa độ Ox, Oy, Oz. Gọi (S) là mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$. Tính diện tích mặt cầu (S).

A $\dfrac{4\sqrt{29}\pi}{3}$. **B** $\dfrac{29\sqrt{29}\pi}{6}$. **C** 116π. **D** 29π.

Lời giải.

Nhận xét rằng, bốn điểm A, B, C, D là 4 trong 8 đỉnh của một hình hộp chữ nhật có đường chéo là OD. Suy ra $R = \dfrac{OD}{2} = \dfrac{\sqrt{29}}{2}$.

Diện tích mặt cầu $S = 4\pi R^2 = 29\pi$.

Chọn đáp án D ....

3 Vị trí tương đối của điểm, của mặt phẳng với mặt cầu

Bài toán 1: Xét điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ và mặt cầu $S\colon (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 - r^2 = 0$ (1). Thay tọa độ điểm M vào vế trái của (1), nếu

① Kết quả bằng 0 thì $M \in (S)$.

② Kết quả ra số âm thì M nằm trong (S).

③ Kết quả ra số dương thì M nằm trong (S).

Bài toán 2: Cho mặt cầu (S) có tâm $I(a; b; c)$, bán kính r và mặt phẳng $(P)\colon Ax + By + Cz + D = 0$.

① Nếu $\mathrm{d}\left(I, (P)\right) = \dfrac{\left|Aa + Bb + Cc + D\right|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} > r$ thì (P) và (S) không có điểm chung.

② Nếu $\mathrm{d}\left(I, (P)\right) = \dfrac{\left|Aa + Bb + Cc + D\right|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = r$ thì (P) tiếp xúc (S).

③ Nếu $\mathrm{d}\left(I, (P)\right) = \dfrac{\left|Aa + Bb + Cc + D\right|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} < r$ thì (P) cắt (S).

BÀI TẬP TỰ LUẬN

VÍ DỤ 1. Cho mặt cầu (S) có tâm $I(2; -1; 4)$ và bán kính $R = 5$. Các điểm $A(3; 1; 5)$, $B(-1; 11; 14)$, $C(6; 2; 4)$ nằm trong, nằm trên hay nằm ngoài mặt cầu (S)?

Lời giải.

- $IA = \sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{6} \approx 2{,}45 < R = 5$, suy ra $IA < R$. Do đó, điểm A nằm trong mặt cầu (S).
- $IB = \sqrt{(-3)^2 + 12^2 + 10^2} = \sqrt{253} \approx 15,91 > 5$, suy ra $IB > R$. Do đó, điểm B nằm ngoài mặt cầu (S).
- $IC = \sqrt{4^2 + 3^2 + 0^2} = 5 = R$. Do đó, điểm C nằm trên mặt cầu (S).

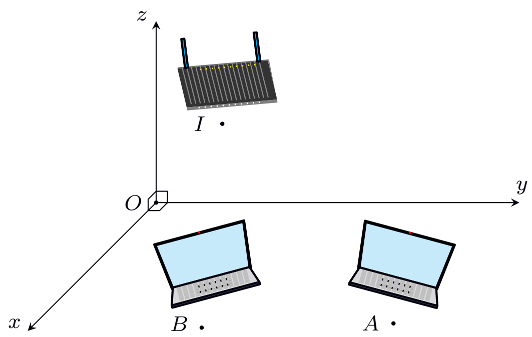
VÍ DỤ 2.

Trong không gian $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục là mét), một router phát sóng wifi có đầu thu phát được đặt tại điểm $I(4; 2; 10)$.

a) Cho biết bán kính phủ sóng wifi là 40 m. Viết phương trình mặt cầu (S) biểu diễn ranh giới của vùng phủ sóng.

b) Một người sử dụng máy tính tại điểm $M(6; 12; 0)$. Hãy cho biết điểm M nằm trong hay nằm ngoài mặt cầu (S) và người đó có thể sử dụng được sóng wifi của router nói trên hay không?

c) Câu hỏi tương tự đối với người sử dụng máy tính ở điểm $N(14; 6; 50)$.



Lời giải.

a) Mặt cầu (S) có tâm $I(4; 2; 10)$, bán kính $R = 40$ nên có phương trình là

$$(x-4)^2 + (y-2)^2 + (z-10)^2 = 1600.$$

b) Ta có $IM = \sqrt{2^2 + 10^2 + (-10)^2} = \sqrt{204} \approx 14{,}3 < 40$, suy ra $IM < R$. Do đó, điểm M nằm trong mặt cầu (S). Vậy người đó có thể sử dụng được sóng wifi của router nói trên.

c) Ta có $IN = \sqrt{10^2 + 4^2 + 40^2} = \sqrt{1716} \approx 41{,}4 > 40$, suy ra $IN > R$. Do đó, điểm N nằm ngoài mặt cầu (S). Vậy người đó **không** thể sử dụng được sóng wifi của router nói trên.

VÍ DỤ 3. Cho mặt cầu $(S)\colon (x-2)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 9$ và mặt phẳng $(P)\colon 2x - y - 2z - 3 = 0$.

a) Chứng minh rằng mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S).

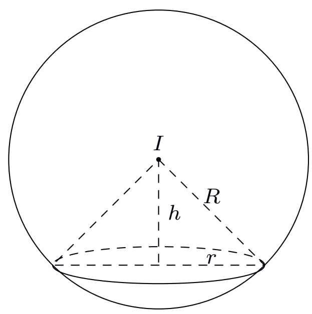
b) Biết mặt cầu (S) cắt (P) theo giao tuyến là đường tròn (C). Tính bán kính r của đường tròn (C).

Lời giải.

Mặt cầu (S) có tâm $I(2; 0; -1)$, bán kính $R = 3$.
Khoảng cách từ I đến mặt phẳng (P) là

$$h = \mathrm{d}(I; (P)) = \frac{|4 - 0 + 2 - 3|}{3} = 1.$$

Ta có $h^2 + r^2 = R^2 \Leftrightarrow 1 + r^2 = 9 \Leftrightarrow r = 2\sqrt{2}$.



BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

CÂU 1. Cho điểm $M(1; -1; 3)$ và mặt cầu (S) có phương trình $(x-1)^2 + (y+2)^2 + z^2 = 9$. Khẳng định đúng là

A) M nằm ngoài (S).
B) M nằm trong (S).
C) M nằm trên (S).
D) M trùng với tâm của (S).

Lời giải.

Thay tọa độ M vào vế trái của phương trình mặt cầu, ta được $(1-1)^2 + (-1+2)^2 + (3)^2 = 10 > 9$. Suy ra M nằm ngoài (S)
Chọn đáp án A .... □

CÂU 2. Cho mặt cầu $(S)\colon x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z = 0$ và ba điểm $O(0; 0; 0)$, $A(1; 2; 3)$, $B(2; -1; -1)$. Trong số ba điểm trên số điểm nằm trên mặt cầu là

A) 2.
B) 0.
C) 3.
D) 1.

Lời giải.

Lần lượt thay tọa độ các điểm O, A, B vào phương trình mặt cầu (S) ta chỉ thấy duy nhất điểm O thuộc mặt cầu (S).
Chọn đáp án D .... □

CÂU 3. Cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 4y + 6z - 2 = 0$ và mặt phẳng $(P)\colon x + y - z + 4 = 0$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A) (P) tiếp xúc (S).
B) (P) và (S) không có điểm chung.
C) (P) đi qua tâm của (S).
D) (P) cắt (S).

Lời giải.

(S) có tâm $I(0; 2; -3)$ và bán kính $R = \sqrt{15}$.
Ta có $\mathrm{d}[I, (P)] = \dfrac{|2 + 3 + 4|}{\sqrt{1+1+1}} = 3\sqrt{3} > \sqrt{15} = R$ nên (P) và (S) không có điểm chung.
Chọn đáp án B .... □

CÂU 4. Cho mặt phẳng (P) và mặt cầu (S) có phương trình lần lượt là $(P)\colon 2x+2y+z-m^2+4m-5=0$; $(S)\colon x^2+y^2+z^2-2x+2y-2z-6=0$. Giá trị của m để (P) tiếp xúc (S) là

(A) $m=5$. (B) $m=-1$. (C) $m=-1$ hoặc $m=5$. (D) $m=1$ hoặc $m=-5$.

Lời giải.

Mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2-2x+2y-2z-6=0$ có tâm $I(1;-1;1)$ và bán kính $R=3$.
(P) tiếp xúc (S) $\Leftrightarrow \mathrm{d}\left(I,(P)\right)=R$

$$\begin{aligned}&\Leftrightarrow \frac{\left|2\cdot 1+2\cdot(-1)+1-m^2+4m-5\right|}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}}=3\\ &\Leftrightarrow \left|m^2-4m+4\right|=9\\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m^2-4m+4=9\\ m^2-4m+4=-9 \quad \text{(vô nghiệm)}\end{array}\right.\\ &\Leftrightarrow m^2-4m-5=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m=-1\\ m=5.\end{array}\right.\end{aligned}$$

Chọn đáp án (C) □

CÂU 5. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon 2x+2y+z-2=0$ và mặt cầu (S) tâm $I(2;1;-1)$ bán kính $R=2$. Bán kính đường tròn giao của mặt phẳng (P) và mặt cầu (S) là

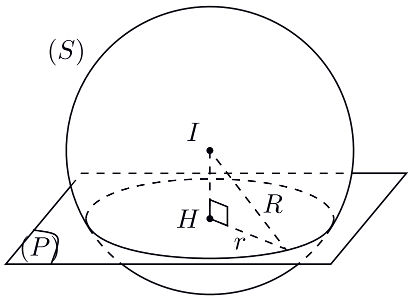
(A) $r=\sqrt{3}$. (B) $r=\sqrt{5}$. (C) $r=1$. (D) $r=3$.

Lời giải.

Gọi bán kính đường tròn giao của mặt phẳng (P) và mặt cầu (S) là r.

Ta có $h=\mathrm{d}(I,(P))=\dfrac{|2\cdot 2+2\cdot(-1)-1-2|}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}}=1$.

Suy ra $r=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$.



Chọn đáp án (A) □

CÂU 6. Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu có phương trình $x^2+y^2+z^2-2x+2y-6z+2=0$ cắt mặt phẳng (Oxz) theo một đường tròn có bán kính bằng

(A) $3\sqrt{2}$. (B) $2\sqrt{2}$. (C) 5. (D) $4\sqrt{2}$.

Lời giải.

Mặt cầu đã cho có tâm $I(1;-1;3)$ và bán kính $R=3$.
Khoảng cách từ I đến mặt phẳng (Oxz) bằng 1, do đó bán kính của đường tròn bằng

$$\sqrt{3^2-1^2}=2\sqrt{2}.$$

Chọn đáp án (B) □

CÂU 7. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon (x-1)^2+(y-2)^2+(z-2)^2=9$ và mặt phẳng $(P)\colon 2x-y-2z+1=0$. Biết (P) cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính r. Tính r.

(A) $r=3$. (B) $r=2$. (C) $r=2\sqrt{2}$. (D) $r=\sqrt{3}$.

Lời giải.

Ta có $(S)\colon (x-1)^2+(y-2)^2+(z-2)^2=9 \Rightarrow \begin{cases}I(1;2;2)\\ R=3\end{cases}$.

$d=\mathrm{d}\left(I,(\alpha)\right)=\dfrac{|2\cdot 1-2-2\cdot 2+1|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+(-2)^2}}=1$.

Vậy $r=\sqrt{R^2-d^2}=2\sqrt{2}$.
Chọn đáp án (C) □

CÂU 8. Trong không gian $Oxyz$ cho mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2-6x-4y-12z=0$ và mặt phẳng $(P)\colon 2x+y-z-2=0$. Tính diện tích thiết diện của mặt cầu (S) cắt bởi mặt phẳng (P).

(A) 50π. (B) $S=49\pi$. (C) 25π. (D) 36π.

Lời giải.

Mặt cầu (S) có tâm $I(3;2;6)$ và bán kính $R=\sqrt{3^2+2^2+6^2}=7$. Vì I thuộc (P) nên (P) cắt (S) theo thiết diện là đường tròn có bán kính bằng 7. Diện tích thiết diện bằng 49π.
Chọn đáp án (B) □

CÂU 9. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $I(2;1;1)$ và mặt phẳng $(P)\colon 2x+y+2z-1=0$. Mặt cầu (S) có tâm I, cắt (P) theo một đường tròn có bán kính $r=4$. Mặt cầu (S) có phương trình là

(A) $(x-2)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=18$.
(B) $(x-2)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=2\sqrt{5}$.
(C) $(x-2)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=20$.
(D) $(x+2)^2+(y+1)^2+(z+1)^2=20$.

Lời giải.

Ta có
$$\mathrm{d}(I;(P))=\frac{|2\cdot 2+1+2\cdot 1-1|}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}}=2.$$
Vì mặt cầu (S) có tâm I, cắt (P) theo một đường tròn có bán kính $r=4$ nên mặt cầu (S) có bán kính
$$R=\sqrt{r^2+\mathrm{d}^2(I,(P))}=\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5}.$$
Vậy phương trình mặt cầu (S) là $(x-2)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=20$.

Chọn đáp án (C) .... □

CÂU 10. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;1)$ và cắt mặt phẳng $(P)\colon 2x-y+2z+7=0$ theo một đường tròn có đường kính bằng 8. Phương trình mặt cầu (S) là

(A) $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=25$.
(B) $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=81$.
(C) $(x+1)^2+(y+2)^2+(z+1)^2=9$.
(D) $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=5$.

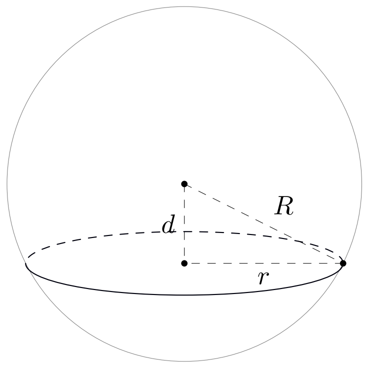
Lời giải.

Gọi R, r, d lần lượt là bán kính của mặt cầu, bán kính của đường tròn và khoảng cách từ tâm I đến mp(P). Khi đó $R=\sqrt{r^2+d^2}$.

Ta có $d=\mathrm{d}(I,(P))=\dfrac{|2\cdot 1-2+2\cdot 1+7|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}}=3$ và $r=4$.

Suy ra $R=\sqrt{3^2+4^2}=5$.

Vậy phương trình mặt cầu (S) là $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=25$.



Chọn đáp án (A) .... □

MỤC LỤC