

QUICK NOTE

QUICK NOTE

⚙️ **Tính chất 3:** Tồn tại 4 điểm không cùng thuộc một mặt phẳng.

Một mặt phẳng hoàn toàn xác định nếu biết ba điểm không thẳng hàng thuộc mặt phẳng đó. Ta kí hiệu mặt phẳng đi qua ba điểm không thẳng hàng A, B, C là (ABC) . Nếu có nhiều điểm cùng thuộc một mặt phẳng thì ta nói những điểm đó đồng phẳng. Nếu *không* có mặt phẳng nào chứa các điểm đó thì ta nói những điểm đó *không đồng phẳng*.

⚙️ **Tính chất 4:** Nếu một đường thẳng có hai điểm thuộc một mặt phẳng thì tất cả các điểm của đường thẳng đều thuộc mặt phẳng đó.

Cho đường thẳng d và mặt phẳng (α) .

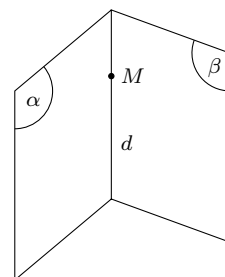
① Khi d nằm trong (α) , ta kí hiệu $d \subset (\alpha)$ hoặc $(P) \supset d$. (không được viết $d \in (\alpha)$ nhé!!!)

② Khi d không nằm trong (α) , ta kí hiệu $d \not\subset (\alpha)$.

⚠️ Dấu hiệu nhận biết $d \subset (\alpha)$ là trên d có hai điểm phân biệt thuộc (α)

⚙️ **Tính chất 5:** Nếu hai mặt phẳng phân biệt có điểm chung thì các điểm chung của hai mặt phẳng là một đường thẳng đi qua điểm chung đó.

Đường thẳng chung d (nếu có) của hai mặt phẳng phân biệt (P) và (Q) được gọi là giao tuyến của hai mặt phẳng đó và kí hiệu là $d = (P) \cap (Q)$.



⚙️ **Tính chất 6:** Trên mỗi mặt phẳng các kết quả đã biết trong hình học phẳng đều đúng.

3. CÁCH XÁC ĐỊNH MỘT MẶT PHẪNG

Ba cách xác định một mặt phẳng

- ☑ Một mặt phẳng được xác định nếu biết nó đi qua ba điểm A, B, C không thẳng hàng của mặt phẳng, kí hiệu (ABC) .
- ☑ Một mặt phẳng được xác định nếu biết nó đi qua một đường thẳng d và một điểm A không thuộc d , kí hiệu (A, d) .
- ☑ Một mặt phẳng được xác định nếu biết nó đi qua hai đường thẳng a, b cắt nhau, kí hiệu (a, b) .

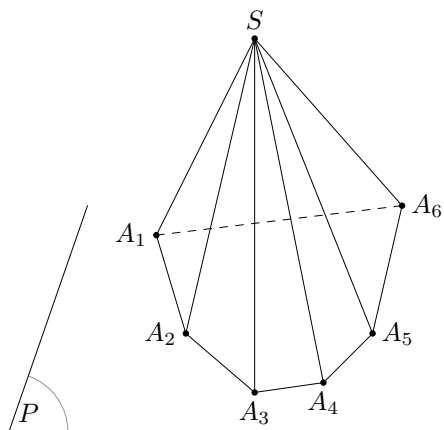
4. HÌNH CHÓP VÀ HÌNH TỨ DIỆN

⚙️ **Hình chóp:**

- ☑ **Định nghĩa:** Cho đa giác $A_1A_2 \dots A_n$ và cho điểm S nằm ngoài mặt phẳng chứa đa giác đó. Nối S với các đỉnh A_1, A_2, \dots, A_n ta được n miền đa giác $SA_1A_2, SA_2A_3, \dots, SA_{n-1}A_n$. Hình gồm n tam giác đó và đa giác $A_1A_2A_3 \dots A_n$ được gọi là hình chóp $S.A_1A_2A_3 \dots A_n$.

❖ Các tên gọi:

- Điểm S gọi là đỉnh của hình chóp.
- Đa giác $A_1A_2 \dots A_n$ gọi là mặt đáy của hình chóp.
- Các đoạn thẳng $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{n-1}A_n$ gọi là các cạnh đáy của hình chóp.
- Các đoạn thẳng SA_1, SA_2, \dots, SA_n gọi là các cạnh bên của hình chóp.
- Các miền tam giác $SA_1A_2, SA_2A_3, \dots, SA_{n-1}A_n$ gọi là các mặt bên của hình chóp.



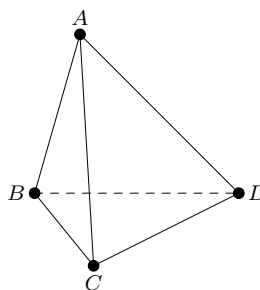
QUICK NOTE

⚙ Hình tứ diện:

❖ **Định nghĩa:** Cho bốn điểm A, B, C, D không đồng phẳng. Hình gồm bốn tam giác ABC, ACD, ABD, BCD được gọi là hình tứ diện và được kí hiệu là $ABCD$.

❖ **Chú ý:**

- Hai cạnh không có đỉnh chung gọi là hai cạnh đối diện, đỉnh không nằm trên một mặt được gọi là đỉnh đối diện với mặt đó.
- Hình chóp tam giác còn được gọi là hình tứ diện.
- Hình tứ diện có bốn mặt là những tam giác đều hay có tất cả các cạnh bằng nhau được gọi là hình tứ diện đều.



Hình tứ diện

B. PHÂN LOẠI, PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

1

Các quan hệ cơ bản

① Chứng minh điểm A thuộc (α) : Ta chứng tỏ điểm A thuộc đường thẳng Δ nằm trong α , nghĩa là

$$A \in \Delta, \Delta \subset (\alpha) \Rightarrow A \in (\alpha).$$

② Chứng minh đường thẳng d nằm trong (α) : Ta chứng tỏ d có hai điểm phân biệt cùng thuộc (α) , nghĩa là

$$\begin{cases} A \in (\alpha), B \in (\alpha) \\ A, B \in d \end{cases} \Rightarrow d \subset (\alpha).$$

③ Chứng minh A là điểm chung của hai mặt phẳng (α) và (β) : Ta thường sử dụng một trong hai cách sau

$$\begin{cases} A \in (\alpha) \\ A \in (\beta) \end{cases} \Rightarrow A \in (\alpha) \cap (\beta) \text{ hoặc } \begin{cases} d \subset (\alpha) \\ \Delta \subset (\beta) \\ d \cap \Delta = A \end{cases} \Rightarrow A \in (\alpha) \cap (\beta).$$

VÍ DỤ 1. Cho tam giác ABC và điểm S không thuộc mặt phẳng (ABC) . Lấy D, E là các điểm lần lượt thuộc các cạnh SA, SB (D, E khác S).

- Đường thẳng DE có nằm trong mặt phẳng (SAB) không?
- Giả sử DE cắt AB tại F . Chứng minh rằng F là điểm chung của hai mặt phẳng (SAB) và (CDE) .

VÍ DỤ 2. Cho hình chóp $S.ABCD$, gọi O là giao điểm của AC và BD . Lấy M, N lần lượt thuộc các cạnh SA, SC .

QUICK NOTE

- a) Chứng minh rằng đường thẳng MN nằm trong mặt phẳng (SAC) .
- b) Chứng minh rằng O là điểm chung của hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) .

VÍ DỤ 3. Cho hình tứ diện $ABCD$. Gọi I là trung điểm cạnh CD . Gọi M, N lần lượt là trọng tâm của các tam giác BCD, CDA .

- a) Chứng minh rằng các điểm M, N thuộc mặt phẳng (ABI) .
- b) Gọi G là giao điểm của AM và BN . Chứng minh rằng $\frac{GM}{GA} = \frac{GN}{GB} = \frac{1}{3}$.

2

Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng

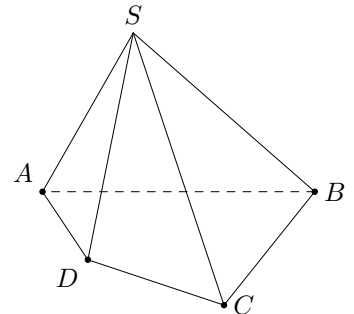
Cho hai mặt phẳng (α) và (β) cắt nhau. Để xác định giao tuyến của chúng, ta đi tìm hai điểm chung phân biệt. Cụ thể, ta thường gặp một trong ba trường hợp sau:

- ① Hai mặt phẳng (α) và (β) có sẵn hai điểm chung phân biệt: Khi đó giao tuyến là đường thẳng qua hai điểm chung đó.
- ② Hai mặt phẳng (α) và (β) thấy trước một điểm chung A :
 - A là điểm chung thứ nhất hay $A \in (\alpha) \cap (\beta)$.
 - Ta tìm điểm chung thứ 2: Trong (α) tìm một đường thẳng d_1 , trong (β) tìm một đường thẳng d_2 sao cho chúng có thể cắt nhau (đồng phẳng). Gọi $B = d_1 \cap d_2$, suy ra $B \in (\alpha) \cap (\beta)$. Vậy $AB = (\alpha) \cap (\beta)$.
- ③ Hai mặt phẳng (α) và (β) chưa thấy điểm chung: Ta mở rộng mặt phẳng để tìm điểm chung tương tự như cách tìm điểm chung ở mục số ②.

VÍ DỤ 1.

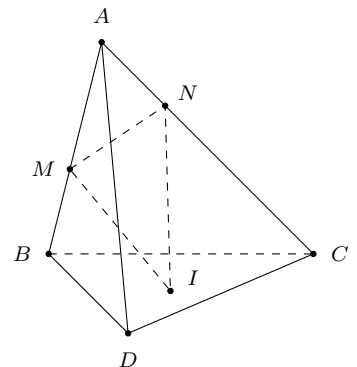
Cho tứ giác $ABCD$ sao cho các cạnh đối không song song với nhau. Lấy một điểm S không thuộc mặt phẳng $(ABCD)$. Xác định giao tuyến của

- a) Mặt phẳng (SAC) và mặt phẳng (SBD) .
- b) Mặt phẳng (SAB) và mặt phẳng (SCD) .
- c) Mặt phẳng (SAD) và mặt phẳng (SBC) .



VÍ DỤ 2.

Cho tứ diện $ABCD$. Lấy các điểm M thuộc cạnh AB , N thuộc cạnh AC sao cho MN cắt BC . Gọi I là điểm bên trong tam giác BCD . Tìm giao tuyến của mặt phẳng (MNI) với các mặt phẳng (ABC) , (BCD) , (ABD) , (ACD) .



VÍ DỤ 3. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm các cạnh AD, BC .

- a) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (IBC) và mặt phẳng (JAD) .
- b) Lấy điểm M thuộc cạnh AB , N thuộc cạnh AC sao cho M, N không là trung điểm. Tìm giao tuyến của mặt phẳng (IBC) và mặt phẳng (DMN) .

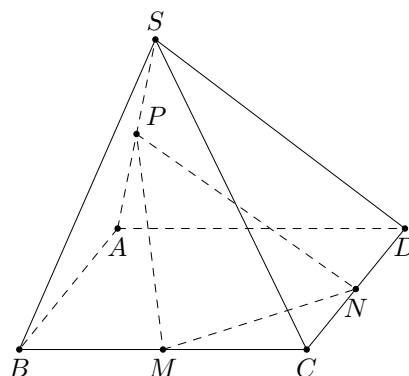
VÍ DỤ 4. Cho tứ diện $ABCD$, M là một điểm bên trong tam giác ABD , N là một điểm bên trong tam giác ACD . Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng sau

- a) (AMN) và (BCD) .
- b) (DMN) và (ABC) .

VÍ DỤ 5.

Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy là hình bình hành tâm O . Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của cạnh BC, CD, SA . Tìm giao tuyến của

- (MNP) và (SAB) .
- (MNP) và (SBC) .
- (MNP) và (SAD) .
- (MNP) và (SCD) .



VÍ DỤ 6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, P lần lượt là trung điểm của SA, BC . N là điểm trên cạnh SB sao cho $BN = \frac{1}{4}BS$. Xác định giao tuyến của mặt phẳng (MNP) với các mặt phẳng

- $(ABCD)$.
- (SAD) .
- (SCD) .

3

Tìm giao điểm của đường thẳng và mặt phẳng

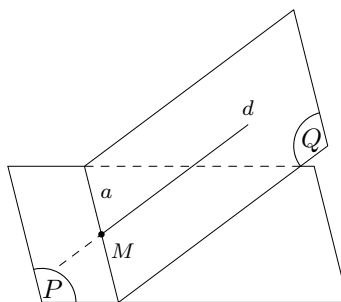
A Muốn tìm giao điểm của đường thẳng d và mặt phẳng (P) (phân biệt, không song song), ta tìm giao điểm của d với một đường thẳng a nằm trong (P) . Xét hai khả năng:

- Nếu đường thẳng a dễ tìm, nghĩa là có sẵn $a \subset (P)$ và a cắt được d . Khi đó

- Gọi $M = d \cap a$ thì $\begin{cases} M \in d \\ M \in a \subset (P) \end{cases}$.
- Vậy $M = d \cap (P)$.

- Nếu đường thẳng a khó tìm, ta thực hiện các bước sau:

- Tìm một mặt phẳng (Q) chứa đường thẳng d và dễ tìm giao tuyến với (P) ;
- Tìm $(Q) \cap (P) = a$.
- Tìm $M = d \cap a$, suy ra $M = d \cap (P)$.



VÍ DỤ 1. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AC và BC . K là điểm nằm trên BD sao cho $KD < KB$.

- Tìm giao điểm của CD với mặt phẳng (MNK) .
- Tìm giao điểm của AD với mặt phẳng (MNK) .

VÍ DỤ 2. Cho tứ diện $ABCD$. trên cạnh AC và AD lấy hai điểm M, N sao cho $AC = 3AM$ và $AN = \frac{2}{3}AD$. Gọi O là điểm bên trong tam giác (BCD) .

- Tìm giao điểm của BC với (OMN) .
- Tìm giao điểm của BD với (OMN) .

VÍ DỤ 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi M là trung điểm của SC .

- Tìm giao điểm I của đường thẳng AM và mặt phẳng (SBD) . Chứng minh $IA = 2IM$.
- Tìm giao điểm E của đường thẳng SD và mặt phẳng (ABM) .
- Gọi N là một điểm tùy ý trên cạnh AB . Tìm giao điểm của đường thẳng MN và mặt phẳng (SBD) .

VÍ DỤ 4. Cho tứ giác $ABCD$ và một điểm S không thuộc mặt phẳng $(ABCD)$. Trên đoạn AB lấy một điểm M , trên đoạn SC lấy một điểm N (M, N không trùng với các đầu mút).

QUICK NOTE

QUICK NOTE

- a) Tìm giao điểm của đường thẳng AN với mặt phẳng (SBD) .
- b) Tìm giao điểm của đường thẳng MN với mặt phẳng (SBD) .

4 Chứng minh ba điểm thẳng hàng

A Muốn chứng minh ba điểm A, B, C thẳng hàng, ta chứng minh ba điểm đó lần lượt thuộc hai mặt phẳng phân biệt (α) và (β) , nghĩa là chúng cùng nằm trên một đường giao tuyến.

VÍ DỤ 1. Cho tứ diện $ABCD$ có G là trọng tâm tam giác BCD , Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD .

- a) Tìm giao tuyến của (AND) và (ABP) .
- b) Gọi $I = AG \cap MP, J = CM \cap AN$. Chứng minh D, I, J thẳng hàng.

VÍ DỤ 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi O là giao điểm của AC và BD ; M, N lần lượt là trung điểm của SB, SD ; P thuộc đoạn SC và không là trung điểm của SC .

- a) Tìm giao điểm E của đường thẳng SO và mặt phẳng (MNP) .
- b) Tìm giao điểm Q của đường thẳng SA và mặt phẳng (MNP) .
- c) Gọi I, J, K lần lượt là giao điểm của QM và AB, QP và AC, QN và AD . Chứng minh rằng I, J, K thẳng hàng.

5 Vận dụng thực tiễn

VÍ DỤ 1. Giải thích tại sao ghế bốn chân có thể bị khập khiễng còn ghế ba chân thì không.

VÍ DỤ 2. Giải thích tại sao chân máy ảnh có thể đặt ở hầu hết các loại hình mà vẫn đứng vững.

VÍ DỤ 3. Hãy giải thích tại sao phần giao nhau giữa 2 vách tường nhà luôn là 1 đường thẳng

VÍ DỤ 4. Hãy giải thích vì sao khi gấp đôi một tờ giấy thì nếp gấp luôn là 1 đường thẳng

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

BÀI 1. Cho tứ diện $ABCD$. Trên AB, AC lấy 2 điểm M, N sao cho MN không song song BC . Gọi O là một điểm trong tam giác BCD .

- a) Tìm giao tuyến của (OMN) và (BCD) .
- b) Tìm giao điểm của DC, BD với (OMN) .

BÀI 2. Cho hình chóp $S.ABCD$. Gọi O là giao điểm của AC và BD . M, N, P lần lượt là các điểm trên SA, SB, SD .

- a) Tìm giao điểm I của SO với mặt phẳng (MNP) .
- b) Tìm giao điểm Q của SC với mặt phẳng (MNP) .

BÀI 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang với AB song song với CD . O là giao điểm của hai đường chéo, M thuộc SB .

- a) Xác định giao tuyến của các cặp mặt phẳng: (SAC) và (SBD) ; (SAD) và (SBC) .
- b) Tìm giao điểm $SO \cap (MCD)$; $SA \cap (MCD)$.

BÀI 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, SC .

- a) Tìm $I = AN \cap (SBD)$.
- b) Tìm $K = MN \cap (SBD)$.
- c) Tính tỉ số $\frac{KM}{KN}$.
- d) Chứng minh B, I, K thẳng hàng. Tính $\frac{IB}{IK}$.

BÀI 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ với đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M là điểm bất kỳ thuộc SB , N thuộc miền trong tam giác $S\Delta SCD$.

- Tìm giao điểm của MN và mặt phẳng $(ABCD)$
- Tìm $SC \cap (AMN)$ và $SD \cap (AMN)$
- Tìm $SA \cap (CMN)$

BÀI 6. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M là trung điểm AB , K là trọng tâm của tam giác ACD .

- Xác định giao tuyến của (AKM) và (BCD) .
- Tìm giao điểm H của MK và $mp(BCD)$. Chứng minh K là trọng tâm của tam giác ABH .
- Trên BC lấy điểm N . Tìm giao điểm P, Q của CD, AD với $mp(MNK)$.

BÀI 7. Cho tứ giác $ABCD$ và $S \notin (ABCD)$. Gọi I, J là hai điểm trên AD và SB , AD cắt BC tại O và OJ cắt SC tại M .

- Tìm giao điểm $K = IJ \cap (SAC)$.
- Xác định giao điểm $L = DJ \cap (SAC)$.
- Chứng minh A, K, L, M thẳng hàng.

BÀI 8. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ và hình bình hành. Gọi G là trọng tâm của tam giác SAD , M là trung điểm của SB .

- Tìm giao điểm N của MG và mặt phẳng $(ABCD)$.
- Chứng minh ba điểm C, D, N thẳng hàng và D là trung điểm của CN .

BÀI 9. Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Gọi M là trung điểm của SC .

- Xác định giao tuyến của (ABM) và (SCD) .
- Gọi N là trung điểm của BO . Xác định giao điểm I của (AMN) với SD . Chứng minh $\frac{SI}{ID} = \frac{2}{3}$.

BÀI 10. Cho tứ diện $SABC$. Gọi I, H lần lượt là trung điểm của SA, AB . Trên cạnh SC lấy điểm K sao cho $CK = 3SK$.

- Tìm giao điểm F của BC với mặt phẳng (IHK) . Tính tỉ số $\frac{FB}{FC}$.
- Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng IH . Tìm giao điểm của KM và mặt phẳng (ABC) .

D. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

CÂU 1. Cho tứ giác $ABCD$. Có thể xác định được bao nhiêu mặt phẳng chứa tất cả các đỉnh của tứ giác $ABCD$?

- ☐ A 1. ☐ B 3. ☐ C 0. ☐ D 2.

CÂU 2. Hình chóp tam giác có số cạnh là

- ☐ A 6. ☐ B 4. ☐ C 5. ☐ D 3.

CÂU 3. Hình chóp lục giác có bao nhiêu mặt?

- ☐ A 10. ☐ B 6. ☐ C 8. ☐ D 7.

CÂU 4. Các yếu tố nào sau đây xác định một mặt phẳng duy nhất?

- ☐ A Một điểm và một đường thẳng. ☐ B Hai đường thẳng cắt nhau.
☐ C Bốn điểm phân biệt. ☐ D Ba điểm phân biệt.

CÂU 5. Khẳng định nào sau đây là sai?

- ☐ A Nếu hai mặt phẳng phân biệt có một điểm chung thì chúng có một đường thẳng chung duy nhất.
☐ B Nếu hai mặt phẳng có một điểm chung thì chúng có vô số điểm chung khác nữa.

QUICK NOTE

QUICK NOTE

- (C) Nếu ba điểm phân biệt cùng thuộc hai mặt phẳng phân biệt thì chúng thẳng hàng.
 (D) Nếu hai mặt phẳng có một điểm chung thì chúng có một đường thẳng chung duy nhất.

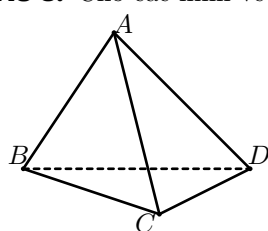
CÂU 6. Cho 5 điểm A, B, C, D, E trong đó không có 4 điểm nào đồng phẳng. Hỏi có bao nhiêu mặt phẳng tạo bởi 3 trong 5 điểm đã cho?

- (A) 10. (B) 14. (C) 12. (D) 8.

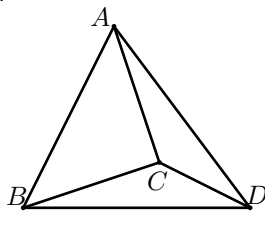
CÂU 7. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

- (A) Qua 3 điểm phân biệt bất kì có duy nhất một mặt phẳng.
 (B) Qua 4 điểm phân biệt bất kì có duy nhất một mặt phẳng.
 (C) Qua 2 điểm phân biệt có duy nhất một mặt phẳng.
 (D) Qua 3 điểm không thẳng hàng có duy nhất một mặt phẳng.

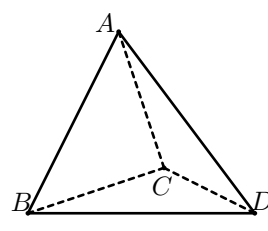
CÂU 8. Cho các hình vẽ sau:



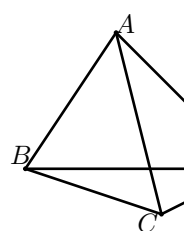
Hình (1)



Hình (2)



Hình (3)



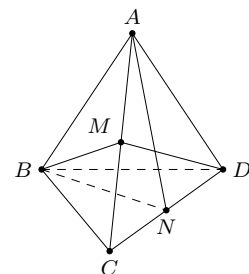
Hình (4)

Trong các hình trên, những hình nào biểu diễn cho tứ diện?

- (A) Hình (1) và hình (2). (B) Hình (1), hình (2) và hình (3).
 (C) Hình (1) và hình (3). (D) Hình (1), hình (3) và hình (4).

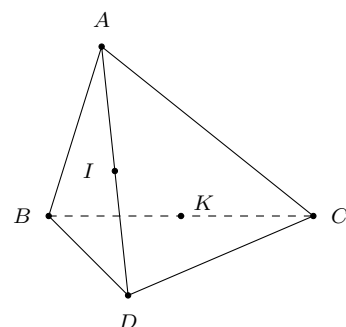
CÂU 9. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AC, CD . Giao tuyến của hai mặt phẳng (MBD) và (ABN) là

- (A) đường thẳng BG (G là trọng tâm tam giác ACD).
 (B) đường thẳng AH (H là trực tâm tam giác ACD).
 (C) đường thẳng MN .
 (D) đường thẳng AM .



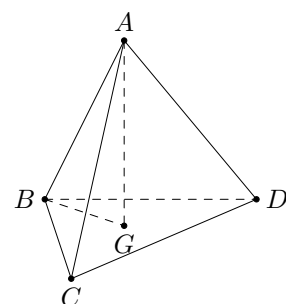
CÂU 10. Cho 4 điểm không đồng phẳng A, B, C, D . Gọi I, K lần lượt là trung điểm của AD và BC . Giao tuyến của (IBC) và (KAD) là

- (A) IK . (B) DK . (C) AK . (D) BC .



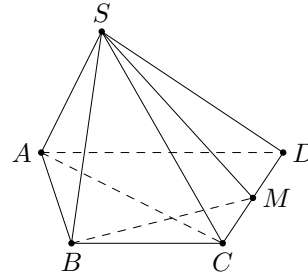
CÂU 11. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G là trọng tâm của tam giác BCD . Giao tuyến của mặt phẳng (ACD) và (GAB) là

- (A) AH (H là hình chiếu của B trên CD).
 (B) AM (M là trung điểm của AB).
 (C) AK (K là hình chiếu của C trên BD).
 (D) AN (N là trung điểm của CD).



CÂU 12. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang $ABCD$ ($AD \parallel BC$). Gọi M là trung điểm CD . Giao tuyến của hai mặt phẳng (MSB) và (SAC) là

- A** SJ (J là giao điểm của AM và BD).
- B** SI (I là giao điểm của AC và BM).
- C** SO (O là giao điểm của AC và BD).
- D** SP (P là giao điểm của AB và CD).

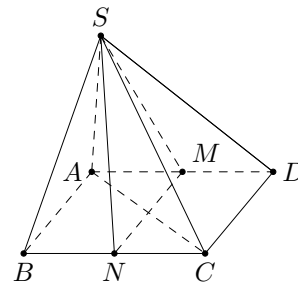


CÂU 13. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$). Khẳng định nào sau đây **sai**?

- A** Hình chóp $S.ABCD$ có 4 mặt bên.
- B** Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) là SO (O là giao điểm của AC và BD).
- C** Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) là đường trung bình của $ABCD$.
- D** Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) là SI (I là giao điểm của AD và BC).

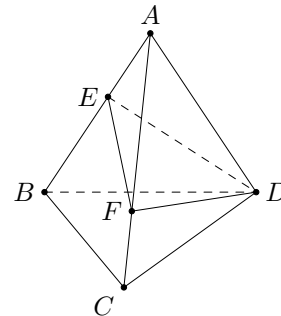
CÂU 14. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm AD và BC . Giao tuyến của hai mặt phẳng (SMN) và (SAC) là

- A** SG (G là trung điểm AB).
- B** SD .
- C** SO (O là tâm hình bình hành $ABCD$).
- D** SF (F là trung điểm CD).



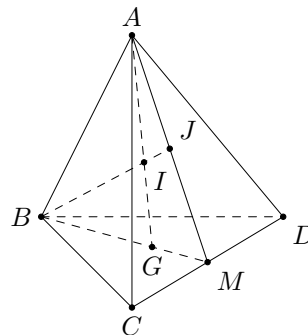
CÂU 15. Cho điểm A không nằm trên mặt phẳng (α) chứa tam giác BCD . Lấy E, F là các điểm lần lượt nằm trên các cạnh AB, AC . Khi EF và BC cắt nhau tại I thì I không phải là điểm chung của hai mặt phẳng nào sau đây?

- A** (BCD) và (ABC) .
- B** (BCD) và (ABD) .
- C** (BCD) và (AEF) .
- D** (BCD) và (DEF) .



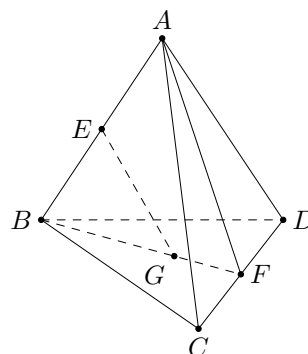
CÂU 16. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G là trọng tâm tam giác BCD , M là trung điểm CD , I là điểm ở trên đoạn thẳng AG , BI cắt mặt phẳng (ACD) tại J . Khẳng định nào sau đây **sai**?

- A** J là trung điểm của AM .
- B** $AM = (ACD) \cap (ABG)$.
- C** A, J, M thẳng hàng.
- D** $DJ = (ACD) \cap (BDJ)$.



CÂU 17. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi E và F lần lượt là trung điểm của AB và CD ; G là trọng tâm tam giác BCD . Giao điểm của đường thẳng EG và mặt phẳng (ACD) là

- A** Giao điểm của đường thẳng EG và CD .
- B** Giao điểm của đường thẳng EG và AC .
- C** Giao điểm của đường thẳng EG và AF .
- D** Điểm F .

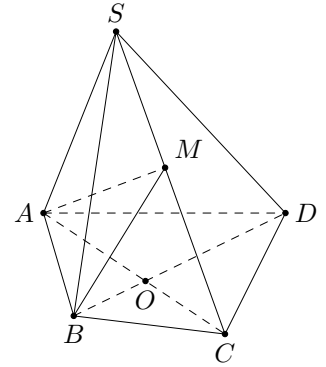


QUICK NOTE

QUICK NOTE

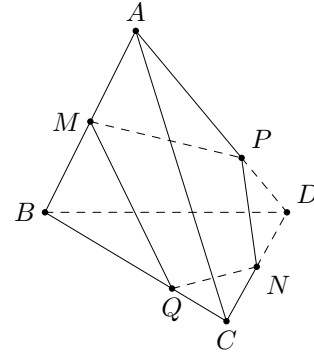
CÂU 18. Cho tứ giác $ABCD$ có AC và BD giao nhau tại O và một điểm S không thuộc mặt phẳng $(ABCD)$. Trên đoạn SC lấy một điểm M không trùng với S và C . Giao điểm của đường thẳng SD với mặt phẳng (ABM) là

- Ⓐ Giao điểm của SD và BK (với $K = SO \cap AM$).
 Ⓑ Giao điểm của SD và AB .
 Ⓒ Giao điểm của SD và MK (với $K = SO \cap AM$).
 Ⓓ Giao điểm của SD và AM .



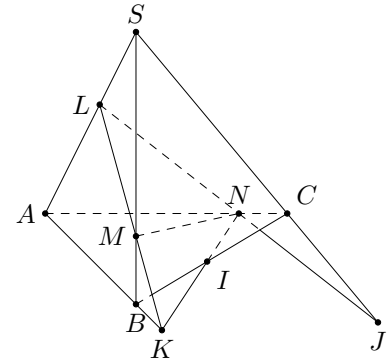
CÂU 19. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD . Mặt phẳng (α) qua MN cắt AD, BC lần lượt tại P và Q . Biết MP cắt NQ tại I . Ba điểm nào sau đây thẳng hàng?

- Ⓐ I, B, D . Ⓑ I, A, C .
 Ⓒ I, C, D . Ⓓ I, A, B .



CÂU 20. Cho tứ diện $SABC$. Gọi L, M, N lần lượt là các điểm trên các cạnh SA, SB và AC sao cho LM không song song với AB, LN không song song với SC . Mặt phẳng (LMN) cắt các cạnh AB, BC, SC lần lượt tại K, I, J . Ba điểm nào sau đây thẳng hàng?

- Ⓐ M, K, J . Ⓑ N, I, J . Ⓒ K, I, J . Ⓓ M, I, J .



Bài 11. HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG

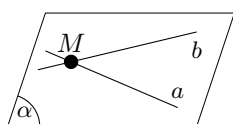
A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA HAI ĐƯỜNG THẲNG

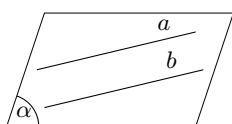
Trong không gian, cho hai đường thẳng a và b .

Các trường hợp có thể xảy ra:

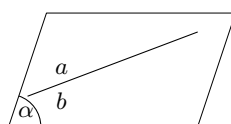
- Nếu a và b đồng phẳng (cùng thuộc một mặt phẳng) thì chúng có các khả năng: cắt nhau; song song nhau hoặc trùng nhau.
- Nếu a và b không đồng phẳng (không tồn tại mặt phẳng chứa được cả a và b) thì ta nói a và b chéo nhau.



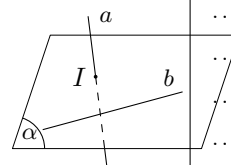
* a cắt b
* Kí hiệu $a \cap b = M$



* a song song b
* Kí hiệu $a \parallel b$



* a trùng b
* Kí hiệu $a \equiv b$



* a chéo b
* a, b không điểm chung

Chú ý: Cho hai đường thẳng a và b phân biệt.

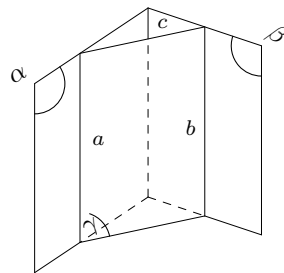
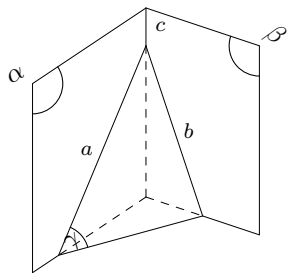
- Khi kiểm tra hai đường thẳng a và b **song song** hay **cắt nhau** thì trước tiên chúng phải đồng phẳng (cùng thuộc một mặt phẳng nào đó);
- Khi a và b không có điểm chung thì chúng có thể song song hoặc chéo nhau. Vấn đề này các bạn hay bị nhầm lẫn, cần chú ý.

2. CÁC ĐỊNH LÝ VÀ HỆ QUẢ CẦN NHỚ

Định lý 1: Trong không gian, qua một điểm không nằm trên đường thẳng cho trước, có một và chỉ một đường thẳng song song với đường thẳng đã cho.

Định lý 2: Hai đường thẳng phân biệt cùng song song với đường thẳng thứ ba thì song song với nhau.

Định lý 3: Nếu ba mặt phẳng phân biệt đôi một cắt nhau theo ba giao tuyến phân biệt thì ba giao tuyến đó hoặc đồng quy hoặc đôi một song song với nhau.



Hệ quả: Nếu hai mặt phẳng phân biệt lần lượt chứa hai đường thẳng song song thì giao tuyến của chúng (nếu có) cũng song song với hai đường thẳng đó hoặc trùng với một trong hai đường thẳng đó.

B. PHÂN LOẠI, PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

1. Xét vị trí tương đối của hai đường thẳng

Cho hai đường thẳng a và b phân biệt. Xét vị trí tương đối của a với b :

- Nếu a và b không đồng phẳng thì a và b chéo nhau.
- Nếu a và b đồng phẳng thì xét số điểm chung của a và b . Nếu a và b không có điểm chung thì $a \parallel b$. Nếu a và b có một điểm chung thì a và b cắt nhau.

VÍ DỤ 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Xét vị trí tương đối của các cặp đường thẳng sau

- a) AB và CD . b) SA và SC . c) SA và BC .

QUICK NOTE

QUICK NOTE

VÍ DỤ 2. Cho tứ diện $ABCD$ có M, N lần lượt là trung điểm của AB, AC . Xét vị trí tương đối của các cặp đường thẳng sau

- a) MN và BC . b) AN và CD . c) MN và CD .

2

Chứng minh hai đường thẳng song song

Phương pháp thường dùng:

- ① Sử dụng các kết quả của hình học phẳng như:
 - Cặp cạnh đối hình bình hành thì song song nhau;...
 - Đường trung bình của tam giác thì song song và bằng nửa cạnh đáy.
- ② Sử dụng tỉ lệ (Định lý Thales)
 - Nếu $\frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC}$ thì $EF \parallel BC$.
 - Chú ý tỉ lệ trọng tâm: $AG = \frac{2}{3}AM$.

VÍ DỤ 1. Cho tứ diện $ABCD$ có I, J lần lượt là trọng tâm của tam giác ABC và ABD . Chứng minh rằng $IJ \parallel CD$.

VÍ DỤ 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang với AB là đáy lớn và $AB = 2CD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh SA và SB . Chứng minh rằng $NC \parallel MD$.

VÍ DỤ 3. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CD . Trên cạnh AC lấy điểm K . Gọi M là giao điểm của BK và AI , N là giao điểm của DK và AJ . Chứng minh rằng $MN \parallel BD$.

VÍ DỤ 4. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N, P, Q, R, S lần lượt là trung điểm của AB, CD, BC, AD, AC, BD .

- a) Chứng minh $MPNQ$ là hình bình hành.
- b) Chứng minh ba đoạn thẳng MN, PQ, RS cắt nhau tại trung điểm G của mỗi đoạn.

VÍ DỤ 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm BC, CD, SB, SD .

- a) Chứng minh rằng $MN \parallel PQ$.
- b) Gọi I là trọng tâm của tam giác ABC , J thuộc SA sao cho $\frac{JS}{JA} = \frac{1}{2}$. Chứng minh $IJ \parallel SM$.

3

Xác định giao tuyến d của hai mặt phẳng cắt nhau

Ta thực hiện một trong hai cách sau đây:

- ✔ **Cách 1:** Tìm hai điểm chung phân biệt (đã xét ở bài học trước)
- ✔ **Cách 2:** Tìm 1 điểm chung. Sau đó nếu hai mặt phẳng có cặp đường thẳng song song nhau thì giao tuyến d sẽ đi qua điểm chung và song song (hoặc trùng) với một trong hai đường thẳng đó.

VÍ DỤ 1. Cho tứ diện $ABCD$. Trên AB, AC lần lượt lấy M, N sao cho $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (DBC) và (DMN) .

VÍ DỤ 2. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD và BD ; G là trọng tâm tam giác ABC . Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (ABC) và (MNG) .

VÍ DỤ 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Điểm M thuộc cạnh SA . Điểm E, F lần lượt là trung điểm của AB và BC .

- a) Tìm $(SAB) \cap (SCD)$.
- b) Tìm $(MBC) \cap (SAD)$.
- c) Tìm $(MEF) \cap (SAC)$.
- d) Tìm $AD \cap (MEF)$.
- e) Tìm $SD \cap (MEF)$.

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

BÀI 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA, SD . Chứng minh

- a) $MN \parallel AD$ và $MN \parallel BC$; b) $MO \parallel SC$ và $NO \parallel SB$.

BÀI 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, AD . Gọi I, J, G lần lượt là trọng tâm của các tam giác SAB, SAD và AOD . Chứng minh

- a) $IJ \parallel MN$; b) $IJ \parallel BD$ và $GJ \parallel SO$.

BÀI 3. Cho hình chóp $SABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang đáy lớn AB . Gọi E, F lần lượt là trung điểm của SA và SB .

- a) Chứng minh $EF \parallel CD$. b) Tìm $I = AF \cap (SCD)$. c) Chứng minh $SI \parallel AB \parallel CD$.

BÀI 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA, SB . Gọi P là một điểm trên cạnh BC . Tìm giao tuyến của

- a) (SBC) và (SAD) ; b) (SAB) và (SCD) ; c) (MNP) và $(ABCD)$.

BÀI 5. Cho tứ diện $SABC$. Gọi E và F lần lượt là trung điểm của các cạnh SB và AB , G là một điểm trên cạnh AC . Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng sau

- a) (SAC) và (EFC) ; b) (SAC) và (EFG) .

BÀI 6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi G là trọng tâm tam giác ABD , N là trung điểm SG . Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (ABN) và (SCD) .

BÀI 7. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm của AB, BC và Q là một điểm nằm trên cạnh AD ($QA \neq QD$) và P là giao điểm của CD với mặt phẳng (MNQ) . Chứng minh rằng $PQ \parallel MN$ và $PQ \parallel AC$.

BÀI 8. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang với AD là đáy lớn và $AD = 2BC$. Gọi M, N, P lần lượt thuộc các đoạn SA, AD, BC sao cho $MA = 2MS, NA = 2ND, PC = 2PB$.

- a) Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng sau: (SAD) và (SBC) , (SAC) và (SBD) .
b) Xác định giao điểm Q của SB với (MNP) .
c) Gọi K là trung điểm của SD . Chứng minh $CK = (MQK) \cap (SCD)$.

BÀI 9. Cho hình chóp $S.ABCD$ có O là tâm của hình bình hành $ABCD$, điểm M thuộc cạnh SA sao cho $SM = 2MA$, N là trung điểm của AD .

- a) Tìm giao tuyến của mặt phẳng (SAD) và (MBC) .
b) Tìm giao điểm I của SB và (CMN) , giao điểm J của SA và (ICD) .
c) Chứng minh ba đường thẳng ID, JC, SO cắt nhau tại E . Tính tỉ số $\frac{SE}{SO}$.

BÀI 10. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA ; gọi I, J, K, L lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng SM, SN, SP, SQ .

- a) Chứng minh rằng bốn điểm I, J, K, L đồng phẳng và tứ giác $IJKL$ là hình bình hành.
b) Chứng minh rằng $IK \parallel BC$.
c) Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng $(IJKL)$ và (SBC) .

QUICK NOTE

QUICK NOTE

D. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

CÂU 1. Hai đường thẳng không có điểm chung thì

- (A) chéo nhau. (B) song song.
(C) cắt nhau. (D) chéo nhau hoặc song song.

CÂU 2. Hai đường thẳng phân biệt không song song thì

- (A) chéo nhau. (B) có điểm chung.
(C) cắt nhau hoặc chéo nhau. (D) không có điểm chung.

CÂU 3. Cho hai đường thẳng phân biệt không có điểm chung cùng nằm trong một mặt phẳng thì hai đường thẳng đó

- (A) trùng nhau. (B) chéo nhau. (C) song song. (D) cắt nhau.

CÂU 4. Chọn khẳng định sai

- (A) Hai đường thẳng phân biệt cùng song song với đường thẳng thứ ba thì song song với nhau.
(B) Nếu hai đường thẳng chéo nhau thì chúng không đồng phẳng.
(C) Hai đường thẳng song song thì không đồng phẳng và không có điểm chung.
(D) Hai đường thẳng cắt nhau thì đồng phẳng và có một điểm chung.

CÂU 5. Cho đường thẳng a cắt mặt phẳng (P) tại điểm A . Mệnh đề nào sau đây đúng?

- (A) Mọi đường thẳng nằm trong (P) đều chéo với a .
(B) Mọi đường thẳng nằm trong (P) đều cắt a .
(C) Mọi đường thẳng nằm trong (P) hoặc chéo với a , hoặc cắt a .
(D) Mọi đường thẳng nằm trong (P) đều không cắt a .

CÂU 6. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M và N là hai điểm phân biệt nằm trên đường thẳng AB , M' và N' là hai điểm phân biệt nằm trên đường thẳng CD . Các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào đúng?

- (A) Hai đường thẳng MM' và NN' có thể cắt nhau.
(B) Hai đường thẳng MM' và NN' có thể song song với nhau.
(C) Hai đường thẳng MM' và NN' hoặc cắt nhau hoặc song song với nhau.
(D) Hai đường thẳng MM' và NN' chéo nhau.

CÂU 7. Cho tứ diện $ABCD$, lấy M, N lần lượt là trung điểm của CD, AB . Khi đó, xác định vị trí tương đối giữa hai đường thẳng BC và MN .

- (A) Chéo nhau. (B) Có hai điểm chung.
(C) Song song. (D) Cắt nhau.

CÂU 8. Cho tứ diện $MNPQ$. Mệnh đề nào trong các mệnh đề dưới đây là đúng?

- (A) $MN \parallel PQ$. (B) MN cắt PQ .
(C) MN và PQ đồng phẳng. (D) MN và PQ chéo nhau.

CÂU 9. Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình bình hành. Điểm M thuộc cạnh SC sao cho $SM = 3MC$, N là giao điểm của SD và (MAB) . Khi đó tứ giác $ABMN$ là hình gì?

- (A) Tứ giác không có cặp cạnh nào song song.
(B) Hình vuông.
(C) Hình thang.
(D) Hình bình hành.

CÂU 10. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang $AB \parallel CD$. Gọi d là giao tuyến của hai mặt phẳng (ASB) và (SCD) . Khẳng định nào sau đây là đúng?

- (A) $d \parallel AB$. (B) d cắt AB . (C) d cắt AD . (D) d cắt CD .

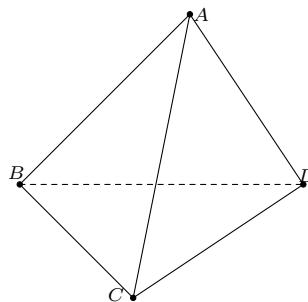
CÂU 11. Cho hình chóp $S.ABCD$. Gọi G, E lần lượt là trọng tâm các tam giác SAD và SCD . Lấy M, N lần lượt là trung điểm AB, BC . Khi đó ta có:

QUICK NOTE

- ☐ A GE và MN trùng nhau. ☐ B GE và MN chéo nhau.
☐ C GE và MN song song với nhau. ☐ D GE cắt BC .

CÂU 12. Cho tứ diện $ABCD$ có P, Q lần lượt là trọng tâm tam giác ABC và BCD . Xác định giao tuyến của mặt phẳng (ABQ) và mặt phẳng (CDP) .

- ☐ A Giao tuyến là đường thẳng đi qua trung điểm hai cạnh AB và CD .
☐ B Giao tuyến là đường thẳng đi qua trung điểm hai cạnh AB và AD .
☐ C Giao tuyến là đường thẳng PQ .
☐ D Giao tuyến là đường thẳng QA .



CÂU 13. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I và J theo thứ tự là trung điểm của AD và AC , G là trọng tâm tam giác BCD . Giao tuyến của hai mặt phẳng (GIJ) và (BCD) là đường thẳng

- ☐ A qua J và song song với BD . ☐ B qua G và song song với BC .
☐ C qua I và song song với AB . ☐ D qua G và song song với CD .

CÂU 14. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang với các cạnh đáy là AB và CD . Gọi (ACI) lần lượt là trung điểm của AD và BC và G là trọng tâm của tam giác SAB . Giao tuyến của (SAB) và (IJG) là

- ☐ A đường thẳng qua S và song song với AB .
☐ B đường thẳng qua G và song song với DC .
☐ C SC .
☐ D đường thẳng qua G và cắt BC .

CÂU 15. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi I, J, E, F lần lượt là trung điểm SA, SB, SC, SD . Trong các đường thẳng sau, đường thẳng nào không song song với IJ ?

- ☐ A DC . ☐ B AB . ☐ C AD . ☐ D EF .

CÂU 16. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi d là giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) . Khẳng định nào sau đây đúng?

- ☐ A d qua S và song song với DC . ☐ B d qua S và song song với BD .
☐ C d qua S và song song với BC . ☐ D d qua S và song song với AB .

CÂU 17. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N là hai điểm phân biệt cùng thuộc đường thẳng AB . P, Q là hai điểm phân biệt cùng thuộc đường thẳng CD . Xét vị trí tương đối của hai đường thẳng MP, NQ .

- ☐ A $MP \parallel NQ$. ☐ B MP cắt NQ .
☐ C MP trùng NQ . ☐ D MP, NQ chéo nhau.

CÂU 18. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang với đáy lớn AB đáy nhỏ CD . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA và SB . Gọi P là giao điểm của SC và (AND) . Gọi I là giao điểm của AN và DP . Hoi tứ giác $SABI$ là hình gì?

- ☐ A Hình bình hành. ☐ B Hình thoi. ☐ C Hình vuông. ☐ D Hình chữ nhật.

CÂU 19. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh SA, SB, SC, SD . Gọi I là một điểm trên cạnh B . Thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (IMN) là hình gì?

- ☐ A Tam giác MNQ . ☐ B Tam giác MNI .
☐ C Hình thang $MNIJ$. ☐ D Hình bình hành $MNIJ$.

CÂU 20. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi I là trung điểm SA . Thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi mặt phẳng (IBC) là

- ☐ A Tam giác IBC .
☐ B Tứ giác $IBCD$.
☐ C Hình thang $IGBC$ (G là trung điểm SB).
☐ D Hình thang $IBCJ$ (J là trung điểm SD).

MỤC LỤC

Bài 10. ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẪNG TRONG KHÔNG GIAN	1
(A) KIẾN THỨC CẦN NHỚ	1
(B) PHÂN LOẠI, PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN	3
Dạng 1. Các quan hệ cơ bản	3
Dạng 2. Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng	4
Dạng 3. Tìm giao điểm của đường thẳng và mặt phẳng	5
Dạng 4. Chứng minh ba điểm thẳng hàng	6
Dạng 5. Vận dụng thực tiễn	6
(C) BÀI TẬP TỰ LUYỆN	6
(D) BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM	7
Bài 11. HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG	11
(A) KIẾN THỨC CẦN NHỚ	11
(B) PHÂN LOẠI, PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN	11
Dạng 1. Xét vị trí tương đối của hai đường thẳng	11
Dạng 2. Chứng minh hai đường thẳng song song	12
Dạng 3. Xác định giao tuyến d của hai mặt phẳng cắt nhau	12
(C) BÀI TẬP TỰ LUYỆN	13
(D) BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM	14

