

Bài 3. CÁC KHÁI NIỆM MỞ ĐẦU

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Khái niệm vectơ

ĐỊNH NGHĨA 3.1. vectơ là một đoạn thẳng có hướng.

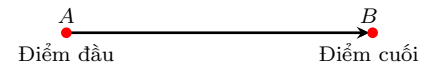
vectơ có điểm đầu là A , điểm cuối là B được kí hiệu là \overrightarrow{AB} , đọc là “vectơ AB ”.

Để vẽ vectơ \overrightarrow{AB} ta vẽ đoạn thẳng AB và đánh dấu mũi tên ở đầu mút B (Hình 1).

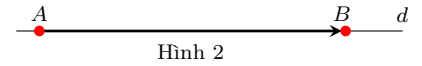
Đối với vectơ AB , ta gọi

☑ Đường thẳng d đi qua hai điểm A và B là giá của vectơ AB (Hình 2).

☑ Độ dài đoạn thẳng AB là độ dài của vectơ AB , kí hiệu là $|\overrightarrow{AB}|$.



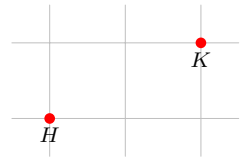
Hình 1



Hình 2

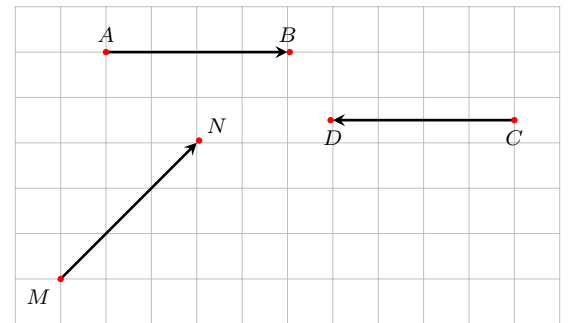
VÍ DỤ 1.

Cho hai điểm phân biệt H, K như hình bên. Viết hai vectơ mà điểm đầu và điểm cuối là H hoặc K .



VÍ DỤ 2.

Tính độ dài của các vectơ \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{CD} và \overrightarrow{MN} ở Hình 3, biết rằng độ dài cạnh của ô vuông bằng 1 cm.



Hình 3

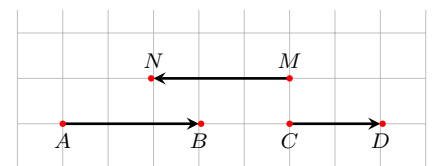
2. Hai vectơ cùng phương, cùng hướng, bằng nhau

ĐỊNH NGHĨA 3.2. Hai vectơ được gọi là cùng phương nếu giá của chúng song song hoặc trùng nhau.

Nhận xét: Nếu hai vectơ cùng phương thì hoặc chúng cùng hướng hoặc chúng ngược hướng.

VÍ DỤ 3.

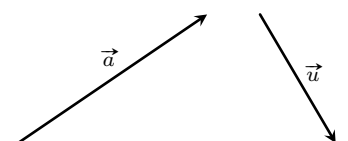
Trong Hình 4, tìm vectơ cùng hướng với vectơ \overrightarrow{AB} ; ngược hướng với vectơ \overrightarrow{AB} .



Hình 4

ĐỊNH NGHĨA 3.3. Hai vectơ \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{CD} bằng nhau nếu chúng cùng hướng và cùng độ dài, kí hiệu: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

Khi không cần chỉ rõ điểm đầu và điểm cuối của vectơ, vectơ còn được kí hiệu là \vec{a} , \vec{b} , \vec{u} , \vec{v} , ... (Hình 5). Độ dài của vectơ \vec{a} được kí hiệu là $|\vec{a}|$.



Hình 5

Nhận xét

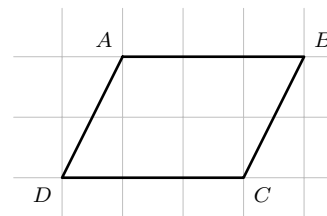
☑ Hai vectơ \vec{a} , \vec{b} bằng nhau nếu chúng cùng hướng và cùng độ dài, kí hiệu là $\vec{a} = \vec{b}$.

☑ Khi cho trước vectơ \vec{a} và điểm O , thì ta luôn tìm được một điểm A duy nhất sao cho $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$.

VÍ DỤ 4.

Cho hình bình hành $ABCD$ (Hình 6).

- vectơ nào bằng vectơ \overrightarrow{AB} ?
- vectơ nào bằng vectơ \overrightarrow{AD} ?



Hình 6

3. vectơ không

ĐỊNH NGHĨA 3.4. vectơ không là vectơ có điểm đầu và điểm cuối trùng nhau, kí hiệu là $\vec{0}$.

Với các điểm bất kì A, B, C ta có $\vec{0} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{CC}$.

vectơ \overrightarrow{AA} nằm trên mọi đường thẳng đi qua A . Ta quy ước $\vec{0}$ (vectơ không) cùng phương và cùng hướng với mọi vectơ; hơn nữa $|\vec{0}| = 0$.

Nhận xét: Hai điểm A, B trùng nhau khi và chỉ khi $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$.

B. CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Xác định một vectơ, độ dài vectơ

- vectơ là một đoạn thẳng có hướng, nghĩa là, trong hai điểm mút của đoạn thẳng, đã chỉ rõ điểm đầu, điểm cuối.
- Độ dài của vectơ là khoảng cách giữa điểm đầu và điểm cuối của vectơ đó.

1. Ví dụ minh họa

VÍ DỤ 1. Cho tứ giác $ABCD$. Hãy chỉ ra các vectơ khác vectơ không có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của tứ giác.

VÍ DỤ 2. Cho hình vuông $ABCD$ với cạnh có độ dài bằng 1. Tính độ dài các vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{DB}$.

VÍ DỤ 3. Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng a . Gọi M là trung điểm của BC tính độ dài vectơ \overrightarrow{AM} .

2. Bài tập tự luận

BÀI 1. Cho lục giác đều $ABCDEF$ có cạnh bằng a .

- Có bao nhiêu vectơ khác vectơ không có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của ngũ giác?
- Tính độ dài các vectơ \overrightarrow{AD}

BÀI 2. Cho tam giác ABC vuông tại A có $BC = 2a$. Gọi M là trung điểm của BC tính độ dài vectơ \overrightarrow{AM} .

Dạng 2. Hai vectơ cùng phương, cùng hướng và bằng nhau

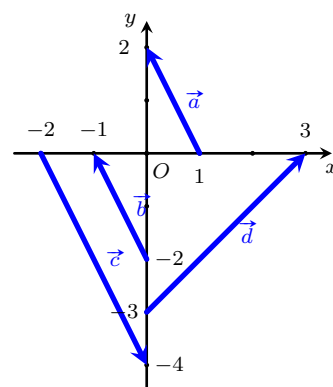
Sử dụng các định nghĩa

- Hai vectơ cùng phương nếu chúng có giá song song hoặc trùng nhau.
- Hai vectơ cùng phương thì cùng hướng hoặc ngược hướng.
- Hai vectơ bằng nhau nếu chúng cùng độ dài và cùng hướng.

1. Ví dụ minh họa

VÍ DỤ 1.

Cho hình vẽ, hãy chỉ ra các vectơ cùng phương, các cặp vectơ ngược hướng và các cặp vectơ bằng nhau



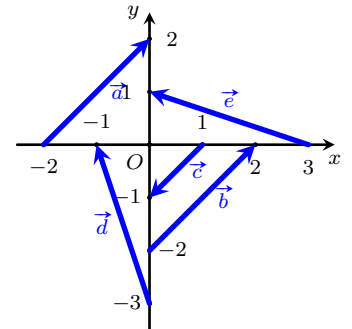
VÍ DỤ 2. Cho hình bình hành $ABCD$ có tâm là O . Hãy tìm các cặp vectơ khác $\vec{0}$, bằng nhau và

- có điểm đầu và điểm cuối trong các điểm A, B, C và D .
- có điểm đầu là O hoặc điểm cuối là O .

2. Bài tập tự luận

BÀI 1.

Cho hình vẽ, hãy chỉ ra các vectơ cùng phương, các cặp vectơ ngược hướng và các cặp vectơ bằng nhau

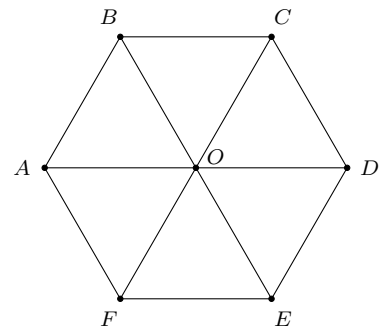


BÀI 2. Cho tam giác đều ABC , hãy chỉ ra mối quan hệ về độ dài, phương và hướng giữa cặp vectơ \vec{BA} và \vec{CA} . Hai vectơ có bằng nhau không?

BÀI 3.

Cho hình lục giác đều $ABCDEF$ có tâm O .

- Hãy tìm các vectơ khác $\vec{0}$ và bằng với \vec{AB} .
- Hãy vẽ vectơ bằng với \vec{AE} và có điểm đầu là B .
- Hãy vẽ vectơ bằng với \vec{AE} và có điểm đầu là C .



BÀI 4. Chứng minh ba điểm A, B, C thẳng hàng khi và chỉ khi \vec{AB}, \vec{AC} cùng phương.

C. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

CÂU 1. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau.

- vectơ là một đường thẳng có hướng.
- vectơ là một đoạn thẳng.
- vectơ là một đoạn thẳng có hướng.
- vectơ là một đoạn thẳng không phân biệt điểm đầu và điểm cuối.

CÂU 2. Cho tam giác ABC có thể xác định được bao nhiêu vectơ (khác vectơ không) có điểm đầu và điểm cuối là đỉnh A, B, C ?

- 2.
- 3.
- 4.
- 6.

CÂU 3. Cho hai điểm phân biệt A, B . Số vectơ (khác $\vec{0}$) có điểm đầu và điểm cuối lấy từ các điểm A, B là

- 2.
- 6.
- 13.
- 12.

CÂU 4. Cho tam giác đều ABC . Mệnh đề nào sau đây **sai**?

- $\vec{AB} = \vec{BC}$.
- $\vec{AC} \neq \vec{BC}$.
- $|\vec{AB}| = |\vec{BC}|$.
- \vec{AC} không cùng phương \vec{BC} .

CÂU 5. Khẳng định nào dưới đây là **sai**?

- Mỗi vectơ đều có một độ dài, đó là khoảng cách giữa điểm đầu và điểm cuối của vectơ đó.
- Độ dài của vectơ \vec{a} được kí hiệu là $|\vec{a}|$.
- $|\vec{PQ}| = \vec{PQ}$.
- $|\vec{AB}| = AB = BA$.

CÂU 6. Cho tam giác ABC . Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AB, AC . Mệnh đề nào sau đây **sai**?

- $\vec{BC} = 2\vec{NM}$.
- $\vec{MN} = \frac{1}{2}\vec{BC}$.
- $\vec{AN} = \vec{NC}$.
- $|\vec{MA}| = |\vec{MB}|$.

CÂU 7. Cho hai vectơ không cùng phương \vec{a} và \vec{b} . Khẳng định nào sau đây đúng?

- ☐ A Không có vectơ nào cùng phương với cả hai vectơ \vec{a} và \vec{b} .
- ☐ B Có vô số vectơ cùng phương với cả hai vectơ \vec{a} và \vec{b} .
- ☐ C Có một vectơ cùng phương với cả hai vectơ \vec{a} và \vec{b} .
- ☐ D Có hai vectơ cùng phương với cả hai vectơ \vec{a} và \vec{b} .

CÂU 8. Cho 3 điểm phân biệt A, B, C . Khi đó khẳng định nào sau đây **sai**?

- ☐ A A, B, C thẳng hàng khi và chỉ khi \vec{AB} và \vec{AC} cùng phương.
- ☐ B A, B, C thẳng hàng khi và chỉ khi \vec{AB} và \vec{BC} cùng phương.
- ☐ C A, B, C thẳng hàng khi và chỉ khi \vec{AC} và \vec{BC} cùng phương.
- ☐ D A, B, C thẳng hàng khi và chỉ khi $AC = BC$.

CÂU 9. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- ☐ A Có duy nhất một vectơ cùng phương với mọi vectơ.
- ☐ B Có ít nhất hai vectơ cùng phương với mọi vectơ.
- ☐ C Có vô số vectơ cùng phương với mọi vectơ.
- ☐ D Không có vectơ nào cùng phương với mọi vectơ.

CÂU 10. Khẳng định nào sau đây đúng?

- ☐ A Hai vectơ cùng phương với một vectơ thứ ba thì cùng phương.
- ☐ B Hai vectơ cùng phương với một vectơ thứ ba khác $\vec{0}$ thì cùng phương.
- ☐ C vectơ không là vectơ không có giá.
- ☐ D Điều kiện đủ để hai vectơ bằng nhau là chúng có độ dài bằng nhau.

CÂU 11. Cho lục giác đều $ABCDEF$ tâm O . Số các vectơ khác $\vec{0}$ cùng phương với \vec{OC} có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của lục giác bằng

- ☐ A 6.
- ☐ B 7.
- ☐ C 8.
- ☐ D 4.

CÂU 12. Cho ba điểm A, B, C phân biệt. Khi đó

- ☐ A Điều kiện cần và đủ để A, B, C thẳng hàng là \vec{AC} cùng phương với \vec{AB} .
- ☐ B Điều kiện đủ để A, B, C thẳng hàng là \vec{CA} cùng phương với \vec{AB} .
- ☐ C Điều kiện cần để A, B, C thẳng hàng là \vec{CA} cùng phương với \vec{AB} .
- ☐ D Điều kiện cần và đủ để A, B, C thẳng hàng là $\vec{AB} = \vec{AC}$.

CÂU 13. Cho vectơ $\vec{MN} \neq \vec{0}$. Số vectơ cùng hướng với vectơ \vec{MN} là

- ☐ A vô số.
- ☐ B 1.
- ☐ C 3.
- ☐ D 2.

CÂU 14. Gọi C là trung điểm của đoạn AB . Hãy chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau.

- ☐ A $\vec{CA} = \vec{CB}$.
- ☐ B \vec{AB} và \vec{AC} cùng hướng.
- ☐ C \vec{AB} và \vec{CB} ngược hướng.
- ☐ D $|\vec{AB}| = |\vec{CB}|$.

CÂU 15. Cho ba điểm M, N, P thẳng hàng, trong đó điểm N nằm giữa hai điểm M và P . Khi đó các cặp vectơ nào cùng hướng?

- ☐ A \vec{MP} và \vec{PN} .
- ☐ B \vec{MN} và \vec{PN} .
- ☐ C \vec{NM} và \vec{NP} .
- ☐ D \vec{MN} và \vec{MP} .

CÂU 16. Phát biểu nào sau đây đúng?

- ☐ A Hai vectơ không bằng nhau thì độ dài của chúng không bằng nhau.
- ☐ B Hai vectơ không bằng nhau thì độ dài của chúng không cùng phương.
- ☐ C Hai vectơ bằng nhau thì có giá trùng nhau hoặc song song nhau.
- ☐ D Hai vectơ có độ dài không bằng nhau thì không cùng hướng.

CÂU 17. Cho vectơ $\vec{a} \neq \vec{0}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- ☐ A Có vô số vectơ \vec{u} mà $\vec{u} = \vec{a}$.
- ☐ B Có duy nhất một \vec{u} mà $\vec{u} = \vec{a}$.
- ☐ C Có duy nhất một \vec{u} mà $\vec{u} = -\vec{a}$.
- ☐ D Không có vectơ \vec{u} nào mà $\vec{u} = \vec{a}$.

CÂU 18. Cho hình bình hành $ABCD$. Đẳng thức nào sau đây **sai**?

- ☐ A $|\vec{AD}| = |\vec{BC}|$.
- ☐ B $|\vec{BC}| = |\vec{DA}|$.
- ☐ C $|\vec{AB}| = |\vec{CD}|$.
- ☐ D $|\vec{AC}| = |\vec{BD}|$.

CÂU 19. Cho lục giác đều $ABCDEF$ tâm O . Ba vectơ bằng vectơ \vec{BA} là

- ☐ A $\vec{OF}, \vec{DE}, \vec{OC}$.
- ☐ B $\vec{CA}, \vec{OF}, \vec{DE}$.
- ☐ C $\vec{OF}, \vec{DE}, \vec{CO}$.
- ☐ D $\vec{OF}, \vec{ED}, \vec{OC}$.

CÂU 20. Cho đoạn thẳng AB , I là trung điểm của AB . Khi đó

- ☐ A $\vec{BI} = \vec{AI}$.
- ☐ B \vec{BI} cùng hướng \vec{AB} .
- ☐ C $|\vec{BI}| = 2|\vec{IA}|$.
- ☐ D $|\vec{BI}| = |\vec{IA}|$.

- CÂU 21.** Cho hình thoi $ABCD$ cạnh a và $\widehat{BAD} = 60^\circ$. Đẳng thức nào sau đây đúng?
 (A) $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{DA}$. (B) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD}$. (C) $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC}$. (D) $|\overrightarrow{BD}| = a$.
- CÂU 22.** Cho hình chữ nhật $ABCD$. Trong các đẳng thức dưới đây, đẳng thức nào đúng?
 (A) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. (B) $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$. (C) $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$. (D) $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{DA}$.
- CÂU 23.** Cho tam giác ABC với trung tuyến AM và trọng tâm G . Khi đó $|\overrightarrow{GA}|$ bằng
 (A) $\frac{1}{2}|\overrightarrow{AM}|$. (B) $\frac{2}{3}|\overrightarrow{GM}|$. (C) $2|\overrightarrow{GM}|$. (D) $-\frac{2}{3}|\overrightarrow{MA}|$.

Bài 4. TỔNG VÀ HIỆU CỦA HAI VÉC-TƠ

A. CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Tính tổng, hiệu hai véc-tơ

- ☑ Ghép các véc-tơ lại thích hợp.
- ☑ Dùng các quy tắc cộng véc-tơ để tính.

BÀI 1. Tính tổng $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{RN} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{QR}$.

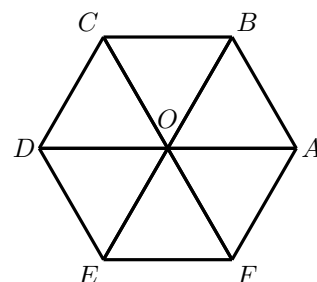
BÀI 2. Cho tam giác ABC với M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB . Tính tổng $\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CN}$.

BÀI 3. Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $AB'C'D'$ có chung đỉnh A . Tính $\vec{u} = \overrightarrow{B'B} + \overrightarrow{C'C'} + \overrightarrow{D'D}$.

BÀI 4. Cho tam giác ABC , gọi D, E, F, G, H, I theo thứ tự là trung điểm các cạnh AB, BC, CA, DF, DE, EF . Tính véc-tơ $\vec{u} = \overrightarrow{BE} - \overrightarrow{GH} - \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{FE}$?

BÀI 5.

Cho lục giác đều $ABCDEF$ tâm O . Rút gọn véc-tơ $\vec{v} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DE}$?



BÀI 6. Gọi O là tâm của tam giác đều ABC . Tính $\vec{u} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.

BÀI 7. Cho hình bình hành $ABCD$. Trên các đoạn thẳng DC, AB theo thứ tự lấy các điểm M, N sao cho $DM = BN$. Gọi P là giao điểm của AM, DB và Q là giao điểm của CN, DB . Tính $\vec{u} = \overrightarrow{DP} - \overrightarrow{QB}$.

Dạng 2. Xác định vị trí của một điểm từ đẳng thức véc-tơ

1. Ví dụ minh họa

VÍ DỤ 1. Cho tam giác ABC . Điểm M thỏa mãn điều kiện $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- (A) M là điểm sao cho tứ giác $BAMC$ là hình bình hành. (B) M là điểm sao cho tứ giác $ABMC$ là hình bình hành.
 (C) M là trọng tâm tam giác ABC . (D) M thuộc đường trung trực của AB .

2. Bài tập tự luận

BÀI 1. Cho tam giác ABC . Xác định điểm M thỏa mãn điều kiện $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$.

BÀI 2. Cho hình bình hành $ABCD$. Xác định điểm M thỏa mãn điều kiện $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AM}$.

BÀI 3. Cho hình bình hành $ABCD$. Xác định điểm M thỏa mãn điều kiện $|\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{CD}| = |\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{DA}|$.

Dạng 3. Tính độ dài véc-tơ

1. Ví dụ minh họa

VÍ DỤ 1. Cho tam giác đều ABC có cạnh $AB = a$, xác định và tính độ dài của véc-tơ

a) $\vec{x} = \vec{AB} + \vec{BC}$.

b) $\vec{y} = \vec{AB} + \vec{AC}$.

VÍ DỤ 2. Cho hình vuông $ABCD$ tâm O có cạnh $AB = 2$, xác định và tính độ dài của véc-tơ $\vec{v} = \vec{OA} - \vec{OD}$.

2. Bài tập tự luận

BÀI 1. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 2$, $AC = 4$, xác định và tính độ dài của véc-tơ $\vec{u} = \vec{AB} + \vec{AC}$.

BÀI 2. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AC = 5$, $AB = 3$, xác định và tính độ dài của véc-tơ

a) $\vec{a} = \vec{AD} - \vec{AC}$.

b) $\vec{b} = \vec{AB} + \vec{AC}$.

BÀI 3. Cho hình thang $ABCD$ có $\widehat{A} = \widehat{D} = 90^\circ$, $AB = AD = 3$, $CD = 5$, xác định và tính độ dài của véc-tơ

a) $\vec{x} = \vec{AB} - \vec{AC}$.

b) $\vec{y} = \vec{DB} + \vec{DC}$.

Dạng 4. Ứng dụng của véc-tơ trong vật lý

BÀI 1.

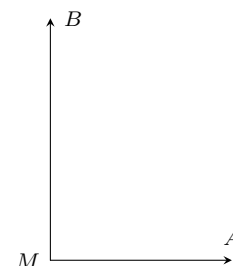
Cho hai lực $\vec{F}_1 = \vec{MA}$, $\vec{F}_2 = \vec{MB}$ cùng tác động vào một vật tại điểm M cường độ hai lực \vec{F}_1 , \vec{F}_2 lần lượt là 300 (N) và 400 (N) và $\widehat{AMB} = 90^\circ$. Tìm cường độ của lực tổng hợp tác động vào vật.

(A) 0 (N).

(B) 700 (N).

(C) 100 (N).

(D) 500 (N).



BÀI 2.

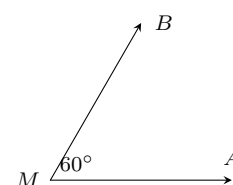
Cho hai lực $\vec{F}_1 = \vec{MA}$, $\vec{F}_2 = \vec{MB}$ cùng tác động vào một vật tại điểm M cường độ hai lực \vec{F}_1 , \vec{F}_2 đều bằng 300 (N) và $\widehat{AMB} = 60^\circ$. Tìm cường độ của lực tổng hợp tác động vào vật.

(A) 0 (N).

(B) 300 (N).

(C) $300\sqrt{3}$ (N).

(D) 500 (N).



B. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

CÂU 1. Cho ba điểm phân biệt A, B, C . Đẳng thức nào sau đây đúng?

(A) $\vec{CA} - \vec{BA} = \vec{CB}$.

(B) $\vec{AB} + \vec{AC} = \vec{CB}$.

(C) $\vec{AB} + \vec{CA} = \vec{BC}$.

(D) $\vec{AB} - \vec{AC} = \vec{BC}$.

CÂU 2. Rút gọn biểu thức véc-tơ $\vec{AM} + \vec{MB} - \vec{AC}$ ta được kết quả đúng là

(A) \vec{MB} .

(B) \vec{BC} .

(C) \vec{CB} .

(D) \vec{AB} .

CÂU 3. Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$. Tính $\vec{OB} - \vec{OC}$.

(A) $\vec{OB} - \vec{OC} = \vec{BC}$.

(B) $\vec{OB} - \vec{OC} = \vec{DA}$.

(C) $\vec{OB} - \vec{OC} = \vec{OD} - \vec{OA}$.

(D) $\vec{OB} - \vec{OC} = \vec{AB}$.

CÂU 4. Cho bốn điểm A, B, C, D phân biệt và $\vec{u} = \vec{AD} + \vec{CD} - \vec{CB} - \vec{BD}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

(A) $\vec{u} = \vec{0}$.

(B) $\vec{u} = \vec{AD}$.

(C) $\vec{u} = \vec{CD}$.

(D) $\vec{u} = \vec{AC}$.

CÂU 5.

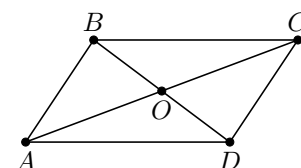
Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O . Hỏi véc-tơ $\vec{AO} - \vec{DO}$ bằng véc-tơ nào trong các véc-tơ sau?

(A) \vec{BA} .

(B) \vec{BC} .

(C) \vec{DC} .

(D) \vec{AC} .



CÂU 6. Cho tam giác ABC . Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh AB, AC, BC . Tổng $\vec{MP} + \vec{NP}$ bằng véc-tơ nào?

(A) \vec{PA} .

(B) \vec{AM} .

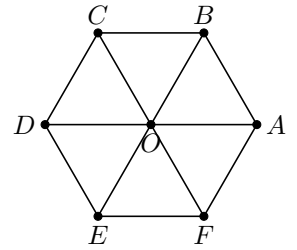
(C) \vec{PB} .

(D) \vec{AP} .

CÂU 7.

Cho lục giác đều $ABCDEF$ có tâm O . Đẳng thức nào sau đây **sai**?

- (A) $\vec{OA} + \vec{OC} + \vec{OE} = \vec{0}$.
 (B) $\vec{OA} + \vec{OC} + \vec{OB} = \vec{EB}$.
 (C) $\vec{AB} + \vec{CD} + \vec{EF} = \vec{0}$.
 (D) $\vec{BC} + \vec{EF} = \vec{AD}$.



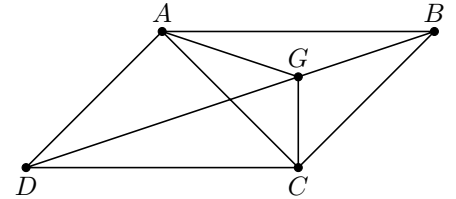
CÂU 8. Cho hình bình hành $ABCD$. Véc-tơ $\vec{BC} - \vec{AB}$ bằng véc-tơ nào dưới đây?

- (A) \vec{DB} . (B) \vec{BD} . (C) \vec{AC} . (D) \vec{CA} .

CÂU 9.

Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC . Mệnh đề nào sau đây đúng?

- (A) $\vec{GA} + \vec{GC} + \vec{GD} = \vec{BD}$. (B) $\vec{GA} + \vec{GC} + \vec{GD} = \vec{CD}$.
 (C) $\vec{GA} + \vec{GC} + \vec{GD} = \vec{0}$. (D) $\vec{GA} + \vec{GD} + \vec{GC} = \vec{CD}$.



CÂU 10. Chọn mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau.

- (A) Nếu $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$ thì $|\vec{a}| + |\vec{b}| = |\vec{c}|$. (B) $\vec{FY} - \vec{BY} = \vec{FB}$ với B, F, Y bất kì.
 (C) Nếu $ABCD$ là hình bình hành thì $\vec{AB} + \vec{AD} = \vec{AC}$. (D) $\vec{AM} + \vec{MH} = \vec{AH}$ với A, M, H bất kì.

CÂU 11. Trong mặt phẳng cho bốn điểm bất kì A, B, C, O . Đẳng thức nào sau đây là đúng?

- (A) $\vec{AB} = \vec{OB} + \vec{OA}$. (B) $\vec{AB} = \vec{AC} + \vec{BC}$. (C) $\vec{OA} = \vec{CA} - \vec{CO}$. (D) $\vec{OA} = \vec{OB} - \vec{BA}$.

CÂU 12. Cho ba điểm A, B, C phân biệt. Đẳng thức nào sau đây là **sai**?

- (A) $\vec{AC} + \vec{AB} = \vec{CB}$. (B) $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$. (C) $\vec{AC} - \vec{AB} = \vec{BC}$. (D) $\vec{AC} - \vec{BC} = \vec{AB}$.

CÂU 13. Tổng $\vec{MN} + \vec{PQ} + \vec{RN} + \vec{NP} + \vec{QR}$ bằng

- (A) \vec{MR} . (B) \vec{MN} . (C) \vec{MP} . (D) \vec{MQ} .

CÂU 14. Cho 4 điểm bất kì A, B, C, D . Đẳng thức nào sau đây **sai**?

- (A) $\vec{AB} = \vec{AC} + \vec{BC}$. (B) $\vec{DA} = \vec{BD} - \vec{CD}$. (C) $\vec{AB} = \vec{DB} - \vec{DA}$. (D) $\vec{BC} = \vec{BD} + \vec{DC}$.

CÂU 15. Cho bốn điểm A, B, C . Tính $\vec{AB} - \vec{AC}$.

- (A) \vec{CA} . (B) $2 \cdot \vec{AC}$. (C) $\vec{0}$. (D) \vec{AC} .

CÂU 16. Cho tam giác ABC và điểm M bất kỳ, chọn đẳng thức **đúng**.

- (A) $\vec{AB} - \vec{AC} = \vec{BC}$. (B) $\vec{MA} + \vec{BM} = \vec{AB}$. (C) $\vec{MB} - \vec{MC} = \vec{CB}$. (D) $\vec{AA} - \vec{BB} = \vec{AB}$.

CÂU 17. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm BC và AD . Tổng của \vec{NC} và \vec{MC} là

- (A) $\vec{0}$. (B) \vec{MN} . (C) \vec{NM} . (D) \vec{AC} .

CÂU 18. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm BC và AD . Tính $\vec{JC} - \vec{IC}$ không bằng

- (A) \vec{DC} . (B) \vec{JI} . (C) \vec{AB} . (D) \vec{AC} .

CÂU 19. Cho hình bình hành $ABCD$. Điểm M thỏa mãn điều kiện $\vec{MB} - \vec{BC} + \vec{BO} = \vec{DO}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- (A) M trùng với A . (B) M trùng với B . (C) M trùng với O . (D) M trùng với C .

CÂU 20. Cho hình bình hành $ABCD$ có tâm O . Điểm M thỏa mãn điều kiện $\vec{OM} = \vec{OA} - \vec{OB} + \vec{DC}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- (A) M trùng với B . (B) M trùng với D . (C) M trùng với A . (D) M trùng với điểm O .

CÂU 21. Cho bốn điểm phân biệt A, B, C, D . Biết điểm M thỏa mãn điều kiện $\vec{MC} + \vec{MD} = \vec{AD} + \vec{BC}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- (A) M là trung điểm CD . (B) M là trung điểm AB . (C) M là trung điểm AD . (D) M là trung điểm BC .

CÂU 22. Cho các điểm phân biệt A, B, C, D, E, F . Biết điểm M thỏa mãn điều kiện $\vec{MC} + \vec{ME} + \vec{MF} = \vec{AC} + \vec{BE} + \vec{DF}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- (A) M là trọng tâm tam giác ABC . (B) M là trọng tâm tam giác BCD .
 (C) M là trọng tâm tam giác ABD . (D) M là trọng tâm tam giác ACD .

CÂU 23. Cho hình bình hành $ABCD$ có E là trung điểm AB . Điểm M thỏa mãn điều kiện $\overrightarrow{EB} = \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{BC}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- (A) M là trung điểm AD . (B) M là trung điểm CD . (C) M là trung điểm AB . (D) M là trung điểm BC .

CÂU 24. Cho tam giác ABC đều có cạnh bằng a . Tìm tập hợp điểm M thỏa mãn điều kiện $|\overrightarrow{MC}| = |\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}|$.

- (A) M thuộc đường tròn tâm A bán kính $a\sqrt{3}$. (B) M thuộc đường tròn tâm C bán kính $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.
(C) M thuộc đường tròn tâm B bán kính $a\sqrt{3}$. (D) M thuộc đường tròn tâm C bán kính $a\sqrt{3}$.

CÂU 25. Cho hình thang $ABCD$ có AB song song với CD . Cho $AB = 2a$, $CD = a$. O là trung điểm của AD . Khi đó,

- (A) $|\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}| = \frac{3a}{2}$. (B) $|\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}| = a$. (C) $|\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}| = 2a$. (D) $|\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}| = 3a$.

CÂU 26. Cho tam giác ABC vuông cân tại A có $BC = a\sqrt{2}$, M là trung điểm của BC . Khẳng định nào sau đây đúng?

- (A) $|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BM}| = a$. (B) $|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BM}| = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. (C) $|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BM}| = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. (D) $|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BM}| = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.

CÂU 27. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a tâm O . Tính theo a độ dài của véc-tơ $\vec{u} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{BC}$.

- (A) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. (B) $\frac{3a\sqrt{2}}{2}$. (C) $a\sqrt{2}$. (D) a .

CÂU 28. Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng a . Khi đó $|\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}|$ bằng

- (A) $2a$. (B) $a\sqrt{2}$. (C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$. (D) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

CÂU 29. Cho tam giác ABC vuông cân tại C , $AB = \sqrt{2}$. Tính độ dài của $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

- (A) $\sqrt{5}$. (B) $2\sqrt{5}$. (C) $\sqrt{3}$. (D) $2\sqrt{3}$.

CÂU 30. Cho hình bình hành $ABCD$ có $DA = 2\text{cm}$, $AB = 4\text{cm}$ và đường chéo $BD = 5\text{cm}$. Tính $|\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{DA}|$.

- (A) 2cm . (B) 4cm . (C) 5cm . (D) 6cm .

CÂU 31. Cho hình thang $ABCD$ có hai đáy $AB = a$, $CD = 2a$. Gọi M , N là trung điểm của AD , BC . Khi đó $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MN}|$ bằng

- (A) $\frac{a}{2}$. (B) $3a$. (C) a . (D) $2a$.

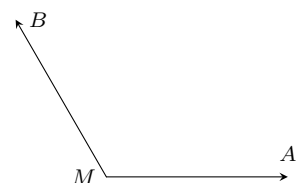
CÂU 32. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a , d là đường thẳng qua A , song song với BD . Gọi M là điểm thuộc đường thẳng d sao cho $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MD}|$ nhỏ nhất. Tính theo a độ dài véc-tơ \overrightarrow{MD} .

- (A) $a\sqrt{2}$. (B) $\frac{a\sqrt{10}}{2}$. (C) a . (D) $\frac{a\sqrt{5}}{2}$.

CÂU 33.

Cho hai lực $\vec{F}_1 = \overrightarrow{MA}$, $\vec{F}_2 = \overrightarrow{MB}$ cùng tác động vào một vật tại điểm M cường độ hai lực \vec{F}_1 , \vec{F}_2 đều bằng 300 (N) và $\widehat{AMB} = 120^\circ$. Tìm cường độ của lực tổng hợp tác động vào vật.

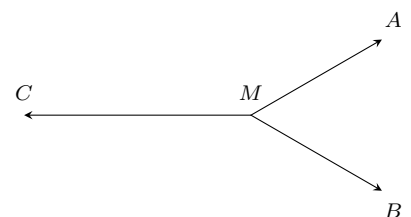
- (A) 300 (N). (B) 700 (N). (C) 100 (N). (D) 500 (N).



CÂU 34.

Cho ba lực $\vec{F}_1 = \overrightarrow{MA}$, $\vec{F}_2 = \overrightarrow{MB}$, $\vec{F}_3 = \overrightarrow{MC}$ cùng tác động vào một vật tại điểm M và vật đứng yên. Cho biết cường độ của \vec{F}_1 , \vec{F}_2 đều bằng 25 (N) và góc $\widehat{AMB} = 60^\circ$. Khi đó cường độ lực của \vec{F}_3 là

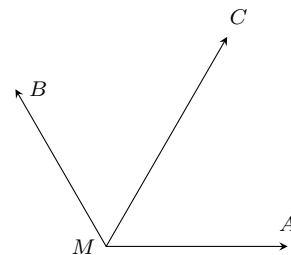
- (A) $25\sqrt{3}$ (N). (B) $50\sqrt{3}$ (N). (C) $50\sqrt{2}$ (N). (D) $100\sqrt{3}$ (N).



CÂU 35.

Cho ba lực $\vec{F}_1 = \vec{MA}$, $\vec{F}_2 = \vec{MB}$, $\vec{F}_3 = \vec{MC}$ cùng tác động vào một vật tại điểm M cường độ hai lực \vec{F}_1 , \vec{F}_2 đều bằng 300 (N) và $\vec{F}_3 = 400$ (N). Lại có $\widehat{AMB} = 120^\circ$ và $\widehat{AMC} = 60^\circ$. Tìm cường độ của lực tổng hợp tác động vào vật.

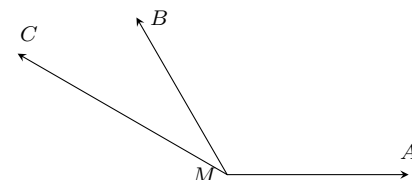
- (A) 300 (N). (B) 700 (N). (C) 100 (N). (D) 500 (N).



CÂU 36.

Cho ba lực $\vec{F}_1 = \vec{MA}$, $\vec{F}_2 = \vec{MB}$, $\vec{F}_3 = \vec{MC}$ cùng tác động vào một vật tại điểm M cường độ hai lực \vec{F}_1 , \vec{F}_2 đều bằng 300 (N) và $\vec{F}_3 = 400$ (N). Lại có $\widehat{AMB} = 120^\circ$ và $\widehat{AMC} = 150^\circ$. Tìm cường độ của lực tổng hợp tác động vào vật.

- (A) 300 (N). (B) 700 (N). (C) 100 (N). (D) 500 (N).



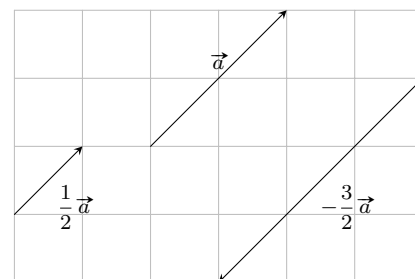
Bài 5. TÍCH CỦA MỘT VECTƠ VỚI MỘT SỐ

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Tích của một vectơ với một số

⚡ ĐỊNH NGHĨA 5.1.

- ☑ Tích của một vectơ $\vec{a} \neq \vec{0}$ với một số $k > 0$ là một vectơ, kí hiệu là $k\vec{a}$, cùng hướng với vectơ \vec{a} và có độ dài bằng $k|\vec{a}|$.
- ☑ Tích của một vectơ $\vec{a} \neq \vec{0}$ với một số $k < 0$ là một vectơ, kí hiệu là $k\vec{a}$, ngược hướng với vectơ \vec{a} và có độ dài bằng $(-k)|\vec{a}|$.



⚠ Ta quy ước $k\vec{a} = \vec{0}$ nếu $\vec{a} = \vec{0}$ hoặc $k = 0$.

2. Các tính chất của phép nhân vectơ với một số

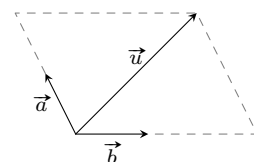
Với hai vectơ \vec{a} , \vec{b} và hai số thực k , t , ta luôn có

- $k(t\vec{a}) = (kt)\vec{a}$;
- $(k+t)\vec{a} = k\vec{a} + t\vec{a}$;
- $k(\vec{a} \pm \vec{b}) = k\vec{a} \pm k\vec{b}$;
- $1\vec{a} = \vec{a}$; $(-1)\vec{a} = -\vec{a}$.

⚠ ☑ Điểm I là trung điểm của đoạn thẳng AB khi và chỉ khi $\vec{IA} + \vec{IB} = \vec{0}$.

☑ Cho tam giác ABC , điểm G là trọng tâm của tam giác ABC khi và chỉ khi $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$.

⚠ Cho hai vectơ không cùng phương \vec{a} và \vec{b} . Khi đó, mọi vectơ \vec{u} đều biểu thị (phân tích) được một cách duy nhất theo hai vectơ \vec{a} và \vec{b} , nghĩa là có duy nhất cặp số (x, y) sao cho $\vec{u} = x\vec{a} + y\vec{b}$.



B. CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Xác định vectơ tích, tính độ dài vectơ

vectơ $k\vec{a}$ có độ dài bằng $|k||\vec{a}|$ và

- cùng hướng với \vec{a} nếu $k \geq 0$;
- ngược hướng với \vec{a} nếu $\begin{cases} \vec{a} \neq \vec{0} \\ k < 0. \end{cases}$

1. Ví dụ minh họa

VÍ DỤ 1. Cho đoạn thẳng AB và M là một điểm nằm trên đoạn AB sao cho $AM = \frac{1}{5}AB$. Tìm k trong các đẳng thức sau

a) $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$.

b) $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB}$.

c) $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{AB}$.

VÍ DỤ 2. Cho tam giác ABC đều cạnh bằng 1, trọng tâm G . Tính độ dài vectơ \overrightarrow{AG} .

VÍ DỤ 3. Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng a , I là trung điểm của cạnh BC . Tính độ dài vectơ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

2. Bài tập áp dụng

BÀI 1. Trên đoạn thẳng AB , gọi C là trung điểm AB và D là điểm đối xứng của C qua A . Tìm k trong các đẳng thức sau

a) $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$.

b) $\overrightarrow{AD} = k\overrightarrow{AB}$.

BÀI 2. Cho tam giác ABC vuông cân tại A , cạnh $BC = 2$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của cạnh AB và BC . Tính độ dài \overrightarrow{MN} .

BÀI 3. Cho hình thoi $ABCD$ có $AC = 2a, BD = a$. Tính độ dài vectơ $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$.

3. Bài tập trắc nghiệm

CÂU 1.

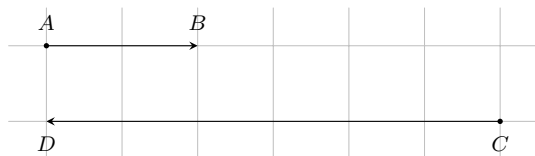
Cho hai vectơ \overrightarrow{AB} và \overrightarrow{CD} trong hình bên. Khẳng định nào sau đây đúng?

Ⓐ $\overrightarrow{CD} = 3\overrightarrow{AB}$.

Ⓑ $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$.

Ⓒ $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{CD}$.

Ⓓ $\overrightarrow{CD} = -3\overrightarrow{AB}$.



CÂU 2. Cho vectơ \vec{a} (khác $\vec{0}$) và vectơ $\vec{b} = k\vec{a}$, ($k \neq 0$). Khẳng định nào sau đây là đúng?

Ⓐ \vec{a} cùng phương \vec{b} nếu $k > 0$.

Ⓑ \vec{a} ngược hướng \vec{b} nếu $k > 0$.

Ⓒ \vec{a} cùng hướng \vec{b} nếu $k < 0$.

Ⓓ \vec{a} cùng hướng \vec{b} nếu $k > 0$.

CÂU 3. Cho hai vectơ \vec{a}, \vec{b} bất kì và số thực k . Ta có $k(\vec{a} + \vec{b})$ bằng

Ⓐ $\vec{a} + k\vec{b}$.

Ⓑ $k\vec{a} + k\vec{b}$.

Ⓒ $k\vec{a} - k\vec{b}$.

Ⓓ $k\vec{a} + \vec{b}$.

CÂU 4. Cho hai vectơ \vec{a}, \vec{b} khác $\vec{0}$ thỏa mãn $\vec{a} = -\frac{1}{2}\vec{b}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

Ⓐ $|\vec{a}| = -\frac{1}{2}|\vec{b}|$.

Ⓑ \vec{a} và \vec{b} là hai vectơ đối nhau.

Ⓒ \vec{a} cùng hướng với \vec{b} .

Ⓓ \vec{a} ngược hướng với \vec{b} .

CÂU 5. Cho vectơ \vec{u} có độ dài bằng 2 và vectơ $\vec{v} = -3\vec{u}$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

Ⓐ vectơ \vec{v} có độ dài bằng -6 và cùng hướng với \vec{u} .

Ⓑ vectơ \vec{v} có độ dài bằng -6 và ngược hướng với \vec{u} .

Ⓒ vectơ \vec{v} có độ dài bằng 6 và cùng hướng với \vec{u} .

Ⓓ vectơ \vec{v} có độ dài bằng 6 và ngược hướng với \vec{u} .

CÂU 6. Cho $\vec{a} = -2\vec{b}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

Ⓐ \vec{a} và \vec{b} là hai vectơ bằng nhau.

Ⓑ \vec{a} và \vec{b} là hai vectơ đối nhau.

Ⓒ \vec{a} và \vec{b} ngược hướng.

Ⓓ \vec{a} và \vec{b} cùng hướng.

CÂU 7. Cho vectơ \vec{q} có độ dài bằng 27. Hỏi độ dài của vectơ $\vec{x} = -\frac{1}{9}\vec{q}$ là bao nhiêu?

Ⓐ 243.

Ⓑ 3.

Ⓒ 9.

Ⓓ -3 .

CÂU 8.

Cho đoạn thẳng AB và điểm I thuộc đoạn thẳng AB như hình vẽ bên.

Mệnh đề nào sau đây đúng?

Ⓐ $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$.

Ⓑ $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{4}\overrightarrow{IB}$.

Ⓒ $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{5}\overrightarrow{BA}$.

Ⓓ $\overrightarrow{AI} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{IB}$.



CÂU 9. Đẳng thức nào mô tả đúng hình vẽ bên?

Ⓐ $3\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AB} = \vec{0}$.

Ⓑ $3\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$.

Ⓒ $\overrightarrow{BI} + 3\overrightarrow{BA} = \vec{0}$.

Ⓓ $\overrightarrow{AI} + 3\overrightarrow{AB} = \vec{0}$.



CÂU 10. Cho M là một điểm trên đoạn AB sao cho $AM = \frac{1}{3}AB$. Khẳng định nào sau đây sai?

Ⓐ $\overrightarrow{MB} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$.

Ⓑ $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.

Ⓒ $\overrightarrow{MA} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{MB}$.

Ⓓ $\overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{AM}$.

CÂU 11. Cho đoạn thẳng AB và M là một điểm trên đoạn AB sao cho $AB = 5AM$. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

- (A) $\overrightarrow{MA} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{MB}$. (B) $\overrightarrow{MB} = \frac{4}{5}\overrightarrow{AB}$. (C) $\overrightarrow{MB} = -\frac{4}{5}\overrightarrow{AB}$. (D) $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AB}$.

CÂU 12. Cho đoạn thẳng AB , M là một điểm trên đoạn thẳng AB sao cho $AM = \frac{1}{4}AB$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

- (A) $\overrightarrow{MA} = \frac{1}{3}\overrightarrow{MB}$. (B) $\overrightarrow{BM} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BA}$. (C) $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$. (D) $\overrightarrow{MB} = -3\overrightarrow{MA}$.

CÂU 13. Cho hình bình hành $ABCD$ có tâm O . Mệnh đề nào sau đây **sai**?

- (A) $\overrightarrow{OD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$. (B) $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{OC}$. (C) $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{OA}$. (D) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

CÂU 14. Cho tam giác ABC với trung tuyến AM và trọng tâm G . Khi đó, vectơ \overrightarrow{GA} bằng với vectơ nào sau đây?

- (A) $2\overrightarrow{GM}$. (B) $-\frac{2}{3}\overrightarrow{AM}$. (C) $\frac{2}{3}\overrightarrow{GM}$. (D) $\frac{1}{2}\overrightarrow{AM}$.

CÂU 15. Cho tam giác ABC có G là trọng tâm, M là trung điểm của BC . Đẳng thức nào sau đây đúng?

- (A) $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 2\overrightarrow{GM}$. (B) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AG}$. (C) $\overrightarrow{GA} = 2\overrightarrow{GM}$. (D) $\overrightarrow{MG} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{MA}$.

CÂU 16. Cho tam giác ABC . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và AC . Khẳng định nào sau đây là **sai**?

- (A) $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$. (B) $\overrightarrow{MN} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$. (C) $\overrightarrow{BC} = -2\overrightarrow{NM}$. (D) $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{MN}$.

CÂU 17. Cho tam giác ABC có trọng tâm G và trung tuyến BM . Khẳng định nào sau đây là **sai**?

- (A) $\overrightarrow{AM} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$. (B) $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$. (C) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OG}$, với mọi điểm O . (D) $\overrightarrow{GB} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BM}$.

CÂU 18. Cho tam giác đều ABC với đường cao AH . Mệnh đề nào sau đây đúng?

- (A) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$. (B) $|\overrightarrow{AH}| = \frac{\sqrt{3}}{2}|\overrightarrow{HC}|$. (C) $\overrightarrow{HB} = \overrightarrow{HC}$. (D) $|\overrightarrow{AC}| = 2|\overrightarrow{HC}|$.

CÂU 19. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . Giá trị của $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}|$ bằng

- (A) $A\sqrt{2}$. (B) $2a$. (C) $2a\sqrt{2}$. (D) $3a$.

CÂU 20. Cho tam giác ABC đều cạnh a . Khi đó, giá trị $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}|$ bằng

- (A) $a\sqrt{3}$. (B) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. (C) $2a$. (D) $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

CÂU 21. Cho tam giác đều ABC cạnh bằng 4. Độ dài $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ là

- (A) $2\sqrt{3}$. (B) $\sqrt{5}$. (C) $\sqrt{6}$. (D) $4\sqrt{3}$.

CÂU 22. Cho tam giác ABC vuông tại A và $AB = 2$, $AC = 3$. Độ dài của vectơ $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AC}$ bằng

- (A) 5. (B) 40. (C) $\sqrt{13}$. (D) $2\sqrt{10}$.

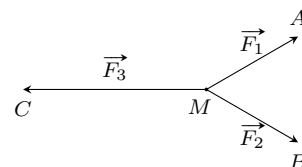
CÂU 23. Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng a . Tính $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DB}|$ theo a .

- (A) $\frac{a\sqrt{5}}{2}$. (B) a . (C) $a\sqrt{5}$. (D) $a\sqrt{3}$.

CÂU 24.

Cho ba lực $\overrightarrow{F_1} = \overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{F_2} = \overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{F_3} = \overrightarrow{MC}$ cùng tác động vào một vật tại điểm M và vật đứng yên. Cho biết cường độ của $\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_2}$ đều bằng 100N và $\widehat{AMB} = 60^\circ$. Khi đó, cường độ lực của $\overrightarrow{F_3}$ bằng

- (A) $50\sqrt{2}$ N. (B) $50\sqrt{3}$ N. (C) $25\sqrt{3}$ N. (D) $100\sqrt{3}$ N.



CÂU 25. Cho tam giác ABC là tam giác đều cạnh $2a$ với G là trọng tâm. Tính $|\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}|$.

- (A) $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$. (B) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. (C) $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. (D) $a\sqrt{3}$.

CÂU 26. Gọi G là trọng tâm tam giác vuông ABC với cạnh huyền $BC = 12$. vectơ $\overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GC}$ có độ dài bằng bao nhiêu?

- (A) 4. (B) $2\sqrt{3}$. (C) 8. (D) 2.

CÂU 27. Tam giác ABC có $AB = AC = a$, $\widehat{ABC} = 120^\circ$. Độ dài vectơ tổng $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ bằng

- (A) $2a$. (B) $a\sqrt{3}$. (C) a . (D) $3a$.

CÂU 28. Cho hình thoi $ABCD$ cạnh a , tâm O và $\widehat{BAD} = 60^\circ$. Độ dài vectơ $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{CD}$ bằng

- (A) $\frac{a\sqrt{7}}{2}$. (B) $\frac{a\sqrt{5}}{2}$. (C) $2a$. (D) $a\sqrt{3}$.

CÂU 29. Cho tam giác ABC đều cạnh a , H là trung điểm của BC . Tính $|\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{HC}|$ bằng

- (A) $\frac{2\sqrt{3}a}{3}$. (B) $\frac{a\sqrt{7}}{2}$. (C) $\frac{a}{2}$. (D) $\frac{3a}{2}$.

CÂU 30. Cho tam giác OAB vuông cân tại O với $OA = OB = a$. Tính độ dài vectơ $\vec{u} = 8\overrightarrow{OA} - 6\overrightarrow{OB}$.

- (A) $2a$. (B) $14a$. (C) $16a$. (D) $10a$.

CÂU 31. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 3$, $AC = 4$. Tính độ dài vectơ $\vec{u} = 2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}$.

- (A) $|\vec{u}| = 18$. (B) $|\vec{u}| = 6\sqrt{5}$. (C) $|\vec{u}| = 9$. (D) $|\vec{u}| = 5\sqrt{6}$.

CÂU 32. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC . Tập hợp điểm M trong mặt phẳng chứa tam giác ABC sao cho $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}| = 6$ là

- (A) đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . (B) đường tròn tâm G bán kính bằng 1.
(C) đường tròn tâm G bán kính bằng 2. (D) đường tròn tâm G bán kính bằng 6.

CÂU 33. Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng $2a$ và G là trọng tâm của tam giác. Khi đó, giá trị $|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{GC}|$ là

- (A) $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. (B) $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$. (C) $\frac{4a\sqrt{3}}{3}$. (D) $\frac{2a}{3}$.

CÂU 34. Cho ba lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ có cùng điểm đặt tại O . Trong đó, có hai lực \vec{F}_1, \vec{F}_2 có phương hợp với nhau một góc 90° và lực \vec{F}_3 ngược hướng với lực \vec{F}_1 . Ba lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ có cường độ lần lượt là 100 N, 200 N và 300 N. Cường độ lực tổng hợp của ba lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ là

- (A) 400 N. (B) $100\sqrt{2}$ N. (C) 600 N. (D) $200\sqrt{2}$ N.

CÂU 35. Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng 1. Độ dài của vectơ $\vec{u} = 12\overrightarrow{AC} - 7\overrightarrow{AB}$ bằng

- (A) $|\vec{u}| = 17$. (B) $|\vec{u}| = 5$. (C) $|\vec{u}| = 13$. (D) $|\vec{u}| = 12\sqrt{2} - 7$.

CÂU 36. Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng 1. Độ dài của vectơ $\vec{u} = 3\overrightarrow{AC} - 7\overrightarrow{AB}$ là

- (A) $|\vec{u}| = 5$. (B) $|\vec{u}| = 12\sqrt{2} - 7$. (C) $|\vec{u}| = 17$. (D) $|\vec{u}| = 13$.

Dạng 2. Chứng minh đẳng thức vector, thu gọn biểu thức

Phương pháp giải

- ☉ HƯỚNG 1. Biến đổi một vế thành vế còn lại. Khi đó
 - a) Nếu xuất phát từ vế phức tạp ta cần thực hiện việc đơn giản biểu thức.
 - b) Nếu xuất phát từ vế đơn giản ta cần thực hiện việc phân tích vectơ.
- ☉ HƯỚNG 2. Biến đổi cả hai vế thành một vectơ hoặc biểu thức vectơ.
- ☉ HƯỚNG 3. Biến đổi đẳng thức cần chứng minh tương đương với một đẳng thức vectơ đã biết đúng.
- ☉ HƯỚNG 4. Xuất phát từ một đẳng thức vectơ đã biết đúng biến đổi thành đẳng thức cần chứng minh.

Khi thực hiện các phép biến đổi cần lưu ý

- a) Quy tắc ba điểm: Với ba điểm A, B, C bất kì ta luôn có $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$.
- b) Quy tắc hình bình hành: Với hình bình hành $ABCD$ ta luôn có $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.
- c) Quy tắc hiệu vectơ: Với ba điểm A, B, O bất kì ta luôn có $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AB}$.
- d) Tính chất trung điểm của đoạn thẳng: Cho đoạn thẳng AB ta có

$$\begin{aligned} I \text{ là trung điểm của } AB &\Leftrightarrow \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0} \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}, M \text{ là điểm bất kì.} \end{aligned}$$

- e) Tính chất trọng tâm tam giác: Cho tam giác ABC ta có

$$\begin{aligned} G \text{ là trọng tâm tam giác } ABC &\Leftrightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}. \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}, M \text{ là điểm bất kì.} \end{aligned}$$

- f) Các tính chất của phép cộng, trừ vectơ và phép nhân một số với một vectơ.

1. Ví dụ minh họa

VÍ DỤ 1. Cho tam giác ABC với trọng tâm G . Chứng minh rằng $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} = 3\overrightarrow{CG}$.

VÍ DỤ 2. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi G là trọng tâm tam giác ABD . Chứng minh rằng

$$\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 9\overrightarrow{AG}.$$

VÍ DỤ 3. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm các đoạn thẳng AB và CD . Chứng minh rằng $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{MN}$.

VÍ DỤ 4. Cho tam giác ABC . Lần lượt lấy các điểm M, N, P trên các đoạn thẳng AB, BC và CA sao cho $AM = \frac{1}{3}AB$, $BN = \frac{1}{3}BC$, $CP = \frac{1}{3}CA$. Chứng minh rằng

$$\overrightarrow{AN} + \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{CM} = \vec{0}.$$

VÍ DỤ 5. Cho hình bình hành $ABCD$ có tâm O . Gọi M là một điểm bất kì. Chứng minh rằng

- $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$.
- $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MO}$.

VÍ DỤ 6. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi M là trung điểm CD . Lấy N trên đoạn BM sao cho $BN = 2MN$. Chứng minh rằng

- $3\overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CM} + \overrightarrow{ND} + \overrightarrow{MN}$,
- $4\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BD} = 3\overrightarrow{AN}$.

2. Bài tập áp dụng

BÀI 1. Cho hình bình hành $ABCD$ có tâm O . Chứng minh rằng

$$\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD} = 4\overrightarrow{OD}.$$

BÀI 2. Gọi G và G' lần lượt là trọng tâm của tam giác ABC và $A'B'C'$. Chứng minh rằng

$$\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = 3\overrightarrow{GG'}.$$

BÀI 3. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M, N, I lần lượt là trung điểm của AC, BD và MN . Chứng minh rằng

- $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = \vec{0}$,
- $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 4\overrightarrow{OI}$ (với O là điểm bất kì).

BÀI 4. Cho tam giác ABC không vuông. Gọi G, H, O lần lượt là trọng tâm, trực tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Gọi D là điểm đối xứng của A qua O và M là trung điểm của cạnh BC . Chứng minh

- $\overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{HD}$.
- $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = 2\overrightarrow{HO}$.
- $\overrightarrow{HA} - \overrightarrow{HB} - \overrightarrow{HC} = 2\overrightarrow{OA}$.
- $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OH}$.
- $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$.
- $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{OM}$.

BÀI 5. Dựng bên ngoài tứ giác $ABCD$ các hình bình hành $ABEF, BCGH, CDIJ, DAKL$.

- Chứng minh rằng $\overrightarrow{KF} + \overrightarrow{EH} + \overrightarrow{GJ} + \overrightarrow{IL} = \vec{0}$.
- Chứng minh rằng $\overrightarrow{EL} - \overrightarrow{HI} = \overrightarrow{FK} - \overrightarrow{GJ}$.

BÀI 6. Cho đường tròn (I) nội tiếp tam giác ABC có $AB = c, AC = b, BC = a$. Chứng minh rằng

$$a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC} = \vec{0}.$$

BÀI 7. Cho tam giác ABC và một điểm M bất kì nằm trong tam giác ABC . Đặt $S_{MBC} = S_a, S_{MCA} = S_b, S_{MAB} = S_c$. Chứng minh rằng

$$S_a\overrightarrow{MA} + S_b\overrightarrow{MB} + S_c\overrightarrow{MC} = \vec{0}.$$



a) Cho M trùng với trọng tâm G của tam giác ABC , ta được $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

b) Cho M trùng với tâm đường tròn nội tiếp I của tam giác ABC , ta được kết quả

$$a\vec{IA} + b\vec{IB} + c\vec{IC} = \vec{0}.$$

c) Nếu tam giác ABC đều thì với điểm M bất kì trong tam giác, Ta có

$$x\vec{MA} + y\vec{MB} + z\vec{MC} = \vec{0},$$

trong đó x, y, z lần lượt là khoảng cách từ M đến các cạnh BC, CA và AB .

d) Khi M nằm ngoài tam giác ABC , ta có các kết quả như sau

(a) Nếu M thuộc góc \widehat{BAC} và góc đối đỉnh của nó thì

$$-S_a\vec{MA} + S_b\vec{MB} + S_c\vec{MC} = \vec{0}.$$

(b) Nếu M thuộc góc \widehat{ABC} và góc đối đỉnh của nó thì

$$S_a\vec{MA} - S_b\vec{MB} + S_c\vec{MC} = \vec{0}.$$

(c) Nếu M thuộc góc \widehat{ACB} và góc đối đỉnh của nó thì

$$S_a\vec{MA} + S_b\vec{MB} - S_c\vec{MC} = \vec{0}.$$

3. Bài tập điền khuyết

CÂU 1. Cho tam giác ABC . Gọi M là điểm trên cạnh BC sao cho $MB = 2MC$. Biết rằng $\vec{AB} + 2\vec{AC} = x\vec{AM}$. Tìm x .

Đáp án:

CÂU 2. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M, N lần lượt thuộc các đoạn thẳng AB, CD sao cho $MB = 2MA$ và $NC = 2ND$. Biết rằng $2\vec{AD} + \vec{BC} = x\vec{MN}$. Tìm x .

Đáp án:

CÂU 3. Cho tam giác đều ABC tâm O . Lấy M là một điểm bất kì trong tam giác. Gọi D, E, F lần lượt là hình chiếu của M trên BC, CA, AB . Biết rằng $\vec{MD} + \vec{ME} + \vec{MF} = x\vec{MO}$, tìm x .

Đáp án:

CÂU 4. Cho hình bình hành $ABCD$ có tâm O và E là trung điểm AD . Tìm các số thực x và y biết rằng

a) $\vec{EA} + \vec{EB} + 2\vec{EC} = x\vec{AB}$. Đáp án:

b) $\vec{EB} + 2\vec{EA} + 4\vec{ED} = y\vec{EC}$. Đáp án:

CÂU 5. Cho tam giác ABC . Dựng bên ngoài tam giác các hình bình hành $ABIF, BCPQ, CARS$. Biết rằng $\vec{RF} + \vec{IQ} + \vec{PS} = x(\vec{AB} + \vec{AC})$. Tìm x .

Đáp án:

4. Bài tập trắc nghiệm

CÂU 6. Cho tam giác ABC có trọng tâm G . Gọi M là trung điểm AB . Chọn mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau:

☐ A $\vec{CM} = -3\vec{MG}$.

☐ B $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{AC}$.

☐ C $\vec{AB} + \vec{AC} = 3\vec{AG}$.

☐ D $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = 3\vec{OG}$, O là điểm bất kì.

CÂU 7. Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O . Khẳng định nào sau đây là **đúng**?

☐ A $\vec{AB} + \vec{AD} = 2\vec{AO}$.

☐ B $\vec{AB} + \vec{AD} = 2\vec{AO}$.

☐ C $\vec{AB} + \vec{AD} = \vec{CA}$.

☐ D $\vec{AB} + \vec{AD} = \vec{BD}$.

CÂU 8. Cho I là trung điểm của đoạn thẳng AB . Với điểm M bất kỳ, ta luôn có

☐ A $\vec{MA} + \vec{MB} = \vec{MI}$.

☐ B $\vec{MA} + \vec{MB} = 2\vec{MI}$.

☐ C $\vec{MA} + \vec{MB} = 3\vec{MI}$.

☐ D $\vec{MA} + \vec{MB} = \frac{1}{2}\vec{MI}$.

CÂU 9. Cho G là trọng tâm của tam giác ABC . Với mọi điểm M , ta luôn có:

☐ A $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = \vec{MG}$.

☐ B $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = 2\vec{MG}$.

☐ C $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = 3\vec{MG}$.

☐ D $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = 4\vec{MG}$.

CÂU 10. Cho $\triangle ABC$ có G là trọng tâm, I là trung điểm BC . Đẳng thức nào đúng?

☐ A $\vec{GA} = 2\vec{GI}$.

☐ B $\vec{IG} = -\frac{1}{3}\vec{IA}$.

☐ C $\vec{GB} + \vec{GC} = 2\vec{GI}$.

☐ D $\vec{GB} + \vec{GC} = \vec{GA}$.

CÂU 11. Khẳng định nào sau đây **không phải** là điều kiện cần và đủ để G là trọng tâm $\triangle ABC$, với M là trung điểm của BC và O là điểm bất kì?

- (A) $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$. (B) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + 3\overrightarrow{OG} = \vec{0}$.
(C) $\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{CG} = \vec{0}$. (D) $\overrightarrow{GM} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GA}$.

CÂU 12. Cho I là trung điểm của đoạn thẳng AB . Với M là một điểm bất kỳ, tìm đẳng thức **đúng**.

- (A) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$. (B) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{MI}$. (C) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MI}$. (D) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{IM}$.

CÂU 13. Cho tam giác ABC có trọng tâm G và M là trung điểm của AB . Mệnh đề nào sau đây **sai**?

- (A) $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$. (B) $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = 2\overrightarrow{GM}$.
(C) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$. (D) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$.

CÂU 14. Cho $\triangle ABC$ có M, Q, N lần lượt là trung điểm của AB, BC, CA . Khi đó vectơ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{NA} + \overrightarrow{BQ}$ là vectơ nào sau đây?

- (A) $\vec{0}$. (B) \overrightarrow{BC} . (C) \overrightarrow{AQ} . (D) \overrightarrow{CB} .

CÂU 15. Cho $\triangle ABC$ và điểm I thỏa mãn $\overrightarrow{IA} = 3\overrightarrow{IB}$. Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

- (A) $\overrightarrow{CI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} - \frac{3}{2}\overrightarrow{CB}$. (B) $\overrightarrow{CI} = \overrightarrow{CA} - 3\overrightarrow{CB}$. (C) $\overrightarrow{CI} = \frac{3}{2}\overrightarrow{CB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$. (D) $\overrightarrow{CI} = 3\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}$.

CÂU 16. Cho tam giác ABC có G là trọng tâm. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

- (A) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$ với mọi điểm M . (B) $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.
(C) $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 2\overrightarrow{GA}$. (D) $3\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

CÂU 17. Khẳng định nào sau đây **sai**?

- (A) Nếu $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$ thì $ABCD$ là hình bình hành.
(B) Nếu O là trung điểm của AB thì với mọi M ta có $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MO}$.
(C) Nếu G là trọng tâm của tam giác ABC thì $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{AG}$.
(D) Với 3 điểm bất kì I, J, K ta có $\overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{JK} = \overrightarrow{IK}$.

CÂU 18. Cho hình bình hành $ABCD$. Đẳng thức nào sau đây **đúng**?

- (A) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB}$. (B) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AC}$.
(C) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AD}$. (D) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{BD}$.

CÂU 19. Cho tam giác ABC biết I là trung điểm của đoạn thẳng AB , G là trọng tâm tam giác, M là điểm bất kỳ. Hãy chọn khẳng định **đúng**.

- (A) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MG}$. (B) $\overrightarrow{BI} + \overrightarrow{IC} = \vec{0}$.
(C) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 3\overrightarrow{MI}$. (D) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$.

CÂU 20. Cho I là trung điểm của đoạn thẳng AB . Hỏi đẳng thức nào **đúng**?

- (A) $2\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AB} = \vec{0}$. (B) $\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IB} = \vec{0}$. (C) $\overrightarrow{AI} - 2\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{IB}$. (D) $\overrightarrow{AI} - \overrightarrow{IB} = \vec{0}$.

CÂU 21. Cho hình bình hành $ABCD$. Đẳng thức nào sau đây **đúng**?

- (A) $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD} = \vec{0}$. (B) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB}$. (C) $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CD}$. (D) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{BC}$.

CÂU 22. Cho G là trọng tâm tam giác ABC và I là trung điểm cạnh BC . Mệnh đề nào sau đây **sai**?

- (A) $\overrightarrow{GA} = -2\overrightarrow{GI}$. (B) $\overrightarrow{IG} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AI}$. (C) $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 2\overrightarrow{GI}$. (D) $\overrightarrow{GA} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AI}$.

CÂU 23. Cho tam giác ABC có trọng tâm G và M là trung điểm cạnh AC . Khẳng định nào sau đây **sai**?

- (A) $BG = \frac{2}{3}BM$. (B) $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{BG}$. (C) $\overrightarrow{MG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BM}$. (D) $GM = \frac{1}{2}GB$.

CÂU 24. Cho tam giác ABC . Gọi M là trung điểm của BC và G là trọng tâm của tam giác ABC . Đẳng thức nào sau đây **đúng**?

- (A) $\overrightarrow{GA} = 2\overrightarrow{GM}$. (B) $\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GM} = \vec{0}$. (C) $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AG}$. (D) $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GA}$.

CÂU 25. Cho G là trọng tâm tam giác ABC , gọi I là trung điểm của BC . Đẳng thức nào sau đây **đúng**?

- (A) $\overrightarrow{GA} = 2\overrightarrow{GI}$. (B) $\overrightarrow{IG} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{IA}$. (C) $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 2\overrightarrow{GI}$. (D) $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GA}$.

CÂU 26. Cho tam giác ABC và một điểm M tùy ý. Hãy chọn hệ thức **đúng**.

- (A) $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{BC}$. (B) $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}$.
(C) $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}$. (D) $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}$.

CÂU 27. Cho tam giác ABC . Gọi M là trung điểm của BC và G là trọng tâm của tam giác ABC . Đẳng thức nào sau đây đúng?

- (A) $\overrightarrow{GA} = 2\overrightarrow{GM}$. (B) $\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GM} = \vec{0}$. (C) $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AG}$. (D) $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GA}$.

CÂU 28. Ba trung tuyến AM, BN, CP của tam giác ABC đồng quy tại G . Hỏi vectơ $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CP}$ bằng vectơ nào?

- (A) $\frac{3}{2}(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC})$. (B) $3(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{NG} + \overrightarrow{PG})$. (C) $\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AC})$. (D) $\vec{0}$.

CÂU 29. Cho hình chữ nhật $ABCD$, I và K lần lượt là trung điểm của BC, CD . Hệ thức nào sau đây đúng?

- (A) $\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AK} = 2\overrightarrow{AC}$. (B) $\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$. (C) $\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AK} = \overrightarrow{IK}$. (D) $\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AK} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$.

CÂU 30. Cho tam giác ABC có M là trung điểm của cạnh BC . Các điểm D, E thỏa mãn các đẳng thức: $\overrightarrow{BD} = 4\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{AE} = 3\overrightarrow{AC}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- (A) $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DE}$. (B) $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{6}\overrightarrow{DE}$. (C) $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DE}$. (D) $\overrightarrow{AM} = \frac{3}{4}\overrightarrow{DE}$.

CÂU 31. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M, N là trung điểm AB và DC . Lấy các điểm P, Q lần lượt thuộc các đường thẳng AD và BC sao cho $\overrightarrow{PA} = -2\overrightarrow{PD}$, $\overrightarrow{QB} = -2\overrightarrow{QC}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- (A) $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC})$. (B) $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{MQ}$. (C) $\overrightarrow{MN} = -\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC})$. (D) $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NA})$.

CÂU 32. Cho hình bình hành $ABCD$. Đẳng thức nào đúng?

- (A) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{BC}$. (B) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB}$. (C) $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{CD}$. (D) $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CD}$.

CÂU 33. Cho G là trọng tâm của tam giác ABC . Trong các mệnh đề sau, tìm mệnh đề đúng?

- (A) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AG}$. (B) $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = 3\overrightarrow{BG}$. (C) $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CG}$. (D) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} = \vec{0}$.

CÂU 34. Cho hình vuông $ABCD$ có tâm là O . Trong các mệnh đề sau, tìm mệnh đề sai?

- (A) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AO}$. (B) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DO} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$. (C) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$. (D) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB} = 4\overrightarrow{AB}$.

CÂU 35. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD . Khi đó $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$ bằng

- (A) \overrightarrow{MN} . (B) $2\overrightarrow{MN}$. (C) $3\overrightarrow{MN}$. (D) $-2\overrightarrow{MN}$.

CÂU 36. Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O và điểm M bất kì. Khẳng định nào sau đây đúng?

- (A) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MO}$. (B) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 2\overrightarrow{MO}$. (C) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 3\overrightarrow{MO}$. (D) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MO}$.

CÂU 37. Cho năm điểm A, B, C, D, E . Khẳng định nào đúng?

- (A) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{EC} = 2(\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{CB})$. (B) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{EC} = 3(\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{CB})$. (C) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{EC} = \frac{\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{CB}}{4}$. (D) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{EC} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{CB}$.

CÂU 38. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABD , I là điểm trên GC sao cho $IC = 3IG$. Với mọi điểm M ta luôn có $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}$ bằng

- (A) $2\overrightarrow{MI}$. (B) $3\overrightarrow{MI}$. (C) $4\overrightarrow{MI}$. (D) $5\overrightarrow{MI}$.

CÂU 39. Cho tam giác ABC . Gọi M là điểm trên cạnh AB sao cho $MA = 2MB$ và N là trung điểm của AC . Gọi P là trung điểm của MN . Khi đó

- (A) $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$. (B) $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$. (C) $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$. (D) $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$.

CÂU 40. Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn tâm O . Gọi H, G lần lượt là trực tâm, trọng tâm của tam giác. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

- (A) $\overrightarrow{OH} = 4\overrightarrow{OG}$. (B) $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$. (C) $\overrightarrow{OH} = 2\overrightarrow{OG}$. (D) $3\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OG}$.

CÂU 41. Cho $\triangle ABC$. Trên các cạnh AB, BC và CA lấy các điểm D, E, F sao cho $DA = 2DB, EB = 2EC, FC = 2FA$. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau đây.

- (A) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$. (B) $\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$. (C) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$. (D) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$.

CÂU 42. Cho tứ giác $ABCD$ và điểm G thỏa mãn $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + 2\overrightarrow{GC} + k\overrightarrow{GD} = \vec{0}$. Gọi I, J lần lượt là trọng tâm tam giác ACD, BCD . Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh CD, AB . Tìm k sao cho G là trung điểm của IJ .

- (A) $k = 1$. (B) $k = 2$. (C) $k = 3$. (D) $k = 4$.

CÂU 43. Cho ngũ giác $ABCDE$ có M, N, P, Q lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC, CD, DE . Gọi I, J lần lượt là trung điểm của MP, NQ . Biết $\overrightarrow{IJ} = k\overrightarrow{EA}$, tìm k .

(A) $k = -\frac{1}{2}$.

(B) $k = \frac{1}{2}$.

(C) $k = -\frac{1}{4}$.

(D) $k = \frac{1}{4}$.

Dạng 3. Xác định điểm thỏa mãn đẳng thức vectơ

Phương pháp giải

Bài toán: Xác định điểm M thỏa mãn đẳng thức vectơ cho trước

- ☑ Bước 1. Ta biến đổi đẳng thức đã cho (bằng chèn điểm, quy tắc ba điểm, qui tắc hình bình hành, tính chất trung điểm, trọng tâm,...) về dạng: $\overrightarrow{OM} = \vec{v}$. Trong đó điểm O và vectơ \vec{v} cho trước.
- ☑ Bước 2. Nếu muốn dựng điểm M , ta lấy điểm O làm gốc, dựng một vectơ bằng vectơ \vec{v} , khi đó điểm ngọn của vectơ này chính là điểm M .

A ☑ *Lưu ý 1. Thông thường, biểu thức $\overrightarrow{OM} = \vec{v}$ là những biểu thức đặc biệt (trung điểm, trọng tâm, điểm chia đoạn thẳng theo tỉ lệ $\vec{a} = k\vec{b}$, hình bình hành,...). Ta dựa vào biểu thức này để dựng.*

☑ *Lưu ý 2. Một số cách chứng minh thường dùng.*

— Để chứng minh I là trung điểm của đoạn thẳng AB , ta cần chứng minh một trong các hệ thức sau

$$+ \overrightarrow{IA} = \overrightarrow{IB}.$$

$$+ \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}.$$

$$+ 2\overrightarrow{IA} = \overrightarrow{AB}.$$

$$+ 2\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} \text{ (O bất kì)}.$$

— Để chứng minh điểm G là trọng tâm của $\triangle ABC$, ta cần chứng minh một trong các hệ thức sau

$$+ \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}.$$

$$+ \text{Với } I \text{ là trung điểm của cạnh } BC \text{ thì } \overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AI}.$$

$$+ \text{Với } O \text{ là điểm bất kì trong mặt phẳng thì: } 3\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}.$$

— Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành $\Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \\ \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \end{cases}$

— Để chứng minh hai điểm A_1 và A_2 trùng nhau ta có thể chứng minh một trong các hệ thức sau

$$+ \overrightarrow{A_1A_2} = \vec{0}.$$

$$+ \overrightarrow{OA_1} = \overrightarrow{OA_2} \text{ với } O \text{ là điểm bất ý.}$$

— Điều kiện cần và đủ để $\triangle ABC$ và $\triangle A'B'C'$ có cùng trọng tâm là

$$\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \vec{0}.$$

— Nếu $\overrightarrow{MB} = k \cdot \overrightarrow{MC}$ ($k \neq 1$) thì $\overrightarrow{AM} = \frac{\overrightarrow{AB} - k \cdot \overrightarrow{AC}}{1 - k}$ (hay điểm M chia đoạn AB theo tỉ số $k \neq 1$).

1. Ví dụ minh họa

VÍ DỤ 1. Cho hai điểm A và B . Xác định điểm M thỏa mãn $2\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} = \vec{0}$.

VÍ DỤ 2. Cho tam giác ABC . Gọi M là trung điểm của AB và N thuộc cạnh AC , sao cho $NC = 2NA$. Hãy xác định K và D khi

a) $3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} - 12\overrightarrow{AK} = \vec{0}$.

b) $3\overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{AC} - 12\overrightarrow{KD} = \vec{0}$.

VÍ DỤ 3. Cho hình bình hành $ABCD$.

a) Hãy dựng các điểm M, N thỏa mãn $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{NC} + \overrightarrow{ND} - \overrightarrow{NA} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}$.

b) Chứng minh rằng $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{BA}$.

VÍ DỤ 4. Cho trước hai điểm A, B và hai số thực α, β thỏa mãn $\alpha + \beta \neq 0$

a) Chứng minh rằng tồn tại duy nhất điểm I thỏa mãn $\alpha \cdot \overrightarrow{IA} + \beta \cdot \overrightarrow{IB} = \vec{0}$.

b) Từ đó suy ra với điểm M bất kỳ, ta luôn có: $\alpha \cdot \overrightarrow{MA} + \beta \cdot \overrightarrow{MB} = (\alpha + \beta) \cdot \overrightarrow{MI}$.

A Lời bình 3

- ☑ Nếu $\alpha = \beta = 1$ thì điểm I chính là trung điểm của AB .
- ☑ Bài toán trên được mở rộng cho ba điểm A, B, C và bộ 3 số thực α, β, γ cho trước thỏa mãn $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$, nghĩa là:
- Tồn tại điểm I duy nhất thỏa mãn $\alpha \cdot \overrightarrow{IA} + \beta \cdot \overrightarrow{IB} + \gamma \cdot \overrightarrow{IC} = \vec{0}$
 - Từ đó suy ra với điểm M bất kỳ, ta luôn có $\alpha \cdot \overrightarrow{IA} + \beta \cdot \overrightarrow{IB} + \gamma \cdot \overrightarrow{IC} = (\alpha + \beta + \gamma) \cdot \overrightarrow{MI}$. Khi $\alpha = \beta = \gamma = 1$ thì I là trọng tâm của $\triangle ABC$.
- ☑ Bài toán trên vẫn đúng với n điểm A_i ($i = \overline{1, n}$) và bộ số thực α_i ($i = \overline{1, n}$) thỏa mãn $\sum_{i=1}^n \alpha_i \neq 0$
- ☑ Kết quả trên dùng giải bài toán “Cho n điểm $A_i, i = \overline{1, n}$ và bộ số thực $\alpha_i, i = \overline{1, n}$ thỏa mãn $\sum_{i=1}^n \alpha_i \neq 0$. Tìm số thực k và điểm cố định I sao cho đẳng thức vectơ $\sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{MA_i} = k \cdot \overrightarrow{MI}$ thỏa mãn với mọi điểm M ”.

2. Bài tập áp dụng**BÀI 1.** Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $ACEF$.

- a) Dựng các điểm M, N sao cho $\overrightarrow{EM} = \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{FN} = \overrightarrow{BD}$.
- b) Chứng minh $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{MN}$.

BÀI 2. Cho tam giác ABC .

- a) Chứng minh với mọi điểm M , ta luôn có $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{CB}$.
- b) Hãy dựng điểm D sao cho $\overrightarrow{DA} + 2\overrightarrow{DB} - 3\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{CB}$.

BÀI 3. Cho tứ giác $ABCD$, M là điểm tùy ý. Trong mỗi trường hợp hãy tìm số k và điểm cố định I, J, K sao cho đẳng thức vectơ sau thỏa mãn với mọi điểm M .

- a) $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = k \cdot \overrightarrow{MI}$.
- b) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2 \cdot \overrightarrow{MC} = k \cdot \overrightarrow{MJ}$.
- c) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + 3 \cdot \overrightarrow{MD} = k \cdot \overrightarrow{MK}$

BÀI 4. Cho tứ giác lồi $ABCD$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA . Chứng minh $\triangle ANP$ và $\triangle CMQ$ có cùng trọng tâm.**3. Bài tập trắc nghiệm****CÂU 1.** Cho điểm A và vectơ \vec{u} . Có bao nhiêu điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{AM} = \vec{u}$?

- (A) Duy nhất một. (B) Hai. (C) Không có. (D) Vô số.

CÂU 2. Cho hình bình hành $ABCD$, điểm M thỏa mãn $4\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$. Khi đó M là

- (A) trung điểm AC . (B) điểm C . (C) trung điểm AB . (D) trung điểm AD .

CÂU 3. Cho hai vectơ \vec{a} và \vec{b} khác $\vec{0}$ và không cùng phương. Biết hai vectơ $\vec{u} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$ và $\vec{v} = \vec{a} + (x - 1)\vec{b}$ cùng phương. Khi đó giá trị của x là

- (A) $\frac{1}{2}$. (B) $-\frac{3}{2}$. (C) $-\frac{1}{2}$. (D) $\frac{3}{2}$.

CÂU 4. Cho hai điểm phân biệt A, B và hai số thực α, β khác 0 thỏa mãn $\alpha + \beta = 0$. Có bao nhiêu điểm M thỏa mãn $\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} = \vec{0}$?

- (A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

CÂU 5. Cho ba điểm không thẳng hàng A, B, C và M là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CM}$. Chọn khẳng định đúng.

- (A) $ABMC$ là hình bình hành. (B) $ABCM$ là hình bình hành.
(C) M là trọng tâm của tam giác ABC . (D) CM là trung tuyến của tam giác ABC .

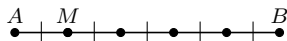
CÂU 6. Cho hai điểm phân biệt A, B và hai số thực α, β thỏa mãn $\alpha + \beta \neq 0$. Có bao nhiêu điểm M thỏa mãn $\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} = \vec{0}$?

- (A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

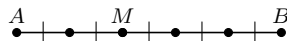
CÂU 7. Cho hai điểm phân biệt A và B . Điều kiện cần và đủ để I là trung điểm của đoạn thẳng AB là
 (A) $IA = IB$. (B) $\overrightarrow{IA} = -\overrightarrow{IB}$. (C) $\overrightarrow{IA} = \overrightarrow{IB}$. (D) $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{BI}$.

CÂU 8. Cho tam giác ABC , điểm I là trung điểm BC . Điểm G có tính chất nào sau đây thì G là trọng tâm tam giác ABC ?
 (A) $\overrightarrow{GI} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AI}$. (B) $GA = 2GI$. (C) $\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{CG} = \vec{0}$. (D) $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 2\overrightarrow{GI}$.

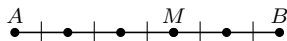
CÂU 9. Cho đoạn thẳng AB , hình nào sau đây biểu diễn đúng điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MA} + 4\overrightarrow{MB} = \vec{0}$.



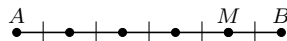
Hình 1



Hình 2



Hình 3

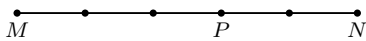


Hình 4

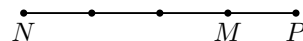
- (A) Hình 1. (B) Hình 2. (C) Hình 3. (D) Hình 4.

CÂU 10. Cho đoạn thẳng AB có trung điểm I . Tìm điểm M thỏa mãn $3\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$.
 (A) M trùng với I . (B) M là trung điểm của BI .
 (C) M là trung điểm của AI . (D) M trùng với A hoặc M trùng với B .

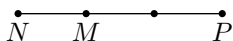
CÂU 11. Trên đường thẳng MN lấy điểm P sao cho $\overrightarrow{MN} = -3\overrightarrow{MP}$. Điểm P được xác định trong hình vẽ nào sau đây?



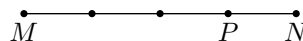
Hình 1



Hình 3



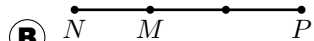
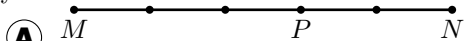
Hình 2



Hình 4

- (A) Hình 1. (B) Hình 2. (C) Hình 3. (D) Hình 4.

CÂU 12. Trên đường thẳng MN lấy điểm P sao cho $\overrightarrow{MN} = -3\overrightarrow{MP}$. Điểm P được xác định đúng theo hình vẽ nào sau đây.



CÂU 13. Cho tam giác ABC với I là trung điểm của AB . Tìm điểm M thỏa mãn hệ thức $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = \vec{0}$.
 (A) M là trung điểm của IC . (B) M là trung điểm của IA .
 (C) M là điểm trên cạnh IC sao cho $IM = 2MC$. (D) M là trung điểm của BC .

CÂU 14.

Đẳng thức nào sau đây mô tả đúng hình vẽ bên?

- (A) $3\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AB} = \vec{0}$. (B) $3\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$. (C) $\overrightarrow{BI} + 3\overrightarrow{BA} = \vec{0}$. (D) $\overrightarrow{AI} + 3\overrightarrow{AB} = \vec{0}$.



CÂU 15. Trong mặt phẳng Oxy , tam giác ABC có trọng tâm G là điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + 6\overrightarrow{AG} = 6\overrightarrow{AM}$. Vị trí của điểm M là

- (A) M là trung điểm của AC . (B) M là trung điểm của BC .
 (C) M là điểm thứ tư của hình bình hành $ABCM$. (D) M là trung điểm của AB .

CÂU 16. Cho tam giác ABC . Để điểm M thỏa mãn điều kiện $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$ thì M phải thỏa mãn
 (A) M là trọng tâm tam giác ABC . (B) M là điểm sao cho tứ giác $ABMC$ là hình bình hành.
 (C) M thuộc trung trực của AB . (D) M là điểm sao cho tứ giác $BAMC$ là hình bình hành.

CÂU 17. Cho tứ giác $ABCD$ và M là điểm thỏa $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = \vec{0}$. Chọn khẳng định đúng.

- (A) M là giao điểm hai đường chéo của tứ giác $ABCD$.
 (B) M là giao điểm của các đoạn thẳng nối hai trung điểm hai cạnh đối diện của tứ giác $ABCD$.
 (C) M là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $ABCD$.
 (D) M là tâm đường tròn nội tiếp tứ giác $ABCD$.

CÂU 18. Cho tam giác ABC , gọi M là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = \vec{0}$. Khi đó,
 (A) $ABCM$ là hình bình hành. (B) $ABMC$ là hình bình hành.
 (C) $ABCM$ là hình bình thang có đáy lớn AM . (D) $ABCM$ là hình bình thang có đáy lớn BC .

CÂU 19. Gọi G và G' lần lượt là trọng tâm của hai tam giác ABC và $A'B'C'$. Tìm điều kiện cần và đủ để $G \equiv G'$.

- (A) $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} + 3\overrightarrow{GG'} = \vec{0}$. (B) $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = 3\overrightarrow{GG'}$.
(C) $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} - 3\overrightarrow{GG'} = \vec{0}$. (D) $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = 3\overrightarrow{G'G}$.

CÂU 20. Cho tam giác ABC có I là trung điểm BC . Gọi M là điểm thỏa mãn $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$. Xác định vị trí của điểm M .

- (A) M là trọng tâm tam giác ABC . (B) M là trung điểm AI .
(C) M là điểm thuộc đoạn thẳng AI thỏa $MA = 2MI$. (D) M là điểm thuộc đoạn thẳng AI thỏa $MI = 2MA$.

CÂU 21. Cho hình bình hành $ABCD$, điểm M thỏa $4\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$. Khi đó điểm M là

- (A) trung điểm AC . (B) điểm C . (C) trung điểm AB . (D) trung điểm AD .

CÂU 22. Cho tam giác ABC . Gọi D, E là các điểm xác định bởi $\overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AE} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$. Gọi K là trung điểm của DE và M xác định bởi $\overrightarrow{BM} = x\overrightarrow{BC}$. Tìm giá trị thực của x sao cho A, K, M thẳng hàng.

- (A) $\frac{3}{8}$. (B) $-\frac{4}{3}$. (C) $\frac{8}{3}$. (D) $-\frac{3}{4}$.

CÂU 23. Cho tam giác ABC . Gọi D là trung điểm cạnh AC và I là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} + 3\overrightarrow{IC} = \vec{0}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- (A) I là trực tâm tam giác BCD . (B) I là trọng tâm tam giác ABC .
(C) I là trọng tâm tam giác CDB . (D) I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC .

CÂU 24. Cho đoạn thẳng AB và M là một điểm nằm trên đường thẳng AB sao cho $\overrightarrow{MA} = -\frac{1}{5}\overrightarrow{AB}$. Khẳng định nào sau đây là sai?

- (A) $\overrightarrow{MB} = -4\overrightarrow{MA}$. (B) $\overrightarrow{MB} = -\frac{4}{5}\overrightarrow{AB}$. (C) $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AB}$. (D) $\overrightarrow{MA} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{MB}$.

CÂU 25. Cho tam giác ABC . Hãy xác định vị trí điểm M thỏa mãn $2\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} = \vec{0}$.

- (A) M thuộc cạnh AB và $AM = 2MB$. (B) M trên AB và ngoài đoạn AB .
(C) M là trung điểm AB . (D) M không thuộc đoạn AB .

CÂU 26. Cho tam giác ABC , N là trung điểm AB , M là điểm thỏa mãn đẳng thức $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$. Kết luận nào dưới đây đúng?

- (A) M đối xứng với C qua A . (B) A đối xứng với M qua C .
(C) C đối xứng với A qua M . (D) M là điểm tùy ý.

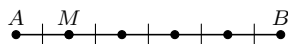
CÂU 27. Cho tam giác ABC và điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AB}$. Tìm vị trí điểm M .

- (A) M là điểm thứ tư của hình bình hành $ABCM$. (B) M là trung điểm của AB .
(C) M là trung điểm của BC . (D) M là trung điểm của AC .

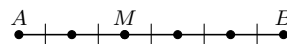
CÂU 28. Cho tam giác ABC , I là trung điểm AC . Vị trí điểm N thỏa mãn $\overrightarrow{NA} + 2\overrightarrow{NB} = \overrightarrow{CB}$ xác định bởi hệ thức

- (A) $\overrightarrow{BN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BI}$. (B) $\overrightarrow{BN} = 2\overrightarrow{BI}$. (C) $\overrightarrow{BN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BI}$. (D) $\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BI}$.

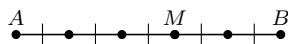
CÂU 29. Cho đoạn thẳng AB , hình nào sau đây biểu diễn đúng điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MA} + 4\overrightarrow{MB} = \vec{0}$.



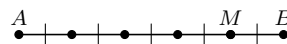
Hình 1



Hình 2



Hình 3



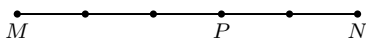
Hình 4

- (A) Hình 1. (B) Hình 2. (C) Hình 3. (D) Hình 4.

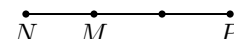
CÂU 30. Cho đoạn thẳng AB có trung điểm I . Tìm điểm M thỏa mãn $3\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$.

- (A) M trùng với I . (B) M là trung điểm của BI .
(C) M là trung điểm của AI . (D) M trùng với A hoặc M trùng với B .

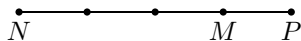
CÂU 31. Trên đường thẳng MN lấy điểm P sao cho $\overrightarrow{MN} = -3\overrightarrow{MP}$. Điểm P được xác định trong hình vẽ nào sau đây?



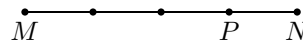
Hình 1



Hình 2



Hình 3



Hình 4

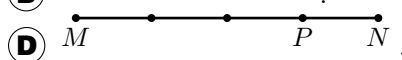
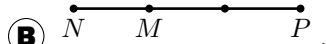
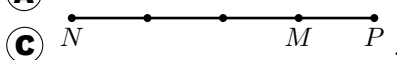
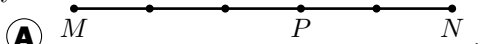
(A) Hình 1.

(B) Hình 2.

(C) Hình 3.

(D) Hình 4.

CÂU 32. Trên đường thẳng MN lấy điểm P sao cho $\overrightarrow{MN} = -3\overrightarrow{MP}$. Điểm P được xác định đúng theo hình vẽ nào sau đây.



CÂU 33.

Đẳng thức nào sau đây mô tả đúng hình vẽ bên?

(A) $3\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AB} = \vec{0}$. (B) $3\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$. (C) $\overrightarrow{BI} + 3\overrightarrow{BA} = \vec{0}$. (D) $\overrightarrow{AI} + 3\overrightarrow{AB} = \vec{0}$.



CÂU 34. Trong mặt phẳng Oxy , tam giác ABC có trọng tâm G là điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + 6\overrightarrow{AG} = 6\overrightarrow{AM}$. Vị trí của điểm M là

(A) M là trung điểm của AC .

(B) M là trung điểm của BC .

(C) M là điểm thứ tư của hình bình hành $ABCM$.

(D) M là trung điểm của AB .

Dạng 4. Biểu diễn vector theo hai vector không cùng phương

Đặt vấn đề : Trong dạng toán này, chúng ta giải quyết bài toán dựa vào kiến thức: “Cho trước hai vectơ \vec{a}, \vec{b} khác $\vec{0}$ và không cùng phương. Với mọi vectơ \vec{c} ta luôn tìm được một cặp số thực (α, β) duy nhất sao cho $\vec{c} = \alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{b}$ ”.

Phương pháp giải : Ta có thể chọn 1 trong 2 hướng giải sau

☞ **Hướng 1:** Từ giả thiết xác định được tính chất hình học, rồi từ đó khai triển vectơ cần biểu diễn bằng quy tắc ba điểm, quy tắc hình bình hành, tính chất trung điểm, trọng tâm, ...

☞ **Hướng 2:** Từ giả thiết, ta lập được mối quan hệ vectơ giữa các đối tượng, rồi từ đó khai triển biểu thức bằng quy tắc ba điểm, quy tắc hình bình hành, tính chất trung điểm, trọng tâm, ...

1. Ví dụ minh họa

VÍ DỤ 1. Cho $\triangle ABC$, gọi G là trọng tâm của tam giác và B_1 là điểm đối xứng của B qua G . Gọi M là trung điểm của BC . Hãy biểu diễn các vectơ

a) $\overrightarrow{CB_1}$ và $\overrightarrow{AB_1}$ theo $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$.

b) $\overrightarrow{MB_1}$ theo $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$.

VÍ DỤ 2. Cho $\triangle ABC$. Gọi I là điểm trên cạnh BC sao cho $2CI = 3BI$ và J là điểm trên BC kéo dài sao cho $5JB = 2JC$. Gọi G là trọng tâm $\triangle ABC$.

a) Tính $\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AJ}$ theo $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$.

b) Tính \overrightarrow{AG} theo \overrightarrow{AI} và \overrightarrow{AJ} .

VÍ DỤ 3. Cho $\triangle ABC$ và hai điểm D, E thỏa mãn $\overrightarrow{DB} = k \cdot \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{EB} = \frac{1}{k} \overrightarrow{EC}$ (với $k \neq 1$).

a) Biểu diễn các vectơ $\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}, \overrightarrow{DE}$ theo các vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$.

b) Điểm F, I thỏa mãn $\overrightarrow{FA} = k \cdot \overrightarrow{FB}, \overrightarrow{IC} = k \cdot \overrightarrow{IA}$. Chứng minh $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BI} + \overrightarrow{CF} = \vec{0}$.

2. Bài tập áp dụng

BÀI 1. Cho $\triangle ABC$ có M, D lần lượt là trung điểm của AB, BC và N là điểm trên cạnh AC sao cho $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{NC}$. Gọi K là trung điểm của MN . Hãy tính các vectơ $\overrightarrow{AK}, \overrightarrow{KD}$ theo $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$.

BÀI 2. Cho $\triangle ABC$. Trên hai cạnh AB và AC lấy hai điểm D và E sao cho $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{CE} = 3\overrightarrow{EA}$. Gọi M, I lần lượt là trung điểm của DE và BC . Hãy tính vectơ $\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{MI}$ theo $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$.

BÀI 3. Cho $\triangle ABC$, lấy điểm M, N, P sao cho $\overrightarrow{MB} = 3\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{NA} + 3\overrightarrow{NC} = \vec{0}, \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} = \vec{0}$. Phân tích $\overrightarrow{PM}, \overrightarrow{PN}$ theo $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$.

BÀI 4. Cho hình bình hành $ABCD$ có tâm là O . Hãy tính các vectơ sau theo vectơ \overrightarrow{AB} và \overrightarrow{AD} .

a) \overrightarrow{AI} với I là trung điểm của \overrightarrow{BO} .

b) \overrightarrow{BG} với G là trọng tâm $\triangle OCD$.

BÀI 5. Cho $\triangle ABC$ có hai đường trung tuyến BN, CP . Hãy biểu thị các vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}$ theo các vectơ $\overrightarrow{BN}, \overrightarrow{CP}$.

BÀI 6. Cho $\triangle ABC$ có trọng tâm G . Gọi I, J nằm trên cạnh BC và BC kéo dài sao cho $2CI = 3BI, 5JB = 2JC$.

a) Tính $\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AJ}$ theo $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$.

b) Tính \overrightarrow{AG} theo $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$.

BÀI 7. Cho $\triangle ABC$ có G là trọng tâm tam giác và I là điểm đối xứng của B qua G . M là trung điểm của BC . Hãy tính $\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{CI}, \overrightarrow{MI}$ theo $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$.

BÀI 8. Cho $\triangle ABC$ có trọng tâm là G và các đường trung tuyến AM, BP . Gọi G' là điểm đối xứng với điểm G qua P .

a) Hãy biểu diễn các vectơ $\overrightarrow{AG'}, \overrightarrow{CG'}$ theo $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$.

b) Chứng minh hệ thức: $5\overrightarrow{AC} - 6\overrightarrow{AB} = 6\overrightarrow{MG'}$.

BÀI 9. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm của các cạnh BC, CD . Hãy biểu diễn các vectơ $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD}$ theo các vectơ $\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AN}$.

BÀI 10. Cho tứ giác $ABCD$ có M, N theo thứ tự là trung điểm của các cạnh AD, BC . Hãy biểu diễn vectơ \overrightarrow{MN} theo $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}$ và theo $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{DB}$.

BÀI 11. Cho $\triangle ABC$. Gọi I là điểm đối xứng của trọng tâm G qua B .

a) Chứng minh $\overrightarrow{IA} - 5\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \vec{0}$.

b) Đặt $\overrightarrow{AG} = \vec{a}, \overrightarrow{AI} = \vec{b}$. Tính $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ theo \vec{a}, \vec{b} .

BÀI 12. Cho $\triangle ABC$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB . Tính các vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}$ theo các vectơ $\overrightarrow{BN}, \overrightarrow{CP}$.

BÀI 13. Cho $\triangle ABC$. Gọi I là điểm trên cạnh BC kéo dài sao cho $IB = 3IC$.

a) Tính \overrightarrow{AI} theo $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$.

b) Gọi J và K lần lượt là các điểm thuộc cạnh AC, AB sao cho $JA = 2JC$ và $KB = 3KA$. Tính \overrightarrow{JK} theo $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$.

c) Tính \overrightarrow{BC} theo \overrightarrow{AI} và \overrightarrow{JK} .

3. Bài tập trắc nghiệm

CÂU 1. Cho tam giác ABC có M là trung điểm của đoạn BC . Tìm mệnh đề đúng.

- Ⓐ $\overrightarrow{AM} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$. Ⓑ $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$. Ⓒ $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$. Ⓓ $\overrightarrow{AM} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

CÂU 2. Cho hình bình hành $ABCD$, gọi I là trung điểm của CD , đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{AD} = \vec{b}$. Biểu diễn vectơ \overrightarrow{BI} theo các vectơ \vec{a}, \vec{b} .

- Ⓐ $\overrightarrow{BI} = -\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$. Ⓑ $\overrightarrow{BI} = \vec{a} + \vec{b}$. Ⓒ $\overrightarrow{BI} = -\frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b}$. Ⓓ $\overrightarrow{BI} = \frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b}$.

CÂU 3. Cho tam giác ABC và một điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{BM} = k\overrightarrow{BC}$. Biểu diễn vectơ \overrightarrow{AM} theo các vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$.

- Ⓐ $\overrightarrow{AM} = (1-k)\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{AC}$. Ⓑ $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{AC}$.
Ⓒ $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB} + (1-k)\overrightarrow{AC}$. Ⓓ $\overrightarrow{AM} = (1-k)\overrightarrow{AB} + (1-k)\overrightarrow{AC}$.

CÂU 4. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi I là điểm trên cạnh BC được xác định bởi $\overrightarrow{BI} = k\overrightarrow{BC}$ ($k \neq 1$). Tìm hệ thức liên hệ giữa $\overrightarrow{DI}, \overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DC}$.

- Ⓐ $\overrightarrow{DI} = (k-1)\overrightarrow{DB} - k\overrightarrow{DC}$. Ⓑ $\overrightarrow{DI} = (1-k)\overrightarrow{DB} + k\overrightarrow{DC}$.
Ⓒ $\overrightarrow{DI} = (1+k)\overrightarrow{DB} - k\overrightarrow{DC}$. Ⓓ $\overrightarrow{DI} = (1+k)\overrightarrow{DB} + k\overrightarrow{DC}$.

CÂU 5. Cho tam giác ABC có M là trung điểm của BC . Tính \overrightarrow{AB} theo \overrightarrow{AM} và \overrightarrow{BC} .

- Ⓐ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$. Ⓑ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AM}$. Ⓒ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$. Ⓓ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AM}$.

CÂU 6. Cho tam giác ABC có M là trung điểm của BC , I là trung điểm của AM . Khẳng định nào sau đây đúng?

- Ⓐ $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$. Ⓑ $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC})$. Ⓒ $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$. Ⓓ $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

CÂU 7. Cho tam giác ABC . Hai điểm M, N chia cạnh BC theo ba phần bằng nhau $BM = MN = NC$. Tính \overrightarrow{AM} theo \overrightarrow{AB} và \overrightarrow{AC} .

- Ⓐ $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$. Ⓑ $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$. Ⓒ $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$. Ⓓ $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.

CÂU 8. Cho tam giác ABC có G là trọng tâm tam giác. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

- Ⓐ $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{CG} = \vec{0}$. Ⓑ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AG}$. Ⓒ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AG}$. Ⓓ $2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{AG}$.

CÂU 9. Cho $\triangle ABC$ có M là trung điểm của BC . Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

- (A) $2\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$. (B) $2\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$. (C) $2\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC}$. (D) $2\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}$.

CÂU 10. Cho $\triangle ABC$ và I thỏa mãn $\overrightarrow{IA} = 3\overrightarrow{IB}$. Phân tích \overrightarrow{CI} theo \overrightarrow{CA} và \overrightarrow{CB} .

- (A) $\overrightarrow{CI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CA} - 3\overrightarrow{CB})$. (B) $\overrightarrow{CI} = \overrightarrow{CA} - 3\overrightarrow{CB}$. (C) $\overrightarrow{CI} = \frac{1}{2}(3\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA})$. (D) $\overrightarrow{CI} = 3\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}$.

CÂU 11. Cho hình bình hành $ABCD$ có N là trung điểm AB và G là trọng tâm $\triangle ABC$. Phân tích \overrightarrow{GA} theo \overrightarrow{BD} và \overrightarrow{NC} .

- (A) $\overrightarrow{GA} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{BD} + \frac{2}{3}\overrightarrow{NC}$. (B) $\overrightarrow{GA} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BD} - \frac{4}{3}\overrightarrow{NC}$. (C) $\overrightarrow{GA} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BD} + \frac{2}{3}\overrightarrow{NC}$. (D) $\overrightarrow{GA} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BD} - \frac{2}{3}\overrightarrow{NC}$.

CÂU 12. Cho $\triangle ABC$ có AK, BM là hai trung tuyến. Đặt $\overrightarrow{AK} = \vec{a}, \overrightarrow{BM} = \vec{b}$. Hãy biểu diễn \overrightarrow{BC} theo \vec{a} và \vec{b} là

- (A) $\overrightarrow{BC} = \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{4}{3}\vec{b}$. (B) $\overrightarrow{BC} = \frac{2}{3}\vec{a} - \frac{4}{3}\vec{b}$. (C) $\overrightarrow{BC} = -\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{4}{3}\vec{b}$. (D) $\overrightarrow{BC} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{4}{3}\vec{b}$.

CÂU 13. Cho $\triangle ABC$ với trọng tâm G . Đặt $\overrightarrow{CA} = \vec{a}, \overrightarrow{CB} = \vec{b}$. Biểu thị vectơ \overrightarrow{AG} theo hai vectơ \vec{a} và \vec{b} ta được

- (A) $\overrightarrow{AG} = \frac{2\vec{a} - \vec{b}}{3}$. (B) $\overrightarrow{AG} = \frac{-2\vec{a} + \vec{b}}{3}$. (C) $\overrightarrow{AG} = \frac{2\vec{a} + \vec{b}}{3}$. (D) $\overrightarrow{AG} = \frac{\vec{a} - 2\vec{b}}{3}$.

CÂU 14. Cho tam giác ABC . Gọi M trên cạnh BC sao cho $MB = 3MC$. Khi đó, biểu diễn vectơ \overrightarrow{AM} theo vectơ \overrightarrow{AB} và vectơ \overrightarrow{AC} là

- (A) $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}$. (B) $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$. (C) $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$. (D) $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$.

CÂU 15. Cho tam giác ABC có trọng tâm G . Đặt $\overrightarrow{CA} = \vec{u}, \overrightarrow{CB} = \vec{v}$. Khi đó \overrightarrow{AG} bằng

- (A) $\frac{2\vec{u} - \vec{v}}{3}$. (B) $\frac{2\vec{u} + \vec{v}}{3}$. (C) $\frac{\vec{u} - 2\vec{v}}{3}$. (D) $\frac{-2\vec{u} + \vec{v}}{3}$.

CÂU 16. Cho tam giác ABC có G là trọng tâm tam giác. Điểm N trên BC sao cho $\overrightarrow{CN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$. Biểu diễn vectơ \overrightarrow{AC} theo các vectơ \overrightarrow{AG} và \overrightarrow{AN} .

- (A) $\overrightarrow{AC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AG} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AN}$. (B) $\overrightarrow{AC} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AG} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AN}$. (C) $\overrightarrow{AC} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AG} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AN}$. (D) $\overrightarrow{AC} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AG} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AN}$.

CÂU 17. Cho $\triangle ABC$ với G là trọng tâm. Đặt $\overrightarrow{CA} = \vec{a}, \overrightarrow{CB} = \vec{b}$. Khi đó \overrightarrow{AG} được biểu diễn theo hai vectơ \vec{a} và \vec{b} là

- (A) $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\vec{a} - \frac{2}{3}\vec{b}$. (B) $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$. (C) $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b}$. (D) $\overrightarrow{AG} = -\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$.

CÂU 18. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC . Đặt $\overrightarrow{GA} = \vec{a}, \overrightarrow{GB} = \vec{b}$. Tìm các giá trị thực của m, n để $\overrightarrow{BC} = m\vec{a} + n\vec{b}$.

- (A) $m = 1; n = 2$. (B) $m = -1; n = -2$. (C) $m = -2; n = -1$. (D) $m = 2; n = 1$.

CÂU 19. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD và BC . Hãy tìm m và n sao cho $\overrightarrow{MN} = m\overrightarrow{AB} + n\overrightarrow{DC}$.

- (A) $m = \frac{1}{2}, n = \frac{1}{2}$. (B) $m = -\frac{1}{2}, n = \frac{1}{2}$. (C) $m = \frac{1}{2}, n = -\frac{1}{2}$. (D) $m = -\frac{1}{2}, n = -\frac{1}{2}$.

CÂU 20. Gọi G là trọng tâm của $\triangle ABC$. Đặt $\overrightarrow{GA} = \vec{a}, \overrightarrow{GB} = \vec{b}$. Hãy tìm m, n để có $\overrightarrow{BC} = m\vec{a} + n\vec{b}$.

- (A) $m = 1, n = 2$. (B) $m = -1, n = -2$. (C) $m = 2, n = 1$. (D) $m = -2, n = -1$.

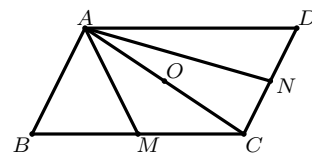
CÂU 21. Cho tứ giác $ABCD$ (với AB, CD không song song). Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD và BC . Tìm m, n để $\overrightarrow{MN} = m\overrightarrow{AB} + n\overrightarrow{DC}$.

- (A) $m = \frac{1}{2}, n = \frac{1}{2}$. (B) $m = -\frac{1}{2}, n = \frac{1}{2}$. (C) $m = \frac{1}{2}, n = -\frac{1}{2}$. (D) $m = -\frac{1}{2}, n = -\frac{1}{2}$.

CÂU 22.

Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC và CD . Đặt $\vec{a} = \overrightarrow{AM}, \vec{b} = \overrightarrow{AN}$. Hãy biểu diễn \overrightarrow{AO} theo \vec{a} và \vec{b} .

- (A) $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$. (B) $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{6}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$.
(C) $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{3}\vec{a} + 2\vec{b}$. (D) $\overrightarrow{AO} = \vec{a} + 3\vec{b}$.



CÂU 23. Cho tam giác ABC . Gọi M là trung điểm của AB và N là một điểm trên cạnh AC sao cho $NC = 2NA$. Gọi K là điểm trên cạnh MN sao cho $KN = 3KM$. Kết quả nào dưới đây đúng?

- (A) $\overrightarrow{AK} = -\frac{3}{8}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{12}\overrightarrow{AC}$. (B) $\overrightarrow{AK} = -\frac{3}{8}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{12}\overrightarrow{AC}$. (C) $\overrightarrow{AK} = \frac{3}{8}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{12}\overrightarrow{AC}$. (D) $\overrightarrow{AK} = \frac{3}{8}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{12}\overrightarrow{AC}$.

CÂU 24. Cho tứ giác $ABCD$. Trên cạnh AB, CD lần lượt lấy các điểm M, N sao cho $3\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB}$ và $3\overrightarrow{DN} = 2\overrightarrow{DC}$. Tính vectơ \overrightarrow{MN} theo hai vectơ $\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BC}$.

- (A) $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$. (B) $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} - \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$. (C) $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$. (D) $\overrightarrow{MN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.

CÂU 25. Cho tam giác đều ABC và điểm I thỏa mãn $\overrightarrow{IA} = 2\overrightarrow{IB}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- (A) $\overrightarrow{CI} = \frac{\overrightarrow{CA} - 2\overrightarrow{CB}}{3}$. (B) $\overrightarrow{CI} = \frac{\overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{CB}}{3}$. (C) $\overrightarrow{CI} = -\overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{CB}$. (D) $\overrightarrow{CI} = \frac{\overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{CB}}{-3}$.

CÂU 26. Cho tam giác ABC có G là trọng tâm tam giác. Lấy các điểm P, Q sao cho $\overrightarrow{PA} = 2\overrightarrow{PB}$, $3\overrightarrow{QA} + 2\overrightarrow{QC} = \vec{0}$. Biểu diễn vectơ \overrightarrow{AG} theo các vectơ $\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AQ}$.

- (A) $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AP} + \frac{5}{6}\overrightarrow{AQ}$. (B) $\overrightarrow{AG} = \frac{5}{6}\overrightarrow{AP} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AQ}$. (C) $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AP} + \frac{5}{6}\overrightarrow{AQ}$. (D) $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AP} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AQ}$.

CÂU 27. Cho tam giác ABC . Gọi I là điểm trên cạnh BC sao cho $2CI = 3BI$ và J thuộc BC kéo dài sao cho $5JB = 2JC$. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC . Biểu diễn vectơ \overrightarrow{AG} theo các vectơ $\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AJ}$.

- (A) $\overrightarrow{AG} = \frac{35}{48}\overrightarrow{AI} - \frac{1}{16}\overrightarrow{AJ}$. (B) $\overrightarrow{AG} = \frac{35}{48}\overrightarrow{AI} + \frac{1}{16}\overrightarrow{AJ}$. (C) $\overrightarrow{AG} = \frac{25}{16}\overrightarrow{AI} - \frac{3}{16}\overrightarrow{AJ}$. (D) $\overrightarrow{AG} = \frac{25}{16}\overrightarrow{AI} + \frac{3}{16}\overrightarrow{AJ}$.

CÂU 28. Cho tam giác ABC . Gọi G là trọng tâm tam giác và H là điểm đối xứng của B qua G . Gọi M là trung điểm BC . Biểu diễn vectơ \overrightarrow{MH} theo các vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$.

- (A) $\overrightarrow{MH} = \frac{5}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$. (B) $\overrightarrow{MH} = -\frac{1}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{5}{6}\overrightarrow{AC}$. (C) $\overrightarrow{MH} = -\frac{5}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$. (D) $\overrightarrow{MH} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{5}{6}\overrightarrow{AC}$.

CÂU 29. Cho góc $\widehat{xOy} = 60^\circ$. Các điểm A, B nằm trên tia Ox , các điểm C, D nằm trên tia Oy sao cho $AB = CD = 2$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm các đoạn AC, BD . Biết A nằm giữa O và B , C nằm giữa O và D , tính IJ .

- (A) $IJ = \frac{\sqrt{3}}{2}$. (B) $IJ = \frac{3\sqrt{3}}{2}$. (C) $IJ = \sqrt{3}$. (D) $IJ = 2\sqrt{3}$.

CÂU 30. Cho tam giác ABC , N là điểm xác định bởi $\overrightarrow{CN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC . Hệ thức tính \overrightarrow{AC} theo \overrightarrow{AG} và \overrightarrow{AN} là

- (A) $\overrightarrow{AC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AG} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AN}$. (B) $\overrightarrow{AC} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AG} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AN}$. (C) $\overrightarrow{AC} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AG} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AN}$. (D) $\overrightarrow{AC} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AG} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AN}$.

Dạng 5. Chứng minh ba điểm thẳng hàng, hai đường thẳng song song, hai điểm trùng nhau

☞ Để chứng minh 3 điểm A, B, C thẳng hàng, ta chứng minh: $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$ (1).

Để nhận được (1), ta lựa chọn một trong hai hướng sau:

- Sử dụng các quy tắc biến đổi vectơ.
- Xác định (tính) vectơ \overrightarrow{AB} và \overrightarrow{AC} thông qua một tổ hợp trung gian.

Chú ý:

- Cho ba điểm A, B, C . Điều kiện cần và đủ để A, B, C thẳng hàng là: $\overrightarrow{MC} = \alpha\overrightarrow{MA} + (1 - \alpha)\overrightarrow{MB}$ với điểm M tùy ý và số thực α bất kỳ.
Đặc biệt khi $0 \leq \alpha \leq 1$ thì $C \in AB$. Kết quả trên còn được sử dụng để tìm điều kiện của tham số k (hoặc m) cho ba điểm A, B, C thẳng hàng.
- Nếu không dễ nhận thấy k trong biểu thức $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$, ta nên quy đồng biểu thức phân tích vectơ \overrightarrow{AB} và \overrightarrow{AC} để tìm ra số k .

☞ Để chứng minh $AB \parallel CD$ ta cần chứng minh $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{DC}$.

1. Ví dụ minh họa

VÍ DỤ 1. Cho hình bình hành $ABCD$, tâm O . Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm của AB, CD và P là điểm thỏa mãn hệ thức $\overrightarrow{OP} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}$. Chứng minh 3 điểm B, P, N thẳng hàng.

VÍ DỤ 2. Cho bốn điểm phân biệt A, B, C, D thỏa: $2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC} = 5\overrightarrow{AD}$. Chứng minh B, C, D thẳng hàng.

VÍ DỤ 3. Cho $\triangle ABC$, lấy điểm M, N, P sao cho $\overrightarrow{MB} = 3\overrightarrow{MC}$, $\overrightarrow{NA} + 3\overrightarrow{NC} = \vec{0}$, $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} = \vec{0}$.

- a) Tính $\overrightarrow{PM}, \overrightarrow{PN}$ theo $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$.
b) Chứng minh ba điểm: M, N, P thẳng hàng.

VÍ DỤ 4. Cho $\triangle ABC$ có I là trung điểm của trung tuyến AM và D là điểm thỏa hệ thức $3\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$. Biểu diễn vectơ $\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BI}$ theo $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ và chứng minh ba điểm B, I, D thẳng hàng.

2. Bài tập áp dụng

BÀI 1. Cho $\triangle ABC$.

- a) Dựng các điểm K, L sao cho $\overrightarrow{KA} + 2\overrightarrow{KB} + 3\overrightarrow{KC} = \vec{0}$, $2\overrightarrow{LB} + 3\overrightarrow{LC} = \vec{0}$
b) Chứng minh ba điểm A, K, L thẳng hàng.

BÀI 2. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi I là trung điểm của AB và E là điểm thỏa hệ thức $3\overrightarrow{IE} = \overrightarrow{ID}$. Chứng minh ba điểm A, C, E thẳng hàng.

BÀI 3. Cho $\triangle ABC$.

- Dựng các điểm K, L sao cho $\overrightarrow{KA} + 2\overrightarrow{KB} + 3\overrightarrow{KC} = \vec{0}$ và $2\overrightarrow{LB} + 3\overrightarrow{LC} = \vec{0}$
- Chứng minh ba điểm A, K, L thẳng hàng.

BÀI 4. Cho $\triangle ABC$. Gọi M là trung điểm của cạnh AB , N và P là hai điểm thỏa mãn hệ thức $\overrightarrow{NA} + 2\overrightarrow{NC} = \vec{0}$, $\overrightarrow{PB} - 2\overrightarrow{PC} = \vec{0}$. Chứng minh ba điểm M, N, P thẳng hàng.

BÀI 5. Cho $\triangle ABC$. Hai điểm M, N được xác định bởi $3\overrightarrow{MA} + 4\overrightarrow{MB} = \vec{0}$, $\overrightarrow{NB} - 3\overrightarrow{NC} = \vec{0}$. Chứng minh MN đi qua trọng tâm $\triangle ABC$.

BÀI 6. Cho $\triangle ABC$.

- Dựng các điểm D, E thỏa các hệ thức $\overrightarrow{AD} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DE} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BC}$.
- Chứng minh ba điểm A, C, E thẳng hàng.

BÀI 7. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi I là trung điểm của cạnh BC và E là điểm xác định bởi $\overrightarrow{AE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$. Chứng minh ba điểm D, E, I thẳng hàng.

BÀI 8. Cho $\triangle ABC$ có trung tuyến AD và M là trung điểm AD . Điểm N được lấy trên AC sao cho $3\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AC}$. Chứng minh ba điểm B, M, N thẳng hàng.

BÀI 9. Cho $\triangle ABC$ có M là trung điểm BC và O là trung điểm của AM . Trên AB lấy điểm I , AC lấy điểm J sao cho $\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AJ} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$. Chứng minh ba điểm I, J, O thẳng hàng.

BÀI 10. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA . Gọi O là giao điểm của MP và NQ , G là trọng tâm của tam giác BCD . Chứng minh rằng ba điểm A, O, G thẳng hàng.

BÀI 11. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M, N là hai điểm di động trên AB, CD sao cho $\frac{MA}{MB} = \frac{ND}{NC}$ và hai điểm I, J lần lượt là trung điểm của AD, BC .

- Tính \overrightarrow{IJ} theo \overrightarrow{AB} và \overrightarrow{DC} .
- Chứng minh trung điểm P của MN nằm trên IJ .

BÀI 12. Cho $\triangle ABC$. Gọi P, Q, R là các điểm thỏa các đẳng thức :

$$3\overrightarrow{PB} + 4\overrightarrow{PC} = \vec{0}, \quad \overrightarrow{AQ} = 2\overrightarrow{QC}, \quad k\overrightarrow{RA} = \overrightarrow{RB}, \quad k \neq 1.$$

- Chứng minh rằng: $21\overrightarrow{PQ} = 2\overrightarrow{BC} + 7\overrightarrow{BA}$.
- Chứng minh rằng: $\overrightarrow{RP} = \frac{k}{1-k}\overrightarrow{BA} + \frac{4}{7}\overrightarrow{BC}$.
- Tìm k sao cho P, Q, R thẳng hàng.

BÀI 13. Cho hình bình hành $ABCD$.

- Gọi I, F, K là các điểm thỏa mãn $\overrightarrow{AI} = \alpha\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AF} = \beta\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AK} = \gamma\overrightarrow{AD}$. Chứng minh điều kiện cần và đủ để I, F, K thẳng hàng là

$$\frac{1}{\beta} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\gamma} \quad (\alpha, \beta, \gamma \neq 0).$$

- Gọi M, N là hai điểm lần lượt trên đoạn AB, CD sao cho $\frac{AM}{AB} = \frac{1}{3}$, $\frac{CN}{CD} = \frac{1}{2}$. Gọi G là trọng tâm $\triangle MNB$. Tính $\overrightarrow{AN}, \overrightarrow{AG}$ theo \overrightarrow{AB} và \overrightarrow{AC} . Gọi H là điểm xác định bởi $\overrightarrow{BH} = k \cdot \overrightarrow{BC}$. Tính \overrightarrow{AH} theo $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ và k . Tìm k để đường thẳng AH đi qua điểm G .

3. Bài tập trắc nghiệm

CÂU 1. Cho ba điểm A, B, C phân biệt. Điều kiện cần và đủ để ba điểm thẳng hàng là

- (A) $AB = AC$. (B) $\exists k \in \mathbb{R}^* : \overrightarrow{AB} = k \cdot \overrightarrow{AC}$.
(C) $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$. (D) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 3\overrightarrow{MC}, \forall$ điểm M .

CÂU 2. Khẳng định nào sau đây **sai**?

- (A) Ba điểm phân biệt A, B, C thẳng hàng khi và chỉ khi $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{BC}, k \neq 0$.
(B) Ba điểm phân biệt A, B, C thẳng hàng khi và chỉ khi $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{BC}, k \neq 0$.
(C) Ba điểm phân biệt A, B, C thẳng hàng khi và chỉ khi $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}, k \neq 0$.
(D) Ba điểm phân biệt A, B, C thẳng hàng khi và chỉ khi $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$.

CÂU 3. Phát biểu nào là **sai**?

- (A) Nếu $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$ thì $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}|$. (B) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ thì A, B, C, D thẳng hàng.
(C) Nếu $3\overrightarrow{AB} + 7\overrightarrow{AC} = \vec{0}$ thì A, B, C thẳng hàng. (D) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{BA}$.

CÂU 4. Cho hai vectơ \vec{a} và \vec{b} không cùng phương. Hai vectơ nào sau đây là cùng phương?

- (A) $\vec{u} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$ và $\vec{v} = \frac{1}{2}\vec{a} - 3\vec{b}$. (B) $\vec{u} = \frac{3}{5}\vec{a} + 3\vec{b}$ và $\vec{v} = 2\vec{a} - \frac{3}{5}\vec{b}$.
(C) $\vec{u} = \frac{2}{3}\vec{a} + 3\vec{b}$ và $\vec{v} = 2\vec{a} - 9\vec{b}$. (D) $\vec{u} = 2\vec{a} - \frac{3}{2}\vec{b}$ và $\vec{v} = -\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b}$.

CÂU 5. Biết rằng hai vectơ \vec{a} và \vec{b} không cùng phương nhưng hai vectơ $2\vec{a} - 3\vec{b}$ và $\vec{a} + (x-1)\vec{b}$ cùng phương. Khi đó giá trị của x là

- (A) $\frac{1}{2}$. (B) $-\frac{3}{2}$. (C) $-\frac{1}{2}$. (D) $\frac{3}{2}$.

CÂU 6. Cho \vec{a}, \vec{b} không cùng phương, $\vec{x} = -2\vec{a} + \vec{b}$. vectơ cùng hướng với \vec{x} là

- (A) $2\vec{a} - \vec{b}$. (B) $-\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$. (C) $4\vec{a} + 2\vec{b}$. (D) $-\vec{a} + \vec{b}$.

CÂU 7. Biết rằng hai vectơ \vec{a} và \vec{b} không cùng phương nhưng hai vectơ $3\vec{a} - 2\vec{b}$ và $(x+1)\vec{a} + 4\vec{b}$ cùng phương. Khi đó giá trị của x là

- (A) -7 . (B) 7 . (C) 5 . (D) 6 .

CÂU 8. Biết rằng hai vectơ \vec{a} và \vec{b} không cùng phương nhưng hai vectơ $2\vec{a} - 3\vec{b}$ và $\vec{a} + (x-1)\vec{b}$ cùng phương. Khi đó giá trị của x là

- (A) $\frac{1}{2}$. (B) $-\frac{3}{2}$. (C) $-\frac{1}{2}$. (D) $\frac{3}{2}$.

CÂU 9. Nếu I là trung điểm đoạn thẳng AB và $\overrightarrow{IA} = k\overrightarrow{AB}$ thì giá trị của k bằng

- (A) 1 . (B) $\frac{1}{2}$. (C) $-\frac{1}{2}$. (D) -2 .

CÂU 10. Cho tam giác ABC và một điểm M tùy ý. Chứng minh rằng vectơ $\vec{v} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}$. Hãy xác định vị trí của điểm D sao cho $\overrightarrow{CD} = \vec{v}$.

- (A) D là điểm thứ tư của hình bình hành $ABCD$. (B) D là điểm thứ tư của hình bình hành $ACBD$.
(C) D là trọng tâm của tam giác ABC . (D) D là trực tâm của tam giác ABC .

CÂU 11. Cho tam giác ABC . Hai điểm M, N được xác định bởi các hệ thức $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MA} = \vec{0}$, $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{NA} - 3\overrightarrow{AC} = \vec{0}$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

- (A) $MN \perp AC$. (B) $MN // AC$.
(C) M nằm trên đường thẳng AC . (D) Hai đường thẳng MN và AC trùng nhau.

CÂU 12. Cho tam giác ABC có trọng tâm G . Các điểm M, N thỏa mãn $7\overrightarrow{MG} = 3\overrightarrow{GC} - \overrightarrow{GB}$; $\overrightarrow{GN} = \frac{1}{2}(3\overrightarrow{GC} - \overrightarrow{GB})$.

Khẳng định nào dưới đây là đúng?

- (A) Đường thẳng MN đi qua G . (B) Đường thẳng MN đi qua A .
(C) Đường thẳng MN đi qua B . (D) Đường thẳng MN đi qua C .

CÂU 13. Cho hai vectơ \vec{a} và \vec{b} không cùng phương. Các điểm A, B, C sao cho $\overrightarrow{AB} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$; $\overrightarrow{AC} = m\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$. Khi A, B, C thẳng hàng thì khẳng định nào sau đây đúng?

- (A) $m \in (2; 3)$. (B) $m \in (1; 2)$. (C) $m \in (-1; 0)$. (D) $m \in (0; 1)$.

CÂU 14. Cho tam giác ABC . Các điểm M, N thỏa mãn $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$. Khi đó, đường thẳng MN luôn đi qua một điểm cố định I . Khẳng định nào sau đây đúng?

- (A) I là trọng tâm của tam giác ABC . (B) I là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .
(C) I là trực tâm của tam giác ABC . (D) Tứ giác $ABCI$ là hình bình hành.

CÂU 15. Cho tam giác ABC . Các điểm M, N thỏa mãn $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}$. Khi đó, đường thẳng MN luôn đi qua một điểm cố định I . Khẳng định nào sau đây đúng?

- (A) $\overrightarrow{IC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$. (B) $\overrightarrow{IC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$. (C) $\overrightarrow{IB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$. (D) $\overrightarrow{IB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$.

CÂU 16. Cho hình bình hành $ABCD$ có O là giao điểm của hai đường chéo. Các điểm M, N thỏa mãn $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}$. Khi đó, đường thẳng MN luôn đi qua một điểm cố định I . Khẳng định nào sau đây đúng?

- (A) I là trọng tâm của tam giác OBC . (B) I là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .
(C) I là trung điểm của cạnh DC . (D) Tứ giác $ABCI$ là hình bình hành.

CÂU 17. Cho tam giác ABC có trọng tâm G . Gọi P, Q là các điểm sao cho $\overrightarrow{PA} = 2\overrightarrow{PB}$, $\overrightarrow{AQ} + k\overrightarrow{AC} = \vec{0}$ với $k \in \mathbb{R}$. Tìm k để P, Q, G thẳng hàng.

- (A) $k = \frac{2}{5}$. (B) $k = \frac{2}{3}$. (C) $k = -\frac{2}{5}$. (D) $k = -\frac{2}{3}$.

CÂU 18. Cho tam giác ABC . Gọi M, N là các điểm thỏa mãn $\overrightarrow{BM} = 3\overrightarrow{BC} - 2\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CN} = k\overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{BC}$. Tìm k để A, M, N thẳng hàng.

- (A) $k = -\frac{3}{2}$. (B) $k = -\frac{1}{2}$. (C) $k = \frac{1}{2}$. (D) $k = \frac{3}{2}$.

CÂU 19. Cho tam giác ABC có I là trung điểm của BC . Gọi M, N, P lần lượt là các điểm xác định bởi $\overrightarrow{AM} = m\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AN} = n\overrightarrow{AI}$; $\overrightarrow{AP} = p\overrightarrow{AC}$, với $mnp \neq 0$. Tìm điều kiện của m, n, p để M, N, P thẳng hàng.

- (A) $mp = mn + np$. (B) $2mn = mp + np$. (C) $2np = mn + mp$. (D) $2mp = mn + np$.

CÂU 20. Cho tam giác ABC . Gọi D, E lần lượt là các điểm thỏa mãn $\overrightarrow{BD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$. Điểm K trên AD thỏa mãn $\overrightarrow{AK} = \frac{a}{b}\overrightarrow{AD}$ (với $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản) sao cho 3 điểm B, K, E thẳng hàng. Tính $P = a^2 + b^2$.

- (A) $P = 5$. (B) $P = 13$. (C) $P = 29$. (D) $P = 10$.

Bài 6. TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VÉC-TƠ

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Góc giữa hai véc-tơ

Cho $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$. Từ một điểm O bất kì vẽ $\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}$. Khi đó số đo của góc \widehat{AOB} được gọi là số đo góc giữa hai véc-tơ \vec{a} và \vec{b} hay đơn giản là góc giữa hai véc-tơ \vec{a}, \vec{b} . Kí hiệu $(\vec{a}, \vec{b}) = \widehat{AOB}$.



- ☉ Quy ước rằng góc giữa hai véc-tơ \vec{a} và \vec{b} có thể nhận một giá trị tùy ý từ 0° đến 180° .
- ☉ $(\vec{a}, \vec{b}) = 0^\circ \Leftrightarrow \vec{a}, \vec{b}$ cùng hướng.
- ☉ $(\vec{a}, \vec{b}) = 180^\circ \Leftrightarrow \vec{a}, \vec{b}$ ngược hướng.
- ☉ Nếu $(\vec{a}, \vec{b}) = 90^\circ$ thì ta nói rằng \vec{a} và \vec{b} vuông góc với nhau, kí hiệu $\vec{a} \perp \vec{b}$ hoặc $\vec{b} \perp \vec{a}$.
Đặc biệt $\vec{0}$ được coi là vuông góc với mọi véc-tơ.

2. Tích vô hướng của hai véc-tơ

⚡ ĐỊNH NGHĨA 6.1. Tích vô hướng của hai véc-tơ \vec{a} và \vec{b} là một số, kí hiệu $\vec{a} \cdot \vec{b}$, được xác định bởi công thức sau

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}).$$



- ☉ Ta có $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.
- ☉ $\vec{a} \cdot \vec{a}$ còn được viết là \vec{a}^2 được gọi là bình phương vô hướng của véc-tơ \vec{a} . Ta có $\vec{a}^2 = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos 0^\circ = |\vec{a}|^2$.

B. CÁC DẠNG TOÁN

📌 Dạng 1. Tính tích vô hướng của hai véc-tơ và xác định góc

Để tính tích vô hướng của hai véc-tơ ta có thể lựa chọn một trong các hướng sau đây:

- ☉ Đưa hai véc-tơ \vec{a} và \vec{b} về chung gốc để xác định chính xác góc giữa hai véc-tơ rồi áp dụng định nghĩa $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b})$.

☑ Sử dụng các tính chất và các hằng đẳng thức của tích vô hướng của hai véc-tơ.

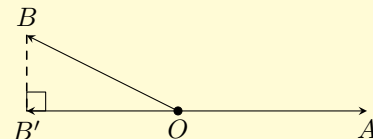
☑ Sử dụng dạng tọa độ nếu $\vec{a} = (a_1; a_2)$, $\vec{b} = (b_1; b_2)$ thì

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2.$$

☑ Sử dụng công thức hình chiếu

Cho hai véc-tơ \vec{OA} , \vec{OB} . Gọi B' là hình chiếu của B trên đường thẳng OA .

Khi đó $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = \vec{OA} \cdot \vec{OB'}$.



Chứng minh: Thật vậy, ta có $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = \vec{OA} \cdot (\vec{OB'} + \vec{B'B}) = \vec{OA} \cdot \vec{OB'}$.

Để xác định góc giữa hai véc-tơ ta có thể lựa chọn một trong các hướng sau đây:

☑ Đưa hai véc-tơ \vec{a} và \vec{b} về chung gốc rồi xác định góc theo định nghĩa.

☑ Sử dụng các tính chất và các hằng đẳng thức để tính tích vô hướng của hai véc-tơ rồi sau đó áp dụng công thức

$$\cos(\vec{a}; \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

Cần lưu ý một số kết quả đặc biệt sau:

☑ $(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{a})$.

☑ Nếu $(\vec{a}, \vec{b}) = \alpha$ thì $(\vec{a}, -\vec{b}) = 180^\circ - \alpha$.

☑ Nếu \vec{a} và \vec{b} cùng hướng thì $(\vec{a}, \vec{b}) = 0^\circ$.

☑ Nếu \vec{a} và \vec{b} ngược hướng thì $(\vec{a}, \vec{b}) = 180^\circ$.

1. Ví dụ minh họa

VÍ DỤ 1. Cho tam giác ABC vuông tại A và có $\widehat{B} = 50^\circ$. Hãy tính các góc (\vec{BA}, \vec{BC}) ; (\vec{AB}, \vec{BC}) ; (\vec{CA}, \vec{CB}) ; (\vec{AC}, \vec{BC}) ; (\vec{AC}, \vec{CB}) ; (\vec{AC}, \vec{BA}) .

VÍ DỤ 2. Cho tam giác đều ABC có cạnh a và trọng tâm G . Tính các tích vô hướng $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$; $\vec{AC} \cdot \vec{CB}$; $\vec{AG} \cdot \vec{AB}$; $\vec{GB} \cdot \vec{GC}$; $\vec{BG} \cdot \vec{GA}$; $\vec{GA} \cdot \vec{BC}$.

VÍ DỤ 3. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = a$, $BC = 2a$ và G là trọng tâm. Tính giá trị của các biểu thức sau:

a) $\vec{AB} \cdot \vec{BC} + \vec{BC} \cdot \vec{CA} + \vec{CA} \cdot \vec{AB}$.

b) $\vec{GA} \cdot \vec{GB} + \vec{GB} \cdot \vec{GC} + \vec{GC} \cdot \vec{GA}$.

VÍ DỤ 4. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . M là trung điểm của AB , G là trọng tâm tam giác ADM . Tính giá trị của các biểu thức sau:

a) $(\vec{AB} + \vec{AD})(\vec{BD} + \vec{BC})$.

b) $\vec{CG}(\vec{CA} + \vec{DM})$.

VÍ DỤ 5. Cho hai véc-tơ \vec{a} và \vec{b} có $|\vec{a}| = 7$, $|\vec{b}| = 12$ và $|\vec{a} + \vec{b}| = 13$. Tính cosin của góc giữa hai véc-tơ \vec{a} và $\vec{a} + \vec{b}$.

2. Bài tập tự luận

BÀI 1. Cho tam giác ABC vuông cân có $AB = AC = a$ và AH là đường cao. Tính các tích vô hướng sau

a) $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$;

b) $\vec{AH} \cdot \vec{BC}$;

c) $\vec{AC} \cdot \vec{CB}$ và $\vec{AB} \cdot \vec{BC}$.

BÀI 2. Cho tam giác ABC đều cạnh a và AM là trung tuyến của tam giác. Tính các tích vô hướng sau

a) $\overrightarrow{AC} (2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC});$

c) $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB};$

b) $\overrightarrow{AC} (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB});$

d) $(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BC}) (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}).$

BÀI 3. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = a\sqrt{2}, AD = 2a$. Gọi K là trung điểm của cạnh AD .

a) Phân tích $\overrightarrow{BK}, \overrightarrow{AC}$ theo \overrightarrow{AB} và \overrightarrow{AD} .

b) Tính tích vô hướng $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AC}$.

BÀI 4. Cho tam giác ABC có $AB = 5, AC = 8, BC = 7$. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}$.

BÀI 5. Cho hai véc-tơ \vec{a} và \vec{b} có độ dài bằng 1 và thỏa mãn điều kiện $|2\vec{a} - 3\vec{b}| = \sqrt{7}$. Tính $\cos(\vec{a}, \vec{b})$.

BÀI 6. Cho tam giác ABC vuông tại A có $BC = a\sqrt{3}$, M là trung điểm của BC . Biết rằng $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{a^2}{2}$. Hãy tính AB, AC .

BÀI 7. Cho hai véc-tơ \vec{a} và \vec{b} có độ dài bằng 1 và góc tạo bởi hai véc-tơ đó bằng 60° . Xác định cosin góc giữa hai véc-tơ \vec{u} và \vec{v} với $\vec{u} = \vec{a} + 2\vec{b}, \vec{v} = \vec{a} - \vec{b}$.

BÀI 8. Cho hai véc-tơ \vec{a}, \vec{b} thỏa mãn $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$ và véc-tơ $\vec{x} = \vec{a} + 2\vec{b}$ vuông góc với véc-tơ $\vec{y} = 5\vec{a} - 4\vec{b}$. Tính góc giữa hai véc-tơ \vec{a} và \vec{b} .

BÀI 9. Cho các véc-tơ \vec{a} và \vec{b} thỏa mãn $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 1$ và $(\vec{a}, \vec{b}) = 60^\circ$. Tính góc giữa véc-tơ \vec{a} và véc-tơ $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$.

BÀI 10. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 2$. M là điểm được xác định bởi $\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{MB}$; G là trọng tâm tam giác ADM . Tính $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{GC}$.

BÀI 11. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có cạnh $AB = a, AD = b$. Tính theo a, b các tích vô hướng sau:

a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}; \overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AC}; (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD});$

b) $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD}$ với điểm M thuộc đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật $ABCD$.

Dạng 2. Chứng minh đẳng thức tích vô hướng hay độ dài

- ☑ Với các biểu thức về tích vô hướng ta sử dụng định nghĩa hoặc tính chất của tích vô hướng. Cần đặc biệt lưu ý phép phân tích véc-tơ để biến đổi (quy tắc ba điểm, quy tắc trung điểm, quy tắc hình bình hành,...).
- ☑ Với các công thức về độ dài ta thường sử dụng $AB^2 = \overrightarrow{AB}^2 = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB}$. Cần nắm vững tính chất của các hình cơ bản.

1. Ví dụ minh họa

VÍ DỤ 1. Cho đoạn thẳng AB và I là trung điểm của AB . Chứng minh rằng với mỗi điểm O ta có

a) $\overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{IB} = 0.$

b) $\overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{OB}^2 - \overrightarrow{OA}^2)$

VÍ DỤ 2. Cho điểm M thay đổi trên đường tròn tâm O bán kính R ngoại tiếp tam giác đều ABC cho trước. Chứng minh $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 6R^2$.

VÍ DỤ 3. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có tâm O , M là điểm bất kì. Chứng minh

a) $MA^2 + MC^2 = MB^2 + MD^2 \quad (1);$

b) $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD} \quad (2).$

2. Bài tập tự luận

BÀI 1. Cho $\triangle ABC$, chứng minh $AB^2 + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CA} = 0$.

BÀI 2. Cho $\triangle ABC$ nhọn, đường cao AH , Chứng minh rằng

a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AH};$

b) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{BC}.$

BÀI 3. Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC ta có $S_{ABC} = \frac{1}{2} \sqrt{\overrightarrow{AB}^2 \cdot \overrightarrow{AC}^2 - (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})^2}$.

BÀI 4. Cho $\triangle ABC$ có trọng tâm G . Chứng minh rằng với mỗi điểm M ta có

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2.$$

BÀI 5. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có tâm O , M là điểm bất kì. Chứng minh

$$MA^2 + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD} = 2\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MO}.$$

BÀI 6. Cho hình chữ nhật $ABCD$ nội tiếp trong đường tròn tâm O , bán kính R . Chứng minh rằng với mọi M thuộc đường tròn (O) ta có

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} + (\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD})(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}) = 8R^2.$$

BÀI 7. Chứng minh rằng với mọi điểm A, B, C, M ta luôn có

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0. \text{ (hệ thức Euler).}$$

BÀI 8. Cho $\triangle ABC$ các đường trung tuyến AD, BE, CF . Chứng minh rằng

$$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CF} \cdot \overrightarrow{AB} = 0.$$

BÀI 9. Cho $\triangle ABC$ đường cao AH , trung tuyến AI . Chứng minh rằng $|AB^2 - AC^2| = 2BC \cdot HI$.

Dạng 3. Điều kiện vuông góc

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0.$$

1. Ví dụ minh họa

VÍ DỤ 1. Cho hai véc-tơ \vec{a} và \vec{b} vuông góc với nhau và $|\vec{a}| = 1, |\vec{b}| = \sqrt{2}$. Chứng minh hai véc-tơ $(2\vec{a} - \vec{b})$ và $(\vec{a} + \vec{b})$ vuông góc với nhau.

BÀI 1. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A có $AB = c, AC = b$. Tính $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$ theo b và c .

BÀI 2. Cho hai véc-tơ \vec{a} và \vec{b} thỏa mãn $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$ và hai véc-tơ $\vec{u} = \frac{2}{5}\vec{a} - 3\vec{b}$ và $\vec{v} = \vec{a} + \vec{b}$ vuông góc với nhau. Xác định góc giữa hai véc-tơ \vec{a} và \vec{b} .

Dạng 4. Tập hợp điểm và chứng minh bất đẳng thức

Ta sử dụng các kết quả cơ bản sau:

a) Cho A, B là các điểm cố định, M là điểm di động

- ☉ Nếu $|\overrightarrow{AM}| = k$ với k là số thực dương cho trước thì tập hợp các điểm M là đường tròn tâm A , bán kính $R = k$.
- ☉ Nếu $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ thì tập hợp các điểm M là đường tròn đường kính AB .
- ☉ Nếu $\overrightarrow{MA} \cdot \vec{a} = 0$ với $\vec{a} \neq \vec{0}$ cho trước thì tập hợp các điểm M là đường thẳng đi qua A và vuông góc với giá của vectơ \vec{a} .

b) Các bất đẳng thức vectơ

- ☉ $\vec{a}^2 \geq 0 \forall \vec{a}$. Dấu "=" xảy ra khi $\vec{a} = \vec{0}$.
- ☉ $\vec{a} \cdot \vec{b} \leq |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$. Dấu "=" xảy ra khi $\vec{a} = k\vec{b}, k > 0$.

VÍ DỤ 1. Cho hai điểm A, B cố định có độ dài bằng a , vectơ \vec{a} khác $\vec{0}$. Tìm tập hợp điểm M sao cho

a) $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \frac{3a^2}{4}$

b) $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MA^2$

VÍ DỤ 2. Cho tam giác ABC . Tìm tập hợp điểm M sao cho

$$(\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}) \cdot \overrightarrow{BC} = 0.$$

VÍ DỤ 3. Cho tam giác ABC . Chứng minh rằng

a) $\cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2}$.

b) $\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C \geq -\frac{3}{2}$.

1. Bài tập tự luận

BÀI 1. Cho đoạn thẳng AB và số thực k . Tìm tập hợp điểm M trong mỗi trường hợp sau

- a) $2MA^2 = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$. b) $MA^2 + 2MB^2 = k, k > 0$. c) $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{a} = k$.

BÀI 2. Cho tứ giác $ABCD$, I, J lần lượt là trung điểm của AB và CD . Tìm tập hợp điểm M sao cho $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MD} = \frac{1}{2}IJ^2$.

BÀI 3. Cho tam giác ABC , góc A nhọn, trung tuyến AI . Tìm tập hợp những điểm M di động trong góc \widehat{BAC} sao cho $AB \cdot AH + AC \cdot AK = AI^2$, trong đó H và K theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của M lên AB và AC .

BÀI 4. Cho tam giác ABC và k là số thực cho trước. Tìm tập hợp những điểm M sao cho

$$MA^2 - MB^2 = k.$$

BÀI 5. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a và số thực k cho trước. Tìm tập hợp điểm M sao cho

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD} = k.$$

BÀI 6. Cho tam giác ABC và các số thực x, y, z . Chứng minh rằng

$$xy \cos A + yz \cos B + zx \cos C \leq \frac{x^2 + y^2 + z^2}{2}.$$

2. Câu hỏi trắc nghiệm

CÂU 1. Cho \vec{a}, \vec{b} khác $\vec{0}$. Ký hiệu (\vec{a}, \vec{b}) là góc giữa hai véc-tơ \vec{a} và \vec{b} . Khẳng định nào sau đây là đúng?

- (A) $(\vec{a}, \vec{b}) = -(\vec{b}, \vec{a})$. (B) Nếu $(\vec{a}, \vec{b}) = 0^\circ$ thì \vec{a}, \vec{b} có giá trị trùng nhau.
(C) $(\vec{a}, -\vec{b}) = -(\vec{a}, \vec{b})$. (D) $(k\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{a}, \vec{b})$ với mọi $k \in \mathbb{R}^+$.

CÂU 2. Cho tam giác ABC vuông tại A và có $\widehat{B} = 60^\circ$. Góc giữa \overrightarrow{CA} và \overrightarrow{CB} bằng

- (A) 60° . (B) 30° . (C) 90° . (D) 45° .

CÂU 3. Cho tam giác ABC vuông cân tại A , góc giữa \overrightarrow{AB} và \overrightarrow{BC} là

- (A) $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = 45^\circ$. (B) $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = 60^\circ$. (C) $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = 120^\circ$. (D) $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = 135^\circ$.

CÂU 4. Cho \vec{a} và \vec{b} là hai véc-tơ cùng hướng và đều khác $\vec{0}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- (A) $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$. (B) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$. (C) $\vec{a} \cdot \vec{b} = -1$. (D) $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$.

CÂU 5. Cho tam giác đều ABC cạnh bằng a và H là trung điểm BC . Tính $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{CA}$.

- (A) $\frac{3a^2}{4}$. (B) $\frac{-3a^2}{4}$. (C) $\frac{3a^2}{2}$. (D) $\frac{-3a^2}{2}$.

CÂU 6. Cho tam giác ABC cân tại A , $\widehat{A} = 120^\circ$ và $AB = a$. Tính $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CA}$.

- (A) $\frac{a^2}{2}$. (B) $-\frac{a^2}{2}$. (C) $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$. (D) $-\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

CÂU 7. Cho tam giác ABC vuông tại A có $\widehat{B} = 60^\circ$, $AB = a$. Tính $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB}$.

- (A) $3a^2$. (B) $-3a^2$. (C) $3a$. (D) 0 .

CÂU 8. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . Tính tích vô hướng của hai véc-tơ \overrightarrow{AB} và \overrightarrow{AC} .

- (A) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = a\sqrt{2}$. (B) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 2a$. (C) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = a^2$. (D) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 2a^2$.

CÂU 9. Cho hai véc-tơ \vec{a} và \vec{b} khác $\vec{0}$. Xác định góc α giữa hai véc-tơ \vec{a} và \vec{b} khi $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$.

- (A) $\alpha = 180^\circ$. (B) $\alpha = 0^\circ$. (C) $\alpha = 90^\circ$. (D) $\alpha = 45^\circ$.

CÂU 10. Cho tam giác ABC vuông tại A và có góc $\widehat{B} = 50^\circ$. Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề đúng?

- (A) Góc giữa hai véc-tơ $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}$ bằng 140° . (B) Góc giữa hai véc-tơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}$ bằng 50° .
(C) Góc giữa hai véc-tơ $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC}$ bằng 90° . (D) Góc giữa hai véc-tơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CB}$ bằng 130° .

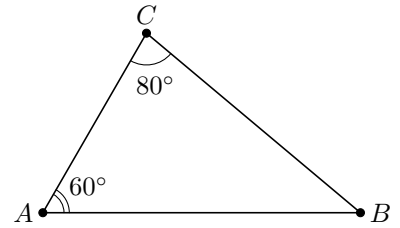
CÂU 11. Tam giác ABC vuông ở A và có $BC = 2AC$. Tính $\cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB})$.

- (A) $\cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}) = \frac{1}{2}$. (B) $\cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}) = -\frac{1}{2}$. (C) $\cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$. (D) $\cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

CÂU 12.

Cho tam giác ABC như hình vẽ. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- (A) $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AB}) = 40^\circ$.
 (B) $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) = 140^\circ$.
 (C) $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}) = 80^\circ$.
 (D) $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BA}) = 120^\circ$.

**CÂU 13.** Cho hình vuông $ABCD$, tính $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CA})$.

- (A) $\frac{1}{2}$.
 (B) $-\frac{1}{2}$.
 (C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$.
 (D) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

CÂU 14. Cho tam giác đều ABC . Tính $P = \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) + \cos(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}) + \cos(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AB})$.

- (A) $P = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.
 (B) $P = \frac{3}{2}$.
 (C) $P = -\frac{3}{2}$.
 (D) $P = -\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

CÂU 15. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . Tính $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD})$.

- (A) $-2a^2$.
 (B) a^2 .
 (C) $2a^2$.
 (D) $-\frac{a^2}{\sqrt{2}}$.

CÂU 16. Cho $\triangle ABC$ đều cạnh bằng 3. Trên các cạnh AB, AC lần lượt lấy các điểm M, N sao cho $2AM = MB, NA = 2NC$. Giá trị của tích vô hướng $\overrightarrow{BN} \cdot \overrightarrow{CM}$ là

- (A) $\frac{7}{2}$.
 (B) $-\frac{7}{2}$.
 (C) $\frac{11}{2}$.
 (D) $-\frac{11}{2}$.

CÂU 17. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = a, BC = 2a$. Tính $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC}$ theo a .

- (A) $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} = -a\sqrt{3}$.
 (B) $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} = -3a^2$.
 (C) $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} = a\sqrt{3}$.
 (D) $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} = 3a^2$.

CÂU 18. Cho tam giác ABC vuông tại A , có số đo góc B là 60° và $AB = a$. Kết quả nào sau đây là sai?

- (A) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$.
 (B) $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 3a^2$.
 (C) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -a^2$.
 (D) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} = -3\sqrt{2}a^2$.

CÂU 19. Cho M là trung điểm AB , tìm mệnh đề sai.

- (A) $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{AB} = -MA \cdot AB$.
 (B) $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = -MA \cdot MB$.
 (C) $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = AM \cdot AB$.
 (D) $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MA \cdot MB$.

CÂU 20. Cho 2 véc-tơ \vec{a} và \vec{b} thỏa $|\vec{a} + \vec{b}| = 2$ và có độ lớn bằng 1. Hãy tính $(3\vec{a} - 4\vec{b})(2\vec{a} + 5\vec{b})$.

- (A) 7.
 (B) 5.
 (C) -7.
 (D) -5.

CÂU 21. Cho hình thang vuông $ABCD$ có đường cao $AD = 3a$. Tính $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{BC}$.

- (A) $-9a^2$.
 (B) $15a^2$.
 (C) 0.
 (D) $9a^2$.

CÂU 22. Cho tam giác ABC có $BC = a, CA = b, AB = c$. Gọi M là trung điểm cạnh BC . Tính $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC}$.

- (A) $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{b^2 - c^2}{2}$.
 (B) $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{c^2 + b^2}{2}$.
 (C) $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{c^2 + b^2 + a^2}{3}$.
 (D) $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2}$.

CÂU 23. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . Tính $P = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BA})$.

- (A) $P = 2\sqrt{2}a$.
 (B) $P = 2a^2$.
 (C) $P = a^2$.
 (D) $P = -2a^2$.

CÂU 24. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . Gọi E là điểm đối xứng của D qua C . Tính $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB}$.

- (A) $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB} = 2a^2$.
 (B) $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB} = \sqrt{3}a^2$.
 (C) $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB} = \sqrt{5}a^2$.
 (D) $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB} = 5a^2$.

CÂU 25. Biết $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$ và $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- (A) \vec{a} và \vec{b} cùng hướng.
 (B) \vec{a} và \vec{b} nằm trên hai đường thẳng hợp với nhau một góc 80° .
 (C) \vec{a} và \vec{b} ngược hướng.
 (D) \vec{a} và \vec{b} nằm trên hai đường thẳng hợp với nhau một góc 60° .

CÂU 26. Cho tam giác ABC vuông tại $A, AB = a, AC = a\sqrt{3}$. Gọi M là trung điểm của BC . Tính cô-sin góc giữa hai véc-tơ \overrightarrow{MA} và \overrightarrow{BC} .

- (A) $\cos(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{BC}) = \frac{1}{2}$.
 (B) $\cos(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{BC}) = -\frac{1}{2}$.
 (C) $\cos(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{BC}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
 (D) $\cos(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{BC}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

CÂU 27. Cho tam giác ABC . Tính tổng $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}) + (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AB})$.

- (A) 180° . (B) 360° . (C) 270° . (D) 120° .

CÂU 28. Tam giác ABC có góc A bằng 100° và có trục tâm H . Tính tổng $(\overrightarrow{HA}, \overrightarrow{HB}) + (\overrightarrow{HB}, \overrightarrow{HC}) + (\overrightarrow{HC}, \overrightarrow{HA})$.

- (A) 360° . (B) 180° . (C) 80° . (D) 160° .

CÂU 29. Cho hình vuông $ABCD$ tâm O . Tính tổng $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}) + (\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{CB}) + (\overrightarrow{CO}, \overrightarrow{DO})$.

- (A) 45° . (B) 405° . (C) 315° . (D) 225° .

CÂU 30. Cho tam giác ABC cân tại A , góc $\hat{A} = 20^\circ$. Gọi BM là đường phân giác trong của góc \widehat{ABC} . Tính $\cos(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{MC})$.

- (A) $\frac{1}{2}$. (B) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$. (C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$. (D) $-\frac{1}{2}$.

CÂU 31. Cho hình thang vuông $ABCD$, vuông tại A và D , biết $AB = AD = a, CD = 2a$. Tính $\cos(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{CB})$.

- (A) $\frac{\sqrt{2}}{2}$. (B) $-\frac{1}{2}$. (C) 0 . (D) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

CÂU 32. Cho hình thoi $ABCD$ cạnh a , góc $\widehat{ABC} = 120^\circ$. Gọi G là trọng tâm của tam giác BCD và α là góc giữa hai đường thẳng DA và BG . Tính $\sin \alpha$.

- (A) $\sin \alpha = \frac{1}{2}$. (B) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$. (C) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$. (D) $\sin \alpha = 1$.

CÂU 33. Cho tam giác ABC có các cạnh bằng a, b, c . Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ theo a, b, c .

- (A) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 - c^2)$. (B) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(a^2 + c^2 - b^2)$.
(C) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(b^2 + c^2 + a^2)$. (D) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(b^2 + c^2 - a^2)$.

CÂU 34. Cho nửa đường tròn tâm O , có đường kính $AB = 2R$. Gọi M, N là hai điểm thuộc nửa đường tròn sao cho hai dây cung AM và BN cắt nhau tại I . Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

- (A) $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AB}$. (B) $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{AB}$. (C) $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AN}$. (D) $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{BA}$.

CÂU 35. Cho hai điểm M, N nằm trên đường tròn đường kính $AB = 2r$. Gọi I là giao điểm của hai đường thẳng AM và BN . Tính theo r giá trị biểu thức $P = \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BN} \cdot \overrightarrow{BI}$.

- (A) $P = 4r^2$. (B) $P = 2r^2$. (C) $P = r^2$. (D) $P = \frac{r^2}{4}$.

CÂU 36. Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh là a . Giá trị của biểu thức $(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BA})(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})$ là

- (A) 0 . (B) $2a^2$. (C) $-2a^2$. (D) $-2\sqrt{2}a^2$.

CÂU 37. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh bằng 2 . Điểm M nằm trên đoạn thẳng AC sao cho $AM = \frac{AC}{4}$. Gọi N là trung điểm của đoạn thẳng DC . Tính $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MN}$.

- (A) $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MN} = -4$. (B) $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MN} = 0$. (C) $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MN} = 4$. (D) $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MN} = 16$.

CÂU 38. Cho hình thoi $ABCD$ có $AC = 8$. Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

- (A) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 24$. (B) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 26$. (C) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 28$. (D) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 32$.

CÂU 39. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = a$ và $AD = a\sqrt{2}$. Gọi K là trung điểm của cạnh AD . Tính $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AC}$.

- (A) $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$. (B) $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AC} = -a^2\sqrt{2}$. (C) $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AC} = a^2\sqrt{2}$. (D) $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AC} = 2a^2$.

CÂU 40. Cho tứ giác $ABCD$ có hai đường chéo vuông góc với nhau tại M và $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD}$. Gọi P là trung điểm của AD . Góc giữa hai đường thẳng MP và BC là

- (A) 90° . (B) 60° . (C) 45° . (D) 30° .

CÂU 41. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . Gọi M và N lần lượt là trung điểm của BC và CD . Tính $\cos(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{NA})$.

- (A) $\frac{4}{5}$. (B) $-\frac{4}{5}$. (C) $\frac{3}{5}$. (D) $-\frac{3}{5}$.

CÂU 42. Cho hình vuông $ABCD$. Gọi M là trung điểm của cạnh BC . Tính góc giữa hai véc-tơ \overrightarrow{AM} và $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB}$.

- (A) 45° . (B) 30° . (C) 135° . (D) 90° .

CÂU 43. Cho hình vuông $ABCD$. Trên cạnh AD, AB lần lượt lấy hai điểm E, F sao cho $AE = AF$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên đường thẳng BE . Tính $\cos(\overrightarrow{FH}, \overrightarrow{CH})$.

- (A) 0 . (B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$. (C) $-\frac{1}{2}$. (D) $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

CÂU 44. Cho hai điểm A và B , O là trung điểm của AB và M là điểm tùy ý, biết rằng $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = OM^2 + kOA^2$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- (A) $k = 1$. (B) $k = -1$. (C) $k = 2$. (D) $k = -2$.

CÂU 45. Cho I là trung điểm AB , M là điểm tùy ý. Biết rằng $\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{AB} = k(MB^2 - MA^2)$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- (A) $k = 2$. (B) $k = \frac{1}{2}$. (C) $k = -1$. (D) $k = -\frac{1}{2}$.

CÂU 46. Cho I là trung điểm AB , M là điểm tùy ý. Biết rằng $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 + kAB^2$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- (A) $k = 2$. (B) $k = \frac{1}{2}$. (C) $k = -1$. (D) $k = -\frac{1}{4}$.

CÂU 47. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- (A) $(\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c} = \vec{a} (\vec{b} \cdot \vec{c})$. (B) $(\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = \vec{a}^2 \cdot \vec{b}^2$.
(C) $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin(\vec{a}, \vec{b})$. (D) $\vec{a} \cdot (\vec{b} - \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{a} \cdot \vec{c}$.

CÂU 48. Cho hai véc-tơ \vec{a} và \vec{b} . Đẳng thức nào sau đây sai?

- (A) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{4}(|\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2)$. (B) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}(|\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2)$.
(C) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}(|\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2)$. (D) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2)$.

CÂU 49. Cho hình thoi $ABCD$ có cạnh bằng a và $\hat{A} = 60^\circ$, điểm M tùy ý. Biết rằng $MA^2 - MB^2 + MC^2 - MD^2 = ka^2$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- (A) $k = 1$. (B) $k = 2$. (C) $k = 4$. (D) $k = 6$.

CÂU 50. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD , M là điểm tùy ý. Biết rằng $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = MO^2 + kBD^2$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- (A) $k = -\frac{1}{2}$. (B) $k = 2$. (C) $k = -\frac{1}{4}$. (D) $k = 4$.

CÂU 51. Cho tam giác ABC , gọi H là trực tâm của tam giác và M là trung điểm của cạnh BC . Đẳng thức nào sau đây đúng?

- (A) $\overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{MA} = \frac{1}{2}BC^2$. (B) $\overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{MA} = -\frac{1}{4}BC^2$. (C) $\overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{MA} = \frac{1}{4}BC^2$. (D) $\overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{MA} = \frac{1}{5}BC^2$.

CÂU 52. Cho điểm M thay đổi trên đường tròn tâm O bán kính R ngoại tiếp tam giác đều ABC cho trước. Biết rằng $MA^2 + 2\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} = kR^2$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- (A) $k = 2$. (B) $k = 3$. (C) $k = 4$. (D) $k = 6$.

CÂU 53. Cho \vec{a}, \vec{b} có $(\vec{a} + 2\vec{b})$ vuông góc với véc-tơ $(5\vec{a} - 4\vec{b})$ và $|\vec{a}| = |\vec{b}|$. Khi đó

- (A) $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$. (B) $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = 90^\circ$. (C) $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$. (D) $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{1}{2}$.

CÂU 54. Cho tam giác ABC . Tập hợp điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ là

- (A) Đường trung trực đoạn BC . (B) Đường tròn có tâm A .
(C) Đường thẳng đi qua A và vuông góc với BC . (D) Đường thẳng đi qua A song song với BC .

CÂU 55. Cho đoạn thẳng AB . Tập hợp điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ là

- (A) Đường trung trực đoạn AB . (B) Đường tròn.
(C) Đường thẳng đi qua A và vuông góc với AB . (D) Đường thẳng đi qua B và vuông góc với AB .

CÂU 56. Cho tam giác ABC . Tập hợp các điểm M thỏa $(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB})(2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}) = 0$ là

- (A) Đường thẳng vuông góc với AB . (B) Đường thẳng vuông góc với AC .
(C) Đường thẳng vuông góc với BC . (D) Đường tròn.

CÂU 57. Cho tam giác ABC . Tập hợp các điểm M thỏa $(\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB})(\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}) = 0$ là

- (A) Đường thẳng vuông góc với AB . (B) Đoạn thẳng.
(C) Đường thẳng song song với AB . (D) Đường tròn.

CÂU 58. Cho tam giác ABC . Tập hợp các điểm M thỏa $2MA^2 + \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC}$ là

- (A) Đường thẳng. (B) Đường tròn đường kính BC .
(C) Đường tròn đi qua A . (D) Đường tròn đi qua B .

CÂU 59. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . Tìm tập hợp các điểm M thỏa mãn

$$(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC})(\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MB}) = 3a^2$$

- ☐ **A** Đường thẳng vuông góc với BC .
 ☐ **B** Đường thẳng song song với BC .
☐ **C** Đường tròn đường kính AB .
 ☐ **D** Đường tròn đường kính AC .

CÂU 60. Cho tam giác ABC . Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = 2 \cos A + 6 \cos B + 3 \cos C$ bằng

- ☐ **A** 11.
 ☐ **B** 10.
 ☐ **C** 7.
 ☐ **D** 6.

————Mục lục chính

MỤC LỤC

Bài 3. Các khái niệm mở đầu	1
Ⓐ Tóm tắt lý thuyết	1
Ⓑ Các dạng toán	2
Dạng 1. Xác định một vectơ, độ dài vectơ	2
Dạng 2. Hai vectơ cùng phương, cùng hướng và bằng nhau	2
Ⓒ Câu hỏi trắc nghiệm	3
Bài 4. Tổng và hiệu của hai véc-tơ	5
Ⓐ Các dạng toán	5
Dạng 1. Tính tổng, hiệu hai véc-tơ	5
Dạng 2. Xác định vị trí của một điểm từ đẳng thức véc-tơ	5
Dạng 3. Tính độ dài véc-tơ	5
Dạng 4. Ứng dụng của véc-tơ trong vật lý	6
Ⓑ Câu hỏi trắc nghiệm	6
Bài 5. Tích của một vectơ với một số	9
Ⓐ Tóm tắt lý thuyết	9
Ⓑ Các dạng toán	9
Dạng 1. Xác định vectơ tích, tính độ dài vectơ	9
Dạng 2. Chứng minh đẳng thức vectơ, thu gọn biểu thức	12
Dạng 3. Xác định điểm thỏa mãn đẳng thức vectơ	17
Dạng 4. Biểu diễn vectơ theo hai vectơ không cùng phương	21
Dạng 5. Chứng minh ba điểm thẳng hàng, hai đường thẳng song song, hai điểm trùng nhau	24
Bài 6. Tích vô hướng của hai véc-tơ	27
Ⓐ Tóm tắt lý thuyết	27
Ⓑ Các dạng toán	27
Dạng 1. Tính tích vô hướng của hai véc-tơ và xác định góc	27
Dạng 2. Chứng minh đẳng thức tích vô hướng hay độ dài	29
Dạng 3. Điều kiện vuông góc	30
Dạng 4. Tập hợp điểm và chứng minh bất đẳng thức	30

