A. NGUYÊN HÀM HÀM ẨN

Công thức đạo hàm của hàm hợp

a) $\int f'(x)\,\mathrm{d}x = f(x) + C$

b) $f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x) = [f(x)\cdot g(x)]'$

c) $\dfrac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)} = \left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]'$

d) $\dfrac{f'(x)}{f(x)} = [\ln f(x)]'$

e) $-\dfrac{f'(x)}{f^2(x)} = \left[\dfrac{1}{f(x)}\right]'$

f) $-\dfrac{f'(x)}{f^n(x)} = \left[\dfrac{1}{(n-1)\,[f(x)]^{n-1}}\right]'$

g) $n\cdot f'(x)\cdot f^{n-1}(x) = [f^n(x)]'$

h) $\dfrac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} = \left[2\sqrt{f(x)}\right]'$

1 Nguyên hàm của một tích, thương

1. Điều kiện hàm ẩn có dạng

$$\left[\begin{array}{l} f'(x) = g(x)\cdot h\,[f(x)] \\ f'(x)\cdot h\,[f(x)] = g(x). \end{array}\right.$$

Phương pháp giải

- $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{h[f(x)]}\,\mathrm{d}x = \int g(x)\,\mathrm{d}x \Leftrightarrow \int \frac{\mathrm{d}\,[f(x)]}{h\,[f(x)]} = \int g(x)\,\mathrm{d}x.$
- $\displaystyle\int f'(x)h[f(x)]\,\mathrm{d}x = \int g(x)\,\mathrm{d}x \Leftrightarrow \int h[f(x)]\,\mathrm{d}\,[f'(x)] = \int g(x)\,\mathrm{d}x.$

Chú ý: Ngoài việc nguyên hàm hai vế, ta có thể lấy tích phân hai vế (tùy câu hỏi của bài toán)

2. Điều kiện hàm ẩn có dạng

$$u(x)f'(x) + u'(x)f(x) = h(x)$$

Phương pháp giải:

$$u(x)f'(x) + u'(x)f(x) = h(x) \Leftrightarrow [u(x)f(x)]' = h(x)$$

CÂU 1. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 0$ và $f'(x)\cdot\sin^2\dfrac{x}{2}\cos^2\dfrac{x}{2} = 1$. Tính $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$.

A. $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$.
B. $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = -1$.
C. $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 2$.
D. $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 4$.

Lời giải.

$f'(x)\cdot\sin^2\dfrac{x}{2}\cos^2\dfrac{x}{2} = 1 \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{\sin^2\dfrac{x}{2}\cos^2\dfrac{x}{2}} = \dfrac{1}{\frac{1}{4}\sin^2 x}$

$\Rightarrow f(x) = 4\displaystyle\int \frac{1}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = -4\cot x + C.$

Với $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 0$ thì $C = 4$.

Suy ra $f(x) = -4\cot x + 4$.

Vậy $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = -4\cot\dfrac{\pi}{2} + 4 = 4$.

Chọn đáp án D .... □

CÂU 2. Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn $f'(x)\cdot f(x) = x^4 + x^2$. Biết $f(0) = 2$. Tính $f^2(2)$.

A. $f^2(2) = \dfrac{313}{15}$.
B. $f^2(2) = \dfrac{332}{15}$.
C. $f^2(2) = \dfrac{324}{15}$.
D. $f^2(2) = \dfrac{323}{15}$.

Lời giải.

Ta có $f'(x)\cdot f(x)=x^4+x^2 \Leftrightarrow f(x)\,\mathrm{d}f(x)=(x^4+x^3)\,\mathrm{d}x$

$$\Leftrightarrow \int f'(x)\cdot f(x)\,\mathrm{d}x=\int (x^4+x^2)\,\mathrm{d}x+C$$
$$\Rightarrow \frac{f^2(x)}{2}=\frac{x^5}{5}+\frac{x^3}{3}+C.$$

Do $f(0)=2\Rightarrow \dfrac{f^2(0)}{2}=\dfrac{0^5}{5}+\dfrac{0^3}{3}+C\Rightarrow C=2.$

Vậy $f^2(2)=2\left(\dfrac{32}{5}+\dfrac{8}{3}+2\right)=\dfrac{332}{15}.$

Chọn đáp án B ....

CÂU 3. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[-2;1]$ thỏa mãn $f(0)=3$ và $(f(x))^2\cdot f'(x)=3x^2+4x+2$. Giá trị $f(1)$ là

A $2\sqrt[3]{42}$. **B** $2\sqrt[3]{15}$. **C** $\sqrt[3]{42}$. **D** $\sqrt[3]{15}$.

Lời giải.

Ta có $(f(x))^2\cdot f'(x)=3x^2+4x+2$ (*).
Lấy nguyên hàm 2 vế của phương trình trên ta được

$$\int f(x)^2\cdot f'(x)\,\mathrm{d}x=\int\left(3x^2+4x+2\right)\,\mathrm{d}x$$
$$\Leftrightarrow \int (f(x))^2\,\mathrm{d}f(x)=x^3+2x^2+2x+C$$
$$\Leftrightarrow \frac{(f(x))^3}{3}=x^3+2x^2+2x+C$$
$$\Leftrightarrow (f(x))^3=3(x^3+2x^2+2x+C)\quad(1).$$

Theo đề bài $f(0)=3\overset{(1)}{\Rightarrow}(f(0))^3=3(0^3+2.0^2+2\cdot 0+C)$
$\Leftrightarrow 27=3C$
$\Leftrightarrow C=9.$

Suy ra $(f(x))^3=3(x^3+2x^2+2x+9)\Rightarrow \quad f(x)=\sqrt[3]{3(x^3+2x^2+2x+9)}.$
Vậy $f(1)=\sqrt[3]{42}.$

Chọn đáp án C ....

CÂU 4. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(2)=-\dfrac{1}{3}$ và $f'(x)=x\,[f(x)]^2$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Giá trị của $f(1)$ bằng

A $f(1)=-\dfrac{2}{3}$. **B** $f(1)=-\dfrac{2}{9}$. **C** $f(1)=-\dfrac{7}{6}$. **D** $f(1)=-\dfrac{11}{6}$.

Lời giải.

Từ hệ thức đề cho: $f'(x)=x\,[f(x)]^2$ (1), suy ra $f'(x)\ge 0$ với mọi $x\in[1;2]$
Do đó $f(x)$ là hàm không giảm trên đoạn $[1;2]$, ta có $f(x)\le f(2)<0$ với mọi $x\in[1;2]$

$f'(x)=x\,[f(x)]^2\Rightarrow \dfrac{f'(x)}{[f(x)]^2}=x$

$$\Rightarrow\left(-\frac{1}{f(x)}\right)'=x$$
$$\Rightarrow\left(\frac{1}{f(x)}\right)'=-x$$
$$\Rightarrow\frac{1}{f(x)}=\int(-x)dx=-\frac{x^2}{2}+C.$$

Mà $f(2)=-\dfrac{1}{3}\Rightarrow\dfrac{1}{f(2)}=-2+C$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{-\frac{1}{3}}=-2+C$$
$$\Rightarrow C=-1.$$

Tìm được $\dfrac{1}{f(x)}=-\dfrac{x^2}{2}-1.$

Cho nên $\dfrac{1}{f(1)}=-\dfrac{1}{2}-1\Leftrightarrow f(1)=-\dfrac{2}{3}.$

Chọn đáp án (A) .... □

CÂU 5. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(2)=-\dfrac{1}{25}$ và $f'(x)=4x^3\left[f(x)\right]^2$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Giá trị của $f(1)$ bằng

(A) $-\dfrac{391}{400}$. (B) $-\dfrac{1}{40}$. (C) $-\dfrac{41}{400}$. **(D)** $-\dfrac{1}{10}$.

Lời giải.

Ta có $f'(x)=4x^3\left[f(x)\right]^2\Rightarrow-\dfrac{f'(x)}{\left[f(x)\right]^2}=-4x^3$

$$\Rightarrow\left[\dfrac{1}{f(x)}\right]'=-4x^3$$

$$\Rightarrow\dfrac{1}{f(x)}=-x^4+C.$$

Với $f(2)=-\dfrac{1}{25}$ thì $\dfrac{1}{f(2)}=-2^4+C\Leftrightarrow-25=-16+C\Leftrightarrow C=-9$.

Suy ra $f(x)=-\dfrac{1}{x^4+9}$.

Vậy $f(1)=-\dfrac{1}{10}$.

Chọn đáp án (D) .... □

CÂU 6. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(2)=-\dfrac{1}{5}$ và $f'(x)=x^3\left[f(x)\right]^2$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Giá trị của $f(1)$ bằng

(A) $-\dfrac{4}{35}$. (B) $-\dfrac{71}{20}$. (C) $-\dfrac{79}{20}$. **(D)** $-\dfrac{4}{5}$.

Lời giải.

Ta có $f'(x)=x^3\left[f(x)\right]^2\Rightarrow\dfrac{f'(x)}{f^2(x)}=x^3$

$$\Rightarrow\int\limits_1^2\dfrac{f'(x)}{f^2(x)}\,\mathrm{d}x=\int\limits_1^2x^3\,\mathrm{d}x$$

$$\Leftrightarrow-\dfrac{1}{f(x)}\Bigg|_1^2=\dfrac{1}{4}\cdot\left(2^4-1^4\right)$$

$$\Leftrightarrow-\dfrac{1}{f(2)}+\dfrac{1}{f(1)}=\dfrac{15}{4}$$

$$\Leftrightarrow\dfrac{1}{f(1)}=\dfrac{4+15f(2)}{4f(2)}$$

$$\Leftrightarrow f(1)=\dfrac{4f(2)}{4+15f(2)}=\dfrac{4\cdot\left(-\frac{1}{5}\right)}{4+15\cdot\left(-\frac{1}{5}\right)}=-\dfrac{4}{5}.$$

Vậy $f(1)=-\dfrac{4}{5}$.

Chọn đáp án (D) .... □

CÂU 7. Cho hàm số $y=f(x)$ thỏa mãn $f(2)=-\dfrac{4}{19}$ và $f'(x)=x^3f^2(x)\,\forall x\in\mathbb{R}$. Giá trị của $f(1)$ bằng

(A) $-\dfrac{2}{3}$. (B) $-\dfrac{1}{2}$. **(C)** -1. (D) $-\dfrac{3}{4}$.

Lời giải.

Ta có $f'(x)=x^3f^2(x)\Leftrightarrow\dfrac{f'(x)}{f^2(x)}=x^3$

$$\Rightarrow\int\dfrac{f'(x)}{f^2(x)}\,\mathrm{d}x=\int x^3\,\mathrm{d}x$$

$$\Leftrightarrow-\dfrac{1}{f(x)}=\dfrac{x^4}{4}+C.$$

Với $f(2)=-\dfrac{4}{9}$ thì $\dfrac{19}{4}=\dfrac{16}{4}+C\Rightarrow C=\dfrac{3}{4}$.

Tìm được $f(x)=-\dfrac{4}{x^4+3}$.

Vậy $f(1)=-1$.

Chọn đáp án (C) ....

CÂU 8. Cho hàm số $f(x)>0$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ đồng thời thỏa mãn $f(0)=\frac{1}{2}$, $f'(x)=-\mathrm{e}^x f^2(x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Tính giá trị của $f(\ln 2)$.

(A) $f(\ln 2)=\frac{1}{4}$. (B) $f(\ln 2)=\frac{1}{3}$. (C) $f(\ln 2)=\ln 2+\frac{1}{2}$. (D) $f(\ln 2)=\ln^2 2+\frac{1}{2}$.

Lời giải.

Ta có $f'(x)=-\mathrm{e}^x f^2(x)\Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f^2(x)}=-\mathrm{e}^x$ (do $f(x)>0$)

$$\Leftrightarrow \int \frac{f'(x)}{f^2(x)}\,\mathrm{d}x=\int(-\mathrm{e}^x)\,\mathrm{d}x$$
$$\Rightarrow -\frac{1}{f(x)}=-\mathrm{e}^x+C$$
$$\Rightarrow f(x)=\frac{1}{\mathrm{e}^x-C}.$$

Với $f(0)=\frac{1}{2}$ thì $\frac{1}{\mathrm{e}^0-C}=\frac{1}{2}\Rightarrow C=-1$.

Suy ra $f(x)=\frac{1}{\mathrm{e}^x+1}$.

Vậy $f(\ln 2)=\frac{1}{\mathrm{e}^{\ln 2}+1}=\frac{1}{3}$.

Chọn đáp án (B) ....

CÂU 9. Cho hàm số $f(x)\neq 0$ thỏa mãn điều kiện $f'(x)=(2x+3)f^2(x)$ và $f(0)=-\frac{1}{2}$. Biết rằng tổng $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(2024)+f(2025)=\frac{a}{b}$ với $(a\in\mathbb{Z},b\in\mathbb{N}^*)$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Mệnh đề nào sau đây đúng?

(A) $\frac{a}{b}<-1$. (B) $\frac{a}{b}>1$. (C) $a+b=1010$. (D) $b-a=1519$.

Lời giải.

Ta có $f'(x)=(2x+3)f^2(x)\Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f^2(x)}=2x+3$

$$\Leftrightarrow \int\frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x=\int(2x+3)\,\mathrm{d}x$$
$$\Leftrightarrow -\frac{1}{f(x)}=x^2+3x+C.$$

Với $f(0)=-\frac{1}{2}$, thì $-\frac{1}{-\frac{1}{2}}=0^2+3\cdot 0+C\Rightarrow C=2$

Suy ra $f(x)=-\frac{1}{(x+1)(x+2)}=\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+1}$

Ta có: $\begin{cases} f(1)=\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\\ f(2)=\frac{1}{4}-\frac{1}{3}\\ f(3)=\frac{1}{5}-\frac{1}{4}\\ \vdots\\ f(2025)=\frac{1}{2026}-\frac{1}{2025}\end{cases}$

Tổng $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(2024)+f(2025)=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2026}=-\frac{506}{1013}$

Do $a\in\mathbb{Z},b\in\mathbb{N}^*\Rightarrow a=-506,b=1013\Rightarrow b-a=1519$.

Chọn đáp án (D) ....

CÂU 10. Cho hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$; $y=f(x)$ liên tục, nhận giá trị dương trên $(0;+\infty)$ và thỏa mãn $f(3)=\frac{4}{9}$ và $[f'(x)]^2=xf(x)$. Tính $f(8)$.

(A) $f(8)=\frac{43-24\sqrt{3}}{9}$. (B) $f(8)=\frac{43+24\sqrt{3}}{9}$. (C) $f(8)=\frac{43-\sqrt{3}}{3}$. (D) $f(8)=\frac{43+\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải.

Với $\forall x \in (0;+\infty)$ thì $y = f(x) > 0$; $x+1>0$
Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$ nên $f'(x) \geq 0, \forall x \in (0;+\infty)$
Ta có $[f'(x)]^2 = xf(x) \Rightarrow f'(x) = \sqrt{xf(x)}$

$$\Rightarrow \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} = \sqrt{x}$$
$$\Rightarrow 2\left(\sqrt{f(x)}\right)' = \sqrt{x}$$
$$\Rightarrow \left(\sqrt{f(x)}\right)' = \frac{1}{2}\sqrt{x}$$
$$\Rightarrow \sqrt{f(x)} = \frac{1}{2}\int \sqrt{x}dx$$
$$\Rightarrow \sqrt{f(x)} = \frac{1}{3}\sqrt{x^3} + C.$$

Với $f(3) = \frac{4}{9}$, thì $\sqrt{f(3)} = \frac{1}{3}\cdot\sqrt{3^3} + C \Leftrightarrow \frac{2}{3} = \sqrt{3} + C \Leftrightarrow C = \frac{2-\sqrt{3}}{3}$.

Tìm được $\sqrt{f(x)} = \frac{1}{3}\sqrt{x^3} + \frac{2-3\sqrt{3}}{3} \Rightarrow f(x) = \left(\frac{1}{3}\sqrt{x^3} + \frac{2-3\sqrt{3}}{3}\right)^2$.

Vậy $f(8) = \frac{43-24\sqrt{3}}{9}$.

Chọn đáp án A .... □

CÂU 11. Cho hàm số $f(x) > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$, $f(0) = 1$ và $f(x) = \sqrt{x}\cdot f'(x)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A $f(3) < 2$.
B $2 < f(3) < 4$.
C $f(3) > 6$.
D $4 < f(3) < 6$.

Lời giải.

Ta có $f(x) = \sqrt{x}\cdot f'(x) \Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{\sqrt{x}}$

$$\Rightarrow \ln f(x) = \int \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$$
$$\Leftrightarrow \ln f(x) = 2\sqrt{x} + C$$
$$\Leftrightarrow f(x) = \mathrm{e}^{2\sqrt{x}+C}.$$

Với $f(0) = 1$ thì $\ln f(0) = 2\sqrt{0} + C \Leftrightarrow C = 0$.
Suy ra $f(x) = \mathrm{e}^{2\sqrt{x}}$.
Vậy $f(3) = \mathrm{e}^{2\sqrt{3}} > 6$.

Chọn đáp án C .... □

CÂU 12. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm cấp hai trên đoạn $[0;1]$ đồng thời thỏa mãn các điều kiện $f'(0) = -1$, $f'(x) < 0$, $[f'(x)]^2 = f''(x)$, $\forall x \in [0;1]$. Giá trị $f'(2)$ thuộc khoảng

A $(2;3)$.
B $(-2;0)$.
C $(0;2)$.
D $(-3;-2)$.

Lời giải.

Ta có

$$[f'(x)]^2 = f''(x) \Leftrightarrow \frac{f''(x)}{[f'(x)]^2} = 1 \Leftrightarrow -\left(\frac{1}{f'(x)}\right)' = 1 \Rightarrow \frac{1}{f'(x)} = -\int \mathrm{d}x \Leftrightarrow \frac{1}{f'(x)} = -x + C.$$

Mà $f'(0) = -1 \Rightarrow C = -1$ suy ra

$$\frac{1}{f'(x)} = -x - 1 \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{x+1} \Rightarrow f'(2) = -\frac{1}{3}.$$

Chọn đáp án B .... □

CÂU 13. Cho hàm số $f(x)$ đồng biến có đạo hàm đến cấp hai trên đoạn $[0;2]$ và thỏa mãn $[f(x)]^2 - f(x)\cdot f''(x) + [f'(x)]^2 = 0$. Biết $f(0) = 1$, $f(2) = \mathrm{e}^6$. Khi đó $f(1)$ bằng

A $\mathrm{e}^{\frac{3}{2}}$.
B e^3.
C $\mathrm{e}^{\frac{5}{2}}$.
D e^2.

Lời giải.

Theo đề bài, ta có

$$\begin{aligned}[f(x)]^2 - f(x)\cdot f''(x) + [f'(x)]^2 = 0 &\Rightarrow \frac{f(x)\cdot f''(x) - [f'(x)]^2}{[f(x)]^2} = 1\\ &\Rightarrow \left[\frac{f'(x)}{f(x)}\right]' = 1\\ &\Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = x + C\\ &\Rightarrow \ln f(x) = \frac{x^2}{2} + Cx + D.\end{aligned}$$

Mà $\begin{cases} f(0) = 1 \\ f(2) = \mathrm{e}^6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C = 2 \\ D = 0. \end{cases}$

Suy ra $f(x) = \mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}+2x} \Rightarrow f(1) = \mathrm{e}^{\frac{5}{2}}$.

Chọn đáp án C ....

CÂU 14. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $(f'(x))^2 + f(x)\cdot f''(x) = x^3 - 2x$, $\forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = f'(0) = 1$. Giá trị của $T = f^2(2)$ bằng

A $\frac{43}{30}$. **B** $\frac{16}{15}$. **C** $\frac{43}{15}$. **D** $\frac{26}{15}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}\left(f'(x)\right)^2 + f(x)\cdot f''(x) = x^3 - 2x \Leftrightarrow \left(f(x)\cdot f'(x)\right)' = x^3 - 2x\\ \Rightarrow f(x)\cdot f'(x) = \int \left(x^3 - 2x\right) \mathrm{d}x\\ \Rightarrow f(x)\cdot f'(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^2 + C.\end{aligned}$$

Từ $f(0) = f'(0) = 1$ suy ra $C = 1$. Do đó $f(x)\cdot f'(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^2 + 1$.

Lại có

$$\begin{aligned}2f(x)\cdot f'(x) = \frac{1}{2}x^4 - 2x^2 + 2 \Leftrightarrow \left(f^2(x)\right)' = \frac{1}{2}x^4 - 2x^2 + 2\\ \Rightarrow f^2(x) = \int \left(\frac{1}{2}x^4 - 2x^2 + 2\right) \mathrm{d}x\\ \Rightarrow f^2(x) = \frac{1}{10}x^5 - \frac{2}{3}x^3 + 2x + C.\end{aligned}$$

Vì $f(0) = 1$ nên $C = 1$. Do đó $f^2(x) = \frac{1}{10}x^5 - \frac{2}{3}x^3 + 2x + 1$.

Vậy $T = \frac{43}{15}$.

Chọn đáp án C ....

CÂU 15. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $[f'(x)]^2 + f(x)\cdot f''(x) = 2x^2 - x + 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = f'(0) = 3$. Giá trị của $[f(1)]^2$ bằng

A 28. **B** 22. **C** $\frac{19}{2}$. **D** 10.

Lời giải.

Ta có $[f(x)f'(x)]' = [f'(x)]^2 + f(x)\cdot f''(x)$.
Do đó theo giả thiết ta được $[f(x)f'(x)]' = 2x^2 - x + 1$.

Suy ra $f(x)f'(x) = \frac{2}{3}x^3 - \frac{x^2}{2} + x + C$.

Hơn nữa $f(0) = f'(0) = 3$ suy ra $C = 9$.

Tương tự vì $\left[f^2(x)\right]' = 2f(x)f'(x)$ nên $\left[f^2(x)\right]' = 2\left(\frac{2}{3}x^3 - \frac{x^2}{2} + x + 9\right)$.

Suy ra $f^2(x) = \int 2\left(\frac{2}{3}x^3 - \frac{x^2}{2} + x + 9\right) \mathrm{d}x = \frac{1}{3}x^4 - \frac{x^3}{3} + x^2 + 18x + C$.

Vì $f(0) = 3$ nên $C = 9$ suy ra $f^2(x) = \frac{1}{3}x^4 - \frac{x^3}{3} + x^2 + 18x + 9$.

Do đó $[f(1)]^2 = 28$.

Chọn đáp án (A) ....

CÂU 16. Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn $y' = xy^2$ và $f(-1) = 1$. Tính giá trị $f(2)$. (*Kết quả làm tròn đến hàng phần mười*).

Đáp án: | 2 | 0 | , | 1 |

Lời giải.

Ta có $y' = xy^2 \Rightarrow \dfrac{y'}{y} = x^2 \Rightarrow \displaystyle\int \dfrac{y'}{y}\,\mathrm{d}x = \int x^2\,\mathrm{d}x \Leftrightarrow \ln y = \dfrac{x^3}{3} + C \Leftrightarrow y = \mathrm{e}^{\frac{x^3}{3}+C}$.

Theo giả thiết $f(-1) = 1$ nên $\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}+C} = 1 \Leftrightarrow C = \dfrac{1}{3}$.

Do đó $y = f(x) = \mathrm{e}^{\frac{x^3}{3}+\frac{1}{3}}$.

Vậy $f(2) = \mathrm{e}^3 \approx 20{,}1$.

Đáp án: $\boxed{20{,}1}$ ....

CÂU 17. Cho hàm số $f(x) \neq 0$, liên tục trên đoạn $[1;2]$ và thỏa mãn $f(1) = 3$, $x^2 \cdot f'(x) = f^2(x)$ với $\forall x \in [1;2]$. Tính $f(2)$.

Đáp án: | − | 6 | | |

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} x^2 \cdot f'(x) = f^2(x) &\Rightarrow \frac{f'(x)}{f^2(x)} = \frac{1}{x^2} \Rightarrow \left(-\frac{1}{f(x)}\right)' = \frac{1}{x^2} \\ &\Rightarrow \int_1^2 \left(-\frac{1}{f(x)}\right)' \mathrm{d}x = \int_1^2 \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x \\ &\Rightarrow \left(-\frac{1}{f(x)}\right)\Bigg|_1^2 = -\frac{1}{x}\Bigg|_1^2 \\ &\Rightarrow -\frac{1}{f(2)} + \frac{1}{f(1)} = -\frac{1}{2} + 1 \\ &\Rightarrow -\frac{1}{f(2)} + \frac{1}{f(1)} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Vì $f(1) = 3 \Rightarrow -\dfrac{1}{f(2)} + \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow f(2) = -6$.

Đáp án: $\boxed{-6}$ ....

CÂU 18. Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn $f(x) < 0$, $\forall x > 0$ và có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên khoảng $(0;+\infty)$ thỏa mãn $f'(x) = (2x+1)f^2(x)$, $\forall x > 0$ và $f(1) = -\dfrac{1}{2}$. Tính giá trị của biểu thức $T = f(1) + f(2) + \ldots + f(2023) + f(2024)$. (*Kết quả làm tròn đến hàng đơn vị*).

Đáp án: | − | 1 | | |

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} f'(x) = (2x+1)f^2(x) &\Rightarrow \frac{f'(x)}{f^2(x)} = 2x+1 \\ &\Rightarrow \int \frac{f'(x)}{f^2(x)}\,\mathrm{d}x = \int (2x+1)\,\mathrm{d}x \\ &\Rightarrow -\frac{1}{f(x)} = x^2 + x + C. \end{aligned}$$

Mà $f(1) = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow C = 0 \Rightarrow f(x) = \dfrac{-1}{x^2+x} = \dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{x}$.

Ta có $\begin{cases} f(1) = \dfrac{1}{2} - 1 \\ f(2) = \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{2} \\ f(3) = \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{3} \\ \ldots \\ f(2024) = \dfrac{1}{2023} - \dfrac{1}{2024}. \end{cases}$

$\Rightarrow T = f(1) + f(2) + \ldots + f(2024) = -1 + \dfrac{1}{2025} = -\dfrac{2024}{2025} \approx -1$.

Đáp án: $\boxed{-1}$ ...

CÂU 19. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(0) = 1 - \ln 2$ và $\mathrm{e}^x f'(x) = 2^x\left[f(x)\right]^2$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Giá trị của $f(1)$ bằng bao nhiêu? (*Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm*).

Đáp án: | 0 | , | 4 | 2 |

Lời giải.

Từ giả thiết ta có $f'(x) = \dfrac{2^x}{\mathrm{e}^x}[f(x)]^2$ với mọi $x \in (1;2]$.
Do đó $f(x) \geq f(1) = 1 > 0$ với mọi $x \in [1;2]$.
Xét với mọi $x \in [1;2]$ ta có

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^x f'(x) = 2^x[f(x)]^2 &\Rightarrow f'(x) = \frac{2^x}{\mathrm{e}^x}[f(x)]^2\\
&\Rightarrow \frac{f'(x)}{[f(x)]^2} = \left(\frac{2}{\mathrm{e}}\right)^x\\
&\Rightarrow -\left(\frac{1}{f(x)}\right)' = \left(\frac{2}{\mathrm{e}}\right)^x\\
&\Rightarrow \left(\frac{1}{f(x)}\right)' = -\left(\frac{2}{\mathrm{e}}\right)^x\\
&\Rightarrow \frac{1}{f(x)} = -\int \left(\frac{2}{\mathrm{e}}\right)^x \mathrm{d}x\\
&\Rightarrow \frac{1}{f(x)} = -\frac{\left(\frac{2}{\mathrm{e}}\right)^x}{\ln\frac{2}{\mathrm{e}}} + C\\
&\Rightarrow \frac{1}{f(x)} = \frac{\left(\frac{2}{\mathrm{e}}\right)^x}{1-\ln 2} + C.
\end{aligned}$$

Mà $f(0) = 1 - \ln 2 \Rightarrow C = 0$.

Do đó $\dfrac{1}{f(x)} = \dfrac{\left(\frac{2}{\mathrm{e}}\right)^x}{1-\ln 2} \Rightarrow f(x) = \dfrac{1-\ln 2}{\left(\frac{2}{\mathrm{e}}\right)^x} = \dfrac{(1-\ln 2)\mathrm{e}^x}{2^x}$.

Vậy $f(1) = \dfrac{\mathrm{e} - \mathrm{e}\ln 2}{2} \approx 0{,}42$.

Đáp án: $\boxed{0{,}42}$ ...

CÂU 20. Cho hàm số $y = f(x)$ đồng biến và có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\left(f'(x)\right)^2 = f(x)\cdot \mathrm{e}^x$, $\forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = 2$. Tính $f(2)$. (Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

Đáp án: | 9 | , | 8 | 1 |

Lời giải.

Vì hàm số $y = f(x)$ đồng biến và có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ đồng thời $f(0) = 2$ nên $f'(x) \geq 0$ và $f(x) > 0$ với mọi $x \in [0;+\infty)$.
Từ giả thiết $\left(f'(x)\right)^2 = f(x)\cdot \mathrm{e}^x$, $\forall x \in \mathbb{R}$ suy ra $f'(x) = \sqrt{f(x)}\cdot \mathrm{e}^{\frac{x}{2}}$, $\forall x \in [0;+\infty)$.
Do đó $\dfrac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}} = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}$, $\forall x \in [0;+\infty)$.
Lấy nguyên hàm hai vế, ta được $\sqrt{f(x)} = e^{\frac{x}{2}} + C$, $\forall x \in [0;+\infty)$ với C là hằng số.
Kết hợp với $f(0) = 2$, ta được $C = \sqrt{2} - 1$.
Suy ra $f(2) = \left(\mathrm{e} + \sqrt{2} - 1\right)^2 \approx 9{,}81$.

Đáp án: $\boxed{9{,}81}$ ...

CÂU 21. Giả sử hàm số $y = f(x)$ liên tục, nhận giá trị dương trên $(0;+\infty)$ và thỏa mãn $f(1) = 1$, $f(x) = f'(x)\cdot\sqrt{3x}$, với mọi $x > 0$. Tính $f(5)$ (*kết quả làm tròn đến hàng phần trăm*).

Đáp án: | 4 | , | 1 | 7 |

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}f(x)=f'(x)\cdot\sqrt{3x}\Rightarrow\frac{f'(x)}{f(x)}&=\frac{1}{\sqrt{3x}}\\ \Rightarrow\ln f(x)&=\frac{1}{\sqrt{3}}\int\frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x\\ \Rightarrow\ln f(x)&=\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{x}+C\\ \Rightarrow f(x)&=e^{\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{x}+C}.\end{aligned}$$

Mà $f(1)=1$ nên $1=e^{\frac{2}{\sqrt{3}}+C}\Rightarrow C=-\frac{2}{\sqrt{3}}\Rightarrow f(x)=e^{\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{x}-\frac{2}{\sqrt{3}}}$.

Suy ra $f(5)=e^{\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{5}-\frac{2}{\sqrt{3}}}=e^{\frac{2\sqrt{5}-2}{\sqrt{3}}}\approx 4{,}17$.

Đáp án: $\boxed{4{,}17}$ .... □

CÂU 22. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\mathrm{e}^{f(x)}-\dfrac{x}{f'(x)}=0,\ \forall x\in\mathbb{R}$. Biết $f(1)=1$, tính $f\left(\mathrm{e}^2\right)$ (*kết quả làm tròn đến hàng phần trăm*).

Đáp án: | 3 | , | 3 | 8 |

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{f(x)}-\frac{x}{f'(x)}=0\Rightarrow f'(x)\mathrm{e}^{f(x)}&=x\\ \Leftrightarrow\left(\mathrm{e}^{f(x)}\right)'&=x\\ \Leftrightarrow\mathrm{e}^{f(x)}&=\int x\,\mathrm{d}x\\ \Leftrightarrow\mathrm{e}^{f(x)}&=\frac{x^2}{2}+C.\end{aligned}$$

Mà $f(1)=1$ nên $\mathrm{e}=\frac{1}{2}+C\Rightarrow C=\mathrm{e}-\frac{1}{2}$.

Do đó $\mathrm{e}^{f(x)}=\frac{x^2}{2}+\mathrm{e}-\frac{1}{2}\Rightarrow\mathrm{e}^{f\left(\mathrm{e}^2\right)}=\frac{\mathrm{e}^4}{2}+\mathrm{e}-\frac{1}{2}\Rightarrow f\left(\mathrm{e}^2\right)=\ln\left(\frac{\mathrm{e}^4}{2}+\mathrm{e}-\frac{1}{2}\right)\approx 3{,}38$.

Đáp án: $\boxed{3{,}38}$ .... □

CÂU 23. Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị dương và thỏa mãn $f(0)=1$, $\left(f'(x)\right)^3=\mathrm{e}^x(f(x))^2,\ \forall x\in\mathbb{R}$. Tính $f(3)$ (*kết quả làm tròn đến hàng phần mười*).

Đáp án: | 2 | 0 | , | 1 |

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}\left(f'(x)\right)^3=\mathrm{e}^x(f(x))^2,\ \forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow f'(x)=\sqrt[3]{\mathrm{e}^x}\cdot\sqrt[3]{(f(x))^2}\Leftrightarrow\frac{f'(x)}{\sqrt[3]{(f(x))^2}}&=\sqrt[3]{\mathrm{e}^x}\\ \Leftrightarrow\frac{f'(x)}{\sqrt[3]{(f(x))^2}}=\sqrt[3]{\mathrm{e}^x}\Leftrightarrow f'(x)\cdot(f(x))^{-\frac{2}{3}}&=\sqrt[3]{\mathrm{e}^x}\\ \Leftrightarrow 3\left[(f(x))^{\frac{1}{3}}\right]'=\sqrt[3]{\mathrm{e}^x}\Leftrightarrow\left[(f(x))^{\frac{1}{3}}\right]'&=\frac{1}{3}\sqrt[3]{\mathrm{e}^x}\\ \Leftrightarrow(f(x))^{\frac{1}{3}}=\frac{1}{3}\int\sqrt[3]{\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x\Leftrightarrow(f(x))^{\frac{1}{3}}&=e^{\frac{x}{3}}+C.\end{aligned}$$

Vì $f(0)=1$ nên $1=1+C\Rightarrow C=0\Rightarrow(f(x))^{\frac{1}{3}}=e^{\frac{x}{3}}\Rightarrow f(x)=\mathrm{e}^x$.

Vậy $f(3)=e^3\approx 20{,}1$.

Đáp án: $\boxed{20{,}1}$ .... □

CÂU 24. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn điều kiện $x^6\left(f'(x)\right)^3+27\left[f(x)-1\right]^4=0,\ \forall x\in\mathbb{R}$ và $f(1)=0$. Tính giá trị của $f(2)$.

Đáp án: | − | 7 | | |

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}
x^6\left(f'(x)\right)^3+27\left[f(x)-1\right]^4=0 &\Leftrightarrow x^6\left(f'(x)\right)^3=-27\left(f(x)-1\right)^4\\
&\Leftrightarrow \frac{\left(f'(x)\right)^3}{\left(f(x)-1\right)^4}=-\frac{27}{x^6}\\
&\Leftrightarrow \frac{\left(f'(x)\right)^3}{\left(f(x)-1\right)^3\left(f(x)-1\right)}=-\frac{27}{x^6}\\
&\Leftrightarrow \frac{f'(x)}{\left(f(x)-1\right)\sqrt[3]{f(x)-1}}=-\frac{3}{x^2}\\
&\Leftrightarrow \frac{f'(x)}{-3\left(f(x)-1\right)\sqrt[3]{f(x)-1}}=\frac{1}{x^2}\\
&\Leftrightarrow \left[\frac{1}{\sqrt[3]{f(x)-1}}\right]'=\frac{1}{x^2}
\end{aligned}$$

Do đó $\displaystyle\int\left(\frac{1}{\sqrt[3]{f(x)-1}}\right)'\mathrm{d}x=\int\frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{x}+C.$

Suy ra $\dfrac{1}{\sqrt[3]{f(x)-1}}=-\dfrac{1}{x}+C.$

Ta có $f(1)=0\Rightarrow C=0\Rightarrow f(x)=1-x^3.$

Khi đó $f(2)=-7.$

Đáp án: $\boxed{-7}$ .... □

CÂU 25. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\left[xf'(x)\right]^2+1=x^2\left[1-f(x).f''(x)\right]$ với mọi x dương. Biết $f(1)=f'(1)=1$. Tính giá trị $f^2(2)$ (*kết quả làm tròn đến hàng phần trăm*).

Đáp án: | 3 | , | 3 | 9 |

Lời giải.

Với mọi x dương, ta có

$$\begin{aligned}
\left[xf'(x)\right]^2+1=x^2\left[1-f(x)\cdot f''(x)\right];x>0 &\Leftrightarrow x^2\cdot\left[f'(x)\right]^2+1=x^2\left[1-f(x)\cdot f''(x)\right]\\
&\Leftrightarrow \left[f'(x)\right]^2+\frac{1}{x^2}=1-f(x)\cdot f''(x)\\
&\Leftrightarrow \left[f'(x)\right]^2+f(x)\cdot f''(x)=1-\frac{1}{x^2}\\
&\Leftrightarrow \left[f(x)\cdot f'(x)\right]'=1-\frac{1}{x^2}.
\end{aligned}$$

Do đó $\displaystyle\int\left[f(x)\cdot f'(x)\right]'\mathrm{d}x=\int\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x\Rightarrow f(x)\cdot f'(x)=x+\frac{1}{x}+C.$

Vì $f(1)=f'(1)=1\Rightarrow 1=2+C\Leftrightarrow C=-1.$

Nên $\displaystyle\int f(x)\cdot f'(x)\,\mathrm{d}x=\int\left(x+\frac{1}{x}-1\right)\mathrm{d}x\Leftrightarrow\int f(x)\,\mathrm{d}\left(f(x)\right)=\int\left(x+\frac{1}{x}-1\right)\mathrm{d}x.$

Suy ra $\dfrac{f^2(x)}{2}=\dfrac{x^2}{2}+\ln x-x+C.$

Vì $f(1)=1\Rightarrow\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}-1+C\Leftrightarrow C=1.$

Vậy $\dfrac{f^2(x)}{2}=\dfrac{x^2}{2}+\ln x-x+1\Rightarrow f^2(2)=2\ln 2+2\approx 3{,}39.$

Đáp án: $\boxed{3{,}39}$ .... □

2 Phương trình vi phân $A(x)f(x)+B(x)f'(x)=h(x)$

$$A(x)f(x)+B(x)f'(x)=h(x)\quad(1)$$

Phương pháp giải: Ta cần nhân thêm một lượng $u(x)$ vào (1) để tạo thành $u'(x)f(x)+u(x)f'(x)=u(x)\cdot h(x)$ và lúc này

$$\begin{aligned}
& u'(x)f(x)+u(x)f'(x)=u(x)\cdot h(x)\\
\Rightarrow\ & u(x)f(x)=\int u(x)\cdot h(x)\,\mathrm{d}x\\
\Rightarrow\ & f(x)=\frac{\int u(x)\cdot h(x)\,\mathrm{d}x}{u(x)}
\end{aligned}$$

Cách tìm $u(x)$: $\begin{cases}u'(x)=A(x)\\u(x)=B(x).\end{cases}$

Suy ra

$$\begin{aligned}
& \frac{u'(x)}{u(x)}=\frac{A(x)}{B(x)}\Rightarrow\int\frac{u'(x)}{u(x)}\,\mathrm{d}x=\int\frac{A(x)}{B(x)}\,\mathrm{d}x\\
\Rightarrow\ & \ln|u(x)|=\int\frac{A(x)}{B(x)}\,\mathrm{d}x\Rightarrow u(x)=\mathrm{e}^{\int\frac{A(x)}{B(x)}\,\mathrm{d}x}
\end{aligned}$$

Tóm lại phương pháp giải $A(x)f(x)+B(x)f'(x)=h(x)\quad(1)$ như sau.

- **Bước 1.** Tìm $u(x)$. $u(x)=\mathrm{e}^{\int\frac{A(x)}{B(x)}\,\mathrm{d}x}$.
- **Bước 2.** Nhân $u(x)$ vào (1) suy ra $f(x)=\dfrac{\int u(x)\cdot h(x)\,\mathrm{d}x}{u(x)}$.

Một số dạng đặc biệt của (1).

a) Điều kiện hàm ẩn có dạng $\left[\begin{array}{l}f'(x)+f(x)=h(x)\\f'(x)-f(x)=h(x).\end{array}\right.$

Phương pháp giải.

- $f'(x)+f(x)=h(x)$.
  Nhân hai vế với e^x ta được
  $$\mathrm{e}^x\cdot f'(x)+\mathrm{e}^x\cdot f(x)=\mathrm{e}^x\cdot h(x)\Leftrightarrow[\mathrm{e}^x\cdot f(x)]'=\mathrm{e}^x\cdot h(x).$$
  Suy ra $\mathrm{e}^x\cdot f(x)=\int\mathrm{e}^x\cdot h(x)\,\mathrm{d}x$.
  Từ đây ta dễ dàng tính được $f(x)$.
- $f'(x)-f(x)=h(x)$.
  Nhân hai vế với e^{-x} ta được
  $$\mathrm{e}^{-x}\cdot f'(x)-\mathrm{e}^{-x}\cdot f(x)=\mathrm{e}^{-x}\cdot h(x)\Leftrightarrow\left[\mathrm{e}^{-x}\cdot f(x)\right]'=\mathrm{e}^{-x}\cdot h(x).$$
  Suy ra $\mathrm{e}^{-x}\cdot f(x)=\int\mathrm{e}^{-x}\cdot h(x)\,\mathrm{d}x$.
  Từ đây ta dễ dàng tính được $f(x)$.

b) Điều kiện hàm ẩn có dạng $f'(x)+p(x)\cdot f(x)=h(x)$.
Phương pháp giải.
Nhân hai vế với $\mathrm{e}^{\int p(x)\,\mathrm{d}x}$ ta được

$$\begin{aligned}
& f'(x)\cdot\mathrm{e}^{\int p(x)\,\mathrm{d}x}+p(x)\cdot\mathrm{e}^{\int p(x)\,\mathrm{d}x}\cdot f(x)=h(x)\cdot\mathrm{e}^{\int p(x)\,\mathrm{d}x}\\
\Leftrightarrow\ & \left[f(x)\cdot\mathrm{e}^{\int p(x)\,\mathrm{d}x}\right]'=h(x)\cdot\mathrm{e}^{\int p(x)\,\mathrm{d}x}.
\end{aligned}$$

Suy ra $f(x)\cdot e^{\int p(x)\,\mathrm{d}x}=\int\mathrm{e}^{\int p(x)\mathrm{e}x}h(x)\,\mathrm{d}x$.
Từ đây ta dễ dàng tính được $f(x)$.

CÂU 1. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(x)+f'(x)=\mathrm{e}^{-x}$, $\forall x\in\mathbb{R}$ và $f(0)=2$. Tất cả các nguyên hàm của $f(x)\mathrm{e}^x$ là

(A) x^2+x+C. (B) $2x^2+2x+C$. (C) $2x^2+x+C$. (D) $\dfrac{1}{2}x^2+2x+C$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} f(x)+f'(x)=\mathrm{e}^{-x} &\Leftrightarrow f(x)\mathrm{e}^{x}+f'(x)\mathrm{e}^{x}=1\\ &\Leftrightarrow \left(f(x)\mathrm{e}^{x}\right)'=1\\ &\Rightarrow f(x)\mathrm{e}^{x}=\int x\,\mathrm{d}x\\ &\Leftrightarrow f(x)\mathrm{e}^{x}=x+C. \end{aligned}$$

Vì $f(0)=2$ nên $C=2$.
Suy ra $f(x)\mathrm{e}^{x}=x+2 \Rightarrow \int f(x)\mathrm{e}^{x}dx=\int (x+2)\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}x^2+2x+C$.

Chọn đáp án D ....

CÂU 2. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f'(x)+2x\cdot f(x)=\mathrm{e}^{-x^2}$, $\forall x\in\mathbb{R}$ và $f(0)=0$. Tính $f(1)$.

A. $f(1)=\mathrm{e}^2$. B. $f(1)=-\dfrac{1}{\mathrm{e}}$. C. $f(1)=\dfrac{1}{\mathrm{e}^2}$. D. $f(1)=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} &f'(x)+2x\cdot f(x)=\mathrm{e}^{-x^2}\\ \Leftrightarrow\ &\mathrm{e}^{x^2}f'(x)+2x\cdot\mathrm{e}^{x^2}\cdot f(x)=1\\ \Leftrightarrow\ &\left(\mathrm{e}^{x^2}\cdot f(x)\right)'=1\\ \Rightarrow\ &\int\left(\mathrm{e}^{x^2}\cdot f(x)\right)'\mathrm{d}x=\int \mathrm{d}x\\ \Rightarrow\ &\mathrm{e}^{x^2}\cdot f(x)=x+C\\ \Rightarrow\ &f(x)=\frac{x+C}{\mathrm{e}^{x^2}}. \end{aligned}$$

Vì $f(0)=0\Rightarrow C=0$.
Do đó $f(x)=\dfrac{x}{\mathrm{e}^{x^2}}$.
Vậy $f(1)=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

Chọn đáp án D ....

CÂU 3. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{-1;0\}$ thỏa mãn điều kiện $f(1)=-2\ln 2$ và $x\cdot(x+1)\cdot f'(x)+f(x)=x^2+x$. Biết $f(2)=a+b\cdot\ln 3$ $(a,\,b\in\mathbb{Q})$. Giá trị $2\left(a^2+b^2\right)$ là

A. $\dfrac{27}{4}$. B. 9. C. $\dfrac{3}{4}$. D. $\dfrac{9}{2}$.

Lời giải.

Chia cả hai vế của biểu thức $x\cdot(x+1)\cdot f'(x)+f(x)=x^2+x$ cho $(x+1)^2$ ta có

$$\frac{x}{x+1}\cdot f'(x)+\frac{1}{(x+1)^2}f(x)=\frac{x}{x+1}\Leftrightarrow\left[\frac{x}{x+1}\cdot f(x)\right]'=\frac{x}{x+1}.$$

Do đó

$$\frac{x}{x+1}\cdot f(x)=\int\left[\frac{x}{x+1}\cdot f(x)\right]'\mathrm{d}x=\int\frac{x}{x+1}\,\mathrm{d}x=\int\left(1-\frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x=x-\ln|x+1|+C.$$

Do $f(1)=-2\ln 2$ nên ta có $\dfrac{1}{2}\cdot f(1)=1-\ln 2+C\Leftrightarrow -\ln 2=1-\ln 2+C\Leftrightarrow C=-1$.
Khi đó $f(x)=\dfrac{x+1}{x}(x-\ln|x+1|-1)$.
Vậy ta có $f(2)=\dfrac{3}{2}(2-\ln 3-1)=\dfrac{3}{2}(1-\ln 3)=\dfrac{3}{2}-\dfrac{3}{2}\ln 3\Rightarrow a=\dfrac{3}{2},\ b=-\dfrac{3}{2}$.
Suy ra $2\left(a^2+b^2\right)=2\left[\left(\dfrac{3}{2}\right)^2+\left(-\dfrac{3}{2}\right)^2\right]=9$.

Chọn đáp án B ....

CÂU 4. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{-1;0\}$ thỏa mãn $f(1)=2\ln 2+1$, $x(x+1)f'(x)+(x+2)f(x)=x(x+1)$, $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-1;0\}$. Biết $f(2)=a+b\ln 3$, với a, b là hai số hữu tỉ. Tính $T=a^2-b$.

A $T=-\dfrac{3}{16}$. **B** $T=\dfrac{21}{16}$. **C** $T=\dfrac{3}{2}$. **D** $T=0$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}x(x+1)f'(x)+(x+2)f(x)=x(x+1) &\Leftrightarrow f'(x)+\frac{x+2}{x(x+1)}f(x)=1\\ &\Leftrightarrow \frac{x^2}{x+1}f'(x)+\frac{x(x+2)}{(x+1)^2}f(x)=\frac{x^2}{x+1}\\ &\Leftrightarrow \left[\frac{x^2}{x+1}f(x)\right]'=\frac{x^2}{x+1}\\ &\Leftrightarrow \frac{x^2}{x+1}f(x)=\int\frac{x^2}{x+1}dx\\ &\Leftrightarrow \frac{x^2}{x+1}f(x)=\frac{x^2}{2}-x+\ln|x+1|+c\\ &\Leftrightarrow f(x)=\frac{x+1}{x^2}\left(\frac{x^2}{2}-x+\ln|x+1|+c\right).\end{aligned}$$

Từ $f(1)=2\ln 2+1\Leftrightarrow c=1$.
Từ đó $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2}\left(\dfrac{x^2}{2}-x+\ln|x+1|+1\right)$.
$\Rightarrow f(2)=\dfrac{3}{4}+\dfrac{3}{4}\ln 3$.
Nên $\begin{cases}a=\dfrac{3}{4}\\ b=\dfrac{3}{4}.\end{cases}$
Vậy $T=a^2-b=-\dfrac{3}{16}$.
Chọn đáp án A .... □

CÂU 5. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $(0;+\infty)$ thỏa mãn $f'(x)+\dfrac{f(x)}{x}=4x^2+3x$ và $f(1)=2$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại điểm có hoành độ $x=2$ là

A $y=-16x-20$. **B** $y=16x-20$. **C** $y=16x+20$. **D** $y=-16x+20$.

Lời giải.

$$f'(x)+\frac{f(x)}{x}=4x^2+3x\Leftrightarrow xf'(x)+f(x)=4x^3+3x^2\Leftrightarrow (x.f(x))'=4x^3+3x^2.$$

Lấy nguyên hàm hai vế ta được $xf(x)=\displaystyle\int\left(4x^3+3x^2\right)\,dx=x^4+x^3+C$.
Với $x=1$ ta có $f(1)=2+C$.
Theo đề bài ta có: $f(1)=2\Leftrightarrow 2+C=2\Leftrightarrow C=0$.
Vậy $xf(x)=x^4+x^3\Leftrightarrow f(x)=x^3+x^2$.
Ta có $f'(x)=3x^2+2x$, $f'(2)=16$, $f(2)=12$.
Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại điểm có hoành độ $x=2$ là

$$y=16(x-2)+12\Leftrightarrow y=16x-20.$$

Chọn đáp án B .... □

CÂU 6. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $(0;+\infty)$ thỏa mãn $2xf'(x)+f(x)=3x^2\sqrt{x}$. Biết $f(1)=\dfrac{1}{2}$. Tính $f(4)$.

A 24. **B** 14. **C** 4. **D** 16.

Lời giải.

Trên khoảng $(0;+\infty)$ ta có

$$\begin{aligned}2xf'(x)+f(x)=3x^2\sqrt{x} &\Leftrightarrow \sqrt{x}f'(x)+\frac{1}{2\sqrt{x}}.f(x)=\frac{3}{2}x^2\\ &\Rightarrow (\sqrt{x}\cdot f(x))'=\frac{3}{2}x^2\\ &\Rightarrow \int(\sqrt{x}\cdot f(x))'dx=\int\frac{3}{2}x^2dx\\ &\Rightarrow \sqrt{x}\cdot f(x)=\frac{1}{2}x^3+C.\quad (*)\end{aligned}$$

Mà $f(1)=\frac{1}{2}$ nên từ $(*)$ có

$$\sqrt{1}\cdot f(1)=\frac{1}{2}\cdot 1^3+C\Leftrightarrow\frac{1}{2}=\frac{1}{2}+C\Leftrightarrow C=0\Rightarrow f(x)=\frac{x^2\sqrt{x}}{2}.$$

Vậy $f(4)=\frac{4^2\cdot\sqrt{4}}{2}=16$.

Chọn đáp án D .... □

CÂU 7. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(1)=4$ và $f(x)=xf'(x)-2x^3-3x^2$ với mọi $x>0$. Giá trị của $f(2)$ bằng

A 5. B 10. C 20. D 15.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}f(x)-xf'(x)=-2x^3-3x^2 &\Leftrightarrow \frac{1\cdot f(x)-x\cdot f'(x)}{x^2}=\frac{-2x^3-3x^2}{x^2}\\ &\Leftrightarrow \left[\frac{f(x)}{x}\right]'=2x+3.\end{aligned}$$

Suy ra $\frac{f(x)}{x}$ là một nguyên hàm của hàm số $g(x)=2x+3$.

Ta có $\int(2x+3)\,\mathrm{d}x=x^2+3x+C$, $C\in\mathbb{R}$.

Do đó $\frac{f(x)}{x}=x^2+3x+\mathrm{C}_1$ (1) với $\mathrm{C}_1\in\mathbb{R}$.

Vì $f(1)=4$ theo giả thiết, nên thay $x=1$ vào hai vế của (1) ta thu được $\mathrm{C}_1=0$, từ đó $f(x)=x^3+3x^2$.

Vậy $f(2)=20$.

Chọn đáp án C .... □

CÂU 8. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $(0;+\infty)$ thỏa mãn $3x\cdot f(x)-x^2\cdot f'(x)=2f^2(x)$, với $f(x)\neq 0$, $\forall x\in(0;+\infty)$ và $f(1)=\frac{1}{3}$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $[1;2]$. Tính $M+m$.

A $\frac{9}{10}$. B $\frac{21}{10}$. C $\frac{5}{3}$. D $\frac{7}{3}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}3x\cdot f(x)-x^2\cdot f'(x)=2f^2(x) &\Rightarrow 3x^2\cdot f(x)-x^3\cdot f'(x)=2x\cdot f^2(x)\\ &\Rightarrow \frac{3x^2\cdot f(x)-x^3\cdot f'(x)}{f^2(x)}=2x, f(x)\neq 0,\forall x\in(0;+\infty)\\ &\Rightarrow \left(\frac{x^3}{f(x)}\right)'=2x\\ &\Rightarrow \frac{x^3}{f(x)}=\int 2x\,\mathrm{d}x=x^2+C.\end{aligned}$$

Mà $f(1)=\frac{1}{3}\Rightarrow C=2\Rightarrow f(x)=\frac{x^3}{x^2+2}$.

Ta có $f(x)=\frac{x^3}{x^2+2}\Rightarrow f'(x)=\frac{x^4+6x^2}{(x^2+2)^2}>0$, $\forall x\in(0;+\infty)$.

Vậy, hàm số $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2+2}$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

Mà $[1;2]\subset(0;+\infty)$ nên hàm số $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2+2}$ đồng biến trên đoạn $[1;2]$.

Suy ra $M=f(2)=\dfrac{4}{3}$, $m=f(1)=\dfrac{1}{3}$.

Vậy $M+m=\dfrac{5}{3}$.

Chọn đáp án C .... □

CÂU 9. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=e^{x^2}\left(x^3-4x\right)$. Hàm số $F\left(x^2+x\right)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A 6. B 5. C 3. D 4.

Lời giải.

Ta có $F'(x)=f(x)$. Khi đó

$$\begin{aligned}F'\left(x^2+x\right)&=f\left(x^2+x\right)\cdot\left(x^2+x\right)'\\&=(2x+1)\left(x^2+x\right)\mathrm{e}^{\left(x^2+x\right)^2}\left[\left(x^2+x\right)^2-4\right]\\&=(2x+1)x(x+1)\mathrm{e}^{\left(x^2+x\right)^2}\left(x^2+x-2\right)\left(x^2+x+2\right)\\&=(2x+1)x(x+1)(x+2)(x-1)\left(x^2+x+2\right)\mathrm{e}^{\left(x^2+x\right)^2}.\end{aligned}$$

$$F'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-2\\x=\dfrac{-1}{2}\\x=1\\x=-1\\x=0.\end{array}\right.$$

$F'\left(x^2+x\right)=0$ có 5 nghiệm đơn nên $F\left(x^2+x\right)$ có 5 điểm cực trị.

Chọn đáp án B .... □

B. TÍCH PHÂN HÀM ẨN BIẾN ĐỔI PHỨC TẠP

Phần I. Mỗi câu hỏi học sinh chọn một trong bốn phương án A, B, C, D.

CÂU 1. Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị không âm và có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f'(x)=(2x+1)[f(x)]^2,\forall x\in\mathbb{R}$ và $f(0)=-1$. Tính tích phân $\displaystyle\int\limits_0^1\left(x^3-1\right)f(x)\,\mathrm{d}x$.

A 1. B $\dfrac{2}{3}$. C $\dfrac{1}{2}$. D $\dfrac{3}{2}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}&f'(x)=(2x+1)[f(x)]^2,\forall x\in\mathbb{R}\\\Rightarrow\quad&\frac{-f'(x)}{[f(x)]^2}=-(2x+1),\forall x\in\mathbb{R}\\\Rightarrow\quad&\left[\frac{1}{f(x)}\right]'=-(2x+1),\forall x\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

Suy ra $\dfrac{1}{f(x)}=-\displaystyle\int(2x+1)\,\mathrm{d}x=-x^2-x+C\Rightarrow f(x)=\dfrac{1}{-x^2-x+C}$.

Vì $f(0)=-1\Rightarrow C=-1$.

Suy ra $f(x)=-\dfrac{1}{x^2+x+1}$.

$$\int\limits_0^1\left(x^3-1\right)f(x)\,\mathrm{d}x=-\int\limits_0^1\left(x^3-1\right)\left(\frac{1}{x^2+x+1}\right)\mathrm{d}x=\int\limits_0^1(1-x)\,\mathrm{d}x$$

$$=\left(x-\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^1=\frac{1}{2}.$$

Chọn đáp án C .... □

CÂU 2. Cho hàm số $f(x) \neq 0$, liên tục trên đoạn $[1;2]$ và thỏa mãn $f(1)=\frac{1}{3}$; $x^2\cdot f'(x)=f^2(x)$ với $\forall x\in[1;2]$. Tính tích phân $I=\int\limits_1^2 (2x+1)^2 f(x)\,\mathrm{d}x$.

Ⓐ $I=\frac{7}{6}$. Ⓑ $I=\frac{5}{6}$. Ⓒ $I=\frac{37}{6}$. Ⓓ $I=\frac{1}{6}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}
&x^2\cdot f'(x)=f^2(x)\\
\Rightarrow&\frac{f'(x)}{f^2(x)}=\frac{1}{x^2}\\
\Rightarrow&\left[-\frac{1}{f(x)}\right]'=\frac{1}{x^2}\\
\Rightarrow&-\frac{1}{f(x)}=\int\frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x\\
\Rightarrow&\frac{1}{f(x)}=-\int\frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x\\
\Rightarrow&\frac{1}{f(x)}=\frac{1}{x}+C.
\end{aligned}$$

Mà $f(1)=\frac{1}{3}\Rightarrow 3=1+C\Rightarrow C=2$.

Do đó $\frac{1}{f(x)}=\frac{1}{x}+2\Rightarrow f(x)=\frac{x}{2x+1}$.

Vậy $I=\int\limits_1^2(2x+1)^2f(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_1^2(2x+1)^2\frac{x}{2x+1}\,\mathrm{d}x=\int\limits_1^2\left(2x^2+x\right)\,\mathrm{d}x=\frac{37}{6}$.

Chọn đáp án Ⓒ ……………………………… □

CÂU 3. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $3f'(x)\cdot\mathrm{e}^{f^3(x)}-\frac{2x}{f^2(x)}=0$ với $\forall x\in\mathbb{R}$. Biết $f(1)=0$, tính tích phân $I=\int\limits_0^{2024}\frac{1}{\sqrt[3]{2\ln x}}\cdot f(x)\,\mathrm{d}x$.

Ⓐ 1. Ⓑ $\frac{1}{2024}$. Ⓒ 2024. Ⓓ 0.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}
&3f'(x)\cdot\mathrm{e}^{f^3(x)}-\frac{2x}{f^2(x)}=0\\
\Rightarrow&3f^2(x)\cdot f'(x)\cdot\mathrm{e}^{f^3(x)}=2x\\
\Rightarrow&\left[\mathrm{e}^{f^3(x)}\right]'=2x\\
\Rightarrow&\mathrm{e}^{f^3(x)}=\int 2x\,\mathrm{d}x\\
\Rightarrow&\mathrm{e}^{f^3(x)}=x^2+C.
\end{aligned}$$

Mặt khác $f(1)=0\Rightarrow\mathrm{e}^{f^3(1)}=1+C\Rightarrow C=0$.

Suy ra $\mathrm{e}^{f^3(x)}=x^2\Rightarrow f^3(x)=\ln x^2\Rightarrow f(x)=\sqrt[3]{2\ln x}$.

Vậy $I=\int\limits_0^{2024}\frac{1}{\sqrt[3]{2\ln x}}\cdot f(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^{2024}\frac{1}{\sqrt[3]{2\ln x}}\cdot\sqrt[3]{2\ln x}\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^{2024}\mathrm{d}x=2024$

Chọn đáp án Ⓒ ……………………………… □

CÂU 4. Cho hàm số $f(x)$ đồng biến, có đạo hàm trên đoạn $[1;4]$ và thoả mãn $x+2x\cdot f(x)=\left[f'(x)\right]^2$ với $\forall x\in[1;4]$. Biết $f(1)=\frac{3}{2}$, tính $I=\int\limits_1^4 f(x)\,\mathrm{d}x$.

A $I=\dfrac{1186}{45}$. **B** $I=\dfrac{1186}{9}$. **C** $I=\dfrac{1186}{5}$. **D** $I=\dfrac{1186}{41}$.

Lời giải.

Do $f(x)$ đồng biến trên đoạn $[1;4] \Rightarrow f'(x)\geq 0, \forall x\in[1;4]$.
Ta có $x+2x\cdot f(x)=[f'(x)]^2 \Leftrightarrow x(1+2\cdot f(x))=[f'(x)]^2$,
Do $x\in[1;4]$ và $f'(x)\geq 0, \forall x\in[1;4] \Rightarrow f(x)>\dfrac{-1}{2}$ và

$$\begin{aligned}
&f'(x)=\sqrt{x}\cdot\sqrt{1+2f(x)}\\
\Leftrightarrow&\frac{f'(x)}{\sqrt{1+2f(x)}}=\sqrt{x}\\
\Leftrightarrow&\left(\sqrt{1+2f(x)}\right)'=\sqrt{x}\\
\Leftrightarrow&\sqrt{1+2f(x)}=\int\sqrt{x}\,\mathrm{d}x\\
\Leftrightarrow&\sqrt{1+2f(x)}=\frac{2}{3}x\sqrt{x}+C.
\end{aligned}$$

Vì $f(1)=\dfrac{3}{2} \Rightarrow \sqrt{1+2\cdot\dfrac{3}{2}}=\dfrac{2}{3}+C \Leftrightarrow C=\dfrac{4}{3}$.
Suy ra

$$\begin{aligned}
&\sqrt{1+2f(x)}=\frac{2}{3}x\sqrt{x}+\frac{4}{3}\\
\Leftrightarrow&1+2f(x)=\left(\frac{2}{3}x\sqrt{x}+\frac{4}{3}\right)^2\\
\Leftrightarrow&f(x)=\frac{2}{9}x^3+\frac{8}{9}x^{\frac{3}{2}}+\frac{7}{18}.
\end{aligned}$$

Khi đó
$I=\displaystyle\int_1^4 f(x)\,\mathrm{d}x=\int_1^4\left(\frac{2}{9}x^3+\frac{8}{9}x^{\frac{3}{2}}+\frac{7}{18}\right)\mathrm{d}x=\left(\frac{1}{18}x^4+\frac{16}{45}x^{\frac{5}{2}}+\frac{7}{18}x\right)\Bigg|_1^4=\frac{1186}{45}$.

Chọn đáp án A .... □

CÂU 5. Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị dương và thỏa mãn $f(0)=1$, $[f'(x)]^3=\mathrm{e}^x[f(x)]^2, \forall x\in\mathbb{R}$. Tính $I=\displaystyle\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x$.

A $I=\mathrm{e}^2+1$. **B** $I=\mathrm{e}-1$. **C** $I=\mathrm{e}^2-e$. **D** $I=\mathrm{e}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}
&[f'(x)]^3=\mathrm{e}^x[f(x)]^2\\
\Leftrightarrow&f'(x)=\sqrt[3]{\mathrm{e}^x}\cdot\sqrt[3]{[f(x)]^2}\\
\Leftrightarrow&\frac{f'(x)}{\sqrt[3]{[f(x)]^2}}=\sqrt[3]{\mathrm{e}^x}\\
\Leftrightarrow&\frac{f'(x)}{\sqrt[3]{[f(x)]^2}}=\sqrt[3]{\mathrm{e}^x}\\
\Leftrightarrow&f'(x)\cdot[f(x)]^{-\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{\mathrm{e}^x}\\
\Leftrightarrow&3\left[(f(x))^{\frac{1}{3}}\right]'=\sqrt[3]{\mathrm{e}^x}\\
\Leftrightarrow&\left[(f(x))^{\frac{1}{3}}\right]'=\frac{1}{3}\sqrt[3]{\mathrm{e}^x}\\
\Leftrightarrow&[f(x)]^{\frac{1}{3}}=\frac{1}{3}\int\sqrt[3]{\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x\\
\Leftrightarrow&[f(x)]^{\frac{1}{3}}=\mathrm{e}^{\frac{x}{3}}+C.
\end{aligned}$$

Mà $f(0)=1 \Rightarrow 1=1+C \Rightarrow C=0$.

Do đó $[f(x)]^{\frac{1}{3}} = \mathrm{e}^{\frac{x}{3}} \Rightarrow f(x) = \mathrm{e}^x$.

Vậy $I = \int\limits_1^2 \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^2 - \mathrm{e}$.

Chọn đáp án C .... □

CÂU 6. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn điều kiện $x^6[f'(x)]^3 + 27[f(x)-1]^4 = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ và $f(1) = 0$. Tính $I = \int\limits_2^3 f(x)\,\mathrm{d}x$.

A $I = \dfrac{31}{2}$. **B** $I = -\dfrac{31}{2}$. **C** $I = \dfrac{61}{4}$. **D** $I = -\dfrac{61}{4}$.

Lời giải.

Ta có

$$
\begin{aligned}
& x^6\left[f'(x)\right]^3 + 27\left[f(x)-1\right]^4 = 0 \\
\Leftrightarrow & x^6\left[f'(x)\right]^3 = -27\left[f(x)-1\right]^4 \\
\Leftrightarrow & \frac{\left[f'(x)\right]^3}{\left[f(x)-1\right]^4} = -\frac{27}{x^6} \\
\Leftrightarrow & \frac{\left[f'(x)\right]^3}{\left[f(x)-1\right]^3\left[f(x)-1\right]} = -\frac{27}{x^6} \\
\Leftrightarrow & \frac{f'(x)}{\left[f(x)-1\right]\sqrt[3]{f(x)-1}} = -\frac{3}{x^2} \\
\Leftrightarrow & \frac{f'(x)}{-3\left[f(x)-1\right]\sqrt[3]{f(x)-1}} = \frac{1}{x^2} \\
\Leftrightarrow & \left[\frac{1}{\sqrt[3]{f(x)-1}}\right]' = \frac{1}{x^2}.
\end{aligned}
$$

Do đó $\displaystyle\int \left[\frac{1}{\sqrt[3]{f(x)-1}}\right]' \mathrm{d}x = \int \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{x} + C$.

Suy ra $\dfrac{1}{\sqrt[3]{f(x)-1}} = -\dfrac{1}{x} + C$.

Mà $f(1) = 0 \Rightarrow C = 0$.

Nên $f(x) = 1 - x^3$.

Khi đó $I = \int\limits_2^3 f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_2^3 (1-x^3)\,\mathrm{d}x = -\dfrac{61}{4}$.

Chọn đáp án D .... □

CÂU 7. Cho hàm số $f(x) > 0$ và thỏa mãn $[f'(x)]^2 + f(x)\cdot f''(x) = \mathrm{e}^x$, $\forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = f'(0) = 1$. Tính $I = \int\limits_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x$.

A $I = 2\sqrt{\mathrm{e}}$. **B** $I = \mathrm{e} - \sqrt{\mathrm{e}}$. **C** $I = 2\mathrm{e} - 2\sqrt{\mathrm{e}}$. **D** $I = 2\mathrm{e} + 2\sqrt{\mathrm{e}}$.

Lời giải.

Ta có

$$
\begin{aligned}
& \left[f'(x)\right]^2 + f(x)\cdot f''(x) = \mathrm{e}^x \\
\Leftrightarrow\quad & \left[f(x)\cdot f'(x)\right]' = \mathrm{e}^x \\
\Rightarrow\quad & f(x)\cdot f'(x) = \int\limits_{\mathrm{e}}^{x} \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x \\
\Rightarrow\quad & f(x)\cdot f'(x) = \mathrm{e}^x + C.
\end{aligned}
$$

Từ $f(0) = f'(0) = 1$ ta suy ra $C = 0$.

Vậy $f(x)\cdot f'(x) = \mathrm{e}^x$

Tiếp đến có

$$2f(x)\cdot f'(x) = \mathrm{e}^x$$

$$\begin{aligned}&\Leftrightarrow\quad \left[f^2(x)\right]'=\mathrm{e}^x\\&\Rightarrow\quad f^2(x)=\int\limits_{\mathrm{e}}^{x}\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x\\&\Rightarrow\quad f^2(x)=\mathrm{e}^x+C\end{aligned}$$

Từ $f(0)=1$ ta suy ra $C=0$.
Vậy $f^2(x)=\mathrm{e}^x\Rightarrow f(x)=\sqrt{\mathrm{e}^x}$ (do $f(x)>0$).
Khi đó $I=\int\limits_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_1^2\sqrt{\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x=\int\limits_1^2 \mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}x=2\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\Big|_1^2=2\mathrm{e}-2\sqrt{\mathrm{e}}$.

Chọn đáp án C ....

CÂU 8. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $[f'(x)]^2+f(x)\cdot f''(x)=2x$, và $f(0)=f'(0)=2$. Tính $I=\int\limits_1^2 f^2(x)\,\mathrm{d}x$.

A $I=\dfrac{15}{2}$. **B** $I=\dfrac{1}{2}$. **C** $I=\dfrac{19}{2}$. **D** $I=15$.

Lời giải.

Ta có $[f(x)f'(x)]'=[f'(x)]^2+f(x)f''(x)$.
Do đó theo giả thiết ta được $[f(x)f'(x)]'=2x$.
Suy ra $f(x)f'(x)=x^2+C$.
Hơn nữa $f(0)=f'(0)=2$ suy ra $C=1$.
$\Rightarrow f(x)f'(x)=x^2+1$.
Tương tự vì $\left[f^2(x)\right]'=2f(x)f'(x)$ nên $\left[f^2(x)\right]'=2\left(x^2+1\right)$.
Suy ra $f^2(x)=\int 2\left(x^2+1\right)\,\mathrm{d}x\Rightarrow f^2(x)=\dfrac{2}{3}x^3+2x+C$.
Mặt khác $f(0)=2$ nên suy ra $C=2$.
$\Rightarrow f^2(x)=\dfrac{2}{3}x^3+2x+2$.
Vậy $I=\int\limits_1^2 f^2(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_1^2\left(\dfrac{2}{3}x^3+2x+2\right)\mathrm{d}x=\dfrac{15}{2}$.

Chọn đáp án A ....

CÂU 9. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn: $[f'(x)]^2+f(x)\cdot f''(x)=15x^4+12x$, $\forall x\in\mathbb{R}$ và $f(0)=f'(0)=1$. Giá trị của $f^2(1)$ bằng

A $\dfrac{5}{2}$. **B** 8. **C** 10. **D** 4.

Lời giải.

Theo giả thiết

$$\begin{aligned}&\forall x\in\mathbb{R}\colon\ [f'(x)]^2+f(x)\cdot f''(x)=15x^4+12x\\\Leftrightarrow\quad & f'(x)\cdot f'(x)+f(x)\cdot f''(x)=15x^4+12x\\\Leftrightarrow\quad & [f(x)\cdot f'(x)]'=15x^4+12x\\\Leftrightarrow\quad & f(x)\cdot f'(x)=\int\left(15x^4+12x\right)\mathrm{d}x=3x^5+6x^2+C.\quad(1)\end{aligned}$$

Thay $x=0$ vào (1), ta được $f(0)\cdot f'(0)=C\Leftrightarrow C=1$.
Khi đó (1) trở thành $f(x)\cdot f'(x)=3x^5+6x^2+1$

$$\begin{aligned}&\Rightarrow\int\limits_0^1 f(x)\cdot f'(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^1\left(3x^5+6x^2+1\right)\mathrm{d}x\\&\Leftrightarrow\left[\frac{1}{2}f^2(x)\right]\Big|_0^1=\left(\frac{1}{2}x^6+2x^3+x\right)\Big|_0^1\Leftrightarrow\frac{1}{2}\left[f^2(1)-f^2(0)\right]=\frac{7}{2}\\&\Leftrightarrow f^2(1)-1=7\Leftrightarrow f^2(1)=8.\end{aligned}$$

Vậy $f^2(1)=8$.

Chọn đáp án B ....

CÂU 10. Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn $[f'(x)]^2 + f(x) \cdot f''(x) = x^3 - 2x$, $\forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = f'(0) = 2$. Tính giá trị của $T = f^2(2)$.

A $\dfrac{160}{15}$. **B** $\dfrac{268}{15}$. **C** $\dfrac{4}{15}$. **D** $\dfrac{268}{30}$.

Lời giải.

Ta có $[f'(x)]^2 + f(x) \cdot f''(x) = x^3 - 2x$, $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow [f'(x) \cdot f(x)]' = x^3 - 2x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
Lấy nguyên hàm hai vế ta có

$$\begin{aligned} & \int [f'(x) \cdot f(x)]' \, \mathrm{d}x = \int \left(x^3 - 2x\right) \, \mathrm{d}x \\ \Leftrightarrow \quad & f'(x) \cdot f(x) = \frac{x^4}{4} - x^2 + C. \end{aligned}$$

Theo đề ra ta có $f(0) \cdot f(0) = C = 4$.

Suy ra $\displaystyle\int_0^2 f'(x) \cdot f(x) \, \mathrm{d}x = \int_0^2 \left(\frac{x^4}{4} - x^2 + 4\right) \mathrm{d}x \Leftrightarrow \left.\frac{f^2(x)}{2}\right|_0^2 = \frac{104}{15} \Leftrightarrow f^2(2) = \frac{268}{15}$.

Chọn đáp án B .... □

CÂU 11. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(x) + f'(x) = \mathrm{e}^{-x}$, $\forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = 2$. Tính $I = \displaystyle\int_1^2 \frac{f(x)\mathrm{e}^x}{x} \, \mathrm{d}x$.

A $I = 2\ln 2$. **B** $I = \ln 2$. **C** $I = 1 + \ln 2$. **D** $I = 1 + 2\ln 2$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} & f(x) + f'(x) = \mathrm{e}^{-x} \\ \Leftrightarrow \quad & f(x)\mathrm{e}^x + f'(x)\mathrm{e}^x = 1 \\ \Leftrightarrow \quad & [f(x)\mathrm{e}^x]' = 1 \\ \Rightarrow \quad & f(x)\mathrm{e}^x = \int x \, \mathrm{d}x \\ \Leftrightarrow \quad & f(x)\mathrm{e}^x = x + C. \end{aligned}$$

Vì $f(0) = 2$ nên $C = 2$.
$\Rightarrow f(x)\mathrm{e}^x = x + 2$.

Vậy $I = \displaystyle\int_1^2 \frac{f(x)\mathrm{e}^x}{x} \, \mathrm{d}x = \int_1^2 \frac{x+2}{x} \, \mathrm{d}x = \int_1^2 \left(1 + \frac{2}{x}\right) \mathrm{d}x = \left.(x + 2\ln|x|)\right|_1^2 = 1 + 2\ln 2$.

Chọn đáp án D .... □

CÂU 12. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $(x+2)\,f(x) + (x+1)\,f'(x) = \mathrm{e}^x$ và $f(0) = \dfrac{1}{2}$. Tính $I = \displaystyle\int_1^2 (2x+2)\,f(x) \, \mathrm{d}x$.

A $I = \mathrm{e}^2$. **B** $I = 1 + \mathrm{e}$. **C** $I = 1 + \mathrm{e}^2$. **D** $I = \mathrm{e}^2 - \mathrm{e}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} & (x+2)\,f(x) + (x+1)\,f'(x) = \mathrm{e}^x \\ \Leftrightarrow \quad & (x+1)\,f(x) + f(x) + (x+1)\,f'(x) = \mathrm{e}^x \\ \Leftrightarrow \quad & [(x+1)\,f(x)] + [(x+1)\,f(x)]' = \mathrm{e}^x \\ \Leftrightarrow \quad & \mathrm{e}^x\,[(x+1)\,f(x)] + \mathrm{e}^x\,[(x+1)\,f(x)]' = \mathrm{e}^{2x} \\ \Leftrightarrow \quad & [\mathrm{e}^x\,(x+1)\,f(x)]' = \mathrm{e}^{2x} \\ \Rightarrow \quad & \int [\mathrm{e}^x\,(x+1)\,f(x)]' \, \mathrm{d}x = \int \mathrm{e}^{2x} \, \mathrm{d}x \\ \Leftrightarrow \quad & \mathrm{e}^x\,(x+1)\,f(x) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x} + C. \end{aligned}$$

Mà $f(0)=\dfrac{1}{2} \Rightarrow C=0$.

Vậy $f(x)=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{e^x}{x+1}$.

Do đó $I=\displaystyle\int_1^2 (2x+2)\,\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{e^x}{x+1}\,dx=\int_1^2 e^x\,dx=e^2-e$.

Chọn đáp án D ....

CÂU 13. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục, có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện $f(x)+x\left[f'(x)-2\sin x\right]=x^2\cos x$, $x\in\mathbb{R}$ và $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{\pi}{2}$. Tính $I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{f(x)}{x}\,dx$.

A $I=1$. **B** $I=\dfrac{\pi}{2}$. **C** $I=-1$. **D** $I=-\pi$.

Lời giải.

Từ giả thiết $f(x)+x\left(f'(x)-2\sin x\right)=x^2\cos x$

$\Leftrightarrow f(x)+xf'(x)=x^2\cos x+2x\sin x$

$\Leftrightarrow (xf(x))'=\left(x^2\sin x\right)'$

$\Leftrightarrow xf(x)=x^2\sin x+C$.

Mặt khác $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow C=0\Rightarrow f(x)=x\sin x$.

Vậy $I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{f(x)}{x}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{x\sin x}{x}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx=1$.

Chọn đáp án A ....

CÂU 14. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $(0;+\infty)$ thỏa mãn $2xf'(x)+f(x)=2x$, $\forall x\in(0;+\infty)$, $f(1)=1$. Giá trị của biểu thức $f(4)$ là

A $\dfrac{25}{6}$. **B** $\dfrac{25}{3}$. **C** $\dfrac{17}{6}$. **D** $\dfrac{17}{3}$.

Lời giải.

Xét phương trình $2xf'(x)+f(x)=2x$ (1) trên $(0;+\infty)$ ta có

$$(1)\Leftrightarrow f'(x)+\frac{1}{2x}\cdot f(x)=1.\quad(2)$$

Đặt $g(x)=\dfrac{1}{2x}$, ta tìm một nguyên hàm $G(x)$ của $g(x)$.

Ta có $\displaystyle\int g(x)\,dx=\int\dfrac{1}{2x}\,dx=\dfrac{1}{2}\ln x+C=\ln\sqrt{x}+C$. Ta chọn $G(x)=\ln\sqrt{x}$.

Nhân cả 2 vế của (2) cho $e^{G(x)}=\sqrt{x}$, ta được

$$\sqrt{x}\cdot f'(x)+\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot f(x)=\sqrt{x}\Leftrightarrow\left[\sqrt{x}\cdot f(x)\right]'=\sqrt{x}.\quad(3)$$

Lấy tích phân 2 vế của (3) từ 1 đến 4, ta được

$\displaystyle\int_1^4\left[\sqrt{x}\cdot f(x)\right]'\,dx=\int_1^4\sqrt{x}\,dx\Rightarrow\left.\left[\sqrt{x}\cdot f(x)\right]\right|_1^4=\left.\left(\frac{2}{3}\sqrt{x^3}\right)\right|_1^4\Rightarrow 2f(4)-f(1)=\frac{14}{3}$

$\Rightarrow f(4)=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{14}{3}+1\right)=\dfrac{17}{6}$ (vì $f(1)=1$).

Vậy $f(4)=\dfrac{17}{6}$.

Chọn đáp án C ....

CÂU 15. Cho hàm số $f(x)$ không âm, có đạo hàm trên đoạn $[0;1]$ và thỏa mãn $f(1)=1$, $\left[2f(x)+1-x^2\right]f'(x)=2x\left[1+f(x)\right]$, $\forall x\in[0;1]$. Tích phân $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$ bằng

A 1. **B** 2. **C** $\dfrac{1}{3}$. **D** $\dfrac{3}{2}$.

Lời giải.

Xét trên đoạn $[0;1]$, theo đề bài ta có

$$\begin{aligned}
& \left[2f(x)+1-x^2\right]f'(x)=2x\left[1+f(x)\right]\\
\Leftrightarrow\ & 2f(x)\cdot f'(x)=2x+\left(x^2-1\right)\cdot f'(x)+2x\cdot f(x)\\
\Leftrightarrow\ & \left[f^2(x)\right]'=\left[x^2+\left(x^2-1\right)\cdot f(x)\right]'\\
\Leftrightarrow\ & f^2(x)=x^2+\left(x^2-1\right)\cdot f(x)+C.\quad (1)
\end{aligned}$$

Thay $x=1$ vào (1) ta được $f^2(1)=1+C\Leftrightarrow C=0$ (vì $f(1)=1$).
Do đó, (1) trở thành

$$\begin{aligned}
& f^2(x)=x^2+\left(x^2-1\right)\cdot f(x)\\
\Leftrightarrow\ & f^2(x)-1=x^2-1+\left(x^2-1\right)\cdot f(x)\\
\Leftrightarrow\ & [f(x)-1]\cdot[f(x)+1]=\left(x^2-1\right)\cdot[f(x)+1]\\
\Leftrightarrow\ & f(x)-1=x^2-1\ (\text{vì } f(x)\geq 0\Rightarrow f(x)+1>0,\ \forall x\in[0;1])\\
\Leftrightarrow\ & f(x)=x^2.
\end{aligned}$$

Vậy $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x=\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1=\frac{1}{3}.$

Chọn đáp án C .... □

CÂU 16. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$, thỏa mãn $[f'(x)]^2+4f(x)=8x^2+4$, $\forall x\in[0;1]$ và $f(1)=2$. Tính $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

A $\frac{1}{3}$. **B** 2. **C** $\frac{4}{3}$. **D** $\frac{21}{4}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}
& [f'(x)]^2+4f(x)=8x^2+4\\
\Rightarrow\ & \int_0^1[f'(x)]^2\,\mathrm{d}x+4\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1\left(8x^2+4\right)\,\mathrm{d}x=\frac{20}{3}.\quad (1)
\end{aligned}$$

Và

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 xf'(x)\,\mathrm{d}x=\left.xf(x)\right|_0^1-\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=2-\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\\
\Rightarrow\ & -4\int_0^1 xf'(x)\,\mathrm{d}x=-8+4\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x.\quad (2)
\end{aligned}$$

Lại có

$$\int_0^1(2x)^2\,\mathrm{d}x=\frac{4}{3}.\quad (3)$$

Cộng vế với vế của (1), (2), (3) ta được

$$\int_0^1\left(f'(x)-2x\right)^2\,\mathrm{d}x=0\Rightarrow f'(x)=2x\Rightarrow f(x)=x^2+C.$$

Mặt khác $f(1)=C+1=2\Rightarrow C=1\Rightarrow f(x)=x^2+1$.

Do đó $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1\left(x^2+1\right)\,\mathrm{d}x=\frac{4}{3}.$

Chọn đáp án C .... □

CÂU 17. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn $3f(x) + xf'(x) \geq x^{2018}$, $\forall x \in [0;1]$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

(A) $\dfrac{1}{2018 \cdot 2020}$. (B) $\dfrac{1}{2019 \cdot 2020}$. (C) $\dfrac{1}{2020 \cdot 2021}$. (D) $\dfrac{1}{2019 \cdot 2021}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}
& 3f(x) + xf'(x) \geq x^{2018},\ \forall x \in [0;1] \\
\Leftrightarrow\ & 3x^2 f(x) + x^3 \cdot f'(x) \geq x^{2020},\ \forall x \in [0;1] \\
\Leftrightarrow\ & \left[x^3 f(x)\right]' \geq x^{2020},\ \forall x \in [0;1] \\
\Rightarrow\ & x^3 f(x) \geq \int x^{2020}\,\mathrm{d}x,\ \forall x \in [0;1] \\
\Rightarrow\ & x^3 f(x) \geq \frac{x^{2021}}{2021} + C,\ \forall x \in [0;1].
\end{aligned}$$

Cho $x = 0 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow x^3 f(x) \geq \dfrac{x^{2021}}{2021}$, $\forall x \in [0;1] \Rightarrow f(x) \geq \dfrac{x^{2018}}{2021}$, $\forall x \in [0;1]$.

$\Rightarrow \displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \geq \int_0^1 \frac{x^{2018}}{2021}\,\mathrm{d}x = \left(\frac{x^{2019}}{2019 \cdot 2021}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{2019 \cdot 2021}$.

Chọn đáp án (D) .... □

CÂU 18. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn

$$\begin{cases} f(0) = f'(0) = 1 \\ f(x+y) = f(x) + f(y) + 3xy(x+y) - 1 \end{cases} \text{với } x, y \in \mathbb{R}$$

Tính $\displaystyle\int_0^1 f(x-1)\,\mathrm{d}x$.

(A) $\dfrac{1}{2}$. (B) $-\dfrac{1}{4}$. (C) $\dfrac{1}{4}$. (D) $\dfrac{7}{4}$.

Lời giải.

Lấy đạo hàm theo hàm số y ta được $f'(x+y) = f'(y) + 3x^2 + 6xy$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
Cho $y = 0 \Rightarrow f'(x) = f'(0) + 3x^2 \Rightarrow f'(x) = 1 + 3x^2$
$\Rightarrow f(x) = \displaystyle\int f'(x)\,\mathrm{d}x = x^3 + x + C$ mà $f(0) = 1 \Rightarrow C = 1$.
Do đó $f(x) = x^3 + x + 1 \Rightarrow f(x-1) = (x-1)^3 + x - 1 + 1 = x^3 - 3x^2 + 4x - 1$.
Vậy $\displaystyle\int_0^1 f(x-1)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(x^3 - 3x^2 + 4x - 1\right)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int_{-1}^0 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^0 \left(x^3 + x + 1\right)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}$.

Chọn đáp án (C) .... □

CÂU 19. Cho hai hàm $f(x)$ và $g(x)$ có đạo hàm trên $[1;4]$, thỏa mãn $\begin{cases} f(1) + g(1) = 4 \\ g(x) = -xf'(x) \\ f(x) = -xg'(x) \end{cases}$, với mọi $x \in [1;4]$. Tính tích phân $I = \displaystyle\int_1^4 [f(x) + g(x)]\,\mathrm{d}x$.

(A) $3\ln 2$. (B) $4\ln 2$. (C) $6\ln 2$. (D) $8\ln 2$.

Lời giải.

Từ giả thiết ta có

$$\begin{aligned}
& f(x) + g(x) = -x \cdot f'(x) - x \cdot g'(x) \\
\Leftrightarrow\ & [f(x) + x \cdot f'(x)] + [g(x) + x \cdot g'(x)] = 0 \\
\Leftrightarrow\ & [x \cdot f(x)]' + [x \cdot g(x)]' = 0 \\
\Rightarrow\ & x \cdot f(x) + x \cdot g(x) = C
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad f(x)+g(x)=\frac{C}{x}$$

Mà $f(1)+g(1)=4 \Rightarrow C=4 \Rightarrow f(x)+g(x)=\dfrac{4}{x}$.

Vậy $I=\displaystyle\int\limits_1^4 [f(x)+g(x)]\,\mathrm{d}x=\int\limits_1^4 \frac{4}{x}\,\mathrm{d}x=8\ln 2$.

Chọn đáp án D .... □

CÂU 20. Cho hai hàm $f(x)$ và $g(x)$ có đạo hàm trên $[1;2]$ thỏa mãn $f(1)=g(1)=0$ và $\begin{cases}\dfrac{x}{(x+1)^2}g(x)+2023x=(x+1)f'(x)\\ \dfrac{x^3}{x+1}g'(x)+f(x)=2024x^2\end{cases}$, $\forall x\in[1;2]$.

Tính tích phân $I=\displaystyle\int\limits_1^2\left[\frac{x}{x+1}g(x)-\frac{x+1}{x}f(x)\right]\mathrm{d}x$.

A $I=\dfrac{1}{2}$. **B** $I=1$. **C** $I=\dfrac{3}{2}$. **D** $I=2$.

Lời giải.

Từ giả thiết ta có $\begin{cases}\dfrac{1}{(x+1)^2}g(x)-\dfrac{x+1}{x}f'(x)=-2023\\ \dfrac{x}{x+1}g'(x)+\dfrac{1}{x^2}f(x)=2024\end{cases}$, $\forall x\in[1;2]$.

Suy ra

$$\begin{aligned}&\left[\frac{1}{(x+1)^2}g(x)+\frac{x}{x+1}g'(x)\right]-\left[\frac{x+1}{x}f'(x)-\frac{1}{x^2}f(x)\right]=1\\ \Leftrightarrow\ &\left[\frac{x}{x+1}g(x)\right]'-\left[\frac{x+1}{x}f(x)\right]'=1\\ \Rightarrow\ &\frac{x}{x+1}g(x)-\frac{x+1}{x}f(x)=x+C.\end{aligned}$$

Mà $f(1)=g(1)=0\Rightarrow C=-1\Rightarrow \dfrac{x}{x+1}g(x)-\dfrac{x+1}{x}f(x)=x-1$.

Vậy $I=\displaystyle\int\limits_1^2\left[\frac{x}{x+1}g(x)-\frac{x+1}{x}f(x)\right]\mathrm{d}x=\int\limits_1^2(x-1)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}$.

Chọn đáp án A .... □

CÂU 21. Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ thỏa mãn $x^2f^2(x)+(2x-1)f(x)=xf'(x)-1$, với mọi $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ đồng thời thỏa mãn $f(1)=-2$. Tính $\displaystyle\int\limits_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x$.

A $-\dfrac{\ln 2}{2}-1$. **B** $-\ln 2-\dfrac{1}{2}$. **C** $-\ln 2-\dfrac{3}{2}$. **D** $-\dfrac{\ln 2}{2}-\dfrac{3}{2}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}&x^2f^2(x)+2xf(x)+1=xf'(x)+f(x)\\ \Leftrightarrow\ &(xf(x)+1)^2=(xf(x)+1)'.\end{aligned}$$

Do đó

$$\begin{aligned}&\frac{(xf(x)+1)'}{(xf(x)+1)^2}=1\\ \Rightarrow\ &\int\frac{(xf(x)+1)'}{(xf(x)+1)^2}\,\mathrm{d}x=\int 1\,\mathrm{d}x\\ \Rightarrow\ &-\frac{1}{xf(x)+1}=x+C\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad xf(x)+1=-\frac{1}{x+C}.$$

Mặt khác $f(1)=-2$ nên $-2+1=-\dfrac{1}{1+C}\Rightarrow C=0$.

Nên suy ra $xf(x)+1=-\dfrac{1}{x}\Rightarrow f(x)=-\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x}$.

Vậy $\displaystyle\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x=\int_1^2\left(-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x=\left(-\ln x+\frac{1}{x}\right)\Big|_1^2=-\ln 2-\frac{1}{2}$.

Chọn đáp án B .... □

CÂU 22. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $x\cdot f(x)\cdot f'(x)=f^2(x)-x$, $\forall x\in\mathbb{R}$ và có $f(2)=1$. Tích phân $\displaystyle\int_0^2 f^2(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

A $\dfrac{3}{2}$. B $\dfrac{4}{3}$. C 2. D 4.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}
x\cdot f(x)\cdot f'(x)=f^2(x)-x &\Leftrightarrow 2x\cdot f(x)\cdot f'(x)=2f^2(x)-2x\\
&\Leftrightarrow 2x\cdot f(x)\cdot f'(x)+f^2(x)=3f^2(x)-2x\\
&\Leftrightarrow \int_0^2\left(x\cdot f^2(x)\right)'\mathrm{d}x=3\int_0^2 f^2(x)\,\mathrm{d}x-\int_0^2 2x\,\mathrm{d}x\\
&\Leftrightarrow \left(x\cdot f^2(x)\right)\Big|_0^2=3I-4\\
&\Leftrightarrow 2=3I-4\\
&\Leftrightarrow I=2.
\end{aligned}$$

Chọn đáp án C .... □

CÂU 23. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, $f(0)=0$, $f'(0)\neq 0$ và thỏa mãn hệ thức $f(x)\cdot f'(x)+18x^2=\left(3x^2+x\right)f'(x)+(6x+1)f(x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Biết $\displaystyle\int_0^1(x+1)\,\mathrm{e}^{f(x)}\,\mathrm{d}x=a\mathrm{e}^2+b$, $(a,b\in\mathbb{Q})$. Giá trị của $a-b$ bằng

A 1. B 2. C 0. D $\dfrac{2}{3}$.

Lời giải.

Ta có $f(x)\cdot f'(x)+18x^2=\left(3x^2+x\right)f'(x)+(6x+1)f(x)$.
Lấy nguyên hàm hai vế ta được

$$\begin{aligned}
\frac{f^2(x)}{2}+6x^3=\left(3x^2+x\right)f(x) &\Rightarrow f^2(x)-2\left(3x^2+x\right)f(x)+12x^3=0\\
&\Rightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=6x^2\\ f(x)=2x.\end{array}\right.
\end{aligned}$$

TH1: $f(x)=6x^2$ không thoả mãn kết quả $\displaystyle\int_0^1(x+1)\,\mathrm{e}^{f(x)}\,\mathrm{d}x=a\mathrm{e}^2+b$, $(a,b\in\mathbb{Q})$.

TH2: $f(x)=2x\Rightarrow\displaystyle\int_0^1(x+1)\,\mathrm{e}^{f(x)}\,\mathrm{d}x=\int_0^1(x+1)\,\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x=\frac{3}{4}\mathrm{e}^2-\frac{1}{4}$.

Suy ra $a=\dfrac{3}{4};b=-\dfrac{1}{4}$.

Vậy $a-b=1$.

Chọn đáp án A .... □

CÂU 24. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $[1;3]$; $f(x) \neq 0, \forall x \in [1;3]$; $f'(x)[1+f(x)]^2 = (x-1)^2[f(x)]^4$ và $f(1) = -1$. Biết rằng $\int\limits_{\mathrm{e}}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x = a\ln 3 + b$ $(a, b \in \mathbb{Z})$. Giá trị của $a + b^2$ bằng

(A) 4. (B) 0. (C) 2. (D) -1.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} f'(x)[1+f(x)]^2 = (x-1)^2[f(x)]^4 &\Rightarrow \frac{f'(x)}{f^4(x)} + \frac{2f'(x)}{f^3(x)} + \frac{f'(x)}{f^2(x)} = (x-1)^2 \\ &\Rightarrow \int \left(\frac{f'(x)}{f^4(x)} + \frac{2f'(x)}{f^3(x)} + \frac{f'(x)}{f^2(x)}\right)\mathrm{d}x = \int (x-1)^2\,\mathrm{d}x \\ &\Rightarrow -\left(\frac{1}{3f^3(x)} + \frac{1}{f^2(x)} + \frac{1}{f(x)}\right) = \frac{1}{3}(x-1)^3 + C. \quad (*) \end{aligned}$$

Do $f(1) = -1$ nên $C = \frac{1}{3}$.

Thay vào $(*)$ ta được $\left(\frac{1}{f(x)} + 1\right)^3 = -(x-1)^3 \Rightarrow f(x) = \frac{-1}{x}$.

Khi đó $\int\limits_{\mathrm{e}}^{3} \frac{-1}{x}\,\mathrm{d}x = -\ln|x|\Big|_{\mathrm{e}}^{3} = -\ln 3 + 1 \Rightarrow a = -1, b = 1$.

Vậy $a + b^2 = 0$.

Chọn đáp án (B) .... □

MỤC LỤC