Bài 1. DẠNG ĐẠI SỐ CỦA SỐ PHỨC VÀ CÁC PHÉP TOÁN TRÊN SỐ PHỨC

QUICK NOTE

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa

ĐỊNH NGHĨA 1.1. Mỗi biểu thức dạng $a+bi$, trong đó $a,b\in\mathbb{R}$, $i^2=-1$ được gọi là một **số phức**.

Đối với số phức $z=a+bi$, ta nói a là **phần thực**, b là **phần ảo** của z, i gọi là đơn vị ảo.
Tập số phức $\mathbb{C}=\{a+bi|a,b\in\mathbb{R},i^2=-1\}$. Tập số thực $\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$.

VÍ DỤ 1. Số phức $z=3-2i$ có phần thực là ...... phần ảo là ......

Đặc biệt

- *Khi phần ảo $b=0\Leftrightarrow z=a\in\mathbb{R}\Leftrightarrow z$ là số thực.*
- *Khi phần thực $a=0\Leftrightarrow z=bi\Leftrightarrow z$ là số thuần ảo.*
- *Số $0=0+0i$ vừa là số thực, vừa là số ảo.*

2. Hai số phức bằng nhau

Hai số phức là bằng nhau nếu phần thực và phần ảo của chúng tương ứng bằng nhau.

$$a+bi=c+di\Leftrightarrow\begin{cases}a=c\\b=d\end{cases},\quad \text{với } a,b,c,d\in\mathbb{R}.$$

VÍ DỤ 2. Tìm các số thực x, y biết rằng $(2x+1)+(3y-2)i=(x+2)+(y+4)i$.

3. Biểu diễn hình học của số phức

Điểm $M(a;b)$ trong hệ trục tọa độ vuông góc của mặt phẳng được gọi là điểm biểu diễn của số phức $z=a+bi$.

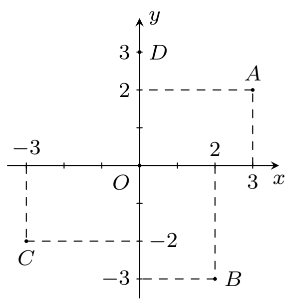
VÍ DỤ 3.
Quan sát hình vẽ bên cạnh, ta có

a) Điểm A biểu diễn cho số phức ....

b) Điểm B biểu diễn cho số phức ....

c) Điểm C biểu diễn cho số phức ....

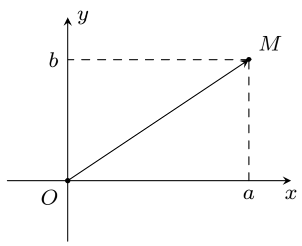
d) Điểm D biểu diễn cho số phức ....



4. Mô-đun của số phức

Giả sử số phức $z=a+bi$ được biểu diễn bởi điểm $M(a;b)$ trên mặt phẳng tọa độ.

a) Độ dài của véc-tơ $\overrightarrow{OM}$ được gọi là mô-đun của số phức z và được ký hiệu là $|z|$. Khi đó, $|z|=\left|\overrightarrow{OM}\right|=|a+bi|=\sqrt{a^2+b^2}$.



b) Kết quả, với mọi số phức z ta có

(a) $|z|\ge 0$ và $|z|=0\Leftrightarrow z=0$.

(b) $z\cdot\bar{z}=|z|^2$.

(c) $|z|=|\bar{z}|$.

(d) $|z_1\cdot z_2|=|z_1|\cdot|z_2|$.

(e) $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|=\dfrac{|z_1|}{|z_2|}$.

VÍ DỤ 4. Tìm mô-đun của các số phức sau

a) $z=3-2i\Rightarrow|z|=|3-2i|=\sqrt{.........}=......$

QUICK NOTE

b) $z = 1 + i\sqrt{3} \Rightarrow |z| = |1 + i\sqrt{3}| = \sqrt{\ldots\ldots\ldots} = \ldots\ldots$

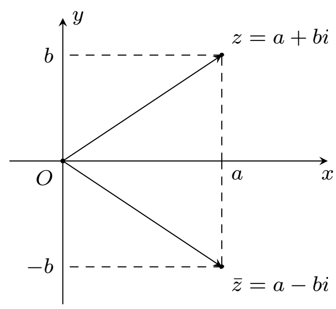
5. Số phức liên hợp

Định nghĩa 1.2. Cho số phức $z = a + bi$, $(a, b \in \mathbb{R})$. Ta gọi $a - bi$ là số phức liên hợp của z và được ký hiệu là $\bar{z} = a - bi$.

VÍ DỤ 5. a) Cho $z = -3 - 2i \Rightarrow \bar{z} = \ldots\ldots\ldots$

b) Cho $\bar{z} = 4 + 3i \Rightarrow z = \ldots\ldots\ldots$

- Trên mặt phẳng tọa độ, các điểm biểu diễn z và $\bar{z}$ đối xứng với nhau qua trục Ox.



- Từ định nghĩa ta có các kết quả sau

2 $\bar{\bar{z}} = z$; $|\bar{z}| = |z|$.

2 $\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$.

2 $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$.

2 $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$.

2 z là số thực $\Leftrightarrow z = \bar{z}$.

2 z là số thuần ảo $\Leftrightarrow z = -\bar{z}$.

6. Cộng, trừ, nhân, chia số phức

Cho hai số phức $z_1 = a + bi$ và $z_2 = c + di$.

a) Phép cộng và phép trừ hai số phức được thực hiện theo quy tắc cộng, trừ đa thức.

- **Phép cộng:** $z_1 + z_2 = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$.
- **Phép trừ:** $z_1 - z_2 = (a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$.
- Số phức đối của của số phức $z = a + bi$ là $-z = -a - bi$. Do đó, $z + (-z) = (-z) + z = 0$.

b) Phép nhân số phức được thực hiện theo quy tắc nhân đa thức, rồi thay $i^2 = -1$ trong kết quả nhận được. Cụ thể, $z_1 \cdot z_2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$.

c) **Phép chia:** $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{z_2 \bar{z}_2} = \dfrac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{|z_2|^2} = \dfrac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \dfrac{bc - ad}{c^2 + d^2} \cdot i$, $(z_2 \neq 0)$.

d) Số phức nghịch đảo của $z = a + bi \neq 0$ là $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\bar{z}}{|z|^2} = \dfrac{\bar{z}}{a^2 + b^2} = \dfrac{a - bi}{a^2 + b^2}$.

B. DẠNG TOÁN VÀ BÀI TẬP

Dạng 1. Bài toán quy về giải phương trình, hệ phương trình nghiệm thực

Phương pháp giải. Hai số phức là bằng nhau nếu phần thực và phần ảo của chúng tương ứng bằng nhau.

$$a + bi = c + di \Leftrightarrow \begin{cases} a = c \\ b = d \end{cases}, \quad \text{với } a, b, c, d \in \mathbb{R}.$$

- Biểu diễn số phức cần tìm $z = a + bi$ với $a, b \in \mathbb{R}$. Biến đổi thu gọn phương trình của bài toán về dạng $A + Bi = C + Di$.
- Giải hệ phương trình $\begin{cases} A = C \\ B = D. \end{cases}$

1. Ví dụ

VÍ DỤ 1. Tìm các số thực x và y thỏa các điều kiện sau

a) $2x + 1 + (1 - 2y)i = 2(2 - i) + yi - x$.

b) $(1 - 2i)x + (1 + 2y)i = 1 + i$.

VÍ DỤ 2. Tìm số phức z thỏa mãn điều kiện bên dưới. Từ đó xác định phần thực, phần ảo, số phức liên hợp và mô-đun của z.

a) $(2+3i)\,z-(1+2i)\,\overline{z}=7-i$.

b) $|z-(2+i)|=\sqrt{10}$ và $z\cdot\overline{z}=25$.

VÍ DỤ 3. Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z+2-i|=2\sqrt{2}$ và $(z-1)^2$ là số thuần ảo?

2. Bài tập áp dụng

CÂU 1. Trong các số phức $\{z_1=3-2i;\ z_2=1;\ z_3=4i;\ z_4=0;\ z_5=-5i\}$. Có bao nhiêu số phức thuần ảo ?

A 3. **B** 2. **C** 1. **D** 4.

CÂU 2. Số phức $z=0$ là số phức

A Thuần thực.

B Thuần ảo.

C Vừa thuần thực vừa thuần ảo.

D không thuần thực cũng không thuần ảo.

CÂU 3. Cho tập S gồm 6 số phức, trong đó có 3 số phức thuần ảo và 4 số phức thuần thực. Tích tất cả các số phức trong tập S có giá trị bằng

A $3-2i$. **B** $4+i$. **C** $6+6i$. **D** 0.

CÂU 4. Cho số phức $z=4-2i$. Phần ảo của số phức là

A $-2i$. **B** -2. **C** $2i$. **D** i.

CÂU 5. Cho số phức $z=-1+2i$. Số phức liên hợp $\overline{z}$ tương ứng là

A $-1-2i$. **B** $1-2i$. **C** $1+2i$. **D** $3i-2$.

CÂU 6. Cho số phức $z=3+4i$. Số phức liên hợp của số phức iz tương ứng là

A $-4+3i$. **B** $3-4i$. **C** $3+4i$. **D** $-4-3i$.

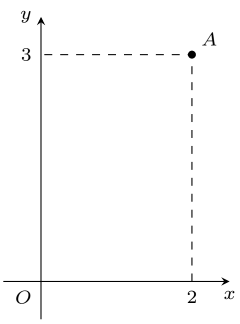
CÂU 7. Cho số phức $z=(1+i)^{10}$ có phần thực tương ứng là

A 0. **B** 32. **C** $32i$. **D** 2.

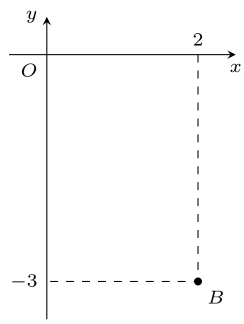
CÂU 8. Trong mặt phẳng phức điểm $M(4;-3)$ biểu diễn số phức nào dưới đây ?

A $z=-(4-3i)$. **B** $z=4i-3$. **C** $z=4-3i$. **D** $z=-4+3i$.

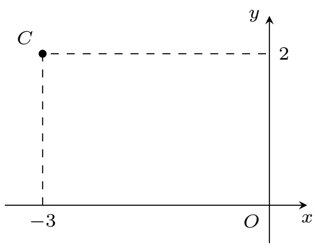
CÂU 9. Trong mặt phẳng phức, điểm nào dưới đây biểu diễn đúng số phức $z=-2+3i$?

A 

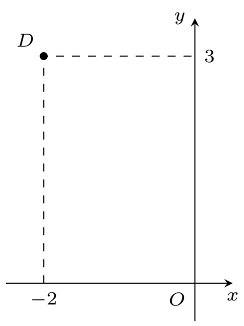
.

B 

.

C 

.

D 

.

CÂU 10. Cho số phức $z=4-3i$ mô-đun của nó tương ứng là

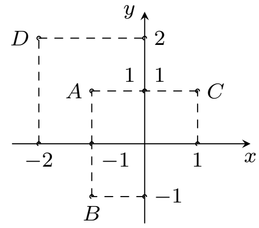
A $|z|=1$. **B** $|z|=25$. **C** $|z|=5$. **D** $|z|=\sqrt{5}$.

QUICK NOTE

QUICK NOTE

CÂU 11.
Trong mặt phẳng phức, cho $z = 1 + i$ điểm nào dưới đây biểu diễn đúng số phức iz?

Ⓐ Điểm A. Ⓑ Điểm B. Ⓒ Điểm C. Ⓓ Điểm D.



CÂU 12. Cho số phức z thỏa mãn $z \cdot \bar{z} = 16$ giá trị của $|z|$ tương ứng bằng

Ⓐ 16. Ⓑ 4. Ⓒ ± 4. Ⓓ 2.

CÂU 13. Cho số phức z thỏa mãn $\left|z^3\right| = 0$, số phức z tương ứng là

Ⓐ $-i$. Ⓑ 0. Ⓒ i. Ⓓ $1 - i$.

CÂU 14. Cho số phức z hệ thức nào dưới đây là **sai** ?

Ⓐ $|z| = |\bar{z}|$. Ⓑ $|z^n| = |z|^n$. Ⓒ $z \cdot \bar{z} = |z|^2$. Ⓓ $|z + \bar{z}| = 2|z|$.

CÂU 15. Cho hai số phức z_1, z_2 hệ thức nào dưới đây là **sai** ?

Ⓐ $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$. Ⓑ $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$.

Ⓒ $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$. Ⓓ $\overline{z_1^2} = -\left(\overline{z_1}\right)^2$.

CÂU 16. Cho hai số phức z_1, z_2 hệ thức nào dưới đây là **sai** ?

Ⓐ $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$. Ⓑ $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$ nếu $z_2 \neq 0$.

Ⓒ $|z_1 \pm z_2| = |z_1| \pm |z_2|$. Ⓓ $|z_1^n| = |z_1|^n$.

CÂU 17. Phần thực của số phức $(1 + i)^{2019}$ tương ứng là

Ⓐ -2^{1009}. Ⓑ 2^{1009}. Ⓒ 0. Ⓓ 2^{2019}.

CÂU 18. Phần ảo của số phức $(1 - i)^{2020}$ tương ứng là

Ⓐ -2^{1010}. Ⓑ 2^{1010}. Ⓒ 0. Ⓓ -2^{2020}.

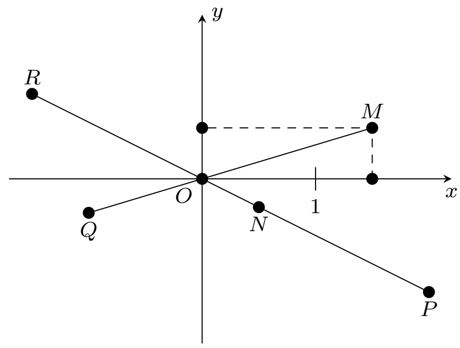
CÂU 19. Phần ảo của số phức $(1 + i\sqrt{3})^{2021}$ tương ứng là

Ⓐ $2^{2020} \cdot \sqrt{3}$. Ⓑ $-2^{2020} \cdot \sqrt{3}$. Ⓒ -2^{2020}. Ⓓ 2^{2020}.

CÂU 20. Phần thực của số phức $\dfrac{(1 - i\sqrt{3})^{2021}}{(1 - i)^{2021}}$ tương ứng là

Ⓐ $2^{1009}(\sqrt{3} + 1)$. Ⓑ 2^{1009}. Ⓒ $2^{1009}(\sqrt{3} - 1)$. Ⓓ $2^{1009}(1 - \sqrt{3})$.

CÂU 21. Cho số phức z biểu diễn điểm M trên mặt phẳng Oxy. Hỏi điểm nào dưới đây biểu diễn đúng số phức $\dfrac{1}{z}$.



Ⓐ P. Ⓑ N. Ⓒ Q. Ⓓ R.

CÂU 22. Tổng $S = \mathrm{C}_{2019}^0 - \mathrm{C}_{2019}^2 + \mathrm{C}_{2019}^4 - \mathrm{C}_{2019}^6 + \ldots - \mathrm{C}_{2019}^{2018}$ có giá trị bằng

Ⓐ 2^{1009}. Ⓑ -2^{2019}. Ⓒ 2^{2019}. Ⓓ -2^{1009}.

CÂU 23. Tổng $S = \mathrm{C}_{2020}^1 - \mathrm{C}_{2020}^3 + \mathrm{C}_{2020}^5 - \mathrm{C}_{2020}^7 + \ldots - \mathrm{C}_{2020}^{2019}$ có giá trị bằng

Ⓐ 0. Ⓑ -2^{1010}. Ⓒ 2^{2020}. Ⓓ 2^{1010}.

CÂU 24. Tổng $S = \mathrm{C}_{2019}^0 - 3\mathrm{C}_{2019}^2 + 3^2\mathrm{C}_{2019}^4 - 3^3\mathrm{C}_{2019}^6 + \ldots - 3^{1009}\mathrm{C}_{2019}^{2018}$ có giá trị bằng

Ⓐ 2^{2019}. Ⓑ 0. Ⓒ -2^{2019}. Ⓓ -2^{1009}.

CÂU 25. Cho $f(x)=\dfrac{(x+2)}{(x-1)(x^2+1)(x+3)}\equiv\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{x+3}+\dfrac{Cx+D}{x^2+1}$. Giá trị của $C+D$ bằng

(A) $\dfrac{3}{5}$. (B) $-\dfrac{7}{10}$. (C) 0. (D) $-\dfrac{9}{10}$.

CÂU 26. Ta có $f(x)=\dfrac{x^3+3}{(x+1)(x^2+1)(x^2+4)}\equiv\dfrac{A}{x+1}+\dfrac{Bx+C}{x^2+1}+\dfrac{Dx+E}{x^2+4}$. Giá trị của biểu thức $(D+E)$ bằng

(A) $\dfrac{4}{3}$. (B) $\dfrac{9}{5}$. (C) $-\dfrac{13}{15}$. (D) $\dfrac{7}{6}$.

CÂU 27. Cho số phức z thỏa mãn $(1-2i)z=(4+3i)(2-z)$. Giá trị $|z|$ bằng

(A) $\dfrac{5}{\sqrt{13}}$. (B) $\dfrac{5\sqrt{26}}{13}$. (C) $2\sqrt{3}$. (D) $\dfrac{5\sqrt{5}}{2}$.

CÂU 28. Cho số phức z khác 0, thỏa mãn $(1+2i)z^2=(4-3i)\cdot\bar{z}$. Giá trị $|z|$ bằng

(A) $\sqrt{5}$. (B) 1. (C) 2. (D) $\sqrt{3}$.

CÂU 29. Cho số phức z khác 0, thỏa mãn $(z+2i)(1-i)=i(3i+\bar{z})$. Phần thực của số phức z bằng

(A) $3\sqrt{5}$. (B) 3. (C) $2\sqrt{13}$. (D) 13.

CÂU 30. Tổng $S=1+i+i^2+\ldots+i^{2019}$ bằng

(A) 1. (B) i. (C) 0. (D) $-i$.

CÂU 31. Phần thực của số phức $z=1+2i+3i^2+\ldots+2020i^{2019}$ tương ứng bằng

(A) 1010. (B) 2020. (C) -2^{1010}. (D) -1010.

CÂU 32. Cho số phức $z=a+ib$ và $z^2=a_0+ib_0$ với $a>0$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $T=\dfrac{a_0+a+1}{a^2+1}$ tương ứng bằng

(A) 1. (B) 2. (C) $\dfrac{3}{2}$. (D) $\dfrac{5}{3}$.

CÂU 33. Cho số phức $z=a+ib$ và $z^2=a_0+ib_0$ với $a,b\in\mathbb{R}$. Khi biểu thức $T=\dfrac{a_0-2a+2}{a^2+1}$ đạt giá trị lớn nhất thì môđun của số phức z tương ứng bằng

(A) $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$. (B) $\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$. (C) $\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$. (D) $\dfrac{3}{2}$.

CÂU 34. Cho số phức $z=a+ib$ và $z^4=a_0+ib_0$ với $a,b\in\mathbb{R},a\neq 0$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=\dfrac{a_0}{a^4}$ tương ứng bằng

(A) 1. (B) -8. (C) 3. (D) -5.

CÂU 35. Cho số phức $z=a+ib$ với $a,b\in\mathbb{R},b\neq 0,|a|\leq|b|$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $T=\left|\dfrac{z^4-\overline{z^4}}{(z-\bar{z})^4}\right|$ tương ứng bằng

(A) $\dfrac{2}{3\sqrt{3}}$. (B) 1. (C) $\dfrac{3}{\sqrt{2}}$. (D) $\sqrt{3}$.

CÂU 36. Cho số phức z thỏa mãn phương trình $(2-3i)z=5+11i$. Phần thực của số phức z bằng

(A) $-\dfrac{23}{13}$. (B) $\dfrac{37}{13}$. (C) $\dfrac{23}{13}$. (D) $-\dfrac{23}{146}$.

CÂU 37. Cho số phức z thỏa mãn phương trình $(1-3i)(z-2i)-(3+i)z+3i=0$. Phần ảo của số phức z bằng

(A) $-\dfrac{2}{5}$. (B) $\dfrac{11}{10}$. (C) $-\dfrac{9}{5}$. (D) $\dfrac{13}{10}$.

CÂU 38. Số phức z thỏa mãn điều kiện $z=4+3\bar{z}$ có mô-đun bằng

(A) $\sqrt{5}$. (B) 2. (C) -2. (D) 4.

CÂU 39. Số phức z thỏa mãn điều kiện $z=-3+4\bar{z}$ có mô-đun bằng

(A) $\dfrac{\sqrt{34}}{5}$. (B) $\dfrac{7}{5}$. (C) $\dfrac{\sqrt{35}}{5}$. (D) $\dfrac{6}{5}$.

CÂU 40. Cho số phức z thỏa mãn phương trình $(1+i)(z+2-4i)=(3-2i)(4+5i)$. Giá trị của biểu thức $T=|z_1+z_2|$ bằng

QUICK NOTE

Ⓐ $\dfrac{33}{2}$. Ⓑ $\dfrac{\sqrt{1065}}{2}$. Ⓒ $\dfrac{\sqrt{1066}}{2}$. Ⓓ $5\sqrt{7}$.

CÂU 41. Cho số phức z thỏa mãn phương trình $i(z-1)+(2-i)\overline{z}=6$. Phần ảo của số phức z bằng

Ⓐ $\dfrac{5}{2}$. Ⓑ $-\dfrac{1}{2}$. Ⓒ $-\dfrac{5}{2}$. Ⓓ $\dfrac{1}{2}$.

CÂU 42. Cho số phức z thỏa mãn phương trình $\overline{iz-3i+4}=\overline{z+1}-2i+3$. Mô-đun của số phức z bằng

Ⓐ $\dfrac{5}{\sqrt{2}}$. Ⓑ $\sqrt{2}$. Ⓒ 3. Ⓓ 1.

CÂU 43. Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z|=0$?

Ⓐ 0. Ⓑ 2. Ⓒ 3. Ⓓ 1.

CÂU 44. Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn điều kiện $2z_1+(1-i)z_2=5-2i$; $iz_1+(1+i)z_2=3$. Giá trị của biểu thức $T=|z_1+z_2|$ bằng

Ⓐ $4\sqrt{14}$. Ⓑ $\dfrac{3\sqrt{130}}{4}$. Ⓒ $\dfrac{\sqrt{130}}{2}$. Ⓓ $3\sqrt{13}$.

CÂU 45. Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn điều kiện $z_1+(2+3i)z_2=1-3i$; $(1-i)z_1+(1+i)z_2=2$. Giá trị của biểu thức $T=|z_1+iz_2|$ bằng

Ⓐ $\sqrt{2}$. Ⓑ $\sqrt{3}$. Ⓒ 2. Ⓓ 1.

CÂU 46. Hỏi có bao nhiêu số phức z thỏa mãn phương trình $z^3-6z-3=0$?

Ⓐ 2. Ⓑ 3. Ⓒ vô số. Ⓓ 1.

CÂU 47. Hỏi có bao nhiêu số phức z có phần thực dương thỏa mãn phương trình $z^4-3z^2-4=0$?

Ⓐ 1. Ⓑ 2. Ⓒ 0. Ⓓ 3.

CÂU 48. Hỏi có bao nhiêu số phức z không thuần thực thỏa mãn phương trình $z^4-2z^2-3=0$?

Ⓐ 2. Ⓑ 3. Ⓒ 0. Ⓓ 4.

CÂU 49. Cho hai số phức z_1, z_2 là nghiệm của phương trình $z^2-2z+3=0$. Gọi A và B là hai điểm biểu diên số phức z_1 và z_2. Khoảng cách AB bằng

Ⓐ $2\sqrt{3}$. Ⓑ $4\sqrt{2}$. Ⓒ $2\sqrt{2}$. Ⓓ $4\sqrt{5}$.

CÂU 50. Cho bốn điểm A, B, C, D biểu diễn bốn nghiệm của phương trình $z^4-3z^2-4=0$. Tứ giác $ABCD$ có diện tích bằng

Ⓐ 4. Ⓑ 2. Ⓒ 8. Ⓓ 6.

CÂU 51. Cho số phức $z=\cos\varphi+i\sin\varphi$. Khi đó $\dfrac{1}{z}$ có argument bằng

Ⓐ $-\varphi$. Ⓑ φ. Ⓒ 2φ. Ⓓ $\dfrac{1}{\varphi}$.

CÂU 52. Cho số phức z không phần thực có $|z|=2$. Phần thực của $\dfrac{1}{2-z}$ bằng

Ⓐ $\dfrac{1}{4}$. Ⓑ $\dfrac{1}{2}$. Ⓒ 2. Ⓓ 1.

CÂU 53. Cho số phức z không phần ảo có $|z|=3$. Phần thực của số phức $\dfrac{1}{9+z^2}$ bằng

Ⓐ $\dfrac{1}{9}$. Ⓑ $\dfrac{1}{18}$. Ⓒ $\dfrac{1}{3}$. Ⓓ $\dfrac{1}{2}$.

CÂU 54. Cho số phức $|z|=1$. Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=|z^3+1|$ lần lượt là M và m. Giá trị của tổng $M+m$ tương ứng bằng

Ⓐ 1. Ⓑ 2. Ⓒ 3. Ⓓ $2\sqrt{3}$.

CÂU 55. Cho số phức $|z|=1$. Gọi giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=|z+1|+2|z^2+1|$ lần lượt là M và m. Giá trị của tổng $M+m$ tương ứng bằng

Ⓐ $2\sqrt{3}$. Ⓑ $6+\sqrt{2}$. Ⓒ $4+2\sqrt{3}$. Ⓓ 7.

CÂU 56. Cho số phức $|z|=1$. Gọi giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=|z-1|+|z^2-z+1|$ lần lượt là M và m. Giá trị tổng của $M+m$ tương ứng bằng

Ⓐ $\dfrac{25}{4}$. Ⓑ $\dfrac{45}{8}$. Ⓒ 6. Ⓓ 5.

CÂU 57. Cho số phức $|z| = 1$. Gọi giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |z^3 + 5z + \overline{z}| - |z + \overline{z}|$ lần lượt là M và m. Giá trị tổng của $M + m$ tương ứng bằng

Ⓐ $\dfrac{21}{2}$. Ⓑ 7. Ⓒ $4 + \sqrt{3}$. Ⓓ $\dfrac{31}{4}$.

CÂU 58. Cho phương trình $(a - 2 + i)z + (2ai + z)i = 0$, a là một số phức. Hãy tính $|a|$ biết rằng phương trình vô nghiệm.

Ⓐ $\sqrt{5}$. Ⓑ 1. Ⓒ $\sqrt{2}$. Ⓓ $\sqrt{3}$.

CÂU 59. Cho phương trình $(a - 3 + 2i)z + 2(ai - z) = b + 3i$, a va2 b là các tham số thực. Hãy tính $|a + bi|$ biết rằng phương trình đã cho có vô số nghiệm.

Ⓐ 4. Ⓑ $2\sqrt{2}$. Ⓒ $4\sqrt{2}$. Ⓓ $2\sqrt{3}$.

Dạng 2. Chuẩn hóa số phức

1. Ví dụ

VÍ DỤ 1. Cho số phức $z_1 \neq 0$, $z_2 \neq 0$ thỏa mãn $|z_1| = |z_2| = |z_1 - z_2|$. Tính giá trị của biểu thức

$$P = \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^4 + \left(\frac{z_2}{z_1}\right)^4.$$

2. Bài tập áp dụng

BÀI 1. Cho hai số phức z_1 và z_2 thỏa mãn $|z_1| = 3$, $|z_2| = 4$, $|z_1 - z_2| = \sqrt{37}$. Biết số phức $z = \dfrac{z_1}{z_2} = a + bi$. Tìm $|b|$.

Ⓐ $|b| = \dfrac{3}{8}$. Ⓑ $|b| = \dfrac{\sqrt{3}}{8}$. Ⓒ $|b| = \dfrac{3\sqrt{3}}{8}$. Ⓓ $|b| = \dfrac{8}{3}$.

BÀI 2. Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1| = 2$, $|z_2| = \sqrt{2}$. Gọi M, N lần lượt là điểm biểu diễn số phức z_1 và iz_2. Biết rằng $\widehat{MON} = 45^\circ$ với O là gốc tọa độ. Tính $\left|z_1^2 + 4z_2^2\right|$.

Ⓐ $4\sqrt{2}$. Ⓑ 4. Ⓒ 6. Ⓓ $4\sqrt{5}$.

BÀI 3. Cho ba số phức z_1, z_2, z_3 thỏa mãn $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ và $z_1 + z_2 + z_3 = 0$. Tính giá trị của biểu thức $P = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2$.

Ⓐ $P = -1$. Ⓑ $P = 0$. Ⓒ $P = 1$. Ⓓ $P = 2$.

QUICK NOTE

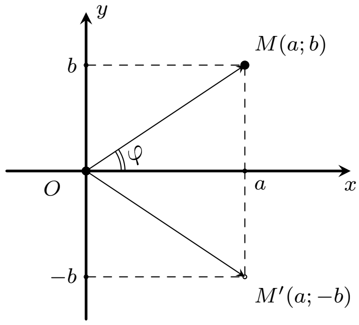
QUICK NOTE

Bài 2. BIỂU DIỄN HÌNH HỌC CỦA SỐ PHỨC VÀ BÀI TOÁN LIÊN QUAN

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

a) Điểm $M(a;b)$ trong hệ trục tọa độ vuông góc của mặt phẳng được gọi là điểm biểu diễn số phức $z = a + bi$.

b) Các điểm $M(a;b)$ và $M'(a;-b)$ biểu diễn số phức $z = a + bi$ và $\overline{z} = a - bi$.



$\tan\varphi = \dfrac{b}{a}$.

Nhận xét. Vì điểm biểu diễn của số phức $z = a + bi$ là $M(a;b)$ hay $\overrightarrow{OM} = (a;b)$. Do đó cần nhớ những kiến thức cơ bản về véctơ, hệ trục Oxy và hệ thức lượng trong tam giác. Cho ham giác ABC, hai véctơ $\vec{a} = (a_1;a_2)$, $\vec{b} = (b_1;b_2)$ và R, r, p lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp và nửa chu vi tam giác ABC.

a) Các phép toán cơ bản trên vectơ:

- Quy tắc ba điểm: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$.
- Quy tắc đường chéo hình bình hành $ABCD$: $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.

b) $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A) \Rightarrow AB = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.

c) M là trung điểm của $AB \Rightarrow x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2}$ và $y_M = \dfrac{y_A + y_B}{2}$.
G là trọng tâm tam giác $ABC \Rightarrow x_G = \dfrac{x_A + x_B + x_C}{3}$ và $y_G = \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3}$.

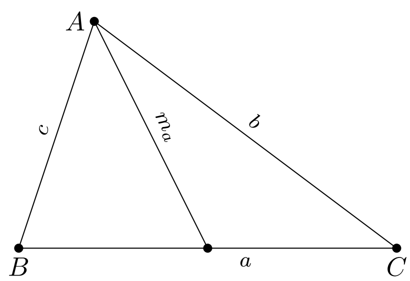
d) Hai vectơ bằng nhau: $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2 \end{cases}$.

e) Hai vectơ cùng phương $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} = k.\vec{b} \Leftrightarrow \dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_2}{b_2}$ $(b_1,\ b_2 \neq 0)$.

f) Tích vô hướng $\vec{a}.\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 = |\vec{a}|.\left|\vec{b}\right|\cos\left(\vec{a}, \vec{b}\right) \Rightarrow \begin{cases} \vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}.\vec{b} = 0 \\ \cos\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = \dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.\left|\vec{b}\right|} \end{cases}$

g) Định lí hàm sin: $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R$.

h) Định lí hàm cos: $\begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos A \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2ac.\cos B \\ c^2 = b^2 + a^2 - 2ab.\cos C \end{cases}$.



i) Công thức trung tuyến: $\begin{cases} m_a^2 = \dfrac{2\left(b^2+c^2\right)-a^2}{4} \\ m_b^2 = \dfrac{2\left(a^2+c^2\right)-b^2}{4} \\ m_c^2 = \dfrac{2\left(b^2+a^2\right)-c^2}{4}. \end{cases}$

j) Diện tích: $S = \dfrac{1}{2}ah_a = \dfrac{1}{2}bc\sin A = \dfrac{abc}{4R} = pr = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$; $p = \dfrac{a+b+c}{2}$: nửa chu vi.

<u>Bài toán:</u> Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, hãy tìm tập hợp các điểm $M(x;y)$ biểu diễn số phức $z = x + yi$ thỏa mãn điều kiện cho trước.

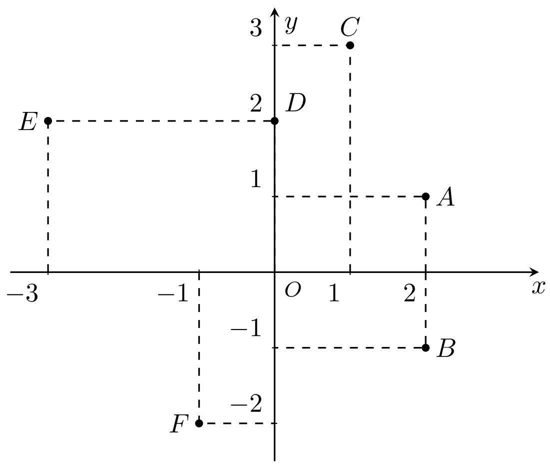
- Bước 1: Gọi $M(x;y)$ biểu diễn số phức $z = x + yi$ (với $x, y \in \mathbb{R}$)
- Bước 2 : Biến đổi điều kiện K để tìm mối liên hệ giữa x, y và kết luận.

Mối liên hệ giữa x và y	**Kết luận tập hợp điểm $M(x;y)$**
$\circ Ax + By + C = 0$	Là đường thẳng d: $Ax + By + C = 0$.
$\circ (x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$	Là đường tròn (C) có tâm $I(a;b)$ và bán kính R.
$\circ x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0$	Là đường tròn (C) có tâm $I(-a;-b)$ và bán kính $R = \sqrt{a^2+b^2-c}$.
$\circ (x-a)^2 + (y-b)^2 \le R^2$	Là hình tròn (C) có tâm $I(a;b)$ và bán kính R.
$\circ x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c \le 0$	Là hình tròn (C) có tâm $I(-a;-b)$ và bán kính $R = \sqrt{a^2+b^2-c}$.
$\circ R_1^2 \le (x-a)^2 + (y-b)^2 \le R_2^2$	Là hình vành khăn tạo bởi hai đường tròn đồng tâm $I(a;b)$ và bán kính R_1 và R_2.
$\circ y = ax^2 + bx + c$	Là Parabol (P) có đỉnh $I\left(-\dfrac{b}{2a}; -\dfrac{\Delta}{4a}\right)$.
$\circ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ với $\begin{cases} MF_1 + MF_2 = 2a \\ F_1F_2 = 2c < 2a \end{cases}$	Là đường Elip (E) có trục lớn $2a$, trục nhỏ $2b$ và tiêu cự $2c = 2\sqrt{a^2-b^2}$.
$\circ \left\|\overrightarrow{MA}\right\| = \left\|\overrightarrow{MB}\right\|$	Là đường trung trực của đoạn AB.

B. BÀI TẬP VẬN DỤNG

Dạng 3. Bài toán xác định điểm biểu diễn số phức cơ bản và bài toán liên quan

CÂU 1. Quan sát hình vẽ bên cạnh, ta có:
Điểm $A(2;1)$ biểu diễn cho số phức $z_1 = 2 + i$.
Điểm $B(\ldots;\ldots)$ biểu diễn cho số phức $z_2 = \ldots$.
Điểm $C(\ldots;\ldots)$ biểu diễn cho số phức $z_3 = \ldots$.
Điểm $D(\ldots;\ldots)$ biểu diễn cho số phức $z_4 = \ldots$.
Điểm $E(\ldots;\ldots)$ biểu diễn cho số phức $z_5 = \ldots$.
Điểm $F(\ldots;\ldots)$ biểu diễn cho số phức $z_6 = \ldots$.



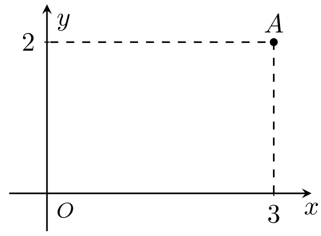
Số phức $z_1 = 2 + i$ và số phức liên hợp $\overline{z}_1 = z_2 = 2 - i$ có điểm biểu diễn trên mặt phẳng tọa độ Oxy là A và B đối xứng nhau qua trục Ox.

CÂU 2. Điểm A trong hình vẽ dưới đây là điểm biểu diễn của số phức z.

QUICK NOTE

QUICK NOTE

Tìm phần thực và phần ảo của số phức $\overline{z}$.



(A) Phần thực là -3 và phần ảo là $2i$.
(B) Phần thực là 3 và phần ảo là -2.
(C) Phần thực là 3 và phần ảo là $-2i$.
(D) Phần thực là -3 và phần ảo là -2.

CÂU 3. Cho số phức $z = 2 - i$. Trên mặt phẳng tọa độ, tìm điểm biểu diễn số phức $w = iz$.

(A) $M(-1; 2)$. (B) $N(2; -1)$. (C) $P(2; 1)$. (D) $Q(1; 2)$.

CÂU 4. Cho số phức z thỏa mãn $2i + z(1-i) = i(3-i)$. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, điểm nào dưới đây là điểm biểu diễn số phức z.

(A) $M_3(1; 0)$. (B) $M_1(0; 1)$. (C) $M_4(0; 2)$. (D) $M_2(0; -1)$.

CÂU 5. Cho số phức $z = 3 - 2i$. Tìm điểm biểu diễn của số phức $w = z + i \cdot \overline{z}$.

(A) $A(1; -5)$. (B) $M(5; -5)$. (C) $M(1; 1)$. (D) $M(5; 1)$.

CÂU 6. Điểm $M(x_0; y_0)$ biểu diễn của số phức z thỏa $(1+i)z + (2+i)\overline{z} = 3 + i$. Tính $2x_0 + 3y_0$.

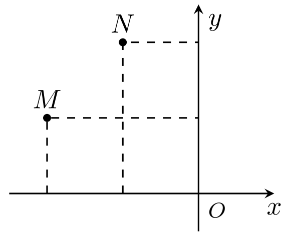
(A) -1. (B) 8. (C) 5. (D) 1.

CÂU 7. Cho hai số phức $z_1 = 1 - 3i$, $z_2 = -4 - 6i$ có các điểm biểu diễn trong mặt phẳng tọa độ lần lượt là M, N. Gọi z là số phức mà có điểm biểu diễn là trung điểm đoạn MN. Tính mô-đun của số phức z.

(A) $|z| = 3\sqrt{10}$. (B) $|z| = \dfrac{2\sqrt{10}}{3}$. (C) $|z| = \sqrt{10}$. (D) $|z| = \dfrac{3\sqrt{10}}{2}$.

CÂU 8. Gọi M và N lần lượt là điểm biểu diễn của các số phức z_1, z_2 như hình bên dưới. Hỏi khẳng định nào sau đây **sai**?

(A) $|z_1 - z_2| = MN$. (B) $|z_1| = OM$.
(C) $|z_2| = ON$. (D) $|z_1 + z_2| = MN$.



CÂU 9. Gọi M là điểm biểu diễn số phức $z_1 = 3 - 4i$ và điểm N là điểm biểu diễn số phức $z_2 = \dfrac{1}{2}(1+i)\,z_1$. Tính diện tích S của tam giác OMN với O là gốc tọa độ.

(A) $S = \dfrac{15}{2}$. (B) $S = \dfrac{25}{4}$. (C) $S = \dfrac{25}{2}$. (D) $S = \dfrac{31}{4}$.

Cần nhớ: *Tính diện tích* $\triangle ABC : \begin{cases} \overrightarrow{AB} = (a; b) \\ \overrightarrow{AC} = (c; d) \end{cases} \Rightarrow S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{2}\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \dfrac{1}{2}|ad - bc|$.

CÂU 10. Trong mặt phẳng phức cho 3 điểm lần lượt là điểm biểu diễn của số phức $z_1 = 1 + i$, $z_2 = (1+i)^2$, $z_3 = m - i$. Tìm tham số m để tam giác ABC vuông tại B.

(A) $m = 3$. (B) $m = -2$. (C) $m = -3$. (D) $m = 2$.

CÂU 11. Trong mặt phẳng phức, gọi A, B, C lần lượt là điểm biểu diễn của các số phức $z_1 = 3 + 2i$, $z_2 = 3 - 2i$, $z_3 = -3 - 2i$. Hỏi khẳng định nào sau đây là **sai**?

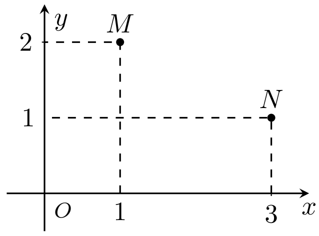
(A) B và C đối xứng nhau qua trục tung.
(B) Trọng tâm của tam giác ABC là điểm $G\left(1; \dfrac{2}{3}\right)$.
(C) A và B đối xứng nhau qua trục hoành.
(D) A, B, C nằm trên đường tròn tâm là gốc tọa độ và bán kính bằng $\sqrt{13}$.

CÂU 12. Cho $ABCD$ là hình bình hành với A, B, C lần lượt là các điểm biểu diễn các số phức $1 - i$, $2 + 3i$, $3 + i$. Tìm số phức z có điểm biểu diễn là D.

(A) $z = 2 - 3i$. (B) $z = 4 + 5i$. (C) $z = 4 + 3i$. (D) $z = 2 + 5i$.

CÂU 13.

Cho hai điểm M, N trong mặt phẳng phức như hình vẽ, gọi P là điểm sao cho $OMNP$ là hình bình hành. Hỏi điểm P biểu thị cho số phức nào sau đây?



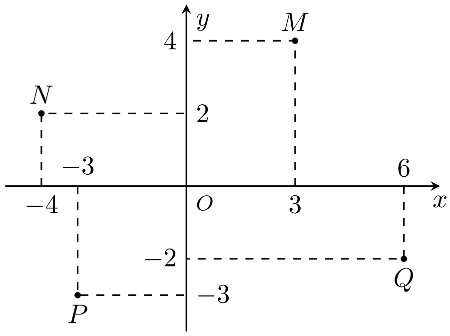
(A) $z_4 = 3 - 3i$. (B) $z_3 = -2 + i$.
(C) $z_2 = 4 + i$. (D) $z_1 = 2 - i$.

CÂU 14. Trong mặt phẳng phức, gọi A, B, C lần lượt là các điểm biểu diễn các số phức $z_1 = (1 - i) \cdot (2 + i)$, $z_2 = 1 + 3i$, $z_3 = -1 - 3i$. Hỏi khẳng định nào sau đây đúng?

(A) Tam giác ABC là tam giác vuông nhưng không cân.
(B) Tam giác ABC là tam giác cân nhưng không đều, không vuông.
(C) Tam giác ABC là tam giác vuông cân.
(D) Tam giác ABC là tam giác đều.

CÂU 15.

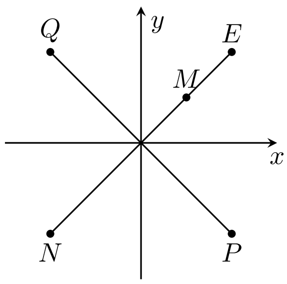
Cho số phức z thỏa $|z| = 2\sqrt{10}$. Hỏi điểm biểu diễn của z là điểm nào trong hình?



(A) Điểm P. (B) Điểm M.
(C) Điểm N. (D) Điểm Q.

CÂU 16.

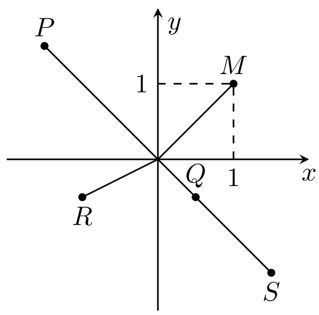
Trong mặt phẳng tọa độ, điểm M là điểm biểu diễn số phức z. Điểm nào trong hình vẽ là điểm biểu diễn của số phức $2z$?



(A) Điểm N. (B) Điểm Q. (C) Điểm E. (D) Điểm P.

CÂU 17.

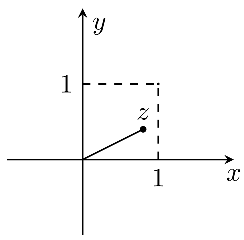
Cho số phức z có điểm biểu diễn là M. Biết số phức $w = \dfrac{1}{z}$ được biểu diễn bởi một trong bốn điểm P, Q, R, S như hình vẽ. Hỏi điểm biểu diễn của w là điểm nào?



(A) Điểm S. (B) Điểm Q. (C) Điểm P. (D) Điểm R.

CÂU 18.

Số phức z được biểu diễn trên mặt phẳng tọa độ như hình vẽ. Hỏi điểm biểu diễn của số phức $w = \dfrac{i}{\overline{z}}$ nằm ở góc phần tư thứ mấy trong hệ trục tọa độ Oxy?



(A) Thứ nhất. (B) Thứ hai. (C) Thứ ba. (D) Thứ tư.

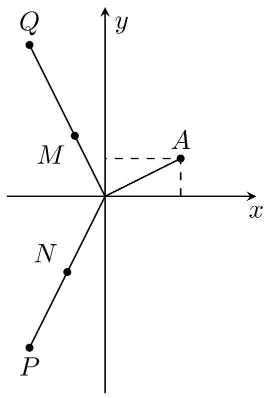
CÂU 19.

QUICK NOTE

QUICK NOTE

Cho số phức z thỏa $|z| = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ và điểm A trong hình vẽ bên là điểm biểu diễn của z. Biết trong hình vẽ, điểm biểu diễn của số phức $w = \dfrac{1}{iz}$ là một trong bốn điểm M, N, P, Q. Khi đó điểm biểu diễn của số phức w là điểm nào sau đây?

(A) Điểm Q. (B) Điểm M. (C) Điểm N. (D) Điểm P.



CÂU 20. Trên mặt phẳng phức, gọi M là điểm biểu diễn số phức $z = (2-3i)\cdot(1+i)$ và φ là góc tạo bởi chiều dương trục hoành và véc-tơ $\overrightarrow{OM}$. Tính $\sin 2\varphi$.

(A) $\sin 2\varphi = -\dfrac{5}{13}$. (B) $\sin 2\varphi = \dfrac{5}{13}$. (C) $\sin 2\varphi = \dfrac{13}{5}$. (D) $\sin 2\varphi = -\dfrac{13}{5}$.

CÂU 21. Trên mặt phẳng phức, gọi M là điểm biểu diễn số phức $z = (2+i)^2\cdot(4-i)$ và gọi φ là góc tạo bởi chiều dương trục hoành và véc-tơ $\overrightarrow{OM}$. Tính $\cos 2\varphi$.

(A) $\cos 2\varphi = -\dfrac{87}{475}$. (B) $\cos 2\varphi = \dfrac{87}{475}$. (C) $\cos 2\varphi = -\dfrac{87}{425}$. (D) $\cos 2\varphi = \dfrac{87}{425}$.

CÂU 22. Cho A, B, C, D là bốn điểm trong mặt phẳng tọa độ theo thứ tự biểu diễn các số phức $1+2i, 1+\sqrt{3}+i$, $1+\sqrt{3}-i, 1-2i$. Biết $ABCD$ là tứ giác nội tiếp đường tròn tâm I, bán kính R. Hỏi tọa độ điểm I biểu diễn số phức nào sau đây?

(A) $z = \sqrt{3}$. (B) $z = 1 - i\sqrt{3}$. (C) $z = 1$. (D) $z = -1$.

CÂU 23. Cho hai số phức z_0, z_1 khác 0 thỏa mãn $z_0^2 - z_0z_1 + z_1^2 = 0$. Gọi A, B lần lượt là các điểm biểu diễn cho số phức z_0, z_1. Hỏi tam giác OAB là tam giác gì?

(A) Tam giác đều. (B) Tam giác vuông tại O.
(C) Tam giác tù. (D) Tam giác có một góc bằng $45°$.

CÂU 24. Xét số phức z và số phức liên hợp của nó có điểm biểu diễn là M, M'. Số phức $z(4+3i)$ và số phức liên hợp của nó có điểm biểu diễn lần lượt là N, N'. Biết rằng $MM'N'N$ là một hình chữ nhật. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |z + 4i - 5|$.

(A) $\min P = \dfrac{5}{\sqrt{34}}$. (B) $\min P = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$. (C) $\min P = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. (D) $\min P = \dfrac{4}{\sqrt{13}}$.

CÂU 25. Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1| = 2, |z_2| = \sqrt{3}$ và nếu gọi M, N lần lượt là điểm biểu diễn của z_1, iz_2 thì $\widehat{MON} = 30°$. Tính $P = \left|z_1^2 + 4z_2^2\right|$.

(A) $P = \sqrt{5}$. (B) $P = 4\sqrt{7}$. (C) $P = 3\sqrt{3}$. (D) $P = 5\sqrt{2}$.

Dạng 4. Tập hợp điểm của số phức là đường thẳng và các bài toán liên quan

BÀI 4. a) Cho số phức z thỏa mãn $|z - (1+i)| = |z + 2i|$. Tập hợp các điểm biểu diễn số phức $w = (3-4i)z - 1$ trên mặt phẳng tọa độ là một đường thẳng. Viết phương trình đường thẳng đó.

b) Cho các số phức z thỏa mãn $|z - 2 - i| = |\bar{z} + 2i|$. Tập hợp các điểm biểu diễn số phức $w = (1+i)z - 2$ trên mặt phẳng tọa độ là một đường thẳng. Viết phương trình đường thẳng đó.

BÀI 5. Cho số phức z thỏa mãn $2|z - 2 + 3i| = |2i - 1 - 2\bar{z}|$. Tập hợp các điểm M biểu diễn số phức z trong mặt phẳng tọa độ Oxy là đường thẳng có phương trình nào sau đây?

(A) $20x - 16y - 47 = 0$. (B) $20x + 16y - 47 = 0$.
(C) $20x - 16y + 47 = 0$. (D) $20x + 16y + 47 = 0$.

CÂU 1. Tìm tập hợp điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $|z| = |\bar{z} - 2 + 3i|$.

(A) Đường thẳng $d\colon 4x - 6y + 13 = 0$. (B) Đường thẳng $d\colon 4x + 6y - 13 = 0$.
(C) Đường thẳng $d\colon 6x - 4y - 13 = 0$. (D) Đường thẳng $d\colon 6x - 4y + 13 = 0$.

CÂU 2. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, tìm tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $z(1+i)$ là số thực.

(A) Trục Oy. (B) Trục Oz. (C) $y=-x$. (D) $y=x$.

CÂU 3. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, tìm tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn điều kiện $w=z(2+3i)+5-i$ là số thuần ảo.

(A) Đường thẳng $2x-3y+1=0$. (B) Đường thẳng $2x-3y+5=0$.

(C) Đường thẳng $3x+2y+1=0$. (D) Đường thẳng $3x+2y-1=0$.

CÂU 4. Tìm tất cả các số phức z thỏa mãn $|z-2i|=\sqrt{5}$ và điểm biểu diễn số phức z thuộc đường thẳng $d\colon 3x-y+1=0$.

(A) $z=1-4i$. (B) $z=1+4i$ hoặc $z=-\frac{2}{5}-\frac{1}{5}i$.

(C) $z=-1-2i$ hoặc $z=\frac{2}{5}+\frac{11}{5}i$. (D) $z=-\frac{2}{5}+\frac{1}{5}i$.

CÂU 5. Cho số phức z thỏa mãn $|z-i|=|z-1+2i|$. Tập hợp các điểm biểu diễn số phức $w=(2-i)z+1$ trên mặt phẳng tọa độ là một đường thẳng. Viết phương trình đường thẳng đó.

(A) $x-7y-9=0$. (B) $x+7y-9=0$. (C) $x+7y+9=0$. (D) $x-7y+9=0$.

NHẬN XÉT. Bài toán cho z, yêu cầu tìm tập hợp điểm biểu diễn w (loại gián tiếp) thường ta sẽ gọi $w=x+yi$, sau đó biểu thị z theo x, y sẽ tìm được tập hợp điểm.

CÂU 6. Cho tất cả các số phức $z=x+yi$ $(x,y\in\mathbb{R})$ thỏa mãn $|z+2i-1|=|z+i|$. Biết z được biểu diễn bởi điểm M sao cho MA ngắn nhất với $A(1;3)$. Tìm $P=2x+3y$.

(A) $P=9$. (B) $P=11$. (C) $P=-3$. (D) $P=5$.

CÂU 7. Cho hai số phức $z_1=1+3i$ và $z_2=-5-3i$. Tìm điểm $M(x;y)$ biểu diễn số phức z_3, biết rằng trong mặt phẳng phức điểm M nằm trên đường thẳng $x-2y+1=0$ và mô-đun số phức $w=3z_3-z_2-2z_1$ đạt giá trị nhỏ nhất.

(A) $M\left(-\frac{3}{5};-\frac{1}{5}\right)$. (B) $M\left(\frac{3}{5};-\frac{1}{5}\right)$. (C) $M\left(\frac{3}{5};\frac{1}{5}\right)$. (D) $M\left(-\frac{3}{5};\frac{1}{5}\right)$.

Dạng 5. Tập hợp điểm của số phức là đường tròn, hình tròn, hình vành khăn

BÀI 6. a) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, tìm tập hợp những điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn điều kiện $|z-(3-4i)|=2$.

b) Cho số phức z thỏa mãn $|z+2|=5$. Biết rằng tập hợp điểm biểu diễn của số phức $w=(1-2i)z+3$ là một đường tròn tâm I và bán kính R. Tìm I và R.

c) Cho số phức z thỏa mãn $(2+i)\,|z|=\dfrac{\sqrt{10}}{z}+1-2i$. Biết tập hợp điểm biểu diễn của số phức $w=(3-4i)z-1+2i$ là một đường tròn tâm I và bán kính R. Tìm I và R.

d) Hãy xác định tập hợp các điểm trong mặt phẳng phức biểu diễn các số phức z thỏa mãn $1<|z-1|<2$.

CÂU 1. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, tìm tập hợp những điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn điều kiện $|z-i|=|(1+i)z|$.

(A) $x^2+(y-1)^2=4$. (B) $(x-1)^2+y^2=4$.

(C) $x^2+(y+1)^2=2$. (D) $(x+1)^2+y^2=2$.

Cần nhớ những kiến thức cơ bản về đường tròn trong mặt phẳng tọa độ Oxy.

a) Để viết phương trình đường tròn ta cần tìm tâm $I(a;b)$ và bán kính R.

Dạng 1 Đường tròn (C) có phương trình $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$.

Dạng 2 Đường tròn (C) có phương trình $x^2+y^2-2ax-2by+c=0$, với $R=\sqrt{a^2+b^2-c}$.

b) Chu vi đường tròn $p=2\pi R$ và diện tích hình tròn $S=\pi R^2$.

QUICK NOTE

QUICK NOTE

CÂU 2. Trong mặt phẳng phức, tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $|z-3+5i|=4$ là một đường tròn. Tính chu vi p của đường tròn đó.

(A) $p=4\pi$. (B) $p=2\pi$. (C) $p=8\pi$. (D) $p=16\pi$.

CÂU 3. Cho số phức z thỏa mãn $(z+1)(\bar{z}-2i)$ là một số thuần ảo. Tập hợp điểm biểu diễn số phức z là một đường tròn có diện tích S bằng bao nhiêu?

(A) $S=5\pi$. (B) $S=\dfrac{5\pi}{4}$. (C) $S=\dfrac{5\pi}{2}$. (D) $S=25\pi$.

CÂU 4. Cho số phức z thỏa mãn $|z-1|=2$. Biết rằng tập hợp điểm biểu diễn số phức $w=2z-i$ là một đường tròn tâm I và bán kính R. Tìm khẳng định **đúng**.

(A) $I(2;-1)$, $R=2$. (B) $I(2;1)$, $R=4$. (C) $I(2;-1)$, $R=4$. (D) $I(-2;1)$, $R=2$.

CÂU 5. Cho số phức z thỏa mãn $|z-1|=1$. Biết rằng tập hợp điểm biểu diễn số phức $w=(1+i\sqrt{3})z+2$ là một đường tròn tâm I và bán kính R. Tìm khẳng định **đúng**.

(A) $I(3;\sqrt{3})$, $R=4$.
(B) $I(3;\sqrt{3})$, $R=2$.
(C) $I(3;-\sqrt{3})$, $R=4$.
(D) $I(-3;\sqrt{3})$, $R=2$.

CÂU 6. Cho số phức z thỏa mãn $|z-1+2i|=3$. Biết tập hợp điểm biểu diễn số phức $w=\bar{z}+1-i$ là một đường tròn tâm I và bán kính R. Tìm khẳng định **đúng**.

(A) $I(2;1)$, $R=3$. (B) $I(1;2)$, $R=\sqrt{3}$. (C) $I(2;1)$, $R=4$. (D) $I(1;2)$, $R=5$.

CÂU 7. Cho số phức z thỏa mãn $|z+1|^2=\dfrac{z\bar{z}}{2}$. Biết rằng tập hợp điểm biểu diễn số phức $w=(1+2i)z+1$ là một đường tròn tâm I và bán kính R. Tìm I và R.

(A) $I(0;-2)$, $R=\sqrt{5}$.
(B) $I(1;-4)$, $R=\sqrt{10}$.
(C) $I(0;2)$, $R=\sqrt{5}$.
(D) $I(-1;-4)$, $R=\sqrt{10}$.

CÂU 8. Cho số phức z thỏa mãn $(1-i)\,|\bar{z}|=\dfrac{2\sqrt{3}}{z}+1+i$. Biết rằng tập hợp điểm biểu diễn số phức $w=iz-1+i$ là một đường tròn tâm I và bán kính R. Tìm khẳng định **đúng**.

(A) $I(-1;1)$, $R=\sqrt{2}$.
(B) $I(1;1)$, $R=\sqrt{2}$.
(C) $I(1;1)$, $R=2$.
(D) $I(-1;1)$, $R=2$.

CÂU 9. Cho số phức z thỏa mãn $(3-7i)\,|z|=\dfrac{176-82i}{\bar{z}}+7+3i$. Biết tập hợp điểm biểu diễn số phức $w=(1+i)z+2-i$ là một đường tròn tâm I và bán kính R. Tìm I và R.

(A) $I(2;-1)$, $R=5$.
(B) $I(2;1)$, $R=5$.
(C) $I(2;-1)$, $R=5\sqrt{2}$.
(D) $I(2;1)$, $R=5\sqrt{2}$.

CÂU 10. Cho số phức z thỏa mãn $|3z+i|^2\le z\cdot\bar{z}+9$. Tìm tập hợp điểm biểu diễn số phức w thỏa mãn $w=\bar{z}+1-i$.

(A) Hình tròn $(x-1)^2+\left(y+\dfrac{5}{8}\right)^2\le\dfrac{73}{64}$.
(B) Đường tròn $(x-1)^2+\left(y+\dfrac{5}{8}\right)^2\le\dfrac{73}{64}$.
(C) Đường tròn $(x-1)^2+(y+3)^2\le 9$.
(D) Hình tròn $(x-1)^2+(y+3)^2\le 9$.

CÂU 11. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, tìm tập hợp các điểm M biểu diễn số phức w thỏa mãn $w=(1+i\sqrt{3})z+2$ với $|z-1|\le 2$.

(A) Hình tròn $x^2+(y-1)^2\le 4$.
(B) Hình tròn $(x-3)^2+(y-\sqrt{3})^2\le 16$.
(C) Hình tròn $x^2+(y-1)^2=16$.
(D) Hình tròn $(x-3)^2+(y-\sqrt{3})^2=4$.

CÂU 12. Tập hợp các điểm biểu diễn số phức $w=(1+i)z+1$ với z là số phức thỏa mãn $|z-1|\le 1$ là hình tròn. Tính diện tích S của hình tròn đó.

(A) $S=4\pi$. (B) $S=2\pi$. (C) $S=3\pi$. (D) $S=\pi$.

CÂU 13. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, tập hợp các điểm M biểu diễn số phức w thỏa mãn $w=\bar{z}+1-i$ với $|2z+i|^2\le 3z\bar{z}+1$ là một hình tròn. Tìm tâm I và bán kính R.

(A) $I(1;-1)$, $R=2$.
(B) $I(1;1)$, $R=2$.
(C) $I(-1;-1)$, $R=2$.
(D) $I(1;1)$, $R=4$.

CÂU 14. Trong mặt phẳng phức Oxy, tập hợp biểu diễn số phức z thỏa mãn $1\le|z+1-i|\le 2$ là hình vành khăn. Tính chu vi P của hình vành khăn.

(A) $P=4\pi$. (B) $P=\pi$. (C) $P=2\pi$. (D) $P=3\pi$.

CÂU 15. Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $3 \le |z - 3i + 1| \le 5$. Tập hợp các điểm biểu diễn số phức z tạo thành một hình phẳng. Tính diện tích S của hình phẳng đó.

(A) $S = 25\pi$. (B) $S = 8\pi$. (C) $S = 4\pi$. (D) $S = 16\pi$.

CÂU 16. Gọi (H) là tập hợp các điểm trong mặt phẳng tọa độ Oxy biểu diễn số phức $z = x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$ thỏa mãn điều kiện $x^2 + y^2 \le 1 \le x - y$. Tính diện tích hình H.

(A) $\dfrac{3\pi}{4} + \dfrac{1}{2}$. (B) $\dfrac{\pi}{4}$. (C) $\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{1}{2}$. (D) 1.

Dạng 6. Tập hợp điểm của số phức là elíp

Định nghĩa 2.1. Cho hai điểm cố định F_1 và F_2 với $F_1F_2 = 2c > 0$. Đường elíp là tập hợp các điểm M sao cho $MF_1 + MF_2 = 2a$ $(a > c)$. Hai điểm F_1, F_2 được gọi là các tiểu điểm của elíp. Khoảng cách $2c$ được gọi là tiêu cự của elíp.

Phương trình chính tắc của elíp $(E): \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

Các thông số cần nhớ:

- *Trục lớn* $A_1A_2 = 2a$.
- *Trục bé* $B_1B_2 = 2b$.
- *Tiêu cự* $F_1F_2 = 2c$.
- *Mối liên hệ* $a^2 = b^2 + c^2$.
- *Bán kính qua tiêu của M là* $MF_1 = a + \dfrac{c}{a}x$, $MF_2 = a - \dfrac{c}{a}x$.

CÂU 1. Biết tập hợp các điểm M biểu diễn hình học số phức z thỏa mãn $|z+4| + |z-4| = 10$ là một elíp (E). Hãy viết phương trình elíp đó.

(A) $(E): \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{25} = 1$. (B) $(E): \dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$.

(C) $(E): \dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} = 1$. (D) $(E): \dfrac{x^2}{5} + \dfrac{y^2}{3} = 1$.

CÂU 2. Biết tập hợp các điểm M biểu diễn hình học số phức z thỏa mãn $|z-2| + |z+2| = 10$ là một elíp (E). Hãy viết phương trình elíp đó.

(A) $(E): \dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} = 1$. (B) $(E): \dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{21} = 1$.

(C) $(E): \dfrac{x^2}{21} + \dfrac{y^2}{16} = 1$. (D) $(E): \dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} = 1$.

CÂU 3. Biết tập hợp các điểm M biểu diễn hình học số phức z thỏa mãn $|z-1| + |z+1| = 4$ là một elíp (E). Hãy viết phương trình elíp đó.

(A) $(E): \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$. (B) $(E): \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{3} = 1$.

(C) $(E): \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{3} = 1$. (D) $(E): \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{2} = 1$.

CÂU 4. Biết tập hợp các điểm M biểu diễn hình học số phức z thỏa mãn $\left|z - \sqrt{2}\right| + \left|z + \sqrt{2}\right| = 8$ là một elíp (E). Hãy viết phương trình elíp đó.

(A) $(E): \dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{13} = 1$. (B) $(E): \dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{14} = 1$.

(C) $(E): \dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{12} = 1$. (D) $(E): \dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{15} = 1$.

Dạng 7. Bài toán liên quan đến giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất

Đối với nhóm bài toán tập hợp điểm biểu diễn số phức là một đường tròn thì việc lượng giác hóa tỏ ra khá hiệu quả và nhanh chóng.

Giả sử có được giả thiết $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2 \Leftrightarrow \left(\dfrac{x-a}{R}\right)^2 + \left(\dfrac{y-b}{R}\right)^2 = 1$, sẽ gợi ta đến công thức $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$ nên ta đặt $\begin{cases} \dfrac{x-a}{R} = \sin t \\ \dfrac{y-b}{R} = \cos t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = R\sin t + a \\ y = R\cos t + b \end{cases}$ để đưa bài toán về dạng lượng giác quen thuộc. Ngoài ra, ta cần nhớ những đánh giá thường được sử dụng

- $-1 \le \sin t \le 1,\ -1 \le \cos t \le 1$ *và* $a\sin t + b\cos t = \sqrt{a^2+b^2}\sin(t+\alpha)$.
- *Bất đẳng thức Cauchy-Schwarz dạng 1:* $|ax+by| \le \sqrt{(a^2+b^2)(x^2+y^2)}$.
- $a\sin t + b\cos t \le \sqrt{(a^2+b^2)(\sin^2 t + \cos^2 t)} = \sqrt{a^2+b^2}$.

  Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} \dfrac{\sin t}{a} = \dfrac{\cos t}{b} \\ a\sin t + b\cos t = \sqrt{a^2+b^2} \end{cases}$
- $a\sin t + b\cos t \ge -\sqrt{(a^2+b^2)(\sin^2 t + \cos^2 t)} = -\sqrt{a^2+b^2}$.

  Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} \dfrac{\sin t}{a} = \dfrac{\cos t}{b} \\ a\sin t + b\cos t = -\sqrt{a^2+b^2} \end{cases}$

BÀI 7. Cho số phức $z = x + iy$ $(x, y \in \mathbb{R})$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện $|z-2-3i| = 1$ và biểu thức $|\overline{z} + i + 1|$ đạt giá trị lớn nhất. Tính giá trị của biểu thức $|3x-2y|$.

CÂU 1. (Đề tham khảo - Bộ Giáo dục và Đào tọa năm 2018 - Câu 46)
Xét các số phức $z = a + bi$ với $a,\ b \in \mathbb{R}$ thỏa mãn $|z-4-3i| = \sqrt{5}$. Tính $P = a + b$ khi $|z+1-3i| + |z-1+i|$ đạt giá trị lớn nhất.

(A) $P = 10$. (B) $P = 4$. (C) $P = 6$. (D) $P = 8$.

CÂU 2. Xét các số phức $z = a + bi$ $(a,\ b \in \mathbb{R})$ thỏa mãn $|z+6-8i| = 2\sqrt{5}$. Tính $P = a + b$ khi $Q = |z+6+2i| + |z-2-2i|$ đạt giá trị lớn nhất.

(A) $P = 10$. (B) $P = 4$. (C) $P = 6$. (D) $P = 8$.

CÂU 3. Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $\dfrac{z-2i}{z-2}$ là số ảo. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = |z-1| + |z-i|$.

(A) $5\sqrt{2}$. (B) $3\sqrt{2}$. (C) $2\sqrt{5}$. (D) $3\sqrt{2}$.

CÂU 4. Cho số phức z thỏa mãn $|z-3-4i| = \sqrt{5}$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |z+2|^2 - |z-i|^2$. Tính môđun của số phức $w = M + mi$.

(A) $|w| = 2\sqrt{314}$. (B) $|w| = 2\sqrt{309}$. (C) $|w| = \sqrt{1258}$. (D) $|w| = 3\sqrt{137}$.

CÂU 5. Xét số phức $z = a + bi$ $(a,\ b \in \mathbb{R})$ thỏa mãn $|z-2|^2 + |z+2|^2 = 26$ và biểu thức $\left|z - \dfrac{3\sqrt{2}}{2} - \dfrac{3\sqrt{2}}{2}i\right|$ đạt giá trị lớn nhất. Tìm giá trị của biểu thức $P = |a+b|$.

(A) $P = 6$. (B) $P = 3\sqrt{2}$. (C) $P = 4$. (D) $P = \sqrt{2}$.

CÂU 6. Xét số phức $z = a + bi$ $(a,\ b \in \mathbb{R})$ thỏa mãn $\dfrac{z-2i}{z-2}$ là số thuần ảo và môđun của z đạt giá trị lớn nhất. Tính giá trị của biểu thức $P = a + b$.

(A) $P = 0$. (B) $P = 1 + 2\sqrt{2}$. (C) $P = 4$. (D) $P = 1 + 3\sqrt{2}$.

CÂU 7. Xét số phức $z = a + bi$ $(a,\ b \in \mathbb{R})$ thỏa mãn $|z-1+2i| = 3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = |z-2i|$.

(A) $3 + \sqrt{17}$. (B) $3 - \sqrt{17}$. (C) $1 + 5\sqrt{2}$. (D) $\sqrt{26 + 6\sqrt{17}}$.

C. DẠNG TOÁN VÀ BÀI TẬP

Dạng 8. Sử dụng bình phương vô hướng

Đối với một số bài toán tìm max, min việc sử dụng bình phương vô hướng để tìm điểm rơi nhằm áp dụng bất đẳng thức $ax + by \leq \sqrt{(a^2+b^2)(x^2+y^2)}$ hoặc $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \cos\left(\vec{a}; \vec{b}\right) \leq |\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right|$ tỏ ra khá hiệu quả. Ta cần nhớ bình phương vô hướng $|\vec{u} \pm \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 \pm 2\vec{u} \cdot \vec{v}$.

1. Ví dụ

VÍ DỤ 1. Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1 + 2z_2| = 5$ và $|3z_1 - z_2| = 3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = |z_1| + |z_2|$.

VÍ DỤ 2. Cho số phức z thỏa mãn $|z - 1 - i| = 1$ và biểu thức $P = 3|z| + 2|z - 4 - 4i|$ đạt giá trị lớn nhất. Tìm mô-đun của số phức z.

(A) $|z| = \sqrt{2} - 1$. (B) $|z| = 4$. (C) $|z| = 2$. (D) $|z| = \sqrt{2} + 1$.

2. Bài tập áp dụng

CÂU 1. Cho số phức z thỏa mãn $|z| = 1$. Tính giá trị lớn nhất của $P = |z+1| + 3|z-1|$.

(A) $2\sqrt{10}$. (B) $\sqrt{10}$. (C) $3\sqrt{10}$. (D) $4\sqrt{10}$.

CÂU 2. Cho số phức z thỏa mãn $|z - 1 - 2i| = 2$ và biểu thức $P = |z| + |z - 3 - 6i|$ đạt giá trị lớn nhất. Tính $|\overline{z}|$.

(A) $|\overline{z}| = 1 + \sqrt{7}$. (B) $|\overline{z}| = \sqrt{7}$. (C) $|\overline{z}| = 2\sqrt{7}$. (D) $|\overline{z}| = 2 + \sqrt{7}$.

CÂU 3. Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $z_1 + z_2 = 8 + 6i$ và $|z_1 - z_2| = 2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = |z_1| + |z_2|$.

(A) $2\sqrt{13}$. (B) $\sqrt{13}$. (C) $\sqrt{26}$. (D) $2\sqrt{26}$.

CÂU 4. Cho số phức $z = x + yi$ với $x, y \in \mathbb{R}$ thỏa mãn $4|z+i| + 3|z-i| = 10$. Tìm $|z|_{\min}$.

(A) 4. (B) 3. (C) 2. (D) 1.

CÂU 5. Cho số phức z thỏa mãn $|z - 3 - 4i| = \sqrt{5}$ và biểu thức $P = |z+2|^2 - |z-i|^2$ đạt giá trị lớn nhất. Tính $|z + i|$.

(A) $3\sqrt{5}$. (B) $\sqrt{61}$. (C) $5\sqrt{3}$. (D) $\sqrt{41}$.

CÂU 6. Cho số phức $z = x + yi$ với $x, y \in \mathbb{R}$ thỏa mãn $|z - 4 - 3i| = \sqrt{5}$. Tính $x + y$ biết rằng biểu thức $P = |z + 1 - 3i| + |z - 1 + i|$ đạt giá trị lớn nhất.

(A) 4. (B) 6. (C) 8. (D) 10.

CÂU 7. Cho số phức z thỏa mãn $|z| = 2$ và biểu thức $P = |z - 1| + |z - 1 - 7i|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính mô-đun của số phức $w = z - 1 + i\sqrt{3}$.

(A) $|w| = 2\sqrt{2}$. (B) $|w| = 2\sqrt{3}$. (C) $|w| = 4\sqrt{3}$. (D) $|w| = 3\sqrt{2}$.

CÂU 8. Cho số phức z thỏa mãn $|z - 1 - i| = 5$ và biểu thức $P = |z - 7 - 9i| + 2|z - 8i|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tìm $|z|$.

(A) $\sqrt{37}$. (B) $\sqrt{41}$. (C) $\sqrt{29}$. (D) $\sqrt{17}$.

CÂU 9. Cho số phức $z = x + yi$ với $x, y \in \mathbb{R}$ thỏa mãn $|z - 3 - 3i| = 6$. Tính $x + y$ biết rằng biểu thức $P = 2|z + 6 - 3i| + 3|z + 1 + 5i|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

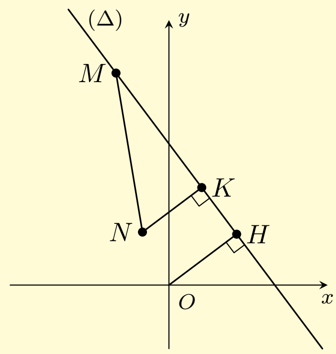
(A) $2 + 2\sqrt{5}$. (B) $1 - \sqrt{5}$. (C) $2 - 2\sqrt{5}$. (D) $1 + \sqrt{5}$.

QUICK NOTE

QUICK NOTE

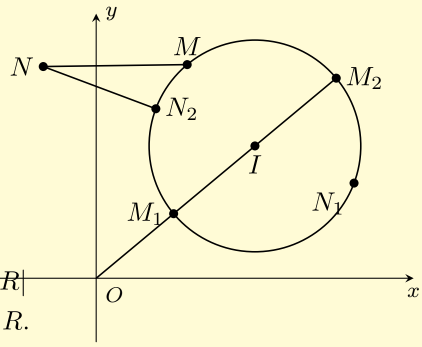
Dạng 9. Sử dụng hình chiếu và tương giao

Cho đường thẳng (Δ): $ax + by + c = 0$ và điểm $M \in (\Delta)$. Điểm $N \notin (\Delta)$ thì NM nhỏ nhất khi và chỉ khi $M \equiv K$ với K là hình chiếu của N trên (Δ).



- $\min|z| = OH = \mathrm{d}_{[O,(\Delta)]} = \dfrac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.
  Khi đó $M \equiv H$ và $H = (\Delta) \cap OH$.
- $\min|z - (x_N + y_N i)| = NK = \mathrm{d}_{N,(\Delta)} = \dfrac{|ax_N + by_N + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.
  Khi đó $M \equiv K$ và $K = (\Delta) \cap NK$.

Cho tập hợp các điểm $M(x; y)$ biểu diễn số phức $z = x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$ là đường tròn $(\mathscr{C})$ có tâm $I(a; b)$ và bán kính R. Gọi N là điểm biểu diễn số phức z'. Khi đó



- $\begin{cases} \min|z| = \min OM = OM_1 = |OI - R| \\ \max|z| = \max OM = OM_2 = OI + R. \end{cases}$
  Khi đó $OI \cap (\mathscr{C}) = \{M_1; M_2\}$.
- $\begin{cases} \min|z - z'| = \min MN = NN_1 = |NI - R| \\ \max|z - z'| = \max MN = NN_2 = NI + R. \end{cases}$
  Khi đó $NI \cap (\mathscr{C}) = \{N_1; N_2\}$.

1. Ví dụ

VÍ DỤ 1. Xét các số phức $z = x + yi$, $(x, y \in \mathbb{R})$ thỏa mãn $|z - 2 - 4i| = |z - 2i|$ và $|z|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tìm $P = 3x - 2y$.

(A) 2. (B) 3. (C) 4. (D) 5.

VÍ DỤ 2. Cho các số phức $z = x + yi$, $(x, y \in \mathbb{R})$ thỏa mãn $|z + 2 - 2i| = |z - 4i|$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $|iz + 1|$.

(A) $2\sqrt{2}$. (B) $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$. (C) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. (D) 2.

VÍ DỤ 3. Cho các số phức $z = x + yi$, $(x, y \in \mathbb{R})$ thỏa mãn $|z - (2 + 4i)| = 2$. Gọi z_1, z_2 lần lượt là hai số phức có mô-đun lớn nhất và mô-đun nhỏ nhất. Tính tổng phần ảo của hai số phức z_1, z_2 đó.

(A) -4. (B) 4. (C) -8. (D) 8.

2. Bài tập áp dụng

CÂU 1. Xét các số phức $z = x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$ thỏa mãn $|z - i| = |\overline{z} - 2 - 3i|$ và $|z|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính $3x - y$.

(A) 3. (B) $\dfrac{3}{5}$. (C) $\dfrac{6}{5}$. (D) $\dfrac{5}{3}$.

CÂU 2. Xét các số phức $z = x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$ thỏa mãn $\left|\dfrac{z + 1 - 5i}{\overline{z} + 3 - i}\right| = 1$ và $|z|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính $T = 3x + y$.

(A) $T = \dfrac{5}{12}$. (B) $T = -\dfrac{12}{5}$. (C) $T = \dfrac{12}{5}$. (D) $T = -\dfrac{5}{12}$.

CÂU 3. Cho các số phức $z = x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$ thỏa mãn $|z - 1 - 2i| = |z - 2 + i|$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $|z + 2 - 3i|$.

(A) $\dfrac{11}{10}$. (B) $\sqrt{10}$. (C) $\dfrac{11\sqrt{10}}{10}$. (D) $\dfrac{121}{10}$.

CÂU 4. Cho số phức $z = x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$ thỏa mãn $|z - 3 + 4i| = 4$. Tính tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |z|$.

(A) 12. (B) 11. (C) 9. (D) 10.

3. Bài tập rèn luyện

CÂU 5. Cho số phức $z = x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$ thỏa mãn $|z - i| = |z + 1|$ và biểu thức $P = |z - (3 - 2i)|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tìm $T = |x - y|$.

(A) $T = 1$. (B) $T = 3$. (C) $T = 5$. (D) $T = 7$.

CÂU 6. Cho số phức $z = x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$ thỏa mãn $|z - 1 + 2i| = \sqrt{5}$ và biểu thức $P = |z + 1 + i|$ đạt giá trị lớn nhất. Tìm $Q = |x - 2y|$.

(A) $Q = 3$. (B) $Q = 5$. (C) $Q = 7$. (D) $Q = 9$.

CÂU 7. Cho số phức $z = x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$ thỏa mãn $|2iz - 1 + 3i| = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = |z + 2 - 3i|$.

(A) $\dfrac{-1 + 5\sqrt{2}}{2}$. (B) $\dfrac{1 + 5\sqrt{2}}{2}$. (C) $\dfrac{-1 + 2\sqrt{5}}{2}$. (D) $\dfrac{1 + 2\sqrt{5}}{2}$.

CÂU 8. Cho số phức $z = x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$ thỏa mãn $|z - 1 + 2i| = 4$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |z + 1 - i|$. Tìm $M + m$.

(A) 4. (B) 8. (C) $\sqrt{13}$. (D) $2\sqrt{13}$.

CÂU 9. Cho số phức $z = x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$ thỏa mãn $|z - 1 - i| + |z - 7 - 4i| = 3\sqrt{5}$. Gọi a, b lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $P = |z - 5 + 2i|$. Tìm $a + b$.

CÂU 10. Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1 + 5| = 5$ và $|z_2 + 1 - 3i| = |z_2 - 3 - 6i|$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |z_1 - z_2|$.

CÂU 11. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để tồn tại duy nhất số phức $z = x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$ thỏa mãn $z\overline{z} = 1$ và $|z - \sqrt{3} + i| = m$. Tìm số phần tử của S.

(A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4.

CÂU 12. Tìm giá trị lớn nhất của $P = |z^2 - z| + |z^2 + z|$ với z là số phức thỏa mãn $|z| = 1$.

(A) $\sqrt{2}$. (B) $2\sqrt{2}$. (C) $\sqrt{3}$. (D) $2\sqrt{3}$.

CÂU 13. Cho số phức $z = x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$ thỏa mãn $\left|iz + \dfrac{2}{1 - i}\right| + \left|iz + \dfrac{2}{i - 1}\right| = 4$. Gọi M và n lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z|$. Tính $M \cdot n$.

(A) $M \cdot n = 2$. (B) $M \cdot n = 1$. (C) $M \cdot n = 2\sqrt{2}$. (D) $M \cdot n = 2\sqrt{3}$.

QUICK NOTE

QUICK NOTE

Bài 3. PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI TRÊN TẬP SỐ PHỨC

A. DẠNG TOÁN VÀ BÀI TẬP

Dạng 10. Căn bậc hai của số phức

Căn bậc hai của số phức $z = x + yi$ là một số phức $w = a + bi$ và tìm như sau

$$a + bi \Leftrightarrow x + yi = (a + bi)^2 \Leftrightarrow (a^2 - b^2) + (2ab) \cdot i = x + yi \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = x \\ 2ab = y \end{cases}$$

Giải hệ này ta tìm được a, b. Từ đó tìm được căn bậc hai của số phức z.

Ta có thể làm tương tự đối với các trường hợp căn bậc ba, bậc bốn.

1. Ví dụ

VÍ DỤ 1. Tìm căn bậc hai của số phức $z = -3 + 4i$.

Tìm căn bậc, căn bậc bốn của số phức $z = a + bi$ bằng máy tính bỏ túi: Để máy tính ở chế độ ra-đian $\boxed{SHIFT}$ - $\boxed{MODE}$ - $\boxed{4}$ *và để chế độ số phức* $\boxed{SHIFT}$ - $\boxed{MODE}$ - $\boxed{2}$.

- *Tìm căn bậc hai* $\sqrt{|a + bi|}\angle\left(\dfrac{\arg(a + bi)}{2} + \dfrac{2\pi X}{2}\right)$ $\boxed{CALC}$ $\begin{cases} X = 0 \Rightarrow w_1 = \ldots \\ X = 1 \Rightarrow w_2 = \ldots \end{cases}$

- *Tìm căn bậc bốn* $\sqrt[4]{|a + bi|}\angle\left(\dfrac{\arg(a + bi)}{4} + \dfrac{2\pi X}{4}\right)$ $\boxed{CALC}$ $\begin{cases} X = 0 \Rightarrow w_1 = \ldots \\ X = 1 \Rightarrow w_2 = \ldots \\ X = 2 \Rightarrow w_3 = \ldots \\ X = 3 \Rightarrow w_4 = \ldots \end{cases}$

Trong đó $|\ \ |$ *bằng* $\boxed{SHIFT}$ - $\boxed{HYP}$; $\angle$ *bằng* $\boxed{SHIFT}$ - $\boxed{(-)}$; $\arg(\ \ )$ *bằng* $\boxed{SHIFT}$ - $\boxed{2}$ - $\boxed{1}$.

2. Bài tập áp dụng

BÀI 8. Tìm căn bậc hai của số phức sau

a) $z = -5 + 12i$.

b) $z = 8 + 6i$.

c) $z = 3 - 4i$.

d) $z = 33 - 56i$.

e) $z = 4 + 6\sqrt{5}i$.

f) $z = -1 - 2\sqrt{6}i$.

Dạng 11. Phương trình bậc hai với hệ số thực

Xét phương trình bậc hai $az^2 + bz + c = 0 \quad (1)$ với $a \neq 0$ có biệt thức $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Nếu $\Delta = 0$ thì phương trình (1) có nghiệm kép $z_1 = z_2 = -\dfrac{b}{2a}$.
- Nếu $\Delta \neq 0$ và gọi δ là căn bậc hai của Δ thì phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt là $z_1 = \dfrac{-b + \delta}{2a}$ và $z_2 = \dfrac{-b - \delta}{2a}$.

1. Ví dụ

VÍ DỤ 1. Biết z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 - 2z + 4 = 0$. Tính $|z_1| + |z_2|$.

2. Bài tập áp dụng

CÂU 1. Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn phương trình $z^2 - 4z + 3 = 0$?

(A) 1. (B) 3. (C) 2. (D) 0.

CÂU 2. Có bao nhiêu số phức z thuần ảo thỏa mãn phương trình $z^2 - 3z - 6 = 0$?

(A) 1. (B) 2. (C) 4. (D) 0.

CÂU 3. Căn bậc hai của số phức $z = 4$ là hai số phức

(A) ± 2. (B) ± 1. (C) ± 4. (D) ± 16.

CÂU 4. Số phức nào dưới đây có đúng một căn bậc hai?

(A) $z = 1$. (B) $z = i$. (C) $z = 1 + i$. (D) $z = 0$.

CÂU 5. Căn bậc hai của $u = -16$ là hai số phức

(A) ± 4. (B) $\pm 4i$. (C) ± 2. (D) $\pm 8i$.

CÂU 6. Gọi z là một căn bậc hai của số phức $u = 18i$ có phần thực dương. Phần ảo của z là

(A) 3. (B) -3. (C) $3\sqrt{2}$. (D) $2\sqrt{3}$.

CÂU 7. Gọi z là một căn bậc hai của số phức $u = -50i$ có phần ảo dương. Phần thực của z là

(A) 5. (B) $5\sqrt{2}$. (C) -5. (D) $-5\sqrt{2}$.

CÂU 8. Căn bậc hai của số phức $z = 3 - 4i$ là hai số phức

(A) $\pm(1 + 2i)$. (B) $\pm\left(1 - i\sqrt{3}\right)$. (C) $\pm\left(\sqrt{3} - 2i\right)$. (D) $\pm(2 - i)$.

CÂU 9. Căn bậc hai của số phức $z = -24 + 10i$ là hai số phức

(A) $\pm(1 + 5i)$. (B) $\pm(-1 + 5i)$. (C) $\pm(5 - i)$. (D) $\pm(5 + i)$.

CÂU 10. Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn phương trình $z^2 + z + 2 = 0$?

(A) 1. (B) 2. (C) 0. (D) 3.

CÂU 11. Có bao nhiêu số phức thỏa mãn phương trình $z^3 - 6z - 3 = 0$?

(A) 2. (B) 3. (C) Vô số. (D) 1.

CÂU 12. Có bao nhiêu số phức z có phần thực dương thỏa mãn phương trình $z^4 - 3z^2 - 4 = 0$?

(A) 1. (B) 2. (C) 0. (D) 3.

CÂU 13. Có bao nhiêu số phức z không thuần thực thỏa mãn phương trình $z^4 - 2z^2 - 3 = 0$?

(A) 2. (B) 3. (C) 0. (D) 4.

CÂU 14. Cho hai số phức $z_1; z_2$ là nghiệm của phương trình $z^2 - 2z + 3 = 0$. Gọi A và B là hai điểm biểu diễn số phức z_1 và z_2. Khoảng cách AB bằng

(A) $2\sqrt{3}$. (B) $4\sqrt{2}$. (C) $2\sqrt{2}$. (D) $4\sqrt{5}$.

CÂU 15. Cho bốn điểm A, B, C, D biểu diễn bốn nghiệm của phương trình $z^4 - 3z - 4 = 0$. Tứ giác $ABCD$ có diện tích bằng

(A) 4. (B) 2. (C) 8. (D) 6.

CÂU 16 (2D4K3-3). Cho ba điểm A, B, C lần lượt biểu diễn ba nghiệm của phương trình phức $z^3 - 1 = 0$. Tam giác ABC có diện tích bằng

(A) $\dfrac{3}{4}$. (B) $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$. (C) 4. (D) 1.

CÂU 17 (2D4K4-3). Cho ba điểm A, B, C, D lần lượt biểu diễn ba nghiệm của phương trình phức $z^4 - 16 = 0$. Tứ giác $ABCD$ có diện tích bằng

(A) $2\sqrt{2}$. (B) 16. (C) 8. (D) 4.

CÂU 18 (2D4B4-3). Cho ba điểm A, B, C, D lần lượt biểu diễn ba nghiệm của phương trình phức $z^4 + 4i = 0$. Tứ giác $ABCD$ có diện tích bằng

(A) 8. (B) 24. (C) 4. (D) 1.

CÂU 19 (2D4K4-1). Cho phương trình phức $z^2 + az + 4 = 0$, với a, b là những số thực. Biết phương trình có hai nghiệm phức không thuần thực là z_1 và z_2. Khi đó giá trị của biểu thức $T = |z_1| + 3|z_2|$ tương ứng bằng

(A) 4. (B) 3. (C) 7. (D) 8.

QUICK NOTE

QUICK NOTE

CÂU 20 (2D4K4-1). Cho phương trình phức $z^2+4z+b=0$, với a,b là những số thực. Biết phương trình có hai nghiệm phức không thuần thực là z_1 và z_2. Khi đó giá trị của $T=|z_1|+|z_2|$ có thể nhận giá trị nào dưới đây?

Ⓐ 2. Ⓑ 3. Ⓒ 5. Ⓓ 4.

CÂU 21 (2D4K4-1). Cho phương trình phức $z^2+2az+a^2-2a=0$, với a là số thực. Biết phương trình có hai nghiệm phức không thuần thực có mô đun bằng 2. Gọi S là tập chứa tất cả các giá trị của a thỏa mãn bài toán. Tổng tất cả các phần tử của S bằng

Ⓐ $1-\sqrt{5}$. Ⓑ -4. Ⓒ 2. Ⓓ 3.

CÂU 22 (2D4K4-1). Cho phương trình phức $z^2-mz+n=0$, với m,n là các số thực. Biết phương trình có hai nghiệm phức không thuần thực là $z_1=u+3i$ và $z_2=2u+2i-2$. Giá trị của $|z_1|$ bằng:

Ⓐ $2\sqrt{13}$. Ⓑ $\sqrt{10}$. Ⓒ $2\sqrt{3}$. Ⓓ $\dfrac{2\sqrt{13}}{3}$.

CÂU 23 (2D4K4-1). Cho phương trình phức $z^2+mz+n=0$, với m,n là các số thực. Biết phương trình có hai nghiệm phức không thuần thực là $z_1=u+2i-1$ và $z_2=iu+3$. Giá trị của biểu thức $|m+in|$ tương ứng bằng

Ⓐ 1. Ⓑ $\sqrt{2}$. Ⓒ $\sqrt{3}$. Ⓓ 2.

CÂU 24 (2D4K2-3). Cho phương trình phức $z^3+az^2+6z+c=0$, với a,b,c là các số thực. Biết phương trình có một nghiệm phức là $z_1=1+2i$. Giá trị của biểu thức $(a+3c)$ tương ứng bằng

Ⓐ 6. Ⓑ -10. Ⓒ 10. Ⓓ -6.

CÂU 25 (2D4K2-3). Cho phương trình phức $z^4+az^3+bz^2+cz+d=0$, với a,b,c,d là các số thực. Biết phương trình có hai nghiệm phức là $z_1=1+2i; z_2=3-i$. Giá trị của biểu thức $(a+b+c+d)$ bằng

Ⓐ 13. Ⓑ 10. Ⓒ 19. Ⓓ -15.

CÂU 26 (2D4K2-3). Cho phương trình phức $z^4+bz^3+cz^2+dz+e=0$, với b,c,d,e là các số thực. Biết phương trình có ba nghiệm phức không thuần thực là $z_1=u+2i; z_2=u+3i-1; z_3=2u+2+i$. Giá trị của b lớn nhất có thể bằng

Ⓐ 10. Ⓑ 16. Ⓒ 19. Ⓓ 14.

CÂU 27 (2D4K3-3). Cho số phức z không thuần thực sao cho số phức $u=\dfrac{3z}{z^2+6}$ thuần thực. Giá trị của $|z|$ bằng

Ⓐ $\sqrt{6}$. Ⓑ 2. Ⓒ $\sqrt{3}$. Ⓓ 6.

CÂU 28 (2D4K3-3). Cho số phức z không thuần thực sao cho số phức $u=\dfrac{2z}{z^2+9}$ thuần thực. Biểu thức $|u+3i|$ có thể nhận giá trị nào dưới đây?

Ⓐ 3. Ⓑ 2. Ⓒ $\dfrac{\sqrt{37}}{2}$. Ⓓ $\dfrac{\sqrt{82}}{3}$.

CÂU 29 (2D4K3-3). Cho số phức z không thuần thực sao cho số phức $u=\dfrac{2019z}{z^2+z+4}$ thuần thực. Giá trị của $|z|$ bằng

Ⓐ 1. Ⓑ 2. Ⓒ $\sqrt{2019}$. Ⓓ 2020.

CÂU 30 (2D4K3-3). Cho số phức z không thuần thực sao cho số phức $u=\dfrac{2019z}{z^2+2020z+a}$ thuần thực. Biết $\dfrac{6|z|}{3+|z|^2}=\sqrt{3}$. Giá trị của số thực a tương ứng bằng:

Ⓐ 2. Ⓑ 3. Ⓒ 1. Ⓓ $\sqrt{2019}$.

Dạng 12. Phương trình bậc hai và bậc cao trong số phức

Xét phương trình bậc hai $az^2+bz+c=0$, (*) với $a\neq 0$ có biệt số $\Delta=b^2-4ac$. Khi đó:

a) Nếu $\Delta=0$ thì phương trình (*) có nghiệm kép $z_1=z_2=-\dfrac{b}{2a}$.

b) Nếu $\Delta\neq 0$ và gọi δ là một căn bậc hai của Δ thì phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt là $z_1=\dfrac{-b+\delta}{2a}$ hoặc $z_2=\dfrac{-b-\delta}{2a}$.

a) *Hệ thức Vi-ét vẫn đúng trong trường phức $\mathbb{C}$: $z_1+z_2=-\dfrac{b}{a}$ và $z_1z_2=\dfrac{c}{a}$.*

b) *Căn bậc hai của số phức $z=x+yi$ là một số phức w và tìm như sau:*

+ *Bước 1. Đặt $w=a+bi$ với $x,y,a,b\in\mathbb{R}$ là một căn bậc hai của số phức z.*
+ *Bước 2. Biến đổi $w^2=x+yi=(a+bi)^2 \Leftrightarrow (a^2-b^2)+2abi=x+yi \Leftrightarrow$ $\begin{cases}a^2-b^2=x\\2ab=y\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a=\cdots\\b=\cdots\end{cases}$*
+ *Bước 3. Kết luận các căn bậc hai của số phức z là $w=a+bi$.*

Ta có thể làm tương tự đối với trường hợp căn bậc ba, căn bậc bốn. Ngoài cách tìm căn bậc hai của số phức như trên, ta có thể tách ghép đưa về số chính phương dựa vào hằng đẳng thức.

QUICK NOTE

1. Ví dụ

VÍ DỤ 1. Tìm căn bậc hai của số phức $z=16-30i$.

VÍ DỤ 2. Giải phương trình: $z^2+2z+5=0$ trên tập số phức $\mathbb{C}$.

2. Bài tập rèn luyện

CÂU 1. Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn phương trình $(z-i)\left(z^2-3iz-2\right)=0$?

(A) 3. (B) 0. (C) 1. (D) 2.

CÂU 2. Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn phương trình $z^2-4iz-4=0$?

(A) 2. (B) 0. (C) Vô số. (D) 1.

CÂU 3. Hai số phức khác nhau z_1 và z_2 thỏa mãn phương trình $z^2+(4-2i)z-2-16i=0$. Giá trị của biểu thức $P=|z_1|+|z_2|$ bằng

(A) $\sqrt{10}+\sqrt{26}$. (B) $2\sqrt{10}+1$. (C) $2\sqrt{65}$. (D) $4\sqrt{5}$.

CÂU 4. Cho phương trình phức $z^3-i=0$. Gọi z_1 và z_2 là hai nghiệm phức không thuần ảo của phương trình đã cho. Tổng phần ảo của hai số phức z_1 và z_2 là

(A) -1. (B) 0. (C) 1. (D) 2.

CÂU 5. Cho ba điểm A, B, C lần lượt biểu diễn ba nghiệm của phương trình phức $z^3+8i=0$. Tam giác ABC có diện tích bằng

(A) $\sqrt{3}$. (B) $3\sqrt{3}$. (C) $2\sqrt{3}$. (D) 2.

CÂU 6. Cho hai số phức z_1 và z_2 là hai nghiệm phức phân biệt của phương trình $z^2-az+3i=0$, với a là số phức. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=2|z_1|+3|z_2|$ bằng

(A) $3\sqrt{3}$. (B) $6\sqrt{2}$. (C) $4\sqrt{3}$. (D) $1+\sqrt{3}$.

CÂU 7. Gọi ba số phức z_1, z_2, z_3 là ba nghiệm của phương trình $z^3+bz^2+cz+3+4i=0$ Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=|z_1|+|z_2|+|z_3|$ bằng

(A) $3\sqrt{5}$. (B) $3\sqrt{2}$. (C) 3. (D) $3\sqrt{6}$.

CÂU 8. Cho phương trình phức $z^2-(11-4i)z+5-8i=0$. Gọi z_1 và z_2 là hai nghiệm của phương trình. Giá trị của biểu thức $T=|(z_1+3i-1)(z_2+3i-1)|$ bằng

(A) $\sqrt{298}$. (B) $\sqrt{205}$. (C) $\sqrt{533}$. (D) $\sqrt{391}$.

CÂU 9. Cho phương trình phức $z^2-(3-2i)z+4-i=0$. Gọi z_1 và z_2 là hai nghiệm của phương trình. Phần ảo của số phức $T=\dfrac{1}{z_1-i}+\dfrac{1}{z_2-i}$ bằng

(A) $\dfrac{8}{17}$. (B) $\dfrac{19}{17}$. (C) $-\dfrac{8}{17}$. (D) $-\dfrac{19}{17}$.

CÂU 10. Cho phương trình bậc hai $z^2+(5i-6)z+3-15i=0$. Gọi z_1 là nghiệm phức của phương trình và có phần ảo lớn hơn nghiệm kia. Giá trị $|z_1|$ bằng

(A) $\sqrt{17}$. (B) $\sqrt{13}$. (C) $\sqrt{41}$. (D) $\sqrt{5}$.

CÂU 11. Cho phương trình bậc hai $z^2-(7-6i)z+7-19i=0$. Gọi z_1 là nghiệm phức của phương trình và có phần thực lớn hơn nghiệm kia. Giá trị $|z_1|$ bằng

QUICK NOTE

(A) $\sqrt{13}$. (B) $3\sqrt{2}$. (C) $\sqrt{26}$. (D) $\sqrt{41}$.

CÂU 12. Cho hai nghiệm của phương trình bậc hai $z^2 + az + b = 0$ lần lượt là $z_1 = 3 - 2i$ và $z_2 = 1 + 4i$. Giá trị của biểu thức $T = |a + 2ib|$ bằng

(A) $2\sqrt{37}$. (B) $4\sqrt{71}$. (C) $4\sqrt{61}$. (D) 12.

CÂU 13. Cho phương trình bậc hai $z^2 + az + 2a - i = 0$, với a là số phức, có một nghiệm là $z_1 = 2 - 5i$. Giá trị của $|a|$ bằng

(A) $\dfrac{36}{41}$. (B) $2\sqrt{41}$. (C) $\sqrt{29}$. (D) $\dfrac{21\sqrt{82}}{41}$.

CÂU 14. Cho phương trình bậc ba $z^3 + az + b = 0$ có ba nghiệm phức là $z_1 = 1 - i$; $z_2 = 2 + 3i$; z_3. Phần thực của số phức $w = a + ib$ bằng

(A) 24. (B) 13. (C) -13. (D) -24.

CÂU 15. Cho phương trình bậc ba $z^3 + (5 - i)z^2 + az + b = 0$ có ba nghiệm phức là $z_1 = 1 - i$; z_2; $z_2 + 2$. Phần ảo của số phức b bằng

(A) -15. (B) 15. (C) 3. (D) -3.

CÂU 16. Cho phương trình bậc bốn $z^4 + z^3 + bz^2 + cz + d = 0$ có bốn nghiệm phức lần lượt là $z_1 = 2 + i$; $z_2 = 3 - 2i$; z_3; $z_4 = z_3 + 2i - 1$. Phần ảo của số phức d bằng

(A) $\dfrac{51}{2}$. (B) 74. (C) $-\dfrac{51}{2}$. (D) -74.

Dạng 13. Dạng lượng giác của số phức

Cho số phức $z = a + bi$ $(a,\ b \in \mathbb{R})$. Đặt $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\cos\varphi = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, $\sin\varphi = \dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$. Khi đó

a) Dạng lượng giác của số phức z là $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.

b) Một acgument của số phức z là φ.

c) $\tan\varphi = \dfrac{b}{a}$.

d) $z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$.

VÍ DỤ 1 (B-2012). Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm của phương trình $z^2 - 2\sqrt{3}iz - 4 = 0$. Viết dạng lượng giác của z_1 và z_2.

VÍ DỤ 2. Viết số phức z dưới dạng lượng giác, biết rằng $|z - 1| = |z - i\sqrt{3}|$ và $i\overline{z}$ có một acgument bằng $\dfrac{\pi}{6}$.

VÍ DỤ 3. Tìm số phức z, biết rằng $|1 - 2z| = |i - 2\overline{z}|$ và $\dfrac{z+3}{z-3}$ có một acgument bằng $\dfrac{\pi}{4}$.

VÍ DỤ 4. Tìm số phức z, biết rằng $|z| = |2\overline{z} - \sqrt{3} + i|$ và $\dfrac{(1+i)z}{1 - \sqrt{3} + (1 + \sqrt{3})i}$ có một acgument bằng $-\dfrac{\pi}{6}$.

VÍ DỤ 5. Tìm số phức z thỏa mãn $|z - 1| = |z - 3|$ và một acgument của $z - 3$ bằng một acgument của $z + 3$ cộng với $\dfrac{\pi}{2}$.

VÍ DỤ 6. Cho số phức z thỏa mãn $|z| + (1 + i\sqrt{3})z = 3$. Hãy tìm mô-đun của số phức $w = z + z^2 + z^{123}$.

VÍ DỤ 7. Tìm acgument âm lớn nhất của số phức $z = (1 + i\sqrt{3})^{10}$.

VÍ DỤ 8. Tìm số phức z thỏa mãn $|z + 3 + i\sqrt{3}| = \sqrt{3}$ và có acgument dương nhỏ nhất.

VÍ DỤ 9. Tìm các số nguyên dương n thỏa mãn $z = \left(\dfrac{3 - i\sqrt{3}}{\sqrt{3} - 3i}\right)^n$ là số thực.

VÍ DỤ 10. Cho số phức $z_1=\left(\dfrac{\sqrt{3}-i}{1-i\sqrt{3}}\right)^n$ là số thực và số phức $z_2=\left(\dfrac{5-i}{2-3i}\right)^{n+2}$ là số ảo. Hãy tìm số nguyên dương n nhỏ nhất.

VÍ DỤ 11. Cho số phức z thỏa mãn $z^2-2z+4=0$. Tìm số phức $w=\left(\dfrac{1+\sqrt{3}-z}{2+z}\right)^7$.

VÍ DỤ 12. Cho số phức z thỏa mãn $2|z|+\sqrt{3}iz=4-z$. Tìm số phức $w=z^{2012}+\dfrac{1}{z^{2013}}$.

VÍ DỤ 13. Tìm phần thực và phần ảo của các số phức sau

a) $z=(\sqrt{3}+i)^8$

b) $z=\dfrac{(1+i)^{10}}{(\sqrt{3}+i)^9}$

VÍ DỤ 14. Tìm phần thực và phần ảo của các số phức sau

a) $w=z^{2014}+\dfrac{1}{z^{2014}}$ biết $z+\dfrac{1}{z}=1$

b) $z=\dfrac{(1+i)^{2012}}{(\sqrt{3}+i)^{2011}}$

QUICK NOTE