

NGUYÊN HÀM VÀ TÍCH PHÂN

QUICK NOTE

Bài 1. NGUYÊN HÀM

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

B. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Định nghĩa nguyên hàm

Cho hàm số  $f(x)$  xác định trên khoảng  $K$ . Hàm số  $F(x)$  được gọi là nguyên hàm của hàm số  $f(x)$  nếu  $F'(x) = f(x)$  với mọi  $x \in K$ .

**Nhận xét:** Nếu  $F(x)$  là một nguyên hàm của  $f(x)$  thì  $F(x) + C$ , ( $C \in \mathbb{R}$ ) cũng là nguyên hàm của  $f(x)$ .

Ký hiệu  $\int f(x) \, dx = F(x) + C$ .

2. Một số tính chất của nguyên hàm

- $\left(\int f(x) \, dx\right)' = f(x)$ .
- $\int a \cdot f(x) \, dx = a \cdot \int f(x) \, dx \quad (a \in \mathbb{R}, a \neq 0)$ .
- $\int [f(x) \pm g(x)] \, dx = \int f(x) \, dx \pm \int g(x) \, dx$ .

3. Một số nguyên hàm cơ bản

Nguyên hàm của hàm số cơ bản	Nguyên hàm mở rộng
$\int a \cdot dx = ax + C, a \in \mathbb{R}$	
$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1$	$\int (ax+b)^\alpha dx = \frac{1}{a} \cdot \frac{(ax+b)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$
$\int \frac{dx}{x} = \ln x  + C, x \neq 0$	$\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a} \cdot \ln ax+b  + C$
$\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C, x > 0$	$\int \frac{dx}{\sqrt{ax+b}} = \frac{2}{a} \sqrt{ax+b} + C, x > 0$
$\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C, x \neq 0$	$\int \frac{dx}{(ax+b)^2} = -\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{ax+b} + C$
$\int \frac{dx}{x^\alpha} = -\frac{1}{(\alpha-1)x^{\alpha-1}} + C$	$\int \frac{dx}{(ax+b)^\alpha} = -\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{(\alpha-1)} \cdot (ax+b)^{\alpha-1} + C$
$\int e^x dx = e^x + C$	$\int e^{ax+b} dx = \frac{1}{a} \cdot e^{ax+b} + C$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	$\int a^{\alpha x+\beta} dx = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{a^{\alpha x+\beta}}{\ln a} + C$
$\int \cos x dx = \sin x + C$	$\int \cos(ax+b) dx = \frac{1}{a} \cdot \sin(ax+b) + C$
$\int \sin x dx = -\cos x + C$	$\int \sin(ax+b) dx = -\frac{1}{a} \cdot \cos(ax+b) + C$
$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$	$\int \frac{1}{\cos^2(ax+b)} dx = \frac{1}{a} \cdot \tan(ax+b) + C$
$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C$	$\int \frac{1}{\sin^2(ax+b)} dx = -\frac{1}{a} \cdot \cot(ax+b) + C$

**Nhận xét:**  $[F(ax+b)]' = af(ax+b) \Rightarrow \int f(ax+b) \, dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C$ .

C. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

1

Sử dụng định nghĩa nguyên hàm và bảng nguyên hàm

QUICK NOTE

## 1. Các ví dụ

**VÍ DỤ 1.** Tìm họ nguyên hàm của các hàm số sau

a)  $f(x) = 4x^3 + x + 5.$

b)  $f(x) = 3x^2 - 2x.$

c)  $f(x) = \frac{1}{x^5} + x^2.$

d)  $f(x) = \frac{1}{x^3} + x^2 - 1.$

**VÍ DỤ 2.** Tính

a)  $I = \int (x^2 - 3x)(x + 1) dx.$  b)  $I = \int (x - 1)(x^2 + 2) dx.$  c)  $I = \int (2x + 1)^5 dx$

d)  $I = \int (2x - 10)^{2020} dx.$  e)  $I = \int \left(3x^2 + \frac{1}{x} - 2\right) dx.$  f)  $I = \int \left(3x^2 - \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}\right) dx.$

g)  $I = \int \frac{x^2 - 3x + 1}{x} dx.$  h)  $I = \int \frac{2x^2 - 6x + 3}{x} dx.$  i)  $I = \int \frac{1}{2x - 1} dx.$

j)  $I = \int \frac{2}{3 - 4x} dx.$  k)  $I = \int \frac{1}{(2x - 1)^2} dx.$  l)  $I = \int \left[ \frac{12}{(x - 1)^2} + \frac{2}{2x - 3} \right] dx.$

m)  $I = \int \frac{3}{4x^2 + 4x + 1} dx.$  n)  $I = \int \frac{4}{x^2 + 6x + 9} dx.$  o) (\*)  $I = \int \frac{2x - 1}{(x + 1)^2} dx.$

**VÍ DỤ 3.** Tìm họ nguyên hàm của các hàm số sau

a)  $I = \int (\sin x - \cos x) dx.$  b)  $I = \int (3 \cos x - 2 \sin x) dx.$  c)  $I = \int (2 \sin 2x - 3 \cos 6x) dx.$

d)  $I = \int \sin x \cos x dx.$  e)  $I = \int \cos \left( \frac{x}{2} + \frac{\pi}{6} \right) dx.$  f)  $I = \int \sin \left( \frac{\pi}{3} - \frac{x}{3} \right) dx.$

g)  $I = \int (\sin x - \cos x)^2 dx.$  h)  $I = \int (\cos x + \sin x)^2 dx.$

**VÍ DỤ 4.** Tìm họ nguyên hàm của các hàm số sau

a)  $I = \int \frac{1}{\sin^2 x} dx.$  b)  $I = \int \frac{6}{\cos^2 3x} dx.$  c)  $I = \int (\tan x + \cot x)^2 dx.$

d)  $I = \int \sin^2 x dx.$  e)  $I = \int \cos^2 2x dx.$  f)  $I = \int \sin 4x \cos x dx.$

g)  $I = \int \frac{1}{\sin x \cos x} dx.$

**VÍ DỤ 5.** Tìm họ nguyên hàm của các hàm số sau

a)  $I = \int e^{2x} dx.$  b)  $I = \int e^{1-2x} dx.$  c)  $I = \int (2x - e^{-x}) dx.$

d)  $I = \int e^x (1 - 3e^{-2x}) dx.$  e)  $I = \int (3 - e^x)^2 dx.$  f)  $I = \int (2 + e^{3x})^2 dx.$

g)  $I = \int 2^{2x+1} dx.$  h)  $I = \int 4^{1-2x} dx.$  i)  $I = \int 3^x \cdot 5^x dx.$

j)  $I = \int 4^x \cdot 3^{x-1} dx.$  k)  $I = \int \frac{dx}{e^{2-5x}}.$  l)  $I = \int \frac{dx}{2^{3-2x}}.$

m)  $I = \int \frac{4^{x+1} \cdot 3^{x-1}}{2^x} dx.$  n)  $I = \int \frac{4^{2x-1} \cdot 6^{x-1}}{3^x} dx.$

## QUICK NOTE

QUICK NOTE

**CÂU 14.** Cho hàm số  $f(x) = x^2 + 4$ . Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A**  $\int f(x) \, dx = 2x + C.$

**C**  $\int f(x) \, dx = \frac{x^3}{3} + 4x + C.$
- B**  $\int f(x) \, dx = x^2 + 4x + C.$

**D**  $\int f(x) \, dx = x^3 + 4x + C.$

**CÂU 15.** Trên khoảng  $(0; +\infty)$ , cho hàm số  $f(x) = x^{\frac{3}{2}}$ . Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A**  $\int f(x) \, dx = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} + C.$

**C**  $\int f(x) \, dx = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + C.$
- B**  $\int f(x) \, dx = \int \sqrt{x^3} \, dx.$

**D**  $\int f(x) \, dx = \frac{2}{3}x^{\frac{1}{2}} + C.$

**CÂU 16.** Cho hàm số  $f(x) = \frac{x^4 + 2}{x^2}$ . Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A**  $\int f(x) \, dx = \frac{x^3}{3} - \frac{1}{x} + C.$

**C**  $\int f(x) \, dx = \int \left(x^2 + \frac{2}{x^2}\right) \, dx.$
- B**  $\int f(x) \, dx = \frac{x^3}{3} + \frac{2}{x} + C.$

**D**  $\int f(x) \, dx = \frac{x^3}{3} - \frac{2}{x} + C.$

**CÂU 17.** Các mệnh đề sau đây đúng hay sai

Mệnh đề	Đ	S
a) $\int (\sqrt[3]{x^2} + x - 2) \, dx = \frac{3}{5}\sqrt[3]{x^5} + \frac{1}{2}x^2 - 2x + C.$		
b) $\int \frac{1}{2023x^{2024}} \, dx = \frac{1}{2023^2x^{2023}} + C.$		
c) $\int (2x - 2024)^2 \, dx = x - 1012 + C.$		
d) $\int \left(\frac{1}{4}x^4 + 4x^3\right) \, dx = \frac{1}{20}x^5 + \frac{4}{3}x^4 + C.$		

**CÂU 18.** Cho các mệnh đề sau đây

Mệnh đề	Đ	S
a) $F(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{3}{2}x^2 + \ln x  + C$ là nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^3 - 3x + \frac{1}{x}.$		
b) $F(x) = \frac{(5x+3)^6}{6} + C$ là nguyên hàm của hàm số $f(x) = (5x+3)^5.$		
c) $F(x) = \frac{3}{2}x\sqrt{x} + \frac{4}{3}x\sqrt[3]{x} + \frac{5}{4}x\sqrt[4]{x} + C$ là nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x}.$		
d) $F(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2024x + C$ là nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{x^3 - 2024x}{x}.$		

**CÂU 19.** Hệ số của  $x^2$  trong nguyên hàm  $F(x)$  của hàm số  $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x}} + 3^x + 3x - 2$  là

KQ:

**CÂU 20.** Hệ số của  $x^3$  trong nguyên hàm  $F(x)$  của hàm số  $f(x) = mx^3 - 3x^2 + \frac{4m}{x^3} + \frac{5}{2x} - 7m$  ( $m$  là tham số) là

KQ:

**CÂU 21.** Tìm nguyên hàm  $F(x)$  của hàm số  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{2}{\sqrt[3]{x}}$ . Tổng hệ số của biến  $x$  là

KQ:

**CÂU 22.** Tìm nguyên hàm  $F(x)$  của hàm số  $f(x) = \frac{(x^2 - 1)^2}{x^2}$ . Tổng hệ số của bậc 3 và bậc 1 là (làm tròn đến hàng phần chục).

KQ:

QUICK NOTE

**CÂU 23.** Tính  $\int \left( \frac{(1-x)^3}{\sqrt[3]{x}} \right) dx$ . Giá trị tổng hệ số chứa biến là (làm tròn đến hàng phần trăm).

KQ:

**CÂU 24.** Tính  $\int (\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[4]{x^3} + \sqrt[5]{x^4}) dx$ . Giá trị tổng hệ số chứa biến là (làm tròn đến hàng phần trăm).

KQ:

**CÂU 25.** Tính  $\int (\sqrt{x} + 1)(x - \sqrt{x} + 1) dx$ . Giá trị tổng hệ số chứa biến là (làm tròn đến hàng phần chục).

KQ:

**CÂU 26.** Tính  $\int \left( 2\sqrt{x} - \frac{3}{\sqrt[3]{x}} \right) dx$ . Giá trị tổng hệ số chứa biến là (làm tròn đến hàng phần chục).

KQ:

**CÂU 27.** Tính  $\int \frac{1}{\sqrt{2x} + \sqrt{3x}} dx = a(\sqrt{b} - \sqrt{c})\sqrt{x}$ . Giá trị của tổng  $a + b + c$  là

KQ:

**CÂU 28.** Tính  $\int \frac{1}{\sqrt{5x} - \sqrt{3x}} dx = (\sqrt{a} + \sqrt{b})\sqrt{x} + C$ . Giá trị  $a + b$  bằng

KQ:

**CÂU 29.** Tính  $\int (x^2 - 1)^3 dx$ . Giá trị tổng hệ số chứa biến là (làm tròn đến hàng phần chục).

KQ:

**CÂU 30.** Tính  $\int (2 - x^2)^4 dx$ . Giá trị tổng hệ số chứa biến là (làm tròn đến hàng phần chục).

KQ:

**CÂU 31.** Tính  $\int (x - \sqrt[3]{x})^2 dx$ . Giá trị tổng hệ số chứa biến là (làm tròn đến hàng phần chục).

KQ:

**CÂU 32.** Tính  $\int \left( \frac{x^2 + 2\sqrt[3]{x}}{x} \right)^2 dx$ . Giá trị tổng hệ số chứa biến là (làm tròn đến hàng phần chục).

KQ:

**CÂU 33.** Tìm  $m$  để  $F(x) = mx^3 + (3m + 2)x^2 - 4x + 3$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x) = 3x^2 + 10x - 4$ .

KQ:

**CÂU 34.** Tìm  $a, b, c$  để  $F(x) = (ax^2 + bx + c)\sqrt{x^2 - 4x}$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x) = (x - 2)\sqrt{x^2 - 4x}$ . Giá trị biểu thức  $a + b + c$  bằng.

KQ:

**CÂU 35.** Tìm  $a, b, c$  để  $F(x) = (ax^2 + bx + c)\sqrt{2x - 3}$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \frac{20x^2 - 30x + 7}{\sqrt{2x - 3}}$ . Giá trị biểu thức  $a + b + c$  bằng

KQ:

QUICK NOTE

**CÂU 36.** Hàm số  $F(x) = \cot x$  là một nguyên hàm của hàm số nào dưới đây trên khoảng  $(0; \frac{\pi}{2})$

- Ⓐ  $f_2(x) = \frac{1}{\sin^2 x}$ . Ⓑ  $f_1(x) = -\frac{1}{\cos^2 x}$ . Ⓒ  $f_4(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ . Ⓓ  $f_3(x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$ .

**CÂU 37.** Cho hàm số  $f(x) = 1 + \sin x$ . Khẳng định nào dưới đây đúng?

- Ⓐ  $\int f(x)dx = x - \cos x + C$ . Ⓑ  $\int f(x)dx = x + \sin x + C$ .  
Ⓒ  $\int f(x)dx = x + \cos x + C$ . Ⓓ  $\int f(x)dx = \cos x + C$ .

**CÂU 38.** Tìm nguyên hàm  $F(x)$  của hàm số  $f(x) = \cos^2 \frac{x}{2}$

- Ⓐ  $F(x) = 2 \cos \frac{x}{2} + C$ . Ⓑ  $F(x) = \frac{1}{2} (1 + \sin x) + C$ .  
Ⓒ  $F(x) = 2 \sin \frac{x}{2} + C$ . Ⓓ  $F(x) = \frac{1}{2} (1 - \sin x) + C$ .

**CÂU 39.** Cho hàm số  $f(x) = 1 - \frac{1}{\cos^2 x}$ . Khẳng định nào dưới đây đúng?

- Ⓐ  $\int f(x)dx = x + \tan x + C$ . Ⓑ  $\int f(x)dx = x + \cot x + C$ .  
Ⓒ  $\int f(x)dx = x - \tan x + C$ . Ⓓ  $\int f(x)dx = x - \cot x + C$ .

**CÂU 40.** Họ nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \cos x + 6x$  là

- Ⓐ  $\sin x + 3x^2 + C$ . Ⓑ  $-\sin x + 3x^2 + C$ .  
Ⓒ  $\sin x + 6x^2 + C$ . Ⓓ  $-\sin x + C$ .

**CÂU 41.** Tìm nguyên hàm của hàm số  $f(x) = 2 \sin x + 3x$ .

- Ⓐ  $\int (2 \sin x + 3x) dx = -2 \cos x + \frac{3}{2}x^2 + C$ .  
Ⓑ  $\int (2 \sin x + 3x) dx = 2 \cos x + 3x^2 + C$ .  
Ⓒ  $\int (2 \sin x + 3x) dx = \sin^2 x + \frac{3}{2}x + C$ .  
Ⓓ  $\int (2 \sin x + 3x) dx = \sin 2x + \frac{3}{2}x^2 + C$ .

**CÂU 42.** Tính  $\int (x - \sin x)dx$ .

- Ⓐ  $\frac{x^2}{2} + \sin x + C$ . Ⓑ  $\frac{x^2}{2} - \cos x + C$ . Ⓒ  $\frac{x^2}{2} - \sin x + C$ . Ⓓ  $\frac{x^2}{2} + \cos x + C$ .

**CÂU 43.** Họ nguyên hàm của hàm số  $f(x) = 3x^2 + \sin x$  là

- Ⓐ  $x^3 + \cos x + C$ . Ⓑ  $6x + \cos x + C$ . Ⓒ  $x^3 - \cos x + C$ . Ⓓ  $6x - \cos x + C$ .

**CÂU 44.** Họ nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \frac{1}{x} + \sin x$  là

- Ⓐ  $\ln x - \cos x + C$ . Ⓑ  $-\frac{1}{x^2} - \cos x + C$ .  
Ⓒ  $\ln |x| + \cos x + C$ . Ⓓ  $\ln |x| - \cos x + C$ .

**CÂU 45.** Cho  $\int f(x) dx = -\cos x + C$ . Khẳng định nào dưới đây đúng?

- Ⓐ  $f(x) = -\sin x$ . Ⓑ  $f(x) = -\cos x$ . Ⓒ  $f(x) = \sin x$ . Ⓓ  $f(x) = \cos x$ .

**CÂU 46.** Cho hàm số  $f(x) = \cos \frac{x}{2} \sin \frac{x}{2}$ . Khẳng định nào dưới đây đúng?

- Ⓐ  $\int \cos \frac{x}{2} \sin \frac{x}{2} = \frac{1}{2} \sin x + C$ . Ⓑ  $\int \cos \frac{x}{2} \sin \frac{x}{2} = \frac{1}{2} \cos x + C$ .  
Ⓒ  $\int \cos \frac{x}{2} \sin \frac{x}{2} = -\frac{1}{2} \sin x + C$ . Ⓓ  $\int \cos \frac{x}{2} \sin \frac{x}{2} = -\frac{1}{2} \cos x + C$ .

**CÂU 47.** Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

QUICK NOTE

Mệnh đề	Đ	S
a) $\int (2 + \cot^2 x) dx = x - \cot x + C.$		
b) $\int \left(1 - \cos^2 \frac{x}{2}\right) dx = \frac{1}{2}(x + \sin x) + C.$		
c) $\int \left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2}\right)^2 dx = x + \cos x + C.$		
d) $\int \left(\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2}\right)^2 dx = x - \cos x + C.$		

**CÂU 48.** Tìm nguyên hàm  $F(x)$  của hàm số  $f(x) = 2024 - 2 \sin^2 \frac{x}{2}$ . Hệ số của biến  $x$  là

KQ:

**CÂU 49.** Tìm nguyên hàm  $F(x)$  của hàm số  $f(x) = \frac{1}{\sin^2 \frac{x}{2} \cdot \cos^2 \frac{x}{2}} = a \cot x + C$ . Giá trị

$a$  là

KQ:

**CÂU 50.** Tìm nguyên hàm  $F(x)$  của hàm số  $f(x) = \frac{1}{3}x^2 - 2x + \frac{1}{2}\tan^2 x = \frac{x^3}{a} + bx^2 + \frac{1}{c}x + d \tan x + C$ . Giá trị của  $a + b + c + d$  là

KQ:

**CÂU 51.** Tính  $\int x^2 \left(1 + \frac{1}{x} - \frac{\tan^2 x}{x^2}\right) dx = \frac{x^m}{n} + \frac{x^p}{q} + x + r \tan x + C$ . Giá trị biểu thức  $P = \frac{m}{n} + \frac{p}{q} + 2r$  là

KQ:

**CÂU 52.** Tính  $T = \int x \left(2024 - \frac{1}{x^3} + \frac{\sin x}{x}\right) dx$ . Hệ số của hạng tử  $\cos x$  của  $T$  là

KQ:

**CÂU 53.** Tính  $R = \int x^3 \left[ \frac{\left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2}\right)^2}{x^3} - 2x + \frac{1}{x^{2024}} \right] dx = ax + b \cos x + cx^5 - \frac{1}{d \cdot x^{2020}} +$

$C$ . Giá trị  $a + b + c + d + 7$  là (làm tròn đến hàng đơn vị)

KQ:

**CÂU 54.** Tính  $\int x^2 \left[ \frac{1}{x^2 \sin^2 \frac{x}{2} \cdot \cos^2 \frac{x}{2}} + \frac{3}{x^3} - \frac{4}{x^4} \right] dx = a \cot x + b \ln |x| + \frac{c}{x} + C$ . Giá trị

$a + b + c$  là

KQ:

**CÂU 55.** Họ nguyên hàm của hàm số  $f(x) = e^{3x}$  là hàm số nào sau đây?

- ☐ A  $3e^x + C.$       ☐ B  $\frac{1}{3}e^{3x} + C.$       ☐ C  $\frac{1}{3}e^x + C.$       ☐ D  $3e^{3x} + C.$

**CÂU 56.** Nguyên hàm của hàm số  $y = e^{2x-1}$  là

- ☐ A  $2e^{2x-1} + C.$       ☐ B  $e^{2x-1} + C.$       ☐ C  $\frac{1}{2}e^{2x-1} + C.$       ☐ D  $\frac{1}{2}e^x + C.$

**CÂU 57.** Cho hàm số  $f(x) = e^x + 2$ . Khẳng định nào dưới đây là **đúng**?

- ☐ A  $\int f(x) dx = e^{x-2} + C.$       ☐ B  $\int f(x) dx = e^x + 2x + C.$   
☐ C  $\int f(x) dx = e^x + C.$       ☐ D  $\int f(x) dx = e^x - 2x + C.$

**CÂU 58.** Cho hàm số  $f(x) = e^x + 2x$ . Khẳng định nào dưới đây **đúng**?

- ☐ A  $\int f(x) dx = e^x + x^2 + C.$       ☐ B  $\int f(x) dx = e^x + C.$

QUICK NOTE

**(C)**  $\int f(x) dx = e^x - x^2 + C.$

**(D)**  $\int f(x) dx = e^x + 2x^2 + C.$

**CÂU 59.** Tìm nguyên hàm của hàm số  $f(x) = 7^x$ .

**(A)**  $\int 7^x dx = \frac{7^x}{\ln 7} + C.$

**(B)**  $\int 7^x dx = 7^{x+1} + C.$

**(C)**  $\int 7^x dx = \frac{7^{x+1}}{x+1} + C.$

**(D)**  $\int 7^x dx = 7^x \ln 7 + C.$

**CÂU 60.** Nguyên hàm của hàm số  $f(x) = 2^x$  là

**(A)**  $\int 2^x dx = \ln 2 \cdot 2^x + C.$

**(B)**  $\int 2^x dx = 2^x + C.$

**(C)**  $\int 2^x dx = \frac{2^x}{\ln 2} + C.$

**(D)**  $\int 2^x dx = \frac{2^x}{x+1} \ln 7 + C.$

**CÂU 61.** Tất cả các nguyên hàm của hàm số  $f(x) = 3^{-x}$  là

**(A)**  $-\frac{3^{-x}}{\ln 3} + C.$

**(B)**  $-3^{-x} + C.$

**(C)**  $-3^{-x} \ln 3 + C.$

**(D)**  $\frac{3^{-x}}{\ln 3} + C.$

**CÂU 62.** Tìm nguyên hàm của hàm số  $f(x) = 3^x + 2x$ .

**(A)**  $\int (3^x + 2x) dx = \frac{3^x}{\ln 3} + x^2 + C.$

**(B)**  $\int (3^x + 2x) dx = 3^x \ln 3 + x^2 + C.$

**(C)**  $\int (3^x + 2x) dx = \frac{3^x}{\ln 3} + x + C.$

**(D)**  $\int (3^x + 2x) dx = 3^x \ln 3 + x + C.$

**CÂU 63.** Họ nguyên hàm của hàm số  $f(x) = e^x - 2x$  là

**(A)**  $e^x + x^2 + C.$

**(B)**  $e^x - x^2 + C.$

**(C)**  $\frac{1}{x+1} e^x - x^2 + C.$

**(D)**  $e^x - 2 + C.$

**CÂU 64.** Tìm nguyên hàm của hàm số  $f(x) = e^x \left( 2017 - \frac{2018e^{-x}}{x^5} \right).$

**(A)**  $\int f(x) dx = 2017e^x - \frac{2018}{x^4} + C.$

**(B)**  $\int f(x) dx = 2017e^x + \frac{2018}{x^4} + C.$

**(C)**  $\int f(x) dx = 2017e^x + \frac{504,5}{x^4} + C.$

**(D)**  $\int f(x) dx = 2017e^x - \frac{504,5}{x^4} + C.$

**CÂU 65.** Họ nguyên hàm của hàm số  $y = e^x \left( 2 + \frac{e^{-x}}{\cos^2 x} \right)$  là

**(A)**  $2e^x + \tan x + C.$

**(B)**  $2e^x - \tan x + C.$

**(C)**  $2e^x - \frac{1}{\cos x} + C.$

**(D)**  $2e^x + \frac{1}{\cos x} + C.$

**CÂU 66.** Tìm họ nguyên hàm của hàm số  $y = x^2 - 3^x + \frac{1}{x}.$

**(A)**  $\frac{x^3}{3} - \frac{3^x}{\ln 3} - \frac{1}{x^2} + C, C \in \mathbb{R}.$

**(B)**  $\frac{x^3}{3} - 3^x + \frac{1}{x^2} + C, C \in \mathbb{R}.$

**(C)**  $\frac{x^3}{3} - \frac{3^x}{\ln 3} + \ln |x| + C, C \in \mathbb{R}.$

**(D)**  $\frac{x^3}{3} - \frac{3^x}{\ln 3} - \ln |x| + C, C \in \mathbb{R}.$

**CÂU 67.** Khẳng định nào dưới đây **đúng**?

**(A)**  $\int e^x dx = xe^x + C.$

**(B)**  $\int e^x dx = e^{x+1} + C.$

**(C)**  $\int e^x dx = -e^{x+1} + C.$

**(D)**  $\int e^x dx = e^x + C.$

**CÂU 68.** Cho hàm số  $f(x) = 1 + e^{2x}$ . Khẳng định nào dưới đây **đúng**?

**(A)**  $\int f(x) dx = x + \frac{1}{2} e^x + C.$

**(B)**  $\int f(x) dx = x + 2e^{2x} + C.$

**(C)**  $\int f(x) dx = x + \frac{1}{2} e^{2x} + C.$

**(D)**  $\int f(x) dx = x + e^{2x} + C.$

**CÂU 69.** Các mệnh đề sau đây **đúng** hay **sai**?

Mệnh đề	Đ	S
a) $\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C.$		



QUICK NOTE

Mệnh đề	Đ	S
b) $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C.$		
c) $\int \sin x dx = -\cos x + C.$		
d) $\int e^x dx = e^x + C.$		

**CÂU 70.** Các mệnh đề sau đây **đúng** hay **sai**?

Mệnh đề	Đ	S
a) $\int \cos x dx = \sin x + C.$		
b) $\int x^e dx = \frac{x^{e+1}}{e+1} + C.$		
c) $\int \frac{1}{x} dx = \ln x  + C.$		
d) $\int e^x dx = \frac{e^{x+1}}{x+1} + C.$		

**CÂU 71.** Các mệnh đề sau đây **đúng** hay **sai**?

Mệnh đề	Đ	S
a) $\int 2^x dx = 2^x \ln 2 + C.$		
b) $\int e^{2x} dx = \frac{e^{2x}}{2} + C.$		
c) $\int e^x(e^x - 1) dx = \frac{1}{2}e^{2x} + e^x + C.$		
d) $\int e^{3x} \cdot 3^x dx = \frac{(3e^3)^x}{3 + \ln 3} + C.$		

**CÂU 72.** Biết rằng  $\int (2^x + 3^x) dx = \frac{2^x}{\ln a} + \frac{3^x}{\ln b} + C, a, b \in \mathbb{Z}.$  Tính  $P = a + b.$

KQ:

**CÂU 73.** Cho  $\int e^{3x+2024} dx = \frac{a}{b}e^{cx+d} + C$  với  $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$  và  $\frac{a}{b}$  là phân số tối giản. Tính giá trị của biểu thức  $P = a + b - c + d.$

KQ:

**CÂU 74.** Biết rằng  $\int 3^{x+2} \cdot 2^{2x+1} dx = \frac{a \cdot 12^x}{b \ln 2 + c \ln 3} + C$  với  $a, b, c \in \mathbb{Z}.$  Tính giá trị của biểu thức  $P = \frac{a}{b+c}.$

KQ:

**CÂU 75.** Biết rằng  $\int (3^x + 5^x)^2 dx = \frac{9^x}{a \ln 3} + \frac{30^x}{b \ln 5 + c \ln 2 + d \ln 3} + \frac{25^x}{e \ln 5} + C.$  Tính giá trị của biểu thức  $P = a + b + c + d + e.$

KQ:

**CÂU 76.** Cho  $\int \frac{e^{3x} + 1}{e^x + 1} dx = \frac{a}{b}e^{2x} + ce^x + dx + C$  với  $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$  và  $\frac{a}{b}$  là phân số tối giản. Tính giá trị của biểu thức  $P = a^2 + b^2 + c^2 + d^2.$

KQ:

**CÂU 77.** Biết rằng  $\int (e^x + e^{-x})^2 dx = \frac{1}{m}e^{2x} + \frac{1}{n}e^{-2x} + px + C$  với  $m, n, p \in \mathbb{Z}.$  Tính giá trị của biểu thức  $P = m + n + p.$

KQ:

QUICK NOTE

**CÂU 78.** Biết rằng  $\int \frac{e^{2x} - 1}{1 - e^{-x}} dx = \frac{1}{m} e^{nx} + pe^x + C$  với  $m, n, p \in \mathbb{Z}$ . Tính giá trị của biểu thức  $P = m + n - p$ .

KQ: 

--	--	--	--

**CÂU 79.** Biết rằng  $F(x) = (ax + b) \cdot e^x$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x) = (4x - 1) \cdot e^x$ . Tính giá trị biểu thức  $P = a + b$ .

KQ: 

--	--	--	--

**CÂU 80.** Biết rằng  $F(x) = 8e^x + \frac{na^x}{\ln a} + p \cos x$  (với  $m, n, p \in \mathbb{Z}$ ) là một nguyên hàm của hàm số  $f(x) = me^x + 2a^x - 2 \sin x$ . Tính giá trị của biểu thức  $P = m + n + p$ .

KQ: 

--	--	--	--

**CÂU 81.** Biết rằng  $F(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-2x}$  (với  $a, b, c \in \mathbb{R}$ ) là một nguyên hàm của hàm số  $f(x) = (-2x^2 + 8x - 7)e^{-2x}$ . Tính giá trị biểu thức  $P = a + b + c$ .

KQ: 

--	--	--	--

2

Tìm nguyên hàm khi biết giá trị nguyên hàm

Phương pháp: Tìm  $F(x) = \int f(x) dx$ . Sau đó dựa vào  $F(x_0) = a$  để suy ra  $C$ .

**CÂU 1.** Hàm số  $F(x)$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \frac{1}{x}$  trên  $(-\infty; 0)$  thỏa mãn  $F(-2) = 0$ . Khẳng định nào sau đây **đúng**?

- ☐ A  $F(x) = \ln\left(-\frac{x}{2}\right), \forall x \in (-\infty; 0)$ .
- ☐ B  $F(x) = \ln|x| + C, \forall x \in (-\infty; 0)$  với  $C$  là một số thực bất kì.
- ☐ C  $F(x) = \ln|x| + \ln 2, \forall x \in (-\infty; 0)$ .
- ☐ D  $F(x) = \ln(-x) + C, \forall x \in (-\infty; 0)$  với  $C$  là một số thực bất kì.

**CÂU 2.** Biết  $F(x)$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x) = e^{2x}$  và  $F(0) = 0$ . Giá trị của  $F(\ln 3)$  bằng

- ☐ A 2. ☐ B 6. ☐ C 8. ☐ D 4.

**CÂU 3.** Cho  $F(x)$  là một nguyên hàm của  $f(x) = 2^x + x + 1$ . Biết  $F(0) = 1$ . Giá trị của  $F(-1)$  bằng

- ☐ A  $F(-1) = \frac{1}{2 \ln 2}$ . ☐ B  $F(-1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \ln 2}$ .
- ☐ C  $F(-1) = 1 + \frac{1}{2 \ln 2}$ . ☐ D  $F(-1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\ln 2}$ .

**CÂU 4.** Tìm nguyên hàm  $F(x)$  của hàm số  $f(x) = \sin x + \cos x$  thỏa mãn  $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$ .

- ☐ A  $F(x) = -\cos x + \sin x + 3$ . ☐ B  $F(x) = -\cos x + \sin x - 1$ .
- ☐ C  $F(x) = -\cos x + \sin x + 1$ . ☐ D  $F(x) = \cos x - \sin x + 3$ .

**CÂU 5.** Cho  $F(x)$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x) = e^x + 2x$  thỏa mãn  $F(0) = \frac{3}{2}$ . Tìm  $F(x)$ .

- ☐ A  $F(x) = e^x + x^2 + \frac{1}{2}$ . ☐ B  $F(x) = e^x + x^2 + \frac{5}{2}$ .
- ☐ C  $F(x) = e^x + x^2 + \frac{3}{2}$ . ☐ D  $F(x) = e^x + x^2 - \frac{1}{2}$ .

**CÂU 6.** Cho hàm số  $f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{khi } x \geq 1 \\ 3x^2 - 2 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$ , giả sử  $F$  là nguyên hàm của  $f$  trên  $\mathbb{R}$  thỏa mãn  $F(0) = 2$ . Giá trị của  $F(-1) + 2F(2)$  bằng

- ☐ A 9. ☐ B 15. ☐ C 11. ☐ D 6.

**CÂU 7.** Cho hàm số  $f(x) = \begin{cases} 2x + 3 & \text{khi } x \geq 1 \\ 3x^2 + 2 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$ . Giả sử  $F$  là nguyên hàm của hàm số  $f$  trên  $\mathbb{R}$  thỏa mãn  $F(0) = 2$ . Giá trị của  $F(-1) + 2F(2)$  bằng

QUICK NOTE

(A) 23.

(B) 11.

(C) 10.

(D) 21.

**CÂU 8.** Cho hàm số  $f(x) = \begin{cases} 2x+2 & \text{khi } x \geq 1 \\ 3x^2+1 & \text{khi } x < 1. \end{cases}$  Giả sử  $F$  là nguyên hàm của hàm số  $f$  trên  $\mathbb{R}$  thỏa mãn  $F(0) = 2$ . Giá trị của  $F(-1) + 2F(2)$  bằng

(A) 18.

(B) 20.

(C) 9.

(D) 24.

**CÂU 9.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm là  $f'(x) = 12x^2 + 2, \forall x \in \mathbb{R}$  và  $f(1) = 3$ . Biết  $F(x)$  là nguyên hàm của  $f(x)$  thỏa mãn  $F(0) = 2$ , khi đó  $F(1)$  bằng

(A) -3.

(B) 1.

(C) 2.

(D) 7.

**CÂU 10.** Cho hàm số  $f(x)$  thỏa mãn  $f'(x) = 3 - 5 \sin x$  và  $f(0) = 10$ . Mệnh đề nào dưới đây đúng?

(A)  $f(x) = 3x - 5 \cos x + 15$ .

(B)  $f(x) = 3x - 5 \cos x + 2$ .

(C)  $f(x) = 3x + 5 \cos x + 5$ .

(D)  $f(x) = 3x + 5 \cos x + 2$ .

**CÂU 11.** Hàm số  $f(x)$  có đạo hàm liên tục trên  $\mathbb{R}$  và  $f'(x) = 2e^{2x} + 1, \forall x; f(0) = 2$ . Hàm  $f(x)$  là

(A)  $y = 2e^x + 2x$ .

(B)  $y = 2e^x + 2$ .

(C)  $y = e^{2x} + x + 2$ .

(D)  $y = e^{2x} + x + 1$ .

**CÂU 12.** Cho hàm số  $f(x)$  thỏa mãn  $f'(x) = 2 - 5 \sin x$  và  $f(0) = 10$ . Mệnh đề nào dưới đây đúng?

(A)  $f(x) = 2x + 5 \cos x + 3$ .

(B)  $f(x) = 2x - 5 \cos x + 15$ .

(C)  $f(x) = 2x + 5 \cos x + 5$ .

(D)  $f(x) = 2x - 5 \cos x + 10$ .

**CÂU 13.** Cho hàm số  $f(x)$  thỏa mãn  $f'(x) = ax^2 + \frac{b}{x^3}, f'(1) = 3, f(1) = 2, f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{12}$ . Khi đó  $2a + b$  bằng

(A)  $-\frac{3}{2}$ .

(B) 0.

(C) 5.

(D)  $\frac{3}{2}$ .

**CÂU 14.** Tìm một nguyên hàm  $F(x)$  của hàm số  $f(x) = ax + \frac{b}{x^2} (x \neq 0)$ , biết rằng  $F(-1) = 1, F(1) = 4, f(1) = 0$ .

(A)  $F(x) = \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{4x} - \frac{7}{4}$ .

(B)  $F(x) = \frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{2x} - \frac{7}{4}$ .

(C)  $F(x) = \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{2x} + \frac{7}{4}$ .

(D)  $F(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2x} - \frac{1}{2}$ .

**CÂU 15.** Cho hàm số  $f(x)$  xác định trên  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  thỏa mãn  $f'(x) = \frac{x+1}{x^2}, f(-2) = \frac{3}{2}$  và  $f(2) = 2 \ln 2 - \frac{3}{2}$ . Giá trị của biểu thức  $f(-1) + f(4)$  bằng

(A)  $\frac{6 \ln 2 - 3}{4}$ .

(B)  $\frac{6 \ln 2 + 3}{4}$ .

(C)  $\frac{8 \ln 2 + 3}{4}$ .

(D)  $\frac{8 \ln 2 - 3}{4}$ .

**CÂU 16.**

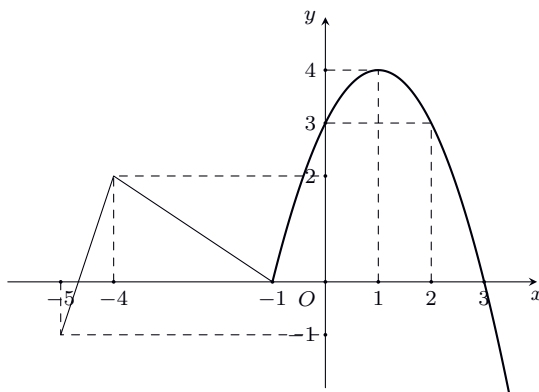
Cho hàm số  $y = f(x)$ . Đồ thị của hàm số  $y = f'(x)$  trên  $[-5; 3]$  như hình vẽ (phần cong của đồ thị là một phần của parabol  $y = ax^2 + bx + c$ ). Biết  $f(0) = 0$ , giá trị của  $2f(-5) + 3f(2)$  bằng

(A) 33.

(B)  $\frac{109}{3}$ .

(C)  $\frac{35}{3}$ .

(D) 11.



**CÂU 17.** Cho hàm số  $f(x) = 2x + e^x$ . Một nguyên hàm  $F(x)$  của hàm số  $f(x)$  thỏa mãn  $F(0) = 2024$ . Biết  $F(x) = ax^2 + be^x + c$ , giá trị của  $a + b + c$  là

KQ: 

--	--	--	--

**CÂU 18.** Cho  $F(x)$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \sin x + 1$  biết  $F\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0$ . Tính giá trị của  $F(\pi)$ . (Làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai)

QUICK NOTE

KQ:

**CÂU 19.** Cho  $F(x)$  là một nguyên hàm của  $f(x) = (5x + 3)^5$ . Biết  $F(1) = 0$ . Tính giá trị của  $\sqrt{|F(0)|}$ . (Làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất)

KQ:

**CÂU 20.** Cho  $F(x)$  là một nguyên hàm của  $f(x) = x^3 - 4x + 5$ . Biết  $F(1) = 3$ . Tính  $|F(0)|$ .

KQ:

**CÂU 21.** Cho  $F(x)$  là một nguyên hàm của  $f(x) = 3 - 5 \cos x$ . Biết  $F(\pi) = 2$ . Tính  $F\left(\frac{\pi}{2}\right)$ . (Làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất)

KQ:

**CÂU 22.** Cho  $F(x)$  là một nguyên hàm của  $f(x) = \frac{3 - 5x^2}{x}$ . Biết  $F(e) = 1$ . Tính  $F(2)$ . (Làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai)

KQ:

**CÂU 23.** Cho  $F(x)$  là một nguyên hàm của  $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x}$ . Biết  $F(1) = \frac{3}{2}$ . Tính  $F(-1)$ .

KQ:

**CÂU 24.** Cho  $F(x)$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \frac{x^3 - 1}{x^2}$ . Biết  $F(-2) = 0$ . Tính giá trị của  $F(2)$ .

KQ:

**CÂU 25.** Cho  $F(x)$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x) = x\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$ . Biết  $F(1) = -2$ . Tính  $F(0)$ .

KQ:

**CÂU 26.** Cho  $F(x)$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \sin x + 1$ . Biết  $F\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0$ . Tính  $F(-1)$ . (Làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất)

KQ:

**CÂU 27.** Cho  $F(x)$  là một nguyên hàm của  $f(x) = 2024 - \sin^2 \frac{x}{2}$ . Biết  $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2025$ . Tính  $\sqrt{|F(0)|}$ . (Làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất)

KQ:

**CÂU 28.** Cho  $F(x)$  là một nguyên hàm của  $f(x) = \sin^2 \frac{x}{4} \cdot \cos^2 \frac{x}{4}$ . Biết  $F\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0$ . Tính giá trị của  $F(\pi)$ . (Làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai)

KQ:

**CÂU 29.** Cho hàm số  $f(x) = \begin{cases} 2x + 5 & \text{khi } x \geq 1 \\ 3x^2 + 4 & \text{khi } x < 1. \end{cases}$  Giả sử  $F$  là nguyên hàm của  $f$  trên  $\mathbb{R}$  thỏa mãn  $F(0) = 2$ . Giá trị của  $F(-1) + 2F(2)$ .

KQ:

**CÂU 30.** Gọi  $F(x)$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x) = 2^x$ , thỏa mãn  $F(0) = \frac{1}{\ln 2}$ . Giá trị biểu thức  $T = F(0) + F(1) + \dots + F(2018) + F(2019)$  có dạng  $\frac{2^{2020} + a}{\ln b}$ . Giá trị của  $\frac{a}{b}$  là

KQ:

**CÂU 31.** Cho  $F(x)$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ . Biết  $F\left(\frac{\pi}{4} + k\pi\right) = k$  với mọi  $k \in \mathbb{Z}$ . Tính giá trị của biểu thức  $T = F(0) + F(\pi) + F(2\pi) + \dots + F(10\pi)$ .

KQ:				
-----	--	--	--	--

**CÂU 32.** Hàm số  $f(x)$  có đạo hàm liên tục trên  $\mathbb{R}$  và  $f'(x) = 2024 - 2 \sin^2 \frac{x}{2}, \forall x$ ;  
 $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2023\pi}{2}$ . Tính giá trị của  $f(0)$ .

KQ: 

--	--	--	--

**CÂU 33.** Hàm số  $f(x)$  có đạo hàm liên tục trên  $\mathbb{R}$  và  $f'(x) = 1 + e^{2x}$ ,  $\forall x$ ;  $f(0) = 2$ . Tính giá trị của  $f(2)$ . (Làm tròn đến số thập phân thứ nhất)

KQ:				
-----	--	--	--	--

**CÂU 34.** Hàm số  $f(x)$  có đạo hàm liên tục trên  $\mathbb{R}$  và  $f'(x) = 2^x + 3^x, \forall x; f(0) = \frac{1}{\ln 3}$ . Tính giá trị của  $f(1)$ . (Làm tròn đến số thập phân thứ hai)

KQ:				
-----	--	--	--	--

**CÂU 35.** Hàm số  $f(x)$  có đạo hàm liên tục trên  $\mathbb{R}$  và  $f'(x) = e^{3x+2024}$ ,  $\forall x$  thỏa mãn  $f(-675) = 1$ . Giá trị của  $f(-674)$  bằng

KQ: 

--	--	--	--

**CÂU 36.** Hàm số  $f(x)$  có đạo hàm liên tục trên  $\mathbb{R}$  và  $f'(x) = 3^{x+2} \cdot 2^{2x+1}, \forall x$  thoả mãn

$$\frac{f(0)}{f(1)} = \frac{1}{2 \ln 2}.$$

Giá trị của  $f(1)$  bằng

KQ:				
-----	--	--	--	--

**CÂU 37.** Hàm số  $f(x)$  có đạo hàm liên tục trên  $\mathbb{R}$  và  $f'(x) = (3^x + 5^x)^2, \forall x$  thoả mãn  $f(0) = \frac{1}{\ln 5 + \ln 3 + \ln 2}$ . Giá trị của  $f(1)$  bằng

KQ: 

--	--	--	--

## 3

### Ứng dụng trong bài toán thực tiễn

Giả sử  $v(t)$  là vận tốc của vật  $M$  tại thời điểm  $t$  và  $s(t)$  là quãng đường vật đi được sau khoảng thời gian  $t$  tính từ lúc bắt đầu chuyển động. Ta có mối liên hệ giữa  $s(t)$  và  $v(t)$  như sau.

- ✓ Đạo hàm của quãng đường là vận tốc  $s'(t) = v(t)$ .
- ✓ Nguyên hàm của vận tốc là quãng đường  $s(t) = \int v(t) dt$ .

Nếu gọi  $a(t)$  là gia tốc của vật M thì ta có mối liên hệ giữa  $v(t)$  và  $a(t)$  như sau.

- ✓ Đạo hàm của vận tốc là gia tốc  $v'(t) = a(t)$ .
- ✓ Nguyên hàm của gia tốc là vận tốc  $v(t) = \int a(t) dt$ .

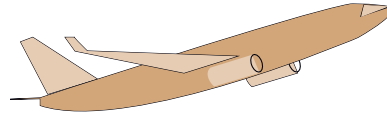
**CÂU 1.** Một ô tô đang chạy với vận tốc 20 m/s thì người lái đạp phanh. Sau khi đạp phanh, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc  $v(t) = -40t + 20$  m/s, trong đó  $t$  là khoảng thời gian tính bằng giây kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Gọi  $s(t)$  là quãng đường xe ô tô đi được trong thời gian  $t$  (giây) kể từ lúc đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ô tô còn đi chuyển bao nhiêu mét?

- Ⓐ 5 cm.                      Ⓑ 7,5 m.                      Ⓒ  $\frac{5}{2}$  m.                      Ⓓ 5 m.

**CÂU 2.** Bạn Minh Hiền ngồi trên máy bay đi du lịch thế giới với vận tốc chuyển động của máy bay là  $v(t) = 3t^2 + 5$  (m/s). Quãng đường máy bay bay từ giây thứ 4 đến giây thứ 10 là

## QUICK NOTE

QUICK NOTE



- ☐ A 36 m.
 ☐ B 252 m.
 ☐ C 1134 m.
 ☐ D 966 m.

**CÂU 3.** Một ô tô đang chạy với vận tốc 12 m/s thì người lái đạp phanh; từ thời điểm đó, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc  $v(t) = -6t + 12$  (m/s), trong đó  $t$  là khoảng thời gian tính bằng giây kể từ lúc đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi ô tô dừng hẳn, ô tô còn đi được bao nhiêu mét?

- ☐ A 24 m.
 ☐ B 12 m.
 ☐ C 6 m.
 ☐ D 0,4 m.

**CÂU 4.** Một ô tô đang chạy với vận tốc 36 km/h thì tăng tốc chuyển động nhanh dần đều với gia tốc  $a(t) = 1 + \frac{t}{3}$  (m/s<sup>2</sup>) tính quãng đường ô tô đi được sau 6 giây kể từ khi ô tô bắt đầu tăng tốc.

- ☐ A  $S = 90$  m.
 ☐ B  $S = 246$  m.
 ☐ C  $S = 58$  m.
 ☐ D  $S = 100$  m.

**CÂU 5.** Một ca nô đang chạy trên hồ Tây với vận tốc 20 m/s thì hết xăng; từ thời điểm đó, ca nô chuyển động chậm dần đều với vận tốc  $v(t) = -5t + 20$  (m/s), trong đó  $t$  là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc hết xăng. Hỏi từ lúc hết xăng đến lúc ca nô dừng hẳn thì ca nô đi được bao nhiêu mét?

- ☐ A 10 m.
 ☐ B 20 m.
 ☐ C 30 m.
 ☐ D 40 m.

**CÂU 6.** Một vật chuyển động với vận tốc 10 m/s thì tăng tốc với gia tốc được tính theo thời gian  $t$  là  $a(t) = 3t + t^2$  (m<sup>2</sup>/s). Tính quãng đường vật đi được trong 10s kể từ khi bắt đầu tăng tốc.

- ☐ A  $\frac{130}{3}$  m.
 ☐ B  $\frac{310}{3}$  m.
 ☐ C  $\frac{3400}{3}$  m.
 ☐ D  $\frac{4300}{3}$  m.

**CÂU 7.** Tại một nơi không có gió, một chiếc khí cầu đang đứng yên ở độ cao 162 m so với mặt đất đã được phi công cài đặt cho nó chế độ chuyển động đi xuống. Biết rằng, khí cầu đã chuyển động theo phương thẳng đứng với vận tốc tuân theo quy luật  $v(t) = 10t - t^2$ , trong đó  $t$  (phút) là thời gian tính từ lúc bắt đầu chuyển động,  $v(t)$  được tính theo đơn vị mét/phút (m/p). Nếu như vậy thì khi bắt đầu tiếp đất vận tốc  $v$  của khí cầu là

- ☐ A 5 m/p.
 ☐ B 7 m/p.
 ☐ C 9 m/p.
 ☐ D 3 m/p.

**CÂU 8.** Một viên đạn được bắn lên theo phương thẳng đứng với vận tốc ban đầu là 25 m/s, gia tốc trọng trường là 9,8 m/s<sup>2</sup>. Quãng đường viên đạn đi được từ lúc bắn cho đến khi chạm đất gần bằng kết quả nào nhất trong các kết quả sau?

- ☐ A 30,78 m.
 ☐ B 31,89 m.
 ☐ C 32,43 m.
 ☐ D 33,88 m.

**CÂU 9.** Trong một đợt xả lũ, nhà máy thủy điện đã xả lũ trong 40 phút với tốc độ lưu lượng nước tại thời điểm  $t$  giây là  $h'(t) = 10t + 500$  (m<sup>3</sup>/s). Hỏi sau thời gian xả lũ trên thì hồ thoát nước của nhà máy đã thoát đi một lượng nước là bao nhiêu?

- ☐ A  $5 \cdot 10^4$  m<sup>3</sup>.
 ☐ B  $4 \cdot 10^6$  m<sup>3</sup>.
 ☐ C  $3 \cdot 10^7$  m<sup>3</sup>.
 ☐ D  $6 \cdot 10^6$  m<sup>3</sup>.

**CÂU 10.** Một bác thợ xây bơm nước vào bể chứa nước. Gọi  $h(t)$  là thể tích nước bơm được sau  $t$  giây. Cho  $h'(t) = 3at^2 + bt$  (m<sup>3</sup>/s) và ban đầu bể không có nước. Sau 5 giây thì thể tích nước trong bể là 150 m<sup>3</sup>. Sau 10 giây thì thể tích nước trong bể là 1100 m<sup>3</sup>. Hỏi thể tích nước trong bể sau khi bơm được 20 giây là bao nhiêu.

- ☐ A 8400 m<sup>3</sup>.
 ☐ B 7400 m<sup>3</sup>.
 ☐ C 6000 m<sup>3</sup>.
 ☐ D 4200 m<sup>3</sup>.

**CÂU 11.** Gọi  $h(t)$  (m) là mực nước ở bồn chứa sau khi bơm nước được  $t$  giây. Biết rằng  $h'(t) = \frac{1}{5}\sqrt[3]{t}$  (m/s) và lúc đầu bồn không có nước. Tìm mực nước ở bồn sau khi bơm nước được 6 giây (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

- ☐ A 2,64 m.
 ☐ B 1,22 m.
 ☐ C 2,22 m.
 ☐ D 1,64 m.

**CÂU 12.** Sự sản sinh vi rút Zika ngày thứ  $t$  có số lượng là  $N(t)$  con, biết  $N'(t) = \frac{1000}{t}$  và lúc đầu đám vi rút có số lượng 250,000 con. Tính số lượng vi rút sau 10 ngày.

- ☐ A 272304 con.
 ☐ B 212302 con.
 ☐ C 242102 con.
 ☐ D 252302 con.

**CÂU 13.** Một chiếc ô tô đang chạy với vận tốc 15 m/s thì nhìn thấy chướng ngại vật trên đường cách đó 50 m, người lái xe hãm phanh khẩn cấp. Sau khi hãm phanh, ô tô chuyển

KQ:				
-----	--	--	--	--

KQ:				
-----	--	--	--	--

KQ:				
-----	--	--	--	--

KQ: 

--	--	--	--

KQ: 

--	--	--	--

KQ: 

--	--	--	--

KQ:				
-----	--	--	--	--

KQ: 

--	--	--	--

QUICK NOTE

## D. NGUYÊN HÀM HÀM ẨN

### Cần nhớ các công thức đạo hàm của hàm hợp

- a)  $\int f'(x)dx = f(x) + C$       b)  $f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) = [f(x) \cdot g(x)]'$
- c)  $\frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)} = \left[ \frac{f(x)}{g(x)} \right]'$       d)  $\frac{f'(x)}{f(x)} = [\ln f(x)]'$
- e)  $-\frac{f'(x)}{f^2(x)} = \left[ \frac{1}{f(x)} \right]'$       f)  $-\frac{f'(x)}{f^n(x)} = \left[ \frac{1}{(n-1)[f(x)]^{n-1}} \right]'$
- g)  $n \cdot f'(x) \cdot f^{n-1}(x) = [f^n(x)]'$       h)  $\frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} = [2\sqrt{f(x)}]'$

4

### Nguyên hàm của một tích, thương

#### 1. Điều kiện hàm ẩn có dạng

$$\begin{cases} f'(x) = g(x) \cdot h[f(x)] \\ f'(x) \cdot h[f(x)] = g(x) \end{cases}$$

**Phương pháp giải**

$$\textcircled{a} \frac{f'(x)}{h[f(x)]} = g(x) \Leftrightarrow \int \frac{f'(x)}{h[f(x)]} dx = \int g(x) dx \Leftrightarrow \int \frac{d[f(x)]}{h[f(x)]} = \int g(x) dx.$$

$$\textcircled{b} f'(x)h[f(x)] = g(x) \Leftrightarrow \int f'(x)h[f(x)]dx = \int g(x)dx \Leftrightarrow \int h[f(x)]d[f(x)] = \int g(x)dx.$$

Chú ý: Ngoài việc nguyên hàm hai vế, ta có thể lấy tích phân hai vế (tùy câu hỏi của bài toán)

#### 2. Điều kiện hàm ẩn có dạng

$$u(x)f'(x) + u'(x)f(x) = h(x)$$

**Phương pháp giải** Dễ dàng thấy rằng  $u(x)f'(x) + u'(x)f(x) = [u(x)f(x)]'$ .

Do đó  $u(x)f'(x) + u'(x)f(x) = h(x) \Leftrightarrow [u(x)f(x)]' = h(x)$ .

Suy ra  $u(x)f(x) = \int h(x)dx$ .

Từ đây ta dễ dàng tính được  $f(x)$ .

**CÂU 1.** Cho hàm số  $f(x)$  thỏa mãn  $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$  và  $f'(x) \sin^2 \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2} = 1$ . Tính  $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ .

- ☐ A  $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ .      ☐ B  $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$ .      ☐ C  $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$ .      ☐ D  $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4$ .

**CÂU 2.** Cho hàm số  $y = f(x)$  thỏa mãn  $f'(x) \cdot f(x) = x^4 + x^2$ . Biết  $f(0) = 2$ . Tính  $f^2(2)$ .

- ☐ A  $f^2(2) = \frac{313}{15}$ .      ☐ B  $f^2(2) = \frac{332}{15}$ .      ☐ C  $f^2(2) = \frac{324}{15}$ .      ☐ D  $f^2(2) = \frac{323}{15}$ .

**CÂU 3.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm liên tục trên đoạn  $[-2; 1]$  thỏa mãn  $f(0) = 3$  và  $(f(x))^2 \cdot f'(x) = 3x^2 + 4x + 2$ . Giá trị  $f(1)$  là

- ☐ A  $2\sqrt[3]{42}$ .      ☐ B  $2\sqrt[3]{15}$ .      ☐ C  $\sqrt[3]{42}$ .      ☐ D  $\sqrt[3]{15}$ .

**CÂU 4.** Cho hàm số  $f(x)$  thỏa mãn  $f(2) = -\frac{1}{3}$  và  $f'(x) = x[f(x)]^2$  với mọi  $x \in \mathbb{R}$ . Giá trị của  $f(1)$  bằng

- ☐ A  $f(1) = -\frac{2}{3}$ .      ☐ B  $f(1) = -\frac{2}{9}$ .      ☐ C  $f(1) = -\frac{7}{6}$ .      ☐ D  $f(1) = -\frac{11}{6}$ .

**CÂU 5.** Cho hàm số  $f(x)$  thỏa mãn  $f(2) = -\frac{1}{25}$  và  $f'(x) = 4x^3[f(x)]^2$  với mọi  $x \in \mathbb{R}$ . Giá trị của  $f(1)$  bằng

- ☐ A  $-\frac{391}{400}$ .      ☐ B  $-\frac{1}{40}$ .      ☐ C  $-\frac{41}{400}$ .      ☐ D  $-\frac{1}{10}$ .



**QUICK NOTE**

**CÂU 6.** Cho hàm số  $f(x)$  thỏa mãn  $f(2) = -\frac{1}{5}$  và  $f'(x) = x^3 [f(x)]^2$  với mọi  $x \in \mathbb{R}$ . Giá trị của  $f(1)$  bằng

- A**  $-\frac{4}{35}$ .      **B**  $-\frac{71}{20}$ .      **C**  $-\frac{79}{20}$ .      **D**  $-\frac{4}{5}$ .

**CÂU 7.** Cho hàm số  $y = f(x)$  thỏa mãn  $f(2) = -\frac{4}{19}$  và  $f'(x) = x^3 f^2(x) \forall x \in \mathbb{R}$ . Giá trị của  $f(1)$  bằng

- A**  $-\frac{2}{3}$ .      **B**  $-\frac{1}{2}$ .      **C**  $-1$ .      **D**  $-\frac{3}{4}$ .

**CÂU 8.** Cho hàm số  $f(x) > 0$  xác định và liên tục trên  $\mathbb{R}$  đồng thời thỏa mãn  $f(0) = \frac{1}{2}$ ,  $f'(x) = -e^x f^2(x)$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ . Tính giá trị của  $f(\ln 2)$ .

- A**  $f(\ln 2) = \frac{1}{4}$ .      **B**  $f(\ln 2) = \frac{1}{3}$ .  
**C**  $f(\ln 2) = \ln 2 + \frac{1}{2}$ .      **D**  $f(\ln 2) = \ln^2 2 + \frac{1}{2}$ .

**CÂU 9.** Cho hàm số  $f(x) \neq 0$  thỏa mãn điều kiện  $f'(x) = (2x + 3)f^2(x)$  và  $f(0) = -\frac{1}{2}$ . Biết rằng tổng  $f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(2024) + f(2025) = \frac{a}{b}$  với  $(a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}^*)$  và  $\frac{a}{b}$  là phân số tối giản. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A**  $\frac{a}{b} < -1$ .      **B**  $\frac{a}{b} > 1$ .      **C**  $a + b = 1010$ .      **D**  $b - a = 1519$ .

**CÂU 10.** Cho hàm số  $y = f(x)$  đồng biến trên  $(0; +\infty)$ ;  $y = f(x)$  liên tục, nhận giá trị dương trên  $(0; +\infty)$  và thỏa mãn  $f(3) = \frac{4}{9}$  và  $[f'(x)]^2 = xf(x)$ . Tính  $f(8)$ .

- A**  $f(8) = \frac{43 - 24\sqrt{3}}{9}$ .      **B**  $f(8) = \frac{43 + 24\sqrt{3}}{9}$ .  
**C**  $f(8) = \frac{43 - \sqrt{3}}{3}$ .      **D**  $f(8) = \frac{43 + \sqrt{3}}{3}$ .

**CÂU 11.** Cho hàm số  $f(x) > 0$  với mọi  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f(0) = 1$  và  $f(x) = \sqrt{x} \cdot f'(x)$  với mọi  $x \in \mathbb{R}$ . Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A**  $f(3) < 2$ .      **B**  $2 < f(3) < 4$ .      **C**  $f(3) > 6$ .      **D**  $4 < f(3) < 6$ .

**CÂU 12.** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm cấp hai trên đoạn  $[0; 1]$  đồng thời thỏa mãn các điều kiện  $f'(0) = -1$ ,  $f'(x) < 0$ ,  $[f'(x)]^2 = f''(x)$ ,  $\forall x \in [0; 1]$ . Giá trị  $f'(2)$  thuộc khoảng

- A**  $(2; 3)$ .      **B**  $(-2; 0)$ .      **C**  $(0; 2)$ .      **D**  $(-3; -2)$ .

**CÂU 13.** Cho hàm số  $f(x)$  đồng biến có đạo hàm đến cấp hai trên đoạn  $[0; 2]$  và thỏa mãn  $[f(x)]^2 - f(x) \cdot f''(x) + [f'(x)]^2 = 0$ . Biết  $f(0) = 1$ ,  $f(2) = e^6$ . Khi đó  $f(1)$  bằng

- A**  $e^{\frac{3}{2}}$ .      **B**  $e^3$ .      **C**  $e^{\frac{5}{2}}$ .      **D**  $e^2$ .

**CÂU 14.** Cho hàm số  $f(x)$  thỏa mãn  $(f'(x))^2 + f(x) \cdot f''(x) = x^3 - 2x$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$  và  $f(0) = f'(0) = 1$ . Giá trị của  $T = f^2(2)$  bằng

- A**  $\frac{43}{30}$ .      **B**  $\frac{16}{15}$ .      **C**  $\frac{43}{15}$ .      **D**  $\frac{26}{15}$ .

**CÂU 15.** Cho hàm số  $f(x)$  thỏa mãn  $[f'(x)]^2 + f(x) \cdot f''(x) = 2x^2 - x + 1$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$  và  $f(0) = f'(0) = 3$ . Giá trị của  $[f(1)]^2$  bằng

- A** 28.      **B** 22.      **C**  $\frac{19}{2}$ .      **D** 10.

**CÂU 16.** Cho hàm số  $y = f(x)$  thỏa mãn  $y' = xy^2$  và  $f(-1) = 1$ . Tính giá trị  $f(2)$ . (Kết quả làm tròn đến hàng phần mười).

KQ: 

--	--	--	--

**CÂU 17.** Cho hàm số  $f(x) \neq 0$ , liên tục trên đoạn  $[1; 2]$  và thỏa mãn  $f(1) = 3$ ,  $x^2 \cdot f'(x) = f^2(x)$  với  $\forall x \in [1; 2]$ . Tính  $f(2)$ .

KQ: 

--	--	--	--

**CÂU 18.** Cho hàm số  $y = f(x)$  thỏa mãn  $f(x) < 0$ ,  $\forall x > 0$  và có đạo hàm  $f'(x)$  liên tục trên khoảng  $(0; +\infty)$  thỏa mãn  $f'(x) = (2x + 1)f^2(x)$ ,  $\forall x > 0$  và  $f(1) = -\frac{1}{2}$ . Tính giá trị

QUICK NOTE

của biểu thức  $T = f(1) + f(2) + \dots + f(2023) + f(2024)$ . (Kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).

KQ:

**CÂU 19.** Cho hàm số  $f(x)$  thỏa mãn  $f(0) = 1 - \ln 2$  và  $e^x f'(x) = 2^x [f(x)]^2$  với mọi  $x \in \mathbb{R}$ . Giá trị của  $f(1)$  bằng bao nhiêu? (Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

KQ:

**CÂU 20.** Cho hàm số  $y = f(x)$  đồng biến và có đạo hàm liên tục trên  $\mathbb{R}$  thỏa mãn  $(f'(x))^2 = f(x) \cdot e^x$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$  và  $f(0) = 2$ . Tính  $f(2)$ . (Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

KQ:

**CÂU 21.** Giả sử hàm số  $y = f(x)$  liên tục, nhận giá trị dương trên  $(0; +\infty)$  và thỏa mãn  $f(1) = 1$ ,  $f(x) = f'(x) \cdot \sqrt{3x}$ , với mọi  $x > 0$ . Tính  $f(5)$  (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

KQ:

**CÂU 22.** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm trên  $\mathbb{R}$  thỏa mãn  $e^{f(x)} - \frac{x}{f'(x)} = 0$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ . Biết  $f(1) = 1$ , tính  $f(e^2)$  (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

KQ:

**CÂU 23.** Cho hàm số  $f(x)$  nhận giá trị dương và thỏa mãn  $f(0) = 1$ ,  $(f'(x))^3 = e^x (f(x))^2$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ . Tính  $f(3)$  (kết quả làm tròn đến hàng phần mười).

KQ:

**CÂU 24.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm liên tục trên  $\mathbb{R}$  và thỏa mãn điều kiện  $x^6 (f'(x))^3 + 27[f(x) - 1]^4 = 0$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$  và  $f(1) = 0$ . Tính giá trị của  $f(2)$ .

KQ:

**CÂU 25.** Cho hàm số  $f(x)$  thỏa mãn  $[xf'(x)]^2 + 1 = x^2 [1 - f(x) \cdot f''(x)]$  với mọi  $x$  dương. Biết  $f(1) = f'(1) = 1$ . Tính giá trị  $f^2(2)$  (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

KQ:

5

Phương trình vi phân  $A(x)f(x) + B(x)f'(x) = h(x)$

$$A(x)f(x) + B(x)f'(x) = h(x) \quad (1)$$

**Phương pháp giải:** Ta cần nhân thêm một lượng  $u(x)$  vào (1) để tạo thành  $u'(x)f(x) + u(x)f'(x) = u(x) \cdot h(x)$  và lúc này

$$\begin{aligned} u'(x)f(x) + u(x)f'(x) &= u(x) \cdot h(x) \\ \Rightarrow u(x)f(x) &= \int u(x) \cdot h(x) dx \\ \Rightarrow f(x) &= \frac{\int u(x) \cdot h(x) dx}{u(x)} \end{aligned}$$

Cách tìm  $u(x)$ :  $\begin{cases} u'(x) = A(x) \\ u(x) = B(x) \end{cases}$

Suy ra

$$\begin{aligned} \frac{u'(x)}{u(x)} &= \frac{A(x)}{B(x)} \Rightarrow \int \frac{u'(x)}{u(x)} dx = \int \frac{A(x)}{B(x)} dx \\ \Rightarrow \ln |u(x)| &= \int \frac{A(x)}{B(x)} dx \Rightarrow u(x) = e^{\int \frac{A(x)}{B(x)} dx} \end{aligned}$$

Tóm lại phương pháp giải  $A(x)f(x) + B(x)f'(x) = h(x)$  (1) như sau.

☑ **Bước 1.** Tìm  $u(x)$ .  $u(x) = e^{\int \frac{A(x)}{B(x)} dx}$ .

☑ **Bước 2.** Nhân  $u(x)$  vào (1) suy ra  $f(x) = \frac{\int u(x) \cdot h(x) dx}{u(x)}$ .

QUICK NOTE

**Một số dạng đặc biệt của (1).**

- a) Điều kiện hàm ẩn có dạng 
$$\begin{cases} f'(x) + f(x) = h(x) \\ f'(x) - f(x) = h(x). \end{cases}$$

Phương pháp giải.

⊕  $f'(x) + f(x) = h(x).$

Nhân hai vế với  $e^x$  ta được

$$e^x \cdot f'(x) + e^x \cdot f(x) = e^x \cdot h(x) \Leftrightarrow [e^x \cdot f(x)]' = e^x \cdot h(x).$$

Suy ra  $e^x \cdot f(x) = \int e^x \cdot h(x) dx.$

Từ đây ta dễ dàng tính được  $f(x).$

⊖  $f'(x) - f(x) = h(x).$

Nhân hai vế với  $e^{-x}$  ta được

$$e^{-x} \cdot f'(x) - e^{-x} \cdot f(x) = e^{-x} \cdot h(x) \Leftrightarrow [e^{-x} \cdot f(x)]' = e^{-x} \cdot h(x).$$

Suy ra  $e^{-x} \cdot f(x) = \int e^{-x} \cdot h(x) dx.$

Từ đây ta dễ dàng tính được  $f(x).$

- b) Điều kiện hàm ẩn có dạng  $f'(x) + p(x) \cdot f(x) = h(x).$

**Phương pháp giải.**

Nhân hai vế với  $e^{\int p(x) dx}$  ta được

$$\begin{aligned} f'(x) \cdot e^{\int p(x) dx} + p(x) \cdot e^{\int p(x) dx} \cdot f(x) &= h(x) \cdot e^{\int p(x) dx} \\ \Leftrightarrow [f(x) \cdot e^{\int p(x) dx}]' &= h(x) \cdot e^{\int p(x) dx}. \end{aligned}$$

Suy ra  $f(x) \cdot e^{\int p(x) dx} = \int e^{\int p(x) dx} h(x) dx.$

Từ đây ta dễ dàng tính được  $f(x).$

**CÂU 1.** Cho hàm số  $f(x)$  thỏa mãn  $f(x) + f'(x) = e^{-x}, \forall x \in \mathbb{R}$  và  $f(0) = 2$ . Tất cả các nguyên hàm của  $f(x)e^x$  là

- Ⓐ  $x^2 + x + C.$     Ⓑ  $2x^2 + 2x + C.$     Ⓒ  $2x^2 + x + C.$     Ⓓ  $\frac{1}{2}x^2 + 2x + C.$

**CÂU 2.** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  thỏa mãn  $f'(x) + 2x \cdot f(x) = e^{-x^2}, \forall x \in \mathbb{R}$  và  $f(0) = 0$ . Tính  $f(1)$ .

- Ⓐ  $f(1) = e^2.$     Ⓑ  $f(1) = -\frac{1}{e}.$     Ⓒ  $f(1) = \frac{1}{e^2}.$     Ⓓ  $f(1) = \frac{1}{e}.$

**CÂU 3.** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R} \setminus \{-1; 0\}$  thỏa mãn điều kiện  $f(1) = -2 \ln 2$  và  $x \cdot (x+1) \cdot f'(x) + f(x) = x^2 + x$ . Biết  $f(2) = a + b \cdot \ln 3$  ( $a, b \in \mathbb{Q}$ ). Giá trị  $2(a^2 + b^2)$  là

- Ⓐ  $\frac{27}{4}.$     Ⓑ 9.    Ⓒ  $\frac{3}{4}.$     Ⓓ  $\frac{9}{2}.$

**CÂU 4.** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R} \setminus \{-1; 0\}$  thỏa mãn  $f(1) = 2 \ln 2 + 1, x(x+1)f'(x) + (x+2)f(x) = x(x+1), \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 0\}$ . Biết  $f(2) = a + b \ln 3$ , với  $a, b$  là hai số hữu tỉ. Tính  $T = a^2 - b$ .

- Ⓐ  $T = -\frac{3}{16}.$     Ⓑ  $T = \frac{21}{16}.$     Ⓒ  $T = \frac{3}{2}.$     Ⓓ  $T = 0.$

**CÂU 5.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm liên tục trên  $(0; +\infty)$  thỏa mãn  $f'(x) + \frac{f(x)}{x} = 4x^2 + 3x$  và  $f(1) = 2$ . Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số  $y = f(x)$  tại điểm có hoành độ  $x = 2$  là

- Ⓐ  $y = -16x - 20.$     Ⓑ  $y = 16x - 20.$     Ⓒ  $y = 16x + 20.$     Ⓓ  $y = -16x + 20.$

**CÂU 6.** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $(0; +\infty)$  thỏa mãn  $2xf'(x) + f(x) = 3x^2\sqrt{x}$ . Biết  $f(1) = \frac{1}{2}$ . Tính  $f(4)$ .

- Ⓐ 24.    Ⓑ 14.    Ⓒ 4.    Ⓓ 16.

**CÂU 7.** Cho hàm số  $f(x)$  thỏa mãn  $f(1) = 4$  và  $f(x) = xf'(x) - 2x^3 - 3x^2$  với mọi  $x > 0$ . Giá trị của  $f(2)$  bằng

## QUICK NOTE

A 5.

B 10.

C 20.

D 15.

**CÂU 8.** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $(0; +\infty)$  thỏa mãn  $3x \cdot f(x) - x^2 \cdot f'(x) = 2f^2(x)$ , với  $f(x) \neq 0, \forall x \in (0; +\infty)$  và  $f(1) = \frac{1}{3}$ . Gọi  $M, m$  lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = f(x)$  trên đoạn  $[1; 2]$ . Tính  $M + m$ .

A  $\frac{9}{10}$ .

B  $\frac{21}{10}$ .

C  $\frac{5}{3}$ .

D  $\frac{7}{3}$ .

**CÂU 9.** Cho  $F(x)$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x) = e^{x^2} (x^3 - 4x)$ . Hàm số  $F(x^2 + x)$  có bao nhiêu điểm cực trị?

A 6.

B 5.

C 3.

D 4.

## Bài 2. TÍCH PHÂN

### A. LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

#### 1. Khái niệm tích phân

Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên đoạn  $[a; b]$ ,  $F(x)$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x)$  trên đoạn  $[a; b]$ . **Tích phân từ  $a$  đến  $b$  của hàm số  $f(x)$** ,

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a).$$

**Chú ý:**

☑ Tên gọi:  $a$  là cận dưới,  $b$  là cận trên.

☑ Quy ước:  $\int_a^a f(x)dx = 0$ ;  $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$ .

☑ Tích phân của hàm số  $f$  từ  $a$  đến  $b$  chỉ phụ thuộc vào  $f$  và các cận  $a, b$  mà không phụ thuộc vào biến  $x$  hay  $t$ , nghĩa là  $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt$ .

**⚡ NHẬN XÉT.**

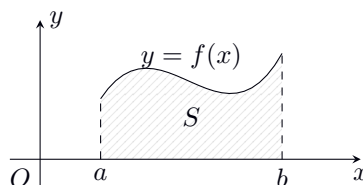
☑ Nếu hàm số  $f(x)$  có đạo hàm  $f'(x)$  và  $f'(x)$  liên tục trên đoạn  $[a; b]$  thì  $f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x)dx$ .

☑ Ý nghĩa hình học của tích phân.

Nếu hàm số  $f(x)$  liên tục và **không âm** trên đoạn

$[a; b]$  thì  $\int_a^b f(x)dx$  là diện tích  $S$  của hình thang

cong giới hạn bởi đồ thị  $y = f(x)$ , trục hoành và hai đường thẳng  $x = a, x = b$ .



$$S = \int_a^b f(x)dx.$$

☑ Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên đoạn  $[a; b]$ . Khi đó  $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$  được gọi là giá trị trung bình của hàm số  $f(x)$  trên đoạn  $[a; b]$ .

☑ Đạo hàm của quãng đường di chuyển của vật theo thời gian bằng tốc độ của chuyển động tại mọi thời điểm  $v(t) = s'(t)$ . Do đó, nếu biết tốc độ  $v(t)$  tại mọi thời điểm  $t \in [a; b]$  thì tính được quãng đường di chuyển trong khoảng thời gian từ  $a$  đến  $b$  theo

công thức:  $s = s(b) - s(a) = \int_a^b v(t)dt$ .

#### 2. Tính chất của tích phân

Cho hai hàm số  $f(x), g(x)$  liên tục trên đoạn  $[a; b]$ . Khi đó:

a)  $\int_a^b kf(x)dx = k \int_a^b f(x)dx$ , với  $k$  là hằng số.

#### QUICK NOTE

## QUICK NOTE

$$b) \int_a^b [f(x) \pm g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx.$$

$$c) \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \text{ với } c \in (a; b).$$

## B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

1

## Tính chất của tích phân

**Phần I.** Mỗi câu hỏi học sinh chọn một trong bốn phương án A, B, C, D.

**CÂU 1.** Nếu  $\int_0^3 f(x) dx = 6$  thì  $\int_0^3 \left[ \frac{1}{3}f(x) + 2 \right] dx$  bằng

- (A) 8. (B) 5. (C) 9. (D) 6.

**CÂU 2.** Nếu  $\int_1^4 f(x) dx = 3$  và  $\int_1^4 g(x) dx = -2$  thì  $\int_1^4 (f(x) - g(x)) dx$  bằng

- (A) -1. (B) -5. (C) 5. (D) 1.

**CÂU 3.** Nếu  $\int_1^4 f(x) dx = 5$  và  $\int_1^4 g(x) dx = -4$  thì  $\int_1^4 [f(x) - g(x)] dx$  bằng

- (A) -1. (B) -9. (C) 1. (D) 9.

**CÂU 4.** Biết  $\int_1^{2024} f(x) dx = -3$  và  $\int_{2024}^1 g(x) dx = 2$ . Khi đó  $\int_1^{2024} [f(x) - g(x)] dx$  bằng

- (A) 6. (B) -5. (C) 5. (D) -1.

**CÂU 5.** Nếu  $\int_0^3 f(x) dx = 3$  thì  $\int_0^3 4f(x) dx$  bằng

- (A) 3. (B) 12. (C) 36. (D) 4.

**CÂU 6.** Cho  $\int_0^2 f(x) dx = \frac{1}{2024}$ . Tính  $I = \int_0^2 2024f(x) dx$ .

- (A)  $I = 5$ . (B)  $I = \frac{1}{2024}$ . (C)  $I = 1$ . (D)  $I = 2024$ .

**CÂU 7.** Nếu  $\int_0^5 f(x) dx = 5$  thì  $\int_5^0 5f(x) dx$  bằng

- (A) 1. (B) -1. (C) 25. (D) -25.

**CÂU 8.** Nếu  $\int_0^2 f(x) dx = 5$  thì  $\int_0^2 [2f(x) - 1] dx$  bằng

- (A) 8. (B) 9. (C) 10. (D) 12.

**CÂU 9.** Nếu  $\int_0^2 f(x) dx = 3$  thì  $\int_0^2 [2f(x) - 1] dx$  bằng

- (A) 6. (B) 4. (C) 8. (D) 5.

**CÂU 10.** Cho  $\int_0^1 f(x) dx = 2$  và  $\int_0^1 g(x) dx = 5$ , khi  $\int_0^1 [f(x) - 2g(x)] dx$  bằng

- (A) -8. (B) 1. (C) -3. (D) 12.

**CÂU 11.** Cho  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = 5$ . Tính  $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [f(x) + 2 \sin x] dx$ .

- (A)  $I = 7$ . (B)  $I = 5 + \frac{\pi}{2}$ . (C)  $I = 3$ . (D)  $I = 5 + \pi$ .

**CÂU 12.** Cho  $\int_1^2 [4f(x) - 2x] dx = 1$ . Khi đó  $\int_1^2 f(x) dx$  bằng

- (A) 1. (B) -3. (C) 3. (D) -1.

**Phần II. Trong mỗi ý a), b), c) và d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.**

**CÂU 13.** Cho hai hàm  $f, g$  liên tục trên  $K$  và  $a, b$  là các số bất kỳ thuộc  $K$ .

Mệnh đề	Đ	S
a) $\int_a^b [f(x) + 2g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + 2 \int_a^b g(x) dx$ .		
b) $\int_a^b \frac{f(x)}{g(x)} dx = \frac{\int_a^b f(x) dx}{\int_a^b g(x) dx}$ .		
c) $\int_a^b [f(x) \cdot g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx \int_a^b g(x) dx$ .		
d) $\int_a^b f^2(x) dx = \left[ \int_a^b f(x) dx \right]^2$ .		

**CÂU 14.** Cho hàm số  $f(x), g(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$ .

Mệnh đề	Đ	S
a) Nếu $\int_0^2 f(x) dx = 4$ thì $\int_0^2 \left[ \frac{1}{2}f(x) + 2 \right] dx = 6$ .		
b) Nếu $\int_2^5 f(x) dx = 3$ và $\int_2^5 g(x) dx = -2$ thì $\int_2^5 [f(x) + g(x)] dx = 1$ .		
c) Nếu $\int_1^4 f(x) dx = 6$ và $\int_1^4 g(x) dx = -5$ thì $\int_1^4 [f(x) - g(x)] dx = 1$ .		
d) Nếu $\int_2^3 f(x) dx = 4$ và $\int_2^3 g(x) dx = 1$ thì $\int_2^3 [f(x) - g(x)] dx = 3$ .		

**CÂU 15.** Cho hàm số  $f(x), g(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$ .

Mệnh đề	Đ	S
a) Biết $\int_2^3 f(x) dx = 3$ và $\int_3^2 g(x) dx = 1$ . Khi đó $\int_2^3 [f(x) + g(x)] dx = 4$ .		
b) Biết $\int_1^3 f(x) dx = 2022$ và $\int_3^1 g(x) dx = 1$ . Khi đó $\int_1^3 [f(x) + g(x)] dx = 2021$ .		
c) Biết $\int_1^2 f(x) dx = 3$ và $\int_1^2 g(x) dx = 2$ . Khi đó $\int_1^2 [f(x) - g(x)] dx = 1$ .		
d) Biết $\int_2^5 f(x) dx = 2$ . Khi đó $\int_2^5 3f(x) dx = 2$ .		

**CÂU 16.** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$ .

Mệnh đề	Đ	S
a) Nếu $\int_0^3 f(x) dx = 3$ thì $\int_0^3 2f(x) dx = 6$ .		
b) Nếu $\int_1^4 f(x) dx = 2024$ thì $\int_4^1 f(x) dx = -2024$ .		

QUICK NOTE

QUICK NOTE

Mệnh đề	Đ	S
c) Nếu $\int_6^0 f(x) dx = 12$ thì $\int_0^6 2022f(x) dx = 24264$ .		
d) Nếu $\int_0^1 f(x) dx = 4$ thì $\int_0^1 2f(x) dx = 8$ .		

Phần III. Học sinh điền kết quả vào ô trống.

CÂU 17. Cho  $\int_0^3 f(x) dx = 4$ . Tính  $I = \int_0^3 3f(x) dx$ .

KQ:

CÂU 18. Cho  $\int_1^3 f(x) dx = 2$ . Tính  $I = \int_1^3 [f(x) + 2x] dx$ .

KQ:

CÂU 19. Cho  $\int_{-1}^2 f(x) dx = 2$  và  $\int_{-1}^2 g(x) dx = -1$ . Tính  $I = \int_{-1}^2 [x + 2f(x) + 3g(x)] dx$ .

KQ:

CÂU 20. Cho  $\int_0^1 f(x) dx = 1$ . Tính tích phân  $I = \int_0^1 [2f(x) - 3x^2] dx$ .

KQ:

CÂU 21. Biết  $\int_1^3 f(x) dx = 3$ . Tính giá trị của  $I = \int_3^1 2f(x) dx$ .

KQ:

2

Tích phân hàm số sơ cấp

Phần I. Mỗi câu hỏi học sinh chọn một trong bốn phương án A, B, C, D.

CÂU 1. Tích phân  $I = \int_0^2 (2x + 1) dx$  bằng

- ☐ A  $I = 5$ . ☐ B  $I = 6$ . ☐ C  $I = 2$ . ☐ D  $I = 4$ .

CÂU 2. Tích phân  $\int_0^1 (3x + 1)(x + 3) dx$  bằng

- ☐ A 12. ☐ B 9. ☐ C 5. ☐ D 6.

CÂU 3. Tính tích phân  $I = \int_1^e \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right) dx$

- ☐ A  $I = \frac{1}{e}$ . ☐ B  $I = \frac{1}{e} + 1$ . ☐ C  $I = 1$ . ☐ D  $I = e$ .

CÂU 4. Biết  $\int_1^3 \frac{x+2}{x} dx = a + b \ln c$ , với  $a, b, c \in \mathbb{Z}$ ,  $c < 9$ . Tính tổng  $S = a + b + c$ .

- ☐ A  $S = 7$ . ☐ B  $S = 5$ . ☐ C  $S = 8$ . ☐ D  $S = 6$ .

CÂU 5. Tích phân  $\int_0^1 e^{3x+1} dx$  bằng

- ☐ A  $\frac{1}{3}(e^4 + e)$ . ☐ B  $e^3 - e$ . ☐ C  $\frac{1}{3}(e^4 - e)$ . ☐ D  $e^4 - e$ .

CÂU 6. Biết  $\int_0^1 \frac{e^x}{2^x} dx = \frac{e-1}{a-\ln b}$ , ( $a, b \in \mathbb{Z}$ ). Khi đó giá trị của  $P = a + b$  là



**QUICK NOTE**

- (A)  $P = -3$ . (B)  $P = 6$ . (C)  $P = -1$ . (D)  $P = 3$ .

**CÂU 7.** Giá trị của  $I = \int_0^1 \frac{e^{2x} - 4}{e^x + 2} dx$  bằng

- (A)  $I = 2(e + 3)$ . (B)  $I = \frac{1}{2}(e + 3)$ . (C)  $I = e - 3$ . (D)  $I = 2(e - 3)$ .

**CÂU 8.** Biết  $\int_1^2 e^x \left(1 - \frac{e^{-x}}{x}\right) dx = e^2 + a \cdot e + b \ln 2$ , ( $a, b \in \mathbb{Z}$ ). Khi đó giá trị của  $P = \frac{a+b}{a \cdot b}$  là

- (A)  $P = -3$ . (B)  $P = 1$ . (C)  $P = -1$ . (D)  $P = -2$ .

**CÂU 9.** Biết  $I = \int_0^1 \frac{e^{2x-1} - e^{-3x} + 1}{e^x} dx = \frac{1}{a} + b$ , ( $a, b \in \mathbb{R}$ ). Khi đó giá trị của  $P = \frac{a+b}{a \cdot b}$  là

- (A)  $P = e^4 - 1$ . (B)  $P = \frac{e^4 - 1}{e^2}$ . (C)  $P = \frac{e^4 - 1}{e^4}$ . (D)  $P = \frac{1 - e^4}{e^4}$ .

**CÂU 10.** Giá trị của  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$  bằng

- (A) 0. (B) 1. (C) -1. (D)  $\frac{\pi}{2}$ .

**CÂU 11.** Biết  $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} (2 \sin x + 3 \cos x + x) dx = \frac{a + b\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi^2}{c}$ , ( $a, b, c \in \mathbb{Z}$ ). Khi đó giá trị của  $P = a + 2b + 3c$  là

- (A)  $P = 45$ . (B)  $P = 60$ . (C)  $P = 65$ . (D)  $P = 70$ .

**CÂU 12.** Biết  $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} 3 \tan^2 x dx = a\sqrt{3} + b + \frac{\pi}{c}$ , ( $a, b, c \in \mathbb{Z}$ ). Khi đó giá trị của  $P = a + b + c$  là

- (A)  $P = 6$ . (B)  $P = -4$ . (C)  $P = 4$ . (D)  $P = -6$ .

**CÂU 13.** Biết  $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} (2 \cot^2 x + 5) dx = \frac{\pi}{a} + b\sqrt{3} + c$ , ( $a, b, c \in \mathbb{Z}$ ). Khi đó giá trị của  $P = a + b + c$  là

- (A)  $P = 6$ . (B)  $P = -4$ . (C)  $P = 4$ . (D)  $P = -6$ .

**CÂU 14.** Biết  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \frac{x}{4} \cos^2 \frac{x}{4} dx = \frac{\pi}{c} + \frac{a}{b}$  với  $a, b \in \mathbb{Z}$  và  $\frac{a}{b}$  là phân số tối giản. Khi đó giá trị của  $P = a + b + c$  là

- (A)  $P = 17$ . (B)  $P = 16$ . (C)  $P = 32$ . (D)  $P = 49$ .

**Phần II.** Trong mỗi ý a), b), c) và d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.

**CÂU 15.** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $[a; b]$ . Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

Mệnh đề	Đ	S
a) $\int_a^b f(x) dx = \int_b^a f(x) dx$ .		
b) $\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx$ .		

QUICK NOTE

Mệnh đề	Đ	S
c) $\int_a^b f(x) \, dx = 2 \int_a^b f(x) \, d(2x).$		
d) $\int_a^a 2024f(x) \, dx = 0.$		

**CÂU 16.** Cho hàm số  $y = f(x)$ ,  $y = g(x)$  liên tục trên  $[a; b]$ . Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

Mệnh đề	Đ	S
a) $\int_a^b [f(x) + g(x)] \, dx = \int_a^b f(x) \, dx + \int_a^b g(x) \, dx.$		
b) $\int_a^b f(x) \cdot g(x) \, dx = \int_a^b f(x) \, dx \cdot \int_a^b g(x) \, dx.$		
c) $\int_a^b kf(x) \, dx = k \int_a^b f(x) \, dx.$		
d) $\int_a^b \frac{f(x)}{g(x)} \, dx = \frac{\int_a^b f(x) \, dx}{\int_a^b g(x) \, dx}.$		

**CÂU 17.** Cho hàm  $f(x)$  là hàm liên tục trên đoạn  $[a; b]$  với  $a < b$  và  $F(x)$  là một nguyên hàm của hàm  $f(x)$  trên  $[a; b]$ . Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

Mệnh đề	Đ	S
a) $\int_a^b kf(x) \, dx = k[F(b) - F(a)].$		
b) $\int_b^a f(x) \, dx = F(b) - F(a).$		
c) Diện tích $S$ của hình phẳng giới hạn bởi đường thẳng $x = a$ ; $x = b$ ; đồ thị của hàm số $y = f(x)$ và trục hoành được tính theo công thức $S = F(b) - F(a).$		
d) $\int_a^b f(2x + 3) \, dx = F(2x + 3) \Big _a^b.$		

**CÂU 18.** Các mệnh đề sau đây đúng hay sai.

Mệnh đề	Đ	S
a) $\int_0^1 \frac{e^{2x} - 4}{e^x + 2} \, dx = e - 3.$		
b) $\int_0^1 \frac{e^x}{2^x} \, dx = \frac{e}{2} + 1.$		
c) $\int_1^2 e^x \left(1 - \frac{e^{-x}}{x}\right) \, dx = e^2 - e - \ln 2.$		
d) $\int_0^1 \frac{e^{2x-1} - e^{-3x} + 1}{e^x} \, dx = e^4 - 1.$		

## QUICK NOTE

KQ: 

--	--	--	--

KQ: 

--	--	--	--

KQ: 

--	--	--	--

KQ: 

--	--	--	--

KQ: 

--	--	--	--

KQ:				
-----	--	--	--	--

KQ: 

--	--	--	--

KQ: 

--	--	--	--

KQ: 

--	--	--	--

KO: 

--	--	--	--

KO				
----	--	--	--	--

QUICK NOTE

**CÂU 30.** Biết  $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x} dx = a\sqrt{3} + \frac{\pi}{b}$  ( $a, b \in \mathbb{Z}$ ). Tính  $a + b$ .

KQ: 

--	--	--	--

**CÂU 31.** Tính  $I = \int_0^1 \frac{(2024^x + 1)^2}{e^{-3x}} dx$  (làm tròn đến hàng phần trăm).

KQ: 

--	--	--	--

**CÂU 32.** Tính  $I = \frac{1}{1000} \int_0^1 \frac{(e^{-x} + 2)^2}{e^{x-1}} dx$  (làm tròn đến hàng đơn vị).

KQ: 

--	--	--	--

**CÂU 33.** Tính  $I = \frac{1}{100} \int_1^2 e^{2x} \left( 2023 + \frac{2024e^{-2x}}{x^3} \right) dx$  (làm tròn đến hàng phần chục).

KQ: 

--	--	--	--

**CÂU 34.** Tính  $I = \int_1^2 \left( 4x^3 - 2 \cdot 3^{x+1} + \frac{1}{x^2} \right) dx$  (làm tròn đến hàng phần chục).

KQ: 

--	--	--	--

3

Tích phân hàm chứa trị tuyệt đối

Tính tích phân  $I = \int_a^b |f(x)| dx$ ?

Phương pháp

- ☑ **Bước 1.** Xét dấu  $f(x)$  trên đoạn  $[a; b]$ .
- ☑ **Bước 2.** Dựa vào bảng xét dấu trên đoạn  $[a; b]$  để khử  $|f(x)|$ . Sau đó sử dụng các phương pháp tính tích phân đã học để tính  $I = \int_a^b |f(x)| \cdot dx$ .

**Phần I.** Mỗi câu hỏi học sinh chọn một trong bốn phương án A, B, C, D.

**CÂU 1.** Giá trị của  $I = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos 2x} dx$  bằng

- (A)  $\sqrt{3}$ .                      (B)  $4\sqrt{2}$ .                      (C)  $2\sqrt{3}$ .                      (D)  $\frac{\pi}{2}$ .

**CÂU 2.** Tính tích phân  $I = \int_0^2 |x - 2| dx$ .

- (A)  $I = -2$ .                      (B)  $I = 4$ .                      (C)  $I = 2$ .                      (D)  $I = 0$ .

**CÂU 3.** Tính tích phân  $I = \int_0^2 |x^3 - x| dx$ .

- (A)  $I = -\frac{1}{2}$ .                      (B)  $I = 5$ .                      (C)  $I = \frac{1}{2}$ .                      (D)  $I = \frac{5}{2}$ .

**CÂU 4.** Tính tích phân  $I = \int_0^2 |x^2 + 2x - 3| dx$ .

- (A)  $I = -2$ .                      (B)  $I = 4$ .                      (C)  $I = 5$ .                      (D)  $I = -4$ .

QUICK NOTE

**CÂU 5.** Cho tích phân  $I = (\sqrt{3} + \sqrt{2}) \int_{-3}^3 |x^2 - 1| dx = a\sqrt{3} + b\sqrt{2}$  với  $a, b \in \mathbb{Q}$ . Tính  $P = a + b$ .

- (A)  $P = \frac{44}{3}$ . (B)  $P = \frac{88}{3}$ . (C)  $P = \frac{17}{3}$ . (D)  $P = \frac{98}{3}$ .

**CÂU 6.** Tính tích phân  $I = \int_{-2}^5 (|x + 2| - |x - 2|) dx$ .

- (A)  $I = 18$ . (B)  $I = 12$ . (C)  $I = 28$ . (D)  $I = 30$ .

**CÂU 7.** Cho tích phân  $I = \int_0^3 |2^x - 4| dx = a + \frac{b}{c \ln 2}$  với  $a, b, c \in \mathbb{Z}$  và  $\frac{b}{c}$  là phân số tối giản. Tính  $P = a^2 + b^2 + c^2$ .

- (A)  $P = 15$ . (B)  $P = 10$ . (C)  $P = 5$ . (D)  $P = 18$ .

**CÂU 8.** Tính tích phân  $I = \int_{-1}^1 |2^x - 2^{-x}| dx$ .

- (A)  $\frac{1}{\ln 2}$ . (B)  $\ln 2$ . (C)  $2 \ln 2$ . (D)  $\frac{2}{\ln 2}$ .

**CÂU 9.** Tính tích phân  $I = \int_{-1}^2 (|x| - |x - 1|) dx$ .

- (A)  $I = 0$ . (B)  $I = 2$ . (C)  $I = -2$ . (D)  $I = -3$ .

**CÂU 10.** Cho  $a$  là số thực dương, tính tích phân  $I = \int_{-1}^a |x| dx$  theo  $a$ .

- (A)  $I = \frac{a^2 + 1}{2}$ . (B)  $I = \frac{a^2 + 2}{2}$ . (C)  $I = \frac{-2a^2 + 1}{2}$ . (D)  $I = \frac{|3a^2 - 1|}{2}$ .

**CÂU 11.** Cho số thực  $m > 1$  thỏa mãn  $\int_1^m |2mx - 1| dx = 1$ . Khẳng định nào sau đây đúng?

- (A)  $m \in (4; 6)$ . (B)  $m \in (2; 4)$ . (C)  $m \in (3; 5)$ . (D)  $m \in (1; 3)$ .

**CÂU 12.** Khẳng định nào sau đây là đúng?

- (A)  $\int_{-1}^1 |x|^3 dx = \left| \int_{-1}^1 x^3 dx \right|$ .  
 (B)  $\int_{-1}^{2024} |x^4 - x^2 + 1| dx = \int_{-1}^{2024} (x^4 - x^2 + 1) dx$ .  
 (C)  $\int_{-2}^3 |e^x (x + 1)| dx = \int_{-2}^3 e^x (x + 1) dx$ .  
 (D)  $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \cos^2 x} dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$ .

**CÂU 13.** Tính tích phân  $I = \int_1^4 \sqrt{x^2 - 6x + 9} dx$ .

- (A)  $I = \frac{5}{2}$ . (B)  $I = -\frac{1}{2}$ . (C)  $I = -2$ . (D)  $I = \frac{1}{2}$ .

**Phần III.** Học sinh điền kết quả vào ô trống.

**CÂU 14.** Tính tích phân  $I = \int_{-3}^3 |x^2 - 1| dx$  (tính gần đúng đến hàng phần chục).

QUICK NOTE

KQ:

**CÂU 15.** Tính tích phân  $I = \int_{-1}^2 |-x^2 - 2x + 3| dx$  (tính gần đúng đến hàng phần trăm).

KQ:

**CÂU 16.** Tính tích phân  $I = \int_1^2 \left| \frac{x+1}{x} \right| dx$  (tính gần đúng đến hàng phần trăm).

KQ:

**CÂU 17.** Tính tích phân  $I = \int_2^6 \sqrt{x^2 - 8x + 16} dx$ .

KQ:

**CÂU 18.** Tính tích phân  $I = \int_{-2}^1 \sqrt{4x^2 + 6x + 9} dx$  (làm tròn đến hàng phần trăm).

KQ:

**CÂU 19.** Tính tích phân  $I = \int_0^1 \sqrt{9x^2 - 6x + 1} dx$  (làm tròn đến hàng phần trăm).

KQ:

**CÂU 20.** Tính tích phân  $I = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \cos 2x} dx$  (làm tròn đến hàng phần trăm).

KQ:

**CÂU 21.** Tính tích phân  $I = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos 2x} dx$  (làm tròn đến hàng phần trăm).

KQ:

**CÂU 22.** Tính tích phân  $I = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \sin 2x} dx$ , (làm tròn đến hàng phần trăm).

KQ:

**CÂU 23.** Tính tích phân  $I = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \sin 2x} dx$  (làm tròn đến hàng phần trăm).

KQ:

4

Tích phân có điều kiện

**Phần I.** Mỗi câu hỏi học sinh chọn một trong bốn phương án A, B, C, D.

**CÂU 1.** Nếu  $F'(x) = \frac{1}{2x}$  và  $F(1) = 1$  thì giá trị của  $F(4)$  bằng

- (A)  $\ln 2$ . (B)  $1 + \ln 2$ . (C)  $1 + \frac{1}{2} \ln 2$ . (D)  $\frac{1}{2} \ln 2$ .

**CÂU 2.** Cho  $F(x)$  là một nguyên hàm của  $f(x) = \frac{2}{x}$ . Biết  $F(-1) = 0$ . Tính  $F(2)$ .

- (A)  $2 \ln 2 + 1$ . (B)  $\ln 2$ . (C)  $2 \ln 3 + 2$ . (D)  $2 \ln 2$ .

## QUICK NOTE

$$\int_{-1}^2 f'(x) \, dx.$$

- Ⓐ 1.                      Ⓑ 7.                      Ⓒ -9.                      Ⓓ 9.

**CÂU 4.** Biết  $F(x) = x^2$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x)$  trên  $\mathbb{R}$ . Tính  $\int_1^x [1 + f(x)] dx$ .

- Ⓐ 10.                      Ⓑ 8.                      Ⓒ  $\frac{26}{3}$ .                      Ⓓ  $\frac{32}{3}$ .

**CÂU 5.** Biết  $F(x) = x^3$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x)$  trên  $\mathbb{R}$ . Tính  $\int_1^3 [1 + f(x)] dx$ .

- A** 20.                      **B** 22.                      **C** 26.                      **D** 28.

**CÂU 6.** Biết  $F(x) = x^2$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x)$  trên  $\mathbb{R}$ . Tính  $\int_1^2 [2 + f(x)] dx$ .

- Ⓐ 5.                      Ⓑ 3.                      Ⓒ  $\frac{13}{3}$ .                      Ⓓ  $\frac{7}{3}$ .

**CÂU 7.** Biết  $F(x) = x^3$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x)$  trên  $\mathbb{R}$ . Tính  $\int_1^2 [2 + f(x)] dx$ .

- Ⓐ  $\frac{23}{4}$ .      Ⓑ 7.      Ⓒ 9.      Ⓓ  $\frac{15}{4}$ .

**CÂU 8.** Cho hàm số  $f(x)$ . Biết  $f(0) = 4$  và  $f'(x) = 2 \sin^2 \frac{x}{2} + 1, \forall x \in \mathbb{R}$ , tính  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx$ .

- A**  $\frac{\pi^2 + 16\pi + 8\sqrt{2} - 16}{16}$ .
 **B**  $\frac{\pi^2 + 16\pi + 2\sqrt{2} - 4}{16}$ .
- C**  $\frac{\pi^2 + 16\pi + 8\sqrt{2}}{16}$ .
 **D**  $\frac{\pi^2 + 16\pi - 16}{16}$ .

**CÂU 9.** Cho hàm số  $f(x)$ . Biết  $f(0) = 4$  và  $f'(x) = 2\cos^2 \frac{x}{2} + 3, \forall x \in \mathbb{R}$ , tính  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)dx$ .

- (A)**  $\frac{\pi^2 + 8\pi - 8 - \sqrt{2}}{8}$ .
 **(B)**  $\frac{\pi^2 + 8\pi - 8 - 4\sqrt{2}}{8}$ .
- (C)**  $\frac{\pi^2 + 6\pi + 8}{8}$ .
 **(D)**  $\frac{\pi^2 + 8\pi - 4\sqrt{2}}{8}$ .

**CÂU 10.** Cho hàm số  $f(x) = \begin{cases} e^{2x} & \text{khi } x \geq 0 \\ x^2 + x + 2 & \text{khi } x < 0 \end{cases}$ . Biết tích phân  $\int_{-1}^1 f(x)dx = \frac{a}{b} + \frac{e^2}{c}$

( $\frac{a}{b}$  là phân số tối giản). Giá trị  $a + b + c$  bằng

- A** 7.                  **B** 8.                  **C** 9.                  **D** 10.

**CÂU 11.** Cho hàm số  $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{khi } x \geq 2 \\ x^2 - 2x + 3 & \text{khi } x < 2 \end{cases}$ . Tích phân  $I = \frac{1}{2} \int_1^3 f(x) dx$  bằng:

- Ⓐ  $\frac{23}{3}$ .      Ⓑ  $\frac{23}{6}$ .      Ⓒ  $\frac{17}{6}$ .      Ⓓ  $\frac{17}{3}$ .

**CÂU 12.** Cho hàm số  $f(x) = \begin{cases} \frac{x(1+x^2)}{x-4} & \text{khi } x \geq 3 \\ \frac{1}{x-4} & \text{khi } x < 3 \end{cases}$ . Tích phân  $I = \int_2^4 f(t)dt$  bằng:

- Ⓐ  $\frac{40}{3} - \ln 2$ .      Ⓑ  $\frac{95}{6} + \ln 2$ .      Ⓒ  $\frac{189}{4} + \ln 2$ .      Ⓓ  $\frac{189}{4} - \ln 2$ .

**CÂU 13.** Cho số thực  $a$  và hàm số  $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{khi } x \leq 0 \\ a(x - x^2) & \text{khi } x > 0 \end{cases}$ . Tính tích phân  $\int_{-1}^1 f(x)dx$ .

QUICK NOTE

- A

 $\frac{a}{6} - 1.$
- B

 $\frac{2a}{3} + 1.$
- C

 $\frac{a}{6} + 1.$
- D

 $\frac{2a}{3} - 1.$

Phần II. Trong mỗi ý a), b), c) và d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.

CÂU 14. Cho hàm số  $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + 3 & \text{khi } x \geq 1 \\ 2 - x^3 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$ .

Mệnh đề	Đ	S
a) $\int_1^{2024} f(x)dx = \int_1^{2024} (2x^2 + 3)dx.$		
b) $\int_{-2024}^1 f(x)dx = \int_{-2024}^1 (2 - x^3)dx.$		
c) $\int_{-2024}^{2024} f(x)dx = \int_1^{2024} (2x^2 + 3)dx + \int_{-2024}^1 (2 - x^3)dx.$		
d) $\int_{-2024}^{2024} f(x)dx = \int_1^{2024} (2x^2 + 3)dx + \int_{-2024}^1 (2 - x^3)dx.$		

CÂU 15. Cho hàm số  $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 3 & \text{khi } x \geq 2 \\ x + 1 & \text{khi } x < 2 \end{cases}$ .

Mệnh đề	Đ	S
a) $\int_1^2 f(x)dx = \int_1^2 (x + 1)dx.$		
b) $\int_2^3 f(x)dx = \int_2^3 (x^2 - 2x + 3)dx.$		
c) $\int_1^3 \frac{1}{2}f(x)dx = \frac{41}{12}.$		
d) $\int_1^2 f(x)dx = \int_1^2 (x^2 - 2x + 3)dx.$		

Phần III. Học sinh điền kết quả vào ô trống.

CÂU 16. Cho hàm số  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{khi } x \geq 1 \\ x + 1 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$ . Tích phân  $I = \int_2^0 -3t^2 f(t)dt$ . (làm tròn đến hàng phần trăm)

KQ: 

--	--	--	--

CÂU 17. Cho hàm số  $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 1 & \text{khi } x < 0 \\ x - 1 & \text{khi } 0 \leq x \leq 2 \\ 5 - 2x & \text{khi } x > 2 \end{cases}$ . Tính tích phân  $I = \int_{-5}^9 \frac{1}{7}f(t)dt$ . (làm tròn đến hàng phần trăm)

KQ: 

--	--	--	--

CÂU 18. Cho hàm số  $f(x) = \begin{cases} x^2 - x & \text{khi } x \geq 0 \\ x & \text{khi } x < 0 \end{cases}$ . Khi đó  $I = \int_{-1}^1 f(x)dx + \int_{-1}^3 f(x)dx$  bằng bao nhiêu? (làm tròn đến hàng phần trăm)

KQ: 

--	--	--	--



QUICK NOTE

**CÂU 19.** Cho hàm số  $f(x) = \begin{cases} 4x & \text{khi } x > 2 \\ -2x + 12 & \text{khi } x \leq 2 \end{cases}$ . Tính tích phân  $I = \int_1^2 f(t)dt + \frac{1}{2} \int_5^{10} f(t)dt$ .

KQ: 

--	--	--	--

**CÂU 20.** Biết rằng hàm số  $f(x) = mx + n$  thỏa mãn  $\int_0^1 f(x)dx = 3$ ,  $\int_0^2 f(x)dx = 8$ . Tính  $m + n$ .

KQ: 

--	--	--	--

**CÂU 21.** Biết rằng hàm số  $f(x) = ax^2 + bx + c$  thỏa mãn  $\int_0^1 f(x)dx = -\frac{7}{2}$ ,  $\int_0^2 f(x)dx = -2$  và  $\int_0^3 f(x)dx = \frac{13}{2}$ . Tính  $P = a + b + c$ . (làm tròn đến hàng phần trăm).

KQ: 

--	--	--	--

**CÂU 22.** Cho  $\int_0^m (3x^2 - 2x + 1)dx = 6$ . Tính giá trị của tham số  $m$ .

KQ: 

--	--	--	--

**CÂU 23.** Cho  $I = \int_0^1 (4x - 2m^2)dx$ . Có bao nhiêu giá trị nguyên của  $m$  để  $I + 6 > 0$ ?

KQ: 

--	--	--	--

**CÂU 24.** Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của  $a$  để  $\int_0^a (2x - 3)dx \leq 4$ ?

KQ: 

--	--	--	--

**CÂU 25.** Có bao nhiêu số thực  $b$  thuộc khoảng  $(\pi; 3\pi)$  sao cho  $\int_{\pi}^b 4 \cos 2x dx = 1$ ?

KQ: 

--	--	--	--

5

Ứng dụng tích phân trong thực tiễn

☑ Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên đoạn  $[a; b]$ . Khi đó  $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$  được gọi là giá trị trung bình của hàm số  $f(x)$  trên đoạn  $[a; b]$ .

☑ Đạo hàm của quãng đường di chuyển của vật theo thời gian bằng tốc độ của chuyển động tại mọi thời điểm  $v(t) = s'(t)$ . Do đó, nếu biết tốc độ  $v(t)$  tại mọi thời điểm  $t \in [a; b]$  thì tính được quãng đường di chuyển trong khoảng thời gian từ  $a$  đến  $b$  theo công thức

$$s = s(b) - s(a) = \int_a^b v(t) dt.$$

☑ Giả sử là vận tốc của vật tại thời điểm và là quãng đường vật đi được sau khoảng thời gian tính từ lúc bắt đầu chuyển động. Ta có mối liên hệ giữa vận tốc và quãng đường như sau

QUICK NOTE

— Đạo hàm của quãng đường là vận tốc  $s'(t) = v(t)$ .

— Nguyên hàm của vận tốc là quãng đường  $s(t) = \int v(t) dt$ .

$\Rightarrow$  Từ đây ta cũng có quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian từ  $a$  đến  $b$  là

$$\int_a^b v(t) dt = s(b) - s(a).$$

Nếu gọi  $a(t)$  là gia tốc của vật thì ta có mối liên hệ giữa gia tốc và vận tốc như sau

— Đạo hàm của vận tốc là gia tốc  $v'(t) = a(t)$ .

— Nguyên hàm của gia tốc là vận tốc  $v(t) = \int a(t) dt$ .

**Phần I. Mỗi câu hỏi học sinh chọn một trong bốn phương án A, B, C, D.**

**CÂU 1.** Một ô tô đang chạy với vận tốc  $10 \text{ m/s}$  thì gặp chướng ngại vật, người lái xe đạp phanh. Từ thời điểm đó, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc  $v(t) = -2t + 10 \text{ (m/s)}$ , trong đó  $t$  là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Tính quãng đường ô tô di chuyển được trong 8 giây cuối cùng.

- A** 55 m.      **B** 25 m.      **C** 50 m.      **D** 16 m.

**CÂU 2.** Một ô tô đang chạy với tốc độ  $20 \text{ (m/s)}$  thì gặp chướng ngại vật, người lái đạp phanh, từ thời điểm đó ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc  $v(t) = -5t + 20 \text{ (m/s)}$ , trong đó  $t$  là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ô tô còn di chuyển bao nhiêu mét (m)?

- A** 20 m.      **B** 30 m.      **C** 10 m.      **D** 40 m.

**CÂU 3.** Một chất điểm  $A$  xuất phát từ  $O$ , chuyển động thẳng với vận tốc biến thiên theo thời gian bởi quy luật  $v(t) = \frac{1}{150}t^2 + \frac{59}{75}t \text{ (m/s)}$ , trong đó  $t$  (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc  $a$  bắt đầu chuyển động. Từ trạng thái nghỉ, một chất điểm  $B$  cũng xuất phát từ  $O$ , chuyển động thẳng cùng hướng với  $A$  nhưng chậm hơn 3 giây so với  $A$  và có gia tốc bằng  $a \text{ (m/s}^2\text{)}$  ( $a$  là hằng số). Sau khi  $B$  xuất phát được 12 giây thì đuổi kịp  $A$ . Vận tốc của  $B$  tại thời điểm đuổi kịp  $A$  bằng

- A** 15 (m/s).      **B** 20 (m/s).      **C** 16 (m/s).      **D** 13 (m/s).

**CÂU 4.** Một ô tô bắt đầu chuyển động thẳng đều với vận tốc  $v_0$ , sau 6 giây chuyển động thì gặp chướng ngại vật nên bắt đầu giảm tốc độ với vận tốc chuyển động  $v(t) = -\frac{5}{2}t + a \text{ (m/s)}$  với  $t \geq 6$  cho đến khi dừng hẳn. Biết rằng kể từ lúc chuyển động đến lúc dừng hẳn thì ô tô đi được quãng đường là  $80 \text{ m}$ . Tìm  $v_0$ .

- A**  $v_0 = 35 \text{ m/s}$ .      **B**  $v_0 = 25 \text{ m/s}$ .      **C**  $v_0 = 10 \text{ m/s}$ .      **D**  $v_0 = 20 \text{ m/s}$ .

**CÂU 5.** Để đảm bảo an toàn khi lưu thông trên đường, các xe ô tô khi dừng đèn đỏ phải cách nhau tối thiểu  $1 \text{ m}$ . Một ô tô  $A$  đang chạy với vận tốc  $16 \text{ m/s}$  bỗng gặp ô tô  $B$  đang dừng đèn đỏ nên ô tô  $A$  hãm phanh và chuyển động chậm dần đều với vận tốc được biểu thị bởi công thức  $v_A(t) = 16 - 4t$  (đơn vị tính bằng  $\text{m/s}$ ), thời gian tính bằng giây. Hỏi rằng để hai ô tô  $A$  và  $B$  đạt khoảng cách an toàn khi dừng lại thì ô tô  $A$  phải hãm phanh khi cách ô tô  $B$  một khoảng ít nhất là bao nhiêu?

- A** 33.      **B** 12.      **C** 31.      **D** 32.

**CÂU 6.** Do các xe phải cách nhau tối thiểu  $1 \text{ m}$  để đảm bảo an toàn nên khi dừng lại ô tô  $A$  phải hãm phanh khi cách ô tô  $B$  một khoảng ít nhất là  $33 \text{ m}$ . Một chất điểm đang chuyển động với vận tốc  $v_0 = 15 \text{ m/s}$  thì tăng tốc với gia tốc  $a(t) = t^2 + 4t \text{ (m/s}^2\text{)}$ . Tính quãng đường chất điểm đó đi được trong khoảng thời gian 3 giây kể từ lúc bắt đầu tăng vận tốc.

- A** 70,25 m.      **B** 68,25 m.      **C** 67,25 m.      **D** 69,75 m.

**CÂU 7.** Một vật chuyển động với vận tốc  $10 \text{ m/s}$  thì tăng tốc với gia tốc được tính theo thời gian là  $a(t) = t^2 + 3t$ . Tính quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian 6 giây kể từ khi vật bắt đầu tăng tốc.

- A** 136 m.      **B** 126 m.      **C** 276 m.      **D** 216 m.

**QUICK NOTE**

**CÂU 8.** Một ô tô bắt đầu chuyển động nhanh dần đều với vận tốc  $v_1(t) = 7t$  (m/s). Đi được 5 s, người lái xe phát hiện chướng ngại vật và phanh gấp, ô tô tiếp tục chuyển động chậm dần đều với gia tốc  $a = -70$  (m/s<sup>2</sup>). Tính quãng đường  $S$  đi được của ô tô từ lúc bắt đầu chuyển bánh cho đến khi dừng hẳn.

- A**  $S = 96,25$  (m).    **B**  $S = 87,5$  (m).    **C**  $S = 94$  (m).    **D**  $S = 95,7$  (m).

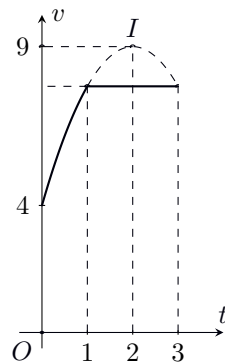
**CÂU 9.** Một ô tô bắt đầu chuyển động nhanh dần đều với vận tốc  $v_1(t) = 2t$  (m/s). Đi được 12 giây, người lái xe gặp chướng ngại vật và phanh gấp, ô tô tiếp tục chuyển động chậm dần đều với gia tốc  $a = -12$  (m/s<sup>2</sup>). Tính quãng đường  $s$  (m) đi được của ô tô từ lúc bắt đầu chuyển động đến khi dừng hẳn.

- A**  $s = 168$  (m).    **B**  $s = 166$  (m).    **C**  $s = 144$  (m).    **D**  $s = 152$  (m).

**CÂU 10.** Một ô tô đang dừng và bắt đầu chuyển động theo một đường thẳng với gia tốc  $a(t) = 6 - 2t$  (m/s<sup>2</sup>), trong đó  $t$  là khoảng thời gian tính bằng giây kể từ lúc ô tô bắt đầu chuyển động. Hỏi quãng đường ô tô đi được từ lúc bắt đầu chuyển động đến khi vận tốc của ô tô đạt giá trị lớn nhất là bao nhiêu mét?

- A** 18 m.    **B** 36 m.    **C** 22,5 m.    **D** 6,75 m.

**CÂU 11.** Một vật chuyển động trong 3 giờ với vận tốc  $v$  (km/h) phụ thuộc vào thời gian  $t$  (h) có đồ thị vận tốc như hình bên. Trong thời gian 1 giờ kể từ khi bắt đầu chuyển động, đồ thị đó là một phần của đường parabol có đỉnh  $I(2; 9)$  và trục đối xứng song song với trục tung, khoảng thời gian còn lại đồ thị là một đoạn thẳng song song với trục hoành. Tính quãng đường  $s$  mà vật chuyển động được trong 3 giờ đó (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).



- A**  $s = 21,58$  (km).    **B**  $s = 23,25$  (km).    **C**  $s = 13,83$  (km).    **D**  $s = 15,50$  (km).

**Phần III. Học sinh điền kết quả vào ô trống.**

**CÂU 12.** Một ô tô đang chạy với vận tốc là 12 (m/s) thì người lái đạp phanh; từ thời điểm đó ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc  $v(t) = -6t + 12$  (m/s), trong đó  $t$  là khoảng thời gian tính bằng giây kể từ lúc đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến lúc ô tô dừng hẳn, ô tô còn di chuyển được bao nhiêu mét?

KQ: 

--	--	--	--

**CÂU 13.** Một ô tô đang chạy với vận tốc 10 m/s thì người lái đạp phanh; từ thời điểm đó, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc  $v(t) = -5t + 10$  (m/s), trong đó  $t$  là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ô tô còn di chuyển bao nhiêu mét?

KQ: 

--	--	--	--

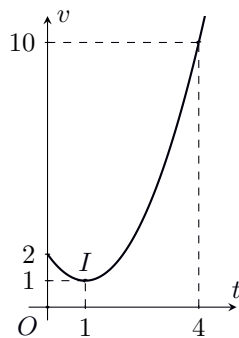
**CÂU 14.** Một ô tô chuyển động nhanh dần đều với vận tốc  $v(t) = 7t$  (m/s). Đi được 5 (s) người lái xe phát hiện chướng ngại vật và phanh gấp, ô tô tiếp tục chuyển động chậm dần đều với gia tốc  $a = -35$  (m/s<sup>2</sup>). Tính quãng đường của ô tô đi được từ lúc bắt đầu chuyển bánh cho đến khi dừng hẳn (đơn vị tính bằng mét)?

KQ: 

--	--	--	--

**CÂU 15.** Một vật chuyển động trong 4 giờ với vận tốc  $v$  (km/h) phụ thuộc thời gian  $t$  (h) có đồ thị là một phần của đường parabol có đỉnh  $I(1; 1)$  và trục đối xứng song song với trục tung như hình bên. Tính quãng đường  $s$  mà vật di chuyển được trong 4 giờ kể từ lúc xuất phát (làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất).

QUICK NOTE



KQ:

## C. TÍCH PHÂN HÀM ẨN BIẾN ĐỔI PHỨC TẠP

**Phần I.** Mỗi câu hỏi học sinh chọn một trong bốn phương án A, B, C, D.

**CÂU 1.** Cho hàm số  $f(x)$  nhận giá trị không âm và có đạo hàm liên tục trên  $\mathbb{R}$  thỏa mãn

$$f'(x) = (2x + 1)[f(x)]^2, \forall x \in \mathbb{R} \text{ và } f(0) = -1. \text{ Tính tích phân } \int_0^1 (x^3 - 1) f(x) dx.$$

- (A) 1.                      (B)  $\frac{2}{3}$ .                      (C)  $\frac{1}{2}$ .                      (D)  $\frac{3}{2}$ .

**CÂU 2.** Cho hàm số  $f(x) \neq 0$ , liên tục trên đoạn  $[1; 2]$  và thỏa mãn  $f(1) = \frac{1}{3}$ ;

$$x^2 \cdot f'(x) = f^2(x) \text{ với } \forall x \in [1; 2]. \text{ Tính tích phân } I = \int_1^2 (2x + 1)^2 f(x) dx.$$

- (A)  $I = \frac{7}{6}$ .                      (B)  $I = \frac{5}{6}$ .                      (C)  $I = \frac{37}{6}$ .                      (D)  $I = \frac{1}{6}$ .

**CÂU 3.** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm trên  $\mathbb{R}$  thỏa mãn  $3f'(x) \cdot e^{f^3(x)} - \frac{2x}{f^2(x)} = 0$  với

$$\forall x \in \mathbb{R}. \text{ Biết } f(1) = 0, \text{ tính tích phân } I = \int_0^{2024} \frac{1}{\sqrt[3]{2 \ln x}} \cdot f(x) dx.$$

- (A) 1.                      (B)  $\frac{1}{2024}$ .                      (C) 2024.                      (D) 0.

**CÂU 4.** Cho hàm số  $f(x)$  đồng biến, có đạo hàm trên đoạn  $[1; 4]$  và thỏa mãn  $x + 2x \cdot f(x) =$

$$[f'(x)]^2 \text{ với } \forall x \in [1; 4]. \text{ Biết } f(1) = \frac{3}{2}, \text{ tính } I = \int_1^4 f(x) dx.$$

- (A)  $I = \frac{1186}{45}$ .                      (B)  $I = \frac{1186}{9}$ .                      (C)  $I = \frac{1186}{5}$ .                      (D)  $I = \frac{1186}{41}$ .

**CÂU 5.** Cho hàm số  $f(x)$  nhận giá trị dương và thỏa mãn  $f(0) = 1, [f'(x)]^3 = e^x [f(x)]^2, \forall x \in$

$$\mathbb{R}. \text{ Tính } I = \int_1^2 f(x) dx.$$

- (A)  $I = e^2 + 1$ .                      (B)  $I = e - 1$ .                      (C)  $I = e^2 - e$ .                      (D)  $I = e$ .

**CÂU 6.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm liên tục trên  $\mathbb{R}$  và thỏa mãn điều kiện  $x^6 [f'(x)]^3 +$

$$27[f(x) - 1]^4 = 0, \forall x \in \mathbb{R} \text{ và } f(1) = 0. \text{ Tính } I = \int_2^3 f(x) dx.$$

- (A)  $I = \frac{31}{2}$ .                      (B)  $I = -\frac{31}{2}$ .                      (C)  $I = \frac{61}{4}$ .                      (D)  $I = -\frac{61}{4}$ .

**CÂU 7.** Cho hàm số  $f(x) > 0$  và thỏa mãn  $[f'(x)]^2 + f(x) \cdot f''(x) = e^x, \forall x \in \mathbb{R}$  và  $f(0) =$

$$f'(0) = 1. \text{ Tính } I = \int_1^2 f(x) dx.$$

- (A)  $I = 2\sqrt{e}$ .                      (B)  $I = e - \sqrt{e}$ .                      (C)  $I = 2e - 2\sqrt{e}$ .                      (D)  $I = 2e + 2\sqrt{e}$ .

## QUICK NOTE

$$I = \int_1^2 f^2(x) \, dx.$$

- Ⓐ  $I = \frac{15}{2}$ .      Ⓑ  $I = \frac{1}{2}$ .      Ⓒ  $I = \frac{19}{2}$ .      Ⓓ  $I = 15$ .

**CÂU 9.** Cho hàm số  $f(x)$  thỏa mãn:  $[f'(x)]^2 + f(x) \cdot f''(x) = 15x^4 + 12x, \forall x \in \mathbb{R}$  và  $f(0) = f'(0) = 1$ . Giá trị của  $f^2(1)$  bằng

- Ⓐ  $\frac{5}{2}$ .                      Ⓑ 8.                      Ⓒ 10.                      Ⓓ 4.

**CÂU 10.** Cho hàm số  $y = f(x)$  thỏa mãn  $[f'(x)]^2 + f(x) \cdot f''(x) = x^3 - 2x, \forall x \in \mathbb{R}$  và  $f(0) = f'(0) = 2$ . Tính giá trị của  $T = f^2(2)$ .

- Ⓐ  $\frac{160}{15}$ .      Ⓑ  $\frac{268}{15}$ .      Ⓒ  $\frac{4}{15}$ .      Ⓓ  $\frac{268}{30}$ .

$$I = \int_1^2 \frac{f(x)e^x}{x} \, dx.$$

- Ⓐ  $I = 2 \ln 2$ .      Ⓑ  $I = \ln 2$ .      Ⓒ  $I = 1 + \ln 2$ .      Ⓓ  $I = 1 + 2 \ln 2$ .

**CÂU 12.** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm trên  $\mathbb{R}$  thỏa mãn  $(x+2)f(x) + (x+1)f'(x) = e^x$  và  $f(0) = \frac{1}{2}$ . Tính  $I = \int_1^2 (2x+2)f(x) dx$ .

- Ⓐ  $I = e^2$ .      Ⓑ  $I = 1 + e$ .      Ⓒ  $I = 1 + e^2$ .      Ⓓ  $I = e^2 - e$ .

**CÂU 13.** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục, có đạo hàm trên  $\mathbb{R}$  thỏa mãn điều kiện

$$f(x) + x[f'(x) - 2 \sin x] = x^2 \cos x, x \in \mathbb{R} \text{ và } f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}. \text{ Tính } I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(x)}{x} dx.$$

- Ⓐ  $I = 1$ .      Ⓑ  $I = \frac{\pi}{2}$ .      Ⓒ  $I = -1$ .      Ⓓ  $I = -\pi$ .

**CÂU 14.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm trên  $(0; +\infty)$  thỏa mãn  $2xf'(x) + f(x) = 2x$ ,  $\forall x \in (0; +\infty)$ ,  $f(1) = 1$ . Giá trị của biểu thức  $f(4)$  là

- Ⓐ  $\frac{25}{6}$ .      Ⓑ  $\frac{25}{3}$ .      Ⓒ  $\frac{17}{6}$ .      Ⓓ  $\frac{17}{3}$ .

**CÂU 15.** Cho hàm số  $f(x)$  không âm, có đạo hàm trên đoạn  $[0; 1]$  và thỏa mãn  $f(1) = 1$ ,

$[2f(x) + 1 - x^2] f'(x) = 2x [1 + f(x)], \forall x \in [0; 1]$ . Tích phân  $\int_0^1 f(x) dx$  bằng

- Ⓐ 1.                      Ⓑ 2.                      Ⓒ  $\frac{1}{3}$ .                      Ⓓ  $\frac{3}{2}$ .

**CÂU 16.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm liên tục trên  $[0; 1]$ , thỏa mãn

$$[f'(x)]^2 + 4f(x) = 8x^2 + 4, \forall x \in [0; 1] \text{ và } f(1) = 2. \text{ Tính } \int_0^1 f(x) dx.$$

- Ⓐ  $\frac{1}{3}$ .                      Ⓑ 2.                      Ⓒ  $\frac{4}{3}$ .                      Ⓓ  $\frac{21}{4}$ .

**CÂU 17.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm liên tục trên  $[0; 1]$  thỏa mãn

$3f(x) + xf'(x) \geq x^{2018}, \forall x \in [0; 1]$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của  $\int_0^1 f(x) dx$ .

- Ⓐ  $\frac{1}{2018 \cdot 2020}$       Ⓑ  $\frac{1}{2019 \cdot 2020}$       Ⓒ  $\frac{1}{2020 \cdot 2021}$       Ⓓ  $\frac{1}{2019 \cdot 2021}$

**CÂU 18.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm trên  $\mathbb{R}$  thỏa mãn

$$\begin{cases} f(0) = f'(0) = 1 \\ f(x+y) = f(x) + f(y) + 3xy(x+y) - 1 \end{cases} \text{ với } x, y \in \mathbb{R}$$

QUICK NOTE

Tính  $\int_0^1 f(x-1) dx$ .

- (A)  $\frac{1}{2}$ . (B)  $-\frac{1}{4}$ . (C)  $\frac{1}{4}$ . (D)  $\frac{7}{4}$ .

**CÂU 19.** Cho hai hàm  $f(x)$  và  $g(x)$  có đạo hàm trên  $[1; 4]$ , thỏa mãn  $\begin{cases} f(1) + g(1) = 4 \\ g(x) = -xf'(x), \text{ với} \\ f(x) = -xg'(x) \end{cases}$

mọi  $x \in [1; 4]$ . Tính tích phân  $I = \int_1^4 [f(x) + g(x)] dx$ .

- (A)  $3 \ln 2$ . (B)  $4 \ln 2$ . (C)  $6 \ln 2$ . (D)  $8 \ln 2$ .

**CÂU 20.** Cho hai hàm  $f(x)$  và  $g(x)$  có đạo hàm trên  $[1; 2]$  thỏa mãn  $f(1) = g(1) = 0$  và  $\begin{cases} \frac{x}{(x+1)^2} g(x) + 2023x = (x+1)f'(x) \\ \frac{x^3}{x+1} g'(x) + f(x) = 2024x^2 \end{cases}, \forall x \in [1; 2]$ .

Tính tích phân  $I = \int_1^2 \left[ \frac{x}{x+1} g(x) - \frac{x+1}{x} f(x) \right] dx$ .

- (A)  $I = \frac{1}{2}$ . (B)  $I = 1$ . (C)  $I = \frac{3}{2}$ . (D)  $I = 2$ .

**CÂU 21.** Cho hàm số  $f(x)$  xác định và liên tục trên  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  thỏa mãn  $x^2 f^2(x) + (2x-1)f(x) = xf'(x) - 1$ , với mọi  $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  đồng thời thỏa mãn  $f(1) = -2$ . Tính  $\int_1^2 f(x) dx$ .

- (A)  $-\frac{\ln 2}{2} - 1$ . (B)  $-\ln 2 - \frac{1}{2}$ . (C)  $-\ln 2 - \frac{3}{2}$ . (D)  $-\frac{\ln 2}{2} - \frac{3}{2}$ .

**CÂU 22.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm liên tục trên  $\mathbb{R}$  thỏa mãn  $x \cdot f(x) \cdot f'(x) = f^2(x) - x, \forall x \in \mathbb{R}$  và có  $f(2) = 1$ . Tính phân  $\int_0^2 f^2(x) dx$  bằng

- (A)  $\frac{3}{2}$ . (B)  $\frac{4}{3}$ . (C)  $2$ . (D)  $4$ .

**CÂU 23.** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm liên tục trên  $\mathbb{R}, f(0) = 0, f'(0) \neq 0$  và thỏa mãn hệ thức  $f(x) \cdot f'(x) + 18x^2 = (3x^2 + x)f'(x) + (6x+1)f(x), \forall x \in \mathbb{R}$ . Biết  $\int_0^1 (x+1)e^{f(x)} dx = ae^2 + b, (a, b \in \mathbb{Q})$ . Giá trị của  $a - b$  bằng

- (A)  $1$ . (B)  $2$ . (C)  $0$ . (D)  $\frac{2}{3}$ .

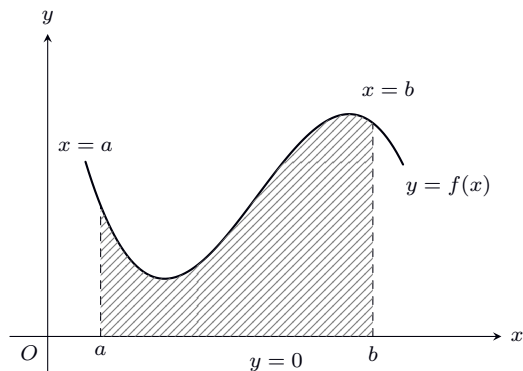
**CÂU 24.** Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định và có đạo hàm  $f'(x)$  liên tục trên  $[1; 3]; f(x) \neq 0, \forall x \in [1; 3]; f'(x)[1+f(x)]^2 = (x-1)^2[f(x)]^4$  và  $f(1) = -1$ . Biết rằng  $\int_e^3 f(x) dx = a \ln 3 + b (a, b \in \mathbb{Z})$ . Giá trị của  $a + b^2$  bằng

- (A)  $4$ . (B)  $0$ . (C)  $2$ . (D)  $-1$ .

## Bài 3. ỨNG DỤNG HÌNH HỌC CỦA TÍCH PHÂN

### A. DIỆN TÍCH HÌNH THANG CONG

## 1. Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$ và $x = b$



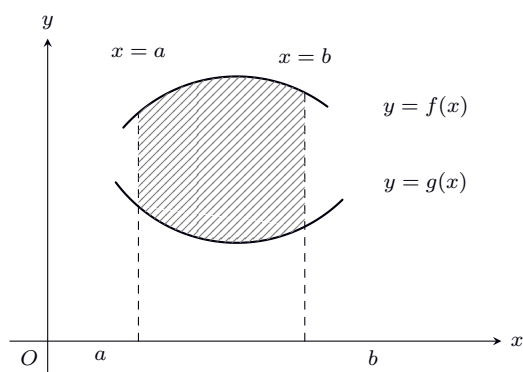
Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $[a; b]$ . Khi đó, diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số  $y = f(x)$ , trục hoành  $Ox$  ( $y = 0$ ) và hai đường thẳng  $x = a$  và  $x = b$  được tính bởi công thức

$$S = \int_a^b |f(x)| \, dx$$

**Chú ý:** Giả sử hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $[a; b]$ . Nếu  $f(x)$  không đổi dấu trên  $[a; b]$  thì

$$\int_a^b |f(x)| \, dx = \left| \int_a^b f(x) \, dx \right|.$$

## 2. Hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số và hai đường thẳng $x = a$ và $x = b$



Cho 2 hàm số  $y = f(x)$  và  $y = g(x)$  liên tục trên  $[a; b]$ . Khi đó diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số  $y = f(x)$  và  $y = g(x)$  và hai đường thẳng  $x = a$  và  $x = b$  được tính bởi công thức

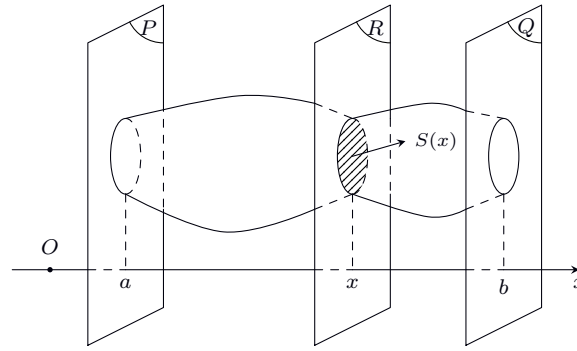
$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)| \, dx$$

## B. THỂ TÍCH HÌNH KHỐI

### QUICK NOTE

QUICK NOTE

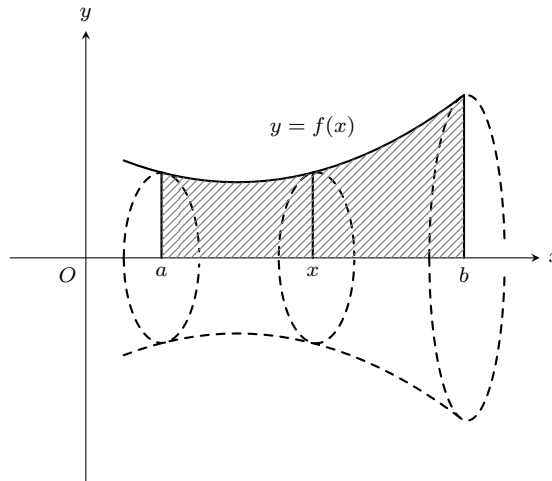
## 1. Thể tích của vật thể



Trong không gian, cho một vật thể nằm trong khoảng không gian giữa hai mặt phẳng ( $P$ ) và ( $Q$ ) cùng vuông góc với trục  $Ox$  tại các điểm  $a$  và  $b$ . Mặt phẳng vuông góc với trục  $Ox$  tại điểm  $x$  ( $a \leq x \leq b$ ) cắt vật thể theo mặt cắt có diện tích  $S(x)$ . Khi đó, nếu  $S(x)$  là hàm số liên tục trên  $[a; b]$  thì thể tích của vật thể được tính bởi công thức

$$V = \int_a^b S(x) dx$$

## 2. Thể tích khối tròn xoay



Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục, không âm trên  $[a; b]$ . Hình phẳng ( $H$ ) giới hạn bởi đồ thị hàm số  $y = f(x)$ , trục hoành  $Ox$  và hai đường thẳng  $x = a$  và  $x = b$  quay quanh trục  $Ox$  tạo thành một khối tròn xoay có thể tích bằng

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

1

Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số

**CÂU 1.** Cho hai hàm số  $f(x)$  và  $g(x)$  liên tục trên  $[a; b]$ . Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của các hàm số  $y = f(x)$ ,  $y = g(x)$  và các đường thẳng  $x = a$ ,  $x = b$  bằng

**A**  $\left| \int_a^b [f(x) - g(x)] dx \right|$

**B**  $\int_a^b |f(x) + g(x)| dx$

**C**  $\int_a^b |f(x) - g(x)| dx$

**D**  $\int_a^b [f(x) - g(x)] dx$

**CÂU 2.** Gọi  $S$  là diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường  $y = 3^x$ ,  $y = 0$ ,  $x = 0$ ,  $x = 2$ . Mệnh đề nào dưới đây đúng?



**QUICK NOTE**

**A**  $\int_0^2 3^x dx.$ 
**B**  $S = \pi \int_0^2 3^{2x} dx.$ 
**C**  $S = \pi \int_0^2 3^x dx.$ 
**D**  $S = \int_0^2 3^{2x} dx.$

**CÂU 3.** Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số  $y = (x - 2)^2 - 1$ , trục hoành và hai đường thẳng  $x = 1, x = 2$  bằng

**A**  $\frac{2}{3}.$ 
**B**  $\frac{3}{2}.$ 
**C**  $\frac{1}{3}.$ 
**D**  $\frac{7}{3}.$

**CÂU 4.** Tính diện tích  $S$  hình phẳng giới hạn bởi các đường  $y = x^2 + 1, x = -1, x = 2$  và trục hoành.

**A**  $S = 6.$ 
**B**  $S = 16.$ 
**C**  $S = \frac{13}{6}.$ 
**D**  $S = 13.$

**CÂU 5.** Gọi  $S$  là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường  $y = x^2 + 5, y = 6x, x = 0, x = 1$ . Tính  $S$ .

**A**  $\frac{4}{3}.$ 
**B**  $\frac{7}{3}.$ 
**C**  $\frac{8}{3}.$ 
**D**  $\frac{5}{3}.$

**CÂU 6.** Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số  $y = \ln x, y = 1$  và hai đường thẳng  $x = 1, x = e$  bằng

**A**  $e^2.$ 
**B**  $e + 2.$ 
**C**  $2e.$ 
**D**  $e - 2.$

**CÂU 7.** Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số  $y = 4x - x^2, y = 2x$  và hai đường thẳng  $x = 1, x = e$  bằng

**A**  $4.$ 
**B**  $\frac{20}{3}.$ 
**C**  $\frac{4}{3}.$ 
**D**  $\frac{16}{3}.$

**CÂU 8.** Tính diện tích  $S$  của hình phẳng giới hạn bởi các đường  $y = x^2 - 2x, y = 0, x = -10, x = 10$ .

**A**  $S = \frac{2000}{3}.$ 
**B**  $S = 2008.$ 
**C**  $S = 2000.$ 
**D**  $S = \frac{2008}{3}.$

**CÂU 9.** Gọi  $S$  là diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường  $y = 2^x, y = 0, x = 0, x = 2$ . Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

Mệnh đề	Đ	S
a) $S = \int_0^2 2^x dx.$		
b) $S = \frac{3}{\ln 2}.$		

Mệnh đề	Đ	S
c) $S = \pi \int_0^2 2^x dx.$		
d) $S = \frac{3\pi}{\ln 2}.$		

**CÂU 10.** Gọi  $S$  là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường  $y = e^x, y = 0, x = 0, x = 2$ . Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

Mệnh đề	Đ	S
a) $S = \int_0^2 e^x dx.$		
b) $S = e^2.$		

Mệnh đề	Đ	S
c) $S = \pi \int_0^2 e^x dx.$		
d) $S = (e^2 - 1)\pi.$		

**CÂU 11.** Các mệnh đề sau đây đúng hay sai

Mệnh đề	Đ	S
a) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^2, y = 2x, x = 0, x = 1$ là $\frac{4}{3}.$		
b) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = -x^2 + 2x + 1, y = 2x^2 - 4x + 1, x = 0, x = 2$ là 4.		
c) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \frac{x-1}{x+1}$ , trục hoành, $x = 0, x = 1$ là $2 \ln 2 - 1.$		
d) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = -x^3 + 12x, y = -x^2, x = -3, x = 4$ là $\frac{937}{12}.$		

QUICK NOTE

**CÂU 12.** Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số  $y = x^2 + x - 1$ ,  $y = x^4 + x - 1$ ,  $x = -1$ ,  $x = 1$ .

KQ:

**CÂU 13.** Kí hiệu  $S(t)$  là diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường  $y = 2x + 1$ ,  $y = 0$ ,  $x = 1$ ,  $x = t$  ( $t > 1$ ). Tìm  $t$  để  $S(t) = 10$ .

KQ:

**CÂU 14.** Gọi  $S$  là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường  $my = x^2$ ,  $mx = y^2$  ( $m > 0$ ). Tìm giá trị của  $m$  để  $S = 3$ .

KQ:

**CÂU 15.** Giá trị dương của tham số  $m$  sao cho diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số  $y = 2x + 3$  và các đường thẳng  $y = 0$ ,  $x = 0$ ,  $x = m$  bằng 10 là?

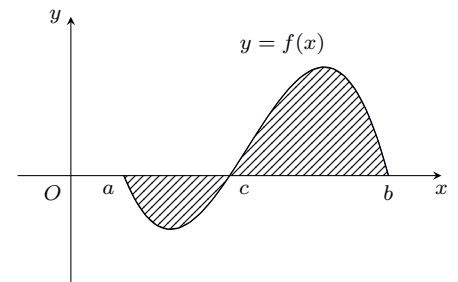
KQ:

**CÂU 16.** Cho hàm số  $f(x) = \begin{cases} 7 - 4x^3 & \text{khi } 0 \leq x \leq 1 \\ 4 - x^2 & \text{khi } x > 1 \end{cases}$ . Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số  $f(x)$  và các đường thẳng  $x = 0$ ,  $x = 3$ ,  $y = 0$ .

KQ:

**CÂU 17.**

Gọi  $S$  là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số  $y = f(x)$ , trục hoành, đường thẳng  $x = a$ ,  $x = b$  (như hình vẽ bên). Hỏi cách tính  $S$  nào dưới đây đúng?



**A**  $S = \int_a^b f(x) dx.$

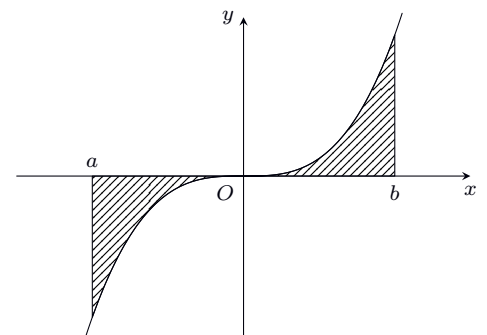
**B**  $S = \left| \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \right|.$

**C**  $S = - \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$

**D**  $S = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$

**CÂU 18.**

Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên đoạn  $[a; b]$ . Gọi  $D$  là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị  $(C) : y = f(x)$ , trục hoành, hai đường thẳng  $x = a$ ,  $x = b$  (như hình vẽ). Giả sử  $S_D$  là diện tích hình phẳng  $D$ . Chọn phương án đúng trong các phương án **A**, **B**, **C**, **D** cho dưới đây?



**A**  $S_D = \int_a^0 f(x) dx + \int_0^b f(x) dx.$

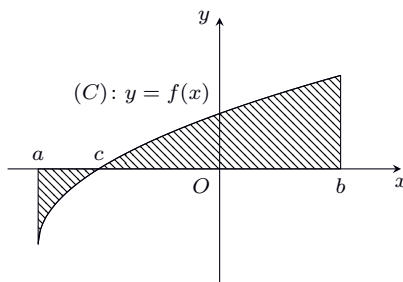
**B**  $S_D = - \int_a^0 f(x) dx + \int_0^b f(x) dx.$

**C**  $S_D = \int_a^0 f(x) dx - \int_0^b f(x) dx.$

**D**  $S_D = - \int_a^0 f(x) dx - \int_0^b f(x) dx.$

**CÂU 19.**

Diện tích của hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số  $y = f(x)$ , trục hoành và hai đường thẳng  $x = a$ ,  $x = b$  ( $a < b$ ) (phần tô đậm trong hình vẽ) tính theo công thức nào dưới đây?



**QUICK NOTE**

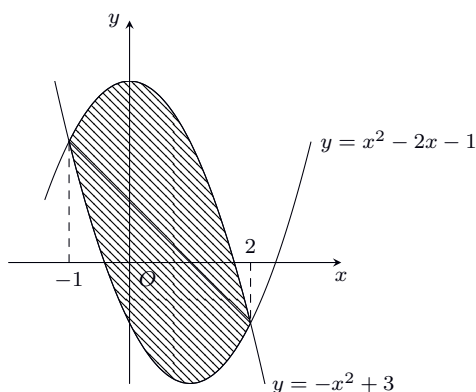
**A**  $S = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$

**B**  $S = \int_a^b f(x) dx.$

**C**  $S = -\int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$

**D**  $S = \left| \int_a^b f(x) dx \right|.$

**CÂU 20.** Diện tích phần hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ bên dưới được tính theo công thức nào dưới đây?



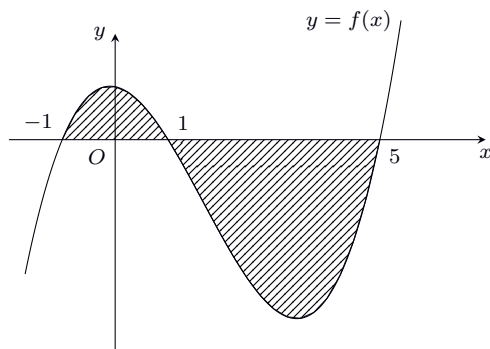
**A**  $\int_{-1}^2 (-2x + 2) dx.$

**B**  $\int_{-1}^2 (2x - 2) dx.$

**C**  $\int_{-1}^2 (-2x^2 + 2x + 4) dx.$

**D**  $\int_{-1}^2 (2x^2 - 2x - 4) dx.$

**CÂU 21.** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$ . Gọi  $S$  là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường  $y = f(x)$ ,  $y = 0$ ,  $x = -1$ ,  $x = 5$  (như hình vẽ bên dưới).



Mệnh đề nào sau đây đúng?

**A**  $S = -\int_{-1}^1 f(x) dx - \int_1^5 f(x) dx.$

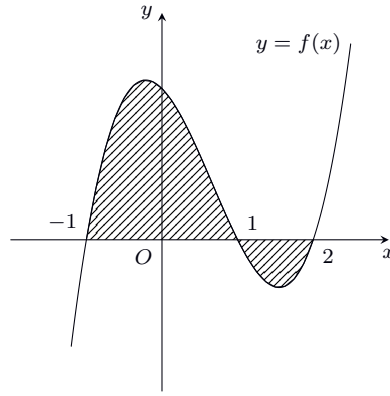
**B**  $S = \int_{-1}^1 f(x) dx + \int_1^5 f(x) dx.$

**C**  $S = \int_{-1}^1 f(x) dx - \int_1^5 f(x) dx.$

**D**  $S = -\int_{-1}^1 f(x) dx + \int_1^5 f(x) dx.$

**CÂU 22.** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$ . Gọi  $S$  là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường  $y = f(x)$ ,  $y = 0$ ,  $x = -1$ ,  $x = 2$  (như hình vẽ bên dưới).

QUICK NOTE



Mệnh đề nào sau đây đúng?

**A**  $S = \int_{-1}^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx.$

**B**  $S = - \int_{-1}^1 f(x) dx - \int_1^2 f(x) dx.$

**C**  $S = - \int_{-1}^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx.$

**D**  $S = \int_{-1}^1 f(x) dx - \int_1^2 f(x) dx.$

**CÂU 23.**

Gọi  $S$  là diện tích hình phẳng ( $H$ ) giới hạn bởi các đường  $y = f(x)$ , trục hoành và hai đường thẳng  $x = -1, x = 2$ . Đặt  $a = \int_{-1}^0 f(x) dx, b = \int_0^2 f(x) dx$  (như hình vẽ bên). Mệnh đề

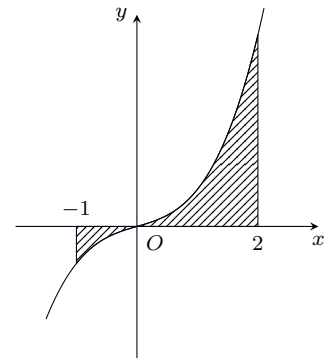
nào sau đây đúng?

**A**  $S = b - a.$

**B**  $S = b + a.$

**C**  $S = -b + a.$

**D**  $S = -b - a.$



**CÂU 24.**

Gọi  $S$  là diện tích hình phẳng ( $H$ ) giới hạn bởi các đường  $y = f(x)$ , trục hoành và hai đường thẳng  $x = -3, x = 2$ .

Đặt  $a = \int_{-3}^1 f(x) dx, b = \int_1^2 f(x) dx$  (như hình vẽ bên).

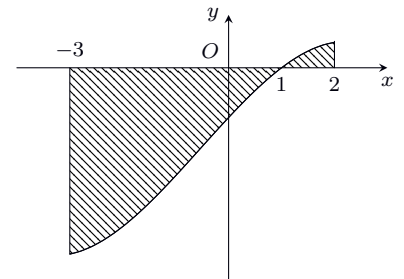
Mệnh đề nào sau đây đúng?

**A**  $S = a + b.$

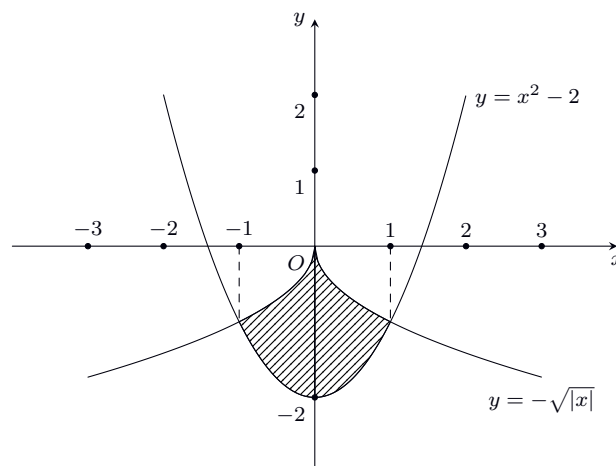
**B**  $S = a - b.$

**C**  $S = -a - b.$

**D**  $S = b - a.$



**CÂU 25.** Diện tích phần hình phẳng được gạch sọc trong hình vẽ sau được tính theo công thức nào dưới đây?



**QUICK NOTE**

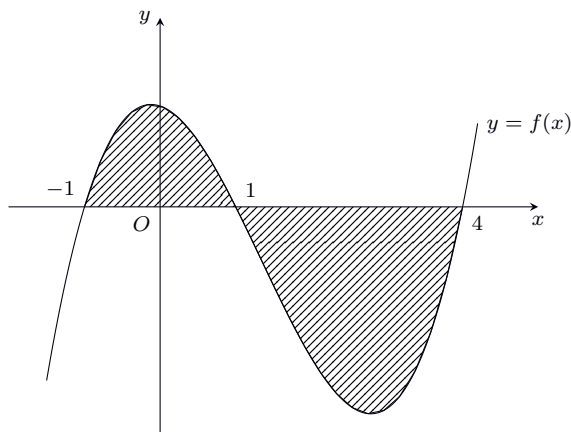
**A**  $\int_{-1}^1 (x^2 - 2 + \sqrt{|x|}) \, dx.$

**B**  $\int_{-1}^1 (x^2 - 2 - \sqrt{|x|}) \, dx.$

**C**  $\int_{-1}^1 (-x^2 + 2 + \sqrt{|x|}) \, dx.$

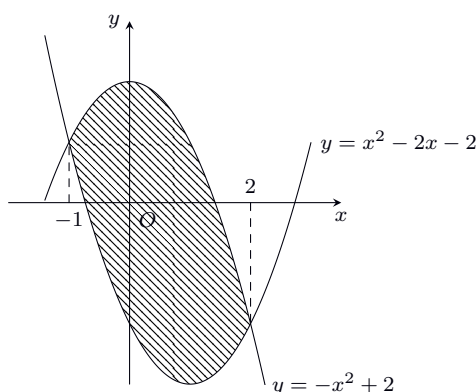
**D**  $\int_{-1}^1 (-x^2 + 2 - \sqrt{|x|}) \, dx.$

**CÂU 26.** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$ . Gọi  $S$  là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường  $y = f(x)$ ,  $y = 0$ ,  $x = -1$ ,  $x = 4$  (như hình vẽ). Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?



Mệnh đề	Đ	S
a) $S = \int_{-1}^1 f(x) \, dx - \int_1^4 f(x) \, dx.$		
b) $S = \int_{-1}^1  f(x)  \, dx + \int_1^4  f(x)  \, dx.$		
c) $S = \left  \int_{-1}^4 f(x) \, dx \right .$		
d) $S = \int_{-1}^1 f(x) \, dx + \int_1^4 f(x) \, dx.$		

**CÂU 27.** Cho hình phẳng được gạch chéo trong hình bên dưới.



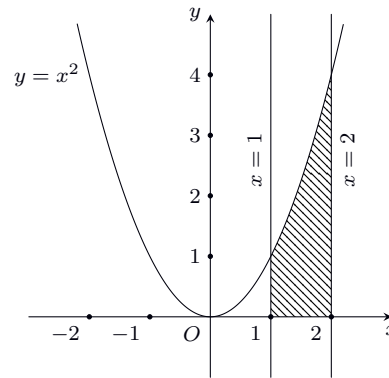
Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

Mệnh đề	Đ	S
a) Hình phẳng được gạch chéo trong hình trên được giới hạn các đồ thị $y = x^2 - 2x - 2$ , $y = -x^2 + 2$ và hai đường thẳng $x = -1$ , $x = 2$ .		

QUICK NOTE

Mệnh đề	Đ	S
b) Diện tích hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ là $S = \int_{-1}^2  x^2 - 2x - 2  dx + \int_{-1}^2  -x^2 + 2  dx.$		
c) Hình phẳng được gạch chéo trong hình trên được giới hạn các đồ thị $y = x^2 - 2x - 2$ và $y = -x^2 + 2$ .		
d) Diện tích hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ là $S = 9$ .		

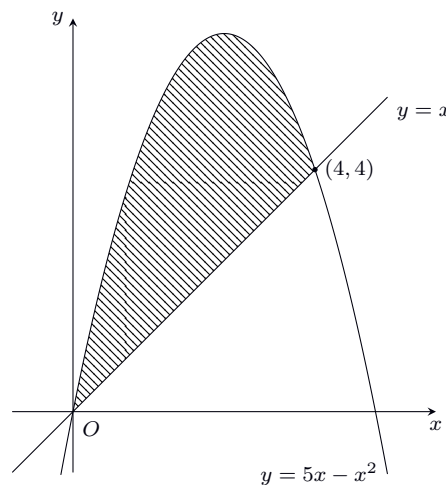
**CÂU 28.** Cho hình phẳng được gạch chéo trong hình bên dưới.



Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

Mệnh đề	Đ	S
a) Hình phẳng được gạch chéo trong hình trên được giới hạn các đồ thị $y = x^2$ , $y = 0$ và hai đường thẳng $x = 1$ , $x = 2$ .		
b) Diện tích hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ là $S = \int_1^2 x^2 dx$ .		
c) Diện tích hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ là $S = \frac{4}{3}$ .		
d) Hình phẳng được gạch chéo trong hình trên được giới hạn đồ thị $y = x^2$ và hai đường thẳng $x = 1$ , $x = 2$ .		

**CÂU 29.** Cho hình phẳng được gạch chéo trong hình bên dưới.



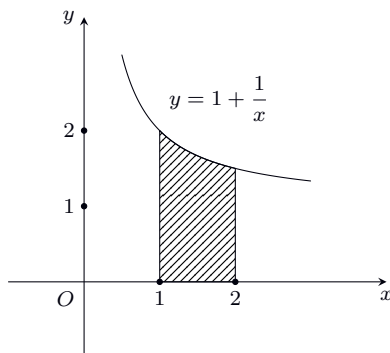
Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

Mệnh đề	Đ	S
a) Hình phẳng được gạch chéo trong hình trên được giới hạn các đồ thị $y = 5x - x^2$ , $y = x$ và các đường thẳng $x = 0$ , $x = 4$ .		

QUICK NOTE

Mệnh đề	Đ	S
b) Diện tích hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ là $S = \int_0^4 (x^2 - 4x) dx$ .		
c) Diện tích hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ là $S = \int_0^4  x^2 - 4x  dx$ .		
d) Diện tích hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ $S = \frac{56}{3}$ .		

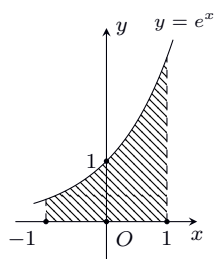
**CÂU 30.** Cho hình phẳng được gạch chéo trong hình bên dưới.



Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

Mệnh đề	Đ	S
a) Hình phẳng được gạch chéo trong hình trên được giới hạn đồ thị $y = 1 + \frac{1}{x}$ và các đường thẳng $x = 1, x = 2$ .		
b) Diện tích hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ là $S = \int_1^2 \left(1 + \frac{1}{x}\right) dx$ .		
c) Diện tích hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ là $S = 2$ .		
d) Diện tích hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ là $S = 1 + \int_1^2 \frac{1}{x} dx$ .		

**CÂU 31.** Cho hình phẳng được tô màu trong hình bên dưới



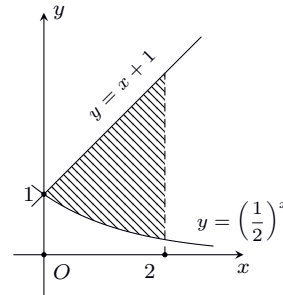
Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

Mệnh đề	Đ	S
a) Hình phẳng được tô màu trong hình vẽ trên được giới hạn bởi các đồ thị $y = e^x; y = 0; x = 0; x = 1$ .		
b) Diện tích hình phẳng tô màu trong hình vẽ là $\int_{-1}^1 e^x dx$ .		
c) Diện tích hình phẳng tô màu trong hình vẽ là $\int_0^1 e^x dx$ .		

QUICK NOTE

Mệnh đề	Đ	S
d) Hình phẳng được tô màu trong hình vẽ trên được giới hạn bởi các đồ thị $y = e^x$ ; $y = 0$ ; $x = -1$ ; $x = 1$ .		

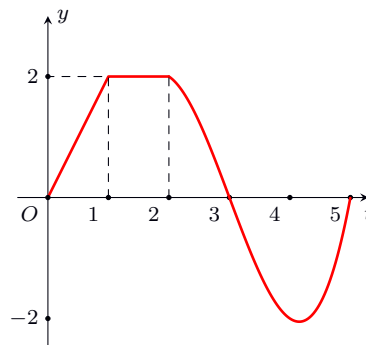
**CÂU 32.** Cho hình phẳng được tô màu trong hình bên dưới.



Các mệnh đề sau đúng hay sai?

Mệnh đề	Đ	S
a) Hình phẳng được tô màu trong hình vẽ trên được giới hạn bởi các đồ thị $y = x + 1$ ; $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ ; $x = 0$ ; $x = 2$ .		
b) Diện tích hình phẳng tô màu trong hình vẽ là $\int_0^2 \left[ \left(\frac{1}{2}\right)^x - x - 1 \right] dx$ .		
c) Diện tích hình phẳng tô màu trong hình vẽ bằng $S = 4 - \frac{3}{4 \ln 2}$ .		
d) Hình phẳng được tô màu trong hình vẽ trên được giới hạn bởi các đồ thị $y = x + 1$ ; $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ ; $x = 1$ ; $x = 2$ .		

**CÂU 33.** Cho đồ thị hàm số  $y = f(t)$  như hình vẽ.



Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

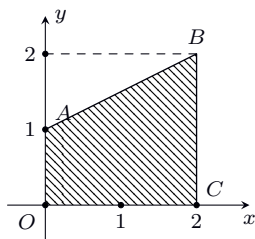
Mệnh đề	Đ	S
a) Diện tích hình phẳng được giới hạn các đồ thị hàm số $y = f(t)$ , trục $Ot$ và hai đường thẳng $t = 0$ ; $t = 1$ là $S = \frac{1}{2} \int_0^1 t dt = \frac{1}{4}$ .		
b) Diện tích hình phẳng được giới hạn các đồ thị hàm số $y = f(t)$ , trục $Ot$ và hai đường thẳng $t = 1$ ; $t = 2$ là $S = \int_1^2 2 dt = 2$ .		
c) Tích phân $\int_2^3 f(x) dx$ biểu thị cho phần diện tích của hình phẳng giới hạn các đồ thị hàm số $y = f(t)$ , trục $Ot$ và hai đường thẳng $t = 2$ ; $t = 3$ .		



QUICK NOTE

Mệnh đề	Đ	S
d) Tích phân $\int_3^5 f(x) dx$ biểu thị cho phần diện tích của hình phẳng giới hạn các đồ thị hàm số $y = f(t)$ , trục $Ot$ và hai đường thẳng $t = 3$ ; $t = 5$ .		

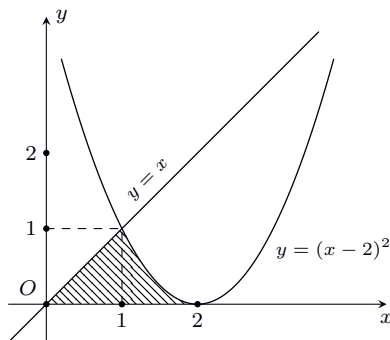
**CÂU 34.** Tính diện tích hình phẳng được tô màu trong hình bên dưới.



KQ: 

--	--	--	--

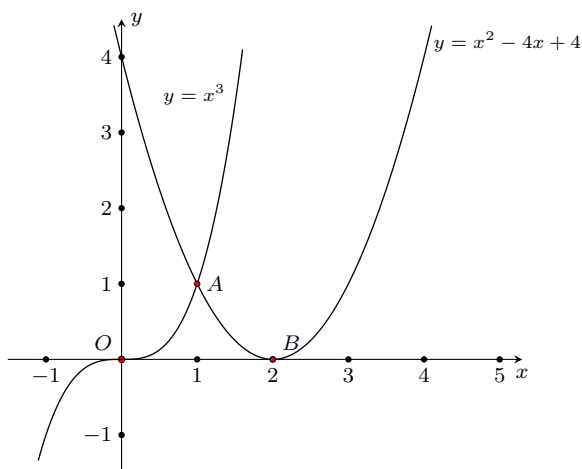
**CÂU 35.** Biết diện tích phần hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ bên có diện tích là  $\frac{a}{b}$  với  $a, b \in \mathbb{Z}$  và phân số  $\frac{a}{b}$  tối giản. Tính tổng  $a + b$ .



KQ: 

--	--	--	--

**CÂU 36.** Biết diện tích phần tam giác cong  $OAB$  trong hình vẽ bên có diện tích là  $\frac{a}{b}$  với  $a, b \in \mathbb{Z}$  và phân số  $\frac{a}{b}$  tối giản. Tính hiệu  $b - a$ .

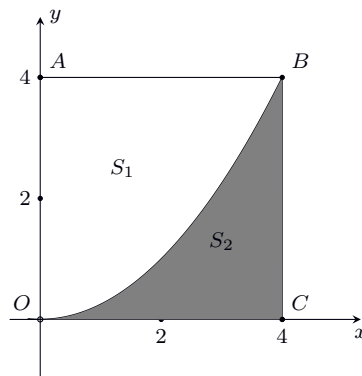


KQ: 

--	--	--	--

**CÂU 37.** Hình vuông  $OABC$  có cạnh bằng 4 được chia thành hai phần bởi đường cong  $(C)$  có phương trình  $y = \frac{1}{4}x^2$ . Gọi  $S_2, S_1$  lần lượt là diện tích của phần không tô màu và phần tô màu như hình vẽ bên dưới. Tỉ số  $\frac{S_1}{S_2}$  bằng bao nhiêu?

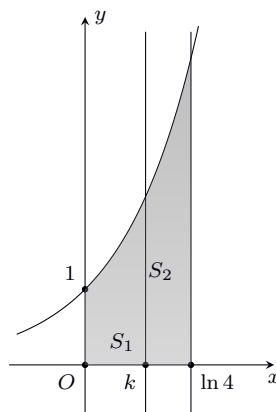
## QUICK NOTE

KQ: 





**CÂU 38.** Cho hình thang cong ( $H$ ) giới hạn bởi các đường  $y = e^x$ ,  $y = 0$ ,  $x = 0$ ,  $x = \ln 4$ . Đường thẳng  $x = k$ , ( $0 < k < \ln 4$ ) chia ( $H$ ) thành hai phần có diện tích là  $S_1$  và  $S_2$  như hình vẽ bên. Tìm  $k$  để  $S_1 = 2S_2$  (làm tròn kết quả đến hàng phần chục).

KQ: 





## 2

## THỂ TÍCH KHỐI TRÒN XOAY

**CÂU 1.** Viết công thức tính thể tích  $V$  của khối tròn xoay được tạo ra khi quay hình thang cong, giới hạn bởi đồ thị hàm số  $y = f(x)$ , trục  $Ox$  và hai đường thẳng  $x = a$ ,  $x = b$ , ( $a < b$ ) xung quanh trục  $Ox$ .

**(A)**  $V = \int_a^b |f(x)| dx.$

**(B)**  $V = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$

**(C)**  $V = \int_a^b f^2(x) dx.$

**(D)**  $V = \pi \int_a^b f(x) dx.$

**CÂU 2.** Cắt một vật thể bởi hai mặt phẳng vuông góc với trục  $Ox$  tại  $x = 1$  và  $x = 2$ . Một mặt phẳng tùy ý vuông góc với trục  $Ox$  tại điểm có hoành độ  $x$ , ( $1 \leq x \leq 2$ ) cắt vật thể đó có diện tích  $S(x) = 2024x$ . Tính thể tích của phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng trên.

**(A)**  $V = 3036.$

**(B)**  $V = 3036\pi.$

**(C)**  $V = 1518.$

**(D)**  $V = 1518\pi.$

**CÂU 3.** Cắt một vật thể bởi hai mặt phẳng vuông góc với trục  $Ox$  tại  $x = 1$  và  $x = 3$ . Một mặt phẳng tùy ý vuông góc với trục  $Ox$  tại điểm có hoành độ  $x$ , ( $1 \leq x \leq 3$ ) cắt vật thể đó theo thiết diện là một hình chữ nhật có độ dài hai cạnh là  $3x$  và  $3x^2 - 2$ . Tính thể tích của phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng trên.

**(A)**  $V = 156.$

**(B)**  $V = 156\pi.$

**(C)**  $V = 312.$

**(D)**  $V = 312\pi.$

**CÂU 4.** Gọi  $D$  là hình phẳng giới hạn bởi các đường  $y = e^{3x}$ ,  $y = 0$ ,  $x = 0$  và  $x = 1$ . Thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay  $D$  quanh trục  $Ox$  bằng

**(A)**  $\pi \int_0^1 e^{3x} dx.$

**(B)**  $\int_0^1 e^{6x} dx.$

**(C)**  $\pi \int_0^1 e^{6x} dx.$

**(D)**  $\int_0^1 e^{3x} dx.$

**QUICK NOTE**

**CÂU 5.** Gọi  $D$  là hình phẳng giới hạn bởi các đường  $y = e^{4x}$ ,  $y = 0$ ,  $x = 0$  và  $x = 1$ . Thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay  $D$  quanh trục  $Ox$  bằng

- ☐ A  $\int_0^1 e^{4x} dx$ .   
 ☐ B  $\pi \int_0^1 e^{8x} dx$ .   
 ☐ C  $\pi \int_0^1 e^{4x} dx$ .   
 ☐ D  $\int_0^1 e^{8x} dx$ .

**CÂU 6.** Cho hình phẳng  $(H)$  giới hạn bởi các đường  $y = x^2 + 3$ ,  $y = 0$ ,  $x = 0$ ,  $x = 2$ . Gọi  $V$  là thể tích của khối tròn xoay được tạo thành khi quay  $(H)$  xung quanh trục  $Ox$ . Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- ☐ A  $V = \int_0^2 (x^2 + 3) dx$ .   
 ☐ B  $V = \pi \int_0^2 (x^2 + 3) dx$ .  
☐ C  $V = \int_0^2 (x^2 + 3)^2 dx$ .   
 ☐ D  $V = \pi \int_0^2 (x^2 + 3)^2 dx$ .

**CÂU 7.** Cho hình phẳng  $D$  giới hạn bởi đường cong  $y = e^x$ , trục hoành và các đường thẳng  $x = 0$ ,  $x = 1$ . Khối tròn xoay tạo thành khi quay  $D$  quanh trục hoành có thể tích  $V$  bằng bao nhiêu?

- ☐ A  $V = \frac{\pi(e^2 + 1)}{2}$ .   
 ☐ B  $V = \frac{e^2 - 1}{2}$ .   
 ☐ C  $V = \frac{\pi e^2}{3}$ .   
 ☐ D  $V = \frac{\pi(e^2 - 1)}{2}$ .

**CÂU 8.** Cho hình phẳng  $D$  giới hạn bởi đường cong  $y = \sqrt{x^2 + 1}$ , trục hoành và các đường thẳng  $x = 0$ ,  $x = 1$ . Khối tròn xoay tạo thành khi quay  $D$  quanh trục hoành có thể tích  $V$  bằng bao nhiêu?

- ☐ A  $V = 2$ .   
 ☐ B  $V = \frac{4\pi}{3}$ .   
 ☐ C  $V = 2\pi$ .   
 ☐ D  $V = \frac{4}{3}$ .

**CÂU 9.** Cho hình phẳng  $D$  giới hạn bởi đường cong  $y = \sqrt{2 + \cos x}$ , trục hoành và các đường thẳng  $x = 0$ ,  $x = \frac{\pi}{2}$ . Khối tròn xoay tạo thành khi  $D$  quay quanh trục hoành có thể tích  $V$  bằng bao nhiêu?

- ☐ A  $V = (\pi + 1)\pi$ .   
 ☐ B  $V = \pi - 1$ .   
 ☐ C  $V = \pi + 1$ .   
 ☐ D  $V = (\pi - 1)\pi$ .

**CÂU 10.** Cho hình phẳng  $D$  giới hạn bởi đường cong  $y = \sqrt{2 + \sin x}$ , trục hoành và các đường thẳng  $x = 0$ ,  $x = \pi$ . Khối tròn xoay tạo thành khi quay  $D$  quay quanh trục hoành có thể tích  $V$  bằng bao nhiêu?

- ☐ A  $V = 2\pi(\pi + 1)$ .   
 ☐ B  $V = 2\pi$ .   
 ☐ C  $V = 2(\pi + 1)$ .   
 ☐ D  $V = 2\pi^2$ .

**CÂU 11.** Tìm công thức tính thể tích của khối tròn xoay khi cho hình phẳng giới hạn bởi parabol  $(P): y = x^2$ , đường thẳng  $d: y = 2x$  và đường thẳng  $x = 0$ ,  $x = 2$  quay xung quanh trục  $Ox$ .

- ☐ A  $\pi \int_0^2 (x^2 - 2x)^2 dx$ .   
 ☐ B  $\pi \int_0^2 4x^2 dx - \pi \int_0^2 x^4 dx$ .  
☐ C  $\pi \int_0^2 4x^2 dx + \pi \int_0^2 x^4 dx$ .   
 ☐ D  $\pi \int_0^2 (2x - x^2) dx$ .

**CÂU 12.** Cho hình phẳng  $(H)$  giới hạn bởi các đường  $y = x^2 + 3$ ,  $y = 0$ ,  $x = 0$ ,  $x = 2$ . Gọi  $V$  là thể tích khối tròn xoay được tạo thành khi quay  $(H)$  xung quanh trục  $Ox$ . Mệnh đề nào sau đây đúng?

- ☐ A  $V = \pi \int_0^2 (x^2 + 3)^2 dx$ .   
 ☐ B  $V = \int_0^2 (x^2 + 3) dx$ .  
☐ C  $V = \int_0^2 (x^2 + 3)^2 dx$ .   
 ☐ D  $V = \pi \int_0^2 (x^2 + 3) dx$ .

**CÂU 13.** Gọi  $V$  là thể tích của khối tròn xoay thu được khi quay hình thang cong, giới hạn bởi đồ thị hàm số  $y = \sin x$ , trục  $Ox$ , trục  $Oy$  và đường thẳng  $x = \frac{\pi}{2}$ , xung quanh trục  $Ox$ . Mệnh đề nào dưới đây đúng?

QUICK NOTE

**(A)**  $V = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \, dx.$

**(B)**  $V = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx.$

**(C)**  $V = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \, dx.$

**(D)**  $V = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx.$

**CÂU 14.** Thể tích khối tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số  $y = x^2 - 2x$ , trục hoành, đường thẳng  $x = 0$  và  $x = 1$  quanh trục hoành bằng

**(A)**  $\frac{16\pi}{15}.$

**(B)**  $\frac{2\pi}{3}.$

**(C)**  $\frac{4\pi}{3}.$

**(D)**  $\frac{8\pi}{15}.$

**CÂU 15.** Cho miền phẳng  $(D)$  giới hạn bởi  $y = \sqrt{x}$ , hai đường thẳng  $x = 1$ ,  $x = 2$  và trục hoành. Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay  $(D)$  quanh trục hoành.

**(A)**  $3\pi.$

**(B)**  $\frac{3\pi}{2}.$

**(C)**  $\frac{2\pi}{3}.$

**(D)**  $\frac{3}{2}.$

**CÂU 16.** Cho hình phẳng  $(H)$  giới hạn bởi các đường  $y = 2x - x^2$ ,  $y = 0$ . Quay  $(H)$  quanh trục hoành tạo thành khối tròn xoay có thể tích là

**(A)**  $\int_0^2 (2x - x^2) \, dx.$

**(B)**  $\pi \int_0^2 (2x - x^2)^2 \, dx.$

**(C)**  $\int_0^2 (2x - x^2)^2 \, dx.$

**(D)**  $\pi \int_0^2 (2x - x^2) \, dx.$

**CÂU 17.** Cho hình phẳng giới hạn bởi các đường  $y = \sqrt{x} - 2$ ,  $y = 0$  và  $x = 4$ ,  $x = 9$  quay xung quanh trục  $Ox$ . Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành.

**(A)**  $V = \frac{7}{6}.$

**(B)**  $V = \frac{5\pi}{6}.$

**(C)**  $V = \frac{7\pi}{11}.$

**(D)**  $V = \frac{11\pi}{6}.$

**CÂU 18.** Cho hình phẳng  $(H)$  giới hạn bởi các đường thẳng  $y = x^2 + 2$ ,  $y = 0$ ,  $x = 1$ ,  $x = 2$ . Gọi  $V$  là thể tích của khối tròn xoay được tạo thành khi quay  $(H)$  xung quanh trục  $Ox$ . Mệnh đề nào dưới đây đúng?

**(A)**  $V = \int_1^2 (x^2 + 2) \, dx.$

**(B)**  $V = \pi \int_1^2 (x^2 + 2)^2 \, dx.$

**(C)**  $V = \int_1^2 (x^2 + 2)^2 \, dx.$

**(D)**  $V = \pi \int_1^2 (x^2 + 2) \, dx.$

**CÂU 19.** Cắt một vật thể  $(T)$  bởi hai mặt phẳng vuông góc với trục  $Ox$  tại  $x = 0$  và  $x = 2$ . Một mặt phẳng tùy ý vuông góc với trục  $Ox$  tại điểm có hoành độ  $x$  ( $0 \leq x \leq 2$ ) cắt vật thể đó có theo một thiết diện là một hình vuông có cạnh bằng  $\sqrt{x^3}$ . Thể tích vật thể  $(T)$  là số hữu tỉ có dạng phân số tối giản  $\frac{a}{b}$ . Tính  $a + b$ .

KQ: 

--	--	--	--

**CÂU 20.** Cắt một vật thể bởi hai mặt phẳng vuông góc với trục  $Ox$  tại  $x = 1$ ;  $x = 3$ . Khi cắt một vật thể bởi mặt phẳng vuông góc với trục  $Ox$  tại điểm có hoành độ  $x$  ( $1 \leq x \leq 3$ ), mặt cắt là tam giác vuông có một góc  $45^\circ$  và độ dài một cạnh góc vuông là  $\sqrt{4 - \frac{1}{2}x^2}$ . Thể tích vật thể trên là một số hữu tỉ có dạng phân số tối giản  $\frac{a}{b}$ . Tính  $a \cdot b$ .

KQ: 

--	--	--	--

**CÂU 21.** Tính thể tích khối tròn xoay khi quay hình phẳng  $(H)$  xác định bởi các đường  $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2$ ,  $y = 0$ ,  $x = 0$  và  $x = 3$  quanh trục  $Ox$  (kết quả viết dưới dạng số thập phân và làm tròn đến hàng phần trăm).

KQ: 

--	--	--	--

**CÂU 22.** Tính thể tích của vật thể tạo nên khi quay quanh trục  $Ox$  hình phẳng  $D$  giới hạn bởi đồ thị  $(P)$ :  $y = 2x - x^2$ , trục  $Ox$  và hai đường thẳng  $x = 0$ ,  $x = 2$  (Kết quả viết dưới dạng số thập phân và làm tròn đến hàng phần trăm).

KQ: 

--	--	--	--

**CÂU 23.** Cho hình phẳng giới hạn bởi các đường  $y = \tan x$ ,  $y = 0$ ,  $x = 0$ ,  $x = \frac{\pi}{4}$  quay xung quanh trục  $Ox$ . Tính thể tích vật thể tròn xoay được sinh ra (kết quả viết dưới dạng số thập phân và làm tròn một chữ số thập phân sau dấu phẩy).

KQ: 

--	--	--	--

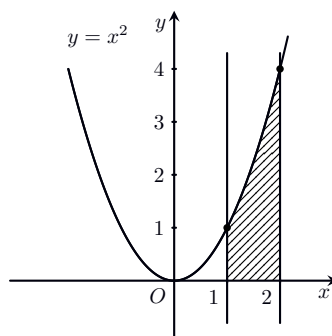
**CÂU 24.** Gọi  $V$  là thể tích khối tròn xoay tạo thành do quay xung quanh trục hoành một elip có phương trình  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ . Tính  $V$  (Kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).

KQ: 

--	--	--	--

**CÂU 25.**

Cho hình phẳng ( $H$ ) được gạch chéo trong hình bên. Tính thể hình tròn xoay sinh ra bởi ( $H$ ) khi quay ( $H$ ) quanh trục  $Ox$  (Kết quả viết dưới dạng số thập phân và làm tròn đến hàng phần chục).

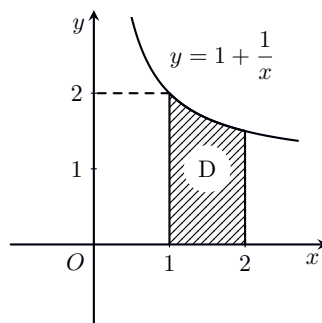


KQ: 

--	--	--	--

**CÂU 26.**

Cho hình phẳng ( $D$ ) được tô màu trong hình bên. Tính thể hình tròn xoay sinh ra bởi ( $D$ ) khi quay ( $D$ ) quanh trục  $Ox$  (Kết quả viết dưới dạng số thập phân và làm tròn đến hàng phần trăm).

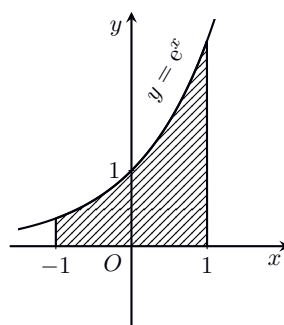


KQ: 

--	--	--	--

**CÂU 27.**

Cho hình phẳng ( $H$ ) được tô màu trong hình bên. Tính thể hình tròn xoay sinh ra bởi ( $H$ ) khi quay ( $H$ ) quanh trục  $Ox$  (Kết quả viết dưới dạng số thập phân và làm tròn đến hàng phần chục).

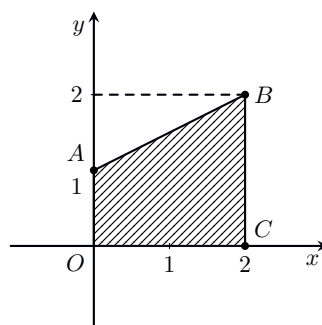


KQ: 

--	--	--	--

**CÂU 28.**

Cho hình phẳng ( $H$ ) được tô màu trong hình bên. Tính thể hình tròn xoay sinh ra bởi ( $H$ ) khi quay ( $H$ ) quanh trục  $Ox$  (Kết quả viết dưới dạng số thập phân và làm tròn đến hàng phần chục).



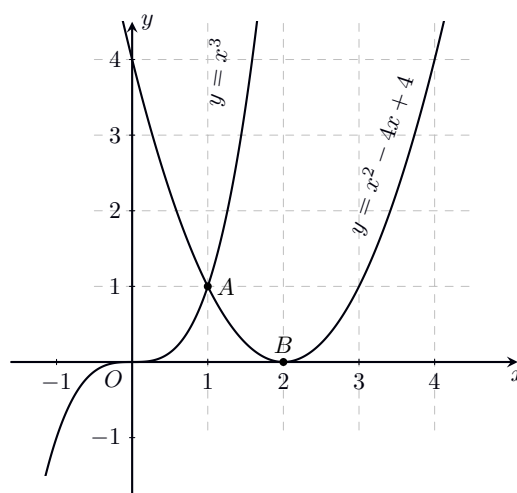
**QUICK NOTE**

## QUICK NOTE

KQ:

## CÂU 29.

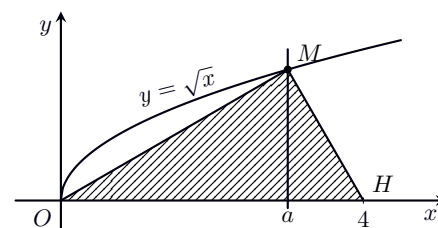
Cho hình phẳng  $(H)$  là tam giác cong  $OAB$  trong hình vẽ bên. Tính thể tích tròn xoay sinh ra bởi  $(H)$  khi quay  $(H)$  quanh trục  $Ox$  (Kết quả viết dưới dạng số thập phân và làm tròn đến hàng phần trăm).



KQ:

## CÂU 30.

Gọi  $V$  là thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường  $y = \sqrt{x}$ ,  $y = 0$  và  $x = 4$  quanh trục  $Ox$ . Đường thẳng  $x = a$ ,  $(0 < a < 4)$  cắt đồ thị hàm số  $y = \sqrt{x}$  tại  $M$  (hình vẽ). Gọi  $V_1$  là thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay tam giác  $OMH$  quanh trục  $Ox$ . Biết rằng  $V = 2V_1$ . Tìm  $a$ .



KQ:

## 3

## Ứng dụng diện tích hình phẳng và thể tích khối tròn xoay trong bт thực tiễn

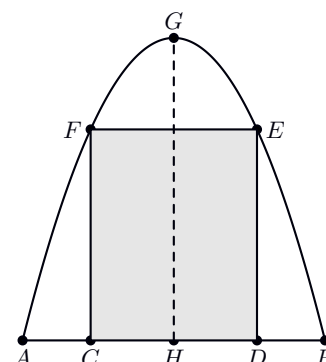
**CÂU 1.** Trường Nguyễn Văn Trỗi muốn làm một cái cửa nhà hình parabol có chiều cao từ mặt đất đến đỉnh là 2,25 mét, chiều rộng tiếp giáp với mặt đất là 3 mét. Giá thuê mỗi mét vuông là 1 500 000 đồng. Vậy số tiền nhà trường phải trả là

- ☐ A 33 750 000 đồng.
 ☐ B 3 750 000 đồng.
 ☐ C 12 750 000 đồng.
 ☐ D 6 750 000 đồng.

## CÂU 2.

Chị Minh Hiền muốn làm một cái cổng hình Parabol như hình vẽ bên. Chiều cao  $GH = 4$  m, chiều rộng  $AB = 4$  m,  $AC = BD = 0,9$  m. Chị Minh Hiền làm hai cánh cổng khi đóng lại là hình chữ nhật  $CDEF$  tô đậm có giá là 1 200 000 đồng/m<sup>2</sup>, còn các phần để trống làm xiên hoa có giá là 900 000 đồng/m<sup>2</sup>. Hỏi tổng số tiền để làm hai phần nói trên gần nhất với số tiền nào dưới đây?

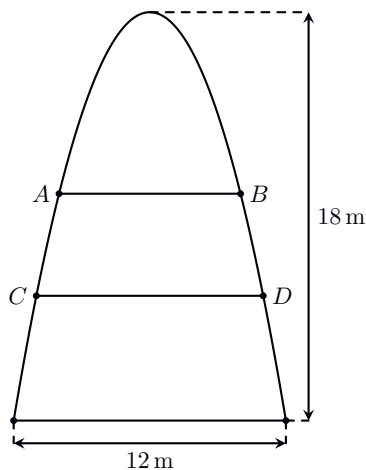
- ☐ A 11 445 000 đồng.
 ☐ B 4 077 000 đồng.
 ☐ C 7 368 000 đồng.
 ☐ D 11 370 000 đồng.



## CÂU 3.

Một cổng chào có dạng hình Parabol chiều cao 18 m, chiều rộng chân đế 12 m. Người ta căng hai sợi dây trang trí  $AB, CD$  nằm ngang đồng thời chia hình giới hạn bởi Parabol và mặt đất thành ba phần có diện tích bằng nhau (xem hình vẽ bên). Tỷ số  $\frac{AB}{CD}$  bằng

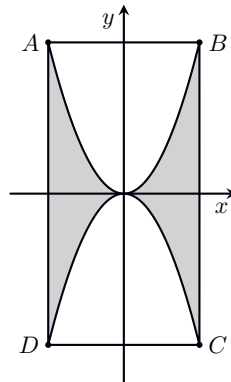
- ☐ A  $\frac{1}{\sqrt{2}}$       ☐ B  $\frac{4}{5}$   
☐ C  $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$       ☐ D  $\frac{3}{1+2\sqrt{2}}$



**CÂU 4.**

Một họa tiết hình cánh bướm như hình vẽ bên. Phần tô đậm được đính đá với giá thành 500 000/m<sup>2</sup>. Phần còn lại được tô màu với giá thành 250 000/m<sup>2</sup>. Cho  $AB = 4$  dm;  $BC = 8$  dm. Hỏi để trang trí 1 000 họa tiết như vậy cần số tiền gần nhất với số nào sau đây.

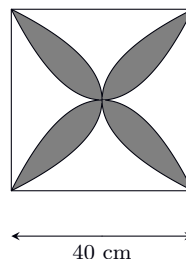
- ☐ A 105 660 667.    ☐ B 106 666 667.    ☐ C 107 665 667.    ☐ D 108 665 667.



**CÂU 5.**

Một viên gạch hoa hình vuông cạnh 40 cm. Người thiết kế đã sử dụng bốn đường parabol có chung đỉnh tại tâm viên gạch để tạo ra bốn cánh hoa (được tô đen như hình vẽ dưới). Diện tích mỗi cánh hoa của viên gạch bằng

- ☐ A 800 cm<sup>2</sup>.    ☐ B  $\frac{800}{3}$  cm<sup>2</sup>.    ☐ C  $\frac{400}{3}$  cm<sup>2</sup>.    ☐ D 250 cm<sup>2</sup>.



**CÂU 6.** Để kỷ niệm ngày 26-3. Chi đoàn 12A dự định dựng một lều trại có dạng parabol, với kích thước: nền trại là một hình chữ nhật có chiều rộng là 3 mét, chiều sâu là 6 mét, đỉnh của parabol cách mặt đất là 3 mét. Hãy tính thể tích phần không gian phía bên trong trại để lớp 12A cử số lượng người tham dự trại cho phù hợp.

- ☐ A 30 m<sup>3</sup>.    ☐ B 36 m<sup>3</sup>.    ☐ C 40 m<sup>3</sup>.    ☐ D 41 m<sup>3</sup>.

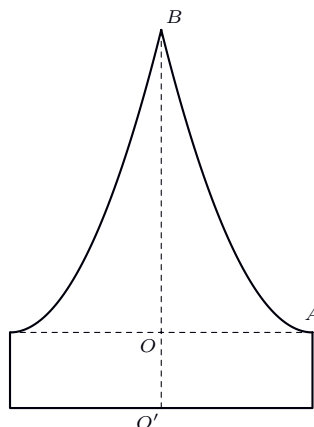
**CÂU 7.** Cho một vật thể bằng gỗ có dạng hình trụ với chiều cao và bán kính đáy cùng bằng  $R$ . Cắt khối gỗ đó bởi một mặt phẳng đi qua đường kính của một mặt đáy của khối gỗ và tạo với mặt phẳng đáy của khối gỗ một góc 30° ta thu được hai khối gỗ có thể tích là  $V_1$  và  $V_2$ , với  $V_1 < V_2$ . Thể tích  $V_1$  bằng

- ☐ A  $V_1 = \frac{2\sqrt{3}R^3}{9}$ .    ☐ B  $V_1 = \frac{\sqrt{3}\pi R^3}{27}$ .    ☐ C  $V_1 = \frac{\sqrt{3}\pi R^3}{18}$ .    ☐ D  $V_1 = \frac{\sqrt{3}R^3}{27}$ .

**CÂU 8.**

Chuẩn bị cho đêm hội diễn văn nghệ chào đón năm mới, bạn Minh Hiền đã làm một chiếc mũ “cách điệu” cho ông già Noel có dáng một khối tròn xoay. Mặt cắt qua trục của chiếc mũ như hình vẽ bên dưới. Biết rằng  $OO' = 5$  cm,  $OA = 10$  cm,  $OB = 20$  cm, đường cong  $AB$  là một phần của parabol có đỉnh là điểm  $A$ . Thể tích của chiếc mũ bằng

- ☐ A  $\frac{2750\pi}{3}$  cm<sup>3</sup>.    ☐ B  $\frac{2500\pi}{3}$  cm<sup>3</sup>.  
☐ C  $\frac{2050\pi}{3}$  cm<sup>3</sup>.    ☐ D  $\frac{2250\pi}{3}$  cm<sup>3</sup>.

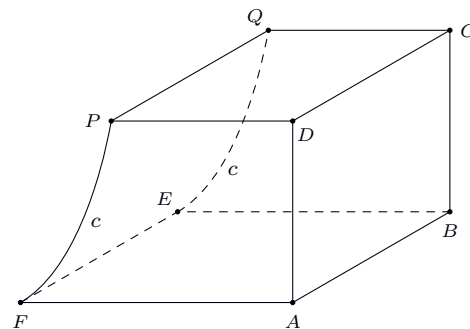


**QUICK NOTE**

QUICK NOTE

**CÂU 9.**

Một chi tiết máy được thiết kế như hình vẽ bên. Các tứ giác  $ABCD$ ,  $CDPQ$  là các hình vuông cạnh  $2,5$  (cm). Tứ giác  $ABEF$  là hình chữ nhật có  $BE = 3,5$  (cm). Mặt bên  $PQEF$  được mài nhẵn theo đường parabol ( $P$ ) có đỉnh parabol nằm trên cạnh  $EF$ . Thể tích của chi tiết máy bằng



- ☐ A  $\frac{395}{24} \text{ cm}^3$ .
 ☐ B  $\frac{50}{3} \text{ cm}^3$ .
 ☐ C  $\frac{125}{8} \text{ cm}^3$ .
 ☐ D  $\frac{425}{24} \text{ cm}^3$ .

**CÂU 10.** Bỏ dọc một quả dưa hấu ta được thiết diện là hình elip có trục lớn  $28$  cm, trục nhỏ  $25$  cm. Biết cứ  $1000 \text{ m}^3$  dưa hấu sẽ làm được cốc sinh tố giá  $20000$  đồng. Hỏi từ quả dưa hấu trên có thể thu được bao nhiêu tiền từ việc bán nước sinh tố? Biết rằng bề dày vỏ dưa không đáng kể.

- ☐ A  $183000$  đồng.
 ☐ B  $180000$  đồng.
 ☐ C  $185000$  đồng.
 ☐ D  $190000$  đồng.

**CÂU 11.** Một bác thợ xây bơm nước vào bể chứa nước. Gọi  $h(t)$  là thể tích nước bơm được sau  $t$  giây. Cho  $h'(t) = 6at^2 + 2bt$  và ban đầu bể không có nước. Sau  $3$  giây thì thể tích nước trong bể là  $90 \text{ m}^3$ , sau  $6$  giây thì thể tích nước trong bể là  $504 \text{ m}^3$ . Tính thể tích nước trong bể sau khi bơm được  $9$  giây.

- ☐ A  $1458 \text{ m}^3$ .
 ☐ B  $600 \text{ m}^3$ .
 ☐ C  $2200 \text{ m}^3$ .
 ☐ D  $4200 \text{ m}^3$ .

**CÂU 12.** Người ta thay nước mới cho một bể bơi có dạng hình hộp chữ nhật có độ sâu là  $280$  cm. Giả sử  $h(t)$  là chiều cao (tính bằng cm) của mực nước bơm được tại thời điểm  $t$  giây, biết rằng tốc độ tăng của chiều cao mực nước tại giây thứ  $t$  là  $h'(t) = \frac{1}{500} \sqrt[3]{t}$  và lúc đầu hồ bơi không có nước. Hỏi sau bao lâu thì bơm được số nước bằng  $\frac{3}{4}$  độ sâu của hồ bơi (làm tròn đến giây)?

- ☐ A  $2$  giờ  $36$  giây.
 ☐ B  $2$  giờ  $48$  giây.
 ☐ C  $2$  giờ  $38$  giây.
 ☐ D  $2$  giờ  $46$  giây.



# MỤC LỤC

<b>NGUYÊN HÀM VÀ TÍCH PHÂN</b>	<b>1</b>
<b>Bài 1. NGUYÊN HÀM</b>	<b>1</b>
(A) Tóm tắt lý thuyết	1
(B) Kiến thức cần nắm	1
(C) Phân loại và phương pháp giải bài tập	1
Dạng 1. Sử dụng định nghĩa nguyên hàm và bảng nguyên hàm	1
Dạng 2. Tìm nguyên hàm khi biết giá trị nguyên hàm	10
Dạng 3. Ứng dụng trong bài toán thực tiễn	13
(D) NGUYÊN HÀM HÀM ẨN	16
Dạng 4. Nguyên hàm của một tích, thương	16
Dạng 5. Phương trình vi phân $A(x)f(x) + B(x)f'(x) = h(x)$	18
<b>Bài 2. Tích Phân</b>	<b>21</b>
(A) Lý thuyết cần nhớ	21
(B) Phân loại và phương pháp giải bài tập	22
Dạng 1. Tính chất của tích phân	22
Dạng 2. Tích phân hàm số sơ cấp	24
Dạng 3. Tích phân hàm chứa trị tuyệt đối	28
Dạng 4. Tích phân có điều kiện	30
Dạng 5. Ứng dụng tích phân trong thực tiễn	33
(C) Tích phân hàm ẩn biến đổi phức tạp	36
<b>Bài 3. ỨNG DỤNG HÌNH HỌC CỦA TÍCH PHÂN</b>	<b>38</b>
(A) Diện tích hình thang cong	38
(B) Thể tích hình khối	39
Dạng 1. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số	40
Dạng 2. THỂ TÍCH KHỐI TRÒN XOAY	50
Dạng 3. Ứng dụng diện tích hình phẳng và thể tích khối tròn xoay trong bt thực tiễn	54

