

# Bài 1. VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN

## QUICK NOTE

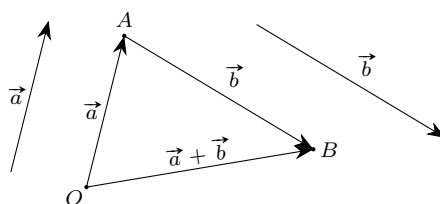
## A. LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

### 1. Tổng của hai véc tơ

#### Định nghĩa:

Trong không gian, cho hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$ . Lấy ba điểm  $O, A, B$  sao cho  $\vec{OA} = \vec{a}$ ,  $\vec{AB} = \vec{b}$ . Ta gọi  $\vec{OB}$  là **tổng của hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$** , ký hiệu  $\vec{a} + \vec{b}$ .

Phép lấy tổng của hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  được gọi là **phép cộng vectơ**.



#### Các quy tắc cần nhớ:

① Quy tắc ba điểm: Với ba điểm  $A, B, C$ , ta có  $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$

② Quy tắc hình bình hành: Cho  $ABCD$  là hình bình hành, ta có  $\vec{AB} + \vec{AD} = \vec{AC}$

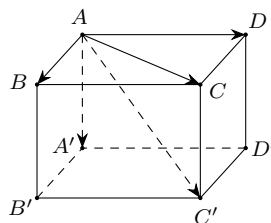
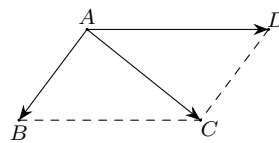
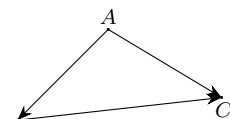
③ Quy tắc hình hộp: Cho hình hộp  $ABCD.A'B'C'D'$ . Ta có  $\vec{AB} + \vec{AD} + \vec{AA'} = \vec{AC'}$

$$\vec{AB} + \vec{AD} = \vec{AC}$$

③ Quy tắc hình hộp: Cho hình hộp  $ABCD.A'B'C'D'$ . Ta có  $\vec{AB} + \vec{AD} + \vec{AA'} = \vec{AC'}$

$$\vec{AB} + \vec{AD} + \vec{AA'} = \vec{AC'}$$

**▲** Hệ thức tương tự:  $\vec{BA} + \vec{BC} + \vec{BB'} = \vec{BD'}$ .



#### Tính chất:

① Tính chất giao hoán:  $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ ;

② Tính chất kết hợp:  $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ ;

③ Với mọi vectơ  $\vec{a}$ , ta luôn có:  $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$ .

④ Tổng của ba vectơ  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ :  $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$ .

### 2. Hiệu của hai véc tơ

#### Vectơ đối:

① Vectơ đối của  $\vec{a}$  ký hiệu là  $-\vec{a}$ .

② Vectơ đối của  $\vec{AB}$  là  $\vec{BA}$ :  $-\vec{AB} = \vec{BA}$ .

③ Vectơ  $\vec{0}$  được coi là vectơ đối của chính nó.

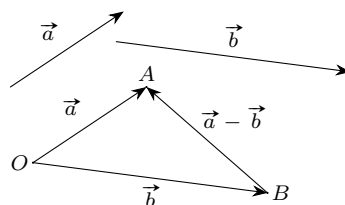
**Định nghĩa hiệu của hai vectơ:** Trong không gian, cho hai vectơ  $\vec{a}, \vec{b}$ . Ta gọi  $\vec{a} + (-\vec{b})$  là **hiệu của hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$** , ký hiệu  $\vec{a} - \vec{b}$ .

Phép lấy hiệu của hai vectơ được gọi là **phép trừ vectơ**.

#### Các quy tắc cần nhớ:

① Với ba điểm  $A, B, C$  ta có  $\vec{AB} - \vec{AC} = \vec{CB}$ .

② Hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  đối nhau thì  $\vec{a} + \vec{b} = \vec{0}$ .



### 3. Tích của một số với một véc-tơ

**Định nghĩa:** Cho số thực  $k \neq 0$  và vectơ  $\vec{a} \neq \vec{0}$ . Tích của một số  $k$  với vectơ  $\vec{a}$  là một vectơ, ký hiệu là  $k\vec{a}$ , được xác định như sau:

☑ Cùng hướng với vectơ  $\vec{a}$  nếu  $k > 0$ , ngược hướng với vectơ  $\vec{a}$  nếu  $k < 0$ .

☑ Có độ dài bằng  $|k| \cdot |\vec{a}|$ .

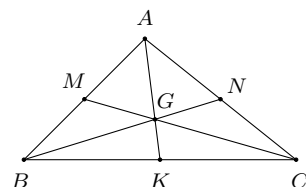
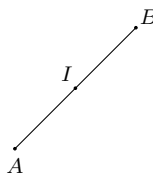
**▲**  $0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$  và  $k \cdot \vec{0} = \vec{0}$ .

## QUICK NOTE

⚙️ **Hệ thức trung điểm, trọng tâm:**

①  $I$  là trung điểm của đoạn thẳng  $AB$  thì

- $\vec{IA} + \vec{IB} = \vec{0}$ ;
- $\vec{IA} = -\vec{IB}$ ;  $\vec{AI} = \frac{1}{2}\vec{AB}$ ;...



②  $G$  là trọng tâm của tam giác  $ABC$  thì

- $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$ ;
- $\vec{GA} = -\frac{2}{3}\vec{AK}$ ;  $\vec{GA} = -2\vec{GK}$ ;...

⚙️ **Nhận xét:**

① Với hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  bất kỳ, với mọi số  $h$  và  $k$ , ta luôn có

- $k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$ ;
- $(h + k)\vec{a} = h\vec{a} + k\vec{a}$ ;
- $h(k\vec{a}) = (hk)\vec{a}$ ;

- $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$ ;
- $(-1) \cdot \vec{a} = -\vec{a}$ ;
- $k\vec{a} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{a} = \vec{0} \\ k = 0 \end{cases}$ .

② Hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  ( $\vec{b}$  khác  $\vec{0}$ ) cùng phương khi và chỉ khi có số  $k$  sao cho  $\vec{a} = k\vec{b}$ .

③ Ba điểm phân biệt  $A, B, C$  thẳng hàng khi và chỉ khi có số  $k \neq 0$  để  $\vec{AB} = k\vec{AC}$ .

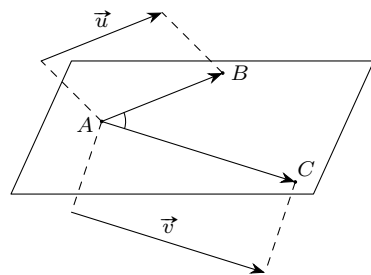
#### 4. Tích vô hướng của hai véc-tơ

⚙️ **Góc giữa hai vectơ:**

Trong không gian, cho  $\vec{u}$  và  $\vec{v}$  là hai vectơ khác  $\vec{0}$ . Lấy một điểm  $A$  bất kỳ, gọi  $B$  và  $C$  là hai điểm sao cho  $\vec{AB} = \vec{u}$ ,  $\vec{AC} = \vec{v}$ . Khi đó, ta gọi  $\widehat{BAC}$  là góc giữa hai vectơ  $\vec{u}$  và  $\vec{v}$ , ký hiệu  $(\vec{u}, \vec{v})$ .

⚠️  $0^\circ \leq (\vec{u}, \vec{v}) \leq 180^\circ$ .

- ⚠️ • Nếu  $\vec{u}$  cùng hướng với  $\vec{v}$  thì  $(\vec{u}, \vec{v}) = 0^\circ$ ;
- Nếu  $\vec{u}$  ngược hướng với  $\vec{v}$  thì  $(\vec{u}, \vec{v}) = 180^\circ$ ;
- Nếu  $\vec{u}$  vuông góc với  $\vec{v}$  thì  $(\vec{u}, \vec{v}) = 90^\circ$ .



⚙️ **Định nghĩa tích vô hướng của hai véc-tơ:** Trong không gian, cho hai vectơ  $\vec{u}$  và  $\vec{v}$  khác  $\vec{0}$ .

Tích vô hướng của hai vectơ  $\vec{u}$  và  $\vec{v}$  là một số, ký hiệu  $\vec{u} \cdot \vec{v}$ , được xác định bởi công thức  $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\vec{u}, \vec{v})$

⚠️ ① Trong trường hợp  $\vec{u} = \vec{0}$  hoặc  $\vec{v} = \vec{0}$ , ta quy ước  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ .

②  $\vec{u} \cdot \vec{u} = \vec{u}^2 = |\vec{u}|^2$ ;  $\vec{u}^2 \geq 0$ .  $\vec{u}^2 = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$ .

③ Với hai vectơ  $\vec{u}, \vec{v}$  khác  $\vec{0}$ , ta có  $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$

④ Với hai vectơ  $\vec{u}, \vec{v}$  khác  $\vec{0}$ , ta có  $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ .

⚙️ **Tính chất:** Với ba vectơ  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  và số thực  $k$ , ta có:

- ☺️  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ ;
- ☺️  $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$ ;
- ☺️  $(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = k(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot (k\vec{b})$ .

## B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

1

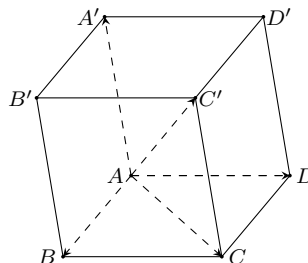
Xác định véc-tơ, chứng minh đẳng thức véc-tơ, độ dài véc-tơ

### 1. Ví dụ minh họa

#### VÍ DỤ 1.

Cho hình hộp  $ABCD.A'B'C'D'$ . Hãy xác định các véc-tơ (khác  $\vec{0}$ ) có điểm đầu, điểm cuối là các đỉnh của hình hộp  $ABCD.A'B'C'D'$  thỏa

- a) cùng phương với  $\vec{AB}$ ;      b) cùng phương  $\vec{AA'}$ ;  
c) bằng với  $\vec{AD}$ ;      d) bằng với  $\vec{A'B}$ ;  
e) đối với  $\vec{CD'}$ ;      f) đối với  $\vec{B'C}$ .



**VÍ DỤ 2.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình bình hành. Gọi  $M, N, O$  lần lượt là trung điểm của  $AB, CD$  và  $AC$ . Chứng minh rằng

- a)  $\vec{BN}$  và  $\vec{DM}$  đối nhau;      b)  $\vec{SA} + \vec{SB} + \vec{SC} + \vec{SD} = 4\vec{SO}$ ;      c)  $\vec{SD} - \vec{BN} - \vec{CM} = \vec{SC}$ .

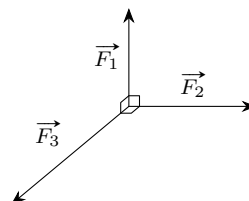
**VÍ DỤ 3.** Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$  cạnh bằng  $a$ . Gọi  $G$  là trọng tâm tam giác  $AB'D'$ .

- a) Tìm vectơ:  $\vec{CC'} + \vec{BA}$ ;       $\vec{CC'} + \vec{BA} + \vec{D'A'}$ ;      b) Chứng minh:  $\vec{BC} + \vec{DC} + \vec{AA'} = \vec{AC'}$ .  
c) Chứng minh:  $\vec{B'B} + \vec{AD} + \vec{CD} = \vec{B'D}$ .      d) Chứng minh:  $\vec{BB'} - \vec{C'B'} - \vec{D'C'} = \vec{BD'}$ .  
e) Chứng minh:  $\vec{A'C} = 3\vec{A'G}$ .      f) Tính độ dài véc-tơ  $\vec{u} = \vec{AB} + \vec{A'D'} + \vec{AA'}$ .

#### VÍ DỤ 4.

Ba lực  $\vec{F_1}, \vec{F_2}, \vec{F_3}$  cùng tác động vào một vật có phương đôi một vuông góc nhau và có độ lớn lần lượt là 2 N, 3 N, 4 N.

- a) Tính độ lớn hợp lực của  $\vec{F_2}, \vec{F_3}$ .  
b) Tính độ lớn hợp lực của ba lực đã cho.



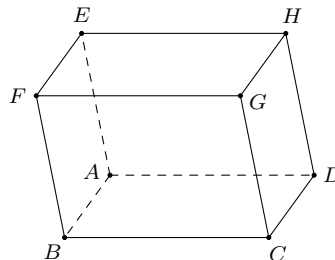
## 2. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Phần I. Mỗi câu hỏi học sinh chọn một trong bốn phương án A, B, C, D.

#### CÂU 1.

Cho hình hộp  $ABCD.EFGH$ . Các véc-tơ có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của hình hộp và bằng véc-tơ  $\vec{AB}$  là các véc-tơ nào sau đây?

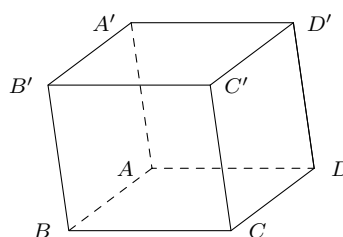
- (A)  $\vec{CD}, \vec{HG}, \vec{EF}$ .      (B)  $\vec{DC}, \vec{HG}, \vec{EF}$ .  
(C)  $\vec{DC}, \vec{HG}, \vec{FE}$ .      (D)  $\vec{DC}, \vec{GH}, \vec{EF}$ .



#### CÂU 2.

Cho hình hộp  $ABCD.A'B'C'D'$ . Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sai?

- (A)  $\vec{AB} + \vec{B'D'} = \vec{AD}$ .      (B)  $\vec{AB} + \vec{CD} = \vec{0}$ .  
(C)  $\vec{AC'} + \vec{A'C} = 2\vec{AC}$ .      (D)  $\vec{AC} - \vec{D'D} = \vec{0}$ .



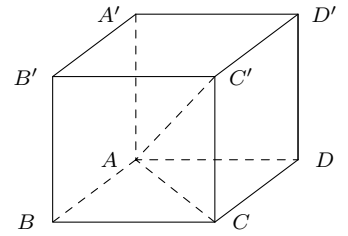
#### CÂU 3.

### QUICK NOTE

QUICK NOTE

Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$  cạnh  $a$ . Khẳng định nào sau đây là khẳng định **sai**?

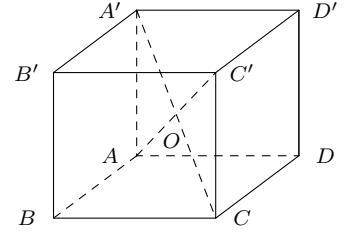
- (A)  $|\overrightarrow{AC}| = a\sqrt{2}$ .  
 (B)  $|\overrightarrow{AC'}| = a\sqrt{3}$ .  
 (C)  $\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{D'B'} = \vec{0}$ .  
 (D)  $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{BC'}$ .



**CÂU 4.**

Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$ . Gọi  $O$  là tâm của hình lập phương. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

- (A)  $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'})$ .  
 (B)  $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'})$ .  
 (C)  $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'})$ .  
 (D)  $\overrightarrow{AO} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'})$ .



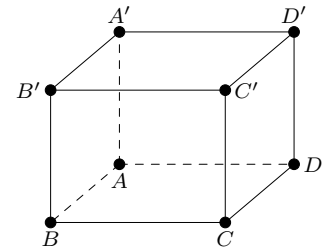
**CÂU 5.** Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$  cạnh  $a$ . Tính độ dài vectơ  $\vec{x} = \overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{AD'}$  theo  $a$ .

- (A)  $|\vec{x}| = a\sqrt{2}$ . (B)  $|\vec{x}| = 2a\sqrt{2}$ . (C)  $|\vec{x}| = 2a\sqrt{6}$ . (D)  $|\vec{x}| = a\sqrt{6}$ .

**CÂU 6.**

Hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$  cạnh  $a$ . Tính độ dài vectơ  $\vec{x} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AC'}$  theo  $a$ .

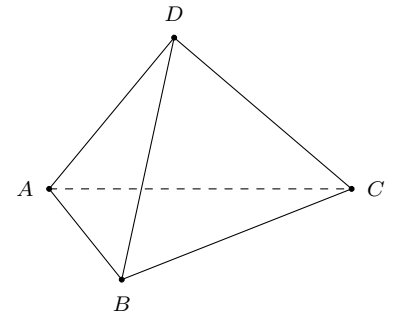
- (A)  $a\sqrt{2}$ . (B)  $(1 + \sqrt{3})a$ .  
 (C)  $a\sqrt{6}$ . (D)  $\frac{a\sqrt{6}}{2}$ .



**CÂU 7.**

Cho tứ diện  $ABCD$ . Mệnh đề nào dưới đây là mệnh đề đúng?

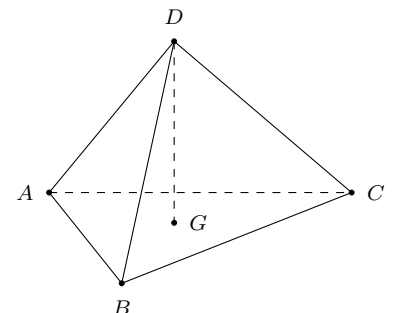
- (A)  $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC}$ .  
 (B)  $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BC}$ .  
 (C)  $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DC}$ .  
 (D)  $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DC}$ .



**CÂU 8.**

Cho tứ diện  $ABCD$ . Gọi  $G$  là trọng tâm tam giác  $ABC$ . Tìm  $k$  thỏa đẳng thức vectơ  $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = k \cdot \overrightarrow{DG}$ .

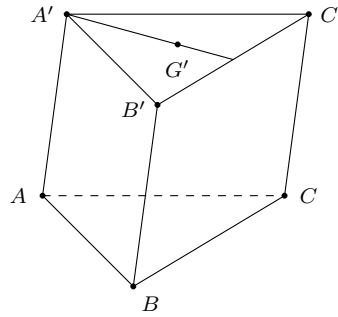
- (A)  $k = 1$ . (B)  $k = 3$ .  
 (C)  $k = 2$ . (D)  $k = 3$ .



**CÂU 9.**

Cho hình lăng trụ  $ABC.A'B'C'$ . Gọi  $G'$  là trọng tâm của tam giác  $A'B'C'$ . Đặt  $\vec{a} = \overrightarrow{AA'}$ ,  $\vec{b} = \overrightarrow{AB}$ ,  $\vec{c} = \overrightarrow{AC}$ . Véc-tơ  $\overrightarrow{AG'}$  bằng

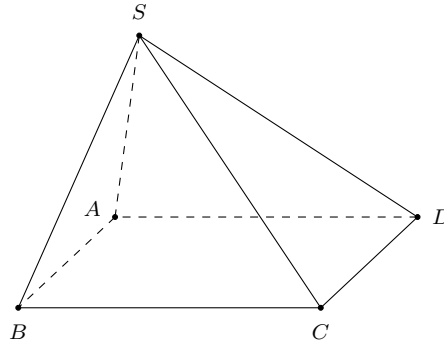
- Ⓐ  $\frac{1}{3}(\vec{a} + 3\vec{b} + \vec{c})$ .      Ⓑ  $\frac{1}{3}(3\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$ .  
 Ⓒ  $\frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + 3\vec{c})$ .      Ⓓ  $\frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$ .



**CÂU 10.**

Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình bình hành. Đặt  $\vec{SA} = \vec{a}$ ,  $\vec{SB} = \vec{b}$ ,  $\vec{SC} = \vec{c}$ ,  $\vec{SD} = \vec{d}$ . Khẳng định nào dưới đây là đúng?

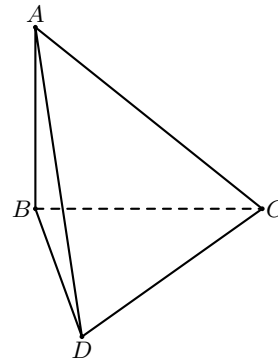
- Ⓐ  $\vec{a} + \vec{c} = \vec{b} + \vec{d}$ .  
 Ⓑ  $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = \vec{0}$ .  
 Ⓒ  $\vec{a} + \vec{d} = \vec{b} + \vec{c}$ .  
 Ⓓ  $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c} + \vec{d}$ .



**CÂU 11.**

Cho tứ diện  $ABCD$ . Các vectơ có điểm đầu là  $A$  và điểm cuối là các đỉnh còn lại của hình tứ diện là

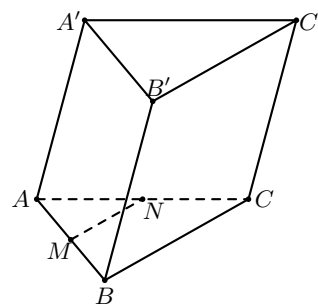
- Ⓐ  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AD}$ .      Ⓑ  $\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ .  
 Ⓒ  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{DA}$ .      Ⓓ  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ .



**CÂU 12.**

Cho hình lăng trụ tam giác  $ABC.A'B'C'$ . Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $AB, AC$ . Trong 4 vectơ  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{B'C'}, \overrightarrow{A'C'}$  vectơ nào cùng hướng với vectơ  $\overrightarrow{MN}$

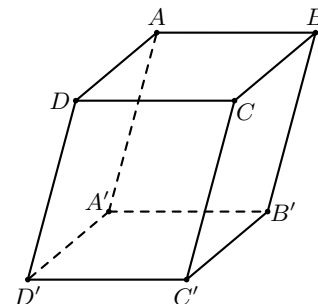
- Ⓐ  $\overrightarrow{AB}$ .      Ⓑ  $\overrightarrow{CB}$ .      Ⓒ  $\overrightarrow{B'C'}$ .      Ⓓ  $\overrightarrow{A'C'}$ .



**CÂU 13.**

Cho hình hộp  $ABCD.A'B'C'D'$ . Số các vectơ có điểm đầu, điểm cuối là các đỉnh của hình hộp và bằng vectơ  $\overrightarrow{AB}$  là

- Ⓐ 1.      Ⓑ 2.      Ⓒ 3.      Ⓓ 4.



**CÂU 14.** Cho hình hộp  $ABCD.A'B'C'D'$ . Trong các khẳng định dưới đây, đâu là khẳng định đúng?

- Ⓐ  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC'}$ .      Ⓑ  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC'}$ .  
 Ⓒ  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$ .      Ⓓ  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AD} = \vec{0}$ .

**QUICK NOTE**

QUICK NOTE

**CÂU 15.** Trong không gian cho tam giác  $ABC$  có  $G$  là trọng tâm và điểm  $M$  nằm ngoài mặt phẳng  $(ABC)$ . Khẳng định nào sau đây là đúng?

- (A)  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$ . (B)  $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ .  
(C)  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MG}$ . (D)  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$ .

**CÂU 16.** Cho hình chóp đều  $S.ABCD$  tất cả các cạnh bằng  $2\sqrt{3}$ . Tính độ dài vectơ  $\vec{u} = \overrightarrow{SA} - \overrightarrow{SC}$ .

- (A)  $\sqrt{3}$ . (B)  $\sqrt{2}$ . (C)  $2\sqrt{6}$ . (D)  $2\sqrt{2}$ .

**CÂU 17.** Cho tứ diện  $ABCD$ . Mệnh đề nào dưới đây là mệnh đề đúng?

- (A)  $\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DC}$ . (B)  $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BC}$ .  
(C)  $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DC}$ . (D)  $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CD}$ .

**CÂU 18.** Cho hình lăng trụ  $ABC.A'B'C'$ ,  $M$  là trung điểm của  $BB'$ . Đặt  $\overrightarrow{CA} = \vec{a}$ ,  $\overrightarrow{CB} = \vec{b}$ ,  $\overrightarrow{AA'} = \vec{c}$ . Khẳng định nào sau đây đúng?

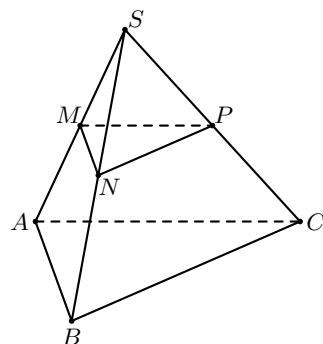
- (A)  $\overrightarrow{AM} = \vec{b} + \vec{c} - \frac{1}{2}\vec{a}$ . (B)  $\overrightarrow{AM} = \vec{a} - \vec{c} + \frac{1}{2}\vec{b}$ .  
(C)  $\overrightarrow{AM} = \vec{a} + \vec{c} - \frac{1}{2}\vec{b}$ . (D)  $\overrightarrow{AM} = \vec{b} - \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{c}$ .

**CÂU 19.** Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$  cạnh  $a$ . Tính độ dài vectơ  $\vec{x} = \overrightarrow{A'C'} - \overrightarrow{A'A}$  theo  $a$ ?

- (A)  $a\sqrt{2}$ . (B)  $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ . (C)  $a\sqrt{6}$ . (D)  $a\sqrt{3}$ .

**CÂU 20.**

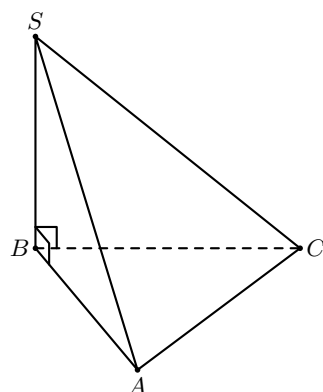
Cho tứ diện  $S.ABC$  có  $M, N, P$  là trung điểm của  $SA, SB, SC$ . Tìm khẳng định đúng?



- (A)  $\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{PN} - \overrightarrow{PM})$ . (B)  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{PN} - \overrightarrow{PM}$ .  
(C)  $\overrightarrow{AB} = 2(\overrightarrow{PM} - \overrightarrow{PN})$ . (D)  $\overrightarrow{AB} = 2(\overrightarrow{PN} - \overrightarrow{PM})$ .

**CÂU 21.**

Cho tứ diện  $S.ABC$  có đáy là tam giác đều cạnh  $a$ ,  $SB$  vuông góc với đáy và  $SB = \sqrt{3}a$ . Góc giữa hai vectơ  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AS})$  là



- (A)  $60^\circ$ . (B)  $30^\circ$ . (C)  $45^\circ$ . (D)  $90^\circ$ .

**CÂU 22.** Cho hình chóp  $S.ABC$  có  $AB = 4$ ,  $\widehat{BAC} = 60^\circ$ ,  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 6$ . Khi đó độ dài  $\overrightarrow{AC}$  là

- (A) 3. (B) 6. (C) 4. (D) 12.

**CÂU 23.** Trong không gian cho vectơ  $\overrightarrow{AB}$ . Khi đó:

- (A) Giá của vectơ  $\overrightarrow{AB}$  là  $\overrightarrow{AB}$ . (B) Giá của vectơ  $\overrightarrow{AB}$  là  $|\overrightarrow{AB}|$ .  
(C) Giá của vectơ  $\overrightarrow{AB}$  là đường thẳng  $AB$ . (D) Giá của vectơ  $\overrightarrow{AB}$  là đoạn thẳng  $AB$ .

QUICK NOTE

**CÂU 24.** Cho hình hộp chữ nhật  $ABCD.A'B'C'D'$ . Trong các vectơ dưới đây, vectơ nào cùng phương với vectơ  $\overrightarrow{AB}$ ?

- (A) Vectơ  $\overrightarrow{AD}$ . (B) Vectơ  $\overrightarrow{CC'}$ . (C) Vectơ  $\overrightarrow{BD}$ . (D) Vectơ  $\overrightarrow{CD}$ .

**CÂU 25.** Cho hình hộp  $ABCD.A'B'C'D'$ . Vectơ  $\vec{u} = \overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{A'D'}$  bằng vectơ nào dưới đây?

- (A)  $\overrightarrow{A'C}$ . (B)  $\overrightarrow{CA'}$ . (C)  $\overrightarrow{AC'}$ . (D)  $\overrightarrow{C'A}$ .

**CÂU 26.** Cho hình lăng trụ tam giác  $ABC.A'B'C'$ . Đặt  $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}$ ,  $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$ ,  $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$ ,  $\overrightarrow{BC} = \vec{d}$ . Trong các biểu thức vectơ sau đây, biểu thức nào là đúng?

- (A)  $\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$ . (B)  $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = \vec{0}$ .  
(C)  $\vec{b} - \vec{c} + \vec{d} = \vec{0}$ . (D)  $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{d}$ .

**CÂU 27.** Cho lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$  có độ dài mỗi cạnh bằng 1. Tính độ dài của vectơ  $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{C'D'}$ .

- (A)  $\sqrt{3}$ . (B)  $\sqrt{2}$ . (C) 1. (D)  $2\sqrt{2}$ .

**CÂU 28.** Cho  $O$  là tâm hình bình hành  $ABCD$ . Hỏi vectơ  $(\overrightarrow{AO} - \overrightarrow{DO})$  bằng vectơ nào?

- (A)  $\overrightarrow{BA}$ . (B)  $\overrightarrow{AD}$ . (C)  $\overrightarrow{DC}$ . (D)  $\overrightarrow{AC}$ .

**CÂU 29.** Cho ba điểm phân biệt  $A, B, C$ . Nếu  $\overrightarrow{AB} = -3\overrightarrow{AC}$  thì đẳng thức nào dưới đây đúng?

- (A)  $\overrightarrow{BC} = -4\overrightarrow{AC}$ . (B)  $\overrightarrow{BC} = -2\overrightarrow{AC}$ . (C)  $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{AC}$ . (D)  $\overrightarrow{BC} = 4\overrightarrow{AC}$ .

**CÂU 30.** Cho tam giác  $ABC$  có điểm  $O$  thỏa mãn:  $|\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} - 2\overrightarrow{OC}| = |\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}|$ . Khẳng định nào sau đây là đúng?

- (A) Tam giác  $ABC$  đều. (B) Tam giác  $ABC$  cân tại  $C$ .  
(C) Tam giác  $ABC$  vuông tại  $C$ . (D) Tam giác  $ABC$  cân tại  $B$ .

**CÂU 31.** Cho hình hộp  $ABCD.A'B'C'D'$ . Đẳng thức nào dưới đây là đúng?

- (A)  $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC}$ . (B)  $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC}$ .  
(C)  $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{AD}$ . (D)  $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA'}$ .

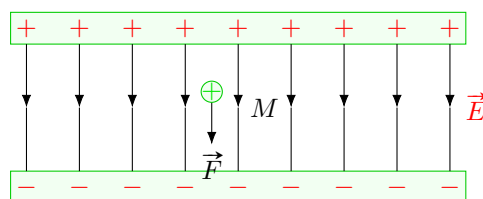
**CÂU 32.** Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$  có độ dài cạnh bằng  $a$ . Tính độ dài của vectơ  $\overrightarrow{AD'} + \overrightarrow{BA'}$ .

- (A)  $\sqrt{3}a$ . (B)  $\sqrt{2}a$ . (C)  $\sqrt{6}a$ . (D)  $2\sqrt{3}a$ .

**CÂU 33.**

Trong điện trường đều, lực tĩnh điện  $\vec{F}$  (đơn vị: N) tác dụng lên điện tích điểm có điện tích  $q$  (đơn vị: C) được tính theo công thức  $\vec{F} = q \cdot \vec{E}$ , trong đó  $\vec{E}$  là cường độ điện trường (đơn vị: N/C). Tính độ lớn của lực tĩnh điện tác dụng lên điện tích điểm khi  $q = 10^{-9}$  C và độ lớn điện trường  $E = 10^5$  N/C.

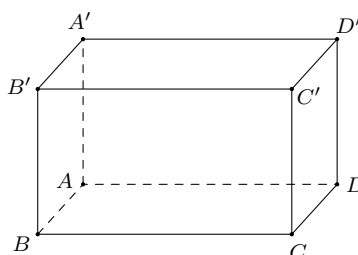
- (A)  $10^{-3}$  N. (B)  $10^4$  N.  
(C)  $10^{-14}$  N. (D)  $10^{-4}$  N.



**Phần II.** Trong mỗi ý a), b), c) và d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.

**CÂU 34.**

Cho hình hộp chữ nhật  $ABCD.A'B'C'D'$  có cạnh  $AB = a$ ;  $AD = a\sqrt{3}$ ;  $AA' = 2a$ . Xét tính đúng, sai của các khẳng định sau:



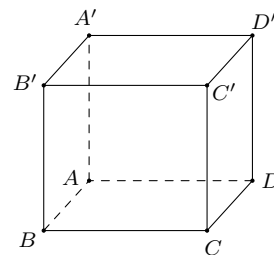
Mệnh đề	Đ	S
a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD'} = \vec{0}$ .		
b) $\overrightarrow{A'D} + \overrightarrow{CB'} = \vec{0}$ .		
c) $ \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}  = a\sqrt{5}$ .		
d) $ \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A'D'} + \overrightarrow{CC'}  = 2\sqrt{2}a$ .		

QUICK NOTE

**CÂU 35.**

Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$  có cạnh bằng  $a$ . Xét tính đúng, sai của các khẳng định sau:

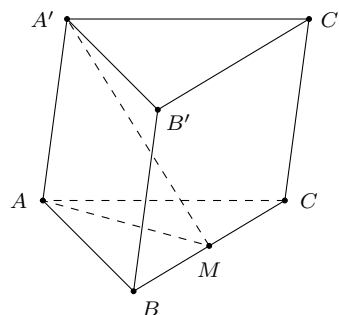
Mệnh đề	Đ	S
a) $\overrightarrow{B'B} - \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{B'D}$ .		
b) $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{BD}$ .		
c) $ \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BB'}  = a\sqrt{2}$ .		
d) $ \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{C'A}  = a$ .		



**CÂU 36.**

Cho hình lăng trụ tam giác  $ABC.A'B'C'$  có  $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}$ ,  $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$  và  $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$ . Gọi  $M$  là trung điểm của  $BC$ . Xét tính đúng, sai của các khẳng định sau:

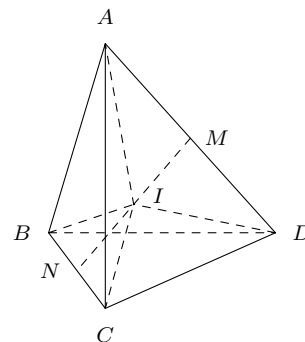
Mệnh đề	Đ	S
a) $\overrightarrow{B'C} = -\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$ .		
b) $\overrightarrow{BC'} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$ .		
c) $\overrightarrow{AM} = \vec{b} + \vec{c}$ .		
d) $\overrightarrow{A'M} = -\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$ .		



**CÂU 37.**

Cho tứ diện  $ABCD$ . Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của các cạnh  $AD$  và  $BC$ ,  $I$  là trung điểm  $MN$ . Xét tính đúng, sai của các khẳng định sau:

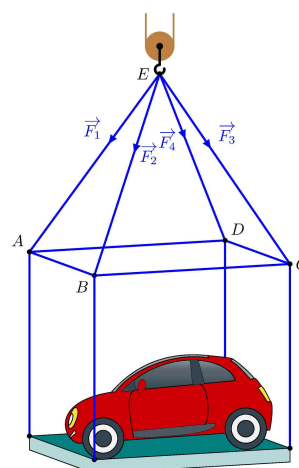
Mệnh đề	Đ	S
a) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD}$ .		
b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$ .		
c) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{MN}$ .		
d) $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = \vec{0}$ .		



**CÂU 38.**

Một chiếc ô tô được đặt trên mặt đáy dưới của một khung sắt có dạng hình hộp chữ nhật với đáy trên là hình chữ nhật  $ABCD$ , mặt phẳng  $(ABCD)$  song song với mặt phẳng nằm ngang. Khung sắt đó được buộc vào móc  $E$  của chiếc cần cẩu sao cho các đoạn dây cáp  $EA, EB, EC, ED$  có độ dài bằng nhau và cùng tạo với mặt phẳng  $(ABCD)$  một góc bằng  $60^\circ$ . Chiếc cần cẩu kéo khung sắt lên theo phương thẳng đứng. Biết rằng các lực căng  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4$  đều có cường độ là 4700 N và trọng lượng của khung sắt là 3000 N.

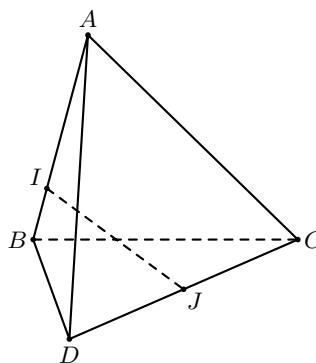
Mệnh đề	Đ	S
a) $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{F}_3 + \vec{F}_4$ .		
b) $\vec{F}_1 + \vec{F}_3 = \vec{F}_2 + \vec{F}_4$ .		
c) $ \vec{F}_1 + \vec{F}_3  = 8141 \text{ N}$ (làm tròn đến hàng đơn vị).		
d) Trọng lượng của chiếc xe ô tô là 16282 N (làm tròn đến hàng đơn vị).		



**CÂU 39.**



Cho tứ diện  $ABCD$  có  $AB = AC = AD = a$  và  $\widehat{BAC} = \widehat{BAD} = 60^\circ, \widehat{CAD} = 90^\circ$ . Gọi  $I$  là điểm trên cạnh  $AB$  sao cho  $AI = 3IB$  và  $J$  là trung điểm của  $CD$ . Gọi  $\alpha$  là góc giữa hai vectơ  $\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{IJ}$ .

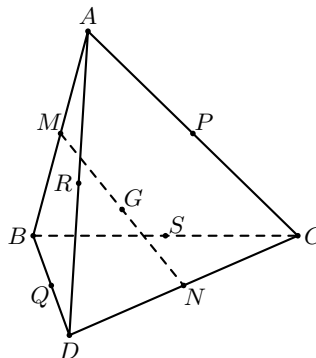


QUICK NOTE

Mệnh đề	Đ	S
a) Tam giác $BCD$ vuông cân.		
b) $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$ .		
c) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{a^2}{2}$ .		
d) $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{5}$ .		

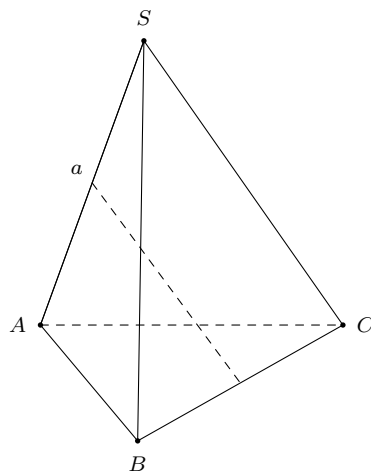
CÂU 40.

Cho tứ diện  $ABCD$ . Gọi  $M, N, P, Q, R, S, G$  lần lượt là trung điểm các đoạn thẳng  $AB, CD, AC, BD, AD, BC, MN$ .



Mệnh đề	Đ	S
a) $\overrightarrow{MR} = \overrightarrow{SN}$ .		
b) $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$ .		
c) $2\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$ .		
d) $ \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} $ nhỏ nhất khi và chỉ khi điểm $I$ trùng với điểm $G$ .		

CÂU 41. Cho tứ diện đều  $SABC$  có cạnh  $a$ . Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm  $SA, BC$ . Các mệnh đề sau đúng hay sai?

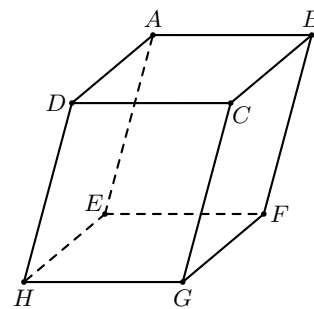


Mệnh đề	Đ	S
a) Độ dài của vectơ $\overrightarrow{SA}$ bằng $a$ .		
b) $\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SB} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$ .		
c) $\overrightarrow{SB} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{AC} = 4\overrightarrow{MN}$ .		
d) Gọi $I$ là trọng tâm của tứ diện. Khoảng cách từ $I$ đến $(ABC)$ bằng $\frac{3a\sqrt{6}}{4}$ .		

CÂU 42.

QUICK NOTE

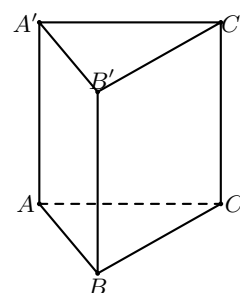
Cho hình hộp chữ nhật  $ABCD \cdot EFGH$  có  $AB = AE = 2$ ,  $AD = 3$  và đặt  $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ ,  $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$ ,  $\vec{c} = \overrightarrow{AE}$ . Lấy điểm  $M$  thỏa  $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AD}$  và điểm  $N$  thỏa  $\overrightarrow{EN} = \frac{2}{5}\overrightarrow{EC}$ . (tham khảo hình vẽ).



Mệnh đề	Đ	S
a) $\overrightarrow{MA} = -\frac{1}{5}\vec{b}$ .		
b) $\overrightarrow{EN} = \frac{2}{5}(\vec{a} - \vec{b} + \vec{c})$ .		
c) $(m \cdot \vec{a} + n \cdot \vec{b} + p \cdot \vec{c})^2 = m^2 \cdot \vec{a}^2 + n^2 \cdot \vec{b}^2 + p^2 \cdot \vec{c}^2$ với $m, n, p$ là các số thực.		
d) $MN = \frac{\sqrt{61}}{5}$ .		

**CÂU 43.**

Cho hình lăng trụ tam giác đều  $ABC.A'B'C'$  có cạnh đáy bằng  $x$  và chiều cao bằng  $y$ . (tham khảo hình vẽ)

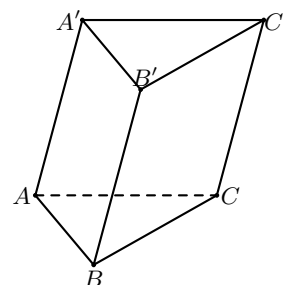


Mệnh đề	Đ	S
a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}x^2$ .		
b) $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AA'}$ .		
c) $\overrightarrow{CB'} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AA'}$ .		
d) Góc $(AC', CB') > 60^\circ$ khi $\frac{y}{x} < \sqrt{2}$ .		

**Phần III. Học sinh điền kết quả vào ô trống.**

**CÂU 44.**

Cho hình lăng trụ  $ABC.A'B'C'$ . Đặt  $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ ,  $\overrightarrow{AA'} = \vec{b}$ ,  $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$ . Ta biểu diễn  $\overrightarrow{B'C} = m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c}$ , khi đó  $m + n + p$  bằng bao nhiêu?



KQ:

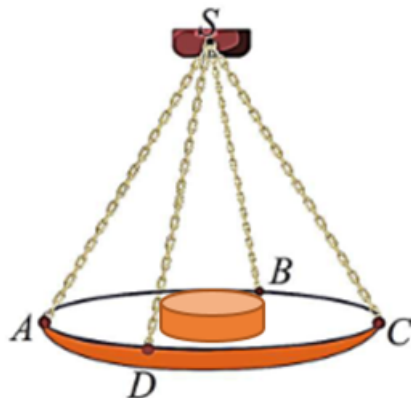
**CÂU 45.** Cho tứ diện  $ABCD$ , gọi  $I, J$  lần lượt là trung điểm của  $AB$  và  $CD$ . Biết  $\overrightarrow{IJ} = \frac{a}{b}\overrightarrow{AC} + \frac{c}{d}\overrightarrow{BD}$ . Giá trị biểu thức  $P = ab + cd$  bằng

KQ:

**CÂU 46.** Cho tứ diện đều  $ABCD$  có cạnh bằng 15. Biết độ dài của  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$  bằng  $a\sqrt{6}$ , khi đó giá trị của  $a$  là?

KQ:

**CÂU 47.** Một chiếc cân đòn tay đang cân một vật có khối lượng  $m = 3\text{ kg}$  được thiết kế với đĩa cân được giữ bởi bốn đoạn xích  $SA, SB, SC, SD$  sao cho  $SABCD$  là hình chóp tứ giác đều có  $\widehat{ASC} = 90^\circ$ . Biết độ lớn của lực căng cho mỗi sợi xích có dạng  $\frac{a\sqrt{2}}{4}$ . Lấy  $g = 10\text{ m/s}^2$ , khi đó giá trị của  $a$  bằng bao nhiêu?



KQ:

**CÂU 48.** Cho tứ diện  $ABCD$ . Trên các cạnh  $AD$  và  $BC$  lần lượt lấy  $M, N$  sao cho  $AM = 3MD$ ,  $BN = 3NC$ . Gọi  $P, Q$  lần lượt là trung điểm của  $AD$  và  $BC$ . Phân tích vectơ  $\overrightarrow{MN}$  theo hai vectơ  $\overrightarrow{PQ}$  và  $\overrightarrow{DC}$  ta được  $\overrightarrow{MN} = a\overrightarrow{PQ} + b\overrightarrow{DC}$ . Tính  $a + 2b$ .

KQ:

**CÂU 49.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình bình hành. Một mặt phẳng  $(\alpha)$  cắt các cạnh  $SA, SB, SC, SD$  lần lượt tại  $A', B', C', D'$ . Giá trị của biểu thức  $P = \frac{SA}{SA'} + \frac{SC}{SC'} - \frac{SB}{SB'} - \frac{SD}{SD'}$ .

KQ:

**CÂU 50.** Cho hình lập phương  $B'C$  có đường chéo  $A'C = \frac{3}{16}$ . Gọi  $O$  là tâm hình vuông  $ABCD$  và điểm  $20$  thỏa mãn:  $\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OC'} + \overrightarrow{OD'}$ . Khi đó độ dài của đoạn  $OS$  bằng  $\frac{a\sqrt{3}}{b}$  với  $a, b \in \mathbb{N}$  và  $\frac{a}{b}$  là phân số tối giản. Tính giá trị của biểu thức  $P = a^2 + b^2$ .

KQ:

**CÂU 51.** Khi chuyển động trong không gian, máy bay luôn chịu tác động của 4 lực chính: lực đẩy của động cơ, lực cản của không khí, trọng lực và lực nâng khí động học (hình ảnh 2.20).



Hình 2.20

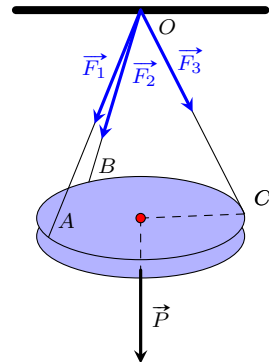
Lực cản của không khí ngược hướng với lực đẩy của động cơ và có độ lớn tỉ lệ thuận với bình phương vận tốc máy bay. Một chiếc máy bay tăng vận tốc từ  $900(\text{km/h})$  lên  $920(\text{km/h})$ , trong quá trình tăng tốc máy bay giữ nguyên hướng bay. Lực cản của không khí khi máy bay đạt vận tốc  $900(\text{km/h})$  và  $920(\text{km/h})$  lần lượt biểu diễn bởi hai véc tơ  $\vec{F}_1$  và  $\vec{F}_2$  với  $\vec{F}_1 = k\vec{F}_2 (k \in \mathbb{R}; k > 0)$ . Tính giá trị của  $k$  (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai).

KQ:

**CÂU 52.**

## QUICK NOTE

Một chiếc đèn tròn được treo song song với mặt phẳng nằm ngang bởi ba sợi dây không dẫn xuất phát từ điểm  $O$  trên trần nhà và lần lượt buộc vào ba điểm  $A, B, C$  trên đèn tròn sao cho các lực căng  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$  lần lượt trên mỗi dây  $OA, OB, OC$  đôi một vuông góc với nhau và  $|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2| = |\vec{F}_3| = 15$  (N). Tính trọng lượng của chiếc đèn tròn đó (làm tròn đến hàng phần chục).

KQ: 

--	--	--	--

**CÂU 53.** Cho hình hộp  $ABCD.A'B'C'D'$ . Xét các điểm  $M, N$  lần lượt thuộc các đường thẳng  $A'C, C'D$  sao cho đường thẳng  $MN$  song song với đường thẳng  $BD'$ . Khi đó tỉ số  $\frac{MN}{BD'}$  bằng

KQ: 

--	--	--	--

2

## Xác định góc và tích vô hướng của hai vectơ

## 1. Ví dụ minh họa

**VÍ DỤ 1.** Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$  có cạnh bằng 5.

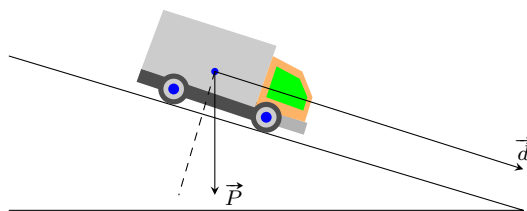
- Tìm góc giữa các cặp véc-tơ sau:  $\vec{AC}$  và  $\vec{AB}$ ;  $\vec{AC}$  và  $\vec{B'D'}$ ;  $\vec{AC}$  và  $\vec{CD}$ ;  $\vec{AD'}$  và  $\vec{BD}$ .
- Tính các tích vô hướng  $\vec{AC} \cdot \vec{AB}$ ;  $\vec{AC} \cdot \vec{B'D'}$ ;  $\vec{AD'} \cdot \vec{BD}$ ;
- Chứng minh  $\vec{AC'}$  vuông góc với  $\vec{BD}$ .

**VÍ DỤ 2.** Cho tứ diện đều  $ABCD$  có cạnh bằng  $a$  và  $M$  là trung điểm của  $CD$ .

- Tính các tích vô hướng  $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$ ,  $\vec{AB} \cdot \vec{AM}$ .
- Tính góc  $(\vec{AB}, \vec{CD})$ .

**VÍ DỤ 3.**

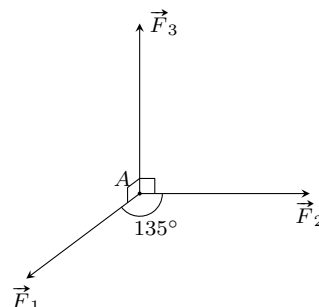
Cho biết công  $A$  (đơn vị:  $J$ ) sinh bởi lực  $\vec{F}$  tác dụng lên một vật được tính bằng công thức  $A = \vec{F} \cdot \vec{d}$ , trong đó  $\vec{d}$  là vectơ biểu thị độ dịch chuyển của vật (đơn vị của  $|\vec{d}|$  là m) khi chịu tác dụng của lực  $\vec{F}$ .



Một chiếc xe có khối lượng 1,5 tấn đang đi xuống trên một đoạn đường dốc có góc nghiêng  $5^\circ$  so với phương ngang. Tính công sinh bởi trọng lực  $\vec{P}$  khi xe đi hết đoạn đường dốc dài 30 m (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị), biết rằng trọng lực  $\vec{P}$  được xác định bởi công thức  $\vec{P} = m\vec{g}$ , với  $m$  (đơn vị: kg) là khối lượng của vật và  $\vec{g}$  là gia tốc rơi tự do có độ lớn  $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ .

**VÍ DỤ 4.**

Một chất điểm  $A$  nằm trên mặt phẳng nằm ngang ( $\alpha$ ), chịu tác động bởi ba lực  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ . Các lực  $\vec{F}_1, \vec{F}_2$  có giá nằm trong ( $\alpha$ ) và  $(\vec{F}_1, \vec{F}_2) = 135^\circ$ , còn lực  $\vec{F}_3$  có giá vuông góc với ( $\alpha$ ) và hướng lên trên. Xác định cường độ hợp lực của các lực  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$  biết rằng độ lớn của ba lực đó lần lượt là 20 N, 15 N và 10 N.



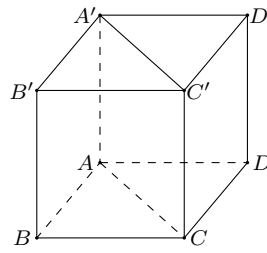
## 2. Bài tập trắc nghiệm

Phần I. Mỗi câu hỏi học sinh chọn một trong bốn phương án A, B, C, D.

**CÂU 1.**

Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$ . Khẳng định nào sau đây là khẳng định **sai**?

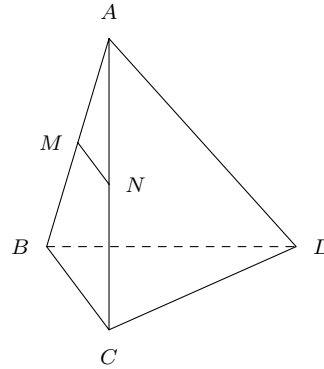
- (A)  $(\overrightarrow{A'C'}, \overrightarrow{AD}) = 45^\circ$ . (B)  $(\overrightarrow{A'C'}, \overrightarrow{B'B}) = 90^\circ$ .  
(C)  $(\overrightarrow{A'A}, \overrightarrow{CB'}) = 45^\circ$ . (D)  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = 180^\circ$ .



**CÂU 2.**

Cho tứ diện đều  $ABCD$ , Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm các cạnh  $AB, AC$ . Hãy tính góc giữa hai vectơ  $\overrightarrow{MN}$  và  $\overrightarrow{BD}$ .

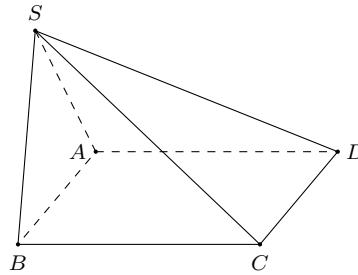
- (A)  $(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{BD}) = 150^\circ$ . (B)  $(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{BD}) = 120^\circ$ .  
(C)  $(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{BD}) = 30^\circ$ . (D)  $(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{BD}) = 60^\circ$ .



**CÂU 3.**

Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình bình hành và mặt bên  $SAB$  là tam giác đều. Tính góc giữa hai vectơ  $\overrightarrow{DC}$  và  $\overrightarrow{BS}$ .

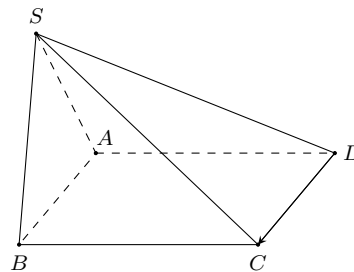
- (A)  $(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{BS}) = 120^\circ$ . (B)  $(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{BS}) = 60^\circ$ .  
(C)  $(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{BS}) = 90^\circ$ . (D)  $(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{BS}) = 150^\circ$ .



**CÂU 4.**

Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình bình hành. Mặt bên  $ASB$  là tam giác vuông cân tại  $S$  và có cạnh  $AB = a$ . Tính  $\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{AS}$ .

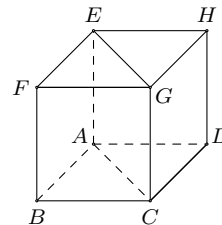
- (A)  $\frac{a^2}{4}$ . (B)  $-\frac{a^2}{4}$ .  
(C)  $-\frac{a^2}{2}$ . (D)  $\frac{a^2}{2}$ .



**CÂU 5.**

Cho hình lập phương  $ABCD.EFGH$  có các cạnh bằng  $a$ . Tính  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{EG}$ .

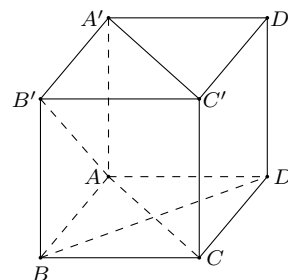
- (A)  $a^2\sqrt{2}$ . (B)  $a^2$ .  
(C)  $\frac{a^2\sqrt{2}}{2}$ . (D)  $a^2\sqrt{3}$ .



**CÂU 6.**

Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$  có cạnh bằng  $a$ . Tính  $\overrightarrow{AB'} \cdot \overrightarrow{A'C'}$ .

- (A)  $\frac{a^2}{2}$ . (B)  $-a^2$ .  
(C)  $a^2$ . (D)  $-\frac{a^2}{2}$ .



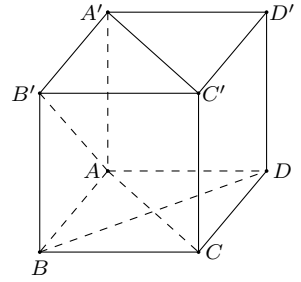
**CÂU 7.**

**QUICK NOTE**

QUICK NOTE

Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$  có cạnh bằng  $a$ . Tính  $\overrightarrow{AB'} \cdot \overrightarrow{BD}$ .

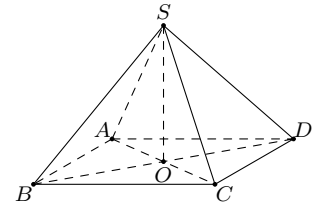
- (A)  $\frac{a^2}{2}$ . (B)  $-a^2$ .  
(C)  $a^2$ . (D)  $-\frac{a^2}{2}$ .



**CÂU 8.**

Cho hình chóp tứ giác đều  $S.ABCD$  có độ dài tất cả các cạnh bằng  $a$ . Tính  $\overrightarrow{AS} \cdot \overrightarrow{BC}$ .

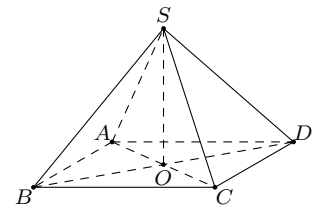
- (A)  $-\frac{a^2}{4}$ . (B)  $\frac{a^2}{2}$ .  
(C)  $-\frac{a^2}{2}$ . (D)  $\frac{a^2}{4}$ .



**CÂU 9.**

Cho hình chóp tứ giác đều  $S.ABCD$  có độ dài tất cả các cạnh bằng  $a$ . Tính  $\overrightarrow{AS} \cdot \overrightarrow{AC}$ .

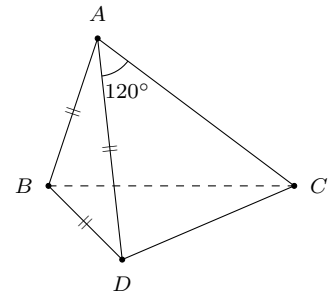
- (A)  $-a^2$ . (B)  $\frac{a^2}{2}$ .  
(C)  $-\frac{a^2}{2}$ . (D)  $a^2$ .



**CÂU 10.**

Cho tứ diện  $ABCD$  biết  $AB = AD = BD = a$ ,  $AC = 2a$  và  $\widehat{CAD} = 120^\circ$ . Tính  $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD}$ .

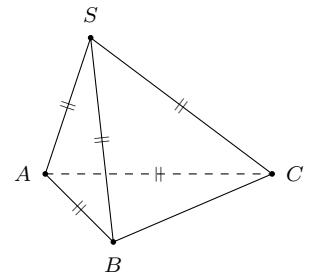
- (A)  $-\frac{3}{2}a^2$ . (B)  $\frac{3}{2}a^2$ .  
(C)  $\frac{1}{2}a^2$ . (D)  $-\frac{1}{2}a^2$ .



**CÂU 11.**

Cho hình chóp  $S.ABC$  có  $SA = SB = SC = AB = AC = a$  và  $BC = a\sqrt{2}$ . Tính góc giữa các vectơ  $\overrightarrow{SC}$  và  $\overrightarrow{AB}$ .

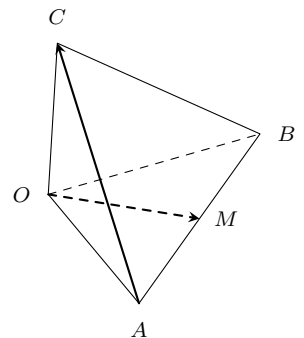
- (A)  $60^\circ$ . (B)  $90^\circ$ .  
(C)  $120^\circ$ . (D)  $150^\circ$ .



**CÂU 12.**

Cho tứ diện  $OABC$  có các cạnh  $OA, OB, OC$  đôi một vuông góc và  $OA = OB = OC = 1$ . Gọi  $M$  là trung điểm của cạnh  $AB$ . Tính góc giữa hai vectơ  $\overrightarrow{OM}$  và  $\overrightarrow{AC}$ .

- (A)  $90^\circ$ . (B)  $120^\circ$ .  
(C)  $60^\circ$ . (D)  $30^\circ$ .



**CÂU 13.** Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$  cạnh bằng  $a$ . Tích vô hướng của hai vectơ  $\overrightarrow{DD'}$  và  $\overrightarrow{A'C'}$  bằng

- (A)  $\sqrt{2}a^2$ . (B)  $a^2$ . (C)  $-\sqrt{2}a^2$ . (D) 0.

Phần II. Trong mỗi ý a), b), c) và d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.

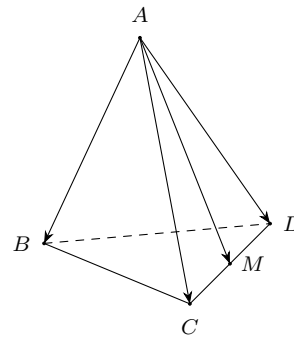
**CÂU 14.** Trong không gian, cho hai véc-tơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  cùng có độ dài bằng 1. Biết rằng góc giữa hai véc-tơ đó là  $45^\circ$ .

Mệnh đề	Đ	S
a) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .		
b) $(\vec{a} + 3\vec{b}) \cdot (\vec{a} - 2\vec{b}) = -5 + \frac{\sqrt{2}}{2}$ .		
c) $ \vec{a} + \vec{b}  = 2 + \sqrt{2}$ .		
d) $ \vec{a} - \sqrt{2}\vec{b}  = 0$ .		

**CÂU 15.**

Cho tứ diện đều  $ABCD$  có cạnh bằng  $a$  và  $M$  là trung điểm của  $CD$ .

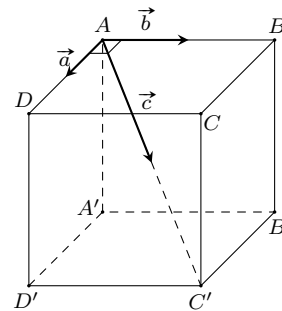
Mệnh đề	Đ	S
a) $\vec{AM} \cdot \vec{CD} = 0$ .		
b) $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \frac{a^2}{2}$ .		
c) $\vec{AB} \cdot \vec{CD} = 0$ .		
d) $\vec{AM} \cdot \vec{AB} = -\frac{a^2}{2}$ .		



**CÂU 16.**

Một chất điểm ở vị trí đỉnh  $A$  của hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$ . Chất điểm chịu tác động bởi ba lực  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  lần lượt cùng hướng với  $\vec{AD}$ ,  $\vec{AB}$  và  $\vec{AC'}$  như hình vẽ. Độ lớn của các lực  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  và  $\vec{c}$  tương ứng là 10 N, 10 N và 20 N.

Mệnh đề	Đ	S
a) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$ .		
b) $ \vec{a} + \vec{b}  = 20$ (N).		
c) $ \vec{a} + \vec{c}  =  \vec{b} + \vec{c} $ .		
d) $ \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}  = 32,59$ (N) (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).		



**CÂU 17.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình chữ nhật. Biết rằng cạnh  $AB = a$ ,  $AD = 2a$ , cạnh bên  $SA = 2a$  và vuông góc với mặt đáy. Gọi  $M$ ,  $N$  lần lượt là trung điểm của các cạnh  $SB$ ,  $SD$ . Các mệnh đề sau đúng hay sai ?

Mệnh đề	Đ	S
a) Hai vectơ $\vec{AB}$ , $\vec{CD}$ là hai vectơ cùng phương, cùng hướng.		
b) Góc giữa hai vectơ $\vec{SC'}$ và $\vec{AC}$ bằng $60^\circ$ .		
c) Tích vô hướng $\vec{AM} \cdot \vec{AB} = \frac{a^2}{2}$ .		
d) Độ dài của vectơ $\vec{AM} - \vec{AN}$ là $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ .		

**CÂU 18.** Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$  có cạnh bằng  $a$ . Trên các cạnh  $AA'$ ,  $CC'$  lần lượt lấy các điểm  $M$ ,  $N$  sao cho  $AM = \frac{2}{3}AA'$ ,  $CN = NC'$ . Các mệnh đề sau đúng hay sai?

Mệnh đề	Đ	S
a) Góc giữa hai vectơ $\vec{AN}$ và $\vec{AC}$ bằng $60^\circ$ .		
b) Độ dài của vectơ $\vec{MN} + \vec{AM}$ là $\frac{3a}{2}$ .		
c) Tích vô hướng $\vec{AN} \cdot \vec{AC} = a^2$ .		

QUICK NOTE

QUICK NOTE

Mệnh đề	Đ	S
d) Tích vô hướng $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{A'C'} = 2a^2$ .		

**CÂU 19.** Cho hình lăng trụ đứng  $ABC.A'B'C'$  đáy là tam giác đều cạnh  $2a$ ,  $AA' = a\sqrt{3}$ .  $H, K$  lần lượt là trung điểm  $BC, B'C'$ . Các mệnh đề sau đúng hay sai?

Mệnh đề	Đ	S
a) Hai vectơ $\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{KA'}$ là hai vectơ cùng phương, cùng hướng.		
b) Góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{A'H}$ và $\overrightarrow{AH}$ bằng $60^\circ$ .		
c) Tích vô hướng $\overrightarrow{AK} \cdot \overrightarrow{AB'} = \frac{5a^2}{2}$ .		
d) Độ dài của vectơ $\overrightarrow{AK} + \overrightarrow{AH}$ là $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ .		

**CÂU 20.** Cho tứ diện đều  $ABCD$  cạnh  $a$ .  $E$  là điểm trên đoạn  $CD$  sao cho  $ED = 2CE$ . Các mệnh đề sau đúng hay sai?

Mệnh đề	Đ	S
a) Có 6 vectơ (khác vectơ $\vec{0}$ ) có điểm đầu và điểm cuối được tạo thành từ các đỉnh của tứ diện.		
b) Góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BC}$ bằng $60^\circ$ .		
c) Nếu $\overrightarrow{BE} = m\overrightarrow{BA} + n\overrightarrow{BC} + p\overrightarrow{BD}$ thì $m + n + p = \frac{2}{3}$ .		
d) Tích vô hướng $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BE} = \frac{a^2}{6}$ .		

**CÂU 21.** Cho tứ diện  $ABCD$  có cạnh  $a$ . Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $AB, CD$ . Các mệnh đề sau đúng hay sai?

Mệnh đề	Đ	S
a) $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ cùng hướng.		
b) $\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{ED} = \vec{0}$ với $E$ là trung điểm $MN$ .		
c) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = \vec{0}$ .		
d) Điểm $I$ xác định bởi $P = 3\overrightarrow{IA}^2 + \overrightarrow{IB}^2 + \overrightarrow{IC}^2 + \overrightarrow{ID}^2$ có giá trị nhỏ nhất. Khi đó giá trị nhỏ nhất của $P$ là $2a^2$ .		

**Phần III. Học sinh điền kết quả vào ô trống.**

**CÂU 22.** Cho tứ diện đều  $ABCD$  có cạnh bằng 4. Giá trị tích vô hướng  $\overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CA})$  bằng

KQ:

**CÂU 23.** Trong không gian, cho hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  có cùng độ dài bằng 6. Biết độ dài của vectơ  $\vec{a} + 2\vec{b}$  bằng  $6\sqrt{3}$ . Biết số đo góc giữa hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  là  $x$  độ. Giá trị của  $x$  là bao nhiêu?

KQ:

**CÂU 24.** Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$  có cạnh bằng 2. Tính  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A'C'}$ .

KQ:

**CÂU 25.** Cho tứ diện  $ABCD$ , gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $BC$  và  $AD$ , biết  $AB = a$ ,  $CD = a$ ,  $MN = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ . Tìm số đo (đơn vị độ) góc giữa hai đường thẳng  $AB$  và  $CD$ .

KQ:

**CÂU 26.** Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$ . Góc giữa hai vectơ  $\overrightarrow{A'B}$  và  $\overrightarrow{AC'}$  bằng

KQ:

**CÂU 27.** Cho hình chóp  $S.ABC$  có  $SA, SB, SC$  đôi một vuông góc nhau và  $SA = SB = SC = a$ . Gọi  $M$  là trung điểm của  $AB$ . Góc giữa hai vectơ  $\overrightarrow{SM}$  và  $\overrightarrow{BC}$  bằng

KQ:



## Bài 2. TỌA ĐỘ CỦA VEC TƠ TRONG KHÔNG GIAN

### QUICK NOTE

### A. LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

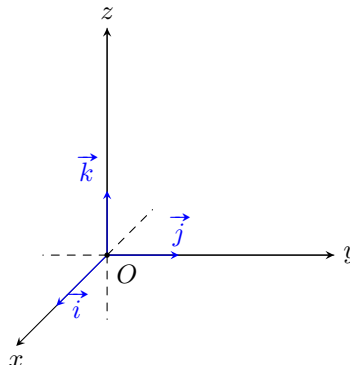
#### 1. Hệ tọa độ trong không gian

Trong không gian, ba trục  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$  đôi một vuông góc với nhau tại gốc  $O$  của mỗi trục. Gọi  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$ ,  $\vec{k}$  lần lượt là các véc-tơ đơn vị trên các trục  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$ .

☑ Hệ ba trục như vậy được gọi là hệ trục tọa độ Descartes vuông góc  $Oxyz$ , hay đơn giản là hệ tọa độ  $Oxyz$ . Điểm  $O$  được gọi là gốc tọa độ.

☑ Các mặt phẳng  $(Oxy)$ ,  $(Oyz)$ ,  $(Ozx)$  đôi một vuông góc với nhau được gọi là các mặt phẳng tọa độ.

☑  $\vec{i}^2 = \vec{j}^2 = \vec{k}^2 = 1$   
và  $\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{i} = 0$



Không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$  còn được gọi là không gian  $Oxyz$ .

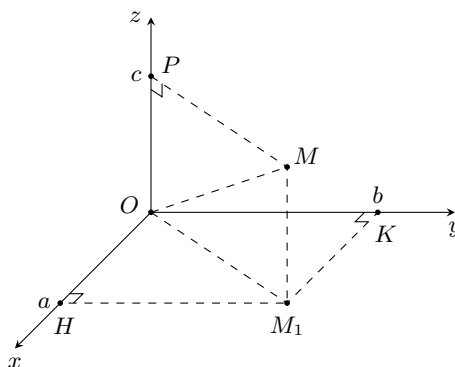
#### 2. Tọa độ của điểm

Trong KG  $Oxyz$ , cho điểm  $M$ . Tọa độ điểm  $M$  được xác định như sau:

☑ Xác định hình chiếu  $M_1$  của điểm  $M$  trên mặt phẳng  $Oxy$ . Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , tìm hoành độ  $a$ , tung độ  $b$  của điểm  $M_1$ .

☑ Xác định hình chiếu  $P$  của điểm  $M$  trên trục cao  $Oz$ , điểm  $P$  ứng với số  $c$  trên trục  $Oz$ . Số  $c$  là cao độ của điểm  $M$ .

Bộ số  $(a; b; c)$  là tọa độ của điểm  $M$  trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , kí hiệu là  $M(a; b; c)$ .



#### 3. Tọa độ của vectơ

Trong KG  $Oxyz$ :

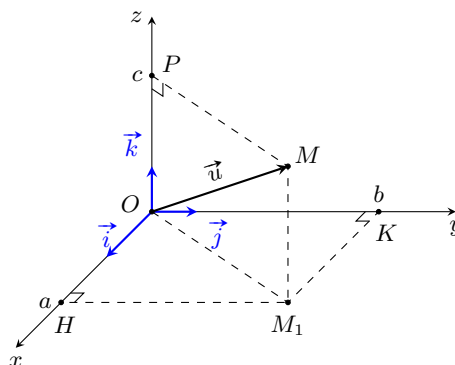
☑ Tọa độ của điểm  $M$  cũng là tọa độ của vectơ  $\vec{OM}$ .

☑ Cho  $\vec{u}$ . Dựng điểm  $M(a; b; c)$  thỏa  $\vec{OM} = \vec{u}$  thì tọa độ của điểm  $M$  là tọa độ của  $\vec{u}$ . Theo hình vẽ thì

$$\vec{u} = \vec{OM} = \vec{OH} + \vec{OK} + \vec{OP} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}.$$

Suy ra

$$\vec{u} = (a; b; c) \Leftrightarrow \vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}.$$



⚠ Tọa độ các véc tơ đơn vị lần lượt là:  $\vec{i} = (1; 0; 0)$ ,  $\vec{j} = (0; 1; 0)$ ,  $\vec{k} = (0; 0; 1)$ .

### B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

1

Tọa độ điểm, tọa độ vec tơ

Khi xác định tọa độ điểm, tọa độ véc tơ ta chú ý các kết quả sau:

a)  $\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k} \Leftrightarrow \vec{u} = (a; b; c).$

QUICK NOTE

$$b) \vec{u}(u_1; u_2; u_3) = \vec{v}(v_1; v_2; v_3) \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = v_1 \\ u_2 = v_2 \\ u_3 = v_3 \end{cases}$$

$$c) \overrightarrow{OM} = (a; b; c) \text{ thì } M(a; b; c).$$

$$d) \overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A).$$

e) Chiếu điểm  $M(a; b; c)$  lên mặt phẳng tọa độ (hoặc trục tọa độ) thì "thành phần bị khuyết" bằng 0. Chẳng hạn:  $M(1; 2; 3)$  chiếu lên  $(Oxy)$  thì  $z = 0$ . Suy ra hình chiếu là  $M_1(1; 2; 0)$ .

f) Tứ giác  $ABCD$  là hình bình hành khi và chỉ khi

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$$

## 1. Ví dụ minh họa

**VÍ DỤ 1.** Trong KG  $Oxyz$ , cho  $A(3; -2; -1)$ . Gọi  $A_1, A_2, A_3$  lần lượt là hình chiếu của điểm  $A$  trên các mặt phẳng tọa độ  $(Oxy), (Oyz), (Oxz)$ . Tìm tọa độ của các điểm  $A_1, A_2, A_3$ .

**VÍ DỤ 2.** Trong KG  $Oxyz$ , cho  $A(-2; 3; 4)$ . Gọi  $H, K, P$  lần lượt là hình chiếu của điểm  $A$  trên các trục  $Ox, Oy, Oz$ . Tìm tọa độ của các điểm  $H, K, P$ .

**VÍ DỤ 3.** Trong KG  $Oxyz$ , cho  $A(1; 1; -2), B(4; 3; 1)$  và  $C(-1; -2; 2)$ .

a) Tìm tọa độ của vectơ  $\overrightarrow{AB}$ .

b) Tìm tọa độ của điểm  $D$  sao cho  $ABCD$  là hình bình hành.

**VÍ DỤ 4.** Trong KG  $Oxyz$ , cho hình hộp  $ABCD \cdot A'B'C'D'$  có  $A(4; 6; -5), B(5; 7; -4), C(5; 6; -4), D'(2; 0; 2)$ . Tìm tọa độ các đỉnh còn lại của hình hộp  $ABCD \cdot A'B'C'D'$ .

## C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Phần I. Mỗi câu hỏi học sinh chọn một trong bốn phương án A, B, C, D.

**CÂU 1.** Trong KG  $Oxyz$ , cho  $\vec{a} = -2\vec{i} + 3\vec{j} + 5\vec{k}$ . Tọa độ của véc-tơ  $\vec{a}$  là

- (A)  $(2; -3; -5)$ . (B)  $(2; 3; -5)$ . (C)  $(-2; 3; 5)$ . (D)  $(2; 3; 5)$ .

**CÂU 2.** Trong KG  $Oxyz$ , cho véc-tơ  $\vec{u} = 3\vec{i} + 4\vec{k} - \vec{j}$ . Tọa độ của véc-tơ  $\vec{u}$  là

- (A)  $(3; -1; 4)$ . (B)  $(3; 4; -1)$ . (C)  $(4; -1; 3)$ . (D)  $(4; 3; -1)$ .

**CÂU 3.** Trong KG  $Oxyz$ , điểm nào sau đây thuộc trục  $Oz$ ?

- (A)  $M(1; 0; 0)$ . (B)  $M(1; 0; 2)$ . (C)  $M(1; 2; 0)$ . (D)  $M(0; 0; -2)$ .

**CÂU 4.** Trong KG  $Oxyz$ , cho điểm  $M$  thỏa  $\overrightarrow{OM} = 2\vec{i} + \vec{j}$ . Tọa độ điểm  $M$  là

- (A)  $M(0; 2; 1)$ . (B)  $M(1; 2; 0)$ . (C)  $M(2; 0; 1)$ . (D)  $M(2; 1; 0)$ .

**CÂU 5.** Trong KG  $Oxyz$ , cho vectơ  $\overrightarrow{OA} = \vec{j} - 2\vec{k}$ . Tọa độ điểm  $A$  là

- (A)  $(1; 0; -2)$ . (B)  $(0; 1; -2)$ . (C)  $(0; -1; 2)$ . (D)  $(1; -2; 0)$ .

**CÂU 6.** Trong không gian  $Oxyz$ , xác định tọa độ của điểm  $A$  biết  $A$  nằm trên tia  $Ox$  và  $OA = 2$ .

- (A)  $A(0; 0; 2)$ . (B)  $A(2; 2; 0)$ . (C)  $A(0; 2; 0)$ . (D)  $A(2; 0; 0)$ .

**CÂU 7.** Trong không gian  $Oxyz$ , xác định tọa độ của điểm  $A$  biết  $A$  nằm trên tia đối của tia  $Oy$  và  $OA = 3$ .

- (A)  $A(0; 3; 0)$ . (B)  $A(0; -3; 0)$ . (C)  $A(0; -9; 0)$ . (D)  $A(3; -3; 0)$ .

**CÂU 8.** Trong KG  $Oxyz$ , cho hai điểm  $A(1; -1; 2)$  và  $B(2; 1; -4)$ . Véc-tơ  $\overrightarrow{AB}$  có tọa độ là

- (A)  $(-1; -2; 6)$ . (B)  $(3; 0; -2)$ . (C)  $(1; 0; -6)$ . (D)  $(1; 2; -6)$ .

**CÂU 9.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai điểm  $A(1; 3; -2), B(3; -2; 4)$ . Véc-tơ  $\overrightarrow{AB}$  có tọa độ là

- (A)  $(2; 5; 6)$ . (B)  $(4; 1; 2)$ . (C)  $(2; -5; 6)$ . (D)  $(-2; 5; 6)$ .

**CÂU 10.** Cho hai điểm  $A, B$  thỏa mãn  $\overrightarrow{OA} = (2; -1; 3)$  và  $\overrightarrow{OB} = (5; 2; -1)$ . Tìm tọa độ véc-tơ  $\overrightarrow{AB}$ .

QUICK NOTE

- Ⓐ  $\vec{AB} = (2; -1; 3)$ . Ⓑ  $\vec{AB} = (3; 3; -4)$ . Ⓒ  $\vec{AB} = (7; 1; 2)$ . Ⓓ  $\vec{AB} = (3; -3; 4)$ .

**CÂU 11.** Trong KG  $Oxyz$ , cho hai điểm  $M$  và  $N$  biết  $M(2; 1; -1)$  và  $\vec{MN} = (-1; 2; -3)$ . Tọa độ  $N$  là

- Ⓐ  $N(1; -3; -4)$ . Ⓑ  $N(1; 3; -4)$ . Ⓒ  $N(-1; 3; -4)$ . Ⓓ  $N(1; 3; 4)$ .

**CÂU 12.** Hình chiếu vuông góc của điểm  $A(3; -4; 5)$  trên mặt phẳng  $(Oxz)$  là điểm

- Ⓐ  $M(3; 0; 0)$ . Ⓑ  $M(0; -4; 5)$ . Ⓒ  $M(0; 0; 5)$ . Ⓓ  $M(3; 0; 5)$ .

**CÂU 13.** Hình chiếu vuông góc của điểm  $A(1; 2; 3)$  trên mặt phẳng  $(Oxy)$  là điểm

- Ⓐ  $M(0; 0; 3)$ . Ⓑ  $N(1; 2; 0)$ . Ⓒ  $Q(0; 2; 0)$ . Ⓓ  $P(1; 0; 0)$ .

**CÂU 14.** Hình chiếu vuông góc của điểm  $M(2; 1; -3)$  lên mặt phẳng  $(Oyz)$  có tọa độ là

- Ⓐ  $(2; 0; 0)$ . Ⓑ  $(2; 1; 0)$ . Ⓒ  $(0; 1; -3)$ . Ⓓ  $(2; 0; -3)$ .

**CÂU 15.** Hình chiếu vuông góc của điểm  $A(3; 2; 1)$  trên trục  $Ox$  có tọa độ là

- Ⓐ  $(0; 2; 1)$ . Ⓑ  $(0; 2; 0)$ . Ⓒ  $(3; 0; 0)$ . Ⓓ  $(0; 0; 1)$ .

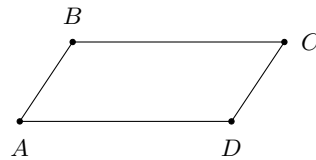
**CÂU 16.** Hình chiếu của điểm  $M(2; 3; -2)$  trên trục  $Oy$  có tọa độ là

- Ⓐ  $(2; 0; 0)$ . Ⓑ  $(0; 3; 0)$ . Ⓒ  $(0; 0; -2)$ . Ⓓ  $(2; 0; -2)$ .

**CÂU 17.**

Trong KG  $Oxyz$ , cho hình bình hành  $ABCD$  với  $A(-2; 3; 1)$ ,  $B(3; 0; -1)$ ,  $C(6; 5; 0)$ . Tọa độ đỉnh  $D$  là

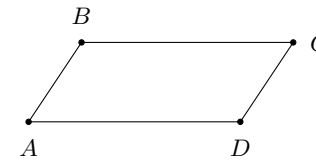
- Ⓐ  $D(11; 2; 2)$ . Ⓑ  $D(1; 8; 2)$ .  
Ⓒ  $D(11; 2; -2)$ . Ⓓ  $D(1; 8; -2)$ .



**CÂU 18.**

Trong KG  $Oxyz$ , cho các điểm  $A(1; 0; 3)$ ,  $B(2; 3; -4)$ ,  $C(-3; 1; 2)$ . Tìm tọa độ điểm  $D$  sao cho tứ giác  $ABCD$  là hình bình hành.

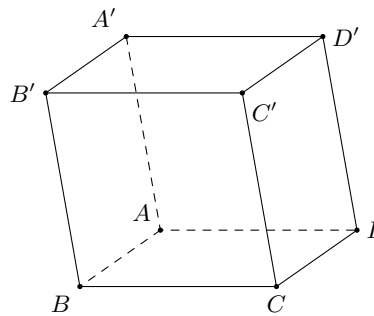
- Ⓐ  $D(4; 2; 9)$ . Ⓑ  $D(-2; 4; -5)$ .  
Ⓒ  $D(6; 2; -3)$ . Ⓓ  $D(-4; -2; 9)$ .



**CÂU 19.**

Cho hình hộp  $ABCD.A'B'C'D'$  có  $A(1; 0; 1)$ ,  $B(2; 1; 2)$ ,  $D(1; -1; 1)$ ,  $C'(4; 5; -5)$ . Tìm tọa độ đỉnh  $C$  của hình hộp.

- Ⓐ  $C(2; 0; 2)$ . Ⓑ  $C(2; 0; 2)$ .  
Ⓒ  $C(2; 0; 2)$ . Ⓓ  $C(2; 0; 2)$ .



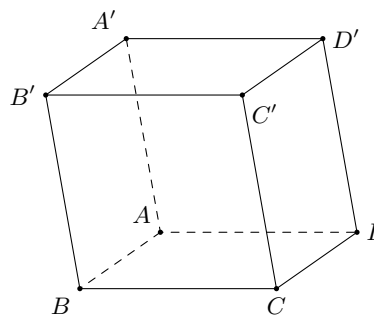
**CÂU 20.** Cho hình hộp  $ABCD.A'B'C'D'$  có  $A(1; 0; 1)$ ,  $B(2; 1; 2)$ ,  $D(1; -1; 1)$ ,  $C'(4; 5; -5)$ . Tìm tọa độ đỉnh  $A'$  của hình hộp.

- Ⓐ  $A'(-1; -5; 8)$ . Ⓑ  $A'(-1; -5; 8)$ . Ⓒ  $A'(-1; -5; 8)$ . Ⓓ  $A'(-1; -5; 8)$ .

**CÂU 21.**

Cho hình hộp  $ABCD.A'B'C'D'$  có  $A(1; 0; 1)$ ,  $B(2; 1; 2)$ ,  $D(1; -1; 1)$ ,  $C'(4; 5; -5)$ . Tìm tọa độ đỉnh  $D'$  của hình hộp.

- Ⓐ  $D'(-1; -6; 8)$ . Ⓑ  $D'(-1; -6; 8)$ .  
Ⓒ  $D'(-1; -6; 8)$ . Ⓓ  $D'(-1; -6; 8)$ .



**Phần II.** Trong mỗi ý a), b), c) và d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.

**CÂU 22.** Trong KG  $Oxyz$ , cho  $\vec{a} = \vec{i} + 3\vec{k} - 4\vec{j}$  và  $\vec{b} = (m - n; 4m - 6n; n^2 - 3m + 2)$ , với  $m, n$  là tham số.

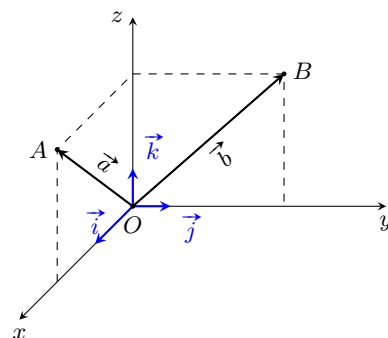
QUICK NOTE

Mệnh đề	Đ	S
a) Tọa độ $\vec{a} = (1; 3; -4)$ .		
b) Điểm $A$ thỏa $\vec{OA} = \vec{a}$ thì $A(1; -4; 3)$ .		
c) Tồn tại giá trị của $m$ và $n$ để $\vec{b} = \vec{0}$ .		
d) Nếu $\vec{a} = \vec{b}$ thì $m + n = 9$ .		

**CÂU 23.**

Trong KG  $Oxyz$ , cho  $\vec{a} = (2; 2; 0)$ ,  $\vec{b} = 2\vec{j} + 2\vec{k}$ . Đặt  $\vec{OA} = \vec{a}$  và  $\vec{OB} = \vec{b}$ .

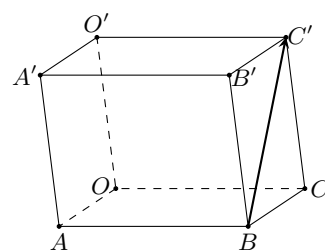
Mệnh đề	Đ	S
a) $\vec{a} = 2\vec{i} + 2\vec{k}$ .		
b) Tọa độ $\vec{b} = (0; 2; 2)$ .		
c) Tọa độ $\vec{AB} = (-2; 2; 0)$ .		
d) Góc $\widehat{AOB} = 45^\circ$ .		



**CÂU 24.**

Trong không gian  $Oxyz$ , cho hình hộp  $OABC.O'A'B'C'$  có  $A(1; 1; -1)$ ,  $B(0; 3; 0)$ ,  $\vec{BC'} = (2; -6; 6)$ . Gọi  $H$ ,  $K$  lần lượt là trọng tâm của tam giác  $OA'O'$  và  $CB'C'$ .

Mệnh đề	Đ	S
a) Tọa độ điểm $C'$ là $(2; -3; 6)$ .		
b) Tọa độ điểm $O'$ là $(3; -5; 5)$ .		
c) Tọa độ véc tơ $\vec{AB'} = (-2; 3; -6)$ .		
d) Tọa độ véc tơ $\vec{HK} = (-1; 2; -1)$ .		



2

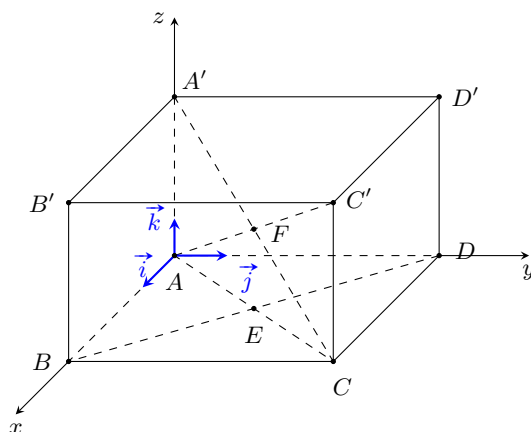
Tọa độ hóa một số hình không gian

- Chọn một điểm mà từ đó có ba đường đôi một vuông góc nhau làm gốc tọa độ.
- Xây dựng tọa độ các điểm trên hình đã cho tương ứng với hệ trục vừa chọn.
- Tọa độ các điểm đặc biệt:
  - $M \in Ox \Rightarrow M(x; 0; 0)$ .
  - $M \in Oy \Rightarrow M(0; y; 0)$ .
  - $M \in Oz \Rightarrow M(0; 0; z)$ .
  - $M \in (Oxy) \Rightarrow M(x; y; 0)$ .
  - $M \in (Oxz) \Rightarrow M(x; 0; z)$ .
  - $M \in (Oyz) \Rightarrow M(0; y; z)$ .

**1. Ví dụ minh họa**

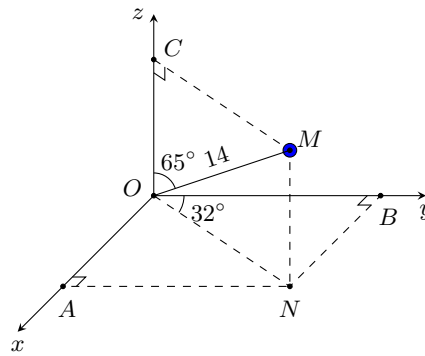
**VÍ DỤ 1.**

Cho hình hộp chữ nhật  $ABCD.A'B'C'D'$  có cạnh  $AB = AA' = 2$ ,  $AD = 4$ . Gọi  $E$  là tâm của hình chữ nhật  $ABCD$ ,  $F$  là trung điểm  $AC'$ . Với hệ tọa độ  $Oxyz$  được thiết lập như hình bên (gốc tọa độ  $O$  trùng với  $A$ ), hãy xác định tọa độ các đỉnh của hình hộp chữ nhật và tọa độ hai điểm  $E$ ,  $F$ .



**VÍ DỤ 2.**

Một máy bay  $M$  đang cất cánh từ phi trường. Với hệ tọa độ  $Oxyz$  được thiết lập như Hình bên, cho biết  $M$  là vị trí của máy bay với  $OM = 14$ ,  $\widehat{NOB} = 32^\circ$ ,  $\widehat{MOC} = 65^\circ$ . Tính tọa độ điểm  $M$ .

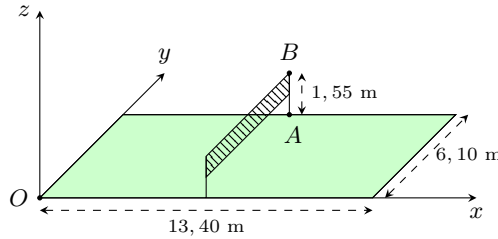


## 2. Bài tập trắc nghiệm

Phần I. Mỗi câu hỏi học sinh chọn một trong bốn phương án A, B, C, D.

### CÂU 1.

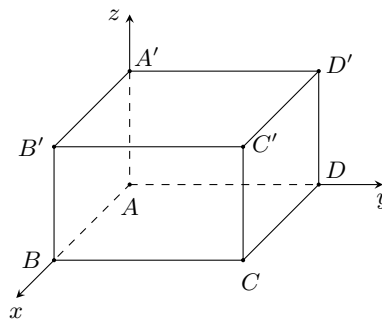
Hình bên mô tả một sân cầu lông với kích thước theo tiêu chuẩn quốc tế. Với hệ tọa độ  $Oxyz$  được thiết lập như hình bên (đơn vị trên mỗi trục là mét), giả sử  $AB$  là một trụ cầu lông để căng lưới, hãy xác định tọa độ của  $B$ .



- ☐ A  $(6; 1; 6; 7; 1; 55)$ .    ☐ B  $(6; 7; 6; 1; 1; 55)$ .  
☐ C  $(6; 1; 0; 1; 55)$ .    ☐ D  $(0; 6; 7; 1; 55)$ .

### CÂU 2.

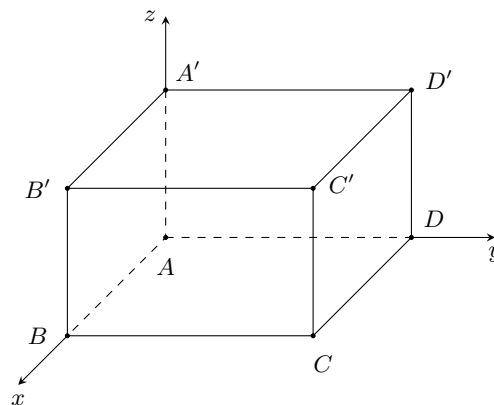
Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$  có cạnh bằng 2. Với hệ tọa độ  $Oxyz$  được thiết lập như hình bên (gốc tọa độ  $O$  trùng với điểm  $A$ ), tọa độ điểm  $B'$  là



- ☐ A  $B(0; 2; 0)$ .    ☐ B  $B(2; 2; 2)$ .  
☐ C  $B(2; 2; 0)$ .    ☐ D  $B(2; 0; 2)$ .

### CÂU 3.

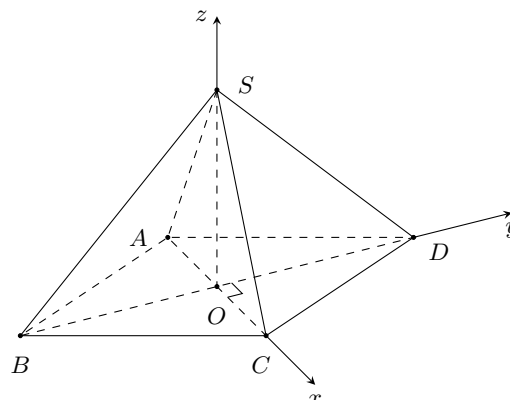
Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$  có cạnh bằng 2. Với hệ tọa độ  $Oxyz$  được thiết lập như hình bên (gốc tọa độ  $O$  trùng với điểm  $A$ ), tọa độ điểm  $C'$  là



- ☐ A  $C'(2; 2; 0)$ .    ☐ B  $C'(2; 2; 2)$ .  
☐ C  $C'(2; 2; 0)$ .    ☐ D  $C'(2; 0; 2)$ .

### CÂU 4.

Cho hình chóp tứ giác đều  $S.ABCD$  có cạnh đáy bằng  $a\sqrt{2}$ , cạnh bên bằng  $a\sqrt{5}$ . Gọi  $O$  là tâm của hình vuông  $ABCD$ . Với hệ tọa độ  $Oxyz$  được thiết lập như hình bên (gốc tọa độ  $O$  trùng với tâm hình vuông  $ABCD$ ), tọa độ  $\vec{SC}$  là



- ☐ A  $\vec{SC} = (2a; 0; -2a)$ .  
☐ B  $\vec{SC} = (2a; -a; -2a)$ .  
☐ C  $\vec{SC} = (a; 0; -2a)$ .  
☐ D  $\vec{SC} = (a; 0; 2a)$ .

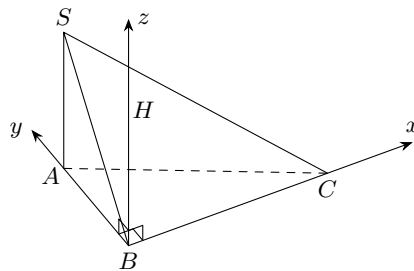
## QUICK NOTE

QUICK NOTE

CÂU 5.

Cho tứ diện  $SABC$  có  $ABC$  là tam giác vuông tại  $B$ ,  $BC = 3$ ,  $BA = 2$ ,  $SA$  vuông góc với mặt phẳng  $(ABC)$  và có độ dài bằng 2. Với hệ tọa độ  $Oxyz$  được thiết lập như hình bên (gốc tọa độ  $O$  trùng với điểm  $B$ ), tìm khẳng định **sai**.

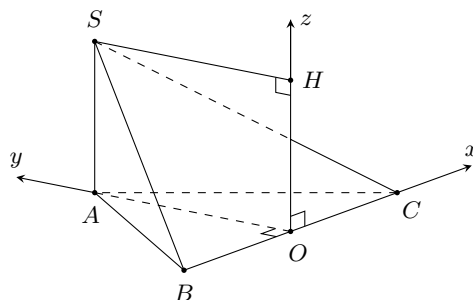
- (A)  $A(0; 2; 0)$ . (B)  $B(0; 0; 0)$ .  
(C)  $C(0; 0; 3)$ . (D)  $S(-2; 2; 2)$ .



CÂU 6.

Cho hình chóp  $S.ABC$  có đáy  $ABC$  là tam giác đều cạnh bằng 2,  $SA$  vuông góc với đáy và  $SA = 1$ . Với hệ tọa độ  $Oxyz$  được thiết lập như hình bên (gốc tọa độ  $O$  trùng với trung điểm của đoạn  $BC$ ), hãy tìm tọa độ điểm  $S$ .

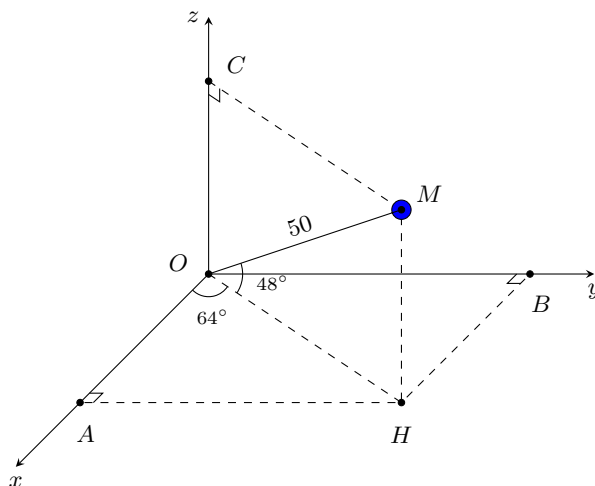
- (A)  $S(0; \sqrt{3}; 1)$ . (B)  $S(0; \sqrt{3}; 1)$ .  
(C)  $S(0; \sqrt{3}; 1)$ . (D)  $S(0; \sqrt{3}; 1)$ .



CÂU 7.

Ở một sân bay, vị trí của máy bay được xác định bởi điểm  $M$  trong KG  $Oxyz$  như hình bên. Gọi  $H$  là hình chiếu vuông góc của  $M$  xuống mặt phẳng  $(Oxy)$ . Cho biết  $OM = 50$ ,  $(\vec{i}, \vec{OH}) = 64^\circ$ ,  $(\vec{OH}, \vec{OM}) = 48^\circ$ . Tìm tọa độ của điểm  $M$ .

- (A)  $M(14,7; 30,1; 37,2)$ .  
(B)  $M(14,7; 30,1; 37,2)$ .  
(C)  $M(14,7; 30,1; 37,2)$ .  
(D)  $M(14,7; 30,1; 37,2)$ .

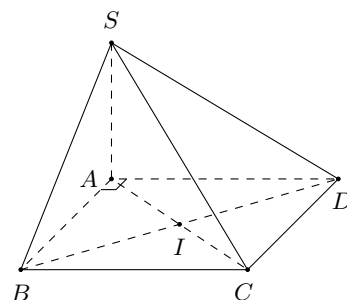


Phần II. Trong mỗi ý a), b), c) và d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.

CÂU 8.

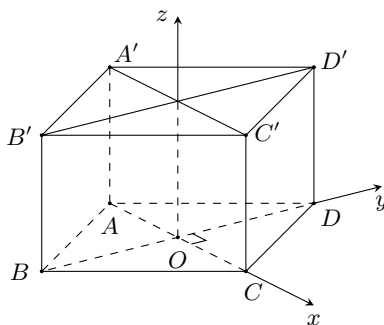
Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình chữ nhật,  $AB = 1$ ,  $AD = 2$ ,  $SA$  vuông góc với mặt đáy và  $SA = 3$ . Với hệ tọa độ  $Oxyz$  được thiết lập như sau: Gốc tọa độ  $O$  trùng với điểm  $A$ , các véc tơ  $\vec{AB}$ ,  $\vec{AD}$ ,  $\vec{AS}$  lần lượt cùng hướng với  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  và  $\vec{k}$ . Xét tính đúng sai của các khẳng định sau

Mệnh đề	Đ	S
a) Tọa độ $D(0; 2; 0)$ .		
b) Tọa độ $C(1; 2; 3)$ .		
c) Tọa độ $S(2; 0; 0)$ .		
d) Tọa độ $I(1; 1; 0)$ .		



CÂU 9.

Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$  có cạnh bằng 2. Với hệ tọa độ  $Oxyz$  được thiết lập như hình bên (gốc tọa độ  $O$  trùng với tâm hình vuông  $ABCD$ ), hãy xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

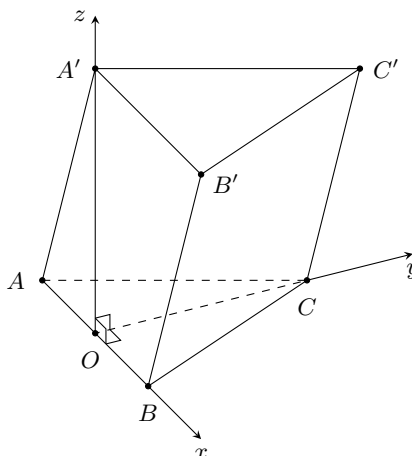


QUICK NOTE

Mệnh đề	Đ	S
a) Tọa độ $A(-1; 0; 0)$ .		
b) $\overrightarrow{AC'} = (2\sqrt{2}; 0; 2)$ .		
c) Tọa độ $D'(0; \sqrt{2}; 2)$ .		
d) $\overrightarrow{BD'} = (0; 0; 2)$ .		

CÂU 10.

Cho hình lăng trụ  $ABC.A'B'C'$  có đáy  $ABC$  là tam giác đều cạnh bằng 2 như hình vẽ. Hình chiếu vuông góc của  $A'$  lên  $(ABC)$  trùng với trung điểm cạnh  $AB$ , góc  $\widehat{A'AO} = 60^\circ$ . Với hệ tọa độ  $Oxyz$  được thiết lập như hình bên (gốc tọa độ  $O$  trùng với trung điểm của đoạn  $BC$ ), hãy xét tính đúng sai của các khẳng định sau:



Mệnh đề	Đ	S
a) Tọa độ điểm $A(-1; 0; 0)$ .		
b) Tọa độ điểm $C(0; \sqrt{3}; 0)$ .		
c) Tọa độ điểm $A'(0; -1; \sqrt{3})$ .		
d) Tọa độ điểm $C'(1; \sqrt{3}; \sqrt{3})$ .		

## Bài 3. BIỂU THỨC TỌA ĐỘ CỦA CÁC PHÉP TOÁN VECTO

### A. LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

#### 1. Biểu thức tọa độ của phép toán cộng, trừ, nhân một số thực với một vectơ

Trong KG  $Oxyz$ , cho hai véc-tơ  $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ ,  $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$  và số  $k$ . Khi đó

①  $\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1; a_2 + b_2; a_3 + b_3)$ ;

②  $\vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1; a_2 - b_2; a_3 - b_3)$ ;

③  $k\vec{a} = (ka_1; ka_2; ka_3)$ .

**A** Cho hai véc-tơ  $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ ,  $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$ ,  $\vec{b} \neq \vec{0}$ . Hai véc-tơ  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  cùng phương khi và chỉ khi tồn tại một số thực  $k$  sao cho

$$\begin{cases} a_1 = kb_1 \\ a_2 = kb_2 \\ a_3 = kb_3. \end{cases}$$

#### 2. Biểu thức tọa độ của tích vô hướng hai vectơ

Trong KG  $Oxyz$ , tích vô hướng của hai véc-tơ  $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$  và  $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$  được xác định bởi công thức

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3.$$

**A** ①  $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0$ ;

②  $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$ ;  $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$ .

③  $\cos(\vec{a}; \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$  (với  $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$ ).

QUICK NOTE

### 3. Biểu thức tọa độ của tích có hướng hai vectơ

Cho hai véc-tơ  $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$  và  $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$  không cùng phương. Khi đó véc-tơ

$$\vec{w} = (a_2b_3 - b_2a_3; a_3b_1 - b_3a_1; a_1b_2 - b_1a_2)$$

vuông góc với cả hai véc-tơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$ .

**A** ① Véc-tơ  $\vec{w}$  xác định như trên còn gọi là **tích có hướng** của hai vectơ  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ , kí hiệu  $\vec{w} = [\vec{a}, \vec{b}]$ .

② Quy ước  $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$  thì

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \left( \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right)$$

③  $\vec{a}$  không cùng phương với  $\vec{b} \Leftrightarrow [\vec{a}, \vec{b}] \neq \vec{0}$ .

### 4. Ứng dụng của tích có hướng của hai véc-tơ

a) Xét sự đồng phẳng của ba véc-tơ:

☉ Ba vectơ  $\vec{a}$ ;  $\vec{b}$ ;  $\vec{c}$  đồng phẳng  $\Leftrightarrow [\vec{a}, \vec{b}] \cdot \vec{c} = 0$ .

☉ Bốn điểm  $A, B, C, D$  tạo thành tứ diện  $\Leftrightarrow [\vec{AB}, \vec{AC}] \cdot \vec{AD} \neq 0$ .

b) Diện tích hình bình hành:  $S_{ABCD} = |[\vec{AB}, \vec{AD}]|$ .

c) Tính diện tích tam giác:  $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} |[\vec{AB}, \vec{AC}]|$ .

d) Tính thể tích hình hộp:  $V_{ABCD.A'B'C'D'} = |[\vec{AB}, \vec{AC}] \cdot \vec{AA'}|$ .

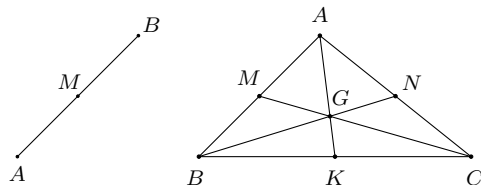
e) Tính thể tích tứ diện:  $V_{ABCD} = \frac{1}{6} |[\vec{AB}, \vec{AC}] \cdot \vec{AD}|$ .

### 5. Biểu thức tọa độ trung điểm đoạn thẳng, trọng tâm tam giác

Trong KG  $Oxyz$ , tọa độ trung điểm và trọng tâm được xác định như sau:

① Tọa độ trung điểm  $M$  của đoạn thẳng  $AB$  là

$$M \left( \frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}; \frac{z_A + z_B}{2} \right).$$



② Tọa độ trọng tâm  $G$  của tam giác  $ABC$  là

$$G \left( \frac{x_A + x_B + x_C}{3}; \frac{y_A + y_B + y_C}{3}; \frac{z_A + z_B + z_C}{3} \right).$$

## B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

1

Tọa độ của các phép toán véc-tơ, tọa độ điểm, độ dài đoạn thẳng

#### 1. Ví dụ minh họa

**VÍ DỤ 1.** Cho  $\vec{a} = (-2; 3; 2)$ ,  $\vec{b} = (2; 1; -1)$ ,  $\vec{c} = (1; 2; 3)$ . Tính tọa độ của mỗi vectơ sau:

a)  $3\vec{a}$ ;

b)  $2\vec{a} - \vec{b}$ ;

c)  $\vec{a} + 2\vec{b} - \frac{3}{2}\vec{c}$ .

**VÍ DỤ 2.** Trong KG  $Oxyz$ , cho các véc-tơ  $\vec{u} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$ ,  $\vec{v} = -\frac{3}{2}\vec{i} + \vec{j} - \frac{1}{2}\vec{k}$ ,  $\vec{w} = 6\vec{i} + m\vec{j} - n\vec{k}$ .



QUICK NOTE

- a) Chứng minh  $\vec{u}$  và  $\vec{v}$  cùng phương.  
b) Tìm giá trị của  $m$  và  $n$  để véc-tơ  $\vec{u}$  và  $\vec{v}$  cùng phương.

**VÍ DỤ 3.** Trong KG  $Oxyz$ , cho ba điểm  $A(3; -1; 2)$ ,  $B(1; 2; 3)$ ,  $C(4; -2; 1)$ .

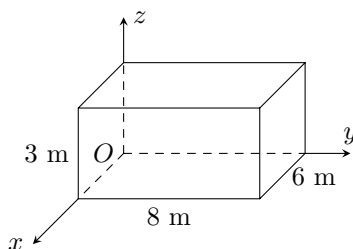
- a) Chứng minh ba điểm  $A, B, C$  không thẳng hàng. Xác định tọa độ trọng tâm tam giác  $ABC$ .  
b) Tìm tọa độ điểm  $D$  biết  $ABCD$  là hình bình hành.  
c) Tìm tọa độ giao điểm  $E$  của đường thẳng  $BC$  với mặt phẳng tọa độ  $(Oxz)$ .

**VÍ DỤ 4.** Trong KG  $Oxyz$ , cho ba điểm  $A(5; -3; 0)$ ,  $B(2; 1; -1)$ ,  $C(4; 1; 2)$ .

- a) Tìm tọa độ của vectơ  $\vec{u} = 2\vec{AB} + \vec{AC} - 5\vec{BC}$ .  
b) Tìm tọa độ điểm  $N$  sao cho  $2\vec{NA} = -\vec{NB}$ .

**VÍ DỤ 5.**

Một phòng học có thiết kế dạng hình hộp chữ nhật với chiều dài là 8 m, chiều rộng là 6 m và chiều cao là 3 m. Một chiếc đèn được treo tại chính giữa trần nhà của phòng học. Xét hệ trục tọa độ  $Oxyz$  có gốc  $O$  trùng với một góc phòng và mặt phẳng  $(Oxy)$  trùng với mặt sàn, đơn vị đo được lấy theo mét (Hình minh họa bên). Hãy tìm tọa độ của điểm treo đèn.



## 2. Bài tập trắc nghiệm

**Phần I. Mỗi câu hỏi học sinh chọn một trong bốn phương án A, B, C, D.**

**CÂU 1.** Cho  $\vec{a} = (1; 2; -3)$ ,  $\vec{b} = (-2; -4; 6)$ . Khẳng định nào sau đây đúng?

- A**  $\vec{a} = 2\vec{b}$ . **B**  $\vec{b} = 2\vec{a}$ . **C**  $\vec{b} = -2\vec{a}$ . **D**  $\vec{a} = -2\vec{b}$ .

**CÂU 2.** Cho hai véc-tơ  $\vec{x} = (2; 1; -3)$ ,  $\vec{y} = (1; 0; -1)$ . Tìm tọa độ của véc-tơ  $\vec{a} = \vec{x} + 2\vec{y}$ .

- A**  $\vec{a}(4; 1; -5)$ . **B**  $\vec{a}(4; 1; -1)$ . **C**  $\vec{a}(3; 1; -4)$ . **D**  $\vec{a}(0; 1; -1)$ .

**CÂU 3.** Cho  $\vec{a} = (1; -1; 3)$ ,  $\vec{b} = (2; 0; -1)$ . Tìm tọa độ véc-tơ  $\vec{u} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$ .

- A**  $\vec{u} = (-4; -2; 9)$ . **B**  $\vec{u} = (4; 2; -9)$ . **C**  $\vec{u} = (-4; -5; 9)$ . **D**  $\vec{u} = (1; 3; -11)$ .

**CÂU 4.** Cho hai véc-tơ  $\vec{a} = (3; 0; 1)$ ,  $\vec{c} = (1; 1; 0)$ . Tìm tọa độ của véc-tơ  $\vec{b}$  thỏa mãn biểu thức  $\vec{b} - \vec{a} + 2\vec{c} = \vec{0}$ .

- A**  $\vec{b} = (-2; 1; -1)$ . **B**  $\vec{b} = (-1; 2; -1)$ . **C**  $\vec{b} = (5; 2; 1)$ . **D**  $\vec{b} = (1; -2; 1)$ .

**CÂU 5.** Cho vectơ  $\vec{a} = (1; -3; 4)$ . Vectơ nào sau đây cùng phương với  $\vec{a}$ ?

- A**  $\vec{b} = (-2; -6; 8)$ . **B**  $\vec{c} = (-2; 6; -8)$ . **C**  $\vec{d} = (-2; 6; 8)$ . **D**  $\vec{m} = (2; -6; -8)$ .

**CÂU 6.** Hai véc-tơ  $\vec{a} = (m; 2; 3)$  và  $\vec{b} = (1; n; 2)$  cùng phương khi

- A**  $\begin{cases} m = \frac{1}{2} \\ n = \frac{4}{3} \end{cases}$ . **B**  $\begin{cases} m = \frac{3}{2} \\ n = \frac{4}{3} \end{cases}$ . **C**  $\begin{cases} m = \frac{3}{2} \\ n = \frac{2}{3} \end{cases}$ . **D**  $\begin{cases} m = \frac{2}{3} \\ n = \frac{4}{3} \end{cases}$ .

**CÂU 7.** Cho hai điểm  $A(2; 3; 1)$  và  $B(3; 1; 5)$ . Tính độ dài đoạn thẳng  $AB$ .

- A**  $AB = \sqrt{21}$ . **B**  $AB = 2\sqrt{3}$ . **C**  $AB = 2\sqrt{5}$ . **D**  $AB = \sqrt{13}$ .

**CÂU 8.** Cho hai điểm  $M(3; -2; 1)$  và  $N(0; 1; -1)$ . Tính độ dài đoạn thẳng  $MN$ .

- A**  $MN = \sqrt{17}$ . **B**  $MN = 22$ . **C**  $MN = \sqrt{22}$ . **D**  $MN = \sqrt{19}$ .

**CÂU 9.** Cho hai điểm  $A(-1; 1; 2)$  và  $B(3; -5; 0)$ . Tọa độ trung điểm của đoạn thẳng  $AB$  là

- A**  $(1; -2; 1)$ . **B**  $(4; -6; 2)$ . **C**  $(2; -3; -1)$ . **D**  $(2; -4; 2)$ .

**CÂU 10.** Cho hai điểm  $A(1; 1; 0)$ ,  $B(3; -1; 2)$ . Tọa độ điểm  $C$  sao cho  $B$  là trung điểm của đoạn  $AC$  là

- A**  $C(5; -3; 4)$ . **B**  $C(4; -3; 5)$ . **C**  $C(-1; 3; -2)$ . **D**  $C(2; 0; 1)$ .

**CÂU 11.** Cho tam giác  $ABC$  với  $A(0; -1; 3)$ ,  $B(2; 1; 1)$ ,  $C(1; 0; -1)$ . Tọa độ trọng tâm của tam giác  $ABC$  là

- A**  $(1; 0; 1)$ . **B**  $(-1; 0; 1)$ . **C**  $(0; 1; 1)$ . **D**  $(1; 1; 0)$ .

QUICK NOTE

**CÂU 12.** Cho  $\vec{OA} = \vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$ , điểm  $B(3; -4; 1)$  và  $C(2; 0; -1)$ . Tọa độ trọng tâm của tam giác  $ABC$  là

- (A)  $(1; -2; 3)$ . (B)  $(-1; 2; -3)$ . (C)  $(2; -2; 1)$ . (D)  $(-2; 2; -1)$ .

**CÂU 13.** Cho tam giác  $ABC$  trọng tâm  $G$ . Biết  $A(0; 2; 1)$ ,  $B(1; -1; 2)$ ,  $G(1; 1; 1)$ . Khi đó điểm  $C$  có tọa độ là

- (A)  $(2; 2; 4)$ . (B)  $(-2; 0; 2)$ . (C)  $(-2; -3; -2)$ . (D)  $(2; 2; 0)$ .

**CÂU 14.** Cho bốn điểm  $A(1; 0; 3)$ ,  $B(2; -1; 1)$ ,  $C(-1; 3; -4)$ ,  $D(2; 6; 0)$  tạo thành một hình tứ diện. Gọi  $M$ ,  $N$  lần lượt là trung điểm các đoạn thẳng  $AB$ ,  $CD$ . Tìm tọa độ trung điểm  $G$  của đoạn  $MN$ .

- (A)  $G\left(\frac{4}{3}; \frac{8}{3}; 0\right)$ . (B)  $G(2; 4; 0)$ . (C)  $G(1; 2; 0)$ . (D)  $G(4; 8; 0)$ .

**CÂU 15.** Cho hai điểm  $B(1; 2; -3)$ ,  $C(7; 4; -2)$ . Nếu  $E$  là điểm thỏa mãn đẳng thức  $\vec{CE} = 2\vec{EB}$  thì tọa độ điểm  $E$  là

- (A)  $\left(3; \frac{8}{3}; \frac{8}{3}\right)$ . (B)  $\left(1; 2; \frac{1}{3}\right)$ . (C)  $\left(3; 3; -\frac{8}{3}\right)$ . (D)  $\left(\frac{8}{3}; 3; -\frac{8}{3}\right)$ .

**CÂU 16.** Cho các điểm  $A(1; -1; 0)$ ,  $B(0; 2; 0)$ ,  $C(2; 1; 3)$  và  $M$  là điểm thỏa mãn hệ thức  $\vec{MA} - \vec{MB} + \vec{MC} = \vec{0}$ . Khi đó điểm  $M$  có tọa độ là

- (A)  $(3; 2; 3)$ . (B)  $(3; -2; -3)$ . (C)  $(3; -2; 3)$ . (D)  $(3; 2; -3)$ .

**CÂU 17.** Cho tọa độ các điểm  $A(-1; 3)$ ,  $B(2; -2)$  và  $C(m; 1)$ . Tìm  $m$  để 3 điểm  $A, B, C$  thẳng hàng.

- (A)  $m = \frac{2}{5}$ . (B)  $m = \frac{1}{5}$ . (C)  $m = -\frac{1}{3}$ . (D)  $m = -\frac{1}{5}$ .

**CÂU 18.** Cho ba điểm  $A(-1; 1; 2)$ ,  $B(0; 1; -1)$ ,  $C(x + 2; y; -2)$  thẳng hàng. Tổng  $x + y$  bằng

- (A)  $\frac{7}{3}$ . (B)  $-\frac{8}{3}$ . (C)  $-\frac{2}{3}$ . (D)  $-\frac{1}{3}$ .

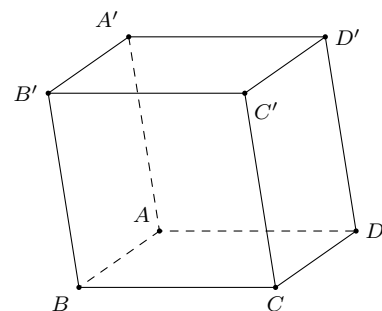
**CÂU 19.** Tứ giác  $ABCD$  là hình bình hành, biết  $A(1; 0; 1)$ ,  $B(2; 1; 2)$ ,  $D(1; -1; 1)$ . Tìm tọa độ điểm  $C$ .

- (A)  $(0; -2; 0)$ . (B)  $(2; 2; 2)$ . (C)  $(2; 0; 2)$ . (D)  $(2; -2; 2)$ .

**CÂU 20.**

Cho hình hộp  $ABCD.A'B'C'D'$  có  $A(0; 0; 0)$ ,  $B(a; 0; 0)$ ,  $D(0; 2a; 0)$ ,  $A'(0; 0; 2a)$ ,  $a \neq 0$ . Tính độ dài đoạn thẳng  $AC'$ .

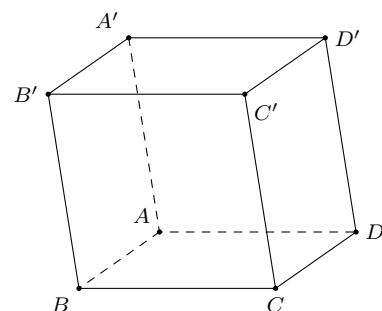
- (A)  $|a|$ . (B)  $2|a|$ .  
(C)  $3|a|$ . (D)  $\frac{3|a|}{2}$ .



**CÂU 21.**

Cho hình hộp  $ABCD.A'B'C'D'$  có  $A(0; 0; 1)$ ,  $B'(1; 0; 0)$ ,  $C'(1; 1; 0)$ . Tìm tọa độ của điểm  $D$ .

- (A)  $D(0; -1; 1)$ . (B)  $D(0; 1; 1)$ .  
(C)  $D(0; 1; 0)$ . (D)  $D(1; 1; 1)$ .



**Phần II.** Trong mỗi ý a), b), c) và d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.

**CÂU 22.** Cho các điểm  $A(1; -2; 3)$ ,  $B(-2; 1; 2)$ ,  $C(3; -1; 2)$ .

Mệnh đề	Đ	S
a) $\vec{AB} = (-3; 3; -1)$ .		

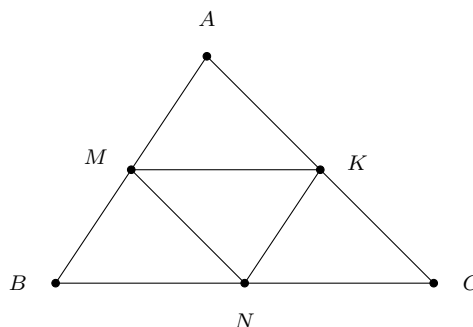
QUICK NOTE

Mệnh đề	Đ	S
b) $\overrightarrow{AC} = (-2; -1; 1)$ .		
c) $\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AC}$ .		
d) Ba điểm $A, B, C$ không thẳng hàng.		

**CÂU 23.**

Cho ba điểm  $A(3; 3; -6)$ ,  $B(1; 3; 2)$  và  $C(-1; -3; 1)$ . Gọi  $M, N, K$  lần lượt là trung điểm của  $AB, BC$  và  $CA$ .

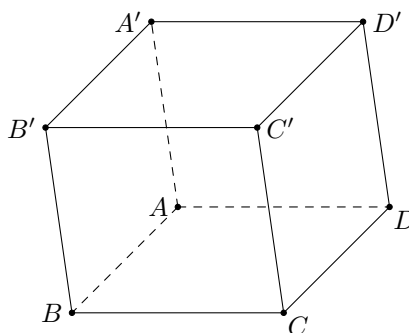
Mệnh đề	Đ	S
a) Tọa độ $M(2; 3; 2)$ .		
b) Với $G$ là trọng tâm tam giác $ABC$ thì $GC = 2\sqrt{5}$ .		
c) Trọng tâm tam giác $MNK$ là $E(1; 1; -1)$ .		
d) Với $D(-3; -3; 9)$ thì tứ giác $ABDC$ là hình bình hành.		



**CÂU 24.**

Cho hình hộp  $ABCD.A'B'C'D'$ , biết điểm  $A(0; 0; 0)$ ,  $B(1; 0; 0)$ ,  $C(1; 2; 0)$ ,  $D'(-1; 3; 5)$ . Gọi  $M, N$  là tâm của các hình bình hành  $ABB'A'$ ,  $ADD'A'$ .

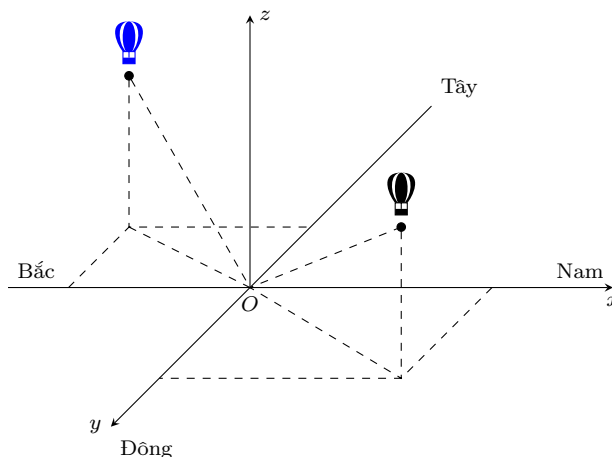
Mệnh đề	Đ	S
a) Tọa độ $D(0; 2; 0)$ .		
b) Tọa độ $A'(-1; 1; 5)$ .		
c) Tọa độ $\overrightarrow{MN} = (-1; 1; 0)$ .		
d) $ \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CC'}  = \sqrt{29}$ .		



**CÂU 25.**

Hai chiếc khinh khí cầu bay lên từ cùng một địa điểm. Chiếc thứ nhất cách điểm xuất phát 2 km về phía nam và 1 km về phía đông, đồng thời cách mặt đất 0,5 km. Chiếc thứ hai nằm cách điểm xuất phát 1 km về phía bắc và 1,5 km về phía tây, đồng thời cách mặt đất 0,8 km.

Chọn hệ trục  $Oxyz$  với gốc  $O$  đặt tại điểm xuất phát của hai khinh khí cầu, mặt phẳng  $(Oxy)$  trùng với mặt đất với trục  $Ox$  hướng về phía nam, trục  $Oy$  hướng về phía đông và trục  $Oz$  hướng thẳng đứng lên trời (Hình bên dưới), đơn vị đo lấy theo kilomet.



Mệnh đề	Đ	S
a) Với hệ tọa độ đã chọn, tọa độ khinh khí cầu thứ nhất là $(2; 1; 0,5)$ .		
b) Với hệ tọa độ đã chọn, tọa độ khinh khí cầu thứ hai là $(-1,5; -1; 0,8)$ .		
c) Khoảng cách từ điểm xuất phát đến khinh khí cầu thứ nhất bằng $\sqrt{21}$ km.		

QUICK NOTE

Mệnh đề

Đ

S

d) Khoảng cách hai chiếc khinh khí cầu là 3,92 km (Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

2

Tích vô hướng, tích có hướng hai vec tơ và ứng dụng

1. Ví dụ minh họa

**VÍ DỤ 1.** Cho ba vec-tơ  $\vec{a} = (3; 0; 1)$ ,  $\vec{b} = (1; -1; -2)$ ,  $\vec{c} = (2; 1; -1)$ ,  $\vec{d} = (1; 7; -3)$ .

a) Tính  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ ,  $\vec{b} \cdot \vec{c}$ . b) Tính  $|\vec{a}|$ ,  $|\vec{b}|$ ,  $\cos(\vec{a}, \vec{b})$ . c) Chứng minh  $\vec{d} \perp \vec{a}$ .

**VÍ DỤ 2.** Trong KG  $Oxyz$ , cho  $\vec{a} = (1; 0; 1)$ ,  $\vec{b} = (1; 1; 0)$  và  $\vec{c} = (-4; 3; m)$ .

a) Tính góc giữa hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$ .  
b) Tìm  $m$  để vectơ  $\vec{d} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$  vuông góc với  $\vec{c}$ .

**VÍ DỤ 3.** Trong KG  $Oxyz$ , cho tam giác  $ABC$  có  $A(-1; 0; 2)$ ,  $B(0; 4; 3)$  và  $C(-2; 1; 2)$ .

a) Chỉ ra tọa độ một vec-tơ (khác  $\vec{0}$ ) vuông góc với hai vec-tơ  $\vec{AB}$ ,  $\vec{AC}$ .  
b) Tính chu vi tam giác  $ABC$ .  
c) Tính  $\cos \widehat{BAC}$ .  
d) Tìm độ dài đường phân giác trong  $AD$  của tam giác  $ABC$ .

**VÍ DỤ 4.** Trong KG  $Oxyz$ , cho 3 điểm  $A(0; 1; -2)$ ;  $B(3; 0; 0)$  và điểm  $C$  thuộc trục  $Oz$ . Biết  $ABC$  là tam giác cân tại  $C$ . Tìm tọa độ điểm  $C$ .

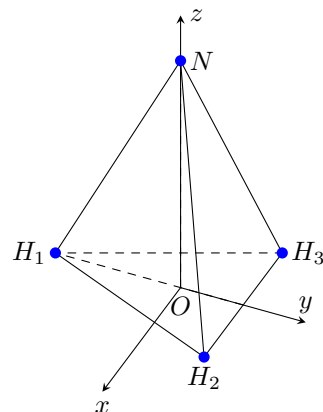
**VÍ DỤ 5.** Trong KG  $Oxyz$ , cho ba điểm  $M(2; 3; -1)$ ,  $N(-1; 1; 1)$ ,  $P(1; m-1; 2)$ . Với những giá trị nào của  $m$  thì tam giác  $MNP$  vuông tại  $N$ ?

**VÍ DỤ 6.** Cho hai điểm  $A(2, -1, 1)$ ;  $B(3, -2, -1)$ . Tìm điểm  $N$  trên trục  $Ox$  cách đều  $A$  và  $B$ .

**VÍ DỤ 7.**

Trong Hóa học, cấu tạo của phân tử amoniac ( $\text{NH}_3$ ) có dạng hình chóp tam giác đều mà đỉnh là nguyên tử nitrogen (N) và đáy là tam giác  $H_1H_2H_3$  với  $H_1, H_2, H_3$  là vị trí của ba nguyên tử hydrogen (H). Góc tạo bởi liên kết H – N – H, có hai cạnh là hai đoạn thẳng nối N với hai trong ba điểm  $H_1, H_2, H_3$  (chẳng hạn  $\widehat{H_1NH_2}$ ), gọi là góc liên kết của phân tử  $\text{NH}_3$ . Góc này xấp xỉ  $107^\circ$ .

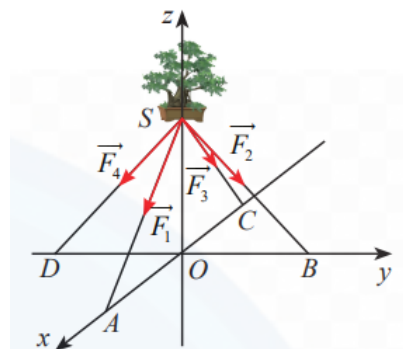
Trong KG  $Oxyz$ , cho một phân tử  $\text{NH}_3$  được biểu diễn bởi hình chóp tam giác đều  $N.H_1H_2H_3$  với  $O$  là tâm của đáy. Nguyên tử nitrogen được biểu diễn bởi điểm  $N$  thuộc trục  $Oz$ , ba nguyên tử hydrogen ở các vị trí  $H_1, H_2, H_3$  trong đó  $H_1(0; -2; 0)$  và  $H_2H_3$  song song với trục  $Ox$  (Hình bên).



a) Tính khoảng cách giữa hai nguyên tử hydrogen.  
b) Tính khoảng cách giữa hai nguyên tử nitrogen với mỗi nguyên tử hydrogen.

**VÍ DỤ 8.**

Một chậu cây được đặt trên một giá đỡ có bốn chân với điểm đặt  $S(0; 0; 20)$  và các điểm chạm mặt đất của bốn chân lần lượt là  $A(20; 0; 0)$ ,  $B(0; 20; 0)$ ,  $C(-20; 0; 0)$ ,  $D(0; -20; 0)$  (đơn vị cm). Cho biết trọng lực tác dụng lên chậu cây có độ lớn 40(N) và được phân bố thành bốn lực  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4$  có độ lớn bằng nhau như Hình 4. Tìm tọa độ của các lực nói trên (mỗi centimet biểu diễn 1 N).



## 2. Bài tập trắc nghiệm

Phần I. Mỗi câu hỏi học sinh chọn một trong bốn phương án A, B, C, D.

**CÂU 1.** Tích vô hướng của hai vectơ  $\vec{u} = (3; 0; 1)$  và  $\vec{v} = (2; 1; 0)$  là

- (A) 0. (B) 6. (C) 8. (D) -6.

**CÂU 2.** Tích vô hướng của hai vectơ  $\vec{u} = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$  và  $\vec{v} = (0; 1; -2)$  bằng

- (A) -4. (B) 0. (C) 4. (D) -2.

**CÂU 3.** Cho các véc-tơ  $\vec{a} = (1; 2; 1)$  và  $\vec{b} = (2; 2; 1)$ . Tính tích vô hướng  $\vec{a} \cdot (\vec{a} - \vec{b})$ .

- (A) -1. (B) -2. (C) 2. (D) 1.

**CÂU 4.** Một thiết bị thăm dò đáy biển được đẩy bởi một lực  $\vec{f} = (5; 4; -2)$  (đơn vị: N) giúp thiết bị thực hiện độ dời  $\vec{a} = (70; 20; -40)$  (đơn vị: m). Tính công sinh bởi lực  $\vec{f}$ .

- (A) 480 (J). (B) 530 (J). (C) 510 (J). (D) 500 (J).

**CÂU 5.** Góc giữa hai véc-tơ  $\vec{i}$  và  $\vec{u} = (-\sqrt{3}; 0; 1)$  bằng

- (A)  $60^\circ$ . (B)  $120^\circ$ . (C)  $150^\circ$ . (D)  $30^\circ$ .

**CÂU 6.** Cho hai véc-tơ  $\vec{u} = (-1; 1; 0)$  và  $\vec{v} = (0; -1; 0)$ . Góc hợp bởi hai véc-tơ  $\vec{u}$  và  $\vec{v}$  bằng

- (A)  $60^\circ$ . (B)  $45^\circ$ . (C)  $135^\circ$ . (D)  $120^\circ$ .

**CÂU 7.** Cho hai véc-tơ  $\vec{a}(-2; -3; 1)$  và  $\vec{b}(1; 0; 1)$ . Tính  $\cos(\vec{a}, \vec{b})$ .

- (A)  $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = -\frac{1}{2\sqrt{7}}$ . (B)  $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = -\frac{3}{2\sqrt{7}}$ .  
(C)  $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{1}{2\sqrt{7}}$ . (D)  $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{3}{2\sqrt{7}}$ .

**CÂU 8.** Cho  $\vec{a} = (3; 2; 1)$ ,  $\vec{b} = (-2; 2; -4)$ . Giá trị của  $|\vec{a} - \vec{b}|$  bằng

- (A)  $5\sqrt{2}$ . (B) 50. (C)  $2\sqrt{5}$ . (D) 3.

**CÂU 9.** Cho hai véc-tơ  $\vec{u} = (-1; 0; 2)$  và  $\vec{v} = (x; -2; 1)$ . Biết rằng  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 4$ . Khi đó  $|\vec{v}|$  bằng

- (A)  $\sqrt{21}$ . (B) 2. (C) 3. (D) 5.

**CÂU 10.** Tìm số thực  $a$  để véc-tơ  $\vec{u} = (a; 0; 1)$  vuông góc với véc-tơ  $\vec{v} = (2; -1; 4)$ .

- (A)  $a = -2$ . (B)  $a = -4$ . (C)  $a = 4$ . (D)  $a = 2$ .

**CÂU 11.** Tìm  $x$  để hai véc-tơ  $\vec{a} = (x; x - 2; 2)$  và  $\vec{b} = (x; 1; -2)$  vuông góc với nhau.

- (A)  $x = 3$ . (B)  $x = 1$ . (C)  $\begin{cases} x = 2 \\ x = -3 \end{cases}$ . (D)  $\begin{cases} x = -2 \\ x = 3 \end{cases}$ .

**CÂU 12.** Cho hai véc-tơ  $\vec{u} = (1; -2; 1)$  và  $\vec{v} = (2; 1; -1)$ . Véc-tơ nào dưới đây vuông góc với cả hai véc-tơ  $\vec{u}$  và  $\vec{v}$ ?

- (A)  $\vec{w}_2 = (1; 3; 5)$ . (B)  $\vec{w}_3 = (1; -4; 7)$ . (C)  $\vec{w}_4 = (1; 4; 7)$ . (D)  $\vec{w}_1 = (1; -3; 5)$ .

**CÂU 13.** Tích có hướng của hai véc-tơ  $\vec{a} = (-1; 2; 0)$  và  $\vec{b} = (0; 4; -3)$  có tọa độ là

- (A)  $(-6; 3; -4)$ . (B)  $(6; -3; 4)$ . (C)  $(6; 3; 4)$ . (D)  $(-6; -3; -4)$ .

**CÂU 14.** Cho  $A(2; 1; 4)$ ,  $B(-2; 2; -6)$ ,  $C(6; 0; -1)$ . Tính tích vô hướng  $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$ .

- (A)  $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 67$ . (B)  $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = -67$ . (C)  $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 33$ . (D)  $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 65$ .

**CÂU 15.** Cho  $A(1; -2; 3)$ ,  $B(2; -4; 1)$ ,  $C(2; 0; 2)$ , khi đó tích vô hướng  $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$  bằng

- (A) 4. (B) -1. (C) 7. (D) -5.

**CÂU 16.** Cho tam giác  $ABC$  với  $A(8; 9; 2)$ ,  $B(3; 5; 1)$ ,  $C(11; 10; 4)$ . Số đo góc  $A$  của tam giác  $ABC$  là

- (A)  $60^\circ$ . (B)  $150^\circ$ . (C)  $30^\circ$ . (D)  $120^\circ$ .

**CÂU 17.** Cho điểm  $A(3; -1; 5)$ ,  $B(m; 2; 7)$ . Tìm tất cả các giá trị của  $m$  để độ dài đoạn  $AB = 7$ .

- (A)  $m = 3$  hoặc  $m = -3$ . (B)  $m = 9$  hoặc  $m = -3$ .  
(C)  $m = -3$  hoặc  $m = -9$ . (D)  $m = 9$  hoặc  $m = 3$ .

### QUICK NOTE

QUICK NOTE

- CÂU 18.** Cho ba điểm  $A(3; 2; 8)$ ,  $B(0; 1; 3)$  và  $C(2; m; 4)$ . Tìm  $m$  để tam giác  $ABC$  vuông tại  $B$ .
- Ⓐ  $m = 4$ .

Ⓑ  $m = -10$ .

Ⓒ  $m = 25$ .

Ⓓ  $m = -1$ .
- CÂU 19.** Cho ba điểm  $M(2; 3; -1)$ ,  $N(-1; 1; 1)$  và  $P(1; m - 1; 2)$ . Tìm  $m$  để tam giác  $MNP$  vuông tại  $N$ .
- Ⓐ  $m = 0$ .

Ⓑ  $m = -4$ .

Ⓒ  $m = 2$ .

Ⓓ  $m = -6$ .
- CÂU 20.** Cho tam giác  $ABC$  có  $A(7; 3; 3)$ ,  $B(1; 2; 4)$ ,  $C(2; 3; 5)$ . Tìm tọa độ điểm  $H$  là chân đường cao kẻ từ  $A$  của tam giác  $ABC$ .
- Ⓐ  $H(3; 4; 6)$ .

Ⓑ  $H(-3; 4; 7)$ .

Ⓒ  $H(2; 4; 1)$ .

Ⓓ  $H(2; -4; 3)$ .
- CÂU 21.** Cho hai điểm  $A(1; 1; 0)$ ,  $B(2; -1; 2)$ . Gọi  $M(0; 0; z)$  là điểm thuộc trục  $Oz$  sao cho  $MA^2 + MB^2$  nhỏ nhất. Khẳng định nào sau đây là đúng?
- Ⓐ  $z \in (0; 1]$ .

Ⓑ  $z \in (1; 2]$ .

Ⓒ  $z \in (-1; 0]$ .

Ⓓ  $z \in (-2; -1]$ .

**Phần II.** Trong mỗi ý a), b), c) và d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.

**CÂU 22.** Cho ba vec-tơ  $\vec{a} = (-1; 1; 0)$ ,  $\vec{b} = (1; 1; 0)$  và  $\vec{c} = (1; 1; 1)$ .

Mệnh đề	Đ	S
a) $ \vec{a}  = 2$ .		
b) $ \vec{c}  = \sqrt{3}$ .		

Mệnh đề	Đ	S
c) $\cos(\vec{a}, \vec{c}) = \frac{2}{\sqrt{5}}$ .		
d) $\vec{b} \perp \vec{c}$ .		

**CÂU 23.** Cho hai vectơ  $\vec{u} = (0; 2; 3)$  và  $\vec{v} = (m - 1; 2m; 3)$ .

Mệnh đề	Đ	S
a) $ \vec{u}  = \sqrt{13}$ .		
b) $ \vec{u}  =  \vec{v}  \Leftrightarrow m = -\frac{3}{5}$ .		
c) $\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow m = 1$ .		
d) $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow m = \frac{9}{4}$ .		

**CÂU 24.** Trong không gian với hệ trục tọa độ  $Oxyz$ , cho ba vectơ  $\vec{a}(1; 2; 3)$ ,  $\vec{b}(2; 2; -1)$ ,  $\vec{c}(4; 0; -4)$ .

Mệnh đề	Đ	S
a) Tọa độ của vectơ $\vec{x} = \vec{a} + \vec{b}$ là $\vec{x} = (3; 4; 2)$ .		
b) Tọa độ của vectơ $\vec{y} = \vec{a} + \vec{c}$ là $\vec{y} = (5; 2; 1)$ .		
c) Tọa độ của vectơ $\vec{z} = \vec{b} + \vec{c}$ là $\vec{z} = (6; -2; -5)$ .		
d) Vectơ $\vec{k} = (7; 4; -2)$ thỏa mãn đẳng thức $\vec{k} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ .		

**CÂU 25.** Trong KG  $Oxyz$ , cho hai vectơ  $\vec{a}(1; -1; 5)$ ,  $\vec{b}(3; 2; -1)$ .

Mệnh đề	Đ	S
a) $\vec{a} + \vec{b} \neq \vec{0}$ .		
b) $\vec{a} - \vec{b} = (-2; -3; 4)$ .		
c) $\vec{v} = \vec{b} - \vec{a}$ có tung độ âm.		
d) Xét $\vec{x}$ thỏa $\vec{a} - \vec{x} = \vec{b}$ . Hoành độ của vectơ $\vec{x}$ thuộc khoảng $(-3; 1)$ .		

**CÂU 26.** Trong KG  $Oxyz$ , cho điểm  $D(4; -1; 3)$  và các điểm  $M$ ,  $N$ ,  $P$  lần lượt thuộc các trục  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$  sao cho  $DM$ ,  $DN$ ,  $DP$  đôi một vuông góc với nhau

Mệnh đề	Đ	S
a) Tung độ của điểm $N$ bằng 13.		
b) Cao độ của điểm $P$ bằng $\frac{13}{4}$ .		

QUICK NOTE

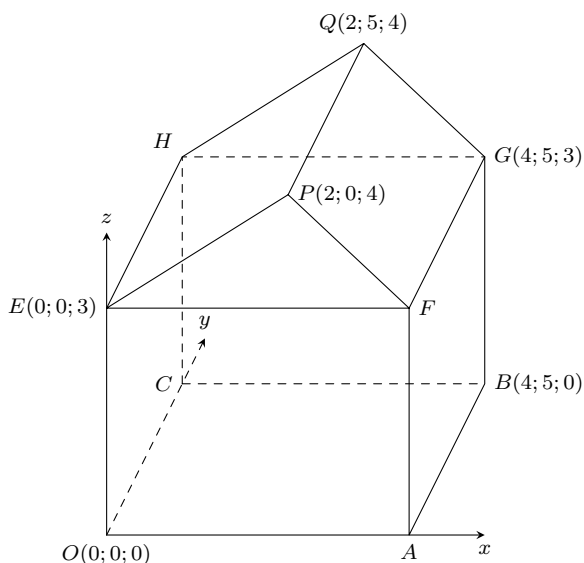
Mệnh đề	Đ	S
c) $V_{DMNP} > 29$ .		
d) Gọi $\vec{x}$ là vectơ thỏa $\vec{x} \cdot \overrightarrow{DM} = 1$ ; $\vec{x} \cdot \overrightarrow{DN} = 2$ ; $\vec{x} \cdot \overrightarrow{DP} = -3$ thì tổng hoành độ, tung độ và cao độ của vectơ $\vec{x}$ thuộc khoảng $(3; 7)$ .		

**CÂU 27.** Cho tam giác  $ABC$  có  $A(1; 2; 0)$ ,  $B(0; 1; 1)$ ,  $C(2; 1; 0)$ .

Mệnh đề	Đ	S
a) Tam giác $ABC$ vuông tại $A$ .		
b) Chu vi tam giác là $\sqrt{7} + \sqrt{3} + \sqrt{2}$ .		
c) Diện tích tam giác $ABC$ là $\sqrt{6}$ .		
d) Tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $ABC$ là $I\left(1; 1; \frac{1}{2}\right)$ .		

**CÂU 28.** Hình minh họa sơ đồ một ngôi nhà trong hệ trục tọa độ  $Oxyz$ , trong đó nền nhà, bốn bức tường và hai mái nhà đều là hình chữ nhật.

Mệnh đề	Đ	S
a) Tọa độ của các điểm $A(5; 0; 0)$ .		
b) Tọa độ của các điểm $H(0; 5; 3)$ .		
c) Góc nhị diện có cạnh là đường thẳng $FG$ , hai mặt lần lượt là $(FGQP)$ và $(FGHE)$ gọi là góc dốc của mái nhà. Số đo của góc dốc của mái nhà bằng $26,6^\circ$ (làm tròn kết quả đến hàng phần mười của độ).		
d) Chiều cao của ngôi nhà là 4.		



# MỤC LỤC

<b>Bài 1. VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN</b>	<b>1</b>
(A) LÝ THUYẾT CẦN NHỚ	1
(B) PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN	3
Dạng 1. Xác định véc-tơ, chứng minh đẳng thức véc tơ, độ dài véc tơ	3
Dạng 2. Xác định góc và tích vô hướng của hai véc tơ	12
<b>Bài 2. TỌA ĐỘ CỦA VEC TƠ TRONG KHÔNG GIAN</b>	<b>17</b>
(A) LÝ THUYẾT CẦN NHỚ	17
(B) PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN	17
Dạng 1. Tọa độ điểm, tọa độ véc tơ	17
(C) BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM	18
Dạng 2. Tọa độ hóa một số hình không gian	20
<b>Bài 3. BIỂU THỨC TỌA ĐỘ CỦA CÁC PHÉP TOÁN VECTƠ</b>	<b>23</b>
(A) LÝ THUYẾT CẦN NHỚ	23
(B) PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN	24
Dạng 1. Tọa độ của các phép toán véc tơ, tọa độ điểm, độ dài đoạn thẳng	24
Dạng 2. Tích vô hướng, tích có hướng hai véc tơ và ứng dụng	28

