

Bài 5. TÍCH CỦA MỘT VECTƠ VỚI MỘT SỐ

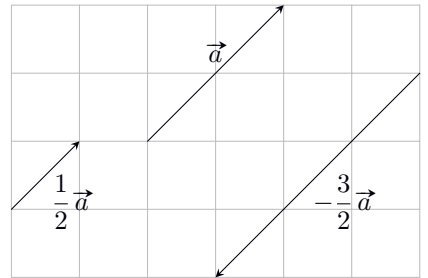
A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Tích của một vectơ với một số

Định nghĩa: Cho vectơ $\vec{a} \neq \vec{0}$ và số thực $k \neq 0$. Tích của vectơ \vec{a} với số k là một vectơ, kí hiệu là $k\vec{a}$, được xác định như sau:

- ☑ Nếu $k > 0$ thì $k\vec{a}$ là vectơ **cùng hướng** với \vec{a} . Nếu $k < 0$ thì $k\vec{a}$ là vectơ **ngược hướng** với \vec{a} .
- ☑ Độ dài của vectơ $k\vec{a}$ bằng $|k|$ lần độ dài của vectơ \vec{a} , tức là $|k\vec{a}| = |k| \cdot |\vec{a}|$.

⚠ Ta quy ước $k\vec{a} = \vec{0}$ nếu $\vec{a} = \vec{0}$ hoặc $k = 0$.



2. Các tính chất của phép nhân vectơ với một số

Với hai vectơ \vec{a}, \vec{b} và hai số thực k, t , ta luôn có

- $k(t\vec{a}) = (kt)\vec{a}$;
- $(k+t)\vec{a} = k\vec{a} + t\vec{a}$;
- $k(\vec{a} \pm \vec{b}) = k\vec{a} \pm k\vec{b}$;
- $1\vec{a} = \vec{a}; (-1)\vec{a} = -\vec{a}$.
- ☑ Điểm I là trung điểm của đoạn thẳng AB khi và chỉ khi $\vec{IA} + \vec{IB} = \vec{0}$.
- ☑ Cho điểm G là trọng tâm của tam giác ABC khi và chỉ khi $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$.

3. Điều kiện để hai vectơ cùng phương

- ① Điều kiện cần và đủ để \vec{a} và $\vec{b} \neq \vec{0}$ cùng phương là có một số thực k để $\vec{a} = k\vec{b}$.
- ② Ba điểm phân biệt A, B, C thẳng hàng khi có số thực k để $\vec{AB} = k\vec{AC}$.

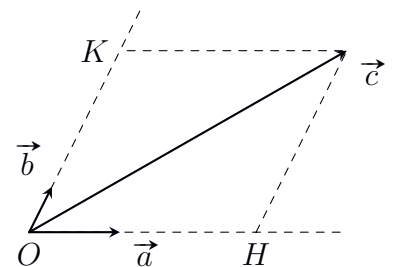
4. Phân tích một vectơ theo hai vectơ không cùng phương

Cho hai vectơ \vec{a} và \vec{b} không cùng phương. Khi đó mọi vectơ \vec{c} đều phân tích được một cách duy nhất theo hai vectơ \vec{a} và \vec{b} , nghĩa là có duy nhất cặp số h, k sao cho $\vec{c} = h\vec{a} + k\vec{b}$

- Theo quy tắc hình bình hành, ta có

$$\vec{c} = \vec{OH} + \vec{OK}$$

- Giả sử $\vec{OH} = h\vec{a}$ và $\vec{OK} = k\vec{b}$ thì $\vec{c} = h\vec{a} + k\vec{b}$.



B. CÁC DẠNG TOÁN

1. Xác định vector tích, tính độ dài vector

1. Ví dụ minh họa

VÍ DỤ 1. Cho đoạn thẳng AB và M là một điểm nằm trên đoạn AB sao cho $AM = \frac{1}{5}AB$. Tìm k trong các đẳng thức sau

- a) $\vec{AM} = k\vec{AB}$. b) $\vec{MA} = k\vec{MB}$. c) $\vec{MA} = k\vec{AB}$.

Lời giải.

VÍ DỤ 2. Cho tam giác ABC đều cạnh bằng 1, trọng tâm G . Tính độ dài vectơ \overrightarrow{AG} .

Lời giải.

VÍ DỤ 3. Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng a , I là trung điểm của cạnh BC . Tính độ dài vectơ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

Lời giải.

2. Bài tập áp dụng

BÀI 1. Trên đoạn thẳng AB , gọi C là trung điểm AB và D là điểm đối xứng của C qua A . Tìm k trong các đẳng thức sau

a) $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$.

b) $\overrightarrow{AD} = k\overrightarrow{AB}$.

BÀI 2. Cho tam giác ABC vuông cân tại A , cạnh $BC = 2$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của cạnh AB và BC . Tính độ dài MN .

BÀI 3. Cho hình thoi $ABCD$ có $AC = 2a, BD = a$. Tính độ dài vectơ $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$.

3. Bài tập trắc nghiệm

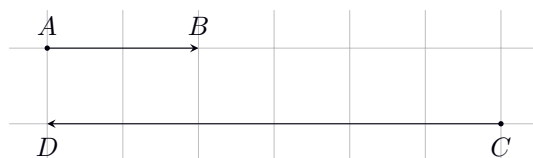
CÂU 1. Cho hai vectơ \overrightarrow{AB} và \overrightarrow{CD} trong hình bên. Khẳng định nào sau đây đúng?

☐ A $\overrightarrow{CD} = 3\overrightarrow{AB}$.

☐ B $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$.

☐ C $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{CD}$.

☐ D $\overrightarrow{CD} = -3\overrightarrow{AB}$.



Lời giải.

CÂU 2. Cho vectơ \vec{a} (khác $\vec{0}$) và vectơ $\vec{b} = k\vec{a}$, ($k \neq 0$). Khẳng định nào sau đây là đúng?

☐ A \vec{a} cùng phương \vec{b} nếu $k > 0$.

☐ B \vec{a} ngược hướng \vec{b} nếu $k > 0$.

☐ C \vec{a} cùng hướng \vec{b} nếu $k < 0$.

☐ D \vec{a} cùng hướng \vec{b} nếu $k > 0$.

Lời giải.

CÂU 3. Cho hai vectơ \vec{a}, \vec{b} bất kì và số thực k . Ta có $k(\vec{a} + \vec{b})$ bằng

☐ A $\vec{a} + k\vec{b}$.

☐ B $k\vec{a} + k\vec{b}$.

☐ C $k\vec{a} - k\vec{b}$.

☐ D $k\vec{a} + \vec{b}$.

Lời giải.

CÂU 4. Cho hai vectơ \vec{a}, \vec{b} khác $\vec{0}$ thỏa mãn $\vec{a} = -\frac{1}{2}\vec{b}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

☐ A $|\vec{a}| = -\frac{1}{2}|\vec{b}|$.

☐ B \vec{a} và \vec{b} là hai vectơ đối nhau.

☐ C \vec{a} cùng hướng với \vec{b} .

☐ D \vec{a} ngược hướng với \vec{b} .

Lời giải.

CÂU 5. Cho vectơ \vec{u} có độ dài bằng 2 và vectơ $\vec{v} = -3\vec{u}$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

☐ A vectơ \vec{v} có độ dài bằng -6 và cùng hướng với \vec{u} .

- B** vectơ \vec{v} có độ dài bằng -6 và ngược hướng với \vec{u} .
C vectơ \vec{v} có độ dài bằng 6 và cùng hướng với \vec{u} .
D vectơ \vec{v} có độ dài bằng 6 và ngược hướng với \vec{u} .

Lời giải.

CÂU 6. Cho $\vec{a} = -2\vec{b}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A** \vec{a} và \vec{b} là hai vectơ bằng nhau. **B** \vec{a} và \vec{b} là hai vectơ đối nhau.
C \vec{a} và \vec{b} ngược hướng. **D** \vec{a} và \vec{b} cùng hướng.

Lời giải.

CÂU 7. Cho vectơ \vec{q} có độ dài bằng 27 . Hỏi độ dài của vectơ $\vec{x} = -\frac{1}{9}\vec{q}$ là bao nhiêu?

- A** 243 . **B** 3 . **C** 9 . **D** -3 .

Lời giải.

CÂU 8. Cho đoạn thẳng AB và điểm I thuộc đoạn thẳng AB như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây đúng?



- A** $\vec{AI} = \frac{1}{4}\vec{AB}$. **B** $\vec{AI} = \frac{1}{4}\vec{IB}$.
C $\vec{AI} = \frac{1}{5}\vec{BA}$. **D** $\vec{AI} = -\frac{1}{4}\vec{IB}$.

Lời giải.

CÂU 9. Đẳng thức nào mô tả đúng hình vẽ bên?



- A** $3\vec{AI} + \vec{AB} = \vec{0}$. **B** $3\vec{IA} + \vec{IB} = \vec{0}$.
C $\vec{BI} + 3\vec{BA} = \vec{0}$. **D** $\vec{AI} + 3\vec{AB} = \vec{0}$.

Lời giải.

CÂU 10. Cho M là một điểm trên đoạn AB sao cho $AM = \frac{1}{3}AB$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

- A** $\vec{MB} = -\frac{2}{3}\vec{AB}$. **B** $\vec{AM} = \frac{1}{3}\vec{AB}$. **C** $\vec{MA} = -\frac{1}{2}\vec{MB}$. **D** $\vec{MB} = 2\vec{AM}$.

Lời giải.

CÂU 11. Cho đoạn thẳng AB và M là một điểm trên đoạn AB sao cho $AB = 5AM$. Mệnh đề nào sau đây sai?

- Ⓐ $\overrightarrow{MA} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{MB}$. Ⓑ $\overrightarrow{MB} = \frac{4}{5}\overrightarrow{AB}$. Ⓒ $\overrightarrow{MB} = -\frac{4}{5}\overrightarrow{AB}$. Ⓓ $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AB}$.

🗨️ Lời giải.

CÂU 12. Cho đoạn thẳng AB , M là một điểm trên đoạn thẳng AB sao cho $AM = \frac{1}{4}AB$. Khẳng định nào sau đây sai?

- Ⓐ $\overrightarrow{MA} = \frac{1}{3}\overrightarrow{MB}$. Ⓑ $\overrightarrow{BM} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BA}$. Ⓒ $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$. Ⓓ $\overrightarrow{MB} = -3\overrightarrow{MA}$.

🗨️ Lời giải.

CÂU 13. Cho hình bình hành $ABCD$ có tâm O . Mệnh đề nào sau đây sai?

- Ⓐ $\overrightarrow{OD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$. Ⓑ $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{OC}$. Ⓒ $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{OA}$. Ⓓ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

🗨️ Lời giải.

CÂU 14. Cho tam giác ABC với trung tuyến AM và trọng tâm G . Khi đó, vectơ \overrightarrow{GA} bằng với vectơ nào sau đây?

- Ⓐ $2\overrightarrow{GM}$. Ⓑ $-\frac{2}{3}\overrightarrow{AM}$. Ⓒ $\frac{2}{3}\overrightarrow{GM}$. Ⓓ $\frac{1}{2}\overrightarrow{AM}$.

🗨️ Lời giải.

CÂU 15. Cho tam giác ABC có G là trọng tâm, M là trung điểm của BC . Đẳng thức nào sau đây đúng?

- Ⓐ $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 2\overrightarrow{GM}$. Ⓑ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AG}$. Ⓒ $\overrightarrow{GA} = 2\overrightarrow{GM}$. Ⓓ $\overrightarrow{MG} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{MA}$.

Lời giải.

CÂU 16. Cho tam giác ABC . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và AC . Khẳng định nào sau đây là sai?

- Ⓐ $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$. Ⓑ $\overrightarrow{MN} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$. Ⓒ $\overrightarrow{BC} = -2\overrightarrow{NM}$. Ⓓ $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{MN}$.

Lời giải.

CÂU 17. Cho tam giác ABC có trọng tâm G và trung tuyến BM . Khẳng định nào sau đây là sai?

- Ⓐ $\overrightarrow{AM} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$. Ⓑ $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.
 Ⓒ $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OG}$, với mọi điểm O . Ⓓ $\overrightarrow{GB} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BM}$.

Lời giải.

CÂU 18. Cho tam giác đều ABC với đường cao AH . Mệnh đề nào sau đây đúng?

- Ⓐ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$. Ⓑ $|\overrightarrow{AH}| = \frac{\sqrt{3}}{2}|\overrightarrow{HC}|$. Ⓒ $\overrightarrow{HB} = \overrightarrow{HC}$. Ⓓ $|\overrightarrow{AC}| = 2|\overrightarrow{HC}|$.

Lời giải.

CÂU 19. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . Giá trị của $|\vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AD}|$ bằng

- Ⓐ $a\sqrt{2}$. Ⓑ $2a$. Ⓒ $2a\sqrt{2}$. Ⓓ $3a$.

💬 Lời giải.

CÂU 20. Cho tam giác ABC đều cạnh a . Khi đó, giá trị $|\vec{AB} + \vec{AC}|$ bằng

- Ⓐ $a\sqrt{3}$. Ⓑ $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Ⓒ $2a$. Ⓓ $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

💬 Lời giải.

CÂU 21. Cho tam giác đều ABC cạnh bằng 4. Độ dài $\vec{AB} + \vec{AC}$ là

- Ⓐ $2\sqrt{3}$. Ⓑ $\sqrt{5}$. Ⓒ $\sqrt{6}$. Ⓓ $4\sqrt{3}$.

💬 Lời giải.

- CÂU 22.** Cho tam giác ABC vuông tại A và $AB = 2$, $AC = 3$. Độ dài của vectơ $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AC}$ bằng
- (A) 5. (B) 40. (C) $\sqrt{13}$. (D) $2\sqrt{10}$.

Lời giải.

- CÂU 23.** Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng a . Tính $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DB}|$ theo a .

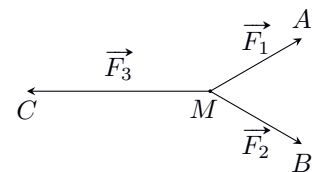
- (A) $\frac{a\sqrt{5}}{2}$. (B) a . (C) $a\sqrt{5}$. (D) $a\sqrt{3}$.

Lời giải.

CÂU 24.

Cho ba lực $\vec{F}_1 = \overrightarrow{MA}$, $\vec{F}_2 = \overrightarrow{MB}$, $\vec{F}_3 = \overrightarrow{MC}$ cùng tác động vào một vật tại điểm M và vật đứng yên. Cho biết cường độ của \vec{F}_1 , \vec{F}_2 đều bằng 100N và $\widehat{AMB} = 60^\circ$. Khi đó, cường độ lực của \vec{F}_3 bằng

- (A) $50\sqrt{2}$ N. (B) $50\sqrt{3}$ N. (C) $25\sqrt{3}$ N. (D) $100\sqrt{3}$ N.



Lời giải.

- CÂU 25.** Cho tam giác ABC là tam giác đều cạnh $2a$ với G là trọng tâm. Tính $|\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}|$.

- (A) $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$. (B) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. (C) $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. (D) $a\sqrt{3}$.

💬 Lời giải.

CÂU 26. Gọi G là trọng tâm tam giác vuông ABC với cạnh huyền $BC = 12$. vectơ $\overrightarrow{GB} - \overrightarrow{CG}$ có độ dài bằng bao nhiêu?

- Ⓐ 4. Ⓑ $2\sqrt{3}$. Ⓒ 8. Ⓓ 2.

💬 Lời giải.

CÂU 27. Tam giác ABC có $AB = AC = a$, $\widehat{ABC} = 120^\circ$. Độ dài vectơ tổng $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ bằng

- Ⓐ $2a$. Ⓑ $a\sqrt{3}$. Ⓒ a . Ⓓ $3a$.

💬 Lời giải.

CÂU 28. Cho hình thoi $ABCD$ cạnh a , tâm O và $\widehat{BAD} = 60^\circ$. Độ dài vectơ $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{CD}$ bằng

- Ⓐ $\frac{a\sqrt{7}}{2}$. Ⓑ $\frac{a\sqrt{5}}{2}$. Ⓒ $2a$. Ⓓ $a\sqrt{3}$.

💬 Lời giải.

CÂU 29. Cho tam giác ABC đều cạnh a , H là trung điểm của BC . Tính $|\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{HC}|$ bằng

(A) $\frac{2\sqrt{3}a}{3}$.

(B) $\frac{a\sqrt{7}}{2}$.

(C) $\frac{a}{2}$.

(D) $\frac{3a}{2}$.

Lời giải.

CÂU 30. Cho tam giác OAB vuông cân tại O với $OA = OB = a$. Tính độ dài vectơ $\vec{u} = 8\overrightarrow{OA} - 6\overrightarrow{OB}$.

(A) $2a$.

(B) $14a$.

(C) $16a$.

(D) $10a$.

Lời giải.

CÂU 31. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 3$, $AC = 4$. Tính độ dài vec-tơ $\vec{u} = 2\vec{AB} + 3\vec{AC}$.

- Ⓐ $|\vec{u}| = 18$. Ⓑ $|\vec{u}| = 6\sqrt{5}$. Ⓒ $|\vec{u}| = 9$. Ⓓ $|\vec{u}| = 5\sqrt{6}$.

💬 Lời giải.

CÂU 32. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC . Tập hợp điểm M trong mặt phẳng chứa tam giác ABC sao cho $|\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}| = 6$ là

- Ⓐ đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Ⓑ đường tròn tâm G bán kính bằng 1.
Ⓒ đường tròn tâm G bán kính bằng 2. Ⓓ đường tròn tâm G bán kính bằng 6.

💬 Lời giải.

CÂU 33. Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng $2a$ và G là trọng tâm của tam giác. Khi đó, giá trị $|\vec{AB} - \vec{GC}|$ là

- Ⓐ $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. Ⓑ $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$. Ⓒ $\frac{4a\sqrt{3}}{3}$. Ⓓ $\frac{2a}{3}$.

💬 Lời giải.

CÂU 34. Cho ba lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ có cùng điểm đặt tại O . Trong đó, có hai lực \vec{F}_1, \vec{F}_2 có phương hợp với nhau một góc 90° và lực \vec{F}_3 ngược hướng với lực \vec{F}_1 . Ba lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ có cường độ lần lượt là 100 N, 200 N và 300 N. Cường độ lực tổng hợp của ba lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ là

- ☐ A 400 N.
 ☐ B $100\sqrt{2}$ N.
 ☐ C 600 N.
 ☐ D $200\sqrt{2}$ N.

 **Lời giải.**

CÂU 35. Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng 1. Độ dài của vectơ $\vec{u} = 12\vec{AC} - 7\vec{AB}$ bằng

- ☐ A $|\vec{u}| = 17$.
 ☐ B $|\vec{u}| = 5$.
 ☐ C $|\vec{u}| = 13$.
 ☐ D $|\vec{u}| = 12\sqrt{2} - 7$.

 **Lời giải.**

CÂU 36. Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng 1. Độ dài của vectơ $\vec{u} = 3\vec{AC} - 7\vec{AB}$ là

- A** $|\vec{u}| = 5$. **B** $|\vec{u}| = 12\sqrt{2} - 7$. **C** $|\vec{u}| = 17$. **D** $|\vec{u}| = 13$.

Lời giải.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2

Chứng minh đẳng thức vectơ, thu gọn biểu thức

Phương pháp giải

- ☑ Cách 1: Biến đổi thẳng VT về VP hoặc ngược lại.
- ☑ Cách 2: Biến đổi VT và VP về cùng bằng một biểu thức trung gian.
- ☑ Cách 3: Chứng minh VT-VT= $\vec{0}$.

Khi thực hiện các phép biến đổi cần lưu ý

- a) *Quy tắc ba điểm:* Với ba điểm A, B, C bất kì ta luôn có $\vec{AB} = \vec{AC} + \vec{CB}$.
- b) *Quy tắc hình bình hành:* Với hình bình hành $ABCD$ ta luôn có $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{AD}$.
- c) *Quy tắc hiệu vectơ:* Với ba điểm A, B, O bất kì ta luôn có $\vec{OB} - \vec{OA} = \vec{AB}$.
- d) *Tính chất trung điểm của đoạn thẳng:* Cho đoạn thẳng AB ta có

$$\begin{aligned} I \text{ là trung điểm của } AB &\Leftrightarrow \vec{IA} + \vec{IB} = \vec{0} \\ &\Leftrightarrow \vec{MA} + \vec{MB} = 2\vec{MI}, M \text{ là điểm bất kì.} \end{aligned}$$

- e) *Tính chất trọng tâm tam giác:* Cho tam giác ABC ta có

$$\begin{aligned} G \text{ là trọng tâm tam giác } ABC &\Leftrightarrow \vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}. \\ &\Leftrightarrow \vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = 3\vec{MG}, M \text{ là điểm bất kì.} \end{aligned}$$

- f) *Các tính chất của phép cộng, trừ vectơ và phép nhân một số với một vectơ.*

1. Ví dụ minh họa

VÍ DỤ 1. Cho tam giác ABC với trọng tâm G . Chứng minh rằng $\vec{CA} + \vec{CB} = 3\vec{CG}$.

Lời giải.

VÍ DỤ 2. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi G là trọng tâm tam giác ABD . Chứng minh rằng

$$\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 9\overrightarrow{AG}.$$

Lời giải.

VÍ DỤ 3. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm các đoạn thẳng AB và CD . Chứng minh rằng $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{MN}$.

Lời giải.

VÍ DỤ 4. Cho tam giác ABC . Lần lượt lấy các điểm M, N, P trên các đoạn thẳng AB, BC và CA sao cho $AM = \frac{1}{3}AB, BN = \frac{1}{3}BC, CP = \frac{1}{3}CA$. Chứng minh rằng

$$\overrightarrow{AN} + \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{CM} = \vec{0}.$$

Lời giải.

VÍ DỤ 5. Cho hình bình hành $ABCD$ có tâm O . Gọi M là một điểm bất kì. Chứng minh rằng

a) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}.$

b) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MO}.$

Lời giải.

VÍ DỤ 6. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi M là trung điểm CD . Lấy N trên đoạn BM sao cho $BN = 2MN$. Chứng minh rằng

a) $3\overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CM} + \overrightarrow{ND} + \overrightarrow{MN},$

b) $4\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BD} = 3\overrightarrow{AN}.$

Lời giải.

2. Bài tập áp dụng

BÀI 1. Cho hình bình hành $ABCD$ có tâm O . Chứng minh rằng

$$\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD} = 4\overrightarrow{OD}.$$

BÀI 2. Gọi G và G' lần lượt là trọng tâm của tam giác ABC và $A'B'C'$. Chứng minh rằng

$$\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = 3\overrightarrow{GG'}.$$

BÀI 3. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M, N, I lần lượt là trung điểm của AC, BD và MN . Chứng minh rằng

a) $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = \vec{0},$

b) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 4\overrightarrow{OI}$ (với O là điểm bất kì).

BÀI 4. Cho tam giác ABC không vuông. Gọi G, H, O lần lượt là trọng tâm, trực tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Gọi D là điểm đối xứng của A qua O và M là trung điểm của cạnh BC . Chứng minh

a) $\overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{HD}.$

d) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OH}.$

b) $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = 2\overrightarrow{HO}.$

e) $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}.$

c) $\overrightarrow{HA} - \overrightarrow{HB} - \overrightarrow{HC} = 2\overrightarrow{OA}.$

f) $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{OM}.$

BÀI 5. Cho tam giác ABC . Gọi M là điểm trên cạnh BC sao cho $MB = 2MC$. Biết rằng $\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} = x\overrightarrow{AM}$. Tìm x .

BÀI 6. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M, N lần lượt thuộc các đoạn thẳng AB, CD sao cho $MB = 2MA$ và $NC = 2ND$. Biết rằng $2\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} = x\overrightarrow{MN}$. Tìm x .

BÀI 7. Cho tam giác đều ABC tâm O . Lấy M là một điểm bất kì trong tam giác. Gọi D, E, F lần lượt là hình chiếu của M trên BC, CA, AB . Biết rằng $\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF} = x\overrightarrow{MO}$, tìm x .

BÀI 8. Cho hình bình hành $ABCD$ có tâm O và E là trung điểm AD . Tìm các số thực x và y biết rằng

a) $\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EB} + 2\overrightarrow{EC} = x\overrightarrow{AB}$.

b) $\overrightarrow{EB} + 2\overrightarrow{EA} + 4\overrightarrow{ED} = y\overrightarrow{EC}$.

BÀI 9. Cho tam giác ABC . Dựng bên ngoài tam giác các hình bình hành $ABIF, BCPQ, CARS$. Biết rằng $\overrightarrow{RF} + \overrightarrow{IQ} + \overrightarrow{PS} = x(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$. Tìm x .

BÀI 10. Dựng bên ngoài tứ giác $ABCD$ các hình bình hành $ABEF, BCGH, CDIJ, DAKL$.

a) Chứng minh rằng $\overrightarrow{KF} + \overrightarrow{EH} + \overrightarrow{GJ} + \overrightarrow{IL} = \vec{0}$.

b) Chứng minh rằng $\overrightarrow{EL} - \overrightarrow{HI} = \overrightarrow{FK} - \overrightarrow{GJ}$.

BÀI 11. Cho đường tròn (I) nội tiếp tam giác ABC có $AB = c, AC = b, BC = a$. Chứng minh rằng

$$a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC} = \vec{0}.$$

BÀI 12. Cho tam giác ABC và một điểm M bất kì nằm trong tam giác ABC . Đặt $S_{MBC} = S_a, S_{MCA} = S_b, S_{MAB} = S_c$. Chứng minh rằng

$$S_a\overrightarrow{MA} + S_b\overrightarrow{MB} + S_c\overrightarrow{MC} = \vec{0}.$$



a) Cho M trùng với trọng tâm G của tam giác ABC , ta được $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

b) Cho M trùng với tâm đường tròn nội tiếp I của tam giác ABC , ta được kết quả

$$a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC} = \vec{0}.$$

c) Nếu tam giác ABC đều thì với điểm M bất kì trong tam giác, Ta có

$$x\overrightarrow{MA} + y\overrightarrow{MB} + z\overrightarrow{MC} = \vec{0},$$

trong đó x, y, z lần lượt là khoảng cách từ M đến các cạnh BC, CA và AB .

d) Khi M nằm ngoài tam giác ABC , ta có các kết quả như sau

(a) Nếu M thuộc góc \widehat{BAC} và góc đối đỉnh của nó thì

$$-S_a\overrightarrow{MA} + S_b\overrightarrow{MB} + S_c\overrightarrow{MC} = \vec{0}.$$

(b) Nếu M thuộc góc \widehat{ABC} và góc đối đỉnh của nó thì

$$S_a\overrightarrow{MA} - S_b\overrightarrow{MB} + S_c\overrightarrow{MC} = \vec{0}.$$

(c) Nếu M thuộc góc \widehat{ACB} và góc đối đỉnh của nó thì

$$S_a\overrightarrow{MA} + S_b\overrightarrow{MB} - S_c\overrightarrow{MC} = \vec{0}.$$

3. Bài tập trắc nghiệm

CÂU 1. Cho tam giác ABC có trọng tâm G . Gọi M là trung điểm AB . Chọn mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau:

A $\overrightarrow{CM} = -3\overrightarrow{MG}$.

B $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{AC}$.

C $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AG}$.

D $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OG}$, O là điểm bất kì.

💬 Lời giải.

CÂU 2. Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O . Khẳng định nào sau đây là **đúng**?

A $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AC}$.

B $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AO}$.

C $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CA}$.

D $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BD}$.

💬 Lời giải.

CÂU 3. Cho I là trung điểm của đoạn thẳng AB . Với điểm M bất kỳ, ta luôn có

A $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MI}$.

B $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$.

C $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 3\overrightarrow{MI}$.

D $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{MI}$.

💬 Lời giải.

CÂU 4. Cho G là trọng tâm của tam giác ABC . Với mọi điểm M , ta luôn có:

A $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MG}$.

B $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MG}$.

C $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$.

D $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 4\overrightarrow{MG}$.

💬 Lời giải.

CÂU 5. Cho $\triangle ABC$ có G là trọng tâm, I là trung điểm BC . Đẳng thức nào đúng?

A $\overrightarrow{GA} = 2\overrightarrow{GI}$.

B $\overrightarrow{IG} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{IA}$.

C $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 2\overrightarrow{GI}$.

D $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GA}$.

💬 Lời giải.

CÂU 6. Khẳng định nào sau đây **không phải** là điều kiện cần và đủ để G là trọng tâm $\triangle ABC$, với M là trung điểm của BC và O là điểm bất kỳ?

A $\vec{AG} = \frac{1}{3}(\vec{AB} + \vec{AC})$.

B $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + 3\vec{OG} = \vec{0}$.

C $\vec{AG} + \vec{BG} + \vec{CG} = \vec{0}$.

D $\vec{GM} = -\frac{1}{2}\vec{GA}$.

Lời giải.

CÂU 7. Cho I là trung điểm của đoạn thẳng AB . Với M là một điểm bất kỳ, tìm đẳng thức **đúng**.

A $\vec{MA} + \vec{MB} = 2\vec{MI}$.

B $\vec{MA} + \vec{MB} = \frac{1}{2}\vec{MI}$.

C $\vec{MA} + \vec{MB} = \vec{MI}$.

D $\vec{MA} + \vec{MB} = 2\vec{IM}$.

Lời giải.

CÂU 8. Cho tam giác ABC có trọng tâm G và M là trung điểm của AB . Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$.

B $\vec{GA} + \vec{GB} = 2\vec{GM}$.

C $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = \vec{0}$.

D $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = 3\vec{MG}$.

Lời giải.

CÂU 9. Cho $\triangle ABC$ có M, Q, N lần lượt là trung điểm của AB, BC, CA . Khi đó vectơ $\vec{AB} + \vec{BM} + \vec{NA} + \vec{BQ}$ là vectơ nào sau đây?

A $\vec{0}$.

B \vec{BC} .

C \vec{AQ} .

D \vec{CB} .

Lời giải.

CÂU 10. Cho $\triangle ABC$ và điểm I thỏa mãn $\overrightarrow{IA} = 3\overrightarrow{IB}$. Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

- Ⓐ $\overrightarrow{CI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} - \frac{3}{2}\overrightarrow{CB}$. Ⓑ $\overrightarrow{CI} = \overrightarrow{CA} - 3\overrightarrow{CB}$. Ⓒ $\overrightarrow{CI} = \frac{3}{2}\overrightarrow{CB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$. Ⓓ $\overrightarrow{CI} = 3\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}$.

💬 **Lời giải.**

CÂU 11. Cho tam giác ABC có G là trọng tâm. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

- Ⓐ $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$ với mọi điểm M . Ⓑ $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.
Ⓒ $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 2\overrightarrow{GA}$. Ⓓ $3\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

💬 **Lời giải.**

CÂU 12. Khẳng định nào sau đây **sai**?

- Ⓐ Nếu $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$ thì $ABCD$ là hình bình hành.
Ⓑ Nếu O là trung điểm của AB thì với mọi M ta có $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MO}$.
Ⓒ Nếu G là trọng tâm của tam giác ABC thì $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{AG}$.
Ⓓ Với 3 điểm bất kì I, J, K ta có $\overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{JK} = \overrightarrow{IK}$.

💬 **Lời giải.**

CÂU 13. Cho hình bình hành $ABCD$. Đẳng thức nào sau đây **đúng**?

- Ⓐ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB}$. Ⓑ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AC}$.
Ⓒ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AD}$. Ⓓ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{BD}$.

💬 **Lời giải.**

CÂU 14. Cho tam giác ABC biết I là trung điểm của đoạn thẳng AB , G là trọng tâm tam giác, M là điểm bất kỳ. Hãy chọn khẳng định **đúng**.

A $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MG}$.

B $\overrightarrow{BI} + \overrightarrow{IC} = \vec{0}$.

C $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 3\overrightarrow{MI}$.

D $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$.

Lời giải.

CÂU 15. Cho I là trung điểm của đoạn thẳng AB . Hỏi đẳng thức nào **đúng**?

A $2\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AB} = \vec{0}$.

B $\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IB} = \vec{0}$.

C $\overrightarrow{AI} - 2\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{IB}$.

D $\overrightarrow{AI} - \overrightarrow{IB} = \vec{0}$.

Lời giải.

CÂU 16. Cho hình bình hành $ABCD$. Đẳng thức nào sau đây **đúng**?

A $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD} = \vec{0}$.

B $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB}$.

C $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CD}$.

D $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{BC}$.

Lời giải.

CÂU 17. Cho G là trọng tâm tam giác ABC và I là trung điểm cạnh BC . Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A $\overrightarrow{GA} = -2\overrightarrow{GI}$.

B $\overrightarrow{IG} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AI}$.

C $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 2\overrightarrow{GI}$.

D $\overrightarrow{GA} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AI}$.

Lời giải.

CÂU 18. Cho tam giác ABC có trọng tâm G và M là trung điểm cạnh AC . Khẳng định nào sau đây **sai**?

- Ⓐ $BG = \frac{2}{3}BM$. Ⓑ $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{BG}$. Ⓒ $\overrightarrow{MG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BM}$. Ⓓ $GM = \frac{1}{2}GB$.

💬 Lời giải.

CÂU 19. Cho tam giác ABC . Gọi M là trung điểm của BC và G là trọng tâm của tam giác ABC . Đẳng thức nào sau đây **đúng**?

- Ⓐ $\overrightarrow{GA} = 2\overrightarrow{GM}$. Ⓑ $\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GM} = \vec{0}$. Ⓒ $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AG}$. Ⓓ $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GA}$.

💬 Lời giải.

CÂU 20. Cho G là trọng tâm tam giác ABC , gọi I là trung điểm của BC . Đẳng thức nào sau đây **đúng**?

- Ⓐ $\overrightarrow{GA} = 2\overrightarrow{GI}$. Ⓑ $\overrightarrow{IG} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{IA}$. Ⓒ $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 2\overrightarrow{GI}$. Ⓓ $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GA}$.

💬 Lời giải.

CÂU 21. Cho tam giác ABC và một điểm M tùy ý. Hãy chọn hệ thức đúng.

- Ⓐ $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{BC}$. Ⓑ $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}$.
Ⓒ $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}$. Ⓓ $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}$.

💬 Lời giải.

CÂU 22. Cho tam giác ABC . Gọi M là trung điểm của BC và G là trọng tâm của tam giác ABC . Đẳng thức nào sau đây đúng?

- Ⓐ $\overrightarrow{GA} = 2\overrightarrow{GM}$. Ⓑ $\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GM} = \vec{0}$. Ⓒ $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AG}$. Ⓓ $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GA}$.

Lời giải.

CÂU 23. Ba trung tuyến AM, BN, CP của tam giác ABC đồng quy tại G . Hỏi vectơ $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CP}$ bằng vectơ nào?

- Ⓐ $\frac{3}{2}(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC})$. Ⓑ $3(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{NG} + \overrightarrow{PG})$.
 Ⓒ $\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AC})$. Ⓓ $\vec{0}$.

Lời giải.

CÂU 24. Cho hình chữ nhật $ABCD$, I và K lần lượt là trung điểm của BC, CD . Hệ thức nào sau đây đúng?

- Ⓐ $\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AK} = 2\overrightarrow{AC}$. Ⓑ $\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.
 Ⓒ $\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AK} = \overrightarrow{IK}$. Ⓓ $\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AK} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$.

Lời giải.

CÂU 25. Cho tam giác ABC có M là trung điểm của cạnh BC . Các điểm D, E thỏa mãn các đẳng thức: $\overrightarrow{BD} = 4\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AE} = 3\overrightarrow{AC}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- Ⓐ $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DE}$. Ⓑ $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{6}\overrightarrow{DE}$. Ⓒ $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DE}$. Ⓓ $\overrightarrow{AM} = \frac{3}{4}\overrightarrow{DE}$.

Lời giải.

CÂU 26. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M, N là trung điểm AB và DC . Lấy các điểm P, Q lần lượt thuộc các đường thẳng AD và BC sao cho $\overrightarrow{PA} = -2\overrightarrow{PD}, \overrightarrow{QB} = -2\overrightarrow{QC}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC})$.

B $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{MQ}$.

C $\overrightarrow{MN} = -\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC})$.

D $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NA})$.

🗨 Lời giải.

CÂU 27. Cho hình bình hành $ABCD$. Đẳng thức nào đúng?

A $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{BC}$.

B $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB}$.

C $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{CD}$.

D $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CD}$.

🗨 Lời giải.

CÂU 28. Cho G là trọng tâm của tam giác ABC . Trong các mệnh đề sau, tìm mệnh đề đúng?

A $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AG}$.

B $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = 3\overrightarrow{BG}$.

C $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CG}$.

D $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} = \vec{0}$.

🗨 Lời giải.

CÂU 29. Cho hình vuông $ABCD$ có tâm là O . Trong các mệnh đề sau, tìm mệnh đề **sai**?

- Ⓐ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AO}$. Ⓑ $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DO} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$. Ⓒ $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$. Ⓓ $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB} = 4\overrightarrow{AB}$.

Lời giải.

CÂU 30. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD . Khi đó $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$ bằng

- Ⓐ \overrightarrow{MN} . Ⓑ $2\overrightarrow{MN}$. Ⓒ $3\overrightarrow{MN}$. Ⓓ $-2\overrightarrow{MN}$.

Lời giải.

CÂU 31. Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O và điểm M bất kì. Khẳng định nào sau đây đúng?

- Ⓐ $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MO}$. Ⓑ $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 2\overrightarrow{MO}$.
 Ⓒ $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 3\overrightarrow{MO}$. Ⓓ $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MO}$.

Lời giải.

CÂU 32. Cho năm điểm A, B, C, D, E . Khẳng định nào đúng?

- Ⓐ $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{EC} = 2(\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{CB})$. Ⓑ $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{EC} = 3(\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{CB})$.

Ⓒ $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{EC} = \frac{\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{CB}}{4}.$

Ⓓ $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{EC} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{CB}.$

💬 Lời giải.

CÂU 33. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABD , I là điểm trên GC sao cho $IC = 3IG$. Với mọi điểm M ta luôn có $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}$ bằng

Ⓐ $2\overrightarrow{MI}.$

Ⓑ $3\overrightarrow{MI}.$

Ⓒ $4\overrightarrow{MI}.$

Ⓓ $5\overrightarrow{MI}.$

💬 Lời giải.

CÂU 34. Cho tam giác ABC . Gọi M là điểm trên cạnh AB sao cho $MA = 2MB$ và N là trung điểm của AC . Gọi P là trung điểm của MN . Khi đó

Ⓐ $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}.$ Ⓑ $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}.$ Ⓒ $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}.$ Ⓓ $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}.$

💬 Lời giải.

CÂU 35. Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn tâm O . Gọi H, G lần lượt là trực tâm, trọng tâm của tam giác. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

- Ⓐ $\overrightarrow{OH} = 4\overrightarrow{OG}$. Ⓑ $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$. Ⓒ $\overrightarrow{OH} = 2\overrightarrow{OG}$. Ⓓ $3\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OG}$.

Lời giải.

CÂU 36. Cho $\triangle ABC$. Trên các cạnh AB, BC và CA lấy các điểm D, E, F sao cho $DA = 2DB, EB = 2EC, FC = 2FA$. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau đây.

- Ⓐ $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$. Ⓑ $\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.
 Ⓒ $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$. Ⓓ $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$.

Lời giải.

CÂU 37. Cho tứ giác $ABCD$ và điểm G thỏa mãn $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + 2\overrightarrow{GC} + k\overrightarrow{GD} = \vec{0}$. Gọi I, J lần lượt là trọng tâm tam giác các ACD, BCD . Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh CD, AB . Tìm k sao cho G là trung điểm của IJ .

☐ A $k = 1$.

☐ B $k = 2$.

☐ C $k = 3$.

☐ D $k = 4$.

💬 Lời giải.

CÂU 38. Cho ngũ giác $ABCDE$ có M, N, P, Q lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC, CD, DE . Gọi I, J lần lượt là trung điểm của MP, NQ . Biết $\overrightarrow{IJ} = k\overrightarrow{EA}$, tìm k .

☐ A $k = -\frac{1}{2}$.

☐ B $k = \frac{1}{2}$.

☐ C $k = -\frac{1}{4}$.

☐ D $k = \frac{1}{4}$.

💬 Lời giải.

3

Xác định điểm thỏa mãn đẳng thức vectơ

Phương pháp giải

Bài toán: Xác định điểm M thỏa mãn đẳng thức vectơ cho trước

- ☑ Bước 1. Ta biến đổi đẳng thức đã cho (bằng chèn điểm, quy tắc ba điểm, qui tắc hình bình hành, tính chất trung điểm, trọng tâm, ...) về dạng: $\overrightarrow{OM} = \vec{v}$. Trong đó điểm O và vectơ \vec{v} cho trước.
- ☑ Bước 2. Nếu muốn dựng điểm M , ta lấy điểm O làm gốc, dựng một vectơ bằng vectơ \vec{v} , khi đó điểm ngọn của vectơ này chính là điểm M .



☑ **Lưu ý 1.** Thông thường, biểu thức $\overrightarrow{OM} = \vec{v}$ là những biểu thức đặc biệt (trung điểm, trọng tâm, điểm chia đoạn thẳng theo tỉ lệ $\vec{a} = k\vec{b}$, hình bình hành, ...). Ta dựa vào biểu thức này để dựng.

☑ **Lưu ý 2.** Một số cách chứng minh thường dùng.

— Để chứng minh I là trung điểm của đoạn thẳng AB , ta cần chứng minh một trong các hệ thức sau

$$\begin{aligned} &+ \overrightarrow{IA} = \overrightarrow{IB}. \\ &+ \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}. \\ &+ 2\overrightarrow{IA} = \overrightarrow{AB}. \\ &+ 2\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} \text{ (} O \text{ bất kì)}. \end{aligned}$$

— Để chứng minh điểm G là trọng tâm của $\triangle ABC$, ta cần chứng minh một trong các hệ thức sau

$$\begin{aligned} &+ \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}. \\ &+ \text{Với } I \text{ là trung điểm của cạnh } BC \text{ thì } \overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AI}. \\ &+ \text{Với } O \text{ là điểm bất kì trong mặt phẳng thì: } 3\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}. \end{aligned}$$

— Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành $\Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \\ \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \end{cases}$.

— Để chứng minh hai điểm A_1 và A_2 trùng nhau ta có thể chứng minh một trong các hệ thức sau

$$\begin{aligned} &+ \overrightarrow{A_1A_2} = \vec{0}. \\ &+ \overrightarrow{OA_1} = \overrightarrow{OA_2} \text{ với } O \text{ là điểm bất kì}. \end{aligned}$$

— Điều kiện cần và đủ để $\triangle ABC$ và $\triangle A'B'C'$ có cùng trọng tâm là

$$\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \vec{0}.$$

— Nếu $\overrightarrow{MB} = k \cdot \overrightarrow{MC}$ ($k \neq 1$) thì $\overrightarrow{AM} = \frac{\overrightarrow{AB} - k \cdot \overrightarrow{AC}}{1 - k}$ (hay điểm M chia đoạn AB theo tỉ số $k \neq 1$).

1. Ví dụ minh họa

VÍ DỤ 1. Cho hai điểm A và B . Xác định điểm M thỏa mãn $2\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} = \vec{0}$.

Lời giải.

VÍ DỤ 2. Cho tam giác ABC . Gọi M là trung điểm của AB và N thuộc cạnh AC , sao cho $NC = 2NA$. Hãy xác định K và D khi

a) $3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} - 12\overrightarrow{AK} = \vec{0}$.

b) $3\overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{AC} - 12\overrightarrow{KD} = \vec{0}$.

💬 **Lời giải.**

VÍ DỤ 3. Cho hình bình hành $ABCD$.

a) Hãy dựng các điểm M, N thỏa mãn $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{NC} + \overrightarrow{ND} - \overrightarrow{NA} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}$.

b) Chứng minh rằng $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{BA}$.

Lời giải.

VÍ DỤ 4. Cho trước hai điểm A, B và hai số thực α, β thỏa mãn $\alpha + \beta \neq 0$

a) Chứng minh rằng tồn tại duy nhất điểm I thỏa mãn $\alpha \cdot \overrightarrow{IA} + \beta \cdot \overrightarrow{IB} = \vec{0}$.

b) Từ đó suy ra với điểm M bất kỳ, ta luôn có: $\alpha \cdot \overrightarrow{MA} + \beta \cdot \overrightarrow{MB} = (\alpha + \beta) \cdot \overrightarrow{MI}$.

Lời giải.

⚠ **Lời bình 3**

- ☑ Nếu $\alpha = \beta = 1$ thì điểm I chính là trung điểm của AB .
- ☑ Bài toán trên được mở rộng cho ba điểm A, B, C và bộ 3 số thực α, β, γ cho trước thỏa mãn $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$, nghĩa là:
 - Tồn tại điểm I duy nhất thỏa mãn $\alpha \cdot \overrightarrow{IA} + \beta \cdot \overrightarrow{IB} + \gamma \cdot \overrightarrow{IC} = \vec{0}$
 - Từ đó suy ra với điểm M bất kỳ, ta luôn có $\alpha \cdot \overrightarrow{IA} + \beta \cdot \overrightarrow{IB} + \gamma \cdot \overrightarrow{IC} = (\alpha + \beta + \gamma) \cdot \overrightarrow{MI}$.
 Khi $\alpha = \beta = \gamma = 1$ thì I là trọng tâm của $\triangle ABC$.
- ☑ Bài toán trên vẫn đúng với n điểm A_i ($i = \overline{1, n}$) và bộ số thực α_i ($i = \overline{1, n}$) thỏa mãn $\sum_{i=1}^n \alpha_i \neq 0$
- ☑ Kết quả trên dùng giải bài toán “Cho n điểm A_i , $i = \overline{1, n}$ và bộ số thực α_i , $i = \overline{1, n}$ thỏa mãn $\sum_{i=1}^n \alpha_i \neq 0$. Tìm số thực k và điểm cố định I sao cho đẳng thức vectơ $\sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{MA_i} = k \cdot \overrightarrow{MI}$ thỏa mãn với mọi điểm M ”.

2. Bài tập áp dụng

BÀI 1. Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $ACEF$.

- a) Dựng các điểm M, N sao cho $\overrightarrow{EM} = \overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{FN} = \overrightarrow{BD}$.
- b) Chứng minh $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{MN}$.

BÀI 2. Cho tam giác ABC .

- a) Chứng minh với mọi điểm M , ta luôn có $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{CB}$.
- b) Hãy dựng điểm D sao cho $\overrightarrow{DA} + 2\overrightarrow{DB} - 3\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{CB}$.

BÀI 3. Cho tứ giác $ABCD$, M là điểm tùy ý. Trong mỗi trường hợp hãy tìm số k và điểm cố định I, J, K sao cho đẳng thức vectơ sau thỏa mãn với mọi điểm M .

- a) $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = k \cdot \overrightarrow{MI}$.
- b) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2 \cdot \overrightarrow{MC} = k \cdot \overrightarrow{MJ}$.

c) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + 3 \cdot \overrightarrow{MD} = k \cdot \overrightarrow{MK}$

BÀI 4. Cho tứ giác lồi $ABCD$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA . Chứng minh $\triangle ANP$ và $\triangle CMQ$ có cùng trọng tâm.

3. Bài tập trắc nghiệm

CÂU 1. Cho điểm A và vectơ \vec{u} . Có bao nhiêu điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{AM} = \vec{u}$?

- ☐ A Duy nhất một. ☐ B Hai. ☐ C Không có. ☐ D Vô số.

Lời giải.

CÂU 2. Cho hình bình hành $ABCD$, điểm M thỏa mãn $4\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$. Khi đó M là

- ☐ A trung điểm AC . ☐ B điểm C . ☐ C trung điểm AB . ☐ D trung điểm AD .

Lời giải.

CÂU 3. Cho hai vectơ \vec{a} và \vec{b} khác $\vec{0}$ và không cùng phương. Biết hai vectơ $\vec{u} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$ và $\vec{v} = \vec{a} + (x - 1)\vec{b}$ cùng phương. Khi đó giá trị của x là

- ☐ A $\frac{1}{2}$. ☐ B $-\frac{3}{2}$. ☐ C $-\frac{1}{2}$. ☐ D $\frac{3}{2}$.

Lời giải.

CÂU 4. Cho hai điểm phân biệt A, B và hai số thực α, β khác 0 thỏa mãn $\alpha + \beta = 0$. Có bao nhiêu điểm M thỏa mãn $\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} = \vec{0}$?

- ☐ A 0. ☐ B 1. ☐ C 2. ☐ D 3.

Lời giải.

CÂU 5. Cho ba điểm không thẳng hàng A, B, C và M là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CM}$. Chọn khẳng định đúng.

- ☐ A $ABMC$ là hình bình hành. ☐ B $ABCM$ là hình bình hành.
☐ C M là trọng tâm của tam giác ABC . ☐ D CM là trung tuyến của tam giác ABC .

Lời giải.

CÂU 6. Cho hai điểm phân biệt A, B và hai số thực α, β thoả mãn $\alpha + \beta \neq 0$. Có bao nhiêu điểm M thoả mãn $\alpha \overrightarrow{MA} + \beta \overrightarrow{MB} = \vec{0}$?

- (A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

Lời giải.

CÂU 7. Cho hai điểm phân biệt A và B . Điều kiện cần và đủ để I là trung điểm của đoạn thẳng AB là

- (A) $IA = IB$. (B) $\overrightarrow{IA} = -\overrightarrow{IB}$. (C) $\overrightarrow{IA} = \overrightarrow{IB}$. (D) $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{BI}$.

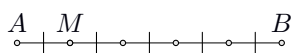
Lời giải.

CÂU 8. Cho tam giác ABC , điểm I là trung điểm BC . Điểm G có tính chất nào sau đây thì G là trọng tâm tam giác ABC ?

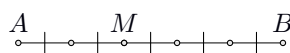
- (A) $\overrightarrow{GI} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AI}$. (B) $GA = 2GI$.
(C) $\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{CG} = \vec{0}$. (D) $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 2\overrightarrow{GI}$.

Lời giải.

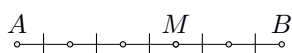
CÂU 9. Cho đoạn thẳng AB , hình nào sau đây biểu diễn đúng điểm M thoả mãn $\overrightarrow{MA} + 4\overrightarrow{MB} = \vec{0}$.



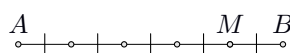
Hình 1



Hình 2



Hình 3



Hình 4

- (A) Hình 1. (B) Hình 2. (C) Hình 3. (D) Hình 4.

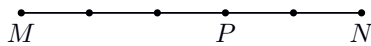
Lời giải.

CÂU 10. Cho đoạn thẳng AB có trung điểm I . Tìm điểm M thỏa mãn $3\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$.

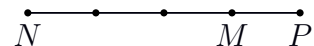
- Ⓐ M trùng với I . Ⓑ M là trung điểm của BI .
Ⓒ M là trung điểm của AI . Ⓓ M trùng với A hoặc M trùng với B .

Lời giải.

CÂU 11. Trên đường thẳng MN lấy điểm P sao cho $\overrightarrow{MN} = -3\overrightarrow{MP}$. Điểm P được xác định trong hình vẽ nào sau đây?



Hình 1



Hình 3



Hình 2

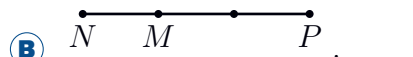
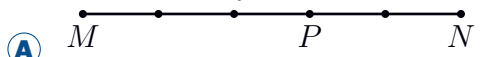


Hình 4

- Ⓐ Hình 1. Ⓑ Hình 2. Ⓒ Hình 3. Ⓓ Hình 4.

Lời giải.

CÂU 12. Trên đường thẳng MN lấy điểm P sao cho $\overrightarrow{MN} = -3\overrightarrow{MP}$. Điểm P được xác định đúng theo hình vẽ nào sau đây.



Lời giải.

CÂU 13. Cho tam giác ABC với I là trung điểm của AB . Tìm điểm M thỏa mãn hệ thức $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = \vec{0}$.

- Ⓐ M là trung điểm của IC . Ⓑ M là trung điểm của IA .
Ⓒ M là điểm trên cạnh IC sao cho $IM = 2MC$. Ⓓ M là trung điểm của BC .

Lời giải.

CÂU 14. Dạng thức nào sau đây mô tả đúng hình vẽ bên?

- ☐ A $3\vec{AI} + \vec{AB} = \vec{0}$.
 ☐ B $3\vec{IA} + \vec{IB} = \vec{0}$.
 ☐ C $\vec{BI} + 3\vec{BA} = \vec{0}$.
 ☐ D $\vec{AI} + 3\vec{AB} = \vec{0}$.



💬 Lời giải.

CÂU 15. Trong mặt phẳng Oxy , tam giác ABC có trọng tâm G là điểm M thỏa mãn $\vec{AB} + \vec{AC} + 6\vec{AG} = 6\vec{AM}$. Vị trí của điểm M là

- ☐ A M là trung điểm của AC .
 ☐ B M là trung điểm của BC .
 ☐ C M là điểm thứ tư của hình bình hành $ABCM$.
 ☐ D M là trung điểm của AB .

💬 Lời giải.

CÂU 16. Cho tam giác ABC . Để điểm M thỏa mãn điều kiện $\vec{MA} + \vec{BM} + \vec{MC} = \vec{0}$ thì M phải thỏa mãn

- ☐ A M là trọng tâm tam giác ABC .
 ☐ B M là điểm sao cho tứ giác $ABMC$ là hình bình hành.
 ☐ C M thuộc trung trực của AB .
 ☐ D M là điểm sao cho tứ giác $BAMC$ là hình bình hành.

💬 Lời giải.

CÂU 17. Cho tứ giác $ABCD$ và M là điểm thỏa $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} + \vec{MD} = \vec{0}$. Chọn khẳng định đúng.

- ☐ A M là giao điểm hai đường chéo của tứ giác $ABCD$.

- Ⓑ M là giao điểm của các đoạn thẳng nối hai trung điểm hai cạnh đối diện của tứ giác $ABCD$.
- Ⓒ M là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $ABCD$.
- Ⓓ M là tâm đường tròn nội tiếp tứ giác $ABCD$.

Lời giải.

CÂU 18. Cho tam giác ABC , gọi M là điểm thoả mãn $\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = \vec{0}$. Khi đó,

- Ⓐ $ABCM$ là hình bình hành. Ⓑ $ABMC$ là hình bình hành.
- Ⓒ $ABCM$ là hình bình thang có đáy lớn AM . Ⓓ $ABCM$ là hình bình thang có đáy lớn BC .

Lời giải.

CÂU 19. Gọi G và G' lần lượt là trọng tâm của hai tam giác ABC và $A'B'C'$. Tìm điều kiện cần và đủ để $G \equiv G'$.

- Ⓐ $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} + 3\overrightarrow{GG'} = \vec{0}$. Ⓑ $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = 3\overrightarrow{GG'}$.
- Ⓒ $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} - 3\overrightarrow{G'G} = \vec{0}$. Ⓓ $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = 3\overrightarrow{G'G}$.

Lời giải.

CÂU 20. Cho tam giác ABC có I là trung điểm BC . Gọi M là điểm thoả mãn $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$. Xác định vị trí của điểm M .

- Ⓐ M là trọng tâm tam giác ABC .
- Ⓑ M là trung điểm AI .
- Ⓒ M là điểm thuộc đoạn thẳng AI thoả $MA = 2MI$.
- Ⓓ M là điểm thuộc đoạn thẳng AI thoả $MI = 2MA$.

Lời giải.

CÂU 21. Cho hình bình hành $ABCD$, điểm M thỏa $4\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$. Khi đó điểm M là
 (A) trung điểm AC . (B) điểm C . (C) trung điểm AB . (D) trung điểm AD .

Lời giải.

CÂU 22. Cho tam giác ABC . Gọi D, E là các điểm xác định bởi $\overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AE} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$. Gọi K là trung điểm của DE và M xác định bởi $\overrightarrow{BM} = x\overrightarrow{BC}$. Tìm giá trị thực của x sao cho A, K, M thẳng hàng.
 (A) $\frac{3}{8}$. (B) $-\frac{4}{3}$. (C) $\frac{8}{3}$. (D) $-\frac{3}{4}$.

Lời giải.

CÂU 23. Cho tam giác ABC . Gọi D là trung điểm cạnh AC và I là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} + 3\overrightarrow{IC} = \vec{0}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- (A) I là trực tâm tam giác BCD . (B) I là trọng tâm tam giác ABC .
 (C) I là trọng tâm tam giác CDB . (D) I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC .

Lời giải.

CÂU 24. Cho đoạn thẳng AB và M là một điểm nằm trên đường thẳng AB sao cho $\overrightarrow{MA} = -\frac{1}{5}\overrightarrow{AB}$. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

- (A) $\overrightarrow{MB} = -4\overrightarrow{MA}$. (B) $\overrightarrow{MB} = -\frac{4}{5}\overrightarrow{AB}$. (C) $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AB}$. (D) $\overrightarrow{MA} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{MB}$.

Lời giải.

CÂU 25. Cho tam giác ABC . Hãy xác định vị trí điểm M thỏa mãn $2\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} = \vec{0}$.

- ☐ A M thuộc cạnh AB và $AM = 2MB$.
 ☐ B M trên AB và ngoài đoạn AB .
 ☐ C M là trung điểm AB .
 ☐ D M không thuộc đoạn AB .

Lời giải.

CÂU 26. Cho tam giác ABC , N là trung điểm AB , M là điểm thỏa mãn đẳng thức $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

Kết luận nào dưới đây đúng?

- ☐ A M đối xứng với C qua A .
 ☐ B A đối xứng với M qua C .
 ☐ C C đối xứng với A qua M .
 ☐ D M là điểm tùy ý.

Lời giải.

CÂU 27. Cho tam giác ABC và điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AB}$. Tìm vị trí điểm M .

- ☐ A M là điểm thứ tư của hình bình hành $ABCM$.
 ☐ B M là trung điểm của AB .
 ☐ C M là trung điểm của BC .
 ☐ D M là trung điểm của AC .

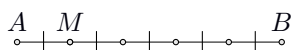
Lời giải.

CÂU 28. Cho tam giác ABC , I là trung điểm AC . Vị trí điểm N thỏa mãn $\overrightarrow{NA} + 2\overrightarrow{NB} = \overrightarrow{CB}$ xác định bởi hệ thức

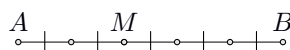
- ☐ A $\overrightarrow{BN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BI}$.
 ☐ B $\overrightarrow{BN} = 2\overrightarrow{BI}$.
 ☐ C $\overrightarrow{BN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BI}$.
 ☐ D $\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BI}$.

Lời giải.

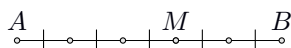
CÂU 29. Cho đoạn thẳng AB , hình nào sau đây biểu diễn đúng điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MA} + 4\overrightarrow{MB} = \vec{0}$.



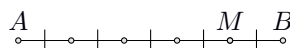
Hình 1



Hình 2



Hình 3



Hình 4

- ☐ A Hình 1. ☐ B Hình 2. ☐ C Hình 3. ☐ D Hình 4.

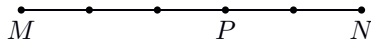
💬 Lời giải.

CÂU 30. Cho đoạn thẳng AB có trung điểm I . Tìm điểm M thỏa mãn $3\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$.

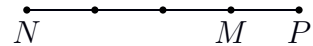
- ☐ A M trùng với I . ☐ B M là trung điểm của BI .
☐ C M là trung điểm của AI . ☐ D M trùng với A hoặc M trùng với B .

💬 Lời giải.

CÂU 31. Trên đường thẳng MN lấy điểm P sao cho $\overrightarrow{MN} = -3\overrightarrow{MP}$. Điểm P được xác định trong hình vẽ nào sau đây?



Hình 1



Hình 3



Hình 2

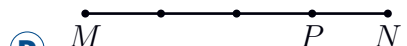
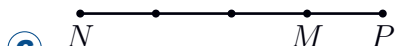
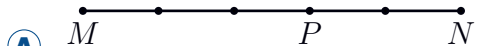


Hình 4

- A** Hình 1. **B** Hình 2. **C** Hình 3. **D** Hình 4.

Lời giải.

CÂU 32. Trên đường thẳng MN lấy điểm P sao cho $\overrightarrow{MN} = -3\overrightarrow{MP}$. Điểm P được xác định đúng theo hình vẽ nào sau đây.



Lời giải.

CÂU 33. Dạng thức nào sau đây mô tả đúng hình vẽ bên?



- A** $3\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AB} = \vec{0}$. **B** $3\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$.
C $\overrightarrow{BI} + 3\overrightarrow{BA} = \vec{0}$. **D** $\overrightarrow{AI} + 3\overrightarrow{AB} = \vec{0}$.

Lời giải.

CÂU 34. Trong mặt phẳng Oxy , tam giác ABC có trọng tâm G là điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + 6\overrightarrow{AG} = 6\overrightarrow{AM}$. Vị trí của điểm M là

- A** M là trung điểm của AC . **B** M là trung điểm của BC .
C M là điểm thứ tư của hình bình hành $ABCM$. **D** M là trung điểm của AB .

Lời giải.

4

Biểu diễn vector theo hai vector không cùng phương

Đặt vấn đề : Trong dạng toán này, chúng ta giải quyết bài toán dựa vào kiến thức: “Cho trước hai vector \vec{a} , \vec{b} khác $\vec{0}$ và không cùng phương. Với mọi vector \vec{c} ta luôn tìm được một cặp số thực (α, β) duy nhất sao cho $\vec{c} = \alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{b}$ ”.

Phương pháp giải : Ta có thể chọn 1 trong 2 hướng giải sau

- ## 1. Ví dụ minh họa

a) $\overrightarrow{CB_1}$ và $\overrightarrow{AB_1}$ theo \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AC} .

b) $\overrightarrow{MB_1}$ theo $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$.

Lời giải.

43 GV.VŨ NGỌC PHÁT

a) Tính $\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AJ}$ theo $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$.

b) Tính \overrightarrow{AG} theo \overrightarrow{AI} và \overrightarrow{AJ} .

Lời giải.

VÍ DỤ 3. Cho $\triangle ABC$ và hai điểm D, E thỏa mãn $\overrightarrow{DB} = k \cdot \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{EB} = \frac{1}{k} \overrightarrow{EC}$ (với $k \neq 1$).

a) Biểu diễn các vectơ $\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}, \overrightarrow{DE}$ theo các vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$.

b) Điểm F, I thỏa mãn $\overrightarrow{FA} = k \cdot \overrightarrow{FB}, \overrightarrow{IC} = k \cdot \overrightarrow{IA}$. Chứng minh $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BI} + \overrightarrow{CF} = \vec{0}$.

Lời giải.

2. Bài tập áp dụng

BÀI 1. Cho $\triangle ABC$ có M, D lần lượt là trung điểm của AB, BC và N là điểm trên cạnh AC sao cho $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{NC}$. Gọi K là trung điểm của MN . Hãy tính các vectơ $\overrightarrow{AK}, \overrightarrow{KD}$ theo $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$.

BÀI 2. Cho $\triangle ABC$. Trên hai cạnh AB và AC lấy hai điểm D và E sao cho $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{CE} = 3\overrightarrow{EA}$. Gọi M, I lần lượt là trung điểm của DE và BC . Hãy tính vectơ $\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{MI}$ theo $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$.

BÀI 3. Cho $\triangle ABC$, lấy điểm M, N, P sao cho $\overrightarrow{MB} = 3\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{NA} + 3\overrightarrow{NC} = \vec{0}, \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} = \vec{0}$. Phân tích $\overrightarrow{PM}, \overrightarrow{PN}$ theo $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$.

BÀI 4. Cho hình bình hành $ABCD$ có tâm là O . Hãy tính các vectơ sau theo vectơ \overrightarrow{AB} và \overrightarrow{AD} .

a) \overrightarrow{AI} với I là trung điểm của \overrightarrow{BO} .

b) \overrightarrow{BG} với G là trọng tâm $\triangle OCD$.

BÀI 5. Cho $\triangle ABC$ có hai đường trung tuyến BN, CP . Hãy biểu thị các vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}$ theo các vectơ $\overrightarrow{BN}, \overrightarrow{CP}$.

BÀI 6. Cho $\triangle ABC$ có trọng tâm G . Gọi I, J nằm trên cạnh BC và BC kéo dài sao cho $2CI = 3BI, 5JB = 2JC$.

a) Tính $\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AJ}$ theo $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$.

b) Tính \overrightarrow{AG} theo $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$.

BÀI 7. Cho $\triangle ABC$ có G là trọng tâm tam giác và I là điểm đối xứng của B qua G . M là trung điểm của BC . Hãy tính $\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{CI}, \overrightarrow{MI}$ theo $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$.

BÀI 8. Cho $\triangle ABC$ có trọng tâm là G và các đường trung tuyến AM, BP . Gọi G' là điểm đối xứng với điểm G qua P .

a) Hãy biểu diễn các vectơ $\overrightarrow{AG'}, \overrightarrow{CG'}$ theo $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$.

b) Chứng minh hệ thức: $5\overrightarrow{AC} - 6\overrightarrow{AB} = 6\overrightarrow{MG'}$.

BÀI 9. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm của các cạnh BC, CD . Hãy biểu diễn các vectơ $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD}$ theo các vectơ $\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AN}$.

BÀI 10. Cho tứ giác $ABCD$ có M, N theo thứ tự là trung điểm của các cạnh AD, BC . Hãy biểu diễn vectơ \overrightarrow{MN} theo $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}$ và theo $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{DB}$.

BÀI 11. Cho $\triangle ABC$. Gọi I là điểm đối xứng của trọng tâm G qua B .

a) Chứng minh $\overrightarrow{IA} - 5\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \vec{0}$.

b) Đặt $\overrightarrow{AG} = \vec{a}, \overrightarrow{AI} = \vec{b}$. Tính $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ theo \vec{a}, \vec{b} .

BÀI 12. Cho $\triangle ABC$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB . Tính các vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}$ theo các vectơ $\overrightarrow{BN}, \overrightarrow{CP}$.

BÀI 13. Cho $\triangle ABC$. Gọi I là điểm trên cạnh BC kéo dài sao cho $IB = 3IC$.

a) Tính \overrightarrow{AI} theo $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$.

b) Gọi J và K lần lượt là các điểm thuộc cạnh AC, AB sao cho $JA = 2JC$ và $KB = 3KA$. Tính \overrightarrow{JK} theo $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$.

c) Tính \overrightarrow{BC} theo \overrightarrow{AI} và \overrightarrow{JK} .

3. Bài tập trắc nghiệm

CÂU 1. Cho tam giác ABC có M là trung điểm của đoạn BC . Tìm mệnh đề đúng.

A $\overrightarrow{AM} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

B $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

C $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

D $\overrightarrow{AM} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

Lời giải.

.....

.....

.....

.....

.....

CÂU 2. Cho hình bình hành $ABCD$, gọi I là trung điểm của CD , đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$. Biểu diễn vectơ \overrightarrow{BI} theo các vectơ \vec{a} , \vec{b} .

- Ⓐ $\overrightarrow{BI} = -\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$. Ⓑ $\overrightarrow{BI} = \vec{a} + \vec{b}$. Ⓒ $\overrightarrow{BI} = -\frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b}$. Ⓓ $\overrightarrow{BI} = \frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b}$.

💬 Lời giải.

CÂU 3. Cho tam giác ABC và một điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{BM} = k\overrightarrow{BC}$. Biểu diễn vectơ \overrightarrow{AM} theo các vectơ \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AC} .

- Ⓐ $\overrightarrow{AM} = (1-k)\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{AC}$. Ⓑ $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{AC}$.
Ⓒ $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB} + (1-k)\overrightarrow{AC}$. Ⓓ $\overrightarrow{AM} = (1-k)\overrightarrow{AB} + (1-k)\overrightarrow{AC}$.

💬 Lời giải.

CÂU 4. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi I là điểm trên cạnh BC được xác định bởi $\overrightarrow{BI} = k\overrightarrow{BC}$ ($k \neq 1$). Tìm hệ thức liên hệ giữa \overrightarrow{DI} , \overrightarrow{DB} , \overrightarrow{DC} .

- Ⓐ $\overrightarrow{DI} = (k-1)\overrightarrow{DB} - k\overrightarrow{DC}$. Ⓑ $\overrightarrow{DI} = (1-k)\overrightarrow{DB} + k\overrightarrow{DC}$.
Ⓒ $\overrightarrow{DI} = (1+k)\overrightarrow{DB} - k\overrightarrow{DC}$. Ⓓ $\overrightarrow{DI} = (1+k)\overrightarrow{DB} + k\overrightarrow{DC}$.

💬 Lời giải.

CÂU 5. Cho tam giác ABC có M là trung điểm của BC . Tính \overrightarrow{AB} theo \overrightarrow{AM} và \overrightarrow{BC} .

- Ⓐ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$. Ⓑ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AM}$. Ⓒ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$. Ⓓ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AM}$.

💬 Lời giải.

CÂU 6. Cho tam giác ABC có M là trung điểm của BC , I là trung điểm của AM . Khẳng định nào sau đây đúng?

- Ⓐ $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$. Ⓑ $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC})$. Ⓒ $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$. Ⓓ $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

Lời giải.

CÂU 7. Cho tam giác ABC . Hai điểm M, N chia cạnh BC theo ba phần bằng nhau $BM = MN = NC$. Tính \overrightarrow{AM} theo \overrightarrow{AB} và \overrightarrow{AC} .

- Ⓐ $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$. Ⓑ $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$. Ⓒ $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$. Ⓓ $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.

Lời giải.

CÂU 8. Cho tam giác ABC có G là trọng tâm tam giác. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

- Ⓐ $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{CG} = \vec{0}$. Ⓑ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AG}$.
Ⓒ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AG}$. Ⓓ $2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{AG}$.

Lời giải.

CÂU 9. Cho $\triangle ABC$ có M là trung điểm của BC . Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

- Ⓐ $2\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$. Ⓑ $2\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$. Ⓒ $2\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC}$. Ⓓ $2\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}$.

Lời giải.

CÂU 10. Cho $\triangle ABC$ và I thỏa mãn $\overrightarrow{IA} = 3\overrightarrow{IB}$. Phân tích \overrightarrow{CI} theo \overrightarrow{CA} và \overrightarrow{CB} .

A $\overrightarrow{CI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CA} - 3\overrightarrow{CB})$.

B $\overrightarrow{CI} = \overrightarrow{CA} - 3\overrightarrow{CB}$.

C $\overrightarrow{CI} = \frac{1}{2}(3\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA})$.

D $\overrightarrow{CI} = 3\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}$.

💬 **Lời giải.**

CÂU 11. Cho hình bình hành $ABCD$ có N là trung điểm AB và G là trọng tâm $\triangle ABC$. Phân tích \overrightarrow{GA} theo \overrightarrow{BD} và \overrightarrow{NC} .

A $\overrightarrow{GA} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{BD} + \frac{2}{3}\overrightarrow{NC}$.

B $\overrightarrow{GA} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BD} - \frac{4}{3}\overrightarrow{NC}$.

C $\overrightarrow{GA} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BD} + \frac{2}{3}\overrightarrow{NC}$.

D $\overrightarrow{GA} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BD} - \frac{2}{3}\overrightarrow{NC}$.

💬 **Lời giải.**

CÂU 12. Cho $\triangle ABC$ có AK, BM là hai trung tuyến. Đặt $\overrightarrow{AK} = \vec{a}, \overrightarrow{BM} = \vec{b}$. Hãy biểu diễn \overrightarrow{BC} theo \vec{a} và \vec{b} là

A $\overrightarrow{BC} = \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{4}{3}\vec{b}$.

B $\overrightarrow{BC} = \frac{2}{3}\vec{a} - \frac{4}{3}\vec{b}$.

C $\overrightarrow{BC} = -\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{4}{3}\vec{b}$.

D $\overrightarrow{BC} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{4}{3}\vec{b}$.

💬 **Lời giải.**

CÂU 13. Cho $\triangle ABC$ với trọng tâm G . Đặt $\overrightarrow{CA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CB} = \vec{b}$. Biểu thị vectơ \overrightarrow{AG} theo hai vectơ \vec{a} và \vec{b} ta được

- Ⓐ $\overrightarrow{AG} = \frac{2\vec{a} - \vec{b}}{3}$. Ⓑ $\overrightarrow{AG} = \frac{-2\vec{a} + \vec{b}}{3}$. Ⓒ $\overrightarrow{AG} = \frac{2\vec{a} + \vec{b}}{3}$. Ⓓ $\overrightarrow{AG} = \frac{\vec{a} - 2\vec{b}}{3}$.

Lời giải.

CÂU 14. Cho tam giác ABC . Gọi M trên cạnh BC sao cho $MB = 3MC$. Khi đó, biểu diễn vectơ \overrightarrow{AM} theo vectơ \overrightarrow{AB} và vectơ \overrightarrow{AC} là

- Ⓐ $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}$. Ⓑ $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$. Ⓒ $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$. Ⓓ $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$.

Lời giải.

CÂU 15. Cho tam giác ABC có trọng tâm G . Đặt $\overrightarrow{CA} = \vec{u}$, $\overrightarrow{CB} = \vec{v}$. Khi đó \overrightarrow{AG} bằng

- Ⓐ $\frac{2\vec{u} - \vec{v}}{3}$. Ⓑ $\frac{2\vec{u} + \vec{v}}{3}$. Ⓒ $\frac{\vec{u} - 2\vec{v}}{3}$. Ⓓ $\frac{-2\vec{u} + \vec{v}}{3}$.

Lời giải.

CÂU 16. Cho tam giác ABC có G là trọng tâm tam giác. Điểm N trên BC sao cho $\overrightarrow{CN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$. Biểu

diễn vectơ \overrightarrow{AC} theo các vectơ \overrightarrow{AG} và \overrightarrow{AN} .

- Ⓐ $\overrightarrow{AC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AG} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AN}$. Ⓑ $\overrightarrow{AC} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AG} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AN}$. Ⓒ $\overrightarrow{AC} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AG} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AN}$. Ⓓ $\overrightarrow{AC} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AG} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AN}$.

💬 Lời giải.

CÂU 17. Cho $\triangle ABC$ với G là trọng tâm. Đặt $\overrightarrow{CA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CB} = \vec{b}$. Khi đó \overrightarrow{AG} được biểu diễn theo hai vectơ \vec{a} và \vec{b} là

- Ⓐ $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\vec{a} - \frac{2}{3}\vec{b}$. Ⓑ $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$. Ⓒ $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b}$. Ⓓ $\overrightarrow{AG} = -\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$.

💬 Lời giải.

CÂU 18. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC . Đặt $\overrightarrow{GA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{GB} = \vec{b}$. Tìm các giá trị thực của m, n để $\overrightarrow{BC} = m\vec{a} + n\vec{b}$.

- Ⓐ $m = 1; n = 2$. Ⓑ $m = -1; n = -2$. Ⓒ $m = -2; n = -1$. Ⓓ $m = 2; n = 1$.

💬 Lời giải.

CÂU 19. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD và BC . Hãy tìm m và n sao cho $\overrightarrow{MN} = m\overrightarrow{AB} + n\overrightarrow{DC}$.

- Ⓐ $m = \frac{1}{2}, n = \frac{1}{2}$. Ⓑ $m = -\frac{1}{2}, n = \frac{1}{2}$. Ⓒ $m = \frac{1}{2}, n = -\frac{1}{2}$. Ⓓ $m = -\frac{1}{2}, n = -\frac{1}{2}$.

💬 Lời giải.

CÂU 20. Gọi G là trọng tâm của $\triangle ABC$. Đặt $\overrightarrow{GA} = \vec{a}, \overrightarrow{GB} = \vec{b}$. Hãy tìm m, n để có $\overrightarrow{BC} = m\vec{a} + n\vec{b}$.

- Ⓐ $m = 1, n = 2$. Ⓑ $m = -1, n = -2$. Ⓒ $m = 2, n = 1$. Ⓓ $m = -2, n = -1$.

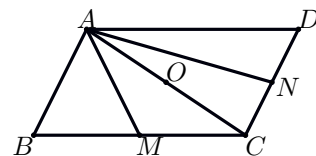
💬 Lời giải.

CÂU 21. Cho tứ giác $ABCD$ (với AB, CD không song song). Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD và BC . Tìm m, n để $\overrightarrow{MN} = m\overrightarrow{AB} + n\overrightarrow{DC}$.

- Ⓐ $m = \frac{1}{2}, n = \frac{1}{2}$. Ⓑ $m = -\frac{1}{2}, n = \frac{1}{2}$. Ⓒ $m = \frac{1}{2}, n = -\frac{1}{2}$. Ⓓ $m = -\frac{1}{2}, n = -\frac{1}{2}$.

💬 Lời giải.

CÂU 22. Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC và CD . Đặt $\vec{a} = \overrightarrow{AM}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AN}$. Hãy biểu diễn \overrightarrow{AO} theo \vec{a} và \vec{b} .



A $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$.

B $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{6}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$.

C $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{3}\vec{a} + 2\vec{b}$.

D $\overrightarrow{AO} = \vec{a} + 3\vec{b}$.

💬 **Lời giải.**

CÂU 23. Cho tam giác ABC . Gọi M là trung điểm của AB và N là một điểm trên cạnh AC sao cho $NC = 2NA$. Gọi K là điểm trên cạnh MN sao cho $KN = 3KM$. Kết quả nào dưới đây đúng?

A $\overrightarrow{AK} = -\frac{3}{8}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{12}\overrightarrow{AC}$.

B $\overrightarrow{AK} = -\frac{3}{8}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{12}\overrightarrow{AC}$.

C $\overrightarrow{AK} = \frac{3}{8}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{12}\overrightarrow{AC}$.

D $\overrightarrow{AK} = \frac{3}{8}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{12}\overrightarrow{AC}$.

💬 **Lời giải.**

CÂU 24. Cho tứ giác $ABCD$. Trên cạnh AB, CD lần lượt lấy các điểm M, N sao cho $3\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB}$ và $3\overrightarrow{DN} = 2\overrightarrow{DC}$. Tính vectơ \overrightarrow{MN} theo hai vectơ $\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BC}$.

A $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.

B $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} - \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$.

C $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$.

D $\overrightarrow{MN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.

💬 **Lời giải.**

CÂU 25. Cho tam giác đều ABC và điểm I thỏa mãn $\overrightarrow{IA} = 2\overrightarrow{IB}$. Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

- Ⓐ $\overrightarrow{CI} = \frac{\overrightarrow{CA} - 2\overrightarrow{CB}}{3}$. Ⓑ $\overrightarrow{CI} = \frac{\overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{CB}}{3}$. Ⓒ $\overrightarrow{CI} = -\overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{CB}$. Ⓓ $\overrightarrow{CI} = \frac{\overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{CB}}{-3}$.

Lời giải.

CÂU 26. Cho tam giác ABC có G là trọng tâm tam giác. Lấy các điểm P, Q sao cho $\overrightarrow{PA} = 2\overrightarrow{PB}$, $3\overrightarrow{QA} + 2\overrightarrow{QC} = \vec{0}$. Biểu diễn vectơ \overrightarrow{AG} theo các vectơ $\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AQ}$.

- Ⓐ $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AP} + \frac{5}{6}\overrightarrow{AQ}$. Ⓑ $\overrightarrow{AG} = \frac{5}{6}\overrightarrow{AP} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AQ}$. Ⓒ $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AP} + \frac{5}{6}\overrightarrow{AQ}$. Ⓓ $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AP} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AQ}$.

Lời giải.

CÂU 27. Cho tam giác ABC . Gọi I là điểm trên cạnh BC sao cho $2CI = 3BI$ và J thuộc \overrightarrow{BC} kéo dài sao cho $5JB = 2JC$. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC . Biểu diễn vectơ \overrightarrow{AG} theo các vectơ $\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AJ}$.

A $\overrightarrow{AG} = \frac{35}{48}\overrightarrow{AI} - \frac{1}{16}\overrightarrow{AJ}$.

B $\overrightarrow{AG} = \frac{35}{48}\overrightarrow{AI} + \frac{1}{16}\overrightarrow{AJ}$.

C $\overrightarrow{AG} = \frac{25}{16}\overrightarrow{AI} - \frac{3}{16}\overrightarrow{AJ}$.

D $\overrightarrow{AG} = \frac{25}{16}\overrightarrow{AI} + \frac{3}{16}\overrightarrow{AJ}$.

Lời giải.

CÂU 28. Cho tam giác ABC . Gọi G là trọng tâm tam giác và H là điểm đối xứng của B qua G . Gọi M là trung điểm BC . Biểu diễn vectơ \overrightarrow{MH} theo các vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$.

A $\overrightarrow{MH} = \frac{5}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$.

B $\overrightarrow{MH} = -\frac{1}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{5}{6}\overrightarrow{AC}$.

C $\overrightarrow{MH} = -\frac{5}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$.

D $\overrightarrow{MH} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{5}{6}\overrightarrow{AC}$.

Lời giải.

CÂU 29. Cho góc $\widehat{xOy} = 60^\circ$. Các điểm A, B nằm trên tia Ox , các điểm C, D nằm trên tia Oy sao cho $AB = CD = 2$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm các đoạn AC, BD . Biết A nằm giữa O và B, C nằm giữa O và D , tính IJ .

A $IJ = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

B $IJ = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

C $IJ = \sqrt{3}$.

D $IJ = 2\sqrt{3}$.

Lời giải.

CÂU 30. Cho tam giác ABC , N là điểm xác định bởi $\overrightarrow{CN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC . Hệ thức tính \overrightarrow{AC} theo \overrightarrow{AG} và \overrightarrow{AN} là

- Ⓐ $\overrightarrow{AC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AG} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AN}$. Ⓑ $\overrightarrow{AC} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AG} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AN}$. Ⓒ $\overrightarrow{AC} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AG} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AN}$. Ⓓ $\overrightarrow{AC} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AG} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AN}$.

Lời giải.

5 Chứng minh ba điểm thẳng hàng, hai đường thẳng song song, hai điểm trùng nhau

- ☑ Để chứng minh 3 điểm A, B, C thẳng hàng, ta chứng minh: $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$ (1).
Để nhận được (1), ta lựa chọn một trong hai hướng sau:

- Sử dụng các quy tắc biến đổi vectơ.
- Xác định (tính) vectơ \overrightarrow{AB} và \overrightarrow{AC} thông qua một tổ hợp trung gian.

Chú ý:

- Cho ba điểm A, B, C . Điều kiện cần và đủ để A, B, C thẳng hàng là: $\overrightarrow{MC} = \alpha\overrightarrow{MA} + (1 - \alpha)\overrightarrow{MB}$ với điểm M tùy ý và số thực α bất kỳ.
Đặc biệt khi $0 \leq \alpha \leq 1$ thì $C \in AB$. Kết quả trên còn được sử dụng để tìm điều kiện của tham số k (hoặc m) cho ba điểm A, B, C thẳng hàng.
- Nếu không dễ nhận thấy k trong biểu thức $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$, ta nên quy đồng biểu thức phân tích vectơ \overrightarrow{AB} và \overrightarrow{AC} để tìm ra số k .

- ☑ Để chứng minh $AB \parallel CD$ ta cần chứng minh $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{DC}$.

1. Ví dụ minh họa

VÍ DỤ 1. Cho hình bình hành $ABCD$, tâm O . Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm của AB, CD và P là điểm thỏa mãn hệ thức $\overrightarrow{OP} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}$. Chứng minh 3 điểm B, P, N thẳng hàng.

💬 Lời giải.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

VÍ DỤ 2. Cho bốn điểm phân biệt A, B, C, D thỏa: $2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC} = 5\overrightarrow{AD}$. Chứng minh B, C, D thẳng hàng.

💬 Lời giải.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

VÍ DỤ 3. Cho $\triangle ABC$, lấy điểm M, N, P sao cho $\overrightarrow{MB} = 3\overrightarrow{MC}$, $\overrightarrow{NA} + 3\overrightarrow{NC} = \vec{0}$, $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} = \vec{0}$.

a) Tính $\overrightarrow{PM}, \overrightarrow{PN}$ theo $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$.

b) Chứng minh ba điểm: M, N, P thẳng hàng.

💬 Lời giải.

.....

.....

.....

2. Bài tập áp dụng

BÀI 1. Cho $\triangle ABC$.

- a) Dựng các điểm K, L sao cho $\overrightarrow{KA} + 2\overrightarrow{KB} + 3\overrightarrow{KC} = \vec{0}$, $2\overrightarrow{LB} + 3\overrightarrow{LC} = \vec{0}$
- b) Chứng minh ba điểm A, K, L thẳng hàng.

BÀI 2. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi I là trung điểm của AB và E là điểm thỏa hệ thức $3\overrightarrow{IE} = \overrightarrow{ID}$. Chứng minh ba điểm A, C, E thẳng hàng.

BÀI 3. Cho $\triangle ABC$.

- a) Dựng các điểm K, L sao cho $\overrightarrow{KA} + 2\overrightarrow{KB} + 3\overrightarrow{KC} = \vec{0}$ và $2\overrightarrow{LB} + 3\overrightarrow{LC} = \vec{0}$
- b) Chứng minh ba điểm A, K, L thẳng hàng.

BÀI 4. Cho $\triangle ABC$. Gọi M là trung điểm của cạnh AB , N và P là hai điểm thỏa mãn hệ thức $\overrightarrow{NA} + 2\overrightarrow{NC} = \vec{0}$, $\overrightarrow{PB} - 2\overrightarrow{PC} = \vec{0}$. Chứng minh ba điểm M, N, P thẳng hàng.

BÀI 5. Cho $\triangle ABC$. Hai điểm M, N được xác định bởi $3\overrightarrow{MA} + 4\overrightarrow{MB} = \vec{0}$, $\overrightarrow{NB} - 3\overrightarrow{NC} = \vec{0}$. Chứng minh MN đi qua trọng tâm $\triangle ABC$.

BÀI 6. Cho $\triangle ABC$.

- a) Dựng các điểm D, E thỏa các hệ thức $\overrightarrow{AD} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DE} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BC}$.
- b) Chứng minh ba điểm A, C, E thẳng hàng.

BÀI 7. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi I là trung điểm của cạnh BC và E là điểm xác định bởi $\overrightarrow{AE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$. Chứng minh ba điểm D, E, I thẳng hàng.

BÀI 8. Cho $\triangle ABC$ có trung tuyến AD và M là trung điểm AD . Điểm N được lấy trên AC sao cho $3\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AC}$. Chứng minh ba điểm B, M, N thẳng hàng.

BÀI 9. Cho $\triangle ABC$ có M là trung điểm BC và O là trung điểm của AM . Trên AB lấy điểm I , AC lấy điểm J sao cho $\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AJ} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$. Chứng minh ba điểm I, J, O thẳng hàng.

BÀI 10. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA . Gọi O là giao điểm của MP và NQ , G là trọng tâm của tam giác BCD . Chứng minh rằng ba điểm A, O, G thẳng hàng.

BÀI 11. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M, N là hai điểm di động trên AB, CD sao cho $\frac{MA}{MB} = \frac{ND}{NC}$ và hai điểm I, J lần lượt là trung điểm của AD, BC .

- a) Tính \overrightarrow{IJ} theo \overrightarrow{AB} và \overrightarrow{DC} .
- b) Chứng minh trung điểm P của MN nằm trên IJ .

BÀI 12. Cho $\triangle ABC$. Gọi P, Q, R là các điểm thỏa các đẳng thức :

$$3\overrightarrow{PB} + 4\overrightarrow{PC} = \vec{0}, \quad \overrightarrow{AQ} = 2\overrightarrow{QC}, \quad k\overrightarrow{RA} = \overrightarrow{RB}, \quad k \neq 1.$$

- a) Chứng minh rằng: $21\overrightarrow{PQ} = 2\overrightarrow{BC} + 7\overrightarrow{BA}$.
- b) Chứng minh rằng: $\overrightarrow{RP} = \frac{k}{1-k}\overrightarrow{BA} + \frac{4}{7}\overrightarrow{BC}$.
- c) Tìm k sao cho P, Q, R thẳng hàng.

BÀI 13. Cho hình bình hành $ABCD$.

- a) Gọi I, F, K là các điểm thỏa mãn $\overrightarrow{AI} = \alpha\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AF} = \beta\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AK} = \gamma\overrightarrow{AD}$. Chứng minh điều kiện cần và đủ để I, F, K thẳng hàng là

$$\frac{1}{\beta} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\gamma} \quad (\alpha, \beta, \gamma \neq 0).$$

- b) Gọi M, N là hai điểm lần lượt trên đoạn AB, CD sao cho $\frac{AM}{AB} = \frac{1}{3}, \frac{CN}{CD} = \frac{1}{2}$. Gọi G là trọng tâm $\triangle MNB$. Tính $\overrightarrow{AN}, \overrightarrow{AG}$ theo \overrightarrow{AB} và \overrightarrow{AC} . Gọi H là điểm xác định bởi $\overrightarrow{BH} = k \cdot \overrightarrow{BC}$. Tính \overrightarrow{AH} theo $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ và k . Tìm k để đường thẳng AH đi qua điểm G .

3. Bài tập trắc nghiệm

CÂU 1. Cho ba điểm A, B, C phân biệt. Điều kiện cần và đủ để ba điểm thẳng hàng là

- A** $AB = AC$. **B** $\exists k \in \mathbb{R}^*: \overrightarrow{AB} = k \cdot \overrightarrow{AC}$.
- C** $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$. **D** $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 3\overrightarrow{MC}, \forall$ điểm M .

Lời giải.

CÂU 2. Khẳng định nào sau đây **sai**?

- A** Ba điểm phân biệt A, B, C thẳng hàng khi và chỉ khi $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{BC}, k \neq 0$.
- B** Ba điểm phân biệt A, B, C thẳng hàng khi và chỉ khi $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{BC}, k \neq 0$.
- C** Ba điểm phân biệt A, B, C thẳng hàng khi và chỉ khi $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}, k \neq 0$.
- D** Ba điểm phân biệt A, B, C thẳng hàng khi và chỉ khi $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$.

Lời giải.

CÂU 3. Phát biểu nào là **sai**?

- A** Nếu $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$ thì $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}|$. **B** $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ thì A, B, C, D thẳng hàng.
- C** Nếu $3\overrightarrow{AB} + 7\overrightarrow{AC} = \vec{0}$ thì A, B, C thẳng hàng. **D** $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{BA}$.

Lời giải.

CÂU 4. Cho hai vectơ \vec{a} và \vec{b} không cùng phương. Hai vectơ nào sau đây là cùng phương?

A $\vec{u} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$ và $\vec{v} = \frac{1}{2}\vec{a} - 3\vec{b}$.

B $\vec{u} = \frac{3}{5}\vec{a} + 3\vec{b}$ và $\vec{v} = 2\vec{a} - \frac{3}{5}\vec{b}$.

C $\vec{u} = \frac{2}{3}\vec{a} + 3\vec{b}$ và $\vec{v} = 2\vec{a} - 9\vec{b}$.

D $\vec{u} = 2\vec{a} - \frac{3}{2}\vec{b}$ và $\vec{v} = -\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b}$.

Lời giải.

CÂU 5. Biết rằng hai vectơ \vec{a} và \vec{b} không cùng phương nhưng hai vectơ $2\vec{a} - 3\vec{b}$ và $\vec{a} + (x - 1)\vec{b}$ cùng phương. Khi đó giá trị của x là

A $\frac{1}{2}$.

B $-\frac{3}{2}$.

C $-\frac{1}{2}$.

D $\frac{3}{2}$.

Lời giải.

CÂU 6. Cho \vec{a}, \vec{b} không cùng phương, $\vec{x} = -2\vec{a} + \vec{b}$. vectơ cùng hướng với \vec{x} là

A $2\vec{a} - \vec{b}$.

B $-\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$.

C $4\vec{a} + 2\vec{b}$.

D $-\vec{a} + \vec{b}$.

Lời giải.

CÂU 7. Biết rằng hai vectơ \vec{a} và \vec{b} không cùng phương nhưng hai vectơ $3\vec{a} - 2\vec{b}$ và $(x + 1)\vec{a} + 4\vec{b}$ cùng phương. Khi đó giá trị của x là

A -7 .

B 7 .

C 5 .

D 6 .

Lời giải.

CÂU 8. Biết rằng hai vectơ \vec{a} và \vec{b} không cùng phương nhưng hai vectơ $2\vec{a} - 3\vec{b}$ và $\vec{a} + (x - 1)\vec{b}$ cùng phương. Khi đó giá trị của x là

A $\frac{1}{2}$.

B $-\frac{3}{2}$.

C $-\frac{1}{2}$.

D $\frac{3}{2}$.

Lời giải.

CÂU 9. Nếu I là trung điểm đoạn thẳng AB và $\vec{IA} = k\vec{AB}$ thì giá trị của k bằng

A 1 .

B $\frac{1}{2}$.

C $-\frac{1}{2}$.

D -2 .

Lời giải.

CÂU 10. Cho tam giác ABC và một điểm M tùy ý. Chứng minh rằng vectơ $\vec{v} = \vec{MA} + \vec{MB} - 2\vec{MC}$. Hãy xác định vị trí của điểm D sao cho $\vec{CD} = \vec{v}$.

- Ⓐ D là điểm thứ tư của hình bình hành $ABCD$. Ⓑ D là điểm thứ tư của hình bình hành $ACBD$.
 Ⓒ D là trọng tâm của tam giác ABC . Ⓓ D là trực tâm của tam giác ABC .

Lời giải.

CÂU 11. Cho tam giác ABC . Hai điểm M, N được xác định bởi các hệ thức $\vec{BC} + \vec{MA} = \vec{0}$, $\vec{AB} - \vec{NA} - 3\vec{AC} = \vec{0}$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

- Ⓐ $MN \perp AC$. Ⓑ $MN // AC$.
 Ⓒ M nằm trên đường thẳng AC . Ⓓ Hai đường thẳng MN và AC trùng nhau.

Lời giải.

CÂU 12. Cho tam giác ABC có trọng tâm G . Các điểm M, N thỏa mãn $7\vec{MG} = 3\vec{GC} - \vec{GB}$; $\vec{GN} = \frac{1}{2}(3\vec{GC} - \vec{GB})$. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

- Ⓐ Đường thẳng MN đi qua G . Ⓑ Đường thẳng MN đi qua A .
 Ⓒ Đường thẳng MN đi qua B . Ⓓ Đường thẳng MN đi qua C .

Lời giải.

CÂU 13. Cho hai vectơ \vec{a} và \vec{b} không cùng phương. Các điểm A, B, C sao cho $\vec{AB} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$; $\vec{AC} = m\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$. Khi A, B, C thẳng hàng thì khẳng định nào sau đây đúng?

- Ⓐ $m \in (2; 3)$. Ⓑ $m \in (1; 2)$. Ⓒ $m \in (-1; 0)$. Ⓓ $m \in (0; 1)$.

💬 Lời giải.

CÂU 14. Cho tam giác ABC . Các điểm M, N thỏa mãn $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$. Khi đó, đường thẳng MN luôn đi qua một điểm cố định I . Khẳng định nào sau đây đúng?

- ☐ A I là trọng tâm của tam giác ABC .
- ☐ B I là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .
- ☐ C I là trực tâm của tam giác ABC .
- ☐ D Tứ giác $ABCI$ là hình bình hành.

💬 Lời giải.

CÂU 15. Cho tam giác ABC . Các điểm M, N thỏa mãn $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}$. Khi đó, đường thẳng MN luôn đi qua một điểm cố định I . Khẳng định nào sau đây đúng?

- ☐ A $\overrightarrow{IC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.
- ☐ B $\overrightarrow{IC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$.
- ☐ C $\overrightarrow{IB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.
- ☐ D $\overrightarrow{IB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$.

💬 Lời giải.

CÂU 16. Cho hình bình hành $ABCD$ có O là giao điểm của hai đường chéo. Các điểm M, N thỏa mãn $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}$. Khi đó, đường thẳng MN luôn đi qua một điểm cố định I . Khẳng định nào sau đây đúng?

- ☐ A I là trọng tâm của tam giác OBC .
- ☐ B I là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .
- ☐ C I là trung điểm của cạnh DC .
- ☐ D Tứ giác $ABCI$ là hình bình hành.

💬 Lời giải.

CÂU 17. Cho tam giác ABC có trọng tâm G . Gọi P, Q là các điểm sao cho $\overrightarrow{PA} = 2\overrightarrow{PB}$, $\overrightarrow{AQ} + k\overrightarrow{AC} = \vec{0}$ với $k \in \mathbb{R}$. Tìm k để P, Q, G thẳng hàng.

A $k = \frac{2}{5}$.

B $k = \frac{2}{3}$.

C $k = -\frac{2}{5}$.

D $k = -\frac{2}{3}$.

Lời giải.

CÂU 18. Cho tam giác ABC . Gọi M, N là các điểm thỏa mãn $\overrightarrow{BM} = 3\overrightarrow{BC} - 2\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CN} = k\overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{BC}$. Tìm k để A, M, N thẳng hàng.

A $k = -\frac{3}{2}$.

B $k = -\frac{1}{2}$.

C $k = \frac{1}{2}$.

D $k = \frac{3}{2}$.

Lời giải.

CÂU 19. Cho tam giác ABC có I là trung điểm của BC . Gọi M, N, P lần lượt là các điểm xác định bởi

$\overrightarrow{AM} = m\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AN} = n\overrightarrow{AI}$; $\overrightarrow{AP} = p\overrightarrow{AC}$, với $mnp \neq 0$. Tìm điều kiện của m, n, p để M, N, P thẳng hàng.

- Ⓐ $mp = mn + np$. Ⓑ $2mn = mp + np$. Ⓒ $2np = mn + mp$. Ⓓ $2mp = mn + np$.

💬 Lời giải.

CÂU 20. Cho tam giác ABC . Gọi D, E lần lượt là các điểm thỏa mãn $\overrightarrow{BD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$. Điểm K trên AD thỏa mãn $\overrightarrow{AK} = \frac{a}{b}\overrightarrow{AD}$ (với $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản) sao cho 3 điểm B, K, E thẳng hàng. Tính $P = a^2 + b^2$.

- Ⓐ $P = 5$. Ⓑ $P = 13$. Ⓒ $P = 29$. Ⓓ $P = 10$.

💬 Lời giải.

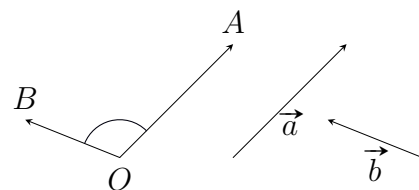
Bài 6. TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Góc giữa hai vectơ

Cho $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$. Từ một điểm O bất kì vẽ $\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}$.

Khi đó số đo của góc \widehat{AOB} được gọi là số đo góc giữa hai vectơ \vec{a} và \vec{b} hay đơn giản là góc giữa hai vectơ \vec{a}, \vec{b} . Kí hiệu $(\vec{a}, \vec{b}) = \widehat{AOB}$.



- ☑ Quy ước rằng góc giữa hai vectơ \vec{a} và \vec{b} có thể nhận một giá trị tùy ý từ 0° đến 180° .
- ☑ $(\vec{a}, \vec{b}) = 0^\circ \Leftrightarrow \vec{a}, \vec{b}$ cùng hướng.
- ☑ $(\vec{a}, \vec{b}) = 180^\circ \Leftrightarrow \vec{a}, \vec{b}$ ngược hướng.
- ☑ Nếu $(\vec{a}, \vec{b}) = 90^\circ$ thì ta nói rằng \vec{a} và \vec{b} vuông góc với nhau, kí hiệu $\vec{a} \perp \vec{b}$ hoặc $\vec{b} \perp \vec{a}$.

2. Tích vô hướng của hai vectơ

Định nghĩa: Tích vô hướng của hai vectơ \vec{a} và \vec{b} là một số, kí hiệu $\vec{a} \cdot \vec{b}$, được xác định bởi công thức sau

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}).$$



- ☑ Ta có $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.
- ☑ $\vec{a} \cdot \vec{a}$ còn được viết là \vec{a}^2 được gọi là bình phương vô hướng của vectơ \vec{a} . Ta có $\vec{a}^2 = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos 0^\circ = |\vec{a}|^2$.

B. CÁC DẠNG TOÁN

1

Tính tích vô hướng của hai vectơ và xác định góc

1. Ví dụ minh họa

VÍ DỤ 1. Cho tam giác ABC vuông tại A và có $\widehat{B} = 50^\circ$. Hãy tính các góc $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}); (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}); (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}); (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC}); (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}); (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BA})$.

Lời giải.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

VÍ DỤ 2. Cho tam giác đều ABC có cạnh a và trọng tâm G . Tính các tích vô hướng $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB}$; $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{GB} \cdot \overrightarrow{GC}$; $\overrightarrow{BG} \cdot \overrightarrow{GA}$; $\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{BC}$.

💬 Lời giải.

VÍ DỤ 3. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = a$, $BC = 2a$ và G là trọng tâm. Tính giá trị của các biểu thức sau:

a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB}$.

b) $\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GB} \cdot \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GC} \cdot \overrightarrow{GA}$.

💬 Lời giải.

VÍ DỤ 4. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . M là trung điểm của AB , G là trọng tâm tam giác ADM . Tính giá trị của các biểu thức sau:

a) $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC})$.

b) $\overrightarrow{CG}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DM})$.

Lời giải.

 **Lời giải.**

Lời giải.

$$\text{b) } \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD} \quad (2).$$

Lời giải.

2. Bài tập tự luận

BÀI 1. Cho $\triangle ABC$, chứng minh $AB^2 + \vec{AB} \cdot \vec{BC} + \vec{AB} \cdot \vec{CA} = 0$.

BÀI 2. Cho $\triangle ABC$ nhọn, đường cao AH , Chứng minh rằng

$$\text{a) } \vec{AB} \cdot \vec{AH} = \vec{AC} \cdot \vec{AH}; \quad \text{b) } \vec{AB} \cdot \vec{BC} = \vec{HB} \cdot \vec{BC}.$$

BÀI 3. Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC ta có $S_{ABC} = \frac{1}{2} \sqrt{\vec{AB}^2 \cdot \vec{AC}^2 - (\vec{AB} \cdot \vec{AC})^2}$.

BÀI 4. Cho $\triangle ABC$ có trọng tâm G . Chứng minh rằng với mỗi điểm M ta có

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2.$$

BÀI 5. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có tâm O , M là điểm bất kì. Chứng minh

$$MA^2 + \vec{MB} \cdot \vec{MD} = 2\vec{MA} \cdot \vec{MO}.$$

BÀI 6. Cho hình chữ nhật $ABCD$ nội tiếp trong đường tròn tâm O , bán kính R . Chứng minh rằng với mọi M thuộc đường tròn (O) ta có

$$\vec{MA} \cdot \vec{MC} + (\vec{MB} + \vec{MD}) (\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} + \vec{MD}) = 8R^2.$$

BÀI 7. Chứng minh rằng với mọi điểm A, B, C, M ta luôn có

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0. \text{ (hệ thức Euler).}$$

BÀI 8. Cho $\triangle ABC$ các đường trung tuyến AD, BE, CF . Chứng minh rằng

$$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CF} \cdot \overrightarrow{AB} = 0.$$

BÀI 9. Cho $\triangle ABC$ đường cao AH , trung tuyến AI . Chứng minh rằng $|AB^2 - AC^2| = 2BC \cdot HI$.

3

Điều kiện vuông góc

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0.$$

1. Ví dụ minh họa

VÍ DỤ 1. Cho hai vectơ \vec{a} và \vec{b} vuông góc với nhau và $|\vec{a}| = 1, |\vec{b}| = \sqrt{2}$. Chứng minh hai vectơ $(2\vec{a} - \vec{b})$ và $(\vec{a} + \vec{b})$ vuông góc với nhau.

Lời giải.

BÀI 1. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A có $AB = c, AC = b$. Tính $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$ theo b và c .

BÀI 2. Cho hai vectơ \vec{a} và \vec{b} thỏa mãn $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$ và hai vectơ $\vec{u} = \frac{2}{5}\vec{a} - 3\vec{b}$ và $\vec{v} = \vec{a} + \vec{b}$ vuông góc với nhau. Xác định góc giữa hai vectơ \vec{a} và \vec{b} .

4

Tập hợp điểm và chứng minh bất đẳng thức

Ta sử dụng các kết quả cơ bản sau:

a) Cho A, B là các điểm cố định, M là điểm di động

- ☑ Nếu $|\overrightarrow{AM}| = k$ với k là số thực dương cho trước thì tập hợp các điểm M là đường tròn tâm A , bán kính $R = k$.
- ☑ Nếu $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ thì tập hợp các điểm M là đường tròn đường kính AB .
- ☑ Nếu $\overrightarrow{MA} \cdot \vec{a} = 0$ với $\vec{a} \neq \vec{0}$ cho trước thì tập hợp các điểm M là đường thẳng đi qua A và vuông góc với giá của vectơ \vec{a} .

b) Các bất đẳng thức vectơ

☑ $\vec{a}^2 \geq 0 \forall \vec{a}$. Dấu "=" xảy ra khi $\vec{a} = \vec{0}$.

☑ $\vec{a} \cdot \vec{b} \leq |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$. Dấu "=" xảy ra khi $\vec{a} = k\vec{b}$, $k > 0$.

VÍ DỤ 1. Cho hai điểm A, B cố định có độ dài bằng a , vectơ \vec{a} khác $\vec{0}$. Tìm tập hợp điểm M sao cho

a) $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \frac{3a^2}{4}$

b) $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MA^2$

Lời giải.

VÍ DỤ 2. Cho tam giác ABC . Tìm tập hợp điểm M sao cho

$$(\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}) \cdot \overrightarrow{BC} = 0.$$

Lời giải.

VÍ DỤ 3. Cho tam giác ABC . Chứng minh rằng

$$\text{a) } \cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2}.$$

$$\text{b) } \cos 2A + \cos 2B + \cos 2C \geq -\frac{3}{2}.$$

Lời giải.

1. Bài tập tự luận

BÀI 1. Cho đoạn thẳng AB và số thực k . Tìm tập hợp điểm M trong mỗi trường hợp sau

$$\text{a) } 2MA^2 = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}.$$

$$\text{b) } MA^2 + 2MB^2 = k, k > 0.$$

$$\text{c) } \overrightarrow{AM} \cdot \vec{a} = k.$$

BÀI 2. Cho tứ giác $ABCD$, I, J lần lượt là trung điểm của AB và CD . Tìm tập hợp điểm M sao cho $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MD} = \frac{1}{2}IJ^2$.

BÀI 3. Cho tam giác ABC , góc A nhọn, trung tuyến AI . Tìm tập hợp những điểm M di động trong góc \widehat{BAC} sao cho $AB \cdot AH + AC \cdot AK = AI^2$, trong đó H và K theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của M lên AB và AC .

BÀI 4. Cho tam giác ABC và k là số thực cho trước. Tìm tập hợp những điểm M sao cho

$$MA^2 - MB^2 = k.$$

BÀI 5. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a và số thực k cho trước. Tìm tập hợp điểm M sao cho

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD} = k.$$

BÀI 6. Cho tam giác ABC và các số thực x, y, z . Chứng minh rằng

$$xy \cos A + yz \cos B + zx \cos C \leq \frac{x^2 + y^2 + z^2}{2}.$$

2. Câu hỏi trắc nghiệm

CÂU 1. Cho \vec{a}, \vec{b} khác $\vec{0}$. Kí hiệu (\vec{a}, \vec{b}) là góc giữa hai vectơ \vec{a} và \vec{b} . Khẳng định nào sau đây là đúng?

- Ⓐ $(\vec{a}, \vec{b}) = -(\vec{b}, \vec{a})$. Ⓑ Nếu $(\vec{a}, \vec{b}) = 0^\circ$ thì \vec{a}, \vec{b} có giá trùng nhau.
Ⓒ $(\vec{a}, -\vec{b}) = -(\vec{a}, \vec{b})$. Ⓓ $(k\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{a}, \vec{b})$ với mọi $k \in \mathbb{R}^+$.

💬 Lời giải.

CÂU 2. Cho tam giác ABC vuông tại A và có $\widehat{B} = 60^\circ$. Góc giữa \overrightarrow{CA} và \overrightarrow{CB} bằng

- Ⓐ 60° . Ⓑ 30° . Ⓒ 90° . Ⓓ 45° .

💬 Lời giải.

CÂU 3. Cho tam giác ABC vuông cân tại A , góc giữa \overrightarrow{AB} và \overrightarrow{BC} là

- Ⓐ $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = 45^\circ$. Ⓑ $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = 60^\circ$. Ⓒ $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = 120^\circ$. Ⓓ $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = 135^\circ$.

💬 Lời giải.

CÂU 4. Cho \vec{a} và \vec{b} là hai vectơ cùng hướng và đều khác $\vec{0}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- Ⓐ $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$. Ⓑ $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$. Ⓒ $\vec{a} \cdot \vec{b} = -1$. Ⓓ $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$.

💬 Lời giải.

CÂU 5. Cho tam giác đều ABC cạnh bằng a và H là trung điểm BC . Tính $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{CA}$.

- (A) $\frac{3a^2}{4}$. (B) $-\frac{3a^2}{4}$. (C) $\frac{3a^2}{2}$. (D) $-\frac{3a^2}{2}$.

Lời giải.

CÂU 6. Cho tam giác ABC cân tại A , $\hat{A} = 120^\circ$ và $AB = a$. Tính $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CA}$.

- (A) $\frac{a^2}{2}$. (B) $-\frac{a^2}{2}$. (C) $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$. (D) $-\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.

CÂU 7. Cho tam giác ABC vuông tại A có $\hat{B} = 60^\circ$, $AB = a$. Tính $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB}$.

- (A) $3a^2$. (B) $-3a^2$. (C) $3a$. (D) 0 .

Lời giải.

CÂU 8. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . Tính tích vô hướng của hai vectơ \overrightarrow{AB} và \overrightarrow{AC} .

- (A) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = a\sqrt{2}$. (B) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 2a$. (C) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = a^2$. (D) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 2a^2$.

Lời giải.

CÂU 9. Cho hai vectơ \vec{a} và \vec{b} khác $\vec{0}$. Xác định góc α giữa hai vectơ \vec{a} và \vec{b} khi $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$.

- (A) $\alpha = 180^\circ$. (B) $\alpha = 0^\circ$. (C) $\alpha = 90^\circ$. (D) $\alpha = 45^\circ$.

Lời giải.

CÂU 10. Cho tam giác ABC vuông tại A và có góc $\hat{B} = 50^\circ$. Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề đúng?

- (A) Góc giữa hai vectơ \overrightarrow{AC} , \overrightarrow{CB} bằng 140° . (B) Góc giữa hai vectơ \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{BC} bằng 50° .
(C) Góc giữa hai vectơ \overrightarrow{BC} , \overrightarrow{AC} bằng 90° . (D) Góc giữa hai vectơ \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{CB} bằng 130° .

Lời giải.

CÂU 11. Tam giác ABC vuông ở A và có $BC = 2AC$. Tính $\cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB})$.

A $\cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}) = \frac{1}{2}$.

B $\cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}) = -\frac{1}{2}$.

C $\cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

D $\cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.

CÂU 12.

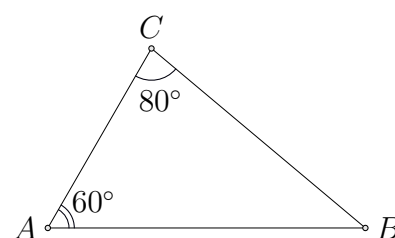
Cho tam giác ABC như hình vẽ. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AB}) = 40^\circ$.

B $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) = 140^\circ$.

C $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}) = 80^\circ$.

D $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BA}) = 120^\circ$.



Lời giải.

CÂU 13. Cho hình vuông $ABCD$, tính $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CA})$.

A $\frac{1}{2}$.

B $-\frac{1}{2}$.

C $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

D $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải.

CÂU 14. Cho tam giác đều ABC . Tính $P = \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) + \cos(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}) + \cos(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AB})$.

- Ⓐ $P = \frac{3\sqrt{3}}{2}$. Ⓑ $P = \frac{3}{2}$. Ⓒ $P = -\frac{3}{2}$. Ⓓ $P = -\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

💬 Lời giải.

CÂU 15. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . Tính $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD})$.

- Ⓐ $-2a^2$. Ⓑ a^2 . Ⓒ $2a^2$. Ⓓ $-\frac{a^2}{\sqrt{2}}$.

💬 Lời giải.

CÂU 16. Cho $\triangle ABC$ đều cạnh bằng 3. Trên các cạnh AB, AC lần lượt lấy các điểm M, N sao cho $2AM = MB, NA = 2NC$. Giá trị của tích vô hướng $\overrightarrow{BN} \cdot \overrightarrow{CM}$ là

- Ⓐ $\frac{7}{2}$. Ⓑ $-\frac{7}{2}$. Ⓒ $\frac{11}{2}$. Ⓓ $-\frac{11}{2}$.

💬 Lời giải.

CÂU 17. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = a, BC = 2a$. Tính $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC}$ theo a .

- Ⓐ $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} = -a\sqrt{3}$. Ⓑ $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} = -3a^2$.
Ⓒ $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} = a\sqrt{3}$. Ⓓ $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} = 3a^2$.

💬 Lời giải.

CÂU 18. Cho tam giác ABC vuông tại A , có số đo góc B là 60° và $AB = a$. Kết quả nào sau đây là sai?

- Ⓐ $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0.$ Ⓑ $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 3a^2.$ Ⓒ $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -a^2.$ Ⓓ $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} = -3\sqrt{2}a^2.$

Lời giải.

CÂU 19. Cho M là trung điểm AB , tìm mệnh đề **sai**.

- Ⓐ $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{AB} = -MA \cdot AB.$ Ⓑ $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = -MA \cdot MB.$
 Ⓒ $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = AM \cdot AB.$ Ⓓ $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MA \cdot MB.$

Lời giải.

CÂU 20. Cho 2 vectơ \vec{a} và \vec{b} thỏa $|\vec{a} + \vec{b}| = 2$ và có độ lớn bằng 1. Hãy tính $(3\vec{a} - 4\vec{b})(2\vec{a} + 5\vec{b})$.

- Ⓐ 7. Ⓑ 5. Ⓒ -7. Ⓓ -5.

Lời giải.

CÂU 21. Cho hình thang vuông $ABCD$ có đường cao $AD = 3a$. Tính $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{BC}$.

- Ⓐ $-9a^2.$ Ⓑ $15a^2.$ Ⓒ 0. Ⓓ $9a^2.$

Lời giải.

CÂU 22. Cho tam giác ABC có $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$. Gọi M là trung điểm cạnh BC . Tính $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC}$.

- Ⓐ $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{b^2 - c^2}{2}.$ Ⓑ $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{c^2 + b^2}{2}.$

Ⓒ $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{c^2 + b^2 + a^2}{3}.$

Ⓓ $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2}.$

💬 Lời giải.

CÂU 23. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . Tính $P = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BA})$.

Ⓐ $P = 2\sqrt{2}a.$

Ⓑ $P = 2a^2.$

Ⓒ $P = a^2.$

Ⓓ $P = -2a^2.$

💬 Lời giải.

CÂU 24. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . Gọi E là điểm đối xứng của D qua C . Tính $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB}$.

Ⓐ $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB} = 2a^2.$

Ⓑ $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB} = \sqrt{3}a^2.$

Ⓒ $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB} = \sqrt{5}a^2.$

Ⓓ $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB} = 5a^2.$

💬 Lời giải.

CÂU 25. Biết $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$ và $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$. Khẳng định nào sau đây đúng?

Ⓐ \vec{a} và \vec{b} cùng hướng.

Ⓑ \vec{a} và \vec{b} nằm trên hai đường thẳng hợp với nhau một góc 80° .

Ⓒ \vec{a} và \vec{b} ngược hướng.

Ⓓ \vec{a} và \vec{b} nằm trên hai đường thẳng hợp với nhau một góc 60° .

💬 Lời giải.

CÂU 26. Cho tam giác ABC vuông tại A , $AB = a$, $AC = a\sqrt{3}$. Gọi M là trung điểm của BC . Tính cô-sin góc giữa hai vectơ \overrightarrow{MA} và \overrightarrow{BC} .

A $\cos(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{BC}) = \frac{1}{2}$.

B $\cos(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{BC}) = -\frac{1}{2}$.

C $\cos(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{BC}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

D $\cos(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{BC}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.

CÂU 27. Cho tam giác ABC . Tính tổng $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}) + (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AB})$.

A 180° .

B 360° .

C 270° .

D 120° .

Lời giải.

CÂU 28. Tam giác ABC có góc A bằng 100° và có trực tâm H . Tính tổng $(\overrightarrow{HA}, \overrightarrow{HB}) + (\overrightarrow{HB}, \overrightarrow{HC}) + (\overrightarrow{HC}, \overrightarrow{HA})$.

A 360° .

B 180° .

C 80° .

D 160° .

Lời giải.

CÂU 29. Cho hình vuông $ABCD$ tâm O . Tính tổng $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}) + (\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{CB}) + (\overrightarrow{CO}, \overrightarrow{DC})$.

A 45° .

B 405° .

C 315° .

D 225° .

Lời giải.

CÂU 30. Cho tam giác ABC cân tại A , góc $\hat{A} = 20^\circ$. Gọi BM là đường phân giác trong của góc \widehat{ABC} . Tính $\cos(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{MC})$.

A $\frac{1}{2}$.

B $\frac{-\sqrt{2}}{2}$.

C $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

D $\frac{-1}{2}$.

💬 Lời giải.

CÂU 31. Cho hình thang vuông $ABCD$, vuông tại A và D , biết $AB = AD = a, CD = 2a$. Tính $\cos(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{CB})$.

A $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

B $\frac{-1}{2}$.

C 0 .

D $\frac{-\sqrt{2}}{2}$.

💬 Lời giải.

CÂU 32. Cho hình thoi $ABCD$ cạnh a , góc $\widehat{ABC} = 120^\circ$. Gọi G là trọng tâm của tam giác BCD và α là góc giữa hai đường thẳng DA và BG . Tính $\sin \alpha$.

A $\sin \alpha = \frac{1}{2}$.

B $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

C $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

D $\sin \alpha = 1$.

💬 Lời giải.

CÂU 33. Cho tam giác ABC có các cạnh bằng a, b, c . Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ theo a, b, c .

A $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 - c^2)$.

B $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(a^2 + c^2 - b^2)$.

C $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(b^2 + c^2 + a^2)$.

D $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(b^2 + c^2 - a^2)$.

💬 Lời giải.

CÂU 34. Cho nửa đường tròn tâm O , có đường kính $AB = 2R$. Gọi M, N là hai điểm thuộc nửa đường tròn sao cho hai dây cung AM và BN cắt nhau tại I . Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AB}.$

B $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{AB}.$

C $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AN}.$

D $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{BA}.$

Lời giải.

CÂU 35. Cho hai điểm M, N nằm trên đường tròn đường kính $AB = 2r$. Gọi I là giao điểm của hai đường thẳng AM và BN . Tính theo r giá trị biểu thức $P = \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BN} \cdot \overrightarrow{BI}$.

A $P = 4r^2.$

B $P = 2r^2.$

C $P = r^2.$

D $P = \frac{r^2}{4}.$

Lời giải.

CÂU 36. Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh là a . Giá trị của biểu thức $(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BA})(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})$ là

A 0.

B $2a^2.$

C $-2a^2.$

D $-2\sqrt{2}a^2.$

Lời giải.

CÂU 37. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh bằng 2. Điểm M nằm trên đoạn thẳng AC sao cho $AM = \frac{AC}{4}$. Gọi N là trung điểm của đoạn thẳng DC . Tính $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MN}$.

A $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MN} = -4.$

B $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MN} = 0.$

C $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MN} = 4.$

D $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MN} = 16.$

Lời giải.

CÂU 38. Cho hình thoi $ABCD$ có $AC = 8$. Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

- Ⓐ $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 24$. Ⓑ $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 26$. Ⓒ $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 28$. Ⓓ $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 32$.

💬 **Lời giải.**

CÂU 39. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = a$ và $AD = a\sqrt{2}$. Gọi K là trung điểm của cạnh AD . Tính $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AC}$.

- Ⓐ $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$. Ⓑ $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AC} = -a^2\sqrt{2}$. Ⓒ $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AC} = a^2\sqrt{2}$. Ⓓ $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AC} = 2a^2$.

💬 **Lời giải.**

CÂU 40. Cho tứ giác $ABCD$ có hai đường chéo vuông góc với nhau tại M và $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD}$. Gọi P là trung điểm của AD . Góc giữa hai đường thẳng MP và BC là

- Ⓐ 90° . Ⓑ 60° . Ⓒ 45° . Ⓓ 30° .

💬 **Lời giải.**

CÂU 41. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . Gọi M và N lần lượt là trung điểm của BC và CD . Tính $\cos(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{NA})$.

☐ A $\frac{4}{5}$.

☐ B $-\frac{4}{5}$.

☐ C $\frac{3}{5}$.

☐ D $-\frac{3}{5}$.

Lời giải.

CÂU 42. Cho hình vuông $ABCD$. Gọi M là trung điểm của cạnh BC . Tính góc giữa hai vectơ \overrightarrow{AM} và $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB}$.

☐ A 45° .

☐ B 30° .

☐ C 135° .

☐ D 90° .

Lời giải.

CÂU 43. Cho hình vuông $ABCD$. Trên cạnh AD, AB lần lượt lấy hai điểm E, F sao cho $AE = AF$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên đường thẳng BE . Tính $\cos(\overrightarrow{FH}, \overrightarrow{CH})$.

☐ A 0.

☐ B $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

☐ C $-\frac{1}{2}$.

☐ D $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải.

CÂU 44. Cho hai điểm A và B , O là trung điểm của AB và M là điểm tùy ý, biết rằng $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = OM^2 + kOA^2$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- Ⓐ $k = 1$. Ⓑ $k = -1$. Ⓒ $k = 2$. Ⓓ $k = -2$.

💬 Lời giải.

CÂU 45. Cho I là trung điểm AB , M là điểm tùy ý. Biết rằng $\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{AB} = k(MB^2 - MA^2)$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- Ⓐ $k = 2$. Ⓑ $k = \frac{1}{2}$. Ⓒ $k = -1$. Ⓓ $k = -\frac{1}{2}$.

💬 Lời giải.

CÂU 46. Cho I là trung điểm AB , M là điểm tùy ý. Biết rằng $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 + kAB^2$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- Ⓐ $k = 2$. Ⓑ $k = \frac{1}{2}$. Ⓒ $k = -1$. Ⓓ $k = -\frac{1}{4}$.

💬 Lời giải.

CÂU 47. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A $(\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c} = \vec{a} (\vec{b} \cdot \vec{c}).$

B $(\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = \vec{a}^2 \cdot \vec{b}^2.$

C $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin(\vec{a}, \vec{b}).$

D $\vec{a} \cdot (\vec{b} - \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{a} \cdot \vec{c}.$

Lời giải.

CÂU 48. Cho hai vectơ \vec{a} và \vec{b} . Đẳng thức nào sau đây **sai**?

A $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{4} (|\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2).$

B $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2} (|\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2).$

C $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2} (|\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2).$

D $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2} (|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2).$

Lời giải.

CÂU 49. Cho hình thoi $ABCD$ có cạnh bằng a và $\widehat{A} = 60^\circ$, điểm M tùy ý. Biết rằng $MA^2 - MB^2 + MC^2 - MD^2 = ka^2$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- Ⓐ $k = 1$. Ⓑ $k = 2$. Ⓒ $k = 4$. Ⓓ $k = 6$.

💬 Lời giải.

CÂU 50. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD , M là điểm tùy ý. Biết rằng $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = MO^2 + kBD^2$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- Ⓐ $k = -\frac{1}{2}$. Ⓑ $k = 2$. Ⓒ $k = -\frac{1}{4}$. Ⓓ $k = 4$.

💬 Lời giải.

CÂU 51. Cho tam giác ABC , gọi H là trực tâm của tam giác và M là trung điểm của cạnh BC . Đẳng thức nào sau đây đúng?

CÂU 53. Cho \vec{a}, \vec{b} có $(\vec{a} + 2\vec{b})$ vuông góc với vectơ $(5\vec{a} - 4\vec{b})$ và $|\vec{a}| = |\vec{b}|$. Khi đó

- Ⓐ $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Ⓑ $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = 90^\circ$. Ⓒ $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Ⓓ $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{1}{2}$.

💬 Lời giải.

CÂU 54. Cho tam giác ABC . Tập hợp điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ là

- Ⓐ Đường trung trực đoạn BC . Ⓑ Đường tròn có tâm A .
Ⓒ Đường thẳng đi qua A và vuông góc với BC . Ⓓ Đường thẳng đi qua A song song với BC .

💬 Lời giải.

CÂU 55. Cho đoạn thẳng AB . Tập hợp điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ là

- Ⓐ Đường trung trực đoạn AB . Ⓑ Đường tròn.
Ⓒ Đường thẳng đi qua A và vuông góc với AB . Ⓓ Đường thẳng đi qua B và vuông góc với AB .

💬 Lời giải.

CÂU 56. Cho tam giác ABC . Tập hợp các điểm M thỏa $(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB})(2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}) = 0$ là

- Ⓐ Đường thẳng vuông góc với AB . Ⓑ Đường thẳng vuông góc với AC .
Ⓒ Đường thẳng vuông góc với BC . Ⓓ Đường tròn.

💬 Lời giải.

CÂU 57. Cho tam giác ABC . Tập hợp các điểm M thỏa $(\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB})(\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}) = 0$ là

- Ⓐ Đường thẳng vuông góc với AB . Ⓑ Đoạn thẳng.
 Ⓒ Đường thẳng song song với AB . Ⓓ Đường tròn.

Lời giải.

CÂU 58. Cho tam giác ABC . Tập hợp các điểm M thỏa $2MA^2 + \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC}$ là

- Ⓐ Đường thẳng. Ⓑ Đường tròn đường kính BC .
 Ⓒ Đường tròn đi qua A . Ⓓ Đường tròn đi qua B .

Lời giải.

CÂU 59. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . Tìm tập hợp các điểm M thỏa mãn

$$(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC})(\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MB}) = 3a^2$$

- Ⓐ Đường thẳng vuông góc với BC . Ⓑ Đường thẳng song song với BC .
 Ⓒ Đường tròn đường kính AB . Ⓓ Đường tròn đường kính AC .

Lời giải.

CÂU 60. Cho tam giác ABC . Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = 2 \cos A + 6 \cos B + 3 \cos C$ bằng

- Ⓐ 11. Ⓑ 10. Ⓒ 7. Ⓓ 6.

💬 **Lời giải.**

MỤC LỤC

Bài 5. Tích của một vectơ với một số	1
Ⓐ Tóm tắt lý thuyết.....	1
Ⓑ Các dạng toán.....	1
📁 Dạng 1. Xác định vectơ tích, tính độ dài vectơ.....	1
📁 Dạng 2. Chứng minh đẳng thức vectơ, thu gọn biểu thức.....	13
📁 Dạng 3. Xác định điểm thỏa mãn đẳng thức vectơ.....	30
📁 Dạng 4. Biểu diễn vectơ theo hai vectơ không cùng phương.....	42
📁 Dạng 5. Chứng minh ba điểm thẳng hàng, hai đường thẳng song song, hai điểm trùng nhau.....	56
Bài 6. Tích vô hướng của hai vectơ	66
Ⓐ Tóm tắt lý thuyết.....	66
Ⓑ Các dạng toán.....	66
📁 Dạng 1. Tính tích vô hướng của hai vectơ và xác định góc.....	66
📁 Dạng 2. Chứng minh đẳng thức tích vô hướng hay độ dài.....	72
📁 Dạng 3. Điều kiện vuông góc.....	75
📁 Dạng 4. Tập hợp điểm và chứng minh bất đẳng thức.....	75

