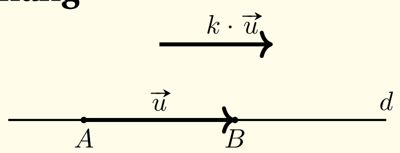
PHẦN ĐỀ BÀI

Bài 36. VIẾT PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Véc-tơ chỉ phương của đường thẳng

- Cho đường thẳng Δ, véc-tơ $\vec{u} \neq \vec{0}$ gọi là véc-tơ chỉ phương của đường thẳng Δ nếu giá của nó song song hoặc trùng với Δ.



- Cho đường thẳng Δ đi qua $M(x_0; y_0; z_0)$ và có véc-tơ chỉ phương là $\vec{u} = (a; b; c)$.
- Nếu $\vec{u}$ là véc-tơ chỉ phương của Δ thì $k \cdot \vec{u}$ $(k \neq 0)$ cũng là véc-tơ chỉ phương của Δ.
- Nếu đường thẳng Δ đi qua hai điểm A, B thì $\overrightarrow{AB}$ là một véc-tơ chỉ phương.

2. Viết phương trình đường thẳng

- Biết đường thẳng d đi qua điểm $M_0(a_1; a_2; a_3)$ và có véc-tơ chỉ phương $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$, $(\vec{a} \neq \vec{0})$, khi đó phương trình tham số của d là $\begin{cases} x = x_0 + a_1 t \\ y = y_0 + a_2 t \\ z = z_0 + a_3 t \end{cases}, (t \in \mathbb{R})$
- Nếu a_1, a_2, a_3 đều khác không. Phương trình đường thẳng d viết dưới dạng chính tắc như sau

$$\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3}$$

B. BÀI TẬP MẪU

VÍ DỤ 36 (Đề minh họa BGD 2022-2023). Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $M(1; -1; -1)$ và $N(5; 5; 1)$. Đường thẳng MN có phương trình là

A $\begin{cases} x = 5 + 2t \\ y = 5 + 3t \\ z = -1 + t \end{cases}$. **B** $\begin{cases} x = 5 + t \\ y = 5 + 2t \\ z = 1 + 3t \end{cases}$. **C** $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + 3t \\ z = -1 + t \end{cases}$. **D** $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + t \\ z = -1 + 3t \end{cases}$.

C. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN

CÂU 1. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng Δ đi qua điểm $M(2; 0; -1)$ và có một véc-tơ chỉ phương $\vec{a} = (4; -6; 2)$. Phương trình tham số của Δ là

A $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -3t \\ z = -1 + t \end{cases}$. **B** $\begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = -6 \\ z = 2 + t \end{cases}$. **C** $\begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = 3t \\ z = 1 + t \end{cases}$. **D** $\begin{cases} x = -2 + 4t \\ y = 6t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$.

CÂU 2. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 1; 2)$, $B(2; -1; 3)$. Viết phương trình đường thẳng AB.

A $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-1}{-2} = \dfrac{z-2}{1}$. **B** $\dfrac{x+2}{1} = \dfrac{y-1}{-2} = \dfrac{z+3}{1}$.

C $\dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z+2}{1}$. **D** $\dfrac{x+2}{1} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z+3}{1}$.

CÂU 3. Trong không gian $Oxyz$, phương trình đường thẳng đi qua 2 điểm $M(2; -1; 1)$ và $N(0; 1; 3)$ là

QUICK NOTE

QUICK NOTE

A $\begin{cases}x=2\\y=-1+t\\z=1+3t\end{cases}$. **B** $\begin{cases}x=2+t\\y=1-t\\z=-1-t\end{cases}$. **C** $\begin{cases}x=2+t\\y=-1\\z=1+2t\end{cases}$. **D** $\begin{cases}x=2+t\\y=-1-t\\z=1-t\end{cases}$.

CÂU 4. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(3;-2;2)$ và mặt phẳng $(P): x+3y-2z=0$. Đường thẳng Δ đi qua M và vuông góc với (P) có phương trình tham số là

A $\begin{cases}x=3+t\\y=-2+3t\\z=-2-2t\end{cases}$. **B** $\begin{cases}x=3+t\\y=-2+3t\\z=2-2t\end{cases}$. **C** $\begin{cases}x=3-t\\y=-2-3t\\z=2-2t\end{cases}$. **D** $\begin{cases}x=3-t\\y=-2-3t\\z=-2+2t\end{cases}$.

CÂU 5. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;-3)$, $B(-2;3;1)$ đường thẳng đi qua $A(1;2;-3)$ và song song với OB có phương trình là

A $\begin{cases}x=-2+t\\y=3+2t\\z=1-3t\end{cases}$. **B** $\begin{cases}x=1-2t\\y=2+3t\\z=-3+t\end{cases}$. **C** $\begin{cases}x=1-4t\\y=2-6t\\z=-3+2t\end{cases}$. **D** $\begin{cases}x=1-2t\\y=2+3t\\z=-3-t\end{cases}$.

CÂU 6. Trong không gian $Oxyz$, phương trình tham số của đường thẳng d đi qua điểm $M(1;2;3)$ và có véc-tơ chỉ phương $\vec{a}=(1;-4;-5)$ là

A $\begin{cases}x=1+t\\y=-4+2t\\z=-5+3t\end{cases}$.

B $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+4}{2}=\dfrac{z+5}{3}$.

C $\begin{cases}x=1-t\\y=2+4t\\z=3+5t\end{cases}$.

D $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{-4}=\dfrac{z-3}{-5}$.

CÂU 7. Cho đường thẳng d có phương trình tham số $\begin{cases}x=3+2t\\y=1-4t\\z=5+7t\end{cases}$, $(t\in\mathbb{R})$. Tìm phương trình chính tắc của đường thẳng d.

A $d\colon 2(x-3)-4(y-1)+7(z-5)=0$.

B $d\colon \dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+4}{1}=\dfrac{z-7}{5}$.

C $d\colon 3(x-2)+y+4+5(z-7)=0$.

D $d\colon \dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y-1}{-4}=\dfrac{z-5}{7}$.

CÂU 8. Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng chứa trục Oy có phương trình tham số là

A $\begin{cases}x=0\\y=1\\z=t\end{cases}$. **B** $\begin{cases}x=0\\y=t\\z=0\end{cases}$. **C** $\begin{cases}x=t\\y=0\\z=0\end{cases}$. **D** $\begin{cases}x=0\\y=0\\z=t\end{cases}$.

CÂU 9. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \begin{cases}x=2-t\\y=1+t\\z=t\end{cases}$. Phương trình nào sau đây là phương trình chính tắc của d?

A $\dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z-3}{1}$.

B $x-2=y=z+3$.

C $\dfrac{x-2}{-1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z}{1}$.

D $\dfrac{x-2}{-1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+3}{-1}$.

CÂU 10. Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình chính tắc đường thẳng d đi qua điểm $A(1;2;3)$ và vuông góc với mặt phẳng $(P)\colon 2x+2y+z+2023=0$.

A $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z+3}{1}$.

B $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-3}{1}$.

C $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-1}{3}$.

D $\dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z+1}{3}$.

CÂU 11. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng Δ có phương trình chính tắc là $\dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z}{2}$. Hỏi phương trình nào sau đây là phương trình tham số của Δ?

A $\begin{cases}x=-2+t\\y=1-t\\z=t\end{cases}$. **B** $\begin{cases}x=2+t\\y=-1-t\\z=2t\end{cases}$. **C** $\begin{cases}x=-2+t\\y=1-t\\z=2t\end{cases}$. **D** $\begin{cases}x=-2-t\\y=1-t\\z=-2t\end{cases}$.

QUICK NOTE

CÂU 12. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1;0;-1)$ và đường thẳng $d\colon \dfrac{x-2}{4}=\dfrac{y-1}{-5}=\dfrac{z-3}{2}$. Đường thẳng Δ đi qua M và song song với d có phương trình tham số là

A $\begin{cases}x=1-4t\\y=5t\\z=-1+2t\end{cases}$. **B** $\begin{cases}x=1+2t\\y=t\\z=-1+3t\end{cases}$. **C** $\begin{cases}x=1+4t\\y=-5t\\z=-1+2t\end{cases}$. **D** $\begin{cases}x=-1-4t\\y=5t\\z=-1-2t\end{cases}$.

CÂU 13. Trong không gian $Oxyz$, phương trình chính tắc của đường thẳng $(d)\colon \begin{cases}x=1-2t\\y=3t\\z=2+t\end{cases}$ là

A $\dfrac{x+1}{-2}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z+2}{1}$. **B** $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z+2}{2}$.

C $\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z-2}{2}$. **D** $\dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z-2}{1}$.

CÂU 14. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $M(2;1;2)$ và $N(4;3;-2)$. Đường thẳng MN có phương trình tham số là

A $\begin{cases}x=4+2t\\y=3+2t.\\z=2-4t\end{cases}$. **B** $\begin{cases}x=2+t\\y=1+t\\z=2+2t\end{cases}$. **C** $\begin{cases}x=-1+t\\y=-2+t\\z=11-2t\end{cases}$. **D** $\begin{cases}x=-3-t\\y=-4-t\\z=12+2t\end{cases}$.

CÂU 15. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng Δ đi qua điểm $M(2;0;-1)$ và có véc-tơ chỉ phương $\vec{a}=(4;-6;2)$. Phương trình tham số của Δ là

A $\begin{cases}x=2+2t\\y=-3t\\z=-1+t\end{cases}$. **B** $\begin{cases}x=-2+2t\\y=-3t\\z=1+t\end{cases}$. **C** $\begin{cases}x=4+2t\\y=-6-3t.\\z=2+t\end{cases}$. **D** $\begin{cases}x=-2+4t\\y=-6t\\z=1+2t\end{cases}$.

CÂU 16. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon 3x-y+6z-18=0$. Đường thẳng d đi qua $A(2;1;0)$ và vuông góc với mặt phẳng (P) có dạng là

A $d\colon \dfrac{x-2}{-3}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-3}{-6}$. **B** $d\colon \dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z}{6}$.

C $d\colon \dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-2}{3}$. **D** $d\colon \dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z}{5}$.

CÂU 17. Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng đi qua điểm $A(1;4;-7)$ và vuông góc với mặt phẳng $x+2y-2z-3=0$ có phương trình là

A $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-4}{-2}=\dfrac{z+7}{-2}$. **B** $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-4}{2}=\dfrac{z+7}{-2}$.

C $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-4}{2}=\dfrac{z-7}{-2}$. **D** $\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y+4}{4}=\dfrac{z-7}{-7}$.

CÂU 18. Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng đi qua điểm $M(1;1;2)$ và vuông góc với mặt phẳng $(P)\colon x-2y+3z+4=0$ có phương trình là

A $\begin{cases}x=1+t\\y=-2+t.\\z=3+2t\end{cases}$. **B** $\begin{cases}x=1-t\\y=1-2t\\z=2+3t\end{cases}$. **C** $\begin{cases}x=1+t\\y=1-2t\\z=2+3t\end{cases}$. **D** $\begin{cases}x=1+t\\y=1-2t\\z=2-3t\end{cases}$.

CÂU 19. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $M(-1;2;0)$ và mặt phẳng $(\alpha)\colon 2x-3z-5=0$. Viết phương trình đường thẳng qua M và vuông góc với mặt phẳng (α)?

A $\begin{cases}x=2-t\\y=-3+2t\\z=-5\end{cases}$. **B** $\begin{cases}x=1+2t\\y=-2\\z=-3t\end{cases}$. **C** $\begin{cases}x=-1-2t\\y=2\\z=3t\end{cases}$. **D** $\begin{cases}x=-1+2t\\y=2-3t\\z=-5t\end{cases}$.

CÂU 20. Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng đi qua điểm $A(-2;4;3)$ và vuông góc với mặt phẳng $2x-3y+6z+19=0$ có phương trình là

A $\dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y-4}{-3}=\dfrac{z-3}{6}$. **B** $\dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y+3}{4}=\dfrac{z-6}{3}$.

C $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y+4}{-3}=\dfrac{z+3}{6}$. **D** $\dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y-3}{4}=\dfrac{z+6}{3}$.

D. BẢNG ĐÁP ÁN

1. A	2. A	3. D	4. B	5. B	6. C	7. D	8. B
9. C	10. B	11. C	12. C	13. D	14. D	15. A	16. B

QUICK NOTE

17. B	18. C	19. C	20. A

Bài 37. ĐIỂM ĐỐI XỨNG, HÌNH CHIẾU CỦA 1 ĐIỂM

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Nhóm bài toán liên quan đến hình chiếu, điểm đối xứng của điểm lên trục, lên mặt phẳng tọa độ

a) **Hình chiếu**: "**Thiếu cái nào, cho cái đó bằng 0**". Nghĩa là hình chiếu của $M(a;b;c)$ lên:

- Ox là $M_1(a;0;0)$.
- Oy là $M_2(0;b;0)$.
- Oz là $M_3(0;0;c)$.
- (Oxy) là $M_4(a;b;0)$.
- (Oxz) là $M_5(a;0;c)$.
- (Oyz) là $M_6(0;b;c)$.

b) **Đối xứng**: "**Thiếu cái nào, đổi dấu cái đó**". Nghĩa là điểm đối xứng của $N(a;b;c)$ qua:

- Ox là $N_1(a;-b;-c)$.
- Oy là $N_2(-a;b;-c)$.
- Oz là $N_3(-a;-b;c)$.
- (Oxy) là $N_4(a;b;-c)$.
- (Oxz) là $N_5(a;-b;c)$.
- (Oyz) là $N_6(-a;b;c)$.

c) **Khoảng cách**: Để tìm khoảng cách từ điểm M đến trục (hoặc mặt phẳng tọa độ), ta tìm **hình chiếu** H của điểm M lên trục (hoặc mặt phẳng tọa độ), từ đó suy ra **khoảng cách cần tìm là** $d = MH$.

2. Điểm thuộc, không thuộc mặt phẳng

a) Phương trình tổng quát của mặt phẳng: $\boxed{(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0}$ (với $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$; (α) có VTPT là $\vec{n} = (A;B;C)$)

b) Điểm $M(x_0;y_0;z_0) \in (P)\colon Ax + By + Cz + D = 0 \Leftrightarrow Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$.

c) Điểm $M(x_0;y_0;z_0) \notin (P)\colon Ax + By + Cz + D = 0 \Leftrightarrow Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0$.

B. BÀI TẬP MẪU

VÍ DỤ 37 (Đề minh họa BGD năm 2022 - 2023). Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;3)$. Điểm đối xứng với A qua mặt phẳng (Oxz) có tọa độ là

(A) $(1;-2;3)$. (B) $(1;2;-3)$. (C) $(-1;-2;-3)$. (D) $(-1;2;3)$.

C. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN

CÂU 1. Cho điểm $A(3;-1;1)$. Hình chiếu vuông góc của A trên (Oyz) là điểm

(A) $M(3;0;0)$. (B) $N(0;-1;1)$. (C) $P(0;-1;0)$. (D) $Q(0;0;1)$.

CÂU 2. Trong không gian $Oxyz$, tìm tọa độ điểm H là hình chiếu của $M(1;2;-4)$ lên (Oxy).

(A) $H(1;2;-4)$. (B) $H(0;2;-4)$. (C) $H(1;0;-4)$. (D) $H(1;2;0)$.

CÂU 3. Hình chiếu vuông góc của $A(3;-1;1)$ trên (Oxz) là $A'(x;y;z)$. Khi đó $x - y - z$ bằng

(A) -4. (B) 2. (C) 4. (D) 3.

CÂU 4. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, tìm tọa độ điểm H là hình chiếu của $M(4;5;6)$ lên trục Ox.

(A) $H(0;5;6)$. (B) $H(4;0;0)$. (C) $H(0;0;6)$. (D) $H(4;5;0)$.

CÂU 5. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, tìm tọa độ điểm H là hình chiếu của $M(1;-1;2)$ lên trục Oy.

(A) $H(0;-1;0)$. (B) $H(1;0;0)$. (C) $H(0;0;2)$. (D) $H(0;1;0)$.

QUICK NOTE

CÂU 6. Tìm tọa độ M' là điểm đối xứng của điểm $M(1;2;3)$ qua gốc tọa độ O.
(A) $M'(-1;2;3)$. (B) $M'(-1;-2;3)$. (C) $M'(-1;-2;-3)$. (D) $M'(1;2;-3)$.

CÂU 7. Tìm M' là điểm đối xứng của $M(1;-2;0)$ qua điểm $A(2;1;-1)$.
(A) $M'(1;3;-1)$. (B) $M'(3;-3;1)$. (C) $M'(0;-5;1)$. (D) $M'(3;4;-2)$.

CÂU 8. Tìm tọa độ M' là điểm đối xứng của điểm $M(3;2;1)$ qua trục Ox.
(A) $M'(3;-2;-1)$. (B) $M'(-3;2;1)$. (C) $M'(-3;-2;-1)$. (D) $M'(3;-2;1)$.

CÂU 9. Trong không gian $Oxyz$, điểm N đối xứng với điểm $M(3;-1;2)$ qua trục Oy là
(A) $N(-3;1;-2)$. (B) $N(3;1;-2)$. (C) $N(-3;-1;-2)$. (D) $N(3;-1;-2)$.

CÂU 10. Tìm tọa độ M' là điểm đối xứng của điểm $M(2;3;4)$ qua trục Oz.
(A) $M'(2;-3;-4)$. (B) $M'(-2;3;4)$. (C) $M'(-2;-3;4)$. (D) $M'(2;-3;4)$.

CÂU 11. Tìm tọa độ M' là điểm đối xứng của điểm $M(1;2;5)$ qua (Oxy).
(A) $M'(-1;-2;5)$. (B) $M'(1;2;0)$. (C) $M'(1;-2;5)$. (D) $M'(1;2;-5)$.

CÂU 12. Trong không gian $Oxyz$, điểm đối xứng với điểm $A(-2;7;5)$ qua mặt phẳng (Oxz) là điểm B có tọa độ là
(A) $B(2;7;-5)$. (B) $B(-2;-7;5)$. (C) $B(-2;7;-5)$. (D) $B(2;-7;-5)$.

CÂU 13. Tìm tọa độ M' là điểm đối xứng của điểm $M(1;-2;3)$ qua (Oyz).
(A) $M'(-1;-2;3)$. (B) $M'(1;2;-3)$. (C) $M'(-1;2;-3)$. (D) $M'(0;-2;3)$.

CÂU 14. Tính khoảng cách d từ điểm $M(1;-2;-3)$ đến (Oxz).
(A) $\mathrm{d}=1$. (B) $\mathrm{d}=2$. (C) $\mathrm{d}=3$. (D) $\mathrm{d}=4$.

CÂU 15. Trong không gian $Oxyz$, hãy tính khoảng cách từ điểm $M(-3;2;4)$ đến trục Oy.
(A) $d=2$. (B) $d=3$. (C) $d=4$. (D) $d=5$.

CÂU 16. Cho mặt phẳng $(P)\colon x-2y+z=5$. Điểm nào dưới đây thuộc (P)?
(A) $Q(2;-1;5)$. (B) $P(0;0;-5)$. (C) $N(-5;0;0)$. (D) $M(1;1;6)$.

CÂU 17. Tìm m để điểm $M(m;1;6)$ thuộc mặt phẳng $(P)\colon x-2y+z-5=0$.
(A) $m=1$. (B) $m=-1$. (C) $m=3$. (D) $m=2$.

CÂU 18. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha):x+y+z-6=0$. Điểm nào dưới đây **không** thuộc (α)?
(A) $N(2;2;2)$. (B) $Q(3;3;0)$. (C) $P(1;2;3)$. (D) $M(1;-1;1)$.

CÂU 19. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng nào dưới đây đi qua điểm $M(1;-2;1)$?
(A) $(P_1):x+y+z=0$. (B) $(P_2):x+y+z-1=0$.
(C) $(P_3):x-2y+z=0$. (D) $(P_4):x+2y+z-1=0$.

CÂU 20. Trong không gian $Oxyz$, điểm nào dưới đây thuộc mặt phẳng (Oxy)?
(A) $Q(3;-1;3)$. (B) $N(3;-1;2)$. (C) $M(2;2;0)$. (D) $P(0;0;-2)$.

D. BẢNG ĐÁP ÁN

1. B	2. D	3. B	4. B	5. A	6. C	7. D	8. A
9. C	10. C	11. C	12. B	13. A	14. B	15. D	16. D
		17. A	18. D	19. A	20. C		

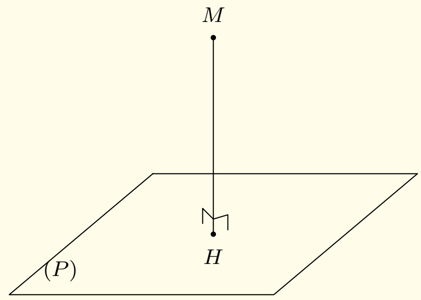
Bài 38. KHOẢNG CÁCH TỪ MỘT ĐIỂM TỚI MẶT PHẲNG

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

QUICK NOTE

1. Phương pháp chung

Khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (P) là MH, với H là hình chiếu vuông góc của M trên mặt phẳng (P).

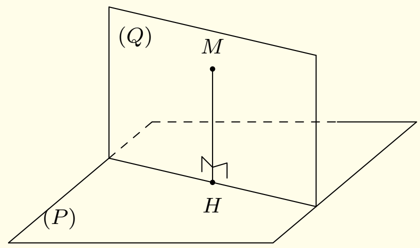


Phương pháp giải chung: Muốn tìm khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng, trước hết ta phải tìm hình chiếu vuông góc của điểm đó trên mặt phẳng. Việc xác định hình chiếu của điểm trên mặt phẳng ta thường dùng một trong các cách sau:

- **Cách 1:**

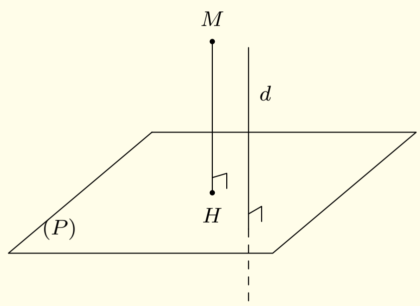
  \+ Bước 1: Tìm một mặt phẳng (Q) chứa M và vuông góc với (P).
  \+ Bước 2: Xác định giao tuyến: $\Delta = (P) \cap (Q)$.
  \+ Bước 3: Trong (Q), dựng $MH \perp \Delta, (H \in \Delta)$.

  Vì $\begin{cases} (P) \perp (Q) \\ \Delta = (P) \cap (Q) \\ (Q) \supset MH \perp \Delta \end{cases} \Rightarrow MH \perp (P) \Rightarrow d(M,(P)) = MH$



- **Cách 2** Nếu đã biết trước một đường thẳng $d \perp (P)$ thì ta sẽ dựng $Mx // d$, khi đó: $H = Mx \cap (P)$ là hình chiếu vuông góc của M trên (P).

$$\Rightarrow d(M,(P)) = MH$$



- **Cách 3**

QUICK NOTE

Dựa vào tính chất trục của tam giác: Cho $\triangle ABC$ nằm trên (P), nếu $MA = MB = MC$ thì hình chiếu vuông góc của điểm M trên (P) chính là tâm O của đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$. Khi đó: $MO \perp (P) \Rightarrow d(M,(P)) = MO$.

2. Khoảng cách dựng trực tiếp

Khoảng cách từ chân đường cao tới mặt bên

Bài toán: Cho hình chóp có đỉnh S có hình chiếu vuông góc lên mặt đáy là H. Tính khoảng cách từ điểm H đến mặt bên (SAB).
+ Kẻ $HI \perp AB, (I \in AB)$.
+ Kẻ $HK \perp SI, (K \in SI)$
Khi đó:

$$d(H,(SAB)) = HK = \frac{\text{SH.HI}}{\sqrt{SH^2 + HI^2}}$$

.

Khoảng cách từ một điểm trên mặt đáy tới mặt đứng(chứa đường cao)

Bài toán: Cho hình chóp có đỉnh S có hình chiếu vuông góc lên mặt đáy là H. Tính khoảng cách tù điểm A bất kì đến mặt bên (SHB).

+ Kẻ $AK \perp HB$
+ $\begin{cases} AK \perp HB \\ AK \perp SH \end{cases} \Rightarrow AK \perp (SHB) \Rightarrow d(A,(SHB)) = AK$

Khối chóp có các cạnh bên bằng nhau

Cho hình chóp có đỉnh S có các cạnh bên có độ dài bằng nhau: $SA = SB = SC = SD$ (đáy có thể là bốn đỉnh hoạc ba đỉnh). Khi đó nếu như O là tâm đường tròn ngoại tiếp đi qua các đỉnh nằm trên mặt đáy thì SO là trục đường tròn ngoại tiêp của đa giác đáy hay nói cách khác: $SO \perp (ABCD) \Rightarrow d(S,(ABCD)) = SO$.
Chú ý:
Nếu đáy là:
+ Tam giác đều, O là trọng tâm.
+ Tam giác vuông, O là trung điểm cạnh huyền.
+ Hình vuông, hình chữ nhật, O là giao của 2 đường chéo đồng thời là trung điểm mỗi đường.

3. Khoảng cách dựng gián tiếp

Giả sử ta muốn dựng trực tiếp khoảng cách tù điểm (P) tới mặt phẳng (P) mà không thực hiện được. Đồng thời từ điểm B ta lại dựng được trực tiếp khoảng cách tới khi đó ta sẽ thục hiện tính khoảng cách gián tiếp như sau:

Cách 1(Đổi điểm) Tính thông qua tỉ số khoảng cách.

TH1: Khi $AB \| (P)$ thì:

$$\mathrm{d}(A,(P)) = \mathrm{d}(B,(P))$$

QUICK NOTE

TH2: Khi $AB \cap (P) = \{I\}$ thì:

$$\frac{\mathrm{d}(A,(P))}{\mathrm{d}(B,(P))} = \frac{AI}{BI}$$

Cách 2 (Đổi đỉnh): Sử dụng phương pháp thể tích để tìm khoảng cách:

Bài toán tính khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng trong nhiều trường hợp có thể qui về bài toán thể tích khối đa diện. Việc tính khoảng cách này dưa vào công thức:

$$h = \frac{3V}{S}$$

V, S, h lần lượt là thể tích, diện tích đáy và chiều cao của hình chóp.

$$h = \frac{V}{S}$$

V, S, h lần lượt là thể tích, diện tích đáy và chiêu cao của hình lăng trụ.

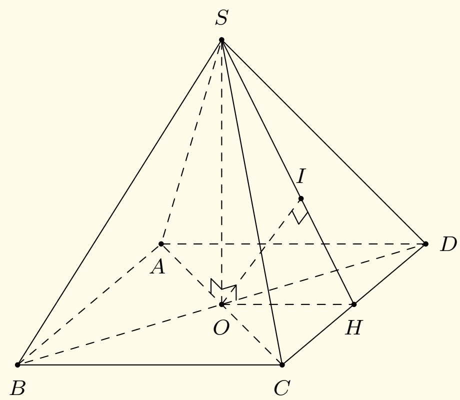
Phương pháp này áp dụng đươc trong trường hợp sau: Giả sử có thể qui bài toán tìm khoảng cách về bài toán tìm chiều cao của một hình chóp (hoặc một lăng trụ) nào đó. Dĩ nhiên, các chiều cao này thường là không tính được trục tiếp bằng cách sử dụng các phương pháp thông thường như định lí Pitago, công thức lượng giác,.. Tuy nhiên, các khối đa diện này lại dễ dàng tính được thể tích và diện tích đáy. Như vậy, chiều cao của nó sẽ được xác định bởi công thức đơn giản trên.

B. BÀI TẬP MẪU

VÍ DỤ 38 (Đề minh họa BGD 2022-2023). Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có chiều cao a, $AC = 2a$ (tham khảo hình bên). Khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SCD) bằng

Ⓐ $\frac{\sqrt{3}}{3}a$. Ⓑ $\sqrt{2}a$.

Ⓒ $\frac{2\sqrt{3}}{3}a$. Ⓓ $\frac{\sqrt{2}}{2}a$.



C. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN

CÂU 1. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B và cạnh bên SB vuông góc với mặt phẳng đáy. Cho biết $SB = 3a$, $AB = 4a$, $BC = 2a$. Tính khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SAC).

Ⓐ $\frac{12\sqrt{61}a}{61}$. Ⓑ $\frac{4a}{5}$. Ⓒ $\frac{12\sqrt{29}a}{29}$. Ⓓ $\frac{3\sqrt{14}a}{14}$.

CÂU 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B, $AB = BC = a$, $AD = 2a$. Biết $SA = a\sqrt{3}, SA \perp (ABCD)$. Gọi H là hình chiếu của A trên (SBC). Tính khoảng cách d từ H đến mặt phẳng (SCD).

A $d=\frac{3a\sqrt{50}}{80}$. **B** $d=\frac{3a\sqrt{30}}{40}$. **C** $d=\frac{3a\sqrt{10}}{20}$. **D** $d=\frac{3a\sqrt{15}}{60}$.

QUICK NOTE

CÂU 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ cạnh a, mặt phẳng (SAB) vuông góc với đáy và tam giác SAB đều. Gọi M là trung điểm của SA. Tính khoảng cách từ M đến mặt phẳng (SCD).

A $\frac{a\sqrt{21}}{14}$. **B** $\frac{a\sqrt{21}}{7}$. **C** $\frac{a\sqrt{3}}{14}$. **D** $\frac{a\sqrt{3}}{7}$.

CÂU 4. Hình chóp $S.ABCD$ đáy hình vuông cạnh a, $SA\perp(ABCD)\,;SA=a\sqrt{3}$. Khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SCD) bằng bao nhiêu?

A $a\sqrt{3}$. **B** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **C** $2a\sqrt{3}$. **D** $\frac{a\sqrt{3}}{4}$.

CÂU 5. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có độ dài cạnh bằng 10. Tính khoảng cách giữa haimặt phẳng $(ADD'A')$ và $(BCC'B')$.

A 10. **B** $\sqrt{10}$. **C** 100. **D** 5.

CÂU 6. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác ABC vuông tại A có $BC=2a$, $AB=a\sqrt{3}$. Tính khoảng cách từ AA' đến mặt phẳng $(BCC'B')$.

A $\frac{a\sqrt{21}}{7}$. **B** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **C** $\frac{a\sqrt{5}}{2}$. **D** $\frac{a\sqrt{7}}{3}$.

CÂU 7. Cho tứ diện $ABCD$ có cạnh AD vuông góc với mặt phẳng (ABC), $AC=AD=4$, $AB=3$, $BC=5$. Tính khoảng cách d từ điểm A đến mặt phẳng (BCD).

A $\mathrm{d}=\frac{12}{\sqrt{34}}$. **B** $\mathrm{d}=\frac{60}{\sqrt{769}}$. **C** $\mathrm{d}=\frac{\sqrt{769}}{60}$. **D** $\mathrm{d}=\frac{\sqrt{34}}{12}$.

CÂU 8. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính khoảng cách h từ điểm A đến mặt phẳng (SCD).

A $h=\frac{a\sqrt{21}}{7}$. **B** $h=a$. **C** $h=\frac{a\sqrt{3}}{4}$. **D** $h=\frac{a\sqrt{3}}{7}$.

CÂU 9. Cho hình chóp $S.ABC$ có hai mặt ABC và SBC là tam giác đều, hai mặt còn lại là tam giác vuông. Tính khoảng cách từ A đến (SBC) biết $BC=a\sqrt{2}$.

A $d\left(A;(SBC)\right)=\frac{a}{\sqrt{2}}$. **B** $d\left(A;(SBC)\right)=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

C $d\left(A;(SBC)\right)=\frac{2a\sqrt{3}}{3}$. **D** $d\left(A;(SBC)\right)=a\sqrt{2}$.

CÂU 10. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B. Biết $AD=2a$, $AB=BC=SA=a$. Cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy, gọi M là trung điểm của AD. Tính khoảng cách h từ M đến mặt phẳng (SCD).

A $h=\frac{a}{3}$. **B** $h=\frac{a\sqrt{6}}{6}$. **C** $h=\frac{a\sqrt{3}}{6}$. **D** $h=\frac{a\sqrt{6}}{3}$.

CÂU 11. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi I là trung điểm của AB và M là trung điểm của AD. Tính khoảng cách từ I đến mặt phẳng (SMC).

A $\frac{3\sqrt{2}a}{8}$. **B** $\frac{\sqrt{30}a}{10}$. **C** $\frac{\sqrt{30}a}{8}$. **D** $\frac{3\sqrt{7}a}{14}$.

CÂU 12. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SCD).

A $\frac{2a\sqrt{3}}{7}$. **B** $\frac{3a}{7}$. **C** $\frac{a\sqrt{21}}{7}$. **D** $\frac{a\sqrt{3}}{7}$.

CÂU 13. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật, $SA\perp(ABCD)$. Biết $AB=a, AD=2a$, góc giữa SC và (SAB) là 30°. Tính khoảng cách từ điểm B đến (SCD).

A $\frac{2a}{\sqrt{15}}$. **B** $\frac{2a}{\sqrt{7}}$. **C** $\frac{2a\sqrt{11}}{\sqrt{15}}$. **D** $\frac{22a}{\sqrt{15}}$.

CÂU 14. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB=3$, $AD=1$. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng $(ABCD)$ là điểm H thuộc cạnh đáy AB sao cho $AH=2HB$. Tính khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SHC).

A $3\sqrt{2}$. **B** $2\sqrt{2}$. **C** $\sqrt{2}$. **D** 2.

QUICK NOTE

CÂU 15. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O, $SA \perp (ABCD)$. Gọi I là trung điểm SC. Khoảng cách từ I đến mặt phẳng $(ABCD)$ bằng độ dài đoạn nào?

(A) IO. (B) IA. (C) IC. (D) IB.

CÂU 16. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng a. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng $(A'BC)$ bằng

(A) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. (B) $\frac{a\sqrt{6}}{4}$. (C) $\frac{a\sqrt{21}}{7}$. (D) $\frac{a\sqrt{3}}{4}$.

CÂU 17. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a. Góc giữa mặt bên và mặt đáy bằng 60°. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC) bằng

(A) $\frac{3a}{4}$. (B) $\frac{a}{4}$. (C) $\frac{a}{2}$. (D) $\frac{3a}{2}$.

CÂU 18. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông tại B với $AB = a$, $AA' = 2a$, $A'C = 3a$. Gọi M là trung điểm cạnh $C'A'$, I là giao điểm của các đường thẳng AM và $A'C$. Tính khoảng cách d từ A tới (IBC).

(A) $d = \frac{a}{\sqrt{5}}$. (B) $d = \frac{a}{2\sqrt{5}}$. (C) $d = \frac{5a}{3\sqrt{2}}$. (D) $d = \frac{2a}{\sqrt{5}}$.

CÂU 19. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng a. Tính khoảng cách d từ điểm A đến mặt phẳng $(A'BC)$.

(A) $d = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. (B) $d = \frac{a\sqrt{6}}{4}$. (C) $d = \frac{a\sqrt{21}}{7}$. (D) $d = \frac{a\sqrt{3}}{4}$.

CÂU 20. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = 2a$, $CD = a$, $\widehat{ACB} = \widehat{ADB} = 90^\circ$. Đáy BCD là tam giác cân tại B và $\widehat{CBD} = 2\alpha$. Tính khoảng cách từ A đến (BCD) theo a và α.

(A) $\frac{a}{\sin 2\alpha}\sqrt{4\sin^2 2\alpha - 2}$. (B) $\frac{a}{\sin 2\alpha}\sqrt{4\sin^2 2\alpha - 1}$.

(C) $\frac{a}{2\sin 2\alpha}\sqrt{4\sin^2 2\alpha - 1}$. (D) $\frac{2a}{\sin 2\alpha}\sqrt{4\sin^2 2\alpha - 1}$.

D. BẢNG ĐÁP ÁN

1. A	2. B	3. A	4. B	5. A	6. B	7. A	8. A
9. A	10. B	11. A	12. C	13. C	14. C	15. A	16. C
		17. A	18. D	19. C	20. B		

Bài 39. PHƯƠNG TRÌNH MŨ VÀ PHƯƠNG TRÌNH LOGARIT

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Công thức logarit

Với $a > 0$, $a \neq 1$ và $b > 0, c > 0$, ta luôn có

- $\log_{a^m} b^n = \frac{n}{m}\log_a b$, $m \neq 0$.
- $\log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$
- $\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c$
- $\log_a b \log_b c = \log_a c \quad (b \neq 1)$

2. Tính chất

Nếu hàm số $y = f(x)$ đơn điệu 1 chiều trên miền D và tồn tại $u, v \in D$, thì khi đó phương trình

$$f(u) = f(v) \Leftrightarrow u = v.$$

B. BÀI TẬP MẪU

VÍ DỤ 39 (Đề minh họa BGD 2022-2023). Có bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn $\log_3 \frac{x^2-16}{343} < \log_7 \frac{x^2-16}{27}$?

(A) 193. (B) 92. (C) 186. (D) 184.

QUICK NOTE

C. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN

CÂU 21. Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thoả mãn $2\left(x+\ln(x+1)\right)+x^2+1=y+e^y$ và $0\le x\le 2020$?

(A) 0. (B) 7. (C) 1. (D) 8.

CÂU 22. Gọi x_1,x_2 là hai nghiệm thực của phương trình $\log_3\dfrac{x-2}{x^2-4x+5}-x^2+7x-10=0$. Tính $|x_1-x_2|$.

(A) 3. (B) 5. (C) $\sqrt{3}$. (D) $\sqrt{5}$.

CÂU 23. Biết x_1,x_2 là hai nghiệm của phương trình $\log_7\left(\dfrac{4x^2-4x+1}{2x}\right)+4x^2+1=6x$ và $x_1+2x_2=\dfrac{1}{4}\left(a+\sqrt{b}\right)$ với a,b là hai số nguyên dương. Tính $a+b$.

(A) $a+b=14$. (B) $a+b=13$. (C) $a+b=16$. (D) $a+b=11$.

CÂU 24. Phương trình $\ln\dfrac{x^2+3x+4}{-x+2}+x^2+4x+2$ có hai nghiệm x_1,x_2. Khi đó x_1+x_2 bằng.

(A) -2. (B) 2. (C) 4. (D) -4.

CÂU 25. Biết $x_1,x_2,(x_1>x_2)$ là hai nghiệm của phương trình $\log_3\left(\dfrac{x^2-2x+1}{3x}\right)+x^2+2x=3x$ và $4x_1+2x_2=a+\sqrt{b}$, với a,b là hai số nguyên dương. Tính $a+b$.

(A) $a+b=14$. (B) $a+b=12$. (C) $a+b=7$. (D) $a+b=9$.

CÂU 26. Cho phương trình $\dfrac{1}{2}\log_2(x+2)+x+3=\log_2\dfrac{2x+1}{x}+\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^2+2\sqrt{x+2}$, gọi S là tổng tất cả các nghiệm của nó. Khi đó, giá trị của S là.

(A) $S=\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}$. (B) $S=\dfrac{1-\sqrt{13}}{2}$. (C) $S=2$. (D) $S=-2$.

CÂU 27. Số nghiệm nguyên của bất phương trình $\log_3\dfrac{3x^2+x+1}{2x^2+2x+3}+x^2-x-2\le 0$ là.

(A) 2. (B) 4. (C) 1. (D) 3.

CÂU 28. Tìm số nghiệm nguyên của bất phương trình $2^{2x^2-15x+100}-2^{x^2+10x-50}+x^2-25x+150<0$.

(A) 5. (B) 3. (C) 6. (D) 4.

CÂU 29. Tìm tổng tất cả các nghiệm của phương trình

$$\frac{1}{2}\log_2(x+3)=\log_2(x+1)+x^2-x-4+2\sqrt{x+3}.$$

(A) $S=2$. (B) $S=-1$. (C) $S=1-\sqrt{2}$. (D) $S=1$.

CÂU 30. Phương trình $2\log_3(\cot x)=\log_2(\cos x)$ có bao nhiêu nghiệm trong khoảng $(0;2018\pi)$.

(A) 2017 nghiệm. (B) 1009 nghiệm. (C) 2018 nghiệm. (D) 1008 nghiệm.

CÂU 31. Phương trình $\log_2\dfrac{x^2+3x+2}{3x^2-5x+8}=x^2-4x+3$ có nghiệm các nghiệm x_1,x_2. Hãy tính giá trị của biểu thức $A=x_1^2+x_2^2-3x_1x_2$.

(A) -31. (B) 1. (C) -1. (D) 31.

CÂU 32. Biết rằng phương trình $\log_2\left(1+x^{1009}\right)=2018\log_3 x$ có nghiệm duy nhất x_0. Khẳng định nào sau đây là đúng.

(A) $1<x_0<3^{\frac{1}{1008}}$. (B) $3^{\frac{1}{1007}}<x_0<1$.

(C) $3^{\frac{1}{1008}}<x_0<3^{\frac{1}{1006}}$. (D) $x_0>3^{\frac{2}{1009}}$.

CÂU 33. Biết x_1,x_2 là hai nghiệm của phương trình $\log_7\left(\dfrac{4x^2-4x+1}{2x}\right)+4x^2+1=6x$ và $x_1+2x_2=\dfrac{1}{4}\left(a+\sqrt{b}\right)$ với a,b là hai số nguyên dương. Tính $a+b$.

QUICK NOTE

(A) $a+b=13$. (B) $a+b=16$. (C) $a+b=11$. (D) $a+b=14$.

CÂU 34. Có bao nhiêu cặp số nguyên dương $(x;y)$ với $x \le 2020$ thỏa mãn $\log_2(x-1)+2x-2y=1+4^y$.

(A) 6. (B) 2020. (C) 5. (D) 1010.

CÂU 35. Cho các số thực x,y thỏa mãn $2x-y=e^x(2-e^x)+\ln(2e^x+y)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x^2+y^2=20y$.

(A) -19. (B) -21. (C) -100. (D) 0.

CÂU 36. Cho phương trình $\log_2\dfrac{4x+2019}{x^2-2x+3}=x^2-6x-2016$. Tổng tất cả các nghiệm của phương trình là.

(A) 5. (B) 6. (C) 4. (D) 2.

CÂU 37. Tính tổng tất cả các nghiệm của phương trình

$$\log\frac{x^3+3x^2-3x-5}{x^2+1}+(x+1)^3=x^2+6x+7.$$

(A) -2. (B) 0. (C) $-2-\sqrt{3}$. (D) $-2+\sqrt{3}$.

CÂU 38. Cho phương trình $\dfrac{1}{2}\log_2(x+2)+x+3=\log_2\dfrac{2x+1}{x}+\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^2+2\sqrt{x+2}$, gọi S là tổng tất cả các nghiệm của nó. Khi đó, giá trị của S là.

(A) $S=2$. (B) $S=\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}$. (C) $S=-2$. (D) $S=\dfrac{1-\sqrt{13}}{2}$.

CÂU 39. Cho phương trình $\log(x-3)+2\sqrt{x-3}+6x-16=2\log(x-4)+2(x-3)^3$ có một nghiệm có dạng $x=\dfrac{a+\sqrt{b}}{2}$, trong đó a,b là hai số nguyên dương. Giá trị của biểu thức $a+b$ bằng.

(A) 14. (B) 5. (C) 9. (D) 10.

CÂU 40. Cho phương trình $\dfrac{1}{2}\log_2(x+2)+x+3=\log_2\dfrac{2x+1}{x}+\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^2+2\sqrt{x+2}$, gọi S là tổng tất cả các nghiệm của nó. Khi đó, giá trị của S là.

(A) $S=\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}$. (B) $S=\dfrac{1-\sqrt{13}}{2}$. (C) $S=2$. (D) $S=-2$.

D. BẢNG ĐÁP ÁN

21. C	22. D	23. A	24. D	25. A	26. A	27. B	28. D
29. D	30. C	31. B	32. A	33. D	34. C	35. A	36. B
		37. B	38. B	39. A	40. A		

Bài 40. TÍCH PHÂN HÀM ẨN

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Định nghĩa

Nếu hàm số $f(x)$ liên tục trên $[a;b]$ và $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên $[a;b]$ thì

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a). \quad (*)$$

Tên gọi

- $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ đọc là "Tích phân từ a đến b của $f(x)\,dx$".
- a và b gọi là hai cận của tích phân, trong đó a là cận dưới và b là cận trên.
- $(*)$ gọi là công thức **Newton-Leibnitz**.

QUICK NOTE

2. Tính chất

a) $\int\limits_a^b [m \cdot f(x) \pm n \cdot g(x)]\,\mathrm{d}x = m\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \pm n\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$

b) $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_c^b (x)\,\mathrm{d}x, \forall c \in [a;b]$.

c) $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int\limits_b^a f(x)\,\mathrm{d}x;\ \int\limits_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$

d) $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int\limits_a^b f(u)\,\mathrm{d}u = \ldots$

3. Phương pháp đổi biến số

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Giả sử hàm số $x = \phi(t)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[\alpha;\beta]$ sao cho $\phi(\alpha) = a$, $\phi(\beta) = b$ và $a \le \phi(t) \le b$ với mọi $t \in [\alpha;\beta]$. Khi đó

$$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_\alpha^\beta f(\phi(t))\,\phi'(t)\,\mathrm{d}t.$$

4. Phương pháp tích phân từng phần

Nếu $u = u(x)$ và $v = v(x)$ là hai hàm số có đạo hàm liên tục trên đoạn $[a;b]$ thì

$$\int\limits_a^b u(x)\cdot v'(x)\,\mathrm{d}x = [u(x)\cdot v(x)]\Big|_a^b - \int\limits_a^b u'(x)\cdot v(x)\,\mathrm{d}x$$

hay $$\int\limits_a^b u\,\mathrm{d}v = (u\cdot v)\Big|_a^b - \int\limits_a^b v\,\mathrm{d}u.$$

B. BÀI TẬP MẪU

VÍ DỤ 40 (Đề minh họa 2023 - BGD&ĐT). Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi $F(x), G(x)$ là hai nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(4)+G(4) = 4$ và $F(0)+G(0) = 1$. Khi đó $\int\limits_0^2 f(2x)\,\mathrm{d}x$ bằng

(A) 3. (B) $\frac{3}{4}$. (C) 6. (D) $\frac{3}{2}$.

C. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN

CÂU 1. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi $F(x)$, $G(x)$ là hai nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(-25)+G(-25) = 6$ và $F(-33)+G(-33) = 9$. Tính $\int\limits_{-5}^{-4} f(8x+7)\mathrm{d}x$.

(A) 15. (B) $-\frac{3}{16}$. (C) -3. (D) $\frac{3}{8}$.

CÂU 2. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi $F(x)$, $G(x)$ là hai nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(22)+G(22) = -1$ và $F(-33)+G(-33) = 0$. Tính $\int\limits_{-6}^{5} f(5x-3)\mathrm{d}x$.

(A) 11. (B) -11. (C) $\frac{1}{10}$. (D) $-\frac{1}{10}$.

QUICK NOTE

CÂU 3. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi $F(x)$, $G(x)$ là hai nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(52)+G(52)=0$ và $F(-46)+G(-46)=-8$. Tính $\int\limits_{-7}^{7} f(7x+3)\mathrm{d}x$.

(A) $\frac{4}{7}$. (B) 8. (C) $\frac{1}{14}$. (D) $-\frac{4}{7}$.

CÂU 4. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi $F(x)$, $G(x)$ là hai nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(132)+G(132)=3$ và $F(-28)+G(-28)=8$. Tính $\int\limits_{-3}^{17} f(8x-4)\mathrm{d}x$.

(A) 5. (B) -5. (C) $\frac{5}{16}$. (D) $-\frac{5}{16}$.

CÂU 5. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi $F(x)$, $G(x)$ là hai nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(147)+G(147)=2$ và $F(28)+G(28)=-3$. Tính $\int\limits_{4}^{21} f(7x)\mathrm{d}x$.

(A) 5. (B) $\frac{5}{14}$. (C) -5. (D) $-\frac{5}{14}$.

CÂU 6. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi $F(x)$, $G(x)$ là hai nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(90)+G(90)=4$ và $F(27)+G(27)=9$. Tính $\int\limits_{3}^{12} f(7x+6)\mathrm{d}x$.

(A) 5. (B) $\frac{5}{14}$. (C) -5. (D) $-\frac{5}{14}$.

CÂU 7. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi $F(x)$, $G(x)$ là hai nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(20)+G(20)=-4$ và $F(8)+G(8)=8$. Tính $\int\limits_{1}^{7} f(2x+6)\mathrm{d}x$.

(A) 3. (B) 4. (C) -3. (D) -4.

CÂU 8. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi $F(x)$, $G(x)$ là hai nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(30)+G(30)=5$ và $F(2)+G(2)=-3$. Tính $\int\limits_{-2}^{12} f(2x+6)\mathrm{d}x$.

(A) 2. (B) 8. (C) -2. (D) -8.

CÂU 9. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi $F(x)$, $G(x)$ là hai nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(50)+G(50)=-2$ và $F(-58)+G(-58)=-7$. Tính $\int\limits_{-6}^{6} f(9x-4)\mathrm{d}x$.

(A) $-\frac{5}{9}$. (B) $-\frac{5}{18}$. (C) $\frac{5}{18}$. (D) $\frac{5}{9}$.

CÂU 10. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi $F(x)$, $G(x)$ là hai nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(32)+G(32)=-8$ và $F(-44)+G(-44)=-3$. Tính $\int\limits_{-9}^{10} f(4x-8)\mathrm{d}x$.

(A) $\frac{5}{4}$. (B) $-\frac{5}{8}$. (C) $\frac{5}{8}$. (D) $-\frac{5}{4}$.

CÂU 11. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\int\limits_{0}^{7} f(x)\,\mathrm{d}x=10$, $\int\limits_{0}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x=6$. Tính $I=\int\limits_{-2}^{3} f(|3-2x|)\,\mathrm{d}x$.

(A) 16. (B) 3. (C) 15. (D) 8.

CÂU 12. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x\cdot f\left(\cos^2 x\right)\,\mathrm{d}x=1$, khi đó $I=$

$\int\limits_0^1 \left[2f(1-x)-3x^2+5\right] \mathrm{d}x$ bằng

(A) 6. (B) 4. (C) 5. (D) 3.

CÂU 13. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(2)=25$ và $f'(x)=4x\sqrt{f(x)}$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Khi đó $\int\limits_2^3 f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

(A) $\dfrac{1073}{15}$. (B) $\dfrac{458}{15}$. (C) $\dfrac{838}{15}$. (D) $\dfrac{1016}{15}$.

CÂU 14. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\int\limits_0^1 (x+1)f'(x)\,\mathrm{d}x=10$ và $2f(1)-f(0)=2$. Tính $I=\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

(A) $I=1$. (B) $I=8$. (C) $I=-12$. (D) $I=-8$.

CÂU 15. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(-x)+2018f(x)=2x\sin x$. Tính $I=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x$.

(A) $\dfrac{2}{2018}$. (B) $\dfrac{2}{1009}$. (C) $\dfrac{4}{2019}$. (D) $\dfrac{2}{2019}$.

CÂU 16. Biết $\int\limits_0^\pi f(\sin x)\,\mathrm{d}x=1$. Tính $\int\limits_0^\pi xf(\sin x)\,\mathrm{d}x$.

(A) $\dfrac{\pi}{2}$. (B) 0. (C) π. (D) $\dfrac{1}{2}$.

CÂU 17. Cho hàm số $f(x)$ có $f(2)=0$ và $f'(x)=\dfrac{x+7}{\sqrt{2x-3}}$, $\forall x\in\left(\dfrac{3}{2};+\infty\right)$. Biết rằng $\int\limits_4^7 f\left(\dfrac{x}{2}\right)\mathrm{d}x=\dfrac{a}{b}$, $(a,b\in\mathbb{Z},b>0)$, $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản. Khi đó $a+b$ bằng

(A) 250. (B) 251. (C) 133. (D) 221.

CÂU 18. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(2)=16$, $\int\limits_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x=4$. Tính $I=\int\limits_0^1 xf'(2x)\,\mathrm{d}x$.

(A) 20. (B) 13. (C) 7. (D) 12.

CÂU 19. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm và liên tục trên $[0;1]$, thỏa mãn $\int\limits_1^2 f(x-1)\,\mathrm{d}x=3$ và $f(1)=4$. Tích phân $\int\limits_0^1 x^3f'\left(x^2\right)\mathrm{d}x$.

(A) 1. (B) -1. (C) $-\dfrac{1}{2}$. (D) $\dfrac{1}{2}$.

CÂU 20. Cho hàm số $f(x)$ có $f(1)=1$ và $f'(x)=-\dfrac{\ln x}{x^2}$, $\forall x>0$. Khi đó $I=\int\limits_1^{\mathrm{e}} f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

(A) $I=-\dfrac{3}{2}$. (B) $I=\dfrac{3}{2}$. (C) $I=\dfrac{2}{\mathrm{e}}-1$. (D) $I=1-\dfrac{2}{\mathrm{e}}$.

QUICK NOTE

QUICK NOTE

D. BẢNG ĐÁP ÁN

1. B	2. D	3. A	4. C	5. B	6. D	7. C	8. A
9. C	10. B	11. D	12. A	13. C	14. D	15. C	16. A
		17. B	18. C	19. D	20. B		