

QUICK NOTE

1

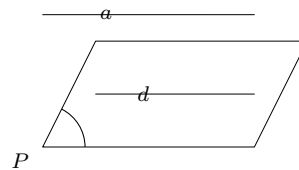
Chứng minh đường thẳng song song với mặt phẳng

Phương pháp giải: Để chứng minh đường thẳng a song song với mặt phẳng (P) , ta cần chứng tỏ các ý sau đây

- a không nằm trên (P) ;
- a song song với một đường thẳng b nằm trong (P) .
Suy ra $a \parallel (P)$.

Tóm lại

$$\begin{cases} a \not\subset (P) \\ a \parallel b \\ b \subset (P) \end{cases} \Rightarrow a \parallel (P)$$



VÍ DỤ 1. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M và N lần lượt là trọng tâm của các tam giác ACD và BCD . Chứng minh rằng MN song song với các mặt phẳng (ABC) và (ABD) .

VÍ DỤ 2. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G là trọng tâm tam giác ABD , điểm I nằm trên cạnh BC sao cho $BI = 2IC$. Chứng minh rằng IG song song (ACD) .

VÍ DỤ 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Lấy M nằm trên cạnh AD sao cho $AD = 3AM$. Gọi G, N lần lượt là trọng tâm của tam giác SAB và ABC .

- Tìm giao tuyến của (SAB) và (SCD) .
- Chứng minh MN song song (SCD) và NG song song (SAC) .

VÍ DỤ 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và CD .

- Chứng minh MN song song với các mặt phẳng (SBC) và (SAD) .
- Gọi E là trung điểm của SA . Chứng minh SB và SC đều song song với mặt phẳng (MNE) .

VÍ DỤ 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. Gọi G là trọng tâm tam giác SAD và E là điểm trên cạnh DC sao cho $DC = 3DE$, I là trung điểm AD .

- Chứng minh OI song song với các mặt phẳng (SAB) và (SCD) .
- Tìm giao điểm P của IE và (SBC) . Chứng minh $GE \parallel (SBC)$.

2

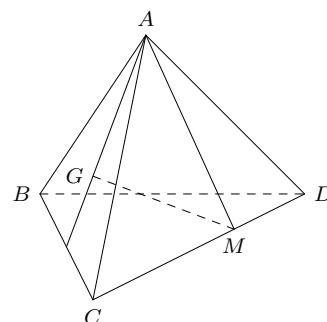
Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng cắt nhau

Ngoài các phương pháp đã học ở bài trước, ta có thêm 2 cách nữa là áp dụng định lí 3 ở trên.

VÍ DỤ 1.

Cho tứ diện $ABCD$ có G là trọng tâm $\triangle ABC$, $M \in CD$ với $MC = 2MD$.

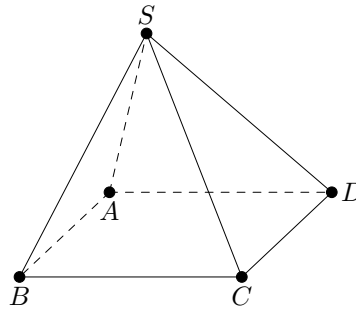
- Chứng minh MG song song với (ABD) .
- Tìm giao tuyến của (ABD) với (BGM) .



VÍ DỤ 2.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi I, K lần lượt là trung điểm của BC và CD .

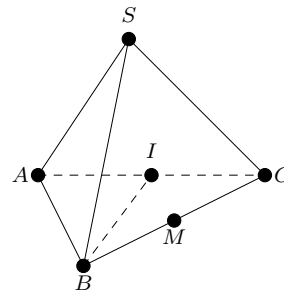
- Tìm giao tuyến của (SIK) và (SAC) , (SIK) và (SBD) .
- Gọi M là trung điểm của SB . Chứng minh $SD \parallel (ACM)$.
- Tìm giao điểm F của DM và (SIK) . Tính tỉ số $\frac{MF}{MD}$.



VÍ DỤ 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang, đáy lớn AD . Gọi I là trung điểm của SB . Gọi (P) là mặt phẳng qua I , song song với SD và AC . Tìm giao tuyến của (P) với các mặt (SBD) và $(ABCD)$.

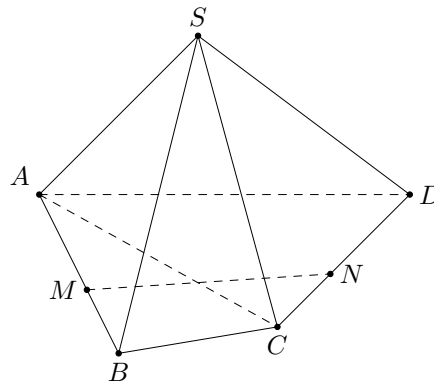
VÍ DỤ 4.

Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, I lần lượt là trung điểm của BC, AC . Mặt phẳng (P) đi qua điểm M , song song với BI và SC . Xác định trên hình vẽ các giao điểm H, K, N của (P) với các cạnh AC, SA, SB . Tứ giác $MNKH$ là hình gì?



VÍ DỤ 5.

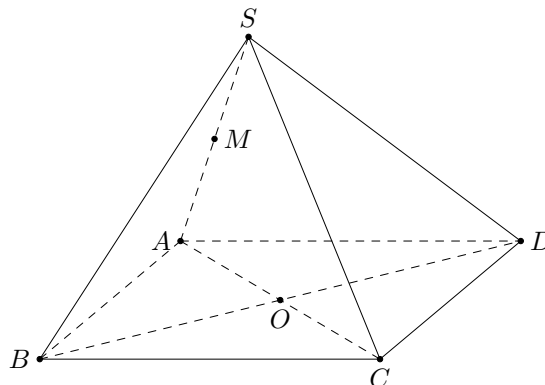
Cho hình chóp $S.ABCD$. Gọi M, N thuộc cạnh AB, CD . Gọi (α) là mặt phẳng qua MN và song song với SA . Tìm giao tuyến của (α) với các mặt của hình chóp.



VÍ DỤ 6.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành, O là giao điểm của AC và BD , M là trung điểm của SA .

- Chứng minh $OM \parallel (SCD)$.
- Gọi (α) là mặt phẳng đi qua M , đồng thời song song với SC và AD . Tìm giao tuyến của mặt phẳng (α) với các mặt của hình chóp $S.ABCD$. Hình tạo bởi các giao tuyến là hình gì?



VÍ DỤ 7. Cho tứ diện $ABCD$ và điểm M thuộc cạnh AB . Gọi (α) là mặt phẳng đi qua M , song song với đường thẳng BC và AD . Gọi N, P, Q lần lượt là giao điểm của (α) với các cạnh AC, CD và DB .

- Chứng minh $MNPQ$ là hình bình hành.
- Trong trường hợp nào thì $MNPQ$ là hình thoi.

QUICK NOTE

QUICK NOTE

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

BÀI 1. Cho tứ diện $ABCD$ có G là trọng tâm tam giác ABD . Trên đoạn BC lấy điểm M sao cho $MB = 2MC$. Chứng minh rằng đường thẳng MG song song với mặt phẳng (ACD) .

BÀI 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh SD, CD, BC .

- Chứng minh đường thẳng OM song song với các mặt phẳng $(SAB), (SBC)$.
- Chứng minh đường thẳng SP song song với mặt phẳng (OMN) .

BÀI 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang đáy lớn AB , với $AB = 2CD$. Gọi O là giao điểm của AC và BD , I là trung điểm của SA , G là trọng tâm của tam giác SBC và E là một điểm trên cạnh SD sao cho $3SE = 2SD$. Chứng minh:

- $DI \parallel (SBC)$.
- $GO \parallel (SCD)$.
- $SB \parallel (ACE)$.

BÀI 4. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB và CD , M là một điểm trên đoạn IJ . Gọi (P) là mặt phẳng qua M và song song với AB và CD .

- Tìm giao tuyến của mặt phẳng (P) và (ICD) .
- Xác định giao tuyến của mặt phẳng (P) với các mặt của tứ diện. Hình tạo bởi các giao tuyến là hình gì?

BÀI 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Gọi K và J lần lượt là trọng tâm của các tam giác ABC và SBC .

- Chứng minh $KJ \parallel (SAB)$.
- Gọi (P) là mặt phẳng chứa KJ và song song với AD . Xác định giao tuyến của mặt phẳng (P) với các mặt của hình chóp. Hình tạo bởi các giao tuyến là hình gì?

BÀI 6. Cho tứ diện $ABCD$. Lấy điểm M trên cạnh AB sao cho $AM = 2MB$. Gọi G là trọng tâm $\triangle BCD$ và I là trung điểm CD , H là điểm đối xứng của G qua I .

- Chứng minh $GD \parallel (MCH)$.
- Tìm giao điểm K của MG với (ACD) . Tính tỉ số $\frac{GK}{GM}$.

BÀI 7. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm O , M là trung điểm của SA . Gọi (P) là mặt phẳng qua O , song song với BM và SD . Tìm giao tuyến của (P) và (SAD) .

D. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

CÂU 1. Trong không gian cho mặt phẳng (α) và A không thuộc (α) . Qua điểm A có thể dựng được bao nhiêu đường thẳng song song với (α) ?

- Duy nhất.
- Vô số.
- 2.
- 4.

CÂU 2. Trong không gian cho đường thẳng Δ và điểm O không nằm trong Δ . Qua điểm O cho trước, có bao nhiêu mặt phẳng song song với đường thẳng Δ ?

- Vô số.
- 3.
- 1.
- 2.

CÂU 3. Có bao nhiêu mặt phẳng song song với cả hai đường thẳng chéo nhau?

- Vô số.
- 1.
- 2.
- 3.

CÂU 4. Cho hai đường thẳng phân biệt a, b và mặt phẳng (α) . Giả sử $a \parallel (\alpha), b \subset (\alpha)$. Khi đó

- $a \parallel b$.
- a, b chéo nhau.
- a, b cắt nhau.
- $a \parallel b$ hoặc a, b chéo nhau.

CÂU 5. Cho hai đường thẳng phân biệt a, b và mặt phẳng (α) . Giả sử $a \parallel b$ và $b \parallel (\alpha)$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

- $a \parallel (\alpha)$.
- $a \subset (\alpha)$.
- $a \parallel (\alpha)$ hoặc $a \subset (\alpha)$.
- a cắt (α) .

CÂU 6. Cho đường thẳng a nằm trong mặt phẳng (α) và đường thẳng b không thuộc (α) . Mệnh đề nào sau đây đúng?

- (A) Nếu $b \parallel (\alpha)$ thì $b \parallel a$.
 (B) Nếu $b \parallel a$ thì $b \parallel (\alpha)$.
 (C) Nếu b cắt (α) và (β) chứa b thì giao tuyến của (α) và (β) là đường thẳng cắt cả a và b .
 (D) Nếu b cắt (α) thì b cắt a .

CÂU 7. Cho hai đường thẳng chéo nhau a và b . Khẳng định nào sau đây sai?

- (A) Có duy nhất một mặt phẳng song song với a và b .
 (B) Có vô số đường thẳng song song với a và cắt b .
 (C) Có duy nhất một mặt phẳng qua a và song song với b .
 (D) Có duy nhất một mặt phẳng qua điểm M , song song với a và b (với M là điểm cho trước).

CÂU 8. Cho $d \parallel (\alpha)$, mặt phẳng (β) qua d cắt (α) theo giao tuyến d' . Khẳng định nào sau đây là đúng?

- (A) d cắt d' .
 (B) $d \parallel d'$.
 (C) d và d' chéo nhau.
 (D) $d \equiv d'$.

CÂU 9. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của SA và SC . Khẳng định nào sau đây đúng?

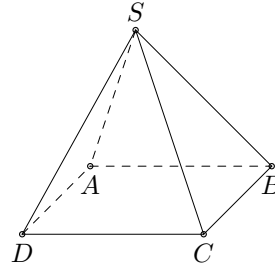
- (A) $MN \parallel (ABCD)$. (B) $MN \parallel (SAB)$. (C) $MN \parallel (SCD)$. (D) $MN \parallel (SBC)$.

CÂU 10. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, M và N là hai điểm trên SA, SB sao cho $\frac{SM}{SA} = \frac{SN}{SB} = \frac{1}{3}$. Vị trí tương đối giữa MN và $(ABCD)$ là

- (A) MN và $(ABCD)$ chéo nhau.
 (B) MN song song $(ABCD)$.
 (C) MN nằm trong $(ABCD)$.
 (D) MN cắt $(ABCD)$.

CÂU 11. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) .

- (A) Là đường thẳng đi qua đỉnh S và song song với đường thẳng BD .
 (B) Là đường thẳng đi qua đỉnh S và tâm O của đáy.
 (C) Là đường thẳng đi qua đỉnh S và song song với đường thẳng BC .
 (D) Là đường thẳng đi qua đỉnh S và song song với đường thẳng AB .



CÂU 12. Cho tứ diện $ABCD$ có I, J lần lượt là trung điểm của BC, BD . Giao tuyến của mặt phẳng (AIJ) và (ACD) là

- (A) đường thẳng d đi qua A và song song với BC .
 (B) đường thẳng d đi qua A và song song với BD .
 (C) đường thẳng d đi qua A và song song với CD .
 (D) đường thẳng AB .

CÂU 13. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABD , Q thuộc cạnh AB sao cho $AQ = 2QB$, P là trung điểm của AB , M là trung điểm của BD . Khẳng định nào sau đây đúng?

- (A) $Q \in (CDP)$. (B) QG cắt (BCD) . (C) $MP \parallel (BCD)$. (D) $GQ \parallel (BCD)$.

CÂU 14. Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$ không cùng nằm trong một mặt phẳng. Gọi O, O_1 lần lượt là tâm của $ABCD, ABEF$; M là trung điểm của CD . Khẳng định nào sau đây sai?

- (A) $OO_1 \parallel (BEC)$.
 (B) $OO_1 \parallel (EFM)$.
 (C) MO_1 cắt (BEC) .
 (D) $OO_1 \parallel (AFD)$.

CÂU 15. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mặt phẳng đi qua trung điểm M của cạnh AB và song song với BD, SA là hình gì?

- (A) Ngũ giác. (B) Hình thang. (C) Tam giác. (D) Hình bình hành.

QUICK NOTE

QUICK NOTE

Bài 13. HAI MẶT PHẪNG SONG SONG

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA HAI MẶT PHẪNG

Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) . Các trường hợp có thể xảy ra:

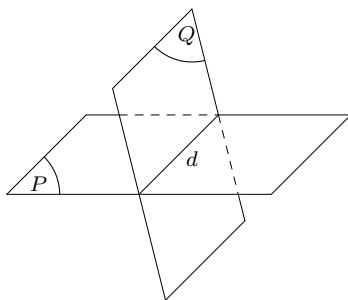
⚙ **Trường hợp 1:** (P) và (Q) trùng nhau.

⚙ **Trường hợp 2:** (P) và (Q) có một điểm chung. Khi đó chúng sẽ có điểm chung khác nữa. Tập hợp tất cả các điểm chung đó gọi là giao tuyến của hai mặt phẳng (P) và (Q) (Hình 1).

⚙ **Trường hợp 3:** (P) và (Q) không có điểm chung. Khi đó ta nói (P) song song (Q) (Hình 2).

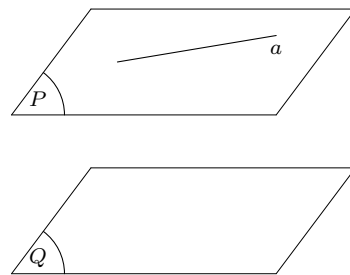
— Kí hiệu $(P) \parallel (Q)$;

— Khi $(P) \parallel (Q)$ và $a \subset (P)$ thì $a \parallel (Q)$.



Hình 1.

$(P), (Q)$ cắt nhau: $(P) \cap (Q) = d$



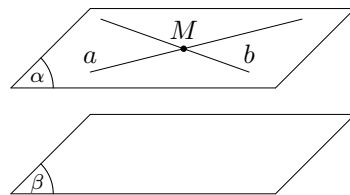
Hình 2.

$(P), (Q)$ không có điểm chung: $(P) \parallel (Q)$

2. CÁC ĐỊNH LÝ CƠ BẢN

⚙ **Định lý 1:**

Nếu mặt phẳng (α) chứa hai đường thẳng cắt nhau a, b và a, b cùng song song với mặt phẳng (β) thì (α) song song với (β) .

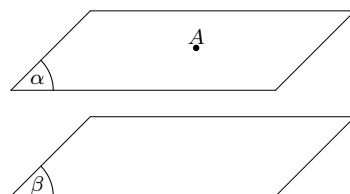


☑ Muốn chứng minh hai mặt phẳng song song, ta phải chứng minh có hai đường thẳng cắt nhau thuộc mặt phẳng này lần lượt song song với mặt phẳng kia.

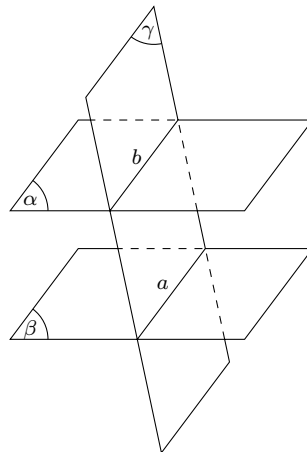
☑ Muốn chứng minh đường thẳng $a \parallel (Q)$, ta chứng minh đường thẳng a nằm trong mặt phẳng (P) và $(P) \parallel (Q)$.

⚙ **Định lý 2:**

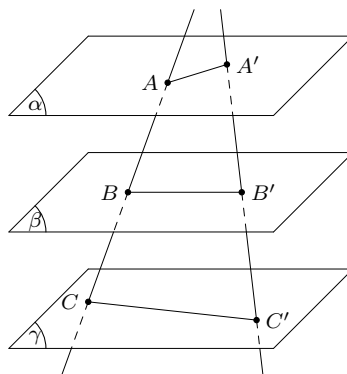
Qua một điểm nằm ngoài một mặt phẳng cho trước có một và chỉ một mặt phẳng song song với mặt phẳng đã cho.



Định lý 3: Cho hai mặt phẳng song song. Nếu một mặt phẳng cắt mặt phẳng này thì cũng cắt mặt phẳng kia và hai giao tuyến song song với nhau.



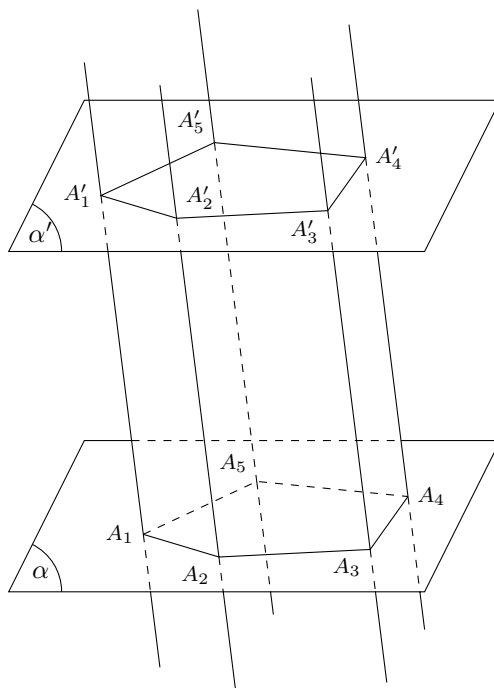
Định lý 4: (Định lý Thales) Ba mặt phẳng đôi một song song chắn trên hai cát tuyến bất kì những đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ.



3. HÌNH LĂNG TRỤ VÀ HÌNH HỘP

Định nghĩa: Cho hai mặt phẳng $(\alpha) \parallel (\alpha')$. Trong (α) cho đa giác lồi $A_1A_2 \dots A_n$. Qua các điểm A_1, A_2, \dots, A_n ta dựng các đường song song với nhau và cắt (α') tại A'_1, A'_2, \dots, A'_n .

Hình tạo thành bởi hai đa giác $A_1A_2 \dots A_n, A'_1A'_2 \dots A'_n$ cùng với các hình bình hành $A_1A_2A'_2A'_1, A_2A_3A'_3A'_2, \dots, A_nA_1A'_1A'_n$ được gọi là *hình lăng trụ* và được ký hiệu bởi $A_1A_2 \dots A_n.A'_1A'_2 \dots A'_n$.



- ☑ Hai đa giác $A_1A_2 \dots A_n, A'_1A'_2 \dots A'_n$ được gọi là hai *mặt đáy* (bằng nhau) của hình lăng trụ.
- ☑ Các đoạn thẳng $A_1A'_1, A_2A'_2, \dots, A_nA'_n$ gọi là các *cạnh bên* của hình lăng trụ.
- ☑ Các hình bình hành $A_1A_2A'_2A'_1, A_2A_3A'_3A'_2, \dots, A_nA_1A'_1A'_n$ gọi là các *mặt bên* của hình lăng trụ.
- ☑ Các đỉnh của hai đa giác đáy gọi là các *đỉnh* của hình lăng trụ.

Tính chất:

- ☑ Các cạnh bên của hình lăng trụ thì song song và bằng nhau.
- ☑ Các mặt bên của hình lăng trụ đều là hình bình hành.
- ☑ Hai đáy của hình lăng trụ là hai đa giác bằng nhau.

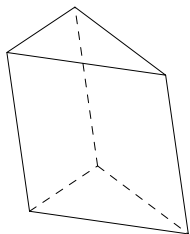
QUICK NOTE

QUICK NOTE

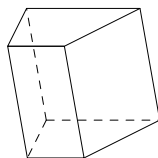
Hình lăng trụ có đáy là hình bình hành gọi là *hình hộp*.

- ☑ Các mặt của hình hộp là hình bình hành.
- ☑ Hai mặt phẳng lần lượt chứa hai mặt đối diện của hình hộp thì song song nhau.

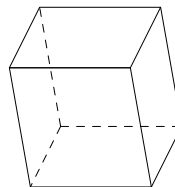
Minh họa vài mô hình thường gặp:



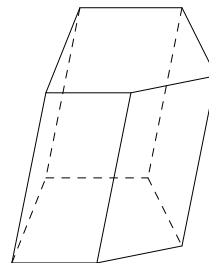
* Lăng trụ tam giác



* Lăng trụ tứ giác



* Hình hộp



* Lăng trụ ngũ giác

B. PHÂN LOẠI, PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

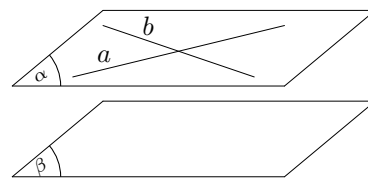
1

Chứng minh hai mặt phẳng song song

Phương pháp:

Chứng minh trên mặt phẳng này có hai đường thẳng cắt nhau cùng song song với mặt phẳng còn lại.

$$\begin{cases} a \text{ cắt } b \\ a \subset (\alpha), b \subset (\alpha) \\ a \parallel (\beta), b \parallel (\beta) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \parallel (\beta).$$



Chú ý: Hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với mặt phẳng thứ ba thì song song nhau.

VÍ DỤ 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm O . Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của SA, SD và SB .

- a) Chứng minh rằng $(MNP) \parallel (ABCD)$.
- b) Chứng minh rằng $(OMN) \parallel (SBC)$.

VÍ DỤ 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ với đáy $ABCD$ là hình thang mà $AD \parallel BC$ và $AD = 2BC$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA và AD . Chứng minh: $(BMN) \parallel (SCD)$.

VÍ DỤ 3. Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$ có chung cạnh AB và không đồng phẳng. Gọi I, J, K lần lượt là trung điểm AB, CD, EF . Chứng minh

- a) $(ADF) \parallel (BCE)$.
- b) $(DIK) \parallel (JBE)$.

VÍ DỤ 4. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Gọi I, J, K lần lượt là trọng tâm các tam giác $ABC, ACC', A'B'C'$. Chứng minh rằng $(IJK) \parallel (BCC'B')$ và $(A'JK) \parallel (AIB')$.

VÍ DỤ 5. Cho hai hình vuông $ABCD$ và $ABEF$ ở trong hai mặt phẳng phân biệt. Trên các đường chéo AC và BF lần lượt lấy các điểm M, N sao cho $AM = BN$. Các đường thẳng song song với AB vẽ từ M, N lần lượt cắt AD và AF tại M' và N' .

- a) Chứng minh rằng $(ADF) \parallel (BCE)$.
- b) Chứng minh rằng $(CDF) \parallel (MM'N'N)$.

2

Chứng minh đường thẳng song song với mặt phẳng

Để chứng minh a song song (P) , ta thường sử dụng một trong hai cách sau

Cách 1: (Đã xét ở bài học trước) Ta cần chứng tỏ các ý sau:

QUICK NOTE

- a không nằm trên (P) ;
- a song song với một đường thẳng b nằm trong (P) . Suy ra $a \parallel (P)$ hay

$$\begin{cases} a \not\subset (P) \\ a \parallel b \\ b \subset (P) \end{cases} \Rightarrow a \parallel (P)$$

Cách 2: Ta chứng minh đường thẳng a nằm trong mặt phẳng (Q) và $(Q) \parallel (P)$ thì $a \parallel (P)$.

VÍ DỤ 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi G_1, G_2, G_3 lần lượt là trọng tâm các tam giác SAB, ABC, SBD . Gọi M là một điểm thuộc đường thẳng G_2G_3 . Chứng minh $G_1M \parallel (SBC)$.

VÍ DỤ 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm O . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA và CD .

- Chứng minh hai mặt phẳng (OMN) và (SBC) song song với nhau.
- Gọi I là trung điểm của SD , J là một điểm trên $(ABCD)$ và cách đều AB, CD . Chứng minh IJ song song với (SAB) .

3

Định lý Thales

Định lý Thales: Ba mặt phẳng đôi một song song chắn trên hai cát tuyến bất kì những đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ.

VÍ DỤ 1. Cho ba mặt phẳng $(P), (Q), (R)$ đôi một song song với nhau. Đường thẳng a cắt các mặt phẳng $(P), (Q), (R)$ lần lượt tại A, B, C sao cho $\frac{AB}{BC} = \frac{2}{3}$ và đường thẳng b cắt các mặt phẳng $(P), (Q), (R)$ lần lượt tại A', B', C' . Tính tỉ số $\frac{A'B'}{B'C'}$.

VÍ DỤ 2. Cho ba mặt phẳng $(P), (Q), (R)$ đôi một song song với nhau. Đường thẳng a cắt các mặt phẳng $(P), (Q), (R)$ lần lượt tại A, B, C sao cho $\frac{AB}{BC} = \frac{1}{3}$ và đường thẳng b cắt các mặt phẳng $(P), (Q), (R)$ lần lượt tại D, E, F . Tính tỉ số $\frac{ED}{DF}$.

VÍ DỤ 3. Cho hình tứ diện $S.ABC$. Trên cạnh SA lấy các điểm A_1, A_2 sao cho $2AA_1 = 2A_1A_2 = A_2S$. Gọi (P) và (Q) là hai mặt phẳng song song với mặt phẳng (ABC) và lần lượt đi qua A_1, A_2 . Mặt phẳng (P) cắt các cạnh SB, SC lần lượt tại B_1, C_1 . Mặt phẳng (Q) cắt các cạnh SB, SC lần lượt tại B_2, C_2 . Chứng minh $2BB_1 = 2B_1B_2 = B_2S$ và $2CC_1 = 2C_1C_2 = C_2S$.

VÍ DỤ 4. Một kệ để đồ bằng gỗ có mâm tầng dưới $(ABCD)$ và mâm tầng trên $(EFGH)$ song song với nhau. Bác thợ mộc đo được $AE = 80$ cm, $CG = 90$ cm và muốn đóng thêm một mâm tầng giữa $(IJKL)$ song song với hai mâm tầng trên và dưới sao cho khoảng cách $EI = 36$ cm (tham khảo hình vẽ). Hãy giúp bác thợ mộc tính độ dài GK để đặt mâm tầng giữa cho kệ để đồ đúng vị trí.

VÍ DỤ 5. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = 9, SB = 12, SC = 15$. Trên cạnh SA lấy các điểm M, N sao cho $SM = 4, MN = 3, NA = 2$. Vẽ hai mặt phẳng song song với (ABC) lần lượt đi qua M, N , cắt SB theo thứ tự M', N' và cắt SC theo thứ tự M'', N'' . Tính độ dài các đoạn thẳng $SM', M'N', M''N'', N''C$.

4

Hình hộp, hình lăng trụ

VÍ DỤ 1. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ và một mặt phẳng (α) cắt các mặt của hình hộp theo các giao tuyến MN, NP, PQ, QR, RS, SM như hình vẽ. Chứng minh các cặp cạnh đối của lục giác $MNPQRS$ song song nhau.

VÍ DỤ 2. Cho hình lăng trụ tứ giác $ABCD.A'B'C'D'$ với đáy là hình thang $AB \parallel CD$. Một mặt phẳng song song với mặt phẳng $(AA'B'B)$ cắt các cạnh $AD, BC, B'C', A'D'$ lần lượt tại E, F, M, H . Hình tạo bởi các điểm E, F, M, H, D, D', C', C là hình gì?

QUICK NOTE

VÍ DỤ 3. Cho lăng trụ tam giác $ABC \cdot A'B'C'$. Gọi M, N, P lần lượt là các điểm trên cạnh AA', BB', CC' sao cho: $\frac{AM}{MA'} = \frac{BN}{NB'} = \frac{CP}{PC'} = \frac{1}{2}$. Hỏi hình tạo bởi các điểm M, N, P, A', B', C' là hình gì?

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

BÀI 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA và CD . Chứng minh hai mặt phẳng (MNO) và (SBC) song song.

BÀI 2. Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình thang có $AB \parallel CD$ và $AB = 2CD$, I là giao điểm của AC và BD . Gọi M là trung điểm của SD , E là trung điểm đoạn CM và G là điểm đối xứng của E qua M , SE cắt CD tại K . Chứng minh $(IKE) \parallel (ADG)$.

BÀI 3. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G_1, G_2, G_3 lần lượt là trọng tâm của các tam giác ABC, ACD, ADB . Chứng minh $(G_1G_2G_3) \parallel (BCD)$.

BÀI 4. Cho hình chóp $SABC$ có G là trọng tâm tam giác ABC . Trên đoạn SA lấy hai điểm M, N sao cho $SM = MN = NA$.

a) Chứng minh rằng $GM \parallel (SBC)$.

b) Gọi D là điểm đối xứng với A qua G . Chứng minh rằng $(MCD) \parallel (NBG)$.

BÀI 5. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Một mặt phẳng song song với mặt đáy $(ABCD)$ của hình hộp và cắt các cạnh AA', BB', CC', DD' lần lượt tại M, N, M', N' . Chứng minh rằng $ABCD.MNM'N'$ là hình hộp.

D. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

CÂU 1. Cho đường thẳng d song song với mặt phẳng (α) . Có bao nhiêu mặt phẳng đi qua d và song song với (α) ?

- ☐ A 1. ☐ B 0. ☐ C 2. ☐ D Vô số.

CÂU 2. Trong các điều kiện sau, điều kiện nào kết luận mặt phẳng (α) song song với mặt phẳng (β) ?

- ☐ A $(\alpha) \parallel (\gamma)$ và $(\beta) \parallel (\gamma)$ (với (γ) là mặt phẳng nào đó).
☐ B $(\alpha) \parallel a$ và $(\alpha) \parallel b$ với a, b là hai đường thẳng phân biệt thuộc (β) .
☐ C $(\alpha) \parallel a$ và $(\alpha) \parallel b$ với a, b là hai đường thẳng phân biệt cùng song song với (β) .
☐ D $(\alpha) \parallel a$ và $(\alpha) \parallel b$ với a, b là hai đường thẳng cắt nhau thuộc (β) .

CÂU 3. Cho các mệnh đề sau:

- ① Hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với một đường thẳng thì chúng song song với nhau.
 ② Hai mặt phẳng cùng song song với một mặt phẳng thứ ba thì chúng song song với nhau.
 ③ Bất kì đường thẳng nào cắt một trong hai mặt phẳng song song thì nó cũng cắt mặt phẳng còn lại.

Số mệnh đề sai là

- ☐ A 0. ☐ B 1. ☐ C 2. ☐ D 3.

CÂU 4. Trong các mệnh đề sau. Mệnh đề sai là

- ☐ A Hai mặt phẳng song song với nhau thì mọi đường thẳng nằm trong mặt phẳng này đều song song với mặt phẳng kia.
☐ B Hai mặt phẳng cùng song song với một mặt phẳng thì song song với nhau.
☐ C Một mặt phẳng cắt hai mặt phẳng song song cho trước theo hai giao tuyến thì hai giao tuyến song song với nhau.
☐ D Hai mặt phẳng song song thì không có điểm chung.

CÂU 5. Cho mặt phẳng (R) cắt hai mặt phẳng song song (P) và (Q) theo hai giao tuyến a và b . Mệnh đề nào sau đây đúng?

- ☐ A a và b vuông góc nhau. ☐ B a và b chéo nhau.
☐ C a và b cắt nhau. ☐ D a và b song song.

CÂU 6. Cho đường thẳng a thuộc mặt phẳng (P) và đường thẳng b thuộc mặt phẳng (Q) .

Mệnh đề nào sau đây đúng?

- (A) $(P) \parallel (Q) \Rightarrow a \parallel (Q)$ và $b \parallel (P)$.
 (B) a và b chéo nhau.
 (C) $(P) \parallel (Q) \Rightarrow a \parallel b$.
 (D) $a \parallel b \Rightarrow (P) \parallel (Q)$.

CÂU 7. Hình lăng trụ tam giác có tất cả bao nhiêu cạnh?

- (A) 6. (B) 9. (C) 12. (D) 3.

CÂU 8. Đặc điểm nào sau đây là đúng với hình lăng trụ?

- (A) Đáy của hình lăng trụ là hình bình hành.
 (B) Hình lăng trụ có tất cả các mặt song song với nhau.
 (C) Hình lăng trụ có tất cả các mặt bên là hình bình hành.
 (D) Hình lăng trụ có tất cả các mặt là hình bình hành.

CÂU 9. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Mặt phẳng $(AB'D')$ song song với mặt phẳng nào sau đây?

- (A) (BCA') . (B) (BDA') . (C) (BDC') . (D) $(A'C'C)$.

CÂU 10. Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$ không thuộc cùng một mặt phẳng, có cạnh chung AB . Kết quả nào sau đây đúng?

- (A) $BC \parallel (AEF)$. (B) $FD \parallel (BEF)$.
 (C) $(CEF) \parallel (ABD)$. (D) $(AFD) \parallel (BCE)$.

CÂU 11. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang ($AB \parallel CD$) và $AB = 2CD$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm SB và AB . Mặt phẳng nào song song với mặt phẳng (SAD) ?

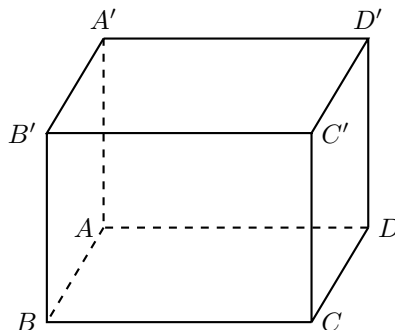
- (A) (SJC) . (B) (ICB) . (C) (IJB) . (D) (IJC) .

CÂU 12. Trong mặt phẳng (P) cho hình bình hành $ABCD$, qua A, B, C, D lần lượt vẽ bốn đường thẳng a, b, c, d đôi một song song với nhau và không nằm trên (P) . Mặt phẳng song song với mặt phẳng (b, c) là

- (A) (a, b) . (B) (a, c) . (C) (a, d) . (D) (d, b) .

CÂU 13. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Mệnh đề nào sau đây là sai?

- (A) $(ABCD) \parallel (A'B'C'D')$.
 (B) $(ABB'A') \parallel (CDD'C')$.
 (C) $(AA'D'D) \parallel (BCC'B')$.
 (D) $(BDD'B') \parallel (ACC'A')$.



CÂU 14. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là một hình bình hành. Gọi A', B', C', D' lần lượt là trung điểm của các cạnh SA, SB, SC, SD . Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau.

- (A) $A'C' \parallel BD$. (B) $A'B' \parallel (SAD)$.
 (C) $(A'C'D') \parallel (ABC)$. (D) $A'B' \parallel (SBD)$.

CÂU 15. Cho hình chóp $S.ABCD$, có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Gọi M, N lần lượt là trung điểm SA, SD . Mặt phẳng (OMN) song song với mặt phẳng nào sau đây?

- (A) $(ABCD)$. (B) (SCD) . (C) (SBC) . (D) (SAB) .

QUICK NOTE

Bài 14. PHÉP CHIẾU PHẪNG SONG SONG

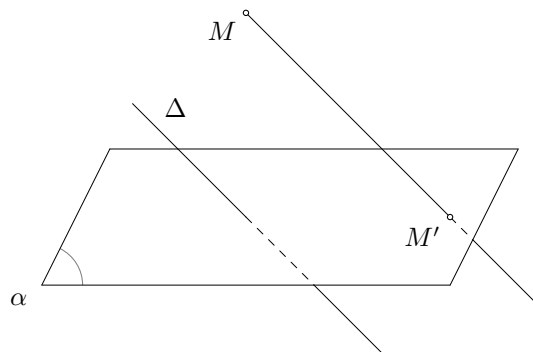
A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. ĐỊNH NGHĨA

Cho mặt phẳng (α) và đường thẳng Δ cắt (α) . Với mỗi điểm M trong không gian ta xác định điểm M' như sau:

QUICK NOTE

- ☑ Nếu M thuộc Δ thì M' là giao điểm của Δ và (α) .
- ☑ Nếu M không thuộc Δ thì M' là giao điểm của (α) và đường thẳng qua M song song Δ .
- ☑ Điểm M' gọi là hình chiếu song song của M trên (α) theo phương Δ .
- ☑ Phép đặt tương ứng mỗi điểm M với hình chiếu M' của nó được gọi là **phép chiếu song song** lên (α) theo phương Δ .
- ☑ Mặt phẳng (α) gọi là mặt phẳng chiếu; phương Δ gọi là **phương chiếu**.



2. TÍNH CHẤT

Phép chiếu song song có các tính chất sau:

- ① Biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng.
- ② Biến đường thẳng thành đường thẳng, biến tia thành tia, đoạn thẳng thành đoạn thẳng.
- ③ Biến hai đường thẳng song song thành hai đường thẳng song song hoặc trùng nhau.
- ④ Giữ nguyên tỉ số độ dài của hai đoạn thẳng cùng nằm trên một đường thẳng hoặc nằm trên hai đường thẳng song song.

3. HÌNH BIỂU DIỄN CỦA MỘT HÌNH KHÔNG GIAN

- ① Hình biểu diễn của hình trong không gian là hình chiếu song song của hình đó trên một mặt phẳng theo một phương chiếu nào đó hoặc hình đồng dạng với hình chiếu đó.
- ② Hình biểu diễn của một hình không gian (trong trường hợp hình phẳng nằm trong mặt phẳng không song song với phương chiếu) có các tính chất sau:
 - Hình biểu diễn của một tam giác là một tam giác.
 - Hình biểu diễn của hình chữ nhật, hình vuông, hình thoi, hình bình hành là hình bình hành.
 - Hình biểu diễn của hình thang $ABCD$ với $AB \parallel CD$ là một hình thang $A'B'C'D'$ với $A'B' \parallel C'D'$ thỏa mãn $\frac{AB}{CD} = \frac{A'B'}{C'D'}$.
 - Hình biểu diễn của hình tròn là hình elip.

B. PHÂN LOẠI, PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

1

Xác định ảnh của một hình qua phép chiếu song song

VÍ DỤ 1. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$.

- a) Xác định ảnh của các điểm A', B', C', D' qua phép chiếu song song lên mặt phẳng $(ABCD)$ theo phương AA' .
- b) Xác định ảnh của tam giác $A'C'D'$ qua phép chiếu song song lên mặt phẳng $(ABCD)$ theo phương $A'B$.

VÍ DỤ 2. Phép chiếu song song biến hình bình hành $ABCD$ thành hình bình hành $A'B'C'D'$. Chứng minh rằng phép chiếu đó biến tâm của hình bình hành $ABCD$ thành tâm của hình bình hành $A'B'C'D'$.

VÍ DỤ 3. Phép chiếu song song biến tam giác ABC thành tam giác $A'B'C'$. Chứng minh rằng phép chiếu đó biến đường trung bình của tam giác ABC thành đường trung bình của tam giác $A'B'C'$.

2

Vẽ hình biểu diễn của một số hình khối đơn giản

QUICK NOTE

VÍ DỤ 1. Vẽ hình biểu diễn của các hình sau

- Hình lục giác đều.
- Hình vuông nội tiếp trong hình tròn.

VÍ DỤ 2. Vẽ hình biểu diễn của hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang $ABCD$ với AB song song CD ; $AB = 2 \text{ cm}$, $CD = 6 \text{ cm}$.

VÍ DỤ 3. Vẽ hình biểu diễn của các hình sau

- Hình lăng trụ có đáy là tam giác đều.
- Hình lăng trụ có đáy là lục giác đều.
- Hình hộp.
- Hình chóp tam giác $S.ABC$ đặt trên một hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$.

C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

CÂU 1. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M, M' lần lượt là trung điểm của các cạnh $BC, B'C'$ Hình chiếu của $\Delta B'DM$ qua phép chiếu song song trên $(A'B'C'D')$ theo phương chiếu AA' là

- ☐ A $\Delta B'A'M'$. ☐ B $\Delta C'D'M'$. ☐ C $\Delta DMM'$. ☐ D $\Delta B'D'M'$.

CÂU 2. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M, M' lần lượt là trung điểm của các cạnh $BC, B'C'$ Hình chiếu của $\Delta D'CM$ qua phép chiếu song song trên $(A'B'C'D')$ theo phương chiếu BB' là

- ☐ A $\Delta B'CM'$. ☐ B $\Delta C'D'M'$. ☐ C $\Delta DMM'$. ☐ D $\Delta B'D'M'$.

CÂU 3. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M, M' lần lượt là trung điểm của các cạnh $AD, A'D'$; N, N' lần lượt là trung điểm của các cạnh $CD, C'D'$; P là trung điểm của DD' . Hình chiếu của ΔMNP qua phép chiếu song song trên $(A'B'C'D')$ theo phương chiếu BB' là

- ☐ A $\Delta B'N'M'$. ☐ B $\Delta D'M'N'$. ☐ C $\Delta PM'N'$. ☐ D $\Delta PD'M'$.

CÂU 4. Trong các mệnh đề sau, có bao nhiêu mệnh đề đúng?

- Một đường thẳng có thể song song với hình chiếu của nó.
- Một đường thẳng có thể trùng với hình chiếu của nó.
- Hình chiếu song song của hai đường thẳng chéo nhau có thể song song với nhau.
- Hình chiếu song song của hai đường thẳng chéo nhau có thể trung nhau.

- ☐ A 1. ☐ B 2. ☐ C 3. ☐ D 4.

CÂU 5. Trong các mệnh đề sau, có bao nhiêu mệnh đề đúng?

- Phép chiếu song song biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng.
- Phép chiếu song song biến hai đường thẳng song song thành hai đường thẳng cắt nhau.
- Phép chiếu song song biến tam giác đều thành tam giác cân.
- Phép chiếu song song biến hình vuông thành hình bình hành.

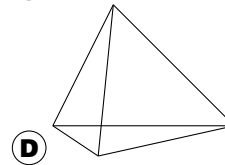
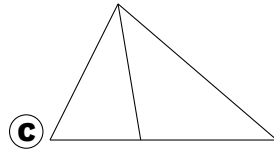
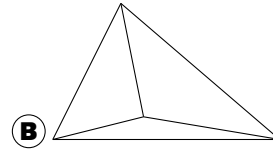
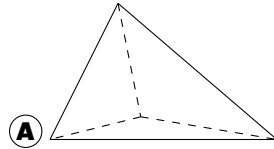
- ☐ A 1. ☐ B 2. ☐ C 3. ☐ D 4.

CÂU 6. Hình chiếu của tứ diện $ABCD$ lên một mặt phẳng (P) theo phương chiếu AB (AB không song song với (P)) là

- ☐ A hình tam giác. ☐ B hình tứ giác. ☐ C đoạn thẳng. ☐ D hình thang.

QUICK NOTE

CÂU 7. Hình nào dưới đây **không phải** là hình biểu diễn của một tứ diện?



CÂU 8. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Gọi M, M' lần lượt là trung điểm của các cạnh $BC, B'C'$ và I là giao điểm của đường thẳng $A'M$ và $(AB'C')$. Tìm hình chiếu song song của I trên $(A'B'C')$ theo phương BB' .

A Trung điểm của đoạn thẳng $A'M'$.

B Trọng tâm của tam giác $A'B'C'$.

C Điểm A' .

D Điểm M' .

CÂU 9. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AC, BC , trên cạnh BD lấy điểm P sao cho $BP = 2PD$. Mặt phẳng (MNP) cắt mặt phẳng (ACD) theo giao tuyến d . Tìm hình chiếu song song của đường thẳng d trên (BCD) theo phương AD .

A Đường thẳng DN .

B Đường thẳng CD .

C Đường thẳng BD .

D Điểm M .

CÂU 10. Cho tứ diện $ABCD$ và M là điểm bất kì thuộc miền trong của tam giác BCD . Gọi B', C', D' lần lượt là hình chiếu song song của M theo các phương AB, AC, AD lên các mặt $(ACD), (ABD), (ABC)$. Tính $\frac{MB'}{AB} + \frac{MC'}{AC} + \frac{MD'}{AD}$.

A 1.

B $\frac{1}{9}$.

C $\frac{1}{3}$.

D 3.

—HẾT—

MỤC LỤC

Bài 12. ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẪNG SONG SONG	1
Ⓐ KIẾN THỨC CẦN NHỚ	1
Ⓑ PHÂN LOẠI, PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN	1
📁 Dạng 1. Chứng minh đường thẳng song song với mặt phẳng	2
📁 Dạng 2. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng cắt nhau	2
Ⓒ BÀI TẬP TỰ LUYỆN	4
Ⓓ BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM	4
Bài 13. HAI MẶT PHẪNG SONG SONG	6
Ⓐ KIẾN THỨC CẦN NHỚ	6
Ⓑ PHÂN LOẠI, PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN	8
📁 Dạng 1. Chứng minh hai mặt phẳng song song	8
📁 Dạng 2. Chứng minh đường thẳng song song với mặt phẳng	8
📁 Dạng 3. Định lý Thales	9
📁 Dạng 4. Hình hộp, hình lăng trụ	9
Ⓒ BÀI TẬP TỰ LUYỆN	10
Ⓓ BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM	10
Bài 14. PHÉP CHIẾU PHẪNG SONG SONG	11
Ⓐ KIẾN THỨC CẦN NHỚ	11
Ⓑ PHÂN LOẠI, PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN	12
📁 Dạng 1. Xác định ảnh của một hình qua phép chiếu song song	12
📁 Dạng 2. Vẽ hình biểu diễn của một số hình khối đơn giản	13
Ⓒ BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM	13

