Bài 5. DÃY SỐ

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa dãy số

- $oldsymbol{\odot}$ Mỗi hàm u xác định trên tập các số nguyên dương \mathbb{N}^* được gọi là một dãy vô hạn (gọi tắt là dãy số), kí hiệu u=u(n).
- $oldsymbol{\odot}$ Ta thường viết u_n thay cho u(n) và kí hiệu dãy số u=u(n) bởi (u_n) , do đó dãy số (u_n) được viết dưới dạng khai triển $u_1,u_2,u_3,\ldots,u_n,\ldots$ Số u_1 gọi là số hạng đầu, u_n gọi là số hạng thứ n và gọi là số hạng tổng quát của dãy số
- \odot Nếu $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = c$ thì (u_n) được gọi là dãy số không đổi.
-
 Mỗi hàm u xác định trên tập $\mathbf{M} = \{1; 2; 3; \dots; m\}$, $\forall m \in \mathbf{N}^*$ được gọi là một dãy số hữu han.
- \odot Dạng khai triển của dãy hữu hạn là $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_m$. Số u_1 gọi là số hạng đầu, số u_m gọi là số hạng cuối.

2. Các cách cho một dãy số

Một dãy số có thể cho bằng:

- ❷ Liệt kê các số hạng (chỉ dùng cho các dãy hữu hạn và có ít số hạng);
- ❷ Công thức của số hạng tổng quát;
- Phương pháp mô tả;
- ❷ Phương pháp truy hồi.

3. Dãy số tăng, dãy số giảm, dãy số bị chặn

- Θ Dãy số (u_n) được gọi là dãy số tăng nếu ta có $u_{n+1} > u_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
- \odot Dãy số (u_n) được gọi là dãy số giảm nếu ta có $u_{n+1} < u_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
- $oldsymbol{\Theta}$ Dãy số (u_n) được gọi là bị chặn trên nếu tồn tại số M sao cho $u_n \leq M, \forall n \in \mathbb{N}^*.$
- \odot Dãy số (u_n) được gọi là bị chặn dưới nếu tồn tại số m sao cho $u_n \geq m, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
- $m{\odot}$ Dãy số (u_n) được gọi là bị chặn nếu nó vừa bị chặn trên vừa bị chặn dưới, tức là tồn tại các số m, M sao cho $m \leq u_n \leq M, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

B. CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

Số hạng tổng quát, biểu diễn dãy số

Để tìm số hạng tổng quát của một dãy bất kỳ khi biết một vài số hạng đầu của dãy số ta làm như sau

- ❷ Phân tích các số hạng sau theo các số hạng đã biết theo một quy luật nào đó.
- ❷ Dự đoán số hạng tổng quát
- \odot Kiểm tra bằng cách thay lần lượt các giá trị $n \in \mathbb{N}^*$ vào công thức tổng quát (Chứng minh bằng phương pháp quy nạp).

Để biểu diễn một dãy số khi biết công thức tổng quát ta lần lượt thay $n \in \mathbb{N}^*$ vào công thức tổng quát để tìm các số hạng thứ nhất, thứ hai, . . .

1. Ví du minh hoa

VÍ DỤ 1. Xác định số hạng đầu và số hạng tổng quát của dãy số (u_n) các số tự nhiên lẻ $1,3,5,7,\ldots$

VÍ DỤ 2. Xác định số hạng đầu và số hạng tổng quát của dãy số (v_n) các số nguyên dương chia hết cho 5: $5, 10, 15, 20, \dots$

	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	•	•	•	•	•	1		
١	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	
١	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	

Ī	Ī	Ī	Ī	Ī	Ī	Ī	Ī	Ī	Ī	Ī	Ī	Ī	Ī	Ī	Ī	Ī	Ī	Ī	Ī	Ī	Ī	Ī	Ī	Ī	Ī	Ī	Ī	Ī	Ī	Ī	Ī	1	

	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	
	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	

•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•

•	•	•	•	•	٠	٠	٠	٠	•	•	•	•	٠	٠	•	•	•	•	•	•	٠	٠	٠	•	•	٠	٠	•	٠	٠	



2. Bài tập tự luận

BÀI 1. Xét dãy số hữu hạn gồm các số tự nhiên lẻ nhỏ hơn 20, sắp xếp theo thứ tự từ bé đến lớn. Liệt kê tất cả các số hạng của dãy số này, tìm số hạng đầu và số hạng cuối của dãy.

BÀI 2. Xét dãy số gồm tất cả các số tư nhiên chia cho 5 dư 1. Xác đinh số hang tổng quát của dãy số.

BÀI 3. Viết năm số hạng đầu của dãy số gồm các số nguyên tố theo thứ tự tăng dần.

3. Câu hỏi trắc nghiệm

CÂU 1. Cho dãy số có các số hang đầu là 5, 10, 15, 20, 25,... Số hang tổng quát của dãy số này là

(A)
$$u_n = 5(n-1)$$
. (B) $u_n = 5n$.

$$lacksquare$$
 $u_n :$

$$\bigcirc u_n = 5 + n.$$

©
$$u_n = 5 + n$$
. **D** $u_n = 5n + 1$.

CÂU 2. Cho dãy số (u_n) với $u_n = \frac{an^2}{n+1}$, a là hằng số. u_{n+1} là số hạng nào trong các số hang sau

(A)
$$u_{n+1} = \frac{a(n+1)^2}{n+2}$$
.
(C) $u_{n+1} = \frac{an^2+1}{n+1}$.

$$\mathbf{B} \ u_{n+1} = \frac{a(n+1)^2}{n+1}.$$

$$\mathbf{D} \ u_{n+1} = \frac{an^2}{n+2}.$$

$$\bigcirc u_{n+1} = \frac{an^2 + 1}{n+1}$$

CÂU 3. Cho dãy số có các số hạng đầu là 8, 15, 22, 29, 36, . . . Số hạng tổng quát của dãy số

$$u_n = 7n.$$

$$(c) u_n = 7n + 1.$$

$$(\mathbf{D}) u_n$$
 không viết được dưới dạng công thức .

CÂU 4. Cho dãy số có các số hạng đầu là $0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots$ Số hạng tổng quát của dãy số này là

$$\bigcirc u_n = \frac{n-1}{n}$$

(A)
$$u_n = \frac{n+1}{n}$$
. (B) $u_n = \frac{n}{n+1}$. (C) $u_n = \frac{n-1}{n}$. (D) $u_n = \frac{n^2 - n}{n+1}$.

CÂU 5. Cho dãy số (u_n) với $u_1=1, u_{n+1}=u_n-1$. Số hạng tổng quát u_n của dãy số là số hạng nào dưới đây?

$$\bigcirc$$
 u_n không xác định.

$$\mathbf{D}$$
 $u_n = -n$, với mọi n .

Tìm số hang cu thể của dãy số

Để tìm số hang cu thể của dãy số ta làm như sau

- ❷ Với trường hợp dãy số đã cho biết công thức tổng quát của dãy số thì ta chỉ cần thay giá trị tương ứng của số hạng đó vào công thức tổng quát.
- ❷ Với trường hợp dãy số cho bởi công thức truy hồi hoặc dưới dạng thì ta phải tìm lần lượt từ những số hạng đầu tiên cho đến số đứng trước số cần tìm trong dãy.

1. Ví du minh hoa

VÍ DỤ 1. Cho dãy số (u_n) , biết $u_n = (-1)^n \cdot \frac{2^n}{n}$. Tìm số hạng u_3 .

VÍ DỤ 2. Cho dãy số (u_n) , biết $u_n = \frac{2n^2 - 1}{n^2 + 3}$. Tìm số hạng u_5 .

VÍ DỤ 3. Cho dãy số u_n bao gồm các số nguyên tố. Tìm số hạng thứ 5 của dãy số.

VÍ DỤ 4. Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $\begin{cases} u_1 = 5 \\ u_{n+1} = u_n + n \end{cases}$. Tìm số hạng thứ 5 của dãy số.

VÍ DU 5. Cho dãy số xác định bằng hệ thức truy hồi

$$u_1=1, u_n=3u_{n-1}+2$$
 với $n\geq 2$

Viết ba số hạng đầu của dãy số này.

2

VÍ DỤ 6. Cho dãy số (u_n) : $\begin{cases} u_1 = 5 \\ u_{n+1} = u_n + n \end{cases}$. Số 20 là số hạng thứ mấy trong dãy?

2. Bài tấp tư luân

BÀI 1. Cho dãy số $u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$. Tìm số hạng u_4 .

BÀI 2. Cho dãy số (u_n) có số hạng tổng quát: $u_n = 2n + \sqrt{n^2 + 4}$. Tìm số hạng thứ 6 của dãy số.

BÀI 3. Cho dãy số (u_n) xác định bởi: $\begin{cases} u_1=-1; u_2=3\\ u_{n+1}=5u_n-6u_{n-1} \forall n\geq 2 \end{cases}$. Tìm số hạng thứ 7 của dãy.

BAI 4. Viết năm số hạng đầu của dãy số Fibonacci (F_n) cho bởi hệ thức truy hồi

$$\begin{cases} F_1 = 1, F_2 = 1 \\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \ (n \ge 3). \end{cases}$$

BÀI 5. Người ta nuôi cấy 5 con vi khuẩn E-coli trong môi trường nhân tạo. Cứ 30 phút thì vi khuẩn E-coli sẽ nhân đôi 1 lần. Tính số lượng vi khuẩn thu được sau 1, 2, 3 lần nhân đôi.

BÀI 6. Cho dãy số (u_n) được xác định bởi $u_n = \frac{n^2 + 3n + 7}{n + 1}$.

- a) Viết năm số hạng đầu của dãy.
- b) Dãy số có bao nhiều số hạng nhận giá trị nguyên.

BÀI 7 (*). Cho dãy số (x_n) thỏa mãn điều kiện $x_1 = 1, x_{n+1} - x_n = \frac{1}{n(n+1)}, n = 1, 2, 3, \dots$ Số hạng x_{2023} bằng

BÀI 8 (*). Cho dãy số (u_n) biết $\begin{cases} u_1=99\\ u_{n+1}=u_n-2n-1, n\geq 1 \end{cases}$. Hỏi số -861 là số hạng thứ mấy?

3. Câu hỏi trắc nghiệm

CÂU 1. Cho dãy số (u_n) , biết $u_n = \frac{n}{3^n - 1}$. Ba số hạng đầu tiên của dãy số đó lần lượt là

- **B** $\frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{3}{4}$. **C** $\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{3}{26}$. **D** $\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}$.

CÂU 2. Cho dãy số (u_n) , biết $u_n = (-1)^n \cdot 2n$. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

(A) $u_3 = -6$. (B) $u_2 = 4$. (C) $u_4 = -8$. (D) $u_1 = -2$. (CÂU 3. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{1}{3}(u_n + 1) \end{cases}$. Tìm số hạng u_4 .

- (A) $u_4 = \frac{2}{3}$. (B) $u_4 = 1$. (C) $u_4 = \frac{14}{27}$.

CÂU 4. Cho dãy số (u_n) , biết $\begin{cases} u_1=-1\\ u_{n+1}=u_n+3 \end{cases}$ với $n\geq 0$. Ba số hạng đầu tiên của dãy số đó là lần lượt là những số nào dưới đây?

- (A) -1; 2; 5.
- (B) -1; 3; 7.
- **(c)** 1; 4; 7.

CÂU 5. Cho dãy số (u_n) , biết $u_n = \frac{2n+5}{5n-4}$. Số $\frac{7}{12}$ là số hạng thứ mấy của dãy số?

CÂU 6. Cho dãy (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1=3\\ u_{n+1}=\frac{u_n}{2}+2 \end{cases}$. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

- **B** $u_4 = \frac{31}{8}$. **C** $u_3 = \frac{15}{4}$. **D** $u_5 = \frac{63}{16}$

CÂU 7. Cho dãy số (u_n) , với $u_n = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{2n+3}$. Tìm số hạng u_{n+1} .

(A)
$$u_{n+1} = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{2(n-1)+3}$$
.
(C) $u_{n+1} = \left(\frac{n}{n+2}\right)^{2n+5}$.

B
$$u_{n+1} = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{2(n+1)+3}$$

CÂU 8. Cho dãy số (a_n) , được xác định $\begin{cases} a_1=3\\ a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n,\ n\geq 1 \end{cases}$. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

B
$$a_{10} = \frac{3}{512}$$
.

CÂU 9. Cho dãy số (u_n) biết $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_2 = 4 \\ u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n \end{cases}$ với mọi $n \ge 1$. Giá trị $u_{101} - u_{100}$ là

$$\mathbf{A}$$
 3 · 2¹⁰².

$$3 \cdot 2^{101}$$

$$(\mathbf{c}) \ 3 \cdot 2^{100}$$

$$\bigcirc$$
 3 · 2⁹⁹.

CÂU 10. Cho dãy số (u_n) thoả mãn $u_1=\sqrt{2}$ và $u_{n+1}=\sqrt{2+u_n}$ với mọi $n\geq 1$. Tìm u_{2023} .

$$\mathbf{c} \ u_{2023} = \sqrt{2} \cos \frac{\pi}{2^{2023}}.$$

$$\bigcirc$$
 $u_{2023} = 2$.

Xét tính tăng giảm của dãy số

a) Phương pháp 1. Xét dấu của hiệu số $u_{n+1} - u_n$.

(a) Nếu $u_{n+1} - u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$ thì (u_n) là dãy số tăng.

(b) Nếu $u_{n+1} - u_n < 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$ thì (u_n) là dãy số giảm.

b) Phương pháp 2. Nếu $u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$ thì ta có thể so sánh thương $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ với 1.

(a) Nếu $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ thì (u_n) là dãy số tăng.

(b) Nếu $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ thì (u_n) là dãy số giảm.

Nếu $u_n < 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$ thì ta có thể so sánh thương $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ với 1.

(a) Nếu $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ < 1 thì (u_n) là dãy số tăng.

(b) Nếu $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ thì (u_n) là dãy số giảm.

c) Phương pháp 3. Nếu dãy số (u_n) cho bởi hệ thức truy hồi thì thường dùng phương pháp quy nạp để chứng minh $u_{n+1} > u_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$ (hoặc $u_{n+1} < u_n \forall n \in \mathbb{N}^*$).

1. Ví du minh hoa

VÍ DỤ 1. Xét sự tăng giảm của dãy số (u_n) với $u_n = (-1)^n$.

VÍ DỤ 2. Xét tính tăng giảm của dãy số sau (u_n) với $u_n = \frac{2n+1}{n+1}$

VÍ DỤ 3. Xét tính tăng giảm của dãy số (u_n) với $u_n = \sqrt{n} - \sqrt{n+2}$.

VÍ DỤ 4. Xét tính tăng giảm của dãy số (u_n) với $u_n = \frac{n}{3n}$

2. Bài tập tự luận

BÀI 1. Xét tính tăng giảm của dãy số (u_n) với $u_n = \frac{\sqrt{2}}{3^n}$

BÀI 2. Xét tính tăng giảm của dãy số (u_n) với $u_n = \frac{1}{n(n+1)}$

BÀI 3. Xét tính tăng giảm của dãy số (u_n) với $u_n = n + \cos^2 n$.

BÀI 4. Xét tính tăng giảm của dãy số (u_n) với $u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}$.

BÀI 5. Xét tính tăng giảm của dãy số (u_n) với $u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}$

3. Bài tấp trắc nghiệm

CÂU 1. Cho các dãy số sau. Dãy số nào là dãy số tăng?

B
$$1; \frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}; \frac{1}{16}; \dots$$

$$\bigcirc$$
 1; $-\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$; $-\frac{1}{8}$; $\frac{1}{16}$;

CÂU 2. Với giá trị nào của a thì dãy số (u_n) với $u_n = \frac{an-1}{n+2}, \forall n \geq 1$ là dãy số tăng?

$$\bigcirc A \ a > 2.$$

B)
$$a < -2$$
.

©
$$a > -\frac{1}{2}$$
. **D** $a < -\frac{1}{2}$.

D
$$a < -\frac{1}{2}$$

CÂU 3. Trong các dãy (u_n) sau đây dãy nào là dãy số giảm ?

(A)
$$u_n = (-1)^n$$
. **(B)** $u_n = 2^n$.

$$(\mathbf{B}) u_n = 2^n.$$

$$\mathbf{C}$$
 $u_n = 3n + 1.$ \mathbf{D} $u_n = \frac{1}{3n}$

CÂU 4. Trong các dãy số (u_n) cho bởi số hạng tổng quát u_n sau, dãy số nào là dãy số tăng?

$$\bigcirc u_n = \frac{n+5}{3n+1}$$

(A)
$$u_n = \frac{1}{n}$$
. (B) $u_n = \frac{1}{2^n}$. (C) $u_n = \frac{n+5}{3n+1}$. (D) $u_n = \frac{2n-1}{n+1}$

CÂU 5. Trong các dãy số (u_n) cho bởi số hạng tổng quát u_n sau, dãy số nào là dãy số giảm?

(A)
$$u_n = n^2$$
. **(B)** $u_n = \frac{3n-1}{n+1}$. **(C)** $u_n = \sqrt{n+2}$. **(D)** $u_n = \frac{1}{2^n}$.

$$\bigcirc u_n = \sqrt{n+2}$$

CÂU 6. Trong các dãy số (u_n) sau, hãy chọn dãy số tăng.

$$\mathbf{C} u_n = (-1)^{n+1} \sin \frac{\pi}{n}, n \in \mathbb{N}^*.$$

CÂU 7. Trong các dãy số (u_n) cho bởi số hạng tổng quát u_n sau, dãy số nào là dãy số giảm?

B)
$$u_n = (-1)^n \cdot (2^n + 1)$$
.

$$\mathbf{C} u_n = \sqrt{n} - \sqrt{n-1} \,.$$

$$\bigcirc u_n = \sin n.$$

CÂU 8. Mệnh đề nào sau đây đúng?

(A) Dãy số
$$u_n = \frac{1}{n} - 2$$
 là dãy tăng.

B Dãy số
$$u_n = 2n + \cos \frac{1}{n}$$
 là dãy tăng.

$$\bigcirc$$
 Dấu số $u_n = \frac{n-1}{n+1}$ là dãy giảm.

$$lacktriangle$$
 Dãy số $u_n = (-1)^n (2^n + 1)$ là dãy giảm.

CÂU 9. Mệnh đề nào sau đây sai?

(A) Dãy số
$$u_n = \frac{1-n}{\sqrt{n}}$$
 là dãy giảm.

$$lacksquare$$
 Dãy số $u_n = n + \sin^2 n$ là dãy tăng.

$$igcolon{igcolon}{f C}$$
 Dãy số $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ là dãy giảm. $igcolon{igcolon}{f D}$ Dãy số $u_n = 2n^2 - 5$ là dãy tăng.

$$\bigcirc$$
 Dãy số $u_n = 2n^2 - 5$ là dãy tăng.

CÂU 10. Cho dãy (u_n) : $\begin{cases} u_1=1\\ u_{n+1}=\frac{n}{2(n+1)}u_n+\frac{3(n+2)}{2(n+1)} \end{cases}, n\in\mathbb{N}^*. \text{ Nhận xét nào sau đây}$

đúng

- (A) Dãy số (u_n) là dãy số tăng.
- (\mathbf{B}) Dãy số (u_n) là dãy số giảm.
- (c) Dãy số (u_n) là dãy số không tăng, không giảm.
- (D) Tất cả các đáp án còn lại đều sai.

Xét tính bi chăn của dãy số

- \odot Để chứng minh dãy số (u_n) bị chặn trên bởi M, ta chứng minh $u_n \leq M, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
- \odot Để chứng minh dãy số (u_n) bị chặn dưới bởi m, ta chứng minh $u_n \geq m, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
- ② Để chứng minh dãy số bị chăn ta chứng minh nó bị chăn trên và bị chăn dưới.
 - Nếu dãy số (u_n) tăng thì bị chặn dưới bởi u_1 .
 - Nếu dãy số (u_n) giảm thì bị chặn trên bởi u_1 .

1. Ví dụ minh hoạ

- **VÍ DỤ 1.** Chứng minh rằng dãy số (u_n) với $u_n = \frac{3n}{n^2 + 9}$ bị chặn trên bởi $\frac{1}{2}$.
- **VÍ DỤ 2.** Chứng minh rằng dãy số (u_n) xác đinh bởi $u_n = \frac{8n+3}{3n+5}$ là một dãy số bị chặn.
- **VÍ DỤ 3.** Xét tính bị chặn của dãy số (u_n) với $u_n = \frac{3n+1}{n+3}$
- **VÍ DỤ 4.** Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1=1$ và $u_{n+1}=\frac{u_n+2}{u_n+1}, \forall n\geq 1$. Chứng minh rằng dãy (u_n) bị chặn trên bởi số $\frac{3}{2}$ và bị chặn dưới bởi số 1.

VÍ DỤ 5. Xét tính bị chặn của dãy số (u_n) với $u_n = \sin n + \cos n$.

2. Bài tập tự luận

BÀI 1. Xét tính bị chặn của các dãy số sau

a)
$$u_n = \frac{1}{2n^2 - 1}$$
.

b)
$$u_n = 3 \cdot \cos \frac{nx}{3}$$
.

c)
$$u_n = 2n^3 + 1$$
.

d)
$$u_n = \frac{n^2 + 2n}{n^2 + n + 1}$$
. e) $u_n = n + \frac{1}{n}$.

e)
$$u_n = n + \frac{1}{n}$$
.

- **BÀI 2.** Xét tính bị chặn của dãy số $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, $n \in N^*$.
- **BÀI 3.** Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1 = 0$ và $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 4, \forall n \geq 1.$
 - a) Chứng minh dãy (u_n) bị chặn trên bởi số 8.
 - b) Chứng minh dãy (u_n) tăng, từ đó suy ra dãy (u_n) bị chặn.

3. Câu hỏi trắc nghiệm

- **CÂU 1.** Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1=3$ và $u_{n+1}=\frac{u_n+1}{2}$, $\forall n\geq 1$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?
 - (A) Dãy số bị chăn.

- **B**) Dãy số bị chặn trên.
- (**c**) Dãy số bị chặn dưới.
- (D) Dãy số không bị chặn.
- **CÂU 2.** Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1 = \sqrt{2}$ và $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$, $\forall n \geq 1$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?
 - (A) Dãy số bị chặn trên.
- (B) Dãy số bị chặn dưới.

C Dãy số bị chặn.

- Dãy số không bị chặn.
- **CÂU 3.** Xét tính bị chặn của dãy số (u_n) với $u_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n \cdot (n+1)}$.
 - (A) Không bị chặn. (B) Bị chặn trên. (C) Bị chặn dưới.
- **CÂU 4.** Cho dãy số (u_n) với $u_n = \frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{2 \cdot 5} + \ldots + \frac{1}{n \cdot (n+3)}$. Dãy số (u_n) bị chặn dưới và chặn trên lần lượt bởi các số m và M nào dưới đây?

- (A) m = 0, M = 1. (B) $m = 1, M = \frac{1}{2}.$ (C) $m = 1, M = \frac{10}{19}.$ (D) $m = 0, M = \frac{11}{18}$

CÂU 5. Cho dãy số (u_n) biết $u_n=\frac{1\cdot 3\cdot 5\dots (2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 2n}$. Dãy số (u_n) bị chặn dưới và chặn trên lần lượt bởi các số m và M. Tính giá trị biểu thức m+M?

- **B** $\frac{1}{\sqrt{3}}$. **C** $\frac{1}{\sqrt{5}}$.

CÂU 6. Cho dãy số (u_n) , với $u_n=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}$, $\forall n=2;3;4;\ldots$ Khẳng định nào sau đây là đúng?

A Dãy số bị chặn.

B) Dãy số bị chặn trên.

(C) Dãy số bị chặn dưới.

(D) Dãy số không bị chặn.

CÂU 7. Cho dãy số (u_n) và đặt $u_n = \sum_{k=1}^n a_k$ với $a_k = \frac{1}{4k^2-1}$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- (A) $0 < u_n < 1$. (B) $0 \le u_n \le \frac{1}{2}$. (C) $0 < u_n < \frac{1}{2}$. (D) $0 \le u_n \le 1$.

CÂU 8. Cho dãy số (u_n) và đặt $u_n = \sum_{k=1}^n a_k$ với $a_k = \frac{1}{k(k+4)}$. Dãy số (u_n) bị chặn dưới

và chặn trên lần lượt bởi các số m và M nào sau đây?

(A)
$$m = 0, M = \frac{25}{48}$$
. (B) $m = 0, M = \frac{25}{12}$. (C) $m = 1, M = \frac{1}{4}$. (D) $m = 1, M = \frac{1}{2}$.

CÂU 9. Xét tính bị chặn của dãy số (u_n) và đặt $u_n = \sum_{k=1}^n a_k$ với $a_k = \frac{1}{k(k+1)}$.

- (B) Bị chặn dưới. (C) Bị chặn trên. (D) Không bị chặn..

CÂU 10. Cho dãy số (u_n) , xác định bởi $\begin{cases} u_1=6\\ u_{n+1}=\sqrt{6+u_n}, \ \forall n\in\mathbb{N}^* \end{cases}$. Mệnh đề nào sau đây

là đúng?

 $(A) \sqrt{6} < u_n < 2\sqrt{3} \ .$

B $\sqrt{6} < u_n < 2\sqrt{3}$.

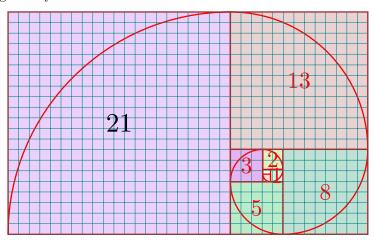
 $(c) \sqrt{6} < u_n < 2\sqrt{3}$.

 $(\mathbf{D}) \sqrt{6} > u_n < 2\sqrt{3}$.



1. Ví du minh hoa

VÍ DỤ 1. Trên lưới ô vuông, mỗi ô cạnh 1 đơn vị, người ta vẽ 8 hình vuông và tô màu khác nhau như hình vẽ. Tìm dãy số biểu diễn độ dài cạnh của 8 hình vuông đó từ nhỏ đến lớn. Có nhân xét gì về dãy số trên?



VÍ DỤ 2. Chị Mai gửi tiền tiết kiệm vào ngân hàng theo thể thức lãi kép như sau. Lần đầu chị gửi 100 triệu đồng. Sau đó, cứ hết 1 tháng chị lại gửi thêm vào ngân hàng 6 triệu đồng. Biết lãi suất của ngân hàng là 0.5% một tháng. Gọi P_n (triệu đồng) là số tiền chị có trong ngân hàng sau n tháng.

a) Tính số tiền chị có trong ngân hàng sau 1 tháng.

QUICK NOTE	b) Tính số tiền chị có trong ngân hàng sau 3 tháng.
	c) Dự đoán công thức của P_n tính theo n .
	VÍ DỤ 3. Ông An gửi tiết kiệm 100 triệu đồng kì hạn 1 tháng với lãi suất 6% một năm theo hình thức tính lãi kép. Số tiền (triệu đồng) của ông An thu được sau n tháng được cho bởi công thức
	$A_n = 100 \left(1 + \frac{0.06}{12} \right)^n.$
	a) Tìm số tiền ông An nhận được sau tháng thứ nhất, sau tháng thứ hai.
	b) Tìm số tiền ông An nhận được sau 1 năm.
	2. Bài tập trắc nghiệm
	CÂU 1. Nếu tỉ lệ lạm phát là $3,5\%$ mỗi năm và giá trung bình của một căn hộ chung cư mới tại thời điểm hiện tại là $2,5$ tỉ đồng thì giá trung bình của một căn hộ chung cư mới
	sau n năm nữa được cho bởi công thức
	$A_n = 2, 5 \cdot (1,035)^n$ (tỉ đồng).
	Tìm giá trung bình (tỉ đồng)của một căn hộ chung cư mới sau 5 năm nữa (kết quả làm tròn
	đến hàng phần trăm).
	KQ:
	CÂU 2. Giá của một chiếc máy photocopy lúc mới mua là 50 triệu đồng. Biết rằng giá trị
	của nó sau mỗi năm sử dụng chỉ còn 75% giá trị trong năm liền trước đó. Tính giá trị còn lại (triệu đồng) của chiếc máy photocopy đó sau 5 năm kể từ khi mua (kết quả làm tròn
	dến hàng phần chục).
	KQ:
	CÂU 3. Một vi sinh đặc biệt X có cách sinh sản vô tính kì lạ, sau một giờ thì để một lần,
	đặc biệt sống được tới giờ thứ n (với n là số nguyên dương) thì ngay lập tức thời điểm đó
	nó để một lần ra 2^n con X khác, tuy nhiên do chu kì của con X ngắn nên ngay sau khi để xong lần thứ 2, nó lập tức chết. Hỏi rằng, nếu tại thời điểm ban đầu có đúng 1 con thì sau
	5 giờ có bao nhiều con sinh vật X đang sống?
	KQ:
	CÂU 4. Bác Hưng để 10 triệu đồng trong tài khoản ngân hàng. Vào cuối mỗi năm, ngân
	hàng trả lãi 3% vào tài khoản của bác ấy, nhưng sau đó sẽ tính phí duy tri tài khoản hằng
	năm là 120 nghìn đồng. Tìm số dư trong tài khoản của bác Hưng sau 4 năm (tính bằng triệu đồng và kết quả làm tròn đến hàng phần chục).
	11-1-4 ac-20 to not for the contract and
	KQ:
	Bài 6. CẤP SỐ CỘNG
	A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT
	1. Định nghĩa
	Dãy số là cấp số cộng nếu mỗi một số hạng (kể từ số hạng thứ hai) đều bằng tổng của số hạng đứng ngay trước nó với một số không đổi d.
	Dãy số (u_n) là cấp số cộng $\Leftrightarrow u_{n+1} = u_n + d, \forall n \in \mathbb{N}^*.$ d là số không đổi, gọi là công sai của cấp số cộng.

2. Tính chất

Nếu (u_n) là cấp số cộng thì kể từ số hạng thứ hai (trừ số hạng cuối nếu là cấp số cộng hữu hạn) đều là trung bình cộng của hai số hạng đứng kề nó trong dãy. Tức là

$$u_k = \frac{u_{k-1} + u_{k+1}}{2}, (\forall k \geq 2, k \in \mathbb{N}^*).$$

3. Số hạng tổng quát

Nếu cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu u_1 và công sai d thì số hạng tổng quát u_n được xác đinh bởi công thức

$$u_n = u_1 + (n-1)d$$
 với $n \ge 2$.

4. Tổng n số hạng đầu tiên

Cho cấp số cộng (u_n) . Tổng n số hạng đầu tiên của cấp số cộng kí hiệu là $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$.

Khi đó S_n được tính theo công thức

$$S_n = \frac{n(u_1 + u_n)}{2} = \frac{n}{2} [2u_1 + (n-1)d].$$

B. CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP



Nhận diện cấp số cộng, công sai d, số hạng tổng quát u_n

1. Ví du minh hoa

VÍ DỤ 1. Dãy số hữu hạn nào là một cấp số cộng? Vì sao?

b)
$$1, -2, -4, -6, -8$$
.

VÍ DU 2. Trong các dãy số dưới đây, dãy số nào là cấp số cộng?

a) Dãy số
$$(a_n)$$
 với $a_n = 4n - 3$;

b) Dãy số
$$(c_n)$$
 với $c_n = 2018^n$.

VÍ DỤ 3. Cho cấp số cộng (u_n) có công thức số hạng tổng quát $u_n = 3n + 1, n \in \mathbb{N}^*$. Tìm số hạng đầu u_1 và công sai d?

VÍ DỤ 4. Cho cấp số cộng (u_n) với $u_1 = 3$, $u_2 = 9$. Công sai của cấp số cộng đã cho bằng bao nhiêu?

VÍ DU 5. Tính số hạng đầu u_1 và công sai d của một cấp số cộng biết $u_4 = 10$ và $u_7 = 19$.

VÍ DỤ 6. Xác định số hạng tổng quát của cấp số cộng (u_n) , biết $\begin{cases} u_7 = 8 \\ d = 2. \end{cases}$

VÍ DỤ 7. Cho cấp số cộng (u_n) với $\begin{cases} u_1 = -9 \\ u_{n-1} = u_n - 5 \end{cases}$. Tìm số hạng tổng quát của cấp số cộng (u_n) .

VÍ DỤ 8. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_{20}=-52$ và $u_{51}=-145$. Hãy tìm số hạng tổng quát của cấp số cộng đó.

VÍ DỤ 9. Tìm số hạng đầu và công sai của cấp số cộng (u_n) , biết

a)
$$\begin{cases} u_9 = 5u_2 \\ u_{13} = 2u_6 + 5. \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} u_1 - u_3 + u_5 = 10 \\ u_1 + u_6 = 7. \end{cases}$$

VÍ DỤ 10. Tìm số hạng đầu và công sai của cấp số cộng (u_n) , biết

a)
$$\begin{cases} -u_3 + u_7 = 8 \\ u_2 u_7 = 75. \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} u_5 = 4u_3 \\ u_2u_6 = -11. \end{cases}$$

2. Bài tập tự luận

BÀI 1. Trong các dãy số sau, dãy số nào là một cấp số cộng?

a)
$$1, -3, -7, -11, -15, \ldots$$
;

b)
$$1, -2, -4, -6, -8, \dots$$

c)
$$\frac{1}{2}$$
, 0, $-\frac{1}{2}$, -1, $-\frac{3}{2}$, ...

và công sai của cấp

	ICI		м	
		•	м	11 12

QUICK NOTE	
	BÀI 2. Trong các dãy số sau, dãy nào là cấp số cộng. Tìm số hạng đầu
	aấ nâm đá

so cong do.

a) Dãy số (u_n) với $u_n = 19n - 5$;

b) Đãy số (u_n) với $u_n = n^2 + n + 1$.

BÀI 3. Cho cấp số cộng (u_n) với $u_1 = 3$, $u_2 = 9$. Công sai của cấp số cộng đã cho bằng bao

BÀI 4. Xác định công thức tổng quát của cấp số cộng (u_n) , biết $\begin{cases} u_{11} = 5 \\ d = -6. \end{cases}$

BÀI 5. Tìm số hạng đầu và công sai của cấp số cộng (u_n) , biết $\begin{cases} u_2 + u_5 - u_3 = 10 \\ u_4 + u_6 = 26. \end{cases}$

BÀI 6. Tìm số hạng đầu và công sai của cấp số cộng, biết

a)
$$\begin{cases} u_7 = 27 \\ u_{15} = 59. \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} u_9 = 5u_2 \\ u_{13} = 2u_6 + 5 \end{cases}$$

a)
$$\begin{cases} u_7 = 27 \\ u_{15} = 59. \end{cases}$$
 b)
$$\begin{cases} u_9 = 5u_2 \\ u_{13} = 2u_6 + 5. \end{cases}$$
 c)
$$\begin{cases} u_2 + u_4 - u_6 = -7 \\ u_8 - u_7 = 2u_4. \end{cases}$$
 d)
$$\begin{cases} u_3 - u_7 = -8 \\ u_2 \cdot u_7 = 75. \end{cases}$$
 e)
$$\begin{cases} u_6 + u_7 = 60 \\ u_4^2 + u_{12}^2 = 1170. \end{cases}$$

d)
$$\begin{cases} u_3 - u_7 = -8 \\ u_2 \cdot u_7 = 75. \end{cases}$$

e)
$$\begin{cases} u_6 + u_7 = 60 \\ u_4^2 + u_{12}^2 = 1170. \end{cases}$$

BÀI 7. Cho cấp số cộng (u_n) thỏa mãn $\begin{cases} u_2+u_4-u_6=-7\\ u_8+u_7=2u_4 \end{cases}$. Xác định số hạng đầu u_1 và công sai d cấp số cộng.

BÀI 8. Cho cấp số cộng (u_n) thỏa mãn $\begin{cases} u_2-u_3+u_5=10\\ u_4+u_6=26 \end{cases}$. Xác định số hạng đầu u_1 và công sai d cấp số cộng.

BÀI 9. Tính số hạng đầu u_1 và công sai d của một cấp số cộng biết $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 27 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 275 \end{cases}$

3. Câu hỏi trắc nghiêm

CÂU 1. Trong các dãy số sau, dãy số nào là một cấp số cộng?

$$(A)$$
 1; -3; -7; -11; -15;

$$\blacksquare$$
 1; -3; -6; -9; -12;

$$(c)$$
 1; -2; -4; -6; -8;

$$\bigcirc$$
 1; -3; -5; -7; -9;

CÂU 2. Dãy số nào sau đây **không** phải là cấp số cộng?

B
$$15\sqrt{2}$$
; $12\sqrt{2}$; $9\sqrt{2}$; $6\sqrt{2}$.

$$\bigcirc$$
 $\frac{4}{5}$; 1; $\frac{7}{5}$; $\frac{9}{5}$; $\frac{11}{5}$.

CÂU 3. Cho cấp số cộng (u_n) với $u_1=2$ và $u_2=6$. Công sai của cấp số cộng đã cho là

CÂU 4. Cho cấp số cộng (u_n) với $u_1 = -3$ và $u_6 = 27$. Công sai d của cấp số cộng đã cho

(A) d = 7.

(B) d = 5.

(c) d = 8.

(D) d = 6.

CÂU 5. Cho cấp số cộng (u_n) với $u_{17}=33$ và $u_{33}=65$. Công sai của cấp số cộng đã cho là

B 3.

(**c**) -2.

CÂU 6. Cho cấp số cộng có $u_1 = -3$ và d = 4. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định

(A) $u_5 = 15$.

B) $u_4 = 8$.

 $\mathbf{c} u_3 = 5.$

 $(\mathbf{D}) u_2 = 2.$

CÂU 7. Cho cấp số cộng có $u_1 = 11$ và công sai d = 4. Hãy tính u_{99} .

(c) 402.

CÂU 8. Một cấp số cộng (u_n) có $u_{13} = 8$ và d = -3. Tìm số hạng thứ ba của cấp số cộng $(u_n).$

(A) 50.

(B) 28.

(c) 38.

(D) 44.

CÂU 9. Cho cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu $u_1=2$ và công sai d=4. Hãy tính giá trị u_{2019} bằng

- (A) 8074.
- **(B)** 4074.
- (C) 8078.
- (**D**) 4078.

CÂU 10. Cho cấp số cộng (u_n) có số hạng tổng quát là $u_n = 3n - 2$. Tìm công sai d của cấp số cộng.

- (A) d = 3.
- **(B)** d = 2.
- (c) d = -2.
- $(\mathbf{D}) d = -3.$

CÂU 11. Cho cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu u_1 và công sai d. Công thức tìm số hạng tổng quát u_n là

(A) $u_n = u_1 + (n-1)d$.

(B) $u_n = u_1 + nd$.

(c) $u_n = u_1 + (n+1)d$.

 \mathbf{D} $u_n = nu_1 + d$.

CÂU 12. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = -3$ và $d = \frac{1}{2}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- $\mathbf{A} u_n = -3 + \frac{1}{2}(n+1).$
- **B** $u_n = -3 + \frac{1}{2}n 1.$
- $u_n = -3 + \frac{1}{2}(n-1).$
- \mathbf{D} $u_n = -3 + \frac{1}{4}(n-1).$

CÂU 13. Cho cấp số cộng (u_n) xác định bởi $u_n = 2n + 1$. Xác định số hạng đầu u_1 và công sai d của cấp số cộng.

- (A) $u_1 = 3, d = 1.$
- **(B)** $u_1 = 1, d = 1.$
- (**c**) $u_1 = 3, d = 2.$ (**D**) $u_1 = 1, d = 2.$

CÂU 14. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_4 = -12$, $u_{14} = 18$. Tìm số hạng đầu u_1 và công sai dcủa cấp số cộng (u_n) .

(A) $u_1 = -20, d = -3.$

(B) $u_1 = -22, d = 3$.

(c) $u_1 = -21$, d = 3.

 \mathbf{D} $u_1 = -21, d = -3.$

CÂU 15. Tìm số hạng đầu và công sai của cấp số cộng (u_n) thỏa mãn $\begin{cases} u_1 + u_9 = 12 \\ u_4 - 3u_2 = 1. \end{cases}$

 $\mathbf{A} u_1 = \frac{1}{2}; d = \frac{13}{8}.$

B $u_1 = -1; d = \frac{13}{9}.$

 $u_1 = -\frac{1}{2}; d = \frac{13}{2}$

 $(\mathbf{D}) u_1 = -1; d = 2.$

CÂU 16. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_4 = -12$ và $u_{14} = 18$. Khi đó, số hạng đầu tiên u_1 và công sai d của cấp số cộng (u_n) lần lượt là

 \mathbf{A} $u_1 = -20, d = -3.$

B) $u_1 = -22, d = 3.$

 \mathbf{C} $u_1 = -21, d = 3.$

 $(\mathbf{D}) u_1 = -21, d = -3.$

CÂU 17. Cho cấp số cộng (u_n) có các số hạng đầu lần lượt là 5; 9; 13; 17; . . . Tìm số hạng tổng quát u_n của cấp số cộng.

- (A) $u_n = 5n + 1$.
- **B**) $u_n = 5n 1$.
- **(c)** $u_n = 4n + 1$.
- **(D)** $u_n = 4n 1$.

CÂU 18. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_3 = 15$ và d = -2. Tìm u_n .

- (A) $u_n = -2n + 21$. (B) $u_n = -\frac{3}{2}n + 12$. (C) $u_n = -3n 17$. (D) $u_n = \frac{3}{2}n^2 4$.

CÂU 19. Trong các dãy số được cho dưới đây, dãy số nào không phải là cấp số cộng?

- $\mathbf{A} u_n = -4n + 9.$

- **(B)** $u_n = -2n + 19$. **(C)** $u_n = -2n 21$. **(D)** $u_n = -2^n + 15$.

CÂU 20. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_4 = -12$ và $u_{14} = 18$. Tìm số hạng đầu tiên u_1 và công sai d của cấp số cộng đã cho.

(A) $u_1 = -21; d = 3.$

B) $u_1 = -20$; d = -3.

 $u_1 = -22; d = 3.$

 $u_1 = -21; d = -3.$

CÂU 21. Cho cấp số cộng (u_n) thoả mãn $\begin{cases} u_2 - u_3 + u_5 = 10 \\ u_3 + u_4 = 17 \end{cases}$. Số hạng đầu tiên và công

sai của cấp số cộng đó lần lượt là

- (A) 1 và 3.
- **(B)** -3 và 4.
- **C** 4 và -3. **D** -4 và -3.

CÂU 22. Cho cấp số cộng (u_n) có công sai d < 0, $u_{31} + u_{34} = 11$ và $(u_{31})^2 + (u_{34})^2 = 101$. Số hạng tổng quát của (u_n) là

- $\mathbf{A} u_n = 86 3n.$
- **(B)** $u_n = 92 3n$. **(C)** $u_n = 95 3n$. **(D)** $u_n = 103 3n$.

		`K	N.I		
w	ш	_ K	IM	()	I F

4				
		/		Ü
	4		2	ľ
		/		4

Tổng của n số hạng đầu tiên của một cấp số cộng. Tính chất của cấp số cộng

Tổng của n số hạng đầu tiên: Đặt $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n$. Khi đó

•
$$S_n = \frac{n(u_1 + u_n)}{2} = \frac{n(u_2 + u_{n-1})}{2} = \frac{n(u_3 + u_{n-2})}{2} = \cdots$$

• Vì $u_n=u_1+(n-1)\,d$ nên công thức trên có thể viết lại là $\boxed{S_n=\frac{n}{2}\left[2u_1+(n-1)\,d\right].}$

Tính chất của cấp số cộng:

- ① Nếu a; b; c theo thứ tự lập thành cấp số cộng thì a+c=2b.
- 2 Luu ý:
 - Nếu cho ba số liên tiếp của một cấp số cộng, ta có thể xem ba số đó là

$$a-d$$
; a ; $a+d$

• Nếu cho bốn số liên tiếp của một cấp số công, ta có thể xem ba số đó là

$$a-3d$$
; $a-d$; $a+d$; $a+3d$.

1. Ví dụ minh hoạ

VÍ Dụ 1. Cho một cấp số cộng (u_n) có $u_3 + u_{28} = 100$. Hãy tính tổng của 30 số hạng đầu tiên của cấp số cộng đó.

VÍ DỤ 2. Cho một cấp số cộng (u_n) có $S_6=18$ và $S_{10}=110$. Tính S_{20} .

VÍ DỤ 3. Tìm số hạng đầu và công sai của cấp số cộng, biết

a)
$$\begin{cases} u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 155 \\ S_3 = 21. \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} S_3 = 12 \\ S_5 = 35. \end{cases}$$

VÍ DỤ 4. Tìm số hạng tổng quát của cấp số cộng, biết $\begin{cases} S_4 = 20 \\ \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \frac{1}{u_3} + \frac{1}{u_4} = \frac{25}{24} \end{cases}$ và cấp

số cộng có công sai là một số nguyên âm.

VÍ DU 5. Tính các tổng sau

a)
$$S = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) + (2n + 1)$$
. b) $S = 100^2 - 99^2 + 98^2 - 97^2 + \dots + 2^2 - 1^2$.

VÍ DỤ 6. Tìm ba số hạng liên tiếp của một cấp số cộng biết tổng của chúng bằng 27 và tổng các bình phương của chúng là 293.

VÍ DỤ 7. Tìm bốn số hạng liên tiếp của một cấp số cộng, biết tổng của chúng bằng 10 và tổng bình phương của chúng bằng 30.

VÍ DỤ 8. Ba góc của một tam giác vuông lập thành một cấp số cộng. Tìm ba góc đó.

VÍ DỤ 9. Xác định 4 góc của một tứ giác lồi, biết rằng 4 góc hợp thành cấp số cộng và góc lớn nhất bằng 5 lần góc nhỏ nhất.

2. Bài tập tự luận

BÀI 1. Giữa các số 10 và 64 hãy đặt thêm 17 số nữa để được một cấp số cộng.

BÀI 2. Tổng ba số hạng liên tiếp của một cấp số cộng bằng 2 và tổng các bình phương của ba số đó bằng $\frac{14}{9}$. Xác định ba số đó và tính công sai của cấp số cộng.

BÀI 3. Một cấp số cộng có 7 số hạng với công sai d dương và số hạng thứ tư bằng 11. Hãy tìm các số hạng còn lại của cấp số cộng đó, biết hiệu của số hạng thứ ba và số hạng thứ năm bằng 6.

BÀI 4. Tìm bốn số hạng liên tiếp của một cấp số cộng, biết rằng:

a) Tổng của chúng bằng 10 và tổng bình phương bằng 70.

- b) Tổng của chúng bằng 22 và tổng bình phương bằng 66.
- c) Tổng của chúng bằng 36 và tổng bình phương bằng 504.
- d) Chúng có tổng bằng 20 và tích của chúng bằng 384.
- e) Tổng của chúng bằng 20, tổng nghịch đảo của chúng bằng $\frac{25}{24}$ và các số này là những số nguyên.
- f) Nó là số đo của một tứ giác lồi và góc lớn nhất gấp 5 lần góc nhỏ nhất.

(3)

Các bài toán thực tế

Các bài toán thực tế về cấp số cộng có thể được giải bằng cách sử dụng công thức của cấp số cộng. Công thức của cấp số cộng là: $u_n = u_1 + (n-1)d$. Trong đó:

- \bigcirc u_n là số hạng thứ n của cấp số cộng.
- \odot u_1 là số hạng đầu tiên của cấp số cộng.
- \odot d là công sai của cấp số cộng.
- ❷ Một số công thức thường gặp:

$$u_n = \frac{u_{n-1} + u_{n+1}}{2} = u_1 + (n-1)d.$$

$$\mathbf{\Theta} \ S_n = \frac{(u_1 + u_n) \cdot n}{2} = \frac{2u_1 + (n-1)d}{2} \cdot n.$$

1. Ví dụ minh hoạ

VÍ DỤ 1. Một người có một khoản tiền gửi ngân hàng với lãi suất 10% /năm theo hình thức lãi đơn. Nếu sau 5 năm người đó nhận được tổng số tiền là 550 triệu đồng thì số tiền gửi ban đầu của người đó là bao nhiêu?

VÍ DỤ 2. Bạn An muốn mua một món quà tặng mẹ nhân ngày mùng 8/3. Bạn quyết định tiết kiệm từ ngày 1/2/2017 đến hết ngày 6/3/2017. Ngày đầu An có $5\,000$ đồng, kể từ ngày thứ hai số tiền An tiết kiệm được ngày sau cao hơn ngày trước mỗi ngày $1\,000$ đồng. Tính số tiền An tiết kiệm được để mua quà tặng mẹ.

VÍ DỤ 3 (Cấp số nhân). Một hội đồng quản trị quyết định tăng lương cho nhân viên hàng năm theo tỷ lệ cố định. Ví dụ, lương của một nhân viên được tăng thêm 5% so với năm trước. Hỏi nếu lương của một nhân viên là 10 triệu đồng/năm vào năm nay, thì lương của nhân viên đó sẽ là bao nhiêu vào năm thứ 5?

VÍ DỤ 4. Hùng đang tiết kiệm để mua một cây guitar. Trong tuần đầu tiên, anh ta để dành 42 đô la, và trong mỗi tuần tiết theo, anh ta đã thêm 8 đô la vào tài khoản tiết kiệm của mình. Cây guitar Hùng cần mua có giá 400 đô la. Hỏi vào tuần thứ bao nhiêu thì anh ấy có đủ tiền để mua cây guitar đó?

VÍ DỤ 5 (Cấp số nhân). Hàng tháng ông An gửi vào ngân hàng một số tiền như nhau là 5 000 000 đồng (vào ngày đầu mỗi tháng) với lãi suất 0,5% một tháng, biết tiền lãi của tháng trước được nhập vào tiền gốc của tháng sau. Hỏi sau 36 tháng ông An nhận được số tiền vốn và lãi là bao nhiêu? (làm tròn đến hàng đơn vị).

VÍ DỤ 6 (VDT). Một xưởng có đăng tuyển công nhân với đãi ngộ về lương như sau: Trong quý đầu tiên thì xưởng trả là 6 triệu đồng/quý và kể từ quý thứ 2 sẽ tăng lên 0,5 triệu cho 1 quý. Hỏi với đãi ngộ trên thì sau 5 năm làm việc tại xưởng, tổng số lương của công nhân đó là bao nhiêu?

2. Câu hỏi trắc nghiệm

CÂU 1. Một công ty đang cần tuyển dụng thêm nhân viên. Công ty quyết định tăng số lượng nhân viên hàng tháng theo cấp số cộng. Nếu công ty đã có 20 nhân viên và quyết định tăng thêm 2 nhân viên hàng tháng, hỏi sau bao nhiều tháng công ty sẽ có 50 nhân viên?

(Λ)	10	tháng	r

(**B**) 16 tháng.

© 36 tháng.

(**D**) 26 tháng.

																													_
				J	_	Ĺ	ı	ı	ı	_	Ĺ	ı,	,	ŀ	Ü	١,	_			ı	ı								
				Ľ	9	Į	ι	J	_	L	ï	K	7		١	_	L	J	Ц	Ľ	3								
					ļ							ļ	ļ	ļ	ļ	ļ	ļ						ļ	į	ļ	ļ	ļ	ļ	ļ
Ť	Ī	Ī	Ī	Ī	Ī	Ī	Ī	Ī	Ī	Ī	Ī	Ī	Ī	Ī	Ī	Ī	Ī	Ī	Ī	Ī	Ī	Ī	Ī	Ī	Ī	Ī	Ī	Ī	ì
•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•

	Ī	Ī	Ī	Ī	Ī	Ī	Ī	Ī	Ī	Ī	Ī	Ī	Ī	Ī	Ī	Ī	Ī	Ī	Ī	Ī	Ī	Ī	Ī	Ī	Ī	Ī	Ī	Ī	Ī	ì	Ī
٠	1	•	i	1	i	i	i	i	i	i	٠	٠	٠	٠	٠	•	•	•	•	•	i	1	١	i	i	i	٠	٠	٠	1	i

QUICK NOTE				gày. Anh ta quyết định tăng
	phút mỗi ngày và t	ăng thêm 5 phút mỗi 1		ất đầu với mức luyện tập 30 yện tập được bao lâu để đạt
	được mức luyện tập A 16 ngày.	B 6 ngày.	© 9 ngày.	D 7 ngày.
	CÂU 3. Nếu một cá	òng ty công nghệ mới ti	hành lập có số lương i	người dùng ban đầu là 10 000
	và mỗi tháng tăng t			au bao lâu có số lượng ngườ
	dùng là 1 triệu. A 198 tháng.	B) 197 tháng.	© 18 tháng.	D 98 tháng.
	•	ầu tư đạng đầu tư vào		mức lợi nhuận cố định hàng
	năm. Nếu nhà đầu		u tư với số tiền ban c	đầu là 20 triệu đồng và mức
	A 34 triệu đồng			
				ẩm của mình lên mỗi tháng nhuận 1 USD và tăng thêm
	. 0	tháng, thì sau bao nhi		
	A 8 000 tháng.	B 7000 tháng.	© 9 000 tháng.	\bigcirc 5 000 tháng.
				ng cách thêm một số tiền cố nân viên là 10 triệu đồng và
	công ty tăng lương	2 triệu đồng mỗi năm		viên sẽ là bao nhiêu nếu làm
	cho công ty 19 năm A 16 triệu đồng	_	© 28 triệu đồng	y. (D) 46 triệu đồng.
		_	_	hữu ích giới hạn. Ví dụ, nếu ị khấu hao với tốc độ không
		i tháng, thì sau bao lâ	_	
		$\mathbf{B} \ x = 43 \text{ tháng.}$	$(\mathbf{C}) x = 41 \text{ tháng}$	$\mathbf{D} x = 40 \text{ tháng.}$
	nhanh chóng do sự Macbook với giá 20	phát triển của công ng 100 đô la và nó bị khấu	ghệ mới. Ví dụ, nếu n ı hao với tốc độ khôn	náy ảnh thường bị khấu hao nột người mua một máy tính g đổi là 100 đô la mỗi tháng
	thi gia trị của Macci \mathbf{A} $x = 12$ tháng.	book còn lại 1 000 đô la $x = 43$ tháng.		~
				sinh sôi ngày sau hơn ngày
	trước 0,5m ² . Biết d	iện tích mặt hồ nước l	à 120m^2 hỏi sau bao	lâu bèo phủ đầy mặt hồ?
	ghế, sau dãy B là 48		sau ít hơn hàng trướ	kí hiệu dãy A là 50 chỗ hàng c 2 ghế, biết hàng cuối cùng
	(A) 21 dãy và 630		B 20 dãy và 63	0 chỗ.
	© 11 dãy và 630	chỗ.	D 21 dãy và 93	0 chỗ.
	CÂU 11. Người ta	trồng cây theo dạng m	ıột hình tam giác như	r sau: hàng thứ nhất trồng 1
		cồng 3 cây, hàng thứ ba 661. Số hàng cây được		p tục trồng như thế cho đến
	A 81 hàng.	B 16 hàng.	(c) 100 hàng.	(D) 89 hàng.
				n nghiệm cho thấy sau x giờ
		cả mặt hồ $500~\mathrm{m}^2$. Biết		ϕ ng lá bèo tăng thêm 0,5 m ²
	A 888 giờ.	B 777 giờ.	© 999 giờ.	D 700 giờ.
		Rài7 C	ÁP SỐ NHÂN	ı
		Bui 7. C	AF JO NUMN	•
	Λ ΤΌΜ ΤΚΊΤ	TÝTHUVỆT		

1. Định nghĩa

Cấp số nhân là một dãy số (hữu hạn hoặc vô hạn) mà trong đó, kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng đều bằng tích một số đứng ngay trước nó với một số q không đổi, nghĩa là:

$$u_n = u_{n-1} \cdot q \text{ v\'oi } \forall n \in \mathbf{N}, n \ge 2$$

Số qđược gọi là công bội của cấp số nhân

2. Số hạng tổng quát của cấp số nhân

Nếu cấp số nhân (u_n) có số hạng đầu là u_1 và công bội q thì số hạng tổng quát u_n của nó được xác định bởi công thức:

$$u_n = u_1 \cdot q^{n-1}, n \ge 2$$

3. Tổng của n số hạng đầu tiên của cấp số nhân

Giả sử (u_n) là cấp số nhân có công bội $q \neq 1$. Đặt $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$, khi đó

$$S_n = u_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}.$$

- - \bigodot Công bội của cấp số nhân: $q = \sqrt[n-1]{\frac{u_n}{u_1}}.$
 - $oldsymbol{\Theta}$ Số hạng đầu tiên của cấp số nhân: $u_1 = \frac{u_n}{q^{n-1}}$.
 - \odot a, b, c là ba số hạng liên tiếp cấp số nhân thì $a \cdot c = b^2$.

B. CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

1

Nhận diện cấp số nhân, công bội q

Để nhận diện (chứng minh) mỗi dãy số là cấp số nhân, ta làm như sau:

Chúng minh $u_{n+1} = u_n q$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ và q là một số không đổi.

Nếu $u_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$ thì ta lập tỉ số $\frac{u_{n+1}}{u_n} = k$.

- \odot Nếu k là hằng số thì (u_n) là cấp số nhân với công bội q=k.
- \odot Nếu k phụ thuộc vào n thì (u_n) không phải là cấp số nhân.

Để chứng minh dãy (u_n) không phải là một cấp số nhân. Khi đó, ta chỉ cần chỉ ra ba số hạng liên tiếp không tạo thành một cấp số nhân, chẳng hạn $\frac{u_3}{u_2} \neq \frac{u_2}{u_1}$.

Để chứng minh ba số a, b, c theo thứ tự đó lập được một cấp số nhân, thì ta chứng minh $ac = b^2$ hoặc $|b| = \sqrt{ac}$.

1. Ví dụ minh hoạ

VÍ DỤ 1. Dãy số 1; 1; 1; 1; ... có phải là một cấp số nhân hay không?

VÍ DỤ 2. Dãy số $u_n = 3^n$ có phải là một cấp số nhân không? Nếu có, hãy tìm công bội của cấp số nhân đó.

VÍ DỤ 3. Dãy số $\begin{cases} u_1=3\\ u_{n+1}=\frac{9}{u_n} \end{cases}$ có phải là một cấp số nhân không? Nếu có, hãy tìm công

bội của cấp số nhân đó.

VÍ DỤ 4. Cho (u_n) là cấp số nhân có công bội $q \neq 0, u_1 \neq 0$. Chứng minh rằng dãy số (v_n) với $v_n = u_n u_{2n}$ cũng là một cấp số nhân.

VÍ DỤ 5 (VDT). Cho dãy số (u_n) được xác định bởi $\begin{cases} u_1=2\\ u_{n+1}=4u_n+9 \end{cases}, \forall n\in\mathbb{N}^*.$ Chứng

minh rằng dãy số (v_n) xác định bởi $v_n = u_n + 3, \forall n \in \mathbb{N}^*$ là một cấp số nhân. Hãy xác định số hạng đầu và công bội của cấp số nhân đó.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2. Bài tập tự luận

BÀI 1. Dãy số 25; 5; 1; $\frac{1}{5}$; ... có phải là một cấp số nhân không? Nếu có hãy tìm công bội của cấp số nhân đó.

BÀI 2. Dãy số 1; n; n^2 ; n^3 ; n^4 ; ... (với n > 1) có phải là một cấp số nhân không? Nếu có hãy tìm công bội của cấp số nhân đó.

BÀI 3. Cho dãy số (u_n) được xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = u_n^2 \end{cases}$. Hỏi dãy số (u_n) có là một cấp số nhân hay không?

BÀI 4. Cho dãy số (u_n) , biết $u_1 = 2$ và $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n$. Chứng minh (u_n) là một cấp số nhân và tìm số hang u_3 .

BÀI 5. Cho (u_n) là cấp số nhân có công bội $q \neq 0, u_1 \neq 0$. Chứng minh rằng dãy số (v_n) với $v_n = \frac{u_n u_{2n+1}}{4}$ cũng là một cấp số nhân.

BÀI 6. Cho dãy số (u_n) được xác định bởi $\begin{cases} u_1=3\\ u_{n+1}=2u_n-2 \end{cases}, \forall n\in\mathbb{N}^*.$ Chứng minh rằng dãy số (v_n) xác định bởi $v_n = 2u_n - 4, \forall n \in \mathbb{N}$ đầu và công bội của cấp số nhân đó.

3. Câu hỏi trắc nghiệm

CÂU 1. Trong các dãy số sau, dãy số nào là một cấp số nhân?

$$\bigcirc$$
 128; -64; 32; -16; 8;

B
$$\sqrt{2}$$
; 2; 4; $4\sqrt{2}$;

D 15; 5; 1;
$$\frac{1}{5}$$
;

CÂU 2. Dãy số nào sau đây **không phải** là cấp số nhân?

$$(A)$$
 1; -1; 1; -1;

$$\bigcirc$$
 3; 3²; 3³; 3⁴;

$$\bigcirc$$
 $a; a^3; a^5; a^7; \dots (a \neq 0).$

CÂU 3. Dãy số 1; 2; 4; 8; 16; 32; ... là một cấp số nhân với

(A) Công bội là 1 và số hạng đầu tiên là 2. (B) Công bội là 2 và số hạng đầu tiên là 1.

Công bội là 2 và số hạng đầu tiên là 2. D Công bội là 1 và số hạng đầu tiên là 1.

CÂU 4. Cho cấp số nhân (u_n) với $u_1=-2$ và công bội q=-5. Viết bốn số hạng đầu tiên của cấp số nhân.

$$\bigcirc$$
 -2; 10; 50; -250.

$$(B)$$
 -2; 10; -50; 250.

$$(c)$$
 -2; -10; -50; -250.

$$\bigcirc$$
 -2; 10; 50; 250.

CÂU 5. Một cấp số nhân có hai số hạng liên tiếp là 3 và 12. Số hạng tiếp theo của cấp số nhân là

CÂU 6. Cho cấp số nhân (u_n) có số hạng tổng quát là $u_n = \frac{3}{2} \cdot 5^n$. Khi đó số hạng đầu u_1 và công bội q là

(A)
$$u_1 = \frac{3}{2}, q = \frac{1}{5}$$
. (B) $u_1 = \frac{3}{2}, q = 5$. (C) $u_1 = \frac{15}{2}, q = \frac{1}{5}$. (D) $u_1 = \frac{15}{2}, q = 5$.

$$u_1 = \frac{15}{2}, q = \frac{1}{5}.$$
 $u_1 = \frac{1}{5}$

CÂU 7. Trong các dãy số (u_n) cho bởi số hạng tổng quát u_n sau, dãy số nào là một cấp số nhân?

(A)
$$u_n = \frac{1}{3^{n-2}}$$
. (B) $u_n = \frac{n}{3^n}$. (C) $u_n = (n+2) \cdot 3^n$. (D) $u_n = n^2$.

CÂU 8. Trong các dãy số (u_n) cho bởi số hạng tổng quát u_n sau, dãy số nào là một cấp số

(A)
$$u_n = 7 - 3n$$
. (B) $u_n = 7 - 3^n$. (C) $u_n = \frac{7}{3n}$.

$$\bigcirc u_n = 7 - 3^n$$

$$\mathbf{c}$$
 $u_n = \frac{7}{3n}$

$$\bigcirc u_n = 7 \cdot 3^n$$

CÂU 9. Mệnh đề nào sau đây sai?

(A) Dãy số có tất cả các số hạng bằng nhau là một cấp số nhân.

(B) Dãy số có tất cả các số hạng bằng nhau là một cấp số cộng.

- (c) Một cấp số cộng có công sai dương là một dãy số tăng.
- (**D**) Một cấp số nhân có công bội q > 1 là một dãy tăng.

CÂU 10. Cho dãy số (u_n) được xác định bởi $u_1=2, u_n=2u_{n-1}+3n-1$. Công thức số hạng tổng quát của dãy số đã cho là biểu thức có dạng $a2^n + bn + c$, với $a, b, c \in \mathbb{Z}, n \ge 2, n \in \mathbb{N}$. Khi đó tổng a + b + c có giá trị bằng

- (A) -4.

- **(D)** 3.

Số hang tổng quát của cấp số nhân

Dựa vào giả thuyết, ta lập một hệ phương trình chứa công bội q và số hạng đầu u_n . Giải hệ phương trình này tìm được u_1 và q.

Nếu cấp số nhân (u_n) có số hạng đầu u_1 và công bội q thì số hạng tổng quát u_n được xác định bởi công thức

$$u_n = u_1 \cdot q^{n-1}$$
 với $n \ge 2$.

1. Ví du minh hoa

VÍ DU 1. Tìm số hạng tổng quát của dãy số $2; 4; 8; 16; 32; \ldots$, biết dãy (u_n) là một cấp số

ví Dụ 2. Tìm số hạng đầu, công bội và số hạng tổng quát của cấp số nhân, biết $\begin{cases} u_1 + u_5 = 51 \\ u_2 + u_6 = 102. \end{cases}$

VÍ DỤ 3. Tìm số hạng đầu, công bội và số hạng tổng quát của cấp số nhân, biết $\begin{cases} u_1 + u_6 = 30 \\ u_2 + u_7 = 120 \end{cases}$

VÍ DỤ 4. Tìm số hạng đầu, công bội và số hạng tổng quát của cấp số nhân, biết $\begin{cases} u_3 = 40 \\ u_6 = 160. \end{cases}$

VÍ DỤ 5 (VDT). Tìm số hạng đầu, công bội và số hạng tổng quát của cấp số nhân có công bội $q \in \mathbb{Z}, q \neq 0$, biết $\begin{cases} u_2 + u_4 = 10 \\ u_1 + u_3 + u_5 = -21. \end{cases}$

2. Bài tập tự luận

BÀI 1. Tìm số hạng tổng quát của dãy số $3; 12; 48; 192; \ldots$, biết dãy (u_n) là một cấp số

BÀI 2. Tìm số hạng tổng quát của cấp số nhân, biết $\begin{cases} u_1 + u_3 = 51 \\ u_2 + u_4 = 153. \end{cases}$

BÀI 3. Tìm số hạng đầu, công bội và số hạng tổng quát của cấp số nhân, biết $\begin{cases} u_3 = 15 \\ u_6 = 120. \end{cases}$

BÀI 4. Tìm số hạng tổng quát của cấp số nhân, biết $\begin{cases} u_4 = 35 \\ u_8 = 560. \end{cases}$

3. Câu hỏi trắc nghiệm

CÂU 1. Cho cấp số nhân (u_n) có số hạng đầu là $u_1 \neq 0$ và công bội $q \neq 0$. Số hạng tổng quát của cấp số nhân bằng

(A) $u_n = u_1 + (n-1)q$.

 $\mathbf{B}) u_n = u_1 \cdot q^{n-1}.$

 \mathbf{c} $u_n = u_1 \cdot q^n$.

CÂU 2. Cấp số nhân (u_n) có $u_n = \frac{3}{5} \cdot 2^n$. Số hạng đầu tiên và công bội q là

- (A) $u_1 = \frac{6}{5}, q = 3.$ (B) $u_1 = \frac{6}{5}, q = -2.$ (C) $u_1 = \frac{6}{5}, q = 2.$ (D) $u_1 = \frac{6}{5}, q = 5.$

CÂU 3. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 = -3$ và công bội $q = \frac{2}{3}$. Chọn mệnh đề đúng?

- (A) $u_5 = -\frac{27}{16}$. (B) $u_5 = -\frac{16}{27}$. (C) $u_5 = \frac{16}{27}$.

CÂU 4. Dãy số có số hạng tổng quát $u_n = \frac{1}{\sqrt{3}}^{2n}$ là một cấp số nhân có công bội q bằng

- $\bigcirc \frac{1}{0}$.

CÂU 5. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 = 1, u_2 = -2$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

(A) $u_{2024} = -2^{2023}$. (B) $u_{2024} = 2^{2023}$. (C) $u_{2024} = -2^{2024}$. (D) $u_{2024} = 2^{2024}$.

CÂU 6. Cho cấp số nhân có $\begin{cases} u_4-u_2=54\\ u_5-u_3=108 \end{cases}$. Số hạng đầu tiên u_1 và công bội q của cấp số

(A) $u_1 = 9 \text{ và } q = 2$.

nhân là

B) $u_1 = 9 \text{ và } q = -2.$

 \mathbf{c} $u_1 = -9 \text{ và } q = 2.$

 $u_1 = -9 \text{ và } q = -2.$

CÂU 7. Cho cấp số nhân (u_n) biết $\begin{cases} u_1+u_2+u_3=31\\ u_1+u_3=26 \end{cases}$. Giá trị u_1 và q là

(A) $u_1 = 2; q = 5$ hoặc $u_1 = 25; q = \frac{1}{5}$.

© $u_1 = 25; q = 5 \text{ hoặc } u_1 = 1; q = \frac{1}{5}.$ © $u_1 = 1; q = 5 \text{ hoặc } u_1 = 25; q = \frac{1}{5}.$

CÂU 8. Số hạng đầu tiên và công bội của cấp số nhân thỏa mãn $\begin{cases} u_5 + u_2 = 36 \\ u_6 - u_4 = 48 \end{cases}$ (với q > 0)

(A) $u_1 = 4, q = 4.$

B) $u_1 = 2, q = 4.$

 \mathbf{C} $u_1 = 2, q = 2.$ \mathbf{D} $u_1 = 4, q = 2.$

CÂU 9. Cho cấp số nhân $u_2 = \frac{1}{4}, u_5 = 16$. Công bội và số hạng đầu tiên của cấp số nhân

B $q = \frac{-1}{2}; u_1 = \frac{-1}{2}.$

 \mathbf{c} $q=4; u_1=\frac{1}{16}$

 \mathbf{D} $q = -4; u_1 = \frac{-1}{16}$

CÂU 10. Người ta thiết kế một cái tháp gồm 11 tầng. Diện tích mặt trên của mỗi tầng bằng nửa diện tích mặt trên của tầng ngay bên dưới và diện tích mặt trên của tầng 1 bằng nửa diện tích của để tháp (có diện tích là 12 288 m²). Diện tích mặt trên cùng (của tầng thứ 11) có giá trị nào sau đây?

 \bigcirc 6 m².

(B) 8 m^2 .

(c) 10 m^2 .

(D) 12 m^2 .

Tìm số hạng cụ thể của CSN

Ta chuyển các số hạng của CSN về số hạng đầu u_1 và công bội q. Sử dụng công thức $u_n = u_1 \cdot q^{n-1}.$

Chia hai phương trình vế theo vế ta thu được phương trình theo q. Giải tìm q và u_1 . Từ đó tìm được số hạng cần tìm thỏa yebt.

1. Ví du minh hoa

VÍ DỤ 1. Cho u_n là CSN thỏa $u_1 = 2$; $u_4 = 16$. Tìm số hạng thứ 5 của CSN.

VÍ DỤ 2. Cho cấp số nhân (u_n) có $\begin{cases} u_4 + u_6 = -540 \\ u_3 + u_5 = 180 \end{cases}$. Tính số hạng đầu u_1 và công bội qcủa cấp Số nhân.

VÍ DỤ 3. Cho cấp số nhân có $u_1=-3,\ q=\frac{2}{3}.$ Số $\frac{-96}{243}$ là số hạng thứ mấy của cấp số nhân?

VÍ DỤ 4. Cấp số nhân (u_n) có số hạng tổng quát là $u_n = \frac{3}{5} \cdot 2^{n-1}, n \in \mathbb{N}^*$. Số hạng đầu tiên và công bội của cấp số nhân đó là

2. Bài tấp tư luân

BÀI 1. Cho cấp số nhân (u_n) biết $\begin{cases} u_4 - u_2 = 25 \\ u_3 - u_1 = 50. \end{cases}$

a) Tìm số hạng đầu và công bội của cấp số nhân (u_n) .

b) Tìm số hạng thứ 8 của cấp số nhân (u_n) .

18

BÀI 2. Tìm số hạng thứ 10 của cấp số nhân (u_n) biết $\begin{cases} u_4 - u_2 = 72 \\ u_5 - u_3 = 144. \end{cases}$

BÀI 3. Cho một cấp số nhân có 5 số hạng biết 2 số hạng đầu là số dương, tích số hạng đầu và số hạng thứ 3 là 1, tích số hạng thứ 3 và số hạng cuối là $\frac{1}{16}$. Tìm cấp số nhân này.

BÀI 4. Tìm số hạng đầu và công bội của cấp số nhân (u_n) biết $\begin{cases} u_2 + u_5 - u_4 = 10 \\ u_3 + u_6 - u_5 = 20. \end{cases}$

BÀI 5. Tìm 5 số lập thành một cấp số nhân có công bội bằng $\frac{1}{4}$ số thứ nhất và tổng 2 số đầu là $\frac{5}{4}$.

BÀI 6. Tìm 3 số lập thành một cấp số nhân có tổng là 63 và tích là 1728.

3. Câu hỏi trắc nghiệm

CÂU 1. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_{20}=8u_{17}$. Công bội của cấp số nhân là

- **B**) q = -2. **C**) q = 4.
- **(D)** q = -4.

CÂU 2. Cho cấp số nhân (u_n) có 10 số hạng với công bội $q \neq 0$ và $u_1 \neq 0$. Đẳng thức nào sau đây là đúng?

- **(B)** $u_7 = u_4 \cdot q^3$. **(C)** $u_7 = u_4 \cdot q^4$. **(D)** $u_7 = u_4 \cdot q^5$.

CÂU 3. Cho cấp số nhân (u_n) có số hạng đầu $u_1=2$ và công bội q=3. Giá trị u_{2019} bằng

- \mathbf{A} 3 · 2²⁰¹⁹.
- **B**) $2 \cdot 3^{2019}$.
- $(\mathbf{c}) \ 3 \cdot 2^{2018}.$
- \bigcirc 2 · 3²⁰¹⁸.

CÂU 4. Cho cấp số nhân (u_n) với công bội q < 0 và $u_2 = 4$, $u_4 = 9$. Tìm u_1 .

- **B** $u_1 = -\frac{8}{3}$. **C** $u_1 = -6$.

CÂU 5. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_2=-6,u_3=3.$ Công bội q của cấp số nhân đã cho bằng

- **B** $\frac{1}{2}$.
- $\mathbf{c} \frac{1}{2}$.

CÂU 6. Cho cấp số nhân có $u_1 = -3$, $q = \frac{2}{3}$. Tính u_5 ?

- (A) $u_5 = \frac{27}{16}$. (B) $u_5 = \frac{-16}{27}$. (C) $u_5 = \frac{-27}{16}$. (D) $u_5 = \frac{16}{27}$.

CÂU 7. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_2=\frac{1}{4}$; $u_5=-16$. Tìm q và số hạng đầu tiên của cấp số

 $\mathbf{A} q = \frac{1}{2}; u_1 = \frac{1}{2}.$

 \mathbf{c} $q = -4, u_1 = \frac{1}{16}.$

 \mathbf{D} $q = -4, u_1 = -\frac{1}{16}$

CÂU 8. Cho cấp số nhân (u_n) , biết: $u_n = 81, u_{n+1} = 9$. Lựa chọn đáp án đúng.

- $\mathbf{A} q = -\frac{1}{0}$.
- $\bigcirc q = \frac{1}{0}$.
- $\bigcirc q = 9.$

CÂU 9. Cho cấp số nhân (u_n) với $u_1=2$ và công bội q=3. Số hạng u_2 bằng

- **(B)** 6.

CÂU 10. Cho cấp số nhân (u_n) với $u_1 = 2$ và $u_3 = 8$. Số hạng thứ hai của cấp số nhân đã cho bằng

- $(A) u_2 = 4.$

- **(B)** $u_2 = 6$. **(C)** $u_2 = \pm 4$. **(D)** $u_2 = -4$.

CÂU 11. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1=-1; q=\frac{-1}{10}$. Số $\frac{1}{10^{103}}$ là số hạng thứ bao nhiêu?

(A) số hạng thứ 103. (B) số hạng thứ 105. (C) số hạng thứ 104. (D) Đáp án khác.

CÂU 12. Cho cấp số nhân (u_n) có các số hạng lần lượt là $3, 9, 27, 81, \dots$ Khi đó u_n bằng

- (A) 3 + 3ⁿ.
- **B**) 3^{n-1} .
- (c) 3^{n+1} .

CÂU 13. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 = 3$ và $15u_1 - 4u_2 + u_3$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tìm số hạng thứ 13 của cấp số nhân đã cho.

- (A) $u_{13} = 12288$.
- **B**) $u_{13} = 3072$.
- (c) $u_{13} = 24567$.
- (**D**) $u_{13} = 49152$.



CÂU 14. Cho cấp số nhân (u_n) biết $u_1 + u_5 = 51$ và $u_2 + u_6 = 102$. Hỏi số 12288 là số hạng thứ mấy của cấp số nhân (u_n) ?

(A) Số hạng thứ 13. (B) Số hạng thứ 10. (C) Số hạng thứ 11. (D) Số hạng thứ 12.

Tìm điều kiện để một dãy số lập thành CSN

 Dãy số a,b,clập thành CSN khi $b^2=\underline{a}\cdot c.$ Dãy số a, b, c, d lập thành CSN khi $\begin{cases} b^2 = a \cdot c \\ c^2 = b \cdot d. \end{cases}$

1. Ví dụ minh hoạ

VÍ DU 1. Cho dãy 3, x, 12, y. Tìm x, y để dãy là CSN.

VÍ DỤ 2. Cho dãy x-1, 2x, 4x+3. Tìm x để dãy là CSN.

VÍ DỤ 3. Các số x + 6y, 5x + 2y, 8x + y theo thứ tự đó lập thành một cấp số cộng, đồng thời, các số $x+\frac{5}{3}$, y-1, 2x-3y theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân. Hãy tìm x và

VÍ DỤ 4. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình sau có ba nghiệm phân biệt lập thành một cấp số nhân $x^3 - 7x^2 + 2(m^2 + 6m)x - 8 = 0$.

VÍ DỤ 5. Các số x + 6y, 5x + 2y, 8x + y theo thứ tự đó lập thành một cấp số cộng; đồng thời các số x-1, y+2, x-3y theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân. Tính x^2+y^2 .

2. Bài tập tự luận

BÀI 1. Xác định x dương để 2x-3; x; 2x+3 lập thành cấp số nhân.

BÀI 2. Cho cấp số nhân x, 12, y, 192. Tìm x và y.

BÀI 3. Tìm x để dãy số 1, x^2 , $6 - x^2$ lập thành cấp số nhân.

BÀI 4. Viết 6 số xen giữa hai số -2 và 256 để được một cấp số nhân có 8 số hang. Tìm cấpsố nhân này.

BÁI 5. Bốn góc của một tứ giác lồi lập thành một cấp số nhân, góc lớn nhất gấp 8 lần góc nhỏ nhất. Tìm 4 góc đó.

BÀI 6. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình sau có ba nghiệm phân biệt lập thành một cấp số nhân $x^3 - 7mx^2 + 2(m^2 + 6m)x - 64 = 0$.

3. Câu hỏi trắc nghiệm

CÂU 1. Xác định x để 3 số 2x-1; x; 2x+1 theo thứ tự lập thành một cấp số nhân:

B
$$x = \pm \frac{1}{3}$$
.

c
$$x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$
.

 \bigcirc Không có giá trị nào của x.

CÂU 2. Cho 4 số nguyên dương, trong đó 3 số đầu lập thành cấp số công, 3 số cuối lập thành cấp số nhân. Biết tổng số đầu và cuối là 37, tổng 2 số hạng giữa là 36. Hỏi số lớn nhất thuộc khoảng nào sau đây?

CÂU 3. Ba số x, y, z theo thứ tự lập thành một cấp số nhân với công bội q khác 1 đồng thời các số $x,\,2y,\,3z$ theo thứ tự lập thành một cấp số cộng với công sai khác 0. Tìm giá trị

(A)
$$q = -\frac{1}{3}$$
. **(B)** $q = \frac{1}{9}$. **(C)** $q = -3$.

$$\bigcirc q = -3$$

CÂU 4. Trong các dãy số (u_n) cho bởi số hạng tổng quát u_n sau, dãy số nào là một cấp số **(A)** $u_n = \frac{1}{3n} - 1$. **(B)** $u_n = n + \frac{1}{3}$. **(C)** $u_n = n^2 - \frac{1}{3}$. **(D)** $u_n = \frac{1}{3n-2}$.

$$\mathbf{A} u_n = \frac{1}{3^n} - 1$$

CÂU 5. Trong các mệnh đề dưới đây, mệnh đề nào là sai?

(A) Dãy số (a_n) , với $a_1=3$ và $a_{n+1}=\sqrt{a_n+6}$, $\forall n\geq 1$, vừa là cấp số cộng vừa là cấp số nhân.

- **B** Dãy số (d_n) , với $d_1 = -3$ và $d_{n+1} = 2d_n^2 15$, $\forall n \ge 1$, vừa là cấp số cộng vừa là cấp
- (c) Dãy số (b_n) , với $b_1 = 1$ và $b_{n+1}(2b_n^2 + 1) = 3$, $\forall n \ge 1$, vừa là cấp số cộng vừa là cấp
- (\mathbf{D}) Đãy số (c_n) , với $c_1=2$ và $c_{n+1}=3c_n^2-10$, $\forall n\geq 1$, vừa là cấp số cộng vừa là cấp số

CÂU 6. Biết rằng tồn tại hai giá trị m_1 và m_2 để phương trình

$$2x^{3} + 2(m^{2} + 2m - 1)x^{2} - 7(m^{2} + 2m - 2)x - 54 = 0$$

có ba nghiệm phân biệt lập thành một cấp số nhân. Tính giá trị của biểu thức $P = m_1^3 + m_2^3$.

$$P = 56.$$

B
$$P = 8$$
.

$$(c) P = -8.$$

$$(\mathbf{D}) P = -56.$$

CÂU 7. Cho bốn số a, b, c, d biết rằng a, b, c theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân với công bội q>1; còn b,c,d theo thứ tự đó lập thành cấp số cộng. Tìm q, biết rằng a+d=14

(A)
$$q = \frac{20 + \sqrt{73}}{24}$$
. (B) $q = \frac{19 + \sqrt{73}}{24}$. (C) $q = \frac{21 + \sqrt{73}}{24}$. (D) $q = \frac{18 + \sqrt{73}}{24}$.

CÂU 8. Cho dãy số tăng $a, b, c \ (c \in \mathbb{Z})$ theo thứ tự lập thành cấp số nhân; đồng thời a, b+8, c theo thứ tự lập thành cấp số cộng và a, b+8, c+64 theo thứ tự lập thành cấp số nhân. Tính giá trị biểu thức P = a - b + 2c.

$$P = 32.$$

B
$$P = \frac{92}{9}$$
.

$$(c) P = 64.$$

(A)
$$P = 32$$
. **(B)** $P = \frac{92}{9}$. **(C)** $P = 64$.

CÂU 9. Cho 3 số a, b, c theo thứ tự lập thành cấp số nhân với công bội khác 1. Biết cũng theo thứ tự đó chúng lần lượt là số thứ nhất, thứ tư và thứ tám của một cấp số cộng công sai là d, $(d \neq 0)$. Tính $\frac{d}{d}$.

$$\frac{4}{3}$$
.

$$\frac{4}{0}$$
.

CÂU 10. Cho dãy số (u_n) là một cấp số nhân với $u_n \neq 0, n \in \mathbb{N}^*$. Dãy số nào sau đây không phải là cấp số nhân?

$$(A)$$
 $u_1 + 2$; $u_2 + 2$; $u_3 + 2$;

B
$$3u_1; 3u_2; 3u_3; \ldots$$

$$\bigcirc$$
 $\frac{1}{u_1}$; $\frac{1}{u_2}$; $\frac{1}{u_3}$;

$$\bigcirc$$
 $u_1; u_3; u_5; \dots$

CÂU 11. Xác định x để 3 số x-2; x+1; 3-x theo thứ tự lập thành một cấp số nhân

$$\mathbf{A}$$
 $x = \pm 1$.

$$lacksquare$$
 Không có giá trị nào của x .

$$(c) x = -3.$$

(D)
$$x = 2$$
.

CÂU 12. Trong các dãy số (u_n) cho bởi số hạng tổng quát u_n sau, dãy số nào là một cấp số nhân?

$$\mathbf{A} u_n = 7 \cdot 3^n.$$

$$\bigcirc u_n = 7 - 3^n$$

(A)
$$u_n = 7 \cdot 3^n$$
. **(B)** $u_n = \frac{7}{3n}$. **(C)** $u_n = 7 - 3^n$. **(D)** $u_n = 7 - 3n$.

CÂU 13. Số hạng thứ hai, số hạng đầu và số hạng thứ ba của một cấp số cộng với công sai khác 0 theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân với công bội q. Tìm q.

$$\bigcirc q = -2.$$

B
$$q = -\frac{3}{2}$$
.

$$\bigcirc q = \frac{3}{2}.$$

$$\bigcirc q=2.$$

CÂU 14. Ba số x, y, z lập thành một cấp số cộng và có tổng bằng 21. Nếu lần lượt thêm các số 2, 3, 9 vào ba số đó (theo thứ tự của cấp số cộng) thì được ba số lập thành một cấp số nhân. Tính $F = x^2 + y^2 + z^2$.

$$F = 389 \text{ hoăc } F = 395.$$

B
$$F = 395$$
 hoặc $F = 179$.

$$F = 441 \text{ hoăc } F = 357.$$

D
$$F = 389$$
 hoặc $F = 179$.

Tính tổng của cấp số nhân

Phương pháp

- \odot Xác định số hạng đầu u_1 , công bội q.
- ❷ Áp dụng công thức tính tổng các số hạng của cấp số nhân.

QUICK NOTE

i	i	i	i	i	ľ	i	i	i	Ì	Ì	Ì	Ì	i	i	i	i	i	i	i	i	i	i	i	i	Ì	Ì	Ì	Ì	i	i	ì

•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	

٠.																





•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•



•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•

1. Ví du minh hoa

VÍ DỤ 1. Tính tổng 10 số hạng đầu tiên của cấp số nhân (u_n) , biết $u_1 = -3$ và công bội q = -2.

VÍ DỤ 2. Tính tổng 8 số hạng đầu tiên của cấp số nhân (u_n) , biết $u_1 = 3$ và $u_2 = 6$.

VÍ DỤ 3 (thuộc chương giới hạn). Tính tổng vô hạn $S=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots$

VÍ DỤ 4. Tính tổng 200 số hạng đầu tiên của dãy số (u_n) biết $\begin{cases} u_1=1\\ u_{n+1}=3u_n \end{cases}$

VÍ DỤ 5. Một cấp số nhân có số hạng đầu $u_1 = 3$, công bội q = 2. Biết $S_n = 765$, tìm n.

2. Bài tập tự luận

BÀI 1. Một cấp số nhân có số hạng đầu $u_1 = 3$ và công bội q = 2. Tính tổng 8 số hạng đầu của cấp số nhân.

BÀI 2 (thuộc chương giới hạn). Tính tổng $S=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{3^n}+\cdots$

BÀI 3. Cho cấp số nhân có $q = -3, S_6 = 730$. Tính u_1 .

BÀI 4. Một cấp số nhân (u_n) có $u_3 = 8$, $u_5 = 32$ và công bội q > 0. Tính tổng của 10 số hạng đầu tiên của cấp số nhân.

BAI 5. Tính tổng S = 2 + 6 + 18 + ... + 13122.

BÀI 6. Tính tổng $S = 1 + 2 + 4 + 8 + \cdots + 1024$.

BÀI 7. Một cấp số nhân có $u_1 = 1, q = 3$, biết $S_n = 3280$. Tìm n.

BÀI 8. Bốn số hạng liên tiếp của một cấp số nhân, trong đó số hạng thứ hai nhỏ hơn số hạng thứ nhất 35, còn số hạng thứ ba lớn hơn số hạng thứ tư 560. Tìm tổng của bốn số hạng trên, biết công bội mang giá trị dương.

BÀI 9 (thuộc chương giới hạn). Tổng của một cấp số nhân lùi vô hạn bằng $\frac{1}{4}$, tổng ba số hạng đầu tiên của cấp số nhân đó bằng $\frac{7}{27}$. Tổng của số hạng đầu và công bội của cấp số nhân đó bằng

BÀI 10. Một du khách vào trường đua ngựa đặt cược, lần đầu đặt 20.000 đồng, mỗi lần sau tiền đặt gấp đôi số tiền lần đặt trước. Người đó thua 10 lần liên tiếp và thắng ở lần thứ 11. Hỏi du khách trên thắng hay thua bao nhiêu tiền?

3. Câu hỏi trắc nghiệm

CÂU 1. Cho cấp số nhân $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n$ với công bội $q \ (q \neq 0, q \neq 1)$. Đặt

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n$$
.

Khẳng định nào sau đây là đúng?

CÂU 2. Cho cấp số nhân (u_n) có số hạng đầu $u_1 = 12$ và công sai $q = \frac{3}{2}$. Tổng 5 số hạng đầu của cấp số nhân bằng

A
$$\frac{93}{4}$$
.

B
$$\frac{633}{2}$$
.

$$\bigcirc$$
 $\frac{633}{4}$.

$$\bigcirc \frac{93}{2}.$$

CÂU 3. Cho cấp số nhân (u_n) có số hạng đầu $u_1 = 3$, công bội q = -2. Tính tổng 10 số hạng đầu tiên của cấp số nhân (u_n) .

$$\bigcirc$$
 -1023.

$$\bigcirc$$
 -513.

CÂU 4. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_2 = -2$ và $u_5 = 54$. Tính tổng 1000 số hạng đầu tiên của cấp số nhân đã cho.

CÂU 5. Tính tổng tất cả các số hạng của một cấp số nhân, biết số hạng đầu bằng 18, số hang thứ hai bằng 54 và số hang cuối bằng 39366.

- (A) 19674.
- **B**) 59040.

CÂU 6. Dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1=1\\ u_{n+1}=\frac{1}{2}u_n \end{cases}$ với $n\geq 1$. Tính tổng $S=u_1+u_2+\cdots+u_{10}$.

CÂU 7. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 = -6$ và q = -2. Tổng n số hạng đầu tiên của cấp số nhân đã cho bằng 2046. Tìm n.

- (A) n = 9.
- **(B)** n = 12.
- (c) n = 11.
- **(D)** n = 10.

CÂU 8. Tổng 100 số hạng đầu của dãy số (u_n) với $u_n = 2n - 1$ là

- (B) $2^{100} 1.$
- **(c)** 10000.

CÂU 9. Cho dãy số (u_n) với $u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n + 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Tính $S_{2019} = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_{2019}$.

 \bigcirc $S_{2019} = \frac{6057}{2}.$

CÂU 10. Cho $S = 11 + 101 + 1001 + \cdots + 1000 \cdot \dots \cdot 01$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- **B** $S = 10 \left(\frac{10^n 1}{9} \right) n.$
- \mathbf{C} $S = 10 \left(\frac{10^n 1}{9} \right) + n.$

CÂU 11. Gọi $S=1+11+111+\cdots+\underbrace{111\dots 1}_{(n\text{ số }1)}$ thì S nhận giá trị nào sau đây?

- **B** $S = \frac{10^n 1}{21}$.
- $\bigcirc S = 10 \left(\frac{10^n 1}{81} \right) n.$

CÂU 12. Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_n = 2u_{n-1} + 1, n \geq 2 \end{cases}$. Tổng $S = u_1 + u_2 + \dots + u_{20}$

- \bigcirc 2²¹ 20.
- **B**) $2^{21} 22$. **C**) 2^{20} .

CÂU 13. Biết rằng $S = 1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 3^2 + \dots + 11 \cdot 3^{10} = a + \frac{21 \cdot 3^b}{4}$. Tính $P = a + \frac{b}{4}$.

- $\bigcirc P = 3.$
- **(c)** P = 1.

Kết hợp cấp số công và cấp số nhân

Nhắc lại tính chất CSC, CSN

- \odot 3 số a, b, c theo thứ tự lập thành CSC thì a + c = 2b.
- \odot 3 số a, b, c theo thứ tự lập thành CSN thì $a.c = b^2$.

1. Ví du minh hoa

VÍ DU 1. Ba số x, y, z theo thứ tự đó lập thành một CSN với công bội $q(q \neq 1)$, đồng thời các số x, 2y, 3z theo thứ tự đó lập thành một CSC với công sai d. Hãy tìm q?

VÍ DU 2. Biết rằng a, b, c là ba số hạng liên tiếp của một CSC và a, c, b là ba số hạng liên tiếp của một CSN, đồng thời a + b + c = 30. Tìm a, b, c.

VÍ DU 3. Ba số x, y, z theo thứ tự đó lập thành một CSN. Ba số x, y - 4, z theo thứ tự đó lập thành CSN. Đồng thời các số x, y-4, z-9 theo thứ tự đó lập thành CSC. Tìm x, y, z.

•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	
٠	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	

▼ VIVPITIGITI - 0902940619 ▼
QUICK NOTE

VÍ Dụ 4. Cho a,b,c là ba số hạng liên tiếp của một CSN và a,b,c-4 là ba số hạng liên tiếp của một CSC, đồng thời a,b-1,c-5 là ba số hạng liên tiếp của một CSN. Tìm a,b,c biết a,b,c là các số nguyên.

VÍ DỤ 5. Cho 4 số nguyên dương, trong đó 3 số đầu lập thành một CSC, 3 số hạng sau thành lập CSN. Biết rằng tổng của số hạng đầu và số hạng cuối là 37, tổng của hai số hạng giữa là 36. Tìm tổng 4 số đó

2. Bài tập tự luận

BÀI 1. Biết x, y, x + 4 theo thứ tự lập thành cấp số cộng và x + 1, y + 1, 2y + 2 theo thứ tự lập thành cấp số nhân với x, y là số thực dương. Tính x + y.

BÀI 2. Cho 3 số a,b,c theo thứ tự tạo thành một cấp số nhân với công bội khác 1. Biết cũng theo thứ tự đó chúng lần lượt là số hạng thứ nhất, thứ tư và thứ tám của một cấp số cộng với công sai $d \neq 0$. Tính $\frac{a}{d}$.

BÀI 3. Tìm tích các số dương a và b sao cho a, a + 2b, 2a + b lập thành một cấp số cộng và $(b+1)^2, ab+5, (a+1)^2$ lập thành một cấp số nhân.

BÀI 4. $a, b, c \ (a \neq b \neq c)$ là ba số hạng liên tiếp của một cấp số cộng và b, c, a là ba số hạng liên tiếp của một cấp số nhân, đồng thời a.b.c = 125. Tìm a, b, c.

BÀI 5. Một cấp số cộng và một cấp số nhân đều là các dãy tăng các số hạng thứ nhất của hai dãy số đều bằng 3, các số hạng thứ hai bằng nhau. Tỉ số giữa các số hạng thứ ba của CSN và CSC là $\frac{9}{5}$. Tìm tích ba số hạng của cấp số cộng thỏa mãn tính chất trên.

BÀI 6. Một CSC và CSN đều có số hạng đầu tiên là bằng 5, số hạng thứ hai của CSC lớn hơn số hạng thứ hai của CSN là 10, còn các số hạng thứ 3 của hai cấp số thì bằng nhau. Tìm tổng các số hạng của cấp số cộng biết công bội của cấp số nhân không âm.

BÀI 7. Ba số khác nhau có tổng bằng 114 có thể coi là ba số hạng liên tiếp của một CSN, hoặc coi là số hạng thứ nhất, thứ tư và thứ hai mươi lăm của một CSC. Tìm ba số đó.

BÀI 8. Ba số khác nhau có tổng là 217 có thể coi là các số hạng liên tiếp của một CSN hoặc là các số hạng thứ 2 thứ 9 và thứ 44 của một CSC. Tìm 3 số đó.

7

Bài toán thực tế

Bài toán lãi kép: Một người gửi tiết kiệm vào ngân hàng một số tiền A với lãi suất r% mỗi kì hạn. Số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn ban đầu để tính lãi cho kì hạn tiếp theo. Hỏi sau n kì hạn thì người đó có tất cả bao nhiêu tiền?

 $L \eth i \ giải$: Gọi u_n là số tiền người đó có sau n kì hạn. Ta có:

- \odot Số tiền người đó có sau kì hạn thứ nhất là: $u_1 = A + A \cdot r\% = A(1 + r\%)$.
- \odot Số tiền người đó có sau n kì hạn là: $u_n = u_{n-1} + u_{n-1} \cdot r\% = u_n (1 + r\%)$.

Suy ra dãy số (u_n) là một cấp số nhân với số hạng đầu $u_1 = A(1 + r\%)$ và công bội q = 1 + r%.

Vậy số tiền người đó có sau n kì hạn là: $u_n = A(1+r\%)^n$

1. Ví dụ minh hoạ

VÍ DỤ 1. Trong một lọ nuôi cấy vi khuẩn, ban đầu có 5 000 con vi khuẩn và số lượng vi khuẩn tăng lên thêm 8% mỗi giờ. Hỏi sau 5 giờ thì số lượng vi khuẩn là bao nhiêu?

VÍ DỤ 2. Người ta thiết kế một cái tháp gồm 10 tầng theo cách: Diện tích bề mặt trên của mỗi tầng bằng nửa diện tích bề mặt trên của tầng ngay bên dưới và diện tích bề mặt của tầng 1 bằng nửa diện tích bề mặt để tháp. Biết diện tích bề mặt để tháp là 12 288 m², tính diện tích bề mặt trên cùng của tháp.

VÍ DỤ 3. Dân số trung bình của Việt Nam năm 2020 là 97,6 triệu người, tỉ lệ tăng dân số là 1,14%/năm.

(Nguồn: Niên giám thống kê của Việt Nam năm 2020, NXB Thống kê, 2021)

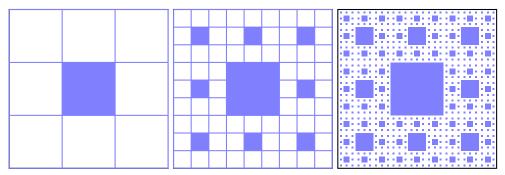
Giả sử tỉ lệ tăng dân số không đổi qua các năm.

a) Sau 1 năm, dân số của Việt Nam sẽ là bao nhiêu triệu người (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?

b) Viết công thức tính dân số Việt Nam sau n năm kể từ năm 2020.

VÍ DỤ 4. Bác Linh gửi vào ngân hàng 100 triệu đồng tiền tiết kiệm với hình thức lãi kép, kì hạn 1 năm với lãi suất 6%/năm. Viết công thức tính số tiền (cả gốc và lãi) mà bác Linh có được sau n năm (giả sử lãi suất không thay đổi qua các năm).

VÍ DỤ 5. Một hình vuông có cạnh 1 đơn vị dài được chia thành chín hình vuông nhỏ hơn và hình vuông ở chính giữa được tô màu xanh như hình. Mỗi hình vuông nhỏ hơn lại được chia thành chín hình vuông con, và mỗi hình vuông con ở chính giữa lại được tô màu xanh. Nếu quá trình này được tiếp tục lặp lại năm lần, thì tổng diện tích các hình vuông được tô màu xanh là bao nhiêu?



VÍ DỤ 6. Một khay nước có nhiệt độ 23° được đặt vào ngăn đá của tủ lạnh. Biết sau mỗi giờ, nhiệt độ của nước giảm 20%. Tính nhiệt độ của khay nước đó sau 6 giờ theo đơn vị độ C.

VÍ DỤ 7. Chu kì bán rã của nguyên tố phóng xạ poloni 210 là 138 ngày, nghĩa là sau 138 ngày, khối lượng của nguyên tố đó chi còn một nửa (theo: https://vi.wikipedia.org/wiki/Poloni-210). Tính khối lượng còn lại của 20 gam poloni 210 sau:

a) 690 ngày;

b) 7314 ngày (khoảng 20 năm).

VÍ DỤ 8. Tế bào E.Coli trong điều kiện nuôi cấy thích hợp cứ 20 phút lại phân đôi một lần. Hỏi sau 24 giờ, tế bào ban đầu sẽ phân chia thành bao nhiều tế bào?

2. Bài tập tự luận

BÀI 1. Một quốc gia có dân số năm 2011 là P triệu người. Trong 10 năm tiếp theo, mỗi năm dân số tăng a%. Chứng minh rằng dân số các năm từ năm 2011 đến năm 2021 của quốc gia đó tạo thành cấp số nhân. Tìm công bội của cấp số nhân này.

BÀI 2. Vào năm 2020, dân số của một quốc gia là khoảng 97 triệu người và tốc độ tăng trưởng dân số là 0.91%. Nếu tốc độ tăng trưởng dân số này được giữ nguyên hằng năm, hãy ước tính dân số của quốc gia đó vào năm 2030.

BÀI 3. Một tỉnh có 2 triệu dân vào năm 2020 với tỉ lệ tăng dân số là 1 %/năm. Gọi u_n là số dân của tỉnh đó sau n năm. Giả sử tỉ lệ tăng dân số là không đổi.

- a) Viết công thức tính số dân của tỉnh đó sau n năm kể từ năm 2020.
- b) Tính số dân của tỉnh đó sau 10 năm kể từ năm 2020.

BÀI 4. Giả sử một thành phố có dân số năm 2022 là khoảng 2,1 triệu người và tốc độ gia tăng dân số trung bình mỗi năm là 0.75%.

- a) Dự đoán dân số của thành phố đó vào năm 2032;
- b) Nếu tốc độ gia tăng dân số vẫn giữ nguyên như trên thì ước tính vào năm nào dân số của thành phố đó sẽ tăng gấp đôi so với năm 2022?

BÀI 5. Giả sử anh Tuấn kí hợp đồng lao động trong 10 năm với điều khoản về tiền lương như sau: Năm thứ nhất, tiền lương của anh Tuấn là 60 triệu. Kể từ năm thứ hai trở đi, mỗi năm tiền lương của anh Tuấn được tăng lên 8%. Tính tổng số tiền lương anh Tuấn lĩnh được trong 10 năm đi làm (đơn vị: triệu đồng, làm tròn đến hàng phần nghìn).

BÀI 6. Một công ty xây dựng mua một chiếc máy ủi với giá 3 tỉ đồng. Cứ sau mỗi năm sử dụng, giá trị của chiếc máy ủi này lại giảm 20% so với giá trị của nó trong năm liền trước đó. Tìm giá trị còn lại của chiếc máy ủi đó sau 5 năm sử dụng.

																																	÷	
•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•		
	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	٠	•	•	•	•		•	•	•	
•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•		
•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	
•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•		
•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	٠	•	•		
•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	
•						١	١	١	Ì				١									١	١	١	١	١					١			
•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	
•						١	١	١			١	١	١	١	١							١	١	١	١	١	١	١	١		١			
	•	•	•		•	•	•	•	•	•					•				•			•	•	•		•								
•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•		
	•	•				•	•	•	•	•	•	•			•				•			•	•	•		•								
																														•			•	
	•																		•															
•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•		•	•		
	•																		•															
•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•		
•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	٠	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	٠	٠	٠	•	•	•		
•	•	•	•	٠	•	•	•	•	•	٠	•	•	٠	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	٠	•	•	•	•	٠		٠		

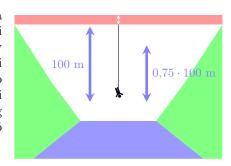
QUI	CK	NC	T
QU.			ш

BÀI 7. Một gia đình mua một chiếc ô tô giá 800 triệu đồng. Trung bình sau mỗi năm sử dung, giá tri còn lai của ô tô giảm đi 4% (so với năm trước đó).

- a) Viết công thức tính giá tri của ô tô sau 1 năm, 2 năm sử dụng.
- b) Viết công thức tính giá trị của ô tô sau n năm sử dụng.
- c) Sau 10 năm, giá trị của ô tô ước tính còn bao nhiêu triệu đồng?

BÀI 8.

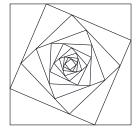
Một người nhảy bungee (một trò chơi mạo hiểm mà người chơi nhảy từ một nơi có địa thế cao xuống với dây đai an toàn buộc xung quanh người) từ một cây cầu và căng một sợi dây dài 100 m. Sau mỗi lần rơi xuống, nhờ sư đàn hồi của dây, người nhảy được kéo lên một quãng đường có độ dài bằng 75% so với lần rơi trước đó và lai bị rơi xuống đúng bằng quãng đường vừa được kéo lên. Tính tổng quãng đường người đó đi được sau 10 lần kéo lên và lại rơi xuống.



BÀI 9 (TH). Một cái tháp có 11 tầng. Diện tích của mặt sàn tầng 2 bằng nửa diện tích của mặt đáy tháp và diện tích của mặt sàn mỗi tầng bằng nửa diện tích của mặt sàn mỗi tầng ngay bên dưới. Biết mặt đáy tháp có diện tích là $12288m^2$. Tính diện tích của mặt sàn tầng trên cùng của tháp theo đơn vi mét vuông.

BÀI 10.

Cho hình vuông C_1 có cạnh bằng 4. Người ta chia mỗi cạnh hình vuông thành bốn phần bằng nhau và nối các điểm chia một cách thích hợp để có hình vuông C_2 . Từ hình vuông C_2 lại làm tiếp tục như trên để có hình vuông C_3 . Cứ tiếp tục quá trình như trên, ta nhận được dãy các hình vuông $C_1, C_2, C_3, \ldots, C_n, \ldots$ Gọi a_n là độ dài canh hình vuông C_n . Chúng minh rằng dãy số (a_n) là cấp số nhân.



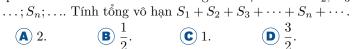
BÀI 11. Một cây đàn organ có tần số âm thanh các phím liên tiếp tạo thành một cấp số nhân. Cho biết tần số phím La trung là 400 Hz và tần số của phím La cao cao hơn 12 phím là 800 Hz (nguồn: https://vi.wikipedia.org/wikiOrgan). Tìm công bội của cấp số nhân nói trên (làm tròn kết quả đến hàng phần nghìn).

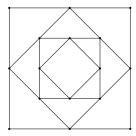
BÁI 12. Một loại thuốc được dùng mỗi ngày một lần. Lúc đầu nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân tăng nhanh, nhưng mỗi liều kế tiếp có tác dụng ít hơn liều trước đó. Lượng thuốc trong máu ở ngày thứ nhất là 50 mg, và mỗi ngày sau đó giảm chỉ còn một nửa so với ngày kề trước đó. Tính tổng lượng thuốc (tính bằng mg) trong máu của bệnh nhân sau khi dùng thuốc 10 ngày liên tiếp.

3. Câu hỏi trắc nghiệm

CÂU 1.

Cho hình vuông có cạnh là 1. Nối các trung điểm của hình vuông trên ta được một hình vuông có diện tích S_1 , tiếp tục quá trình trên với các hình vuông với diện tích là S_2 ; S_3 ;





CÂU 2. Cho n là số nguyên dương và n tam giác $A_1B_1C_1, A_2B_2C_2, \ldots, A_nB_nC_n$, trong đó các điểm lần $A_{i+1}, B_{i+1}, C_{i+1}$ lượt nằm trên các cạnh $B_iC_i, A_iC_i, A_iB_i (i=1,2,\ldots,n-1)$ sao cho $A_{i+1}C_i = 3A_{i+1}B_i, B_{i+1}A_i = 3B_{i+1}C_i, C_{i+1}B_i = 3C_{i+1}A_i$. Gọi S là tổng tất cả các diện tích của tam giác $A_1B_1C_1, A_2B_2C_2, \ldots, A_nB_nC_n$ biết rằng tam giác $A_1B_1C_1$ có diện tích bằng $\frac{9}{16}$. Tìm số nguyên dương sao cho $S = \frac{16^{29} - 7^{29}}{16^{29}}$.

(A) n = 28.

(D) n = 29.

CÂU 3. Người ta thiết kế một cái tháp gồm 11 tầng. Diện tích bề mặt trên của mỗi tầng bằng nửa diện của mặt trên tầng ngay bên dưới và diện tích tầng 1 bằng nửa diện tích của để tháp. Biết để tháp có diện tích là 12288 m². Tính diện tích mặt trên cùng.

- (A) $12 \,\mathrm{m}^2$.
- **B**) $6 \, \text{m}^2$.
- $(c) 10 \, m^2$.

CÂU 4. Cho tứ giác ABCD có bốn góc tạo thành cấp số nhân có công bội q=2. Góc có số đo nhỏ nhất trong bốn góc đó là

- (c) 12° .
- **D** 30°.

CÂU 5. Một du khách vào chuồng đua ngựa đặt cược, lần đầu tiên đặt 20000 đồng, mỗi lần sau tiền đặt gấp đôi lần tiền đặt cược trước. Người đó thua lần 9 liên tiếp và thắng ở lần thứ 10. Hỏi du khách đó thắng hay thua bao nhiêu tiền?

(A) Thắng 20000 đồng.

(B) Thua 40000 đồng.

(C) Hòa vốn.

(**D**) Thua 20000 đồng.

 $\hat{\mathbf{CAU}}$ 6. Cho tam giác ABC cân tại A có cạnh đáy BC, đường cao AH và cạnh bên ABtheo thứ tự đó lập thành cấp số nhân công bội q. Giá trị của q là

(A) $q = \frac{1}{2}\sqrt{\sqrt{2}+1}$.

B) $q = \sqrt{2} + 1$.

(c) $q = \sqrt{2(\sqrt{2}+1)}$.

D $q = \frac{1}{2}\sqrt{2(\sqrt{2}+1)}$.

CÂU 7. Giả sử một người đi làm được lĩnh lương khởi điểm là 2.000.000 đồng/tháng. Cứ 3 năm người ấy lại được tăng lương một lần với mức tăng bằng 7% của tháng trước đó. Hỏi sau 36 năm làm việc người ấy lĩnh được tất cả bao nhiêu tiền?

(A) 1.287.968.492 đồng.

- **B**) 10.721.769.110 đồng.
- (c) $7.068289036 \cdot 10^8$ đồng.
- **D** 429.322.830,5 đồng.

CÂU 8. Từ độ cao 55,8 (mét) của tháp nghiên Pisa nước Italia người ta thả một quả bóng cao su chạm xuống đất. Giả sử mỗi lần chạm đất bóng lại nảy lên độ cao bằng $\frac{1}{10}$ độ cao mà bóng đạt trước đó. Tổng độ dài hành trình (mét) của bóng được thả từ lúc ban đầu cho đến khi nó nằm yên trên mặt đất thuộc khoảng nào trong các khoảng sau đây?

- (A) (69; 72).
- **B**) (60; 63).
- **(c)** (67; 69).
- (D) (64; 66).

CÂU 9. Một gia đình lập kế hoạch tiết kiệm như sau: Họ lập một sổ tiết kiệm tại một ngân hàng và cứ đầu mỗi tháng họ gửi vào số tiết kiệm đó 15 triệu đồng. Giả sử lãi suất tiền gửi không đổi là 0,6 %/tháng và tiền gửi được tính lãi theo hình thức lãi kép. Hỏi sau 3 năm gia đình đó tiết kiệm được số tiền gần nhất với con số nào dười đây?

- (A) 543240000 đồng. (B) 589269000 đồng. (C) 669763000 đồng. (D) 604359000 đồng.

Gọi tôi là: Ngày làm đề:/..../......

ÔN TẬP KIẾM TRA CHƯƠNG II

TOÁN 11 — ĐỀ 1 LỚP TOÁN THẨY PHÁT

Thời gian có hạn, đừng lãng phí!.

Phần I. Mỗi câu hỏi học sinh chọn một trong bốn phương án A, B, C, D.

CÂU 1. Cho dãy số (u_n) với $u_n = 3^n$. Số hạng thứ n+1 là

- (A) $u_{n+1} = 3^n + 3$. (B) $u_{n+1} = 3 \cdot 3^n$. (C) $u_{n+1} = 3^n + 1$. (D) $u_{n+1} = 3(n+1)$.

CÂU 2. Cho dãy số (u_n) có $u_n = \frac{n^2+1}{2n+1}$. Số $\frac{37}{13}$ là số hạng thứ bao nhiều của dãy số đã

- (A) 8.

CÂU 3. Cho dãy số: $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{3^2}$; $\frac{1}{3^3}$; $\frac{1}{3^4}$; $\frac{1}{3^5}$; Số hạng tổng quát của dãy số này là $\mathbf{A} u_n = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3^{n+1}}. \qquad \mathbf{B} u_n = \frac{1}{3^{n+1}}. \qquad \mathbf{C} u_n = \frac{1}{3^n}. \qquad \mathbf{D} u_n = \frac{1}{3^{n-1}}.$



ĐIỂM:

"It's not how much time you have, it's how you use it."

QUICK NOTE

QUICK NOTE	CÂU 4. Cho dãy số (u_n) với $u_n = \frac{n+1}{n+2}$. Phát biể	u nào sau đây đúng?	
		Dãy số giảm và bị chặn.	
	© Dãy số giảm và bị chặn dưới.	Dãy số giảm và bị chặn trên.	
	CÂU 5. Khẳng định nào sau đây là sai?		
	A Một dãy số tăng thì bị chặn dưới.		
	B Một dãy số giảm thì bị chặn trên.		
	© Một dãy số bị chặn thì phải tăng hoặc giảm		
	Một dãy số không đổi thì bị chặn.		
	CÂU 6. Cho cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu u_1 ,	công sai d . Khi đó, với $n > 2$ ta có	
		$u_n = u_1 + (n+1)d.$	
		$u_n = u_1 + (n-1)d.$	
	CÂU 7. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = 3$ và $u_2 = -$	$u_3 = -5.$ D $u_3 = 7.$	
	•		
	CÂU 8. Cho cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu u_1 hạng tổng quát u_n là	= -5, công sai $d = 4$. Công thức của	a sô
	A $u_n = -5 + 4n$. B $u_n = -1 - 4n$.	$u_n = -5 + 4n^2$ \mathbf{p} $u_n = -9 + 4n$	
			9
	CÂU 9. Có bao nhiêu số thực x để $2x - 1$; x ; $2x + 1$ (B) 2.		1:
	CÂU 10. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 = -1$, công	; bội $q = -\frac{1}{10}$. Khi đó $\frac{1}{10^{2017}}$ là số h	ang
	thứ mấy?		
	A 2016. B 2017. C 2	2 018. D 2019.	
	CÂU 11. Tổng của 100 số tự nhiên lẻ đầu tiên tín	h từ 1 là	
	A 10000. B 10100. C 2	20000. D 20200.	
	CÂU 12. Một gia đình cần khoan một cái giếng đ	ể lấy nước. Họ thuê một đội khoan gi	iếng
	nước đến để khoan giếng. Biết giá của mét khoan		
	thứ hai giá của mỗi mét khoan tăng thêm 5000 c Biết cần phải khoan sâu xuống 50 m mới có nước.	lồng so với giá của mét khoan trước Hỏi phải trả bao nhiêu tiền để khoan	dó. cái
	giếng đó?	Troi phai tra sao innea tien de known	cai
	A 10 125 000 đồng. B 5 250 000 đồng. C 4	1 245 000 đồng. D 4 000 000 đồng.	
	Phần II. Trong mỗi ý a), b), c) và d) ở mỗi	câu, học sinh chọn đúng hoặc sa	ıi.
	CÂU 13. Cho dãy số $u_n = \frac{2n+1}{n+3}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Các		
	n+3,		
	Mệnh đề	Ð S	
	a) $u_3 = \frac{7}{6}$.		
	$\mathbf{b)} \ u_n < 2, \ \forall n \in \mathbb{N}^*.$		+
			\dashv
	c) Dãy số trên là dãy số giảm.		_
	d) Dãy số trên là dãy số bị chặn.		
	CÂU 14. Cho cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu u_1	= -5 và công sai $d = 3$.	
	Mệnh đề	ÐS	
	a) Số 100 là số hạng thứ 36 của cấp số cộng.		
	b) Số hạng thứ 5 của cấp số cộng là 9.		
	c) Tổng 10 số hạng đầu của cấp số cộng là 85		
	2) Toug to so mand dan can cab so cond up of	··	

d) Số hạng tổng quát của cấp số cộng (u_n) là $(u_n) = 3n - 7$.

CÂU 15. Một gia đình mua một chiếc ô tô giá 800 triệu đồng. Trung bình sau mỗi năm sử dụng, giá trị còn lại của ô tô giảm đi 4% (so với năm trước đó). Các khẳng định sau là đúng hay sai?

Mệnh đề	Ð	S
a) Giá trị còn lại của ô tô sau từng năm lập thành một cấp số nhân với công bội nhỏ hơn 1.		
b) Giá trị của chiếc xe sau 3 năm gần bằng 508,84 triệu đồng.		
c) Giá trị của chiếc xe sau 5 năm lớn hơn một nửa giá trị ban đầu của chiếc xe.		
d) Nếu sau một thời gian sử dụng, gia đình muốn bán lại chiếc xe để thu được ít nhất 600 triệu đồng thì gia đình đó nên sử dụng ít hơn 6 năm.		

CÂU 16. Cho một cấp số cộng (u_n) có $u_1 = \frac{1}{3}$, $u_8 = 26$, có công sai d.

Mệnh đề	Ð	\mathbf{S}
a) $d = \frac{11}{3}$.		
b) $u_{11} = 37.$		
c) Tổng 102 số hạng đầu của dãy số là $S_{102} = \frac{1124}{3}$.		
d) Trong 100 số hạng đầu tiên của dãy số (u_n) , có đúng 34 số hạng là số nguyên.		

Phần III. Học sinh điền kết quả vào ô trống.

CÂU 17. Người ta trồng cây theo các hàng ngang với quy luật: ở hàng thứ nhất có 1 cây, ở hàng thứ hai có 2 cây, ở hàng thứ ba có 3 cây, ... ở hàng thứ n có n cây. Biết rằng người ta trồng hết 4950 cây. Hỏi số hàng cây được trồng theo cách trên là bao nhiêu?

KQ:		

CÂU 18. Cho một cấp số cộng (u_n) là cấp số cộng có $u_1=1$ và tổng 100 số hạng đầu bằng 24850. Biết $S=\frac{1}{u_1u_2}+\frac{1}{u_2u_3}+\ldots+\frac{1}{u_{49}u_{50}}=\frac{a}{b}$ với $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính a+b.

KQ:				
-----	--	--	--	--

CÂU 19. Một người gửi ngân hàng 100 triệu đồng với kỳ hạn 3 tháng, lãi suất 2% một quý theo hình thức lãi kép. Sau đúng 6 tháng, người đó gửi thêm 100 triệu đồng với kỳ hạn và lãi suất như trước đó. Tổng số tiền người đó nhận được sau 1 năm kể từ khi bắt đầu gửi tiền gần bằng bao nhiêu triệu đồng (làm tròn kết quả tới hàng đơn vị)?

KQ:				
-----	--	--	--	--

CÂU 20. Ba cạnh của một tam giác vuông có độ dài là các số nguyên dương lập thành một CSC. Độ dài cạnh dài nhất bằng 10. Tổng độ dài hai cạnh góc vuông bằng

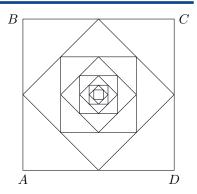
KQ:			
		l	

CÂU 21. Từ độ cao 55,8 (mét) của tháp nghiên Pisa nước Italia người ta thả một quả bóng cao su chạm xuống đất. Giả sử mỗi lần chạm đất bóng lại nảy lên độ cao bằng $\frac{1}{5}$ độ cao mà bóng đạt trước đó. Quãng đường của bóng di chuyển từ lúc được thả rơi cho đến khi nó nảy lên và rơi xuống lần thứ năm gần bằng bao nhiêu (làm tròn đến phần chục)?

KQ:					
-----	--	--	--	--	--

QUICK NOTE

Cho hình vuông ABCD có các cạnh bằng a và có diện tích S_1 . Nối 4 trung điểm A_1, B_1, C_1, D_1 theo thứ tự của 4 cạnh AB, BC, CD, DA ta được hình vuông thứ hai có diện tích S_2 . Tiếp tục làm như thế, ta được hình vuông thứ ba là A_2, B_2, C_2, D_2 có diện tích S_3, \ldots và cứ tiếp tục làm như thế, ta tính được các hình vuông lần lượt có diện tích có diện tích $S_4, S_5, \ldots, S_{100}$ (tham khảo hình vẽ bên). Giá trị tổng có diện tích $S = S_1 + S_2 + S_3 + \cdots + S_{100}$ là $\frac{a^m(2^n-1)}{2^p}$, với $m,n,p\in \mathbb{N}^*$. Tính giá trị biểu thức T=m+n-p.



KQ:

Phần III. Câu hỏi tự luận.

CÂU 23. Tính tổng $S = 1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 3^2 + \cdots + 11.3^{10}$.

CÂU 24. Chị Hương vay góp một khoản tiền 100 triệu đồng và đồng ý trả dần 5 triệu đồng mỗi tháng với lãi suất 0.8% số tiền còn lại của mỗi tháng. Gọi A_n , $(n \in \mathbb{N}^*)$ là số tiền còn nợ (triệu đồng) của chị Hương sau n tháng.

- a) Xác định công thức tổng quát của dãy số (A_n) .
- b) Sau 20 tháng chị Hương có trả hết nợ không? Nếu chưa hết thì sau bao nhiêu tháng chị Hương sẽ trả hết nợ?
- c) Giả sử chị Hương dự kiến trả góp hết nợ trong vòng 1 năm. Hỏi mỗi tháng chị Hương phải trả bao nhiêu tiền (làm tròn đến hàng nghìn đồng)?

LỜI GIẢI CHI TIẾT

Bài 5. DÃY SỐ

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa dãy số

- Θ Mỗi hàm u xác định trên tập các số nguyên dương \mathbb{N}^* được gọi là một dãy vô hạn (gọi tắt là dãy số), kí hiệu u = u(n).
- $oldsymbol{\odot}$ Ta thường viết u_n thay cho u(n) và kí hiệu dãy số u=u(n) bởi (u_n) , do đó dãy số (u_n) được viết dưới dạng khai triển $u_1,u_2,u_3,\ldots,u_n,\ldots$ Số u_1 gọi là số hạng đầu, u_n gọi là số hạng thứ n và gọi là số hạng tổng quát của dãy số.
- \odot Nếu $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = c$ thì (u_n) được gọi là dãy số không đổi.
- $oldsymbol{\Theta}$ Mỗi hàm u xác định trên tập $\mathbf{M} = \{1; 2; 3; \dots; m\}$, $\forall m \in \mathbf{N}^*$ được gọi là một dãy số hữu hạn.
- $\ensuremath{ \bigodot}$ Dạng khai triển của dãy hữu hạn là $u_1,u_2,u_3,\ldots,u_m.$ Số u_1 gọi là số hạng đầu, số u_m gọi là số hạng cuối.

2. Các cách cho một dãy số

Một dãy số có thể cho bằng:

- ❷ Liệt kê các số hạng (chỉ dùng cho các dãy hữu hạn và có ít số hạng);
- ❷ Công thức của số hạng tổng quát;
- Phương pháp mô tả;
- Phương pháp truy hồi.

3. Dãy số tăng, dãy số giảm, dãy số bị chặn

- \odot Dãy số (u_n) được gọi là dãy số tăng nếu ta có $u_{n+1} > u_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
- $oldsymbol{\Theta}$ Đãy số (u_n) được gọi là dãy số giảm nếu ta có $u_{n+1} < u_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
- \odot Dãy số (u_n) được gọi là bị chặn trên nếu tồn tại số M sao cho $u_n \leq M, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
- \odot Dãy số (u_n) được gọi là bị chặn dưới nếu tồn tại số m sao cho $u_n \geq m, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
- $m{\odot}$ Dãy số (u_n) được gọi là bị chặn nếu nó vừa bị chặn trên vừa bị chặn dưới, tức là tồn tại các số m, M sao cho $m \le u_n \le M, \forall n \in \mathbb{N}^*.$

B. CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

1

Số hạng tổng quát, biểu diễn dãy số

Để tìm số hạng tổng quát của một dãy bất kỳ khi biết một vài số hạng đầu của dãy số ta làm như sau

- Phân tích các số hạng sau theo các số hạng đã biết theo một quy luật nào đó.
- O Dự đoán số hạng tổng quát
- \odot Kiểm tra bằng cách thay lần lượt các giá trị $n \in \mathbb{N}^*$ vào công thức tổng quát (Chứng minh bằng phương pháp quy nạp).

Để biểu diễn một dãy số khi biết công thức tổng quát ta lần lượt thay $n \in \mathbb{N}^*$ vào công thức tổng quát để tìm các số hạng thứ nhất, thứ hai, . . .

1. Ví du minh hoa

VÍ DU 1. Xác định số hạng đầu và số hạng tổng quát của dãy số (u_n) các số tự nhiên lẻ $1,3,5,7,\ldots$

Lời giải.

Dãy (u_n) có số hạng đầu $u_1 = 1$ và số hạng tổng quát $u_n = 2n - 1$.

VÍ DU 2. Xác định số hạng đầu và số hạng tổng quát của dãy số (v_n) các số nguyên dương chia hết cho 5: $5, 10, 15, 20, \dots$ 🗩 Lời giải.

Dãy (v_n) có số hạng đầu $v_1 = 5$ và số hạng tổng quát $v_n = 5n$.

2. Bài tấp tư luân

BÁI 1. Xét dãy số hữu han gồm các số tư nhiên lẻ nhỏ hơn 20, sắp xếp theo thứ tư từ bé đến lớn. Liêt kê tất cả các số hang của dãy số này, tìm số hạng đầu và số hạng cuối của dãy.

Lời giải.

Các số hang của dãy là 1, 3, 5, 7, 9, 10, 11, 13, 15, 17, 19.

Số hang đầu của dãy là $u_1 = 1$.

Số hang cuối của dãy là $u_{11} = 19$.

BAI 2. Xét dãy số gồm tất cả các số tự nhiên chia cho 5 dư 1. Xác định số hạng tổng quát của dãy số.

Lời giải.

Các số tư nhiên chia cho 5 dư 1 gồm các số sau: 6, 11, 16, 21, ...

Số hạng tổng quát $u_n = 5n + 1$.

BÀI 3. Viết năm số hạng đầu của dãy số gồm các số nguyên tố theo thứ tự tăng dần.

🗭 Lời giải.

Năm số hang đầu của dãy số trên là 2, 3, 5, 7, 11.

3. Câu hỏi trắc nghiệm

CÂU 1. Cho dãy số có các số hạng đầu là 5, 10, 15, 20, 25, ... Số hạng tổng quát của dãy số này là

(A)
$$u_n = 5(n-1)$$
.

$$\mathbf{C} u_n = 5 + n.$$

🗭 Lời giải.

Ta có $5 = 5 \cdot 1, 10 = 5 \cdot 2, 15 = 5 \cdot 3, 20 = 5 \cdot 4, 25 = 5 \cdot 5, \dots$

Vậy dãy trên có số hạng tổng quát là $u_n = 5n$.

Chon đáp án B.....

CÂU 2. Cho dãy số (u_n) với $u_n = \frac{an^2}{n+1}$, a là hằng số. u_{n+1} là số hạng nào trong các số hạng sau

$$\mathbf{A} u_{n+1} = \frac{a(n+1)^2}{n+2}$$

(A)
$$u_{n+1} = \frac{a(n+1)^2}{n+2}$$
. (B) $u_{n+1} = \frac{a(n+1)^2}{n+1}$. (C) $u_{n+1} = \frac{an^2+1}{n+1}$.

$$\bigcirc$$
 $u_{n+1} = \frac{an^2 + 1}{n+1}.$

🗭 Lời giải.

Ta có
$$u_{n+1} = \frac{a(n+1)^2}{n+1+1} = \frac{a(n+1)^2}{n+2}.$$

CÂU 3. Cho dãy số có các số hạng đầu là 8, 15, 22, 29, 36, ... Số hạng tổng quát của dãy số này là

(B)
$$u_n = 7n$$
.

$$(c) u_n = 7n + 1.$$

$$\bigcirc$$
 u_n không viết được dưới dạng công thức.

🗭 Lời giải.

Ta có $8 = 7 \cdot 1 + 1, 15 = 7 \cdot 2 + 1, 22 = 7 \cdot 3 + 1, 29 = 7 \cdot 4 + 1, 36 = 7 \cdot 5 + 1, \dots$

Vậy dãy trên có số hạng tổng quát là $u_n = 7n + 1$.

Chon đáp án (C).....

CÂU 4. Cho dãy số có các số hạng đầu là $0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots$ Số hạng tổng quát của dãy số này là

$$\bigcirc u_n = \frac{n-1}{n}.$$

(A)
$$u_n = \frac{n+1}{n}$$
. (B) $u_n = \frac{n}{n+1}$. (C) $u_n = \frac{n-1}{n}$.

D Lời giải.

Ta có $0 = \frac{1-1}{1}$, $\frac{1}{2} = \frac{2-1}{2}$, $\frac{2}{3} = \frac{3-1}{2}$, ...

Vậy dãy trên có số hạng tổng quát là $u_n = \frac{n}{n}$

CÂU 5. Cho dãy số (u_n) với $u_1 = 1, u_{n+1} = u_n - 1$. Số hạng tổng quát u_n của dãy số là số hạng nào dưới đây?

$$\bigcirc$$
 u_n không xác định.

$$u_n = 1 - n.$$

$$\mathbf{D} u_n = -n$$
, với mọi n .

🗭 Lời giải.

Ta có $u_1 = 1, u_2 = 0, u_3 = -1, u_4 = -2, \dots$

Dễ dàng dự đoán được số hạng tổng quát là $u_n = 2 - n$.

Chọn đáp án A....

2

Tìm số hang cu thể của dãy số

Để tìm số hạng cụ thể của dãy số ta làm như sau

- ❷ Với trường hợp dãy số đã cho biết công thức tổng quát của dãy số thì ta chỉ cần thay giá trị tương ứng của số hạng đó vào công thức tổng quát.
- ❷ Với trường hợp dãy số cho bởi công thức truy hồi hoặc dưới dạng thì ta phải tìm lần lượt từ những số hạng đầu tiên cho đến số đứng trước số cần tìm trong dãy.

1. Ví du minh hoa

VÍ DỤ 1. Cho dãy số (u_n) , biết $u_n = (-1)^n \cdot \frac{2^n}{n}$. Tìm số hạng u_3 .

🗭 Lời giải.

Ta có
$$u_3 = (-1)^3 \cdot \frac{2^3}{3} = -\frac{8}{3}$$
.

VÍ DỤ 2. Cho dãy số (u_n) , biết $u_n = \frac{2n^2 - 1}{n^2 + 3}$. Tìm số hạng u_5 .

🗭 Lời giải.

Ta có
$$u_5 = \frac{2 \cdot 5^2 - 1}{5^2 + 3} = \frac{49}{28} = \frac{7}{4}.$$

VÍ DỤ 3. Cho dãy số u_n bao gồm các số nguyên tố. Tìm số hạng thứ 5 của dãy số.

D Lời giải.

Ta có $u_1 = 2, u_2 = 3, u_3 = 5, u_4 = 7, u_5 = 11.$

Vậy số hạng thứ 5 của dãy số là 11.

VÍ DỤ 4. Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $\begin{cases} u_1=5\\ u_{n+1}=u_n+n \end{cases}$. Tìm số hạng thứ 5 của dãy số.

🗭 Lời giải.

Ta có $u_2 = u_1 + 1 = 6$, $u_3 = u_2 + 2 = 8$, $u_4 = u_3 + 3 = 11$, $u_5 = u_4 + 4 = 15$.

VÍ DỤ 5. Cho dãy số xác định bằng hệ thức truy hồi

$$u_1 = 1, u_n = 3u_{n-1} + 2 \text{ v\'oi } n \ge 2$$

Viết ba số hạng đầu của dãy số này.

🗭 Lời giải.

Ta có:
$$u_1 = 1, u_2 = 3u_1 + 2 = 3 \cdot 1 + 2 = 5, u_3 = 3u_2 + 2 = 3 \cdot 5 + 2 = 17.$$

VÍ DỤ 6. Cho dãy số (u_n) : $\begin{cases} u_1 = 5 \\ u_{n+1} = u_n + n \end{cases}$. Số 20 là số hạng thứ mấy trong dãy?

🗭 Lời giải.

Ta có $u_1 = 5, u_2 = 6, u_3 = 8, u_4 = 11, u_5 = 16, u_6 = 20.$

Vậy số 20 là số hạng thứ 6.

2. Bài tập tự luận

BÀI 1. Cho dãy số $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}+1}$. Tìm số hạng u_4 .

🗭 Lời giải.

Ta có
$$u_4 = \frac{1}{\sqrt{4} + 1} = \frac{1}{3}$$
.

BÀI 2. Cho dãy số (u_n) có số hạng tổng quát: $u_n = 2n + \sqrt{n^2 + 4}$. Tìm số hạng thứ 6 của dãy số.

Lời giải.

Ta có $u_6 = 2 \cdot 6 + \sqrt{6^2 + 4} = 12 + 2\sqrt{10}$.

BÀI 3. Cho dãy số (u_n) xác định bởi: $\begin{cases} u_1 = -1; u_2 = 3 \\ u_{n+1} = 5u_n - 6u_{n-1} \forall n \geq 2 \end{cases}$. Tìm số hạng thứ 7 của dãy.

🗭 Lời giải.

Ta có

$$u_3 = 5u_2 - 6u_1 = 21$$
; $u_4 = 5u_3 - 6u_2 = 87$; $u_5 = 309$; $u_6 = 1023$; $u_7 = 3261$

Vậy số hạng thứ 7 của dãy là 3261.

BÀI 4. Viết năm số hạng đầu của dãy số Fibonacci (F_n) cho bởi hệ thức truy hồi

$$\begin{cases} F_1 = 1, F_2 = 1 \\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \ (n \ge 3). \end{cases}$$

🗭 Lời giải.

Ta có $F_3 = 2$, $F_4 = 3$, $F_5 = 5$.

BÀI 5. Người ta nuôi cấy 5 con vi khuẩn E-coli trong môi trường nhân tạo. Cứ 30 phút thì vi khuẩn E-coli sẽ nhân đôi 1 lần. Tính số lượng vi khuẩn thu được sau 1, 2, 3 lần nhân đôi.

🗭 Lời giải.

Đặt $u_1 = 5$, gọi số vi khuẩn sau n lần phân chia là u_{n+1} , khi đó ta có dãy số (u_n) thỏa mãn

$$u_1 = 5, \ u_{n+1} = 2u_n$$

Ta có $u_2 = 10, u_3 = 20, u_4 = 40.$

BÀI 6. Cho dãy số (u_n) được xác định bởi $u_n = \frac{n^2 + 3n + 7}{n + 1}$

- a) Viết năm số hạng đầu của dãy.
- b) Dãy số có bao nhiều số hạng nhận giá trị nguyên.

🗭 Lời giải.

- a) Ta có năm số hạng đầu của dãy $u_1 = \frac{1^2 + 3.1 + 7}{1 + 1} = \frac{11}{2}; u_2 = \frac{17}{3}; u_3 = \frac{25}{4}; u_4 = 7; u_5 = \frac{47}{6}.$
- b) Ta có: $u_n = n + 2 + \frac{5}{n+1}$, do đó u_n nguyên khi và chỉ khi $\frac{5}{n+1}$ nguyên hay n+1 là ước của 5. Điều đó xảy ra khi $n+1=5 \Leftrightarrow n=4$. Vậy dãy số có duy nhất một số hạng nguyên là $u_4=7$.

BÀI 7 (*). Cho dãy số (x_n) thỏa mãn điều kiện $x_1 = 1, x_{n+1} - x_n = \frac{1}{n(n+1)}, n = 1, 2, 3, \dots$ Số hạng x_{2023} bằng

🗭 Lời giải.

Ta có

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) = \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$$
$$\Leftrightarrow x_n - x_1 = 1 - \frac{1}{n}$$
$$\Leftrightarrow x_n = \frac{2n-1}{n}.$$

BÀI 8 (*). Cho dãy số (u_n) biết $\begin{cases} u_1 = 99 \\ u_{n+1} = u_n - 2n - 1, n \ge 1 \end{cases}$. Hỏi số -861 là số hạng thứ mấy?

🗭 Lời giải.

Ta có

$$u_{n} = u_{n-1} - 2n + 1$$

$$u_{n-1} = u_{n-2} - 2n + 3$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$u_{3} = u_{2} - 2n + 2n - 5$$

$$u_{2} = u_{1} - 2n + 2n - 3$$

Suy ra

$$u_n = u_1 - 2n \cdot (n-1) + 1 + 3 + 5 + \dots + (2n-5) + (2n-3)$$

$$u_n = 99 - 2n^2 + 2n + \frac{n-1}{2} \cdot [2 \cdot 1 + (n-2) \cdot 2] = 100 - n^2$$

Giả sử $u_n = -861 \Rightarrow n^2 = 961 \Rightarrow n = 31$ (vì $n \in \mathbb{N}$). Vậy số -861 là số hạng thứ 31.

3. Câu hỏi trắc nghiêm

CÂU 1. Cho dãy số (u_n) , biết $u_n = \frac{n}{3^n - 1}$. Ba số hạng đầu tiên của dãy số đó lần lượt là những số nào dưới đây?

$$\bigcirc$$
 $\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{16}.$

B
$$\frac{1}{2}$$
; $\frac{2}{3}$; $\frac{3}{4}$.

$$\bigcirc$$
 $\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{3}{26}.$

$$\bigcirc$$
 $\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}.$

🗭 Lời giải.

Ta có
$$u_1 = \frac{1}{2}$$
; $u_2 = \frac{2}{3^2 - 1} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$; $u_3 = \frac{3}{3^3 - 1} = \frac{3}{26}$.

Chọn đáp án \bigcirc

CÂU 2. Cho dãy số (u_n) , biết $u_n = (-1)^n \cdot 2n$. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

$$u_3 = -6.$$

B
$$u_2 = 4$$
.

$$u_4 = -8.$$

$$u_1 = -2.$$

🗭 Lời giải.

Ta có

$$u_1 = -2 \cdot 1 = -2; \ u_2 = (-1)^2 \cdot 2 \cdot 2 = 4, \ u_3 = (-1)^3 \cdot 2 \cdot 3 = -6; \ u_4 = (-1)^4 \cdot 2 \cdot 4 = 8.$$

Nhận xét: Dễ thấy $u_n > 0$ khi n chẵn và ngược lại nên đáp án $u_4 = -8$ sai.

CÂU 3. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1=2\\ u_{n+1}=\frac{1}{3}(u_n+1) \end{cases}$. Tìm số hạng u_4 .

$$\mathbf{A} u_4 = \frac{2}{3}.$$

B
$$u_4 = 1$$
.

$$\mathbf{C}$$
 $u_4 = \frac{14}{27}$.

🗭 Lời giải.

Ta có
$$u_2 = \frac{1}{3}(u_1 + 1) = \frac{1}{3}(2 + 1) = 1; \ u_3 = \frac{1}{3}(u_2 + 1) = \frac{2}{3}; \ u_4 = \frac{1}{3}(u_3 + 1) = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3} + 1\right) = \frac{5}{9}.$$

Chọn đáp án \bigcirc

CÂU 4. Cho dãy số (u_n) , biết $\begin{cases} u_1 = -1 \\ u_{n+1} = u_n + 3 \end{cases}$ với $n \geq 0$. Ba số hạng đầu tiên của dãy số đó là lần lượt là những số nào

dưới đây?

$$(A)$$
 -1; 2; 5.

$$(B)$$
 -1; 3; 7.

🗭 Lời giải.

Ta có $u_1 = -1$; $u_2 = u_1 + 3 = 2$; $u_3 = u_2 + 3 = 5$.

Nhận xét. (i) Dùng chức năng "lặp" của MTCT để tính:

Nhập vào màn hình: X = X + 3

Bấm CALC và cho X = -1 (ứng với $u_1 = -1$)

Để tính u_n cần bấm "=" ra kết quả liên tiếp n-1 lần. Ví dụ để tính u_2 ta bấm "=" ra kết quả lần đầu tiên, bấm "=" ra kết quả thứ hai chính là u_3, \ldots

(ii) Vì $u_1 = -1$ nên loại các đáp án $u_1 = 1$, $u_1 = 4$.

Còn lại các đáp án có $u_1 = -1$; để biết đáp án nào ta chỉ cần kiểm tra u_2 (vì u_2 ở hai đáp án là khác nhau): $u_2 = u_1 + 3 = 2$.

Chọn đáp án A

CÂU 5. Cho dãy số (u_n) , biết $u_n = \frac{2n+5}{5n-4}$. Số $\frac{7}{12}$ là số hạng thứ mấy của dãy số?

A 9.

B 6.

c 10.

D 8.

🗭 Lời giải.

Ta có

$$u_n = \frac{2n+5}{5n-4} = \frac{7}{12} \Leftrightarrow 24n+60 = 35n-28 \Leftrightarrow 11n = 88 \Leftrightarrow n = 8.$$

Chọn đáp án \bigcirc

CÂU 6. Cho dãy (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1=3\\ u_{n+1}=\frac{u_n}{2}+2 \end{cases}$. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

$$\mathbf{A} u_2 = \frac{5}{2}.$$

B
$$u_4 = \frac{31}{8}$$
.

$$\mathbf{c}$$
 $u_3 = \frac{15}{4}$.

🗭 Lời giải.



Ta có
$$\begin{cases} u_2 = \frac{u_1}{2} + 2 = \frac{3}{2} + 2 = \frac{7}{2}; \ u_3 = \frac{u_2}{2} + 2 = \frac{7}{4} + 2 = \frac{15}{4}. \\ u_4 = \frac{u_3}{2} + 2 = \frac{15}{8} + 2 = \frac{31}{8}; \ u_5 = \frac{u_4}{2} + 2 = \frac{31}{16} + 2 = \frac{63}{16}. \end{cases}$$

Chọn đáp án (A)..

CÂU 7. Cho dãy số (u_n) , với $u_n = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{2n+3}$. Tìm số hạng u_{n+1} .

(A)
$$u_{n+1} = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{2(n-1)+3}$$
.

B
$$u_{n+1} = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{2(n+1)+3}$$
.

🗭 Lời giải.

$$u_n = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{2n+3} \Rightarrow u_{n+1} = \left(\frac{(n+1)-1}{(n+1)+1}\right)^{2(n+1)+3} = \left(\frac{n}{n+2}\right)^{2n+5}.$$

CÂU 8. Cho dãy số (a_n) , được xác định $\begin{cases} a_1=3\\ a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n,\ n\geq 1 \end{cases}$. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

B
$$a_{10} = \frac{3}{512}$$
.

🗭 Lời giải.

Ta có
$$a_1=3;\ a_2=\frac{u_1}{2};\ a_3=\frac{u_2}{2}=\frac{u_1}{2^2};\ a_4=\frac{u_3}{2}=\frac{u_1}{2^3},\dots$$

$$\Rightarrow u_n=\frac{u_1}{2^{n-1}}=\frac{3}{2^{n-1}} \text{ nên suy ra đáp án } a_n=\frac{3}{2^n} \text{ sai.}$$

Xét đáp án

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 3\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4}\right) = 3.\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^5}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{93}{16} \Rightarrow \text{dúng}.$$

Xét đáp án
$$a_{10}=\frac{3}{2^9}=\frac{3}{512}\Rightarrow$$
 đúng.
Xét đáp án $a_{n+1}+a_n=\frac{3}{2^n}+\frac{3}{2^{n-1}}=\frac{3+3\cdot 2}{2^n}=\frac{9}{2^n}\Rightarrow$ đúng.

Chon đáp án C.....

CÂU 9. Cho dãy số (u_n) biết $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_2 = 4 \\ u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n \end{cases}$ với mọi $n \ge 1$. Giá trị $u_{101} - u_{100}$ là

$$\mathbf{A} 3 \cdot 2^{102}$$
.

B
$$3 \cdot 2^{101}$$

$$3 \cdot 2^{100}$$

$$\bigcirc$$
 3 · 2⁹⁹.

Lời giải.

Theo bài ta có

$$u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$$

$$\Leftrightarrow u_{n+2} = u_{n+1} + 2(u_{n+1} - u_n)$$

$$\Leftrightarrow u_{n+2} - u_{n+1} = 2(u_{n+1} - u_n).$$

Với n = 99 ta có

$$u_{101} - u_{100} = 2(u_{100} - u_{99})$$

$$= 2 \cdot 2(u_{99} - u_{98})$$

$$= \dots$$

$$= 2^{99} \cdot (u_2 - u_1) = 3 \cdot 2^{99}.$$

CÂU 10. Cho dãy số (u_n) thoả mãn $u_1=\sqrt{2}$ và $u_{n+1}=\sqrt{2+u_n}$ với mọi $n\geq 1$. Tìm u_{2023} .

B
$$u_{2023} = \sqrt{2}\cos\frac{\pi}{2^{2024}}$$
. **c** $u_{2023} = \sqrt{2}\cos\frac{\pi}{2^{2023}}$.

$$u_{2023} = 2.$$

🗭 Lời giải.

Ta chứng minh bằng phương pháp quy nạp số hạng tổng quát của dãy là $u_n = 2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}$.

Dễ thấy, với n = 1 ta có $u_1 = \sqrt{2}$ (đúng).

Giả sử mệnh đề đúng với $n=k, \forall k \in \mathbb{N}^*$ nghĩa là $u_k=2\cos\frac{\pi}{2^{k+1}}$ ta phải chứng minh mệnh đề đúng với n=k+1 nghĩa là $u_{k+1} = 2\cos\frac{\pi}{2^{k+2}}.$

Thật vậy,
$$u_{k+1} = \sqrt{2 + u_k} = \sqrt{2 + 2\cos\frac{\pi}{2^{k+1}}} = \sqrt{4\cos^2\frac{\pi}{2^{k+2}}} = 2\cos\frac{\pi}{2^{k+2}}.$$

Áp dụng công thức tổng quát trên ta có $u_{2023} = \sqrt{2}\cos\frac{\pi}{2^{2024}}$

Chọn đáp án (B).....

Xét tính tăng giảm của dãy số

- a) Phương pháp 1. Xét dấu của hiệu số $u_{n+1} u_n$.
 - (a) Nếu $u_{n+1} u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$ thì (u_n) là dãy số tăng.
 - (b) Nếu $u_{n+1} u_n < 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$ thì (u_n) là dãy số giảm.
- b) Phương pháp 2. Nếu $u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$ thì ta có thể so sánh thương $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ với 1.
 - (a) Nếu $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ thì (u_n) là dãy số tăng.
 - (b) Nếu $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ thì (u_n) là dãy số giảm.

Nếu $u_n < 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$ thì ta có thể so sánh thương $\frac{u_{n+1}}{u}$ với 1.

- (a) Nếu $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ < 1 thì (u_n) là dãy số tăng.
- (b) Nếu $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ thì (u_n) là dãy số giảm.
- c) Phương pháp 3. Nếu dãy số (u_n) cho bởi hệ thức truy hồi thì thường dùng phương pháp quy nạp để chứng minh $u_{n+1} > u_n, \forall n \in \mathbb{N}^* \text{ (hoặc } u_{n+1} < u_n \forall n \in \mathbb{N}^* \text{)}.$

1. Ví du minh hoa

VÍ DỤ 1. Xét sự tăng giảm của dãy số (u_n) với $u_n = (-1)^n$.

Lời giải.

$$u_1 = (-1)^1 = -1, u_2 = (-1)^2 = 1, u_3 = (-1)^3 = -1.$$

Vậy (u_n) là dãy không tăng không giảm.

VÍ DỤ 2. Xét tính tăng giảm của dãy số sau (u_n) với $u_n = \frac{2n+1}{n+1}$

🗭 Lời giải.

Ta có:
$$u_n = \frac{2n+1}{n+1} = 2 - \frac{1}{n+1}$$
.
$$u_{n+1} - u_n = \left(2 - \frac{1}{n+1+1}\right) - \left(2 - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Vậy dãy số (u_n) là dãy số tăng

VÍ DỤ 3. Xét tính tăng giảm của dãy số (u_n) với $u_n = \sqrt{n} - \sqrt{n+2}$

Ta có
$$u_n = \sqrt{n} - \sqrt{n+2} = \frac{-2}{\sqrt{n} + \sqrt{n+2}}.$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{-2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n+3}} - \frac{-2}{\sqrt{n} + \sqrt{n+2}}$$
$$= \frac{2}{\sqrt{n} + \sqrt{n+2}} - \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n+3}} > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Vậy (u_n) là dãy số tăng.

VÍ DỤ 4. Xét tính tăng giảm của dãy số (u_n) với $u_n = \frac{n}{2^n}$

🗭 Lời giải.

Ta có
$$u_n = \frac{n}{3^n} > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Xét thương
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+1}{3^{n+1}} : \frac{n}{3^n} = \frac{n+1}{3 \cdot n} < 1, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Vậy (u_n) là dãy số giảm.

2. Bài tập tự luận

BÀI 1. Xét tính tăng giảm của dãy số (u_n) với $u_n = \frac{\sqrt{2}}{3^n}$.

🗭 Lời giải.

Ta có $u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*.$

Xét thương

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\sqrt{2}}{3^{n+1}} : \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3^2}} = \frac{3^n}{3^{n+1}} = \frac{1}{3} < 1.$$

Vậy (u_n) là dãy số giảm.

BÀI 2. Xét tính tăng giảm của dãy số (u_n) với $u_n = \frac{1}{n(n+1)}$.

🗭 Lời giải.

Ta có $u_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$. Xét hiệu:

$$u_{n+1} - u_n = \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) - \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right)$$
$$= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Vậy (u_n) là dãy số tăng.

BÀI 3. Xét tính tăng giảm của dãy số (u_n) với $u_n = n + \cos^2 n$.

🗭 Lời giải.

Xét hiệu

$$u_{n+1} - u_n = (n+1+\cos^2(n+1)) - (n+\cos^2 n)$$

= 1 + \cos^2(n+1) - \cos^2 n
= \cos^2(n+1) + \sin^2 n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*.

Vậy (u_n) là dãy số tăng.

BÀI 4. Xét tính tăng giảm của dãy số (u_n) với $u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}$

🗭 Lời giải.

Xét hiệu

$$u_{n+1} - u_n = \left(\frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{2(n+1)}\right) - \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}\right)$$

$$= \frac{1}{n+2} - \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2}$$

$$= \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{2n+1} < 0, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Vậy (u_n) là dãy số giảm.

BÀI 5. Xét tính tăng giảm của dãy số (u_n) với $u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}$

🗭 Lời giải.

Xét hiệu

$$u_{n+1} - u_n = \left(\frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{2(n+1)}\right) - \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}\right)$$

$$= \frac{1}{n+2} - \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2}$$

$$= \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{2n+1} < 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Vậy (u_n) là dãy số giảm.

3. Bài tập trắc nghiệm

CÂU 1. Cho các dãy số sau. Dãy số nào là dãy số tăng?

B
$$1; \frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}; \frac{1}{16}; \dots$$

©
$$1; -\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; -\frac{1}{8}; \frac{1}{16}; \dots$$
 D $1; 3; 5; 7; 9; \dots$

🗭 Lời giải.

Xét đáp án 1; 1; 1; 1; 1; 1; ... đây là dãy hằng nên không tăng không giảm. Xét đáp án 1;
$$-\frac{1}{2}$$
; $\frac{1}{4}$; $-\frac{1}{8}$; $\frac{1}{16}$; ... $\Rightarrow u_1 > u_2 < u_3 \Rightarrow$ loại.

Xét đáp án 1; 3; 5; 7; 9; ...
$$\Rightarrow u_n < u_{n+1}, n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \text{chon.}$$

Xét đáp án 1; 3; 5; 7; 9; ...
$$\Rightarrow u_n < u_{n+1}, \ n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \text{chọn.}$$

Xét đáp án 1; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{8}$; $\frac{1}{16}$; ... $\Rightarrow u_1 > u_2 > u_3 ... > u_n > ... \Rightarrow \text{loại.}$

Chọn đáp án
$$\boxed{\mathbb{D}}$$
.....

CÂU 2. Với giá trị nào của a thì dãy số (u_n) với $u_n = \frac{an-1}{n+2}, \forall n \geq 1$ là dãy số tăng?

B
$$a < -2$$
.

$$a > -\frac{1}{2}$$
.

D
$$a < -\frac{1}{2}$$
.

🗭 Lời giải.

Ta có
$$u_n = a - \frac{1+2a}{n+2}$$
.

$$u_{n+1} - u_n = (1+2a)\left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}\right).$$

Suy ra dãy số đã cho tăng khi
$$a > -\frac{1}{2}$$

Chọn đáp án
$$\bigcirc$$

CÂU 3. Trong các dãy (u_n) sau đây dãy nào là dãy số giảm ?

$$(A) u_n = (-1)^n.$$

$$\bigcirc u_n = 2^n.$$

$$\bigcirc u_n = 3n + 1.$$

🗭 Lời giải.

Xét dãy số
$$(u_n)$$
 có $u_n = \frac{1}{3^n}$, ta thấy $u_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ và $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{1}{3^{n+1}}}{\frac{1}{3^n}} = \frac{1}{3} < 1$ nên dãy số (u_n) này là dãy số giảm.

CÂU 4. Trong các dãy số (u_n) cho bởi số hạng tổng quát u_n sau, dãy số nào là dãy số tăng?

🗭 Lời giải.

Vì 2^n ; n là các dãy dương và tăng nên $\frac{1}{2^n}$; $\frac{1}{n}$ là các dãy giảm, do đó loại các đáp án $u_n = \frac{1}{2^n}$ và $u_n = \frac{1}{n}$.

Xét đáp án
$$u_n = \frac{n+5}{3n+1} \Rightarrow \begin{cases} u_1 = \frac{3}{2} \\ u_2 = \frac{7}{6} \end{cases} \Rightarrow u_1 > u_2 \Rightarrow \text{loại.}$$

Xét đáp án
$$u_n = \frac{2n-1}{n+1} = 2 - \frac{3}{n+1} \Rightarrow u_{n+1} - u_n = 3\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) > 0 \Rightarrow \text{nhận}.$$

CÂU 5. Trong các dãy số (u_n) cho bởi số hạng tổng quát u_n sau, dãy số nào là dãy số giảm?

🗭 Lời giải.

Vì 2^n là dãy dương và tăng nên $\frac{1}{2^n}$ là dãy giảm.

Xét
$$u_n = \frac{3n-1}{n+1} \Rightarrow \begin{cases} u_1 = 1 \\ u_2 = \frac{5}{3} \end{cases} \Rightarrow u_1 < u_2$$
, loại

$$X\acute{e}t \ u_n = \frac{3n-1}{n+1} \Rightarrow \begin{cases} u_1 = 1 \\ u_2 = \frac{5}{3} \Rightarrow u_1 < u_2, \text{ loại.} \end{cases}$$
Hoặc $u_{n+1} - u_n = \frac{3n+2}{n+2} - \frac{3n-1}{n+1} = \frac{4}{(n+1)(n+2)} > 0 \text{ nên } (u_n) \text{ là dãy tăng.}$

$$X\acute{e}t \ u_n = n^2 \Rightarrow u_{n+1} - u_n = (n+1)^2 - n^2 - 2n + 1 > 0 \text{ loại.}$$

Xét
$$u_n = n^2 \Rightarrow u_{n+1} - u_n = (n+1)^2 - n^2 = 2n+1 > 0$$
, loại.

Xét
$$u_n = \sqrt{n+2} \Rightarrow u_{n+1} - u_n = \sqrt{n+3} - \sqrt{n+2} = \frac{1}{\sqrt{n+3} + \sqrt{n+2}} > 0$$
, loại.

Chọn đáp án (D).....

CÂU 6. Trong các dãy số (u_n) sau, hãy chọn dãy số tăng.

$$\mathbf{A} u_n = (-1)^{2n} (5^n + 1), n \in \mathbb{N}^*.$$

🗭 Lời giải.

Xét dãy số (u_n) với $u_n = (-1)^{2n}(5^n + 1)$, ta có

$$u_{n+1} - u_n = (-1)^{2n+2} (5^{n+1} + 1) - (-1)^{2n} (5^n + 1) = 5^{n+1} + 1 - 5^n - 1 = 4 \cdot 5^n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Vây dãy trên là dãy số tăng.

Xét các dãy số còn lại

$$\bullet$$
 Với $u_n = (-1)^{n+1} \sin \frac{\pi}{n}$ ta có $u_1 = 0$, $u_2 = -1$ hay $u_1 > u_2$. Vậy dãy số này không là dãy số tăng.

$$\bullet$$
 Với $u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}+n}$ ta có $u_1 = \sqrt{2}-1$, $u_2 = 2-\sqrt{3}$ hay $u_1 > u_2$. Vậy dãy số này không là dãy số tăng.

$$m{\Theta}$$
 Với $u_n = \frac{n}{n^2 + 1}$ ta có $u_1 = \frac{1}{2}, u_2 = \frac{2}{5}$ hay $u_1 > u_2$. Vậy dãy số này không là dãy số tăng.

Chọn đáp án (A)......

CÂU 7. Trong các dãy số (u_n) cho bởi số hạng tổng quát u_n sau, dãy số nào là dãy số giảm?

B
$$u_n = (-1)^n \cdot (2^n + 1)$$
. **C** $u_n = \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$. **D** $u_n = \sin n$.

$$\bigcirc u_n = \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$$

Xét $u_n = \sin n \Rightarrow u_{n+1} - u_n = 2\cos\left(n + \frac{1}{2}\right)\sin\frac{1}{2}$ có thể dương hoặc âm phụ thuộc n nên đáp án sai. Hoặc dễ thấy $\sin n$ có

dấu thay đổi trên \mathbb{N}^* nên dãy sin n không tăng, không giảm. Xét $u_n = \frac{n^2+1}{n} = n + \frac{1}{n} \Rightarrow u_{n+1} - u_n = 1 + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{n^2+n-1}{n(n+1)} > 0$ nên dãy đã cho tăng nên đáp án sai.

Xét $u_n = \sqrt{n} - \sqrt{n-1} = \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}}$, dãy $\sqrt{n} + \sqrt{n-1} > 0$ là dãy tăng nên suy ra u_n giảm.

Xét $u_n = (-1)^n (2^n + 1)$ là dãy thay dấu nên không tăng không giảm, nên đáp án đúng.

Xét
$$u_n = \sin n$$
 có dấu thay đổi trên \mathbb{N}^* nên dãy này không tăng không giảm.
Xét $u_n = \frac{n^2+1}{n}$, ta có
$$\begin{cases} n=1 \to u_1=2 \\ n=2 \to u_2=\frac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow u_1 < u_2 \Rightarrow u_n = \frac{n^2+1}{n} \text{ không giảm.}$$

Xét
$$u_n = \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$$
, ta có
$$\begin{cases} n = 1 \rightarrow u_1 = 1 \\ n = 2 \rightarrow u_2 = \sqrt{2} - 1 \end{cases} \Rightarrow u_1 > u_2 \text{ nên dự đoán dãy này giảm.}$$
 Xét $u_n = (-1)^n (2^n + 1)$ là dãy thay dấu nên không tăng không giảm.

Cách CASIO.

Các dãy $\sin n$; $(-1)^n(2^n+1)$ có dấu thay đổi trên \mathbb{N}^* nên các dãy này không tăng không giảm nên loại các đáp án này. Xét hai đáp án còn lại, ta chỉ cần kiểm tra một đáp án bằng chức năng TABLE.

Chẳng hạn kiểm tra đáp án $u_n = \frac{n^2 + 1}{n}$, ta vào chức năng TABLE nhập $F(X) = \frac{X^2 + 1}{X}$ với thiết lập Start = 1, End = 10, Step = 1.

Nếu thấy cột F(X) các giá trị tăng thì loại $u_n = \frac{n^2 + 1}{n}$ nếu ngược lại nếu thấy cột F(X) các giá trị giảm dần thị chọn $u_n = \frac{n^2 + 1}{n}.$

Chọn đáp án (C).....

CÂU 8. Mệnh đề nào sau đây đúng?

$$\begin{tabular}{|c|c|c|c|c|} \hline \end{tabular}$$
 Dãy số $u_n = \frac{1}{n} - 2$ là dãy tăng.

$$lacksquare$$
 Dãy số $u_n = 2n + \cos \frac{1}{n}$ là dãy tăng.

$$\bigcirc$$
 Dãu số $u_n = \frac{n-1}{n+1}$ là dãy giảm.

$$lacktriangle$$
 Dãy số $u_n = (-1)^n (2^n + 1)$ là dãy giảm.

🗭 Lời giải.

Xét đáp án $u_n = \frac{1}{n} - 2 \Rightarrow u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} < 0 \Rightarrow loại.$

Xét đáp án
$$u_n = (-1)^n (2^n + 1)$$
 là dãy có dấu thay đổi nên không giảm nên loại.
Xét đáp án $u_n = \frac{n-1}{n+1} = 1 - \frac{2}{n+1} \Rightarrow u_{n+1} - u_n = 2\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) > 0 \Rightarrow \text{loại}.$

Xét đáp án
$$u_n = 2n + \cos \frac{1}{n} \Rightarrow u_{n+1} - u_n = \left(2 - \cos \frac{1}{n+1}\right) + \cos \frac{1}{n+2} > 0$$
 chọn.

CÂU 9. Mệnh đề nào sau đây sai?

(A) Dãy số
$$u_n = \frac{1-n}{\sqrt{n}}$$
 là dãy giảm.

B Dãy số
$$u_n = n + \sin^2 n$$
 là dãy tăng.

$$\bullet$$
 Dãy số $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ là dãy giảm.

$$lacktriangle$$
 Dãy số $u_n=2n^2-5$ là dãy tăng.

🗭 Lời giải.

Xét đáp án

$$u_n = \frac{1-n}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}} - \sqrt{n} \Rightarrow u_{n+1} - u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{n}} + \sqrt{n} - \sqrt{n+1} < 0 \text{ nên dãy } (u_n) \text{ là dãy giảm nên đúng.}$$
 Xét đáp án $u_n = 2n^2 - 5$ là dãy tăng vì n^2 là dãy tăng nên đúng.

Hoặc
$$u_{n+1} - u_n = 2(2n+1) > 0$$
 nên (u_n) là dãy tăng.
Xét đáp án $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n > 0 \Rightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+2}{n+1} \cdot \left(\frac{n+2}{n}\right)^n > 1 \Rightarrow (u_n)$ là dãy tăng nên sai.
Xét đáp án $u_n = n + \sin^2 n \Rightarrow u_{n+1} - u_n = (1 - \sin^2(n+1)) + \sin^2 n > 0$.

CÂU 10. Cho dãy
$$(u_n)$$
:
$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{n}{2(n+1)} u_n + \frac{3(n+2)}{2(n+1)} \end{cases}, n \in \mathbb{N}^*. \text{ Nhận xét nào sau đây đúng}$$

(A) Dãy số (u_n) là dãy số tăng.

- (B) Dãy số (u_n) là dãy số giảm.
- (**c**) Dãy số (u_n) là dãy số không tăng, không giảm.
- (D) Tất cả các đáp án còn lại đều sai.

Lời giải.

Ta chứng minh quy nạp $u_n < 3, \forall n \in N^*$.

Giả sử mđ đúng với n = k khi đó có:

$$u_{k+1} = \frac{k}{2(k+1)}u_k + \frac{3(k+2)}{2(k+1)} < \frac{3k}{2(k+2)} + \frac{3(k+2)}{2(k+1)} = 3.$$

Vậy mệnh đề đúng với n = k + 1. Từ đó ta có

$$u_{n+1} - u_n = \frac{(3 - u_n)(n+2)}{n+1} > 0.$$

Vậy dãy (u_n) tăng

Chọn đáp án (A).....

Xét tính bị chặn của dãy số

- \odot Để chứng minh dãy số (u_n) bị chặn trên bởi M, ta chứng minh $u_n \leq M$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.
- \odot Để chứng minh dãy số (u_n) bị chặn dưới bởi m, ta chứng minh $u_n \geq m, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
- O Để chứng minh dãy số bị chăn ta chứng minh nó bị chăn trên và bị chăn dưới.
 - Nếu dãy số (u_n) tăng thì bị chặn dưới bởi u_1 .
 - Nếu dãy số (u_n) giảm thì bị chặn trên bởi u_1 .

1. Ví dụ minh hoạ

VÍ DỤ 1. Chứng minh rằng dãy số (u_n) với $u_n = \frac{3n}{n^2+9}$ bị chặn trên bởi $\frac{1}{9}$

Với mọi $n \ge 1$, ta có $\frac{3n}{n^2 + 9} \le \frac{1}{2} \Leftrightarrow n^2 + 9 \le 6n \Leftrightarrow (n - 3)^2 \le 0$ (đúng).

Vậy dãy số đã cho bị chặn trên bởi $\frac{1}{2}$.

VÍ DỤ 2. Chứng minh rằng dãy số (u_n) xác đinh bởi $u_n = \frac{8n+3}{3n+5}$ là một dãy số bị chặn.

🗭 Lời giải.

Ta có
$$u_n > 0$$
, $\forall n \ge 1$. Suy ra dãy số bị chặn dưới.
Mặt khác $u_n = \frac{8n+3}{3n+5} < \frac{8n+3}{3n} = \frac{8}{3} + \frac{1}{n} < \frac{8}{3} + 1 = \frac{11}{3}$. Do đó dãy số bị chặn trên bởi $\frac{11}{3}$.
Vậy dãy số đã cho bị chặn.

VÍ DỤ 3. Xét tính bị chặn của dãy số (u_n) với $u_n = \frac{3n+1}{n+3}$

🗭 Lời giải.

Với
$$n \in \mathbb{N}^*$$
 ta có $u_n = \frac{3n+1}{n+3} > 0$.

Nên dãy
$$(u_n)$$
 bị chặn dưới bởi 0

Nên dãy
$$(u_n)$$
 bị chặn dưới bởi 0.
Mặt khác $u_n = \frac{3n+1}{n+3} = \frac{3n+9-8}{n+3} = 3 - \frac{8}{n+3} < 3, \forall n \in \mathbb{N}^*.$
Nên dãy (u_n) bị chặn trên bởi 3

Nên dãy (u_n) bị chặn trên bởi 3

Vậy dãy số (u_n) bị chặn.

VÍ DỤ 4. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1=1$ và $u_{n+1}=\frac{u_n+2}{u_n+1}, \, \forall n\geq 1.$ Chứng minh rằng dãy (u_n) bị chặn trên bởi sô $\frac{3}{2}$

và bị chặn dưới bởi số 1

Lời giải.

Ta chứng minh $1 \le u_n \le \frac{3}{2}, \forall n \ge 1$ bằng phương pháp quy nạp.

$$\bullet$$
 Với $n=1$ ta có $1 \le u_1 \le \frac{3}{2}$.

$$m{\Theta}$$
 Giả sử $1 \le u_n \le \frac{3}{2}$ với mọi $n = k \ge 1$, tức là $1 \le u_k \le \frac{3}{2}$. Ta cần chứng minh $1 \le u_{k+1} \le \frac{3}{2}$.

Thật vậy
$$u_{k+1} = 1 + \frac{1}{u_k + 1}$$
.

Vì
$$u_k + 1 > 0$$
 nên $u_{k+1} = 1 + \frac{1}{u_k + 1} > 1$.

Vì
$$u_k + 1 \ge 2$$
 nên $u_{k+1} = 1 + \frac{1}{u_k + 1} \le 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$.

Vậy $1 \le u_n \le \frac{3}{2}$, $\forall n \ge 1$ hay dãy (u_n) bị chặn trên bởi số $\frac{3}{2}$ và bị chặn dưới bởi số 1.

VÍ DỤ 5. Xét tính bị chặn của dãy số (u_n) với $u_n = \sin n + \cos n$

🗭 Lời giải.

Ta có
$$\sin n + \cos n$$

$$= \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin n + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos n \right)$$

$$= \sqrt{2} \left(\sin n \cdot \cos \frac{\pi}{4} + \cos n \cdot \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

$$=\sqrt{2}\sin\left(n+\frac{\pi}{4}\right).$$

$$Vi -1 \le \sqrt{2} \sin\left(n + \frac{\pi}{4}\right) \le 1$$

$$\Rightarrow -\sqrt{2} \le \sqrt{2} \sin\left(n + \frac{\pi}{4}\right) \le \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow -\sqrt{2} \le \sin n + \cos n \le \sqrt{2}, \ \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$$\Rightarrow -\sqrt{2} \le u_n \le \sqrt{2}, \ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Vậy dãy số (u_n) là dãy số bị chặn

2. Bài tấp tư luân

BÀI 1. Xét tính bi chăn của các dãy số sau

a)
$$u_n = \frac{1}{2n^2 - 1}$$
.

b)
$$u_n = 3 \cdot \cos \frac{nx}{3}$$
.

d)
$$u_n = \frac{n^2 + 2n}{n^2 + n + 1}$$

e)
$$u_n = n + \frac{1}{n}$$
.

c) $u_n = 2n^3 + 1$.

🗭 Lời giải.

- a) $u_n = \frac{1}{2n^2 1}$. Ta có $2n^2 - 1 \ge 1 \Rightarrow u_n = \frac{1}{2n^2 - 1} \le 1, \forall n \ge 1.$ Vậy dãy số bị chặn trên bởi 1
- b) $u_n = 3 \cdot \cos \frac{nx}{3}$ có $-1 \le \cos \frac{nx}{3} \le 1 \Rightarrow -3 \le 3 \cdot \cos \frac{nx}{3} \le 3$. Vây dãy số bị chặn dưới bởi -3 và chặn trên bởi 3.
- c) $u_n = 2n^3 + 1$ có $2n^3 + 1 \ge 3$, $\forall n \ge 1$. Vây dãy số bị chăn dưới bởi 3.
- d) $u_n = \frac{n^2 + 2n}{n^2 + n + 1}$ có $u_n = \frac{n^2 + 2n}{n^2 + n + 1} = 1 + \frac{n 1}{n^2 + n + 1} \ge 1, \forall n \ge 1.$
- e) $u_n = n + \frac{1}{n}$ có $u_n = n + \frac{1}{n} \ge 2\sqrt{n \cdot \frac{1}{n}} = 2, \forall n > 0.$
- **BÀI 2.** Xét tính bị chặn của dãy số $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, $n \in N^*$.

🗭 Lời giải.

Ta có $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$ nên (u_n) bị chặn dưới (1).

Lai có
$$u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k \left(\frac{1}{n}\right)^k$$

$$= \sum_{k=0}^n \left[\frac{n!}{k! \cdot (n-k)! \cdot n^k}\right]$$

$$= \sum_{k=0}^n \left[\frac{1}{k!} \cdot \frac{(n-k+1)}{n} \cdot \frac{(n-k+2)}{n} \dots \frac{(n-k+k)}{n}\right] \le \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}, n \in \mathbb{N}^*$$

$$\operatorname{Ma} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \le 1 + 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{(n-1) \cdot n}$$
$$= 2 + \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right)$$
$$= 3 - \frac{1}{n} < 3, \, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Suy ra $u_n < 3$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ nên dãy số (u_n) bị chặn trên (2).

Từ (1) và (2) suy ra dãy số (u_n) bị chặn.

BÀI 3. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1 = 0$ và $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 4, \forall n \geq 1.$

- a) Chứng minh dãy (u_n) bị chặn trên bởi số 8.
- b) Chứng minh dãy (u_n) tăng, từ đó suy ra dãy (u_n) bị chặn.

🗭 Lời giải.

- a) Ta chứng minh $u_n \leq 8$ với mọi $n \geq 1$.
 - \odot Khi n = 1, ta có $u_1 = 0 < 8$.
 - \odot Giả sử $u_n \leq 8$ với $n = k \geq 1$, tức là $u_k \leq 8$. Ta cần chứng minh $u_{k+1} \le 8$. Thật vậy, $u_{k+1} = \frac{1}{2}u_k + 4 \le \frac{1}{2} \cdot 8 + 4 \le 8$.

Vậy $u_n \leq 8$ với mọi $n \geq 1$, hay (u_n) bị chặn trên bởi 8.

b) Với mọi $n \ge 1$, ta có $u_{n+1} - u_n = 4 - \frac{1}{2}u_n$. Mà $u_n \le 8$ nên $u_{n+1} - u_n \ge 0$. Suy ra u_n là dãy số tăng. Do đó (u_n) bị chặn dưới bởi $u_1 = 0$. Kết hợp với câu a, ta được dãy số (u_n) bị chặn.

3. Câu hỏi trắc nghiệm

CÂU 1. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1 = 3$ và $u_{n+1} = \frac{u_n + 1}{2}$, $\forall n \ge 1$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- (A) Dãy số bị chặn.
- **B**) Dãy số bị chặn trên.
- © Dãy số bị chặn dưới.
- Dãy số không bị chăn.

🗭 Lời giải.

Ta chứng minh $u_n > 1, \forall n \geq 1$ bằng phương pháp quy nạp.

Suy ra dãy số bị chặn dưới bởi 1.

Ta có $u_{n+1} - u_n = \frac{1 - u_n}{2} < 0, \forall n \ge 1.$

Do đó dãy số này là dãy số giảm nên nó bị chặn trên bởi $u_1 = 3$

Vây dãy số đã cho là dãy số bi chăn.

Chọn đáp án (A).....

CÂU 2. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1 = \sqrt{2}$ và $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$, $\forall n \ge 1$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A Dãy số bị chặn trên.
- B) Dãy số bị chặn dưới. (C) Dãy số bị chặn.
- Dãy số không bị chặn.

🗭 Lời giải.

Vì $u_n \ge 0$, $\forall n \ge 1$ nên dãy số bị chặn dưới bởi 0.

Ta chứng minh $u_n \geq 2, \forall n \geq 1$. Suy ra dãy số bị chặn trên bởi 2.

Vậy dãy số đã cho là dãy số bị chặn.

Chọn đáp án (C).....

CÂU 3. Xét tính bị chặn của dãy số (u_n) với $u_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n\cdot (n+1)}$

- (A) Không bị chặn.
- (B) Bị chặn trên.
- (C) Bị chặn dưới.
- (D) Bị chặn.

🗩 Lời giải.

Ta có $u_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}.$

Do đó $0 \le u_n \le 1, \forall n \ge 1$

Vậy dãy số đã cho bị chặn

Chọn đáp án (D).....

CÂU 4. Cho dãy số (u_n) với $u_n = \frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{2 \cdot 5} + \ldots + \frac{1}{n \cdot (n+3)}$. Dãy số (u_n) bị chặn dưới và chặn trên lần lượt bởi các số m và M nào dưới đây?

- (A) m = 0, M = 1. (B) $m = 1, M = \frac{1}{2}.$ (C) $m = 1, M = \frac{10}{19}.$ (D) $m = 0, M = \frac{11}{18}$

Lời giải.

Rõ ràng $u_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ nên (u_n) bị chặn dưới. Mặt khác $\frac{1}{k(k+3)} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+3} \right)$.

Suy ra $u_n = \frac{1}{2} \left[\left(1 - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6} \right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{7} \right) + \right]$ $\dots + \left(\frac{1}{n-3} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n-2} - \frac{1}{n+1}\right) + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+2}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+3}\right)$

 $=\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)<\frac{11}{18},\,\forall n\in\mathbb{N}^*.$

Do đó (u_n) bị chặn trên.

Vậy $m = 0, M = \frac{11}{18}$

Chọn đáp án \bigcirc

CÂU 5. Cho dãy số (u_n) biết $u_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 2n}$. Dãy số (u_n) bị chặn dưới và chặn trên lần lượt bởi các số m và M. Tính giá trị biểu thức m + M?

 $\mathbf{A} \frac{1}{\sqrt{2}}$

 \bigcirc $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

 $\frac{1}{\sqrt{5}}$.

 $\bigcirc \frac{1}{\sqrt{7}}$.

🗭 Lời giải.

Xét $\frac{2k-1}{2k} < \frac{2k-1}{\sqrt{4k^2-1}} = \frac{\sqrt{(2k-1)^2}}{\sqrt{(2k-1)(2k+1)}} = \frac{\sqrt{2k-1}}{\sqrt{2k+1}}, \forall k \ge 1.$

$$\Rightarrow u_n < \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}} \cdot \dots \cdot \frac{\sqrt{2n-1}}{\sqrt{2n+1}} = \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \le \frac{1}{\sqrt{3}}, \, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

$$\Rightarrow 0 < u_n < \frac{1}{\sqrt{3}}, \, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Vây $m + M = 0 + \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Chọn đáp án B....

CÂU 6. Cho dãy số (u_n) , với $u_n = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}$, $\forall n = 2; 3; 4; \ldots$ Khẳng định nào sau đây là đúng?

- (B) Dãy số bị chặn trên.
- C Dãy số bị chặn dưới.

🗭 Lời giải.

Ta có $u_n>0 \Rightarrow (u_n)$ bị chặn dưới bởi 0. Mặt khác $\frac{1}{k^2}<\frac{1}{(k-1)k}=\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k},\,(k\in\mathbb{N}^*,\,k\geq 2)$ nên suy ra

$$u_n < \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}$$

$$= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} < 1.$$

Nên dãy (u_n) bị chặn trên, do đó dãy (u_n) bị chặn.

Chọn đáp án (A).....

CÂU 7. Cho dãy số (u_n) và đặt $u_n = \sum_{k=1}^n a_k$ với $a_k = \frac{1}{4k^2 - 1}$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

$$\bigcirc 0 < u_n < 1.$$

$$\bigcirc 0 < u_n < \frac{1}{2}.$$

Lời giải.

$$\mathbf{\Theta}$$
 Ta có $a_k = \frac{1}{4k^2 - 1} = \frac{1}{(2k+1)(2k-1)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(2k+1) - (2k-1)}{(2k+1)(2k-1)} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\right).$

 Θ Mặt khác $u_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$. Do đó

$$u_n = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \dots + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2n+1}\right)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{2n}{2n+1} = \frac{n}{2n+1}.$$

 \bullet Với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ thì $u_n > 0$ nên dãy số (u_n) bị chặn dưới.

Ta lại có
$$u_n = \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{2n+1}\right) < \frac{1}{2}.$$

Vây dãy số bi chăn

Chọn đáp án \bigcirc

CÂU 8. Cho dãy số (u_n) và đặt $u_n = \sum_{k=1}^n a_k$ với $a_k = \frac{1}{k(k+4)}$. Dãy số (u_n) bị chặn dưới và chặn trên lần lượt bởi các số m

và M nào sau đây?

$$\bigcirc M = 0, M = \frac{25}{48}.$$

B
$$m = 0, M = \frac{25}{12}.$$
 C $m = 1, M = \frac{1}{4}.$ **D** $m = 1, M = \frac{1}{2}.$

$$\bigcirc m = 1, M = \frac{1}{4}.$$

$$\mathbf{D} m = 1, M = \frac{1}{2}$$

🗭 Lời giải.

Ta có
$$a_k = \frac{1}{k(k+4)} = \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{k(k+4)} = \frac{1}{4} \cdot \frac{k+4-k}{k(k+4)} = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+4}\right).$$



Mặt khác
$$u_n = \sum_{k=1}^n a_k$$
. Do đó

$$u_n = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{5}\right) + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right) + \dots + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+4}\right)$$

$$= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+4}\right)$$

$$= \frac{1}{4} \left(\frac{25}{12} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+4}\right).$$

Với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ thì $u_n > 0$ nên dãy số (u_n) bị chặn dước

Ta lai có
$$u_n = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{25}{12} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+4}\right) < \frac{1}{4} \cdot \frac{25}{12} = \frac{25}{48}.$$

Vây
$$m = 0, M = \frac{25}{48}$$
.

Chọn đáp án (A)...

CÂU 9. Xét tính bị chặn của dãy số (u_n) và đặt $u_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_k$ với $a_k = \frac{1}{k(k+1)}$.

- A Bị chặn.
- (B) Bị chặn dưới.
- © Bị chặn trên.
- (D) Không bị chặn..

D Lời giải.

Ta có
$$a_k = \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$
. Do đó

$$u_n = \sum_{k=1}^n a_k = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}.$$

Với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ thì $u_n > 0$ nên dãy số (u_n) bị chặn dưới. Ta lại có $u_n = 1 - \frac{n}{n+1} < 1$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ nên dãy số (u_n) bị chặn trên.

Vậy dãy số bị chặn.

Chọn đáp án (A).....

CÂU 10. Cho dãy số (u_n) , xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 6 \\ u_{n+1} = \sqrt{6 + u_n}, \ \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- **(A)** $\sqrt{6} < u_n < 2\sqrt{3}$. **(B)** $\sqrt{6} \le u_n \le 2\sqrt{3}$.
- (c) $\sqrt{6} < u_n \le 2\sqrt{3}$. (d) $\sqrt{6} \ge u_n < 2\sqrt{3}$.

🗭 Lời giải.

Ta có
$$\begin{cases} u_1 = 6 \\ u_{n+1} = \sqrt{6 + u_n} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1 = 6 \\ u_{n+1} \ge 0 \end{cases} \Rightarrow u_n \ge 0 \Rightarrow \begin{cases} u_1 = 6 \\ u_{n+1} = \sqrt{6 + u_n} \ge \sqrt{6} \end{cases} \Rightarrow u_n \ge \sqrt{6}.$$
Ta chứng minh quy nạp
$$\begin{cases} u_n \le 2\sqrt{3} \\ u_1 \le 2\sqrt{3} \\ u_1 \le 2\sqrt{3} \\ u_k \le 2\sqrt{3}. \end{cases}$$

$$\Rightarrow u_{k+1} = \sqrt{6 + u_{k+1}} \le \sqrt{6 + 2\sqrt{3}} < \sqrt{6 + 6} = 2\sqrt{3}.$$
Chan đến án (P)

$$\Rightarrow u_{k+1} = \sqrt{6 + u_{k+1}} \le \sqrt{6 + 2\sqrt{3}} < \sqrt{6 + 6} = 2\sqrt{3}.$$

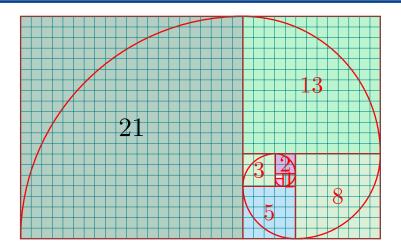
Chon đáp án B.....



Toán thực tế về dãy số

1. Ví dụ minh hoạ

VÍ DU 1. Trên lưới ô vuông, mỗi ô cạnh 1 đơn vị, người ta vẽ 8 hình vuông và tô màu khác nhau như hình vẽ. Tìm dãy số biểu diễn độ dài cạnh của 8 hình vuông đó từ nhỏ đến lớn. Có nhận xét gì về dãy số trên?



🗭 Lời giải.

$$oldsymbol{0} u_1 = 1.$$

$$oldsymbol{0} u_5 = 5.$$

$$oldsymbol{\Theta} u_7 = 13.$$

$$u_2 = 1.$$

$$oldsymbol{0} u_4 = 3.$$

$$oldsymbol{0} u_6 = 8.$$

$$u_8 = 21.$$

Ta có dãy số
$$(u_n)$$
 :
$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_2 = 1 \\ u_n = u_{n-1} - u_{n-2}. \end{cases}$$

VÍ DỤ 2. Chị Mai gửi tiền tiết kiệm vào ngân hàng theo thể thức lãi kép như sau. Lần đầu chị gửi 100 triệu đồng. Sau đó, cứ hết 1 tháng chị lại gửi thêm vào ngân hàng 6 triệu đồng. Biết lãi suất của ngân hàng là 0.5% một tháng. Gọi P_n (triệu đồng) là số tiền chị có trong ngân hàng sau n tháng.

- a) Tính số tiền chị có trong ngân hàng sau 1 tháng.
- b) Tính số tiền chị có trong ngân hàng sau 3 tháng.
- c) Dự đoán công thức của P_n tính theo n.

🗭 Lời giải.

- a) Số tiền chị có trong ngân hàng sau 1 tháng là $P_1 = +100 + 100 \cdot 0.5\% + 6 = 100.5 + 6$ (triệu đồng).
- b) Số tiền chị có trong ngân hàng sau 2 tháng là

$$\begin{array}{ll} P_2 & = & 100.5 + 6 + (100.5 + 6) \cdot 0.5\% + 6 \\ & = & (100.5 + 6)(1 + 0.5\%) + 6 \\ & = & 100.5(1 + 0.5\%) + 6 \cdot (1 + 0.5\%) + 6 \text{ (triệu đồng)}. \end{array}$$

Số tiền chị có trong ngân hàng sau 3 tháng là

$$P_3 = (100,5+6)(1+0,5\%) + 6 + [(100,5+6)(1+0,5\%) + 6] \cdot 0,5\% + 6$$
$$= 100,5 \cdot (1+0,5\%)^2 + 6(1+0,5\%)^2 + 6 \cdot (1+0,5\%) + 6(\text{triệu đồng}).$$

c) Số tiền chị có trong ngân hàng sau 4 tháng là

$$\begin{array}{ll} P_4 & = & (100.5+6)(1+0.5\%)^2+6\cdot(1+0.5\%)+6+\left[(100.5+6)(1+0.5\%)^2+6\cdot(1+0.5\%)+6\right]\cdot0.5\%+6\\ & = & 100.5\cdot(1+0.5\%)^3+6\cdot(1+0.5\%)^3+6\cdot(1+0.5\%)^2+6\cdot(1+0.5\%)+6 \text{ (triệu đồng)}. \end{array}$$

Số tiền chị có trong ngân hàng sau n tháng là

$$P_n = 100.5 \cdot (1 + 0.5\%)^{n-1} + 6 \cdot (1 + 0.5\%)^{n-1} + 6 \cdot (1 + 0.5\%)^{n-2} + 6 \cdot (1 + 0.5\%)^{n-3} + \dots + 6$$

với moi $n \in \mathbb{N}^*$.

VÍ DỤ 3. Ông An gửi tiết kiệm 100 triệu đồng kì hạn 1 tháng với lãi suất 6% một năm theo hình thức tính lãi kép. Số tiền (triệu đồng) của ông An thu được sau n tháng được cho bởi công thức

$$A_n = 100 \left(1 + \frac{0,06}{12} \right)^n.$$

- a) Tìm số tiền ông An nhận được sau tháng thứ nhất, sau tháng thứ hai.
- b) Tìm số tiền ông An nhận được sau 1 năm.

🗩 Lời giải.

a) Số tiền ông An nhận được sau tháng thứ nhất là

$$A_1 = 100 \left(1 + \frac{0.06}{12}\right)^1 = 100.5 \text{ (triệu đồng)}.$$

Số tiền ông An nhận được sau tháng thứ hai là

$$A_2 = 100 \left(1 + \frac{0.06}{12}\right)^2 = 101,0025 \text{ (triệu đồng)}.$$

b) Số tiền ông An nhận được sau 1 năm (12 tháng) là

$$A_{12} = 100 \left(1 + \frac{0.06}{12}\right)^{12} \approx 106.17 \, (\text{triệu đồng}).$$

2. Bài tập trắc nghiệm

CÂU 1. Nếu tỉ lệ lạm phát là 3,5% mỗi năm và giá trung bình của một căn hộ chung cư mới tại thời điểm hiện tại là 2,5 tỉ đồng thì giá trung bình của một căn hộ chung cư mới sau n năm nữa được cho bởi công thức

$$A_n = 2, 5 \cdot (1,035)^n$$
 (tỉ đồng).

Tìm giá trung bình (tỉ đồng)của một căn hộ chung cư mới sau 5 năm nữa (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

Đáp án: 2 , 9 7

🗭 Lời giải.

Giá trung bình của một căn hộ chung cư mới sau 5 năm là

$$A_5 = 2.5 \cdot (1.035)^5 = 2.9692$$
 (tỉ đồng).

Đáp án: 2,97

CÂU 2. Giá của một chiếc máy photocopy lúc mới mua là 50 triệu đồng. Biết rằng giá trị của nó sau mỗi năm sử dụng chỉ còn 75% giá trị trong năm liền trước đó. Tính giá trị còn lại (triệu đồng) của chiếc máy photocopy đó sau 5 năm kể từ khi mua (kết quả làm tròn đến hàng phần chuc).

Đáp án: $\boxed{1}$ $\boxed{1}$, $\boxed{9}$

Lời giải.

Giá trị của máy photocopy sau 1 năm sử dụng là

$$T_1 = 50 \cdot 75\% = 37, 5 \text{(triệu đồng)}.$$

Giá trị của máy photocopy sau 2 năm sử dụng là

$$T_2 = T_1 \cdot 75\% = 28,125$$
 (triệu đồng).

Giá trị của máy photocopy sau 3 năm sử dụng là

$$T_3 = T_2 \cdot 75\% = 21,0938$$
 (triệu đồng).

Giá trị của máy photocopy sau 4 năm sử dụng là

$$T_4 = T_3 \cdot 75\% = 15,8203$$
 (triệu đồng).

Giá trị của máy photocopy sau 5 năm sử dụng là

$$T_5 = T_4 \cdot 75\% = 11,8652$$
 (triệu đồng).

Chú ý: Tổng quát, giá trị của máy photocopy sau n năm sử dụng là

$$T_n = T_1 \cdot (0,75)^{n-1}$$
 (triệu đồng).

Đáp án: 11,9

CÂU 3. Một vi sinh đặc biệt X có cách sinh sản vô tính kì lạ, sau một giờ thì để một lần, đặc biệt sống được tới giờ thứ n (với n là số nguyên dương) thì ngay lập tức thời điểm đó nó để một lần ra 2^n con X khác, tuy nhiên do chu kì của con X ngắn nên ngay sau khi để xong lần thứ 2, nó lập tức chết. Hỏi rằng, nếu tại thời điểm ban đầu có đúng 1 con thì sau 5 giờ có bao nhiêu con sinh vật X đạng sống?

Đáp án: 3 | 3 | 6 |

🗭 Lời giải.

Gọi s_n là số lượng con X được sinh ra tại thời gian thứ $n, n \in \mathbb{N}^*$ và $s_0 = 1$. Ta có

$$s_0 = 1,$$
 $s_1 = 2s_0 = 2,$ $s_2 = 2s_1 + 4s_0 = 8,$ $s_3 = 2s_2 + 4s_1 = 24,$ $s_4 = 2s_3 + 4s_2 = 80,$ $s_5 = 2s_4 + 4s_3 = 256.$

Khi đó, sau 5 giờ thì số con sinh vật X đang sống bằng $s_4 + s_5 = 336$.

CÂU 4. Bác Hưng để 10 triệu đồng trong tài khoản ngân hàng. Vào cuối mỗi năm, ngân hàng trả lãi 3% vào tài khoản của bác ấy, nhưng sau đó sẽ tính phí duy tri tài khoản hằng năm là 120 nghìn đồng. Tìm số dư trong tài khoản của bác Hưng sau 4 năm (tính bằng triệu đồng và kết quả làm tròn đến hàng phần chục).

Đáp án: $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 8 \\ \end{bmatrix}$

🗭 Lời giải.

a) Vào cuối năm thứ nhất, số tiền trong tài khoản của bác Hưng là

$$A_1 = A_0(1+3\%) - 120000 = 1,03A_0 - 120000$$
 (đồng).

Vào cuối năm thứ hai, số tiền trong tài khoản của bác Hưng là

$$A_2 = A_1(1+3\%) - 120000 = 1,03A_1 - 120000$$
 (đồng).

Vào cuối năm thứ ba, số tiền trong tài khoản của bác Hưng là

$$A_3 = A_2(1+3\%) - 120000 = 1,03A_2 - 120000$$
 (đồng).

Tương tự, vào cuối năm thứ $n(n \ge 1)$, số tiền trong tài khoản của bác Hưng là

$$A_n = A_{n-1}(1+3\%) - 120000 = 1,03A_{n-1} - 120000$$
 (đồng).

b) Ta tính lần lượt A_1, A_2, A_3, A_4 :

$$A_1 = 10180000; \quad A_2 = 10365400; A_3 = 10556362; \quad A_4 = 10753053.$$

Như vậy, số dư trong tài khoản của bác Hưng sau 4 năm là 10753053 đồng.

Đáp án: 10.8

Bài 6. CẤP SỐ CỘNG

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa

Dãy số là cấp số cộng nếu mỗi một số hạng (kể từ số hạng thứ hai) đều bằng tổng của số hạng đứng ngay trước nó với một số không đổi d.

Dãy số (u_n) là cấp số cộng $\Leftrightarrow u_{n+1} = u_n + d, \forall n \in \mathbb{N}^*.$

d là số không đổi, gọi là **công sai** của cấp số cộng.

2. Tính chất

Nếu (u_n) là cấp số cộng thì kể từ số hạng thứ hai (trừ số hạng cuối nếu là cấp số cộng hữu hạn) đều là trung bình cộng của hai số hạng đứng kề nó trong dãy. Tức là

$$u_k = \frac{u_{k-1} + u_{k+1}}{2}, (\forall k \ge 2, k \in \mathbb{N}^*).$$

3. Số hạng tổng quát

Nếu cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu u_1 và công sai d thì số hạng tổng quát u_n được xác định bởi công thức

$$u_n = u_1 + (n-1)d \text{ v\'oi } n \ge 2.$$

4. Tổng n số hạng đầu tiên

Cho cấp số cộng (u_n) . Tổng n số hạng đầu tiên của cấp số cộng kí hiệu là $S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$. Khi đó S_n được tính theo công thức

$$S_n = \frac{n(u_1 + u_n)}{2} = \frac{n}{2} [2u_1 + (n-1)d].$$

B. CÁC DANG TOÁN THƯỜNG GĂP



Nhân diên cấp số công, công sai d, số hang tổng quát u_n

1. Ví du minh hoa

VÍ DỤ 1. Dãy số hữu hạn nào là một cấp số cộng? Vì sao?

a)
$$-2$$
, 1, 4, 7, 10, 13, 16.

b)
$$1, -2, -4, -6, -8$$
.

🗭 Lời giải.

- a) Ta thấy $u_2 = u_1 + 3$ do 1 = (-2) + 3. Vì $u_k = u_{k-1} + d$, $\forall k \geq 2$ (1 = (-2) + 3; 4 = 1 + 3; 7 = 4 + 3; 10 = 7 + 3; 13 = 10 + 3; 16 = 13 + 3) nên dãy số đã cho là cấp số cộng.
- b) Ta thấy $u_2 = u_1 + (-3)$ do -2 = 1 + (-3). Vì $u_3 \neq u_2 + (-3)$ bởi $(-4 \neq -2 + (-3))$ nên dãy số đã cho không là cấp số cộng.

VÍ DU 2. Trong các dãy số dưới đây, dãy số nào là cấp số cộng?

a) Dãy số
$$(a_n)$$
 với $a_n = 4n - 3$;

b) Dãy số
$$(c_n)$$
 với $c_n = 2018^n$.

D Lời giải.

- a) Ta có $a_{n+1} = 4(n+1) 3 = 4n+1$ nên $a_{n+1} a_n = (4n+1) (4n-3) = 4, \forall n \ge 1...$ Do đó (a_n) là cấp số cộng.
- b) Ta có $c_{n+1} = 2018^{n+1}$ nên $c_{n+1} c_n = 2018^{n+1} 2018^n = 2017 \cdot 2018^n$ (phụ thuộc vào giá trị của n). Suy ra (c_n) không phải là một cấp số cộng.

VÍ DỤ 3. Cho cấp số cộng (u_n) có công thức số hạng tổng quát $u_n = 3n + 1, n \in \mathbb{N}^*$. Tìm số hạng đầu u_1 và công sai d? $\textcircled{\textbf{p}}$ Lời giải.

Từ công thức số hạng tổng quát, ta có $u_1 = 4$, $u_2 = 7$ suy ra $d = u_2 - u_1 = 3$.

VÍ DỤ 4. Cho cấp số cộng (u_n) với $u_1 = 3$, $u_2 = 9$. Công sai của cấp số cộng đã cho bằng bao nhiêu? \bigcirc Lời giải.

Cấp số cộng (u_n) có số hạng tổng quát là $u_n = u_1 + (n-1)d$ với $n \ge 2$.

Suy ra $u_2 = u_1 + d \Leftrightarrow 9 = 3 + d \Leftrightarrow d = 6$.

Vậy công sai của cấp số cộng đã cho là 6.

VÍ DU 5. Tính số hạng đầu u_1 và công sai d của một cấp số cộng biết $u_4 = 10$ và $u_7 = 19$.

Ta có
$$\begin{cases} u_4 = 10 \\ u_7 = 19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 3d = 10 \\ u_1 + 6d = 19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 1 \\ d = 3. \end{cases}$$

VÍ DỤ 6. Xác định số hạng tổng quát của cấp số cộng (u_n) , biết $\begin{cases} u_7 = 8 \\ d = 2. \end{cases}$

🗭 Lời giải.

Ta có

$$\begin{cases} u_7 = 8 \\ d = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 6d = 8 \\ d = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = -4 \\ d = 2. \end{cases}$$

Vậy công thức tổng quát của cấp số cộng

$$u_n = -4 + (n-1)2 \Leftrightarrow u_n = 2n - 6 \text{ v\'oi } n \ge 2.$$

VÍ DỤ 7. Cho cấp số cộng (u_n) với $\begin{cases} u_1 = -9 \\ u_{n-1} = u_n - 5 \end{cases}$. Tìm số hạng tổng quát của cấp số cộng (u_n) .

🗭 Lời giải.

Từ công thức $u_{n-1} = u_n - 5 \Leftrightarrow u_n = u_{n-1} + 5$, suy ra d = 5.

Vậy công thức tổng quát của cấp số cộng (u_n) là $u_n = -9 + 5(n-1) = 5n - 14$.

VÍ DỤ 8. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_{20} = -52$ và $u_{51} = -145$. Hãy tìm số hạng tổng quát của cấp số cộng đó. Lời giải.

 $\mathrm{Ta}\ \mathrm{c}\acute{\mathrm{o}}$

$$\begin{cases} u_{20} = -52 \\ u_{51} = -145 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 19d = -52 \\ u_1 + 50d = -145 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 5 \\ d = -3. \end{cases}$$

Vậy số hạng tổng quát cần tìm là $u_n = u_1 + (n-1)d = 5 + (n-1) \cdot (-3) = -3n + 8$

VÍ DU 9. Tìm số hạng đầu và công sai của cấp số cộng (u_n) , biết

a)
$$\begin{cases} u_9 = 5u_2 \\ u_{13} = 2u_6 + 5. \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} u_1 - u_3 + u_5 = 10 \\ u_1 + u_6 = 7. \end{cases}$$

🗭 Lời giải.

a) Ta có

$$\begin{cases} u_9 = 5u_2 \\ u_{13} = 2u_6 + 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 8d = 5 (u_1 + d) \\ u_1 + 12d = 2 (u_1 + 5d) + 5 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} -4u_1 + 3d = 0 \\ -u_1 + 2d = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 3 \\ d = 4. \end{cases}$$

Vậy $u_1 = 3, d = 4.$

b) Ta có

$$\begin{cases} u_1 - u_3 + u_5 = 10 \\ u_1 + u_6 = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 - (u_1 + 2d) + (u_1 + 4d) = 10 \\ u_1 + (u_1 + 5d) = 7 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 2d = 10 \\ 2u_1 + 5d = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 36 \\ d = -13. \end{cases}$$

Vậy $u_1 = 36$, d = -13.

VÌ DỤ 10. Tìm số hạng đầu và công sai của cấp số cộng (u_n) , biết

a)
$$\begin{cases} -u_3 + u_7 = 8 \\ u_2 u_7 = 75. \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} u_5 = 4u_3 \\ u_2u_6 = -11. \end{cases}$$

🗭 Lời giải.

a) Ta có

$$\begin{cases} -u_3 + u_7 = 8 \\ u_2 u_7 = 75 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -(u_1 + 2d) + (u_1 + 6d) = 8 \\ (u_1 + d) (u_1 + 6d) = 75 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4d = 8 \\ u_1^2 + 7u_1d + 6d^2 = 75 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} d = 2 \\ u_1^2 + 14u_1 - 51 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 3 \\ d = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} d_1 = 3 \\ d = 2 \end{cases}$$

Vậy
$$\begin{cases} u_1 = 3 \\ d = 2 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} u_1 = -17 \\ d = 2. \end{cases}$$

b) Ta có

$$\begin{cases} u_{5} = 4u_{3} \\ u_{2}u_{6} = -11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_{1} + 4d = 4(u_{1} + 2d) \\ (u_{1} + d)(u_{1} + 5d) = -11 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3u_{1} + 4d = 0 \\ u_{1}^{2} + 6du_{1} + 5d^{2} = -11 \end{cases} (2)$$

Từ (1) suy ra $3u_1 = -4d$. Thay vào (2) ta được

$$9u_1^2 + 54du_1 + 45d^2 = -99 \Leftrightarrow 16d^2 - 72d^2 + 45d^2 = -99$$

 $\Leftrightarrow -11d^2 = -99 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} d = 3 \\ d = -3. \end{bmatrix}$

Với d=3, ta có $u_1=-4$. Với d = -3, ta có $u_1 = 4$. Vậy $\begin{cases} u_1 = -4 \\ d = 3 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} u_1 = 4 \\ d = -3. \end{cases}$

2. Bài tấp tư luân

BÀI 1. Trong các dãy số sau, dãy số nào là một cấp số cộng?

- a) $1, -3, -7, -11, -15, \ldots$;
- b) $1, -2, -4, -6, -8, \ldots$
- c) $\frac{1}{2}$, 0, $-\frac{1}{2}$, -1, $-\frac{3}{2}$, ...

🗭 Lời giải.

Ta lần lượt đi kiểm tra: $u_2 - u_1 = u_3 - u_2 = u_4 - u_3 = \dots$? Xét từng dãy số thì ta thấy 1) và 3) là cấp số cộng.

BÀI 2. Trong các dãy số sau, dãy nào là cấp số cộng. Tìm số hạng đầu và công sai của cấp số cộng đó.

a) Dãy số (u_n) với $u_n = 19n - 5$;

b) Đãy số (u_n) với $u_n = n^2 + n + 1$.

🗭 Lời giải.

- a) Dãy số (u_n) với $u_n = 19n 5$. Ta có $u_{n+1} - u_n = 19(n+1) - 5 - (19n-5) = 19$. Vậy (u_n) là một cấp số cộng với số hạng đầu là $u_1 = 19 \cdot 1 - 5 = 14$ và công sai d = 19.
- b) Đãy số (u_n) với $u_n=n^2+n+1$. Ta có $u_{n+1}-u_n=(n+1)^2+(n+1)+1-(n^2+n+1)=2n+2$ phụ thuộc vào n. Vậy (u_n) không là một cấp số cộng.

BÀI 3. Cho cấp số công (u_n) với $u_1 = 3$, $u_2 = 9$. Công sai của cấp số công đã cho bằng bao nhiêu?

🗭 Lời giải.

Cấp số cộng (u_n) có số hạng tổng quát là $u_n = u_1 + (n-1) d$ với $n \ge 2$ (số hạng đầu u_1 và công sai d) Suy ra $u_2 = u_1 + d \Leftrightarrow 9 = 3 + d \Leftrightarrow d = 6$. Vậy công sai của cấp số cộng đã cho là 6.

BÀI 4. Xác định công thức tổng quát của cấp số cộng (u_n) , biết $\begin{cases} u_{11} = 5 \\ d = -6 \end{cases}$

Lời giải.

Ta có

$$\begin{cases} u_{11} = 5 \\ d = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 10d = 5 \\ d = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 65 \\ d = -6. \end{cases}$$

Vậy công thức tổng quát của cấp số cộng:

$$u_n = 65 + (n-1) \cdot (-6) \Leftrightarrow u_n = -6n + 71 \text{ v\'oi } n \ge 2.$$

BÀI 5. Tìm số hạng đầu và công sai của cấp số cộng (u_n) , biết $\begin{cases} u_2 + u_5 - u_3 = 10 \\ u_4 + u_6 = 26. \end{cases}$

🗭 Lời giải.

Ta có

$$\begin{cases} u_2 + u_5 - u_3 = 10 \\ u_4 + u_6 = 26 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + d + u_1 + 4d - (u_1 + 2d) = 10 \\ u_1 + 3d + u_1 + 5d = 26 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 3d = 10 \\ 2u_1 + 8d = 26 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 1 \\ d = 3. \end{cases}$$

Vậy $u_1 = 1, d = 3.$

BÀI 6. Tìm số hạng đầu và công sai của cấp số cộng, biết

a)
$$\begin{cases} u_7 = 27 \\ u_{15} = 59. \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} u_9 = 5u_2 \\ u_{13} = 2u_6 + 5. \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} u_2 + u_4 - u_6 = -7 \\ u_8 - u_7 = 2u_4. \end{cases}$$

d)
$$\begin{cases} u_3 - u_7 = -8 \\ u_2 \cdot u_7 = 75. \end{cases}$$

e)
$$\begin{cases} u_6 + u_7 = 60 \\ u_4^2 + u_{12}^2 = 1170. \end{cases}$$

🗭 Lời giải.

a) Ta có
$$\begin{cases} u_7 = 27 \\ u_{15} = 59 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 6d = 27 \\ u_1 + 14d = 59 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 3 \\ d = 4. \end{cases}$$

b) Ta có
$$\begin{cases} u_9 = 5u_2 \\ u_{13} = 2u_6 + 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 8d = 5u_1 + 5d \\ u_1 + 12d = 2u_1 + 10d + 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4u_1 - 3d = 0 \\ -u_1 + 2d = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 3d + 3d = 0 \\ -u_1 + 2d = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 3d + 3d = 0 \\ -u_1 + 2d = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 3d + 3d = 0 \\ -u_1 + 2d = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 3d + 3d = 0 \\ -u_1 + 2d = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 3d + 3d = 0 \\ -u_1 + 2d = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 3d + 3d = 0 \\ -u_1 + 2d = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 3d + 3d = 0 \\ -u_1 + 2d = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 3d + 3d = 0 \\ -u_1 + 2d = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 3d + 3d = 0 \\ -u_1 + 2d = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 3d + 3d = 0 \\ -u_1 + 2d = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 3d + 3d = 0 \\ -u_1 + 2d = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 3d + 3d = 0 \\ -u_1 + 2d = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 3d + 3d = 0 \\ -u_1 + 2d = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 3d + 3d = 0 \\ -u_1 + 2d = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 3d + 3d = 0 \\ -u_1 + 2d = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 3d + 3d = 0 \\ -u_1 + 2d = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 3d + 3d = 0 \\ -u_1 + 2d = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 3d + 3d = 0 \\ -u_1 + 2d = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 3d + 3d = 0 \\ -u_1 + 2d = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 3d + 3d = 0 \\ -u_1 + 2d = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 3d + 3d = 0 \\ -u_1 + 2d = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 3d + 3d = 0 \\ -u_1 + 2d = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 3d + 3d = 0 \\ -u_1 + 2d = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 3d + 3d = 0 \\ -u_1 + 2d = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 3d + 3d = 0 \\ -u_1 + 2d = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 3d + 3d = 0 \\ -u_1 + 2d = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 3d + 3d = 0 \\ -u_1 + 2d = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 3d + 3d = 0 \\ -u_1 + 2d = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 3d + 3d = 0 \\ -u_1 + 2d = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 3d + 3d = 0 \\ -u_1 + 2d = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 3d + 3d = 0 \\ -u_1 + 2d = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 3d + 3d = 0 \\ -u_1 + 2d = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 3d + 3d = 0 \\ -u_1 + 2d = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 3d + 3d = 0 \\ -u_1 + 2d = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 3d + 3d = 0 \\ -u_1 + 2d = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 3d + 3d = 0 \\ -u_1 + 2d = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 3d + 3d = 0 \\ -u_1 + 2d = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 3d + 3d = 0 \\ -u_1 + 2d = 3d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 3d + 3d = 0 \\ -u_1 + 2d = 3d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 3d + 3d = 0 \\ -u_1 + 2d = 3d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 3d + 3d = 0 \\ -u_1 + 2d = 3d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 3d + 3d = 0 \\ -u_1 + 2d = 3d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 3d + 3d = 0 \\ -u_1 + 2d = 3d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 3d + 3d = 0 \\ -u_1 + 3d = 3d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 3d + 3d = 3d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 3d + 3d = 3d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 3d + 3d = 3d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 3d + 3d = 3d = 3$$

c) Ta có
$$\begin{cases} u_2 + u_4 - u_6 = -7 \\ u_8 - u_7 = 2u_4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + d + u_1 + 3d - u_1 - 5d = -7 \\ u_1 + 7d - u_1 - 6d = 2u_1 + 6d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 - d = -7 \\ 2u_1 + 5d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = -5 \\ d = 2. \end{cases}$$
Vây số họng đầu của cấp số công là $u_1 = -5$ công sai là $d = 2$

d) Ta có
$$\begin{cases} u_3 - u_7 = -8 \\ u_2 \cdot u_7 = 75 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 2d - u_1 - 6d = -8 \\ (u_1 + d)(u_1 + 6d) = 75 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 2 \\ u_1^2 + 14u_1 - 51 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 2 \\ u_1 = 3 \\ u_1 = -17. \end{cases}$$

Vậy số hạng đầu của cấp số cộng là $u_1=3$, công sai là d=2 hoặc $u_1=-17,\,d=1$

e) Ta có
$$\begin{cases} u_6 + u_7 = 60 \\ u_4^2 + u_{12}^2 = 1170 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2u_6 + d = 60 \\ (u_6 - 2d)^2 + (u_6 + 6d)^2 = 1170. \end{cases}$$
(1) Từ (1), suy ra $d = 60 - 2u_6$, thay vào (2), ta có

$$(5u_6-120)^2+(360-11u_6)^2=1170 \Leftrightarrow 146u_6^2-9120u_6+142830=0 \text{ (vô nghiệm)}.$$

Vậy không tồn tại cấp số cộng thỏa yêu cầu bài toán.

BÀI 7. Cho cấp số cộng (u_n) thỏa mãn $\begin{cases} u_2 + u_4 - u_6 = -7 \\ u_8 + u_7 = 2u_4 \end{cases}$. Xác định số hạng đầu u_1 và công sai d cấp số cộng.

Ta có
$$\begin{cases} u_2 + u_4 - u_6 = -7 \\ u_8 + u_7 = 2u_4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + d + (u_1 + 3d) - (u_1 + 5d) = -7 \\ u_1 + 7d - (u_1 + 6d) = 2(u_1 + 3d) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 - d = -7 \\ 2u_1 + 5d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = -5 \\ d = 2. \end{cases}$$

BÀI 8. Cho cấp số cộng (u_n) thỏa mãn $\begin{cases} u_2 - u_3 + u_5 = 10 \\ u_4 + u_6 = 26 \end{cases}$. Xác định số hạng đầu u_1 và công sai d cấp số cộng.

Ta có
$$\begin{cases} u_2 - u_3 + u_5 = 10 \\ u_4 + u_6 = 26 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + d - (u_1 + 2d) + u_1 + 4d = 10 \\ u_1 + 3d + u_1 + 5d = 26 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 3d = 10 \\ u_1 + 4d = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 1 \\ d = 3. \end{cases}$$

BÀI 9. Tính số hạng đầu u_1 và công sai d của một cấp số cộng biết $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 27 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 275 \end{cases}$

Dùi giải.

Ta có
$$\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 27 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 275 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_2 - d + u_2 + u_2 + d = 27 \\ (u_2 - d)^2 + u_2^2 + (u_2 + d)^2 = 275 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_2 = 9 \\ 3u_2^2 + 2d^2 = 275. \end{cases}$$

Thay $u_2 = 9$ vào $3u_2^2 + 2d^2 = 275$ ta được d = 4 hay

Vậy $u_1 = 5$, d = 4 hoặc $u_1 = 13$, d = -4

3. Câu hỏi trắc nghiệm

CÂU 1. Trong các dãy số sau, dãy số nào là một cấp số cộng?

(A) $1; -3; -7; -11; -15; \dots$ (B) $1; -3; -6; -9; -12; \dots$ (C) $1; -2; -4; -6; -8; \dots$ (D) $1; -3; -5; -7; -9; \dots$

🗭 Lời giải.

Ta lần lượt tính khoảng cách d các phần tử, ta thấy dãy số đáp án A có d=-4.

Chọn đáp án $\stackrel{\frown}{{\sf A}}$

CÂU 2. Dãy số nào sau đây không phải là cấp số cộng?

B $15\sqrt{2}$; $12\sqrt{2}$; $9\sqrt{2}$; $6\sqrt{2}$.

$$\bigcirc$$
 $\frac{4}{5}$; 1; $\frac{7}{5}$; $\frac{9}{5}$; $\frac{11}{5}$.

🗭 Lời giải.

Ta lần lượt tính khoảng cách d các phần tử, ta thấy dãy số trừ đáp án C có khoảng cách các phần tử không bằng nhau. Chọn đáp án \bigcirc

CÂU 3. Cho cấp số cộng (u_n) với $u_1=2$ và $u_2=6$. Công sai của cấp số cộng đã cho là

(A) 4.

B) -4.

c) 8.

D 3.

🗭 Lời giải.

Ta có $u_2 = 6 \Leftrightarrow 6 = u_1 + d \Leftrightarrow d = 4$.

Chọn đáp án (A)

CÂU 4. Cho cấp số cộng (u_n) với $u_1 = -3$ và $u_6 = 27$. Công sai d của cấp số cộng đã cho là

$$(\mathbf{A}) d = 7.$$

$$\bigcirc$$
 $d=5$.

$$(c) d = 8.$$

(D)
$$d = 6$$
.

🗭 Lời giải.

Ta có $u_6 = 27 \Leftrightarrow 27 = u_1 + 5d \Leftrightarrow d = 6$.

Chọn đáp án \bigcirc

CÂU 5. Cho cấp số cộng (u_n) với $u_{17} = 33$ và $u_{33} = 65$. Công sai của cấp số cộng đã cho là

(**A**) 1

$$(\mathbf{C}) - 2.$$

$$(\mathbf{D}) 2$$

🗭 Lời giải.

Gọi u_1 , d lần lượt là số hạng đầu và công sai của cấp số cộng (u_n) .

Khi đó, ta có $u_{17} = u_1 + 16d$, $u_{33} = u_1 + 32d$

Suy ra $u_{33} - u_{17} = 65 - 33 \Leftrightarrow 16d = 32 \Leftrightarrow d = 2$

Vậy công sai bằng 2.

Chọn đáp án (D)...

CÂU 6. Cho cấp số cộng có $u_1 = -3$ và d = 4. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau.

(A)
$$u_5 = 15$$
.

(B)
$$u_4 = 8$$
.

(**c**)
$$u_3 = 5$$
.

$$(\mathbf{D}) u_2 = 2.$$

🗭 Lời giải.

Ta có $u_3 = u_1 + 2d = -3 + 2 \cdot 4 = 5$.

CÂU 7. Cho cấp số cộng có $u_1 = 11$ và công sai d = 4. Hãy tính u_{99} .

A 401.

(B) 403.

(C) 402.

(**D**) 404.

🗭 Lời giải.

Ta có $u_{99} = u_1 + 98d = 11 + 98 \cdot 4 = 403$.

Chọn đáp án B.....

CÂU 8. Một cấp số cộng (u_n) có $u_{13} = 8$ và d = -3. Tìm số hạng thứ ba của cấp số cộng (u_n) .

(A) 50.

B) 28.

(C) 38.

(D) 44.

Lời giải.

Ta có $u_{13} = u_1 + 12d \Leftrightarrow 8 = u_1 + 12 \cdot (-3) \Rightarrow u_1 = 44 \Rightarrow u_3 = u_1 + 2d = 44 - 6 = 38.$

Chọn đáp án C.....

CÂU 9. Cho cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu $u_1=2$ và công sai d=4. Hãy tính giá trị u_{2019} bằng

(A) 8074.

(B) 4074.

(C) 8078.

(D) 4078.

🗭 Lời giải.

Ta có $u_{2019} = u_1 + 2018d = 2 + 2018 \cdot 4 = 8074.$

Chọn đáp án (A).....

CÂU 10. Cho cấp số cộng (u_n) có số hạng tổng quát là $u_n = 3n - 2$. Tìm công sai d của cấp số cộng.

$$\bigcirc$$
 $d=2.$

$$(c) d = -2.$$

$$(D) d = -3.$$

🗭 Lời giải.

Ta có $u_{n+1} - u_n = 3(n+1) - 2 - 3n + 2 = 3$. Suy ra công sai d = 3.

Chọn đáp án (A).....

CÂU 11. Cho cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu u_1 và công sai d. Công thức tìm số hạng tổng quát u_n là

(A)
$$u_n = u_1 + (n-1)d$$
.

$$\mathbf{C}$$
 $u_n = u_1 + (n+1)d$.

$$\mathbf{D} u_n = nu_1 + d.$$

🗭 Lời giải.

Ta có $u_n = u_1 + (n-1)d$.

Chọn đáp án (A).....

CÂU 12. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = -3$ và $d = \frac{1}{2}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

(A)
$$u_n = -3 + \frac{1}{2}(n+1)$$
. (B) $u_n = -3 + \frac{1}{2}n - 1$. (C) $u_n = -3 + \frac{1}{2}(n-1)$. (D) $u_n = -3 + \frac{1}{4}(n-1)$.

$$\mathbf{c}$$
 $u_n = -3 + \frac{1}{2}(n-1).$

Ta có
$$\begin{cases} u_1 = -3 \\ d = \frac{1}{2} \end{cases} \xrightarrow{CTTQ} u_n = u_1 + (n-1)d = -3 + \frac{1}{2}(n-1).$$

Chọn đáp án (C)..... **CÂU 13.** Cho cấp số cộng (u_n) xác định bởi $u_n = 2n + 1$. Xác định số hạng đầu u_1 và công sai d của cấp số cộng.

$$\mathbf{A}$$
 $u_1 = 3, d = 1.$

B)
$$u_1 = 1, d = 1.$$

$$\mathbf{C}$$
 $u_1 = 3, d = 2.$

$$(\mathbf{D}) u_1 = 1, d = 2.$$

🗭 Lời giải.

Ta có $u_1 = 2 \cdot 1 + 1 = 3$ và $u_2 = 2 \cdot 2 + 1 = 5$, nên $d = u_2 - u_1 = 2$.

CÂU 14. Cho cấp số công (u_n) có $u_4 = -12$, $u_{14} = 18$. Tìm số hang đầu u_1 và công sai d của cấp số công (u_n) .

B)
$$u_1 = -22, d = 3$$
.

$$\mathbf{c}$$
 $u_1 = -21, d = 3.$

🗭 Lời giải.

Ta có

$$\begin{cases} u_4 = u_1 + (4-1)d \\ u_{14} = u_1 + (14-1)d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -12 = u_1 + 3d \\ 18 = u_1 + 13d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = -12 \\ d = 3. \end{cases}$$

CÂU 15. Tìm số hạng đầu và công sai của cấp số cộng (u_n) thỏa mãn $\begin{cases} u_1 + u_9 = 12 \\ u_4 - 3u_2 = 1. \end{cases}$

B
$$u_1 = -1; d = \frac{13}{8}.$$

(A)
$$u_1 = \frac{1}{2}$$
; $d = \frac{13}{8}$. (B) $u_1 = -1$; $d = \frac{13}{8}$. (C) $u_1 = -\frac{1}{2}$; $d = \frac{13}{8}$.

$$\mathbf{D} u_1 = -1; d = 2$$

D Lời giải.

Ta có:
$$\begin{cases} u_1 + u_9 = 12 \\ u_4 - 3u_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + (u_1 + 8d) = 12 \\ (u_1 + 3d) - 3(u_1 + d) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2u_1 + 8d = 12 \\ -2u_1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = \frac{13}{8} \\ u_1 = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

CÂU 16. Cho cấp số công (u_n) có $u_4 = -12$ và $u_{14} = 18$. Khi đó, số hang đầu tiên u_1 và công sai d của cấp số công (u_n) lần lượt là

$$\mathbf{A}$$
 $u_1 = -20, d = -3.$

B
$$u_1 = -22, d = 3.$$

$$\mathbf{c}$$
 $u_1 = -21, d = 3$

$$\mathbf{c}$$
 $u_1 = -21, d = 3.$ \mathbf{b} $u_1 = -21, d = -3.$

🗭 Lời giải.

Ta có:
$$\begin{cases} u_4 = -12 \\ u_{14} = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 3d = -12 \\ u_1 + 13d = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = -21 \\ d = 3. \end{cases}$$

CÂU 17. Cho cấp số cộng (u_n) có các số hạng đầu lần lượt là 5; 9; 13; 17; Tìm số hạng tổng quát u_n của cấp số cộng.

B
$$u_n = 5n - 1$$
.

$$u_n = 4n + 1.$$

🗭 Lời giải.

Cấp số cộng đã cho có $u_1 = 5$, $d = u_2 - u_1 = 4$. Suy ra $u_n = u_1 + (n-1)d = 5 + 4(n-1) = 4n + 1$.

CÂU 18. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_3 = 15$ và d = -2. Tìm u_n .

B
$$u_n = -\frac{3}{2}n + 12.$$
 C $u_n = -3n - 17.$ **D** $u_n = \frac{3}{2}n^2 - 4.$

$$\bigcirc u_n = -3n - 17.$$

D Lời giải.

Ta có
$$\begin{cases} 15 = u_3 = u_1 + 2d \\ d = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 19 \\ d = -2 \end{cases} \Rightarrow u_n = u_1 + (n-1)d = -2n + 21.$$

CÂU 19. Trong các dãy số được cho dưới đây, dãy số nào **không** phải là cấp số cộng?

$$(A) u_n = -4n + 9.$$

B)
$$u_n = -2n + 19$$
.

©
$$u_n = -2n - 21$$
. **D** $u_n = -2^n + 15$.

$$u_n = -2^n + 15$$

Lời giải.

Dãy số $u_n = -2^n + 15$ không có dạng an + b nên có không phải là cấp số cộng.

Chon đấp án (D)....

CÂU 20. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_4 = -12$ và $u_{14} = 18$. Tìm số hạng đầu tiên u_1 và công sai d của cấp số cộng đã cho.

$$u_1 = -21$$
: $d = 3$.

B)
$$u_1 = -20$$
; $d = -3$.

$$\mathbf{c}$$
) $u_1 = -22$; $d = 3$.

$$\mathbf{D}$$
 $u_1 = -21; d = -3.$

D Lời giải.

Ta có
$$\begin{cases} u_4 = -12 \\ u_{14} = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 3d = -12 \\ u_1 + 13d = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = -21 \\ d = 3. \end{cases}$$

CÂU 21. Cho cấp số cộng (u_n) thoả mãn $\begin{cases} u_2 - u_3 + u_5 = 10 \\ u_3 + u_4 = 17 \end{cases}$. Số hạng đầu tiên và công sai của cấp số cộng đó lần lượt là

$$(B)$$
 -3 và 4.

(c) 4 và
$$-3$$
.

$$\bigcirc$$
 -4 và -3.

🗭 Lời giải.

$$\begin{cases} u_2 - u_3 + u_5 = 10 \\ u_3 + u_4 = 17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (u_1 + d) - (u_1 + 2d) + (u_1 + 4d) = 10 \\ (u_1 + 2d) + (u_1 + 3d) = 17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 3d = 10 \\ 2u_1 + 5d = 17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 1 \\ d = 3. \end{cases}$$

Chọn đáp án (A).....

CÂU 22. Cho cấp số cộng (u_n) có công sai d < 0, $u_{31} + u_{34} = 11$ và $(u_{31})^2 + (u_{34})^2 = 101$. Số hạng tổng quát của (u_n) là

B
$$u_n = 92 - 3n$$
.

$$\mathbf{c}$$
 $u_n = 95 - 3n$.

©
$$u_n = 95 - 3n$$
. **D** $u_n = 103 - 3n$.

🗭 Lời giải.

Gọi cấp số cộng (u_n) có công sai d.

$$(u_{31})^2 + (u_{34})^2 = 101 \Leftrightarrow (u_{31} + u_{34})^2 - 2u_{31} \cdot u_{34} = 101 \Rightarrow u_{31} \cdot u_{34} = 10.$$

Do đó, ta có
$$\begin{cases} u_{31} + u_{34} = 11 \\ u_{31}.u_{34} = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_{31} = 10 \\ u_{34} = 1 \end{cases}$$
(vì $d < 0$)

 $u_{31} + u_{34} = 11 \Rightarrow 2u_{31} + 3d = 11 \Rightarrow d = -3 \text{ và } u_1 = 100.$

Do đó: $u_n = 103 - 3n$.

Chọn đáp án (D).....

Tổng của n số hạng đầu tiên của một cấp số cộng. Tính chất của cấp số cộng

Tổng của n số hạng đầu tiên: Đặt $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n$. Khi đó

•
$$S_n = \frac{n(u_1 + u_n)}{2} = \frac{n(u_2 + u_{n-1})}{2} = \frac{n(u_3 + u_{n-2})}{2} = \cdots$$

• Vì
$$u_n = u_1 + (n-1) d$$
 nên công thức trên có thể viết lại là
$$S_n = \frac{n}{2} [2u_1 + (n-1) d].$$

Tính chất của cấp số cộng:

- ① Nếu a; b; c theo thứ tự lập thành cấp số cộng thì a + c = 2b.
- 2 Luu ý:
 - Nếu cho ba số liên tiếp của một cấp số công, ta có thể xem ba số đó là

$$a-d$$
; a ; $a+d$

• Nếu cho bốn số liên tiếp của một cấp số cộng, ta có thể xem ba số đó là

$$a - 3d$$
; $a - d$; $a + d$; $a + 3d$.

1. Ví du minh hoa

VÍ DỤ 1. Cho một cấp số cộng (u_n) có $u_3 + u_{28} = 100$. Hãy tính tổng của 30 số hạng đầu tiên của cấp số cộng đó. 🗭 Lời giải.

Ta có
$$S_{30} = \frac{30(u_1 + u_{30})}{2} = \frac{30(u_1 + 2d + u_{30} - 2d)}{2} = \frac{30(u_3 + u_{28})}{2} = \frac{30 \cdot 100}{2} = 1500.$$

VÍ DỤ 2. Cho một cấp số cộng (u_n) có $S_6 = 18$ và $S_{10} = 110$. Tính S_{20} .

Lời giải.

Giả sử cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu là u_1 và công sai là d.

Ta có
$$S_6 = 6u_1 + \frac{6 \cdot 5}{2}d \Leftrightarrow 6u_1 + 15d = 18.$$
 (1)

$$S_{10} = 10u_1 + \frac{10 \cdot 9}{2} d \Leftrightarrow 10u_1 + 45d = 110.$$
 (2)

Từ (1) và (2), ta có hệ phương trình
$$\begin{cases} 6u_1 + 15d = 18 \\ 10u_1 + 45d = 110 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = -7 \\ d = 4. \end{cases}$$

Khi đó
$$S_{20} = 20u_1 + \frac{20 \cdot 19}{2}d = 20 \cdot (-7) + 190 \cdot 4 = 620.$$

VÍ DU 3. Tìm số hạng đầu và công sai của cấp số cộng, biết

a)
$$\begin{cases} u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 155 \\ S_3 = 21. \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} S_3 = 12 \\ S_5 = 35. \end{cases}$$

Lời giải.

a)
$$\begin{cases} u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 155 \\ S_3 = 21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1^2 + (u_1 + d)^2 + (u_1 + 2d)^2 = 155 \\ 3u_1 + 3d = 21. \end{cases}$$
 (2)

Từ (2), ta có $3u_1 + 3d = 21 \Rightarrow d = 7 - u_1$, thay vào (1)

$$u_1^2 + 7^2 + (14 - u_1)^2 = 155 \Leftrightarrow 2u_1^2 - 28u_1 + 90 = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} u_1 = 9 \\ u_1 = 5. \end{bmatrix}$$

Với $u_1 = 9$ thì d = -2. Với $u_1 = 5$ thì d = 2.

Vậy số hạng đầu của cấp số cộng là $u_1 = 9$, công sai là d = -2 hoặc $u_1 = 5$, d = 2.

b)
$$\begin{cases} S_3 = 12 \\ S_5 = 35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3u_1 + 3d = 12 \\ 5u_1 + 10d = 35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 1 \\ d = 3. \end{cases}$$
 Vậy số hạng đầu của cấp số cộng là $u_1 = 1$, công sai là $d = 3$.

VÍ DỤ 4. Tìm số hạng tổng quát của cấp số cộng, biết $\begin{cases} S_4 = 20 \\ \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \frac{1}{u_4} + \frac{1}{u_4} = \frac{25}{24} \end{cases}$ và cấp số cộng có công sai là một số

nguyên âm.

🗭 Lời giải.

$$\begin{cases} S_4 = 20 & (1) \\ \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \frac{1}{u_3} + \frac{1}{u_4} = \frac{25}{24} & (2). \end{cases}$$

Từ (1), suy ra
$$u_1 + u_4 = u_2 + u_3 = 10$$
 và $u_1 = 5 - \frac{3}{2}d$.

Từ (2), ta có

$$\begin{split} \frac{u_1+u_4}{u_1\cdot u_4} + \frac{u_2+u_3}{u_2\cdot u_3} &= \frac{25}{24} \Leftrightarrow \frac{10}{u_1(u_1+3d)} + \frac{10}{(u_1+d)(u_1+2d)} = \frac{25}{24} \\ \Leftrightarrow & \frac{10}{\left(5-\frac{3}{2}d\right)\left(5+\frac{3}{2}d\right)} + \frac{10}{\left(5-\frac{1}{2}d\right)\left(5+\frac{1}{2}d\right)} &= \frac{25}{24} \Leftrightarrow \frac{10}{25-\frac{9}{4}d^2} + \frac{10}{25-\frac{1}{4}d^2} = \frac{25}{24} \\ \Leftrightarrow & 10\left(25-\frac{9}{4}d^2+25-\frac{1}{4}d^2\right) = \frac{25}{24}\left(25-\frac{9}{4}d^2\right)\left(25-\frac{1}{4}d^2\right) \\ \Leftrightarrow & \frac{75}{128}d^4 - \frac{1925}{48}d^2 + \frac{3625}{24} = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} d^2 = \frac{580}{9} \\ d^2 = 4 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} d = \pm \frac{2\sqrt{145}}{3} \\ d = \pm 2. \end{split}$$

Với d = -2 thì $u_1 = 8$. Suy ra $u_n = u_1 + (n-1)d = 10 - 2n$

VÍ DU 5. Tính các tổng sau

a)
$$S = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) + (2n + 1)$$
.

b)
$$S = 100^2 - 99^2 + 98^2 - 97^2 + \dots + 2^2 - 1^2$$
.

D Lời giải.

a) $S = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) + (2n + 1)$. Xét cấp số cộng (u_k) , $k \in \mathbb{N}^*$ với số hạng đầu là $u_1 = 1$ và công sai là d = 2. Ta có $u_k = u_1 + (k-1)d \Leftrightarrow 2n+1 = 1+2(k-1) \Leftrightarrow k = n+1.$ Vây $S = \frac{k(u_1 + u_k)}{2} = \frac{(n+1)(1+2n+1)}{2} = (n+1)^2.$

Vây
$$S = \frac{k(u_1 + u_k)}{2} = \frac{(n+1)(1+2n+1)}{2} = (n+1)^2$$

b) $S = 100^2 - 99^2 + 98^2 - 97^2 + \dots + 2^2 - 1^2 = 199 + 195 + \dots + 3.$ Xét cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu $u_1 = 199$ và công sai $d = u_2 - u_1 = 195 - 199 = -4$.

Ta có
$$u_n = u_1 + (n-1)d \Leftrightarrow 3 = 199 - 4(n-1) \Leftrightarrow n = 50.$$

Khi đó $S = \frac{n(u_1 + u_{50})}{2} = \frac{50(199 + 3)}{2} = 5050.$

VÍ DU 6. Tìm ba số hạng liên tiếp của một cấp số cộng biết tổng của chúng bằng 27 và tổng các bình phương của chúng là 293.

Lời giải.

Gọi ba số hạng liên tiếp của cấp số cộng là x-d, x, x+d trong đó d là công sai của cấp số cộng.

Khi đó ta có $x - d + x + x + d = 27 \Leftrightarrow 3x = 27 \Leftrightarrow x = 9$.

Mà
$$(x-d)^2 + x^2 + (x+d)^2 = 293 \Leftrightarrow (9-d)^2 + 81 + (9+d)^2 = 293 \Leftrightarrow 2d^2 - 50 = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} d = 5 \\ d = -5. \end{bmatrix}$$

Với d = 5 thì ba số hạng của cấp số cộng là 4, 9, 14.

Với d = -5 thì ba số hạng của cấp số cộng là 14, 9, 4.

Vậy ba số hạng liên tiếp của cấp số cộng là 4, 9, 14.

VÍ DỤ 7. Tìm bốn số hạng liên tiếp của một cấp số cộng, biết tổng của chúng bằng 10 và tổng bình phương của chúng bằng 30.

Lời giải.

Gọi bốn số hạng liên tiếp của cấp số cộng là $x-3d,\,x-d,\,x+d,\,x+3d$ với 2d là công sai của cấp số cộng.

Khi đó ta có
$$x - 3d + x - d + x + d + x + 3d = 10 \Leftrightarrow 4x = 10 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}$$
.

Mặt khác

$$(x-3d)^2 + (x-d)^2 + (x+d)^2 + (x+3d)^2 = 30 \Leftrightarrow 4x^2 + 20d^2 = 30 \Leftrightarrow d^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} d = \frac{1}{2} \\ d = -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Với $x = \frac{5}{2}$ thì $d = \frac{1}{2}$, khi đó bốn số hạng liên tiếp của cấp số cộng là 1, 2, 3, 4.

Với $x=\frac{5}{2}$ thì $d=-\frac{1}{2}$, khi đó bốn số hạng liên tiếp của cấp số cộng là 4, 3, 2, 1.

Vậy bốn số hạng liên tiếp của cấp số cộng là 1, 2, 3, 4.

VÍ DU 8. Ba góc của một tam giác vuông lập thành một cấp số cộng. Tìm ba góc đó.

🗩 Lời giải.

Gọi ba góc của tam giác lần lượt là A, B, C. Khi đó ta có $A + B + C = 180^{\circ}$.

Do ba góc A, B, C của tam giác theo thứ tự lập thành một cấp số cộng nên $B - A = C - A \Leftrightarrow A + C = 2B$.

Do đó $2B + B = 180^{\circ} \Rightarrow 3B = 180^{\circ} \Rightarrow B = 60^{\circ}$.

Do tam giác ABC vuông nên giả sử $C=90^\circ$ khi đó công sai d của cấp số cộng là $d=C-B=30^\circ$.

Vậy góc A của tam giác là $A = 30^{\circ}$.

VÍ DỤ 9. Xác định 4 góc của một tứ giác lồi, biết rằng 4 góc hợp thành cấp số cộng và góc lớn nhất bằng 5 lần góc nhỏ nhất.

🗭 Lời giải.

Gọi số đo bốn góc cần tìm là u_1, u_2, u_3, u_4 . Ta có

$$\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 360 \\ u_5 = 5u_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4u_1 + 6d = 360 \\ 4d = 4u_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 36 \\ d = 36. \end{cases}$$

Vậy số đo bốn góc cần tìm là

2. Bài tập tự luận

BÀI 1. Giữa các số 10 và 64 hãy đặt thêm 17 số nữa để được một cấp số cộng.

Dừi giải.

Ta có

$$\begin{cases} u_1 = 10 \\ u_{19} = 64 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 10 \\ u_1 + 18d = 64 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 10 \\ d = 3. \end{cases}$$

Vậy 17 số đặt thêm giữa các số 10 và 64 để được một cấp số cộng là

13; 16; 19; 22; 25; 28; 31; 34; 37; 40; 43; 46; 49; 52; 55; 58; 61.

BÀI 2. Tổng ba số hạng liên tiếp của một cấp số cộng bằng 2 và tổng các bình phương của ba số đó bằng $\frac{14}{9}$. Xác định ba số đó và tính công sai của cấp số cộng.

🗭 Lời giải.

Ta có hệ

$$\begin{cases} u_k + u_{k+1} + u_{k+2} = 2 \\ u_k^2 + u_{k+1}^2 + u_{k+2}^2 = \frac{14}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_k + u_k + d + u_k + 2d = 2 \\ u_k^2 + (u_k + d)^2 + (u_k + 2d)^2 = \frac{14}{9} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3u_k + 3d = 2 \\ 3u_k^2 + 6u_k d + 5d^2 = \frac{14}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_k = 1 \\ d = -\frac{1}{3} & \text{hoặc } \\ d = \frac{1}{3}. \end{cases}$$

Vậy ba số hạng liên tiếp của cấp số cộng thỏa yêu cầu bài toán $1; \frac{2}{3}; \frac{1}{3}$ ứng với $d = -\frac{1}{3}$ hoặc $\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; 1$ ứng với $d = \frac{1}{3}$.

 \mathbf{B} Àl 3. Một cấp số cộng có 7 số hạng với công sai d dương và số hạng thứ tư bằng 11. Hãy tìm các số hạng còn lại của cấp số cộng đó, biết hiệu của số hạng thứ ba và số hạng thứ năm bằng 6.

🗩 Lời giải.

Gọi số hạng đầu của cấp số cộng là u_1 , công sai d. Vì số hạng thứ tư của cấp số cộng bằng 11 nên ta có $u_4 = 11$. Do d dương nên $u_5 > u_3$.

Vì hiệu của số hạng thứ ba và số hạng thứ năm bằng 6 nên ta có $u_5-u_3=6$. Ta có

$$\begin{cases} u_4 = 11 \\ u_5 - u_3 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 3d = 11 \\ (u_1 + 4d) - (u_1 + 2d) = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 3 \cdot 3 = 11 \\ d = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 2 \\ d = 3. \end{cases}$$

Vậy các số hạng còn lại của cấp số cộng là $u_1=2;\,u_2=5;\,u_4=11;\,u_6=17;\,u_7=20.$

BÀI 4. Tìm bốn số hạng liên tiếp của một cấp số cộng, biết rằng:

- a) Tổng của chúng bằng 10 và tổng bình phương bằng 70.
- b) Tổng của chúng bằng 22 và tổng bình phương bằng 66.
- c) Tổng của chúng bằng 36 và tổng bình phương bằng 504.
- d) Chúng có tổng bằng 20 và tích của chúng bằng 384.
- e) Tổng của chúng bằng 20, tổng nghịch đảo của chúng bằng $\frac{25}{24}$ và các số này là những số nguyên.
- f) Nó là số đo của một tứ giác lồi và góc lớn nhất gấp 5 lần góc nhỏ nhất.

Lời giải.

a) Gọi bốn số hạng liên tiếp của cấp số cộng là x-3d; x-d; x+d, x+3d trong đó 2d là công sai. Theo đề bài ta có

$$\begin{cases} (x-3d) + (x-d) + (x+d) + (x+3d) = 10 \\ (x-3d)^2 + (x-d)^2 + (x+d)^2 + (x+3d)^2 = 70 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x = 10 \\ 4x^2 + 20d^2 = 70 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{2} \\ 4 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 20d^2 = 70 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{2} \\ d^2 = \frac{9}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ d = \pm \frac{3}{2}. \end{cases}$$

Vậy bốn số hạng liên tiếp của cấp số cộng là -2; 1; 4; 7.

b) Gọi bốn số hạng liên tiếp của cấp số cộng là x-3d; x-d; x+d; x+3d trong đó 2d là công sai. Theo đề bài ta có

$$\begin{cases} (x-3d) + (x-d) + (x+d) + (x+3d) = 22 \\ (x-3d)^2 + (x-d)^2 + (x+d)^2 + (x+3d)^2 = 66 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x = 22 \\ 4x^2 + 20d^2 = 66 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{11}{2} \\ 4 \cdot \left(\frac{11}{2}\right)^2 + 20d^2 = 66 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{11}{2} \\ d^2 = \frac{-11}{4} \text{ (loại)}. \end{cases}$$

Vây không tồn tai bốn số hang liên tiếp của cấp số công thỏa mãn yêu cầu đề bài.

c) Gọi bốn số hạng liên tiếp của cấp số cộng là x-3d; x-d; x+d; x+3d trong đó 2d là công sai. Theo đề bài ta có

$$\begin{cases} (x-3d) + (x-d) + (x+d) + (x+3d) = 36 \\ (x-3d)^2 + (x-d)^2 + (x+d)^2 + (x+3d)^2 = 504 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x = 36 \\ 4x^2 + 20d^2 = 504 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 9 \\ 4 \cdot 9^2 + 20d^2 = 504 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 9 \\ d^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 9 \\ d = \pm 3. \end{cases}$$

Vậy bốn số hạng liên tiếp của cấp số cộng là 0; 6; 12; 18.

d) Gọi bốn số hạng liên tiếp của cấp số cộng là x-3d; x-d; x+d; x+3d trong đó 2d là công sai. Theo đề bài ta có

$$\begin{cases} (x-3d) + (x-d) + (x+d) + (x+3d) = 20 \\ (x-3d)(x-d)(x+d)(x+3d) = 384 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5 \\ (x^2-d^2)(x^2-9d^2) = 384 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5 \\ (25-d^2)(25-9d^2) = 384 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5 \\ 9d^4 - 250d^2 + 241 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5 \\ d^2 = 1 \\ d^2 = \frac{241}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5 \\ d = \pm 1 \\ d = \pm \frac{\sqrt{241}}{3} \end{cases}$$

Vậy bốn số hạng liên tiếp của cấp số cộng là 2; 4; 6; 8 hoặc $5-\sqrt{241}$; $\frac{15-\sqrt{241}}{3}$; $\frac{15+\sqrt{241}}{3}$; $5+\sqrt{241}$.

e) Gọi bốn số hạng liên tiếp của cấp số cộng là x-3d; x-d; x+d; x+3d trong đó 2d là công sai trong đó $2d \in \mathbb{Z}$. Theo đề bài ta có

$$\begin{cases} (x-3d) + (x-d) + (x+d) + (x+3d) = 20 \\ \frac{1}{x-3d} + \frac{1}{x-d} + \frac{1}{x+d} + \frac{1}{x+3d} = \frac{25}{24} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x = 20 \\ \frac{1}{5-3d} + \frac{1}{5-d} + \frac{1}{5+d} + \frac{1}{5+3d} = \frac{25}{24} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ \frac{10}{25-9d^2} + \frac{10}{25-d^2} = \frac{25}{24} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ 9d^4 - 250d^2 + 241 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ d^2 = 1 \\ d^2 = \frac{241}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ d = \pm 1 \text{ (thổa mãn)} \\ d = \pm \frac{\sqrt{241}}{3} \text{ (loại vì } 2d \in \mathbb{Z}). \end{cases}$$

Vậy bốn số hạng nguyên liên tiếp của cấp số cộng là 2; 4; 6; 8.

f) Gọi bốn số hạng liên tiếp của cấp số cộng xếp theo thứ tự tăng dần là x-3d; x-d; x+d; x+3d trong đó 2d>0 là công sai.

Theo đề bài ta có

$$\begin{cases} (x-3d) + (x-d) + (x+d) + (x+3d) = 360^{\circ} \\ x+3d = 5(x-3d) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x = 360^{\circ} \\ 4x = 18d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 90^{\circ} \\ 4 \cdot 90^{\circ} = 18d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 90^{\circ} \\ d = 20^{\circ}. \end{cases}$$

Vây bốn góc của tứ giác lồi lần lượt là 30°; 70°; 110°; 150°.

3 Các bài toán thực tế

Các bài toán thực tế về cấp số cộng có thể được giải bằng cách sử dụng công thức của cấp số cộng. Công thức của cấp số cộng là: $u_n = u_1 + (n-1)d$. Trong đó:

- Θ u_n là số hạng thứ n của cấp số cộng.
- Θ u_1 là số hạng đầu tiên của cấp số cộng.
- \odot d là công sai của cấp số công.
- ❷ Một số công thức thường gặp:

$$\mathbf{\Theta} \ u_n = \frac{u_{n-1} + u_{n+1}}{2} = u_1 + (n-1)d.$$

$$\Theta S_n = \frac{(u_1 + u_n) \cdot n}{2} = \frac{2u_1 + (n-1)d}{2} \cdot n.$$

1. Ví dụ minh hoạ

VÍ DỤ 1. Một người có một khoản tiền gửi ngân hàng với lãi suất 10% /năm theo hình thức lãi đơn. Nếu sau 5 năm người đó nhận được tổng số tiền là 550 triệu đồng thì số tiền gửi ban đầu của người đó là bao nhiêu?

🗭 Lời giải.

Gọi x là số tiền gửi ban đầu của người đó (x > 0).

Sau 5 năm, số tiền nhận được bằng số tiền gốc cộng với lãi suất:

$$x + 0.1x \times 5 = 1.5x.$$

Theo đề bài, tổng số tiền nhận được sau 5 năm là 550 triệu đồng, do đó ta có phương trình:

$$1.5x = 550.$$

Giải phương trình ta có:

$$x = \frac{550}{1.5} \approx 366,67.$$

Vậy số tiền gửi ban đầu của người đó là 366,67 triệu đồng.

VÍ DỤ 2. Bạn An muốn mua một món quà tặng mẹ nhân ngày mùng 8/3. Bạn quyết định tiết kiệm từ ngày 1/2/2017 đến hết ngày 6/3/2017. Ngày đầu An có $5\,000$ đồng, kể từ ngày thứ hai số tiền An tiết kiệm được ngày sau cao hơn ngày trước mỗi ngày $1\,000$ đồng. Tính số tiền An tiết kiệm được để mua quà tặng mẹ.

🗭 Lời giải.

Tính số ngày mà An tiết kiệm được từ ngày 1/2/2017 đến hết ngày 6/3/2017:

Số ngày từ ngày 1/2/2017 đến hết ngày 28/2/2017 là 28 ngày.

Số ngày từ ngày 1/3/2017 đến hết ngày 6/3/2017 là 6 ngày.

Vậy An tiết kiệm được 28 + 6 = 34 ngày.

Gọi u_n là số tiền An tiết kiệm được vào ngày thứ n kể từ ngày 1/2/2017.

Theo đề ta có $u_1 = 5000$ đồng.

Vì ngày sau An tiết kiệm được nhiều hơn ngày trước mỗi ngày 1000 đồng nên $u_n = u_{n-1} + 1000$, với $n \ge 2$.

Vậy (u_n) là một cấp số cộng với $u_1 = 5\,000$ và công sai $d = 1\,000$.

Tổng số tiền An tiết kiệm được trong 34 ngày là:

$$S_{34} = \frac{n}{2} (2u_1 + 33d) = \frac{34}{2} (2 \cdot 5000 + 33 \cdot 1000) = 731000.$$

Vậy số tiền An tiết kiệm được để mua quà tặng mẹ là 731 000 đồng.

VÍ DỤ 3 (Cấp số nhân). Một hội đồng quản trị quyết định tăng lương cho nhân viên hàng năm theo tỷ lệ cố định. Ví dụ, lương của một nhân viên được tăng thêm 5% so với năm trước. Hỏi nếu lương của một nhân viên là 10 triệu đồng/năm vào năm nay, thì lương của nhân viên đó sẽ là bao nhiêu vào năm thứ 5?

🗭 Lời giải.

Theo giả thiết, lương của nhân viên được tăng thêm 5 % so với năm trước đó.

- \odot Vậy lương của nhân viên vào năm thứ 2 sẽ là $10 \cdot (1+0.05) = 10.5$ triệu đồng/năm.
- \odot Tương tự, lương của nhân viên vào năm thứ 3 sẽ là $10.5 \cdot (1+0.05) = 11.025$ triệu đồng/năm.
- \odot Lương của nhân viên vào năm thứ 4 sẽ là $11,025 \cdot (1+0,05) = 11,57625$ triệu đồng/năm.
- \odot Cuối cùng, lương của nhân viên vào năm thứ 5 sẽ là $11.57625 \cdot (1+0.05) = 12.1550625$ triệu đồng/năm.

Vậy lương của nhân viên đó vào năm thứ 5 sẽ là 12,1550625 triệu đồng/năm.

Chú ý: Lương của nhân viên đó vào năm thứ 5 sẽ là $u_5 = u_1 + 4d = 10 + 4 \cdot 10 \cdot 0,05 = 12$ triệu đồng chỉ đúng trong trường hợp lương của một nhân viên được tăng thêm 5% so với năm đầu tiên.

VÍ DỤ 4. Hùng đang tiết kiệm để mua một cây guitar. Trong tuần đầu tiên, anh ta để dành 42 đô la, và trong mỗi tuần tiết theo, anh ta đã thêm 8 đô la vào tài khoản tiết kiệm của mình. Cây guitar Hùng cần mua có giá 400 đô la. Hỏi vào tuần thứ bao nhiêu thì anh ấy có đủ tiền để mua cây guitar đó?

🗭 Lời giải.

Gọi n là số tuần anh ta đã thêm 8 đô la vào tài khoản tiết kiệm của mình.

Số tiền anh ta tiết kiệm được sau n tuần đó là S = 42 + 8n.

Theo bài ra $S=42+8n \geq 400 \Leftrightarrow n \geq 44,75 \Rightarrow n=45.$

Vậy kể cả tuần đầu thì tuần thứ 46 anh ta có đủ tiền để mua cây guitar đó.

VÍ DỤ 5 (Cấp số nhân). Hàng tháng ông An gửi vào ngân hàng một số tiền như nhau là $5\,000\,000$ đồng (vào ngày đầu mỗi tháng) với lãi suất 0.5% một tháng, biết tiền lãi của tháng trước được nhập vào tiền gốc của tháng sau. Hỏi sau 36 tháng ông An nhận được số tiền vốn và lãi là bao nhiêu? (làm tròn đến hàng đơn vị).

🗭 Lời giải.

Gọi a là số tiền ông An gửi vào hàng tháng, r là lãi suất trên một tháng và P_n là số tiền vốn và lãi ông An nhận được sau n tháng.

- \odot Sau một tháng, ông An có số tiền là $P_1 = a + ar = a(1+r)$.
- \odot Đầu tháng thứ hai, ông An có số tiền là $P_1 + a = a(1+r) + a$.
- $oldsymbol{\odot}$ Sau hai tháng, ông An có số tiền là $P_2=a(1+r)+a+[a(1+r)+a]\,r=a\,\bigl\lceil(1+r)^2+(1+r)\bigr\rceil.$
- ❷ Cuối tháng thứ 36, ông An có số tiền là

$$P_{36} = a \left[(1+r)^{36} + (1+r)^{35} + \dots + (1+r) \right]$$

$$= a(1+r) \frac{(1+r)^{36} - 1}{r}$$

$$= 5000000 \cdot (1+0,005) \cdot \frac{(1+0,005)^{36} - 1}{0,005}$$

$$\approx 197663927 \quad \text{(đồng)}.$$

VÌ DỤ 6 (VDT). Một xưởng có đăng tuyển công nhân với đãi ngộ về lương như sau: Trong quý đầu tiên thì xưởng trả là 6 triệu đồng/quý và kể từ quý thứ 2 sẽ tăng lên 0,5 triệu cho 1 quý. Hỏi với đãi ngộ trên thì sau 5 năm làm việc tại xưởng, tổng số lương của công nhân đó là bao nhiêu?

🗭 Lời giải.

Gọi u_n (triệu đồng) là số lương của công nhân trong quý thứ n.

Theo đề:

Quý đầu: $u_1 = 6$ triệu.

Các quý tiếp theo: $u_{n+1} = u_n + 0, 5$ với $\forall n \ge 1$.

Mức lương của công nhân mỗi quý là 1 số hạng của dãy số u_n . Mặt khác, lương của quý sau hơn lương quý trước là 0,5 triệu nên dãy số u_n là một cấp số cộng với công sai d=0,5.

Ta biết 1 năm sẽ có 4 quý nên 5 năm sẽ có $5 \cdot 4 = 20$ quý. Theo yêu cầu của đề bài ta cần tính tổng của 20 số hạng đầu tiên của cấp số cộng (u_n) .

Lương tháng quý 20 của công nhân: $u_{20} = 6 + (20 - 1) \cdot 0.5 = 15.5$ triệu đồng.

Tổng số lương của công nhân nhận được sau 5 năm làm việc tại xưởng: $S_{12} = 20 \cdot (6 + 15, 5)2 = 215$ (triệu đồng).

2. Câu hỏi trắc nghiêm

CÂU 1. Một công ty đang cần tuyển dụng thêm nhân viên. Công ty quyết định tăng số lượng nhân viên hàng tháng theo cấp số cộng. Nếu công ty đã có 20 nhân viên và quyết định tăng thêm 2 nhân viên hàng tháng, hỏi sau bao nhiêu tháng công ty sẽ có 50 nhân viên?

(A) 19 tháng.

B 16 tháng.

© 36 tháng.

D 26 tháng.

🗭 Lời giải.

Để giải bài toán này, ta có thể sử dung công thức cấp số công:

$$a_n = a_1 + (n-1) \times d.$$

Trong đó a_1 là số lượng nhân viên ban đầu, d là số lượng nhân viên tăng hàng tháng và n là số tháng. Ta cần tìm số tháng n để công ty có được 50 nhân viên. Thay các giá trị vào công thức cấp số cộng ta có:

$$50 = 20 + (n-1) \times 2$$
.

Suv ra:

$$n = \frac{50 - 20}{2} + 1 = 16.$$

Vậy sau 16 tháng kể từ khi công ty quyết định tăng số lượng nhân viên hàng tháng theo cấp số cộng, công ty sẽ có được 50 nhân viên.

Chọn đáp án \fbox{B}

CÂU 2. Một người đang tăng cường luyện tập thể thao hàng ngày. Anh ta quyết định tăng mức độ luyện tập theo cấp số cộng hàng tuần. Nếu anh ta bắt đầu với mức luyện tập 30 phút mỗi ngày và tăng thêm 5 phút mỗi ngày, hỏi anh ta sẽ luyện tập được bao lâu để đạt được mức luyện tập 60 phút mỗi ngày?

A 16 ngày.

B 6 ngày.

© 9 ngày.

D 7 ngày.

🗭 Lời giải.

Gọi n là số ngày liên tiếp mà người đó tăng mức độ luyện tập. Theo đó, mức độ luyện tập của người đó sau n ngày là:

$$30 + 5n$$
 (phút).

Vì để đạt được mức luyện tập 60 phút mỗi ngày nên:

$$30 + 5n = 60.$$

Từ đó suy ra:

$$n = \frac{60 - 30}{5} = 6.$$

Vậy người đó cần luyện tập liên tiếp trong 6 ngày để đạt được mức luyện tập 60 phút mỗi ngày.

Chon đáp án B.

CÂU 3. Nếu một công ty công nghệ mới thành lập có số lượng người dùng ban đầu là 10 000 và mỗi tháng tăng thêm cố định 5 000 lượng người dùng, thì sau bao lâu có số lượng người dùng là 1 triệu.

(A) 198 tháng.

B 197 tháng.

c 18 tháng.

D 98 tháng.

🗭 Lời giải.

Ta cần tính số tháng n theo công thức sau:

$$10\,000 + 5\,000n = 1\,000\,000.$$

$$\Rightarrow n = \frac{1000000 - 10000}{5000} = 198.$$

Vậy sau khoảng 198 tháng (khoảng 16 năm và 6 tháng), công ty sẽ đạt được 1 triệu người dùng.

Chọn đáp án $\stackrel{f A}{f A}$

CÂU 4. Một nhà đầu tư đang đầu tư vào một quỹ đầu tư với mức lợi nhuận cố định hàng năm. Nếu nhà đầu tư đầu tư vào quỹ đầu tư với số tiền ban đầu là 20 triệu đồng và mức lợi nhuận hàng năm là 10%, hỏi số tiền nhà đầu tư sẽ nhận được sau 7 năm?

A 34 triệu đồng.

B 14 triệu đồng.

© 30 triệu đồng.

▶ 39 triệu đồng.

🗭 Lời giải.

Với số tiền ban đầu là 20 triệu đồng và mức lợi nhuận hàng năm là 10%, ta có thể tính được số tiền nhà đầu tư sẽ nhận được sau 1 năm, sau đó sử dụng cấp số cộng để tính số tiền nhà đầu tư sẽ nhận được sau 7 năm.

Số tiền nhà đầu tư sẽ nhận được sau 1 năm là:

 $20 \text{ triệu đồng} \times 10\% = 2 \text{ triệu đồng}$

Số tiền nhà đầu tư sẽ nhận được sau 7 năm là:

 $2 \text{ triệu đồng} \times 7 \text{ năm} + 20 \text{ triệu đồng} = 34 \text{ triệu đồng}$

Vậy sau 7 năm, nhà đầu tư sẽ nhận được tổng cộng 34 triệu đồng.

CÂU 5. Một công ty sản xuất bánh keo tăng sản lượng sản phẩm của mình lên mỗi tháng. Nếu sản lượng ban đầu là 1000 sản phẩm, một sản phẩm lơi nhuân 1 USD và tăng thêm 200 sản phẩm mỗi tháng, thì sau bao nhiệu tháng lơi nhuân công ty 1 triệu đô.

(A) 8 000 tháng.

B 7000 tháng.

(c) 9 000 tháng.

(**D**) 5 000 tháng.

🗭 Lời giải.

Để tính thời gian công ty đat được lợi nhuân 1 triệu đô, chúng ta cần biết lợi nhuân của công ty đat được bao nhiêu sau mỗi tháng.

Giả sử sản lượng ban đầu là 1000 sản phẩm một sản phẩm lợi nhuận 1 USD và tăng thêm 200 sản phẩm mỗi tháng. Ta có thể tính được lợi nhuân của công ty sau mỗi tháng như sau:

② Tháng 1: $1000 \times 1 = 1000$ USD.

 \odot Tháng 2: $(1000 + 200) \times 1 = 1200$ USD.

 \bigcirc Tháng 3: $(1000 + 2 \times 200) \times 1 = 1400 \text{ USD}.$

 \bigcirc Tháng 4: $(1000 + 3 \times 200) \times 1 = 1600 \text{ USD}$.

⊘ Tháng n: $(1\,000 + (n-1) \times 200) \times 1 = (n-1) \times 200 + 1\,000$ USD.

Để tính thời gian để công ty đạt được lợi nhuận 1 triệu đô, ta giải phương trình sau:

 $(n-1) \times 200 + 1000 = 10^6$

$$\Rightarrow (n-1) \times 200 = (10^6 - 1000)$$

$$\Rightarrow n - 1 = \frac{10^6 - 1000}{200}$$

$$\Rightarrow n = \frac{10^6 - 1\,000}{200} + 1$$

 $\Rightarrow n = 5001$

Vậy sau 5000 tháng, công ty sẽ đạt được lợi nhuận 1 triệu đô.

Chọn đáp án $\overline{(D)}$

CÂU 6. Một công ty tăng lương cho nhân viên hàng năm bằng cách thêm một số tiền cố định vào lương của họ. Ví dụ: Nếu lương ban đầu của một nhân viên là 10 triệu đồng và công ty tăng lương 2 triệu đồng mỗi năm, thì lương của nhân viên sẽ là bao nhiêu nếu làm cho công ty 19 năm?

(A) 16 triệu đồng.

(B) 26 triệu đồng.

© 28 triệu đồng.

(D) 46 triệu đồng.

Lời aiải.

Do tăng lương cho nhân viên hàng năm bằng cách thêm một số tiền cố định nên ta có thể sử dụng công thức tính số hạng thứ n của cấp số cộng $a_n = a_1 + (n-1)d$.

Ở bài toán này, ta có:

 $a_1 = 10$ (triệu đồng) là lương ban đầu của nhân viên.

d=2 (triệu đồng) là công sai của cấp số cộng.

n = 19 là số thứ tự của số hạng.

Ta thay các giá trị này vào công thức trên để tính lương của nhân viên sau 19 năm:

 $a_{19} = 10 + (19 - 1)2 \Rightarrow a_{19} = 46$ (triệu đồng).

Vậy lương của nhân viên sau 19 năm làm việc cho công ty là 46 triệu đồng.

CÂU 7. Tài sản thường bị khấu hao khiến chúng có tuổi thọ hữu ích giới hạn. Ví dụ, nếu một công ty mua một chiếc xe tải với giá $35\,000$ đô la và nó bị khấu hao với tốc độ không đổi là 700 đô la mỗi tháng, thì sau bao lâu giá trị của nó còn $5\,000$ đô la.

(A) x = 23 tháng.

 \mathbf{B} x = 43 tháng.

 \mathbf{c} x = 41 tháng.

 \mathbf{D} x = 40 tháng.

Lời giải.

Cách 1: Thời gian để giá trị của chiếc xe tải trên được khấu hao xuống còn 5.000 đô la có thể được tính bằng cách sử dụng công thức sau:

Giá trị khởi đầu của chiếc xe tải là 35 000 Giá trị cuối cùng của chiếc xe tải là 5 000 Tốc độ khấu hao tương ứng 700/tháng

 ${\rm D}$ ể tìm ra thời gian cần thiết để giá trị của chiếc xe tải giảm xuống còn 5.000, ta cần tìm số tháng được khấu hao.

Giả sử số tháng cần khấu hao là x tháng.

Giá trị của chiếc xe tải sau x tháng khấu hao được tính bằng:

 $35\,000 - 700x = 5\,000.$

Giải phương trình trên ta có: $x \approx 43$ tháng

Vì vậy, sau 43 tháng, giá trị của chiếc xe tải sẽ giảm xuống còn 5 000. Ngoài ra ta có thể giải theo cấp số cộng như sau: $C\acute{a}ch$ 2: Ta có thể sử dụng cộng thức tính số hạng thứ n của cấp số cộng $a_n = a_1 + (n-1)d$

- \bigcirc $u_1 = 35\,000$ (đô la) là giá trị ban đầu của xe tải.
- \odot d = -700 (đô la) là công sai của cấp số cộng (âm vì giá trị xe tải giảm).
- \odot $a_n = 5\,000$ (đô la) là giá trị cuối cùng của xe tải.

Ta thay các giá trị này vào công thức trên để tính số tháng mà xe tải bị khấu hao đến 5000 đô la:

$$5\,000 = 35\,000 + (n-1)(-700) \Rightarrow n = 43.857.$$

Vậy sau khoảng 43,857 tháng, tức là khoảng 3 năm và 7 tháng, giá trị của xe tải sẽ còn khoảng 5 000 đô la.

Chọn đáp án B.

CÂU 8. Các thiết bị điện tử như máy tính, điện thoại, hoặc máy ảnh thường bị khấu hao nhanh chóng do sự phát triển của công nghệ mới. Ví dụ, nếu một người mua một máy tính Macbook với giá 2000 đô la và nó bị khấu hao với tốc độ không đổi là 100 đô la mỗi tháng, thì giá trị của Macbook còn lại 1000 đô la sau bao nhiêu tháng?

$$\mathbf{A}$$
 $x = 12$ tháng.

B)
$$x = 43$$
 tháng.

$$\mathbf{c}$$
 $x = 11$ tháng.

$$\bigcirc$$
 $x = 10$ tháng.

🗭 Lời giải.

Để giải bài toán này, ta có thể sử dụng công thức tính số hạng thứ n của cấp số cộng $a_n = a + (n-1)d$.

Ở bài toán này, ta có:

 $a=2\,000$ (đô la) là giá trị ban đầu của máy tính Macbook.

d = -100 (đô la) là công sai của cấp số cộng (âm vì giá trị máy tính giảm).

 $a_n = 1\,000$ (đô la) là giá trị cuối cùng của máy tính Macbook.

Ta thay các giá trị này vào công thức trên để tính số tháng mà máy tính bị khấu hao đến 1000 đô la:

$$1000 = 2000 + (n-1)(-100) \Rightarrow n = 11.$$

Vậy sau 11 tháng, giá trị của máy tính Macbook sẽ còn 1000 đô la.

CÂU 9. Ban đầu có 1m^2 bèo sinh sôi trên mặt hồ biết tốc độ sinh sôi ngày sau hơn ngày trước 0.5m^2 . Biết diện tích mặt hồ nước là 120m^2 hỏi sau bao lâu bèo phủ đầy mặt hồ?

$$\mathbf{A}$$
 $x = 120$ tháng.

B
$$x = 143$$
 tháng.

$$(\mathbf{c}) x = 238 \text{ tháng.}$$

$$\mathbf{D}$$
 $x = 130$ tháng.

🗭 Lời giải.

Giả sử sau x ngày, diện tích của bèo phủ đầy mặt hồ là Sm^2 .

Theo đề bài, ta biết được rằng:

- \odot Tốc độ sinh sôi của bèo là $0.5 \text{m}^2/\text{ngày}$.
- \odot Ban đầu, diên tích của bèo là 1 m².
- \odot Diện tích mặt hồ là 120m^2 .

Vây ta có phương trình sau đây: S = 1 + 0.5x.

Điều kiện để bèo phủ đầy mặt hồ là S = 120.

 $1 + 0.5x = 120 \text{ hay } 0.5x = 119 \Rightarrow x = 238 \text{ ngày.}$

Vậy sau 238 ngày, bèo sẽ phủ đầy mặt hồ.

A 21 dãy và 630 chỗ.

B) 20 dãy và 630 chỗ.

(c) 11 dãy và 630 chỗ.

D 21 dãy và 930 chỗ.

Dùi giải.

Gọi n là số dãy ghế. Theo đề bài, ta có:

$$\begin{cases} S = 50 + 48 + \dots + 10 = \frac{50 + 10}{2}n \\ S = \frac{2.50 + (n - 1) \cdot (-2)}{2}n \end{cases}$$

Từ phương trình đầu tiên, ta có:

$$S = 50 + 48 + \dots + 10 = \frac{50 + 10}{2}n = 30n.$$

Từ phương trình thứ hai, ta có:

$$S = \frac{2 \cdot 50 + (n-1) \cdot (-2)}{2} n = (50 - n + 1)n = (51 - n)n.$$

Do đó, ta có:

$$30n = (51 - n)n \Rightarrow n = 21.$$

Vậy n = 21 dãy ghế và $30 \cdot 21 = 630$ ghế.

Chọn đáp án $\stackrel{\frown}{\mathbb{A}}$

CÂU 11. Người ta trồng cây theo dạng một hình tam giác như sau: hàng thứ nhất trồng 1 cây, hàng thứ hai trồng 3 cây, hàng thứ ba trồng 5 cây,... cứ tiếp tục trồng như thế cho đến khi hết số cây là 6 561. Số hàng cây được trồng là bao nhiêu?

- (A) 81 hàng.
- **B** 16 hàng.
- **c** 100 hàng.
- **D** 89 hàng.

D Lời giải.

Để giải bài toán này, ta cần tìm số hàng cây được trồng cho đến khi tổng số cây là 2023.

- ❷ Hàng thứ nhất trồng 1 cây.
- ❷ Hàng thứ hai trồng 3 cây (1 cây +2 cây).
- Θ Hàng thứ ba trồng 5 cây (1 cây +2 cây +2 cây).
- **②** ...

Vậy ta thấy rằng số cây trồng trong hàng thứ n là $(n-1) \cdot 2 + 1$. Số cây được trồng trong n hàng đầu tiên là:

$$1+3+5+...+(2n-1)=n^2$$
.

Để tìm số hàng cây được trồng cho đến khi tổng số cây là 6561, ta giải phương trình sau: $n^2 = 6561$. Vậy số hàng cây được trồng là 81 hàng.

Chọn đáp án igain A.

CÂU 12. Người ta thả một 1 m² lá bèo vào một hồ nước. Kinh nghiệm cho thấy sau x giờ, bèo sẽ sinh sôi kín cả mặt hồ 500 m^2 . Biết rằng sau mỗi giờ, lượng lá bèo tăng thêm 0.5 m^2 và tốc độ tăng không đổi tìm x?

- **A** 888 giờ.
- **B**) 777 giờ.
- (c) 999 giờ.
- (**D**) 700 giờ.

🗭 Lời giải.

Bài toán này có thể giải bằng cách sử dụng công thức tăng trưởng của bèo. Giả sử lượng lá bèo ban đầu là 1 m^2 , sau mỗi giờ lượng lá bèo tăng thêm 0.5 m^2 . Sau x giờ, lượng lá bèo đã phủ kín mặt hồ 500 m^2 . Ta có thể viết phương trình sau:

$$1 + 0.5x = 500.$$

Giải phương trình ta được:

$$x = \frac{500 - 1}{0.5} \approx 999.$$

Vây sau khoảng 999 giờ (khoảng 41 ngày), lượng lá bèo sẽ phủ kín mặt hồ 500 m².

Bài 7. CẤP SỐ NHÂN

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa

Cấp số nhân là một dãy số (hữu hạn hoặc vô hạn) mà trong đó, kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng đều bằng tích một số đứng ngay trước nó với một số q không đổi, nghĩa là:

$$u_n = u_{n-1} \cdot q \text{ v\'oi } \forall n \in \mathbf{N}, n \geq 2$$

Số q được gọi là công bội của cấp số nhân

☞ CẤP SỐ NHÂN

2. Số hang tổng quát của cấp số nhân

Nếu cấp số nhân (u_n) có số hạng đầu là u_1 và công bội q thì số hạng tổng quát u_n của nó được xác định bởi công thức:

$$u_n = u_1 \cdot q^{n-1}, n \ge 2$$

3. Tổng của n số hang đầu tiên của cấp số nhân

Giả sử (u_n) là cấp số nhân có công bội $q \neq 1$. Đặt $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$, khi đó

$$S_n = u_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}.$$



Khi q = 1 thì $S_n = n \cdot u_1$.

- $m{\Theta}$ Công bội của cấp số nhân: $q = \sqrt[n-1]{\frac{u_n}{u_1}}$.
- \odot Số hạng đầu tiên của cấp số nhân: $u_1 = \frac{u_n}{a^{n-1}}$.
- Θ a, b, c là ba số hang liên tiếp cấp số nhân thì $a \cdot c = b^2$.

B. CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GĂP

Nhân diên cấp số nhân, công bôi q

Để nhận diện (chúng minh) mỗi dãy số là cấp số nhân, ta làm như sau:

Chúng minh $u_{n+1} = u_n q$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ và q là một số không đổi.

Nếu $u_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$ thì ta lập tỉ số $\frac{u_{n+1}}{u_n} = k$.

- \odot Nếu k là hằng số thì (u_n) là cấp số nhân với công bội q=k.
- Θ Nếu k phụ thuộc vào n thì (u_n) không phải là cấp số nhân.

Để chứng minh dãy (u_n) không phải là một cấp số nhân. Khi đó, ta chỉ cần chỉ ra ba số hạng liên tiếp không tạo thành một cấp số nhân, chẳng hạn $\frac{u_3}{u_2} \neq \frac{u_2}{u_1}$

Để chứng minh ba số a, b, c theo thứ tự đó lập được một cấp số nhân, thì ta chứng minh $ac = b^2$ hoặc $|b| = \sqrt{ac}$.

1. Ví du minh hoa

VÍ DỤ 1. Dãy số 1; 1; 1; 1; ... có phải là một cấp số nhân hay không?

Dễ thấy $\frac{u_2}{u_1} = \frac{u_3}{u_2} = \ldots = 1$ là một số không đổi.

Do đó dãy số 1; 1; 1; 1; ... là một cấp số nhân.

VÍ DỤ 2. Dãy số $u_n = 3^n$ có phải là một cấp số nhân không? Nếu có, hãy tìm công bội của cấp số nhân đó.

Ta có $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3^{n+1}}{3^n} = \frac{3^n \cdot 3}{3^n} = 3$ là số không đổi nên (u_n) là cấp số nhân với công bội q = 3.

VÍ DỤ 3. Dãy số $\begin{cases} u_1=3\\ u_{n+1}=\frac{9}{u_n} \end{cases}$ có phải là một cấp số nhân không? Nếu có, hãy tìm công bội của cấp số nhân đó.

🗩 Lời giải.

Xét dãy số
$$\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{9}{u_n} \end{cases} \text{ có } \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{9}{u_n} : \frac{9}{u_{n-1}} = \frac{u_{n-1}}{u_n} \Rightarrow u_{n+1} = u_{n-1}, \forall n \geq 2.$$
Do đó ta có
$$\begin{cases} u_1 = u_3 = u_5 = \dots = u_{2n+1} = \dots \\ u_2 = u_4 = u_6 = \dots = u_{2n} = \dots \end{cases} \tag{2}.$$
Theo đề bài ta có $u_1 = 3 \Rightarrow u_2 = \frac{9}{u_1} = 3 \tag{3}.$
Từ (1) (2) và (3) suy ra $u_1 = u_2 = u_1 = u_2 = u_2 = u_3 = u_4 = u_4 = u_4 = u_4 = u_5 =$

Do đó ta có
$$\begin{cases} u_1 = u_3 = u_5 = \dots = u_{2n+1} = \dots \\ u_2 = u_4 = u_6 = \dots = u_{2n} = \dots \end{cases}$$
 (2).

Từ (1), (2) và (3) suy ra $u_1 = u_2 = u_3 = u_4 = \dots = u_{2n} = u_{2n+1} = \dots$

Do đó (u_n) là một cấp số nhân với công bội q=1.

VÍ DỤ 4. Cho (u_n) là cấp số nhân có công bội $q \neq 0, u_1 \neq 0$. Chứng minh rằng dãy số (v_n) với $v_n = u_n u_{2n}$ cũng là một cấp

🗭 Lời giải.

Ta có
$$\frac{v_n}{v_{n-1}} = \frac{u_n u_{2n}}{u_{n-1} u_{2(n-1)}} = \frac{u_1 q^{n-1} \cdot u_1 q^{2n-1}}{u_1 q^{n-2} \cdot u_1 q^{2n-3}} = q^3$$
. Do đó (v_n) là một cấp số nhân với công bội là q^3 .

VÍ DỤ 5 (VDT). Cho dãy số (u_n) được xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = 4u_n + 9 \end{cases}, \forall n \in \mathbb{N}^*. \text{ Chứng minh rằng dãy số } (v_n) \text{ xác định bởi}$

 $v_n = u_n + 3, \forall n \in \mathbb{N}^*$ là một cấp số nhân. Hãy xác định số hạng đầu và công bội của cấp số nhân đó.

Lời giải.

Ta có
$$v_n = u_n + 3$$
 (1) và $v_{n+1} = u_{n+1} + 3$ (2).

Theo đề ta có
$$u_{n+1} = 4u_n + 9 \Rightarrow u_{n+1} + 3 = 4(u_n + 3)$$
 (3)

Theo đề ta có
$$u_{n+1} = 4u_n + 9 \Rightarrow u_{n+1} + 3 = 4(u_n + 3)$$
 (3).
Thay (1) và (2) vào (3) ta được $v_{n+1} = 4v_n \Rightarrow \frac{v_{n+1}}{v_n} = 4, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Suy ra (v_n) là cấp số nhân với công bội q=4 và số hàng đầu $v_1=u_1+3=2+3=5$.

2. Bài tấp tư luân

BÀI 1. Dãy số 25; 5; 1; $\frac{1}{5}$; ... có phải là một cấp số nhân không? Nếu có hãy tìm công bội của cấp số nhân đó.

Ta có
$$\frac{u_2}{u_1} = \frac{u_3}{u_2} = \ldots = \frac{1}{5}$$
 là một số không đổi.

Do đó dãy số 25; 5; 1;
$$\frac{1}{5}$$
; ... là một cấp số nhân với công bội $q = \frac{1}{5}$.

BÀI 2. Dãy số 1; n; n^2 ; n^3 ; n^4 ; ... (với n > 1) có phải là một cấp số nhân không? Nếu có hãy tìm công bội của cấp số nhân đó.

🗭 Lời giải.

Ta có
$$\frac{u_2}{u_1} = \frac{u_3}{u_2} = \ldots = n$$
 (với $n>1) là một số không đổi.$

Do đó dãy số 1;
$$n$$
; n^2 ; n^3 ; n^4 ; ... (với $n > 1$) là một cấp số nhân với công bội $q = n$.

BÀI 3. Cho dãy số
$$(u_n)$$
 được xác định bởi
$$\begin{cases} u_1=2\\ u_{n+1}=u_n^2 \end{cases}$$
. Hỏi dãy số (u_n) có là một cấp số nhân hay không?

Lời giải.

Ta có
$$u_2 = u_1^2 = 4, u_3 = u_2^2 = 16, u_4 = u_3^2 = 256.$$

Suy ra $\frac{u_2}{u_1} = 2; \frac{u_3}{u_2} = 4$ và $\frac{u_4}{u_3} = 16.$ Vì $\frac{u_2}{u_1} \neq \frac{u_3}{u_2} \neq \frac{u_4}{u_3}$ nên (u_n) không là một cấp số nhân

BÀI 4. Cho dãy số
$$(u_n)$$
, biết $u_1=2$ và $u_{n+1}=\frac{1}{3}u_n$. Chứng minh (u_n) là một cấp số nhân và tìm số hạng u_3 .

D Lời giải.

Ta có
$$u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n \Rightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{3}$$
 là một số không đổi nên (u_n) là một cấp số nhân với công bội là $q = \frac{1}{3}$.

Do đó
$$u_3 = u_2 \cdot q = u_1 \cdot q^2 = 2 \cdot \frac{1}{3^2} = \frac{2}{9}.$$

BÀI 5. Cho (u_n) là cấp số nhân có công bội $q \neq 0, u_1 \neq 0$. Chứng minh rằng dãy số (v_n) với $v_n = \frac{u_n u_{2n+1}}{4}$ cũng là một cấp số nhân.

Lời giải.

Ta có
$$\frac{v_n}{v_{n-1}} = \frac{\frac{u_n u_{2n+1}}{4}}{\frac{u_{n-1} u_{2(n-1)+1}}{4}} = \frac{u_1 q^{n-1} \cdot u_1 q^{2n}}{u_1 q^{n-2} \cdot u_1 q^{2n-2}} = q^3$$
. Do đó (v_n) là một cấp số nhân với công bội là q^3 .

BÀI 6. Cho dãy số (u_n) được xác định bởi $\begin{cases} u_1=3\\ u_{n+1}=2u_n-2 \end{cases}, \forall n\in\mathbb{N}^*.$ Chứng minh rằng dãy số (v_n) xác định bởi $v_n=1$

 $2u_n-4, \forall n\in\mathbb{N}^*$ là một cấp số nhân. Hãy xác định số hạng đầu và công bội của cấp số nhân đó.

🗭 Lời giải.

Ta có
$$v_n = 2u_n - 4$$
 (1) và $v_{n+1} = 2u_{n+1} - 4$ (2).

Theo đề ta có
$$u_{n+1} = 2u_n - 2 \Rightarrow 2u_{n+1} - 4 = 2(2u_n - 4)$$
 (3).

Thay (1) và (2) vào (3) ta được
$$v_{n+1} = 2v_n \Rightarrow \frac{\dot{v}_{n+1}}{v_n} = 2, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Suy ra (v_n) là cấp số nhân với công bội q=2 và số hàng đầu $v_1=2u_1-4=2\cdot 3-4=2$.

3. Câu hỏi trắc nghiệm

CÂU 1. Trong các dãy số sau, dãy số nào là một cấp số nhân?

- **A** $128; -64; 32; -16; 8; \dots$ **B** $\sqrt{2}; 2; 4; 4\sqrt{2}; \dots$ **C** $5; 6; 7; 8; \dots$
- **D** 15; 5; 1; $\frac{1}{5}$;

Lời aiải.

Xét phương án 128; -64; 32; -16; 8;

Có $\frac{u_2}{u_1} = \frac{u_3}{u_2} = \dots = -\frac{1}{2}$ là một số không đổi nên dãy số 128; -64; 32; -16; 8; ... là một cấp số nhân.

Chon đáp án (A).....

CÂU 2. Dãy số nào sau đây **không phải** là cấp số nhân?

- (A) 1; -1; 1; -1; (B) 3; 3^2 ; 3^3 ; 3^4 ; (c) a; a^3 ; a^5 ; a^7 ; ... ($a \neq 0$). (D) $\frac{1}{\pi}$; $\frac{1}{\pi^2}$; $\frac{1}{\pi^4}$; $\frac{1}{\pi^6}$;

🗭 Lời giải.

Xét dãy $\frac{1}{\pi}$; $\frac{1}{\pi^2}$; $\frac{1}{\pi^4}$; $\frac{1}{\pi^6}$; ... có $\frac{u_2}{u_1} \neq \frac{u_3}{u_2} \left(\frac{1}{\pi} \neq \frac{1}{\pi^2}\right)$.

Do đó dãy $\frac{1}{\pi}$; $\frac{1}{\pi^2}$; $\frac{1}{\pi^4}$; $\frac{1}{\pi^6}$; ... không là một cấp số nhân.

CÂU 3. Dãy số 1; 2; 4; 8; 16; 32; ... là một cấp số nhân với

- (A) Công bội là 1 và số hạng đầu tiên là 2.
- (B) Công bội là 2 và số hạng đầu tiên là 1.
- (c) Công bội là 2 và số hang đầu tiên là 2.
- (D) Công bội là 1 và số hang đầu tiên là 1.

Lời giải.

Ta có $q = \frac{u_2}{u_1} = \frac{u_3}{u_2} = \dots = 2.$

Vậy dãy số đã cho là một cấp số nhân với công bội là q=2 và số hạng đầu tiên là $u_1=1$.

CÂU 4. Cho cấp số nhân (u_n) với $u_1 = -2$ và công bội q = -5. Viết bốn số hạng đầu tiên của cấp số nhân.

- (A) -2; 10; 50; -250.
- (\mathbf{B}) -2; 10; -50; 250.
- (c) -2; -10; -50; -250.
- (\mathbf{D}) -2; 10; 50; 250.

Lời giải.

Vì (u_n) là một cấp số nhân nên ta có $u_{n+1} = u_n q$.

Do đó $u_2 = u_1 q = (-2) \cdot (-5) = 10$, $u_3 = u_2 q = 10 \cdot (-5) = -50$, $u_4 = u_3 q = (-50) \cdot (-5) = 250$.

Vậy bốn số hạng đầu tiên của cấp số nhân đó là -2; 10; -50; 250.

Chon đáp án (B).....

CÂU 5. Một cấp số nhân có hai số hạng liên tiếp là 3 và 12. Số hạng tiếp theo của cấp số nhân là

(A) 15.

(B) 21.

(C) 36.

Lời giải.

Một cấp số nhân có hai số hạng liên tiếp là 3 và 12, do đó ta có $q = \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{12}{3} = 4$.

Vậy số hạng tiếp theo của cấp số nhân đó là $u_{n+2} = u_{n+1}q = 12 \cdot 4 = 48$.

Chon đáp án (D).....

CÂU 6. Cho cấp số nhân (u_n) có số hạng tổng quát là $u_n = \frac{3}{2} \cdot 5^n$. Khi đó số hạng đầu u_1 và công bội q là

- (A) $u_1 = \frac{3}{2}, q = \frac{1}{5}$. (B) $u_1 = \frac{3}{2}, q = 5$. (C) $u_1 = \frac{15}{2}, q = \frac{1}{5}$.

D Lời giải.

Ta có $u_1 = \frac{3}{2} \cdot 5^1 = \frac{15}{2}$ và $u_2 = \frac{3}{2} \cdot 5^2 = \frac{75}{2}$

Vì (u_n) là một cấp số nhân nên $q = \frac{u_2}{u_1} = \frac{^275}{2} : \frac{15}{2} = 5.$

Chọn đáp án (D)..... **CÂU 7.** Trong các dãy số (u_n) cho bởi số hạng tổng quát u_n sau, dãy số nào là một cấp số nhân?

- (A) $u_n = \frac{1}{3^{n-2}}$.
- \mathbf{c} $u_n = (n+2) \cdot 3^n$.
- **(D)** $u_n = n^2$.

🗭 Lời giải.

 $m{\Theta}$ Với $u_n = \frac{1}{3^{n-2}}$, ta có $q = \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{3^{n-3}} : \frac{1}{3^{n-2}} = 3$ là một số không đổi. Vậy dãy số (u_n) có số hạng tổng quát $u_n = \frac{1}{3^{n-2}}$ là một cấp số nhân.

 $oldsymbol{oldsymbol{arphi}}$ Với $u_n=rac{n}{3^n},$ ta có $q=rac{u_{n+1}}{u_n}=rac{n+1}{3^{n+1}}:rac{n}{3^n}=rac{n+1}{3n}$ không phải là một số không đổi.

Vậy dãy số (u_n) có số hạng tổng quát $u_n = \frac{n}{3^n}$ không là một cấp số nhân.

Vậy dãy số (u_n) có số hạng tổng quát $u_n = (n+2) \cdot 3^n$ không là một cấp số nhân.

 $m{\Theta}$ Với $u_n=n^2$, ta có $q=\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{(n+1)^2}{n^2}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^2$ không là một số không đổi. Vậy dãy số (u_n) có số hạng tổng quát $u_n = n^2$ không là một cấp số nhân.

CÂU 8. Trong các dãy số (u_n) cho bởi số hạng tổng quát u_n sau, dãy số nào là một cấp số nhân?

$$\mathbf{A} u_n = 7 - 3n.$$

B)
$$u_n = 7 - 3^n$$
.

$$\bigcirc u_n = \frac{7}{3n}.$$

$$\bigcirc u_n = 7 \cdot 3^n.$$

🗭 Lời giải.

Vậy dãy số (u_n) có số hạng tổng quát $u_n = 7 - 3n$ không là một cấp số nhân.

Vậy dãy số (u_n) có số hạng tổng quát $u_n = 7 - 3^n$ không là một cấp số nhân.

 \bullet Với $u_n = 7 \cdot 3^n$, ta có $q = \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{7 \cdot 3^{n+1}}{7 \cdot 3^n} = 3$ là một số không đổi. Vậy dãy số (u_n) có số hạng tổng quát $u_n = 7 \cdot 3^n$ là một cấp số nhân.

Chọn đáp án (D).....

CÂU 9. Mệnh đề nào sau đây sai?

- (A) Dãy số có tất cả các số hạng bằng nhau là một cấp số nhân.
- (B) Dãy số có tất cả các số hạng bằng nhau là một cấp số cộng.
- (c) Một cấp số cộng có công sai dương là một dãy số tăng.
- (**D**) Một cấp số nhân có công bội q > 1 là một dãy tăng.

🗭 Lời giải.

- ② Dãy số có tất cả các số hang bằng nhau là một cấp số nhân là mênh đề đúng. Vì xét dãy số (u_n) là một cấp số nhân. Khi đó $u_{n+1}=u_n\cdot q$ với $u_n\neq 0, q=1$ thì $u_{n+1}=u_n.$
- ② Dãy số có tất cả các số hạng bằng nhau là một cấp số cộng là mệnh đề đúng. Vì $u_{n+1} = u_n + d$, với d = 0 thì $u_{n+1} = u_n$.
- ❷ Một cấp số cộng có công sai dương là một dãy số tăng là mệnh đề đúng. Ta xét dãy (u_n) là một cấp số cộng có công sai d > 0. Vì $u_{n+1} = u_n + d \Rightarrow u_{n+1} - u_n = d > 0$. Do đó dãy (u_n) là dãy số tăng.
- \odot Một cấp số nhân có công bội q > 1 là một dãy tăng là mệnh đề sai. Ta xét dãy số (u_n) là một cấp số nhân có công bội q > 1. Vì $u_{n+1} = u_n q$ với $u_n \neq 0, q > 1$. Khi đó $u_{n+1} - u_n = u_n q - u_n = u_n (q-1)$. Nếu $u_n < 0$ thì $u_{n+1} - u_n = u_n q - u_n = u_n (q-1) < 0$. Do đó dãy (u_n) là dãy số giảm.

Chọn đáp án \bigcirc .

CÂU 10. Cho dãy số (u_n) được xác định bởi $u_1=2, u_n=2u_{n-1}+3n-1$. Công thức số hạng tổng quát của dãy số đã cho là biểu thức có dạng $a2^n+bn+c$, với $a,b,c\in\mathbb{Z},n\geq 2,n\in\mathbb{N}$. Khi đó tổng a+b+c có giá trị bằng

$$\bigcirc$$
 -4 .

$$(c)$$
 -3.

Lời giải.

Ta có $u_n = 2u_{n-1} + 3n - 1 \Leftrightarrow u_n + 3n + 5 = 2[u_{n-1} + 3(n-1) + 5]$ với $n \geq 2, n \in \mathbb{N}$.

Đặt $v_n = u_n + 3n + 5$, ta có $v_n = 2v_{n-1}$ với $n \ge 2, n \in \mathbb{N}$.

Như vậy (v_n) là cấp số nhân với công bội q=2 và $v_1=10$.

Do đó $v_n = 10 \cdot 2^{n-1} = 5 \cdot 2^n$.

Suy ra $u_n + 3n + 5 = 5 \cdot 2^n$ hay $u_n = 5 \cdot 2^n - 3n - 5$ với $n \ge 2, n \in \mathbb{N}$.

Vậy a = 5, b = -3, c = -5, suy ra a + b + c = -3

Chọn đáp án (C)....



Số hạng tống quát của cấp số nhân

Dựa vào giả thuyết, ta lập một hệ phương trình chứa công bội q và số hạng đầu u_n . Giải hệ phương trình này tìm được

Nếu cấp số nhân (u_n) có số hạng đầu u_1 và công bội q thì số hạng tổng quát u_n được xác định bởi công thức

$$u_n = u_1 \cdot q^{n-1}$$
 với $n \ge 2$.

1. Ví du minh hoa

VÍ DU 1. Tìm số hạng tổng quát của dãy số $2;4;8;16;32;\ldots$ biết dãy (u_n) là một cấp số nhân.

🗩 Lời giải.

Vì dãy số (u_n) là một cấp số nhân nên $q=\frac{u_2}{u_1}=\frac{u_3}{u_2}=\ldots=2$ và số hạng đầu $u_1=2.$

Do đó dãy số 2; 4; 8; 16; 32; . . . là một cấp số nhân cố số hạng tổng quát là $u_n = u_1 q^{n-1} = 2 \cdot 2^{n-1}$.

VÍ DỤ 2. Tìm số hạng đầu, công bội và số hạng tổng quát của cấp số nhân, biết $\begin{cases} u_1 + u_5 = 51 \\ u_2 + u_6 = 102 \end{cases}$

Lời giải.

Vì
$$(u_n)$$
 là một cấp số nhân nên $u_n = u_1 \cdot q^{n-1}$.
Ta có
$$\begin{cases} u_1 + u_5 = 51 \\ u_2 + u_6 = 102 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + u_1 q^4 = 51 \\ u_1 q + u_1 q^5 = 102 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 (1 + q^4) = 51 \\ u_1 q (1 + q^4) = 102 \end{cases}$$
(2).

Chia từng vế của (2) cho (1) ta được $\frac{u_1q(1+q^4)}{u_1(1+q^4)} = \frac{102}{51} \Leftrightarrow q = 2.$

Suy ra
$$u_1 = \frac{51}{1+q^4} = \frac{51}{17} = 3$$
, $u_n = u_1 \cdot q^{n-1} = 3 \cdot 2^{n-1}$.

Vậy $u_1 = 3$, q = 2 và $u_n = 3 \cdot 2^{n-1}$.

VÍ DỤ 3. Tìm số hạng đầu, công bội và số hạng tổng quát của cấp số nhân, biết $\begin{cases} u_1 + u_6 = 30 \\ u_2 + u_7 = 120. \end{cases}$

Lời giải.

Vì
$$(u_n)$$
 là một cấp số nhân nên $u_n = u_1 \cdot q^{n-1}$.
Ta có
$$\begin{cases} u_1 + u_6 = 30 \\ u_2 + u_7 = 120 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + u_1 q^5 = 30 \\ u_1 q + u_1 q^6 = 102 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 (1 + q^5) = 30 \\ u_1 q (1 + q^5) = 120 \end{cases}$$
(2).

Chia từng vế của (2) cho (1) ta được $\frac{u_1q(1+q^5)}{u_1(1+q^5)} = \frac{120}{30} \Leftrightarrow q = 4.$

Suy ra
$$u_1 = \frac{30}{1+q^5} = \frac{30}{1+4^5} = \frac{6}{205}, u_n = u_1 \cdot q^{n-1} = \frac{6}{205} \cdot 4^{n-1}.$$

Vây
$$u_1 = \frac{6}{205}$$
, $q = 4$ và $u_n = \frac{6}{205} \cdot 4^{n-1}$.

VÍ DỤ 4. Tìm số hạng đầu, công bội và số hạng tổng quát của cấp số nhân, biết $\begin{cases} u_3 = 40 \\ u_6 = 160. \end{cases}$

Lời giải.

Vì (u_n) là một cấp số nhân nên $u_n = u_1 \cdot q^{n-1}$

Ta có
$$\begin{cases} u_3 = 40 \\ u_6 = 1080 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 q^2 = 40 \\ u_1 q^5 = 1080 \end{cases}$$
 (1)

Chia từng vế của (2) cho (1) ta được $\frac{u_1q^5}{u_1q^2} = \frac{1080}{40} \Leftrightarrow q^3 = 27 \Leftrightarrow q = 3.$

Suy ra $u_1 = \frac{40}{q^2} = \frac{40}{3^2} = \frac{40}{9}$, $u_n = u_1 \cdot q^{n-1} = \frac{40}{9} \cdot 3^{n-1} = 40 \cdot 3^{n-3}$.

Vây $u_1 = \frac{40}{9}, q = 3 \text{ và } u_n = 40 \cdot 3^{n-3}.$

VÍ DỤ 5 (VDT). Tìm số hạng đầu, công bội và số hạng tổng quát của cấp số nhân có công bội $q \in \mathbb{Z}, q \neq 0$, biết $\int u_2 + u_4 = 10$ $u_1 + u_3 + u_5 = -21.$

Lời giải.

Vì
$$(u_n)$$
 là một cấp số nhân nên $u_n = u_1 \cdot q^{n-1}$ với $q \in \mathbb{Z}, q \neq 0$.
Ta có
$$\begin{cases} u_2 + u_4 = 10 \\ u_1 + u_3 + u_5 = -21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 q + u_1 q^3 = 10 \\ u_1 q + u_1 q^2 + u_1 q^4 = -21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 (q + q^3) = 10 \\ u_1 (1 + q^2 + q^4) = -21 \end{cases}$$
(2)

$$\begin{split} \frac{u_1(1+q^2+q^4)}{u_1(q+q^3)} &= \frac{-21}{10} &\Leftrightarrow & 10q^4 + 21q^3 + 10q^2 + 21q + 10 = 0 \\ &\Leftrightarrow & (q+2)(2q+1)(5q^2 - 2q + 5) = 0 \\ &\Leftrightarrow & \left[q = -2 \text{ (thỏa mãn)}\right] \\ &\Leftrightarrow & \left[q = -\frac{1}{2} \text{ (loại)}\right]. \end{split}$$

Suy ra
$$u_1 = \frac{10}{q+q^3} = -1$$
, $u_n = u_1 \cdot q^{n-1} = (-1) \cdot (-2)^{n-1} = -(-2)^{n-1} = -\frac{(-2)^n}{-2} = \frac{(-2)^n}{2}$.
Vậy $u_1 = -1$, $q = -2$ và $u_n = \frac{(-2)^n}{2}$.

2. Bài tấp tư luân

BÀI 1. Tìm số hạng tổng quát của dãy số $3; 12; 48; 192; \ldots$, biết dãy (u_n) là một cấp số nhân.

🗭 Lời giải.

Vì dãy số (u_n) là một cấp số nhân nên $q = \frac{u_2}{u_1} = \frac{12}{3} = 4$ và số hạng đầu $u_1 = 3$.

Do đó dãy số $3; 12; 48; 192; \dots$ là một cấp số nhân có số hạng tổng quát là $u_n = u_1 q^{n-1} = 3 \cdot 4^{n-1}$.

BÀI 2. Tìm số hạng tổng quát của cấp số nhân, biết
$$\begin{cases} u_1+u_3=51\\ u_2+u_4=153. \end{cases}$$

🗭 Lời giải.

Vì
$$(u_n)$$
 là một cấp số nhân nên $u_n = u_1 \cdot q^{n-1}$.
Ta có
$$\begin{cases} u_1 + u_3 = 51 \\ u_2 + u_4 = 153 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + u_1 q^2 = 51 \\ u_1 q + u_1 q^3 = 153 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 (1 + q^2) = 51 \\ u_1 q (1 + q^2) = 153 \end{cases}$$
(1)

Chia từng vế của (2) cho (1) ta được $\frac{u_1q(1+q^2)}{u_1(1+q^2)} = \frac{153}{51} \Leftrightarrow q = 3.$ Suy ra $u_1 = \frac{51}{1+q^2} = \frac{51}{10}, u_n = u_1 \cdot q^{n-1} = \frac{51}{10} \cdot 3^{n-1}.$

Suy ra
$$u_1 = \frac{51}{1+a^2} = \frac{51}{10}$$
, $u_n = u_1 \cdot q^{n-1} = \frac{51}{10} \cdot 3^{n-1}$.

Vậy số hạng tổng quát $u_n = \frac{51}{10} \cdot 3^{n-1}$.

BÀI 3. Tìm số hạng đầu, công bội và số hạng tổng quát của cấp số nhân, biết $\begin{cases} u_3 = 15 \\ u_6 = 120. \end{cases}$

Lời giải.

Vì
$$(u_n)$$
 là một cấp số nhân nên $u_n = u_1 \cdot q^{n-1}$.
Ta có
$$\begin{cases} u_3 = 15 \\ u_6 = 120 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 q^2 = 15 \\ u_1 q^5 = 120 \end{cases}$$
 (2).

Chia từng vế của (2) cho (1) ta được $\frac{u_1q^5}{u_1q^2} = \frac{120}{15} \Leftrightarrow q^3 = 8 \Leftrightarrow q = 2.$

Suy ra
$$u_1 = \frac{15}{q^2} = \frac{15}{2^2} = \frac{15}{4}$$
, $u_n = u_1 \cdot q^{n-1} = \frac{15}{4} \cdot 2^{n-1} = 15 \cdot 2^{n-3}$.

Vây $u_1 = \frac{15}{4}, q = 2$ và $u_n = 15 \cdot 3^{n-3}$.

BÀI 4. Tìm số hạng tổng quát của cấp số nhân, biết $\begin{cases} u_4 = 35 \\ u_8 = 560. \end{cases}$

Vì (u_n) là một cấp số nhân nên $u_n = u_1 \cdot q^{n-1}$.

Ta có
$$\begin{cases} u_4 = 35 \\ u_8 = 560 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 q^3 = 35 & (1) \\ u_1 q^7 = 560 & (2). \end{cases}$$

Chia từng vế của (2) cho (1) ta được $\frac{u_1q^7}{u_1q^3} = \frac{560}{35} \Leftrightarrow q^4 = 16 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} q=2 \\ a=-2 \end{bmatrix}$

Với
$$q = 2$$
. Suy ra $u_1 = \frac{35}{q^3} = \frac{35}{8}$, $u_n = u_1 \cdot q^{n-1} = \frac{35}{8} \cdot 2^{n-1} = 35 \cdot 2^{n-4}$.

Với
$$q = -2$$
. Suy ra $u_1 = \frac{35}{q^3} = -\frac{35}{8}$, $u_n = u_1 \cdot q^{n-1} = -\frac{35}{8} \cdot (-2)^{n-1} = 35 \cdot (-2)^{n-4}$.

Vậy $u_n = 35 \cdot 2^{n-4}$ với q = 2 hoặc $u_n = 35 \cdot (-2)^{n-4}$ với q = -2.

3. Câu hỏi trắc nghiệm

CÂU 1. Cho cấp số nhân (u_n) có số hạng đầu là $u_1 \neq 0$ và công bội $q \neq 0$. Số hạng tổng quát của cấp số nhân bằng

(A)
$$u_n = u_1 + (n-1)q$$
. (B) $u_n = u_1 \cdot q^{n-1}$.

Lời giải.

Số hạng tổng quát của cấp số nhân là $u_n = u_1 \cdot q^{n-1}$.

Chọn đáp án (B).....

CÂU 2. Cấp số nhân (u_n) có $u_n = \frac{3}{5} \cdot 2^n$. Số hạng đầu tiên và công bội q là

A
$$u_1 = \frac{6}{5}, q = 3.$$

B
$$u_1 = \frac{6}{5}, q = -2.$$
 C $u_1 = \frac{6}{5}, q = 2.$

$$u_1 = \frac{6}{5}, q = 2.$$

D
$$u_1 = \frac{6}{5}, q = 5.$$

🗭 Lời giải

Ta có $u_n = \frac{3}{5} \cdot 2^n = \frac{6}{5} \cdot 2^{n-1}$, suy ra $u_1 = \frac{6}{5}$ và q = 2.

Chọn đáp án (C).

CÂU 3. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 = -3$ và công bội $q = \frac{2}{3}$. Chọn mệnh đề đúng?

$$u_5 = -\frac{27}{16}$$
.

B
$$u_5 = -\frac{16}{27}$$
.

$$u_5 = \frac{16}{27}$$
.

🗭 Lời giải.

Số hạng tổng quát của cấp số nhân là $u_n = u_1 \cdot q^{n-1} = 3 \cdot \left(\frac{2}{2}\right)^{n-1}$.

Vây
$$u_5 = 3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{5-1} = \frac{16}{27}$$

Chon đáp án (C)...

CÂU 4. Dãy số có số hạng tổng quát $u_n = \frac{1}{\sqrt{3}}^{2n}$ là một cấp số nhân có công bội q bằng

$$\bigcirc$$
 $\sqrt{3}$.

$$\bigcirc \frac{1}{9}$$
.

$$\bigcirc$$
 $\frac{1}{3}$.

🗭 Lời giải.

Ta có $u_n = \frac{1}{\sqrt{3}}^{2n} = \left[\left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right)^2 \right]^n = \left(\frac{1}{3} \right)^n = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{3} \right)^{n-1}.$

Suy ra công bội của cấp số nhân $q = \frac{1}{3}$.

CÂU 5. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 = 1, u_2 = -2$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

$$\mathbf{C} u_{2024} = -2^{2024}.$$

🗭 Lời giải.

Số hạng tổng quát của cấp số nhân là $u_n = u_1 \cdot q^{n-1} = (-2)^{n-1}$. Vậy $u_{2024} = (-2)^{2024-1} = (-2)^{2023} = -2^{2023}$.

Chọn đáp án (A)...

CÂU 6. Cho cấp số nhân có $\begin{cases} u_4 - u_2 = 54 \\ u_5 - u_3 = 108 \end{cases}$. Số hạng đầu tiên u_1 và công bội q của cấp số nhân là

(A)
$$u_1 = 9 \text{ và } q = 2$$
.

B)
$$u_1 = 9 \text{ và } q = -2.$$

$$\mathbf{c}$$
 $u_1 = -9 \text{ và } q = 2.$

D
$$u_1 = -9 \text{ và } q = -2.$$

🗩 Lời aiải.

$$\text{Ta c\'o} \begin{cases} u_4 - u_2 = 54 \\ u_5 - u_3 = 108 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 q^3 - u_1 q = 54 \\ u_1 q^4 - u_1 q^2 = 108 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 q(q^2 - 1) - 54 & (1) \\ u_1 q^2 (q^2 - 1) = 108 & (2). \end{cases}$$
 Chia từng vế của (2) cho (1) ta được
$$\frac{u_1 q^2 (q^2 - 1)}{u_1 q(q^2 - 1)} = \frac{108}{54} \Leftrightarrow q = 2.$$

Suy ra $u_1 = \frac{54}{a^3 - a} = \frac{54}{2^3 - 2} = 9.$

Chọn đáp án (A).....

CÂU 7. Cho cấp số nhân (u_n) biết $\begin{cases} u_1+u_2+u_3=31\\ u_1+u_3=26 \end{cases}$. Giá trị u_1 và q là

(A)
$$u_1 = 2; q = 5 \text{ hoặc } u_1 = 25; q = \frac{1}{5}.$$

B
$$u_1 = 5; q = 1 \text{ hoặc } u_1 = 25; q = \frac{1}{5}.$$

©
$$u_1 = 25; q = 5 \text{ hoặc } u_1 = 1; q = \frac{1}{5}.$$

🗭 Lời giải.

Vì
$$(u_n)$$
 là một cấp số nhân nên $u_n = u_1 \cdot q^{n-1}$

Ta có
$$\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 31 \\ u_1 + u_3 = 26 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_2 = 5 \\ u_1 + u_3 = 26 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1q = 5 & (1) \\ u_1(1+q^2) = 26 & (2). \end{cases}$$

Chia từng vế của (2) cho (1) ta được
$$\frac{q^2+1}{q} = \frac{26}{5} \Leftrightarrow 5q^2 - 26q + 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} q=5 \\ q=\frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

Với
$$q = 5$$
. Suy ra $u_1 = \frac{5}{q} = \frac{5}{5} = 1$.

Với
$$q = \frac{1}{5}$$
. Suy ra $u_1 = \frac{5}{q} = 5 : \frac{1}{5} = 25$.

Vậy
$$u_1 = 1$$
 với $q = 5$ hoặc $u_1 = 25$ với $q = \frac{1}{5}$.

Chọn đáp án \bigcirc D.....

CÂU 8. Số hạng đầu tiên và công bội của cấp số nhân thỏa mãn $\begin{cases} u_5+u_2=36\\ u_6-u_4=48 \end{cases}$ (với q>0) là

$$(A)$$
 $u_1 = 4, q = 4.$

B)
$$u_1 = 2, q = 4.$$

$$\mathbf{C}$$
 $u_1 = 2, q = 2$

$$(\mathbf{D}) u_1 = 4, q = 2.$$

D Lời giải.

Ta có
$$\begin{cases} u_5 + u_2 = 36 \\ u_6 - u_4 = 48 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 q^4 + u_1 q = 36 \\ u_1 q^5 - u_1 q^3 = 48 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 q(q^3 + 1) = 36 & (1) \\ u_1 q(q^4 - q^2) = 48 & (2). \end{cases}$$

Chia từng vế của (2) cho (1) ta

$$\frac{u_1q(q^4-q^2)}{u_1q(q^3+1)} = \frac{48}{36} \Leftrightarrow \frac{q^4-q^2}{q^3+1} = \frac{4}{3} \Leftrightarrow 3q^4-4q^3-3q^2-4 = 0 \begin{bmatrix} q=2\\ q=-1. \end{bmatrix}$$

Từ điều kiện q>0 suy ra công bội của cấp số nhân là q=2, do đó $u_1=\frac{36}{\sigma^4+\sigma}=2$.

 $V_{ay} u_1 = 2 \text{ và } q = 2.$

Chọn đáp án (C)......

CÂU 9. Cho cấp số nhân $u_2=\frac{1}{4},u_5=16.$ Công bội và số hạng đầu tiên của cấp số nhân là

$$\mathbf{A} \ q = \frac{1}{2}; u_1 = \frac{1}{2}.$$

B
$$q = \frac{-1}{2}; u_1 = \frac{-1}{2}.$$

$$\mathbf{c}$$
 $q=4; u_1=\frac{1}{16}$

B
$$q = \frac{-1}{2}; u_1 = \frac{-1}{2}.$$
 C $q = 4; u_1 = \frac{1}{16}.$ **D** $q = -4; u_1 = \frac{-1}{16}.$

Lời giải

Ta có
$$u_2 = u_1 q = \frac{1}{4}$$
 (1) và $u_5 = u_1 q^4 = 16$ (2).

Lấy (2) chia cho (1) vế theo vế ta được
$$\frac{u_1q^4}{u_1q} = \frac{16}{\frac{1}{4}} \Leftrightarrow q^3 = 64 \Leftrightarrow q = 4.$$

Suy ra
$$u_1 = \frac{1}{4} : q = \frac{1}{4} : 4 = \frac{1}{16}$$
.

Vậy
$$u_1 = \frac{1}{16}, q = 4.$$

Chọn đáp án (C).....

CÂU 10. Người ta thiết kế một cái tháp gồm 11 tầng. Diện tích mặt trên của mỗi tầng bằng nửa diện tích mặt trên của tầng ngay bên dưới và diên tích mặt trên của tầng 1 bằng nửa diên tích của để tháp (có diên tích là 12 288 m²). Diên tích mặt trên cùng (của tầng thứ 11) có giá trị nào sau đây?

$$\bigcirc$$
 6 m².

$$\bigcirc$$
 8 m².

$$\bigcirc$$
 10 m².

$$\bigcirc$$
 12 m².

🗭 Lời giải.

Vì diện tích của mặt trên của mỗi tầng bằng nửa diện tích mặt trên của tầng ngay bên dưới và diện tích mặt trên của tầng 1 bằng nửa diện tích của để tháp.

Do đó diện tích của mỗi tầng tạo nên dãy số và dãy số đó là một cấp số nhân có công bội $q = \frac{1}{2}$.

Vậy số hạng tổng quát của cấp số nhân đó là $u_n = 12\ 288 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

Vì từ để tháp đến tầng thứ 11 của tháp sẽ có 12 mặt nền, do đó diện tích của mặt của tầng thứ 11 là $u_{12} = 12\ 288 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{12-1} = 6$ m^2 .

Chọn đáp án (A).....



Tìm số hang cu thể của CSN

Ta chuyển các số hạng của CSN về số hạng đầu u_1 và công bội q. Sử dụng công thức $u_n = u_1 \cdot q^{n-1}$.

Chia hai phương trình vế theo vế ta thu được phương trình theo q.

Giải tìm q và u_1 . Từ đó tìm được số hạng cần tìm thỏa yebt.

1. Ví du minh hoa

VÍ DỤ 1. Cho u_n là CSN thỏa $u_1 = 2$; $u_4 = 16$. Tìm số hạng thứ 5 của CSN.

🗭 Lời giải.

Do u_n là CSN nên ta có $u_4 = u_1 \cdot q^3 \Rightarrow q^3 = \frac{u_4}{u_1} = 8 \Rightarrow q = 2.$

Vậy $u_5 = u_1 \cdot q^4 = 2 \cdot 2^4 = 32.$

VÍ DỤ 2. Cho cấp số nhân (u_n) có $\begin{cases} u_4 + u_6 = -540 \\ u_3 + u_5 = 180 \end{cases}$. Tính số hạng đầu u_1 và công bội q của cấp Số nhân.

Ta có
$$\begin{cases} u_4 + u_6 = -540 \\ u_3 + u_5 = 180 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 q^3 (1 + q^2) = -540 \\ u_1 q^2 (1 + q^2) = 180 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 2 \\ q = -3. \end{cases}$$

Vậy $\begin{cases} u_1 = 2 \\ q = -3 \end{cases}$ là số hạng cần tìm.

VÍ DỤ 3. Cho cấp số nhân có $u_1 = -3$, $q = \frac{2}{3}$. Số $\frac{-96}{243}$ là số hạng thứ mấy của cấp số nhân?

D Lời giải.

Giả sử số $\frac{-96}{243}$ là số hạng thứ n của cấp số nhân.

Ta có:
$$u_1 \cdot q^{n-1} = \frac{-96}{243} \Leftrightarrow (-3) \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = \frac{-96}{243} \Leftrightarrow n = 6.$$

Vậy số $\frac{-96}{242}$ là số hạng thứ 6 của cấp số nhân.

VÍ DỤ 4. Cấp số nhân (u_n) có số hạng tổng quát là $u_n = \frac{3}{5} \cdot 2^{n-1}, n \in \mathbb{N}^*$. Số hạng đầu tiên và công bội của cấp số nhân đó là

🗭 Lời giải.

Ta có
$$u_1=\frac{3}{5}\cdot 2^{1-1}=\frac{3}{5}$$
 và $u_2=\frac{3}{5}\cdot 2^{2-1}=\frac{6}{5}\Rightarrow q=\frac{u_2}{u_1}=2.$ Vậy $u_1=\frac{3}{5}$ và $q=2.$

2. Bài tập tự luận

BÀI 1. Cho cấp số nhân
$$(u_n)$$
 biết
$$\begin{cases} u_4 - u_2 = 25 \\ u_3 - u_1 = 50. \end{cases}$$

- a) Tìm số hạng đầu và công bội của cấp số nhân (u_n) .
- b) Tìm số hạng thứ 8 của cấp số nhân (u_n) .

a) Ta có
$$\begin{cases} u_4 - u_2 = 25 \\ u_3 - u_1 = 50 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1(q^3 - q) = 25 \\ u_1(q^2 - q) = 50 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q = \frac{1}{2} \\ u_1 = -200. \end{cases}$$

b) Ta có
$$u_8 = u_1 \cdot q^7 = -200 \cdot \frac{1}{2^7} = -\frac{25}{16}$$

BÀI 2. Tìm số hạng thứ 10 của cấp số nhân (u_n) biết $\begin{cases} u_4 - u_2 = 72 \\ u_5 - u_3 = 144. \end{cases}$

🗭 Lời giải.

Ta có
$$\begin{cases} u_4 - u_2 = 72 \\ u_5 - u_3 = 144 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_4 - u_2 = 72 \\ q(u_4 - u_2) = 144 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q = 2 \\ u_1(q^3 - q) = 72 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = 2 \\ u_1 = 12. \end{cases}$$

Khi đó $u_{10} = u_1 \cdot q^9 = 6144$.

BÀI 3. Cho một cấp số nhân có 5 số hạng biết 2 số hạng đầu là số dương, tích số hạng đầu và số hạng thứ 3 là 1, tích số hạng thứ 3 và số hạng cuối là $\frac{1}{16}$. Tìm cấp số nhân này.

🗭 Lời giải.

Gọi 5 số hạng cần tìm có dạng $\frac{x}{q^2}$; $\frac{x}{q}$; x; xq; xq^2 .

Theo đề ra ta có $\begin{cases} \frac{x}{q^2} \cdot x = 1 \\ x \cdot xq^2 = \frac{1}{16} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ q = \frac{1}{2} \end{cases} \text{ (do hai số hạng đầu dương nên } q > 0 \text{)}.$

Vậy 5 số hạng cần tìm là 2; 1; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{8}$

BÀI 4. Tìm số hạng đầu và công bội của cấp số nhân (u_n) biết $\begin{cases} u_2 + u_5 - u_4 = 10 \\ u_3 + u_6 - u_5 = 20. \end{cases}$

🗭 Lời giải.

Ta có
$$\begin{cases} u_2 + u_5 - u_4 = 10 \\ u_3 + u_6 - u_5 = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1(q + q^4 - q^3) = 10 \\ u_1(q^2 + q^5 - q^4) = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = 2 \\ u_1 = 1. \end{cases}$$

BÀI 5. Tìm 5 số lập thành một cấp số nhân có công bội bằng $\frac{1}{4}$ số thứ nhất và tổng 2 số đầu là $\frac{5}{4}$

🗭 Lời giải.

Theo đề, ta có
$$\begin{cases} q = \frac{1}{4}u_1 \\ u_1 + u_2 = \frac{5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = \frac{1}{4}u_1 \\ u_1 + u_1 \cdot q = \frac{5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = \frac{1}{4}u_1 \\ u_1 + u_1 \cdot q = \frac{5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = \frac{1}{4}u_1 \\ u_1^2 + 4u_1 - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = \frac{1}{4} \text{ hoặc } \begin{cases} q = -\frac{5}{4} \\ u_1 = -5 \end{cases} \end{cases}$$

BÀI 6. Tìm 3 số lập thành một cấp số nhân có tổng là 63 và tích là 1728.

⊕ Lời giải

Gọi ba số cần tìm là $\frac{x}{a}$; x; xq. Theo đề ra, ta có $x^3 = 1728 \Rightarrow x = 12$.

$$\text{Mặt khác } \frac{x}{q} + x + xq = 63 \Leftrightarrow 12q + 12 + \frac{12}{q} = 63 \Leftrightarrow 12q^2 - 51q + 12 = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} q = 4 \\ q = \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

Vây CSN cần tìm là 3; 12; 48.

3. Câu hỏi trắc nghiệm

CÂU 1. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_{20}=8u_{17}$. Công bội của cấp số nhân là

(B)
$$q = -2$$
.

$$(c) q = 4.$$

$$\bigcirc$$
 $q = -4$

🗭 Lời giải.

Ta có $u_{20}=8u_{17}\Rightarrow u_1\cdot q^{19}=8\cdot u_1\cdot q^{16}\Rightarrow q=2.$

Chọn đáp án A.....

CÂU 2. Cho cấp số nhân (u_n) có 10 số hạng với công bội $q \neq 0$ và $u_1 \neq 0$. Đẳng thức nào sau đây là đúng?

🗭 Lời giải.

Ta có $u_7 = u_1 \cdot q^6 = (u_1 \cdot q^3) \cdot q^3 = u_4 \cdot q^3$.

CÂU 3. Cho cấp số nhân (u_n) có số hạng đầu $u_1=2$ và công bội q=3. Giá trị u_{2019} bằng

 $\mathbf{A} 3 \cdot 2^{2019}$.

B $2 \cdot 3^{2019}$.

 $(\mathbf{c}) \ 3 \cdot 2^{2018}.$

 \bigcirc 2 · 3²⁰¹⁸.

Lời giải.

Áp dụng công thức của số hạng tổng quát $u_n = u_1 \cdot q^{n-1} = 2 \cdot 3^{2018}$.

Chọn đáp án (D).....

CÂU 4. Cho cấp số nhân (u_n) với công bội q < 0 và $u_2 = 4$, $u_4 = 9$. Tìm u_1 .

B $u_1 = -\frac{8}{2}$.

 $u_1 = \frac{8}{2}$.

Lời giải.

Vì $q < 0, u_2 > 0$ nên $u_3 < 0$. Do đó $u_3 = -\sqrt{u_2 \cdot u_4} = -\sqrt{4 \cdot 9} = -6$.

Ta có $u_2^2 = u_1 \cdot u_3 \Rightarrow u_1 = \frac{u_2^2}{u_2} = \frac{4^2}{-6} = -\frac{8}{3}.$

Chọn đáp án B.....

CÂU 5. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_2 = -6, u_3 = 3$. Công bội q của cấp số nhân đã cho bằng

 $(c) - \frac{1}{2}$.

🗭 Lời giải.

Công bội của cấp số nhân đã cho là

$$q = \frac{u_3}{u_2} = -\frac{1}{2}.$$

CÂU 6. Cho cấp số nhân có $u_1 = -3$, $q = \frac{2}{3}$. Tính u_5 ?

 $\mathbf{A} u_5 = \frac{27}{16}.$

B $u_5 = \frac{-16}{27}$. **C** $u_5 = \frac{-27}{16}$.

 \mathbf{D} $u_5 = \frac{16}{27}$.

🗭 Lời giải.

Ta có: $u_5 = u_1 \cdot q^4 = (-3) \left(\frac{2}{2}\right)^4 = -\frac{16}{27}$.

Chọn đáp án B.....

CÂU 7. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_2 = \frac{1}{4}$; $u_5 = -16$. Tìm q và số hạng đầu tiên của cấp số nhân?

(A) $q = \frac{1}{2}$; $u_1 = \frac{1}{2}$. (B) $q = -\frac{1}{2}$, $u_1 = -\frac{1}{2}$. (C) q = -4, $u_1 = \frac{1}{16}$.

🗭 Lời giải.

Ta có $\begin{cases} u_2 = \frac{1}{4} \\ u_5 = 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1 \cdot q = \frac{1}{4} \\ u_1 \cdot q^4 = -16 \end{cases} \Rightarrow q^3 = -64 \Rightarrow q = -4 \Rightarrow u_1 = \frac{1}{16}.$

CÂU 8. Cho cấp số nhân (u_n) , biết: $u_n = 81, u_{n+1} = 9$. Lựa chọn đáp án đúng.

 $\mathbf{A} q = -\frac{1}{9}.$

 \mathbf{B} $q=\frac{1}{0}$.

 $(\mathbf{D}) q = -9.$

Lời giải.

Ta có $q = \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{9}{81} = \frac{1}{9}.$

CÂU 9. Cho cấp số nhân (u_n) với $u_1=2$ và công bội q=3. Số hạng u_2 bằng

(B) 6.

(D) 18.

🗭 Lời giải.

Ta có $u_2 = u_1 \cdot q = 2 \cdot 3 = 6$.

Chọn đáp án (B).....

CÂU 10. Cho cấp số nhân (u_n) với $u_1=2$ và $u_3=8$. Số hạng thứ hai của cấp số nhân đã cho bằng

$$(A) u_2 = 4.$$

B)
$$u_2 = 6$$
.

$$(c) u_2 = \pm 4.$$

$$(\mathbf{D}) u_2 = -4.$$

Ta có
$$u_1 \cdot u_3 = u_2^2 \Leftrightarrow u_2^2 = 16 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} u_2 = 4 \\ u_2 = -4. \end{bmatrix}$$

Chon đáp án (C).....

CÂU 11. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1=-1; q=\frac{-1}{10}$. Số $\frac{1}{10^{103}}$ là số hạng thứ bao nhiêu?

- (\mathbf{A}) số hang thứ 103.
- (\mathbf{B}) số hạng thứ 105.
- (\mathbf{C}) số hạng thứ 104.
- (D) Đáp án khác.

🗭 Lời giải.

$$\text{Ta có } u_n = u_1 \cdot q^{n-1} \Leftrightarrow \frac{1}{10^{103}} = -1 \cdot \left(\frac{-1}{10}\right)^{n-1} \Leftrightarrow \left(\frac{-1}{10}\right)^{n-1} = \left(\frac{-1}{10}\right)^{103} \Rightarrow n = 104.$$

CÂU 12. Cho cấp số nhân (u_n) có các số hạng lần lượt là $3, 9, 27, 81, \dots$ Khi đó u_n bằng

- (A) $3 + 3^n$.
- \bigcirc 3^{n-1}

(c) 3^{n+1} .

 \bigcirc 3^n .

Lời giải.

Cấp số nhân đã cho có $u_1 = 3$ và công bội q = 3 nên $u_n = u_1 \cdot q^{n-1} = 3 \cdot 3^{n-1} = 3^n$.

Chon đáp án (D).....

CÂU 13. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1=3$ và $15u_1-4u_2+u_3$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tìm số hạng thứ 13 của cấp số nhân đã

- (A) $u_{13} = 12288$.
- **B**) $u_{13} = 3072$.
- \mathbf{c}) $u_{13} = 24567$.
- $u_{13} = 49152.$

🗭 Lời giải.

Gọi q là công bội của cấp số nhân (u_n) .

Ta có $15u_1 - 4u_2 + u_3 = 45 - 12q + 3q^2 = 3(q-2)^2 + 33 \ge 33 \ \forall q \in \mathbb{R}.$

Suy ra $15u_1 - 4u_2 + u_3$ đạt giá trị nhỏ nhất khi q = 2.

Khi đó $u_{13} = u_1 q^{12} = 12288$.

Chọn đáp án (A).....

CÂU 14. Cho cấp số nhân (u_n) biết $u_1 + u_5 = 51$ và $u_2 + u_6 = 102$. Hỏi số 12288 là số hạng thứ mấy của cấp số nhân (u_n) ?

- (A) Số hạng thứ 13.
- (B) Số hang thứ 10.
- (c) Số hạng thứ 11.
- (D) Số hang thứ 12.

Lời giải.

Goi q là công bôi của cấp số nhân đã cho. Theo đề bài, ta có

$$\begin{cases} u_1 + u_5 = 51 \\ u_2 + u_6 = 102 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 \left(1 + q^4\right) = 51 \\ u_1 q \left(1 + q^4\right) = 102 \end{cases} \Rightarrow q = 2 \Rightarrow u_1 = 3 \Rightarrow u_n = 3 \cdot 2^{n-1}.$$
 Mặt khác $u_n = 12288 \Leftrightarrow 3 \cdot 2^{n-1} = 12288 \Leftrightarrow 2^{n-1} = 2^{12} \Leftrightarrow n = 13.$

Chon đáp án (A).....

Tìm điều kiện để một dãy số lập thành CSN

Dãy số a, b, c lập thành CSN khi $b^2 = a$.

Dãy số a, b, c, d lập thành CSN khi $\begin{cases} b^2 = a \cdot c \\ c^2 = b \cdot d. \end{cases}$

1. Ví du minh hoa

VÍ DỤ 1. Cho dãy 3, x, 12, y. Tìm x, y để dãy là CSN.

Dãy là CSN khi
$$\begin{cases} x^2 = 3 \cdot 12 \\ 12^2 = x \cdot y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = 24 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = -6 \\ y = -24. \end{cases}$$

VÍ DU 2. Cho dãy x-1, 2x, 4x+3. Tìm x để dãy là CSN.

Lời giải.

Dãy là CSN khi $(2x)^2 = (x-1)(4x+3) \Leftrightarrow x = -3$.

VÍ DỤ 3. Các số x+6y, 5x+2y, 8x+y theo thứ tự đó lập thành một cấp số cộng, đồng thời, các số $x+\frac{5}{2}$, y-1, 2x-3ytheo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân. Hãy tìm x và y.

- $oldsymbol{\Theta}$ Ba số x+6y, 5x+2y, 8x+y lập thành cấp số cộng nên $(x+6y)+(8x+y)=2(5x+2y)\Leftrightarrow x=3y$.
- ullet Ba số $x+\frac{5}{3}$, y-1, 2x-3y lập thành cấp số nhân nên $\left(x+\frac{5}{3}\right)(2x-3y)=\left(y-1\right)^2$.

Thay x = 3y vào ta được $8y^2 + 7y - 1 = 0 \Leftrightarrow y = -1$ hoặc $y = \frac{1}{8}$

Với
$$y = -1$$
 thì $x = -3$; với $y = \frac{1}{8}$ thì $x = \frac{3}{8}$.

 \mathbf{V} Í \mathbf{D} \mathbf{U} 4. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình sau có ba nghiệm phân biệt lập thành một cấp số nhân $x^3 - 7x^2 + 2(m^2 + 6m)x - 8 = 0.$

🗭 Lời giải.

+ Điều kiện cần:

Giả sử phương trình đã cho có ba nghiệm phân biệt x_1,x_2,x_3 lập thành một cấp số nhân.

Theo định lý Vi-ét, ta có $x_1x_2x_3 = 8$.

Theo tính chất của cấp số nhân, ta có $x_1x_3 = x_2^2$. Suy ra $x_2^3 = 8 \Leftrightarrow x_2 = 2$.

Với nghiệm
$$x = 2$$
, ta có $m^2 + 6m - 7 = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} m = 1 \\ m = -7 \end{vmatrix}$

+ Điều kiên đủ:

Với m = 1 hoặc m = -7 thì $m^2 + 6m = 7$.

Khi đó phương trình ban đầu trở thành $x^3 - 7x^2 + 14x - 8 = 0$.

Giải phương trình này, ta được các nghiệm là 1,2,4. Hiển nhiên ba nghiệm này lập thành một cấp số nhân với công bội q=2. Vậy m = 1 và m = -7 là các giá trị cần tìm.

VÍ DỤ 5. Các số x + 6y, 5x + 2y, 8x + y theo thứ tự đó lập thành một cấp số cộng; đồng thời các số x - 1, y + 2, x - 3ytheo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân. Tính $x^2 + y^2$.

Lời giải.

Theo giả thiết ta có

$$\begin{cases} (x+6y) + (8x+y) = 2(5x+2y) \\ (x-1)(x-3y) = (y+2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3y \\ (3y-1)(3y-3y) = (y+2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3y \\ 0 = (y+2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -6 \\ y = -2 \end{cases}$$

Vậy $x^2 + y^2 = 40$.

2. Bài tấp tư luân

BÀI 1. Xác định x dương để 2x-3; x; 2x+3 lập thành cấp số nhân.

Lời giải.

Ba số 2x-3; x; 2x+3 lập thành cấp số nhân khi $x^2=(2x-3)(2x+3) \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{3}$.

Do x > 0 nên chọn $x = \sqrt{3}$.

BÀI 2. Cho cấp số nhân x, 12, y, 192. Tìm x và y.

Bốn số
$$x, 12, y, 192$$
 lập thành CSN khi
$$\begin{cases} xy = 12^2 \\ y^2 = 12 \cdot 192 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 48 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = -3 \\ y = -48. \end{cases}$$

BÀI 3. Tìm x để dãy số 1, x^2 , $6 - x^2$ lập thành cấp số nhân.

Lời giải.

Ta có $1, x^2, 6 - x^2$ lập thành cấp số nhân $\Leftrightarrow x^4 = 6 - x^2 \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{2}$.

BÀI 4. Viết 6 số xen giữa hai số -2 và 256 để được một cấp số nhân có 8 số hạng. Tìm cấp số nhân này.

🗭 Lời giải.

Theo đề ra, ta có
$$\begin{cases} u_1 = -2 \\ u_8 = 256 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = -2 \\ u_1 \cdot q^7 = 256 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = -2 \\ q = -2. \end{cases}$$

BÀI 5. Bốn góc của một tứ giác lồi lập thành một cấp số nhân, góc lớn nhất gấp 8 lần góc nhỏ nhất. Tìm 4 góc đó. Lời giải.

Giả sử 4 góc của tứ giác là $A \le B \le C \le D$. Suy ra $A + B + C + D = 360^\circ$.

Theo đề, ta có $D = 8A \Leftrightarrow Aq^3 = 8A \Leftrightarrow q = 2$. Khi đó, ta được

$$A(1+q+q^2+q^3) = 360^{\circ} \Rightarrow A = 24^{\circ}.$$

Vậy 4 góc của tứ giác lần lượt là 24°; 48°; 96°; 192°.

 \mathbf{B} Àl 6. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình sau có ba nghiệm phân biệt lập thành một cấp số nhân $x^3 - 7mx^2 + 2(m^2 + 6m)x - 64 = 0.$

D Lời giải.

+ Điều kiên cần:

Giả sử phương trình đã cho có ba nghiệm phân biệt $x_1; x_2; x_3$ lập thành một cấp số nhân.

Theo định lý Vi-ét, ta có $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = 64$.

Theo tính chất của cấp số nhân, ta có $x_1 \cdot x_3 = x_2^2$. Suy ra ta có $x_2^3 = 64 \Leftrightarrow x_2 = 4$.

Thay x = 4 vào phương trình đã cho ta được

$$4^{3} - 7m \cdot 4^{2} + 2(m^{2} + 6m) \cdot 4 - 64 = 0 \Leftrightarrow m^{2} - 8m = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} m = 0 \\ m = 8. \end{bmatrix}$$

+ Điều kiện đủ:

Với m=0 thay vào phương trình đã cho ta được: $x^3-64=0$ hay x=4 (nghiệm kép-loại).

Với m=8 thay vào phương trình đã cho nên ta có phương trình $x^3-56x^2+224x-64=0$.

Phương trình này có 3 nghiệm phân biệt lập thành cấp số nhân.

Vây m = 8 là giá trị cần tìm.

3. Câu hỏi trắc nghiệm

CÂU 1. Xác định x để 3 số 2x-1; x; 2x+1 theo thứ tự lập thành một cấp số nhân:

$$\mathbf{A} \ x = \pm \sqrt{3}.$$

$$\bigcirc x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

 \bigcirc Không có giá trị nào của x.

🗭 Lời giải.

Ba số 2x-1; x; 2x+1 theo thứ tự lập thành cấp số nhân

$$\Leftrightarrow (2x-1)(2x+1) = x^2 \Leftrightarrow 3x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

CÂU 2. Cho 4 số nguyên dương, trong đó 3 số đầu lập thành cấp số cộng, 3 số cuối lập thành cấp số nhân. Biết tổng số đầu và cuối là 37, tổng 2 số hạng giữa là 36. Hỏi số lớn nhất thuộc khoảng nào sau đây?

$$\bigcirc$$
 (22; 25).

🗭 Lời giải.

Giả sử 4 số đó là $a, b, c, d \ (a, b, c, d \in \mathbb{N}^*)$.

Do a, b, c lập thành cấp số cộng nên ta có a + c = 2b (1).

Do b, c, d lập thành cấp số nhân nên ta có $b \cdot d = c^2$ (*).

Theo giả thiết ta có
$$\begin{cases} a+d=37 & (2) \\ b+c=36. & (3) \\ a=-d+37 \end{cases}$$

Theo giả thiết ta có
$$\begin{cases} a+d=37 & (2) \\ b+c=36. & (3) \end{cases}$$

$$\text{Từ (1), (2), (3) ta có} \begin{cases} a=-d+37 \\ b=\frac{-d+73}{3} \\ c=\frac{d+35}{3}. \end{cases}$$

Thay vào (*) ta có
$$\frac{-d+73}{3} \cdot d = \left(\frac{d+35}{3}\right)^2 \Leftrightarrow 4d^2 - 149d + 1225 = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} d=25 \\ d=\frac{49}{4} \end{bmatrix}$$
 (loại).

Với d = 25, ta có a = 12, b = 16, c = 20.

Vậy số lớn nhất là $25 \in (24; 26)$.

Chọn đáp án (B).....

CÂU 3. Ba số x, y, z theo thứ tự lập thành một cấp số nhân với công bội q khác 1 đồng thời các số x, 2y, 3z theo thứ tự lập thành một cấp số cộng với công sai khác 0. Tìm giá trị của q.

$$\mathbf{A} q = -\frac{1}{3}$$

B
$$q = \frac{1}{9}$$
.

$$\mathbf{c}$$
 $q = -3$.

🗭 Lời giải.

Theo giả thiết ta có

$$\begin{cases} y = xq \\ z = xq^2 \\ x + 3z = 2(2y) \end{cases} \Rightarrow x + 3xq^2 = 4xq \Rightarrow x (3q^2 - 4q + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = 0 \\ 3q^2 - 4q + 1 = 0. \end{cases}$$

Nếu $x = 0 \Rightarrow y = z = 0 \Rightarrow$ công sai của cấp số cộng x, 2y, 3z bằng 0 (vô lí).

Nếu
$$3q^2 - 4q + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} q = 1 \\ q = \frac{1}{3} & \Leftrightarrow q = \frac{1}{3} \text{ và } (q \neq 1). \end{bmatrix}$$

CÂU 4. Trong các dãy số (u_n) cho bởi số hạng tổng quát u_n sau, dãy số nào là một cấp số nhân?

$$\mathbf{A} u_n = \frac{1}{2n} - 1.$$

B
$$u_n = n + \frac{1}{3}$$
. **C** $u_n = n^2 - \frac{1}{3}$.

🗭 Lời giải.

Từ các đáp án trên, với dãy (u_n) cho bởi $u_n = \frac{1}{3^{n-2}}$ là một cấp số nhân, vì

$$T = \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3^{n-2}}{3^{n-1}} = \frac{1}{3}$$
 (không đổi).

CÂU 5. Trong các mệnh đề dưới đây, mệnh đề nào là sai?

- (A) Dãy số (a_n) , với $a_1 = 3$ và $a_{n+1} = \sqrt{a_n + 6}$, $\forall n \geq 1$, vừa là cấp số cộng vừa là cấp số nhân.
- (B) Dãy số (d_n) , với $d_1=-3$ và $d_{n+1}=2d_n^2-15$, $\forall n\geq 1$, vừa là cấp số cộng vừa là cấp số nhân.
- \bigcirc Dãy số (b_n) , với $b_1 = 1$ và $b_{n+1} \left(2b_n^2 + 1 \right) = 3$, $\forall n \geq 1$, vừa là cấp số cộng vừa là cấp số nhân.
- $lackbox{\textbf{D}}$ Đãy số (c_n) , với $c_1=2$ và $c_{n+1}=3c_n^2-10, \, \forall n\geq 1$, vừa là cấp số cộng vừa là cấp số nhân.

🗭 Lời giải.

Kiểm tra từng phương án ta có

- \odot Ta có $a_2=3, a_2=3, \ldots$ Bằng phương pháp quy nạp toán học chúng ra chứng minh được rằng $a_n=3, \forall n\geq 1$. Do đó (a_n) là dãy số không đổi. Suy ra nó vừa là cấp số cộng (công sai bằng 0) vừa là cấp số nhân (công bội bằng 1).
- $m{\Theta}$ Tương tự như phương án trên, chúng ta chỉ ra được $b_n = 1$, $\forall n \geq 1$. Do đó (b_n) là dãy số không đổi. Suy ra nó vừa là cấp số cộng (công sai bằng 0) vừa là cấp số nhân (công bội bằng 1).
- \odot Tương tự như phương án trên, chúng ta chỉ ra được $c_n = 2$, $\forall n \geq 1$. Do đó (c_n) là dãy số không đổi. Suy ra nó vừa là cấp số cộng (công sai bằng 0) vừa là cấp số nhân (công bội bằng 1).
- \odot Ta có $d_1 = -3$, $d_2 = 3$, $d_3 = 3$. Ba số hạng này không lập thành cấp số cộng cũng không lập thành cấp số nhân nên dãy số (d_n) không phải là cấp số cộng và cũng không là cấp số nhân.

Chọn đáp án (B).....

CÂU 6. Biết rằng tồn tại hai giá trị m_1 và m_2 để phương trình

$$2x^{3} + 2(m^{2} + 2m - 1)x^{2} - 7(m^{2} + 2m - 2)x - 54 = 0$$

có ba nghiệm phân biệt lập thành một cấp số nhân. Tính giá trị của biểu thức $P=m_1^3+m_2^3$

$$P = 56.$$

$$\bigcirc P = 8.$$

$$P = -8.$$

$$P = -56.$$

🗭 Lời giải.

Theo định lý Vi-ét, ta có $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = -\frac{d}{a} = -\frac{-54}{2} = 27 \Leftrightarrow x_2^3 = 27 \Leftrightarrow x_2 = 3.$

Điều kiện cần để phương trình đã cho có ba nghiệm phân biệt lập thành một cấp số nhân là x=3 phải là nghiệm của phương trình đã cho. Suy ra

$$m^2 + 2m - 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} m = 2\\ m = -4. \end{bmatrix}$$

Vì giả thiết cho biết tồn tại đúng hai giá trị của tham số m nên m=2 và m=-4 là các giá trị thỏa mãn. Vây $P = 2^3 + (-4)^3 = -56$.

Chọn đáp án \bigcirc

CÂU 7. Cho bốn số a, b, c, d biết rằng a, b, c theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân với công bội q > 1; còn b, c, d theo thứ tự đó lập thành cấp số cộng. Tìm q, biết rằng a+d=14 và b+c=12.

B
$$q = \frac{19 + \sqrt{73}}{24}$$
. **c** $q = \frac{21 + \sqrt{73}}{24}$.

$$\mathbf{c} \ q = \frac{21 + \sqrt{73}}{24}.$$

Lời giải.

Giả sử a, b, c lập thành cấp số cộng công bội q. Khi đó theo giả thiết ta có

$$\begin{cases} b = aq, \ c = aq^2 \\ b + d = 2c \\ a + d = 14 \\ b + c = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} aq + d = 2aq^2 \\ a + d = 14 \\ a(q + q^2) = 12. \end{cases}$$
 (1)

- \bigcirc Nếu $q = 0 \Rightarrow b = c = d = 0$. (Vô lí!)
- \odot Nếu $q=-1 \Rightarrow b=-a; c=a \Rightarrow b+c=0.$ (Vô lí!)

Vậy $q \neq 0$, $q \neq -1$, từ (2) và (3) ta có d = 14 - a và $a = \frac{12}{q + q^2}$. Thay vào (1) ta được

$$\frac{12q}{q+q^2} + \frac{14q^2 + 14q - 12}{q+q^2} = \frac{24q^3}{q+q^2} \Leftrightarrow 12q^3 - 7q^2 - 13q + 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow (q+1)\left(12q^2 - 19q + 6\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} q = -1 & (\text{loai}) \\ q = \frac{19 + \sqrt{73}}{24} \\ q = \frac{19 - \sqrt{73}}{24} \\ \end{bmatrix}$$

Vì
$$q > 1$$
 nên $q = \frac{19 + \sqrt{73}}{24}$.

Chọn đáp án B

CÂU 8. Cho dãy số tăng a, b, c $(c \in \mathbb{Z})$ theo thứ tự lập thành cấp số nhân; đồng thời a, b+8, c theo thứ tự lập thành cấp số cộng và a, b+8, c+64 theo thứ tự lập thành cấp số nhân. Tính giá trị biểu thức P=a-b+2c.

$$\triangle P = 32.$$

$$P = \frac{92}{9}.$$

$$\bigcirc P = 64.$$

$$\bigcirc P = \frac{184}{9}.$$

🗭 Lời giải.

Theo giả thiết, ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} ac = b^2 \\ a + c = 2(b+8) \\ a(c+64) = (b+8)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ac = b^2 \\ a - 2b = 16 - c \\ ac + 64a = (b+8)^2 \end{cases}$$
 (1)

Thay (1) vào (3) ta được $b^2 + 64a = b^2 + 16b + 64 \Leftrightarrow 4a - b = 4$. (4) Kết hợp (2) với (4) ta được

$$\begin{cases} a - 2b = 16 - c \\ 4a - b = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{c - 8}{7} \\ b = \frac{4c - 60}{7}. \end{cases}$$
 (5)

Thay (5) vào (1) ta được

$$7(c-8)c = (4c-60)^2 \Leftrightarrow 9c^2 - 424c + 3600 = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} c = 36 \\ c = \frac{100}{9} \Leftrightarrow c = 36. \end{bmatrix}$$
 (Vì $c \in \mathbb{Z}$)

Với $c = 36 \Rightarrow a = 4, b = 12 \Rightarrow P = 4 - 12 + 72 = 64.$

Chọn đáp án \bigcirc

CÂU 9. Cho 3 số a, b, c theo thứ tự lập thành cấp số nhân với công bội khác 1 . Biết cũng theo thứ tự đó chúng lần lượt là số thứ nhất, thứ tư và thứ tám của một cấp số cộng công sai là $d, (d \neq 0)$. Tính $\frac{a}{d}$.

$$\mathbf{A} \frac{4}{3}$$

$$\frac{\mathbf{c}}{9}$$
.

🗭 Lời giải.

Do a,b,c theo thứ tự lần lượt là số thứ nhất, thứ tư và thứ tám của một cấp số cộng công sai là $d,(d\neq 0)$ nên $\left\{ \begin{array}{l} b=a+3d\\ c=a+7d \end{array} \right.$ Hơn nữa a,b,c theo thứ tự lập thành cấp số nhân với công bội khác 1 nên $ac=b^2.$

Khi đó

$$\begin{split} a(a+7d) &= (a+3d)^2 &\iff a^2+7ad = a^2+6ad+9d^2 \\ &\Leftrightarrow 9d^2-ad = 0 \Leftrightarrow 9d = a \Leftrightarrow \frac{a}{d} = 9. \end{split}$$

$$V_{ay} \frac{a}{d} = 9.$$

CÂU 10. Cho dãy số (u_n) là một cấp số nhân với $u_n \neq 0, n \in \mathbb{N}^*$. Dãy số nào sau đây không phải là cấp số nhân?

(A) $u_1 + 2$; $u_2 + 2$; $u_3 + 2$;

(B) $3u_1$; $3u_2$; $3u_3$;

 \bigcirc $\frac{1}{u_1}$; $\frac{1}{u_2}$; $\frac{1}{u_3}$;

 $(\mathbf{D}) u_1; u_3; u_5; \dots$

Giả sử (u_n) là một cấp số nhân với công bội q.

Ta có $u_2 = u_1 q$, $u_3 = u_1 q^2$.

Dễ thấy $\frac{u_2 + 2}{u_1 + 2} = \frac{u_1 q + 2}{u_1 + 2}$ và $\frac{u_3 + 2}{u_2 + 2} = \frac{u_1 q^2 + 2}{u_1 q + 2}$.

Do $\frac{u_2 + 2}{u_1 + 2} \neq \frac{u_3 + 2}{u_2 + 2} \Rightarrow$ dãy số $u_1 + 2$; $u_2 + 2$; $u_3 + 2$; ... không phải là cấp số nhân.

CÂU 11. Xác định x để 3 số x-2; x+1; 3-x theo thứ tự lập thành một cấp số nhân

(A) $x = \pm 1$.

(B) Không có giá trị nào của x.

(c) x = -3.

(D) x = 2.

Lời giải.

Ba số x-2; x+1; 3-x theo thứ tự lập thành một cấp số nhân $\Leftrightarrow (x-2)(3-x) = (x+1)^2 \Leftrightarrow 2x^2 - 3x + 7 = 0$ (Phương trình vô nghiệm).

Chon đáp án (B).....

CÂU 12. Trong các dãy số (u_n) cho bởi số hạng tổng quát u_n sau, dãy số nào là một cấp số nhân?

- **(A)** $u_n = 7 \cdot 3^n.$
- \mathbf{C} $u_n = 7 3^n$.
- $(\mathbf{D}) u_n = 7 3n.$

Lời giải.

Từ các đáp án trên, với dãy (u_n) cho bởi $u_n = 7 \cdot 3^n$ là một cấp số nhân, vì

$$T = \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{7 \cdot 3^{n+1}}{7 \cdot 3^n} = 3 \text{ (không đổi)}.$$

CÂU 13. Số hạng thứ hai, số hạng đầu và số hạng thứ ba của một cấp số cộng với công sai khác 0 theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân với công bội q. Tìm q.

- (A) q = -2.
- **B** $q = -\frac{3}{2}$.
- $\mathbf{c} q = \frac{3}{2}.$
- **(D)** q = 2.

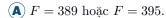
Lời giải.

Giả sử ba số hạng a; b; c lập thành cấp số cộng thỏa mãn yêu cầu, khi đó b; a; c theo thứ tự đó lập thành cấp số nhân công bội $q \neq 1$. Ta có

$$\begin{cases} a+c=2b \\ a=bq; c=bq^2 \end{cases} \Rightarrow bq+bq^2=2b \Leftrightarrow \begin{bmatrix} b=0 \\ q^2+q-2=0. \end{cases}$$

- \bullet Nếu $b=0 \Rightarrow a=b=c=0$ nên a; b; c là cấp số công công sai d=0. (Vô lí!)
- $oldsymbol{\odot}$ Nếu $q^2+q-2=0$ thì q=1 hoặc q=-2. Dễ thấy trường hợp q=1 là không thỏa mãn, vì khi đó a=b=c. Do đó q = -2.

CÂU 14. Ba số x, y, z lập thành một cấp số cộng và có tổng bằng 21. Nếu lần lượt thêm các số 2, 3, 9 vào ba số đó (theo thứ tự của cấp số cộng) thì được ba số lập thành một cấp số nhân. Tính $F = x^2 + y^2 + z^2$.



(B)
$$F = 395 \text{ hoặc } F = 179$$

(B)
$$F = 395$$
 hoặc $F = 179$. **(C)** $F = 441$ hoặc $F = 357$. **(D)** $F = 389$ hoặc $F = 179$.

D
$$F = 389$$
 hoặc $F = 179$

Theo tính chất của cấp số cộng, ta có x + z = 2y.

Kết hợp với giả thiết x + y + z = 21, ta suy ra $3y = 21 \Leftrightarrow y = 7$.

Gọi d là công sai của cấp số cộng thì x = y - d = 7 - d và z = y + d = 7 + d.

Sau khi thêm các số 2, 3, 9 vào ba số x, y, z ta được ba số là x + 2, y + 3, z + 9 hay 9 - d, 10, 16 + d.

Theo tính chất của cấp số nhân, ta có $(9-d)(16+d)=10^2 \Leftrightarrow d^2+7d-44=0$.

Giải phương trình ta được d = -11 hoặc d = 4.

Với d = -11, cấp số cộng 18, 7, -4. Lúc này F = 389.

Với d=4, cấp số cộng 3, 7, 11. Lúc này F=179.

Chon đáp án (D).....



Tính tổng của cấp số nhân

Phương pháp

- \odot Xác định số hạng đầu u_1 , công bội q.
- ② Áp dụng công thức tính tổng các số hang của cấp số nhân.

1. Ví du minh hoa

VÍ DỤ 1. Tính tổng 10 số hạng đầu tiên của cấp số nhân (u_n) , biết $u_1 = -3$ và công bội q = -2.

🗭 Lời giải.

Ta có:
$$S_{10} = \frac{u_1 \left(1 - q^{10}\right)}{1 - q} = 1023.$$

VÍ DỤ 2. Tính tổng 8 số hạng đầu tiên của cấp số nhân (u_n) , biết $u_1 = 3$ và $u_2 = 6$.

🗭 Lời giải.

Ta có:
$$u_2 = u_1.q \Leftrightarrow 6 = 3.q \Leftrightarrow q = 2$$

 $S_8 = u_1 \frac{1 - q^8}{1 - q} = 3. \frac{1 - 2^8}{1 - 2} = 765.$

$$S_8 = u_1 \frac{1 - q^8}{1 - q} = 3. \frac{1 - 2^8}{1 - 2} = 765$$

VÍ DỤ 3 (thuộc chương giới hạn). Tính tổng vô hạn $S=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{2^n}+...$

🗭 Lời giải.

Đây là tổng của cấp số nhân lùi vô hạn, với $u_1=1, q=\frac{1}{2}$. Khi đó

$$S = \frac{u_1}{1 - q} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2.$$

VÍ DỤ 4. Tính tổng 200 số hạng đầu tiên của dãy số (u_n) biết $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = 3u_n \end{cases}$

🗭 Lời giải.

Đễ thấy dãy đã cho là một cấp số nhân với công bội
$$q=3;u_1=1.$$
 Từ đó $S_{200}=u_1\frac{q^{200}-1}{q-1}=\frac{3^{200}-1}{2}.$

VÍ DỤ 5. Một cấp số nhân có số hạng đầu $u_1 = 3$, công bội q = 2. Biết $S_n = 765$, tìm n.

Lời giải.

Áp dụng công thức tính tổng của cấp số nhân ta có $S_n = 765 \Leftrightarrow \frac{u_1(1-q^n)}{1-q} = 765 \Leftrightarrow \frac{3\cdot(1-2^n)}{1-2} = 765 \Leftrightarrow 2^n = 256 = 2^8 \Leftrightarrow 2^n = 256 = 256 = 2^n = 256 = 256 = 2^n = 256$

2. Bài tấp tư luân

BÀI 1. Một cấp số nhân có số hạng đầu $u_1 = 3$ và công bội q = 2. Tính tổng 8 số hạng đầu của cấp số nhân.

Ta có
$$S_8 = \frac{u_1(1-q^8)}{1-q} = \frac{3(1-2^8)}{1-2} = 765.$$

BÀI 2 (thuộc chương giới hạn). Tính tổng $S=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{3^n}+\cdots$

🗭 Lời giải.

Đây là tổng của một cấp số nhân lùi vô hạn với $u_1 = 1, q = \frac{1}{3}$

Suy ra
$$S = \frac{u_1}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$$
.

BÀI 3. Cho cấp số nhân có q = -3, $S_6 = 730$. Tính u_1 .

🗭 Lời giải.

$$S_6 = u_1 \cdot \frac{1 - q^6}{1 - q} \Rightarrow u_1 = S_6 \cdot \frac{1 - q}{1 - q^6} = 730 \cdot \frac{1 - (-3)}{1 - (-3)^6} = 4.$$

BÀI 4. Một cấp số nhân (u_n) có $u_3 = 8$, $u_5 = 32$ và công bội q > 0. Tính tổng của 10 số hạng đầu tiên của cấp số nhân.

$$\begin{cases} u_3 = 8 \\ u_5 = 32 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 \cdot q^2 = 8 \\ u_1 \cdot q^4 = 32 \end{cases} \Rightarrow q^2 = \frac{32}{8} = 4 \Rightarrow q = 2, u_1 = 2$$
$$\Rightarrow S_{10} = u_1 \cdot \frac{1 - q^{10}}{1 - q} = 2 \cdot \frac{2 - 2^{10}}{1 - 2} = 2046.$$

BAI 5. Tính tổng S = 2 + 6 + 18 + ... + 13122

Lời giải.

Xét cấp số nhân có $u_1=2, q=3$. Khi đó $13122=u_1.q^{n-1}\Leftrightarrow 13122=2.3^{n-1}\Leftrightarrow n=9$ Vậy $S=S_9=u_1\frac{1-q^9}{1-q}=2.\frac{1-3^9}{1-3}=19682$

Vậy
$$S = S_9 = u_1 \frac{1 - q^9}{1 - q} = 2.\frac{1 - 3^9}{1 - 3} = 19682$$

BÀI 6. Tính tổng $S = 1 + 2 + 4 + 8 + \cdots + 1024$.

Lời giải.

Xét cấp số nhân có
$$u_1 = 1, q = 2$$
. Khi đó $1024 = u_1.q^{n-1} \Leftrightarrow 1024 = 1.2^{n-1} \Leftrightarrow n = 11$. Vậy $S = S_{11} = u_1 \frac{1 - q^{11}}{1 - q} = 1 \cdot \frac{1 - 2^{11}}{1 - 2} = 2047$.

BÀI 7. Một cấp số nhân có $u_1 = 1, q = 3$, biết $S_n = 3280$. Tìm n.

$$S_n = u_1 \frac{1 - q^n}{1 - q} = 1 \cdot \frac{1 - 3^n}{1 - 3} = 3280 \Rightarrow n = 8.$$

BÀI 8. Bốn số hạng liên tiếp của một cấp số nhân, trong đó số hạng thứ hai nhỏ hơn số hạng thứ nhất 35, còn số hạng thứ ba lớn hơn số hạng thứ tư 560. Tìm tổng của bốn số hạng trên, biết công bội mang giá trị dương.

Lời giải.

Theo đề ta có
$$\begin{cases} u_1 - u_2 = 35 \\ u_3 - u_4 = 560 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 - u_1 q = 35 \\ u_1 q^2 - u_1 q^3 = 560 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 (1 - q) = 35 & (1) \\ u_1 q^2 (1 - q) = 560 & (2) \end{cases}$$

Thay (1) vào (2) ta được $q^2 = 16 \Leftrightarrow q =$

Với q = 4 thay vào (1) ta được $u_1 = -\frac{35}{3}$

$$S_4 = u_1 \cdot \frac{1 - q^4}{1 - q} = -\frac{2975}{3}.$$

BÀI 9 (thuộc chương giới hạn). Tổng của một cấp số nhân lùi vô hạn bằng $\frac{1}{4}$, tổng ba số hạng đầu tiên của cấp số nhân đó bằng $\frac{7}{27}$. Tổng của số hạng đầu và công bội của cấp số nhân đó bằng

D Lời giải.

Gọi u_1 và q với (|q| < 1) lần lượt là số hạng đầu và cộng bội của cấp số nhân lùi vô hạn. Theo giả thiết, ta có

$$\begin{cases} \frac{u_1}{q-1} = \frac{1}{4} \\ u_1 + u_1 q + u_1 q^2 = \frac{7}{27} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{u_1}{q-1} = \frac{1}{4} \\ u_1(1-q^3) = \frac{7}{27}(1-q) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{u_1}{1-q} = \frac{1}{4} \\ q^3 = -\frac{1}{27} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = \frac{1}{3} \\ q = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

 $V_{ay} u_1 + q = 0.$

BÀI 10. Một du khách vào trường đua ngựa đặt cược, lần đầu đặt 20.000 đồng, mỗi lần sau tiền đặt gấp đôi số tiền lần đặt trước. Người đó thua 10 lần liên tiếp và thắng ở lần thứ 11. Hỏi du khách trên thắng hay thua bao nhiêu tiền?

🗭 Lời giải.

Số tiền du khách đặt trong mỗi lần (kể từ lần đầu) là một cấp số nhân có $u_1=20.000$ và công bội q=2. Du khách thua trong 10 lần liên tiếp đầu tiên nên tổng số tiền thua là

$$S_{10} = \frac{u_1(1-q^{10})}{1-a} = \frac{20000(1-2^{10})}{1-2} = 20000(2^{10}-1)(\hat{\text{dong}}).$$

Số tiền du khách thắng trong lần thứ 11 là $u_{11}=u_1q^{10}=20000.2^{10}$ (đồng). Ta có $u_{11}-S_{10}=20000>0$. Vậy du khách thắng 20000 đồng.

3. Câu hỏi trắc nghiệm

CÂU 1. Cho cấp số nhân $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n$ với công bội $q \ (q \neq 0, q \neq 1)$. Đặt

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n$$
.

Khẳng định nào sau đây là đúng?

🗩 Lời giải.

Ta có
$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n = u_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} = \frac{u_1 (q^n - 1)}{q - 1}.$$

CÂU 2. Cho cấp số nhân (u_n) có số hạng đầu $u_1 = 12$ và công sai $q = \frac{3}{2}$. Tổng 5 số hạng đầu của cấp số nhân bằng

$$\bigcirc 3 \frac{93}{4}$$
.

B
$$\frac{633}{2}$$
.

$$\bigcirc \frac{633}{4}.$$

$$\bigcirc \frac{93}{2}$$
.

🗭 Lời giải.

Gọi S_5 là tổng 5 số hạng đầu của cấp số nhân đã cho. Khi đó ta có

$$S_5 = u_1 \cdot \frac{1 - q^5}{1 - q} = 12 \cdot \frac{1 - \left(\frac{3}{2}\right)^5}{1 - \frac{3}{2}} = \frac{633}{4}.$$

CÂU 3. Cho cấp số nhân (u_n) có số hạng đầu $u_1=3$, công bội q=-2. Tính tổng 10 số hạng đầu tiên của cấp số nhân $(u_n).$

$$\bigcirc$$
 -1023.

$$(D)$$
 -513.

Lời giải.

Tổng của 10 số hạng đầu bằng

$$S_{10} = u_1 \cdot \frac{q^{10} - 1}{q - 1} = 3 \cdot \frac{(-2)^{10} - 1}{-2 - 1} = -1023.$$

CÂU 4. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_2 = -2$ và $u_5 = 54$. Tính tổng 1000 số hạng đầu tiên của cấp số nhân đã cho.

🗭 Lời giải.

Ta có
$$u_5 = u_2 \cdot q^3 \Leftrightarrow q^3 = \frac{u_5}{u_2} = \frac{54}{-2} = -27 = (-3)^3 \Rightarrow q = -3 \text{ và } u_1 = \frac{u_2}{q} = \frac{2}{3}.$$

Suy ra
$$S_{1000} = u_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1 - (-3)^{1000}}{1 + 3} = \frac{1 - 3^{1000}}{6}.$$

CÂU 5. Tính tổng tất cả các số hạng của một cấp số nhân, biết số hạng đầu bằng 18, số hạng thứ hai bằng 54 và số hạng cuối bằng 39366.

Lời giải.

$$u_1 = 18, u_2 = 54 \Rightarrow q = 3.$$

$$u_n = 39366 \Leftrightarrow u_1 \cdot q^{n-1} = 39366 \Leftrightarrow 18 \cdot 3^{n-1} = 39366 \Leftrightarrow 3^{n-1} = 3^7 \Leftrightarrow n = 8.$$

Vây
$$S_8 = 18 \cdot \frac{1 - 3^8}{1 - 3} = 59040.$$

Chọn đáp án B.....

CÂU 6. Dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n \end{cases}$ với $n \ge 1$. Tính tổng $S = u_1 + u_2 + \dots + u_{10}$.

$$A S = \frac{1023}{2048}$$

$$(\mathbf{D}) S = 2.$$

Ta có các số hạng của dãy số (u_n) là $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \dots, \frac{1}{2^n}$. Khi đó (u_n) lập thành một cấp số nhân có $u_1 = 1$ và công bội $q = \frac{1}{2}$.

Suy ra
$$S = u_1 + u_2 + \dots + u_{10} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^9} = \frac{1 \cdot \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{10}\right]}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1023}{512}.$$

CÂU 7. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 = -6$ và q = -2. Tổng n số hạng đầu tiên của cấp số nhân đã cho bằng 2046. Tìm n.

$$\bigcirc n = 9.$$

B)
$$n = 12$$
.

$$n = 11.$$

$$n = 10.$$

🗭 Lời giải.

Ta có
$$2046 = S_n = u_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} = -6 \cdot \frac{1 - (-2)^n}{1 - (-2)} = 2((-2)^n - 1) \Rightarrow (-2)^n = 1024 \Leftrightarrow n = 10.$$

Chọn đáp án D.....

CÂU 8. Tổng 100 số hạng đầu của dãy số (u_n) với $u_n = 2n - 1$ là

$$(B)$$
 $2^{100} - 1$.

Lời giải.

Ta có (u_n) là cấp số cộng công sai d=2 và $u_1=1$.

Do đó
$$S_n = n \cdot u_1 + \frac{n(n-1)}{2} \cdot d = 100 \cdot 1 + \frac{100 \cdot 99}{2} \cdot 2 = 10000.$$

Chon đáp án (C)....

CÂU 9. Cho dãy số (u_n) với $u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n + 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Tính $S_{2019} = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_{2019}$.

A
$$S_{2019} = 2019 + \frac{1}{2^{2019}}$$
. **B** $S_{2019} = \frac{4039}{2}$.

$$\mathbf{C}$$
 $S_{2019} = \frac{6057}{2}$.

$$\mathbf{C}$$
 $S_{2019} = \frac{6057}{2}$. \mathbf{D} $S_{2019} = 2020 - \frac{1}{2^{2019}}$.

🗭 Lời giải.

Ta có

$$S_{2019} = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_{2019}$$

$$= \left(\frac{1}{2} + 1\right) + \left[\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1\right] + \left[\left(\frac{1}{2}\right)^3 + 1\right] + \dots + \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{2019} + 1\right]$$

$$= 2019 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^{2019}$$

$$= 2019 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{2019}}{1 - \frac{1}{2}} = 2019 + 1 - \frac{1}{2^{2019}}$$

$$= 2020 - \frac{1}{2^{2019}}.$$

CÂU 10. Cho $S=11+101+1001+\cdots+\underbrace{1000\ldots01}$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

(A)
$$S = 10 \left(\frac{10^n - 1}{9} \right)$$
. (B) $S = 10 \left(\frac{10^n - 1}{9} \right) - n$. (C) $S = 10 \left(\frac{10^n - 1}{9} \right) + n$. (D) $S = \left(\frac{10^n - 1}{9} \right) + n$.

$$\bigcirc S = 10 \left(\frac{10^n - 1}{9} \right) + n.$$

Lời giải.

Ta có

$$S = (10+1) + (10^{2}+1) + (10^{3}+1) + \dots + (10^{n}+1)$$

$$= (10+10^{2}+10^{3}+\dots+10^{n}) + \underbrace{1+1+1+\dots+1}_{n \text{ số } 1}$$

$$= 10\left(\frac{10^{n}-1}{9}\right) + n.$$

Chọn đáp án (C).....

CÂU 11. Gọi $S=1+11+111+\cdots+\underbrace{111\dots 1}_{(n\text{ số }1)}$ thì S nhận giá trị nào sau đây?

$$\boxed{ \pmb{\mathbb{A}} } \; S = \frac{1}{9} \left[10 \left(\frac{10^n - 1}{9} \right) - n \right].$$

$$\mathbf{B} S = \frac{10^n - 1}{81}.$$

©
$$S = 10 \left(\frac{10^n - 1}{81} \right) - n.$$

🗭 Lời giải.

Ta có
$$S = \frac{1}{9}(9 + 99 + 999 + \dots + \underbrace{99\dots9}_{n \text{ só } 9}) = \frac{1}{9} \cdot \left[10 \cdot \frac{1 - 10^n}{1 - 10} - n\right].$$

Chọn đáp án A.....

CÂU 12. Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $\begin{cases} u_1=1 \\ u_n=2u_{n-1}+1, n\geq 2 \end{cases}$. Tổng $S=u_1+u_2+\cdots+u_{20}$ là

$$\mathbf{A}$$
 $2^{21} - 20$.

$$(B)$$
 $2^{21} - 22.$

$$(c)$$
 2^{20}

$$(\mathbf{D}) 2^{20} - 20$$

🗩 Lời giải.

Dự đoán công thức số hạng tổng quát $u_n=2^n-1$ (Chứng minh bằng phương pháp quy nạp TH). $S=2^1+2^2+\cdots+2^{20}-20=2\cdot\frac{1-2^{20}}{1-2}-20=2^{21}-22.$

$$S = 2^1 + 2^2 + \dots + 2^{20} - 20 = 2 \cdot \frac{1 - 2^{20}}{1 - 2} - 20 = 2^{21} - 22$$

Chọn đáp án (B).....

CÂU 13. Biết rằng $S = 1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 3^2 + \dots + 11 \cdot 3^{10} = a + \frac{21 \cdot 3^b}{4}$. Tính $P = a + \frac{b}{4}$.

$$\bigcirc P = 3.$$

$$(\mathbf{B}) P = 4.$$

$$P = 1.$$

$$P=2.$$

🗭 Lời giải.

Từ giả thiết suy ra $3S=3+2\cdot 3^2+3\cdot 3^3+\cdots+11\cdot 3^{11}.$ Do đó

$$-2S = S - 3S = 1 + 3 + 3^{2} + \dots + 3^{10} - 10 \cdot 3^{11}$$
$$= \frac{1 - 3^{11}}{1 - 3} - 11 \cdot 3^{11} = -\frac{1}{2} - \frac{21 \cdot 3^{11}}{2} \Rightarrow S = \frac{1}{4} + \frac{21}{4} \cdot 3^{11}.$$

$$\text{Vì } S = \frac{1}{4} + \frac{21 \cdot 3^{11}}{4} = a + \frac{21 \cdot 3^b}{4} \Rightarrow a = \frac{1}{4}, \ b = 11 \Rightarrow P = \frac{1}{4} + \frac{11}{4} = 3.$$

Kết hợp cấp số cộng và cấp số nhân

Nhắc lai tính chất CSC, CSN

- \odot 3 số a, b, c theo thứ tự lập thành CSC thì a + c = 2b.
- \odot 3 số a, b, c theo thứ tư lập thành CSN thì $a.c = b^2$.

1. Ví du minh hoa

VÍ DỤ 1. Ba số x, y, z theo thứ tự đó lập thành một CSN với công bội $q(q \neq 1)$, đồng thời các số x, 2y, 3z theo thứ tự đó lập thành một CSC với công sai d . Hãy tìm q?

Lời giải.

Ta có
$$x + 3z = 2.2y \Leftrightarrow x + 3xq^2 = 2.2xq \Leftrightarrow 1 + 3q^2 = 4q \Leftrightarrow \begin{bmatrix} q = \frac{1}{3} \\ q = 1(L) \end{bmatrix}$$

VÍ DỤ 2. Biết rằng a,b,c là ba số hạng liên tiếp của một CSC và a,c,b là ba số hạng liên tiếp của một CSN, đồng thời a + b + c = 30. Tim a, b, c.

🗭 Lời giải.

Theo đề ta có
$$\begin{cases} a+c=2b & (1) \\ ab=c^2 & (2) \\ a+b+c=30 & (3) \end{cases}$$
 Từ (1) và (3) ta được $3b=30 \Leftrightarrow b=10$

Thay
$$b = 10$$
 vào (1), (2) ta được
$$\begin{cases} a + c = 20 \\ 10a = c^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} c = 10, a = 10 \ (L) \\ c = -20, a = 40(N) \end{cases}$$

Vây
$$a = 40, b = 10, c = -20$$

VÍ DỤ 3. Ba số x, y, z theo thứ tự đó lập thành một CSN. Ba số x, y - 4, z theo thứ tự đó lập thành CSN. Đồng thời các số x, y-4, z-9 theo thứ tự đó lập thành CSC. Tìm x, y, z.

Theo đề ta có
$$\begin{cases} xz = y^2 & (1) \\ xz = (y-4)^2 & (2) \\ x + (z-9) = 2(y-4) & (3) \end{cases}$$
 Từ (1) và (2) ta có $y^2 = (y-4)^2 \Leftrightarrow y = 2$

Thế
$$y = 2$$
 vào (1) và (3) ta được
$$\begin{cases} xz = 4 \\ x + z = 5 \end{cases} \Rightarrow x = 4, z = 1 \text{ hoặc } x = 1, z = 4$$

VÍ DỤ 4. Cho a,b,c là ba số hạng liên tiếp của một CSN và a,b,c-4 là ba số hạng liên tiếp của một CSC, đồng thời a, b-1, c-5 là ba số hạng liên tiếp của một CSN. Tìm a, b, c biết a, b, c là các số nguyên.

🗭 Lời giải.

Theo đề ta có
$$\begin{cases} ac = b^2 & (1) \\ a + c - 4 = 2b & (2) \\ a(c - 5) = (b - 1)^2 & (3) \end{cases}$$
 Thay (1) vào (3): $b^2 - 5a = b^2 - 2b + 1 \Leftrightarrow b = \frac{5a + 1}{2}$ Thay vào (2) ta được $a + c - 4 = 5a + 1 \Leftrightarrow c = 4a + 5$

Thay (1) vào (3):
$$b^2 - 5a = b^2 - 2b + 1 \Leftrightarrow b = \frac{5a+1}{2}$$

Thế
$$b,c$$
 theo a vào (1) ta được $9a^2-10a+1=0 \Leftrightarrow a=1 \lor a=\frac{1}{9}(L)$ Vậy $a=1,b=3,c=9$

VÍ DU 5. Cho 4 số nguyên dương, trong đó 3 số đầu lập thành một CSC, 3 số hang sau thành lập CSN. Biết rằng tổng của số hạng đầu và số hạng cuối là 37, tổng của hai số hạng giữa là 36. Tìm tổng 4 số đó

Lời giải.

Gọi 4 số cần tìm lần lượt là a, b, c, d

a,b,c là 3 số hạng liên tiếp của CSC. Ta có a+c=2b (1)

b, c, d là 3 số hạng liên tiếp của CSN. Ta có $bd = c^2$ (2)

Theo giả thuyết ta có
$$\begin{cases} a+d=37 & (3) \\ b+c=36 & (4) \end{cases}$$
 Từ $(4)\Rightarrow b=36-c$ thay vào (1) ta được $a=72-3c$, thay a vào (3) ta được $d=-35+3c$

Thế
$$b, d$$
 vào (2) ta được $(36 - c)(-35 + 3c) = c^2 \Rightarrow c = 20 \lor c = \frac{63}{4}(L)$

Vây
$$c = 20, a = 12, b = 16, d = 95 \Rightarrow S = a + b + c + d = 143$$

2. Bài tấp tư luân

BÀI 1. Biết x, y, x + 4 theo thứ tự lập thành cấp số cộng và x + 1, y + 1, 2y + 2 theo thứ tự lập thành cấp số nhân với x, ylà số thực dương. Tính x + y.

🗭 Lời giải.

Theo giả thiết ta có:

Theo gia thief ta co:
$$\begin{cases} x + (x+4) = 2y \\ (x+1)(2y+2) = (y+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x+2 \\ (x+1)(2x+6) = (x+3)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \Rightarrow y = 3 \\ x = -3 \Rightarrow y = -1 \end{cases}$$

BÀI 2. Cho 3 số a, b, c theo thứ tự tạo thành một cấp số nhân với công bội khác 1. Biết cũng theo thứ tự đó chúng lần lượt là số hạng thứ nhất, thứ tư và thứ tám của một cấp số cộng với công sai $d \neq 0$. Tính $\frac{a}{d}$

Lời giải.

a, b, c lần lượt là số hạng thứ nhất, thứ tư, thứ tám của một CSC với công sai d

ta có
$$\begin{cases} b = a + 3d \\ c = a + 7d \end{cases}$$

Mặt khác a,b,c là 3 số hạng liên tiếp của CSN nên

$$a.c = b^2 \Leftrightarrow a(a+7d) = (a+3d)^2 \Leftrightarrow a^2+7ad = a^2+6ad+9d^2 \Leftrightarrow 9d^2 = ad \Leftrightarrow \frac{a}{d} = 9.$$

BÀI 3. Tìm tích các số dương a và b sao cho a, a+2b, 2a+b lập thành một cấp số cộng và $(b+1)^2, ab+5, (a+1)^2$ lập thành một cấp số nhân.

🗭 Lời giải.

Theo tính chất CSC ta có a + (2a + b) = 2(a + 2b) (1)

Theo tính chất CSN ta có $(b+1)^2 \cdot (a+1)^2 = (ab+5)^2$ (2)

Theo thin that CSIV ta to
$$(b+1)$$
 $(a+1) = (ab+3)$ (2)
Từ (1) ta được $a = 3b$, thay vào (2) ta được $(b+1)^2(3b+1)^2 = (3b^2+5)^2$
 $\Leftrightarrow \begin{bmatrix} (b+1)(3b+1) = (3b^2+5) \\ (b+1)(3b+1) = -(3b^2+5) \end{cases} \Leftrightarrow b = 1, a = 3 \Rightarrow ab = 3.$

BÀI 4. $a, b, c \ (a \neq b \neq c)$ là ba số hạng liên tiếp của một cấp số cộng và b, c, a là ba số hạng liên tiếp của một cấp số nhân, đồng thời a.b.c = 125. Tìm a, b, c.

Lời giải.

a, b, c là ba số hạng liên tiếp của cấp số cộng, nên có a + c = 2b.

b,c,a là ba số hạng liên tiếp của một cấp số nhân, nên có $b.a=c^2$.

Ta có hệ
$$\begin{cases} a+c=2b & (1) \\ b.a=c^2 & (2) \\ a.b.c=125 & (3) \end{cases}$$
 Thay (2) vào (3) ta được $c^3=125 \Rightarrow c=5$

Thay
$$c=5$$
 vào (1), (2) ta được hệ
$$\begin{cases} a+5=2b \\ ab=25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2b-5 \\ 2b^2-5b-25=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} b=5\Rightarrow a=5 \\ b=-\frac{5}{2}\Rightarrow a=-10 \end{cases}$$

Vậy
$$a = -10, b = -\frac{5}{2}, c = 5.$$

BÀI 5. Một cấp số cộng và một cấp số nhân đều là các dãy tăng các số hạng thứ nhất của hai dãy số đều bằng 3, các số hạng thứ hai bằng nhau. Tỉ số giữa các số hạng thứ ba của CSN và CSC là $\frac{9}{5}$. Tìm tích ba số hạng của cấp số cộng thỏa mãn tính chất trên.

Lời giải.

Goi u_1, u_2, u_3 là 3 số hang liên tiếp của CSC.

Gọi a_1, a_2, a_3 là 3 số hạng liên tiếp của CSN

Theo đề ta có hệ
$$\begin{cases} u_1 = a_1 = 3 \\ u_2 = a_2 \\ a_3 = \frac{9}{5}u_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = a_1 = 3 \\ 3 + d = 3q \\ 5(3q^2) = 9(3 + 2d) \end{cases} \Rightarrow q = 3 \lor q = \frac{3}{5}$$

Chọn q=3 vì dãy tăng, khi đó d=6

Vậy 3 số hạng của cấp số cộng là 3; 9; $15 \Rightarrow 3 \cdot 9 \cdot 15 = 405$

BÁI 6. Một CSC và CSN đều có số hạng đầu tiên là bằng 5, số hạng thứ hai của CSC lớn hơn số hạng thứ hai của CSN là 10, còn các số hạng thứ 3 của hai cấp số thì bằng nhau. Tìm tổng các số hạng của cấp số cộng biết công bội của cấp số nhân không âm.

Lời giải.

Gọi u_1, u_2, u_3 là 3 số hạng liên tiếp của CSC với công sai d.

Gọi a_1, a_2, a_3 là 3 số hạng liên tiếp của CSN với công bội q.

Theo đề bài ta có:
$$\begin{cases} u_1 = a_1 = 5 \\ u_2 - a_2 = 10 \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = a_1 = 5 \\ u_1 + d - a_1 q = 10 \Leftrightarrow \\ u_1 + 2d = a_1 q^2 \end{cases} \begin{cases} u_1 = a_1 = 5 \\ d = 5 + 5q \Rightarrow q = 3 \lor q = -1(L) \\ 5 + 2d = 5q^2 \end{cases}$$

BÀI 7. Ba số khác nhau có tổng bằng 114 có thể coi là ba số hang liên tiếp của một CSN, hoặc coi là số hang thứ nhất, thứ tư và thứ hai mươi lăm của một CSC. Tìm ba số đó.

Lời giải.

Gọi u_1, u_2, u_3 là 3 số hạng liên tiếp của CSN với công bội q.

Theo đề $u_1=a_1,u_2=a_4,u_3=a_{25}$ với a_1,a_4,a_{25} là 3 số hạng của CSC với công sai d.

Ta có
$$\begin{cases} a_4 = a_1 + 3d \\ a_{25} = a_1 + 24d \end{cases} \Rightarrow 8a_4 - a_{25} = 7a_1 \Leftrightarrow 8u_2 - u_3 = 7u_1 \Leftrightarrow 8u_1q - u_1q^2 = 7u_1 \Leftrightarrow q^2 - 8q + 7 = 0 \Leftrightarrow q = 1(L) \lor q = 7(N)$$

Theo đề ta cũng có $u_1 + u_2 + u_3 = 114 \Leftrightarrow u_1 + u_1q + u_1q^2 = 114 \Rightarrow u_1 = 2$ Vây 3 số cần tìm là 2; 14; 98.

BÀI 8. Ba số khác nhau có tổng là 217 có thể coi là các số hạng liên tiếp của một CSN hoặc là các số hạng thứ 2 thứ 9 và thứ 44 của một CSC. Tìm 3 số đó.

🗭 Lời giải.

Gọi u_1, u_2, u_3 là 3 số hạng liên tiếp của CSN với công bội q.

Theo đề $u_1=a_2,u_2=a_9,u_3=a_{44}$ với a_2,a_9,a_{44} là 3 số hạng của CSC với công sai d.

Ta có
$$\begin{cases} a_9 = a_2 + 7d \\ a_{44} = a_2 + 42d \end{cases} \Rightarrow 6a_9 - a_{44} = 5a_2 \Leftrightarrow 6u_2 - u_3 = 5u_1 \Leftrightarrow 6u_1q - u_1q^2 = 5u_1$$

$$\Leftrightarrow q^2 - 6q + 5 = 0 \Leftrightarrow q = 1(L) \lor q = 5(N)$$

Theo đề ta cũng có $u_1 + u_2 + u_3 = 217 \Leftrightarrow u_1 + u_1q + u_1q^2 = 217 \Rightarrow u_1 = 7$ Vậy 3 số cần tìm là 7; 35; 175.

7

Bài toán thực tế

Bài toán lãi kép: Một người gửi tiết kiệm vào ngân hàng một số tiền A với lãi suất r% mỗi kì hạn. Số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn ban đầu để tính lãi cho kì hạn tiếp theo. Hỏi sau n kì hạn thì người đó có tất cả bao nhiêu tiền? Lời giải: Gọi u_n là số tiền người đó có sau n kì hạn. Ta có:

- \odot Số tiền người đó có sau kì hạn thứ nhất là: $u_1 = A + A \cdot r\% = A(1 + r\%)$.
- \odot Số tiền người đó có sau n kì hạn là: $u_n = u_{n-1} + u_{n-1} \cdot r\% = u_n (1 + r\%)$.

Suy ra dãy số (u_n) là một cấp số nhân với số hạng đầu $u_1 = A(1 + r\%)$ và công bội q = 1 + r%. Vậy số tiền người đó có sau n kì hạn là: $u_n = A(1 + r\%)^n$.

1. Ví du minh hoa

VÍ DỤ 1. Trong một lọ nuôi cấy vi khuẩn, ban đầu có 5 000 con vi khuẩn và số lượng vi khuẩn tăng lên thêm 8% mỗi giờ. Hỏi sau 5 giờ thì số lượng vi khuẩn là bao nhiêu?

🗭 Lời giải.

Ta có A=5~000 là số lượng vi khuẩn ban đầu, r=8%=0.08 là tỉ lệ gia tăng vi khuẩn sau một giờ.

- \odot Tại thời điểm sau 1 giờ: $u_1 = 5000 + 5000 \cdot 0.08 = 5000 \cdot (1.08)$.
- **②** Tại thời điểm sau n giờ: $u_n = u_{n-1} + u_{n-1} \cdot 0.08 = u_{n-1} \cdot (1.08)$.

Do đó ta có thể nhận thấy rằng, số lượng vi khuẩn ở thời gian n giờ là một cấp số nhân có số hạng đầu $u_1 = 5000.1, 08$ và công bội q = 1,08.

Vậy số lượng vi khuẩn sau 5 giờ là $u_5 = 5~000 \cdot (1.08)^5 \approx 7346$ (vi khuẩn).

VÍ DỤ 2. Người ta thiết kế một cái tháp gồm 10 tầng theo cách: Diện tích bề mặt trên của mỗi tầng bằng nửa diện tích bề mặt trên của tầng ngay bên dưới và diện tích bề mặt của tầng 1 bằng nửa diện tích bề mặt để tháp. Biết diện tích bề mặt đế tháp là 12 288 m², tính diện tích bề mặt trên cùng của tháp.

Lời giải.

Gọi S là diện tích mặt để và T_1, T_2, \dots, T_{10} là diện tích bề mặt của tầng 1, tầng 2, ..., tầng 10. Khi đó, ta có

$$T_1 = \frac{1}{2} \cdot S;$$

 $T_n = \frac{1}{2} \cdot T_{n-1}$

Suy ra (T_n) là cấp số nhân có số hạng đầu $T_1 = \frac{1}{2} \cdot 12288 = 6144 \text{ m}^2$ và công bội $q = \frac{1}{2}$.

Vậy diện tích bề mặt trên cùng của tháp là $T_{10} = \frac{1}{2^{10}} \cdot 12288 = 12 \text{ m}^2$.

VÍ DỤ 3. Dân số trung bình của Việt Nam năm 2020 là 97,6 triệu người, tỉ lệ tăng dân số là 1,14%/năm.

(Nguồn: Niên giám thống kê của Việt Nam năm 2020, NXB Thống kê, 2021)

Giả sử tỉ lệ tăng dân số không đổi qua các năm.

- a) Sau 1 năm, dân số của Việt Nam sẽ là bao nhiêu triệu người (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?
- b) Viết công thức tính dân số Việt Nam sau n năm kể từ năm 2020.

a) Sau 1 năm, dân số của Việt Nam sẽ là

$$u_1 = 97.6 + 97.6 \cdot 0.0114 = 97.6 \cdot (1 + 0.0114)$$

= $97.6 \cdot 1.0114 \approx 98.7$ (triêu người).

b) Gọi u_n là dân số của Việt Nam sau n năm. Do tỉ lệ tăng dân số hàng năm là 1,14% nên ta có

$$u_n = u_{n-1} + u_{n-1} \cdot 0,0114 = u_{n-1} \cdot (1+0,0114)$$

= $u_{n-1} \cdot 1,0114$ với $n \ge 2$.

Do đó, (u_n) là cấp số nhân có số hạng đầu $u_1=97.6\cdot 1{,}0114$, công bội $q=1{,}0114$. Vậy dân số của Việt Nam sau n năm kể từ năm 2020 là

$$u_n = 97.6 \cdot 1.0114 \cdot 1.0114^{n-1} = 97.6 \cdot 1.0114^n$$
 (triệu người).

VÍ DỤ 4. Bác Linh gửi vào ngân hàng 100 triệu đồng tiền tiết kiệm với hình thức lãi kép, kì hạn 1 năm với lãi suất 6%/năm. Viết công thức tính số tiền (cả gốc và lãi) mà bác Linh có được sau n năm (giả sử lãi suất không thay đổi qua các năm). \bigcirc Lời giải.

Gọi u_n là số tiền (cả gốc lẫn lãi) mà bác Linh có được sau n năm.

Do lãi suất 1 năm là 6% nên ta có

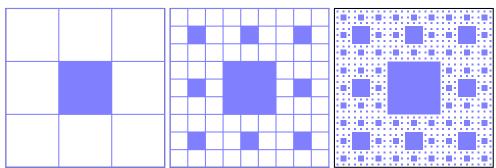
$$u_n = u_{n-1} + u_{n-1} \cdot 0.06 = u_{n-1} \cdot (1+0.06)$$

= $u_{n-1} \cdot 1.06$ với $n > 2$.

Do đó, (u_n) là cấp số nhân có số hạng đầu $u_1=100\cdot 1,06$ (triệu đồng), công bội q=1,06. Vậy số tiền mà bác Linh có được sau n năm là

$$u_n = 100 \cdot 1,06^n$$
 (triệu đồng).

VÍ DỤ 5. Một hình vuông có cạnh 1 đơn vị dài được chia thành chín hình vuông nhỏ hơn và hình vuông ở chính giữa được tô màu xanh như hình. Mỗi hình vuông nhỏ hơn lại được chia thành chín hình vuông con, và mỗi hình vuông con ở chính giữa lại được tô màu xanh. Nếu quá trình này được tiếp tục lặp lại năm lần, thì tổng diện tích các hình vuông được tô màu xanh là bao nhiêu?



🗭 Lời giải.

Lần phân chia thứ nhất, 1 hình vuông thành 9 hình vuông con, diện tích hình vuông tô màu xanh là $u_1 = \frac{1}{9}$.

Lần phân chia thứ hai, 8 hình vuông thành 9 hình vuông con, diện tích hình vuông tô màu xanh tăng thêm là $u_2 = \frac{1}{9} \left(\frac{8}{9} \right)$.

Lần phân chia thứ ba, 8^2 hình vuông thành 9 hình vuông con, diện tích hình vuông tô màu xanh tăng thêm là $u_3 = \frac{1}{9} \left(\frac{8}{9}\right)^2$.

Lần phân chia thứ tư, 8^3 hình vuông thành 9 hình vuông con, diện tích hình vuông tô màu xanh tăng thêm là $u_4 = \frac{1}{9} \left(\frac{8}{9} \right)^3$.

Lần phân chia thứ năm, 8^4 hình vuông thành 9 hình vuông con, diện tích hình vuông tô màu xanh tăng thêm là $u_5 = \frac{1}{9} \left(\frac{8}{9}\right)^4$.

Như vậy diện tích các hình vuông tăng thêm sau mỗi lần chia tạo thành cấp số nhân có công bội là $q = \frac{8}{9}$, số hạng đầu là $u_1 = \frac{1}{9}$.

Do đó, tổng diện tích hình vuông tô màu xanh sau 5 lần chia là

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 = \frac{1 - q^5}{1 - q} \cdot u_1 = \frac{1 - \left(\frac{8}{9}\right)^5}{1 - \frac{8}{9}} \cdot \frac{1}{9} = \frac{26281}{39366}.$$

VÍ DỤ 6. Một khay nước có nhiệt độ 23° được đặt vào ngăn đá của tủ lạnh. Biết sau mỗi giờ, nhiệt độ của nước giảm 20%. Tính nhiệt đô của khay nước đó sau 6 giờ theo đơn vi đô C.

D Lời giải.

Nhiệt độ sau mỗi giờ của khay nước theo thứ tự lập thành cấp số nhân với $u_1=23.(1-20\%)$ và q=(1-20%).

Ta có $u_6 = u_1 \cdot q^5 = 23 \cdot (1 - 20\%)^6 \approx 7, 5.$

Nhiệt độ của khay nước sau 6 giờ là $\approx 6,0^{\circ}$.

VÍ DỤ 7. Chu kì bán rã của nguyên tố phóng xạ poloni 210 là 138 ngày, nghĩa là sau 138 ngày, khối lượng của nguyên tố đó chi còn một nửa (theo: https://vi.wikipedia.org/wiki/Poloni-210). Tính khối lượng còn lại của 20 gam poloni 210 sau:

a) 690 ngày;

b) 7314 ngày (khoảng 20 năm).

🗩 Lời giải.

a) Ta có
$$\frac{690}{138} = 5$$
 suy ra khối lượng còn lại sau 690 này là $\frac{20}{2^5} = 0,625$ gam;

b) Ta có
$$\frac{7314}{138}=53$$
 suy ra khối lượng còn lại sau 7314 này là $\frac{20}{2^{53}}$ gam.

VÍ DỤ 8. Tế bào E.Coli trong điều kiện nuôi cấy thích hợp cứ 20 phút lại phân đôi một lần. Hỏi sau 24 giờ, tế bào ban đầu sẽ phân chia thành bao nhiều tế bào?

🗭 Lời giải.

Lần phân chia thứ nhất, 1 tế bào thành 2 tế bào, số tế bào lần 1 phân chia là $u_1 = 2$.

Lần phân chia thứ hai 2, số tế bào lần 2 phân chia là $u_2 = 2 \cdot 2 = u_1 \cdot 2$.

Lần phân chia thứ 3 có 4 tế bào phân chia, số tế bào lần 3 phân chia là $u_3 = 2 \cdot u_2$.

Như vậy một tế bào phân đôi sẽ tạo thành cấp số nhân có công bội là 2, số hạng đầu là $u_1 = 2$.

Sau n lần phân chia từ một tế bào phân được thành $u_n = 2^{n-1}u_1$.

Đổi 24 giờ = $24 \cdot 60 = 72 \cdot 20$ (phút) $\Rightarrow 24$ giờ gấp 72 lần 20 phút.

Do đó, sau 24 giờ số tế bào nhận được là $u_{72} = 2^{71} \cdot 2 = 2^{72}$ (tế bào).

2. Bài tấp tư luân

BÀI 1. Một quốc gia có dân số năm 2011 là P triệu người. Trong 10 năm tiếp theo, mỗi năm dân số tăng a%. Chứng minh rằng dân số các năm từ năm 2011 đến năm 2021 của quốc gia đó tạo thành cấp số nhân. Tìm công bội của cấp số nhân này.

🗭 Lời giải.

Coi ngày điều tra dân số năm 2011 và năm 2021 trùng nhau thì từ năm 2011 đến năm 2021 là 10 năm. Vậy dân số nước ta tính đến năm 2021 là

$$u_{10} = P \cdot (1 + a\%)^{10} .$$

Ta có

$$u_1 = P \cdot (1 + a\%)^1$$
.

$$u_2 = P \cdot (1 + a\%)^2$$
.

Và công bội của cáp số nhân này là $\frac{u_2}{u_1} = q = \frac{P \cdot (1 + a\%)^2}{P \cdot (1 + a\%)^1} = 1 + a\%.$

BÀI 2. Vào năm 2020, dân số của một quốc gia là khoảng 97 triệu người và tốc độ tăng trưởng dân số là 0,91%. Nếu tốc độ tăng trưởng dân số này được giữ nguyên hằng năm, hãy ước tính dân số của quốc gia đó vào năm 2030.

🗭 Lời giải.

Dân số năm 2021 tăng lên so với năm 2020 là 97 · 0,91% triệu người.

Dân số năm 2021 là

$$97 + 97 \cdot 0.91\% = 97 \cdot (1 + 0.91\%)$$
 triệu người.

Dân số năm 2022 tăng lên so với năm 2021 là $97 \cdot (1 + 0.91\%) \cdot 0.91\%$ triệu người.

Dân số năm 2022 là

$$97 \cdot (1 + 0.91\%) + 97 \cdot (1 + 0.91\%) \cdot 0.91\% = 97 \cdot (1 + 0.91\%)^2$$
 triệu người.

Dân số năm 2023 tăng lên so với năm 2021 là $97 \cdot (1 + 0.91\%)^2 \cdot 0.91\%$ triệu người.

Dân số năm 2023 là

$$97 \cdot (1 + 0.91\%)^2 + 97 \cdot (1 + 0.91\%)^2 \cdot 0.91\% = 97 \cdot (1 + 0.91\%)^3$$
 triệu người.

Tương tự vậy ta có dân số năm 2030 là $97 \cdot (1 + 0.91\%)^{10} = 106,1973784$ triệu người.

BÀI 3. Một tỉnh có 2 triệu dân vào năm 2020 với tỉ lệ tăng dân số là 1 %/năm. Gọi u_n là số dân của tỉnh đó sau n năm. Giả sử tỉ lệ tăng dân số là không đổi.

- a) Viết công thức tính số dân của tỉnh đó sau n năm kể từ năm 2020.
- b) Tính số dân của tỉnh đó sau 10 năm kể từ năm 2020.

a) Với u_n là số dân của tỉnh đó sau n năm.

Ta có $u_1 = 2 \cdot 1,01$ (triệu dân).

 $u_{n+1} = u_n + u_n \cdot 0.01 = 1.01u_n.$

Do đó, (u_n) là cấp số nhân với số hạng đầu $u_1 = 2 \cdot 1,01$ và công bội q = 1,01.

Vậy công thức tính số dân của tỉnh đó sau n năm là $u_n = u_1 q^{n-1} \Rightarrow u_n = 2 \cdot 1,01^n$.

b) Số dân của tỉnh đó sau 10 năm kể từ năm 2020 là $u_{10}=2\cdot 1{,}01^10=2{,}209$ (triệu dân).

t BÀI 4. Giả sử một thành phố có dân số năm 2022 là khoảng 2,1 triệu người và tốc độ gia tăng dân số trung bình mỗi năm là 0.75%.

- a) Dự đoán dân số của thành phố đó vào năm 2032;
- b) Nếu tốc độ gia tăng dân số vẫn giữ nguyên như trên thì uớc tính vào năm nào dân số của thành phố đó sẽ tăng gấp đôi so với năm 2022?

🗭 Lời giải.

a) Giả sử dân số năm 2022 là $u_1 = 2,1 \cdot 10^6$ thì dân số năm 2023 là $u_2 = u_1 + 0,0075u_1 = 1,0075u_1$.

Tương tự dân số năm 2024 là $u_3 = 1,0075u_2$.

Do đó dân số của thành phố qua các năm lập thành một cấp số nhân với $u_1 = 2,1 \cdot 10^6$; q = 1,0075.

Vậy dân số năm 2032 tương ứng với $u_{11} = u_1 \cdot q^{10} = 2, 1 \cdot 10^6 \cdot 1,0075^{10} \approx 2262924$ (người).

b) Giả sử đến năm thứ n thì dân số gấp đôi năm 2022.

Suy ra $u_n = 2u_1 \Leftrightarrow q^{n-1} = 2 \Leftrightarrow 1,0075^{n-1} = 2 \Leftrightarrow n \approx 93,7.$

Vậy 94 năm sau tức là năm 2116 thì dân số thành phố sẽ gấp đôi năm 2022.

BÀI 5. Giả sử anh Tuấn kí hợp đồng lao động trong 10 năm với điều khoản về tiền lương như sau: Năm thứ nhất, tiền lương của anh Tuấn là 60 triệu. Kể từ năm thứ hai trở đi, mỗi năm tiền lương của anh Tuấn được tăng lên 8%. Tính tổng số tiền lương anh Tuấn lĩnh được trong 10 năm đi làm (đơn vị: triệu đồng, làm tròn đến hàng phần nghìn).

D Lời giải.

Gọi u_n là số tiền lương (triệu đồng) anh Tuấn được lĩnh ở năm làm việc thứ n. Ta có: $u_1 = 60$;

$$u_n = u_{n-1} + u_{n-1} \cdot 0.08 = u_{n-1} \cdot (1 + 0.08) = u_{n-1} \cdot 1.08.$$

Do đó, (u_n) là cấp số nhân có số hạng đầu $u_1 = 60$, công bội q = 1,08. Áp dụng công thức tính tổng S_n , ta có tổng số tiền lương anh Tuấn lĩnh được trong 10 năm đi làm là

$$S_{10} = \frac{60 \cdot (1 - 1,08^{10})}{1 - 1.08} \approx 869,194$$
 (triệu người).

BÀI 6. Một công ty xây dựng mua một chiếc máy ủi với giá 3 tỉ đồng. Cứ sau mỗi năm sử dụng, giá trị của chiếc máy ủi này lại giảm 20% so với giá trị của nó trong năm liền trước đó. Tìm giá trị còn lại của chiếc máy ủi đó sau 5 năm sử dụng.

Lời giải.

G : 15 G:4 :

Gọi u_n là Giá trị của máy ủi sau n sử dụng.

Dãy số (u_n) là một cấp số nhân có $u_1 = 3.0, 8, q = 0.8$.

Số hạng tổng quát của cấp số nhân này là $u_n = 3 \cdot 0.2^n$.

Ta có $u_5 = 3 \cdot 0.8^5 = 0.98304$.

Tương ứng giá trị của chiếc máy ủi sau 5 năm xấp xỉ 983 triệu đồng.

BÀI 7. Một gia đình mua một chiếc ô tô giá 800 triệu đồng. Trung bình sau mỗi năm sử dụng, giá trị còn lại của ô tô giảm đi 4% (so với năm trước đó).

- a) Viết công thức tính giá trị của ô tô sau 1 năm, 2 năm sử dụng.
- b) Viết công thức tính giá trị của ô tô sau n năm sử dụng.
- c) Sau 10 năm, giá trị của ô tô ước tính còn bao nhiều triệu đồng?

🗭 Lời giải.

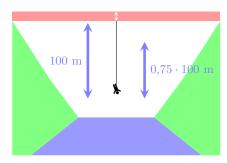
Gọi u_n là giá trị còn lại của ô tô sau n năm sử dụng.

a) Giá trị của ô tô sau 1 năm sử dụng là $u_1 = 800 - 800 \cdot 0,04 = 800 \cdot 0,96 = 768$ triệu đồng. Giá trị của ô tô sau 2 năm sử dụng là $u_2 = u_1 - u_1 \cdot 0,04 = u_1 \cdot 0,96 = 737,28$ triệu đồng.

- b) Ta có $u_n = u_{n-1} u_{n-1} \cdot 0.04 = u_{n-1} \cdot 0.96$. Do đó, (u_n) là cấp số nhân với số hạng đầu $u_1 = 768$ và công bội q = 0.96. Vậy sau n năm sử dụng, giá trị còn lại của chiếc ô tô là $u_n = u_1 q^{n-1} \Rightarrow u_n = 768 \cdot 0.96^{n-1}$.
- c) Sau 10 năm, ước tính giá trị của ô tô còn lại là $u_{10} = 768 \cdot 0.96^9 \approx 531.87$ triệu đồng.

BÀI 8.

Một người nhảy bungee (một trò chơi mạo hiểm mà người chơi nhảy từ một nơi có địa thế cao xuống với dây đai an toàn buộc xung quanh người) từ một cây cầu và căng một sợi dây dài 100 m. Sau mỗi lần rơi xuống, nhờ sự đàn hồi của dây, người nhảy được kéo lên một quãng đường có độ dài bằng 75% so với lần rơi trước đó và lại bị rơi xuống đúng bằng quãng đường vừa được kéo lên. Tính tổng quãng đường người đó đi được sau 10 lần kéo lên và lại rơi xuống.



🗭 Lời giải.

Gọi u_n là quãng đường người đó được kéo lên ở lần thứ n được kéo lên và lại rơi xuống (đơn vị tính: mét).

Ta có
$$u_1 = 0.75 \cdot 100 = 100 \cdot 1.5 = 75$$
 m và $u_n = 0.75 \cdot u_{n-1}$.

Vậy (u_n) là cấp số nhân với số hạng đầu $u_1 = 75$ và công bội q = 0.75.

Tổng quãng đường người đó đi được sau 10 lần kéo lên và lại rơi xuống là

$$S = 100 + 2u_1 + 2u_2 + \dots + 2u_{10}$$

$$= 100 + 2S_{10} = 100 + 2 \cdot \frac{75(1 - 0.75^{10})}{1 - 0.75}$$

$$\approx 666.2 \text{ m}.$$

BÀI 9 (TH). Một cái tháp có 11 tầng. Diện tích của mặt sàn tầng 2 bằng nửa diện tích của mặt đáy tháp và diện tích của mặt sàn mỗi tầng bằng nửa diện tích của mặt sàn mỗi tầng ngay bên dưới. Biết mặt đáy tháp có diện tích là $12288m^2$. Tính diện tích của mặt sàn tầng trên cùng của tháp theo đơn vị mét vuông.

🗭 Lời giải.

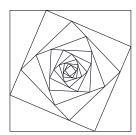
(Lưu ý: Một số nơi xem tầng 1 là tầng trệt. Nên bài toán này giống bài toán tháp 10 tầng ở phần trên) Do diện tích của mặt sàn tính từ tầng một lập thành một cấp số nhân với $u_2 = \frac{1}{2}.12288 = 6144$ và $q = \frac{1}{2}.$

Ta có
$$\begin{cases} u_2 = 6144 \\ q = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 12288 \\ q = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Ta có $\begin{cases} u_2 = 6144 \\ q = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 12288 \\ q = \frac{1}{2} \end{cases}.$ Ta có $u_{11} = u_1.q^{10} = 12288.\frac{1}{2^{10}} = 12m^2$. Vậy diện tích của mặt sàn tầng trên cùng là $12m^2$.

BÀI 10.

Cho hình vuông C_1 có cạnh bằng 4. Người ta chia mỗi cạnh hình vuông thành bốn phần bằng nhau và nối các điểm chia một cách thích hợp để có hình vuông C_2 . Từ hình vuông C_2 lại làm tiếp tục như trên để có hình vuông C_3 . Cứ tiếp tục quá trình như trên, ta nhận được dãy các hình vuông $C_1, C_2, C_3, \ldots, C_n, \ldots$ Gọi a_n là độ dài cạnh hình vuông C_n . Chứng minh rằng dãy số (a_n) là cấp số nhân.



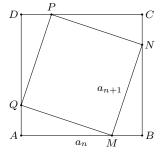
🗭 Lời giải.

Gọi cạnh một hình vuông thứ
$$n, n+1$$
 lần lượt là a_n, a_{n+1} . Do $MN = \sqrt{MB^2 + BN^2} = \sqrt{\left(\frac{AB}{4}\right)^2 + \left(\frac{3AB}{4}\right)^2} = AB \cdot \frac{\sqrt{10}}{4}$.

Nên ta có canh hình vuông thứ n+1 là:

$$a_{n+1} = a_n \cdot \frac{\sqrt{10}}{4}.$$

Vậy dãy số (a_n) là cấp số nhân.



BÀI 11. Một cây đàn organ có tần số âm thanh các phím liên tiếp tạo thành một cấp số nhân. Cho biết tần số phím La trung là 400 Hz và tần số của phím La cao cao hơn 12 phím là 800 Hz (nguồn: https://vi.wikipedia.org/wikiOrgan). Tìm công bội của cấp số nhân nói trên (làm tròn kết quả đến hàng phần nghìn).

Theo đề ta có
$$\begin{cases} u_1 = 400 \\ u_{13} = 800 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 400 \\ u_1 q^{12} = 800 \end{cases} \Rightarrow q^{12} = 2 \Rightarrow q = \pm \sqrt[12]{2}.$$

BÀI 12. Một loại thuốc được dùng mỗi ngày một lần. Lúc đầu nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân tăng nhanh, nhưng mỗi liều kế tiếp có tác dụng ít hơn liều trước đó. Lượng thuốc trong máu ở ngày thứ nhất là 50 mg, và mỗi ngày sau đó giảm chỉ còn một nửa so với ngày kề trước đó. Tính tổng lượng thuốc (tính bằng mg) trong máu của bệnh nhân sau khi dùng thuốc 10 ngày liên tiếp.

Lời giải.

Gọi u_n là giá trị của lượng thuốc trong máu của bệnh nhân trong ngày thứ n.

Dãy số này là một cấp số nhân có $u_1 = 50, q = \frac{1}{2}$

Tổng của n số hạng đầu tiên của cấp số nhân là $S_n = u_1 \frac{1 - q^n}{1 - q}$.

Theo bài toán, ta có $S_{10}=50\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{10}}{1-\frac{1}{2}}\approx 99,902.$

Vậy tổng lượng thuốc trong máu của bệnh nhân sau khi dùng thuốc 10 ngày liên tiếp là 99,902 mg.

Câu hỏi trắc nghiệm

CÂU 1.

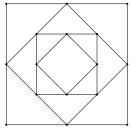
Cho hình vuông có cạnh là 1. Nối các trung điểm của hình vuông trên ta được một hình vuông có diện tích S_1 , tiếp tục quá trình trên với các hình vuông với diện tích là $S_2; S_3; \ldots; S_n; \ldots$ Tính tổng vô hạn $S_1 + S_2 + S_3 + \cdots + S_n + \cdots$.











Ta có
$$S_1 = \frac{1}{2}$$
, $S_2 = \frac{1}{4}$, $S_3 = \frac{1}{8}$, ... $S_n = \frac{1}{2^n}$, ... tạo thành 1 cấp số nhân với công bội $q = \frac{1}{2} < 1$.

Vậy
$$S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_n + \dots = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1.$$

CÂU 2. Cho n là số nguyên dương và n tam giác $A_1B_1C_1, A_2B_2C_2, \ldots, A_nB_nC_n$, trong đó các điểm lần $A_{i+1}, B_{i+1}, C_{i+1}$ lượt nằm trên các cạnh B_iC_i , A_iC_i , A_iB_i ($i=1,2,\ldots,n-1$) sao cho $A_{i+1}C_i=3A_{i+1}B_i$, $B_{i+1}A_i=3B_{i+1}C_i$, $C_{i+1}B_i=3C_{i+1}A_i$. Gọi S là tổng tất cả các diện tích của tam giác $A_1B_1C_1, A_2B_2C_2, \ldots, A_nB_nC_n$ biết rằng tam giác $A_1B_1C_1$ có diện tích bằng $\frac{9}{16}$. Tìm số nguyên dương sao cho $S = \frac{16^{29} - 7^{29}}{16^{29}}$.

(A)
$$n = 28$$
.

B
$$n = 2018$$
.

$$(c) n = 30.$$

$$n = 29.$$

D Lời giải.

Gọi
$$S_i(i=1,2,3,...,n)$$
 là diện tích của $\Delta A_i B_i C_i$. Ta có $\frac{S_{A_1B_2C_2}}{S_{A_1B_1C_1}} = \frac{A_1B_2}{A_1C_1} \cdot \frac{A_1C_2}{A_1B_1} = \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{16}$. Tương tự, ta có $\frac{S_{A_2B_1C_2}}{S_{A_1B_1C_1}} = \frac{S_{A_2B_2C_1}}{S_{A_1B_1C_1}} = \frac{3}{16}$. Do đó $\frac{S_{A_2B_2C_2}}{S_{A_1B_1C_1}} = 1 - 3 \cdot \frac{3}{16} = \frac{7}{16} \Rightarrow S_2 = \frac{7}{16}S_1$.

Tương tự, ta có $S_{i+1} = \frac{7}{16} S_i, i = 1, 2, \dots, n$. Khi đó

$$S = S_1 \left[1 + \frac{7}{16} + \dots + \left(\frac{7}{16} \right)^{n-1} \right] = \frac{9}{16} \cdot \frac{1 - \left(\frac{7}{16} \right)^n}{1 - \frac{7}{16}} = 1 - \left(\frac{7}{16} \right)^n.$$

Theo giả thiết ta có $1 - \left(\frac{7}{16}\right)^n = 1 - \left(\frac{7}{16}\right)^{29} \Leftrightarrow n = 29.$

CÂU 3. Người ta thiết kế một cái tháp gồm 11 tầng. Diện tích bề mặt trên của mỗi tầng bằng nửa diện của mặt trên tầng ngay bên dưới và diện tích tầng 1 bằng nửa diện tích của để tháp. Biết để tháp có diện tích là 12288 m². Tính diện tích mặt trên cùng.

 \bigcirc 12 m².

(B) $6 \, \text{m}^2$.

 \bigcirc 10 m².

 $(D) 8 m^2.$

🗭 Lời giải.

Gọi S_i là diện tích của tầng thứ i với $i=1,2,\ldots,11$.

Do giả thiết suy ra $S_{i+1} = \frac{1}{2}S_i$ với $i = 1, 2, \dots, 10$.

Do đó $\{S_i\}$ là một cấp số nhân với công bội $q = \frac{1}{2}$. Do đó $S_{11} = \frac{1}{2^{10}}S_1 = \frac{1}{2^{11}} \cdot 12288 = 6 \text{ (m}^2)$.

CÂU 4. Cho tứ giác ABCD có bốn góc tạo thành cấp số nhân có công bội q=2. Góc có số đo nhỏ nhất trong bốn góc đó

(A) 24°.

(B) 1°.

(c) 12°.

(D) 30°.

🗭 Lời giải.

Gọi số đo bốn góc của tứ giác ABCD là x, 2x, 4x, 8x.

Có $x + 2x + 4x + 8x = 360 \Leftrightarrow 15x = 360 \Leftrightarrow x = 24$.

Chon đáp án (A).....

CÂU 5. Một du khách vào chuồng đua ngưa đặt cược, lần đầu tiên đặt 20000 đồng, mỗi lần sau tiền đặt gấp đôi lần tiền đặt cược trước. Người đó thua lần 9 liên tiếp và thắng ở lần thứ 10. Hỏi du khách đó thắng hay thua bao nhiêu tiền?

(A) Thắng 20000 đồng.

(B) Thua 40000 đồng.

(C) Hòa vốn.

(**D**) Thua 20000 đồng.

Lời giải.

Số tiền đặt cược lần thứ n là $u_n = u_1 \cdot 2^{n-1}$ với $u_1 = 20000$.

Ta có: $u_{10} - \sum_{n=1}^{3} u_1 \cdot 2^{n-1} = 20000 \cdot 2^9 - \sum_{n=1}^{9} 20000 \cdot 2^{n-1} = 20000.$

Vây du khách thắng 20000 đồng.

Chọn đáp án (A).....

CÂU 6. Cho tam giác ABC cân tại A có cạnh đáy BC, đường cao AH và cạnh bên AB theo thứ tự đó lập thành cấp số nhân công bội q. Giá trị của q là

(A) $q = \frac{1}{2}\sqrt{\sqrt{2}+1}$. (B) $q = \sqrt{2}+1$. (C) $q = \sqrt{2(\sqrt{2}+1)}$.

Giả sử $BC = u_1$, $AH = u_1 \cdot q$ và $AB = u_1 \cdot q^2$ với $u_1 > 0, q > 0$.

Do $\triangle ABC$ cân tại A suy ra

$$AB^{2} = AH^{2} + \frac{BC^{2}}{4} \Leftrightarrow u_{1}^{2} \cdot q^{4} = \frac{u_{1}^{2}}{4} + u_{1}^{2} \cdot q^{2}$$
$$\Leftrightarrow 4q^{4} - 4q^{2} - 1 = 0$$
$$\Leftrightarrow q^{2} = \frac{1 \pm \sqrt{2}}{2}.$$

Kết hợp với điều kiện bài toán ta có $q=\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}=\frac{1}{2}\sqrt{2(\sqrt{2}+1)}.$

CÂU 7. Giả sử một người đi làm được lĩnh lương khởi điểm là 2.000.000 đồng/tháng. Cứ 3 năm người ấy lại được tăng lương một lần với mức tăng bằng 7% của tháng trước đó. Hỏi sau 36 năm làm việc người ấy lĩnh được tất cả bao nhiêu tiền?

(A) 1.287.968.492 đồng.

(B) 10.721.769.110 đồng.

(c) $7.068289036 \cdot 10^8$ đồng.

Lời giải.

Ta có 36 năm tương ứng với 12 kỳ lương; mỗi kỳ lương có 36 tháng và kỳ sau tăng 7% so với kỳ trước. Do đó tổng số tiền

mỗi kỳ lương là một cấp số nhân với $u_1 = 36 \times 2 = 72$ (triệu đồng) và công bội q = 1,07. Vậy tổng số tiền sau 36 năm là $T = \frac{72 \cdot \left[(1,07)^{12} - 1 \right]}{1,07 - 1} = 1287,968492$ (triệu đồng).

CÂU 8. Từ độ cao 55,8 (mét) của tháp nghiên Pisa nước Italia người ta thả một quả bóng cao su chạm xuống đất. Giả sử mỗi lần chạm đất bóng lại nảy lên độ cao bằng $\frac{1}{10}$ độ cao mà bóng đạt trước đó. Tổng độ dài hành trình (mét) của bóng được thả từ lúc ban đầu cho đến khi nó nằm yên trên mặt đất thuộc khoảng nào trong các khoảng sau đây?

(B) (60; 63).

(C) (67; 69).

(**D**) (64; 66).

Đặt $u_1 = 55.8$ (mét) là quãng đường bóng rơi khi thả xuống, $u_{n+1} = \frac{1}{10^n} u_1, n \ge 1$ là quãng đường bóng rơi sau lần nảy lên thứ n.

Ta có (u_n) là dãy cấp số nhân với $u_1 = 55.8$ và công bội $q = \frac{1}{10}$

Suy ra tổng quãng đường quả bóng rơi xuống là $\lim_{n \to +\infty} u_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q} = \lim_{n \to +\infty} 55, 8 \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{10}\right)^n}{1-\frac{1}{10}} = 62.$

Ngoài ra ta còn phải tính tổng quãng đường mà bóng nảy lên. Ta có tổng quãng đường bóng nảy lên bằng tổng quãng đường rơi của bóng trừ đi quãng đường thả rơi xuống.

Vậy tổng quãng đường hành trình của quả bóng là 62 + 62 - 55.8 = 68.2 (mét).

Chọn đáp án (C)

CÂU 9. Một gia đình lập kế hoạch tiết kiệm như sau: Họ lập một sổ tiết kiệm tại một ngân hàng và cứ đầu mỗi tháng họ gửi vào sổ tiết kiệm đó 15 triệu đồng. Giả sử lãi suất tiền gửi không đổi là 0.6 %/tháng và tiền gửi được tính lãi theo hình thức lãi kép. Hỏi sau 3 năm gia đình đó tiết kiệm được số tiền gần nhất với con số nào dười đây?

- **A** 543240000 đồng.
- **B**) 589269000 đồng.
- **c** 669763000 đồng.
- (D) 604359000 đồng.

🗭 Lời giải.

Gọi S_0 triệu đồng là số tiền gia đình đó định kỳ gửi tiết kiệm vào đầu hằng tháng, r là lãi suất tiền gửi hằng tháng. Ta có $S_0 = 15$ triệu đồng, r = 0.6 %/tháng.

Gọi $S_i, i = \overline{1,n}$ là số tiền trong sổ tiết kiệm cuối tháng thứ i.

- \odot $S_1 = S_0 + S_0 \cdot r = S_0(1+r),$
- $S_3 = [S_0 + S_0(1+r) + S_0(1+r)^2] + [S_0 + S_0(1+r) + S_0(1+r)^2] r,$ $= S_0(1+r) + S_0(1+r)^2 + S_0(1+r)^3,$
- **⊘** . . .
- $S_n = S_0(1+r) + S_0(1+r)^2 + S_0(1+r)^3 + \dots + S_0(1+r)^n$ $= S_0 \left[(1+r) + (1+r)^2 + (1+r)^3 + \dots + (1+r)^n \right]$ $= S_0(1+r) \cdot \frac{(1+r)^n 1}{(1+r) 1} = S_0(1+r) \cdot \frac{(1+r)^n 1}{r} .$

Vậy sau 3 năm, tức cuối tháng thứ 36 thì gia đình tiết kiệm được số tiền là

$$S_{36} = 15 \cdot 10^6 (1 + 0.6 \cdot 10^{-2}) \cdot \frac{(1 + 0.6 \cdot 10^{-2})^{36} - 1}{0.6 \cdot 10^{-2}} = 604358538.2$$
 đồng.

Chọn đáp án (D)

..../..../...../ làm đề:/..../...... Goi tôi là:.

ÔN TẬP KIẾM TRA CHƯƠNG II

TOÁN 11 — ĐỀ 2

LỚP TOÁN THẦY PHÁT

Thời gian có hạn, đừng lãng phí!.

Phần I. Mỗi câu hỏi học sinh chọn một trong bốn phương án A, B, C, D.

CÂU 1. Cho dãy số (u_n) với $u_n = 3^n$. Số hạng thứ n+1 là

$$(A)$$
 $u_{n+1} = 3^n + 3.$

B)
$$u_{n+1} = 3 \cdot 3^n$$
.

$$\mathbf{C}$$
 $u_{n+1} = 3^n + 1.$ \mathbf{D} $u_{n+1} = 3(n+1).$

$$u_{n+1} = 3(n+1).$$

🗭 Lời giải.

Ta có $u_{n+1} = 3^{n+1} = 3 \cdot 3^n$.

Vậy số hạng thứ n+1 là $u_{n+1}=3\cdot 3^n$

Chọn đáp án (B)..... **CÂU 2.** Cho dãy số (u_n) có $u_n = \frac{n^2 + 1}{2n + 1}$. Số $\frac{37}{13}$ là số hạng thứ bao nhiều của dãy số đã cho?

(A) 8.

🗭 Lời giải.

Giả sử số hạng $u_n = \frac{37}{13}$ với $n \in \mathbb{N}^*$, ta có

$$\frac{n^2 + 1}{2n + 1} = \frac{37}{13} \Leftrightarrow 13n^2 - 74n - 24 = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} n = 6 \\ n = -\frac{4}{13} \end{bmatrix}$$

Do $n \in \mathbb{N}^*$ nên n = 6. Vậy số $\frac{37}{13}$ là số hạng thứ 6 dãy số (u_n) .

Chọn đáp án (B)... **CÂU 3.** Cho dãy số: $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{3^2}$; $\frac{1}{3^3}$; $\frac{1}{3^4}$; $\frac{1}{3^5}$; Số hạng tổng quát của dãy số này là

(A)
$$u_n = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3^{n+1}}$$
. **(B)** $u_n = \frac{1}{3^{n+1}}$.

$$B u_n = \frac{1}{3^{n+1}}.$$

🗭 Lời giải.

Dễ thấy dãy số đã cho có số hạng tổng quát là $\frac{1}{2n}$.

Chọn đáp án (C)..... **CÂU 4.** Cho dãy số (u_n) với $u_n = \frac{n+1}{n+2}$. Phát biểu nào sau đây đúng?

(A) Dãy số tăng và bị chặn.

(B) Dãy số giảm và bị chặn.

(C) Dãy số giảm và bị chặn dưới.

Dãy số giảm và bi chăn trên.

🗭 Lời giải.

 $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{n+1}{n+2} = 1 - \frac{1}{n+2}$ Suy ra

$$u_{n+1} - u_n = \left(1 - \frac{1}{n+3}\right) - \left(1 - \frac{1}{n+2}\right) = \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} = \frac{1}{(n+2)(n+3)} > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Suy ra
$$\{u_n\}$$
 là dãy số tăng.
Vì $\frac{2}{3} \leq 1 - \frac{1}{n+2} < 1$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Chọn đáp án (A).....

Vậy dãy số đã cho bị chặn.

CÂU 5. Khẳng định nào sau đây là sai?

(A) Một dãy số tăng thì bị chặn dưới.

(B) Một dãy số giảm thì bị chặn trên.

(D) Một dãy số không đổi thì bị chặn.

Lời giải.

Dãy (u_n) có $u_n = 5$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ bị chặn nhưng không tăng và không giảm.

CÂU 6. Cho cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu u_1 , công sai d. Khi đó, với $n \geq 2$ ta có

$$\mathbf{B} u_n = u_1 + (n+1)d.$$

🗭 Lời giải.

Ta có $u_n = u_1 + (n-1)d$.

Chọn đáp án (D)......

CÂU 7. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = 3$ và $u_2 = -1$. Khi đó

$$(A) u_3 = 4.$$

B)
$$u_3 = 2$$
.

$$u_3 = -5.$$

$$(\mathbf{D}) u_3 = 7.$$

🗭 Lời giải.

Ta có $u_2 = u_1 + d \Rightarrow d = u_2 - u_1 = -1 - 3 = -4$.

Suy ra $u_3 = u_1 + 2d = 3 - 8 = -5$.

CÂU 8. Cho cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu $u_1 = -5$, công sai d = 4. Công thức của số hạng tổng quát u_n là

B)
$$u_n = -1 - 4n$$
.

$$\mathbf{C}$$
 $u_n = -5 + 4n^2$.

$$u_n = -9 + 4n$$

🗭 Lời giải.

Với mọi số tự nhiên $n \ge 2$ ta có $u_n = u_1 + (n-1)d = -5 + (n-1) \cdot 4 = 4n - 9$.

CÂU 9. Có bao nhiêu số thực x để 2x-1; x; 2x+1 theo thứ tự lập thành cấp số nhân?

Lời giải.

Vì 2x-1; x; 2x+1 theo thứ tự lập thành cấp số nhân nên

$$x^{2} = (2x - 1)(2x + 1) \Leftrightarrow 3x^{2} - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Chon đáp án (B).....

CÂU 10. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1=-1$, công bội $q=-\frac{1}{10}$. Khi đó $\frac{1}{10^{2017}}$ là số hạng thứ mấy?

🗭 Lời giải.

Ta có số hạng tổng quát của dãy số là $u_n = u_1 \cdot q^{n-1} = (-1) \cdot \left(-\frac{1}{10}\right)^{n-1}$.

Giả sử $\frac{1}{102017}$ là số hạng thứ n của cấp số nhân, ta có

$$u_n = \frac{1}{10^{2017}} \Leftrightarrow (-1) \cdot \left(-\frac{1}{10}\right)^{(n-1)} = \frac{1}{10^{2017}} \Leftrightarrow n = 2018.$$

Chọn đáp án \bigcirc

CÂU 11. Tổng của 100 số tự nhiên lẻ đầu tiên tính từ 1 là

- (A) 10000.
- **(B)** 10100.
- (c) 20000.
- **(D)** 20200.

Lời giải.

Ta có 100 số lẻ đầu tiên tạo thành cấp số cộng có 100 số hạng với $u_1 = 1$, d = 2 và $u_{100} = 199$.

Tổng n số lẻ đầu tiên là $S_{100} = \frac{(u_1 + u_{100}) \cdot 100}{2} = 10000.$

Chọn đáp án (A).

CÂU 12. Một gia đình cần khoan một cái giếng để lấy nước. Họ thuê một đội khoan giếng nước đến để khoan giếng. Biết giá của mét khoan đầu tiên là 80 000 đồng, kể từ mét khoan thứ hai giá của mỗi mét khoan tăng thêm 5000 đồng so với giá của mét khoan trước đó. Biết cần phải khoan sâu xuống 50 m mới có nước. Hỏi phải trả bao nhiêu tiền để khoan cái giếng (A) 10 125 000 đồng.

B) 5 250 000 đồng.

c 4 245 000 đồng.

D) 4 000 000 đồng.

Lời giải.

Số tiền phải trả ở mỗi mét khoan tạo thành một cấp số cộng có số hạng đầu $u_1=80\,000$ và công sai d=5000Như vậy, tổng số tiền khi khoan đến mét thứ n được tính theo công thức

$$S_n = \frac{n}{2} [2u_1 + (n-1)d].$$

Vậy tổng số tiền phải trả là

$$S_{50} = 25 \cdot (2 \cdot 80\,000 + 49 \cdot 5000) = 10\,125\,000.$$

Chọn đáp án (A)... Phần II. Trong mỗi ý a), b), c) và d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.

CÂU 13. Cho dãy số $u_n = \frac{2n+1}{n+3}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Các khẳng định sau là đúng hay sai?

Mệnh đề	Ð	S
a) $u_3 = \frac{7}{6}$.	X	
b) $u_n < 2, \ \forall n \in \mathbb{N}^*.$	X	

Mệnh đề	Ð	S
c) Dãy số trên là dãy số giảm.		X
d) Dãy số trên là dãy số bị chặn.	X	

🗭 Lời giải.

a) D Ta có $u_3 = \frac{2 \cdot 3 + 1}{3 + 3} = \frac{7}{6}$.

Khẳng đinh trên là đúng.

b) Ta có $u_n = \frac{2n+1}{n+3} < \frac{2n+6}{n+3} = 2$. Vậy $u_n < 2, \ \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Khẳng định trên là đúng

c) S Ta có $u_1 = \frac{3}{4}$, $u_2 = 1$. Ta có $u_{n+1} = \frac{2n+3}{n+4}$, $u_{n+1} - u_n = \frac{2n+3}{n+4} - \frac{2n+1}{n+3} = \frac{5}{(n+4)(n+3)} > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Vậy $u_{n+1} > u_n \ \forall n \in \mathbb{N}^*$, nên dãy đã cho là dãy tăng

Khẳng định trên là sai.

d) D Ta có $n \in \mathbb{N}^*$ nên $u_n = \frac{2n+1}{n+3} > 0$.

Mặt khác, ta đã chứng minh $u_n < 2 \ \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Vậy $0 < u_n < 2$, nên dãy số đã cho là dãy bị chặn. Khẳng định trên là đúng.

CÂU 14. Cho cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu $u_1 = -5$ và công sai d = 3.

Mệnh đề	Ð	\mathbf{S}
a) Số 100 là số hạng thứ 36 của cấp số cộng.	X	
b) Số hạng thứ 5 của cấp số cộng là 9.		X
c) Tổng 10 số hạng đầu của cấp số cộng là 85.	X	
d) Số hạng tổng quát của cấp số cộng (u_n) là $(u_n) = 3n - 7$.		X

Lời giải.

- a) D Ta có $u_n = u_1 + (n-1)d \Leftrightarrow 100 = -5 + (n-1)3 \Leftrightarrow n = 36$. Khẳng định trên là đúng.
- **b)** (S) Ta có $u_5 = u_1 + 4d = -5 + 4 \cdot 3 = 7$. Khẳng định trên là sai.
- c) D Ta có $S_n = \frac{n}{2} [2u_1 + (n-1)d] \Rightarrow S_{10} = \frac{10}{2} [2 \cdot (-5) + (10-1)3] = 85.$ Khẳng định trên là đúng.
- d) (S) $u_n = u_1 + (n-1) d = -5 + (n-1) 3 = 3n 8$. Khẳng định trên là sai.

Chọn đáp án a đúng d sai b sai | c đúng |

CẦU 15. Một gia đình mua một chiếc ô tô giá 800 triệu đồng. Trung bình sau mỗi năm sử dụng, giá trị còn lại của ô tô giảm đi 4% (so với năm trước đó). Các khẳng định sau là đúng hay sai?

Mệnh đề		S
a) Giá trị còn lại của ô tô sau từng năm lập thành một cấp số nhân với công bội nhỏ hơn 1.	X	
b) Giá trị của chiếc xe sau 3 năm gần bằng 508,84 triệu đồng.		X
c) Giá trị của chiếc xe sau 5 năm lớn hơn một nửa giá trị ban đầu của chiếc xe.	X	
d) Nếu sau một thời gian sử dụng, gia đình muốn bán lại chiếc xe để thu được ít nhất 600 triệu đồng thì gia đình đó nên sử dụng ít hơn 6 năm.		X

🗭 Lời giải.

a) D Sau mỗi năm, giá trị của chiếc xe bằng 96% giá trị của năm ngoái, vậy giá trị chiếc xe lập thành một cấp số nhân với $u_1 = 800$ và q = 0.96.

Giá trị chiếc xe sau n năm là $u_n = 800 \cdot (0.96)^n$.

Khẳng định trên là đúng.

b) (S) Ta có $u_n = 800 \cdot (0.96)^n$.

Giá trị của chiếc xe sau 3 năm là $u_3 = 800 \cdot (0.96)^3 a \approx 707.79$ (triệu đồng).

Khẳng định trên là sai.

- c) D Giá trị của chiếc xe sau 5 năm là $u_5 = 800 \cdot (0.96)^5 \approx 652.3$ (triệu đồng). Khẳng định trên là đúng.
- d) (S) Ta có $u_7 \approx 601,16$ và $u_8 \approx 577,11$ triệu đồng.

Vậy gia đình muốn bán lại chiếc xe để thu được ít nhất 600 triệu đồng thì gia đình đó nên dùng chiếc xe ít hơn 7 năm.

Chọn đáp án a đúng b sai c đúng d sai

CÂU 16. Cho một cấp số cộng (u_n) có $u_1 = \frac{1}{3}$, $u_8 = 26$, có công sai d.

Mệnh đề	Ð	S
a) $d = \frac{11}{3}$.	X	
b) $u_{11} = 37$.	X	
c) Tổng 102 số hạng đầu của dãy số là $S_{102} = \frac{1124}{3}$.		X
d) Trong 100 số hạng đầu tiên của dãy số (u_n) , có đúng 34 số hạng là số nguyên.		X

🗭 Lời giải.

a) De Ta có
$$\begin{cases} u_1 = \frac{1}{3} \\ u_8 = 26 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = \frac{1}{3} \\ u_1 + 7d = 26 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = \frac{1}{3} \\ d = \frac{11}{3}. \end{cases}$$
 Vậy $d = \frac{11}{3}$.

- **b)** $u_{11} = u_1 + 10d = 37.$
- c) S Ta có $S_{102} = 2u_1 + 101d = 371$.
- d) (S) Vì $u_n = u_1 + (n-1)d = \frac{11n-10}{3}$ nên u_n là số nguyên khi 11n-10 chia hết cho 3. Mà 11n - 10 = (9n - 9) + (2n - 1) nên u_n là số nguyên khi 2n - 1 chia hết cho 3, với $n \in \{1; ...; 100\}$. Suy ra $n \in \{2; 5; 8; ...; 98\}$, do đó có đúng $\frac{98 - 2}{3} + 1 = 33$ số hạng đầu tiên của dãy số (u_n) là số nguyên.

Chọn đáp án a đúng b đúng c sai d sai

Phần III. Học sinh điền kết quả vào ô trống.

CÂU 17. Người ta trồng cây theo các hàng ngang với quy luật: ở hàng thứ nhất có 1 cây, ở hàng thứ hai có 2 cây, ở hàng thứ ba có 3 cây, ... ở hàng thứ n có n cây. Biết rằng người ta trồng hết 4950 cây. Hỏi số hàng cây được trồng theo cách trên là bao nhiêu?

Đáp án: | 1 | 0 |

Lời giải.

Số cây ở mỗi hàng lập thành một cấp số cộng với $u_1 = 1$ và công sai d = 1.

Theo giả thiết Ta có
$$S_n = 4950 \Leftrightarrow n + \frac{(n-1)n}{2} = 4950 \Leftrightarrow n^2 + n - 4950 = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} n = -99 \text{ (loại)} \\ n = 100. \end{bmatrix}$$

Vậy có 100 hàng cây được trồng.

Đáp án: 100

CÂU 18. Cho một cấp số cộng (u_n) là cấp số cộng có $u_1=1$ và tổng 100 số hạng đầu bằng 24850. Biết $S=\frac{1}{u_1u_2}+\frac{1}{u_2u_3}+\frac{1}{u_2u_3}$ $\dots + \frac{1}{u_{40}u_{50}} = \frac{a}{b}$ với $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính a + b.

Đáp án: 2

🗭 Lời giải.

Gọi d là công sai của cấp số đã cho.

Ta có
$$S_{100} = 50 (2u_1 + 99d) = 24850 \Rightarrow d = \frac{497 - 2u_1}{99} = 5.$$

$$\Rightarrow 5S = \frac{5}{u_1 u_2} + \frac{5}{u_2 u_3} + \ldots + \frac{5}{u_{49} u_{50}}$$

$$= \frac{u_2 - u_1}{u_1 u_2} + \frac{u_3 - u_2}{u_2 u_3} + \ldots + \frac{u_{50} - u_{49}}{u_{49} u_{50}}$$

$$= \frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_2} + \frac{1}{u_2} - \frac{1}{u_3} + \ldots + \frac{1}{u_{48}} - \frac{1}{u_{49}} + \frac{1}{u_{49}} - \frac{1}{u_{50}}$$

$$= \frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_{50}} = \frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_1 + 49d} = \frac{245}{246}.$$

$$\Rightarrow S = \frac{49}{246}.$$

Đáp án: 297

CÂU 19. Một người gửi ngân hàng 100 triệu đồng với kỳ hạn 3 tháng, lãi suất 2% một quý theo hình thức lãi kép. Sau đúng 6 tháng, người đó gửi thêm 100 triệu đồng với kỳ hạn và lãi suất như trước đó. Tổng số tiền người đó nhận được sau 1 năm kế từ khi bắt đầu gửi tiền gần bằng bao nhiêu triệu đồng (làm tròn kết quả tới hàng đơn vị)?

Đáp án: 2

🗭 Lời giải.

Số tiền người đó nhận được sau 6 tháng đầu: $100 \cdot (1 + 2\%)^2$.

Số tiền người đó nhận được sau 6 tháng tiếp theo là: $[100 \cdot (1+2\%)^2 + 100] \cdot (1+2\%)^2 \approx 212,28$.

Đáp án: 212

CÂU 20. Ba cạnh của một tam giác vuông có độ dài là các số nguyên dương lập thành một CSC. Độ dài cạnh dài nhất bằng 10. Tổng độ dài hai cạnh góc vuông bằng

Đáp án: 1

Lời giải.

Gọi độ dài ba cạnh của tam giác lần lượt là 0 < a < b < c.

Vì a, b, c theo thứ tự lập thành cấp số cộng nên

$$a + c = 2b$$

$$\Leftrightarrow a^2 + 2ac + c^2 = 4(c^2 - a^2)$$

$$\Leftrightarrow -3c^2 + 2ac + 5a^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (c+a)(5a - 3c) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} c = -a \\ 3c = 5a. \end{bmatrix}$$

- c = -a vô lí vì a, c > 0.
- 3c = 5a, vì c = 10 nên a = 6 và b = 8.

Vây a+b=14.

Đáp án: 14

CÂU 21. Từ độ cao 55,8 (mét) của tháp nghiên Pisa nước Italia người ta thả một quả bóng cao su chạm xuống đất. Giả sử $m\tilde{0}$ i lần chạm đất bóng lại nảy lên độ cao bằng $\frac{1}{5}$ độ cao mà bóng đạt trước đó. Quãng đường của bóng di chuyển từ lúc được thả rơi cho đến khi nó nảy lên và rơi xuống lần thứ năm gần bằng bao nhiêu (làm tròn đến phần chục)?

Đáp án: 8

Lời giải.

Đặt $u_1 = 55.8$ (mét) là quãng đường bóng rơi khi thả xuống, $u_{n+1} = \frac{u_1}{5^n}$, $n \ge 1$ là quãng đường bóng rơi sau lần nảy lên thứ

Ta có (u_n) là dãy cấp số nhân với $u_1 = 55.8$ và công bội $q = \frac{1}{5}$.

Suy ra quãng đường của bóng di chuyển từ lúc được thả rơi cho đến khi nó nảy lên và rơi xuống lần thứ 5 là

$$S = u_1 + 2u_2 + 2u_3 + 2u_4 + 2u_5 + 2u_6 = 2 \cdot \frac{u_1(1 - q^6)}{1 - q} - u_1 \approx 83,7 \text{ (m\'et)}.$$

Ngoài ra ta còn phải tính tổng quãng đường mà bóng nảy lên. Ta có tổng quãng đường bóng nảy lên bằng tổng quãng đường rơi của bóng trừ đi quãng đường thả rơi xuống.

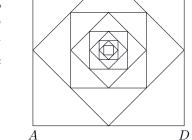
Vậy tổng quãng đường hành trình của quả bóng xấp xỉ 83,7 (mét).

Đáp án: 83,7

CÂU 22.

Cho hình vuông ABCD có các cạnh bằng a và có diện tích S_1 . Nối 4 trung điểm A_1, B_1, C_1, D_1 theo thứ tự của 4 cạnh AB, BC, CD, DA ta được hình vuông thứ hai có diện tích S_2 . Tiếp tục làm như thế, ta được hình vuông thứ ba là A_2, B_2, C_2, D_2 có diện tích $S_3,...$ và cứ tiếp tục làm như thế, ta tính được các hình vuông lần lượt có diện tích có diện tích S_4, S_5, \dots, S_{100} (tham khảo hình vẽ bên). Giá trị tổng có diện tích

 $S=S_1+S_2+S_3+\cdots+S_{100}$ là $\frac{a^m(2^n-1)}{2^p}$, với $m,n,p\in\mathbb{N}^*$. Tính giá trị biểu thức



A

Đáp án: 3

🗭 Lời giải.

Ta có
$$S_1 = a^2; S_2 = \frac{1}{2}a^2; S_3 = \frac{1}{4}a^2, \dots$$

Do đó $S_1, S_2, S_3, \ldots, S_{100}$ là cấp số nhân với số hạng đầu $u_1 = S_1 = a^2$ và công bội $q = \frac{1}{2}$.

Suy ra $S = S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_{100} = S_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} = \frac{a^2(2^{100} - 1)}{2^{99}}$. Vậy m + n - p = 2 + 100 - 99 = 3.

Phần III. Câu hỏi tư luân.

CÂU 23. Tính tổng $S = 1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 3^2 + \dots + 11.3^{10}$.

Từ giả thiết suy ra $3S=3+2\cdot 3^2+3\cdot 3^3+\cdots+11\cdot 3^{11}.$

Do đó
$$-2S = S - 3S = 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{10} - 10.3^{11} = \frac{1 - 3^{11}}{1 - 3} - 11 \cdot 3^{11} \Rightarrow S = \frac{1}{4} + \frac{21}{4} \cdot 3^{11}.$$

CÂU 24. Chị Hương vay góp một khoản tiền 100 triệu đồng và đồng ý trả dần 5 triệu đồng mỗi tháng với lãi suất 0,8% số tiền còn lại của mỗi tháng. Gọi A_n , $(n \in \mathbb{N}^*)$ là số tiền còn nợ (triệu đồng) của chị Hương sau n tháng.

- a) Xác định công thức tổng quát của dãy số (A_n) .
- b) Sau 20 tháng chi Hương có trả hết nơ không? Nếu chưa hết thì sau bao nhiêu tháng chi Hương sẽ trả hết nơ?
- c) Giả sử chi Hương dư kiến trả góp hết nơ trong vòng 1 năm. Hỏi mỗi tháng chi Hương phải trả bao nhiệu tiền (làm tròn đến hàng nghìn đồng)?

Lời giải.

Kỳ trả đầu tiên là cuối tháng thứ nhất nên đây là bài toán vay vốn trả góp cuối kỳ.

Gọi A là số tiền vay ngân hàng, B là số tiền trả trong mỗi chu kỳ, d=r% là lãi suất cho số tiền chưa trả trên một chu kỳ, n là số kỳ trả nợ.

Số tiền còn nợ ngân hàng (tính cả lãi) trong từng chu kỳ như sau:

- Θ Đầu kỳ thứ nhất là A.
- \odot Cuối kỳ thứ nhất là A(1+d)-B.

- **②** Cuối kỳ thứ ba là : $[A \cdot (1+d)^2 B \cdot (1+d) + 1] \cdot (1+d) B = A \cdot (1+d)^3 B \cdot [(1+d)^2 + (1+d) + 1]$.
- **⊘** ...

a) Áp dụng công thức trên với A = 100, B = 5, $d = 0{,}008$ ta có số tiền còn nợ (tính cả lãi) sau n chu kỳ là

$$A_n = 100 \cdot (1 + 0{,}008)^n - 5 \cdot \frac{(1 + 0{,}008)^n - 1}{0{,}008} = 625 - 525 \cdot (1{,}008)^n \text{ (triệu đồng)}.$$

b) Sau 20 tháng, chị Hương còn nợ

$$A_{20} = 625 - 525 \cdot (1{,}008)^{20} \approx 9{,}30$$
 (triệu đồng).

Vậy sau 20 tháng chị Hương chưa trả hết nợ. Để trả hết nợ, chị cần phải trả thêm 2 tháng nữa.

c) Giả sử chị Hương dự kiến trả góp hết nợ trong vòng 1 năm (12 tháng). Áp dung công thức trên với A = 100, n = 12, d = 0.008 ta có số tiền còn nơ (tính cả lãi) sau 12 tháng là

$$A_{12} = 100 \cdot (1 + 0.008)^{12} - B \cdot \frac{(1 + 0.008)^{12} - 1}{0.008}.$$

Để trả hết nợ sau 12 tháng thì $A_{12}=0 \Leftrightarrow B=\frac{100\cdot (1+0{,}008)^{12}\cdot 0{,}008}{(1+0{,}008)^{12}-1}\approx 8{,}772$ (triệu đồng). Vậy mỗi tháng chị Hương phải trả khoảng 8,78 (triệu đồng) để trả hết nợ trong vòng 1 năm.



Bài	5. Dãy số	1
	Tóm tắt lý thuyết	1
	Các dạng toán thường gặp	1
	🗁 Dạng 1. Số hạng tổng quát, biểu diễn dãy số	1
	🗁 Dạng 2. Tìm số hạng cụ thể của dãy số	
	Dạng 3. Xét tính tăng giảm của dãy số	
	Dạng 4. Xét tính bị chặn của dãy số	
Bài		8
		_
	Các dạng toán thường gặp	
	$ ightharpoonup$ Dạng 1. Nhận diện cấp số cộng, công sai d , số hạng tổng quát u_n	
	Dạng 3. Các bài toán thực tế	
Bài		14
	Tóm tắt lý thuyết	
	Các dạng toán thường gặp	
	Cac dạng toan thương gạp Dạng 1. Nhận diện cấp số nhân, công bội q	
	Dạng 2. Số hạng tổng quát của cấp số nhân	
	Dạng 3. Tìm số hạng cụ thể của CSN	
	🗁 Dạng 4. Tìm điều kiện để một dãy số lập thành CSN	20
	🗁 Dạng 5. Tính tổng của cấp số nhân	
	Dạng 6. Kết hợp cấp số cộng và cấp số nhân	
Dề 1: TOÁN 11 — LỚ	Dạng 7. Bài toán thực tế	
De I: TOAN II — LO	TOAN THAY PHAT	27
LỜI GIẢI CHI TI	$\widehat{\mathbf{E}}\mathbf{T}$	31
Bài	5. Dãy số	31
	Tóm tắt lý thuyết	31
	Các dạng toán thường gặp	31
	🗁 Dạng 1. Số hạng tổng quát, biểu diễn dãy số	
	🗁 Dạng 2. Tìm số hạng cụ thể của dãy số	
	🗁 Dạng 3. Xét tính tăng giảm của dãy số	
	Dạng 4. Xét tính bị chặn của dãy số	
D7:	Dạng 5. Toán thực tế về dãy số	
	6. Cấp số cộng	49
	Tóm tắt lý thuyết	
	Các dạng toán thường gặp	
	$ ightharpoonup$ Dạng 1. Nhận diện cấp số cộng, công sai d , số hạng tổng quát u_n	
	Dạng 3. Các bài toán thực tế	
Bài	7. Cấp số nhân	66
	Tóm tắt lý thuyết	
	Các dạng toán thường gặp	
	riangle Dạng 1. Nhận diện cấp số nhân, công bội q	07

	Dạng 2. Số hạng tổng quát của cấp số nhân	71
	Dạng 3. Tìm số hạng cụ thể của CSN	
	Dạng 4. Tìm điều kiện để một dãy số lập thành CSN	
	Dạng 5. Tính tổng của cấp số nhân	84
	Dạng 6. Kết hợp cấp số cộng và cấp số nhân	88
	Dạng 7. Bài toán thực tế	91
ĐỀ 2: TOÁN 11 — LỚP TOÁN	I THẦY PHÁT	99

