

## Bài 3. HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

### A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

#### 1. Định nghĩa hàm số lượng giác

⚡ ĐỊNH NGHĨA 3.1.

- ☑ Quy tắc đặt tương ứng mỗi số thực  $x$  với số thực  $\sin x$  được gọi là hàm số sin, kí hiệu là  $y = \sin x$ . Tập xác định của hàm số sin là  $\mathbb{R}$ .
- ☑ Quy tắc đặt tương ứng mỗi số thực  $x$  với số thực  $\cos x$  được gọi là hàm số cosin, kí hiệu là  $y = \cos x$ . Tập xác định của hàm số cosin là  $\mathbb{R}$ .
- ☑ Hàm số cho bằng công thức  $y = \frac{\sin x}{\cos x}$  được gọi là hàm số tang, kí hiệu là  $y = \tan x$ . Tập xác định của hàm số tang là  $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$ .
- ☑ Hàm số cho bằng công thức  $y = \frac{\cos x}{\sin x}$  được gọi là hàm số cotang, kí hiệu là  $y = \cot x$ . Tập xác định của hàm số cotang là  $\mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ .

#### 2. Hàm số chẵn, hàm số lẻ

⚡ ĐỊNH NGHĨA 3.2. Cho hàm số  $y = f(x)$  có tập xác định là  $\mathcal{D}$ .

- ☑ Hàm số  $f(x)$  được gọi là **hàm số chẵn** nếu  $\forall x \in \mathcal{D}$  thì  $-x \in \mathcal{D}$  và  $f(-x) = f(x)$ . Đồ thị của một hàm số chẵn nhận trục tung là trục đối xứng.
- ☑ Hàm số  $f(x)$  được gọi là **hàm số lẻ** nếu  $\forall x \in \mathcal{D}$  thì  $-x \in \mathcal{D}$  và  $f(-x) = -f(x)$ . Đồ thị của một hàm số lẻ nhận gốc tọa độ là tâm đối xứng.

#### 3. Hàm số tuần hoàn

⚡ ĐỊNH NGHĨA 3.3. Hàm số  $y = f(x)$  có tập xác định  $\mathcal{D}$  được gọi là **hàm số tuần hoàn** nếu tồn tại số  $T \neq 0$  sao cho với mọi  $x \in \mathcal{D}$  ta có:

- $x + T \in \mathcal{D}$  và  $x - T \in \mathcal{D}$ ;
- $f(x + T) = f(x)$ .

Số  $T$  dương nhỏ nhất thỏa mãn các điều kiện trên (nếu có) được gọi là **chu kỳ** của hàm số tuần hoàn đó.

⚡ NHẬN XÉT.

- ☑ Các hàm số  $y = \sin x$  và  $y = \cos x$  tuần hoàn với chu kỳ  $2\pi$ . Các hàm số  $y = \tan x$  và  $y = \cot x$  tuần hoàn với chu kỳ  $\pi$ .

⚠ *Tổng quát, người ta chứng minh được các hàm số  $y = A \sin \omega x$  và  $y = A \cos \omega x$  ( $\omega > 0$ ) là những hàm số tuần hoàn với chu kỳ  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ .*

#### 4. Đồ thị và tính chất của hàm số $y = \sin x$

⚡ TÍNH CHẤT 3.1. Hàm số  $y = \sin x$ :

- ☑ Có tập xác định là  $\mathbb{R}$  và tập giá trị là  $[-1; 1]$ ;
- ☑ Là hàm số lẻ và tuần hoàn với chu kỳ  $2\pi$ ;
- ☑ Đồng biến trên mỗi khoảng  $\left(-\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{\pi}{2} + k2\pi\right)$  và nghịch biến trên mỗi khoảng  $\left(\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{3\pi}{2} + k2\pi\right)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ;
- ☑ Có đồ thị đối xứng qua gốc tọa độ và gọi là một **đường hình sin**.

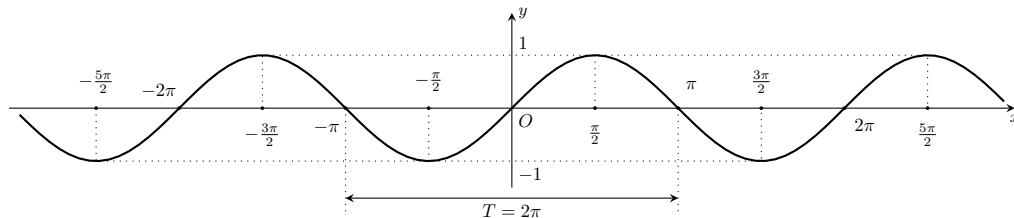


ĐIỂM:

Be yourself; everyone else is already taken.

QUICK NOTE

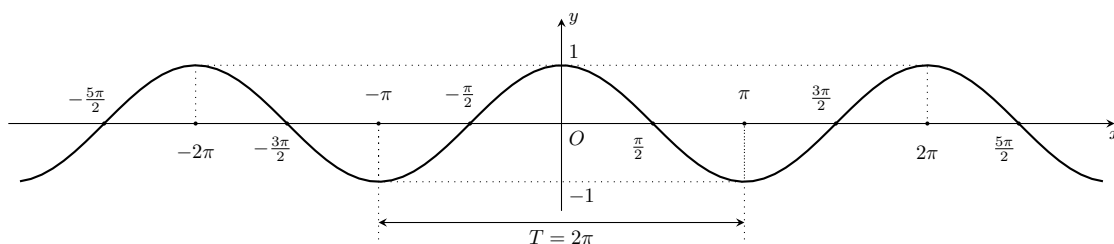
QUICK NOTE



## 5. Đồ thị và tính chất của hàm số $y = \cos x$

**TÍNH CHẤT 3.2.** Hàm số  $y = \cos x$ :

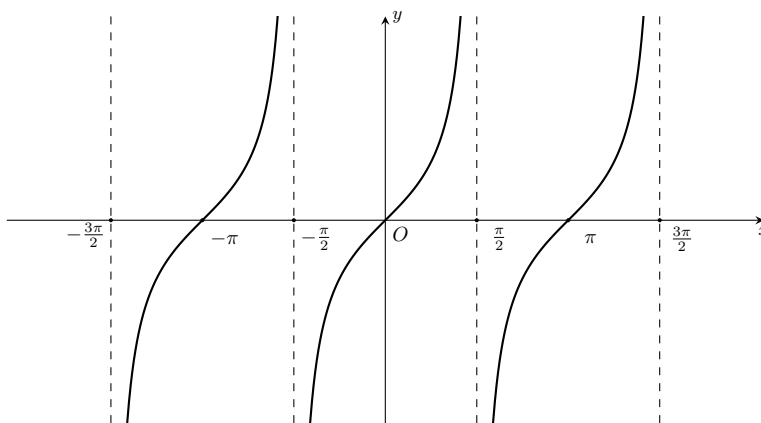
- ☑ Có tập xác định là  $\mathbb{R}$  và tập giá trị là  $[-1; 1]$ ;
- ☑ Là hàm số chẵn và tuần hoàn với chu kỳ  $2\pi$ ;
- ☑ Đồng biến trên mỗi khoảng  $(-\pi + k2\pi; k2\pi)$  và nghịch biến trên mỗi khoảng  $(k2\pi; \pi + k2\pi)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ;
- ☑ Có đồ thị là một đường hình sin đối xứng qua trục tung.



## 6. Đồ thị và tính chất của hàm số $y = \tan x$

**TÍNH CHẤT 3.3.** Hàm số  $y = \tan x$ :

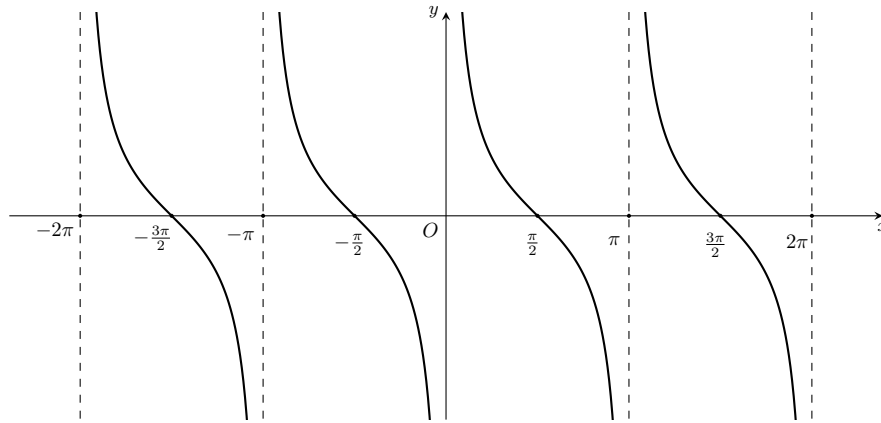
- ☑ Có tập xác định là  $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$  và tập giá trị là  $\mathbb{R}$ ;
- ☑ Là hàm số lẻ và tuần hoàn với chu kỳ  $\pi$ ;
- ☑ Đồng biến trên mỗi khoảng  $\left( -\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi \right)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ;
- ☑ Có đồ thị đối xứng qua gốc tọa độ.



## 7. Đồ thị và tính chất của hàm số $y = \cot x$

**TÍNH CHẤT 3.4.** Hàm số  $y = \cot x$ :

- ☑ Có tập xác định là  $\mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$  và tập giá trị là  $\mathbb{R}$ ;
- ☑ Là hàm số lẻ và tuần hoàn với chu kỳ  $\pi$ ;
- ☑ Nghịch biến trên mỗi khoảng  $(k\pi; \pi + k\pi)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ;
- ☑ Có đồ thị đối xứng qua gốc tọa độ.



QUICK NOTE

## B. CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

### Dạng 1. Tìm tập xác định của hàm số lượng giác

Để tìm tập xác định của hàm số lượng giác ta cần nhớ

☉  $y = \tan f(x) = \frac{\sin f(x)}{\cos f(x)}$   $\Leftrightarrow \cos f(x) \neq 0 \Leftrightarrow f(x) \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

☉  $y = \cot f(x) = \frac{\cos f(x)}{\sin f(x)}$   $\Leftrightarrow \sin f(x) \neq 0 \Leftrightarrow f(x) \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

⚠ Khi tìm tập xác định, ta xem nó có mẫu không? có tan, cot không? có căn không?

☉ Với  $k \in \mathbb{Z}$ , ta cần nhớ những trường hợp đặc biệt:

a) $\begin{cases} + \sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi. \\ + \sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi. \\ + \sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi. \end{cases}$	b) $\begin{cases} + \cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi. \\ + \cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi. \\ + \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi. \end{cases}$
c) $\begin{cases} + \tan x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi. \\ + \tan x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi. \\ + \tan x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi. \end{cases}$	d) $\begin{cases} + \cot x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi. \\ + \cot x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi. \\ + \cot x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi. \end{cases}$

**BÀI 1.** Tìm tập xác định  $\mathcal{D}$  của hàm số  $y = \frac{\tan 2x}{\cos x + 1} + \sin x$ .

**BÀI 2.** Tìm tập xác định  $\mathcal{D}$  của hàm số  $y = \frac{\cos 3x}{1 - \sin x} + \tan x$ .

**BÀI 3.** Tìm tập xác định  $\mathcal{D}$  của hàm số  $y = \frac{2 \tan 2x - 5}{\sin 2x + 1}$ .

**BÀI 4.** Tìm tập xác định  $\mathcal{D}$  của hàm số  $y = \frac{1}{\tan x - 1}$ .

**BÀI 5.** Tìm tập xác định  $\mathcal{D}$  của hàm số  $y = \frac{3}{\cos^2 x - \sin^2 x} + \tan x$ .

**BÀI 6.** Tìm tập xác định  $\mathcal{D}$  của hàm số  $y = \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x}$ .

**BÀI 7.** Tìm tập xác định  $\mathcal{D}$  của hàm số  $y = \sqrt{\frac{2 - \sin x}{\cos x + 1}}$ .

**BÀI 8.** Tìm tập xác định  $\mathcal{D}$  của hàm số  $y = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin x}}$ .

**BÀI 9.** Tìm tập xác định  $\mathcal{D}$  của hàm số  $y = \sqrt{\frac{\cos x + 4}{\sin x + 1}}$ .

**BÀI 10.** Tìm tập xác định  $\mathcal{D}$  của hàm số  $y = \sqrt{\frac{2 - \cos x}{1 - \sin x}}$ .

QUICK NOTE

**BÀI 11.** Tìm tập xác định  $\mathcal{D}$  của hàm số  $y = \sqrt{4\pi^2 - x^2} + \cot 2x$ .

**BÀI 12.** Tìm tập xác định  $\mathcal{D}$  của hàm số  $y = \sqrt{\pi^2 - x^2} + \cot 2x$ .

**BÀI 13.** Tìm tập xác định  $\mathcal{D}$  của hàm số  $y = \frac{\sqrt{\pi^2 - x^2}}{\sin 2x + 1}$ .

**BÀI 14.** Tìm tập xác định  $\mathcal{D}$  của hàm số  $y = \frac{\sqrt{4\pi^2 - x^2}}{\cos 2x + 1}$ .

**CÂU 1.** Hàm số  $y = \frac{2\sin x + 1}{1 - \cos x}$  xác định khi

- (A)  $x \neq k\pi$ . (B)  $x \neq k2\pi$ . (C)  $x \neq \frac{\pi}{2} + k2\pi$ . (D)  $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ .

**CÂU 2.** Hàm số  $y = \frac{1 - 3\cos x}{\sin x}$  xác định khi

- (A)  $x \neq k\pi$ . (B)  $x \neq k2\pi$ . (C)  $x \neq \frac{k\pi}{2}$ . (D)  $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ .

**CÂU 3.** Tập xác định của hàm số  $y = \frac{1 - \cos x}{\sin x - 1}$  là

- (A)  $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}$ . (B)  $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k2\pi \right\}$ . (C)  $\mathbb{R} \setminus \{k\pi\}$ . (D)  $\mathbb{R} \setminus \{k2\pi\}$ .

**CÂU 4.** Tập xác định của hàm số  $y = \frac{\cot x}{\cos x - 1}$  là

- (A)  $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{k\pi}{2} \right\}$ . (B)  $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}$ .  
(C)  $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{k\pi\}$ . (D)  $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{k2\pi\}$ .

**CÂU 5.** Hàm số  $y = \frac{1}{\sin x - \cos x}$  xác định khi

- (A)  $x \neq k2\pi$ . (B)  $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ . (C)  $x \neq k\pi$ . (D)  $x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi$ .

**CÂU 6.** Tập xác định của hàm số  $y = \frac{\tan 2x}{\cos x}$  là

- (A)  $\mathbb{R}$ . (B)  $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}$ .  
(C)  $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \right\}$ . (D)  $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}; \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}$ .

**CÂU 7.** Tập xác định của hàm số  $y = \frac{\tan x - 5}{1 - \sin^2 x}$  là

- (A)  $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}$ . (B)  $\mathbb{R}$ . (C)  $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k2\pi \right\}$ . (D)  $\mathbb{R} \setminus \{\pi + k\pi\}$ .

**CÂU 8.** Hàm số  $y = \sqrt{\frac{1 - \sin x}{1 + \sin x}}$  xác định khi

- (A)  $x \neq \pm \frac{\pi}{2} + k2\pi$ . (B)  $x \neq -k\pi$ . (C)  $x \neq \frac{\pi}{2} + k2\pi$ . (D)  $x \neq -\frac{\pi}{2} + k2\pi$ .

**CÂU 9.** Tập xác định hàm số  $y = \sqrt{\frac{\sin 2x + 2}{1 - \cos x}}$  là

- (A)  $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ . (B)  $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{k2\pi\}$ . (C)  $\mathcal{D} = \{k2\pi\}$ . (D)  $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{k\pi\}$ .

**CÂU 10.** Tập xác định  $\mathcal{D}$  của hàm số  $y = \frac{\tan 2x}{\sqrt{\sin x + 1}}$  là

- (A)  $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \right\}$ . (B)  $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \right\}$ .  
(C)  $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{k2\pi\}$ . (D)  $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \right\}$ .

**CÂU 11.** Tập xác định của hàm số  $y = \cot \left( x + \frac{\pi}{6} \right) + \sqrt{\frac{1 + \cos x}{1 - \cos x}}$  là

- (A)  $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{\pi}{3} + k\pi; \frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ . (B)  $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{\pi + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ .  
(C)  $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{k2\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ . (D)  $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{\pi}{6} + k\pi; k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ .

**CÂU 12.** Tập xác định của hàm số  $y = \sqrt{\frac{1 - \sin x}{1 + \cos x}}$  là

- (A)  $\mathbb{R} \setminus \{\pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ . (B)  $\mathbb{R} \setminus \{k2\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ .  
(C)  $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ . (D)  $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ .

**CÂU 13.** Tập xác định của hàm số  $y = \sqrt{\sin x + 2}$  là

- (A)  $\mathbb{R}$ . (B)  $[-2; +\infty)$ .  
(C)  $(0; 2\pi)$ . (D)  $[\arcsin(-2); +\infty)$ .

**CÂU 14.** Tập xác định của hàm số  $y = \sqrt{1 - \cos 2x}$  là

- (A)  $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ . (B)  $\mathcal{D} = [0; 1]$ .  
(C)  $\mathcal{D} = [-1; 1]$ . (D)  $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ .

**CÂU 15.** Hàm số nào sau đây có tập xác định  $\mathbb{R}$ ?

- (A)  $y = \sqrt{\frac{2 + \cos x}{2 - \sin x}}$ . (B)  $y = \tan^2 x + \cot^2 x$ .  
(C)  $y = \frac{1 + \sin^2 x}{1 + \cot^2 x}$ . (D)  $y = \frac{\sin^3 x}{2 \cos x + \sqrt{2}}$ .

## Dạng 2. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số lượng giác

Dựa vào tập giá trị của hàm số lượng giác, chẳng hạn:

$$\textcircled{v} -1 \leq \sin x \leq 1 \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq |\sin x| \leq 1 \\ 0 \leq \sin^2 x \leq 1 \end{cases} \text{ hoặc } -1 \leq \cos x \leq 1 \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq |\cos x| \leq 1 \\ 0 \leq \cos^2 x \leq 1. \end{cases}$$

🕒 Biến đổi về dạng:  $m \leq y \leq M$ .

Kết luận:  $\max y = M$  và  $\min y = m$ .

**Một số phương pháp tìm GTLN, GTNN**

a) Khảo sát parabol: Trong trường hợp hàm số có dạng bậc hai theo một hàm số lượng giác, ta có thể dùng phương pháp đặt ẩn phụ để đưa về hàm bậc hai, sau đó khảo sát hàm này và kết luận.

b) Sử dụng bất đẳng thức.

🕒 Bất đẳng thức Cauchy:

🕒  $\forall a, b \geq 0$  thì  $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ . Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi  $a = b \geq 0$ .

🕒  $\forall a, b, c \geq 0$  thì  $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$ . Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi  $a = b = c \geq 0$ .

🕒 Bất đẳng thức Cauchy - Schwarz:

🕒  $\forall x, y, a, b \in \mathbb{R}$  thì  $|ax + by| \leq \sqrt{(a^2 + b^2)(x^2 + y^2)}$ . Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi  $\frac{x}{a} = \frac{y}{b}$ .

🕒  $\forall x, y \in \mathbb{R}, a, b > 0$  thì  $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} \geq \frac{(x+y)^2}{a+b}$ . Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi  $\frac{x}{a} = \frac{y}{b}$ .

**⚠** Trong trường hợp đề bài yêu cầu tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số lượng giác trên đoạn cho trước, ta sẽ sử dụng đường tròn lượng giác để giới hạn miền của  $\sin$  hoặc  $\cos$ . Sau đó thêm bớt giống phương pháp 1 hoặc bậc 2 thì sử dụng parabol.

$$\textcircled{v} m \geq f(x), \forall x \in \mathcal{D} \Leftrightarrow m \geq \max_{x \in \mathcal{D}} f(x). \quad \textcircled{v} m \leq f(x), \forall x \in \mathcal{D} \Leftrightarrow m \leq \min_{x \in \mathcal{D}} f(x).$$

**BÀI 1.** Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = 5 - 3 \cos 4x$ .

**BÀI 2.** Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = 2 + 3 \cos x$ .

**BÀI 3.** Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = 3 - 2 \sin 2x$ .

**BÀI 4.** Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = 3 - 2|\sin 2x|$ .

**BÀI 5.** Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = \frac{1 + 4 \cos^2 x}{3}$ .

## QUICK NOTE

QUICK NOTE

- BÀI 6.** Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x$ .
- BÀI 7.** Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = \sin x + \sin(x + 2\pi/3)$ .
- BÀI 8.** Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = \cos x + \cos(x + \pi/3)$ .
- BÀI 9.** Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = \frac{4}{2 - \sin x}$ .
- BÀI 10.** Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = \frac{8}{3 - \cos^2 x}$ .
- BÀI 11.** Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = \frac{3}{3 - \sqrt{1 - \cos x}}$ .
- BÀI 12.** Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = \frac{1}{\sqrt{2 - \sin^2 3x}}$ .
- BÀI 13.** Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = \sin x + \sqrt{3} \cos x + 12$ .
- BÀI 14.** Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = \sqrt{3} \sin x - \cos x + 5$ .
- BÀI 15.** Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = \cos 3x - \sqrt{3} \sin 3x + 4$ .
- BÀI 16.** Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = \sqrt{3} (\cos^4 x - \sin^4 x) + \sin 2x + 1$ .
- BÀI 17.** Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = 4 \sin^2 x - 4 \sin x + 3$ .
- BÀI 18.** Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = \cos^2 x - 2 \cos x - 4$ .
- BÀI 19.** Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = \cos^2 x + 2 \sin x + 2$ .
- BÀI 20.** Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = \cos^4 x - 2 \sin^2 x + 1$ .
- BÀI 21.** Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = \sqrt{5 - 4 \sin x + \sin^2 x}$ .
- BÀI 22.** Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = \sqrt{\cos^2 x + 6 \cos x + 14}$ .
- BÀI 23.** Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = 2(\sin x + \cos x) + \sin 2x + 3$ .
- BÀI 24.** Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = \sin x + \cos x + 2 \sin x \cos x - 1$ .
- BÀI 25.** Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = 3 - \sin 2x$  trên đoạn  $[0; \frac{\pi}{2}]$ ?
- BÀI 26.** Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = \sin 2x + 2$  trên  $[0; \frac{\pi}{2}]$ ?
- BÀI 27.** Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = \cos(x + \frac{\pi}{3})$  trên  $[0; \pi]$ .
- BÀI 28.** Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = \sin(2x + \frac{\pi}{4}) + \frac{1}{2}$  trên  $[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}]$ .
- BÀI 29.** Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = \sin^4 x + \cos^4 x$  trên  $[0; \frac{\pi}{6}]$ .
- BÀI 30.** Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = \sin^6 x + \cos^6 x$  trên  $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ .
- BÀI 31.** Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = \sqrt{3} \sin 2x + 2 \cos^2 x + 3$  trên  $[-\frac{5\pi}{6}; \frac{\pi}{4}]$ .
- BÀI 32.** Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = \sin 2x + \cos 2x + 3$  trên  $[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}]$ .
- BÀI 33.** Giá trị lớn nhất của hàm số  $y = \sin^9 x + \cos^{12} x$  bằng  
 (A) 2. (B) 1. (C) 0,5. (D) 1,5.
- BÀI 34.** Số giờ có ánh sáng của một thành phố X ở vĩ độ  $40^\circ$  Bắc trong ngày thứ  $t$  của một năm không nhuận được cho bởi hàm số  $d(t) = 3 \sin \left[ \frac{\pi}{182}(t - 80) \right] + 12$ ,  $t \in \mathbb{Z}$  và  $0 < t \leq 365$ . Vào ngày nào trong năm thì thành phố X có nhiều giờ ánh sáng nhất?  
 (A) 262. (B) 353. (C) 80. (D) 171.

- BÀI 35.** Hằng ngày, mực nước của con kênh lên xuống theo thủy triều. Độ cao  $h$  (m) của mực nước trong kênh tính theo thời gian  $t$  (h) được cho bởi công thức  $h = 3 \cos\left(\frac{\pi t}{6} + \frac{\pi}{3}\right) + 12$ . Khi nào mực nước của kênh là cao nhất với thời gian ngắn nhất?
- (A)**  $t = 22$  (h).      **(B)**  $t = 15$  (h).      **(C)**  $t = 14$  (h).      **(D)**  $t = 10$  (h).

### Dạng 3. Xét tính chẵn lẻ của hàm số lượng giác

**Bước 1.** Tìm tập xác định  $\mathcal{D}$  của hàm số lượng giác.

Nếu  $\forall x \in \mathcal{D}$  thì  $-x \in \mathcal{D}$ , suy ra  $\mathcal{D}$  là tập đối xứng và chuyển sang bước tiếp theo.

**Bước 2.** Tính  $f(-x)$ , nghĩa là ta sẽ thay  $x$  bằng  $-x$ , sẽ có hai kết quả thường gặp sau:

☑ Nếu  $f(-x) = f(x)$  thì  $f(x)$  là hàm số chẵn.

☑ Nếu  $f(-x) = -f(x)$  thì  $f(x)$  là hàm số lẻ.



☑ Nếu  $\mathcal{D}$  không là tập đối xứng ( $\exists x \in \mathcal{D} \Rightarrow -x \notin \mathcal{D}$ ) hoặc  $(f(-x) \neq f(x)$  và  $f(-x) \neq -f(x))$  ta sẽ kết luận hàm số  $f(x)$  không chẵn, không lẻ.

☑ Ta thường sử dụng cung góc liên kết trong dạng toán này, cụ thể

$$\cos(-a) = \cos a, \sin(-a) = -\sin a, \tan(-a) = -\tan a, \cot(-a) = -\cot a.$$

☑ Lưu ý:  $\sin^{2n}(-\alpha) = \sin^{2n} \alpha, \cos^{2n}(-\alpha) = \cos^{2n} \alpha, \tan^{2n}(-\alpha) = \tan^{2n} \alpha, \dots$

☑ Đồ thị của hàm số chẵn nhận trục tung làm trục đối xứng, đồ thị hàm số lẻ nhận gốc tọa độ  $O$  làm tâm đối xứng.

**BÀI 1.** Xét tính chẵn, lẻ của hàm số  $f(x) = \sin^2 2x + \cos 3x$ .

**BÀI 2.** Xét tính chẵn, lẻ của hàm số  $f(x) = \cos^2 3x + \cos x$ .

**BÀI 3.** Xét tính chẵn, lẻ của hàm số  $f(x) = \frac{\sin^2 x - \cos x}{\sin 3x}$ .

**BÀI 4.** Xét tính chẵn, lẻ của hàm số  $f(x) = 1 + \cos x \cdot \sin\left(\frac{3\pi}{2} - 2x\right)$ .

**BÀI 5.** Xét tính chẵn, lẻ của hàm số  $f(x) = \cos \sqrt{x^2 - 16}$ .

**BÀI 6.** Xét tính chẵn, lẻ của hàm số  $f(x) = \tan x + \cot x$ .

**BÀI 7.** Xét tính chẵn, lẻ của hàm số  $f(x) = \cot(4x + 5\pi) \cdot \tan(2x - 3\pi)$ .

**BÀI 8.** Xét tính chẵn, lẻ của hàm số  $f(x) = \sin^3(3x + \pi) + \cot(2x - 7\pi)$ .

**BÀI 9.** Xét tính chẵn, lẻ của hàm số  $f(x) = \left|\sin x - \frac{1}{2}\right| + \left|\sin x + \frac{1}{2}\right|$ .

**BÀI 10.** Xét tính chẵn, lẻ của hàm số  $f(x) = \frac{\sqrt{\cos x + 2} + \cot^2 x}{\sin 4x}$ .

### Dạng 4. Tìm chu kỳ của hàm số lượng giác

☑ Hàm số  $y = \sin x, y = \cos x$  tuần hoàn với chu kỳ  $T_0 = 2\pi$ , nghĩa là  $\sin(x + k2\pi) = \sin x$  và  $\cos(x + k2\pi) = \cos x$ .

Suy ra hàm số  $y = \sin(ax + b)$  và  $y = \cos(ax + b)$  tuần hoàn với chu kỳ  $T_0 = \frac{2\pi}{|a|}$ .

☑ Hàm số  $y = \tan x, y = \cot x$  tuần hoàn với chu kỳ  $T_0 = \pi$ .

Suy ra hàm số  $y = \tan(ax + b)$  và  $y = \cot(ax + b)$  tuần hoàn với chu kỳ  $T_0 = \frac{\pi}{|a|}$ .



Giả sử hàm số  $f(x) = g(x) \pm h(x)$  có hàm  $g(x)$  tuần hoàn với chu kỳ  $T_1$  và hàm  $h(x)$  tuần hoàn với chu kỳ  $T_2$ . Khi đó hàm số  $f(x)$  sẽ tuần hoàn với chu kỳ  $T_0$  là bội chung nhỏ nhất của hai chu kỳ  $T_1$  và  $T_2$ .

### QUICK NOTE

QUICK NOTE

**CÂU 1.** Hàm số  $y = \sin 2x$  tuần hoàn với chu kỳ chu kỳ là

- (A)  $T_0 = 2\pi$ . (B)  $T_0 = \frac{\pi}{2}$ . (C)  $T_0 = \pi$ . (D)  $T_0 = 4\pi$ .

**CÂU 2.** Hàm số  $y = \tan 2x$  tuần hoàn với chu kỳ chu kỳ là

- (A)  $T_0 = \frac{\pi}{3}$ . (B)  $T_0 = \frac{\pi}{2}$ . (C)  $T_0 = 2\pi$ . (D)  $T_0 = \pi$ .

**CÂU 3.** Hàm số  $y = 3 \sin \frac{x}{2}$  tuần hoàn với chu kỳ chu kỳ là

- (A)  $T_0 = 0$ . (B)  $T_0 = \frac{\pi}{2}$ . (C)  $T_0 = 2\pi$ . (D)  $T_0 = 4\pi$ .

**CÂU 4.** Hàm số  $f(x) = \sin \frac{x}{2} + 2 \cos \frac{3x}{2}$  tuần hoàn với chu kỳ chu kỳ là

- (A)  $5\pi$ . (B)  $\frac{\pi}{2}$ . (C)  $3\pi$ . (D)  $4\pi$ .

**CÂU 5.** Tìm  $m$  để hàm số  $y = \cos mx$  tuần hoàn với chu kỳ  $T_0 = \pi$ .

- (A)  $m = \pm 1$ . (B)  $m = \pm 2$ . (C)  $m = \pm \frac{\pi}{2}$ . (D)  $m = \pm \pi$ .

Dạng 5. Sự biến thiên của hàm số lượng giác

- ☑ Hàm số  $y = \sin x$  đồng biến trên mỗi khoảng  $(-\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{\pi}{2} + k2\pi)$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ) và nghịch biến trên mỗi khoảng  $(\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{3\pi}{2} + k2\pi)$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ).
- ☑ Hàm số  $y = \cos x$  đồng biến trên mỗi khoảng  $(-\pi + k2\pi; k2\pi)$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ) và nghịch biến trên mỗi khoảng  $(k2\pi; \pi + k2\pi)$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ).
- ☑ Hàm số  $y = \tan x$  đồng biến trên mỗi khoảng  $(-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi)$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ).
- ☑ Hàm số  $y = \cot x$  nghịch biến trên mỗi khoảng  $(k\pi; \pi + k\pi)$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ).

**CÂU 1.** Hàm số  $y = \sin x$

- (A) đồng biến trên mỗi khoảng  $(\frac{\pi}{2} + k2\pi; \pi + k2\pi)$  và nghịch biến trên mỗi khoảng  $(\pi + k2\pi; k2\pi)$  với  $k \in \mathbb{Z}$ .
- (B) đồng biến trên mỗi khoảng  $(-\frac{3\pi}{2} + k2\pi; \frac{5\pi}{2} + k2\pi)$  và nghịch biến trên mỗi khoảng  $(-\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{\pi}{2} + k2\pi)$  với  $k \in \mathbb{Z}$ .
- (C) đồng biến trên mỗi khoảng  $(\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{3\pi}{2} + k2\pi)$  và nghịch biến trên mỗi khoảng  $(-\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{\pi}{2} + k2\pi)$  với  $k \in \mathbb{Z}$ .
- (D) đồng biến trên mỗi khoảng  $(-\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{\pi}{2} + k2\pi)$  và nghịch biến trên mỗi khoảng  $(\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{3\pi}{2} + k2\pi)$  với  $k \in \mathbb{Z}$ .

**CÂU 2.** Hàm số  $y = \cos x$

- (A) đồng biến trên mỗi khoảng  $(\frac{\pi}{2} + k2\pi; \pi + k2\pi)$  và nghịch biến trên mỗi khoảng  $(\pi + k2\pi; k2\pi)$  với  $k \in \mathbb{Z}$ .
- (B) đồng biến trên mỗi khoảng  $(-\pi + k2\pi; k2\pi)$  và nghịch biến trên mỗi khoảng  $(k2\pi; \pi + k2\pi)$  với  $k \in \mathbb{Z}$ .
- (C) đồng biến trên mỗi khoảng  $(\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{3\pi}{2} + k2\pi)$  và nghịch biến trên mỗi khoảng  $(-\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{\pi}{2} + k2\pi)$  với  $k \in \mathbb{Z}$ .
- (D) đồng biến trên mỗi khoảng  $(k2\pi; \pi + k2\pi)$  và nghịch biến trên mỗi khoảng  $(\pi + k2\pi; 3\pi + k2\pi)$  với  $k \in \mathbb{Z}$ .

**CÂU 3.** Hàm số  $y = \tan x$  đồng biến trên khoảng nào sau đây?

- (A)  $(0; \frac{\pi}{2})$ . (B)  $(0; \pi)$ . (C)  $(\frac{\pi}{2}; 2\pi)$ . (D)  $(\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{2})$ .

**CÂU 4.** Hàm số  $y = \cot x$  nghịch biến trên khoảng nào sau đây?



**QUICK NOTE**

- ☐ (0; 2 $\pi$ ).     
 ☐  $\left(\frac{\pi}{2}; 2\pi\right)$ .     
 ☐ (- $\pi$ ; 0).     
 ☐  $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$ .

**CÂU 5.** Hàm số  $y = \sqrt{3} + 2 \cos x$  tăng trên khoảng

- ☐  $\left(-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}\right)$ .     
 ☐  $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$ .     
 ☐  $\left(\frac{7\pi}{6}; 2\pi\right)$ .     
 ☐  $\left(\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}\right)$ .

**CÂU 6.** Hàm số nào đồng biến trên khoảng  $\left(-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{6}\right)$ ?

- ☐  $y = \cos x$ .     
 ☐  $y = \cot 2x$ .     
 ☐  $y = \sin x$ .     
 ☐  $y = \cos 2x$ .

**CÂU 7.** Mệnh đề nào sau đây sai?

- ☐ Hàm số  $y = \sin x$  tăng trong khoảng  $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ .  
☐ Hàm số  $y = \cot x$  giảm trong khoảng  $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ .  
☐ Hàm số  $y = \tan x$  tăng trong khoảng  $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ .  
☐ Hàm số  $y = \cos x$  tăng trong khoảng  $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ .

**CÂU 8.** Hàm số  $y = \sin x$  đồng biến trên

- ☐ khoảng  $(0; \pi)$ .  
☐ các khoảng  $\left(-\frac{\pi}{4} + k2\pi; \frac{\pi}{4} + k2\pi\right)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .  
☐ các khoảng  $\left(\frac{\pi}{2} + k2\pi; \pi + k2\pi\right)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .  
☐ khoảng  $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$ .

**CÂU 9.** Hàm số  $y = \cos x$

- ☐ tăng trong  $[0; \pi]$ .  
☐ tăng trong  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$  và giảm trong  $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ .  
☐ nghịch biến  $[0; \pi]$ .  
☐ Các khẳng định trên đều sai.

**CÂU 10.** Hàm số  $y = \cos x$  đồng biến trên đoạn nào dưới đây?

- ☐  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ .     
 ☐  $[\pi; 2\pi]$ .     
 ☐  $[-\pi; \pi]$ .     
 ☐  $[0; \pi]$ .

**CÂU 11.** Hàm số nào sau đây có tính đơn điệu trên khoảng  $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$  khác với các hàm số còn lại?

- ☐  $y = \sin x$ .     
 ☐  $y = \cos x$ .     
 ☐  $y = \tan x$ .     
 ☐  $y = -\cot x$ .

**CÂU 12.** Hàm số  $y = \tan x$  đồng biến trên khoảng

- ☐  $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ .     
 ☐  $\left(0; \frac{\pi}{2}\right]$ .     
 ☐  $\left(0; \frac{3\pi}{2}\right)$ .     
 ☐  $\left(-\frac{3\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ .

**CÂU 13.** Khẳng định nào sau đây đúng?

- ☐ Hàm số  $y = \sin x$  đồng biến trong khoảng  $\left(\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right)$ .  
☐ Hàm số  $y = \cos x$  đồng biến trong khoảng  $\left(\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right)$ .  
☐ Hàm số  $y = \sin x$  đồng biến trong khoảng  $\left(-\frac{3\pi}{4}; -\frac{\pi}{4}\right)$ .  
☐ Hàm số  $y = \cos x$  đồng biến trong khoảng  $\left(-\frac{3\pi}{4}; -\frac{\pi}{4}\right)$ .

**CÂU 14.** Hàm số nào sau đây nghịch biến trên khoảng  $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ ?

- ☐  $y = \sin x$ .     
 ☐  $y = \cos x$ .     
 ☐  $y = \tan x$ .     
 ☐  $y = -\cot x$ .

**CÂU 15.** Hàm số nào dưới đây đồng biến trên khoảng  $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$ ?

- ☐  $y = \sin x$ .     
 ☐  $y = \cos x$ .     
 ☐  $y = \cot x$ .     
 ☐  $y = \tan x$ .

## QUICK NOTE

