Bài 3. CÁC KHÁI NIỆM MỞ ĐẦU

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

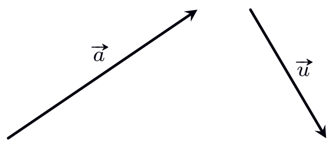
1. Khái niệm vectơ

Khái niệm: Vectơ là một đoạn thẳng có hướng. Vectơ có điểm đầu là A, điểm cuối là B được kí hiệu là $\overrightarrow{AB}$, đọc là "vectơ AB".

Đối với vectơ AB, ta gọi

- Đường thẳng d đi qua hai điểm A và B là giá của vectơ AB.
- Độ dài đoạn thẳng AB là độ dài của vectơ AB, kí hiệu là $\left|\overrightarrow{AB}\right|$.

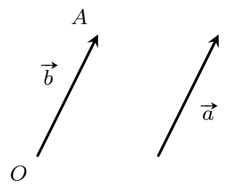
Khi không cần chỉ rõ điểm đầu và điểm cuối của vectơ, vectơ còn được kí hiệu là $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{u}$, $\vec{v}$, ... Độ dài của vectơ $\vec{a}$ được kí hiệu là $|\vec{a}|$.



2. Hai vectơ cùng phương, cùng hướng, bằng nhau

Định nghĩa: Hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ bằng nhau nếu chúng cùng hướng và cùng độ dài, kí hiệu là $\vec{a} = \vec{b}$.

Nhận xét: Khi cho trước vectơ $\vec{a}$ và điểm O, thì ta luôn tìm được một điểm A duy nhất sao cho $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$.



3. Vectơ không

Định nghĩa: Vectơ không (kí hiệu là $\vec{0}$) là vectơ có điểm đầu và điểm cuối trùng nhau. Với các điểm bất kì A, B, C ta có $\vec{0} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{CC}$.

Quy ước: $\vec{0}$ (vectơ không) cùng phương và cùng hướng với mọi vectơ; hơn nữa $\left|\vec{0}\right| = 0$.

Nhận xét: Hai điểm A, B trùng nhau khi và chỉ khi $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$.

B. CÁC DẠNG TOÁN

1 Xác định một vectơ, độ dài vectơ

1. Ví dụ minh hoạ

VÍ DỤ 1. Cho tứ giác $ABCD$. Hãy chỉ ra các vectơ khác vectơ không có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của tứ giác.

VÍ DỤ 2. Cho hình vuông $ABCD$ với cạnh có độ dài bằng 1. Tính độ dài các vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{DB}$.

VÍ DỤ 3. Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng a. Gọi M là trung điểm của BC. Tính độ dài vectơ $\overrightarrow{AM}$.

2. Bài tập tự luận

BÀI 1. Cho lục giác đều $ABCDEF$ có cạnh bằng a.

a) Có bao nhiêu vectơ khác vectơ không có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của ngũ giác?

b) Tính độ dài các vectơ $\overrightarrow{AD}$

BÀI 2. Cho tam giác ABC vuông tại A có $BC = 2a$. Gọi M là trung điểm của BC tính độ dài vectơ $\overrightarrow{AM}$.

QUICK NOTE

QUICK NOTE

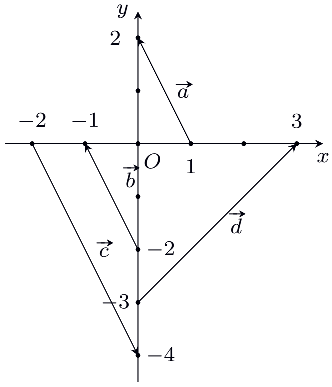
2 Hai vectơ cùng phương, cùng hướng và bằng nhau

Sử dụng các định nghĩa

- Hai vectơ cùng phương nếu chúng có giá song song hoặc trùng nhau.
- Hai vectơ cùng phương thì cùng hướng hoặc ngược hướng.
- Hai vectơ bằng nhau nếu chúng cùng độ dài và cùng hướng.

1. Ví dụ minh hoạ

VÍ DỤ 1.
Cho hình vẽ, hãy chỉ ra các vectơ cùng phương, các cặp vectơ ngược hướng và các cặp vectơ bằng nhau



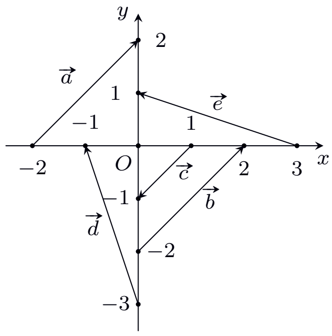
VÍ DỤ 2. Cho hình bình hành $ABCD$ có tâm là O . Hãy tìm các cặp vectơ khác $\vec{0}$, bằng nhau và

a) có điểm đầu và điểm cuối trong các điểm A , B , C và D .

b) có điểm đầu là O hoặc điểm cuối là O.

2. Bài tập tự luận

BÀI 1.
Cho hình vẽ, hãy chỉ ra các vectơ cùng phương, các cặp vectơ ngược hướng và các cặp vectơ bằng nhau



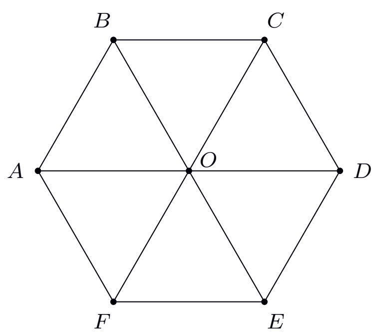
BÀI 2. Cho tam giác đều ABC, hãy chỉ ra mối quan hệ về độ dài, phương và hướng giữa cặp vectơ $\overrightarrow{BA}$ và $\overrightarrow{CA}$. Hai vectơ có bằng nhau không?

BÀI 3.
Cho hình lục giác đều $ABCDEF$ có tâm O.

a) Hãy tìm các vectơ khác $\vec{0}$ và bằng với $\overrightarrow{AB}$.

b) Hãy vẽ vectơ bằng với $\overrightarrow{AE}$ và có điểm đầu là B.

c) Hãy vẽ vectơ bằng với $\overrightarrow{AE}$ và có điểm đầu là C.



BÀI 4. Chứng minh ba điểm A, B, C thẳng hàng khi và chỉ khi $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ cùng phương.

C. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

CÂU 1. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau.

Ⓐ vectơ là một đường thẳng có hướng.

Ⓑ vectơ là một đoạn thẳng.

Ⓒ vectơ là một đoạn thẳng có hướng.

Ⓓ vectơ là một đoạn thẳng không phân biệt điểm đầu và điểm cuối.

CÂU 2. Cho tam giác ABC có thể xác định được bao nhiêu vectơ (khác vectơ không) có điểm đầu và điểm cuối là đỉnh A, B, C?

Ⓐ 2. Ⓑ 3. Ⓒ 4. Ⓓ 6.

CÂU 3. Cho hai điểm phân biệt A, B. Số vectơ (khác $\vec{0}$) có điểm đầu và điểm cuối lấy từ các điểm A, B là

Ⓐ 2. Ⓑ 6. Ⓒ 13. Ⓓ 12.

CÂU 4. Cho tam giác đều ABC. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

Ⓐ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$.

Ⓑ $\overrightarrow{AC} \neq \overrightarrow{BC}$.

Ⓒ $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{BC}\right|$.

Ⓓ $\overrightarrow{AC}$ không cùng phương $\overrightarrow{BC}$.

CÂU 5. Khẳng định nào dưới đây là **sai**?

Ⓐ Mỗi vectơ đều có một độ dài, đó là khoảng cách giữa điểm đầu và điểm cuối của vectơ đó.

Ⓑ Độ dài của vectơ $\vec{a}$ được kí hiệu là $|\vec{a}|$.

Ⓒ $\left|\overrightarrow{PQ}\right| = \overrightarrow{PQ}$.

Ⓓ $\left|\overrightarrow{AB}\right| = AB = BA$.

CÂU 6. Cho tam giác ABC. Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AB, AC. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

Ⓐ $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{NM}$. Ⓑ $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$. Ⓒ $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{NC}$. Ⓓ $\left|\overrightarrow{MA}\right| = \left|\overrightarrow{MB}\right|$.

CÂU 7. Cho hai vectơ không cùng phương $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

Ⓐ Không có vectơ nào cùng phương với cả hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

Ⓑ Có vô số vectơ cùng phương với cả hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

Ⓒ Có một vectơ cùng phương với cả hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

Ⓓ Có hai vectơ cùng phương với cả hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

CÂU 8. Cho 3 điểm phân biệt A, B, C. Khi đó khẳng định nào sau đây **sai**?

Ⓐ A, B, C thẳng hàng khi và chỉ khi $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ cùng phương.

Ⓑ A, B, C thẳng hàng khi và chỉ khi $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BC}$ cùng phương.

Ⓒ A, B, C thẳng hàng khi và chỉ khi $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{BC}$ cùng phương.

Ⓓ A, B, C thẳng hàng khi và chỉ khi $AC = BC$.

CÂU 9. Mệnh đề nào sau đây đúng?

Ⓐ Có duy nhất một vectơ cùng phương với mọi vectơ.

Ⓑ Có ít nhất hai vectơ cùng phương với mọi vectơ.

Ⓒ Có vô số vectơ cùng phương với mọi vectơ.

Ⓓ Không có vectơ nào cùng phương với mọi vectơ.

CÂU 10. Khẳng định nào sau đây đúng?

Ⓐ Hai vectơ cùng phương với một vectơ thứ ba thì cùng phương.

Ⓑ Hai vectơ cùng phương với một vectơ thứ ba khác $\vec{0}$ thì cùng phương.

Ⓒ vectơ không là vectơ không có giá.

Ⓓ Điều kiện đủ để hai vectơ bằng nhau là chúng có độ dài bằng nhau.

CÂU 11. Cho lục giác đều $ABCDEF$ tâm O. Số các vectơ khác $\vec{0}$ cùng phương với $\overrightarrow{OC}$ có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của lục giác bằng

Ⓐ 6. Ⓑ 7. Ⓒ 8. Ⓓ 4.

QUICK NOTE

QUICK NOTE

CÂU 12. Cho ba điểm A, B, C phân biệt. Khi đó

(A) Điều kiện cần và đủ để A, B, C thẳng hàng là $\overrightarrow{AC}$ cùng phương với $\overrightarrow{AB}$.

(B) Điều kiện đủ để A, B, C thẳng hàng là $\overrightarrow{CA}$ cùng phương với $\overrightarrow{AB}$.

(C) Điều kiện cần để A, B, C thẳng hàng là $\overrightarrow{CA}$ cùng phương với $\overrightarrow{AB}$.

(D) Điều kiện cần và đủ để A, B, C thẳng hàng là $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$.

CÂU 13. Cho vectơ $\overrightarrow{MN} \neq \overrightarrow{0}$. Số vectơ cùng hướng với vectơ $\overrightarrow{MN}$ là

(A) vô số. (B) 1. (C) 3. (D) 2.

CÂU 14. Gọi C là trung điểm của đoạn AB. Hãy chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau.

(A) $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CB}$.
(B) $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ cùng hướng.
(C) $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CB}$ ngược hướng.
(D) $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \overrightarrow{CB}$.

CÂU 15. Cho ba điểm M, N, P thẳng hàng, trong đó điểm N nằm giữa hai điểm M và P. Khi đó các cặp vectơ nào cùng hướng?

(A) $\overrightarrow{MP}$ và $\overrightarrow{PN}$. (B) $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{PN}$. (C) $\overrightarrow{NM}$ và $\overrightarrow{NP}$. (D) $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{MP}$.

CÂU 16. Phát biểu nào sau đây đúng?

(A) Hai vectơ không bằng nhau thì độ dài của chúng không bằng nhau.

(B) Hai vectơ không bằng nhau thì độ dài của chúng không cùng phương.

(C) Hai vectơ bằng nhau thì có giá trùng nhau hoặc song song nhau.

(D) Hai vectơ có độ dài không bằng nhau thì không cùng hướng.

CÂU 17. Cho vectơ $\overrightarrow{a} \neq \overrightarrow{0}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

(A) Có vô số vectơ $\overrightarrow{u}$ mà $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{a}$.
(B) Có duy nhất một $\overrightarrow{u}$ mà $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{a}$.
(C) Có duy nhất một $\overrightarrow{u}$ mà $\overrightarrow{u} = -\overrightarrow{a}$.
(D) Không có vectơ $\overrightarrow{u}$ nào mà $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{a}$.

CÂU 18. Cho hình bình hành $ABCD$. Đẳng thức nào sau đây **sai**?

(A) $\left|\overrightarrow{AD}\right| = \left|\overrightarrow{BC}\right|$. (B) $\left|\overrightarrow{BC}\right| = \left|\overrightarrow{DA}\right|$. (C) $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{CD}\right|$. (D) $\left|\overrightarrow{AC}\right| = \left|\overrightarrow{BD}\right|$.

CÂU 19. Cho lục giác đều $ABCDEF$ tâm O. Ba vectơ bằng vectơ $\overrightarrow{BA}$ là

(A) $\overrightarrow{OF}$, $\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{OC}$. (B) $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{OF}$, $\overrightarrow{DE}$. (C) $\overrightarrow{OF}$, $\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{CO}$. (D) $\overrightarrow{OF}$, $\overrightarrow{ED}$, $\overrightarrow{OC}$.

CÂU 20. Cho đoạn thẳng AB, I là trung điểm của AB. Khi đó

(A) $\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{AI}$.
(B) $\overrightarrow{BI}$ cùng hướng $\overrightarrow{AB}$.
(C) $\left|\overrightarrow{BI}\right| = 2\left|\overrightarrow{IA}\right|$.
(D) $\left|\overrightarrow{BI}\right| = \left|\overrightarrow{IA}\right|$.

CÂU 21. Cho hình thoi $ABCD$ cạnh a và $\widehat{BAD} = 60^\circ$. Đẳng thức nào sau đây đúng?

(A) $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{DA}$. (B) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD}$. (C) $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC}$. (D) $\left|\overrightarrow{BD}\right| = a$.

CÂU 22. Cho hình chữ nhật $ABCD$. Trong các đẳng thức dưới đây, đẳng thức nào đúng?

(A) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. (B) $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$. (C) $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$. (D) $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{DA}$.

CÂU 23. Cho tam giác ABC với trung tuyến AM và trọng tâm G. Khi đó $|\overrightarrow{GA}|$ bằng

(A) $\frac{1}{2}|\overrightarrow{AM}|$. (B) $\frac{2}{3}|\overrightarrow{GM}|$. (C) $2|\overrightarrow{GM}|$. (D) $-\frac{2}{3}|\overrightarrow{MA}|$.

Bài 4. TỔNG VÀ HIỆU CỦA HAI VECTƠ

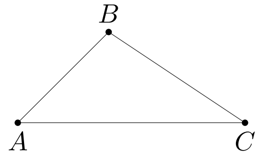
A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Phép toán cộng hai vectơ

Phép cộng hai vectơ có tính chất giao hoán. Khi thực hiện phép toán cộng hai vectơ, ta chú ý các quy tắc sau

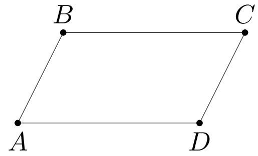
Quy tắc 3 điểm: ("nối đuôi")

CÂU 23 Với ba điểm A, B, C bất kì, ta luôn có $\boxed{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}}$



- **Quy tắc hình bình hành:** ("chung đầu")

CÂU 23 Xét hình bình hành $ABCD$, ta luôn có $\boxed{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}}$



- **Quy tắc cộng vectơ đối:** Nếu $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đối nhau thì $\vec{a} + \vec{b} = \vec{0}$.

Tính chất: Với ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ tùy ý

- Tính chất giao hoán: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.
- Tính chất kết hợp: $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$.
- Tính chất của vectơ-không: $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$.

2. Phép toán hiệu hai vectơ

- **Vectơ đối:**
  - Vectơ đối của $\vec{a}$ kí hiệu là $-\vec{a}$.
  - Vectơ đối của $\overrightarrow{AB}$ là $\overrightarrow{BA}$, nghĩa là $\boxed{-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}}$ (*dùng để làm mất dấu trừ trước vectơ*).
  - Vectơ $\vec{0}$ được coi là vectơ đối của chính nó.
- **Quy tắc trừ:** Với ba điểm A, B, C bất kì, ta luôn có $\boxed{\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}}$

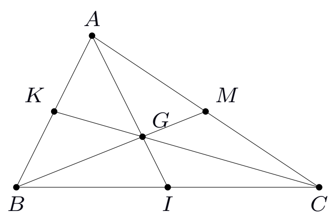
3. Công thức trung điểm, trọng tâm

- **Công thức trung điểm:** Nếu M là trung điểm của đoạn AB thì

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$$

- **Công thức trọng tâm:** Nếu G là trọng tâm của tam giác ABC thì

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}.$$



B. CÁC DẠNG TOÁN

1 Tính tổng, hiệu hai vectơ

- Ghép các vectơ lại thích hợp.
- Dùng các quy tắc cộng vectơ để tính.

QUICK NOTE

QUICK NOTE

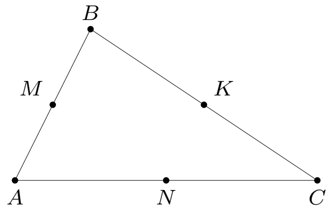
1. Ví dụ minh hoạ

CÂU 0. Cho tam giác ABC. Các điểm M, N và K lần lượt là trung điểm của AB, AC và BC.

a) Tìm các vectơ bằng với $\overrightarrow{MK}$.

b) Tìm các vectơ đối của $\overrightarrow{MN}$.

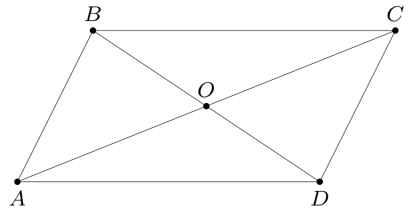
c) Xác định các vectơ $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MN}$; $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{NK}$; $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{KN}$; $\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AN}$; $\overrightarrow{MN}-\overrightarrow{NC}$; $\overrightarrow{BK}-\overrightarrow{CK}$.



CÂU 0. Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O.

a) Tìm vectơ bằng với $\overrightarrow{OC}$.

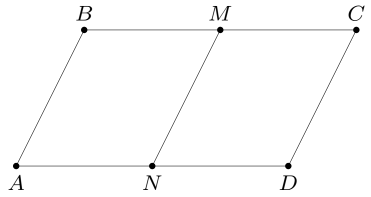
b) Xác định các vectơ $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}$; $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}$; $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$; $\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{DC}$.



CÂU 0. Cho hình bình hành $ABCD$ Hai điểm M và N lần lượt là trung điểm của BC và AD Xác định vectơ

$\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DC}$, $\quad \overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AN}$,

$\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{CM}$, $\quad \overrightarrow{MB}+\overrightarrow{NC}$.



2. Bài tập tự luận

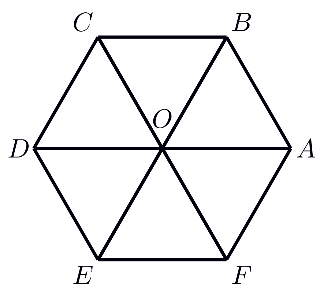
BÀI 1. Tính tổng $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{RN}+\overrightarrow{NP}+\overrightarrow{QR}$.

BÀI 2. Cho tam giác ABC với M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB. Tính tổng $\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CN}$.

BÀI 3. Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $AB'C'D'$ có chung đỉnh A. Tính $\vec{u}=\overrightarrow{B'B}+\overrightarrow{CC'}+\overrightarrow{D'D}$.

BÀI 4. Cho tam giác ABC, gọi D, E, F, G, H, I theo thứ tự là trung điểm các cạnh AB, BC, CA, DF, DE, EF. Tính vectơ $\vec{u}=\overrightarrow{BE}-\overrightarrow{GH}-\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{FE}$?

CÂU 0. Cho lục giác đều $ABCDEF$ tâm O. Rút gọn vectơ $\vec{v}=\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DE}$?



BÀI 6. Gọi O là tâm của tam giác đều ABC. Tính $\vec{u}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$.

BÀI 7. Cho hình bình hành $ABCD$. Trên các đoạn thẳng DC, AB theo thứ tự lấy các điểm M, N sao cho $DM=BN$. Gọi P là giao điểm của AM, DB và Q là giao điểm của CN, DB. Tính $\vec{u}=\overrightarrow{DP}-\overrightarrow{QB}$.

2 Xác định vị trí của một điểm từ đẳng thức vectơ

1. Ví dụ minh hoạ

VÍ DỤ 1. Cho tam giác ABC. Điểm M thỏa mãn điều kiện $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

(A) M là điểm sao cho tứ giác $BAMC$ là hình bình hành.

(B) M là điểm sao cho tứ giác $ABMC$ là hình bình hành.

(C) M là trọng tâm tam giác ABC.

(D) M thuộc đường trung trực của AB.

QUICK NOTE

2. Bài tập tự luận

BÀI 1. Cho tam giác ABC. Xác định điểm M thỏa mãn điều kiện $\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}$.

BÀI 2. Cho hình bình hành $ABCD$. Xác định điểm M thỏa mãn điều kiện $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AM}$.

BÀI 3. Cho hình bình hành $ABCD$. Xác định điểm M thỏa mãn điều kiện $\left|\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{CD}\right|=\left|\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{DA}\right|$.

3 Tính độ dài vectơ

1. Ví dụ minh hoạ

VÍ DỤ 1. Cho tam giác đều ABC có cạnh $AB=a$, xác định và tính độ dài của vectơ

a) $\vec{x}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$.

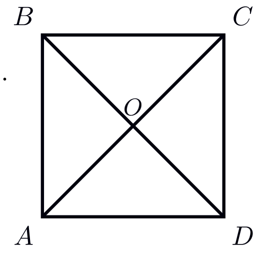
b) $\vec{y}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$.

VÍ DỤ 2.
Cho hình vuông $ABCD$ tâm O cạnh bằng a. Tính

a) $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right|$.

b) $\left|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right|$.

c) $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{BC}\right|$.



2. Bài tập tự luận

BÀI 1. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB=2$, $AC=4$, xác định và tính độ dài của vectơ $\vec{u}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$.

BÀI 2. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AC=5$, $AB=3$, xác định và tính độ dài của vectơ

a) $\vec{a}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC}$.

b) $\vec{b}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$.

BÀI 3. Cho hình thang $ABCD$ có $\widehat{A}=\widehat{D}=90^\circ$, $AB=AD=3$, $CD=5$, xác định và tính độ dài của vectơ

a) $\vec{x}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$.

b) $\vec{y}=\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}$.

4 Chứng minh một đẳng thức vectơ

Ta thường dùng một trong hai cách sau:

① Thực hiện các phép toán, biến đổi đẳng thức cần chứng minh đi đến một kết quả hiển nhiên đúng.

② Biến đổi vế phức tạp thành vế đơn giản (biến vế trái thành vế phải hoặc ngược lại)

1. Ví dụ minh hoạ

VÍ DỤ 1. Cho bốn điểm A, B, C, D. Chứng minh các đẳng thức sau:

a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}=\vec{0}$;

b) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}$;

c) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}$;

d) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BD}$.

VÍ DỤ 2. Cho tam giác ABC. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA và AB; O là một điểm bất kì. Chứng minh rằng

a) $\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CN}+\overrightarrow{AP}=\vec{0}$;

b) $\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BM}=\vec{0}$;

c) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OP}$.

VÍ DỤ 3. Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O; M là một điểm bất kì trong mặt phẳng . Chứng minh

QUICK NOTE

a) $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AC}=\vec{0}$; b) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$;

c) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{CO}-\overrightarrow{CD}$; d) $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}$.

2. Bài tập tự luận

BÀI 1. Cho năm điểm A, B, C, D, E. Chứng minh rằng

a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{EA}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{ED}$; b) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{CB}$.

BÀI 2. Cho các sáu điểm A, B, C, D, E, F. Chứng minh rằng

a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{EA}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{ED}$; b) $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{CD}$;

c) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DE}-\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}$; d) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{EF}-\overrightarrow{ED}=\vec{0}$.

BÀI 3. Cho tam giác ABC. Vẽ về phía ngoài tam giác ABC các hình bình hành $ABEF$, $ACPQ$, $BCIJ$. Chứng minh $\overrightarrow{EJ}+\overrightarrow{IP}+\overrightarrow{QF}=\vec{0}$.

BÀI 4. Cho tam giác ABC có trung tuyến AM.

a) Chứng minh $\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AM}=\vec{0}$;

b) Trên cạnh AC lấy hai điểm E và F sao cho $AE=EF=FC$; BE cắt AM tại N Chứng minh $\overrightarrow{NA}$ và $\overrightarrow{NM}$ là hai vec tơ đối nhau.

BÀI 5. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm AB, BC, CD, DA. Chứng minh rằng $\overrightarrow{MQ}=\overrightarrow{NP}$.

BÀI 6. Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O. Gọi M, N lần lượt là trung điểm BC và AD. Chứng minh rằng

a) $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$; b) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$;

c) $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{OA}$; d) $\overrightarrow{ND}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AM}$.

5 Ứng dụng của vectơ trong thực tiễn

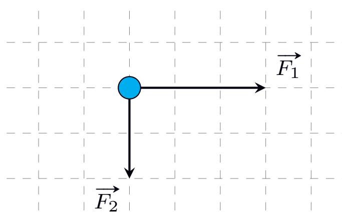
Phép cộng vectơ tương ứng với các quy tắc tổng hợp lực, tổng hợp vận tốc:

- Nếu hai lực cùng tác động vào chất điểm A và được biểu diễn bởi các vectơ $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ thì hợp lực tác động vào A được biểu diễn bởi vectơ $\vec{u}_1+\vec{u}_2$.
- Nếu một con thuyền di chuyển trên sông với vận tốc riêng (vận tốc so với dòng nước) được biểu diễn bởi vectơ $\vec{v_r}$ và vận tốc của dòng nước (so với bờ) được biểu diễn bởi vectơ $\overline{v_n}$ thì vận tốc thực tế của thuyền (so với bờ) được biểu diễn bởi vectơ $\vec{v}_r+\vec{v}_n$.

1. Ví dụ minh hoạ

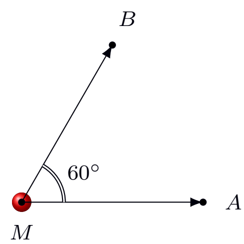
VÍ DỤ 1.

Cho hai lực đồng quy $\vec{F_1}$ và $\vec{F_2}$ như hình vẽ. Biết độ lớn của $\vec{F_1}$, $\vec{F_2}$ lần lượt là 3N và 2N. Tính độ lớn hợp lực của $\vec{F_1}$ và $\vec{F_2}$.



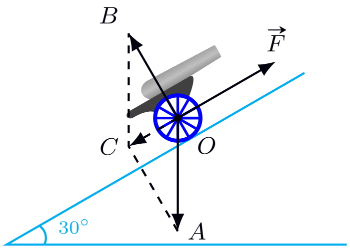
VÍ DỤ 2.

Cho hai lực $\vec{F}_1=\overrightarrow{MA}$, $\vec{F}_2=\overrightarrow{MB}$ cùng tác động vào một vật tại điểm M cường độ hai lực $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ đều bằng 300 (N) và $\widehat{AMB}=60^\circ$. Tìm cường độ của lực tổng hợp tác động vào vật.



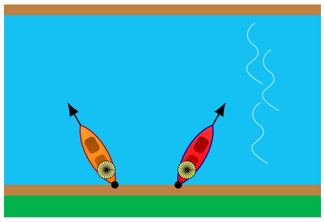
VÍ DỤ 3.

Tính lực kéo cần thiết để kéo một khẩu pháo có trọng lượng 22 148 N (xấp xỉ 2 260 kg) lên một con dốc nghiêng 30° so với phương nằm ngang (hình bên). Nếu lực kéo của mỗi người bằng 100 N thì cần tối thiểu bao nhiêu người để kéo pháo (*bỏ qua ma sát trượt giữa bánh xe và mặt phẳng nghiêng*)?



VÍ DỤ 4.

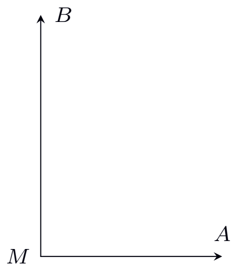
Hai con tàu xuất phát cùng lúc từ bờ bên này để sang bờ bên kia của dòng sông (hai bờ song song nhau) với vận tốc riêng không đổi và có độ lớn bằng nhau. Hai tàu luôn giữ lái sao cho chúng tạo với bờ cùng một góc nhọn nhưng một tàu hướng xuống hạ lưu, một tàu hướng lên thượng nguồn. Vận tốc dòng nước là đáng kể, các yếu tố bên ngoài khác không ảnh hưởng tới vận tốc của các tàu. Hỏi tàu nào sang bờ bên kia trước?



2. Bài tập tự luận

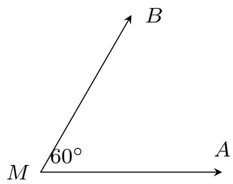
BÀI 1.

Cho hai lực $\vec{F}_1 = \overrightarrow{MA}$, $\vec{F}_2 = \overrightarrow{MB}$ cùng tác động vào một vật tại điểm M cường độ hai lực $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ lần lượt là 300 (N) và 400 (N) và $\widehat{AMB} = 90^\circ$. Tìm cường độ của lực tổng hợp tác động vào vật.



BÀI 2.

Cho hai lực $\vec{F}_1 = \overrightarrow{MA}$, $\vec{F}_2 = \overrightarrow{MB}$ cùng tác động vào một vật tại điểm M cường độ hai lực $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ đều bằng 300 (N) và $\widehat{AMB} = 60^\circ$. Tìm cường độ của lực tổng hợp tác động vào vật.



C. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

CÂU 1. Cho ba điểm phân biệt A, B, C. Đẳng thức nào sau đây đúng?

(A) $\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CB}$. (B) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$. (C) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{BC}$. (D) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}$.

CÂU 2. Rút gọn biểu thức vectơ $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{AC}$ ta được kết quả đúng là

(A) $\overrightarrow{MB}$. (B) $\overrightarrow{BC}$. (C) $\overrightarrow{CB}$. (D) $\overrightarrow{AB}$.

CÂU 3. Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$. Tính $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}$.

(A) $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{BC}$. (B) $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{DA}$.

(C) $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA}$. (D) $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{AB}$.

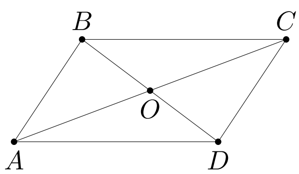
CÂU 4. Cho bốn điểm A, B, C, D phân biệt và $\vec{u} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{BD}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

(A) $\vec{u} = \vec{0}$. (B) $\vec{u} = \overrightarrow{AD}$. (C) $\vec{u} = \overrightarrow{CD}$. (D) $\vec{u} = \overrightarrow{AC}$.

CÂU 5.

Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O . Hỏi vectơ $\overrightarrow{AO} - \overrightarrow{DO}$ bằng vectơ nào trong các vectơ sau?

(A) $\overrightarrow{BA}$. (B) $\overrightarrow{BC}$. (C) $\overrightarrow{DC}$. (D) $\overrightarrow{AC}$.



CÂU 6. Cho tam giác ABC. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh AB, AC, BC. Tổng $\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{NP}$ bằng vectơ nào?

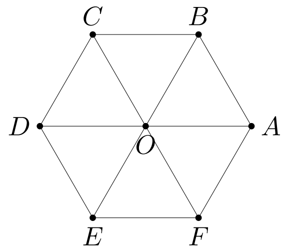
(A) $\overrightarrow{PA}$. (B) $\overrightarrow{AM}$. (C) $\overrightarrow{PB}$. (D) $\overrightarrow{AP}$.

CÂU 7.

QUICK NOTE

QUICK NOTE

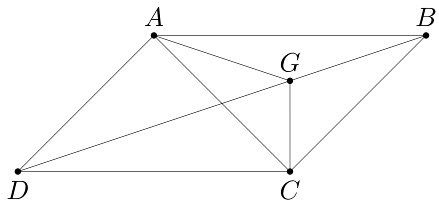
Cho lục giác đều $ABCDEF$ có tâm O. Đẳng thức nào sau đây **sai**?



(A) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OE}=\vec{0}$. (B) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{EB}$.
(C) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{EF}=\vec{0}$. (D) $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AD}$.

CÂU 8. Cho hình bình hành $ABCD$. vectơ $\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AB}$ bằng vectơ nào dưới đây?
(A) $\overrightarrow{DB}$. (B) $\overrightarrow{BD}$. (C) $\overrightarrow{AC}$. (D) $\overrightarrow{CA}$.

CÂU 9.
Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC. Mệnh đề nào sau đây đúng?



(A) $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\overrightarrow{BD}$.
(B) $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\overrightarrow{CD}$.
(C) $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{O}$.
(D) $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GD}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{CD}$.

CÂU 10. Chọn mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau.
(A) Nếu $\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}$ thì $|\vec{a}|+\left|\vec{b}\right|=|\vec{c}|$.
(B) $\overrightarrow{FY}-\overrightarrow{BY}=\overrightarrow{FB}$ với B, F, Y bất kì.
(C) Nếu $ABCD$ là hình bình hành thì $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$.
(D) $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MH}=\overrightarrow{AH}$ với A, M, H bất kì.

CÂU 11. Trong mặt phẳng cho bốn điểm bất kì A, B, C, O. Đẳng thức nào sau đây là đúng?
(A) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OA}$. (B) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}$. (C) $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CO}$. (D) $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{BA}$.

CÂU 12. Cho ba điểm A, B, C phân biệt. Đẳng thức nào sau đây là **sai**?
(A) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CB}$. (B) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$. (C) $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BC}$. (D) $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}$.

CÂU 13. Tổng $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{RN}+\overrightarrow{NP}+\overrightarrow{QR}$ bằng
(A) $\overrightarrow{MR}$. (B) $\overrightarrow{MN}$. (C) $\overrightarrow{MP}$. (D) $\overrightarrow{MQ}$.

CÂU 14. Cho 4 điểm bất kì A, B, C, D. Đẳng thức nào sau đây sai?
(A) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}$. (B) $\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{CD}$.
(C) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{DA}$. (D) $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DC}$.

CÂU 15. Cho bốn điểm A, B, C. Tính $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$.
(A) $\overrightarrow{CA}$. (B) $2\cdot\overrightarrow{AC}$. (C) $\vec{0}$. (D) $\overrightarrow{AC}$.

CÂU 16. Cho tam giác ABC và điểm M bất kỳ, chọn đẳng thức **đúng**.
(A) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BC}$. (B) $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{AB}$.
(C) $\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{CB}$. (D) $\overrightarrow{AA}-\overrightarrow{BB}=\overrightarrow{AB}$.

CÂU 17. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm BC và AD. Tổng của $\overrightarrow{NC}$ và $\overrightarrow{MC}$ là
(A) $\vec{0}$. (B) $\overrightarrow{MN}$. (C) $\overrightarrow{NM}$. (D) $\overrightarrow{AC}$.

CÂU 18. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm BC và AD. Tính $\overrightarrow{JC}-\overrightarrow{IC}$ không bằng
(A) $\overrightarrow{DC}$. (B) $\overrightarrow{JI}$. (C) $\overrightarrow{AB}$. (D) $\overrightarrow{AC}$.

CÂU 19. Cho hình bình hành $ABCD$. Điểm M thỏa mãn điều kiện $\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{DO}$. Khẳng định nào sau đây đúng?
(A) M trùng với A. (B) M trùng với B. (C) M trùng với O. (D) M trùng với C.

CÂU 20. Cho hình bình hành $ABCD$ có tâm O. Điểm M thỏa mãn điều kiện $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{DC}$. Khẳng định nào sau đây đúng?
(A) M trùng với B. (B) M trùng với D.
(C) M trùng với A. (D) M trùng với điểm O.

QUICK NOTE

CÂU 21. Cho bốn điểm phân biệt A, B, C, D. Biết điểm M thỏa mãn điều kiện $\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

Ⓐ M là trung điểm CD. Ⓑ M là trung điểm AB.

Ⓒ M là trung điểm AD. Ⓓ M là trung điểm BC.

CÂU 22. Cho các điểm phân biệt A, B, C, D, E, F. Biết điểm M thỏa mãn điều kiện $\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{MF}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{DF}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

Ⓐ M là trọng tâm tam giác ABC. Ⓑ M là trọng tâm tam giác BCD.

Ⓒ M là trọng tâm tam giác ABD. Ⓓ M là trọng tâm tam giác ACD.

CÂU 23. Cho hình bình hành $ABCD$ có E là trung điểm AB. Điểm M thỏa mãn điều kiện $\overrightarrow{EB}=\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{BC}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

Ⓐ M là trung điểm AD. Ⓑ M là trung điểm CD.

Ⓒ M là trung điểm AB. Ⓓ M là trung điểm BC.

CÂU 24. Cho tam giác ABC đều có cạnh bằng a. Tìm tập hợp điểm M thỏa mãn điều kiện $\left|\overrightarrow{MC}\right|=\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right|$.

Ⓐ M thuộc đường tròn tâm A bán kính $a\sqrt{3}$.

Ⓑ M thuộc đường tròn tâm C bán kính $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Ⓒ M thuộc đường tròn tâm B bán kính $a\sqrt{3}$.

Ⓓ M thuộc đường tròn tâm C bán kính $a\sqrt{3}$.

CÂU 25. Cho hình thang $ABCD$ có AB song song với CD. Cho $AB=2a$, $CD=a$. O là trung điểm của AD. Khi đó,

Ⓐ $\left|\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right|=\dfrac{3a}{2}$. Ⓑ $\left|\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right|=a$.

Ⓒ $\left|\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right|=2a$. Ⓓ $\left|\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right|=3a$.

CÂU 26. Cho tam giác ABC vuông cân tại A có $BC=a\sqrt{2}$, M là trung điểm của BC. Khẳng định nào sau đây đúng?

Ⓐ $\left|\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BM}\right|=a$. Ⓑ $\left|\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BM}\right|=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Ⓒ $\left|\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BM}\right|=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Ⓓ $\left|\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BM}\right|=\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

CÂU 27. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a tâm O. Tính theo a độ dài của vectơ $\vec{u}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{BC}$.

Ⓐ $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. Ⓑ $\dfrac{3a\sqrt{2}}{2}$. Ⓒ $a\sqrt{2}$. Ⓓ a.

CÂU 28. Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng a. Khi đó $\left|\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}\right|$ bằng

Ⓐ $2a$. Ⓑ $a\sqrt{2}$. Ⓒ $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Ⓓ $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

CÂU 29. Cho tam giác ABC vuông cân tại C, $AB=\sqrt{2}$. Tính độ dài của $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$

Ⓐ $\sqrt{5}$. Ⓑ $2\sqrt{5}$. Ⓒ $\sqrt{3}$. Ⓓ $2\sqrt{3}$.

CÂU 30. Cho hình bình hành $ABCD$ có $DA=2\text{cm}$, $AB=4\text{cm}$ và đường chéo $BD=5\text{cm}$. Tính $\left|\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{DA}\right|$.

Ⓐ 2cm. Ⓑ 4cm. Ⓒ 5cm. Ⓓ 6cm.

CÂU 31. Cho hình thang $ABCD$ có hai đáy $AB=a$, $CD=2a$. Gọi M, N là trung điểm của AD, BC. Khi đó $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MN}\right|$ bằng

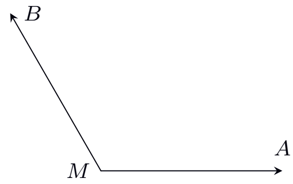
Ⓐ $\dfrac{a}{2}$. Ⓑ $3a$. Ⓒ a. Ⓓ $2a$.

CÂU 32. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a, d là đường thẳng qua A, song song với BD. Gọi M là điểm thuộc đường thẳng d sao cho $|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MD}|$ nhỏ nhất. Tính theo a độ dài vectơ $\overrightarrow{MD}$.

Ⓐ $a\sqrt{2}$. Ⓑ $\dfrac{a\sqrt{10}}{2}$. Ⓒ a. Ⓓ $\dfrac{a\sqrt{5}}{2}$.

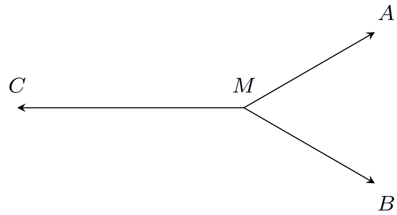
QUICK NOTE

CÂU 33.
Cho hai lực $\vec{F}_1 = \overrightarrow{MA}$, $\vec{F}_2 = \overrightarrow{MB}$ cùng tác động vào một vật tại điểm M cường độ hai lực $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ đều bằng 300 (N) và $\widehat{AMB} = 120^\circ$. Tìm cường độ của lực tổng hợp tác động vào vật.



(A) 300 (N). (B) 700 (N). (C) 100 (N). (D) 500 (N).

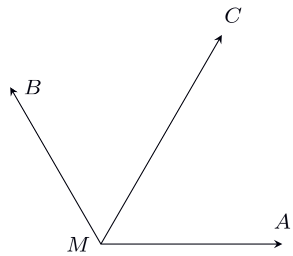
CÂU 34.
Cho ba lực $\vec{F}_1 = \overrightarrow{MA}$, $\vec{F}_2 = \overrightarrow{MB}$, $\vec{F}_3 = \overrightarrow{MC}$ cùng tác động vào một vật tại điểm M và vật đứng yên. Cho biết cường độ của $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ đều bằng 25 (N) và góc $\widehat{AMB} = 60^\circ$. Khi đó cường độ lực của $\vec{F}_3$ là



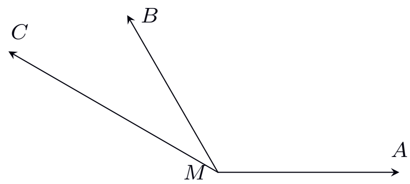
(A) $25\sqrt{3}$ (N). (B) $50\sqrt{3}$ (N). (C) $50\sqrt{2}$ (N). (D) $100\sqrt{3}$ (N).

CÂU 35.
Cho ba lực $\vec{F}_1 = \overrightarrow{MA}$, $\vec{F}_2 = \overrightarrow{MB}$, $\vec{F}_3 = \overrightarrow{MC}$ cùng tác động vào một vật tại điểm M cường độ hai lực $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ đều bằng 300 (N) và $\vec{F}_3 = 400$ (N). Lại có $\widehat{AMB} = 120^\circ$ và $\widehat{AMC} = 60^\circ$. Tìm cường độ của lực tổng hợp tác động vào vật.

(A) 300 (N). (B) 700 (N). (C) 100 (N). (D) 500 (N).



CÂU 36.
Cho ba lực $\vec{F}_1 = \overrightarrow{MA}$, $\vec{F}_2 = \overrightarrow{MB}$, $\vec{F}_3 = \overrightarrow{MC}$ cùng tác động vào một vật tại điểm M cường độ hai lực $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ đều bằng 300 (N) và $\vec{F}_3 = 400$ (N). Lại có $\widehat{AMB} = 120^\circ$ và $\widehat{AMC} = 150^\circ$. Tìm cường độ của lực tổng hợp tác động vào vật.



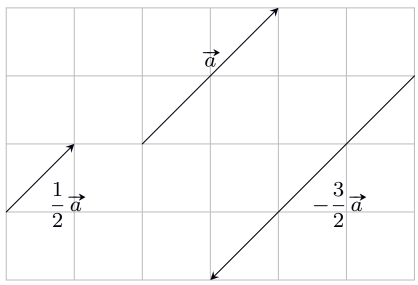
(A) 300 (N). (B) 700 (N).
(C) 100 (N). (D) 500 (N).

Bài 5. TÍCH CỦA MỘT VECTƠ VỚI MỘT SỐ

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. Tích của một vectơ với một số

Định nghĩa: Cho vectơ $\vec{a} \neq \vec{0}$ và số thực $k \neq 0$. Tích của vectơ $\vec{a}$ với số k là một vectơ, kí hiệu là $k\vec{a}$, được xác định như sau:



- Nếu $k > 0$ thì $k\vec{a}$ là vectơ **cùng hướng** với $\vec{a}$. Nếu $k < 0$ thì $k\vec{a}$ là vectơ **ngược hướng** với $\vec{a}$.
- Độ dài của vectơ $k\vec{a}$ bằng $|k|$ lần độ dài của vectơ $\vec{a}$, tức là $|k\vec{a}| = |k| \cdot |\vec{a}|$.

Ta quy ước $k\vec{a} = \vec{0}$ nếu $\vec{a} = \vec{0}$ hoặc $k = 0$.

2. Các tính chất của phép nhân vectơ với một số

Với hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ và hai số thực k, t, ta luôn có

- $k(t\vec{a}) = (kt)\vec{a}$;
- $(k + t)\vec{a} = k\vec{a} + t\vec{a}$;
- $k(\vec{a} \pm \vec{b}) = k\vec{a} \pm k\vec{b}$;
- $1\vec{a} = \vec{a}$; $(-1)\vec{a} = -\vec{a}$.

- Điểm I là trung điểm của đoạn thẳng AB khi và chỉ khi $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$.
- Cho điểm G là trọng tâm của tam giác ABC khi và chỉ khi $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

QUICK NOTE

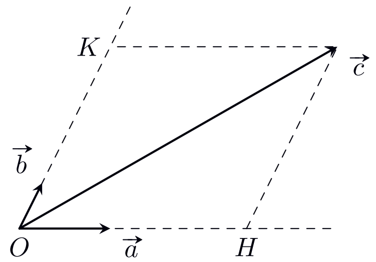
3. Điều kiện để hai vectơ cùng phương

① Điều kiện cần và đủ để $\vec{a}$ và $\vec{b} \neq \vec{0}$ cùng phương là có một số thực k để $\vec{a} = k\vec{b}$.

② Ba điểm phân biệt A, B, C thẳng hàng khi có số thực k để $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$.

4. Phân tích một vectơ theo hai vectơ không cùng phương

Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương. Khi đó mọi vectơ $\vec{c}$ đều phân tích được một cách duy nhất theo hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$, nghĩa là có duy nhất cặp số h, k sao cho $\vec{c} = h\vec{a} + k\vec{b}$



- Theo quy tắc hình bình hành, ta có

$$\vec{c} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{OK}$$

- Giả sử $\overrightarrow{OH} = h\vec{a}$ và $\overrightarrow{OK} = k\vec{b}$ thì $\vec{c} = h\vec{a} + k\vec{b}$.

B. CÁC DẠNG TOÁN

1 Xác định vectơ tích, tính độ dài vectơ

1. Ví dụ minh họa

VÍ DỤ 1. Cho đoạn thẳng AB và M là một điểm nằm trên đoạn AB sao cho $AM = \dfrac{1}{5}AB$. Tìm k trong các đẳng thức sau

a) $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$.　　b) $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB}$.　　c) $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{AB}$.

VÍ DỤ 2. Cho tam giác ABC đều cạnh bằng 1, trọng tâm G. Tính độ dài vectơ $\overrightarrow{AG}$.

VÍ DỤ 3. Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng a, I là trung điểm của cạnh BC. Tính độ dài vectơ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

2. Bài tập áp dụng

BÀI 1. Trên đoạn thẳng AB, gọi C là trung điểm AB và D là điểm đối xứng của C qua A. Tìm k trong các đẳng thức sau

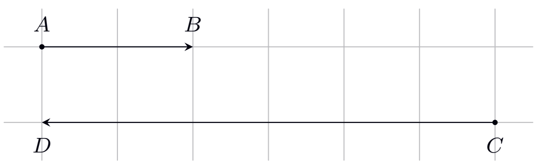
a) $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$.　　b) $\overrightarrow{AD} = k\overrightarrow{AB}$.

BÀI 2. Cho tam giác ABC vuông cân tại A, cạnh $BC = 2$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của cạnh AB và BC. Tính độ dài $\overrightarrow{MN}$.

BÀI 3. Cho hình thoi $ABCD$ có $AC = 2a$, $BD = a$. Tính độ dài vectơ $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$.

3. Bài tập trắc nghiệm

CÂU 1. Cho hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ trong hình bên. Khẳng định nào sau đây đúng?



(A) $\overrightarrow{CD} = 3\overrightarrow{AB}$.　(B) $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$.
(C) $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{CD}$.　(D) $\overrightarrow{CD} = -3\overrightarrow{AB}$.

CÂU 2. Cho vectơ $\vec{a}$ (khác $\vec{0}$) và vectơ $\vec{b} = k\vec{a}$, $(k \neq 0)$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

(A) $\vec{a}$ cùng phương $\vec{b}$ nếu $k > 0$.　(B) $\vec{a}$ ngược hướng $\vec{b}$ nếu $k > 0$.
(C) $\vec{a}$ cùng hướng $\vec{b}$ nếu $k < 0$.　(D) $\vec{a}$ cùng hướng $\vec{b}$ nếu $k > 0$.

CÂU 3. Cho hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ bất kì và số thực k. Ta có $k\left(\vec{a} + \vec{b}\right)$ bằng

(A) $\vec{a} + k\vec{b}$.　(B) $k\vec{a} + k\vec{b}$.　(C) $k\vec{a} - k\vec{b}$.　(D) $k\vec{a} + \vec{b}$.

CÂU 4. Cho hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ khác $\vec{0}$ thỏa mãn $\vec{a} = -\dfrac{1}{2}\vec{b}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

(A) $|\vec{a}| = -\dfrac{1}{2}\left|\vec{b}\right|$.　(B) $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là hai vectơ đối nhau.
(C) $\vec{a}$ cùng hướng với $\vec{b}$.　(D) $\vec{a}$ ngược hướng với $\vec{b}$.

QUICK NOTE

CÂU 5. Cho vectơ $\vec{u}$ có độ dài bằng 2 và vectơ $\vec{v} = -3\vec{u}$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

(A) vectơ $\vec{v}$ có độ dài bằng -6 và cùng hướng với $\vec{u}$.
(B) vectơ $\vec{v}$ có độ dài bằng -6 và ngược hướng với $\vec{u}$.
(C) vectơ $\vec{v}$ có độ dài bằng 6 và cùng hướng với $\vec{u}$.
(D) vectơ $\vec{v}$ có độ dài bằng 6 và ngược hướng với $\vec{u}$.

CÂU 6. Cho $\vec{a} = -2\vec{b}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

(A) $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là hai vectơ bằng nhau. (B) $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là hai vectơ đối nhau.
(C) $\vec{a}$ và $\vec{b}$ ngược hướng. (D) $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng hướng.

CÂU 7. Cho vectơ $\vec{q}$ có độ dài bằng 27. Hỏi độ dài của vectơ $\vec{x} = -\frac{1}{9}\vec{q}$ là bao nhiêu?

(A) 243. (B) 3. (C) 9. (D) -3.

CÂU 8. Cho đoạn thẳng AB và điểm I thuộc đoạn thẳng AB như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây đúng?

(A) $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$. (B) $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{4}\overrightarrow{IB}$.
(C) $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{5}\overrightarrow{BA}$. (D) $\overrightarrow{AI} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{IB}$.

CÂU 9. Đẳng thức nào mô tả đúng hình vẽ bên?

(A) $3\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AB} = \vec{0}$. (B) $3\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$.
(C) $\overrightarrow{BI} + 3\overrightarrow{BA} = \vec{0}$. (D) $\overrightarrow{AI} + 3\overrightarrow{AB} = \vec{0}$.

CÂU 10. Cho M là một điểm trên đoạn AB sao cho $AM = \frac{1}{3}AB$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

(A) $\overrightarrow{MB} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$. (B) $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$. (C) $\overrightarrow{MA} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{MB}$. (D) $\overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{AM}$.

CÂU 11. Cho đoạn thẳng AB và M là một điểm trên đoạn AB sao cho $AB = 5AM$. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

(A) $\overrightarrow{MA} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{MB}$. (B) $\overrightarrow{MB} = \frac{4}{5}\overrightarrow{AB}$. (C) $\overrightarrow{MB} = -\frac{4}{5}\overrightarrow{AB}$. (D) $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AB}$.

CÂU 12. Cho đoạn thẳng AB, M là một điểm trên đoạn thẳng AB sao cho $AM = \frac{1}{4}AB$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

(A) $\overrightarrow{MA} = \frac{1}{3}\overrightarrow{MB}$. (B) $\overrightarrow{BM} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BA}$. (C) $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$. (D) $\overrightarrow{MB} = -3\overrightarrow{MA}$.

CÂU 13. Cho hình bình hành $ABCD$ có tâm O. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

(A) $\overrightarrow{OD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$. (B) $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{OC}$. (C) $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{OA}$. (D) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

CÂU 14. Cho tam giác ABC với trung tuyến AM và trọng tâm G. Khi đó, vectơ $\overrightarrow{GA}$ bằng với vectơ nào sau đây?

(A) $2\overrightarrow{GM}$. (B) $-\frac{2}{3}\overrightarrow{AM}$. (C) $\frac{2}{3}\overrightarrow{GM}$. (D) $\frac{1}{2}\overrightarrow{AM}$.

CÂU 15. Cho tam giác ABC có G là trọng tâm, M là trung điểm của BC. Đẳng thức nào sau đây đúng?

(A) $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 2\overrightarrow{GM}$. (B) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AG}$.
(C) $\overrightarrow{GA} = 2\overrightarrow{GM}$. (D) $\overrightarrow{MG} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{MA}$.

CÂU 16. Cho tam giác ABC. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và AC. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

(A) $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$. (B) $\overrightarrow{MN} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$. (C) $\overrightarrow{BC} = -2\overrightarrow{NM}$. (D) $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{MN}$.

CÂU 17. Cho tam giác ABC có trọng tâm G và trung tuyến BM. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

(A) $\overrightarrow{AM} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$.

B $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

C $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OG}$, với mọi điểm O.

D $\overrightarrow{GB} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{BM}$.

CÂU 18. Cho tam giác đều ABC với đường cao AH. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$. **B** $\left|\overrightarrow{AH}\right| = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\left|\overrightarrow{HC}\right|$.

C $\overrightarrow{HB} = \overrightarrow{HC}$. **D** $\left|\overrightarrow{AC}\right| = 2\left|\overrightarrow{HC}\right|$.

CÂU 19. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a. Giá trị của $\left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}\right|$ bằng

A $A\sqrt{2}$. **B** $2a$. **C** $2a\sqrt{2}$. **D** $3a$.

CÂU 20. Cho tam giác ABC đều cạnh a. Khi đó, giá trị $\left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right|$ bằng

A $a\sqrt{3}$. **B** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **C** $2a$. **D** $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

CÂU 21. Cho tam giác đều ABC cạnh bằng 4. Độ dài $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ là

A $2\sqrt{3}$. **B** $\sqrt{5}$. **C** $\sqrt{6}$. **D** $4\sqrt{3}$.

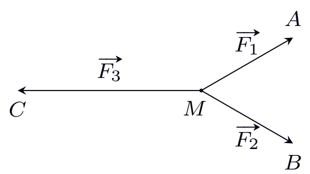
CÂU 22. Cho tam giác ABC vuông tại A và $AB = 2$, $AC = 3$. Độ dài của vectơ $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AC}$ bằng

A 5. **B** 40. **C** $\sqrt{13}$. **D** $2\sqrt{10}$.

CÂU 23. Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng a. Tính $\left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DB}\right|$ theo a.

A $\dfrac{a\sqrt{5}}{2}$. **B** a. **C** $a\sqrt{5}$. **D** $a\sqrt{3}$.

CÂU 24.
Cho ba lực $\overrightarrow{F_1} = \overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{F_2} = \overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{F_3} = \overrightarrow{MC}$ cùng tác động vào một vật tại điểm M và vật đứng yên. Cho biết cường độ của $\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_2}$ đều bằng 100N và $\widehat{AMB} = 60°$. Khi đó, cường độ lực của $\overrightarrow{F_3}$ bằng



A $50\sqrt{2}$N. **B** $50\sqrt{3}$N. **C** $25\sqrt{3}$N. **D** $100\sqrt{3}$N.

CÂU 25. Cho tam giác ABC là tam giác đều cạnh $2a$ với G là trọng tâm. Tính $\left|\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}\right|$.

A $\dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$. **B** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **C** $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **D** $a\sqrt{3}$.

CÂU 26. Gọi G là trọng tâm tam giác vuông ABC với cạnh huyền $BC = 12$. vectơ $\overrightarrow{GB} - \overrightarrow{CG}$ có độ dài bằng bao nhiêu?

A 4. **B** $2\sqrt{3}$. **C** 8. **D** 2.

CÂU 27. Tam giác ABC có $AB = AC = a$, $\widehat{ABC} = 120°$. Độ dài vectơ tổng $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ bằng

A $2a$. **B** $a\sqrt{3}$. **C** a. **D** $3a$.

CÂU 28. Cho hình thoi $ABCD$ cạnh a, tâm O và $\widehat{BAD} = 60°$. Độ dài vectơ $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{CD}$ bằng

A $\dfrac{a\sqrt{7}}{2}$. **B** $\dfrac{a\sqrt{5}}{2}$. **C** $2a$. **D** $a\sqrt{3}$.

CÂU 29. Cho tam giác ABC đều cạnh a, H là trung điểm của BC. Tính $\left|\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{HC}\right|$ bằng

A $\dfrac{2\sqrt{3}a}{3}$. **B** $\dfrac{a\sqrt{7}}{2}$. **C** $\dfrac{a}{2}$. **D** $\dfrac{3a}{2}$.

CÂU 30. Cho tam giác OAB vuông cân tại O với $OA = OB = a$. Tính độ dài vectơ $\vec{u} = 8\overrightarrow{OA} - 6\overrightarrow{OB}$.

A $2a$. **B** $14a$. **C** $16a$. **D** $10a$.

CÂU 31. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 3$, $AC = 4$. Tính độ dài vec-tơ $\vec{u} = 2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}$.

A $|\vec{u}| = 18$. **B** $|\vec{u}| = 6\sqrt{5}$. **C** $|\vec{u}| = 9$. **D** $|\vec{u}| = 5\sqrt{6}$.

QUICK NOTE

QUICK NOTE

CÂU 32. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC. Tập hợp điểm M trong mặt phẳng chứa tam giác ABC sao cho $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|=6$ là

Ⓐ đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Ⓑ đường tròn tâm G bán kính bằng 1.
Ⓒ đường tròn tâm G bán kính bằng 2. Ⓓ đường tròn tâm G bán kính bằng 6.

CÂU 33. Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng $2a$ và G là trọng tâm của tam giác. Khi đó, giá trị $\left|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{GC}\right|$ là

Ⓐ $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. Ⓑ $\dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$. Ⓒ $\dfrac{4a\sqrt{3}}{3}$. Ⓓ $\dfrac{2a}{3}$.

CÂU 34. Cho ba lực $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$ có cùng điểm đặt tại O. Trong đó, có hai lực $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ có phương hợp với nhau một góc 90° và lực $\vec{F}_3$ ngược hướng với lực $\vec{F}_1$. Ba lực $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$ có cường độ lần lượt là 100 N, 200 N và 300 N. Cường độ lực tổng hợp của ba lực $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$ là

Ⓐ 400 N. Ⓑ $100\sqrt{2}$ N. Ⓒ 600 N. Ⓓ $200\sqrt{2}$ N.

CÂU 35. Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng 1. Độ dài của vectơ $\vec{u}=12\overrightarrow{AC}-7\overrightarrow{AB}$ bằng

Ⓐ $|\vec{u}|=17$. Ⓑ $|\vec{u}|=5$. Ⓒ $|\vec{u}|=13$. Ⓓ $|\vec{u}|=12\sqrt{2}-7$.

CÂU 36. Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng 1. Độ dài của vectơ $\vec{u}=3\overrightarrow{AC}-7\overrightarrow{AB}$ là

Ⓐ $|\vec{u}|=5$. Ⓑ $|\vec{u}|=12\sqrt{2}-7$. Ⓒ $|\vec{u}|=17$. Ⓓ $|\vec{u}|=13$.

2 Chứng minh đẳng thức vectơ, thu gọn biểu thức

Phương pháp giải

- Cách 1: Biến đổi thẳng VT về VP hoặc ngược lại.
- Cách 2: Biến đổi VT và VP về cùng bằng một biểu thức trung gian.
- Cách 3: Chứng minh VT-VT$=\vec{0}$.

Khi thực hiện các phép biến đổi cần lưu ý

a) *Quy tắc ba điểm:* Với ba điểm A, B, C bất kì ta luôn có $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}$.

b) *Quy tắc hình bình hành:* Với hình bình hành $ABCD$ ta luôn có $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$.

c) *Quy tắc hiệu vectơ:* Với ba điểm A, B, O bất kì ta luôn có $\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{AB}$.

d) *Tính chất trung điểm của đoạn thẳng:* Cho đoạn thẳng AB ta có

$$\begin{aligned} I \text{ là trung điểm của } AB &\Leftrightarrow \overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}\\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MI}, M \text{ là điểm bất kì.}\end{aligned}$$

e) *Tính chất trọng tâm tam giác:* Cho tam giác ABC ta có

$$\begin{aligned} G \text{ là trọng tâm tam giác } ABC &\Leftrightarrow \overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}.\\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}, M \text{ là điểm bất kì}.\end{aligned}$$

f) *Các tính chất của phép cộng, trừ vectơ và phép nhân một số với một vectơ.*

1. Ví dụ minh họa

VÍ DỤ 1. Cho tam giác ABC với trọng tâm G. Chứng minh rằng $\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}=3\overrightarrow{CG}$.

VÍ DỤ 2. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi G là trọng tâm tam giác ABD. Chứng minh rằng

$$\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=9\overrightarrow{AG}.$$

VÍ DỤ 3. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm các đoạn thẳng AB và CD. Chứng minh rằng $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{MN}$.

VÍ DỤ 4. Cho tam giác ABC. Lần lượt lấy các điểm M, N, P trên các đoạn thẳng AB, BC

và CA sao cho $AM = \dfrac{1}{3}AB$, $BN = \dfrac{1}{3}BC$, $CP = \dfrac{1}{3}CA$. Chứng minh rằng

$$\overrightarrow{AN} + \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{CM} = \vec{0}.$$

VÍ DỤ 5. Cho hình bình hành $ABCD$ có tâm O. Gọi M là một điểm bất kì. Chứng minh rằng

a) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$.

b) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MO}$.

VÍ DỤ 6. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi M là trung điểm CD. Lấy N trên đoạn BM sao cho $BN = 2MN$. Chứng minh rằng

a) $3\overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CM} + \overrightarrow{ND} + \overrightarrow{MN}$,

b) $4\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BD} = 3\overrightarrow{AN}$.

2. Bài tập áp dụng

BÀI 1. Cho hình bình hành $ABCD$ có tâm O. Chứng minh rằng

$$\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD} = 4\overrightarrow{OD}.$$

BÀI 2. Gọi G và G' lần lượt là trọng tâm của tam giác ABC và $A'B'C'$. Chứng minh rằng

$$\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = 3\overrightarrow{GG'}.$$

BÀI 3. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M, N, I lần lượt là trung điểm của AC, BD và MN. Chứng minh rằng

a) $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = \vec{0}$,

b) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 4\overrightarrow{OI}$ (với O là điểm bất kì).

BÀI 4. Cho tam giác ABC không vuông. Gọi G, H, O lần lượt là trọng tâm, trực tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Gọi D là điểm đối xứng của A qua O và M là trung điểm của cạnh BC. Chứng minh

a) $\overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{HD}$.

b) $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = 2\overrightarrow{HO}$.

c) $\overrightarrow{HA} - \overrightarrow{HB} - \overrightarrow{HC} = 2\overrightarrow{OA}$.

d) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OH}$.

e) $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$.

f) $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{OM}$.

BÀI 5. Cho tam giác ABC. Gọi M là điểm trên cạnh BC sao cho $MB = 2MC$. Biết rằng $\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} = x\overrightarrow{AM}$. Tìm x.

BÀI 6. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M, N lần lượt thuộc các đoạn thẳng AB, CD sao cho $MB = 2MA$ và $NC = 2ND$. Biết rằng $2\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} = x\overrightarrow{MN}$. Tìm x.

BÀI 7. Cho tam giác đều ABC tâm O. Lấy M là một điểm bất kì trong tam giác. Gọi D, E, F lần lượt là hình chiếu của M trên BC, CA, AB. Biết rằng $\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF} = x\overrightarrow{MO}$, tìm x.

BÀI 8. Cho hình bình hành $ABCD$ có tâm O và E là trung điểm AD. Tìm các số thực x và y biết rằng

a) $\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EB} + 2\overrightarrow{EC} = x\overrightarrow{AB}$.

b) $\overrightarrow{EB} + 2\overrightarrow{EA} + 4\overrightarrow{ED} = y\overrightarrow{EC}$.

BÀI 9. Cho tam giác ABC. Dựng bên ngoài tam giác các hình bình hành $ABIF$, $BCPQ$, $CARS$. Biết rằng $\overrightarrow{RF} + \overrightarrow{IQ} + \overrightarrow{PS} = x(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$. Tìm x.

BÀI 10. Dựng bên ngoài tứ giác $ABCD$ các hình bình hành $ABEF$, $BCGH$, $CDIJ$, $DAKL$.

QUICK NOTE

QUICK NOTE

a) Chứng minh rằng $\overrightarrow{KF}+\overrightarrow{EH}+\overrightarrow{GJ}+\overrightarrow{IL}=\vec{0}$.

b) Chứng minh rằng $\overrightarrow{EL}-\overrightarrow{HI}=\overrightarrow{FK}-\overrightarrow{GJ}$.

BÀI 11. Cho đường tròn (I) nội tiếp tam giác ABC có $AB=c$, $AC=b$, $BC=a$. Chứng minh rằng
$$a\overrightarrow{IA}+b\overrightarrow{IB}+c\overrightarrow{IC}=\vec{0}.$$

BÀI 12. Cho tam giác ABC và một điểm M bất kì nằm trong tam giác ABC. Đặt $S_{MBC}=S_a$, $S_{MCA}=S_b$, $S_{MAB}=S_c$. Chứng minh rằng
$$S_a\overrightarrow{MA}+S_b\overrightarrow{MB}+S_c\overrightarrow{MC}=\vec{0}.$$

a) Cho M trùng với trọng tâm G của tam giác ABC, ta được $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.

b) Cho M trùng với tâm đường tròn nội tiếp I của tam giác ABC, ta được kết quả
$$a\overrightarrow{IA}+b\overrightarrow{IB}+c\overrightarrow{IC}=\vec{0}.$$

c) Nếu tam giác ABC đều thì với điểm M bất kì trong tam giác, Ta có
$$x\overrightarrow{MA}+y\overrightarrow{MB}+z\overrightarrow{MC}=\vec{0},$$
trong đó x,y,z lần lượt là khoảng cách từ M đến các cạnh BC, CA và AB.

d) Khi M nằm ngoài tam giác ABC, ta có các kết quả như sau

(a) Nếu M thuộc góc $\widehat{BAC}$ và góc đối đỉnh của nó thì
$$-S_a\overrightarrow{MA}+S_b\overrightarrow{MB}+S_c\overrightarrow{MC}=\vec{0}.$$

(b) Nếu M thuộc góc $\widehat{ABC}$ và góc đối đỉnh của nó thì
$$S_a\overrightarrow{MA}-S_b\overrightarrow{MB}+S_c\overrightarrow{MC}=\vec{0}.$$

(c) Nếu M thuộc góc $\widehat{ACB}$ và góc đối đỉnh của nó thì
$$S_a\overrightarrow{MA}+S_b\overrightarrow{MB}-S_c\overrightarrow{MC}=\vec{0}.$$

3. Bài tập trắc nghiệm

CÂU 1. Cho tam giác ABC có trọng tâm G. Gọi M là trung điểm AB. Chọn mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau:

(A) $\overrightarrow{CM}=-3\overrightarrow{MG}$.

(B) $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{AC}$.

(C) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{AG}$.

(D) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=3\overrightarrow{OG}$, O là điểm bất kì.

CÂU 2. Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O. Khẳng định nào sau đây là **đúng**?

(A) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AC}$. (B) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AO}$.

(C) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{CA}$. (D) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BD}$.

CÂU 3. Cho I là trung điểm của đoạn thẳng AB. Với điểm M bất kỳ, ta luôn có

(A) $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MI}$. (B) $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MI}$.

(C) $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=3\overrightarrow{MI}$. (D) $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{MI}$.

CÂU 4. Cho G là trọng tâm của tam giác ABC. Với mọi điểm M, ta luôn có:

(A) $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MG}$. (B) $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{MG}$.

(C) $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}$. (D) $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=4\overrightarrow{MG}$.

CÂU 5. Cho $\triangle ABC$ có G là trọng tâm, I là trung điểm BC. Đẳng thức nào đúng?

(A) $\overrightarrow{GA}=2\overrightarrow{GI}$. (B) $\overrightarrow{IG}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{IA}$.

(C) $\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=2\overrightarrow{GI}$. (D) $\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{GA}$.

QUICK NOTE

CÂU 6. Khẳng định nào sau đây **không phải** là điều kiện cần và đủ để G là trọng tâm ΔABC, với M là trung điểm của BC và O là điểm bất kì?

Ⓐ $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)$.
Ⓑ $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + 3\overrightarrow{OG} = \vec{0}$.
Ⓒ $\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{CG} = \vec{0}$.
Ⓓ $\overrightarrow{GM} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GA}$.

CÂU 7. Cho I là trung điểm của đoạn thẳng AB. Với M là một điểm bất kỳ, tìm đẳng thức **đúng**.

Ⓐ $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$.
Ⓑ $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{MI}$.
Ⓒ $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MI}$.
Ⓓ $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{IM}$.

CÂU 8. Cho tam giác ABC có trọng tâm G và M là trung điểm của AB. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

Ⓐ $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.
Ⓑ $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = 2\overrightarrow{GM}$.
Ⓒ $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$.
Ⓓ $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$.

CÂU 9. Cho $\triangle ABC$ có M, Q, N lần lượt là trung điểm của AB, BC, CA. Khi đó vectơ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{NA} + \overrightarrow{BQ}$ là vectơ nào sau đây?

Ⓐ $\vec{0}$. Ⓑ $\overrightarrow{BC}$. Ⓒ $\overrightarrow{AQ}$. Ⓓ $\overrightarrow{CB}$.

CÂU 10. Cho $\triangle ABC$ và điểm I thỏa mãn $\overrightarrow{IA} = 3\overrightarrow{IB}$. Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

Ⓐ $\overrightarrow{CI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} - \frac{3}{2}\overrightarrow{CB}$.
Ⓑ $\overrightarrow{CI} = \overrightarrow{CA} - 3\overrightarrow{CB}$.
Ⓒ $\overrightarrow{CI} = \frac{3}{2}\overrightarrow{CB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$.
Ⓓ $\overrightarrow{CI} = 3\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}$.

CÂU 11. Cho tam giác ABC có G là trọng tâm. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

Ⓐ $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$ với mọi điểm M.
Ⓑ $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.
Ⓒ $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 2\overrightarrow{GA}$.
Ⓓ $3\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

CÂU 12. Khẳng định nào sau đây **sai**?

Ⓐ Nếu $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$ thì $ABCD$ là hình bình hành.
Ⓑ Nếu O là trung điểm của AB thì với mọi M ta có $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MO}$.
Ⓒ Nếu G là trọng tâm của tam giác ABC thì $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{AG}$.
Ⓓ Với 3 điểm bất kì I, J, K ta có $\overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{JK} = \overrightarrow{IK}$.

CÂU 13. Cho hình bình hành $ABCD$. Đẳng thức nào sau đây **đúng**?

Ⓐ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB}$.
Ⓑ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AC}$.
Ⓒ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AD}$.
Ⓓ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{BD}$.

CÂU 14. Cho tam giác ABC biết I là trung điểm của đoạn thẳng AB, G là trọng tâm tam giác, M là điểm bất kỳ. Hãy chọn khẳng định **đúng**.

Ⓐ $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MG}$.
Ⓑ $\overrightarrow{BI} + \overrightarrow{IC} = \vec{0}$.
Ⓒ $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 3\overrightarrow{MI}$.
Ⓓ $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$.

CÂU 15. Cho I là trung điểm của đoạn thẳng AB. Hỏi đẳng thức nào **đúng**?

Ⓐ $2\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AB} = \vec{0}$. Ⓑ $\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IB} = \vec{0}$. Ⓒ $\overrightarrow{AI} - 2\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{IB}$. Ⓓ $\overrightarrow{AI} - \overrightarrow{IB} = \vec{0}$.

CÂU 16. Cho hình bình hành $ABCD$. Đẳng thức nào sau đây **đúng**?

Ⓐ $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD} = \vec{0}$.
Ⓑ $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB}$.
Ⓒ $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CD}$.
Ⓓ $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{BC}$.

CÂU 17. Cho G là trọng tâm tam giác ABC và I là trung điểm cạnh BC. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

Ⓐ $\overrightarrow{GA} = -2\overrightarrow{GI}$.
Ⓑ $\overrightarrow{IG} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AI}$.
Ⓒ $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 2\overrightarrow{GI}$.
Ⓓ $\overrightarrow{GA} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AI}$.

QUICK NOTE

CÂU 18. Cho tam giác ABC có trọng tâm G và M là trung điểm cạnh AC. Khẳng định nào sau đây **sai**?

(A) $BG = \dfrac{2}{3}BM$. (B) $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{BG}$. (C) $\overrightarrow{MG} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{BM}$. (D) $GM = \dfrac{1}{2}GB$.

CÂU 19. Cho tam giác ABC. Gọi M là trung điểm của BC và G là trọng tâm của tam giác ABC. Đẳng thức nào sau đây **đúng**?

(A) $\overrightarrow{GA} = 2\overrightarrow{GM}$. (B) $\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GM} = \vec{0}$. (C) $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AG}$. (D) $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GA}$.

CÂU 20. Cho G là trọng tâm tam giác ABC, gọi I là trung điểm của BC. Đẳng thức nào sau đây **đúng**?

(A) $\overrightarrow{GA} = 2\overrightarrow{GI}$. (B) $\overrightarrow{IG} = -\dfrac{1}{3}\overrightarrow{IA}$.

(C) $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 2\overrightarrow{GI}$. (D) $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GA}$.

CÂU 21. Cho tam giác ABC và một điểm M tùy ý. Hãy chọn hệ thức đúng.

(A) $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{BC}$. (B) $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}$.

(C) $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}$. (D) $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}$.

CÂU 22. Cho tam giác ABC. Gọi M là trung điểm của BC và G là trọng tâm của tam giác ABC. Đẳng thức nào sau đây đúng?

(A) $\overrightarrow{GA} = 2\overrightarrow{GM}$. (B) $\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GM} = \vec{0}$. (C) $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AG}$. (D) $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GA}$.

CÂU 23. Ba trung tuyến AM, BN, CP của tam giác ABC đồng quy tại G. Hỏi vectơ $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CP}$ bằng vectơ nào?

(A) $\dfrac{3}{2}\left(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{CG}\right)$. (B) $3\left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{NG} + \overrightarrow{GP}\right)$.

(C) $\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AC}\right)$. (D) $\vec{0}$.

CÂU 24. Cho hình chữ nhật $ABCD$, I và K lần lượt là trung điểm của BC, CD. Hệ thức nào sau đây đúng?

(A) $\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AK} = 2\overrightarrow{AC}$. (B) $\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.

(C) $\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AK} = \overrightarrow{IK}$. (D) $\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AK} = \dfrac{3}{2}\overrightarrow{AC}$.

CÂU 25. Cho tam giác ABC có M là trung điểm của cạnh BC. Các điểm D, E thỏa mãn các đẳng thức: $\overrightarrow{BD} = 4\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{AE} = 3\overrightarrow{AC}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

(A) $\overrightarrow{AM} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{DE}$. (B) $\overrightarrow{AM} = \dfrac{1}{6}\overrightarrow{DE}$. (C) $\overrightarrow{AM} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{DE}$. (D) $\overrightarrow{AM} = \dfrac{3}{4}\overrightarrow{DE}$.

CÂU 26. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M, N là trung điểm AB và DC. Lấy các điểm P, Q lần lượt thuộc các đường thẳng AD và BC sao cho $\overrightarrow{PA} = -2\overrightarrow{PD}$, $\overrightarrow{QB} = -2\overrightarrow{QC}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

(A) $\overrightarrow{MN} = \dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}\right)$. (B) $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{MQ}$.

(C) $\overrightarrow{MN} = -\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}\right)$. (D) $\overrightarrow{MN} = \dfrac{1}{4}\left(\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NA}\right)$.

CÂU 27. Cho hình bình hành $ABCD$. Đẳng thức nào đúng?

(A) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{BC}$. (B) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB}$.

(C) $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{CD}$. (D) $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CD}$.

CÂU 28. Cho G là trọng tâm của tam giác ABC. Trong các mệnh đề sau, tìm mệnh đề đúng?

(A) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AG}$. (B) $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = 3\overrightarrow{BG}$.

(C) $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CG}$. (D) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} = \vec{0}$.

CÂU 29. Cho hình vuông $ABCD$ có tâm là O. Trong các mệnh đề sau, tìm mệnh đề **sai**?

(A) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AO}$. (B) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DO} = -\dfrac{1}{2}\overrightarrow{CA}$.

(C) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{CB}$. (D) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB} = 4\overrightarrow{AB}$.

CÂU 30. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD. Khi đó $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$ bằng

Ⓐ $\overrightarrow{MN}$. Ⓑ $2\overrightarrow{MN}$. Ⓒ $3\overrightarrow{MN}$. Ⓓ $-2\overrightarrow{MN}$.

QUICK NOTE

CÂU 31. Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O và điểm M bất kì. Khẳng định nào sau đây đúng?

Ⓐ $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{MO}$. Ⓑ $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=2\overrightarrow{MO}$.

Ⓒ $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=3\overrightarrow{MO}$. Ⓓ $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=4\overrightarrow{MO}$.

CÂU 32. Cho năm điểm A, B, C, D, E. Khẳng định nào đúng?

Ⓐ $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{EC}=2\left(\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{CB}\right)$.

Ⓑ $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{EC}=3\left(\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{CB}\right)$.

Ⓒ $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{EC}=\dfrac{\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{CB}}{4}$.

Ⓓ $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{CB}$.

CÂU 33. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABD, I là điểm trên GC sao cho $IC=3IG$. Với mọi điểm M ta luôn có $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}$ bằng

Ⓐ $2\overrightarrow{MI}$. Ⓑ $3\overrightarrow{MI}$. Ⓒ $4\overrightarrow{MI}$. Ⓓ $5\overrightarrow{MI}$.

CÂU 34. Cho tam giác ABC. Gọi M là điểm trên cạnh AB sao cho $MA=2MB$ và N là trung điểm của AC. Gọi P là trung điểm của MN. Khi đó

Ⓐ $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$. Ⓑ $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$.

Ⓒ $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$. Ⓓ $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$.

CÂU 35. Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn tâm O. Gọi H, G lần lượt là trực tâm, trọng tâm của tam giác. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

Ⓐ $\overrightarrow{OH}=4\overrightarrow{OG}$. Ⓑ $\overrightarrow{OH}=3\overrightarrow{OG}$. Ⓒ $\overrightarrow{OH}=2\overrightarrow{OG}$. Ⓓ $3\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OG}$.

CÂU 36. Cho $\triangle ABC$. Trên các cạnh AB, BC và CA lấy các điểm D, E, F sao cho $DA=2DB$, $EB=2EC$, $FC=2FA$. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau đây.

Ⓐ $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$. Ⓑ $\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$.

Ⓒ $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$. Ⓓ $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$.

CÂU 37. Cho tứ giác $ABCD$ và điểm G thảo mãn $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+2\overrightarrow{GC}+k\overrightarrow{GD}=\overrightarrow{0}$. Gọi I, J lần lượt là trọng tâm tam giác các ACD, BCD. Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh CD, AB. Tìm k sao cho G là trung điểm của IJ.

Ⓐ $k=1$. Ⓑ $k=2$. Ⓒ $k=3$. Ⓓ $k=4$.

CÂU 38. Cho ngũ giác $ABCDE$ có M, N, P, Q lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC, CD, DE. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của MP, NQ. Biết $\overrightarrow{IJ}=k\overrightarrow{EA}$, tìm k.

Ⓐ $k=-\frac{1}{2}$. Ⓑ $k=\frac{1}{2}$. Ⓒ $k=-\frac{1}{4}$. Ⓓ $k=\frac{1}{4}$.

3 Xác định điểm thỏa mãn đẳng thức vectơ

Phương pháp giải

Bài toán: Xác định điểm M thỏa đẳng thức vectơ cho trước

- Bước 1. Ta biến đổi đẳng thức đã cho (bằng chèn điểm, quy tắc ba điểm, qui tắc hình bình hành, tính chất trung điểm, trọng tâm,...) về dạng: $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{v}$. Trong đó điểm O và vectơ $\overrightarrow{v}$ cho trước.
- Bước 2. Nếu muốn dựng điểm M, ta lấy điểm O làm gốc, dựng một vectơ bằng vectơ $\overrightarrow{v}$, khi đó điểm ngọn của vectơ này chính là điểm M.

QUICK NOTE

Lưu ý 1. Thông thường, biểu thức $\overrightarrow{OM}=\vec{v}$ là những biểu thức đặc biệt (trung điểm, trọng tâm, điểm chia đoạn thẳng theo tỉ lệ $\vec{a}=k\vec{b}$, hình bình hành,... Ta dựa vào biểu thức này để dựng.

Lưu ý 2. Một số cách chứng minh thường dùng.

— Để chứng minh I là trung điểm của đoạn thẳng AB, ta cần chứng minh một trong các hệ thức sau
+ $\overrightarrow{IA}=\overrightarrow{IB}$.
+ $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$.
+ $2\overrightarrow{IA}=\overrightarrow{AB}$.
+ $2\overrightarrow{OI}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$ (O bất kì).

— Để chứng minh điểm G là trọng tâm của $\triangle ABC$, ta cần chứng minh một trong các hệ thức sau
+ $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.
+ Với I là trung điểm của cạnh BC thì $\overrightarrow{AG}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AI}$.
+ Với O là điểm bất kì trong mặt phẳng thì: $3\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$.

— Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}\\ \overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}.\end{array}\right.$

— Để chứng minh hai điểm A_1 và A_2 trùng nhau ta có thể chứng minh một trong các hệ thức sau
+ $\overrightarrow{A_1A_2}=\vec{0}$.
+ $\overrightarrow{OA_1}=\overrightarrow{OA_2}$ với O là điểm bất ỳ.

— Điều kiện cần và đủ để $\triangle ABC$ và $\triangle A'B'C'$ có cùng trọng tâm là

$$\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}=\vec{0}.$$

— Nếu $\overrightarrow{MB}=k\cdot\overrightarrow{MC}$ $(k\neq 1)$ thì $\overrightarrow{AM}=\dfrac{\overrightarrow{AB}-k\cdot\overrightarrow{AC}}{1-k}$ (hay điểm M chia đoạn AB theo tỉ số $k\neq 1$).

1. Ví dụ minh họa

VÍ DỤ 1. Cho hai điểm A và B. Xác định điểm M thỏa mãn $2\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MB}=\vec{0}$.

VÍ DỤ 2. Cho tam giác ABC. Gọi M là trung điểm của AB và N thuộc cạnh AC, sao cho $NC=2NA$. Hãy xác định K và D khi

a) $3\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}-12\overrightarrow{AK}=\vec{0}$.

b) $3\overrightarrow{AB}+4\overrightarrow{AC}-12\overrightarrow{KD}=\vec{0}$.

VÍ DỤ 3. Cho hình bình hành $ABCD$.

a) Hãy dựng các điểm M, N thỏa mãn $\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{NC}+\overrightarrow{ND}-\overrightarrow{NA}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC}$.

b) Chứng minh rằng $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{BA}$.

VÍ DỤ 4. Cho trước hai điểm A, B và hai số thực α, β thỏa mãn $\alpha+\beta\neq 0$

a) Chứng minh rằng tồn tại duy nhất điểm I thỏa mãn $\alpha\cdot\overrightarrow{IA}+\beta\cdot\overrightarrow{IB}=\vec{0}$.

b) Từ đó suy ra với điểm M bất kỳ, ta luôn có: $\alpha\cdot\overrightarrow{MA}+\beta\cdot\overrightarrow{MB}=(\alpha+\beta)\cdot\overrightarrow{MI}$.

Lời bình 3

Nếu $\alpha=\beta=1$ thì điểm I chính là trung điểm của AB.

Bài toán trên được mở rộng cho ba điểm A, B, C và bộ 3 số thực α, β, γ cho trước thỏa mãn $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$, nghĩa là:

— Tồn tại điểm I duy nhất thỏa mãn $\alpha\cdot\overrightarrow{IA}+\beta\cdot\overrightarrow{IB}+\gamma\cdot\overrightarrow{IC}=\vec{0}$

— Từ đó suy ra với điểm M bất kỳ, ta luôn có $\alpha\cdot\overrightarrow{IA}+\beta\cdot\overrightarrow{IB}+\gamma\cdot\overrightarrow{IC}=$

$(\alpha+\beta+\gamma)\cdot\overrightarrow{MI}$. *Khi* $\alpha=\beta=\gamma=1$ *thì* I *là trọng tâm của* $\triangle ABC$.

- *Bài toán trên vẫn đúng với* n *điểm* A_i $(i=\overline{1,n})$ *và bộ số thực* α_i $(i=\overline{1,n})$ *thỏa mãn* $\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i\neq 0$
- *Kết quả trên dùng giải bài toán "Cho* n *điểm* A_i, $i=\overline{1,n}$ *và bộ số thực* α_i, $i=\overline{i,n}$ *thỏa mãn* $\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i\neq 0$. *Tìm số thực* k *và điểm cố định* I *sao cho đẳng thức vectơ* $\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{MA_i}=k\cdot\overrightarrow{MI}$ *thỏa mãn với mọi điểm* M*".*

2. Bài tập áp dụng

BÀI 1. Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $ACEF$.

a) Dựng các điểm M, N sao cho $\overrightarrow{EM}=\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{FN}=\overrightarrow{BD}$.

b) Chứng minh $\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{MN}$.

BÀI 2. Cho tam giác ABC.

a) Chứng minh với mọi điểm M, ta luôn có $\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{CA}+2\overrightarrow{CB}$.

b) Hãy dựng điểm D sao cho $\overrightarrow{DA}+2\overrightarrow{DB}-3\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{CA}+2\overrightarrow{CB}$.

BÀI 3. Cho tứ giác $ABCD$, M là điểm tùy ý. Trong mỗi trường hợp hãy tìm số k và điểm cố định I, J, K sao cho đẳng thức vectơ sau thỏa mãn với mọi điểm M.

a) $2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=k\cdot\overrightarrow{MI}$.

b) $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\cdot\overrightarrow{MC}=k\cdot\overrightarrow{MJ}$.

c) $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+3\cdot\overrightarrow{MD}=k\cdot\overrightarrow{MK}$

BÀI 4. Cho tứ giác lồi $ABCD$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA. Chứng minh $\triangle ANP$ và $\triangle CMQ$ có cùng trọng tâm.

3. Bài tập trắc nghiệm

CÂU 1. Cho điểm A và vectơ $\vec{u}$. Có bao nhiêu điểm M thoả mãn $\overrightarrow{AM}=\vec{u}$?

(A) Duy nhất một. (B) Hai. (C) Không có. (D) Vô số.

CÂU 2. Cho hình bình hành $ABCD$, điểm M thỏa mãn $4\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}$. Khi đó M là

(A) trung điểm AC. (B) điểm C. (C) trung điểm AB. (D) trung điểm AD.

CÂU 3. Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khác $\vec{0}$ và không cùng phương. Biết hai vectơ $\vec{u}=2\vec{a}-3\vec{b}$ và $\vec{v}=\vec{a}+(x-1)\vec{b}$ cùng phương. Khi đó giá trị của x là

(A) $\frac{1}{2}$. (B) $-\frac{3}{2}$. (C) $-\frac{1}{2}$. (D) $\frac{3}{2}$.

CÂU 4. Cho hai điểm phân biệt A, B và hai số thực α, β khác 0 thoả mãn $\alpha+\beta=0$. Có bao nhiêu điểm M thoả mãn $\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}=\vec{0}$?

(A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

CÂU 5. Cho ba điểm không thẳng hàng A, B, C và M là điểm thoả mãn $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CM}$. Chọn khẳng định đúng.

(A) $ABMC$ là hình bình hành. (B) $ABCM$ là hình bình hành.

(C) M là trọng tâm của tam giác ABC. (D) CM là trung tuyến của tam giác ABC.

CÂU 6. Cho hai điểm phân biệt A, B và hai số thực α, β thoả mãn $\alpha+\beta\neq 0$. Có bao nhiêu điểm M thoả mãn $\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}=\vec{0}$?

(A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

CÂU 7. Cho hai điểm phân biệt A và B. Điều kiện cần và đủ để I là trung điểm của đoạn thẳng AB là

(A) $IA=IB$. (B) $\overrightarrow{IA}=-\overrightarrow{IB}$. (C) $\overrightarrow{IA}=\overrightarrow{IB}$. (D) $\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{BI}$.

QUICK NOTE

QUICK NOTE

CÂU 8. Cho tam giác ABC, điểm I là trung điểm BC. Điểm G có tính chất nào sau đây thì G là trọng tâm tam giác ABC?

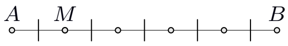
A $\overrightarrow{GI} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AI}$.

B $GA = 2GI$.

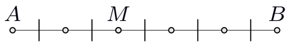
C $\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{CG} = \vec{0}$.

D $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 2\overrightarrow{GI}$.

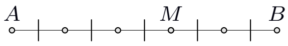
CÂU 9. Cho đoạn thẳng AB, hình nào sau đây biểu diễn đúng điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MA} + 4\overrightarrow{MB} = \vec{0}$.



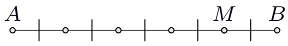
Hình 1



Hình 2



Hình 3



Hình 4

A Hình 1. **B** Hình 2. **C** Hình 3. **D** Hình 4.

CÂU 10. Cho đoạn thẳng AB có trung điểm I. Tìm điểm M thỏa mãn $3\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$.

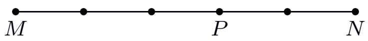
A M trùng với I.

B M là trung điểm của BI.

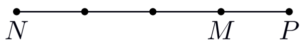
C M là trung điểm của AI.

D M trùng với A hoặc M trùng với B.

CÂU 11. Trên đường thẳng MN lấy điểm P sao cho $\overrightarrow{MN} = -3\overrightarrow{MP}$. Điểm P được xác định trong hình vẽ nào sau đây?

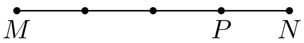


Hình 1



Hình 3

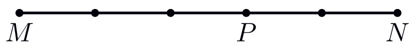
Hình 2



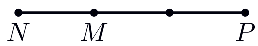
Hình 4

A Hình 1. **B** Hình 2. **C** Hình 3. **D** Hình 4.

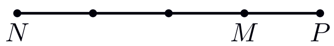
CÂU 12. Trên đưuòng thẳng MN lấy điểm P sao cho $\overrightarrow{MN} = -3\overrightarrow{MP}$. Điểm P được xác định đúng theo hình vẽ nào sau đây.

A 

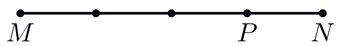
.

B 

.

C 

.

D 

.

CÂU 13. Cho tam giác ABC với I là trung điểm của AB. Tìm điểm M thỏa mãn hệ thức $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = \vec{0}$.

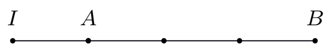
A M là trung điểm của IC.

B M là trung điểm của IA.

C M là điểm trên cạnh IC sao cho $IM = 2MC$.

D M là trung điểm của BC.

CÂU 14. Đẳng thức nào sau đây mô tả đúng hình vẽ bên?



A $3\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AB} = \vec{0}$.

B $3\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$.

C $\overrightarrow{BI} + 3\overrightarrow{BA} = \vec{0}$.

D $\overrightarrow{AI} + 3\overrightarrow{AB} = \vec{0}$.

CÂU 15. Trong mặt phẳng Oxy, tam giác ABC có trọng tâm G là điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + 6\overrightarrow{AG} = 6\overrightarrow{AM}$. Vị trí của điểm M là

A M là trung điểm của AC.

B M là trung điểm của BC.

C M là điểm thứ tư của hình bình hành $ABCM$.

D M là trung điểm của AB.

CÂU 16. Cho tam giác ABC. Để điểm M thỏa mãn điều kiện $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$ thì M phải thỏa mãn

A M là trọng tâm tam giác ABC.

B M là điểm sao cho tứ giác $ABMC$ là hình bình hành.

QUICK NOTE

Ⓒ M thuộc trung trực của AB.

Ⓓ M là điểm sao cho tứ giác $BAMC$ là hình bình hành.

CÂU 17. Cho tứ giác $ABCD$ và M là điểm thoả $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=\vec{0}$. Chọn khẳng định đúng.

Ⓐ M là giao điểm hai đường chéo của tứ giác $ABCD$.

Ⓑ M là giao điểm của các đoạn thẳng nối hai trung điểm hai cạnh đối diện của tứ giác $ABCD$.

Ⓒ M là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $ABCD$.

Ⓓ M là tâm đường tròn nội tiếp tứ giác $ABCD$.

CÂU 18. Cho tam giác ABC, gọi M là điểm thoả mãn $\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}=\vec{0}$. Khi đó,

Ⓐ $ABCM$ là hình bình hành.

Ⓑ $ABMC$ là hình bình hành.

Ⓒ $ABCM$ là hình bình thang có đáy lớn AM.

Ⓓ $ABCM$ là hình bình thang có đáy lớn BC.

CÂU 19. Gọi G và G' lần lượt là trọng tâm của hai tam giác ABC và $A'B'C'$. Tìm điều kiện cần và đủ để $G\equiv G'$.

Ⓐ $\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}+3\overrightarrow{GG'}=\vec{0}$.

Ⓑ $\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}=3\overrightarrow{GG'}$.

Ⓒ $\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}-3\overrightarrow{G'G}=\vec{0}$.

Ⓓ $\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}=3\overrightarrow{G'G}$.

CÂU 20. Cho tam giác ABC có I là trung điểm BC. Gọi M là điểm thoả mãn $2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}$. Xác định vị trí của điểm M.

Ⓐ M là trọng tâm tam giác ABC.

Ⓑ M là trung điểm AI.

Ⓒ M là điểm thuộc đoạn thẳng AI thoả $MA=2MI$.

Ⓓ M là điểm thuộc đoạn thẳng AI thoả $MI=2MA$.

CÂU 21. Cho hình bình hành $ABCD$, điểm M thỏa $4\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}$. Khi đó điểm M là

Ⓐ trung điểm AC. Ⓑ điểm C. Ⓒ trung điểm AB. Ⓓ trung điểm AD.

CÂU 22. Cho tam giác ABC. Gọi D,E là các điểm xác định bởi $\overrightarrow{AD}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AE}=\dfrac{2}{5}\overrightarrow{AC}$. Gọi K là trung điểm của DE và M xác định bởi $\overrightarrow{BM}=x\overrightarrow{BC}$. Tìm giá trị thực của x sao cho A,K,M thẳng hàng.

Ⓐ $\dfrac{3}{8}$. Ⓑ $-\dfrac{4}{3}$. Ⓒ $\dfrac{8}{3}$. Ⓓ $-\dfrac{3}{4}$.

CÂU 23. Cho tam giác ABC. Gọi D là trung điểm cạnh AC và I là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IB}+3\overrightarrow{IC}=\vec{0}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

Ⓐ I là trực tâm tam giác BCD.

Ⓑ I là trọng tâm tam giác ABC.

Ⓒ I là trọng tâm tam giác CDB.

Ⓓ I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

CÂU 24. Cho đoạn thẳng AB và M là một điểm nằm trên đường thẳng AB sao cho $\overrightarrow{MA}=-\dfrac{1}{5}\overrightarrow{AB}$. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

Ⓐ $\overrightarrow{MB}=-4\overrightarrow{MA}$. Ⓑ $\overrightarrow{MB}=-\dfrac{4}{5}\overrightarrow{AB}$. Ⓒ $\overrightarrow{AM}=\dfrac{1}{5}\overrightarrow{AB}$. Ⓓ $\overrightarrow{MA}=-\dfrac{1}{4}\overrightarrow{MB}$.

CÂU 25. Cho tam giác ABC. Hãy xác định vị trí điểm M thỏa mãn $2\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MB}=\vec{0}$.

Ⓐ M thuộc cạnh AB và $AM=2MB$.

Ⓑ M trên AB và ngoài đoạn AB.

Ⓒ M là trung điểm AB.

Ⓓ M không thuộc đoạn AB.

CÂU 26. Cho tam giác ABC, N là trung điểm AB, M là điểm thỏa mãn đẳng thức $\overrightarrow{MN}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$. Kết luận nào dưới đây đúng?

Ⓐ M đối xứng với C qua A.

Ⓑ A đối xứng với M qua C.

QUICK NOTE

(C) C đối xứng với A qua M.
(D) M là điểm tùy ý.

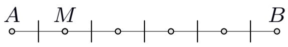
CÂU 27. Cho tam giác ABC và điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{AB}$. Tìm vị trí điểm M.

(A) M là điểm thứ tư của hình bình hành $ABCM$.
(B) M là trung điểm của AB.
(C) M là trung điểm của BC.
(D) M là trung điểm của AC.

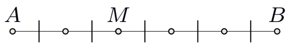
CÂU 28. Cho tam giác ABC, I là trung điểm AC. Vị trí điểm N thỏa mãn $\overrightarrow{NA}+2\overrightarrow{NB}=\overrightarrow{CB}$ xác định bởi hệ thức

(A) $\overrightarrow{BN}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{BI}$.
(B) $\overrightarrow{BN}=2\overrightarrow{BI}$.
(C) $\overrightarrow{BN}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{BI}$.
(D) $\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{BI}$.

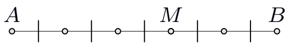
CÂU 29. Cho đoạn thẳng AB, hình nào sau đây biểu diễn đúng điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MA}+4\overrightarrow{MB}=\vec{0}$.



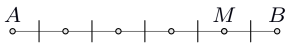
Hình 1



Hình 2



Hình 3



Hình 4

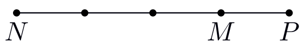
(A) Hình 1.
(B) Hình 2.
(C) Hình 3.
(D) Hình 4.

CÂU 30. Cho đoạn thẳng AB có trung điểm I. Tìm điểm M thỏa mãn $3\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\vec{0}$.

(A) M trùng với I.
(B) M là trung điểm của BI.
(C) M là trung điểm của AI.
(D) M trùng với A hoặc M trùng với B.

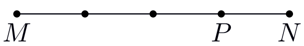
CÂU 31. Trên đường thẳng MN lấy điểm P sao cho $\overrightarrow{MN}=-3\overrightarrow{MP}$. Điểm P được xác định trong hình vẽ nào sau đây?

Hình 1



Hình 3

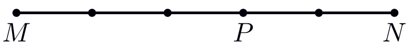
Hình 2



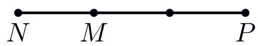
Hình 4

(A) Hình 1.
(B) Hình 2.
(C) Hình 3.
(D) Hình 4.

CÂU 32. Trên đưuòng thẳng MN lấy điểm P sao cho $\overrightarrow{MN}=-3\overrightarrow{MP}$. Điểm P được xác định đúng theo hình vẽ nào sau đây.

(A) 

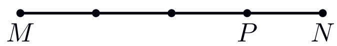
.

(B) 

.

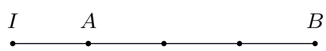
(C) 

.

(D) 

.

CÂU 33. Đẳng thức nào sau đây mô tả đúng hình vẽ bên?



(A) $3\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{AB}=\vec{0}$.
(B) $3\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$.
(C) $\overrightarrow{BI}+3\overrightarrow{BA}=\vec{0}$.
(D) $\overrightarrow{AI}+3\overrightarrow{AB}=\vec{0}$.

CÂU 34. Trong mặt phẳng Oxy, tam giác ABC có trọng tâm G là điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+6\overrightarrow{AG}=6\overrightarrow{AM}$. Vị trí của điểm M là

(A) M là trung điểm của AC.
(B) M là trung điểm của BC.
(C) M là điểm thứ tư của hình bình hành $ABCM$.
(D) M là trung điểm của AB.

4 Biểu diễn vectơ theo hai vectơ không cùng phương

Đặt vấn đề : Trong dạng toán này, chúng ta giải quyết bài toán dựa vào kiến thức: "Cho trước hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ khác $\vec{0}$ và không cùng phương. Với mọi vectơ $\vec{c}$ ta luôn tìm được một cặp số thực (α, β) duy nhất sao cho $\vec{c} = \alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{b}$".

Phương pháp giải : Ta có thể chọn 1 trong 2 hướng giải sau

- **Hướng 1**: Từ giả thiết xác định được tính chất hình học, rồi từ đó khai triển vectơ cần biểu diễn bằng quy tắc ba điểm, quy tắc hình bình hành, tính chất trung điểm, trọng tâm, ...
- **Hướng 2**: Từ giả thiết, ta lập được mối quan hệ vectơ giữa các đối tượng, rồi từ đó khai triển biểu thức bằng quy tắc ba điểm, quy tắc hình bình hành, tính chất trung điểm, trọng tâm, ...

QUICK NOTE

1. Ví dụ minh họa

VÍ DỤ 1. Cho $\triangle ABC$, gọi G là trọng tâm của tam giác và B_1 là điểm đối xứng của B qua G. Gọi M là trung điểm của BC. Hãy biểu diễn các vectơ

a) $\overrightarrow{CB_1}$ và $\overrightarrow{AB_1}$ theo $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$.

b) $\overrightarrow{MB_1}$ theo $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$.

VÍ DỤ 2. Cho $\triangle ABC$. Gọi I là điểm trên cạnh BC sao cho $2CI = 3BI$ và J là điểm trên BC kéo dài sao cho $5JB = 2JC$. Gọi G là trọng tâm $\triangle ABC$.

a) Tính $\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AJ}$ theo $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$.

b) Tính $\overrightarrow{AG}$ theo $\overrightarrow{AI}$ và $\overrightarrow{AJ}$.

VÍ DỤ 3. Cho $\triangle ABC$ và hai điểm D, E thỏa mãn $\overrightarrow{DB} = k \cdot \overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{EB} = \dfrac{1}{k}\overrightarrow{EC}$ (với $k \neq 1$).

a) Biểu diễn các vectơ $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{DE}$ theo các vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$.

b) Điểm F, I thỏa mãn $\overrightarrow{FA} = k \cdot \overrightarrow{FB}$, $\overrightarrow{IC} = k \cdot \overrightarrow{IA}$. Chứng minh $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BI} + \overrightarrow{CF} = \vec{0}$.

2. Bài tập áp dụng

BÀI 1. Cho $\triangle ABC$ có M, D lần lượt là trung điểm của AB, BC và N là điểm trên cạnh AC sao cho $\overrightarrow{AN} = \dfrac{1}{2} \cdot \overrightarrow{NC}$. Gọi K là trung điểm của MN. Hãy tính các vectơ $\overrightarrow{AK}$, $\overrightarrow{KD}$ theo $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$.

BÀI 2. Cho $\triangle ABC$. Trên hai cạnh AB và AC lấy hai điểm D và E sao cho $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{CE} = 3\overrightarrow{EA}$. Gọi M, I lần lượt là trung điểm của DE và BC. Hãy tính vectơ $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{MI}$ theo $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$.

BÀI 3. Cho $\triangle ABC$, lấy điểm M, N, P sao cho $\overrightarrow{MB} = 3\overrightarrow{MC}$, $\overrightarrow{NA} + 3\overrightarrow{NC} = \vec{0}$, $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} = \vec{0}$. Phân tích $\overrightarrow{PM}$, $\overrightarrow{PN}$ theo $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$.

BÀI 4. Cho hình bình hành $ABCD$ có tâm là O. Hãy tính các vectơ sau theo vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AD}$.

a) $\overrightarrow{AI}$ với I là trung điểm của $\overrightarrow{BO}$.

b) $\overrightarrow{BG}$ với G là trọng tâm $\triangle OCD$.

BÀI 5. Cho $\triangle ABC$ có hai đường trung tuyến BN, CP. Hãy biểu thị các vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$ theo các vectơ $\overrightarrow{BN}$, $\overrightarrow{CP}$.

BÀI 6. Cho $\triangle ABC$ có trọng tâm G. Gọi I, J nằm trên cạnh BC và BC kéo dài sao cho $2CI = 3BI$, $5JB = 2JC$.

a) Tính $\overrightarrow{AI}$, $\overrightarrow{AJ}$ theo $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$.

b) Tính $\overrightarrow{AG}$ theo $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$.

BÀI 7. Cho $\triangle ABC$ có G là trọng tâm tam giác và I là điểm đối xứng của B qua G. M là trung điểm của BC. Hãy tính $\overrightarrow{AI}$, $\overrightarrow{CI}$, $\overrightarrow{MI}$ theo $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$.

BÀI 8. Cho $\triangle ABC$ có trọng tâm là G và các đường trung tuyến AM, BP. Gọi G' là điểm đối xứng với điểm G qua P.

a) Hãy biểu diễn các vectơ $\overrightarrow{AG'}$, $\overrightarrow{CG'}$ theo $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$.

b) Chứng minh hệ thức: $5\overrightarrow{AC} - 6\overrightarrow{AB} = 6\overrightarrow{MG'}$.

QUICK NOTE

BÀI 9. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm của các cạnh BC, CD. Hãy biểu diễn các vectơ $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$ theo các vectơ $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AN}$.

BÀI 10. Cho tứ giác $ABCD$ có M, N theo thứ tự là trung điểm của các cạnh AD, BC. Hãy biểu diễn vectơ $\overrightarrow{MN}$ theo $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DC}$ và theo $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{DB}$.

BÀI 11. Cho $\triangle ABC$. Gọi I là điểm đối xứng của trọng tâm G qua B.

a) Chứng minh $\overrightarrow{IA} - 5\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \vec{0}$.

b) Đặt $\overrightarrow{AG} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AI} = \vec{b}$. Tính $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ theo $\vec{a}$, $\vec{b}$.

BÀI 12. Cho $\triangle ABC$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB. Tính các vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$ theo các vectơ $\overrightarrow{BN}$, $\overrightarrow{CP}$.

BÀI 13. Cho $\triangle ABC$. Gọi I là điểm trên cạnh BC kéo dài sao cho $IB = 3IC$.

a) Tính $\overrightarrow{AI}$ theo $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$.

b) Gọi J và K lần lượt là các điểm thuộc cạnh AC, AB sao cho $JA = 2JC$ và $KB = 3KA$. Tính $\overrightarrow{JK}$ theo $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$.

c) Tính $\overrightarrow{BC}$ theo $\overrightarrow{AI}$ và $\overrightarrow{JK}$.

3. Bài tập trắc nghiệm

CÂU 1. Cho tam giác ABC có M là trung điểm của đoạn BC. Tìm mệnh đề đúng.

(A) $\overrightarrow{AM} = -\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.
(B) $\overrightarrow{AM} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.
(C) $\overrightarrow{AM} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.
(D) $\overrightarrow{AM} = -\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

CÂU 2. Cho hình bình hành $ABCD$, gọi I là trung điểm của CD, đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$. Biểu diễn vectơ $\overrightarrow{BI}$ theo các vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$.

(A) $\overrightarrow{BI} = -\dfrac{1}{2}\vec{a} + \dfrac{1}{2}\vec{b}$.
(B) $\overrightarrow{BI} = \vec{a} + \vec{b}$.
(C) $\overrightarrow{BI} = -\dfrac{1}{2}\vec{a} + \vec{b}$.
(D) $\overrightarrow{BI} = \dfrac{1}{2}\vec{a} + \vec{b}$.

CÂU 3. Cho tam giác ABC và một điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{BM} = k\overrightarrow{BC}$. Biểu diễn vectơ $\overrightarrow{AM}$ theo các vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$.

(A) $\overrightarrow{AM} = (1-k)\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{AC}$.
(B) $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{AC}$.
(C) $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB} + (1-k)\overrightarrow{AC}$.
(D) $\overrightarrow{AM} = (1-k)\overrightarrow{AB} + (1-k)\overrightarrow{AC}$.

CÂU 4. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi I là điểm trên cạnh BC được xác định bởi $\overrightarrow{BI} = k\overrightarrow{BC}$ $(k \neq 1)$. Tìm hệ thức liên hệ giữa $\overrightarrow{DI}$, $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{DC}$.

(A) $\overrightarrow{DI} = (k-1)\overrightarrow{DB} - k\overrightarrow{DC}$.
(B) $\overrightarrow{DI} = (1-k)\overrightarrow{DB} + k\overrightarrow{DC}$.
(C) $\overrightarrow{DI} = (1+k)\overrightarrow{DB} - k\overrightarrow{DC}$.
(D) $\overrightarrow{DI} = (1+k)\overrightarrow{DB} + k\overrightarrow{DC}$.

CÂU 5. Cho tam giác ABC có M là trung điểm của BC. Tính $\overrightarrow{AB}$ theo $\overrightarrow{AM}$ và $\overrightarrow{BC}$.

(A) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.
(B) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AM}$.
(C) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM} - \dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.
(D) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC} - \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AM}$.

CÂU 6. Cho tam giác ABC có M là trung điểm của BC, I là trung điểm của AM. Khẳng định nào sau đây **đúng**?

(A) $\overrightarrow{AI} = \dfrac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)$.
(B) $\overrightarrow{AI} = \dfrac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\right)$.
(C) $\overrightarrow{AI} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.
(D) $\overrightarrow{AI} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{AB} - \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

CÂU 7. Cho tam giác ABC. Hai điểm M, N chia cạnh BC theo ba phần bằng nhau $BM = MN = NC$. Tính $\overrightarrow{AM}$ theo $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.

(A) $\overrightarrow{AM} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.
(B) $\overrightarrow{AM} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.
(C) $\overrightarrow{AM} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB} - \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.
(D) $\overrightarrow{AM} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.

CÂU 8. Cho tam giác ABC có G là trọng tâm tam giác. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

(A) $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{CG}=\vec{0}$.
(B) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{AG}$.
(C) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AG}$.
(D) $2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{AG}$.

CÂU 9. Cho $\triangle ABC$ có M là trung điểm của BC. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

(A) $2\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$.
(B) $2\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$.
(C) $2\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BC}$.
(D) $2\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}$.

CÂU 10. Cho $\triangle ABC$ và I thỏa mãn $\overrightarrow{IA}=3\overrightarrow{IB}$. Phân tích $\overrightarrow{CI}$ theo $\overrightarrow{CA}$ và $\overrightarrow{CB}$.

(A) $\overrightarrow{CI}=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{CA}-3\overrightarrow{CB}\right)$.
(B) $\overrightarrow{CI}=\overrightarrow{CA}-3\overrightarrow{CB}$.
(C) $\overrightarrow{CI}=\dfrac{1}{2}\left(3\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA}\right)$.
(D) $\overrightarrow{CI}=3\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA}$.

CÂU 11. Cho hình bình hành $ABCD$ có N là trung điểm AB và G là trọng tâm $\triangle ABC$. Phân tích $\overrightarrow{GA}$ theo $\overrightarrow{BD}$ và $\overrightarrow{NC}$.

(A) $\overrightarrow{GA}=-\dfrac{1}{3}\overrightarrow{BD}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{NC}$.
(B) $\overrightarrow{GA}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{BD}-\dfrac{4}{3}\overrightarrow{NC}$.
(C) $\overrightarrow{GA}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{BD}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{NC}$.
(D) $\overrightarrow{GA}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{BD}-\dfrac{2}{3}\overrightarrow{NC}$.

CÂU 12. Cho $\triangle ABC$ có AK, BM là hai trung tuyến. Đặt $\overrightarrow{AK}=\vec{a}$, $\overrightarrow{BM}=\vec{b}$. Hãy biểu diễn $\overrightarrow{BC}$ theo $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là

(A) $\overrightarrow{BC}=\dfrac{2}{3}\vec{a}+\dfrac{4}{3}\vec{b}$.
(B) $\overrightarrow{BC}=\dfrac{2}{3}\vec{a}-\dfrac{4}{3}\vec{b}$.
(C) $\overrightarrow{BC}=-\dfrac{2}{3}\vec{a}+\dfrac{4}{3}\vec{b}$.
(D) $\overrightarrow{BC}=\dfrac{1}{3}\vec{a}+\dfrac{4}{3}\vec{b}$.

CÂU 13. Cho $\triangle ABC$ với trọng tâm G. Đặt $\overrightarrow{CA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{CB}=\vec{b}$. Biểu thị vectơ $\overrightarrow{AG}$ theo hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ ta được

(A) $\overrightarrow{AG}=\dfrac{2\vec{a}-\vec{b}}{3}$.
(B) $\overrightarrow{AG}=\dfrac{-2\vec{a}+\vec{b}}{3}$.
(C) $\overrightarrow{AG}=\dfrac{2\vec{a}+\vec{b}}{3}$.
(D) $\overrightarrow{AG}=\dfrac{\vec{a}-2\vec{b}}{3}$.

CÂU 14. Cho tam giác ABC. Gọi M trên cạnh BC sao cho $MB=3MC$. Khi đó, biểu diễn vectơ $\overrightarrow{AM}$ theo vectơ $\overrightarrow{AB}$ và vectơ $\overrightarrow{AC}$ là

(A) $\overrightarrow{AM}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}$.
(B) $\overrightarrow{AM}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\dfrac{3}{4}\overrightarrow{AC}$.
(C) $\overrightarrow{AM}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{6}\overrightarrow{AC}$.
(D) $\overrightarrow{AM}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{6}\overrightarrow{AC}$.

CÂU 15. Cho tam giác ABC có trọng tâm G. Đặt $\overrightarrow{CA}=\vec{u}$, $\overrightarrow{CB}=\vec{v}$. Khi đó $\overrightarrow{AG}$ bằng

(A) $\dfrac{2\vec{u}-\vec{v}}{3}$.
(B) $\dfrac{2\vec{u}+\vec{v}}{3}$.
(C) $\dfrac{\vec{u}-2\vec{v}}{3}$.
(D) $\dfrac{-2\vec{u}+\vec{v}}{3}$.

CÂU 16. Cho tam giác ABC có G là trọng tâm tam giác. Điểm N trên BC sao cho $\overrightarrow{CN}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC}$. Biểu diễn vectơ $\overrightarrow{AC}$ theo các vectơ $\overrightarrow{AG}$ và $\overrightarrow{AN}$.

(A) $\overrightarrow{AC}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AG}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AN}$.
(B) $\overrightarrow{AC}=\dfrac{3}{4}\overrightarrow{AG}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AN}$.
(C) $\overrightarrow{AC}=\dfrac{4}{3}\overrightarrow{AG}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AN}$.
(D) $\overrightarrow{AC}=\dfrac{3}{4}\overrightarrow{AG}-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AN}$.

CÂU 17. Cho $\triangle ABC$ với G là trọng tâm. Đặt $\overrightarrow{CA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{CB}=\vec{b}$. Khi đó $\overrightarrow{AG}$ được biểu diễn theo hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là

(A) $\overrightarrow{AG}=\dfrac{1}{3}\vec{a}-\dfrac{2}{3}\vec{b}$.
(B) $\overrightarrow{AG}=\dfrac{2}{3}\vec{a}+\dfrac{1}{3}\vec{b}$.
(C) $\overrightarrow{AG}=\dfrac{2}{3}\vec{a}-\dfrac{1}{3}\vec{b}$.
(D) $\overrightarrow{AG}=-\dfrac{2}{3}\vec{a}+\dfrac{1}{3}\vec{b}$.

CÂU 18. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. Đặt $\overrightarrow{GA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{GB}=\vec{b}$. Tìm các giá trị thực của m, n để $\overrightarrow{BC}=m\vec{a}+n\vec{b}$.

(A) $m=1$; $n=2$.
(B) $m=-1$; $n=-2$.
(C) $m=-2$; $n=-1$.
(D) $m=2$; $n=1$.

CÂU 19. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD và BC. Hãy tìm m và n sao cho $\overrightarrow{MN}=m\overrightarrow{AB}+n\overrightarrow{DC}$.

(A) $m=\dfrac{1}{2}$, $n=\dfrac{1}{2}$.
(B) $m=-\dfrac{1}{2}$, $n=\dfrac{1}{2}$.

QUICK NOTE

QUICK NOTE

(C) $m=\frac{1}{2}$, $n=-\frac{1}{2}$. (D) $m=-\frac{1}{2}$, $n=-\frac{1}{2}$.

CÂU 20. Gọi G là trọng tâm của $\triangle ABC$. Đặt $\overrightarrow{GA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{GB}=\vec{b}$. Hãy tìm m, n để có $\overrightarrow{BC}=m\vec{a}+n\vec{b}$.

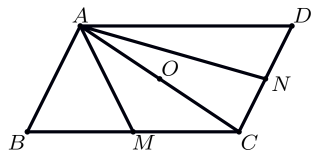
(A) $m=1$, $n=2$. (B) $m=-1$, $n=-2$. (C) $m=2$, $n=1$. (D) $m=-2$, $n=-1$.

CÂU 21. Cho tứ giác $ABCD$ (với AB, CD không song song). Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD và BC. Tìm m, n để $\overrightarrow{MN}=m\overrightarrow{AB}+n\overrightarrow{DC}$.

(A) $m=\frac{1}{2}$, $n=\frac{1}{2}$. (B) $m=-\frac{1}{2}$, $n=\frac{1}{2}$.

(C) $m=\frac{1}{2}$, $n=-\frac{1}{2}$. (D) $m=-\frac{1}{2}$, $n=-\frac{1}{2}$.

CÂU 22. Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của BC và CD. Đặt $\vec{a}=\overrightarrow{AM}$, $\vec{b}=\overrightarrow{AN}$. Hãy biểu diễn $\overrightarrow{AO}$ theo $\vec{a}$ và $\vec{b}$.



(A) $\overrightarrow{AO}=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}$. (B) $\overrightarrow{AO}=\frac{1}{6}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}$.

(C) $\overrightarrow{AO}=\frac{1}{3}\vec{a}+2\vec{b}$. (D) $\overrightarrow{AO}=\vec{a}+3\vec{b}$.

CÂU 23. Cho tam giác ABC. Gọi M là trung điểm của AB và N là một điểm trên cạnh AC sao cho $NC=2NA$. Gọi K là là điểm trên cạnh MN sao cho $KN=3KM$. Kết quả nào dưới đây đúng?

(A) $\overrightarrow{AK}=-\frac{3}{8}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{12}\overrightarrow{AC}$. (B) $\overrightarrow{AK}=-\frac{3}{8}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{12}\overrightarrow{AC}$.

(C) $\overrightarrow{AK}=\frac{3}{8}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{12}\overrightarrow{AC}$. (D) $\overrightarrow{AK}=\frac{3}{8}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{12}\overrightarrow{AC}$.

CÂU 24. Cho tứ giác $ABCD$. Trên cạnh AB, CD lần lượt lấy các điểm M, N sao cho $3\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{AB}$ và $3\overrightarrow{DN}=2\overrightarrow{DC}$. Tính vectơ $\overrightarrow{MN}$ theo hai vectơ $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BC}$.

(A) $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$. (B) $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}-\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$.

(C) $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$. (D) $\overrightarrow{MN}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.

CÂU 25. Cho tam giác đều ABC và điểm I thỏa mãn $\overrightarrow{IA}=2\overrightarrow{IB}$. Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

(A) $\overrightarrow{CI}=\frac{\overrightarrow{CA}-2\overrightarrow{CB}}{3}$. (B) $\overrightarrow{CI}=\frac{\overrightarrow{CA}+2\overrightarrow{CB}}{3}$.

(C) $\overrightarrow{CI}=-\overrightarrow{CA}+2\overrightarrow{CB}$. (D) $\overrightarrow{CI}=\frac{\overrightarrow{CA}+2\overrightarrow{CB}}{-3}$.

CÂU 26. Cho tam giác ABC có G là trọng tâm tam giác. Lấy các điểm P, Q sao cho $\overrightarrow{PA}=2\overrightarrow{PB}$, $3\overrightarrow{QA}+2\overrightarrow{QC}=\vec{0}$. Biểu diễn vectơ $\overrightarrow{AG}$ theo các vectơ $\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{AQ}$.

(A) $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AP}+\frac{5}{6}\overrightarrow{AQ}$. (B) $\overrightarrow{AG}=\frac{5}{6}\overrightarrow{AP}+\frac{1}{6}\overrightarrow{AQ}$.

(C) $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{6}\overrightarrow{AP}+\frac{5}{6}\overrightarrow{AQ}$. (D) $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AP}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AQ}$.

CÂU 27. Cho tam giác ABC. Gọi I là điểm trên cạnh BC sao cho $2CI=3BI$ và J thuộc BC kéo dài sao cho $5JB=2JC$. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. Biểu diễn vectơ $\overrightarrow{AG}$ theo các vectơ $\overrightarrow{AI}$, $\overrightarrow{AJ}$.

(A) $\overrightarrow{AG}=\frac{35}{48}\overrightarrow{AI}-\frac{1}{16}\overrightarrow{AJ}$. (B) $\overrightarrow{AG}=\frac{35}{48}\overrightarrow{AI}+\frac{1}{16}\overrightarrow{AJ}$.

(C) $\overrightarrow{AG}=\frac{25}{16}\overrightarrow{AI}-\frac{3}{16}\overrightarrow{AJ}$. (D) $\overrightarrow{AG}=\frac{25}{16}\overrightarrow{AI}+\frac{3}{16}\overrightarrow{AJ}$.

CÂU 28. Cho tam giác ABC. Gọi G là trọng tâm tam giác và H là điểm đối xứng của B qua G. Gọi M là trung điểm BC. Biểu diễn vectơ $\overrightarrow{MH}$ theo các vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$.

(A) $\overrightarrow{MH}=\frac{5}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$. (B) $\overrightarrow{MH}=-\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{5}{6}\overrightarrow{AC}$.

(C) $\overrightarrow{MH}=-\frac{5}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$. (D) $\overrightarrow{MH}=\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{5}{6}\overrightarrow{AC}$.

CÂU 29. Cho góc $\widehat{xOy}=60^\circ$. Các điểm A, B nằm trên tia Ox, các điểm C, D nằm trên tia Oy sao cho $AB=CD=2$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm các đoạn AC, BD. Biết A nằm giữa O và B, C nằm giữa O và D, tính IJ.

Ⓐ $IJ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Ⓑ $IJ = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$. Ⓒ $IJ = \sqrt{3}$. Ⓓ $IJ = 2\sqrt{3}$.

CÂU 30. Cho tam giác ABC, N là điểm xác định bởi $\overrightarrow{CN} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC}$. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. Hệ thức tính $\overrightarrow{AC}$ theo $\overrightarrow{AG}$ và $\overrightarrow{AN}$ là

Ⓐ $\overrightarrow{AC} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AG} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AN}$. Ⓑ $\overrightarrow{AC} = \dfrac{4}{3}\overrightarrow{AG} - \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AN}$.

Ⓒ $\overrightarrow{AC} = \dfrac{3}{4}\overrightarrow{AG} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AN}$. Ⓓ $\overrightarrow{AC} = \dfrac{3}{4}\overrightarrow{AG} - \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AN}$.

5 Chứng minh ba điểm thẳng hàng, hai đường thẳng song song, hai điểm trùng nhau

- Để chứng minh 3 điểm A, B, C thẳng hàng, ta chứng minh: $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$ (1).
  Để nhận được (1), ta lựa chọn một trong hai hướng sau:
  - Sử dụng các quy tắc biến đổi vectơ.
  - Xác định (tính) vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ thông qua một tổ hợp trung gian.

  Chú ý:
  - Cho ba điểm A, B, C. Điều kiện cần và đủ để A, B, C thẳng hàng là: $\overrightarrow{MC} = \alpha\overrightarrow{MA} + (1-\alpha)\overrightarrow{MB}$ với điểm M tùy ý và số thực α bất k".
    Đặc biệt khi $0 \le \alpha \le 1$ thì $C \in AB$. Kết quả trên còn được sử dụng để tìm điều kiện của tham số k (hoặc m) cho ba điểm A, B, C thẳng hàng.
  - Nếu không dễ nhận thấy k trong biểu thức $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$, ta nên quy đồng biểu thức phân tích vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ để tìm ra số k.
- Để chứng minh $AB \parallel CD$ ta cần chứng minh $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{DC}$.

1. Ví dụ minh họa

VÍ DỤ 1. Cho hình bình hành $ABCD$, tâm O. Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm của AB, CD và P là điểm thỏa mãn hệ thức $\overrightarrow{OP} = -\dfrac{1}{3}\overrightarrow{OA}$. Chứng minh 3 điểm B, P, N thẳng hàng.

VÍ DỤ 2. Cho bốn điểm phân biệt A, B, C, D thỏa: $2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC} = 5\overrightarrow{AD}$. Chứng minh B, C, D thẳng hàng.

VÍ DỤ 3. Cho $\triangle ABC$, lấy điểm M, N, P sao cho $\overrightarrow{MB} = 3\overrightarrow{MC}$, $\overrightarrow{NA} + 3\overrightarrow{NC} = \vec{0}$, $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} = \vec{0}$.

a) Tính $\overrightarrow{PM}$, $\overrightarrow{PN}$ theo $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$.

b) Chứng minh ba điểm: M, N, P thẳng hàng.

VÍ DỤ 4. Cho $\triangle ABC$ có I là trung điểm của trung tuyến AM và D là điểm thỏa hệ thức $3\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$. Biểu diễn vectơ $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{BI}$ theo $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ và chứng minh ba điểm B, I, D thẳng hàng.

2. Bài tập áp dụng

BÀI 1. Cho $\triangle ABC$.

a) Dựng các điểm K, L sao cho $\overrightarrow{KA} + 2\overrightarrow{KB} + 3\overrightarrow{KC} = \vec{0}$, $2\overrightarrow{LB} + 3\overrightarrow{LC} = \vec{0}$

b) Chứng minh ba điểm A, K, L thẳng hàng.

BÀI 2. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi I là trung điểm của AB và E là điểm thoả hệ thức $3\overrightarrow{IE} = \overrightarrow{ID}$. Chứng minh ba điểm A, C, E thẳng hàng.

BÀI 3. Cho $\triangle ABC$.

a) Dựng các điểm K, L sao cho $\overrightarrow{KA} + 2\overrightarrow{KB} + 3\overrightarrow{KC} = \vec{0}$ và $2\overrightarrow{LB} + 3\overrightarrow{LC} = \vec{0}$

b) Chứng minh ba điểm A, K, L thẳng hàng.

BÀI 4. Cho $\triangle ABC$. Gọi M là trung điểm của cạnh AB, N và P là hai điểm thỏa mãn hệ thức $\overrightarrow{NA} + 2\overrightarrow{NC} = \vec{0}$, $\overrightarrow{PB} - 2\overrightarrow{PC} = \vec{0}$. Chứng minh ba điểm M, N, P thẳng hàng.

QUICK NOTE

QUICK NOTE

BÀI 5. Cho $\triangle ABC$. Hai điểm M, N được xác định bởi $3\overrightarrow{MA}+4\overrightarrow{MB}=\vec{0}$, $\overrightarrow{NB}-3\overrightarrow{NC}=\vec{0}$. Chứng minh MN đi qua trọng tâm $\triangle ABC$.

BÀI 6. Cho $\triangle ABC$.

a) Dựng các điểm D, E thỏa các hệ thức $\overrightarrow{AD}=\dfrac{3}{2}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DE}=\dfrac{3}{2}\overrightarrow{BC}$.

b) Chứng minh ba điểm A, C, E thẳng hàng.

BÀI 7. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi I là trung điểm của cạnh BC và E là điểm xác định bởi $\overrightarrow{AE}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AC}$. Chứng minh ba điểm D, E, I thẳng hàng.

BÀI 8. Cho $\triangle ABC$ có trung tuyến AD và M là trung điểm AD. Điểm N được lấy trên AC sao cho $3\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AC}$. Chứng minh ba điểm B, M, N thẳng hàng.

BÀI 9. Cho $\triangle ABC$ có M là trung điểm BC và O là trung điểm của AM. Trên AB lấy điểm I, AC lấy điểm J sao cho $\overrightarrow{AI}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AJ}=\dfrac{2}{5}\overrightarrow{AC}$. Chứng minh ba điểm I, J, O thẳng hàng.

BÀI 10. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA. Gọi O là giao điểm của MP và NQ, G là trọng tâm của tam giác BCD. Chứng minh rằng ba điểm A, O, G thẳng hàng.

BÀI 11. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M, N là hai điểm di động trên AB, CD sao cho $\dfrac{MA}{MB}=\dfrac{ND}{NC}$ và hai điểm I, J lần lượt là trung điểm của AD, BC.

a) Tính $\overrightarrow{IJ}$ theo $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{DC}$.

b) Chứng minh trung điểm P của MN nằm trên IJ.

BÀI 12. Cho $\triangle ABC$. Gọi P, Q, R là các điểm thỏa các đẳng thức :

$$3\overrightarrow{PB}+4\overrightarrow{PC}=\vec{0},\quad \overrightarrow{AQ}=2\overrightarrow{QC},\quad k\overrightarrow{RA}=\overrightarrow{RB},\ k\neq 1.$$

a) Chứng minh rằng: $21\overrightarrow{PQ}=2\overrightarrow{BC}+7\overrightarrow{BA}$.

b) Chứng minh rằng: $\overrightarrow{RP}=\dfrac{k}{1-k}\overrightarrow{BA}+\dfrac{4}{7}\overrightarrow{BC}$.

c) Tìm k sao cho P, Q, R thẳng hàng.

BÀI 13. Cho hình bình hành $ABCD$.

a) Gọi I, F, K là các điểm thỏa mãn $\overrightarrow{AI}=\alpha\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AF}=\beta\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AK}=\gamma\overrightarrow{AD}$. Chứng minh điều kiện cần và đủ để I, F, K thẳng hàng là

$$\frac{1}{\beta}=\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\gamma}\quad(\alpha,\ \beta,\ \gamma\neq 0).$$

b) Gọi M, N là hai điểm lần lượt trên đoạn AB, CD sao cho $\dfrac{AM}{AB}=\dfrac{1}{3}$, $\dfrac{CN}{CD}=\dfrac{1}{2}$. Gọi G là trọng tâm $\triangle MNB$. Tính $\overrightarrow{AN},\overrightarrow{AG}$ theo $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$. Gọi H là điểm xác định bởi $\overrightarrow{BH}=k\cdot\overrightarrow{BC}$. Tính $\overrightarrow{AH}$ theo $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ và k. Tìm k để đường thẳng AH đi qua điểm G.

3. Bài tập trắc nghiệm

CÂU 1. Cho ba điểm A, B, C phân biệt. Điều kiện cần và đủ để ba điểm thẳng hàng là

(A) $AB=AC$.
(B) $\exists k\in\mathbb{R}^*:\ \overrightarrow{AB}=k\cdot\overrightarrow{AC}$.
(C) $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BC}$.
(D) $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=3\overrightarrow{MC},\forall$ điểm M.

CÂU 2. Khẳng định nào sau đây **sai**?

(A) Ba điểm phân biệt A, B, C thẳng hàng khi và chỉ khi $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{BC}, k\neq 0$.
(B) Ba điểm phân biệt A, B, C thẳng hàng khi và chỉ khi $\overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{BC},\ k\neq 0$.
(C) Ba điểm phân biệt A, B, C thẳng hàng khi và chỉ khi $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{AC}, k\neq 0$.
(D) Ba điểm phân biệt A, B, C thẳng hàng khi và chỉ khi $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{AC}$.

CÂU 3. Phát biểu nào là **sai**?

(A) Nếu $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}$ thì $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\left|\overrightarrow{AC}\right|$.

(B) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ thì A,B,C,D thẳng hàng.

(C) Nếu $3\overrightarrow{AB}+7\overrightarrow{AC}=\vec{0}$ thì A,B,C thẳng hàng.

(D) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{BA}$.

CÂU 4. Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương. Hai vectơ nào sau đây là cùng phương?

(A) $\vec{u}=2\vec{a}+3\vec{b}$ và $\vec{v}=\dfrac{1}{2}\vec{a}-3\vec{b}$.
(B) $\vec{u}=\dfrac{3}{5}\vec{a}+3\vec{b}$ và $\vec{v}=2\vec{a}-\dfrac{3}{5}\vec{b}$.
(C) $\vec{u}=\dfrac{2}{3}\vec{a}+3\vec{b}$ và $\vec{v}=2\vec{a}-9\vec{b}$.
(D) $\vec{u}=2\vec{a}-\dfrac{3}{2}\vec{b}$ và $\vec{v}=-\dfrac{1}{3}\vec{a}+\dfrac{1}{4}\vec{b}$.

CÂU 5. Biết rằng hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương nhưng hai vectơ $2\vec{a}-3\vec{b}$ và $\vec{a}+(x-1)\vec{b}$ cùng phương. Khi đó giá trị của x là

(A) $\dfrac{1}{2}$. (B) $-\dfrac{3}{2}$. (C) $-\dfrac{1}{2}$. (D) $\dfrac{3}{2}$.

CÂU 6. Cho $\vec{a},\vec{b}$ không cùng phương, $\vec{x}=-2\vec{a}+\vec{b}$. vectơ cùng hướng với $\vec{x}$ là

(A) $2\vec{a}-\vec{b}$. (B) $-\vec{a}+\dfrac{1}{2}\vec{b}$. (C) $4\vec{a}+2\vec{b}$. (D) $-\vec{a}+\vec{b}$.

CÂU 7. Biết rằng hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương nhưng hai vectơ $3\vec{a}-2\vec{b}$ và $(x+1)\vec{a}+4\vec{b}$ cùng phương. Khi đó giá trị của x là

(A) -7. (B) 7. (C) 5. (D) 6.

CÂU 8. Biết rằng hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương nhưng hai vectơ $2\vec{a}-3\vec{b}$ và $\vec{a}+(x-1)\vec{b}$ cùng phương. Khi đó giá trị của x là

(A) $\dfrac{1}{2}$. (B) $-\dfrac{3}{2}$. (C) $-\dfrac{1}{2}$. (D) $\dfrac{3}{2}$.

CÂU 9. Nếu I là trung điểm đoạn thẳng AB và $\overrightarrow{IA}=k\overrightarrow{AB}$ thì giá trị của k bằng

(A) 1. (B) $\dfrac{1}{2}$. (C) $-\dfrac{1}{2}$. (D) -2.

CÂU 10. Cho tam giác ABC và một điểm M tùy ý. Chứng minh rằng vectơ $\vec{v}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}$. Hãy xác định vị trí của điểm D sao cho $\overrightarrow{CD}=\vec{v}$.

(A) D là điểm thứ tư của hình bình hành $ABCD$.

(B) D là điểm thứ tư của hình bình hành $ACBD$.

(C) D là trọng tâm của tam giác ABC.

(D) D là trực tâm của tam giác ABC.

CÂU 11. Cho tam giác ABC. Hai điểm M,N được xác định bởi các hệ thức $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{MA}=\vec{0}$, $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{NA}-3\overrightarrow{AC}=\vec{0}$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

(A) $MN\perp AC$.

(B) $MN//AC$.

(C) M nằm trên đường thẳng AC.

(D) Hai đường thẳng MN và AC trùng nhau.

CÂU 12. Cho tam giác ABC có trọng tâm G. Các điểm M, N thỏa mãn $7\overrightarrow{MG}=3\overrightarrow{GC}-\overrightarrow{GB}$; $\overrightarrow{GN}=\dfrac{1}{2}\left(3\overrightarrow{GC}-\overrightarrow{GB}\right)$. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

(A) Đường thẳng MN đi qua G.
(B) Đường thẳng MN đi qua A.
(C) Đường thẳng MN đi qua B.
(D) Đường thẳng MN đi qua C.

CÂU 13. Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương. Các điểm A, B, C sao cho $\overrightarrow{AB}=2\vec{a}-3\vec{b}$; $\overrightarrow{AC}=m\vec{a}-\dfrac{1}{2}\vec{b}$. Khi A, B, C thẳng hàng thì khẳng định nào sau đây đúng?

(A) $m\in(2;3)$. (B) $m\in(1;2)$. (C) $m\in(-1;0)$. (D) $m\in(0;1)$.

CÂU 14. Cho tam giác ABC. Các điểm M, N thỏa mãn $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}$. Khi đó, đường thẳng MN luôn đi qua một điểm cố định I. Khẳng định nào sau đây đúng?

(A) I là trọng tâm của tam giác ABC.

(B) I là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

QUICK NOTE

QUICK NOTE

(C) I là trực tâm của tam giác ABC.

(D) Tứ giác $ABCI$ là hình bình hành.

CÂU 15. Cho tam giác ABC. Các điểm M, N thỏa mãn $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}$. Khi đó, đường thẳng MN luôn đi qua một điểm cố định I. Khẳng định nào sau đây đúng?

(A) $\overrightarrow{IC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$. (B) $\overrightarrow{IC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$. (C) $\overrightarrow{IB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$. (D) $\overrightarrow{IB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$.

CÂU 16. Cho hình bình hành $ABCD$ có O là giao điểm của hai đường chéo. Các điểm M, N thỏa mãn $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}$. Khi đó, đường thẳng MN luôn đi qua một điểm cố định I. Khẳng định nào sau đây đúng?

(A) I là trọng tâm của tam giác OBC.

(B) I là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

(C) I là trung điểm của cạnh DC.

(D) Tứ giác $ABCI$ là hình bình hành.

CÂU 17. Cho tam giác ABC có trọng tâm G. Gọi P, Q là các điểm sao cho $\overrightarrow{PA}=2\overrightarrow{PB}$, $\overrightarrow{AQ}+k\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{0}$ với $k\in\mathbb{R}$. Tìm k để P, Q G thẳng hàng.

(A) $k=\frac{2}{5}$. (B) $k=\frac{2}{3}$. (C) $k=-\frac{2}{5}$. (D) $k=-\frac{2}{3}$.

CÂU 18. Cho tam giác ABC. Gọi M, N là các điểm thỏa mãn $\overrightarrow{BM}=3\overrightarrow{BC}-2\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{CN}=k\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{BC}$. Tìm k để A, M, N thẳng hàng.

(A) $k=-\frac{3}{2}$. (B) $k=-\frac{1}{2}$. (C) $k=\frac{1}{2}$. (D) $k=\frac{3}{2}$.

CÂU 19. Cho tam giác ABC có I là trung điểm của BC . Gọi M, N, P lần lượt là các điểm xác định bởi $\overrightarrow{AM}=m\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AN}=n\overrightarrow{AI}$; $\overrightarrow{AP}=p\overrightarrow{AC}$, với $mnp\neq 0$. Tìm điều kiện của m, n, p để M, N, P thẳng hàng.

(A) $mp=mn+np$. (B) $2mn=mp+np$. (C) $2np=mn+mp$. (D) $2mp=mn+np$.

CÂU 20. Cho tam giác ABC . Gọi D, E lần lượt là các điểm thỏa mãn $\overrightarrow{BD}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$. Điểm K trên AD thỏa mãn $\overrightarrow{AK}=\frac{a}{b}\overrightarrow{AD}$ (với $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản) sao cho 3 điểm B, K, E thẳng hàng. Tính $P=a^2+b^2$.

(A) $P=5$. (B) $P=13$. (C) $P=29$. (D) $P=10$.

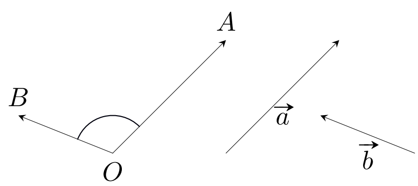
Bài 6. TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Góc giữa hai vectơ

Cho $\vec{a},\vec{b}\neq\vec{0}$. Từ một điểm O bất kì vẽ $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$.

Khi đó số đo của góc $\widehat{AOB}$ được gọi là số đo góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ hay đơn giản là góc giữa hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$. Kí hiệu $\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\widehat{AOB}$.



- Quy ước rằng góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ có thể nhận một giá trị tùy ý từ 0° đến 180°.
- $\left(\vec{a},\vec{b}\right)=0^\circ\Leftrightarrow\vec{a},\vec{b}$ cùng hướng.
- $\left(\vec{a},\vec{b}\right)=180^\circ\Leftrightarrow\vec{a},\vec{b}$ ngược hướng.
- Nếu $\left(\vec{a},\vec{b}\right)=90^\circ$ thì ta nói rằng $\vec{a}$ và $\vec{b}$ vuông góc với nhau, kí hiệu $\vec{a}\perp\vec{b}$ hoặc $\vec{b}\perp\vec{a}$.

2. Tích vô hướng của hai vectơ

Định nghĩa: Tích vô hướng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là một số, kí hiệu $\vec{a}\cdot\vec{b}$, được xác định bởi công thức sau

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right).$$

- *Ta có $\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=0$.*
- *$\vec{a}\cdot\vec{a}$ còn được viết là $\vec{a}^2$ được gọi là bình phương vô hướng của vectơ $\vec{a}$. Ta có $\vec{a}^2=|\vec{a}|\cdot|\vec{a}|\cdot\cos 0^\circ=|\vec{a}|^2$.*

B. CÁC DẠNG TOÁN

1 Tính tích vô hướng của hai vectơ và xác định góc

1. Ví dụ minh hoạ

VÍ DỤ 1. Cho tam giác ABC vuông tại A và có $\widehat{B}=50^\circ$. Hãy tính các góc $\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right)$; $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right)$; $\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right)$; $\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BC}\right)$; $\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{CB}\right)$; $\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BA}\right)$.

VÍ DỤ 2. Cho tam giác đều ABC có cạnh a và trọng tâm G. Tính các tích vô hướng $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CB}$; $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{GB}\cdot\overrightarrow{GC}$; $\overrightarrow{BG}\cdot\overrightarrow{GA}$; $\overrightarrow{GA}\cdot\overrightarrow{BC}$.

VÍ DỤ 3. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB=a$, $BC=2a$ và G là trọng tâm. Tính giá trị của các biểu thức sau:

a) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB}$.

b) $\overrightarrow{GA}\cdot\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GB}\cdot\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GC}\cdot\overrightarrow{GA}$.

VÍ DỤ 4. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a. M là trung điểm của AB, G là trọng tâm tam giác ADM. Tính giá trị của các biểu thức sau:

a) $\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)\left(\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{BC}\right)$.

b) $\overrightarrow{CG}\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{DM}\right)$.

VÍ DỤ 5. Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ có $|\vec{a}|=7,\left|\vec{b}\right|=12$ và $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=13$. Tính cosin của góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{a}+\vec{b}$.

2. Bài tập tự luận

BÀI 1. Cho tam giác ABC vuông cân có $AB=AC=a$ và AH là đường cao. Tính các tích vô hướng sau

a) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$; b) $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC}$; c) $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CB}$ và $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$.

BÀI 2. Cho tam giác ABC đều cạnh a và AM là trung tuyến của tam giác. Tính các tích vô hướng sau

a) $\overrightarrow{AC}\left(2\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AC}\right)$;

b) $\overrightarrow{AC}\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)$;

c) $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AB}$;

d) $\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{BC}\right)\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}\right)$.

BÀI 3. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB=a\sqrt{2}, AD=2a$. Gọi K là trung điểm của cạnh AD.

a) Phân tích $\overrightarrow{BK},\overrightarrow{AC}$ theo $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AD}$.

b) Tính tích vô hướng $\overrightarrow{BK}\cdot\overrightarrow{AC}$.

BÀI 4. Cho tam giác ABC có $AB=5$, $AC=8$, $BC=7$. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}$.

BÀI 5. Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ có độ dài bằng 1 và thỏa mãn điều kiện $\left|2\vec{a}-3\vec{b}\right|=\sqrt{7}$. Tính $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)$.

QUICK NOTE

QUICK NOTE

BÀI 6. Cho tam giác ABC vuông tại A có $BC = a\sqrt{3}$, M là trung điểm của BC. Biết rằng $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = \dfrac{a^2}{2}$. Hãy tính AB, AC.

BÀI 7. Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ có độ dài bằng 1 và góc tạo bởi hai vectơ đó bằng 60°. Xác định cosin góc giữa hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ với $\vec{u} = \vec{a} + 2\vec{b}$, $\vec{v} = \vec{a} - \vec{b}$.

BÀI 8. Cho hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ thỏa mãn $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$ và vectơ $\vec{x} = \vec{a} + 2\vec{b}$ vuông góc với vectơ $\vec{y} = 5\vec{a} - 4\vec{b}$. Tính góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

BÀI 9. Cho các vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ thỏa mãn $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 1$ và $\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = 60^\circ$. Tính góc giữa vectơ $\vec{a}$ và vectơ $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$.

BÀI 10. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 2$. M là điểm được xác định bởi $\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{MB}$; G là trọng tâm tam giác ADM. Tính $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{GC}$.

BÀI 11. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có cạnh $AB = a$, $AD = b$. Tính theo a, b các tích vô hướng sau:

a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AC}$; $\left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right)\left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}\right)$;

b) $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD}$ với điểm M thuộc đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật $ABCD$.

2 Chứng minh đẳng thức tích vô hướng hay độ dài

- Với các biểu thức về tích vô hướng ta sử dụng định nghĩa hoặc tính chất của tích vô hướng. Cần đặc biệt lưu ý phép phân tích vectơ để biến đổi (quy tắc ba điểm, quy tắc trung điểm, quy tắc hình bình hành,...).
- Với các công thức về độ dài ta thường sử dụng $AB^2 = \overrightarrow{AB}^2 = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB}$. Cần nắm vững tính chất của các hình cơ bản.

1. Ví dụ minh hoạ

VÍ DỤ 1. Cho đoạn thẳng AB và I là trung điểm của AB. Chứng minh rằng với mỗi điểm O ta có

a) $\overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{IB} = 0$.

b) $\overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{AB} = \dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{OB}^2 - \overrightarrow{OA}^2\right)$

VÍ DỤ 2. Cho điểm M thay đổi trên đường tròn tâm O bán kính R ngoại tiếp tam giác đều ABC cho trước. Chứng minh $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 6R^2$.

VÍ DỤ 3. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có tâm O, M là điểm bất kì. Chứng minh

a) $MA^2 + MC^2 = MB^2 + MD^2 \quad (1)$;

b) $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD} \quad (2)$.

2. Bài tập tự luận

BÀI 1. Cho $\triangle ABC$, chứng minh $AB^2 + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CA} = 0$.

BÀI 2. Cho $\triangle ABC$ nhọn, đường cao AH, Chứng minh rằng

a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AH}$;

b) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{BC}$.

BÀI 3. Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC ta có $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}\sqrt{\overrightarrow{AB}^2 \cdot \overrightarrow{AC}^2 - \left(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}\right)^2}$.

BÀI 4. Cho $\triangle ABC$ có trọng tâm G. Chứng minh rằng với mỗi điểm M ta có

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2.$$

BÀI 5. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có tâm O, M là điểm bất kì. Chứng minh

$$MA^2 + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD} = 2\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MO}.$$

BÀI 6. Cho hình chữ nhật $ABCD$ nội tiếp trong đường tròn tâm O, bán kính R. Chứng minh rằng với mọi M thuộc đường tròn (O) ta có

$$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MC}+\left(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}\right)\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right)=8R^2.$$

BÀI 7. Chứng minh rằng với mọi điểm A, B, C, M ta luôn có

$$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{AB}=0.\ \text{(hệ thức Euler)}.$$

BÀI 8. Cho $\triangle ABC$ các đường trung tuyến AD, BE, CF. Chứng minh rằng

$$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CF}\cdot\overrightarrow{AB}=0.$$

BÀI 9. Cho $\triangle ABC$ đường cao AH, trung tuyến AI. Chứng minh rằng $\left|AB^2-AC^2\right|=2BC\cdot HI$.

3 Điều kiện vuông góc

$$\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=0.$$

1. Ví dụ minh hoạ

VÍ DỤ 1. Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ vuông góc với nhau và $|\vec{a}|=1$, $\left|\vec{b}\right|=\sqrt{2}$. Chứng minh hai vectơ $\left(2\vec{a}-\vec{b}\right)$ và $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)$ vuông góc với nhau.

BÀI 1. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A có $AB=c$, $AC=b$. Tính $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$ theo b và c.

BÀI 2. Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ thỏa mãn $|\vec{a}|=\left|\vec{b}\right|=1$ và hai vectơ $\vec{u}=\dfrac{2}{5}\vec{a}-3\vec{b}$ và $\vec{v}=\vec{a}+\vec{b}$ vuông góc với nhau. Xác định góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

4 Tập hợp điểm và chứng minh bất đẳng thức

Ta sử dụng các kết quả cơ bản sau:

a) Cho A, B là các điểm cố định, M là điểm di động

- Nếu $\left|\overrightarrow{AM}\right|=k$ với k là số thực dương cho trước thì tập hợp các điểm M là đường tròn tâm A, bán kính $R=k$.
- Nếu $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$ thì tập hợp các điểm M là đường tròn đường kính AB.
- Nếu $\overrightarrow{MA}\cdot\vec{a}=0$ với $\vec{a}\neq\vec{0}$ cho trước thì tập hợp các điểm M là đường thẳng đi qua A và vuông góc với giá của vectơ $\vec{a}$.

b) Các bất đẳng thức vectơ

- $\vec{a}^2\geq 0\ \forall\vec{a}$. Dấu "=" xảy ra khi $\vec{a}=\vec{0}$.
- $\vec{a}\cdot\vec{b}\leq|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$. Dấu "=" xảy ra khi $\vec{a}=k\vec{b}$, $k>0$.

VÍ DỤ 1. Cho hai điểm A, B cố định có độ dài bằng a, vectơ $\vec{a}$ khác $\vec{0}$. Tìm tập hợp điểm M sao cho

a) $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=\dfrac{3a^2}{4}$

b) $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=MA^2$

VÍ DỤ 2. Cho tam giác ABC. Tìm tập hợp điểm M sao cho

$$\left(\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{CB}\right)\overrightarrow{BC}=0.$$

VÍ DỤ 3. Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng

a) $\cos A+\cos B+\cos C\leq\dfrac{3}{2}$.

b) $\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C\geq-\dfrac{3}{2}$.

QUICK NOTE

QUICK NOTE

1. Bài tập tự luận

BÀI 1. Cho đoạn thẳng AB và số thực k. Tìm tập hợp điểm M trong mỗi trường hợp sau

a) $2MA^2 = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$. b) $MA^2 + 2MB^2 = k$, $k > 0$. c) $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{a} = k$.

BÀI 2. Cho tứ giác $ABCD$, I, J lần lượt là trung điểm của AB và CD. Tìm tập hợp điểm M sao cho $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MD} = \frac{1}{2}IJ^2$.

BÀI 3. Cho tam giác ABC, góc A nhọn, trung tuyến AI. Tìm tập hợp những điểm M di động trong góc $\widehat{BAC}$ sao cho $AB \cdot AH + AC \cdot AK = AI^2$, trong đó H và K theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của M lên AB và AC.

BÀI 4. Cho tam giác ABC và k là số thực cho trước. Tìm tập hợp những điểm M sao cho

$$MA^2 - MB^2 = k.$$

BÀI 5. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a và số thực k cho trước. Tìm tập hợp điểm M sao cho

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD} = k.$$

BÀI 6. Cho tam giác ABC và các số thực x, y, z. Chứng minh rằng

$$xy\cos A + yz\cos B + zx\cos C \le \frac{x^2+y^2+z^2}{2}.$$

2. Câu hỏi trắc nghiệm

CÂU 1. Cho $\vec{a}, \vec{b}$ khác $\vec{0}$. Kí hiệu $\left(\vec{a}, \vec{b}\right)$ là góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

(A) $\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = -\left(\vec{b}, \vec{a}\right)$.

(B) Nếu $\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = 0^\circ$ thì $\vec{a}, \vec{b}$ có giá trùng nhau.

(C) $\left(\vec{a}, -\vec{b}\right) = -\left(\vec{a}, \vec{b}\right)$.

(D) $\left(k\vec{a}, \vec{b}\right) = \left(\vec{a}, \vec{b}\right)$ với mọi $k \in \mathbb{R}^+$.

CÂU 2. Cho tam giác ABC vuông tại A và có $\widehat{B} = 60^\circ$. Góc giữa $\overrightarrow{CA}$ và $\overrightarrow{CB}$ bằng

(A) 60°. (B) 30°. (C) 90°. (D) 45°.

CÂU 3. Cho tam giác ABC vuông cân tại A, góc giữa $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BC}$ là

(A) $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}\right) = 45^\circ$. (B) $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}\right) = 60^\circ$.

(C) $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}\right) = 120^\circ$. (D) $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}\right) = 135^\circ$.

CÂU 4. Cho $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là hai vectơ cùng hướng và đều khác $\vec{0}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

(A) $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$. (B) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

(C) $\vec{a} \cdot \vec{b} = -1$. (D) $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$.

CÂU 5. Cho tam giác đều ABC cạnh bằng a và H là trung điểm BC. Tính $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{CA}$.

(A) $\frac{3a^2}{4}$. (B) $\frac{-3a^2}{4}$. (C) $\frac{3a^2}{2}$. (D) $\frac{-3a^2}{2}$.

CÂU 6. Cho tam giác ABC cân tại A, $\widehat{A} = 120^\circ$ và $AB = a$. Tính $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CA}$.

(A) $\frac{a^2}{2}$. (B) $-\frac{a^2}{2}$. (C) $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$. (D) $-\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

CÂU 7. Cho tam giác ABC vuông tại A có $\widehat{B} = 60^\circ$, $AB = a$. Tính $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB}$.

(A) $3a^2$. (B) $-3a^2$. (C) $3a$. (D) 0.

CÂU 8. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a. Tính tích vô hướng của hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.

(A) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = a\sqrt{2}$. (B) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 2a$. (C) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = a^2$. (D) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 2a^2$.

CÂU 9. Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khác $\vec{0}$. Xác định góc α giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khi $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$.

(A) $\alpha = 180^\circ$. (B) $\alpha = 0^\circ$. (C) $\alpha = 90^\circ$. (D) $\alpha = 45^\circ$.

QUICK NOTE

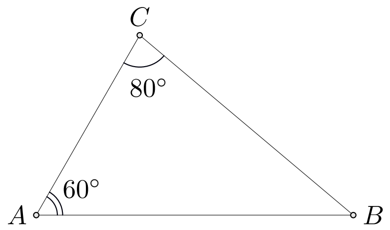
CÂU 10. Cho tam giác ABC vuông tại A và có góc $\widehat{B} = 50^\circ$. Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề đúng?

Ⓐ Góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{CB}$ bằng 140°. Ⓑ Góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ bằng 50°.
Ⓒ Góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AC}$ bằng 90°. Ⓓ Góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CB}$ bằng 130°.

CÂU 11. Tam giác ABC vuông ở A và có $BC = 2AC$. Tính $\cos\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}\right)$.

Ⓐ $\cos\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}\right) = \frac{1}{2}$. Ⓑ $\cos\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}\right) = -\frac{1}{2}$.
Ⓒ $\cos\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Ⓓ $\cos\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

CÂU 12.
Cho tam giác ABC như hình vẽ. Mệnh đề nào sau đây là đúng?



Ⓐ $\left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AB}\right) = 40^\circ$. Ⓑ $\left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}\right) = 140^\circ$.
Ⓒ $\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}\right) = 80^\circ$. Ⓓ $\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BA}\right) = 120^\circ$.

CÂU 13. Cho hình vuông ABCD, tính $\cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CA}\right)$.

Ⓐ $\frac{1}{2}$. Ⓑ $-\frac{1}{2}$. Ⓒ $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Ⓓ $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

CÂU 14. Cho tam giác đều ABC. Tính $P = \cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}\right) + \cos\left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}\right) + \cos\left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AB}\right)$.

Ⓐ $P = \frac{3\sqrt{3}}{2}$. Ⓑ $P = \frac{3}{2}$. Ⓒ $P = -\frac{3}{2}$. Ⓓ $P = -\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

CÂU 15. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a. Tính $\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right)\left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD}\right)$.

Ⓐ $-2a^2$. Ⓑ a^2. Ⓒ $2a^2$. Ⓓ $-\frac{a^2}{\sqrt{2}}$.

CÂU 16. Cho $\triangle ABC$ đều cạnh bằng 3. Trên các cạnh AB, AC lần lượt lấy các điểm M, N sao cho $2AM = MB, NA = 2NC$. Giá trị của tích vô hướng $\overrightarrow{BN} \cdot \overrightarrow{CM}$ là

Ⓐ $\frac{7}{2}$. Ⓑ $-\frac{7}{2}$. Ⓒ $\frac{11}{2}$. Ⓓ $-\frac{11}{2}$.

CÂU 17. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = a$, $BC = 2a$. Tính $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC}$ theo a.

Ⓐ $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} = -a\sqrt{3}$. Ⓑ $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} = -3a^2$.
Ⓒ $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} = a\sqrt{3}$. Ⓓ $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} = 3a^2$.

CÂU 18. Cho tam giác ABC vuông tại A, có số đo góc B là 60° và $AB = a$. Kết quả nào sau đây là **sai**?

Ⓐ $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$. Ⓑ $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 3a^2$.
Ⓒ $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -a^2$. Ⓓ $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} = -3\sqrt{2}a^2$.

CÂU 19. Cho M là trung điểm AB, tìm mệnh đề **sai**.

Ⓐ $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{AB} = -MA \cdot AB$. Ⓑ $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = -MA \cdot MB$.
Ⓒ $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = AM \cdot AB$. Ⓓ $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MA \cdot MB$.

CÂU 20. Cho 2 vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ thỏa $\left|\vec{a} + \vec{b}\right| = 2$ và có độ lớn bằng 1. Hãy tính $\left(3\vec{a} - 4\vec{b}\right)\left(2\vec{a} + 5\vec{b}\right)$.

Ⓐ 7. Ⓑ 5. Ⓒ -7. Ⓓ -5.

CÂU 21. Cho hình thang vuông $ABCD$ có đường cao $AD = 3a$. Tính $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{BC}$.

Ⓐ $-9a^2$. Ⓑ $15a^2$. Ⓒ 0. Ⓓ $9a^2$.

CÂU 22. Cho tam giác ABC có $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$. Gọi M là trung điểm cạnh BC. Tính $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC}$.

Ⓐ $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{b^2 - c^2}{2}$. Ⓑ $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{c^2 + b^2}{2}$.
Ⓒ $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{c^2 + b^2 + a^2}{3}$. Ⓓ $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2}$.

QUICK NOTE

CÂU 23. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a. Tính $P = \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)\left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BA}\right)$.

(A) $P = 2\sqrt{2}a$. (B) $P = 2a^2$. (C) $P = a^2$. (D) $P = -2a^2$.

CÂU 24. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a. Gọi E là điểm đối xứng của D qua C. Tính $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB}$.

(A) $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB} = 2a^2$.
(B) $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB} = \sqrt{3}a^2$.
(C) $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB} = \sqrt{5}a^2$.
(D) $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB} = 5a^2$.

CÂU 25. Biết $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$ và $\vec{a} \cdot \vec{b} = -\left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right|$. Khẳng định nào sau đây đúng?

(A) $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng hướng.
(B) $\vec{a}$ và $\vec{b}$ nằm trên hai đường thẳng hợp với nhau một góc 80°.
(C) $\vec{a}$ và $\vec{b}$ ngược hướng.
(D) $\vec{a}$ và $\vec{b}$ nằm trên hai đường thẳng hợp với nhau một góc 60°.

CÂU 26. Cho tam giác ABC vuông tại A, $AB = a$, $AC = a\sqrt{3}$. Gọi M là trung điểm của BC. Tính cô-sin góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{MA}$ và $\overrightarrow{BC}$.

(A) $\cos\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{BC}\right) = \frac{1}{2}$.
(B) $\cos\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{BC}\right) = -\frac{1}{2}$.
(C) $\cos\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{BC}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
(D) $\cos\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{BC}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

CÂU 27. Cho tam giác ABC. Tính tổng $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}\right) + \left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}\right) + \left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AB}\right)$.

(A) 180°. (B) 360°. (C) 270°. (D) 120°.

CÂU 28. Tam giác ABC có góc A bằng 100° và có trực tâm H. Tính tổng $\left(\overrightarrow{HA}, \overrightarrow{HB}\right) + \left(\overrightarrow{HB}, \overrightarrow{HC}\right) + \left(\overrightarrow{HC}, \overrightarrow{HA}\right)$.

(A) 360°. (B) 180°. (C) 80°. (D) 160°.

CÂU 29. Cho hình vuông $ABCD$ tâm O. Tính tổng $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}\right) + \left(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{CB}\right) + \left(\overrightarrow{CO}, \overrightarrow{DC}\right)$.

(A) 45°. (B) 405°. (C) 315°. (D) 225°.

CÂU 30. Cho tam giác ABC cân tại A, góc $\hat{A} = 20^\circ$. Gọi BM là đường phân giác trong của góc $\widehat{ABC}$. Tính $\cos\left(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{MC}\right)$.

(A) $\frac{1}{2}$. (B) $\frac{-\sqrt{2}}{2}$. (C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$. (D) $\frac{-1}{2}$.

CÂU 31. Cho hình thang vuông $ABCD$, vuông tại A và D, biết $AB = AD = a, CD = 2a$. Tính $\cos\left(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{CB}\right)$.

(A) $\frac{\sqrt{2}}{2}$. (B) $\frac{-1}{2}$. (C) 0. (D) $\frac{-\sqrt{2}}{2}$.

CÂU 32. Cho hình thoi $ABCD$ cạnh a, góc $\widehat{ABC} = 120^\circ$. Gọi G là trọng tâm của tam giác BCD và α là góc giữa hai đường thẳng DA và BG. Tính $\sin\alpha$.

(A) $\sin\alpha = \frac{1}{2}$. (B) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$. (C) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$. (D) $\sin\alpha = 1$.

CÂU 33. Cho tam giác ABC có các cạnh bằng a, b, c. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ theo a, b, c.

(A) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 - c^2)$.
(B) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(a^2 + c^2 - b^2)$.
(C) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(b^2 + c^2 + a^2)$.
(D) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(b^2 + c^2 - a^2)$.

CÂU 34. Cho nửa đường tròn tâm O, có đường kính $AB = 2R$. Gọi M, N là hai điểm thuộc nửa đường tròn sao cho hai dây cung AM và BN cắt nhau tại I. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

(A) $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AB}$.
(B) $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{AB}$.
(C) $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AN}$.
(D) $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{BA}$.

CÂU 35. Cho hai điểm M, N nằm trên đường tròn đường kính $AB = 2r$. Gọi I là giao điểm của hai đường thẳng AM và BN. Tính theo r giá trị biểu thức $P = \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BN} \cdot \overrightarrow{BI}$.

(A) $P = 4r^2$. (B) $P = 2r^2$. (C) $P = r^2$. (D) $P = \frac{r^2}{4}$.

QUICK NOTE

CÂU 36. Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh là a. Giá trị của biểu thức $\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{BA}\right)\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)$ là

(A) 0. (B) $2a^2$. (C) $-2a^2$. (D) $-2\sqrt{2}a^2$.

CÂU 37. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh bằng 2. Điểm M nằm trên đoạn thẳng AC sao cho $AM=\dfrac{AC}{4}$. Gọi N là trung điểm của đoạn thẳng DC. Tính $\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MN}$.

(A) $\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MN}=-4$. (B) $\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MN}=0$. (C) $\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MN}=4$. (D) $\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MN}=16$.

CÂU 38. Cho hình thoi $ABCD$ có $AC=8$. Tính $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.

(A) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=24$. (B) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=26$. (C) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=28$. (D) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=32$.

CÂU 39. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB=a$ và $AD=a\sqrt{2}$. Gọi K là trung điểm của cạnh AD. Tính $\overrightarrow{BK}\cdot\overrightarrow{AC}$.

(A) $\overrightarrow{BK}\cdot\overrightarrow{AC}=0$.
(B) $\overrightarrow{BK}\cdot\overrightarrow{AC}=-a^2\sqrt{2}$.
(C) $\overrightarrow{BK}\cdot\overrightarrow{AC}=a^2\sqrt{2}$.
(D) $\overrightarrow{BK}\cdot\overrightarrow{AC}=2a^2$.

CÂU 40. Cho tứ giác $ABCD$ có hai đường chéo vuông góc với nhau tại M và $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MD}$. Gọi P là trung điểm của AD. Góc giữa hai đường thẳng MP và BC là

(A) $90°$. (B) $60°$. (C) $45°$. (D) $30°$.

CÂU 41. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của BC và CD. Tính $\cos\left(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{NA}\right)$.

(A) $\dfrac{4}{5}$. (B) $-\dfrac{4}{5}$. (C) $\dfrac{3}{5}$. (D) $-\dfrac{3}{5}$.

CÂU 42. Cho hình vuông $ABCD$. Gọi M là trung điểm của cạnh BC. Tính góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{AM}$ và $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB}$.

(A) $45°$. (B) $30°$. (C) $135°$. (D) $90°$.

CÂU 43. Cho hình vuông $ABCD$. Trên cạnh AD, AB lần lượt lấy hai điểm E, F sao cho $AE=AF$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên đường thẳng BE. Tính $\cos\left(\overrightarrow{FH},\overrightarrow{CH}\right)$.

(A) 0. (B) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. (C) $\dfrac{-1}{2}$. (D) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

CÂU 44. Cho hai điểm A và B, O là trung điểm của AB và M là điểm tùy ý, biết rằng $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=OM^2+kOA^2$. Khẳng định nào sau đây đúng?

(A) $k=1$. (B) $k=-1$. (C) $k=2$. (D) $k=-2$.

CÂU 45. Cho I là trung điểm AB, M là điểm tùy ý. Biết rằng $\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{AB}=k\left(MB^2-MA^2\right)$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

(A) $k=2$. (B) $k=\dfrac{1}{2}$. (C) $k=-1$. (D) $k=-\dfrac{1}{2}$.

CÂU 46. Cho I là trung điểm AB, M là điểm tùy ý. Biết rằng $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=MI^2+kAB^2$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

(A) $k=2$. (B) $k=\dfrac{1}{2}$. (C) $k=-1$. (D) $k=-\dfrac{1}{4}$.

CÂU 47. Khẳng định nào sau đây là đúng?

(A) $\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)\vec{c}=\vec{a}\left(\vec{b}\cdot\vec{c}\right)$.
(B) $\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)^2=\vec{a}^2\cdot\vec{b}^2$.
(C) $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|\sin\left(\vec{a},\vec{b}\right)$.
(D) $\vec{a}\cdot\left(\vec{b}-\vec{c}\right)=\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{a}\cdot\vec{c}$.

CÂU 48. Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Đẳng thức nào sau đây **sai**?

(A) $\vec{a}\cdot\vec{b}=\dfrac{1}{4}\left(\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2-\left|\vec{a}-\vec{b}\right|^2\right)$.
(B) $\vec{a}\cdot\vec{b}=\dfrac{1}{2}\left(\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2-\left|\vec{a}-\vec{b}\right|^2\right)$.
(C) $\vec{a}\cdot\vec{b}=\dfrac{1}{2}\left(\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2-|\vec{a}|^2-\left|\vec{b}\right|^2\right)$.
(D) $\vec{a}\cdot\vec{b}=\dfrac{1}{2}\left(|\vec{a}|^2+\left|\vec{b}\right|^2-\left|\vec{a}-\vec{b}\right|^2\right)$.

CÂU 49. Cho hình thoi $ABCD$ có cạnh bằng a và $\widehat{A}=60°$, điểm M tùy ý. Biết rằng $MA^2-MB^2+MC^2-MD^2=ka^2$. Khẳng định nào sau đây đúng?

(A) $k=1$. (B) $k=2$. (C) $k=4$. (D) $k=6$.

CÂU 50. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD, M là điểm tuỳ ý. Biết rằng $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MC}=MO^2+kBD^2$. Khẳng định nào sau đây đúng?

QUICK NOTE

(A) $k=-\frac{1}{2}$. (B) $k=2$. (C) $k=-\frac{1}{4}$. (D) $k=4$.

CÂU 51. Cho tam giác ABC, gọi H là trực tâm của tam giác và M là trung điểm của cạnh BC. Đẳng thức nào sau đây **đúng**?

(A) $\overrightarrow{MH}\cdot\overrightarrow{MA}=\frac{1}{2}BC^2$.
(B) $\overrightarrow{MH}\cdot\overrightarrow{MA}=-\frac{1}{4}BC^2$.
(C) $\overrightarrow{MH}\cdot\overrightarrow{MA}=\frac{1}{4}BC^2$.
(D) $\overrightarrow{MH}\cdot\overrightarrow{MA}=\frac{1}{5}BC^2$.

CÂU 52. Cho điểm M thay đổi trên đường tròn tâm O bán kính R ngoại tiếp tam giác đều ABC cho trước. Biết rằng $MA^2+2\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MC}=kR^2$. Khẳng định nào sau đây đúng?

(A) $k=2$. (B) $k=3$. (C) $k=4$. (D) $k=6$.

CÂU 53. Cho $\vec{a}$, $\vec{b}$ có $\left(\vec{a}+2\vec{b}\right)$ vuông góc với vectơ $\left(5\vec{a}-4\vec{b}\right)$ và $|\vec{a}|=\left|\vec{b}\right|$. Khi đó

(A) $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$.
(B) $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=90^\circ$.
(C) $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$.
(D) $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\frac{1}{2}$.

CÂU 54. Cho tam giác ABC. Tập hợp điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{BC}=0$ là

(A) Đường trung trực đoạn BC.
(B) Đường tròn có tâm A.
(C) Đường thẳng đi qua A và vuông góc với BC.
(D) Đường thẳng đi qua A song song với BC.

CÂU 55. Cho đoạn thẳng AB. Tập hợp điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$ là

(A) Đường trung trực đoạn AB.
(B) Đường tròn.
(C) Đường thẳng đi qua A và vuông góc với AB.
(D) Đường thẳng đi qua B và vuông góc với AB.

CÂU 56. Cho tam giác ABC. Tập hợp các điểm M thỏa $\left(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right)\left(2\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right)=0$ là

(A) Đường thẳng vuông góc với AB.
(B) Đường thẳng vuông góc với AC.
(C) Đường thẳng vuông góc với BC.
(D) Đường tròn.

CÂU 57. Cho tam giác ABC. Tập hợp các điểm M thỏa $\left(\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}\right)\left(\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right)=0$ là

(A) Đường thẳng vuông góc với AB.
(B) Đoạn thẳng.
(C) Đường thẳng song song với AB.
(D) Đường tròn.

CÂU 58. Cho tam giác ABC. Tập hợp các điểm M thỏa $2MA^2+\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MC}$ là

(A) Đường thẳng.
(B) Đường tròn đường kính BC.
(C) Đường tròn đi qua A.
(D) Đường tròn đi qua B.

CÂU 59. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a. Tìm tập hợp các điểm M thỏa mãn

$$\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right)\left(\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MB}\right)=3a^2$$

.

(A) Đường thẳng vuông góc với BC.
(B) Đường thẳng song song với BC.
(C) Đường tròn đường kính AB.
(D) Đường tròn đường kính AC.

CÂU 60. Cho tam giác ABC. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P=2\cos A+6\cos B+3\cos C$ bằng

(A) 11. (B) 10. (C) 7. (D) 6.

LỜI GIẢI CHI TIẾT

Bài 3. CÁC KHÁI NIỆM MỞ ĐẦU

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

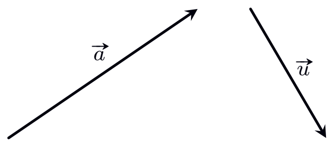
1. Khái niệm vectơ

Khái niệm: Vectơ là một đoạn thẳng có hướng. Vectơ có điểm đầu là A, điểm cuối là B được kí hiệu là $\overrightarrow{AB}$, đọc là “vectơ AB”.

Đối với vectơ AB, ta gọi

- Đường thẳng d đi qua hai điểm A và B là giá của vectơ AB.
- Độ dài đoạn thẳng AB là độ dài của vectơ AB, kí hiệu là $\left|\overrightarrow{AB}\right|$.

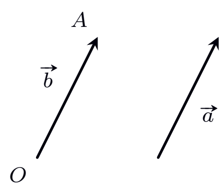
Khi không cần chỉ rõ điểm đầu và điểm cuối của vectơ, vectơ còn được kí hiệu là $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{u}$, $\vec{v}$, ... Độ dài của vectơ $\vec{a}$ được kí hiệu là $|\vec{a}|$.



2. Hai vectơ cùng phương, cùng hướng, bằng nhau

Định nghĩa: Hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ bằng nhau nếu chúng cùng hướng và cùng độ dài, kí hiệu là $\vec{a} = \vec{b}$.

Nhận xét: Khi cho trước vectơ $\vec{a}$ và điểm O, thì ta luôn tìm được một điểm A duy nhất sao cho $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$.



3. Vectơ không

Định nghĩa: Vectơ không (kí hiệu là $\vec{0}$) là vectơ có điểm đầu và điểm cuối trùng nhau.
Với các điểm bất kì A, B, C ta có $\vec{0} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{CC}$.

Quy ước: $\vec{0}$ (vectơ không) cùng phương và cùng hướng với mọi vectơ; hơn nữa $\left|\vec{0}\right| = 0$.

Nhận xét: Hai điểm A, B trùng nhau khi và chỉ khi $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$.

B. CÁC DẠNG TOÁN

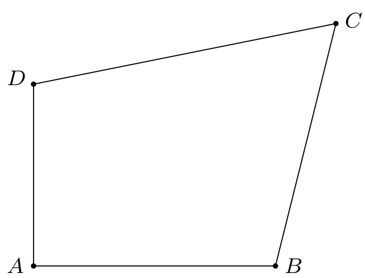
1 Xác định một vectơ, độ dài vectơ

1. Ví dụ minh hoạ

VÍ DỤ 1. Cho tứ giác $ABCD$. Hãy chỉ ra các vectơ khác vectơ không có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của tứ giác.

Lời giải.

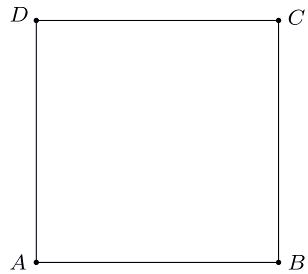
Từ hai điểm phân biệt của tứ giác ta xác định được hai vectơ khác vectơ không, chẳng hạn từ hai điểm A, B ta xác định được hai vectơ khác vectơ không là $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BA}$.
Suy ra tứ giác $ABCD$ có 12 vectơ khác vectơ không là $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{DB}$.



VÍ DỤ 2. Cho hình vuông $ABCD$ với cạnh có độ dài bằng 1. Tính độ dài các vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{DB}$.

Lời giải.

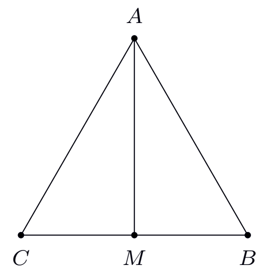
Vì cạnh của hình vuông $ABCD$ có độ dài bằng 1 nên $|\overrightarrow{AB}| = 1$ và đường chéo của hình vuông có độ dài bằng $\sqrt{2}$.
Suy ra $|\overrightarrow{BD}| = |\overrightarrow{DB}| = BD = \sqrt{2}$.



VÍ DỤ 3. Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng a. Gọi M là trung điểm của BC. Tính độ dài vectơ $\overrightarrow{AM}$.

Lời giải.

Vì ABC là tam giác đều nên $AM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow |\overrightarrow{AM}| = AM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.



2. Bài tập tự luận

BÀI 1. Cho lục giác đều $ABCDEF$ có cạnh bằng a.

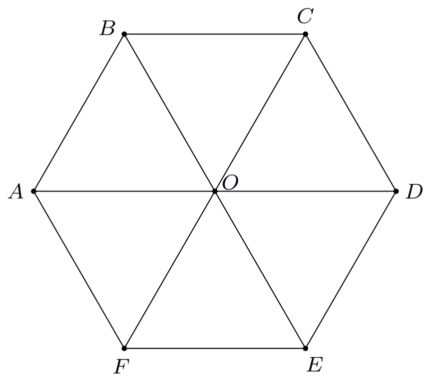
a) Có bao nhiêu vectơ khác vectơ không có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của ngũ giác?

b) Tính độ dài các vectơ $\overrightarrow{AD}$

Lời giải.

a) Từ hai điểm phân biệt của tứ giác ta xác định được hai vectơ khác vectơ không, chẳng hạn từ hai điểm A, B ta xác định được hai vectơ khác vectơ không là $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BA}$.
Lục giác đều $ABCDEF$ có 15 cặp điểm phân biệt do đó có 30 vectơ khác vectơ không có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của ngũ giác.

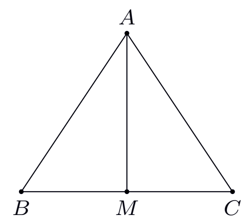
b) Ta có $|\overrightarrow{AD}| = AD = 2AB = 2a$.



BÀI 2. Cho tam giác ABC vuông tại A có $BC = 2a$. Gọi M là trung điểm của BC tính độ dài vectơ $\overrightarrow{AM}$.

Lời giải.

Độ dài vectơ $\overrightarrow{AM}$ là $|\overrightarrow{AM}| = AM = \dfrac{BC}{2} = a$.



2 Hai vectơ cùng phương, cùng hướng và bằng nhau

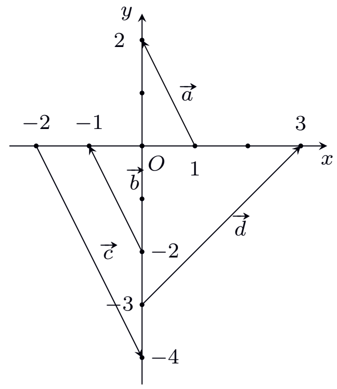
Sử dụng các định nghĩa

- Hai vectơ cùng phương nếu chúng có giá song song hoặc trùng nhau.
- Hai vectơ cùng phương thì cùng hướng hoặc ngược hướng.
- Hai vectơ bằng nhau nếu chúng cùng độ dài và cùng hướng.

1. Ví dụ minh hoạ

VÍ DỤ 1.

Cho hình vẽ, hãy chỉ ra các vectơ cùng phương, các cặp vectơ ngược hướng và các cặp vectơ bằng nhau



Lời giải.

Dựa vào hình vẽ ta thấy

- Các vectơ cùng phương là $\vec{a}$, $\vec{b}$ và $\vec{c}$.
- Các cặp vectơ ngược hướng là $\vec{a}$ với $\vec{c}$ và $\vec{b}$ với $\vec{c}$.
- Các cặp vectơ bằng nhau là $\vec{a}$ với $\vec{b}$.

VÍ DỤ 2. Cho hình bình hành $ABCD$ có tâm là O . Hãy tìm các cặp vectơ khác $\vec{0}$, bằng nhau và

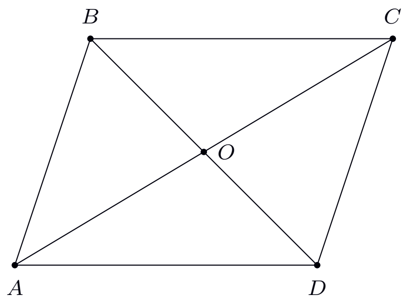
a) có điểm đầu và điểm cuối trong các điểm A , B , C và D .

b) có điểm đầu là O hoặc điểm cuối là O.

Lời giải.

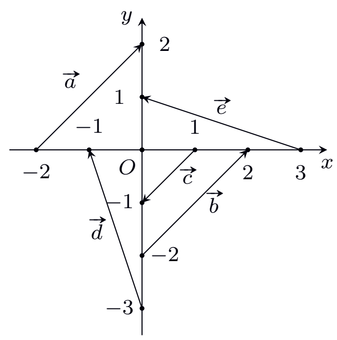
a) Các cặp vectơ khác $\vec{0}$, bằng nhau và có điểm đầu và điểm cuối trong các điểm A , B , C và D: $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{BA}$ và $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{BC}$ và $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{CB}$ và $\overrightarrow{DA}$.

b) Các cặp vectơ khác $\vec{0}$, bằng nhau và có điểm đầu là O hoặc điểm cuối là O: $\overrightarrow{OA}$ và $\overrightarrow{CO}$, $\overrightarrow{AO}$ và $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OB}$ và $\overrightarrow{DO}$, $\overrightarrow{BO}$ và $\overrightarrow{OD}$.



2. Bài tập tự luận

BÀI 1.
Cho hình vẽ, hãy chỉ ra các vectơ cùng phương, các cặp vectơ ngược hướng và các cặp vectơ bằng nhau



Lời giải.

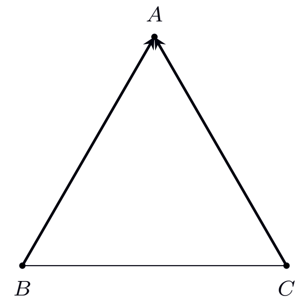
Dựa vào hình vẽ ta thấy

- Các vectơ cùng phương là $\vec{a}$, $\vec{b}$ và $\vec{c}$.
- Các cặp vectơ ngược hướng là $\vec{a}$ với $\vec{c}$ và $\vec{b}$ với $\vec{c}$.
- Các cặp vectơ bằng nhau là $\vec{a}$ với $\vec{b}$.

BÀI 2. Cho tam giác đều ABC, hãy chỉ ra mối quan hệ về độ dài, phương và hướng giữa cặp vectơ $\overrightarrow{BA}$ và $\overrightarrow{CA}$. Hai vectơ có bằng nhau không?

Lời giải.

Dựa vào hình vẽ ta thấy hai vectơ $\overrightarrow{BA}$ và $\overrightarrow{CA}$ cùng độ dài nhưng không cùng phương nên cũng không cùng hướng. Do đó, hai vectơ $\overrightarrow{BA}$ và $\overrightarrow{CA}$ không bằng nhau.

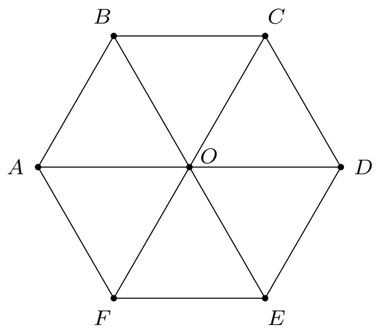


BÀI 3.
Cho hình lục giác đều $ABCDEF$ có tâm O.

a) Hãy tìm các vectơ khác $\vec{0}$ và bằng với $\overrightarrow{AB}$.

b) Hãy vẽ vectơ bằng với $\overrightarrow{AE}$ và có điểm đầu là B.

c) Hãy vẽ vectơ bằng với $\overrightarrow{AE}$ và có điểm đầu là C.

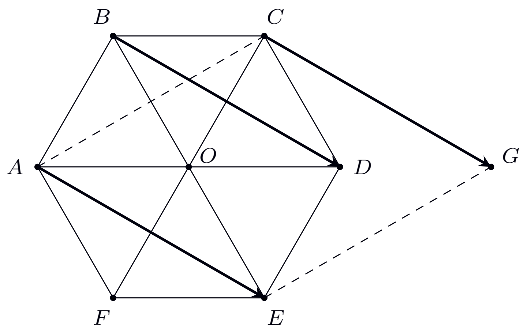


Lời giải.

a) các vectơ khác $\vec{0}$ và bằng với vectơ $\overrightarrow{AB}$ là $\overrightarrow{FO}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{ED}$.

b) Vì $ABDE$ là tứ giác có hai đường chéo cắt nhau tại mỗi đường nên là hình bình hành. Suy ra, vectơ bằng với $\overrightarrow{AE}$ có điểm đầu B là $\overrightarrow{BD}$.

c) Giả sử $\overrightarrow{CG}$ là vectơ cần dựng và vì $\overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AE}$ nên $AEGC$ là hình bình hành.



Vậy điểm G cần dựng là đỉnh còn lại của hình bình hành $AEGC$.

BÀI 4. Chứng minh ba điểm A, B, C thẳng hàng khi và chỉ khi $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ cùng phương.

Lời giải.

- Giả sử A, B, C thẳng hàng. Khi đó, chúng cùng nằm trên một đường thẳng. Suy ra, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ có giá trùng nhau. Vậy $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ cùng phương.
- Giả sử $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ cùng phương. Khi đó, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ có giá song song hoặc trùng nhau. Mặt khác, giá của $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ cùng đi qua điểm A nên chúng trùng nhau. Vậy A, B, C thẳng hàng.

C. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

CÂU 1. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau.

(A) vectơ là một đường thẳng có hướng.

(B) vectơ là một đoạn thẳng.

(C) vectơ là một đoạn thẳng có hướng.

(D) vectơ là một đoạn thẳng không phân biệt điểm đầu và điểm cuối.

Lời giải.

vectơ là một đoạn thẳng có hướng.

Chọn đáp án (C) .... □

CÂU 2. Cho tam giác ABC có thể xác định được bao nhiêu vectơ (khác vectơ không) có điểm đầu và điểm cuối là đỉnh A, B, C?

(A) 2. (B) 3. (C) 4. (D) 6.

Lời giải.

Có thể xác định được 6 vectơ (khác vectơ không) có điểm đầu và điểm cuối là đỉnh A, B, C là các vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CB}$.

Chọn đáp án (D) .... □

CÂU 3. Cho hai điểm phân biệt A, B. Số vectơ (khác $\vec{0}$) có điểm đầu và điểm cuối lấy từ các điểm A, B là

A 2. **B** 6. **C** 13. **D** 12.

Lời giải.

Có 2 vectơ có điểm đầu và điểm cuối lấy từ các điểm A, B là $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BA}$.

Chọn đáp án (A) .... □

CÂU 4. Cho tam giác đều ABC. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$.

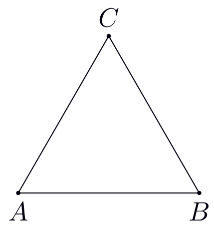
B $\overrightarrow{AC} \neq \overrightarrow{BC}$.

C $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{BC}\right|$.

D $\overrightarrow{AC}$ không cùng phương $\overrightarrow{BC}$.

Lời giải.

Có $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BC}$ là 2 vectơ không cùng phương nên $\overrightarrow{AC} \neq \overrightarrow{BC}$.



Chọn đáp án (A) .... □

CÂU 5. Khẳng định nào dưới đây là **sai**?

A Mỗi vectơ đều có một độ dài, đó là khoảng cách giữa điểm đầu và điểm cuối của vectơ đó.

B Độ dài của vectơ $\vec{a}$ được kí hiệu là $|\vec{a}|$.

C $\left|\overrightarrow{PQ}\right| = \overrightarrow{PQ}$.

D $\left|\overrightarrow{AB}\right| = AB = BA$.

Lời giải.

$\left|\overrightarrow{PQ}\right|$ khác $\overrightarrow{PQ}$ do vectơ là một đoạn thẳng định hướng còn độ dài vectơ là độ dài đoạn thẳng nối điểm đầu và điểm cuối vectơ đó.

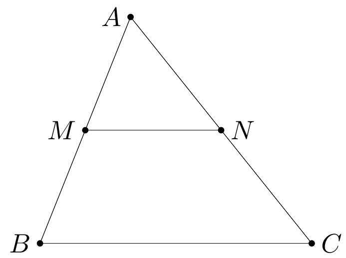
Chọn đáp án (C) .... □

CÂU 6. Cho tam giác ABC. Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AB, AC. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{NM}$. **B** $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$. **C** $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{NC}$. **D** $\left|\overrightarrow{MA}\right| = \left|\overrightarrow{MB}\right|$.

Lời giải.

- $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{NC}$ đúng vì $\overrightarrow{AN}$ và $\overrightarrow{NC}$ cùng hướng và cùng độ dài.
- $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ đúng vì MN là đường trung bình của ΔABC nên $MN = \frac{1}{2}BC$ và $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{BC}$ cùng hướng.
- $\left|\overrightarrow{MA}\right| = \left|\overrightarrow{MB}\right|$ đúng vì M là trung điểm AB nên $MA = MB$.
- $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{NM}$ sai vì mệnh đề đúng tương ứng là $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{MN}$.



Chọn đáp án (A) .... □

CÂU 7. Cho hai vectơ không cùng phương $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A Không có vectơ nào cùng phương với cả hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

B Có vô số vectơ cùng phương với cả hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

C Có một vectơ cùng phương với cả hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

D Có hai vectơ cùng phương với cả hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

Lời giải.

Có một vectơ cùng phương với cả hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đó là vectơ không.

Chọn đáp án (C) .... □

CÂU 8. Cho 3 điểm phân biệt A, B, C. Khi đó khẳng định nào sau đây **sai**?

Ⓐ A, B, C thẳng hàng khi và chỉ khi $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ cùng phương.

Ⓑ A, B, C thẳng hàng khi và chỉ khi $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BC}$ cùng phương.

Ⓒ A, B, C thẳng hàng khi và chỉ khi $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{BC}$ cùng phương.

Ⓓ A, B, C thẳng hàng khi và chỉ khi $AC = BC$.

Lời giải.

A, B, C thẳng hàng khi và chỉ khi các vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC}$ đôi một cùng phương.

Chọn đáp án D ☐

CÂU 9. Mệnh đề nào sau đây đúng?

Ⓐ Có duy nhất một vectơ cùng phương với mọi vectơ. Ⓑ Có ít nhất hai vectơ cùng phương với mọi vectơ.

Ⓒ Có vô số vectơ cùng phương với mọi vectơ. Ⓓ Không có vectơ nào cùng phương với mọi vectơ.

Lời giải.

Có duy nhất một vectơ cùng phương với mọi vectơ đó là vectơ không.

Chọn đáp án A ☐

CÂU 10. Khẳng định nào sau đây đúng?

Ⓐ Hai vectơ cùng phương với một vectơ thứ ba thì cùng phương.

Ⓑ Hai vectơ cùng phương với một vectơ thứ ba khác $\overrightarrow{0}$ thì cùng phương.

Ⓒ vectơ không là vectơ không có giá.

Ⓓ Điều kiện đủ để hai vectơ bằng nhau là chúng có độ dài bằng nhau.

Lời giải.

Hai vectơ cùng phương với một vectơ thứ ba khác $\overrightarrow{0}$ thì cùng phương.

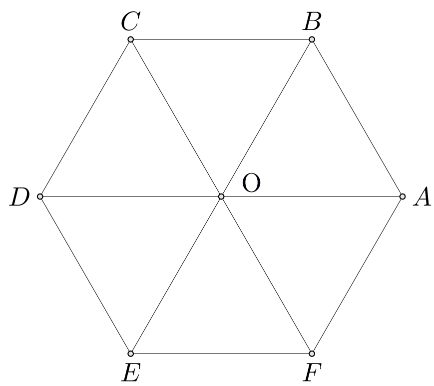
Chọn đáp án B ☐

CÂU 11. Cho lục giác đều $ABCDEF$ tâm O. Số các vectơ khác $\overrightarrow{0}$ cùng phương với $\overrightarrow{OC}$ có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của lục giác bằng

Ⓐ 6. Ⓑ 7. Ⓒ 8. Ⓓ 4.

Lời giải.

Số các vectơ khác $\overrightarrow{0}$ cùng phương với $\overrightarrow{OC}$ có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của lục giác là $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{FC}$, $\overrightarrow{CF}$, $\overrightarrow{ED}$, $\overrightarrow{DE}$.



Chọn đáp án A ☐

CÂU 12. Cho ba điểm A, B, C phân biệt. Khi đó

Ⓐ Điều kiện cần và đủ để A, B, C thẳng hàng là $\overrightarrow{AC}$ cùng phương với $\overrightarrow{AB}$.

Ⓑ Điều kiện đủ để A, B, C thẳng hàng là $\overrightarrow{CA}$ cùng phương với $\overrightarrow{AB}$.

Ⓒ Điều kiện cần để A, B, C thẳng hàng là $\overrightarrow{CA}$ cùng phương với $\overrightarrow{AB}$.

Ⓓ Điều kiện cần và đủ để A, B, C thẳng hàng là $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$.

Lời giải.

Điều kiện cần và đủ để A, B, C thẳng hàng là $\overrightarrow{AC}$ cùng phương với $\overrightarrow{AB}$.

Chọn đáp án A ☐

CÂU 13. Cho vectơ $\overrightarrow{MN} \neq \overrightarrow{0}$. Số vectơ cùng hướng với vectơ $\overrightarrow{MN}$ là

Ⓐ vô số. Ⓑ 1. Ⓒ 3. Ⓓ 2.

Lời giải.

Có vô số vectơ cùng hướng với một vectơ khác vectơ-không cho trước.

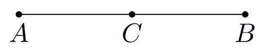
Chọn đáp án (A)

CÂU 14. Gọi C là trung điểm của đoạn AB. Hãy chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau.

(A) $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CB}$.
(B) $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ cùng hướng.
(C) $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CB}$ ngược hướng.
(D) $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \overrightarrow{CB}$.

Lời giải.

Có $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ cùng hướng.



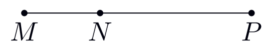
Chọn đáp án (B)

CÂU 15. Cho ba điểm M, N, P thẳng hàng, trong đó điểm N nằm giữa hai điểm M và P. Khi đó các cặp vectơ nào cùng hướng?

(A) $\overrightarrow{MP}$ và $\overrightarrow{PN}$.
(B) $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{PN}$.
(C) $\overrightarrow{NM}$ và $\overrightarrow{NP}$.
(D) $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{MP}$.

Lời giải.

Cặp vectơ $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{MP}$ là cùng hướng.



Chọn đáp án (D)

CÂU 16. Phát biểu nào sau đây đúng?

(A) Hai vectơ không bằng nhau thì độ dài của chúng không bằng nhau.
(B) Hai vectơ không bằng nhau thì độ dài của chúng không cùng phương.
(C) Hai vectơ bằng nhau thì có giá trùng nhau hoặc song song nhau.
(D) Hai vectơ có độ dài không bằng nhau thì không cùng hướng.

Lời giải.

Hai vectơ bằng nhau thì cùng phương nên chúng có giá trùng nhau hoặc song song nhau.

Chọn đáp án (C)

CÂU 17. Cho vectơ $\vec{a} \neq \vec{0}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

(A) Có vô số vectơ $\vec{u}$ mà $\vec{u} = \vec{a}$.
(B) Có duy nhất một $\vec{u}$ mà $\vec{u} = \vec{a}$.
(C) Có duy nhất một $\vec{u}$ mà $\vec{u} = -\vec{a}$.
(D) Không có vectơ $\vec{u}$ nào mà $\vec{u} = \vec{a}$.

Lời giải.

Có vô số vectơ $\vec{u}$ mà $\vec{u} = \vec{a}$.

Chọn đáp án (A)

CÂU 18. Cho hình bình hành $ABCD$. Đẳng thức nào sau đây **sai**?

(A) $\left|\overrightarrow{AD}\right| = \left|\overrightarrow{BC}\right|$.
(B) $\left|\overrightarrow{BC}\right| = \left|\overrightarrow{DA}\right|$.
(C) $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{CD}\right|$.
(D) $\left|\overrightarrow{AC}\right| = \left|\overrightarrow{BD}\right|$.

Lời giải.

Theo tính chất của hình bình hành, ta có $\left|\overrightarrow{AC}\right| = \left|\overrightarrow{BD}\right|$ là đẳng thức sai.

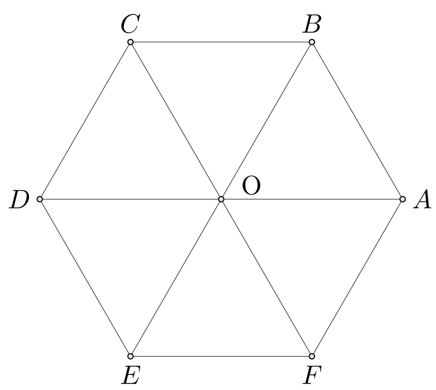
Chọn đáp án (D)

CÂU 19. Cho lục giác đều $ABCDEF$ tâm O. Ba vectơ bằng vectơ $\overrightarrow{BA}$ là

(A) $\overrightarrow{OF}$, $\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{OC}$.
(B) $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{OF}$, $\overrightarrow{DE}$.
(C) $\overrightarrow{OF}$, $\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{CO}$.
(D) $\overrightarrow{OF}$, $\overrightarrow{ED}$, $\overrightarrow{OC}$.

Lời giải.

Các vectơ bằng vectơ $\overrightarrow{BA}$ là $\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{OF}$, $\overrightarrow{CO}$.



Chọn đáp án (C) .... □

CÂU 20. Cho đoạn thẳng AB, I là trung điểm của AB. Khi đó

(A) $\overrightarrow{BI}=\overrightarrow{AI}$. (B) $\overrightarrow{BI}$ cùng hướng $\overrightarrow{AB}$. (C) $\left|\overrightarrow{BI}\right|=2\left|\overrightarrow{IA}\right|$. (D) $\left|\overrightarrow{BI}\right|=\left|\overrightarrow{IA}\right|$.

Lời giải.

Do I là trung điểm AB nên $IA=IB$, suy ra $\left|\overrightarrow{BI}\right|=\left|\overrightarrow{IA}\right|$.

Chọn đáp án (D) .... □

CÂU 21. Cho hình thoi $ABCD$ cạnh a và $\widehat{BAD}=60^\circ$. Đẳng thức nào sau đây đúng?

(A) $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{DA}$. (B) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AD}$. (C) $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AC}$. (D) $\left|\overrightarrow{BD}\right|=a$.

Lời giải.

Từ giả thiết suy ra tam giác ABD đều cạnh a nên $BD=a\Rightarrow\left|\overrightarrow{BD}\right|=a$.

Chọn đáp án (D) .... □

CÂU 22. Cho hình chữ nhật $ABCD$. Trong các đẳng thức dưới đây, đẳng thức nào đúng?

(A) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$. (B) $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$. (C) $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}$. (D) $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{DA}$.

Lời giải.

Vì $ABCD$ là hình chữ nhật nên ta có $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$.

Chọn đáp án (B) .... □

CÂU 23. Cho tam giác ABC với trung tuyến AM và trọng tâm G. Khi đó $|\overrightarrow{GA}|$ bằng

(A) $\frac{1}{2}|\overrightarrow{AM}|$. (B) $\frac{2}{3}|\overrightarrow{GM}|$. (C) $2|\overrightarrow{GM}|$. (D) $-\frac{2}{3}|\overrightarrow{MA}|$.

Lời giải.

Theo tính chất đường trung tuyến $AG=\frac{2}{3}AM$ hay $GA=2\cdot GM$.

Chọn đáp án (C) .... □

Bài 4. TỔNG VÀ HIỆU CỦA HAI VECTƠ

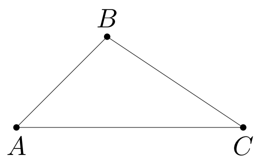
A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Phép toán cộng hai vectơ

Phép cộng hai vectơ có tính chất giao hoán. Khi thực hiện phép toán cộng hai vectơ, ta chú ý các quy tắc sau

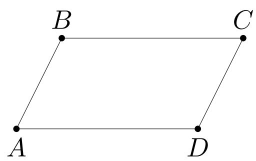
- **Quy tắc 3 điểm:** ("nối đuôi")

  CÂU 23 Với ba điểm A,B,C bất kì, ta luôn có $\boxed{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}}$



- **Quy tắc hình bình hành:** ("chung đầu")

  CÂU 23 Xét hình bình hành $ABCD$, ta luôn có $\boxed{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}}$



- **Quy tắc cộng vectơ đối:** Nếu $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đối nhau thì $\vec{a}+\vec{b}=\vec{0}$.

Tính chất: Với ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ tùy ý

- Tính chất giao hoán: $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$.
- Tính chất kết hợp: $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$.
- Tính chất của vectơ-không: $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$.

2. Phép toán hiệu hai vectơ

Vectơ đối:

- Vectơ đối của $\vec{a}$ kí hiệu là $-\vec{a}$.
- Vectơ đối của $\overrightarrow{AB}$ là $\overrightarrow{BA}$, nghĩa là $\boxed{-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BA}}$ (*dùng để làm mất dấu trừ trước vectơ*).
- Vectơ $\vec{0}$ được coi là vectơ đối của chính nó.

Quy tắc trừ: Với ba điểm A, B, C bất kì, ta luôn có $\boxed{\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}}$

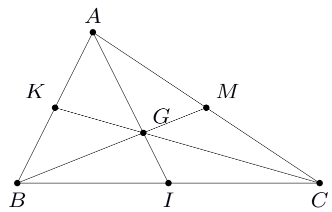
3. Công thức trung điểm, trọng tâm

Công thức trung điểm: Nếu M là trung điểm của đoạn AB thì

$$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\vec{0}$$

Công thức trọng tâm: Nếu G là trọng tâm của tam giác ABC thì

$$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}.$$



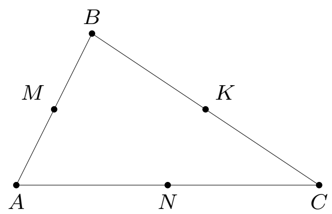
B. CÁC DẠNG TOÁN

1 Tính tổng, hiệu hai vectơ

- Ghép các vectơ lại thích hợp.
- Dùng các quy tắc cộng vectơ để tính.

1. Ví dụ minh hoạ

CÂU 0. Cho tam giác ABC. Các điểm M, N và K lần lượt là trung điểm của AB, AC và BC.

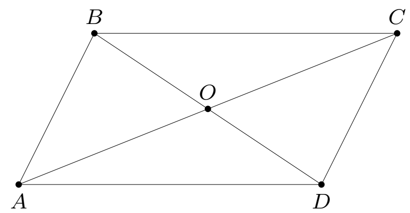


a) Tìm các vectơ bằng với $\overrightarrow{MK}$.

b) Tìm các vectơ đối của $\overrightarrow{MN}$.

c) Xác định các vectơ $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MN}$; $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{NK}$; $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{KN}$; $\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AN}$; $\overrightarrow{MN}-\overrightarrow{NC}$; $\overrightarrow{BK}-\overrightarrow{CK}$.

CÂU 0. Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O.



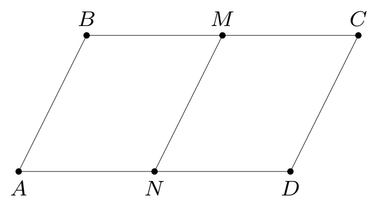
a) Tìm vectơ bằng với $\overrightarrow{OC}$.

b) Xác định các vectơ $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}$; $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}$; $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$; $\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{DC}$
.

CÂU 0. Cho hình bình hành $ABCD$ Hai điểm M và N lần lượt là trung điểm của BC và AD Xác định vectơ

$\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AN}$,

$\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{CM}$, $\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{NC}$.



2. Bài tập tự luận

BÀI 1. Tính tổng $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{RN}+\overrightarrow{NP}+\overrightarrow{QR}$.

Lời giải.

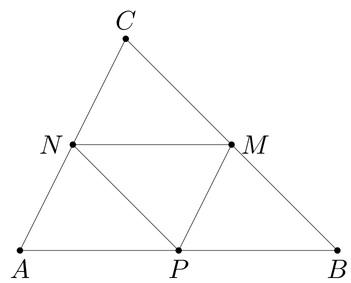
Ta có $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{RN}+\overrightarrow{NP}+\overrightarrow{QR}=\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NP}+\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QR}+\overrightarrow{RN}=\overrightarrow{MN}$.

BÀI 2. Cho tam giác ABC với M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB. Tính tổng $\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CN}$.

Lời giải.

CÂU 0. Dễ dàng có $BPNM$ là hình bình hành suy ra $\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{PN}$ và $\overrightarrow{CN}=\overrightarrow{NA}$ vì N là trung điểm của CA. Do đó

$$\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CN}=\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{PN}+\overrightarrow{NA}=\vec{0}.$$



BÀI 3. Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $AB'C'D'$ có chung đỉnh A. Tính $\vec{u}=\overrightarrow{B'B}+\overrightarrow{CC'}+\overrightarrow{D'D}$.

Lời giải.

Theo quy tắc trừ và quy tắc hình bình hành ta có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{B'B}+\overrightarrow{CC'}+\overrightarrow{D'D} &= (\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AB'})+(\overrightarrow{AC'}-\overrightarrow{AC})+(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AD'})\\ &= (\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})-\overrightarrow{AC}-(\overrightarrow{AB'}+\overrightarrow{AD}')+\overrightarrow{AC}\\ &= \vec{0}\end{aligned}$$

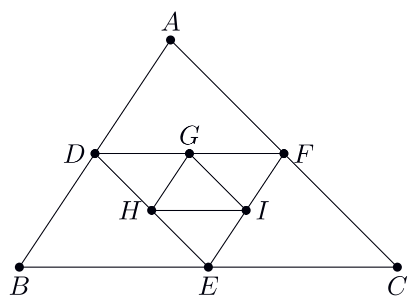
Vậy $\vec{u}=0$.

BÀI 4. Cho tam giác ABC, gọi D, E, F, G, H, I theo thứ tự là trung điểm các cạnh AB, BC, CA, DF, DE, EF. Tính vectơ $\vec{u}=\overrightarrow{BE}-\overrightarrow{GH}-\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{FE}$?

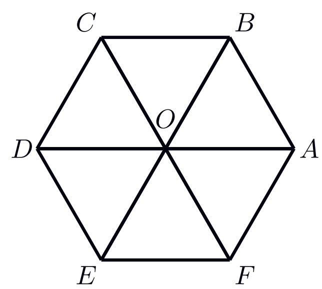
Lời giải.

CÂU 0. Ta có

$$\begin{aligned}\vec{u} &= \overrightarrow{BE}-\overrightarrow{GH}-\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{FE}\\ &= \left(\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{FE}\right)-\left(\overrightarrow{GH}+\overrightarrow{AI}\right)\\ &= \left(\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{FE}\right)-\left(\overrightarrow{IE}+\overrightarrow{AI}\right)\\ &= \overrightarrow{DE}-\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{DA}.\end{aligned}$$



CÂU 0. Cho lục giác đều $ABCDEF$ tâm O. Rút gọn vectơ $\vec{v}=\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DE}$?



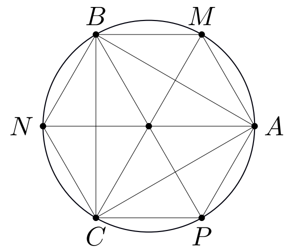
Lời giải.

$\vec{v}=\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CO}=\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{BE}$.

BÀI 6. Gọi O là tâm của tam giác đều ABC. Tính $\vec{u}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$.

Lời giải.

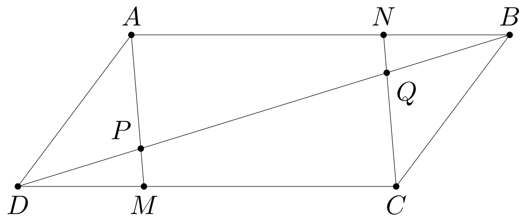
CÂU 0. Vẽ lục giác đều $AMBNCP$ nội tiếp đường tròn (O).
Vì $BOCN$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{ON}$.
Do đó $\vec{u}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{ON}=\vec{0}$.



BÀI 7. Cho hình bình hành $ABCD$. Trên các đoạn thẳng DC, AB theo thứ tự lấy các điểm M, N sao cho $DM=BN$. Gọi P là giao điểm của AM, DB và Q là giao điểm của CN, DB. Tính $\vec{u}=\overrightarrow{DP}-\overrightarrow{QB}$.

Lời giải.

Ta có $DM=BN \Rightarrow AN=MC$, mặt khác AN song song với MC do đó tứ giác $ANCM$ là
CÂU 0. hình bình hành. Suy ra $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{NC}$.
Xét tam giác $\triangle DMP$ và $\triangle BNQ$ ta có
$$\begin{cases} DM=NB \text{ (giả thiết)}\\ \widehat{PDM}=\widehat{QBN} \text{ (so le trong).}\end{cases}$$



Mặt khác $\widehat{DMP}=\widehat{APB}$ (đối đỉnh) và $\widehat{APQ}=\widehat{NQB}$ (hai góc đồng vị) suy ra $\widehat{DMP}=\widehat{BNQ}$.
Do đó $\triangle DMP=\triangle BNQ$ (c.g.c) suy ra $DB=QB$.
Dễ thấy $\overrightarrow{DP}, \overrightarrow{QB}$ cùng hướng vì vậy $\overrightarrow{DP}=\overrightarrow{QB}$ hay $\vec{u}=\overrightarrow{DP}-\overrightarrow{QB}=0$.

2 Xác định vị trí của một điểm từ đẳng thức vectơ

1. Ví dụ minh hoạ

VÍ DỤ 1. Cho tam giác ABC. Điểm M thỏa mãn điều kiện $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

(A) M là điểm sao cho tứ giác $BAMC$ là hình bình hành.
(B) M là điểm sao cho tứ giác $ABMC$ là hình bình hành.
(C) M là trọng tâm tam giác ABC.
(D) M thuộc đường trung trực của AB.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}$ nên M là trọng tâm tam giác ABC.
Chọn đáp án C .... □

2. Bài tập tự luận

BÀI 1. Cho tam giác ABC. Xác định điểm M thỏa mãn điều kiện $\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}=-\overrightarrow{MC} \Leftrightarrow \overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CM}$.
Suy ra M là đỉnh của hình bình hành $BAMC$.

BÀI 2. Cho hình bình hành $ABCD$. Xác định điểm M thỏa mãn điều kiện $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AM}$.

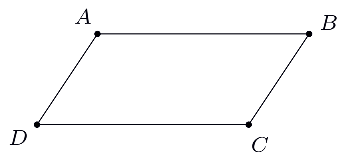
Lời giải.

Vì $ABCD$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$.
Khi đó $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AM} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CM}$.
Suy ra M đối xứng với A qua C.

BÀI 3. Cho hình bình hành $ABCD$. Xác định điểm M thỏa mãn điều kiện $\left|\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{CD}\right|=\left|\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{DA}\right|$.

Lời giải.

CÂU 0. Vì $ABCD$ là hình bình hành nên $\begin{cases}\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CD}\\ \overrightarrow{DA}=\overrightarrow{CB}.\end{cases}$



Ta có
$$\begin{aligned} &\left|\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{CD}\right|=\left|\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{DA}\right|\\ \Leftrightarrow\ &\left|\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BA}\right|=\left|\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{CB}\right|\\ \Leftrightarrow\ &\left|\overrightarrow{MA}\right|=\left|\overrightarrow{MB}\right| \Leftrightarrow MA=MB.\end{aligned}$$

Vậy M thuộc đường trung trực của cạnh AB.

3 Tính độ dài vectơ

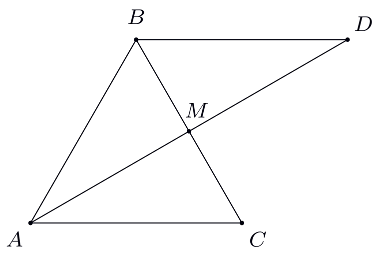
1. Ví dụ minh hoạ

VÍ DỤ 1. Cho tam giác đều ABC có cạnh $AB = a$, xác định và tính độ dài của vectơ

a) $\vec{x} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$.

b) $\vec{y} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

Lời giải.



a) Ta có $\vec{x} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.
Suy ra $|\vec{x}| = \left|\overrightarrow{AC}\right| = AC = a$.

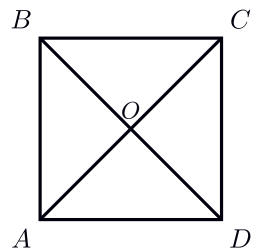
b) Dựng $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC}$, ta có $\vec{y} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}$.
Suy ra $|\vec{y}| = \left|\overrightarrow{AD}\right| = AD$.
Gọi M là trung điểm của BC, ta có $AD = 2AM = 2 \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$. Vậy $|\vec{y}| = a\sqrt{3}$.

VÍ DỤ 2.
Cho hình vuông $ABCD$ tâm O cạnh bằng a. Tính

a) $\left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right|$.

b) $\left|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\right|$.

c) $\left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{BC}\right|$.



Lời giải.

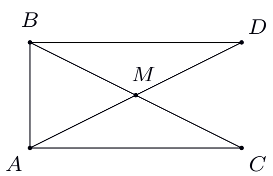
a) Ta có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$. Suy ra $\left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right| = AC = a\sqrt{2}$

b) Ta có $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$. Suy ra $\left|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\right| = CB = a$

c) Ta có $\vec{u} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BO} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CO} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB}$.
Suy ra $|\vec{u}| = \left|\overrightarrow{OB}\right| = OB = \dfrac{\sqrt{2}}{2}AB = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

2. Bài tập tự luận

BÀI 1. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 2$, $AC = 4$, xác định và tính độ dài của vectơ $\vec{u} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.
Lời giải.



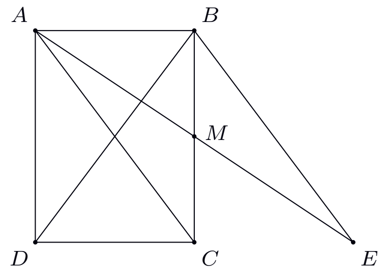
Dựng $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC}$, ta có $\vec{u} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}$.
Suy ra $|\vec{u}| = \left|\overrightarrow{AD}\right| = AD$.
Ta có $ABDC$ là hình chữ nhật nên $AD = \sqrt{AB^2 + AC^2} = 2\sqrt{5}$. Vậy $|\vec{u}| = 2\sqrt{5}$.
Lời giải.

BÀI 2. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AC = 5$, $AB = 3$, xác định và tính độ dài của vectơ

a) $\vec{a} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}$.

b) $\vec{b} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

Lời giải.



a) Ta có $\vec{a} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CD}$.
Suy ra $|\vec{a}| = \left|\overrightarrow{CD}\right| = CD = AB = 3$.

b) Dựng $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AC}$, ta có $\vec{b} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AE}$.
Suy ra $\left|\vec{b}\right| = \left|\overrightarrow{AE}\right| = AE$. Gọi M là trung điểm của BC.
Ta có $AE = 2AM = 2\sqrt{AB^2 + BM^2} = 2\sqrt{13}$. Vậy $\left|\vec{b}\right| = 2\sqrt{13}$.

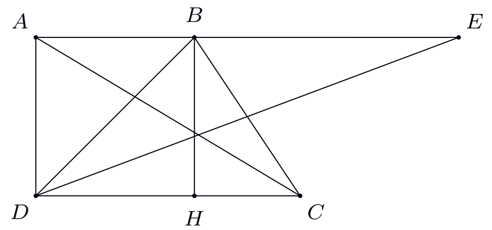
Lời giải.

BÀI 3. Cho hình thang $ABCD$ có $\widehat{A} = \widehat{D} = 90^\circ$, $AB = AD = 3$, $CD = 5$, xác định và tính độ dài của vectơ

a) $\vec{x} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$.

b) $\vec{y} = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC}$.

Lời giải.



a) Ta có $\vec{x} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$.
Suy ra $|\vec{x}| = \left|\overrightarrow{CB}\right| = CB$.
Gọi H là hình chiếu của B lên CD, ta có $BH = AD = 3$, $CH = CD - DH = 2$.
Tam giác BHC có $BC = \sqrt{BH^2 + CH^2} = \sqrt{13}$. Vậy $|\vec{x}| = CB = \sqrt{13}$.

b) Dựng $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{DC}$, ta có $\vec{y} = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{DE}$.
Suy ra $|\vec{y}| = \left|\overrightarrow{DE}\right| = DE$.
Ta có $AE = AB + BE = 8$, $DE = \sqrt{AD^2 + AE^2} = \sqrt{73}$. Vậy $|\vec{y}| = \sqrt{73}$.

4 Chứng minh một đẳng thức vectơ

Ta thường dùng một trong hai cách sau:

① Thực hiện các phép toán, biến đổi đẳng thức cần chứng minh đi đến một kết quả hiển nhiên đúng.

② Biến đổi vế phức tạp thành vế đơn giản (biến vế trái thành vế phải hoặc ngược lại)

1. Ví dụ minh hoạ

VÍ DỤ 1. Cho bốn điểm A, B, C, D. Chứng minh các đẳng thức sau:

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \vec{0}$;

b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$;

c) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$;

d) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD}$.

VÍ DỤ 2. Cho tam giác ABC. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA và AB; O là một điểm bất kì. Chứng minh rằng

a) $\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CN}+\overrightarrow{AP}=\vec{0}$;

b) $\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BM}=\vec{0}$;

c) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OP}$.

VÍ DỤ 3. Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O; M là một điểm bất kì trong mặt phẳng . Chứng minh

a) $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AC}=\vec{0}$;

b) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$;

c) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{CO}-\overrightarrow{CD}$;

d) $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}$.

2. Bài tập tự luận

BÀI 1. Cho năm điểm A, B, C, D, E. Chứng minh rằng

a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{EA}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{ED}$;

b) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{CB}$.

BÀI 2. Cho các sáu điểm A, B, C, D, E, F. Chứng minh rằng

a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{EA}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{ED}$;

b) $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{CD}$;

c) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DE}-\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}$;

d) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{EF}-\overrightarrow{ED}=\vec{0}$.

BÀI 3. Cho tam giác ABC. Vẽ về phía ngoài tam giác ABC các hình bình hành $ABEF$, $ACPQ$, $BCIJ$. Chứng minh $\overrightarrow{EJ}+\overrightarrow{IP}+\overrightarrow{QF}=\vec{0}$.

BÀI 4. Cho tam giác ABC có trung tuyến AM.

a) Chứng minh $\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AM}=\vec{0}$;

b) Trên cạnh AC lấy hai điểm E và F sao cho $AE=EF=FC$; BE cắt AM tại N Chứng minh $\overrightarrow{NA}$ và $\overrightarrow{NM}$ là hai vec tơ đối nhau.

BÀI 5. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm AB, BC, CD, DA. Chứng minh rằng $\overrightarrow{MQ}=\overrightarrow{NP}$.

BÀI 6. Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O. Gọi M, N lần lượt là trung điểm BC và AD. Chứng minh rằng

a) $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$;

b) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$;

c) $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{OA}$;

d) $\overrightarrow{ND}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AM}$.

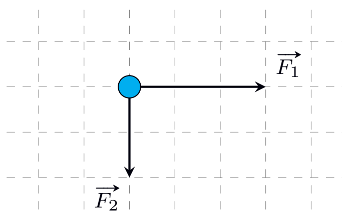
5 Ứng dụng của vectơ trong thực tiễn

Phép cộng vectơ tương ứng với các quy tắc tổng hợp lực, tổng hợp vận tốc:

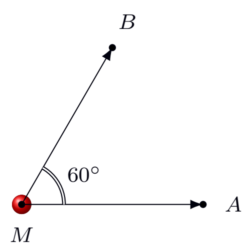
- Nếu hai lực cùng tác động vào chất điểm A và được biểu diễn bởi các vectơ $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ thì hợp lực tác động vào A được biểu diễn bởi vectơ $\vec{u}_1+\vec{u}_2$.
- Nếu một con thuyền di chuyển trên sông với vận tốc riêng (vận tốc so với dòng nước) được biểu diễn bởi vectơ $\vec{v_r}$ và vận tốc của dòng nước (so với bờ) được biểu diễn bởi vectơ $\vec{v_n}$ thì vận tốc thực tế của thuyền (so với bờ) được biểu diễn bởi vectơ $\vec{v}_r+\vec{v}_n$.

1. Ví dụ minh hoạ

VÍ DỤ 1.
Cho hai lực đồng quy $\overrightarrow{F_1}$ và $\overrightarrow{F_2}$ như hình vẽ. Biết độ lớn của $\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_2}$ lần lượt là 3N và 2N. Tính độ lớn hợp lực của $\overrightarrow{F_1}$ và $\overrightarrow{F_2}$.



VÍ DỤ 2.
Cho hai lực $\vec{F}_1=\overrightarrow{MA}$, $\vec{F}_2=\overrightarrow{MB}$ cùng tác động vào một vật tại điểm M cường độ hai lực $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ đều bằng 300 (N) và $\widehat{AMB}=60^\circ$. Tìm cường độ của lực tổng hợp tác động vào vật.

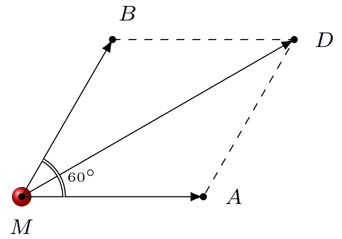


Lời giải.

Gọi D là đỉnh thứ tư của hình thoi $MBDA$, ta có

$$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MD}.$$

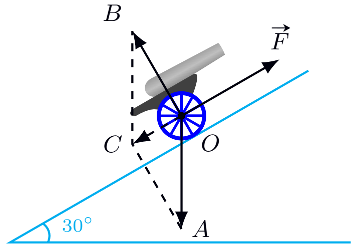
Vậy cường độ lực tổng hợp tại M là $\left|\overrightarrow{MD}\right|=MD$.



Gọi O là tâm hình thoi $MBDA$ có cạnh 300, ta có $MD=2MO=300\sqrt{3}$ (N).

VÍ DỤ 3.

Tính lực kéo cần thiết để kéo một khẩu pháo có trọng lượng 22 148 N (xấp xỉ 2 260 kg) lên một con dốc nghiêng 30° so với phương nằm ngang (hình bên). Nếu lực kéo của mỗi người bằng 100 N thì cần tối thiểu bao nhiêu người để kéo pháo (*bỏ qua ma sát trượt giữa bánh xe và mặt phẳng nghiêng*)?



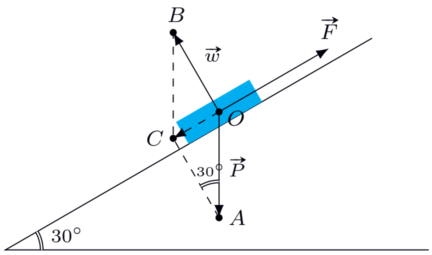
Lời giải.

Lực tổng hợp của trọng lực $\overrightarrow{P}$ và phản lực $\overrightarrow{w}$ là lực $\overrightarrow{T}=\overrightarrow{OC}$. Theo hình vẽ thì

$$\left|\overrightarrow{T}\right|=OC=OA\cdot\sin 30^\circ=11074\,\mathrm{N}$$

Suy ra, muốn kéo được pháo lên dốc thì lực $\overrightarrow{F}$ phải có độ lớn

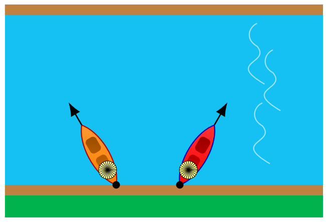
$$\left|\overrightarrow{F}\right|>\left|\overrightarrow{T}\right|=11074\,\mathrm{N}$$



Do $\dfrac{11074}{100}=110,74$ nên nếu lực kéo mỗi người là 100 N thì ta cần tối thiểu 111 người.

VÍ DỤ 4.

Hai con tàu xuất phát cùng lúc từ bờ bên này để sang bờ bên kia của dòng sông (hai bờ song song nhau) với vận tốc riêng không đổi và có độ lớn bằng nhau. Hai tàu luôn giữ lái sao cho chúng tạo với bờ cùng một góc nhọn nhưng một tàu hướng xuống hạ lưu, một tàu hướng lên thượng nguồn. Vận tốc dòng nước là đáng kể, các yếu tố bên ngoài khác không ảnh hưởng tới vận tốc của các tàu. Hỏi tàu nào sang bờ bên kia trước?

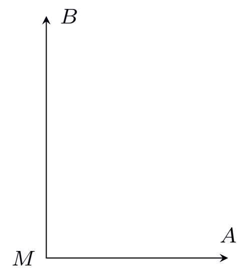


Lời giải.

2. Bài tập tự luận

BÀI 1.

Cho hai lực $\overrightarrow{F_1}=\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{F_2}=\overrightarrow{MB}$ cùng tác động vào một vật tại điểm M cường độ hai lực $\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_2}$ lần lượt là 300 (N) và 400 (N) và $\widehat{AMB}=90^\circ$. Tìm cường độ của lực tổng hợp tác động vào vật.

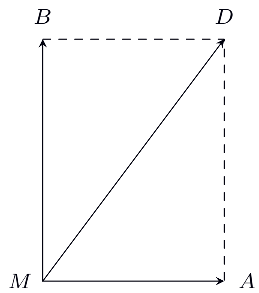


Lời giải.

Gọi D là đỉnh thứ tư của hình chữ nhật $MADB$, ta có

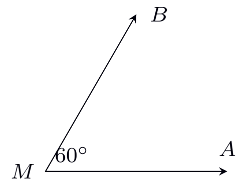
$$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MD}.$$

Vậy cường độ lực tổng hợp tại M là $\left|\overrightarrow{MD}\right|=MD=\sqrt{MB^2+MA^2}=500$ (N).



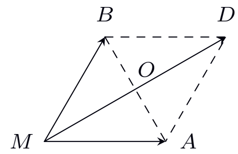
BÀI 2.

Cho hai lực $\overrightarrow{F}_1 = \overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{F}_2 = \overrightarrow{MB}$ cùng tác động vào một vật tại điểm M cường độ hai lực $\overrightarrow{F}_1$, $\overrightarrow{F}_2$ đều bằng 300 (N) và $\widehat{AMB} = 60^\circ$. Tìm cường độ của lực tổng hợp tác động vào vật.



Lời giải.

Gọi D là đỉnh thứ tư của hình thoi $MBDA$, ta có



$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MD}.$$

Vậy cường độ lực tổng hợp tại M là $\left|\overrightarrow{MD}\right| = MD$.

Gọi O là tâm hình thoi $MBDA$ có cạnh 300, ta có $MD = 2MO = 300\sqrt{3}$ (N).

C. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

CÂU 1. Cho ba điểm phân biệt A, B, C. Đẳng thức nào sau đây đúng?

(A) $\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CB}$. (B) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$. (C) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{BC}$. (D) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB}$.
Mặt khác

- $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} \neq \overrightarrow{CB}$.
- $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB} \neq \overrightarrow{BC}$.
- $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB} \neq \overrightarrow{BC}$.

Chọn đáp án (A) .... □

CÂU 2. Rút gọn biểu thức vectơ $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{AC}$ ta được kết quả đúng là

(A) $\overrightarrow{MB}$. (B) $\overrightarrow{BC}$. (C) $\overrightarrow{CB}$. (D) $\overrightarrow{AB}$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$.

Chọn đáp án (C) .... □

CÂU 3. Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$. Tính $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}$.

(A) $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{BC}$. (B) $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{DA}$. (C) $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA}$. (D) $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{AB}$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DA}$.

Chọn đáp án (B) .... □

CÂU 4. Cho bốn điểm A, B, C, D phân biệt và $\vec{u} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{BD}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

(A) $\vec{u} = \vec{0}$. (B) $\vec{u} = \overrightarrow{AD}$. (C) $\vec{u} = \overrightarrow{CD}$. (D) $\vec{u} = \overrightarrow{AC}$.

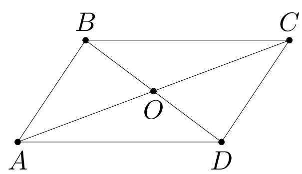
Lời giải.

Ta có $\vec{u} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}$.

Chọn đáp án (B) .... □

CÂU 5.
Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O . Hỏi vectơ $\overrightarrow{AO} - \overrightarrow{DO}$ bằng vectơ nào trong các vectơ sau?

(A) $\overrightarrow{BA}$. (B) $\overrightarrow{BC}$. (C) $\overrightarrow{DC}$. (D) $\overrightarrow{AC}$.



Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AO} - \overrightarrow{DO} = -\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.

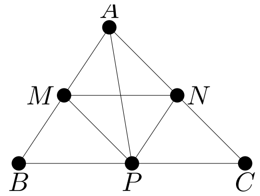
Chọn đáp án (B) .... □

CÂU 6. Cho tam giác ABC. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh AB, AC, BC. Tổng $\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{NP}$ bằng vectơ nào?

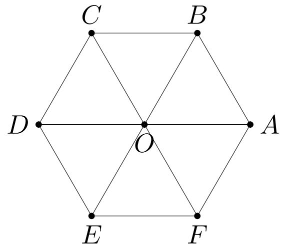
(A) $\overrightarrow{PA}$. (B) $\overrightarrow{AM}$. (C) $\overrightarrow{PB}$. (D) $\overrightarrow{AP}$.

Lời giải.

CÂU 6. Ta có tứ giác $MANP$ là hình bình hành.
Mà $\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{NP}=-\left(\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{PN}\right)=-\overrightarrow{PA}=\overrightarrow{AP}$.



CÂU 7.
Cho lục giác đều $ABCDEF$ có tâm O. Đẳng thức nào sau đây **sai**?



Ⓐ $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OE}=\vec{0}$.
Ⓑ $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{EB}$.
Ⓒ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{EF}=\vec{0}$.
Ⓓ $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AD}$.

Lời giải.

Ta có
$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OE}=\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}\right)+\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OE}=\vec{0}$ đúng.
$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OB}=\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}\right)+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OB}=2\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{EB}$ đúng.
$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{EF}=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BO}\right)+\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{AA}=\vec{0}$ đúng.

Chọn đáp án (D) .... □

CÂU 8. Cho hình bình hành $ABCD$. vectơ $\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AB}$ bằng vectơ nào dưới đây?

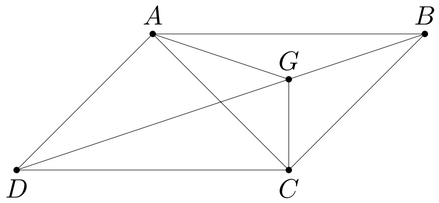
Ⓐ $\overrightarrow{DB}$.
Ⓑ $\overrightarrow{BD}$.
Ⓒ $\overrightarrow{AC}$.
Ⓓ $\overrightarrow{CA}$.

Lời giải.

$\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{BD}$.

CÂU 9.
Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC. Mệnh đề nào sau đây đúng?

Ⓐ $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\overrightarrow{BD}$.
Ⓑ $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\overrightarrow{CD}$.
Ⓒ $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{O}$.
Ⓓ $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GD}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{CD}$.



Lời giải.

Vì G là trọng tâm của tam giác ABC nên $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}\Rightarrow\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GC}=-\overrightarrow{GB}$.
Do đó $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=-\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GD}=\overrightarrow{GD}-\overrightarrow{GB}=\overrightarrow{BD}$.
Chọn đáp án (A) .... □

CÂU 10. Chọn mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau.

Ⓐ Nếu $\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}$ thì $|\vec{a}|+\left|\vec{b}\right|=|\vec{c}|$.
Ⓑ $\overrightarrow{FY}-\overrightarrow{BY}=\overrightarrow{FB}$ với B, F, Y bất kì.
Ⓒ Nếu $ABCD$ là hình bình hành thì $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$.
Ⓓ $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MH}=\overrightarrow{AH}$ với A, M, H bất kì.

Lời giải.

Mệnh đề sai: Nếu $\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}$ thì $|\vec{a}|+\left|\vec{b}\right|=|\vec{c}|$.

Chọn đáp án (A) .... □

CÂU 11. Trong mặt phẳng cho bốn điểm bất kì A, B, C, O. Đẳng thức nào sau đây là đúng?

Ⓐ $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OA}$.
Ⓑ $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}$.
Ⓒ $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CO}$.
Ⓓ $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{BA}$.

Lời giải.

Nhắc lại lý thuyết: Với 3 điểm O, A, B bất kì:
Quy tắc 3 điểm: $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}$.
Quy tắc hiệu: $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{BA}$.
Chọn đáp án (C) .... □

CÂU 12. Cho ba điểm A, B, C phân biệt. Đẳng thức nào sau đây là **sai**?

Ⓐ $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CB}$.
Ⓑ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$.
Ⓒ $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BC}$.
Ⓓ $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}$.

Lời giải.

Nhắc lại lý thuyết: Với 3 điểm C, A, B bất kì:
Quy tắc 3 điểm: $\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CB}$.
Quy tắc hiệu: $\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{BA}$.

Chọn đáp án A

CÂU 13. Tổng $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{RN}+\overrightarrow{NP}+\overrightarrow{QR}$ bằng

A. $\overrightarrow{MR}$. B. $\overrightarrow{MN}$. C. $\overrightarrow{MP}$. D. $\overrightarrow{MQ}$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{RN}+\overrightarrow{NP}+\overrightarrow{QR}=\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NP}+\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QR}+\overrightarrow{RN}=\overrightarrow{MN}$.

Chọn đáp án B

CÂU 14. Cho 4 điểm bất kì A, B, C, D. Đẳng thức nào sau đây sai?

A. $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}$. B. $\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{CD}$. C. $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{DA}$. D. $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DC}$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BC}$.

Chọn đáp án B

CÂU 15. Cho bốn điểm A, B, C. Tính $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$.

A. $\overrightarrow{CA}$. B. $2\cdot\overrightarrow{AC}$. C. $\vec{0}$. D. $\overrightarrow{AC}$.

Lời giải.

$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AC}$.

Chọn đáp án D

CÂU 16. Cho tam giác ABC và điểm M bất kỳ, chọn đẳng thức **đúng**.

A. $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BC}$. B. $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{AB}$. C. $\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{CB}$. D. $\overrightarrow{AA}-\overrightarrow{BB}=\overrightarrow{AB}$.

Lời giải.

Áp dụng quy tắc cộng, trừ. Ta có: $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CA}$
$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{BA}$
$\overrightarrow{AA}-\overrightarrow{BB}=\vec{0}$

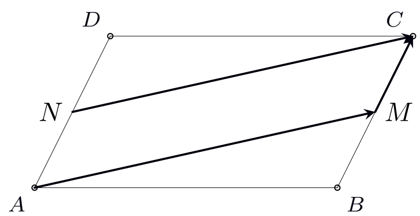
Chọn đáp án C

CÂU 17. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm BC và AD. Tổng của $\overrightarrow{NC}$ và $\overrightarrow{MC}$ là

A. $\vec{0}$. B. $\overrightarrow{MN}$. C. $\overrightarrow{NM}$. D. $\overrightarrow{AC}$.

Lời giải.

$ANCM$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{NC}=\overrightarrow{AM}$.
Do đó: $\overrightarrow{NC}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{AC}$.



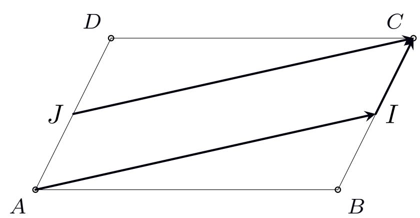
Chọn đáp án D

CÂU 18. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm BC và AD. Tính $\overrightarrow{JC}-\overrightarrow{IC}$ không bằng

A. $\overrightarrow{DC}$. B. $\overrightarrow{JI}$. C. $\overrightarrow{AB}$. D. $\overrightarrow{AC}$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{JC}-\overrightarrow{IC}=\overrightarrow{JC}+\overrightarrow{CI}=\overrightarrow{JC}+\overrightarrow{DJ}=\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{JI}=\overrightarrow{AB}$. .



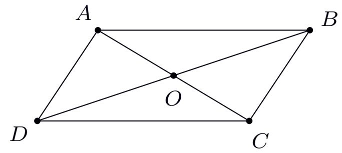
Chọn đáp án D

CÂU 19. Cho hình bình hành $ABCD$. Điểm M thỏa mãn điều kiện $\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{DO}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. M trùng với A. B. M trùng với B. C. M trùng với O. D. M trùng với C.

Lời giải.

CÂU 19. Vì O là tâm hình bình hành $ABCD$ nên $\overrightarrow{DO} = \overrightarrow{OB}$.
Khi đó $\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{DO} \Leftrightarrow \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{DO} - \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \overrightarrow{MO} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \overrightarrow{MO} = \overrightarrow{OC}$.
Suy ra O là trung điểm MC. Mà O là trung điểm AC.
Vậy M trùng với A.

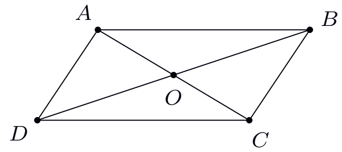


CÂU 20. Cho hình bình hành $ABCD$ có tâm O. Điểm M thỏa mãn điều kiện $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{DC}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A M trùng với B. **B** M trùng với D. **C** M trùng với A. **D** M trùng với điểm O.

Lời giải.

CÂU 20. Vì $ABCD$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$.
Khi đó



$$\begin{aligned} & \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{DC} \\ \Leftrightarrow\ & \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DC} \\ \Leftrightarrow\ & \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DC} \\ \Leftrightarrow\ & \overrightarrow{OM} = \vec{0}. \end{aligned}$$

Suy ra M trùng với điểm O.

CÂU 21. Cho bốn điểm phân biệt A, B, C, D. Biết điểm M thỏa mãn điều kiện $\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A M là trung điểm CD. **B** M là trung điểm AB. **C** M là trung điểm AD. **D** M là trung điểm BC.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} & \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} \\ \Leftrightarrow\ & \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MD} - \overrightarrow{AD} \\ \Leftrightarrow\ & \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DA} = \vec{0} \\ \Leftrightarrow\ & \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MA} = \vec{0}. \end{aligned}$$

Suy ra M là trung điểm AB.
Chọn đáp án B .... □

CÂU 22. Cho các điểm phân biệt A, B, C, D, E, F. Biết điểm M thỏa mãn điều kiện $\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{DF}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A M là trọng tâm tam giác ABC. **B** M là trọng tâm tam giác BCD.

C M là trọng tâm tam giác ABD. **D** M là trọng tâm tam giác ACD.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} & \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{DF} \\ \Leftrightarrow\ & \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{ME} - \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{MF} - \overrightarrow{DF} = \vec{0} \\ \Leftrightarrow\ & \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{MF} + \overrightarrow{FD} = \vec{0} \\ \Leftrightarrow\ & \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD} = \vec{0}. \end{aligned}$$

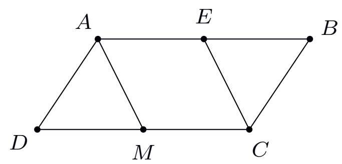
Suy ra M là trọng tâm tam giác ABD.
Chọn đáp án C .... □

CÂU 23. Cho hình bình hành $ABCD$ có E là trung điểm AB. Điểm M thỏa mãn điều kiện $\overrightarrow{EB} = \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{BC}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A M là trung điểm AD. **B** M là trung điểm CD. **C** M là trung điểm AB. **D** M là trung điểm BC.

Lời giải.

CÂU 23. Ta có $\overrightarrow{EB} = \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AM} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{EC}$.
Do đó $AMCE$ là hình bình hành.
Suy ra $AE = MC$ và $AE \parallel MC$.
Vậy M là trung điểm CD.



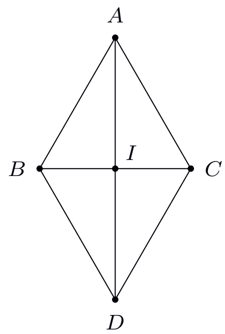
CÂU 24. Cho tam giác ABC đều có cạnh bằng a. Tìm tập hợp điểm M thỏa mãn điều kiện $\left|\overrightarrow{MC}\right| = \left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right|$.

Ⓐ M thuộc đường tròn tâm A bán kính $a\sqrt{3}$.
Ⓑ M thuộc đường tròn tâm C bán kính $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.
Ⓒ M thuộc đường tròn tâm B bán kính $a\sqrt{3}$.
Ⓓ M thuộc đường tròn tâm C bán kính $a\sqrt{3}$.

Lời giải.

CÂU 24. Dựng hình bình hành $ABDC$. Suy ra $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}$.
Khi đó $\left|\overrightarrow{MC}\right|=\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right| \Leftrightarrow \left|\overrightarrow{MC}\right|=\left|\overrightarrow{AD}\right| \Leftrightarrow MC=AD$.

Gọi I là tâm của hình bình hành $ABDC$. Ta có $AD=2AI=2\cdot\dfrac{AB\sqrt{3}}{2}=a\sqrt{3}$.
Do đó $MC=a\sqrt{3}$.
Vậy M thuộc đường tròn tâm C bán kính $a\sqrt{3}$.



CÂU 25. Cho hình thang $ABCD$ có AB song song với CD. Cho $AB=2a$, $CD=a$. O là trung điểm của AD. Khi đó,

Ⓐ $\left|\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right|=\dfrac{3a}{2}$.
Ⓑ $\left|\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right|=a$.
Ⓒ $\left|\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right|=2a$.
Ⓓ $\left|\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right|=3a$.

Lời giải.

Gọi M là trung điểm của BC. Ta có $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=2\overrightarrow{OM}$, mà OM là đường trung bình của hình thang $ABCD$ nên $2OM=AB+AD=3a$ suy ra $\left|\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right|=3a$.

Chọn đáp án (D) .... □

CÂU 26. Cho tam giác ABC vuông cân tại A có $BC=a\sqrt{2}$, M là trung điểm của BC. Khẳng định nào sau đây đúng?

Ⓐ $\left|\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BM}\right|=a$.
Ⓑ $\left|\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BM}\right|=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.
Ⓒ $\left|\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BM}\right|=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.
Ⓓ $\left|\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BM}\right|=\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

Lời giải.

CÂU 26. Dựng hình bình hành $ABMN$.
Ta có: $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{BN}$ nên

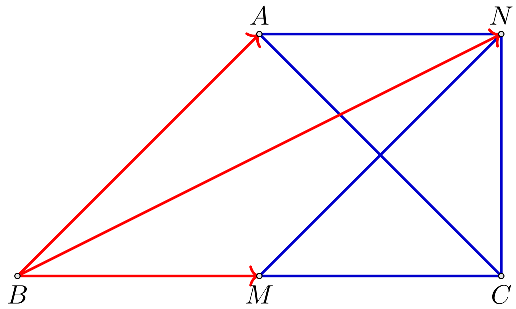
$$\left|\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BM}\right|=\left|\overrightarrow{BN}\right|=BN.$$

Tam giác BCN vuông tại C có

$$NC=AM=\frac{1}{2}BC=\frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Suy ra

$$BN=\sqrt{BC^2+NC^2}=\sqrt{2a^2-\frac{2a^2}{4}}=\frac{a\sqrt{6}}{2}.$$



CÂU 27. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a tâm O. Tính theo a độ dài của vectơ $\vec{u}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{BC}$.

Ⓐ $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.
Ⓑ $\dfrac{3a\sqrt{2}}{2}$.
Ⓒ $a\sqrt{2}$.
Ⓓ a.

Lời giải.

Ta có $\vec{u}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BO}-\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CO}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OB}$.
Suy ra $|\vec{u}|=\left|\overrightarrow{OB}\right|=OB=\dfrac{\sqrt{2}}{2}AB=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Chọn đáp án (A) .... □

CÂU 28. Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng a. Khi đó $\left|\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}\right|$ bằng

Ⓐ $2a$.
Ⓑ $a\sqrt{2}$.
Ⓒ $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
Ⓓ $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải.

Ta có $\left|\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}\right|=\left|\overrightarrow{AC}\right|=a\sqrt{2}$.

Chọn đáp án (B) .... □

CÂU 29. Cho tam giác ABC vuông cân tại C, $AB=\sqrt{2}$. Tính độ dài của $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$

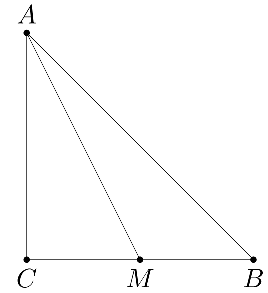
Ⓐ $\sqrt{5}$.
Ⓑ $2\sqrt{5}$.
Ⓒ $\sqrt{3}$.
Ⓓ $2\sqrt{3}$.

Lời giải.

CÂU 29. Ta có $AC^2 + BC^2 = AB^2 \Leftrightarrow 2AC^2 = 2 \Rightarrow AC = BC = 1$.

$AM = \sqrt{AC^2 + CM^2} = \sqrt{1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

$\left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right| = \left|2\overrightarrow{AM}\right| = 2AM = \sqrt{5}$.

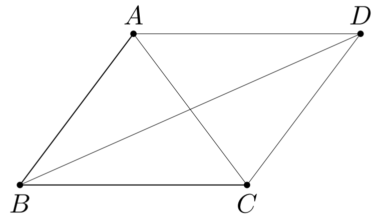


CÂU 30. Cho hình bình hành $ABCD$ có $DA = 2$cm, $AB = 4$cm và đường chéo $BD = 5$cm. Tính $\left|\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{DA}\right|$.

Ⓐ 2cm. Ⓑ 4cm. Ⓒ 5cm. Ⓓ 6cm.

Lời giải.

CÂU 30. $\left|\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{DA}\right| = \left|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}\right| = \left|\overrightarrow{BD}\right| = BD = 5$cm.



CÂU 31. Cho hình thang $ABCD$ có hai đáy $AB = a$, $CD = 2a$. Gọi M, N là trung điểm của AD, BC. Khi đó $\left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MN}\right|$ bằng

Ⓐ $\frac{a}{2}$. Ⓑ $3a$. Ⓒ a. Ⓓ $2a$.

Lời giải.

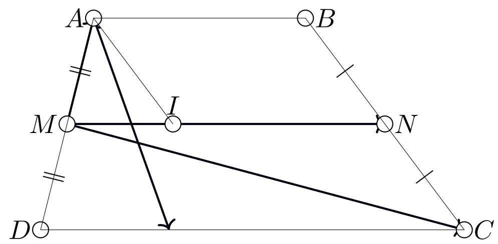
CÂU 31. Ta có $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{NC}$. (1)

Qua A, dựng vectơ $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{NC}$. Suy ra I nằm trên đường thẳng MN và tứ giác $ABNI$ là hình bình hành.

Khi đó, từ (1) suy ra $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{NC} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{MI}$. (2)

Vì M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AD và BC nên MN là đường trung bình của hình thang $ABCD$. Suy ra, $MN = \frac{3a}{2}$ và $MI = \frac{a}{2}$

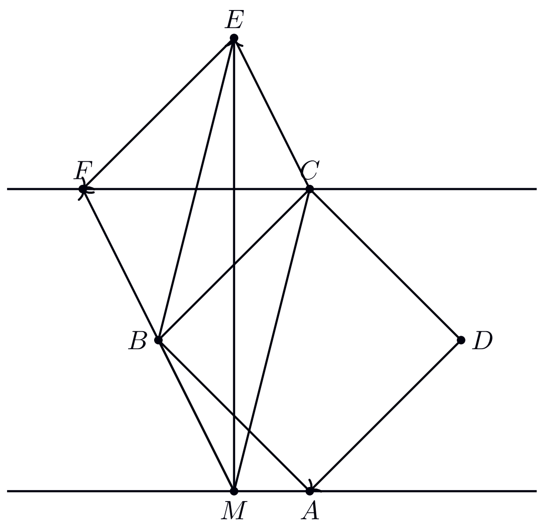
Từ (1) và (2), suy ra $\left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MN}\right| = |\overrightarrow{MI}| = \frac{a}{2}$.



CÂU 32. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a, d là đường thẳng qua A, song song với BD. Gọi M là điểm thuộc đường thẳng d sao cho $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MD}|$ nhỏ nhất. Tính theo a độ dài vectơ $\overrightarrow{MD}$.

Ⓐ $a\sqrt{2}$. Ⓑ $\frac{a\sqrt{10}}{2}$. Ⓒ a. Ⓓ $\frac{a\sqrt{5}}{2}$.

Lời giải.

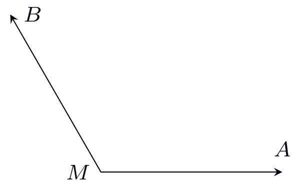


Dựng hình bình hành $MBEC$, $BCEF$, ta có $|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MD}| = |\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{DA}| = |\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{EF}| = |\overrightarrow{MF}|$. Khi M thay đổi trên d thì F thuộc đường thẳng cố định qua C song song với d, điểm M cần tìm là hình chiếu vuông góc của B trên d.

Khi đó, ta có $|\overrightarrow{MD}| = MD = \sqrt{BD^2+BM^2} = \dfrac{a\sqrt{10}}{2}$.

Chọn đáp án B .... □

CÂU 33.
Cho hai lực $\vec{F}_1 = \overrightarrow{MA}$, $\vec{F}_2 = \overrightarrow{MB}$ cùng tác động vào một vật tại điểm M cường độ hai lực $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ đều bằng 300 (N) và $\widehat{AMB} = 120^\circ$. Tìm cường độ của lực tổng hợp tác động vào vật.



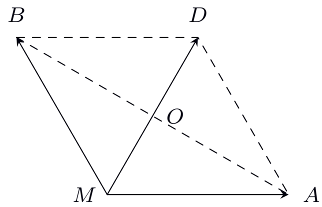
Ⓐ 300 (N). Ⓑ 700 (N). Ⓒ 100 (N). Ⓓ 500 (N).

Lời giải.

Gọi D là đỉnh thứ tư của hình thoi $MBDA$, ta có

$$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MD}.$$

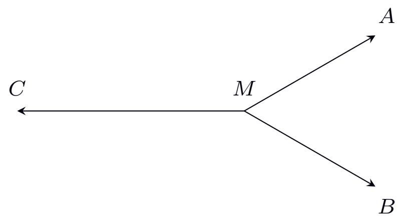
Vậy cường độ lực tổng hợp tại M là $\left|\overrightarrow{MD}\right| = MD$.



Gọi O là tâm hình thoi $MBDA$ có cạnh 300, do $\widehat{BMA} = 120^\circ \Rightarrow \widehat{MBD} = 60^\circ$.
Vậy tam giác MBD đều cạnh 300 suy ra $MD = 300$ (N).

Chọn đáp án A .... □

CÂU 34.
Cho ba lực $\vec{F}_1 = \overrightarrow{MA}$, $\vec{F}_2 = \overrightarrow{MB}$, $\vec{F}_3 = \overrightarrow{MC}$ cùng tác động vào một vật tại điểm M và vật đứng yên. Cho biết cường độ của $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ đều bằng 25 (N) và góc $\widehat{AMB} = 60^\circ$. Khi đó cường độ lực của $\vec{F}_3$ là



Ⓐ $25\sqrt{3}$ (N). Ⓑ $50\sqrt{3}$ (N). Ⓒ $50\sqrt{2}$ (N). Ⓓ $100\sqrt{3}$ (N).

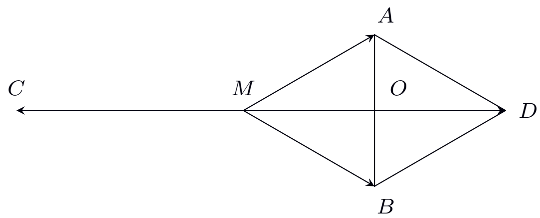
Lời giải.

Gọi D là đỉnh thứ tư của hình thoi $MADB$, ta có

$$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MD}.$$

Vậy lực tổng hợp tại M là

$$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MD}+\overrightarrow{MC}.$$



Do vật đứng yên nên $\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{MC} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{MC} = -\overrightarrow{MD}$.
Vậy cường độ lực $\vec{F}_3$ là

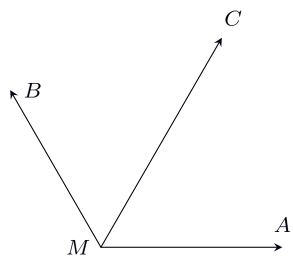
$$\left|\overrightarrow{MC}\right| = \left|\overrightarrow{MD}\right| = MD.$$

Gọi O là tâm hình thoi $MBDA$ có cạnh 25, ta có $MD = 2MO = 25\sqrt{3}$ (N).

Chọn đáp án A .... □

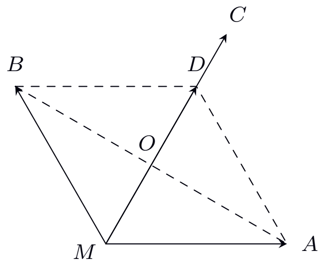
CÂU 35.
Cho ba lực $\vec{F}_1 = \overrightarrow{MA}$, $\vec{F}_2 = \overrightarrow{MB}$, $\vec{F}_3 = \overrightarrow{MC}$ cùng tác động vào một vật tại điểm M cường độ hai lực $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ đều bằng 300 (N) và $\vec{F}_3 = 400$ (N). Lại có $\widehat{AMB} = 120^\circ$ và $\widehat{AMC} = 60^\circ$. Tìm cường độ của lực tổng hợp tác động vào vật.

Ⓐ 300 (N). Ⓑ 700 (N). Ⓒ 100 (N). Ⓓ 500 (N).



Lời giải.

Gọi D là đỉnh thứ tư của hình thoi $MBDA$, ta có



$$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MD}.$$

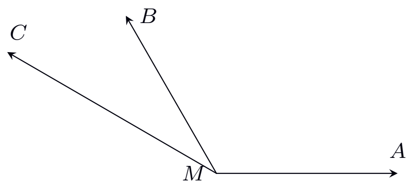
Vậy cường độ lực tổng hợp tại M là

$$\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|=\left|\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{MC}\right|.$$

Lại có $\overrightarrow{MD}$ và $\overrightarrow{MD}$ là 2 vectơ cùng hướng nên $\left|\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{MC}\right|=MD+MC$.

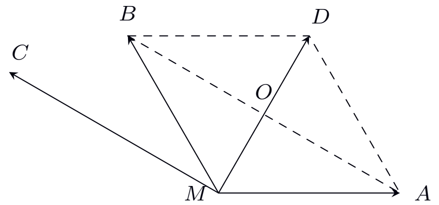
Gọi O là tâm hình thoi $MBDA$ có cạnh 300, do $\widehat{BMA}=120^\circ \Rightarrow \widehat{MBD}=60^\circ$.
Vậy tam giác MBD đều cạnh 300 suy ra $MD=300$ (N).
Vậy cường độ lực tổng hợp tại M là $MD+MC=300+400=700$ (N).
Chọn đáp án (B) .... □

CÂU 36.
Cho ba lực $\vec{F}_1=\overrightarrow{MA}$, $\vec{F}_2=\overrightarrow{MB}$, $\vec{F}_3=\overrightarrow{MC}$ cùng tác động vào một vật tại điểm M cường độ hai lực $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ đều bằng 300 (N) và $\vec{F}_3=400$ (N). Lại có $\widehat{AMB}=120^\circ$ và $\widehat{AMC}=150^\circ$. Tìm cường độ của lực tổng hợp tác động vào vật.



(A) 300 (N). (B) 700 (N). (C) 100 (N). (D) 500 (N).

Lời giải.
Gọi D là đỉnh thứ tư của hình thoi $MBDA$, ta có

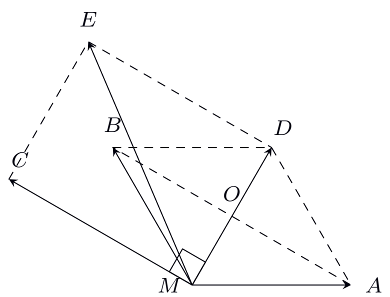


$$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MD}.$$

Vậy cường độ lực tổng hợp tại M là

$$\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|=\left|\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{MC}\right|.$$

Gọi O là tâm hình thoi $MBDA$ có cạnh 300, do $\widehat{BMA}=120^\circ \Rightarrow \widehat{MBD}=60^\circ$.
Vậy tam giác MBD đều cạnh 300 suy ra $MD=300$ (N) và $\widehat{DMA}=60^\circ$.
Suy ra $\widehat{CMD}=150^\circ-60^\circ=90^\circ$ hay tam giác CMD vuông tại M.
Gọi E là đỉnh thứ tư của hình chữ nhật $CMDE$, ta có



$$\left|\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{MC}\right|=\left|\overrightarrow{ME}\right|=ME.$$

Do $CMDE$ là hình chữ nhật nên

$$ME=\sqrt{300^2+400^2}=500 \text{ (N)}.$$

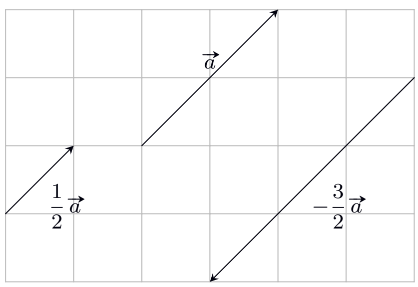
Chọn đáp án (B) .... □

Bài 5. TÍCH CỦA MỘT VECTƠ VỚI MỘT SỐ

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. Tích của một vectơ với một số

Định nghĩa: Cho vectơ $\vec{a}\neq\vec{0}$ và số thực $k\neq 0$. Tích của vectơ $\vec{a}$ với số k là một vectơ, kí hiệu là $k\vec{a}$, được xác định như sau:



- Nếu $k>0$ thì $k\vec{a}$ là vectơ **cùng hướng** với $\vec{a}$. Nếu $k<0$ thì $k\vec{a}$ là vectơ **ngược hướng** với $\vec{a}$.
- Độ dài của vectơ $k\vec{a}$ bằng $|k|$ lần độ dài của vectơ $\vec{a}$, tức là $|k\vec{a}|=|k|\cdot|\vec{a}|$.

Ta quy ước $k\vec{a}=\vec{0}$ nếu $\vec{a}=\vec{0}$ hoặc $k=0$.

2. Các tính chất của phép nhân vectơ với một số

Với hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ và hai số thực k, t, ta luôn có

- $k(t\vec{a}) = (kt)\vec{a}$;
- $(k+t)\vec{a} = k\vec{a} + t\vec{a}$;
- $k(\vec{a} \pm \vec{b}) = k\vec{a} \pm k\vec{b}$;
- $1\vec{a} = \vec{a}$; $(-1)\vec{a} = -\vec{a}$.

Điểm I là trung điểm của đoạn thẳng AB khi và chỉ khi $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$.

Cho điểm G là trọng tâm của tam giác ABC khi và chỉ khi $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

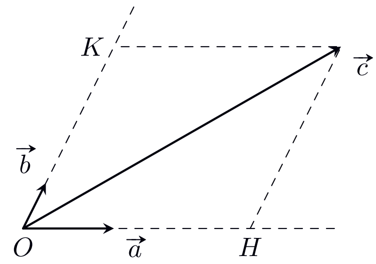
3. Điều kiện để hai vectơ cùng phương

① Điều kiện cần và đủ để $\vec{a}$ và $\vec{b} \neq \vec{0}$ cùng phương là có một số thực k để $\vec{a} = k\vec{b}$.

② Ba điểm phân biệt A, B, C thẳng hàng khi có số thực k để $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$.

4. Phân tích một vectơ theo hai vectơ không cùng phương

Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương. Khi đó mọi vectơ $\vec{c}$ đều phân tích được một cách duy nhất theo hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$, nghĩa là có duy nhất cặp số h, k sao cho $\vec{c} = h\vec{a} + k\vec{b}$



- Theo quy tắc hình bình hành, ta có

$$\vec{c} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{OK}$$

- Giả sử $\overrightarrow{OH} = h\vec{a}$ và $\overrightarrow{OK} = k\vec{b}$ thì $\vec{c} = h\vec{a} + k\vec{b}$.

B. CÁC DẠNG TOÁN

1 Xác định vectơ tích, tính độ dài vectơ

1. Ví dụ minh họa

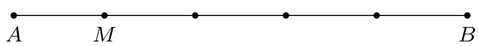
VÍ DỤ 1. Cho đoạn thẳng AB và M là một điểm nằm trên đoạn AB sao cho $AM = \dfrac{1}{5}AB$. Tìm k trong các đẳng thức sau

a) $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$.

b) $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB}$.

c) $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{AB}$.

Lời giải.



a) Thấy $\overrightarrow{AM}$ và $\overrightarrow{AB}$ cùng hướng nên $k > 0$.

Ta có $|k| = \dfrac{\left|\overrightarrow{AM}\right|}{\left|\overrightarrow{AB}\right|} = \dfrac{AM}{AB} = \dfrac{1}{5}$. Suy ra $k = \dfrac{1}{5}$.

b) Thấy $\overrightarrow{MA}$ và $\overrightarrow{MB}$ ngược hướng nên $k < 0$.

Ta có $|k| = \dfrac{\left|\overrightarrow{MA}\right|}{\left|\overrightarrow{MB}\right|} = \dfrac{AM}{MB} = \dfrac{1}{4}$. Suy ra $k = -\dfrac{1}{4}$.

c) Thấy $\overrightarrow{MA}$ và $\overrightarrow{AB}$ ngược hướng nên $k < 0$.

Ta có $|k| = \dfrac{\left|\overrightarrow{MA}\right|}{\left|\overrightarrow{AB}\right|} = \dfrac{AM}{AB} = \dfrac{1}{5}$. Suy ra $k = -\dfrac{1}{5}$.

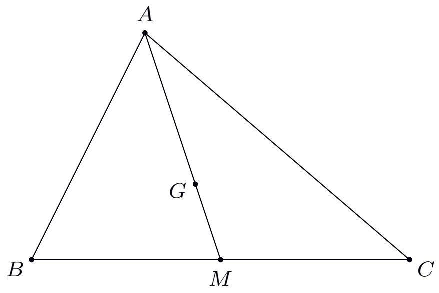
VÍ DỤ 2. Cho tam giác ABC đều cạnh bằng 1, trọng tâm G. Tính độ dài vectơ $\overrightarrow{AG}$.

Lời giải.

Gọi M là trung điểm của BC.

Khi đó, ta có $\overrightarrow{AG} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AM}$ nên

$$\left|\overrightarrow{AG}\right| = \frac{2}{3}\left|\overrightarrow{AM}\right| = \frac{2}{3}AM = \frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$



VÍ DỤ 3. Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng a, I là trung điểm của cạnh BC. Tính độ dài vectơ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

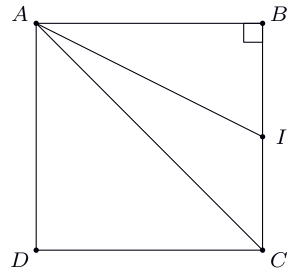
Lời giải.

Vì I là trung điểm BC nên ta có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AI}$.

Do đó $\left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right| = \left|2\overrightarrow{AI}\right| = 2AI$.

Xét $\triangle ABI$ vuông tại B, ta có $AI = \sqrt{AB^2 + BI^2} = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$.

Vậy $\left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right| = a\sqrt{5}$.



2. Bài tập áp dụng

BÀI 1. Trên đoạn thẳng AB, gọi C là trung điểm AB và D là điểm đối xứng của C qua A. Tìm k trong các đẳng thức sau

a) $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$.

b) $\overrightarrow{AD} = k\overrightarrow{AB}$.

Lời giải.

- Vì C là trung điểm của AB nên $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{AB}$ cùng hướng. Do đó $k > 0$.

  Ta lại có $|k| = \dfrac{\left|\overrightarrow{AC}\right|}{\left|\overrightarrow{AB}\right|} = \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{1}{2}$. Suy ra $k = \dfrac{1}{2}$.

- Vì D đối xứng với C qua A nên $\overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{AB}$ là ngược hướng, do đó $k < 0$.

  Ta lại có $AD = AC$ nên $|k| = \dfrac{\left|\overrightarrow{AD}\right|}{\left|\overrightarrow{AB}\right|} = \dfrac{AD}{AB} = \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{1}{2}$. Suy ra $k = -\dfrac{1}{2}$.

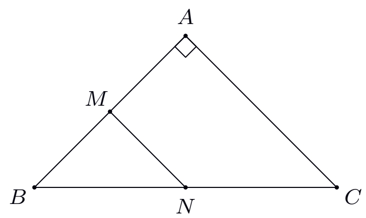
BÀI 2. Cho tam giác ABC vuông cân tại A, cạnh $BC = 2$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của cạnh AB và BC. Tính độ dài $\overrightarrow{MN}$.

Lời giải.

Vì $\triangle ABC$ vuông cân tại A nên $AB^2 = AC^2 = \dfrac{1}{2}BC^2 = 2$, do đó $AB = AC = \sqrt{2}$.

Dễ thấy rằng MN là đường trung bình của $\triangle ABC$ nên $\overrightarrow{MN} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

Suy ra $\left|\overrightarrow{MN}\right| = \dfrac{1}{2}\left|\overrightarrow{AC}\right| = \dfrac{1}{2}AC = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.



BÀI 3. Cho hình thoi $ABCD$ có $AC = 2a$, $BD = a$. Tính độ dài vectơ $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$.

Lời giải.

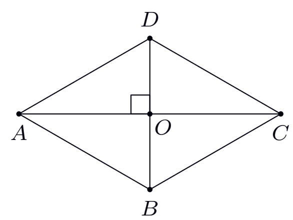
Gọi O là tâm của hình thoi.

Khi đó ta có $\left|\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}\right| = \left|2\overrightarrow{AO} + 2\overrightarrow{OD}\right| = \left|2\overrightarrow{AD}\right| = 2AD$.

Áp dụng định lý Pi-ta-go trong tam giác AOD ta có

$$AD = \sqrt{AO^2 + OD^2} = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{5}}{2}.$$

Do đó $\left|\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}\right| = 2AD = a\sqrt{5}$.



3. Bài tập trắc nghiệm

CÂU 1. Cho hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ trong hình bên. Khẳng định nào sau đây đúng?

(A) $\overrightarrow{CD} = 3\overrightarrow{AB}$.
(B) $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$.
(C) $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{CD}$.
(D) $\overrightarrow{CD} = -3\overrightarrow{AB}$.

Lời giải.

Từ hình vẽ, theo định nghĩa ta có $\overrightarrow{CD} = -3\overrightarrow{AB}$.

Chọn đáp án (D) .... □

CÂU 2. Cho vectơ $\vec{a}$ (khác $\vec{0}$) và vectơ $\vec{b} = k\vec{a}$, $(k \neq 0)$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

(A) $\vec{a}$ cùng phương $\vec{b}$ nếu $k > 0$.
(B) $\vec{a}$ ngược hướng $\vec{b}$ nếu $k > 0$.
(C) $\vec{a}$ cùng hướng $\vec{b}$ nếu $k < 0$.
(D) $\vec{a}$ cùng hướng $\vec{b}$ nếu $k > 0$.

Lời giải.

vectơ $\vec{b} = k\vec{a}$ có độ dài bằng $|k||\vec{a}|$ và

- cùng hướng với $\vec{a}$ nếu $k > 0$;
- ngược hướng với $\vec{a}$ nếu $k < 0$.

Chọn đáp án (D) .... □

CÂU 3. Cho hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ bất kì và số thực k. Ta có $k\left(\vec{a} + \vec{b}\right)$ bằng

(A) $\vec{a} + k\vec{b}$.
(B) $k\vec{a} + k\vec{b}$.
(C) $k\vec{a} - k\vec{b}$.
(D) $k\vec{a} + \vec{b}$.

Lời giải.

Theo tính chất, ta có $k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$.

Chọn đáp án (B) .... □

CÂU 4. Cho hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ khác $\vec{0}$ thỏa mãn $\vec{a} = -\dfrac{1}{2}\vec{b}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

(A) $|\vec{a}| = -\dfrac{1}{2}\left|\vec{b}\right|$.
(B) $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là hai vectơ đối nhau.
(C) $\vec{a}$ cùng hướng với $\vec{b}$.
(D) $\vec{a}$ ngược hướng với $\vec{b}$.

Lời giải.

Do $\vec{a} = -\dfrac{1}{2}\vec{b}$ và $-\dfrac{1}{2} < 0$ nên $\vec{a}$ ngược hướng với $\vec{b}$.

Chọn đáp án (D) .... □

CÂU 5. Cho vectơ $\vec{u}$ có độ dài bằng 2 và vectơ $\vec{v} = -3\vec{u}$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

(A) vectơ $\vec{v}$ có độ dài bằng -6 và cùng hướng với $\vec{u}$.
(B) vectơ $\vec{v}$ có độ dài bằng -6 và ngược hướng với $\vec{u}$.
(C) vectơ $\vec{v}$ có độ dài bằng 6 và cùng hướng với $\vec{u}$.
(D) vectơ $\vec{v}$ có độ dài bằng 6 và ngược hướng với $\vec{u}$.

Lời giải.

Với $\vec{u} \neq \vec{0}$ và số thực $k \neq 0$, ta có $k\vec{u}$ ngược hướng với $\vec{u}$ nếu $k < 0$ và $|k\vec{u}| = |k| \cdot |\vec{u}|$.
Do đó, khẳng định đúng là: "vectơ $\vec{v}$ có độ dài bằng 6 và ngược hướng với $\vec{u}$."

Chọn đáp án (D) .... □

CÂU 6. Cho $\vec{a} = -2\vec{b}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

(A) $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là hai vectơ bằng nhau.
(B) $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là hai vectơ đối nhau.
(C) $\vec{a}$ và $\vec{b}$ ngược hướng.
(D) $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng hướng.

Lời giải.

Theo định nghĩa, nếu $\vec{a} = -2\vec{b}$ thì $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là hai vectơ ngược hướng.

Chọn đáp án (C) .... □

CÂU 7. Cho vectơ $\vec{q}$ có độ dài bằng 27. Hỏi độ dài của vectơ $\vec{x} = -\dfrac{1}{9}\vec{q}$ là bao nhiêu?

(A) 243.
(B) 3.
(C) 9.
(D) -3.

Lời giải.

Ta có $|\vec{x}| = \dfrac{1}{9}|\vec{q}| = \dfrac{27}{9} = 3$.

Chọn đáp án (B) .... □

CÂU 8. Cho đoạn thẳng AB và điểm I thuộc đoạn thẳng AB như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây đúng?

(A) $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$. (B) $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{4}\overrightarrow{IB}$. (C) $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{5}\overrightarrow{BA}$. (D) $\overrightarrow{AI}=-\frac{1}{4}\overrightarrow{IB}$.

Lời giải.

Từ hình vẽ ta có $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{4}\overrightarrow{IB}$.

Chọn đáp án (B) .... □

CÂU 9. Đẳng thức nào mô tả đúng hình vẽ bên?

(A) $3\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{AB}=\vec{0}$. (B) $3\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$. (C) $\overrightarrow{BI}+3\overrightarrow{BA}=\vec{0}$. (D) $\overrightarrow{AI}+3\overrightarrow{AB}=\vec{0}$.

Lời giải.

Từ hình vẽ ta thấy $\overrightarrow{IA}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow 3\overrightarrow{IA}=\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow 3\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{AB}=\vec{0}$.

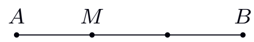
Chọn đáp án (A) .... □

CÂU 10. Cho M là một điểm trên đoạn AB sao cho $AM=\frac{1}{3}AB$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

(A) $\overrightarrow{MB}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$. (B) $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$. (C) $\overrightarrow{MA}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{MB}$. (D) $\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{AM}$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{AB}$ cùng hướng và $MB=\frac{2}{3}AB$ nên $\overrightarrow{MB}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$.



Khẳng định **sai** là $\overrightarrow{MB}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$.

Chọn đáp án (A) .... □

CÂU 11. Cho đoạn thẳng AB và M là một điểm trên đoạn AB sao cho $AB=5AM$. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

(A) $\overrightarrow{MA}=-\frac{1}{4}\overrightarrow{MB}$. (B) $\overrightarrow{MB}=\frac{4}{5}\overrightarrow{AB}$. (C) $\overrightarrow{MB}=-\frac{4}{5}\overrightarrow{AB}$. (D) $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{5}\overrightarrow{AB}$.

Lời giải.

Dễ thấy rằng $\overrightarrow{MB}$ và $\overrightarrow{AB}$ là hai vectơ cùng hướng nên mệnh đề sai là $\overrightarrow{MB}=-\frac{4}{5}\overrightarrow{AB}$.

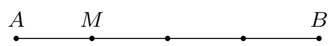
Chọn đáp án (C) .... □

CÂU 12. Cho đoạn thẳng AB, M là một điểm trên đoạn thẳng AB sao cho $AM=\frac{1}{4}AB$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

(A) $\overrightarrow{MA}=\frac{1}{3}\overrightarrow{MB}$. (B) $\overrightarrow{BM}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BA}$. (C) $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$. (D) $\overrightarrow{MB}=-3\overrightarrow{MA}$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MB}$ ngược hướng và $MA=\frac{1}{3}MB$ nên $\overrightarrow{MA}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.



Khẳng định **sai** là $\overrightarrow{MA}=\frac{1}{3}\overrightarrow{MB}$.

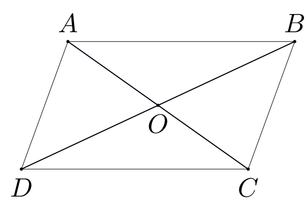
Chọn đáp án (C) .... □

CÂU 13. Cho hình bình hành $ABCD$ có tâm O. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

(A) $\overrightarrow{OD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$. (B) $\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{OC}$. (C) $\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{OA}$. (D) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{OA}$ là hai vectơ ngược hướng và $AC=2OA$ nên $\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{OA}$.



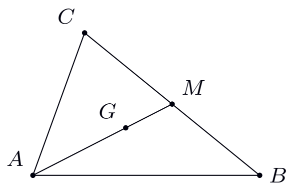
Chọn đáp án (C) .... □

CÂU 14. Cho tam giác ABC với trung tuyến AM và trọng tâm G. Khi đó, vectơ $\overrightarrow{GA}$ bằng với vectơ nào sau đây?

(A) $2\overrightarrow{GM}$. (B) $-\frac{2}{3}\overrightarrow{AM}$. (C) $\frac{2}{3}\overrightarrow{GM}$. (D) $\frac{1}{2}\overrightarrow{AM}$.

Lời giải.

Ta có $GA = \frac{2}{3}AM$ và $\overrightarrow{GA}$ ngược hướng $\overrightarrow{AM}$ nên $\overrightarrow{GA} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AM}$.



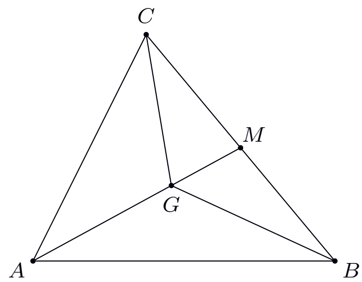
Chọn đáp án (B) .... □

CÂU 15. Cho tam giác ABC có G là trọng tâm, M là trung điểm của BC. Đẳng thức nào sau đây đúng?

(A) $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 2\overrightarrow{GM}$. (B) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AG}$. (C) $\overrightarrow{GA} = 2\overrightarrow{GM}$. (D) $\overrightarrow{MG} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{MA}$.

Lời giải.

Theo tính chất trung điểm ta có $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 2\overrightarrow{GM}$.



Chọn đáp án (A) .... □

CÂU 16. Cho tam giác ABC. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và AC. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

(A) $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$. (B) $\overrightarrow{MN} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$. (C) $\overrightarrow{BC} = -2\overrightarrow{NM}$. (D) $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{MN}$.

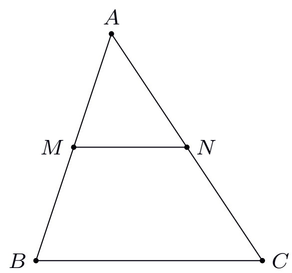
Lời giải.

Vì M, N lần lượt là trung điểm của AB và AC nên MN là đường trung bình của $\triangle ABC$. Do đó $MN \parallel BC$ và $MN = \frac{1}{2}BC$.

Ta có các đẳng thức đúng là

- $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.
- $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{MN}$.
- $\overrightarrow{BC} = -2\overrightarrow{NM}$.

Đẳng thức $\overrightarrow{MN} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ là khẳng định **sai**.



Chọn đáp án (B) .... □

CÂU 17. Cho tam giác ABC có trọng tâm G và trung tuyến BM. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

(A) $\overrightarrow{AM} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$. (B) $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

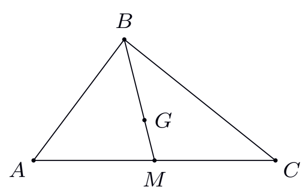
(C) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OG}$, với mọi điểm O. (D) $\overrightarrow{GB} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BM}$.

Lời giải.

Do $\triangle ABC$ có trọng tâm G và trung tuyến BM nên ta có $BG = \frac{2}{3}BM$.

Lại có $\overrightarrow{GB}$ và $\overrightarrow{BM}$ là hai vectơ ngược hướng nên $\overrightarrow{GB} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{BM}$.

Suy ra khẳng định sai là $\overrightarrow{GB} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BM}$.



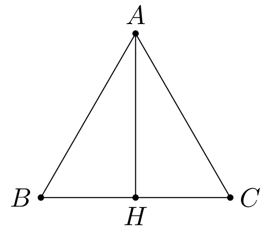
Chọn đáp án (D) .... □

CÂU 18. Cho tam giác đều ABC với đường cao AH. Mệnh đề nào sau đây đúng?

(A) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}$. (B) $\left|\overrightarrow{AH}\right|=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\left|\overrightarrow{HC}\right|$. (C) $\overrightarrow{HB}=\overrightarrow{HC}$. (D) $\left|\overrightarrow{AC}\right|=2\left|\overrightarrow{HC}\right|$.

Lời giải.

Ta có $2\left|\overrightarrow{HC}\right|=\left|\overrightarrow{BC}\right|=BC=AC=\left|\overrightarrow{AC}\right|$.



Chọn đáp án (D) ....

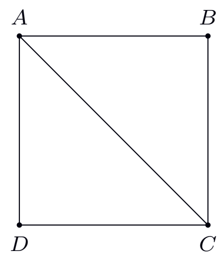
CÂU 19. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a. Giá trị của $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right|$ bằng

(A) $A\sqrt{2}$. (B) $2a$. (C) $2a\sqrt{2}$. (D) $3a$.

Lời giải.

Ta có

$$\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right|=\left|\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC}\right|=2\left|\overrightarrow{AC}\right|=2AC=2a\sqrt{2}.$$



Chọn đáp án (C) ....

CÂU 20. Cho tam giác ABC đều cạnh a. Khi đó, giá trị $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right|$ bằng

(A) $a\sqrt{3}$. (B) $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. (C) $2a$. (D) $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

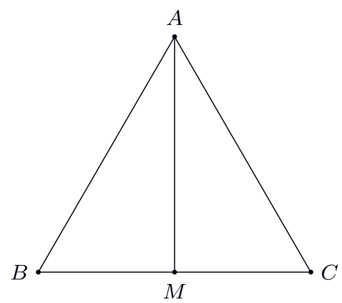
Lời giải.

Gọi M là trung điểm của BC.
Vì AM là đường trung tuyến của tam giác đều nên

$$AM=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot a=\frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Khi đó, ta có

$$\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right|=\left|2\overrightarrow{AM}\right|=2\cdot AM=2\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}=a\sqrt{3}.$$



Chọn đáp án (A) ....

CÂU 21. Cho tam giác đều ABC cạnh bằng 4. Độ dài $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ là

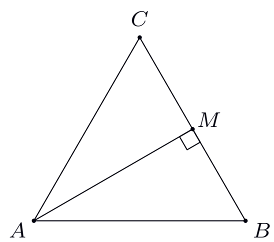
(A) $2\sqrt{3}$. (B) $\sqrt{5}$. (C) $\sqrt{6}$. (D) $4\sqrt{3}$.

Lời giải.

Gọi M là trung điểm của BC .
Vì AM là đường trung tuyến của tam giác đều cạnh 4 nên

$$AM=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 4=2\sqrt{3}.$$

Do đó $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right|=\left|2\overrightarrow{AM}\right|=2AM=4\sqrt{3}$.



Chọn đáp án (D) ....

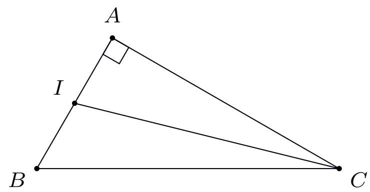
CÂU 22. Cho tam giác ABC vuông tại A và $AB=2$, $AC=3$. Độ dài của vectơ $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AC}$ bằng

(A) 5. (B) 40. (C) $\sqrt{13}$. (D) $2\sqrt{10}$.

Lời giải.

Gọi I là trung điểm của AB. Ta có

$$\left|\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AC}\right|=\left|\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CA}\right|=\left|2\overrightarrow{CI}\right|=2CI.$$



Tam giác AIC vuông tại A nên $CI=\sqrt{AI^2+AC^2}=\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}$.
Vậy $\left|\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AC}\right|=2\sqrt{10}$.

Chọn đáp án D .... □

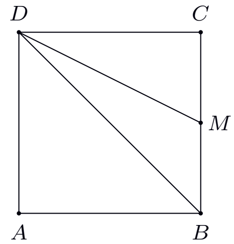
CÂU 23. Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng a. Tính $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DB}\right|$ theo a.

(A) $\dfrac{a\sqrt{5}}{2}$. (B) a. (C) $a\sqrt{5}$. (D) $a\sqrt{3}$.

Lời giải.

Gọi M là trung điểm của BC.

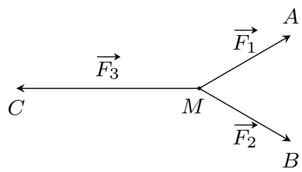
Ta có $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DB}\right|=\left|\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{DB}\right|=2\left|\overrightarrow{DM}\right|=2\sqrt{a^2+\left(\dfrac{a}{2}\right)^2}=a\sqrt{5}$.



Chọn đáp án C .... □

CÂU 24.
Cho ba lực $\overrightarrow{F_1}=\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{F_2}=\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{F_3}=\overrightarrow{MC}$ cùng tác động vào một vật tại điểm M và vật đứng yên. Cho biết cường độ của $\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_2}$ đều bằng 100N và $\widehat{AMB}=60^\circ$. Khi đó, cường độ lực của $\overrightarrow{F_3}$ bằng

(A) $50\sqrt{2}$N. (B) $50\sqrt{3}$N. (C) $25\sqrt{3}$N. (D) $100\sqrt{3}$N.

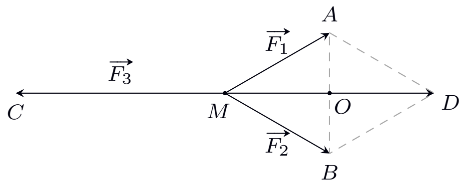


Lời giải.

Gọi D là đỉnh thứ tư của hình bình hành $MADB$ và O là tâm hình bình hành.
Khi đó, hợp lực $\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MD}=2\overrightarrow{MO}$.

Dễ thấy rằng $\triangle AMB$ là tam giác đều nên $MO=100\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Suy ra hợp lực $\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}$ có độ lớn $100\sqrt{3}$.
Vì điểm M đứng yên nên độ lớn của lực $\overrightarrow{F_3}$ là $100\sqrt{3}N$.



Chọn đáp án D .... □

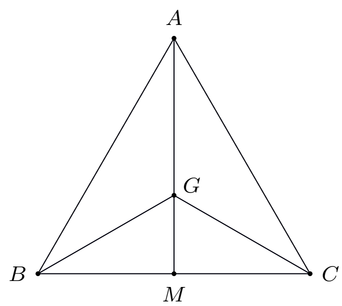
CÂU 25. Cho tam giác ABC là tam giác đều cạnh $2a$ với G là trọng tâm. Tính $\left|\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}\right|$.

(A) $\dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$. (B) $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. (C) $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. (D) $a\sqrt{3}$.

Lời giải.

Gọi M là trung điểm của BC.

Ta có $\left|\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}\right|=\left|2\overrightarrow{GM}\right|=2\cdot GM=2\cdot\dfrac{1}{3}\cdot AM=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{2a\sqrt{3}}{2}=\dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$.

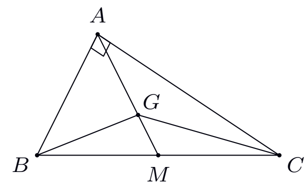


Chọn đáp án A .... □

CÂU 26. Gọi G là trọng tâm tam giác vuông ABC với cạnh huyền $BC=12$. vectơ $\overrightarrow{GB}-\overrightarrow{CG}$ có độ dài bằng bao nhiêu?

(A) 4. (B) $2\sqrt{3}$. (C) 8. (D) 2.

Lời giải.



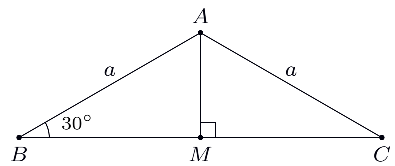
Gọi M là trung điểm của BC.
Ta có $\overrightarrow{GB}-\overrightarrow{CG}=\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=2\overrightarrow{GM}$.
Vì $\triangle ABC$ vuông tại A nên $AM=\dfrac{BC}{2}=6\Rightarrow GM=\dfrac{1}{3}AM=2$.
Vậy $\left|\overrightarrow{GB}-\overrightarrow{CG}\right|=2\left|\overrightarrow{GM}\right|=2GM=4$.

Chọn đáp án (A) .... □

CÂU 27. Tam giác ABC có $AB=AC=a$, $\widehat{ABC}=120^\circ$. Độ dài vectơ tổng $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ bằng

(A) $2a$. (B) $a\sqrt{3}$. (C) a. (D) $3a$.

Lời giải.



Gọi M là trung điểm của BC, ta có $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AM}$.
Tam giác ABC cân tại A có $\widehat{BAC}=120^\circ$ nên

$$\widehat{ABM}=\frac{1}{2}\left(180^\circ-120^\circ\right)=30^\circ.$$

Tam giác ABM vuông tại M có $\widehat{ABM}=30^\circ$ nên

$$AM=AB\cdot\sin 30^\circ=\frac{a}{2}.$$

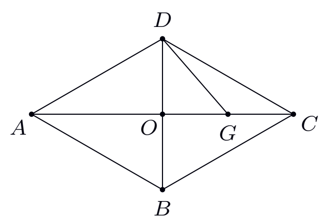
Vậy $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right|=2\left|\overrightarrow{AM}\right|=2AM=a$.

Chọn đáp án (C) .... □

CÂU 28. Cho hình thoi $ABCD$ cạnh a, tâm O và $\widehat{BAD}=60^\circ$. Độ dài vectơ $\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{CD}$ bằng

(A) $\dfrac{a\sqrt{7}}{2}$. (B) $\dfrac{a\sqrt{5}}{2}$. (C) $2a$. (D) $a\sqrt{3}$.

Lời giải.



Gọi G là trung điểm của đoạn OC.
Ta có $\left|\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{CD}\right|=\left|\overrightarrow{DO}+\overrightarrow{DC}\right|=2\left|\overrightarrow{DG}\right|=2DG$.
Tam giác DOG vuông tại O có $DO=\dfrac{a}{2}$, $OG=\dfrac{OC}{2}=\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$ nên

$$DG=\sqrt{DO^2+OG^2}=\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{a\sqrt{3}}{4}\right)^2}=\frac{a\sqrt{7}}{4}.$$

Suy ra $\left|\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{CD}\right|=2\cdot\dfrac{a\sqrt{7}}{4}=\dfrac{a\sqrt{7}}{2}$.

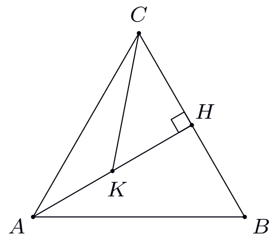
Chọn đáp án (A) .... □

CÂU 29. Cho tam giác ABC đều cạnh a, H là trung điểm của BC. Tính $\left|\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{HC}\right|$ bằng

(A) $\dfrac{2\sqrt{3}a}{3}$. (B) $\dfrac{a\sqrt{7}}{2}$. (C) $\dfrac{a}{2}$. (D) $\dfrac{3a}{2}$.

Lời giải.

Gọi K là trung điểm của AH. Khi đó



$$\left|\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{HC}\right|=\left|\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CH}\right|=\left|2\overrightarrow{CK}\right|=2CK.$$

Xét $\triangle KHC$ vuông tại H có $HC=\dfrac{a}{2}$, $KH=\dfrac{1}{2}AH=\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$. Do đó

$$CK=\sqrt{CH^2+HK^2}=\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{a\sqrt{3}}{4}\right)^2}=\frac{a\sqrt{7}}{4}.$$

Vậy $\left|\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{HC}\right|=\dfrac{a\sqrt{7}}{4}$.

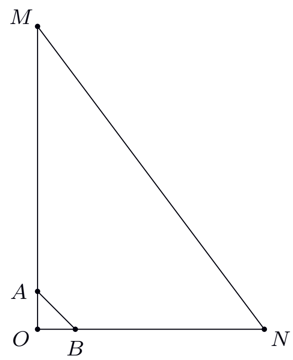
Chọn đáp án (B) .... □

CÂU 30. Cho tam giác OAB vuông cân tại O với $OA=OB=a$. Tính độ dài vectơ $\vec{u}=8\overrightarrow{OA}-6\overrightarrow{OB}$.

(A) $2a$. (B) $14a$. (C) $16a$. (D) $10a$.

Lời giải.

Lấy điểm M sao cho $\overrightarrow{OM}=8\overrightarrow{OA}$. Khi đó



$$OM=\left|\overrightarrow{OM}\right|=\left|8\overrightarrow{OA}\right|=8OA=8a.$$

Lấy điểm N sao cho $\overrightarrow{ON}=6\overrightarrow{OB}$. Khi đó

$$ON=\left|\overrightarrow{ON}\right|=\left|6\overrightarrow{OB}\right|=6OB=6a.$$

Vì $OA\perp OB$ nên $OM\perp ON$, hay $\triangle OMN$ vuông tại O. Do đó

$$\begin{aligned}|\vec{u}|&=\left|8\overrightarrow{OA}-6\overrightarrow{OB}\right|=\left|\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{ON}\right|\\&=\left|\overrightarrow{NM}\right|=MN=\sqrt{OM^2+ON^2}\\&=\sqrt{(8a)^2+(6a)^2}=10a.\end{aligned}$$

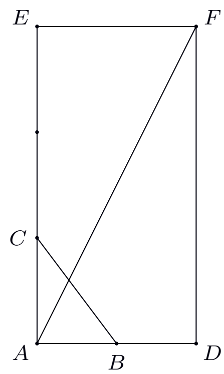
Chọn đáp án (D) .... □

CÂU 31. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB=3$, $AC=4$. Tính độ dài vec-tơ $\vec{u}=2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}$.

(A) $|\vec{u}|=18$. (B) $|\vec{u}|=6\sqrt{5}$. (C) $|\vec{u}|=9$. (D) $|\vec{u}|=5\sqrt{6}$.

Lời giải.

Gọi D, E là hai điểm thỏa $\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AE}=3\overrightarrow{AC}$.
Suy ra $AD=6$, $AE=12$.
Gọi F là điểm sao cho tứ giác $ADFE$ là hình chữ nhật.
Suy ra $AF=\sqrt{AD^2+AE^2}=\sqrt{6^2+12^2}=6\sqrt{5}$.
Ta có



$$\vec{u}=2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AF}.$$

Suy ra $|\vec{u}|=\left|\overrightarrow{AF}\right|=6\sqrt{5}$.

Chọn đáp án (B) .... □

CÂU 32. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC. Tập hợp điểm M trong mặt phẳng chứa tam giác ABC sao cho $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|=6$ là

(A) đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.
(B) đường tròn tâm G bán kính bằng 1.
(C) đường tròn tâm G bán kính bằng 2.
(D) đường tròn tâm G bán kính bằng 6.

Lời giải.

Ta có G là trọng tâm $\triangle ABC$ nên $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}$.

Do đó $\left|3\overrightarrow{MG}\right| = 6 \Leftrightarrow MG = 2$.

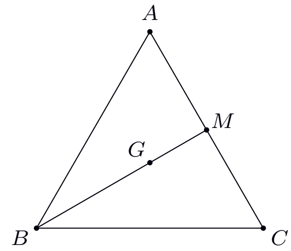
Vậy tập hợp điểm M là đường tròn tâm G bán kính bằng 2.

Chọn đáp án (C) .... □

CÂU 33. Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng $2a$ và G là trọng tâm của tam giác. Khi đó, giá trị $\left|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{GC}\right|$ là

(A) $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. (B) $\dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$. (C) $\dfrac{4a\sqrt{3}}{3}$. (D) $\dfrac{2a}{3}$.

Lời giải.



Vì G là trọng tâm của $\triangle ABC$ nên ta có $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

Do đó

$$\left|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{GC}\right| = \left|\overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GC}\right| = \left|\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GB}\right| = \left|2\overrightarrow{GB}\right| = 2GB.$$

Gọi M là trung điểm AC. Khi đó

$$GB = \frac{2}{3}BM = \frac{2}{3} \cdot 2a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2a\sqrt{3}}{3}.$$

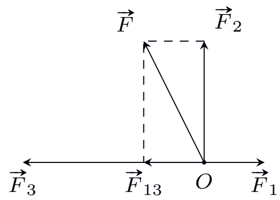
Suy ra $\left|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{GC}\right| = 2 \cdot \dfrac{2a\sqrt{3}}{3} = \dfrac{4a\sqrt{3}}{3}$.

Chọn đáp án (C) .... □

CÂU 34. Cho ba lực $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$ có cùng điểm đặt tại O. Trong đó, có hai lực $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ có phương hợp với nhau một góc 90° và lực $\vec{F}_3$ ngược hướng với lực $\vec{F}_1$. Ba lực $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$ có cường độ lần lượt là 100 N, 200 N và 300 N. Cường độ lực tổng hợp của ba lực $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$ là

(A) 400 N. (B) $100\sqrt{2}$ N. (C) 600 N. (D) $200\sqrt{2}$ N.

Lời giải.



Gọi $\vec{F}_{13} = \vec{F}_1 + \vec{F}_3$.

Vì $\vec{F}_1$ ngược hướng với $\vec{F}_3$ nên $F_{13} = |F_1 - F_3| = 200$ N.

Suy ra $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \vec{F}_{13} + \vec{F}_2$.

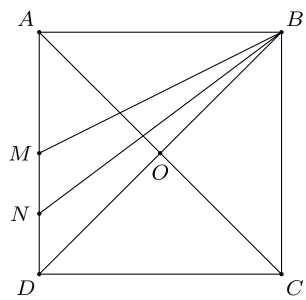
Do $\vec{F}_2 \perp \vec{F}_{13}$, suy ra $F = \sqrt{F_2^2 + F_{13}^2} = \sqrt{200^2 + 200^2} = 200\sqrt{2}$ N.

Chọn đáp án (D) .... □

CÂU 35. Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng 1. Độ dài của vectơ $\vec{u} = 12\overrightarrow{AC} - 7\overrightarrow{AB}$ bằng

(A) $|\vec{u}| = 17$. (B) $|\vec{u}| = 5$. (C) $|\vec{u}| = 13$. (D) $|\vec{u}| = 12\sqrt{2} - 7$.

Lời giải.



Gọi O, M, N lần lượt là tâm của hình vuông $ABCD$, trung điểm của đoạn AD, trung điểm của đoạn DM. Ta có

$$\begin{aligned} 12\overrightarrow{AC} - 7\overrightarrow{AB} &= 6\overrightarrow{AO} - 6\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AB} = 6\overrightarrow{BO} - \overrightarrow{AB} \\ &= 3\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BA} = 2\overrightarrow{BD} + \left(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BA}\right) \\ &= 2\overrightarrow{BD} + 2\overrightarrow{BM} = 2\left(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BM}\right) \\ &= 2 \cdot 2\overrightarrow{BN} = 4\overrightarrow{BN}. \end{aligned}$$

Do đó $|\vec{u}| = 4BN$.

Xét $\triangle ABN$ vuông tại A, có $BN = \sqrt{AB^2 + AN^2} = \sqrt{1^2 + \left(\dfrac{3}{4}\right)^2} = \dfrac{5}{4}$.

Vậy $|\vec{u}| = 4 \cdot \dfrac{5}{4} = 5$.

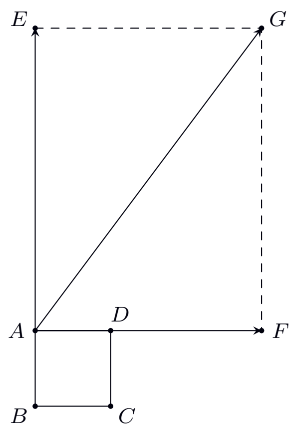
Chọn đáp án (B) .... □

CÂU 36. Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng 1. Độ dài của vectơ $\vec{u} = 3\overrightarrow{AC} - 7\overrightarrow{AB}$ là

(A) $|\vec{u}| = 5$. (B) $|\vec{u}| = 12\sqrt{2} - 7$. (C) $|\vec{u}| = 17$. (D) $|\vec{u}| = 13$.

Lời giải.

Ta có $\vec{u} = 3\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right) - 7\overrightarrow{AB} = -4\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AD}$.
Dựng E, F, G sao cho $\overrightarrow{AE} = -4\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AF} = 3\overrightarrow{AD}$ và $AEGF$ là hình bình hành.
Vì $AB \perp AD$ nên $AE \perp AF$. Do đó $AEGF$ là hình chữ nhật.
Vậy $\vec{u} = \overrightarrow{AG}$ và $|\vec{u}| = \left|\overrightarrow{AG}\right| = AG = EF = \sqrt{AE^2 + AF^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$.



Chọn đáp án (A) .... □

2 Chứng minh đẳng thức vectơ, thu gọn biểu thức

Phương pháp giải

- Cách 1: Biến đổi thẳng VT về VP hoặc ngược lại.
- Cách 2: Biến đổi VT và VP về cùng bằng một biểu thức trung gian.
- Cách 3: Chứng minh VT-VT$=\vec{0}$.

Khi thực hiện các phép biến đổi cần lưu ý

a) *Quy tắc ba điểm:* Với ba điểm A, B, C bất kì ta luôn có $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$.

b) *Quy tắc hình bình hành:* Với hình bình hành $ABCD$ ta luôn có $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.

c) *Quy tắc hiệu vectơ:* Với ba điểm A, B, O bất kì ta luôn có $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AB}$.

d) *Tính chất trung điểm của đoạn thẳng:* Cho đoạn thẳng AB ta có

$$\begin{aligned} I \text{ là trung điểm của } AB &\Leftrightarrow \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0} \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}, M \text{ là điểm bất kì.} \end{aligned}$$

e) *Tính chất trọng tâm tam giác:* Cho tam giác ABC ta có

$$\begin{aligned} G \text{ là trọng tâm tam giác } ABC &\Leftrightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}. \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}, M \text{ là điểm bất kì .} \end{aligned}$$

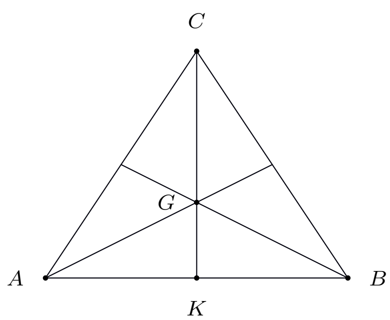
f) *Các tính chất của phép cộng, trừ vectơ và phép nhân một số với một vectơ.*

1. Ví dụ minh họa

VÍ DỤ 1. Cho tam giác ABC với trọng tâm G. Chứng minh rằng $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} = 3\overrightarrow{CG}$.

Lời giải.

Gọi K là trung điểm của AB thì $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} = 2\overrightarrow{CK}$. (1)
Vì G là trọng tâm của tam giác ABC nên $\overrightarrow{CG} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{CK}$, tức là $3\overrightarrow{CG} = 2\overrightarrow{CK}$. (2)
Từ (1) và (2) ta có $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} = 3\overrightarrow{CG}$.

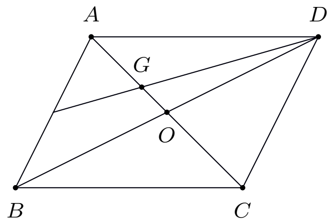


VÍ DỤ 2. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi G là trọng tâm tam giác ABD. Chứng minh rằng

$$\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 9\overrightarrow{AG}.$$

Lời giải.

Vì $ABCD$ là hình bình hành nên ta có $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$.
Suy ra

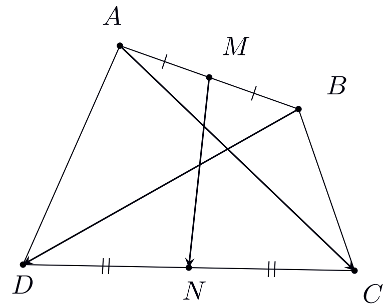


$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD} &= \left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)+2\overrightarrow{AC}\\ &= \overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{AC}. \qquad (1)\end{aligned}$$

Gọi O là tâm hình bình hành $ABCD$.
Vì G là trọng tâm tam giác ABD nên ta có $\overrightarrow{AG}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AO}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}$. Suy ra $\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{AG}$. (2)
Từ (1) và (2) ta có $\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=9\overrightarrow{AG}$.

VÍ DỤ 3. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm các đoạn thẳng AB và CD. Chứng minh rằng $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{MN}$.

Lời giải.
Cách 1. Ta có



$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC}&=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NC},\\ \overrightarrow{BD}&=\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{ND}.\end{aligned}$$

Cộng hai đẳng thức trên theo vế ta được:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD} &= 2\overrightarrow{MN}+\left(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BM}\right)+\left(\overrightarrow{NC}+\overrightarrow{ND}\right)\\ &= 2\overrightarrow{MN}.\end{aligned}$$

(Vì $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BM}=\vec{0}$ và $\overrightarrow{NC}+\overrightarrow{ND}=\vec{0}$).
Cách 2. Ta có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MN}&=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CN},\\ \overrightarrow{MN}&=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DN}.\end{aligned}$$

Cộng hai đẳng thức trên theo vế ta được

$$\begin{aligned}2\overrightarrow{MN} &= \left(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BM}\right)+\left(\overrightarrow{NC}+\overrightarrow{ND}\right)+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}\\ &= \overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}.\end{aligned}$$

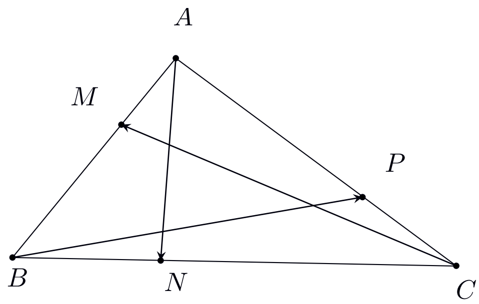
(Vì $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BM}=\vec{0}$ và $\overrightarrow{NC}+\overrightarrow{ND}=\vec{0}$).

Ta cũng có đẳng thức $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{MN}$. Học sinh chứng minh tương tự.

VÍ DỤ 4. Cho tam giác ABC. Lần lượt lấy các điểm M, N, P trên các đoạn thẳng AB, BC và CA sao cho $AM=\dfrac{1}{3}AB$, $BN=\dfrac{1}{3}BC$, $CP=\dfrac{1}{3}CA$. Chứng minh rằng

$$\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{CM}=\vec{0}.$$

Lời giải.
Ta có



$$\begin{aligned}&\overrightarrow{BN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}\Leftrightarrow \overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AB}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}. && (1)\\ &\overrightarrow{CP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CA}\Leftrightarrow \overrightarrow{BP}-\overrightarrow{BC}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CA}. && (2)\\ &\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow \overrightarrow{CM}-\overrightarrow{CA}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}. && (3)\end{aligned}$$

Từ (1), (2) và (3) ta suy ra

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{CM}-\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}\right)=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}\right)\\ \Leftrightarrow\ &\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{CM}=\frac{4}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}\right)\\ \Leftrightarrow\ &\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{CM}=\frac{4}{3}\vec{0}\\ \Leftrightarrow\ &\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{CM}=\vec{0}.\end{aligned}$$

VÍ DỤ 5. Cho hình bình hành $ABCD$ có tâm O. Gọi M là một điểm bất kì. Chứng minh rằng

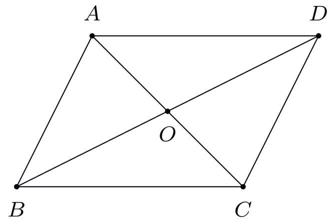
a) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$.

b) $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=4\overrightarrow{MO}$.

Lời giải.

a) Chứng minh $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$.

Vì O là trung điểm của AC và BD nên ta có



$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\vec{0},$$
$$\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}.$$

Do đó $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$.

b) Theo quy tắc ba điểm ta có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MA}&=\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OA},\\ \overrightarrow{MB}&=\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OB},\\ \overrightarrow{MC}&=\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OC},\\ \overrightarrow{MD}&=\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OD}.\end{aligned}$$

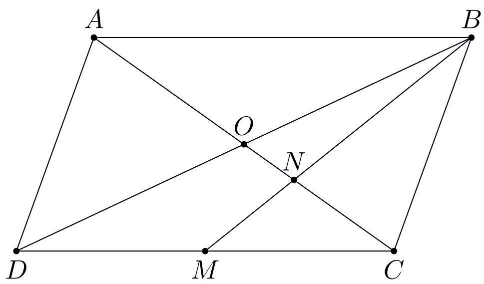
Suy ra $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=4\overrightarrow{MO}+\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\right)$.
Theo ý a) ta có $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$.
Vậy $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=4\overrightarrow{MO}$ với M là điểm bất kì.

VÍ DỤ 6. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi M là trung điểm CD. Lấy N trên đoạn BM sao cho $BN=2MN$. Chứng minh rằng

a) $3\overrightarrow{AB}+4\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{ND}+\overrightarrow{MN}$,

b) $4\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{BD}=3\overrightarrow{AN}$.

Lời giải.



a) Ta có

$$VT=3\overrightarrow{AB}+4\overrightarrow{CD}=3(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD})+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CD}.\qquad(1)$$
$$VP=\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{ND}=\overrightarrow{CD}.\qquad(2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $VT=VP$.

b) Ta có N thuộc đoạn BM và $BN=2MN$ nên N là trọng tâm của tam giác BCD.
Ta có

$$\begin{aligned}VP&=3\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AC}.\\ VT&=4\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{BD}\\ &=2\overrightarrow{AB}+2(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD})\\ &=2\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AD}\\ &=2\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{BC}\\ &=2\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right)=2\overrightarrow{AC}.\end{aligned}$$

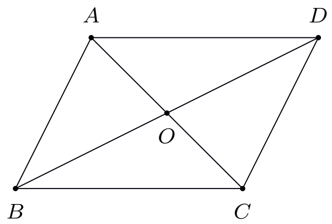
Vậy $4\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{BD}=3\overrightarrow{AN}$

2. Bài tập áp dụng

BÀI 1. Cho hình bình hành $ABCD$ có tâm O. Chứng minh rằng
$$\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BD}=4\overrightarrow{OD}.$$

Lời giải.

Ta có
$$\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{BD}=4\overrightarrow{OD}.$$



BÀI 2. Gọi G và G' lần lượt là trọng tâm của tam giác ABC và $A'B'C'$. Chứng minh rằng
$$\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}=3\overrightarrow{GG'}.$$

Lời giải.

Áp dụng quy tắc ba điểm, ta có
$$\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GG'}+\overrightarrow{GA'},$$
$$\overrightarrow{BB'}=\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{GG'}+\overrightarrow{GB'},$$
$$\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{CG}+\overrightarrow{GG'}+\overrightarrow{GC'}.$$

Suy ra $\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}=3\overrightarrow{GG'}+\left(\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{CG}\right)+\left(\overrightarrow{GA'}+\overrightarrow{GB'}+\overrightarrow{GC'}\right)$.

Vì G và G' lần lượt là trọng tâm của tam giác ABC và $A'B'C'$ nên ta có
$$\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{CG}=\vec{0},$$
$$\overrightarrow{GA'}+\overrightarrow{GB'}+\overrightarrow{GC'}=\vec{0}.$$

Vậy $\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}=3\overrightarrow{GG'}$.

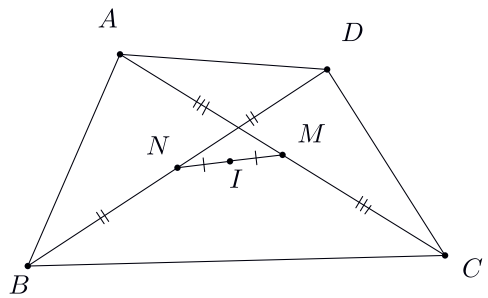
BÀI 3. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M, N, I lần lượt là trung điểm của AC, BD và MN. Chứng minh rằng

a) $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}=\vec{0}$,

b) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=4\overrightarrow{OI}$ (với O là điểm bất kì).

Lời giải.

a) Vì M, N lần lượt là trung điểm của AC và BD nên ta có



$$\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IC}=2\overrightarrow{IM},$$
$$\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{ID}=2\overrightarrow{IN}.$$

Suy ra
$$\begin{aligned}\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID} &= \left(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IC}\right)+\left(\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{ID}\right)\\ &= 2\left(\overrightarrow{IM}+\overrightarrow{IN}\right).\end{aligned}$$

Mặt khác I là trung điểm của MN nên $\overrightarrow{IM}+\overrightarrow{IN}=\vec{0}$.

Vậy $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}=2\vec{0}=\vec{0}$.

b) Với điểm O bất kì ta có
$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=2\overrightarrow{OM},$$
$$\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}=2\overrightarrow{ON},$$
$$\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}=2\overrightarrow{OI}.$$

Do đó
$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD} &= \left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}\right)+\left(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}\right)\\ &= 2\overrightarrow{OM}+2\overrightarrow{ON}\\ &= 2\left(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}\right)\\ &= 4\overrightarrow{OI}.\end{aligned}$$

BÀI 4. Cho tam giác ABC không vuông. Gọi G, H, O lần lượt là trọng tâm, trực tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Gọi D là điểm đối xứng của A qua O và M là trung điểm của cạnh BC. Chứng minh

a) $\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=\overrightarrow{HD}$.

b) $\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=2\overrightarrow{HO}$.

c) $\overrightarrow{HA}-\overrightarrow{HB}-\overrightarrow{HC}=2\overrightarrow{OA}$.

d) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OH}$.

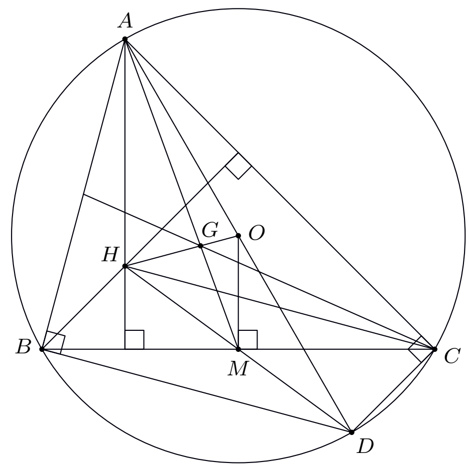
e) $\overrightarrow{OH}=3\overrightarrow{OG}$.

f) $\overrightarrow{AH}=2\overrightarrow{OM}$.

Lời giải.

a) Chứng minh $\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=\overrightarrow{HD}$.

Ta có $BH \parallel CD$ (vì cùng vuông góc với AC).
Và $BD \parallel CH$ (vì cùng vuông góc với AB).
Suy ra $BDCH$ là hình bình hành.
Vậy $\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=\overrightarrow{HD}$ (quy tắc hình bình hành).



b) Chứng minh $\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=2\overrightarrow{HO}$.
Ta có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC} &= \overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HD} \text{ (theo ý trên)}\\ &= 2\overrightarrow{HO} \text{ (vì } O \text{ là trung điểm của } AD).\end{aligned}$$

c) Chứng minh $\overrightarrow{HA}-\overrightarrow{HB}-\overrightarrow{HC}=2\overrightarrow{OA}$.
Ta có

$$\overrightarrow{HA}-\overrightarrow{HB}-\overrightarrow{HC}=\overrightarrow{HA}-\left(\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}\right)=\overrightarrow{HA}-\overrightarrow{HD}=\overrightarrow{DA}=2\overrightarrow{OA}.$$

d) Chứng minh $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OH}$.
Ta có

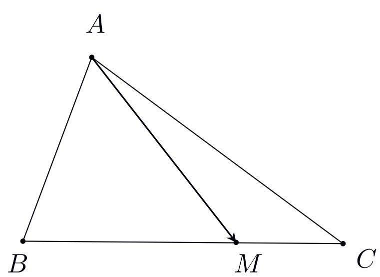
$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC} &= 3\overrightarrow{OH}+\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC} \text{ (Quy tắc 3 điểm)}\\ &= 3\overrightarrow{OH}+2\overrightarrow{HO} \text{ (theo ý (2))}\\ &= \overrightarrow{OH}.\end{aligned}$$

e) Chứng minh $\overrightarrow{OH}=3\overrightarrow{OG}$.
Theo ý (4) ta có $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OH}$.
Mặt khác, G là trọng tâm tam giác ABC nên $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=3\overrightarrow{OG}$.
Suy ra $\overrightarrow{OH}=3\overrightarrow{OG}$.

f) Chứng minh $\overrightarrow{AH}=2\overrightarrow{OM}$.
Trong tam giác AHD, ta có OM là đường trung bình nên $\overrightarrow{AH}=2\overrightarrow{OM}$.

BÀI 5. Cho tam giác ABC. Gọi M là điểm trên cạnh BC sao cho $MB=2MC$. Biết rằng $\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}=x\overrightarrow{AM}$. Tìm x.

Lời giải.



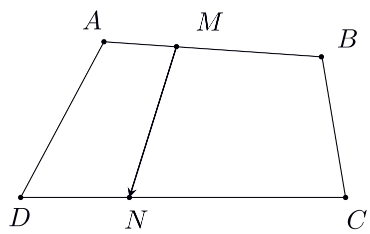
$$\begin{aligned} M \text{ là điểm thuộc cạnh } BC \text{ và } MB = 2MC &\Leftrightarrow \overrightarrow{MB} = -2\overrightarrow{MC} \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AM} = -2(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AM}) \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AM}. \end{aligned}$$

BÀI 6. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M, N lần lượt thuộc các đoạn thẳng AB, CD sao cho $MB = 2MA$ và $NC = 2ND$. Biết rằng $2\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} = x\overrightarrow{MN}$. Tìm x.

Lời giải.

Vì M, N lần lượt thuộc các đoạn thẳng AB, CD sao cho $MB = 2MA$ và $NC = 2ND$ nên ta có $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$ và $2\overrightarrow{DN} + \overrightarrow{CN} = \vec{0}$.

Áp dụng quy tắc ba điểm, ta có



$$\begin{aligned} &\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN}. \quad (1) \\ &\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CN} \\ \Rightarrow\ &2\overrightarrow{MN} = 2\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{CN}. \quad (2) \end{aligned}$$

Cộng (1) và (2) vế theo vế ta được

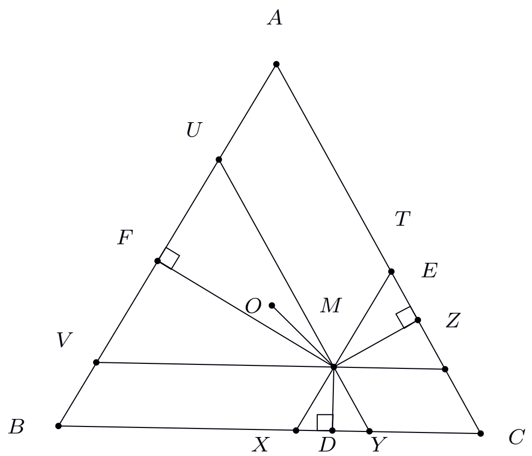
$$\begin{aligned} &3\overrightarrow{MN} = \left(2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right) + 2\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} + \left(2\overrightarrow{DN} + \overrightarrow{CN}\right) \\ \Leftrightarrow\ &3\overrightarrow{MN} = 2\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} \\ \Leftrightarrow\ &\overrightarrow{MN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}. \end{aligned}$$

BÀI 7. Cho tam giác đều ABC tâm O. Lấy M là một điểm bất kì trong tam giác. Gọi D, E, F lần lượt là hình chiếu của M trên BC, CA, AB. Biết rằng $\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF} = x\overrightarrow{MO}$, tìm x.

Lời giải.

Qua điểm M dựng

- đường thẳng song song với BC, cắt các cặp đường thẳng AB, AC tại V, Z;
- đường thẳng song song với AB, cắt các cặp đường thẳng AC, BC tại T, X;
- đường thẳng song song với BC, cắt các cặp đường thẳng AB, AC tại V, Z.



Ta thấy các tứ giác $MTAU$, $MVBX$, $MYCZ$ là các hình bình hành và các điểm D, E, F tương ứng là trung điểm của XY, ZT, UV.

Từ đó suy ra

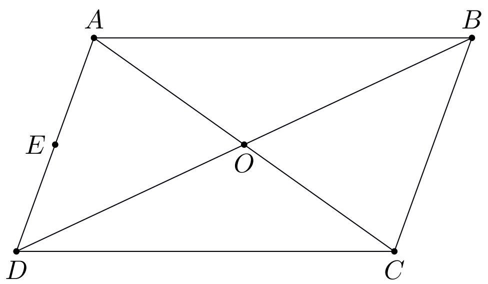
$$\begin{aligned} \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF} &= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{MX} + \overrightarrow{MY}\right) + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{MZ} + \overrightarrow{MT}\right) + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{MU} + \overrightarrow{MV}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{MT} + \overrightarrow{MU}\right) + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{MV} + \overrightarrow{MX}\right) + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{MY} + \overrightarrow{MZ}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right) \\ &= \frac{3}{2}\overrightarrow{MO}. \end{aligned}$$

BÀI 8. Cho hình bình hành $ABCD$ có tâm O và E là trung điểm AD. Tìm các số thực x và y biết rằng

a) $\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EB} + 2\overrightarrow{EC} = x\overrightarrow{AB}$.

b) $\overrightarrow{EB} + 2\overrightarrow{EA} + 4\overrightarrow{ED} = y\overrightarrow{EC}$.

Lời giải.



a) Theo tính chất trung điểm ta có $4\overrightarrow{EO} = 2\overrightarrow{AB}$.
Khi đó

$$\begin{aligned}\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EB} + 2\overrightarrow{EC} &= \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EB} + 2\overrightarrow{EC} \\ &= \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{EC} \\ &= 2\left(\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EC}\right) + \overrightarrow{AB} \\ &= 4\overrightarrow{EO} + \overrightarrow{AB} \\ &= 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AB}.\end{aligned}$$

b) Ta có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{EB} + 2\overrightarrow{EA} + 4\overrightarrow{ED} &= \overrightarrow{EB} + 2\overrightarrow{EA} + 4\overrightarrow{ED} \\ &= \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{ED} + 2\left(\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{ED}\right) \\ &= \left(\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{ED}\right) + \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{AB} \\ &= \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{EC}.\end{aligned}$$

BÀI 9. Cho tam giác ABC. Dựng bên ngoài tam giác các hình bình hành $ABIF$, $BCPQ$, $CARS$. Biết rằng $\overrightarrow{RF} + \overrightarrow{IQ} + \overrightarrow{PS} = x(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$. Tìm x.

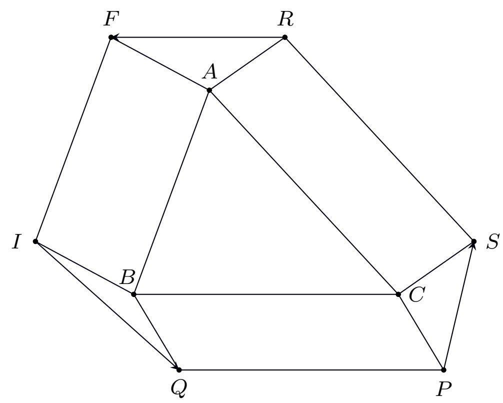
Lời giải.

Ta có $\begin{cases}\overrightarrow{RF} = \overrightarrow{RA} + \overrightarrow{AF} & (1) \\ \overrightarrow{IQ} = \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BQ} & (2) \\ \overrightarrow{PS} = \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{CS}. & (3)\end{cases}$

Cộng vế theo vế của (1), (2), (3), ta được

$$\overrightarrow{RF} + \overrightarrow{IQ} + \overrightarrow{PS} = \underbrace{(\overrightarrow{RA} + \overrightarrow{CS})}_{\vec{0}} + \underbrace{(\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{IB})}_{\vec{0}} + \underbrace{(\overrightarrow{BQ} + \overrightarrow{PC})}_{\vec{0}}.$$

Suy ra $\overrightarrow{RF} + \overrightarrow{IQ} + \overrightarrow{PS} = \vec{0}$.



BÀI 10. Dựng bên ngoài tứ giác $ABCD$ các hình bình hành $ABEF$, $BCGH$, $CDIJ$, $DAKL$.

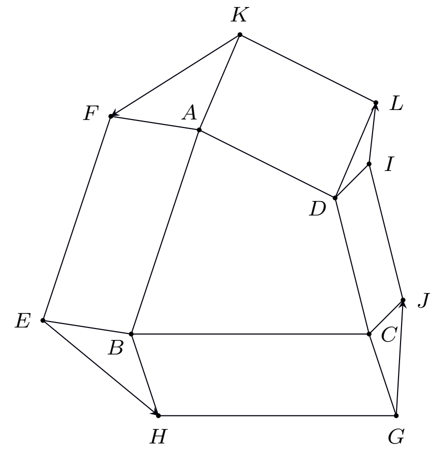
a) Chứng minh rằng $\overrightarrow{KF} + \overrightarrow{EH} + \overrightarrow{GJ} + \overrightarrow{IL} = \vec{0}$.

b) Chứng minh rằng $\overrightarrow{EL} - \overrightarrow{HI} = \overrightarrow{FK} - \overrightarrow{GJ}$.

Lời giải.

a) Chứng minh rằng $\overrightarrow{KF} + \overrightarrow{EH} + \overrightarrow{GJ} + \overrightarrow{IL} = \vec{0}$.

Ta có



$$\overrightarrow{KF} = \overrightarrow{KA} + \overrightarrow{AF}. \quad (1)$$
$$\overrightarrow{EH} = \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BH}. \quad (2)$$
$$\overrightarrow{GJ} = \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{CJ}. \quad (3)$$
$$\overrightarrow{IL} = \overrightarrow{ID} + \overrightarrow{DL}. \quad (4)$$

Cộng vế theo vế của (1), (2), (3), (4) ta được

$$\begin{aligned} &\overrightarrow{KF} + \overrightarrow{EH} + \overrightarrow{GJ} + \overrightarrow{IL} \\ = \ &\underbrace{(\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{DL})}_{\vec{0}} + \underbrace{(\overrightarrow{EB} + \overrightarrow{AF})}_{\vec{0}} + \underbrace{(\overrightarrow{BH} + \overrightarrow{GC})}_{\vec{0}} + \underbrace{(\overrightarrow{CJ} + \overrightarrow{ID})}_{\vec{0}}. \end{aligned}$$

Suy ra $\overrightarrow{KF} + \overrightarrow{EH} + \overrightarrow{GJ} + \overrightarrow{IL} = \vec{0}$ (đpcm).

b) Chứng minh rằng $\overrightarrow{EL} - \overrightarrow{HI} = \overrightarrow{FK} - \overrightarrow{GJ}$.
Ta có

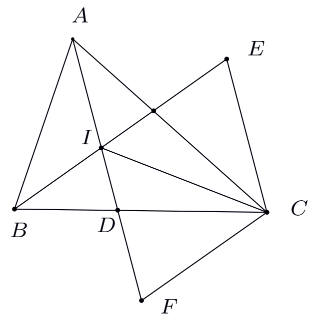
$$\begin{aligned} \overrightarrow{EL} - \overrightarrow{HI} &= \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DL} - \left(\overrightarrow{HG} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DI}\right) \\ &= \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{DL} - \left(\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{DI}\right) \left(\text{vì } BCGH \text{ là hình bình hành nên } \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{HG}\right) \\ &= \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{AK} - \left(\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{CJ}\right) \\ &= \overrightarrow{FK} - \overrightarrow{GJ}. \end{aligned}$$

(Vì $ABEF$, $ADLK$, $CDIJ$ là các hình bình hành nên $\overrightarrow{EB} = \overrightarrow{FA}$, $\overrightarrow{DL} = \overrightarrow{AK}$, $\overrightarrow{DI} = \overrightarrow{CJ}$.)

BÀI 11. Cho đường tròn (I) nội tiếp tam giác ABC có $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$. Chứng minh rằng

$$a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC} = \vec{0}.$$

Lời giải.



Qua C dựng đường thẳng song song với IA, cắt đường thẳng BI tại E.
Qua C dựng đường thẳng song song với IB, cắt đường thẳng AI tại F.
$IECF$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{IC} = \overrightarrow{IE} + \overrightarrow{IF}$. (1).
Gọi D là giao điểm của AI và BC. Vì $ID \parallel CE$ và AD là đường phân giác nên ta có

$$\frac{BI}{IE} = \frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{c}{b} \Rightarrow \overrightarrow{IE} = -\frac{b}{c}\overrightarrow{IB}. \qquad (2)$$

Tương tự ta chứng minh được $\overrightarrow{IF} = -\dfrac{a}{c}\overrightarrow{IA}$. (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra

$$\overrightarrow{IC} = -\frac{b}{c}\overrightarrow{IB} - \frac{a}{c}\overrightarrow{IA} \Leftrightarrow a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC} = \vec{0}.$$

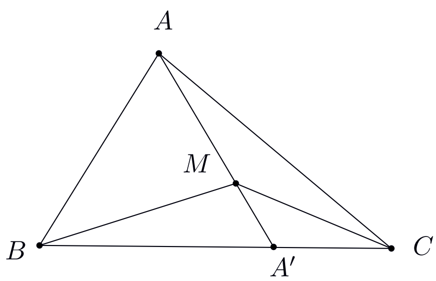
Bài tập tương tự: Cho đường tròn (I) nội tiếp tam giác ABC. Chứng minh rằng

$$\sin A \cdot \overrightarrow{IA} + \sin B \cdot \overrightarrow{IB} + \sin C \cdot \overrightarrow{IC} = \vec{0}.$$

BÀI 12. Cho tam giác ABC và một điểm M bất kì nằm trong tam giác ABC. Đặt $S_{MBC} = S_a$, $S_{MCA} = S_b$, $S_{MAB} = S_c$. Chứng minh rằng

$$S_a\overrightarrow{MA} + S_b\overrightarrow{MB} + S_c\overrightarrow{MC} = \vec{0}.$$

Lời giải.



Gọi A' là giao điểm của đường thẳng MA với BC.

Ta có $\overrightarrow{MA'} = \dfrac{A'C}{BC}\overrightarrow{MB} + \dfrac{A'B}{BC}\overrightarrow{MC}$.

Mà $\dfrac{A'C}{A'B} = \dfrac{S_{MA'C}}{S_{MA'B}} = \dfrac{S_{MAC}}{S_{MAB}} = \dfrac{S_b}{S_c}$ nên

$$\frac{A'C}{BC} = \frac{S_b}{S_b + S_c}, \ \frac{A'B}{BC} = \frac{S_c}{S_c + S_b}.$$

Suy ra $\overrightarrow{MA'} = \dfrac{S_b}{S_b + S_c}\overrightarrow{MB} + \dfrac{S_c}{S_b + S_c}\overrightarrow{MC}$. (1)

Mặt khác

$$\frac{MA'}{MA}=\frac{S_{MA'B}}{S_{MAB}}=\frac{S_{MA'C}}{S_{MAC}}=\frac{S_{MA'B}+S_{MA'C}}{S_{MAB}+S_{MAC}}=\frac{S_a}{S_b+S_c}\Rightarrow \overrightarrow{MA'}=\frac{-S_a}{S_b+S_c}\overrightarrow{MA}. \qquad (2)$$

Thay (2) vào (1) ta được

$$-S_a\overrightarrow{MA}=S_b\overrightarrow{MB}+S_c\overrightarrow{MC}\Leftrightarrow S_a\overrightarrow{MA}+S_b\overrightarrow{MB}+S_c\overrightarrow{MC}=\vec{0}.$$

a) Cho M trùng với trọng tâm G của tam giác ABC, ta được $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.

b) Cho M trùng với tâm đường tròn nội tiếp I của tam giác ABC, ta được kết quả

$$a\overrightarrow{IA}+b\overrightarrow{IB}+c\overrightarrow{IC}=\vec{0}.$$

c) Nếu tam giác ABC đều thì với điểm M bất kì trong tam giác, Ta có

$$x\overrightarrow{MA}+y\overrightarrow{MB}+z\overrightarrow{MC}=\vec{0},$$

trong đó x,y,z lần lượt là khoảng cách từ M đến các cạnh BC, CA và AB.

d) Khi M nằm ngoài tam giác ABC, ta có các kết quả như sau

(a) Nếu M thuộc góc $\widehat{BAC}$ và góc đối đỉnh của nó thì

$$-S_a\overrightarrow{MA}+S_b\overrightarrow{MB}+S_c\overrightarrow{MC}=\vec{0}.$$

(b) Nếu M thuộc góc $\widehat{ABC}$ và góc đối đỉnh của nó thì

$$S_a\overrightarrow{MA}-S_b\overrightarrow{MB}+S_c\overrightarrow{MC}=\vec{0}.$$

(c) Nếu M thuộc góc $\widehat{ACB}$ và góc đối đỉnh của nó thì

$$S_a\overrightarrow{MA}+S_b\overrightarrow{MB}-S_c\overrightarrow{MC}=\vec{0}.$$

3. Bài tập trắc nghiệm

CÂU 1. Cho tam giác ABC có trọng tâm G. Gọi M là trung điểm AB. Chọn mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau:

A. $\overrightarrow{CM}=-3\overrightarrow{MG}$.

B. $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{AC}$.

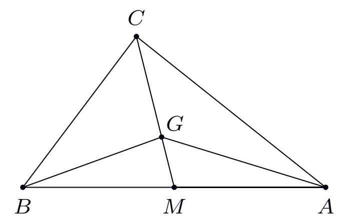
C. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{AG}$.

D. $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=3\overrightarrow{OG}$, O là điểm bất kì.

Lời giải.

Vì G là trọng tâm tam giác ABC nên ta có

$$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}.$$



Chọn đáp án B ....

CÂU 2. Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O. Khẳng định nào sau đây là **đúng**?

A. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AC}$.

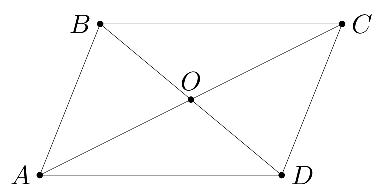
B. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AO}$.

C. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{CA}$.

D. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BD}$.

Lời giải.

Theo quy tắc hình bình hành ta có $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$.
Mặt khác O là trung điểm AC nên $\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AO}$.
Vậy $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AO}$.



Chọn đáp án B ....

CÂU 3. Cho I là trung điểm của đoạn thẳng AB. Với điểm M bất kỳ, ta luôn có

A. $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MI}$.

B. $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MI}$.

C. $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=3\overrightarrow{MI}$.

D. $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{MI}$.

Lời giải.

Áp dụng tính chất trung điểm của đoạn thẳng: Với điểm M bất kỳ, ta luôn có $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MI}$.

Chọn đáp án (B)

CÂU 4. Cho G là trọng tâm của tam giác ABC. Với mọi điểm M, ta luôn có:

(A) $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MG}$.
(B) $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{MG}$.
(C) $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}$.
(D) $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=4\overrightarrow{MG}$.

Lời giải.

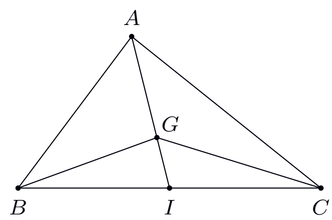
Áp dụng tính chất trọng tâm của tam giác: Với mọi điểm M, ta luôn có $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}$.

Chọn đáp án (C)

CÂU 5. Cho $\triangle ABC$ có G là trọng tâm, I là trung điểm BC. Đẳng thức nào đúng?

(A) $\overrightarrow{GA}=2\overrightarrow{GI}$.
(B) $\overrightarrow{IG}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{IA}$.
(C) $\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=2\overrightarrow{GI}$.
(D) $\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{GA}$.

Lời giải.



Áp dụng tính chất trung điểm của đoạn thẳng, ta có $\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=2\overrightarrow{GI}$.

Chọn đáp án (C)

CÂU 6. Khẳng định nào sau đây **không phải** là điều kiện cần và đủ để G là trọng tâm ΔABC, với M là trung điểm của BC và O là điểm bất kì?

(A) $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$.
(B) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+3\overrightarrow{OG}=\vec{0}$.
(C) $\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{CG}=\vec{0}$.
(D) $\overrightarrow{GM}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{GA}$.

Lời giải.

Xét khẳng định $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+3\overrightarrow{OG}=\vec{0}$, ta có
$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+3\overrightarrow{OG}=\vec{0}\Leftrightarrow 6\overrightarrow{OG}=\vec{0}\Leftrightarrow G\equiv O$ với mọi điểm O (vô lí).
Vậy khẳng định $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+3\overrightarrow{OG}=\vec{0}$ không phải là điều kiện cần và đủ để G là trọng tâm ΔABC.

Chọn đáp án (B)

CÂU 7. Cho I là trung điểm của đoạn thẳng AB. Với M là một điểm bất kỳ, tìm đẳng thức **đúng**.

(A) $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MI}$.
(B) $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{MI}$.
(C) $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MI}$.
(D) $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{IM}$.

Lời giải.

Áp dụng tính chất trung điểm.

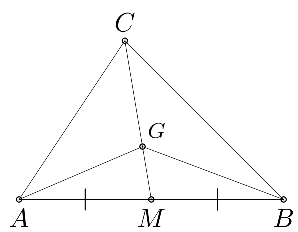
Chọn đáp án (A)

CÂU 8. Cho tam giác ABC có trọng tâm G và M là trung điểm của AB. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

(A) $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.
(B) $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}=2\overrightarrow{GM}$.
(C) $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}$.
(D) $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}$.

Lời giải.

- Vì G là trọng tâm của tam giác ABC nên $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.
- Vì M là trung điểm của AB nên $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}=2\overrightarrow{GM}$. ($G$ có thể tùy ý)
- Vì G là trọng tâm của tam giác ABC nên $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}$. ($M$ có thể tùy ý)
- $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}$ là mệnh đề **sai**.



Chọn đáp án (C)

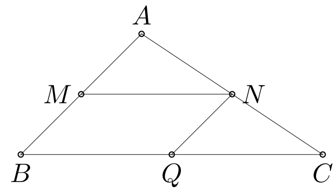
CÂU 9. Cho $\triangle ABC$ có M, Q, N lần lượt là trung điểm của AB, BC, CA. Khi đó vectơ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{BQ}$ là vectơ nào sau đây?

A $\vec{0}$. **B** $\overrightarrow{BC}$. **C** $\overrightarrow{AQ}$. **D** $\overrightarrow{CB}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{BQ} &= \overrightarrow{NA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{BQ}\\ &= \overrightarrow{NM}+\overrightarrow{BQ}\\ &= \vec{0}.\end{aligned}$$



Chọn đáp án (A) ....

CÂU 10. Cho $\triangle ABC$ và điểm I thỏa mãn $\overrightarrow{IA}=3\overrightarrow{IB}$. Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

A $\overrightarrow{CI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}-\frac{3}{2}\overrightarrow{CB}$. **B** $\overrightarrow{CI}=\overrightarrow{CA}-3\overrightarrow{CB}$. **C** $\overrightarrow{CI}=\frac{3}{2}\overrightarrow{CB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$. **D** $\overrightarrow{CI}=3\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA}$.

Lời giải.

Ta có

$$\overrightarrow{IA}=3\overrightarrow{IB}\Leftrightarrow\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CI}=3(\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CI})\Leftrightarrow\overrightarrow{CI}=\frac{3}{2}\overrightarrow{CB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}.$$

Chọn đáp án (C) ....

CÂU 11. Cho tam giác ABC có G là trọng tâm. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}$ với mọi điểm M. **B** $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.

C $\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=2\overrightarrow{GA}$. **D** $3\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$.

Lời giải.

- Theo tính chất trọng tâm tam giác ta có $\overrightarrow{AA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{AG}\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{AG}$.
- Ta có $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=-\overrightarrow{GA}$. Suy ra mệnh đề $\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=2\overrightarrow{GA}$ là mệnh đề sai.
- Các mệnh đề còn lại **đúng**.

Chọn đáp án (C) ....

CÂU 12. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A Nếu $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$ thì $ABCD$ là hình bình hành.

B Nếu O là trung điểm của AB thì với mọi M ta có $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MO}$.

C Nếu G là trọng tâm của tam giác ABC thì $\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{AG}$.

D Với 3 điểm bất kì I, J, K ta có $\overrightarrow{IJ}+\overrightarrow{JK}=\overrightarrow{IK}$.

Lời giải.

Khẳng định "Nếu $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$ thì $ABCD$ là hình bình hành" là phương án **sai** trong trường hợp bốn điểm A, B, C, D thẳng hàng.

Chú ý.

Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành $\Leftrightarrow\begin{cases}A,\ B,\ C \text{ không thẳng hàng}\\ \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A,\ B,\ C \text{ không thẳng hàng}\\ \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}.\end{cases}$

Chọn đáp án (A) ....

CÂU 13. Cho hình bình hành $ABCD$. Đẳng thức nào sau đây **đúng**?

A $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AB}$. **B** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AC}$. **C** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AD}$. **D** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{BD}$.

Lời giải.

Theo qui tắc hình hình hành ta có

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}.$$

Do đó

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AC}.$$

Chọn đáp án (B) ....

CÂU 14. Cho tam giác ABC biết I là trung điểm của đoạn thẳng AB, G là trọng tâm tam giác, M là điểm bất kỳ. Hãy chọn khẳng định **đúng**.

Ⓐ $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{MG}$. Ⓑ $\overrightarrow{BI}+\overrightarrow{IC}=\vec{0}$.

Ⓒ $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=3\overrightarrow{MI}$. Ⓓ $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}$.

Lời giải.

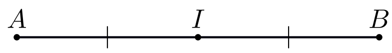
- Vì $\overrightarrow{BI}+\overrightarrow{IC}=\overrightarrow{BC}$ nên phương án $\overrightarrow{BI}+\overrightarrow{IC}=\vec{0}$ là phương án **sai**.
- Vì $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MI}$ nên phương án $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=3\overrightarrow{MI}$ là phương án **sai**.
- Theo quy tắc trọng tâm tam giác ta có $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}$.

Chọn đáp án (D) .... □

CÂU 15. Cho I là trung điểm của đoạn thẳng AB. Hỏi đẳng thức nào **đúng**?

Ⓐ $2\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{AB}=\vec{0}$. Ⓑ $\overrightarrow{IA}-\overrightarrow{IB}=\vec{0}$. Ⓒ $\overrightarrow{AI}-2\overrightarrow{BI}=\overrightarrow{IB}$. Ⓓ $\overrightarrow{AI}-\overrightarrow{IB}=\vec{0}$.

Lời giải.



Ta có:

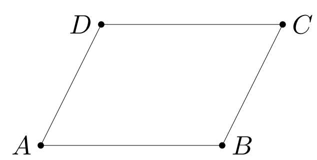
- $\overrightarrow{AI}-\overrightarrow{IB}=\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{BI}=\vec{0}$ nên $\overrightarrow{AI}-\overrightarrow{IB}=\vec{0}$ đúng.
- $2\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AB}\neq\vec{0}$ nên $2\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{AB}=\vec{0}$ là phương án **sai**.
- $\overrightarrow{IA}-\overrightarrow{IB}=\overrightarrow{BA}\neq\vec{0}$ nên $\overrightarrow{IA}-\overrightarrow{IB}=\vec{0}$ là phương án **sai**.
- $\overrightarrow{AI}-2\overrightarrow{BI}=\overrightarrow{IB}+2\overrightarrow{IB}=3\overrightarrow{IB}\neq\overrightarrow{IB}$ nên $\overrightarrow{AI}-2\overrightarrow{BI}=\overrightarrow{IB}$ là phương án **sai**.

Chọn đáp án (D) .... □

CÂU 16. Cho hình bình hành $ABCD$. Đẳng thức nào sau đây **đúng**?

Ⓐ $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BD}=\vec{0}$. Ⓑ $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}$. Ⓒ $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{CD}$. Ⓓ $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{BC}$.

Lời giải.



- $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BD}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}$ **sai** vì $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{BD}$ không cùng phương.
- $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BC}=\vec{0}$ là phương án **sai**.
- Vì $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DC}$ nên $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{CD}$ là phương án **sai**.
- $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right)+\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}\right)=2\overrightarrow{BC}+\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}\right)=2\overrightarrow{BC}+\vec{0}=2\overrightarrow{BC}$.

Chọn đáp án (D) .... □

CÂU 17. Cho G là trọng tâm tam giác ABC và I là trung điểm cạnh BC. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

Ⓐ $\overrightarrow{GA}=-2\overrightarrow{GI}$. Ⓑ $\overrightarrow{IG}=-\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AI}$. Ⓒ $\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=2\overrightarrow{GI}$. Ⓓ $\overrightarrow{GA}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AI}$.

Lời giải.

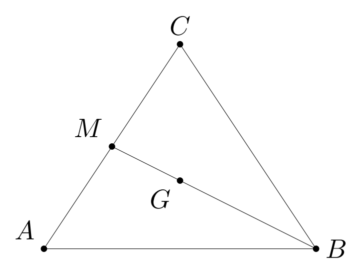
Ta thấy mệnh đề sai là mệnh đề $\overrightarrow{GA}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AI}$.

Chọn đáp án (D) .... □

CÂU 18. Cho tam giác ABC có trọng tâm G và M là trung điểm cạnh AC. Khẳng định nào sau đây **sai**?

Ⓐ $BG=\dfrac{2}{3}BM$. Ⓑ $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{BG}$. Ⓒ $\overrightarrow{MG}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{BM}$. Ⓓ $GM=\dfrac{1}{2}GB$.

Lời giải.



Do M là trung điểm là AC và G là trọng tâm của $\triangle ABC$
nên $BG=\dfrac{2}{3}BM$; $MG=\dfrac{1}{3}BM$ và $GM=\dfrac{1}{2}GB$.
Mặt khác $\overrightarrow{MG}$ và $\overrightarrow{BM}$ ngược hướng; $\overrightarrow{GM}$ và $\overrightarrow{BG}$ cùng hướng
nên $\overrightarrow{MG}=-\dfrac{1}{3}\overrightarrow{BM}$; $\overrightarrow{GM}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BG}$.
Do M là trung điểm AC nên $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GC}=2\overrightarrow{GM}=\overrightarrow{BG}$.

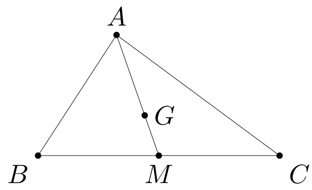
Chọn đáp án (C) .... □

CÂU 19. Cho tam giác ABC. Gọi M là trung điểm của BC và G là trọng tâm của tam giác ABC. Đẳng thức nào sau đây **đúng**?

A $\overrightarrow{GA} = 2\overrightarrow{GM}$. **B** $\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GM} = \vec{0}$. **C** $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AG}$. **D** $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GA}$.

Lời giải.

Vì G là trọng tâm của tam giác ABC nên ta có $GA = 2GM$.
Suy ra $\overrightarrow{GA} = -2\overrightarrow{GM} \Rightarrow \overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GM} = \vec{0}$.



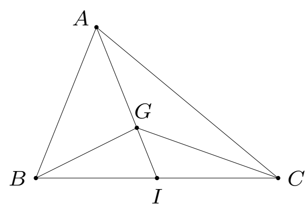
Chọn đáp án (B) .... □

CÂU 20. Cho G là trọng tâm tam giác ABC, gọi I là trung điểm của BC. Đẳng thức nào sau đây **đúng**?

A $\overrightarrow{GA} = 2\overrightarrow{GI}$. **B** $\overrightarrow{IG} = -\dfrac{1}{3}\overrightarrow{IA}$. **C** $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 2\overrightarrow{GI}$. **D** $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GA}$.

Lời giải.

Vì I là trung điểm của BC nên $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 2\overrightarrow{GI}$.



Chọn đáp án (C) .... □

CÂU 21. Cho tam giác ABC và một điểm M tùy ý. Hãy chọn hệ thức đúng.

A $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{BC}$. **B** $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}$.

C $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}$. **D** $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}$.

Lời giải.

Ta có $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} = 2(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MC}) + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}$.

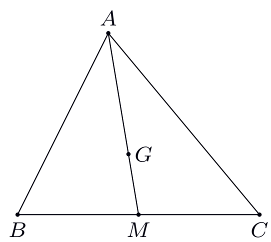
Chọn đáp án (C) .... □

CÂU 22. Cho tam giác ABC. Gọi M là trung điểm của BC và G là trọng tâm của tam giác ABC. Đẳng thức nào sau đây đúng?

A $\overrightarrow{GA} = 2\overrightarrow{GM}$. **B** $\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GM} = \vec{0}$. **C** $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AG}$. **D** $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GA}$.

Lời giải.

Vì G là trọng tâm của tam giác ABC nên ta có $GA = 2GM$.
$\Rightarrow \overrightarrow{GA} = -2\overrightarrow{GM} \Rightarrow \overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GM} = \vec{0}$.



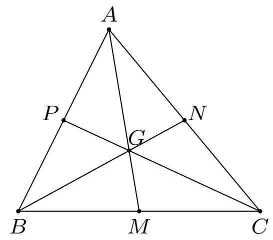
Chọn đáp án (B) .... □

CÂU 23. Ba trung tuyến AM, BN, CP của tam giác ABC đồng quy tại G. Hỏi vectơ $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CP}$ bằng vectơ nào?

A $\dfrac{3}{2}\left(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{CG}\right)$. **B** $3\left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{NG} + \overrightarrow{GP}\right)$. **C** $\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AC}\right)$. **D** $\vec{0}$.

Lời giải.

Ta có



$$\begin{aligned}\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{CP} &= \frac{3}{2}\overrightarrow{AG}+\frac{3}{2}\overrightarrow{BG}+\frac{3}{2}\overrightarrow{CG}\\ &= \frac{3}{2}\left(\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{CG}\right)\\ &= \vec{0}.\end{aligned}$$

Chọn đáp án (D) .... □

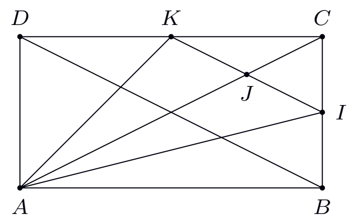
CÂU 24. Cho hình chữ nhật $ABCD$, I và K lần lượt là trung điểm của BC, CD. Hệ thức nào sau đây đúng?

(A) $\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{AK}=2\overrightarrow{AC}$. (B) $\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$. (C) $\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{IK}$. (D) $\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{AK}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$.

Lời giải.

Gọi J là giao điểm của AC và KI.

Ta có $\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{AK}=2\overrightarrow{AJ}=2\cdot\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$.



Chọn đáp án (D) .... □

CÂU 25. Cho tam giác ABC có M là trung điểm của cạnh BC. Các điểm D, E thỏa mãn các đẳng thức: $\overrightarrow{BD}=4\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{AE}=3\overrightarrow{AC}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

(A) $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{DE}$. (B) $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{6}\overrightarrow{DE}$. (C) $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DE}$. (D) $\overrightarrow{AM}=\frac{3}{4}\overrightarrow{DE}$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{BD}=4\overrightarrow{BA}$, suy ra $\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}=4\overrightarrow{BA}$ hay $\overrightarrow{AD}=-3\overrightarrow{AB}$. Khi đó

$$\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AD}=3\overrightarrow{AC}+3\overrightarrow{AB}=3\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}\right)=6\overrightarrow{AM}.$$

Vậy $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{6}\overrightarrow{DE}$.

Chọn đáp án (B) .... □

CÂU 26. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M, N là trung điểm AB và DC. Lấy các điểm P, Q lần lượt thuộc các đường thẳng AD và BC sao cho $\overrightarrow{PA}=-2\overrightarrow{PD}$, $\overrightarrow{QB}=-2\overrightarrow{QC}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

(A) $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}\right)$. (B) $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{MQ}$.

(C) $\overrightarrow{MN}=-\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}\right)$. (D) $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{NB}+\overrightarrow{NA}\right)$.

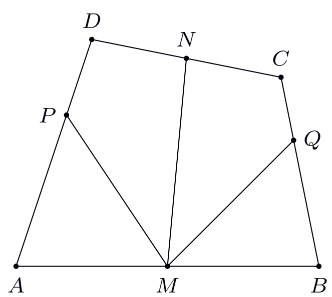
Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CN}$ (1)

$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DN}$ (2)

Cộng theo vế (1) và 2) ta được

$$\begin{aligned}2\overrightarrow{MN} &= \overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CN}+\overrightarrow{DN}\\ &= \vec{0}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}+\vec{0}\\ &= \overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}.\end{aligned}$$



Vậy $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}\right)$.

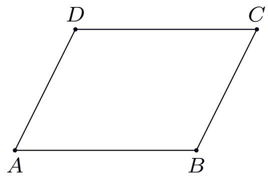
Chọn đáp án (A) .... □

CÂU 27. Cho hình bình hành $ABCD$. Đẳng thức nào đúng?

(A) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{BC}$. (B) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}$. (C) $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{CD}$. (D) $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{CD}$.

Lời giải.

Ta có



$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD} &= \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}\\ &= 2\overrightarrow{BC}+(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD})\\ &= 2\overrightarrow{BC}.\end{aligned}$$

Chọn đáp án A .... □

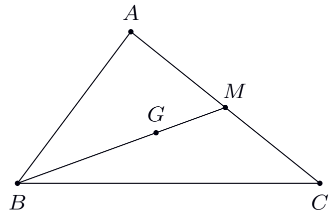
CÂU 28. Cho G là trọng tâm của tam giác ABC. Trong các mệnh đề sau, tìm mệnh đề đúng?

A $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AG}$. **B** $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}=3\overrightarrow{BG}$. **C** $\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CG}$. **D** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}=\vec{0}$.

Lời giải.

Gọi M là trung điểm của AC.

Ta có



$$\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{BM}=2\cdot\frac{3}{2}\overrightarrow{BG}=3\overrightarrow{BG}.$$

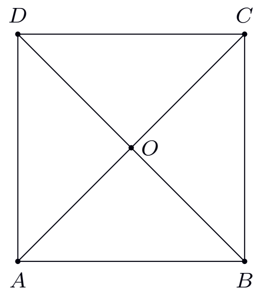
Chọn đáp án B .... □

CÂU 29. Cho hình vuông $ABCD$ có tâm là O. Trong các mệnh đề sau, tìm mệnh đề **sai**?

A $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AO}$. **B** $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DO}=-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{CA}$. **C** $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{CB}$. **D** $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DB}=4\overrightarrow{AB}$.

Lời giải.

Ta có



$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DB} &= \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CB}\\ &= \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}\\ &= 2\overrightarrow{AB}.\end{aligned}$$

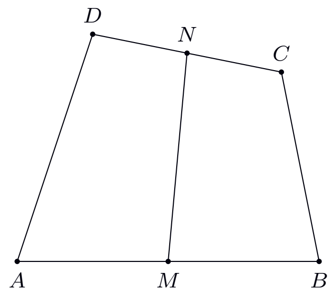
Chọn đáp án D .... □

CÂU 30. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD. Khi đó $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}$ bằng

A $\overrightarrow{MN}$. **B** $2\overrightarrow{MN}$. **C** $3\overrightarrow{MN}$. **D** $-2\overrightarrow{MN}$.

Lời giải.

Ta có



$$\begin{cases}\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CN}\\ \overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DN}\end{cases}\Rightarrow 2\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}.$$

Chọn đáp án B .... □

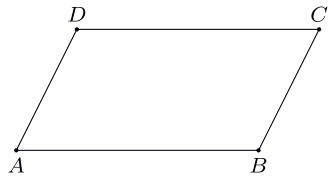
CÂU 31. Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O và điểm M bất kì. Khẳng định nào sau đây đúng?

A $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{MO}$. **B** $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=2\overrightarrow{MO}$.

C $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=3\overrightarrow{MO}$. **D** $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=4\overrightarrow{MO}$.

Lời giải.

Ta có



$$\begin{aligned}\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD} &= (\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC})+(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD})\\ &= 2\overrightarrow{MO}+2\overrightarrow{MO}\\ &= 4\overrightarrow{MO}.\end{aligned}$$

Chọn đáp án D .... □

CÂU 32. Cho năm điểm A, B, C, D, E. Khẳng định nào đúng?

Ⓐ $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{EC}=2\left(\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{CB}\right)$.

Ⓑ $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{EC}=3\left(\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{CB}\right)$.

Ⓒ $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{EC}=\dfrac{\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{CB}}{4}$.

Ⓓ $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{CB}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{CB}\\ \Leftrightarrow\ &\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AE}\right)+\left(\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CB}\right)-\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{DB}=\vec{0}\\ \Leftrightarrow\ &\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{DB}=\vec{0}\\ \Leftrightarrow\ &\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DB}=\vec{0}.\end{aligned}$$

Chọn đáp án D .... □

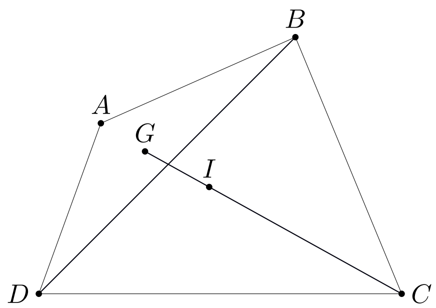
CÂU 33. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABD, I là điểm trên GC sao cho $IC=3IG$. Với mọi điểm M ta luôn có $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}$ bằng

Ⓐ $2\overrightarrow{MI}$.
Ⓑ $3\overrightarrow{MI}$.
Ⓒ $4\overrightarrow{MI}$.
Ⓓ $5\overrightarrow{MI}$.

Lời giải.

Ta có $3\overrightarrow{IG}=-\overrightarrow{IC}$.

Do G là trọng tâm của tam giác ABD nên



$$\begin{aligned}&\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{ID}=3\overrightarrow{IG}\\ \Leftrightarrow\ &\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{ID}=-\overrightarrow{IC}\\ \Leftrightarrow\ &\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}=\vec{0}.\end{aligned}$$

Khi đó

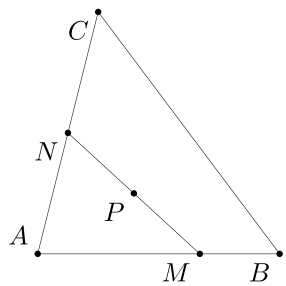
$$\begin{aligned}&\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\\ =\ &\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{ID}\\ =\ &4\overrightarrow{MI}+(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID})\\ =\ &4\overrightarrow{MI}+\vec{0}=4\overrightarrow{MI}.\end{aligned}$$

Chọn đáp án C .... □

CÂU 34. Cho tam giác ABC. Gọi M là điểm trên cạnh AB sao cho $MA=2MB$ và N là trung điểm của AC. Gọi P là trung điểm của MN. Khi đó

Ⓐ $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.
Ⓑ $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$.
Ⓒ $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.
Ⓓ $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$.

Lời giải.



Vì P là trung điểm của MN nên $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AN}\right)$. (1)

VÌ N là trung điểm của AC nên $\overrightarrow{AN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$. (2)

Ta có M thuộc cạnh AB sao cho $MA=2MB$ nên suy ra $MA=\frac{2}{3}AB$.

Do đó $\overrightarrow{AM}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$. (3)

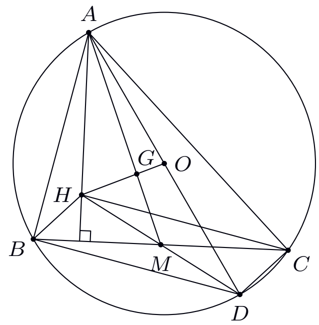
Từ (1), (2), (3) ta có $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$.

Chọn đáp án D .... □

CÂU 35. Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn tâm O. Gọi H, G lần lượt là trực tâm, trọng tâm của tam giác. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

A $\overrightarrow{OH} = 4\overrightarrow{OG}$. **B** $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$. **C** $\overrightarrow{OH} = 2\overrightarrow{OG}$. **D** $3\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OG}$.

Lời giải.



Gọi D là điểm đối xứng với A qua O. Ta có

$$\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HD} = 2\overrightarrow{HO}. \qquad (1)$$

Vì $HBDC$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{HD} = \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC}$. (2)
Từ (1), (2) suy ra

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = 2\overrightarrow{HO}\\
\Leftrightarrow&(\overrightarrow{HO} + \overrightarrow{OA}) + (\overrightarrow{HO} + \overrightarrow{OB}) + (\overrightarrow{HO} + \overrightarrow{OC}) = 2\overrightarrow{HO}\\
\Leftrightarrow&3\overrightarrow{HO} + (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) = 2\overrightarrow{HO}\\
\Leftrightarrow&\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = -\overrightarrow{HO}\\
\Leftrightarrow&3\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OH}.
\end{aligned}$$

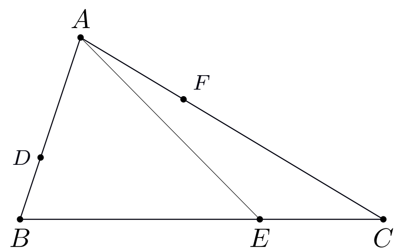
Chọn đáp án B .... □

CÂU 36. Cho $\triangle ABC$. Trên các cạnh AB, BC và CA lấy các điểm D, E, F sao cho $DA = 2DB$, $EB = 2EC$, $FC = 2FA$. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau đây.

A $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$. **B** $\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

C $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$. **D** $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$.

Lời giải.



Vì $DA = 2DB$ nên $AD = \frac{2}{3}AB \Rightarrow \overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$.
Tương tự $\overrightarrow{BE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{AF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.
Khi đó

$$\begin{aligned}
VT &= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF}\\
&= \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE}) + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\\
&= \frac{5}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}\\
&= \frac{5}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{2}{3}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})\\
&= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = VP.
\end{aligned}$$

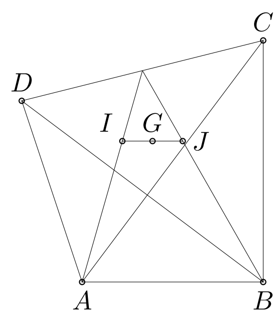
Vậy $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

Chọn đáp án A .... □

CÂU 37. Cho tứ giác $ABCD$ và điểm G thảo mãn $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + 2\overrightarrow{GC} + k\overrightarrow{GD} = \vec{0}$. Gọi I, J lần lượt là trọng tâm tam giác các ACD, BCD. Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh CD, AB. Tìm k sao cho G là trung điểm của IJ.

A $k = 1$. **B** $k = 2$. **C** $k = 3$. **D** $k = 4$.

Lời giải.



Vì I, J lần lượt là trọng tâm tam giác các ACD, BCD nên

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = 3\overrightarrow{GI},\\
\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = 3\overrightarrow{GJ}.
\end{aligned}$$

Cộng vế theo vế hai đẳng thức vectơ trên ta được

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + 2\overrightarrow{GC} + 2\overrightarrow{GD} = 3\left(\overrightarrow{GI} + \overrightarrow{GJ}\right).$$

Nhưng G là trung điểm của IJ nên $\overrightarrow{GI} + \overrightarrow{GJ} = \vec{0}$.
Do đó $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + 2\overrightarrow{GC} + 2\overrightarrow{GD} = \vec{0}$.
Vậy $k = 2$.

Chọn đáp án (B) ....

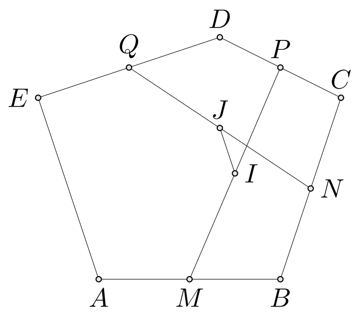
CÂU 38. Cho ngũ giác $ABCDE$ có M, N, P, Q lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC, CD, DE. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của MP, NQ. Biết $\overrightarrow{IJ} = k\overrightarrow{EA}$, tìm k.

(A) $k = -\dfrac{1}{2}$. (B) $k = \dfrac{1}{2}$. (C) $k = -\dfrac{1}{4}$. (D) $k = \dfrac{1}{4}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{IJ} &= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{IQ} + \overrightarrow{IN}\right)\\ &= \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{IE} + \overrightarrow{ID} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC}\right)\\ &= \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{ID} + \overrightarrow{IC}\right)\\ &= \frac{1}{4}\overrightarrow{AE}\\ &= -\frac{1}{4}\overrightarrow{EA}.\end{aligned}$$



Vậy $k = -\dfrac{1}{4}$.

Chọn đáp án (C) ....

3 Xác định điểm thỏa mãn đẳng thức vectơ

Phương pháp giải

Bài toán: Xác định điểm M thỏa đẳng thức vectơ cho trước

- Bước 1. Ta biến đổi đẳng thức đã cho (bằng chèn điểm, quy tắc ba điểm, qui tắc hình bình hành, tính chất trung điểm, trọng tâm,...) về dạng: $\overrightarrow{OM} = \vec{v}$. Trong đó điểm O và vectơ $\vec{v}$ cho trước.
- Bước 2. Nếu muốn dựng điểm M, ta lấy điểm O làm gốc, dựng một vectơ bằng vectơ $\vec{v}$, khi đó điểm ngọn của vectơ này chính là điểm M.

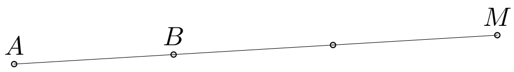
- *Lưu ý 1. Thông thường, biểu thức $\overrightarrow{OM} = \vec{v}$ là những biểu thức đặc biệt (trung điểm, trọng tâm, điểm chia đoạn thẳng theo tỉ lệ $\vec{a} = k\vec{b}$, hình bình hành,... Ta dựa vào biểu thức này để dựng.*
- *Lưu ý 2. Một số cách chứng minh thường dùng.*
  - *Để chứng minh I là trung điểm của đoạn thẳng AB, ta cần chứng minh một trong các hệ thức sau*
    - $\overrightarrow{IA} = \overrightarrow{IB}$.
    - $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$.
    - $2\overrightarrow{IA} = \overrightarrow{AB}$.
    - $2\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ *(O bất kì).*
  - *Để chứng minh điểm G là trọng tâm của $\triangle ABC$, ta cần chứng minh một trong các hệ thức sau*
    - $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.
    - *Với I là trung điểm của cạnh BC thì $\overrightarrow{AG} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AI}$.*
    - *Với O là điểm bất kì trong mặt phẳng thì: $3\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.*
  - *Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}\\ \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}.\end{array}\right.$*
  - *Để chứng minh hai điểm A_1 và A_2 trùng nhau ta có thể chứng minh một trong các hệ thức sau*
    - $\overrightarrow{A_1A_2} = \vec{0}$.
    - $\overrightarrow{OA_1} = \overrightarrow{OA_2}$ *với O là điểm bất ỳ.*
  - *Điều kiện cần và đủ để $\triangle ABC$ và $\triangle A'B'C'$ có cùng trọng tâm là*
$$\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \vec{0}.$$
  - *Nếu $\overrightarrow{MB} = k \cdot \overrightarrow{MC}$ $(k \neq 1)$ thì $\overrightarrow{AM} = \dfrac{\overrightarrow{AB} - k \cdot \overrightarrow{AC}}{1-k}$ (hay điểm M chia đoạn AB theo tỉ số $k \neq 1$).*

1. Ví dụ minh họa

VÍ DỤ 1. Cho hai điểm A và B. Xác định điểm M thỏa mãn $2\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} = \vec{0}$.

Lời giải.

Ta có $2\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MA} - 3\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}\right) = -\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{AB}$.



Khi đó điểm M được xác định như sau:

- M nằm trên đường thẳng AB và nằm ngoài đoạn AB, gần B. Hai vectơ $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AB}$ cùng hướng.
- Độ dài $AM = 3AB$, nghĩa là điểm B chia AM ra 3 đoạn bằng nhau.

VÍ DỤ 2. Cho tam giác ABC. Gọi M là trung điểm của AB và N thuộc cạnh AC, sao cho $NC = 2NA$. Hãy xác định K và D khi

a) $3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} - 12\overrightarrow{AK} = \vec{0}$.

b) $3\overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{AC} - 12\overrightarrow{KD} = \vec{0}$.

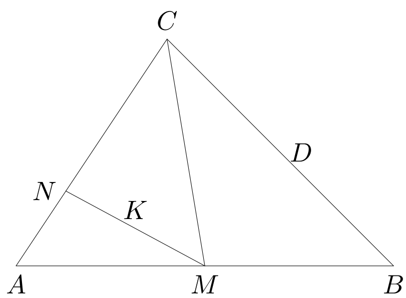
Lời giải.

a) **Xác định điểm K thỏa mãn** $3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} - 12\overrightarrow{AK} = \vec{0}$ (1)

Theo giả thiết thì

$$\begin{cases} AB = 2AM \\ \overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{AM} \end{cases} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AM} \quad (2).$$

và $\begin{cases} AC = 3AN \\ \overrightarrow{AC} \uparrow\uparrow \overrightarrow{AN} \end{cases} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AN}$ (3)



Thay (2) và (3) vào (1) ta được: $6\overrightarrow{AM} + 6\overrightarrow{AN} - 12\overrightarrow{AK} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AK} = \dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN}\right)$.

Suy ra K là trung điểm của MN.

b) **Xác định điểm D thỏa mãn** $3\overrightarrow{AB}+4\overrightarrow{AC}-12\overrightarrow{KD}=\vec{0}$ (4)
Ta có $\overrightarrow{KD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AK}$ (5). Mà theo (4) suy ra $\overrightarrow{AK}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ (6)
Thay (6) vào (5) ta được: $\overrightarrow{KD}=\overrightarrow{AD}-\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ (7)
Thay (7) vào (4) ta được

$$3\overrightarrow{AB}+4\overrightarrow{AC}-12\left(\overrightarrow{AD}-\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\right)=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right).$$

Suy ra D là trung điểm của BC.

VÍ DỤ 3. Cho hình bình hành $ABCD$.

a) Hãy dựng các điểm M, N thỏa mãn $\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{NC}+\overrightarrow{ND}-\overrightarrow{NA}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC}$.

b) Chứng minh rằng $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{BA}$.

Lời giải.

a) **Dựng điểm M thỏa:** $\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{AD}$.
Ta có $\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{AD}\Leftrightarrow\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{AD}\Leftrightarrow\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}$
Do $ABCD$ là hình bình hành nên: $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}\Rightarrow\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{AC}\Rightarrow C$ là trung điểm của CM.

b) **Dựng điểm M thỏa:**$\overrightarrow{NC}+\overrightarrow{ND}-\overrightarrow{NA}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC}$.
Ta có

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{NC}+\overrightarrow{ND}-\overrightarrow{NA}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC}\\\Leftrightarrow&\left(\overrightarrow{NC}-\overrightarrow{NA}\right)+\overrightarrow{ND}=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)-\overrightarrow{AC}\\\Leftrightarrow&\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{ND}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AC}\\\Leftrightarrow&\overrightarrow{DN}=\overrightarrow{AC}.\end{aligned}$$

Suy ra N là đỉnh thứ tư của hình bình hành $DACN$.

c) Chứng minh rằng $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{BA}$.
Ta có $DACN$ là hình bình hành (câu b) bên $NC=DA$.
Mà $ABCD$ là hình bình hành (giả thiết) nên $DA=BC$.
Suy ra $NC=NB\Rightarrow C$ là trung điểm BN.
Suy ra tứ giác $ABMN$ là hình bình hành (do đó 2 đường chéo NB và AM cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường)
Suy ra $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{BA}$.

VÍ DỤ 4. Cho trước hai điểm A, B và hai số thực α, β thỏa mãn $\alpha+\beta\neq 0$

a) Chứng minh rằng tồn tại duy nhất điểm I thỏa mãn $\alpha\cdot\overrightarrow{IA}+\beta\cdot\overrightarrow{IB}=\vec{0}$.

b) Từ đó suy ra với điểm M bất kỳ, ta luôn có: $\alpha\cdot\overrightarrow{MA}+\beta\cdot\overrightarrow{MB}=(\alpha+\beta)\cdot\overrightarrow{MI}$.

Lời giải.

a) Chứng minh rằng tồn tại duy nhất điểm I thỏa mãn $\alpha\cdot\overrightarrow{IA}+\beta\cdot\overrightarrow{IB}=\vec{0}$.
Ta có

$$\begin{aligned}&\alpha\cdot\overrightarrow{IA}+\beta\cdot\overrightarrow{IB}=\vec{0}\\\Leftrightarrow&\alpha\cdot\overrightarrow{IA}+\beta\cdot\left(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}\right)=\vec{0}\\\Leftrightarrow&(\alpha=\beta)\cdot\overrightarrow{IA}+\beta\cdot\overrightarrow{AB}=\vec{0}\\\Leftrightarrow&(\alpha+\beta)\cdot\overrightarrow{AI}=\beta\cdot\overrightarrow{AB}\\\Rightarrow&\overrightarrow{AI}=\frac{\beta}{\alpha+\beta}\cdot\overrightarrow{AB}.\end{aligned}$$

Vì A, B cố định nên vectơ $\frac{\beta}{\alpha+\beta}\cdot\overrightarrow{AB}$ không đổi, do đó tồn tại duy nhất điểm I thỏa mãn đề bài.

b) Từ đó suy ra với điểm M bất kỳ, ta luôn có: $\alpha \cdot \overrightarrow{MA} + \beta \cdot \overrightarrow{MB} = (\alpha + \beta) \cdot \overrightarrow{MI}$.
Ta có

$$\begin{aligned}\alpha \cdot \overrightarrow{MA} + \beta \cdot \overrightarrow{MB} &= \alpha\left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\right) + \beta \cdot \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}\right)\\ &= (\alpha + \beta) \cdot \overrightarrow{MI} + \left(\alpha \cdot \overrightarrow{IA} + \beta \cdot \overrightarrow{IB}\right)\\ &= (\alpha + \beta) \cdot \overrightarrow{MI}.\end{aligned}$$

Vậy $\alpha \cdot \overrightarrow{MA} + \beta \cdot \overrightarrow{MB} = (\alpha + \beta) \cdot \overrightarrow{MI}$, $\forall M$ (đpcm).

Lời bình 3

- *Nếu $\alpha = \beta = 1$ thì điểm I chính là trung điểm của AB.*
- *Bài toán trên được mở rộng cho ba điểm A, B, C và bộ 3 số thực α, β, γ cho trước thỏa mãn $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$, nghĩa là:*
  - *Tồn tại điểm I duy nhất thỏa mãn $\alpha \cdot \overrightarrow{IA} + \beta \cdot \overrightarrow{IB} + \gamma \cdot \overrightarrow{IC} = \overrightarrow{0}$*
  - *Từ đó suy ra với điểm M bất kỳ, ta luôn có $\alpha \cdot \overrightarrow{IA} + \beta \cdot \overrightarrow{IB} + \gamma \cdot \overrightarrow{IC} = (\alpha + \beta + \gamma) \cdot \overrightarrow{MI}$. Khi $\alpha = \beta = \gamma = 1$ thì I là trọng tâm của $\triangle ABC$.*
- *Bài toán trên vẫn đúng với n điểm A_i $(i = \overline{1,n})$ và bộ số thực α_i $(i = \overline{1,n})$ thỏa mãn $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \neq 0$*
- *Kết quả trên dùng giải bài toán "Cho n điểm A_i, $i = \overline{1,n}$ và bộ số thực α_i, $i = \overline{i,n}$ thỏa mãn $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \neq 0$. Tìm số thực k và điểm cố định I sao cho đẳng thức vectơ $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{MA_i} = k \cdot \overrightarrow{MI}$ thỏa mãn với mọi điểm M".*

2. Bài tập áp dụng

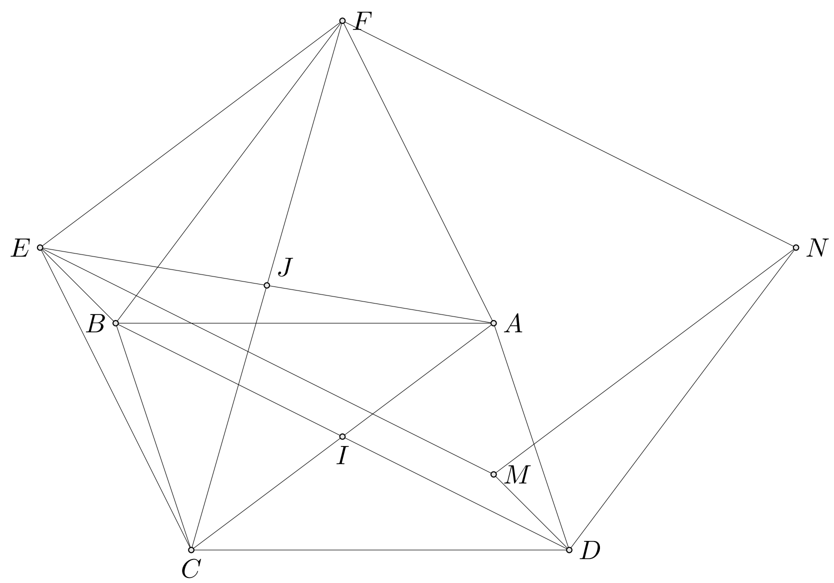
BÀI 1. Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $ACEF$.

a) Dựng các điểm M, N sao cho $\overrightarrow{EM} = \overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{FN} = \overrightarrow{BD}$.

b) Chứng minh $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{MN}$.

Lời giải.

a) Ta có $\overrightarrow{EM} = \overrightarrow{BD}$ suy ra $EMDB$ là hình bình hành.
Ta có $\overrightarrow{FN} = \overrightarrow{BD}$ suy ra $FNDB$ là hình bình hành.



b) Ta có $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DN} = \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{CA}$.

BÀI 2. Cho tam giác ABC.

a) Chứng minh với mọi điểm M, ta luôn có $\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{CA}+2\overrightarrow{CB}$.

b) Hãy dựng điểm D sao cho $\overrightarrow{DA}+2\overrightarrow{DB}-3\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{CA}+2\overrightarrow{CB}$.

Lời giải.

a) Ta có $\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{CA}+2\overrightarrow{CB}\Leftrightarrow\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{CA}+2\overrightarrow{MC}+2\overrightarrow{CB}-3\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{CA}+2\overrightarrow{CB}$ luôn thỏa, với mọi điểm M.

b) Mọi điểm trong mặt phẳng đều thỏa bài toán.

BÀI 3. Cho tứ giác $ABCD$, M là điểm tùy ý. Trong mỗi trường hợp hãy tìm số k và điểm cố định I, J, K sao cho đẳng thức vectơ sau thỏa mãn với mọi điểm M.

a) $2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=k\cdot\overrightarrow{MI}$.

b) $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\cdot\overrightarrow{MC}=k\cdot\overrightarrow{MJ}$.

c) $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+3\cdot\overrightarrow{MD}=k\cdot\overrightarrow{MK}$

Lời giải.

a) **Tìm k thỏa mãn** $2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=k\cdot\overrightarrow{MI}$.
Vì $2\cdot\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=k\cdot\overrightarrow{MI}$ (1) thỏa với mọi M, do đó nó cũng đúng với $M\equiv I$.
Khi đó $2\cdot\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=k\cdot\overrightarrow{II}=\vec{0}$ (2)
Ta có (2) $\Leftrightarrow 2\overrightarrow{IA}+\left(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}\right)=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{IA}=-\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}\Rightarrow I$ được xác định. Nó nằm trên đường thẳng AB, ngoài đoạn AB, vectơ $\overrightarrow{IA}$ ngược chiều với vectơ $\overrightarrow{AB}$ và có độ dài lớn hơn $IA=\dfrac{1}{3}AB$.
Từ (2) ta có $2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=(2+1)\overrightarrow{MI}=3\overrightarrow{MI}$ (3) (áp dụng lời bình 3 và $M\equiv I$)
Từ (1), (3) $\Rightarrow 3\overrightarrow{MI}=k\cdot\overrightarrow{MI}\Rightarrow k=3$.

b) **Tìm k thỏa:** $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\cdot\overrightarrow{MC}=k\cdot\overrightarrow{MJ}$.
Vì $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}=k\cdot\overrightarrow{MJ}$ (4) thỏa với mọi M, do đó nó cũng đúng với $M\equiv I$.
Khi đó $\overrightarrow{JA}+\overrightarrow{JB}+2\overrightarrow{JC}=k\cdot\overrightarrow{IJ}=\vec{0}$ (5)
Gọi E là trung điểm của AB, từ (5) $\Rightarrow 2\overrightarrow{JE}+2\overrightarrow{JC}=\vec{0}\Rightarrow\overrightarrow{JE}+\overrightarrow{JC}=\vec{0}\Rightarrow J$ là trung điểm của CE.
Từ (5), ta được $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}=(1+1+2)\overrightarrow{MJ}=4\overrightarrow{MJ}$ (6)
Từ (4) và (6) suy ra $k\overrightarrow{MJ}=4\overrightarrow{MJ}\Rightarrow k=4$.

c) **Tìm k thỏa**$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+3\cdot\overrightarrow{MD}=k\cdot\overrightarrow{MK}$
Vì $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+3\overrightarrow{MD}=k\overrightarrow{MK}$ (7) thỏa mãn với mọi điểm M nên ns đúng với $M\equiv K$.
Khi đó $\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{KC}+3\overrightarrow{KD}=k\cdot\overrightarrow{KD}=\vec{0}$ (8) Gọi G là trọng tâm $\triangle ABC$, từ (8) $\Leftrightarrow 3\overrightarrow{KG}+3\overrightarrow{KD}=\vec{0}\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{KG}=\overrightarrow{KD}\Rightarrow K$ là trung điểm của GD.
Từ (8), ta được $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+3\overrightarrow{MD}=(1+1+1+3)\overrightarrow{MK}=6\overrightarrow{MK}$ (9).
Từ (7), (9) $\Rightarrow k\cdot\overrightarrow{MK}=6\cdot\overrightarrow{MK}\Rightarrow k=6$.

BÀI 4. Cho tứ giác lồi $ABCD$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA. Chứng minh $\triangle ANP$ và $\triangle CMQ$ có cùng trọng tâm.

Lời giải.

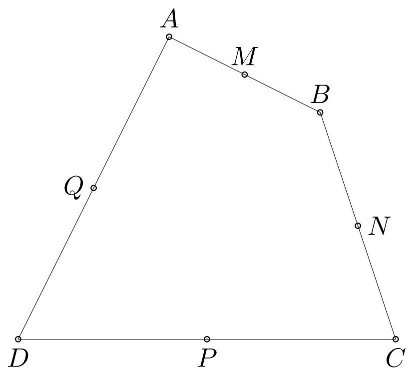
Gọi G_1, G_2 lần lượt là trọng tâm của $\triangle ANP$, $\triangle CMQ$, O là một điểm tùy ý.

Ta có $\begin{cases}\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OP}=3\overrightarrow{OG_1}\\ \overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{OQ}=3\overrightarrow{OG_2}.\end{cases}$ (1)

Mặc khác $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)+\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\right)=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}+\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}\right)$.

$\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OC}+\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right)+\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OD}\right)=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}+\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}\right)$ (2)

Từ (1), (2) suy ra $\overrightarrow{OG_1}=\overrightarrow{OG_2}\Rightarrow G_1\equiv G_2\Rightarrow\triangle ANP$ và $\triangle CMQ$ có cùng trọng tâm (đpcm).



3. Bài tập trắc nghiệm

CÂU 1. Cho điểm A và vectơ $\vec{u}$. Có bao nhiêu điểm M thoả mãn $\overrightarrow{AM}=\vec{u}$?

(A) Duy nhất một. (B) Hai. (C) Không có. (D) Vô số.

Lời giải.

Có duy nhất điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{AM}=\vec{u}$.

Chọn đáp án (A) ☐

CÂU 2. Cho hình bình hành $ABCD$, điểm M thỏa mãn $4\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}$. Khi đó M là

(A) trung điểm AC. (B) điểm C. (C) trung điểm AB. (D) trung điểm AD.

Lời giải.

Gọi G là trọng tâm tam giác BCD. Khi đó $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=3\overrightarrow{AG}$. Từ đó ta có

$$4\overrightarrow{AM}=3\overrightarrow{AG}\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AG}.$$

Vậy điểm M là trung điểm của AC.

Chọn đáp án (A) ☐

CÂU 3. Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khác $\vec{0}$ và không cùng phương. Biết hai vectơ $\vec{u}=2\vec{a}-3\vec{b}$ và $\vec{v}=\vec{a}+(x-1)\vec{b}$ cùng phương. Khi đó giá trị của x là

(A) $\frac{1}{2}$. (B) $-\frac{3}{2}$. (C) $-\frac{1}{2}$. (D) $\frac{3}{2}$.

Lời giải.

Hai vectơ $\vec{u}=2\vec{a}-3\vec{b}$ và $\vec{v}=\vec{a}+(x-1)\vec{b}$ cùng phương $\Leftrightarrow\frac{1}{2}=\frac{x-1}{-3}\Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}$.

Chọn đáp án (C) ☐

CÂU 4. Cho hai điểm phân biệt A, B và hai số thực α, β khác 0 thoả mãn $\alpha+\beta=0$. Có bao nhiêu điểm M thoả mãn $\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}=\vec{0}$?

(A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

Lời giải.

Ta có $\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}=\alpha\overrightarrow{MA}-\alpha\overrightarrow{MB}=\alpha\left(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right)=\alpha\overrightarrow{AB}=\vec{0}$ (Vô lí vì $\overrightarrow{AB}\neq\vec{0}$ và $\alpha\neq 0$).

Vậy không có điểm M nào thỏa mãn đề bài.

Chọn đáp án (A) ☐

CÂU 5. Cho ba điểm không thẳng hàng A, B, C và M là điểm thoả mãn $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CM}$. Chọn khẳng định đúng.

(A) $ABMC$ là hình bình hành. (B) $ABCM$ là hình bình hành.

(C) M là trọng tâm của tam giác ABC. (D) CM là trung tuyến của tam giác ABC.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CM}\Rightarrow\begin{cases}AB\parallel CM\\ AB=CM\end{cases}\Rightarrow ABMC$ là hình bình hành.

Chọn đáp án (A) ☐

CÂU 6. Cho hai điểm phân biệt A, B và hai số thực α, β thoả mãn $\alpha+\beta\neq 0$. Có bao nhiêu điểm M thoả mãn $\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}=\vec{0}$?

(A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}&\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}=\vec{0}\\ &\Leftrightarrow\alpha\overrightarrow{MA}+(-\alpha+\beta+\alpha)\overrightarrow{MB}=\vec{0}\\ &\Leftrightarrow\alpha\left(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right)+(\beta+\alpha)\overrightarrow{MB}=\vec{0}\\ &\Leftrightarrow\alpha\overrightarrow{BA}+(\beta+\alpha)\overrightarrow{MB}=\vec{0}.\\ &\Leftrightarrow\overrightarrow{MB}=-\frac{\alpha}{\beta+\alpha}\overrightarrow{BA}.\end{aligned}$$

Vậy có 1 điểm M nào thỏa mãn đề bài.

Chọn đáp án (B) ☐

CÂU 7. Cho hai điểm phân biệt A và B. Điều kiện cần và đủ để I là trung điểm của đoạn thẳng AB là

A $IA = IB$. **B** $\overrightarrow{IA} = -\overrightarrow{IB}$. **C** $\overrightarrow{IA} = \overrightarrow{IB}$. **D** $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{BI}$.

Lời giải.

Ta có I là trung điểm AB khi và chỉ khi $IA = IB$ và $\overrightarrow{IA}$ ngược hướng $\overrightarrow{IB}$ hay $\overrightarrow{IA} = -\overrightarrow{IB}$.

Chọn đáp án B .... □

CÂU 8. Cho tam giác ABC, điểm I là trung điểm BC. Điểm G có tính chất nào sau đây thì G là trọng tâm tam giác ABC?

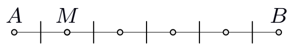
A $\overrightarrow{GI} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AI}$. **B** $GA = 2GI$. **C** $\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{CG} = \vec{0}$. **D** $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 2\overrightarrow{GI}$.

Lời giải.

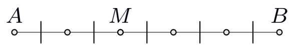
Ta có G là trọng tâm tam giác ABC suy ra $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0} \Leftrightarrow -\overrightarrow{AG} - \overrightarrow{BG} - \overrightarrow{CG} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{CG} = \vec{0}$.

Chọn đáp án C .... □

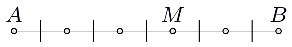
CÂU 9. Cho đoạn thẳng AB, hình nào sau đây biểu diễn đúng điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MA} + 4\overrightarrow{MB} = \vec{0}$.



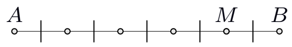
Hình 1



Hình 2



Hình 3



Hình 4

A Hình 1. **B** Hình 2. **C** Hình 3. **D** Hình 4.

Lời giải.

$\overrightarrow{MA} + 4\overrightarrow{MB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + 4\overrightarrow{MA} + 4\overrightarrow{AB} = \vec{0} \Leftrightarrow 5\overrightarrow{AM} = 4\overrightarrow{AB}$.

Suy ra M nằm trên tia AB và $AM = \frac{4}{5}AB$.

Chọn đáp án D .... □

CÂU 10. Cho đoạn thẳng AB có trung điểm I. Tìm điểm M thỏa mãn $3\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$.

A M trùng với I. **B** M là trung điểm của BI.

C M là trung điểm của AI. **D** M trùng với A hoặc M trùng với B.

Lời giải.

Do I là trung điểm của đoạn thẳng AB nên $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$.

Ta có

$$\begin{aligned} & 3\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0} \\ \Leftrightarrow\ & 2\overrightarrow{MA} + \left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right) = \vec{0} \\ \Leftrightarrow\ & 2\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MI} = \vec{0} \\ \Leftrightarrow\ & \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MI} = \vec{0}. \end{aligned}$$

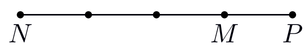
Vậy M là trung điểm của IA.

Chọn đáp án C .... □

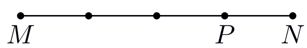
CÂU 11. Trên đường thẳng MN lấy điểm P sao cho $\overrightarrow{MN} = -3\overrightarrow{MP}$. Điểm P được xác định trong hình vẽ nào sau đây?

Hình 1

Hình 2



Hình 3



Hình 4

A Hình 1. **B** Hình 2. **C** Hình 3. **D** Hình 4.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{MN} = -3\overrightarrow{MP}$ nên M nằm giữa N, P và $MN = 3MP$.

Chọn đáp án C .... □

CÂU 12. Trên đưuòng thẳng MN lấy điểm P sao cho $\overrightarrow{MN} = -3\overrightarrow{MP}$. Điểm P được xác định đúng theo hình vẽ nào sau đây.

Ⓐ 

.

Ⓑ 

.

Ⓒ 

.

Ⓓ 

.

Lời giải.

Vì $\overrightarrow{MN} = -3\overrightarrow{MP}$ nên $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{MP}$ ngược hướng và $MN = 3MP$.

Chọn đáp án Ⓒ .... □

CÂU 13. Cho tam giác ABC với I là trung điểm của AB. Tìm điểm M thỏa mãn hệ thức $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = \vec{0}$.

Ⓐ M là trung điểm của IC.

Ⓑ M là trung điểm của IA.

Ⓒ M là điểm trên cạnh IC sao cho $IM = 2MC$.

Ⓓ M là trung điểm của BC.

Lời giải.

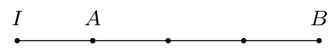
Ta có

$$\begin{aligned} & \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = \vec{0} \\ \Leftrightarrow\ & 2\overrightarrow{MI} + 2\overrightarrow{MC} = \vec{0} \\ \Leftrightarrow\ & \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}. \end{aligned}$$

Suy ra M là trung điểm của IC.

Chọn đáp án Ⓐ .... □

CÂU 14. Đẳng thức nào sau đây mô tả đúng hình vẽ bên?



Ⓐ $3\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AB} = \vec{0}$. Ⓑ $3\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$. Ⓒ $\overrightarrow{BI} + 3\overrightarrow{BA} = \vec{0}$. Ⓓ $\overrightarrow{AI} + 3\overrightarrow{AB} = \vec{0}$.

Lời giải.

Hai vec-tơ $\overrightarrow{AI}$, $\overrightarrow{AB}$ ngược hướng và $AB = 3AI$ nên đẳng thức mô tả đúng hình vẽ là $3\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AB} = \vec{0}$.

Chọn đáp án Ⓐ .... □

CÂU 15. Trong mặt phẳng Oxy, tam giác ABC có trọng tâm G là điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + 6\overrightarrow{AG} = 6\overrightarrow{AM}$. Vị trí của điểm M là

Ⓐ M là trung điểm của AC.

Ⓑ M là trung điểm của BC.

Ⓒ M là điểm thứ tư của hình bình hành $ABCM$.

Ⓓ M là trung điểm của AB.

Lời giải.

Vì G là trọng tâm $\triangle ABC$ nên

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AG}.$$

Do đó $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + 6\overrightarrow{AG} = 6\overrightarrow{AM} \Leftrightarrow 3\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right) = 6\overrightarrow{AM} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = \dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)$.

Suy ra M là trung điểm của BC.

Chọn đáp án Ⓑ .... □

CÂU 16. Cho tam giác ABC. Để điểm M thỏa mãn điều kiện $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$ thì M phải thỏa mãn

Ⓐ M là trọng tâm tam giác ABC.

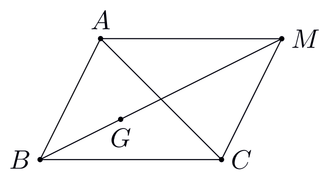
Ⓑ M là điểm sao cho tứ giác $ABMC$ là hình bình hành.

Ⓒ M thuộc trung trực của AB.

Ⓓ M là điểm sao cho tứ giác $BAMC$ là hình bình hành.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{BC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AM}$.
Vậy $BAMC$ là hình bình hành.



Chọn đáp án Ⓓ .... □

CÂU 17. Cho tứ giác $ABCD$ và M là điểm thoả $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = \vec{0}$. Chọn khẳng định đúng.

Ⓐ M là giao điểm hai đường chéo của tứ giác $ABCD$.

Ⓑ M là giao điểm của các đoạn thẳng nối hai trung điểm hai cạnh đối diện của tứ giác $ABCD$.

Ⓒ M là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $ABCD$.

Ⓓ M là tâm đường tròn nội tiếp tứ giác $ABCD$.

Lời giải.

Gọi E, F lần lượt là trung điểm AB, CD.

$$\begin{aligned} & \overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=\vec{0} \\ \Leftrightarrow\ & 2\overrightarrow{ME}+2\overrightarrow{MF}=\vec{0} \\ \Leftrightarrow\ & M \text{ là trung điểm } EF. \end{aligned}$$

Tương tự nếu gọi P, Q lần lượt là trung điểm của AD, BC thì ta cũng có M là trung điểm PQ. Khi đó M cũng chính là giao điểm của EF và PQ.

Chọn đáp án B .... □

CÂU 18. Cho tam giác ABC, gọi M là điểm thoả mãn $\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}=\vec{0}$. Khi đó,

- **A** $ABCM$ là hình bình hành.
- **B** $ABMC$ là hình bình hành.
- **C** $ABCM$ là hình bình thang có đáy lớn AM.
- **D** $ABCM$ là hình bình thang có đáy lớn BC.

Lời giải.

$$\begin{aligned} & \overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}=\vec{0} \\ \Leftrightarrow\ & \overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{BC}=\vec{0} \\ \Leftrightarrow\ & \overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{BC}. \end{aligned}$$

Khi đó $ABCM$ là hình thang với đáy lớn AM.

Chọn đáp án C .... □

CÂU 19. Gọi G và G' lần lượt là trọng tâm của hai tam giác ABC và $A'B'C'$. Tìm điều kiện cần và đủ để $G \equiv G'$.

- **A** $\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}+3\overrightarrow{GG'}=\vec{0}$.
- **B** $\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}=3\overrightarrow{GG'}$.
- **C** $\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}-3\overrightarrow{G'G}=\vec{0}$.
- **D** $\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}=3\overrightarrow{G'G}$.

Lời giải.

Ta có: $\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}=3\overrightarrow{G'G}$
$\Leftrightarrow \overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GG'}+\overrightarrow{G'A'}+\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{GG'}+\overrightarrow{G'B'}+\overrightarrow{CG}+\overrightarrow{GG'}+\overrightarrow{G'C'}=3\overrightarrow{G'G}$
$\Leftrightarrow (\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{CG})+(\overrightarrow{G'A'}+\overrightarrow{G'B'}+\overrightarrow{G'C'})+3\overrightarrow{GG'}=3\overrightarrow{G'G}$
$\Leftrightarrow \vec{0}+\vec{0}+3\overrightarrow{GG'}=3\overrightarrow{G'G} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{GG'}=3\overrightarrow{G'G} \Leftrightarrow \overrightarrow{GG'}=\overrightarrow{G'G} \Leftrightarrow G \equiv G'$.

Chọn đáp án D .... □

CÂU 20. Cho tam giác ABC có I là trung điểm BC. Gọi M là điểm thoả mãn $2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}$. Xác định vị trí của điểm M.

- **A** M là trọng tâm tam giác ABC.
- **B** M là trung điểm AI.
- **C** M là điểm thuộc đoạn thẳng AI thoả $MA=2MI$.
- **D** M là điểm thuộc đoạn thẳng AI thoả $MI=2MA$.

Lời giải.

Ta có $2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MI}=\vec{0} \Leftrightarrow 4\overrightarrow{MF}=\vec{0} \Leftrightarrow M \equiv F$ với F là trung điểm AI.

Chọn đáp án B .... □

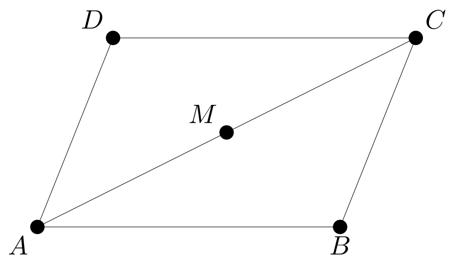
CÂU 21. Cho hình bình hành $ABCD$, điểm M thỏa $4\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}$. Khi đó điểm M là

- **A** trung điểm AC.
- **B** điểm C.
- **C** trung điểm AB.
- **D** trung điểm AD.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AC}=4\overrightarrow{AM} \Rightarrow \overrightarrow{AM}=\dfrac{\overrightarrow{AC}}{2}$.

Từ đó suy ra M là trung điểm của AC.



Chọn đáp án A .... □

CÂU 22. Cho tam giác ABC. Gọi D, E là các điểm xác định bởi $\overrightarrow{AD}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE}=\dfrac{2}{5}\overrightarrow{AC}$. Gọi K là trung điểm của DE và M xác định bởi $\overrightarrow{BM}=x\overrightarrow{BC}$. Tìm giá trị thực của x sao cho A, K, M thẳng hàng.

- **A** $\dfrac{3}{8}$.
- **B** $-\dfrac{4}{3}$.
- **C** $\dfrac{8}{3}$.
- **D** $-\dfrac{3}{4}$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{5}\overrightarrow{AC}\right) = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{5}\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB} + x\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + x\left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right) = (1-x)\overrightarrow{AB} + x\overrightarrow{AC}$

Do đó A, K, M thẳng hàng khi và chỉ khi $\overrightarrow{AM}$ và $\overrightarrow{AK}$ cùng phương

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AK} \Leftrightarrow (1-x)\overrightarrow{AB} + x\overrightarrow{AC} = \frac{k}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{k}{5}\overrightarrow{AC}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - x = \frac{k}{3} \\ x = \frac{k}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{15}{8} \\ x = \frac{3}{8} \end{cases}.$

Vậy $x = \frac{3}{8}$.

Chọn đáp án (A) .... □

CÂU 23. Cho tam giác ABC. Gọi D là trung điểm cạnh AC và I là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} + 3\overrightarrow{IC} = \vec{0}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

(A) I là trực tâm tam giác BCD.

(B) I là trọng tâm tam giác ABC.

(C) I là trọng tâm tam giác CDB.

(D) I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} + 3\overrightarrow{IC} = \overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} + 2\overrightarrow{IC} + \overrightarrow{IC} = 2(\overrightarrow{ID} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC}) = \vec{0}$.
Khi đó I là trọng tâm tam giác BCD.

Chọn đáp án (C) .... □

CÂU 24. Cho đoạn thẳng AB và M là một điểm nằm trên đường thẳng AB sao cho $\overrightarrow{MA} = -\frac{1}{5}\overrightarrow{AB}$. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

(A) $\overrightarrow{MB} = -4\overrightarrow{MA}$.

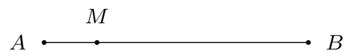
(B) $\overrightarrow{MB} = -\frac{4}{5}\overrightarrow{AB}$.

(C) $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AB}$.

(D) $\overrightarrow{MA} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{MB}$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{MA} = -\frac{1}{5}\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{AB} = -\frac{1}{5}\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{MB} = \frac{4}{5}\overrightarrow{AB}$.



Vậy mệnh đề "$\overrightarrow{MB} = -\frac{4}{5}\overrightarrow{AB}$" là sai.

Chọn đáp án (B) .... □

CÂU 25. Cho tam giác ABC. Hãy xác định vị trí điểm M thỏa mãn $2\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} = \vec{0}$.

(A) M thuộc cạnh AB và $AM = 2MB$.

(B) M trên AB và ngoài đoạn AB.

(C) M là trung điểm AB.

(D) M không thuộc đoạn AB.

Lời giải.

Ta có $2\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} = \frac{3}{2}\overrightarrow{MB}$.

Khi đó M không thuộc đoạn AB sao cho $\overrightarrow{MA} = \frac{3}{2}\overrightarrow{MB}$.

Chọn đáp án (B) .... □

CÂU 26. Cho tam giác ABC, N là trung điểm AB, M là điểm thỏa mãn đẳng thức $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$. Kết luận nào dưới đây đúng?

(A) M đối xứng với C qua A.

(B) A đối xứng với M qua C.

(C) C đối xứng với A qua M.

(D) M là điểm tùy ý.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} & \overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{AC} \\ \Leftrightarrow \; & \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NA} = \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AC} = \vec{0}. \end{aligned}$$

Suy ra A là trung điểm MC hay M đối xứng với C qua A.

Chọn đáp án (A) .... □

CÂU 27. Cho tam giác ABC và điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{AB}$. Tìm vị trí điểm M.

Ⓐ M là điểm thứ tư của hình bình hành $ABCM$. Ⓑ M là trung điểm của AB.

Ⓒ M là trung điểm của BC. Ⓓ M là trung điểm của AC.

Lời giải.

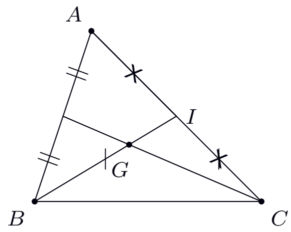
Gọi I là trung điểm của BC.
Ta có $\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow 2\overrightarrow{MI}=\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow \overrightarrow{MI}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.
Suy ra MI song song và bằng một nửa AB, mà I là trung điểm BC nên M phải là trung điểm của AC.
Chọn đáp án D .... □

CÂU 28. Cho tam giác ABC, I là trung điểm AC. Vị trí điểm N thỏa mãn $\overrightarrow{NA}+2\overrightarrow{NB}=\overrightarrow{CB}$ xác định bởi hệ thức

Ⓐ $\overrightarrow{BN}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{BI}$. Ⓑ $\overrightarrow{BN}=2\overrightarrow{BI}$. Ⓒ $\overrightarrow{BN}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{BI}$. Ⓓ $\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{BI}$.

Lời giải.

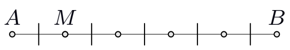
Ta có



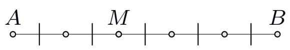
$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{NA}+2\overrightarrow{NB}=\overrightarrow{CB}\\
\Leftrightarrow\ &\overrightarrow{IA}-\overrightarrow{IN}+2\overrightarrow{IB}-2\overrightarrow{IN}=\overrightarrow{IB}-\overrightarrow{IC}\\
\Leftrightarrow\ &3\overrightarrow{IN}=\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{IB}\\
\Leftrightarrow\ &\overrightarrow{IN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{IB}.\quad (\text{Do } \overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IC}=\vec{0})\\
\Leftrightarrow\ &3\overrightarrow{BN}-3\overrightarrow{BI}=-\overrightarrow{BI}\\
\Leftrightarrow\ &\overrightarrow{BN}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BI}.
\end{aligned}$$

Chọn đáp án C .... □

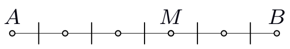
CÂU 29. Cho đoạn thẳng AB, hình nào sau đây biểu diễn đúng điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MA}+4\overrightarrow{MB}=\vec{0}$.



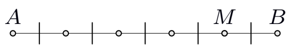
Hình 1



Hình 2



Hình 3



Hình 4

Ⓐ Hình 1. Ⓑ Hình 2. Ⓒ Hình 3. Ⓓ Hình 4.

Lời giải.

$\overrightarrow{MA}+4\overrightarrow{MB}=\vec{0}\Leftrightarrow \overrightarrow{MA}+4\overrightarrow{MA}+4\overrightarrow{AB}=\vec{0}\Leftrightarrow 5\overrightarrow{AM}=4\overrightarrow{AB}$.
Suy ra M nằm trên tia AB và $AM=\dfrac{4}{5}AB$.

Chọn đáp án D .... □

CÂU 30. Cho đoạn thẳng AB có trung điểm I. Tìm điểm M thỏa mãn $3\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\vec{0}$.

Ⓐ M trùng với I. Ⓑ M là trung điểm của BI.

Ⓒ M là trung điểm của AI. Ⓓ M trùng với A hoặc M trùng với B.

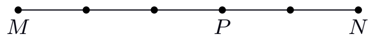
Lời giải.

Do I là trung điểm của đoạn thẳng AB nên $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MI}$.
Ta có

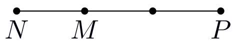
$$\begin{aligned}
&3\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\vec{0}\\
\Leftrightarrow\ &2\overrightarrow{MA}+\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right)=\vec{0}\\
\Leftrightarrow\ &2\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MI}=\vec{0}\\
\Leftrightarrow\ &\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MI}=\vec{0}.
\end{aligned}$$

Vậy M là trung điểm của IA.
Chọn đáp án C .... □

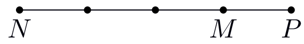
CÂU 31. Trên đường thẳng MN lấy điểm P sao cho $\overrightarrow{MN}=-3\overrightarrow{MP}$. Điểm P được xác định trong hình vẽ nào sau đây?



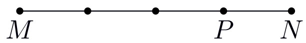
Hình 1



Hình 2



Hình 3



Hình 4

Ⓐ Hình 1. Ⓑ Hình 2. Ⓒ Hình 3. Ⓓ Hình 4.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{MN} = -3\overrightarrow{MP}$ nên M nằm giữa N, P và $MN = 3MP$.

Chọn đáp án C .... □

CÂU 32. Trên đưuòng thẳng MN lấy điểm P sao cho $\overrightarrow{MN} = -3\overrightarrow{MP}$. Điểm P được xác định đúng theo hình vẽ nào sau đây.

Ⓐ 

.

Ⓑ 

.

Ⓒ 

.

Ⓓ 

.

Lời giải.

Vì $\overrightarrow{MN} = -3\overrightarrow{MP}$ nên $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{MP}$ ngược hướng và $MN = 3MP$.

Chọn đáp án C .... □

CÂU 33. Đẳng thức nào sau đây mô tả đúng hình vẽ bên?

Ⓐ $3\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0}$. Ⓑ $3\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{0}$. Ⓒ $\overrightarrow{BI} + 3\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{0}$. Ⓓ $\overrightarrow{AI} + 3\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0}$.

Lời giải.

Hai vec-tơ $\overrightarrow{AI}$, $\overrightarrow{AB}$ ngược hướng và $AB = 3AI$ nên đẳng thức mô tả đúng hình vẽ là $3\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0}$.

Chọn đáp án A .... □

CÂU 34. Trong mặt phẳng Oxy, tam giác ABC có trọng tâm G là điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + 6\overrightarrow{AG} = 6\overrightarrow{AM}$. Vị trí của điểm M là

Ⓐ M là trung điểm của AC.

Ⓑ M là trung điểm của BC.

Ⓒ M là điểm thứ tư của hình bình hành $ABCM$.

Ⓓ M là trung điểm của AB.

Lời giải.

Vì G là trọng tâm $\triangle ABC$ nên

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AG}.$$

Do đó $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + 6\overrightarrow{AG} = 6\overrightarrow{AM} \Leftrightarrow 3\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right) = 6\overrightarrow{AM} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = \dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)$.

Suy ra M là trung điểm của BC.

Chọn đáp án B .... □

4 Biểu diễn vectơ theo hai vectơ không cùng phương

Đặt vấn đề : Trong dạng toán này, chúng ta giải quyết bài toán dựa vào kiến thức: "Cho trước hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ khác $\vec{0}$ và không cùng phương. Với mọi vectơ $\vec{c}$ ta luôn tìm được một cặp số thực (α, β) duy nhất sao cho $\vec{c} = \alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{b}$".

Phương pháp giải : Ta có thể chọn 1 trong 2 hướng giải sau

- **Hướng 1**: Từ giả thiết xác định được tính chất hình học, rồi từ đó khai triển vectơ cần biểu diễn bằng quy tắc ba điểm, quy tắc hình bình hành, tính chất trung điểm, trọng tâm, ...
- **Hướng 2**: Từ giả thiết, ta lập được mối quan hệ vectơ giữa các đối tượng, rồi từ đó khai triển biểu thức bằng quy tắc ba điểm, quy tắc hình bình hành, tính chất trung điểm, trọng tâm, ...

1. Ví dụ minh họa

VÍ DỤ 1. Cho $\triangle ABC$, gọi G là trọng tâm của tam giác và B_1 là điểm đối xứng của B qua G. Gọi M là trung điểm của BC. Hãy biểu diễn các vectơ

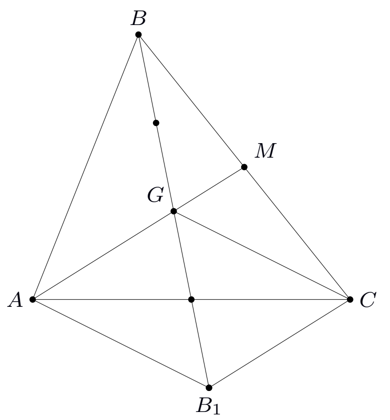
a) $\overrightarrow{CB_1}$ và $\overrightarrow{AB_1}$ theo $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$.

b) $\overrightarrow{MB_1}$ theo $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$.

Lời giải.

Theo giả thiết thì AB_1CG là hình bình hành.

a) Tính $\overrightarrow{CB_1}$ và $\overrightarrow{AB_1}$ theo $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$.



- Ta có $\overrightarrow{CB_1} = \overrightarrow{GA} = -\overrightarrow{AG} = -\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AM}$.
  Mà M là trung điểm của đoạn BC nên

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right).$$

  Do đó $\overrightarrow{CB_1} = -\dfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)$.
- Mặt khác

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB_1} &= \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AC} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AM}\\ &= \overrightarrow{AC} - \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right) = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}.\end{aligned}$$

b) Tính $\overrightarrow{MB_1}$ theo $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$.
Ta có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MB_1} &= \overrightarrow{AB_1} - \overrightarrow{AM} = \left(\frac{2}{3}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\right) - \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right)\\ &= -\frac{5}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}.\end{aligned}$$

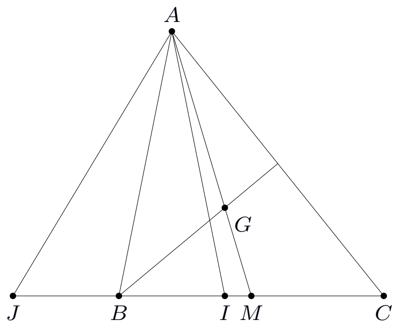
VÍ DỤ 2. Cho $\triangle ABC$. Gọi I là điểm trên cạnh BC sao cho $2CI = 3BI$ và J là điểm trên BC kéo dài sao cho $5JB = 2JC$. Gọi G là trọng tâm $\triangle ABC$.

a) Tính $\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AJ}$ theo $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$.

b) Tính $\overrightarrow{AG}$ theo $\overrightarrow{AI}$ và $\overrightarrow{AJ}$.

Lời giải.

a) Tính các vectơ $\overrightarrow{AI}$, $\overrightarrow{AJ}$ theo $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.
Do $2CI = 3BI$ và $\overrightarrow{IC}$, $\overrightarrow{IB}$ ngược hướng nên



$$\begin{aligned}2\overrightarrow{IC} = -3\overrightarrow{IB} &\Leftrightarrow 2\left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AI}\right) = -3\left(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AI}\right)\\ &\Leftrightarrow 5\overrightarrow{AI} = 3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}.\end{aligned}$$

Vậy $\overrightarrow{AI} = \dfrac{3}{5}\overrightarrow{AB} + \dfrac{2}{5}\overrightarrow{AC}$.
Do $5JB = 2JC$ và $\overrightarrow{JC}$, $\overrightarrow{JB}$ cùng hướng nên

$$\begin{aligned}5\overrightarrow{JB} = 2\overrightarrow{JC} &\Leftrightarrow 5\left(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AJ}\right) = 2\left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AJ}\right)\\ &\Leftrightarrow 3\overrightarrow{AJ} = 5\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}\\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{AJ} = \frac{5}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}.\end{aligned}$$

b) Tính vectơ $\overrightarrow{AG}$ theo $\overrightarrow{AI}$ và $\overrightarrow{AJ}$.
Gọi M là trung điểm của BC nên $\overrightarrow{AG} = \dfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)$.
Do $\begin{cases}\overrightarrow{AI} = \dfrac{3}{5}\overrightarrow{AB} + \dfrac{2}{5}\overrightarrow{AC}\\ \overrightarrow{AJ} = \dfrac{5}{3}\overrightarrow{AB} - \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AC}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\overrightarrow{AB} = \dfrac{5}{8}\overrightarrow{AI} + \dfrac{3}{8}\overrightarrow{AJ}\\ \overrightarrow{AC} = \dfrac{25}{16}\overrightarrow{AI} + \dfrac{9}{16}\overrightarrow{AJ}.\end{cases}$
Vậy $\overrightarrow{AG} = \dfrac{35}{48}\overrightarrow{AI} - \dfrac{1}{16}\overrightarrow{AJ}$.

VÍ DỤ 3. Cho $\triangle ABC$ và hai điểm D, E thỏa mãn $\overrightarrow{DB} = k \cdot \overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{EB} = \dfrac{1}{k}\overrightarrow{EC}$ (với $k \neq 1$).

a) Biểu diễn các vectơ $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{DE}$ theo các vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$.

b) Điểm F, I thỏa mãn $\overrightarrow{FA}=k\cdot\overrightarrow{FB}$, $\overrightarrow{IC}=k\cdot\overrightarrow{IA}$. Chứng minh $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BI}+\overrightarrow{CF}=\vec{0}$.

Lời giải.

a) Biểu diễn các véctơ $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{DE}$ theo các véctơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$.

- Tính $\overrightarrow{AD}$ theo $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$.
  Ta có $\begin{cases}\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}\\ \overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}\\ \overrightarrow{DB}=k\cdot\overrightarrow{DC}\end{cases}\Rightarrow \overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=k\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}\right)$.
  Suy ra $\overrightarrow{AD}=\dfrac{k}{k-1}\overrightarrow{AC}+\dfrac{1}{k-1}\overrightarrow{AB}$. (1)
- Tính $\overrightarrow{AE}$ theo $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$.
  Ta có $\begin{cases}\overrightarrow{EB}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AE}\\ \overrightarrow{EC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AE}\\ \overrightarrow{EB}=\dfrac{1}{k}\overrightarrow{EC}\end{cases}\Rightarrow \overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AE}=k\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AE}\right)$.
  Do đó $\overrightarrow{AE}=\dfrac{1}{k-1}\overrightarrow{AC}+\dfrac{k}{k-1}\overrightarrow{AB}$. (2)
- Tính $\overrightarrow{DE}$ theo $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$.
  Ta có $\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AD}$. (3)
  Thay (1), (2) vào (3) và rút gọn, ta được $\overrightarrow{DE}=\dfrac{k+1}{k-1}\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right)$.

b) Điểm F, I thỏa mãn hệ thức $\overrightarrow{FA}=k\cdot\overrightarrow{FB},\overrightarrow{IC}=k\cdot\overrightarrow{IA}$. Chứng minh $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BI}+\overrightarrow{CF}=\vec{0}$.

- Ta có $\overrightarrow{IC}=k\cdot\overrightarrow{IA}\Rightarrow\overrightarrow{AI}=-\dfrac{1}{k-1}\cdot\overrightarrow{AC}$.
  Mà $\overrightarrow{BI}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AI}\Rightarrow\overrightarrow{BI}=-\dfrac{1}{k-1}\cdot\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$.
- Từ giả thiết, ta có $\overrightarrow{FA}=k\cdot\overrightarrow{FB}\Rightarrow\overrightarrow{AF}=\dfrac{k}{k-1}\cdot\overrightarrow{AB}$.
  Nên $\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AC}=\dfrac{k}{k-1}\cdot\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$.
- Do đó $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BI}+\overrightarrow{CF}=\dfrac{k}{k-1}\overrightarrow{AC}+\dfrac{-1}{k-1}\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AC}+\dfrac{k}{k-1}\cdot\overrightarrow{AB}+\dfrac{-1}{k-1}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AB}$
  $\Rightarrow\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BI}+\overrightarrow{CF}=\vec{0}$ (đpcm).

2. Bài tập áp dụng

BÀI 1. Cho $\triangle ABC$ có M, D lần lượt là trung điểm của AB, BC và N là điểm trên cạnh AC sao cho $\overrightarrow{AN}=\dfrac{1}{2}\cdot\overrightarrow{NC}$. Gọi K là trung điểm của MN. Hãy tính các vectơ $\overrightarrow{AK}$, $\overrightarrow{KD}$ theo $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$.

BÀI 2. Cho $\triangle ABC$. Trên hai cạnh AB và AC lấy hai điểm D và E sao cho $\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{CE}=3\overrightarrow{EA}$. Gọi M, I lần lượt là trung điểm của DE và BC. Hãy tính vectơ $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{MI}$ theo $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$.

BÀI 3. Cho $\triangle ABC$, lấy điểm M, N, P sao cho $\overrightarrow{MB}=3\overrightarrow{MC}$, $\overrightarrow{NA}+3\overrightarrow{NC}=\vec{0}$, $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}=\vec{0}$. Phân tích $\overrightarrow{PM}$, $\overrightarrow{PN}$ theo $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$.

BÀI 4. Cho hình bình hành $ABCD$ có tâm là O. Hãy tính các vectơ sau theo vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AD}$.

a) $\overrightarrow{AI}$ với I là trung điểm của $\overrightarrow{BO}$.

b) $\overrightarrow{BG}$ với G là trọng tâm $\triangle OCD$.

BÀI 5. Cho $\triangle ABC$ có hai đường trung tuyến BN, CP. Hãy biểu thị các vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$ theo các vectơ $\overrightarrow{BN}$, $\overrightarrow{CP}$.

BÀI 6. Cho $\triangle ABC$ có trọng tâm G. Gọi I, J nằm trên cạnh BC và BC kéo dài sao cho $2CI=3BI$, $5JB=2JC$.

a) Tính $\overrightarrow{AI}$, $\overrightarrow{AJ}$ theo $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$.

b) Tính $\overrightarrow{AG}$ theo $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$.

BÀI 7. Cho $\triangle ABC$ có G là trọng tâm tam giác và I là điểm đối xứng của B qua G. M là trung điểm của BC. Hãy tính $\overrightarrow{AI}$, $\overrightarrow{CI}$, $\overrightarrow{MI}$ theo $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$.

BÀI 8. Cho $\triangle ABC$ có trọng tâm là G và các đường trung tuyến AM, BP. Gọi G' là điểm đối xứng với điểm G qua P.

a) Hãy biểu diễn các vectơ $\overrightarrow{AG'}$, $\overrightarrow{CG'}$ theo $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$.

b) Chứng minh hệ thức: $5\overrightarrow{AC} - 6\overrightarrow{AB} = 6\overrightarrow{MG'}$.

BÀI 9. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm của các cạnh BC, CD. Hãy biểu diễn các vectơ $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$ theo các vectơ $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AN}$.

BÀI 10. Cho tứ giác $ABCD$ có M, N theo thứ tự là trung điểm của các cạnh AD, BC. Hãy biểu diễn vectơ $\overrightarrow{MN}$ theo $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DC}$ và theo $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{DB}$.

BÀI 11. Cho $\triangle ABC$. Gọi I là điểm đối xứng của trọng tâm G qua B.

a) Chứng minh $\overrightarrow{IA} - 5\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \vec{0}$.

b) Đặt $\overrightarrow{AG} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AI} = \vec{b}$. Tính $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ theo $\vec{a}$, $\vec{b}$.

BÀI 12. Cho $\triangle ABC$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB. Tính các vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$ theo các vectơ $\overrightarrow{BN}$, $\overrightarrow{CP}$.

BÀI 13. Cho $\triangle ABC$. Gọi I là điểm trên cạnh BC kéo dài sao cho $IB = 3IC$.

a) Tính $\overrightarrow{AI}$ theo $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$.

b) Gọi J và K lần lượt là các điểm thuộc cạnh AC, AB sao cho $JA = 2JC$ và $KB = 3KA$. Tính $\overrightarrow{JK}$ theo $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$.

c) Tính $\overrightarrow{BC}$ theo $\overrightarrow{AI}$ và $\overrightarrow{JK}$.

3. Bài tập trắc nghiệm

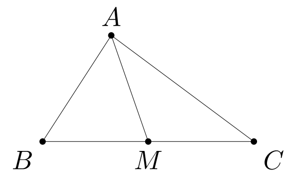
CÂU 1. Cho tam giác ABC có M là trung điểm của đoạn BC. Tìm mệnh đề đúng.

(A) $\overrightarrow{AM} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$. (B) $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$. (C) $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$. (D) $\overrightarrow{AM} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

Lời giải.

Vì M là trung điểm của BC nên ta có

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}.$$



Chọn đáp án (C) ☐

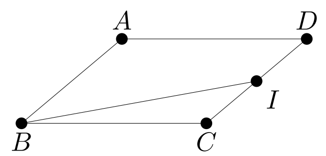
CÂU 2. Cho hình bình hành $ABCD$, gọi I là trung điểm của CD, đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$. Biểu diễn vectơ $\overrightarrow{BI}$ theo các vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$.

(A) $\overrightarrow{BI} = -\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$. (B) $\overrightarrow{BI} = \vec{a} + \vec{b}$. (C) $\overrightarrow{BI} = -\frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b}$. (D) $\overrightarrow{BI} = \frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BI} &= \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CI} = \overrightarrow{AD} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\\ &= -\frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b}.\end{aligned}$$



Chọn đáp án (C) ☐

CÂU 3. Cho tam giác ABC và một điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{BM} = k\overrightarrow{BC}$. Biểu diễn vectơ $\overrightarrow{AM}$ theo các vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$.

(A) $\overrightarrow{AM} = (1-k)\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{AC}$. (B) $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{AC}$.

(C) $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB} + (1-k)\overrightarrow{AC}$. (D) $\overrightarrow{AM} = (1-k)\overrightarrow{AB} + (1-k)\overrightarrow{AC}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AM} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{BC}\\ &= \overrightarrow{AB} + k\left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right)\\ &= (1-k)\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{AC}.\end{aligned}$$

Chọn đáp án (A) ☐

CÂU 4. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi I là điểm trên cạnh BC được xác định bởi $\overrightarrow{BI}=k\overrightarrow{BC}$ $(k\neq 1)$. Tìm hệ thức liên hệ giữa $\overrightarrow{DI}$, $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{DC}$.

A $\overrightarrow{DI}=(k-1)\overrightarrow{DB}-k\overrightarrow{DC}$. **B** $\overrightarrow{DI}=(1-k)\overrightarrow{DB}+k\overrightarrow{DC}$. **C** $\overrightarrow{DI}=(1+k)\overrightarrow{DB}-k\overrightarrow{DC}$. **D** $\overrightarrow{DI}=(1+k)\overrightarrow{DB}+k\overrightarrow{DC}$.

Lời giải.

Từ giả thiết ta có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BI}=k\overrightarrow{BC} &\Leftrightarrow \overrightarrow{DI}-\overrightarrow{DB}=k\left(\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{DB}\right)\\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{DI}=(1-k)\overrightarrow{DB}+k\overrightarrow{DC}.\end{aligned}$$

Chọn đáp án B .... □

CÂU 5. Cho tam giác ABC có M là trung điểm của BC. Tính $\overrightarrow{AB}$ theo $\overrightarrow{AM}$ và $\overrightarrow{BC}$.

A $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AM}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$. **B** $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AM}$. **C** $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AM}-\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$. **D** $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AM}$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{AM}-\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.

Chọn đáp án C .... □

CÂU 6. Cho tam giác ABC có M là trung điểm của BC, I là trung điểm của AM. Khẳng định nào sau đây **đúng**?

A $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$. **B** $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right)$. **C** $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$. **D** $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AI} &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)\\ &= \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right).\end{aligned}$$

Chọn đáp án A .... □

CÂU 7. Cho tam giác ABC. Hai điểm M, N chia cạnh BC theo ba phần bằng nhau $BM=MN=NC$. Tính $\overrightarrow{AM}$ theo $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.

A $\overrightarrow{AM}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$. **B** $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$. **C** $\overrightarrow{AM}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$. **D** $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AM} &= \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}\\ &= \overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)\\ &= \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}.\end{aligned}$$

Chọn đáp án A .... □

CÂU 8. Cho tam giác ABC có G là trọng tâm tam giác. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

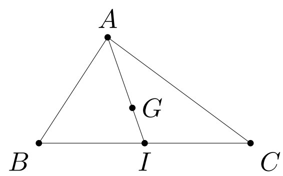
A $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{CG}=\vec{0}$. **B** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{AG}$. **C** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AG}$. **D** $2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{AG}$.

Lời giải.

Gọi I là trung điểm của BC, ta có $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AI}$.

Do G là trọng tâm $\triangle ABC$ nên $\overrightarrow{AI}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AG}$.

Suy ra $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AI}=3\overrightarrow{AG}$.



Chọn đáp án B .... □

CÂU 9. Cho $\triangle ABC$ có M là trung điểm của BC. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

A $2\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$. **B** $2\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$. **C** $2\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BC}$. **D** $2\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}$.

Lời giải.

Do M là trung điểm của BC nên ta có

$$\begin{aligned} 2\overrightarrow{AM} &= \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC} \\ &= \overrightarrow{AB}+\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right)=2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC} \\ &= 2\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BC}\right)+\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BC}. \end{aligned}$$

Từ các phương án đã cho, ta thấy mệnh đề sai là "$2\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}$".

Chọn đáp án D .... □

CÂU 10. Cho $\triangle ABC$ và I thỏa mãn $\overrightarrow{IA}=3\overrightarrow{IB}$. Phân tích $\overrightarrow{CI}$ theo $\overrightarrow{CA}$ và $\overrightarrow{CB}$.

A $\overrightarrow{CI}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CA}-3\overrightarrow{CB}\right)$. **B** $\overrightarrow{CI}=\overrightarrow{CA}-3\overrightarrow{CB}$. **C** $\overrightarrow{CI}=\frac{1}{2}\left(3\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA}\right)$. **D** $\overrightarrow{CI}=3\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} \overrightarrow{CI} &= \overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{CA}-3\overrightarrow{IB} \\ &= \overrightarrow{CA}-3\left(\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{CB}\right)=\overrightarrow{CA}+3\overrightarrow{CI}-3\overrightarrow{CB} \\ &= -\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CA}-3\overrightarrow{CB}\right)=\frac{1}{2}\left(3\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA}\right). \end{aligned}$$

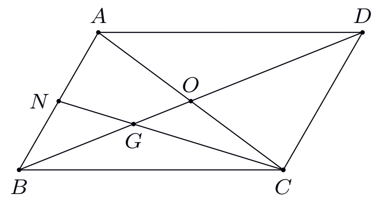
Chọn đáp án C .... □

CÂU 11. Cho hình bình hành $ABCD$ có N là trung điểm AB và G là trọng tâm $\triangle ABC$. Phân tích $\overrightarrow{GA}$ theo $\overrightarrow{BD}$ và $\overrightarrow{NC}$.

A $\overrightarrow{GA}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{BD}+\frac{2}{3}\overrightarrow{NC}$. **B** $\overrightarrow{GA}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BD}-\frac{4}{3}\overrightarrow{NC}$. **C** $\overrightarrow{GA}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BD}+\frac{2}{3}\overrightarrow{NC}$. **D** $\overrightarrow{GA}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BD}-\frac{2}{3}\overrightarrow{NC}$.

Lời giải.

Vì G là trọng tâm $\triangle ABC$ nên



$$\begin{aligned} \overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0} &\Leftrightarrow \overrightarrow{GA}=-\left(\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}\right) \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{GA}=-\left(-\frac{1}{3}\overrightarrow{BD}+\frac{2}{3}\overrightarrow{NC}\right) \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{GA}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BD}-\frac{2}{3}\overrightarrow{NC}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án D .... □

CÂU 12. Cho $\triangle ABC$ có AK, BM là hai trung tuyến. Đặt $\overrightarrow{AK}=\vec{a}$, $\overrightarrow{BM}=\vec{b}$. Hãy biểu diễn $\overrightarrow{BC}$ theo $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là

A $\overrightarrow{BC}=\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{4}{3}\vec{b}$. **B** $\overrightarrow{BC}=\frac{2}{3}\vec{a}-\frac{4}{3}\vec{b}$. **C** $\overrightarrow{BC}=-\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{4}{3}\vec{b}$. **D** $\overrightarrow{BC}=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{4}{3}\vec{b}$.

Lời giải.

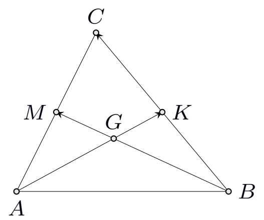
Gọi G là trọng tâm tam giác ABC.

Ta có $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GB}=\frac{2}{3}\vec{a}-\frac{2}{3}\vec{b}$ (1)

Do K là trung điểm của BC nên $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AK}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AC}=2\vec{a}-\overrightarrow{AB}=\frac{4}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{4}{3}\vec{b}$.



Chọn đáp án A .... □

CÂU 13. Cho $\triangle ABC$ với trọng tâm G. Đặt $\overrightarrow{CA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{CB}=\vec{b}$. Biểu thị vectơ $\overrightarrow{AG}$ theo hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ ta được

A $\overrightarrow{AG}=\dfrac{2\vec{a}-\vec{b}}{3}$. **B** $\overrightarrow{AG}=\dfrac{-2\vec{a}+\vec{b}}{3}$. **C** $\overrightarrow{AG}=\dfrac{2\vec{a}+\vec{b}}{3}$. **D** $\overrightarrow{AG}=\dfrac{\vec{a}-2\vec{b}}{3}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} 3\overrightarrow{AG} &= \overrightarrow{AA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC} \\ &= \left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}\right)+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB} \\ &= -2\vec{a}+\vec{b}. \end{aligned}$$

Do đó $\overrightarrow{AG} = \dfrac{-2\vec{a} + \vec{b}}{3}$.

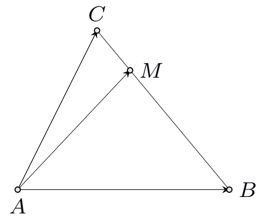
Chọn đáp án B

CÂU 14. Cho tam giác ABC. Gọi M trên cạnh BC sao cho $MB = 3MC$. Khi đó, biểu diễn vectơ $\overrightarrow{AM}$ theo vectơ $\overrightarrow{AB}$ và vectơ $\overrightarrow{AC}$ là

A. $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}$.
B. $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$.
C. $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$.
D. $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$.

Lời giải.

Ta có



$$\begin{aligned}\overrightarrow{AM} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{BC}\\ &= \overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right)\\ &= \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}.\end{aligned}$$

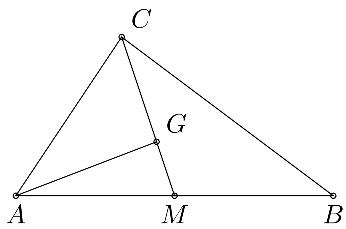
Chọn đáp án B

CÂU 15. Cho tam giác ABC có trọng tâm G. Đặt $\overrightarrow{CA} = \vec{u}$, $\overrightarrow{CB} = \vec{v}$. Khi đó $\overrightarrow{AG}$ bằng

A. $\dfrac{2\vec{u} - \vec{v}}{3}$.
B. $\dfrac{2\vec{u} + \vec{v}}{3}$.
C. $\dfrac{\vec{u} - 2\vec{v}}{3}$.
D. $\dfrac{-2\vec{u} + \vec{v}}{3}$.

Lời giải.

Ta có



$$\begin{aligned}\overrightarrow{AG} &= \overrightarrow{CG} - \overrightarrow{CA} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CM} - \overrightarrow{CA}\\ &= \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}\right) - \overrightarrow{CA} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CB}\\ &= \frac{-2\vec{u} + \vec{v}}{3}.\end{aligned}$$

Chọn đáp án D

CÂU 16. Cho tam giác ABC có G là trọng tâm tam giác. Điểm N trên BC sao cho $\overrightarrow{CN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$. Biểu diễn vectơ $\overrightarrow{AC}$ theo các vectơ $\overrightarrow{AG}$ và $\overrightarrow{AN}$.

A. $\overrightarrow{AC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AG} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AN}$.
B. $\overrightarrow{AC} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AG} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AN}$.
C. $\overrightarrow{AC} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AG} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AN}$.
D. $\overrightarrow{AC} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AG} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AN}$.

Lời giải.

Do G là trọng tâm của $\triangle ABC$ nên

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AG} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AG} - \overrightarrow{AC}.$$

Ta có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AN} &= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CN} = \overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\\ &= -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC} = -\frac{1}{2}\left(3\overrightarrow{AG} - \overrightarrow{AC}\right) + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}\\ &= \frac{3}{4}\overrightarrow{AG} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AN}.\end{aligned}$$

Chọn đáp án B

CÂU 17. Cho $\triangle ABC$ với G là trọng tâm. Đặt $\overrightarrow{CA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CB} = \vec{b}$. Khi đó $\overrightarrow{AG}$ được biểu diễn theo hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là

A. $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\vec{a} - \frac{2}{3}\vec{b}$.
B. $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$.
C. $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b}$.
D. $\overrightarrow{AG} = -\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$.

Lời giải.

Gọi M là trung điểm cạnh BC.
Ta có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AG} &= \frac{2}{3}\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)\\ &= \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{CA} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}\right) - \frac{1}{3}\overrightarrow{CA}\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{3}\overrightarrow{CB} - \frac{2}{3}\overrightarrow{CA} = -\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}.$$

Chọn đáp án (D) .... □

CÂU 18. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. Đặt $\overrightarrow{GA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{GB} = \vec{b}$. Tìm các giá trị thực của m, n để $\overrightarrow{BC} = m\vec{a} + n\vec{b}$.

(A) $m = 1$; $n = 2$. (B) $m = -1$; $n = -2$. (C) $m = -2$; $n = -1$. (D) $m = 2$; $n = 1$.

Lời giải.

Vì G là trọng tâm tam giác ABC nên

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{GC} = -\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB}.$$

Ta có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BC} &= \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GC}\\ &= -\overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB}\\ &= -\overrightarrow{GA} - 2\overrightarrow{GB}.\end{aligned}$$

Suy ra $m = -1$; $n = -2$.

Chọn đáp án (B) .... □

CÂU 19. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD và BC. Hãy tìm m và n sao cho $\overrightarrow{MN} = m\overrightarrow{AB} + n\overrightarrow{DC}$.

(A) $m = \frac{1}{2}$, $n = \frac{1}{2}$. (B) $m = -\frac{1}{2}$, $n = \frac{1}{2}$. (C) $m = \frac{1}{2}$, $n = -\frac{1}{2}$. (D) $m = -\frac{1}{2}$, $n = -\frac{1}{2}$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right) = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DC}\right)$.

Vì M là trung điểm AD nên $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MD} = \vec{0}$.

Vậy $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}\right) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$.

Suy ra $m = \frac{1}{2}$, $n = \frac{1}{2}$.

Chọn đáp án (A) .... □

CÂU 20. Gọi G là trọng tâm của $\triangle ABC$. Đặt $\overrightarrow{GA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{GB} = \vec{b}$. Hãy tìm m, n để có $\overrightarrow{BC} = m\vec{a} + n\vec{b}$.

(A) $m = 1$, $n = 2$. (B) $m = -1$, $n = -2$. (C) $m = 2$, $n = 1$. (D) $m = -2$, $n = -1$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{GC} = -\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB}$.

Suy ra

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BC} &= \overrightarrow{GC} - \overrightarrow{GB}\\ &= -\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GB}\\ &= -\vec{a} - 2\vec{b}.\end{aligned}$$

Chọn đáp án (B) .... □

CÂU 21. Cho tứ giác $ABCD$ (với AB, CD không song song). Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD và BC. Tìm m, n để $\overrightarrow{MN} = m\overrightarrow{AB} + n\overrightarrow{DC}$.

(A) $m = \frac{1}{2}$, $n = \frac{1}{2}$. (B) $m = -\frac{1}{2}$, $n = \frac{1}{2}$. (C) $m = \frac{1}{2}$, $n = -\frac{1}{2}$. (D) $m = -\frac{1}{2}$, $n = -\frac{1}{2}$.

Lời giải.

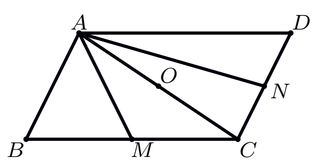
Ta có $\begin{cases}\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN}\\ \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CN}.\end{cases}$

Suy ra $2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}$.

Vậy $m = \frac{1}{2}$, $n = \frac{1}{2}$.

Chọn đáp án (A) .... □

CÂU 22. Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC và CD. Đặt $\vec{a} = \overrightarrow{AM}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AN}$. Hãy biểu diễn $\overrightarrow{AO}$ theo $\vec{a}$ và $\vec{b}$.



(A) $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$. (B) $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{6}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$. (C) $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{3}\vec{a} + 2\vec{b}$. (D) $\overrightarrow{AO} = \vec{a} + 3\vec{b}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AO} &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(2\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AC}\right)\\ &= \overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AC}.\end{aligned}$$

Suy ra

$$\overrightarrow{AO} = \vec{a}+\vec{b}-2\overrightarrow{AO} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{AO} = \vec{a}+\vec{b} \Leftrightarrow \overrightarrow{AO} = \frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}.$$

Chọn đáp án A ....

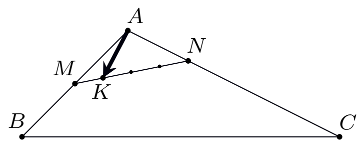
CÂU 23. Cho tam giác ABC. Gọi M là trung điểm của AB và N là một điểm trên cạnh AC sao cho $NC = 2NA$. Gọi K là là điểm trên cạnh MN sao cho $KN = 3KM$. Kết quả nào dưới đây đúng?

A $\overrightarrow{AK} = -\frac{3}{8}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{12}\overrightarrow{AC}$. **B** $\overrightarrow{AK} = -\frac{3}{8}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{12}\overrightarrow{AC}$. **C** $\overrightarrow{AK} = \frac{3}{8}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{12}\overrightarrow{AC}$. **D** $\overrightarrow{AK} = \frac{3}{8}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{12}\overrightarrow{AC}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AK} &= \overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{MN}\\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AM}\right)\\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{12}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{8}\overrightarrow{AB}\\ &= \frac{3}{8}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{12}\overrightarrow{AC}.\end{aligned}$$



Chọn đáp án C ....

CÂU 24. Cho tứ giác $ABCD$. Trên cạnh AB, CD lần lượt lấy các điểm M, N sao cho $3\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB}$ và $3\overrightarrow{DN} = 2\overrightarrow{DC}$. Tính vectơ $\overrightarrow{MN}$ theo hai vectơ $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BC}$.

A $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$. **B** $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}-\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$. **C** $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$. **D** $\overrightarrow{MN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.

Lời giải.

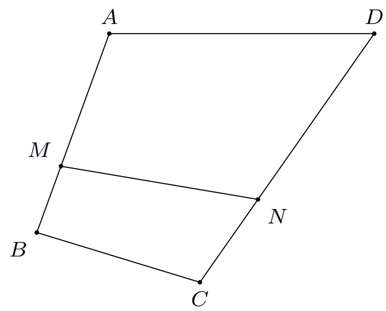
Ta có $\begin{cases}\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DN}\\ \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CN}.\end{cases}$

Suy ra

$$\begin{aligned}3\overrightarrow{MN} &= \overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DN}+2\left(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CN}\right)\\ &= \left(\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}\right)+\overrightarrow{AD}+2\overrightarrow{BC}+\left(\overrightarrow{DN}+2\overrightarrow{CN}\right).\end{aligned}$$

Theo bài ra, ta có $\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB} = \vec{0}$ và $\overrightarrow{DN}+2\overrightarrow{CN} = \vec{0}$.

Vậy $3\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AD}+2\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \overrightarrow{MN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$.



Chọn đáp án C ....

CÂU 25. Cho tam giác đều ABC và điểm I thỏa mãn $\overrightarrow{IA} = 2\overrightarrow{IB}$. Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

A $\overrightarrow{CI} = \dfrac{\overrightarrow{CA}-2\overrightarrow{CB}}{3}$. **B** $\overrightarrow{CI} = \dfrac{\overrightarrow{CA}+2\overrightarrow{CB}}{3}$. **C** $\overrightarrow{CI} = -\overrightarrow{CA}+2\overrightarrow{CB}$. **D** $\overrightarrow{CI} = \dfrac{\overrightarrow{CA}+2\overrightarrow{CB}}{-3}$.

Lời giải.

Từ giả thiết, ta có $\overrightarrow{IA} = 2\overrightarrow{IB} \Rightarrow B$ là trung điểm của IA.

Suy ra $\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AI} = 2\overrightarrow{AB}$.

Lại có $\begin{cases}\overrightarrow{CI} = \overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BI}\\ \overrightarrow{CI} = \overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AI}.\end{cases}$

Do đó

$$\begin{aligned}2\overrightarrow{CI} &= \overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{BI}+\overrightarrow{CI}\\ &= \overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AB}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}+3\overrightarrow{AB}\\ &= \overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}+3\left(\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA}\right)\\ &= -2\overrightarrow{CA}+4\overrightarrow{CB}.\end{aligned}$$

Vậy $\overrightarrow{CI}=-\overrightarrow{CA}+2\overrightarrow{CB}$.

Chọn đáp án C .... □

CÂU 26. Cho tam giác ABC có G là trọng tâm tam giác. Lấy các điểm P, Q sao cho $\overrightarrow{PA}=2\overrightarrow{PB}$, $3\overrightarrow{QA}+2\overrightarrow{QC}=\vec{0}$. Biểu diễn vectơ $\overrightarrow{AG}$ theo các vectơ $\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{AQ}$.

A $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AP}+\frac{5}{6}\overrightarrow{AQ}$. **B** $\overrightarrow{AG}=\frac{5}{6}\overrightarrow{AP}+\frac{1}{6}\overrightarrow{AQ}$. **C** $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{6}\overrightarrow{AP}+\frac{5}{6}\overrightarrow{AQ}$. **D** $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AP}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AQ}$.

Lời giải.

Ta có

- $\overrightarrow{AP}=2\overrightarrow{BP}=2\left(\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AB}\right)$, suy ra $\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AP}$.
- $3\overrightarrow{AQ}=2\overrightarrow{QC}=2\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AQ}\right)$, suy ra $\overrightarrow{AC}=\frac{5}{2}\overrightarrow{AQ}$.

Do đó $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{6}\overrightarrow{AP}+\frac{5}{6}\overrightarrow{AQ}$.

Chọn đáp án C .... □

CÂU 27. Cho tam giác ABC. Gọi I là điểm trên cạnh BC sao cho $2CI=3BI$ và J thuộc BC kéo dài sao cho $5JB=2JC$. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. Biểu diễn vectơ $\overrightarrow{AG}$ theo các vectơ $\overrightarrow{AI}$, $\overrightarrow{AJ}$.

A $\overrightarrow{AG}=\frac{35}{48}\overrightarrow{AI}-\frac{1}{16}\overrightarrow{AJ}$. **B** $\overrightarrow{AG}=\frac{35}{48}\overrightarrow{AI}+\frac{1}{16}\overrightarrow{AJ}$. **C** $\overrightarrow{AG}=\frac{25}{16}\overrightarrow{AI}-\frac{3}{16}\overrightarrow{AJ}$. **D** $\overrightarrow{AG}=\frac{25}{16}\overrightarrow{AI}+\frac{3}{16}\overrightarrow{AJ}$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AI}=\frac{3}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AJ}=\frac{5}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$

Suy ra $\overrightarrow{AB}=\frac{5}{8}\overrightarrow{AI}+\frac{3}{8}\overrightarrow{AJ}$, $\overrightarrow{AC}=\frac{25}{16}\overrightarrow{AI}-\frac{9}{16}\overrightarrow{AJ}$.

Do đó $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)=\frac{35}{48}\overrightarrow{AI}-\frac{1}{16}\overrightarrow{AJ}$.

Chọn đáp án A .... □

CÂU 28. Cho tam giác ABC. Gọi G là trọng tâm tam giác và H là điểm đối xứng của B qua G. Gọi M là trung điểm BC. Biểu diễn vectơ $\overrightarrow{MH}$ theo các vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$.

A $\overrightarrow{MH}=\frac{5}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$. **B** $\overrightarrow{MH}=-\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{5}{6}\overrightarrow{AC}$. **C** $\overrightarrow{MH}=-\frac{5}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$. **D** $\overrightarrow{MH}=\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{5}{6}\overrightarrow{AC}$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.

Lại có $\overrightarrow{BH}=2\overrightarrow{BG}=\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AC}-2\overrightarrow{AB}\right)$.

Do đó

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MH} &= -\overrightarrow{HM}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{HB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{HC}\\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{BH}-\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AH}\right)\\ &= -\frac{5}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}.\end{aligned}$$

Chọn đáp án C .... □

CÂU 29. Cho góc $\widehat{xOy}=60^\circ$. Các điểm A, B nằm trên tia Ox, các điểm C, D nằm trên tia Oy sao cho $AB=CD=2$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm các đoạn AC, BD. Biết A nằm giữa O và B, C nằm giữa O và D, tính IJ.

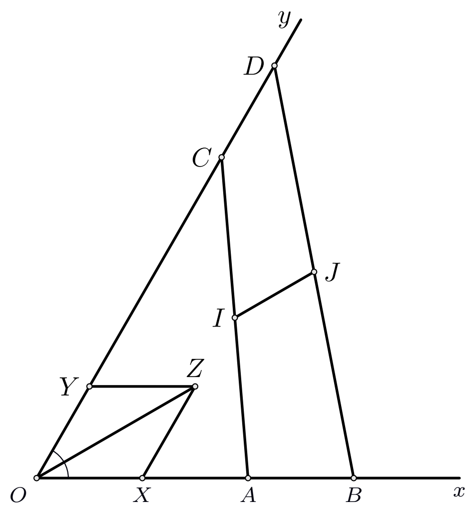
A $IJ=\frac{\sqrt{3}}{2}$. **B** $IJ=\frac{3\sqrt{3}}{2}$. **C** $IJ=\sqrt{3}$. **D** $IJ=2\sqrt{3}$.

Lời giải.

Trên các tia Ox, Oy lần lượt lấy các điểm X, Y sao cho $OX = OY = 2$.
Dựng hình bình hành $OXZY$, ta có

$$\begin{aligned} 2\overrightarrow{IJ} &= \left(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BJ}\right)+\left(\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DJ}\right) \\ &= \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{OX}+\overrightarrow{OY}=\overrightarrow{OZ}. \end{aligned}$$

Suy ra $IJ = \dfrac{1}{2}OZ = \sqrt{3}$.



Chọn đáp án (C) .... □

CÂU 30. Cho tam giác ABC, N là điểm xác định bởi $\overrightarrow{CN} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC}$. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. Hệ thức tính $\overrightarrow{AC}$ theo $\overrightarrow{AG}$ và $\overrightarrow{AN}$ là

(A) $\overrightarrow{AC} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AG} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AN}$.
(B) $\overrightarrow{AC} = \dfrac{4}{3}\overrightarrow{AG} - \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AN}$.
(C) $\overrightarrow{AC} = \dfrac{3}{4}\overrightarrow{AG} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AN}$.
(D) $\overrightarrow{AC} = \dfrac{3}{4}\overrightarrow{AG} - \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AN}$.

Lời giải.

Gọi M là trung điểm của BC.
Vì G là trọng tâm tam giác $ABC \Rightarrow \overrightarrow{AM} = \dfrac{3}{2}\overrightarrow{AG}$.
Ta có

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AC} &= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AN}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\overrightarrow{AG}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AN} \\ &= \frac{3}{4}\overrightarrow{AG}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AN}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án (C) .... □

5 Chứng minh ba điểm thẳng hàng, hai đường thẳng song song, hai điểm trùng nhau

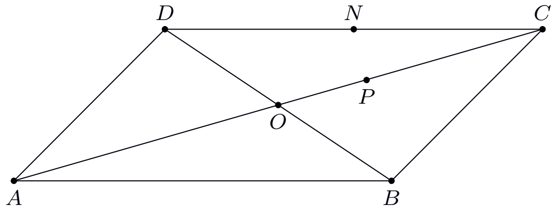
- Để chứng minh 3 điểm A, B, C thẳng hàng, ta chứng minh: $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$ (1).
  Để nhận được (1), ta lựa chọn một trong hai hướng sau:
  - Sử dụng các quy tắc biến đổi vectơ.
  - Xác định (tính) vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ thông qua một tổ hợp trung gian.

  Chú ý:
  - Cho ba điểm A, B, C. Điều kiện cần và đủ để A, B, C thẳng hàng là: $\overrightarrow{MC} = \alpha\overrightarrow{MA} + (1-\alpha)\overrightarrow{MB}$ với điểm M tùy ý và số thực α bất k".
    Đặc biệt khi $0 \leq \alpha \leq 1$ thì $C \in AB$. Kết quả trên còn được sử dụng để tìm điều kiện của tham số k (hoặc m) cho ba điểm A, B, C thẳng hàng.
  - Nếu không dễ nhận thấy k trong biểu thức $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$, ta nên quy đồng biểu thức phân tích vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ để tìm ra số k.
- Để chứng minh $AB \parallel CD$ ta cần chứng minh $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{DC}$.

1. Ví dụ minh họa

VÍ DỤ 1. Cho hình bình hành $ABCD$, tâm O. Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm của AB, CD và P là điểm thỏa mãn hệ thức $\overrightarrow{OP} = -\dfrac{1}{3}\overrightarrow{OA}$. Chứng minh 3 điểm B, P, N thẳng hàng.

Lời giải.



Ta có CO là đường trung tuyến của tam giác BCD. Hơn nữa $\overrightarrow{OP} = -\dfrac{1}{3}\overrightarrow{OA} \Leftrightarrow \overrightarrow{OP} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{OC}$ suy ra P là trọng tâm của tam giác BCD.
Mặt khác BN cũng là đường trung tuyến trong tam giác BCD nên B, P, N thẳng hàng.

VÍ DỤ 2. Cho bốn điểm phân biệt A, B, C, D thỏa: $2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC} = 5\overrightarrow{AD}$. Chứng minh B, C, D thẳng hàng.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}
& 2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC} = 5\overrightarrow{AD} \\
\Leftrightarrow\ & 2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC} - 5\overrightarrow{AD} = \vec{0} \\
\Leftrightarrow\ & 2\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AD} + 3\overrightarrow{AC} - 3\overrightarrow{AD} = \vec{0} \\
\Leftrightarrow\ & 2\left(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}\right) + 3\left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}\right) = \vec{0} \\
\Leftrightarrow\ & 2\overrightarrow{DB} + 3\overrightarrow{DC} = \vec{0} \\
\Leftrightarrow\ & \overrightarrow{DB} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{DC}.
\end{aligned}$$

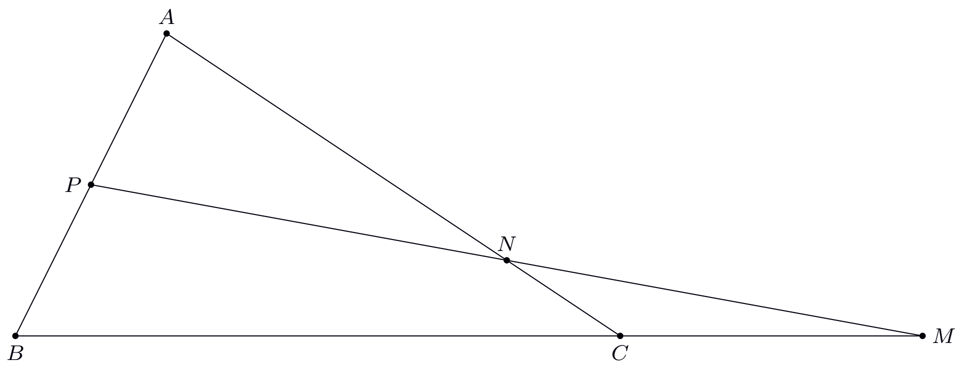
Suy ra ba điểm B, C, D thẳng hàng.

VÍ DỤ 3. Cho $\triangle ABC$, lấy điểm M, N, P sao cho $\overrightarrow{MB} = 3\overrightarrow{MC}$, $\overrightarrow{NA} + 3\overrightarrow{NC} = \vec{0}$, $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} = \vec{0}$.

a) Tính $\overrightarrow{PM}$, $\overrightarrow{PN}$ theo $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$.

b) Chứng minh ba điểm: M, N, P thẳng hàng.

Lời giải.



a) Ta có:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{MB} = 3\overrightarrow{MC} &\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AM} = 3\left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AM}\right) \\
&\Leftrightarrow 2\overrightarrow{AM} = -\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC} \\
&\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}. \\
\overrightarrow{NA} + 3\overrightarrow{NC} = \vec{0} &\Leftrightarrow -\overrightarrow{AN} + 3\left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AN}\right) = \vec{0} \\
&\Leftrightarrow -4\overrightarrow{AN} = -3\overrightarrow{AC} \\
&\Leftrightarrow \overrightarrow{AN} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}. \\
\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} = \vec{0} &\Leftrightarrow -\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AP} = \vec{0} \\
&\Leftrightarrow -2\overrightarrow{AP} = -\overrightarrow{AB} \\
&\Leftrightarrow \overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}.
\end{aligned}$$

Suy ra

$$\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AP} = \left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}\right) - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}\,;$$

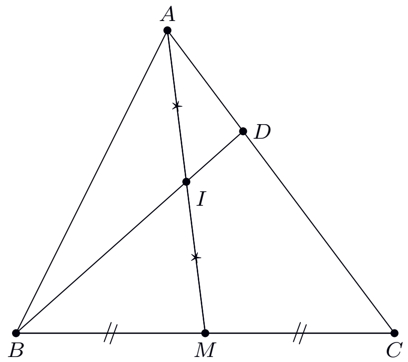
$$\overrightarrow{PN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AP} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}.$$

b) Ta có $\begin{cases} \overrightarrow{PM} = -\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC} \\ \overrightarrow{PN} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{PM} = 2\overrightarrow{PN}.$

Suy ra hai vectơ $\overrightarrow{PM}$ và $\overrightarrow{PN}$ cùng phương, nên ba điểm M, N, P thẳng hàng.

VÍ DỤ 4. Cho $\triangle ABC$ có I là trung điểm của trung tuyến AM và D là điểm thỏa hệ thức $3\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$. Biểu diễn vectơ $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{BI}$ theo $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ và chứng minh ba điểm B, I, D thẳng hàng.

Lời giải.



Ta có $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$. (1)

Lại có

$$\overrightarrow{BI} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\right) \Leftrightarrow \overrightarrow{BI} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right)$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{BI} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} - \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có $\overrightarrow{BI} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BD}$, suy ra ba điểm B, I, D thẳng hàng.

2. Bài tập áp dụng

BÀI 1. Cho $\triangle ABC$.

a) Dựng các điểm K, L sao cho $\overrightarrow{KA} + 2\overrightarrow{KB} + 3\overrightarrow{KC} = \vec{0}$, $2\overrightarrow{LB} + 3\overrightarrow{LC} = \vec{0}$

b) Chứng minh ba điểm A, K, L thẳng hàng.

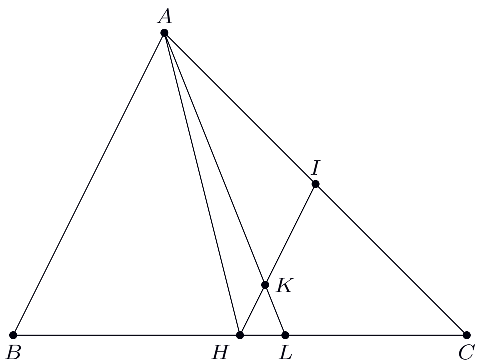
Lời giải.

a) Gọi H, I lần lượt là trung điểm của BC, AC. Khi đó

$$\overrightarrow{KA} + 2\overrightarrow{KB} + 3\overrightarrow{KC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KC} + 2\left(\overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC}\right) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{KI} + 4\overrightarrow{KH} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{IK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{IH}.$$

Từ đó dựng các điểm K, L như hình vẽ.



b) Ta có

$$\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{2}{3}\overrightarrow{IH}$$

$$= \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} \text{ (do } IH \text{ là đường trung bình trong } \triangle ABC\text{)}.$$

Lại có

$$\overrightarrow{AL} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BL} = \overrightarrow{AB} + \frac{3}{5}\overrightarrow{BC}$$

$$= \frac{2}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{5}\overrightarrow{AC} = \frac{6}{5}\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right) = \frac{6}{5}\overrightarrow{AK}.$$

Vậy ba điểm A, K, L thẳng hàng.

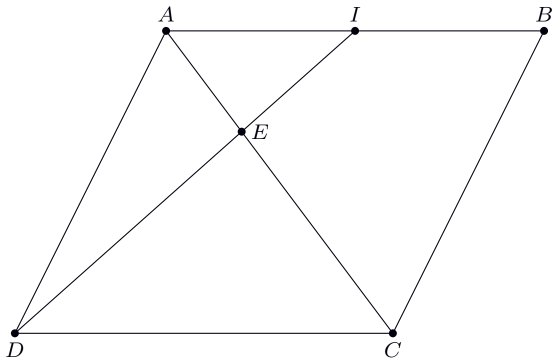
BÀI 2. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi I là trung điểm của AB và E là điểm thoả hệ thức $3\overrightarrow{IE} = \overrightarrow{ID}$. Chứng minh ba điểm A, C, E thẳng hàng.

Lời giải.

Ta có $3\overrightarrow{IE} = \overrightarrow{ID} \Leftrightarrow \overrightarrow{DI} = \dfrac{3}{2}\overrightarrow{DE}$.
Do $ABCD$ là hình bình hành nên

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AD}\\ &= 2\overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{DI} + \overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AD} + 3\overrightarrow{DE} = 3\overrightarrow{AE}.\end{aligned}$$

Vậy ba điểm A, C, E thẳng hàng.



BÀI 3. Cho $\triangle ABC$.

a) Dựng các điểm K, L sao cho $\overrightarrow{KA} + 2\overrightarrow{KB} + 3\overrightarrow{KC} = \vec{0}$ và $2\overrightarrow{LB} + 3\overrightarrow{LC} = \vec{0}$

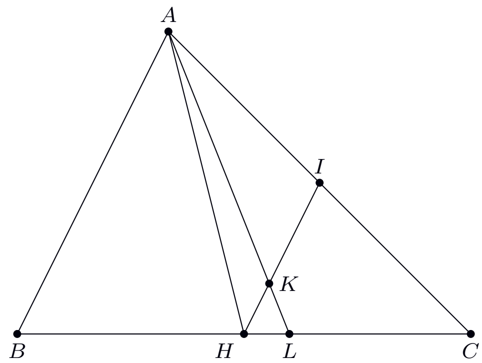
b) Chứng minh ba điểm A, K, L thẳng hàng.

Lời giải.

a) Gọi H, I lần lượt là trung điểm của BC, AC. Khi đó

$$\begin{aligned}\overrightarrow{KA} + 2\overrightarrow{KB} + 3\overrightarrow{KC} = \vec{0} &\Leftrightarrow \overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KC} + 2\left(\overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC}\right) = \vec{0}\\ &\Leftrightarrow 2\overrightarrow{KI} + 4\overrightarrow{KH} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{IK} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{IH}.\end{aligned}$$

Từ đó dựng các điểm K, L như hình vẽ.



b) Ta có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AK} &= \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IK} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \dfrac{2}{3}\overrightarrow{IH}\\ &= \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB} \text{ (do } IH \text{ là đường trung bình trong } \triangle ABC).\end{aligned}$$

Lại có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AL} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BL} = \overrightarrow{AB} + \dfrac{3}{5}\overrightarrow{BC}\\ &= \dfrac{2}{5}\overrightarrow{AB} + \dfrac{3}{5}\overrightarrow{AC} = \dfrac{6}{5}\left(\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right) = \dfrac{6}{5}\overrightarrow{AK}.\end{aligned}$$

Vậy ba điểm A, K, L thẳng hàng.

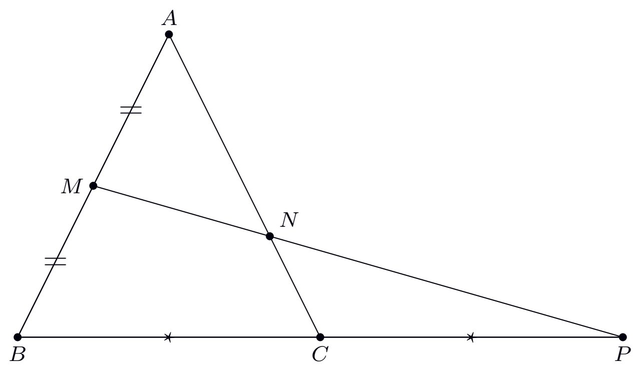
BÀI 4. Cho $\triangle ABC$. Gọi M là trung điểm của cạnh AB, N và P là hai điểm thỏa mãn hệ thức $\overrightarrow{NA} + 2\overrightarrow{NC} = \vec{0}$, $\overrightarrow{PB} - 2\overrightarrow{PC} = \vec{0}$. Chứng minh ba điểm M, N, P thẳng hàng.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN} = -\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.
Lại có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MP} &= \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BP} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BC}\\ &= \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB} + 2\left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right) = -\dfrac{3}{2}\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}\\ &= 3\left(-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AC}\right) = 3\overrightarrow{MN}.\end{aligned}$$

Vậy ba điểm M, N, P thẳng hàng.



BÀI 5. Cho $\triangle ABC$. Hai điểm M, N được xác định bởi $3\overrightarrow{MA} + 4\overrightarrow{MB} = \vec{0}$, $\overrightarrow{NB} - 3\overrightarrow{NC} = \vec{0}$. Chứng minh MN đi qua trọng tâm $\triangle ABC$.

Lời giải.

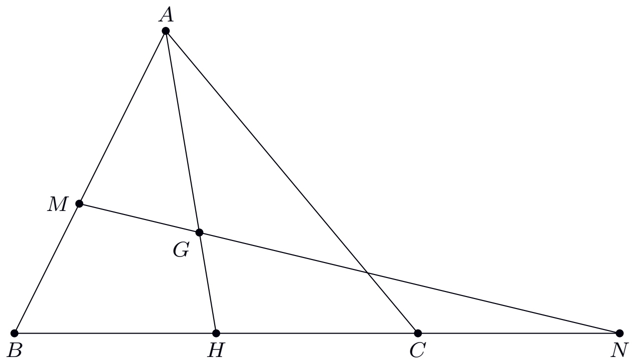
Gọi G là trọng tâm của $\triangle ABC$. Ta có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MG} &= \overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AG} = -\frac{4}{7}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AH}\\ &= -\frac{4}{7}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right) = -\frac{5}{21}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}.\end{aligned}$$

Lại có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MN} &= \overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BN} = \frac{3}{7}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{2}\overrightarrow{BC}\\ &= \frac{3}{7}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{2}\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right) = -\frac{15}{14}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{9}{2}\overrightarrow{MG}.\end{aligned}$$

Vậy M, N, G thẳng hàng, hay MN đi qua trọng tâm G của $\triangle ABC$.



BÀI 6. Cho $\triangle ABC$.

a) Dựng các điểm D, E thỏa các hệ thức $\overrightarrow{AD} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DE} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BC}$.

b) Chứng minh ba điểm A, C, E thẳng hàng.

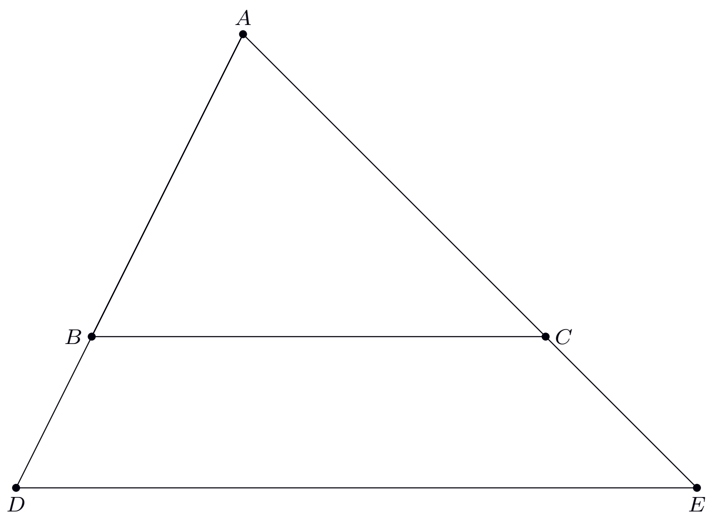
Lời giải.

a) Ta dựng các điểm D, E như hình vẽ.

b) Ta có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AE} &= \overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DE} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{2}\overrightarrow{BC}\\ &= \frac{3}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right) = \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}.\end{aligned}$$

Vậy ba điểm A, C, E thẳng hàng.



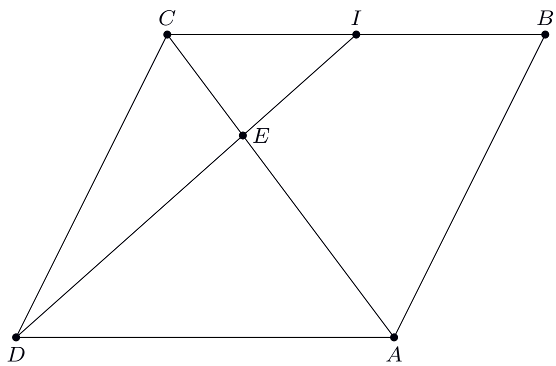
BÀI 7. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi I là trung điểm của cạnh BC và E là điểm xác định bởi $\overrightarrow{AE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$. Chứng minh ba điểm D, E, I thẳng hàng.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{DI} &= \frac{1}{2}\overrightarrow{DB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{DC} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DC}\right)+\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}\\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AC}\\ &= \frac{3}{2}\overrightarrow{DA}+\frac{3}{2}\overrightarrow{AE} = \frac{3}{2}\overrightarrow{DE}.\end{aligned}$$

Vậy ba điểm D, E, I thẳng hàng.



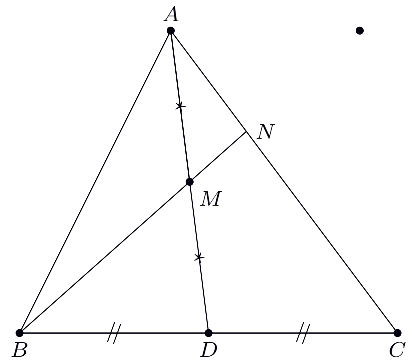
BÀI 8. Cho $\triangle ABC$ có trung tuyến AD và M là trung điểm AD. Điểm N được lấy trên AC sao cho $3\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AC}$. Chứng minh ba điểm B, M, N thẳng hàng.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BM} &= \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}\\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}\\ &= \frac{3}{4}\left(\overrightarrow{BA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\right)=\frac{3}{4}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AN}\right)=\frac{3}{4}\overrightarrow{BN}.\end{aligned}$$

Vậy ba điểm B, M, N thẳng hàng.



BÀI 9. Cho $\triangle ABC$ có M là trung điểm BC và O là trung điểm của AM. Trên AB lấy điểm I, AC lấy điểm J sao cho $\overrightarrow{AI}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AJ}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$. Chứng minh ba điểm I, J, O thẳng hàng.

Lời giải.

Do $\overrightarrow{AI}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ nên $\overrightarrow{IB}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$. Tương tự thì $\overrightarrow{JC}=\frac{3}{5}\overrightarrow{AC}$.

Ta có

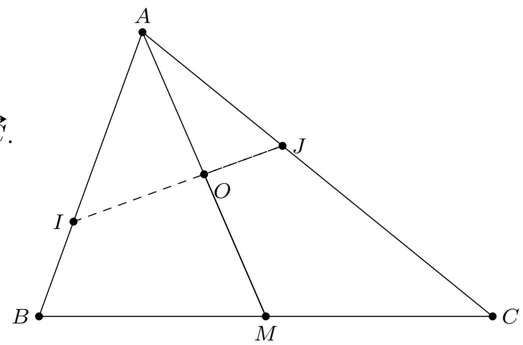
$$2\overrightarrow{IO}=\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IM}=\frac{-2}{3}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{BM}=\frac{-2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}=\frac{-1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}.$$

Tương tự,

$$2\overrightarrow{JO}=\frac{1}{5}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}=\frac{1}{5}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right)-\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}=\frac{1}{5}\overrightarrow{AB}-\frac{3}{10}\overrightarrow{BC}.$$

Suy ra $6\overrightarrow{IO}=-10\overrightarrow{JO}$ hay $\overrightarrow{IO}=\frac{-5}{3}\overrightarrow{JO}$.

Vậy ba điểm I, J, O thẳng hàng.



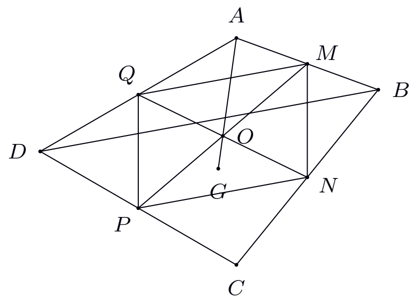
BÀI 10. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA. Gọi O là giao điểm của MP và NQ, G là trọng tâm của tam giác BCD. Chứng minh rằng ba điểm A, O, G thẳng hàng.

Lời giải.

MN, PQ lần lượt là đường trung bình của ΔABC, ΔACD

$$\Rightarrow \begin{cases} MN \parallel PQ \parallel AC \\ MN=PQ=\frac{1}{2}AC.\end{cases}$$

Do đó tứ giác $MNPQ$ là hình bình hành $\Rightarrow O$ là trung điểm của MP.



Ta có

$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\left(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MA}\right)+\left(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MB}\right)+\left(\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PC}\right)+\left(\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PD}\right)$

$=2\left(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{OP}\right)=\vec{0}$.

G là trọng tâm $\Delta BCD \Rightarrow \overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=3\overrightarrow{OG}$.

Khi đó $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}\Leftrightarrow \overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OG}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{OA}=-3\overrightarrow{OG}$.

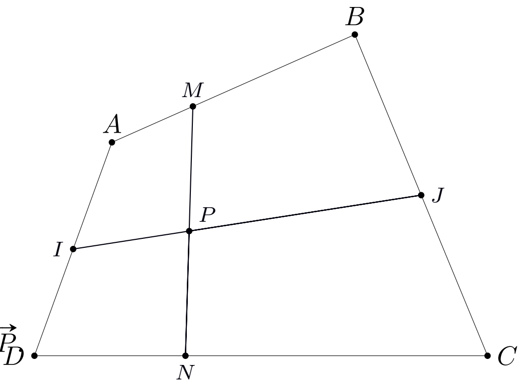
Vậy ba điểm A, O, G thẳng hàng (đpcm).

BÀI 11. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M, N là hai điểm di động trên AB, CD sao cho $\dfrac{MA}{MB}=\dfrac{ND}{NC}$ và hai điểm I, J lần lượt là trung điểm của AD, BC.

a) Tính $\overrightarrow{IJ}$ theo $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{DC}$.

b) Chứng minh trung điểm P của MN nằm trên IJ.

Lời giải.



a) $2\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{ID} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}$.

Suy ra $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$.

b) Từ giải thiết ta có $\overrightarrow{BM} = -\overrightarrow{AM} \cdot \frac{NC}{ND}$ và $\overrightarrow{CN} = -\overrightarrow{DN} \cdot \frac{MB}{MA}$.

Mặt khác

$$2\overrightarrow{IP} = \overrightarrow{IM} + \overrightarrow{IN} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{ID} + \overrightarrow{DN} = \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{DN}.$$

Mà

$$2\overrightarrow{JP} = \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CN} = -\overrightarrow{AM}\cdot\frac{NC}{ND} - \overrightarrow{DN}\cdot\frac{MB}{MA} = -\frac{MB}{MA}(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{DN}) = -\frac{2MB}{MA}\cdot\overrightarrow{IP}.$$

Suy ra I, P, J thẳng hàng hay P của MN nằm trên IJ.

BÀI 12. Cho $\triangle ABC$. Gọi P, Q, R là các điểm thỏa các đẳng thức :

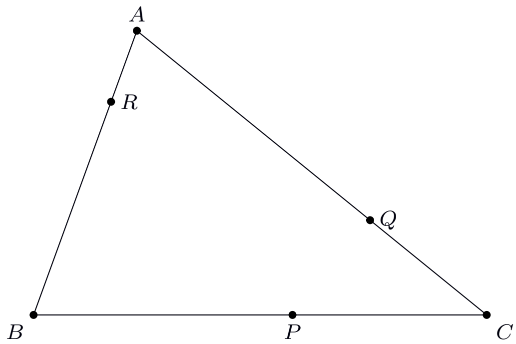
$$3\overrightarrow{PB} + 4\overrightarrow{PC} = \vec{0}, \quad \overrightarrow{AQ} = 2\overrightarrow{QC}, \quad k\overrightarrow{RA} = \overrightarrow{RB},\ k \neq 1.$$

a) Chứng minh rằng: $21\overrightarrow{PQ} = 2\overrightarrow{BC} + 7\overrightarrow{BA}$.

b) Chứng minh rằng: $\overrightarrow{RP} = \frac{k}{1-k}\overrightarrow{BA} + \frac{4}{7}\overrightarrow{BC}$.

c) Tìm k sao cho P, Q, R thẳng hàng.

Lời giải.



a) Từ $3\overrightarrow{PB} + 4\overrightarrow{PC} = \vec{0}$, $\overrightarrow{AQ} = 2\overrightarrow{QC}$ suy ra $\overrightarrow{PC} = \frac{3}{7}\overrightarrow{BC}$ và $\overrightarrow{CQ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CA}$.

Do đó

$$21\overrightarrow{PQ} = 21\overrightarrow{PC} + 21\overrightarrow{CQ} = 9\overrightarrow{BC} + 7\overrightarrow{CA} = 9\overrightarrow{BC} + 7(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA}) = 2\overrightarrow{BC} + 7\overrightarrow{BA}.$$

b) Từ $k\overrightarrow{RA} = \overrightarrow{RB}$ suy ra $\overrightarrow{RB} = \frac{k}{1-k}\overrightarrow{BA}$.

Do đó $\overrightarrow{RP} = \overrightarrow{RB} + \overrightarrow{BP} = \frac{k}{1-k}\overrightarrow{BA} + \frac{4}{7}\overrightarrow{BC}$.

c) Để P, Q, R thẳng hàng thì $\overrightarrow{RP} = a \cdot \overrightarrow{PQ}$, $a \neq 0$.

Suy ra $\frac{k}{1-k}\overrightarrow{BA} + \frac{4}{7}\overrightarrow{BC} = a \cdot \left(\frac{2}{21}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BA}\right)$

Suy ra $k = \frac{2}{3}$.

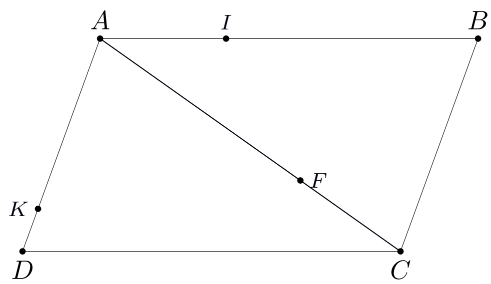
BÀI 13. Cho hình bình hành $ABCD$.

a) Gọi I, F, K là các điểm thỏa mãn $\overrightarrow{AI} = \alpha\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AF} = \beta\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AK} = \gamma\overrightarrow{AD}$. Chứng minh điều kiện cần và đủ để I, F, K thẳng hàng là

$$\frac{1}{\beta} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\gamma} \quad (\alpha,\ \beta,\ \gamma \neq 0).$$

b) Gọi M, N là hai điểm lần lượt trên đoạn AB, CD sao cho $\frac{AM}{AB} = \frac{1}{3}$, $\frac{CN}{CD} = \frac{1}{2}$. Gọi G là trọng tâm $\triangle MNB$. Tính $\overrightarrow{AN}, \overrightarrow{AG}$ theo $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$. Gọi H là điểm xác định bởi $\overrightarrow{BH} = k \cdot \overrightarrow{BC}$. Tính $\overrightarrow{AH}$ theo $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ và k. Tìm k để đường thẳng AH đi qua điểm G.

Lời giải.



a) Do $\overrightarrow{KI} = \overrightarrow{AI} - \overrightarrow{AK} = \alpha\overrightarrow{AB} - \gamma\overrightarrow{AD}$ và

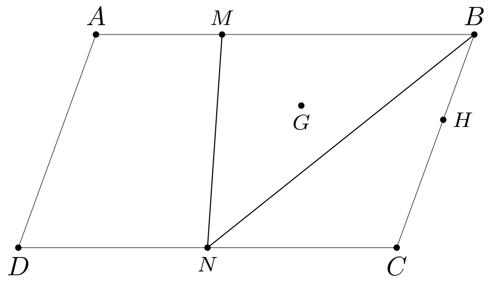
$\overrightarrow{KF} = \overrightarrow{AF} - \overrightarrow{AK} = \beta\overrightarrow{AC} - \gamma\overrightarrow{AD} = \beta(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) - \gamma\overrightarrow{AD}$.

Suy ra $\overrightarrow{KF} = \beta\overrightarrow{AB} + (\beta - \gamma)\overrightarrow{AD}$.

Mặt khác, I, F, K thẳng hàng khi và chỉ khi $\overrightarrow{KI} = k\overrightarrow{KF}, k \neq 0$.

Hay $\begin{cases}\alpha = k\beta \\ \gamma = -k(\beta - \gamma)\end{cases} \Leftrightarrow \frac{\alpha\gamma}{\beta} = \alpha + \gamma \Leftrightarrow \frac{1}{\beta} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\gamma}$.

b) Từ giả thiết suy ra $\overrightarrow{AM}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CN}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{CD}=\dfrac{-1}{2}\overrightarrow{AB}$.



Ta có

- $\overrightarrow{AN}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AC})=\overrightarrow{AC}-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.
- $\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{NG}=\overrightarrow{AN}+\dfrac{1}{3}(\overrightarrow{NM}+\overrightarrow{NB})=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AN}+\dfrac{2}{9}\overrightarrow{AB}+\dfrac{2}{9}\overrightarrow{AB}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}+\dfrac{5}{18}\overrightarrow{AB}$.
- $\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BH}=\overrightarrow{AB}+k\overrightarrow{BC}=(1-k)\overrightarrow{AB}+k\overrightarrow{AC}$.

Để AH đi qua điểm G khi và chỉ khi $\overrightarrow{AH}=t\overrightarrow{AG}$, $t\neq 0$ hay

$$(1-k)\overrightarrow{AB}+k\overrightarrow{AC}=t\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}+\frac{5}{18}\overrightarrow{AB}\right)\Leftrightarrow\begin{cases}1-k=\dfrac{5}{18}t\\ k=\dfrac{t}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}k=\dfrac{6}{11}\\ t=\dfrac{18}{11}.\end{cases}$$

Vậy $k=\dfrac{6}{11}$.

3. Bài tập trắc nghiệm

CÂU 1. Cho ba điểm A,B,C phân biệt. Điều kiện cần và đủ để ba điểm thẳng hàng là

(A) $AB=AC$.

(B) $\exists k\in\mathbb{R}^*:\overrightarrow{AB}=k\cdot\overrightarrow{AC}$.

(C) $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BC}$.

(D) $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=3\overrightarrow{MC},\forall$ điểm M.

Lời giải.

Ba điểm A,B,C thẳng hàng khi và chỉ khi tồn tại số $k\in\mathbb{R}$ khác 0 để $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{AC}$.

Chọn đáp án (B) .... □

CÂU 2. Khẳng định nào sau đây **sai**?

(A) Ba điểm phân biệt A, B, C thẳng hàng khi và chỉ khi $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{BC},k\neq 0$.

(B) Ba điểm phân biệt A, B, C thẳng hàng khi và chỉ khi $\overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{BC},\ k\neq 0$.

(C) Ba điểm phân biệt A, B, C thẳng hàng khi và chỉ khi $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{AC},k\neq 0$.

(D) Ba điểm phân biệt A, B, C thẳng hàng khi và chỉ khi $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{AC}$.

Lời giải.

Ta có ba điểm phân biệt A,B,C thẳng hàng khi và chỉ khi sao cho $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{AC}$.

Chọn đáp án (D) .... □

CÂU 3. Phát biểu nào là **sai**?

(A) Nếu $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}$ thì $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\left|\overrightarrow{AC}\right|$.

(B) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ thì A,B,C,D thẳng hàng.

(C) Nếu $3\overrightarrow{AB}+7\overrightarrow{AC}=\vec{0}$ thì A,B,C thẳng hàng.

(D) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{BA}$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ thì $\left[\begin{array}{l}AB\parallel CD\\ AB\equiv CD\end{array}\right.$.

Nên khẳng định "$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ thì A, B, C, D thẳng hàng" sai.

Chọn đáp án (B) .... □

CÂU 4. Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương. Hai vectơ nào sau đây là cùng phương?

(A) $\vec{u}=2\vec{a}+3\vec{b}$ và $\vec{v}=\dfrac{1}{2}\vec{a}-3\vec{b}$.

(B) $\vec{u}=\dfrac{3}{5}\vec{a}+3\vec{b}$ và $\vec{v}=2\vec{a}-\dfrac{3}{5}\vec{b}$.

(C) $\vec{u}=\dfrac{2}{3}\vec{a}+3\vec{b}$ và $\vec{v}=2\vec{a}-9\vec{b}$.

(D) $\vec{u}=2\vec{a}-\dfrac{3}{2}\vec{b}$ và $\vec{v}=-\dfrac{1}{3}\vec{a}+\dfrac{1}{4}\vec{b}$.

Lời giải.

Ta có $\vec{v}=-\dfrac{1}{3}\vec{a}+\dfrac{1}{4}\vec{b}=-\dfrac{1}{6}\left(2\vec{a}-\dfrac{3}{2}\vec{b}\right)=-\dfrac{1}{6}\vec{u}$.

Hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$là cùng phương.

Chọn đáp án (D) .... □

CÂU 5. Biết rằng hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương nhưng hai vectơ $2\vec{a}-3\vec{b}$ và $\vec{a}+(x-1)\vec{b}$ cùng phương. Khi đó giá trị của x là

(A) $\frac{1}{2}$. (B) $-\frac{3}{2}$. (C) $-\frac{1}{2}$. (D) $\frac{3}{2}$.

Lời giải.

Ta có $2\vec{a}-3\vec{b}$ và $\vec{a}+(x-1)\vec{b}$ cùng phương nên có tỉ lệ $\frac{1}{2}=\frac{x-1}{-3} \Rightarrow x=-\frac{1}{2}$.

Chọn đáp án (C) .... □

CÂU 6. Cho $\vec{a}, \vec{b}$ không cùng phương, $\vec{x}=-2\vec{a}+\vec{b}$. vectơ cùng hướng với $\vec{x}$ là

(A) $2\vec{a}-\vec{b}$. (B) $-\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$. (C) $4\vec{a}+2\vec{b}$. (D) $-\vec{a}+\vec{b}$.

Lời giải.

Ta có $-\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}=\frac{1}{2}\left(-2\vec{a}+\vec{b}\right)=\frac{1}{2}\vec{x}$.

Chọn đáp án (B) .... □

CÂU 7. Biết rằng hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương nhưng hai vectơ $3\vec{a}-2\vec{b}$ và $(x+1)\vec{a}+4\vec{b}$ cùng phương. Khi đó giá trị của x là

(A) -7. (B) 7. (C) 5. (D) 6.

Lời giải.

Điều kiện để hai vectơ $3\vec{a}-2\vec{b}$ và $(x+1)\vec{a}+4\vec{b}$ cùng phương là $\frac{x+1}{3}=\frac{4}{-2} \Leftrightarrow x=-7$.

Chọn đáp án (A) .... □

CÂU 8. Biết rằng hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương nhưng hai vectơ $2\vec{a}-3\vec{b}$ và $\vec{a}+(x-1)\vec{b}$ cùng phương. Khi đó giá trị của x là

(A) $\frac{1}{2}$. (B) $-\frac{3}{2}$. (C) $-\frac{1}{2}$. (D) $\frac{3}{2}$.

Lời giải.

Từ giả thiết, ta có $\frac{1}{2}=\frac{x-1}{-3} \Leftrightarrow x=\frac{-1}{2}$.

Chọn đáp án (C) .... □

CÂU 9. Nếu I là trung điểm đoạn thẳng AB và $\overrightarrow{IA}=k\overrightarrow{AB}$ thì giá trị của k bằng

(A) 1. (B) $\frac{1}{2}$. (C) $-\frac{1}{2}$. (D) -2.

Lời giải.

Ta có $IA=\frac{1}{2}AB$ và $\overrightarrow{IA}$, $\overrightarrow{AB}$ ngược hướng. Vậy $\overrightarrow{IA}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

Chọn đáp án (C) .... □

CÂU 10. Cho tam giác ABC và một điểm M tùy ý. Chứng minh rằng vectơ $\vec{v}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}$. Hãy xác định vị trí của điểm D sao cho $\overrightarrow{CD}=\vec{v}$.

(A) D là điểm thứ tư của hình bình hành $ABCD$.
(B) D là điểm thứ tư của hình bình hành $ACBD$.
(C) D là trọng tâm của tam giác ABC.
(D) D là trực tâm của tam giác ABC.

Lời giải.

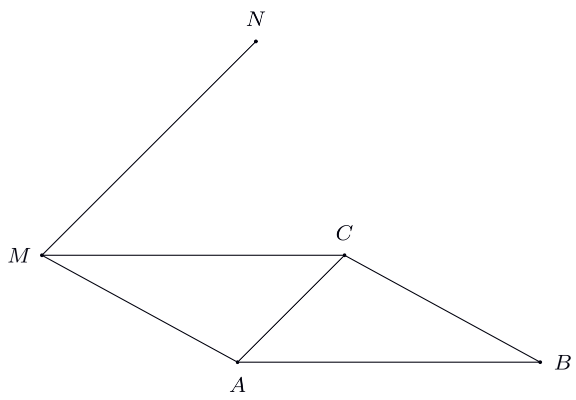
Ta có: $\vec{v}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}=2\overrightarrow{CI}$ (Với I là trung điểm của AB).
Vậy vectơ $\vec{v}$ không phụ thuộc vào vị trú điểm M. Khi đó: $\overrightarrow{CD}=\vec{v}=2\overrightarrow{CI} \Rightarrow I$ là trung điểm của CD
Vậy D là điểm thứ tư của hình bình hành $ACBD$.
Chọn đáp án (B) .... □

CÂU 11. Cho tam giác ABC. Hai điểm M, N được xác định bởi các hệ thức $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{MA}=\vec{0}$, $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{NA}-3\overrightarrow{AC}=\vec{0}$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

(A) $MN \perp AC$.
(B) $MN//AC$.
(C) M nằm trên đường thẳng AC.
(D) Hai đường thẳng MN và AC trùng nhau.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{MA}=\vec{0}\Rightarrow\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{BC}\Rightarrow M$ là điểm thứ tư của hình bình hành $ABCM$ nên $M\notin AC$. (1)
Cộng vế theo vế hai đẳng thức
$\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{MA}=\vec{0}$, $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{NA}-3\overrightarrow{AC}=\vec{0}$, ta được
$\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{NA}-3\overrightarrow{AC}=\vec{0}$
$\Leftrightarrow(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AN})+(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})-3\overrightarrow{AC}=\vec{0}$
$\Leftrightarrow\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{AC}-3\overrightarrow{AC}\Leftrightarrow\overrightarrow{MN}=2\overrightarrow{AC}$
$\Rightarrow\overrightarrow{MN}$ cùng phương với $\overrightarrow{AC}$. (2)
Từ (1) và (2) suy ra $MN//AC$.



Chọn đáp án (B) ☐

CÂU 12. Cho tam giác ABC có trọng tâm G. Các điểm $M,\ N$ thỏa mãn $7\overrightarrow{MG}=3\overrightarrow{GC}-\overrightarrow{GB}$; $\overrightarrow{GN}=\frac{1}{2}\left(3\overrightarrow{GC}-\overrightarrow{GB}\right)$. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

(A) Đường thẳng MN đi qua G.
(B) Đường thẳng MN đi qua A.
(C) Đường thẳng MN đi qua B.
(D) Đường thẳng MN đi qua C.

Lời giải.

Theo giả thiết ta có $2\overrightarrow{GN}=7\overrightarrow{MG}$.
Vậy ba điểm M, N, G thẳng hàng hay đường thẳng MN đi qua G.

Chọn đáp án (A) ☐

CÂU 13. Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương. Các điểm A, B, C sao cho $\overrightarrow{AB}=2\vec{a}-3\vec{b}$; $\overrightarrow{AC}=m\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}$. Khi A, B, C thẳng hàng thì khẳng định nào sau đây đúng?

(A) $m\in(2;3)$. (B) $m\in(1;2)$. (C) $m\in(-1;0)$. (D) $m\in(0;1)$.

Lời giải.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}$ cùng phương $\overrightarrow{AC}\Leftrightarrow\dfrac{m}{2}=\dfrac{-\frac{1}{2}}{-3}\Leftrightarrow m=\dfrac{1}{3}$.

Chọn đáp án (D) ☐

CÂU 14. Cho tam giác ABC. Các điểm M, N thỏa mãn $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}$. Khi đó, đường thẳng MN luôn đi qua một điểm cố định I. Khẳng định nào sau đây đúng?

(A) I là trọng tâm của tam giác ABC.
(B) I là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.
(C) I là trực tâm của tam giác ABC.
(D) Tứ giác $ABCI$ là hình bình hành.

Lời giải.

Gọi I là trọng tâm của tam giác ABC suy ra I cố định.
Khi đó $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MI}$.
Suy ra $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\Leftrightarrow\overrightarrow{MN}=3\overrightarrow{MI}\Leftrightarrow$3 điểm M, N, I thẳng hàng.
$\Rightarrow$ đường thẳng MN luôn đi qua điểm Icố định.
Vậy đường thẳng MN luôn đi qua điểm cố định I là trọng tâm của tam giác ABC.

Chọn đáp án (A) ☐

CÂU 15. Cho tam giác ABC. Các điểm M,N thỏa mãn $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}$. Khi đó, đường thẳng MN luôn đi qua một điểm cố định I. Khẳng định nào sau đây đúng?

(A) $\overrightarrow{IC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$. (B) $\overrightarrow{IC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$. (C) $\overrightarrow{IB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$. (D) $\overrightarrow{IB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$.

Lời giải.

Gọi I điểm thỏa mãn $\overrightarrow{IA}-\overrightarrow{IB}+2\overrightarrow{IC}=\vec{0}$.
Ta có $\overrightarrow{IA}-\overrightarrow{IB}+2\overrightarrow{IC}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{BA}+2\overrightarrow{IC}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{IC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.
Vì $A,\ B,\ C$ cố định nên I cố định. Khi đó
$\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}=\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)-\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)+2\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IC}\right)=2\overrightarrow{MI}+\left(\overrightarrow{IA}-\overrightarrow{IB}+2\overrightarrow{IC}\right)=2\overrightarrow{MI}$.
Suy ra $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\Leftrightarrow\overrightarrow{MN}=2\overrightarrow{MI}\Leftrightarrow$3 điểm M, N, I thẳng hàng.
$\Rightarrow$ đường thẳng MN luôn đi qua điểm I cố định.
Vậy đường thẳng MN luôn đi qua I là điểm cố định thỏa mãn $\overrightarrow{IC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

Chọn đáp án (A) .... □

CÂU 16. Cho hình bình hành $ABCD$ có O là giao điểm của hai đường chéo. Các điểm M, N thỏa mãn $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}$. Khi đó, đường thẳng MN luôn đi qua một điểm cố định I. Khẳng định nào sau đây đúng?

(A) I là trọng tâm của tam giác OBC.

(B) I là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

(C) I là trung điểm của cạnh DC.

(D) Tứ giác $ABCI$ là hình bình hành.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MN} &= \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}\\ &= \left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}\right) + 2\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\\ &= 2\overrightarrow{MO} + 2\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\\ &= 2\left(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right)\\ &= 6\overrightarrow{MI} \text{ (với } I \text{ là trọng tâm của } \triangle OBC).\end{aligned}$$

$\Rightarrow$3 điểm M, N, I thẳng hàng.
$\Rightarrow$ đường thẳng MN luôn đi qua điểm I cố định.
Vậy đường thẳng MN luôn đi qua điểm cố định I là trọng tâm của tam giác OBC.

Chọn đáp án (A) .... □

CÂU 17. Cho tam giác ABC có trọng tâm G. Gọi P, Q là các điểm sao cho $\overrightarrow{PA} = 2\overrightarrow{PB}$, $\overrightarrow{AQ} + k\overrightarrow{AC} = \vec{0}$ với $k \in \mathbb{R}$. Tìm k để P, Q G thẳng hàng.

(A) $k = \dfrac{2}{5}$.

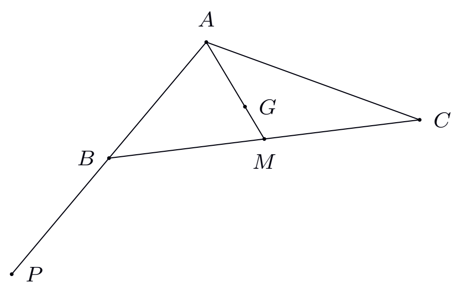
(B) $k = \dfrac{2}{3}$.

(C) $k = -\dfrac{2}{5}$.

(D) $k = -\dfrac{2}{3}$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{PA} = 2\overrightarrow{PB}$ suy ra P đối xứng với A qua B. Gọi M là trung điểm của BC.



$$\begin{aligned}\overrightarrow{AG} &= \frac{2}{3}\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right) = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\\ \overrightarrow{PG} &= \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AG} = -2\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} = -\frac{5}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\\ \overrightarrow{AQ} &= -k\overrightarrow{AC} \Rightarrow \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PQ} = -k\overrightarrow{AC} \Rightarrow \overrightarrow{PQ} = -2\overrightarrow{AB} - k\overrightarrow{AC}.\end{aligned}$$

Vì P, Q, G thẳng hàng nên $\dfrac{-k}{\frac{1}{3}} = \dfrac{2}{\frac{5}{3}}$. Suy ra $k = -\dfrac{2}{5}$.

Vậy $k = -\dfrac{2}{5}$.

Chọn đáp án (C) .... □

CÂU 18. Cho tam giác ABC. Gọi M, N là các điểm thỏa mãn $\overrightarrow{BM} = 3\overrightarrow{BC} - 2\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CN} = k\overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{BC}$. Tìm k để A, M, N thẳng hàng.

(A) $k = -\dfrac{3}{2}$.

(B) $k = -\dfrac{1}{2}$.

(C) $k = \dfrac{1}{2}$.

(D) $k = \dfrac{3}{2}$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{BM} = 3\overrightarrow{BC} - 2\overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AC} - 3\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{AC} - 4\overrightarrow{AB}$.
Mặt khác $\overrightarrow{CN} = k\overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{BC} \Rightarrow \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AC} + 2(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) \Rightarrow \overrightarrow{AN} = (k+3)\overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{AB}$.

Vì A, M, N thẳng hàng nên $\dfrac{k+3}{3} = \dfrac{1}{2}$. Suy ra $k = -\dfrac{3}{2}$.

Vậy $k = -\dfrac{3}{2}$.

Chọn đáp án (A) .... □

CÂU 19. Cho tam giác ABC có I là trung điểm của BC . Gọi M, N, P lần lượt là các điểm xác định bởi $\overrightarrow{AM} = m\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AN} = n\overrightarrow{AI}$; $\overrightarrow{AP} = p\overrightarrow{AC}$, với $mnp \neq 0$. Tìm điều kiện của m, n, p để M, N, P thẳng hàng.

(A) $mp = mn + np$.

(B) $2mn = mp + np$.

(C) $2np = mn + mp$.

(D) $2mp = mn + np$.

Lời giải.

Ta có

$$\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AM} = p\overrightarrow{AC} - m\overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} = n\overrightarrow{AI} - m\overrightarrow{AB}.$$

Mà $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)$ suy ra $\overrightarrow{MN} = \frac{n}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right) - m\overrightarrow{AB} = \left(\frac{n}{2} - m\right)\overrightarrow{AB} + \frac{n}{2}\overrightarrow{AC}$.

Do $mnp \neq 0$ nên M, N, P thẳng hàng khi và chỉ khi $\dfrac{\frac{n}{2} - m}{-m} = \dfrac{\frac{n}{2}}{p} \Leftrightarrow 2mp = mn + np$.

Chọn đáp án D .... □

CÂU 20. Cho tam giác ABC . Gọi D, E lần lượt là các điểm thỏa mãn $\overrightarrow{BD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$. Điểm K trên AD thỏa mãn $\overrightarrow{AK} = \frac{a}{b}\overrightarrow{AD}$ (với $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản) sao cho 3 điểm B, K, E thẳng hàng. Tính $P = a^2 + b^2$.

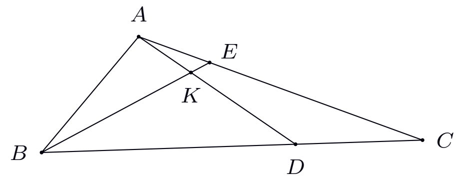
Ⓐ $P = 5$. Ⓑ $P = 13$. Ⓒ $P = 29$. Ⓓ $P = 10$.

Lời giải.

Vì $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{BE} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC} + \frac{3}{4}\overrightarrow{BA}$.

Giả sử $\overrightarrow{AK} = x.\overrightarrow{AD}$.



Ta có $\overrightarrow{BK} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AK} = \overrightarrow{BA} + x\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BA} + x\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}\right) = (1-x)\overrightarrow{BA} + x\overrightarrow{BD}$.

Mà $\overrightarrow{BD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$ nên $\overrightarrow{BK} = \frac{2x}{3}\overrightarrow{BC} + (1-x)\overrightarrow{BA}$.

Vì B, K, E thẳng hàng ($B \neq E$) nên có m sao cho $\overrightarrow{BK} = m\overrightarrow{BE}$.

Do đó có: $\frac{m}{4}\overrightarrow{BC} + \frac{3m}{4}\overrightarrow{BA} = \frac{2x}{3}\overrightarrow{BC} + (1-x)\overrightarrow{BA}$.

Hay $\left(\frac{m}{4} - \frac{2x}{3}\right)\overrightarrow{BC} + \left(\frac{3m}{4} + x - 1\right)\overrightarrow{BA} = \vec{0}$.

Do $\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{BA}$ không cùng phương nên $\frac{m}{4} - \frac{2x}{3} = 0$; $\frac{3m}{4} + x - 1 = 0$. Từ đó suy ra $x = \frac{1}{3}$; $m = \frac{8}{9}$.

Suy ra $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$. Vậy $P = a^2 + b^2 = 10$.

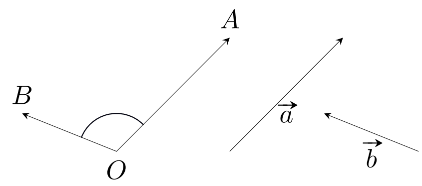
Chọn đáp án D .... □

Bài 6. TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Góc giữa hai vectơ

Cho $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$. Từ một điểm O bất kì vẽ $\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}$.
Khi đó số đo của góc $\widehat{AOB}$ được gọi là số đo góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ hay đơn giản là góc giữa hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$. Kí hiệu $\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = \widehat{AOB}$.



- Quy ước rằng góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ có thể nhận một giá trị tùy ý từ $0°$ đến $180°$.
- $\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = 0° \Leftrightarrow \vec{a}, \vec{b}$ cùng hướng.
- $\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = 180° \Leftrightarrow \vec{a}, \vec{b}$ ngược hướng.
- Nếu $\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = 90°$ thì ta nói rằng $\vec{a}$ và $\vec{b}$ vuông góc với nhau, kí hiệu $\vec{a} \perp \vec{b}$ hoặc $\vec{b} \perp \vec{a}$.

2. Tích vô hướng của hai vectơ

Định nghĩa: Tích vô hướng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là một số, kí hiệu $\vec{a} \cdot \vec{b}$, được xác định bởi công thức sau

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \cos\left(\vec{a}, \vec{b}\right).$$

- *Ta có* $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

- $\vec{a}\cdot\vec{a}$ *còn được viết là* $\vec{a}^2$ *được gọi là bình phương vô hướng của vectơ* $\vec{a}$. *Ta có* $\vec{a}^2 = |\vec{a}|\cdot|\vec{a}|\cdot\cos 0^\circ = |\vec{a}|^2$.

B. CÁC DẠNG TOÁN

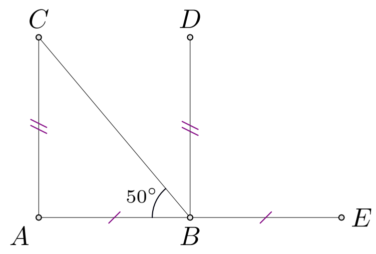
1 Tính tích vô hướng của hai vectơ và xác định góc

1. Ví dụ minh hoạ

VÍ DỤ 1. Cho tam giác ABC vuông tại A và có $\widehat{B} = 50^\circ$. Hãy tính các góc $\left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}\right)$; $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}\right)$; $\left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}\right)$; $\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC}\right)$; $\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}\right)$; $\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BA}\right)$.

Lời giải.

Vẽ điểm D sao cho $ABDC$ là hình chữ nhật và vẽ điểm E sao cho B là trung điểm của AE.



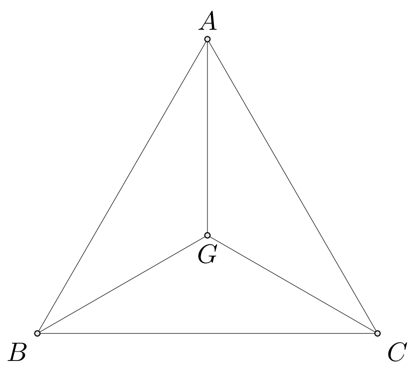
- $\left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}\right) = \widehat{ABC} = 50^\circ$.
- $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}\right) = \left(\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{BC}\right) = \widehat{CBE} = 130^\circ$.
- $\left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}\right) = \widehat{ACB} = 40^\circ$.
- $\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC}\right) = \left(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BC}\right) = \widehat{DBC} = 40^\circ$.
- $\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}\right) = \left(\overrightarrow{AC}, -\overrightarrow{BC}\right) = 180^\circ - 40^\circ = 140^\circ$
- $\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BA}\right) = \left(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BA}\right) = \widehat{ABD} = 90^\circ$

VÍ DỤ 2. Cho tam giác đều ABC có cạnh a và trọng tâm G. Tính các tích vô hướng $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CB}$; $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{GB}\cdot\overrightarrow{GC}$; $\overrightarrow{BG}\cdot\overrightarrow{GA}$; $\overrightarrow{GA}\cdot\overrightarrow{BC}$.

Lời giải.

Ta có G là trọng tâm của tam giác đều ABC nên $GA = GB = GC = \dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Cách 1: Theo định nghĩa, ta có



$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = a\cdot a\cdot\cos 60^\circ = \dfrac{1}{2}a^2$;

$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CB} = a\cdot a\cdot\cos 120^\circ = -\dfrac{1}{2}a^2$;

$\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{AB} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}\cdot a\cdot\cos 30^\circ = a^2\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{1}{2}a^2$;

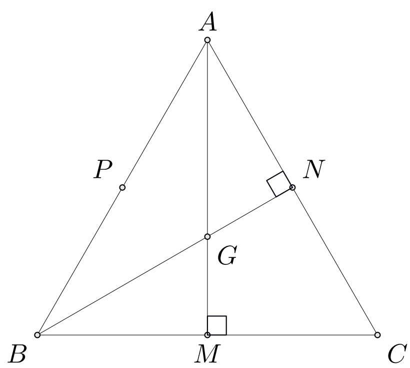
$\overrightarrow{GB}\cdot\overrightarrow{GC} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}\cdot\dfrac{a\sqrt{3}}{3}\cdot\cos 120^\circ = -\dfrac{a^2}{6}$;

$\overrightarrow{BG}\cdot\overrightarrow{GA} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}\cdot\dfrac{a\sqrt{3}}{3}\cdot\cos 60^\circ = \dfrac{a^2}{6}$;

$\overrightarrow{GA}\cdot\overrightarrow{BC} = 0$ do $GA \perp BC$.

Cách 2: Sử dụng công thức hình chiếu.

Gọi M, N và P lần lượt là trung điểm của BC, CA và AB.



$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP} = a\cdot\dfrac{1}{2}a = \dfrac{1}{2}a^2$;

$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{CB} = \dfrac{1}{2}a\cdot(-a) = -\dfrac{1}{2}a^2$;

$\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB} = \dfrac{1}{2}a\cdot a = \dfrac{1}{2}a^2$;

$\overrightarrow{GB}\cdot\overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GB}\cdot\overrightarrow{GN} = -\dfrac{a\sqrt{3}}{3}\cdot\dfrac{a\sqrt{3}}{6} = -\dfrac{a^2}{6}$;

$\overrightarrow{BG}\cdot\overrightarrow{GA} = \overrightarrow{BG}\cdot\overrightarrow{GN} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}\cdot\dfrac{a\sqrt{3}}{6} = \dfrac{a^2}{6}$;

$\overrightarrow{GA}\cdot\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{MM}\cdot\overrightarrow{BC} = 0$.

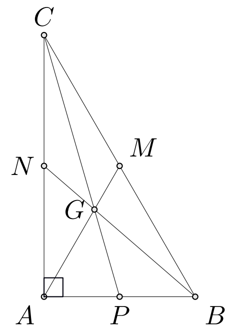
VÍ DỤ 3. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = a$, $BC = 2a$ và G là trọng tâm. Tính giá trị của các biểu thức sau:

a) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB}$.

b) $\overrightarrow{GA}\cdot\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GB}\cdot\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GC}\cdot\overrightarrow{GA}$.

Lời giải.

a) **Cách 1:**



Vì tam giác ABC vuông tại A nên $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} &= -\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} \\ &= -\left|\overrightarrow{BA}\right| \cdot \left|\overrightarrow{BC}\right| \cdot \cos\left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}\right) \\ &= 2a^2 \cos \widehat{ABC} = 2a^2 \cdot \frac{a}{2a} = -a^2.\end{aligned}$$

Theo định lý Py-ta-go ta có $CA = \sqrt{(2a)^2 - a^2} = a\sqrt{3}$.

$\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA} = -\left|\overrightarrow{CB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{CA}\right| \cdot \cos\left(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}\right)$

$$= -2a \cdot a\sqrt{3} \cdot \cos \widehat{ACB} = -2a \cdot a\sqrt{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2a} = -3a^2.$$

Vậy $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB} = -a^2 - 3a^2 = -4a^2$.

Cách 2: Ta có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$. Bình phương hai vế của đẳng thức, ta được

$$AB^2 + BC^2 + CA^2 + 2\left(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB}\right) = 0.$$

Do đó

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB} = -\frac{1}{2}\left(AB^2 + BC^2 + CA^2\right) = -\frac{1}{2}\left(a^2 + 4a^2 + 3a^2\right) = -4a^2.$$

Cách 3: Đặt hệ trục tọa độ Oxy vào tam giác ABC sao cho $A \equiv O$, AB nằm trên tia Ox và AC nằm trên tia Oy. Khi đó ta có $A(0;0)$, $B(a;0)$ và $C(0;a\sqrt{3})$.

Dễ dàng tính được $\overrightarrow{AB} = (a;0)$, $\overrightarrow{BC} = (-a;a\sqrt{3})$ và $\overrightarrow{CA} = (0;-a\sqrt{3})$. Suy ra

$$\begin{aligned}& \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB} \\ = \ & [a \cdot (-a) + 0 \cdot a\sqrt{3}] + [-a \cdot 0 + a\sqrt{3} \cdot (-a\sqrt{3})] + [0 \cdot a + (-a\sqrt{3}) \cdot 0] = -4a^2.\end{aligned}$$

Cách 4: Sử dụng công thức hình chiếu.

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BA} = -a^2$.

$\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CA} = -3a^2$.

$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$.

Vậy $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB} = -a^2 - 3a^2 = -4a^2$.

b) **Cách 1:** Biến đổi tương tự cách 2 của câu a,

vì $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ nên $\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GB} \cdot \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GC} \cdot \overrightarrow{GA} = -\dfrac{1}{2}\left(GA^2 + GB^2 + GC^2\right)$.

Gọi M, N và P lần lượt là trung điểm của BC, CA và AB.

Ta có $GA^2 = \left(\dfrac{2}{3}AM\right)^2 = \left(\dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{1}{2}BC\right)^2 = \dfrac{4a^2}{9}$.

Theo định lý Py-ta-go ta có:

$GB^2 = \dfrac{4}{9}BN^2 = \dfrac{4}{9}\left(AB^2 + AN^2\right) = \dfrac{4}{9}\left(a^2 + \dfrac{3a^2}{4}\right) = \dfrac{7a^2}{9}$;

$GC^2 = \dfrac{4}{9}CP^2 = \dfrac{4}{9}\left(AC^2 + AP^2\right) = \dfrac{4}{9}\left(3a^2 + \dfrac{a^2}{4}\right) = \dfrac{13a^2}{9}$.

Suy ra $\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GB} \cdot \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GC} \cdot \overrightarrow{GA} = -\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{4a^2}{9} + \dfrac{7a^2}{9} + \dfrac{13a^2}{9}\right) = -\dfrac{4a^2}{3}$.

Cách 2: Sử dụng hệ trục toa độ như cách 3 của câu a, lúc này ta cần tính thêm tọa độ của trọng tâm G. Theo công thức tính tọa độ của trọng tâm tam giác, ta tính được $G\left(\dfrac{a}{3}; -\dfrac{a\sqrt{3}}{3}\right)$.

Từ đó suy ra $\overrightarrow{GA} = \left(-\dfrac{a}{3}; \dfrac{a\sqrt{3}}{3}\right)$, $\overrightarrow{GB} = \left(\dfrac{2a}{3}; \dfrac{a\sqrt{3}}{3}\right)$ và $\overrightarrow{GC} = \left(-\dfrac{a}{3}; \dfrac{4a\sqrt{3}}{3}\right)$.

Suy ra $\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GB} \cdot \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GC} \cdot \overrightarrow{GA} =$

$$\left(-\frac{a}{3} \cdot \frac{2a}{3} + \frac{a\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{3}\right) + \left[\frac{2a}{3} \cdot \left(-\frac{a}{3}\right) + \frac{a\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{4a\sqrt{3}}{3}\right] + \left[\left(-\frac{a}{3}\right) \cdot \left(-\frac{a}{3}\right) + \frac{4a\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{3}\right] = -\frac{4a^2}{3}.$$

VÍ DỤ 4. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a. M là trung điểm của AB, G là trọng tâm tam giác ADM. Tính giá trị của các biểu thức sau:

a) $\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right)\left(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC}\right)$.

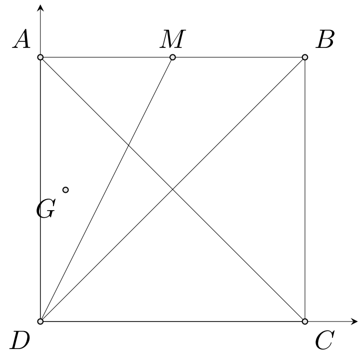
b) $\overrightarrow{CG}\left(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DM}\right)$.

Lời giải.

a) **Cách 1:**

Theo quy tắc hình bình hành ta có $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$. Do đó

$$\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)\left(\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{BC}\right)=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$$



($\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=0$ vì $\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{BD}$)
Theo định lý Py-ta-go ta có $AC=\sqrt{a^2+a^2}=a\sqrt{2}$.
Góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{CA}$ và $\overrightarrow{CB}$ là góc $ACB=45^\circ$.

Vậy $\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)\left(\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{BC}\right)=\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=\left|\overrightarrow{CA}\right|\cdot\left|\overrightarrow{CB}\right|\cdot\cos\widehat{ACB}=a\cdot a\sqrt{2}\cos 45^\circ=a^2$.

Cách 2: Đặt hệ trục tọa độ Oxy vào hình vuông $ABCD$ sao cho $O\equiv D$, DC nằm trên tia Ox và DA nằm trên tia Oy. Khi đó ta có $D(0;0)$, $A(0;a)$, $B(a;a)$, $C(a;0)$. Dễ dàng tính được $\overrightarrow{AB}=(a;0)$; $\overrightarrow{AD}=(0;-a)$; $\overrightarrow{BD}=(-a;-a)$; $\overrightarrow{BC}=(0;-a)$. Suy ra $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=(a;-a)$ và $\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{BC}=(-a;-2a)$.
Vậy $\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)\left(\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{BC}\right)=a\cdot(-a)+(-a)\cdot(-2a)=a^2$.

b) **Cách 1:**

Nhận xét: *Nếu ta nhân phân phối vectơ $\overrightarrow{CG}$ vào với $\overrightarrow{CA}$ và $\overrightarrow{DM}$ thì ta sẽ nhận được những tích vô hướng mà khó tính được bằng định nghĩa. Tuy nhiên, hãy nhớ lại rằng một vectơ có thể được phân tích thành nhiều vectơ khác nhau, và nếu chúng ta chọn phân tích vectơ ra những thành phần đã biết trước có sự vuông góc với nhau thì khi nhân phân phối vào những thành phần vuông góc đó có tích vô hướng bằng 0 và bị triệt tiêu. Theo ý tưởng này, ta thử chọn chuyển hết các vectơ về hai vectơ $\overrightarrow{CD}$ và $\overrightarrow{CB}$.*

Vì G là trọng tâm của tam giác ADM nên theo quy tắc trọng tâm

$$\overrightarrow{CG}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CM}\right).$$

Mặt khác

$$\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CB}$$

và

$$\overrightarrow{CM}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}\right)=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CB}\right)=\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CB},$$

suy ra

$$\overrightarrow{CG}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CM}\right)=\frac{1}{3}\left[\left(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CB}\right)+\overrightarrow{CD}+\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CB}\right)\right]=\frac{5}{6}\overrightarrow{CD}+\frac{2}{3}\overrightarrow{CB}.$$

Theo quy tắc trung điểm thì

$$\overrightarrow{DM}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB}\right)=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CD}\right)=\overrightarrow{CB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}.$$

Như vậy

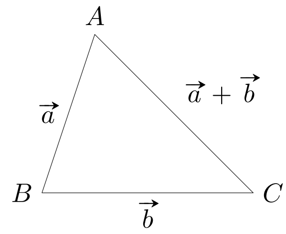
$$\begin{aligned}\overrightarrow{CG}\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{DM}\right)&=\left(\frac{5}{6}\overrightarrow{CD}+\frac{2}{3}\overrightarrow{CB}\right)\left[\left(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CB}\right)+\left(\overrightarrow{CB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}\right)\right]\\&=\left(\frac{5}{6}\overrightarrow{CD}+\frac{2}{3}\overrightarrow{CB}\right)\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}+2\overrightarrow{CB}\right)\\&=\frac{5}{12}CD^2+6\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{CB}+\frac{4}{3}CB^2=\frac{5}{12}a^2+\frac{4}{3}a^2=\frac{21a^2}{12}.\end{aligned}$$

Cách 2: Sử dụng hệ trục tọa độ giống như cách 2 ở câu a.
Vì M là trung điểm của AB và G là trọng tâm tam giác ADM nên sử dụng các công thức tọa độ tương ứng tính được $M\left(\frac{a}{2};a\right)$ và $G\left(\frac{a}{6};\frac{2a}{3}\right)$. Từ đó suy ra $\overrightarrow{CG}=\left(-\frac{5a}{6};\frac{2a}{3}\right)$; $\overrightarrow{CA}=(-a;a)$ và $\overrightarrow{DM}=\left(\frac{a}{2};a\right)$.
Vậy $\overrightarrow{CG}\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{DM}\right)=\left[-\frac{5a}{6}\cdot\left(-a+\frac{a}{2}\right)\right]+\left[\frac{2a}{3}\cdot(a+a)\right]=\frac{21a^2}{12}$.

VÍ DỤ 5. Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ có $|\vec{a}|=7$, $\left|\vec{b}\right|=12$ và $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=13$. Tính cosin của góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{a}+\vec{b}$.

Lời giải.

Dựng các điểm A, B, C sao cho $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$, khi đó $\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$. Ta có $\vec{a}\left(\vec{a} + \vec{b}\right) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.



Mặt khác, từ đẳng thức $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$, ta bình phương hai vế và chuyển vế thu được

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left(AB^2 + AC^2 - BC^2\right) = \frac{1}{2}\left(7^2 + 13^2 - 12^2\right) = 37.$$

Vậy $\cos\left(\vec{a}, (\vec{a} + \vec{b})\right) = \cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \dfrac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|} = \dfrac{37}{7 \cdot 13} = \dfrac{37}{91}$.

2. Bài tập tự luận

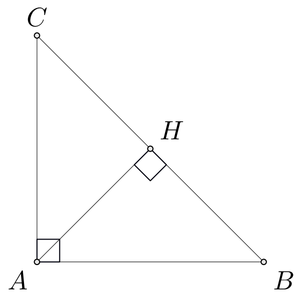
BÀI 1. Cho tam giác ABC vuông cân có $AB = AC = a$ và AH là đường cao. Tính các tích vô hướng sau

a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$;

b) $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC}$;

c) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB}$ và $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$.

Lời giải.



a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ vì $AB \perp AC$.

b) $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ vì $AH \perp BC$.

c) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} = -\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = -CA \cdot CB \cdot \cos 45^\circ = -a \cdot a\sqrt{2} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} = -a^2$;

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = -BA \cdot BC \cdot \cos 45^\circ - a \cdot a\sqrt{2} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} = -a^2$.

BÀI 2. Cho tam giác ABC đều cạnh a và AM là trung tuyến của tam giác. Tính các tích vô hướng sau

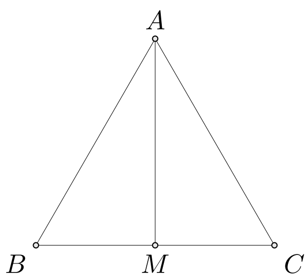
a) $\overrightarrow{AC}\left(2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}\right)$;

b) $\overrightarrow{AC}\left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right)$;

c) $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB}$;

d) $\left(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BC}\right)\left(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}\right)$.

Lời giải.



a) $\overrightarrow{AC}\left(2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}\right) = 2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC} = 2a \cdot a\cos 60^\circ - 3a^2 = -2a^2$.

b) $\overrightarrow{AC}\left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right) = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = a^2 - a \cdot a\cos 60^\circ = \dfrac{1}{2}a^2$.

c) $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \cdot a\cos 30^\circ = \dfrac{3}{4}a^2$.

d) $\left(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BC}\right)\left(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}\right) = \overrightarrow{CA}^2 + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA}^2 - \overrightarrow{BC}^2 = a^2 - a^2 = 0$.

BÀI 3. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = a\sqrt{2}$, $AD = 2a$. Gọi K là trung điểm của cạnh AD.

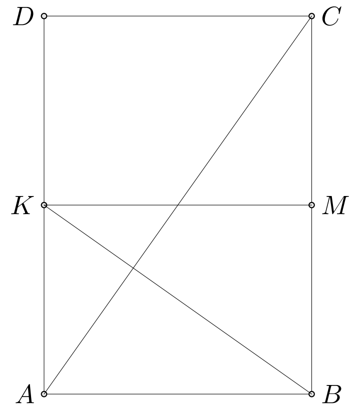
a) Phân tích $\overrightarrow{BK}, \overrightarrow{AC}$ theo $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AD}$.

b) Tính tích vô hướng $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AC}$.

Lời giải.

a) Gọi M là trung điểm của cạnh BC.
Theo quy tắc hình bình hành, ta có
$\overrightarrow{BK}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BM}=-\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}$.
Mặt khác $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$.

b) $\overrightarrow{BK}\cdot\overrightarrow{AC}=\left(-\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}\right)\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)$
$=-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AD}$
$=-2a^2+0+0+\dfrac{1}{2}(2a)^2=0.$



BÀI 4. Cho tam giác ABC có $AB=5$, $AC=8$, $BC=7$. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}$.

Lời giải.

Ta có $BC^2=\overrightarrow{BC}^2=\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)^2=\overrightarrow{AC}^2+\overrightarrow{AB}^2-2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}$.

Suy ra $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}=\dfrac{\overrightarrow{AC}^2+\overrightarrow{AB}^2-\overrightarrow{BC}^2}{2}=\dfrac{8^2+5^2-7^2}{2}=20.$

BÀI 5. Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ có độ dài bằng 1 và thỏa mãn điều kiện $|2\vec{a}-3\vec{b}|=\sqrt{7}$. Tính $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)$.

Lời giải.

$$|2\vec{a}-3\vec{b}|=\sqrt{7}\Leftrightarrow\left(2\vec{a}-3\vec{b}\right)^2=7\Leftrightarrow 4|\vec{a}|^2-6\vec{a}\cdot\vec{b}+9|\vec{b}|^2=7\Leftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=-1.$$

Do đó $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=-1.$

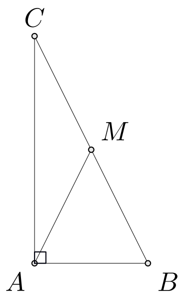
BÀI 6. Cho tam giác ABC vuông tại A có $BC=a\sqrt{3}$, M là trung điểm của BC. Biết rằng $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BC}=\dfrac{a^2}{2}$. Hãy tính AB, AC.

Lời giải.

Theo định lý Py-ta-go ta có $AB^2+AC^2=BC^2=3a^2$. Mặt khác

$$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BC}=\frac{a^2}{2}\Leftrightarrow\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)=\frac{a^2}{2}$$
$$\Leftrightarrow\frac{1}{2}\left(AC^2-AB^2\right)=\frac{a^2}{2}\Leftrightarrow AC^2-AB^2=a^2.$$

Giải hệ phương trình $\begin{cases}AC^2+AB^2=3a^2\\AC^2-AB^2=a^2\end{cases}$ ta được $AB=a$ và $AC=2a$.



BÀI 7. Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ có độ dài bằng 1 và góc tạo bởi hai vectơ đó bằng 60°. Xác định cosin góc giữa hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ với $\vec{u}=\vec{a}+2\vec{b}$, $\vec{v}=\vec{a}-\vec{b}$.

Lời giải.

Ta có

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\left(\vec{a}+2\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}-\vec{b}\right)=|\vec{a}|^2+\vec{a}\cdot\vec{b}-2|\vec{b}|^2=1+1\cdot1\cdot\cos60^\circ-2=-\frac{1}{2}.$$

Do đó $\cos(\vec{u},\vec{v})=\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}=-\dfrac{1}{2}$.

BÀI 8. Cho hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ thỏa mãn $|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$ và vectơ $\vec{x}=\vec{a}+2\vec{b}$ vuông góc với vectơ $\vec{y}=5\vec{a}-4\vec{b}$. Tính góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

Lời giải.

Ta có

$$\vec{x}\cdot\vec{y}=0\Leftrightarrow\left(\vec{a}+2\vec{b}\right)\cdot\left(5\vec{a}-4\vec{b}\right)=0\Leftrightarrow5|\vec{a}|^2+6\vec{a}\cdot\vec{b}-8|\vec{b}|^2=0\Leftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{1}{2}.$$

Do đó $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\dfrac{1}{2}$.

Từ đó suy ra góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng 60°.

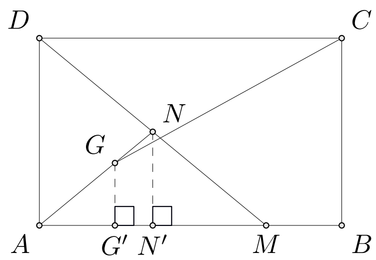
BÀI 9. Cho các vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ thỏa mãn $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=1$ và $\left(\vec{a},\vec{b}\right)=60^\circ$. Tính góc giữa vectơ $\vec{a}$ và vectơ $\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}$.

Lời giải.

Ta có $\vec{c}^2 = \left(\vec{a} - \vec{b}\right)^2 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} = 3$ nên $\left|\vec{c}\right| = \sqrt{3}$.
Lại có $\vec{a} \cdot \vec{c} = \vec{a}\left(\vec{a} - \vec{b}\right) = \vec{a}^2 - \vec{a} \cdot \vec{b} = 3$.
Do đó $\cos(\vec{a}, \vec{c}) = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{c}}{\left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{c}\right|} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Từ đó tính được góc giữa vectơ $\vec{a}$ và $\vec{c}$ là 30°.

BÀI 10. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 2$. M là điểm được xác định bởi $\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{MB}$; G là trọng tâm tam giác ADM. Tính $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{GC}$.

Lời giải.



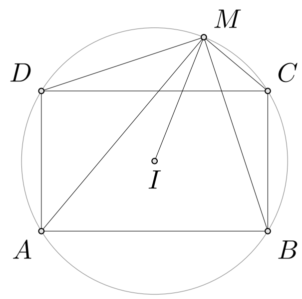
Gọi N là trung điểm của DM; G' và N' lần lượt là hình chiếu vuông góc của G và N lên AB.
Theo định lý Ta-lét ta có được các kết quả sau:
$AG' = \dfrac{2}{3}AN' = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{1}{2}AM = \dfrac{1}{3}AM$.
Mà điểm M được xác định bởi $\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{MB}$ nên $AM = \dfrac{3}{4}AB$. Do đó $AG' = \dfrac{1}{4}AB = \dfrac{1}{2}$, suy ra $G'B = \dfrac{3}{2}$.
Vậy $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{G'B} = \dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{3}{2} = \dfrac{3}{8}$.

BÀI 11. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có cạnh $AB = a$, $AD = b$. Tính theo a, b các tích vô hướng sau:

a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AC}$; $\left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right)\left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}\right)$;

b) $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD}$ với điểm M thuộc đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật $ABCD$.

Lời giải.



a)
$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = a^2.$$
$$\begin{aligned}\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AC} &= \left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA}\right)\left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}\right)\\ &= \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AB}\\ &= \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AB} = b^2 - a^2.\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}\left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right)\left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}\right) &= \overrightarrow{BC}\left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}\right) = \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD}\\ &= \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AD} = 2b^2.\end{aligned}$$

b) Gọi I là tâm hình chữ nhật $ABCD$, suy ra I là trung điểm của AC và BD. Theo quy tắc trung điểm, ta có $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MI}$ và $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD} = 2\overrightarrow{MI}$. Bình phương hai vế của hai đẳng thức này, ta được

$$MA^2 + MC^2 + 2\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = 4MI^2 \Leftrightarrow 2\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = 4MI^2 - MA^2 - MC^2$$
$$MB^2 + MD^2 + 2\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD} = 4MI^2 \Leftrightarrow 2\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD} = 4MI^2 - MB^2 - MD^2.$$

Cộng vế theo vế của hai đẳng thức trên, ta có

$$2\left(\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD}\right) = 8MI^2 - \left(MA^2 + MC^2 + MB^2 + MD^2\right). \quad (*)$$

Vì điểm M nằm trên đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật $ABCD$ có AC và BD là hai đường kính nên $MA^2 + MC^2 = AC^2 = 4MI^2$ và $MB^2 + MD^2 = BD^2 = 4MI^2$. Thay vào $(*)$ ta được kết quả $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD} = 0$.

2 Chứng minh đẳng thức tích vô hướng hay độ dài

- Với các biểu thức về tích vô hướng ta sử dụng định nghĩa hoặc tính chất của tích vô hướng. Cần đặc biệt lưu ý phép phân tích vectơ để biến đổi (quy tắc ba điểm, quy tắc trung điểm, quy tắc hình bình hành,...).
- Với các công thức về độ dài ta thường sử dụng $AB^2 = \overrightarrow{AB}^2 = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB}$. Cần nắm vững tính chất của các hình cơ bản.

1. Ví dụ minh hoạ

VÍ DỤ 1. Cho đoạn thẳng AB và I là trung điểm của AB. Chứng minh rằng với mỗi điểm O ta có

a) $\overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{IB} = 0$.

b) $\overrightarrow{OI}\cdot\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OB}^2-\overrightarrow{OA}^2\right)$

Lời giải.

a) Vì I là trung điểm AB nên $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$.
Vậy $\overrightarrow{OI}\cdot\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{OI}\cdot\overrightarrow{IB}=\overrightarrow{OI}\cdot\left(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}\right)=\overrightarrow{OI}\cdot\vec{0}=0$.

b) Vì I là trung điểm AB nên $2\overrightarrow{OI}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OA}\Leftrightarrow\overrightarrow{OI}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OA}\right)$. Do đó

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OI}\cdot\overrightarrow{AB}&=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OA}\right)\cdot\left(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\right)\\&=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OA}\right)\cdot\overrightarrow{OB}+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OA}\right)\cdot\left(-\overrightarrow{OA}\right)\\&=\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OA}-\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OA}\\&=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OB}^2-\overrightarrow{OA}^2\right).\end{aligned}$$

VÍ DỤ 2. Cho điểm M thay đổi trên đường tròn tâm O bán kính R ngoại tiếp tam giác đều ABC cho trước. Chứng minh $MA^2+MB^2+MC^2=6R^2$.

Lời giải.

- **Cách 1** (*Dùng tích vô hướng*). Vì tam giác ABC đều nên tâm O của đường tròn ngoại tiếp đồng thời là trọng tâm của tam giác. Vậy $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$. Ta có

$$\begin{aligned}MA^2+MB^2+MC^2&=\overrightarrow{MA}^2+\overrightarrow{MB}^2+\overrightarrow{MC}^2\\&=\left(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OA}\right)^2+\left(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OB}\right)^2+\left(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OC}\right)^2\\&=3MO^2+OA^2+OB^2+OC^2+2\overrightarrow{MO}\cdot\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)\\&=6R^2.\end{aligned}$$

- **Cách 2** (*Dùng tọa độ*). Xét hệ trục tọa độ có gốc trùng với tâm O của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Gọi tọa độ của các điểm là $A(x_A,y_A)$, $B(x_B,y_B)$, $C(x_C,y_C)$, $M(x,y)$. Vì tam giác ABC đều nên tâm đường tròn ngoại tiếp $O(0;0)$ đồng thời là trọng tâm của tam giác. Do đó $x_A+x_B+x_C=0$ và $y_A+y_B+y_C=0$.
Vì $OM^2=OA^2=R^2$ nên $x^2+y^2=x_A^2+y_A^2=R^2$.
Vậy

$$\begin{aligned}MA^2&=(x-x_A)^2+(y-y_A)^2\\&=2R^2-2xx_A-2yy_A.\end{aligned}$$

Tương tự $MB^2=2R^2-2xx_B-2yy_B$ và $MC^2=2R^2-2xx_C-2yy_C$.
Do đó $MA^2+MB^2+MC^2=6R^2-2x(x_A+x_B+x_C)-2y(y_A+y_B+y_C)=6R^2$.

VÍ DỤ 3. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có tâm O, M là điểm bất kì. Chứng minh

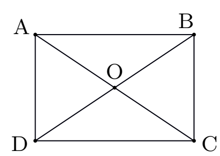
a) $MA^2+MC^2=MB^2+MD^2$ (1);

b) $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MD}$ (2).

Lời giải.

Nhận xét: Ta có $ABCD$ là hình chữ nhật nên O là trung điểm AC và BD, do đó

$$\begin{cases}\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{MO}\\\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}=2\overrightarrow{MO}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}MA^2+MB^2+2\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MC}=4MO^2\\MB^2+MD^2+2\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MD}=4MO^2.\end{cases}$$



Từ đây ta có thể thấy hai mệnh đề (1) và (2) là hai mệnh đề tương đương, tức là chứng minh được một mệnh đề thì sẽ suy ra được mệnh đề còn lại.
Tuy nhiên, ở đây hai mệnh đề vẫn được chứng minh một cách độc lập để bạn đọc có thêm nhiều cách nhìn nhận giải quyết vấn đề hơn.

a) Ta có $ABCD$ là hình chữ nhật nên $\overrightarrow{BA}\perp\overrightarrow{DA}\Rightarrow\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{DA}=0$. Do đó

$$\begin{aligned}MA^2+MC^2&=\left(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BA}\right)^2+\left(\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{DC}\right)^2\\&=\overrightarrow{MB}^2+\overrightarrow{MD}^2+\overrightarrow{BA}^2+\overrightarrow{DC}^2+2\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{BA}+2\overrightarrow{MD}\cdot\overrightarrow{DC}\\&=MB^2+MD^2+2\overrightarrow{BA}^2+2\overrightarrow{BA}\left(\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MD}\right)\ (\text{vì } \overrightarrow{DC}=-\overrightarrow{BA}.)\\&=MB^2+MD^2+2\overrightarrow{BA}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DB}\right)\\&=MB^2+MD^2+2\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{DA}=MB^2+MD^2.\end{aligned}$$

b) Ta có O là trung điểm AC nên $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$. Do đó

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MC}&=\left(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OA}\right)\left(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OC}\right)\\&=MO^2+\overrightarrow{MO}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}\right)-OA^2\\&=MO^2-OA^2.\end{aligned}$$

Tương tự ta cũng chứng minh được $\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MD}=MO^2-OB^2$.
Mà $OA=OB$ nên ta có điều phải chứng minh.

Nhận xét: Ta có thể vận dụng cách chứng minh mệnh đề (1) để chứng minh mệnh đề (2) và ngược lại, bạn đọc có thể tự mình thử nghiệm để hiểu rõ hơn về các cách tiếp cận giải quyết các bài toán dạng này.

2. Bài tập tự luận

BÀI 1. Cho $\triangle ABC$, chứng minh $AB^2+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CA}=0$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}VT&=\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CA}\\&=\overrightarrow{AB}\cdot\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}\right)\\&=\overrightarrow{AB}\cdot\vec{0}=0.\end{aligned}$$

BÀI 2. Cho $\triangle ABC$ nhọn, đường cao AH, Chứng minh rằng

a) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AH}$;

b) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{HB}\cdot\overrightarrow{BC}$.

Lời giải.

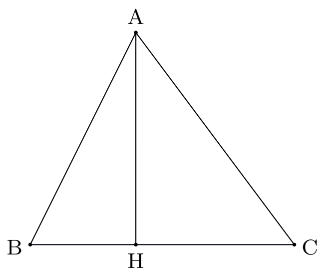
Vì $AH\perp BC$ nên $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{HB}=\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{HC}=0$.

a)

Ta có

- $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH}=\left(\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HB}\right)\cdot\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HB}\cdot\overrightarrow{AH}=AH^2$.
- $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AH}=\left(\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HC}\right)\cdot\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HC}\cdot\overrightarrow{AH}=AH^2$.

Vậy $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AH}$.



b) Ta có $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=\left(\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HB}\right)\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{HB}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{HB}\cdot\overrightarrow{BC}$.

BÀI 3. Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC ta có $S_{ABC}=\dfrac{1}{2}\sqrt{\overrightarrow{AB}^2\cdot\overrightarrow{AC}^2-\left(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\right)^2}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}^2\cdot\overrightarrow{AC}^2-\left(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\right)^2&=AB^2\cdot AC^2-\left(AB^2\cdot AC^2\cdot\cos A\right)^2\\&=AB^2\cdot AC^2\cdot\left(1-\cos^2 A\right)\\&=AB^2\cdot AC^2\cdot\sin^2 A\\&=(AB\cdot AC\cdot\sin A)^2\\&=\left(2S_{ABC}\right)^2.\end{aligned}$$

Vậy ta có điều phải chứng minh.

BÀI 4. Cho $\triangle ABC$ có trọng tâm G. Chứng minh rằng với mỗi điểm M ta có

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2.$$

Lời giải.

Ta có G là trọng tâm $\triangle ABC$ nên $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$. Do đó

$$\begin{aligned} VT &= \overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 + \overrightarrow{MC}^2 \\ &= \left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC}\right)^2 \\ &= 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2 + 2\overrightarrow{MG} \cdot \left(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}\right) = VP. \end{aligned}$$

BÀI 5. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có tâm O, M là điểm bất kì. Chứng minh

$$MA^2 + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD} = 2\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MO}.$$

Lời giải.

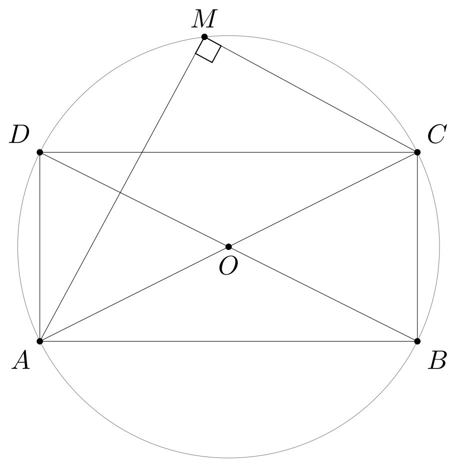
Ta có $ABCD$ là hình chữ nhật nên O là trung điểm AC, do đó $2\overrightarrow{MO} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}$.
Suy ra $2\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MO} = \overrightarrow{MA}\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}\right) = MA^2 + \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC}$.
Mà theo Ví dụ 3 lại có $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD}$ nên ta có điều phải chứng minh.

BÀI 6. Cho hình chữ nhật $ABCD$ nội tiếp trong đường tròn tâm O, bán kính R. Chứng minh rằng với mọi M thuộc đường tròn (O) ta có

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} + \left(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD}\right)\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\right) = 8R^2.$$

Lời giải.

Vì $ABCD$ là hình chữ nhật nên O là trung điểm AC và BD. Ta có



$$\begin{aligned} &\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} \\ =\ &\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OD} \\ =\ &4\overrightarrow{MO} + \left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}\right) + \left(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}\right) = 4\overrightarrow{MO}. \end{aligned}$$

Vì AC là đường kính của (O) nên $MA \perp MC$.
Suy ra $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = 0$, dẫn tới

$$\begin{aligned} &\left(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD}\right)\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\right) \\ =\ &2\overrightarrow{MO} \cdot 4\overrightarrow{MO} = 8MO^2 = 8R^2. \end{aligned}$$

BÀI 7. Chứng minh rằng với mọi điểm A, B, C, M ta luôn có

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0. \text{ (hệ thức Euler).}$$

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} VT &= \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{BC} + \left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}\right) \cdot \overrightarrow{CA} + \left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC}\right) \cdot \overrightarrow{AB} \\ &= \overrightarrow{MA}\left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}\right) + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} \\ &= \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{BB} + \overrightarrow{AB}\left(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AC}\right) = 0. \end{aligned}$$

BÀI 8. Cho $\triangle ABC$ các đường trung tuyến AD, BE, CF. Chứng minh rằng

$$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CF} \cdot \overrightarrow{AB} = 0.$$

Lời giải.

Ta có AD, BE, CF là trung tuyến nên

$$\begin{aligned} VT &= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}\right)\overrightarrow{CA} + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}\right)\overrightarrow{AB} \\ &= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{AB}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left[\left(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{AB}\right) + \left(\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA}\right) + \left(\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB}\right)\right] \\ &= 0. \end{aligned}$$

BÀI 9. Cho $\triangle ABC$ đường cao AH, trung tuyến AI. Chứng minh rằng $\left|AB^2 - AC^2\right| = 2BC \cdot HI$.

Lời giải.

Ta có $AH \perp BC$ nên $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$. Do đó

$$\begin{aligned} AB^2 - AC^2 &= \left(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\right)\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right) \\ &= \overrightarrow{CB} \cdot 2\overrightarrow{AI} \\ &= 2\overrightarrow{CB}\left(\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HI}\right) \\ &= 2\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{HI} \end{aligned}$$

Do B, C, H, I thẳng hàng nên $\left|\cos\left(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{HI}\right)\right| = 1$.

Vậy ta có điều phải chứng minh.

3 Điều kiện vuông góc

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0.$$

1. Ví dụ minh hoạ

VÍ DỤ 1. Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ vuông góc với nhau và $|\vec{a}| = 1$, $\left|\vec{b}\right| = \sqrt{2}$. Chứng minh hai vectơ $\left(2\vec{a} - \vec{b}\right)$ và $\left(\vec{a} + \vec{b}\right)$ vuông góc với nhau.

Lời giải.

Vì $\vec{a} \perp \vec{b}$ nên $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

Ta có

$$\begin{aligned} \left(2\vec{a} - \vec{b}\right) \cdot \left(\vec{a} + \vec{b}\right) &= 2\vec{a}^2 + \vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{b}^2 \\ &= 2\left|\vec{a}\right|^2 + 0 + \left|\vec{b}\right|^2 \\ &= 2 \cdot 1^2 - \left(\sqrt{2}\right)^2 = 0. \end{aligned}$$

Vậy hai vectơ $\left(2\vec{a} - \vec{b}\right)$ và $\left(\vec{a} + \vec{b}\right)$ vuông góc với nhau.

BÀI 1. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A có $AB = c$, $AC = b$. Tính $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$ theo b và c.

Lời giải.

$\triangle ABC$ vuông tại $A \Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$.

Ta có $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} \cdot \left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right) = \overrightarrow{BA}^2 + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} = AB^2 = c^2$.

BÀI 2. Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ thỏa mãn $|\vec{a}| = \left|\vec{b}\right| = 1$ và hai vectơ $\vec{u} = \dfrac{2}{5}\vec{a} - 3\vec{b}$ và $\vec{v} = \vec{a} + \vec{b}$ vuông góc với nhau. Xác định góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

Lời giải.

Ta có $\vec{u} \perp \vec{v} \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow \left(\dfrac{2}{5}\vec{a} - 3\vec{b}\right) \cdot \left(\vec{a} + \vec{b}\right) = 0 \Rightarrow \dfrac{2}{5}\vec{a}^2 - \dfrac{13}{5}\vec{a}\vec{b} - 3\vec{b}^2 = 0$ (1).

Vì $|\vec{a}| = \left|\vec{b}\right| = 1$ nên từ (1) ta suy ra $\vec{a}\vec{b} = -1$.

Khi đó ta có

$$\cos\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right|} = -1 \Rightarrow \left(\vec{a}, \vec{b}\right) = 180^\circ.$$

4 Tập hợp điểm và chứng minh bất đẳng thức

Ta sử dụng các kết quả cơ bản sau:

a) Cho A, B là các điểm cố định, M là điểm di động

- Nếu $\left|\overrightarrow{AM}\right| = k$ với k là số thực dương cho trước thì tập hợp các điểm M là đường tròn tâm A, bán kính $R = k$.
- Nếu $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ thì tập hợp các điểm M là đường tròn đường kính AB.
- Nếu $\overrightarrow{MA} \cdot \vec{a} = 0$ với $\vec{a} \neq \vec{0}$ cho trước thì tập hợp các điểm M là đường thẳng đi qua A và vuông góc với giá của vectơ $\vec{a}$.

b) Các bất đẳng thức vectơ

- $\vec{a}^2 \geq 0\ \forall \vec{a}$. Dấu "=" xảy ra khi $\vec{a} = \vec{0}$.
- $\vec{a} \cdot \vec{b} \leq |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$. Dấu "=" xảy ra khi $\vec{a} = k\vec{b},\ k > 0$.

VÍ DỤ 1. Cho hai điểm A, B cố định có độ dài bằng a, vectơ $\vec{a}$ khác $\vec{0}$. Tìm tập hợp điểm M sao cho

a) $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \dfrac{3a^2}{4}$

b) $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MA^2$

Lời giải.

a) Gọi I là trung điểm của AB ta có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \frac{3a^2}{4} &\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\right)\left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}\right) = \frac{3a^2}{4}\\ &\Leftrightarrow MI^2 - IA^2 = \frac{3a^2}{4}\ (\text{Do } \overrightarrow{IB} = -\overrightarrow{IA})\\ &\Leftrightarrow MI^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{3a^2}{4} \Leftrightarrow MI = a.\end{aligned}$$

Vậy tập hợp điểm M là đường tròn tâm I bán kính $R = a$.

b) Ta có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MA^2 &\Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA}^2\\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \cdot \left(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}\right) = 0\\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{BA} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \perp \overrightarrow{BA}.\end{aligned}$$

Vậy tập hợp điểm M là đường thẳng vuông góc với đường thẳng AB tại A.

VÍ DỤ 2. Cho tam giác ABC. Tìm tập hợp điểm M sao cho

$$\left(\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{CB}\right)\overrightarrow{BC} = 0.$$

Lời giải.

Gọi I là điểm xác định bởi

$$\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} = \vec{0}.$$

Khi đó

$$\begin{aligned}&\left(\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{CB}\right)\overrightarrow{BC} = 0\\ \Leftrightarrow\ &\left[\left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\right) + 2\left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}\right)\right] \cdot \overrightarrow{BC} = 3BC^2\\ \Leftrightarrow\ &\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{BC} = BC^2\end{aligned}$$

Gọi M', I' lần lượt là hình chiếu của M, I lên đường thẳng BC.
Theo công thức hình chiếu ta có

$$\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{M'I'} \cdot \overrightarrow{BC}.$$

Do đó

$$\overrightarrow{M'I'} \cdot \overrightarrow{BC} = BC^2.$$

Vì $BC^2 > 0$ nên $\overrightarrow{M'I'}$, $\overrightarrow{BC}$ cùng hướng suy ra

$$\overrightarrow{M'I'} \cdot \overrightarrow{BC} = BC^2 \Leftrightarrow M'I' \cdot BC = BC^2 \Leftrightarrow M'I' = BC.$$

Do I cố định nên I' cố định suy ra M' cố định.
Vậy tập hợp điểm M là đường thẳng đi qua M' và vuông góc với BC.

VÍ DỤ 3. Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng

a) $\cos A + \cos B + \cos C \leq \dfrac{3}{2}$.

b) $\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C \geq -\dfrac{3}{2}$.

Lời giải.

a) Đặt $\vec{i}=\dfrac{1}{AB}\overrightarrow{AB}$, $\vec{j}=\dfrac{1}{BC}\overrightarrow{BC}$, $\vec{k}=\dfrac{1}{CA}\overrightarrow{CA}$. Khi đó

$$|\vec{i}|=|\vec{j}|=|\vec{k}|=1$$

và

$$(\vec{i},\vec{j})=180^\circ-B,\ (\vec{j},\vec{k})=180^\circ-C,\ (\vec{k},\vec{i})=180^\circ-A.$$

Ta có

$$\begin{aligned}(\vec{i}+\vec{j}+\vec{k})^2\geq 0 &\Leftrightarrow \vec{i}^2+\vec{j}^2+\vec{k}^2+2\vec{i}\cdot\vec{j}+2\vec{j}\cdot\vec{k}+2\vec{k}\cdot\vec{i}\geq 0\\ &\Leftrightarrow 1^2+1^2+1^2+2\cos(180^\circ-B)+2\cos(180^\circ-C)+2\cos(180^\circ-A)\geq 0\\ &\Leftrightarrow 3-2\cos A-2\cos B-2\cos C\geq 0\\ &\Leftrightarrow \cos A+\cos B+\cos C\leq \frac{3}{2}.\end{aligned}$$

b) Gọi (O,R) là tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Ta có

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})^2\geq 0 &\Leftrightarrow OA^2+OB^2+OC^2+2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}\geq 0\\ &\Leftrightarrow 3R^2+2R^2(\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C)\geq 0\\ &\Leftrightarrow \cos 2A+\cos 2B+\cos 2C\geq -\frac{3}{2}.\end{aligned}$$

1. Bài tập tự luận

BÀI 1. Cho đoạn thẳng AB và số thực k. Tìm tập hợp điểm M trong mỗi trường hợp sau

a) $2MA^2=\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}$. b) $MA^2+2MB^2=k$, $k>0$. c) $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{a}=k$.

Lời giải.

a) Ta có

$$2MA^2=\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}\Leftrightarrow \overrightarrow{MA}\left(2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right)=0. \quad (*)$$

Gọi I là điểm thoả mãn:

$$2\overrightarrow{IA}-\overrightarrow{IB}=\vec{0}.$$

Khi đó

$$2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MI}.$$

Do đó:

$$(*)\Leftrightarrow \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MI}=0\Leftrightarrow \overrightarrow{MA}\perp\overrightarrow{MI}.$$

Vậy tập hợp điểm M là đường tròn đường kính AI.

b) Gọi E là điểm thoả mãn

$$\overrightarrow{EA}+2\overrightarrow{EB}=\vec{0}.$$

Ta có

$$\begin{aligned}&MA^2+2MB^2=k\\ \Leftrightarrow\ &\left(\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{EA}\right)^2+\left(\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{EB}\right)^2=k\\ \Leftrightarrow\ &3ME^2=k-EA^2-2EB^2.\quad (*)\end{aligned}$$

Mặt khác từ

$$\overrightarrow{EA}+2\overrightarrow{EB}=\vec{0},$$

suy ra

$$EA=\frac{2}{3}AB;\ \ EB=\frac{1}{3}AB,$$

nên

$$(*)\Leftrightarrow 3ME^2=k-\frac{2}{3}AB^2\Leftrightarrow ME^2=\frac{1}{3}\left(k-\frac{2}{3}AB^2\right).$$

- Nếu $k<\dfrac{2}{3}AB^2$: Tập hợp điểm M là rỗng.
- Nếu $k=\dfrac{2}{3}AB^2$: Tập hợp điểm M là một điểm E.
- Nếu $k>\dfrac{2}{3}AB^2$: Tập hợp điểm M là đường tròn tâm E, bán kính $R=\sqrt{\dfrac{1}{3}\left(k-\dfrac{2}{3}AB^2\right)}$.

c) Gọi Δ là giá của vectơ $\vec{a}$ và A', M' lần lượt là hình chiếu của A, M lên Δ. Theo công thức hình chiếu ta có

$$\overrightarrow{AM}.\vec{a} = \overrightarrow{A'M'} \cdot \vec{a}.$$

Suy ra

$$\overrightarrow{A'M'} \cdot \vec{a} = k \Leftrightarrow \overline{A'M'} \cdot \overline{a} = k \Leftrightarrow \overline{A'M'} = \frac{k}{\overline{a}},$$

trong đó $\overline{a}$ là độ dài đại số của vectơ $\vec{a}$.

Vì A' là điểm cố định, $\dfrac{k}{\overline{a}}$ là hằng số không đổi nên M' là điểm cố định.

Do đó tập hợp điểm M là đường thẳng vuông góc với Δ tại M'.

BÀI 2. Cho tứ giác $ABCD$, I, J lần lượt là trung điểm của AB và CD. Tìm tập hợp điểm M sao cho $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{MD} = \frac{1}{2}IJ^2$.

Lời giải.

Ta có

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MD} = \frac{1}{2}IJ^2 \Leftrightarrow \overrightarrow{MI}^2 + \overrightarrow{MJ}^2 - IA^2 - JC^2 = \frac{1}{2}IJ^2.$$

Goi K là trung điểm IJ suy ra

$$\overrightarrow{MI}^2 + \overrightarrow{MJ}^2 = 2MK^2 + 2IK^2.$$

Do đó

$$MK^2 = \frac{IA^2 + JC^2}{2}.$$

Suy ra tập hợp điểm M là đường tròn tâm K bán kính $R = \sqrt{\dfrac{IA^2 + JC^2}{2}}$.

BÀI 3. Cho tam giác ABC, góc A nhọn, trung tuyến AI. Tìm tập hợp những điểm M di động trong góc $\widehat{BAC}$ sao cho $AB \cdot AH + AC \cdot AK = AI^2$, trong đó H và K theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của M lên AB và AC.

Lời giải.

Sử dụng công thức hình chiếu ta có:

$$\begin{aligned} & AB \cdot AH + AC \cdot AK = AI^2 \Leftrightarrow \overrightarrow{AI}^2 = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AK} \\ \Leftrightarrow\ & \overrightarrow{AI}^2 = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AM} \\ \Leftrightarrow\ & \overrightarrow{AI}^2 = 2\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AM}. \end{aligned}$$

Gọi M_0 là hình chiếu của M lên AI khi đó ta có

$$AI^2 = 2AI \cdot AM_0 \Leftrightarrow AM_0 = \frac{AI}{2}$$

(M_0 nằm trên tia AI).

Suy ra tập hợp điểm M là đoạn trung trực của AI nằm trong góc $\widehat{BAC}$.

BÀI 4. Cho tam giác ABC và k là số thực cho trước. Tìm tập hợp những điểm M sao cho

$$MA^2 - MB^2 = k.$$

Lời giải.

Gọi I là trung điểm AB ta có

$$MA^2 - MB^2 = k \Leftrightarrow 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{BA} = k \Leftrightarrow \overline{M'I} = \frac{k}{2\overline{BA}}.$$

Với M' là hình chiếu M lên AB suy ra M' là điểm cố định.

Vậy tập hợp điểm M là đường thẳng đi qua M' và vuông góc với AB.

BÀI 5. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a và số thực k cho trước. Tìm tập hợp điểm M sao cho

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD} = k.$$

Lời giải.

Gọi I là tâm của hình vuông $ABCD$. Ta có

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} &= \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\right)\left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC}\right) \\ &= MI^2 + \overrightarrow{MI}\left(\overrightarrow{IC} + \overrightarrow{IA}\right) + \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IC} \\ &= MI^2 + \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IC}. \end{aligned}$$

Tương tự
$$\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MD}=MI^2+\overrightarrow{IB}\cdot\overrightarrow{ID},$$
nên
$$\begin{aligned}\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MD}=k &\Leftrightarrow 2MI^2+\overrightarrow{IB}\cdot\overrightarrow{ID}+\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{IC}=k\\ &\Leftrightarrow 2MI^2-IB^2-IA^2=k\Leftrightarrow MI^2=\frac{k}{2}+IA^2\\ &\Leftrightarrow MI^2=\frac{k}{2}+a^2\\ &\Leftrightarrow MI=\sqrt{\frac{k}{2}+IA^2}=\sqrt{\frac{k+a^2}{2}}.\end{aligned}$$

- Nếu $k<-a^2$: Tập hợp điểm M là tập rỗng.
- Nếu $k=-a^2$ thì $MI=0\Leftrightarrow M\equiv I$ suy ra tập hợp điểm M là điểm I.
- Nếu $k>-a^2$ thì $MI=\sqrt{\frac{k+a^2}{2}}$. Suy ra tập hợp điểm M là đường tròn tâm I bán kính $R=\sqrt{\frac{k+a^2}{2}}$.

BÀI 6. Cho tam giác ABC và các số thực x,y,z. Chứng minh rằng
$$xy\cos A+yz\cos B+zx\cos C\le\frac{x^2+y^2+z^2}{2}.$$

Lời giải.

Đặt $\vec{i}=\frac{\overrightarrow{AB}}{AB}$, $\vec{j}=\frac{\overrightarrow{BC}}{BC}$, $\vec{k}=\frac{\overrightarrow{CA}}{CA}$. Suy ra $\left|\vec{i}\right|=\left|\vec{j}\right|=\left|\vec{k}\right|=1$ và $\vec{i}.\vec{j}=-\cos B$, $\vec{j}.\vec{k}=-\cos C$, $\vec{k}.\vec{i}=-\cos A$.

Ta có
$$\begin{aligned}\left(x\vec{k}+y\vec{i}+z\vec{j}\right)^2\ge 0 &\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2+2xy\,\vec{i}.\vec{k}+2yz\,\vec{i}.\vec{j}+2zx\,\vec{j}.\vec{k}\ge 0\\ &\Leftrightarrow xy\cos A+yz\cos B+zx\cos C\le\frac{x^2+y^2+z^2}{2}\ \text{(đpcm)}.\end{aligned}$$

2. Câu hỏi trắc nghiệm

CÂU 1. Cho $\vec{a},\vec{b}$ khác $\vec{0}$. Kí hiệu $\left(\vec{a},\vec{b}\right)$ là góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

(A) $\left(\vec{a},\vec{b}\right)=-\left(\vec{b},\vec{a}\right)$.

(B) Nếu $\left(\vec{a},\vec{b}\right)=0^\circ$ thì $\vec{a},\vec{b}$ có giá trùng nhau.

(C) $\left(\vec{a},-\vec{b}\right)=-\left(\vec{a},\vec{b}\right)$.

(D) $\left(k\vec{a},\vec{b}\right)=\left(\vec{a},\vec{b}\right)$ với mọi $k\in\mathbb{R}^+$.

Lời giải.

Vì $k\vec{a}$ với mọi $k\in\mathbb{R}^+$ và $\vec{a}$ cùng hướng nên $(k\vec{a},\vec{b})=(\vec{a},\vec{b})$ với mọi $k\in\mathbb{R}^+$.

Chọn đáp án (D) .... □

CÂU 2. Cho tam giác ABC vuông tại A và có $\widehat{B}=60^\circ$. Góc giữa $\overrightarrow{CA}$ và $\overrightarrow{CB}$ bằng

(A) 60°. (B) 30°. (C) 90°. (D) 45°.

Lời giải.

Ta có $\left(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB}\right)=\widehat{ACB}$.

Do $\triangle ABC$ vuông tại A và có $\widehat{B}=60^\circ$ nên $\widehat{C}=30^\circ$.

Chọn đáp án (B) .... □

CÂU 3. Cho tam giác ABC vuông cân tại A, góc giữa $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BC}$ là

(A) $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right)=45^\circ$. (B) $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right)=60^\circ$. (C) $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right)=120^\circ$. (D) $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right)=135^\circ$.

Lời giải.

$\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right)=\left(-\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right)=180^\circ-\widehat{ABC}=180^\circ-45^\circ=135^\circ$

Chọn đáp án (D) .... □

CÂU 4. Cho $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là hai vectơ cùng hướng và đều khác $\vec{0}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

(A) $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$. (B) $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$. (C) $\vec{a}\cdot\vec{b}=-1$. (D) $\vec{a}\cdot\vec{b}=-|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$.

Lời giải.

Ta có $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)$.

Do $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là hai vectơ cùng hướng nên $\left(\vec{a},\vec{b}\right)=0^\circ$.

Vậy $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$.

Chọn đáp án (A) .... □

CÂU 5. Cho tam giác đều ABC cạnh bằng a và H là trung điểm BC. Tính $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{CA}$.

(A) $\dfrac{3a^2}{4}$. (B) $\dfrac{-3a^2}{4}$. (C) $\dfrac{3a^2}{2}$. (D) $\dfrac{-3a^2}{2}$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{CA}=AH\cdot CA\cdot\cos\left(\overrightarrow{AH},\overrightarrow{CA}\right)=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\cdot a\cdot\cos 150^\circ=-\dfrac{3a^2}{4}$.

Chọn đáp án (B) ....

CÂU 6. Cho tam giác ABC cân tại A, $\widehat{A}=120^\circ$ và $AB=a$. Tính $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{CA}$.

(A) $\dfrac{a^2}{2}$. (B) $-\dfrac{a^2}{2}$. (C) $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$. (D) $-\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{CA}=BA\cdot CA\cdot\cos 120^\circ=-\dfrac{1}{2}a^2$.

Chọn đáp án (B) ....

CÂU 7. Cho tam giác ABC vuông tại A có $\widehat{B}=60^\circ$, $AB=a$. Tính $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CB}$.

(A) $3a^2$. (B) $-3a^2$. (C) $3a$. (D) 0.

Lời giải.

$$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CB}=AC\cdot BC\cdot\cos 150^\circ=a\sqrt{3}\cdot 2a\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-3a^2.$$

Chọn đáp án (B) ....

CÂU 8. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a. Tính tích vô hướng của hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.

(A) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=a\sqrt{2}$. (B) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=2a$. (C) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=a^2$. (D) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=2a^2$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|\cdot\cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=a\cdot a\sqrt{2}\cos 45^\circ=a^2$.

Chọn đáp án (C) ....

CÂU 9. Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khác $\vec{0}$. Xác định góc α giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khi $\vec{a}\cdot\vec{b}=-|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$.

(A) $\alpha=180^\circ$. (B) $\alpha=0^\circ$. (C) $\alpha=90^\circ$. (D) $\alpha=45^\circ$.

Lời giải.

Ta có $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)$.

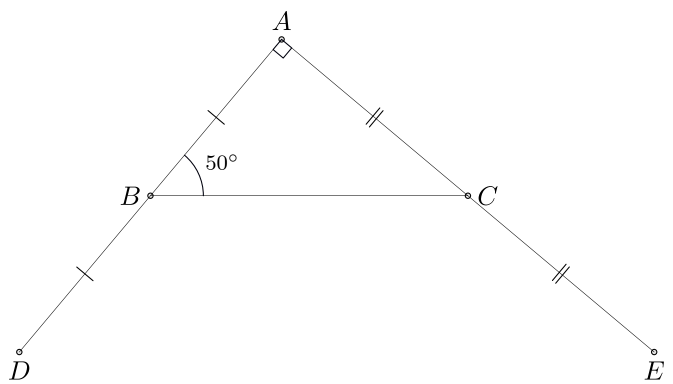
Mà theo giả thiết $\vec{a}\cdot\vec{b}=-|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$ nên $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=-1$ hay $\alpha=180^\circ$.

Chọn đáp án (A) ....

CÂU 10. Cho tam giác ABC vuông tại A và có góc $\widehat{B}=50^\circ$. Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề đúng?

(A) Góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{CB}$ bằng 140°.
(B) Góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ bằng 50°.
(C) Góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AC}$ bằng 90°.
(D) Góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CB}$ bằng 130°.

Lời giải.



Gọi D, E lần lượt là các điểm thuộc đường thẳng AB, AC sao cho $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BD}$ và $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CE}$.

Vì tam giác ABC vuông tại A và có $\widehat{ABC}=50^\circ$ nên $\widehat{ACB}=40^\circ$.

Khi đó
$\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{CB}\right)=\left(\overrightarrow{CE},\overrightarrow{CB}\right)=\widehat{BCE}=180^\circ-40^\circ=140^\circ$.

$\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}\right) = \left(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BC}\right) = \widehat{CBD} = 180^\circ - 50^\circ = 130^\circ$.
$\left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC}\right) = \widehat{ACB} = 40^\circ$.
$\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CB}\right) = \widehat{ABC} = 50^\circ$.

Chọn đáp án (A) ....

CÂU 11. Tam giác ABC vuông ở A và có $BC = 2AC$. Tính $\cos\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}\right)$.

(A) $\cos\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}\right) = \frac{1}{2}$. (B) $\cos\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}\right) = -\frac{1}{2}$. (C) $\cos\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$. (D) $\cos\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.

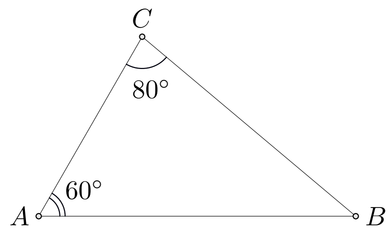
Xác định được $\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}\right) = 180^\circ - \widehat{ACB}$.

Ta có $\cos\widehat{ACB} = \frac{AC}{BC} = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{ACB} = 60^\circ$. Vậy $\cos\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}\right) = \cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$.

Chọn đáp án (B) ....

CÂU 12.
Cho tam giác ABC như hình vẽ. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

(A) $\left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AB}\right) = 40^\circ$. (B) $\left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}\right) = 140^\circ$.
(C) $\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}\right) = 80^\circ$. (D) $\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BA}\right) = 120^\circ$.



Lời giải.

$\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BA}\right) = \left(\overrightarrow{AC}, -\overrightarrow{AB}\right) = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$.

Chọn đáp án (D) ....

CÂU 13. Cho hình vuông ABCD, tính $\cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CA}\right)$.

(A) $\frac{1}{2}$. (B) $-\frac{1}{2}$. (C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$. (D) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải.

Vì $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CA}\right) = 180^\circ - \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = 135^\circ$ nên $\cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CA}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Chọn đáp án (D) ....

CÂU 14. Cho tam giác đều ABC. Tính $P = \cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}\right) + \cos\left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}\right) + \cos\left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AB}\right)$.

(A) $P = \frac{3\sqrt{3}}{2}$. (B) $P = \frac{3}{2}$. (C) $P = -\frac{3}{2}$. (D) $P = -\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.

Ta có $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}\right) = \left(-\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}\right) = 180^\circ - \widehat{CBA} = 120^\circ \Rightarrow \cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}\right) = -\frac{1}{2}$.

Tương tự, ta cũng có $\cos\left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}\right) = \cos\left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AB}\right) = -\frac{1}{2}$.

Vậy $\cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}\right) + \cos\left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}\right) + \cos\left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AB}\right) = -\frac{3}{2}$.

Chọn đáp án (C) ....

CÂU 15. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a. Tính $\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right)\left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD}\right)$.

(A) $-2a^2$. (B) a^2. (C) $2a^2$. (D) $-\frac{a^2}{\sqrt{2}}$.

Lời giải.

$ABCD$ là hình vuông cạnh a nên $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BD}$ và $AC = a\sqrt{2}$.
Do đó

$$\begin{aligned}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right)\left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD}\right) &= \overrightarrow{AC}\left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD}\right) \\ &= \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = AC \cdot BC \cdot \cos 45^\circ = a^2.\end{aligned}$$

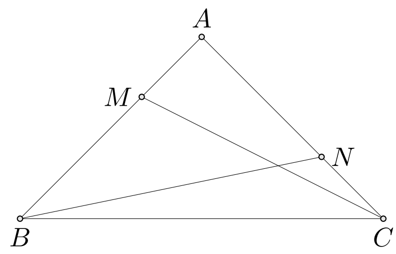
Chọn đáp án (B) ....

CÂU 16. Cho $\triangle ABC$ đều cạnh bằng 3. Trên các cạnh AB, AC lần lượt lấy các điểm M, N sao cho $2AM = MB, NA = 2NC$. Giá trị của tích vô hướng $\overrightarrow{BN} \cdot \overrightarrow{CM}$ là

A $\frac{7}{2}$. **B** $-\frac{7}{2}$. **C** $\frac{11}{2}$. **D** $-\frac{11}{2}$.

Lời giải.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BN} \cdot \overrightarrow{CM} &= \left(\overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AB}\right) \cdot \left(\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AC}\right) \\ &= \overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \\ &= 1 \cdot 2 \cdot \cos 60^\circ - 2 \cdot 3 \cos 0^\circ - 3 \cdot 1 \cos 0^\circ + 3 \cdot 3 \cos 60^\circ \\ &= -\frac{7}{2}.\end{aligned}$$



Chọn đáp án B ☐

CÂU 17. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = a$, $BC = 2a$. Tính $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC}$ theo a.

A $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} = -a\sqrt{3}$.

B $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} = -3a^2$.

C $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} = a\sqrt{3}$.

D $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} = 3a^2$.

Lời giải.

Tam giác ABC vuông tại A nên $CA^2 = BC^2 - AB^2 = 3a^2$.
$\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC}(\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CA} = -3a^2$.

Chọn đáp án B ☐

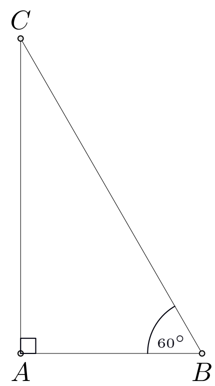
CÂU 18. Cho tam giác ABC vuông tại A, có số đo góc B là 60° và $AB = a$. Kết quả nào sau đây là **sai**?

A $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$. **B** $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 3a^2$. **C** $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -a^2$. **D** $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} = -3\sqrt{2}a^2$.

Lời giải.

Ta có $AB = a, BC = 2a, AC = a\sqrt{3}$.

- Do $AB \perp AC$ nên $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$.
- Ta có $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = CA \cdot CB \cdot \cos 30^\circ = 3a^2$.
- Ta có $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = -BA \cdot BC \cdot \cos 60^\circ = -a^2$.
- Ta có $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} = -\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = -CA \cdot CB \cdot \cos 30^\circ = -3a^2$.



Chọn đáp án D ☐

CÂU 19. Cho M là trung điểm AB, tìm mệnh đề **sai**.

A $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{AB} = -MA \cdot AB$.

B $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = -MA \cdot MB$.

C $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = AM \cdot AB$.

D $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MA \cdot MB$.

Lời giải.

$\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{AB}$ ngược hướng suy ra $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{AB} = MA \cdot AB \cdot \cos 180^\circ = -MA \cdot AB$.
$\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}$ ngược hướng suy ra $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MA \cdot MB \cdot \cos 180^\circ = -MA \cdot MB$.
$\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}$ cùng hướng suy ra $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = AM \cdot AB \cdot \cos 0^\circ = AM \cdot AB$.
$\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}$ ngược hướng suy ra $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MA \cdot MB \cdot \cos 180^\circ = -MA \cdot MB$.

Chọn đáp án D ☐

CÂU 20. Cho 2 vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ thỏa $\left|\vec{a} + \vec{b}\right| = 2$ và có độ lớn bằng 1. Hãy tính $\left(3\vec{a} - 4\vec{b}\right)\left(2\vec{a} + 5\vec{b}\right)$.

A 7. **B** 5. **C** -7. **D** -5.

Lời giải.

$\left|\vec{a}\right| = \left|\vec{b}\right| = 1$.
$\left|\vec{a} + \vec{b}\right| = 2 \Leftrightarrow \left(\vec{a} + \vec{b}\right)^2 = 4 \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 1$.
$\left(3\vec{a} - 4\vec{b}\right)\left(2\vec{a} + 5\vec{b}\right) = 6\vec{a}^2 - 20\vec{b}^2 + 7\vec{a} \cdot \vec{b} = -7$.

Chọn đáp án (C) .... □

CÂU 21. Cho hình thang vuông $ABCD$ có đường cao $AD = 3a$. Tính $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{BC}$.

(A) $-9a^2$. (B) $15a^2$. (C) 0. (D) $9a^2$.

Lời giải.

$\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{DA} \cdot \left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}\right) = \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{AD} = -9a^2$.

Chọn đáp án (A) .... □

CÂU 22. Cho tam giác ABC có $BC = a,\ CA = b,\ AB = c$. Gọi M là trung điểm cạnh BC. Tính $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC}$.

(A) $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = \dfrac{b^2 - c^2}{2}$. (B) $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = \dfrac{c^2 + b^2}{2}$. (C) $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = \dfrac{c^2 + b^2 + a^2}{3}$. (D) $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = \dfrac{c^2 + b^2 - a^2}{2}$.

Lời giải.

Vì M là trung điểm của BC suy ra $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AM}$. Khi đó

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} &= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}\right)\left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right) = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}^2 - \overrightarrow{AB}^2\right) = \frac{1}{2}\left(AC^2 - AB^2\right) = \frac{b^2 - c^2}{2}.\end{aligned}$$

Chọn đáp án (A) .... □

CÂU 23. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a. Tính $P = \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)\left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BA}\right)$.

(A) $P = 2\sqrt{2}a$. (B) $P = 2a^2$. (C) $P = a^2$. (D) $P = -2a^2$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} BD = a\sqrt{2} \\ \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BA} = \left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA}\right) + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{BD}. \end{cases}$

Khi đó

$$\begin{aligned}P &= \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right) \cdot 2\overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} + 2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = -2\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BD} + 0\\ &= -2 \cdot BA \cdot BD \cos\left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BD}\right) = -2 \cdot a \cdot a\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -2a^2.\end{aligned}$$

Chọn đáp án (D) .... □

CÂU 24. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a. Gọi E là điểm đối xứng của D qua C. Tính $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB}$.

(A) $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB} = 2a^2$. (B) $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB} = \sqrt{3}a^2$. (C) $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB} = \sqrt{5}a^2$. (D) $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB} = 5a^2$.

Lời giải.

Ta có C là trung điểm của DE nên $DE = 2a$. Khi đó

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB} &= \left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE}\right) \cdot \overrightarrow{AB} = \underbrace{\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB}}_{0} + \overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{AB}\\ &= DE \cdot AB \cdot \cos\left(\overrightarrow{DE}, \overrightarrow{AB}\right) = DE \cdot AB \cdot \cos 0^\circ = 2a^2.\end{aligned}$$

Chọn đáp án (A) .... □

CÂU 25. Biết $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$ và $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$. Khẳng định nào sau đây đúng?

(A) $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng hướng.

(B) $\vec{a}$ và $\vec{b}$ nằm trên hai dường thẳng hợp với nhau một góc 80°.

(C) $\vec{a}$ và $\vec{b}$ ngược hướng.

(D) $\vec{a}$ và $\vec{b}$ nằm trên hai dường thẳng hợp với nhau một góc 60°.

Lời giải.

Ta có

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \Leftrightarrow |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \Leftrightarrow \cos\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = -1$$

nên $\vec{a}$ và $\vec{b}$ ngược hướng.

Chọn đáp án (C) .... □

CÂU 26. Cho tam giác ABC vuông tại A, $AB = a$, $AC = a\sqrt{3}$. Gọi M là trung điểm của BC. Tính cô-sin góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{MA}$ và $\overrightarrow{BC}$.

(A) $\cos\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{BC}\right) = \dfrac{1}{2}$. (B) $\cos\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{BC}\right) = -\dfrac{1}{2}$. (C) $\cos\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{BC}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. (D) $\cos\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{BC}\right) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.

Từ giả thiết suy ra $\widehat{B}=60^\circ$ và $\widehat{C}=30^\circ$. $\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{BC}\right)=\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MC}\right)=\widehat{AMC}=120^\circ$

$\Rightarrow \cos\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{BC}\right)=\cos 120^\circ=-\dfrac{1}{2}$.

Chọn đáp án B

CÂU 27. Cho tam giác ABC. Tính tổng $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right)+\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CA}\right)+\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{AB}\right)$.

A 180°. **B** 360°. **C** 270°. **D** 120°.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases}\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right)=180^\circ-\widehat{ABC}\\ \left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CA}\right)=180^\circ-\widehat{BCA}\\ \left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{AB}\right)=180^\circ-\widehat{CAB}\end{cases}$

Suy ra $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right)+\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CA}\right)+\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{AB}\right)=360^\circ$.

Chọn đáp án B

CÂU 28. Tam giác ABC có góc A bằng 100° và có trực tâm H. Tính tổng $\left(\overrightarrow{HA},\overrightarrow{HB}\right)+\left(\overrightarrow{HB},\overrightarrow{HC}\right)+\left(\overrightarrow{HC},\overrightarrow{HA}\right)$.

A 360°. **B** 180°. **C** 80°. **D** 160°.

Lời giải.

Gọi BI và CF là hai đường cao của tam giác ABC. Suy ra tứ giác $HIAF$ nội tiếp, kéo theo $\widehat{BHC}=80^\circ$.

Ta có $\begin{cases}\left(\overrightarrow{HA},\overrightarrow{HB}\right)=\widehat{BHA}\\ \left(\overrightarrow{HB},\overrightarrow{HC}\right)=\widehat{BHC}\\ \left(\overrightarrow{HC},\overrightarrow{HA}\right)=\widehat{CHA}\end{cases}$

$\left(\overrightarrow{HA},\overrightarrow{HB}\right)+\left(\overrightarrow{HB},\overrightarrow{HC}\right)+\left(\overrightarrow{HC},\overrightarrow{HA}\right)=2\widehat{BHC}=160^\circ$.

Chọn đáp án D

CÂU 29. Cho hình vuông $ABCD$ tâm O. Tính tổng $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{DC}\right)+\left(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{CB}\right)+\left(\overrightarrow{CO},\overrightarrow{DC}\right)$.

A 45°. **B** 405°. **C** 315°. **D** 225°.

Lời giải.

Vì $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{DC}$ cùng hướng nên $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{DC}\right)=0^\circ$.

Vì $\overrightarrow{AD},\overrightarrow{CB}$ ngược hướng nên $\left(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{CB}\right)=180^\circ$.

Vẽ $\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{DC}$, khi đó $\left(\overrightarrow{CO},\overrightarrow{DC}\right)=\left(\overrightarrow{CO},\overrightarrow{CE}\right)=\widehat{OCE}=135^\circ$.

Vậy $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{DC}\right)+\left(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{CB}\right)+\left(\overrightarrow{CO},\overrightarrow{DC}\right)=0^\circ+180^\circ+135^\circ=315^\circ$.

Chọn đáp án C

CÂU 30. Cho tam giác ABC cân tại A, góc $\hat{A}=20^\circ$. Gọi BM là đường phân giác trong của góc $\widehat{ABC}$. Tính $\cos\left(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{MC}\right)$.

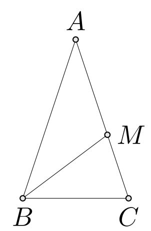
A $\dfrac{1}{2}$. **B** $\dfrac{-\sqrt{2}}{2}$. **C** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **D** $\dfrac{-1}{2}$.

Lời giải.

Ta có $\widehat{BMC}=180^\circ-\left(\widehat{MBC}+\widehat{BCM}\right)=180^\circ-(40^\circ+80^\circ)=60^\circ$.

$\left(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{MC}\right)=180^\circ-60^\circ=120^\circ$.

$\Rightarrow \cos\left(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{MC}\right)=\dfrac{-1}{2}$.



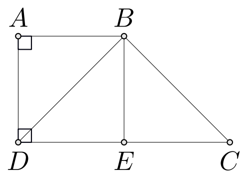
Chọn đáp án D

CÂU 31. Cho hình thang vuông $ABCD$, vuông tại A và D, biết $AB=AD=a, CD=2a$. Tính $\cos\left(\overrightarrow{BD},\overrightarrow{CB}\right)$.

A $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **B** $\dfrac{-1}{2}$. **C** 0. **D** $\dfrac{-\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải.

Gọi E là trung điểm của đoạn thẳng CD. Khi đó, tam giác BCE vuông cân tại E.
$\Rightarrow \widehat{BCE} = 45^\circ \Rightarrow \widehat{DBC} = 90^\circ$.
$\left(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{CB}\right) = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ \Rightarrow \cos\left(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{CB}\right) = 0$.



Chọn đáp án C ....

CÂU 32. Cho hình thoi $ABCD$ cạnh a, góc $\widehat{ABC} = 120^\circ$. Gọi G là trọng tâm của tam giác BCD và α là góc giữa hai đường thẳng DA và BG. Tính $\sin\alpha$.

A $\sin\alpha = \dfrac{1}{2}$. **B** $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **C** $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **D** $\sin\alpha = 1$.

Lời giải.

Vì $AD \parallel BC$ nên Ta có $\alpha = \widehat{(DA, BG)} = \widehat{(BC, BG)} = 30^\circ \Rightarrow \sin\alpha = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$.

Chọn đáp án A ....

CÂU 33. Cho tam giác ABC có các cạnh bằng a, b, c. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ theo a, b, c.

A $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \dfrac{1}{2}(a^2+b^2-c^2)$.
B $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \dfrac{1}{2}(a^2+c^2-b^2)$.
C $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \dfrac{1}{2}(b^2+c^2+a^2)$.
D $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \dfrac{1}{2}(b^2+c^2-a^2)$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{BC}^2 = (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})^2 \Rightarrow BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$. Do đó $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \dfrac{1}{2}(b^2+c^2-a^2)$.

Chọn đáp án D ....

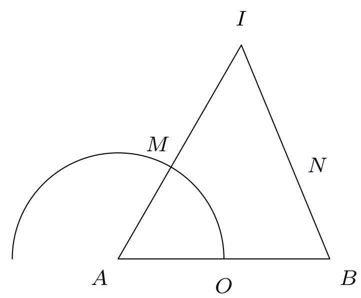
CÂU 34. Cho nửa đường tròn tâm O, có đường kính $AB = 2R$. Gọi M, N là hai điểm thuộc nửa đường tròn sao cho hai dây cung AM và BN cắt nhau tại I. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A $\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{AB}$. **B** $\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AN}\cdot\overrightarrow{AB}$. **C** $\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{AN}$. **D** $\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{BA}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{AM} &= \overrightarrow{AI}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM})\\ &= \overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{BM}\\ &= \overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{AB}.\end{aligned}$$



Chọn đáp án A ....

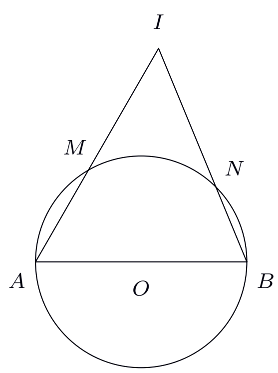
CÂU 35. Cho hai điểm M, N nằm trên đường tròn đường kính $AB = 2r$. Gọi I là giao điểm của hai đường thẳng AM và BN. Tính theo r giá trị biểu thức $P = \overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BN}\cdot\overrightarrow{BI}$.

A $P = 4r^2$. **B** $P = 2r^2$. **C** $P = r^2$. **D** $P = \dfrac{r^2}{4}$.

Lời giải.

Vì $AI \perp BM$ và $BI \perp AN$ nên $\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BI}\cdot\overrightarrow{AN} = 0$.
Do đó

$$\begin{aligned}P &= \overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BN}\cdot\overrightarrow{BI}\\ &= \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}\right)\cdot\overrightarrow{AI} + \left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AN}\right)\cdot\overrightarrow{BI}\\ &= \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AI} - \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BI}\\ &= \overrightarrow{AB}\cdot\left(\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB}\right)\\ &= \overrightarrow{AB}^2 = AB^2 = 4r^2.\end{aligned}$$



Chọn đáp án (A) .... □

CÂU 36. Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh là a. Giá trị của biểu thức $\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{BA}\right)\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)$ là

(A) 0. (B) $2a^2$. (C) $-2a^2$. (D) $-2\sqrt{2}a^2$.

Lời giải.

$\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{BA}\right)\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)=2\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{BC}=2|\overrightarrow{BD}|\cdot|\overrightarrow{BC}|\cdot\cos\left(\overrightarrow{BD},\overrightarrow{BC}\right)=2\cdot a\sqrt{2}\cdot a\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}=2a^2$.

Chọn đáp án (B) .... □

CÂU 37. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh bằng 2. Điểm M nằm trên đoạn thẳng AC sao cho $AM=\dfrac{AC}{4}$. Gọi N là trung điểm của đoạn thẳng DC. Tính $\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MN}$.

(A) $\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MN}=-4$. (B) $\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MN}=0$. (C) $\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MN}=4$. (D) $\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MN}=16$.

Lời giải.

Vì giả thiết không cho góc nên ta thử phân tích các vectơ $\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{MN}$ theo các vectơ có giá vuông góc với nhau.

$$\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}-\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}-\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{4}\overrightarrow{AD}.$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MN}&=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DN}-\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}-\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)\\&=\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)=\frac{3}{4}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}.\end{aligned}$$

Suy ra

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MN}&=\left(\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{4}\overrightarrow{AD}\right)\left(\frac{3}{4}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}\right)=\frac{1}{16}\left(3\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}+3\overrightarrow{AB}^2-3\overrightarrow{AD}^2-\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}\right)\\&=\frac{1}{16}\left(0+3a^2-3a^2-0\right)=0.\end{aligned}$$

Chọn đáp án (B) .... □

CÂU 38. Cho hình thoi $ABCD$ có $AC=8$. Tính $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.

(A) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=24$. (B) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=26$. (C) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=28$. (D) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=32$.

Lời giải.

Gọi $O=AC\cap BD$, giả thiết không cho góc, ta phân tích các vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ theo các vectơ có giá vuông góc với nhau.
Ta có $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\left(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}\right)\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{AC}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AC}+0=\dfrac{1}{2}AC^2=32$.

Chọn đáp án (D) .... □

CÂU 39. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB=a$ và $AD=a\sqrt{2}$. Gọi K là trung điểm của cạnh AD. Tính $\overrightarrow{BK}\cdot\overrightarrow{AC}$.

(A) $\overrightarrow{BK}\cdot\overrightarrow{AC}=0$. (B) $\overrightarrow{BK}\cdot\overrightarrow{AC}=-a^2\sqrt{2}$. (C) $\overrightarrow{BK}\cdot\overrightarrow{AC}=a^2\sqrt{2}$. (D) $\overrightarrow{BK}\cdot\overrightarrow{AC}=2a^2$.

Lời giải.

Ta có $AC=BD=\sqrt{AB^2+AD^2}=\sqrt{2a^2+a^2}=a\sqrt{3}$.

Lại có $\begin{cases}\overrightarrow{BK}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{BA}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}\\ \overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}.\end{cases}$

$\overrightarrow{BK}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AD}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AD}=-a^2+0+0+\dfrac{1}{2}\left(a\sqrt{2}\right)^2=0$.

Chọn đáp án (A) .... □

CÂU 40. Cho tứ giác $ABCD$ có hai đường chéo vuông góc với nhau tại M và $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MD}$. Gọi P là trung điểm của AD. Góc giữa hai đường thẳng MP và BC là

(A) 90°. (B) 60°. (C) 45°. (D) 30°.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MB}$; $\overrightarrow{MP}=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MD}\right)$

Suy ra $2\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{BC}=\left(\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MB}\right)\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MD}\right)$

$=\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{MD}-\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MD}$

$=\overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{MD}-\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$ (Vì $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MD}$ và $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{MD}=0$)

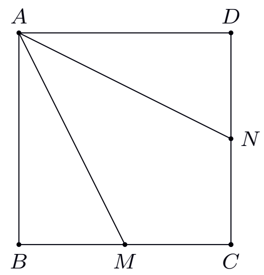
Vậy $MP\perp BC\Rightarrow\widehat{(MP,BC)}=90^\circ$.

Chọn đáp án (A) ....

CÂU 41. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của BC và CD. Tính $\cos\left(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{NA}\right)$.

(A) $\dfrac{4}{5}$. (B) $-\dfrac{4}{5}$. (C) $\dfrac{3}{5}$. (D) $-\dfrac{3}{5}$.

Lời giải.



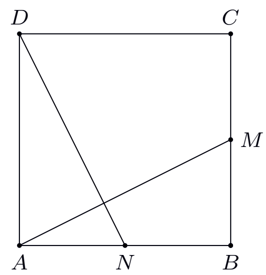
Từ giả thiết ta có $AM = AN = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$.
$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}; \overrightarrow{NA} = \overrightarrow{ND} + \overrightarrow{DA}$
$\Rightarrow \overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{NA} = \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}\right)\left(\overrightarrow{ND} + \overrightarrow{DA}\right)$
$= \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{ND} + \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{ND} + \overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{DA}$
$= a\cdot\dfrac{a}{2}\cdot\cos 180^\circ + 0 + 0 + a\cdot\dfrac{a}{2}\cdot\cos 180^\circ = -a^2$
Suy ra $\cos\left(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{NA}\right) = \dfrac{\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{NA}}{|\overrightarrow{AM}|\cdot|\overrightarrow{NA}|} = \dfrac{-a^2}{\dfrac{a\sqrt{5}}{2}\cdot\dfrac{a\sqrt{5}}{2}} = -\dfrac{4}{5}$.

Chọn đáp án (B) ....

CÂU 42. Cho hình vuông $ABCD$. Gọi M là trung điểm của cạnh BC. Tính góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{AM}$ và $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB}$.

(A) 45°. (B) 30°. (C) 135°. (D) 90°.

Lời giải.



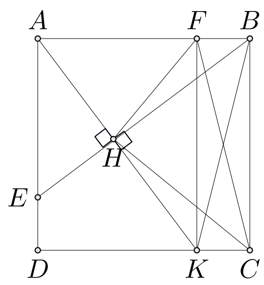
Gọi N là trung điểm AB.
Có $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} = 2\overrightarrow{DN}$
Chứng minh được $AM \perp DN$
Suy ra góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{AM}$ và $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB}$ bằng $\left(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{DN}\right) = 90^\circ$.

Chọn đáp án (D) ....

CÂU 43. Cho hình vuông $ABCD$. Trên cạnh AD, AB lần lượt lấy hai điểm E, F sao cho $AE = AF$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên đường thẳng BE. Tính $\cos\left(\overrightarrow{FH},\overrightarrow{CH}\right)$.

(A) 0. (B) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. (C) $\dfrac{-1}{2}$. (D) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải.



Gọi $K = AH \cap CD$. Khi đó $BCKF$ là hình chữ nhật.
Ta có $\widehat{BHK} = 90^\circ$.
Do đó H thuộc đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật $BCKF$.
$\Rightarrow \widehat{CHF} = 90^\circ \Rightarrow \left(\overrightarrow{FH},\overrightarrow{CH}\right) = 90^\circ \Rightarrow \cos\left(\overrightarrow{FH},\overrightarrow{CH}\right) = 0$.

Chọn đáp án (A) ....

CÂU 44. Cho hai điểm A và B, O là trung điểm của AB và M là điểm tùy ý, biết rằng $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = OM^2 + kOA^2$. Khẳng định nào sau đây đúng?

(A) $k = 1$. (B) $k = -1$. (C) $k = 2$. (D) $k = -2$.

Lời giải.

Ta có O là trung điểm AB nên $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \vec{0}$. Do đó

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} &= \left(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA}\right)\cdot\left(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB}\right)\\ &= \overrightarrow{MO}^2 + \overrightarrow{MO}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right) + \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}\end{aligned}$$

$$= OM^2 - OA^2.$$

Vậy $k = -1$.

Chọn đáp án (B) ....

CÂU 45. Cho I là trung điểm AB, M là điểm tùy ý. Biết rằng $\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{AB} = k\left(MB^2 - MA^2\right)$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

(A) $k = 2$. (B) $k = \dfrac{1}{2}$. (C) $k = -1$. (D) $k = -\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Ta có I là trung điểm AB nên $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$. Do đó

$$\begin{aligned} MB^2 - MA^2 &= \overrightarrow{MB}^2 - \overrightarrow{MA}^2 \\ &= \left(\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA}\right) \cdot \left(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MA}\right) \\ &= \overrightarrow{AB} \cdot \left(2\overrightarrow{MI}\right) \\ &= 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{AB}. \end{aligned}$$

$\Rightarrow \overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{AB} = \dfrac{1}{2}\left(MB^2 - MA^2\right)$. Vậy $k = \dfrac{1}{2}$.

Chọn đáp án (B) ....

CÂU 46. Cho I là trung điểm AB, M là điểm tùy ý. Biết rằng $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 + kAB^2$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

(A) $k = 2$. (B) $k = \dfrac{1}{2}$. (C) $k = -1$. (D) $k = -\dfrac{1}{4}$.

Lời giải.

Ta có I là trung điểm AB nên $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = 0$. Do đó

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} &= \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\right)\left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}\right) \\ &= \overrightarrow{MI}^2 + \overrightarrow{MI}\left(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}\right) + \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB} \end{aligned}$$

$$MI^2 - \frac{1}{4}AB^2.$$

Vậy $k - \dfrac{1}{4}$.

Chọn đáp án (D) ....

CÂU 47. Khẳng định nào sau đây là đúng?

(A) $\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right)\vec{c} = \vec{a}\left(\vec{b} \cdot \vec{c}\right)$.

(B) $\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right)^2 = \vec{a}^2 \cdot \vec{b}^2$.

(C) $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right| \sin\left(\vec{a}, \vec{b}\right)$.

(D) $\vec{a} \cdot \left(\vec{b} - \vec{c}\right) = \vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{a} \cdot \vec{c}$.

Lời giải.

- Xét hình vuông $ABCD$ cạnh bằng 1 thì
  - $\left(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}\right)\overrightarrow{BC} = 0 \cdot \overrightarrow{BC} = \vec{0}$.
  - $\overrightarrow{AB}\left(\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC}\right) = \overrightarrow{AB} \cdot 1 = \overrightarrow{AB} \neq \vec{0}$.

  Do đó $\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right)\vec{c} = \vec{a}\left(\vec{b} \cdot \vec{c}\right)$ là khẳng định sai.
- Xét hình vuông $ABCD$ cạnh bằng 1 thì
  - $\left(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}\right)^2 = 0^2 = 0$.
  - $\overrightarrow{AB}^2 \cdot \overrightarrow{AD}^2 = 1 \cdot 1 = 1$.

  Do đó $\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right)^2 = \vec{a}^2 \cdot \vec{b}^2$ là khẳng định sai.
- Ta có $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right| \cos\left(\vec{a}, \vec{b}\right)$ nên $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right| \sin\left(\vec{a}, \vec{b}\right)$ là khẳng định sai.
- Ta có $\vec{a} \cdot \left(\vec{b} - \vec{c}\right) = \vec{a} \cdot \left(\vec{b} + (-\vec{c})\right) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot (-\vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{a} \cdot \vec{c}$.

Chọn đáp án (D) ....

CÂU 48. Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Đẳng thức nào sau đây **sai**?

A $\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{1}{4}\left(\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2-\left|\vec{a}-\vec{b}\right|^2\right)$.

B $\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{1}{2}\left(\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2-\left|\vec{a}-\vec{b}\right|^2\right)$.

C $\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{1}{2}\left(\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2-\left|\vec{a}\right|^2-\left|\vec{b}\right|^2\right)$.

D $\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{1}{2}\left(\left|\vec{a}\right|^2+\left|\vec{b}\right|^2-\left|\vec{a}-\vec{b}\right|^2\right)$.

Lời giải.

Ta có

- $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2=\left(\vec{a}+\vec{b}\right)^2=\vec{a}^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2$.

- $\left|\vec{a}-\vec{b}\right|^2=\left(\vec{a}-\vec{b}\right)^2=\vec{a}^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2$.

Suy ra

$$\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2-\left|\vec{a}-\vec{b}\right|^2=4\vec{a}\cdot\vec{b}\Rightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{1}{4}\left(\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2-\left|\vec{a}-\vec{b}\right|^2\right).$$

Chọn đáp án B .... □

CÂU 49. Cho hình thoi $ABCD$ có cạnh bằng a và $\widehat{A}=60^\circ$, điểm M tùy ý. Biết rằng $MA^2-MB^2+MC^2-MD^2=ka^2$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A $k=1$. **B** $k=2$. **C** $k=4$. **D** $k=6$.

Lời giải.

Ta có $ABCD$ là hình thoi cạnh a và $\widehat{A}=60^\circ$ nên $\triangle ABC$ đều cạnh a do đó $OB=OD=\frac{a}{2}$, $OA=OC=\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Do đó

$$\begin{aligned}&MA^2-MB^2+MC^2-MD^2\\=&\left(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OA}\right)^2-\left(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OA}\right)^2+\left(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OC}\right)^2-\left(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OD}\right)^2\\=&2\overrightarrow{MO}\left(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OD}\right)+OA^2-OB^2+OC^2-OD^2\\=&2\overrightarrow{MO}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DC}\right)+\frac{3a^2}{4}-\frac{a^2}{4}+\frac{3a^2}{4}-\frac{a^2}{4}\\=&a^2.\end{aligned}$$

Vậy $k=1$.

Chọn đáp án A .... □

CÂU 50. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD, M là điểm tuỳ ý. Biết rằng $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MC}=MO^2+kBD^2$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A $k=-\frac{1}{2}$. **B** $k=2$. **C** $k=-\frac{1}{4}$. **D** $k=4$.

Lời giải.

Do O là trung điểm của AC nên $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{MO}\Rightarrow\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}\right)^2=\left(2\overrightarrow{MO}\right)^2$

$\Rightarrow MA^2+MC^2+2\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MC}=4MO^2$. (1)

Lại có $\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{AC}\Rightarrow\left(\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MA}\right)^2=\left(\overrightarrow{AC}\right)^2$

$\Rightarrow MA^2+MC^2-2\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MC}=AC^2$. (2)

Từ (1) và (2), trừ vế theo vế ta được:

$4\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MC}=4MO^2-AC^2\Rightarrow\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MC}=MO^2-\frac{1}{4}BD^2$ (do $AC^2=BD^2$).

Vậy $k=-\frac{1}{4}$.

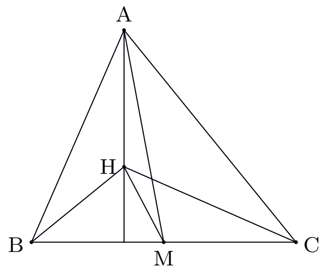
Chọn đáp án C .... □

CÂU 51. Cho tam giác ABC, gọi H là trực tâm của tam giác và M là trung điểm của cạnh BC. Đẳng thức nào sau đây **đúng**?

A $\overrightarrow{MH}\cdot\overrightarrow{MA}=\frac{1}{2}BC^2$. **B** $\overrightarrow{MH}\cdot\overrightarrow{MA}=-\frac{1}{4}BC^2$. **C** $\overrightarrow{MH}\cdot\overrightarrow{MA}=\frac{1}{4}BC^2$. **D** $\overrightarrow{MH}\cdot\overrightarrow{MA}=\frac{1}{5}BC^2$.

Lời giải.

M là trung điểm của BC, ta có $\begin{cases} \overrightarrow{MH} = \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{BH} + \overrightarrow{CH}) \\ \overrightarrow{MA} = \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA}) \end{cases}$



$\Rightarrow \overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{MA} = \dfrac{1}{4}(\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BH} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BH} + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CH} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CH})$

Do H là trực tâm nên lại có

$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BH} = \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC},\ \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CH} = \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB},$$

suy ra

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{MA} &= \frac{1}{4}(\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CH} + \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{CA}) \\ &= \frac{1}{4}(\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BH} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CH}) \\ &= \frac{1}{4}(\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BC}) \\ &= \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}(\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{CA}) \\ &= \frac{1}{4}BC^2. \end{aligned}$$

Chọn đáp án (C) .... □

CÂU 52. Cho điểm M thay đổi trên đường tròn tâm O bán kính R ngoại tiếp tam giác đều ABC cho trước. Biết rằng $MA^2 + 2\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} = kR^2$. Khẳng định nào sau đây đúng?

(A) $k = 2$. (B) $k = 3$. (C) $k = 4$. (D) $k = 6$.

Lời giải.

Ta có $\triangle ABC$ đều nên $\widehat{BOC} = 2\widehat{BAC} = 120°$, $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$. Do đó

$$\begin{aligned} & MA^2 + 2\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} \\ =\ & \left(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA}\right)^2 + 2\left(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB}\right)\left(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OC}\right) \\ =\ & 3MO^2 + OA^2 + 2\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} + 2\overrightarrow{MO}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right) \\ =\ & 4R^2 + 2R^2 \cdot \cos 120° = 3R^2. \end{aligned}$$

Vậy $k = 3$.

Chọn đáp án (B) .... □

CÂU 53. Cho $\vec{a}$, $\vec{b}$ có $\left(\vec{a} + 2\vec{b}\right)$ vuông góc với vectơ $\left(5\vec{a} - 4\vec{b}\right)$ và $|\vec{a}| = \left|\vec{b}\right|$. Khi đó

(A) $\cos\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. (B) $\cos\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = 90°$. (C) $\cos\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. (D) $\cos\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = \dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Theo giả thiết, ta có

$$\begin{cases} \left(\vec{a} + 2\vec{b}\right)\left(5\vec{a} - 4\vec{b}\right) = 0 \\ |\vec{a}| = \left|\vec{b}\right| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5|\vec{a}|^2 - 8\left|\vec{b}\right|^2 + 6\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \\ |\vec{a}| = \left|\vec{b}\right| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{a} \cdot \vec{b} = \dfrac{1}{2}|\vec{a}|^2 \\ |\vec{a}| = \left|\vec{b}\right|. \end{cases}$$

Từ đó

$$\cos\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right|} = \frac{\frac{1}{2}|\vec{a}|^2}{|\vec{a}| \cdot |\vec{a}|} = \frac{1}{2}.$$

Chọn đáp án (D) .... □

CÂU 54. Cho tam giác ABC. Tập hợp điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ là

(A) Đường trung trực đoạn BC.
(B) Đường tròn có tâm A.
(C) Đường thẳng đi qua A và vuông góc với BC.
(D) Đường thẳng đi qua A song song với BC.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$, nên $MA \perp BC$. Vậy tập hợp điểm M là đường thẳng đi qua A và vuông góc với BC.

Chọn đáp án (C) .... □

CÂU 55. Cho đoạn thẳng AB. Tập hợp điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$ là

Ⓐ Đường trung trực đoạn AB.
Ⓑ Đường tròn.
Ⓒ Đường thẳng đi qua A và vuông góc với AB.
Ⓓ Đường thẳng đi qua B và vuông góc với AB.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$, nên $MA\perp MB$, hay M nằm trên đường tròn đường kính AB. Vậy tập hợp M là đường tròn.

Chọn đáp án B ....

CÂU 56. Cho tam giác ABC. Tập hợp các điểm M thỏa $\left(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right)\left(2\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right)=0$ là

Ⓐ Đường thẳng vuông góc với AB.
Ⓑ Đường thẳng vuông góc với AC.
Ⓒ Đường thẳng vuông góc với BC.
Ⓓ Đường tròn.

Lời giải.

Gọi I là điểm thoả mãn

$$2\overrightarrow{IB}-\overrightarrow{IC}=\vec{0},$$

ta có

$$\left(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right)\left(2\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right)=0\Leftrightarrow\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{MI}=0.$$

Suy ra tập hợp điểm M là đường thẳng đi qua I và vuông góc với AB.

Chọn đáp án A ....

CÂU 57. Cho tam giác ABC. Tập hợp các điểm M thỏa $\left(\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}\right)\left(\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right)=0$ là

Ⓐ Đường thẳng vuông góc với AB.
Ⓑ Đoạn thẳng.
Ⓒ Đường thẳng song song với AB.
Ⓓ Đường tròn.

Lời giải.

Gọi D và E là các điểm thoả mãn:

$$\overrightarrow{DA}+2\overrightarrow{DB}=\vec{0},\ \overrightarrow{EB}+2\overrightarrow{EC}=\vec{0}.$$

Ta có

$$\left(\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}\right)\left(\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right)=0\Leftrightarrow\overrightarrow{MD}\cdot\overrightarrow{ME}=0.$$

Tập hợp điểm M là đường tròn đường kính DE.

Chọn đáp án D ....

CÂU 58. Cho tam giác ABC. Tập hợp các điểm M thỏa $2MA^2+\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MC}$ là

Ⓐ Đường thẳng.
Ⓑ Đường tròn đường kính BC.
Ⓒ Đường tròn đi qua A.
Ⓓ Đường tròn đi qua B.

Lời giải.

Ta có:

$$2MA^2+\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC},$$

hay

$$\Leftrightarrow\overrightarrow{MA}\left(2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right)=0.\qquad(*)$$

Gọi J là điểm xác định bởi

$$2\overrightarrow{JA}+\overrightarrow{JB}-\overrightarrow{JC}=\vec{0}.$$

Ta có

$$(*)\Leftrightarrow 2\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MJ}=0\Leftrightarrow\overrightarrow{MA}\perp\overrightarrow{MJ}.$$

Tập hợp điểm M là đường tròn đường kính AJ.

Chọn đáp án C ....

CÂU 59. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a. Tìm tập hợp các điểm M thỏa mãn

$$\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right)\left(\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MB}\right)=3a^2$$

.

Ⓐ Đường thẳng vuông góc với BC.
Ⓑ Đường thẳng song song với BC.

Ⓒ Đường tròn đường kính AB.
Ⓓ Đường tròn đường kính AC.

Lời giải.

Gọi G là trọng tâm tam giác ABC, ta có :

$$\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right)\left(\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MB}\right)=3a^2$$
$$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{BC}=3a^2 \Leftrightarrow \overrightarrow{MG}.\overrightarrow{BC}=a^2$$

Gọi M', G' lần lượt là hình chiếu của M, G lên đường thẳng BC. Suy ra

$$\overrightarrow{M'G'}\cdot\overrightarrow{BC}=BC^2 \Leftrightarrow M'G'=BC.$$

Do G cố định nên G' cố định, suy ra M' cố định.
Vậy tập hợp điểm M là đường thẳng đi qua M' và vuông góc với BC.

Chọn đáp án Ⓐ .... □

CÂU 60. Cho tam giác ABC. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P=2\cos A+6\cos B+3\cos C$ bằng

Ⓐ 11.
Ⓑ 10.
Ⓒ 7.
Ⓓ 6.

Lời giải.

Áp dụng bất đẳng thức

$$xy\cos A+yz\cos B+zx\cos C\le\frac{x^2+y^2+z^2}{2}$$

với $x=1, y=2, z=3$, ta có $P\le 7$.

Chọn đáp án Ⓒ .... □

MỤC LỤC