

# TỔNG HỢP LÝ THUYẾT GÓC LƯỢNG GIÁC - GTLG

## A. GTLG GÓC LƯỢNG GIÁC

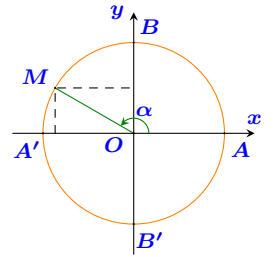
☑ Đổi đơn vị đo:  $1 \text{ vòng} = 360^\circ = 2\pi \text{ rad}$ ,  $180^\circ = \pi \text{ rad}$

Độ	$0^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$90^\circ$	$120^\circ$	$135^\circ$	$150^\circ$	$180^\circ$
Radian	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\pi$

☑ Độ dài cung tròn bán kính  $R$  số đo  $\alpha$  rad là  $l = R\alpha$ .

☑ Điểm biểu diễn góc lượng giác  $\alpha$  lên đường tròn lượng giác là  $M$ . Khi đó  $M$  cũng biểu diễn các góc lượng giác  $\alpha + k2\pi$ .

Góc  $\alpha$  và  $\beta$  có chung điểm biểu diễn khi  $\alpha - \beta = k2\pi$  (chẵn lần  $\pi$ )



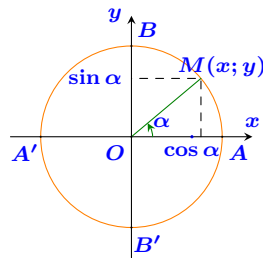
### Định nghĩa GTLG

☑  $\cos \alpha = x$

☑  $\sin \alpha = y$

☑  $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{y}{x}$

☑  $\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{x}{y}$



### Các công thức lượng giác cơ bản

☑  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

☑  $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \left( \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right)$

☑  $1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \left( \alpha \neq k\pi, k \in \mathbb{Z} \right)$

☑  $\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1 \left( \alpha \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right)$

Chú ý:  $\tan \alpha$  xác định khi  $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ) và  $\cot \alpha$  xác định khi  $\alpha \neq k\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ).

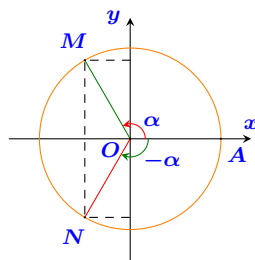
### cos đối

☑  $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$

☑  $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$

☑  $\tan(-\alpha) = -\tan \alpha$

☑  $\cot(-\alpha) = -\cot \alpha$



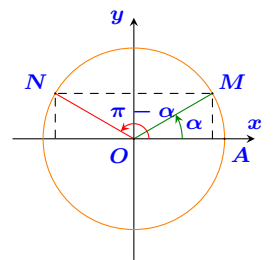
### sin bù

☑  $\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$

☑  $\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$

☑  $\tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha$

☑  $\cot(\pi - \alpha) = -\cot \alpha$



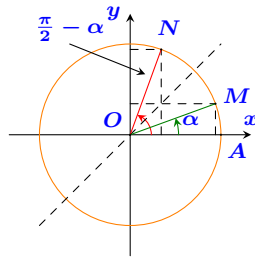
### phụ chéo

☑  $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha$

☑  $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha$

☑  $\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot \alpha$

☑  $\cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \tan \alpha$



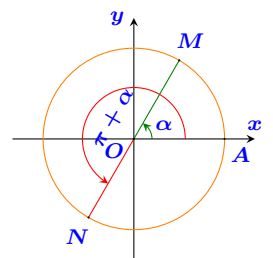
### $\pm \pi$ tan, cot

☑  $\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha$

☑  $\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha$

☑  $\tan(\pi + \alpha) = \tan \alpha$

☑  $\cot(\pi + \alpha) = \cot \alpha$



## B. CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC

### 1. Công thức cộng

#### Công thức cộng

$$\begin{aligned} \checkmark \cos(a-b) &= \cos a \cos b + \sin a \sin b. & \checkmark \cos(a+b) &= \cos a \cos b - \sin a \sin b. \\ \checkmark \sin(a-b) &= \sin a \cos b - \sin b \cos a. & \checkmark \sin(a+b) &= \sin a \cos b + \sin b \cos a. \\ \checkmark \tan(a-b) &= \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}. & \checkmark \tan(a+b) &= \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}. \end{aligned}$$

#### Trường hợp đặc biệt

$$\begin{aligned} \checkmark \sin x + \cos x &= \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right). \\ \checkmark \sqrt{3} \sin x + \cos x &= 2 \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 2 \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right). \\ \checkmark \sin x + \sqrt{3} \cos x &= 2 \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 2 \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right). \end{aligned}$$

### 2. Công thức nhân đôi

#### Công thức nhân đôi

$$\begin{aligned} \checkmark \sin 2a &= 2 \sin a \cos a. \\ \checkmark \cos 2a &= \cos^2 a - \sin^2 a = 2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \sin^2 a. \\ \checkmark \tan 2a &= \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}. \end{aligned}$$

#### Công thức hạ bậc

$$\begin{aligned} \checkmark \sin^2 a &= \frac{1 - \cos 2a}{2}. \\ \checkmark \cos^2 a &= \frac{1 + \cos 2a}{2}. \\ \checkmark \tan^2 a &= \frac{1 - \cos 2a}{1 + \cos 2a}. \end{aligned}$$

**A** Áp dụng công thức cộng cho  $3a = a + 2a$ , ta có công thức nhân ba:

#### Công thức nhân ba

$$\begin{aligned} \checkmark \sin 3a &= 3 \sin a - 4 \sin^3 a. & \checkmark \tan 3a &= \frac{3 \tan a - \tan^3 a}{1 - 3 \tan^2 a}. \\ \checkmark \cos 3a &= 4 \cos^3 a - 3 \cos a. \end{aligned}$$

### 3. Công thức biến đổi tích thành tổng

#### Công thức tích thành tổng

$$\begin{aligned} \checkmark \cos a \cos b &= \frac{1}{2} [\cos(a-b) + \cos(a+b)]. \\ \checkmark \sin a \sin b &= \frac{1}{2} [\cos(a-b) - \cos(a+b)]. \\ \checkmark \sin a \cos b &= \frac{1}{2} [\sin(a-b) + \sin(a+b)]. \end{aligned}$$

### 4. Công thức biến đổi tổng thành tích

Công thức biến đổi tổng thành tích được xây dựng bằng cách  $a = \frac{a+b}{2}, b = \frac{a-b}{2}$  trong công thức biến đổi tích thành tổng.

#### Công thức tổng thành tích

$$\begin{aligned} \checkmark \cos a + \cos b &= 2 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}. & \checkmark \cos a - \cos b &= -2 \sin \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}. \\ \checkmark \sin a + \sin b &= 2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}. & \checkmark \sin a - \sin b &= 2 \cos \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}. \end{aligned}$$

## C. HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

### Hàm số chẵn, hàm số lẻ

- ☑ Hàm số  $f(x)$  được gọi là **hàm số chẵn** nếu  $\forall x \in \mathcal{D}$  thì  $-x \in \mathcal{D}$  và  $f(-x) = f(x)$ . Đồ thị của một **hàm số chẵn** nhận **trục tung** là trục đối xứng.
- ☑ Hàm số  $f(x)$  được gọi là **hàm số lẻ** nếu  $\forall x \in \mathcal{D}$  thì  $-x \in \mathcal{D}$  và  $f(-x) = -f(x)$ . Đồ thị của một **hàm số lẻ** nhận **gốc tọa độ** là tâm đối xứng.

Các hàm số  $y = \sin x$ ,  $y = \tan x$ ,  $y = \cot x$  là hàm số **lẻ**, hàm số  $y = \cos x$  là hàm số **chẵn**.

### Hàm số tuần hoàn

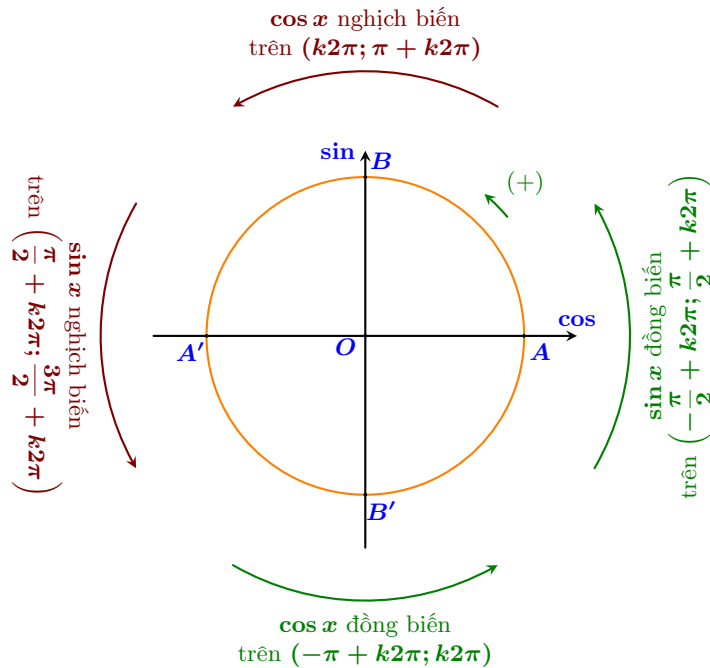
⚡ ĐỊNH NGHĨA 0.1. Hàm số  $y = f(x)$  có tập xác định  $\mathcal{D}$  được gọi là **hàm số tuần hoàn** nếu tồn tại số  $T \neq 0$  sao cho với mọi  $x \in \mathcal{D}$  ta có:

- ☑  $x + T \in \mathcal{D}$  và  $x - T \in \mathcal{D}$ ;
- ☑  $f(x + T) = f(x)$ .

Số  $T$  dương nhỏ nhất thỏa mãn các điều kiện trên (nếu có) được gọi là **chu kỳ** của hàm số tuần hoàn đó.

Các hàm số  $y = A \sin \omega x$  và  $y = A \cos \omega x$  ( $\omega > 0$ ) là những hàm số tuần hoàn với chu kỳ  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ .

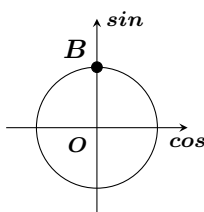
Các hàm số  $y = A \tan \omega x$  và  $y = A \cot \omega x$  ( $\omega > 0$ ) là những hàm số tuần hoàn với chu kỳ  $T = \frac{\pi}{\omega}$ .



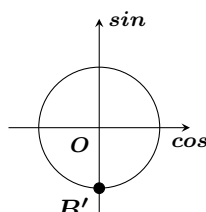
## D. PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

### Phương trình $\sin x = a$ .

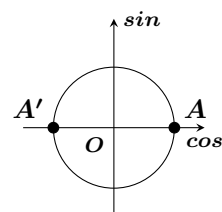
- ☑ Trường hợp  $a > 1$  hoặc  $a < -1$  phương trình vô nghiệm.
- ☑ Trường hợp  $a \in \{-1; 0; 1\}$ .



$$\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$$



$$\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$$

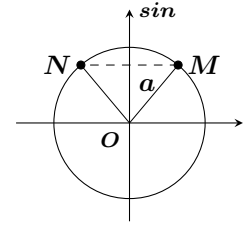


$$\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi$$

☑ Trường hợp  $a \in \left\{ \pm \frac{1}{2}; \pm \frac{\sqrt{2}}{2}; \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \right\}$  hoặc  $a \in (-1; 1)$ . Ta bấm máy **SHIFT** **SIN** để tìm góc  $\alpha$  hoặc  $\beta^\circ$ .

① Công thức theo đơn vị rad:  $\sin x = \sin \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + k2\pi \\ x = \pi - \alpha + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$

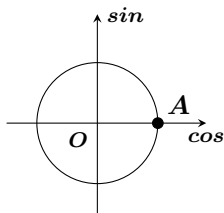
② Công thức theo đơn vị độ:  $\sin x = \sin \beta^\circ \Leftrightarrow \begin{cases} x = \beta^\circ + k360^\circ \\ x = 180^\circ - \beta^\circ + k360^\circ \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$



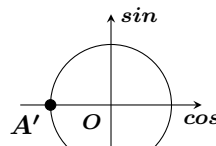
### Phương trình $\cos x = a$ .

☑ Trường hợp  $a > 1$  hoặc  $a < -1$  phương trình vô nghiệm.

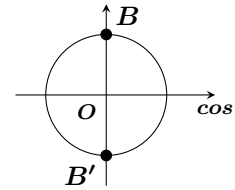
☑ Trường hợp  $a \in \{-1; 0; 1\}$ .



$$\cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi$$



$$\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi$$

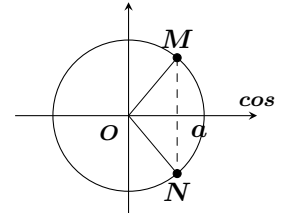


$$\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

☑ Trường hợp  $a \in \left\{ \pm \frac{1}{2}; \pm \frac{\sqrt{2}}{2}; \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \right\}$  hoặc  $a \in (-1; 1)$ . Ta bấm máy **SHIFT** **COS** để tìm góc  $\alpha$  hoặc  $\beta^\circ$  tương ứng.

① Công thức theo đơn vị rad:  $\cos x = \cos \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + k2\pi \\ x = -\alpha + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$

② Công thức theo đơn vị độ:  $\cos x = \cos \beta^\circ \Leftrightarrow \begin{cases} x = \beta^\circ + k360^\circ \\ x = -\beta^\circ + k360^\circ \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$



### Phương trình $\tan x = a$ và $\cot x = b$ .

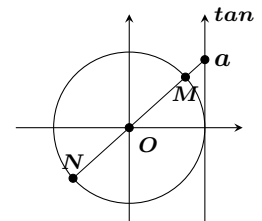
☑ Trường hợp  $a \in \left\{ 0; \pm \frac{\sqrt{3}}{3}; \pm 1; \pm \sqrt{3} \right\}$  hoặc  $a$  bất kì. Ta bấm máy **SHIFT** **TAN** để tìm góc  $\alpha$  hoặc  $\beta^\circ$  tương ứng.

① Công thức theo đơn vị rad:

$$\tan x = \tan \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

② Công thức theo đơn vị độ:

$$\tan x = \tan \beta^\circ \Leftrightarrow x = \beta^\circ + k180^\circ, k \in \mathbb{Z}$$



★ Phương trình  $\cot x = b$ .  $b \in \left\{ \pm \frac{\sqrt{3}}{3}; \pm 1; \pm \sqrt{3} \right\}$  hoặc  $b$  bất kì. Ta bấm máy **SHIFT** **TAN**  $\left[ \frac{1}{b} \right]$  để tìm góc  $\alpha$  hoặc  $\beta^\circ$  tương ứng. Riêng  $b = 0$  thì  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ . Công thức nghiệm tương tự phương trình  $\tan x = a$