ĐIỂM: ______

"It's not how much time you have, it's how you use it."

QUICK NOTE

Bài 1. VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN

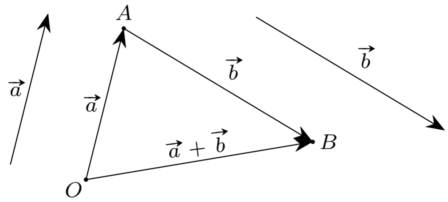
A. LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1. Tổng của hai véc tơ

Định nghĩa:

Trong không gian, cho hai véctơ $\overrightarrow{a}$ và $\overrightarrow{b}$. Lấy ba điểm O, A, B sao cho $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{b}$. Ta gọi $\overrightarrow{OB}$ là **tổng của hai véctơ** $\overrightarrow{a}$ và $\overrightarrow{b}$, ký hiệu $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$.

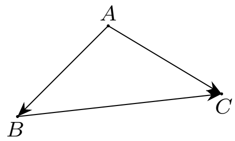
Phép lấy tổng của hai véctơ $\overrightarrow{a}$ và $\overrightarrow{b}$ được gọi là **phép cộng véctơ**.

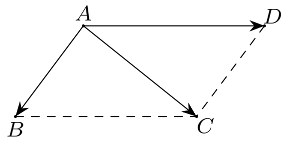


Các quy tắc cần nhớ:

① Quy tắc ba điểm: Với ba điểm A, B, C, ta có $\boxed{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}}$

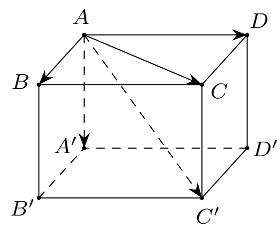
② Quy tắc hình bình hành: Cho $ABCD$ là hình bình hành, ta có $\boxed{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}}$





③ Quy tắc hình hộp: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Ta có $\boxed{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC'}}$

⚠ *Hệ thức tương tự:* $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{BD'}$.



Tính chất:

① Tính chất giao hoán: $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = \overrightarrow{b} + \overrightarrow{a}$;

② Tính chất kết hợp: $\left(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}\right) + \overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} + \left(\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}\right)$;

③ Với mọi véctơ $\overrightarrow{a}$, ta luôn có: $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0} + \overrightarrow{a} = \overrightarrow{a}$.

④ Tổng của ba véctơ $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$: $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c} = \left(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}\right) + \overrightarrow{c}$.

2. Hiệu của hai véc tơ

Véctơ đối:

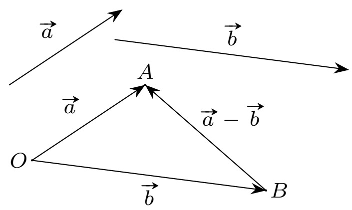
① Vectơ đối của $\overrightarrow{a}$ kí hiệu là $-\overrightarrow{a}$.

② Vectơ đối của $\overrightarrow{AB}$ là $\overrightarrow{BA}$: $-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$.

③ Vectơ $\overrightarrow{0}$ được coi là vectơ đối của chính nó.

Định nghĩa hiệu của hai véctơ: Trong không gian, cho hai véctơ $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$. Ta gọi $\overrightarrow{a} + \left(-\overrightarrow{b}\right)$ là **hiệu của hai véctơ** $\overrightarrow{a}$ và $\overrightarrow{b}$, ký hiệu $\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}$.

Phép lấy hiệu của hai véctơ được gọi là **phép trừ véctơ**.



Các quy tắc cần nhớ:

① Với ba điểm A, B, C ta có $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$.

② Hai véc tơ $\overrightarrow{a}$ và $\overrightarrow{b}$ đối nhau thì $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = \overrightarrow{0}$.

3. Tích của một số với một véc-tơ

Định nghĩa: Cho số thực $k \neq 0$ và vectơ $\overrightarrow{a} \neq \overrightarrow{0}$. Tích của một số k với vectơ $\overrightarrow{a}$ là một vectơ, kí hiệu là $k\overrightarrow{a}$, được xác định như sau:

- Cùng hướng với vectơ $\overrightarrow{a}$ nếu $k > 0$, ngược hướng với vectơ $\overrightarrow{a}$ nếu $k < 0$.
- Có độ dài bằng $|k| \cdot |\overrightarrow{a}|$.

$0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$ *và* $k \cdot \vec{0} = \vec{0}$.

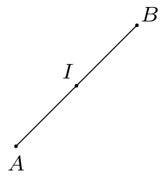
Hệ thức trung điểm, trọng tâm:

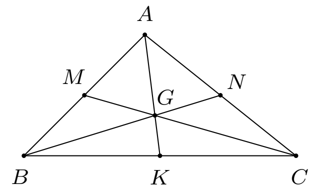
① I là trung điểm của đoạn thẳng AB thì

- $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$;
- $\overrightarrow{IA} = -\overrightarrow{IB}$; $\overrightarrow{AI} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$;...

② G là trọng tâm của tam giác ABC thì

- $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$;
- $\overrightarrow{GA} = -\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AK}$; $\overrightarrow{GA} = -2\overrightarrow{GK}$;...





Nhận xét:

① Với hai véctơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bất kỳ, với mọi số h và k, ta luôn có

- $k\left(\vec{a} + \vec{b}\right) = k\vec{a} + k\vec{b}$;
- $(h+k)\,\vec{a} = h\vec{a} + k\vec{a}$;
- $h\,(k\vec{a}) = (hk)\,\vec{a}$;
- $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$;
- $(-1) \cdot \vec{a} = -\vec{a}$;
- $k\vec{a} = \vec{0} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\vec{a} = \vec{0}\\ k = 0\end{array}\right.$.

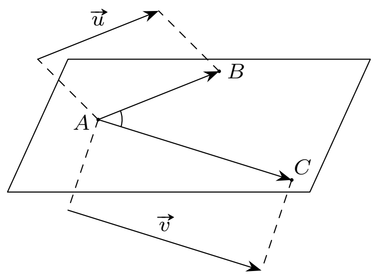
② Hai véctơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ ($\vec{b}$ khác $\vec{0}$) cùng phương khi và chỉ khi có số k sao cho $\vec{a} = k\vec{b}$.

③ Ba điểm phân biệt A, B, C thẳng hàng khi và chỉ khi có số $k \neq 0$ để $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$.

4. Tích vô hướng của hai véc-tơ

Góc giữa hai véctơ:

Trong không gian, cho $\vec{u}$ và $\vec{v}$ là hai véctơ khác $\vec{0}$. Lấy một điểm A bất kỳ, gọi B và C là hai điểm sao cho $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$. Khi đó, ta gọi $\widehat{BAC}$ là góc giữa hai véctơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$, ký hiệu $(\vec{u}, \vec{v})$.



$0° \leq (\vec{u}, \vec{v}) \leq 180°$.

- *Nếu* $\vec{u}$ *cùng hướng với* $\vec{v}$ *thì* $(\vec{u}, \vec{v}) = 0°$;
- *Nếu* $\vec{u}$ *ngược hướng với* $\vec{v}$ *thì* $(\vec{u}, \vec{v}) = 180°$;
- *Nếu* $\vec{u}$ *vuông góc với* $\vec{v}$ *thì* $(\vec{u}, \vec{v}) = 90°$.

Định nghĩa tích vô hướng của hai véc tơ: Trong không gian, cho hai véctơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ khác $\vec{0}$.
Tích vô hướng của hai véctơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ là một số, kí hiệu $\vec{u} \cdot \vec{v}$, được xác định bởi công thức $\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\vec{u}, \vec{v})}$

① *Trong trường hợp* $\vec{u} = 0$ *hoặc* $\vec{v} = 0$, *ta quy ước* $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

② $\vec{u} \cdot \vec{u} = \vec{u}^2 = |\vec{u}|^2$; $\quad \vec{u}^2 \geqslant 0$. $\vec{u}^2 = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$.

③ *Với hai véctơ* $\vec{u}$, $\vec{v}$ *khác* $\vec{0}$, *ta có* $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$

④ *Với hai véctơ* $\vec{u}$, $\vec{v}$ *khác* $\vec{0}$, *ta có* $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{0}$.

Tính chất: Với ba véctơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ và số thực k, ta có:

- $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$;
- $\vec{a} \cdot \left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$;
- $(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = k(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot (k\vec{b})$.

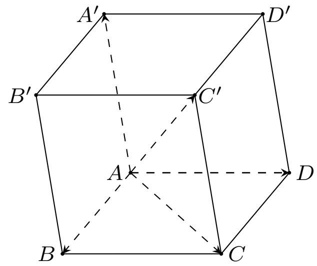
B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Dạng 1. Xác định véc-tơ, chứng minh đẳng thức véc tơ,độ dài véc tơ

BÀI TẬP TỰ LUẬN

VÍ DỤ 1.

Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Hãy xác định các véc-tơ (khác $\vec{0}$) có điểm đầu, điểm cuối là các đỉnh của hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ thỏa



a) cùng phương với $\overrightarrow{AB}$;

b) cùng phương $\overrightarrow{AA'}$;

c) bằng với $\overrightarrow{AD}$;

d) bằng với $\overrightarrow{A'B}$;

e) đối với $\overrightarrow{CD'}$;

f) đối với $\overrightarrow{B'C}$.

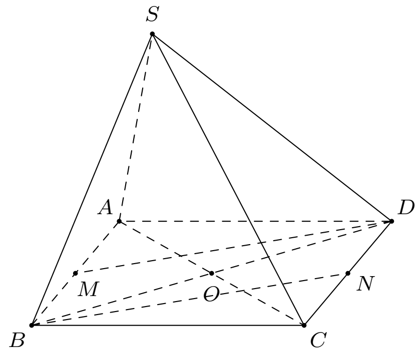
VÍ DỤ 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N, O lần lượt là trung điểm của AB, CD và AC. Chứng minh rằng

a) $\overrightarrow{BN}$ và $\overrightarrow{DM}$ đối nhau;

b) $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}+\overrightarrow{SD}=4\overrightarrow{SO}$;

c) $\overrightarrow{SD}-\overrightarrow{BN}-\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{SC}$.

Lời giải.



a) Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành nên $AB = CD$ và $AB \parallel CD$, suy ra $BM = DN$ và $BM \parallel DN$.
Do đó $BMDN$ là hình bình hành.
Hai véc-tơ $\overrightarrow{BN}$ và $\overrightarrow{DN}$ có cùng độ dài và ngược hướng nên chúng là hai véc-tơ đối nhau.

b) Ta có $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SC}=2\overrightarrow{SO}$; $\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SD}=2\overrightarrow{SO}$. Suy ra

$$\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}+\overrightarrow{SD}=4\overrightarrow{SO}.$$

c) Từ câu a, ta có $\overrightarrow{BN}=-\overrightarrow{DM}$.
Suy ra $\overrightarrow{SD}-\overrightarrow{BN}-\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{SD}+\overrightarrow{DM}-\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{SM}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{SC}$.

VÍ DỤ 3. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh bằng a. Gọi G là trọng tâm tam giác $AB'D'$.

a) Tìm vectơ: $\overrightarrow{CC'}+\overrightarrow{BA}$; $\overrightarrow{CC'}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{D'A'}$.

b) Chứng minh: $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AC'}$.

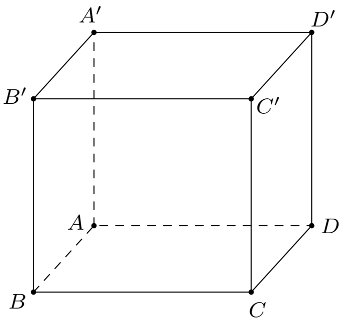
c) Chứng minh: $\overrightarrow{B'B}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{B'D}$.

d) Chứng minh: $\overrightarrow{BB'}-\overrightarrow{C'B'}-\overrightarrow{D'C'}=\overrightarrow{BD'}$.

e) Chứng minh: $\overrightarrow{A'C}=3\overrightarrow{A'G}$.

f) Tính độ dài véc tơ $\vec{u}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A'D'}+\overrightarrow{AA'}$.

Lời giải.



a) Vì $ABCD.A'B'C'D'$ là hình hộp nên $\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CD}$ và $\overrightarrow{D'A'}=\overrightarrow{CB}$.
Suy ra $\overrightarrow{CC'}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{D'A'}=\overrightarrow{CC'}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CA'}$.

b) Vì tứ giác $ABCD$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}$. Áp dụng quy tắc hình hộp suy ra

$$\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AC'}$$

c) Ta có $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{B'C'}$, $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{B'A'}$. Do đó

$$\overrightarrow{B'B}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{B'B}+\overrightarrow{B'C'}+\overrightarrow{B'A'}=\overrightarrow{B'D}.$$

d) Ta có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BB'}-\overrightarrow{C'B'}-\overrightarrow{D'C'} &= \overrightarrow{BB'}-\left(\overrightarrow{D'C'}+\overrightarrow{C'B'}\right)=\overrightarrow{BB'}-\overrightarrow{D'B'}\\ &= \overrightarrow{BB'}+\left(-\overrightarrow{D'B'}\right)=\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{B'D'}=\overrightarrow{BD'}.\end{aligned}$$

e) Do G là trọng tâm tam giác $AB'D'$ nên $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB'}+\overrightarrow{GD'}=\vec{0}$. Khi đó, theo quy tắc hình hộp ta có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{A'C} &= \overrightarrow{A'A}+\overrightarrow{A'B'}+\overrightarrow{A'D'}\\ &= \overrightarrow{A'G}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{A'G}+\overrightarrow{GB'}+\overrightarrow{A'G}+\overrightarrow{GD'}\\ &= 3\overrightarrow{A'G}.\end{aligned}$$

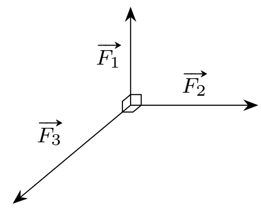
f) Ta có $\vec{u}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A'D'}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AC'}$. Suy ra $|\vec{u}|=AC'=a\sqrt{3}$.

VÍ DỤ 4.

Ba lực $\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_2}$, $\overrightarrow{F_3}$ cùng tác động vào một vật có phương đôi một vuông góc nhau và có độ lớn lần lượt là 2 N, 3 N, 4 N.

a) Tính độ lớn hợp lực của $\overrightarrow{F_2}$, $\overrightarrow{F_3}$.

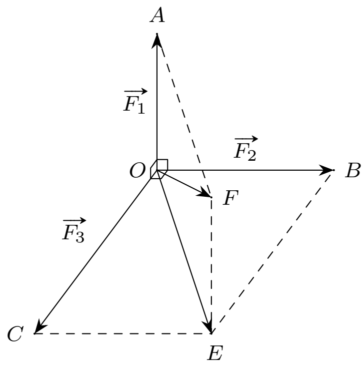
b) Tính độ lớn hợp lực của ba lực đã cho.



Lời giải.

a) Gọi O là vị trí trên vật mà ba lực cùng tác động vào. GọiA, B, C là các điểm sao cho $\overrightarrow{F_1} = \overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{F_2} = \overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{F_3} = \overrightarrow{OC}$. Khi đó

$$\left|\overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{F_3}\right| = OE = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5\text{N}.$$



b) Dựng các hình chữ nhật $OBEC$ và $OEFA$ thì ta có

$$\begin{cases} \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OE} \\ \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OF}. \end{cases}$$

Do đó $\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{F_3} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OF}$.
Vậy độ lớn hợp lực của F_1, $\overrightarrow{F_2}$ và $\overrightarrow{F_3}$ là

$$\begin{aligned} \left|\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{F_3}\right| &= OF = \sqrt{OA^2 + OE^2} \\ &= \sqrt{OA^2 + OB^2 + OC^2} \\ &= \sqrt{2^2 + 3^2 + 4^2} = \sqrt{29}\,\text{N}. \end{aligned}$$

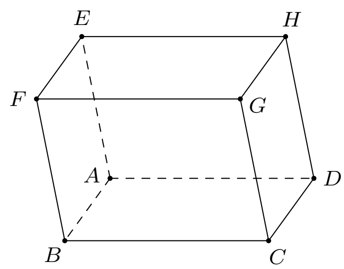
BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. *Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.*

CÂU 1.

Cho hình hộp $ABCD.EFGH$. Các véc-tơ có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của hình hộp và bằng véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ là các véc-tơ nào sau đây?

A $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{HG}$, $\overrightarrow{EF}$. **B** $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{HG}$, $\overrightarrow{EF}$. **C** $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{HG}$, $\overrightarrow{FE}$. **D** $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{GH}$, $\overrightarrow{EF}$.



Lời giải.

Các véc-tơ bằng với véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ là $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{HG}$, $\overrightarrow{EF}$

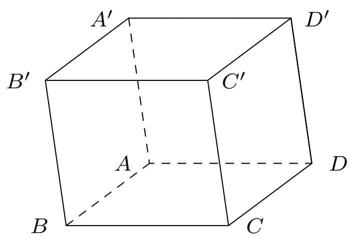
Chọn đáp án B .... □

CÂU 2.

Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

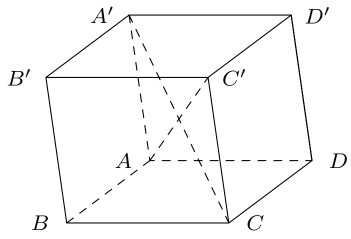
A $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B'D'} = \overrightarrow{AD}$. **B** $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \vec{0}$.

C $\overrightarrow{AC'} + \overrightarrow{A'C} = 2\overrightarrow{AC}$. **D** $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{D'D} = \vec{0}$.



Lời giải.

- $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B'D'}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}$’
- $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ đối nhau nên $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\vec{0}$.
- Theo quy tắc hình bình hành ta có $\overrightarrow{AC'}+\overrightarrow{A'C}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{A'A}+\overrightarrow{A'C'}=2\cdot\overrightarrow{AC}$.
- $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{D'D}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{AC'}$



Chọn đáp án D .... □

CÂU 3.

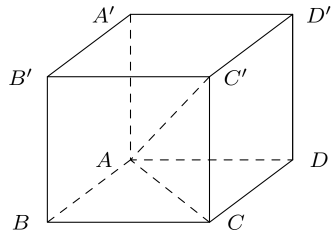
Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Khẳng định nào sau đây là khẳng định **sai**?

A $|\overrightarrow{AC}|=a\sqrt{2}$.

B $|\overrightarrow{AC'}|=a\sqrt{3}$.

C $\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{D'B'}=\vec{0}$.

D $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BB'}=\overrightarrow{BC'}$.



Lời giải.

Chọn đáp án D .... □

CÂU 4.

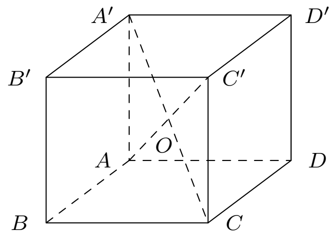
Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi O là tâm của hình lập phương. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A $\overrightarrow{AO}=\dfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}\right)$.

B $\overrightarrow{AO}=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}\right)$.

C $\overrightarrow{AO}=\dfrac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}\right)$.

D $\overrightarrow{AO}=\dfrac{2}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}\right)$.

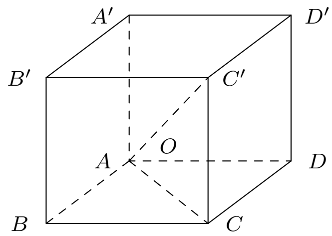


Lời giải.

Theo quy tắc hình hộp, ta có $\overrightarrow{AC'}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}$.

Mà O là trung điểm của AC'

nên $\overrightarrow{AO}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC'}=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}\right)$.



Chọn đáp án B .... □

CÂU 5. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Tính độ dài vectơ $\vec{x}=\overrightarrow{AB'}+\overrightarrow{AD'}$ theo a.

A $|\vec{x}|=a\sqrt{2}$.

B $|\vec{x}|=2a\sqrt{2}$.

C $|\vec{x}|=2a\sqrt{6}$.

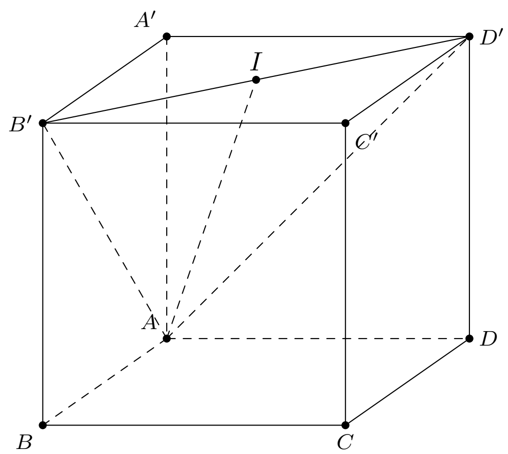
D $|\vec{x}|=a\sqrt{6}$.

Lời giải.

Ta có $\vec{x}=\overrightarrow{AB'}+\overrightarrow{AD'}=2\overrightarrow{AI}$, với I là trung điểm của $B'D'$. Khi đó $|\vec{x}|=2AI$.

Do tam giác $AB'D'$ đều cạnh $a\sqrt{2}$ nên $AI=\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

Vậy $|\vec{x}|=a\sqrt{6}$.

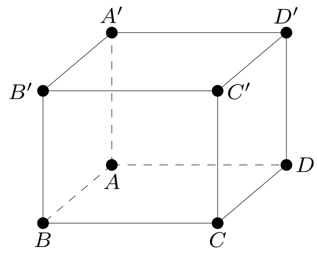


Chọn đáp án D .... □

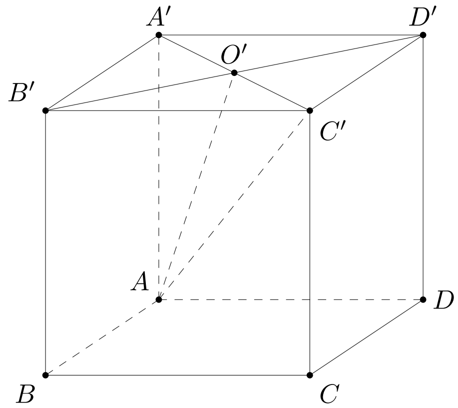
CÂU 6.

Hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Tính độ dài véctơ $\vec{x} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AC'}$ theo a.

(A) $a\sqrt{2}$.
(B) $\left(1+\sqrt{3}\right)a$.
(C) $a\sqrt{6}$.
(D) $\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.



Lời giải.



Gọi O' là tâm $A'B'C'D' \Rightarrow A'O' = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Ta có $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AC'} = 2\overrightarrow{AO'} \Rightarrow |\vec{x}| = 2\left|\overrightarrow{AO'}\right| = 2AO'$.

$\triangle AA'O'$ vuông tại $A' \Rightarrow AO' = \sqrt{AA'^2 + A'O'^2} = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

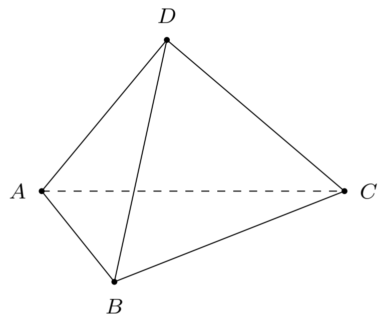
Vậy $|\vec{x}| = 2AO' = a\sqrt{6}$.

Chọn đáp án (C)

CÂU 7.

Cho tứ diện $ABCD$. Mệnh đề nào dưới đây là mệnh đề đúng?

(A) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC}$.
(B) $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BC}$.
(C) $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DC}$.
(D) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DC}$.



Lời giải.

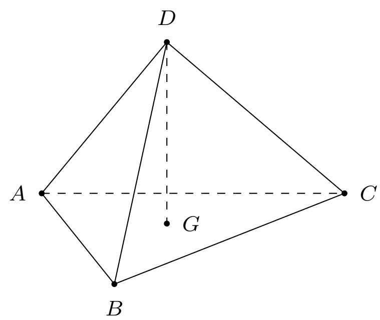
Ta có $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DC}$.

Chọn đáp án (D)

CÂU 8.

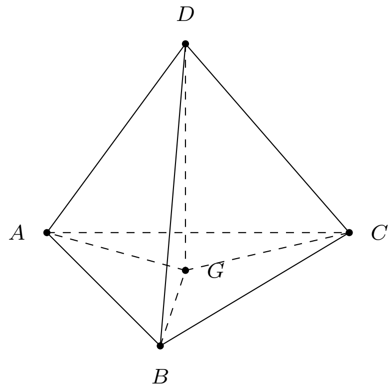
Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. Tìm k thỏa đẳng thức vectơ $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = k \cdot \overrightarrow{DG}$.

(A) $k = 1$.
(B) $k = 3$.
(C) $k = 2$.
(D) $k = 3$.



Lời giải.

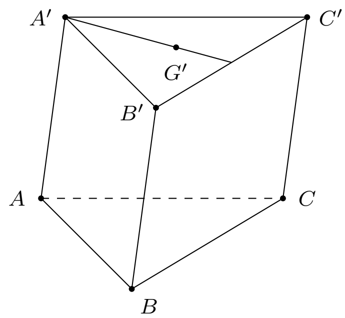
$\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DG}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{DG}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{DG}+\overrightarrow{GC}=3\overrightarrow{DG}$.



Chọn đáp án D .... □

CÂU 9.

Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Gọi G' là trọng tâm của tam giác $A'B'C'$. Đặt $\vec{a}=\overrightarrow{AA'}$, $\vec{b}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{c}=\overrightarrow{AC}$. Véc-tơ $\overrightarrow{AG'}$ bằng



A $\frac{1}{3}\left(\vec{a}+3\vec{b}+\vec{c}\right)$.

B $\frac{1}{3}\left(3\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)$.

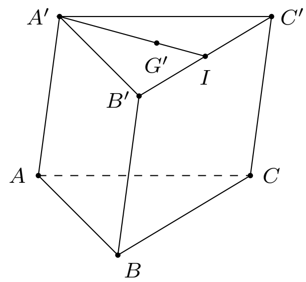
C $\frac{1}{3}\left(\vec{a}+\vec{b}+3\vec{c}\right)$.

D $\frac{1}{3}\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)$.

Lời giải.

Gọi I là trung điểm của $B'C'$.

Vì G' là trọng tâm của tam giác $A'B'C' \Rightarrow \overrightarrow{A'G'}=\frac{2}{3}\overrightarrow{A'I}$.



Ta có $\overrightarrow{AG'}=\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{A'G'}=\overrightarrow{AA'}+\frac{2}{3}\overrightarrow{A'I}$

$=\overrightarrow{AA'}+\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{A'B'}+\overrightarrow{A'C'}\right)$

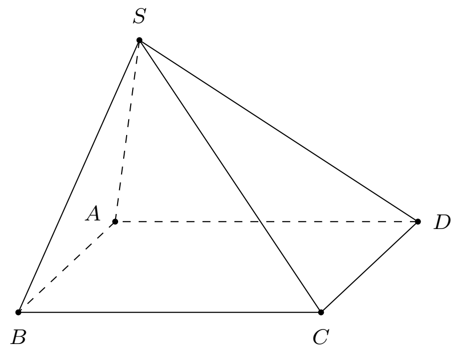
$=\overrightarrow{AA'}+\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$

$=\frac{1}{3}\left(3\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)=\frac{1}{3}\left(3\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)$.

Chọn đáp án B .... □

CÂU 10.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Đặt $\overrightarrow{SA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{SB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{SC}=\vec{c}$, $\overrightarrow{SD}=\vec{d}$. Khẳng định nào dưới đây là đúng?



A $\vec{a}+\vec{c}=\vec{b}+\vec{d}$.

B $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}=\vec{0}$.

C $\vec{a}+\vec{d}=\vec{b}+\vec{c}$.

D $\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}+\vec{d}$.

Lời giải.

Gọi O là tâm hình bình hành $ABCD$.

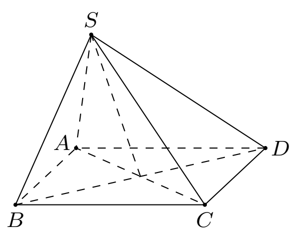
Vì O là trung điểm của AC

nên $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SC}=2\overrightarrow{SO} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{SO}=\vec{a}+\vec{c}$. (1)

Và O là trung điểm của BD

nên $\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SD}=2\overrightarrow{SO} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{SO}=\vec{b}+\vec{d}$. (2)

Từ (1) và (2), suy ra $\vec{a}+\vec{c}=\vec{b}+\vec{d}$.

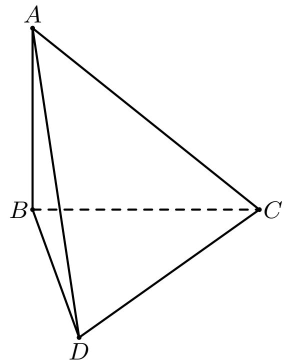


Chọn đáp án A .... □

CÂU 11.

Cho tứ diện $ABCD$. Các vectơ có điểm đầu là A và điểm cuối là các đỉnh còn lại của hình tứ diện là

A $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AD}$. **B** $\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$. **C** $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{DA}$. **D** $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$.



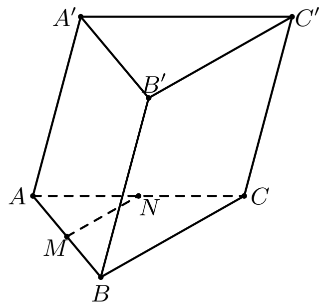
Lời giải.

Chọn đáp án D

CÂU 12.

Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$.Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, AC. Trong 4 vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{B'C'}$, $\overrightarrow{A'C'}$ vectơ nào cùng hướng với vectơ $\overrightarrow{MN}$

A $\overrightarrow{AB}$. **B** $\overrightarrow{CB}$. **C** $\overrightarrow{B'C'}$. **D** $\overrightarrow{A'C'}$.



Lời giải.

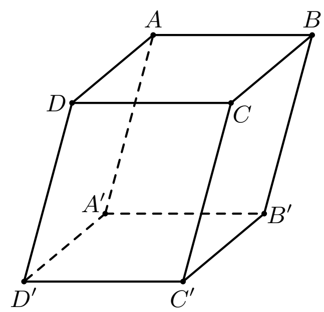
Vì MN là đường trung bình của tam giác ABC nên MN song song với BC. Mà tứ giác $BCC'B'$ là hình bình hành. Do đó MN song song với $B'C'$. Vậy hai vectơ $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{B'C'}$ cùng hướng.

Chọn đáp án C

CÂU 13.

Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$.Số các vectơ có điểm đầu, điểm cuối là các đỉnh của hình hộp và bằng vectơ $\overrightarrow{AB}$ là

A 1. **B** 2. **C** 3. **D** 4.



Lời giải.

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{D'C'} = \overrightarrow{A'B'}$

Chọn đáp án C

CÂU 14. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Trong các khẳng định dưới đây, đâu là khẳng định đúng?

A $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC'}$. **B** $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC'}$. **C** $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$. **D** $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AD} = \vec{0}$.

Lời giải.

Xét hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ ta có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC'}$

Chọn đáp án B

CÂU 15. Trong không gian cho tam giác ABC có G là trọng tâm và điểm M nằm ngoài mặt phẳng (ABC). Khẳng định nào sau đây là đúng?

A $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$.

B $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 0$.

C $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MG}$.

D $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$.

Lời giải.

Vì G là trọng tâm tam giác ABC nên $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$

Chọn đáp án D

CÂU 16. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ tất cả các cạnh bằng $2\sqrt{3}$. Tính độ dài vectơ $\vec{u} = \overrightarrow{SA} - \overrightarrow{SC}$.

A $\sqrt{3}$. **B** $\sqrt{2}$. **C** $2\sqrt{6}$. **D** $2\sqrt{2}$.

Lời giải.

Ta có: $|\vec{u}| = |\overrightarrow{SA} - \overrightarrow{SC}| = |\overrightarrow{CA}| = AB\sqrt{2} = 2\sqrt{6}$.

Chọn đáp án (C) .... □

CÂU 17. Cho tứ diện $ABCD$. Mệnh đề nào dưới đây là mệnh đề đúng?

(A) $\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DC}$. (B) $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BC}$. (C) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DC}$. (D) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CB}$.

Lời giải.

Ta có: $\begin{cases} \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB} \\ \overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{CB} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DC}$.

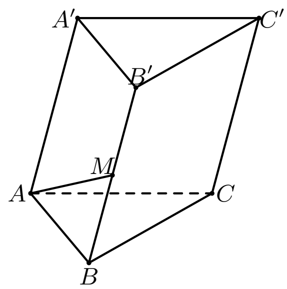
Chọn đáp án (C) .... □

CÂU 18. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$, M là trung điểm của BB'. Đặt $\overrightarrow{CA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AA'} = \vec{c}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

(A) $\overrightarrow{AM} = \vec{b} + \vec{c} - \frac{1}{2}\vec{a}$. (B) $\overrightarrow{AM} = \vec{a} - \vec{c} + \frac{1}{2}\vec{b}$. (C) $\overrightarrow{AM} = \vec{a} + \vec{c} - \frac{1}{2}\vec{b}$. (D) $\overrightarrow{AM} = \vec{b} - \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{c}$.

Lời giải.

Ta có: $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AA'} = \vec{b} - \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{c}$



Chọn đáp án (D) .... □

CÂU 19. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Tính độ dài véctơ $\vec{x} = \overrightarrow{A'C'} - \overrightarrow{A'A}$ theo a?

(A) $a\sqrt{2}$. (B) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. (C) $a\sqrt{6}$. (D) $a\sqrt{3}$.

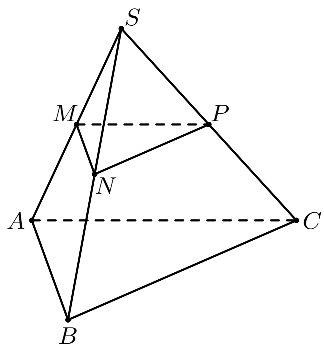
Lời giải.

Ta có $\vec{x} = \overrightarrow{A'C'} - \overrightarrow{A'A} = \overrightarrow{AC'} = a\sqrt{3}$.

Chọn đáp án (D) .... □

CÂU 20.

Cho tứ diện $S.ABC$ có M, N, P là trung điểm của SA, SB, SC. Tìm khẳng định đúng?



(A) $\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{PN} - \overrightarrow{PM}\right)$. (B) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{PN} - \overrightarrow{PM}$. (C) $\overrightarrow{AB} = 2\left(\overrightarrow{PM} - \overrightarrow{PN}\right)$. (D) $\overrightarrow{AB} = 2\left(\overrightarrow{PN} - \overrightarrow{PM}\right)$.

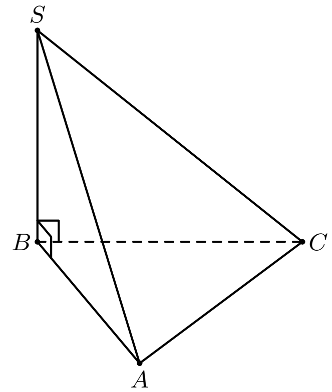
Lời giải.

Ta có: $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{MN} = 2\left(\overrightarrow{PN} - \overrightarrow{PM}\right)$.

Chọn đáp án (D) .... □

CÂU 21.

Cho tứ diện $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a, SB vuông góc với đáy và $SB = \sqrt{3}a$. Góc giữa hai vectơ $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AS})$ là



(A) $60°$. (B) $30°$. (C) $45°$. (D) $90°$.

Lời giải.

Ta có: $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AS}\right) = \widehat{SAB}$.

Xét $\triangle SBA$ vuông tại B ta có: $\tan\left(\widehat{SAB}\right) = \dfrac{SB}{AB} = \sqrt{3}$. Suy ra: $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AS}\right) = 60°$

Chọn đáp án (A) .... □

CÂU 22. Cho hình chóp $S.ABC$ có $AB = 4$, $\widehat{BAC} = 60°$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 6$. Khi đó độ dài $\overrightarrow{AC}$ là

(A) 3. (B) 6. (C) 4. (D) 12.

Lời giải.

Ta có: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \cdot AC \cdot \cos\widehat{BAC} \Leftrightarrow 6 = 4 \cdot AC \cdot \cos 60° \Leftrightarrow AC = 3$.

Chọn đáp án (A) .... □

CÂU 23. Trong không gian cho vectơ $\overrightarrow{AB}$. Khi đó:

(A) Giá của vectơ $\overrightarrow{AB}$ là $\overrightarrow{AB}$.

(B) Giá của vectơ $\overrightarrow{AB}$ là $\left|\overrightarrow{AB}\right|$.

(C) Giá của vectơ $\overrightarrow{AB}$ là đường thẳng AB.

(D) Giá của vectơ $\overrightarrow{AB}$ là đoạn thẳng AB.

Lời giải.

Giá của vectơ $\overrightarrow{AB}$ là đường thẳng AB.

Chọn đáp án (C) .... □

CÂU 24. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$. Trong các vectơ dưới đây, vectơ nào cùng phương với vectơ $\overrightarrow{AB}$?

(A) Vectơ$\overrightarrow{AD}$. (B) Vectơ$\overrightarrow{CC'}$. (C) Vectơ$\overrightarrow{BD}$. (D) Vectơ$\overrightarrow{CD}$.

Lời giải.

$AB \parallel CD$ nên $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ cùng phương.

Chọn đáp án (D) .... □

CÂU 25. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Vectơ $\vec{u} = \overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{A'D'}$ bằng vectơ nào dưới đây?

(A) $\overrightarrow{A'C}$. (B) $\overrightarrow{CA'}$. (C) $\overrightarrow{AC'}$. (D) $\overrightarrow{C'A}$.

Lời giải.

Do $A'B'BA$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{A'B}$. Lại có, $A'BCD'$ cũng là hình bình hành nên $\overrightarrow{A'B} + \overrightarrow{A'D'} = \overrightarrow{A'C}$. Vậy $\overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{A'D'} = \overrightarrow{A'C}$

Chọn đáp án (A) .... □

CÂU 26. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Đặt $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{d}$. Trong các biểu thức vec tơ sau đây, biểu thức nào là đúng?

(A) $\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$. (B) $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = \vec{0}$. (C) $\vec{b} - \vec{c} + \vec{d} = \vec{0}$. (D) $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{d}$.

Lời giải.

Ta có: $\vec{b} - \vec{c} + \vec{d} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BC} = \vec{0}$.

Chọn đáp án (C) .... □

CÂU 27. Cho lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có độ dài mỗi cạnh bằng 1. Tính độ dài của vectơ $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{C'D'}$.

(A) $\sqrt{3}$. (B) $\sqrt{2}$. (C) 1. (D) $2\sqrt{2}$.

Lời giải.

Ta có: $A'C'CA$ là hình chữ nhật nên $\overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{AC}$.

Khi đó, $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{C'D'} = \overrightarrow{A'C'} + \overrightarrow{C'D'} = \overrightarrow{A'D'}$. Vậy $\left|\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{C'D'}\right| = \left|\overrightarrow{A'D'}\right| = A'D' = 1$

Chọn đáp án (C) .... □

CÂU 28. Cho O là tâm hình bình hành $ABCD$. Hỏi vectơ $\left(\overrightarrow{AO}-\overrightarrow{DO}\right)$ bằng vectơ nào?

A $\overrightarrow{BA}$. **B** $\overrightarrow{AD}$. **C** $\overrightarrow{DC}$. **D** $\overrightarrow{AC}$.

Lời giải.

Ta có: $\overrightarrow{AO}-\overrightarrow{DO}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{AD}$.

Chọn đáp án B

CÂU 29. Cho ba điểm phân biệt A, B, C. Nếu $\overrightarrow{AB}=-3\overrightarrow{AC}$ thì đẳng thức nào dưới đây đúng?

A $\overrightarrow{BC}=-4\overrightarrow{AC}$. **B** $\overrightarrow{BC}=-2\overrightarrow{AC}$. **C** $\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{AC}$. **D** $\overrightarrow{BC}=4\overrightarrow{AC}$.

Lời giải.

Ta có: $\overrightarrow{AB}=-3\overrightarrow{AC}\Leftrightarrow\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA}=-3\overrightarrow{AC}\Leftrightarrow\overrightarrow{AC}+3\overrightarrow{AC}=-\overrightarrow{CB}\Leftrightarrow\overrightarrow{BC}=4\overrightarrow{AC}$.

Chọn đáp án D

CÂU 30. Cho tam giác ABC có điểm O thỏa mãn: $\left|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}-2\overrightarrow{OC}\right|=\left|\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}\right|$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A Tam giác ABC đều. **B** Tam giác ABC cân tại C.

C Tam giác ABC vuông tại C. **D** Tam giác ABC cân tại B.

Lời giải.

Gọi M là trung điểm AB, ta có $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=2\overrightarrow{OM}$.

Do đó, $\left|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}-2\overrightarrow{OC}\right|=\left|\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}\right|\Leftrightarrow\left|2\overrightarrow{OM}-2\overrightarrow{OC}\right|=\left|\overrightarrow{BA}\right|\Leftrightarrow 2\left|\overrightarrow{CM}\right|=BA\Leftrightarrow CM=\dfrac{1}{2}BA$ (1)

Vì M là trung điểm AB nên CM là đường trung tuyến của $\triangle ABC$, Từ (1) suy ra, tam giác $\triangle ABC$ vuông tại C.

Chọn đáp án C

CÂU 31. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Đẳng thức nào dưới đây là đúng?

A $\overrightarrow{AC'}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AC}$. **B** $\overrightarrow{AC'}=\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AC}$. **C** $\overrightarrow{AC'}=\overrightarrow{AB'}+\overrightarrow{AD}$. **D** $\overrightarrow{AC'}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AA'}$.

Lời giải.

Do $AB'C'D$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{AC'}=\overrightarrow{A'B'}+\overrightarrow{AD}$.

Chọn đáp án C

CÂU 32. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có độ dài cạnh bằng a. Tính độ dài của vectơ $\overrightarrow{AD'}+\overrightarrow{BA'}$.

A $\sqrt{3}a$. **B** $\sqrt{2}a$. **C** $\sqrt{6}a$. **D** $2\sqrt{3}a$.

Lời giải.

Gọi O' là tâm của hình vuông $A'B'C'D'$.

Ta có $ABC'D'$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{AD'}=\overrightarrow{BC'}$, do đó $\overrightarrow{BA'}+\overrightarrow{AD'}=\overrightarrow{BA'}+\overrightarrow{BC'}=2\overrightarrow{BO'}$.

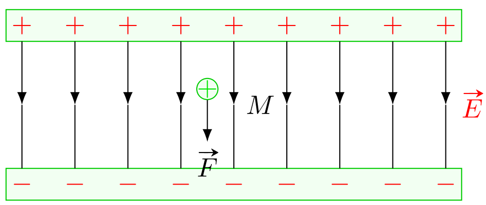
Tam giác $BA'C'$ là tam giác đều cạnh $a\sqrt{2}$ nên $BO'=\dfrac{\sqrt{3}}{2}a\sqrt{2}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}a$.

Từ đó độ dài của vectơ $\overrightarrow{AD'}+\overrightarrow{BA'}$ bằng $\sqrt{6}a$.

Chọn đáp án C

CÂU 33.

Trong điện trường đều, lực tĩnh điện $\vec{F}$ (đơn vị: N) tác dụng lên điện tích điểm có điện tích q (đơn vị: C) được tính theo công thức $\vec{F}=q\cdot\vec{E}$, trong đó $\vec{E}$ là cường độ điện trường (đơn vị: N/C). Tính độ lớn của lực tĩnh điện tác dụng lên điện tích điểm khi $q=10^{-9}$ C và độ lớn điện trường $E=10^5$ N/C.



A 10^{-3} N. **B** 10^{4} N. **C** 10^{-14} N. **D** 10^{-4} N.

Lời giải.

Từ công thức $\vec{F}=q\cdot\vec{E}$ suy ra $|\vec{F}|=q|\vec{E}|$

$=10^{-9}\cdot 10^{5}$

$=10^{-4}$N.

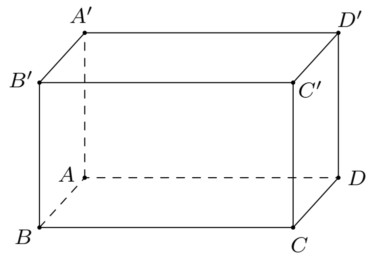
Vậy độ lớn của lực tĩnh điện tác dụng lên điện tích điểm là 10^{-4} N.

Chọn đáp án D

PHẦN II. *Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.*

CÂU 34.

Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh $AB = a$; $AD = a\sqrt{3}$; $AA' = 2a$. Xét tính đúng, sai của các khẳng định sau:



Mệnh đề	Đ	S
a) $\overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{CD'} = \vec{0}$.		X
b) $\overrightarrow{A'D} + \overrightarrow{CB'} = \vec{0}$.	X	
c) $\left\|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right\| = a\sqrt{5}$.		X
d) $\left\|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A'D'} + \overrightarrow{CC'}\right\| = 2\sqrt{2}a$.	X	

Lời giải.

a) $\overrightarrow{AB'}$ và $\overrightarrow{CD'}$ không đối nhau nên $\overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{CD'} \neq \vec{0}$

b) $\overrightarrow{A'D}$ và $\overrightarrow{CB'}$ đối nhau nên $\overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{CD'} = \vec{0}$

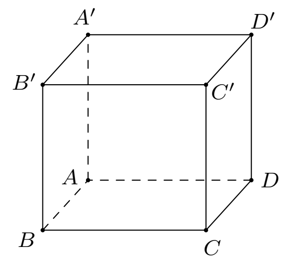
c) $\left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right| = \left|\overrightarrow{AC}\right| = AC = \sqrt{AB^2 + AD^2} = 2a$

d) $\left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A'D'} + \overrightarrow{CC'}\right| = \left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}\right| = AC' = \sqrt{AB^2 + AD^2 + AA^2} = 2\sqrt{2}a$

Chọn đáp án | a sai | b đúng | c sai | d đúng | .... □

CÂU 35.

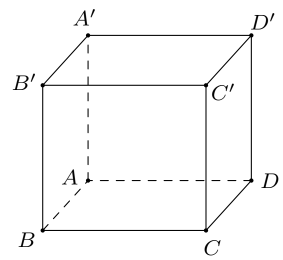
Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Xét tính đúng, sai của các khẳng định sau:



Mệnh đề	Đ	S
a) $\overrightarrow{B'B} - \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{B'D}$.	X	
b) $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{BD}$.		X

Mệnh đề	Đ	S
c) $\left\|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BB'}\right\| = a\sqrt{2}$.		X
d) $\left\|\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{C'A}\right\| = a$.	X	

Lời giải.



a) Ta có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{B'B} - \overrightarrow{DB} &= \overrightarrow{B'B} + \left(-\overrightarrow{DB}\right)\\ &= \overrightarrow{B'B} + \overrightarrow{BD}\\ &= \overrightarrow{B'D}.\end{aligned}$$

b) Áp dụng quy tắc hình hộp ta có $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{BD'}$.

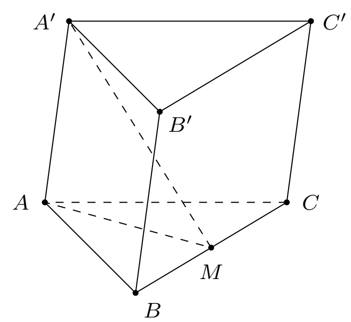
c) $\left|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BB'}\right| = \left|\overrightarrow{BD'}\right| = BD' = a\sqrt{3}$

d) Ta có $\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{C'A} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{C'A} = \overrightarrow{C'C}$.
Do đó $\left|\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{C'A}\right| = C'C = a$

Chọn đáp án | a đúng | b sai | c sai | d đúng | .... □

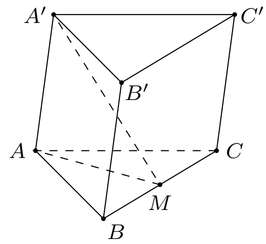
CÂU 36.

Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$ và $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$. Gọi M là trung điểm của BC. Xét tính đúng, sai của các khẳng định sau:



Mệnh đề	Đ	S
a) $\overrightarrow{B'C} = -\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$.	X	
b) $\overrightarrow{BC'} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$.	X	
c) $\overrightarrow{AM} = \vec{b} + \vec{c}$.		X
d) $\overrightarrow{A'M} = -\vec{a} + \dfrac{1}{2}\vec{b} + \dfrac{1}{2}\vec{c}$.	X	

Lời giải.



a) $\overrightarrow{B'C} = \overrightarrow{B'A'} + \overrightarrow{A'C'} + \overrightarrow{C'C} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AA'}$ hay $\overrightarrow{B'C} = -\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$;

b) $\overrightarrow{BC'} = \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{B'A'} + \overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{AA'} - \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ hay $\overrightarrow{BC'} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$;

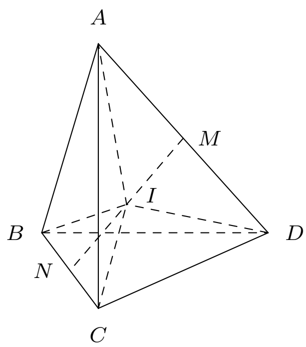
c) Ta có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AM}$, suy ra $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$

d) $\overrightarrow{A'M} = \overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{A'A} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = -\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$

Chọn đáp án | a đúng | b đúng | c sai | d đúng | .... □

CÂU 37.

Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AD và BC, I là trung điểm MN. Xét tính đúng, sai của các khẳng định sau:



Mệnh đề	Đ	S
a) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD}$.		X
b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$.	X	

Mệnh đề	Đ	S
c) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{MN}$.	X	
d) $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = \vec{0}$.	X	

Lời giải.

a) Sử dụng quy tắc ba điểm và quy tắc hiệu, ta có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} &= \left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}\right) - \overrightarrow{CD}\\ &= \overrightarrow{AC} + \left(\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CD}\right)\\ &= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB}\\ &= \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD}.\end{aligned}$$

b) Theo quy tắc ba điểm, ta có $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB}$. Do đó

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} &= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{CD}\\ &= \overrightarrow{AD} + \left(\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DB}\right)\\ &= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}.\end{aligned}$$

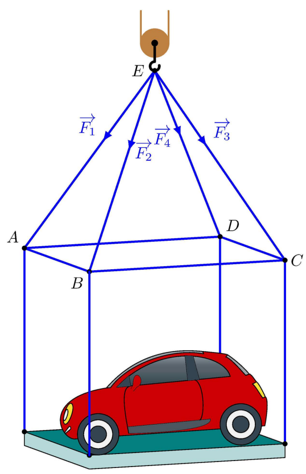
c) Ta có

d)

Chọn đáp án | a sai | b đúng | c đúng | d đúng | .... □

CÂU 38.

Một chiếc ô tô được đặt trên mặt đáy dưới của một khung sắt có dạng hình hộp chữ nhật với đáy trên là hình chữ nhật $ABCD$, mặt phẳng $(ABCD)$ song song với mặt phẳng nằm ngang. Khung sắt đó được buộc vào móc E của chiếc cần cẩu sao cho các đoạn dây cáp EA, EB, EC, ED có độ dài bằng nhau và cùng tạo với mặt phẳng $(ABCD)$ một góc bằng $60°$. Chiếc cần cẩu kéo khung sắt lên theo phương thẳng đứng. Biết rằng các lực căng $\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_2}$, $\overrightarrow{F_3}$, $\overrightarrow{F_4}$ đều có cường độ là 4700 N và trọng lượng của khung sắt là 3000 N.



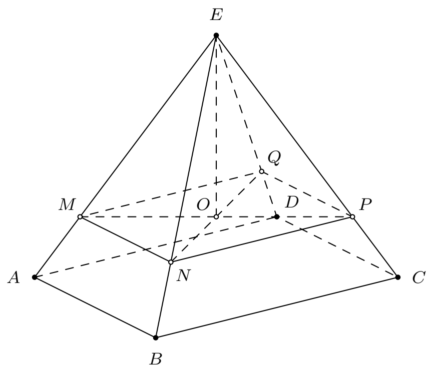
Mệnh đề	Đ	S
a) $\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} = \overrightarrow{F_3} + \overrightarrow{F_4}$.		X
b) $\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_3} = \overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{F_4}$.	X	
c) $\left\lvert\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_3}\right\rvert = 8141$ N (*làm tròn đến hàng đơn vị*).	X	
d) Trọng lượng của chiếc xe ô tô là 16282 N (*làm tròn đến hàng đơn vị*).		X

Lời giải.

Lấy các điểm M, N, P, Q lần lượt trên các tia EA, EB, EC, ED sao cho

$$\overrightarrow{EM}=\overrightarrow{F_1},\ \overrightarrow{EN}=\overrightarrow{F_2},\ \overrightarrow{EP}=\overrightarrow{F_3},\ \overrightarrow{EQ}=\overrightarrow{F_4}.$$

Do các lực căng $\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_2}$, $\overrightarrow{F_3}$, $\overrightarrow{F_4}$ đều có cường độ là 4700 N nên $EM=EN=EP=EQ=4700$.



a) Ta có

- $\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}=\overrightarrow{EM}+\overrightarrow{EN}=2\overrightarrow{EH}$, với H là trung điểm của MN.
- $\overrightarrow{F_3}+\overrightarrow{F_4}=\overrightarrow{EP}+\overrightarrow{EQ}=2\overrightarrow{EK}$, với K là trung điểm của PQ.

Suy ra $\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}\neq\overrightarrow{F_3}+\overrightarrow{F_4}$

b) Ta có

- $\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_3}=\overrightarrow{EM}+\overrightarrow{EP}=2\overrightarrow{EO}$, với O là trung điểm của MP.
- $\overrightarrow{F_2}+\overrightarrow{F_4}=\overrightarrow{EN}+\overrightarrow{EQ}=2\overrightarrow{EO}$, với O là trung điểm của MP.

Suy ra $\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_3}=\overrightarrow{F_2}+\overrightarrow{F_4}$.

c) $\left|\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_3}\right|=\left|2\overrightarrow{EO}\right|=2EO$.
Theo giả thiết, góc giữa EA với $(ABCD)$ bằng 60°, suy ra góc giữa EM với $(MNPQ)$ cũng bằng 60° hay $\widehat{SMO}=60^\circ$.
Xét $\triangle EMO$ có $EM=4700$, $\widehat{SMO}=60^\circ$. Suy ra $EO=EM\sin 60^\circ=2350\sqrt{3}$.
Từ đây, ta tính được $\left|\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_3}\right|=2EO=8141$ N.

d) Gọi $\overrightarrow{P}$ là trọng lực tác dụng lên cả hệ, do O là trung điểm MP, NQ nên ta có:

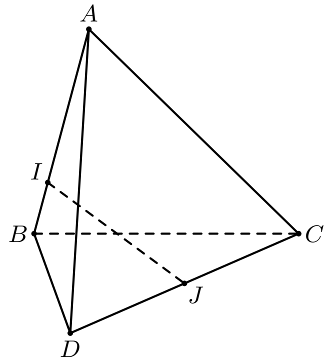
$$\begin{aligned}\overrightarrow{P}&=\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}+\overrightarrow{F_3}+\overrightarrow{F_4}\\&=\overrightarrow{EM}+\overrightarrow{EN}+\overrightarrow{EP}+\overrightarrow{EQ}\\&=\overrightarrow{EO}+\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{EO}+\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{EO}+\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{EO}+\overrightarrow{OQ}\\&=4\overrightarrow{EO}+\left(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{OP}\right)+\left(\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OQ}\right)\\&=4\overrightarrow{EO}.\end{aligned}$$

Suy ra trọng lượng của toàn bộ hệ là $\left|\overrightarrow{P}\right|=4\left|\overrightarrow{EO}\right|=4EO=9400\sqrt{3}$ N.
Do trọng trượng khung sắt là 3000 N nên trọng lượng của xe ô tô là $9400\sqrt{3}-3000\approx 13281$ N.

Chọn đáp án | a sai | b đúng | c đúng | d sai | .... □

CÂU 39.

Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = AC = AD = a$ và $\widehat{BAC} = \widehat{BAD} = 60^\circ, \widehat{CAD} = 90^\circ$. Gọi I là điểm trên cạnh AB sao cho $AI = 3IB$ và J là trung điểm của CD. Gọi α là góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{IJ}$.



Mệnh đề	Đ	S
a) Tam giác BCD vuông cân.	X	
b) $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$.		X
c) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB} = \frac{a^2}{2}$.		X
d) $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{5}$.	X	

Lời giải.

a) Tam giác ABC, ABD đều cạnh bằng a, tam giác ACD vuông cân đỉnh $A \Rightarrow CD = a\sqrt{2}$. Vậy tam giác BCD có $BC = BD = a, CD = a\sqrt{2}$ nên tam giác BCD vuông cân.

b) $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AJ} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}\right) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} - \frac{3}{4 >}\overrightarrow{AB}$.

c) Ta có: $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD} = 0$, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} = AB\cdot AD\cdot\cos 60^\circ = \frac{a^2}{2}$, $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB} = \frac{a^2}{2}$. Suy ra $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB} = a^2$.

d) $IJ^2 = \overrightarrow{IJ}^2 = \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} - \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(\frac{17}{4}a^2 + 2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD} - 3\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}\right) = \frac{5a^2}{16} \Rightarrow IJ = \frac{a\sqrt{5}}{4}$.

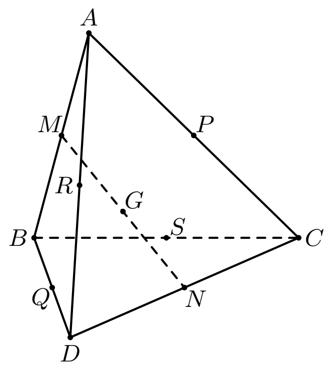
$\overrightarrow{IJ}\cdot\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} - \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}\right)\cdot\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB} - \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}^2\right) = -\frac{a^2}{4}$.

$\cos\left(\overrightarrow{IJ}, \overrightarrow{AB}\right) = \frac{\overrightarrow{IJ}\cdot\overrightarrow{AB}}{IJ\cdot AB} = \frac{-\frac{a^2}{4}}{\frac{a\sqrt{5}}{4}\cdot a} = -\frac{\sqrt{5}}{5}$.

Chọn đáp án | a đúng | b sai | c sai | d đúng | .... □

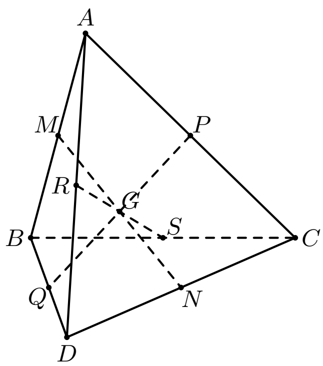
CÂU 40.

Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N, P, Q, R, S, G lần lượt là trung điểm các đoạn thẳng AB, CD, AC, BD, AD, BC, MN.



Mệnh đề	Đ	S
a) $\overrightarrow{MR} = \overrightarrow{SN}$.	X	
b) $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$.	X	
c) $2\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$.		X
d) $\lvert\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID}\rvert$ nhỏ nhất khi và chỉ khi điểm I trùng với điểm G.	X	

Lời giải.



a) $\overrightarrow{MR} = \overrightarrow{SN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$.

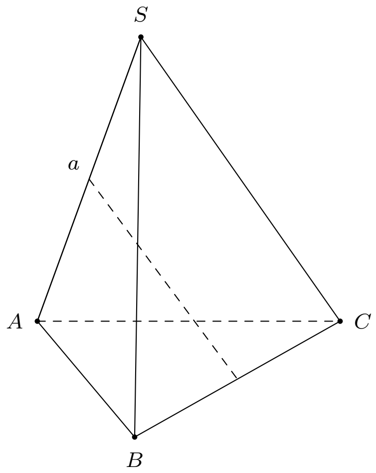
b) Vì M là trung điểm của AB nên $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}=2\overrightarrow{GM}$
Vì N là trung điểm của CD nên $\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=2\overrightarrow{GN}$
Vì G là trung điểm của MN nên $\overrightarrow{GM}+\overrightarrow{GN}=\vec{0}$
Do đó: $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=2\left(\overrightarrow{GM}+\overrightarrow{GN}\right)=2\cdot\vec{0}=\vec{0}$.

c) $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{AQ}-\overrightarrow{AP}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\Leftrightarrow 2\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}$

d) $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}=4\overrightarrow{IG}+\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}\right)=4\overrightarrow{IG}$.
$\Rightarrow|\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}|=|4\overrightarrow{IG}|=4IG$
Do đó: $|\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}|$ nhỏ nhất khi $IG=0\Leftrightarrow I\equiv G$

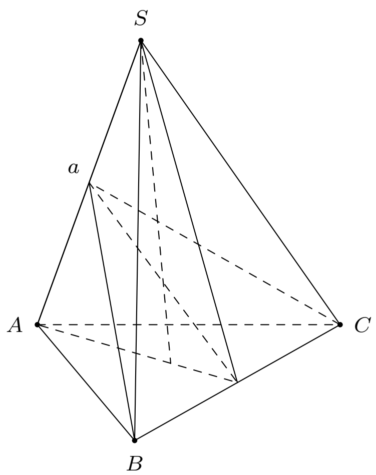
Chọn đáp án | a đúng | b đúng | c sai | d đúng | .... □

CÂU 41. Cho tứ diện đều $SABC$ có cạnh a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm SA, BC. Các mệnh đề sau đúng hay sai?



Mệnh đề	Đ	S
a) Độ dài của vectơ $\overrightarrow{SA}$ bằng a..	X	
b) $\overrightarrow{SA}\cdot\overrightarrow{SB}=\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.	X	
c) $\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{SC}+\overrightarrow{AC}=4\overrightarrow{MN}$.		X
d) Gọi I là trọng tâm của tứ diện. Khoảng cách từ I đến (ABC) bằng $\frac{3a\sqrt{6}}{4}$.		X

Lời giải.



a) $|\overrightarrow{SA}|=SA=a$.

b) $\overrightarrow{SA}\cdot\overrightarrow{SB}=\left|\overrightarrow{SA}\right|\cdot\left|\overrightarrow{SB}\right|\cdot\sin\widehat{ASB}=a\cdot a\cdot\sin 60^\circ=\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

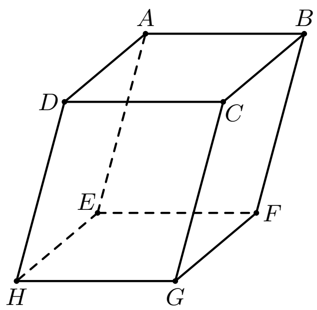
c) Do N là trung điểm của BC nên $\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}=2\overrightarrow{SN}$ và $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{MB}$.
Suy ra $\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\left(\overrightarrow{SN}+\overrightarrow{AN}\right)$
Do M là trung điểm của SA nên $\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{NS}=2\overrightarrow{NM}\Leftrightarrow\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{SN}=2\overrightarrow{MN}$.
Do đó $\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\cdot 2\cdot\overrightarrow{MN}=4\overrightarrow{MN}$.

d) Gọi G là trọng tâm tam giác ABC.
Do tứ diện $SABC$ là tứ diện đều và I là trọng tâm tứ diện nên $d\left(I,(ABC)\right)=IG$
Tam giác ABC đều cạnh a, N là trung điểm của BC, suy ra $AN=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.
Do G là trọng tâm tam giácABC nên $AG=\dfrac{2}{3}AN=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.
Do tứ diện $SABC$ là tứ diện đều nên $SG\perp(ABC)\Rightarrow SG\perp AG$.
Tam giác SAG vuông tại G nên $SG=\sqrt{SA^2-AG^2}=\sqrt{a^2-\dfrac{a^2}{3}}=\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.
Do I là trọng tâm tứ diện$SABC$ nên $IG=\dfrac{1}{4}SG=\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{a\sqrt{6}}{3}=\dfrac{a\sqrt{6}}{12}$.
Vậy $d\left(I,(ABC)\right)=\dfrac{a\sqrt{6}}{12}$.

Chọn đáp án | a đúng | b đúng | c sai | d sai | .... □

CÂU 42.

Cho hình hộp chữ nhật $ABCD\cdot EFGH$ có $AB=AE=2$, $AD=3$ và đặt $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{b}=\overrightarrow{AD}$, $\vec{c}=\overrightarrow{AE}$. Lấy điểm M thỏa $\overrightarrow{AM}=\dfrac{1}{5}\overrightarrow{AD}$ và điểm N thỏa $\overrightarrow{EN}=\dfrac{2}{5}\overrightarrow{EC}$. (tham khảo hình vẽ).



Mệnh đề	Đ	S
a) $\overrightarrow{MA}=-\dfrac{1}{5}\vec{b}$.	X	
b) $\overrightarrow{EN}=\dfrac{2}{5}\left(\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}\right)$.	X	
c) $\left(m\cdot\vec{a}+n\cdot\vec{b}+n\cdot\vec{c}\right)^2=m^2\cdot\vec{a}^2+n^2\cdot\vec{b}^2+p^2\cdot\vec{c}^2$ với m,n,p là các số thực.		X
d) $MN=\dfrac{\sqrt{61}}{5}$.	X	

Lời giải.

a) $\overrightarrow{MA}=-\overrightarrow{AM}=-\dfrac{1}{5}\overrightarrow{AD}=-\dfrac{1}{5}\vec{b}$.

b) $\overrightarrow{EN}=\dfrac{2}{5}\overrightarrow{EC}=\dfrac{2}{5}\left(\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{EH}+\overrightarrow{EA}\right)=\dfrac{2}{5}\left(\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}\right)$.

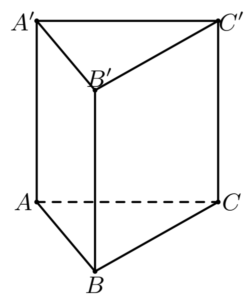
c) $\left(m\cdot\vec{a}+n\cdot\vec{b}+p\cdot\vec{c}\right)^2=m^2\cdot\vec{a}^2+n^2\cdot\vec{b}^2+p^2\cdot\vec{c}^2+2mn\cdot\vec{a}\cdot\vec{b}+2np\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}+2mp\cdot\vec{a}\cdot\vec{c}$
$=m^2\cdot\vec{a}^2+n^2\cdot\vec{b}^2+p^2\cdot\vec{c}^2$. (vì $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ đôi một vuông góc nên $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}=0$).

d) $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EN}=-\dfrac{1}{5}\vec{b}+\vec{c}+\dfrac{2}{5}\left(\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}\right)=\dfrac{2}{5}\vec{a}+\dfrac{1}{5}\vec{b}+\dfrac{3}{5}\vec{c}$.
$MN^2=\overrightarrow{MN}^2=\left(\dfrac{2}{5}\vec{a}+\dfrac{1}{5}\vec{b}+\dfrac{3}{5}\vec{c}\right)^2=\dfrac{4}{25}\vec{a}^2+\dfrac{1}{25}\vec{b}^2+\dfrac{9}{25}\vec{c}^2=\dfrac{4}{25}\cdot 4+\dfrac{1}{25}\cdot 9+\dfrac{9}{25}\cdot 4=\dfrac{61}{25}$.
Suy ra $MN=\dfrac{\sqrt{61}}{5}$.

Chọn đáp án | a đúng | b đúng | c sai | d đúng | .... □

CÂU 43.

Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng x và chiều cao bằng y. (tham khảo hình vẽ)



Mệnh đề	Đ	S
a) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}x^2$.	X	
b) $\overrightarrow{AC'}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AA'}$.	X	
c) $\overrightarrow{CB'}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AA'}$.		X
d) Góc $(AC',CB')>60^\circ$ khi $\frac{y}{x}<\sqrt{2}$.		X

Lời giải.

a) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=AB\cdot AC\cdot\cos 60^\circ=\frac{1}{2}x^2$.

b) $\overrightarrow{AC'}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AA'}$ (vì $ACC'A'$ là hình chữ nhật).

c) $\overrightarrow{CB'}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AA'}$.

d) Ta có $\overrightarrow{AC'}\cdot\overrightarrow{CB'}=\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AA'}\right)\cdot\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AA'}\right)=y^2-\frac{1}{2}x^2$ và $AC'=CB'=\sqrt{x^2+y^2}$.

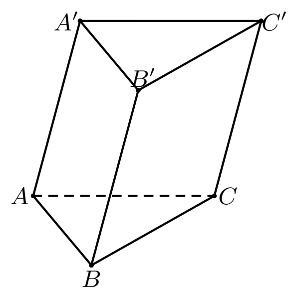
Khi đó $\cos\left(AC',CB'\right)=\left|\cos\left(\overrightarrow{AC'},\overrightarrow{CB'}\right)\right|=\frac{\left|\overrightarrow{AC'}\cdot\overrightarrow{CB'}\right|}{AC'\cdot CB'}=\frac{\left|y^2-\frac{1}{2}x^2\right|}{x^2+y^2}$.

Theo đề $(AC',CB')>60^\circ$, suy ra $\frac{\left|y^2-\frac{1}{2}x^2\right|}{x^2+y^2}<\frac{1}{2}\Leftrightarrow 3y^4-6x^2y^2<0\Leftrightarrow\frac{y}{x}<\sqrt{2}$.

Chọn đáp án | a đúng | b đúng | c sai | d sai | .... □

PHẦN III. *Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.*

CÂU 44.
Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Đặt $\overrightarrow{AB}=\vec{a},\overrightarrow{AA'}=\vec{b},\overrightarrow{AC}=\vec{c}$. Ta biểu diễn $\overrightarrow{B'C}=m\vec{a}+n\vec{b}+p\vec{c}$, khi đó $m+n+p$ bằng bao nhiêu?



Lời giải.

Đáp án: -1

$\overrightarrow{B'C}=\overrightarrow{B'B}+\overrightarrow{BC}=-\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}=-\overrightarrow{BB'}-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=-\vec{b}-\vec{a}+\vec{c}$
$\Rightarrow\overrightarrow{B'C}=-\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$.
Suy ra $m=-1$, $n=-1$, $p=1$. Do đó $m+n+p=-1$.

CÂU 45. Cho tứ diện $ABCD$, gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB và CD. Biết $\overrightarrow{IJ}=\frac{a}{b}\overrightarrow{AC}+\frac{c}{d}\overrightarrow{BD}$. Giá trị biểu thức $P=ab+cd$ bằng

Lời giải.

Đáp án: 4

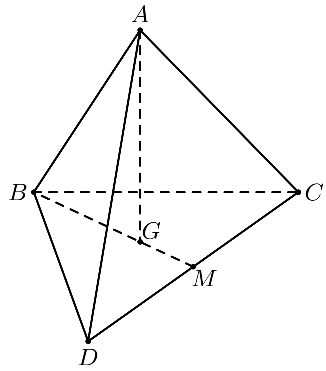
$\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IJ}+\overrightarrow{JC}+\overrightarrow{BI}+\overrightarrow{IJ}+\overrightarrow{JD}=2\overrightarrow{IJ}\Rightarrow\overrightarrow{IJ}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}\right)$.

CÂU 46. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng 15. Biết độ dài của $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}$ bằng $a\sqrt{6}$, khi đó giá trị của a là?

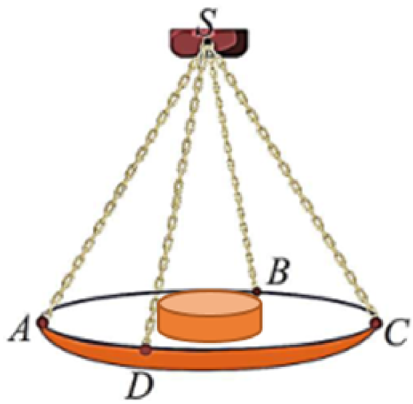
Lời giải.

Đáp án: 15

Gọi G là trọng tâm tâm giác BCD, M là trung điểm CD.
Ta có $\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0} \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AB}\right)+\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AC}\right)+\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AD}\right)=\vec{0} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{GA}+\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right)=\vec{0}$
$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=-3\overrightarrow{GA}=3\overrightarrow{AG} \Rightarrow |\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}|=|3\overrightarrow{AG}|=3AG$.
Xét tam giác đều BCD có $BM=BC\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{15\sqrt{3}}{2} \Rightarrow BG=\dfrac{2}{3}BM=5\sqrt{3}$.
Vì tứ diện $ABCD$ đều nên $AG\perp(BCD) \Rightarrow \widehat{AGB}=90^\circ$.
Xét tam giác ABG có $AG=\sqrt{AB^2-BG^2}=\sqrt{15^2-\left(5\sqrt{3}\right)^2}=5\sqrt{6}$.
Do đó $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}|=3AG=15\sqrt{6} \Rightarrow a=15$.
Vậy giá trị của $a=15$.



CÂU 47. Một chiếc cân đòn tay đang cân một vật có khối lượng $m=3\,\text{kg}$ được thiết kế với đĩa cân được giữ bởi bốn đoạn xích SA, SB, SC, SD sao cho $S.ABCD$ là hình chóp tứ giác đều có $\widehat{ASC}=90^\circ$. Biết độ lớn của lực căng cho mỗi sợi xích có dạng $\dfrac{a\sqrt{2}}{4}$. Lấy $g=10\text{m/s}^2$, khi đó giá trị của a bằng bao nhiêu?



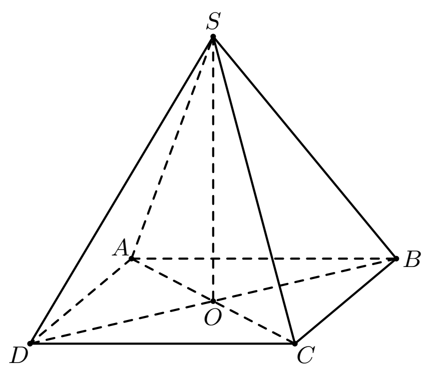
Lời giải.

Đáp án: 30

Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$.
Ta có $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{OS}+\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{OS}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{OS}+\overrightarrow{SC}+\overrightarrow{OS}+\overrightarrow{SD}=\vec{0}$
$\Leftrightarrow \overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}+\overrightarrow{SD}=-4\overrightarrow{OS}=4\overrightarrow{SO} \Rightarrow |\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}+\overrightarrow{SD}|=|4\overrightarrow{SO}|=4SO$.
Trọng lượng của vật nặng là $P=mg=3\cdot 10=30$ (N). Suy ra $4|\overrightarrow{SO}|=P=30$ (N)
$\Rightarrow SO=\dfrac{15}{2}$.
Lại có tam giác ASC vuông cân tại S nên

$$SO=SA\cdot\sin\widehat{SAC} \Rightarrow SA=\frac{SO}{\sin\widehat{SAC}}=\frac{\frac{15}{2}}{\sin 45^\circ}=\frac{15\sqrt{2}}{2}=\frac{30\sqrt{2}}{4} \Rightarrow a=30.$$

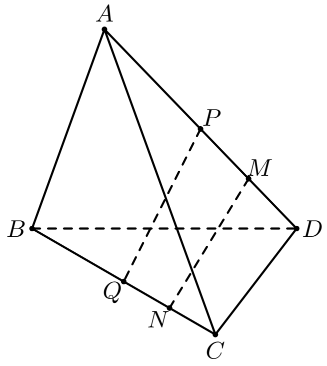
Vậy $a=30$.



CÂU 48. Cho tứ diện $ABCD$. Trên các cạnh AD và BC lần lượt lấy M, N sao cho $AM=3MD$, $BN=3NC$. Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của AD và BC. Phân tích vectơ $\overrightarrow{MN}$ theo hai vectơ $\overrightarrow{PQ}$ và $\overrightarrow{DC}$ ta được $\overrightarrow{MN}=a\overrightarrow{PQ}+b\overrightarrow{DC}$. Tính $a+2b$.

Lời giải.

Đáp án: 1,5



Do $AM = 3MD$, $BN = 3NC$ và P, Q lần lượt là trung điểm của AD và BC nên M, N lần lượt là trung điểm của PD và QC.

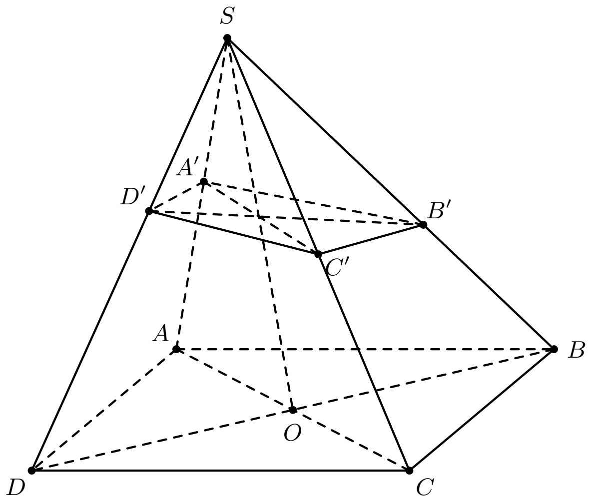
Ta có $\begin{cases} \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QN} \\ \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CN} \end{cases} \Rightarrow 2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{DC} \Rightarrow \overrightarrow{MN} = \dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{DC}\right)$

$\Rightarrow a = \dfrac{1}{2};\ b = \dfrac{1}{2} \Rightarrow a + 2b = \dfrac{3}{2} = 1,5.$

CÂU 49. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Một mặt phẳng (α) cắt các cạnh SA, SB, SC, SD lần lượt tại A', B', C', D'. Giá trị của biểu thức $P = \dfrac{SA}{SA'} + \dfrac{SC}{SC'} - \dfrac{SB}{SB'} - \dfrac{SD}{SD'}$.

Lời giải.

Đáp án: 0



Gọi O là tâm của hình bình hành $ABCD$ thì $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC} = \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD} = 2\overrightarrow{SO}$

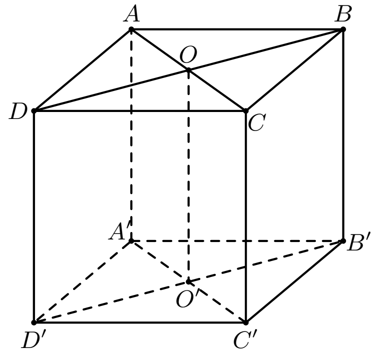
$\Leftrightarrow \dfrac{SA}{SA'}\overrightarrow{SA'} + \dfrac{SC}{SC'}\overrightarrow{SC'} = \dfrac{SB}{SB'}\overrightarrow{SB'} + \dfrac{SD}{SD'}\overrightarrow{SD'}$

Do A', B', C', D' đồng phẳng nên $\Rightarrow \dfrac{SA}{SA'} + \dfrac{SC}{SC'} = \dfrac{SB}{SB'} + \dfrac{SD}{SD'} \Rightarrow P = \dfrac{SA}{SA'} + \dfrac{SC}{SC'} - \dfrac{SB}{SB'} - \dfrac{SD}{SD'} = 0.$

CÂU 50. Cho hình lập phương $B'C$ có đường chéo $A'C = \dfrac{3}{16}$. Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$ và điểm 20 thỏa mãn: $\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OC'} + \overrightarrow{OD'}$. Khi đó độ dài của đoạn OS bằng $\dfrac{a\sqrt{3}}{b}$ với $a, b \in \mathbb{N}$ và $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính giá trị của biểu thức $P = a^2 + b^2$.

Lời giải.

Đáp án: 17



Ta có: $A'C^2 = A'A^2 + AC^2 = 3A'A^2 \Rightarrow A'A = \dfrac{A'C}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{16}$.
Gọi O' là tâm của hình vuông $A'B'C'D'$.
Lại có : $\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OC'} + \overrightarrow{OD'}$

$$= \left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}\right) + \left(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}\right) + \left(\overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OC'}\right) + \left(\overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OD'}\right)$$

$$= 2\overrightarrow{OO'} + 2\overrightarrow{OO'} = 4\overrightarrow{OO'}$$

Suy ra $OS = \left|\overrightarrow{OS}\right| = \left|4\overrightarrow{OO'}\right| = 4OO' = 4 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{16} = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$.
Khi đó $a = 1, b = 4 \Rightarrow P = a^2 + b^2 = 17$.

CÂU 51. Khi chuyển động trong không gian, máy bay luôn chịu tác động của 4 lực chính: lực đẩy của động cơ, lực cản của không khí, trọng lực và lực nâng khí động học (hình ảnh 2.20).

Hình 2.20

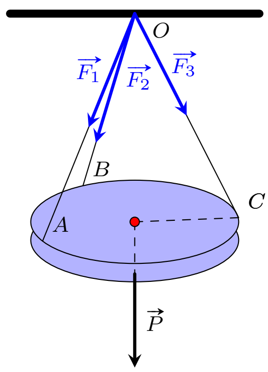
Lực cản của không khí ngược hướng với lực đẩy của động cơ và có độ lớn tỉ lệ thuận với bình phương vận tốc máy bay. Một chiếc máy bay tăng vận tốc từ 900(km/h) lên 920(km/h), trong quá trình tăng tốc máy bay giữ nguyên hướng bay. Lực cản của không khí khi máy bay đạt vận tốc 900(km/h) và 920(km/h) lần lượt biểu diễn bởi hai véc tơ $\overrightarrow{F_1}$ và $\overrightarrow{F_2}$ với $\overrightarrow{F_1} = k\overrightarrow{F_2}(k \in \mathbb{R}; k > 0)$. Tính giá trị của k (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai).

Lời giải.

Đáp án: 0,96

Vì trong quá trình máy bay tăng vận tốc từ 900(km/h) lên 900(km/h), máy bay giữ nguyên hướng bay nên hai véc tơ $\overrightarrow{F_1}$ và $\overrightarrow{F_2}$ có cùng hướng và $\overrightarrow{F_1} = k\overrightarrow{F_2}(k > 0)$.
Gọi v_1, v_2 lần lượt là vận tốc của chiếc máy bay khi đạt 900(km/h) và 920(km/h).
Suy ra $v_1 = 900$(km/h), $v_2 = 920$(km/h).
Vì lực cản của không khí ngược hướng với lực đẩy của động cơ và có độ lớn tỉ lệ thuận với bình phương vận tốc máy bay nên $\left|\dfrac{\overrightarrow{F_1}}{\overrightarrow{F_2}}\right| = \dfrac{v_1^2}{v_2^2} = \dfrac{900^2}{920^2} = \dfrac{2025}{2116} \Rightarrow \left|\overrightarrow{F_1}\right| = \dfrac{2025}{2116}\left|\overrightarrow{F_2}\right| \Rightarrow \overrightarrow{F_1} = \dfrac{2025}{2116}\overrightarrow{F_2}$.
Từ đó suy ra: $k = \dfrac{2025}{2116} \approx 0{,}96$.

CÂU 52.
Một chiếc đèn tròn được treo song song với mặt phẳng nằm ngang bởi ba sợi dây không dãn xuất phát từ điểm O trên trần nhà và lần lượt buộc vào ba điểm A, B, C trên đèn tròn sao cho các lực căng $\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_2}$, $\overrightarrow{F_3}$ lần lượt trên mỗi dây OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau và $\left|\overrightarrow{F_1}\right| = \left|\overrightarrow{F_2}\right| = \left|\overrightarrow{F_3}\right| = 15$ (N). Tính trọng lượng của chiếc đèn tròn đó (làm tròn đến hàng phần chục).



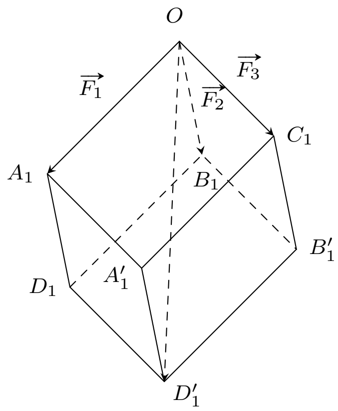
Lời giải.

Đáp án: 26,0

Gọi A_1, B_1, C_1 lần lượt là các điểm sao cho $\overrightarrow{OA_1} = \overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{OB_1} = \overrightarrow{F_2}$, $\overrightarrow{OC_1} = \overrightarrow{F_3}$. Lấy các điểm D_1, A_1', B_1', D_1' sao cho $OA_1D_1B_1.C_1A_1'D_1'B_1'$ là hình hộp (như hình bên). Khi đó, áp dụng quy tắc hình hộp ta có

$$\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OC_1} = \overrightarrow{OD_1'}.$$

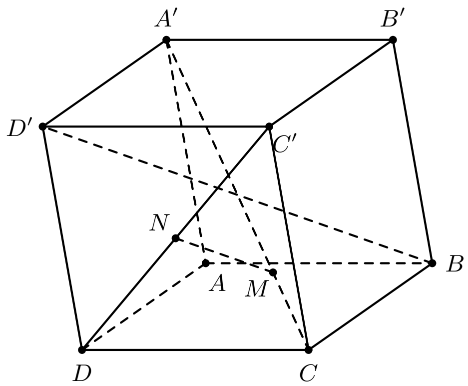
Mặt khác, do các lực căng $\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_2}$, $\overrightarrow{F_3}$ đôi một vuông góc và $\left|\overrightarrow{F_1}\right| = \left|\overrightarrow{F_2}\right| = \left|\overrightarrow{F_3}\right| = 15$ (N) nên hình hộp $OA_1D_1B_1.C_1A_1'D_1'B_1'$ có ba cạnh OA_1, OB_1, OC_1 đôi một vuông góc và bằng nhau. Vì thế hình hộp đó là hình lập phương có độ dài cạnh bằng 15. Suy ra độ dài đường chéo OD_1' của hình lập phương đó bằng $15\sqrt{3}$.
Do chiếc đèn ở vị trí cân bằng nên $\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{F_3} = \overrightarrow{P}$, ở đó $\overrightarrow{P}$ là trọng lực tác dụng lên chiếc đèn. Suy ra trọng lượng của chiếc đèn là $\left|\overrightarrow{P}\right| = \left|\overrightarrow{OD_1'}\right| = 15\sqrt{3}$ (N).



CÂU 53. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Xét các điểm M, N lần lượt thuộc các đường thẳng $A'C$, $C'D$ sao cho đường thẳng MN song song với đường thẳng BD'. Khi đó tỉ số $\dfrac{MN}{BD'}$ bằng

Lời giải.

Đáp án: 0,25



Đặt $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{x}$, $\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{y}$, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{z}$.
Do $\overrightarrow{CM}$, $\overrightarrow{CA'}$ là hai vectơ cùng phương $\Rightarrow \exists k \in \mathbb{R}$: $\overrightarrow{CM} = k \cdot \overrightarrow{CA'}$.
Và $\overrightarrow{C'N}$, $\overrightarrow{C'D}$ là hai vectơ cùng phương $\Rightarrow \exists h \in \mathbb{R}$: $\overrightarrow{C'N} = h \cdot \overrightarrow{C'D}$.
Ta có: $\overrightarrow{BD'} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{x} + \overrightarrow{y} + \overrightarrow{z}$, (1)

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{CN} - \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{C'N} - \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CC'} + h \cdot \overrightarrow{C'D} - k \cdot \overrightarrow{CA'} \quad (2)$$

$$= \overrightarrow{y} + h \cdot (-\overrightarrow{y} + \overrightarrow{x}) - k \cdot (\overrightarrow{y} - \overrightarrow{z} + \overrightarrow{x}) = (h-k) \cdot \overrightarrow{x} + (1-h-k) \cdot \overrightarrow{y} + k \cdot \overrightarrow{z}$$

Do $MN \parallel B'D$ nên tồn tại $t \in \mathbb{R}$: $\overrightarrow{MN} = t \cdot \overrightarrow{BD'}$.

Từ (1) và (2) ta có $\begin{cases} h - k = t \\ 1 - h - k = t \\ k = t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = t \\ h = 2t \\ 1 - 3t = t \end{cases} \Rightarrow t = \dfrac{1}{4} \Rightarrow \overrightarrow{MN} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{BD'}$.

Vậy $\dfrac{MN}{BD'} = \dfrac{1}{4} = 0,25$.

Dạng 2. Xác định góc và tính tích vô hướng của hai véctơ

BÀI TẬP TỰ LUẬN

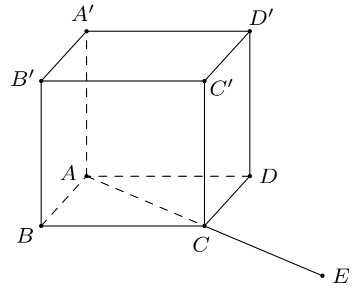
VÍ DỤ 1. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng 5.

a) Tìm góc giữa các cặp véc-tơ sau: $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{B'D'}$; $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{CD}$; $\overrightarrow{AD'}$ và $\overrightarrow{BD}$.

b) Tính các tích vô hướng $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{B'D'}$; $\overrightarrow{AD'} \cdot \overrightarrow{BD}$;

c) Chứng minh $\overrightarrow{AC'}$ vuông góc với $\overrightarrow{BD}$.

Lời giải.



a) Ta có :

- $\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}\right)=\widehat{CAB}=45^\circ$
- $\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{B'D'}\right)=\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BD}\right)=90^\circ$.
- $\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{CD}\right)=\left(\overrightarrow{CE},\overrightarrow{CD}\right)=180^\circ-45^\circ=135^\circ$ (E là điểm đối xứng của A qua C).
- $\overrightarrow{AD'}=\overrightarrow{BC'}\Rightarrow\left(\overrightarrow{AD'},\overrightarrow{BD}\right)=\left(\overrightarrow{BC'},\overrightarrow{BD}\right)=\widehat{C'BD}$. Lại có, tam giác $C'BD$ là tam giác đều nên $\widehat{C'BD}=60^\circ\Rightarrow\left(\overrightarrow{AD'},\overrightarrow{BD}\right)=60^\circ$.

b) Ta có $AC=BD=B'D'=5\sqrt{2}$. Suy ra

- $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}=AC.AB.\cos 45^\circ=25$.
- Do AC vuông góc $B'D'$ nên $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{B'D'}=0$.
- $\overrightarrow{AD'}\cdot\overrightarrow{BD}=AD'.BD.\cos 60^\circ=5\sqrt{2}.5\sqrt{2}.\dfrac{1}{2}=25$.

c) Ta cần chứng minh $\overrightarrow{AC'}\cdot\overrightarrow{BD}=0$.
Ta có: $\overrightarrow{AC'}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}$ và $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}$ nên

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC'}\cdot\overrightarrow{BD}&=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}\right)\cdot\left(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}\right)\\&=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AD}^2-\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{AB}=5^2-5^2=0\end{aligned}$$

Suy ra $\overrightarrow{AC'}$ vuông góc với $\overrightarrow{BD}$.

VÍ DỤ 2. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a và M là trung điểm của CD.

a) Tính các tích vô hướng $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM}$.

b) Tính góc $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD})$.

Lời giải.

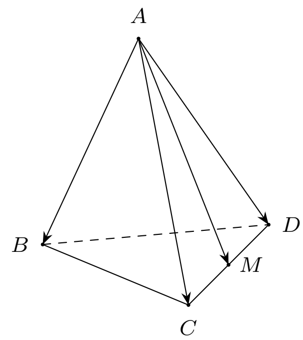
a) Ta có $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|\cdot\cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$

$$\begin{aligned}&=AB\cdot AC\cdot\cos\widehat{BAC}\\&=a\cdot a\cdot\cos 60^0\\&=\frac{a^2}{2}.\end{aligned}$$

Tương tự ta cũng có $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=\dfrac{a^2}{2}$.

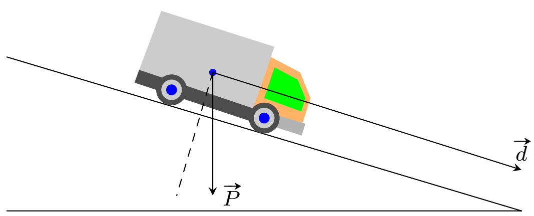
Ta lại có $\overrightarrow{AM}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD})$, suy ra

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}\cdot\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD})=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD})=\frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{2}+\frac{a^2}{2}\right)=\frac{a^2}{2}.$$



b) Ta có $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB})\cdot\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{CD}$.
Mà AM, BM là trung tuyến của các tam giác đều ACD, BCD nên $\overrightarrow{AM}\perp\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{MB}\perp\overrightarrow{CD}$.
Suy ra $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{CD}=0$.
Từ các kết quả trên ta có $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{CD}=0$. Suy ra $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD})=90^\circ$.

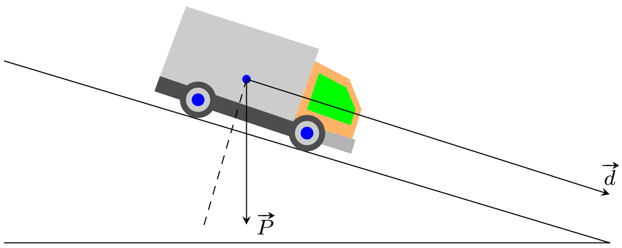
VÍ DỤ 3.
Cho biết công A (đơn vị: J) sinh bởi lực $\overrightarrow{F}$ tác dụng lên một vật được tính bằng công thức $A=\overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{d}$, trong đó $\overrightarrow{d}$ là vectơ biểu thị độ dịch chuyển của vật (đơn vị của $\left|\overrightarrow{d}\right|$ là m) khi chịu tác dụng của lực $\overrightarrow{F}$.



Một chiếc xe có khối lượng 1,5 tấn đang đi xuống trên một đoạn đường dốc có góc nghiêng 5° so với phương ngang. Tính công sinh bởi trọng lực $\overrightarrow{P}$ khi xe đi hết đoạn đường dốc dài 30 m (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị), biết rằng trọng lực $\overrightarrow{P}$

được xác định bởi công thức $\vec{P} = m\vec{g}$, với m (đơn vị: kg) là khối lượng của vật và $\vec{g}$ là gia tốc rơi tự do có độ lớn $g = 9{,}8$ m/s^2.

Lời giải.



Ta có 1,5 tấn = 1 500 kg.

Độ lớn của trọng lực tác dụng lên chiếc xe là $\left|\vec{P}\right| = m\left|\vec{g}\right| = 1\,500 \cdot 9{,}8 = 14\,700$ (N).

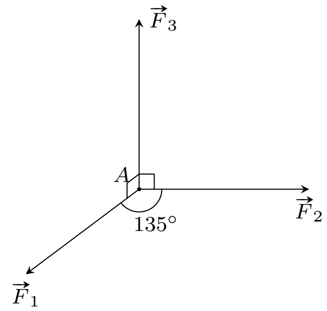
Vectơ d biểu thị độ dịch chuyển của xe có độ dài là $\left|\vec{d}\right| = 30$ (m) và $\left(\vec{P}, \vec{d}\right) = 90^\circ - 5^\circ = 85^\circ$.

Công sinh ra bởi trọng lực $\vec{P}$ khi xe đi hết đoạn đường dốc dài 30 m là

$$A = \vec{P} \cdot \vec{d} = \left|\vec{P}\right| \cdot \left|\vec{d}\right| \cdot \cos\left(\vec{P}, \vec{d}\right) = 14\,700 \cdot 30 \cdot \cos 85^\circ \approx 38\,436\ (J).$$

VÍ DỤ 4.

Một chất điểm A nằm trên mặt phẳng nằm ngang (α), chịu tác động bởi ba lực $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$. Các lực $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ có giá nằm trong (α) và $\left(\vec{F}_1, \vec{F}_2\right) = 135^\circ$, còn lực $\vec{F}_3$ có giá vuông góc với (α) và hướng lên trên. Xác định cường độ hợp lực của các lực $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$ biết rằng độ lớn của ba lực đó lần lượt là 20 N, 15 N và 10 N.



Lời giải.

Gọi $\vec{F}$ là hợp lực của các lực $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$, tức là $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$, ta có

$$\begin{aligned}\left|\vec{F}\right|^2 &= \left(\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3\right)^2 \\ &= \vec{F}_1^2 + \vec{F}_2^2 + \vec{F}_3^2 + 2\vec{F}_1 \cdot \vec{F}_2 + 2\vec{F}_2 \cdot \vec{F}_3 + 2\vec{F}_3 \cdot \vec{F}_1 \\ &= 20^2 + 15^2 + 10^2 + 2 \cdot 20 \cdot 15 \cdot \cos 135^\circ \\ &= 725 - 300\sqrt{2}.\end{aligned}$$

Vậy $\left|\vec{F}\right| = \sqrt{725 - 300\sqrt{2}} \approx 17{,}34$ (N).

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

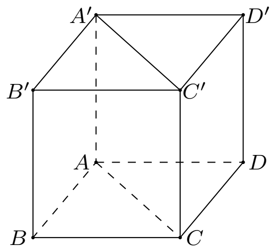
PHẦN I. *Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.*

CÂU 1.

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định **sai**?

A $\left(\overrightarrow{A'C'}, \overrightarrow{AD}\right) = 45^\circ$. **B** $\left(\overrightarrow{A'C'}, \overrightarrow{B'B}\right) = 90^\circ$.

C $\left(\overrightarrow{A'A}, \overrightarrow{CB'}\right) = 45^\circ$. **D** $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right) = 180^\circ$.



Lời giải.

- Ta có $\left(\overrightarrow{A'C'}, \overrightarrow{AD}\right) = \left(\overrightarrow{A'C'}, \overrightarrow{A'D'}\right) = \widehat{C'A'D'} = 45^\circ$.
- $\left(\overrightarrow{A'C'}, \overrightarrow{B'B}\right) = \left(\overrightarrow{A'C'}, \overrightarrow{A'A}\right) = \widehat{AA'C'} = 90^\circ$.

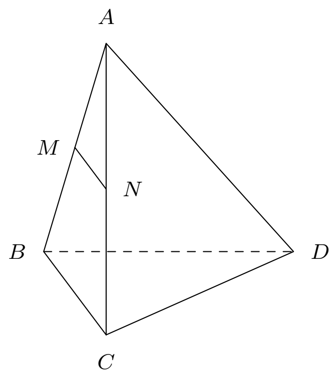
- Ta có $\overrightarrow{B'B} = \overrightarrow{A'A}$, suy ra
$\left(\overrightarrow{A'A}, \overrightarrow{CB'}\right) = \left(\overrightarrow{B'B}, \overrightarrow{CB'}\right) = 180^\circ - \widehat{BB'C} = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$

- $\overrightarrow{AB}$ ngược hướng với $\overrightarrow{CD}$ nên $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right) = 180^\circ$.

Chọn đáp án C .... □

CÂU 2.

Cho tứ diện đều $ABCD$, Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AB, AC. Hãy tính góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{BD}$.



A $\left(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{BD}\right) = 150^\circ$.
B $\left(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{BD}\right) = 120^\circ$.
C $\left(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{BD}\right) = 30^\circ$.
D $\left(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{BD}\right) = 60^\circ$.

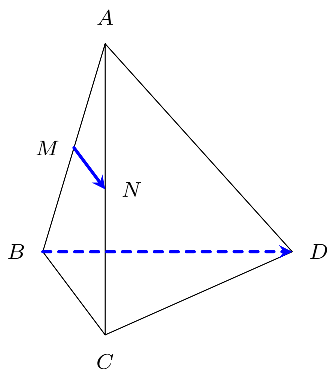
Lời giải.

Xét tam giác ABC có M, N là trung điểm của AB, AC nên MN là đường trung bình của tam giác ABC. Do đó $MN \parallel BC$.

Ta có $\left(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{BD}\right) = \left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}\right) = \widehat{CBD}$.

Vì $ABCD$ là tứ diện đều nên $BC = CD = DB$. Do đó tam giác BCD đều suy ra $\widehat{CBD} = 60^\circ$.

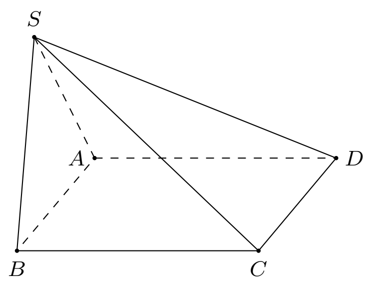
Vậy $\left(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{BD}\right) = 60^\circ$.



Chọn đáp án D .... □

CÂU 3.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành và mặt bên SAB là tam giác đều. Tính góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{DC}$ và $\overrightarrow{BS}$.



A $\left(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{BS}\right) = 120^\circ$.
B $\left(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{BS}\right) = 60^\circ$.
C $\left(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{BS}\right) = 90^\circ$.
D $\left(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{BS}\right) = 150^\circ$.

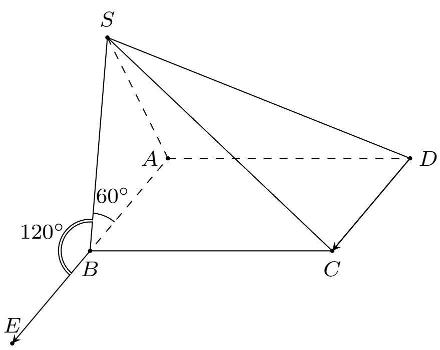
Lời giải.

Vì $ABCD$ là hình bình hành nên $AB \parallel DC$.

Trên tia AB lấy điểm E sao cho $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{DC}$ (Hình 2.20). Ta có

$$\left(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{BS}\right) = \left(\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{BS}\right) = \widehat{EBS} = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ.$$

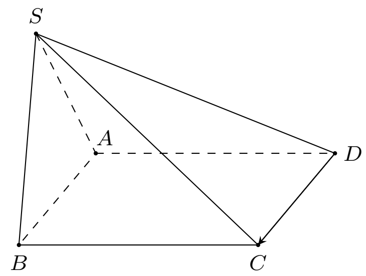
Vậy $\left(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{BS}\right) = 120^\circ$.



Chọn đáp án A .... □

CÂU 4.

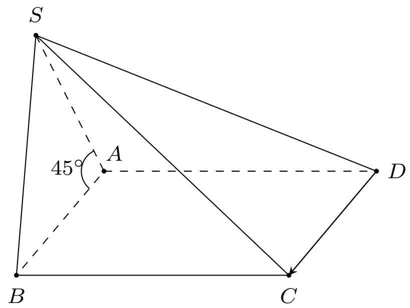
Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Mặt bên ASB là tam giác vuông cân tại S và có cạnh $AB = a$. Tính $\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{AS}$.



Ⓐ $\dfrac{a^2}{4}$.
Ⓑ $-\dfrac{a^2}{4}$.
Ⓒ $-\dfrac{a^2}{2}$.
Ⓓ $\dfrac{a^2}{2}$.

Lời giải.

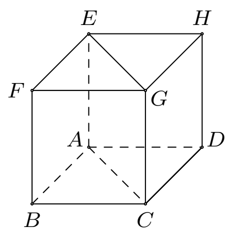
$\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{AS} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AS} = \left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AS}\right| \cdot \cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AS}\right) = a \cdot \dfrac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \cos 45^\circ = \dfrac{a^2}{2}$.



Chọn đáp án (D) .... □

CÂU 5.

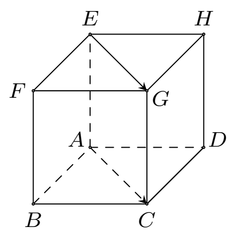
Cho hình lập phương $ABCD.EFGH$ có các cạnh bằng a. Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{EG}$.



Ⓐ $a^2\sqrt{2}$.
Ⓑ a^2.
Ⓒ $\dfrac{a^2\sqrt{2}}{2}$.
Ⓓ $a^2\sqrt{3}$.

Lời giải.

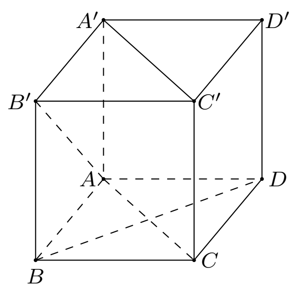
Ta có $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{EG} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \cdot AC \cdot \cos 45^\circ = a \cdot a\sqrt{2} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} = a^2$.



Chọn đáp án (B) .... □

CÂU 6.

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Tính $\overrightarrow{AB'} \cdot \overrightarrow{A'C'}$.



Ⓐ $\dfrac{a^2}{2}$.
Ⓑ $-a^2$.
Ⓒ a^2.
Ⓓ $-\dfrac{a^2}{2}$.

Lời giải.

Ta có $A'C' = AC$.

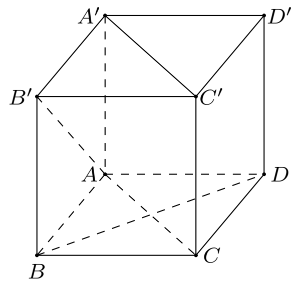
Vì $AB' = AC = B'C = a\sqrt{2}$ nên tam giác $AB'C$ đều. Suy ra $\widehat{B'AC} = 60^\circ$.

Ta có
$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB'} \cdot \overrightarrow{A'C'} &= \left|\overrightarrow{AB'}\right| \cdot \left|\overrightarrow{A'C'}\right| \cdot \cos\left(\overrightarrow{AB'}, \overrightarrow{A'C'}\right)\\ &= AB' \cdot A'C' \cdot \cos\left(\overrightarrow{AB'}, \overrightarrow{AC}\right)\\ &= AB' \cdot A'C' \cdot \cos\widehat{B'AC}\\ &= a\sqrt{2} \cdot a\sqrt{2} \cdot \cos 60^\circ = a^2.\end{aligned}$$

Chọn đáp án (C) .... □

CÂU 7.

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Tính $\overrightarrow{AB'} \cdot \overrightarrow{BD}$.



(A) $\dfrac{a^2}{2}$.
(B) $-a^2$.
(C) a^2.
(D) $-\dfrac{a^2}{2}$.

Lời giải.

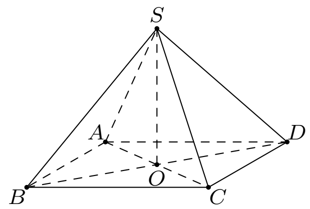
Ta có $ABCD.A'B'C'D$ là hình lập phương nên $\begin{cases} AA' \perp AB \\ AB \perp BC \\ \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \\ \overrightarrow{AB'} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}. \end{cases}$

Khi đó
$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB'} \cdot \overrightarrow{BD} &= \left(\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AB}\right) \cdot \left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}\right) \\ &= \overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}. \\ &= 0 + 0 - AB^2 + 0 = -a^2. \end{aligned}$$

Chọn đáp án C .... □

CÂU 8.

Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có độ dài tất cả các cạnh bằng a. Tính $\overrightarrow{AS} \cdot \overrightarrow{BC}$.



(A) $-\dfrac{a^2}{4}$.
(B) $\dfrac{a^2}{2}$.
(C) $-\dfrac{a^2}{2}$.
(D) $\dfrac{a^2}{4}$.

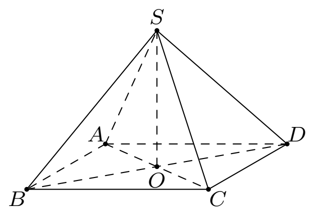
Lời giải.

Tam giác SAD có ba cạnh bằng nhau nên là tam giác đều, suy ra $\widehat{SAD} = 60^\circ$.
Tứ giác $ABCD$ là hình vuông nên $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$, suy ra $(\overrightarrow{AS}, \overrightarrow{BC}) = (\overrightarrow{AS}, \overrightarrow{AD}) = \widehat{SAD} = 60^\circ$.
Do đó $\overrightarrow{AS} \cdot \overrightarrow{BC} = |\overrightarrow{AS}| \cdot |\overrightarrow{BC}| \cdot \cos 60^\circ = a \cdot a \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{a^2}{2}$.

Chọn đáp án B .... □

CÂU 9.

Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có độ dài tất cả các cạnh bằng a. Tính $\overrightarrow{AS} \cdot \overrightarrow{AC}$.



(A) $-a^2$.
(B) $\dfrac{a^2}{2}$.
(C) $-\dfrac{a^2}{2}$.
(D) a^2.

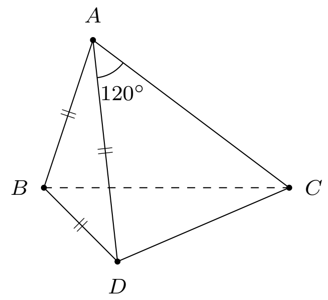
Lời giải.

Tứ giác $ABCD$ là hình vuông có độ dài mỗi cạnh là a nên độ dài đường chéo AC là $\sqrt{2}a$.
Tam giác SAC có $SA = SC = a$ và $AC = \sqrt{2}a$ nên tam giác SAC vuông cân tại S, suy ra $\widehat{SAC} = 45^\circ$.
Do đó $\overrightarrow{AS} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AS}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cdot \cos \widehat{SAC} = a \cdot \sqrt{2}a \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} = a^2$.

Chọn đáp án D .... □

CÂU 10.

Cho tứ diện $ABCD$ biết $AB = AD = BD = a$, $AC = 2a$ và $\widehat{CAD} = 120^\circ$. Tính $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD}$.



Ⓐ $-\dfrac{3}{2}a^2$.
Ⓑ $\dfrac{3}{2}a^2$.
Ⓒ $\dfrac{1}{2}a^2$.
Ⓓ $-\dfrac{1}{2}a^2$.

Lời giải.

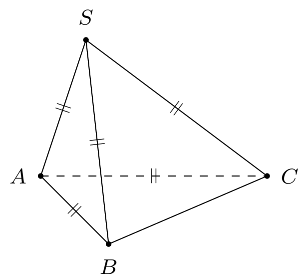
Theo giả thiết tam giác ABD là tam giác đều. Ta có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD} &= \left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right) \cdot \overrightarrow{AD} \\ &= \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} \\ &= AC \cdot AD \cdot \cos 120^\circ - AB \cdot AD \cdot \cos 60^\circ \\ &= \frac{-3}{2}a^2.\end{aligned}$$

Chọn đáp án Ⓐ ....

CÂU 11.

Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC = AB = AC = a$ và $BC = a\sqrt{2}$. Tính góc giữa các vectơ $\overrightarrow{SC}$ và $\overrightarrow{AB}$.

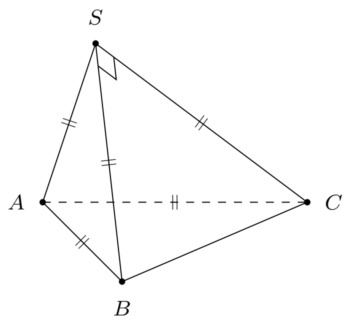


Ⓐ 60°.
Ⓑ 90°.
Ⓒ 120°.
Ⓓ 150°.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}\cos\left(\overrightarrow{SC}, \overrightarrow{AB}\right) &= \frac{\overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{SC}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AB}\right|} = \frac{\left(\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{AC}\right) \cdot \overrightarrow{AB}}{a^2} \\ &= \frac{\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}}{a^2}.\end{aligned}$$



Từ giả thiết suy ra SAB là tam giác đều và ABC là tam giác vuông cân tại A. Từ đó ta tính được $\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{AB} = a \cdot a \cdot \cos 120^\circ = -\dfrac{a^2}{2}$ và $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$.

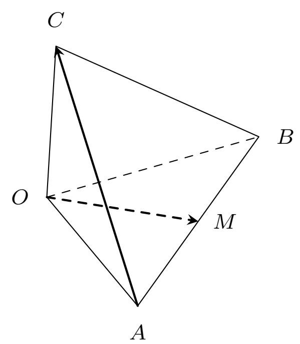
Suy ra $\cos\left(\overrightarrow{SC}, \overrightarrow{AB}\right) = -\dfrac{1}{2}$.

Vậy $\cos\left(\overrightarrow{SC}, \overrightarrow{AB}\right) = 120^\circ$.

Chọn đáp án Ⓒ ....

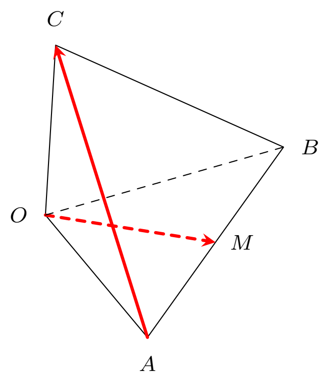
CÂU 12.

Cho tứ diện $OABC$ có các cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc và $OA = OB = OC = 1$. Gọi M là trung điểm của cạnh AB. Tính góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{OM}$ và $\overrightarrow{AC}$.



Ⓐ 90°.
Ⓑ 120°.
Ⓒ 60°.
Ⓓ 30°.

Lời giải.



Đặt $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$.
Khi đó, $|\vec{a}| = \left|\vec{b}\right| = |\vec{c}| = 1$ và $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c} = \vec{b} \cdot \vec{c} = 0$.

Ta có $\cos\left(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{AC}\right) = \dfrac{\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{OM}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AC}\right|}$.

Mặt khác do $\overrightarrow{OM} = \dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right) = \dfrac{1}{2}\left(\vec{a} + \vec{b}\right)$
và $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = \vec{c} - \vec{a}$
nên $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{AC} = \dfrac{1}{2}\left(\vec{a} + \vec{b}\right) \cdot (\vec{c} - \vec{a})$
$= \dfrac{1}{2}\left(\vec{a} \cdot \vec{c} - \vec{a}^2 + \vec{b} \cdot \vec{c} - \vec{b} \cdot \vec{a}\right) = -\dfrac{1}{2}$.

Ta lại có $\left|\overrightarrow{OM}\right| = OM = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\left|\overrightarrow{AC}\right| = AC = \sqrt{2}$.

Do đó $\cos\left(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{AC}\right) = \dfrac{\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{OM}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AC}\right|} = \dfrac{\frac{-1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{2}} = \dfrac{-1}{2}$.

Vậy $\left(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{AC}\right) = 120°$.

Chọn đáp án (B) .... □

CÂU 13. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh bằng a. Tích vô hướng của hai vectơ $\overrightarrow{DD'}$ và $\overrightarrow{A'C'}$ bằng

(A) $\sqrt{2}a^2$. **(B)** a^2. **(C)** $-\sqrt{2}a^2$. **(D)** 0.

Lời giải.

Ta có: $\overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{A'D'} + \overrightarrow{D'C'}$, mà tứ giác $ADD'A'$ và $DCC'D'$ là hình vuông nên $\overrightarrow{DD'} \cdot \overrightarrow{A'D'} = \overrightarrow{DD'} \cdot \overrightarrow{D'C'} = 0$. Do đó $\overrightarrow{DD'} \cdot \left(\overrightarrow{A'D'} + \overrightarrow{D'C'}\right) = 0$.

Chọn đáp án (D) .... □

PHẦN II. *Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.*

CÂU 14. Trong không gian, cho hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng có độ dài bằng 1. Biết rằng góc giữa hai véc-tơ đó là $45°$.

Mệnh đề	Đ	S
a) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.	X	
b) $\left(\vec{a} + 3\vec{b}\right) \cdot \left(\vec{a} - 2\vec{b}\right) = -5 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.	X	
c) $\left|\vec{a} + \vec{b}\right| = 2 + \sqrt{2}$.		X
d) $\left|\vec{a} - \sqrt{2}\vec{b}\right| = 0$.		X

Lời giải.

a) $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right| \cos\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

b) $\left(\vec{a} + 3\vec{b}\right) \cdot \left(\vec{a} - 2\vec{b}\right) = |\vec{a}|^2 + \cdot\vec{a} \cdot \vec{b} - 6\left|\vec{b}\right|^2 = 1 + \cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2} - 6 = -5 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

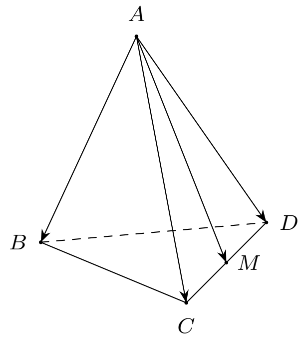
c) $\left(\vec{a} + \vec{b}\right)^2 = \vec{a}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2 = 1 + 2 \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} + 1 = 2 + \sqrt{2}$. Suy ra $\left|\vec{a} + \vec{b}\right| = \sqrt{2 + \sqrt{2}}$.

d) $\left(\vec{a} - \sqrt{2}\vec{b}\right)^2 = \vec{a}^2 + 2\sqrt{2}\vec{a} \cdot \vec{b} + 2\vec{b}^2 = 1 + 2\sqrt{2} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} + 2 = 2$. Suy ra $\left|\vec{a} - \sqrt{2}\vec{b}\right| = \sqrt{2}$.

Chọn đáp án | a đúng | b đúng | c sai | d sai | .... □

CÂU 15.

Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a và M là trung điểm của CD.



Mệnh đề	Đ	S
a) $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{CD}=0$.	X	
b) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\dfrac{a^2}{2}$.	X	

Mệnh đề	Đ	S
c) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=0$.	X	
d) $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AB}=-\dfrac{a^2}{2}$.		X

Lời giải.

a) Tam giác ACD đều, suy ra AM vuông góc với CD nên $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{CD}=0$.

b) Ta có
$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}&=|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|\cdot\cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})\\&=AB\cdot AC\cdot\cos\widehat{BAC}\\&=a\cdot a\cdot\cos 60^0\\&=\frac{a^2}{2}.\end{aligned}$$

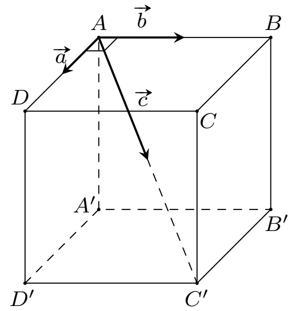
c) Ta có $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB})\cdot\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{CD}$.
Mà AM, BM là trung tuyến của các tam giác đều ACD, BCD nên $\overrightarrow{AM}\perp\overrightarrow{CD},\overrightarrow{MB}\perp\overrightarrow{CD}$.
Suy ra $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{CD}=0$.
Từ các kết quả trên ta có $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{CD}=0$. Suy ra $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD})=90°$.

d) Ta có $\overrightarrow{AM}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD})$, suy ra
$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}\cdot\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD})=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD})=\frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{2}+\frac{a^2}{2}\right)=\frac{a^2}{2}.$$

Chọn đáp án | a đúng | b đúng | c đúng | d sai | ☐

CÂU 16.

Một chất điểm ở vị trí đỉnh A của hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Chất điểm chịu tác động bởi ba lực $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ lần lượt cùng hướng với $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC'}$ như hình vẽ. Độ lớn của các lực $\vec{a}$, $\vec{b}$ và $\vec{c}$ tương ứng là 10 N, 10 N và 20 N.



Mệnh đề	Đ	S
a) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}$.		X
b) $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=20$ (N).		X
c) $\left|\vec{a}+\vec{c}\right|=\left|\vec{b}+\vec{c}\right|$.	X	
d) $\left|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right|=32{,}59$ (N) (*làm tròn kết quả đến hàng phần mười*).	X	

Lời giải.

Từ giả thiết, ta có $\vec{a}\perp\vec{b};\cos(\vec{a},\vec{c})=\cos\widehat{DAC'}=\dfrac{1}{\sqrt{3}};\cos\left(\vec{b},\vec{c}\right)=\cos\widehat{BAC'}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

a) Giả sử $\vec{a}+\vec{b}=\vec{d}$. Theo quy tắc hình bình hành thì $\vec{d}$ cùng hướng với $\overrightarrow{AC}$. Suy ra $\vec{a}+\vec{b}\neq\vec{c}$

b) $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=10\sqrt{2}$ (đường chéo hình vuông cạnh bằng 10).

c) Ta có

- $\left(\vec{a}+\vec{c}\right)^2=|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{c}+|\vec{c}|^2=10^2+2.10.20.\dfrac{1}{\sqrt{3}}+20^2=500+\dfrac{400\sqrt{3}}{3}$.

  Suy ra $\left|\vec{a}+\vec{c}\right|=\sqrt{500+\dfrac{400\sqrt{3}}{3}}$.

- $(\vec{b}+\vec{c})^2 = |\vec{b}|^2 + 2\vec{b}\cdot\vec{c} + |\vec{c}|^2 = 10^2 + 2.10.20.\dfrac{1}{\sqrt{3}} + 20^2 = 500 + \dfrac{400\sqrt{3}}{3}$.

  Suy ra $|\vec{b}+\vec{c}| = \sqrt{500 + \dfrac{400\sqrt{3}}{3}}$.

  Vậy $|\vec{a}+\vec{c}| = |\vec{b}+\vec{c}|$.

d) Giả sử lực tổng hợp là $\vec{m}$, tức là $\vec{m} = \vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$.
Do đó

$$\begin{aligned}
\vec{m} = \vec{a}+\vec{b}+\vec{c} &\Leftrightarrow |\vec{m}|^2 = \left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)^2\\
&\Leftrightarrow |\vec{m}|^2 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 + \vec{c}^2 + 2\vec{a}\cdot\vec{b} + 2\vec{b}\cdot\vec{c} + 2\vec{c}\cdot\vec{a}\\
&\Leftrightarrow |\vec{m}|^2 = 10^2 + 10^2 + 20^2 + 0 + 2\cdot 10\cdot 20\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} + 2\cdot 10\cdot 20\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\\
&\Leftrightarrow |\vec{m}|^2 = 10^2 + 10^2 + 20^2 + 0 + 2\cdot 10\cdot 20\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} + 2\cdot 10\cdot 20\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\\
&\Leftrightarrow |\vec{m}| \approx 32{,}59.
\end{aligned}$$

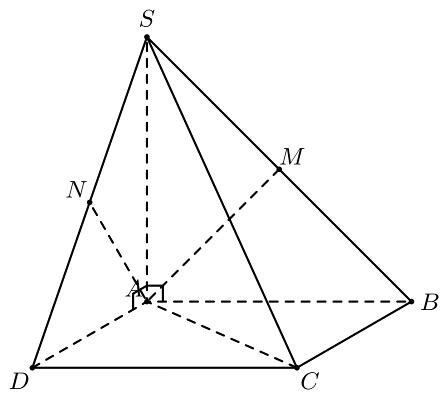
Vậy cường độ hợp lực của $\vec{a}$, $\vec{b}$ và $\vec{c}$ là $\approx 32{,}59$ (N).

Chọn đáp án | a sai | b sai | c đúng | d đúng | ....□

CÂU 17. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. Biết rằng cạnh $AB = a$, $AD = 2a$, cạnh bên $SA = 2a$ và vuông góc với mặt đáy. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh SB, SD. Các mệnh đề sau đúng hay sai ?

Mệnh đề	Đ	S
a) Hai vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ là hai vectơ cùng phương, cùng hướng.		X
b) Góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{SC}$ và $\overrightarrow{AC}$ bằng $60°$.		X
c) Tích vô hướng $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AB} = \dfrac{a^2}{2}$.	X	
d) Độ dài của vectơ $\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AN}$ là $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.		X

Lời giải.



a) $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{CD}$. Suy ra hai vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ là hai vectơ ngược hướng.

b) Ta có: $ABCD$ là hình chữ nhật nên: $AC = \sqrt{AB^2 + AD^2} = a\sqrt{5}$.
Hình chóp $S.ABCD$ có SA vuông góc với mặt đáy nên tam giác SAC là tam giác vuông tại A. Suy ra: $\tan\widehat{SCA} = \dfrac{SA}{AC} = \dfrac{2a}{a\sqrt{5}} \Rightarrow \widehat{SCA} \approx 41°48'$.
Ta có: $\left(\overrightarrow{SC}, \overrightarrow{AC}\right) = \left(\overrightarrow{CS}, \overrightarrow{CA}\right) = \widehat{SCA} \approx 41°48'$.

c) Hình chóp $S.ABCD$ có SA vuông góc với mặt đáy nên tam giác SAB là tam giác vuông tại A.
Suy ra: $SB = \sqrt{SA^2 + AB^2} = a\sqrt{5}$.
Trong tam giác SAB vuông tại A có AM là đường trung tuyến nên:
$AM = \dfrac{1}{2}SB = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$.
Lại có: M là trung điểm của SB nên $MB = \dfrac{1}{2}SB = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$.

Ta tính được: $\cos\widehat{MAB}=\dfrac{MA^2+AB^2-MB^2}{2MA\cdot AB}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

Mà: $\left(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AB}\right)=\widehat{MAB}$, suy ra:

$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AB}=\left|\overrightarrow{AM}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\cos\left(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AB}\right)=\dfrac{a\sqrt{5}}{2}\cdot a\cdot\dfrac{\sqrt{5}}{5}=\dfrac{a^2}{2}$.

d) Ta có: M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh SB, SD nên MN là đường trung bình của tam giác SBD. Do đó: $MN=\dfrac{1}{2}BD=\sqrt{AB^2+AD^2}=\dfrac{a\sqrt{5}}{2}$.

Suy ra: $\left|\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AN}\right|=\left|\overrightarrow{MN}\right|=\dfrac{a\sqrt{5}}{2}$.

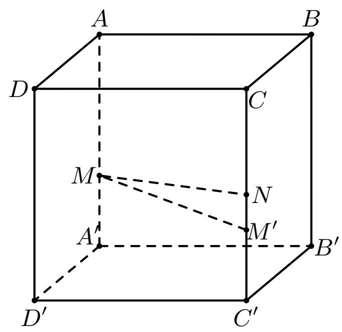
Chọn đáp án | a sai | b sai | c đúng | d sai | ☐

CÂU 18. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Trên các cạnh AA', CC' lần lượt lấy các điểm M, N sao cho $AM=\dfrac{2}{3}AA'$, $CN=NC'$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

Mệnh đề	Đ	S
a) Góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{AN}$ và $\overrightarrow{AC}$ bằng $60°$.		X
b) Độ dài của vectơ $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{AM}$ là $\dfrac{3a}{2}$.	X	

Mệnh đề	Đ	S
c) Tích vô hướng $\overrightarrow{AN}\cdot\overrightarrow{AC}=a^2$.		X
d) Tích vô hướng $\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{A'C'}=2a^2$.	X	

Lời giải.



a) Ta có: $AC=\sqrt{AB^2+AC^2}=a\sqrt{2}$.

Lại có: $CN=NC'$ nên $CN=NC'=\dfrac{a}{2}$.

$ABCD.A'B'C'D'$ là hình lập phương nên tam giác NAC là tam giác vuông tại C.

Suy ra: $\tan NAC=\dfrac{CN}{AC}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}\Rightarrow\widehat{NAC}\approx 19°28'$

Ta có: $\left(\overrightarrow{AN},\overrightarrow{AC}\right)=\widehat{NAC}\approx 19°28'$.

b) Trong tam giác NAC vuông tại C có: $AN=\sqrt{AC^2+CN^2}=\dfrac{3a}{2}$.

Ta có: $\left|\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{AM}\right|=\left|\overrightarrow{AN}\right|=\dfrac{3a}{2}$.

c) Ta có: $\tan\widehat{NAC}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}\Rightarrow\cos\widehat{NAC}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ (Do $\widehat{NAC}<90°$).

Do đó: $\overrightarrow{AN}\cdot\overrightarrow{AC}=\left|\overrightarrow{AN}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|\cdot\cos\left(\overrightarrow{AN},\overrightarrow{AC}\right)=\dfrac{3a}{2}\cdot a\sqrt{2}\cdot\dfrac{2\sqrt{2}}{3}=2a^2$.

d) Trên cạnh CC' lấy điểm M' sao cho: $\dfrac{CM'}{CC'}=\dfrac{2}{3}$.

Suy ra: $\begin{cases}NM'=NC'-M'C'=\dfrac{a}{6}\\ MM'\parallel AC\\ MM'=AC=a\sqrt{2}\end{cases}$.

Ta có: $\cos\widehat{NMM'}=\dfrac{NM^2+M'M^2-M'N^2}{2\cdot NM\cdot M'M}=\dfrac{6\sqrt{146}}{73}$.

Mặt khác: $\left(\overrightarrow{MN},\overrightarrow{A'C'}\right)=\left(\overrightarrow{MN},\overrightarrow{MM'}\right)=\widehat{NMM'}$.

Tam giác MNM' vuông tại M' có: $MN=\sqrt{M'N^2+M'M^2}=\dfrac{a\sqrt{73}}{6}$.

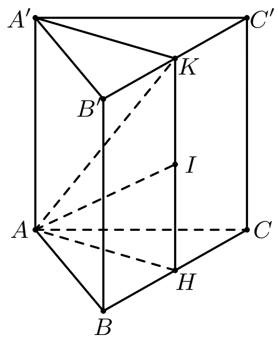
Do đó: $\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{A'C'}=\left|\overrightarrow{MN}\right|\cdot\left|\overrightarrow{A'C'}\right|\cdot\cos\left(\overrightarrow{MN},\overrightarrow{A'C'}\right)=2a^2$.

Chọn đáp án | a sai | b đúng | c sai | d đúng | ☐

CÂU 19. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ đáy là tam giác đều cạnh $2a$, $AA' = a\sqrt{3}$. H, K lần lượt là trung điểm BC, $B'C'$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

Mệnh đề	Đ	S
a) Hai vectơ $\overrightarrow{AH}$, $\overrightarrow{KA'}$ là hai vectơ cùng phương, cùng hướng.		X
b) Góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{A'H}$ và $\overrightarrow{AH}$ bằng 60°.		X
c) Tích vô hướng $\overrightarrow{AK} \cdot \overrightarrow{AB'} = \dfrac{5a^2}{2}$.		X
d) Độ dài của vectơ $\overrightarrow{AK} + \overrightarrow{AH}$ là $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.	X	

Lời giải.



a) Ta có tam giác $\triangle ABC, \triangle A'B'C'$ đều cạnh $2a$ suy ra $A'K = AH = a\sqrt{3}$
Xét tứ giác $AA'KH$ có $AA' = KH = AH = A'K = a\sqrt{3}$, $AA' \perp AH$ suy ra tứ giác $AA'KH$ là hình vuông , từ đó dễ thấy hai vectơ $\overrightarrow{AH}$, $\overrightarrow{KA'}$ là hai vecto cùng phương ngược hướng.

b) Ta có: $AA'KH$ là hình vuông suy ra $\widehat{A'HA} = 45^\circ$
Có $A'A \perp AH \Rightarrow \triangle A'AH$ vuông tại $A \Rightarrow \left(\overrightarrow{A'H}, \overrightarrow{AH}\right) = \widehat{A'HA} = 45^\circ$.

c) Ta có $\triangle AB'C'$ cân tại A, suy ra $AK \perp B'C'$, $AK = a\sqrt{6}, B'K = a$
$AB' = \sqrt{AB^2 + BB'^2} = \sqrt{4a^2 + 3a^2} = a\sqrt{7}$
Xét $\triangle AKB'$ có $\cos\widehat{KAB'} = \dfrac{AK}{AB'} = \dfrac{a\sqrt{6}}{a\sqrt{7}} = \sqrt{\dfrac{6}{7}}$.
$\overrightarrow{AK} \cdot \overrightarrow{AB'} = AK \cdot AB' \cdot \cos\widehat{KAB'} = a\sqrt{6} \cdot a\sqrt{7} \cdot \sqrt{\dfrac{6}{7}} = 6a^2$.

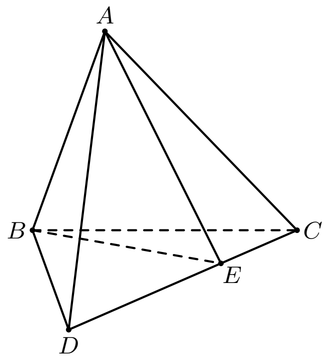
d) Gọi I là trung điểm $HK \Rightarrow IH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, $AI = \sqrt{IH^2 + AH^2} = \sqrt{\dfrac{3a^2}{4} + 3a^2} = \dfrac{a\sqrt{15}}{2}$.
Ta có $\left|\overrightarrow{AK} + \overrightarrow{AH}\right| = \left|2 \cdot \overrightarrow{AI}\right| = 2AI = a\sqrt{15}$.

Chọn đáp án | a sai | b sai | c sai | d đúng | ☐

CÂU 20. Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh a. E là điểm trên đoạn CD sao cho $ED = 2CE$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

Mệnh đề	Đ	S
a) Có 6 vectơ (khác vectơ $\vec{0}$) có điểm đầu và điểm cuối được tạo thành từ các đỉnh của tứ diện.		X
b) Góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BC}$ bằng 60°.		X
c) Nếu $\overrightarrow{BE} = m\overrightarrow{BA} + n\overrightarrow{BC} + p\overrightarrow{BD}$ thì $m + n + p = \dfrac{2}{3}$.		X
d) Tích vô hướng $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BE} = \dfrac{a^2}{6}$.	X	

Lời giải.



a) Số vectơ (khác $\vec{0}$) có điểm đầu và điểm cuối được tạo thành từ các đỉnh của tứ diện là $A_4^2 = 12$.

b) $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = 180^\circ - (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = 180^\circ - \widehat{ABC} = 120^\circ$.

c) $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{BC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BC} + \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BC}\right) = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BD}$.
Do đó $m = 0, n = \frac{2}{3}, p = \frac{1}{3}$. Suy ra $m + n + p = 1$.

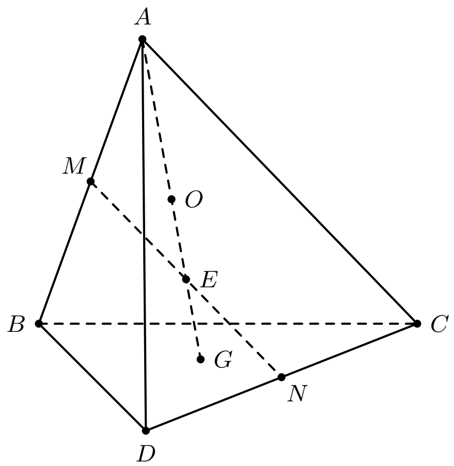
d) Ta có: $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AB} = \left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CE}\right) - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{AB}$
$= \overrightarrow{AC} + \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}\right) - \overrightarrow{AB} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}$
Suy ra: $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AD} \cdot \left(\frac{2}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}\right) = \frac{2}{3} \cdot \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC} + \frac{1}{3} \cdot \overrightarrow{AD}^2 - \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB}$
$= \frac{2}{3} \cdot a \cdot a \cdot \cos 60^\circ + \frac{1}{3}a^2 - a \cdot a \cdot \cos 60^\circ = \frac{a^2}{6}$.

Chọn đáp án | a sai | b sai | c sai | d đúng | .... □

CÂU 21. Cho tứ diện $ABCD$ có cạnh a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

Mệnh đề	Đ	S
a) $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ cùng hướng.		X
b) $\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{ED} = \vec{0}$ với E là trung điểm MN.	X	
c) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = \vec{0}$.	X	
d) Điểm I xác định bởi $P = 3\overrightarrow{IA}^2 + \overrightarrow{IB}^2 + \overrightarrow{IC}^2 + \overrightarrow{ID}^2$ có giá trị nhỏ nhất. Khi đó giá trị nhỏ nhất của P là $2a^2$.	X	

Lời giải.



a) $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ ngược hướng.

b) Vì M là trung điểm AB nên $\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EB} = 2\overrightarrow{EM}$, N là trung điểm CD nên $\overrightarrow{EC} + \overrightarrow{ED} = 2\overrightarrow{EN}$.
Ta có $\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{ED} = 2\left(\overrightarrow{EM} + \overrightarrow{EN}\right) = \vec{0}$.

c) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}=\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}\right)\cdot\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}$

$=\overrightarrow{AC}\cdot\left(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DB}\right)+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CD}$

$=\overrightarrow{CB}\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}\right)+\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CD}=\vec{0}$

d) Gọi O là điểm thoả mãn hệ thức $3\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$ suy ra O cố định vì A, B, C, D cố định. Ta có

$$\begin{aligned}P&=3\overrightarrow{IA}^2+\overrightarrow{IB}^2+\overrightarrow{IC}^2+\overrightarrow{ID}^2\\&=3\left(\overrightarrow{IO}+\overrightarrow{OA}\right)^2+\left(\overrightarrow{IO}+\overrightarrow{OB}\right)^2+\left(\overrightarrow{IO}+\overrightarrow{OC}\right)^2+\left(\overrightarrow{IO}+\overrightarrow{OD}\right)^2\\&=6IO^2+3OA^2+OB^2+OC^2+OD^2+2\overrightarrow{IO}\left(3\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\right)\\&=6IO^2+3OA^2+OB^2+OC^2+OD^2.\end{aligned}$$

Do đó để P nhỏ nhất thì I trùng với O. Gọi G là trọng tâm tam giác BCD.
Vì $3\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=3\overrightarrow{OA}+\left(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\right)=3\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OG}$ nên $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OG}=\vec{0}$.
Suy ra O là trung điểm của AG.
Ta có $BG=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{a\sqrt{3}}{2}=\dfrac{a}{\sqrt{3}}\Rightarrow AG=\sqrt{AB^2-BG^2}=\sqrt{a^2-\left(\dfrac{a}{\sqrt{3}}\right)^2}=\dfrac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$
$\Rightarrow OA=\dfrac{1}{2}AG=\dfrac{a}{\sqrt{6}}\Rightarrow OA^2=\dfrac{a^2}{6}$.
Lại có $OD^2=OC^2=OB^2=OG^2+BG^2=\dfrac{a^2}{6}+\dfrac{a^2}{3}=\dfrac{a^2}{2}$.
Vậy giá trị nhỏ nhất là $P=3\cdot\dfrac{a^2}{6}+3\cdot\dfrac{a^2}{2}=2a^2$ khi I trùng với O.

Chọn đáp án | a sai | b đúng | c đúng | d đúng | ………………………… □

PHẦN III. *Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.*

CÂU 22. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng 4. Giá trị tích vô hướng $\overrightarrow{AB}\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CA}\right)$ bằng

Lời giải.

Đáp án: 24

$$\overrightarrow{AB}\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CA}\right)=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}^2+|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|\cdot\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$$
$$=AB^2+AB\cdot AC\cdot\cos\left(\widehat{BAC}\right)=4^2+4\cdot4\cdot\cos60^\circ=4^2+\frac{4^2}{2}=\frac{3\cdot4^2}{2}=24.$$

CÂU 23. Trong không gian, cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ có cùng độ dài bằng 6. Biết độ dài của vectơ $\vec{a}+2\vec{b}$ bằng $6\sqrt{3}$. Biết số đo góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là x độ. Giá trị của x là bao nhiêu?

Lời giải.

Đáp án: 120

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{1}{4}\left[\left(\vec{a}+2\vec{b}\right)^2-\vec{a}^2-4\vec{b}^2\right]=\frac{1}{4}\left[\left|\vec{a}+2\vec{b}\right|^2-|\vec{a}|^2-4|\vec{b}|^2\right]=\frac{1}{4}\left[\left(6\sqrt{3}\right)^2-6^2-4\cdot6^2\right]=-18.$$

Lại có $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)\Leftrightarrow\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\dfrac{-18}{6\cdot6}=\dfrac{-1}{2}\Leftrightarrow\left(\vec{a},\vec{b}\right)=120^\circ$.

Khi đó góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là 120°.

CÂU 24. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng 2. Tính $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A'C'}$.

Lời giải.

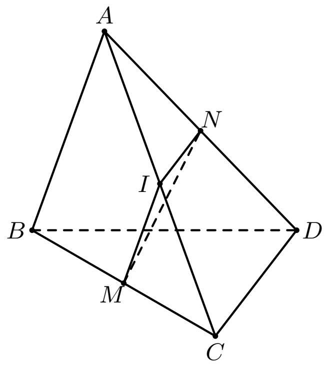
Đáp án: 4

Ta có: $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A'C'}\right)=\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=45^\circ$.
Khi đó: $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A'C'}=AB\cdot A'C'\cdot\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A'C'}\right)=2\cdot2\sqrt{2}\cdot\cos45^\circ=4$.

CÂU 25. Cho tứ diện $ABCD$, gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC và AD, biết $AB=a$, $CD=a$, $MN=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Tìm số đo (đơn vị độ) góc giữa hai đường thẳng AB và CD.

Lời giải.

Đáp án: 60



Gọi I là trung điểm của AC.

Ta có $\begin{cases} IM \parallel AB \\ IN \parallel CD \end{cases} \Rightarrow \widehat{(AB, CD)} = \widehat{(IM, IN)}$.

Đặt $\widehat{MIN} = \alpha$. Xét tam giác IMN, có: $IM = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{a}{2}$, $IN = \dfrac{CD}{2} = \dfrac{a}{2}$, $MN = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Theo định lý cosin, có $\cos\alpha = \dfrac{IM^2 + IN^2 - MN^2}{2 \cdot IM \cdot IN} = -\dfrac{1}{2} < 0$.

$\Rightarrow \widehat{MIN} = 120^\circ \Rightarrow \widehat{(AB, CD)} = 60^\circ$.

CÂU 26. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{A'B}$ và $\overrightarrow{AC'}$ bằng

Lời giải.

Đáp án: 90

$\overrightarrow{A'B} = \overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AA'}$.

$\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}$.

$\Rightarrow \overrightarrow{A'B} \cdot \overrightarrow{AC'} = \left(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AA'}\right) \cdot \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}\right) = \overrightarrow{AB}^2 - \overrightarrow{AA'}^2 = 0$.

$\Rightarrow$ Góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{A'B}$ và $\overrightarrow{AC'}$ bằng 90°.

CÂU 27. Cho hình chóp $S.ABC$ có SA, SB, SC đôi một vuông góc nhau và $SA = SB = SC = a$. Gọi M là trung điểm của AB. Góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{SM}$ và $\overrightarrow{BC}$ bằng

Lời giải.

Đáp án: 120

Ta có $\cos\left(\overrightarrow{SM}, \overrightarrow{BC}\right) = \dfrac{\overrightarrow{SM} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{SM}| \cdot |\overrightarrow{BC}|} = \dfrac{\overrightarrow{SM} \cdot \overrightarrow{BC}}{SM \cdot BC}$.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{SM} \cdot \overrightarrow{BC} &= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB}\right) \cdot \left(\overrightarrow{SC} - \overrightarrow{SB}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SC} - \overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SB} \cdot \overrightarrow{SC} - \overrightarrow{SB} \cdot \overrightarrow{SB}\right) \\
&= -\frac{1}{2}\overrightarrow{SB} \cdot \overrightarrow{SB} = -\frac{1}{2}SB^2 = -\frac{a^2}{2}.
\end{aligned}$$

Tam giác SAB và SBC vuông cân tại S nên $AB = BC = a\sqrt{2}$.

$\Rightarrow SM = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Do đó $\cos\left(\overrightarrow{SM}, \overrightarrow{BC}\right) = \dfrac{-\dfrac{a^2}{2}}{\dfrac{a\sqrt{2}}{2} \cdot a\sqrt{2}} = -\dfrac{1}{2}$. Suy ra $\left(\overrightarrow{SM}, \overrightarrow{BC}\right) = 120^\circ$.

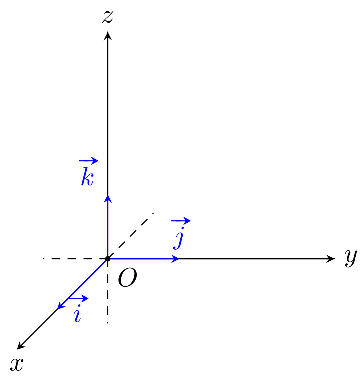
Bài 2. TỌA ĐỘ CỦA VÉC TƠ TRONG KHÔNG GIAN

A. LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1. Hệ tọa độ trong không gian

Trong không gian, ba trục Ox, Oy, Oz đôi một vuông góc với nhau tại gốc O của mỗi trục. Gọi $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ lần lượt là các véc-tơ đơn vị trên các trục Ox, Oy, Oz.

- Hệ ba trục như vậy được gọi là hệ trục toạ độ Descartes vuông góc $Oxyz$, hay đơn giản là hệ toạ độ $Oxyz$. Điểm O được gọi là gốc toạ độ.
- Các mặt phẳng (Oxy), (Oyz), (Ozx) đôi một vuông góc với nhau được gọi là các mặt phẳng toạ độ.
- $\vec{i}^2 = \vec{j}^2 = \vec{k}^2 = 1$ và $\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{i} = 0$



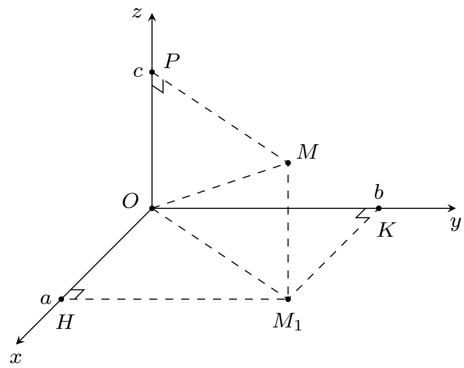
Không gian với hệ toạ độ $Oxyz$ còn được gọi là không gian $Oxyz$.

2. Tọa độ của điểm

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm M. Tọa độ điểm M được xác định như sau:

- Xác định hình chiếu M_1 của điểm M trên mặt phẳng Oxy. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, tìm hoành độ a, tung độ b của điểm M_1.
- Xác định hình chiếu P của điểm M trên trục cao Oz, điểm P ứng với số c trên trục Oz. Số c là cao độ của điểm M.

Bộ số $(a; b; c)$ là toạ độ của điểm M trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, kí hiệu là $M(a; b; c)$.



3. Tọa độ của vectơ

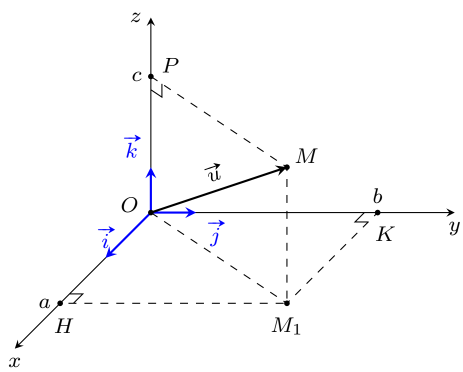
Trong không gian $Oxyz$:

- Toạ độ của điểm M cũng là toạ độ của vectơ $\overrightarrow{OM}$.
- Cho $\vec{u}$. Dựng điểm $M(a; b; c)$ thỏa $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$ thì tọa độ của điểm M là tọa độ của $\vec{u}$. Theo hình vẽ thì

$$\vec{u} = \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{OK} + \overrightarrow{OP} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}.$$

Suy ra

$$\vec{u} = (a; b; c) \Leftrightarrow \vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}.$$



Tọa độ các véc tơ đơn vị lần lượt là: $\vec{i} = (1; 0; 0)$, $\vec{j} = (0; 1; 0)$, $\vec{k} = (0; 0; 1)$.

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Dạng 3. Tọa độ điểm, tọa độ vec tơ

Khi xác định tọa độ điểm, tọa độ véc tơ ta chú ý các kết quả sau:

① $\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k} \Leftrightarrow \vec{u} = (a; b; c)$.

② $\vec{u}(u_1; u_2; u_3) = \vec{v}(v_1; v_2; v_3) \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = v_1 \\ u_2 = v_2 \\ u_3 = v_3 \end{cases}$

③ $\overrightarrow{OM} = (a; b; c)$ thì $M(a; b; c)$.

④ $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$.

⑤ Chiếu điểm $M(a; b; c)$ lên mặt phẳng tọa độ (hoặc trục tọa độ) thì "thành phần bị khuyết" bằng 0. Chẳng hạn: $M(1; 2; 3)$ chiếu lên (Oxy) thì $z = 0$. Suy ra hình chiếu là $M_1(1; 2; 0)$.

⑥ Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành khi và chỉ khi

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$$

BÀI TẬP TỰ LUẬN

VÍ DỤ 1. Trong không gian $Oxyz$, cho $A(3;-2;-1)$. Gọi A_1, A_2, A_3 lần lượt là hình chiếu của điểm A trên các mặt phẳng toạ độ $(Oxy), (Oyz), (Oxz)$. Tìm toạ độ của các điểm A_1, A_2, A_3.

Lời giải.

Toạ độ của các điểm $A_1 = (3;-2;0)$.
Toạ độ của các điểm $A_2 = (3;0;-1)$.
Toạ độ của các điểm $A_3 = (0;-2;-1)$

VÍ DỤ 2. Trong không gian $Oxyz$, cho $A(-2;3;4)$. Gọi H, K, P lần lượt là hình chiếu của điểm A trên các trục Ox, Oy, Oz. Tìm tọa độ của các điểm H, K, P.

Lời giải.

Tìm tọa độ của các điểm $H = (-2;0;0)$.
Tìm tọa độ của các điểm $K = (0;3;0)$.
Tìm tọa độ của các điểm $P = (0;0;4)$.

VÍ DỤ 3. Trong không gian $Oxyz$, cho $A(1;1;-2)$, $B(4;3;1)$ và $C(-1;-2;2)$.

a) Tìm tọa độ của véctơ $\overrightarrow{AB}$.

b) Tìm toạ độ của điểm D sao cho $ABCD$ là hình bình hành.

Lời giải.

a) Ta có $\overrightarrow{AB} = (4-1;3-1;1-(-2)) = (3;2;3)$.

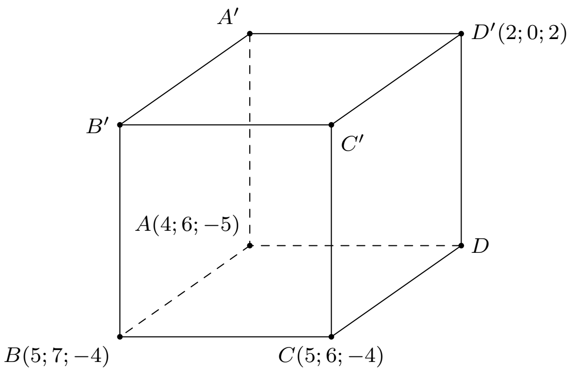
b) Gọi tọa độ của điểm D là $(x_D;y_D;z_D)$, ta có $\overrightarrow{DC} = (-1-x_D;-2-y_D;2-z_D)$.
Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành khi và chỉ khi

$$\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \begin{cases} -1-x_D = 3 \\ -2-y_D = 2 \\ 2-z_D = 3. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = -4 \\ y_D = -4 \\ z_D = -1. \end{cases}$$

Vậy $D(-4;-4;-1)$.

VÍ DỤ 4. Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD \cdot A'B'C'D'$ có $A(4;6;-5)$, $B(5;7;-4)$, $C(5;6;-4)$, $D'(2;0;2)$. Tìm tọa độ các đỉnh còn lại của hình hộp $ABCD \cdot A'B'C'D'$.

Lời giải.



Ta có $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = x_A - x_B + x_C \\ y_D = y_A - y_B + y_C \\ z_D = z_A - z_B + z_C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = 4 \\ y_D = 5 \\ z_D = -5 \end{cases}$. Suy ra $D(4;5;-5)$.

Do đó $\overrightarrow{DD'} = (2-4;0-5;2-(-5)) = (-2;-5;7)$.

Theo tính chất của hình hộp ta có $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{DD'} = (-2;-5;7)$. Suy ra tọa độ đỉnh còn lại của hình hộp là $A' = (2;1;2)$, $B'(3;2;3)$, $C'(3;1;3)$.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.

CÂU 1. Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a}=-2\vec{i}+3\vec{j}+5\vec{k}$. Toạ độ của véc-tơ $\vec{a}$ là

Ⓐ $(2;-3;-5)$. Ⓑ $(2;3;-5)$. Ⓒ $(-2;3;5)$. Ⓓ $(2;3;5)$.

Lời giải.

Toạ độ của véc-tơ $\vec{a}$ là $(-2;3;5)$.

Chọn đáp án C ☐

CÂU 2. Trong không gian $Oxyz$, cho véc-tơ $\vec{u}=3\vec{i}+4\vec{k}-\vec{j}$. Tọa độ của véc-tơ $\vec{u}$ là

Ⓐ $(3;-1;4)$. Ⓑ $(3;4;-1)$. Ⓒ $(4;-1;3)$. Ⓓ $(4;3;-1)$.

Lời giải.

Tọa độ của véc-tơ $\vec{u}$ là $(3;-1;4)$.

Chọn đáp án A ☐

CÂU 3. Trong không gian $Oxyz$, điểm nào sau đây thuộc trục Oz?

Ⓐ $M(1;0;0)$. Ⓑ $M(1;0;2)$. Ⓒ $M(1;2;0)$. Ⓓ $M(0;0;-2)$.

Lời giải.

Ta có $M(0;0;-2)\in Oz$.

Chọn đáp án D ☐

CÂU 4. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm M thỏa $\overrightarrow{OM}=2\vec{i}+\vec{j}$. Tọa độ điểm M là

Ⓐ $M(0;2;1)$. Ⓑ $M(1;2;0)$. Ⓒ $M(2;0;1)$. Ⓓ $M(2;1;0)$.

Lời giải.

Tọa độ $\overrightarrow{OM}=2\vec{i}+\vec{j}=(2;0;0)+(0;1;0)=(2;1;0)$.

Vậy $M(2;1;0)$.

Chọn đáp án D ☐

CÂU 5. Trong không gian $Oxyz$, cho vectơ $\overrightarrow{OA}=\vec{j}-2\vec{k}$. Tọa độ điểm A là

Ⓐ $(1;0;-2)$. Ⓑ $(0;1;-2)$. Ⓒ $(0;-1;2)$. Ⓓ $(1;-2;0)$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{OA}=\vec{j}-2\vec{k}\Leftrightarrow A(0;1;-2)$.

Chọn đáp án B ☐

CÂU 6. Trong không gian $Oxyz$, xác định toạ độ của điểm A biết A nằm trên tia Ox và $OA=2$.

Ⓐ $A(0;0;2)$. Ⓑ $A(2;2;0)$. Ⓒ $A(0;2;0)$. Ⓓ $A(2;0;0)$.

Lời giải.

A nằm trên tia Ox và $OA=2$ nên $A(2;0;0)$.

Chọn đáp án D ☐

CÂU 7. Trong không gian $Oxyz$, xác định toạ độ của điểm A biết A nằm trên tia đối của tia Oy và $OA=3$.

Ⓐ $A(0;3;0)$. Ⓑ $A(0;-3;0)$. Ⓒ $A(0;-9;0)$. Ⓓ $A(3;-3;0)$.

Lời giải.

A nằm trên tia đối của tia Oy và $OA=3$ nên $A(0;-3;0)$.

Chọn đáp án B ☐

CÂU 8. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;-1;2)$ và $B(2;1;-4)$. Véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ có tọa độ là

Ⓐ $(-1;-2;6)$. Ⓑ $(3;0;-2)$. Ⓒ $(1;0;-6)$. Ⓓ $(1;2;-6)$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(1;2;-6)$.

Chọn đáp án D ☐

CÂU 9. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;3;-2)$, $B(3;-2;4)$. Véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ có tọa độ là

Ⓐ $(2;5;6)$. Ⓑ $(4;1;2)$. Ⓒ $(2;-5;6)$. Ⓓ $(-2;5;6)$.

Lời giải.

Véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ có tọa độ là $(2;-5;6)$.

Chọn đáp án C ☐

CÂU 10. Cho hai điểm A, B thỏa mãn $\overrightarrow{OA}=(2;-1;3)$ và $\overrightarrow{OB}=(5;2;-1)$. Tìm tọa độ véc-tơ $\overrightarrow{AB}$.

Ⓐ $\overrightarrow{AB}=(2;-1;3)$. Ⓑ $\overrightarrow{AB}=(3;3;-4)$. Ⓒ $\overrightarrow{AB}=(7;1;2)$. Ⓓ $\overrightarrow{AB}=(3;-3;4)$.

Lời giải.

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(5-2;2+1;-1-3)=(3;3;-4)$.

Chọn đáp án B ☐

CÂU 11. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm M và N biết $M(2;1;-1)$ và $\overrightarrow{MN}=(-1;2-3)$. Tọa độ N là

(A) $N(1;-3;-4)$. (B) $N(1;3;-4)$. (C) $N(-1;3;-4)$. (D) $N(1;3;4)$.

Lời giải.

Gọi $N(x,y,z)$, khi đó ta có $\begin{cases}x-2=-1\\y-1=2\\z+1=-3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=1\\y=3\\z=-4\end{cases} \Rightarrow N(1;3;-4)$.

Chọn đáp án (B) .... □

CÂU 12. Hình chiếu vuông góc của điểm $A(3;-4;5)$ trên mặt phẳng (Oxz) là điểm

(A) $M(3;0;0)$. (B) $M(0;-4;5)$. (C) $M(0;0;5)$. (D) $M(3;0;5)$.

Lời giải.

Hình chiếu vuông góc của điểm $A(3;-4;5)$ trên mặt phẳng (Oxz) là điểm $M(3;0;5)$.

Chọn đáp án (D) .... □

CÂU 13. Hình chiếu vuông góc của điểm $A(1;2;3)$ trên mặt phẳng (Oxy) là điểm

(A) $M(0;0;3)$. (B) $N(1;2;0)$. (C) $Q(0;2;0)$. (D) $P(1;0;0)$.

Lời giải.

Hình chiếu vuông góc của điểm $A(1;2;3)$ trên mặt phẳng (Oxy) là điểm $N(1;2;0)$.

Chọn đáp án (B) .... □

CÂU 14. Hình chiếu vuông góc của điểm $M(2;1;-3)$ lên mặt phẳng (Oyz) có tọa độ là

(A) $(2;0;0)$. (B) $(2;1;0)$. (C) $(0;1;-3)$. (D) $(2;0;-3)$.

Lời giải.

Điểm thuộc (Oyz) có tọa độ $(0;y;z)$ nên hình chiếu của M lên (Oyz) có tọa độ là $(0;-1;3)$.

Chọn đáp án (C) .... □

CÂU 15. Hình chiếu vuông góc của điểm $A(3;2;1)$ trên trục Ox có tọa độ là

(A) $(0;2;1)$. (B) $(0;2;0)$. (C) $(3;0;0)$. (D) $(0;0;1)$.

Lời giải.

Hình chiếu vuông góc của điểm $A(3;2;1)$ lên trục Ox là $A'(3;0;0)$.

Chọn đáp án (C) .... □

CÂU 16. Hình chiếu của điểm $M(2;3;-2)$ trên trục Oy có tọa độ là

(A) $(2;0;0)$. (B) $(0;3;0)$. (C) $(0;0;-2)$. (D) $(2;0;-2)$.

Lời giải.

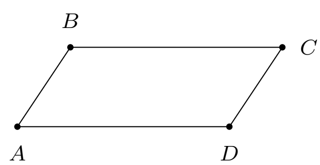
Hình chiếu của điểm $M(2;3;-2)$ trên trục Oy có tọa độ là $(0;3;0)$.

Chọn đáp án (B) .... □

CÂU 17.

Trong không gian $Oxyz$, cho hình bình hành $ABCD$ với $A(-2;3;1)$, $B(3;0;-1)$, $C(6;5;0)$. Tọa độ đỉnh D là

(A) $D(11;2;2)$. (B) $D(1;8;2)$. (C) $D(11;2;-2)$. (D) $D(1;8;-2)$.



Lời giải.

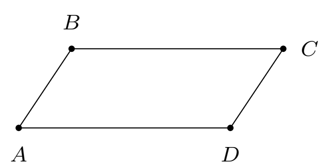
Ta có $\begin{cases}x_D=x_A+x_C-x_B=1\\y_D=y_A+y_C-y_B=8\\z_D=z_A+z_C-z_B=2\end{cases} \Rightarrow D(1;8;2)$.

Chọn đáp án (B) .... □

CÂU 18.

Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(1;0;3)$, $B(2;3;-4)$,$C(-3;1;2)$. Tìm tọa độ điểm D sao cho tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.

(A) $D(4;2;9)$. (B) $D(-2;4;-5)$. (C) $D(6;2;-3)$. (D) $(-4;-2;9)$.



Lời giải.

Gọi $D(x;y;z) \Rightarrow \overrightarrow{CD} = (x+3; y-1; z-2)$ và $\overrightarrow{BA} = (-1;-3;7)$.

Để tứ giác $ABCD$ là hình bình hành ta có $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD} \Rightarrow \begin{cases} x+3=-1 \\ y-1=-3 \\ z-2=7 \end{cases} \Rightarrow D(-4;-2;9)$.

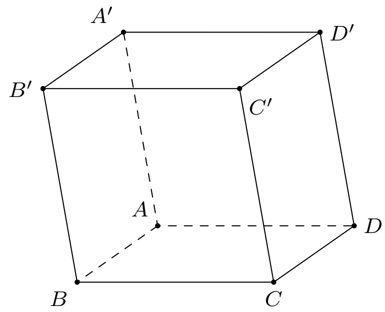
Chọn đáp án D ....

CÂU 19.

Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $A(1;0;1)$, $B(2;1;2)$, $D(1;-1;1)$, $C'(4;5;-5)$. Tìm tọa độ đỉnh C của hình hộp.

Ⓐ $C(2;0;2)$. Ⓑ $C(2;0;2)$.

Ⓒ $C(2;0;2)$. Ⓓ $C(2;0;2)$.



Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \begin{cases} 2-1 = x_C - 1 \\ 1-0 = y_C-(-1) \\ 2-1 = z_C - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_C = 2 \\ y_C = 0 \\ z_C = 2 \end{cases} \Rightarrow C(2;0;2)$.

CÂU 20. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $A(1;0;1)$, $B(2;1;2)$, $D(1;-1;1)$, $C'(4;5;-5)$. Tìm tọa độ đỉnh A' của hình hộp.

Ⓐ $A'(-1;-5;8)$. Ⓑ $A'(-1;-5;8)$. Ⓒ $A'(-1;-5;8)$. Ⓓ $A'(-1;-5;8)$.

Lời giải.

Ta có

- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \begin{cases} 2-1 = x_C - 1 \\ 1-0 = y_C-(-1) \\ 2-1 = z_C - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_C = 2 \\ y_C = 0 \\ z_C = 2 \end{cases} \Rightarrow C(2;0;2)$;

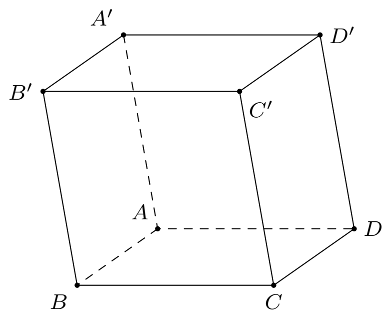
- $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{CC'} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{A'} - 1 = 2-4 \\ y_{A'} - 0 = 0-5 \\ z_{A'} - 1 = 2-(-5) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{A'} = -1 \\ y_{A'} = -5 \\ z_{A'} = 8 \end{cases} \Rightarrow A'(-1;-5;8)$;

CÂU 21.

Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $A(1;0;1)$, $B(2;1;2)$, $D(1;-1;1)$, $C'(4;5;-5)$. Tìm tọa độ đỉnh D' của hình hộp.

Ⓐ $D'(-1;-6;8)$. Ⓑ $D'(-1;-6;8)$.

Ⓒ $D'(-1;-6;8)$. Ⓓ $D'(-1;-6;8)$.



Lời giải.

Ta có

- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \begin{cases} 2-1 = x_C - 1 \\ 1-0 = y_C-(-1) \\ 2-1 = z_C - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_C = 2 \\ y_C = 0 \\ z_C = 2 \end{cases} \Rightarrow C(2;0;2)$;

- $\overrightarrow{DD'} = \overrightarrow{CC'} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{D'} - 1 = 2-4 \\ y_{D'} - (-1) = 0-5 \\ z_{D'} - 1 = 2-(-5) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{D'} = -1 \\ y_{D'} = -6 \\ z_{D'} = 8 \end{cases} \Rightarrow D'(-1;-6;8)$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.

CÂU 22. Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a} = \vec{i} + 3\vec{k} - 4\vec{j}$ và $\vec{b} = (m - n; 4m - 6n; n^2 - 3m + 2)$, với m, n là tham số.

Mệnh đề	Đ	S
a) Tọa độ $\vec{a} = (1; 3; -4)$.		X
b) Dựng điểm A thỏa $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ thì $A(1; -4; 3)$.	X	
c) Tồn tại giá trị của m và n để $\vec{b} = \vec{0}$.		X
d) Nếu $\vec{a} = \vec{b}$ thì $m + n = 9$.	X	

Lời giải.

a) Tọa độ $\vec{a} = (1; -4; 3)$.

b) Khi $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ thì tọa độ $\vec{a}$ cũng là tọa độ điểm A. Suy ra $A(1; -4; 3)$.

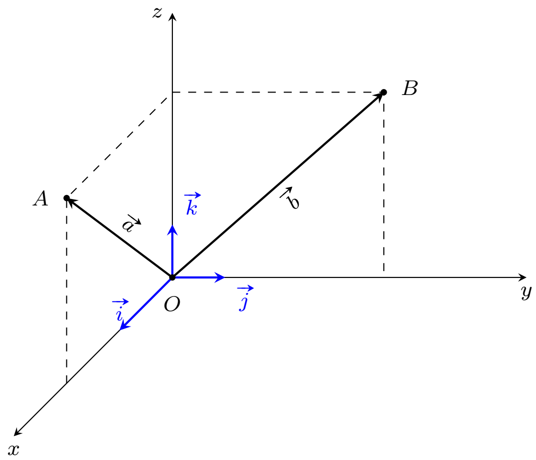
c) $\vec{b} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} m - n = 0 \\ 4m - 6n = 0 \\ n^2 - 3m + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ n = 0 \\ n^2 - 3m + 2 = 0 \end{cases}$ (vô nghiệm).
Vậy, không tồn tại m, n để $\vec{b} = \vec{0}$.

d) $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} m - n = 1 \\ 4m - 6n = -4 \\ n^2 - 3m + 2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 5 \\ n = 4 \end{cases}$.
Suy ra $m + n = 9$.

Chọn đáp án | a sai | b đúng | c sai | d đúng | ....□

CÂU 23.
Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a} = (2; 2; 0)$, $\vec{b} = 2\vec{j} + 2\vec{k}$. Dựng $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ và $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$.

Mệnh đề	Đ	S
a) $\vec{a} = 2\vec{i} + 2\vec{k}$.		X
b) Toạ độ $\vec{b} = (0; 2; 2)$.	X	
c) Toạ độ $\overrightarrow{AB} = (-2; 2; 0)$.	X	
d) Góc $\widehat{AOB} = 45°$.		X



Lời giải.

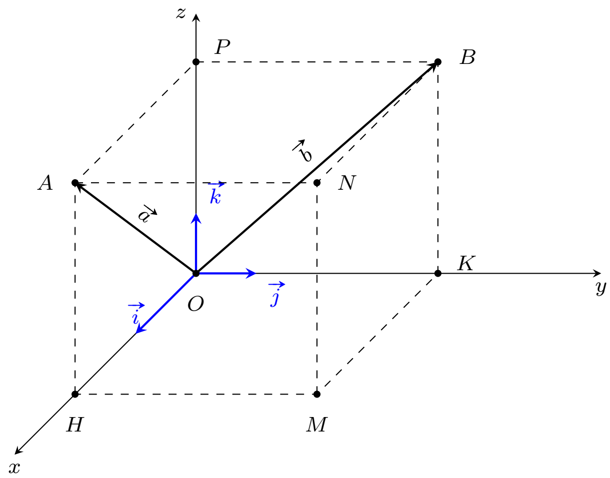
a) Ta có $\vec{a} = (2; 0; 2) \Rightarrow \vec{a} = 2\vec{i} + 2\vec{k}$.

b) Ta có $\vec{b} = 2\vec{j} + 2\vec{k} \Rightarrow \vec{b} = (0; 2; 2)$.

c) Ta có $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ thì toạ độ véc tơ $\vec{a}$ cũng chính là toạ độ A. Suy ra $A(2; 0; 2)$. Tương tự $B(0; 2; 2)$. Từ đây, ta tính được

$$\overrightarrow{AB} = (-2; 2; 0).$$

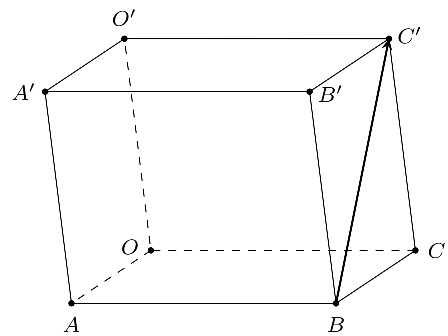
d) Nhận xét $OHMK.PANB$ là hình lập phương. Suy ra $\triangle OAB$ đều. Vậy $\widehat{AOB} = 60°$.



Chọn đáp án | a sai | b đúng | c đúng | d sai | ....□

CÂU 24.

Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp $OABC.O'A'B'C'$ có $A(1;1;-1)$, $B(0;3;0)$, $\overrightarrow{BC'}=(2;-6;6)$. Gọi H, K lần lượt là trọng tâm của tam giác $OA'O'$ và $CB'C'$.



Mệnh đề	Đ	S
a) Tọa độ điểm C' là $(2;-3;6)$.	X	
b) Tọa độ điểm O' là $(3;-5;5)$.	X	
c) Tọa độ véc tơ $\overrightarrow{AB'}=(-2;3;-6)$.		X
d) Tọa độ véc tơ $\overrightarrow{HK}=(-1;2;-1)$.		X

Lời giải.

a) Gọi $C'(x;y;z)$. Ta có

$$\overrightarrow{BC'}=(2;-6;6)\Rightarrow\begin{cases}x-0=2\\y-3=-6\\z-0=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\y=-3\\z=6\end{cases}$$

Vậy $C(2;-3;6)$.

b) Gọi $O'(x;y;z)$. Theo hình vẽ thì

$$\overrightarrow{AO'}=\overrightarrow{BC'}\Leftrightarrow\begin{cases}x-1=2\\y-1=-6\\z+1=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=3\\y=-5\\z=5\end{cases}$$

Vậy $O'(3;-5;5)$.

c) Theo hình vẽ thì $\overrightarrow{AB'}=\overrightarrow{OC'}=(2;-3;6)$.

d) Ta có $\overrightarrow{HK}=\overrightarrow{AB}=(-1;2;1)$.

Chọn đáp án | a đúng | b đúng | c sai | d sai | .... □

Dạng 4. Tọa độ hóa một số hình không gian

① Chọn một điểm mà từ đó có ba đường đôi một vuông góc nhau làm gốc tọa độ.

② Xây dựng tọa độ các điểm trên hình đã cho tương ứng với hệ trục vừa chọn.

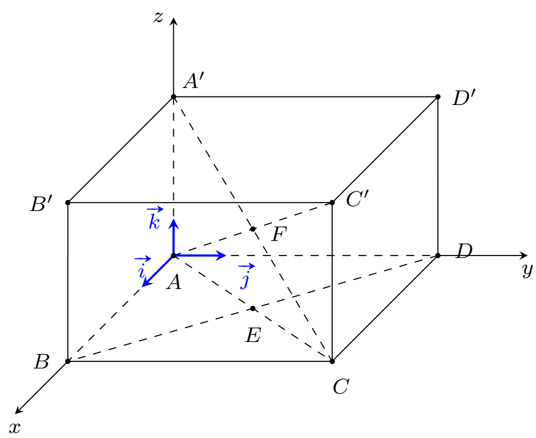
② Tọa độ các điểm đặc biệt:

- $M\in Ox\Rightarrow M(x;0;0)$.
- $M\in Oy\Rightarrow M(0;y;0)$.
- $M\in Oz\Rightarrow M(0;0;z)$.
- $M\in(Oxy)\Rightarrow M(x;y;0)$.
- $M\in(Oxz)\Rightarrow M(x;0;z)$.
- $M\in(Oyz)\Rightarrow M(0;y;z)$.

BÀI TẬP TỰ LUẬN

VÍ DỤ 1.

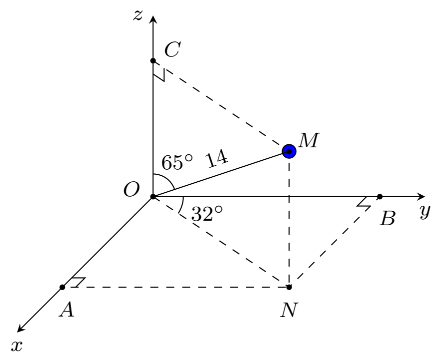
Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh $AB=AA'=2$, $AD=4$. Gọi E là tâm của hình chữ nhật $ABCD$, F là trung điểm AC'. Với hệ toạ độ $Oxyz$ được thiết lập như hình bên (gốc tọa độ O trùng với A), hãy xác định tọa độ các đỉnh của hình hộp chữ nhật và tọa độ hai điểm E, F.



Lời giải.

VÍ DỤ 2.

Một máy bay M đang cất cánh từ phi trường. Với hệ toạ độ $Oxyz$ được thiết lập như Hình bên, cho biết M là vị trí của máy bay với $OM = 14$, $\widehat{NOB} = 32°$, $\widehat{MOC} = 65°$. Tính toạ độ điểm M.

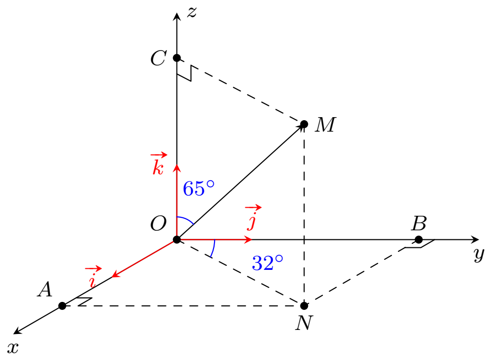


Lời giải.

Ta có:
$OC = OM\cos 65° \approx 5{,}9$.
$ON = CN = OM\sin 65° \approx 12{,}7$.
$OB = ON\cos 32° \approx 10{,}8$.
$OA = BN = ON\sin 32° \approx 6{,}7$.
Vì $OANB$ là hình chữ nhật nên $\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$.
Vì $OCMN$ là hình chữ nhật nên

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 6{,}7\vec{i} + 10{,}8\vec{j} + 5{,}9\vec{k}.$$

Do đó $M(6{,}7; 10{,}8; 5{,}9)$.



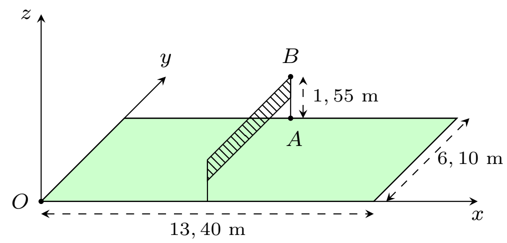
BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.

CÂU 1.

Hình bên mô tả một sân cầu lông với kích thước theo tiêu chuẩn quốc tế. Với hệ toạ độ $Oxyz$ được thiết lập như hình bên (đơn vị trên mỗi trục là mét), giả sử AB là một trụ cầu lông để căng lưới, hãy xác định tọa độ của B.

Ⓐ $(6,1; 6,7; 1,55)$. Ⓑ $(6,7; 6,1; 1,55)$.
Ⓒ $(6,1; 0; 1,55)$. Ⓓ $(0; 6,7; 1,55)$.



Lời giải.

- Gọi toạ độ điểm A là $(x_A; y_A; z_A)$. Vì chiều rộng của sân là $6,1$ m nên $x_A = 6,1$. Do một nửa chiều dài của sân là $6,7$ m nên $y_A = 6,7$. Điểm A thuộc mặt phẳng (Oxy) nên $z_A = 0$. Vì vậy, điểm A có tọa độ là $(6,1; 6,7; 0)$.
- Độ dài đoạn thẳng AB là $1,55$ m nên điểm B có toạ độ là $(6,1; 6,7; 1,55)$.

Vậy ta có: $\overrightarrow{AB} = (6,1 - 6,1; 6,7 - 6,7; 1,55 - 0)$, tức là $\overrightarrow{AB} = (0; 0; 1,55)$.

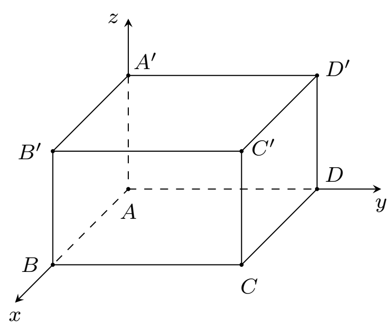
Chọn đáp án B ....□

Lời giải.

CÂU 2.

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng 2. Với hệ toạ độ $Oxyz$ được thiết lập như hình bên (gốc tọa độ O trùng với điểm A), tọa độ điểm B' là

Ⓐ $B(0; 2; 0)$. Ⓑ $B(2; 2; 2)$.
Ⓒ $B(2; 2; 0)$. Ⓓ $B(2; 0; 2)$.



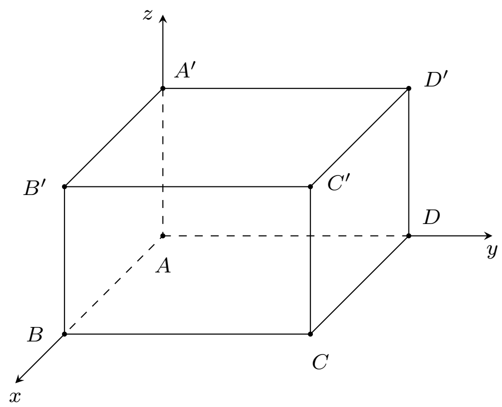
Lời giải.

Chọn đáp án D ....□

CÂU 3.

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng 2. Với hệ toạ độ $Oxyz$ được thiết lập như hình bên (gốc tọa độ O trùng với điểm A), tọa độ điểm C' là

Ⓐ $C'(2;2;0)$.
Ⓑ $C'(2;2;2)$.
Ⓒ $C'(2;2;0)$.
Ⓓ $C'(2;0;2)$.



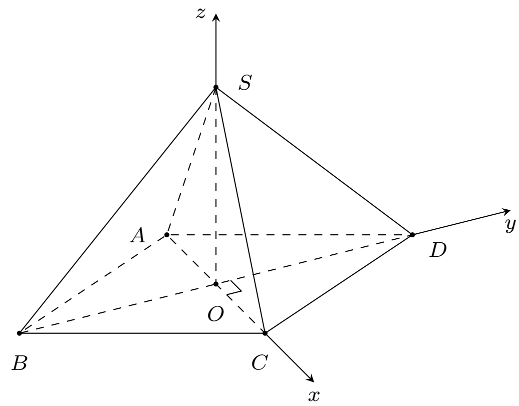
Lời giải.

Chọn đáp án B ....

CÂU 4.

Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $a\sqrt{2}$, cạnh bên bằng $a\sqrt{5}$. Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$. Với hệ toạ độ $Oxyz$ được thiết lập như hình bên (gốc tọa độ O trùng với tâm hình vuông $ABCD$), tọa độ $\overrightarrow{SC}$ là

Ⓐ $\overrightarrow{SC}=(2a;0;-2a)$.
Ⓑ $\overrightarrow{SC}=(2a;-a;-2a)$.
Ⓒ $\overrightarrow{SC}=(a;0;-2a)$.
Ⓓ $\overrightarrow{SC}=(a;0;2a)$.



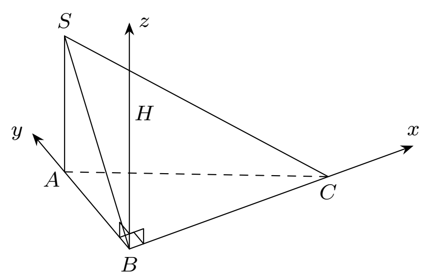
Lời giải.

Chọn đáp án C ....

CÂU 5.

Cho tứ diện $SABC$ có ABC là tam giác vuông tại B, $BC=3$, $BA=2$, SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) và có độ dài bằng 2. Với hệ toạ độ $Oxyz$ được thiết lập như hình bên (gốc tọa độ O trùng với điểm B), tìm khẳng định **sai**.

Ⓐ $A(0;2;0)$.
Ⓑ $B(0;0;0)$.
Ⓒ $C(0;0;3)$.
Ⓓ $S(-2;2;2)$.



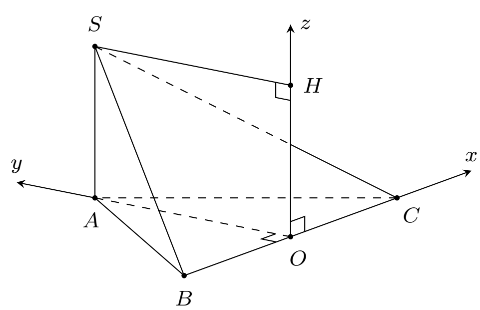
Lời giải.

Chọn đáp án D ....

CÂU 6.

Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng 2, SA vuông góc với đáy và $SA=1$. Với hệ toạ độ $Oxyz$ được thiết lập như hình bên (gốc toạ độ O trùng với trung điểm của đoạn BC), hãy tìm toạ độ điểm S.

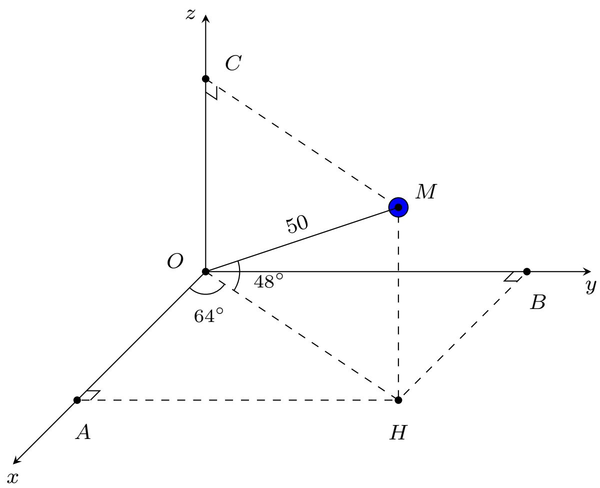
Ⓐ $S(0;\sqrt{3};1)$.
Ⓑ $S(0;\sqrt{3};1)$.
Ⓒ $S(0;\sqrt{3};1)$.
Ⓓ $S(0;\sqrt{3};1)$.



Lời giải.

CÂU 7.

Ở một sân bay, vị trí của máy bay được xác định bởi điểm M trong không gian $Oxyz$ như hình bên. Gọi H là hình chiếu vuông góc của M xuống mặt phẳng (Oxy). Cho biết $OM = 50$, $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{OH}\right) = 64^\circ$, $\left(\overrightarrow{OH}, \overrightarrow{OM}\right) = 48^\circ$. Tìm toạ độ của điểm M.

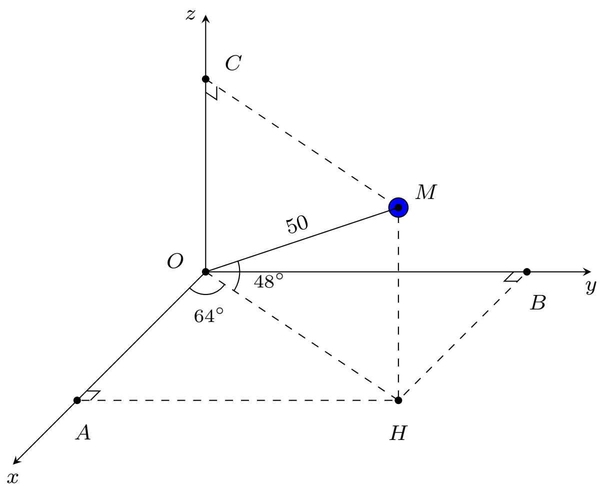


A $M(14{,}7; 30{,}1; 37{,}2)$. **B** $M(14{,}7; 30{,}1; 37{,}2)$.
C $M(14{,}7; 30{,}1; 37{,}2)$. **D** $M(14{,}7; 30{,}1; 37{,}2)$.

Lời giải.

Tam giác OMH vuông tại H, $OM = 50$; $\widehat{MOH} = 48^\circ$ nên ta có

- $OH = OM \cdot \cos 48 \approx 33{,}5$
- $OC = MH = OM \cdot \sin 48 \approx 37{,}2$.



Tam giác OAH vuông tại A, $OH = 33{,}5$; $\widehat{AOH} = 64^\circ$ nên ta có

- $OA = OH \cdot \cos 64 \approx 14{,}7$,
- $OB = AH = OH \cdot \sin 64 \approx 30{,}1$.

Suy ra

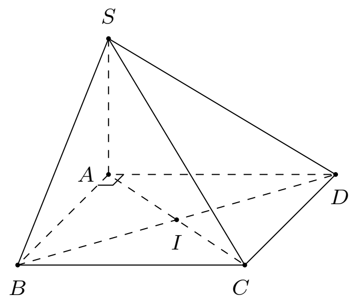
$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM} &= \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\\ &= 14{,}7\overrightarrow{i} + 30{,}1\overrightarrow{j} + 37{,}2\overrightarrow{k}.\end{aligned}$$

Vậy $M(14{,}7; 30{,}1; 37{,}2)$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.

CÂU 8.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = 1$, $AD = 2$, SA vuông góc với mặt đáy và $SA = 3$. Với hệ tọa độ $Oxyz$ được thiết lập như sau: Gốc tọa độ O trùng với điểm A, các véc tơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AS}$ lần lượt cùng hướng với $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ và $\overrightarrow{k}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau



Mệnh đề	Đ	S
a) Tọa độ $D(0; 2; 0)$.	X	
b) Tọa độ $C(1; 2; 3)$.		X

Mệnh đề	Đ	S
c) Tọa độ $S(2; 0; 0)$.	X	
d) Tọa độ $I(1; 1; 0)$.		X

Lời giải.

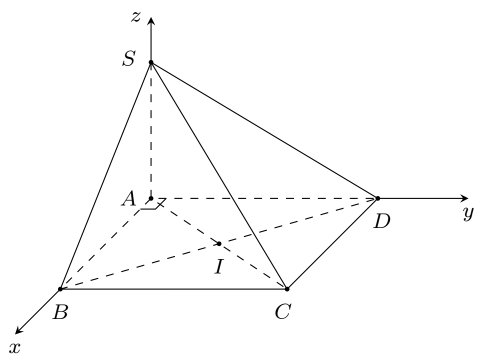
Với hệ trục đã chọn như hình vẽ thì

a) Điểm $D \in Oy$ và $AD = 2$ nên $D(0; 2; 0)$.

b) Điểm $C \in (Oxy)$ và có hình chiếu lên Ox, Oy lần lượt là điểm B và D. Do $AB = 1$ và $AD = 2$ nên $C(2; 2; 0)$.

c) Điểm $S \in Oz$ và $AS = 3$ nên $S(0; 0; 3)$.

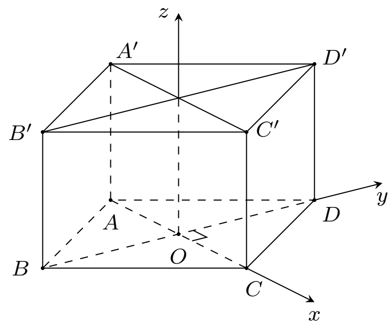
d) Điểm $I \in (Oxy)$ và và có hình chiếu lên Ox, Oy lần lượt là trung điểm của AB và AD nên $I(0,5; 1; 0)$.



Chọn đáp án | a đúng | b sai | c đúng | d sai | .... □

CÂU 9.

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng 2. Với hệ toạ độ $Oxyz$ được thiết lập như hình bên (gốc tọa độ O trùng với tâm hình vuông $ABCD$), hãy xét tính đúng sai của các khẳng định sau:



Mệnh đề	Đ	S
a) Tọa độ $A(-1;0;0)$.		X
b) $\overrightarrow{AC'} = (2\sqrt{2};0;2)$.	X	

Mệnh đề	Đ	S
c) Tọa độ $D'(0;\sqrt{2};2)$.	X	
d) $\overrightarrow{BD'} = (0;0;2)$.		X

Lời giải.

Độ dài $AC = 2\sqrt{2}$. Với hệ trục $Oxyz$ đã chọn như hình vẽ thì

a) Điểm $A \in Ox$, nằm ngược chiều dương và $OA = \sqrt{2}$ nên $A(-\sqrt{2};0;0)$.

b) Tọa độ $C'(\sqrt{2};0;2)$. Suy ra $\overrightarrow{AC'} = (2\sqrt{2};0;2)$.

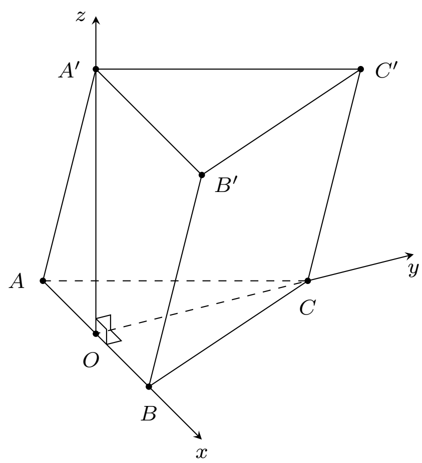
c) Điểm D' có hình chiếu vuông góc xuống (Oxy) là điểm $D(0;\sqrt{2};0)$ và $DD' = 2$ nên $D'(0;\sqrt{2};2)$.

d) Tọa độ $B(0;-\sqrt{2};0)$, $D'(0;\sqrt{2};2)$. Suy ra $\overrightarrow{BD'} = (0;2\sqrt{2};2)$.

Chọn đáp án | a sai | b đúng | c đúng | d sai | .... □

CÂU 10.

Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng 2 như hình vẽ. Hình chiếu vuông góc của A' lên (ABC) trùng với trung điểm cạnh AB, góc $\widehat{A'AO} = 60^\circ$. Với hệ toạ độ $Oxyz$ được thiết lập như hình bên (gốc tọa độ O trùng với trung điểm của đoạn BC), hãy xét tính đúng sai của các khẳng định sau:



Mệnh đề	Đ	S
a) Tọa độ điểm $A(-1;0;0)$.	X	
b) Tọa độ điểm $C(0;\sqrt{3};0)$.	X	
c) Tọa độ điểm $A'(0;-1;\sqrt{3})$.		X
d) Tọa độ điểm $C'(1;\sqrt{3};\sqrt{3})$.	X	

Lời giải.

Độ dài $OC = 2.\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$. $OA' = OA.\tan 60^\circ = \sqrt{3}$. Với hệ trục $Oxyz$ đã chọn như hình vẽ trên thì

a) Điểm $A \in Ox$, nằm ngược chiều dương và $OA = 1$ nên $A(-1;0;0)$.

b) Điểm $A' \in Oy$, nằm cùng chiều dương và $OC = \sqrt{3}$ nên $C(0;\sqrt{3};0)$.

c) $A' \in Oz$, nằm cùng chiều dương và $OA' = \sqrt{3}$ nên $A'(0;0;\sqrt{3})$.

d) Gọi $C'(x;y;z)$. Ta có

$$\overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 0 = 1 \\ y - 0 = \sqrt{3} \\ z - \sqrt{3} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = \sqrt{3} \\ z = \sqrt{3} \end{cases}.$$

Chọn đáp án | a đúng | b đúng | c sai | d đúng | .... □

Bài 3. BIỂU THỨC TỌA ĐỘ CỦA CÁC PHÉP TOÁN VECTƠ

A. LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1. Biểu thức tọa độ của phép toán cộng, trừ, nhân một số thực với một véctơ

Trong không gian $Oxyz$, cho hai véc-tơ $\vec{a} = (a_1;a_2;a_3)$, $\vec{b} = (b_1;b_2;b_3)$ và số k. Khi đó

① $\vec{a}+\vec{b}=(a_1+b_1;a_2+b_2;a_3+b_3)$;

② $\vec{a}-\vec{b}=(a_1-b_1;a_2-b_2;a_3-b_3)$;

③ $k\vec{a}=(ka_1;ka_2;ka_3)$.

Cho hai véc-tơ $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$, $\vec{b}=(b_1;b_2;b_3)$, $\vec{b}\neq\vec{0}$. Hai véc-tơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ cùng phương khi và chỉ khi tồn tại một số thực k sao cho $\begin{cases} a_1=kb_1\\ a_2=kb_2\\ a_3=kb_3.\end{cases}$

2. Biểu thức tọa độ của tích vô hướng hai véctơ

Trong không gian $Oxyz$, tích vô hướng của hai véc-tơ $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$ và $\vec{b}=(b_1;b_2;b_3)$ được xác định bởi công thức

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3.$$

① $\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0$;

② $|\vec{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$; $\quad AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$.

③ $\cos\left(\vec{a};\vec{b}\right)=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|}=\dfrac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\cdot\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}$ *(với $\vec{a}\neq\vec{0}$ và $\vec{b}\neq\vec{0}$).*

3. Biểu thức tọa độ của tích có hướng hai véctơ

Cho hai véc-tơ $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$ và $\vec{b}=(b_1;b_2;b_3)$ không cùng phương. Khi đó vec tơ

$$\vec{w}=\Big(a_2b_3-b_2a_3\,;\,a_3b_1-b_3a_1\,;\,a_1b_2-b_1a_2\Big)$$

vuông góc với cả hai véc tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

① *Véc tơ $\vec{w}$ xác định như trên còn gọi là **tích có hướng** của hai véc tơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, kí hiệu $\vec{w}=\left[\vec{a},\vec{a}\right]$.*

② *Quy ước* $\begin{vmatrix} a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}=a_1b_2-a_2b_1$ *thì*

$$\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix};\begin{vmatrix} a_3 & a_1\\ b_3 & b_1\end{vmatrix};\begin{vmatrix} a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}\right)=\Big(a_2b_3-b_2a_3\,;\,a_3b_1-b_3a_1\,;\,a_1b_2-b_1a_2\Big)$$

③ *$\vec{a}$ không cùng phương với $\vec{b}\Leftrightarrow\left[\vec{a},\vec{b}\right]\neq\vec{0}$.*

4. Biểu thức tọa độ trung điểm đoạn thẳng, trọng tâm tam giác

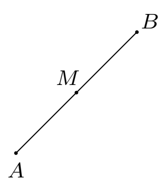
Trong không gian $Oxyz$, tọa độ trung điểm và trong tâm được xác định như sau:

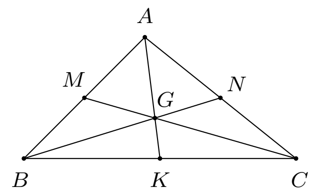
① Tọa độ trung điểm M của đoạn thẳng AB là

$$M\left(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2};\frac{z_A+z_B}{2}\right).$$

② Tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC là

$$G\left(\frac{x_A+x_B+x_C}{3};\frac{y_A+y_B+y_C}{3};\frac{z_A+z_B+z_C}{3}\right).$$





B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Dạng 5. Tọa độ của các phép toán vec tơ, tọa độ điểm, độ dài đoạn thẳng

BÀI TẬP TỰ LUẬN

VÍ DỤ 1. Cho $\vec{a}=(-2;3;2)$, $\vec{b}=(2;1;-1)$, $\vec{c}=(1;2;3)$. Tính tọa độ của mỗi vectơ sau:

a) $3\vec{a}$; b) $2\vec{a}-\vec{b}$; c) $\vec{a}+2\vec{b}-\dfrac{3}{2}\vec{c}$.

Lời giải.

Ta có

a) $3\vec{a}=(3\cdot(-2);3\cdot 3;3\cdot 2)$. Vậy $3\vec{a}=(-6;9;6)$.

b) Ta có $2\vec{a}=(-4;6;4)$ và $\vec{b}=(2;1;-1)$.
Do đó, $2\vec{a}-\vec{b}=(-4-2;6-1;4-(-1))$.
Vậy $2\vec{a}-\vec{b}=(-6;5;5)$.

c) Do $\vec{a}=(-2;3;2)$ và $2\vec{b}=(4;2;-2)$ nên
$$\vec{a}+2\vec{b}=(2;5;0).$$
Ngoài ra, vì $-\dfrac{3}{2}\vec{c}=\left(-\dfrac{3}{2};-3;-\dfrac{9}{2}\right)$ nên $\vec{a}+2\vec{b}-\dfrac{3}{2}\vec{c}=\left(\dfrac{1}{2};2;-\dfrac{9}{2}\right)$.

VÍ DỤ 2. Trong không gian $Oxyz$, cho các véc-tơ $\vec{u}=3\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{v}=-\dfrac{3}{2}\vec{i}+\vec{j}-\dfrac{1}{2}\vec{k}$, $\vec{w}=6\vec{i}+m\vec{j}-n\vec{k}$.

a) Chứng minh $\vec{u}$ và $\vec{v}$ cùng phương.

b) Tìm giá trị của m và n để véc-tơ $\vec{u}$ và $\vec{w}$ cùng phương.

Lời giải.

Ta có $\vec{u}=(3;-2;1)$, $\vec{v}=\left(-\dfrac{3}{2};1;-\dfrac{1}{2}\right)$, $\vec{w}=(6;m;-n)$.

a) Hai véc-tơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ cùng phương khi và chỉ khi
$$\vec{v}=k\vec{u}\Leftrightarrow\begin{cases}-\dfrac{3}{2}=3k\\1=-2k\\-\dfrac{1}{2}=k\end{cases}\Leftrightarrow k=-\dfrac{1}{2}$$
Như vậy $\vec{v}=-\dfrac{1}{2}\vec{u}$ nên hai véc-tơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ cùng phương.

b) Hai véc-tơ $\vec{u}$ và $\vec{w}$ cùng phương khi và chỉ khi
$$\vec{w}=k\vec{u}\Leftrightarrow\begin{cases}6=3k\\m=-2k\\-n=k\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}k=2\\m=-4\\n=-2\end{cases}$$
Như vậy $m=-4$ và $n=-2$ thì hai véc-tơ $\vec{u}$ và $\vec{w}$ cùng phương. Khi đó $\vec{w}=(6;-4;2)$.

VÍ DỤ 3. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(3;-1;2)$, $B(1;2;3)$, $C(4;-2;1)$.

a) Chứng minh ba điểm A,B,C không thẳng hàng. Xác định tọa độ trọng tâm tam giác ABC.

b) Tìm tọa độ điểm D biết $ABCD$ là hình bình hành.

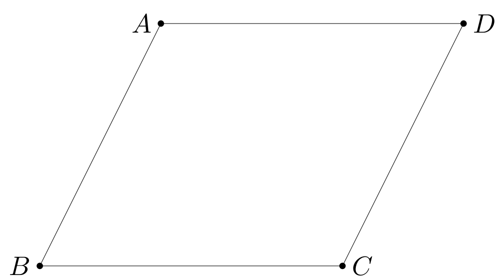
c) Tìm tọa độ giao điểm E của đường thẳng BC với mặt phẳng tọa độ (Oxz).

Lời giải.

a) Ta có $\overrightarrow{AB}=(-2;3;1)$, $\overrightarrow{AC}=(1;-1;-1)$. Vì $\dfrac{-2}{1}\neq\dfrac{-3}{-1}$ nên hai véc-tơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ không cùng phương.
Hay ba điểm A, B, C không thẳng hàng. Suy ra, tọa độ trọng tâm là $G\left(\dfrac{8}{3};-\dfrac{1}{3};2\right)$.

b)

Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành khi và chỉ khi
$$\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow\begin{cases}4-x_D=-2\\-2-y_D=3\\1-z_D=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_D=6\\y_D=-5\\z_D=0\end{cases}$$
Vậy $D(6;-5;0)$.



c) Vì E thuộc mặt phẳng Oxz nên $E=(x;0;z)$.
Ta có $\overrightarrow{AE}=(x-3;1;z-2)$.
Mặt khác A,B,E thẳng hàng nên hai véc-tơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AE}$ cùng phương, do đó:

$$\overrightarrow{AE}=k\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow\begin{cases}x-3=-2k\\1=3k\\z-2=k\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{7}{3}\\k=\dfrac{1}{3}\\z=\dfrac{7}{3}\end{cases}$$

Vậy $E=\left(\dfrac{7}{3};0;\dfrac{7}{3}\right)$.

VÍ DỤ 4. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(5;-3;0)$, $B(2;1;-1)$, $C(4;1;2)$.

a) Tìm tọa độ của vectơ $\vec{u}=2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}-5\overrightarrow{BC}$.

b) Tìm tọa độ điểm N sao cho $2\overrightarrow{NA}=-\overrightarrow{NB}$.

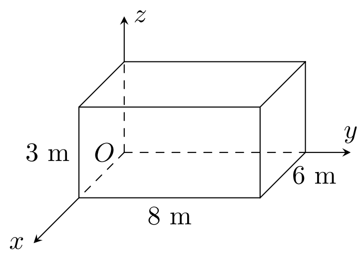
Lời giải.

a) Ta có $\begin{cases}A(5;-3;0)\\B(2;1;-1)\\C(4;1;2)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\overrightarrow{AB}=(-3;4;-1)\\\overrightarrow{AC}=(-1;4;2)\\\overrightarrow{BC}=(2;0;3)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2\overrightarrow{AB}=(-6;8;-2)\\\overrightarrow{AC}=(-1;4;2)\\-5\overrightarrow{BC}=(-10;0;-15)\end{cases}\Rightarrow\vec{u}=(-17;12;-15)$.

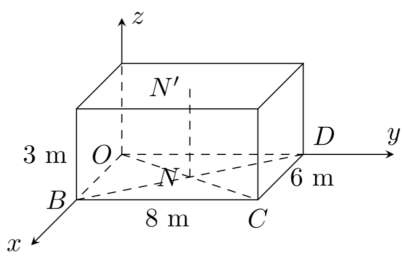
b) Gọi $N(x;y;z)$, khi đó $\begin{cases}\overrightarrow{NA}=(5-x;-3-y;-z)\\\overrightarrow{NB}=(2-x;1-y;-1-z)\end{cases}$

$$2\overrightarrow{NA}=-\overrightarrow{NB}\Leftrightarrow\begin{cases}2(5-x)=-2+x\\2(-3-y)=-1+y\\-2z=1+z\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=4\\y=-\dfrac{5}{3}\\z=-\dfrac{1}{3}\end{cases}\Rightarrow N\left(4;-\dfrac{5}{3};-\dfrac{1}{3}\right).$$

VÍ DỤ 5.
Một phòng học có thiết kế dạng hình hộp chữ nhật với chiều dài là 8 m, chiều rộng là 6 m và chiều cao là 3 m. Một chiếc đèn được treo tại chính giữa trần nhà của phòng học. Xét hệ trục toạ độ $Oxyz$ có gốc O trùng với một góc phòng và mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt sàn, đơn vị đo được lấy theo mét (*Hình minh họa bên*). Hãy tìm toạ độ của điểm treo đèn.



Lời giải.
Gọi các điểm $B(3;0;0)$, $C(3;6;0)$, $D(0;6;0)$ như hình vẽ.
N là trung điểm OC, N' là hình chiếu của N lên mặt phẳng trần nhà.
Suy ra N' là điểm treo đèn.
Ta có N có tọa độ là $\left(\dfrac{0+3}{2};\dfrac{0+6}{2};\dfrac{0+0}{2}\right)$, suy ra $N\left(\dfrac{3}{2};3;0\right)$.
Suy ra $N'\left(\dfrac{3}{2};3;3\right)$.
Vậy tọa độ của điểm treo đèn là $\left(\dfrac{3}{2};3;3\right)$.



BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.

Các câu hỏi sau đều xét trong không gian $Oxyz$.

CÂU 1. Cho $\vec{a}=(1;2;-3)$, $\vec{b}=(-2;-4;6)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A $\vec{a}=2\vec{b}$. **B** $\vec{b}=2\vec{a}$. **C** $\vec{b}=-2\vec{a}$. **D** $\vec{a}=-2\vec{b}$.

Lời giải.
Ta có: $-2\vec{a}=(-2;-4;6)=\vec{b}$.
Chọn đáp án C .... □

CÂU 2. Cho hai véc-tơ $\vec{x}=(2;1;-3)$, $\vec{y}=(1;0;-1)$. Tìm tọa độ của véc-tơ $\vec{a}=\vec{x}+2\vec{y}$.

(A) $\vec{a}(4;1;-5)$. (B) $\vec{a}(4;1;-1)$. (C) $\vec{a}(3;1;-4)$. (D) $\vec{a}(0;1;-1)$.

Lời giải.

Ta có $\vec{a}=(2;1;-3)+2\cdot(1;0;-1)=(4;1;-5)$.

Chọn đáp án (A)

CÂU 3. Cho $\vec{a}=(1;-1;3)$, $\vec{b}=(2;0;-1)$. Tìm tọa độ véc-tơ $\vec{u}=2\vec{a}-3\vec{b}$.

(A) $\vec{u}=(-4;-2;9)$. (B) $\vec{u}=(4;2;-9)$. (C) $\vec{u}=(-4;-5;9)$. (D) $\vec{u}=(1;3;-11)$.

Lời giải.

$\vec{u}=2\vec{a}-3\vec{b}=(-4;-2;9)$.

Chọn đáp án (A)

CÂU 4. Cho hai véc-tơ $\vec{a}=(3;0;1)$, $\vec{c}=(1;1;0)$. Tìm tọa độ của véc-tơ $\vec{b}$ thỏa mãn biểu thức $\vec{b}-\vec{a}+2\vec{c}=\vec{0}$.

(A) $\vec{b}=(-2;1;-1)$. (B) $\vec{b}=(-1;2;-1)$. (C) $\vec{b}=(5;2;1)$. (D) $\vec{b}=(1;-2;1)$.

Lời giải.

Gọi $\vec{b}=(x;y;z)$. Ta có

$$\vec{b}-\vec{a}+2\vec{c}=\vec{0}\Leftrightarrow\begin{cases}x-3+2\cdot1=0\\y-0+2\cdot1=0\\z-1+2\cdot0=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=-2\\z=1.\end{cases}$$

Vậy $\vec{b}=(1;-2;1)$.

Chọn đáp án (D)

CÂU 5. Cho vectơ $\vec{a}=(1;-3;4)$. Vectơ nào sau đây cùng phương với $\vec{a}$?

(A) $\vec{b}=(-2;-6;8)$. (B) $\vec{c}=(-2;6;-8)$. (C) $\vec{d}=(-2;6;8)$. (D) $\vec{m}=(2;-6;-8)$.

Lời giải.

$$\vec{b}=(-2;6;-8)=-2\vec{a}.$$

Chọn đáp án (B)

CÂU 6. Hai véc-tơ $\vec{a}=(m;2;3)$ và $\vec{b}=(1;n;2)$ cùng phương khi

(A) $\begin{cases}m=\dfrac{1}{2}\\n=\dfrac{4}{3}.\end{cases}$ (B) $\begin{cases}m=\dfrac{3}{2}\\n=\dfrac{4}{3}.\end{cases}$ (C) $\begin{cases}m=\dfrac{3}{2}\\n=\dfrac{2}{3}.\end{cases}$ (D) $\begin{cases}m=\dfrac{2}{3}\\n=\dfrac{4}{3}.\end{cases}$

Lời giải.

$$\text{YCBT}\Leftrightarrow\exists k\in\mathbb{R}^*:\vec{a}=k.\vec{b}\Leftrightarrow\begin{cases}m=k.1\\2=k.n\\3=k.2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m=\dfrac{3}{2}\\n=\dfrac{4}{3}.\end{cases}$$

Chọn đáp án (B)

CÂU 7. Cho hai điểm $A(2;3;1)$ và $B(3;1;5)$. Tính độ dài đoạn thẳng AB.

(A) $AB=\sqrt{21}$. (B) $AB=2\sqrt{3}$. (C) $AB=2\sqrt{5}$. (D) $AB=\sqrt{13}$.

Lời giải.

$AB=\sqrt{(3-2)^2+(1-3)^2+(5-1)^2}=\sqrt{21}$.

Chọn đáp án (A)

CÂU 8. Cho hai điểm $M(3;-2;1)$ và $N(0;1;-1)$. Tính độ dài đoạn thẳng MN.

(A) $MN=\sqrt{17}$. (B) $MN=22$. (C) $MN=\sqrt{22}$. (D) $MN=\sqrt{19}$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{MN}=(-3;3;-2)\Rightarrow MN=\sqrt{9+9+4}=\sqrt{22}$.

Chọn đáp án (C)

CÂU 9. Cho hai điểm $A(-1;1;2)$ và $B(3;-5;0)$. Tọa độ trung điểm của đoạn thẳng AB là

(A) $(1;-2;1)$. (B) $(4;-6;2)$. (C) $(2;-3;-1)$. (D) $(2;-4;2)$.

Lời giải.

Gọi M là trung điểm AB, khi đó tọa độ của M được tính bởi

$$\begin{cases}x_M=\dfrac{x_A+y_A}{2}=1\\y_M=\dfrac{y_A+y_B}{2}=-2\\z_M=\dfrac{z_A+z_B}{2}=1.\end{cases}$$

Chọn đáp án (A) .... □

CÂU 10. Cho hai điểm $A(1;1;0)$, $B(3;-1;2)$. Tọa độ điểm C sao cho B là trung điểm của đoạn AC là

A $C(5;-3;4)$. **B** $C(4;-3;5)$. **C** $C(-1;3;-2)$. **D** $C(2;0;1)$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} x_B = \dfrac{x_A + x_C}{2} \\ y_B = \dfrac{y_A + y_C}{2} \\ z_B = \dfrac{z_A + z_C}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_C = 2x_B - x_A = 5 \\ y_C = 2y_B - y_A = -3 \\ z_C = 2z_B - z_A = 4. \end{cases}$

Chọn đáp án (A) .... □

CÂU 11. Cho tam giác ABC với $A(0;-1;3)$, $B(2;1;1)$, $C(1;0;-1)$. Tọa độ trọng tâm của tam giác ABC là

A $(1;0;1)$. **B** $(-1;0;1)$. **C** $(0;1;1)$. **D** $(1;1;0)$.

Lời giải.

Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC. Khi đó $\begin{cases} x_G = \dfrac{x_A + x_B + x_C}{3} \\ y_G = \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3} \\ z_G = \dfrac{z_A + z_B + z_C}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_G = 1 \\ y_G = 0 \\ z_G = 1. \end{cases}$

Vậy tọa độ trọng tâm tam giác ABC là $(1;0;1)$.

Chọn đáp án (A) .... □

CÂU 12. Cho $\overrightarrow{OA} = \vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$, điểm $B(3;-4;1)$ và $C(2;0;-1)$. Tọa độ trọng tâm của tam giác ABC là

A $(1;-2;3)$. **B** $(-1;2;-3)$. **C** $(2;-2;1)$. **D** $(-2;2;-1)$.

Lời giải.

Từ giả thiết: $\overrightarrow{OA} = \vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k} \Rightarrow A(1;-2;3)$.

Gọi G là trọng tâm tam giác ABC, ta có: $\begin{cases} x_G = \dfrac{x_A + x_B + x_C}{3} = 2 \\ y_G = \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3} = -2 \\ z_G = \dfrac{z_A + z_B + z_C}{3} = 1 \end{cases} \Rightarrow G(2;-2;1)$.

Vậy trọng tâm của tam giác ABC là điểm $G(2;-2;1)$.

Chọn đáp án (C) .... □

CÂU 13. Cho tam giác ABC trọng tâm G. Biết $A(0;2;1)$, $B(1;-1;2)$, $G(1;1;1)$. Khi đó điểm C có tọa độ là

A $(2;2;4)$. **B** $(-2;0;2)$. **C** $(-2;-3;-2)$. **D** $(2;2;0)$.

Lời giải.

- Giả sử tọa độ C là $C(a;b;c)$ khi đó $\begin{cases} \dfrac{0+1+a}{3} = 1 \\ \dfrac{2-1+b}{3} = 1 \\ \dfrac{1+2+c}{3} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 2 \\ c = 0. \end{cases}$
- Vậy điểm C có tọa độ là $(2;2;0)$.

Chọn đáp án (D) .... □

CÂU 14. Cho bốn điểm $A(1;0;3)$, $B(2;-1;1)$, $C(-1;3;-4)$, $D(2;6;0)$ tạo thành một hình tứ diện. Gọi M, N lần lượt là trung điểm các đoạn thẳng AB, CD. Tìm tọa độ trung điểm G của đoạn MN.

A $G\left(\dfrac{4}{3};\dfrac{8}{3};0\right)$. **B** $G(2;4;0)$. **C** $G(1;2;0)$. **D** $G(4;8;0)$.

Lời giải.

Gọi M là trung điểm đoạn thẳng $AB \Rightarrow M\left(\dfrac{3}{2};-\dfrac{1}{2};2\right)$.

Gọi N là trung điểm đoạn thẳng $CD \Rightarrow N\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{9}{2};-2\right)$).

Gọi G là trung điểm đoạn thẳng $MN \Rightarrow G(1;2;0)$.

Chọn đáp án (C) .... □

CÂU 15. Cho hai điểm $B(1;2;-3)$, $C(7;4;-2)$. Nếu E là điểm thỏa mãn đẳng thức $\overrightarrow{CE}=2\overrightarrow{EB}$ thì tọa độ điểm E là

Ⓐ $\left(3;\frac{8}{3};\frac{8}{3}\right)$. Ⓑ $\left(1;2;\frac{1}{3}\right)$. Ⓒ $\left(3;3;-\frac{8}{3}\right)$. Ⓓ $\left(\frac{8}{3};3;-\frac{8}{3}\right)$.

Lời giải.

$E(x;y;z)$, từ $\overrightarrow{CE}=2\overrightarrow{EB}\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{8}{3}\\ y=3\\ z=-\frac{8}{3}.\end{cases}$

Chọn đáp án D ....□

CÂU 16. Cho các điểm $A(1;-1;0)$, $B(0;2;0)$, $C(2;1;3)$ và M là điểm thỏa mãn hệ thức $\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}$. Khi đó điểm M có tọa độ là

Ⓐ $(3;2;3)$. Ⓑ $(3;-2;-3)$. Ⓒ $(3;-2;3)$. Ⓓ $(3;2;-3)$.

Lời giải.

Gọi $M(x;y;z)$, ta có $\begin{cases}1-x-(0-x)+(2-x)&=0\\ -1-y-(2-y)+1-y&=0\\ 0-z-(0-z)+3-z&=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=3\\ y=-2\\ z=3\end{cases}\Rightarrow M(3;-2;3).$

Chọn đáp án C ....□

CÂU 17. Cho tọa độ các điểm $A(-1;3)$; $B(2;-2)$ và $C(m;1)$. Tìm m để 3 điểm A,B,C thẳng hàng.

Ⓐ $m=\frac{2}{5}$. Ⓑ $m=\frac{1}{5}$. Ⓒ $m=-\frac{1}{3}$. Ⓓ $m=-\frac{1}{5}$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(3;-5)$; $\overrightarrow{AC}=(m+1;-2)$.

A,B,C thẳng hàng $\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}$ cùng phương với $\overrightarrow{AC}\Leftrightarrow\frac{3}{m+1}=\frac{-5}{-2}\Leftrightarrow m=-\frac{1}{5}$.

Chọn đáp án D ....□

CÂU 18. Cho ba điểm $A\left(-1;1;2\right)$, $B(0;1;-1)$, $C(x+2;y;-2)$ thẳng hàng. Tổng $x+y$ bằng

Ⓐ $\frac{7}{3}$. Ⓑ $-\frac{8}{3}$. Ⓒ $-\frac{2}{3}$. Ⓓ $-\frac{1}{3}$.

Lời giải.

- Ta có $\overrightarrow{AB}=(1;0-3)$, $\overrightarrow{AC}=(x+3;y-1;-4)$.
- Các điểm A, B, C thẳng hàng $\Leftrightarrow$ có số thực t thỏa mãn $\overrightarrow{AC}=t\overrightarrow{AB}$. (1)

  Ta có (1) $\Leftrightarrow\begin{cases}x+3=t\\ y-1=0\\ -4=-3t\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-\frac{5}{3}\\ y=1\\ t=\frac{4}{3}\end{cases}\Rightarrow x+y=-\frac{2}{3}.$
- Vậy tổng $x+y=-\frac{2}{3}$.

Chọn đáp án C ....□

CÂU 19. Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành, biết $A(1;0;1)$, $B(2;1;2)$, $D(1;-1;1)$. Tìm tọa độ điểm C.

Ⓐ $(0;-2;0)$. Ⓑ $(2;2;2)$. Ⓒ $(2;0;2)$. Ⓓ $(2;-2;2)$.

Lời giải.

- Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành khi

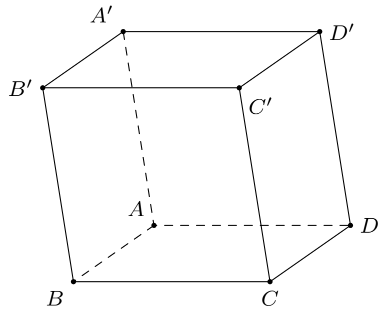
$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}\Leftrightarrow\begin{cases}x_C-1=2-1\\ y_C+1=1-0\\ z_C-1=2-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_C=2\\ y_C=0\\ z_C=2\end{cases}.$$

- Tọa độ điểm $C(2;0;2)$.

Chọn đáp án C ....□

CÂU 20. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $A(0;0;0)$, $B(a;0;0)$, $D(0;2a;0)$, $A'(0;0;2a), a \neq 0$. Tính độ dài đoạn thẳng AC'.

Ⓐ $|a|$.
Ⓑ $2|a|$.
Ⓒ $3|a|$.
Ⓓ $\dfrac{3|a|}{2}$.

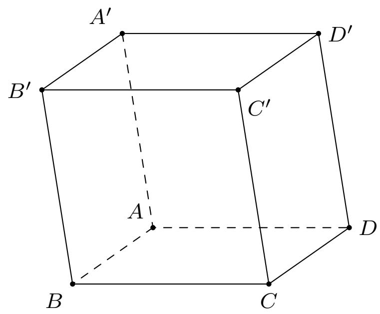


Lời giải.

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (a;0;0)$; $\overrightarrow{AD} = (0;2a;0)$; $\overrightarrow{AA'} = (0;0;2a)$.

$$\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} \Rightarrow \overrightarrow{AC'} = (a;2a;2a).$$

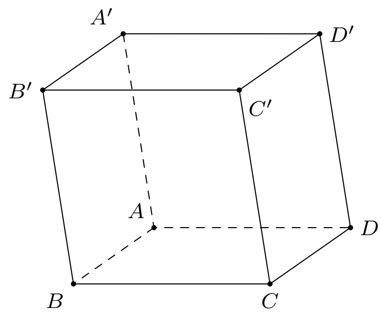
Suy ra $AC' = \sqrt{a^2 + 4a^2 + 4a^2} = 3|a|$.



Chọn đáp án C .... □

CÂU 21. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $A(0;0;1)$, $B'(1;0;0)$, $C'(1;1;0)$. Tìm tọa độ của điểm D.

Ⓐ $D(0;-1;1)$.
Ⓑ $D(0;1;1)$.
Ⓒ $D(0;1;0)$.
Ⓓ $D(1;1;1)$.



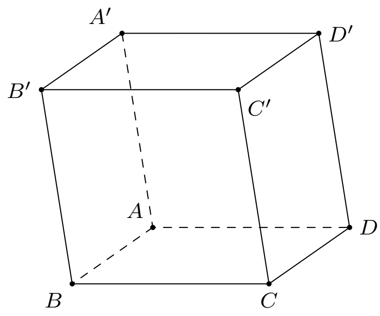
Lời giải.

Gọi $D(x_D;y_D;z_D)$.

Ta có $\overrightarrow{B'C'} = (0;1;0)$, $\overrightarrow{AD} = (x_D;y_D;z_D - 1)$. Vì $B'C'DA$ là hình bình hành nên

$$\overrightarrow{B'C'} = \overrightarrow{AD} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = 0 \\ y_D = 1 \\ z_D - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = 0 \\ y_D = 1 \\ z_D = 1. \end{cases}$$

Vậy $D(0;1;1)$.



Chọn đáp án B .... □

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.

CÂU 22. Cho các điểm $A(1;-2;3), B(-2;1;2), C(3;-1;2)$.

Mệnh đề	Đ	S
a) $\overrightarrow{AB} = (-3;3;-1)$.	X	
b) $\overrightarrow{AC} = (-2;-1;1)$.		X

Mệnh đề	Đ	S
c) $\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AC}$.		X
d) Ba điểm A, B, C không thẳng hàng.	X	

Lời giải.

a) $\overrightarrow{AB} = \left(x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A\right) = (-3;3;-1)$.

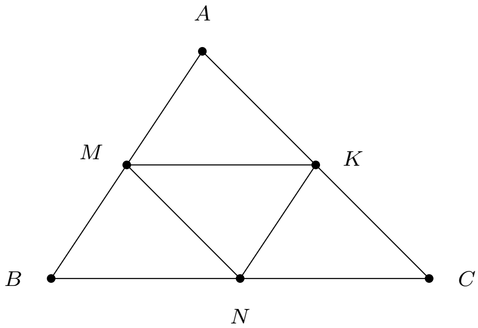
b) $\overrightarrow{AC} = \left(x_C - x_A; y_C - y_A; z_C - z_A\right) = (2;1;-1)$

c) $\overrightarrow{AB}=(-3;3;-1)$, $\overrightarrow{AC}=(2;1;-1)$. Hai vec tơ này không cùng phương nên không tồn tại số thực k để $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{AC}$.

d) Hai vec tơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ không cùng phương nên ba điểm A, B, C không thẳng hàng.

Chọn đáp án | a đúng | b sai | c sai | d đúng | □

CÂU 23. Cho ba điểm $A(3;3;-6)$, $B(1;3;2)$ và $C(-1;-3;1)$. Gọi M, N, K lần lượt là trung điểm của AB, BC và CA.



Mệnh đề	Đ	S
e) Tọa độ $M(2;3;2)$.		
f) Với G là trọng tâm tam giác ABC thì $GC=2\sqrt{5}$.		X
g) Trọng tâm tam giác MNK là $E(1;1;-1)$.	X	
h) Với $D(-3;-3;9)$ thì tứ giác $ABDC$ là hình bình hành.	X	

Lời giải.

a) M là trung điểm của AB, suy ra $M\left(\dfrac{x_A+x_B}{2};\dfrac{y_A+y_B}{2};\dfrac{z_A+z_B}{2}\right)$ hay $M(2;3;-2)$.

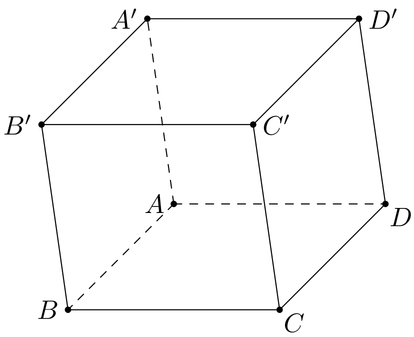
b) Ta có $G(1;1;-1)$. Suy ra $GC=\sqrt{(-1-1)^2+(-3-1)^2+(1+1)^2}=2\sqrt{6}$.

c) Hai tam giác ABC và MNK có cùng trọng tâm. Suy ra E trùng với $G(1;1;-1)$.

d) Ta có $\overrightarrow{AC}=(-4;-6;7)$, $\overrightarrow{BD}=(-4;-6;7)$, suy ra $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}$. Vậy $ABDC$ là hình bình hành.

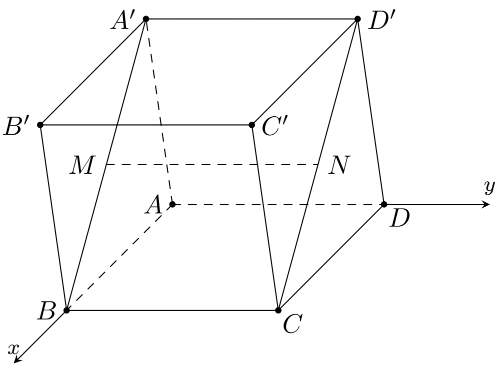
Chọn đáp án | a sai | b sai | c đúng | d đúng | e sai | f sai | g đúng | h đúng | □

CÂU 24. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$, biết điểm $A(0;0;0)$, $B(1;0;0)$, $C(1;2;0)$, $D'(-1;3;5)$. Gọi M, N là tâm của các hình bình hành $ABB'A'$, $ADD'A'$.



Mệnh đề	Đ	S
e) Tọa độ $D(0;2;0)$.	X	
f) Tọa độ $A'(-1;1;5)$.	X	
g) Tọa độ $\overrightarrow{MN}=(-1;1;0)$.		X
h) $\left\lvert\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CC'}\right\rvert=\sqrt{29}$.		X

Lời giải.



a) Theo qui tắc hình bình hành, ta có
$$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=(0;2;0)\Rightarrow D(0;2;0).$$

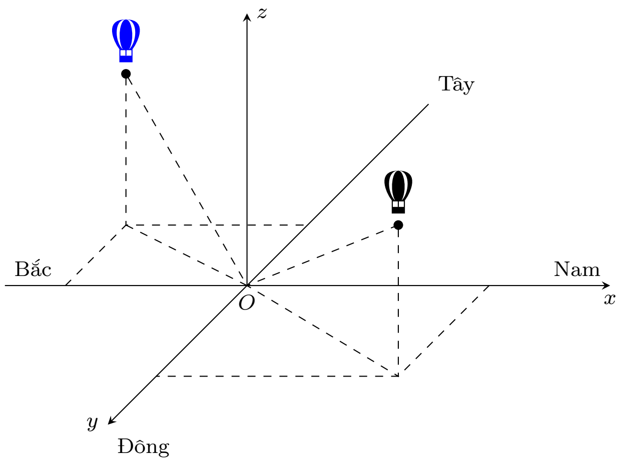
b) Ta có
$$\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{DD'}=(-1;1;5)\Rightarrow A'(-1;1;5).$$

c) Theo hình vẽ $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{BC}=(0;2;0)$.

d) Ta có $\overrightarrow{AC'}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}=(0;3;5)$.
Xét
$$\begin{aligned}\left\lvert\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CC'}\right\rvert &= \left\lvert\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}\right\rvert=\left\lvert\overrightarrow{AC'}\right\rvert\\ &= \sqrt{0^2+3^2+5^2}=\sqrt{34}.\end{aligned}$$

Chọn đáp án | a đúng | b đúng | c sai | d sai | e đúng | f đúng | g sai | h sai | □

CÂU 25. Hai chiếc khinh khí cầu bay lên từ cùng một địa điểm. Chiếc thứ nhất cách điểm xuất phát 2 km về phía nam và 1 km về phía đông, đồng thời cách mặt đất 0,5 km. Chiếc thứ hai nằm cách điểm xuất phát 1 km về phía bắc và 1,5 km về phía tây, đồng thời cách mặt đất 0,8 km.
Chọn hệ trục $Oxyz$ với gốc O đặt tại điểm xuất phát của hai khinh khí cầu, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất với trục Ox hướng về phía nam, trục Oy hướng về phía đông và trục Oz hướng thẳng đứng lên trời (Hình bên dưới), đơn vị đo lấy theo kilomet.



Mệnh đề	Đ	S
a) Với hệ tọa độ đã chọn, toạ độ khinh khí cầu thứ nhất là $(2;1;0{,}5)$.	X	
b) Với hệ tọa độ đã chọn, toạ độ khinh khí cầu thứ hai là $(-1{,}5;-1;0{,}8)$.		X
c) Khoảng cách từ điểm xuất phát đến khinh khí cầu thứ nhất bằng $\sqrt{21}$ km.		X
d) Khoảng cách hai chiếc khinh khí cầu là 3,92 km (*Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm*).	X	

Lời giải.

a) Chiếc khinh khí cầu thứ nhất có tọa độ là $(2;1;0{,}5)$.

b) Chiếc khinh khí cầu thứ hai có tọa độ là $(-1;-1{,}5;0{,}8)$.

c) Khoảng cách từ điểm xuất phát đến khinh khí cầu thứ nhất bằng $\sqrt{2^2+1^2+0,5^2}=\dfrac{\sqrt{21}}{2}$ (km)

d) Khoảng cách hai chiếc khinh khí cầu là $\sqrt{(-1-2)^2+(1{,}5-1)^2+(0{,}8-0{,}5)^2}=\sqrt{15{,}34}\approx 3{,}92$ (km).

Chọn đáp án | a đúng | b sai | c sai | d đúng | .... □

Dạng 6. Tích vô hướng, tích có hướng hai vec tơ và ứng dụng

BÀI TẬP TỰ LUẬN

VÍ DỤ 1. Cho ba véc-tơ $\vec{a}=(3;0;1)$, $\vec{b}=(1;-1;-2)$, $\vec{c}=(2;1;-1)$, $\vec{d}=(1;7;-3)$.

a) Tính $\vec{a}\cdot\vec{b}$, $\vec{b}\cdot\vec{c}$.

b) Tính $|\vec{a}|$, $\left|\vec{b}\right|$, $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)$.

c) Chứng minh $\vec{d}\perp\vec{a}$.

Lời giải.

a) Ta có $\vec{a}\cdot\vec{b}=3\cdot1+0\cdot(-1)+1\cdot(-2)=1$ và $\vec{b}\cdot\vec{c}=1\cdot2+(-1)\cdot1+(-2)\cdot(-1)=3$.

b) Ta có $|\vec{a}|=\sqrt{3^2+0^2+1^2}=\sqrt{10}$, $\left|\vec{b}\right|\sqrt{1^2+(-1)^2+(-2)^2}=\sqrt{6}$.

$\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|}=\dfrac{1}{\sqrt{10}\cdot\sqrt{6}}=\dfrac{\sqrt{15}}{60}$.

c) Ta có $\vec{d}\cdot\vec{a}=1\cdot3+7\cdot0+(-3)\cdot1=0\Rightarrow\vec{d}\perp\vec{a}$.

VÍ DỤ 2. Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a}=(1;0;1)$, $\vec{b}=(1;1;0)$ và $\vec{c}=(-4;3;m)$.

a) Tính góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

b) Tìm m để vectơ $\vec{d}=2\vec{a}+3\vec{b}$ vuông góc với $\vec{c}$.

Lời giải.

a) Ta có $\begin{cases}\vec{a}=(1;0;1)\\ \vec{b}=(1;1;0)\end{cases} \Rightarrow \cos(\vec{a};\vec{b})=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\dfrac{1}{2}$.

b) Ta có $\vec{d}=2\vec{a}+3\vec{b}=(5;3;2)$.
Ta có $\vec{d}\perp\vec{c}\Leftrightarrow\vec{d}\cdot\vec{c}=0\Leftrightarrow -20+9+2m=0\Leftrightarrow m=\dfrac{11}{2}$.

VÍ DỤ 3. Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(-1;0;2)$, $B(0;4;3)$ và $C(-2;1;2)$.

a) Chỉ ra tọa độ một véc tơ (khác $\vec{0}$) vuông góc với hai véc tơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$.

b) Tính chu vi tam giác ABC.

c) Tính $\cos\widehat{BAC}$.

d) Tìm độ dài đường phân giác trong AD của tam giác ABC.

Lời giải.

a)

b) Ta có $AB=\sqrt{1+16+1}=3\sqrt{2}$ và $AC=\sqrt{1+1+0}$.

c)

d) Theo tính chất đường phân giác trong của tam giác, ta có $\dfrac{DB}{DC}=\dfrac{AB}{AC}=3$.

Suy ra $\overrightarrow{DB}=-3\overrightarrow{DC}\Leftrightarrow\begin{cases}x_D=\dfrac{x_B+3x_C}{4}=-\dfrac{3}{2}\\ y_D=\dfrac{y_B+3y_C}{4}=\dfrac{7}{4}\\ z_D=\dfrac{z_B+3z_C}{4}=\dfrac{9}{4}.\end{cases}$

$\Rightarrow D\left(-\dfrac{3}{2};\dfrac{7}{4};\dfrac{9}{4}\right)$.

Vậy $AD=\sqrt{\dfrac{1}{4}+\dfrac{49}{16}+\dfrac{1}{16}}=\dfrac{3\sqrt{6}}{4}$.

VÍ DỤ 4. Trong không gian $Oxyz$, cho 3 điểm $A\left(0;1;-2\right);B\left(3;0;0\right)$ và điểm C thuộc trục Oz. Biết ABC là tam giác cân tại C. Tìm toạ độ điểm C.

Lời giải.

Gọi $C\left(0;0;z\right)$ là điểm thuộc trục Oz.
Tam giác ABC cân tại C nên $CA=CB$.
Suy ra $CA^2=CB^2\Rightarrow 1+(z+2)^2=9+z^2\Rightarrow z=1\Rightarrow C(0;0;1)$.

VÍ DỤ 5. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $M\left(2;3;-1\right)$, $N\left(-1;1;1\right)$, $P\left(1;m-1;2\right)$. Với những giá trị nào của m thì tam giác MNP vuông tại N?

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{NM}=(3;2;-2)$ và $\overrightarrow{NP}=(2;m-2;1)$.
Vì tam giác MNP vuông tại N nên ta có $\overrightarrow{NM}\perp\overrightarrow{NP}\Leftrightarrow\overrightarrow{NM}.\overrightarrow{NP}=0\Leftrightarrow 2m=0\Leftrightarrow m=0$.
Vậy $m=0$ thỏa yêu cầu bài toán.

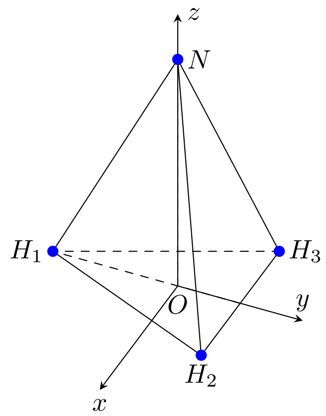
VÍ DỤ 6. Cho hai điểm $A\left(2,-1,1\right);B\left(3,-2,-1\right)$. Tìm điểm N trên trục Ox cách đều A và B.

Lời giải.

N nằm trên trục Ox nên $N\left(x;0;0\right)$.
Khi đó, ta có $\overrightarrow{AN}=(x-2;1;-1)$; $\overrightarrow{BN}=(x-3;2;1)$.
Vì N cách đều A và B nên $AN=BN\Leftrightarrow\sqrt{(x-2)^2+1+1}=\sqrt{(x-3)^2+4+1}\Leftrightarrow x=4$.
Suy ra $N(4;0;0)$.

VÍ DỤ 7.

Trong Hóa học, cấu tạo của phân tử ammoniac (NH_3) có dạng hình chóp tam giác đều mà đỉnh là nguyên tử nitrogen (N) và đáy là tam giác $H_1H_2H_3$ với H_1, H_2, H_3 là vị trí của ba nguyên tử hydrogen (H). Góc tạo bởi liên kết H – N – H, có hai cạnh là hai đoạn thẳng nối N với hai trong ba điểm H_1, H_2, H_3 (chẳng hạn $\widehat{H_1NH_2}$), gọi là góc liên kết của phân tử NH_3. Góc này xấp xỉ 107°.
Trong không gian $Oxyz$, cho một phân tử NH_3 được biểu diễn bởi hình chóp tam giác đều $N.H_1H_2H_3$ với O là tâm của đáy. Nguyên tử nitrogen được biểu diễn bởi điểm N thuộc trục Oz, ba nguyên tử hydrogen ở các vị trí H_1, H_2, H_3 trong đó $H_1(0;-2;0)$ và H_2H_3 song song với trục Ox (Hình bên).



a) Tính khoảng cách giữa hai nguyên tử hydrogen.

b) Tính khoảng cách giữa hai nguyên tử nitrogen với mỗi nguyên tử hydrogen.

Lời giải.

a) Gọi $x = H_1H_2$, khi đó độ dài $OH_1 = x\dfrac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow 2 = x\dfrac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow x = 2\sqrt{3}$.

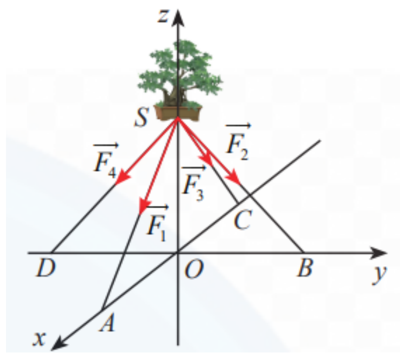
b) Gọi y là khoảng cách giữa hai nguyên tử nitrogen với mỗi nguyên tử hydrogen; khi đó $NH_2 = y$.
Áp dụng định lí cosin ta có

$$H_1H_2^2 = NH_1^2 + NH_2^2 - 2 \cdot NH_1 \cdot NH_2 \cos \widehat{H_1NH_2} \Leftrightarrow 2y^2 - 2y^2 \cos 107^\circ = 12$$

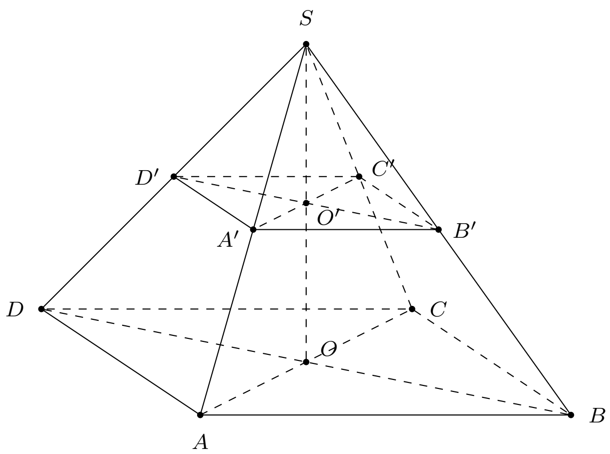
$$\Leftrightarrow y^2 = \frac{12}{2 - 2\cos 107} \Leftrightarrow y = 2{,}155$$

VÍ DỤ 8.

Một chậu cây được đặt trên một giá đỡ có bốn chân với điểm đặt $S(0;0;20)$ và các điểm chạm mặt đất của bốn chân lần lượt là $A(20;0;0)$, $B(0;20;0)$, $C(-20;0;0)$, $D(0;-20;0)$ (đơn vị cm). Cho biết trọng lực tác dụng lên chậu cây có độ lớn 40(N) và được phân bố thành bốn lực $\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_2}$, $\overrightarrow{F_3}$, $\overrightarrow{F_4}$ có độ lớn bằng nhau như Hình 4. Tìm toạ độ của các lực nói trên (mỗi centimét biểu diễn 1 N).



Lời giải.
Tứ giác $ABCD$ có hai đường chéo bằng nhau và vuông góc với nhau tại trung điểm của mỗi đường nên là hình vuông.



Ta có $\overrightarrow{SA} = (20;0;-20)$, $\overrightarrow{SB} = (0;20;-20)$, $\overrightarrow{SC} = (-20;0;-20)$, $\overrightarrow{SD} = (0;-20;-20)$.
Suy ra $SA = SB = SC = SD = 20\sqrt{2}$. Do đó $S.ABCD$ là hình chóp tứ giác đều. Các véctơ $\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_2}$, $\overrightarrow{F_3}$, $\overrightarrow{F_4}$ có điểm đầu tại S và điểm cuối lần lượt là A', B', C', D'.

Ta có $SA' = SB' = SC' = SD'$ nên $S.A'B'C'D'$ cũng là hình chóp tứ giác đều.
Gọi $\vec{F}$ là trọng lực tác dụng lên chậu cây và O' là tâm của hình vuông $A'B'C'D'$. Ta có

$$\vec{F} = \vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{F_3} + \vec{F_4} = \overrightarrow{SA'} + \overrightarrow{SB'} + \overrightarrow{SC'} + \overrightarrow{SD'} = 4\overrightarrow{SO'}.$$

Ta có $\left|\vec{F}\right| = 40$, suy ra $\left|\overrightarrow{SO'}\right| = SO' = 10$. Do tam giác $SO'A'$ vuông cân nên $SA' = \sqrt{2}SO' = 10\sqrt{2}$.
Suy ra $\vec{F_1} = \overrightarrow{SA'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{SA} = (10; 0; -10)$. Chứng minh tương tự ta cũng có

$$\vec{F_2} = \frac{1}{2}\overrightarrow{SB} = (0; 10; -10), \vec{F_3} = \frac{1}{2}\overrightarrow{SC} = (-10; 0; -10), \vec{F_4} = \frac{1}{2}\overrightarrow{SD} = (0; -10; -10).$$

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.

CÂU 1. Tích vô hướng của hai vectơ $\vec{u} = (3; 0; 1)$ và $\vec{v} = (2; 1; 0)$ là

(A) 0. (B) 6. (C) 8. (D) -6.

Lời giải.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 6 + 0 + 0 = 6.$$

Chọn đáp án B

CÂU 2. Tích vô hướng của hai vectơ $\vec{u} = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$ và $\vec{v} = (0; 1; -2)$ bằng

(A) -4. (B) 0. (C) 4. (D) -2.

Lời giải.

Ta có $\vec{u} = (1; 2; -1)$.
Suy ra $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + (-1) \cdot (-2) = 4$.
Chọn đáp án C

CÂU 3. Cho các véc-tơ $\vec{a} = (1; 2; 1)$ và $\vec{b} = (2; 2; 1)$. Tính tích vô hướng $\vec{a} \cdot \left(\vec{a} - \vec{b}\right)$.

(A) -1. (B) -2. (C) 2. (D) 1.

Lời giải.

Ta có: $\left(\vec{a} - \vec{b}\right) = (-1; 0; 0) \Rightarrow \vec{a} \cdot \left(\vec{a} - \vec{b}\right) = 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 0 = -1$.
Chọn đáp án A

CÂU 4. Một thiết bị thăm dò đáy biển được đẩy bởi một lực $\vec{f} = (5; 4; -2)$ (đơn vị: N) giúp thiết bị thực hiện độ dời $\vec{a} = (70; 20; -40)$ (đơn vị: m). Tính công sinh bởi lực $\vec{f}$.

(A) 480 (J). (B) 530 (J). (C) 510 (J). (D) 500 (J).

Lời giải.

Công sinh bởi lực $\vec{f}$ là

$$A = \left|\vec{f}\right| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos\left(\vec{f}, \vec{a}\right) = \vec{f} \cdot \vec{a} = 5 \cdot 70 + 4 \cdot 20 + (-2) \cdot (-40) = 510(\text{J}).$$

Chọn đáp án C

CÂU 5. Góc giữa hai véc-tơ $\vec{i}$ và $\vec{u} = (-\sqrt{3}; 0, ; 1)$ bằng

(A) 60°. (B) 120°. (C) 150°. (D) 30°.

Lời giải.

$\cos\left(\vec{i}, \vec{u}\right) = \dfrac{\vec{i} \cdot \vec{u}}{|\vec{i}| \cdot |\vec{u}|} = \dfrac{1 \cdot (-\sqrt{3})}{1 \cdot \sqrt{3 + 1}} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
Vậy góc của hai véc-tơ đã cho bằng 150°.
Chọn đáp án C

CÂU 6. Cho hai véc-tơ $\vec{u} = (-1; 1; 0)$ và $\vec{v} = (0; -1; 0)$. Góc hợp bởi hai véc-tơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ bằng

(A) 60°. (B) 45°. (C) 135°. (D) 120°.

Lời giải.

$\cos\left(\vec{u}, \vec{v}\right) = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \dfrac{(-1) \cdot 0 + 1 \cdot (-1) + 0 \cdot 0}{\sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 0^2}\sqrt{0^2 + (-1)^2 + 0^2}} = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.
Vậy góc của hai véc-tơ đã cho bằng 135°.
Chọn đáp án C

CÂU 7. Cho hai véc-tơ $\vec{a}(-2;-3;1)$ và $\vec{b}(1;0;1)$. Tính $\cos(\vec{a},\vec{b})$.

A $\cos(\vec{a},\vec{b}) = -\dfrac{1}{2\sqrt{7}}$. **B** $\cos(\vec{a},\vec{b}) = -\dfrac{3}{2\sqrt{7}}$. **C** $\cos(\vec{a},\vec{b}) = \dfrac{1}{2\sqrt{7}}$. **D** $\cos(\vec{a},\vec{b}) = \dfrac{3}{2\sqrt{7}}$.

Lời giải.

Ta có $\cos(\vec{a},\vec{b}) = \dfrac{(-2)\cdot 1 + (-3)\cdot 0 + 1\cdot 1}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{2}} = -\dfrac{1}{2\sqrt{7}}$.

Chọn đáp án A □

CÂU 8. Cho $\vec{a} = (3;2;1)$, $\vec{b} = (-2;2;-4)$. Giá trị của $\left|\vec{a} - \vec{b}\right|$ bằng

A $5\sqrt{2}$. **B** 50. **C** $2\sqrt{5}$. **D** 3.

Lời giải.

Gọi $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b} = (5;0-5) \Rightarrow |\vec{c}| = \sqrt{5^2 + (-5)^2} = 5\sqrt{2}$.

Chọn đáp án A □

CÂU 9. Cho hai véc-tơ $\vec{u} = (-1;0;2)$ và $\vec{v} = (x;-2;1)$. Biết rằng $\vec{u}\cdot\vec{v} = 4$. Khi đó $|\vec{v}|$ bằng

A $\sqrt{21}$. **B** 2. **C** 3. **D** 5.

Lời giải.

Ta có $\vec{u}\cdot\vec{v} = -x + 2 = 4 \Leftrightarrow x = -2$.

Vậy $|\vec{v}| = 3$.

Chọn đáp án C □

CÂU 10. Tìm số thực a để vec-tơ $\vec{u} = (a;0;1)$ vuông góc với vec-tơ $\vec{v} = (2;-1;4)$.

A $a = -2$. **B** $a = -4$. **C** $a = 4$. **D** $a = 2$.

Lời giải.

Ta có $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u}\cdot\vec{v} = 0 \Leftrightarrow 2a + 0(-1) + 4 = 0 \Leftrightarrow a = -2$.

Chọn đáp án A □

CÂU 11. Tìm x để hai véc-tơ $\vec{a} = (x;x-2;2)$ và $\vec{b} = (x;1;-2)$ vuông góc với nhau.

A $x = 3$. **B** $x = 1$. **C** $\left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = -3 \end{array}\right.$. **D** $\left[\begin{array}{l} x = -2 \\ x = 3 \end{array}\right.$.

Lời giải.

Hai véc-tơ đã cho vuông góc khi $0 = \vec{a}\cdot\vec{b} = x^2 + x - 2 - 4$ hay $x = 2$ hoặc $x = -3$.

Chọn đáp án C □

CÂU 12. Cho hai véc-tơ $\vec{u} = (1;-2;1)$ và $\vec{v} = (2;1;-1)$. Véc-tơ nào dưới đây vuông góc với cả hai véc-tơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$?

A $\vec{w_2} = (1;3;5)$. **B** $\vec{w_3} = (1;-4;7)$. **C** $\vec{w_4} = (1;4;7)$. **D** $\vec{w_1} = (1;-3;5)$.

Lời giải.

Ta có $\vec{u}\cdot\vec{w_2} = 0$, $\vec{v}\cdot\vec{w_2} = 0$. Do đó $\vec{w_2}$ thỏa mãn đề bài.

Chọn đáp án A □

CÂU 13. Tích có hướng của hai véc-tơ $\vec{a} = (-1;2;0)$ và $\vec{b} = (0;4;-3)$ có tọa độ là

A $(-6;3;-4)$. **B** $(6;-3;4)$. **C** $(6;3;4)$. **D** $(-6;-3;-4)$.

Lời giải.

Ta có $\left[\vec{a},\vec{b}\right] = \left(\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 4 & -3 \end{vmatrix};\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -3 & 0 \end{vmatrix};\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}\right) = (-6;-3;-4)$.

Chọn đáp án D □

CÂU 14. Cho $A(2;1;4), B(-2;2;-6), C(6;0;-1)$. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.

A $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 67$. **B** $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = -67$. **C** $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 33$. **D** $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 65$.

Lời giải.

Ta có: $\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (-4;1;-10) \\ \overrightarrow{AC} = (4;-1;-5). \end{cases}$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = (-4)\cdot 6 + 1\cdot(-1) + (-10)\cdot(-5) = 33$.

Chọn đáp án C □

CÂU 15. Cho $A(1;-2;3)$, $B(2;-4;1)$, $C(2;0;2)$, khi đó tích vô hướng $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ bằng

A 4. **B** -1. **C** 7. **D** -5.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (1;-2;-2)$ và $\overrightarrow{AC} = (1;2;-1)$.

Vì vậy $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 1\cdot 1 + (-2)\cdot 2 + (-2)\cdot(-1) = -1$.

Chọn đáp án B □

CÂU 16. Cho tam giác ABC với $A(8;9;2)$, $B(3;5;1)$, $C(11;10;4)$. Số đo góc A của tam giác ABC là

A 60°. **B** 150°. **C** 30°. **D** 120°.

Lời giải.

Ta có $\widehat{BAC} = \left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$, $\overrightarrow{AB} = (-5;-4;-1)$, $\overrightarrow{AC} = (3;1;2)$. Ta có

$$\cos\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right) = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|} = \frac{-21}{\sqrt{42}\cdot\sqrt{14}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \widehat{BAC} = \left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right) = 150^\circ.$$

Chọn đáp án B .... □

CÂU 17. Cho điểm $A(3;-1;5)$, $B(m;2;7)$. Tìm tất cả các giá trị của m để độ dài đoạn $AB = 7$.

A $m = 3$ hoặc $m = -3$. **B** $m = 9$ hoặc $m = -3$. **C** $m = -3$ hoặc $m = -9$. **D** $m = 9$ hoặc $m = 3$.

Lời giải.

$$AB = 7 \Leftrightarrow \sqrt{(m-3)^2 + 3^2 + 2^2} = 7 \Leftrightarrow (m-3)^2 = 36 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m-3 = 6 \\ m-3 = -6 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 9 \\ m = -3. \end{array}\right.$$

Chọn đáp án B .... □

CÂU 18. Cho ba điểm $A(3;2;8)$, $B(0;1;3)$ và $C(2;m;4)$. Tìm m để tam giác ABC vuông tại B.

A $m = 4$. **B** $m = -10$. **C** $m = 25$. **D** $m = -1$.

Lời giải.

Tam giác ABC vuông tại B tương đương với $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = \vec{0}$.
Ta có $\overrightarrow{BA} = (3;1;5)$, $\overrightarrow{BC} = (2;m-1;1)$.
Nên $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = 0 \Leftrightarrow 3\cdot 2 + (m-1) + 5\cdot 1 = 0 \Leftrightarrow m = -10$.
Chọn đáp án B .... □

CÂU 19. Cho ba điểm $M(2;3;-1)$, $N(-1;1;1)$ và $P(1;m-1;2)$. Tìm m để tam giác MNP vuông tại N.

A $m = 0$. **B** $m = -4$. **C** $m = 2$. **D** $m = -6$.

Lời giải.

$\overrightarrow{MN}(-3;-2;2)$; $\overrightarrow{NP}(2;m-2;1)$.
Tam giác MNP vuông tại $N \Leftrightarrow \overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{NP} = 0 \Leftrightarrow -6 - 2(m-2) + 2 = 0 \Leftrightarrow m - 2 = -2 \Leftrightarrow m = 0$.
Chọn đáp án A .... □

CÂU 20. Cho tam giác ABC có $A(7;3;3)$, $B(1;2;4)$, $C(2;3;5)$. Tìm toạ độ điểm H là chân đường cao kẻ từ A của tam giác ABC.

A $H(3;4;6)$. **B** $H(-3;4;7)$. **C** $H(2;4;1)$. **D** $H(2;-4;3)$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{BC} = (1;1;1)$.
Gọi $H(x;y;z)$ là chân đường cao của tam giác ABC kẻ từ A.
Suy ra $\overrightarrow{BH} = (x-1;y-2;z-4)$.
$\overrightarrow{BH}$ cùng phương với $\overrightarrow{BC}$, do đó $x-1 = t$; $y-2 = t$; $z-4 = t$. Suy ra $H(1+t;2+t;4+t)$.
Ta có $\overrightarrow{AH} = (x_H - x_A; y_H - y_A; z_H - z_A) = (t-6;t-1;t+1)$.
$\overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC} = 0 \Leftrightarrow t - 6 + t - 1 + t + 1 = 0 \Leftrightarrow 3t = 6 \Leftrightarrow t = 2$.
Suy ra $H(3;4;6)$.
Chọn đáp án A .... □

CÂU 21. Cho hai điểm $A(1;1;0)$, $B(2;-1;2)$. Gọi $M(0;0;z)$ là điểm thuộc trục Oz sao cho $MA^2 + MB^2$ nhỏ nhất. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A $z \in (0;1]$. **B** $z \in (1;2]$. **C** $z \in (-1;0]$. **D** $z \in (-2;-1]$.

Lời giải.

Gọi $M(0;0;z)$.Khi đó $MA^2 + MB^2 = 2z^2 - 4z + 11 = 2(z-1)^2 + 9 \geq 9$.
Dấu $" = "$ xảy ra khi và chỉ khi $z = 1$. Do đó, $M(0;0;1)$.
Chọn đáp án A .... □

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.

CÂU 22. Cho ba vec-tơ $\vec{a} = (-1;1;0)$, $\vec{b} = (1;1;0)$ và $\vec{c} = (1;1;1)$.

Mệnh đề	Đ	S
a) $\|\vec{a}\| = 2$.		X
b) $\|\vec{c}\| = \sqrt{3}$.	X	
c) $\cos(\vec{a}, \vec{c}) = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$.		X
d) $\vec{b} \perp \vec{c}$.		X

Lời giải.

a) $|\vec{a}| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$.

b) $|\vec{c}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$

c) $\cos(\vec{a}, \vec{c}) = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{c}}{|\vec{a}|.|\vec{c}|} = 0$

d) $\vec{b} \cdot \vec{c} = 2$, suy ra $\vec{b}$ không vuông $\vec{c}$.

Chọn đáp án | a sai | b đúng | c sai | d sai | .... □

CÂU 23. Cho hai véctơ $\vec{u} = (0; 2; 3)$ và $\vec{v} = (m-1; 2m; 3)$.

Mệnh đề	Đ	S
a) $\|\vec{u}\| = \sqrt{13}$.	X	
b) $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| \Leftrightarrow m = -\dfrac{3}{5}$.		X
c) $\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow m = 1$.	X	
d) $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow m = \dfrac{9}{4}$.		X

Lời giải.

a) $|\vec{u}| = \sqrt{0^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$

b) $|\vec{u}| = |\vec{v}| \Leftrightarrow \sqrt{13} = \sqrt{(m-1)^2 + 4m^2 + 9} \Leftrightarrow 5m^2 - 2m - 3 = 0 \Leftrightarrow m = 1$ hoặc $m = -\dfrac{3}{5}$.

c) khi $m = 1$ thì $\vec{v} = (0; 2; 3)$. Suy ra $\vec{u} = \vec{v}$.

d) $\vec{u} \perp \vec{u} \Leftrightarrow 4m + 9 = 0 \Leftrightarrow m = -\dfrac{9}{4}$.

Chọn đáp án | a đúng | b sai | c đúng | d sai | .... □

CÂU 24. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba vectơ $\vec{a}(1; 2; 3)$, $\vec{b}(2; 2; -1)$, $\vec{c}(4; 0; -4)$.

Mệnh đề	Đ	S
a) Tọa độ của vectơ $\vec{x} = \vec{a} + \vec{b}$ là $\vec{x} = (3; 4; 2)$.	X	
b) Tọa độ của vectơ $\vec{y} = \vec{a} + \vec{c}$ là $\vec{y} = (5; 2; 1)$.		X
c) Tọa độ của vectơ $\vec{z} = \vec{b} + \vec{c}$ là $\vec{z} = (6; -2; -5)$.		X
d) Vectơ $\vec{k} = (7; 4; -2)$ thỏa mãn đẳng thức $\vec{k} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.	X	

Lời giải.

a) $\vec{x} = \vec{a} + \vec{b} = (3; 4; 2)$.

b) $\vec{y} = \vec{a} + \vec{c} = (5; 2; -1)$.

c) $\vec{z} = \vec{b} + \vec{c} = (6; 2; -5)$.

d) $\vec{k} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = (7; 4; -2)$.

Chọn đáp án | a đúng | b sai | c sai | d đúng | .... □

CÂU 25. Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a}(1; -1; 5)$, $\vec{b}(3; 2; -1)$.

Mệnh đề	Đ	S
a) $\vec{a} + \vec{b} \neq \vec{0}$.	X	
b) $\vec{a} - \vec{b} = (-2; -3; 4)$.		X

c) $\vec{v} = \vec{b} - \vec{a}$ có tung độ âm.		X
d) Xét $\vec{x}$ thỏa $\vec{a} - \vec{x} = \vec{b}$. Hoành độ của vectơ $\vec{x}$ thuộc khoảng $(-3;1)$.	X	

Lời giải.

a) $\vec{a} + \vec{b} = (4;1;4)$.

b) $\vec{a} - \vec{b} = (-2;-3;6)$.

c) $\vec{b} - \vec{a} = (2;3;-4)$.

d) $\vec{a} - \vec{x} = \vec{b} \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{a} - \vec{b} = (-2;-3;6)$. Suy ra hoành độ của vectơ $\vec{x}$ là $-2 \in (-3;1)$.

Chọn đáp án a đúng | b sai | c sai | d đúng □

CÂU 26. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $D(4;-1;3)$ và các điểm M, N, P lần lượt thuộc các trục Ox, Oy, Oz sao cho DM, DN, DP đôi một vuông góc với nhau

Mệnh đề	Đ	S
a) Tung độ của điểm N bằng 13.		X
b) Cao độ của điểm P bằng $\dfrac{13}{4}$.		X
c) $V_{DMNP} > 29$.	X	
d) Gọi $\vec{x}$ là vectơ thỏa $\vec{x} \cdot \overrightarrow{DM} = 1$; $\vec{x} \cdot \overrightarrow{DN} = 2$; $\vec{x} \cdot \overrightarrow{DP} = -3$ thì tổng hoành độ, tung độ và cao độ của vectơ $\vec{x}$ thuộc khoảng $(3;7)$.		X

Lời giải.

- Gọi $M(a;0;0)$, $N(0;b;0)$, $P(0;0;c)$.
$\overrightarrow{DM} = (a-4;1;-3)$, $\overrightarrow{DN} = (-4;b+1;-3)$, $\overrightarrow{DP} = (-4;1;c-3)$
Ta có DM, DN, DP đôi một vuông góc với nhau nên
$$\begin{cases} \overrightarrow{DM} \cdot \overrightarrow{DN} = 0 \\ \overrightarrow{DM} \cdot \overrightarrow{DP} = 0 \\ \overrightarrow{DN} \cdot \overrightarrow{DP} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4(a-4) + b + 1 + 9 = 0 \\ -4(a-4) + 1 - 3(c-3) = 0 \\ 16 + b + 1 - 3(c-3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4a + b = -26 \\ -4a - 3c = -26 \\ b - 3c = -26 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{13}{4} \\ b = -13 \\ c = \dfrac{13}{3} \end{cases}.$$

- $V_{DMNP} = \dfrac{1}{6} DM \cdot DN \cdot DP = \dfrac{1}{6} \cdot \dfrac{13}{4} \cdot 13 \cdot \dfrac{13}{3} = \dfrac{2197}{72} > 29$.

- Gọi $\vec{x} = (m;n;p)$
$\overrightarrow{DM} = \left(-\dfrac{3}{4};1;-3\right)$; $\overrightarrow{DN} = (-4;-12;-3)$; $\overrightarrow{DP} = \left(-4;1;\dfrac{4}{3}\right)$
$$\begin{cases} \vec{x} \cdot \overrightarrow{DM} = 1 \\ \vec{x} \cdot \overrightarrow{DN} = 2 \\ \vec{x} \cdot \overrightarrow{DP} = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{3}{4}m + n - 3p = 1 \\ -4m - 12n - 3p = 2 \\ -4m + n + \dfrac{4}{3}p = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \dfrac{88}{169} \\ n = -\dfrac{35}{169} \\ p = -\dfrac{90}{169} \end{cases}$$
$m + n + p = \dfrac{-37}{169}$.

Chọn đáp án a sai | b sai | c đúng | d sai □

CÂU 27. Cho tam giác ABC có $A(1;2;0)$, $B(0;1;1)$, $C(2;1;0)$.

Mệnh đề	Đ	S
a) Tam giác ABC vuông tại A.	X	
b) Chu vi tam giác là $\sqrt{7} + \sqrt{3} + \sqrt{2}$.		X
c) Diện tích tam giác ABC là $\sqrt{6}$.		X
d) Tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là $I\left(1;1;\dfrac{1}{2}\right)$.	X	

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(-1;-1;1)\Rightarrow AB=\sqrt{3}$, $\overrightarrow{AC}=(1;-1;0)\Rightarrow AC=\sqrt{2}$,
$\overrightarrow{BC}=(2;0;-1)\Rightarrow BC=\sqrt{5}$.

a) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$ do đó $AB\perp AC$, tam giác ABC vuông tại A.

b) Chu vi của tam giác là $AB+AC+BC=\sqrt{3}+\sqrt{2}+\sqrt{5}$.

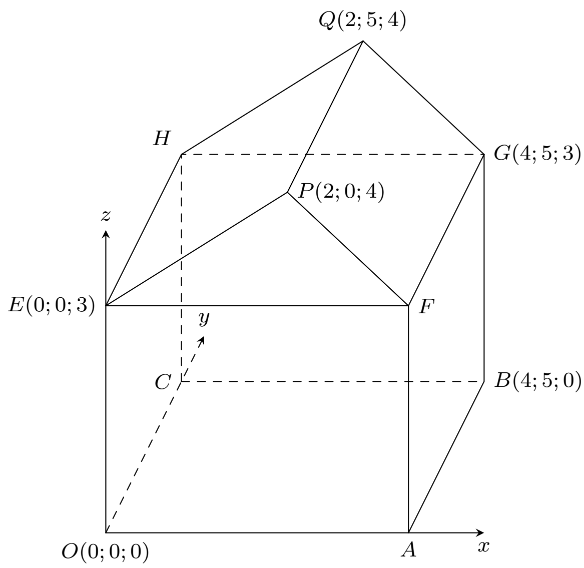
c) Diện tích là
$S=\dfrac{1}{2}\cdot AB\cdot AC=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

d) Tâm đường tròn ngoại tiếp là trung điểm của BC có tọa độ $I\left(1;1;\dfrac{1}{2}\right)$.

Chọn đáp án | a đúng | b sai | c sai | d đúng | .... □

CÂU 28. Hình minh họa sơ đồ một ngôi nhà trong hệ trục tọa độ $Oxyz$, trong đó nền nhà, bốn bức tường và hai mái nhà đều là hình chữ nhật.

Mệnh đề	Đ	S
e) Tọa độ của các điểm $A(5;0;0)$.		
f) Tọa độ của các điểm $H(0;5;3)$.		X
g) Góc nhị diện có cạnh là đường thẳng FG, hai mặt lần lượt là $(FGQP)$ và $(FGHE)$ gọi là góc dốc của mái nhà. Số đo của góc dốc của mái nhà bằng $26{,}6^\circ$ (làm tròn kết quả đến hàng phần mười của độ).		X
h) Chiều cao của ngôi nhà là 4.		X



Lời giải.

a) Vì nền nhà là hình chữ nhật nên tứ giác $OABC$ là hình chữ nhật, suy ra $x_A=x_B=4$, $y_C=y_B=5$. Do A nằm trên trục Ox nên tọa độ điểm A là $(4;0;0)$.

b) Tường nhà là hình chữ nhật, suy ra $y_H=y_C=5$, $z_H=z_E=3$. Do H nằm trên mặt phẳng (Oyz) nên tọa độ điểm H là $(0;5;3)$.

c) Để tính góc dốc của mái nhà, ta đi tính số đo góc nhị diện có cạnh là đường thẳng FG, hai mặt phẳng lần lượt là $(FGQP)$ và $(FGHE)$. Do mặt phẳng (Ozx) vuông góc với hai mặt phẳng $(FGQP)$ và $(FGHE)$ nên góc PFE là góc phẳng nhị diện ứng với góc nhị diện đó.
Ta có $\overrightarrow{FP}=(-2;0;1)$, $\overrightarrow{FE}=(-4;0;0)$.
Suy ra

$$\begin{aligned}\cos\widehat{PFE} &= \cos\left(\overrightarrow{FP},\overrightarrow{FE}\right)=\frac{\overrightarrow{FP}\cdot\overrightarrow{FE}}{\left|\overrightarrow{FP}\right|\cdot\left|\overrightarrow{FE}\right|}\\ &= \frac{(-2)\cdot(-4)+0\cdot0+1\cdot0}{\sqrt{(-2)^2+0^2+1^2}\cdot\sqrt{(-4)^2+0^2+0^2}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}.\end{aligned}$$

Do đó, $\widehat{PFE}\approx 26,^\circ$. Vậy góc dốc của mái nhà khoảng $26{,}6^\circ$.

d) Chiều cao bằng cao độ của điểm P. Suy ra $h=4$.

Chọn đáp án | a sai | b sai | c sai | d sai | e sai | f sai | g sai | h sai | .... □

PHẦN III. *Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.*

CÂU 29. Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a}=(1;2;-3)$; $\vec{b}=(-1;-2;z)$. Tìm giá trị z sao cho $\vec{a}+\vec{b}=\vec{0}$

Lời giải.

Đáp án: 3

Ta có: $\vec{a}+\vec{b}=(0;0;z-3)$.
$\vec{a}+\vec{b}=\vec{0} \Leftrightarrow z-3=0 \Leftrightarrow z=3$.
Vậy $z=3$.

CÂU 30. Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a}=2\vec{i}-3\vec{j}+6\vec{k}$ và $\vec{b}=6\vec{j}+\vec{k}$. Khi đó độ dài của $\vec{a}-2\vec{b}$ (làm tròn đến hàng phần mười)

Lời giải.

Đáp án: 15,7

Ta có: $\vec{a}=2\vec{i}-3\vec{j}+6\vec{k} \Rightarrow \vec{a}=(2;-3;6)$
$\vec{b}=6\vec{j}+\vec{k} \Rightarrow \vec{b}=(0;6;1)$
Khi đó: $\vec{a}-2\vec{b}=(2;-15;4) \Rightarrow \left|\vec{a}-2\vec{b}\right|=7\sqrt{5}\approx 15{,}7$

CÂU 31. Trong không gian $Oxyz$, cho các vectơ $\vec{a}=(1;0;-2)$, $\vec{b}=(-2;1;3)$, $\vec{c}=(3;2;-1)$, $\vec{d}=(9;0;-11)$ và 3 số thực m,n,p thỏa $m\cdot\vec{a}+n\cdot\vec{b}+p\vec{c}=\vec{d}$. Tính giá trị biểu thức $T=m+n+p$.

Lời giải.

Đáp án: 1

Ta có: $m\cdot\vec{a}+n\cdot\vec{b}+p\vec{c}=(m-2n+3p;n+2p;-2m+3n-p)$, $\vec{d}=(9;0;-11)$.

$$m\cdot\vec{a}+n\cdot\vec{b}+p\vec{c}=\vec{d} \Leftrightarrow \begin{cases} m-2n+3p=9 \\ n+2p=0 \\ -2m+3n-p=-11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=2 \\ n=-2 \\ p=1. \end{cases}$$

Vậy $T=m+n+p=1$.