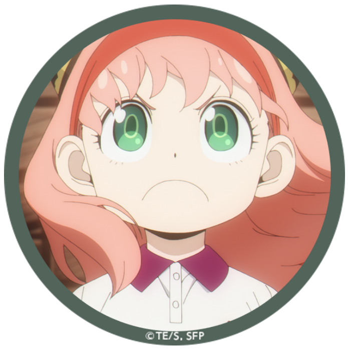
PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

Bài 4. PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN



ĐIỂM:

Be yourself; everyone else is already taken.

QUICK NOTE

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Phương trình $\sin x = m$

- Với $|m| > 1$ thì phương trình $\sin x = m$ vô nghiệm.
- Với $|m| \leq 1$, sẽ tồn tại duy nhất $\alpha \in \left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$ thỏa mãn $\sin \alpha = m$. Khi đó

$$\sin x = m \Leftrightarrow \sin x = \sin \alpha \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \alpha + k2\pi \\ x = \pi - \alpha + k2\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

- Nếu số đo của góc α được đo bằng đơn vị độ thì

$$\sin x = \sin \alpha^\circ \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \alpha^\circ + k360^\circ \\ x = 180^\circ - \alpha^\circ + k360^\circ \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

- Tổng quát,

$$\sin f(x) = \sin g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = g(x) + k2\pi \\ f(x) = \pi - g(x) + k2\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

- Một số trường hợp đặt biệt:
  - $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.
  - $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.
  - $\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

2. Phương trình $\cos x = m$

- Với $|m| > 1$ thì phương trình $\cos x = m$ vô nghiệm.
- Với $|m| \leq 1$, sẽ tồn tại duy nhất $\alpha \in [0; \pi]$ thỏa mãn $\cos x = m$. Khi đó

$$\cos x = m \Leftrightarrow \cos x = \cos \alpha \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \alpha + k2\pi \\ x = -\alpha + k2\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

- Nếu số đo của góc α được đo bằng đơn vị độ thì

$$\cos x = \cos \alpha \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \alpha^\circ + k360^\circ \\ x = -\alpha^\circ + k360^\circ \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

- Tổng quát,

$$\cos f(x) = \cos g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = g(x) + k2\pi \\ f(x) = -g(x) + k2\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})$$

- Một số trường hợp đặc biệt:
  - $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.
  - $\cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.
  - $\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

QUICK NOTE

3. Phương trình $\tan x = m$

- Với mọi $m \in \mathbb{R}$, tồn tại duy nhất $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ thỏa mãn $\tan\alpha = m$. Khi đó

$$\tan x = m \Leftrightarrow \tan x = \tan\alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi \ (k \in \mathbb{Z}).$$

- Nếu số đo của góc α được đo bằng đơn vị độ thì

$$\tan x = \tan\alpha^\circ \Leftrightarrow x = \alpha^\circ + k180^\circ,\ k \in \mathbb{Z}$$

- Tổng quát,

$$\tan f(x) = \tan g(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x) + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

4. Phương trình $\cot x = m$

- Với mọi $m \in \mathbb{R}$, tồn tại duy nhất $\alpha \in (0; \pi)$ thỏa mãn $\cot\alpha = m$. Khi đó

$$\cot x = m \Leftrightarrow \cot x = \cot\alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi\ k \in \mathbb{Z}.$$

- Nếu số đo của góc α được đo bằng đơn vị độ thì

$$\cot x = \cot\alpha^\circ \Leftrightarrow x = \alpha^\circ + k180^\circ,\ k \in \mathbb{Z}.$$

- Tổng quát,

$$\cot f(x) = \cot g(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x) + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Dạng 1. Điều kiện có nghiệm của phương trình lượng giác cơ bản

- $\sin x = a$ có tập giá trị $|a| \le 1$.
- $\cos x = b$ có tập giá trị $|b| \le 1$.

1. Ví dụ

VÍ DỤ 1. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $\sin x = m$ có nghiệm.

VÍ DỤ 2. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $\sin x - m = 1$ có nghiệm.

VÍ DỤ 3. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $3\sin^2 x = 2m - 1$ có nghiệm.

VÍ DỤ 4. Tìm m để phương trình $\cos x - m = 0$ vô nghiệm.

VÍ DỤ 5. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\cos x = m + 1$ có nghiệm?

2. Bài tập tự luận

BÀI 1. Tìm tất cả các tham số m sao cho trong tập nghiệm của phương trình $\sin 2x = 1 + 2m$ có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

BÀI 2. Tìm m để phương trình $\sin 3x - 6 - 5m = 0$ có nghiệm.

BÀI 3. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình: $3\sin x + m - 1 = 0$ có nghiệm?

3. Bài tập trắc nghiệm

CÂU 1. Với giá trị nào của m thì phương trình $\sin x - m = 1$ có nghiệm là

(A) $0 \le m \le 1$. (B) $m \le 0$. (C) $m \ge 1$. (D) $-2 \le m \le 0$.

CÂU 2. Phương trình $\sin\frac{x}{2} = m$ có nghiệm khi và chỉ khi.

(A) $m \in [-1; 1]$. (B) $m \in [-2; 2]$. (C) $m \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$. (D) $m \in R$.

CÂU 3. Với giá trị nào của m thì phương trình $\sin x - 2m = 1$ có nghiệm?

(A) $0 \le m \le 1$. (B) $m \le 0$. (C) $m \ge 1$. (D) $-1 \le m \le 0$.

QUICK NOTE

CÂU 4. Tập hợp các giá trị của tham số m để phương trình $\sin 2x + 2 = m$ có nghiệm là $[a; b]$. Khi đó $a + b$ bằng

A 3. **B** 0. **C** 2. **D** 4.

CÂU 5. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $3\sin 2x - m^2 + 5 = 0$ có nghiệm?

A 6. **B** 2. **C** 1. **D** 7.

CÂU 6. Cho phương trình $4\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = a^2 + \sqrt{3}\sin 2x - \cos 2x \quad (1)$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số a để phương trình (1) có nghiệm.

A 5. **B** 0. **C** 2. **D** 3.

CÂU 7. Tìm tất cả giá trị thực của m để phương trình $\cos 2x - m = 0$ vô nghiệm.

A $m \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$. **B** $m \in (1; +\infty)$.
C $m \in [-1; 1]$. **D** $m \in (-\infty; -1)$.

CÂU 8. Cho phương trình $\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) - m = 2$. Tìm m để phương trình có nghiệm?

A Không tồn tại m. **B** $m \in [-1; 3]$.
C $m \in [-3; -1]$. **D** $m \in \mathbb{R}$.

CÂU 9. Tìm tất cả giá trị của a để phương trình sau có nghiệm $\cos^2 3x = 2a^2 - 3a + 1$.

A $a \in [0; 1]$. **B** $a \in \left[0; \frac{1}{2}\right] \cup \left[1; \frac{3}{2}\right]$.
C $a \in \left[0; \frac{3}{2}\right]$. **D** $a \in [0; 1] \cup \left[\frac{3}{2}; +\infty\right)$.

Dạng 2. Phương trình lượng giác cơ bản dùng Radian

- $\sin x = \sin \alpha \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \alpha + k2\pi \\ x = \pi - \alpha + k2\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})$.
- $\cos x = \cos \alpha \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \alpha + k2\pi \\ x = -\alpha + k2\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})$.
- $\tan x = \tan \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$.
- $\cot x = \cot \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$.

1. Ví dụ

VÍ DỤ 1. Giải phương trình $\sin x = 1$.

VÍ DỤ 2. Giải phương trình $\cos x = 1$.

VÍ DỤ 3. Giải phương trình $\sin\left(\frac{3x}{4} - \frac{\pi}{3}\right) = 1$.

VÍ DỤ 4. Giải phương trình $\tan x - 1 = 0$.

VÍ DỤ 5. Giải phương trình $\sqrt{3}\tan x - 1 = 0$.

VÍ DỤ 6. Giải phương trình $\cot 3x = \cot x$.

2. Bài tập tự luận

BÀI 1. Giải phương trình $\sin 2x = 1$

BÀI 2. Giải phương trình $\cot(3x - 1) = -\sqrt{3}$.

BÀI 3. Giải phương trình $\cot x = \cot\left(-\frac{\pi}{7}\right)$ trên khoảng $(0; 3\pi)$.

BÀI 4. Phương trình $\cot x = \sqrt{3}$ có bao nhiêu nghiệm thuộc $[-2018\pi; 2018\pi]$?

BÀI 5. Tổng các nghiệm của phương trình $\tan 5x - \tan x = 0$ trên nửa khoảng $[0; \pi)$ bằng

QUICK NOTE

3. Bài tập trắc nghiệm

CÂU 1. Phương trình $\sin x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ có tập nghiệm là

A. $S = \left\{\dfrac{\pi}{6} + k2\pi; \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

B. $S = \left\{\dfrac{\pi}{3} + k2\pi; -\dfrac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

C. $S = \left\{\dfrac{\pi}{3} + k2\pi; \dfrac{2\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

D. $S = \left\{\dfrac{\pi}{3} + k2\pi; -\dfrac{2\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

CÂU 2. Phương trình $2\sin x - 1 = 0$ có tập nghiệm là

A. $S = \left\{\dfrac{\pi}{6} + k2\pi; \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

B. $S = \left\{\dfrac{\pi}{3} + k2\pi; -\dfrac{2\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

C. $S = \left\{\dfrac{\pi}{6} + k2\pi; -\dfrac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

D. $S = \left\{\dfrac{1}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

CÂU 3. Tập nghiệm của phương trình $\sin x = 0$ là

A. $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$.

B. $x = k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$.

C. $x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi\ (k \in \mathbb{Z})$.

D. $x = k2\pi\ (k \in \mathbb{Z})$.

CÂU 4. Số nghiệm của phương trình $\sin 2x = 0$ thỏa mãn $0 < x < 2\pi$ là?

A. 2. B. 1. C. 3. D. 0.

CÂU 5. Nghiệm của phương trình $\sin \dfrac{x}{2} = 1$ là

A. $x = \pi + k4\pi, k \in \mathbb{Z}$.

B. $x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

C. $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

D. $x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

CÂU 6. Nghiệm của phương trình $\cos x = \dfrac{1}{2}$ là

A. $x = \pm\dfrac{\pi}{2} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

B. $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

C. $x = \pm\dfrac{\pi}{4} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

D. $x = \pm\dfrac{\pi}{6} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

CÂU 7. Số nghiệm của phương trình $\cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = 1$ với $\pi \le x \le 5\pi$ là

A. 0. B. 3. C. 1. D. 2.

CÂU 8. Phương trình $\cos x - 1 = 0$ có nghiệm là

A. $x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

B. $x = k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

C. $x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

D. $x = \pi + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

CÂU 9. Tập nghiệm của phương trình $\cos 2x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ là

A. $x = \pm\dfrac{\pi}{12} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

B. $x = \pm\dfrac{\pi}{6} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

C. $x = -\dfrac{\pi}{12} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

D. $x = \dfrac{\pi}{12} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

CÂU 10. Tập nghiệm của phương trình $\cos 2x = \dfrac{1}{2}$ là

A. $x = \pm\dfrac{\pi}{6} + k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$.

B. $x = \pm\dfrac{\pi}{6} + k\pi\ (k \in \mathbb{R})$.

C. $x = \dfrac{\pi}{6} + k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$.

D. $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k2\pi\ (k \in \mathbb{Z})$.

CÂU 11. Tổng nghiệm âm lớn nhất và nghiệm dương nhỏ nhất của phương trình $2\cos x - \sqrt{3} = 0$ là

A. $\dfrac{5\pi}{3}$. B. 0. C. $\dfrac{5\pi}{6}$. D. $-\dfrac{5\pi}{3}$.

CÂU 12. Số nghiệm của phương trình $\cos x = \dfrac{2}{5}$ trên khoảng $\left(-\dfrac{\pi}{2}; 2\pi\right)$ là

A. 2. B. 1. C. 4. D. 3.

CÂU 13. Tổng các nghiệm thuộc khoảng $(0; 2\pi)$ của phương trình $5\cos x - 2 = 0$ là

A. $S = 3\pi$. B. $S = 2\pi$. C. $S = 0$. D. $S = 4\pi$.

CÂU 14. Tính tổng S tất cả các nghiệm trên khoảng $(0; 3\pi)$ của phương trình $2\cos 3x = 1$

A. $S = \dfrac{121\pi}{9}$. B. $S = \dfrac{120\pi}{9}$. C. $S = \dfrac{122\pi}{9}$. D. $S = \dfrac{20\pi}{3}$.

QUICK NOTE

CÂU 15. Tập nghiệm S của phương trình $\sqrt{3}\tan\frac{x}{3}+3=0$.

(A) $S=\left\{-\frac{\pi}{9}+k3\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}$.
(B) $S=\left\{-\frac{\pi}{3}+k\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}$.
(C) $S=\{-\pi+k3\pi,k\in\mathbb{Z}\}$.
(D) $S=\left\{\frac{\pi}{6}+k\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}$.

CÂU 16. Nghiệm của phương trình $\tan x=\tan\frac{\pi}{3}$ là

(A) $x=\pm\frac{\pi}{3}+k2\pi,k\in\mathbb{Z}$.
(B) $x=\frac{\pi}{6}+k2\pi,k\in\mathbb{Z}$.
(C) $x=\frac{\pi}{3}+k\pi,k\in\mathbb{Z}$.
(D) $x=-\frac{\pi}{6}+k2\pi,k\in\mathbb{Z}$.

CÂU 17. Phương trình $\tan x=1$ có nghiệm là

(A) $x=\frac{\pi}{4}+k2\pi$.
(B) $x=-\frac{\pi}{4}+k2\pi$.
(C) $x=-\frac{\pi}{4}+k\pi$.
(D) $x=\frac{\pi}{4}+k\pi$.

CÂU 18. Phương trình $\sqrt{3}\tan 2x-3=0$ có nghiệm là

(A) $x=\frac{\pi}{3}+k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$.
(B) $x=\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2}\ (k\in\mathbb{Z})$.
(C) $x=\frac{\pi}{3}+\frac{k\pi}{2}\ (k\in\mathbb{Z})$.
(D) $x=\frac{\pi}{6}+k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$.

CÂU 19. Cho phương trình $\sqrt{3}\tan 2x=3$ có nghiệm x_0 khi đó $\cos x_0$ nhận giá trị là

(A) $\frac{-\sqrt{3}}{2}$.
(B) $\pm\frac{\sqrt{3}}{2};\pm\frac{1}{2}$.
(C) $\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$.
(D) $\pm\frac{1}{2}$.

CÂU 20. Tổng các nghiệm của phương trình $\tan 2x=\tan x$ trên $[-\pi;2\pi]$ là

(A) π.
(B) $\frac{\pi}{2}$.
(C) 4π.
(D) 2π.

CÂU 21. Nghiệm của phương trình $\tan 3x=\tan x$ là

(A) $x=k\pi,k\in\mathbb{Z}$.
(B) $x=\frac{k\pi}{2},k\in\mathbb{Z}$.
(C) $x=\frac{k\pi}{6},k\in\mathbb{Z}$.
(D) $x=k2\pi,k\in\mathbb{Z}$.

CÂU 22. Nghiệm của phương trình $\tan 2x=\tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$ là

(A) $x=\frac{\pi}{6}+k\frac{\pi}{2},k\in\mathbb{Z}$.
(B) $x=\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{3},k\in\mathbb{Z}$.
(C) $x=\frac{\pi}{3}+k\frac{\pi}{2},k\in\mathbb{Z}$.
(D) $x=\frac{\pi}{6}+k\frac{\pi}{3},k\in\mathbb{Z}$.

CÂU 23. Phương trình lượng giác $\sqrt{3}\cot x-3=0$ có nghiệm là

(A) $x=\frac{\pi}{3}+k\pi,(k\in\mathbb{Z})$.
(B) $x=\frac{\pi}{6}+k2\pi,(k\in\mathbb{Z})$.
(C) $x=-\frac{\pi}{6}+k2\pi,(k\in\mathbb{Z})$.
(D) $x=\frac{\pi}{6}+k\pi,(k\in\mathbb{Z})$.

CÂU 24. Phương trình $\cot\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)=1$ có nghiệm

(A) $x=\frac{\pi}{2}+k2\pi,k\in\mathbb{Z}$.
(B) $x=\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbb{Z}$.
(C) $x=k\pi,k\in\mathbb{Z}$.
(D) $x=k\frac{\pi}{2},k\in\mathbb{Z}$.

Dạng 3. Phương trình lượng giác cơ bản dùng độ

- $\sin x=\sin\alpha^\circ\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\alpha^\circ+k360^\circ\\x=180^\circ-\alpha^\circ+k360^\circ\end{array}\right.\ (k\in\mathbb{Z})$.
- $\cos x=\cos\alpha^\circ\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\alpha^\circ+k360^\circ\\x=-\alpha^\circ+k360^\circ\end{array}\right.\ (k\in\mathbb{Z})$.
- $\tan x=\tan\alpha^\circ\Leftrightarrow x=\alpha^\circ+k180^\circ\quad(k\in\mathbb{Z})$.
- $\cot x=\cot\alpha^\circ\Leftrightarrow x=\alpha^\circ+k180^\circ\quad(k\in\mathbb{Z})$.

1. Ví dụ

VÍ DỤ 1. Tìm góc lượng giác x sao cho:

a) $\sin x=\sin 55^\circ$;
c) $\tan x=\tan 67^\circ$;
b) $\cos x=\cos(-87^\circ)$;
d) $\cot x=\cot(-83^\circ)$.

VÍ DỤ 2. Giải các phương trình sau:

QUICK NOTE

a) $\sin(x+20^\circ)=\dfrac{1}{2}$; b) $\sin(x+30^\circ)=\sin(x+60^\circ)$.

VÍ DỤ 3. Giải phương trình $\sin 2x=\sin(60^\circ-3x)$.

VÍ DỤ 4. Giải phương trình $\cos 2x=\cos(45^\circ-x)$.

VÍ DỤ 5. Giải phương trình: $\sqrt{3}\tan\left(\dfrac{x}{2}+15^\circ\right)=1$.

2. Bài tập tự luận

BÀI 1. Giải phương trình $\cos(x-15^\circ)=-\dfrac{1}{2}$.

BÀI 2. Giải phương trình: $\cos(2x-60^\circ)=\dfrac{1}{3}$.

BÀI 3. Giải phương trình $\tan(x+30^\circ)+1=0$ với $-90^\circ<x<360^\circ$.

BÀI 4. Giải phương trình $3\cot^2(5x+40^\circ)=1$.

BÀI 5. Giải phương trình: $\tan(3x-20^\circ)-\cot(2x+15^\circ)=0$.

BÀI 6. Giải phương trình: $\cot(x+30^\circ)=\cot\dfrac{x}{2}$

3. Bài tập trắc nghiệm

CÂU 1. Phương trình $\sin x=\sin a^\circ$ tương đương với

(A) $\left[\begin{array}{l}x=a^\circ+k360^\circ\\x=-a^\circ+k60^\circ\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z})$. (B) $\left[\begin{array}{l}x=a^\circ+k60^\circ\\x=180^\circ-a^\circ+60^\circ\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z})$.

(C) $x=a^\circ+k180^\circ\ (k\in\mathbb{Z})$. (D) $x=-a^\circ+k180^\circ\ (k\in\mathbb{Z})$.

CÂU 2. Hỏi $x=45^\circ$ là nghiệm của phương trình nào sau đây?

(A) $\sin x=1$. (B) $\cos x=1$. (C) $\sin x\cdot\cos x=\dfrac{1}{2}$. (D) $\sin 2x=0$.

CÂU 3. Tìm tập nghiệm S của phương trình $\cos 3x=\cos 45^\circ$.

(A) $S=\{15^\circ+k120^\circ;45^\circ+k120^\circ,k\in\mathbb{Z}\}$.
(B) $S=\{-15^\circ+k120^\circ;15^\circ+k120^\circ,k\in\mathbb{Z}\}$.
(C) $S=\{15^\circ+k360^\circ;45^\circ+k360^\circ,k\in\mathbb{Z}\}$.
(D) $S=\{-15^\circ+k360^\circ;15^\circ+k360^\circ,k\in\mathbb{Z}\}$.

CÂU 4. Tìm tập nghiệm S của phương trình $\cos(2x-30^\circ)=-\dfrac{1}{2}$.

(A) $S=\{-45^\circ+k360^\circ;75^\circ+k360^\circ,k\in\mathbb{Z}\}$.
(B) $S=\{-45^\circ+k180^\circ;45^\circ+k180^\circ,k\in\mathbb{Z}\}$.
(C) $S=\{-45^\circ+k180^\circ;75^\circ+k180^\circ,k\in\mathbb{Z}\}$.
(D) $S=\{-75^\circ+k180^\circ;75^\circ+k180^\circ,k\in\mathbb{Z}\}$.

CÂU 5. Nghiệm của phương trình $\tan x=\tan 25^\circ$ là

(A) $x=25^\circ+\mathrm{k}360^\circ$ và $x=155^\circ+\mathrm{k}360^\circ,\mathrm{k}\in\mathbb{Z}$.
(B) $x=25^\circ+k180^\circ$ và $x=155^\circ+\mathrm{k}180^\circ,\mathrm{k}\in\mathbb{Z}$.
(C) $x=25^\circ+k360^\circ$ và $x=-25^\circ+\mathrm{k}360^\circ,\mathrm{k}\in\mathbb{Z}$.
(D) $x=25^\circ+\mathrm{k}180^\circ,\mathrm{k}\in\mathbb{Z}$.

CÂU 6. Phương trình $\tan(2x+12^\circ)=0$ có họ nghiệm là

(A) $x=-6^\circ+k180^\circ,\ k\in\mathbb{Z}$. (B) $x=-6^\circ+k360^\circ,\ k\in\mathbb{Z}$.
(C) $x=-12^\circ+k90^\circ,\ k\in\mathbb{Z}$. (D) $x=-6^\circ+k90^\circ,\ k\in\mathbb{Z}$.

CÂU 7. Tìm số nghiệm của phương trình $\sin 3x=0$ thuộc khoảng $(0;180^\circ)$.

(A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4.

CÂU 8. Tìm tập nghiệm S của phương trình $\cos(x+30^\circ)=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

(A) $S=\{120^\circ+k360^\circ;k360^\circ,k\in\mathbb{Z}\}$.
(B) $S=\{120^\circ+k360^\circ;-180^\circ+k360^\circ,k\in\mathbb{Z}\}$.
(C) $S=\{120^\circ+k180^\circ;k180^\circ,k\in\mathbb{Z}\}$.
(D) $S=\{120^\circ+k180^\circ;-180^\circ+k180^\circ,k\in\mathbb{Z}\}$.

QUICK NOTE

CÂU 9. Tìm nghiệm của phương trình $\sqrt{3}\cot(x+60^\circ)-1=0$.

Ⓐ $x=-30^\circ+k360^\circ, k\in\mathbb{Z}$.
Ⓑ $x=-30^\circ+k180^\circ, k\in\mathbb{Z}$.
Ⓒ $x=k360^\circ, k\in\mathbb{Z}$.
Ⓓ $x=k180^\circ, k\in\mathbb{Z}$.

CÂU 10. Cho phương trình $\tan(2x-15^\circ)=1$ biết rằng $-90^\circ<x<90^\circ$. Số nghiệm của phương trình là

Ⓐ 1. Ⓑ 2. Ⓒ 3. Ⓓ 4.

CÂU 11. Số nghiệm của phương trình $\sin(2x-40^\circ)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ với $-180^\circ\le x\le 180^\circ$ là

Ⓐ 2. Ⓑ 4. Ⓒ 6. Ⓓ 7.

CÂU 12. Tìm tập nghiệm S của phương trình $\sin(x+30^\circ)\cdot\cos(x-45^\circ)=0$.

Ⓐ $S=\{-30^\circ+k180^\circ, k\in\mathbb{Z}\}$.
Ⓑ $S=\{-30^\circ+k180^\circ; 135^\circ+k180^\circ, k\in\mathbb{Z}\}$.
Ⓒ $S=\{135^\circ+k180^\circ, k\in\mathbb{Z}\}$.
Ⓓ $S=\{45^\circ+k180^\circ, k\in\mathbb{Z}\}$.

Dạng 4. Phương trình đưa về phương trình lượng giác cơ bản

1. Ví dụ

VÍ DỤ 1. Giải phương trình: $\sin 2x=\cos 3x$.

VÍ DỤ 2. Giải phương trình: $\sin 4x-\cos\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)=0$.

VÍ DỤ 3. Giải các phương trình sau:

a) $\sin 2x+\cos 4x=0$. b) $\cos 3x=-\cos 7x$.

VÍ DỤ 4. Giải phương trình: $\cos^2 2x=\cos^2\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)$.

VÍ DỤ 5. Giải phương trình: $\sin x+\sin 2x=0$.

2. Bài tập tự luận

BÀI 1. Giải phương trình: $\sin 3x-\cos 5x=0$.

BÀI 2. Giải phương trình $\sin 2x+\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)=0$.

BÀI 3. Giải phương trình: $\tan(2x+1)+\cot x=0$.

BÀI 4. Tìm $x\in(-\pi;\pi)$ sao cho $\sin\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)+2\cos\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)=0$.

BÀI 5. Giải phương trình: $2\sin^2 x-1+\cos 3x=0$.

BÀI 6. Giải phương trình $\sin 3x+\cos 2x-\sin x=0$.

BÀI 7. Giải phương trình $\sin x\cdot\cos 2x=\sin 2x\cdot\cos 3x$.

BÀI 8. Giải phương trình: $\sin^4\dfrac{x}{2}+\cos^4\dfrac{x}{2}=\dfrac{1}{2}$.

BÀI 9. Giải phương trình: $\tan^2 4x-\tan^2\left(3x-\dfrac{\pi}{3}\right)=0$.

BÀI 10. Giải phương trình $\sin^6 x+\cos^6 x=\dfrac{7}{16}$.

3. Bài tập trắc nghiệm

CÂU 1. Tìm số nghiệm thuộc khoảng $(-\pi;\pi)$ của phương trình $\sin x+\sin 2x=0$.

Ⓐ 3. Ⓑ 1. Ⓒ 2. Ⓓ 4.

CÂU 2. Tìm số nghiệm thuộc khoảng $(0;\pi)$ của phương trình $\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)+\sin 5x=0$.

Ⓐ 4. Ⓑ 5. Ⓒ 6. Ⓓ 7.

CÂU 3. Phương trình $\tan 2x+\tan x=0$ có bao nhiêu nghiệm trong đoạn $[-4\pi;5\pi]$?

Ⓐ 28. Ⓑ 27. Ⓒ 19. Ⓓ 18.

QUICK NOTE

CÂU 4. Giải phương trình $\sin x + \cos\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right) = 2$.

(A) $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
(B) $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
(C) $x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.
(D) $x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

CÂU 5. Họ nghiệm của phương trình $\tan 3x \cdot \tan x = 1$ là

(A) $x = \dfrac{\pi}{8} + k\dfrac{\pi}{8},\ k \in \mathbb{Z}$.
(B) $x = \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{4},\ k \in \mathbb{Z}$.
(C) $x = \dfrac{\pi}{8} + k\dfrac{\pi}{4},\ k \in \mathbb{Z}$.
(D) $x = \dfrac{\pi}{8} + k\dfrac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$.

CÂU 6. Tổng các nghiệm của phương trình $\sin x = \dfrac{-1}{2\sqrt{2}\cos x}$ trên đoạn $[0; 2\pi]$ là

(A) $\dfrac{9\pi}{8}$.
(B) $\dfrac{15\pi}{8}$.
(C) 5π.
(D) $\dfrac{11\pi}{8}$.

CÂU 7. Giải phương trình $\sin^2 2x = \cos^2\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$.

(A) $x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi,\ x = \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{k\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}$.
(B) $x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi,\ x = -\dfrac{\pi}{12} + k\pi,\ x = \dfrac{7\pi}{12} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.
(C) $x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi,\ x = -\dfrac{\pi}{12} + \dfrac{k\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}$.
(D) $x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi,\ x = -\dfrac{\pi}{12} + \dfrac{k\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}$.

CÂU 8. Có bao nhiêu điểm trên đường tròn lượng giác biểu diễn tất các nghiệm của phương trình $\sin 4x \cos x = \sin 5x \cos 2x$?

(A) 2 điểm.
(B) 5 điểm.
(C) 9 điểm.
(D) 14 điểm.

CÂU 9. Có bao nhiêu điểm trên đường tròn lượng giác biểu diễn tất các nghiệm của phương trình $\sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin 2x$?

(A) 2 điểm.
(B) 3 điểm.
(C) 4 điểm.
(D) 1 điểm.

CÂU 10. Một vật thể chuyển động với vận tốc thay đổi có phương trình $v(t) = 2 + \sin\left(\pi t + \dfrac{\pi}{4}\right)$ (t tính bằng giây, vận tốc tính bằng m/s^2). Trong khoảng 1 giây đầu chuyển động, thời điểm vật thể đạt vận tốc 3 m/s^2 là

(A) 1 giây.
(B) $\dfrac{1}{4}$ giây.
(C) $\dfrac{1}{2}$ giây.
(D) $\dfrac{3}{4}$ giây.

CÂU 11. Tìm số nghiệm thuộc khoảng $(0; 2\pi)$ của phương trình $\sin x + 2\sin 2x + \sin 3x = 0$.

(A) 6.
(B) 5.
(C) 4.
(D) 3.

CÂU 12. Cho phương trình $\sin x + 2\sin 2x + \sin 3x = \cos x + 2\cos 2x + \cos 3x$. Tính tổng S tất cả các nghiệm trong đoạn $(0; \pi)$ của phương trình đã cho.

(A) $S = \dfrac{3\pi}{4}$.
(B) $S = \dfrac{5\pi}{8}$.
(C) $S = \dfrac{17\pi}{12}$.
(D) $S = \dfrac{13\pi}{12}$.

CÂU 13. Cho phương trình $\sin x \cos x = 2(\sin^4 x + \cos^4 x) - \dfrac{3}{2}$. Tính tổng S tất cả các nghiệm thuộc $\left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$ của phương trình đã cho.

(A) $S = \dfrac{\pi}{2}$.
(B) $S = \dfrac{5\pi}{12}$.
(C) $S = \dfrac{\pi}{12}$.
(D) $S = \dfrac{5\pi}{4}$.

CÂU 14. Phương trình $\tan\left(\dfrac{\pi}{3} - x\right) \cdot \tan\left(\dfrac{\pi}{2} + 2x\right) = 1$ có nghiệm là

(A) $x = -\dfrac{\pi}{6} + \text{k}\pi, k \in \mathbb{Z}$.
(B) $x = \dfrac{\pi}{6} + \text{k}\pi, k \in \mathbb{Z}$.
(C) $x = -\dfrac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
(D) $x = \dfrac{5\pi}{6} + \text{k}\pi, k \in \mathbb{Z}$.

CÂU 15. Nghiệm của phương trình $\tan 2x - \cot\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = 0$ có dạng $x = \dfrac{\pi}{n} + \dfrac{k\pi}{m}, k \in \mathbb{Z}$. Khi đó $m \cdot n$ bằng

(A) 8.
(B) 32.
(C) 36.
(D) 12.

Dạng 5. Toán thực tế liên môn

QUICK NOTE

1. Bài tập tự luận

BÀI 1. Nhiệt độ ngoài trời ở một thành phố vào các thời điểm khác nhau trong ngày có thể được mô phỏng bởi công thức

$$h(t)=29+3\sin\frac{\pi}{12}(t-9).$$

với h tính bằng độ C và t là thời gian trong ngày tính bằng giờ.

a) Tính nhiệt độ lúc 12 giờ trưa.

b) Tính thời gian nhiệt độ thấp nhất trong ngày.

BÀI 2. Số giờ có ánh sáng mặt trời của một thành phố A ở vĩ độ 40° Bắc trong ngày thứ t của một năm không nhuận được cho bởi hàm số

$$d(t)=3\sin\left[\frac{\pi}{182}\cdot(t-80)\right]+12 \text{ với } t\in\mathbb{Z} \text{ và } 0\le t\le 365.$$

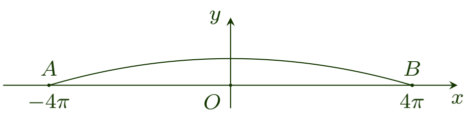
Hỏi thành phố A có đúng 12 giờ có ánh sáng mặt trời vào ngày nào trong năm?

BÀI 3. Giả sử một vật dao động điều hoa xung quanh vị trí cân bằng theo phương trình

$$x=2\cos\left(5t-\frac{\pi}{6}\right)$$

Ở đây, thời gian t tính bằng giây và quãng đường x tính bằng centimét. Hãy cho biết trong khoảng thời gian từ 0 đến 6 giây, vật đi qua vị trí cân bằng bao nhiêu lần?

BÀI 4.
Một cây cầu có dạng cung AB của đồ thị hàm số $y=4{,}2\cdot\cos\frac{x}{8}$ và được mô tả trong hệ trục toạ độ với đơn vị trục là mét như ở hình bên. Một sà lan chở khối hàng hoá được xếp thành hình hộp chữ nhật với độ cao 3 m so với mực nước sông sao cho sà lan có thể đi qua được gầm cầu. Chứng minh rằng chiều rộng của khối hàng hoá đó phải nhỏ hơn 12,5 m.



BÀI 5. Một quả đạn pháo được bắn ra khỏi nòng pháo với vận tốc ban đầu $v_0=500$ m/s hợp với phương ngang một góc α. Trong Vật lí, ta biết rằng, nếu bỏ qua sức cản của không khí và coi quả đạn pháo được bắn ra từ mặt đất thì quỹ đạo của quả đạn tuân theo phương trình $y=\dfrac{-g}{2v_0^2\cos^2\alpha}\cdot x^2+x\tan\alpha$, ở đó $g=10$ m/s^2 là gia tốc trọng trường.

a) Tính theo góc bắn α tầm xa mà quả đạn đạt tới (tức là khoảng cách từ vị trí bắn đến điểm quả đạn chạm đất).

b) Tìm góc bắn α để quả đạn trúng mục tiêu cách vị trí đặt khẩu pháo 22 000 (m).

2. Bài tập trắc nghiệm

CÂU 1. Nhiệt độ ngoài trời ở một thành phố vào các thời điểm khác nhau trong ngày có thể được mô phỏng bởi công thức $h(t)=30+3\sin\frac{\pi}{12}(t-5)$. Với h tính bằng độ C và t là thời gian trong ngày tính bằng giờ. Nhiệt độ lúc 7 giờ sáng là bao nhiêu?

Ⓐ 31,5 độ C. Ⓑ 32,5 độ C. Ⓒ 30 độ C. Ⓓ 37 độ C.

CÂU 2. Nhiệt độ ngoài trời ở một thành phố vào các thời điểm khác nhau trong ngày có thể được mô phỏng bởi công thức

$$h(t)=29+3\sin\frac{\pi}{12}(t-9).$$

với h tính bằng độ C và t là thời gian trong ngày tính bằng giờ. Thời gian nhiệt độ cao nhất trong ngày là

Ⓐ 13 giờ. Ⓑ 15 giờ. Ⓒ 12 giờ. Ⓓ 14 giờ.

CÂU 3. Số giờ có ánh sáng mặt trời của một thành phố A trong ngày thứ t của một năm không nhuận được cho bởi hàm số $d(t)=4\sin\left[\frac{\pi}{18}\cdot(t-80)\right]+12$ với $t\in\mathbb{Z}$ và $0\le t\le 365$. Số giờ nắng của ngày thứ 83 là

Ⓐ 12. Ⓑ 11. Ⓒ 14. Ⓓ 8.

QUICK NOTE

CÂU 4. Số giờ có ánh sáng mặt trời của một thành phố A trong ngày thứ t trong một năm không nhuận được cho bởi công thức

$$d(t) = 4\sin\left[\frac{\pi}{182}(t-70)\right] + 16 \text{ với } t \in \mathbb{R} \text{ và } 0 < t \leq 365.$$

Vào ngày nào trong năm thì thành phố A có ít ánh sáng mặt trời nhất

(A) 353. (B) 171. (C) 161. (D) 343.

CÂU 5. Hằng ngày mực nước con kênh lên xuống theo thủy triều. Độ sâu h (mét) của mực nước trong kênh được tính tại thời điểm t (giờ) trong một ngày bởi công thức $h = 3\cos\left(\frac{\pi t}{8} + \frac{\pi}{4}\right) + 12$. Mực nước của kênh cao nhất khi $t = t_0$. Tính giá trị của $P = t_0^2 + t_0$.

(A) $t = 272$. (B) $t = 182$. (C) $t = 240$. (D) $t = 210$.

CÂU 6. Số giờ có ánh sáng của thành phố Hà Nội trong ngày thứ t của năm 2019 được cho bởi một hàm số $y = 4\sin\left|\frac{\pi}{178}(t-60)\right| + 10$, với $t \in \mathbb{Z}$ và $0 < t \leq 365$. Vào ngày nào trong năm thì thành phố có ít giờ ánh sáng mặt trời nhất?

(A) 23 tháng 11. (B) 24 tháng 11. (C) 25 tháng 11. (D) 22 tháng 11.

CÂU 7. Hằng ngày mực nước con kênh lên xuống theo thủy triều. Độ sâu h (mét) của mực nước trong kênh được tính tại thời điểm t (giờ) trong một ngày bởi công thức $h = 3\cos\left(\frac{\pi t}{8} + \frac{\pi}{4}\right) + 12$. Mực nước của kênh cao nhất khi $t = t_0$. Tính giá trị của $P = t_0^2 + t_0$.

(A) $t = 272$. (B) $t = 182$. (C) $t = 240$. (D) $t = 210$.

CÂU 8. Hằng ngày mực nước của con kênh lên, xuống theo thủy triều. Độ sâu h (m) của mực nước trong kênh được tính tại thời điểm t (giờ), $0 \leq t \leq 24$ trong một ngày được tính bởi công thức $h(t) = 3\cos\left(\frac{\pi t}{8} + \frac{\pi}{4}\right) + 3$. Hỏi trong một ngày có mấy thời điểm mực nước của con kênh đạt độ sâu lớn nhất?

(A) 1. (B) 3. (C) 2. (D) 4.

CÂU 9. Giả sử một vật dao động điều hoa xung quanh vị trí cân bằng theo phương trình $x = 2\sin\left(5t - \frac{\pi}{6}\right)$. Ở đây, thời gian t tính bằng giây và quãng đường x tinh bằng centimét. Vật đi qua vị trí cân bằng bao nhiêu lần trong 3 giây đầu.

(A) 5. (B) 3. (C) 4. (D) 8.

CÂU 10. Một quả đạn pháo được bắn ra khỏi nòng pháo với vận tốc ban đầu $v_0 = 500$ m/s hợp với phương ngang một góc α. Trong Vật lí, ta biết rằng, nếu bỏ qua sức cản của không khí và coi quả đạn pháo được bắn ra từ mặt đất thì quỹ đạo của quả đạn tuân theo phương trình $y = \frac{-g}{2v_0^2\cos^2\alpha} \cdot x^2 + x\tan\alpha$, ở đó $g = 10$ m/s^2 là gia tốc trọng trường. Góc bắn α để quả đạn bay xa nhất là

Dạng 6. Phương trình bận n theo một hàm số lượng giác

Quan sát và dùng các công thức biến đổi để đưa phương trình về cùng một hàm lượng giác (cùng sin hoặc cùng cos hoặc cùng tan hoặc cùng cot) với cung góc giống nhau, chẳng hạn:

Dạng	Đặt ẩn phụ	Điều kiện
$a\sin^2 x + b\sin x + c = 0$	$t = \sin x$	$-1 \leq t \leq 1$
$a\cos^2 x + b\cos x + c = 0$	$t = \cos x$	$-1 \leq t \leq 1$
$a\tan^2 x + b\tan x + c = 0$	$t = \tan x$	$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$
$a\cot^2 x + b\cot x + c = 0$	$t = \cot x$	$x \neq k\pi$

Nếu đặt $t = \sin^2 x, \cos^2 x$ hoặc $t = |\sin x|, |\cos x|$ thì điều kiện là $0 \leq t \leq 1$.

NHẬN XÉT. Khi gặp phương trình bậc 3; 4... ta có thể làm tương tự.

1. Ví dụ

VÍ DỤ 1. Giải các phương trình sau

a) $2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0$.

b) $\sin^2 x + 3\sin x + 2 = 0$.

c) $\tan^2 x + (\sqrt{3} - 1)\tan x - \sqrt{3} = 0$.

d) $\cot^2 x + 4\cot x + 3 = 0$.

2. Bài tập tự luận

BÀI 1. Giải các phương trình lượng giác sau

a) $6\cos^2 x + 5\sin x - 2 = 0$.

b) $2\cos^2 x + 5\sin x - 4 = 0$.

c) $3 - 4\cos^2 x = \sin x(2\sin x + 1)$.

d) $-\sin^2 x - 3\cos x + 3 = 0$.

BÀI 2. Giải các phương trình lượng giác sau:

a) $2\cos 2x - 8\cos x + 5 = 0$.

b) $1 + \cos 2x = 2\cos x$.

c) $9\sin x + \cos 2x = 8$.

d) $2 + \cos 2x + 5\sin x = 0$.

e) $3\sin x + 2\cos 2x = 2$.

f) $2\cos 2x + 8\sin x - 5 = 0$.

BÀI 3. Giải các phương trình lượng giác sau:

a) $2\cos^2 2x + 5\sin 2x + 1 = 0$.

b) $5\cos x - 2\sin\dfrac{x}{2} + 7 = 0$.

c) $\sin^2 x + \cos 2x + \cos x = 2$.

d) $\cos 2x + \cos^2 x - \sin x + 2 = 0$.

BÀI 4. Giải các phương trình lượng giác sau

a) $3\sin^2 x + 2\cos^4 x - 2 = 0$.

b) $4\sin^4 x + 2\cos^2 x = 7$.

c) $4\cos^4 x = 4\sin^2 x - 1$

d) $4\sin^4 x + 5\cos^2 x - 4 = 0$

BÀI 5. Giải các phương trình sau

a) $\cos^3 x + 3\cos^2 x + 2\cos x = 0$.

b) $23\sin x - \sin 3x = 24$.

c) $2\cos 3x \cdot \cos x - 4\sin^2 2x + 1 = 0$.

d) $\sin^6 x + \cos^6 x = \dfrac{15}{8}\cos 2x - \dfrac{1}{2}$.

3. Bài tập trắc nghiệm

CÂU 1. Nghiệm của phương trình $\sin^2 x - 4\sin x + 3 = 0$ là

Ⓐ $x = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.
Ⓑ $x = \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.
Ⓒ $x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.
Ⓓ $x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

CÂU 2. Phương trình $\cos^2 2x + \cos 2x - \dfrac{3}{4} = 0$ có họ nghiệm là

Ⓐ $x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.
Ⓑ $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.
Ⓒ $x = \pm\dfrac{\pi}{6} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.
Ⓓ $x = \pm\dfrac{\pi}{6} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

CÂU 3. Nghiệm âm lớn nhất của phương trình $2\tan^2 x + 5\tan x + 3 = 0$ là

Ⓐ $-\dfrac{\pi}{4}$.
Ⓑ $-\dfrac{\pi}{3}$.
Ⓒ $-\dfrac{\pi}{6}$.
Ⓓ $-\dfrac{5\pi}{6}$.

CÂU 4. Phương trình $3\tan^2 x + \left(6 - \sqrt{3}\right)\tan x - 2\sqrt{3} = 0$ có nghiệm là

Ⓐ $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \arctan(-2) + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$.
Ⓑ $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{3} + k\pi \\ x = \arctan(-2) + k\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$.
Ⓒ $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{6} + k\pi \\ x = \arctan(-2) + k\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$.
Ⓓ $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{6} + k\pi \\ x = -\arctan 2 + k\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$.

CÂU 5. Cho phương trình $\cos^2 x + 3\sin x - 3 = 0$. Đặt $\sin x = t$ $(-1 \le t \le 1)$ ta được phương trình nào sau đây?

Ⓐ $t^2 + 3t + 2 = 0$.
Ⓑ $t^2 - 3t + 2 = 0$.
Ⓒ $t^2 - 3t - 2 = 0$.
Ⓓ $t^2 + 3t - 3 = 0$.

CÂU 6. Phương trình $\sin^2 x - 3\cos x - 4 = 0$ có nghiệm là

Ⓐ $x = -\pi + k2\pi$.
Ⓑ Vô nghiệm.
Ⓒ $x = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi$.
Ⓓ $x = \dfrac{\pi}{6} + k\pi$.

CÂU 7. Giải phương trình $\cos^2 x + \sin x + 1 = 0$ có nghiệm là

Ⓐ $x = -\dfrac{\pi}{2} + k\dfrac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.
Ⓑ $x = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.
Ⓒ $x = -\dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
Ⓓ $x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

QUICK NOTE

QUICK NOTE

CÂU 8. Nghiệm của phương trình $2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0$ là

A $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + k\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}).$

B $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + k\frac{2}{3}\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k\frac{2}{3}\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}).$

C $x = \frac{\pi}{2} + k\frac{5}{2}\pi, \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + k\frac{1}{2}\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k\frac{1}{2}\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}).$

D $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}).$

CÂU 9. Cho phương trình $3\cos 2x - 10\cos x - 4 = 0$. Đặt $t = \cos x$ thì phương trình đã cho trở thành phương trình nào sau đây?

A $6t^2 - 10t - 4 = 0$.
B $3t^2 - 10t - 4 = 0$.
C $-6t^2 - 10t - 1 = 0$.
D $6t^2 - 10t - 7 = 0$.

CÂU 10. Tập nghiệm của phương trình $\sin x + \cos 2x = 0$ là

A $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, x = -\frac{\pi}{2} + \frac{k2\pi}{3}$.
B $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, x = -\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}$.
C $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, x = -\frac{\pi}{6} + \frac{k2\pi}{3}$.
D $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, x = -\frac{\pi}{2} + \frac{k\pi}{3}$.

CÂU 11. Nghiệm của phương trình lượng giác $2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0$ thỏa điều kiện $0 < x < \frac{\pi}{2}$ là

A $x = \frac{\pi}{2}$.
B $x = \frac{\pi}{3}$.
C $x = \frac{\pi}{6}$.
D $\frac{5\pi}{6}$.

CÂU 12. Tìm nghiệm phương trình $3\sin^2 2x - 7\sin 2x + 4 = 0$ trên đoạn $[0; \pi]$.

A $x = \frac{\pi}{3}$.
B $x = \frac{\pi}{4}$.
C $x = \frac{\pi}{2}$.
D $x = \frac{\pi}{6}$.

CÂU 13. Tính tổng các nghiệm của phương trình $2\cos^2 x + 5\sin x - 4 = 0$ trong $[0; 2\pi]$.

A 0.
B $\frac{8\pi}{3}$.
C π.
D $\frac{5\pi}{6}$.

CÂU 14. Tổng các nghiệm của phương trình $\tan x + \cot x = 2$ trong khoảng $(-\pi; \pi)$ là

A $-\pi$.
B $-\frac{\pi}{2}$.
C $\frac{5\pi}{4}$.
D $\frac{\pi}{4}$.

CÂU 15. Số nghiệm của phương trình $\cos 2\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + 4\cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = \frac{5}{2}$ thuộc $[0; 2\pi]$ là

A 1.
B 2.
C 3.
D 4.

CÂU 16. Nghiệm của phương trình $3\cos 4x - \sin^2 2x + \cos 2x - 2 = 0$ là

A $\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x = \pm \arccos \frac{6}{7} + k\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}).$

B $\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = \pm \arccos \frac{6}{7} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}).$

C $\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{3} + k\pi \\ x = \pm \arccos \frac{6}{7} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}).$

D $\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x = \pm \frac{1}{2} \arccos \frac{6}{7} + k\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}).$

CÂU 17. Giải phương trình $4\cos x \cos 2x + 1 = 0$.

A $\left[\begin{array}{l} x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \pm \arccos \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{8} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}).$

B $\left[\begin{array}{l} x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \pm \arccos \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{8} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}).$

QUICK NOTE

(C) $\left[\begin{array}{l} x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \pm\arccos\dfrac{-1 \pm \sqrt{7}}{8} + k2\pi \end{array}\right.$ $(k \in \mathbb{Z})$.

(D) $\left[\begin{array}{l} x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \pm\arccos\dfrac{-1 \pm \sqrt{6}}{8} + k2\pi \end{array}\right.$ $(k \in \mathbb{Z})$.

CÂU 18. Họ nghiệm của phương trình $16(\sin^8 x + \cos^8 x) = 17\cos^2 2x$ là

(A) $x = \dfrac{\pi}{8} + k\dfrac{5\pi}{4}$ $(k \in \mathbb{Z})$.
(B) $x = \dfrac{\pi}{8} + k\dfrac{7\pi}{4}$ $(k \in \mathbb{Z})$.
(C) $x = \dfrac{\pi}{8} + k\dfrac{9\pi}{4}$ $(k \in \mathbb{Z})$.
(D) $x = \dfrac{\pi}{8} + k\dfrac{\pi}{4}$ $(k \in \mathbb{Z})$.

CÂU 19. Nghiệm của phương trình $\cos^4 x - \cos 2x + 2\sin^6 x = 0$.

(A) $x = k2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.
(B) $x = k\dfrac{1}{2}\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.
(C) $x = k\dfrac{2}{3}\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.
(D) $x = k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

CÂU 20. Giải phương trình $5(1 + \cos x) = 2 + \sin^4 x - \cos^4 x$.

(A) $x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + k\pi$.
(B) $x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + k\dfrac{2}{3}\pi$.
(C) $x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + k\dfrac{3}{4}\pi$.
(D) $x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + k2\pi$.

CÂU 21. Nghiệm của phương trình $\sin\left(2x + \dfrac{5\pi}{2}\right) - 3\cos\left(x - \dfrac{7\pi}{2}\right) = 1 + 2\sin x$ là

(A) $\left[\begin{array}{l} x = k2\pi \\ x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \dfrac{5\pi}{6} + k\pi \end{array}\right.$ $(k \in \mathbb{Z})$.

(B) $\left[\begin{array}{l} x = k\dfrac{1}{2}\pi \\ x = \dfrac{\pi}{6} + k\pi \\ x = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right.$ $(k \in \mathbb{Z})$.

(C) $\left[\begin{array}{l} x = k\pi \\ x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right.$ $(k \in \mathbb{Z})$.

(D) $\left[\begin{array}{l} x = k2\pi \\ x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right.$ $(k \in \mathbb{Z})$.

CÂU 22. Giải phương trình $7\cos x = 4\cos^3 x + 4\sin 2x$.

(A) $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = \dfrac{\pi}{6} + k\pi \\ x = \dfrac{5\pi}{6} + k\pi \end{array}\right.$.
(B) $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + k\dfrac{1}{4}\pi \\ x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right.$.
(C) $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + k\dfrac{1}{2}\pi \\ x = \dfrac{\pi}{6} + k\pi \\ x = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right.$.
(D) $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right.$.

CÂU 23. Giải phương trình $\cos 4x = \cos^2 3x$.

(A) $\left[\begin{array}{l} x = k2\pi \\ x = \pm\dfrac{\pi}{12} + k2\pi \\ x = \pm\dfrac{5\pi}{12} + k\pi \end{array}\right.$.

(B) $\left[\begin{array}{l} x = k\pi \\ x = \pm\dfrac{\pi}{12} + k\dfrac{1}{2}\pi \\ x = \pm\dfrac{5\pi}{12} + k\dfrac{1}{2}\pi \end{array}\right.$.

(C) $\left[\begin{array}{l} x = k\pi \\ x = \pm\dfrac{\pi}{12} + k3\pi \\ x = \pm\dfrac{5\pi}{12} + k3\pi \end{array}\right.$.

(D) $\left[\begin{array}{l} x = k\pi \\ x = \pm\dfrac{\pi}{12} + k\pi \\ x = \pm\dfrac{5\pi}{12} + k\pi \end{array}\right.$.

CÂU 24. Cho phương trình: $\cos 2x - (2m + 1)\cos x + m + 1 = 0$. Tìm m để phương trình có nghiệm $x \in \left(\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{3\pi}{2}\right)$.

(A) $-1 \le m < 0$.
(B) $-1 \le m \le 0$.
(C) $-1 < m < 0$.
(D) $-1 \le m \le 1$.

CÂU 25. Cho phương trình $3\cos 4x - 2\cos^2 3x = 1$. Trên đoạn $[0; \pi]$, tổng các nghiệm của phương trình là

(A) 0.
(B) π.
(C) 2π.
(D) 3π.

LỜI GIẢI CHI TIẾT

PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

Bài 4. PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Phương trình $\sin x = m$

- Với $|m| > 1$ thì phương trình $\sin x = m$ vô nghiệm.
- Với $|m| \leq 1$, sẽ tồn tại duy nhất $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ thỏa mãn $\sin \alpha = m$. Khi đó

$$\sin x = m \Leftrightarrow \sin x = \sin \alpha \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \alpha + k2\pi \\ x = \pi - \alpha + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}).$$

- Nếu số đo của góc α được đo bằng đơn vị độ thì

$$\sin x = \sin \alpha^\circ \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \alpha^\circ + k360^\circ \\ x = 180^\circ - \alpha^\circ + k360^\circ \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}).$$

- Tổng quát,

$$\sin f(x) = \sin g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = g(x) + k2\pi \\ f(x) = \pi - g(x) + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}).$$

- Một số trường hợp đặt biệt:
  - $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.
  - $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.
  - $\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

2. Phương trình $\cos x = m$

- Với $|m| > 1$ thì phương trình $\cos x = m$ vô nghiệm.
- Với $|m| \leq 1$, sẽ tồn tại duy nhất $\alpha \in [0; \pi]$ thỏa mãn $\cos x = m$. Khi đó

$$\cos x = m \Leftrightarrow \cos x = \cos \alpha \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \alpha + k2\pi \\ x = -\alpha + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}).$$

- Nếu số đo của góc α được đo bằng đơn vị độ thì

$$\cos x = \cos \alpha \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \alpha^\circ + k360^\circ \\ x = -\alpha^\circ + k360^\circ \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}).$$

- Tổng quát,

$$\cos f(x) = \cos g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = g(x) + k2\pi \\ f(x) = -g(x) + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$$

- Một số trường hợp đặc biệt:
  - $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.
  - $\cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.
  - $\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

3. Phương trình $\tan x = m$

- Với mọi $m \in \mathbb{R}$, tồn tại duy nhất $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ thỏa mãn $\tan\alpha = m$. Khi đó

$$\tan x = m \Leftrightarrow \tan x = \tan\alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi \ (k \in \mathbb{Z}).$$

- Nếu số đo của góc α được đo bằng đơn vị độ thì

$$\tan x = \tan\alpha^\circ \Leftrightarrow x = \alpha^\circ + k180^\circ,\ k \in \mathbb{Z}$$

- Tổng quát,

$$\tan f(x) = \tan g(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x) + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

4. Phương trình $\cot x = m$

- Với mọi $m \in \mathbb{R}$, tồn tại duy nhất $\alpha \in (0; \pi)$ thỏa mãn $\cot\alpha = m$. Khi đó

$$\cot x = m \Leftrightarrow \cot x = \cot\alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi\ k \in \mathbb{Z}.$$

- Nếu số đo của góc α được đo bằng đơn vị độ thì

$$\cot x = \cot\alpha^\circ \Leftrightarrow x = \alpha^\circ + k180^\circ,\ k \in \mathbb{Z}.$$

- Tổng quát,

$$\cot f(x) = \cot g(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x) + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Dạng 1. Điều kiện có nghiệm của phương trình lượng giác cơ bản

- $\sin x = a$ có tập giá trị $|a| \le 1$.
- $\cos x = b$ có tập giá trị $|b| \le 1$.

1. Ví dụ

VÍ DỤ 1. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $\sin x = m$ có nghiệm.

Lời giải.

Phương trình $\sin x = m$ có nghiệm $\Leftrightarrow -1 \le m \le 1$. □

VÍ DỤ 2. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $\sin x - m = 1$ có nghiệm.

Lời giải.

Ta có $\sin x - m = 1 \Leftrightarrow \sin x = m + 1$.

Vì $-1 \le \sin x \le 1$ nên phương trình $\sin x = m + 1$ có nghiệm khi:$-1 \le m + 1 \le 1 \Leftrightarrow -2 \le m \le 0$. □

VÍ DỤ 3. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $3\sin^2 x = 2m - 1$ có nghiệm.

Lời giải.

Ta có $3\sin^2 x = 2m - 1 \Leftrightarrow \sin^2 x = \dfrac{2m-1}{3}$.

Để phương trình có nghiệm thì $\begin{cases} \dfrac{2m-1}{3} \le 1 \\ \dfrac{2m-1}{3} \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \le 2 \\ m \ge \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{1}{2} \le m \le 2.$ □

VÍ DỤ 4. Tìm m để phương trình $\cos x - m = 0$ vô nghiệm.

Lời giải.

Phương trình $\cos x - m = 0 \Leftrightarrow \cos x = m$.

Phương trình $\cos x = m$ vô nghiệm khi $\left[\begin{array}{l} m < -1 \\ m > 1. \end{array}\right.$ □

VÍ DỤ 5. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\cos x = m + 1$ có nghiệm?

Lời giải.

Phương trình $\cos x = m + 1$ có nghiệm $\Leftrightarrow -1 \le m + 1 \le 1 \Leftrightarrow -2 \le m \le 0$.

Mà $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-2; -1; 0\}$.

Vậy có 3 giá trị nguyên của tham số m thỏa yêu cầu bài toán. □

2. Bài tập tự luận

BÀI 1. Tìm tất cả các tham số m sao cho trong tập nghiệm của phương trình $\sin 2x = 1 + 2m$ có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Lời giải.

Yêu cầu của bài toán được thỏa mãn khi và chỉ khi $0 < 1 + 2m \le 1 \Leftrightarrow -1 < 2m \le 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < m \le 0$.

Vậy $m \in \left(-\frac{1}{2}; 0\right]$. □

BÀI 2. Tìm m để phương trình $\sin 3x - 6 - 5m = 0$ có nghiệm.

Lời giải.

Phương trình có nghiệm khi và chỉ khi: $-1 \le 6 + 5m \le 1 \Leftrightarrow -\frac{7}{5} \le m \le -1$ □

BÀI 3. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình: $3\sin x + m - 1 = 0$ có nghiệm?

Lời giải.

Ta có $3\sin x + m - 1 = 0 \Leftrightarrow \sin x = \frac{1-m}{3}$.

Để phương trình có nghiệm thì $-1 \le \frac{1-m}{3} \le 1 \Leftrightarrow -2 \le m \le 4$.

Vậy có 7 giá trị nguyên của m để phương trình có nghiệm. □

3. Bài tập trắc nghiệm

CÂU 1. Với giá trị nào của m thì phương trình $\sin x - m = 1$ có nghiệm là

Ⓐ $0 \le m \le 1$. Ⓑ $m \le 0$. Ⓒ $m \ge 1$. Ⓓ $-2 \le m \le 0$.

Lời giải.

Ta có $\sin x - m = 1 \Leftrightarrow \sin x = m + 1$.
Vì $-1 \le \sin x \le 1 \Rightarrow -1 \le m + 1 \le 1 \Rightarrow -2 \le m \le 0$.
Vậy để phương trình $\sin x - m = 1$ có nghiệm thì $-2 \le m \le 0$.
Chọn đáp án Ⓓ □

CÂU 2. Phương trình $\sin \frac{x}{2} = m$ có nghiệm khi và chỉ khi.

Ⓐ $m \in [-1; 1]$. Ⓑ $m \in [-2; 2]$. Ⓒ $m \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$. Ⓓ $m \in R$.

Lời giải.

Ta có $-1 \le \sin \frac{x}{2} \le 1 \Rightarrow -1 \le m \le 1$. Vậy $m \in [-1; 1]$.

Chọn đáp án Ⓐ □

CÂU 3. Với giá trị nào của m thì phương trình $\sin x - 2m = 1$ có nghiệm?

Ⓐ $0 \le m \le 1$. Ⓑ $m \le 0$. Ⓒ $m \ge 1$. Ⓓ $-1 \le m \le 0$.

Lời giải.

Phương trình $\sin x - 2m = 1 \Leftrightarrow \sin x = 2m + 1$.
Phương trình đã cho có nghiệm khi $-1 \le 2m + 1 \le 1 \Leftrightarrow -1 \le m \le 0$.
Chọn đáp án Ⓓ □

CÂU 4. Tập hợp các giá trị của tham số m để phương trình $\sin 2x + 2 = m$ có nghiệm là $[a; b]$. Khi đó $a + b$ bằng

Ⓐ 3. Ⓑ 0. Ⓒ 2. Ⓓ 4.

Lời giải.

Ta có $\sin 2x + 2 = m \Leftrightarrow \sin 2x = m - 2$ có nghiệm khi và chỉ khi

$$-1 \le m - 2 \le 1 \Leftrightarrow 1 \le m \le 3 \Leftrightarrow m \in [1; 3].$$

Vậy $a + b = 4$.
Chọn đáp án Ⓓ □

CÂU 5. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $3\sin 2x - m^2 + 5 = 0$ có nghiệm?

Ⓐ 6. Ⓑ 2. Ⓒ 1. Ⓓ 7.

Lời giải.

Phương trình đã cho tương đương với phương trình $\sin 2x = \frac{m^2 - 5}{3}$.

Vì $\sin 2x \in [-1; 1]$ nên $\frac{m^2-5}{3} \in [-1; 1] \Rightarrow m^2 \in [2; 8] \Rightarrow \left[\begin{array}{l} -2\sqrt{2} \le m \le -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \le m \le 2\sqrt{2}. \end{array}\right.$

Chọn đáp án Ⓑ □

CÂU 6. Cho phương trình $4\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)\cos\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)=a^2+\sqrt{3}\sin 2x-\cos 2x$ (1). Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số a để phương trình (1) có nghiệm.

Ⓐ 5. Ⓑ 0. Ⓒ 2. Ⓓ 3.

Lời giải.

$$\begin{aligned}\text{Phương trình (1)} &\Leftrightarrow 2\left[\sin\frac{\pi}{2}+\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)\right]=a^2+\sqrt{3}\sin 2x-\cos 2x\\ &\Leftrightarrow 2\left(1+\sin 2x\cos\frac{\pi}{6}+\cos 2x\sin\frac{\pi}{6}\right)=a^2+\sqrt{3}\sin 2x-\cos 2x\\ &\Leftrightarrow 2\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x+\frac{1}{2}\cos 2x\right)=a^2+\sqrt{3}\sin 2x-\cos 2x\\ &\Leftrightarrow 2+\sqrt{3}\sin 2x+\cos 2x=a^2+\sqrt{3}\sin 2x-\cos 2x\\ &\Leftrightarrow 2\cos 2x=a^2-2\\ &\Leftrightarrow \cos 2x=\frac{a^2-2}{2}=\frac{a^2}{2}-1. \qquad (2)\end{aligned}$$

Phương trình (1) có nghiệm khi và chỉ khi phương trình (2) có nghiệm

$$\Leftrightarrow -1\le\frac{a^2}{2}-1\le 1\Leftrightarrow 0\le\frac{a^2}{2}\le 2\Leftrightarrow a^2\le 4\Leftrightarrow -2\le a\le 2.$$

Vì $a\in\mathbb{Z}\Rightarrow a\in\{-2;-1;0;1;2\}$. Vậy có 5 giá trị nguyên của tham số a.

Chọn đáp án Ⓐ □

CÂU 7. Tìm tất cả giá trị thực của m để phương trình $\cos 2x-m=0$ vô nghiệm.

Ⓐ $m\in(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$. Ⓑ $m\in(1;+\infty)$.

Ⓒ $m\in[-1;1]$. Ⓓ $m\in(-\infty;-1)$.

Lời giải.

Ta có $\cos 2x-m=0\Leftrightarrow\cos 2x=m$.

Do đó phương trình đã cho vô nghiệm khi và chỉ khi $|m|>1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m>1\\ m<-1\end{array}\right.\Leftrightarrow m\in(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$.

Chọn đáp án Ⓐ □

CÂU 8. Cho phương trình $\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)-m=2$. Tìm m để phương trình có nghiệm?

Ⓐ Không tồn tại m. Ⓑ $m\in[-1;3]$. Ⓒ $m\in[-3;-1]$. Ⓓ $m\in\mathbb{R}$.

Lời giải.

Ta có $\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)-m=2\Leftrightarrow\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)=m+2$.

Phương trình đã cho có nghiệm khi $-1\le m+2\le 1\Leftrightarrow -3\le m\le -1$.

Chọn đáp án Ⓒ □

CÂU 9. Tìm tất cả giá trị của a để phương trình sau có nghiệm $\cos^2 3x=2a^2-3a+1$.

Ⓐ $a\in[0;1]$. Ⓑ $a\in\left[0;\dfrac{1}{2}\right]\cup\left[1;\dfrac{3}{2}\right]$. Ⓒ $a\in\left[0;\dfrac{3}{2}\right]$. Ⓓ $a\in[0;1]\cup\left[\dfrac{3}{2};+\infty\right)$.

Lời giải.

$$\begin{aligned}\text{Ta có } \cos^2 3x=2a^2-3a+1 &\Leftrightarrow \frac{1+\cos 6x}{2}=2a^2-3a+1\\ &\Leftrightarrow 1+\cos 6x=4a^2-6a+2\\ &\Leftrightarrow \cos 6x=4a^2-6a+1. \quad (*)\end{aligned}$$

Phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi phương trình $(*)$ có nghiệm

$$\Leftrightarrow\begin{cases}4a^2-6a+1\ge -1\\ 4a^2-6a+1\le 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4a^2-6a+2\ge 0\\ 4a^2-6a\le 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}a\le\dfrac{1}{2}\\ a\ge 1\end{array}\right.\\ 0\le a\le\dfrac{3}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}0\le a\le\dfrac{1}{2}\\ 1\le a\le\dfrac{3}{2}.\end{array}\right.$$

Chọn đáp án Ⓑ □

Dạng 2. Phương trình lượng giác cơ bản dùng Radian

- $\sin x = \sin\alpha \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \alpha + k2\pi \\ x = \pi - \alpha + k2\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})$.
- $\cos x = \cos\alpha \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \alpha + k2\pi \\ x = -\alpha + k2\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})$.
- $\tan x = \tan\alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$.
- $\cot x = \cot\alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$.

1. Ví dụ

VÍ DỤ 1. Giải phương trình $\sin x = 1$.

Lời giải.

Ta có $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z})$. □

VÍ DỤ 2. Giải phương trình $\cos x = 1$.

Lời giải.

Ta có $\cos x = 1 \Leftrightarrow x = 2k\pi, (k \in \mathbb{Z})$. □

VÍ DỤ 3. Giải phương trình $\sin\left(\dfrac{3x}{4} - \dfrac{\pi}{3}\right) = 1$.

Lời giải.

Ta có

$$\sin\left(\frac{3x}{4} - \frac{\pi}{3}\right) = 1 \Leftrightarrow \frac{3x}{4} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow \frac{3x}{4} = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{10\pi}{9} + \frac{k8\pi}{3}\,(k \in \mathbb{Z})\,.$$

□

VÍ DỤ 4. Giải phương trình $\tan x - 1 = 0$.

Lời giải.

Ta có $\tan x - 1 = 0 \Leftrightarrow \tan x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$. □

VÍ DỤ 5. Giải phương trình $\sqrt{3}\tan x - 1 = 0$.

Lời giải.

Điều kiện: $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi\,(k \in \mathbb{Z})$.

Với điều kiện $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi\,(k \in \mathbb{Z})$ thì phương trình

$$\sqrt{3}\tan x - 1 = 0 \Leftrightarrow \tan x = \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \tan x = \tan\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\pi, (k \in \mathbb{Z}).$$

Vậy phương trình có nghiệm là $x = \dfrac{\pi}{6} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$. □

VÍ DỤ 6. Giải phương trình $\cot 3x = \cot x$.

Lời giải.

Điều kiện xác định $\begin{cases} \sin 3x \neq 0 \\ \text{s inx} \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq k\dfrac{\pi}{3} \\ x \neq k\pi \end{cases}$.

Phương trình đã cho tương đương

$$\frac{\cos 3x}{\sin 3x} = \frac{\cos x}{\sin x} \Leftrightarrow \sin x\cos 3x - \cos x\sin 3x = 0 \Leftrightarrow \sin 2x = 0 \Leftrightarrow x = k\frac{\pi}{2}, \ (k \in \mathbb{Z}).$$

Kết hợp điều kiện ta được các nghiệm của phương trình $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi, \ (k \in \mathbb{Z})$. □

2. Bài tập tự luận

BÀI 1. Giải phương trình $\sin 2x = 1$

Lời giải.

Ta có $\sin 2x = 1 \Leftrightarrow 2x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$. □

BÀI 2. Giải phương trình $\cot(3x-1) = -\sqrt{3}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}\cot(3x-1) = -\sqrt{3} &\Leftrightarrow \cot(3x-1) = \cot\left(-\frac{\pi}{6}\right)\\ &\Leftrightarrow 3x-1 = \frac{-\pi}{6} + k\pi\\ &\Leftrightarrow x = \frac{1}{3} - \frac{\pi}{18} + k\frac{\pi}{3},\ (k\in\mathbb{Z}).\end{aligned}$$

□

BÀI 3. Giải phương trình $\cot x = \cot\left(-\frac{\pi}{7}\right)$ trên khoảng $(0; 3\pi)$.

Lời giải.

Ta có $\cot x = \cot\left(-\frac{\pi}{7}\right) \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{7} + k\pi, k\in\mathbb{Z}$.

Vì $x\in(0;3\pi)$ nên $x \in \left\{\frac{6\pi}{7}; \frac{13\pi}{7}; \frac{20\pi}{7}\right\}$. □

BÀI 4. Phương trình $\cot x = \sqrt{3}$ có bao nhiêu nghiệm thuộc $[-2018\pi; 2018\pi]$?

Lời giải.

Điều kiện $\sin x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\pi, k\in\mathbb{Z}$.

$\cot x = \sqrt{3} \Leftrightarrow \tan x = \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\pi, k\in\mathbb{Z}$.

Vì $x\in[-2018\pi; 2018\pi]$ nên $k \in [-2018; 2017]$. Do đó có 4036 nghiệm. □

BÀI 5. Tổng các nghiệm của phương trình $\tan 5x - \tan x = 0$ trên nửa khoảng $[0;\pi)$ bằng

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} 5x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{10} + k\frac{\pi}{2} \\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases}, k\in\mathbb{Z}$.

Ta có $\tan 5x - \tan x = 0 \Leftrightarrow \tan 5x = \tan x \Leftrightarrow 5x = x + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{4}\ (k\in\mathbb{Z})$.

Do $x\in[0;\pi)$ và kết hợp với điều kiện suy ra $x\in\left\{0; \frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right\}$.

Vậy tổng các nghiệm là $0 + \frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} = \pi$. □

3. Bài tập trắc nghiệm

CÂU 1. Phương trình $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ có tập nghiệm là

(A) $S = \left\{\frac{\pi}{6} + k2\pi; \frac{5\pi}{6} + k2\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$.

(B) $S = \left\{\frac{\pi}{3} + k2\pi; -\frac{\pi}{3} + k2\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$.

(C) $S = \left\{\frac{\pi}{3} + k2\pi; \frac{2\pi}{3} + k2\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$.

(D) $S = \left\{\frac{\pi}{3} + k2\pi; -\frac{2\pi}{3} + k2\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Lời giải.

Ta có $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \sin x = \sin\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right.\ (k\in\mathbb{Z})$.

Chọn đáp án (C) □

CÂU 2. Phương trình $2\sin x - 1 = 0$ có tập nghiệm là

(A) $S = \left\{\frac{\pi}{6} + k2\pi; \frac{5\pi}{6} + k2\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$.

(B) $S = \left\{\frac{\pi}{3} + k2\pi; -\frac{2\pi}{3} + k2\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$.

(C) $S = \left\{\frac{\pi}{6} + k2\pi; -\frac{\pi}{6} + k2\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$.

(D) $S = \left\{\frac{1}{2} + k2\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Lời giải.

Ta có $2\sin x - 1 = 0 \Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin x = \sin\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right.\ (k\in\mathbb{Z})$.

Chọn đáp án (A) □

CÂU 3. Tập nghiệm của phương trình $\sin x = 0$ là

(A) $x = \frac{\pi}{2} + k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$.

(B) $x = k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$.

(C) $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi\ (k\in\mathbb{Z})$.

(D) $x = k2\pi\ (k\in\mathbb{Z})$.

Lời giải.

Ta có $\sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi,\ (k \in \mathbb{Z})$.

Chọn đáp án (B) □

CÂU 4. Số nghiệm của phương trình $\sin 2x = 0$ thỏa mãn $0 < x < 2\pi$ là?

A 2. **B** 1. **C** 3. **D** 0.

Lời giải.

Ta có $\sin 2x = 0 \Leftrightarrow 2x = k\pi \Leftrightarrow x = k\dfrac{\pi}{2};\ k \in \mathbb{Z}$.

Do $0 < x < 2\pi \Rightarrow 0 < k\dfrac{\pi}{2} < 2\pi \Rightarrow 0 < k < 4 \xrightarrow{k\in\mathbb{Z}} k = \{1;2;3\}$.

Chọn đáp án (C) □

CÂU 5. Nghiệm của phương trình $\sin\dfrac{x}{2} = 1$ là

A $x = \pi + k4\pi, k \in \mathbb{Z}$. **B** $x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$. **C** $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$. **D** $x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Lời giải.

Phương trình $\sin\dfrac{x}{2} = 1 \Leftrightarrow \dfrac{x}{2} = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = \pi + k4\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Chọn đáp án (A) □

CÂU 6. Nghiệm của phương trình $\cos x = \dfrac{1}{2}$ là

A $x = \pm\dfrac{\pi}{2} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. **B** $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. **C** $x = \pm\dfrac{\pi}{4} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. **D** $x = \pm\dfrac{\pi}{6} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Lời giải.

Ta có $\cos x = \cos\dfrac{\pi}{3} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = -\dfrac{\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$.

Chọn đáp án (B) □

CÂU 7. Số nghiệm của phương trình $\cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = 1$ với $\pi \le x \le 5\pi$ là

A 0. **B** 3. **C** 1. **D** 2.

Lời giải.

Phương trình $\cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow x + \dfrac{\pi}{4} = k2\pi \Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Mà $\pi \le x \le 5\pi$ nên $\pi \le -\dfrac{\pi}{4} + k2\pi \le 5\pi \Leftrightarrow \dfrac{5}{8} \le k \le \dfrac{21}{8};\ k \in \mathbb{Z} \Rightarrow k \in \{1;2\}$.

Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm trên $[\pi;5\pi]$.

Chọn đáp án (D) □

CÂU 8. Phương trình $\cos x - 1 = 0$ có nghiệm là

A $x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. **B** $x = k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. **C** $x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. **D** $x = \pi + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Lời giải.

Ta có $\cos x - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Chọn đáp án (B) □

CÂU 9. Tập nghiệm của phương trình $\cos 2x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ là

A $x = \pm\dfrac{\pi}{12} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. **B** $x = \pm\dfrac{\pi}{6} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. **C** $x = -\dfrac{\pi}{12} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. **D** $x = \dfrac{\pi}{12} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Lời giải.

Ta có $\cos 2x = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow 2x = \pm\dfrac{\pi}{6} + k2\pi \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{\pi}{12} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Chọn đáp án (A) □

CÂU 10. Tập nghiệm của phương trình $\cos 2x = \dfrac{1}{2}$ là

A $x = \pm\dfrac{\pi}{6} + k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$. **B** $x = \pm\dfrac{\pi}{6} + k\pi\ (k \in \mathbb{R})$. **C** $x = \dfrac{\pi}{6} + k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$. **D** $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k2\pi\ (k \in \mathbb{Z})$.

Lời giải.

Ta có $\cos 2x = \dfrac{1}{2} = \cos\dfrac{\pi}{3} \Leftrightarrow 2x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k2\pi \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{\pi}{6} + k\pi,\ (k \in \mathbb{Z})$.

Chọn đáp án (A) □

CÂU 11. Tổng nghiệm âm lớn nhất và nghiệm dương nhỏ nhất của phương trình $2\cos x - \sqrt{3} = 0$ là

A $\dfrac{5\pi}{3}$. **B** 0. **C** $\dfrac{5\pi}{6}$. **D** $-\dfrac{5\pi}{3}$.

Lời giải.

Ta có $2\cos x-\sqrt{3}=0 \Leftrightarrow \cos x=\dfrac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \cos x=\cos\dfrac{\pi}{6} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{6}+k2\pi \\ x=-\dfrac{\pi}{6}+k2\pi. \end{array}\right.$

Suy ra nghiệm dương nhỏ nhất của phương trình là $x=\dfrac{\pi}{6}$, nghiệm âm lớn nhất của phương trình là $x=-\dfrac{\pi}{6}$.

Vậy tổng cần tìm là $S=\dfrac{\pi}{6}+\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)=0$.

Chọn đáp án (B) □

CÂU 12. Số nghiệm của phương trình $\cos x=\dfrac{2}{5}$ trên khoảng $\left(-\dfrac{\pi}{2};2\pi\right)$ là

(A) 2. (B) 1. (C) 4. (D) 3.

Lời giải.

Ta có $\cos x=\dfrac{2}{5} \Leftrightarrow x=\pm\arccos\dfrac{2}{5}+k2\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

Vì $x\in\left(-\dfrac{\pi}{2};2\pi\right) \Rightarrow x=\arccos\dfrac{2}{3}; x=-\arccos\dfrac{2}{3}+2\pi$ là thỏa mãn.

Chọn đáp án (A) □

CÂU 13. Tổng các nghiệm thuộc khoảng $(0;2\pi)$ của phương trình $5\cos x-2=0$ là

(A) $S=3\pi$. (B) $S=2\pi$. (C) $S=0$. (D) $S=4\pi$.

Lời giải.

Ta có $5\cos x-2=0 \Leftrightarrow \cos x=\dfrac{2}{5} \Leftrightarrow x=\pm\arccos\left(\dfrac{2}{5}\right)+k2\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

Xét trên $(0;2\pi)$ phương trình có hai nghiệm $x=\arccos\left(\dfrac{2}{5}\right)$ và $x=-\arccos\left(\dfrac{2}{5}\right)+2\pi$.

Do vậy tổng tất cả các nghiệm của phương trình bằng $\arccos\left(\dfrac{2}{5}\right)-\arccos\left(\dfrac{2}{5}\right)+2\pi=2\pi$.

Chọn đáp án (B) □

CÂU 14. Tính tổng S tất cả các nghiệm trên khoảng $(0;3\pi)$ của phương trình $2\cos 3x=1$

(A) $S=\dfrac{121\pi}{9}$. (B) $S=\dfrac{120\pi}{9}$. (C) $S=\dfrac{122\pi}{9}$. (D) $S=\dfrac{20\pi}{3}$.

Lời giải.

Ta có $2\cos 3x=1 \Leftrightarrow \cos 3x=\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x=\dfrac{\pi}{3}+k2\pi \\ 3x=-\dfrac{\pi}{3}+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{9}+\dfrac{k2\pi}{3},\ k\in\mathbb{Z} \\ x=-\dfrac{\pi}{9}+\dfrac{k2\pi}{3},\ k\in\mathbb{Z}. \end{array}\right.$

Suy ra $S=\left(\dfrac{\pi}{9}+\dfrac{7\pi}{9}+\dfrac{13\pi}{9}+\dfrac{19\pi}{9}+\dfrac{25\pi}{9}\right)+\left(\dfrac{5\pi}{9}+\dfrac{11\pi}{9}+\dfrac{17\pi}{9}+\dfrac{23\pi}{9}\right)=\dfrac{121\pi}{9}$.

Chọn đáp án (A) □

CÂU 15. Tập nghiệm S của phương trình $\sqrt{3}\tan\dfrac{x}{3}+3=0$.

(A) $S=\left\{-\dfrac{\pi}{9}+k3\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$. (B) $S=\left\{-\dfrac{\pi}{3}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$.

(C) $S=\{-\pi+k3\pi, k\in\mathbb{Z}\}$. (D) $S=\left\{\dfrac{\pi}{6}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Lời giải.

Ta có $\sqrt{3}\tan\dfrac{x}{3}+3=0 \Leftrightarrow \tan\dfrac{x}{3}=\tan\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \dfrac{x}{3}=-\dfrac{\pi}{3}+k\pi \Leftrightarrow x=-\pi+k3\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

Chọn đáp án (C) □

CÂU 16. Nghiệm của phương trình $\tan \mathrm{x}=\tan\dfrac{\pi}{3}$ là

(A) $x=\pm\dfrac{\pi}{3}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$. (B) $x=\dfrac{\pi}{6}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$. (C) $x=\dfrac{\pi}{3}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$. (D) $x=-\dfrac{\pi}{6}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$.

Lời giải.

Ta có $\tan \mathrm{x}=\tan\dfrac{\pi}{3} \Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{3}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$.

Chọn đáp án (C) □

CÂU 17. Phương trình $\tan x=1$ có nghiệm là

(A) $x=\dfrac{\pi}{4}+k2\pi$. (B) $x=-\dfrac{\pi}{4}+k2\pi$. (C) $x=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi$. (D) $x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi$.

Lời giải.

Ta có $\tan x=1 \Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

Chọn đáp án (D) □

CÂU 18. Phương trình $\sqrt{3}\tan 2x - 3 = 0$ có nghiệm là

Ⓐ $x = \dfrac{\pi}{3} + k\pi\,(k \in \mathbb{Z})$. Ⓑ $x = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{k\pi}{2}\,(k \in \mathbb{Z})$. Ⓒ $x = \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{k\pi}{2}\,(k \in \mathbb{Z})$. Ⓓ $x = \dfrac{\pi}{6} + k\pi\,(k \in \mathbb{Z})$.

Lời giải.

Ta có $\sqrt{3}\tan 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow \tan 2x = \tan\dfrac{\pi}{3} \Leftrightarrow 2x = \dfrac{\pi}{3} + k\pi \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$.

Vậy $x = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$.

Chọn đáp án Ⓑ □

CÂU 19. Cho phương trình $\sqrt{3}\tan 2x = 3$ có nghiệm x_0 khi đó $\cos x_0$ nhận giá trị là

Ⓐ $\dfrac{-\sqrt{3}}{2}$. Ⓑ $\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}; \pm\dfrac{1}{2}$. Ⓒ $\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Ⓓ $\pm\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Ta có $\sqrt{3}\tan 2x = 3 \Leftrightarrow \tan 2x = \dfrac{3}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow 2x = \dfrac{\pi}{3} + k\pi \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{6} + k\dfrac{\pi}{2}$.

Suy ra $x_0 \in \left\{\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi; \dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi; \dfrac{7\pi}{6} + 2k\pi; \dfrac{5\pi}{3} + 2k\pi | k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Do vậy $\cos x_0 \in \left\{\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}; \pm\dfrac{1}{2}\right\}$.

Chọn đáp án Ⓑ □

CÂU 20. Tổng các nghiệm của phương trình $\tan 2x = \tan x$ trên $[-\pi; 2\pi]$ là

Ⓐ π. Ⓑ $\dfrac{\pi}{2}$. Ⓒ 4π. Ⓓ 2π.

Lời giải.

Điều kiện xác định $\begin{cases}\cos 2x \neq 0\\ \cos x \neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2}\\ x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi\end{cases}, (k \in \mathbb{Z})$.

Khi đó $\tan 2x = \tan x \Leftrightarrow 2x = x + k\pi \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
Do $x \in [-\pi; 2\pi]$ nên $x \in \{-\pi; 0; \pi; 2\pi\}$.
Vậy tổng các nghiệm của phương trình trên $[-\pi; 2\pi]$ là 2π.
Chọn đáp án Ⓓ □

CÂU 21. Nghiệm của phương trình $\tan 3x = \tan x$ là

Ⓐ $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Ⓑ $x = \dfrac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$. Ⓒ $x = \dfrac{k\pi}{6}, k \in \mathbb{Z}$. Ⓓ $x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi\\ x \neq \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{k\pi}{3}\end{cases} (k \in \mathbb{Z})$.

Ta có $\tan 3x = \tan x \Leftrightarrow 3x = x + k\pi \Leftrightarrow x = \dfrac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$.

Kết hợp điều kiện, khi đó phương trình có nghiệm là $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
Chọn đáp án Ⓐ □

CÂU 22. Nghiệm của phương trình $\tan 2\mathrm{x} = \tan\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)$ là

Ⓐ $x = \dfrac{\pi}{6} + k\dfrac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$. Ⓑ $x = \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$. Ⓒ $x = \dfrac{\pi}{3} + k\dfrac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$. Ⓓ $x = \dfrac{\pi}{6} + k\dfrac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} 2x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi\\ \dfrac{\pi}{2} - x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{k\pi}{2}\\ x \neq k\pi\end{cases} (k \in \mathbb{Z})$.

Ta có $\tan 2\mathrm{x} = \tan\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) \Leftrightarrow 2\mathrm{x} = \dfrac{\pi}{2} - x + k\pi \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{6} + k\dfrac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$.

Chọn đáp án Ⓓ □

CÂU 23. Phương trình lượng giác $\sqrt{3}\cot x - 3 = 0$ có nghiệm là

Ⓐ $x = \dfrac{\pi}{3} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$. Ⓑ $x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z})$. Ⓒ $x = -\dfrac{\pi}{6} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z})$. Ⓓ $x = \dfrac{\pi}{6} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$.

Lời giải.

Ta có $\sqrt{3}\cot x - 3 = 0 \Leftrightarrow \cot x = \sqrt{3} \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{6} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Chọn đáp án Ⓓ □

CÂU 24. Phương trình $\cot\left(\dfrac{\pi}{4}-2x\right)=1$ có nghiệm

(A) $x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$. (B) $x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$. (C) $x=k\pi, k\in\mathbb{Z}$. (D) $x=k\dfrac{\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}$.

Lời giải.

Ta có $\cot\left(\dfrac{\pi}{4}-2x\right)=1 \Leftrightarrow \dfrac{\pi}{4}-2x=\dfrac{\pi}{4}-k\pi \Leftrightarrow x=k\dfrac{\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}$.

Chọn đáp án (D) □

Dạng 3. Phương trình lượng giác cơ bản dùng độ

- $\sin x=\sin\alpha^\circ \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\alpha^\circ+k360^\circ\\ x=180^\circ-\alpha^\circ+k360^\circ\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z})$.
- $\cos x=\cos\alpha^\circ \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\alpha^\circ+k360^\circ\\ x=-\alpha^\circ+k360^\circ\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z})$.
- $\tan x=\tan\alpha^\circ \Leftrightarrow x=\alpha^\circ+k180^\circ\quad (k\in\mathbb{Z})$.
- $\cot x=\cot\alpha^\circ \Leftrightarrow x=\alpha^\circ+k180^\circ\quad (k\in\mathbb{Z})$.

1. Ví dụ

VÍ DỤ 1. Tìm góc lượng giác x sao cho:

a) $\sin x=\sin 55^\circ$;

b) $\cos x=\cos(-87^\circ)$;

c) $\tan x=\tan 67^\circ$;

d) $\cot x=\cot(-83^\circ)$.

Lời giải.

a) $\sin x=\sin 55^\circ \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=55^\circ+k360^\circ\\ x=180^\circ-55^\circ+k360^\circ\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=55^\circ+k360^\circ\\ x=125^\circ+k360^\circ\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z})$.

b) $\cos x=\cos(-87^\circ) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-87^\circ+k360^\circ\\ x=-(-87^\circ)+k360^\circ\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-87^\circ+k360^\circ\\ x=87^\circ+k360^\circ\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z})$.

c) $\tan x=\tan 67^\circ \Leftrightarrow x=67^\circ+k180^\circ, k\in\mathbb{Z}$.

d) $\cot x=\cot(-83^\circ) \Leftrightarrow x=-83^\circ+k180^\circ\ (k\in\mathbb{Z})$.

□

VÍ DỤ 2. Giải các phương trình sau:

a) $\sin(x+20^\circ)=\dfrac{1}{2}$;

b) $\sin(x+30^\circ)=\sin(x+60^\circ)$.

Lời giải.

a) Ta có:

$$\begin{aligned}\sin(x+20^\circ)=\frac{1}{2} &\Leftrightarrow \sin(x+20^\circ)=\sin 30^\circ\\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x+20^\circ=30^\circ+k360^\circ\\ x+20^\circ=180^\circ-30^\circ+k360^\circ\end{array}\right.\\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=10^\circ+k360^\circ\\ x=130^\circ+k360^\circ\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z}).\end{aligned}$$

b) Ta có:

$$\begin{aligned}\sin(x+30^\circ)=\sin(x+60^\circ) &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x+30^\circ=x+60^\circ+k360^\circ\\ x+30^\circ=180^\circ-(x+60^\circ)+k360^\circ\end{array}\right.\\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-30^\circ=k360^\circ\ (\text{vô nghiệm})\\ 2x=90^\circ+k360^\circ\end{array}\right.\\ &\Leftrightarrow x=45^\circ+k180^\circ\ (k\in\mathbb{Z}).\end{aligned}$$

□

VÍ DỤ 3. Giải phương trình $\sin 2x = \sin(60^\circ - 3x)$.

Lời giải.

Ta có

$$\sin 2x = \sin(60^\circ - 3x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = 60^\circ - 3x + k360^\circ \\ 2x = 180^\circ - (60^\circ - 3x) + k360^\circ \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5x = 60^\circ + k360^\circ \\ -x = 120^\circ + k360^\circ \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 12^\circ + k72^\circ \\ x = -120^\circ - k360^\circ \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

□

VÍ DỤ 4. Giải phương trình $\cos 2x = \cos\left(45^\circ - x\right)$.

Lời giải.

$$\cos 2x = \cos\left(45^\circ - x\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = 45^\circ - x + k360^\circ \\ 2x = -\left(45^\circ - x\right) + k360^\circ \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x = 45^\circ + k360^\circ \\ x = -45^\circ + k360^\circ \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 15^\circ + k120^\circ \\ x = -45^\circ + k360^\circ \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}).$$

□

VÍ DỤ 5. Giải phương trình: $\sqrt{3}\tan\left(\dfrac{x}{2} + 15^\circ\right) = 1$.

Lời giải.

Ta có:

$$\begin{aligned} \sqrt{3}\tan\left(\frac{x}{2} + 15^\circ\right) = 1 \quad &\Leftrightarrow \quad \tan\left(\frac{x}{2} + 15^\circ\right) = \frac{1}{\sqrt{3}} \\ &\Leftrightarrow \quad \tan\left(\frac{x}{2} + 15^\circ\right) = \tan 30^\circ \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{x}{2} + 15^\circ = 30^\circ + k180^\circ \\ &\Leftrightarrow \quad x = 30^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

□

2. Bài tập tự luận

BÀI 1. Giải phương trình $\cos\left(x - 15^\circ\right) = -\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Ta có: $\cos\left(x - 15^\circ\right) = -\dfrac{1}{2} = \cos 120^\circ \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - 15^\circ = 120^\circ + k360^\circ \\ x - 15^\circ = -120^\circ + k360^\circ \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 135^\circ + k360^\circ \\ x = -105^\circ + k360^\circ \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}).$ □

BÀI 2. Giải phương trình: $\cos\left(2x - 60^\circ\right) = \dfrac{1}{3}$.

Lời giải.

Vì $\dfrac{1}{3} \in [-1; 1]$ nên tồn tại $\cos a^\circ = \dfrac{1}{3}$.

Khi đó ta có:

$$\cos\left(2x - 60^\circ\right) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \cos\left(2x - 60^\circ\right) = \cos a^\circ \Leftrightarrow 2x - 60^\circ = \pm a^\circ + k360^\circ \Leftrightarrow x = 30^\circ \pm \frac{a^\circ}{2} + k180^\circ, k \in \mathbb{Z}.$$

□

BÀI 3. Giải phương trình $\tan\left(x + 30^\circ\right) + 1 = 0$ với $-90^\circ < x < 360^\circ$.

Lời giải.

Ta có:

$$\begin{aligned} \tan\left(x + 30^\circ\right) + 1 = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \tan\left(x + 30^\circ\right) = -1 = \tan\left(-45^\circ\right) \\ &\Leftrightarrow \quad x + 30^\circ = -45^\circ + \mathrm{k}180^\circ \\ &\Leftrightarrow \quad x = -75^\circ + k180^\circ \left(k \in \mathbb{Z}\right). \end{aligned}$$

Do $-90^\circ < x < 360^\circ$ nên ta có tập nghiệm của phương trình là $S = \{-75^\circ; 105^\circ; 285^\circ\}$. □

BÀI 4. Giải phương trình $3\cot^2\left(5x + 40^\circ\right) = 1$.

Lời giải.

Ta có: $3\cot^2\left(5x + 40^\circ\right) = 1 \Leftrightarrow \cot\left(5x + 40^\circ\right) = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

- $\cot(5x+40^\circ)=\dfrac{\sqrt{3}}{3}=\cot 60^\circ \Leftrightarrow 5x+40^\circ=60^\circ+k180^\circ \Leftrightarrow x=4^\circ+k36^\circ, k\in\mathbb{Z}$.
- $\cot(5x+40^\circ)=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}=\cot(-60^\circ) \Leftrightarrow 5x+40^\circ=-60^\circ+k180^\circ \Leftrightarrow x=-20^\circ+k36^\circ, k\in\mathbb{Z}$.

□

BÀI 5. Giải phương trình: $\tan(3x-20^\circ)-\cot(2x+15^\circ)=0$.

Lời giải.

Ta có:

$$\begin{aligned}\tan(3x-20^\circ)-\cot(2x+15^\circ)=0 &\Leftrightarrow \tan(3x-20^\circ)=\cot(2x+15^\circ)\\ &\Leftrightarrow \tan(3x-20^\circ)=\tan(90^\circ-2x-15^\circ)\\ &\Leftrightarrow \tan(3x-20^\circ)=\tan(75^\circ-2x)\\ &\Leftrightarrow 3x-20^\circ=75^\circ-2x+k180^\circ\\ &\Leftrightarrow x=19^\circ+k36^\circ, k\in\mathbb{Z}.\end{aligned}$$

□

BÀI 6. Giải phương trình: $\cot(x+30^\circ)=\cot\dfrac{x}{2}$

Lời giải.

Điều kiện: $\begin{cases}\sin(x+30^\circ)\neq 0\\ \sin\dfrac{x}{2}\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x+30^\circ\neq k\cdot 180^\circ\\ \dfrac{x}{2}\neq n\cdot 180^\circ\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\neq -30^\circ+k\cdot 180^\circ\\ x\neq n\cdot 360^\circ\end{cases} (k,n\in\mathbf{Z})$.

Khi đó:

$$\cot(x+30^\circ)=\cot\frac{x}{2}\Leftrightarrow x+30^\circ=\frac{x}{2}+m\cdot 180^\circ\Leftrightarrow 2x+60^\circ=x+m\cdot 360^\circ\Leftrightarrow x=-60^\circ+m\cdot 360^\circ, m\in\mathbb{Z}.$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x=-60^\circ+m\cdot 360^\circ, m\in\mathbb{Z}$. □

3. Bài tập trắc nghiệm

CÂU 1. Phương trình $\sin x=\sin a^\circ$ tương đương với

(A) $\left[\begin{array}{l}x=a^\circ+k360^\circ\\ x=-a^\circ+k60^\circ\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z})$.

(B) $\left[\begin{array}{l}x=a^\circ+k60^\circ\\ x=180^\circ-a^\circ+60^\circ\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z})$.

(C) $x=a^\circ+k180^\circ\ (k\in\mathbb{Z})$.

(D) $x=-a^\circ+k180^\circ\ (k\in\mathbb{Z})$.

Lời giải.

Ta có $\sin x=\sin a^\circ\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=a^\circ+k360^\circ\\ x=180^\circ-a^\circ+k360^\circ\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z})$.

Chọn đáp án (B) □

CÂU 2. Hỏi $x=45^\circ$ là nghiệm của phương trình nào sau đây?

(A) $\sin x=1$. (B) $\cos x=1$. (C) $\sin x\cdot\cos x=\dfrac{1}{2}$. (D) $\sin 2x=0$.

Lời giải.

Ta có $\sin x\cdot\cos x=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow\sin 2x=1\Leftrightarrow 2x=90^\circ+k360^\circ\Leftrightarrow x=45^\circ+k180^\circ$.

Do đó $x=45^\circ$ là nghiệm của phương trình $\sin x\cdot\cos x=\dfrac{1}{2}$.

Chọn đáp án (C) □

CÂU 3. Tìm tập nghiệm S của phương trình $\cos 3x=\cos 45^\circ$.

(A) $S=\{15^\circ+k120^\circ;45^\circ+k120^\circ,k\in\mathbb{Z}\}$.

(B) $S=\{-15^\circ+k120^\circ;15^\circ+k120^\circ,k\in\mathbb{Z}\}$.

(C) $S=\{15^\circ+k360^\circ;45^\circ+k360^\circ,k\in\mathbb{Z}\}$.

(D) $S=\{-15^\circ+k360^\circ;15^\circ+k360^\circ,k\in\mathbb{Z}\}$.

Lời giải.

$\cos 3x=\cos 45^\circ\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3x=45^\circ+k360^\circ\\ 3x=-45^\circ+k360^\circ\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=15^\circ+k120^\circ\\ x=-15^\circ+k120^\circ\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z})$.

Chọn đáp án (B) □

CÂU 4. Tìm tập nghiệm S của phương trình $\cos(2x-30^\circ)=-\dfrac{1}{2}$.

(A) $S=\{-45^\circ+k360^\circ;75^\circ+k360^\circ,k\in\mathbb{Z}\}$.

(B) $S=\{-45^\circ+k180^\circ;45^\circ+k180^\circ,k\in\mathbb{Z}\}$.

(C) $S=\{-45^\circ+k180^\circ;75^\circ+k180^\circ,k\in\mathbb{Z}\}$.

(D) $S=\{-75^\circ+k180^\circ;75^\circ+k180^\circ,k\in\mathbb{Z}\}$.

Lời giải.

Ta có
$$\cos\left(2x-30^\circ\right)=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x-30^\circ=120^\circ+k360^\circ\\2x-30^\circ=-120^\circ+k360^\circ\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=75^\circ+k180^\circ\\x=-45^\circ+k180^\circ\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z}).$$

Chọn đáp án C □

CÂU 5. Nghiệm của phương trình $\tan x=\tan 25^\circ$ là

A $x=25^\circ+\mathrm{k}360^\circ$ và $x=155^\circ+\mathrm{k}360^\circ,\mathrm{k}\in\mathbb{Z}$.
B $x=25^\circ+k180^\circ$ và $x=155^\circ+\mathrm{k}180^\circ,\mathrm{k}\in\mathbb{Z}$.
C $x=25^\circ+k360^\circ$ và $x=-25^\circ+\mathrm{k}360^\circ,\mathrm{k}\in\mathbb{Z}$.
D $x=25^\circ+\mathrm{k}180^\circ,\mathrm{k}\in\mathbb{Z}$.

Lời giải.

Ta có:
$$\tan x=\tan 25^\circ\Leftrightarrow x=25^\circ+\mathrm{k}180^\circ,\mathrm{k}\in\mathbb{Z}.$$

Chọn đáp án D □

CÂU 6. Phương trình $\tan\left(2x+12^\circ\right)=0$ có họ nghiệm là

A $x=-6^\circ+k180^\circ,\ \ k\in\mathbb{Z}$.
B $x=-6^\circ+k360^\circ,\ \ k\in\mathbb{Z}$.
C $x=-12^\circ+k90^\circ,\ \ k\in\mathbb{Z}$.
D $x=-6^\circ+k90^\circ,\ \ k\in\mathbb{Z}$.

Lời giải.

Ta có
$$\begin{aligned}&\tan\left(2x+12^\circ\right)=0\\ \Leftrightarrow\ &x=-6^\circ+k90^\circ,k\in\mathbb{Z}.\end{aligned}$$

Chọn đáp án D □

CÂU 7. Tìm số nghiệm của phương trình $\sin 3x=0$ thuộc khoảng $(0;180^\circ)$.

A 1. B 2. C 3. D 4.

Lời giải.

Ta có: $\sin 3x=0\Leftrightarrow x=\dfrac{k180^\circ}{3}$.

Xét bất phương trình $0<\dfrac{k180^\circ}{3}<180^\circ\Leftrightarrow k\in\{1;2\}$.

Vậy phương trình có 2 nghiệm trong $(0;180^\circ)$.

Chọn đáp án B □

CÂU 8. Tìm tập nghiệm S của phương trình $\cos(x+30^\circ)=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

A $S=\{120^\circ+k360^\circ;k360^\circ,k\in\mathbb{Z}\}$.
B $S=\{120^\circ+k360^\circ;-180^\circ+k360^\circ,k\in\mathbb{Z}\}$.
C $S=\{120^\circ+k180^\circ;k180^\circ,k\in\mathbb{Z}\}$.
D $S=\{120^\circ+k180^\circ;-180^\circ+k180^\circ,k\in\mathbb{Z}\}$.

Lời giải.

Ta có $\cos(x+30^\circ)=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x+30^\circ=-150^\circ+k360^\circ\\x+30^\circ=150^\circ+k360^\circ\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-180^\circ+k360^\circ\\x=120^\circ+k360^\circ\end{array}\right.,(k\in\mathbb{Z})$.

Chọn đáp án B □

CÂU 9. Tìm nghiệm của phương trình $\sqrt{3}\cot\left(x+60^\circ\right)-1=0$.

A $x=-30^\circ+k360^\circ,k\in\mathbb{Z}$.
B $x=-30^\circ+k180^\circ,k\in\mathbb{Z}$.
C $x=k360^\circ,k\in\mathbb{Z}$.
D $x=k180^\circ,k\in\mathbb{Z}$.

Lời giải.

$$\begin{aligned}&\sqrt{3}\cot\left(x+60^\circ\right)-1=0\\ \Leftrightarrow\ &\cot\left(x+60^\circ\right)=\frac{1}{\sqrt{3}}\\ \Leftrightarrow\ &x=k180^\circ,k\in\mathbb{Z}.\end{aligned}$$

Chọn đáp án D □

CÂU 10. Cho phương trình $\tan\left(2x-15^\circ\right)=1$ biết rằng $-90^\circ<x<90^\circ$. Số nghiệm của phương trình là

A 1. B 2. C 3. D 4.

Lời giải.

Ta có: $\tan\left(2x-15^\circ\right)=1\Leftrightarrow 2x-15^\circ=45^\circ+k180^\circ\Leftrightarrow x=30^\circ+k90^\circ,k\in\mathbb{Z}$.

Do $x\in(-90^\circ;90^\circ)\Leftrightarrow-90^\circ<30^\circ+k90^\circ<90^\circ\Leftrightarrow-\dfrac{4}{3}<k<\dfrac{2}{3},k\in\mathbb{Z}\Rightarrow k\in\{-1;0\}$.

nên phương trình có hai nghiệm thỏa mãn yêu cầu.

Chọn đáp án B □

CÂU 11. Số nghiệm của phương trình $\sin(2x-40^\circ)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ với $-180^\circ \le x \le 180^\circ$ là

Ⓐ 2. Ⓑ 4. Ⓒ 6. Ⓓ 7.

Lời giải.

Ta có:

$$\sin(2x-40^\circ)=\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \sin(2x-40^\circ)=\sin 60^\circ \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x-40^\circ=60^\circ+k360^\circ \\ 2x-40^\circ=180^\circ-60^\circ+k360^\circ \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=50^\circ+k180^\circ \\ x=80^\circ+k180^\circ. \end{array}\right.$$

Do $-180^\circ \le x \le 180^\circ$ nên $x \in \{-130^\circ; 50^\circ; -100^\circ; 80^\circ\}$.
Vậy có tất cả 4 nghiệm thỏa mãn bài toán.
Chọn đáp án Ⓑ □

CÂU 12. Tìm tập nghiệm S của phương trình $\sin(x+30^\circ)\cdot\cos(x-45^\circ)=0$.

Ⓐ $S=\{-30^\circ+k180^\circ, k\in\mathbb{Z}\}$.

Ⓑ $S=\{-30^\circ+k180^\circ; 135^\circ+k180^\circ, k\in\mathbb{Z}\}$.

Ⓒ $S=\{135^\circ+k180^\circ, k\in\mathbb{Z}\}$.

Ⓓ $S=\{45^\circ+k180^\circ, k\in\mathbb{Z}\}$.

Lời giải.

Ta có:

$$\sin(x+30^\circ)\cdot\cos(x-45^\circ)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin(x+30^\circ)=0 \\ \cos(x-45^\circ)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+30^\circ=k\cdot 180^\circ \\ x-45^\circ=90^\circ+k\cdot 180^\circ \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-30^\circ+k\cdot 180^\circ \\ x=135^\circ+k\cdot 180^\circ. \end{array}\right.$$

Vậy phương trình có tập nghiệm là $S=\{-30^\circ+k180^\circ; 135^\circ+k180^\circ, k\in\mathbb{Z}\}$.
Chọn đáp án Ⓑ □

Dạng 4. Phương trình đưa về phương trình lượng giác cơ bản

1. Ví dụ

VÍ DỤ 1. Giải phương trình: $\sin 2x=\cos 3x$.

Lời giải.

Ta có:

$$\begin{aligned} \sin 2x=\cos 3x &\Leftrightarrow \cos 3x=\cos\left(\frac{\pi}{2}-2x\right) \\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x=\dfrac{\pi}{2}-2x+k2\pi \\ 3x=-\left(\dfrac{\pi}{2}-2x\right)+k2\pi \end{array}\right. \\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi \\ x=-\dfrac{\pi}{2}+k2\pi \end{array}\right. \\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{k2\pi}{5} \\ x=-\dfrac{\pi}{2}+k2\pi \end{array}\right. (k\in\mathbb{Z}). \end{aligned}$$

□

VÍ DỤ 2. Giải phương trình: $\sin 4x-\cos\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)=0$.

Lời giải.

Ta có:

$$\begin{aligned} & \sin 4x-\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=0 \\ \Leftrightarrow\ & \sin 4x=\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right) \\ \Leftrightarrow\ & \sin 4x=\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right) \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} 4x=\dfrac{\pi}{3}-x+k2\pi \\ 4x=\pi-\dfrac{\pi}{3}+x+k2\pi \end{array}\right. \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} 5x=\dfrac{\pi}{3}+k2\pi \\ 3x=\dfrac{2\pi}{3}+k2\pi \end{array}\right. \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{15} + \dfrac{k2\pi}{5} \\ x = \dfrac{2\pi}{9} + \dfrac{k2\pi}{3} \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}).$$

□

VÍ DỤ 3. Giải các phương trình sau:

a) $\sin 2x + \cos 4x = 0$.

b) $\cos 3x = -\cos 7x$.

Lời giải.

a) $\sin 2x + \cos 4x = 0 \Leftrightarrow -\sin 2x = \cos 4x \Leftrightarrow \cos\left(2x + \dfrac{\pi}{2}\right) = \cos 4x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4x = 2x + \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \\ 4x = -2x - \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \\ 6x = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \\ x = -\dfrac{\pi}{12} + \dfrac{k}{3}\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.$$

b) $\cos 3x = -\cos 7x \Leftrightarrow \cos 3x = \cos(\pi - 7x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x = \pi - 7x + k2\pi \\ 3x = 7x - \pi + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{10} + \dfrac{k}{5}\pi \\ x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k}{4}\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.$

□

VÍ DỤ 4. Giải phương trình: $\cos^2 2x = \cos^2\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right)$.

Lời giải.

Cách 1.

Ta có: $\cos^2 2x = \cos^2\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \cos 2x = \cos\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right) & (1) \\ \cos 2x = -\cos\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right). & (2) \end{array}\right.$

+) (1) $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = x + \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ 2x = -\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right) + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ 3x = -\dfrac{\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = -\dfrac{\pi}{18} + \dfrac{k2\pi}{3} \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}).$

+) (2) $\Leftrightarrow \cos 2x = \cos\left[\pi - \left(x + \dfrac{\pi}{6}\right)\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = \pi - \left(x + \dfrac{\pi}{6}\right) + k2\pi \\ 2x = -\left[\pi - \left(x + \dfrac{\pi}{6}\right)\right] + k2\pi \end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi \\ x = -\dfrac{5\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{5\pi}{18} + \dfrac{k2\pi}{3} \\ x = -\dfrac{5\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}).$$

Cách 2. Dùng công thức hạ bậc, ta có:

$$\begin{aligned} \cos^2 2x = \cos^2\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right) &\Leftrightarrow \dfrac{1 - \cos 4x}{2} = \dfrac{1 - \cos\left(2x + \dfrac{\pi}{3}\right)}{2} \\ &\Leftrightarrow \cos 4x = \cos\left(2x + \dfrac{\pi}{3}\right) \\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4x = 2x + \dfrac{\pi}{3} + k2\pi \\ 4x = -\left(2x + \dfrac{\pi}{3}\right) + x + k2\pi \end{array}\right. \\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = \dfrac{\pi}{3} + k2\pi \\ 6x = -\dfrac{\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right. \\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{6} + k\pi \\ x = -\dfrac{\pi}{18} + \dfrac{k\pi}{3} \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

□

VÍ DỤ 5. Giải phương trình: $\sin x + \sin 2x = 0$.

Lời giải.

Ta có:

$$\begin{aligned}\sin x + \sin 2x = 0 &\Leftrightarrow \sin x + 2\sin x \cdot \cos x = 0\\ &\Leftrightarrow \sin x \cdot (1 + 2\cos x) = 0\\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x = 0\\ 1 + 2\cos x = 0\end{array}\right.\\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x = 0\\ \cos x = -\dfrac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = k\pi\\ x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + k2\pi\end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}).\end{aligned}$$

Vậy phương trình có các nghiệm là $k\pi, k \in \mathbb{Z}$ và $x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$. □

2. Bài tập tự luận

BÀI 1. Giải phương trình: $\sin 3x - \cos 5x = 0$.

Lời giải.

Ta có:

$$\begin{aligned}\sin 3x - \cos 5x = 0 &\Leftrightarrow \sin 3x = \cos 5x\\ &\Leftrightarrow \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - 3x\right) = \cos 5x\\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\dfrac{\pi}{2} - 3x = 5x + k2\pi\\ \dfrac{\pi}{2} - 3x = -5x + k2\pi\end{array}\right.\\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = -\dfrac{\pi}{16} - k\dfrac{\pi}{4}\\ x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi\end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}).\end{aligned}$$

□

BÀI 2. Giải phương trình $\sin 2x + \sin\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right) = 0$.

Lời giải.

Ta có:

$$\begin{aligned}\sin 2x + \sin\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right) = 0 &\Leftrightarrow \sin 2x = -\sin\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right)\\ &\Leftrightarrow \sin 2x = \sin\left(-x - \dfrac{\pi}{6}\right)\\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2x = -x - \dfrac{\pi}{6} + k2\pi\\ 2x = \dfrac{7\pi}{6} + x + k2\pi\end{array}\right.\\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2x = -x - \dfrac{\pi}{6} + k2\pi\\ 2x = \dfrac{7\pi}{6} + x + k2\pi\end{array}\right.\\ &\Leftrightarrow x = \dfrac{7\pi}{6} + k2\pi.\end{aligned}$$

□

BÀI 3. Giải phương trình: $\tan(2x + 1) + \cot x = 0$.

Lời giải.

Ta có:

$$\begin{aligned}\tan(2x + 1) + \cot x = 0 &\Leftrightarrow \tan(2x + 1) = -\cot x\\ &\Leftrightarrow \tan(2x + 1) = \cot(-x)\\ &\Leftrightarrow \tan(2x + 1) = \tan\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right)\\ &\Leftrightarrow 2x + 1 = \dfrac{\pi}{2} + x + k\pi\\ &\Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} - 1 + k\pi, k \in \mathbb{Z}.\end{aligned}$$

□

BÀI 4. Tìm $x \in (-\pi; \pi)$ sao cho $\sin\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right) + 2\cos\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right) = 0$.

Lời giải.

Ta có:

$$\begin{aligned}\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + 2\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 0 \Leftrightarrow &\quad -\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + 2\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 0\\ \Leftrightarrow &\quad \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 0\\ \Leftrightarrow &\quad x = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.\end{aligned}$$

Cho $k = -1, 0$ ta được $x = -\dfrac{2\pi}{3}, \dfrac{\pi}{3}$. □

BÀI 5. Giải phương trình: $2\sin^2 x - 1 + \cos 3x = 0$.

Lời giải.

Ta có:

$$\begin{aligned}2\sin^2 x - 1 + \cos 3x = 0 &\Leftrightarrow \cos 3x - \cos 2x = 0\\ &\Leftrightarrow \cos 3x = \cos 2x\\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}3x = 2x + k2\pi\\ 3x = -2x + k2\pi\end{array}\right.\\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = k2\pi\\ 5x = k2\pi\end{array}\right.\\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = k2\pi\\ x = \dfrac{k2\pi}{5}\end{array}\right., (k \in \mathbb{Z}).\end{aligned}$$

□

BÀI 6. Giải phương trình $\sin 3x + \cos 2x - \sin x = 0$.

Lời giải.

Ta có:

$$\begin{aligned}\sin 3x + \cos 2x - \sin x = 0 &\Leftrightarrow \sin 3x - \sin x + \cos 2x = 0\\ &\Leftrightarrow 2\cos 2x \cdot \sin x + \cos 2x = 0\\ &\Leftrightarrow \cos 2x \cdot (\sin x + 1) = 0\\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 2x = 0\\ \sin x = -1\end{array}\right.\\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2}\\ x = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi\end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}).\end{aligned}$$

□

BÀI 7. Giải phương trình $\sin x \cdot \cos 2x = \sin 2x \cdot \cos 3x$.

Lời giải.

Áp dụng công thức biến đổi tích thành tổn, ta có:

$$\begin{aligned}\sin x \cdot \cos 2x = \sin 2x \cdot \cos 3x &\Leftrightarrow \frac{1}{2}(\sin 3x - \sin x) = \frac{1}{2}(\sin 5x - \sin x)\\ &\Leftrightarrow \sin 5x = \sin 3x\\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}5x = 3x + k2\pi\\ 5x = \pi - 3x + k2\pi\end{array}\right.\\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = k\pi\\ x = \dfrac{\pi}{8} + \dfrac{k\pi}{4}\end{array}\right., (k \in \mathbb{Z}).\end{aligned}$$

□

BÀI 8. Giải phương trình: $\sin^4 \dfrac{x}{2} + \cos^4 \dfrac{x}{2} = \dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Ta có:

$$\begin{aligned}\sin^4\frac{x}{2}+\cos^4\frac{x}{2}=\frac{1}{2} &\Leftrightarrow \left(\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}\right)^2-2\sin^2\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}=\frac{1}{2}\\ &\Leftrightarrow 1-\frac{1}{2}\sin^2 x=\frac{1}{2}\\ &\Leftrightarrow \sin^2 x=1\\ &\Leftrightarrow \cos x=0\\ &\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi,(k\in\mathbb{Z}).\end{aligned}$$

□

BÀI 9. Giải phương trình: $\tan^2 4x-\tan^2\left(3x-\frac{\pi}{3}\right)=0$.

Lời giải.

Điều kiện: $\begin{cases}\cos 4x\neq 0\\ \cos\left(3x-\frac{\pi}{3}\right)\neq 0.\end{cases}$

Phương trình đã cho tương đương với

$$\left[\tan 4x-\tan\left(3x-\frac{\pi}{3}\right)\right]\cdot\left[\tan 4x+\tan\left(3x-\frac{\pi}{3}\right)\right]=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\tan 4x=\tan\left(3x-\frac{\pi}{3}\right)\\ \tan 4x=-\tan\left(3x-\frac{\pi}{3}\right).\end{array}\right.$$

- $\tan 4x=\tan\left(3x-\frac{\pi}{3}\right)\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{3}+k\pi,(k\in\mathbb{Z})$.
- $\tan 4x=-\tan\left(3x-\frac{\pi}{3}\right)\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{21}+\frac{k2\pi}{7},(k\in\mathbb{Z})$.

Các nghiệm này thỏa mãn các điều kiện.

Vậy phương trình có nghiệm $x=-\frac{\pi}{3}+k\pi, x=-\frac{\pi}{21}+\frac{k2\pi}{7},(k\in\mathbb{Z})$. □

BÀI 10. Giải phương trình $\sin^6 x+\cos^6 x=\frac{7}{16}$.

Lời giải.

Ta có:

$$\begin{aligned}\sin^6 x+\cos^6 x=\frac{7}{16} &\Leftrightarrow \left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)^3-3\sin^2 x\cos^2 x\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)=\frac{7}{16}\\ &\Leftrightarrow 1-\frac{3}{4}\sin^2 2x=\frac{7}{16}\\ &\Leftrightarrow 1-\frac{3}{4}\left(\frac{1-\cos 4x}{2}\right)=\frac{7}{16}\\ &\Leftrightarrow \cos 4x=-\frac{1}{2}\\ &\Leftrightarrow \cos 4x=\cos\frac{2\pi}{3}\\ &\Leftrightarrow x=\pm\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2},(k\in\mathbb{Z}).\end{aligned}$$

□

3. Bài tập trắc nghiệm

CÂU 1. Tìm số nghiệm thuộc khoảng $(-\pi;\pi)$ của phương trình $\sin x+\sin 2x=0$.

A 3. **B** 1. **C** 2. **D** 4.

Lời giải.

Phương trình tương đương với

$$\sin x\left(1+2\cos x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin x=0\\ \cos x=-\frac{1}{2}.\end{array}\right.$$

- $\sin x=0\Leftrightarrow x=k\pi,(k\in\mathbb{Z})$.
- $\cos x=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=\pm\frac{2\pi}{3}+k2\pi,(k\in\mathbb{Z})$.

Do $x \in (-\pi;\pi) \Rightarrow x \in \left\{0, -\dfrac{2\pi}{3}, \dfrac{2\pi}{3}\right\}$.

Vậy phương trình đã cho có 3 nghiệm thuộc khoảng $(-\pi;\pi)$.

Chọn đáp án (A) □

CÂU 2. Tìm số nghiệm thuộc khoảng $(0;\pi)$ của phương trình $\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)+\sin 5x = 0$.

(A) 4. (B) 5. (C) 6. (D) 7.

Lời giải.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\sin 5x = \sin\left(-x-\dfrac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5x = -x-\dfrac{\pi}{3}+k2\pi \\ 5x = x+\dfrac{4\pi}{3}+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{18}+\dfrac{k\pi}{3} \\ x = \dfrac{\pi}{3}+\dfrac{k\pi}{2} \end{array}\right. (k\in\mathbb{Z}).$$

Do $x \in (0;\pi)$ nên $x \in \left\{\dfrac{5\pi}{18}, \dfrac{11\pi}{18}, \dfrac{17\pi}{18}, \dfrac{\pi}{3}, \dfrac{5\pi}{6}\right\}$.

Vậy phương trình có 5 nghiệm thuộc khoảng $(0;\pi)$.

Chọn đáp án (B) □

CÂU 3. Phương trình $\tan 2x + \tan x = 0$ có bao nhiêu nghiệm trong đoạn $[-4\pi; 5\pi]$?

(A) 28. (B) 27. (C) 19. (D) 18.

Lời giải.

Điều kiện: $\begin{cases} 2x \neq \dfrac{\pi}{2}+k\pi \\ x \neq \dfrac{\pi}{2}+n\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \dfrac{\pi}{4}+\dfrac{k\pi}{2} \\ x \neq \dfrac{\pi}{2}+n\pi \end{cases}, k,n\in\mathbb{Z}$.

Khi đó:

$\tan 2x + \tan x = 0 \Leftrightarrow \tan 2x = -\tan x \Leftrightarrow \tan 2x = \tan(-x) \Leftrightarrow 2x = -x+m\pi$

$\Leftrightarrow 3x = m\pi \Leftrightarrow x = \dfrac{m\pi}{3}, m\in\mathbb{Z}$ (thỏa điều kiện).

Mà $x\in[-4\pi, 5\pi]$ nên $-4\pi \leq \dfrac{m\pi}{3} \leq 5\pi \Leftrightarrow -12 \leq m \leq 15$.

Vậy số nghiệm của phương trình là 28.

Chọn đáp án (A) □

CÂU 4. Giải phương trình $\sin x + \cos\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right) = 2$.

(A) $x = k\pi, k\in\mathbb{Z}$. (B) $x = \dfrac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$. (C) $x = k2\pi, k\in\mathbb{Z}$. (D) $x = \dfrac{\pi}{2}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$.

Lời giải.

Ta có: $\sin x + \cos\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right) = 2 \Leftrightarrow 2\sin x = 2 \Leftrightarrow \sin x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$.

Chọn đáp án (D) □

CÂU 5. Họ nghiệm của phương trình $\tan 3x\cdot\tan x = 1$ là

(A) $x = \dfrac{\pi}{8}+k\dfrac{\pi}{8},\ k\in\mathbb{Z}$. (B) $x = \dfrac{\pi}{4}+k\dfrac{\pi}{4},\ k\in\mathbb{Z}$. (C) $x = \dfrac{\pi}{8}+k\dfrac{\pi}{4},\ k\in\mathbb{Z}$. (D) $x = \dfrac{\pi}{8}+k\dfrac{\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}$.

Lời giải.

Điều kiện: $\begin{cases} \cos 3x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \dfrac{\pi}{6}+m\dfrac{\pi}{3} \\ x \neq \dfrac{\pi}{2}+n\pi \end{cases}, m,n\in\mathbb{Z}$.

Khi đó:

$$\tan 3x\cdot\tan x = 1 \Leftrightarrow \tan 3x = \dfrac{1}{\tan x} \Leftrightarrow \tan 3x = \cot x = \tan\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right) \Leftrightarrow 3x = \dfrac{\pi}{2}-x+k\pi \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{8}+k\dfrac{\pi}{4}.$$

Nghiệm này thỏa mãn các điều kiện của phương trình.

Vậy nghiệm của phương trình là $x = \dfrac{\pi}{8}+k\dfrac{\pi}{4}$.

Chọn đáp án (C) □

CÂU 6. Tổng các nghiệm của phương trình $\sin x = \dfrac{-1}{2\sqrt{2}\cos x}$ trên đoạn $[0;2\pi]$ là

(A) $\dfrac{9\pi}{8}$. (B) $\dfrac{15\pi}{8}$. (C) 5π. (D) $\dfrac{11\pi}{8}$.

Lời giải.

Phương trình tương đương với $\sin 2x = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{8} + k\pi \\ x = \dfrac{5\pi}{8} + k\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})$.

Do đó, tổng các nghiệm của phương trình đã cho trên đoạn $[0; 2\pi]$ bằng

$$\frac{7\pi}{8} + \frac{15\pi}{8} + \frac{5\pi}{8} + \frac{13\pi}{8} = 5\pi.$$

Chọn đáp án (C) □

CÂU 7. Giải phương trình $\sin^2 2x = \cos^2\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$.

A $x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$, $x = \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{k\pi}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$.

B $x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$, $x = -\dfrac{\pi}{12} + k\pi$, $x = \dfrac{7\pi}{12} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

C $x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi$, $x = -\dfrac{\pi}{12} + \dfrac{k\pi}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$.

D $x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$, $x = -\dfrac{\pi}{12} + \dfrac{k\pi}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Lời giải.

Ta có:

$$\begin{aligned} &\sin^2 2x = \cos^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \frac{1 - \cos 4x}{2} = \frac{1 + \cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)}{2} \\ \Leftrightarrow &-\cos 4x = \sin 2x \Leftrightarrow 2\sin^2 2x - \sin 2x - 1 = 0 \\ \Leftrightarrow &\left[\begin{array}{l} \sin 2x = 1 \\ \sin 2x = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \\ x = -\dfrac{\pi}{12} + k\pi \\ x = \dfrac{7\pi}{12} + k\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Chọn đáp án (B) □

CÂU 8. Có bao nhiêu điểm trên đường tròn lượng giác biểu diễn tất các nghiệm của phương trình $\sin 4x \cos x = \sin 5x \cos 2x$?

A 2 điểm. **B** 5 điểm. **C** 9 điểm. **D** 14 điểm.

Lời giải.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{1}{2}(\sin 5x + \sin 3x) = \frac{1}{2}(\sin 7x + \sin 3x) \Leftrightarrow \sin 5x = \sin 7x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k\pi \\ x = \dfrac{\pi}{12} + \dfrac{k\pi}{6} \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

- Cung lượng giác $x = k\pi$ có 2 điểm biểu diễn trên đường tròn lượng giác.
- Cung lượng giác $x = \dfrac{\pi}{12} + \dfrac{k\pi}{6}$ có 12 điểm biểu diễn trên đường tròn lượng giác, trong đó không có điểm nào trùng với các điểm biểu diễn của cung $x = k\pi$.

Chọn đáp án (D) □

CÂU 9. Có bao nhiêu điểm trên đường tròn lượng giác biểu diễn tất các nghiệm của phương trình $\sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin 2x$?

A 2 điểm. **B** 3 điểm. **C** 4 điểm. **D** 1 điểm.

Lời giải.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin 2x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + k2\pi \\ x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k2\pi}{3} \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Vậy có 3 điểm biểu diễn.

Chọn đáp án (B) □

CÂU 10. Một vật thể chuyển động với vận tốc thay đổi có phương trình $v(t) = 2 + \sin\left(\pi t + \dfrac{\pi}{4}\right)$ (t tính bằng giây, vận tốc tính bằng $\mathrm{m/s^2}$). Trong khoảng 1 giây đầu chuyển động, thời điểm vật thể đạt vận tốc 3 $\mathrm{m/s^2}$ là

A 1 giây. **B** $\dfrac{1}{4}$ giây. **C** $\dfrac{1}{2}$ giây. **D** $\dfrac{3}{4}$ giây.

Lời giải.

Ta có: $2+\sin\left(\pi t+\dfrac{\pi}{4}\right)=3 \Leftrightarrow \sin\left(\pi t+\dfrac{\pi}{4}\right)=1 \Leftrightarrow t=\dfrac{1}{4}+2k\,(k\in\mathbb{Z})$.

Ta có, $0\le t\le 1 \Leftrightarrow k=0$. Suy ra $t=\dfrac{1}{4}$.

Chọn đáp án (B) □

CÂU 11. Tìm số nghiệm thuộc khoảng $(0;2\pi)$ của phương trình $\sin x+2\sin 2x+\sin 3x=0$.

(A) 6. (B) 5. (C) 4. (D) 3.

Lời giải.

Phương trình đã cho tương đương với

$$2\sin 2x\cos x+2\sin 2x=0 \Leftrightarrow \sin 2x(\cos x+1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin 2x=0\\ \cos x=-1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=k\dfrac{\pi}{2}\\ x=\pi+k2\pi\end{array}\right. (k\in\mathbb{Z}).$$

Do $x\in(0;2\pi)\Rightarrow x\in\left\{\dfrac{\pi}{2},\pi,\dfrac{3\pi}{2}\right\}$.

Chọn đáp án (D) □

CÂU 12. Cho phương trình $\sin x+2\sin 2x+\sin 3x=\cos x+2\cos 2x+\cos 3x$. Tính tổng S tất cả các nghiệm trong đoạn $(0;\pi)$ của phương trình đã cho.

(A) $S=\dfrac{3\pi}{4}$. (B) $S=\dfrac{5\pi}{8}$. (C) $S=\dfrac{17\pi}{12}$. (D) $S=\dfrac{13\pi}{12}$.

Lời giải.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}&\sin 2x\cdot(\cos x+1)=\cos 2x\cdot(\cos x+1)\\ \Leftrightarrow\ &(\cos x+1)\cdot(\sin 2x-\cos 2x)=0\\ \Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l}\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{4}\right)=0\\ \cos x=-1\end{array}\right.\\ \Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l}x=\pi+k2\pi\\ x=\dfrac{\pi}{8}+k\dfrac{\pi}{2}\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z}).\end{aligned}$$

Do $x\in(0;\pi)\Rightarrow x\in\left\{\dfrac{\pi}{8},\dfrac{5\pi}{8}\right\}\Rightarrow S=\dfrac{3\pi}{4}$.

Chọn đáp án (A) □

CÂU 13. Cho phương trình $\sin x\cos x=2(\sin^4 x+\cos^4 x)-\dfrac{3}{2}$. Tính tổng S tất cả các nghiệm thuộc $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$ của phương trình đã cho.

(A) $S=\dfrac{\pi}{2}$. (B) $S=\dfrac{5\pi}{12}$. (C) $S=\dfrac{\pi}{12}$. (D) $S=\dfrac{5\pi}{4}$.

Lời giải.

Ta có $\sin^4 x+\cos^4 x=\dfrac{3}{4}+\dfrac{\cos 4x}{4}$. Khi đó

$$\begin{aligned}&\sin x\cos x=2(\sin^4 x+\cos^4 x)-\dfrac{3}{2}\\ \Leftrightarrow\ &\sin x\cos x=\dfrac{1}{2}\cos 4x\\ \Leftrightarrow\ &\sin 2x=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-4x\right)\\ \Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{k\pi}{3}\\ x=-\dfrac{\pi}{4}-k\pi\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z}).\end{aligned}$$

Suy ra các nghiệm thuộc $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$ là $\dfrac{5\pi}{12};\dfrac{\pi}{12}$. Vậy $S=\dfrac{\pi}{2}$.

Chọn đáp án (A) □

CÂU 14. Phương trình $\tan\left(\dfrac{\pi}{3}-x\right)\cdot\tan\left(\dfrac{\pi}{2}+2x\right)=1$ có nghiệm là

(A) $x=-\dfrac{\pi}{6}+\mathrm{k}\pi,k\in\mathbb{Z}$. (B) $x=\dfrac{\pi}{6}+\mathrm{k}\pi,k\in\mathbb{Z}$. (C) $x=-\dfrac{\pi}{3}+k\pi,k\in\mathbb{Z}$. (D) $x=\dfrac{5\pi}{6}+k\pi,k\in\mathbb{Z}$.

Lời giải.

Điều kiện xác định $\begin{cases} \cos\left(\dfrac{\pi}{3}-x\right)\neq 0 \\ \cos\left(\dfrac{\pi}{2}+2x\right)\neq 0. \end{cases}$

$$\begin{aligned} \tan\left(\frac{\pi}{3}-x\right)\cdot\tan\left(\frac{\pi}{2}+2x\right)=1 &\Leftrightarrow \tan\left(\frac{\pi}{3}-x\right)=\cot\left(\frac{\pi}{2}+2x\right) \\ &\Leftrightarrow \tan\left(\frac{\pi}{3}-x\right)=\tan(-2x) \\ &\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{3}+k\pi, k\in\mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án C □

CÂU 15. Nghiệm của phương trình $\tan 2x-\cot\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=0$ có dạng $x=\dfrac{\pi}{n}+\dfrac{k\pi}{m}, k\in\mathbb{Z}$. Khi đó $m\cdot n$ bằng

A 8. **B** 32. **C** 36. **D** 12.

Lời giải.

Ta có: $\tan 2x-\cot\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=0\Leftrightarrow \tan 2x=\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)\Leftrightarrow 2x=\dfrac{\pi}{4}-x+k\pi\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{12}+k\dfrac{\pi}{3}$.
Suy ra $n=12, m=3\Rightarrow m\cdot n=36$.
Chọn đáp án C □

Dạng 5. Toán thực tế liên môn

1. Bài tập tự luận

BÀI 1. Nhiệt độ ngoài trời ở một thành phố vào các thời điểm khác nhau trong ngày có thể được mô phỏng bởi công thức

$$h(t)=29+3\sin\frac{\pi}{12}(t-9).$$

với h tính bằng độ C và t là thời gian trong ngày tính bằng giờ.

a) Tính nhiệt độ lúc 12 giờ trưa.

b) Tính thời gian nhiệt độ thấp nhất trong ngày.

Lời giải.

a) Khi $t=12$ thì $h(12)=29+3\sin\dfrac{\pi}{12}(12-9)=29+3\sin\dfrac{\pi}{4}\approx 31{,}12$.
Vậy nhiệt độ lúc 12 giờ trưa khoảng 31,12 độ C.

b) Ta có

$$\begin{aligned} & -1\leq \sin\frac{\pi}{12}(t-9)\leq 1 \\ \Leftrightarrow\ & -3\leq 3\sin\frac{\pi}{12}(t-9)\leq 3 \\ \Leftrightarrow\ & 26\leq 29+3\sin\frac{\pi}{12}(t-9)\leq 32. \end{aligned}$$

Do đó nhiệt độ thấp nhất trong ngày là 26 độ C khi

$$\sin\frac{\pi}{12}(t-9)=-1\Leftrightarrow \frac{\pi}{12}(t-9)=-\frac{\pi}{2}+k2\pi\Leftrightarrow t=3+24k\quad (k\in\mathbb{Z}).$$

Do $0\leq t\leq 24$ nên $k=0$ suy ra $t=3$.
Vậy lúc 3 giờ là thời gian nhiệt độ thấp nhất trong ngày.

□

BÀI 2. Số giờ có ánh sáng mặt trời của một thành phố A ở vĩ độ 40° Bắc trong ngày thứ t của một năm không nhuận được cho bởi hàm số

$$d(t)=3\sin\left[\frac{\pi}{182}\cdot(t-80)\right]+12 \text{ với } t\in\mathbb{Z} \text{ và } 0\leq t\leq 365.$$

Hỏi thành phố A có đúng 12 giờ có ánh sáng mặt trời vào ngày nào trong năm?

Lời giải.

Thành phố A có đúng 12 giờ có ánh sáng mặt trời nên

$$\begin{aligned} & 3\sin\left[\frac{\pi}{182}\cdot(t-80)\right]+12=12 \\ \Leftrightarrow\ & \sin\left[\frac{\pi}{182}\cdot(t-80)\right]=0 \\ \Leftrightarrow\ & \frac{\pi}{182}\cdot(t-80)=k\pi \Leftrightarrow t=80+182k. \end{aligned}$$

Vì $0\le t\le 365 \Leftarrow 0\le 80+182k\le 365 \Leftrightarrow -0{,}43\le k\le 1{,}57$ vì $k\in\mathbb{Z}$ nên $k\in\{0;1\}$.
Khi đó $t=80$ hoặc $t=262$.
Vậy có hai ngày 80 và 262 thì thành phố A có đúng 12 giờ có ánh sáng mặt trời. □

BÀI 3. Giả sử một vật dao động điều hoa xung quanh vị trí cân bằng theo phương trình

$$x=2\cos\left(5t-\frac{\pi}{6}\right)$$

Ở đây, thời gian t tính bằng giây và quãng đường x tính bằng centimét. Hãy cho biết trong khoảng thời gian từ 0 đến 6 giây, vật đi qua vị trí cân bằng bao nhiêu lần?

Lời giải.

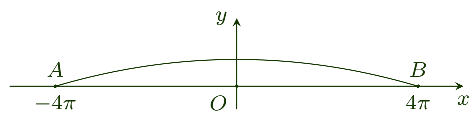
Vật qua vị trí cân bằng khi $x=0$ khi đó ta có

$$\begin{aligned} & 2\cos\left(5t-\frac{\pi}{6}\right)=0 \\ \Leftrightarrow\ & 5t-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+k\pi \\ \Leftrightarrow\ & t=\frac{2\pi}{15}+\frac{k\pi}{5}. \end{aligned}$$

Mà $0\le t\le 6 \Leftrightarrow 0\le \dfrac{2\pi}{15}+\dfrac{k\pi}{5}\le 6 \Leftrightarrow -0{,}67\le k\le 8{,}88$.
Vì $k\in\mathbb{Z}$ nên $k=\{0;1;2;3;4;5;6;7;8\}$.
Vậy vật đi qua vị trí cân bằng 9 lần. □

BÀI 4.

Một cây cầu có dạng cung AB của đồ thị hàm số $y=4{,}2\cdot\cos\dfrac{x}{8}$ và được mô tả trong hệ trục toạ độ với đơn vị trục là mét như ở hình bên. Một sà lan chở khối hàng hoá được xếp thành hình hộp chữ nhật với độ cao 3 m so với mực nước sông sao cho sà lan có thể đi qua được gầm cầu. Chứng minh rằng chiều rộng của khối hàng hoá đó phải nhỏ hơn 12,5 m.



Lời giải.

Với mỗi điểm M nằm trên mặt cầu, khoảng cách từ điểm M đến mặt nước tương ứng với giá trị tung độ y của điểm M, Xét phương trình $4{,}2\cdot\cos\dfrac{x}{8}=3 \Leftrightarrow \cos\dfrac{x}{8}=\dfrac{5}{7}$.
Do $x\in[-4\pi;4\pi]$ nên $\dfrac{x}{8}\in\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$.
Khi đó, ta có $\cos\dfrac{x}{8}=\dfrac{5}{7}\Leftrightarrow\dfrac{x}{8}\approx\pm0{,}775$, suy ra $\left|\dfrac{x}{8}\right|<0{,}78\Leftrightarrow|x|<6{,}14$.
Do sà lan có thể đi qua được gầm cầu nên chiều rộng của khối hàng hóa là

$$2|x|<12{,}48<12{,}5.$$

□

BÀI 5. Một quả đạn pháo được bắn ra khỏi nòng pháo với vận tốc ban đầu $v_0=500$ m/s hợp với phương ngang một góc α. Trong Vật lí, ta biết rằng, nếu bỏ qua sức cản của không khí và coi quả đạn pháo được bắn ra từ mặt đất thi quỹ đạo của quả đạn tuân theo phương trình $y=\dfrac{-g}{2v_0^2\cos^2\alpha}\cdot x^2+x\tan\alpha$, ở đó $g=10$ m/s^2 là gia tốc trọng trường.

a) Tính theo góc bắn α tầm xa mà quả đạn đạt tới (tức là khoảng cách từ vị trí bắn đến điểm quả đạn chạm đất).

b) Tìm góc bắn α để quả đạn trúng mục tiêu cách vị trí đặt khẩu pháo 22 000 (m).

Lời giải.

a) Ta có

$$\begin{aligned} y=0 &\Leftrightarrow \frac{-g}{2v_0^2\cos^2\alpha}\cdot x^2+x\tan\alpha=0\\ &\Leftrightarrow x\left(\frac{-g}{2v_0^2\cos^2\alpha}\cdot x+\tan\alpha\right)=0\\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0\\ x=\dfrac{v_0^2\sin 2\alpha}{g}=25\ 000\sin 2\alpha. \end{array}\right. \end{aligned}$$

Vậy tầm bay xa mà quả đạn đạt tới là $25\,000\sin 2\alpha$ (m).

b) Điều kiện $0\le\alpha\le\dfrac{\pi}{2}$

Để quả đạn trúng mục tiêu cách vị trí đặt khẩu pháo $22\ 000$ (m) thì

$$\begin{aligned} 25\ 000\sin 2\alpha=22\ 000 &\Leftrightarrow \sin 2\alpha=\frac{22}{25}\\ &\Rightarrow 2\alpha\approx 1{,}08\Leftrightarrow\alpha\approx 0{,}54. \end{aligned}$$

Vậy góc bắn khoảng $0{,}54$ (rad) $\approx 30{,}82^\circ$ thì quả đạn trúng mục tiêu cách vị trí đặt khẩu pháo $22\ 000$ (m).

□

2. Bài tập trắc nghiệm

CÂU 1. Nhiệt độ ngoài trời ở một thành phố vào các thời điểm khác nhau trong ngày có thể được mô phỏng bởi công thức $h(t)=30+3\sin\dfrac{\pi}{12}(t-5)$. Với h tính bằng độ C và t là thời gian trong ngày tính bằng giờ. Nhiệt độ lúc 7 giờ sáng là bao nhiêu?

Ⓐ $31{,}5$ độ C. Ⓑ $32{,}5$ độ C. Ⓒ 30 độ C. Ⓓ 37 độ C.

Lời giải.

Khi $t=7$ thì $h(7)=30+3\sin\dfrac{\pi}{12}(7-5)=30+3\sin\dfrac{\pi}{6}=31{,}5$.

Vậy nhiệt độ lúc 7 giờ trưa là $31{,}5$ độ C.

Chọn đáp án (A) □

CÂU 2. Nhiệt độ ngoài trời ở một thành phố vào các thời điểm khác nhau trong ngày có thể được mô phỏng bởi công thức

$$h(t)=29+3\sin\frac{\pi}{12}(t-9).$$

với h tính bằng độ C và t là thời gian trong ngày tính bằng giờ. Thời gian nhiệt độ cao nhất trong ngày là

Ⓐ 13 giờ. Ⓑ 15 giờ. Ⓒ 12 giờ. Ⓓ 14 giờ.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} &-1\le\sin\frac{\pi}{12}(t-9)\le 1\\ \Leftrightarrow\ &-3\le 3\sin\frac{\pi}{12}(t-9)\le 3\\ \Leftrightarrow\ &26\le 29+3\sin\frac{\pi}{12}(t-9)\le 32. \end{aligned}$$

Do đó nhiệt độ cao nhất trong ngày là 32 độ C khi

$$\sin\frac{\pi}{12}(t-9)=1\Leftrightarrow\frac{\pi}{12}(t-9)=\frac{\pi}{2}+k2\pi\Leftrightarrow t=15+24k\quad(k\in\mathbb{Z}).$$

Do $0\le t\le 24$ nên $k=0$ suy ra $t=15$.

Vậy lúc 15 giờ là thời gian nhiệt độ cao nhất trong ngày.

Chọn đáp án (B) □

CÂU 3. Số giờ có ánh sáng mặt trời của một thành phố A trong ngày thứ t của một năm không nhuận được cho bởi hàm số $d(t)=4\sin\left[\dfrac{\pi}{18}\cdot(t-80)\right]+12$ với $t\in\mathbb{Z}$ và $0\le t\le 365$. Số giờ nắng của ngày thứ 83 là

Ⓐ 12. Ⓑ 11. Ⓒ 14. Ⓓ 8.

Lời giải.

Với $t=83$ thì $d(83)=4\sin\left[\dfrac{\pi}{18}\cdot(83-80)\right]+12=14$. Vậy ngày thứ 83 có 14 giời nắng.

Chọn đáp án (C) □

CÂU 4. Số giờ có ánh sáng mặt trời của một thành phố A trong ngày thứ t trong một năm không nhuận được cho bởi công thức

$$d(t) = 4\sin\left[\frac{\pi}{182}(t-70)\right] + 16 \text{ với } t \in \mathbb{R} \text{ và } 0 < t \leq 365.$$

Vào ngày nào trong năm thì thành phố A có ít ánh sáng mặt trời nhất

A 353. **B** 171. **C** 161. **D** 343.

Lời giải.

Ta có $12 = 16 - 4 \leq 4\sin\left[\frac{\pi}{182}(t-70)\right] + 16 \leq 16 + 4 = 20$.

Do đó ngày có ít ánh nắng mặt trời nhất khi

$$\begin{aligned} dt = 12 \quad &\Leftrightarrow \quad 4\sin\left[\frac{\pi}{182}(t-70)\right] + 16 = 12 \Leftrightarrow \sin\left[\frac{\pi}{182}(t-70)\right] = -1 \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{\pi}{182}(t-70) = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow t = -21 + 364k \Rightarrow t = 343. \end{aligned}$$

Chọn đáp án D □

CÂU 5. Hằng ngày mực nước con kênh lên xuống theo thủy triều. Độ sâu h (mét) của mực nước trong kênh được tính tại thời điểm t (giờ) trong một ngày bởi công thức $h = 3\cos\left(\frac{\pi t}{8} + \frac{\pi}{4}\right) + 12$. Mực nước của kênh cao nhất khi $t = t_0$. Tính giá trị của $P = t_0^2 + t_0$.

A $t = 272$. **B** $t = 182$. **C** $t = 240$. **D** $t = 210$.

Lời giải.

Mực nước cao nhất của kênh đạt được khi

$$\cos\left(\frac{\pi t_0}{8} + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow \frac{\pi t_0}{8} + \frac{\pi}{4} = k2\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow t_0 = 16k - 2, k \in \mathbb{Z}.$$

Do $0 \leq t_0 \leq 24$ nên $k = 1$ và $t_0 = 14$. Vậy $P = 210$.

Chọn đáp án D □

CÂU 6. Số giờ có ánh sáng của thành phố Hà Nội trong ngày thứ t của năm 2019 được cho bởi một hàm số $y = 4\sin\left|\frac{\pi}{178}(t-60)\right| + 10$, với $t \in \mathbb{Z}$ và $0 < t \leq 365$. Vào ngày nào trong năm thì thành phố có ít giờ ánh sáng mặt trời nhất?

A 23 tháng 11. **B** 24 tháng 11. **C** 25 tháng 11. **D** 22 tháng 11.

Lời giải.

Do $\sin x \geq -1$ nên số giờ thành phố Hà Nội có ít ánh sáng mặt trời nhất $\sin\left|\frac{\pi}{178}(t-60)\right| \geq -1$ với $t \in \mathbb{Z}$ và $0 < t \leq 365$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \quad \left|\frac{\pi}{178}(t-60)\right| = \frac{3\pi}{2} + k2\pi \\ &\Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 60 \leq t \leq 365 \\ \frac{\pi}{178}(t-60) = \frac{3\pi}{2} + k2\pi \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < t \leq 60 \\ \frac{\pi}{178}(60-t) = \frac{3\pi}{2} + k2\pi \end{cases} \end{array}\right. \\ &\Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 60 \leq t \leq 365 \\ t = 327 + k356 \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < t < 60 \\ t = -207 - k356 \end{cases} \end{array}\right. \\ &\Leftrightarrow \quad t = 327 \text{ (vì } k \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Vậy thành phố Hà Nội có ít giờ ánh sáng nhất trong năm là ngày thứ 327 của năm, tức là ngày 23 tháng 11 $(= 365 - 31 - 7)$.

Chọn đáp án A □

CÂU 7. Hằng ngày mực nước con kênh lên xuống theo thủy triều. Độ sâu h (mét) của mực nước trong kênh được tính tại thời điểm t (giờ) trong một ngày bởi công thức $h = 3\cos\left(\frac{\pi t}{8} + \frac{\pi}{4}\right) + 12$. Mực nước của kênh cao nhất khi $t = t_0$. Tính giá trị của $P = t_0^2 + t_0$.

A $t = 272$. **B** $t = 182$. **C** $t = 240$. **D** $t = 210$.

Lời giải.

Mực nước cao nhất của kênh đạt được khi

$$\cos\left(\frac{\pi t_0}{8}+\frac{\pi}{4}\right)=1 \Leftrightarrow \frac{\pi t_0}{8}+\frac{\pi}{4}=k2\pi, k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow t_0=16k-2, k\in\mathbb{Z}.$$

Do $0\le t_0\le 24$ nên $k=1$ và $t_0=14$. Vậy $P=210$.
Chọn đáp án (D) □

CÂU 8. Hằng ngày mực nước của con kênh lên, xuống theo thủy triều. Độ sâu h (m) của mực nước trong kênh được tính tại thời điểm t (giờ), $0\le t\le 24$ trong một ngày được tính bởi công thức $h(t)=3\cos\left(\frac{\pi t}{8}+\frac{\pi}{4}\right)+3$. Hỏi trong một ngày có mấy thời điểm mực nước của con kênh đạt độ sâu lớn nhất?

A 1. **B** 3. **C** 2. **D** 4.

Lời giải.

Thời điểm mực nước của con kênh đạt độ sâu lớn nhất khi và chỉ khi

$$\cos\left(\frac{\pi t}{8}+\frac{\pi}{4}\right)=1 \Leftrightarrow \frac{\pi t}{8}+\frac{\pi}{4}=k2\pi \Leftrightarrow t=-2+k16.$$

Vì $0\le t\le 24$ nên $0\le -2+k16\le 24 \Leftrightarrow \frac{1}{8}\le k\le\frac{13}{6}\Rightarrow k=1, k\in\mathbb{Z}$.
Chọn đáp án (A) □

CÂU 9. Giả sử một vật dao động điều hoa xung quanh vị trí cân bằng theo phương trình $x=2\sin\left(5t-\frac{\pi}{6}\right)$. Ở đây, thời gian t tính bằng giây và quãng đường x tinh bằng centimét. Vật đi qua vị trí cân bằng bao nhiêu lần trong 3 giây đầu.

A 5. **B** 3. **C** 4. **D** 8.

Lời giải.

Vật qua vị trí cân bằng khi $x=0$ khi đó ta có

$$\begin{aligned} & 2\sin\left(5t-\frac{\pi}{6}\right)=0\\ \Leftrightarrow\ & 5t-\frac{\pi}{6}=k\pi\\ \Leftrightarrow\ & t=\frac{\pi}{30}+\frac{k\pi}{5}.\end{aligned}$$

Mà $0\le t\le 3\Leftrightarrow 0\le\frac{\pi}{30}+\frac{k\pi}{5}\le 3\Leftrightarrow -0{,}17\le k\le 4{,}61$.
Vì $k\in\mathbb{Z}$ nên $k=\{0;1;2;3;4\}$.
Vậy vật đi qua vị trí cân bằng 5 lần.
Chọn đáp án (A) □

CÂU 10. Một quả đạn pháo được bắn ra khỏi nòng pháo với vận tốc ban đầu $v_0=500$ m/s hợp với phương ngang một góc α. Trong Vật lí, ta biết rằng, nếu bỏ qua sức cản của không khí và coi quả đạn pháo được bắn ra từ mặt đất thì quỹ đạo của quả đạn tuân theo phương trình $y=\frac{-g}{2v_0^2\cos^2\alpha}\cdot x^2+x\tan\alpha$, ở đó $g=10$ m/s^2 là gia tốc trọng trường. Góc bắn α để quả đạn bay xa nhất là

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} y=0 \quad & \Leftrightarrow \frac{-g}{2v_0^2\cos^2\alpha}\cdot x^2+x\tan\alpha=0\\ & \Leftrightarrow x\left(\frac{-g}{2v_0^2\cos^2\alpha}\cdot x+\tan\alpha\right)=0\\ & \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0\\ x=\dfrac{v_0^2\sin 2\alpha}{g}=25\ 000\sin 2\alpha.\end{array}\right.\end{aligned}$$

Vậy tầm bay xa mà quả đạn đạt tới là $25\,000\sin 2\alpha$ m.
Vậy đạn bay xa nhất khi $\sin 2\alpha=1\Leftrightarrow 2\alpha=\frac{\pi}{2}+k2\pi\Leftrightarrow\alpha=\frac{\pi}{4}+k\pi$.
Vì $0\le\alpha\le\frac{\pi}{2}$ nên $\alpha=\frac{\pi}{4}$.
Vậy góc bắn bằng 45° thì đạn bay xa nhất. □

Dạng 6. Phương trình bậc n theo một hàm số lượng giác

Quan sát và dùng các công thức biến đổi để đưa phương trình về cùng một hàm lượng giác (cùng sin hoặc cùng cos hoặc cùng tan hoặc cùng cot) với cung góc giống nhau, chẳng hạn:

Dạng	Đặt ẩn phụ	Điều kiện
$a\sin^2 x + b\sin x + c = 0$	$t = \sin x$	$-1 \le t \le 1$
$a\cos^2 x + b\cos x + c = 0$	$t = \cos x$	$-1 \le t \le 1$
$a\tan^2 x + b\tan x + c = 0$	$t = \tan x$	$x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$
$a\cot^2 x + b\cot x + c = 0$	$t = \cot x$	$x \neq k\pi$

Nếu đặt $t = \sin^2 x, \cos^2 x$ hoặc $t = |\sin x|, |\cos x|$ thì điều kiện là $0 \le t \le 1$.

NHẬN XÉT. Khi gặp phương trình bậc 3; 4... ta có thể làm tương tự.

1. Ví dụ

VÍ DỤ 1. Giải các phương trình sau

a) $2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0$.

b) $\sin^2 x + 3\sin x + 2 = 0$.

c) $\tan^2 x + (\sqrt{3} - 1)\tan x - \sqrt{3} = 0$.

d) $\cot^2 x + 4\cot x + 3 = 0$.

Lời giải.

a) $2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0$ (*)

Đặt $t = \cos x$, $-1 \le t \le 1$.

(*) trở thành $2t^2 - 3t + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} t = 1 & (N) \\ t = \dfrac{1}{2} & (N). \end{array}\right.$

• Với $t = 1 \Leftrightarrow \cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi$, $(k \in \mathbb{Z})$.

• Với $t = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = -\dfrac{\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right.$, $(k \in \mathbb{Z})$.

Vậy nghiệm của phương trình $x = k2\pi$; $x = \dfrac{\pi}{3} + k2\pi$; $x = -\dfrac{\pi}{3} + k2\pi$, $(k \in \mathbb{Z})$.

b) $\sin^2 x + 3\sin x + 2 = 0$ (*)

Đặt $t = \sin x$, $-1 \le t \le 1$.

(*) trở thành $t^2 + 3t + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} t = -1 & (N) \\ t = -2 & (L). \end{array}\right.$

• Với $t = -1 \Leftrightarrow \sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi$, $(k \in \mathbb{Z})$.

Vậy nghiệm phương trình $x = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi$, $(k \in \mathbb{Z})$.

c) $\tan^2 x + (\sqrt{3} - 1)\tan x - \sqrt{3} = 0$ (*)

Đặt $t = \tan x$.

(*) trở thành $t^2 + (\sqrt{3} - 1)t - \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = -\sqrt{3}. \end{array}\right.$

• Với $t = 1 \Leftrightarrow \tan x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$, $(k \in \mathbb{Z})$.

• Với $t = -\sqrt{3} \Leftrightarrow \tan x = -\sqrt{3} \Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{3} + k\pi$, $(k \in \mathbb{Z})$.

Vậy nghiệm phương trình $x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$; $x = -\dfrac{\pi}{3} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$.

d) $\cot^2 x + 4\cot x + 3 = 0$ (*)

Đặt $t = \cot x$.

(*) trở thành $t^2 + 4t + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 \\ t = -3. \end{array}\right.$

• Với $t = -1 \Leftrightarrow \cot x = -1 \Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi$, $(k \in \mathbb{Z})$.

• Với $t = -3 \Leftrightarrow \cot x = -3 \Leftrightarrow x = \operatorname{arccot}(-3) + k\pi$, $(k \in \mathbb{Z})$.

Vậy nghiệm phương trình $x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi$; $x = \operatorname{arccot}(-3) + k\pi$, $(k \in \mathbb{Z})$.

□

2. Bài tập tự luận

BÀI 1. Giải các phương trình lượng giác sau

a) $6\cos^2 x + 5\sin x - 2 = 0$.

b) $2\cos^2 x + 5\sin x - 4 = 0$.

c) $3 - 4\cos^2 x = \sin x(2\sin x + 1)$.

d) $-\sin^2 x - 3\cos x + 3 = 0$.

Lời giải.

a) Ta có
$$6\cos^2 x + 5\sin x - 2 = 0 \Leftrightarrow -6\sin^2 x + 5\sin x + 4 = 0.$$
Đặt $t = \sin x\ (-1 \le t \le 1)$. Khi đó, phương trình trở thành
$$-6t^2 + 5t + 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{4}{3} \\ t = \dfrac{-1}{2}. \end{array}\right.$$
Vì $-1 \le t \le 1$ nên $t = \sin x = \dfrac{-1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{-\pi}{6} + k2\pi \\ x = \dfrac{7\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$.

b) Ta có
$$\begin{aligned} 2\cos^2 x + 5\sin x - 4 = 0 &\Leftrightarrow 2 - 2\sin^2 x + 5\sin x - 4 = 0 \\ &\Leftrightarrow 2\sin^2 x - 5\sin x + 2 = 0. \end{aligned}$$
Đặt $t = \sin x(-1 \le t \le 1)$. Khi đó, phương trình trở thành
$$2t^2 - 5t + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 2 \\ t = \dfrac{1}{2}. \end{array}\right.$$
Vì $-1 \le t \le 1$ nên $t = \sin x = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$.

c) Ta có
$$\begin{aligned} 3 - 4\cos^2 x = \sin x(2\sin x + 1) &\Leftrightarrow 3 - 4(1 - \sin^2 x) - 2\sin^2 x - \sin x = 0 \\ &\Leftrightarrow 2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0. \end{aligned}$$
Đặt $t = \sin x(-1 \le t \le 1)$. Khi đó, phương trình trở thành:
$$2t^2 - t - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = \dfrac{-1}{2}. \end{array}\right.$$
Vì $-1 \le t \le 1$ nên $\left[\begin{array}{l} t = \sin x = 1 \\ t = \sin x = \dfrac{-1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = \dfrac{-5\pi}{6} + k2\pi \\ x = \dfrac{-\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$.

d) Ta có
$$-\sin^2 x - 3\cos x + 3 = 0 \Leftrightarrow \cos^2 x - 3\cos x + 2 = 0.$$
Đặt $t = \cos x\ (-1 \le t \le 1)$. Khi đó, phương trình trở thành:
$$t^2 - 3t + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 2 \\ t = 1. \end{array}\right.$$
Vì $-1 \le t \le 1$ nên $t = \cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi (k \in \mathbb{Z})$.

□

BÀI 2. Giải các phương trình lượng giác sau:

a) $2\cos 2x - 8\cos x + 5 = 0$.

b) $1 + \cos 2x = 2\cos x$.

c) $9\sin x + \cos 2x = 8$.

d) $2 + \cos 2x + 5\sin x = 0$.

e) $3\sin x + 2\cos 2x = 2$.

f) $2\cos 2x + 8\sin x - 5 = 0$.

Lời giải.

a) Ta có
$$2\cos 2x - 8\cos x + 5 = 0 \Leftrightarrow 4\cos^2 x - 8\cos x + 3 = 0.$$
Đặt $t = \cos x\,(-1 \le t \le 1)$. Khi đó, phương trình trở thành:
$$4t^2 - 8t + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{3}{2} \\ t = \dfrac{1}{2}. \end{array}\right.$$
Vì $-1 \le t \le 1$ nên $t = \cos x = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{-\pi}{3} + k2\pi \\ x = \dfrac{\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$.

b) Ta có
$$1 + \cos 2x = 2\cos x \Leftrightarrow 2\cos^2 x - 2\cos x = 0.$$
Đặt $t = \cos x\,(-1 \le t \le 1)$. Khi đó, phương trình trở thành:
$$2t^2 - 2t = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0 \\ t = 1. \end{array}\right.$$
Vì $-1 \le t \le 1$ nên $\left[\begin{array}{l} t = \cos x = 0 \\ t = \cos x = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k2\pi \\ x = \dfrac{-\pi}{2} + k\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$.

c) Ta có
$$9\sin x + \cos 2x = 8 \Leftrightarrow -2\sin^2 x + 9\sin x - 7 = 0.$$
Đặt $t = \sin x(-1 \le t \le 1)$. Khi đó, phương trình trở thành:
$$2t^2 - 9t + 7 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = \dfrac{7}{2}. \end{array}\right.$$
Vì $-1 \le t \le 1$ nên $t = \sin x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi\,(k \in \mathbb{Z})$.

d) Ta có
$$2 + \cos 2x + 5\sin x = 0 \Leftrightarrow -2\sin^2 x + 5\sin x + 3 = 0.$$
Đặt $t = \sin x(-1 \le t \le 1)$. Khi đó, phương trình trở thành:
$$2t^2 - 5t - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 3 \\ t = \dfrac{-1}{2}. \end{array}\right.$$
Vì $-1 \le t \le 1$ nên $t = \sin x = \dfrac{-1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{-\pi}{6} + k2\pi \\ x = \dfrac{-5\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$.

e) Ta có
$$3\sin x+2\cos 2x=2\Leftrightarrow -4\sin^2 x+3\sin x=0.$$
Đặt $t=\sin x\,(-1\le t\le 1)$. Khi đó, phương trình trở thành:
$$-4t^2+3t=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=0\\t=\dfrac{3}{4}.\end{array}\right.$$
Vì $-1\le t\le 1$ nên $\left[\begin{array}{l}t=\sin x=0\\t=\sin x=\dfrac{3}{4}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=k\pi\\x=\arcsin\dfrac{3}{4}+k2\pi\\x=-\arcsin\dfrac{3}{4}+\pi+k2\pi\end{array}\right.\quad(k\in\mathbb{Z}).$

f) Ta có
$$2\cos 2x+8\sin x-5=0\Leftrightarrow -4\sin^2 x+8\sin x-3=0.$$
Đặt $t=\sin x\,(-1\le t\le 1)$. Khi đó, phương trình trở thành:
$$4t^2-8t+3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=\dfrac{3}{2}\\t=\dfrac{1}{2}.\end{array}\right.$$
Vì $-1\le t\le 1$ nên $t=\sin x=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{6}+k2\pi\\x=\dfrac{5\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right.\quad(k\in\mathbb{Z}).$

□

BÀI 3. Giải các phương trình lượng giác sau:

a) $2\cos^2 2x+5\sin 2x+1=0$.

b) $5\cos x-2\sin\dfrac{x}{2}+7=0$.

c) $\sin^2 x+\cos 2x+\cos x=2$.

d) $\cos 2x+\cos^2 x-\sin x+2=0$.

Lời giải.

a) Ta có
$$2\cos^2 2x+5\sin 2x+1=0\Leftrightarrow -2\sin^2 2x+5\sin 2x+3=0.$$
Đặt $t=\sin 2x\,(-1\le t\le 1)$. Khi đó, phương trình trở thành:
$$2t^2-5t-3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=3\\t=\dfrac{-1}{2}.\end{array}\right.$$
Vì $-1\le t\le 1$ nên $t=\sin 2x=\dfrac{-1}{2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{-5\pi}{12}+k\pi\\x=\dfrac{-\pi}{12}+k\pi\end{array}\right.\quad(k\in\mathbb{Z}).$

b) Đặt $y=\dfrac{x}{2}$. Khi đó, phương trình trở thành:
$$5\cos 2y-2\sin y+7=0\Leftrightarrow -10\sin^2 y-2\sin y+12=0.$$
Đặt $t=\sin y\,(-1\le t\le 1)$. Khi đó, phương trình trở thành:
$$10t^2+2t-12=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\\t=\dfrac{-6}{5}.\end{array}\right.$$
Vì $-1\le t\le 1, y=\dfrac{x}{2}$ nên $t=\sin\dfrac{x}{2}=1\Leftrightarrow x=\pi+4k\pi\,(k\in\mathbb{Z})$.

c) Ta có

$$\begin{aligned}\sin^2 x+\cos 2x+\cos x=2 &\Leftrightarrow 1-\cos^2 x+2\cos^2 x-1+\cos x-2=0\\ &\Leftrightarrow \cos^2 x+\cos x-2=0.\end{aligned}$$

Đặt $t=\cos x\,(-1\le t\le 1)$. Khi đó, phương trình trở thành:

$$t^2+t-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{aligned}&t=-2\\&t=1.\end{aligned}\right.$$

Vì $-1\le t\le 1$ nên $t=\cos x=1\Leftrightarrow x=k2\pi\,(k\in\mathbb{Z})$.

d) Ta có

$$\begin{aligned}\cos 2x+\cos^2 x-\sin x+2=0 &\Leftrightarrow 1-2\sin^2 x+1-\sin^2 x-\sin x+2=0\\ &\Leftrightarrow 3\sin^2 x+\sin x-4=0.\end{aligned}$$

Đặt $t=\sin x\,(-1\le t\le 1)$. Khi đó, phương trình trở thành:

$$3t^2+t-4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{aligned}&t=\frac{-4}{3}\\&t=1.\end{aligned}\right.$$

Vì $-1\le t\le 1$ nên $t=\sin x=1\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\,(k\in\mathbb{Z})$.

□

BÀI 4. Giải các phương trình lượng giác sau

a) $3\sin^2 x+2\cos^4 x-2=0$.

b) $4\sin^4 x+2\cos^2 x=7$.

c) $4\cos^4 x=4\sin^2 x-1$

d) $4\sin^4 x+5\cos^2 x-4=0$

Lời giải.

a) Ta có

$$3\sin^2 x+2\cos^4 x-2=0\Leftrightarrow 2\cos^4 x-3\cos^2 x+1=0.$$

Đặt $t=\cos^2 x\,(0\le t\le 1)$. Khi đó, phương trình trở thành:

$$2t^2-3t+1=0\Leftrightarrow \left[\begin{aligned}&t=1\\&t=\frac{1}{2}.\end{aligned}\right.$$

Vì $0\le t\le 1$ nên $\left[\begin{aligned}&t=\cos^2 x=1\\&t=\cos^2 x=\frac{1}{2}\end{aligned}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{aligned}&\cos x=1\\&\cos x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{aligned}&x=k2\pi\\&x=\frac{-\pi}{4}+k\pi\\&x=\frac{\pi}{4}+k\pi\end{aligned}\right.(k\in\mathbb{Z})$.

b) Ta có

$$4\sin^4 x+12\cos^2 x=7\Leftrightarrow 4\sin^4 x-12\sin^2 x+5=0.$$

Đặt $t=\sin^2 x(0\le t\le 1)$. Khi đó, phương trình trở thành:

$$4t^2-12t+5=0\Leftrightarrow \left[\begin{aligned}&t=\frac{1}{2}\\&t=\frac{5}{2}.\end{aligned}\right.$$

Vì $0\le t\le 1$ nên $t=\sin^2 x=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow \sin x=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow \left[\begin{aligned}&x=\frac{\pi}{4}+k\pi\\&x=\frac{-\pi}{4}+k\pi\end{aligned}\right.(k\in\mathbb{Z})$.

c) Ta có
$$4\cos^4 x = 4\sin^2 x - 1 \Leftrightarrow 4\cos^4 x + 4\cos^2 x - 3 = 0.$$
Đặt $t = \cos^2 x\,(0 \le t \le 1)$. Khi đó, phương trình trở thành:
$$4t^2 + 4t - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{1}{2} \\ t = \dfrac{-3}{2}. \end{array}\right.$$
Vì $0 \le t \le 1$ nên $t = \cos^2 x = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{-3\pi}{4} + k\pi \\ x = \dfrac{3\pi}{4} + k\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$.

d) Ta có
$$4\sin^4 x + 5\cos^2 x - 4 = 0 \Leftrightarrow 4\sin^4 x - 5\sin^2 x + 1 = 0.$$
Đặt $t = \sin^2 x\,(0 \le t \le 1)$. Khi đó, phương trình trở thành:
$$4t^2 - 5t + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{1}{4} \\ t = 1. \end{array}\right.$$
Vì $0 \le t \le 1$ nên $\left[\begin{array}{l} t = \sin^2 x = \dfrac{1}{4} \\ t = \sin^2 x = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \sin x = \dfrac{1}{2} \\ t = \sin x = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi \\ x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$.

□

BÀI 5. Giải các phương trình sau

a) $\cos^3 x + 3\cos^2 x + 2\cos x = 0$.

b) $23\sin x - \sin 3x = 24$.

c) $2\cos 3x \cdot \cos x - 4\sin^2 2x + 1 = 0$.

d) $\sin^6 x + \cos^6 x = \dfrac{15}{8}\cos 2x - \dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

a) $\cos^3 x + 3\cos^2 x + 2\cos x = 0$ (*)

Đặt $t = \cos x$, $-1 \le t \le 1$.

(*) trở thành $t^3 + 3t^2 + 2t = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} t = 0 & (N) \\ t = -1 & (N) \\ t = -2 & (L). \end{array}\right.$

- Với $t = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $(k \in \mathbb{Z})$.
- Với $t = -1 \Leftrightarrow \cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi$, $(k \in \mathbb{Z})$.

Vậy nghiệm của phương trình $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$; $x = \pi + k2\pi$, $(k \in \mathbb{Z})$.

b) $23\sin x - \sin 3x = 24$

$\Leftrightarrow 23\sin x - (3\sin x - 4\sin^3 x) = 24 \Leftrightarrow 4\sin^3 x + 20\sin x - 24 = 0$ (*)

Đặt $t = \cos x, -1 \le t \le 1$.

(*) trở thành $4t^3 + 20t - 24 = 0 \Leftrightarrow t = 1$ (N)

- Với $t = 1 \Leftrightarrow \sin x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi$, $(k \in \mathbb{Z})$.

Vậy nghiệm của phương trình $x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z})$.

c) $2\cos 3x \cdot \cos x - 4\sin^2 2x + 1 = 0$

$\Leftrightarrow \cos 4x + \cos 2x - 2(1 - \cos 2x) + 1 = 0 \Leftrightarrow 2\cos^2 2x + 3\cos 2x - 2 = 0$ (*)

Đặt $t = \cos 2x$, $-1 \le t \le 1$.

(*) trở thành $2t^2 + 3t - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} t = \dfrac{1}{2} & (N) \\ t = -2 & (L). \end{array}\right.$

• Với $t = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \cos 2x = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \cos 2x = \cos\dfrac{\pi}{3} \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{\pi}{6} + k\pi$, $(k \in \mathbb{Z})$.

Vậy nghiệm của phương trình $x = \pm\dfrac{\pi}{6} + k\pi$, $(k \in \mathbb{Z})$.

d)

$$\begin{aligned} \sin^6 x + \cos^6 x = \frac{15}{8}\cos 2x - \frac{1}{2} &\Leftrightarrow 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x = \frac{15}{8}\cos 2x - \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow 6\cos^2 2x - 15\cos 2x + 6 = 0 \\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \cos 2x = 2 & (L) \\ \cos 2x = \dfrac{1}{2} & (N) \end{array}\right. \\ &\Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi, (k \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của phương trình $x = \pm\dfrac{\pi}{6} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$.

□

3. Bài tập trắc nghiệm

CÂU 1. Nghiệm của phương trình $\sin^2 x - 4\sin x + 3 = 0$ là

Ⓐ $x = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$. Ⓑ $x = \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$. Ⓒ $x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$. Ⓓ $x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Lời giải.

Ta có $\sin^2 x - 4\sin x + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 1 \\ \sin x = 3. \end{array}\right.$

- Với $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.
- Với $\sin x = 3$ phương trình vô nghiệm.

Chọn đáp án Ⓒ □

CÂU 2. Phương trình $\cos^2 2x + \cos 2x - \dfrac{3}{4} = 0$ có họ nghiệm là

Ⓐ $x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Ⓑ $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Ⓒ $x = \pm\dfrac{\pi}{6} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Ⓓ $x = \pm\dfrac{\pi}{6} + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Lời giải.

$\cos^2 2x + \cos 2x - \dfrac{3}{4} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 2x = \dfrac{1}{2} \\ \cos 2x = -\dfrac{3}{4}. \end{array}\right.$

Với $\cos 2x = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow 2x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k2\pi \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{\pi}{6} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Với $\cos 2x = -\dfrac{3}{4} \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{1}{2}\arccos\left(-\dfrac{3}{4}\right) + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Chọn đáp án Ⓒ □

CÂU 3. Nghiệm âm lớn nhất của phương trình $2\tan^2 x + 5\tan x + 3 = 0$ là

Ⓐ $-\dfrac{\pi}{4}$. Ⓑ $-\dfrac{\pi}{3}$. Ⓒ $-\dfrac{\pi}{6}$. Ⓓ $-\dfrac{5\pi}{6}$.

Lời giải.

Ta có

$$2\tan^2 x + 5\tan x + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan x = -1 \\ \tan x = -\dfrac{3}{2} \end{array}\right..$$

Suy ra nghiệm âm lớn nhất của phương trình là $-\dfrac{\pi}{4}$.

Chọn đáp án Ⓐ □

CÂU 4. Phương trình $3\tan^2 x + \left(6-\sqrt{3}\right)\tan x - 2\sqrt{3} = 0$ có nghiệm là

(A) $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \arctan(-2) + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$.

(B) $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{3} + k\pi \\ x = \arctan(-2) + k\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$.

(C) $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{6} + k\pi \\ x = \arctan(-2) + k\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$.

(D) $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{6} + k\pi \\ x = -\arctan 2 + k\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$.

Lời giải.

Ta có

$$3\tan^2 x + \left(6-\sqrt{3}\right)\tan x - 2\sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan x = -2 \\ \tan x = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \arctan(-2) + k\pi \\ x = \dfrac{\pi}{6} + k\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}).$$

Chọn đáp án (C) □

CÂU 5. Cho phương trình $\cos^2 x + 3\sin x - 3 = 0$. Đặt $\sin x = t$ $(-1 \le t \le 1)$ ta được phương trình nào sau đây?

(A) $t^2 + 3t + 2 = 0$. (B) $t^2 - 3t + 2 = 0$. (C) $t^2 - 3t - 2 = 0$. (D) $t^2 + 3t - 3 = 0$.

Lời giải.

Ta có $\cos^2 x + 3\sin x - 3 = 0 \Leftrightarrow 1 - \sin^2 x + 3\sin x - 3 = 0 \Leftrightarrow -\sin^2 x + 3\sin x - 2 = 0$.
Do đó, đặt $\sin x = t$ $(-1 \le t \le 1)$ thì ta được phương trình $t^2 - 3t + 2 = 0$.
Chọn đáp án (B) □

CÂU 6. Phương trình $\sin^2 x - 3\cos x - 4 = 0$ có nghiệm là

(A) $x = -\pi + k2\pi$. (B) Vô nghiệm. (C) $x = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi$. (D) $x = \dfrac{\pi}{6} + k\pi$.

Lời giải.

Ta có

$$\sin^2 x - 3\cos x - 4 = 0 \Leftrightarrow \cos^2 x + 3\cos x + 3 = 0 \text{ (vô nghiệm)}.$$

Chọn đáp án (B) □

CÂU 7. Giải phương trình $\cos^2 x + \sin x + 1 = 0$ có nghiệm là

(A) $x = -\dfrac{\pi}{2} + k\dfrac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$. (B) $x = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$. (C) $x = -\dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$. (D) $x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Lời giải.

Ta có $\cos^2 x + \sin x + 1 = 0 \Leftrightarrow -\sin^2 x + \sin x + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = -1 \\ \sin x = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Chọn đáp án (B) □

CÂU 8. Nghiệm của phương trình $2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0$ là

(A) $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{6} + k\pi \\ x = \dfrac{5\pi}{6} + k\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$.

(B) $x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi$, $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{6} + k\dfrac{2}{3}\pi \\ x = \dfrac{5\pi}{6} + k\dfrac{2}{3}\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$.

(C) $x = \dfrac{\pi}{2} + k\dfrac{5}{2}\pi$, $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{6} + k\dfrac{1}{2}\pi \\ x = \dfrac{5\pi}{6} + k\dfrac{1}{2}\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$.

(D) $x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi$, $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$.

Lời giải.

Đặt $t = \sin x$, $t \in [-1;1]$, ta có phương trình $2t^2 - 3t + 1 = 0 \Rightarrow t = 1$, $t = \dfrac{1}{2}$.

- $t = 1 \Rightarrow \sin x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi$.
- $t = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \sin x = \dfrac{1}{2} = \sin\dfrac{\pi}{6} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$.

Chọn đáp án (D) □

CÂU 9. Cho phương trình $3\cos 2x - 10\cos x - 4 = 0$. Đặt $t = \cos x$ thì phương trình đã cho trở thành phương trình nào sau đây?

(A) $6t^2 - 10t - 4 = 0$. (B) $3t^2 - 10t - 4 = 0$. (C) $-6t^2 - 10t - 1 = 0$. (D) $6t^2 - 10t - 7 = 0$.

Lời giải.

Ta có

$$3\cos 2x - 10\cos x - 4 = 0 \Leftrightarrow 3\left(2\cos^2 x - 1\right) - 10\cos x - 4 = 0 \Leftrightarrow 6\cos^2 x - 10\cos x - 7 = 0.$$

Đặt $t = \cos x$ phương trình trên trở thành $6t^2 - 10t - 7 = 0$.

Chọn đáp án (D) □

CÂU 10. Tập nghiệm của phương trình $\sin x + \cos 2x = 0$ là

(A) $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, x = -\frac{\pi}{2} + \frac{k2\pi}{3}$.
(B) $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, x = -\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}$.
(C) $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, x = -\frac{\pi}{6} + \frac{k2\pi}{3}$.
(D) $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, x = -\frac{\pi}{2} + \frac{k\pi}{3}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}
& \sin x + cos2x = 0 \\
\Leftrightarrow\ & -2\sin^2 x + \sin x + 1 = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} \sin x = 1 \\ \sin x = -\frac{1}{2} \end{array}\right. \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \vee x = -\frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. \\
\Leftrightarrow\ & x = -\frac{\pi}{6} + \frac{k2\pi}{3}.
\end{aligned}$$

Chọn đáp án (C) □

CÂU 11. Nghiệm của phương trình lượng giác $2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0$ thỏa điều kiện $0 < x < \frac{\pi}{2}$ là

(A) $x = \frac{\pi}{2}$.
(B) $x = \frac{\pi}{3}$.
(C) $x = \frac{\pi}{6}$.
(D) $\frac{5\pi}{6}$.

Lời giải.

$$2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 1 \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right., (k \in \mathbb{Z}).$$

Vậy $\frac{\pi}{6}$ là nghiệm của phương trình.

Chọn đáp án (C) □

CÂU 12. Tìm nghiệm phương trình $3\sin^2 2x - 7\sin 2x + 4 = 0$ trên đoạn $[0; \pi]$.

(A) $x = \frac{\pi}{3}$.
(B) $x = \frac{\pi}{4}$.
(C) $x = \frac{\pi}{2}$.
(D) $x = \frac{\pi}{6}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}
& 3\sin^2 2x - 7\sin 2x + 4 = 0 \\
& \Leftrightarrow (3\sin 2x - 4)(\sin 2x - 1) = 0 \\
& \Leftrightarrow \sin 2x = 1 \text{ hoặc } \sin 2x = \frac{4}{3} \text{ (vô nghiệm)} \\
& \Leftrightarrow \sin 2x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

Mà $x \in [0; \pi]$ nên $x = \frac{\pi}{4}$.

Chọn đáp án (B) □

CÂU 13. Tính tổng các nghiệm của phương trình $2\cos^2 x + 5\sin x - 4 = 0$ trong $[0; 2\pi]$.

(A) 0.
(B) $\frac{8\pi}{3}$.
(C) π.
(D) $\frac{5\pi}{6}$.

Lời giải.

$$\begin{aligned}
2\cos^2 x + 5\sin x - 4 = 0 & \Leftrightarrow 2(1 - \sin^2 x) + 5\sin x - 4 = 0 \\
& \Leftrightarrow 2\sin^2 x - 5\sin x + 2 = 0 \\
& \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = \frac{1}{2} \\ \sin x = 2 \quad \text{(vô nghiệm)} \end{array}\right. \\
& \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi. \end{array}\right.
\end{aligned}$$

Vậy các nghiệm trong $[0;2\pi]$ của phương trình đã cho là $x=\dfrac{\pi}{6}$, $x=\dfrac{5\pi}{6}$. Nên tổng các nghiệm của phương trình đã cho trong $[0;2\pi]$ bằng π.

Chọn đáp án (C) □

CÂU 14. Tổng các nghiệm của phương trình $\tan x+\cot x=2$ trong khoảng $(-\pi;\pi)$ là

A $-\pi$. **B** $-\dfrac{\pi}{2}$. **C** $\dfrac{5\pi}{4}$. **D** $\dfrac{\pi}{4}$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases}\sin x\neq 0\\ \cos x\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow \sin 2x\neq 0.$

Với x thỏa mãn điều kiện xác định thì

$$\begin{aligned}\tan x+\cot x=2 &\Leftrightarrow \frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\sin x}=2\Leftrightarrow \frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin x\cdot\cos x}=2\\ &\Leftrightarrow \sin 2x=1\Leftrightarrow 2x=\frac{\pi}{2}+k2\pi\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+k\pi\ (k\in\mathbb{Z}).\end{aligned}$$

Do $x\in(-\pi;\pi)$ nên $x\in\left\{-\dfrac{3\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}\right\}$. So với điều kiện, thỏa mãn.

Vậy tổng các nghiệm $S=-\dfrac{3\pi}{4}+\dfrac{\pi}{4}=-\dfrac{\pi}{2}$.

Chọn đáp án (B) □

CÂU 15. Số nghiệm của phương trình $\cos 2\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)+4\cos\left(\dfrac{\pi}{6}-x\right)=\dfrac{5}{2}$ thuộc $[0;2\pi]$ là

A 1. **B** 2. **C** 3. **D** 4.

Lời giải.

Đặt $t=x+\dfrac{\pi}{3}$. Phương trình trở thành

$$\cos 2t+4\cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right)=\frac{5}{2}\Leftrightarrow 1-2\sin^2 t+4\sin t=\frac{5}{2}\Leftrightarrow -2\sin^2 t+4\sin t-\frac{3}{2}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin t=\dfrac{3}{2}\ \text{(loại)}\\ \sin t=\dfrac{1}{2}.\end{array}\right.$$

Với $\sin t=\dfrac{1}{2}$, ta có $\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x+\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{6}+k2\pi\\ x+\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{5\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{-\pi}{6}+k2\pi\\ x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi.\end{array}\right.$

Vậy trong đoạn $[0;2\pi]$ phương trình có 2 nghiệm $x=\dfrac{\pi}{2};x=\dfrac{11\pi}{6}$.

Chọn đáp án (B) □

CÂU 16. Nghiệm của phương trình $3\cos 4x-\sin^2 2x+\cos 2x-2=0$ là

A $\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi\\ x=\pm\arccos\dfrac{6}{7}+k\pi\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z})$.

B $\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\\ x=\pm\arccos\dfrac{6}{7}+k2\pi\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z})$.

C $\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{3}+k\pi\\ x=\pm\arccos\dfrac{6}{7}+k2\pi\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z})$.

D $\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi\\ x=\pm\dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{6}{7}+k\pi\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z})$.

Lời giải.

Phương trình đã cho tương đương với $3(2\cos^2 2x-1)-(1-\cos^2 2x)+\cos 2x-2=0$

$\Leftrightarrow 7\cos^2 2x+\cos 2x-6=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\cos 2x=-1\\ \cos 2x=\dfrac{6}{7}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi\\ x=\pm\dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{6}{7}+k\pi\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z}).$

Chọn đáp án (D) □

CÂU 17. Giải phương trình $4\cos x\cos 2x+1=0$.

A $\left[\begin{array}{l}x=\pm\dfrac{\pi}{3}+k2\pi\\ x=\pm\arccos\dfrac{-1\pm\sqrt{3}}{8}+k2\pi\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z})$.

B $\left[\begin{array}{l}x=\pm\dfrac{\pi}{3}+k2\pi\\ x=\pm\arccos\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{8}+k2\pi\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z})$.

C $\left[\begin{array}{l}x=\pm\dfrac{\pi}{3}+k2\pi\\ x=\pm\arccos\dfrac{-1\pm\sqrt{7}}{8}+k2\pi\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z})$.

D $\left[\begin{array}{l}x=\pm\dfrac{\pi}{3}+k2\pi\\ x=\pm\arccos\dfrac{-1\pm\sqrt{6}}{8}+k2\pi\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z})$.

Lời giải.

Phương trình $\Leftrightarrow 4\cos x(2\cos^2 x-1)+1=0$

$\Leftrightarrow 8\cos^3 x-4\cos x+1=0 \Leftrightarrow (2\cos x-1)(4\cos^2 x+2\cos x-1)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x=\dfrac{1}{2}\\ 4\cos^2 x+2\cos x-1=0\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x=\dfrac{1}{2}\\ \cos x=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{8}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\pm\dfrac{\pi}{3}+k2\pi\\ x=\pm\arccos\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{8}+k2\pi\end{array}\right. (k\in\mathbb{Z}).$$

Chọn đáp án B □

CÂU 18. Họ nghiệm của phương trình $16(\sin^8 x+\cos^8 x)=17\cos^2 2x$ là

A $x=\dfrac{\pi}{8}+k\dfrac{5\pi}{4}$ $(k\in\mathbb{Z})$. B $x=\dfrac{\pi}{8}+k\dfrac{7\pi}{4}$ $(k\in\mathbb{Z})$. C $x=\dfrac{\pi}{8}+k\dfrac{9\pi}{4}$ $(k\in\mathbb{Z})$. D $x=\dfrac{\pi}{8}+k\dfrac{\pi}{4}$ $(k\in\mathbb{Z})$.

Lời giải.

Ta có $\sin^8 x+\cos^8 x=(\sin^4 x+\cos^4 x)^2-2\sin^4 x\cos^4 x=\left(1-\dfrac{1}{2}\sin^2 2x\right)^2-\dfrac{1}{8}\sin^4 2x.$

Nên đặt $t=\sin^2 2x$, $0\le t\le 1$, ta được phương trình

$16\left(1-\dfrac{1}{2}t\right)^2-2t^2=17(1-t)\Leftrightarrow 2t^2+t-1=0\Leftrightarrow t=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow \sin^2 2x=\dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow 1-2\sin^2 2x=0\Leftrightarrow \cos 4x=0\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{8}+k\dfrac{\pi}{4}$ $(k\in\mathbb{Z})$.

Chọn đáp án D □

CÂU 19. Nghiệm của phương trình $\cos^4 x-\cos 2x+2\sin^6 x=0$.

A $x=k2\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$. B $x=k\dfrac{1}{2}\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$. C $x=k\dfrac{2}{3}\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$. D $x=k\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$.

Lời giải.

Đặt $t=\cos 2x\Rightarrow -1\le t\le 1\Rightarrow \cos^4 x=\dfrac{1}{4}(1+t)^2$, $\sin^6 x=\dfrac{1}{8}(1-t)^3$.

Nên phương trình đã cho trở thành

$\dfrac{1}{4}(1+t)^2-t+\dfrac{1}{4}(1-t)^3=0\Leftrightarrow t^3-4t^2+5t-2=0\Leftrightarrow t=1, t=2.$

$t=1\Rightarrow \cos 2x=1\Leftrightarrow x=k\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$.

Chọn đáp án D □

CÂU 20. Giải phương trình $5(1+\cos x)=2+\sin^4 x-\cos^4 x$.

A $x=\pm\dfrac{2\pi}{3}+k\pi$. B $x=\pm\dfrac{2\pi}{3}+k\dfrac{2}{3}\pi$. C $x=\pm\dfrac{2\pi}{3}+k\dfrac{3}{4}\pi$. D $x=\pm\dfrac{2\pi}{3}+k2\pi$.

Lời giải.

$$\begin{aligned}5(1+\cos x)=2+\sin^4 x-\cos^4 x &\Leftrightarrow 3+5\cos x=(\sin^2 x-\cos^2 x)(\sin^2 x+\cos^2 x)\\ &\Leftrightarrow 2\cos^2 x+5\cos x+2=0\\ &\Leftrightarrow \cos x=-\dfrac{1}{2}\\ &\Leftrightarrow x=\pm\dfrac{2\pi}{3}+k2\pi.\end{aligned}$$

Chọn đáp án D □

CÂU 21. Nghiệm của phương trình $\sin\left(2x+\dfrac{5\pi}{2}\right)-3\cos\left(x-\dfrac{7\pi}{2}\right)=1+2\sin x$ là

A $\left[\begin{array}{l}x=k2\pi\\ x=\dfrac{\pi}{6}+k2\pi\\ x=\dfrac{5\pi}{6}+k\pi\end{array}\right.$ $(k\in\mathbb{Z})$. B $\left[\begin{array}{l}x=k\dfrac{1}{2}\pi\\ x=\dfrac{\pi}{6}+k\pi\\ x=\dfrac{5\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right.$ $(k\in\mathbb{Z})$. C $\left[\begin{array}{l}x=k\pi\\ x=\dfrac{\pi}{6}+k2\pi\\ x=\dfrac{5\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right.$ $(k\in\mathbb{Z})$. D $\left[\begin{array}{l}x=k2\pi\\ x=\dfrac{\pi}{6}+k2\pi\\ x=\dfrac{5\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right.$ $(k\in\mathbb{Z})$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} PT &\Leftrightarrow \cos 2x + 3\sin x = 1 + 2\sin x \\ &\Leftrightarrow 1 - 2\sin^2 x + 3\sin x - 1 - 2\sin x = 0 \\ &\Leftrightarrow -2\sin^2 x + \sin x = 0 \\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ \sin x = \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k\pi \\ x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right., \quad (k \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Chọn đáp án (C) □

CÂU 22. Giải phương trình $7\cos x = 4\cos^3 x + 4\sin 2x$.

(A) $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = \dfrac{\pi}{6} + k\pi \\ x = \dfrac{5\pi}{6} + k\pi \end{array}\right.$. (B) $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + k\dfrac{1}{4}\pi \\ x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right.$. (C) $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + k\dfrac{1}{2}\pi \\ x = \dfrac{\pi}{6} + k\pi \\ x = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right.$. (D) $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right.$.

Lời giải.

Phương trình $\Leftrightarrow \cos x(4\cos^2 x + 8\sin x - 7) = 0$

$\Leftrightarrow \cos x(4\sin^2 x - 8\sin x + 3) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi. \end{array}\right.$

Chọn đáp án (D) □

CÂU 23. Giải phương trình $\cos 4x = \cos^2 3x$.

(A) $\left[\begin{array}{l} x = k2\pi \\ x = \pm\dfrac{\pi}{12} + k2\pi \\ x = \pm\dfrac{5\pi}{12} + k\pi \end{array}\right.$. (B) $\left[\begin{array}{l} x = k\pi \\ x = \pm\dfrac{\pi}{12} + k\dfrac{1}{2}\pi \\ x = \pm\dfrac{5\pi}{12} + k\dfrac{1}{2}\pi \end{array}\right.$. (C) $\left[\begin{array}{l} x = k\pi \\ x = \pm\dfrac{\pi}{12} + k3\pi \\ x = \pm\dfrac{5\pi}{12} + k3\pi \end{array}\right.$. (D) $\left[\begin{array}{l} x = k\pi \\ x = \pm\dfrac{\pi}{12} + k\pi \\ x = \pm\dfrac{5\pi}{12} + k\pi \end{array}\right.$.

Lời giải.

Phương trình $\Leftrightarrow 2\cos 4x = 1 + \cos 6x \Leftrightarrow 2(2\cos^2 2x - 1) = 1 + 4\cos^3 2x - 3\cos 2x$

$\Leftrightarrow 4\cos^3 2x - 4\cos^2 2x - 3\cos 2x + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 2x = 1 \\ \cos 2x = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k\pi \\ x = \pm\dfrac{\pi}{12} + k\pi \\ x = \pm\dfrac{5\pi}{12} + k\pi. \end{array}\right.$

Chọn đáp án (D) □

CÂU 24. Cho phương trình: $\cos 2x - (2m+1)\cos x + m + 1 = 0$. Tìm m để phương trình có nghiệm $x \in \left(\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{3\pi}{2}\right)$.

(A) $-1 \le m < 0$. (B) $-1 \le m \le 0$. (C) $-1 < m < 0$. (D) $-1 \le m \le 1$.

Lời giải.

Phương trình tương đương

$$2\cos^2 x - (2m+1)\cos x + m = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = m \\ \cos x = \dfrac{1}{2}. \end{array}\right. \qquad (*)$$

Với $x \in \left(\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{3\pi}{2}\right)$, ta có $-1 \le \cos x < 0$. Từ (*), ta loại trường hợp $\cos x = \dfrac{1}{2}$ và phương trình đã cho có nghiệm $x \in \left(\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{3\pi}{2}\right)$ khi và chỉ khi $-1 \le m < 0$.

Chọn đáp án (A) □

CÂU 25. Cho phương trình $3\cos 4x - 2\cos^2 3x = 1$. Trên đoạn $[0; \pi]$, tổng các nghiệm của phương trình là

(A) 0. (B) π. (C) 2π. (D) 3π.

Lời giải.

Phương trình $\Leftrightarrow 3\cos 4x - 1 - \cos 6x = 1 \Leftrightarrow 3(2\cos^2 2x - 1) - 2 - (4\cos^3 2x - 3\cos 2x) = 0$

$$\Leftrightarrow 4\cos^3 2x - 6\cos^2 2x - 3\cos 2x + 5 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \cos 2x = 1 & (N) \\ \cos 2x = \dfrac{1-\sqrt{21}}{4} & (N) \\ \cos 2x = \dfrac{1+\sqrt{21}}{4} & (L) \end{array}\right.$$

$\Leftrightarrow x = k\pi;\ x = \pm\dfrac{1}{2}\alpha + k\pi,\ \left(\cos\alpha = \dfrac{1-\sqrt{21}}{4}\right)$.

Vì $\dfrac{1-\sqrt{21}}{4} \in (-1;0)$, nên ta chọn $\alpha \in \left(\dfrac{\pi}{2};\pi\right) \Rightarrow \dfrac{1}{2}\alpha \in \left(\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Trong đoạn $[0,\pi]$, ta có các nghiệm 0, π, $\dfrac{1}{2}\alpha$, $\pi - \dfrac{1}{2}\alpha$.

Tổng các nghiệm là 2π.

Chọn đáp án C □

MỤC LỤC