QUICK NOTE

Bài 1. QUY TẮC ĐẾM

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. Quy tắc cộng

Giả sử một công việc nào đó có thể thực hiện theo một trong hai phương án khác nhau

- Phương án một có n_1 cách thực hiện,
- Phương án hai có n_2 cách thực hiện.

Khi đó, số cách thực hiện công việc sẽ là $\boxed{\mathbf{n_1 + n_2}}$ cách.

2. Quy tắc nhân

Giả sử một công việc nào đó phải hoàn thành qua hai công đoạn liên tiếp nhau

- Công đoạn một có m_1 cách thực hiện,
- Với mỗi cách thực hiện công đoạn một, có m_2 cách thực hiện công đoạn hai.

Khi đó, số cách thực hiện công việc là $\boxed{\mathbf{m_1 \cdot m_2}}$ cách.

B. CÁC DẠNG TOÁN

1 Bài toán sử dụng quy tắc cộng

- Ta áp dụng quy tắc cộng cho một công việc có nhiều phương án khi các phương án đó phải rời nhau, không phụ thuộc vào nhau (độc lập với nhau).
- Nếu A và B là các tập hợp hữu hạn không giao nhau, thì $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$.

1. Ví dụ minh hoạ

VÍ DỤ 1. Giả sử từ tỉnh C đến tỉnh D có thể đi bằng các phương tiện: ô tô, tàu hỏa hoặc máy bay. Mỗi ngày có 6 chuyến ô tô, 4 chuyến tàu hỏa và 2 chuyến máy bay. Số cách lựa chọn chuyến đi từ tỉnh C đến tỉnh D là

VÍ DỤ 2. Giả sử bạn muốn mua một áo sơ mi cỡ 39 hoặc cỡ 40. Áo cỡ 39 có 5 màu khác nhau, áo cỡ 40 có 4 màu khác nhau. Hỏi có bao nhiêu sự lựa chọn (về màu áo và cỡ áo)?

VÍ DỤ 3. Một hộp có 12 viên bi trắng, 10 viên bi xanh và 8 viên bi đỏ. Một em bé muốn chọn 1 viên bi để chơi. Hỏi có bao nhiêu cách chọn?

2. Bài tập trắc nghiệm

CÂU 1. Một lớp có 39 bạn nam và 10 bạn nữ. Hỏi có bao nhiêu cách chọn một bạn phụ trách quỹ lớp?

(A) 390. (B) 10. (C) 49. (D) 39.

CÂU 2. Trên giá sách có 5 quyển sách Tiếng Anh khác nhau, 6 quyển sách Toán khác nhau và 8 quyển sách Tiếng Việt khác nhau. Số cách chọn 1 quyển sách là

(A) 240. (B) 19. (C) 6. (D) 8.

CÂU 3. Một trường THPT được cử một học sinh đi dự trại hè toàn quốc. Nhà trường quyết định chọn một học sinh tiên tiến lớp $11A$ hoặc lớp $12B$. Hỏi nhà trường có bao nhiêu cách chọn, nếu biết rằng lớp $11A$ có 31 học sinh tiên tiến và lớp $12B$ có 22 học sinh tiên tiến?

(A) 682. (B) 31. (C) 9. (D) 53.

CÂU 4. Một lớp có 25 học sinh nam và 20 học sinh nữ. Hỏi có bao nhiêu cách chọn 1 học sinh?

(A) 45. (B) 20. (C) 500. (D) 25.

CÂU 5. Trên giá sách có 10 quyển sách Toán khác nhau, 11 quyển sách Văn khác nhau và 7 quyển sách Tiếng Anh khác nhau. Hỏi có bao nhiêu cách chọn một quyển sách trong các quyển sách nói trên?

(A) 32. (B) 26. (C) 20. (D) 28.

QUICK NOTE

CÂU 6. Một người vào cửa hàng ăn nhưng chỉ đủ tiền mua 1 món ăn. Thực đơn gồm 5 món cơm, 6 món mì và 3 món cháo. Hỏi người đó có bao nhiêu cách chọn món?

Ⓐ 5. Ⓑ 3. Ⓒ 14. Ⓓ 6.

CÂU 7. Có 8 quyển sách khác nhau và 6 quyển vở khác nhau. Số cách chọn một trong các quyển đó là

Ⓐ 8. Ⓑ 14. Ⓒ 6. Ⓓ 48.

CÂU 8. Một lớp học có 7 học sinh giỏi Toán, 5 học sinh giỏi Văn, 4 học sinh giỏi Anh. Hỏi có bao nhiêu cách chọn ra một học sinh giỏi bất kì?

Ⓐ 7. Ⓑ 16. Ⓒ 12. Ⓓ 140.

CÂU 9. Giả sử bố bạn An muốn mua một chiếc xe hiệu Vision hoặc SH. Biết rằng xe máy hiệu Vision có 5 màu khác nhau, xe máy hiệu SH có 9 màu khác nhau. Hỏi bố bạn An có bao nhiêu sự lựa chọn?

Ⓐ 9. Ⓑ 14. Ⓒ 5. Ⓓ 45.

CÂU 10. Một cô gái có 2 cái mũ màu trắng, 3 cái mũ màu xanh và 5 cái mũ màu vàng, tất cả các cái mũ đều khác kiểu. Hỏi cô gái này có bao nhiêu cách chọn một cái mũ để đội đi dạo?

Ⓐ 5. Ⓑ 10. Ⓒ 30. Ⓓ 6.

CÂU 11. Một bạn muốn đi từ tỉnh A tới tỉnh B trong một ngày nhất định. Biết rằng trong ngày hôm đó từ tỉnh A đến tỉnh B có 14 chuyến ô tô, 5 chuyến tàu. Hỏi bạn đó có bao nhiêu sự lựa chọn để đi từ A đến B?

Ⓐ 70. Ⓑ 19. Ⓒ 14. Ⓓ 5.

CÂU 12. Trong một hộp chứa sáu quả cầu trắng được đánh số từ 1 đến 6 và ba quả cầu đen được đánh số từ 7 đến 9. Có bao nhiêu cách chọn một trong các quả cầu ấy?

Ⓐ 1. Ⓑ 9. Ⓒ 6. Ⓓ 3.

CÂU 13. Trong một trường THPT, khối 11 có 280 học sinh nam và 325 học sinh nữ. Nhà trường chọn một học sinh ở khối 11 đi dự dạ hội của học sinh thành phố. Hỏi nhà trường có bao nhiêu cách chọn?

Ⓐ 605. Ⓑ 280. Ⓒ 325. Ⓓ 45.

CÂU 14. Giả sử một công việc có thể được tiến hành theo hai phương án A và B. Phương án A có thể thực hiện bằng n cách, phương án B có thể thực hiện bằng m cách không trùng với cách nào của phương án A. Khi đó

Ⓐ Công việc có thể được thực hiện bằng $m \cdot n$ cách.

Ⓑ Công việc có thể được thực hiện bằng $m + n$ cách.

Ⓒ Công việc có thể được thực hiện bằng $\frac{1}{2}(m + n)$ cách.

Ⓓ Công việc có thể được thực hiện bằng $\frac{1}{2} \cdot m \cdot n$ cách.

CÂU 15. Từ một bó hoa hồng gồm 3 bông hồng trắng, 5 bông hồng đỏ và 6 bông hồng vàng, có bao nhiêu cách chọn ra một bông hồng?

Ⓐ 11. Ⓑ 90. Ⓒ 14. Ⓓ 8.

2 Bài toán sử dụng quy tắc nhân

Ta sử dụng quy tắc nhân để giải các bài toán đếm trong đó việc thực hiện một công việc được chia thành nhiều giai đoạn, ứng với mỗi cách thực hiện giai đoạn trước sẽ có số cách thực hiện giai đoạn sau cố định.

1. Ví dụ minh hoạ

VÍ DỤ 1. Bạn An có 4 áo sơ-mi khác màu và 3 quần dài khác nhau. Hỏi bạn An có bao nhiêu cách chọn ra một bộ đồ gồm 1 áo sơ-mi và 1 quần dài?

VÍ DỤ 2. Một trường phổ thông có 12 học sinh chuyên tin và 18 học sinh chuyên toán. Thành lập một đoàn gồm hai người dự hội nghị sao cho có một học sinh chuyên tin và một học sinh chuyên toán. Hỏi có bao nhiêu cách lập một đoàn như trên?

VÍ DỤ 3. Từ Quảng Trị đến Quảng Ngãi có 4 con đường và có 6 con đường từ Quảng Ngãi đến TPHCM. Hỏi có bao nhiêu con đường khác nhau để đi từ Quảng Trị đến TPHCM qua Quảng Ngãi?

VÍ DỤ 4. Cho tập hợp $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Có bao nhiêu số tự nhiên gồm ba chữ số đôi một khác nhau được tạo từ các chữ số trong tập A?

2. Bài tập tự luận

BÀI 1. Cho tập hợp $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Có bao nhiêu số tự nhiên gồm năm chữ số đôi một khác nhau được tạo từ các chữ số trong tập A?

BÀI 2. Cho tập hợp $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8\}$. Từ A có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm năm chữ số đôi một khác nhau và chia hết cho 5?

BÀI 3. Có bao nhiêu biển đăng kí xe ô tô nếu mỗi biển số chứa một dãy ba chữ cái (trong bảng 26 chữ cái tiếng Anh), tiếp sau là bốn chữ số?

BÀI 4. Có bao nhiêu số tự nhiên có ba chữ số bắt đầu bằng chữ số lẻ và các chữ số đôi một khác nhau?

BÀI 5. Từ các số $1; 2; \ldots; 9$ có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có bốn chữ số đôi một khác nhau, bắt đầu bằng chữ số lẻ và kết thúc bằng chữ số chẵn?

BÀI 6. Từ các số $0; 4; 5; 7; 8; 9$ có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có bốn chữ số khác nhau và lớn hơn 5000?

BÀI 7. Có bao nhiêu số tự nhiên có năm chữ số khác nhau được viết từ các số $1; 2; 3; 4; 5$, trong đó ba chữ số đầu là ba chữ số lẻ và hai chữ số cuối là hai chữ số chẵn?

3. Bài tập trắc nghiệm

CÂU 1. Một công việc được hoàn thành bởi hai hành động liên tiếp. Nếu có m cách thực hiện hành động thứ nhất và ứng với mỗi cách đó có n cách thực hiện hành động thứ hai. Hỏi có bao nhiêu cách thực hiện công việc?

(A) $m + n$. (B) $m - n$. (C) $\dfrac{m}{n}$. (D) $m \cdot n$.

CÂU 2. Anh A có 7 cái áo màu sắc khác nhau và 6 cái quần có kiểu khác nhau. Anh A có thể chọn nhiều nhất bao nhiêu bộ quần áo?

(A) 7. (B) 13. (C) 6. (D) 42.

CÂU 3. Để đi từ thị trấn A đến thị trấn C phải qua thị trấn B. Biết từ A đến B có 4 con đường, từ B đến C có 3 con đường. Khi đó số cách đi từ A đến C mà phải qua B là:

(A) 6. (B) 7. (C) 15. (D) 12.

CÂU 4. An muốn mua một cây bút mực và một cây bút chì. Các cây bút mực có 8 màu khác nhau, các cây bút chì cũng có 8 màu khác nhau. Vậy An có bao nhiêu cách chọn?

(A) 64. (B) 16. (C) 32. (D) 20.

CÂU 5. Lớp 12A có 20 bạn nữ, lớp 12B có 16 bạn nam. Có bao nhiêu cách chọn 1 bạn nữ lớp 12A và 1 bạn nam lớp 12B để dẫn chương trình hoạt động ngoại khóa?

(A) 320. (B) 630. (C) 36. (D) 1220.

CÂU 6. Một hộp có 3 viên bi đỏ và 4 viên bi xanh. Số cách lấy ra hai viên bi, trong đó có 1 viên bi đỏ và 1 viên bi xanh bằng

(A) 7. (B) 81. (C) 64. (D) 12.

CÂU 7. Có hai kiểu mặt đồng hồ đeo tay (vuông, tròn) và có ba kiểu dây (kim loại, da, nhựa). Hỏi có bao nhiêu cách chọn một chiếc đồng hồ có một mặt và một dây?

(A) 8. (B) 7. (C) 5. (D) 6.

CÂU 8. Số các số tự nhiên gồm 3 chữ số được tạo thành từ 4 chữ số $0; 1; 2; 3$ là

(A) 56. (B) 96. (C) 52. (D) 48.

CÂU 9. Liên quan đến chuyên ngành bạn Linh muốn học ở bậc đại học, có 4 trường đại học, mỗi trường có 1 khoa và ở mỗi khoa đó có 3 ngành học về chuyên ngành bạn Linh muốn học. Hỏi bạn Linh có bao nhiêu lựa chọn?

(A) 64. (B) 12. (C) 81. (D) 7.

CÂU 10. Cho các chữ số 2, 3, 4, 5, 6, 7. Khi đó có bao nhiêu số tự nhiên có bốn chữ số được thành lập từ các chữ số đã cho?

QUICK NOTE

QUICK NOTE

(A) 1296. (B) 360. (C) 24. (D) 720.

CÂU 11. Đề kiểm tra học kì 1 môn Toán khối 11 ở một trường THPT gồm 2 phần tự luận và trắc nghiệm, trong đó phần tự luận có 13 đề, phần trắc nghiệm có 10 đề. Mỗi học sinh phải làm bài thi gồm một đề tự luận và một đề trắc nghiệm. Hỏi trường THPT đó có bao nhiêu cách chọn đề thi?

(A) 130. (B) 23. (C) 253. (D) 506.

CÂU 12. Cho 6 chữ số $2, 3, 4, 5, 6, 7$. Có bao nhiêu số tự nhiên chẵn có 3 chữ số lập từ 6 chữ số đó.

(A) 256. (B) 108. (C) 36. (D) 18.

CÂU 13. Trong mặt phẳng, cho một đa giác lồi có 20 cạnh. Số đường chéo của đa giác là

(A) 340. (B) 380. (C) 190. (D) 170.

CÂU 14. Một đa giác đều có số đường chéo gấp đôi số cạnh. Hỏi đa giác đó có bao nhiêu cạnh?

(A) 6. (B) 7. (C) 5. (D) 8.

CÂU 15. Có bao nhiêu số tự nhiên có ba chữ số khác nhau?

(A) 1000. (B) 729. (C) 648. (D) 720.

CÂU 16. Có bao nhiêu số tự nhiên có hai chữ số mà tất cả các chữ số đều là chữ số lẻ?

(A) 10. (B) 25. (C) 45. (D) 50.

CÂU 17. Cho tập $A = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}$. Từ tập A có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có 5 chữ số và chia hết cho 2?

(A) 8232. (B) 1230. (C) 1260. (D) 2880.

CÂU 18. Một phòng có 12 người. Cần lập một tổ đi công tác 3 người, một người làm tổ trưởng, một người làm tổ phó và một người là thành viên. Hỏi có bao nhiêu cách lập?

(A) 220. (B) 1728. (C) 1230. (D) 1320.

CÂU 19. Giả sử có 8 vận động viên tham gia chạy thi. Nếu không kể trường hợp có hai vận động viên về đích cùng lúc thì có bao nhiêu kết quả có thể xảy ra đối với các vị trí nhất, nhì, ba?

(A) 56. (B) 120. (C) 336. (D) 24.

CÂU 20. Cho đa giác đều 16 đỉnh. Hỏi có bao nhiêu tam giác vuông có ba đỉnh là ba đỉnh của đa giác đều đó?

(A) 560. (B) 112. (C) 121. (D) 128.

CÂU 21. Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 5, 8 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên lẻ có bốn chữ số đôi một khác nhau và phải có mặt chữ số 3.

(A) 108 số. (B) 228 số. (C) 36 số. (D) 144 số.

CÂU 22. Gieo một con súc sắc 6 mặt cân đối 3 lần, có bao nhiêu kết quả có thể xảy ra thỏa mãn điều kiện "Tổng số chấm xuất hiện trong 3 lần là số chẵn"?

(A) 162. (B) 54. (C) 108. (D) 27.

CÂU 23. Cho 5 chữ số $1, 2, 3, 4, 6$. Lập các số tự nhiên có 3 chữ số đôi một khác nhau từ 5 chữ số đã cho. Tính tổng của tất cả các số lập được.

(A) 12321. (B) 21312. (C) 12312. (D) 21321.

3 Kết hợp quy tắc cộng và quy tắc nhân

Hầu hết các bài toán đếm trong thực tế sẽ phức tạp và cần áp dụng cả hai quy tắc cộng và quy tắc nhân để giải bài toán.

1. Ví dụ minh hoạ

VÍ DỤ 1. Cho tập hợp $A = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$. Có bao nhiêu số tự nhiên gồm bốn chữ số được lấy từ A sao cho các chữ số

a) Khác nhau từng đôi một.

b) Khác nhau từng đôi một và nó là số lẻ.

QUICK NOTE

c) Khác nhau từng đôi một và nó là số chẵn.

d) Khác nhau đôi một và chia hết cho 5.

VÍ DỤ 2. Cho tập hợp $X = \{0; 2; 3; 4; 5; 6; 8\}$. Có bao nhiêu số tự nhiên gồm ba chữ số được lấy từ X sao cho các chữ số

a) Khác nhau từng đôi một.

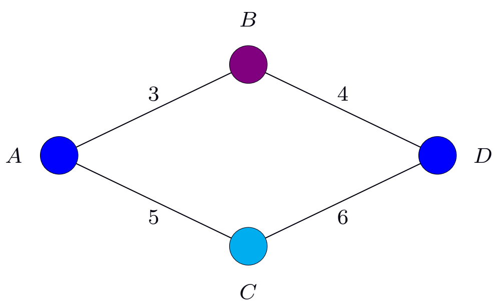
b) Khác nhau từng đôi một và nó là số lẻ.

c) Khác nhau từng đôi một và chia hết cho 2.

d) Khác nhau đôi một và chia hết cho 5.

VÍ DỤ 3. Có bao nhiêu số tự nhiên chẵn gồm bốn chữ số đôi một khác nhau được lập từ tập $E = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$?

VÍ DỤ 4. Từ thành phố A đến thành phố B có 3 con đường, từ thành phố B đến thành phố D có 4 con đường, từ thành phố A đến thành phố C có 5 con đường, từ thành phố C đến thành phố D có 6 con đường, các con đường này đôi một khác nhau. Có bao nhiêu cách chọn đường đi A đến D rồi trở về A mà không có con đường nào được đi lặp trở lại, biết rằng không có con đường nào đi trực tiếp B đến C và đi trực tiếp từ A đến D.



VÍ DỤ 5. Có bao nhiêu cách chọn một vé Xổ số kiến thiết có 5 chữ số mà số ghi trên vé không có chữ số 0 hoặc không có chữ số 9?

VÍ DỤ 6. Từ tập $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên chẵn gồm 3 chữ số đôi một khác nhau và không lớn hơn 789?

2. Bài tập tự luận

BÀI 1. Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 có thể lập được bao nhiêu số có bốn chữ số khác nhau trong đó phải có chữ số 2?

BÀI 2. Cho các số 1, 2, 3, 4, 5.

a) Hãy tìm tất cả các số có ba chữ số khác nhau nằm trong khoảng $(300; 500)$.

b) Hãy tìm tất cả các số có ba chữ số nằm trong khoảng $(300; 500)$ (các chữ số không cần khác nhau).

BÀI 3. Từ các chữ số 0, 4, 5, 7, 9.

a) Có thể lập được bao nhiêu số có bốn chữ số khác nhau.

b) Có thể lập được bao nhiêu số có bốn chữ số khác nhau và lớn hơn 5000?

c) Có thể lập được bao nhiêu số có bốn chữ số chia hết cho 5?

BÀI 4. Một lớp học có 3 tổ. Tổ I gồm có 3 học sinh nam và 7 học sinh nữ; tổ II gồm có 5 học sinh nam và 5 học sinh nữ; tổ III gồm có 6 học sinh nam và 4 học sinh nữ. Cô giáo chủ nhiệm cần chọn ra một học sinh nam và một học sinh nữ để tham gia hoạt động tình nguyện. Hỏi cô giáo có bao nhiêu cách chọn, nếu cô muốn chọn hai em học sinh ở hai tổ khác nhau?

BÀI 5. Từ tập $E = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm 4 chữ số khác nhau và số tự nhiên này lớn hơn 3452?

BÀI 6. Từ tập $E = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm 4 chữ số đôi một khác nhau chia hết cho 3?

QUICK NOTE

BÀI 7. Có bao nhiêu cách chọn một vé số có 5 chữ số mà số ghi trên vé có chữ số 5 và có số chẵn?

BÀI 8. Cho tập $A = \{0; 1; 2; \ldots; 8; 9\}$. Từ A có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm bảy chữ số đôi một khác nhau và chia hết cho 2?

BÀI 9. Có bao nhiêu số tự nhiên trong đó các chữ số khác nhau và nhỏ hơn 10000 được tạo thành từ năm chữ số 0, 1, 2, 3, 4?

BÀI 10. Từ các số $0; 1; 2; 3; 4; 5$ có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có năm chữ số khác nhau và không bắt đầu bằng 123?

BÀI 11. Cho tập hợp $A = \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$.

a) Có bao nhiêu số tự nhiên gồm năm chữ số đôi một khác nhau, chia hết cho 5 và chữ số 2 luôn có mặt đúng một lần?

b) Có bao nhiêu số tự nhiên gồm ba chữ số đôi một khác nhau và chia hết cho 3?

c) Tính tổng các số tự nhiên có năm chữ số đôi một khác nhau mà các số này không có chữ số 0?

3. Bài tập trắc nghiệm

CÂU 1. Có bao nhiêu số tự nhiên có 6 chữ số khác nhau?

Ⓐ 136080. Ⓑ 136800. Ⓒ 1360800. Ⓓ 138060.

CÂU 2. Bạn Anh muốn qua nhà bạn Bình để rủ Bình đến nhà bạn Châu chơi. Từ nhà Anh đến nhà Bình có 3 con đường. Từ nhà Bình đến nhà Châu có 5 con đường. Hỏi bạn Anh có bao nhiêu cách chọn đường đi từ nhà mình đến nhà bạn Châu?

Ⓐ 6. Ⓑ 15. Ⓒ 4. Ⓓ 8.

CÂU 3. Bạn Mai có ba cái áo màu khác nhau và hai quần kiểu khác nhau. Hỏi Mai có bao nhiêu cách chọn một bộ quần áo?

Ⓐ 10. Ⓑ 20. Ⓒ 6. Ⓓ 5.

CÂU 4. Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên bé hơn 60?

Ⓐ 30. Ⓑ 17. Ⓒ 25. Ⓓ 42.

CÂU 5. Từ các số của tập hợp $\{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$ lập được bao nhiêu số tự nhiên chẵn có ít nhất 5 chữ số và các chữ số đôi một phân biệt?

Ⓐ 624. Ⓑ 522. Ⓒ 312. Ⓓ 405.

CÂU 6. Cho tập $A = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}$, từ tập A có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có 5 chữ số khác nhau và chia hết cho 2?

Ⓐ 1230. Ⓑ 2880. Ⓒ 1260. Ⓓ 8232.

CÂU 7. Cho các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5. Từ các chữ số đã cho lập được bao nhiêu số tự nhiên chẵn có 4 chữ số và các chữ số đôi một bất kỳ khác nhau?

Ⓐ 160. Ⓑ 156. Ⓒ 752. Ⓓ 240.

CÂU 8. Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 5, 8 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên lẻ có bốn chữ số đôi một khác nhau và phải có mặt chữ số 3?

Ⓐ 108. Ⓑ 228. Ⓒ 36. Ⓓ 144.

CÂU 9. Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên chẵn có sáu chữ số và thỏa mãn điều kiện: sáu chữ số của mỗi số là khác nhau và chữ số hàng nghìn lớn hơn 2?

Ⓐ 720. Ⓑ 360. Ⓒ 288. Ⓓ 240.

CÂU 10. Xét mạng đường nối các tỉnh A, B, C, D, E, F, G, trong đó số viết trên một cạnh cho biết số con đường nối hai tỉnh nằm ở hai đầu mút của cạnh. Số cách đi từ tỉnh A đến tỉnh G là

Ⓐ 23. Ⓑ 252. Ⓒ 2880. Ⓓ 522.

CÂU 11. Từ các chữ số $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên chẵn có 3 chữ số đôi một khác nhau?

Ⓐ 168. Ⓑ 210. Ⓒ 84. Ⓓ 105.

CÂU 12. Một hộp đựng 9 thẻ được đánh số từ 1 đến 9. Có bao nhiêu cách chọn hai thẻ sao cho tích hai số trên hai thẻ là số chẵn?

A. 32. B. 36. C. 26. D. 72.

CÂU 13. Từ tập hợp $A=\{0;1;2;3;4;5;6\}$ lập được bao nhiêu số tự nhiên chia hết cho 5, gồm năm chữ số khác nhau sao cho trong đó luôn có mặt các chữ số 1, 2, 3 và chúng đứng cạnh nhau ?

A. 46. B. 66. C. 52. D. 44.

CÂU 14. Cho tập hợp $A=\{0;1;2;3;4;5\}$. Có thể lập bao nhiêu số tự nhiên có 3 chữ số khác nhau và chia hết cho 5?

A. 42. B. 40. C. 38. D. 36.

CÂU 15. Có bao nhiêu số tự nhiên chẵn gồm hai chữ số khác nhau được lập từ các chữ số $0,1,2,3,4,5$?

A. 5. B. 15. C. 13. D. 22.

CÂU 16. Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6 có thể lập được bao nhiêu chữ số tự nhiên bé hơn 100?

A. 36. B. 62. C. 54. D. 42.

CÂU 17. Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5 có thể lập được bao nhiêu số chẵn gồm 4 chữ số khác nhau?

A. 156. B. 144. C. 96. D. 134.

CÂU 18. Cho tập $A=\{0;1;2;3;4;5;6\}$. Từ tập A có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm 5 chữ số và chia hết cho 5.

A. 600. B. 432. C. 679. D. 523.

CÂU 19. Từ thành phố A đến thành phố B có 3 con đường, từ thành phố A đến thành phố C có 2 con đường, từ thành phố B đến thành phố D có 2 con đường, từ thành phố C đến thành phố D có 3 con đường, không có con đường nào nối từ thành phố C đến thành phố B. Hỏi có bao nhiêu con đường đi từ thành phố A đến thành phố D.

A. 6. B. 12. C. 18. D. 36.

CÂU 20. Số 1746360 có bao nhiêu ước số nguyên?

A. 120. B. 240. C. 60. D. 480.

CÂU 21. Từ các chữ số 0, 2, 3, 5, 7, 8, 9 lập được bao nhiêu số tự nhiên có 4 chữ số khác nhau và luôn chứa một bộ phận là "35"?

A. 60. B. 70. C. 52. D. 56.

CÂU 22. Bình A chứa 3 quả cầu xanh, 4 quả cầu đỏ và 5 quả cầu trắng. Bình B chứa 4 quả cầu xanh, 3 quả cầu đỏ và 6 quả cầu trắng. Bình C chứa 5 quả cầu xanh, 5 quả cầu đỏ và 2 quả cầu trắng. Từ mỗi bình lấy ra một quả cầu. Có bao nhiêu cách lấy để cuối cùng được 3 quả có màu giống nhau?

A. 180. B. 60. C. 150. D. 120.

CÂU 23. Có bao nhiêu số tự nhiên có 4 chữ số được viết từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 sao cho số đó chia hết cho 15?

A. 132. B. 432. C. 234. D. 243.

CÂU 24. Có bao nhiêu số tự nhiên chẵn gồm ba chữ số khác nhau?

A. 328. B. 500. C. 360. D. 405.

CÂU 25. Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5 có thể lập được tất cả bao nhiêu số tự nhiên có 3 chữ số phân biệt và chia hết cho 3?

A. 34. B. 30. C. 48. D. 40.

CÂU 26. Từ các chữ số 1, 3, 5, 7, 9 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên bé hơn 500?

A. 120. B. 80. C. 60. D. 45.

CÂU 27. Có bao nhiêu số tự nhiên có sáu chữ số khác nhau từng đôi một, trong đó chữ số 5 đứng liền giữa hai chữ số 1 và 4?

A. 249. B. 1500. C. 3204. D. 2942.

QUICK NOTE

QUICK NOTE

CÂU 28. Từ các chữ số 1, 3, 5, 7, 9 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm 3 chữ số đôi một khác nhau và nhỏ hơn 379?

Ⓐ 30. Ⓑ 60. Ⓒ 12. Ⓓ 20.

CÂU 29. Xếp 6 người A, B, C, D, E, F vào một ghế dài. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp sao cho A và F không ngồi cạnh nhau?

Ⓐ 260. Ⓑ 480. Ⓒ 460. Ⓓ 240.

CÂU 30. Từ các chữ số $0; 1; 2; 3; 4; 5; 6$ có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có 5 chữ số khác nhau và chia hết cho 15?

Ⓐ 200. Ⓑ 240. Ⓒ 222. Ⓓ 120.

CÂU 31. Từ các chữ số 0, 1, 2 có thể thành lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm 9 chữ số và là bội số của 3 đồng thời bé hơn $2 \cdot 10^8$?

Ⓐ 4374. Ⓑ 2187. Ⓒ 6561. Ⓓ 3645.

CÂU 32. Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên chẵn có sáu chữ số và thỏa mãn điều kiện: sáu chữ số của mỗi số là khác nhau và chữ số hàng nghìn lớn hơn 2?

Ⓐ 240. Ⓑ 720. Ⓒ 360. Ⓓ 288.

CÂU 33. Có bao nhiêu số tự nhiên có ba chữ số dạng $\overline{abc}$ với $a,\ b,\ c \in \{0; 1; \ldots; 6\}$, sao cho $a < b < c$?

Ⓐ 120. Ⓑ 20. Ⓒ 40. Ⓓ 30.

CÂU 34. Một túi có 14 viên bi gồm 5 viên màu trắng được đánh số từ 1 đến 5; 4 viên màu đỏ được đánh số từ 1 đến 4; 3 viên màu xanh được đánh số từ 1 đến 3 và 2 viên màu vàng được đánh số từ 1 đến 2. Có bao nhiêu cách chọn 3 viên bi từng đôi khác số?

Ⓐ 184. Ⓑ 120. Ⓒ 243. Ⓓ 190.

CÂU 35. Một hộp đựng 26 tấm thẻ được đánh số từ 1 đến 26. Bạn Hải rút ngẫu nhiên cùng một lúc ba tấm thẻ. Hỏi có bao nhiêu cách rút sao cho bất kỳ hai trong ba tấm thẻ lấy ra đó có hai số tương ứng ghi trên hai tấm thẻ luôn hơn kém nhau ít nhất 2 đơn vị?

Ⓐ 1350. Ⓑ 1768. Ⓒ 2024. Ⓓ 1771.

CÂU 36. Xếp 6 người A, B, C, D, E, F vào một ghế dài. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp sao cho A và F không ngồi cạnh nhau?

Ⓐ 460. Ⓑ 480. Ⓒ 260. Ⓓ 240.

CÂU 37. Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 5, 8 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên lẻ có bốn chữ số đôi một khác nhau và phải có chữ số 3?

Ⓐ 108. Ⓑ 144. Ⓒ 228. Ⓓ 36.

CÂU 38. Từ tập $E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm ba chữ số phân biệt trong đó luôn có chữ số 2?

Ⓐ 114. Ⓑ 144. Ⓒ 58. Ⓓ 228.

CÂU 39. Cho tập hợp $A = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$. Có bao nhiêu số tự nhiên chẵn có 6 chữ số đôi một khác nhau được lập thành từ các chữ số của tập A, đồng thời có đúng 3 chữ số lẻ và 3 chữ số lẻ đó đứng cạnh nhau?

Ⓐ 48. Ⓑ 4464. Ⓒ 240. Ⓓ 1440.

CÂU 40. Cho 10 chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Có thể tạo ra được bao nhiêu số tự nhiên gồm 5 chữ số khác nhau, trong đó có mặt đủ 3 chữ số 2, 3 và 4?

Ⓐ 25056. Ⓑ 2376. Ⓒ 27216. Ⓓ 25592.

CÂU 41. Trong mặt phẳng, cho hai đường thẳng phân biệt a và b song song với nhau. Trên đường thẳng a lấy 5 điểm phân biệt A, B, C, D, E và trên đường thẳng b lấy 5 điểm phân biệt G, H, I, J, K sao cho $AB = BC = CD = DE = GH = HI = IJ = JK = 20$ cm. Có bao nhiêu hình bình hành có 4 đỉnh là 4 điểm trong 10 điểm nói trên?

Ⓐ 30. Ⓑ 210. Ⓒ 16. Ⓓ 100.

QUICK NOTE

Bài 2. HOÁN VỊ - CHỈNH HỢP - TỔ HỢP

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Hoán vị

ĐỊNH NGHĨA 2.1. Một hoán vị của một tập hợp có n phần tử là một cách sắp xếp có thứ tự n phần tử đó (với n là một số tự nhiên, $n \geq 1$).
Số các hoán vị của tập hợp có n phần tử, kí hiệu là P, được tính bằng công thức

$$\mathrm{P}_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 2 \cdot 1.$$

Kí hiệu $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 2 \cdot 1$ là $n!$ (đọc là n giai thừa), ta có $\mathrm{P}_n = n!$. Chẳng hạn $\mathrm{P}_3 = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$.
Quy ước $0! = 1$.

2. Chỉnh hợp

ĐỊNH NGHĨA 2.2. Một chỉnh hợp chập k của n là một cách sắp xếp có thứ tự k phần tử từ một tập hợp n phần tử (với k, n là các số tự nhiên, $1 \leq k \leq n$).
Số các chỉnh hợp chập k của n, kí hiệu là A_n^k, được tính bằng công thức

$$\mathrm{A}_n^k = n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1) \text{ hay } \mathrm{A}_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}\ (1 \leq k \leq n).$$

- *Hoán vị sắp xếp tất cả các phần tử của tập hợp, còn chỉnh hợp chọn ra một số phần tử và sắp xếp chúng.*
- *Mỗi hoán vị của n phần tử cũng chính là một chỉnh hợp chập n của n phần tử đó. Vì vậy $\mathrm{P}_n = \mathrm{A}_n^n$.*

3. Tổ hợp

ĐỊNH NGHĨA 2.3. Một tổ hợp chập k của n là một cách chọn k phần tử từ một tập hợp n phần tử (với k, n là các số tự nhiên, $0 \leq k \leq n$).
Số các tổ hợp chập k của n, kí hiệu là C_n^k, được tính bằng công thức

$$\mathrm{C}_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}\ (0 \leq k \leq n).$$

- $\mathrm{C}_n^k = \dfrac{\mathrm{A}_n^k}{k!}$.
- *Chỉnh hợp và tổ hợp có điểm giống nhau là đều chọn một số phần tử trong một tập hợp, nhưng khác nhau ở chỗ, chỉnh hợp là chọn có xếp thứ tự, còn tổ hợp là chọn không xếp thứ tự.*

B. CÁC DẠNG TOÁN

1 Các bài toán liên quan đến hoán vị

- Sắp xếp n phần tử theo một hàng $n! = n(n-1) \cdot (n-2) \ldots 3 \cdot 2 \cdot 1$ cách sắp xếp.
- Sắp xếp n phần tử theo một vòng tròn (bàn tròn) có $(n-1)!$ cách.

Casio: Bấm $n!$ ta thao tác: n SHIFT x^{-1}, chẳng hạn: 3 SHIFT x^{-1} $= 6$, tức $3! = 6$.

VÍ DỤ 1. Trên một kệ sách dài có 5 quyển sách Toán, 4 quyển sách Lí, 3 quyển sách Văn. Các quyển sách đều khác nhau. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp các quyển sách trên nếu

a) Xếp một cách tùy ý.

b) Xếp theo từng môn.

c) Theo từng môn và sách Toán nằm ở giữa.

VÍ DỤ 2. Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6 lập các số gồm sáu chữ số khác nhau. Hỏi

QUICK NOTE

a) Có tất cả bao nhiêu số?

b) Có bao nhiêu số chẵn và bao nhiêu số lẻ?

c) Có bao nhiêu số bé hơn 432000?

1. Bài tập tự luận

BÀI 1. Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6 thiết lập tất cả các số có sáu chữ số khác nhau. Hỏi trong các số thiết lập được, có bao nhiêu số mà hai chữ số 1 và 6 không đứng cạnh nhau?

BÀI 2. Từ tập hợp $A = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ lập được bao nhiêu số tự nhiên chia hết cho 5, gồm năm chữ số khác nhau sao cho trong đó luôn có mặt các chữ số 1, 2, 3 và chúng đứng cạnh nhau?

BÀI 3. Cho tập $X = \{1; 2; 3; 4; 7\}$. Có bao nhiêu số tự nhiên gồm ba chữ số khác nhau chia hết cho 3 được lập từ tập X?

BÀI 4. Cho tập $E = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$. Có bao nhiêu số tự nhiên có ba chữ số khác nhau, biết rằng tổng của ba chữ số này bằng 9?

BÀI 5. Từ các chữ số 2, 3, 4, 5, 6, 7 lập các số gồm sáu chữ số khác nhau. Hỏi

a) Có tất cả bao nhiêu số?

b) Có bao nhiêu số chẵn và bao nhiêu số lẻ?

c) Có bao nhiêu số bé hơn 432000?

BÀI 6. Xét các số tự nhiên gồm năm chữ số khác nhau lập từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5. Hỏi trong các số đó có bao nhiêu số

a) Bắt đầu bằng chữ số 5?

b) Không bắt đầu bằng chữ số 1?

c) Bắt đầu bằng 23?

d) Không bắt đầu bằng 234?

BÀI 7. Một THPT X có 4 học sinh giỏi khối 12, có 5 học sinh giỏi khối 11, có 6 học sinh giỏi khối 10. Có bao nhiêu cách xếp 15 học sinh trên thành 1 hàng ngang nhận thưởng nếu

a) Những học sinh đứng tùy ý.

b) Các học sinh cùng khối đứng cạnh nhau.

c) Cùng khối đứng cạnh và khối 11 ở giữa.

BÀI 8. Có hai dãy ghế, mỗi dãy 5 ghế. Xếp 5 nam, 5 nữ vào hai dãy ghế trên, có bao nhiêu cách xếp, nếu:

a) Nam, nữ được xếp tùy ý.

b) Nam 1 dãy ghế, nữ 1 dãy ghế.

BÀI 9. Có hai dãy ghế, mỗi dãy 4 ghế. Xếp 4 nam, 4 nữ vào hai dãy ghế trên, có bao nhiêu cách xếp, nếu:

a) Nam, nữ được xếp tùy ý.

b) Nam 1 dãy ghế, nữ 1 dãy ghế.

BÀI 10. Cho một bàn dài có 10 ghế và 10 học sinh trong đó có 5 học sinh nữ. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp chỗ ngồi cho 10 học sinh sao cho:

a) Nam và nữ ngồi xen kẻ nhau.

b) Học sinh cùng giới thì ngồi cạnh nhau.

BÀI 11. Cho một bàn dài có 8 ghế và 8 học sinh trong đó có 4 học sinh nam. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp chỗ ngồi cho 8 học sinh sao cho:

a) Nam và nữ ngồi xen kẻ nhau.

b) Học sinh cùng giới thì ngồi cạnh nhau.

BÀI 12. Xếp 6 học sinh A, B, C, D, E, F vào một ghế dài, có mấy cách sắp xếp nếu:

a) 6 học sinh này ngồi bất kì.

b) A và F luôn ngồi ở hai đầu ghế.

c) A và F luôn ngồi cạnh nhau.

d) A, B, C luôn ngồi cạnh nhau.

e) A, B, C, D luôn ngồi cạnh nhau.

BÀI 13. Xếp 5 học sinh A, B, C, D, E vào một ghế dài, có mấy cách sắp xếp nếu:

a) 5 học sinh này ngồi bất kì.

b) A và E luôn ngồi ở hai đầu ghế.

c) A và E luôn ngồi cạnh nhau.

d) A, B, C luôn ngồi cạnh nhau.

e) A, B, C, D luôn ngồi cạnh nhau.

2 Các bài toán liên quan đến hoán vị, tổ hợp và chỉnh hợp

- Chọn k trong n và sắp xếp $\Rightarrow$ Sử dụng chỉnh hợp $\mathrm{A}_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$
  $(Casio : n \quad SHIFT \times k)$
- Chọn k trong n tuỳ ý $\Rightarrow$ Sử dụng tổ hợp $\mathrm{C}_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!k!}$
  $(Casio : n \quad SHIFT \div k)$

VÍ DỤ 1. Trong không gian cho bốn điểm A, B, C, D mà không có ba điểm nào thẳng hàng. Hỏi:

a) Có bao nhiêu đoạn thẳng được tạo thành?

b) Có bao nhiêu vectơ được tạo thành?

VÍ DỤ 2. Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6 lập được bao nhiêu số tự nhiên.

a) Gồm 4 chữ số.

b) Gồm 3 chữ số đôi một khác nhau.

c) Gồm 4 chữ số khác nhau và nó là số chẵn.

VÍ DỤ 3. Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 lập được bao nhiêu số tự nhiên.

a) Gồm 5 chữ số.

b) Gồm 4 chữ số đôi một khác nhau.

c) Gồm 5 chữ số khác nhau và nó là số lẻ.

VÍ DỤ 4. Cho $X = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$ có bao nhiêu số tự nhiên gồm 5 chữ số được tạo từ tập X, sao cho:

a) Khác nhau đôi một và là số lẻ.

b) Khác nhau đôi một và là số chẵn.

c) Khác nhau đôi một và luôn có mặt 1, 2, 3.

VÍ DỤ 5. Cho $X = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$ có bao nhiêu số tự nhiên gồm 5 chữ số được tạo từ tập X, sao cho:

a) Khác nhau đôi một và là số chẵn.

b) Khác nhau đôi một và chia hết cho 5.

c) Khác nhau đôi một và luôn có mặt số 2 và số 3.

QUICK NOTE

QUICK NOTE

VÍ DỤ 6. Có bao nhiêu số có 5 chữ số mà các chữ số đôi một khác nhau và khác 0, trong đó có đúng 3 chữ số lẻ.

VÍ DỤ 7. Từ các số $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ sẽ lập được bao nhiêu số có 6 chữ số khác nhau mà có đúng bốn chữ số chẵn và 2 chữ số lẻ.

VÍ DỤ 8. Có bao nhiêu chữ số có 5 chữ số khác nhau biết rằng có đúng 3 chữ số chẵn và 2 chữ số lẻ còn lại đứng kề nhau?

1. Bài tập tự luận

BÀI 1. Một lớp học có 40 học sinh, trong đó gồm 25 nam và 15 nữ. Giáo viên chủ nhiệm muốn chọn một ban cán sự lớp gồm 4 em. Hỏi có bao nhiêu cách chọn, nếu:

a) Gồm 4 học sinh tuỳ ý.

b) Có 1 nam và 3 nữ.

c) Có 2 nam và 2 nữ.

BÀI 2. Một lớp học có 40 học sinh, trong đó gồm 25 nam và 15 nữ. Giáo viên chủ nhiệm muốn chọn 5 học sinh trực nhật. Hỏi có bao nhiêu cách chọn, nếu:

a) Gồm 5 học sinh tuỳ ý.

b) Có 3 nam và 2 nữ.

c) Có không quá 3 nữ.

d) Có ít nhất 1 nữ.

BÀI 3. Một lớp có 20 học sinh trong đó có 14 nam, 6 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách lập một đội gồm 4 học sinh, trong đó có:

a) Số nam và số nữ bằng nhau.

b) Ít nhất một nữ.

BÀI 4. Một đội văn nghệ gồm 20 người, trong đó có 10 nam, 10 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách chọn ra 5 người, sao cho:

a) Có đúng 2 nam.

b) Có ít nhất 2 nam và 1 nữ.

BÀI 5. Từ 5 bông hồng vàng, 3 bông hồng trắng, 4 bông hồng đỏ (các bông hồng xem như đôi một khác nhau). Người ta muốn chọn ra 1 bó hoa hồng gồm 7 bông. Có bao nhiêu cách chọn một đóa hoa sao cho:

a) Có đúng 1 bông hồng đỏ.

b) Có ít nhất 3 bông vàng và ít nhất 3 bông đỏ.

BÀI 6. Trông một hộp có 18 bi, trong đó có 9 viên bi xanh, 5 viên bi đỏ, 4 bi vàng có kích thước đôi một khác nhau. Có bao nhiêu cách chọn ra 6 viên bi sao cho những viên bi được chọn thỏa mãn:

a) Có đúng 2 viên bi màu đỏ?

b) Số bi xanh bằng số bi đỏ?

BÀI 7. Trong ngân hàng đề kiểm tra 30 phút môn Vật Lí có 10 câu hỏi, trong đó có 4 câu lý thuyết và 6 bài tập. Người ta cấu tạo thành các đề thi. Biết rằng trong mỗi đề thi phải gồm 3 câu hỏi, trong đó nhất thiết phải có ít nhất 1 câu lý thuyết và 1 bài tập. Hỏi có thể tạo ra bao nhiêu đề thi có dạng như trên?

BÀI 8. Trong một môn học, thầy giáo có 30 câu hỏi khác nhau gồm 5 câu hỏi khó, 10 câu hỏi trung bình, 15 câu hỏi dễ. Từ 30 câu hỏi đó có thể lập được bao nhiêu đề kiểm tra, mỗi đề gồm 5 câu hỏi khác nhau và nhất thiết phải có đủ 3 loại câu hỏi (khó, trung bình, dễ) và số câu hỏi dễ không ít hơn 2.

BÀI 9. Đội thanh niên xung kích của một trường phổ thông có 12 học sinh, gồm 5 học sinh lớp A, 4 học sinh lớp B và 3 học sinh lớp C. Cần chọn 4 học sinh đi làm nhiệm vụ, sao cho 4 học sinh này thuộc không quá 2 trong 3 lớp trên. Hỏi có bao nhiêu cách chọn như vậy?

BÀI 10. Hội đồng quản trị của một công ty gồm 12 người, trong đó có 5 nữ. Từ hội đồng quản trị đó người ta bầu ra 1 chủ tịch hội đồng quản trị, 1 phó chủ tịch hội đồng quản trị và 2 ủy viên. Hỏi có bao nhiêu cách bầu sao cho trong 4 người được bầu nhất thiết phải có nữ?

BÀI 11. Lớp có 50 học sinh được chia thành 5 tổ, mỗi tổ có 10 học sinh. Hỏi có bao nhiêu cách chia tổ?

QUICK NOTE

BÀI 12. Một tổ có 8 học sinh đi trồng cây. Khi trồng cây cần có 2 em học sinh. Có bao nhiêu cách chia tổ thành những cặp như vậy?

BÀI 13. Giải bóng truyền VTV Cup gồm 9 đội bóng tham dự, trong đó có 6 đội nước ngoài và 3 đội Việt Nam. Ban tổ chức bốc thăm chia làm 3 bảng đấu A, B, C. Hỏi có bao nhiêu cách chia sao cho:

a) Mỗi bảng ba đội?

b) Mỗi bảng ba đội và 3 đội bóng của Việt Nam ở ba bảng khác nhau?

BÀI 14. Để sắp xếp 5 bạn nữ và 15 bạn nam thành bốn nhóm A, B, C, D, mỗi nhóm có 5 bạn. Việc chia nhóm được thực hiện một cách ngẫu nhiên. Hỏi có bao nhiêu cách chia nhóm sao cho:

a) Thành viên trong nhóm là bất kì?

b) 5 bạn nữ ở cùng một nhóm.

BÀI 15. Trong một hộp có 50 tấm thẻ được đánh số từ 1 đến 50. Có bao nhiêu cách lấy ra ba thẻ sao cho có đúng 2 thẻ mang số chia hết cho 8?

BÀI 16. Có 30 tấm thẻ được đánh số từ 1 đến 30. Có bao nhiêu cách chọn ra 10 tấm thẻ sao cho có 5 tấm thẻ mang số lẻ, 5 tấm thẻ mang số chẵn trong đó chỉ có đúng một tấm thẻ mang số chia hết cho 10?

BÀI 17. Trong một hộp có 20 viên bi được đánh số từ 1 đến 20. Có bao nhiêu cách lấy ra 5 viên bi sao cho có đúng 3 viên bi mang số lẻ, 2 viên bi mang số chẵn trong đó có đúng một viên bi mang số chia hết cho 4?

BÀI 18. Trong một hộp có 100 viên bi được đánh số từ 1 đến 100. Có bao nhiêu cách chọn ra 3 viên bi sao cho tổng ba số trên 3 bi chia hết cho 2.

BÀI 19. Trong một hộp có 40 tấm thẻ được đánh số từ 1 đến 40. Có bao nhiêu cách chọn 3 tấm thẻ trong hộp sao cho tổng ba số trên 3 thẻ chia hết cho 3.

BÀI 20. Cho hai đường thẳng $a \parallel b$. Trên đường thẳng a có 5 điểm phân biệt và trên đường thẳng b có 10 điểm phân biệt. Hỏi có thể tạo được bao nhiêu tam giác có các đỉnh là các điểm trên hai đường thẳng a và b đã cho?

BÀI 21. Cho hai đường thẳng song song d_1, d_2 . Trên d_1 lấy 17 điểm phân biệt, trên d_2 lấy 20 điểm phân biệt. Tính số tam giác có các đỉnh là 3 điểm trong số 37 điểm đã chọn trên d_1 và d_2 đã cho?

BÀI 22. Cho hai đường thẳng $d_1 \parallel d_2$. Trên đường thẳng d_1 có 10 điểm phân biệt, trên đường thẳng d_2 có n điểm phân biệt với $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Biết có 2800 tam giác có đỉnh là các điểm đã cho. Hãy tìm n?

BÀI 23. Cho hai đường thẳng $d_1 \parallel d_2$. Trên đường thẳng d_1 có 10 điểm phân biệt, trên đường thẳng d_2 có n điểm phân biệt với $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Biết có 1725 tam giác có đỉnh là các điểm đã cho. Hãy tìm n?

BÀI 24. Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4 có thể lập được bao nhiêu số

a) Có 9 chữ số sao cho chữ số 0 có mặt 2 lần, chữ số 2 có mặt 3 lần, chữ số 3 có mặt 2 lần các chữ số còn lại có mặt đúng một lần.

b) Có 8 chữ số sao cho chữ số 1 có mặt 3 lần, chữ số 4 có mặt 2 lần, các chữ số còn lại có mặt đúng 1 lần.

BÀI 25. Từ các chữ số 0, 2, 4, 5, 9 có thể lập được bao nhiêu số

a) Có 9 chữ số sao cho chữ số 0 có mặt 3 lần, chữ số 4 có mặt 2 lần, chữ số 5 có mặt 2 lần các chữ số còn lại có mặt đúng một lần.

b) Có 8 chữ số sao cho chữ số 2 có mặt 3 lần, chữ số 9 có mặt 3 lần, các chữ số còn lại có mặt đúng 1 lần.

BÀI 26. Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 có thể lập được bao nhiêu số có 12 chữ số trong đó chữ số 5 có mặt đúng 2 lần; chữ số 6 có mặt đúng 4 lần, các chữ số còn lại có mặt đúng một lần?

BÀI 27. Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5 có thể lập được bao nhiêu số có 8 chữ số trong đó chữ số 5 có mặt 3 lần, các chữ số còn lại có mặt đúng một lần?

QUICK NOTE

BÀI 28. Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5 có bao nhiêu số gồm 6 chữ số phân biệt mà

a) Các chữ số chẵn đứng cạnh nhau.

b) Số chẵn đứng cạnh và số lẻ đứng cạnh nhau.

BÀI 29. Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4 có bao nhiêu số gồm 5 chữ số phân biệt mà

a) Các chữ số chẵn đứng cạnh nhau.

b) Số chẵn đứng cạnh và số lẻ đứng cạnh nhau.

3 Giải phương trình, bất phương trình, hệ phương trình

- Tìm điều kiện. Ta có các điều kiện thường gặp sau:

Các kí hiệu và công thức	Điều kiện
• $n! = n(n-1)(n-2)\ldots 3.2.1$	$n \in \mathbb{N}$
• $\mathrm{P}_n = n!$	$n \in \mathbb{N}^*$
• $\mathrm{A}_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$	$\begin{cases} n, k \in \mathbb{N} \\ 0 \leq k \leq n \end{cases}$
• $\mathrm{C}_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$	$\begin{cases} n, k \in \mathbb{N} \\ 0 \leq k \leq n \end{cases}$
• $\mathrm{C}_n^k = \mathrm{C}_n^{n-k}$	$\begin{cases} n, k \in \mathbb{N} \\ 0 \leq k \leq n \end{cases}$
• $\mathrm{C}_{n+1}^k = \mathrm{C}_n^k + \mathrm{C}_n^{k-1}$	$\begin{cases} n, k \in \mathbb{N} \\ 1 \leq k \leq n \end{cases}$

- Thu gọn dựa vào những công thức trên và đưa về phương trình đại số. Giải phương trình đại số này tìm được ẩn.
- So với điều kiện để nhận những giá trị cần tìm.

VÍ DỤ 1. Giải phương trình $\mathrm{P}_2 \cdot x^2 - \mathrm{P}_3 \cdot x = 8$.

VÍ DỤ 2. Giải phương trình $\dfrac{\mathrm{P}_x - \mathrm{P}_{x-1}}{\mathrm{P}_{x+1}} = \dfrac{1}{6}$.

VÍ DỤ 3. Giải phương trình $\dfrac{(n+1)!}{(n-1)!} = 72$.

VÍ DỤ 4. Giải phương trình $\dfrac{n!}{(n-2)!} - \dfrac{n!}{(n-1)!} = 3$.

VÍ DỤ 5. Giải phương trình $\mathrm{A}_n^3 = 20n$.

VÍ DỤ 6. Giải phương trình $\mathrm{A}_n^3 + 2\mathrm{C}_n^2 = 16n$.

VÍ DỤ 7. Giải phương trình $\mathrm{A}_x^3 + \mathrm{C}_x^{x-2} = 14x$.

VÍ DỤ 8. Giải phương trình $\mathrm{A}_{x-2}^2 + \mathrm{C}_x^{x-2} = 101$.

VÍ DỤ 9. Cho $n \in \mathbb{Z}^+$ thỏa $\mathrm{C}_{n+1}^2 + 2\mathrm{C}_{n+2}^2 + 2\mathrm{C}_{n+3}^2 + \mathrm{C}_{n+4}^2 = 149$. Chứng minh: $\dfrac{\mathrm{A}_{n+1}^4 + 3\mathrm{A}_n^3}{(n+1)!} = \dfrac{3}{4}$.

VÍ DỤ 10. Giải bất phương trình $\mathrm{A}_n^3 + 15 < 15n$.

VÍ DỤ 11. Giải bất phương trình $2\mathrm{C}_{x+1}^2 + 3\mathrm{A}_x^2 < 30$.

1. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

CÂU 1. Với k và n là hai số nguyên dương tùy ý thỏa mãn $k \leq n$, mệnh đề nào đúng?

(A) $\mathrm{C}_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

(B) $\mathrm{C}_n^k = \dfrac{n!}{k!}$.

(C) $\mathrm{C}_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$.

(D) $\mathrm{C}_n^k = \dfrac{k!(n-k)!}{n!}$.

QUICK NOTE

CÂU 2. Có bao nhiêu cách sắp xếp chỗ ngồi cho 5 học sinh vào 5 ghế xếp thành một dãy?

A. 120. B. 240. C. 90. D. 60.

CÂU 3. Trong một lớp học có 20 bạn học sinh, hỏi có bao nhiêu cách chọn ra một bạn để làm lớp trưởng và một bạn khác làm lớp phó?

A. A_{20}^{18}. B. A_{20}^{2}. C. 20^2. D. C_{20}^{2}.

CÂU 4. Công thức tính số hoán vị P_n là

A. $P_n = (n-1)!$. B. $P_n = (n+1)!$. C. $P_n = \dfrac{n!}{n+1}$. D. $P_n = n!$.

CÂU 5. Số cách xếp 10 học sinh thành một hàng dọc là

A. $5! \cdot 5!$. B. $10!$. C. 10. D. 25.

CÂU 6. Có bao nhiêu số tự nhiên gồm 4 chữ số đôi một khác nhau lập ra từ các chữ số 2;4;6;8?

A. 4. B. $4!$. C. C_4^4. D. $4! - 3!$.

CÂU 7. Có bao nhiêu cách sắp xếp 5 học sinh đứng thành 1 hàng dọc.

A. 5. B. 15. C. 25. D. 120.

CÂU 8. Từ các chữ số $1;2;3;5;6;7$ có thể lập được bao nhiêu số có 3 chữ số khác nhau

A. C_7^3. B. A_7^3. C. $6 \cdot 5 \cdot 4$. D. 6^3.

CÂU 9. Có bao nhiêu cách chọn một ban chấp hành gồm một trưởng ban, một phó ban, một thư ký và một thủ quỹ từ 14 thành viên

A. A_{14}^4. B. C_{14}^4. C. $4!$. D. 4^{14}.

CÂU 10. Có 10 cuốn sách toán, số cách tặng cho 3 bạn An, Thu, Minh mỗi bạn một cuốn sách toán từ số sách trên là

A. C_{10}^3. B. A_{10}^3. C. 3^{10}. D. $3!$.

CÂU 11. Một lớp có 20 học sinh nam, 15 học sinh nữ. Có bao nhiêu cách lấy ra cùng lúc 3 học sinh bất kì trong lớp đó để phân công làm tổ trưởng của 3 tổ khác nhau là

A. C_{35}^3. B. A_{35}^3.

C. $C_{20}^1 C_{15}^2 + C_{20}^2 C_{15}^1$. D. $C_{20}^1 C_{15}^2 + C_{20}^3 + C_{15}^3$.

CÂU 12. Cho tập hợp $X = \{1;2;4;5;8\}$, một tổ hợp chập 2 của X là

A. $\{2\}$. B. $1;2$. C. $\{1;5\}$. D. $\{5;6\}$.

CÂU 13. Cho hình ngũ giác $ABCDE$. Ta nối các đỉnh của nó lại để được các tam giác, ta có thể coi mỗi tam giác như vậy là

A. Một chỉnh hợp chập 3 của 5 phần tử.

B. Một tổ hợp chập 3 của 5 phần tử.

C. Một hoán vị của 3 phần tử.

D. Một bộ gồm 3 chỉnh hợp của 5 phần tử.

CÂU 14. Lớp 11A có 35 học sinh. Hỏi có bao nhiêu cách chọn một đội 5 bạn đi trực tuần?

A. C_{35}^5. B. A_{35}^5. C. $5!$. D. 5.

CÂU 15. Một đội văn nghệ có 5 bạn nam và 8 bạn nữ. Số cách chọn 2 bạn nam và 3 bạn nữ đi biểu diễn là

A. C_{13}^5. B. A_{13}^5. C. $A_5^2 \cdot A_8^3$. D. $C_5^2 \cdot C_8^3$.

CÂU 16. Với k, n là hai số nguyên dương tùy ý thỏa mãn $k \le n$, mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $C_n^k = C_n^{n-k}$. B. $C_n^k = C_{n+k}^k$. C. $C_n^k = C_n^{k+1}$. D. $C_n^k = C_{n+1}^k$.

CÂU 17. Với k, n là hai số nguyên dương tùy ý thỏa mãn $k < n$, mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$. B. $C_n^k = C_{n+1}^k + C_{n+1}^{k-1}$.

C. $C_n^k = C_n^{k+1}$. D. $C_n^k = C_{n+1}^k$.

CÂU 18. Số cách xếp 4 bạn học sinh thành một hàng ngang là

A. 16. B. 4^4. C. 12. D. $4!$.

QUICK NOTE

CÂU 19. Từ các chữ số $1; 2; 3; 5; 6; 8$ có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có 6 chữ số đôi một khác nhau biết rằng các số đó phải bắt đầu bằng chữ số 1.

A. $6!$. B. $5!$. C. $4!$. D. 5^5.

CÂU 20. Lớp $11A$ có 30 học sinh. Có bao nhiêu cách chọn ra 3 học sinh phân vào 3 vị trí Lớp trưởng, Lớp phó và Bí thư.

A. C_{30}^3. B. A_{30}^3. C. 30. D. $3!$.

CÂU 21. Có 5 quyển sách Toán, Vật lý, Hóa học, Lịch sử, Địa lý. Có bao nhiêu cách chọn ra 3 quyển sách để trao tặng cho 3 em học sinh (mỗi em một quyển).

A. A_5^3. B. $5!$. C. $3!$. D. C_5^3.

CÂU 22. Xét số nguyên $n \geq 1$ và số nguyên k với $0 \leq k \leq n$. Công thức nào sau đây đúng?

A. $C_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$. B. $C_n^k = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}$.

C. $C_n^k = \dfrac{n!}{k!}$. D. $C_n^k = \dfrac{n!}{n!\,(n-k)!}$.

CÂU 23. Cần phân công 3 bạn từ một tổ 10 bạn để làm trực nhật. Hỏi có bao nhiêu cách phân công khác nhau

A. C_{10}^3. B. 3^{10}. C. A_{10}^3. D. 10^3.

CÂU 24. Có 5 bạn học sinh trong đó có hai bạn là Thảo và Linh. Số cách xếp 5 học sinh trên thành một hàng ngang sao cho hai bạn Thảo và Linh đứng cạnh nhau là

A. 48. B. 120. C. 24. D. 6.

CÂU 25. Xếp sáu bạn A, B, C, D, E, F vào cùng một ghế dài. Hỏi có bao nhiêu cách xếp sao cho hai bạn A và F luôn ngồi cạnh nhau?

A. 720. B. 360. C. 120. D. 240.

CÂU 26. Cho hai đường thẳng song song d_1 và d_2. Trên d_1 lấy 17 điểm phân biệt, trên d_2 lấy 20 điểm phân biệt. Tính số tam giác mà có các đỉnh được chọn từ 37 điểm này.

A. 5690. B. 5960. C. 5950. D. 5590.

CÂU 27. Trên giá sách có 4 quyển sách Toán khác nhau, 5 quyển sách Văn khác nhau và 6 quyển sách Tiếng Anh khác nhau. Có bao nhiêu cách lấy 4 quyển sách từ giá sách này sao cho có đủ ba môn và số quyển sách Văn nhiều nhất?

A. $C_4^1C_5^2C_6^1$. B. $C_4^1C_5^1C_6^2$. C. $C_{10}^2C_5^2$. D. $C_4^2C_5^1C_6^1$.

CÂU 28. Trong trận chung kết bóng đá phải phân định thắng thua bằng đá luân lưu 11 mét. Huấn luyện viên của mỗi đội cần trình với trọng tài một danh sách sắp thứ tự 5 cầu thủ trong 11 cầu thủ để đá luân lưu 5 quả 11 mét. Hỏi huấn luyện viên của mỗi đội sẽ có bao nhiêu cách chọn?

A. 55440. B. 120. C. 462. D. 39916800.

CÂU 29. Một lớp học có 36 học sinh chụp ảnh lưu niệm. Lớp muốn trong bức ảnh có 10 bạn ngồi ở hàng thứ nhất, 12 bạn đứng ở hàng thứ hai và 14 bạn đứng ở hàng thứ ba. Hỏi có bao nhiêu cách xếp vị trí chụp ảnh như vậy?

A. $C_{36}^{10} \cdot C_{26}^{12} \cdot 14!$. B. $A_{36}^{10} \cdot A_{26}^{12} \cdot 14!$. C. $A_{36}^{10} \cdot A_{26}^{12}$. D. $C_{36}^{10} \cdot C_{26}^{12}$.

CÂU 30. Cho các số tự nhiên m, n thỏa mãn đồng thời các điều kiện $C_m^2 = 153$ và $C_m^n = C_m^{n+2}$. Khi đó $m + n$ bằng

A. 25. B. 24. C. 26. D. 23. .

CÂU 31. Từ các chữ số 1; 2; 3; 4; 6 có thể lập được bao nhiêu số có ba chữ số đôi một khác nhau và chia hết cho 3.

A. 12. B. 23. C. 18. D. 24.

CÂU 32. Một tổ có 5 học sinh nam và 4 học sinh nữ. Số cách xếp học sinh trong tổ thành một hàng dọc sao cho nam nữ đứng xen kẽ là

A. 362880. B. 144. C. 2880. D. 5760.

CÂU 33. Có bao nhiêu số tự nhiên gồm hai chữ số khác nhau mà hai chữ số này đều lẻ?

A. A_5^2. B. C_5^2. C. $5!$. D. 5^2.

CÂU 34. Lớp 10A có 35 học sinh trong đó có 15 học sinh nam và 20 học sinh nữ. Giáo viên chủ nhiệm lớp 10A muốn lập ra một ban cán sự lớp gồm 1 lớp trưởng, 1 lớp phó, 1 bí thư và 4 tổ trưởng. Biết các học sinh trong lớp 10A có thể đảm nhiệm được các chức vụ trong ban cán sự lớp. Hỏi giáo viên chủ nhiệm lớp 10A có bao nhiêu cách lập ban cán sự lớp như trên ?

A A^7_{35}. **B** C^7_{35}. **C** $C^3_{35}\cdot A^4_{32}$. **D** $A^3_{35}\cdot C^4_{32}$.

CÂU 35. Có bao nhiêu đoạn thẳng được tạo thành từ 10 điểm phân biệt khác nhau?

A 45. **B** 90. **C** 35. **D** 55.

CÂU 36. Số véc-tơ khác $\vec{0}$ có điểm đầu, điểm cuối là hai trong 6 đỉnh của lục giác bằng

A P_6. **B** C^2_6. **C** A^2_6. **D** 36 .

CÂU 37. Cần chọn 3 người đi công tác từ một tổ có 30 người, khi đó số cách chọn là

A A^3_{30}. **B** 3^{30}. **C** 10. **D** C^3_{30}.

CÂU 38. Trong một buổi khiêu vũ có 20 nam và 18 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách chọn ra một đôi nam nữ để khiêu vũ ?

A C^2_{38}. **B** A^2. **C** $C^2_{20}\cdot C^1_{18}$. **D** $C^1_{20}\cdot C^1_{18}$.

CÂU 39. Có 3 bạn nam và 3 bạn nữ được xếp vào một ghế dài có 6 vị trí. Hỏi có bao nhiêu cách xếp sao cho nam và nữ ngồi xen kẽ lẫn nhau?

A 48. **B** 72. **C** 24. **D** 36.

CÂU 40. Cho hai đường thẳng song song. Trên đường thứ nhất có 10 điểm, trên đường thứ hai có 15 điểm. Hỏi có bao nhiêu tam giác được tạo thành từ các điểm đã cho?

A 1725. **B** 1050. **C** 675. **D** 1275.

CÂU 41. Trên đường thẳng d_1 cho 5 điểm phân biệt, trên đường thẳng $d_2 \parallel d_1$ cho n điểm phân biệt. Biết có 175 tam giác được tạo thành mà 3 đỉnh lấy từ $n+5$ điểm trên thì n là

A $n=9$. **B** $n=8$. **C** $n=10$. **D** $n=7$.

CÂU 42. Trong một đa giác lồi n cạnh, số đường chéo của đa giác là

A C^2_n. **B** A^2_n. **C** A^2-n. **D** C^2_n-n.

CÂU 43. Có bao nhiêu số có bốn chữ số khác nhau được tạo thành từ các chữ số $1,2,3,4,5$.

A A^4_5. **B** P_5. **C** C^4_5. **D** P_4.

CÂU 44. Cho tập $A=\{1;2;3;5;7;9\}$. Từ tập A có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm bốn chữ số đôi một khác nhau?

A 720 . **B** 360 . **C** 120 . **D** 24 .

CÂU 45. Cho tập $A=\{0;1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$. Có bao nhiêu số tự nhiên gồm 5 chữ số khác nhau được tạo từ tập A?

A A^4_{10}. **B** $9\cdot C^4_9$. **C** $9\cdot A^4_9$. **D** C^4_{10}.

CÂU 46. Nghiệm của phương trình $A^3_n=20n$ là

A $n=6$. **B** $n=5$. **C** $n=8$. **D** $n=-3$.

CÂU 47. Cho $n\in\mathbb{N}^*$ thỏa mãn $C^5_n=2002$. Tính A^5_n

A 2007. **B** 10010. **C** 40040. **D** 240240.

CÂU 48. Tổng các nghiệm của bất phương trình $A^3_x+15<15x$ bằng

A 7 . **B** 9. **C** 14 . **D** 20 .

CÂU 49. Có bao nhiêu cách chia hết 4 đồ vật khác nhau cho 3 người, biết rằng mỗi người nhận được ít nhất 1 đồ vật?

A 72. **B** 18. **C** 12. **D** 36.

CÂU 50. Cho đa giác đều $2n$ đỉnh $(n\geq 2, n\in\mathbb{N})$. Biết số hình chữ nhật được tạo thành từ $2n$ đỉnh của đa giác đó là 45. Tìm n.

A $n=12$. **B** $n=10$. **C** $n=9$. **D** $n=45$.

CÂU 51. Có 10 đội bóng thi đấu theo thể thức vòng tròn một lượt, thắng được 3 điểm, hòa 1 điểm, thua 0 điểm. Kết thúc giải đấu, tổng cộng số điểm của tất cả 10 đội là 130. Hỏi có bao nhiêu trận hòa?

A 7. **B** 8. **C** 5. **D** 6.

QUICK NOTE

QUICK NOTE

CÂU 52. Trong một hộp đựng 4 bi xanh, 4 bi vàng và 12 bi đỏ. Hỏi có bao nhiêu cách lấy ra từ hộp 10 viên bi sao cho trong 10 bi lấy ra có đủ 3 loại?

(A) 184690. (B) 168806. (C) 168674. (D) 176682.

CÂU 53. Cho các số nguyên dương k, n $(k < n)$. Tính tổng $T = \mathrm{C}_n^k + \mathrm{C}_n^{k+1} + \mathrm{C}_{n+1}^{k+2}$

(A) $T = \mathrm{C}_n^{k+2}$. (B) $T = \mathrm{C}_{n+1}^{k+2}$. (C) $T = \mathrm{C}_{n+1}^{k+1}$. (D) $T = \mathrm{C}_{n+2}^{n-k}$.

CÂU 54. Từ các chữ số $0; 1; 2; 3$ có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có 4 chữ số đôi một khác nhau?

(A) 24. (B) 6. (C) 18. (D) 12.

CÂU 55. Từ các chữ số $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm ba chữ số đôi một khác nhau ?

(A) C_7^3. (B) 7^3. (C) A_7^3. (D) 3^7.

CÂU 56. Tổ 1 lớp 10A1 có 6 học sinh nam và 5 học sinh nữ. Giáo viên chủ nhiệm cần chọn ra 4 học sinh của tổ 1 để tham gia đội kịch sinh hoạt ngoại khóa. Hỏi có bao nhiêu cách chọn 4 học sinh trong đó có ít nhất một học sinh nam?

(A) 120. (B) 625. (C) 325. (D) 35.

CÂU 57. Có 3 vận động viên thi chạy ngắn cự ly 100m. Hỏi có bao nhiêu thứ tự về đích của 3 vận động viên đó.

(A) 3. (B) 6. (C) 9. (D) 4.

CÂU 58. Có bao nhiêu số tự nhiên gồm 5 chữ số đôi một khác nhau?

(A) C_{10}^5. (B) $9 \cdot \mathrm{A}_9^4$. (C) A_{10}^5. (D) $9 \cdot \mathrm{C}_9^4$.

CÂU 59. Trong một môn học, thầy giáo có 30 câu hỏi khác nhau, trong đó có 5 câu khó, 10 câu trung bình và 15 câu dễ. Thầy giáo muốn chọn ra 1 đề kiểm tra gồm 5 câu, có đủ ba loại câu hỏi và có ít nhất 2 câu dễ. Hỏi thầy giáo có bao nhiêu cách chọn đề kiểm tra?

(A) 34125. (B) 33250. (C) 46375. (D) 56875.

CÂU 60. Một tổ có 8 học sinh trong đó có An và Bình. Tính số cách xếp 8 bạn trong tổ thành hàng ngang sao cho An và Bình luôn đứng cạnh nhau?

(A) 1440. (B) 5040. (C) 10080. (D) 40320.

CÂU 61. Cho tập hợp $A = \{0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6;\ 7\}$. Có bao nhiêu số tự nhiên lẻ có 6 chữ số đôi một khác nhau được lập từ các chữ số của tập A mà chữ số đứng ở vị trí thứ ba luôn chia hết cho 6.

(A) 2880. (B) 5040. (C) 2640. (D) 2886.

CÂU 62. Cho tam giác ABC. Trên mỗi cạnh AB, BC, CA lấy 10 điểm phân biệt và không có điểm nào trùng với 3 đỉnh A, B, C. Hỏi từ 33 điểm đã cho (tính cả các điểm A, B, C) lập được bao nhiêu tam giác.

(A) 3565. (B) 4796. (C) 5456. (D) 4060.

CÂU 63. Tìm x thoả mãn đẳng thức sau:$\mathrm{C}_x^2\mathrm{C}_x^{x-2} + 2\mathrm{C}_x^2\mathrm{C}_x^3 + \mathrm{C}_x^3\mathrm{C}_x^{x-3} = 100$.

(A) 3. (B) 4. (C) 5. (D) 6.

CÂU 64. Xếp ngẫu nhiên 3 bạn lớp A, 2 bạn lớp B và 1 bạn lớp C vào dãy gồm 6 ghế được xếp ngang. Hỏi có bao nhiêu cách để xếp bạn lớp C ngồi giữa 2 bạn lớp A ?

(A) 108. (B) 72. (C) 144. (D) 36.

CÂU 65. Một nhóm học sinh gồm 15 nam và 5 nữ. Người ta muốn chọn từ nhóm ra 5 người để lập thành một đội cờ đỏ sao cho phải có 1 đội trưởng nam, 1 đội phó nam và có ít nhất 1 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách lập đội cờ đỏ?

(A) 131444. (B) 141666. (C) 241561. (D) 111300.

CÂU 66. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp 2 quyển sách Ngữ Văn, 3 quyển sách Tiếng Anh và 5 Quyển sách Toán (tất cả các quyển sách khác nhau) thành hàng ngang lên một kệ sách để hai quyển sách cùng môn thì không được sắp xếp kề nhau?

(A) 63360. (B) 120960. (C) 14400. (D) 144000.

CÂU 67. Có hai hộp, mỗi hộp chứa các quả cầu trắng và đen. Từ mỗi hộp lấy ngẫu nhiên ra 1 quả cầu. Biết rằng xác suất để lấy được 2 quả cầu màu trắng là 0,54. Tính xác suất lấy được 2 quả cầu đen. Biết rằng có 25 quả cầu trong cả hai hộp.

(A) $0,01$. (B) $0,04$. (C) $0,02$. (D) $0,05$.

QUICK NOTE

CÂU 68. Trong chương trình trò chơi thực tế, có 2 đội tham gia bốc thăm trúng thưởng. Các lá thăm được đánh số từ 1 đến 20. Mỗi lần bốc 1 lá thăm và đội chơi được quyền chọn 1 hoặc 2 lần bốc. Điểm số của đội chơi được tính như sau

- Nếu đội chơi chọn bốc thăm 1 lần thì điểm của đội chơi là điểm bốc được.
- Nếu đội chơi chọn bốc thăm 2 lần và tổng điểm có được không lớn hơn 20 thì điểm của đội chơi là tổng điểm bốc được.
- Nếu đội chơi chọn bốc thăm 2 lần và tổng điểm lớn hơn 20 thì điểm của đội chơi là tổng điểm bốc được trừ đi 20

Trong mỗi lượt chơi, đội nào có điểm số cao hơn sẽ thắng cuộc, hòa nhau sẽ chơi lại lượt khác. Đội A và đội B cùng tham gia một lượt chơi, đội A chơi trước và có điểm số là 15. Tính xác suất để đội B thắng cuộc ngay ở lượt chơi này.

(A) $P = \dfrac{1}{4}$. (B) $P = \dfrac{7}{16}$. (C) $P = \dfrac{19}{40}$. (D) $P = \dfrac{3}{16}$.

CÂU 69. Xếp ngẫu nhiên 10 học sinh gồm 2 học sinh lớp 10A, 3 học sinh lớp 10B và 5 học sinh lớp 10C thành một hàng ngang. Tính số cách xếp để trong 10 học sinh trên không có 2 học sinh cùng lớp đứng cạnh nhau.

(A) 63360. (B) 86400. (C) 41260. (D) 95364.

CÂU 70. Có mười con thỏ được đánh số từ 1 đến 10 và ba cái chuồng khác nhau. Hỏi có bao nhiêu cách nhốt số thỏ trên vào chuồng sao cho không có hai con thỏ mang số nguyên liên tiếp nào được nhốt chung trong một cái chuồng và chuồng nào cũng có thỏ?

(A) 150 cách. (B) 160 cách. (C) 170 cách. (D) 180 cách.

CÂU 71. Có 4 cặp vợ chồng được xếp ngồi trên một chiếc ghế dài có 8 chỗ. Biết rằng mỗi người vợ chỉ ngồi cạnh chồng của mình hoặc ngồi cạnh một người phụ nữ khác. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp chỗ ngồi thỏa mãn?

(A) 816. (B) 18. (C) 8!. (D) 604.

CÂU 72. Mệnh đề nào đúng trong các mệnh đề sau ?

(A) $A_n^k = k! \cdot C_n^{n-k}$. (B) $C_n^k = k! \cdot A_n^k$. (C) $A_n^k = k \cdot C_n^k$. (D) $C_n^k = k \cdot A_n^k$.

CÂU 73. Có n phần tử $(n > 0)$, lấy ra k phần tử $(0 \le k \le n)$ đem sắp xếp theo một thứ tự nhất định mà khi thay đổi thứ tự ta được cách sắp xếp mới. Khi đó số cách sắp xếp là

(A) C_n^k. (B) A_k^n. (C) A_n^k. (D) P_n.

CÂU 74. Từ các số 1, 2, 3, 4 có thể tạo ra bao nhiêu số tự nhiên có 4 chữ số đôi một khác nhau?

(A) 12. (B) 24. (C) 42. (D) 4^4.

CÂU 75. Có bao nhiêu cách chọn ra 5 cầu thủ từ 11 cầu thủ để thực hiện quả đá luân lưu 11 m theo thứ tự từ quả thứ nhất đến quả thứ 5 ?

(A) A_{11}^5. (B) C_{11}^5. (C) $A_{11}^5 \cdot 5!$. (D) C_{10}^5.

CÂU 76. Cho tập hợp M có 10 phần tử. Số tập con có 2 phần tử của M là

(A) A_{10}^8. (B) A_{10}^2. (C) C_{10}^2. (D) 10^2.

CÂU 77. Nhân dịp lễ sơ kết học kì 1, để thưởng cho 3 học sinh có thành tích tốt nhất lớp, cô An đã mua 10 cuốn sách khác nhau và chọn ra 3 cuốn để phát thưởng cho 3 học sinh đó mỗi học sinh nhận 1 cuốn. Hỏi cô An có bao nhiêu cách phát thưởng.

(A) C_{10}^3. (B) A_{10}^3. (C) 10^3. (D) $3 \cdot C_{10}^3$.

CÂU 78. Có bao nhiêu cách xếp 5 học sinh thành một hàng dọc ?

(A) 5^5. (B) 5!. (C) 4!. (D) 5.

CÂU 79. Có bao nhiêu cách chia 10 người thành hai nhóm, một nhóm 6 người và một nhóm 4 người ?

(A) 210. (B) 120. (C) 100. (D) 140.

CÂU 80. Trong kho đèn trang trí đang còn 5 bóng đèn loại I, 7 bóng đèn loại II, các bóng đèn đều khác nhau về màu sắc và hình dáng. Lấy ra 5 bóng đèn bất kỳ. Hỏi có bao nhiêu khả năng xảy ra số bóng đèn loại I nhiều hơn số bóng đèn loại II ?

(A) 246. (B) 3480. (C) 245. (D) 3360.

QUICK NOTE

CÂU 81. Có 5 nhà toán học nam, 3 nhà toán học nữ và 4 nhà vật lý nam. Lập một đoàn công tác gồm 3 người cần có cả nam và nữ, có cả nhà toán học và vật lý thì có bao nhiêu cách ?

A 120. **B** 90. **C** 80. **D** 220.

CÂU 82. Tổ 1 lớp $11A$ có 6 học sinh nam và 5 học sinh nữ. Giáo viên chủ nhiệm cần chọn ra 4 học sinh của tổ 1 để lao động vệ sinh cùng cả trường. Hỏi có bao nhiêu cách chọn như vậy nếu có ít nhất một học sinh nam ?

A 600. **B** 25. **C** 325. **D** 30.

CÂU 83. Có 9 tấm thẻ được đánh số từ 1 đến 9. Có bao nhiêu cách chọn ra hai tấm thẻ rồi nhân hai số ghi trên đó lại với nhau sao cho kết quả thu được là một số chẵn ?

A 10. **B** 26. **C** 36. **D** 27.

CÂU 84. Cho tập hợp $A = \{0; 1; 2; \ldots; 7\}$. Hỏi từ A có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có 5 chữ số đôi một khác nhau sao cho một trong ba chữ số đầu tiên phải là 1 ?

A 65. **B** 2280. **C** 2520. **D** 2802.

CÂU 85. Có bao nhiêu số chẵn mà mỗi số có bốn chữ số đôi một khác nhau ?

A 2520. **B** 50000. **C** 4500. **D** 2296.

CÂU 86. Từ các số 0, 1, 2, 3, 5 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có bốn chữ số đôi một khác nhau và không chia hết cho 5 ?

A 72. **B** 120. **C** 54. **D** 69.

CÂU 87. Cho hai đường thẳng d_1 và d_2 song song nhau. Trên d_1 lấy 5 điểm phân biệt. Trên d_2 lấy n điểm phân biệt. Biết rằng có 175 tam giác được tạo thành mà ba đỉnh của tam giác là ba trong $n + 5$ điểm kể trên. Giá trị của n là

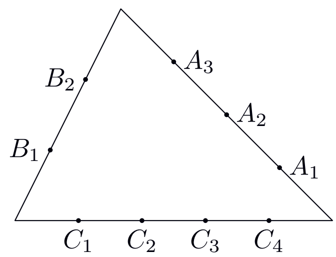
A 10. **B** 7. **C** 8. **D** 9.

CÂU 88. Cho đa giác đều $A_1A_2A_3 \cdots A_{30}$ nội tiếp đường tròn tâm O. Tính số hình chữ nhật mà bốn đỉnh là bốn trong 30 đỉnh của đa giác ?

A 105. **B** 27405. **C** 27406. **D** 106.

CÂU 89.
Cho một tam giác. Trên ba cạnh của tam giác lấy 9 điểm như hình vẽ. Có bao nhiêu tam giác có ba đỉnh là ba trong 9 điểm kể trên?

A 79. **B** 48. **C** 55. **D** 24.



CÂU 90. Có bao nhiêu số tự nhiên có ba chữ số đôi một khác nhau lấy từ tập $A = \{1; 2; 3; 4; 5\}$ sao cho mỗi số lập được luôn có mặt của số 3 ?

A 72. **B** 36. **C** 32. **D** 48.

CÂU 91. Có bao nhiêu số tự nhiên có 7 chữ số đôi một khác nhau sao cho chữ số 2 đứng liền giữa chữ số 1 và chữ số 3 ?

A 2942. **B** 5880. **C** 7440. **D** 3204.

Bài 3. NHỊ THỨC NEWTON

QUICK NOTE

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Nhị thức Newton

Cho a, b là các số thực. Ta có

$$(a+b)^4 = \mathrm{C}_4^0 a^4 + \mathrm{C}_4^1 a^3 b + \mathrm{C}_4^2 a^2 b^2 + \mathrm{C}_4^3 a b^3 + \mathrm{C}_4^4 b^4 = a^4 + 4a^3 b + 6a^2 b^2 + 4ab^3 + b^4.$$

$$(a+b)^5 = \mathrm{C}_5^0 a^5 + \mathrm{C}_5^1 a^4 b + \mathrm{C}_5^2 a^3 b^2 + \mathrm{C}_5^3 a^2 b^3 + \mathrm{C}_5^4 a b^4 + \mathrm{C}_5^5 b^5 = a^5 + 5a^4 + 10a^3 b^2 + 10a^2 b^3 + 5ab^4 + b^5.$$

B. CÁC DẠNG TOÁN

1 Khai triển một nhị thức Newton

Cho a, b là các số thực. Ta có

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3 b + 6a^2 b^2 + 4ab^3 + b^4.$$
$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4 + 10a^3 b^2 + 10a^2 b^3 + 5ab^4 + b^5.$$

1. Ví dụ minh hoạ

VÍ DỤ 1. Khai triển $(x+1)^4$.

VÍ DỤ 2. Khai triển $(x-1)^4$.

VÍ DỤ 3. Khai triển các biểu thức sau

a) $(x-2y)^4$; b) $(3x-y)^5$.

2. Bài tập tự luận

BÀI 1. Khai triển các biểu thức sau

a) $(2+x)^4$; b) $(2-3y)^5$; c) $(3x-2y)^4$

BÀI 2. Khai triển các biểu thức sau

a) $\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^4$; b) $\left(x-\dfrac{1}{3}\right)^4$.

BÀI 3. Khai triển đa thức $(x+5)^4 + (x-5)^4$.

BÀI 4. Số dân của một tỉnh ở thời điểm hiện tại là khoảng 800 nghìn người. Giả sử rằng tỉ lệ tăng dân số hằng năm của tỉnh đó là $r\%$.

a) Viết công thức tính số dân của tỉnh đó sau 1 năm, sau 2 năm. Từ đó suy ra công thức tính số dân của tỉnh đó sau 5 năm nữa là $P = 800\left(1+\dfrac{r}{100}\right)^5$ (nghìn người).

b) Với $r = 1{,}5\%$, dùng hai số hạng đầu trong khai triển của $(1+0{,}015)^5$, hãy ước tính số dân của tỉnh đó sau 5 năm nữa (theo đơn vị nghìn người).

2 Tìm hệ số số hạng trong khai triển nhị thức Newton

Để tìm số hạng hay hệ số của số hạng trong khai triển nhị thức Newton ta có thể làm theo các cách sau

- Cách 1: Sử dụng tam giác Pascal để khai triển toàn bộ nhị thức rồi tìm số hạng thích hợp. Thường sử dụng cách này với đa thức bậc nhỏ hơn hoặc bằng 5.
- Cách 2: Sử dụng số hạng tổng quát (được giới thiệu ở Chuyên đề học tập Toán 10).
  Số hạng tổng quát trong khai triển của $(a+b)^n$ là $\mathrm{C}_n^k a^{n-k} b^k$ hay $\mathrm{C}_n^{n-k} a^k b^{n-k}$.
  Nếu trong khai triển có chứa x, chẳng hạn $(ax+b)^n$ thì ta có số hạng chứa x^k là $\mathrm{C}_n^{n-k} a^k b^{n-k} x^k$. Do đó hệ số của x^k trong khai triển của $(ax+b)^n$ là $\mathrm{C}_n^{n-k} a^k b^{n-k}$.

Khi tìm hệ số lớn nhất trong khai triển $(a+b)^n$ ta sử dụng nhận xét sau.

QUICK NOTE

Dãy hệ số C_n^0; C_n^1; C_n^2;...; C_n^{n-1}; C_n^n trong khai triển $(a+b)^n$ có hai tính chất sau

- Các cặp hệ số tính từ hai đầu trở vào (tương tứng) thì bằng nhau.

$$\mathrm{C}_n^k = \mathrm{C}_n^{n-k}, \forall k \in \mathbb{N}, k \leq n, n \in \mathbb{N}^*.$$

- Dãy hệ số tăng dần đến "giữa" rồi giảm dần

$$\mathrm{C}_n^0 < \mathrm{C}_n^1 < \mathrm{C}_n^2 < \ldots$$
$$\ldots > \mathrm{C}_n^{n-2} > \mathrm{C}_n^{n-1} > \mathrm{C}_n^n.$$

VÍ DỤ 1. Khai triển biểu thức $(a+bx)^4$, viết các số hạng theo thứ tự bậc của x tăng dần, nhận được biểu thức gồm hai số hạng đầu tiên là $16-96x$. Hãy tìm số hạng chứa x^2.

VÍ DỤ 2. Tìm hệ số của x^4 trong khai triển biểu thức $(2x+1)(x-1)^5$.

VÍ DỤ 3. Tìm hệ số của x^7 trong khai triển thành đa thức của $(2-3x)^{10}$.

VÍ DỤ 4. Cho a là một số thực dương. Biết rằng trong khai triển của $(3x+a)^8$, hệ số của x^4 là 70. Tìm giá trị của a.

VÍ DỤ 5. Tìm hệ số lớn nhất trong khai triển của

a) $(a+b)^6$;

b) $(a+b)^7$.

1. Bài tập tự luận

BÀI 1. Tìm hệ số của x^3 trong khai triển $(3x-2)^5$.

BÀI 2. Trong khai triển của $(5x-2)^5$, số mũ của x được sắp xếp theo lũy thừa tăng dần, hãy tìm hạng tử thứ hai tính từ trái sang phải.

BÀI 3. Xác định hạng tử không chứa x trong khai triển của $\left(x+\dfrac{2}{x}\right)^4$.

BÀI 4. Tìm giá trị tham số a để trong khai triển $(a+x)(1+x)^4$ có một số hạng là $22x^2$.

BÀI 5. Cho số thực $a \neq 0$, biết rằng trong khai triển $(ax-1)^5$, hệ số của x^4 gấp bốn lần hệ số của x^2. Hãy tìm giá trị của tham số a.

BÀI 6. Biết rằng trong khai triển của $\left(ax+\dfrac{1}{x}\right)^4$, số hạng không chứa x là 24. Hãy tìm giá trị của tham số a

BÀI 7. Xác định hệ số của

a) x^{10} trong khai triển của $(x+4)^{20}$;

b) x^{12} trong khai triển của $(3+2x)^{30}$;

c) x^{15} trong khai triển của $\left(\dfrac{2x}{3}-\dfrac{1}{7}\right)^{31}$;

BÀI 8. Tìm hệ số của x^5 trong khai triển thành đa thức của biểu thức

$$x(1-2x)^5 + x^2(1+3x)^{10}.$$

BÀI 9. Biết rằng a là một số thực khác 0 và trong khai triển của $(ax+1)^6$, hệ số của x^4 gấp ba lần hệ số của x^2. Tìm giá trị của a.

BÀI 10. Tìm hệ số lớn nhất trong khai triển của

a) $(a+b)^8$;

b) $(a+b)^9$.

BÀI 11. Biết rằng $(2+x)^{100} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_{100}x^{100}$. Với giá trị nào của k $(0 \leq k \leq 100)$ thì a_k lớn nhất.

QUICK NOTE

3 Chứng minh, tính giá trị của biểu thức tổ hợp có sử dụng khai triển nhị thức Newton.

- ***Phương pháp:*** Sử dụng khai triển nhị thức Newton tổng quát $(a+b)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k a^{n-k} b^k$, sau đó thay thế các giá trị a và b thích hợp.
- ***Một số hệ thức thường gặp:***

a) $\mathrm{C}_n^k = \mathrm{C}_n^{n-k}$.

b) $\mathrm{C}_{n-1}^{k-1} + \mathrm{C}_{n-1}^{k} = \mathrm{C}_n^k$.

c) $\mathrm{C}_n^0 + \mathrm{C}_n^1 + \ldots + \mathrm{C}_n^k + \ldots + \mathrm{C}_n^n = 2^n$.

d) $\mathrm{C}_n^0 - \mathrm{C}_n^1 + \ldots + (-1)^k \mathrm{C}_n^k + \ldots + (-1)^n \mathrm{C}_n^n = 0$.

e) $\mathrm{C}_{2n}^0 + \mathrm{C}_{2n}^2 + \mathrm{C}_{2n}^4 + .. + \mathrm{C}_{2n}^{2n} = 2^{2n-1}$.

f) $\mathrm{C}_{2n}^1 + \mathrm{C}_{2n}^3 + \mathrm{C}_{2n}^5 + \ldots . + \mathrm{C}_{2n}^{2n-1} = 2^{2n-1}$.

VÍ DỤ 1. Với n là số nguyên dương, chứng minh rằng $1 + 4\mathrm{C}_n^1 + 4^2\mathrm{C}_n^2 + \ldots + 4^n\mathrm{C}_n^n = 5^n$.

VÍ DỤ 2. Với n là số nguyên dương, chứng minh rằng

$$4^n\mathrm{C}_n^0 - 4^{n-1}\mathrm{C}_n^1 + 4^{n-2}\mathrm{C}_n^2 + \ldots + (-1)^n\mathrm{C}_n^n = \mathrm{C}_n^0 + 2\mathrm{C}_n^1 + 2^2\mathrm{C}_n^2 + \ldots + 2^n\mathrm{C}_n^n.$$

VÍ DỤ 3. Tính tổng $S = 2^{18}\mathrm{C}_{18}^0 - 2^{17}\mathrm{C}_{18}^1 + 2^{16}\mathrm{C}_{18}^2 - \ldots + \mathrm{C}_{18}^{18}$.

VÍ DỤ 4. Tính tổng $S = \mathrm{C}_{10}^0 2^{11} 3^1 + \mathrm{C}_{10}^1 2^{10} 3^2 + \mathrm{C}_{10}^2 2^9 3^3 + \ldots + \mathrm{C}_{10}^9 2^2 3^{10} + \mathrm{C}_{10}^{10} 2^1 3^{11}$.

1. Bài tập tự luận

BÀI 1. Chứng minh

a) $\mathrm{C}_{2n}^0 + \mathrm{C}_{2n}^1 + \mathrm{C}_{2n}^2 + \mathrm{C}_{2n}^3 + \cdots + \mathrm{C}_{2n}^{2n-1} + \mathrm{C}_{2n}^{2n} = 4^n$.

b) $\mathrm{C}_n^0 \cdot 3^n - \mathrm{C}_n^1 \cdot 3^{n-1} + \cdots + (-1)^n\mathrm{C}_n^n = \mathrm{C}_n^0 + \mathrm{C}_n^1 + \cdots + \mathrm{C}_n^n$.

BÀI 2. Tính các tổng sau

a) $S = \mathrm{C}_5^0 + \mathrm{C}_5^1 + \mathrm{C}_5^2 + \cdots + \mathrm{C}_5^5$.

b) $S = 2\mathrm{C}_{2010}^1 + 2^3\mathrm{C}_{2010}^3 + 2^5\mathrm{C}_{2010}^5 + \cdots + 2^{2009}\mathrm{C}_{2010}^{2009}$.

BÀI 3. Tính tổng $S = \mathrm{C}_{15}^8 + \mathrm{C}_{15}^9 + \mathrm{C}_{15}^{10} + \ldots + \mathrm{C}_{15}^{15}$.

BÀI 4. Tính tổng

a) $S = \mathrm{C}_5^0 + 2\mathrm{C}_5^1 + 2^2\mathrm{C}_5^2 + \cdots + 2^5\mathrm{C}_5^5$.

b) $S = 4^0\mathrm{C}_8^0 + 4^1\mathrm{C}_8^1 + 4^2\mathrm{C}_8^2 + \cdots + 4^8\mathrm{C}_8^8$.

BÀI 5. Với n là số nguyên dương, chứng minh $\mathrm{C}_n^1 + 2\mathrm{C}_n^2 + 3\mathrm{C}_n^3 + \ldots + n\mathrm{C}_n^n = n \cdot 2^{n-1}$.

BÀI 6. Chứng minh rằng $\mathrm{C}_{2022}^0 + 2^2\mathrm{C}_{2022}^2 + \ldots + 2^{2022}\mathrm{C}_{2022}^{2022} = \dfrac{3^{2022}+1}{2}$

BÀI 7. Với p, a, b là các số nguyên dương và $p \le a, b$. Chứng minh rằng

$$\mathrm{C}_a^p + \mathrm{C}_a^{p-1}\mathrm{C}_b^1 + \mathrm{C}_a^{p-2}\mathrm{C}_b^2 + \ldots + \mathrm{C}_a^{p-q}\mathrm{C}_b^q + \ldots + \mathrm{C}_b^p = \mathrm{C}_{a+b}^p.$$

BÀI 8. Với n là số nguyên dương, chứng minh rằng: $\left(\mathrm{C}_n^0\right)^2 + \left(\mathrm{C}_n^1\right)^2 + \ldots + \left(\mathrm{C}_n^n\right)^2 = \left(\mathrm{C}_{2n}^n\right)^2$.

BÀI 9. Tính tổng: $S = 3^{2019} - \mathrm{C}_{2019}^1 3^{2018} \cdot 4 + \mathrm{C}_{2019}^2 3^{2017} \cdot 4^2 - \ldots + \mathrm{C}_{2019}^{2018} 3 \cdot 4^{2018} - 4^{2019}$

BÀI 10. Tính tổng $S = \mathrm{C}_{2004}^0 + 2^2\mathrm{C}_{2004}^1 + \ldots + 2^{2005}\mathrm{C}_{2004}^{2004}$.

BÀI 11. Tính tổng $S = \mathrm{C}_{2018}^0 + 3^2\mathrm{C}_{2018}^2 + 3^4\mathrm{C}_{2018}^4 + \ldots + 3^{2018}\mathrm{C}_{2018}^{2018}$.

BÀI 12. Chứng minh

a) $\mathrm{C}_{2n}^0 - \mathrm{C}_{2n}^1 + \mathrm{C}_{2n}^2 - \mathrm{C}_{2n}^3 + \cdots - \mathrm{C}_{2n}^{2n-1} + \mathrm{C}_{2n}^{2n} = 0$.

b) $3^{16}\mathrm{C}_{16}^0 - 3^{15}\mathrm{C}_{16}^1 + 3^{14}\mathrm{C}_{16}^2 - \cdots 3\mathrm{C}_{16}^{15} + \mathrm{C}_{16}^{16} = 2^{16}$.

c) $\mathrm{C}_{2n}^0 + \mathrm{C}_{2n}^2 \cdot 3^2 + \mathrm{C}_{2n}^4 \cdot 3^4 + \cdots + \mathrm{C}_{2n}^{2n} \cdot 3^{2n} = 2^{2n-1} \cdot (2^{2n}+1)$.

BÀI 13. Tìm số nguyên dương n thỏa mãn

a) $\mathrm{C}_{2n}^0 + \mathrm{C}_{2n}^2 + \mathrm{C}_{2n}^4 + \cdots + \mathrm{C}_{2n}^{2n} = 512$.

b) $\mathrm{C}_{2n+1}^1 + \mathrm{C}_{2n+1}^3 + \mathrm{C}_{2n+1}^5 + \cdots + \mathrm{C}_{2n+1}^{2n+1} = 1024$.

QUICK NOTE

C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

CÂU 1. Cho biết $2C_n^2 - 3A_n^1 = 5(n+2)$ hỏi khai triển $(2x-1)^{n+1}$ có bao nhiêu số hạng?

(A) 11. (B) 12. (C) 10. (D) 9.

CÂU 2. Số hạng tổng quát trong khai triển biểu thức $\left(x - \dfrac{2}{x^2}\right)^{15}$, $x \neq 0$ là

(A) $(-2)^k\, C_{15}^k\, x^{15-3k}$. (B) $2^k\, C_{15}^k\, x^{15-3k}$. (C) $2^k\, C_{15}^k\, x^{15-2k}$. (D) $(-2)^k\, C_{15}^k\, x^{15-2k}$.

CÂU 3. Khai triển nhị thức $(x-2)^4$ ta được biểu thức nào sau đây?

(A) $-x^4 + 8x^3 - 24x^2 + 32x - 16$. (B) $x^4 + 8x^3 + 24x^2 + 32x + 16$.

(C) $x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 32x + 16$. (D) $x^4 + 8x^3 - 24x^2 + 32x - 16$.

CÂU 4. Biểu diễn $\left(3+\sqrt{2}\right)^5 - \left(3-\sqrt{2}\right)^5$ dưới dạng $a + b\sqrt{2}$ với $a, b \in \mathbb{Z}$. Giá trị của biểu thức $M = a + b$ là

(A) 1177. (B) 1178. (C) 1179. (D) 1180.

CÂU 5. Hệ số của x^4 trong khai triển nhị thức $(3x-4)^5$ là

(A) 1620. (B) 60. (C) -60. (D) -1620.

CÂU 6. Hệ số của x^2 trong khai triển $(1-2x)^4$ là

(A) 24. (B) -24. (C) 48. (D) -48.

CÂU 7. Hệ số của x^3 trong khai triển $(3+2x)^5$ bằng

(A) 1080. (B) 720. (C) 50. (D) 100.

CÂU 8. Hệ số của a^3b^2 trong khai triển $(a+2b)^5$ bằng

(A) 5. (B) 10. (C) 4. (D) 6.

CÂU 9. Số hạng không chứa x trong khai triển $\left(x + \dfrac{2}{x}\right)^4$, $x \neq 0$ bằng

(A) 0. (B) 12. (C) 24. (D) 6.

CÂU 10. Số hạng không chứa x trong khai triển $\left(x^3 - \dfrac{1}{x^2}\right)^5$, $x \neq 0$ bằng

(A) 0. (B) 10. (C) -10. (D) 6.

CÂU 11. Biết rằng $(1-\sqrt{2})^4 = a + b\sqrt{2}$ với a, b là các số nguyên. Giá trị của b bằng

(A) -11. (B) 11. (C) 12. (D) -12.

CÂU 12. Biết rằng $\left(1+\sqrt{3}\right)^5 - 2\left(1-\sqrt{3}\right)^4 = a + b\sqrt{3}$ với a, b là các số nguyên. Tính $T = a - b$

(A) $T = 96$. (B) $T = -56$. (C) $T = 56$. (D) $T = -96$.

CÂU 13. Xét khai triển $(a+bx)^5 = a_0 + a_1x + \cdots + a_5x^5$. Biết $a_3 = 40$ và $a_4 = 10$. Tính $T = a \cdot b$

(A) $T = 2$. (B) $T = 1$. (C) $T = \dfrac{1}{2}$. (D) $T = \dfrac{1}{4}$.

CÂU 14. Xét khai triển $f(x) = (2+x)^5 - 3(1+2x)^4 = a_0 + a_1x + \cdots + a_5x^5$. Tính a_4

(A) $a_4 = 71$. (B) $a_4 = 74$. (C) $a_4 = 21$. (D) $a_4 = 26$.

CÂU 15. Hệ số của x^6 trong khai triển $\left(\dfrac{1}{x} + x^3\right)^{10}$ bằng

(A) 210. (B) 252. (C) 165. (D) 792.

CÂU 16. Trong khai triển $\left(\dfrac{1}{x^3} + x^5\right)^{12}$ với $x \neq 0$. Số hạng chứa x^4 là

(A) 792. (B) 924. (C) $792x^4$. (D) $924x^4$.

CÂU 17. Tìm số hạng chứa x^7 trong khai triển nhị thức $\left(2x^2 - \dfrac{1}{x}\right)^8$.

(A) -1792. (B) $-1792x^7$. (C) 1792. (D) $1792x^7$.

QUICK NOTE

CÂU 18. Trong khai triển $(1+3x)^{20}$ với số mũ tăng dần, hệ số của số hạng đứng chính giữa là

A $3^{11}C_{20}^{11}$. **B** $3^{12}C_{20}^{12}$. **C** $3^{10}C_{20}^{10}$. **D** $3^{9}C_{20}^{9}$.

CÂU 19. Số hạng không chứa x trong khai triển $\left(x-\dfrac{1}{x^2}\right)^{45}$ là

A C_{45}^{15}. **B** C_{45}^{30}. **C** $-C_{45}^{5}$. **D** $-C_{45}^{15}$.

CÂU 20. Tìm hệ số của x^5 trong khai triển $\left(2x-\dfrac{3}{x^2}\right)^{11}$.

A -253440. **B** 55. **C** 28160. **D** 253440.

CÂU 21. Tìm số hạng không chứa x trong khai triển $\left(\dfrac{1}{x}-x^2\right)^{12}$

A 495. **B** -495. **C** 924. **D** -924.

CÂU 22. Hệ số của x^5 trong khai triển nhị thức $x(2x-1)^6+(3x-1)^8$ bằng

A -13368. **B** 13368. **C** -13848. **D** 13848.

CÂU 23. Biết rằng hệ số x^{n-2} trong khai triển $\left(x-\dfrac{1}{4}\right)^n$ bằng 31. Tìm n.

A 30. **B** 32. **C** 31. **D** 33.

CÂU 24. Với n là số nguyên dương thỏa mãn $A_n^2-2C_{n+2}^2+82=0$, số hạng không chứa x trong khai triển của biểu thức $\left(x^3-\dfrac{3}{x}\right)^n$ bằng

A -15504. **B** 15504. **C** $-15504\cdot 3^{15}$. **D** $15504\cdot 3^{15}$.

CÂU 25. Tính tổng $S=C_{20}^0+C_{20}^1+C_{20}^2+\ldots+C_{20}^{20}$.

A $S=0$. **B** $S=1$. **C** $S=2$. **D** $S=2^{20}$.

CÂU 26. Tính tổng $S=C_{20}^0-C_{20}^1+C_{20}^2-\ldots+C_{20}^{20}$.

A $S=0$. **B** $S=1$. **C** $S=-2$. **D** $S=(-2)^{20}$.

CÂU 27. Tính tổng $S=C_{20}^0+2C_{20}^1+2^2C_{20}^2+\ldots+2^{20}C_{20}^{20}$.

A $S=2^{21}$. **B** $S=3^{21}$. **C** $S=3^{20}$. **D** $S=2^{20}$.

CÂU 28. Tính tổng $S=C_{21}^0-2C_{21}^1+2^2C_{21}^2-\ldots-2^{21}C_{21}^{21}$.

A $S=-1$. **B** $S=1$. **C** $S=(-3)^{21}$. **D** $S=3^{21}$.

CÂU 29. Tính tổng $S=C_{21}^0-\dfrac{1}{2}C_{21}^1+\dfrac{1}{2^2}C_{21}^2-\ldots-\dfrac{1}{2^{21}}C_{21}^{21}$.

A $S=\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{21}$. **B** $S=\dfrac{1}{2}$. **C** $S=\dfrac{1}{2^{21}}$. **D** $S=-\dfrac{1}{2}$.

CÂU 30. Tính tổng $S=3^{20}C_{20}^0+3^{19}C_{20}^1+3^{18}C_{20}^2+\ldots+3C_{20}^{20}+C_{20}^{20}$.

A $S=2^{20}$. **B** $S=3^{20}$. **C** $S=4^{20}$. **D** $S=-4^{20}$.

CÂU 31. Tính tổng $S=3^{20}C_{20}^0-3^{19}C_{20}^1+3^{18}C_{20}^2-\ldots-3C_{19}^{20}+C_{20}^{20}$.

A $S=2^{20}$. **B** $S=3^{20}$. **C** $S=4^{20}$. **D** $S=-4^{20}$.

CÂU 32. Tính tổng $S=3^{20}C_{20}^0+3^{19}\cdot 2C_{20}^1+3^{18}\cdot 2^2C_{20}^2+\ldots+3\cdot 2^{19}C_{19}^{20}+2^{20}C_{20}^{20}$.

A $S=1$. **B** $S=6^{20}$. **C** $S=5^{20}$. **D** $S=-1$.

CÂU 33. Tính tổng $S=3^{20}C_{20}^0-3^{19}\cdot 2C_{20}^1+3^{18}\cdot 2^2C_{20}^2-\ldots-3\cdot 2^{19}C_{19}^{20}+2^{20}C_{20}^{20}$.

A $S=1$. **B** $S=6^{20}$. **C** $S=5^{20}$. **D** $S=-1$.

CÂU 34. Công thức thu gọn của $S=C_n^0-C_n^1x+C_n^2x^2-\ldots+(-1)^nC_n^nx^n$ là

A $S=(x-1)^n$. **B** $S=(1-x)^n$. **C** $S=(x+1)^n$. **D** $S=2^n$.

CÂU 35. Tổng $C_{2018}^2+C_{2018}^3+C_{2018}^4+\cdots+C_{2018}^{2018}$ bằng

A 2^{2018}. **B** $2^{2018}-1$. **C** $2^{2018}-2019$. **D** $2^{2018}-2018$.

CÂU 36. Tổng $C_{2019}^0+C_{2019}^1+C_{2019}^2+C_{2019}^3+\ldots+C_{2019}^{2018}+C_{2019}^{2019}$ bằng

A 2^{2019}. **B** $2^{2019}+1$. **C** $4^{2019}-1$. **D** $2^{2019}-1$.

QUICK NOTE

CÂU 37. Giải phương trình $C_1^n + 3\cdot C_2^n + 7\cdot C_3^n + \cdots + (2^n - 1)\cdot C_n^n = 3^{2n} - 2^n - 6480$ trên tập $\mathbb{N}^*$.

Ⓐ $n = 3$. Ⓑ $n = 4$. Ⓒ $n = 5$. Ⓓ $n = 6$.

CÂU 38. Tính tổng $S = \dfrac{1}{2!2017!} + \dfrac{1}{4!2015!} + \dfrac{1}{6!2013!} + \ldots + \dfrac{1}{2016!3!} + \dfrac{1}{2018!}$.

Ⓐ $S = \dfrac{2^{2018}-1}{2019}$. Ⓑ $S = \dfrac{2^{2018}-1}{2018!}$. Ⓒ $S = \dfrac{2^{2018}}{2018}$. Ⓓ $S = \dfrac{2^{2018}-1}{2019!}$.

CÂU 39. Tính giá trị biểu thức $S = C_{2017}^1 + C_{2017}^2 + C_{2017}^3 + \cdots + C_{2017}^{2016}$.

Ⓐ $S = 2^{2016} - 1$. Ⓑ $S = 2^{2017}$. Ⓒ $S = 2^{2017} - 2$. Ⓓ $S = 2^{2017} - 1$.

CÂU 40. Cho khai triển $\left(1 + x + x^2\right)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{2n}x^{2n}$, với $n \geq 2$ và $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{2n}$ là các hệ số. Biết rằng $a_3 = 210$, khi đó tổng $S = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{2n}$ bằng

Ⓐ $S = 3^{13}$. Ⓑ $S = 3^{10}$. Ⓒ $S = 3^{12}$. Ⓓ $S = 3^{11}$.

CÂU 41. Tính tổng $S = C_{2018}^0 + \dfrac{1}{2}C_{2018}^1 + \dfrac{1}{3}C_{2018}^2 + \cdots + \dfrac{1}{2018}C_{2018}^{2017} + \dfrac{1}{2019}C_{2018}^{2018}$.

Ⓐ $S = \dfrac{2^{2018}+1}{2019}$. Ⓑ $S = \dfrac{2^{2018}-1}{2019} + 1$.

Ⓒ $S = \dfrac{2^{2019}-1}{2019}$. Ⓓ $S = \dfrac{2^{2018}-1}{2019} - 1$.

CÂU 42. Tính giá trị của biểu thức

$$P = \left(\frac{1}{C_{2017}^1} + \frac{1}{C_{2017}^2} + \cdots + \frac{1}{C_{2017}^{2017}}\right) : \left(\frac{1}{C_{2016}^0} + \frac{1}{C_{2016}^1} + \cdots + \frac{1}{C_{2016}^{2016}}\right).$$

Ⓐ $P = \dfrac{1008}{2017}$. Ⓑ $P = \dfrac{2016}{2017}$. Ⓒ $P = \dfrac{1009}{2017}$. Ⓓ $P = \dfrac{2018}{2017}$.

LỜI GIẢI CHI TIẾT

Bài 1. QUY TẮC ĐẾM

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. Quy tắc cộng

Giả sử một công việc nào đó có thể thực hiện theo một trong hai phương án khác nhau

- Phương án một có n_1 cách thực hiện,
- Phương án hai có n_2 cách thực hiện.

Khi đó, số cách thực hiện công việc sẽ là $\boxed{\mathbf{n_1 + n_2}}$ cách.

2. Quy tắc nhân

Giả sử một công việc nào đó phải hoàn thành qua hai công đoạn liên tiếp nhau

- Công đoạn một có m_1 cách thực hiện,
- Với mỗi cách thực hiện công đoạn một, có m_2 cách thực hiện công đoạn hai.

Khi đó, số cách thực hiện công việc là $\boxed{\mathbf{m_1 \cdot m_2}}$ cách.

B. CÁC DẠNG TOÁN

1 Bài toán sử dụng quy tắc cộng

- Ta áp dụng quy tắc cộng cho một công việc có nhiều phương án khi các phương án đó phải rời nhau, không phụ thuộc vào nhau (độc lập với nhau).
- Nếu A và B là các tập hợp hữu hạn không giao nhau, thì $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$.

1. Ví dụ minh hoạ

VÍ DỤ 1. Giả sử từ tỉnh C đến tỉnh D có thể đi bằng các phương tiện: ô tô, tàu hỏa hoặc máy bay. Mỗi ngày có 6 chuyến ô tô, 4 chuyến tàu hỏa và 2 chuyến máy bay. Số cách lựa chọn chuyến đi từ tỉnh C đến tỉnh D là

Lời giải.

Để đi từ C đến D có 3 phương án lựa chọn:

- Đi bằng ô tô có 6 cách chọn.
- Đi bằng tàu hỏa có 4 cách chọn.
- Đi bằng máy bay có 2 cách chọn.

Theo quy tắc cộng, có $6 + 4 + 2 = 12$ cách chọn.

VÍ DỤ 2. Giả sử bạn muốn mua một áo sơ mi cỡ 39 hoặc cỡ 40. Áo cỡ 39 có 5 màu khác nhau, áo cỡ 40 có 4 màu khác nhau. Hỏi có bao nhiêu sự lựa chọn (về màu áo và cỡ áo)?

Lời giải.

- Nếu chọn cỡ áo 39 thì sẽ có 5 cách.
- Nếu chọn cỡ áo 40 thì sẽ có 4 cách.

Theo quy tắc cộng, ta có $5 + 4 = 9$ cách chọn mua áo.

VÍ DỤ 3. Một hộp có 12 viên bi trắng, 10 viên bi xanh và 8 viên bi đỏ. Một em bé muốn chọn 1 viên bi để chơi. Hỏi có bao nhiêu cách chọn?

Lời giải.

Để chọn 1 viên bi để chơi có các phương án

a) Chọn 1 viên bi trắng có 12 cách.

b) Chọn 1 viên bi xanh có 10 cách.

c) Chọn 1 viên bi đỏ có 8 cách.

Theo quy tắc cộng, số cách để chọn 1 viên bi để chơi là $12 + 10 + 8 = 30$ cách.

2. Bài tập trắc nghiệm

CÂU 1. Một lớp có 39 bạn nam và 10 bạn nữ. Hỏi có bao nhiêu cách chọn một bạn phụ trách quỹ lớp?

(A) 390. (B) 10. (C) 49. (D) 39.

Lời giải.

Tổng cộng lớp có 49 bạn nên sẽ có 49 cách chọn một bạn phụ trách quỹ lớp.

Chọn đáp án (C) .... □

CÂU 2. Trên giá sách có 5 quyển sách Tiếng Anh khác nhau, 6 quyển sách Toán khác nhau và 8 quyển sách Tiếng Việt khác nhau. Số cách chọn 1 quyển sách là

(A) 240. (B) 19. (C) 6. (D) 8.

Lời giải.

Có 5 cách chọn một quyển sách Tiếng Anh, 6 cách chọn một quyển sách Toán và 8 cách chọn một quyển sách Tiếng Việt. Vậy có $5+6+8=19$ cách chọn một quyển sách.

Chọn đáp án (B) .... □

CÂU 3. Một trường THPT được cử một học sinh đi dự trại hè toàn quốc. Nhà trường quyết định chọn một học sinh tiên tiến lớp $11A$ hoặc lớp $12B$. Hỏi nhà trường có bao nhiêu cách chọn, nếu biết rằng lớp $11A$ có 31 học sinh tiên tiến và lớp $12B$ có 22 học sinh tiên tiến?

(A) 682. (B) 31. (C) 9. (D) 53.

Lời giải.

- Nếu chọn một học sinh lớp $11A$ có 31 cách.
- Nếu chọn một học sinh lớp $12B$ có 22 cách.

Theo quy tắc cộng, ta có $31+22=53$ cách chọn.

Chọn đáp án (D) .... □

CÂU 4. Một lớp có 25 học sinh nam và 20 học sinh nữ. Hỏi có bao nhiêu cách chọn 1 học sinh?

(A) 45. (B) 20. (C) 500. (D) 25.

Lời giải.

Có $25+20=45$ cách chọn 1 học sinh.

Chọn đáp án (A) .... □

CÂU 5. Trên giá sách có 10 quyển sách Toán khác nhau, 11 quyển sách Văn khác nhau và 7 quyển sách Tiếng Anh khác nhau. Hỏi có bao nhiêu cách chọn một quyển sách trong các quyển sách nói trên?

(A) 32. (B) 26. (C) 20. (D) 28.

Lời giải.

Có 10 cách để chọn 1 quyển sách Toán, 11 cách để chọn 1 quyển sách Văn và 7 cách để chọn 1 quyển sách Tiếng Anh nên theo quy tắc cộng có 28 cách chọn một quyển sách trong các quyển sách nói trên.

Chọn đáp án (D) .... □

CÂU 6. Một người vào cửa hàng ăn nhưng chỉ đủ tiền mua 1 món ăn. Thực đơn gồm 5 món cơm, 6 món mì và 3 món cháo. Hỏi người đó có bao nhiêu cách chọn món?

(A) 5. (B) 3. (C) 14. (D) 6.

Lời giải.

Có 5 cách chọn cơm, 6 cách chọn mì và 3 cách chọn cháo.
Vậy có tất cả $5+6+3=14$ cách chọn món.

Chọn đáp án (C) .... □

CÂU 7. Có 8 quyển sách khác nhau và 6 quyển vở khác nhau. Số cách chọn một trong các quyển đó là

(A) 8. (B) 14. (C) 6. (D) 48.

Lời giải.

Để chọn được 1 quyển sách hoặc vở, ta có hai phương án
Phương án 1. Chọn được quyển sách có 8 cách.
Phương án 2. Chọn được quyển vở có 6 cách.
Do đó theo quy tắc cộng có $8+6=13$ cách.

Chọn đáp án (B) .... □

CÂU 8. Một lớp học có 7 học sinh giỏi Toán, 5 học sinh giỏi Văn, 4 học sinh giỏi Anh. Hỏi có bao nhiêu cách chọn ra một học sinh giỏi bất kì?

(A) 7. (B) 16. (C) 12. (D) 140.

Lời giải.

Để chọn được 1 học sinh giỏi, ta có ba phương án
Phương án 1. Chọn học sinh giỏi Toán có 7 cách.
Phương án 2. Chọn học sinh giỏi Văn có 5 cách.
Phương án 3. Chọn học sinh giỏi Anh có 4 cách.
Do đó theo quy tắc cộng có $7+5+4=16$ cách.

Chọn đáp án (B) .... □

CÂU 9. Giả sử bố bạn An muốn mua một chiếc xe hiệu Vision hoặc SH. Biết rằng xe máy hiệu Vision có 5 màu khác nhau, xe máy hiệu SH có 9 màu khác nhau. Hỏi bố bạn An có bao nhiêu sự lựa chọn?

(A) 9. (B) 14. (C) 5. (D) 45.

Lời giải.

Có 5 loại xe Vision và 9 loại xe SH nên theo quy tắc cộng sẽ có 14 cách chọn mua một chiếc xe.

Chọn đáp án (B) .... □

CÂU 10. Một cô gái có 2 cái mũ màu trắng, 3 cái mũ màu xanh và 5 cái mũ màu vàng, tất cả các cái mũ đều khác kiểu. Hỏi cô gái này có bao nhiêu cách chọn một cái mũ để đội đi dạo?

(A) 5. (B) 10. (C) 30. (D) 6.

Lời giải.

Theo quy tắc cộng ta có $2+3+5=10$ cách chọn một cái mũ.

Chọn đáp án (B) .... □

CÂU 11. Một bạn muốn đi từ tỉnh A tới tỉnh B trong một ngày nhất định. Biết rằng trong ngày hôm đó từ tỉnh A đến tỉnh B có 14 chuyến ô tô, 5 chuyến tàu. Hỏi bạn đó có bao nhiêu sự lựa chọn để đi từ A đến B?

(A) 70. (B) 19. (C) 14. (D) 5.

Lời giải.

Để đi từ A đến B có thể chọn đi ô tô hoặc đi tàu nên theo quy tắc cộng ta có 19 cách chọn.

Chọn đáp án (B) .... □

CÂU 12. Trong một hộp chứa sáu quả cầu trắng được đánh số từ 1 đến 6 và ba quả cầu đen được đánh số từ 7 đến 9. Có bao nhiêu cách chọn một trong các quả cầu ấy?

(A) 1. (B) 9. (C) 6. (D) 3.

Lời giải.

Mỗi quả cầu được đánh một số khác nhau, nên mỗi lần lấy ra một quả cầu bất kì là một lần.
Số quả cầu là $6+3=9$.
Tương ứng với 9 cách.

Chọn đáp án (B) .... □

CÂU 13. Trong một trường THPT, khối 11 có 280 học sinh nam và 325 học sinh nữ. Nhà trường chọn một học sinh ở khối 11 đi dự dạ hội của học sinh thành phố. Hỏi nhà trường có bao nhiêu cách chọn?

(A) 605. (B) 280. (C) 325. (D) 45.

Lời giải.

- Chọn một học sinh nam có 280 cách.
- Chọn một học sinh nữ có 325 cách.

Vậy có $280+325=605$ cách chọn.

Chọn đáp án (A) .... □

CÂU 14. Giả sử một công việc có thể được tiến hành theo hai phương án A và B. Phương án A có thể thực hiện bằng n cách, phương án B có thể thực hiện bằng m cách không trùng với cách nào của phương án A. Khi đó

(A) Công việc có thể được thực hiện bằng $m \cdot n$ cách.
(B) Công việc có thể được thực hiện bằng $m+n$ cách.
(C) Công việc có thể được thực hiện bằng $\frac{1}{2}(m+n)$ cách.
(D) Công việc có thể được thực hiện bằng $\frac{1}{2} \cdot m \cdot n$ cách.

Lời giải.

Theo quy tắc cộng có $m+n$ cách.

Chọn đáp án (B) ....

CÂU 15. Từ một bó hoa hồng gồm 3 bông hồng trắng, 5 bông hồng đỏ và 6 bông hồng vàng, có bao nhiêu cách chọn ra một bông hồng?

(A) 11. (B) 90. (C) 14. (D) 8.

Lời giải.

Ta có

- Chọn một bông hồng trắng có 3 cách.
- Chọn một bông hồng đỏ có 5 cách.
- Chọn một bông hồng vàng có 6 cách.

Theo quy tắc cộng, ta có $3+5+6=14$ cách chọn một bông hồng.

Chọn đáp án (C) ....

2 Bài toán sử dụng quy tắc nhân

Ta sử dụng quy tắc nhân để giải các bài toán đếm trong đó việc thực hiện một công việc được chia thành nhiều giai đoạn, ứng với mỗi cách thực hiện giai đoạn trước sẽ có số cách thực hiện giai đoạn sau cố định.

1. Ví dụ minh hoạ

VÍ DỤ 1. Bạn An có 4 áo sơ-mi khác màu và 3 quần dài khác nhau. Hỏi bạn An có bao nhiêu cách chọn ra một bộ đồ gồm 1 áo sơ-mi và 1 quần dài?

Lời giải.

Mỗi cách chọn một áo sơ-mi sẽ có tương ứng 3 cách chọn quần dài.
Do đó, bạn An có 4 cách chọn áo sơ-mi và 3 cách chọn quần dài.
Áp dụng quy tắc nhân ta có $4\cdot 3=12$ (cách chọn).

VÍ DỤ 2. Một trường phổ thông có 12 học sinh chuyên tin và 18 học sinh chuyên toán. Thành lập một đoàn gồm hai người dự hội nghị sao cho có một học sinh chuyên tin và một học sinh chuyên toán. Hỏi có bao nhiêu cách lập một đoàn như trên?

Lời giải.

Để có một đoàn đi dự hội nghị phải có đồng thời một học sinh chuyên tin và một học sinh chuyên toán.
Mỗi cách chọn một học sinh chuyên tin trong số 12 học sinh chuyên tin sẽ có 18 cách chọn một học sinh chuyên toán trong 18 học sinh chuyên toán.
Theo quy tắc nhân ta có $12\cdot 18=216$ (cách).

VÍ DỤ 3. Từ Quảng Trị đến Quảng Ngãi có 4 con đường và có 6 con đường từ Quảng Ngãi đến TPHCM. Hỏi có bao nhiêu con đường khác nhau để đi từ Quảng Trị đến TPHCM qua Quảng Ngãi?

Lời giải.

- Số cách chọn đường đi từ Quảng Trị đến Quảng Ngãi là 4.
- Số cách chọn đường đi từ Quảng Ngãi đến TPHCM là 6.

Vậy có $4\cdot 6=24$ (cách chọn).

VÍ DỤ 4. Cho tập hợp $A=\{1,2,3,4,5\}$. Có bao nhiêu số tự nhiên gồm ba chữ số đôi một khác nhau được tạo từ các chữ số trong tập A?

Lời giải.

Gọi số tự nhiên có ba chữ số cần tìm là $\overline{abc}$, trong đó

- a có 5 cách chọn.
- b có 4 cách chọn.
- c có 3 cách chọn.

Vậy có $5\cdot 4\cdot 3=60$ (số).

2. Bài tập tự luận

BÀI 1. Cho tập hợp $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Có bao nhiêu số tự nhiên gồm năm chữ số đôi một khác nhau được tạo từ các chữ số trong tập A?

Lời giải.

Gọi số cần tìm là $\overline{abcde}$.
Do các chữ số đôi một khác nhau nên có 5 cách chọn $a \neq 0$; 5 cách chọn b; 4 cách chọn c; 3 cách chọn d và 2 cách chọn e.
Vậy có $5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 600$ (số).

BÀI 2. Cho tập hợp $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8\}$. Từ A có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm năm chữ số đôi một khác nhau và chia hết cho 5?

Lời giải.

Gọi số cần tìm là $\overline{abcde}$.
Do chia hết cho 5 nên có 1 cách chọn $e = 5$.
Đồng thời, do các chữ số đôi một khác nhau nên có 6 cách chọn a; 5 cách chọn b; 4 cách chọn c và 3 cách chọn d.
Vậy có $1 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$ (số).

BÀI 3. Có bao nhiêu biển đăng kí xe ô tô nếu mỗi biển số chứa một dãy ba chữ cái (trong bảng 26 chữ cái tiếng Anh), tiếp sau là bốn chữ số?

Lời giải.

Giả sử mỗi biển số xe có dạng $a_1a_2a_3b_1b_2b_3b_4$, trong đó a_i $(i = \overline{1,3})$ là các chữ cái và b_j $(j = \overline{1,4})$ là các số.
Do các chữ cái có thể giống nhau nên có 26 cách chọn a_1, 26 cách chọn a_2, 26 cách chọn a_3.
Đồng thời, do các số có thể giống nhau nên có 10 cách chọn b_1, 10 cách chọn b_2, 10 cách chọn b_3 và 10 cách chọn b_4.
Vậy có $26^3 \cdot 10^4 = 175760000$ số.

BÀI 4. Có bao nhiêu số tự nhiên có ba chữ số bắt đầu bằng chữ số lẻ và các chữ số đôi một khác nhau?

Lời giải.

Gọi số cần tìm là $\overline{abc}$.
Do bắt đầu bằng chữ số lẻ nên có 5 cách chọn a.
Đồng thời, do các chữ số đôi một khác nhau nên có 9 cách chọn b và 8 cách chọn c.
Vậy có $5 \cdot 9 \cdot 8 = 360$ (số).

BÀI 5. Từ các số $1; 2; \ldots; 9$ có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có bốn chữ số đôi một khác nhau, bắt đầu bằng chữ số lẻ và kết thúc bằng chữ số chẵn?

Lời giải.

Gọi số cần tìm là $\overline{abcd}$.
Do kết thúc bằng chữ số chẵn nên có 4 cách chọn d.
Do bắt đầu bằng chữ số lẻ nên có 5 cách chọn a.
Đồng thời, do các chữ số đôi một khác nhau nên có 7 cách chọn b và 6 cách chọn c.
Vậy có $4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 6 = 840$ (số).

BÀI 6. Từ các số $0; 4; 5; 7; 8; 9$ có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có bốn chữ số khác nhau và lớn hơn 5000?

Lời giải.

Gọi số cần tìm là $\overline{abcd}$.
Do số cần tìm lớn hơn 5000 nên có 4 cách chọn $a \in \{5; 7; 8; 9\}$.
Đồng thời, do các chữ số khác nhau nên có 5 cách chọn b; 4 cách chọn c và 3 cách chọn d.
Vậy có $4 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 240$ (số).

BÀI 7. Có bao nhiêu số tự nhiên có năm chữ số khác nhau được viết từ các số $1; 2; 3; 4; 5$, trong đó ba chữ số đầu là ba chữ số lẻ và hai chữ số cuối là hai chữ số chẵn?

Lời giải.

Gọi số cần tìm là $\overline{abcde}$.
Do số cần tìm có ba chữ số đầu là ba chữ số lẻ nên có 3 cách chọn a, 2 cách chọn b, 1 cách chọn c.
Đồng thời, do số cần tìm có hai chữ số cuối là hai chữ số chẵn nên có 2 cách chọn d và 1 cách chọn e.
Vậy có $3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 = 12$ (số).

3. Bài tập trắc nghiệm

CÂU 1. Một công việc được hoàn thành bởi hai hành động liên tiếp. Nếu có m cách thực hiện hành động thứ nhất và ứng với mỗi cách đó có n cách thực hiện hành động thứ hai. Hỏi có bao nhiêu cách thực hiện công việc?

A $m + n$. **B** $m - n$. **C** $\dfrac{m}{n}$. **D** $m \cdot n$.

Lời giải.

Áp dụng qui tắc nhân.

Chọn đáp án D .... □

CÂU 2. Anh A có 7 cái áo màu sắc khác nhau và 6 cái quần có kiểu khác nhau. Anh A có thể chọn nhiều nhất bao nhiêu bộ quần áo?

(A) 7. (B) 13. (C) 6. (D) 42.

Lời giải.

Ứng với mỗi cái áo anh A chọn được 6 kiểu quần.
Vậy anh A có thể chọn nhiều nhất $6 \cdot 7 = 42$ bộ quần áo.

Chọn đáp án (D) .... □

CÂU 3. Để đi từ thị trấn A đến thị trấn C phải qua thị trấn B. Biết từ A đến B có 4 con đường, từ B đến C có 3 con đường. Khi đó số cách đi từ A đến C mà phải qua B là:

(A) 6. (B) 7. (C) 15. (D) 12.

Lời giải.

Từ A đến B có 3 cách đi.
Từ B đến C có 4 cách đi.
Theo quy tắc nhân, từ A đến C phải qua B có $3 \cdot 4 = 12$ cách.

Chọn đáp án (D) .... □

CÂU 4. An muốn mua một cây bút mực và một cây bút chì. Các cây bút mực có 8 màu khác nhau, các cây bút chì cũng có 8 màu khác nhau. Vậy An có bao nhiêu cách chọn?

(A) 64. (B) 16. (C) 32. (D) 20.

Lời giải.

Số cách chọn mua một cây bút mực là 8 cách.
Số cách chọn mua một cây bút chì là 8 cách.
Nên theo quy tắc nhân thì An có $8 \cdot 8 = 64$ cách.

Chọn đáp án (A) .... □

CÂU 5. Lớp 12A có 20 bạn nữ, lớp 12B có 16 bạn nam. Có bao nhiêu cách chọn 1 bạn nữ lớp 12A và 1 bạn nam lớp 12B để dẫn chương trình hoạt động ngoại khóa?

(A) 320. (B) 630. (C) 36. (D) 1220.

Lời giải.

Để chọn 1 bạn nữ của lớp 12A ta có 20 cách.
Để chọn 1 bạn nam của lớp 12B ta có 16 cách.
Vậy theo quy tắc nhân ta có $20 \times 16 = 320$.

Chọn đáp án (A) .... □

CÂU 6. Một hộp có 3 viên bi đỏ và 4 viên bi xanh. Số cách lấy ra hai viên bi, trong đó có 1 viên bi đỏ và 1 viên bi xanh bằng

(A) 7. (B) 81. (C) 64. (D) 12.

Lời giải.

Số cách lấy ra hai viên bi, trong đó có 1 viên bi đỏ và 1 viên bi xanh bằng $3 \cdot 4 = 12$ (cách).

Chọn đáp án (D) .... □

CÂU 7. Có hai kiểu mặt đồng hồ đeo tay (vuông, tròn) và có ba kiểu dây (kim loại, da, nhựa). Hỏi có bao nhiêu cách chọn một chiếc đồng hồ có một mặt và một dây?

(A) 8. (B) 7. (C) 5. (D) 6.

Lời giải.

Theo quy tắc nhân, số cách chọn ra một chiếc đồng hồ là $2 \cdot 3 = 6$.

Chọn đáp án (D) .... □

CÂU 8. Số các số tự nhiên gồm 3 chữ số được tạo thành từ 4 chữ số $0; 1; 2; 3$ là

(A) 56. (B) 96. (C) 52. (D) 48.

Lời giải.

Có 3 cách chọn chữ số hàng trăm, 4 cách chọn chữ số hàng chục, 4 cách chọn chữ số hàng đơn vị, nên số các số thoả mãn là $3 \cdot 4 \cdot 4 = 48$.

Chọn đáp án (D) .... □

CÂU 9. Liên quan đến chuyên ngành bạn Linh muốn học ở bậc đại học, có 4 trường đại học, mỗi trường có 1 khoa và ở mỗi khoa đó có 3 ngành học về chuyên ngành bạn Linh muốn học. Hỏi bạn Linh có bao nhiêu lựa chọn?

(A) 64. (B) 12. (C) 81. (D) 7.

Lời giải.

Số cách chọn trường: 4 cách.
Số cách chọn khoa trong trường: 1 cách.
Số cách chọn ngành trong khoa: 3 cách.
Theo quy tắc nhân ta có $4 \cdot 1 \cdot 3 = 12$ cách.

Chọn đáp án (B) .... □

CÂU 10. Cho các chữ số 2, 3, 4, 5, 6, 7. Khi đó có bao nhiêu số tự nhiên có bốn chữ số được thành lập từ các chữ số đã cho?

(A) 1296. (B) 360. (C) 24. (D) 720.

Lời giải.

Từ 6 chữ số tự nhiên đã cho, ta có 6 cách chọn chữ số hàng đơn vị, 6 cách chọn chữ số hàng chục, 6 cách chọn chữ số hàng trăm, 6 cách chọn chữ số hàng nghìn.
Theo quy tắc nhân suy ra số các số thỏa mãn yêu cầu bài toán là $6^4 = 1296$ cách.

Chọn đáp án (B) .... □

CÂU 11. Đề kiểm tra học kì 1 môn Toán khối 11 ở một trường THPT gồm 2 phần tự luận và trắc nghiệm, trong đó phần tự luận có 13 đề, phần trắc nghiệm có 10 đề. Mỗi học sinh phải làm bài thi gồm một đề tự luận và một đề trắc nghiệm. Hỏi trường THPT đó có bao nhiêu cách chọn đề thi?

(A) 130. (B) 23. (C) 253. (D) 506.

Lời giải.

Số cách chọn một đề tự luận và một đề trắc nghiệm lần lượt là 13, 10.
Vậy số cách chọn đề thi là $13 \cdot 10 = 130$.

Chọn đáp án (A) .... □

CÂU 12. Cho 6 chữ số $2, 3, 4, 5, 6, 7$. Có bao nhiêu số tự nhiên chẵn có 3 chữ số lập từ 6 chữ số đó.

(A) 256. (B) 108. (C) 36. (D) 18.

Lời giải.

Gọi $\overline{a_1a_2a_3}$ là số tự nhiên cần lập.
Ta có a_3 có 3 cách chọn, a_2, a_1 có 6 cách.
Vậy có $3 \cdot 6 \cdot 6 = 108$.

Chọn đáp án (B) .... □

CÂU 13. Trong mặt phẳng, cho một đa giác lồi có 20 cạnh. Số đường chéo của đa giác là

(A) 340. (B) 380. (C) 190. (D) 170.

Lời giải.

Từ mỗi đỉnh của đa giác ta kẻ được 17 đường chéo.
Từ 20 đỉnh kẻ được $17 \cdot 20 = 340$ đường chéo.
Tuy nhiên, theo cách vẽ ở trên thì mỗi đường chéo của đa giác được kẻ 2 lần.
Vậy số đường chéo của đa giác là $\dfrac{340}{2} = 170$.

Chọn đáp án (D) .... □

CÂU 14. Một đa giác đều có số đường chéo gấp đôi số cạnh. Hỏi đa giác đó có bao nhiêu cạnh?

(A) 6. (B) 7. (C) 5. (D) 8.

Lời giải.

Gọi số đỉnh của đa giác là n. Mà số cạnh bằng số đỉnh nên số cạnh của đa giác là n.
Cứ mỗi đỉnh nối với $(n-3)$ đỉnh còn lại tạo thành $(n-3)$ đường chéo nên số đường chéo của đa giác là $\dfrac{n(n-3)}{2}$ (do mỗi đường chéo được tính hai lần). Vì số đường chéo gấp đôi số cạnh nên

$$\frac{n(n-3)}{2} = 2n \Leftrightarrow n - 3 = 4 \Leftrightarrow n = 7.$$

Vậy đa giác có 7 cạnh.

Chọn đáp án (B) .... □

CÂU 15. Có bao nhiêu số tự nhiên có ba chữ số khác nhau?

(A) 1000. (B) 729. (C) 648. (D) 720.

Lời giải.

Gọi số cần lập là $\overline{abc}$ với $a \neq 0$.
Chọn a có 9 cách.
Chọn b có 9 cách.
Chọn c có 8 cách.
Vậy có $9 \cdot 9 \cdot 8 = 648$ số tự nhiên có ba chữ số khác nhau.

Chọn đáp án C ....□

CÂU 16. Có bao nhiêu số tự nhiên có hai chữ số mà tất cả các chữ số đều là chữ số lẻ?

A 10. B 25. C 45. D 50.

Lời giải.

Tập hợp các chữ số lẻ là $\{1,3,5,7,9\}$.
Số tự nhiên có hai chữ số có dạng $\overline{ab}$.
Vì tất cả các chữ số đều là chữ số lẻ nên $a, b \in \{1,3,5,7,9\}$.

- Vị trí a có 5 cách chọn.
- Vị trí b có 5 cách chọn.

Vậy có tất cả $5 \times 5 = 25$ số tự nhiên có hai chữ số mà tất cả các chữ số đều lẻ.

Chọn đáp án B ....□

CÂU 17. Cho tập $A = \{0;1;2;3;4;5;6\}$. Từ tập A có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có 5 chữ số và chia hết cho 2?

A 8232. B 1230. C 1260. D 2880.

Lời giải.

Gọi $\overline{abcde}\,(a \neq 0)$ là số cần lập. Vì không có yêu cầu các chữ số phải khác nhau nên ta có:
Chọn a có 6 cách.
Chọn e có 4 cách.
Chọn các chữ số b, c, d thì có 7 cách chọn mỗi chữ số.
Vậy có $7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 4 = 8232$ (số).

Chọn đáp án A ....□

CÂU 18. Một phòng có 12 người. Cần lập một tổ đi công tác 3 người, một người làm tổ trưởng, một người làm tổ phó và một người là thành viên. Hỏi có bao nhiêu cách lập?

A 220. B 1728. C 1230. D 1320.

Lời giải.

- Có 12 cách chọn một người làm tổ trưởng.
- Có 11 cách chọn một người làm tổ phó.
- Có 10 cách chọn một người làm thành viên.

Suy ra, số cách lập một tổ đi công tác 3 người bằng $12 \cdot 11 \cdot 10 = 1320$.

Chọn đáp án D ....□

CÂU 19. Giả sử có 8 vận động viên tham gia chạy thi. Nếu không kể trường hợp có hai vận động viên về đích cùng lúc thì có bao nhiêu kết quả có thể xảy ra đối với các vị trí nhất, nhì, ba?

A 56. B 120. C 336. D 24.

Lời giải.

Vị trí thứ nhất có 8 khả năng, vị trí thứ nhì có 7 khả năng và vị trí thứ ba có 6 khả năng.
Vậy có $8 \times 7 \times 6 = 336$.

Chọn đáp án C ....□

CÂU 20. Cho đa giác đều 16 đỉnh. Hỏi có bao nhiêu tam giác vuông có ba đỉnh là ba đỉnh của đa giác đều đó?

A 560. B 112. C 121. D 128.

Lời giải.

Chọn 2 đỉnh đối diện trong 16 đỉnh ta được 8 cạnh là đường kính của đường tròn ngoại tiếp đa giác đều.
Khi đó, ta chọn 1 trong 14 đỉnh còn lại ta sẽ được một tam giác vuông tại đỉnh vừa chọn.
Vậy có tất cả $8 \times 14 = 112$ tam giác vuông tạo thành.

Chọn đáp án B ....□

CÂU 21. Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 5, 8 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên lẻ có bốn chữ số đôi một khác nhau và phải có mặt chữ số 3.

(A) 108 số. (B) 228 số. (C) 36 số. (D) 144 số.

Lời giải.

Gọi $\overline{a_1a_2a_3a_4}$ là số lẻ có 4 chữ số khác nhau, với $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \{0; 1; 2; 3; 5; 8\} \Rightarrow a_4$ có 3 cách chọn, a_1 có 4 cách chọn, a_2 có 4 cách chọn và a_3 có 3 cách chọn.
Khi đó, có $4 \cdot 4 \cdot 3 = 144$ số thỏa mãn yêu cầu trên.
Gọi $\overline{b_1b_2b_3b_4}$ là số lẻ có 4 chữ số khác nhau, với $b_1, b_2, b_3, b_4 \in \{0; 1; 2; 5; 8\} \Rightarrow b_4$ có 2 cách chọn, b_1 có 3 cách chọn, b_2 có 3 cách chọn và b_3 có 2 cách chọn.
Do đó, có $2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 = 36$ số thỏa mãn yêu cầu trên.
Vậy có tất cả $144 - 36 = 108$ số thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án (A) .... □

CÂU 22. Gieo một con súc sắc 6 mặt cân đối 3 lần, có bao nhiêu kết quả có thể xảy ra thỏa mãn điều kiện "Tổng số chấm xuất hiện trong 3 lần là số chẵn"?

(A) 162. (B) 54. (C) 108. (D) 27.

Lời giải.

Dù kết quả hai lần gieo đầu tiên như thế nào thì lần thứ ba cũng có 3 khả năng xảy ra để phù hợp với điều kiện "Tổng số chấm xuất hiện trong 3 lần là số chẵn".
Do đó, số kết quả thỏa mãn điều kiện trên là $6 \times 6 \times 3 = 108$.

Chọn đáp án (C) .... □

CÂU 23. Cho 5 chữ số $1, 2, 3, 4, 6$. Lập các số tự nhiên có 3 chữ số đôi một khác nhau từ 5 chữ số đã cho. Tính tổng của tất cả các số lập được.

(A) 12321. (B) 21312. (C) 12312. (D) 21321.

Lời giải.

Xét tập $X = \{1, 2, 3, 4, 6\}$.
Số các số tự nhiên có ba chữ số đôi một khác nhau lấy từ tập X là $5 \times 4 \times 3 = 60$.
Do vai trò các chữ số là như nhau, nên số lần xuất hiện của mỗi chữ số trong tập X tại mỗi hàng trăm, hàng chục, hàng đơn vị là $\dfrac{60}{5} = 12$.
Tổng các số lập được $S = (1 + 2 + 3 + 4 + 6) \times 12 \times 111 = 21312$.

Chọn đáp án (B) .... □

3 Kết hợp quy tắc cộng và quy tắc nhân

Hầu hết các bài toán đếm trong thực tế sẽ phức tạp và cần áp dụng cả hai quy tắc cộng và quy tắc nhân để giải bài toán.

1. Ví dụ minh hoạ

VÍ DỤ 1. Cho tập hợp $A = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$. Có bao nhiêu số tự nhiên gồm bốn chữ số được lấy từ A sao cho các chữ số

a) Khác nhau từng đôi một.

b) Khác nhau từng đôi một và nó là số lẻ.

c) Khác nhau từng đôi một và nó là số chẵn.

d) Khác nhau đôi một và chia hết cho 5.

Lời giải.

a) Gọi số có bốn chữ số cần lập là $\overline{abcd}$ với $a \neq b \neq c \neq d$.

- Chọn chữ số a có 7 cách do $a \neq 0$.
- Chọn chữ số b có 7 cách do $b \neq a$.
- Chọn chữ số c có 6 cách do $c \neq b$ và $c \neq a$.
- Chọn chữ số d có 5 cách do $d \neq c$; $d \neq b$ và $d \neq a$.

Vậy theo quy tắc nhân có $7 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 1470$ số.

b) Gọi số có bốn chữ số cần lập là $\overline{abcd}$ với $a \neq b \neq c \neq d$.

- Chọn chữ số d có 4 cách do $d \in \{1;3;5;7\}$.
- Chọn chữ số a có 6 cách do $a \neq d$ và $a \neq 0$.
- Chọn chữ số b có 6 cách do $b \neq d$ và $b \neq a$.
- Chọn chữ số c có 5 cách do $c \neq d$; $c \neq a$ và $c \neq b$.

Vậy theo quy tắc nhân có $4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 5 = 720$ số.

c) Gọi số có bốn chữ số cần lập là $\overline{abcd}$ với $a \neq b \neq c \neq d$.

(a) **Trường hợp 1.** Chữ số $d = 0$.
- Chọn chữ số a có 7 cách do $a \neq 0$.
- Chọn chữ số b có 6 cách do $b \neq a$ và $b \neq 0$.
- Chọn chữ số c có 5 cách do $c \neq a$; $c \neq b$ và $c \neq 0$.

Theo quy tắc nhân có $7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$ số.

(b) **Trường hợp 2.** Chữ số $d \in \{2;4;6\}$ nên có 3 cách chọn.
- Chọn chữ số a có 6 cách do $a \neq 0$ và $a \neq d$.
- Chọn chữ số b có 6 cách do $b \neq a$ và $b \neq d$.
- Chọn chữ số c có 5 cách do $c \neq a$; $c \neq b$ và $c \neq d$.

Theo quy tắc nhân có $3 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 5 = 540$ số.

Vậy theo quy tắc cộng có $210 + 540 = 750$ số.

d) Gọi số có bốn chữ số cần lập là $\overline{abcd}$ với $a \neq b \neq c \neq d$.

(a) **Trường hợp 1.** Chữ số $d = 0$.
- Chọn chữ số a có 7 cách do $a \neq 0$.
- Chọn chữ số b có 6 cách do $b \neq a$ và $b \neq 0$.
- Chọn chữ số c có 5 cách do $c \neq a$; $c \neq b$ và $c \neq 0$.

Theo quy tắc nhân có $7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$ số.

(b) **Trường hợp 2.** Chữ số $d = 5$.
- Chọn chữ số a có 6 cách do $a \neq 0$ và $a \neq 5$.
- Chọn chữ số b có 6 cách do $b \neq a$ và $b \neq 5$.
- Chọn chữ số c có 5 cách do $c \neq a$; $c \neq b$ và $c \neq 5$.

Theo quy tắc nhân có $6 \cdot 6 \cdot 5 = 180$ số.

Vậy theo quy tắc cộng có $210 + 180 = 390$ số.

VÍ DỤ 2. Cho tập hợp $X = \{0;2;3;4;5;6;8\}$. Có bao nhiêu số tự nhiên gồm ba chữ số được lấy từ X sao cho các chữ số

a) Khác nhau từng đôi một.

b) Khác nhau từng đôi một và nó là số lẻ.

c) Khác nhau từng đôi một và chia hết cho 2.

d) Khác nhau đôi một và chia hết cho 5.

Lời giải.

a) Gọi số có ba chữ số cần lập là $\overline{abc}$ với $a \neq b \neq c$.
- Chọn chữ số a có 6 cách do $a \neq 0$.
- Chọn chữ số b có 6 cách do $b \neq a$.
- Chọn chữ số c có 5 cách do $c \neq b$ và $c \neq a$.

Vậy theo quy tắc nhân có $6 \cdot 6 \cdot 5 = 180$ số.

b) Gọi số có ba chữ số cần lập là $\overline{abc}$ với $a \neq b \neq c$.
- Chọn chữ số c có 2 cách do $d \in \{3;5\}$.
- Chọn chữ số a có 5 cách do $a \neq c$ và $a \neq 0$.
- Chọn chữ số b có 5 cách do $b \neq c$ và $b \neq a$.

Vậy theo quy tắc nhân có $2 \cdot 5 \cdot 5 = 50$ số.

c) Gọi số có ba chữ số cần lập là $\overline{abc}$ với $a \neq b \neq c$.

(a) **Trường hợp 1.** Chữ số $c = 0$.
- Chọn chữ số a có 6 cách do $a \neq 0$.
- Chọn chữ số b có 5 cách do $b \neq a$ và $b \neq 0$.

Theo quy tắc nhân có $6 \cdot 5 = 30$ số.

(b) **Trường hợp 2.** Chữ số $c \in \{2; 4; 6; 8\}$ nên có 4 cách chọn.
- Chọn chữ số a có 5 cách do $a \neq 0$ và $a \neq c$.
- Chọn chữ số b có 5 cách do $b \neq a$ và $b \neq c$.

Theo quy tắc nhân có $4 \cdot 5 \cdot 5 = 100$ số.

Vậy theo quy tắc cộng có $30 + 100 = 130$ số.

d) Gọi số có ba chữ số cần lập là $\overline{abc}$ với $a \neq b \neq c$.

(a) **Trường hợp 1.** Chữ số $c = 0$.
- Chọn chữ số a có 6 cách do $a \neq 0$.
- Chọn chữ số b có 5 cách do $b \neq a$ và $b \neq 0$.

Theo quy tắc nhân có $6 \cdot 5 = 30$ số.

(b) **Trường hợp 2.** Chữ số $d = 5$.
- Chọn chữ số a có 5 cách do $a \neq 0$ và $a \neq 5$.
- Chọn chữ số b có 5 cách do $b \neq a$ và $b \neq 5$.

Theo quy tắc nhân có $5 \cdot 5 = 25$ số.

Vậy theo quy tắc cộng có $25 + 30 = 55$ số.

VÍ DỤ 3. Có bao nhiêu số tự nhiên chẵn gồm bốn chữ số đôi một khác nhau được lập từ tập $E = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$?

Lời giải.

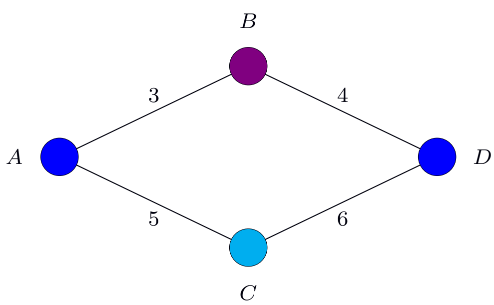
Mỗi cách lập ra số tự nhiên $\overline{abcd}$ là số chẵn, gồm 4 chữ số đôi một khác nhau từ tập E được thực hiện theo một trong các phương án sau:

- Phương án 1: $d = 0$.
  - Công đoạn 1: Chọn $a \in E \setminus \{0\}$. Có 8 cách.
  - Công đoạn 2: Chọn $b \in E \setminus \{a; 0\}$. Có 7 cách.
  - Công đoạn 3: Chọn $c \in E \setminus \{a; b; 0\}$. Có 6 cách.

  Theo quy tắc nhân số cách chọn trong phương án này là $8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$. (1)
- Phương án 2: $d \in \{2; 4; 6; 8\}$.
  - Công đoạn 1: Chọn $d \in \{2; 4; 6; 8\}$. Có 4 cách.
  - Công đoạn 2: Chọn $a \in E \setminus \{d; 0\}$. Có 7 cách.
  - Công đoạn 3: Chọn $b \in E \setminus \{a; d\}$. Có 7 cách.
  - Công đoạn 4: Chọn $c \in E \setminus \{a; d; b\}$. Có 6 cách.

  Theo quy tắc nhân số cách chọn trong phương án này là $4 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 6 = 1176$. (2)
  Từ (1) và (2) theo quy tắc cộng, ta có số các số tự nhiên thỏa đề bài là $336 + 1176 = 1512$.

VÍ DỤ 4. Từ thành phố A đến thành phố B có 3 con đường, từ thành phố B đến thành phố D có 4 con đường, từ thành phố A đến thành phố C có 5 con đường, từ thành phố C đến thành phố D có 6 con đường, các con đường này đôi một khác nhau. Có bao nhiêu cách chọn đường đi A đến D rồi trở về A mà không có con đường nào được đi lặp trở lại, biết rằng không có con đường nào đi trực tiếp B đến C và đi trực tiếp từ A đến D.



Lời giải.

Mỗi cách chọn đường đi từ A đến D rồi trở về A mà không có con đường nào được đi lặp trở lại được thực hiện theo một trong các phương án sau

- Phương án 1: Đi theo hướng $A \longrightarrow B \longrightarrow D \longrightarrow B \longrightarrow A$.
  - Công đoạn 1: Chọn đường đi từ A đến B. Có 3 cách.
  - Công đoạn 2: Chọn đường đi từ B đến D. Có 4 cách.
  - Công đoạn 3: Chọn đường đi từ D trở về B mà không đi lại con đường đã đi qua. Có 3 cách.
  - Công đoạn 4: Chọn đường đi từ B trở về A mà không đi lại con đường đã đi qua. Có 2 cách.
    Theo quy tắc nhân, số cách chọn trong phương án này là $3 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 72$. (1)
- Phương án 2: Đi theo hướng $A \longrightarrow B \longrightarrow D \longrightarrow C \longrightarrow A$.
  - Công đoạn 1: Chọn đường đi từ A đến B. Có 3 cách.
  - Công đoạn 2: Chọn đường đi từ B đến D. Có 4 cách.
  - Công đoạn 3: Chọn đường đi từ D đến C. Có 6 cách.
  - Công đoạn 4: Chọn đường đi từ C đến A. Có 5 cách.
    Theo quy tắc nhân, số cách chọn trong phương án này là $3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 5 = 360$. (2)
- Phương án 3: Đi theo hướng $A \longrightarrow C \longrightarrow D \longrightarrow B \longrightarrow A$.
  - Công đoạn 1: Chọn đường đi từ A đến C. Có 5 cách.
  - Công đoạn 2: Chọn đường đi từ C đến D. Có 6 cách.
  - Công đoạn 3: Chọn đường đi từ D đến B. Có 4 cách.
  - Công đoạn 4: Chọn đường đi từ B đến A. Có 3 cách.
    Theo quy tắc nhân, số cách chọn trong phương án này là $5 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 3 = 360$. (3)
- Phương án 4: Đi theo hướng $A \longrightarrow C \longrightarrow D \longrightarrow C \longrightarrow A$.
  - Công đoạn 1: Chọn đường đi từ A đến C. Có 5 cách.
  - Công đoạn 2: Chọn đường đi từ C đến D. Có 6 cách.
  - Công đoạn 3: Chọn đường đi từ D trở về cC mà không đi lại con đường đã đi qua. Có 5 cách.
  - Công đoạn 4: Chọn đường đi từ C trở về A mà không đi lại con đường đã đi qua. Có 4 cách.

  Theo quy tắc nhân, số cách chọn trong phương án này là $5 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 600$. (4)

Từ (1), (2), (3) và (4) theo quy tắc cộng, ta có số cách chọn đường đi thỏa yêu cầu đề bài là

$$72 + 360 + 360 + 600 = 1392.$$

VÍ DỤ 5. Có bao nhiêu cách chọn một vé Xổ số kiến thiết có 5 chữ số mà số ghi trên vé không có chữ số 0 hoặc không có chữ số 9?

Lời giải.

Gọi A là tập hợp các vé Xổ số mà số ghi trên vé không có chữ số 0, B là tập hợp các vé Xổ số có 5 chữ số mà số ghi trên vé không có chữ số 9 thì $A \cup B$ là tập hợp các vé số có 5 chữ số mà số ghi trên vé không có chữ số 0 hoặc không có chữ số 9 và $A \cap B$ là tập hợp các vé số có 5 chữ số mà số ghi trên vé không có chữ số 0 và không có chữ số 9.
Vì $A \cap B \neq \varnothing$ nên $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$.

- Tìm $n(A)$.
  Số ghi trên vé là một dãy gồm 5 chữ số $abcde$. Vì số ghi trên vé không có chữ số 0 nên ở mỗi vị trí có 9 cách chọn. Suy ra $n(A) = 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 = 9^5$.
- Tìm $n(B)$.
  Vì số dãy số ghi trên vé không có chữ số 9 và a có thể bằng 0 nên mỗi vị trí $a, b, c, d, e)$ có có 9 cách chọn. Do đó, $n(B) = 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 = 9^5$.
- Tìm $n(A \cap B)$.
  Mỗi cách chọn ra dãy số gồm 5 chữ số $abcde$ sao cho trong đó không có chữ số 0 và chữ số 9 được thực hiện qua 5 công đoạn, mỗi công đoạn có 8 cách chọn trong tập $\{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$. Suy ra $n(A \cap B) = 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 = 8^5$.

Vậy số vé Xổ số thỏa đề bài là $n(A \cup B) = 2 \cdot 9^5 - 8^5 = 85330$.

VÍ DỤ 6. Từ tập $E = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên chẵn gồm 3 chữ số đôi một khác nhau và không lớn hơn 789?

Lời giải.

Mỗi cách lập ra số tự nhiên $\overline{abc}$ là số chẵn gồm 3 chữ số đôi một khác nhau từ E thỏa $\overline{abcd} \leq 789$ được thực hiện theo một trong các phương án sau

- Phương án 1: $\overline{abc} = \overline{7bc}$ với $b < 9$.
  - Công đoạn 1: Chọn $c \in \{2;4;6;8\}$. Có 4 cách.
  - Công đoạn 2: Chọn $b \in E \backslash \{9,7;c\}$. Có 6 cách.

  Theo quy tắc nhân, số cách chọn trong phương án này là $4 \cdot 6 = 24$. (1)
- Phương án 2: $\overline{abc}$ với $a < 7, c = 8$
  - Công đoạn 1: Chọn $a \in \{1;2;3;4;5;6\}$. Có 6 cách.
  - Công đoạn 2: Chọn $b \in E \backslash \{8,a\}$. Có 7 cách.
    Theo quy tắc nhân, số cách chọn trong phương án này là $6 \cdot 7 = 42$. (2)
- Phương án 3: $\overline{abc}$ với $a < 7, c \neq 8$.
  - Công đoạn 1: Chọn $c \in \{2;4;6\}$. Có 3 cách
  - Công đoạn 2: Chọn $a \in E \backslash \{7,8,9,c\}$. Có 5 cách.
  - Công đoạn 3: Chọn $b \in E \backslash \{a,c\}$. Có 7 cách.
    Theo quy tắc nhân, số cách chọn trong phương án này là $3 \cdot 5 \cdot 7 = 105$. (3)

  Từ (1), (2), và (3) theo quy tắc cộng, ta có số các số thỏa đề là $24 + 42 + 105 = 171$.

2. Bài tập tự luận

BÀI 1. Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 có thể lập được bao nhiêu số có bốn chữ số khác nhau trong đó phải có chữ số 2?

Lời giải.

Gọi $n = \overline{a_1a_2a_3a_4}$ là số cần tìm.

- Nếu $a_1 = 2$ thì a_2 có 7 cách chọn, a_3 có 6 cách chọn, a_4 có 5 cách chọn.
  Suy ra có $5 \cdot 6 \cdot 7 = 210$ số.
- Nếu $a_1 \neq 2$ và $a_2 = 2$ thì a_1 có 6 cách chọn (vì $a_1 \neq 0$), a_3 có 6 cách chọn, a_4 có 5 cách chọn.
  Suy ra có $5 \cdot 6 \cdot 6 = 180$ số.
  Tương tự đối với các trường hợp a_3, a_4 bằng 2 đều giống trường hợp $a_2 = 2$.

Suy ra số các số cần tìm là $210 + 180 \cdot 3 = 750$ số.

BÀI 2. Cho các số 1, 2, 3, 4, 5.

a) Hãy tìm tất cả các số có ba chữ số khác nhau nằm trong khoảng $(300; 500)$.

b) Hãy tìm tất cả các số có ba chữ số nằm trong khoảng $(300; 500)$ (các chữ số không cần khác nhau).

Lời giải.

Số có ba chữ số có dạng $n = \overline{a_1a_2a_3}$.

a) Ta có $300 < n < 500$ nên a_1 chỉ có thể là 3 hoặc 4.

- Nếu $a_1 = 3$ thì $n = \overline{3a_2a_3}$. Khi đó,
  \+ a_2 có 4 cách chọn.
  \+ a_3 có 3 cách chọn.
  Do đó, có $4 \times 3 = 12$ số.
- Nếu $a_1 = 4$ thì $n = \overline{4a_2a_3}$. Khi đó,
  \+ a_2 có 4 cách chọn.
  \+ a_3 có 3 cách chọn.
  Do đó, có $4 \times 3 = 12$ số.

Vậy có tất cả $12 + 12 = 24$ số.

b) Ta có $300 < n < 500$ nên $a_1 \in \{3,4\}$. Kết hợp với các chữ số không cần khác nhau thì

- a_1 có 2 cách chọn.
- a_2 có 5 cách chọn.

- a_3 có 5 cách chọn.

Vậy có tất cả $2 \times 5 \times 5 = 50$ số.

BÀI 3. Từ các chữ số 0, 4, 5, 7, 9.

a) Có thể lập được bao nhiêu số có bốn chữ số khác nhau.

b) Có thể lập được bao nhiêu số có bốn chữ số khác nhau và lớn hơn 5000?

c) Có thể lập được bao nhiêu số có bốn chữ số chia hết cho 5?

Lời giải.

a) Gọi số cần tìm là $n = \overline{a_1a_2a_3a_4}$.

- a_1 có 4 cách chọn (vì $a_1 \neq 0$).
- a_2 có 4 cách chọn.
- a_3 có 3 cách chọn.
- a_4 có 2 cách chọn.

Suy ra có $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 4 = 96$ số.

b) Số lớn hơn 5000 thì chữ số hàng nghìn $a_1 \geq 5$.

- Nếu $a_1 = 5$ thì $n = \overline{5a_2a_3a_4}$.
  Khi đó a_2 có 4 cách chọn, a_3 có 3 cách chọn, a_4 có 2 cách chọn.
  Suy ra có $2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ số.
- Nếu $a_1 = 7$ hoặc $a_1 = 9$ thì cũng giống trường hợp $a_1 = 5$

Suy ra có tất cả $24 \cdot 3 = 72$ số lớn hơn 5000.

c) Số chia hết cho 5 phải có chữ số tận cùng là 0 hoặc 5 nên a_4 có 2 cách chọn.

- Nếu $a_4 = 0$ thì $n = \overline{a_1a_2a_30}$.
  Khi đó a_1 có 4 cách chọn, a_2 có 3 cách chọn, a_3 có 2 cách chọn.
  Suy ra có $2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ số.
- Nếu $a_4 = 5$ thì $n = \overline{a_1a_2a_35}$.
  Khi đó a_1 có ba cách chọn (vì $a_1 \neq 0$), a_2 có 3 cách chọn, a_3 có hai cách chọn.
  Suy ra có $2 \cdot 3 \cdot 3 = 18$ số.

Vậy có tất cả $24 + 18 = 42$ số.

BÀI 4. Một lớp học có 3 tổ. Tổ I gồm có 3 học sinh nam và 7 học sinh nữ; tổ II gồm có 5 học sinh nam và 5 học sinh nữ; tổ III gồm có 6 học sinh nam và 4 học sinh nữ. Cô giáo chủ nhiệm cần chọn ra một học sinh nam và một học sinh nữ để tham gia hoạt động tình nguyện. Hỏi cô giáo có bao nhiêu cách chọn, nếu cô muốn chọn hai em học sinh ở hai tổ khác nhau?

Lời giải.

Mỗi cách chọn ra một học sinh nam và học sinh nữ thỏa yêu cầu đề bài được thực hiện theo một trong các phương án sau:

- Phương án 1: Chọn nam tổ I và nữ ở hai tổ còn lại.
  - Công đoạn 1: Chọn 1 học sinh nam trong tổ I. Có 3 cách.
  - Công đoạn 2: Chọn 1 học sinh nữ từ hai tổ còn lại. Có 9 cách.
    Theo quy tắc nhân, số cách trong phương án này là $3 \times 9 = 27$ cách. (1)
- Phương án 2: Chọn nam tổ II và nữ ở hai tổ còn lại.
  Tương tự phương án 1, ta có số cách trong phương án này là $5 \times 11 = 55$ cách. (2)
- Phương án 3: Chọn nam tổ III và nữ ở hai tổ còn lại. Có $6 \times 12 = 72$ cách. (3)

Từ (1), (2) và (3), theo quy tắc cộng, ta có tổng số cách chọn là $27 + 55 + 72 = 154$ cách.

BÀI 5. Từ tập $E = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm 4 chữ số khác nhau và số tự nhiên này lớn hơn 3452?

Lời giải.

Mỗi cách lập ra số tự nhiên $\overline{abcd}$ gồm 4 chữ số phân khác nhau từ tập E thỏa $\overline{abcd} > 3452$ được thực hiện theo một trong các phương án sau:

- Phương án 1: $\overline{abcd} = \overline{345d}$ với $d > 2$.
  Vì d có duy nhất một cách chọn là $d = 6$ nên phương án này có 1 số thỏa mãn. (1)

- Phương án 2: $\overline{abcd} = \overline{34cd}$ với $c > 5$.
  - Công đoạn 1: Chọn $c \in E$, $c > 5$. Có 1 cách.
  - Công đoạn 2: Chọn $d \in E \backslash \{3; 4; c\}$. Có 4 cách.
    Theo quy tắc nhân, số cách chọn trong phương án này là $1 \cdot 4 = 4$. (2)
- Phương án 3: $\overline{abcd} = \overline{3bcd}$ với $b > 4$.
  - Công đoạn 1: Chọn $b \in \{5; 6\}$. Có 2 cách
  - Công đoạn 2: Chọn $c \in E \backslash \{3; b\}$. Có 5 cách.
  - Công đoạn 3: Chọn $d \in E \backslash \{3; b, c\}$. Có 4 cách.
    Theo quy tắc nhân, số cách chọn trong phương án này là $2 \cdot 5 \cdot 4 = 40$. (3)
- Phương án 4: $\overline{abcd}$ với $a > 3$.
  - Công đoạn 1: Chọn $a \in \{4; 5; 6\}$. Có 3 cách
  - Công đoạn 2: Chọn $b \in E \backslash \{a\}$. Có 6 cách.
  - Công đoạn 3: Chọn $c \in E \backslash \{a; b\}$. Có 5 cách.
  - Công đoạn 4: Chọn $d \in E \backslash \{a; b; c\}$. Có 4 cách.
    Theo quy tắc nhân, số cách chọn trong phương án này là $3 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 360$. (4)

Từ (1), (2), (3) và (4) theo quy tắc cộng, ta có số các số thỏa đề là $1 + 4 + 40 + 360 = 405$.

BÀI 6. Từ tập $E = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm 4 chữ số đôi một khác nhau chia hết cho 3?

Lời giải.

Các tập con gồm 4 phần tử của E mà có tổng các chữ số chia hết cho 3 là
$\{0; 1; 2; 3\}, \{0; 1; 2; 6\}, \{0; 1; 3; 5\}, \{0; 1; 5; 6\}, \{0; 2; 3; 4\}, \{0; 2; 4; 6\}, \{0; 3; 4; 5\}, \{0; 4; 5; 6\}$,
$\{1; 2; 3; 6\}, \{1; 2; 4; 5\}, \{1; 3; 4; 5\}, \{2; 3; 4; 6\}, \{3; 4; 5; 6\}$.
Mỗi cách lập ra số tự nhiên $\overline{abcd}$ gồm 4 chữ số đôi một khác nhau chia hết cho 3 được thực hiện theo một trong các phương án sau

- Phương án 1: Số $\overline{abcd}$ được tạo thành từ một tập con có chữ số 0.
  - Công đoạn 1: Chọn $a \neq 0$. Có 3 cách.
  - Công đoạn 2: Chọn b, c phân biệt từ 3 số còn lại. Có $3 \cdot 2 = 6$ cách.
    Theo quy tắc nhân, số các số abcd được tạo thành từ một tập con có chữ số 0 là $3 \cdot 6 = 18$.

  Vì có 8 tập con chứa số 0 nên trong phương án này có $8 \cdot 18 = 144$ số. (1)
- Phương án 2: Số $\overline{abcd}$ được tạo thành từ một tập con không có chữ số 0.
  - Công đoạn 1: Chọn a. Có 4 cách.
  - Công đoạn 2: Chọn b, c phân biệt từ 3 số còn lại. Có $3 \cdot 2 = 6$ cách.
    Theo quy tắc nhân, số các số $\overline{abcd}$ được tạo thành từ một tập con không có chữ số 0 là $4 \cdot 6 = 24$.

  Vì có 5 tập con không chứa số 0 nên trong phương án này có $5 \cdot 24 = 120$. (2)

Từ (1) và (2) theo quy tắc cộng ta có số các số thỏa đề là $144 + 120 = 264$.

BÀI 7. Có bao nhiêu cách chọn một vé số có 5 chữ số mà số ghi trên vé có chữ số 5 và có số chẵn?

Lời giải.

Gọi x là số các vé số gồm 5 chữ số, còn y là số vé số gồm 5 chữ số sao cho trong đó không có chữ số 5 hoặc không có chữ số chẵn thì $x - y$ là số các vé số gồm 5 chữ số trong đó có có số 5 và có chữ số chẵn.

- Tìm x.
  Mỗi số ghi trên vé số là một dãy số có 5 chữ số *abcde*, mỗi chữ số có thể bằng 0 và các chữ số có thể giống nhau nên theo quy tắc nhân, ta có $x = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^5$.
- Tìm y.
  Gọi C là tập hợp các vé số có 5 chữ số mà số ghi trên vé không có chữ số 5, D là tập hợp các vé số có 5 chữ số mà số ghi trên vé không có chữ số chẵn thì $C \cup D$ là tập hợp các vé số có 5 chữ số mà số ghi trên vé không có chữ số 5 hoặc không có chữ số chẵn và $C \cap D$ là tập hợp các vé số có 5 chữ số mà số ghi trên vé không có chữ số 5 và không có chữ số chẵn (tức là các số ghi trên vé chỉ gồm các số trong tập $\{1; 3; 7; 9\}$).
  - Áp dụng quy tắc nhân, ta tìm được

$$n(C) = 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 = 9, n(D) = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^5, n(C \cap D) = 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^5.$$

— Ta có $y = n(C \cup D) = n(C) + n(D) - n(C \cap D) = 9^5 + 5^5 - 4^5 = 61150$.

Vậy số các vé số thỏa đề bài là $x - y = 100000 - 38850$.

BÀI 8. Cho tập $A = \{0; 1; 2; \ldots; 8; 9\}$. Từ A có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm bảy chữ số đôi một khác nhau và chia hết cho 2?

Lời giải.

Gọi số cần tìm là $\overline{abcdefg}$.

- **TH1:** $g = 0$ Do các chữ số đôi một khác nhau nên có 9 cách chọn a; 8 cách chọn b; 7 cách chọn c; 6 cách chọn d; 5 cách chọn e và 4 cách chọn f.
  Nên có $1 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 60480$ (số).
- **TH2:** $g \in \{2; 4; 6; 8\}$ Do các chữ số đôi một khác nhau nên có 4 cách chọn g; 8 cách chọn $a \neq 0$; 8 cách chọn b; 7 cách chọn c; 6 cách chọn d; 5 cách chọn e và 4 cách chọn f.
  Nên có $4 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 215040$ (số).

Vậy có $60480 + 215040 = 275520$ (số).

BÀI 9. Có bao nhiêu số tự nhiên trong đó các chữ số khác nhau và nhỏ hơn 10000 được tạo thành từ năm chữ số 0, 1, 2, 3, 4?

Lời giải.

Các số cần tìm được bắt đầu từ các chữ số 1, 2, 3, 4 và có bốn, ba, hai, một chữ số.

- Số cần tìm có bốn chữ số là $\overline{abcd}$.
  Do các chữ số khác nhau nên có 4 cách chọn $a \neq 0$; 4 cách chọn b; 3 cách chọn c và 2 cách chọn d.
  Nên có $4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 96$ (số).
- Số cần tìm có ba chữ số là $\overline{abc}$.
  Do các chữ số khác nhau nên có 4 cách chọn $a \neq 0$; 4 cách chọn b và 3 cách chọn c.
  Nên có $4 \cdot 4 \cdot 3 = 48$ (số).
- Số cần tìm có hai chữ số là $\overline{ab}$.
  Do các chữ số khác nhau nên có $4 \neq 0$ cách chọn a và 4 cách chọn b.
  Nên có $4 \cdot 4 = 16$ (số).
- Số cần tìm có một chữ số: 5 (số).

Vậy có $96 + 48 + 16 + 5 = 165$ (số).

BÀI 10. Từ các số $0; 1; 2; 3; 4; 5$ có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có năm chữ số khác nhau và không bắt đầu bằng 123?

Lời giải.

- Gọi số tự nhiên có năm chữ số khác nhau có dạng $\overline{abcde}$.
  Ta có 5 cách chọn $a \neq 0$; 5 cách chọn b; 4 cách chọn c; 3 cách chọn d và 2 cách chọn e.
  Nên có $5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 600$ (số).
- Gọi số tự nhiên có năm chữ số khác nhau và bắt đầu bằng 123 có dạng $\overline{123b_1b_2}$.
  Ta có 3 cách chọn b_1 và 2 cách chọn b_2.
  Nên có $3 \cdot 2 = 6$ (số).

Vậy có $600 - 6 = 594$ số tự nhiên có năm chữ số khác nhau và không bắt đầu bằng 123.

BÀI 11. Cho tập hợp $A = \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$.

a) Có bao nhiêu số tự nhiên gồm năm chữ số đôi một khác nhau, chia hết cho 5 và chữ số 2 luôn có mặt đúng một lần?

b) Có bao nhiêu số tự nhiên gồm ba chữ số đôi một khác nhau và chia hết cho 3?

c) Tính tổng các số tự nhiên có năm chữ số đôi một khác nhau mà các số này không có chữ số 0?

Lời giải.

a) Gọi số cần tìm là $\overline{abcde}$.

- **Trường hợp 1:** $e = 0$.
  — Ta có 1 cách chọn e.
  — Chữ số 2 có 4 vị trí đặt là a hoặc b hoặc c hoặc d.
  — Ba chữ số còn lại có $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ (cách).

  Nên có $1 \cdot 4 \cdot 24 = 96$ (số).

- **Trường hợp 2:** $e = 5$, $a = 2$. Ta có 1 cách chọn e, 1 cách chọn a.
  Do các chữ số đôi một khác nhau nên có 4 cách chọn b, 3 cách chọn c và 2 cách chọn d.
  Nên có $1 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ (số).
- **Trường hợp 3:** $e = 5$, $a \neq 2$.
  — Ta có 1 cách chọn e, 3 cách chọn $a \neq 0$.
  — Chữ số 2 có 3 vị trí đặt là b hoặc c hoặc d.
  — Hai chữ số còn lại có $3 \cdot 2 = 6$ (cách).
  Nên có $1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 6 = 54$ (số).

Vậy có $96 + 24 + 54 = 174$ (số).

b) Gọi số cần tìm là $\overline{abc}$.
Xét các tập con gồm 3 phần tử của tập hợp A, ta thấy các tập hợp sau có tổng các phần tử là số chia hết cho 3 là

$$A_1 = \{0;1;2\},\ A_2 = \{0;1;5\},\ A_3 = \{0;2;4\},\ A_4 = \{0;4;5\},$$
$$A_5 = \{1;2;3\},\ A_6 = \{1;3;5\},\ A_7 = \{2;3;4\},\ A_8 = \{3;4;5\}.$$

- Khi $a, b, c, \in A_1, A_2, A_3, A_4$: mỗi trường hợp có 2 cách chọn $a \neq 0$, 2 cách chọn b và 1 cách chọn c. Nên có $4 \cdot (2 \cdot 2 \cdot 1) = 16$ (số).
- Khi $a, b, c, \in A_5, A_6, A_7, A_8$: mỗi trường hợp có 3 cách chọn a, 2 cách chọn b và 1 cách chọn c. Nên có $4 \cdot (3 \cdot 2 \cdot 1) = 24$ (số).

Vậy có $16 + 24 = 40$ (số).

c) Gọi số cần tìm là $\overline{abcde}$.
Do các chữ số đôi một khác nhau mà các số này không có chữ số 0 nên có 5 cách chọn a, 4 cách chọn b, 3 cách chọn c, 2 cách chọn d và 1 cách chọn e.
Nên có $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ số thỏa mãn yêu cầu bài toán.
Gọi S là tổng của 120 số tự nhiên có 5 chữ số khác nhau vừa tìm được.
Mỗi chữ số 1, 2, 3, 4, 5 đều xuất hiện ở a, b, c, d, e là 24 lần.
Mà $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$ nên

$$S = 24 \cdot \left(15 \cdot 10^4 + 15 \cdot 10^3 + 15 \cdot 10^2 + 15 \cdot 10 + 15\right) = 3999960.$$

3. Bài tập trắc nghiệm

CÂU 1. Có bao nhiêu số tự nhiên có 6 chữ số khác nhau?

Ⓐ 136080. Ⓑ 136800. Ⓒ 1360800. Ⓓ 138060.

Lời giải.

Số số tự nhiên có 6 chữ số khác nhau là $9 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 = 136080$.

Chọn đáp án (A) .... □

CÂU 2. Bạn Anh muốn qua nhà bạn Bình để rủ Bình đến nhà bạn Châu chơi. Từ nhà Anh đến nhà Bình có 3 con đường. Từ nhà Bình đến nhà Châu có 5 con đường. Hỏi bạn Anh có bao nhiêu cách chọn đường đi từ nhà mình đến nhà bạn Châu?

Ⓐ 6. Ⓑ 15. Ⓒ 4. Ⓓ 8.

Lời giải.

Có 3 cách chọn một đường đi từ nhà Anh đến nhà Bình và có 5 cách chọn một đường đi từ nhà Bình đến nhà Châu. Do đó có $3 \cdot 5 = 15$ cách để chọn một đường đi từ nhà Anh đến nhà Châu.

Chọn đáp án (B) .... □

CÂU 3. Bạn Mai có ba cái áo màu khác nhau và hai quần kiểu khác nhau. Hỏi Mai có bao nhiêu cách chọn một bộ quần áo?

Ⓐ 10. Ⓑ 20. Ⓒ 6. Ⓓ 5.

Lời giải.

Chọn một cái áo trong ba cái áo màu khác nhau, số cách chọn là 3.
Chọn một cái quần trong hai quần kiểu khác nhau, số cách chọn là 2.
Theo quy tắc nhân, số cách chọn một bộ quần áo là $3 \cdot 2 = 6$.

Chọn đáp án (C) .... □

CÂU 4. Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên bé hơn 60?

Ⓐ 30. Ⓑ 17. Ⓒ 25. Ⓓ 42.

Lời giải.

- Số cần tìm có 1 chữ số ⇒ có 5 số thỏa mãn yêu cầu.
- Số cần tìm có 2 chữ số ⇒ có $5 \cdot 5 = 25$ số thỏa mãn yêu cầu.

Vậy có $5 + 25 = 30$ (số thỏa mãn yêu cầu).

Chọn đáp án A ....

CÂU 5. Từ các số của tập hợp $\{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$ lập được bao nhiêu số tự nhiên chẵn có ít nhất 5 chữ số và các chữ số đôi một phân biệt?

A 624. B 522. C 312. D 405.

Lời giải.

Theo đề bài ta cần tìm số các số tự nhiên chẵn có 6 chữ số và 5 chữ số đôi một phân biệt từ tập hợp đã cho.

a) Số tự nhiên có 6 chữ số có dạng $n = \overline{abcdef}$.

- Nếu $f = 0$ thì mỗi cách chọn chữ số cho các vị trí a, b, c, d, e là một hoán vị của 5 phần tử 1, 2, 3, 4, 5. Do đó có $5!$ số.
- Nếu $f \in \{2; 4\}$ thì $a \neq 0$ nên a có 4 cách chọn và mỗi cách chọn chữ số cho các vị trí b, c, d, e là một hoán vị của 4 phần tử còn lại. Do đó có $2 \times 4 \times 4!$ số.
  Vậy có tất cả $5! + 2 \times 4 \times 4! = 312$ số chẵn có 6 chữ số đôi một phân biệt.

b) Số tự nhiên có 5 chữ số có dạng $n = \overline{abcde}$.

- Nếu $e = 0$ thì mỗi cách chọn chữ số cho các vị trí a, b, c, d là một chỉnh hợp chập 4 của 5 phần tử 1, 2, 3, 4, 5. Do đó có A_5^4 số.
- Nếu $e \in \{2; 4\}$ thì $a \neq 0$ nên a có 4 cách chọn và mỗi cách chọn chữ số cho các vị trí b, c, d là một chỉnh hợp chập 3 của 4 phần tử còn lại. Do đó có $2 \times 4 \times \mathrm{A}_4^3$ số.
  Như thế có tất cả $\mathrm{A}_5^4 + 2 \times 4 \times \mathrm{A}_4^3 = 312$ số chẵn có 5 chữ số đôi một phân biệt.

Vậy có tất cả $312 + 312 = 624$ số tự nhiên chẵn có ít nhất 5 chữ số và các chữ số đôi một phân biệt.

Chọn đáp án A ....

CÂU 6. Cho tập $A = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}$, từ tập A có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có 5 chữ số khác nhau và chia hết cho 2?

A 1230. B 2880. C 1260. D 8232.

Lời giải.

Gọi các số thỏa mãn bài toán có dạng $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$, với $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 \in A$.
Trường hợp 1: $a_5 = 0$.

- Vị trí a_1 có 6 cách chọn từ tập $A \setminus \{0\}$.
- Vị trí a_2 có 5 cách chọn từ tập $A \setminus \{0; a_1\}$.
- Vị trí a_3 có 4 cách chọn từ tập $A \setminus \{0; a_1; a_2\}$.
- Vị trí a_4 có 3 cách chọn từ tập $A \setminus \{0; a_1; a_2; a_3\}$.

Theo quy tắc nhân, số các số thỏa mãn bài toán trong trường hợp này là $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$ số.
Trường hợp 2: $a_5 \neq 0$.

- Vì số cần tìm chia hết cho 2 nên a_5 có 3 cách chọn từ tập $\{2; 4; 6\}$.
- Vị trí a_1 có 5 cách chọn từ tập $A \setminus \{0; a_5\}$.
- Vị trí a_2 có 5 cách chọn từ tập $A \setminus \{a_5; a_1\}$.
- Vị trí a_3 có 4 cách chọn từ tập $A \setminus \{a_5; a_1; a_2\}$.
- Vị trí a_4 có 3 cách chọn từ tập $A \setminus \{a_5; a_1; a_2; a_3\}$.

Theo quy tắc nhân, số các số thỏa mãn bài toán trong trường hợp này là $3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 900$ số.
Theo quy tắc cộng, số các số thỏa mãn bài toán là $360 + 900 = 1260$ số.

Chọn đáp án C ....

CÂU 7. Cho các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5. Từ các chữ số đã cho lập được bao nhiêu số tự nhiên chẵn có 4 chữ số và các chữ số đôi một bất kỳ khác nhau?

(A) 160. (B) 156. (C) 752. (D) 240.

Lời giải.

Gọi các số thỏa mãn bài toán có dạng $\overline{a_1a_2a_3a_4}$, với $a_1, a_2, a_3, a_4 \in A = \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$.

Trường hợp 1: $a_4 = 0$.
Vị trí a_1 có 5 cách chọn từ tập $A \setminus \{0\}$.
Vị trí a_2 có 4 cách chọn từ tập $A \setminus \{0; a_1\}$.
Vị trí a_3 có 3 cách chọn từ tập $A \setminus \{0; a_1; a_2\}$.
Theo quy tắc nhân, số các số thỏa mãn bài toán trong trường hợp này là $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ số.

Trường hợp 2: $a_4 \neq 0$.
Vì số cần tìm là số chẵn nên a_4 có 2 cách chọn từ tập $\{2; 4\}$.
Vị trí a_1 có 4 cách chọn từ tập $A \setminus \{0; a_4\}$.
Vị trí a_2 có 4 cách chọn từ tập $A \setminus \{a_4; a_1\}$.
Vị trí a_3 có 3 cách chọn từ tập $A \setminus \{a_4; a_1; a_2\}$.
Theo quy tắc nhân, số các số thỏa mãn bài toán trong trường hợp này là $2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 3 = 96$ số.

Theo quy tắc cộng, số các số thỏa mãn bài toán là $60 + 96 = 156$ số.

Chọn đáp án (B) .... □

CÂU 8. Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 5, 8 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên lẻ có bốn chữ số đôi một khác nhau và phải có mặt chữ số 3?

(A) 108. (B) 228. (C) 36. (D) 144.

Lời giải.

Gọi các số thỏa mãn bài toán có dạng $\overline{a_1a_2a_3a_4}$, với $a_1, a_2, a_3, a_4 \in A = \{0; 1; 2; 3; 5; 8\}$.

Trường hợp 1: $a_4 = 3$.
Vị trí a_1 có 4 cách chọn từ tập $A \setminus \{0; 3\}$.
Vị trí a_2 có 4 cách chọn từ tập $A \setminus \{a_1; 3\}$.
Vị trí a_3 có 3 cách chọn từ tập $A \setminus \{a_1; a_2; 3\}$.
Theo quy tắc nhân, số các số thỏa mãn bài toán trong trường hợp này là $4 \cdot 4 \cdot 3 = 48$ số.

Trường hợp 2: $a_1 = 3$.
Vì số cần tìm là số lẻ nên a_4 có 2 cách chọn từ tập $\{1; 5\}$.
Vị trí a_2 có 4 cách chọn từ tập $A \setminus \{3; a_4\}$.
Vị trí a_3 có 3 cách chọn từ tập $A \setminus \{3; a_4; a_2\}$.
Theo quy tắc nhân, số các số thỏa mãn bài toán trong trường hợp này là $2 \cdot 4 \cdot 3 = 24$ số.

Trường hợp 3: $a_1 \neq 3$ và $a_4 \neq 3$.
Vì số cần tìm là số lẻ nên a_4 có 2 cách chọn từ tập $\{1; 5\}$.
Vị trí a_1 có 3 cách chọn từ tập $A \setminus \{0; 3; a_4\}$.
Chọn 1 vị trí để đặt số 3, có 2 cách (vị trí a_2, a_3).
Vị trí cuối cùng có 3 cách chọn từ tập $A \setminus \{a_4; a_1; 3\}$.
Theo quy tắc nhân, số các số thỏa mãn bài toán trong trường hợp này là $2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 = 36$ số.

Theo quy tắc cộng, số các số thỏa mãn bài toán là $48 + 24 + 36 = 108$ số.

Chọn đáp án (A) .... □

CÂU 9. Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên chẵn có sáu chữ số và thỏa mãn điều kiện: sáu chữ số của mỗi số là khác nhau và chữ số hàng nghìn lớn hơn 2?

(A) 720. (B) 360. (C) 288. (D) 240.

Lời giải.

Gọi các số thỏa mãn bài toán có dạng $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6}$, với $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 \in A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.
Vì số cần tìm có hàng nghìn lớn hơn 2 nên $a_3 \geq 3$.

Trường hợp 1: a_3 là số lẻ.
Vị trí a_3 có 2 cách chọn từ tập $\{3; 5\}$.
Vì số cần tìm là số chẵn nên a_6 có 3 cách chọn từ tập $\{2; 4; 6\}$.
Vị trí a_1 có 4 cách chọn từ tập $A \setminus \{a_3; a_6\}$.
Vị trí a_2 có 3 cách chọn từ tập $A \setminus \{a_3; a_6; a_1\}$.
Vị trí a_4 có 2 cách chọn từ tập $A \setminus \{a_3; a_6; a_1; a_2\}$.
Vị trí a_5 có 1 cách chọn từ tập $A \setminus \{a_3; a_6; a_1; a_2; a_3\}$.
Theo quy tắc nhân, số các số thỏa mãn bài toán trong trường hợp này là $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 144$ số.

Trường hợp 2: a_3 là số chẵn.
Vị trí a_3 có 2 cách chọn từ tập $\{4; 6\}$.

Vì số cần tìm là số chẵn nên a_6 có 2 cách chọn từ tập $\{2; 4; 6\} \setminus \{a_3\}$.
Vị trí a_1 có 4 cách chọn từ tập $A \setminus \{a_3; a_6\}$.
Vị trí a_2 có 3 cách chọn từ tập $A \setminus \{a_3; a_6; a_1\}$.
Vị trí a_4 có 2 cách chọn từ tập $A \setminus \{a_3; a_6; a_1; a_2\}$.
Vị trí a_5 có 1 cách chọn từ tập $A \setminus \{a_3; a_6; a_1; a_2; a_3\}$.
Theo quy tắc nhân, số các số thỏa mãn bài toán trong trường hợp này là $2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 96$ số.

Theo quy tắc cộng, số các số thỏa mãn bài toán là $144 + 96 = 240$ số.

Chọn đáp án D .... □

CÂU 10. Xét mạng đường nối các tỉnh A, B, C, D, E, F, G, trong đó số viết trên một cạnh cho biết số con đường nối hai tỉnh nằm ở hai đầu mút của cạnh. Số cách đi từ tỉnh A đến tỉnh G là

A 23. **B** 252. **C** 2880. **D** 522.

Lời giải.

- Đi từ A đến D.
  - Đi có qua B có $2 \times 3 = 6$ cách.
  - Đi có qua C có $3 \times 4 = 12$ cách.

  Theo quy tắc cộng có $6 + 12 = 18$ cách đi từ A đến D.
- Đi từ D đến G.
  - Đi có qua E có $2 \times 5 = 10$ cách.
  - Đi có qua F có $2 \times 2 = 4$ cách.

  Theo quy tắc cộng có $10 + 4 = 14$ cách đi từ D đến G.

Theo quy tắc nhân có $18 \times 14 = 252$ cách đi từ A đến G.
Chọn đáp án C .... □

CÂU 11. Từ các chữ số $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên chẵn có 3 chữ số đôi một khác nhau?

A 168. **B** 210. **C** 84. **D** 105.

Lời giải.

Gọi số tự nhiên cần tìm là $n = \overline{abc}$ với $a \neq 0$.

a) Trường hợp 1. Xét $n = \overline{ab0}$.
   - a có 6 cách chọn vì $a \neq 0$.
   - b có 5 cách chọn vì $b \neq 0, b \neq a$.

   Theo quy tắc nhân ta có $6 \times 5 = 30$ số cần tìm.

b) Trường hợp 2. Xét $n = \overline{abc}$ với $c \in \{2; 4; 6\}$.
   - c có 3 cách chọn.
   - a có 5 cách chọn vì $a \neq 0, a \neq c$.
   - b có 5 cách chọn vì $b \neq a, b \neq c$.

   Theo quy tắc nhân ta có $3 \times 5 \times 5 = 75$ số cần tìm.

Theo quy tắc cộng ta có $30 + 75 = 105$ số cần tìm.
Chọn đáp án D .... □

CÂU 12. Một hộp đựng 9 thẻ được đánh số từ 1 đến 9. Có bao nhiêu cách chọn hai thẻ sao cho tích hai số trên hai thẻ là số chẵn?

A 32. **B** 36. **C** 26. **D** 72.

Lời giải.

Trong 9 thẻ có 4 số chẵn và 5 số lẻ. Ta có các trường hợp sau:

- Cả 2 thẻ đều là số chẵn thì có $\dfrac{4 \times 3}{2} = 6$ cách.
- 1 thẻ là số chẵn, 1 thẻ là số lẻ thì có $4 \times 5 = 20$ cách.

Theo quy tắc cộng ta có $6 + 20 = 26$ cách.

Chọn đáp án C

CÂU 13. Từ tập hợp $A = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ lập được bao nhiêu số tự nhiên chia hết cho 5, gồm năm chữ số khác nhau sao cho trong đó luôn có mặt các chữ số 1, 2, 3 và chúng đứng cạnh nhau ?

A 46. B 66. C 52. D 44.

Lời giải.

- Trường hợp 1: Số cần tìm có dạng $\overline{123de}$.
  + Chọn $e \in \{0; 5\}$ có 2 cách chọn.
  + Chọn $d \in \{0; 4; 6; 5\} \setminus \{e\}$ có 3 cách chọn.
  + Có $2 \cdot 3 \cdot 6 = 36$ số cần tìm.

- Trường hợp 2: Số cần tìm có dạng $\overline{a123e}$.
  + Chọn $e = 0$, $a = 5$, trường hợp này có $1 \cdot 6 \cdot 1 = 6$ số.
  + Chọn $e \in \{0; 5\}$, $a \in \{6; 4\}$, trường hợp này có $2 \cdot 6 \cdot 2 = 24$ số.
  Vậy trường hợp này có $6 + 24 = 30$ số.

Số các số cần tìm là $36 + 30 = 66$ số.

Chọn đáp án B

CÂU 14. Cho tập hợp $A = \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$. Có thể lập bao nhiêu số tự nhiên có 3 chữ số khác nhau và chia hết cho 5?

A 42. B 40. C 38. D 36.

Lời giải.

Số tự nhiên x có dạng $\overline{abc}$ với a, b, $c \in A$ và đôi một phân biệt.
Vì số tạo ra chia hết cho 5 nên $c \in \{0; 5\}$.
Với $c = 0$, b có 5 cách chọn, a có 4 cách chọn nên $5 \times 4 = 20$ số cần tìm.
Với $c = 5$, số số $\overline{ab}$ thỏa mãn tiếp theo là $5 \times 4 - 4 = 16$.
Vậy có tất cả $20 + 16 = 36$ số.

Chọn đáp án D

CÂU 15. Có bao nhiêu số tự nhiên chẵn gồm hai chữ số khác nhau được lập từ các chữ số $0, 1, 2, 3, 4, 5$?

A 5. B 15. C 13. D 22.

Lời giải.

Số tự nhiên thỏa mãn có dạng $\overline{ab}$. Vì cần số chẵn nên $b \in \{0; 2; 4\}$.
Với $b = 0 \Rightarrow a \in \{1; 2; 3; 4; 5\} \Rightarrow 5$ số.
Với $b \neq 0 \Rightarrow b$ có 2 cách chọn là $2, 4$; a có 4 cách chọn.
Khi đó số các số cần tìm là $2 \times 4 = 8$ số.
Vậy có tất cả $8 + 5 = 13$ số.

Chọn đáp án C

CÂU 16. Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6 có thể lập được bao nhiêu chữ số tự nhiên bé hơn 100?

A 36. B 62. C 54. D 42.

Lời giải.

Các số bé hơn 100 chính là các số có một chữ số và hai chữ số được hình thành từ tập $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Từ tập A có thể lập được 6 số có một chữ số.
Gọi số có hai chữ số có dạng $\overline{ab}$ với a, $b \in A$.
Trong đó:
- a được chọn từ tập A (có 6 phần tử) nên có 6 cách chọn
- b được chọn từ tập A (có 6 phần tử) nên có 6 cách chọn.

Như vậy, ta có $6 \times 6 = 36$ số có hai chữ số.
Vậy, từ A có thể lập được $36 + 6 = 42$ số tự nhiên bé hơn 100.

Chọn đáp án D

CÂU 17. Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5 có thể lập được bao nhiêu số chẵn gồm 4 chữ số khác nhau?

A 156. B 144. C 96. D 134.

Lời giải.

Đặt $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Gọi số cần tìm có dạng $\overline{abcd}$ với a, b, c, $d \in A$.
Vì $\overline{abcd}$ là số chẵn $\Rightarrow d = \{0, 2, 4\}$.
TH1. Nếu $d = 0$, số cần tìm là $\overline{abc0}$. Khi đó:
- a được chọn từ tập $A \setminus \{0\}$ nên có 5 cách chọn

- b được chọn từ tập $A \setminus \{0,\, a\}$ nên có 4 cách chọn.
- c được chọn từ tập $A \setminus \{0,\, a,\, b\}$ nên có 3 cách chọn.

Như vậy, ta có $5 \times 4 \times 3 = 60$ số có dạng $\overline{abc0}$.
TH2. Nếu $d = \{2,\, 4\} \Rightarrow d$: có 2 cách chọn.
Khi đó a có 4 cách chọn (khác 0 và d), b có 4 cách chọn và c có 3 cách chọn.
Như vậy, ta có $2 \times 4 \times 4 \times 3 = 96$ số cần tìm như trên.
Vậy có tất cả $60 + 96 = 156$ số cần tìm.

Chọn đáp án (A) ....

CÂU 18. Cho tập $A = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}$. Từ tập A có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm 5 chữ số và chia hết cho 5.

(A) 600. (B) 432. (C) 679. (D) 523.

Lời giải.

Gọi $x = \overline{abcde}$ là số cần lập, $e \in \{0; 5\}$, $a \neq 0$.

- $e = 0 \Rightarrow e$ có 1 cách chọn, cách chọn a, b, c, d tương ứng là $6, 5, 4, 3$.
  Trường hợp này có $6 \times 5 \times 4 \times 3 = 360$ số.
- $e = 5 \Rightarrow e$ có 1 cách chọn, cách chọn a, b, c, d tương ứng là $5, 5, 4, 3$.
  Trường hợp này có $5 \times 5 \times 4 \times 3 = 300$ số.

Vậy có 660 số thỏa mãn yêu cầu bài toán.

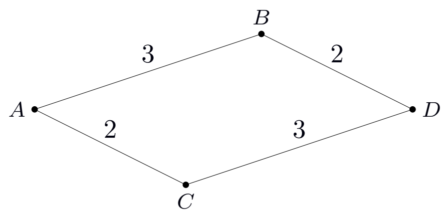
Chọn đáp án (A) ....

CÂU 19. Từ thành phố A đến thành phố B có 3 con đường, từ thành phố A đến thành phố C có 2 con đường, từ thành phố B đến thành phố D có 2 con đường, từ thành phố C đến thành phố D có 3 con đường, không có con đường nào nối từ thành phố C đến thành phố B. Hỏi có bao nhiêu con đường đi từ thành phố A đến thành phố D.

(A) 6. (B) 12. (C) 18. (D) 36.

Lời giải.

Số cách đi từ A đến D bằng cách đi từ A đến B rồi đến D là $3 \times 2 = 6$.
Số cách đi từ A đến D bằng cách đi từ A đến C rồi đến D là $2 \times 3 = 6$.
Nên có: $6 + 6 = 12$ cách.



Chọn đáp án (B) ....

CÂU 20. Số 1746360 có bao nhiêu ước số nguyên?

(A) 120. (B) 240. (C) 60. (D) 480.

Lời giải.

Ta có $1746360 = 2^3 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 11$.
Mỗi ước nguyên dương của 1746360 có dạng $2^a \cdot 3^b \cdot 5^c \cdot 7^d \cdot 11^e$ với $a \in \{0; 1; 2; 3\}$, $b \in \{0; 1; 2; 3; 4\}$, $c \in \{0; 1\}$, $d \in \{0; 1; 2\}$ và $e \in \{0; 1\}$.
Suy ra có $4 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 = 240$ ước nguyên dương của 1746360.
Vậy số 1746360 có 480 ước số nguyên.

Chọn đáp án (D) ....

CÂU 21. Từ các chữ số 0, 2, 3, 5, 7, 8, 9 lập được bao nhiêu số tự nhiên có 4 chữ số khác nhau và luôn chứa một bộ phận là “35”?

(A) 60. (B) 70. (C) 52. (D) 56.

Lời giải.

TH 1. Số có dạng $\overline{35ab}$.

(a) a có 5 cách chọn.
(b) b có 4 cách chọn.

Theo quy tắc nhân thì ta có $5 \cdot 4 = 20$ số.

TH 2. Số có dạng $\overline{a35b}$ hoặc $\overline{ab35}$.

(a) a có 4 cách chọn.

(b) b có 4 cách chọn.

Theo quy tắc nhân thì ta có $4 \cdot 4 \cdot 2 = 32$ số.

Theo quy tắc cộng ta có $20 + 32 = 52$ số.

Chọn đáp án C .... □

CÂU 22. Bình A chứa 3 quả cầu xanh, 4 quả cầu đỏ và 5 quả cầu trắng. Bình B chứa 4 quả cầu xanh, 3 quả cầu đỏ và 6 quả cầu trắng. Bình C chứa 5 quả cầu xanh, 5 quả cầu đỏ và 2 quả cầu trắng. Từ mỗi bình lấy ra một quả cầu. Có bao nhiêu cách lấy để cuối cùng được 3 quả có màu giống nhau?

A 180. B 60. C 150. D 120.

Lời giải.

Mỗi cách lấy ra từ mỗi bình 1 quả cầu sao cho 3 quả cầu lấy ra có cùng màu được thực hiện theo một trong các phương án sau

- Phương án 1: Ba quả cầu lấy ra cùng màu xanh, có $3 \times 4 \times 5 = 60$ cách lấy.
- Phương án 2: Ba quả cầu lấy ra cùng màu đỏ, có $4 \times 3 \times 5 = 60$ cách lấy.
- Phương án 3: Ba quả cầu lấy ra cùng màu trắng, có $5 \times 6 \times 2 = 60$ cách lấy.

Vậy có tất cả $60 + 60 + 60 = 180$ cách lấy quả cầu thoả mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án A .... □

CÂU 23. Có bao nhiêu số tự nhiên có 4 chữ số được viết từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 sao cho số đó chia hết cho 15?

A 132. B 432. C 234. D 243.

Lời giải.

Gọi số cần tìm là $N = \overline{a_1a_2a_3a_4}$.
Do N chia hết cho 15 nên N phải chia hết cho 3 và 5, nên a_4 phải bằng 5 và $a_1 + a_2 + a_3 + a_4$ phải chia hết cho 3.
Do vai trò các chữ số a_1, a_2, a_3 là như nhau, mỗi chữ số a_1 và a_2 có 9 cách chọn nên ta xét các trường hợp

- Nếu $a_1 + a_2 + a_4 = 3k$ thì $a_3 \in \{3; 6; 9\}$ có 3 cách chọn.
- Nếu $a_1 + a_2 + a_4 = 3k + 1$ thì $a_3 \in \{2; 5; 8\}$ có 3 cách chọn.
- Nếu $a_1 + a_2 + a_4 = 3k + 2$ thì $a_3 \in \{1; 4; 7\}$ có 3 cách chọn.

Vậy trong phương án thì a_3 có 3 cách chọn.
Vậy có tất cả $1 \times 9^2 \times 3 = 243$ số thỏa mãn.

Chọn đáp án D .... □

CÂU 24. Có bao nhiêu số tự nhiên chẵn gồm ba chữ số khác nhau?

A 328. B 500. C 360. D 405.

Lời giải.

Đặt $E = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$.
Mỗi cách lập ra số tự nhiên $\overline{abc}$ là số chẵn, gồm 3 chữ số phân biệt từ tập E được thực hiện theo một trong các phương án sau:

- Phương án 1: $c = 0$.
  - Công đoạn 1: Chọn $a \in E \setminus \{0\}$. Có 9 cách.
  - Công đoạn 2: Chọn $b \in E \setminus \{a; 0\}$. Có 8 cách.

  Theo quy tắc nhân số cách chọn trong phương án này là $9 \cdot 8 = 72$. (1)
- Phương án 2: $c \in \{2; 4; 6; 8\}$.
  - Công đoạn 1: Chọn $c \in \{2; 4; 6; 8\}$. Có 4 cách.
  - Công đoạn 2: Chọn $a \in E \setminus \{c; 0\}$. Có 8 cách.
  - Công đoạn 3: Chọn $b \in E\{a, c\}$. Có 8 cách.

  Theo quy tắc nhân số cách chọn trong phương án này là $4 \cdot 8 \cdot 8 = 256$. (2)
  Từ (1) và (2) theo quy tắc cộng, ta có số các số tự nhiên thỏa đề bài là $72 + 256 = 328$.

Chọn đáp án A .... □

CÂU 25. Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5 có thể lập được tất cả bao nhiêu số tự nhiên có 3 chữ số phân biệt và chia hết cho 3?

(A) 34. (B) 30. (C) 48. (D) 40.

Lời giải.

Giả sử số tự nhiên cần lập có dạng $\overline{abc}$.
Để số lập được chia hết cho 3 thì $a+b+c$ phải chia hết cho 3.
Khi đó a, b, c thuộc các tập hợp sau đây

$$\{0;1;2\},\ \{0;1;5\},\ \{0;2;4\},\ \{0;4;5\},\ \{1;2;3\},\ \{1;3;5\},\ \{2;3;4\},\ \{3;4;5\}.$$

Suy ra có $4\cdot 2\cdot 2\cdot 1+4\cdot 3\cdot 2\cdot 1=40$ số chia hết cho 3.
Vậy ta có 40 số thoả yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án (D) .... □

CÂU 26. Từ các chữ số 1, 3, 5, 7, 9 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên bé hơn 500?

(A) 120. (B) 80. (C) 60. (D) 45.

Lời giải.

Mỗi các lập số tự nhiên bé hơn 500 từ các chữ số đã cho được thực hiện theo một trong các phương án sau:

- Phương án 1: Số có một chữ số: Có 5 cách lập.
- Phương án 2: Số có 2 chữ số có $5\cdot 5=25$ cách.
- Phương án 3: Số có 3 chữ số chữ số. Gọi số cần tìm là $\overline{abc}$ khi đó chữ số a nhỏ hơn bằng 4 và các chữ số b, c được chọn tùy ý.
  $a\in\{1;3\}$: có 2 cách chọn.
  b có 5 cách chọn, c có 5 cách chọn.
  Vậy có $2\cdot 5\cdot 5=50$ cách.

Theo quy tắc cộng ta có số các số thỏa đề bài là $5+25+50=80$.
Chọn đáp án (B) .... □

CÂU 27. Có bao nhiêu số tự nhiên có sáu chữ số khác nhau từng đôi một, trong đó chữ số 5 đứng liền giữa hai chữ số 1 và 4?

(A) 249. (B) 1500. (C) 3204. (D) 2942.

Lời giải.

Mỗi cách lập ra số $\overline{abcdef}$ thỏa đề bài được thực hiện theo một trong các phương án sau

- Phương án 1: Số cần tìm có dạng $\overline{154def}$.
  - Công đoạn 1: Chọn d. Có 7 cách chọn.
  - Công đoạn 2: Chọn e. Có 6 cách chọn.
  - Công đoạn 3: Chọn f. Có 5 cách chọn.
    Theo quy tắc nhân, phương án này có $7\cdot 6\cdot 5=210$ cách chọn.
- Phương án 2: Số cần tìm có dạng $\overline{a154ef}$.
  - Công đoạn 1: Chọn a. Có 6 cách chọn.
  - Công đoạn 2: Chọn e. Có 6 cách chọn.
  - Công đoạn 3: Chọn f. Có 5 cách chọn.
    Theo quy tắc nhân, phương án này có $6\cdot 6\cdot 5=180$ cách chọn.
- Phương án 3: Số cần tìm có dạng $\overline{ab154f}$.
  Tương tự phương án 2, có 180 cách chọn.
- Phương án 4: Số cần tìm có dạng $\overline{abc154}$.
  Tương tự phương án 2, có 180 cách chọn.

Do vị trí số 1 và 4 có vai trò như nhau nên tất cả có $(210+3\cdot 180)\cdot 2=1500$ cách chọn.
Chọn đáp án (B) .... □

CÂU 28. Từ các chữ số 1, 3, 5, 7, 9 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm 3 chữ số đôi một khác nhau và nhỏ hơn 379?

(A) 30. (B) 60. (C) 12. (D) 20.

Lời giải.

Mỗi cách lập ra số $\overline{abc}<379$ được thực hiện theo một trong các phương án sau

- Phương án 1. $\overline{abc}$ với $a < 3$.
  - Công đoạn 1: Chọn $a < 3$. Có 1 cách chọn.
  - Công đoạn 2: Chọn b. Có 4 cách chọn.
  - Công đoạn 3: Chọn c. Có 3 cách chọn.
    Theo quy tắc nhân, phương án này có $1 \cdot 4 \cdot 3 = 12$ số. (1)
- Phương án 2. $\overline{abc} = \overline{3bc}$ với $b < 7$.
  - Công đoạn 1. Chọn b. Có 2 cách chọn.
  - Công đoạn 2. Chọn c. Có 3 cách chọn.
    Theo quy tắc nhân, phương án này có $1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$ số. (2)
- Phương án 3: $\overline{abc} = \overline{37c}$ với $c < 9$.
  Vì $c \in \{1; 5\}$ nên có 2 cách chọn c. Phương án này có 2 số thỏa mãn. (3)

Từ (1), (2) và (3), theo quy tắc cộng, ta có số các số thỏa đề bài là $12 + 6 + 2 = 20$ số.

Chọn đáp án D .... □

CÂU 29. Xếp 6 người A, B, C, D, E, F vào một ghế dài. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp sao cho A và F không ngồi cạnh nhau?

A. 260. B. 480. C. 460. D. 240.

Lời giải.

Để xếp 6 người A, B, C, D, E, F vào một ghế dài sao cho A và F không ngồi cạnh nhau, ta có 2 phương án sau:

- Phương án 1: A ở hai đầu ghế, có 2 cách chọn vị trí cho A. Tiếp đến chọn vị trí cho F, có 4 cách chọn. Xếp 4 người còn lại có $4!$ cách xếp.
  Suy ra có $2 \cdot 4 \cdot 4! = 192$ cách.
- Phương án 2: A không ngồi ở hai đầu ghế, có 4 cách chọn vị trí cho A. Tiếp đến chọn vị trí cho F, có 3 cách chọn. Xếp 4 người còn lại có $4!$ cách xếp.
  Suy ra có $4 \cdot 3 \cdot 4! = 288$ cách.

Vậy có $192 + 288 = 480$ cách sắp xếp thỏa mãn bài toán.
Cách khác:
Xếp 6 người vào ghế ta có $6! = 720$ cách.
Ta xếp A và F ngồi cạnh nhau như sau

- Xem hai người A và F là nhóm X. Xếp nhóm X và 4 người B, C, D vào ghế, có $5!$ cách.
- A và F có thể đổi chỗ cho nhau, nên có 2 cách đổi chỗ cho A và F.
- Khi đó có $5! \cdot 2 = 240$ cách xếp hai người A và F ngồi cạnh nhau.

Vậy có $720 - 240 = 480$ cách xếp sao cho A và F không ngồi cạnh nhau.

Chọn đáp án B .... □

CÂU 30. Từ các chữ số $0; 1; 2; 3; 4; 5; 6$ có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có 5 chữ số khác nhau và chia hết cho 15?

A. 200. B. 240. C. 222. D. 120.

Lời giải.

Gọi số cần tìm có dạng $\overline{abcde}$, thỏa mãn các chữ số đều khác nhau.
Để chia hết cho 15 thì phải chia hết cho 3 và 5. Do đó tận cùng phải là 0 hoặc 5.

Phương án 1. $e = 0$, khi đó $a + b + c + d$ phải chia hết cho 3. Suy ra ta có các cặp gồm
$\{1, 2, 3, 6\}$; $\{1, 2, 4, 5\}$; $\{1, 3, 5, 6\}$;$\{2, 3, 4, 6\}$; $\{3, 4, 5, 6\}$.
Phương án này có $5 \times 4! = 120$ cách.

Phương án 2. $e = 5$, khi đó $a + b + c + d$ phải chia cho 3 dư 1. Suy ra ta có các cặp gồm
$\{0, 1, 2, 4\}$; $\{0, 1, 3, 6\}$; $\{0, 3, 4, 6\}$; $\{1, 2, 3, 4\}$, $\{1, 2, 4, 6\}$.
Suy ra có $3 \times 3 \times 3! + 2 \times 4! = 102$.

Vậy có tất cả là $120 + 102 = 222$ cách.

Chọn đáp án C .... □

CÂU 31. Từ các chữ số 0, 1, 2 có thể thành lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm 9 chữ số và là bội số của 3 đồng thời bé hơn $2 \cdot 10^8$?

Ⓐ 4374. Ⓑ 2187. Ⓒ 6561. Ⓓ 3645.

Lời giải.

Gọi số thỏa mãn bài có dạng $A = \overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8a_9}$ trong đó $a_i \in \{0;1;2\}$ và các a_i không đồng thời bằng 0.
Vì $A < 2 \cdot 10^8$ nên $a_1 = 1 \Rightarrow a_1$ có 1 cách chọn.
Các chữ số từ a_2 đến a_8 đều có 3 cách chọn.
Khi đó $a_1 + a_2 + \ldots + a_8$ có thể chia hết cho 3 hoặc chia cho 3 dư 1 hoặc chia cho 3 dư 2.
+ Nếu $a_1 + a_2 + \ldots + a_8$ chia hết cho 3 thì $a_9 = 0$.
+ Nếu $a_1 + a_2 + \ldots + a_8$ chia cho 3 dư 1 thì $a_9 = 2$.
+ Nếu $a_1 + a_2 + \ldots + a_8$ chia cho 3 dư 2 thì $a_9 = 1$.
$\Rightarrow$ chữ số a_9 có đúng 1 cách chọn.
Vậy có $1.3^7.1 = 2187$ số cần tìm.

Chọn đáp án B .... □

CÂU 32. Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên chẵn có sáu chữ số và thỏa mãn điều kiện: sáu chữ số của mỗi số là khác nhau và chữ số hàng nghìn lớn hơn 2?

Ⓐ 240. Ⓑ 720. Ⓒ 360. Ⓓ 288.

Lời giải.

Gọi các số thỏa mãn bài toán có dạng $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6}$, với $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 \in A = \{1;2;3;4;5;6\}$.
Vì số cần tìm có hàng nghìn lớn hơn 2 nên $a_3 \geq 3$. Mỗi cách lập ra số thỏa đề bài được thực hiện theo một trong các phương án sau:

- **Phương án 1**: a_3 là số lẻ.
  Vị trí a_3 có 2 cách chọn từ tập $\{3;5\}$.
  Vì số cần tìm là số chẵn nên a_6 có 3 cách chọn từ tập $\{2;4;6\}$.
  Vị trí a_1 có 4 cách chọn từ tập $A \setminus \{a_3;a_6\}$.
  Vị trí a_2 có 3 cách chọn từ tập $A \setminus \{a_3;a_6;a_1\}$.
  Vị trí a_4 có 2 cách chọn từ tập $A \setminus \{a_3;a_6;a_1;a_2\}$.
  Vị trí a_5 có 1 cách chọn từ tập $A \setminus \{a_3;a_6;a_1;a_2;a_3\}$.
  Theo quy tắc nhân, số các trong phương án này là $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 144$ số. (1)
- **Phương án 2**: a_3 là số chẵn.
  Vị trí a_3 có 2 cách chọn từ tập $\{4;6\}$.
  Vì số cần tìm là số chẵn nên a_6 có 2 cách chọn từ tập $\{2;4;6\} \setminus \{a_3\}$.
  Vị trí a_1 có 4 cách chọn từ tập $A \setminus \{a_3;a_6\}$.
  Vị trí a_2 có 3 cách chọn từ tập $A \setminus \{a_3;a_6;a_1\}$.
  Vị trí a_4 có 2 cách chọn từ tập $A \setminus \{a_3;a_6;a_1;a_2\}$.
  Vị trí a_5 có 1 cách chọn từ tập $A \setminus \{a_3;a_6;a_1;a_2;a_3\}$.
  Theo quy tắc nhân, số các số trong phương án này là $2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 96$ số. (2)

Từ (1) và (2) theo quy tắc cộng, số các số thỏa mãn bài toán là $144 + 96 = 240$ số.

Chọn đáp án A .... □

CÂU 33. Có bao nhiêu số tự nhiên có ba chữ số dạng $\overline{abc}$ với $a, b, c \in \{0;1;\ldots;6\}$, sao cho $a < b < c$?

Ⓐ 120. Ⓑ 20. Ⓒ 40. Ⓓ 30.

Lời giải.

Vì $a \neq 0$ nên $a \geq 1$. Do $a < b < c$ và $c \leq 6$ nên $a = \{1;\ 2;\ 3;\ 4\}$.

- Phương án 1. Với $a = 1$:
  - Xét $b = 2 \Rightarrow c \geq 3$, do đó có 4 số thỏa mãn.
  - Xét $b = 3 \Rightarrow c \geq 4$, do đó có 3 số thỏa mãn.
  - Xét $b = 4 \Rightarrow c \geq 5$, do đó có 2 số thỏa mãn.
  - Xét $b = 5 \Rightarrow c \geq 6$, do đó có 1 số thỏa mãn.
- Phương án 2. Với $a = 2$:
  - Xét $b = 3 \Rightarrow c \geq 4$, do đó có 3 số thỏa mãn.
  - Xét $b = 4 \Rightarrow c \geq 5$, do đó có 2 số thỏa mãn.
  - Xét $b = 5 \Rightarrow c \geq 6$, do đó có 1 số thỏa mãn.

- Phương án 3. Với $a = 3$:
  - Xét $b = 4 \Rightarrow c \geq 5$, do đó có 2 số thỏa mãn.
  - Xét $b = 5 \Rightarrow c \geq 6$, do đó có 1 số thỏa mãn.
- Phương án 4. Với $a = 4 \Rightarrow b = 5$ và $c = 6$, do đó có 1 số thỏa mãn.

Vậy có tất cả $(4 + 3 + 2 + 1) + (3 + 2 + 1) + (2 + 1) + 1 = 20$ số.

Chọn đáp án B .... □

CÂU 34. Một túi có 14 viên bi gồm 5 viên màu trắng được đánh số từ 1 đến 5; 4 viên màu đỏ được đánh số từ 1 đến 4; 3 viên màu xanh được đánh số từ 1 đến 3 và 2 viên màu vàng được đánh số từ 1 đến 2. Có bao nhiêu cách chọn 3 viên bi từng đôi khác số?

A 184. **B** 120. **C** 243. **D** 190.

Lời giải.

Số viên bi được đánh số 1, 2, 3, 4, 5 lần lượt là 4, 4, 3, 2, 1.
Vì ba viên bi từng đôi khác số nên khi chọn, ta có thể có những phương án sau:

$$(1, 2, 3); (1, 2, 4); (1, 2, 5); (1, 3, 4); (1, 3, 5); (1, 4, 5); (2, 3, 4); (2, 3, 5); (2, 4, 5); (3, 4, 5).$$

- Phương án $(1, 2, 3)$: Vì số viên bi được đánh số $1, 2, 3$ lần lượt là 4, 4, 3 nên số cách chọn ba viên bi trong phương án này là 48 cách.
- Tương tự, những phương án còn lại lần lượt có số cách chọn là 48, 32, 16, 24, 12, 8, 24, 12, 8, 6.

Vậy có tổng cộng $48 + 32 + 16 + 24 + 12 + 8 + 24 + 12 + 8 + 6 = 190$ cách.

Chọn đáp án D .... □

CÂU 35. Một hộp đựng 26 tấm thẻ được đánh số từ 1 đến 26. Bạn Hải rút ngẫu nhiên cùng một lúc ba tấm thẻ. Hỏi có bao nhiêu cách rút sao cho bất kỳ hai trong ba tấm thẻ lấy ra đó có hai số tương ứng ghi trên hai tấm thẻ luôn hơn kém nhau ít nhất 2 đơn vị?

A 1350. **B** 1768. **C** 2024. **D** 1771.

Lời giải.

Số cách rút ra ba thẻ, sao cho trong ba thẻ đó luôn có ít nhất hai thẻ mà số ghi trên hai thẻ đó là hai số tự nhiên liên tiếp, ta có các phương án .

- Rút hai thẻ liên tiếp có cặp số là 1; 2, thì thẻ thứ 3 ta có 24 cách rút.
- Rút hai thẻ liên tiếp có cặp số là 2; 3, thì thẻ thứ 3 không thể là thẻ có số 1, suy ra có 23 cách rút thẻ thứ 3.
- Rút hai thẻ liên tiếp có cặp số là 3; 4, thì thẻ thứ 3 không thể là thẻ có số 2, suy ra có 23 cách rút thẻ thứ 3.
- Rút hai thẻ liên tiếp có cặp số là 24; 25, thì thẻ thứ 3 không thể là thẻ có số 23, suy ra có 23 cách rút thẻ thứ 3.
- Rút hai thẻ liên tiếp có cặp số là 25; 26, thì thẻ thứ 3 không thể là thẻ có số 24, suy ra có 23 cách rút thẻ thứ 3.

Từ đó suy ra, có $24 + 23 \times 24 = 576$ cách rút ra ba thẻ sao cho trong ba thẻ luôn có ít nhất hai thẻ mà số ghi trên hai thẻ đó là hai số tự nhiên liên tiếp.
Vậy số cách rút ra ba thẻ mà trong hai thẻ bất kỳ lấy ra có hai số tương ứng luôn hơn kém nhau ít nhất hai đơn vị là $n(\Omega) - 576 = 2024$.

Chọn đáp án C .... □

CÂU 36. Xếp 6 người A, B, C, D, E, F vào một ghế dài. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp sao cho A và F không ngồi cạnh nhau?

A 460. **B** 480. **C** 260. **D** 240.

Lời giải.

Mỗi cách sắp xếp 6 người A, B, C, D, E, F vào một ghế dài sao cho A và F không ngồi cạnh nhau được thực hiện theo một trong các phương án sau

- Phương án 1: A ở hai đầu ghế, có 2 cách chọn vị trí cho A. Tiếp đến chọn vị trí cho F, có 4 cách chọn. Xếp 4 người còn lại có 4! cách xếp.
  Suy ra có $2 \cdot 4 \cdot 4! = 192$ cách.
- Phương án 2: A không ngồi ở hai đầu ghế, có 4 cách chọn vị trí cho A. Tiếp đến chọn vị trí cho F, có 3 cách chọn. Xếp 4 người còn lại có 4! cách xếp.
  Suy ra có $4 \cdot 3 \cdot 4! = 288$ cách.

Vậy có $192 + 288 = 480$ cách sắp xếp thỏa mãn bài toán.

Cách khác:

Xếp 6 người vào ghế ta có $6! = 720$ cách.

Ta xếp A và F ngồi cạnh nhau như sau

- Xem hai người A và F là nhóm X. Xếp nhóm X và 4 người B, C, D vào ghế, có $5!$ cách.
- A và F có thể đổi chỗ cho nhau, nên có 2 cách đổi chỗ cho A và F.
- Khi đó có $5! \cdot 2 = 240$ cách xếp hai người A và F ngồi cạnh nhau.

Vậy có $720 - 240 = 480$ cách xếp sao cho A và F không ngồi cạnh nhau.

Chọn đáp án B .... □

CÂU 37. Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 5, 8 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên lẻ có bốn chữ số đôi một khác nhau và phải có chữ số 3?

A 108. B 144. C 228. D 36.

Lời giải.

Gọi các số thỏa mãn bài toán có dạng $\overline{a_1a_2a_3a_4}$, với $a_1, a_2, a_3, a_4 \in A = \{0; 1; 2; 3; 5; 8\}$.

- Phương án 1: Xét $a_4 = 3$.
  Vị trí a_1 có 4 cách chọn từ tập $A \setminus \{0; 3\}$.
  Vị trí a_2 có 4 cách chọn từ tập $A \setminus \{a_1; 3\}$.
  Vị trí a_3 có 3 cách chọn từ tập $A \setminus \{a_1; a_2; 3\}$.
  Theo quy tắc nhân, số các số thỏa mãn bài toán trong trường hợp này là $4 \cdot 4 \cdot 3 = 48$ số.
- Phương án 2: Xét $a_1 = 3$.
  Vì số cần tìm là số lẻ nên a_4 có 2 cách chọn từ tập $\{1; 5\}$.
  Vị trí a_2 có 4 cách chọn từ tập $A \setminus \{3; a_4\}$.
  Vị trí a_3 có 3 cách chọn từ tập $A \setminus \{3; a_4; a_2\}$.
  Theo quy tắc nhân, số các số thỏa mãn bài toán trong trường hợp này là $2 \cdot 4 \cdot 3 = 24$ số.
- Phương án 3: Xét $a_1 \neq 3$ và $a_4 \neq 3$.
  Vì số cần tìm là số lẻ nên a_4 có 2 cách chọn từ tập $\{1; 5\}$.
  Vị trí a_1 có 3 cách chọn từ tập $A \setminus \{0; 3; a_4\}$.
  Chọn 1 vị trí để đặt số 3, có 2 cách (vị trí a_2, a_3).
  Vị trí cuối cùng có 3 cách chọn từ tập $A \setminus \{a_4; a_1; 3\}$.
  Theo quy tắc nhân, số các số thỏa mãn bài toán trong trường hợp này là $2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 = 36$ số.

Theo quy tắc cộng, số các số thỏa mãn bài toán là $48 + 24 + 36 = 108$ số.

Chọn đáp án A .... □

CÂU 38. Từ tập $E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm ba chữ số phân biệt trong đó luôn có chữ số 2?

A 114. B 144. C 58. D 228.

Lời giải.

Mỗi cách lập ra số tự nhiên $\overline{abc}$ gồm 3 chữ số phân biệt từ E sao cho trong đó luôn có chữ số 2 được thực hiện theo một trong các phương án sau:

- Phương án 1: Xét $\overline{abc} = \overline{ab2}$.
  - Công đoạn 1: Chọn $a \in E \setminus \{0; 2\}$. Có 6 cách.
  - Công đoạn 2. Chọn $b \in \mathrm{E} \setminus \{2; a\}$. Có 6 cách.
    Theo quy tác nhân, số cách chọn trong phương án này là $6 \cdot 6 = 36$ cách. (1)
- Phương án 2: Xét $\overline{abc} = \overline{a2c}$.
  - Công đoạn 1: Chọn $a \in E \setminus \{0; 2\}$. Có 6 cách.
  - Công đoạn 2: Chọn $c \in E \setminus \{2; a\}$. Có 6 cách.
    Theo quy tác nhân, số cách chọn trong phương án này là $6 \cdot 6 = 36$ cách (2)
- Phương án 3: Xét $\overline{abc} = \overline{2bc}$.
  - Công đoạn 1: Chọn $b \in E \setminus \{2\}$. Có 7 cách.

— Công đoạn 2: Chọn $c \in E \setminus \{2; a\}$. Có 6 cách.
Theo quy tắc nhân, số cách chọn trong phương án này là $7 \cdot 6 = 42$ cách. (3)

Từ (1), (2) và (3) theo quy tắc cộng, ta có số các số thỏa đề bài là $36 + 36 + 42 = 114$.

Chọn đáp án (A) ....□

CÂU 39. Cho tập hợp $A = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$. Có bao nhiêu số tự nhiên chẵn có 6 chữ số đôi một khác nhau được lập thành từ các chữ số của tập A, đồng thời có đúng 3 chữ số lẻ và 3 chữ số lẻ đó đứng cạnh nhau?

(A) 48. (B) 4464. (C) 240. (D) 1440.

Lời giải.

Giả sử số cần tìm gồm 3 chữ số lẻ l_1, l_2, l_3 và 3 chữ số chẵn c_1, c_2, c_3. Ta thấy rằng các chữ số l_1, l_2, l_3 được chọn ngẫu nhiên đôi một khác nhau trong tập hợp con của A gồm các chữ số lẻ $\{1; 3; 5; 7\}$ và các chữ số c_1, c_2, c_3 được chọn ngẫu nhiên đôi một khác nhau trong tập hợp con của A gồm các chữ số chẵn $\{0; 2; 4; 6\}$.
Vì tập A có chữ số 0 nên mỗi cách laapj ra số thỏa đề bài được thực hiện theo một trong các phương án sau:

a) **Phương án** 1: Số tự nhiên lập thành có dạng $\overline{l_1l_2l_3c_1c_2c_3}$.
Theo thứ tự từ trái qua phải, l_1 có 4 cách chọn, l_2 có 3 cách chọn và l_3 có 2 cách chọn.
Tương tự, c_1 có 4 cách chọn, c_2 có 3 cách chọn và c_3 có 2 cách chọn.
Phương án này, ta có $4 \times 3 \times 2 \times 4 \times 3 \times 2 = 576$ số thỏa mãn đề.

b) **Phương án** 2: Số tự nhiên lập thành có dạng $\overline{c_1l_1l_2l_3c_2c_3}$ hoặc $\overline{c_1c_2l_1l_2l_3c_3}$.
Ở cả hai dạng này, theo thứ tự từ trái qua phải, vì $c_1 \neq 0$ nên c_1 có 3 cách chọn, c_2 có 3 cách chọn và c_3 có 2 cách chọn. Chữ số lẻ l_1 có 4 cách chọn, l_2 có 3 cách chọn và l_3 có 2 cách chọn.
Phương án này, ta có $2 \times (3 \times 3 \times 2 \times 4 \times 3 \times 2) = 864$ số thỏa mãn đề.

Vậy, ta có tổng cộng $576 + 864 = 1440$ số thỏa đề.

Chọn đáp án (D) ....□

CÂU 40. Cho 10 chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Có thể tạo ra được bao nhiêu số tự nhiên gồm 5 chữ số khác nhau, trong đó có mặt đủ 3 chữ số 2, 3 và 4?

(A) 25056. (B) 2376. (C) 27216. (D) 25592.

Lời giải.

Mỗi cách lập ra số $\overline{abcde}$ thỏa mãn đề bài được thực hiện theo một trong các phương án sau:

a) **Phương án** 1: Xét $a \notin \{2; 3; 4\}$.
- Có 6 cách chọn a (trừ các số $\{0; 2; 3; 4\}$).
- Có $4 \cdot 3 \cdot 2$ cách chọn vị trí cho các số 2, 3 và 4.
- Có 6 cách chọn một số vào vị trí còn lại (trừ a và các số $\{2; 3; 4\}$).

b) **Phương án** 2: Xét $a \in \{2, 3, 4\}$.
- Có 3 cách chọn a.
- Có $4 \cdot 3$ cách chọn vị trí cho 2 trong 3 số 2, 3 và 4.
- Có $7 \cdot 6$ cách chọn hai số vào hai vị trí còn lại.

Vậy có $6 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 6 + 3 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 6 = 2376$ số thỏa mãn bài toán.

Chọn đáp án (B) ....□

CÂU 41. Trong mặt phẳng, cho hai đường thẳng phân biệt a và b song song với nhau. Trên đường thẳng a lấy 5 điểm phân biệt A, B, C, D, E và trên đường thẳng b lấy 5 điểm phân biệt G, H, I, J, K sao cho $AB = BC = CD = DE = GH = HI = IJ = JK = 20$ cm. Có bao nhiêu hình bình hành có 4 đỉnh là 4 điểm trong 10 điểm nói trên?

(A) 30. (B) 210. (C) 16. (D) 100.

Lời giải.

Đặt $x = 20$ cm. Mỗi cách lập ra hình bình hành thỏa đề bài được thực thiện theo một trong các phương án sau

- **Phương án** 1: Hình bình hành có một cặp cạnh độ dài x.
Có 4 cách chọn một cạnh trên đường thẳng a.
Có 4 cách chọn một cạnh trên đường thẳng b.
Theo quy tắc nhân, ta có $4 \times 4 = 16$ cách chọn hình bình hành có một cặp cạnh độ dài x. (1)

- **Phương án** 2: Hình bình hành có một cặp cạnh độ dài $2x$.
  Có 3 cách chọn một cạnh trên đường thẳng a.
  Có 3 cách chọn một cạnh trên đường thẳng b.
  Theo quy tắc nhân, ta có $3 \times 3 = 9$ cách chọn hình bình hành có một cặp cạnh độ dài $2x$. (2)

- **Phương án** 3: Hình bình hành có một cặp cạnh độ dài $3x$.
  Có 2 cách chọn một cạnh trên đường thẳng a.
  Có 2 cách chọn một cạnh trên đường thẳng b.
  Theo quy tắc nhân, ta có $2 \times 2 = 4$ cách chọn hình bình hành có một cặp cạnh độ dài $3x$. (3)

- **Phương án** 4: Hình bình hành có một cặp cạnh độ dài $4x$.
  Có 1 cách chọn một cạnh trên đường thẳng a.
  Có 1 cách chọn một cạnh trên đường thẳng b.
  Do đó, phương án này có $1 \times 1 = 1$ cách chọn hình bình hành có một cặp cạnh độ dài $4x$. (4)

Từ (1), (2), (3) và (4), theo quy tắc cộng, ta có số cách tạo ra hình bình hành từ các điểm đã cho là $16 + 9 + 4 + 1 = 30$ cách.
Chọn đáp án A .... □

Bài 2. HOÁN VỊ - CHỈNH HỢP - TỔ HỢP

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Hoán vị

ĐỊNH NGHĨA 2.1. Một hoán vị của một tập hợp có n phần tử là một cách sắp xếp có thứ tự n phần tử đó (với n là một số tự nhiên, $n \geq 1$).
Số các hoán vị của tập hợp có n phần tử, kí hiệu là P, được tính bằng công thức

$$\mathrm{P}_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 2 \cdot 1.$$

Kí hiệu $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 2 \cdot 1$ là $n!$ (đọc là n giai thừa), ta có $\mathrm{P}_n = n!$. Chẳng hạn $\mathrm{P}_3 = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$. Quy ước $0! = 1$.

2. Chỉnh hợp

ĐỊNH NGHĨA 2.2. Một chỉnh hợp chập k của n là một cách sắp xếp có thứ tự k phần tử từ một tập hợp n phần tử (với k, n là các số tự nhiên, $1 \leq k \leq n$).
Số các chỉnh hợp chập k của n, kí hiệu là A_n^k, được tính bằng công thức

$$\mathrm{A}_n^k = n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1) \text{ hay } \mathrm{A}_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}\ (1 \leq k \leq n).$$

- *Hoán vị sắp xếp tất cả các phần tử của tập hợp, còn chỉnh hợp chọn ra một số phần tử và sắp xếp chúng.*
- *Mỗi hoán vị của n phần tử cũng chính là một chỉnh hợp chập n của n phần tử đó. Vì vậy $\mathrm{P}_n = \mathrm{A}_n^n$.*

3. Tổ hợp

ĐỊNH NGHĨA 2.3. Một tổ hợp chập k của n là một cách chọn k phần tử từ một tập hợp n phần tử (với k, n là các số tự nhiên, $0 \leq k \leq n$).
Số các tổ hợp chập k của n, kí hiệu là C_n^k, được tính bằng công thức

$$\mathrm{C}_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}\ (0 \leq k \leq n).$$

- $\mathrm{C}_n^k = \dfrac{\mathrm{A}_n^k}{k!}$.
- *Chỉnh hợp và tổ hợp có điểm giống nhau là đều chọn một số phần tử trong một tập hợp, nhưng khác nhau ở chỗ, chỉnh hợp là chọn có xếp thứ tự, còn tổ hợp là chọn không xếp thứ tự.*

B. CÁC DẠNG TOÁN

1 Các bài toán liên quan đến hoán vị

- Sắp xếp n phần tử theo một hàng $n! = n(n-1) \cdot (n-2) \ldots 3 \cdot 2 \cdot 1$ cách sắp xếp.
- Sắp xếp n phần tử theo một vòng tròn (bàn tròn) có $(n-1)!$ cách.

Casio: Bấm $n!$ ta thao tác: n SHIFT x^{-1}, chẳng hạn: 3 SHIFT $x^{-1} = 6$, tức $3! = 6$.

VÍ DỤ 1. Trên một kệ sách dài có 5 quyển sách Toán, 4 quyển sách Lí, 3 quyển sách Văn. Các quyển sách đều khác nhau. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp các quyển sách trên nếu

a) Xếp một cách tùy ý.

b) Xếp theo từng môn.

c) Theo từng môn và sách Toán nằm ở giữa.

Lời giải.

a) Xếp một cách tùy ý.
Mỗi cách sắp xếp 12 quyển sách trên kệ dài là một hoán vị của 12 phần tử. Suy ra có $12!$ cách xếp.

b) Xếp theo từng môn.

5 sách Toán	4 sách Lí	3 sách Văn

- Nhóm 5 sách Toán thành khối A, 4 sách Lí thành khối B, 3 sách Văn thành khối C. Xem đây là 3 hoán vị của 3 phần tử A, B, C. Suy ra, có 3! cách xếp.
- Xếp 5 sách Toán trong khối A có 5! cách.
- Xếp 4 sách Lí trong khối B có 4! cách.
- Xếp 3 sách Văn trong khối C có 3! cách.

Theo quy tắc nhân, có $3! \cdot 5! \cdot 4! \cdot 3! = 103680$ cách xếp.

c) Xếp theo từng môn và sách toán nằm ở giữa.

5 sách Toán	4 sách Lí	3 sách Văn

- Nhóm 5 sách Toán thành khối A, 4 sách Lí thành khối B, 3 sách Văn thành khối C. Do môn Toán nằm ở giữa nên ta hoán vị nhóm B, C. Suy ra, có 2! cách xếp.
- Xếp 5 sách Toán trong khối A có 5! cách.
- Xếp 4 sách Lí trong khối B có 4! cách.
- Xếp 3 sách Văn trong khối C có 3! cách.

Theo quy tắc nhân, có $2! \cdot 5! \cdot 4! \cdot 3! = 103680$ cách xếp.

VÍ DỤ 2. Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6 lập các số gồm sáu chữ số khác nhau. Hỏi

a) Có tất cả bao nhiêu số?

b) Có bao nhiêu số chẵn và bao nhiêu số lẻ?

c) Có bao nhiêu số bé hơn 432000?

Lời giải.

a) Có tất cả bao nhiêu số ?
Mỗi số gồm 6 chữ số khác nhau lập từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6 là một hoán vị của 6 số. Suy ra có $6! = 720$ số.

b) Có bao nhiêu số chẵn và bao nhiêu số lẻ ?

- Gọi số chẵn có 6 chữ số có dạng $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6}$.
  + Chọn $a_6 \in \{2; 4; 6\}$ có 3 cách chọn..
  + Xếp 5 số còn lại vào a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 và có thể thay đổi vị trí 5 số này nên có 5! cách xếp.
  + Theo quy tắc nhân có $3 \cdot 5! = 360$ số là số chẵn.
- Số các số lẻ có 6 chữ số là $720 - 360 = 360$ số.

c) Có bao nhiêu số bé hơn 432000 ?
Gọi số cần tìm có dạng là $\overline{abcdef}$.

- Nếu $a < 4$ thì $a \in \{1; 2; 3\}$, suy ra a có 3 cách chọn.
  + Các số còn lại xếp vào 5 vị trí còn lại có 5! cách xếp.
  + Theo quy tắc nhân có $3 \cdot 5! = 360$ số.
- Nếu $a = 4$, $b < 3$ thì
  + $a = 4$ có một cách chọn.
  + $b \in \{1; 2\}$ có hai cách chọn.
  + Xếp 4 số còn lại có 4! cách xếp.
  + Theo quy tắc nhân có 48 số.
- Nếu $a = 4$, $b = 3$, $c = 1$ thì xếp ba số $\{2; 5; 6\}$ vào ba vị trí d, e, f có $3! = 6$ cách. Vậy có 6 số trong trường hợp này.

Theo quy tắc cộng có $360 + 48 + 6 = 414$ số.

1. Bài tập tự luận

BÀI 1. Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6 thiết lập tất cả các số có sáu chữ số khác nhau. Hỏi trong các số thiết lập được, có bao nhiêu số mà hai chữ số 1 và 6 không đứng cạnh nhau?

Lời giải.

+ Số có 6 chữ số khác nhau mà các chữ số được thiết lập từ 1, 2, 3, 4, 5, 6 là $6! = 720$ số.
+ Ta xem số có sáu chữ số mà trong đó chữ số 1 và chữ số 6 đứng cạnh nhau là một số có 5 chữ số, hai số 1 và 6 ghép với nhau thành chữ số m. Số các số này được tính như sau:
-) Hoán vị 5 số 2, 3, 4, 5 và m có 5! cách.
-) Hoán vị chữ số 1 và chữ số 6 có 2! cách.
Vậy có $2 \cdot 5! = 240$ số có sáu chữ số khác nhau, trong đó chữ số 1 và chữ số 6 đứng cạnh nhau.
Suy ra, số có 6 chữ số khác nhau mà chữ số 1, chữ số 6 không đứng cạnh nhau là $720 - 240 = 480$ số.

BÀI 2. Từ tập hợp $A = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ lập được bao nhiêu số tự nhiên chia hết cho 5, gồm năm chữ số khác nhau sao cho trong đó luôn có mặt các chữ số 1, 2, 3 và chúng đứng cạnh nhau?

Lời giải.

- Trường hợp 1: Số cần tìm có dạng $\overline{123de}$.
  + Chọn $e\{0; 5\}$ có 2 cách chọn.
  + Chọn $d \in \{0; 4; 6; 5\} \setminus \{e\}$ có 3 cách chọn.
  + Có $2 \cdot 3 \cdot 3! = 36$ số cần tìm.

- Trường hợp 2: Số cần tìm có dạng $\overline{a123e}$.
  + Chọn $e = 0$, $a = 5$, trường hợp này có $1 \cdot 3! \cdot 1 = 6$ số.
  + Chọn $e \in \{0; 5\}$, $a \in \{6; 4\}$, trường hợp này có $2 \cdot 3! \cdot 2 = 24$ số.
  Vậy trường hợp này có $6 + 24 = 30$ số.

Số các số cần tìm là $36 + 30 = 66$ số.

BÀI 3. Cho tập $X = \{1; 2; 3; 4; 7\}$. Có bao nhiêu số tự nhiên gồm ba chữ số khác nhau chia hết cho 3 được lập từ tập X?

Lời giải.

Gọi số có ba chữ số khác nhau cần tìm mà các chữ số lấy từ tập X là $\overline{abc}$.

- Trường hợp 1: a, b, $c \in \{1; 2; 3\}$.
  Số các số thỏa mãn yêu cầu bài toán trong trường hợp này là $3! = 6$ số.

- Trường hợp 1: a, b, $c \in \{4; 2; 3\}$.
  Số các số thỏa mãn yêu cầu bài toán trong trường hợp này là $3! = 6$ số.

- Trường hợp 1: a, b, $c \in \{7; 2; 3\}$.
  Số các số thỏa mãn yêu cầu bài toán trong trường hợp này là $3! = 6$ số.

- Trường hợp 1: a, b, $c \in \{7; 4; 1\}$.
  Số các số thỏa mãn yêu cầu bài toán trong trường hợp này là $3! = 6$ số.

Vậy số các số cần tìm là 24 số.

BÀI 4. Cho tập $E = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$. Có bao nhiêu số tự nhiên có ba chữ số khác nhau, biết rằng tổng của ba chữ số này bằng 9?

Lời giải.

Bộ ba chữ số lấy từ tập E mà tổng bằng 9, được chia thành các bộ sau đây: $\{1; 2; 6\}$, $\{2; 3; 4\}$, $\{1; 3; 5\}$.
Mỗi bộ sẽ lập được $3! = 6$ số có ba chữ số mà tổng các chữ số bằng 9. Số các số cần tìm là 18 số.

BÀI 5. Từ các chữ số 2, 3, 4, 5, 6, 7 lập các số gồm sáu chữ số khác nhau. Hỏi

a) Có tất cả bao nhiêu số?

b) Có bao nhiêu số chẵn và bao nhiêu số lẻ?

c) Có bao nhiêu số bé hơn 432000?

Lời giải.

a) Có tất cả bao nhiêu số ?
Mỗi số gồm 6 chữ số khác nhau lập từ các chữ số 7, 2, 3, 4, 5, 6 là một hoán vị của 6 số. Suy ra có $6! = 720$ số.

b) Có bao nhiêu số chẵn và bao nhiêu số lẻ ?

- Gọi số chẵn có 6 chữ số có dạng $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6}$.
  + Chọn $a_6 \in \{2;4;6\}$ có 3 cách chọn..
  + Xếp 5 số còn lại vào a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 và có thể thay đổi vị trí 5 số này nên có 5! cách xếp.
  + Theo quy tắc nhân có $3 \cdot 5! = 360$ số là số chẵn.
- Số các số lẻ có 6 chữ số là $720 - 360 = 360$ số.

c) Có bao nhiêu số bé hơn 432000 ?
Gọi số cần tìm có dạng là $\overline{abcdef}$.

- Nếu $a < 4$ thì $a \in \{2;3\}$, suy ra a có 2 cách chọn.
  + Các số còn lại xếp vào 5 vị trí còn lại có 5! cách xếp.
  + Theo quy tắc nhân có $2 \cdot 5! = 240$ số.
- Nếu $a = 4$, $b = 2$ thì
  + $a = 4$ có một cách chọn.
  + $b = 2$ có một cách chọn.
  + Xếp 4 số còn lại có 4! cách xếp.
  + Theo quy tắc nhân có 24 số.
- Nếu $a = 4$, $b = 3$, $c = 2$ thì xếp ba số $\{7;5;6\}$ vào ba vị trí d, e, f có $3! = 6$ cách. Vậy có 6 số trong trường hợp này.

Theo quy tắc cộng có $240 + 24 + 6 = 270$ số.

BÀI 6. Xét các số tự nhiên gồm năm chữ số khác nhau lập từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5. Hỏi trong các số đó có bao nhiêu số

a) Bắt đầu bằng chữ số 5?

b) Không bắt đầu bằng chữ số 1?

c) Bắt đầu bằng 23?

d) Không bắt đầu bằng 234?

Lời giải.

a) Gọi số cần tìm có dạng $\overline{5bcde}$.
Xếp 4 chữ số 1, 2, 3, 4 vào bốn vị trí còn lại có 4! cách xếp. Vậy có 24 số.

b) Gọi số cần tìm có dạng $\overline{abcde}$, trong đó $a \neq 1$.
+ $a \in \{2;3;4;5\}$ có 4 cách chọn.
+ Xếp 4 số còn lại có 4! cách xếp.
+ Trường hợp này có $4 \cdot 4! = 96$ số.

c) Gọi số cần tìm có dạng $\overline{23cde}$. Xếp ba vị trí c, d, e từ các số 1, 4, 5 có 3! cách xếp. Trường hợp này có 6 số.

d) Giả sử số bắt đầu bằng 234, số dạng này có 2 số là số 23415, 23451. Suy ra số không bắt đầu bằng 234 có $5! - 2 = 118$ số.

BÀI 7. Một THPT X có 4 học sinh giỏi khối 12, có 5 học sinh giỏi khối 11, có 6 học sinh giỏi khối 10. Có bao nhiêu cách xếp 15 học sinh trên thành 1 hàng ngang nhận thưởng nếu

a) Những học sinh đứng tùy ý.

b) Các học sinh cùng khối đứng cạnh nhau.

c) Cùng khối đứng cạnh và khối 11 ở giữa.

Lời giải.

a) Những học sinh đứng tùy ý.
Có 15! cách xếp.

b) Các học sinh cùng khối đứng cạnh nhau.

Bước 1. Xếp 4 học sinh khối 12 thành một nhóm có $4! = 24$ cách.

Bước 2. Xếp 5 học sinh khối 11 thành một nhóm có $5! = 120$ cách.

Bước 3. Xếp 6 học sinh khối 10 thành một nhóm có $6! = 720$ cách.

Bước 4. Hoán vị 3 nhóm học sinh có $3! = 6$ cách.

Theo quy tắc nhân có $24 \cdot 120 \cdot 720 \cdot 6 = 12441600$ cách xếp.

c) Cùng khối đứng cạnh và khối 11 ở giữa.

Bước 1. Xếp 4 học sinh khối 12 thành một nhóm có $4! = 24$ cách.

Bước 2. Xếp 5 học sinh khối 11 thành một nhóm có $5! = 120$ cách.

Bước 3. Xếp 6 học sinh khối 10 thành một nhóm có $6! = 720$ cách.

Bước 4. Xếp nhóm khối 11 đứng giữa hai nhóm còn lại có $2! = 2$ cách

Theo quy tắc nhân có $24 \cdot 120 \cdot 720 \cdot 2 = 4147200$ cách xếp.

BÀI 8. Có hai dãy ghế, mỗi dãy 5 ghế. Xếp 5 nam, 5 nữ vào hai dãy ghế trên, có bao nhiêu cách xếp, nếu:

a) Nam, nữ được xếp tùy ý.

b) Nam 1 dãy ghế, nữ 1 dãy ghế.

Lời giải.

a) Nam, nữ được xếp tùy ý.
Mỗi cách xếp 5 nam và 5 nữ vào hai dãy ghế một cách tùy ý là một hoán vị của 10 người.
$\Rightarrow$ Có $10! = 3628800$ cách xếp.

b) Nam 1 dãy ghế, nữ 1 dãy ghế.

- Chọn một dãy ghế trong hai dãy ghế để xếp nam vào có 2 cách.
- Xếp 5 nam vào dãy ghế đã chọn có $5!$ cách.
- Xếp 5 nữ vào dãy ghế còn lại có $5!$ cách.

Theo quy tắc nhân có $2 \cdot 5! \cdot 5! = 28800$ cách xếp.

BÀI 9. Có hai dãy ghế, mỗi dãy 4 ghế. Xếp 4 nam, 4 nữ vào hai dãy ghế trên, có bao nhiêu cách xếp, nếu:

a) Nam, nữ được xếp tùy ý.

b) Nam 1 dãy ghế, nữ 1 dãy ghế.

Lời giải.

a) Nam, nữ được xếp tùy ý.
Mỗi cách xếp 4 nam và 4 nữ vào hai dãy ghế một cách tùy ý là một hoán vị của 8 người.
$\Rightarrow$ Có $8! = 40320$ cách xếp.

b) Nam 1 dãy ghế, nữ 1 dãy ghế.

- Chọn một dãy ghế trong hai dãy ghế để xếp nam vào có 2 cách.
- Xếp 4 nam vào dãy ghế đã chọn có $4!$ cách.
- Xếp 4 nữ vào dãy ghế còn lại có $4!$ cách.

Theo quy tắc nhân có $2 \cdot 4! \cdot 4! = 1152$ cách xếp.

BÀI 10. Cho một bàn dài có 10 ghế và 10 học sinh trong đó có 5 học sinh nữ. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp chỗ ngồi cho 10 học sinh sao cho:

a) Nam và nữ ngồi xen kẻ nhau.

b) Học sinh cùng giới thì ngồi cạnh nhau.

Lời giải.

a) Nam và nữ ngồi xen kẻ nhau.
Đánh số các vị trí xếp chỗ như hình dưới

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

TH1. Xếp 5 học sinh nam vào vị trí chẵn có $5!$ cách, sau đó xếp 5 học sinh nữ vào 5 vị trí lẻ còn lại có $5!$ cách. Theo quy tắc nhân có $5! \cdot 5!$ cách.

TH2. Xếp 5 học sinh nam vào vị trí lẻ có $5!$ cách, sau đó xếp 5 học sinh nữ vào 5 vị trí chẵn còn lại có $5!$ cách. Theo quy tắc nhân có $5! \cdot 5!$ cách.

Theo quy tắc cộng có $5! \cdot 5! + 5! \cdot 5! = 28800$ cách.

b) Học sinh cùng giới thì ngồi cạnh nhau.

TH1. Xếp 5 học sinh nam vào vị trí $1, 2, 3, 4, 5$ có $5!$ cách, sau đó xếp 5 học sinh nữ vào 5 vị trí còn lại có $5!$ cách. Theo quy tắc nhân có $5! \cdot 5!$ cách.

TH2. Xếp 5 học sinh nữ vào vị trí $1, 2, 3, 4, 5$ có $5!$ cách, sau đó xếp 5 học sinh nữ vào 5 vị trí còn lại có $5!$ cách. Theo quy tắc nhân có $5! \cdot 5!$ cách.

Theo quy tắc cộng có $5! \cdot 5! + 5! \cdot 5! = 28800$ cách.

BÀI 11. Cho một bàn dài có 8 ghế và 8 học sinh trong đó có 4 học sinh nam. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp chỗ ngồi cho 8 học sinh sao cho:

a) Nam và nữ ngồi xen kẻ nhau.

b) Học sinh cùng giới thì ngồi cạnh nhau.

Lời giải.

a) Nam và nữ ngồi xen kẻ nhau.
Đánh số các vị trí xếp chỗ như hình dưới

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16

TH1. Xếp 8 học sinh nam vào vị trí chẵn có $8!$ cách, sau đó xếp 8 học sinh nữ vào 8 vị trí lẻ còn lại có $8!$ cách. Theo quy tắc nhân có $8! \cdot 8!$ cách.

TH2. Xếp 8 học sinh nam vào vị trí lẻ có $8!$ cách, sau đó xếp 8 học sinh nữ vào 8 vị trí chẵn còn lại có $8!$ cách. Theo quy tắc nhân có $8! \cdot 8!$ cách.

Theo quy tắc cộng có $8! \cdot 8! + 8! \cdot 8! = 3251404800$ cách.

b) Học sinh cùng giới thì ngồi cạnh nhau.

TH1. Xếp 8 học sinh nam vào vị trí $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ có $8!$ cách, sau đó xếp 8 học sinh nữ vào 8 vị trí còn lại có $8!$ cách.
Theo quy tắc nhân có $8! \cdot 8!$ cách.

TH2. Xếp 8 học sinh nữ vào vị trí $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ có $8!$ cách, sau đó xếp 8 học sinh nữ vào 8 vị trí còn lại có $8!$ cách. Theo quy tắc nhân có $8! \cdot 8!$ cách.

Theo quy tắc cộng có $8! \cdot 8! + 8! \cdot 8! = 3251404800$ cách.

BÀI 12. Xếp 6 học sinh A, B, C, D, E, F vào một ghế dài, có mấy cách sắp xếp nếu:

a) 6 học sinh này ngồi bất kì.

b) A và F luôn ngồi ở hai đầu ghế.

c) A và F luôn ngồi cạnh nhau.

d) A, B, C luôn ngồi cạnh nhau.

e) A, B, C, D luôn ngồi cạnh nhau.

Lời giải.

a) 6 học sinh này ngồi bất kì. Có $6! = 720$ cách xếp.

b) A và F luôn ngồi ở hai đầu ghế.

- Xếp A, F ngồi ở hai đầu ghế có $2! = 2$ cách.
- Xếp B, C, D, E vào 4 vị trí ở giữa có $4! = 24$ cách.

Theo quy tắc nhân có $2 \cdot 24 = 48$ cách xếp.

c) A và F luôn ngồi cạnh nhau.

- Ghép A, F thành một nhóm (AF hoặc FA) và xem như 1 học sinh đặc biệt có $2! = 2$ cách.
- Xếp 5 học sinh (gồm B, C, D, E và học sinh đặc biệt) vào 5 vị trí có $5! = 120$ cách.

Theo quy tắc nhân có $2 \cdot 120 = 240$ cách xếp.

d) A, B, C luôn ngồi cạnh nhau.

- Ghép A, B, C thành một nhóm và xem như 1 học sinh đặc biệt có $3! = 6$ cách.
- Xếp 4 học sinh (gồm D, E, F và học sinh đặc biệt) vào 4 vị trí có $4! = 24$ cách.

Theo quy tắc nhân có $6 \cdot 24 = 144$ cách xếp.

e) A, B, C, D luôn ngồi cạnh nhau.

- Ghép A, B, C, D thành một nhóm và xem như 1 học sinh đặc biệt có $4! = 24$ cách.
- Xếp 3 học sinh (gồm E, F và học sinh đặc biệt) vào 3 vị trí có $3! = 6$ cách.

Theo quy tắc nhân có $24 \cdot 6 = 144$ cách xếp.

BÀI 13. Xếp 5 học sinh A, B, C, D, E vào một ghế dài, có mấy cách sắp xếp nếu:

a) 5 học sinh này ngồi bất kì.

b) A và E luôn ngồi ở hai đầu ghế.

c) A và E luôn ngồi cạnh nhau.

d) A, B, C luôn ngồi cạnh nhau.

e) A, B, C, D luôn ngồi cạnh nhau.

Lời giải.

a) 5 học sinh này ngồi bất kì. Có $5! = 120$ cách xếp.

b) A và E luôn ngồi ở hai đầu ghế.

- Xếp A, E ngồi ở hai đầu ghế có $2! = 2$ cách.
- Xếp B, C, D vào 3 vị trí ở giữa có $3! = 6$ cách.

Theo quy tắc nhân có $2 \cdot 6 = 12$ cách xếp.

c) A và E luôn ngồi cạnh nhau.

- Ghép A, E thành một nhóm (AE hoặc EA) và xem như 1 học sinh đặc biệt có $2! = 2$ cách.
- Xếp 4 học sinh (gồm B, C, D và học sinh đặc biệt) vào 4 vị trí có $4! = 24$ cách.

Theo quy tắc nhân có $2 \cdot 24 = 48$ cách xếp.

d) A, B, C luôn ngồi cạnh nhau.

- Ghép A, B, C thành một nhóm và xem như 1 học sinh đặc biệt có $3! = 6$ cách.
- Xếp 3 học sinh (gồm D, E và học sinh đặc biệt) vào 3 vị trí có $3! = 6$ cách.

Theo quy tắc nhân có $6 \cdot 6 = 36$ cách xếp.

e) A, B, C, D luôn ngồi cạnh nhau

- Ghép A, B, C, D thành một nhóm và xem như 1 học sinh đặc biệt có $4! = 24$ cách.
- Xếp 2 học sinh (gồm E và học sinh đặc biệt) vào 2 vị trí có $2! = 2$ cách.

Theo quy tắc nhân có $24 \cdot 2 = 48$ cách xếp.

2 Các bài toán liên quan đến hoán vị, tổ hợp và chỉnh hợp

- Chọn k trong n và sắp xếp $\Rightarrow$ Sử dụng chỉnh hợp $\mathrm{A}_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$
  $(Casio : n \quad SHIFT \times k)$
- Chọn k trong n tuỳ ý $\Rightarrow$ Sử dụng tổ hợp $\mathrm{C}_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!k!}$
  $(Casio : n \quad SHIFT \div k)$

VÍ DỤ 1. Trong không gian cho bốn điểm A, B, C, D mà không có ba điểm nào thẳng hàng. Hỏi:

a) Có bao nhiêu đoạn thẳng được tạo thành?

b) Có bao nhiêu vectơ được tạo thành?

Lời giải.

a) Số đoạn thẳng được tạo thành là $\mathrm{C}_4^2 = \dfrac{4!}{(4-2)!2!} = 6$

b) Số vectơ được tạo thành là $\mathrm{A}_4^2 = \dfrac{4!}{(4-2)!} = 12$

VÍ DỤ 2. Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6 lập được bao nhiêu số tự nhiên.

a) Gồm 4 chữ số.

b) Gồm 3 chữ số đôi một khác nhau.

c) Gồm 4 chữ số khác nhau và nó là số chẵn.

Lời giải.

a) Gọi số cần tìm có dạng $\overline{a_1a_2a_3a_4}$

Phần tử	a_1	a_2	a_3	a_4
Số cách chọn	6	6	6	6

Theo quy tắc nhân có $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^4 = 1296$ số

b) Gọi số cần tìm có dạng $\overline{abc}$
Chọn 3 số trong 6 số 1, 2, 3, 4, 5, 6 và xếp vào 3 vị trí a, b, c có $\mathrm{A}_6^3 = 120$ số

c) Gồm 4 chữ số khác nhau và nó là số chẵn.
Gọi số thoả mãn bài toán có dạng $\overline{b_1b_2b_3b_4}$
Chọn $b_4 \in \{2; 4; 6\}$: có 3 cách chọn
Chọn 3 số trong 5 số $\{1; 2; 3; 4; 5; 6\} \setminus \{b_4\}$ và xếp vào các vị trí b_1, b_2, b_3 có A_5^3 cách chọn.
Theo quy tắc nhân có $3 \cdot \mathrm{A}_5^3 = 180$ số

VÍ DỤ 3. Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 lập được bao nhiêu số tự nhiên.

a) Gồm 5 chữ số.

b) Gồm 4 chữ số đôi một khác nhau.

c) Gồm 5 chữ số khác nhau và nó là số lẻ.

Lời giải.

a) Gọi số cần tìm có dạng $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$

Phần tử	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
Số cách chọn	7	7	7	7	7

Theo quy tắc nhân có $7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = 7^5 = 16807$ số

b) Gọi số cần tìm có dạng $\overline{abcd}$
Chọn 4 số trong 7 số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 và xếp vào 4 vị trí a, b, c, d có $\mathrm{A}_7^4 = 840$ số

c) Gồm 5 chữ số khác nhau và nó là số lẻ.
Gọi số thoả mãn bài toán có dạng $\overline{b_1b_2b_3b_4b_5}$
Chọn $b_5 \in \{1; 3; 5; 7\}$: có 4 cách chọn
Chọn 4 số trong 6 số $\{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\} \setminus \{b_5\}$ và xếp vào các vị trí b_1, b_2, b_3, b_4 có A_6^4 cách chọn.
Theo quy tắc nhân có $4 \cdot \mathrm{A}_6^4 = 1440$ số

VÍ DỤ 4. Cho $X = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$ có bao nhiêu số tự nhiên gồm 5 chữ số được tạo từ tập X, sao cho:

a) Khác nhau đôi một và là số lẻ.

b) Khác nhau đôi một và là số chẵn.

c) Khác nhau đôi một và luôn có mặt 1, 2, 3.

Lời giải.

a) Gọi số cần tìm là $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$
Chọn $a_5 \in \{1;3;5;7;9\}$: có 5 cách chọn.
Nhận xét rằng $a_1 \neq 0$ và $a_1 \neq a_5$ nên a_1 có 8 cách chọn.
Chọn 3 số trong 8 số $\{0;1;2;3;4;5;6;7;8;9\} \setminus \{a_1;a_5\}$ và xếp vào các vị trí a_2, a_3, a_4 có A_8^3 cách chọn.
Theo quy tắc nhân có $5 \cdot 8 \cdot \mathrm{A}_8^3 = 13440$ số

b) Gọi số cần tìm là $\overline{b_1b_2b_3b_4b_5}$
Trường hợp 1: Nếu $b_5 = 0$
Chọn 4 số trong 9 số $\{1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$ và xếp vào các vị trí b_1 b_2, b_3, b_4 có A_9^4 cách chọn.
Trường hợp 2: Nếu $b_5 \neq 0$
Chọn $b_5 \in \{2;4;6;8\}$: có 4 cách chọn.
Nhận xét rằng $b_1 \neq 0$ và $b_1 \neq b_5$ nên b_1 có 8 cách chọn.
Chọn 3 số trong 8 số $\{0;1;2;3;4;5;6;7;8;9\} \setminus \{b_1;b_5\}$ và xếp vào các vị trí b_2, b_3, b_4 có A_8^3 cách chọn.
Theo quy tắc nhân có $4 \cdot 8 \cdot \mathrm{A}_8^3 = 13440$ số.
Như vậy có $\mathrm{A}_9^4 + 10752 = 13776$ số.

c) Gọi số cần tìm là $\overline{abcde}$
Ta tìm số có 5 chữ số trong đó có các chữ số 1; 2; 3 nên số cách chọn là $A_5^3 \cdot \mathrm{A}_7^2$.
Nhưng số 0 vẫn có thể đứng đầu nên ta phải loại đi những số có số 0 đứng đầu.
Những số có 0 đứng đầu có dạng $\overline{0bcde}$ trong đó có chữ số 1, 2, 3. Vì vậy số cách chọn để loại bỏ là $\mathrm{A}_4^3 \cdot A_6^1$.
Như vậy có $\mathrm{A}_5^3 \cdot \mathrm{A}_7^2 - \mathrm{A}_4^3 \cdot \mathrm{A}_6^1 = 2376$ số

VÍ DỤ 5. Cho $X = \{0;1;2;3;4;5;6;7\}$ có bao nhiêu số tự nhiên gồm 5 chữ số được tạo từ tập X, sao cho:

a) Khác nhau đôi một và là số chẵn.

b) Khác nhau đôi một và chia hết cho 5.

c) Khác nhau đôi một và luôn có mặt số 2 và số 3.

Lời giải.

a) Gọi số cần tìm là $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$
Trường hợp 1: Nếu $a_5 = 0$
Chọn 4 số trong 7 số $\{1;2;3;4;5;6;7\}$ và xếp vào các vị trí a_1 a_2, a_3, a_4 có A_7^4 cách chọn.
Trường hợp 2: Nếu $a_5 \neq 0$
Chọn $a_5 \in \{2;4;6\}$: có 3 cách chọn.
Nhận xét rằng $a_1 \neq 0$ và $a_1 \neq a_5$ nên a_1 có 6 cách chọn.
Chọn 3 số trong 6 số $\{0;1;2;3;4;5;6;7\} \setminus \{a_1;a_5\}$ và xếp vào các vị trí a_2, a_3, a_4 có A_6^3 cách chọn.
Theo quy tắc nhân có $3 \cdot 6 \cdot \mathrm{A}_6^3 = 2160$ số.
Như vậy có $\mathrm{A}_7^4 + 2160 = 3000$ số.

b) Gọi số cần tìm là $\overline{abcde}$
Số tự nhiên chia hết cho 5 sẽ có tận cùng là 0 hoặc 5.
Trường hợp 1: Số tự nhiên gồm 5 chữ số đôi một khác nhau có dạng $\overline{abcd0}$ trong đó a, b, c, d đôi một khác nhau và thuộc tập hợp $X = \{1;2;3;4;5;6;7\}$. Khi đó có $\mathrm{A}_7^4 = 840$ số dạng này
Trường hợp 2: Số tự nhiên gồm 5 chữ số đôi một khác nhau có dạng $\overline{abcd5}$ trong đó a, b, c, d đôi một khác nhau và thuộc tập hợp $X = \{0;1;2;3;4;6;7\}$ riêng a thêm điều kiện khác 0. Khi đó có 6 cách chọn a và có A_6^3 cách chọn $\overline{bcd}$
Do đó có $6 \cdot \mathrm{A}_6^3 = 720$ số dạng này
Như vậy có $840 + 720 = 1560$ số

c) Gọi số cần tìm là $\overline{abcde}$
Ta tìm số có 5 chữ số trong đó có các chữ số 2; 3 nên số cách chọn là $\mathrm{A}_5^2 \cdot \mathrm{A}_6^3$.
Nhưng số 0 vẫn có thể đứng đầu nên ta phải loại đi những số có số 0 đứng đầu.
Những số có 0 đứng đầu có dạng $\overline{0bcde}$ trong đó có chữ số 2, 3. Vì vậy số cách chọn để loại bỏ là $\mathrm{A}_4^2 \cdot \mathrm{A}_5^2$.
Như vậy có $\mathrm{A}_5^2 \cdot \mathrm{A}_6^3 - \mathrm{A}_4^2 \cdot \mathrm{A}_5^2 = 2400 - 240 = 2160$ số

VÍ DỤ 6. Có bao nhiêu số có 5 chữ số mà các chữ số đôi một khác nhau và khác 0, trong đó có đúng 3 chữ số lẻ.
Lời giải.
Từ 1 đến 9 có 4 chữ số chẵn và 5 chữ số lẻ.
Xếp 5 số thoả yêu cầu bài toán vào 5 ô tương ứng.
Chọn 3 số lẻ trong 5 số lẻ và đặt vào 3 ô tuỳ ý có C_5^3 cách.
Chọn 2 số chẵn trong 4 số chẵn để đặt vào 2 ô còn lại có C_4^2 cách.
Những số đặt trong 5 ô này có thể thay đổi vị trí cho nhau nên có 5! cách.
Theo quy tắc nhân có $\mathrm{C}_5^3 \cdot \mathrm{C}_4^2 \cdot 5! = 7200$ số thoả yêu cầu bài toán.

VÍ DỤ 7. Từ các số $1,2,3,4,5,6,7,8,9$ sẽ lập được bao nhiêu số có 6 chữ số khác nhau mà có đúng bốn chữ số chẵn và 2 chữ số lẻ.

Lời giải.

Từ 1 đến 9 có 4 chữ số chẵn và 5 chữ số lẻ.
Xếp 6 số thoả yêu cầu bài toán vào 6 ô tương ứng.
Chọn 2 số lẻ trong 5 số lẻ và đặt vào 2 ô tuỳ ý có C_5^2 cách.
Chọn 4 số chẵn trong 4 số chẵn để đặt vào 4 ô còn lại có 1 cách.
Những số đặt trong 6 ô này có thể thay đổi vị trí cho nhau nên có 6! cách.
Theo quy tắc nhân có $\mathrm{C}_5^2 \cdot 6! = 7200$ số thoả yêu cầu bài toán.

VÍ DỤ 8. Có bao nhiêu chữ số có 5 chữ số khác nhau biết rằng có đúng 3 chữ số chẵn và 2 chữ số lẻ còn lại đứng kề nhau?

Lời giải.

Từ 0 đến 9 có 5 chữ số chẵn và 5 chữ số lẻ.
Xếp 5 số thoả yêu cầu bài toán vào 5 ô tương ứng.
Chọn 2 số lẻ kề nhau trong 5 số lẻ đặt vào 2 vị trí mà 2 số này liền kề nhau có A_5^2 Chọn 3 số chẵn trong 5 số chẵn và đặt vào 3 ô còn lại có C_5^3 cách.
Có thể coi 2 số lẻ là một số có hai chữ số Những số đặt trong 4 ô này có thể thay đổi vị trí cho nhau nên có 4! cách.
Theo quy tắc nhân có $\mathrm{A}_5^2 \cdot \mathrm{C}_5^3 \cdot 4! = 4800$ số.
Nhưng ta phải loại bỏ trường hợp số có dạng $\overline{0bcde}$. Số có dạng $\overline{0bcde}$ thoả yêu cầu đề bài có $\mathrm{A}_5^2 \cdot \mathrm{C}_4^2 \cdot 3! = 720$ cách.
Như vậy có $4800 - 720 = 4080$ số thoả yêu cầu đề bài.

1. Bài tập tự luận

BÀI 1. Một lớp học có 40 học sinh, trong đó gồm 25 nam và 15 nữ. Giáo viên chủ nhiệm muốn chọn một ban cán sự lớp gồm 4 em. Hỏi có bao nhiêu cách chọn, nếu:

a) Gồm 4 học sinh tuỳ ý.

b) Có 1 nam và 3 nữ.

c) Có 2 nam và 2 nữ.

Lời giải.

a) Gồm 4 học sinh tuỳ ý thì có $\mathrm{C}_{40}^4 = 91390$ cách chọn.

b) Gồm 1 nam và 3 nữ thì có $25 \cdot \mathrm{C}_{25}^3 = 11375$ cách chọn.

c) Gồm 2 nam và 2 nữ thì có $\mathrm{C}_{25}^2 \cdot \mathrm{C}_{15}^2 = 31500$ cách chọn.

BÀI 2. Một lớp học có 40 học sinh, trong đó gồm 25 nam và 15 nữ. Giáo viên chủ nhiệm muốn chọn 5 học sinh trực nhật. Hỏi có bao nhiêu cách chọn, nếu:

a) Gồm 5 học sinh tuỳ ý.

b) Có 3 nam và 2 nữ.

c) Có không quá 3 nữ.

d) Có ít nhất 1 nữ.

Lời giải.

a) Gồm 5 học sinh tuỳ ý thì có $\mathrm{C}_{40}^5 = 658008$ cách chọn.

b) Gồm 3 nam và 2 nữ thì có $\mathrm{C}_{25}^3 \cdot \mathrm{C}_{15}^2 = 241500$ cách chọn.

c) Trường hợp chọn 5 học sinh mà có 4 nữ thì có $25 \cdot \mathrm{C}_{15}^4 = 34125$ cách chọn.
Trường hợp chọn 5 học sinh toàn nữ thì có $\mathrm{C}_{15}5 = 3003$ cách chọn.
Như vậy có $658008 - 34125 - 3003 = 620880$ cách chọn thoả yêu cầu đề bài.

d) Chọn 5 học sinh có ít nhất một nữ thì có $658008 - \mathrm{C}_{25}^5 = 604878$ cách chọn

BÀI 3. Một lớp có 20 học sinh trong đó có 14 nam, 6 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách lập một đội gồm 4 học sinh, trong đó có:

a) Số nam và số nữ bằng nhau.

b) Ít nhất một nữ.

Lời giải.

a) Gồm 2 nam và 2 nữ thì có $\mathrm{C}_{14}^2 \cdot \mathrm{C}_6^2 = 1365$ cách chọn.

b) Có ít nhất một nữ thì có $\mathrm{C}_{20}^4 - \mathrm{C}_{14}^4 = 3844$ cách chọn.

BÀI 4. Một đội văn nghệ gồm 20 người, trong đó có 10 nam, 10 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách chọn ra 5 người, sao cho:

a) Có đúng 2 nam.

b) Có ít nhất 2 nam và 1 nữ.

Lời giải.

a) Có đúng 2 nam thì có $C_{10}^2 \cdot C_{10}^3 = 5400$ cách chọn.

b) Trường hợp không có nữ thì có $C_{10}^5 = 252$.
Trường hợp có không có nam hoặc có 1 nam thì có $C_{10}^5 + 10 \cdot C_{10}^4 = 2352$.
Như vậy có $C_{20}^5 - 252 - 2352 = 12900$ cách chọn thoả yêu cầu bài toán.

BÀI 5. Từ 5 bông hồng vàng, 3 bông hồng trắng, 4 bông hồng đỏ (các bông hồng xem như đôi một khác nhau). Người ta muốn chọn ra 1 bó hoa hồng gồm 7 bông. Có bao nhiêu cách chọn một đóa hoa sao cho:

a) Có đúng 1 bông hồng đỏ.

b) Có ít nhất 3 bông vàng và ít nhất 3 bông đỏ.

Lời giải.

a) Có đúng 1 bông hồng đỏ thì có $4 \cdot C_8^6 = 112$ cách chọn.

b) Trường hợp lấy 3 vàng, 3 đỏ và 1 trắng thì có $C_5^3 \cdot C_4^3 \cdot C_3^1 = 120$.
Trường hợp lấy 4 vàng, 3 đỏ thì có $C_5^4 \cdot C_4^3 = 20$.
Trường hợp lấy 3 vàng, 4 đỏ thì có $C_5^3 \cdot C_4^4 = 10$.
Như vậy có $120 + 20 + 10 = 150$ cách chọn thoả yêu cầu bài toán.

BÀI 6. Trông một hộp có 18 bi, trong đó có 9 viên bi xanh, 5 viên bi đỏ, 4 bi vàng có kích thước đôi một khác nhau. Có bao nhiêu cách chọn ra 6 viên bi sao cho những viên bi được chọn thỏa mãn:

a) Có đúng 2 viên bi màu đỏ?

b) Số bi xanh bằng số bi đỏ?

Lời giải.

a) Có đúng 2 viên bi đỏ thì có $C_{13}^4 \cdot C_5^2 = 7150$ cách chọn.

b) **Trường hợp 1:** Lấy 3 xanh, 3 đỏ thì có $C_9^3 \cdot C_5^3 = 840$.
Trường hợp 2: Lấy 2 xanh, 2 đỏ và 2 vàng thì có $C_9^2 \cdot C_5^2 \cdot C_4^2 = 2160$.
Trường hợp 3: Lấy 1 xanh, 1 đỏ và 4 vàng thì có $C_9^1 \cdot C_5^1 \cdot C_4^4 = 45$.
Như vậy có $840 + 2160 + 45 = 3045$ cách chọn thoả yêu cầu bài toán.

BÀI 7. Trong ngân hàng đề kiểm tra 30 phút môn Vật Lí có 10 câu hỏi, trong đó có 4 câu lý thuyết và 6 bài tập. Người ta cấu tạo thành các đề thi. Biết rằng trong mỗi đề thi phải gồm 3 câu hỏi, trong đó nhất thiết phải có ít nhất 1 câu lý thuyết và 1 bài tập. Hỏi có thể tạo ra bao nhiêu đề thi có dạng như trên?

Lời giải.

Thiết lập đề kiểm tra gồm 3 câu hỏi, trong đó có ít nhất một câu lý thuyết và ít nhất một câu bài tập.
Trường hợp không có câu lý thuyết thì có C_6^3.
Trường hợp không có câu bài tập thì có C_4^3.
Như vậy có $C_{10}^3 - C_6^3 - C_4^3 = 96$ cách tạo ra đề kiểm tra thoả yêu cầu.

BÀI 8. Trong một môn học, thầy giáo có 30 câu hỏi khác nhau gồm 5 câu hỏi khó, 10 câu hỏi trung bình, 15 câu hỏi dễ. Từ 30 câu hỏi đó có thể lập được bao nhiêu đề kiểm tra, mỗi đề gồm 5 câu hỏi khác nhau và nhất thiết phải có đủ 3 loại câu hỏi (khó, trung bình, dễ) và số câu hỏi dễ không ít hơn 2.

Lời giải.

Trường hợp 1: 3 dễ, 1 khó, 1 trung bình thì có $C_{15}^3 \cdot C_5^1 \cdot C_{10}^1 = 22750$ cách.
Trường hợp 2: 2 dễ, 2 khó, 1 trung bình thì có $C_{15}^2 \cdot C_5^2 \cdot C_{10}^1 = 10500$ cách.
Trường hợp 3: 2 dễ, 1 khó, 2 trung bình thì có $C_{15}^2 \cdot C_5^1 \cdot C_{10}^2 = 23625$ cách.
Như vậy có $22750 + 10500 + 23625 = 56875$ cách chọn đề kiểm tra thoả yêu cầu.

BÀI 9. Đội thanh niên xung kích của một trường phổ thông có 12 học sinh, gồm 5 học sinh lớp A, 4 học sinh lớp B và 3 học sinh lớp C. Cần chọn 4 học sinh đi làm nhiệm vụ, sao cho 4 học sinh này thuộc không quá 2 trong 3 lớp trên. Hỏi có bao nhiêu cách chọn như vậy?

Lời giải.

Cách chọn lớp nào cũng có học sinh tham gia làm nhiệm vụ:
Trường hợp 1: 2 lớp A, 1 lớp B,1 lớp C thì có $C_5^2 \cdot C_4^1 \cdot C_3^1 = 120$ cách.
Trường hợp 2:1 lớpA, 2 lớp B, 1 lớp C thì có $C_5^1 \cdot C_4^2 \cdot C_3^1 = 90$ cách.
Trường hợp 3: 1 lớp A, 1 lớp B, 2 lớp Cthì có $C_5^1 \cdot C_4^1 \cdot C_3^2 = 60$ cách.
Như vậy có $C_{12}^4 - (120 + 90 + 60) = 225$ cách chọn đề kiểm tra thoả yêu cầu.

BÀI 10. Hội đồng quản trị của một công ty gồm 12 người, trong đó có 5 nữ. Từ hội đồng quản trị đó người ta bầu ra 1 chủ tịch hội đồng quản trị, 1 phó chủ tịch hội đồng quản trị và 2 ủy viên. Hỏi có bao nhiêu cách bầu sao cho trong 4 người được bầu nhất thiết phải có nữ?

Lời giải.

Cách chọn 4 người tuỳ ý làm Hội đồng quản trị có $C_{12}^1 \cdot C_{11}^1 \cdot C_{10}^2$ cách.
Cách chọn 4 người không có nữ thì có $C_7^1 \cdot C_6^1 \cdot C_5^2$ cách.
Như vậy cách chọn thoả yêu cầu bài toán là một hội đồng quản trị 4 người trong đó luôn có nữ là: $C_{12}^1 \cdot C_{11}^1 \cdot C_{10}^2 - C_7^1 \cdot C_6^1 \cdot C_5^2 = 5520$ cách.

BÀI 11. Lớp có 50 học sinh được chia thành 5 tổ, mỗi tổ có 10 học sinh. Hỏi có bao nhiêu cách chia tổ?

Lời giải.

Chọn 10 học sinh cho tổ 1 có C_{50}^{10} cách.
Chọn 10 học sinh cho tổ 2 có C_{40}^{10} cách.
Chọn 10 học sinh cho tổ 3 có C_{30}^{10} cách.
Chọn 10 học sinh cho tổ 4 có C_{20}^{10} cách.
Chọn 10 học sinh cho tổ 5 có C_{10}^{10} cách.
Như vậy theo quy tắc nhân có $C_{50}^{10} \cdot C_{40}^{10} \cdot C_{30}^{10} \cdot C_{20}^{10} \cdot C_{10}^{10}$ cách chọn thoả yêu cầu bài toán.

BÀI 12. Một tổ có 8 học sinh đi trồng cây. Khi trồng cây cần có 2 em học sinh. Có bao nhiêu cách chia tổ thành những cặp như vậy?

Lời giải.

Vì mỗi tổ gồm 2 học sinh nên số cách chia tổ là $C_8^2 \cdot C_6^2 \cdot C_4^2 \cdot C_2^2 = \dfrac{8!}{2! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 2!} = 2520$.

BÀI 13. Giải bóng truyền VTV Cup gồm 9 đội bóng tham dự, trong đó có 6 đội nước ngoài và 3 đội Việt Nam. Ban tổ chức bốc thăm chia làm 3 bảng đấu A, B, C. Hỏi có bao nhiêu cách chia sao cho:

a) Mỗi bảng ba đội?

b) Mỗi bảng ba đội và 3 đội bóng của Việt Nam ở ba bảng khác nhau?

Lời giải.

a) Vì mỗi bảng gồm 3 đội nên

- Số cách chọn 3 đội vào bảng A: $C_9^3 = 84$;
- Số cách chọn 3 đội vào bảng B: $C_6^3 = 20$;
- Số cách chọn 3 đội vào bảng C: $C_3^3 = 1$.

Theo quy tắc nhân, số cách chia bảng là $84 \cdot 20 \cdot 1 = 1680$.

b) Vì các đội bóng của Việt Nam ở các bảng khác nhau nên

- Số cách cách xếp 3 đội bóng Việt Nam vào 3 bảng: $3! = 6$;
- Số xếp 6 đội còn lại vào ba bảng, mỗi bảng hai đội: $\dfrac{6!}{2! \cdot 2! \cdot 2!} = 90$.

Theo quy tắc nhân, số cách chia bảng là $6 \cdot 90 = 540$.

BÀI 14. Để sắp xếp 5 bạn nữ và 15 bạn nam thành bốn nhóm A, B, C, D, mỗi nhóm có 5 bạn. Việc chia nhóm được thực hiện một cách ngẫu nhiên. Hỏi có bao nhiêu cách chia nhóm sao cho:

a) Thành viên trong nhóm là bất kì?

b) 5 bạn nữ ở cùng một nhóm.

Lời giải.

a) Ta có

- Số cách chọn 5 học sinh nhóm A: C_{20}^5;
- Số cách chọn 5 học sinh nhóm B: C_{15}^5;
- Số cách chọn 5 học sinh nhóm C: C_{10}^5.
- Số cách chọn 5 học sinh nhóm D: C_5^5.

Theo quy tắc nhân, số cách chia nhóm thỏa yêu cầu bài toán là

$$C_{20}^5 \cdot C_{15}^5 \cdot C_{10}^5 \cdot C_5^5.$$

b) Vì 5 bạn nữ ở cùng một nhóm nên

- Số cách xếp nhóm cho 5 học sinh nữ là 4;
- Số cách xếp 15 học sinh nam vào 3 nhóm còn lại

$$\mathrm{C}_{15}^5 \cdot \mathrm{C}_{10}^5 \cdot \mathrm{C}_5^5.$$

Theo quy tắc nhân, số cách chia nhóm thỏa yêu cầu bài toán là

$$4 \cdot \mathrm{C}_{15}^5 \cdot \mathrm{C}_{10}^5 \cdot \mathrm{C}_5^5.$$

BÀI 15. Trong một hộp có 50 tấm thẻ được đánh số từ 1 đến 50. Có bao nhiêu cách lấy ra ba thẻ sao cho có đúng 2 thẻ mang số chia hết cho 8?

Lời giải.

Từ 1 đến 50 có đúng $\left[\dfrac{50}{8}\right] = 6$ số chia hết cho 8. Khi đó,

- Số cách chọn 2 số chia hết cho 8 là $\mathrm{C}_6^2 = 15$ cách;
- Số cách chọn 1 số không chia hết cho 8 là 44 cách.

Theo quy tắc nhân, ta có tất cả $44 \cdot 15 = 660$ cách chọn 3 thẻ thỏa yêu cầu bài toán.

BÀI 16. Có 30 tấm thẻ được đánh số từ 1 đến 30. Có bao nhiêu cách chọn ra 10 tấm thẻ sao cho có 5 tấm thẻ mang số lẻ, 5 tấm thẻ mang số chẵn trong đó chỉ có đúng một tấm thẻ mang số chia hết cho 10?

Lời giải.

Từ 1 đến 30 có 15 số chẵn, 15 số lẻ; trong 15 số chẵn có 3 số chia hết cho 5. Do đó,

- Số cách chọn 5 số lẻ là C_{15}^5 cách;
- Số cách chọn 1 số chẵn chia hết cho 5 là 3 cách;
- Số cách chọn 4 số chẵn trong các số chẵn còn lại là C_{12}^4.

Theo quy tắc nhân, ta có tất cả $\mathrm{C}_{15}^5 \cdot 3 \cdot \mathrm{C}_{12}^4 = 4459455$ cách chọn 10 thẻ thỏa yêu cầu bài toán.

BÀI 17. Trong một hộp có 20 viên bi được đánh số từ 1 đến 20. Có bao nhiêu cách lấy ra 5 viên bi sao cho có đúng 3 viên bi mang số lẻ, 2 viên bi mang số chẵn trong đó có đúng một viên bi mang số chia hết cho 4?

Lời giải.

Từ 1 đến 20 có 10 số chẵn, 10 số lẻ; trong 10 số chẵn có 5 số chia hết cho 4. Do đó,

- Số cách chọn 3 số lẻ là C_{10}^3 cách;
- Số cách chọn 1 số chẵn chia hết cho 4 là 5 cách;
- Số cách chọn 1 số chẵn trong các số chẵn còn lại là 5.

Theo quy tắc nhân, ta có tất cả $\mathrm{C}_{10}^3 \cdot 5 \cdot 5 = 3000$ cách chọn 5 thẻ thỏa yêu cầu bài toán.

BÀI 18. Trong một hộp có 100 viên bi được đánh số từ 1 đến 100. Có bao nhiêu cách chọn ra 3 viên bi sao cho tổng ba số trên 3 bi chia hết cho 2.

Lời giải.

Trong các số từ 1 đến 100 có 50 số chẵn và 50 số lẻ. Để tổng ba số được chọn thỏa yêu cầu bài toán, ta có hai khả năng xảy ra

TH 1. Ba số được chọn là ba số chẵn. Trong trường hợp này, chúng ta có tất cả $\mathrm{C}_{50}^3 = 19600$.

TH 2. Ba số được chọn gồm hai số lẻ và một số chẵn. Trong trường hợp này, chúng ta có tất cả $\mathrm{C}_{50}^1 \cdot \mathrm{C}_{50}^2 = 61250$.

Theo quy tắc cộng, ta có $19600 + 61250 = 80850$ cách.

BÀI 19. Trong một hộp có 40 tấm thẻ được đánh số từ 1 đến 40. Có bao nhiêu cách chọn 3 tấm thẻ trong hộp sao cho tổng ba số trên 3 thẻ chia hết cho 3.

Lời giải.

Trong các số từ 1 đến 40 có 13 số chia hết cho 3, 14 số chia ba dư 1 và 13 số chia ba dư 2. Để tổng ba số được chọn thỏa yêu cầu bài toán, ta có hai khả năng xảy ra

TH 1. Ba số được chọn là ba số chia hết cho 3. Trong trường hợp này, chúng ta có tất cả $\mathrm{C}_{13}^3 = 286$.

TH 2. Ba số được chọn gồm ba số chia ba dư 1. Trong trường hợp này, chúng ta có tất cả $\mathrm{C}_{14}^3 = 364$.

TH 3. Ba số được chọn gồm ba số chia ba dư 2. Trong trường hợp này, chúng ta có tất cả $\mathrm{C}_{13}^3 = 286$.

TH 4. Ba số được chọn gồm ba số chia ba dư lần lượt 1, 2, 3. Trong trường hợp này, chúng ta có tất cả $14 \cdot 13 \cdot 13 = 2366$.

Theo quy tắc cộng, ta có $286 + 364 + 286 + 2366 = 3302$ cách.

BÀI 20. Cho hai đường thẳng $a \parallel b$. Trên đường thẳng a có 5 điểm phân biệt và trên đường thẳng b có 10 điểm phân biệt. Hỏi có thể tạo được bao nhiêu tam giác có các đỉnh là các điểm trên hai đường thẳng a và b đã cho?

Lời giải.

Gọi $\triangle$ là tam giác thỏa yêu cầu bài toán. Khi đó, vì $a \parallel b$ nên chỉ có hai khả năng xảy ra

- $\triangle$ có hai đỉnh thuộc a và một đỉnh thuộc b. Trong trường hợp này, có tất cả $\mathrm{C}_5^2 \cdot \mathrm{C}_{10}^1 = 100$.
- $\triangle$ có hai đỉnh thuộc b và một đỉnh thuộc a. Trong trường hợp này, có tất cả $\mathrm{C}_5^1 \cdot \mathrm{C}_{10}^2 = 225$.

Theo quy tắc cộng, số tam giác thỏa yêu cầu bài toán là $100 + 225 = 325$.

BÀI 21. Cho hai đường thẳng song song d_1, d_2 . Trên d_1 lấy 17 điểm phân biệt, trên d_2 lấy 20 điểm phân biệt. Tính số tam giác có các đỉnh là 3 điểm trong số 37 điểm đã chọn trên d_1 và d_2 đã cho?

Lời giải.

Gọi $\triangle$ là tam giác thỏa yêu cầu bài toán. Khi đó, vì $d_1 \parallel d_2$ nên chỉ có hai khả năng xảy ra

- $\triangle$ có hai đỉnh thuộc d_1 và một đỉnh thuộc d_2. Trong trường hợp này, có tất cả $\mathrm{C}_{17}^2 \cdot \mathrm{C}_{20}^1 = 2720$.
- $\triangle$ có hai đỉnh thuộc d_2 và một đỉnh thuộc d_1. Trong trường hợp này, có tất cả $\mathrm{C}_{17}^1 \cdot \mathrm{C}_{20}^2 = 3230$.

Theo quy tắc cộng, số tam giác thỏa yêu cầu bài toán là $2720 + 3230 = 5950$.

BÀI 22. Cho hai đường thẳng $d_1 \parallel d_2$. Trên đường thẳng d_1 có 10 điểm phân biệt, trên đường thẳng d_2 có n điểm phân biệt với $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Biết có 2800 tam giác có đỉnh là các điểm đã cho. Hãy tìm n?

Lời giải.

Gọi $\triangle$ là tam giác thỏa yêu cầu bài toán. Khi đó, vì $d_1 \parallel d_2$ nên chỉ có hai khả năng xảy ra

- $\triangle$ có hai đỉnh thuộc d_1 và một đỉnh thuộc d_2. Trong trường hợp này, có tất cả $\mathrm{C}_{10}^2 \cdot \mathrm{C}_n^1 = 45n$.
- $\triangle$ có hai đỉnh thuộc d_2 và một đỉnh thuộc d_1. Trong trường hợp này, có tất cả $\mathrm{C}_{10}^1 \cdot \mathrm{C}_n^2 = 5n(n-1)$.

Theo quy tắc cộng và giả thiết đề bài, ta có

$$45n + 5n(n-1) = 2800 \Leftrightarrow n^2 + 8n - 560 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n = 20 \text{ (nhận)} \\ n = -28 \text{ (loại)} \end{array}\right.$$

Vậy $n = 20$.

BÀI 23. Cho hai đường thẳng $d_1 \parallel d_2$. Trên đường thẳng d_1 có 10 điểm phân biệt, trên đường thẳng d_2 có n điểm phân biệt với $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Biết có 1725 tam giác có đỉnh là các điểm đã cho. Hãy tìm n?

Lời giải.

Gọi $\triangle$ là tam giác thỏa yêu cầu bài toán. Khi đó, vì $d_1 \parallel d_2$ nên chỉ có hai khả năng xảy ra

- $\triangle$ có hai đỉnh thuộc d_1 và một đỉnh thuộc d_2. Trong trường hợp này, có tất cả $\mathrm{C}_{10}^2 \cdot \mathrm{C}_n^1 = 45n$.
- $\triangle$ có hai đỉnh thuộc d_2 và một đỉnh thuộc d_1. Trong trường hợp này, có tất cả $\mathrm{C}_{10}^1 \cdot \mathrm{C}_n^2 = 5n(n-1)$.

Theo quy tắc cộng và giả thiết đề bài, ta có

$$45n + 5n(n-1) = 1725 \Leftrightarrow n^2 + 8n - 345 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n = 15 \text{ (nhận)} \\ n = -23 \text{ (loại)} \end{array}\right.$$

Vậy $n = 15$.

BÀI 24. Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4 có thể lập được bao nhiêu số

a) Có 9 chữ số sao cho chữ số 0 có mặt 2 lần, chữ số 2 có mặt 3 lần, chữ số 3 có mặt 2 lần các chữ số còn lại có mặt đúng một lần.

b) Có 8 chữ số sao cho chữ số 1 có mặt 3 lần, chữ số 4 có mặt 2 lần, các chữ số còn lại có mặt đúng 1 lần.

Lời giải.

a) Xếp số vào 9 ô trống thỏa yêu cầu đề bài.

- Chọn 2 ô trong 8 ô (bỏ ô đầu tiên) để xếp 2 chữ số 0, có $\mathrm{C}_8^2 = 28$ cách.

- Chọn 3 ô trong 7 ô còn lại để xếp 3 chữ số 2, có $C_7^3 = 35$ cách.
- Chọn 2 ô trong 4 ô còn lại để xếp 2 chữ số 3, có $C_4^2 = 6$ cách.
- Xếp 2 chữ số còn lại $\{2; 4\}$ vào 2 ô còn lại, có 2! cách.

Theo quy tắc nhân có $28 \cdot 35 \cdot 6 \cdot 2 = 11760$.

b) Xếp số vào 8 ô trống thỏa yêu cầu đề bài.

Trường hợp ô đầu có thể chứa số 0. Chọn 3 ô trong 8 ô để xếp 3 chữ số 1, có $C_8^3 = 56$ cách.
- Chọn 2 ô trong 5 ô còn lại để xếp 2 chữ số 4, có $C_5^2 = 10$ cách.
- Xếp 3 chữ số còn lại vào 3 ô còn lại, có 3! cách.

Theo quy tắc nhân có $56 \cdot 10 \cdot 6 = 3360$ số thỏa yêu cầu, nhưng có những số có chữ số 0 đứng vị trí đầu tiên.

Trường hợp số 0 ở ô đầu tiên. Chọn 3 ô trong 7 ô để xếp 3 chữ số 1, có $C_7^3 = 35$ cách.
- Chọn 2 ô trong 4 ô còn lại để xếp 2 chữ số 4, có $C_4^2 = 6$ cách.
- Xếp 2 chữ số còn lại vào 2 ô còn lại, có 2! cách.

Theo quy tắc nhân có $35 \cdot 6 \cdot 2 = 420$ ssố mà có chữ số 0 ở đầu.

Do đó, số chữ số thỏa yêu cầu bài toán là $3360 - 420 = 2940$.

BÀI 25. Từ các chữ số 0, 2, 4, 5, 9 có thể lập được bao nhiêu số

a) Có 9 chữ số sao cho chữ số 0 có mặt 3 lần, chữ số 4 có mặt 2 lần, chữ số 5 có mặt 2 lần các chữ số còn lại có mặt đúng một lần.

b) Có 8 chữ số sao cho chữ số 2 có mặt 3 lần, chữ số 9 có mặt 3 lần, các chữ số còn lại có mặt đúng 1 lần.

Lời giải.

a) Xếp số vào 9 ô trống thỏa yêu cầu đề bài.

- Chọn 3 ô trong 8 ô (bỏ ô đầu tiên) để xếp 3 chữ số 0, có C_8^3 cách.
- Chọn 2 ô trong 6 ô còn lại để xếp 2 chữ số 4, có C_6^2 cách.
- Chọn 2 ô trong 4 ô còn lại để xếp 2 chữ số 5, có C_4^2 cách.
- Xếp 2 chữ số còn lại $\{2; 9\}$ vào 2 ô còn lại, có 2! cách.

Theo quy tắc nhân có $C_8^3 \cdot C_6^2 \cdot C_4^2 \cdot 2 = 10080$.

b) Xếp số vào 8 ô trống thỏa yêu cầu đề bài.

Trường hợp ô đầu có thể chứa số 0. Chọn 3 ô trong 8 ô để xếp 3 chữ số 2, có $C_8^3 = 56$ cách.
- Chọn 3 ô trong 5 ô còn lại để xếp 2 chữ số 9, có $C_5^3 = 10$ cách.
- Xếp 3 chữ số còn lại vào 2 ô còn lại, có $A_3^2 = 3!$ cách.

Theo quy tắc nhân có $56 \cdot 10 \cdot 6 = 3360$ số thỏa yêu cầu, nhưng có những số có chữ số 0 đứng vị trí đầu tiên.

Trường hợp số 0 ở ô đầu tiên. Chọn 3 ô trong 7 ô để xếp 3 chữ số 2, có $C_7^3 = 35$ cách.
- Chọn 3 ô trong 4 ô còn lại để xếp 3 chữ số 9, có $C_4^3 = 4$ cách.
- Xếp 2 chữ số còn lại vào 1 ô còn lại, có $A_2^1 = 2!$ cách.

Theo quy tắc nhân có $35 \cdot 4 \cdot 2 = 280$ số mà có chữ số 0 ở đầu.

Do đó, số chữ số thỏa yêu cầu bài toán là $3360 - 280 = 3080$ số.

BÀI 26. Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 có thể lập được bao nhiêu số có 12 chữ số trong đó chữ số 5 có mặt đúng 2 lần; chữ số 6 có mặt đúng 4 lần, các chữ số còn lại có mặt đúng một lần?

Lời giải.

Xếp số vào 12 ô trống thỏa yêu cầu đề bài.

- Chọn 2 ô trong 12 ô để xếp 2 chữ số 5, có C_{12}^2 cách.

- Chọn 4 ô trong 10 ô còn lại để xếp 4 chữ số 6, có C_{10}^4 cách.
- Xếp 8 chữ số còn lại $\{1;2;3;4;7;8\}$ vào 6 ô còn lại, có 6! cách.

Theo quy tắc nhân có $C_{12}^2 \cdot C_{10}^4 \cdot 6! = 9979200$ số.

BÀI 27. Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5 có thể lập được bao nhiêu số có 8 chữ số trong đó chữ số 5 có mặt 3 lần, các chữ số còn lại có mặt đúng một lần?

Lời giải.

Xếp số vào 8 ô trống thỏa yêu cầu đề bài.

Trường hợp ô đầu có thể chứa số 0
- Chọn 3 ô trong 8 ô để xếp 3 chữ số 5, có $C_8^3 = 56$ cách.
- Xếp 5 chữ số còn lại vào 5 ô còn lại, có 5! cách.

Theo quy tắc nhân có $56 \cdot 5! = 6720$ số thỏa yêu cầu, nhưng có những số có chữ số 0 đứng vị trí đầu tiên.

Trường hợp số 0 ở ô đầu tiên.
- Chọn 3 ô trong 7 ô để xếp 3 chữ số 5, có $C_7^3 = 35$ cách.
- Xếp 4 chữ số còn lại vào 4 ô còn lại, có 4! cách.

Theo quy tắc nhân có $35 \cdot 4! = 840$ số mà có chữ số 0 ở đầu.

Do đó, số chữ số thỏa yêu cầu bài toán là $6720 - 840 = 5880$ số.

BÀI 28. Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5 có bao nhiêu số gồm 6 chữ số phân biệt mà

a) Các chữ số chẵn đứng cạnh nhau.

b) Số chẵn đứng cạnh và số lẻ đứng cạnh nhau.

Lời giải.

a) Các chữ số chẵn đứng cạnh nhau.
Đặt $a = 024$, $b = 042$, $c = 204$, $d = 240$, $e = 420$ và $f = 402$.

- Từ $\{a;1;3;5\}$ ta lập được $3 \cdot 3! = 18$ số.
- Từ $\{b;1;3;5\}$ ta lập được $3 \cdot 3! = 18$ số.
- Từ $\{c;1;3;5\}$ ta lập được $4! = 24$ số.
- Từ $\{d;1;3;5\}$ ta lập được $4! = 24$ số.
- Từ $\{e;1;3;5\}$ ta lập được $4! = 24$ số.
- Từ $\{f;1;3;5\}$ ta lập được $4! = 24$ số.

Theo quy tắc cộng, ta có $18 + 18 + 24 + 24 + 24 + 24 = 132$.

b) Số chẵn đứng cạnh và số lẻ đứng cạnh nhau.
Gọi số cần lập là $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6}$. Có hai khả năng xảy ra

TH 1. a_1, a_2, a_3 là các số chẵn và a_4, a_5, a_6 là các số lẻ. Khi đó
- a_1 có 2 cách chọn;
- $\overline{a_2a_3}$ có 2! cách chọn;
- $\overline{a_4a_5a_6}$ có 3! cách chọn.

Theo quy tắc nhân, ta có $2 \cdot 2! \cdot 3! = 24$ số.

TH 2. a_1, a_2, a_3 là các số lẻ và a_4, a_5, a_6 là các số chẵn. Khi đó
- $\overline{a_1a_2a_3}$ có 3! cách chọn;
- $\overline{a_4a_5a_6}$ có 3! cách chọn.

Theo quy tắc nhân, ta có $3! \cdot 3! = 36$ số.

Theo quy tắc cộng, ta có $24 + 36 = 60$ số thỏa mãn yêu cầu bài toán.

BÀI 29. Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4 có bao nhiêu số gồm 5 chữ số phân biệt mà

a) Các chữ số chẵn đứng cạnh nhau.

b) Số chẵn đứng cạnh và số lẻ đứng cạnh nhau.

Lời giải.

a) Các chữ số chẵn đứng cạnh nhau.
Đặt $a = 024$, $b = 042$, $c = 204$, $d = 240$, $e = 420$ và $f = 402$.

- Từ $\{a; 1; 3\}$ ta lập được $2 \cdot 2! = 4$ số.
- Từ $\{b; 1; 3\}$ ta lập được $2 \cdot 2! = 4$ số.
- Từ $\{c; 1; 3\}$ ta lập được $3! = 6$ số.
- Từ $\{d; 1; 3\}$ ta lập được $3! = 6$ số.
- Từ $\{e; 1; 3\}$ ta lập được $3! = 6$ số.
- Từ $\{f; 1; 3\}$ ta lập được $3! = 6$ số.

Theo quy tắc cộng, ta có $4 + 4 + 6 + 6 + 6 + 6 = 32$.

b) Số chẵn đứng cạnh và số lẻ đứng cạnh nhau.
Gọi số cần lập là $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6}$. Có hai khả năng xảy ra

TH 1. a_1, a_2, a_3 là các số chẵn và a_4, a_5 là các số lẻ. Khi đó

- a_1 có 2 cách chọn;
- $\overline{a_2a_3}$ có $2!$ cách chọn;
- $\overline{a_4a_5}$ có $2!$ cách chọn.

Theo quy tắc nhân, ta có $2 \cdot 2! \cdot 2! = 8$ số.

TH 2. a_1, a_2 là các số lẻ và a_3, a_4, a_5 là các số chẵn. Khi đó

- $\overline{a_1a_2}$ có $2!$ cách chọn;
- $\overline{a_3a_4a_5}$ có $3!$ cách chọn.

Theo quy tắc nhân, ta có $2! \cdot 3! = 12$ số.

Theo quy tắc cộng, ta có $8 + 12 = 20$ số thỏa mãn yêu cầu bài toán.

3 Giải phương trình, bất phương trình, hệ phương trình

- Tìm điều kiện. Ta có các điều kiện thường gặp sau:

Các kí hiệu và công thức	Điều kiện
• $n! = n(n-1)(n-2)\ldots 3.2.1$	$n \in \mathrm{N}$
• $\mathrm{P}_n = n!$	$n \in \mathbb{N}^*$
• $\mathrm{A}_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$	$\begin{cases} n, k \in \mathbb{N} \\ 0 \le k \le n \end{cases}$
• $\mathrm{C}_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$	$\begin{cases} n, k \in \mathbb{N} \\ 0 \le k \le n \end{cases}$
• $\mathrm{C}_n^k = \mathrm{C}_n^{n-k}$	$\begin{cases} n, k \in \mathbb{N} \\ 0 \le k \le n \end{cases}$
• $\mathrm{C}_{n+1}^k = \mathrm{C}_n^k + \mathrm{C}_n^{k-1}$	$\begin{cases} n, k \in \mathbb{N} \\ 1 \le k \le n \end{cases}$

- Thu gọn dựa vào những công thức trên và đưa về phương trình đại số. Giải phương trình đại số này tìm được ẩn.
- So với điều kiện để nhận những giá trị cần tìm.

VÍ DỤ 1. Giải phương trình $\mathrm{P}_2 \cdot x^2 - \mathrm{P}_3 \cdot x = 8$.

Lời giải.

$$\mathrm{P}_2 \cdot x^2 - \mathrm{P}_3 \cdot x = 8 \Leftrightarrow 2! \cdot x^2 - 3! \cdot x = 8 \Leftrightarrow 2x^2 - 6x - 8 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 4 \\ x = -1. \end{array}\right.$$

Vậy tập nghiệm $S = \{-1; 4\}$.

VÍ DỤ 2. Giải phương trình $\dfrac{\mathrm{P}_x - \mathrm{P}_{x-1}}{\mathrm{P}_{x+1}} = \dfrac{1}{6}$.

Lời giải.

$$\frac{\mathrm{P}_x - \mathrm{P}_{x-1}}{\mathrm{P}_{x+1}} = \frac{1}{6} \quad (\text{ĐK: } x \ge 1, x \in \mathbb{N})$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \frac{x!-(x-1)!}{(x+1)!}=\frac{1}{6}\\
&\Leftrightarrow \frac{x\cdot(x-1)!-(x-1)!}{(x+1)\cdot x\cdot(x-1)!}=\frac{1}{6}\\
&\Leftrightarrow \frac{x-1}{(x+1)\cdot x}=\frac{1}{6}\\
&\Leftrightarrow 6x-6=x^2+x\\
&\Leftrightarrow x^2-5x+6=0\\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3\\ x=2.\end{array}\right.
\end{aligned}$$

Vậy tập nghiệm $S=\{2;3\}$.

VÍ DỤ 3. Giải phương trình $\dfrac{(n+1)!}{(n-1)!}=72$.

Lời giải.

$$\begin{aligned}
&\frac{(n+1)!}{(n-1)!}=72 \quad (\text{ĐK: } n\geq 1, n\in\mathbb{N})\\
\Leftrightarrow\ &\frac{(n+1)\cdot n\cdot(n-1)!}{(n-1)!}=72\\
\Leftrightarrow\ &n^2+n-72=0\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{ll} n=8 & (\text{nhận})\\ n=-9 & (\text{loại}).\end{array}\right.
\end{aligned}$$

Vậy tập nghiệm $S=\{8\}$.

VÍ DỤ 4. Giải phương trình $\dfrac{n!}{(n-2)!}-\dfrac{n!}{(n-1)!}=3$.

Lời giải.

$$\begin{aligned}
&\frac{n!}{(n-2)!}-\frac{n!}{(n-1)!}=3 \quad (\text{ĐK: } n\geq 2, n\in\mathbb{N})\\
\Leftrightarrow\ &\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)!}{(n-2)!}-\frac{n\cdot(n-1)!}{(n-1)!}=3\\
\Leftrightarrow\ &n^2-n-n=3\\
\Leftrightarrow\ &n^2-2n-3=0\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{ll} n=3 & (\text{nhận})\\ n=-1 & (\text{loại}).\end{array}\right.
\end{aligned}$$

Vậy tập nghiệm $S=\{3\}$.

VÍ DỤ 5. Giải phương trình $\mathrm{A}_n^3=20n$.

Lời giải.

$$\begin{aligned}
&\mathrm{A}_n^3=20n \quad (\text{ĐK: } n\geq 3, n\in\mathbb{N})\\
\Leftrightarrow\ &\frac{n!}{(n-3)!}=20n\\
\Leftrightarrow\ &\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)!}{(n-3)!}=20n\\
\Leftrightarrow\ &(n-1)(n-2)=20\\
\Leftrightarrow\ &n^2-3n-18=0\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{ll} n=6 & (\text{nhận})\\ n=-3 & (\text{loại}).\end{array}\right.
\end{aligned}$$

Vậy tập nghiệm $S=\{6\}$.

VÍ DỤ 6. Giải phương trình $\mathrm{A}_n^3+2\mathrm{C}_n^2=16n$.

Lời giải.

$$\mathrm{A}_n^3+2\mathrm{C}_n^2=20n \quad (\text{ĐK: } n\geq 3, n\in\mathbb{N})$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \frac{n!}{(n-3)!}+2\cdot\frac{n!}{2!\cdot(n-2)!}=16n\\
&\Leftrightarrow \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)!}{(n-3)!}+\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)!}{(n-2)!}=16n\\
&\Leftrightarrow (n-1)(n-2)+n-1=16\\
&\Leftrightarrow n^2-2n-15=0\\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} n=5 & \text{(nhận)}\\ n=-3 & \text{(loại).}\end{array}\right.
\end{aligned}$$

Vậy tập nghiệm $S=\{5\}$.

VÍ DỤ 7. Giải phương trình $\mathrm{A}_x^3+\mathrm{C}_x^{x-2}=14x$.

Lời giải.

$$\begin{aligned}
&\mathrm{A}_x^3+\mathrm{C}_x^{x-2}=14x \quad (\text{ĐK: } x\geq 3, x\in\mathbb{N})\\
\Leftrightarrow\ &\frac{x!}{(x-3)!}+\frac{x!}{(x-2)!\cdot 2!}=14x\\
\Leftrightarrow\ &\frac{x\cdot(x-1)\cdot(x-2)\cdot(x-3)!}{(x-3)!}+\frac{x\cdot(x-1)\cdot(x-2)!}{(x-2)!\cdot 2}=14x\\
\Leftrightarrow\ &(x-1)(x-2)+\frac{x-1}{2}=14\\
\Leftrightarrow\ &2x^2-5x-25=0\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{ll} x=5 & \text{(nhận)}\\ x=-\dfrac{5}{2} & \text{(loại).}\end{array}\right.
\end{aligned}$$

Vậy tập nghiệm $S=\{5\}$.

VÍ DỤ 8. Giải phương trình $\mathrm{A}_{x-2}^2+\mathrm{C}_x^{x-2}=101$.

Lời giải.

$$\begin{aligned}
&\mathrm{A}_{x-2}^2+\mathrm{C}_x^{x-2}=101 \quad (\text{ĐK: } x\geq 4, x\in\mathbb{N})\\
\Leftrightarrow\ &\frac{(x-2)!}{(x-4)!}+\frac{x!}{(x-2)!\cdot 2!}=101\\
\Leftrightarrow\ &\frac{(x-2)\cdot(x-3)\cdot(x-4)!}{(x-4)!}+\frac{x\cdot(x-1)\cdot(x-2)!}{(x-2)!\cdot 2}=101\\
\Leftrightarrow\ &(x-2)(x-3)+\frac{x^2-x}{2}=101\\
\Leftrightarrow\ &3x^2-11x-190=0\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{ll} x=10 & \text{(nhận)}\\ x=-\dfrac{19}{3} & \text{(loại).}\end{array}\right.
\end{aligned}$$

Vậy tập nghiệm $S=\{10\}$.

VÍ DỤ 9. Cho $n\in\mathbb{Z}^+$ thỏa $\mathrm{C}_{n+1}^2+2\mathrm{C}_{n+2}^2+2\mathrm{C}_{n+3}^2+\mathrm{C}_{n+4}^2=149$. Chứng minh: $\dfrac{\mathrm{A}_{n+1}^4+3\mathrm{A}_n^3}{(n+1)!}=\dfrac{3}{4}$.

Lời giải.

$$\begin{aligned}
&\mathrm{C}_{n+1}^2+2\mathrm{C}_{n+2}^2+2\mathrm{C}_{n+3}^2+\mathrm{C}_{n+4}^2=149 \quad (\text{ĐK: } n\in\mathbb{Z}^+)\\
\Leftrightarrow\ &\frac{(n+1)!}{2!\cdot(n-1)!}+2\cdot\frac{(n+2)!}{2!\cdot n!}+2\cdot\frac{(n+3)!}{2!\cdot(n+1)!}+\frac{(n+4)!}{2!\cdot(n+2)!}=149\\
\Leftrightarrow\ &\frac{1}{2}(n+1)n+(n+2)(n+1)+(n+3)(n+2)+\frac{1}{2}(n+4)(n+3)=149\\
\Leftrightarrow\ &6n^2+24n-270=0\\
\Leftrightarrow\ &3x^2-11x-190=0\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{ll} n=5 & \text{(nhận)}\\ n=-9 & \text{(loại).}\end{array}\right.
\end{aligned}$$

Với $n=5$ ta có $\dfrac{\mathrm{A}_{n+1}^4+3\mathrm{A}_n^3}{(n+1)!}=\dfrac{\mathrm{A}_6^4+3\mathrm{A}_5^3}{6!}=\dfrac{3}{4}$.

VÍ DỤ 10. Giải bất phương trình $\mathrm{A}_n^3 + 15 < 15n$.

Lời giải.

$$\begin{aligned}
& \mathrm{A}_n^3 + 15 < 15n \quad (\text{ĐK: } n \geq 3, n \in \mathbb{N}) \\
\Leftrightarrow\ & \frac{n!}{(n-3)!} + 15 < 15n \\
\Leftrightarrow\ & \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3)!}{(n-3)!} + 15 < 15n \\
\Leftrightarrow\ & n(n-1)(n-2) + 15 < 15n \\
\Leftrightarrow\ & n^3 - 3n^2 - 13n + 15 < 0 \\
\Leftrightarrow\ & (n-1)(n-5)(n+3) < 0 \\
\Leftrightarrow\ & n - 5 < 0 \quad \left(\text{vì } n \geq 3 \text{ nên } \begin{cases} n-1 > 0 \\ n+3 > 0 \end{cases}\right) \\
\Leftrightarrow\ & n < 5.
\end{aligned}$$

So với điều kiện ta suy ra $\begin{cases} 3 \leq n < 5 \\ n \in \mathbb{N} \end{cases} \Rightarrow n \in \{3; 4\}$.

VÍ DỤ 11. Giải bất phương trình $2\mathrm{C}_{x+1}^2 + 3\mathrm{A}_x^2 < 30$.

Lời giải.

$$\begin{aligned}
& 2\mathrm{C}_{x+1}^2 + 3\mathrm{A}_x^2 < 30 \quad (\text{ĐK: } x \geq 2, x \in \mathbb{N}) \\
\Leftrightarrow\ & 2 \cdot \frac{(x+1)!}{2! \cdot (x-1)!} + 3 \cdot \frac{x!}{(x-2)!} < 30 \\
\Leftrightarrow\ & \frac{(x+1) \cdot x \cdot (x-1)!}{(x-1)!} + 3 \cdot \frac{x \cdot (x-1) \cdot (x-2)!}{(x-2)!} < 30 \\
\Leftrightarrow\ & (x+1)x + 3x(x-1) < 30 \\
\Leftrightarrow\ & 4x^2 - 2x - 30 < 0 \\
\Leftrightarrow\ & -\frac{5}{2} < x < 3.
\end{aligned}$$

So với điều kiện ta suy ra $\begin{cases} 2 \leq x < 3 \\ x \in \mathbb{N} \end{cases} \Rightarrow x = 2$.

1. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

CÂU 1. Với k và n là hai số nguyên dương tùy ý thỏa mãn $k \leq n$, mệnh đề nào đúng?

A $\mathrm{C}_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$. **B** $\mathrm{C}_n^k = \dfrac{n!}{k!}$. **C** $\mathrm{C}_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$. **D** $\mathrm{C}_n^k = \dfrac{k!(n-k)!}{n!}$.

Lời giải.

Ta có $\mathrm{C}_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

Các phương án còn lại sai.

Chọn đáp án A .... □

CÂU 2. Có bao nhiêu cách sắp xếp chỗ ngồi cho 5 học sinh vào 5 ghế xếp thành một dãy?

A 120. **B** 240. **C** 90. **D** 60.

Lời giải.

Mỗi cách sắp xếp chỗ ngồi cho 5 học sinh vào 5 ghế kê thành dãy là 1 hoán vị của 5 phần tử.
Số cách sắp xếp là $5! = 120$ cách.

CÂU 3. Trong một lớp học có 20 bạn học sinh, hỏi có bao nhiêu cách chọn ra một bạn để làm lớp trưởng và một bạn khác làm lớp phó?

A A_{20}^{18}. **B** A_{20}^2. **C** 20^2. **D** C_{20}^2.

Lời giải.

Mỗi cách chọn ra một học sinh để làm lớp trưởng và một học sinh làm lớp phó là một chỉnh hợp chập 2 của 20 phần tử.
Số cách chọn ra thỏa mãn yêu cầu đề bài là A_{20}^2.

Chọn đáp án B .... □

CÂU 4. Công thức tính số hoán vị P_n là

(A) $P_n = (n-1)!$. (B) $P_n = (n+1)!$. (C) $P_n = \dfrac{n!}{n+1}$. (D) $P_n = n!$.

Lời giải.

Công thức tính số hoán vị n phần tử là $P_n = n!$.

Chọn đáp án (D)

CÂU 5. Số cách xếp 10 học sinh thành một hàng dọc là

(A) $5! \cdot 5!$. (B) $10!$. (C) 10. (D) 25.

Lời giải.

Số cách xếp 10 học sinh thành một hàng dọc là $10!$.

Chọn đáp án (B)

CÂU 6. Có bao nhiêu số tự nhiên gồm 4 chữ số đôi một khác nhau lập ra từ các chữ số 2;4;6;8?

(A) 4. (B) $4!$. (C) C_4^4. (D) $4! - 3!$.

Lời giải.

Số tự nhiên gồm 4 chữ số đôi một khác nhau lập ra từ các chữ số 2;4;6;8 là $P_4 = 4!$.

Chọn đáp án (B)

CÂU 7. Có bao nhiêu cách sắp xếp 5 học sinh đứng thành 1 hàng dọc.

(A) 5. (B) 15. (C) 25. (D) 120.

Lời giải.

Mỗi cách sắp xếp 5 học sinh đứng thành 1 đường thẳng là một hoán vị của 5 phần tử.
Nên có $5! = 120$ cách sắp xếp 5 học sinh đứng thành 1 hàng dọc.

Chọn đáp án (D)

CÂU 8. Từ các chữ số $1; 2; 3; 5; 6; 7$ có thể lập được bao nhiêu số có 3 chữ số khác nhau

(A) C_7^3. (B) A_7^3. (C) $6 \cdot 5 \cdot 4$. (D) 6^3.

Lời giải.

Chọn 3 trong 6 chữ số để sắp vào 3 vị trí (phân biệt thứ tự) là một chỉnh hợp chập 3 của 6 phần tử: $A_6^3 = \dfrac{6!}{3!} = 6 \cdot 5 \cdot 4$

Chọn đáp án (C)

CÂU 9. Có bao nhiêu cách chọn một ban chấp hành gồm một trưởng ban, một phó ban, một thư ký và một thủ quỹ từ 14 thành viên

(A) A_{14}^4. (B) C_{14}^4. (C) $4!$. (D) 4^{14}.

Lời giải.

Chọn 4 trong 14 thành viên để bầu ban chấp hành (phân biệt thứ tự) là một chỉnh hợp chập 4 của 14 phần tử: A_{14}^4

Chọn đáp án (A)

CÂU 10. Có 10 cuốn sách toán, số cách tặng cho 3 bạn An, Thu, Minh mỗi bạn một cuốn sách toán từ số sách trên là

(A) C_{10}^3. (B) A_{10}^3. (C) 3^{10}. (D) $3!$.

Lời giải.

Số cách lấy ra 3 cuốn rồi tặng cho mỗi bạn một cuốn sách là A_{10}^3.

Chọn đáp án (B)

CÂU 11. Một lớp có 20 học sinh nam, 15 học sinh nữ. Có bao nhiêu cách lấy ra cùng lúc 3 học sinh bất kì trong lớp đó để phân công làm tổ trưởng của 3 tổ khác nhau là

(A) C_{35}^3. (B) A_{35}^3. (C) $C_{20}^1 C_{15}^2 + C_{20}^2 C_{15}^1$. (D) $C_{20}^1 C_{15}^2 + C_{20}^3 + C_{15}^3$.

Lời giải.

Tổng số học sinh trong lớp là 35. Số cách lấy ra 3 học sinh bất kì rồi phân công làm tổ trưởng 3 tổ khác nhau là A_{35}^3.

Chọn đáp án (B)

CÂU 12. Cho tập hợp $X = \{1; 2; 4; 5; 8\}$, một tổ hợp chập 2 của X là

(A) $\{2\}$. (B) $1; 2$. (C) $\{1; 5\}$. (D) $\{5; 6\}$.

Lời giải.

Theo định nghĩa, trong các phương án trên, chỉ có phương án $\{1; 5\}$ là 1 tổ hợp chập 2 của X.

Chọn đáp án (C)

CÂU 13. Cho hình ngũ giác $ABCDE$. Ta nối các đỉnh của nó lại để được các tam giác, ta có thể coi mỗi tam giác như vậy là

A Một chỉnh hợp chập 3 của 5 phần tử. **B** Một tổ hợp chập 3 của 5 phần tử.
C Một hoán vị của 3 phần tử. **D** Một bộ gồm 3 chỉnh hợp của 5 phần tử.

Lời giải.

Vì 5 đỉnh của ngũ giác đã cho không có 3 điểm nào thẳng hàng nên với mỗi tập hợp 3 điểm lấy ra từ 5 điểm đó ta được đúng 1 tam giác. Vậy mỗi tam giác có thể coi là một chỉnh hợp chập 3 của 5 phần tử.

Chọn đáp án B .... □

CÂU 14. Lớp 11A có 35 học sinh. Hỏi có bao nhiêu cách chọn một đội 5 bạn đi trực tuần?

A C_{35}^{5}. **B** A_{35}^{5}. **C** $5!$. **D** 5.

Lời giải.

Số cách chọn một đội 5 bạn đi trực tuần trong 35 bạn là C_{35}^{5}.

Chọn đáp án A .... □

CÂU 15. Một đội văn nghệ có 5 bạn nam và 8 bạn nữ. Số cách chọn 2 bạn nam và 3 bạn nữ đi biểu diễn là

A C_{13}^{5}. **B** A_{13}^{5}. **C** $\mathrm{A}_{5}^{2} \cdot \mathrm{A}_{8}^{3}$. **D** $\mathrm{C}_{5}^{2} \cdot \mathrm{C}_{8}^{3}$.

Lời giải.

Số cách chọn 2 bạn nam và bạn nữ đi biểu diễn là $\mathrm{C}_{5}^{2} \cdot \mathrm{C}_{8}^{3}$.

Chọn đáp án D .... □

CÂU 16. Với k, n là hai số nguyên dương tùy ý thỏa mãn $k \leq n$, mệnh đề nào dưới đây đúng?

A $\mathrm{C}_{n}^{k} = \mathrm{C}_{n}^{n-k}$. **B** $\mathrm{C}_{n}^{k} = \mathrm{C}_{n+k}^{k}$. **C** $\mathrm{C}_{n}^{k} = \mathrm{C}_{n}^{k+1}$. **D** $\mathrm{C}_{n}^{k} = \mathrm{C}_{n+1}^{k}$.

Lời giải.

Theo tính chất ta có $\mathrm{C}_{n}^{k} = \mathrm{C}_{n}^{n-k}$.

Chọn đáp án A .... □

CÂU 17. Với k, n là hai số nguyên dương tùy ý thỏa mãn $k < n$, mệnh đề nào dưới đây đúng?

A $\mathrm{C}_{n}^{k} = \mathrm{C}_{n-1}^{k} + \mathrm{C}_{n-1}^{k-1}$. **B** $\mathrm{C}_{n}^{k} = \mathrm{C}_{n+1}^{k} + \mathrm{C}_{n+1}^{k-1}$. **C** $\mathrm{C}_{n}^{k} = \mathrm{C}_{n}^{k+1}$. **D** $\mathrm{C}_{n}^{k} = \mathrm{C}_{n+1}^{k}$.

Lời giải.

Theo tính chất ta có $\mathrm{C}_{n}^{k} = \mathrm{C}_{n-1}^{k} + \mathrm{C}_{n-1}^{k-1}$.

Chọn đáp án A .... □

CÂU 18. Số cách xếp 4 bạn học sinh thành một hàng ngang là

A 16. **B** 4^4. **C** 12. **D** $4!$.

Lời giải.

Số cách xếp 4 bạn học sinh thành một hàng ngang là $4! = 24$.

Chọn đáp án D .... □

CÂU 19. Từ các chữ số $1; 2; 3; 5; 6; 8$ có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có 6 chữ số đôi một khác nhau biết rằng các số đó phải bắt đầu bằng chữ số 1.

A $6!$. **B** $5!$. **C** $4!$. **D** 5^5.

Lời giải.

Để lập được số tự nhiên có 6 chữ số đôi một khác nhau từ các chữ số $1; 2; 3; 5; 6; 8$ mà các chữ số đó bắt đầu bằng chữ số 1 ta chỉ cần sắp thứ thự 5 chữ số $2; 3; 5; 6; 8$ sau chữ số 1. Số cách sắp xếp cần tìm là $5!$.

Chọn đáp án B .... □

CÂU 20. Lớp 11A có 30 học sinh. Có bao nhiêu cách chọn ra 3 học sinh phân vào 3 vị trí Lớp trưởng, Lớp phó và Bí thư.

A C_{30}^{3}. **B** A_{30}^{3}. **C** 30. **D** $3!$.

Lời giải.

Số cách chọn 3 học sinh từ 30 học sinh để phân vào 3 vị trí Lớp trưởng, Lớp phó và Bí thư chính là số chỉnh hợp chập 3 của 30 phần tử.

Vậy có A_{30}^{3} cách chọn.

Chọn đáp án B .... □

CÂU 21. Có 5 quyển sách Toán, Vật lý, Hóa học, Lịch sử, Địa lý. Có bao nhiêu cách chọn ra 3 quyển sách để trao tặng cho 3 em học sinh (mỗi em một quyển).

Ⓐ A_5^3. Ⓑ $5!$. Ⓒ $3!$. Ⓓ C_5^3.

Lời giải.

Số cách chọn ra 3 quyển sách từ 5 quyển sách để trao tặng cho 3 em học sinh chính là số chỉnh hợp chập 3 của 5 phần tử. Vậy có A_5^3 cách chọn.

Chọn đáp án (A) .... □

CÂU 22. Xét số nguyên $n \geq 1$ và số nguyên k với $0 \leq k \leq n$. Công thức nào sau đây đúng?

Ⓐ $\mathrm{C}_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$. Ⓑ $\mathrm{C}_n^k = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}$. Ⓒ $\mathrm{C}_n^k = \dfrac{n!}{k!}$. Ⓓ $\mathrm{C}_n^k = \dfrac{n!}{n!\,(n-k)!}$.

Lời giải.

Ta có $\mathrm{C}_n^k = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}$

Chọn đáp án (B) .... □

CÂU 23. Cần phân công 3 bạn từ một tổ 10 bạn để làm trực nhật. Hỏi có bao nhiêu cách phân công khác nhau

Ⓐ C_{10}^3. Ⓑ 3^{10}. Ⓒ A_{10}^3. Ⓓ 10^3.

Lời giải.

Mỗi cách phân công 3 bạn từ một tổ 10 bạn để làm trực nhật là một tổ hợp chập 3 của 10 phần tử. Vậy số cách phân công khác nhau là C_{10}^3.

Chọn đáp án (A) .... □

CÂU 24. Có 5 bạn học sinh trong đó có hai bạn là Thảo và Linh. Số cách xếp 5 học sinh trên thành một hàng ngang sao cho hai bạn Thảo và Linh đứng cạnh nhau là

Ⓐ 48. Ⓑ 120. Ⓒ 24. Ⓓ 6.

Lời giải.

Ta coi hai bạn Thảo và Linh đứng cạnh nhau là một nhóm X.
Xếp X và 3 bạn còn lại thành một hàng ngang: có $4!$ cách xếp.
Ứng với mỗi cách xếp ở trên, có $2!$ cách xếp vị trí cho hai bạn Thảo và Linh trong nhóm X.
Theo quy tắc nhân, ta có $4! \cdot 2! = 48$ cách xếp thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án (A) .... □

CÂU 25. Xếp sáu bạn A, B, C, D, E, F vào cùng một ghế dài. Hỏi có bao nhiêu cách xếp sao cho hai bạn A và F luôn ngồi cạnh nhau?

Ⓐ 720. Ⓑ 360. Ⓒ 120. Ⓓ 240.

Lời giải.

Cách xếp hai bạn A và F luôn ngồi cạnh là $2! = 2$ cách.
Khi đó các bạn B, C, D, E và A, F xếp vào 5 vị trí trên ghế là hoán vị của 5 phần tử, nên số cách thực hiện là $5! = 120$ cách.
Vậy có tất cả $2.120 = 240$ cách.

Chọn đáp án (D) .... □

CÂU 26. Cho hai đường thẳng song song d_1 và d_2. Trên d_1 lấy 17 điểm phân biệt, trên d_2 lấy 20 điểm phân biệt. Tính số tam giác mà có các đỉnh được chọn từ 37 điểm này.

Ⓐ 5690. Ⓑ 5960. Ⓒ 5950. Ⓓ 5590.

Lời giải.

Một tam giác được tạo bởi ba điểm phân biệt không thẳng hàng nên ta có 2 trường hợp sau
TH1: Chọn 1 điểm thuộc d_1 và 2 điểm thuộc d_2 có $\mathrm{C}_{17}^1 \cdot \mathrm{C}_{20}^2$ tam giác.
TH2: Chọn 2 điểm thuộc d_1 và 1 điểm thuộc d_2 có $\mathrm{C}_{17}^2 \cdot \mathrm{C}_{20}^1$ tam giác.
Vậy số tam cần tìm là $\mathrm{C}_{17}^1 \cdot \mathrm{C}_{20}^2 + \mathrm{C}_{17}^2 \cdot \mathrm{C}_{20}^1 = 5950$ tam giác.

Chọn đáp án (C) .... □

CÂU 27. Trên giá sách có 4 quyển sách Toán khác nhau, 5 quyển sách Văn khác nhau và 6 quyển sách Tiếng Anh khác nhau. Có bao nhiêu cách lấy 4 quyển sách từ giá sách này sao cho có đủ ba môn và số quyển sách Văn nhiều nhất?

Ⓐ $\mathrm{C}_4^1\mathrm{C}_5^2\mathrm{C}_6^1$. Ⓑ $\mathrm{C}_4^1\mathrm{C}_5^1\mathrm{C}_6^2$. Ⓒ $\mathrm{C}_{10}^2\mathrm{C}_5^2$. Ⓓ $\mathrm{C}_4^2\mathrm{C}_5^1\mathrm{C}_6^1$.

Lời giải.

Lấy 4 quyển sách từ giá sách này sao cho có đủ ba môn và số quyển sách Văn nhiều nhất là lấy 1 quyển sách Toán, 2 quyển sách Văn và 1 quyển sách Tiếng Anh.
Số cách lấy là $\mathrm{C}_4^1\mathrm{C}_5^2\mathrm{C}_6^1$ cách.

Chọn đáp án (A) .... □

CÂU 28. Trong trận chung kết bóng đá phải phân định thắng thua bằng đá luân lưu 11 mét. Huấn luyện viên của mỗi đội cần trình với trọng tài một danh sách sắp thứ tự 5 cầu thủ trong 11 cầu thủ để đá luân lưu 5 quả 11 mét. Hỏi huấn luyện viên của mỗi đội sẽ có bao nhiêu cách chọn?

(A) 55440. (B) 120. (C) 462. (D) 39916800.

Lời giải.

Số cách chọn của huấn luyện viên của mỗi đội là $\mathrm{A}_{11}^{5}=55440$.

Chọn đáp án (A) ....

CÂU 29. Một lớp học có 36 học sinh chụp ảnh lưu niệm. Lớp muốn trong bức ảnh có 10 bạn ngồi ở hàng thứ nhất, 12 bạn đứng ở hàng thứ hai và 14 bạn đứng ở hàng thứ ba. Hỏi có bao nhiêu cách xếp vị trí chụp ảnh như vậy?

(A) $\mathrm{C}_{36}^{10}\cdot\mathrm{C}_{26}^{12}\cdot 14!$. (B) $\mathrm{A}_{36}^{10}\cdot\mathrm{A}_{26}^{12}\cdot 14!$. (C) $\mathrm{A}_{36}^{10}\cdot\mathrm{A}_{26}^{12}$. (D) $\mathrm{C}_{36}^{10}\cdot\mathrm{C}_{26}^{12}$.

Lời giải.

Chọn 10 bạn học sinh ngồi ở hàng thứ nhất trong 36 học sinh và xếp thứ tự 10 bạn đó, mỗi cách xếp là một chỉnh hợp chập 10 của 36, có A_{36}^{10} cách.
Chọn 12 bạn học sinh đứng ở hàng thứ hai trong 26 học sinh và xếp thứ tự 12 bạn đó, mỗi cách xếp là một chỉnh hợp chập 12 của 26, có A_{26}^{12} cách.
Còn lại 14 bạn đứng ở hàng thứ ba, có 14! cách xếp.
Vậy số cách xếp thỏa mãn yêu cầu bài toán là $\mathrm{A}_{36}^{10}\cdot\mathrm{A}_{26}^{12}\cdot 14!$.

Chọn đáp án (B) ....

CÂU 30. Cho các số tự nhiên m, n thỏa mãn đồng thời các điều kiện $\mathrm{C}_{m}^{2}=153$ và $\mathrm{C}_{m}^{n}=\mathrm{C}_{m}^{n+2}$. Khi đó $m+n$ bằng

(A) 25. (B) 24. (C) 26. (D) 23. .

Lời giải.

Theo tính chất $\mathrm{C}_{m}^{n}=\mathrm{C}_{m}^{m-n}$ nên từ $\mathrm{C}_{m}^{n}=\mathrm{C}_{m}^{n+2}$ suy ra $2n+2=m$.
$\mathrm{C}_{m}^{2}=153\Leftrightarrow\dfrac{m(m-1)}{2}=153\Rightarrow m=18$. Do đó $n=8$.
Vậy $m+n=26$.

Chọn đáp án (C) ....

CÂU 31. Từ các chữ số 1; 2; 3; 4; 6 có thể lập được bao nhiêu số có ba chữ số đôi một khác nhau và chia hết cho 3.

(A) 12. (B) 23. (C) 18. (D) 24.

Lời giải.

Từ 5 chữ số đã cho ta có 4 bộ gồm ba chữ số có tổng chia hết cho 3 là $(1;2;3)$, $(1;2;6)$, $(2;3;4)$ và $(2;4;6)$. Mỗi bộ ba chữ số này ta lập được $3!=6$ số.
Vậy có $6\cdot 4=24$ số cần tìm.

Chọn đáp án (D) ....

CÂU 32. Một tổ có 5 học sinh nam và 4 học sinh nữ. Số cách xếp học sinh trong tổ thành một hàng dọc sao cho nam nữ đứng xen kẽ là

(A) 362880. (B) 144. (C) 2880. (D) 5760.

Lời giải.

Xếp 5 học sinh nam có 5! cách. 5 học sinh nam tạo thành 4 khoảng trống.
Xếp 4 học sinh nữ vào 4 khoảng trống có 4! cách.
Vậy có số cách xếp sao cho nam nữ đứng xen kẽ nhau là $5!\cdot 4!=2880$ cách.

Chọn đáp án (C) ....

CÂU 33. Có bao nhiêu số tự nhiên gồm hai chữ số khác nhau mà hai chữ số này đều lẻ?

(A) A_{5}^{2}. (B) C_{5}^{2}. (C) $5!$. (D) 5^{2}.

Lời giải.

Có 5 chữ số lẻ là $\mathrm{A}=\{1,3,5,7,9\}$.
Mỗi số có hai chữ số khác nhau được lập từ tập A là một chỉnh hợp chập 2 của 5 phần tử nên có A_{5}^{2} số thỏa mãn.

Chọn đáp án (A) ....

CÂU 34. Lớp 10A có 35 học sinh trong đó có 15 học sinh nam và 20 học sinh nữ. Giáo viên chủ nhiệm lớp 10A muốn lập ra một ban cán sự lớp gồm 1 lớp trưởng, 1 lớp phó, 1 bí thư và 4 tổ trưởng. Biết các học sinh trong lớp 10A có thể đảm nhiệm được các chức vụ trong ban cán sự lớp. Hỏi giáo viên chủ nhiệm lớp 10A có bao nhiêu cách lập ban cán sự lớp như trên ?

(A) A_{35}^{7}. (B) C_{35}^{7}. (C) $\mathrm{C}_{35}^{3}\cdot\mathrm{A}_{32}^{4}$. (D) $\mathrm{A}_{35}^{3}\cdot\mathrm{C}_{32}^{4}$.

Lời giải.

Số cách chọn 3 học sinh vào các vị trí lớp trưởng, lớp phó, bí thư là A_{35}^{3} cách chọn.
Số cách chọn 4 học sinh vào vị trí tổ trưởng là C_{32}^{4} cách chọn.
Số cách chọn ban cán sự lớp thỏa yêu cầu bài toán là $A_{35}^{3} \cdot C_{32}^{4}$ cách chọn.

Chọn đáp án D .... □

CÂU 35. Có bao nhiêu đoạn thẳng được tạo thành từ 10 điểm phân biệt khác nhau?

A 45. B 90. C 35. D 55.

Lời giải.

Mỗi đoạn thẳng được tạo thành từ 2 trong 10 điểm phân biệt khác nhau.
Số đoạn thẳng là $C_{10}^{2} = 45$.

Chọn đáp án A .... □

CÂU 36. Số véc-tơ khác $\vec{0}$ có điểm đầu, điểm cuối là hai trong 6 đỉnh của lục giác bằng

A P_6. B C_6^2. C A_6^2. D 36 .

Lời giải.

Mỗi véc-tơ khác $\vec{0}$ có điểm đầu, điểm cuối là hai trong 6 đỉnh của lục giác là một chỉnh hợp chập 2 của 6 phần tử.
Số véc-tơ là A_6^2.

Chọn đáp án C .... □

CÂU 37. Cần chọn 3 người đi công tác từ một tổ có 30 người, khi đó số cách chọn là

A A_{50}^{3}. B 3^{30}. C 10. D C_{30}^{3}.

Lời giải.

Mỗi cách chọn 3 người đi công tác từ một tổ có 30 người là một tổ hợp chập 3 của 30 phần tử.
Số cách chọn là C_{30}^{3}.

Chọn đáp án D .... □

CÂU 38. Trong một buổi khiêu vũ có 20 nam và 18 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách chọn ra một đôi nam nữ để khiêu vũ ?

A C_{38}^{2}. B A^2. C $C_{20}^{2} \cdot C_{18}^{1}$. D $C_{20}^{1} \cdot C_{18}^{1}$.

Lời giải.

- Chọn 1 nam trong 20 nam có C_{20}^{1} cách.
- Chọn 1 nữ trong 18 nữ có C_{18}^{1} cách.

Vậy có $C_{20}^{1} \cdot C_{18}^{1}$ cách chọn.

Chọn đáp án D .... □

CÂU 39. Có 3 bạn nam và 3 bạn nữ được xếp vào một ghế dài có 6 vị trí. Hỏi có bao nhiêu cách xếp sao cho nam và nữ ngồi xen kẽ lẫn nhau?

A 48. B 72. C 24. D 36.

Lời giải.

TH1: Bạn nam ngồi đầu dãy, suy ra có $3!.3! = 36$ cách săp xếp.

TH2: Ban nữ ngồi đầu dãy, suy ra có $3!.3! = 36$ cách sắp xếp.

Vậy có tất cả $36 + 36 = 72$ cách xếp nam, nữ ngồi xen kẽ.

Chọn đáp án D .... □

CÂU 40. Cho hai đường thằng song song. Trên đường thứ nhất có 10 điểm, trên đường thứ hai có 15 điểm. Hỏi có bao nhiêu tam giác được tạo thành từ các điểm đã cho?

A 1725. B 1050. C 675. D 1275.

Lời giải.

Gọi a, b là hai đường thẳng song song.
Số tam giác lập được thuộc vào một trong hai loại sau:

Loại 1: Gồm hai đỉnh thuộc vào a và một đỉnh thuộc vào b.

— Số cách chọn bộ hai điểm trong 10 thuộc a: C_{10}^{2}.
— Số cách chọn một điểm trong 15 điểm thuộc b: C_{15}^{1}.

Loại này có: $C_{10}^{2} \cdot C_{15}^{1}$ tam giác.

loại 2: Gồm một đỉnh thuộc vào a và hai đỉnh thuộc vào b.

— Số cách chọn một điểm trong 10 thuộc a: C_{10}^1

— Số cách chọn bộ hai điểm trong 15 điểm thuộc b: C_{15}^2.

Loại này có: $\mathrm{C}_{10}^1 \cdot \mathrm{C}_{15}^2 =$ tam giác.

Vậy có tất cả: $\mathrm{C}_{10}^2 \cdot \mathrm{C}_{15}^1 + \mathrm{C}_{10}^1 \cdot \mathrm{C}_{15}^2 = 1725$ tam giác thỏa yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án A ....

CÂU 41. Trên đường thẳng d_1 cho 5 điểm phân biệt, trên đường thẳng $d_2 \parallel d_1$ cho n điểm phân biệt. Biết có 175 tam giác được tạo thành mà 3 đỉnh lấy từ $n+5$ điểm trên thì n là

A $n = 9$. **B** $n = 8$. **C** $n = 10$. **D** $n = 7$.

Lời giải.

Số tam giác lập được thuộc vào một trong hai loại sau:

Loại 1: Gồm hai đỉnh thuộc vào d_1 và một đỉnh thuộc vào d_2.

— Số cách chọn bộ hai điểm trong 5 thuộc d_1: C_5^2.

— Số cách chọn một điểm trong n điểm thuộc d_2: C_n^1.

Loại này có: $\mathrm{C}_5^2 \cdot \mathrm{C}_n^1$ tam giác.

Loại 2: Gồm một đỉnh thuộc vào d_1 và hai đỉnh thuộc vào d_2.

— Số cách chọn một điểm trong 5 thuộc d_1: C_5^1

— Số cách chọn bộ hai điểm trong n điểm thuộc d_2: C_n^2.

Loại này có: $\mathrm{C}_5^1 \cdot \mathrm{C}_n^2$ tam giác.

Vậy có tất cả: $\mathrm{C}_5^2 \cdot \mathrm{C}_n^1 + \mathrm{C}_5^1 \cdot \mathrm{C}_n^2$ tam giác.
Theo đề bài ta có

$$\begin{aligned} & \mathrm{C}_5^2 \cdot \mathrm{C}_n^1 + \mathrm{C}_5^1 \cdot \mathrm{C}_n^2 = 175 \\ \Leftrightarrow\ & 10\frac{n!}{1!(n-1)!} + 5\frac{n!}{2!(n-2)!} = 175 \\ \Leftrightarrow\ & 10n + \frac{5}{2}n(n-1) = 175 \\ \Leftrightarrow\ & 5n^2 + 15n - 350 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} n = 7 \\ n = -10 \text{ (loại)}. \end{array}\right. \end{aligned}$$

Vậy $n = 7$.

CÂU 42. Trong một đa giác lồi n cạnh, số đường chéo của đa giác là

A C_n^2. **B** A_n^2. **C** $A^2 - n$. **D** $\mathrm{C}_n^2 - n$.

Lời giải.

Mỗi đoạn thẳng nối 2 đỉnh của một đa giác lồi n là một tổ hợp chập 2 của n phần tử nên có C_n^2 đoạn thẳng.
Mỗi đoạn thẳng trên hoặc là cạnh, hoặc là đường chéo của đa giác.
Vậy trong một đa giác lồi n cạnh, số đường chéo của đa giác là $\mathrm{C}_n^2 - n$.

Chọn đáp án D ....

CÂU 43. Có bao nhiêu số có bốn chữ số khác nhau được tạo thành từ các chữ số $1, 2, 3, 4, 5$.

A A_5^4. **B** P_5. **C** C_5^4. **D** P_4.

Lời giải.

Mỗi số có bốn chữ số khác nhau được tạo thành từ các chữ số $1, 2, 3, 4, 5$ là một chỉnh hợp chập 4 của 5 phần tử.
Số các số cần tìm là A_5^4.

Chọn đáp án A ....

CÂU 44. Cho tập $A = \{1; 2; 3; 5; 7; 9\}$. Từ tập A có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm bốn chữ số đôi một khác nhau?

A 720 . **B** 360 . **C** 120 . **D** 24 .

Lời giải.

Mỗi số có bốn chữ số khác nhau được tạo thành từ $A = \{1; 2; 3; 5; 7; 9\}$ là một chỉnh hợp chập 4 của 6 phần tử.
Số các số cần tìm là $\mathrm{A}_6^4 = 360$.

Chọn đáp án B ....

CÂU 45. Cho tập $A = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$. Có bao nhiêu số tự nhiên gồm 5 chữ số khác nhau được tạo từ tập A?

A A_{10}^4. **B** $9 \cdot \mathrm{C}_9^4$. **C** $9 \cdot \mathrm{A}_9^4$. **D** C_{10}^4.

Lời giải.

- Số các số có dạng $\overline{abcde}$ (kể cả số 0 đầu) và các chữ số đôi một khác nhau là A_{10}^5.
- Số các số có dạng $\overline{0bcde}$ và các chữ số đôi một khác nhau là A_9^4.

Vậy số các số cần tìm là $\mathrm{A}_{10}^5 - \mathrm{A}_9^4 = 9 \cdot \mathrm{A}_9^4$.

Chọn đáp án (C) .... □

CÂU 46. Nghiệm của phương trình $\mathrm{A}_n^3 = 20n$ là

A $n = 6$. **B** $n = 5$. **C** $n = 8$. **D** $n = -3$.

Lời giải.

Điều kiện $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$.

$$\begin{aligned}
& \mathrm{A}_n^3 = 20n \\
\Leftrightarrow\ & \frac{n!}{(n-3)!} - 20n = 0 \\
\Leftrightarrow\ & n(n-1)(n-2) - 20n = 0 \\
\Leftrightarrow\ & n[(n-1)(n-2) - 20] = 0 \\
\Leftrightarrow\ & n(n^2 - 3n - 18) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} n = 0 \text{ (loại)} \\ n = 6 \\ n = -3 \text{ (loại).} \end{array}\right.
\end{aligned}$$

Vậy $n = 6$.

Chọn đáp án (A) .... □

CÂU 47. Cho $n \in \mathbb{N}^*$ thóa mãn $\mathrm{C}_n^5 = 2002$. Tính A_n^5

A 2007. **B** 10010. **C** 40040. **D** 240240.

Lời giải.

$\mathrm{A}_n^5 = 5!\mathrm{C}_n^5 = 240240$.

Chọn đáp án (D) .... □

CÂU 48. Tổng các nghiệm của bất phương trình $\mathrm{A}_x^3 + 15 < 15x$ bằng

A 7 . **B** 9. **C** 14 . **D** 20 .

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{N}, x \geq 3$.

$$\begin{aligned}
& \mathrm{A}_x^3 + 15 < 15x \\
\Leftrightarrow\ & \frac{x!}{(x-3)!} - 15x + 15 < 0 \\
\Leftrightarrow\ & x(x-1)(x-2) - 15x + 15 < 0 \\
\Leftrightarrow\ & (x-1)(x^2 - 2x - 15) < 0 \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x < -3 \text{ (loại)} \\ 1 < x < 5. \end{array}\right.
\end{aligned}$$

So với điều kiện thì bất phương trình đã cho có 2 nghiệm là $x = 3, x = 4$.
Tổng các nghiệm của bất phương trình đã cho là $3 + 4 = 7$

Chọn đáp án (A) .... □

CÂU 49. Có bao nhiêu cách chia hết 4 đồ vật khác nhau cho 3 người, biết rằng mỗi người nhận được ít nhất 1 đồ vật?

A 72. **B** 18. **C** 12. **D** 36.

Lời giải.

- Chọn 2 đồ vật trong 4 đồ vật khác nhau chia cho người thứ nhất có $\mathrm{C}_4^2 = 6$ cách.
- Có 2 cách chia 2 đồ vật còn lại cho 2 người còn lại.

Theo quy tắc nhân ta có $6 \cdot 2 = 12$ cách.
Lý luận tương tự như trên cho trường hợp người thứ hai và người thứ ba nhận được hai đồ vật có $12 + 12 = 24$ cách.
Vậy có tất cả $12 + 24 = 36$ cách.

Chọn đáp án (D) .... □

CÂU 50. Cho đa giác đều $2n$ đỉnh $(n \geq 2, n \in \mathbb{N})$. Biết số hình chữ nhật được tạo thành từ $2n$ đỉnh của đa giác đó là 45. Tìm n.

(A) $n = 12$. (B) $n = 10$. (C) $n = 9$. (D) $n = 45$.

Lời giải.

Đa giác đều $2n$ đỉnh có n đường chéo qua tâm.
Cứ mỗi 2 đường chéo qua tâm thì ta có 1 hình chữ nhật.
Nên có tất cả C_n^2 hình chữ nhật.
Theo đề bài ta có $\mathrm{C}_n^2 = 45 \Leftrightarrow n = 10$.

Chọn đáp án (B) .... □

CÂU 51. Có 10 đội bóng thi đấu theo thể thức vòng tròn một lượt, thắng được 3 điểm, hòa 1 điểm, thua 0 điểm. Kết thúc giải đấu, tổng cộng số điểm của tất cả 10 đội là 130. Hỏi có bao nhiêu trận hòa?

(A) 7. (B) 8. (C) 5. (D) 6.

Lời giải.

Vì 10 đội bóng thi đấu theo thể thức vòng tròn một lượt nên số trận đấu là $C_{10}^2 = 45$ (trận).
Gọi số trận hòa là x, số trận không hòa là $45 - x$ (trận).
Tổng số điểm mỗi trận hòa là 2, tổng số điểm của trận không hòa là $3\,(45 - x)$.
Theo đề bài ta có phương trình $2x + 3\,(45 - x) = 130 \Leftrightarrow x = 5$.

Chọn đáp án (C) .... □

CÂU 52. Trong một hộp đựng 4 bi xanh, 4 bi vàng và 12 bi đỏ. Hỏi có bao nhiêu cách lấy ra từ hộp 10 viên bi sao cho trong 10 bi lấy ra có đủ 3 loại?

(A) 184690. (B) 168806. (C) 168674. (D) 176682.

Lời giải.

Số cách lấy ra 10 bi từ 20 bi trong hộp là C_{20}^{10}.
Số cách lấy ra 10 bi có đúng 1 loại là C_{12}^{10}.
Số cách lấy ra 10 bi có đúng 2 loại xanh, đỏ là $\mathrm{C}_{16}^{10} - \mathrm{C}_{12}^{10}$.
Số cách lấy ra 10 bi có đúng 2 loại vàng, đỏ là $\mathrm{C}_{16}^{10} - \mathrm{C}_{12}^{10}$.
Do đó, số cách lấy ra 10 bi có đủ 3 loại là $\mathrm{C}_{20}^{10} - \mathrm{C}_{12}^{10} - 2\left(\mathrm{C}_{16}^{10} - \mathrm{C}_{12}^{10}\right) = 168806$.

Chọn đáp án (B) .... □

CÂU 53. Cho các số nguyên dương $k, n\,(k < n)$. Tính tổng $T = \mathrm{C}_n^k + \mathrm{C}_n^{k+1} + \mathrm{C}_{n+1}^{k+2}$

(A) $T = \mathrm{C}_n^{k+2}$. (B) $T = \mathrm{C}_{n+1}^{k+2}$. (C) $T = \mathrm{C}_{n+1}^{k+1}$. (D) $T = \mathrm{C}_{n+2}^{n-k}$.

Lời giải.

Ta có $T = \left(\mathrm{C}_n^k + \mathrm{C}_n^{k+1}\right) + \mathrm{C}_{n+1}^{k+2} = \mathrm{C}_{n+1}^{k+1} + \mathrm{C}_{n+1}^{k+2} = \mathrm{C}_{n+2}^{k+2} = \mathrm{C}_{n+2}^{(n+2)-(k+2)} = \mathrm{C}_{n+2}^{n-k}$.

Chọn đáp án (D) .... □

CÂU 54. Từ các chữ số $0; 1; 2; 3$ có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có 4 chữ số đôi một khác nhau?

(A) 24. (B) 6. (C) 18. (D) 12.

Lời giải.

Gọi số tự nhiên cần tìm là $n = \overline{abcd}$ trong đó a, b, c, d đôi một khác nhau, được chọn từ 4 số đã cho và $a \neq 0$.
Do đó số các số tự nhiên cần tìm là $3 \cdot \mathrm{P}_3 = 3 \cdot 3! = 18$ số.

Chọn đáp án (C) .... □

CÂU 55. Từ các chữ số $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm ba chữ số đôi một khác nhau ?

(A) C_7^3. (B) 7^3. (C) A_7^3. (D) 3^7.

Lời giải.

Chọn 3 số trong 7 số đã cho và hoán vị chúng ta được A_7^3 số tự nhiên gồm ba chữ số đôi một khác nhau.

Chọn đáp án (C) .... □

CÂU 56. Tổ 1 lớp 10A1 có 6 học sinh nam và 5 học sinh nữ. Giáo viên chủ nhiệm cần chọn ra 4 học sinh của tổ 1 để tham gia đội kịch sinh hoạt ngoại khóa. Hỏi có bao nhiêu cách chọn 4 học sinh trong đó có ít nhất một học sinh nam?

(A) 120. (B) 625. (C) 325. (D) 35.

Lời giải.

Trường hợp 1: Chọn 1 nam và 3 nữ.
Trường hợp 2: Chọn 2 nam và 2 nữ.
Trường hợp 3: Chọn 3 nam và 1 nữ.
Trường hợp 4: Chọn 4 nam.
Số cách chọn cần tìm là $C_6^1C_5^3 + C_6^2C_5^2 + C_6^3C_5^1 + C_6^4 = 325$ cách chọn.

Chọn đáp án C .... □

CÂU 57. Có 3 vận động viên thi chạy ngắn cự ly 100m. Hỏi có bao nhiêu thứ tự về đích của 3 vận động viên đó.

A 3. **B** 6. **C** 9. **D** 4.

Lời giải.

Mỗi thứ tự về đích của 3 vận động viên chính là một hoán vị của 3 người. Do đó, số thứ tự về đích của 3 vận động viên là $3! = 6$.

Chọn đáp án B .... □

CÂU 58. Có bao nhiêu số tự nhiên gồm 5 chữ số đôi một khác nhau?

A C_{10}^5. **B** $9 \cdot A_9^4$. **C** A_{10}^5. **D** $9 \cdot C_9^4$.

Lời giải.

Kí hiệu $E = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$.
Mỗi cách lập ra số tự nhiên $\overline{abcde}$ gồm 5 chữ số đôi một khác nhau từ tập E được thực hiện qua hai công đoạn
Công đoạn 1: Chọn $a \in E \setminus \{0\}$. Có 9 cách chọn.
Công đoạn 2: Chọn $b, c, d, e \in E \setminus \{a\}$, đôi một khác nhau. Có A_9^4 cách chọn.
Theo quy tắc nhân, số cách chọn số tự nhiên thỏa đề bài là $9 \cdot A_9^4$ cách.
Vậy có tất cả $9 \cdot A_9^4 = 27216$ số tự nhiên gồm 5 chữ số đôi một khác nhau.

Chọn đáp án B .... □

CÂU 59. Trong một môn học, thầy giáo có 30 câu hỏi khác nhau, trong đó có 5 câu khó, 10 câu trung bình và 15 câu dễ. Thầy giáo muốn chọn ra 1 đề kiểm tra gồm 5 câu, có đủ ba loại câu hỏi và có ít nhất 2 câu dễ. Hỏi thầy giáo có bao nhiêu cách chọn đề kiểm tra?

A 34125. **B** 33250. **C** 46375. **D** 56875.

Lời giải.

Ta có các trường hợp sau
TH1: Đề kiểm tra gồm 2 câu dễ, 1 câu trung bình và 2 câu khó.
Có $C_{15}^2 \cdot C_{10}^1 \cdot C_5^2 = 10500$ cách.
TH2: Đề kiểm tra gồm 2 câu dễ, 2 câu trung bình và 1 câu khó.
Có $C_{15}^2 \cdot C_{10}^2 \cdot C_5^1 = 23625$ cách.
TH3: Đề kiểm tra gồm 3 câu dễ, 1 câu trung bình và 1 câu khó.
Có $C_{15}^3 \cdot C_{10}^1 \cdot C_5^1 = 22750$ cách.
Vậy thầy giáo có tất cả $10500 + 23625 + 22750 = 56875$ cách chọn đề kiểm tra.

Chọn đáp án D .... □

CÂU 60. Một tổ có 8 học sinh trong đó có An và Bình. Tính số cách xếp 8 bạn trong tổ thành hàng ngang sao cho An và Bình luôn đứng cạnh nhau?

A 1440. **B** 5040. **C** 10080. **D** 40320.

Lời giải.

Số cách xếp hai bạn An và Bình đứng cạnh nhau là $2! = 2$.
Số cách để xếp 8 bạn trong tổ đứng cạnh nhau sao cho An, Bình luôn đứng cạnh nhau là $2! \cdot 7! = 10080$.

Chọn đáp án C .... □

CÂU 61. Cho tập hợp $A = \{0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6;\ 7\}$. Có bao nhiêu số tự nhiên lẻ có 6 chữ số đôi một khác nhau được lập từ các chữ số của tập A mà chữ số đứng ở vị trí thứ ba luôn chia hết cho 6.

A 2880. **B** 5040. **C** 2640. **D** 2886.

Lời giải.

Gọi số cần tìm có dạng $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6}$.
Vì số được chọn là một số lẻ và chữ số đứng ở vị trí thứ ba luôn chia hết cho 6. Suy ra $a_6 \in \{1; 3; 5; 7\}$ và $a_3 \in \{0; 6\}$.
Trường hợp 1: Với $a_3 = 0$: chữ số a_6 có 4 cách chọn, a_1 có 6 cách chọn, ba chữ số còn lại có A_5^3 cách chọn. Do đó trong tường hợp này có $4 \cdot 6 \cdot A_5^3$ số.
Trường hợp 2: Với $a_3 = 6$: chữ số a_6 có 4 cách chọn, a_1 có 5 cách chọn, ba chữ số còn lại có A_5^3 cách chọn. Do đó trong tường hợp này có $4 \cdot 5 \cdot A_5^3$ số.
Vậy số số tự nhiên thỏa mãn yêu cầu bài toán là $4 \cdot 6 \cdot A_5^3 + 4 \cdot 5 \cdot A_5^3 = 2640$.

Chọn đáp án C .... □

CÂU 62. Cho tam giác ABC. Trên mỗi cạnh AB, BC, CA lấy 10 điểm phân biệt và không có điểm nào trùng với 3 đỉnh A, B, C. Hỏi từ 33 điểm đã cho (tính cả các điểm A, B, C) lập được bao nhiêu tam giác.

(A) 3565. (B) 4796. (C) 5456. (D) 4060.

Lời giải.

Để tạo ra một tam giác ta lấy 3 điểm không thẳng hàng.
Ta xét cách lấy ba điểm thẳng hàng thì có ba trường hợp là 3 điểm thuộc đoạn AB, hoặc 3 điểm thuộc đoạn BC, hoặc 3 điểm thuộc đoạn AC.Trên mỗi đoạn thẳng có 12 điểm nên số cách lấy 3 điểm trên mỗi đoạn là C_{12}^3.
Số cách lấy 3 điểm bất kì trong 33 điểm là C_{33}^3.
Vậy số tam giác được tạo ra từ 33 điểm trên là $\mathrm{C}_{33}^3 - 3.\mathrm{C}_{12}^3 = 4796$.

Chọn đáp án (B) .... □

CÂU 63. Tìm x thoả mãn đẳng thức sau:$\mathrm{C}_x^2\mathrm{C}_x^{x-2} + 2\mathrm{C}_x^2\mathrm{C}_x^3 + \mathrm{C}_x^3\mathrm{C}_x^{x-3} = 100$.

(A) 3. (B) 4. (C) 5. (D) 6.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} x \in \mathbb{N} \\ x \geq 3. \end{cases}$

Ta có $\mathrm{C}_x^{x-2} = \mathrm{C}_x^2$ và $\mathrm{C}_x^{x-3} = \mathrm{C}_x^3$.

$$\begin{aligned}
& \mathrm{C}_x^2\mathrm{C}_x^{x-2} + 2\mathrm{C}_x^2\mathrm{C}_x^3 + \mathrm{C}_x^3\mathrm{C}_x^{x-3} = 100 \\
\Leftrightarrow\ & \left(\mathrm{C}_x^2\right)^2 + 2\mathrm{C}_x^2\mathrm{C}_x^3 + \left(\mathrm{C}_x^3\right)^2 = 100 \\
\Leftrightarrow\ & \left(\mathrm{C}_x^2 + \mathrm{C}_x^3\right)^2 = 100 \Leftrightarrow \mathrm{C}_x^2 + \mathrm{C}_x^3 = 10 \\
\Leftrightarrow\ & \frac{x(x-1)}{2} + \frac{x(x-1)(x-2)}{6} = 10 \\
\Leftrightarrow\ & x^3 - x - 60 = 0 \\
\Leftrightarrow\ & (x-4)(x^2 + 4x + 15) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & x = 4.
\end{aligned}$$

Chọn đáp án (B) .... □

CÂU 64. Xếp ngẫu nhiên 3 bạn lớp A, 2 bạn lớp B và 1 bạn lớp C vào dãy gồm 6 ghế được xếp ngang. Hỏi có bao nhiêu cách để xếp bạn lớp C ngồi giữa 2 bạn lớp A ?

(A) 108. (B) 72. (C) 144. (D) 36.

Lời giải.

Đánh số ghế từ 1 đến 6, để bạn lớp C ngồi giữa 2 bạn lớp A thì bạn lớp C chỉ được ngồi ghế số $2, 3, 4, 5$ có 4 cách.
Với mỗi vị trí bạn lớp C đã chọn, sắp xếp 2 bạn lớp A vào 2 vị trí bên cạnh có A_3^2 cách.
Các bạn còn lại sắp xếp vào các ghế trống có 3! cách.
Số cách để xếp bạn lớp C ngồi giữa 2 bạn lớp A là: $4 \cdot \mathrm{A}_3^2 \cdot 3! = 144$ cách.

Chọn đáp án (C) .... □

CÂU 65. Một nhóm học sinh gồm 15 nam và 5 nữ. Người ta muốn chọn từ nhóm ra 5 người để lập thành một đội cờ đỏ sao cho phải có 1 đội trưởng nam, 1 đội phó nam và có ít nhất 1 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách lập đội cờ đỏ?

(A) 131444. (B) 141666. (C) 241561. (D) 111300.

Lời giải.

Vì trong 5 người được chọn phải có ít nhất 1 nữ và ít nhất phải có 2 nam nên số học sinh nữ gồm 1 hoặc 2 hoặc 3 nên ta có các trường hợp sau

- Chọn 1 nữ và 4 nam.
  Số cách chọn 1 nữ: 5 cách
  Số cách chọn 2 nam làm đội trưởng và đội phó: A_{15}^2
  Số cách chọn 2 nam còn lại: C_{13}^2
  Suy ra có $5\mathrm{A}_{15}^2 \cdot \mathrm{C}_{13}^2$ cách chọn cho trường hợp này.
- Chọn 2 nữ và 3 nam.
  Số cách chọn 2 nữ: C_5^2 cách.
  Số cách chọn 2 nam làm đội trưởng và đội phó: A_{15}^2cách.
  Số cách chọn 1 nam còn lại: 13 cách.
  Suy ra có $13\mathrm{A}_{15}^2 \cdot \mathrm{C}_5^2$ cách chọn cho trường hợp này.
- Chọn 3 nữ và 2 nam.
  Số cách chọn 3 nữ: C_5^3 cách.

Số cách chọn 2 nam làm đội trưởng và đội phó: A_{15}^2 cách.
Suy ra có $A_{15}^2 \cdot C_5^3$ cách chọn cho trường hợp 3.
Vậy có $5A_{15}^2 \cdot C_{13}^2 + 13A_{15}^2 \cdot C_5^2 + A_{15}^2 \cdot C_5^3 = 111300$ cách.

Chọn đáp án D .... □

CÂU 66. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp 2 quyển sách Ngữ Văn, 3 quyển sách Tiếng Anh và 5 Quyển sách Toán (tất cả các quyển sách khác nhau) thành hàng ngang lên một kệ sách để hai quyển sách cùng môn thì không được sắp xếp kề nhau?

A 63360. B 120960. C 14400. D 144000.

Lời giải.

Vì số sách Ngữ Văn, Tiếng Anh và Toán lần lượt là $2; 3; 5$ nên ta chỉ cần xét hai trường hợp

- Trường hợp 1: Ở giữa hai quyển sách Toán bất kỳ có đúng một quyển sách ở môn học khác
Bước 1: Hoán vị 5 quyển sách Toán có 5! cách.
Bước 2: Sắp xếp 5 quyển sách còn lại vào giữa hai quyển sách Toán và ở một bên ngoài cùng có $2 \cdot 5!$ cách.
Suy ra có $5! \cdot 2 \cdot 5! = 28800$.
- Trường hợp 2: Có hai quyển sách Toán mà giữa nó một quyển sách Ngữ Văn và một quyển sách Tiếng Anh.
Bước 1: Hoán vị 5 quyển sách Toán có 5! cách.
Bước 2: Chọn một quyển sách Ngữ Văn và một quyển sách Tiếng Anh và sắp xếp vào giữa hai quyển sách Toán có $C_3^1 \cdot C_2^1 \cdot C_4^1 \cdot 2!$ cách.
Bước 3: Sắp xếp 3 quyển sách còn lại có 3! cách.
Suy ra có $5! \cdot \left(C_3^1 \cdot C_2^1 \cdot C_4^1 \cdot 2!\right) \cdot 3! = 34560$.
Vậy có tất cả 63360 cách sắp xếp.

Chọn đáp án A .... □

CÂU 67. Có hai hộp, mỗi hộp chứa các quả cầu trắng và đen. Từ mỗi hộp lấy ngẫu nhiên ra 1 quả cầu. Biết rằng xác suất để lấy được 2 quả cầu màu trắng là 0,54. Tính xác suất lấy được 2 quả cầu đen. Biết rằng có 25 quả cầu trong cả hai hộp.

A $0,01$. B $0,04$. C $0,02$. D $0,05$.

Lời giải.

Giả sử m_1, m_2 lần lượt là số quả cầu tương ứng trong hộp 1 và hộp 2 $(m_1 \leq m_2)$. k_1, k_2 lần lượt là các quả cầu trắng trong hộp 1 và 2. Khi đó xác suất để lấy được hai quả cầu trắng là $\dfrac{k_1}{m_1} \cdot \dfrac{k_2}{m_2} = 0,54 = \dfrac{27}{50}$ và $m_1 + m_2 = 25$.
Vì $27m_1m_2 = 50k_1k_2$ nên một trong hai số m_1, m_2 phải chia hết cho 5 nhưng $m_1 + m_2$ chia hết cho 5 nên cả m_1, m_2 chia hết cho 5. Từ đó có hai khả năng: $m_1 = 5, m_2 = 20$ hoặc $m_1 = 10, m_2 = 15$. TH1: $m_1 = 5, m_2 = 20$ thì do $k_1k_2 = 54$ với $0 \leq k_1 \leq 5; 0 \leq k_2 \leq 20$ suy ra $k_1 = 3, k_2 = 18$. Từ đó xác suất để lấy được hai quả cầu đen là $\dfrac{2}{5} . \dfrac{2}{20} = 0,04$.
TH2: $m_1 = 10, m_2 = 15$. Lập luận tương tự suy ra kết quả tương tự.
Chọn đáp án B .... □

CÂU 68. Trong chương trình trò chơi thực tế, có 2 đội tham gia bốc thăm trúng thưởng. Các lá thăm được đánh số từ 1 đến 20. Mỗi lần bốc 1 lá thăm và đội chơi được quyền chọn 1 hoặc 2 lần bốc. Điểm số của đội chơi được tính như sau

- Nếu đội chơi chọn bốc thăm 1 lần thì điểm của đội chơi là điểm bốc được.
- Nếu đội chơi chọn bốc thăm 2 lần và tổng điểm có được không lớn hơn 20 thì điểm của đội chơi là tổng điểm bốc được.
- Nếu đội chơi chọn bốc thăm 2 lần và tổng điểm lớn hơn 20 thì điểm của đội chơi là tổng điểm bốc được trừ đi 20

Trong mỗi lượt chơi, đội nào có điểm số cao hơn sẽ thắng cuộc, hòa nhau sẽ chơi lại lượt khác. Đội A và đội B cùng tham gia một lượt chơi, đội A chơi trước và có điểm số là 15. Tính xác suất để đội B thắng cuộc ngay ở lượt chơi này.

A $P = \dfrac{1}{4}$. B $P = \dfrac{7}{16}$. C $P = \dfrac{19}{40}$. D $P = \dfrac{3}{16}$.

Lời giải.

Ta có $n(\Omega) = 20$.
Để đội B thắng, ta chỉ có 2 trường hợp như sau

- Trường hợp 1: Đội B bốc một lần ra điểm số lớn hơn 15, ta có 5 khả năng thuộc tập hợp $\{16; 17; 18; 19; 20\}$. Do đó xác suất là $P_1 = \dfrac{5}{20} = \dfrac{1}{4}$.
- Trường hợp 2: Đội B bốc thăm lần đầu ra điểm số là $a \leq 15$, ta có 15 khả năng.
Do đó xác suất là $P_2 = \dfrac{15}{20} = \dfrac{3}{4}$.

Khi đó để thắng thì đội B cần phải có tổng hai lần bốc lớn hơn 15, ta có 5 khả năng thuộc tập hợp $\{16-a; 17-a; 18-a; 19-a; 20$
cho lần bốc thứ 2 với xác suất là $P_3 = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$.

Do đó, xác suất cho trường hợp 2 là $P_2 \cdot P_3 = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{16}$

Vậy xác suất để đội B thắng ngay trong lượt là $P = \frac{1}{4} + \frac{3}{16} = \frac{7}{16}$.

Chọn đáp án (B) .... □

CÂU 69. Xếp ngẫu nhiên 10 học sinh gồm 2 học sinh lớp 10A, 3 học sinh lớp 10B và 5 học sinh lớp 10C thành một hàng ngang. Tính số cách xếp để trong 10 học sinh trên không có 2 học sinh cùng lớp đứng cạnh nhau.

(A) 63360. (B) 86400. (C) 41260. (D) 95364.

Lời giải.

Sắp xếp 5 học sinh lớp 10C vào 5 vị trí, có 5! cách.

Ứng mỗi cách xếp 5 học sinh lớp 10C sẽ có 6 khoảng trống gồm 4 vị trí ở giữa và hai vị trí hai đầu để xếp các học sinh còn lại.

TH1: Xếp 3 học sinh lớp 10B vào 4 vị trí trống ở giữa (không xếp vào hai đầu), có A_4^3 cách.

Ứng với mỗi cách xếp đó, chọn lấy 1 trong 2 học sinh lớp 10A xếp vào vị trí trống thứ 4 (để hai học sinh lớp 10C không được ngồi cạnh nhau), có 2 cách.

Học sinh lớp 10A còn lại có 8 vị trí để xếp, có 8 cách.

Theo quy tắc nhân, ta có $5! \cdot A_4^3 \cdot 2 \cdot 8$ cách.

TH2: Xếp 2 trong 3 học sinh lớp 10B vào 4 vị trí trống ở giữa và học sinh còn lại xếp vào hai đầu, có $C_3^1 \cdot 2 \cdot A_4^2$ cách.

Ứng với mỗi cách xếp đó sẽ còn 2 vị trí trống ở giữa, xếp 2 học sinh lớp 10A vào vị trí đó, có 2 cách.

Theo quy tắc nhân, ta có $5! \cdot C_3^1 \cdot 2 \cdot A_4^2 \cdot 2$ cách.

Do đó số cách xếp không có học sinh cùng lớp ngồi cạnh nhau là
$5! \cdot A_4^3 \cdot 2 \cdot 8 + 5! \cdot C_3^1 \cdot 2 \cdot A_4^2 \cdot 2 = 63360$ cách.

Chọn đáp án (A) .... □

CÂU 70. Có mười con thỏ được đánh số từ 1 đến 10 và ba cái chuồng khác nhau. Hỏi có bao nhiêu cách nhốt số thỏ trên vào chuồng sao cho không có hai con thỏ mang số nguyên liên tiếp nào được nhốt chung trong một cái chuồng và chuồng nào cũng có thỏ?

(A) 150 cách. (B) 160 cách. (C) 170 cách. (D) 180 cách.

Lời giải.

- Công đoạn 1. Đặt tên ba cái chuồng là A, B, C, có $3! = 6$ cách
- Công đoạn 2. Với mỗi cách đặt tên chuồng như trên ta thực hiện các bước sau
  - Nhốt con thỏ số 1 vào chuồng A, nhốt con thỏ số 2 vào chuồng B.
  - Nhốt số con thỏ số 3 vào chuồng có 2 cách (loại chuồng B vì B chứa con thỏ số 2).
  - Nhốt con thỏ số 4 vào chuồng có 2 cách (loại chuồng chứa con thỏ số 3).
  - Tiếp tục nhốt các con thỏ từ số 5 đến số 10 vào ba chuồng A, B, C theo cách như trên mỗi con có 2 cách nhốt. Vậy số cách nhốt 10 con thỏ vào ba chuồng A, B, C như trên có 2^8 cách.
    Xét trường hợp chồng C không có con thỏ nào. Khi đó, chuồng A chứa các con thỏ số $1; 3; 5; 7; 9$ và chuồng B chứa các con thỏ số $2; 4; 6; 8; 10$, có 1 cách.
    Do đó số cách nhốt 10 con thỏ vào ba chuồng đã được đặt tên như trên sao cho không có hai con thỏ mang số nguyên liên tiếp nào được nhốt chung trong một cái chuồng và chuồng nào cũng có thỏ là $2^8 - 1$.

Theo quy tắc nhân, ta có $6 \cdot (2^8 - 1) = 1530$ cách.

Chọn đáp án (A) .... □

CÂU 71. Có 4 cặp vợ chồng được xếp ngồi trên một chiếc ghế dài có 8 chỗ. Biết rằng mỗi người vợ chỉ ngồi cạnh chồng của mình hoặc ngồi cạnh một người phụ nữ khác. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp chỗ ngồi thỏa mãn?

(A) 816. (B) 18. (C) 8!. (D) 604.

Lời giải.

TH1: Xếp 4 người vợ ngồi cạnh nhau có 4! cách

- Xếp 4 người chồng ngồi cạnh nhau VVV<u>VC</u>CCC hoặc CCC<u>CV</u>VVV có 2 cách.
  Vợ chỉ được ngồi cạnh chồng của mình nên, xếp 3 người chồng (không được gạch chân) có 3! cách xếp.
  Suy ra có $4! \cdot 2 \cdot 3!$ cách.

— Xếp 3 người chồng ngồi cạnh nhau $\underline{\text{CV}}\text{VV}\underline{\text{VC}}\text{CC}$ hoặc $\text{CC}\underline{\text{CV}}\text{VV}\underline{\text{VC}}$ có 2 cách xếp.
Xếp 2 người chồng (không được gạch chân) có 2 cách xếp.
Suy ra có $4! \cdot 2 \cdot 2$ cách.

— Xếp 2 người chồng ngồi cạnh nhau $\text{C}\underline{\text{CV}}\text{VV}\underline{\text{VC}}\text{C}$ có 1 cách.
Xếp 2 người chồng (không được gạch chân) có 2 cách xếp.
Suy ra có $4! \cdot 2$ cách.

Vậy trường hợp 1 có $4! \cdot 2 \cdot 3! + 4! \cdot 2 \cdot 2 + 4! \cdot 2 = 432$ cách.

TH2: Xếp 3 người vợ ngồi cạnh nhau.
Xếp 4 người vợ vào 4 vị trí có 4! cách.

— 4 người chồng ngồi cạnh nhau: $\underline{\text{VC}}\text{CC}\underline{\text{CV}}\text{VV}$ hoặc $\text{VV}\underline{\text{VC}}\text{CC}\underline{\text{CV}}$ có 2 cách.
Xếp 2 người chồng không được gạch chân có 2 cách xếp.
Suy ra có $4! \cdot 2 \cdot 2$ cách.

— 3 người chồng ngồi cạnh nhau: $\underline{\text{VC}}\text{C}\underline{\text{CV}}\text{V}\underline{\text{VC}}$ hoặc $\underline{\text{CV}}\text{V}\underline{\text{VC}}\text{C}\underline{\text{CV}}$ có 2 cách.
Suy ra có $4! \cdot 2$ cách.

— 2 người chồng ngồi cạnh nhau: $\underline{\text{VCCV}}\text{V}\underline{\text{VC}}\text{C}$ hoặc $\text{C}\underline{\text{CV}}\text{V}\underline{\text{VCCV}}$ có 2 cách xếp.
Suy ra $4! \cdot 2$ cách.

Vậy trường hợp này có $4! \cdot 2 \cdot 2 + 4! \cdot 2 + 4! \cdot 2 = 192$ cách.

TH3: Xếp 2 người vợ ngồi cạnh nhau.
Xếp 4 người vợ vào 4 vị trí có 4! cách.

— 4 người chồng ngồi cạnh nhau $\text{V}\underline{\text{VC}}\text{CC}\underline{\text{CV}}\text{V}$ có 1 cách.
Có 2 cách xếp 2 người chồng không có gạch chân.
Suy ra có $4! \cdot 2$ cách.

— 3 người chồng ngồi cạnh nhau $\text{V}\underline{\text{VC}}\text{C}\underline{\text{CVVC}}$ hoặc $\underline{\text{CVVC}}\text{C}\underline{\text{CV}}\text{V}$ có 2 cách.
Suy ra có $4! \cdot 2$ cách.

— 2 người chồng ngồi cạnh nhau $\underline{\text{CVVCCVVC}}$ hoặc $\text{V}\underline{\text{VCCVVC}}\text{C}$ hoặc $\text{C}\underline{\text{CVVCCV}}\text{V}$ hoặc $\underline{\text{VCCVVCCV}}$ có 4 cách xếp.
Suy ra có $4! \cdot 4$ cách.

Vậy trường hợp này có $4! \cdot 2 + 4! \cdot 2 + 4! \cdot 4 = 192$ cách.

Vậy có tất cả số cách là $432 + 192 + 192 = 816$ cách.

Chọn đáp án A .... □

CÂU 72. Mệnh đề nào đúng trong các mệnh đề sau ?

A $\mathrm{A}_n^k = k! \cdot \mathrm{C}_n^{n-k}$. **B** $\mathrm{C}_n^k = k! \cdot \mathrm{A}_n^k$. **C** $\mathrm{A}_n^k = k \cdot \mathrm{C}_n^k$. **D** $\mathrm{C}_n^k = k \cdot \mathrm{A}_n^k$.

Lời giải.

Ta có $\mathrm{A}_n^k = k! \cdot \mathrm{C}_n^k = k! \cdot \mathrm{C}_n^{n-k}$.

Chọn đáp án A .... □

CÂU 73. Có n phần tử $(n > 0)$, lấy ra k phần tử $(0 \leq k \leq n)$ đem sắp xếp theo một thứ tự nhất định mà khi thay đổi thứ tự ta được cách sắp xếp mới. Khi đó số cách sắp xếp là

A C_n^k. **B** A_k^n. **C** A_n^k. **D** P_n.

Lời giải.

Mỗi cách lấy ra k phần tử từ n phần tử và sắp xếp chúng theo một thứ tự là một chỉnh hợp chập k của n.
Khi đó số cách lấy ra như vậy là A_n^k.

Chọn đáp án C .... □

CÂU 74. Từ các số 1, 2, 3, 4 có thể tạo ra bao nhiêu số tự nhiên có 4 chữ số đôi một khác nhau?

A 12. **B** 24. **C** 42. **D** 4^4.

Lời giải.

Mỗi cách hoán đổi vị trí của 4 số 1, 2, 3, 4 sẽ tạo thành một số tự nhiên có bốn chữ số đôi một khác nhau.
Khi đó có $4! = 24$ số tự nhiên thoả mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án B .... □

CÂU 75. Có bao nhiêu cách chọn ra 5 cầu thủ từ 11 cầu thủ để thực hiện quả đá luân lưu 11 m theo thứ tự từ quả thứ nhất đến quả thứ 5 ?

A A_{11}^5. **B** C_{11}^5. **C** $A_{11}^5 \cdot 5!$. **D** C_{10}^5.

Lời giải.

Mỗi cách chọn ra 5 cầu thủ từ 11 cầu thủ để thực hiện quả đá luân lưu 11 m theo thứ tự từ quả thứ nhất đến quả thứ 5 là một chỉnh hợp chập 5 của 11.
Khi đó có A_{11}^5 cách chọn thoả mãn yêu cầu đề bài.

Chọn đáp án A .... □

CÂU 76. Cho tập hợp M có 10 phần tử. Số tập con có 2 phần tử của M là

A A_{10}^8. **B** A_{10}^2. **C** C_{10}^2. **D** 10^2.

Lời giải.

Mỗi tập con có 2 phần tử của M là một tổ hợp chập 2 của 10.
Khi đó có C_{10}^2 tập con có hai phần tử của M.

Chọn đáp án C .... □

CÂU 77. Nhân dịp lễ sơ kết học kì 1, để thưởng cho 3 học sinh có thành tích tốt nhất lớp, cô An đã mua 10 cuốn sách khác nhau và chọn ra 3 cuốn để phát thưởng cho 3 học sinh đó mỗi học sinh nhận 1 cuốn. Hỏi cô An có bao nhiêu cách phát thưởng.

A C_{10}^3. **B** A_{10}^3. **C** 10^3. **D** $3 \cdot C_{10}^3$.

Lời giải.

Mỗi cách lấy ra 3 quyển sách từ 10 quyển sách và phát cho 3 học sinh là một chỉnh hợp chập 3 của 10.
Khi đó có A_{10}^3 cách chọn ra và phát tập cho học sinh thoả mãn yêu cầu đề bài.

Chọn đáp án B .... □

CÂU 78. Có bao nhiêu cách xếp 5 học sinh thành một hàng dọc ?

A 5^5. **B** $5!$. **C** $4!$. **D** 5.

Lời giải.

Mỗi cách xếp 5 học sinh vào một hàng ngang là một hoán vị của 5.
Khi đó có 5! cách xếp thoả mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án B .... □

CÂU 79. Có bao nhiêu cách chia 10 người thành hai nhóm, một nhóm 6 người và một nhóm 4 người ?

A 210. **B** 120. **C** 100. **D** 140.

Lời giải.

Chọn ra 6 người từ 10 người để thành lập nhóm thứ nhất: có $C_{10}^6 = 210$ cách.
Còn 4 người còn lại tạo thành nhóm thứ hai.
Theo quy tắc nhân có $210 \cdot 1 = 210$ cách chia nhóm thoả mãn yêu cầu đề bài.

Chọn đáp án A .... □

CÂU 80. Trong kho đèn trang trí đang còn 5 bóng đèn loại I, 7 bóng đèn loại II, các bóng đèn đều khác nhau về màu sắc và hình dáng. Lấy ra 5 bóng đèn bất kỳ. Hỏi có bao nhiêu khả năng xảy ra số bóng đèn loại I nhiều hơn số bóng đèn loại II ?

A 246. **B** 3480. **C** 245. **D** 3360.

Lời giải.

- Trường hợp 1: lấy ra 3 bóng loại I, 2 bóng loại II: có $C_5^3 \cdot C_7^2 = 210$ cách.
- Trường hợp 2: lấy ra 4 bóng loại I, 1 bóng loại II: có $C_5^4 \cdot C_7^1 = 35$ cách.
- Trường hợp 3: lấy ra 5 bóng loại I, 0 bóng loại II: có $C_5^5 = 1$ cách.
- Theo quy tắc cộng có $210 + 35 + 1 = 246$ cách.

Chọn đáp án A .... □

CÂU 81. Có 5 nhà toán học nam, 3 nhà toán học nữ và 4 nhà vật lý nam. Lập một đoàn công tác gồm 3 người cần có cả nam và nữ, có cả nhà toán học và vật lý thì có bao nhiêu cách ?

A 120. **B** 90. **C** 80. **D** 220.

Lời giải.

Ta xét các trường hợp sau

- Trường hợp 1: chọn 1 nhà Toán học nữ, 1 nhà Toán học nam, 1 nhà vật lý nam: có $5 \cdot 3 \cdot 4 = 60$ cách.
- Trường hợp 2: chọn 1 nhà Toán học nữ, 2 nhà Vật lý nam: có $\mathrm{C}_3^1 \cdot \mathrm{C}_4^2 = 18$ cách.
- Trường hợp 3: chọn 2 nhà Toán học nữ, 1 nhà vật lý nam: có $\mathrm{C}_3^2 \cdot \mathrm{C}_4^1 = 12$ cách.
- Theo quy tắc cộng, ta có $60 + 18 + 12 = 90$ cách.

Chọn đáp án (B) .... □

CÂU 82. Tổ 1 lớp $11A$ có 6 học sinh nam và 5 học sinh nữ. Giáo viên chủ nhiệm cần chọn ra 4 học sinh của tổ 1 để lao động vệ sinh cùng cả trường. Hỏi có bao nhiêu cách chọn như vậy nếu có ít nhất một học sinh nam ?

(A) 600. (B) 25. (C) 325. (D) 30.

Lời giải.

Số cách chọn ra bốn học sinh tuỳ ý trong tổ 1 là $\mathrm{C}_{11}^4 = 330$ cách.
Số cách chọn ra 4 học sinh không có nam là $\mathrm{C}_5^4 = 5$ cách.
Suy ra số cách chọn ra 4 học sinh mà có ít nhất một nam là $330 - 5 = 325$ cách.

Chọn đáp án (C) .... □

CÂU 83. Có 9 tấm thẻ được đánh số từ 1 đến 9. Có bao nhiêu cách chọn ra hai tấm thẻ rồi nhân hai số ghi trên đó lại với nhau sao cho kết quả thu được là một số chẵn ?

(A) 10. (B) 26. (C) 36. (D) 27.

Lời giải.

Có C_9^2 cách rút ra 2 tấm thẻ bất kỳ.
Có C_5^2 cách rút ra hai tấm thẻ ghi số lẻ để nhân hai số ra một số lẻ.
Suy ra có $\mathrm{C}_9^2 - \mathrm{C}_5^2 = 26$ cách rút ra được hai tấm thẻ và nhân hai số ghi trên hai thẻ để được kết quả là một số chẵn.

Chọn đáp án (B) .... □

CÂU 84. Cho tập hợp $A = \{0; 1; 2; \ldots; 7\}$. Hỏi từ A có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có 5 chữ số đôi một khác nhau sao cho một trong ba chữ số đầu tiên phải là 1 ?

(A) 65. (B) 2280. (C) 2520. (D) 2802.

Lời giải.

Gọi $\overline{abcde}$ là số tự nhiên cần tìm $(a \neq 0)$.

- Trường hợp 1: $a = 1$. Khi đó có $A_7^4 = 840$ cách chọn b, c, d, e.
- Trường hợp 2: $a \neq 1$.
  Khi đó chọn $a \in A \setminus \{1; 0\}$: có 6 cách chọn.
  Xếp 1 vào một trong hai vị trí b hoặc c: có 2 cách.
  Chọn 3 trong 6 số thuộc tập $A \setminus \{a; 1\}$ để xếp vào ba vị trí còn lại: có $\mathrm{A}_6^3 = 120$ cách.
  Theo quy tắc nhân có $6 \cdot 2 \cdot 120 = 1440$ số.
- Vậy có $840 + 1440 = 2280$ số.

Chọn đáp án (B) .... □

CÂU 85. Có bao nhiêu số chẵn mà mỗi số có bốn chữ số đôi một khác nhau ?

(A) 2520. (B) 50000. (C) 4500. (D) 2296.

Lời giải.

Đặt $X = \{0; 1; 2; \ldots; 9\}$.
Gọi $\overline{abcd}$ là số tự nhiên cần tìm.

- Trường hợp 1: $d = 0$.
  Chọn 3 trong 9 số thuộc $X \setminus \{0\}$ để xếp vào vị trí a, b, c: có $\mathrm{A}_9^3 = 504$ cách.
  Suy ra có 504 số.
- Trường hợp 2: $d \in \{2; 4; 6; 8\}$ có 4 cách chọn.
  Chọn $a \in X \setminus \{0; d\}$: có 8 cách chọn.
  Chọn 2 trong số 8 số thuộc $X \setminus \{d; a\}$ để xếp vào hai vị trí b, c có $\mathrm{A}_8^2 = 56$ cách.
  Theo quy tắc nhân có $4 \cdot 8 \cdot 56 = 1792$ số.
- Vậy có $504 + 1792 = 2296$ số.

Chọn đáp án (D) .... □

CÂU 86. Từ các số 0, 1, 2, 3, 5 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có bốn chữ số đôi một khác nhau và không chia hết cho 5 ?

(A) 72. (B) 120. (C) 54. (D) 69.

Lời giải.

Đặt $X = \{0; 1; 2; 3; 5\}$.
Gọi $\overline{abcd}$ là số tự nhiên cần tìm.
Chọn $d \in X \setminus \{0; 5\}$ có 3 cách.
Chọn $a \in X \setminus \{0; e\}$: có 3 cách.
Chọn 2 trong 3 số từ $X \setminus \{a, d\}$ để xếp vào các vị trí b, c có $\mathrm{A}_3^2 = 6$ cách.
Vậy có $3 \cdot 3 \cdot 6 = 54$ số.

Chọn đáp án (C) .... □

CÂU 87. Cho hai đường thẳng d_1 và d_2 song song nhau. Trên d_1 lấy 5 điểm phân biệt. Trên d_2 lấy n điểm phân biệt. Biết rằng có 175 tam giác được tạo thành mà ba đỉnh của tam giác là ba trong $n + 5$ điểm kể trên. Giá trị của n là

(A) 10. (B) 7. (C) 8. (D) 9.

Lời giải.

Số tam giác được tạo thành thoả mãn yêu cầu bài toán là $\mathrm{C}_5^1 \cdot \mathrm{C}_n^2 + \mathrm{C}_5^2 \cdot \mathrm{C}_n^1$ với $n \geq 2$, $n \in \mathbb{N}$.
Theo đề bài

$$\begin{aligned} & \mathrm{C}_5^1 \cdot \mathrm{C}_n^2 + \mathrm{C}_5^2 \cdot \mathrm{C}_n^1 = 175 \\ \Leftrightarrow\ & 5 \cdot \frac{n(n-1)}{2} + 10 \cdot n = 175 \\ \Leftrightarrow\ & 5n^2 + 15n - 350 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} n = 7 \\ n = -10 \end{array}\right. \\ \Leftrightarrow\ & n = 7. \end{aligned}$$

Chọn đáp án (B) .... □

CÂU 88. Cho đa giác đều $A_1A_2A_3 \cdots A_{30}$ nội tiếp đường tròn tâm O. Tính số hình chữ nhật mà bốn đỉnh là bốn trong 30 đỉnh của đa giác ?

(A) 105. (B) 27405. (C) 27406. (D) 106.

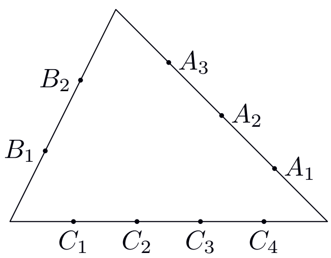
Lời giải.

Đa giác đều 30 đỉnh có 15 đường chéo đi qua tâm.
Cứ hai đường chéo đi qua tâm sẽ tạo thành hai đường chéo của một hình chữ nhật.
Vậy số hình chữ nhật được tạo thành thoả mãn yêu cầu bài toán là $\mathrm{C}_{15}^2 = 105$.

Chọn đáp án (A) .... □

CÂU 89.
Cho một tam giác. Trên ba cạnh của tam giác lấy 9 điểm như hình vẽ. Có bao nhiêu tam giác có ba đỉnh là ba trong 9 điểm kể trên?

(A) 79. (B) 48. (C) 55. (D) 24.



Lời giải.
Số tam giác được tạo thành thoả mãn yêu cầu bài toán là

$$\mathrm{C}_9^3 - \mathrm{C}_3^3 - \mathrm{C}_4^3 = 79.$$

Chọn đáp án (A) .... □

CÂU 90. Có bao nhiêu số tự nhiên có ba chữ số đôi một khác nhau lấy từ tập $A = \{1; 2; 3; 4; 5\}$ sao cho mỗi số lập được luôn có mặt của số 3 ?

(A) 72. (B) 36. (C) 32. (D) 48.

Lời giải.

Gọi $\overline{abc}$ là số tự nhiên cần tìm.
Đặt 3 vào một trong ba vị trí a, b, c: có 3 cách.
Chọn 2 trong bốn số 1, 2, 4, 5 để xếp vào hai vị trí còn lại: có A_4^2 cách.
Theo quy tắc nhân có $3 \cdot \mathrm{A}_4^2 = 36$ số.

Chọn đáp án (B) .... □

CÂU 91. Có bao nhiêu số tự nhiên có 7 chữ số đôi một khác nhau sao cho chữ số 2 đứng liền giữa chữ số 1 và chữ số 3 ?

(A) 2942. (B) 5880. (C) 7440. (D) 3204.

Lời giải.

Đặt $X = \{0; 1; 2; \ldots; 9\}$.
Xem 1, 2, 3 như một phần tử kép.
Có 2! cách hoán đổi vị trí của 1 và 3 để 2 luôn liền giữa 1 và 3.
Chọn ra 4 trong 7 số thuộc $X \setminus \{1; 2; 3\}$ có C_7^4 cách.
Có 5! cách hoán đổi vị trí của bốn số vừa được chọn và phần tử kép 1, 2, 3.
Suy ra có $2! \cdot \mathrm{C}_7^4 \cdot 5! = 8400$ số có dạng $\overline{a_1a_2\ldots a_7}$ trong đó các chữ số đôi một khác nhau, chữ số 2 đứng liền giữa chữ số 1 và 3 (số được tạo thành có thể có chữ số 0 đứng đầu).
Lập luận tương tự như trên, ta có $2! \cdot \mathrm{C}_6^3 \cdot 4! = 960$ số có dạng $\overline{0a_2a_3\ldots a_7}$ trong đó các chữ số đôi một khác nhau, chữ số 2 đứng liền giữa chữ số 1 và 3.
Vậy có $8400 - 960 = 7440$ số thoả mãn yêu cầu đề toán.

Chọn đáp án (C) .... □

Bài 3. NHỊ THỨC NEWTON

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Nhị thức Newton

Cho a, b là các số thực. Ta có

$$(a+b)^4 = \mathrm{C}_4^0 a^4 + \mathrm{C}_4^1 a^3 b + \mathrm{C}_4^2 a^2 b^2 + \mathrm{C}_4^3 a b^3 + \mathrm{C}_4^4 b^4 = a^4 + 4a^3 b + 6a^2 b^2 + 4ab^3 + b^4.$$

$$(a+b)^5 = \mathrm{C}_5^0 a^5 + \mathrm{C}_5^1 a^4 b + \mathrm{C}_5^2 a^3 b^2 + \mathrm{C}_5^3 a^2 b^3 + \mathrm{C}_5^4 a b^4 + \mathrm{C}_5^5 b^5 = a^5 + 5a^4 + 10a^3 b^2 + 10a^2 b^3 + 5ab^4 + b^5.$$

B. CÁC DẠNG TOÁN

1 Khai triển một nhị thức Newton

Cho a, b là các số thực. Ta có

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3 b + 6a^2 b^2 + 4ab^3 + b^4.$$
$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4 + 10a^3 b^2 + 10a^2 b^3 + 5ab^4 + b^5.$$

1. Ví dụ minh hoạ

VÍ DỤ 1. Khai triển $(x+1)^4$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}(x+1)^4 &= x^4 + 4\cdot x^3\cdot 1 + 6\cdot x^2\cdot 1^2 + 4\cdot x\cdot 1^3 + 1^4\\ &= x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1.\end{aligned}$$

VÍ DỤ 2. Khai triển $(x-1)^4$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}(x+1)^4 &= x^4 - 4\cdot x^3\cdot 1 + 6\cdot x^2\cdot 1^2 - 4\cdot x\cdot 1^3 + 1^4\\ &= x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1.\end{aligned}$$

VÍ DỤ 3. Khai triển các biểu thức sau

a) $(x-2y)^4$;

b) $(3x-y)^5$.

Lời giải.

a) Ta có

$$\begin{aligned}(x-2y)^4 &= x^4 - 4\cdot x^3\cdot(2y) + 6\cdot x^2\cdot(2y)^2 - 4\cdot x\cdot(2y)^3 + (2y)^4\\ &= x^4 - 8x^3 y + 24x^2 y^2 - 32xy^3 + 16y^4.\end{aligned}$$

b) Ta có

$$\begin{aligned}(3x-y)^5 &= (3x)^5 - 5\cdot(3x)^4 y + 10\cdot(3x)^3 y^2 - 10\cdot(3x)^2 y^3 + 5\cdot(3x)y^4 - y^5\\ &= 243x^5 - 405x^4 y + 270x^3 y^2 - 90x^2 y^3 + 15xy^4 - y^5.\end{aligned}$$

2. Bài tập tự luận

BÀI 1. Khai triển các biểu thức sau

a) $(2+x)^4$;

b) $(2-3y)^5$;

c) $(3x-2y)^4$

Lời giải.

a)

$$\begin{aligned}(2+x)^4 &= 2^4 + 4\cdot 2^3 x + 6\cdot 2^2 x^2 + 4\cdot 2x^3 + x^4\\ &= 16 + 32x + 24x^2 + 8x^3 + x^4.\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}(2-3y)^5 &= 2^5-5\cdot 2^4\cdot(3y)+10\cdot 2^3\cdot(3y)^2-10\cdot 2^2\cdot(3y)^3+5\cdot 2\cdot(3y)^4-\mathrm{C}_5^5\cdot(3y)^5\\ &= 32-240y+720y^2-1080y^3+810y^4-243y^5.\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}(3x-2y)^4 &= (3x)^4+4\cdot(3x)^3\cdot(2y)+6\cdot(3x)^2\cdot(2y)^2+4\cdot(3x)\cdot(2y)^3+(2y)^4\\ &= 81x^4+216x^3y+216x^2y^2+96xy^3+16y^4.\end{aligned}$$

BÀI 2. Khai triển các biểu thức sau

a) $\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^4$; b) $\left(x-\dfrac{1}{3}\right)^4$.

Lời giải.

a)

$$\begin{aligned}\left(x+\frac{1}{2}\right)^4 &= x^4+4\cdot x^3\cdot\frac{1}{2}+6\cdot x^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2+4\cdot x\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{1}{2}\right)^4\\ &= x^4+2x^3+\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{16}.\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}\left(x-\frac{1}{3}\right)^4 &= x^4-4\cdot x^3\cdot\frac{1}{3}+6\cdot x^2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2-4\cdot x\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)^4\\ &= x^4-\frac{4}{3}x^3+\frac{2}{3}x^2-\frac{4}{27}x+\frac{1}{81}.\end{aligned}$$

BÀI 3. Khai triển đa thức $(x+5)^4+(x-5)^4$.

Lời giải.

$$\begin{aligned}(x+5)^4+(x-5)^4 &= x^4+20x^3+150x^2+500x+625+x^4-20x^3+150x^2-500x+625\\ &= 2\left(x^4+150x^2+625\right).\end{aligned}$$

BÀI 4. Số dân của một tỉnh ở thời điểm hiện tại là khoảng 800 nghìn người. Giả sử rằng tỉ lệ tăng dân số hằng năm của tỉnh đó là $r\%$.

a) Viết công thức tính số dân của tỉnh đó sau 1 năm, sau 2 năm. Từ đó suy ra công thức tính số dân của tỉnh đó sau 5 năm nữa là $P=800\left(1+\dfrac{r}{100}\right)^5$ (nghìn người).

b) Với $r=1{,}5\%$, dùng hai số hạng đầu trong khai triển của $(1+0{,}015)^5$, hãy ước tính số dân của tỉnh đó sau 5 năm nữa (theo đơn vị nghìn người).

Lời giải.

a) Số dân của tỉnh đó sau 1 năm là

$$P_1=800+800\cdot r\%=800\left(1+\frac{r}{100}\right)^1 \text{ (nghìn người).}$$

Số dân của tỉnh đó sau 2 năm là

$$P_2=P_1+P_1\cdot r\%=800\left(1+\frac{r}{100}\right)^1+800\left(1+\frac{r}{100}\right)^1\cdot\frac{r}{100}=800\left(1+\frac{r}{100}\right)^2 \text{ (nghìn người).}$$

Do đó công thức tính số dân của tỉnh đó sau 5 năm nữa là $P=800\left(1+\dfrac{r}{100}\right)^5$ (nghìn người).

b) Với $r=1{,}5\%$, ta có khai triển

$$\begin{aligned}&(1+0{,}015)^5\\ =\;&1^5+5\cdot 1^4\cdot 0{,}015+10\cdot 1^3\cdot(0{,}015)^2+10\cdot 1^2\cdot(0{,}015)^3+5\cdot 1\cdot(0{,}015)^4+(0{,}015)^5\\ \approx\;&1^5+5\cdot 1^4\cdot 0{,}015=1{,}075.\end{aligned}$$

Số dân của tỉnh đó sau 5 năm nữa là

$$P=800\cdot(1+0{,}015)^5\approx 800\cdot 1{,}075=860 \text{ (nghìn người).}$$

Vậy số dân của tỉnh đó sau 5 năm nữa xấp xỉ khoảng 860 nghìn người.

2 Tìm hệ số số hạng trong khai triển nhị thức Newton

Để tìm số hạng hay hệ số của số hạng trong khai triển nhị thức Newton ta có thể làm theo các cách sau

- Cách 1: Sử dụng tam giác Pascal để khai triển toàn bộ nhị thức rồi tìm số hạng thích hợp. Thường sử dụng cách này với đa thức bậc nhỏ hơn hoặc bằng 5.
- Cách 2: Sử dụng số hạng tổng quát (được giới thiệu ở Chuyên đề học tập Toán 10).
  Số hạng tổng quát trong khai triển của $(a+b)^n$ là $\mathrm{C}_n^k a^{n-k} b^k$ hay $\mathrm{C}_n^{n-k} a^k b^{n-k}$.
  Nếu trong khai triển có chứa x, chẳng hạn $(ax+b)^n$ thì ta có số hạng chứa x^k là $\mathrm{C}_n^{n-k} a^k b^{n-k} x^k$. Do đó hệ số của x^k trong khai triển của $(ax+b)^n$ là $\mathrm{C}_n^{n-k} a^k b^{n-k}$.

Khi tìm hệ số lớn nhất trong khai triển $(a+b)^n$ ta sử dụng nhận xét sau.
Dãy hệ số C_n^0; C_n^1; C_n^2;...; C_n^{n-1}; C_n^n trong khai triển $(a+b)^n$ có hai tính chất sau

- Các cặp hệ số tính từ hai đầu trở vào (tương tứng) thì bằng nhau.
$$\mathrm{C}_n^k = \mathrm{C}_n^{n-k}, \forall k \in \mathbb{N}, k \leq n, n \in \mathbb{N}^*.$$
- Dãy hệ số tăng dần đến "giữa" rồi giảm dần
$$\begin{aligned} &\mathrm{C}_n^0 < \mathrm{C}_n^1 < \mathrm{C}_n^2 < \dots \\ &\dots > \mathrm{C}_n^{n-2} > \mathrm{C}_n^{n-1} > \mathrm{C}_n^n. \end{aligned}$$

VÍ DỤ 1. Khai triển biểu thức $(a+bx)^4$, viết các số hạng theo thứ tự bậc của x tăng dần, nhận được biểu thức gồm hai số hạng đầu tiên là $16-96x$. Hãy tìm số hạng chứa x^2.

Lời giải.

Áp dụng công thức nhị thức Newton, ta có

$$\begin{aligned} (a+bx)^4 &= a^4 + 4a^3bx + 6a^2(bx)^2 + 4a(bx)^3 + (bx)^4 \\ &= a^4 + 4a^3bx + 6a^2b^2x^2 + 4ab^3x^3 + b^4x^4. \end{aligned}$$

Theo giả thiết, ta có $\begin{cases} a^4 = 16 \\ 4a^3b = -96 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -3 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a = -2 \\ b = 3 \end{cases} \Rightarrow a^2b^2 = 4 \cdot 9 = 36.$
Vậy số hạng thứ 3 là $6a^2b^2x^2 = 6 \cdot 36 \cdot x^2 = 216x^2$.

VÍ DỤ 2. Tìm hệ số của x^4 trong khai triển biểu thức $(2x+1)(x-1)^5$.

Lời giải.

Áp dụng công thức nhị thức Newton, ta có

$$(x-1)^5 = x^5 - 5x^4 + 10x^3 - 10x^2 + 5x - 1. \qquad (*)$$

Khi nhân biểu thức $2x+1$ với biểu thức bên phải của $(*)$, ta được hệ số của x^4 bằng

$$2 \cdot 10 + 1 \cdot (-5) = 15.$$

Vậy hệ số của x^4 trong khai triển biểu thức $(2x+1)(x-1)^5$ bằng 15.
Nhận xét: Nếu tìm tất cả các số hạng của khai triển, ta được

$$\begin{aligned} (2x+1)(x-1)^5 &= (2x+1)\left(x^5 - 5x^4 + 10x^3 - 10x^2 + 5x - 1\right) \\ &= 2x^6 - 9x^5 + 15x^4 - 10x^3 + 3x - 1. \end{aligned}$$

Từ đó, cũng tìm được hệ số của x^4 bằng 15.

VÍ DỤ 3. Tìm hệ số của x^7 trong khai triển thành đa thức của $(2-3x)^{10}$.

Lời giải.

Số hạng tổng quát trong khai triển của $(2-3x)^{10}$ là

$$\mathrm{C}_{10}^k 2^{10-k}(-3x)^k = \mathrm{C}_{10}^k 2^{10-k}(-3)^k x^k.$$

Số hạng chứa x^7 nên $k=7$.
Hệ số cần tìm là

$$\mathrm{C}_{10}^k 2^{10-k}(-3)^k = \mathrm{C}_{10}^7 2^3 (-3)^7 = -2099520.$$

VÍ DỤ 4. Cho a là một số thực dương. Biết rằng trong khai triển của $(3x+a)^8$, hệ số của x^4 là 70. Tìm giá trị của a.

Lời giải.

Số hạng tổng quát trong khai triển $(3x+a)^8$ là $\mathrm{C}_8^k(3x)^{8-k}a^k = \mathrm{C}_8^k 3^{8-k}a^k x^{8-k}$.
Số hạng chứa x^4 thì $8-k=4 \Leftrightarrow k=4$.
Hệ số của x^4 là $\mathrm{C}_8^k 3^{8-k}a^k = \mathrm{C}_8^4 3^4 a^4 = 5670a^4$.
Theo giả thiết ta có $5670a^4 = 70 \Leftrightarrow a = \dfrac{1}{3}$.

VÍ DỤ 5. Tìm hệ số lớn nhất trong khai triển của

a) $(a+b)^6$;

b) $(a+b)^7$.

Lời giải.

a) Ta có $\mathrm{C}_6^0 < \mathrm{C}_6^1 < \mathrm{C}_6^2 < \mathrm{C}_6^3$ và $\mathrm{C}_6^3 > \mathrm{C}_6^4 > \mathrm{C}_6^5 > \mathrm{C}_6^6$.
Vậy hệ số lớn nhất trong khai triển của $(a+b)^6$ là $\mathrm{C}_6^3 = 20$.

b) Ta có $\mathrm{C}_7^0 < \mathrm{C}_7^1 < \mathrm{C}_7^2 < \mathrm{C}_7^3 = \mathrm{C}_7^4$ và $\mathrm{C}_7^4 > \mathrm{C}_7^5 > \mathrm{C}_7^6 > \mathrm{C}_7^7$.
Vậy hệ số lớn nhất trong khai triển của $(a+b)^7$ là $\mathrm{C}_7^3 = \mathrm{C}_7^4 = 35$.

1. Bài tập tự luận

BÀI 1. Tìm hệ số của x^3 trong khai triển $(3x-2)^5$.

Lời giải.

Áp dụng công thức nhị thức Newton ta có

$$\begin{aligned}(3x-2)^5 &= (3x)^5 + 5(3x)^4\cdot(-2) + 10(3x)^3\cdot(-2)^2 + 10(3x)^2\cdot(-2)^3 + 5\cdot 3x\cdot(-2)^4 + (-2)^5\\ &= 243x^5 - 810x^4 + 1080x^3 - 720x^2 + 240x - 32.\end{aligned}$$

Vậy hệ số của x^3 là 1080.

BÀI 2. Trong khai triển của $(5x-2)^5$, số mũ của x được sắp xếp theo lũy thừa tăng dần, hãy tìm hạng tử thứ hai tính từ trái sang phải.

Lời giải.

Áp dụng công thức nhị thức Newton ta có

$$\begin{aligned}(5x-2)^5 &= (5x)^5 + 5(5x)^4\cdot(-2) + 10(5x)^3\cdot(-2)^2 + 10(5x)^2\cdot(-2)^3 + 5\cdot 5x\cdot(-2)^4 + (-2)^5\\ &= 3125x^5 - 6250x^4 + 5000x^3 - 2000x^2 + 400x - 32\\ &= -32 + 400x - 2000x^2 + 5000x^3 - 6250x^4 + 3125x^5.\end{aligned}$$

Vậy hạng tử thứ hai là $400x$.

BÀI 3. Xác định hạng tử không chứa x trong khai triển của $\left(x+\dfrac{2}{x}\right)^4$.

Lời giải.

Áp dụng công thức nhị thức Newton ta có

$$\begin{aligned}\left(x+\frac{2}{x}\right)^4 &= x^4 + 4x^3\cdot\frac{2}{x} + 6x^2\cdot\left(\frac{2}{x}\right)^2 + 4x\cdot\left(\frac{2}{x}\right)^3 + \left(\frac{2}{x}\right)^4\\ &= x^4 + 8x^2 + 24 + \frac{32}{x^2} + \frac{16}{x^4}.\end{aligned}$$

Vậy hạng tử không chứa x là 24.

BÀI 4. Tìm giá trị tham số a để trong khai triển $(a+x)(1+x)^4$ có một số hạng là $22x^2$.

Lời giải.

Áp dụng công thức nhị thức Newton ta có

$$(1+x)^4 = 1 + 4x + 6x^2 + 4x^3 + x^4.$$

Do đó hệ số của x^2 trong khai triển $(a+x)(1+x)^4$ là $a\cdot 6 + 1\cdot 4 = 6a+4$.
Theo bài ra ta có $6a+4 = 22 \Leftrightarrow a = 3$.

BÀI 5. Cho số thực $a \neq 0$, biết rằng trong khai triển $(ax-1)^5$, hệ số của x^4 gấp bốn lần hệ số của x^2. Hãy tìm giá trị của tham số a.

Lời giải.

Áp dụng công thức nhị thức Newton ta có

$$\begin{aligned}(ax-1)^5 &= (ax)^5 - 5(ax)^4 + 10(ax)^3 - 10(ax)^2 + 5\cdot ax - 1\\ &= a^5x^5 - 5a^4x^4 + 10a^3x^3 - 10a^2x^2 + 5ax - 1.\end{aligned}$$

Vì hệ số của x^4 gấp bốn lần hệ số của x^2 nên

$$-5a^4 = 4\cdot(-10a^2) \Leftrightarrow a^2 = 8 \Leftrightarrow a = \pm 2\sqrt{2}.$$

BÀI 6. Biết rằng trong khai triển của $\left(ax+\dfrac{1}{x}\right)^4$, số hạng không chứa x là 24. Hãy tìm giá trị của tham số a

Lời giải.

Áp dụng công thức nhị thức Newton ta có

$$\begin{aligned}\left(ax+\frac{1}{x}\right)^4 &= (ax)^4 + 4(ax)^3\cdot\frac{1}{x} + 6(ax)^2\cdot\left(\frac{1}{x}\right)^2 + 4(ax)\cdot\left(\frac{1}{x}\right)^3 + \left(\frac{1}{x}\right)^4\\ &= a^4x^4 + 4a^3x^2 + 6a^2 + \frac{4a}{x^2} + \frac{1}{x^4}.\end{aligned}$$

Vì số hạng không chứa x là 24 nên $6a^2 = 24 \Leftrightarrow a = \pm 2$.

BÀI 7. Xác định hệ số của

a) x^{10} trong khai triển của $(x+4)^{20}$;

b) x^{12} trong khai triển của $(3+2x)^{30}$;

c) x^{15} trong khai triển của $\left(\dfrac{2x}{3}-\dfrac{1}{7}\right)^{31}$;

Lời giải.

a) Số hạng tổng quát trong khai triển của $(x+4)^{20}$ là

$$\mathrm{C}_{20}^{20-k}x^k\cdot 4^{20-k} = \mathrm{C}_{20}^{20-k}4^{20-k}\cdot x^k.$$

Do đó hệ số của x^{10} là $\mathrm{C}_{20}^{10}4^{10}$.

b) Số hạng tổng quát trong khai triển của $(3+2x)^{30}$ là

$$\mathrm{C}_{30}^{k}\cdot 3^{30-k}\cdot(2x)^k = \mathrm{C}_{30}^{k}\cdot 3^{30-k}\cdot 2^kx^k.$$

Do đó hệ số của x^{12} là $\mathrm{C}_{30}^{12}\cdot 3^{18}\cdot 2^{12}$.

c) Số hạng tổng quát trong khai triển của $\left(\dfrac{2x}{3}-\dfrac{1}{7}\right)^{31}$ là

$$\mathrm{C}_{31}^{31-k}\left(\frac{2x}{3}\right)^k\left(-\frac{1}{7}\right)^{31-k} = \mathrm{C}_{31}^{31-k}\left(\frac{2}{3}\right)^k\left(-\frac{1}{7}\right)^{31-k}\cdot x^k.$$

Do đó hệ số của x^{12} là $\mathrm{C}_{31}^{19}\left(\dfrac{2}{3}\right)^{12}\left(-\dfrac{1}{7}\right)^{19} = -\dfrac{\mathrm{C}_{31}^{19}\cdot 2^{12}}{3^{12}\cdot 7^{19}}$.

BÀI 8. Tìm hệ số của x^5 trong khai triển thành đa thức của biểu thức

$$x(1-2x)^5 + x^2(1+3x)^{10}.$$

Lời giải.

- Số hạng tổng quát của khai triển $(1-2x)^5$ là $\mathrm{C}_5^k(-2x)^k = \mathrm{C}_5^k(-2)^k\cdot x^k$.
  Do đó số hạng tổng quát của khai triển $x(1-2x)^5$ là $\mathrm{C}_5^k(-2)^k\cdot x^{k+1}$.
  Vì số hạng chứa x^5 nên $k+1=5 \Leftrightarrow k=4$.
- Số hạng tổng quát của khai triển $(1+3x)^{10}$ là $\mathrm{C}_{10}^i(3x)^i = \mathrm{C}_{10}^i\cdot 3^i\cdot x^i$.
  Do đó số hạng tổng quát của khai triển $x^2(1+3x)^{10}$ là $\mathrm{C}_{10}^i\cdot 3^i\cdot x^{i+2}$.
  Vì số hạng chứa x^5 nên $i+2=5 \Leftrightarrow i=3$.

Vậy hệ số của x^5 trong khai triển thành đa thức của biểu thức $x(1-2x)^5+x^2(1+3x)^{10}$ là

$$\mathrm{C}_5^4(-2)^4+\mathrm{C}_{10}^3\cdot 3^3=3320.$$

BÀI 9. Biết rằng a là một số thực khác 0 và trong khai triển của $(ax+1)^6$, hệ số của x^4 gấp ba lần hệ số của x^2. Tìm giá trị của a.

Lời giải.

Số hạng tổng quát trong khai triển của $(ax+1)^6$ là $\mathrm{C}_6^{6-k}(ax)^k=\mathrm{C}_6^{6-k}a^k\cdot x^k$.
Do đó hệ số của x^k là $\mathrm{C}_6^{6-k}a^k$.
Vì hệ số của x^4 gấp ba lần hệ số của x^2 và $a\neq 0$ nên

$$\mathrm{C}_6^2a^4=3\mathrm{C}_6^4a^2\Leftrightarrow a=\pm\sqrt{3}.$$

BÀI 10. Tìm hệ số lớn nhất trong khai triển của

a) $(a+b)^8$;

b) $(a+b)^9$.

Lời giải.

a) Ta có $\mathrm{C}_8^0<\mathrm{C}_8^1<\mathrm{C}_8^2<\mathrm{C}_8^3<\mathrm{C}_8^4$ và $\mathrm{C}_8^4>\mathrm{C}_8^5>\mathrm{C}_8^6>\mathrm{C}_8^7>\mathrm{C}_8^8$.
Vậy hệ số lớn nhất trong khai triển của $(a+b)^8$ là $\mathrm{C}_8^4=70$.

b) Ta có $\mathrm{C}_9^0<\mathrm{C}_9^1<\mathrm{C}_9^2<\mathrm{C}_9^3<\mathrm{C}_9^4=\mathrm{C}_9^5$ và $\mathrm{C}_9^5>\mathrm{C}_9^6>\mathrm{C}_9^7>\mathrm{C}_9^8>\mathrm{C}_9^9$.
Vậy hệ số lớn nhất trong khai triển của $(a+b)^9$ là $\mathrm{C}_9^4=\mathrm{C}_9^5=126$.

BÀI 11. Biết rằng $(2+x)^{100}=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_{100}x^{100}$. Với giá trị nào của k $(0\leq k\leq 100)$ thì a_k lớn nhất.

Lời giải.

Số hạng tổng quát trong khai triển $(2+x)^{100}$ là $\mathrm{C}_{100}^k\cdot 2^{100-k}\cdot x^k$.
Do đó $a_k=\mathrm{C}_{100}^k\cdot 2^{100-k}$.

- Xét $a_k\leq a_{k+1}$

$$\begin{aligned}&\Leftrightarrow\ \mathrm{C}_{100}^k\cdot 2^{100-k}\leq \mathrm{C}_{100}^{k+1}\cdot 2^{99-k}\\&\Leftrightarrow\ \frac{100!}{(100-k)!k!}\cdot 2^{100-k}\leq\frac{100!}{(99-k)!(k+1)!}\cdot 2^{99-k}\\&\Leftrightarrow\ \frac{2}{100-k}\leq\frac{1}{k+1}\Leftrightarrow k\leq\frac{98}{3}.\end{aligned}$$

  Các giá trị k thỏa mãn là $\{0;1;2;\ldots;32\}$.
  Do đó $a_0<a_1<a_2<\ldots<a_{33}$.

- Xét $a_k>a_{k+1}$, ta được $k>\dfrac{98}{3}$. Các giá trị k thỏa mãn là $\{33;34;35;\ldots;99\}$.
  Do đó $a_{33}>a_{34}>\ldots>a_{100}$.
  Vậy với $k=33$ thì a_k lớn nhất.

3 Chứng minh, tính giá trị của biểu thức tổ hợp có sử dụng khai triển nhị thức Newton.

- ***Phương pháp:*** Sử dụng khai triển nhị thức Newton tổng quát $(a+b)^n=\sum\limits_{k=0}^{n}\mathrm{C}_n^ka^{n-k}b^k$, sau đó thay thế các giá trị a và b thích hợp.

- ***Một số hệ thức thường gặp:***

  a) $\mathrm{C}_n^k=\mathrm{C}_n^{n-k}$.
  b) $\mathrm{C}_{n-1}^{k-1}+\mathrm{C}_{n-1}^k=\mathrm{C}_n^k$.
  c) $\mathrm{C}_n^0+\mathrm{C}_n^1+\ldots+\mathrm{C}_n^k+\ldots+\mathrm{C}_n^n=2^n$.
  d) $\mathrm{C}_n^0-\mathrm{C}_n^1+\ldots+(-1)^k\mathrm{C}_n^k+\ldots+(-1)^n\mathrm{C}_n^n=0$.
  e) $\mathrm{C}_{2n}^0+\mathrm{C}_{2n}^2+\mathrm{C}_{2n}^4+..+\mathrm{C}_{2n}^{2n}=2^{2n-1}$.
  f) $\mathrm{C}_{2n}^1+\mathrm{C}_{2n}^3+\mathrm{C}_{2n}^5+\ldots.+\mathrm{C}_{2n}^{2n-1}=2^{2n-1}$.

VÍ DỤ 1. Với n là số nguyên dương, chứng minh rằng $1+4\mathrm{C}_n^1+4^2\mathrm{C}_n^2+\ldots+4^n\mathrm{C}_n^n=5^n$.

Lời giải.

Áp dụng khai triển nhị thức ta có
$VT=1+4\mathrm{C}_n^1+4^2\mathrm{C}_n^2+\ldots+4^n\mathrm{C}_n^n=\mathrm{C}_n^0+4\mathrm{C}_n^1+4^2\mathrm{C}_n^2+\ldots+4^n\mathrm{C}_n^n=(1+4)^n=5^n=VP$.

VÍ DỤ 2. Với n là số nguyên dương, chứng minh rằng

$$4^n\mathrm{C}_n^0-4^{n-1}\mathrm{C}_n^1+4^{n-2}\mathrm{C}_n^2+\ldots+(-1)^n\mathrm{C}_n^n=\mathrm{C}_n^0+2\mathrm{C}_n^1+2^2\mathrm{C}_n^2+\ldots+2^n\mathrm{C}_n^n.$$

Lời giải.

Trong khai triển nhị thức Newton dạng tổng quát
∘ Chọn $a=4,b=-1\Rightarrow 4^n\mathrm{C}_n^0-4^{n-1}\mathrm{C}_n^1+4^{n-2}\mathrm{C}_n^2+\ldots+(-1)^n\mathrm{C}_n^n=3^n$.
∘ Chọn $a=1,b=2\Rightarrow \mathrm{C}_n^0+2\mathrm{C}_n^1+2^2\mathrm{C}_n^2+\ldots+2^n\mathrm{C}_n^n=3^n$.
Từ đó ta có điều phải chứng minh.

VÍ DỤ 3. Tính tổng $S=2^{18}\mathrm{C}_{18}^0-2^{17}\mathrm{C}_{18}^1+2^{16}\mathrm{C}_{18}^2-\ldots+\mathrm{C}_{18}^{18}$.

Lời giải.

Các số hạng của tổng đều có dạng: $\mathrm{C}_{18}^k2^{18-k}(-1)^k$.

Do đó: $S=2^{18}\mathrm{C}_{18}^0-2^{17}\mathrm{C}_{18}^1+2^{16}\mathrm{C}_{18}^2-\ldots+\mathrm{C}_{18}^{18}=\displaystyle\sum_{k=0}^{18}\mathrm{C}_{18}^k2^{18-k}(-1)^k=(2-1)^{18}=1$.

VÍ DỤ 4. Tính tổng $S=\mathrm{C}_{10}^02^{11}3^1+\mathrm{C}_{10}^12^{10}3^2+\mathrm{C}_{10}^22^93^3+\ldots+\mathrm{C}_{10}^92^23^{10}+\mathrm{C}_{10}^{10}2^13^{11}$.

Lời giải.

$S=6\left(\mathrm{C}_{10}^02^{10}+\mathrm{C}_{10}^12^93+\mathrm{C}_{10}^22^83^2+\ldots+\mathrm{C}_{10}^923^9+\mathrm{C}_{10}^{10}3^{10}\right)=6(2+3)^{10}=6\cdot5^{10}$.

1. Bài tập tự luận

BÀI 1. Chứng minh

a) $\mathrm{C}_{2n}^0+\mathrm{C}_{2n}^1+\mathrm{C}_{2n}^2+\mathrm{C}_{2n}^3+\cdots+\mathrm{C}_{2n}^{2n-1}+\mathrm{C}_{2n}^{2n}=4^n$.

b) $\mathrm{C}_n^0\cdot3^n-\mathrm{C}_n^1\cdot3^{n-1}+\cdots+(-1)^n\mathrm{C}_n^n=\mathrm{C}_n^0+\mathrm{C}_n^1+\cdots+\mathrm{C}_n^n$.

Lời giải.

a) Xét nhị thức

$$(x+1)^{2n}=\mathrm{C}_{2n}^0x^{2n}+\mathrm{C}_{2n}^1x^{2n-1}+\mathrm{C}_{2n}^2x^{2n-2}+\mathrm{C}_{2n}^3x^{2n-3}+\cdots+\mathrm{C}_{2n}^{2n-1}x+\mathrm{C}_{2n}^{2n}.$$

Thay $x=1$ ta được

$$\mathrm{C}_{2n}^0+\mathrm{C}_{2n}^1+\mathrm{C}_{2n}^2+\mathrm{C}_{2n}^3+\cdots+\mathrm{C}_{2n}^{2n-1}+\mathrm{C}_{2n}^{2n}=2^{2n}.$$

Vậy $\mathrm{C}_{2n}^0+\mathrm{C}_{2n}^1+\mathrm{C}_{2n}^2+\mathrm{C}_{2n}^3+\cdots+\mathrm{C}_{2n}^{2n-1}+\mathrm{C}_{2n}^{2n}=4^n$.

b) Xét nhị thức $(x-1)^n=\mathrm{C}_n^0x^n-\mathrm{C}_n^1x^{n-1}+\cdots+(-1)^n\mathrm{C}_n^n$.
Thay $x=3$ ta được

$$\mathrm{C}_n^0\cdot3^n-\mathrm{C}_n^1\cdot3^{n-1}+\cdots+(-1)^n\mathrm{C}_n^n=2^n.$$

Lại có $\mathrm{C}_n^0+\mathrm{C}_n^1+\cdots+\mathrm{C}_n^n=2^n$.
Vậy $\mathrm{C}_n^0\cdot3^n-\mathrm{C}_n^1\cdot3^{n-1}+\cdots+(-1)^n\mathrm{C}_n^n=\mathrm{C}_n^0+\mathrm{C}_n^1+\cdots+\mathrm{C}_n^n$.

BÀI 2. Tính các tổng sau

a) $S=\mathrm{C}_5^0+\mathrm{C}_5^1+\mathrm{C}_5^2+\cdots+\mathrm{C}_5^5$.

b) $S=2\mathrm{C}_{2010}^1+2^3\mathrm{C}_{2010}^3+2^5\mathrm{C}_{2010}^5+\cdots+2^{2009}\mathrm{C}_{2010}^{2009}$.

Lời giải.

a) Ta có $S=\mathrm{C}_5^0+\mathrm{C}_5^1+\mathrm{C}_5^2+\cdots+\mathrm{C}_5^5=2^5=32$.

b) Xét nhị thức

$$(1+x)^{2010}=\mathrm{C}_{2010}^0+\mathrm{C}_{2010}^1x+\mathrm{C}_{2010}^2x^2+\mathrm{C}_{2010}^3x^3+\cdots+\mathrm{C}_{2010}^{2009}x^{2009}+\mathrm{C}_{2010}^{2010}x^{2010}.$$

Thay $x=2$ ta được

$$\mathrm{C}_{2010}^0+2\mathrm{C}_{2010}^1+2^2\mathrm{C}_{2010}^2+2^3\mathrm{C}_{2010}^3+\cdots+2^{2009}\mathrm{C}_{2010}^{2009}+2^{2010}\mathrm{C}_{2010}^{2010}=3^{2010}. \quad (1)$$

Thay $x=-2$ ta được

$$\mathrm{C}_{2010}^0-2\mathrm{C}_{2010}^1+2^2\mathrm{C}_{2010}^2-2^3\mathrm{C}_{2010}^3+\cdots-2^{2009}\mathrm{C}_{2010}^{2009}+2^{2010}\mathrm{C}_{2010}^{2010}=1. \quad (2)$$

Trừ hai vế (1) và (2) suy ra

$$2\left(2\mathrm{C}_{2010}^1+2^3\mathrm{C}_{2010}^3+2^5\mathrm{C}_{2010}^5+\cdots+2^{2009}\mathrm{C}_{2010}^{2009}\right)=3^{2010}-1.$$

Vậy $S=\dfrac{3^{2010}-1}{2}$.

BÀI 3. Tính tổng $S = \mathrm{C}_{15}^{8} + \mathrm{C}_{15}^{9} + \mathrm{C}_{15}^{10} + \ldots + \mathrm{C}_{15}^{15}$.

Lời giải.

Sử dụng tính chất $\mathrm{C}_n^k = \mathrm{C}_n^{n-k}$, ta có

$$2S = \mathrm{C}_{15}^{0} + \mathrm{C}_{15}^{1} + \mathrm{C}_{15}^{2} + \ldots + \mathrm{C}_{15}^{8} + \ldots + \mathrm{C}_{15}^{15} = 2^{15} \Rightarrow S = 2^{14}$$

BÀI 4. Tính tổng

a) $S = \mathrm{C}_5^0 + 2\mathrm{C}_5^1 + 2^2\mathrm{C}_5^2 + \cdots + 2^5\mathrm{C}_5^5$.

b) $S = 4^0\mathrm{C}_8^0 + 4^1\mathrm{C}_8^1 + 4^2\mathrm{C}_8^2 + \cdots + 4^8\mathrm{C}_8^8$.

Lời giải.

Xét khai triển $(a+b)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k a^{n-k} b^k$.

Trong khai triển trên, số mũ của a giảm dần từ n đến 0 và số mũ của b tăng dần từ 0 đến n.

a) Thay $a = 1, b = 2, n = 5$ vào khai triển $(a+b)^n$ ta được $S = (1+2)^5 = 3^5$.

b) Thay $a = 1, b = 4, n = 8$ vào khai triển $(a+b)^n$ ta được $S = (1+4)^8 = 5^8$.

BÀI 5. Với n là số nguyên dương, chứng minh $\mathrm{C}_n^1 + 2\mathrm{C}_n^2 + 3\mathrm{C}_n^3 + \ldots + n\mathrm{C}_n^n = n \cdot 2^{n-1}$.

Lời giải.

Đặt $S = \mathrm{C}_n^1 + 2\mathrm{C}_n^2 + 3\mathrm{C}_n^3 + \ldots + n\mathrm{C}_n^n$ $(*)$.

Áp dụng hệ thức $\mathrm{C}_n^k = \mathrm{C}_n^{n-k}$. Ta có

$$\begin{aligned} \mathrm{C}_n^1 &= \mathrm{C}_n^{n-1} \\ 2\mathrm{C}_n^2 &= 2\mathrm{C}_n^{n-2} \\ &\ldots\ldots \\ (n-1)\mathrm{C}_n^{n-1} &= (n-1)\mathrm{C}_n^1 \\ n\mathrm{C}_n^n &= n\mathrm{C}_n^0 \end{aligned}$$

Cộng vế với vế ta được $S = \mathrm{C}_n^{n-1} + 2\mathrm{C}_n^{n-2} + \ldots + (n-1)\mathrm{C}_n^1 + n\mathrm{C}_n^0$ $(**)$.

Từ $(*), (**)$ ta có $2S = n\left(\mathrm{C}_n^0 + \mathrm{C}_n^1 + \ldots + \mathrm{C}_n^{n-1} + \mathrm{C}_n^n\right) = n \cdot 2^n$.

Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

BÀI 6. Chứng minh rằng $\mathrm{C}_{2022}^0 + 2^2\mathrm{C}_{2022}^2 + \ldots + 2^{2022}\mathrm{C}_{2022}^{2022} = \dfrac{3^{2022}+1}{2}$

Lời giải.

$(1+x)^{2022} = \sum\limits_{k=0}^{2022} \mathrm{C}_{2022}^k x^k$.

$(1-x)^{2022} = \sum\limits_{k=0}^{2022} \mathrm{C}_{2022}^k (-x)^k$.

Cộng vế với vế ta được $(1+x)^{2022} + (1-x)^{2022} = 2\left(\mathrm{C}_{2022}^0 + \mathrm{C}_{2022}^2 x^2 + \ldots + \mathrm{C}_{2022}^{2022} x^{2022}\right)$.

Chọn $x = 2$ ta có $\mathrm{C}_{2022}^0 + 2^2\mathrm{C}_{2022}^2 + \ldots + 2^{2022}\mathrm{C}_{2022}^{2022} = \dfrac{3^{2022}+1}{2}$.

BÀI 7. Với p, a, b là các số nguyên dương và $p \le a, b$. Chứng minh rằng

$$\mathrm{C}_a^p + \mathrm{C}_a^{p-1}\mathrm{C}_b^1 + \mathrm{C}_a^{p-2}\mathrm{C}_b^2 + \ldots + \mathrm{C}_a^{p-q}\mathrm{C}_b^q + \ldots + \mathrm{C}_b^p = \mathrm{C}_{a+b}^p.$$

Lời giải.

Xét hai khai triển

$$(1+x)^a = \mathrm{C}_a^0 + \mathrm{C}_a^1 x + \mathrm{C}_a^2 x^2 \ldots + \mathrm{C}_a^a x^a.$$

$$(1+x)^b = \mathrm{C}_b^0 + \mathrm{C}_b^1 x + \mathrm{C}_b^2 x^2 \ldots + \mathrm{C}_b^b x^b.$$

Suy ra $(1+x)^{a+b} = M + \left(\mathrm{C}_a^p + \mathrm{C}_a^{p-1}\mathrm{C}_b^1 + \ldots + \mathrm{C}_a^{p-q}\mathrm{C}_b^q + \ldots + \mathrm{C}_b^p\right) x^p$ $(*)$.

Với M là một đa thức không chứa x^p.

Mặt khác: $(1+x)^{a+b} = \mathrm{C}_{a+b}^0 + \mathrm{C}_{a+b}^1 x + \mathrm{C}_{a+b}^2 x^2 + \ldots + \mathrm{C}_{a+b}^p x^p + \ldots + \mathrm{C}_{a+b}^{a+b} x^{a+b}$ $(**)$.

Đồng nhất hệ số ở $(*), (**)$. Ta có điều phải chứng minh.

BÀI 8. Với n là số nguyên dương, chứng minh rằng: $\left(\mathrm{C}_n^0\right)^2 + \left(\mathrm{C}_n^1\right)^2 + \ldots + \left(\mathrm{C}_n^n\right)^2 = \left(\mathrm{C}_{2n}^n\right)^2$.

Lời giải.

Áp dụng kết quả $\mathrm{C}_a^p + \mathrm{C}_a^{p-1}\mathrm{C}_b^1 + \mathrm{C}_a^{p-2}\mathrm{C}_b^2 + \ldots + \mathrm{C}_a^{p-q}\mathrm{C}_b^q + \ldots + \mathrm{C}_b^p = \mathrm{C}_{a+b}^p$ với $p = a = b = n$. Ta có điều phải chứng minh.

BÀI 9. Tính tổng: $S=3^{2019}-\mathrm{C}_{2019}^{1}3^{2018}\cdot 4+\mathrm{C}_{2019}^{2}3^{2017}\cdot 4^{2}-\ldots+\mathrm{C}_{2019}^{2018}3\cdot 4^{2018}-4^{2019}$

Lời giải.

$S=3^{2019}-\mathrm{C}_{2019}^{1}3^{2018}\cdot 4+\mathrm{C}_{2019}^{2}3^{2017}\cdot 4^{2}-\ldots+\mathrm{C}_{2019}^{2018}3\cdot 4^{2018}-4^{2019}=(3-4)^{2019}=-1.$

BÀI 10. Tính tổng $S=\mathrm{C}_{2004}^{0}+2^{2}\mathrm{C}_{2004}^{1}+\ldots+2^{2005}\mathrm{C}_{2004}^{2004}$.

Lời giải.

Ta có

$S=\mathrm{C}_{2004}^{0}+2^{2}\mathrm{C}_{2004}^{1}+\ldots+2^{2005}\mathrm{C}_{2004}^{2004}$

$\quad=2\left(\mathrm{C}_{2004}^{0}+2\mathrm{C}_{2004}^{1}+\ldots+2^{2004}\mathrm{C}_{2004}^{2004}\right)-1=2.3^{2004}-1$

BÀI 11. Tính tổng $S=\mathrm{C}_{2018}^{0}+3^{2}\mathrm{C}_{2018}^{2}+3^{4}\mathrm{C}_{2018}^{4}+\ldots+3^{2018}\mathrm{C}_{2018}^{2018}$.

Lời giải.

Vẫn sử dụng nhị thức với $a=1; b=3$ và $n=2018$.

Các số hạng của tổng đều có dạng: $\mathrm{C}_{2018}^{k}1^{2018-k}3^{k}$ với k chẵn. Do đó ta triệt tiêu số hạng "lẻ" bằng cách bổ sung nhị thức với $a=-1; b=3$ và $n=2018$. Khi đó:

◦ $S_1=\mathrm{C}_{2018}^{0}+3^{1}\mathrm{C}_{2018}^{1}+3^{2}\mathrm{C}_{2018}^{2}+\ldots+3^{2018}\mathrm{C}_{2018}^{2018}=4^{2018}$.

◦ $S_1=\mathrm{C}_{2018}^{0}-3^{1}\mathrm{C}_{2018}^{1}+3^{2}\mathrm{C}_{2018}^{2}-\ldots+3^{2018}\mathrm{C}_{2018}^{2018}=2^{2018}$.

$S=\dfrac{S_1+S_2}{2}=\dfrac{4^{2018}+2^{2018}}{2}$.

Tổng quát: Với $a\neq 0$.

- $S=\mathrm{C}_{2n}^{0}+a^{2}\mathrm{C}_{2n}^{2}+a^{4}\mathrm{C}_{2n}^{4}+\ldots+a^{2n}\mathrm{C}_{2n}^{2n}=\dfrac{(a+1)^{2n}+(a-1)^{2n}}{2}$.
- $S=a\mathrm{C}_{2n}^{1}+a^{3}\mathrm{C}_{2n}^{3}+a^{5}\mathrm{C}_{2n}^{5}+\ldots+a^{2n-1}\mathrm{C}_{2n}^{2n-1}=\dfrac{(a+1)^{2n}-(a-1)^{2n}}{2}$.

BÀI 12. Chứng minh

a) $\mathrm{C}_{2n}^{0}-\mathrm{C}_{2n}^{1}+\mathrm{C}_{2n}^{2}-\mathrm{C}_{2n}^{3}+\cdots-\mathrm{C}_{2n}^{2n-1}+\mathrm{C}_{2n}^{2n}=0$.

b) $3^{16}\mathrm{C}_{16}^{0}-3^{15}\mathrm{C}_{16}^{1}+3^{14}\mathrm{C}_{16}^{2}-\cdots 3\mathrm{C}_{16}^{15}+\mathrm{C}_{16}^{16}=2^{16}$.

c) $\mathrm{C}_{2n}^{0}+\mathrm{C}_{2n}^{2}\cdot 3^{2}+\mathrm{C}_{2n}^{4}\cdot 3^{4}+\cdots+\mathrm{C}_{2n}^{2n}\cdot 3^{2n}=2^{2n-1}\cdot(2^{2n}+1)$.

Lời giải.

a) Ta có
$$VP=0^{2n}=(1-1)^{2n}=\mathrm{C}_{2n}^{0}-\mathrm{C}_{2n}^{1}+\mathrm{C}_{2n}^{2}-\mathrm{C}_{2n}^{3}+\cdots-\mathrm{C}_{2n}^{2n-1}+\mathrm{C}_{2n}^{2n}=VT.$$

b) Ta có
$$VP=(3-1)^{16}=3^{16}\mathrm{C}_{16}^{0}-3^{15}\mathrm{C}_{16}^{1}+3^{14}\mathrm{C}_{16}^{2}-\cdots 3\mathrm{C}_{16}^{15}+\mathrm{C}_{16}^{16}=VT.$$

c) Ta có
$$\begin{aligned}
&4^{2n}=(3+1)^{2n}=\mathrm{C}_{2n}^{0}+3^{1}\mathrm{C}_{2n}^{1}+3^{2}\mathrm{C}_{2n}^{2}+\cdots+3^{2n-1}\mathrm{C}_{2n}^{2n-1}+3^{2n}\mathrm{C}_{2n}^{2n}.\\
&2^{2n}=(3-1)^{2n}=\mathrm{C}_{2n}^{0}-3^{1}\mathrm{C}_{2n}^{1}+3^{2}\mathrm{C}_{2n}^{2}-\cdots-3^{2n-1}\mathrm{C}_{2n}^{2n-1}+3^{2n}\mathrm{C}_{2n}^{2n}.\\
\Rightarrow\ &4^{2n}+2^{2n}=2\left(\mathrm{C}_{2n}^{0}+\mathrm{C}_{2n}^{2}\cdot 3^{2}+\mathrm{C}_{2n}^{4}\cdot 3^{4}+\cdots+\mathrm{C}_{2n}^{2n}\cdot 3^{2n}\right)\\
\Rightarrow\ &VT=\frac{4^{2n}+2^{2n}}{2}=2^{2n-1}\cdot\left(2^{2n}+1\right)=VP.
\end{aligned}$$

BÀI 13. Tìm số nguyên dương n thỏa mãn

a) $\mathrm{C}_{2n}^{0}+\mathrm{C}_{2n}^{2}+\mathrm{C}_{2n}^{4}+\cdots+\mathrm{C}_{2n}^{2n}=512$.

b) $\mathrm{C}_{2n+1}^{1}+\mathrm{C}_{2n+1}^{3}+\mathrm{C}_{2n+1}^{5}+\cdots+\mathrm{C}_{2n+1}^{2n+1}=1024$.

Lời giải.

a) Ta có
$$\begin{aligned}
&2^{2n}=(1+1)^{2n}=\mathrm{C}_{2n}^{0}+\mathrm{C}_{2n}^{1}+\mathrm{C}_{2n}^{2}+\cdots+\mathrm{C}_{2n}^{2n-1}+\mathrm{C}_{2n}^{2n}.\\
&0^{2n}=(1-1)^{2n}=\mathrm{C}_{2n}^{0}-\mathrm{C}_{2n}^{1}+\mathrm{C}_{2n}^{2}-\cdots-\mathrm{C}_{2n}^{2n-1}+\mathrm{C}_{2n}^{2n}.\\
\Rightarrow\ &2^{2n}+0^{2n}=2\left(\mathrm{C}_{2n}^{0}+\mathrm{C}_{2n}^{2}+\mathrm{C}_{2n}^{4}+\cdots+\mathrm{C}_{2n}^{2n}\right)\\
\Rightarrow\ &2^{2n}=2\cdot 512\Rightarrow 2^{2n}=2^{10}\Rightarrow 2n=10\Rightarrow n=5.
\end{aligned}$$

Vậy $n=5$ thỏa yêu cầu bài toán.

b) Ta có

$$\begin{aligned}
& 2^{2n+1} = (1+1)^{2n+1} = \mathrm{C}_{2n+1}^0 + \mathrm{C}_{2n+1}^1 + \mathrm{C}_{2n+1}^2 + \cdots + \mathrm{C}_{2n+1}^{2n} + \mathrm{C}_{2n+1}^{2n+1}.\\
& 0^{2n+1} = (1-1)^{2n+1} = \mathrm{C}_{2n+1}^0 - \mathrm{C}_{2n+1}^1 + \mathrm{C}_{2n+1}^2 - \cdots + \mathrm{C}_{2n+1}^{2n} - \mathrm{C}_{2n+1}^{2n+1}.\\
\Rightarrow\ & 2^{2n+1} - 0^{2n+1} = 2\cdot\left(\mathrm{C}_{2n+1}^1 + \mathrm{C}_{2n+1}^3 + \mathrm{C}_{2n+1}^5 + \cdots + \mathrm{C}_{2n+1}^{2n+1}\right)\\
\Rightarrow\ & 2^{2n+1} = 2\cdot 1024 \Rightarrow 2^{2n+1} = 2^{11} \Rightarrow 2n+1 = 11 \Rightarrow n = 5.
\end{aligned}$$

Vậy $n = 5$ thỏa yêu cầu bài toán.

C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

CÂU 1. Cho biết $2\mathrm{C}_n^2 - 3\mathrm{A}_n^1 = 5(n+2)$ hỏi khai triển $(2x-1)^{n+1}$ có bao nhiêu số hạng?

A 11. B 12. C 10. D 9.

Lời giải.

Điều kiện: $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.
Phương trình tương đương

$$n(n-1) - 3n = 5(n+2) \Leftrightarrow n = 10.$$

Khi đó $(2n-1)^{11}$ có tất cả 12 số hạng.

Chọn đáp án B .... □

CÂU 2. Số hạng tổng quát trong khai triển biểu thức $\left(x - \dfrac{2}{x^2}\right)^{15}$, $x \neq 0$ là

A $(-2)^k\,\mathrm{C}_{15}^k\,x^{15-3k}$. B $2^k\,\mathrm{C}_{15}^k\,x^{15-3k}$. C $2^k\,\mathrm{C}_{15}^k\,x^{15-2k}$. D $(-2)^k\,\mathrm{C}_{15}^k\,x^{15-2k}$.

Lời giải.

Ta có $\left(x - \dfrac{2}{x^2}\right)^{15} = \displaystyle\sum_{k=0}^{15} \mathrm{C}_{15}^k\,x^{15-k}\left(-\dfrac{2}{x^2}\right)^k = \sum_{k=0}^{15}\mathrm{C}_{15}^k(-2)^k\,x^{15-3k}$.
Do đó, số hạng tổng quát trong khai triển trên là $\mathrm{C}_{15}^k(-2)^k\,x^{15-3k}$.

Chọn đáp án A .... □

CÂU 3. Khai triển nhị thức $(x-2)^4$ ta được biểu thức nào sau đây?

A $-x^4 + 8x^3 - 24x^2 + 32x - 16$. B $x^4 + 8x^3 + 24x^2 + 32x + 16$.
C $x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 32x + 16$. D $x^4 + 8x^3 - 24x^2 + 32x - 16$.

Lời giải.

Ta có $(x-2)^4 = \displaystyle\sum_{k=0}^{4}\mathrm{C}_4^k\cdot x^{4-k}\cdot(-2)^k = x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 32x + 16$.

Chọn đáp án C .... □

CÂU 4. Biểu diễn $\left(3+\sqrt{2}\right)^5 - \left(3-\sqrt{2}\right)^5$ dưới dạng $a + b\sqrt{2}$ với $a, b \in \mathbb{Z}$. Giá trị của biểu thức $M = a + b$ là

A 1177. B 1178. C 1179. D 1180.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}
\left(3+\sqrt{2}\right)^5 &= 3^5 + 5\cdot 3^4\cdot\sqrt{2} + 10\cdot 3^3\cdot\left(\sqrt{2}\right)^2 + 10\cdot 3^2\cdot\left(\sqrt{2}\right)^3 + 5\cdot 3\cdot\left(\sqrt{2}\right)^4 + \left(\sqrt{2}\right)^5\\
&= 243 + 405\sqrt{2} + 540 + 180\sqrt{2} + 60 + 4\sqrt{2}\\
&= 843 + 589\sqrt{2}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left(3-\sqrt{2}\right)^5 &= 3^5 - 5\cdot 3^4\cdot\sqrt{2} + 10\cdot 3^3\cdot\left(\sqrt{2}\right)^2 - 10\cdot 3^2\cdot\left(\sqrt{2}\right)^3 + 5\cdot 3\cdot\left(\sqrt{2}\right)^4 - \left(\sqrt{2}\right)^5\\
&= 243 - 405\sqrt{2} + 540 - 180\sqrt{2} + 60 - 4\sqrt{2}\\
&= 843 - 589\sqrt{2}.
\end{aligned}$$

$\Rightarrow \left(3+\sqrt{2}\right)^5 - \left(3-\sqrt{2}\right)^5 = 1178\sqrt{2}$.
Vậy $M = 0 + 1178 = 1178$.

Chọn đáp án B .... □

CÂU 5. Hệ số của x^4 trong khai triển nhị thức $(3x-4)^5$ là

Ⓐ 1620. Ⓑ 60. Ⓒ -60. Ⓓ -1620.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}(3x-4)^5 &= \mathrm{C}_5^0(3x)^5 + \mathrm{C}_5^1(3x)^4\cdot(-4) + \mathrm{C}_5^2(3x)^3\cdot(-4)^2\\ &\quad + \mathrm{C}_5^3(3x)^2\cdot(-4)^3 + \mathrm{C}_5^4(3x)\cdot(-4)^4 + \mathrm{C}_5^5(-4)^5.\end{aligned}$$

Suy ra hệ số của x^4 là

$$\mathrm{C}_5^1\cdot 3^4\cdot(-4) = -1620.$$

Chọn đáp án Ⓓ .... □

CÂU 6. Hệ số của x^2 trong khai triển $(1-2x)^4$ là

Ⓐ 24. Ⓑ -24. Ⓒ 48. Ⓓ -48.

Lời giải.

Ta có

$$(1-2x)^4 = \mathrm{C}_4^0 + \mathrm{C}_4^1\cdot(-2x) + \mathrm{C}_4^2\cdot(-2x)^2 + \mathrm{C}_4^3\cdot(-2x)^3 + \mathrm{C}_4^4\cdot(-2x)^4.$$

Hệ số của x^2 là

$$\mathrm{C}_4^2\cdot(-2)^2 = 24.$$

Chọn đáp án Ⓐ .... □

CÂU 7. Hệ số của x^3 trong khai triển $(3+2x)^5$ bằng

Ⓐ 1080. Ⓑ 720. Ⓒ 50. Ⓓ 100.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}(3+2x)^5 &= \mathrm{C}_5^0 3^5 + \mathrm{C}_5^1\cdot 3^4\cdot(2x) + \mathrm{C}_5^2\cdot 3^3\cdot(2x)^2\\ &\quad + \mathrm{C}_5^3\cdot 3^2\cdot(2x)^3 + \mathrm{C}_5^4\cdot 3^1\cdot(2x)^4 + \mathrm{C}_5^5\cdot(2x)^5.\end{aligned}$$

Hệ số x^3 là

$$\mathrm{C}_5^3\cdot 3^2\cdot 2^3 = 720.$$

Chọn đáp án Ⓑ .... □

CÂU 8. Hệ số của a^3b^2 trong khai triển $(a+2b)^5$ bằng

Ⓐ 5. Ⓑ 10. Ⓒ 4. Ⓓ 6.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}(a+2b)^5 &= \mathrm{C}_5^0a^5 + \mathrm{C}_5^1a^4b + \mathrm{C}_5^2a^3b^2 + \mathrm{C}_5^3a^2b^3 + \mathrm{C}_5^4ab^4 + \mathrm{C}_5^5b^5\\ &= a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5.\end{aligned}$$

Chọn đáp án Ⓑ .... □

CÂU 9. Số hạng không chứa x trong khai triển $\left(x+\dfrac{2}{x}\right)^4$, $x\neq 0$ bằng

Ⓐ 0. Ⓑ 12. Ⓒ 24. Ⓓ 6.

Lời giải.

Ta có

$$\left(x+\frac{2}{x}\right)^4 = \mathrm{C}_4^0x^4 + \mathrm{C}_4^1\cdot x^3\cdot\left(\frac{2}{x}\right) + \mathrm{C}_4^2\cdot x^2\cdot\left(\frac{2}{x}\right)^2 + \mathrm{C}_4^3\cdot x\cdot\left(\frac{2}{x}\right)^3 + \mathrm{C}_4^4\cdot\left(\frac{2}{x}\right)^4.$$

Số hạng không chứa x là

$$\mathrm{C}_4^2\cdot x^2\cdot\left(\frac{2}{x}\right)^2 = \mathrm{C}_4^2\cdot 2^2 = 24.$$

Chọn đáp án Ⓒ .... □

CÂU 10. Số hạng không chứa x trong khai triển $\left(x^3-\dfrac{1}{x^2}\right)^5$, $x\neq 0$ bằng

Ⓐ 0. Ⓑ 10. Ⓒ -10. Ⓓ 6.

Lời giải.

Ta có

$$\left(x^3-\frac{1}{x^2}\right)^5=\mathrm{C}_5^0(x^3)^5+\mathrm{C}_5^1(x^3)^4\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)+\mathrm{C}_5^2(x^3)^3\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)^2+\mathrm{C}_5^3(x^3)^2\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)^3+\mathrm{C}_5^4(x^3)^1\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)^4+\mathrm{C}_5^5\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)^5.$$

Số hạng không chứa x bằng

$$\mathrm{C}_5^3(x^3)^2\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)^3=-10.$$

Chọn đáp án C ....

CÂU 11. Biết rằng $(1-\sqrt{2})^4=a+b\sqrt{2}$ với $a,\ b$ là các số nguyên. Giá trị của b bằng

Ⓐ -11. Ⓑ 11. Ⓒ 12. Ⓓ -12.

Lời giải.

Ta có

$$(1-\sqrt{2})^4=\mathrm{C}_4^0 1^4+\mathrm{C}_4^1\cdot1^3\cdot(-\sqrt{2})+\mathrm{C}_4^2\cdot1^2\cdot(-\sqrt{2})^2+\mathrm{C}_4^3\cdot1^1\cdot(-\sqrt{2})^3+\mathrm{C}_4^4\cdot(-\sqrt{2})^4.$$

Suy ra

$$b=-\mathrm{C}_4^1-\mathrm{C}_4^3\cdot2=-12$$

Chọn đáp án D ....

CÂU 12. Biết rằng $\left(1+\sqrt{3}\right)^5-2\left(1-\sqrt{3}\right)^4=a+b\sqrt{3}$ với $a,\ b$ là các số nguyên. Tính $T=a-b$

Ⓐ $T=96$. Ⓑ $T=-56$. Ⓒ $T=56$. Ⓓ $T=-96$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}\left(1+\sqrt{3}\right)^5&=\mathrm{C}_5^0+\mathrm{C}_5^1\sqrt{3}+\mathrm{C}_5^2\left(\sqrt{3}\right)^2+\mathrm{C}_5^3\left(\sqrt{3}\right)^3+\mathrm{C}_5^4\left(\sqrt{3}\right)^4+\mathrm{C}_5^5\left(\sqrt{3}\right)^5\\&=76+44\sqrt{3}.\end{aligned}$$

và

$$\begin{aligned}\left(1-\sqrt{3}\right)^4&=\mathrm{C}_4^0+\mathrm{C}_4^1\left(-\sqrt{3}\right)+\mathrm{C}_4^2\left(-\sqrt{3}\right)^2+\mathrm{C}_4^3\left(-\sqrt{3}\right)^3+\mathrm{C}_4^4\left(-\sqrt{3}\right)^4\\&=28-16\sqrt{3}\end{aligned}$$

Suy ra

$$\left(1+\sqrt{3}\right)^5-2\left(1-\sqrt{3}\right)^4=20+76\sqrt{3}.$$

Do đó $a-b=-56$.

Chọn đáp án B ....

CÂU 13. Xét khai triển $(a+bx)^5=a_0+a_1x+\cdots+a_5x^5$. Biết $a_3=40$ và $a_4=10$. Tính $T=a\cdot b$

Ⓐ $T=2$. Ⓑ $T=1$. Ⓒ $T=\frac{1}{2}$. Ⓓ $T=\frac{1}{4}$.

Lời giải.

Ta có

$$(a+bx)^5=\mathrm{C}_5^0a^5+\mathrm{C}_5^1a^4bx+\mathrm{C}_5^2a^3b^2x^2+\mathrm{C}_5^3a^2b^3x^3+\mathrm{C}_5^4ab^4x^4+\mathrm{C}_5^5b^5x^5.$$

Suy ra $a_3=\mathrm{C}_5^3a^2b^3=10a^2b^3=40$ và $a_4=\mathrm{C}_5^4ab^4=5ab^4=10$. Do đó

$$\frac{a_3}{a_4}=\frac{2a}{b}=4\Rightarrow a=2b\Rightarrow b=1,\ a=2\Rightarrow T=2.$$

Chọn đáp án A ....

CÂU 14. Xét khai triển $f(x)=(2+x)^5-3(1+2x)^4=a_0+a_1x+\cdots+a_5x^5$. Tính a_4

Ⓐ $a_4=71$. Ⓑ $a_4=74$. Ⓒ $a_4=21$. Ⓓ $a_4=26$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}(2+x)^5&=\mathrm{C}_5^02^5+\mathrm{C}_5^12^4x+\mathrm{C}_5^22^3x^2+\mathrm{C}_5^32^2x^3+\mathrm{C}_5^42^1x^4+\mathrm{C}_5^5x^5\\(1+2x)^4&=\mathrm{C}_4^0+\mathrm{C}_4^1\cdot2x+\mathrm{C}_4^2(2x)^2+\mathrm{C}_4^3(2x)^3+\mathrm{C}_4^4(2x)^4.\end{aligned}$$

Suy ra

$$a_4=\mathrm{C}_5^42^1+\mathrm{C}_4^42^4=26.$$

Chọn đáp án D ....

CÂU 15. Hệ số của x^6 trong khai triển $\left(\dfrac{1}{x}+x^3\right)^{10}$ bằng

Ⓐ 210. Ⓑ 252. Ⓒ 165. Ⓓ 792.

Lời giải.

Ta có

$$\left(\frac{1}{x}+x^3\right)^{10}=\sum_{k=0}^{10}\mathrm{C}_{10}^k(x^{-1})^k(x^3)^{10-k}.$$

Để có hạng tử x^6 thì $-k+3(10-k)=6\Leftrightarrow k=6$.
Vậy hệ số của x^6 là $\mathrm{C}_{10}^6=210$.

Chọn đáp án (A) □

CÂU 16. Trong khai triển $\left(\dfrac{1}{x^3}+x^5\right)^{12}$ với $x\neq 0$. Số hạng chứa x^4 là

Ⓐ 792. Ⓑ 924. Ⓒ $792x^4$. Ⓓ $924x^4$.

Lời giải.

Số hạng tổng quát của khai triển là

$$\mathrm{C}_{12}^k\left(\frac{1}{x^3}\right)^{12-k}\cdot\left(x^5\right)^k=\mathrm{C}_{12}^k\cdot x^{8k-36}.$$

Xét số hạng chứa x^4 thì

$$8k-36=4\Leftrightarrow k=5.$$

Vậy số hạng chứa x^4 là $\mathrm{C}_{12}^5x^4=792x^4$.

Chọn đáp án (C) □

CÂU 17. Tìm số hạng chứa x^7 trong khai triển nhị thức $\left(2x^2-\dfrac{1}{x}\right)^8$.

Ⓐ -1792. Ⓑ $-1792x^7$. Ⓒ 1792. Ⓓ $1792x^7$.

Lời giải.

Ta có

$$\left(2x^2-\frac{1}{x}\right)^8=\sum_{k=0}^{8}\mathrm{C}_8^k(2x^2)^{8-k}\left(-\frac{1}{x}\right)^k=\sum_{k=0}^{8}\mathrm{C}_8^k2^{8-k}(-1)^kx^{16-3k}.$$

Số hạng chứa x^7 ứng với

$$16-3k=7\Leftrightarrow k=3.$$

Khi đó số hạng chứa x^7 là

$$\mathrm{C}_8^3 2^{8-3}(-1)^3x^7=-1792x^7.$$

Chọn đáp án (B) □

CÂU 18. Trong khai triển $(1+3x)^{20}$ với số mũ tăng dần, hệ số của số hạng đứng chính giữa là

Ⓐ $3^{11}\mathrm{C}_{20}^{11}$. Ⓑ $3^{12}\mathrm{C}_{20}^{12}$. Ⓒ $3^{10}\mathrm{C}_{20}^{10}$. Ⓓ $3^9\mathrm{C}_{20}^9$.

Lời giải.

Ta có

$$(1+3x)^{20}=\sum_{k=0}^{20}\mathrm{C}_{20}^k1^{20-k}(3x)^k=\sum_{k=0}^{20}\mathrm{C}_{20}^k\cdot 3^k\cdot x^k.$$

Vế phải của khai triển có 21 số hạng. Do đó số hạng đứng chính giữa sẽ là số hạng thứ 11, tương ứng với $k=10$.
Vậy, hệ số cần tìm là $3^{10}\mathrm{C}_{20}^{10}$.

Chọn đáp án (C) □

CÂU 19. Số hạng không chứa x trong khai triển $\left(x-\dfrac{1}{x^2}\right)^{45}$ là

Ⓐ C_{45}^{15}. Ⓑ C_{45}^{30}. Ⓒ $-\mathrm{C}_{45}^5$. Ⓓ $-\mathrm{C}_{45}^{15}$.

Lời giải.

Điều kiện $x\neq 0$.
Khi đó ta có

$$\left(x-\frac{1}{x^2}\right)^{45}=\sum_{k=0}^{45}(-1)^k\mathrm{C}_{45}^kx^{45-k}\left(\frac{1}{x^2}\right)^k=\sum_{k=0}^{k=45}(-1)^k\mathrm{C}_{45}^kx^{45-3k}.$$

Suy ra số hạng thứ $k+1$ là
$$(-1)^k \mathrm{C}_{45}^k x^{45-3k}$$
để thỏa mãn bài toán
$$45-3k=0 \Leftrightarrow k=15.$$
Khi đó số hạng không chứa x là $(-1)^{15}\mathrm{C}_{45}^{15}=-\mathrm{C}_{45}^{15}$.

Chọn đáp án D

CÂU 20. Tìm hệ số của x^5 trong khai triển $\left(2x-\dfrac{3}{x^2}\right)^{11}$.

A -253440. B 55. C 28160. D 253440.

Lời giải.

Số hạng tổng quát có dạng
$$T_{k+1}=\mathrm{C}_{11}^k(2x)^{11-k}\cdot\left(-\frac{3}{x^2}\right)^k=\mathrm{C}_{11}^k\cdot 2^{11-k}\cdot(-3)^k\cdot\frac{x^{11-k}}{(x^2)^k}=\mathrm{C}_{11}^k\cdot 2^{11-k}\cdot(-3)^k\cdot x^{11-3k}.$$
Số hạng này chứa x^5 khi $11-3k=5\Leftrightarrow k=2$.
Vậy hệ số của x^5 là $T_3=\mathrm{C}_{11}^2\cdot 2^9\cdot(-3)^2=253440$.

Chọn đáp án D

CÂU 21. Tìm số hạng không chứa x trong khai triển $\left(\dfrac{1}{x}-x^2\right)^{12}$

A 495. B -495. C 924. D -924.

Lời giải.

Số hạng tổng quát của khai triển là
$$(-1)^k\mathrm{C}_{12}^k x^{3k-12}.$$
Số hạng không chứa x trong khai triển ứng với $k=4$ và bằng
$$(-1)^4\mathrm{C}_{12}^4=495.$$

Chọn đáp án A

CÂU 22. Hệ số của x^5 trong khai triển nhị thức $x(2x-1)^6+(3x-1)^8$ bằng

A -13368. B 13368. C -13848. D 13848.

Lời giải.

$$\begin{aligned}\text{Ta có } x(2x-1)^6+(3x-1)^8&=x\sum_{k=0}^{6}\mathrm{C}_6^k\cdot(2x)^k\cdot(-1)^{6-k}+\sum_{l=0}^{8}\mathrm{C}_8^l\cdot(3x)^l\cdot(-1)^{8-l}\\&=x\sum_{k=0}^{6}\mathrm{C}_6^k\cdot(2x)^k\cdot(-1)^{6-k}+\sum_{l=0}^{8}\mathrm{C}_8^l\cdot(3x)^l\cdot(-1)^{8-l}\end{aligned}$$
Suy ra hệ số của x^5 trong khai triển nhị thức là: $\mathrm{C}_6^4\cdot 2^4\cdot(-1)^{6-4}+\mathrm{C}_8^5\cdot 3^5\cdot(-1)^{6-5}=-13368$.

Chọn đáp án A

CÂU 23. Biết rằng hệ số x^{n-2} trong khai triển $\left(x-\dfrac{1}{4}\right)^n$ bằng 31. Tìm n.

A 30. B 32. C 31. D 33.

Lời giải.

Số hạng thứ $k+1$ của khai triển nhị thức $(a+b)^n$ là $T_{k+1}=\mathrm{C}_n^k a^k b^{n-k}$.

Do đó ta có $T_{n-2}=\mathrm{C}_n^{n-2}x^{n-2}\left(\dfrac{-1}{4}\right)^2$.

Suy ra $\mathrm{C}_n^{n-2}\left(\dfrac{-1}{4}\right)^2=31\Leftrightarrow n^2-n-31\cdot 32=0\Leftrightarrow n=32$.

Chọn đáp án B

CÂU 24. Với n là số nguyên dương thỏa mãn $\mathrm{A}_n^2-2\mathrm{C}_{n+2}^2+82=0$, số hạng không chứa x trong khai triển của biểu thức $\left(x^3-\dfrac{3}{x}\right)^n$ bằng

A -15504. B 15504. C $-15504\cdot 3^{15}$. D $15504\cdot 3^{15}$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} n \geq 2 \\ n \in N. \end{cases}$

Ta có

$$\begin{aligned} & \mathrm{A}_n^2 - 2\mathrm{C}_{n+2}^2 + 82 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \frac{n!}{(n-2)!} - 2\frac{(n+2)!}{n! \cdot 2!} + 82 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & n(n-1) - (n+2)(n+1) + 82 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & n^2 - n - n^2 - 3n - 2 + 82 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & -4n + 80 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & n = 20. \end{aligned}$$

Số hạng tổng quát trong khai triển $\left(x^3 - \dfrac{3}{x}\right)^{20}$ là

$$\mathrm{T}_{k+1} = \mathrm{C}_{20}^k \left(x^3\right)^{20-k} \left(\frac{-3}{x}\right)^k = \mathrm{C}_{20}^k (-3)^k x^{60-4k}.$$

Ta có $60 - 4k = 0 \Leftrightarrow k = 15$.
Vậy số hạng không chứa x là $\mathrm{C}_{20}^{15} (-3)^{15} = -15504 \cdot 3^{15}$.

Chọn đáp án C ……………………………………………………………… □

CÂU 25. Tính tổng $S = \mathrm{C}_{20}^0 + \mathrm{C}_{20}^1 + \mathrm{C}_{20}^2 + \ldots + \mathrm{C}_{20}^{20}$.

A. $S = 0$. B. $S = 1$. C. $S = 2$. D. $S = 2^{20}$.

Lời giải.

$$2^{20} = (1+1)^{20} = \mathrm{C}_{20}^0 + \mathrm{C}_{20}^1 + \mathrm{C}_{20}^2 + \ldots + \mathrm{C}_{20}^{20}.$$

Chọn đáp án D ……………………………………………………………… □

CÂU 26. Tính tổng $S = \mathrm{C}_{20}^0 - \mathrm{C}_{20}^1 + \mathrm{C}_{20}^2 - \ldots + \mathrm{C}_{20}^{20}$.

A. $S = 0$. B. $S = 1$. C. $S = -2$. D. $S = (-2)^{20}$.

Lời giải.

$$0 = (1-1)^{20} = \mathrm{C}_{20}^0 - \mathrm{C}_{20}^1 + \mathrm{C}_{20}^2 - \ldots + \mathrm{C}_{20}^{20}.$$

Chọn đáp án A ……………………………………………………………… □

CÂU 27. Tính tổng $S = \mathrm{C}_{20}^0 + 2\mathrm{C}_{20}^1 + 2^2\mathrm{C}_{20}^2 + \ldots + 2^{20}\mathrm{C}_{20}^{20}$.

A. $S = 2^{21}$. B. $S = 3^{21}$. C. $S = 3^{20}$. D. $S = 2^{20}$.

Lời giải.

$$3^{20} = (1+2)^{20} = \mathrm{C}_{20}^0 + 2\mathrm{C}_{20}^1 + 2^2\mathrm{C}_{20}^2 + \ldots + 2^{20}\mathrm{C}_{20}^{20}.$$

Chọn đáp án C ……………………………………………………………… □

CÂU 28. Tính tổng $S = \mathrm{C}_{21}^0 - 2\mathrm{C}_{21}^1 + 2^2\mathrm{C}_{21}^2 - \ldots - 2^{21}\mathrm{C}_{21}^{21}$.

A. $S = -1$. B. $S = 1$. C. $S = (-3)^{21}$. D. $S = 3^{21}$.

Lời giải.

$$-1 = (1-2)^{21} = \mathrm{C}_{21}^0 - 2\mathrm{C}_{21}^1 + 2^2\mathrm{C}_{21}^2 - \ldots - 2^{21}\mathrm{C}_{21}^{21}.$$

Chọn đáp án A ……………………………………………………………… □

CÂU 29. Tính tổng $S = \mathrm{C}_{21}^0 - \dfrac{1}{2}\mathrm{C}_{21}^1 + \dfrac{1}{2^2}\mathrm{C}_{21}^2 - \ldots - \dfrac{1}{2^{21}}\mathrm{C}_{21}^{21}$.

A. $S = \left(-\dfrac{1}{2}\right)^{21}$. B. $S = \dfrac{1}{2}$. C. $S = \dfrac{1}{2^{21}}$. D. $S = -\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{21} = \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{21} = \mathrm{C}_{21}^0 - \frac{1}{2}\mathrm{C}_{21}^1 + \frac{1}{2^2}\mathrm{C}_{21}^2 - \ldots - \frac{1}{2^{21}}\mathrm{C}_{21}^{21}.$$

Chọn đáp án C ……………………………………………………………… □

CÂU 30. Tính tổng $S = 3^{20}C_{20}^0 + 3^{19}C_{20}^1 + 3^{18}C_{20}^2 + \ldots + 3C_{20}^{20} + C_{20}^{20}$.

(A) $S = 2^{20}$. (B) $S = 3^{20}$. (C) $S = 4^{20}$. (D) $S = -4^{20}$.

Lời giải.

$$4^{20} = (1+3)^{20} = 3^{20}C_{20}^0 + 3^{19}C_{20}^1 + 3^{18}C_{20}^2 + \ldots + 3C_{20}^{20} + C_{20}^{20}.$$

Chọn đáp án (C) ....

CÂU 31. Tính tổng $S = 3^{20}C_{20}^0 - 3^{19}C_{20}^1 + 3^{18}C_{20}^2 - \ldots - 3C_{19}^{20} + C_{20}^{20}$.

(A) $S = 2^{20}$. (B) $S = 3^{20}$. (C) $S = 4^{20}$. (D) $S = -4^{20}$.

Lời giải.

$$2^{20} = (3-1)^{20} = 3^{20}C_{20}^0 - 3^{19}C_{20}^1 + 3^{18}C_{20}^2 - \ldots - 3C_{19}^{20} + C_{20}^{20}.$$

Chọn đáp án (A) ....

CÂU 32. Tính tổng $S = 3^{20}C_{20}^0 + 3^{19}\cdot 2C_{20}^1 + 3^{18}\cdot 2^2C_{20}^2 + \ldots + 3\cdot 2^{19}C_{19}^{20} + 2^{20}C_{20}^{20}$.

(A) $S = 1$. (B) $S = 6^{20}$. (C) $S = 5^{20}$. (D) $S = -1$.

Lời giải.

$$5^{20} = (3+2)^{20} = 3^{20}C_{20}^0 + 3^{19}\cdot 2C_{20}^1 + 3^{18}\cdot 2^2C_{20}^2 + \ldots + 3\cdot 2^{19}C_{19}^{20} + 2^{20}C_{20}^{20}.$$

Chọn đáp án (C) ....

CÂU 33. Tính tổng $S = 3^{20}C_{20}^0 - 3^{19}\cdot 2C_{20}^1 + 3^{18}\cdot 2^2C_{20}^2 - \ldots - 3\cdot 2^{19}C_{19}^{20} + 2^{20}C_{20}^{20}$.

(A) $S = 1$. (B) $S = 6^{20}$. (C) $S = 5^{20}$. (D) $S = -1$.

Lời giải.

$$1 = (3-2)^{20} = 3^{20}C_{20}^0 - 3^{19}\cdot 2C_{20}^1 + 3^{18}\cdot 2^2C_{20}^2 - \ldots - 3\cdot 2^{19}C_{19}^{20} + 2^{20}C_{20}^{20}.$$

Chọn đáp án (A) ....

CÂU 34. Công thức thu gọn của $S = C_n^0 - C_n^1x + C_n^2x^2 - \ldots + (-1)^nC_n^nx^n$ là

(A) $S = (x-1)^n$. (B) $S = (1-x)^n$. (C) $S = (x+1)^n$. (D) $S = 2^n$.

Lời giải.

Theo khai triển nhị thức Newton, ta có

$$(1-x)^n = C_n^0 - C_n^1x + C_n^2x^2 - \ldots + (-1)^nC_n^nx^n.$$

Chọn đáp án (B) ....

CÂU 35. Tổng $C_{2018}^2 + C_{2018}^3 + C_{2018}^4 + \cdots + C_{2018}^{2018}$ bằng

(A) 2^{2018}. (B) $2^{2018} - 1$. (C) $2^{2018} - 2019$. (D) $2^{2018} - 2018$.

Lời giải.

Ta có $C_{2018}^0 + C_{2018}^1 + C_{2018}^2 + \cdots + C_{2018}^{2018} = 2^{2018}$. Do đó

$$C_{2018}^2 + C_{2018}^3 + C_{2018}^4 + \cdots + C_{2018}^{2018} = 2^{2018} - \left(C_{2018}^0 + +C_{2018}^1\right) = 2^{2018} - (1+2018) = 2^{2018} - 2019.$$

Chọn đáp án (C) ....

CÂU 36. Tổng $C_{2019}^0 + C_{2019}^1 + C_{2019}^2 + C_{2019}^3 + \ldots + C_{2019}^{2018} + C_{2019}^{2019}$ bằng

(A) 2^{2019}. (B) $2^{2019} + 1$. (C) $4^{2019} - 1$. (D) $2^{2019} - 1$.

Lời giải.

$(1+x)^{2019} = C_{2019}^0 + C_{2019}^1x + C_{2019}^2x^2 + \cdots + C_{2019}^{2019}x^{2019}$.
Chọn $x = 1$, ta được $C_{2019}^0 + C_{2019}^1 + C_{2019}^2 + C_{2019}^3 + \ldots + C_{2019}^{2018} + C_{2019}^{2019} = 2^{2019}$.

Chọn đáp án (A) ....

CÂU 37. Giải phương trình $C_1^n + 3\cdot C_2^n + 7\cdot C_3^n + \cdots + (2^n-1)\cdot C_n^n = 3^{2n} - 2^n - 6480$ trên tập $\mathbb{N}^*$.

(A) $n = 3$. (B) $n = 4$. (C) $n = 5$. (D) $n = 6$.

Lời giải.

Xét khai triển $(1+x)^n = C_0^n + xC_1^n + x^2C_2^n + \cdots + x^nC_n^n$.
Thay $x = 2$ ta có $3^n = C_0^n + 2C_1^n + 2^2C_2^n + \cdots + 2^nC_n^n$ (1).
Thay $x = 1$ ta có $2^n = C_0^n + C_1^n + C_2^n + \cdots + C_n^n$ (2).
Trừ vế theo vế của (1) cho (2) thì $C_1^n + 3C_2^n + 7C_3^n + \cdots + (2^n-1)C_n^n = 3^n - 2^n$.
Khi đó $3^n - 2^n = 3^{2n} - 2^n - 6480 \Leftrightarrow 3^n = 81 \Leftrightarrow n = 4$.

Chọn đáp án (B) ....

CÂU 38. Tính tổng $S=\dfrac{1}{2!2017!}+\dfrac{1}{4!2015!}+\dfrac{1}{6!2013!}+\ldots+\dfrac{1}{2016!3!}+\dfrac{1}{2018!}$.

Ⓐ $S=\dfrac{2^{2018}-1}{2019}$. Ⓑ $S=\dfrac{2^{2018}-1}{2018!}$. Ⓒ $S=\dfrac{2^{2018}}{2018}$. Ⓓ $S=\dfrac{2^{2018}-1}{2019!}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}2019!S &= \frac{2019!}{2!2017!}+\frac{2019!}{4!2015!}+\frac{2019!}{6!2013!}+\ldots+\frac{2019!}{2016!3!}+\frac{2019!}{2018!}\\ &= \mathrm{C}_{2019}^{2}+\mathrm{C}_{2019}^{4}+\mathrm{C}_{2019}^{6}+\ldots+\mathrm{C}_{2019}^{2016}+\mathrm{C}_{2019}^{2018}\end{aligned}$$

Ta có $(1+x)^{2019}=\mathrm{C}_{2019}^{0}+\mathrm{C}_{2019}^{1}x+\mathrm{C}_{2019}^{2}x^2+\ldots+\mathrm{C}_{2019}^{2019}x^{2019}$
và $(1-x)^{2019}=\mathrm{C}_{2019}^{0}-\mathrm{C}_{2019}^{1}x+\mathrm{C}_{2019}^{2}x^2-\ldots-\mathrm{C}_{2019}^{2019}x^{2019}$
nên suy ra $(1+x)^{2019}+(1-x)^{2019}=2\left(\mathrm{C}_{2019}^{0}+\mathrm{C}_{2019}^{2}x^2+\mathrm{C}_{2019}^{4}x^4+\ldots+\mathrm{C}_{2019}^{2018}x^{2018}\right)$.
Thay $x=1$ ta được $\mathrm{C}_{2019}^{0}+\mathrm{C}_{2019}^{2}+\mathrm{C}_{2019}^{4}+\mathrm{C}_{2019}^{6}+\ldots+\mathrm{C}_{2019}^{2016}+\mathrm{C}_{2019}^{2018}=2^{2018}$.

Từ đó ta có $2019!S=2^{2018}-1$ hay $S=\dfrac{2^{2018}-1}{2019!}$.

Chọn đáp án D .... □

CÂU 39. Tính giá trị biểu thức $S=\mathrm{C}_{2017}^{1}+\mathrm{C}_{2017}^{2}+\mathrm{C}_{2017}^{3}+\cdots+\mathrm{C}_{2017}^{2016}$.

Ⓐ $S=2^{2016}-1$. Ⓑ $S=2^{2017}$. Ⓒ $S=2^{2017}-2$. Ⓓ $S=2^{2017}-1$.

Lời giải.

Xét khai triển $(a+b)^n=\mathrm{C}_n^0a^nb^0+\mathrm{C}_n^1a^{n-1}b^1+\mathrm{C}_n^2a^{n-2}b^2+\cdots+\mathrm{C}_n^na^0b^n$.
Cho $a=b=1$ và $n=2017$ vào khai triển trên, ta được

$$\begin{aligned}&2^{2017}=\mathrm{C}_{2017}^{0}+\mathrm{C}_{2017}^{1}+\mathrm{C}_{2017}^{2}+\cdots+\mathrm{C}_{2017}^{2017}\\ \Rightarrow\ &\mathrm{C}_{2017}^{1}+\mathrm{C}_{2017}^{2}+\mathrm{C}_{2017}^{3}+\cdots+\mathrm{C}_{2017}^{2016}=2^{2017}-\mathrm{C}_{2017}^{0}-\mathrm{C}_{2017}^{2017}\\ \text{hay}\ \ &S=2^{2017}-2.\end{aligned}$$

Chọn đáp án C .... □

CÂU 40. Cho khai triển $\left(1+x+x^2\right)^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{2n}x^{2n}$, với $n\ge 2$ và $a_0,a_1,a_2,\ldots,a_{2n}$ là các hệ số. Biết rằng $a_3=210$, khi đó tổng $S=a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{2n}$ bằng

Ⓐ $S=3^{13}$. Ⓑ $S=3^{10}$. Ⓒ $S=3^{12}$. Ⓓ $S=3^{11}$.

Lời giải.

Ta có $\left(1+x+x^2\right)^n=\sum\limits_{k=0}^{n}\mathrm{C}_n^k(1+x)^k\left(x^2\right)^{n-k}=\sum\limits_{k=0}^{n}\mathrm{C}_n^k\left(\sum\limits_{i=0}^{k}\mathrm{C}_k^ix^i\right)x^{2n-2k}=\sum\limits_{k=0}^{n}\sum\limits_{i=0}^{k}\mathrm{C}_n^k\mathrm{C}_k^ix^{2n-2k+i}$.

Xét $2n-2k+i=3$ với $\begin{cases}0\le i\le k\le n\\ i,k,n\in\mathbb{N}.\end{cases}$

Vì $n\ge k$ nên $2n-2k\ge 0\Rightarrow i\le 3$.

- $i=0\Rightarrow 2n-2k=3$ (vô nghiệm).
- $i=1\Rightarrow 2n-2k=2\Leftrightarrow k=n-1$.
- $i=2\Rightarrow 2n-2k=1$ (vô nghiệm).
- $i=3\Rightarrow k=n$.

Do đó hệ số của x^3 là $\mathrm{C}_n^{n-1}\mathrm{C}_{n-1}^{1}+\mathrm{C}_n^n\mathrm{C}_n^3=\dfrac{1}{6}n^3+\dfrac{1}{2}n^2-\dfrac{2}{3}n$.

Theo giả thiết $\dfrac{1}{6}n^3+\dfrac{1}{2}n^2-\dfrac{2}{3}n=210\Leftrightarrow n=10$.

Khi đó $S=\sum\limits_{k=0}^{10}\sum\limits_{i=0}^{k}\mathrm{C}_{10}^k\mathrm{C}_k^i=\sum\limits_{k=0}^{10}\left(\sum\limits_{i=0}^{k}\mathrm{C}_k^i\right)\mathrm{C}_{10}^k=\sum\limits_{k=0}^{10}2^k\mathrm{C}_{10}^k=3^{10}$.

Chọn đáp án B .... □

CÂU 41. Tính tổng $S=\mathrm{C}_{2018}^{0}+\dfrac{1}{2}\mathrm{C}_{2018}^{1}+\dfrac{1}{3}\mathrm{C}_{2018}^{2}+\cdots+\dfrac{1}{2018}\mathrm{C}_{2018}^{2017}+\dfrac{1}{2019}\mathrm{C}_{2018}^{2018}$.

Ⓐ $S=\dfrac{2^{2018}+1}{2019}$. Ⓑ $S=\dfrac{2^{2018}-1}{2019}+1$. Ⓒ $S=\dfrac{2^{2019}-1}{2019}$. Ⓓ $S=\dfrac{2^{2018}-1}{2019}-1$.

Lời giải.

Xét khai triển

$$(1+x)^{2019} = \mathrm{C}_{2019}^{0} + \mathrm{C}_{2019}^{1}x + \mathrm{C}_{2019}^{2}x^2 + \mathrm{C}_{2019}^{3}x^3 + \cdots + \mathrm{C}_{2019}^{2019}x^{2019}.$$

Ta có $\mathrm{C}_{n+1}^{k+1} = \dfrac{n+1}{k+1}\mathrm{C}_n^k$. Suy ra

$$\begin{aligned}(1+x)^{2019} &= \mathrm{C}_{2019}^{0} + \frac{2019}{1}\mathrm{C}_{2018}^{0}x + \frac{2019}{2}\mathrm{C}_{2018}^{1}x^2 + \cdots + \frac{2019}{2019}\mathrm{C}_{2018}^{2018}x^{2019}\\ (1+x)^{2019} - 1 &= 2019\left(\mathrm{C}_{2018}^{0}x + \frac{1}{2}\mathrm{C}_{2018}^{1}x^2 + \frac{1}{3}\mathrm{C}_{2018}^{2}x^3 + \cdots + \frac{1}{2019}\mathrm{C}_{2018}^{2018}x^{2019}\right).\end{aligned}$$

Chọn $x=1$, ta có

$$\frac{2^{2019}-1}{2019} = \mathrm{C}_{2018}^{0} + \frac{1}{2}\mathrm{C}_{2018}^{1} + \frac{1}{3}\mathrm{C}_{2018}^{2} + \cdots + \frac{1}{2018}\mathrm{C}_{2018}^{2017} + \frac{1}{2019}\mathrm{C}_{2018}^{2018}.$$

Vậy $S = \dfrac{2^{2019}-1}{2019}$.

Chọn đáp án C .... □

CÂU 42. Tính giá trị của biểu thức

$$P = \left(\frac{1}{\mathrm{C}_{2017}^{1}} + \frac{1}{\mathrm{C}_{2017}^{2}} + \cdots + \frac{1}{\mathrm{C}_{2017}^{2017}}\right) : \left(\frac{1}{\mathrm{C}_{2016}^{0}} + \frac{1}{\mathrm{C}_{2016}^{1}} + \cdots + \frac{1}{\mathrm{C}_{2016}^{2016}}\right).$$

A $P = \dfrac{1008}{2017}$. **B** $P = \dfrac{2016}{2017}$. **C** $P = \dfrac{1009}{2017}$. **D** $P = \dfrac{2018}{2017}$.

Lời giải.

Với mọi $k \in [0;2016]$, $k \in \mathbb{N}$, ta có

$$\begin{aligned}\frac{1}{\mathrm{C}_{2017}^{k+1}} + \frac{1}{\mathrm{C}_{2017}^{2017-k}} &= \frac{(k+1)!(2016-k)!}{2017!} + \frac{k!(2017-k)!}{2017!}\\ &= \frac{k!(2016-k)!(k+1+2017-k)}{2016!2017}\\ &= \frac{2018}{2017}\cdot\frac{1}{\mathrm{C}_{2016}^{k}}\\ &= \frac{1009}{2017}\left(\frac{1}{\mathrm{C}_{2016}^{k}} + \frac{1}{\mathrm{C}_{2016}^{2016-k}}\right) \quad \left(\text{vì } \frac{1}{\mathrm{C}_{2016}^{k}} = \frac{1}{\mathrm{C}_{2016}^{2016-k}}\right).\end{aligned}$$

Đặt $A = \dfrac{1}{\mathrm{C}_{2017}^{1}} + \dfrac{1}{\mathrm{C}_{2017}^{2}} + \cdots + \dfrac{1}{\mathrm{C}_{2017}^{2017}}$, $B = \dfrac{1}{\mathrm{C}_{2016}^{0}} + \dfrac{1}{\mathrm{C}_{2016}^{1}} + \cdots + \dfrac{1}{\mathrm{C}_{2016}^{2016}}$.

Khi đó

$$\begin{aligned}2A &= \frac{1}{\mathrm{C}_{2017}^{1}} + \frac{1}{\mathrm{C}_{2017}^{2}} + \cdots + \frac{1}{\mathrm{C}_{2017}^{2017}}\\ &+ \frac{1}{\mathrm{C}_{2017}^{2017}} + \frac{1}{\mathrm{C}_{2017}^{2016}} + \cdots + \frac{1}{\mathrm{C}_{2017}^{1}}\\ &= \frac{1009}{2017}\left(\frac{1}{\mathrm{C}_{2016}^{0}} + \frac{1}{\mathrm{C}_{2016}^{2016}}\right) + \frac{1009}{2017}\left(\frac{1}{\mathrm{C}_{2016}^{1}} + \frac{1}{\mathrm{C}_{2016}^{2015}}\right) + \cdots + \frac{1009}{2017}\left(\frac{1}{\mathrm{C}_{2016}^{2016}} + \frac{1}{\mathrm{C}_{2016}^{0}}\right)\\ &= 2B.\end{aligned}$$

Suy ra $P = \dfrac{2A}{2B} = \dfrac{1009}{2017}$.

Chọn đáp án C .... □

MỤC LỤC