

Bài 2. TOẠ ĐỘ CỦA VÉC TƠ TRONG KHÔNG GIAN

A. LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

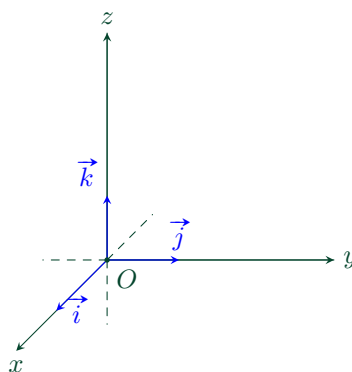
1. Hệ tọa độ trong không gian

Trong không gian, ba trục Ox , Oy , Oz đôi một vuông góc với nhau tại gốc O của mỗi trục. Gọi \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} lần lượt là các véc-tơ đơn vị trên các trục Ox , Oy , Oz .

☑ Hệ ba trục như vậy được gọi là hệ trục tọa độ Descartes vuông góc $Oxyz$, hay đơn giản là hệ tọa độ $Oxyz$. Điểm O được gọi là gốc tọa độ.

☑ Các mặt phẳng (Oxy) , (Oyz) , (Oxz) đôi một vuông góc với nhau được gọi là các mặt phẳng tọa độ.

☑ $\vec{i}^2 = \vec{j}^2 = \vec{k}^2 = 1$
và $\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{i} = 0$



Không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ còn được gọi là không gian $Oxyz$.

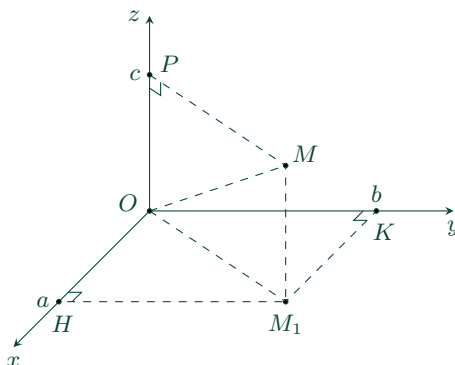
2. Tọa độ của điểm

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm M . Tọa độ điểm M được xác định như sau:

☑ Xác định hình chiếu M_1 của điểm M trên mặt phẳng Oxy . Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , tìm hoành độ a , tung độ b của điểm M_1 .

☑ Xác định hình chiếu P của điểm M trên trục cao Oz , điểm P ứng với số c trên trục Oz . Số c là cao độ của điểm M .

Bộ số $(a; b; c)$ là tọa độ của điểm M trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, kí hiệu là $M(a; b; c)$.



3. Tọa độ của vectơ

Trong không gian $Oxyz$:

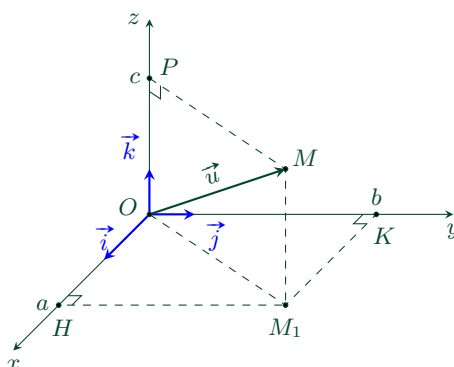
☑ Tọa độ của điểm M cũng là tọa độ của vectơ \vec{OM} .

☑ Cho \vec{u} . Dựng điểm $M(a; b; c)$ thỏa $\vec{OM} = \vec{u}$ thì tọa độ của điểm M là tọa độ của \vec{u} . Theo hình vẽ thì

$$\vec{u} = \vec{OM} = \vec{OH} + \vec{OK} + \vec{OP} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}.$$

Suy ra

$$\vec{u} = (a; b; c) \Leftrightarrow \vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}.$$



⚠ Tọa độ các véc tơ đơn vị lần lượt là: $\vec{i} = (1; 0; 0)$, $\vec{j} = (0; 1; 0)$, $\vec{k} = (0; 0; 1)$.

ĐIỂM:

"It's not how much time you have, it's how you use it."

QUICK NOTE

QUICK NOTE

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Dạng 1. Tọa độ điểm, tọa độ vec tơ

Khi xác định tọa độ điểm, tọa độ vec tơ ta chú ý các kết quả sau:

a) $\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k} \Leftrightarrow \vec{u} = (a; b; c).$

b) $\vec{u}(u_1; u_2; u_3) = \vec{v}(v_1; v_2; v_3) \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = v_1 \\ u_2 = v_2 \\ u_3 = v_3 \end{cases}$

c) $\overrightarrow{OM} = (a; b; c)$ thì $M(a; b; c).$

d) $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A).$

e) Chiếu điểm $M(a; b; c)$ lên mặt phẳng tọa độ (hoặc trục tọa độ) thì "thành phần bị khuyết" bằng 0. Chẳng hạn: $M(1; 2; 3)$ chiếu lên (Oxy) thì $z = 0$. Suy ra hình chiếu là $M_1(1; 2; 0).$

f) Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành khi và chỉ khi

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$$

BÀI TẬP TỰ LUẬN TRẢ LỜI NGẮN

VÍ DỤ 1. Trong không gian $Oxyz$, cho $A(3; -2; -1)$. Gọi A_1, A_2, A_3 lần lượt là hình chiếu của điểm A trên các mặt phẳng tọa độ $(Oxy), (Oyz), (Oxz)$. Tìm tọa độ của các điểm A_1, A_2, A_3 .

VÍ DỤ 2. Trong không gian $Oxyz$, cho $A(-2; 3; 4)$. Gọi H, K, P lần lượt là hình chiếu của điểm A trên các trục Ox, Oy, Oz . Tìm tọa độ của các điểm H, K, P .

VÍ DỤ 3. Trong không gian $Oxyz$, cho $A(1; 1; -2), B(4; 3; 1)$ và $C(-1; -2; 2)$.

a) Tìm tọa độ của vec tơ \overrightarrow{AB} .

b) Tìm tọa độ của điểm D sao cho $ABCD$ là hình bình hành.

VÍ DỤ 4. Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD \cdot A'B'C'D'$ có $A(4; 6; -5), B(5; 7; -4), C(5; 6; -4), D'(2; 0; 2)$. Tìm tọa độ các đỉnh còn lại của hình hộp $ABCD \cdot A'B'C'D'$.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM 4 PHƯƠNG ÁN

CÂU 1. Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a} = -2\vec{i} + 3\vec{j} + 5\vec{k}$. Tọa độ của vec tơ \vec{a} là
 (A) $(2; -3; -5)$. (B) $(2; 3; -5)$. (C) $(-2; 3; 5)$. (D) $(2; 3; 5)$.

CÂU 2. Trong không gian $Oxyz$, cho vec tơ $\vec{u} = 3\vec{i} + 4\vec{k} - \vec{j}$. Tọa độ của vec tơ \vec{u} là
 (A) $(3; -1; 4)$. (B) $(3; 4; -1)$. (C) $(4; -1; 3)$. (D) $(4; 3; -1)$.

CÂU 3. Trong không gian $Oxyz$, điểm nào sau đây thuộc trục Oz ?
 (A) $M(1; 0; 0)$. (B) $M(1; 0; 2)$. (C) $M(1; 2; 0)$. (D) $M(0; 0; -2)$.

CÂU 4. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm M thỏa $\overrightarrow{OM} = 2\vec{i} + \vec{j}$. Tọa độ điểm M là
 (A) $M(0; 2; 1)$. (B) $M(1; 2; 0)$. (C) $M(2; 0; 1)$. (D) $M(2; 1; 0)$.

CÂU 5. Trong không gian $Oxyz$, cho vectơ $\overrightarrow{OA} = \vec{j} - 2\vec{k}$. Tọa độ điểm A là
 (A) $(1; 0; -2)$. (B) $(0; 1; -2)$. (C) $(0; -1; 2)$. (D) $(1; -2; 0)$.

CÂU 6. Trong không gian $Oxyz$, xác định tọa độ của điểm A biết A nằm trên tia Ox và $OA = 2$.
 (A) $A(0; 0; 2)$. (B) $A(2; 2; 0)$. (C) $A(0; 2; 0)$. (D) $A(2; 0; 0)$.

CÂU 7. Trong không gian $Oxyz$, xác định tọa độ của điểm A biết A nằm trên tia đối của tia Oy và $OA = 3$.
 (A) $A(0; 3; 0)$. (B) $A(0; -3; 0)$. (C) $A(0; -9; 0)$. (D) $A(3; -3; 0)$.

QUICK NOTE

CÂU 8. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; -1; 2)$ và $B(2; 1; -4)$. Véc-tơ \overrightarrow{AB} có tọa độ là

- ☐ A $(-1; -2; 6)$. ☐ B $(3; 0; -2)$. ☐ C $(1; 0; -6)$. ☐ D $(1; 2; -6)$.

CÂU 9. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 3; -2)$, $B(3; -2; 4)$. Véc-tơ \overrightarrow{AB} có tọa độ là

- ☐ A $(2; 5; 6)$. ☐ B $(4; 1; 2)$. ☐ C $(2; -5; 6)$. ☐ D $(-2; 5; 6)$.

CÂU 10. Cho hai điểm A, B thỏa mãn $\overrightarrow{OA} = (2; -1; 3)$ và $\overrightarrow{OB} = (5; 2; -1)$. Tìm tọa độ véc-tơ \overrightarrow{AB} .

- ☐ A $\overrightarrow{AB} = (2; -1; 3)$. ☐ B $\overrightarrow{AB} = (3; 3; -4)$. ☐ C $\overrightarrow{AB} = (7; 1; 2)$. ☐ D $\overrightarrow{AB} = (3; -3; 4)$.

CÂU 11. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm M và N biết $M(2; 1; -1)$ và $\overrightarrow{MN} = (-1; 2; -3)$. Tọa độ N là

- ☐ A $N(1; -3; -4)$. ☐ B $N(1; 3; -4)$. ☐ C $N(-1; 3; -4)$. ☐ D $N(1; 3; 4)$.

CÂU 12. Hình chiếu vuông góc của điểm $A(3; -4; 5)$ trên mặt phẳng (Oxz) là điểm

- ☐ A $M(3; 0; 0)$. ☐ B $M(0; -4; 5)$. ☐ C $M(0; 0; 5)$. ☐ D $M(3; 0; 5)$.

CÂU 13. Hình chiếu vuông góc của điểm $A(1; 2; 3)$ trên mặt phẳng (Oxy) là điểm

- ☐ A $M(0; 0; 3)$. ☐ B $N(1; 2; 0)$. ☐ C $Q(0; 2; 0)$. ☐ D $P(1; 0; 0)$.

CÂU 14. Hình chiếu vuông góc của điểm $M(2; 1; -3)$ lên mặt phẳng (Oyz) có tọa độ là

- ☐ A $(2; 0; 0)$. ☐ B $(2; 1; 0)$. ☐ C $(0; 1; -3)$. ☐ D $(2; 0; -3)$.

CÂU 15. Hình chiếu vuông góc của điểm $A(3; 2; 1)$ trên trục Ox có tọa độ là

- ☐ A $(0; 2; 1)$. ☐ B $(0; 2; 0)$. ☐ C $(3; 0; 0)$. ☐ D $(0; 0; 1)$.

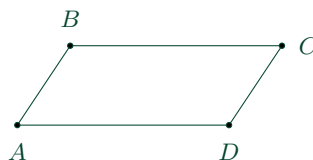
CÂU 16. Hình chiếu của điểm $M(2; 3; -2)$ trên trục Oy có tọa độ là

- ☐ A $(2; 0; 0)$. ☐ B $(0; 3; 0)$. ☐ C $(0; 0; -2)$. ☐ D $(2; 0; -2)$.

CÂU 17.

Trong không gian $Oxyz$, cho hình bình hành $ABCD$ với $A(-2; 3; 1)$, $B(3; 0; -1)$, $C(6; 5; 0)$. Tọa độ đỉnh D là

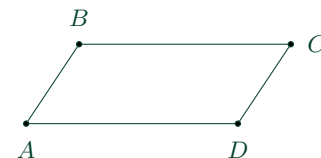
- ☐ A $D(11; 2; 2)$. ☐ B $D(1; 8; 2)$.
☐ C $D(11; 2; -2)$. ☐ D $D(1; 8; -2)$.



CÂU 18.

Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(1; 0; 3)$, $B(2; 3; -4)$, $C(-3; 1; 2)$. Tìm tọa độ điểm D sao cho tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.

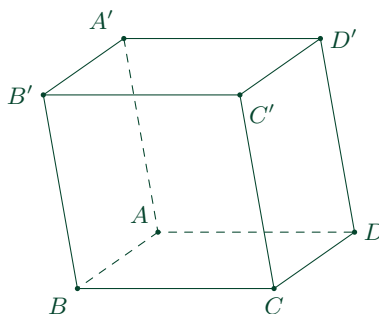
- ☐ A $D(4; 2; 9)$. ☐ B $D(-2; 4; -5)$.
☐ C $D(6; 2; -3)$. ☐ D $(-4; -2; 9)$.



CÂU 19.

Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $A(1; 0; 1)$, $B(2; 1; 2)$, $D(1; -1; 1)$, $C'(4; 5; -5)$. Tìm tọa độ đỉnh C của hình hộp.

- ☐ A $C(2; 0; 2)$. ☐ B $C(2; 0; 2)$.
☐ C $C(2; 0; 2)$. ☐ D $C(2; 0; 2)$.



CÂU 20. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $A(1; 0; 1)$, $B(2; 1; 2)$, $D(1; -1; 1)$, $C'(4; 5; -5)$. Tìm tọa độ đỉnh A' của hình hộp.

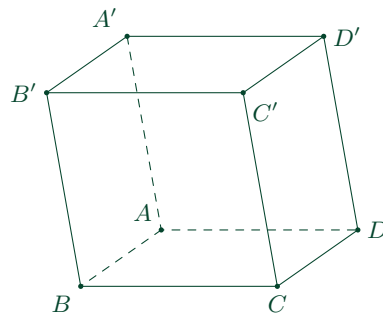
- ☐ A $A'(-1; -5; 8)$. ☐ B $A'(-1; -5; 8)$. ☐ C $A'(-1; -5; 8)$. ☐ D $A'(-1; -5; 8)$.

CÂU 21.

QUICK NOTE

Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $A(1; 0; 1)$, $B(2; 1; 2)$, $D(1; -1; 1)$, $C'(4; 5; -5)$. Tìm tọa độ đỉnh D' của hình hộp.

- Ⓐ $D'(-1; -6; 8)$. Ⓑ $D'(-1; -6; 8)$.
Ⓒ $D'(-1; -6; 8)$. Ⓓ $D'(-1; -6; 8)$.



BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM ĐÚNG SAI

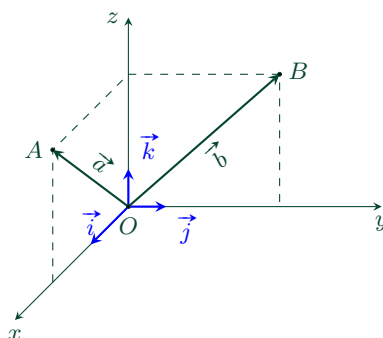
CÂU 22. Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a} = \vec{i} + 3\vec{k} - 4\vec{j}$ và $\vec{b} = (m - n; 4m - 6n; n^2 - 3m + 2)$, với m, n là tham số.

Mệnh đề	Đ	S
a) Tọa độ $\vec{a} = (1; 3; -4)$.		
b) Dựng điểm A thỏa $\vec{OA} = \vec{a}$ thì $A(1; -4; 3)$.		
c) Tồn tại giá trị của m và n để $\vec{b} = \vec{0}$.		
d) Nếu $\vec{a} = \vec{b}$ thì $m + n = 9$.		

CÂU 23.

Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a} = (2; 2; 0)$, $\vec{b} = 2\vec{j} + 2\vec{k}$. Dựng $\vec{OA} = \vec{a}$ và $\vec{OB} = \vec{b}$.

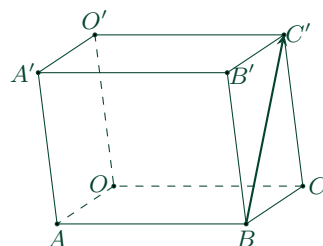
Mệnh đề	Đ	S
a) $\vec{a} = 2\vec{i} + 2\vec{k}$.		
b) Tọa độ $\vec{b} = (0; 2; 2)$.		
c) Tọa độ $\vec{AB} = (-2; 2; 0)$.		
d) Góc $\widehat{AOB} = 45^\circ$.		



CÂU 24.

Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp $OABC.O'A'B'C'$ có $A(1; 1; -1)$, $B(0; 3; 0)$, $\vec{BC'} = (2; -6; 6)$. Gọi H, K lần lượt là trọng tâm của tam giác $OA'O'$ và $CB'C'$.

Mệnh đề	Đ	S
a) Tọa độ điểm C' là $(2; -3; 6)$.		
b) Tọa độ điểm O' là $(3; -5; 5)$.		
c) Tọa độ véc tơ $\vec{AB'} = (-2; 3; -6)$.		
d) Tọa độ véc tơ $\vec{HK} = (-1; 2; -1)$.		



Dạng 2. Tọa độ hóa một số hình không gian

- Chọn một điểm mà từ đó có ba đường đôi một vuông góc nhau làm gốc tọa độ.
- Xây dựng tọa độ các điểm trên hình đã cho tương ứng với hệ trục vừa chọn.
- Tọa độ các điểm đặc biệt:

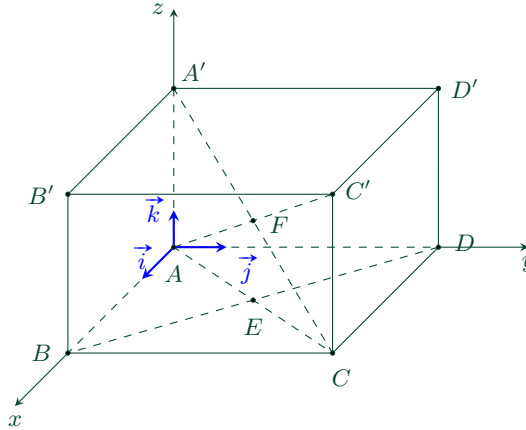
$$\bullet M \in Ox \Rightarrow M(x; 0; 0). \quad \bullet M \in Oy \Rightarrow M(0; y; 0). \quad \bullet M \in Oz \Rightarrow M(0; 0; z).$$

- $M \in (Oxy) \Rightarrow M(x; y; 0).$
- $M \in (Oxz) \Rightarrow M(x; 0; z).$
- $M \in (Oyz) \Rightarrow M(0; y; z).$

BÀI TẬP TỰ LUẬN TRẢ LỜI NGẮN

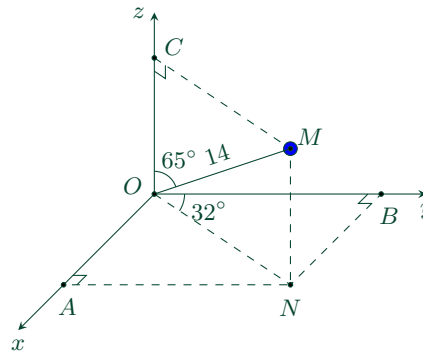
VÍ DỤ 1.

Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh $AB = AA' = 2$, $AD = 4$. Gọi E là tâm của hình chữ nhật $ABCD$, F là trung điểm AC' . Với hệ tọa độ $Oxyz$ được thiết lập như hình bên (gốc tọa độ O trùng với A), hãy xác định tọa độ các đỉnh của hình hộp chữ nhật và tọa độ hai điểm E, F .



VÍ DỤ 2.

Một máy bay M đang cất cánh từ phi trường. Với hệ tọa độ $Oxyz$ được thiết lập như Hình bên, cho biết M là vị trí của máy bay với $OM = 14$, $\widehat{NOB} = 32^\circ$, $\widehat{MOC} = 65^\circ$. Tính tọa độ điểm M .

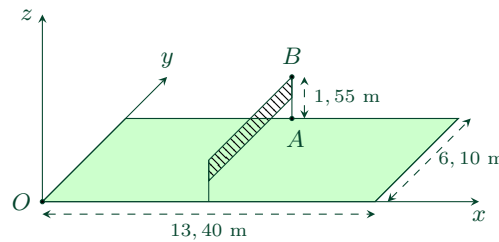


BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM 4 PHƯƠNG ÁN

CÂU 1.

Hình bên mô tả một sân cầu lông với kích thước theo tiêu chuẩn quốc tế. Với hệ tọa độ $Oxyz$ được thiết lập như hình bên (đơn vị trên mỗi trục là mét), giả sử AB là một trụ cầu lông để căng lưới, hãy xác định tọa độ của B .

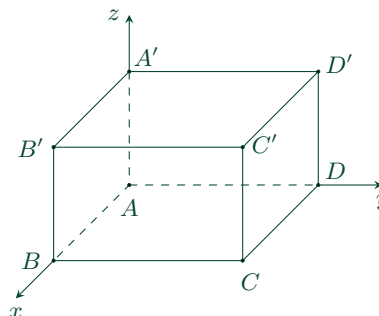
- ☐ A (6; 1; 6; 7; 1; 55).
 ☐ B (6; 7; 6; 1; 1; 55).
 ☐ C (6; 1; 0; 1; 55).
 ☐ D (0; 6; 7; 1; 55).



CÂU 2.

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng 2. Với hệ tọa độ $Oxyz$ được thiết lập như hình bên (gốc tọa độ O trùng với điểm A), tọa độ điểm B' là

- ☐ A $B(0; 2; 0).$
☐ B $B(2; 2; 2).$
☐ C $B(2; 2; 0).$
☐ D $B(2; 0; 2).$

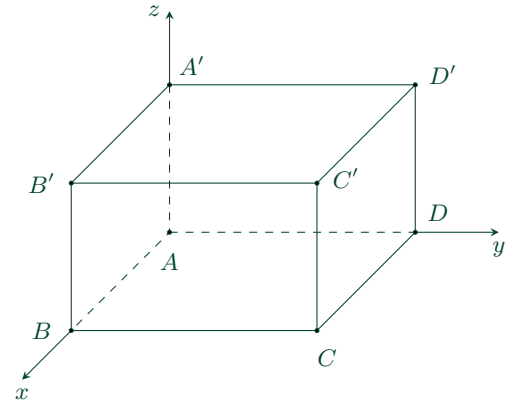


CÂU 3.

QUICK NOTE

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng 2. Với hệ tọa độ $Oxyz$ được thiết lập như hình bên (gốc tọa độ O trùng với điểm A), tọa độ điểm C' là

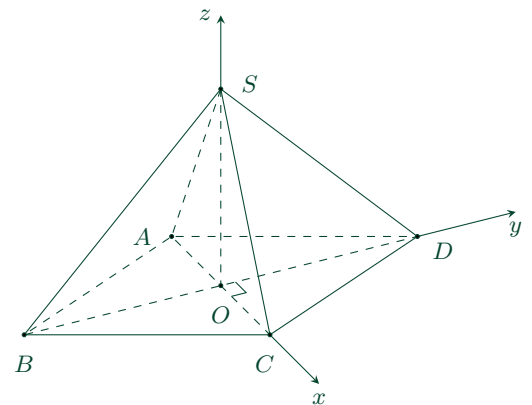
- ☐ A $C'(2; 2; 0)$. ☐ B $C'(2; 2; 2)$.
☐ C $C'(2; 2; 0)$. ☐ D $C'(2; 0; 2)$.



CÂU 4.

Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $a\sqrt{2}$, cạnh bên bằng $a\sqrt{5}$. Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$. Với hệ tọa độ $Oxyz$ được thiết lập như hình bên (gốc tọa độ O trùng với tâm hình vuông $ABCD$), tọa độ \vec{SC} là

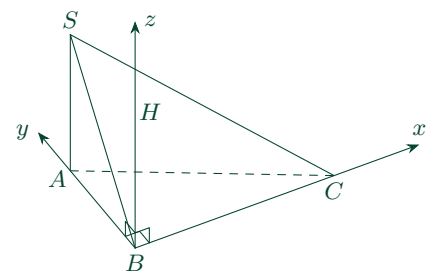
- ☐ A $\vec{SC} = (2a; 0; -2a)$.
☐ B $\vec{SC} = (2a; -a; -2a)$.
☐ C $\vec{SC} = (a; 0; -2a)$.
☐ D $\vec{SC} = (a; 0; 2a)$.



CÂU 5.

Cho tứ diện $SABC$ có ABC là tam giác vuông tại B , $BC = 3$, $BA = 2$, SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) và có độ dài bằng 2. Với hệ tọa độ $Oxyz$ được thiết lập như hình bên (gốc tọa độ O trùng với điểm B), tìm khẳng định **sai**.

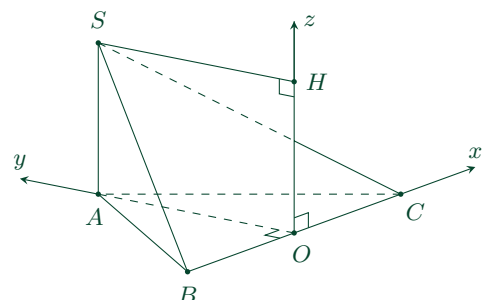
- ☐ A $A(0; 2; 0)$. ☐ B $B(0; 0; 0)$.
☐ C $C(0; 0; 3)$. ☐ D $S(-2; 2; 2)$.



CÂU 6.

Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng 2, SA vuông góc với đáy và $SA = 1$. Với hệ tọa độ $Oxyz$ được thiết lập như hình bên (gốc tọa độ O trùng với trung điểm của đoạn BC), hãy tìm tọa độ điểm S .

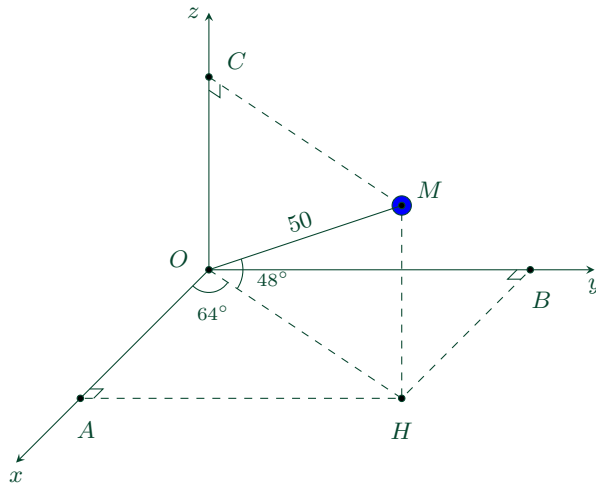
- ☐ A $S(0; \sqrt{3}; 1)$. ☐ B $S(0; \sqrt{3}; 1)$.
☐ C $S(0; \sqrt{3}; 1)$. ☐ D $S(0; \sqrt{3}; 1)$.



CÂU 7.

Ở một sân bay, vị trí của máy bay được xác định bởi điểm M trong không gian $Oxyz$ như hình bên. Gọi H là hình chiếu vuông góc của M xuống mặt phẳng (Oxy) . Cho biết $OM = 50$, $(\vec{i}, \vec{OH}) = 64^\circ$, $(\vec{OH}, \vec{OM}) = 48^\circ$. Tìm toạ độ của điểm M .

- A** $M(14,7; 30,1; 37,2)$.
B $M(14,7; 30,1; 37,2)$.
C $M(14,7; 30,1; 37,2)$.
D $M(14,7; 30,1; 37,2)$.

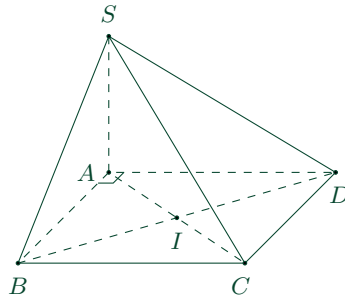


BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM ĐÚNG SAI

CÂU 8.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = 1$, $AD = 2$, SA vuông góc với mặt đáy và $SA = 3$. Với hệ toạ độ $Oxyz$ được thiết lập như sau: Gốc toạ độ O trùng với điểm A , các véc tơ \vec{AB} , \vec{AD} , \vec{AS} lần lượt cùng hướng với \vec{i} , \vec{j} và \vec{k} . Xét tính đúng sai của các khẳng định sau

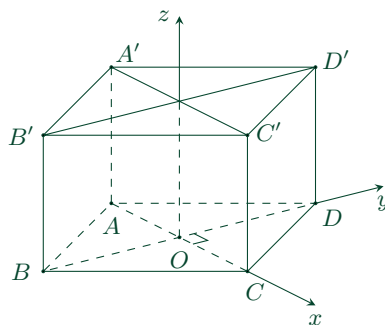
Mệnh đề	Đ	S
a) Tọa độ $D(0; 2; 0)$.		
b) Tọa độ $C(1; 2; 3)$.		
c) Tọa độ $S(2; 0; 0)$.		
d) Tọa độ $I(1; 1; 0)$.		



CÂU 9.

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng 2. Với hệ toạ độ $Oxyz$ được thiết lập như hình bên (gốc toạ độ O trùng với tâm hình vuông $ABCD$), hãy xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

Mệnh đề	Đ	S
a) Tọa độ $A(-1; 0; 0)$.		
b) $\vec{AC'} = (2\sqrt{2}; 0; 2)$.		
c) Tọa độ $D'(0; \sqrt{2}; 2)$.		
d) $\vec{BD'} = (0; 0; 2)$.		

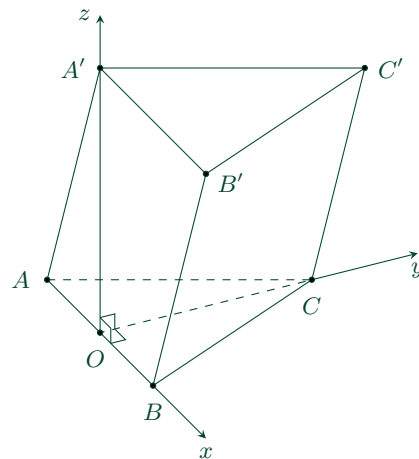


CÂU 10.

QUICK NOTE

QUICK NOTE

Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng 2 như hình vẽ. Hình chiếu vuông góc của A' lên (ABC) trùng với trung điểm cạnh AB , góc $\widehat{A'AO} = 60^\circ$. Với hệ tọa độ $Oxyz$ được thiết lập như hình bên (gốc tọa độ O trùng với trung điểm của đoạn BC), hãy xét tính đúng sai của các khẳng định sau:



Mệnh đề	Đ	S
a) Tọa độ điểm $A(-1; 0; 0)$.		
b) Tọa độ điểm $C(0; \sqrt{3}; 0)$.		
c) Tọa độ điểm $A'(0; -1; \sqrt{3})$.		
d) Tọa độ điểm $C'(1; \sqrt{3}; \sqrt{3})$.		

Bài 3. BIỂU THỨC TỌA ĐỘ CỦA CÁC PHÉP TOÁN VECTƠ

A. LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1. Biểu thức tọa độ của phép toán cộng, trừ, nhân một số thực với một vectơ

Trong không gian $Oxyz$, cho hai véc-tơ $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$, $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$ và số k . Khi đó

$$\textcircled{1} \quad \vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1; a_2 + b_2; a_3 + b_3);$$

$$\textcircled{2} \quad \vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1; a_2 - b_2; a_3 - b_3);$$

$$\textcircled{3} \quad k\vec{a} = (ka_1; ka_2; ka_3).$$

⚠ Cho hai véc-tơ $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$, $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$, $\vec{b} \neq \vec{0}$. Hai véc-tơ \vec{a} , \vec{b} cùng phương khi và chỉ khi tồn tại một số thực k sao cho
$$\begin{cases} a_1 = kb_1 \\ a_2 = kb_2 \\ a_3 = kb_3. \end{cases}$$

2. Biểu thức tọa độ của tích vô hướng hai vectơ

Trong không gian $Oxyz$, tích vô hướng của hai véc-tơ $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ và $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$ được xác định bởi công thức

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3.$$

⚠ $\textcircled{1} \quad \vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0;$

$$\textcircled{2} \quad |\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}; \quad AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}.$$

$$\textcircled{3} \quad \cos(\vec{a}; \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}} \quad (\text{với } \vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}).$$

3. Biểu thức tọa độ của tích có hướng hai vectơ

Cho hai véc-tơ $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ và $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$ không cùng phương. Khi đó véc-tơ

$$\vec{w} = (a_2b_3 - b_2a_3; a_3b_1 - b_3a_1; a_1b_2 - b_1a_2)$$

vuông góc với cả hai véc-tơ \vec{a} và \vec{b} .

⚠ $\textcircled{1}$ Véc-tơ \vec{w} xác định như trên còn gọi là **tích có hướng** của hai vectơ \vec{a} , \vec{b} , kí hiệu $\vec{w} = [\vec{a}, \vec{b}]$.

② Quy ước $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$ thì

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right)$$

③ \vec{a} không cùng phương với $\vec{b} \Leftrightarrow [\vec{a}, \vec{b}] \neq \vec{0}$.

4. Ứng dụng của tích có hướng của hai véc-tơ

a) Xét sự đồng phẳng của ba véc-tơ:

☑ Ba vectơ $\vec{a}; \vec{b}; \vec{c}$ đồng phẳng $\Leftrightarrow [\vec{a}, \vec{b}] \cdot \vec{c} = 0$.

☑ Bốn điểm A, B, C, D tạo thành tứ diện $\Leftrightarrow [\vec{AB}, \vec{AC}] \cdot \vec{AD} \neq 0$.

b) Diện tích hình bình hành: $S_{ABCD} = |[\vec{AB}, \vec{AD}]|$.

c) Tính diện tích tam giác: $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} |[\vec{AB}, \vec{AC}]|$.

d) Tính thể tích hình hộp: $V_{ABCD.A'B'C'D'} = |[\vec{AB}, \vec{AC}] \cdot \vec{AA'}|$.

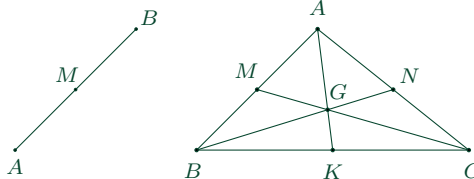
e) Tính thể tích tứ diện: $V_{ABCD} = \frac{1}{6} |[\vec{AB}, \vec{AC}] \cdot \vec{AD}|$.

5. Biểu thức tọa độ trung điểm đoạn thẳng, trọng tâm tam giác

Trong không gian $Oxyz$, tọa độ trung điểm và trọng tâm được xác định như sau:

① Tọa độ trung điểm M của đoạn thẳng AB là

$$M \left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}; \frac{z_A + z_B}{2} \right).$$



② Tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC là

$$G \left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}; \frac{y_A + y_B + y_C}{3}; \frac{z_A + z_B + z_C}{3} \right).$$

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Dạng 1. Tọa độ của các phép toán véc-tơ, tọa độ điểm, độ dài đoạn thẳng

BÀI TẬP TỰ LUẬN TRẢ LỜI NGẮN

VÍ DỤ 1. Cho $\vec{a} = (-2; 3; 2)$, $\vec{b} = (2; 1; -1)$, $\vec{c} = (1; 2; 3)$. Tính tọa độ của mỗi vectơ sau:

a) $3\vec{a}$; b) $2\vec{a} - \vec{b}$; c) $\vec{a} + 2\vec{b} - \frac{3}{2}\vec{c}$.

VÍ DỤ 2. Trong không gian $Oxyz$, cho các véc-tơ $\vec{u} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{v} = -\frac{3}{2}\vec{i} + \vec{j} - \frac{1}{2}\vec{k}$, $\vec{w} = 6\vec{i} + m\vec{j} - n\vec{k}$.

- a) Chứng minh \vec{u} và \vec{v} cùng phương.
b) Tìm giá trị của m và n để véc-tơ \vec{u} và \vec{w} cùng phương.

VÍ DỤ 3. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(3; -1; 2)$, $B(1; 2; 3)$, $C(4; -2; 1)$.

QUICK NOTE

QUICK NOTE

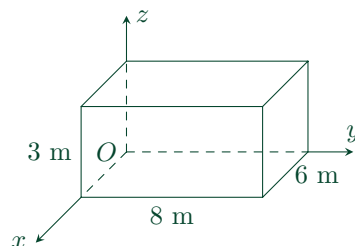
- a) Chứng minh ba điểm A, B, C không thẳng hàng. Xác định tọa độ trọng tâm tam giác ABC .
- b) Tìm tọa độ điểm D biết $ABCD$ là hình bình hành.
- c) Tìm tọa độ giao điểm E của đường thẳng BC với mặt phẳng tọa độ (Oxz) .

VÍ DỤ 4. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(5; -3; 0)$, $B(2; 1; -1)$, $C(4; 1; 2)$.

- a) Tìm tọa độ của vectơ $\vec{u} = 2\vec{AB} + \vec{AC} - 5\vec{BC}$.
- b) Tìm tọa độ điểm N sao cho $2\vec{NA} = -\vec{NB}$.

VÍ DỤ 5.

Một phòng học có thiết kế dạng hình hộp chữ nhật với chiều dài là 8 m, chiều rộng là 6 m và chiều cao là 3 m. Một chiếc đèn được treo tại chính giữa trần nhà của phòng học. Xét hệ trục tọa độ $Oxyz$ có gốc O trùng với một góc phòng và mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt sàn, đơn vị đo được lấy theo mét (Hình minh họa bên). Hãy tìm tọa độ của điểm treo đèn.



BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM 4 PHƯƠNG ÁN

Các câu hỏi sau đều xét trong không gian $Oxyz$.

CÂU 1. Cho $\vec{a} = (1; 2; -3)$, $\vec{b} = (-2; -4; 6)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- ☐ A $\vec{a} = 2\vec{b}$. ☐ B $\vec{b} = 2\vec{a}$. ☐ C $\vec{b} = -2\vec{a}$. ☐ D $\vec{a} = -2\vec{b}$.

CÂU 2. Cho hai véc-tơ $\vec{x} = (2; 1; -3)$, $\vec{y} = (1; 0; -1)$. Tìm tọa độ của véc-tơ $\vec{a} = \vec{x} + 2\vec{y}$.

- ☐ A $\vec{a}(4; 1; -5)$. ☐ B $\vec{a}(4; 1; -1)$. ☐ C $\vec{a}(3; 1; -4)$. ☐ D $\vec{a}(0; 1; -1)$.

CÂU 3. Cho $\vec{a} = (1; -1; 3)$, $\vec{b} = (2; 0; -1)$. Tìm tọa độ véc-tơ $\vec{u} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$.

- ☐ A $\vec{u} = (-4; -2; 9)$. ☐ B $\vec{u} = (4; 2; -9)$. ☐ C $\vec{u} = (-4; -5; 9)$. ☐ D $\vec{u} = (1; 3; -11)$.

CÂU 4. Cho hai véc-tơ $\vec{a} = (3; 0; 1)$, $\vec{c} = (1; 1; 0)$. Tìm tọa độ của véc-tơ \vec{b} thỏa mãn biểu thức $\vec{b} - \vec{a} + 2\vec{c} = \vec{0}$.

- ☐ A $\vec{b} = (-2; 1; -1)$. ☐ B $\vec{b} = (-1; 2; -1)$. ☐ C $\vec{b} = (5; 2; 1)$. ☐ D $\vec{b} = (1; -2; 1)$.

CÂU 5. Cho vectơ $\vec{a} = (1; -3; 4)$. Vectơ nào sau đây cùng phương với \vec{a} ?

- ☐ A $\vec{b} = (-2; -6; 8)$. ☐ B $\vec{c} = (-2; 6; -8)$. ☐ C $\vec{d} = (-2; 6; 8)$. ☐ D $\vec{m} = (2; -6; -8)$.

CÂU 6. Hai véc-tơ $\vec{a} = (m; 2; 3)$ và $\vec{b} = (1; n; 2)$ cùng phương khi

- ☐ A $\begin{cases} m = \frac{1}{2} \\ n = \frac{4}{3} \end{cases}$. ☐ B $\begin{cases} m = \frac{3}{2} \\ n = \frac{4}{3} \end{cases}$. ☐ C $\begin{cases} m = \frac{3}{2} \\ n = \frac{2}{3} \end{cases}$. ☐ D $\begin{cases} m = \frac{2}{3} \\ n = \frac{4}{3} \end{cases}$.

CÂU 7. Cho hai điểm $A(2; 3; 1)$ và $B(3; 1; 5)$. Tính độ dài đoạn thẳng AB .

- ☐ A $AB = \sqrt{21}$. ☐ B $AB = 2\sqrt{3}$. ☐ C $AB = 2\sqrt{5}$. ☐ D $AB = \sqrt{13}$.

CÂU 8. Cho hai điểm $M(3; -2; 1)$ và $N(0; 1; -1)$. Tính độ dài đoạn thẳng MN .

- ☐ A $MN = \sqrt{17}$. ☐ B $MN = 22$. ☐ C $MN = \sqrt{22}$. ☐ D $MN = \sqrt{19}$.

CÂU 9. Cho hai điểm $A(-1; 1; 2)$ và $B(3; -5; 0)$. Tọa độ trung điểm của đoạn thẳng AB là

- ☐ A $(1; -2; 1)$. ☐ B $(4; -6; 2)$. ☐ C $(2; -3; -1)$. ☐ D $(2; -4; 2)$.

CÂU 10. Cho hai điểm $A(1; 1; 0)$, $B(3; -1; 2)$. Tọa độ điểm C sao cho B là trung điểm của đoạn AC là

- ☐ A $C(5; -3; 4)$. ☐ B $C(4; -3; 5)$. ☐ C $C(-1; 3; -2)$. ☐ D $C(2; 0; 1)$.

CÂU 11. Cho tam giác ABC với $A(0; -1; 3)$, $B(2; 1; 1)$, $C(1; 0; -1)$. Tọa độ trọng tâm của tam giác ABC là

- ☐ A $(1; 0; 1)$. ☐ B $(-1; 0; 1)$. ☐ C $(0; 1; 1)$. ☐ D $(1; 1; 0)$.

CÂU 12. Cho $\vec{OA} = \vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$, điểm $B(3; -4; 1)$ và $C(2; 0; -1)$. Tọa độ trọng tâm của tam giác ABC là

- A** $(1; -2; 3)$. **B** $(-1; 2; -3)$. **C** $(2; -2; 1)$. **D** $(-2; 2; -1)$.

CÂU 13. Cho tam giác ABC trọng tâm G . Biết $A(0; 2; 1)$, $B(1; -1; 2)$, $G(1; 1; 1)$. Khi đó điểm C có tọa độ là

- A** $(2; 2; 4)$. **B** $(-2; 0; 2)$. **C** $(-2; -3; -2)$. **D** $(2; 2; 0)$.

CÂU 14. Cho bốn điểm $A(1; 0; 3)$, $B(2; -1; 1)$, $C(-1; 3; -4)$, $D(2; 6; 0)$ tạo thành một hình tứ diện. Gọi M , N lần lượt là trung điểm các đoạn thẳng AB , CD . Tìm tọa độ trung điểm G của đoạn MN .

- A** $G\left(\frac{4}{3}; \frac{8}{3}; 0\right)$. **B** $G(2; 4; 0)$. **C** $G(1; 2; 0)$. **D** $G(4; 8; 0)$.

CÂU 15. Cho hai điểm $B(1; 2; -3)$, $C(7; 4; -2)$. Nếu E là điểm thỏa mãn đẳng thức $\vec{CE} = 2\vec{EB}$ thì tọa độ điểm E là

- A** $\left(3; \frac{8}{3}; \frac{8}{3}\right)$. **B** $\left(1; 2; \frac{1}{3}\right)$. **C** $\left(3; 3; -\frac{8}{3}\right)$. **D** $\left(\frac{8}{3}; 3; -\frac{8}{3}\right)$.

CÂU 16. Cho các điểm $A(1; -1; 0)$, $B(0; 2; 0)$, $C(2; 1; 3)$ và M là điểm thỏa mãn hệ thức $\vec{MA} - \vec{MB} + \vec{MC} = \vec{0}$. Khi đó điểm M có tọa độ là

- A** $(3; 2; 3)$. **B** $(3; -2; -3)$. **C** $(3; -2; 3)$. **D** $(3; 2; -3)$.

CÂU 17. Cho tọa độ các điểm $A(-1; 3)$, $B(2; -2)$ và $C(m; 1)$. Tìm m để 3 điểm A, B, C thẳng hàng.

- A** $m = \frac{2}{5}$. **B** $m = \frac{1}{5}$. **C** $m = -\frac{1}{3}$. **D** $m = -\frac{1}{5}$.

CÂU 18. Cho ba điểm $A(-1; 1; 2)$, $B(0; 1; -1)$, $C(x+2; y; -2)$ thẳng hàng. Tổng $x+y$ bằng

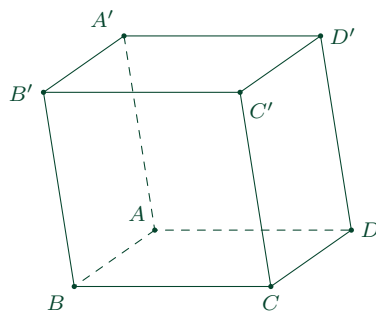
- A** $\frac{7}{3}$. **B** $-\frac{8}{3}$. **C** $-\frac{2}{3}$. **D** $-\frac{1}{3}$.

CÂU 19. Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành, biết $A(1; 0; 1)$, $B(2; 1; 2)$, $D(1; -1; 1)$. Tìm tọa độ điểm C .

- A** $(0; -2; 0)$. **B** $(2; 2; 2)$. **C** $(2; 0; 2)$. **D** $(2; -2; 2)$.

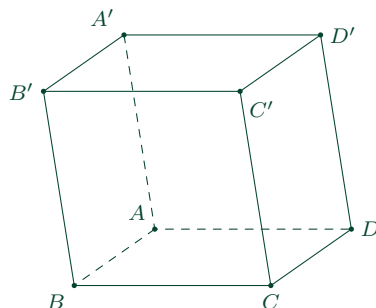
CÂU 20. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $A(0; 0; 0)$, $B(a; 0; 0)$, $D(0; 2a; 0)$, $A'(0; 0; 2a)$, $a \neq 0$. Tính độ dài đoạn thẳng AC' .

- A** $|a|$. **B** $2|a|$. **C** $3|a|$. **D** $\frac{3|a|}{2}$.



CÂU 21. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $A(0; 0; 1)$, $B'(1; 0; 0)$, $C'(1; 1; 0)$. Tìm tọa độ của điểm D .

- A** $D(0; -1; 1)$. **B** $D(0; 1; 1)$. **C** $D(0; 1; 0)$. **D** $D(1; 1; 1)$.



BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM ĐÚNG SAI

CÂU 22. Cho các điểm $A(1; -2; 3)$, $B(-2; 1; 2)$, $C(3; -1; 2)$.

Mệnh đề	Đ	S
a) $\vec{AB} = (-3; 3; -1)$.		

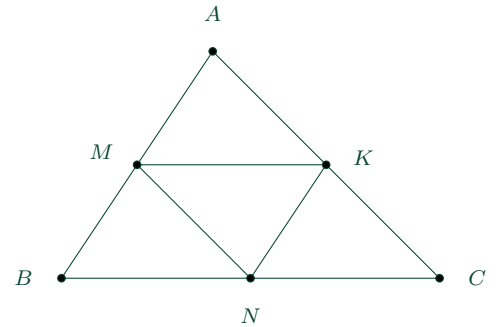
QUICK NOTE

QUICK NOTE

Mệnh đề	Đ	S
b) $\overrightarrow{AC} = (-2; -1; 1)$.		
c) $\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AC}$.		
d) Ba điểm A, B, C không thẳng hàng.		

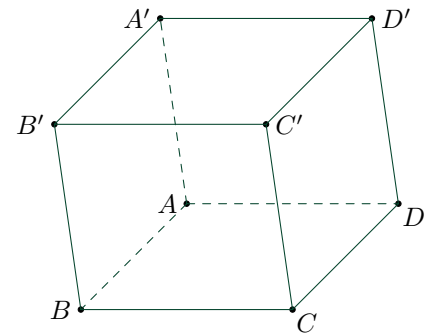
CÂU 23. Cho ba điểm $A(3; 3; -6)$, $B(1; 3; 2)$ và $C(-1; -3; 1)$. Gọi M, N, K lần lượt là trung điểm của AB, BC và CA .

Mệnh đề	Đ	S
a) Tọa độ $M(2; 3; 2)$.		
b) Với G là trọng tâm tam giác ABC thì $GC = 2\sqrt{5}$.		
c) Trọng tâm tam giác MNK là $E(1; 1; -1)$.		
d) Với $D(-3; -3; 9)$ thì tứ giác $ABDC$ là hình bình hành.		

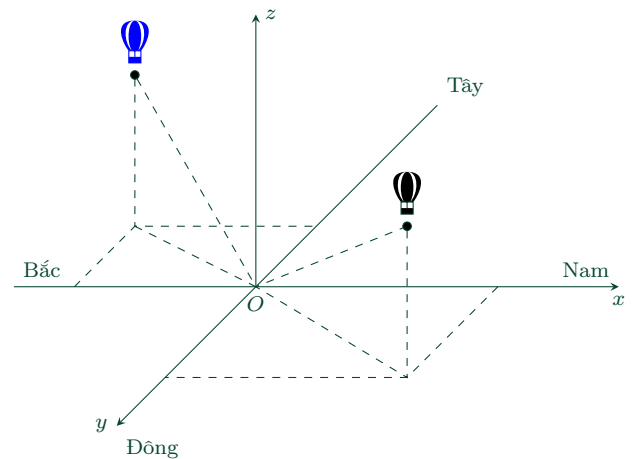


CÂU 24. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$, biết điểm $A(0; 0; 0)$, $B(1; 0; 0)$, $C(1; 2; 0)$, $D'(-1; 3; 5)$. Gọi M, N là tâm của các hình bình hành $ABB'A'$, $ADD'A'$.

Mệnh đề	Đ	S
a) Tọa độ $D(0; 2; 0)$.		
b) Tọa độ $A'(-1; 1; 5)$.		
c) Tọa độ $\overrightarrow{MN} = (-1; 1; 0)$.		
d) $ \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CC'} = \sqrt{29}$.		



CÂU 25. Hai chiếc khinh khí cầu bay lên từ cùng một địa điểm. Chiếc thứ nhất cách điểm xuất phát 2 km về phía nam và 1 km về phía đông, đồng thời cách mặt đất 0,5 km. Chiếc thứ hai nằm cách điểm xuất phát 1 km về phía bắc và 1,5 km về phía tây, đồng thời cách mặt đất 0,8 km. Chọn hệ trục $Oxyz$ với gốc O đặt tại điểm xuất phát của hai khinh khí cầu, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất với trục Ox hướng về phía nam, trục Oy hướng về phía đông và trục Oz hướng thẳng đứng lên trời (Hình bên dưới), đơn vị đo lấy theo kilomet.



Mệnh đề	Đ	S
a) Với hệ tọa độ đã chọn, tọa độ khinh khí cầu thứ nhất là $(2; 1; 0,5)$.		
b) Với hệ tọa độ đã chọn, tọa độ khinh khí cầu thứ hai là $(-1,5; -1; 0,8)$.		
c) Khoảng cách từ điểm xuất phát đến khinh khí cầu thứ nhất bằng $\sqrt{21}$ km.		

QUICK NOTE

Mệnh đề

Đ

S

d) Khoảng cách hai chiếc khinh khí cầu là 3,92 km (Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

Dạng 2. Tích vô hướng, tích có hướng hai vec tơ và ứng dụng

BÀI TẬP TỰ LUẬN TRẢ LỜI NGẮN

VÍ DỤ 1. Cho ba vec-tơ $\vec{a} = (3; 0; 1)$, $\vec{b} = (1; -1; -2)$, $\vec{c} = (2; 1; -1)$, $\vec{d} = (1; 7; -3)$.

a) Tính $\vec{a} \cdot \vec{b}$, $\vec{b} \cdot \vec{c}$. b) Tính $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$, $\cos(\vec{a}, \vec{b})$. c) Chứng minh $\vec{d} \perp \vec{a}$.

VÍ DỤ 2. Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a} = (1; 0; 1)$, $\vec{b} = (1; 1; 0)$ và $\vec{c} = (-4; 3; m)$.

a) Tính góc giữa hai vectơ \vec{a} và \vec{b} .
b) Tìm m để vectơ $\vec{d} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$ vuông góc với \vec{c} .

VÍ DỤ 3. Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(-1; 0; 2)$, $B(0; 4; 3)$ và $C(-2; 1; 2)$.

a) Chỉ ra tọa độ một vec-tơ (khác $\vec{0}$) vuông góc với hai vec-tơ \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AC} .
b) Tính chu vi tam giác ABC .
c) Tính $\cos \widehat{BAC}$.
d) Tìm độ dài đường phân giác trong AD của tam giác ABC .

VÍ DỤ 4. Trong không gian $Oxyz$, cho 3 điểm $A(0; 1; -2)$; $B(3; 0; 0)$ và điểm C thuộc trục Oz . Biết ABC là tam giác cân tại C . Tìm tọa độ điểm C .

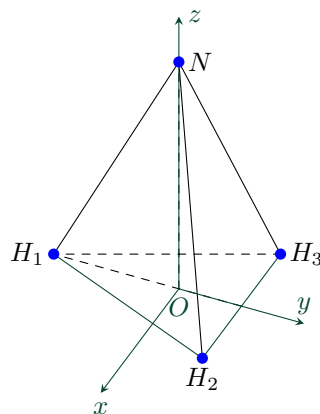
VÍ DỤ 5. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $M(2; 3; -1)$, $N(-1; 1; 1)$, $P(1; m-1; 2)$. Với những giá trị nào của m thì tam giác MNP vuông tại N ?

VÍ DỤ 6. Cho hai điểm $A(2, -1, 1)$; $B(3, -2, -1)$. Tìm điểm N trên trục Ox cách đều A và B .

VÍ DỤ 7.

Trong Hóa học, cấu tạo của phân tử ammoniac (NH_3) có dạng hình chóp tam giác đều mà đỉnh là nguyên tử nitrogen (N) và đáy là tam giác $H_1H_2H_3$ với H_1, H_2, H_3 là vị trí của ba nguyên tử hydrogen (H). Góc tạo bởi liên kết H – N – H, có hai cạnh là hai đoạn thẳng nối N với hai trong ba điểm H_1, H_2, H_3 (chẳng hạn $\widehat{H_1NH_2}$), gọi là góc liên kết của phân tử NH_3 . Góc này xấp xỉ 107° .

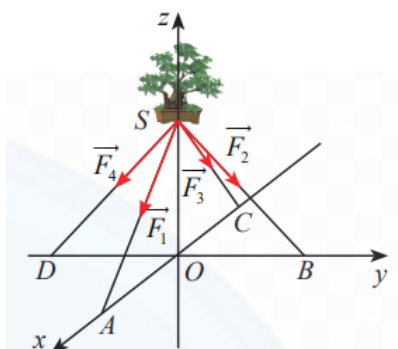
Trong không gian $Oxyz$, cho một phân tử NH_3 được biểu diễn bởi hình chóp tam giác đều $N.H_1H_2H_3$ với O là tâm của đáy. Nguyên tử nitrogen được biểu diễn bởi điểm N thuộc trục Oz , ba nguyên tử hydrogen ở các vị trí H_1, H_2, H_3 trong đó $H_1(0; -2; 0)$ và H_2H_3 song song với trục Ox (Hình bên).



a) Tính khoảng cách giữa hai nguyên tử hydrogen.
b) Tính khoảng cách giữa hai nguyên tử nitrogen với mỗi nguyên tử hydrogen.

VÍ DỤ 8.

Một chậu cây được đặt trên một giá đỡ có bốn chân với điểm đặt $S(0; 0; 20)$ và các điểm chạm mặt đất của bốn chân lần lượt là $A(20; 0; 0)$, $B(0; 20; 0)$, $C(-20; 0; 0)$, $D(0; -20; 0)$ (đơn vị cm). Cho biết trọng lực tác dụng lên chậu cây có độ lớn 40(N) và được phân bố thành bốn lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4$ có độ lớn bằng nhau như Hình 4. Tìm tọa độ của các lực nói trên (mỗi centimet biểu diễn 1 N).



QUICK NOTE

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM 4 PHƯƠNG ÁN

- CÂU 1.** Tích vô hướng của hai vectơ $\vec{u} = (3; 0; 1)$ và $\vec{v} = (2; 1; 0)$ là
 (A) 0. (B) 6. (C) 8. (D) -6.
- CÂU 2.** Tích vô hướng của hai vectơ $\vec{u} = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$ và $\vec{v} = (0; 1; -2)$ bằng
 (A) -4. (B) 0. (C) 4. (D) -2.
- CÂU 3.** Cho các véc-tơ $\vec{a} = (1; 2; 1)$ và $\vec{b} = (2; 2; 1)$. Tính tích vô hướng $\vec{a} \cdot (\vec{a} - \vec{b})$.
 (A) -1. (B) -2. (C) 2. (D) 1.
- CÂU 4.** Một thiết bị thăm dò đáy biển được đẩy bởi một lực $\vec{f} = (5; 4; -2)$ (đơn vị: N) giúp thiết bị thực hiện độ dời $\vec{a} = (70; 20; -40)$ (đơn vị: m). Tính công sinh bởi lực \vec{f} .
 (A) 480 (J). (B) 530 (J). (C) 510 (J). (D) 500 (J).
- CÂU 5.** Góc giữa hai véc-tơ \vec{i} và $\vec{u} = (-\sqrt{3}; 0; 1)$ bằng
 (A) 60° . (B) 120° . (C) 150° . (D) 30° .
- CÂU 6.** Cho hai véc-tơ $\vec{u} = (-1; 1; 0)$ và $\vec{v} = (0; -1; 0)$. Góc hợp bởi hai véc-tơ \vec{u} và \vec{v} bằng
 (A) 60° . (B) 45° . (C) 135° . (D) 120° .
- CÂU 7.** Cho hai véc-tơ $\vec{a}(-2; -3; 1)$ và $\vec{b}(1; 0; 1)$. Tính $\cos(\vec{a}, \vec{b})$.
 (A) $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = -\frac{1}{2\sqrt{7}}$. (B) $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = -\frac{3}{2\sqrt{7}}$.
 (C) $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{1}{2\sqrt{7}}$. (D) $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{3}{2\sqrt{7}}$.
- CÂU 8.** Cho $\vec{a} = (3; 2; 1)$, $\vec{b} = (-2; 2; -4)$. Giá trị của $|\vec{a} - \vec{b}|$ bằng
 (A) $5\sqrt{2}$. (B) 50. (C) $2\sqrt{5}$. (D) 3.
- CÂU 9.** Cho hai véc-tơ $\vec{u} = (-1; 0; 2)$ và $\vec{v} = (x; -2; 1)$. Biết rằng $\vec{u} \cdot \vec{v} = 4$. Khi đó $|\vec{v}|$ bằng
 (A) $\sqrt{21}$. (B) 2. (C) 3. (D) 5.
- CÂU 10.** Tìm số thực a để véc-tơ $\vec{u} = (a; 0; 1)$ vuông góc với véc-tơ $\vec{v} = (2; -1; 4)$.
 (A) $a = -2$. (B) $a = -4$. (C) $a = 4$. (D) $a = 2$.
- CÂU 11.** Tìm x để hai véc-tơ $\vec{a} = (x; x - 2; 2)$ và $\vec{b} = (x; 1; -2)$ vuông góc với nhau.
 (A) $x = 3$. (B) $x = 1$. (C) $\begin{cases} x = 2 \\ x = -3 \end{cases}$. (D) $\begin{cases} x = -2 \\ x = 3 \end{cases}$.
- CÂU 12.** Cho hai véc-tơ $\vec{u} = (1; -2; 1)$ và $\vec{v} = (2; 1; -1)$. Véc-tơ nào dưới đây vuông góc với cả hai véc-tơ \vec{u} và \vec{v} ?
 (A) $\vec{w}_2 = (1; 3; 5)$. (B) $\vec{w}_3 = (1; -4; 7)$. (C) $\vec{w}_4 = (1; 4; 7)$. (D) $\vec{w}_1 = (1; -3; 5)$.
- CÂU 13.** Tích có hướng của hai véc-tơ $\vec{a} = (-1; 2; 0)$ và $\vec{b} = (0; 4; -3)$ có tọa độ là
 (A) $(-6; 3; -4)$. (B) $(6; -3; 4)$. (C) $(6; 3; 4)$. (D) $(-6; -3; -4)$.
- CÂU 14.** Cho $A(2; 1; 4)$, $B(-2; 2; -6)$, $C(6; 0; -1)$. Tính tích vô hướng $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$.
 (A) $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 67$. (B) $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = -67$. (C) $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 33$. (D) $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 65$.
- CÂU 15.** Cho $A(1; -2; 3)$, $B(2; -4; 1)$, $C(2; 0; 2)$, khi đó tích vô hướng $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$ bằng
 (A) 4. (B) -1. (C) 7. (D) -5.
- CÂU 16.** Cho tam giác ABC với $A(8; 9; 2)$, $B(3; 5; 1)$, $C(11; 10; 4)$. Số đo góc A của tam giác ABC là
 (A) 60° . (B) 150° . (C) 30° . (D) 120° .
- CÂU 17.** Cho điểm $A(3; -1; 5)$, $B(m; 2; 7)$. Tìm tất cả các giá trị của m để độ dài đoạn $AB = 7$.
 (A) $m = 3$ hoặc $m = -3$. (B) $m = 9$ hoặc $m = -3$.
 (C) $m = -3$ hoặc $m = -9$. (D) $m = 9$ hoặc $m = 3$.
- CÂU 18.** Cho ba điểm $A(3; 2; 8)$, $B(0; 1; 3)$ và $C(2; m; 4)$. Tìm m để tam giác ABC vuông tại B .
 (A) $m = 4$. (B) $m = -10$. (C) $m = 25$. (D) $m = -1$.

CÂU 19. Cho ba điểm $M(2; 3; -1)$, $N(-1; 1; 1)$ và $P(1; m-1; 2)$. Tìm m để tam giác MNP vuông tại N .

- A** $m = 0$. **B** $m = -4$. **C** $m = 2$. **D** $m = -6$.

CÂU 20. Cho tam giác ABC có $A(7; 3; 3)$, $B(1; 2; 4)$, $C(2; 3; 5)$. Tìm tọa độ điểm H là chân đường cao kẻ từ A của tam giác ABC .

- A** $H(3; 4; 6)$. **B** $H(-3; 4; 7)$. **C** $H(2; 4; 1)$. **D** $H(2; -4; 3)$.

CÂU 21. Cho hai điểm $A(1; 1; 0)$, $B(2; -1; 2)$. Gọi $M(0; 0; z)$ là điểm thuộc trục Oz sao cho $MA^2 + MB^2$ nhỏ nhất. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A** $z \in (0; 1]$. **B** $z \in (1; 2]$. **C** $z \in (-1; 0]$. **D** $z \in (-2; -1]$.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM ĐÚNG SAI

CÂU 22. Cho ba vec-tơ $\vec{a} = (-1; 1; 0)$, $\vec{b} = (1; 1; 0)$ và $\vec{c} = (1; 1; 1)$.

Mệnh đề	Đ	S
a) $ \vec{a} = 2$.		
b) $ \vec{c} = \sqrt{3}$.		

Mệnh đề	Đ	S
c) $\cos(\vec{a}, \vec{c}) = \frac{2}{\sqrt{5}}$.		
d) $\vec{b} \perp \vec{c}$.		

CÂU 23. Cho hai vectơ $\vec{u} = (0; 2; 3)$ và $\vec{v} = (m-1; 2m; 3)$.

Mệnh đề	Đ	S
a) $ \vec{u} = \sqrt{13}$.		
b) $ \vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow m = -\frac{3}{5}$.		

Mệnh đề	Đ	S
c) $\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow m = 1$.		
d) $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow m = \frac{9}{4}$.		

CÂU 24. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba vectơ $\vec{a}(1; 2; 3)$, $\vec{b}(2; 2; -1)$, $\vec{c}(4; 0; -4)$.

Mệnh đề	Đ	S
a) Tọa độ của vectơ $\vec{x} = \vec{a} + \vec{b}$ là $\vec{x} = (3; 4; 2)$.		
b) Tọa độ của vectơ $\vec{y} = \vec{a} + \vec{c}$ là $\vec{y} = (5; 2; 1)$.		
c) Tọa độ của vectơ $\vec{z} = \vec{b} + \vec{c}$ là $\vec{z} = (6; -2; -5)$.		
d) Vectơ $\vec{k} = (7; 4; -2)$ thỏa mãn đẳng thức $\vec{k} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.		

CÂU 25. Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a}(1; -1; 5)$, $\vec{b}(3; 2; -1)$.

Mệnh đề	Đ	S
a) $\vec{a} + \vec{b} \neq \vec{0}$.		
b) $\vec{a} - \vec{b} = (-2; -3; 4)$.		
c) $\vec{v} = \vec{b} - \vec{a}$ có tung độ âm.		
d) Xét \vec{x} thỏa $\vec{a} - \vec{x} = \vec{b}$. Hoành độ của vectơ \vec{x} thuộc khoảng $(-3; 1)$.		

CÂU 26. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $D(4; -1; 3)$ và các điểm M , N , P lần lượt thuộc các trục Ox , Oy , Oz sao cho DM , DN , DP đôi một vuông góc với nhau

Mệnh đề	Đ	S
a) Tung độ của điểm N bằng 13.		
b) Cao độ của điểm P bằng $\frac{13}{4}$.		
c) $V_{DMNP} > 29$.		
d) Gọi \vec{x} là vectơ thỏa $\vec{x} \cdot \overrightarrow{DM} = 1$; $\vec{x} \cdot \overrightarrow{DN} = 2$; $\vec{x} \cdot \overrightarrow{DP} = -3$ thì tổng hoành độ, tung độ và cao độ của vectơ \vec{x} thuộc khoảng $(3; 7)$.		

QUICK NOTE

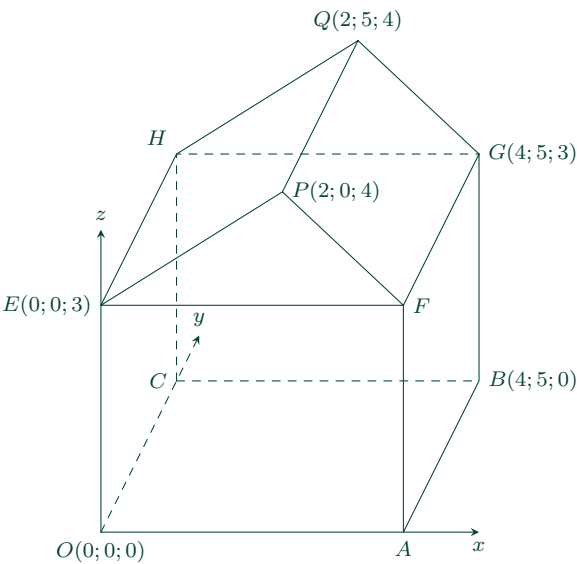
QUICK NOTE

CÂU 27. Cho tam giác ABC có $A(1; 2; 0)$, $B(0; 1; 1)$, $C(2; 1; 0)$.

Mệnh đề	Đ	S
a) Tam giác ABC vuông tại A .		
b) Chu vi tam giác là $\sqrt{7} + \sqrt{3} + \sqrt{2}$.		
c) Diện tích tam giác ABC là $\sqrt{6}$.		
d) Tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là $I\left(1; 1; \frac{1}{2}\right)$.		

CÂU 28. Hình minh họa sơ đồ một ngôi nhà trong hệ trục tọa độ $Oxyz$, trong đó nền nhà, bốn bức tường và hai mái nhà đều là hình chữ nhật.

Mệnh đề	Đ	S
a) Tọa độ của các điểm $A(5; 0; 0)$.		
b) Tọa độ của các điểm $H(0; 5; 3)$.		
c) Góc nhị diện có cạnh là đường thẳng FG , hai mặt lần lượt là $(FGQP)$ và $(FGHE)$ gọi là góc dốc của mái nhà. Số đo của góc dốc của mái nhà bằng $26,6^\circ$ (làm tròn kết quả đến hàng phần mười của độ).		
d) Chiều cao của ngôi nhà là 4.		



BÀI TẬP TỰ LUẬN TRẢ LỜI NGẮN

- CÂU 29.** Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a} = (1; 2; -3)$; $\vec{b} = (-1; -2; z)$. Tìm giá trị z sao cho $\vec{a} + \vec{b} = \vec{0}$
- CÂU 30.** Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 6\vec{k}$ và $\vec{b} = 6\vec{j} + \vec{k}$. Khi đó độ dài của $\vec{a} - 2\vec{b}$ (làm tròn đến hàng phần mười)
- CÂU 31.** Trong không gian $Oxyz$, cho các vectơ $\vec{a} = (1; 0; -2)$, $\vec{b} = (-2; 1; 3)$, $\vec{c} = (3; 2; -1)$, $\vec{d} = (9; 0; -11)$ và 3 số thực m, n, p thỏa $m \cdot \vec{a} + n \cdot \vec{b} + p \cdot \vec{c} = \vec{d}$. Tính giá trị biểu thức $T = m + n + p$.

LỜI GIẢI CHI TIẾT

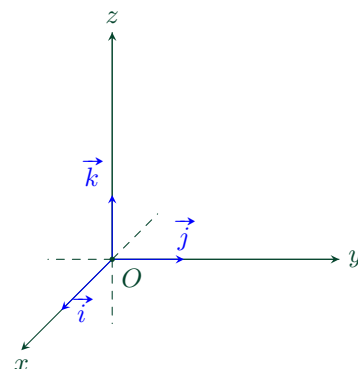
Bài 2. TỌA ĐỘ CỦA VÉC TƠ TRONG KHÔNG GIAN

A. LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1. Hệ tọa độ trong không gian

Trong không gian, ba trục Ox , Oy , Oz đôi một vuông góc với nhau tại gốc O của mỗi trục. Gọi \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} lần lượt là các véc-tơ đơn vị trên các trục Ox , Oy , Oz .

- ☑ Hệ ba trục như vậy được gọi là hệ trục tọa độ Descartes vuông góc $Oxyz$, hay đơn giản là hệ tọa độ $Oxyz$. Điểm O được gọi là gốc tọa độ.
- ☑ Các mặt phẳng (Oxy) , (Oyz) , (Ozx) đôi một vuông góc với nhau được gọi là các mặt phẳng tọa độ.
- ☑ $\vec{i}^2 = \vec{j}^2 = \vec{k}^2 = 1$
và $\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{i} = 0$



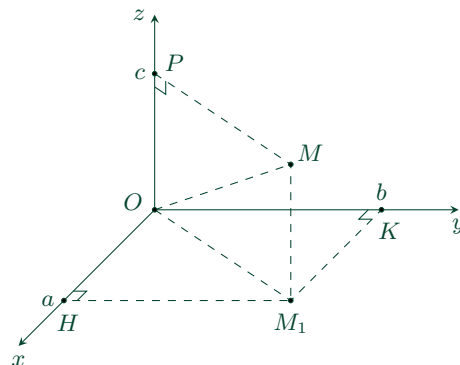
Không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ còn được gọi là không gian $Oxyz$.

2. Tọa độ của điểm

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm M . Tọa độ điểm M được xác định như sau:

- ☑ Xác định hình chiếu M_1 của điểm M trên mặt phẳng Oxy . Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , tìm hoành độ a , tung độ b của điểm M_1 .
- ☑ Xác định hình chiếu P của điểm M trên trục cao Oz , điểm P ứng với số c trên trục Oz . Số c là cao độ của điểm M .

Bộ số $(a; b; c)$ là tọa độ của điểm M trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, kí hiệu là $M(a; b; c)$.



3. Tọa độ của véc-tơ

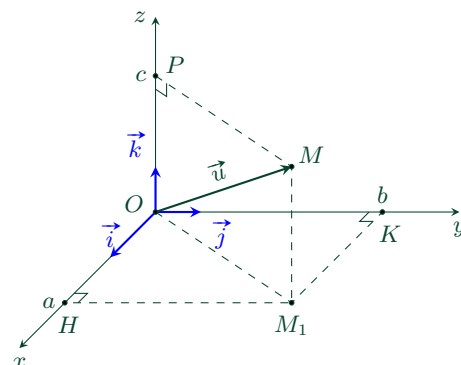
Trong không gian $Oxyz$:

- ☑ Tọa độ của điểm M cũng là tọa độ của véc-tơ \overrightarrow{OM} .
- ☑ Cho \vec{u} . Dựng điểm $M(a; b; c)$ thỏa $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$ thì tọa độ của điểm M là tọa độ của \vec{u} . Theo hình vẽ thì

$$\vec{u} = \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{OK} + \overrightarrow{OP} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}.$$

Suy ra

$$\vec{u} = (a; b; c) \Leftrightarrow \vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}.$$



⚠ Tọa độ các véc-tơ đơn vị lần lượt là: $\vec{i} = (1; 0; 0)$, $\vec{j} = (0; 1; 0)$, $\vec{k} = (0; 0; 1)$.

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Dạng 1. Tọa độ điểm, tọa độ vec tơ

Khi xác định tọa độ điểm, tọa độ vec tơ ta chú ý các kết quả sau:

a) $\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k} \Leftrightarrow \vec{u} = (a; b; c).$

b) $\vec{u}(u_1; u_2; u_3) = \vec{v}(v_1; v_2; v_3) \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = v_1 \\ u_2 = v_2 \\ u_3 = v_3 \end{cases}$

c) $\overrightarrow{OM} = (a; b; c)$ thì $M(a; b; c).$

d) $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A).$

e) Chiếu điểm $M(a; b; c)$ lên mặt phẳng tọa độ (hoặc trục tọa độ) thì "thành phần bị khuyết" bằng 0. Chẳng hạn: $M(1; 2; 3)$ chiếu lên (Oxy) thì $z = 0$. Suy ra hình chiếu là $M_1(1; 2; 0).$

f) Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành khi và chỉ khi

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$$

BÀI TẬP TỰ LUẬN TRẢ LỜI NGẮN

VÍ DỤ 1. Trong không gian $Oxyz$, cho $A(3; -2; -1)$. Gọi A_1, A_2, A_3 lần lượt là hình chiếu của điểm A trên các mặt phẳng tọa độ $(Oxy), (Oyz), (Oxz)$. Tìm tọa độ của các điểm A_1, A_2, A_3 .

Lời giải.

Tọa độ của các điểm $A_1 = (3; -2; 0).$

Tọa độ của các điểm $A_2 = (3; 0; -1).$

Tọa độ của các điểm $A_3 = (0; -2; -1)$

VÍ DỤ 2. Trong không gian $Oxyz$, cho $A(-2; 3; 4)$. Gọi H, K, P lần lượt là hình chiếu của điểm A trên các trục Ox, Oy, Oz . Tìm tọa độ của các điểm H, K, P .

Lời giải.

Tìm tọa độ của các điểm $H = (-2; 0; 0).$

Tìm tọa độ của các điểm $K = (0; 3; 0).$

Tìm tọa độ của các điểm $P = (0; 0; 4).$

VÍ DỤ 3. Trong không gian $Oxyz$, cho $A(1; 1; -2), B(4; 3; 1)$ và $C(-1; -2; 2).$

a) Tìm tọa độ của vectơ \overrightarrow{AB} .

b) Tìm tọa độ của điểm D sao cho $ABCD$ là hình bình hành.

Lời giải.

a) Ta có $\overrightarrow{AB} = (4 - 1; 3 - 1; 1 - (-2)) = (3; 2; 3).$

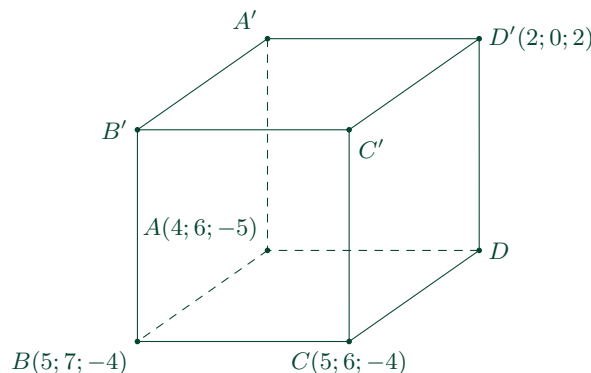
b) Gọi tọa độ của điểm D là $(x_D; y_D; z_D)$, ta có $\overrightarrow{DC} = (-1 - x_D; -2 - y_D; 2 - z_D).$
Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành khi và chỉ khi

$$\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 - x_D = 3 \\ -2 - y_D = 2 \\ 2 - z_D = 3. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = -4 \\ y_D = -4 \\ z_D = -1. \end{cases}$$

Vậy $D(-4; -4; -1).$

VÍ DỤ 4. Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD \cdot A'B'C'D'$ có $A(4; 6; -5), B(5; 7; -4), C(5; 6; -4), D'(2; 0; 2).$ Tìm tọa độ các đỉnh còn lại của hình hộp $ABCD \cdot A'B'C'D'$.

Lời giải.



Ta có $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = x_A - x_B + x_C \\ y_D = y_A - y_B + y_C \\ z_D = z_A - z_B + z_C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = 4 \\ y_D = 5 \\ z_D = -5 \end{cases}$. Suy ra $D(4; 5; -5)$.

Do đó $\overrightarrow{DD'} = (2 - 4; 0 - 5; 2 - (-5)) = (-2; -5; 7)$.

Theo tính chất của hình hộp ta có $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{DD'} = (-2; -5; 7)$. Suy ra tọa độ đỉnh còn lại của hình hộp là $A' = (2; 1; 2)$, $B' = (3; 2; 3)$, $C' = (3; 1; 3)$.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM 4 PHƯƠNG ÁN

CÂU 1. Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a} = -2\vec{i} + 3\vec{j} + 5\vec{k}$. Tọa độ của véc-tơ \vec{a} là

- (A) $(2; -3; -5)$. (B) $(2; 3; -5)$. (C) $(-2; 3; 5)$. (D) $(2; 3; 5)$.

Lời giải.

Tọa độ của véc-tơ \vec{a} là $(-2; 3; 5)$.

Chọn đáp án (C) □

CÂU 2. Trong không gian $Oxyz$, cho véc-tơ $\vec{u} = 3\vec{i} + 4\vec{k} - \vec{j}$. Tọa độ của véc-tơ \vec{u} là

- (A) $(3; -1; 4)$. (B) $(3; 4; -1)$. (C) $(4; -1; 3)$. (D) $(4; 3; -1)$.

Lời giải.

Tọa độ của véc-tơ \vec{u} là $(3; -1; 4)$.

Chọn đáp án (A) □

CÂU 3. Trong không gian $Oxyz$, điểm nào sau đây thuộc trục Oz ?

- (A) $M(1; 0; 0)$. (B) $M(1; 0; 2)$. (C) $M(1; 2; 0)$. (D) $M(0; 0; -2)$.

Lời giải.

Ta có $M(0; 0; -2) \in Oz$.

Chọn đáp án (D) □

CÂU 4. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm M thỏa $\overrightarrow{OM} = 2\vec{i} + \vec{j}$. Tọa độ điểm M là

- (A) $M(0; 2; 1)$. (B) $M(1; 2; 0)$. (C) $M(2; 0; 1)$. (D) $M(2; 1; 0)$.

Lời giải.

Tọa độ $\overrightarrow{OM} = 2\vec{i} + \vec{j} = (2; 0; 0) + (0; 1; 0) = (2; 1; 0)$.

Vậy $M(2; 1; 0)$.

Chọn đáp án (D) □

CÂU 5. Trong không gian $Oxyz$, cho vectơ $\overrightarrow{OA} = \vec{j} - 2\vec{k}$. Tọa độ điểm A là

- (A) $(1; 0; -2)$. (B) $(0; 1; -2)$. (C) $(0; -1; 2)$. (D) $(1; -2; 0)$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{OA} = \vec{j} - 2\vec{k} \Leftrightarrow A(0; 1; -2)$.

Chọn đáp án (B) □

CÂU 6. Trong không gian $Oxyz$, xác định tọa độ của điểm A biết A nằm trên tia Ox và $OA = 2$.

- (A) $A(0; 0; 2)$. (B) $A(2; 2; 0)$. (C) $A(0; 2; 0)$. (D) $A(2; 0; 0)$.

Lời giải.

A nằm trên tia Ox và $OA = 2$ nên $A(2; 0; 0)$.

Chọn đáp án (D) □

CÂU 7. Trong không gian $Oxyz$, xác định tọa độ của điểm A biết A nằm trên tia đối của tia Oy và $OA = 3$.

- (A) $A(0; 3; 0)$. (B) $A(0; -3; 0)$. (C) $A(0; -9; 0)$. (D) $A(3; -3; 0)$.

Lời giải.

A nằm trên tia đối của tia Oy và $OA = 3$ nên $A(0; -3; 0)$.

Chọn đáp án **(B)** □

CÂU 8. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; -1; 2)$ và $B(2; 1; -4)$. Véc-tơ \overrightarrow{AB} có tọa độ là

- (A)** $(-1; -2; 6)$. **(B)** $(3; 0; -2)$. **(C)** $(1; 0; -6)$. **(D)** $(1; 2; -6)$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (1; 2; -6)$.

Chọn đáp án **(D)** □

CÂU 9. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 3; -2)$, $B(3; -2; 4)$. Véc-tơ \overrightarrow{AB} có tọa độ là

- (A)** $(2; 5; 6)$. **(B)** $(4; 1; 2)$. **(C)** $(2; -5; 6)$. **(D)** $(-2; 5; 6)$.

Lời giải.

Véc-tơ \overrightarrow{AB} có tọa độ là $(2; -5; 6)$.

Chọn đáp án **(C)** □

CÂU 10. Cho hai điểm A, B thỏa mãn $\overrightarrow{OA} = (2; -1; 3)$ và $\overrightarrow{OB} = (5; 2; -1)$. Tìm tọa độ véc-tơ \overrightarrow{AB} .

- (A)** $\overrightarrow{AB} = (2; -1; 3)$. **(B)** $\overrightarrow{AB} = (3; 3; -4)$. **(C)** $\overrightarrow{AB} = (7; 1; 2)$. **(D)** $\overrightarrow{AB} = (3; -3; 4)$.

Lời giải.

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (5 - 2; 2 + 1; -1 - 3) = (3; 3; -4)$.

Chọn đáp án **(B)** □

CÂU 11. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm M và N biết $M(2; 1; -1)$ và $\overrightarrow{MN} = (-1; 2; -3)$. Tọa độ N là

- (A)** $N(1; -3; -4)$. **(B)** $N(1; 3; -4)$. **(C)** $N(-1; 3; -4)$. **(D)** $N(1; 3; 4)$.

Lời giải.

$$\text{Gọi } N(x, y, z), \text{ khi đó ta có } \begin{cases} x - 2 = -1 \\ y - 1 = 2 \\ z + 1 = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \\ z = -4 \end{cases} \Rightarrow N(1; 3; -4).$$

Chọn đáp án **(B)** □

CÂU 12. Hình chiếu vuông góc của điểm $A(3; -4; 5)$ trên mặt phẳng (Oxz) là điểm

- (A)** $M(3; 0; 0)$. **(B)** $M(0; -4; 5)$. **(C)** $M(0; 0; 5)$. **(D)** $M(3; 0; 5)$.

Lời giải.

Hình chiếu vuông góc của điểm $A(3; -4; 5)$ trên mặt phẳng (Oxz) là điểm $M(3; 0; 5)$.

Chọn đáp án **(D)** □

CÂU 13. Hình chiếu vuông góc của điểm $A(1; 2; 3)$ trên mặt phẳng (Oxy) là điểm

- (A)** $M(0; 0; 3)$. **(B)** $N(1; 2; 0)$. **(C)** $Q(0; 2; 0)$. **(D)** $P(1; 0; 0)$.

Lời giải.

Hình chiếu vuông góc của điểm $A(1; 2; 3)$ trên mặt phẳng (Oxy) là điểm $N(1; 2; 0)$.

Chọn đáp án **(B)** □

CÂU 14. Hình chiếu vuông góc của điểm $M(2; 1; -3)$ lên mặt phẳng (Oyz) có tọa độ là

- (A)** $(2; 0; 0)$. **(B)** $(2; 1; 0)$. **(C)** $(0; 1; -3)$. **(D)** $(2; 0; -3)$.

Lời giải.

Điểm thuộc (Oyz) có tọa độ $(0; y; z)$ nên hình chiếu của M lên (Oyz) có tọa độ là $(0; -1; 3)$.

Chọn đáp án **(C)** □

CÂU 15. Hình chiếu vuông góc của điểm $A(3; 2; 1)$ trên trục Ox có tọa độ là

- (A)** $(0; 2; 1)$. **(B)** $(0; 2; 0)$. **(C)** $(3; 0; 0)$. **(D)** $(0; 0; 1)$.

Lời giải.

Hình chiếu vuông góc của điểm $A(3; 2; 1)$ lên trục Ox là $A'(3; 0; 0)$.

Chọn đáp án **(C)** □

CÂU 16. Hình chiếu của điểm $M(2; 3; -2)$ trên trục Oy có tọa độ là

- (A)** $(2; 0; 0)$. **(B)** $(0; 3; 0)$. **(C)** $(0; 0; -2)$. **(D)** $(2; 0; -2)$.

Lời giải.

Hình chiếu của điểm $M(2; 3; -2)$ trên trục Oy có tọa độ là $(0; 3; 0)$.

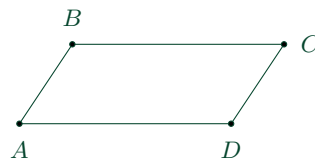
Chọn đáp án **(B)** □

CÂU 17.

Trong không gian $Oxyz$, cho hình bình hành $ABCD$ với $A(-2; 3; 1)$, $B(3; 0; -1)$, $C(6; 5; 0)$.

Tọa độ đỉnh D là

- (A) $D(11; 2; 2)$. (B) $D(1; 8; 2)$. (C) $D(11; 2; -2)$. (D) $D(1; 8; -2)$.



Lời giải.

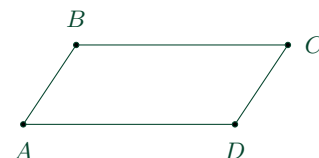
$$\text{Ta có } \begin{cases} x_D = x_A + x_C - x_B = 1 \\ y_D = y_A + y_C - y_B = 8 \\ z_D = z_A + z_C - z_B = 2 \end{cases} \Rightarrow D(1; 8; 2).$$

Chọn đáp án (B) □

CÂU 18.

Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(1; 0; 3)$, $B(2; 3; -4)$, $C(-3; 1; 2)$. Tìm tọa độ điểm D sao cho tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.

- (A) $D(4; 2; 9)$. (B) $D(-2; 4; -5)$. (C) $D(6; 2; -3)$. (D) $D(-4; -2; 9)$.



Lời giải.

Gọi $D(x; y; z) \Rightarrow \overrightarrow{CD} = (x + 3; y - 1; z - 2)$ và $\overrightarrow{BA} = (-1; -3; 7)$.

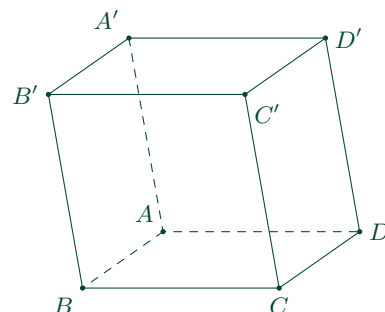
$$\text{Để tứ giác } ABCD \text{ là hình bình hành ta có } \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD} \Rightarrow \begin{cases} x + 3 = -1 \\ y - 1 = -3 \\ z - 2 = 7 \end{cases} \Rightarrow D(-4; -2; 9).$$

Chọn đáp án (D) □

CÂU 19.

Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $A(1; 0; 1)$, $B(2; 1; 2)$, $D(1; -1; 1)$, $C'(4; 5; -5)$. Tìm tọa độ đỉnh C của hình hộp.

- (A) $C(2; 0; 2)$. (B) $C(2; 0; 2)$.
(C) $C(2; 0; 2)$. (D) $C(2; 0; 2)$.



Lời giải.

$$\text{Ta có } \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 - 1 = x_C - 1 \\ 1 - 0 = y_C - (-1) \\ 2 - 1 = z_C - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_C = 2 \\ y_C = 0 \\ z_C = 2 \end{cases} \Rightarrow C(2; 0; 2).$$

CÂU 20. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $A(1; 0; 1)$, $B(2; 1; 2)$, $D(1; -1; 1)$, $C'(4; 5; -5)$. Tìm tọa độ đỉnh A' của hình hộp.

- (A) $A'(-1; -5; 8)$. (B) $A'(-1; -5; 8)$. (C) $A'(-1; -5; 8)$. (D) $A'(-1; -5; 8)$.

Lời giải.

Ta có

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 - 1 = x_C - 1 \\ 1 - 0 = y_C - (-1) \\ 2 - 1 = z_C - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_C = 2 \\ y_C = 0 \\ z_C = 2 \end{cases} \Rightarrow C(2; 0; 2);$$

$$\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{CC'} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{A'} - 1 = 2 - 4 \\ y_{A'} - 0 = 0 - 5 \\ z_{A'} - 1 = 2 - (-5) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{A'} = -1 \\ y_{A'} = -5 \\ z_{A'} = 8 \end{cases} \Rightarrow A'(-1; -5; 8);$$

CÂU 21.

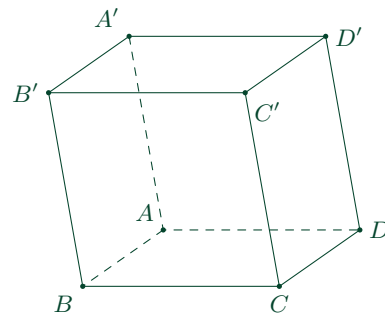
Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $A(1; 0; 1)$, $B(2; 1; 2)$, $D(1; -1; 1)$, $C'(4; 5; -5)$. Tìm tọa độ đỉnh D' của hình hộp.

A $D'(-1; -6; 8)$.

B $D'(-1; -6; 8)$.

C $D'(-1; -6; 8)$.

D $D'(-1; -6; 8)$.



Lời giải.

Ta có

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 - 1 = x_C - 1 \\ 1 - 0 = y_C - (-1) \\ 2 - 1 = z_C - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_C = 2 \\ y_C = 0 \\ z_C = 2 \end{cases} \Rightarrow C(2; 0; 2);$$

$$\overrightarrow{DD'} = \overrightarrow{CC'} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{D'} - 1 = 2 - 4 \\ y_{D'} - (-1) = 0 - 5 \\ z_{D'} - 1 = 2 - (-5) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{D'} = -1 \\ y_{D'} = -6 \\ z_{D'} = 8 \end{cases} \Rightarrow D'(-1; -6; 8).$$

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM ĐÚNG SAI

CÂU 22. Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a} = \vec{i} + 3\vec{k} - 4\vec{j}$ và $\vec{b} = (m - n; 4m - 6n; n^2 - 3m + 2)$, với m, n là tham số.

Mệnh đề	Đ	S
a) Tọa độ $\vec{a} = (1; 3; -4)$.		X
b) Dựng điểm A thỏa $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ thì $A(1; -4; 3)$.	X	
c) Tồn tại giá trị của m và n để $\vec{b} = \vec{0}$.		X
d) Nếu $\vec{a} = \vec{b}$ thì $m + n = 9$.	X	

Lời giải.

a) Tọa độ $\vec{a} = (1; -4; 3)$.

b) Khi $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ thì tọa độ \vec{a} cũng là tọa độ điểm A . Suy ra $A(1; -4; 3)$.

c) $\vec{b} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} m - n = 0 \\ 4m - 6n = 0 \\ n^2 - 3m + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ n = 0 \\ n^2 - 3m + 2 = 0 \end{cases} \quad (\text{vô nghiệm}).$

Vậy, không tồn tại m, n để $\vec{b} = \vec{0}$.

d) $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} m - n = 1 \\ 4m - 6n = -4 \\ n^2 - 3m + 2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 5 \\ n = 4 \end{cases}.$

Suy ra $m + n = 9$.

Chọn đáp án

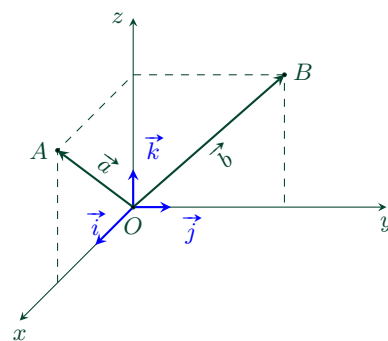
a sai	b đúng	c sai	d đúng
-------	--------	-------	--------

 □

CÂU 23.

Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a} = (2; 2; 0)$, $\vec{b} = 2\vec{j} + 2\vec{k}$. Đặt $\vec{OA} = \vec{a}$ và $\vec{OB} = \vec{b}$.

Mệnh đề	Đ	S
a) $\vec{a} = 2\vec{i} + 2\vec{k}$.		X
b) Toạ độ $\vec{b} = (0; 2; 2)$.	X	
c) Toạ độ $\vec{AB} = (-2; 2; 0)$.	X	
d) Góc $\widehat{AOB} = 45^\circ$.		X

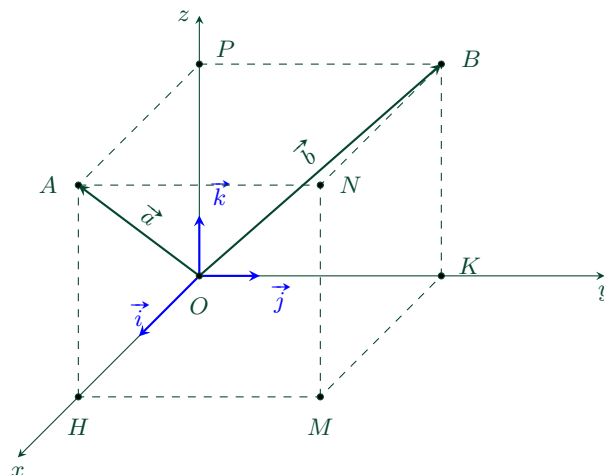


Lời giải.

- a) Ta có $\vec{a} = (2; 0; 2) \Rightarrow \vec{a} = 2\vec{i} + 2\vec{k}$.
 b) Ta có $\vec{b} = 2\vec{j} + 2\vec{k} \Rightarrow \vec{b} = (0; 2; 2)$.
 c) Ta có $\vec{OA} = \vec{a}$ thì toạ độ véc tơ \vec{a} cũng chính là toạ độ A .
 Suy ra $A(2; 0; 2)$. Tương tự $B(0; 2; 2)$. Từ đây, ta tính được

$$\vec{AB} = (-2; 2; 0).$$

- d) Nhận xét $OHMK.PANB$ là hình lập phương. Suy ra $\triangle OAB$ đều. Vậy $\widehat{AOB} = 60^\circ$.

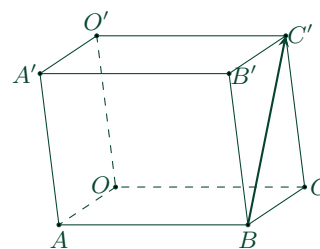


Chọn đáp án ☐ a sai ☐ b đúng ☐ c đúng ☐ d sai

CÂU 24.

Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp $OABC.O'A'B'C'$ có $A(1; 1; -1)$, $B(0; 3; 0)$, $\vec{BC'} = (2; -6; 6)$. Gọi H, K lần lượt là trọng tâm của tam giác $OA'O'$ và $CB'C'$.

Mệnh đề	Đ	S
a) Toạ độ điểm C' là $(2; -3; 6)$.	X	
b) Toạ độ điểm O' là $(3; -5; 5)$.	X	
c) Toạ độ véc tơ $\vec{AB'} = (-2; 3; -6)$.		X
d) Toạ độ véc tơ $\vec{HK} = (-1; 2; -1)$.		X



Lời giải.

- a) Gọi $C'(x; y; z)$. Ta có

$$\vec{BC'} = (2; -6; 6) \Rightarrow \begin{cases} x - 0 = 2 \\ y - 3 = -6 \\ z - 0 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -3 \\ z = 6 \end{cases}$$

Vậy $C(2; -3; 6)$.

- b) Gọi $O'(x; y; z)$. Theo hình vẽ thì

$$\vec{AO'} = \vec{BC'} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = 2 \\ y - 1 = -6 \\ z + 1 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -5 \\ z = 5 \end{cases}$$

Vậy $O'(3; -5; 5)$.

- c) Theo hình vẽ thì $\vec{AB'} = \vec{OC'} = (2; -3; 6)$.

- d) Ta có $\vec{HK} = \vec{AB} = (-1; 2; 1)$.

Chọn đáp án ☐ a đúng ☐ b đúng ☐ c sai ☐ d sai

Dạng 2. Tọa độ hóa một số hình không gian

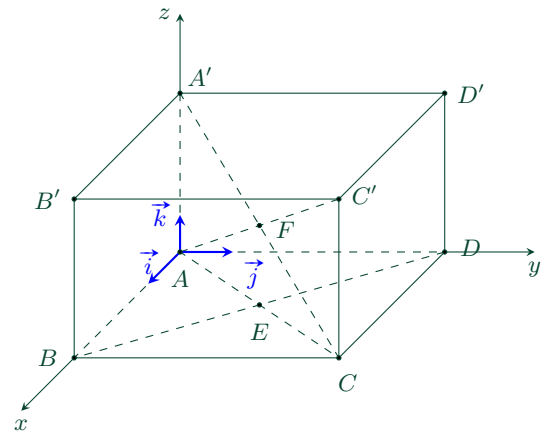
- ① Chọn một điểm mà từ đó có ba đường đôi một vuông góc nhau làm gốc tọa độ.
- ② Xây dựng tọa độ các điểm trên hình đã cho tương ứng với hệ trục vừa chọn.
- ③ Tọa độ các điểm đặc biệt:

- $M \in Ox \Rightarrow M(x; 0; 0).$
- $M \in Oy \Rightarrow M(0; y; 0).$
- $M \in Oz \Rightarrow M(0; 0; z).$
- $M \in (Oxy) \Rightarrow M(x; y; 0).$
- $M \in (Oxz) \Rightarrow M(x; 0; z).$
- $M \in (Oyz) \Rightarrow M(0; y; z).$

BÀI TẬP TỰ LUẬN TRẢ LỜI NGẮN

VÍ DỤ 1.

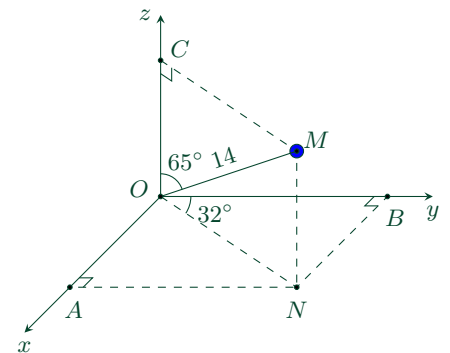
Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh $AB = AA' = 2$, $AD = 4$. Gọi E là tâm của hình chữ nhật $ABCD$, F là trung điểm AC' . Với hệ tọa độ $Oxyz$ được thiết lập như hình bên (gốc tọa độ O trùng với A), hãy xác định tọa độ các đỉnh của hình hộp chữ nhật và tọa độ hai điểm E, F .



Lời giải.

VÍ DỤ 2.

Một máy bay M đang cất cánh từ phi trường. Với hệ tọa độ $Oxyz$ được thiết lập như Hình bên, cho biết M là vị trí của máy bay với $OM = 14$, $\widehat{NOB} = 32^\circ$, $\widehat{MOC} = 65^\circ$. Tính tọa độ điểm M .



Lời giải.

Ta có:

$$OC = OM \cos 65^\circ \approx 5,9.$$

$$ON = CN = OM \sin 65^\circ \approx 12,7.$$

$$OB = ON \cos 32^\circ \approx 10,8.$$

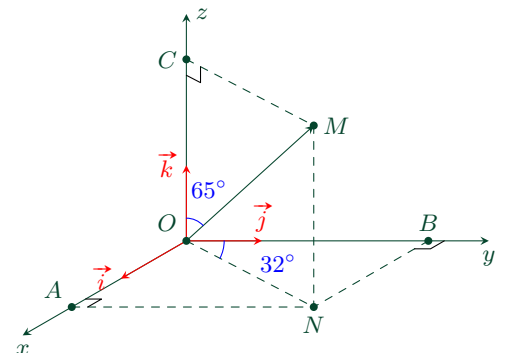
$$OA = BN = ON \sin 32^\circ \approx 6,7.$$

Vì $OANB$ là hình chữ nhật nên $\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$.

Vì $OCMN$ là hình chữ nhật nên

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 6,7\vec{i} + 10,8\vec{j} + 5,9\vec{k}.$$

Do đó $M(6,7; 10,8; 5,9)$.

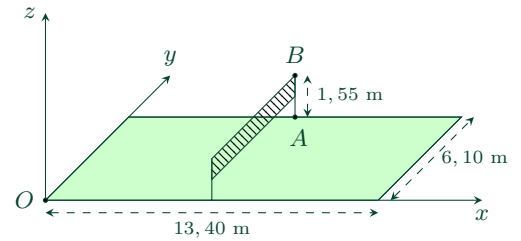


BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM 4 PHƯƠNG ÁN

CÂU 1.

Hình bên mô tả một sân cầu lông với kích thước theo tiêu chuẩn quốc tế. Với hệ toạ độ $Oxyz$ được thiết lập như hình bên (đơn vị trên mỗi trục là mét), giả sử AB là một trụ cầu lông để căng lưới, hãy xác định toạ độ của B .

- ☐ A $(6; 1; 6; 7; 1; 55)$.
 ☐ B $(6; 7; 6; 1; 1; 55)$.
 ☐ C $(6; 1; 0; 1; 55)$.
 ☐ D $(0; 6; 7; 1; 55)$.



Lời giải.

- ☒ Gọi toạ độ điểm A là $(x_A; y_A; z_A)$. Vì chiều rộng của sân là 6,1 m nên $x_A = 6,1$. Do một nửa chiều dài của sân là 6,7 m nên $y_A = 6,7$. Điểm A thuộc mặt phẳng (Oxy) nên $z_A = 0$. Vì vậy, điểm A có toạ độ là $(6,1; 6,7; 0)$.
☒ Độ dài đoạn thẳng AB là 1,55 m nên điểm B có toạ độ là $(6,1; 6,7; 1,55)$.

Vậy ta có: $\overrightarrow{AB} = (6,1 - 6,1; 6,7 - 6,7; 1,55 - 0)$, tức là $\overrightarrow{AB} = (0; 0; 1,55)$.

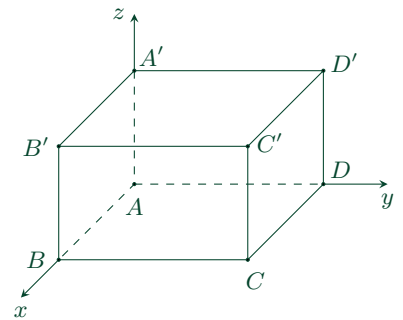
Chọn đáp án **B**.

Lời giải.

CÂU 2.

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng 2. Với hệ toạ độ $Oxyz$ được thiết lập như hình bên (gốc toạ độ O trùng với điểm A), toạ độ điểm B' là

- ☐ A $B(0; 2; 0)$.
 ☐ B $B(2; 2; 2)$.
 ☐ C $B(2; 2; 0)$.
 ☐ D $B(2; 0; 2)$.



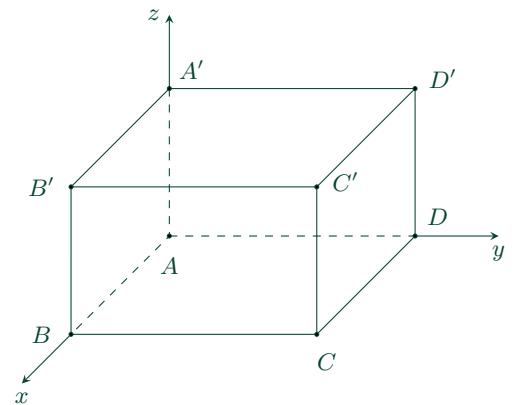
Lời giải.

Chọn đáp án **D**.

CÂU 3.

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng 2. Với hệ toạ độ $Oxyz$ được thiết lập như hình bên (gốc toạ độ O trùng với điểm A), toạ độ điểm C' là

- ☐ A $C'(2; 2; 0)$.
 ☐ B $C'(2; 2; 2)$.
 ☐ C $C'(2; 2; 0)$.
 ☐ D $C'(2; 0; 2)$.



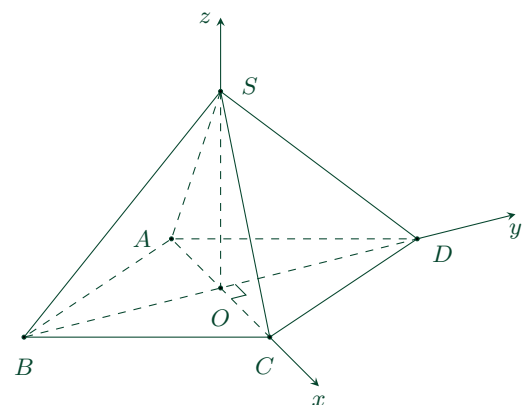
Lời giải.

Chọn đáp án **B**.

CÂU 4.

Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $a\sqrt{2}$, cạnh bên bằng $a\sqrt{5}$. Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$. Với hệ toạ độ $Oxyz$ được thiết lập như hình bên (gốc toạ độ O trùng với tâm hình vuông $ABCD$), toạ độ \overrightarrow{SC} là

- ☐ A $\overrightarrow{SC} = (2a; 0; -2a)$.
 ☐ B $\overrightarrow{SC} = (2a; -a; -2a)$.
 ☐ C $\overrightarrow{SC} = (a; 0; -2a)$.
 ☐ D $\overrightarrow{SC} = (a; 0; 2a)$.



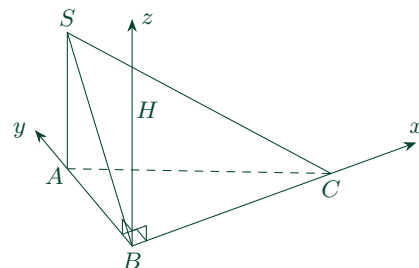
Lời giải.

Chọn đáp án **C**.....

CÂU 5.

Cho tứ diện $SABC$ có ABC là tam giác vuông tại B , $BC = 3$, $BA = 2$, SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) và có độ dài bằng 2. Với hệ tọa độ $Oxyz$ được thiết lập như hình bên (gốc tọa độ O trùng với điểm B), tìm khẳng định **sai**.

- A** $A(0; 2; 0)$. **B** $B(0; 0; 0)$.
C $C(0; 0; 3)$. **D** $S(-2; 2; 2)$.



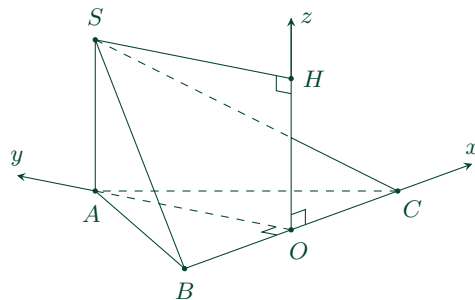
Lời giải.

Chọn đáp án **D**.....

CÂU 6.

Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng 2, SA vuông góc với đáy và $SA = 1$. Với hệ tọa độ $Oxyz$ được thiết lập như hình bên (gốc tọa độ O trùng với trung điểm của đoạn BC), hãy tìm tọa độ điểm S .

- A** $S(0; \sqrt{3}; 1)$. **B** $S(0; \sqrt{3}; 1)$.
C $S(0; \sqrt{3}; 1)$. **D** $S(0; \sqrt{3}; 1)$.

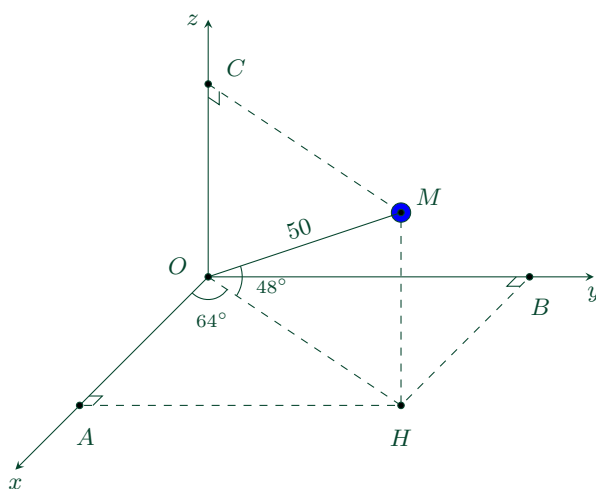


Lời giải.

CÂU 7.

Ở một sân bay, vị trí của máy bay được xác định bởi điểm M trong không gian $Oxyz$ như hình bên. Gọi H là hình chiếu vuông góc của M xuống mặt phẳng (Oxy) . Cho biết $OM = 50$, $(\vec{i}, \vec{OH}) = 64^\circ$, $(\vec{OH}, \vec{OM}) = 48^\circ$. Tìm tọa độ của điểm M .

- A** $M(14,7; 30,1; 37,2)$. **B** $M(14,7; 30,1; 37,2)$.
C $M(14,7; 30,1; 37,2)$. **D** $M(14,7; 30,1; 37,2)$.



Lời giải.

Tam giác OMH vuông tại H , $OM = 50$; $\widehat{MOH} = 48^\circ$ nên ta có

- $OH = OM \cdot \cos 48 \approx 33,5$
- $OC = MH = OM \cdot \sin 48 \approx 37,2$.

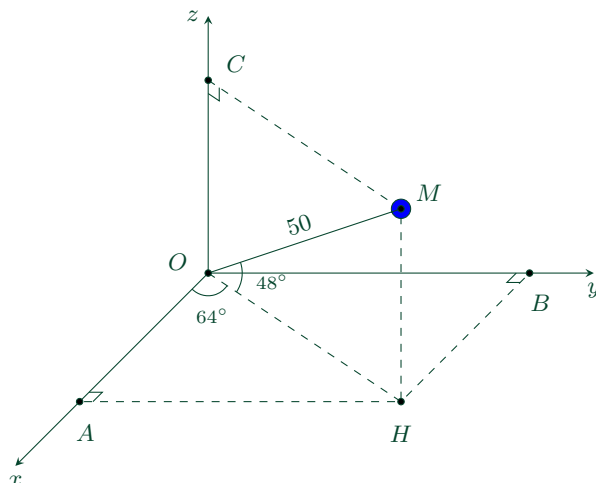
Tam giác OAH vuông tại A , $OH = 33,5$; $\widehat{AOH} = 64^\circ$ nên ta có

- $OA = OH \cdot \cos 64 \approx 14,7$,
- $OB = AH = OH \cdot \sin 64 \approx 30,1$.

Suy ra

$$\begin{aligned}\vec{OM} &= \vec{OC} + \vec{OH} = \vec{OC} + \vec{OA} + \vec{OB} \\ &= 14,7\vec{i} + 30,1\vec{j} + 37,2\vec{k}.\end{aligned}$$

Vậy $M(14,7; 30,1; 37,2)$.



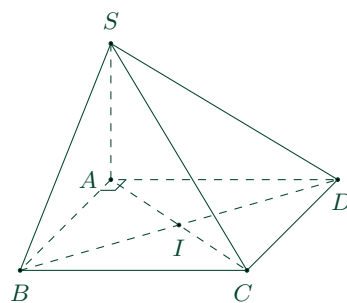
BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM ĐÚNG SAI

CÂU 8.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = 1$, $AD = 2$, SA vuông góc với mặt đáy và $SA = 3$. Với hệ tọa độ $Oxyz$ được thiết lập như sau: Gốc tọa độ O trùng với điểm A , các véc tơ \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AD} , \overrightarrow{AS} lần lượt cùng hướng với \vec{i} , \vec{j} và \vec{k} . Xét tính đúng sai của các khẳng định sau

Mệnh đề	Đ	S
a) Tọa độ $D(0; 2; 0)$.	X	
b) Tọa độ $C(1; 2; 3)$.		X

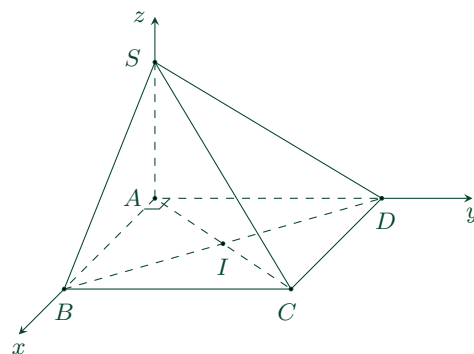
Mệnh đề	Đ	S
c) Tọa độ $S(2; 0; 0)$.	X	
d) Tọa độ $I(1; 1; 0)$.		X



Lời giải.

Với hệ trục đã chọn như hình vẽ thì

- a) Điểm $D \in Oy$ và $AD = 2$ nên $D(0; 2; 0)$.
- b) Điểm $C \in (Oxy)$ và có hình chiếu lên Ox , Oy lần lượt là điểm B và D . Do $AB = 1$ và $AD = 2$ nên $C(1; 2; 0)$.
- c) Điểm $S \in Oz$ và $AS = 3$ nên $S(0; 0; 3)$.
- d) Điểm $I \in (Oxy)$ và có hình chiếu lên Ox , Oy lần lượt là trung điểm của AB và AD nên $I(0,5; 1; 0)$.



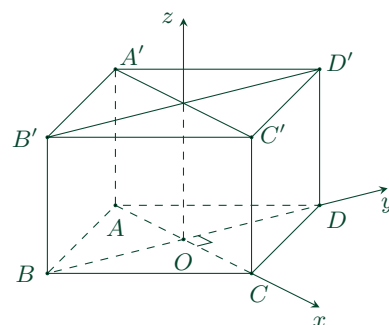
Chọn đáp án ☐ a đúng ☐ b sai ☐ c đúng ☐ d sai

CÂU 9.

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng 2. Với hệ tọa độ $Oxyz$ được thiết lập như hình bên (gốc tọa độ O trùng với tâm hình vuông $ABCD$), hãy xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

Mệnh đề	Đ	S
a) Tọa độ $A(-1; 0; 0)$.		X
b) $\overrightarrow{AC'} = (2\sqrt{2}; 0; 2)$.	X	

Mệnh đề	Đ	S
c) Tọa độ $D'(0; \sqrt{2}; 2)$.	X	
d) $\overrightarrow{BD'} = (0; 0; 2)$.		X



Lời giải.

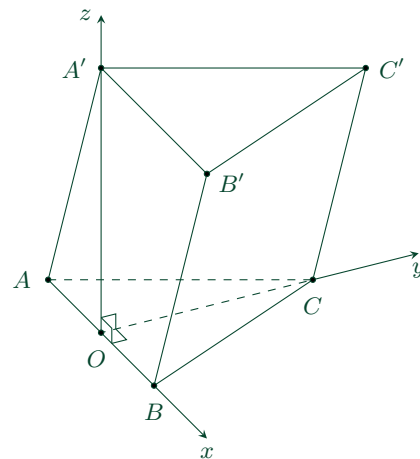
Độ dài $AC = 2\sqrt{2}$. Với hệ trục $Oxyz$ đã chọn như hình vẽ thì

- a) Điểm $A \in Ox$, nằm ngược chiều dương và $OA = \sqrt{2}$ nên $A(-\sqrt{2}; 0; 0)$.
- b) Tọa độ $C'(\sqrt{2}; 0; 2)$. Suy ra $\overrightarrow{AC'} = (2\sqrt{2}; 0; 2)$.
- c) Điểm D' có hình chiếu vuông góc xuống (Oxy) là điểm $D(0; \sqrt{2}; 0)$ và $DD' = 2$ nên $D'(0; \sqrt{2}; 2)$.
- d) Tọa độ $B(0; -\sqrt{2}; 0)$, $D'(0; \sqrt{2}; 2)$. Suy ra $\overrightarrow{BD'} = (0; 2\sqrt{2}; 2)$.

Chọn đáp án ☐ a sai ☐ b đúng ☐ c đúng ☐ d sai

CÂU 10.

Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng 2 như hình vẽ. Hình chiếu vuông góc của A' lên (ABC) trùng với trung điểm cạnh AB , góc $\widehat{A'AO} = 60^\circ$. Với hệ tọa độ $Oxyz$ được thiết lập như hình bên (gốc tọa độ O trùng với trung điểm của đoạn BC), hãy xét tính đúng sai của các khẳng định sau:



Mệnh đề	Đ	S
a) Tọa độ điểm $A(-1; 0; 0)$.	X	
b) Tọa độ điểm $C(0; \sqrt{3}; 0)$.	X	
c) Tọa độ điểm $A'(0; -1; \sqrt{3})$.		X
d) Tọa độ điểm $C'(1; \sqrt{3}; \sqrt{3})$.	X	

Lời giải.

Độ dài $OC = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$. $OA' = OA \cdot \tan 60^\circ = \sqrt{3}$. Với hệ trục $Oxyz$ đã chọn như hình vẽ trên thì

- a) Điểm $A \in Ox$, nằm ngược chiều dương và $OA = 1$ nên $A(-1; 0; 0)$.
- b) Điểm $A' \in Oy$, nằm cùng chiều dương và $OC = \sqrt{3}$ nên $C(0; \sqrt{3}; 0)$.
- c) $A' \in Oz$, nằm cùng chiều dương và $OA' = \sqrt{3}$ nên $A'(0; 0; \sqrt{3})$.
- d) Gọi $C'(x; y; z)$. Ta có

$$\overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 0 = 1 \\ y - 0 = \sqrt{3} \\ z - \sqrt{3} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = \sqrt{3} \\ z = \sqrt{3} \end{cases}.$$

Chọn đáp án ☐ a đúng ☐ b đúng ☐ c sai ☐ d đúng

Bài 3. BIỂU THỨC TỌA ĐỘ CỦA CÁC PHÉP TOÁN VECTO

A. LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1. Biểu thức tọa độ của phép toán cộng, trừ, nhân một số thực với một vectơ

Trong không gian $Oxyz$, cho hai véc-tơ $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$, $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$ và số k . Khi đó

- ① $\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1; a_2 + b_2; a_3 + b_3)$;
- ② $\vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1; a_2 - b_2; a_3 - b_3)$;
- ③ $k\vec{a} = (ka_1; ka_2; ka_3)$.

! Cho hai véc-tơ $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$, $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$, $\vec{b} \neq \vec{0}$. Hai véc-tơ \vec{a} , \vec{b} cùng phương khi và chỉ khi tồn tại một số thực k sao cho $\begin{cases} a_1 = kb_1 \\ a_2 = kb_2 \\ a_3 = kb_3 \end{cases}$.

2. Biểu thức tọa độ của tích vô hướng hai vectơ

Trong không gian $Oxyz$, tích vô hướng của hai véc-tơ $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ và $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$ được xác định bởi công thức

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3.$$

- !** ① $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0$;
- ② $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$; $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$.
- ③ $\cos(\vec{a}; \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$ (với $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$).

3. Biểu thức tọa độ của tích có hướng hai vectơ

Cho hai véc-tơ $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ và $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$ không cùng phương. Khi đó véc-tơ

$$\vec{w} = (a_2b_3 - b_2a_3; a_3b_1 - b_3a_1; a_1b_2 - b_1a_2)$$

vuông góc với cả hai véc-tơ \vec{a} và \vec{b} .

A ① Véc-tơ \vec{w} xác định như trên còn gọi là **tích có hướng** của hai vectơ \vec{a} , \vec{b} , kí hiệu $\vec{w} = [\vec{a}, \vec{b}]$.

② Quy ước $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$ thì

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right)$$

③ \vec{a} không cùng phương với $\vec{b} \Leftrightarrow [\vec{a}, \vec{b}] \neq \vec{0}$.

4. Ứng dụng của tích có hướng của hai véc-tơ

a) Xét sự đồng phẳng của ba véc-tơ:

☑ Ba vectơ \vec{a} ; \vec{b} ; \vec{c} đồng phẳng $\Leftrightarrow [\vec{a}, \vec{b}] \cdot \vec{c} = 0$.

☑ Bốn điểm A, B, C, D tạo thành tứ diện $\Leftrightarrow [\vec{AB}, \vec{AC}] \cdot \vec{AD} \neq 0$.

b) Diện tích hình bình hành: $S_{ABCD} = |[\vec{AB}, \vec{AD}]|$.

c) Tính diện tích tam giác: $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} |[\vec{AB}, \vec{AC}]|$.

d) Tính thể tích hình hộp: $V_{ABCD.A'B'C'D'} = |[\vec{AB}, \vec{AC}] \cdot \vec{AA'}|$.

e) Tính thể tích tứ diện: $V_{ABCD} = \frac{1}{6} |[\vec{AB}, \vec{AC}] \cdot \vec{AD}|$.

5. Biểu thức tọa độ trung điểm đoạn thẳng, trọng tâm tam giác

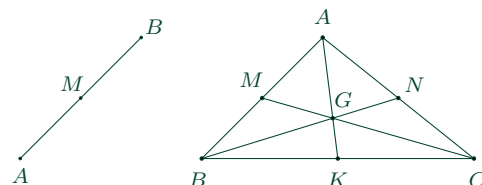
Trong không gian $Oxyz$, tọa độ trung điểm và trọng tâm được xác định như sau:

① Tọa độ trung điểm M của đoạn thẳng AB là

$$M \left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}; \frac{z_A + z_B}{2} \right).$$

② Tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC là

$$G \left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}; \frac{y_A + y_B + y_C}{3}; \frac{z_A + z_B + z_C}{3} \right).$$



B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Dạng 1. Tọa độ của các phép toán véc-tơ, tọa độ điểm, độ dài đoạn thẳng

BÀI TẬP TỰ LUẬN TRẢ LỜI NGẮN

VÍ DỤ 1. Cho $\vec{a} = (-2; 3; 2)$, $\vec{b} = (2; 1; -1)$, $\vec{c} = (1; 2; 3)$. Tính tọa độ của mỗi vectơ sau:

a) $3\vec{a}$;

b) $2\vec{a} - \vec{b}$;

c) $\vec{a} + 2\vec{b} - \frac{3}{2}\vec{c}$.

Lời giải.

Ta có

a) $3\vec{a} = (3 \cdot (-2); 3 \cdot 3; 3 \cdot 2)$. Vậy $3\vec{a} = (-6; 9; 6)$.

- b) Ta có $2\vec{a} = (-4; 6; 4)$ và $\vec{b} = (2; 1; -1)$.
Do đó, $2\vec{a} - \vec{b} = (-4 - 2; 6 - 1; 4 - (-1))$.
Vậy $2\vec{a} - \vec{b} = (-6; 5; 5)$.

- c) Do $\vec{a} = (-2; 3; 2)$ và $2\vec{b} = (4; 2; -2)$ nên

$$\vec{a} + 2\vec{b} = (2; 5; 0).$$

Ngoài ra, vì $-\frac{3}{2}\vec{c} = \left(-\frac{3}{2}; -3; -\frac{9}{2}\right)$ nên $\vec{a} + 2\vec{b} - \frac{3}{2}\vec{c} = \left(\frac{1}{2}; 2; -\frac{9}{2}\right)$.

VÍ DỤ 2. Trong không gian $Oxyz$, cho các véc-tơ $\vec{u} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{v} = -\frac{3}{2}\vec{i} + \vec{j} - \frac{1}{2}\vec{k}$, $\vec{w} = 6\vec{i} + m\vec{j} - n\vec{k}$.

- a) Chứng minh \vec{u} và \vec{v} cùng phương.
b) Tìm giá trị của m và n để véc-tơ \vec{u} và \vec{w} cùng phương.

Lời giải.

Ta có $\vec{u} = (3; -2; 1)$, $\vec{v} = \left(-\frac{3}{2}; 1; -\frac{1}{2}\right)$, $\vec{w} = (6; m; -n)$.

- a) Hai véc-tơ \vec{u} và \vec{v} cùng phương khi và chỉ khi

$$\vec{v} = k\vec{u} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{3}{2} = 3k \\ 1 = -2k \\ -\frac{1}{2} = k \end{cases} \Leftrightarrow k = -\frac{1}{2}$$

Như vậy $\vec{v} = -\frac{1}{2}\vec{u}$ nên hai véc-tơ \vec{u} và \vec{v} cùng phương.

- b) Hai véc-tơ \vec{u} và \vec{w} cùng phương khi và chỉ khi

$$\vec{w} = k\vec{u} \Leftrightarrow \begin{cases} 6 = 3k \\ m = -2k \\ -n = k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 2 \\ m = -4 \\ n = -2 \end{cases}$$

Như vậy $m = -4$ và $n = -2$ thì hai véc-tơ \vec{u} và \vec{w} cùng phương. Khi đó $\vec{w} = (6; -4; 2)$.

VÍ DỤ 3. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(3; -1; 2)$, $B(1; 2; 3)$, $C(4; -2; 1)$.

- a) Chứng minh ba điểm A, B, C không thẳng hàng. Xác định tọa độ trọng tâm tam giác ABC .
b) Tìm tọa độ điểm D biết $ABCD$ là hình bình hành.
c) Tìm tọa độ giao điểm E của đường thẳng BC với mặt phẳng tọa độ (Oxz) .

Lời giải.

- a) Ta có $\overrightarrow{AB} = (-2; 3; 1)$, $\overrightarrow{AC} = (1; -1; -1)$. Vì $\frac{-2}{1} \neq \frac{3}{-1}$ nên hai véc-tơ \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AC} không cùng phương.

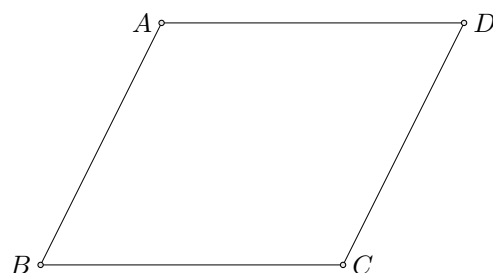
Hay ba điểm A, B, C không thẳng hàng. Suy ra, tọa độ trọng tâm là $G\left(\frac{8}{3}; -\frac{1}{3}; 2\right)$.

- b)

Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành khi và chỉ khi

$$\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 - x_D = -2 \\ -2 - y_D = 3 \\ 1 - z_D = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = 6 \\ y_D = -5 \\ z_D = 0 \end{cases}$$

Vậy $D(6; -5; 0)$.



c) Vì E thuộc mặt phẳng Oxz nên $E = (x; 0; z)$.

Ta có $\overrightarrow{AE} = (x - 3; 1; z - 2)$.

Mặt khác A, B, E thẳng hàng nên hai véc-tơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE}$ cùng phương, do đó:

$$\overrightarrow{AE} = k\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3 = -2k \\ 1 = 3k \\ z - 2 = k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{7}{3} \\ k = \frac{1}{3} \\ z = \frac{7}{3} \end{cases}$$

$$\text{Vậy } E = \left(\frac{7}{3}; 0; \frac{7}{3}\right).$$

VÍ DỤ 4. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(5; -3; 0)$, $B(2; 1; -1)$, $C(4; 1; 2)$.

a) Tìm tọa độ của vectơ $\vec{u} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} - 5\overrightarrow{BC}$.

b) Tìm tọa độ điểm N sao cho $2\overrightarrow{NA} = -\overrightarrow{NB}$.

Lời giải.

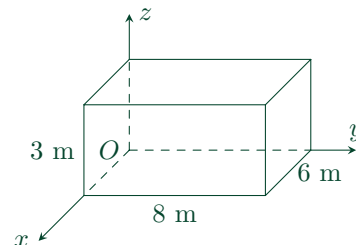
$$\text{a) Ta có } \begin{cases} A(5; -3; 0) \\ B(2; 1; -1) \\ C(4; 1; 2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB} = (-3; 4; -1) \\ \overrightarrow{AC} = (-1; 4; 2) \\ \overrightarrow{BC} = (2; 0; 3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\overrightarrow{AB} = (-6; 8; -2) \\ \overrightarrow{AC} = (-1; 4; 2) \\ -5\overrightarrow{BC} = (-10; 0; -15) \end{cases} \Rightarrow \vec{u} = (-17; 12; -15).$$

$$\text{b) Gọi } N(x; y; z), \text{ khi đó } \begin{cases} \overrightarrow{NA} = (5 - x; -3 - y; -z) \\ \overrightarrow{NB} = (2 - x; 1 - y; -1 - z) \end{cases}$$

$$2\overrightarrow{NA} = -\overrightarrow{NB} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(5 - x) = -2 + x \\ 2(-3 - y) = -1 + y \\ -2z = 1 + z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = -\frac{5}{3} \\ z = -\frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow N\left(4; -\frac{5}{3}; -\frac{1}{3}\right).$$

VÍ DỤ 5.

Một phòng học có thiết kế dạng hình hộp chữ nhật với chiều dài là 8 m, chiều rộng là 6 m và chiều cao là 3 m. Một chiếc đèn được treo tại chính giữa trần nhà của phòng học. Xét hệ trục tọa độ $Oxyz$ có gốc O trùng với một góc phòng và mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt sàn, đơn vị đo được lấy theo mét (Hình minh họa bên). Hãy tìm tọa độ của điểm treo đèn.



Lời giải.

Gọi các điểm $B(3; 0; 0)$, $C(3; 6; 0)$, $D(0; 6; 0)$ như hình vẽ.

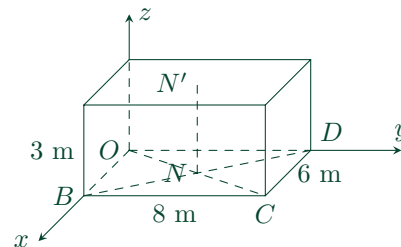
N là trung điểm OC , N' là hình chiếu của N lên mặt phẳng trần nhà.

Suy ra N' là điểm treo đèn.

Ta có N có tọa độ là $\left(\frac{0+3}{2}; \frac{0+6}{2}; \frac{0+0}{2}\right)$, suy ra $N\left(\frac{3}{2}; 3; 0\right)$.

Suy ra $N'\left(\frac{3}{2}; 3; 3\right)$.

Vậy tọa độ của điểm treo đèn là $\left(\frac{3}{2}; 3; 3\right)$.



BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM 4 PHƯƠNG ÁN

Các câu hỏi sau đều xét trong không gian $Oxyz$.

CÂU 1. Cho $\vec{a} = (1; 2; -3)$, $\vec{b} = (-2; -4; 6)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

(A) $\vec{a} = 2\vec{b}$.

(B) $\vec{b} = 2\vec{a}$.

(C) $\vec{b} = -2\vec{a}$.

(D) $\vec{a} = -2\vec{b}$.

Lời giải.

Ta có: $-2\vec{a} = (-2; -4; 6) = \vec{b}$.

Chọn đáp án **(C)**.....

CÂU 2. Cho hai véc-tơ $\vec{x} = (2; 1; -3)$, $\vec{y} = (1; 0; -1)$. Tìm tọa độ của véc-tơ $\vec{a} = \vec{x} + 2\vec{y}$.

- (A) $\vec{a}(4; 1; -5)$. (B) $\vec{a}(4; 1; -1)$. (C) $\vec{a}(3; 1; -4)$. (D) $\vec{a}(0; 1; -1)$.

Lời giải.

Ta có $\vec{a} = (2; 1; -3) + 2 \cdot (1; 0; -1) = (4; 1; -5)$.

Chọn đáp án (A) □

CÂU 3. Cho $\vec{a} = (1; -1; 3)$, $\vec{b} = (2; 0; -1)$. Tìm tọa độ véc-tơ $\vec{u} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$.

- (A) $\vec{u} = (-4; -2; 9)$. (B) $\vec{u} = (4; 2; -9)$. (C) $\vec{u} = (-4; -5; 9)$. (D) $\vec{u} = (1; 3; -11)$.

Lời giải.

$\vec{u} = 2\vec{a} - 3\vec{b} = (-4; -2; 9)$.

Chọn đáp án (A) □

CÂU 4. Cho hai véc-tơ $\vec{a} = (3; 0; 1)$, $\vec{c} = (1; 1; 0)$. Tìm tọa độ của véc-tơ \vec{b} thỏa mãn biểu thức $\vec{b} - \vec{a} + 2\vec{c} = \vec{0}$.

- (A) $\vec{b} = (-2; 1; -1)$. (B) $\vec{b} = (-1; 2; -1)$. (C) $\vec{b} = (5; 2; 1)$. (D) $\vec{b} = (1; -2; 1)$.

Lời giải.

Gọi $\vec{b} = (x; y; z)$. Ta có

$$\vec{b} - \vec{a} + 2\vec{c} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3 + 2 \cdot 1 = 0 \\ y - 0 + 2 \cdot 1 = 0 \\ z - 1 + 2 \cdot 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \\ z = 1. \end{cases}$$

Vậy $\vec{b} = (1; -2; 1)$.

Chọn đáp án (D) □

CÂU 5. Cho vectơ $\vec{a} = (1; -3; 4)$. Vectơ nào sau đây cùng phương với \vec{a} ?

- (A) $\vec{b} = (-2; -6; 8)$. (B) $\vec{c} = (-2; 6; -8)$. (C) $\vec{d} = (-2; 6; 8)$. (D) $\vec{m} = (2; -6; -8)$.

Lời giải.

$$\vec{b} = (-2; 6; -8) = -2\vec{a}.$$

Chọn đáp án (B) □

CÂU 6. Hai véc-tơ $\vec{a} = (m; 2; 3)$ và $\vec{b} = (1; n; 2)$ cùng phương khi

- (A) $\begin{cases} m = \frac{1}{2} \\ n = \frac{4}{3} \end{cases}$. (B) $\begin{cases} m = \frac{3}{2} \\ n = \frac{4}{3} \end{cases}$. (C) $\begin{cases} m = \frac{3}{2} \\ n = \frac{2}{3} \end{cases}$. (D) $\begin{cases} m = \frac{2}{3} \\ n = \frac{4}{3} \end{cases}$.

Lời giải.

$$\text{YCBT} \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}^* : \vec{a} = k \cdot \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} m = k \cdot 1 \\ 2 = k \cdot n \\ 3 = k \cdot 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = \frac{3}{2} \\ n = \frac{4}{3} \end{cases}$$

Chọn đáp án (B) □

CÂU 7. Cho hai điểm $A(2; 3; 1)$ và $B(3; 1; 5)$. Tính độ dài đoạn thẳng AB .

- (A) $AB = \sqrt{21}$. (B) $AB = 2\sqrt{3}$. (C) $AB = 2\sqrt{5}$. (D) $AB = \sqrt{13}$.

Lời giải.

$$AB = \sqrt{(3-2)^2 + (1-3)^2 + (5-1)^2} = \sqrt{21}.$$

Chọn đáp án (A) □

CÂU 8. Cho hai điểm $M(3; -2; 1)$ và $N(0; 1; -1)$. Tính độ dài đoạn thẳng MN .

- (A) $MN = \sqrt{17}$. (B) $MN = 22$. (C) $MN = \sqrt{22}$. (D) $MN = \sqrt{19}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \overrightarrow{MN} = (-3; 3; -2) \Rightarrow MN = \sqrt{9+9+4} = \sqrt{22}.$$

Chọn đáp án (C) □

CÂU 9. Cho hai điểm $A(-1; 1; 2)$ và $B(3; -5; 0)$. Tọa độ trung điểm của đoạn thẳng AB là

- (A) $(1; -2; 1)$. (B) $(4; -6; 2)$. (C) $(2; -3; -1)$. (D) $(2; -4; 2)$.

Lời giải.

Gọi M là trung điểm AB , khi đó tọa độ của M được tính bởi

$$\begin{cases} x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = 1 \\ y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = -2 \\ z_M = \frac{z_A + z_B}{2} = 1. \end{cases}$$

Chọn đáp án (A) □

CÂU 10. Cho hai điểm $A(1; 1; 0)$, $B(3; -1; 2)$. Tọa độ điểm C sao cho B là trung điểm của đoạn AC là

- (A) $C(5; -3; 4)$. (B) $C(4; -3; 5)$. (C) $C(-1; 3; -2)$. (D) $C(2; 0; 1)$.

☞ Lời giải.

$$\text{Ta có } \begin{cases} x_B = \frac{x_A + x_C}{2} \\ y_B = \frac{y_A + y_C}{2} \\ z_B = \frac{z_A + z_C}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_C = 2x_B - x_A = 5 \\ y_C = 2y_B - y_A = -3 \\ z_C = 2z_B - z_A = 4. \end{cases}$$

Chọn đáp án (A) □

CÂU 11. Cho tam giác ABC với $A(0; -1; 3)$, $B(2; 1; 1)$, $C(1; 0; -1)$. Tọa độ trọng tâm của tam giác ABC là

- (A) $(1; 0; 1)$. (B) $(-1; 0; 1)$. (C) $(0; 1; 1)$. (D) $(1; 1; 0)$.

☞ Lời giải.

$$\text{Gọi } G \text{ là trọng tâm của tam giác } ABC. \text{ Khi đó } \begin{cases} x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} \\ y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \\ z_G = \frac{z_A + z_B + z_C}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_G = 1 \\ y_G = 0 \\ z_G = 1. \end{cases}$$

Vậy tọa độ trọng tâm tam giác ABC là $(1; 0; 1)$.

Chọn đáp án (A) □

CÂU 12. Cho $\vec{OA} = \vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$, điểm $B(3; -4; 1)$ và $C(2; 0; -1)$. Tọa độ trọng tâm của tam giác ABC là

- (A) $(1; -2; 3)$. (B) $(-1; 2; -3)$. (C) $(2; -2; 1)$. (D) $(-2; 2; -1)$.

☞ Lời giải.

Từ giả thiết: $\vec{OA} = \vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k} \Rightarrow A(1; -2; 3)$.

$$\text{Gọi } G \text{ là trọng tâm tam giác } ABC, \text{ ta có: } \begin{cases} x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} = 2 \\ y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} = -2 \\ z_G = \frac{z_A + z_B + z_C}{3} = 1 \end{cases} \Rightarrow G(2; -2; 1).$$

Vậy trọng tâm của tam giác ABC là điểm $G(2; -2; 1)$.

Chọn đáp án (C) □

CÂU 13. Cho tam giác ABC trọng tâm G . Biết $A(0; 2; 1)$, $B(1; -1; 2)$, $G(1; 1; 1)$. Khi đó điểm C có tọa độ là

- (A) $(2; 2; 4)$. (B) $(-2; 0; 2)$. (C) $(-2; -3; -2)$. (D) $(2; 2; 0)$.

☞ Lời giải.

$$\bullet \text{ Giả sử tọa độ } C \text{ là } C(a; b; c) \text{ khi đó } \begin{cases} \frac{0+1+a}{3} = 1 \\ \frac{2-1+b}{3} = 1 \\ \frac{1+2+c}{3} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 2 \\ c = 0. \end{cases}$$

- Vậy điểm C có tọa độ là $(2; 2; 0)$.

Chọn đáp án (D) □

CÂU 14. Cho bốn điểm $A(1; 0; 3)$, $B(2; -1; 1)$, $C(-1; 3; -4)$, $D(2; 6; 0)$ tạo thành một hình tứ diện. Gọi M , N lần lượt là trung điểm các đoạn thẳng AB , CD . Tìm tọa độ trung điểm G của đoạn MN .

- (A) $G\left(\frac{4}{3}; \frac{8}{3}; 0\right)$. (B) $G(2; 4; 0)$. (C) $G(1; 2; 0)$. (D) $G(4; 8; 0)$.

☞ Lời giải.

Gọi M là trung điểm đoạn thẳng $AB \Rightarrow M\left(\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}; 2\right)$.

Gọi N là trung điểm đoạn thẳng $CD \Rightarrow N\left(\frac{1}{2}; \frac{9}{2}; -2\right)$.

Gọi G là trung điểm đoạn thẳng $MN \Rightarrow G(1; 2; 0)$.

Chọn đáp án (C) □

CÂU 15. Cho hai điểm $B(1; 2; -3)$, $C(7; 4; -2)$. Nếu E là điểm thỏa mãn đẳng thức $\overrightarrow{CE} = 2\overrightarrow{EB}$ thì tọa độ điểm E là

(A) $\left(3; \frac{8}{3}; \frac{8}{3}\right)$. (B) $\left(1; 2; \frac{1}{3}\right)$. (C) $\left(3; 3; -\frac{8}{3}\right)$. (D) $\left(\frac{8}{3}; 3; -\frac{8}{3}\right)$.

Lời giải.

$$E(x; y; z), \text{ từ } \overrightarrow{CE} = 2\overrightarrow{EB} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{8}{3} \\ y = 3 \\ z = -\frac{8}{3} \end{cases}$$

Chọn đáp án (D) □

CÂU 16. Cho các điểm $A(1; -1; 0)$, $B(0; 2; 0)$, $C(2; 1; 3)$ và M là điểm thỏa mãn hệ thức $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$. Khi đó điểm M có tọa độ là

(A) $(3; 2; 3)$. (B) $(3; -2; -3)$. (C) $(3; -2; 3)$. (D) $(3; 2; -3)$.

Lời giải.

$$\text{Gọi } M(x; y; z), \text{ ta có } \begin{cases} 1 - x - (0 - x) + (2 - x) = 0 \\ -1 - y - (2 - y) + 1 - y = 0 \\ 0 - z - (0 - z) + 3 - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -2 \\ z = 3 \end{cases} \Rightarrow M(3; -2; 3).$$

Chọn đáp án (C) □

CÂU 17. Cho tọa độ các điểm $A(-1; 3)$, $B(2; -2)$ và $C(m; 1)$. Tìm m để 3 điểm A, B, C thẳng hàng.

(A) $m = \frac{2}{5}$. (B) $m = \frac{1}{5}$. (C) $m = -\frac{1}{5}$. (D) $m = -\frac{1}{3}$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (3; -5)$; $\overrightarrow{AC} = (m + 1; -2)$.

A, B, C thẳng hàng $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}$ cùng phương với $\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \frac{3}{m + 1} = \frac{-5}{-2} \Leftrightarrow m = -\frac{1}{5}$.

Chọn đáp án (D) □

CÂU 18. Cho ba điểm $A(-1; 1; 2)$, $B(0; 1; -1)$, $C(x + 2; y; -2)$ thẳng hàng. Tổng $x + y$ bằng

(A) $\frac{7}{3}$. (B) $-\frac{8}{3}$. (C) $-\frac{2}{3}$. (D) $-\frac{1}{3}$.

Lời giải.

• Ta có $\overrightarrow{AB} = (1; 0; -3)$, $\overrightarrow{AC} = (x + 3; y - 1; -4)$.

• Các điểm A, B, C thẳng hàng \Leftrightarrow có số thực t thỏa mãn $\overrightarrow{AC} = t\overrightarrow{AB}$. (1)

$$\text{Ta có (1)} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3 = t \\ y - 1 = 0 \\ -4 = -3t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{5}{3} \\ y = 1 \\ t = \frac{4}{3} \end{cases} \Rightarrow x + y = -\frac{2}{3}.$$

• Vậy tổng $x + y = -\frac{2}{3}$.

Chọn đáp án (C) □

CÂU 19. Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành, biết $A(1; 0; 1)$, $B(2; 1; 2)$, $D(1; -1; 1)$. Tìm tọa độ điểm C .

(A) $(0; -2; 0)$. (B) $(2; 2; 2)$. (C) $(2; 0; 2)$. (D) $(2; -2; 2)$.

Lời giải.

• Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành khi

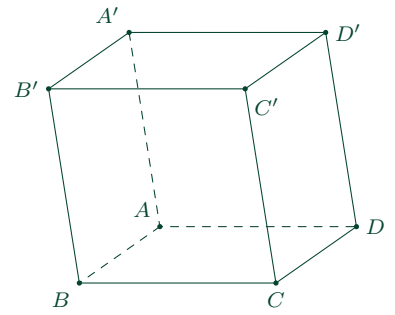
$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \begin{cases} x_C - 1 = 2 - 1 \\ y_C + 1 = 1 - 0 \\ z_C - 1 = 2 - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_C = 2 \\ y_C = 0 \\ z_C = 2 \end{cases}.$$

• Tọa độ điểm $C(2; 0; 2)$.

Chọn đáp án (C) □

CÂU 20. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $A(0;0;0)$, $B(a;0;0)$, $D(0;2a;0)$, $A'(0;0;2a)$, $a \neq 0$. Tính độ dài đoạn thẳng AC' .

- (A) $|a|$. (B) $2|a|$.
(C) $3|a|$. (D) $\frac{3|a|}{2}$.

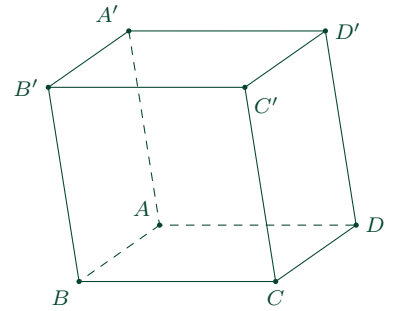


Lời giải.

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (a;0;0)$; $\overrightarrow{AD} = (0;2a;0)$; $\overrightarrow{AA'} = (0;0;2a)$.

$$\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} \Rightarrow \overrightarrow{AC'} = (a;2a;2a).$$

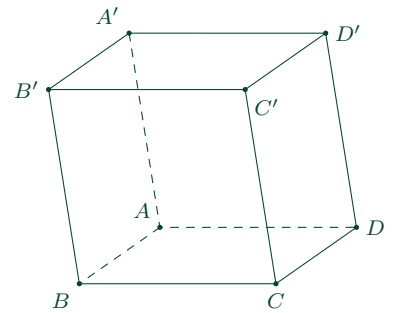
Suy ra $AC' = \sqrt{a^2 + 4a^2 + 4a^2} = 3|a|$.



Chọn đáp án (C) □

CÂU 21. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $A(0;0;1)$, $B'(1;0;0)$, $C'(1;1;0)$. Tìm tọa độ của điểm D .

- (A) $D(0;-1;1)$. (B) $D(0;1;1)$.
(C) $D(0;1;0)$. (D) $D(1;1;1)$.



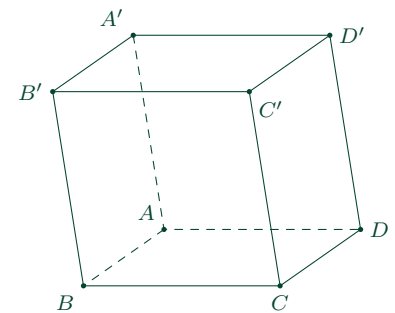
Lời giải.

Gọi $D(x_D; y_D; z_D)$.

Ta có $\overrightarrow{B'C'} = (0;1;0)$, $\overrightarrow{AD} = (x_D; y_D; z_D - 1)$. Vì $B'C'DA$ là hình bình hành nên

$$\overrightarrow{B'C'} = \overrightarrow{AD} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = 0 \\ y_D = 1 \\ z_D - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = 0 \\ y_D = 1 \\ z_D = 1. \end{cases}$$

Vậy $D(0;1;1)$.



Chọn đáp án (B) □

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM ĐÚNG SAI

CÂU 22. Cho các điểm $A(1;-2;3)$, $B(-2;1;2)$, $C(3;-1;2)$.

Mệnh đề	Đ	S
a) $\overrightarrow{AB} = (-3; 3; -1)$.	X	
b) $\overrightarrow{AC} = (-2; -1; 1)$.		X

Mệnh đề	Đ	S
c) $\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AC}$.		X
d) Ba điểm A, B, C không thẳng hàng.	X	

Lời giải.

a) $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A) = (-3; 3; -1)$.

b) $\overrightarrow{AC} = (x_C - x_A; y_C - y_A; z_C - z_A) = (2; 1; -1)$

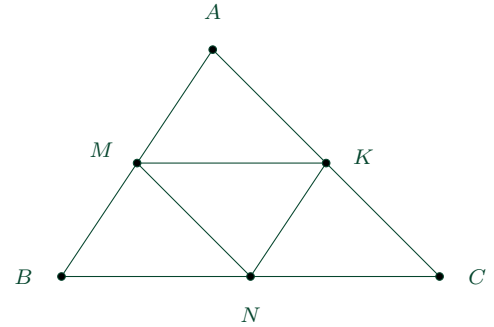
c) $\overrightarrow{AB} = (-3; 3; -1)$, $\overrightarrow{AC} = (2; 1; -1)$. Hai vec tơ này không cùng phương nên không tồn tại số thực k để $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$.

d) Hai vec tơ \overrightarrow{AB} và \overrightarrow{AC} không cùng phương nên ba điểm A, B, C không thẳng hàng.

Chọn đáp án ☐ a đúng ☐ b sai ☐ c sai ☐ d đúng

CÂU 23. Cho ba điểm $A(3; 3; -6)$, $B(1; 3; 2)$ và $C(-1; -3; 1)$. Gọi M, N, K lần lượt là trung điểm của AB, BC và CA .

Mệnh đề	Đ	S
a) Tọa độ $M(2; 3; 2)$.		X
b) Với G là trọng tâm tam giác ABC thì $GC = 2\sqrt{5}$.		X
c) Trọng tâm tam giác MNK là $E(1; 1; -1)$.	X	
d) Với $D(-3; -3; 9)$ thì tứ giác $ABDC$ là hình bình hành.	X	



Lời giải.

a) M là trung điểm của AB , suy ra $M\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}; \frac{z_A + z_B}{2}\right)$ hay $M(2; 3; -2)$.

b) Ta có $G(1; 1; -1)$. Suy ra $GC = \sqrt{(-1-1)^2 + (-3-1)^2 + (1+1)^2} = 2\sqrt{6}$.

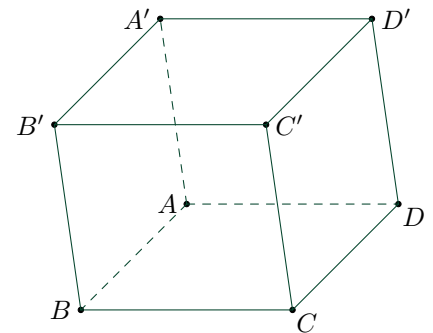
c) Hai tam giác ABC và MNK có cùng trọng tâm. Suy ra E trùng với $G(1; 1; -1)$.

d) Ta có $\overrightarrow{AC} = (-4; -6; 7)$, $\overrightarrow{BD} = (-4; -6; 7)$, suy ra $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$. Vậy $ABDC$ là hình bình hành.

Chọn đáp án ☐ a sai ☐ b sai ☐ c đúng ☐ d đúng

CÂU 24. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$, biết điểm $A(0; 0; 0)$, $B(1; 0; 0)$, $C(1; 2; 0)$, $D'(-1; 3; 5)$. Gọi M, N là tâm của các hình bình hành $ABB'A'$, $ADD'A'$.

Mệnh đề	Đ	S
a) Tọa độ $D(0; 2; 0)$.	X	
b) Tọa độ $A'(-1; 1; 5)$.	X	
c) Tọa độ $\overrightarrow{MN} = (-1; 1; 0)$.		X
d) $ \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CC'} = \sqrt{29}$.		X



Lời giải.

a) Theo qui tắc hình bình hành, ta có

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = (0; 2; 0) \Rightarrow D(0; 2; 0).$$

b) Ta có

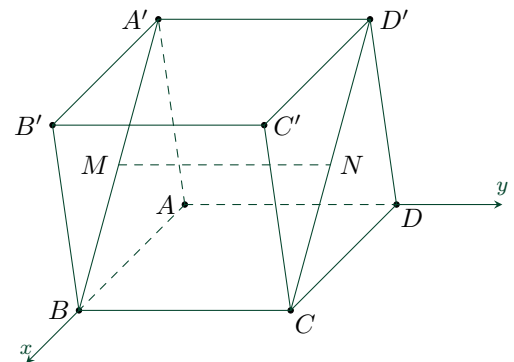
$$\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{DD'} = (-1; 1; 5) \Rightarrow A'(-1; 1; 5).$$

c) Theo hình vẽ $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{BC} = (0; 2; 0)$.

d) Ta có $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} = (0; 3; 5)$.
Xét

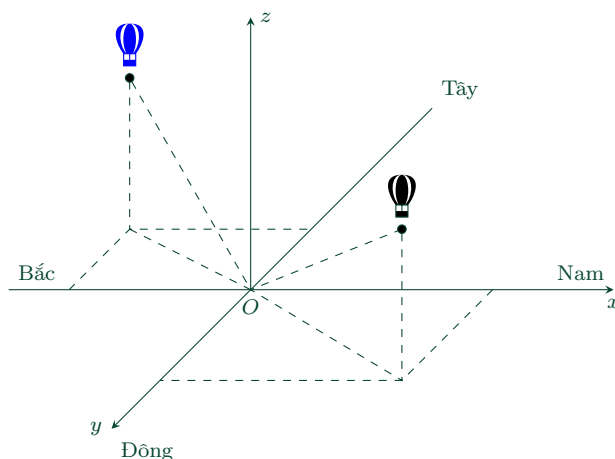
$$\begin{aligned} |\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CC'}| &= |\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}| = |\overrightarrow{AC'}| \\ &= \sqrt{0^2 + 3^2 + 5^2} = \sqrt{34}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án ☐ a đúng ☐ b đúng ☐ c sai ☐ d sai



CÂU 25. Hai chiếc khinh khí cầu bay lên từ cùng một địa điểm. Chiếc thứ nhất cách điểm xuất phát 2 km về phía nam và 1 km về phía đông, đồng thời cách mặt đất 0,5 km. Chiếc thứ hai nằm cách điểm xuất phát 1 km về phía bắc và 1,5 km về phía tây, đồng thời cách mặt đất 0,8 km.

Chọn hệ trục $Oxyz$ với gốc O đặt tại điểm xuất phát của hai khinh khí cầu, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất với trục Ox hướng về phía nam, trục Oy hướng về phía đông và trục Oz hướng thẳng đứng lên trời (Hình bên dưới), đơn vị đo lấy theo kilomet.



Mệnh đề	Đ	S
a) Với hệ tọa độ đã chọn, tọa độ khinh khí cầu thứ nhất là $(2; 1; 0,5)$.	X	
b) Với hệ tọa độ đã chọn, tọa độ khinh khí cầu thứ hai là $(-1,5; -1; 0,8)$.		X
c) Khoảng cách từ điểm xuất phát đến khinh khí cầu thứ nhất bằng $\sqrt{21}$ km.		X
d) Khoảng cách hai chiếc khinh khí cầu là 3,92 km (Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).	X	

Lời giải.

a) Chiếc khinh khí cầu thứ nhất có tọa độ là $(2; 1; 0,5)$.

b) Chiếc khinh khí cầu thứ hai có tọa độ là $(-1; -1,5; 0,8)$.

c) Khoảng cách từ điểm xuất phát đến khinh khí cầu thứ nhất bằng $\sqrt{2^2 + 1^2 + 0,5^2} = \frac{\sqrt{21}}{2}$ (km)

d) Khoảng cách hai chiếc khinh khí cầu là $\sqrt{(-1-2)^2 + (1,5-1)^2 + (0,8-0,5)^2} = \sqrt{15,34} \approx 3,92$ (km).

Chọn đáp án ☐ a đúng ☐ b sai ☐ c sai ☐ d đúng

Dạng 2. Tích vô hướng, tích có hướng hai vec tơ và ứng dụng

BÀI TẬP TỰ LUẬN TRẢ LỜI NGẮN

VÍ DỤ 1. Cho ba vec-tơ $\vec{a} = (3; 0; 1)$, $\vec{b} = (1; -1; -2)$, $\vec{c} = (2; 1; -1)$, $\vec{d} = (1; 7; -3)$.

a) Tính $\vec{a} \cdot \vec{b}$, $\vec{b} \cdot \vec{c}$.

b) Tính $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$, $\cos(\vec{a}, \vec{b})$.

c) Chứng minh $\vec{d} \perp \vec{a}$.

Lời giải.

a) Ta có $\vec{a} \cdot \vec{b} = 3 \cdot 1 + 0 \cdot (-1) + 1 \cdot (-2) = 1$ và $\vec{b} \cdot \vec{c} = 1 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 + (-2) \cdot (-1) = 3$.

b) Ta có $|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{10}$, $|\vec{b}| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{6}$.

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{1}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{6}} = \frac{\sqrt{15}}{60}.$$

c) Ta có $\vec{d} \cdot \vec{a} = 1 \cdot 3 + 7 \cdot 0 + (-3) \cdot 1 = 0 \Rightarrow \vec{d} \perp \vec{a}$.

VÍ DỤ 2. Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a} = (1; 0; 1)$, $\vec{b} = (1; 1; 0)$ và $\vec{c} = (-4; 3; m)$.

a) Tính góc giữa hai vectơ \vec{a} và \vec{b} .

b) Tìm m để vectơ $\vec{d} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$ vuông góc với \vec{c} .

Lời giải.

a) Ta có $\begin{cases} \vec{a} = (1; 0; 1) \\ \vec{b} = (1; 1; 0) \end{cases} \Rightarrow \cos(\vec{a}; \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{1}{2}.$

b) Ta có $\vec{d} = 2\vec{a} + 3\vec{b} = (5; 3; 2).$

Ta có $\vec{d} \perp \vec{c} \Leftrightarrow \vec{d} \cdot \vec{c} = 0 \Leftrightarrow -20 + 9 + 2m = 0 \Leftrightarrow m = \frac{11}{2}.$

VÍ DỤ 3. Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(-1; 0; 2)$, $B(0; 4; 3)$ và $C(-2; 1; 2)$.

a) Chỉ ra tọa độ một véc tơ (khác $\vec{0}$) vuông góc với hai véc tơ \vec{AB} , \vec{AC} .

b) Tính chu vi tam giác ABC .

c) Tính $\cos \widehat{BAC}$.

d) Tìm độ dài đường phân giác trong AD của tam giác ABC .

Lời giải.

a)

b) Ta có $AB = \sqrt{1 + 16 + 1} = 3\sqrt{2}$ và $AC = \sqrt{1 + 1 + 0}.$

c)

d) Theo tính chất đường phân giác trong của tam giác, ta có $\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC} = 3.$

$$\text{Suy ra } \vec{DB} = -3\vec{DC} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = \frac{x_B + 3x_C}{4} = -\frac{3}{2} \\ y_D = \frac{y_B + 3y_C}{4} = \frac{7}{4} \\ z_D = \frac{z_B + 3z_C}{4} = \frac{9}{4} \end{cases}$$

$$\Rightarrow D\left(-\frac{3}{2}; \frac{7}{4}; \frac{9}{4}\right).$$

$$\text{Vậy } AD = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{49}{16} + \frac{1}{16}} = \frac{3\sqrt{6}}{4}.$$

VÍ DỤ 4. Trong không gian $Oxyz$, cho 3 điểm $A(0; 1; -2)$; $B(3; 0; 0)$ và điểm C thuộc trục Oz . Biết ABC là tam giác cân tại C . Tìm tọa độ điểm C .

Lời giải.

Gọi $C(0; 0; z)$ là điểm thuộc trục Oz .

Tam giác ABC cân tại C nên $CA = CB$.

$$\text{Suy ra } CA^2 = CB^2 \Rightarrow 1 + (z + 2)^2 = 9 + z^2 \Rightarrow z = 1 \Rightarrow C(0; 0; 1).$$

VÍ DỤ 5. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $M(2; 3; -1)$, $N(-1; 1; 1)$, $P(1; m - 1; 2)$. Với những giá trị nào của m thì tam giác MNP vuông tại N ?

Lời giải.

$$\text{Ta có } \vec{NM} = (3; 2; -2) \text{ và } \vec{NP} = (2; m - 2; 1).$$

$$\text{Vì tam giác } MNP \text{ vuông tại } N \text{ nên ta có } \vec{NM} \perp \vec{NP} \Leftrightarrow \vec{NM} \cdot \vec{NP} = 0 \Leftrightarrow 2m = 0 \Leftrightarrow m = 0.$$

Vậy $m = 0$ thỏa yêu cầu bài toán.

VÍ DỤ 6. Cho hai điểm $A(2, -1, 1)$; $B(3, -2, -1)$. Tìm điểm N trên trục Ox cách đều A và B .

Lời giải.

N nằm trên trục Ox nên $N(x; 0; 0)$.

$$\text{Khi đó, ta có } \vec{AN} = (x - 2; 1; -1); \quad \vec{BN} = (x - 3; 2; 1).$$

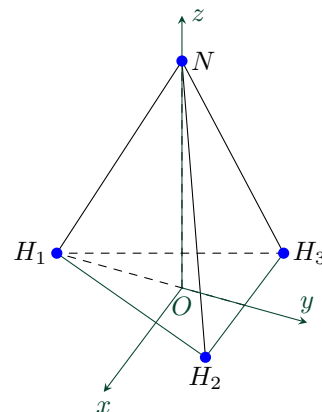
$$\text{Vì } N \text{ cách đều } A \text{ và } B \text{ nên } AN = BN \Leftrightarrow \sqrt{(x - 2)^2 + 1 + 1} = \sqrt{(x - 3)^2 + 4 + 1} \Leftrightarrow x = 4.$$

$$\text{Suy ra } N(4; 0; 0).$$

VÍ DỤ 7.

Trong Hóa học, cấu tạo của phân tử ammoniac (NH_3) có dạng hình chóp tam giác đều mà đỉnh là nguyên tử nitrogen (N) và đáy là tam giác $H_1H_2H_3$ với H_1, H_2, H_3 là vị trí của ba nguyên tử hydrogen (H). Góc tạo bởi liên kết H – N – H, có hai cạnh là hai đoạn thẳng nối N với hai trong ba điểm H_1, H_2, H_3 (chẳng hạn $\widehat{H_1NH_2}$), gọi là góc liên kết của phân tử NH_3 . Góc này xấp xỉ 107° .

Trong không gian $Oxyz$, cho một phân tử NH_3 được biểu diễn bởi hình chóp tam giác đều $N.H_1H_2H_3$ với O là tâm của đáy. Nguyên tử nitrogen được biểu diễn bởi điểm N thuộc trục Oz , ba nguyên tử hydrogen ở các vị trí H_1, H_2, H_3 trong đó $H_1(0; -2; 0)$ và H_2H_3 song song với trục Ox (Hình bên).



- Tính khoảng cách giữa hai nguyên tử hydrogen.
- Tính khoảng cách giữa hai nguyên tử nitrogen với mỗi nguyên tử hydrogen.

Lời giải.

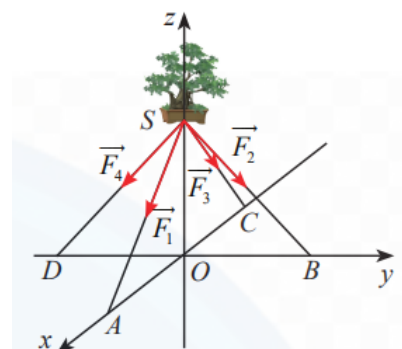
- Gọi $x = H_1H_2$, khi đó độ dài $OH_1 = x \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow 2 = x \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow x = 2\sqrt{3}$.
- Gọi y là khoảng cách giữa hai nguyên tử nitrogen với mỗi nguyên tử hydrogen; khi đó $NH_2 = y$.
Áp dụng định lí cosin ta có

$$H_1H_2^2 = NH_1^2 + NH_2^2 - 2 \cdot NH_1 \cdot NH_2 \cos \widehat{H_1NH_2} \Leftrightarrow 2y^2 - 2y^2 \cos 107^\circ = 12$$

$$\Leftrightarrow y^2 = \frac{12}{2 - 2 \cos 107} \Leftrightarrow y = 2,155$$

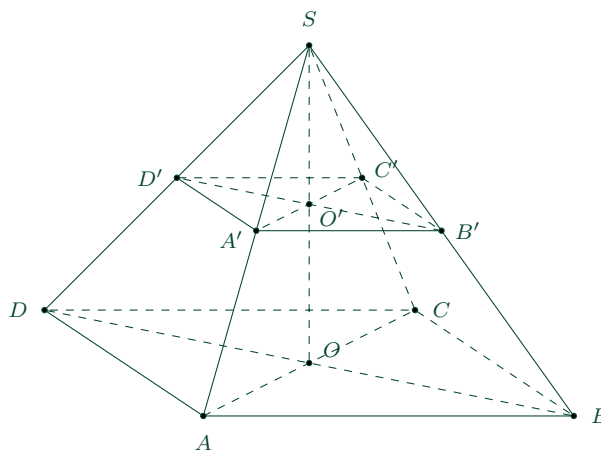
VÍ DỤ 8.

Một chậu cây được đặt trên một giá đỡ có bốn chân với điểm đặt $S(0; 0; 20)$ và các điểm chạm mặt đất của bốn chân lần lượt là $A(20; 0; 0)$, $B(0; 20; 0)$, $C(-20; 0; 0)$, $D(0; -20; 0)$ (đơn vị cm). Cho biết trọng lực tác dụng lên chậu cây có độ lớn 40(N) và được phân bố thành bốn lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4$ có độ lớn bằng nhau như Hình 4. Tìm tọa độ của các lực nói trên (mỗi centimet biểu diễn 1 N).



Lời giải.

Tứ giác $ABCD$ có hai đường chéo bằng nhau và vuông góc với nhau tại trung điểm của mỗi đường nên là hình vuông.



Ta có $\vec{SA} = (20; 0; -20)$, $\vec{SB} = (0; 20; -20)$, $\vec{SC} = (-20; 0; -20)$, $\vec{SD} = (0; -20; -20)$.

Suy ra $SA = SB = SC = SD = 20\sqrt{2}$. Do đó $S.ABCD$ là hình chóp tứ giác đều. Các vectơ $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4$ có điểm đầu tại S và điểm cuối lần lượt là A', B', C', D' .

Ta có $SA' = SB' = SC' = SD'$ nên $SA'B'C'D'$ cũng là hình chóp tứ giác đều.
Gọi \vec{F} là trọng lực tác dụng lên chậu cây và O' là tâm của hình vuông $A'B'C'D'$. Ta có

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 = \vec{SA'} + \vec{SB'} + \vec{SC'} + \vec{SD'} = 4\vec{SO'}.$$

Ta có $|\vec{F}| = 40$, suy ra $|\vec{SO'}| = SO' = 10$. Do tam giác $SO'A'$ vuông cân nên $SA' = \sqrt{2}SO' = 10\sqrt{2}$.

Suy ra $\vec{F}_1 = \vec{SA'} = \frac{1}{2}\vec{SA} = (10; 0; -10)$. Chứng minh tương tự ta cũng có

$$\vec{F}_2 = \frac{1}{2}\vec{SB} = (0; 10; -10), \vec{F}_3 = \frac{1}{2}\vec{SC} = (-10; 0; -10), \vec{F}_4 = \frac{1}{2}\vec{SD} = (0; -10; -10).$$

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM 4 PHƯƠNG ÁN

CÂU 1. Tích vô hướng của hai vectơ $\vec{u} = (3; 0; 1)$ và $\vec{v} = (2; 1; 0)$ là

- (A) 0. (B) 6. (C) 8. (D) -6.

Lời giải.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 6 + 0 + 0 = 6.$$

Chọn đáp án (B) □

CÂU 2. Tích vô hướng của hai vectơ $\vec{u} = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$ và $\vec{v} = (0; 1; -2)$ bằng

- (A) -4. (B) 0. (C) 4. (D) -2.

Lời giải.

Ta có $\vec{u} = (1; 2; -1)$.

$$\text{Suy ra } \vec{u} \cdot \vec{v} = 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + (-1) \cdot (-2) = 4.$$

Chọn đáp án (C) □

CÂU 3. Cho các véc-tơ $\vec{a} = (1; 2; 1)$ và $\vec{b} = (2; 2; 1)$. Tính tích vô hướng $\vec{a} \cdot (\vec{a} - \vec{b})$.

- (A) -1. (B) -2. (C) 2. (D) 1.

Lời giải.

$$\text{Ta có: } (\vec{a} - \vec{b}) = (-1; 0; 0) \Rightarrow \vec{a} \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 0 = -1.$$

Chọn đáp án (A) □

CÂU 4. Một thiết bị thăm dò đáy biển được đẩy bởi một lực $\vec{f} = (5; 4; -2)$ (đơn vị: N) giúp thiết bị thực hiện độ dời $\vec{a} = (70; 20; -40)$ (đơn vị: m). Tính công sinh bởi lực \vec{f} .

- (A) 480 (J). (B) 530 (J). (C) 510 (J). (D) 500 (J).

Lời giải.

Công sinh bởi lực \vec{f} là

$$A = |\vec{f}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos(\vec{f}, \vec{a}) = \vec{f} \cdot \vec{a} = 5 \cdot 70 + 4 \cdot 20 + (-2) \cdot (-40) = 510(\text{J}).$$

Chọn đáp án (C) □

CÂU 5. Góc giữa hai véc-tơ \vec{i} và $\vec{u} = (-\sqrt{3}; 0; 1)$ bằng

- (A) 60° . (B) 120° . (C) 150° . (D) 30° .

Lời giải.

$$\cos(\vec{i}, \vec{u}) = \frac{\vec{i} \cdot \vec{u}}{|\vec{i}| \cdot |\vec{u}|} = \frac{1 \cdot (-\sqrt{3})}{1 \cdot \sqrt{3+1}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Vậy góc của hai véc-tơ đã cho bằng 150° .

Chọn đáp án (C) □

CÂU 6. Cho hai véc-tơ $\vec{u} = (-1; 1; 0)$ và $\vec{v} = (0; -1; 0)$. Góc hợp bởi hai véc-tơ \vec{u} và \vec{v} bằng

- (A) 60° . (B) 45° . (C) 135° . (D) 120° .

Lời giải.

$$\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{(-1) \cdot 0 + 1 \cdot (-1) + 0 \cdot 0}{\sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 0^2} \sqrt{0^2 + (-1)^2 + 0^2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Vậy góc của hai véc-tơ đã cho bằng 135° .

Chọn đáp án (C) □

CÂU 7. Cho hai véc-tơ $\vec{a}(-2; -3; 1)$ và $\vec{b}(1; 0; 1)$. Tính $\cos(\vec{a}, \vec{b})$.

- (A) $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = -\frac{1}{2\sqrt{7}}$. (B) $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = -\frac{3}{2\sqrt{7}}$. (C) $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{1}{2\sqrt{7}}$. (D) $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{3}{2\sqrt{7}}$.

Lời giải.

Ta có $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{(-2) \cdot 1 + (-3) \cdot 0 + 1 \cdot 1}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{2}} = -\frac{1}{2\sqrt{7}}$.

Chọn đáp án (A) □

CÂU 8. Cho $\vec{a} = (3; 2; 1)$, $\vec{b} = (-2; 2; -4)$. Giá trị của $|\vec{a} - \vec{b}|$ bằng

- (A) $5\sqrt{2}$. (B) 50. (C) $2\sqrt{5}$. (D) 3.

Lời giải.

Gọi $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b} = (5; 0; 5) \Rightarrow |\vec{c}| = \sqrt{5^2 + (-5)^2} = 5\sqrt{2}$.

Chọn đáp án (A) □

CÂU 9. Cho hai véc-tơ $\vec{u} = (-1; 0; 2)$ và $\vec{v} = (x; -2; 1)$. Biết rằng $\vec{u} \cdot \vec{v} = 4$. Khi đó $|\vec{v}|$ bằng

- (A) $\sqrt{21}$. (B) 2. (C) 3. (D) 5.

Lời giải.

Ta có $\vec{u} \cdot \vec{v} = -x + 2 = 4 \Leftrightarrow x = -2$.

Vậy $|\vec{v}| = 3$.

Chọn đáp án (C) □

CÂU 10. Tìm số thực a để véc-tơ $\vec{u} = (a; 0; 1)$ vuông góc với véc-tơ $\vec{v} = (2; -1; 4)$.

- (A) $a = -2$. (B) $a = -4$. (C) $a = 4$. (D) $a = 2$.

Lời giải.

Ta có $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow 2a + 0(-1) + 4 = 0 \Leftrightarrow a = -2$.

Chọn đáp án (A) □

CÂU 11. Tìm x để hai véc-tơ $\vec{a} = (x; x - 2; 2)$ và $\vec{b} = (x; 1; -2)$ vuông góc với nhau.

- (A) $x = 3$. (B) $x = 1$. (C) $\begin{cases} x = 2 \\ x = -3 \end{cases}$. (D) $\begin{cases} x = -2 \\ x = 3 \end{cases}$.

Lời giải.

Hai véc-tơ đã cho vuông góc khi $0 = \vec{a} \cdot \vec{b} = x^2 + x - 2 - 4$ hay $x = 2$ hoặc $x = -3$.

Chọn đáp án (C) □

CÂU 12. Cho hai véc-tơ $\vec{u} = (1; -2; 1)$ và $\vec{v} = (2; 1; -1)$. Véc-tơ nào dưới đây vuông góc với cả hai véc-tơ \vec{u} và \vec{v} ?

- (A) $\vec{w}_2 = (1; 3; 5)$. (B) $\vec{w}_3 = (1; -4; 7)$. (C) $\vec{w}_4 = (1; 4; 7)$. (D) $\vec{w}_1 = (1; -3; 5)$.

Lời giải.

Ta có $\vec{u} \cdot \vec{w}_2 = 0$, $\vec{v} \cdot \vec{w}_2 = 0$. Do đó \vec{w}_2 thỏa mãn đề bài.

Chọn đáp án (A) □

CÂU 13. Tích có hướng của hai véc-tơ $\vec{a} = (-1; 2; 0)$ và $\vec{b} = (0; 4; -3)$ có tọa độ là

- (A) $(-6; 3; -4)$. (B) $(6; -3; 4)$. (C) $(6; 3; 4)$. (D) $(-6; -3; -4)$.

Lời giải.

Ta có $[\vec{a}, \vec{b}] = \left(\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 4 & -3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -3 & 0 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} \right) = (-6; -3; -4)$.

Chọn đáp án (D) □

CÂU 14. Cho $A(2; 1; 4)$, $B(-2; 2; -6)$, $C(6; 0; -1)$. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

- (A) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 67$. (B) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -67$. (C) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 33$. (D) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 65$.

Lời giải.

Ta có: $\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (-4; 1; -10) \\ \overrightarrow{AC} = (4; -1; -5) \end{cases}$

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = (-4) \cdot 4 + 1 \cdot (-1) + (-10) \cdot (-5) = 33$.

Chọn đáp án (C) □

CÂU 15. Cho $A(1; -2; 3)$, $B(2; -4; 1)$, $C(2; 0; 2)$, khi đó tích vô hướng $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ bằng

- (A) 4. (B) -1. (C) 7. (D) -5.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (1; -2; -2)$ và $\overrightarrow{AC} = (1; 2; -1)$.

Vì vậy $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 1 \cdot 1 + (-2) \cdot 2 + (-2) \cdot (-1) = -1$.

Chọn đáp án (B) □

CÂU 16. Cho tam giác ABC với $A(8; 9; 2)$, $B(3; 5; 1)$, $C(11; 10; 4)$. Số đo góc A của tam giác ABC là
 (A) 60° . (B) 150° . (C) 30° . (D) 120° .

Lời giải.

Ta có $\widehat{BAC} = (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$, $\overrightarrow{AB} = (-5; -4; -1)$, $\overrightarrow{AC} = (3; 1; 2)$. Ta có

$$\cos(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|} = \frac{-21}{\sqrt{42} \cdot \sqrt{14}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \widehat{BAC} = (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = 150^\circ.$$

Chọn đáp án (B) □

CÂU 17. Cho điểm $A(3; -1; 5)$, $B(m; 2; 7)$. Tìm tất cả các giá trị của m để độ dài đoạn $AB = 7$.

(A) $m = 3$ hoặc $m = -3$. (B) $m = 9$ hoặc $m = -3$. (C) $m = -3$ hoặc $m = -9$. (D) $m = 9$ hoặc $m = 3$.

Lời giải.

$$AB = 7 \Leftrightarrow \sqrt{(m-3)^2 + 3^2 + 2^2} = 7 \Leftrightarrow (m-3)^2 = 36 \Leftrightarrow \begin{cases} m-3 = 6 \\ m-3 = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 9 \\ m = -3 \end{cases}.$$

Chọn đáp án (B) □

CÂU 18. Cho ba điểm $A(3; 2; 8)$, $B(0; 1; 3)$ và $C(2; m; 4)$. Tìm m để tam giác ABC vuông tại B .

(A) $m = 4$. (B) $m = -10$. (C) $m = 25$. (D) $m = -1$.

Lời giải.

Tam giác ABC vuông tại B tương đương với $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$.

Ta có $\overrightarrow{BA} = (3; 1; 5)$, $\overrightarrow{BC} = (2; m-1; 1)$.

Nên $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \Leftrightarrow 3 \cdot 2 + (m-1) + 5 \cdot 1 = 0 \Leftrightarrow m = -10$.

Chọn đáp án (B) □

CÂU 19. Cho ba điểm $M(2; 3; -1)$, $N(-1; 1; 1)$ và $P(1; m-1; 2)$. Tìm m để tam giác MNP vuông tại N .

(A) $m = 0$. (B) $m = -4$. (C) $m = 2$. (D) $m = -6$.

Lời giải.

$\overrightarrow{MN}(-3; -2; 2)$; $\overrightarrow{NP}(2; m-2; 1)$.

Tam giác MNP vuông tại $N \Leftrightarrow \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{NP} = 0 \Leftrightarrow -6 - 2(m-2) + 2 = 0 \Leftrightarrow m-2 = -2 \Leftrightarrow m = 0$.

Chọn đáp án (A) □

CÂU 20. Cho tam giác ABC có $A(7; 3; 3)$, $B(1; 2; 4)$, $C(2; 3; 5)$. Tìm tọa độ điểm H là chân đường cao kẻ từ A của tam giác ABC .

(A) $H(3; 4; 6)$. (B) $H(-3; 4; 7)$. (C) $H(2; 4; 1)$. (D) $H(2; -4; 3)$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{BC} = (1; 1; 1)$.

Gọi $H(x; y; z)$ là chân đường cao của tam giác ABC kẻ từ A .

Suy ra $\overrightarrow{BH} = (x-1; y-2; z-4)$.

\overrightarrow{BH} cùng phương với \overrightarrow{BC} , do đó $x-1 = t$; $y-2 = t$; $z-4 = t$. Suy ra $H(1+t; 2+t; 4+t)$.

Ta có $\overrightarrow{AH} = (x_H - x_A; y_H - y_A; z_H - z_A) = (t-6; t-1; t+1)$.

$\overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \Leftrightarrow t-6 + t-1 + t+1 = 0 \Leftrightarrow 3t = 6 \Leftrightarrow t = 2$.

Suy ra $H(3; 4; 6)$.

Chọn đáp án (A) □

CÂU 21. Cho hai điểm $A(1; 1; 0)$, $B(2; -1; 2)$. Gọi $M(0; 0; z)$ là điểm thuộc trục Oz sao cho $MA^2 + MB^2$ nhỏ nhất. Khẳng định nào sau đây là đúng?

(A) $z \in (0; 1]$. (B) $z \in (1; 2]$. (C) $z \in (-1; 0]$. (D) $z \in (-2; -1]$.

Lời giải.

Gọi $M(0; 0; z)$. Khi đó $MA^2 + MB^2 = 2z^2 - 4z + 11 = 2(z-1)^2 + 9 \geq 9$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $z = 1$. Do đó, $M(0; 0; 1)$.

Chọn đáp án (A) □

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM ĐÚNG SAI

CÂU 22. Cho ba vec-tơ $\vec{a} = (-1; 1; 0)$, $\vec{b} = (1; 1; 0)$ và $\vec{c} = (1; 1; 1)$.

Mệnh đề	Đ	S
a) $ \vec{a} = 2$.		X
b) $ \vec{c} = \sqrt{3}$.	X	

Mệnh đề	Đ	S
c) $\cos(\vec{a}, \vec{c}) = \frac{2}{\sqrt{5}}$.		X
d) $\vec{b} \perp \vec{c}$.		X

Lời giải.

a) $|\vec{a}| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$.

b) $|\vec{c}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$

c) $\cos(\vec{a}, \vec{c}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{c}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{c}|} = 0$

d) $\vec{b} \cdot \vec{c} = 2$, suy ra \vec{b} không vuông \vec{c} .

Chọn đáp án ☐ a sai ☐ b đúng ☐ c sai ☐ d sai

CÂU 23. Cho hai vectơ $\vec{u} = (0; 2; 3)$ và $\vec{v} = (m - 1; 2m; 3)$.

Mệnh đề	Đ	S
a) $ \vec{u} = \sqrt{13}$.	X	
b) $ \vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow m = -\frac{3}{5}$.		X

Mệnh đề	Đ	S
c) $\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow m = 1$.	X	
d) $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow m = \frac{9}{4}$.		X

Lời giải.

a) $|\vec{u}| = \sqrt{0^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$

b) $|\vec{u}| = |\vec{v}| \Leftrightarrow \sqrt{13} = \sqrt{(m-1)^2 + 4m^2 + 9} \Leftrightarrow 5m^2 - 2m - 3 = 0 \Leftrightarrow m = 1 \text{ hoặc } m = -\frac{3}{5}$.

c) khi $m = 1$ thì $\vec{v} = (0; 2; 3)$. Suy ra $\vec{u} = \vec{v}$.

d) $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow 4m + 9 = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{9}{4}$.

Chọn đáp án ☐ a đúng ☐ b sai ☐ c đúng ☐ d sai

CÂU 24. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba vectơ $\vec{a}(1; 2; 3)$, $\vec{b}(2; 2; -1)$, $\vec{c}(4; 0; -4)$.

Mệnh đề	Đ	S
a) Tọa độ của vectơ $\vec{x} = \vec{a} + \vec{b}$ là $\vec{x} = (3; 4; 2)$.	X	
b) Tọa độ của vectơ $\vec{y} = \vec{a} + \vec{c}$ là $\vec{y} = (5; 2; 1)$.		X
c) Tọa độ của vectơ $\vec{z} = \vec{b} + \vec{c}$ là $\vec{z} = (6; -2; -5)$.		X
d) Vectơ $\vec{k} = (7; 4; -2)$ thỏa mãn đẳng thức $\vec{k} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.	X	

Lời giải.

a) $\vec{x} = \vec{a} + \vec{b} = (3; 4; 2)$.

b) $\vec{y} = \vec{a} + \vec{c} = (5; 2; -1)$.

c) $\vec{z} = \vec{b} + \vec{c} = (6; 2; -5)$.

d) $\vec{k} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = (7; 4; -2)$.

Chọn đáp án ☐ a đúng ☐ b sai ☐ c sai ☐ d đúng

CÂU 25. Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a}(1; -1; 5)$, $\vec{b}(3; 2; -1)$.

Mệnh đề	Đ	S
a) $\vec{a} + \vec{b} \neq \vec{0}$.	X	
b) $\vec{a} - \vec{b} = (-2; -3; 4)$.		X

Mệnh đề	Đ	S
c) $\vec{v} = \vec{b} - \vec{a}$ có tung độ âm.		X
d) Xét \vec{x} thỏa $\vec{a} - \vec{x} = \vec{b}$. Hoành độ của vectơ \vec{x} thuộc khoảng $(-3; 1)$.	X	

Lời giải.

a) $\vec{a} + \vec{b} = (4; 1; 4)$.

b) $\vec{a} - \vec{b} = (-2; -3; 6)$.

c) $\vec{b} - \vec{a} = (2; 3; -4)$.

d) $\vec{a} - \vec{x} = \vec{b} \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{a} - \vec{b} = (-2; -3; 6)$. Suy ra hoành độ của vectơ \vec{x} là $-2 \in (-3; 1)$.

Chọn đáp án ☐ a đúng ☐ b sai ☐ c sai ☐ d đúng

CÂU 26. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $D(4; -1; 3)$ và các điểm M, N, P lần lượt thuộc các trục Ox, Oy, Oz sao cho DM, DN, DP đôi một vuông góc với nhau

Mệnh đề	Đ	S
a) Tung độ của điểm N bằng 13.		X
b) Cao độ của điểm P bằng $\frac{13}{4}$.		X
c) $V_{DMNP} > 29$.	X	
d) Gọi \vec{x} là vectơ thỏa $\vec{x} \cdot \overrightarrow{DM} = 1; \vec{x} \cdot \overrightarrow{DN} = 2; \vec{x} \cdot \overrightarrow{DP} = -3$ thì tổng hoành độ, tung độ và cao độ của vectơ \vec{x} thuộc khoảng $(3; 7)$.		X

Lời giải.

☑ Gọi $M(a; 0; 0), N(0; b; 0), P(0; 0; c)$.

$$\overrightarrow{DM} = (a - 4; 1; -3), \overrightarrow{DN} = (-4; b + 1; -3), \overrightarrow{DP} = (-4; 1; c - 3)$$

Ta có DM, DN, DP đôi một vuông góc với nhau nên

$$\begin{cases} \overrightarrow{DM} \cdot \overrightarrow{DN} = 0 \\ \overrightarrow{DM} \cdot \overrightarrow{DP} = 0 \\ \overrightarrow{DN} \cdot \overrightarrow{DP} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4(a - 4) + b + 1 + 9 = 0 \\ -4(a - 4) + 1 - 3(c - 3) = 0 \\ 16 + b + 1 - 3(c - 3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4a + b = -26 \\ -4a - 3c = -26 \\ b - 3c = -26 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{13}{4} \\ b = -13 \\ c = \frac{13}{3} \end{cases}$$

☑ $V_{DMNP} = \frac{1}{6} DM \cdot DN \cdot DP = \frac{1}{6} \cdot \frac{13}{4} \cdot 13 \cdot \frac{13}{3} = \frac{2197}{72} > 29$.

☑ Gọi $\vec{x} = (m; n; p)$

$$\overrightarrow{DM} = \left(-\frac{3}{4}; 1; -3\right); \overrightarrow{DN} = (-4; -12; -3); \overrightarrow{DP} = \left(-4; 1; \frac{4}{3}\right)$$

$$\begin{cases} \vec{x} \cdot \overrightarrow{DM} = 1 \\ \vec{x} \cdot \overrightarrow{DN} = 2 \\ \vec{x} \cdot \overrightarrow{DP} = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{3}{4}m + n - 3p = 1 \\ -4m - 12n - 3p = 2 \\ -4m + n + \frac{4}{3}p = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{88}{169} \\ n = -\frac{35}{169} \\ p = -\frac{90}{169} \end{cases}$$

$$m + n + p = \frac{-37}{169}$$

Chọn đáp án ☐ a sai ☐ b sai ☐ c đúng ☐ d sai

CÂU 27. Cho tam giác ABC có $A(1; 2; 0), B(0; 1; 1), C(2; 1; 0)$.

Mệnh đề	Đ	S
a) Tam giác ABC vuông tại A .	X	
b) Chu vi tam giác là $\sqrt{7} + \sqrt{3} + \sqrt{2}$.		X
c) Diện tích tam giác ABC là $\sqrt{6}$.		X
d) Tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là $I\left(1; 1; \frac{1}{2}\right)$.	X	

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (-1; -1; 1) \Rightarrow AB = \sqrt{3}$, $\overrightarrow{AC} = (1; -1; 0) \Rightarrow AC = \sqrt{2}$,
 $\overrightarrow{BC} = (2; 0; -1) \Rightarrow BC = \sqrt{5}$.

a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ do đó $AB \perp AC$, tam giác ABC vuông tại A .

b) Chu vi của tam giác là $AB + AC + BC = \sqrt{3} + \sqrt{2} + \sqrt{5}$.

c) Diện tích là

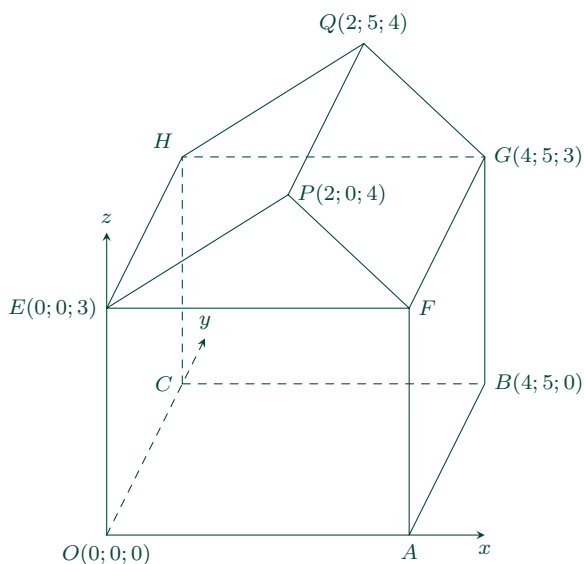
$$S = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

d) Tâm đường tròn ngoại tiếp là trung điểm của BC có tọa độ $I\left(1; 1; \frac{1}{2}\right)$.

Chọn đáp án ☐ a đúng ☐ b sai ☐ c sai ☐ d đúng

CÂU 28. Hình minh họa sơ đồ một ngôi nhà trong hệ trục tọa độ $Oxyz$, trong đó nền nhà, bốn bức tường và hai mái nhà đều là hình chữ nhật.

Mệnh đề	Đ	S
a) Tọa độ của các điểm $A(5; 0; 0)$.		X
b) Tọa độ của các điểm $H(0; 5; 3)$.		X
c) Góc nhị diện có cạnh là đường thẳng FG , hai mặt lần lượt là $(FGQP)$ và $(FGHE)$ gọi là góc dốc của mái nhà. Số đo của góc dốc của mái nhà bằng $26,6^\circ$ (làm tròn kết quả đến hàng phần mười của độ).		X
d) Chiều cao của ngôi nhà là 4.		X



Lời giải.

a) Vì nền nhà là hình chữ nhật nên tứ giác $OABC$ là hình chữ nhật, suy ra $x_A = x_B = 4$, $y_C = y_B = 5$. Do A nằm trên trục Ox nên tọa độ điểm A là $(4; 0; 0)$.

b) Tường nhà là hình chữ nhật, suy ra $y_H = y_C = 5$, $z_H = z_E = 3$. Do H nằm trên mặt phẳng (Oyz) nên tọa độ điểm H là $(0; 5; 3)$.

c) Để tính góc dốc của mái nhà, ta đi tính số đo góc nhị diện có cạnh là đường thẳng FG , hai mặt phẳng lần lượt là $(FGQP)$ và $(FGHE)$. Do mặt phẳng (Oxz) vuông góc với hai mặt phẳng $(FGQP)$ và $(FGHE)$ nên góc PFE là góc phẳng nhị diện ứng với góc nhị diện đó.

Ta có $\overrightarrow{FP} = (-2; 0; 1)$, $\overrightarrow{FE} = (-4; 0; 0)$.

Suy ra

$$\begin{aligned}\cos \widehat{PFE} &= \cos(\overrightarrow{FP}, \overrightarrow{FE}) = \frac{\overrightarrow{FP} \cdot \overrightarrow{FE}}{|\overrightarrow{FP}| \cdot |\overrightarrow{FE}|} \\ &= \frac{(-2) \cdot (-4) + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0}{\sqrt{(-2)^2 + 0^2 + 1^2} \cdot \sqrt{(-4)^2 + 0^2 + 0^2}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}.\end{aligned}$$

Do đó, $\widehat{PFE} \approx 26,6^\circ$. Vậy góc dốc của mái nhà khoảng $26,6^\circ$.

d) Chiều cao bằng cao độ của điểm P . Suy ra $h = 4$.

Chọn đáp án

a sai	b sai	c sai	d sai
-------	-------	-------	-------

 ☐

BÀI TẬP TỰ LUẬN TRẢ LỜI NGẮN

CÂU 29. Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a} = (1; 2; -3)$; $\vec{b} = (-1; -2; z)$. Tìm giá trị z sao cho $\vec{a} + \vec{b} = \vec{0}$

Lời giải.

Đáp án:

3				
---	--	--	--	--

Ta có: $\vec{a} + \vec{b} = (0; 0; z - 3)$.

$\vec{a} + \vec{b} = \vec{0} \Leftrightarrow z - 3 = 0 \Leftrightarrow z = 3$.

Vậy $z = 3$.

CÂU 30. Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 6\vec{k}$ và $\vec{b} = 6\vec{j} + \vec{k}$. Khi đó độ dài của $\vec{a} - 2\vec{b}$ (làm tròn đến hàng phần mười)

Lời giải.

Đáp án:

1	5	,	7
---	---	---	---

Ta có: $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 6\vec{k} \Rightarrow \vec{a} = (2; -3; 6)$

$\vec{b} = 6\vec{j} + \vec{k} \Rightarrow \vec{b} = (0; 6; 1)$

Khi đó: $\vec{a} - 2\vec{b} = (2; -15; 4) \Rightarrow |\vec{a} - 2\vec{b}| = 7\sqrt{5} \approx 15,7$

CÂU 31. Trong không gian $Oxyz$, cho các vectơ $\vec{a} = (1; 0; -2)$, $\vec{b} = (-2; 1; 3)$, $\vec{c} = (3; 2; -1)$, $\vec{d} = (9; 0; -11)$ và 3 số thực m, n, p thỏa $m \cdot \vec{a} + n \cdot \vec{b} + p \cdot \vec{c} = \vec{d}$. Tính giá trị biểu thức $T = m + n + p$.

Lời giải.

Đáp án:

1				
---	--	--	--	--

Ta có: $m \cdot \vec{a} + n \cdot \vec{b} + p \cdot \vec{c} = (m - 2n + 3p; n + 2p; -2m + 3n - p)$, $\vec{d} = (9; 0; -11)$.

$$m \cdot \vec{a} + n \cdot \vec{b} + p \cdot \vec{c} = \vec{d} \Leftrightarrow \begin{cases} m - 2n + 3p = 9 \\ n + 2p = 0 \\ -2m + 3n - p = -11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ n = -2 \\ p = 1. \end{cases}$$

Vậy $T = m + n + p = 1$.

MỤC LỤC

Bài 2. TỌA ĐỘ CỦA VEC TƠ TRONG KHÔNG GIAN	1
(A) LÝ THUYẾT CẦN NHỚ	1
(B) PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN	2
Dạng 1. Tọa độ điểm, tọa độ vec tơ	2
Dạng 2. Tọa độ hóa một số hình không gian	4
Bài 3. BIỂU THỨC TỌA ĐỘ CỦA CÁC PHÉP TOÁN VECTƠ	8
(A) LÝ THUYẾT CẦN NHỚ	8
(B) PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN	9
Dạng 1. Tọa độ của các phép toán vec tơ, tọa độ điểm, độ dài đoạn thẳng	9
Dạng 2. Tích vô hướng, tích có hướng hai vec tơ và ứng dụng	13

LỜI GIẢI CHI TIẾT 17

Bài 2. TỌA ĐỘ CỦA VEC TƠ TRONG KHÔNG GIAN	17
(A) LÝ THUYẾT CẦN NHỚ	17
(B) PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN	18
Dạng 1. Tọa độ điểm, tọa độ vec tơ	18
Dạng 2. Tọa độ hóa một số hình không gian	24
Bài 3. BIỂU THỨC TỌA ĐỘ CỦA CÁC PHÉP TOÁN VECTƠ	28
(A) LÝ THUYẾT CẦN NHỚ	28
(B) PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN	29
Dạng 1. Tọa độ của các phép toán vec tơ, tọa độ điểm, độ dài đoạn thẳng	29
Dạng 2. Tích vô hướng, tích có hướng hai vec tơ và ứng dụng	37

