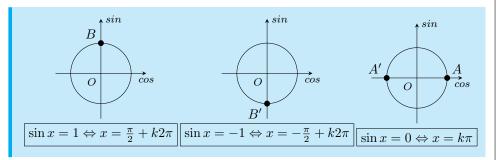
Bài 4. PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CƠ BẨN

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

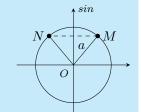
1. Phương trình $\sin x = a$.

 \blacksquare Trường hợp $a \in \{-1, 0, 1\}$.



- - ① Công thức theo đơn vị rad:

$$\sin x = \sin \alpha \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = \alpha + k2\pi \\ x = \pi - \alpha + k2\pi \end{bmatrix}, \, k \in \mathbb{Z}$$

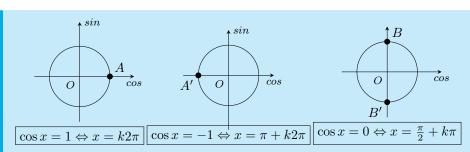


② Công thức theo đơn vị độ:

$$\sin x = \sin \beta^{\circ} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = \beta^{\circ} + k360^{\circ} \\ x = 180^{\circ} - \beta^{\circ} + k360^{\circ} \end{bmatrix}, k \in \mathbb{Z}$$

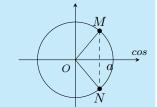
2. Phương trình $\cos x = a$.

 \blacksquare Trường hợp $a \in \{-1; 0; 1\}$.



- - ① Công thức theo đơn vị rad:

$$\cos x = \cos \alpha \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = \alpha + k2\pi \\ x = -\alpha + k2\pi \end{bmatrix}, \, k \in \mathbb{Z}$$



2 Công thức theo đơn vị độ:

$$\cos x = \cos \beta^{\circ} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = \beta^{\circ} + k360^{\circ} \\ x = -\beta^{\circ} + k360^{\circ} \end{bmatrix}, k \in \mathbb{Z}$$



ĐIỂM:

"It's not how much time you have, it's how you use it."

QUICK NOTE

.....

.....

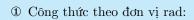
.....

.....

.....

3. Phương trình tan x = a.

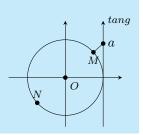
Trường hợp $a \in \left\{0; \pm \frac{\sqrt{3}}{3}; \pm 1; \pm \sqrt{3}\right\}$ hoặc a bất kì. Ta bấm máy sượ tan để tìm góc α hoặc β° tương ứng.



$$\tan x = \tan \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$$

2 Công thức theo đơn vị độ:

$$\tan x = \tan \beta^{\circ} \Leftrightarrow x = \beta^{\circ} + k180^{\circ}, k \in \mathbb{Z}$$

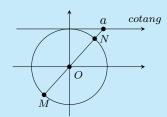


4. Phương trình $\cot x = a$.

Trường hợp $a \in \left\{\pm \frac{\sqrt{3}}{3}; \pm 1; \pm \sqrt{3}\right\}$ hoặc a bất kì. Ta bấm máy sượ tương ứng. Riêng a = 0 thì $\alpha = \frac{\pi}{2}$

① Công thức theo đơn vị rad:

$$\cot x = \cot \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$$



② Công thức theo đơn vị độ:

$$\cot x = \cot \beta^{\circ} \Leftrightarrow x = \beta^{\circ} + k180^{\circ}, k \in \mathbb{Z}$$

📂 Dạng 1. Điều kiện có nghiệm của phương trình lượng giác cơ bản

- \odot sin x = a có tập giá trị $|a| \le 1$.
- Θ $\cos x = b$ có tập giá trị $|b| \le 1$.

1. Ví dụ

VÍ DU 1. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $\sin x = m$ có nghiệm.

VÍ DỤ 2. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $\sin x - m = 1$ có nghiệm.

VÍ DỤ 3. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $3\sin^2 x = 2m-1$ có nghiệm.

VÍ DỤ 4. Tìm m để phương trình $\cos x - m = 0$ vô nghiệm.

VÍ DỤ 5. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\cos x = m+1$ có nghiệm?

2. Bài tập tự luận

BÀI 1. Tìm tất cả các tham số m sao cho trong tập nghiệm của phương trình $\sin 2x = 1 + 2m$ có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

BÀI 2. Tìm m để phương trình $\sin 3x - 6 - 5m = 0$ có nghiệm.

BÀI 3. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình: $3\sin x + m - 1 = 0$ có nghiệm?

3. Bài tập trắc nghiệm

CÂU 1. Với giá trị nào của m thì phương trình $\sin x - m = 1$ có nghiệm là

$$(\mathbf{C})m \geq 1.$$

CÂU 2. Phương trình $\sin \frac{x}{2} = m$ có nghiệm khi và chỉ khi.

$$(A)$$
 $m \in [-1; 1].$

$$(\mathbf{B})m \in [-2; 2].$$

$$\bigcirc m \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right].$$

$$\bigcirc m \in R.$$

CÂU 3. Với giá trị nào của m thì phương trình $\sin x - 2m = 1$ có nghiệm?

- (\mathbf{A}) $0 \le m \le 1$.
- $(\mathbf{B})m < 0.$
- $(\mathbf{C})m \geq 1.$
- $(\mathbf{D}) 1 \le m \le 0.$

CÂU 4. Tập hợp các giá trị của tham số m để phương trình $\sin 2x + 2 = m$ có nghiệm là [a;b]. Khi đó a+b bằng

- **(A)**3.
- $(\mathbf{B})0.$
- \mathbf{C} 2.
- $(\mathbf{D})4$

CÂU 5. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $3\sin 2x - m^2 + 5 = 0$ có nghiệm?

- **A**6.
- \bigcirc 2.
- \bigcirc 1.
- **D**7.

CÂU 6. Cho phương trình $4\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=a^2+\sqrt{3}\sin 2x-\cos 2x$ (1). Có tất cả bao nhiều giá trị nguyên của tham số a để phương trình (1) có nghiệm.

- **A** 5.
- $(\mathbf{B})_0$.
- \mathbf{C} 2.
- $(\mathbf{D})_3$

CÂU 7. Tìm tất cả giá trị thực của m để phương trình $\cos 2x - m = 0$ vô nghiệm.

- $(\mathbf{A})m \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty).$

 $(\mathbf{C})m \in [-1;1].$

 $(\mathbf{D})m \in (-\infty; -1).$

CÂU 8. Cho phương trình $\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)-m=2$. Tìm m để phương trình có nghiệm?

lack A Không tồn tại m.

B $m \in [-1; 3].$

 $\bigcirc m \in [-3; -1].$

 \mathbf{D} $m \in \mathbb{R}$.

CÂU 9. Tìm tất cả giá trị của a để phương trình sau có nghiệm $\cos^2 3x = 2a^2 - 3a + 1$.

 $\bigcirc a \in \left[0; \frac{3}{2}\right].$

🖶 Dạng 2. Phương trình lượng giác cơ bản dùng Radian

$$\Theta \sin x = \sin \alpha \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = \alpha + k2\pi \\ x = \pi - \alpha + k2\pi \end{bmatrix} (k \in \mathbb{Z}).$$

- \odot tan $x = \tan \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi \ (k \in \mathbb{Z}).$
- Θ $\cot x = \cot \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi \ (k \in \mathbb{Z}).$

1. Ví dụ

VÍ DỤ 1. Giải phương trình $\sin x = 1$.

VÍ DỤ 2. Giải phương trình $\cos x = 1$.

VÍ DỤ 3. Giải phương trình $\sin\left(\frac{3x}{4} - \frac{\pi}{3}\right) = 1.$

VÍ DỤ 4. Giải phương trình $\tan x - 1 = 0$.

VÍ DU 5. Giải phương trình $\sqrt{3} \tan x - 1 = 0$.

VÍ DU 6. Giải phương trình $\cot 3x = \cot x$.

2. Bài tập tự luận

BÀI 1. Giải phương trình $\sin 2x = 1$

BÀI 2. Giải phương trình $\cot (3x - 1) = -\sqrt{3}$.

BÀI 3. Giải phương trình $\cot x = \cot \left(-\frac{\pi}{7}\right)$ trên khoảng $(0; 3\pi)$.

BÀI 4. Phương trình cot $x=\sqrt{3}$ có bao nhiều nghiệm thuộc $[-2018\pi;2018\pi]$?

BÀI 5. Tổng các nghiệm của phương trình $\tan 5x - \tan x = 0$ trên nửa khoảng $[0;\pi)$ bằng

.....

.....

.....

.....

.....

.....

$oldsymbol{\Omega}$	V	N	\circ	ī	-

3. Bài tập trắc nghiệm

CÂU 1. Phương trình $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ có tập nghiệm là

$$\mathbf{C}S = \left\{ \frac{\pi}{3} + k2\pi; \frac{2\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

$$\mathbf{D}S = \left\{ \frac{\pi}{3} + k2\pi; -\frac{2\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

CÂU 2. Phương trình $2\sin x - 1 = 0$ có tập nghiệm là

CÂU 3. Tập nghiệm của phương trình $\sin x = 0$ là

$$\mathbf{C}x = \frac{2}{\pi} + k2\pi (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\mathbf{D}x = k2\pi (k \in \mathbb{Z}).$$

CÂU 4. Số nghiệm của phương trình $\sin 2x = 0$ thỏa mãn $0 < x < 2\pi$ là?

CÂU 5. Nghiệm của phương trình $\sin \frac{x}{2} = 1$ là

$$(\mathbf{B})x = \pi + k4\pi, k \in \mathbb{Z}.$$
 $(\mathbf{B})x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$

CÂU 6. Nghiệm của phương trình $\cos x = \frac{1}{2}$ là

$$(\mathbf{A})x = \pm \frac{\pi}{2} + k2\pi, \ k \in \mathbb{Z}.$$
 $(\mathbf{B})x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi, \ k \in \mathbb{Z}.$

CÂU 7. Số nghiệm của phương trình $\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=1$ với $\pi\leq x\leq 5\pi$ là

$$(A)_0.$$
 $(B)_3.$ $(C)_1.$ $(D)_2.$

CÂU 8. Phương trình $\cos x - 1 = 0$ có nghiệm là

$$(\mathbf{A})x = k\pi, \ k \in \mathbb{Z}.$$

$$(\mathbf{B})x = k2\pi, \ k \in \mathbb{Z}.$$

$$\mathbf{C}$$
 $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, \ k \in \mathbb{Z}.$ \mathbf{D} $x = \pi + k2\pi, \ k \in \mathbb{Z}.$

CÂU 9. Tập nghiệm của phương trình $\cos 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ là

$$\mathbf{C}x = -\frac{\pi}{12} + k\pi, \ k \in \mathbb{Z}.$$

$$\mathbf{D}x = \frac{\pi}{12} + k\pi, \ k \in \mathbb{Z}.$$

CÂU 10. Tập nghiệm của phương trình $\cos 2x = \frac{1}{2}$ là

$$\mathbf{C}x = \frac{\pi}{6} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\mathbf{D}x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z}).$$

CÂU 11. Tổng nghiệm âm lớn nhất và nghiệm dương nhỏ nhất của phương trình $2\cos x$ –

B 0.
$$\mathbf{C} \frac{5\pi}{6}$$
. $\mathbf{D} - \frac{5\pi}{3}$.

CÂU 12. Tính tổng S tất cả các nghiệm trên khoảng $(0;3\pi)$ của phương trình $2\cos 3x=$

$$egin{aligned} egin{aligned} igspace & igspace & 121\pi \\ igspace & igspace & S \end{aligned} = rac{120\pi}{9}. \qquad igspace & igspace & S = rac{122\pi}{9}. \end{aligned}$$

CÂU 13. Tập nghiệm S của phương trình $\sqrt{3} \tan \frac{x}{3} + 3 = 0$.

CÂU 14. Nghiệm của phương trình $\tan x = \tan \frac{\pi}{3}$ là

$$\mathbf{B}x = \frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\mathbf{C} x = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\mathbf{B}$$
 $x=rac{\pi}{6}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}.$ \mathbf{D} $x=-rac{\pi}{6}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}.$

$$\mathbf{A}x = \frac{\pi}{4} + k2\pi.$$

$$\mathbf{C}x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$$

CÂU 16. Phương trình $\sqrt{3} \tan 2x - 3 = 0$ có nghiệm

$$\mathbf{A} x = \frac{\pi}{3} + k\pi \, (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\mathbf{B} x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2} (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\mathbf{C} x = \frac{3}{3} + \frac{k\pi}{2} (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\mathbf{D}x = \frac{\sigma}{6} + k\pi \, (k \in \mathbb{Z}).$$

CÂU 17. Cho phương trình $\sqrt{3} \tan 2x = 3$ có nghiệm x_0 khi đó $\cos x_0$ nhận giá trị là

$$\bigcirc \frac{-\sqrt{3}}{2}$$
.

B
$$\pm \frac{\sqrt{3}}{2}; \pm \frac{1}{2}.$$
 C $\pm \frac{\sqrt{3}}{2}.$

$$\mathbf{c}$$
 $\pm \frac{\sqrt{3}}{2}$.

$$\bigcirc$$
 $\pm \frac{1}{2}$.

CÂU 18. Tổng các nghiệm của phương trình $\tan 2x = \tan x$ trên $[-\pi; 2\pi]$ là

$$\mathbf{A}\pi$$
.

$$\frac{\dot{\mathbf{B}}}{2}$$
.

$$\mathbf{C}$$
 4π .

$$\mathbf{D}$$
 2π .

$$(\mathbf{B})x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\mathbf{C}x = \frac{k\pi}{6}, k \in \mathbb{Z}$$

CÂU 20. Nghiệm của phương trình $\tan 2\mathbf{x} = \tan \left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ là

$$\mathbf{C}x = \frac{9}{3} + k\frac{2}{3}, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\mathbf{B} x = \frac{\pi}{4} + k \frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\mathbf{D} x = \frac{\pi}{6} + k \frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\mathbf{A} x = \frac{\pi}{2} + k\pi, (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\mathbf{B}$$
 $x = \frac{\pi}{c} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z})$

$$\mathbf{C} x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\widehat{\mathbf{D}}x = \frac{6}{6} + k\pi, (k \in \mathbb{Z}).$$

CÂU 22. Phương trình $\cot\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)=1$ có nghiệm

$$\mathbf{C}x = k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\mathbf{D} x = k \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$$

ե Dạng 3. Phương trình lượng giác cơ bản dùng độ

$$\Theta \sin x = \sin \alpha^{\circ} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = \alpha^{\circ} + k360^{\circ} \\ x = 180^{\circ} - \alpha^{\circ} + k360^{\circ} \end{bmatrix} (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\Theta$$
 $\tan x = \tan \alpha^{\circ} \Leftrightarrow x = \alpha^{\circ} + k180^{\circ} \quad (k \in \mathbb{Z}).$

$$\Theta$$
 $\cot x = \cot \alpha^{\circ} \Leftrightarrow x = \alpha^{\circ} + k180^{\circ} \quad (k \in \mathbb{Z}).$

1. Ví du

VÍ DỤ 1. Tìm góc lượng giác x sao cho:

a)
$$\sin x = \sin 55^\circ$$
;

c)
$$\tan x = \tan 67^{\circ}$$
;

b)
$$\cos x = \cos(-87^{\circ});$$

d)
$$\cot x = \cot(-83^{\circ}).$$

VÍ DU 2. Giải các phương trình sau:

a)
$$\sin(x+20^\circ) = \frac{1}{2}$$
;

b)
$$\sin(x + 30^\circ) = \sin(x + 60^\circ)$$
.

VÍ DU 3. Giải phương trình $\sin 2x = \sin(60^{\circ} - 3x)$.

all	ICK	NO	ТБ
σu		NO	ш

,										
VI	DŲ 4	4.	Giải	phương	${\rm tr}{\rm inh}$	$\cos 2x$	$=\cos($	45°	-x	

VÍ DỤ 5. Giải phương trình:
$$\sqrt{3} \tan \left(\frac{x}{2} + 15^{\circ}\right) = 1$$
.

2. Bài tập tự luận

BÀI 1. Giải phương trình
$$\cos(x-15^{\circ}) = -\frac{1}{2}$$
.

BÀI 2. Giải phương trình:
$$\cos(2x - 60^{\circ}) = \frac{1}{3}$$
.

BÀI 3. Giải phương trình
$$\tan(x+30^\circ)+1=0$$
 với $-90^\circ < x < 360^\circ$.

BÀI 4. Giải phương trình
$$3 \cot^2 (5x + 40^\circ) = 1$$
.

BÀI 5. Giải phương trình:
$$\tan (3x - 20^{\circ}) - \cot (2x + 15^{\circ}) = 0$$
.

BÀI 6. Giải phương trình:
$$\cot(x+30^\circ) = \cot\frac{x}{2}$$

3. Bài tập trắc nghiệm

CÂU 1. Phương trình $\sin x = \sin a^{\circ}$ tương đương với

$$\begin{bmatrix} x = a^{\circ} + k60^{\circ} \\ x = 180^{\circ} - a^{\circ} + 60^{\circ} \end{bmatrix} (k \in \mathbb{Z})$$

$$\mathbf{C} x = a^{\circ} + k180^{\circ} \ (k \in \mathbb{Z}).$$

CÂU 2. Hỏi $x=45^{\circ}$ là nghiệm của phương trình nào sau đây?

$$(\mathbf{B})\cos x = 1.$$

$$\mathbf{C}\sin x \cdot \cos x = \frac{1}{2}. \quad \mathbf{D}\sin 2x = 0.$$

CÂU 3. Tìm tập nghiệm S của phương trình $\cos 3x = \cos 45^{\circ}$.

$$A) S = \{15^{\circ} + k120^{\circ}; 45^{\circ} + k120^{\circ}, k \in \mathbb{Z}\}.$$

$$(\mathbf{B})S = \{-15^{\circ} + k120^{\circ}; 15^{\circ} + k120^{\circ}, k \in \mathbb{Z}\}.$$

$$\mathbf{C}$$
 $S = \{15^{\circ} + k360^{\circ}; 45^{\circ} + k360^{\circ}, k \in \mathbb{Z}\}.$

$$(\mathbf{D})S = \{-15^{\circ} + k360^{\circ}; 15^{\circ} + k360^{\circ}, k \in \mathbb{Z}\}.$$

CÂU 4. Tìm tập nghiệm S của phương trình $\cos{(2x-30^\circ)}=-\frac{1}{2}$.

$$(\mathbf{A})S = \{-45^{\circ} + k360^{\circ}; 75^{\circ} + k360^{\circ}, k \in \mathbb{Z}\}.$$

$$(\mathbf{B})S = \{-45^{\circ} + k180^{\circ}; 45^{\circ} + k180^{\circ}, k \in \mathbb{Z}\}.$$

$$(\mathbf{C})S = \{-45^{\circ} + k180^{\circ}; 75^{\circ} + k180^{\circ}, k \in \mathbb{Z}\}.$$

$$(\mathbf{D})S = \{-75^{\circ} + k180^{\circ}; 75^{\circ} + k180^{\circ}, k \in \mathbb{Z}\}.$$

CÂU 5. Nghiệm của phương trình $\tan x = \tan 25^{\circ}$ là

$$(\mathbf{A})x = 25^{\circ} + k360^{\circ} \text{ và } x = 155^{\circ} + k360^{\circ}, k \in \mathbb{Z}.$$

(B)
$$x = 25^{\circ} + k180^{\circ} \text{ và } x = 155^{\circ} + k180^{\circ}, k \in \mathbb{Z}$$
.

$$(\mathbf{C})x = 25^{\circ} + k360^{\circ} \text{ và } x = -25^{\circ} + k360^{\circ}, k \in \mathbb{Z}.$$

$$(\mathbf{D})x = 25^{\circ} + k180^{\circ}, k \in \mathbb{Z}$$
.

CÂU 6. Phương trình $\tan(2x+12^{\circ})=0$ có họ nghiệm là

$$(\mathbf{A})x = -6^{\circ} + k180^{\circ}, \ k \in \mathbb{Z}.$$

(B)
$$x = -6^{\circ} + k360^{\circ}, \ k \in \mathbb{Z}.$$

$$\mathbf{C}x = -12^{\circ} + k90^{\circ}, \ k \in \mathbb{Z}.$$

$$\mathbf{D}$$
 $x = -6^{\circ} + k90^{\circ}, \ k \in \mathbb{Z}.$

CÂU 7. Tìm số nghiệm của phương trình $\sin 3x = 0$ thuộc khoảng $(0; 180^{\circ})$.

$$(\mathbf{A})1$$

$$(\mathbf{c})_3$$

CÂU 8. Tìm tập nghiệm S của phương trình $\cos(x+30^\circ)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$$(A)S = \{120^{\circ} + k360^{\circ}; k360^{\circ}, k \in \mathbb{Z}\}.$$

$$(\mathbf{B})S = \{120^{\circ} + k360^{\circ}; -180^{\circ} + k360^{\circ}, k \in \mathbb{Z}\}.$$

$$(\mathbf{C})S = \{120^{\circ} + k180^{\circ}; k180^{\circ}, k \in \mathbb{Z}\}.$$

$$(\mathbf{D})S = \{120^{\circ} + k180^{\circ}; -180^{\circ} + k180^{\circ}, k \in \mathbb{Z}\}.$$

CÂU 9. Tìm nghiệm của phương trình $\sqrt{3}\cot(x+60^\circ)-1=0$.

$$(A)x = -30^{\circ} + k360^{\circ}, k \in \mathbb{Z}.$$

(B)
$$x = -30^{\circ} + k180^{\circ}, k \in \mathbb{Z}.$$

$$(\mathbf{C})x = k360^{\circ}, k \in \mathbb{Z}.$$

$$(\mathbf{D})x = k180^{\circ}, k \in \mathbb{Z}.$$

CÂU 10. Cho phương trình $\tan(2x-15^\circ)=1$ biết rằng $-90^\circ < x < 90^\circ$. Số nghiệm của phương trình là

A1.

 \bigcirc 2.

(C)3.

 \bigcirc 4.

CÂU 11. Số nghiệm của phương trình $\sin{(2x-40^\circ)}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ với $-180^\circ \le x \le 180^\circ$ là

 \bigcirc 2.

B)4.

(C)6

(D)7.

CÂU 12. Tìm tập nghiệm S của phương trình $\sin(x+30^\circ) \cdot \cos(x-45^\circ) = 0$.

 $(\mathbf{B})S = \{-30^{\circ} + k180^{\circ}; 135^{\circ} + k180^{\circ}, k \in \mathbb{Z}\}.$

 $(\mathbf{\hat{C}})S = \{135^{\circ} + k180^{\circ}, k \in \mathbb{Z}\}.$

 $(\mathbf{D})S = \{45^{\circ} + k180^{\circ}, k \in \mathbb{Z}\}.$

Dạng 4. Phương trình đưa về phương trình lượng giác cơ bản

1. Ví dụ

VÍ DỤ 1. Giải phương trình: $\sin 2x = \cos 3x$.

VÍ DỤ 2. Giải phương trình: $\sin 4x - \cos \left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 0$.

VÍ DU 3. Giải các phương trình sau:

a) $\sin 2x + \cos 4x = 0.$

b) $\cos 3x = -\cos 7x$.

VÍ Dụ 4. Giải phương trình: $\cos^2 2x = \cos^2 \left(x + \frac{\pi}{6}\right)$.

VÍ DỤ 5. Giải phương trình: $\sin x + \sin 2x = 0$.

VÍ DỤ 6. Giải phương trình sau: $\sqrt{3} \cdot \sin x + \cos x = 1$.

VÍ DỤ 7. Giải phương trình: $\sin x + \sqrt{3}\cos x = 1$.

VÍ DU 8. Giải phương trình: $\sqrt{3}\cos x - \sin x = \sqrt{2}$.

VÍ DỤ 9. Giải phương trình: $\sqrt{3}\sin 2x + \cos 2x = \sqrt{2}$.

VÍ DỤ 10. Tìm số nghiệm của phương trình $\sin 5x + \sqrt{3}\cos 5x = 2\sin 7x$ trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

2. Bài tâp tư luân

BÀI 1. Giải phương trình: $\sin 3x - \cos 5x = 0$.

BÀI 2. Giải phương trình $\sin 2x + \sin \left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 0$.

BÀI 3. Giải phương trình: $\tan(2x+1) + \cot x = 0$.

BÀI 4. Tìm $x \in (-\pi; \pi)$ sao cho $\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + 2\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 0$.

BÀI 5. Giải phương trình: $2\sin^2 x - 1 + \cos 3x = 0$.

BÀI 6. Giải phương trình $\sin 3x + \cos 2x - \sin x = 0$.

BÀI 7. Giải phương trình $\sin x \cdot \cos 2x = \sin 2x \cdot \cos 3x$.

BÀI 8. Giải phương trình: $\sin^4 \frac{x}{2} + \cos^4 \frac{x}{2} = \frac{1}{2}$.

BÀI 9. Giải phương trình: $\tan^2 4x - \tan^2 \left(3x - \frac{\pi}{3}\right) = 0$.

BÀI 10. Giải phương trình $\sin^6 x + \cos^6 x = \frac{7}{16}$.

BÀI 11. Giải phương trình $\cos x - \sqrt{3} \sin x = -2$.

BÀI 12. Tìm tập nghiệm của trình $\sin x + \cos x = \sqrt{2}$.

BÀI 13. Giải phương trình $\sqrt{3}\sin 2x - \cos 2x = 2$.

BÀI 14. Giải phương trình $\sin 2x - \sqrt{3}\cos 2x = 1$.

QUICK NOTE

_	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
-	-	-	-	•	•	•	•	•	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	•	•		-		-	-	-	•	-	-	-
•	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	•	•

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ω	П	\sim 1 $^{\prime}$			-
ດ	UII	CK	- 1	u 🗨) 3

CÂU 1. Tìm số nghiệm thuộc khoảng $(-\pi;\pi)$ của phương trình $\sin x + \sin 2x = 0$.

 $(\mathbf{C})_{2.}$

CÂU 2. Tìm số nghiệm thuộc khoảng $(0; \pi)$ của phương trình $\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \sin 5x = 0$.

CÂU 3. Phương trình $\tan 2x + \tan x = 0$ có bao nhiều nghiệm trong đoạn $[-4\pi; 5\pi]$?

(B)27.

 $(\mathbf{C})19.$

(**D**)18.

CÂU 4. Giải phương trình $\sin x + \cos \left(x - \frac{\pi}{2}\right) = 2$.

 $(\mathbf{C})x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$

 $\mathbf{B} x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$ $\mathbf{D} x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$

CÂU 6. Tổng các nghiệm của phương trình $\sin x = \frac{-1}{2\sqrt{2}\cos x}$ trên đoạn $[0;2\pi]$ là

 \bigcirc $\frac{15\pi}{\circ}$.

 \bigcirc $\frac{11\pi}{2}$.

CÂU 7. Giải phương trình $\sin^2 2x = \cos^2 \left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

 \mathbf{C} $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, \ x = -\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{3}, \ k \in \mathbb{Z}.$

 \mathbf{D} $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, \ x = -\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{3}, \ k \in \mathbb{Z}.$

CẦU 8. Có bao nhiêu điểm trên đường tròn lượng giác biểu diễn tất các nghiệm của phương trình $\sin 4x \cos x = \sin 5x \cos 2x$?

 (\mathbf{A}) 2 điểm.

(**B**)5 điểm.

(**C**)9 điểm.

(**D**)14 điểm.

CÂU 9. Có bao nhiều điểm trên đường tròn lượng giác biểu diễn tất các nghiệm của phương trình $\sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin 2x$?

 (\mathbf{A}) 2 điểm.

(**C**)4 điểm.

(**D**)1 điểm.

CÂU 10. Phương trình $\sqrt{3}\sin 3x + \cos 3x = -1$ tương đương với phương trình nào sau

 $(\mathbf{A})\sin\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}.$ $(\mathbf{C})\sin\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}.$

 $\mathbf{B}\sin\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\pi}{6}.$ $\mathbf{D}\sin\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}.$

CÂU 11. Phương trình $\sqrt{3}\sin x + \cos x = -\frac{1}{4}$ tương đương với phương trình nào sau

 $\mathbf{\hat{A}}\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{8}.$

 $\left(\mathbf{c}\right)\sin\left(x+\frac{\ddot{\pi}}{2}\right)=-\frac{1}{4}.$

CÂU 12. Một vật thể chuyển động với vận tốc thay đổi có phương trình v(t)=2+ $\sin\left(\pi t + \frac{\pi}{4}\right)$ (t tính bằng giây, vận tốc tính bằng m/s²). Trong khoảng 1 giây đầu chuyển động, thời điểm vật thể đạt vận tốc 3 m/s^2 là \bigcirc 1 giây. \bigcirc 1 giây. \bigcirc 2 giây.

 $(\mathbf{D})^{\frac{3}{4}}$ giây.

CÂU 13. Tìm số nghiệm thuộc khoảng $(0; 2\pi)$ của phương trình $\sin x + 2\sin 2x + \sin 3x =$ 0.

 $(\mathbf{A})6.$

(B)5.

(C)4.

(**D**)3.

CÂU 14. Cho phương trình $\sin x + 2\sin 2x + \sin 3x = \cos x + 2\cos 2x + \cos 3x$. Tính tổng S tất cả các nghiệm trong đoạn $(0;\pi)$ của phương trình đã cho.

$$\mathbf{B}S = \frac{5\pi}{8}.$$

$$\mathbf{D}S = \frac{13\pi}{12}.$$

CÂU 15. Cho phương trình $\sin x \cos x = 2(\sin^4 x + \cos^4 x) - \frac{3}{2}$. Tính tổng S tất cả các nghiệm thuộc $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ của phương trình đã cho.

$$\mathbf{B}S = \frac{5\pi}{12}.$$

B
$$S = \frac{5\pi}{12}$$
. **C** $S = \frac{\pi}{12}$.

CÂU 16. Phương trình $\tan\left(\frac{\pi}{3}-x\right)\cdot\tan\left(\frac{\pi}{2}+2x\right)=1$ có nghiệm là

$$\mathbf{B}x = \frac{\pi}{6} + \mathbf{k}\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\mathbf{C} x = -\frac{\sigma}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\mathbf{B} x = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\mathbf{D} x = \frac{5\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

CÂU 17. Nghiệm của phương trình $\tan 2x - \cot \left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$ có dạng $x = \frac{\pi}{n} + \frac{k\pi}{m}, k \in \mathbb{Z}$. Khi đó $m \cdot n$ bằng

CÂU 18. Với $k \in \mathbb{Z}$, họ nghiệm của phương trình $\sqrt{3}\cos x + \sin x = -2$ là

B
$$x = -\frac{5\pi}{6} + k2\pi$$

(A)
$$x = \frac{\pi}{6} + k2\pi$$
. **(B)** $x = -\frac{5\pi}{6} + k2\pi$. **(C)** $x = \pm \frac{5\pi}{6} + k2\pi$. **(D)** $x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$.

CÂU 19. Nghiệm của phương trình $\cos x - \sqrt{3} \sin x = -2$ là

$$\mathbf{A} x = \frac{4\pi}{3} + k2\pi; k \in \mathbb{Z}.$$

$$\mathbf{D}x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi; k \in \mathbb{Z}.$$

CÂU 20. Nghiệm của phương trình $\sin x - \sqrt{3}\cos x = 2\sin 3x$ là

$$\mathbf{A} x = \frac{\pi}{6} + k\pi \text{ hoặc } x = \frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}.$$

B
$$x = \frac{6}{3} + k2\pi$$
 hoặc $x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

$$\mathbf{C}x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi \text{ hoặc } x = \frac{4\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\mathbf{D} x = \frac{\pi}{3} + k \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$$

CÂU 21. Giải phương trình $\sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin 3x$.

$$\mathbf{A} \begin{bmatrix} x = \frac{\pi}{10} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{5} + \frac{k\pi}{2} \end{bmatrix} (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\mathbf{C} \begin{bmatrix} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2} \end{bmatrix} (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\begin{bmatrix} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2} \end{bmatrix} (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\begin{bmatrix} x = \frac{\pi}{8} + k\pi \\ x = \frac{3\pi}{16} + \frac{k\pi}{2} \end{bmatrix} (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\mathbf{C} \begin{bmatrix} x = \frac{3}{2} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + \frac{k\pi}{2} \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

$$x = \frac{8\pi}{8} + k\pi$$

$$x = \frac{3\pi}{16} + \frac{k\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

CÂU 22. Phương trình $\sin 2x - \cos 2x = \sqrt{2}\cos x$ có hai họ nghiệm dạng $x = \alpha + k2\pi$ và $x = \beta + \frac{k2\pi}{3}$, trong đó $\alpha \in (0; \pi)$ và $\beta \in (0; \frac{\pi}{2})$. Khi đó, giá trị $2\alpha - \beta$ là

$$\bigcirc -\frac{11\pi}{4}$$

$$\bigcirc \frac{5\pi}{4}$$
.

CÂU 23. Phương trình $\sin^2 x + \sqrt{3} \sin x \cos x = 1$ có bao nhiều nghiệm thuộc $[0; 2\pi]$?

(A) 5	
(\mathbf{A}) 5.	

_
2

$$\bigcirc$$
4.

CÂU 24. Tìm số nghiệm của phương trình $4\sin^2 x + 3\sqrt{3}\sin 2x - 2\cos^2 x = 4$ trong khoảng $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$.

(Λ)	4
(A)	4.

$$\bigcirc$$
1

CÂU 25. Số nghiệm của phương trình $\cos^2 x - \sin 2x = \sqrt{2} + \cos^2 \left(\frac{\pi}{2} + x\right)$ trên khoảng $(0;3\pi)$ bằng

$$\bigcirc$$
2.

(B)3.

 $(\mathbf{C})4.$

(**D**)1.

all	NIC	1

CÂU 26. Gọi S là tập hợp tất cả các nghiệm thuộc khoảng (0; 2024) của phương trình $\sqrt{3}(1-\cos 2x)+\sin 2x-4\cos x+8=4\left(\sqrt{3}+1\right)\sin x$. Tìm số các phần tử của tập hợp S.

(A) 322.

B)323.

 (\mathbf{C}) 321.

(D)324.

Dạng 5. Toán thực tế liên môn

1. Bài tập tự luận

BÀI 1. Nhiệt độ ngoài trời ở một thành phố vào các thời điểm khác nhau trong ngày có thể được mô phỏng bởi công thức

$$h(t) = 29 + 3\sin\frac{\pi}{12}(t-9)$$
.

với h tính bằng độ C và t là thời gian trong ngày tính bằng giờ.

- a) Tính nhiệt độ lúc 12 giờ trưa.
- b) Tính thời gian nhiệt độ thấp nhất trong ngày.

BÀI 2. Số giờ có ánh sáng mặt trời của một thành phố A ở vĩ độ 40° Bắc trong ngày thứ t của một năm không nhuân được cho bởi hàm số

$$d(t) = 3\sin\left[\frac{\pi}{182}\cdot(t-80)\right] + 12 \text{ v\'oi } t \in \mathbb{Z} \text{ v\'a } 0 \le t \le 365.$$

Hỏi thành phố A có đúng 12 giờ có ánh sáng mặt trời vào ngày nào trong năm?

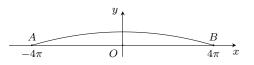
BÀI 3. Giả sử một vật dao động điều hoa xung quanh vị trí cân bằng theo phương trình

$$x = 2\cos\left(5t - \frac{\pi}{6}\right)$$

 $\mathring{\text{O}}$ đây, thời gian t tính bằng giây và quãng đường x tính bằng centimét. Hãy cho biết trong khoảng thời gian từ 0 đến 6 giây, vật đi qua vị trí cân bằng bao nhiêu lần?

BÀI 4.

Một cây cầu có dạng cung AB của đồ thị hàm số $y=4,2\cdot\cos\frac{x}{8}$ và được mô tả trong hệ trục toạ độ với đơn vị trục là mét như ở hình bên. Một sà lan chở khối hàng hoá được xếp thành hình hộp chữ nhật với độ cao 3 m so với mực nước sông sao cho sà lan có thể đi qua được gầm cầu. Chứng minh rằng chiều rộng của khối hàng hoá đó phải nhỏ hơn 12,5 m.



BÀI 5. Một quả đạn pháo được bắn ra khỏi nòng pháo với vận tốc ban đầu $v_0 = 500$ m/s hợp với phương ngang một góc α . Trong Vật lí, ta biết rằng, nếu bỏ qua sức cản của không khí và coi quả đạn pháo được bắn ra từ mặt đất thi quỹ đạo của quả đạn tuân theo phương trình $y = \frac{-g}{2v_0^2\cos^2\alpha} \cdot x^2 + x\tan\alpha$, ở đó g = 10 m/s² là gia tốc trọng trường.

- a) Tính theo góc bắn α tầm xa mà quả đạn đạt tới (tức là khoảng cách từ vị trí bắn đến điểm quả đạn chạm đất).
- b) Tìm góc bắn α để quả đạn trúng mục tiêu cách vị trí đặt khẩu pháo 22 000 (m).

2. Bài tập trắc nghiệm

CÂU 1. Nhiệt độ ngoài trời ở một thành phố vào các thời điểm khác nhau trong ngày có thể được mô phỏng bởi công thức $h(t) = 30 + 3\sin\frac{\pi}{12}\,(t-5)$. Với h tính bằng độ C và t là thời gian trong ngày tính bằng giờ. Nhiệt độ lúc 7 giờ sáng là bao nhiêu?

 \bigcirc 31,5 độ C.

 $lackbox{\textbf{B}}$ 32,5 độ C.

 \bigcirc 30 độ C.

 \bigcirc 37 độ C.

CÂU 2. Nhiệt độ ngoài trời ở một thành phố vào các thời điểm khác nhau trong ngày có thể được mô phỏng bởi công thức

$$h(t) = 29 + 3\sin\frac{\pi}{12}(t-9).$$

với h tính bằng độ C và t là thời gian trong ngày tính bằng giờ. Thời gian nhiệt độ cao nhất trong ngày là

 (\mathbf{A}) 13 giờ.

(**B**)15 giờ.

(C)12 giờ.

 (\mathbf{D}) 14 giờ.

CÂU 3. Số giờ có ánh sáng mặt trời của một thành phố A trong ngày thứ t của một năm không nhuận được cho bởi hàm số $d(t)=4\sin\left[\frac{\pi}{18}\cdot(t-80)\right]+12$ với $t\in\mathbb{Z}$ và $0\leq t\leq 365$. Số giờ nắng của ngày thứ 83 là

CÂU 4. Số giờ có ánh sáng mặt trời của một thành phố A trong ngày thứ t trong một năm không nhuận được cho bởi công thức

$$d(t) = 4\sin\left[\frac{\pi}{182}\left(t - 70\right)\right] + 16 \text{ v\'oi } t \in \mathbb{R} \text{ v\'a } 0 < t \leq 365.$$

Vào ngày nào trong năm thì thành phố A có ít ánh sáng mặt trời nhất

(**A**)353.

(B)171.

(C)161.

CÂU 5. Hằng ngày mực nước con kênh lên xuống theo thủy triều. Độ sâu h (mét) của mực nước trong kênh được tính tại thời điểm t (giờ) trong một ngày bởi công thức h= $3\cos\left(\frac{\pi t}{8} + \frac{\pi}{4}\right) + 12$. Mực nước của kênh cao nhất khi $t = t_0$. Tính giá trị của $P = t_0^2 + t_0$. (a) t = 272. (b) t = 240. (c) t = 240.

CÂU 6. Số giờ có ánh sáng của thành phố Hà Nội trong ngày thứ t của năm 2019 được cho bởi một hàm số $y=4\sin\left|\frac{\pi}{178}(t-60)\right|+10$, với $t\in\mathbb{Z}$ và $0< t\leq 365$. Vào ngày nào trong năm thì thành phố có ít giờ ánh sáng mặt trời nhất?

 (\mathbf{A}) 23 tháng 11.

(B)24 tháng 11.

 (\mathbf{C}) 25 tháng 11.

 (\mathbf{D}) 22 tháng 11.

CÂU 7. Hằng ngày mực nước con kênh lên xuống theo thủy triều. Độ sâu h (mét) của mực nước trong kênh được tính tại thời điểm t (giờ) trong một ngày bởi công thức h= $3\cos\left(\frac{\pi t}{8} + \frac{\pi}{4}\right) + 12$. Mực nước của kênh cao nhất khi $t = t_0$. Tính giá trị của $P = t_0^2 + t_0$. $(\mathbf{A})t = 272$. $(\mathbf{B})t = 182$. $(\mathbf{C})t = 240$. $(\mathbf{D})t = 210$.

CÂU 8. Hằng ngày mực nước của con kênh lên, xuống theo thủy triều. Độ sâu h (m) của mực nước trong kênh được tính tại thời điểm t (giờ), $0 \le t \le 24$ trong một ngày được tính bởi công thức $h(t)=3\cos\left(\frac{\pi t}{8}+\frac{\pi}{4}\right)+3$. Hỏi trong một ngày có mấy thời điểm mực nước của con kênh đạt độ sâu lớn nhất?

 $(\mathbf{C})_{2}$.

CÂU 9. Giả sử một vật dao động điều hoa xung quanh vị trí cân bằng theo phương trình $x=2\sin\left(5t-\frac{\pi}{6}\right)$. Ở đây, thời gian t tính bằng giây và quãng đường x tinh bằng centimét. Vật đi qua vị trí cân bằng bao nhiêu lần trong 3 giây đầu.

 $(\mathbf{D})8.$

CÂU 10. Một quả đạn pháo được bắn ra khỏi nòng pháo với vận tốc ban đầu $v_0=500$ m/s hợp với phương ngang một góc α . Trong Vật lí, ta biết rằng, nếu bỏ qua sức cản của không khí và coi quả đạn pháo được bắn ra từ mặt đất thi quỹ đạo của quả đạn tuân theo phương trình $y=\frac{-g}{2v_0^2\cos^2\alpha}\cdot x^2+x\tan\alpha$, ở đó $g=10~{\rm m/s^2}$ là gia tốc trọng trường. Góc bắn α để quả đạn bay xa nhất là

\blacktriangleright Dạng 6. Phương trình bận n theo một hàm số lượng giác

Quan sát và dùng các công thức biến đổi để đưa phương trình về cùng một hàm lương giác (cùng sin hoặc cùng cos hoặc cùng tan hoặc cùng cot) với cung góc giống nhau, chẳng hạn:

•	•		•	•	•	•	•	•	•						•	•		•		•	•	•	•		•						•	•
		•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•		•		•		•	•	•	•	•	•	•	•	•	•		

•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•		•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•		•	•	٠

•	•	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	•
												•																				
•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•

•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•

•																

•	•	•	•	•	•	•	٠	•	٠	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•

•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
	•														•	•				•										



VIVITIAII1 0702740017 V
QUICK NOTE

Dạng	Đặt ẩn phụ	Điều kiện
$a\sin^2 x + b\sin x + c = 0$	$t = \sin x$	$-1 \le t \le 1$
$a\cos^2 x + b\cos x + c = 0$	$t = \cos x$	$-1 \le t \le 1$
$a \tan^2 x + b \tan x + c = 0$	$t = \tan x$	$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$
$a\cot^2 x + b\cot x + c = 0$	$t = \cot x$	$x \neq k\pi$

Nếu đặt $t = \sin^2 x, \cos^2 x$ hoặc $t = |\sin x|, |\cos x|$ thì điều kiện là $0 \le t \le 1$.

NHẬN XÉT. Khi gặp phương trình bậc 3; 4...ta có thể làm tương tự.

1. Ví du

VÍ DU 1. Giải các phương trình sau

- a) $2\cos^2 x 3\cos x + 1 = 0$.
- b) $\sin^2 x + 3\sin x + 2 = 0$.
- c) $\tan^2 x + (\sqrt{3} 1) \tan x \sqrt{3} = 0$.

2. Bài tấp tư luân

BÀI 1. Giải các phương trình lượng giác sau

- a) $6\cos^2 x + 5\sin x 2 = 0$.
- b) $2\cos^2 x + 5\sin x 4 = 0$.
- c) $3 4\cos^2 x = \sin x(2\sin x + 1)$.
- d) $-\sin^2 x 3\cos x + 3 = 0$.

BAI 2. Giải các phương trình lượng giác sau:

- a) $2\cos 2x 8\cos x + 5 = 0$.
- b) $1 + \cos 2x = 2\cos x$.

c) $9\sin x + \cos 2x = 8$.

- d) $2 + \cos 2x + 5\sin x = 0$.
- e) $2\cos 2x + 8\sin x 5 = 0$.

BÀI 3. Giải các phương trình lượng giác sau:

- a) $2\cos^2 2x + 5\sin 2x + 1 = 0$.
- b) $5\cos x 2\sin\frac{x}{2} + 7 = 0$.
- c) $\sin^2 x + \cos 2x + \cos x = 2$.
- d) $\cos 2x + \cos^2 x \sin x + 2 = 0$.

BÀI 4. Giải các phương trình lượng giác sau

- a) $3\sin^2 x + 2\cos^4 x 2 = 0$.
- b) $4\sin^4 x + 2\cos^2 x = 7$.

c) $4\cos^4 x = 4\sin^2 x - 1$

d) $4\sin^4 x + 5\cos^2 x - 4 = 0$

BÀI 5. Giải các phương trình sau

- a) $\cos^3 x + 3\cos^2 x + 2\cos x = 0$.
- b) $23\sin x \sin 3x = 24$.
- c) $2\cos 3x \cdot \cos x 4\sin^2 2x + 1 = 0$.
- d) $\sin^6 x + \cos^6 x = \frac{15}{8} \cos 2x \frac{1}{2}$.

3. Bài tấp trắc nghiệm

CÂU 1. Nghiệm của phương trình $\sin^2 x - 4\sin x + 3 = 0$ là \mathbf{A} $x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

 $(\mathbf{D})x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

CÂU 2. Nghiệm âm lớn nhất của phương trình $2 \tan^2 x + 5 \tan x + 3 = 0$ là

- $\mathbf{B} \frac{\pi}{3}$. $\mathbf{C} \frac{\pi}{6}$.

CÂU 3. Cho phương trình $\cos^2 x + 3\sin x - 3 = 0$. Đặt $\sin x = t \ (-1 \le t \le 1)$ ta được phương trình nào sau đây?

- $(\mathbf{A})t^2 + 3t + 2 = 0.$ $(\mathbf{B})t^2 3t + 2 = 0.$ $(\mathbf{C})t^2 3t 2 = 0.$ $(\mathbf{D})t^2 + 3t 3 = 0.$

CÂU 4. Phương trình $\sin^2 x - 3\cos x - 4 = 0$ có nghiệm là

- $(\mathbf{A})x = -\pi + k2\pi. \quad (\mathbf{B}) \text{Vô nghiệm.}$
- \mathbf{C} $x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$. \mathbf{D} $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$.

CÂU 5. Giải phương trình $\cos^2 x + \sin x + 1 = 0$ có nghiệm là

$$\mathbf{A} x = -\frac{\pi}{2} + k \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\mathbf{B} x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\mathbf{c} x = -\frac{2}{\pi} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\mathbf{\hat{CAU}} \ \mathbf{\hat{CAU}} \ \mathbf{\hat{C}} \ \mathbf{\hat{$$

CÂU 7. Cho phương trình $3\cos 2x - 10\cos x - 4 = 0$. Đặt $t = \cos x$ thì phương trình đã cho trở thành phương trình nào sau đây?

$$(\mathbf{A})6t^2 - 10t - 4 = 0.$$

$$\mathbf{B})3t^2 - 10t - 4 = 0.$$

$$(\mathbf{c})$$
 $-6t^2 - 10t - 1 = 0.$

$$(\mathbf{D})6t^2 - 10t - 7 = 0.$$

CÂU 8. Tập nghiệm của phương trình $\sin x + \cos 2x = 0$ là

$$B) x = \frac{\pi}{2} + k\pi, x = -\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}.$$

$$\mathbf{C}$$
 $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, x = -\frac{\pi}{6} + \frac{k2\pi}{3}.$

$$\mathbf{\hat{D}})x = \frac{\pi}{2} + k\pi, x = -\frac{\pi}{2} + \frac{k\pi}{3}.$$

CÂU 9. Nghiệm của phương trình lượng giác $2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0$ thỏa điều kiện $0 < x < \frac{n}{2}$ là

$$\mathbf{C}$$
 $x = \frac{\pi}{6}$.

$$\bigcirc \frac{5\pi}{6}$$
.

CÂU 10. Tìm nghiệm phương trình $3\sin^2 2x - 7\sin 2x + 4 = 0$ trên đoạn $[0; \pi]$. **(a)** $x = \frac{\pi}{3}$. **(b)** $x = \frac{\pi}{6}$.

$$\mathbf{B} x = \frac{\pi}{4}.$$

$$\mathbf{C}x = \frac{\pi}{2}.$$

$$\mathbf{D}x = \frac{\pi}{6}.$$

CÂU 11. Tính tổng các nghiệm của phương trình $2\cos^2 x + 5\sin x - 4 = 0$ trong $[0; 2\pi]$.

$$\mathbf{A}$$
0.

$$\mathbf{B} \frac{8\pi}{2}$$
.

$$\mathbf{C}\pi$$
.

$$\bigcirc \frac{5\pi}{6}$$
.

CÂU 12. Tổng các nghiệm của phương trình $\tan x + \cot x = 2$ trong khoảng $(-\pi; \pi)$ là

$$(\mathbf{A}) - \pi$$
.

$$\bigcirc \mathbf{B} - \frac{\pi}{2}.$$

$$\mathbf{c}$$
 $\frac{5\pi}{4}$.

$$\bigcirc \frac{\pi}{4}$$
.

CÂU 13. Số nghiệm của phương trình $\cos 2\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+4\cos\left(\frac{\pi}{6}-x\right)=\frac{5}{2}$ thuộc $[0;2\pi]$

 \mathbf{A} 1.

	_	
1	R	2

$$\bigcirc$$
4.

CÂU 14. Họ nghiệm của phương trình $16(\sin^8 x + \cos^8 x) = 17\cos^2 2x$ là

$$\mathbf{B} x = \frac{\pi}{8} + k \frac{7\pi}{4} \ (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\mathbf{C}$$
 $x = \frac{8}{8} + k \frac{9\pi}{4} \ (k \in \mathbb{Z}).$

$$\mathbf{D} x = \frac{3}{8} + k \frac{\pi}{4} \ (k \in \mathbb{Z}).$$

CÂU 15. Nghiệm của phương trình $\cos^4 x - \cos 2x + 2\sin^6 x = 0$.

$$(\mathbf{A})x = k2\pi \ (k \in \mathbb{Z}).$$

CÂU 16. Giải phương trình $5(1 + \cos x) = 2 + \sin^4 x - \cos^4 x$. **(A)** $x = \pm \frac{2\pi}{3} + k\pi$. **(B)** $x = \pm \frac{2\pi}{3} + k\frac{2}{3}\pi$. **(C)** $x = \pm \frac{2\pi}{3} + k\frac{3}{4}\pi$. **(D)** $x = \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi$.

$$\mathbf{A} x = \pm \frac{2\pi}{3} + k\pi. \quad \mathbf{B} x$$

	•	-			-
O	ш	CK	Ν	\mathbf{O}	13

$$\mathbf{C} \begin{bmatrix} x = k\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{bmatrix} (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\mathbf{D} \begin{bmatrix} x = k2\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \end{bmatrix} (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\mathbf{D} \begin{bmatrix} x = k2\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{bmatrix} (k \in \mathbb{Z}).$$

CÂU 18. Giải phương trình $7\cos x = 4\cos^3 x + 4\sin 2x$

CÂU 19. Giải phương trình $\cos 4x = \cos^2 3x$.

$$\begin{bmatrix} x = k2\pi \\ x = \pm \frac{\pi}{12} + k2\pi \\ x = \pm \frac{5\pi}{12} + k\pi \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x = k\pi \\ x = \pm \frac{\pi}{12} + k\frac{1}{2}\pi \\ x = \pm \frac{5\pi}{12} + k\pi \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x = k\pi \\ x = \pm \frac{\pi}{12} + k\frac{1}{2}\pi \\ x = \pm \frac{5\pi}{12} + k3\pi \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x = k\pi \\ x = \pm \frac{\pi}{12} + k\frac{1}{2}\pi \\ x = \pm \frac{\pi}{12} + k\pi \\ x = \pm \frac{\pi}{12} + k\pi \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x = k\pi \\ x = \pm \frac{\pi}{12} + k\pi \\ x = \pm \frac{\pi}{12} + k\pi \end{bmatrix}$$

CÂU 20. Cho phương trình: $\cos 2x - (2m+1)\cos x + m + 1 = 0$. Tìm m để phương trình có nghiệm $x \in \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$.

$$oxed{A} - 1 \le m < 0.$$
 $oxed{B} - 1 \le m \le 0.$ $oxed{C} - 1 < m < 0.$ $oxed{D} - 1 \le m \le 1.$

CÂU 21. Cho phương trình $3\cos 4x - 2\cos^2 3x = 1$. Trên đoạn $[0; \pi]$, tổng các nghiệm của phương trình là

🖶 Dạng 7. Phương trình lượng giác không mẫu mực

a) PHƯƠNG PHÁP ĐƯA VỀ PHƯƠNG TRÌNH TÍCH Phương pháp này nhằm biến đổi phương trình lương giác về dang

$$A \cdot B = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} A = 0 \\ B = 0 \end{bmatrix}$$

b) PHƯƠNG PHÁP TỔNG BÌNH PHƯƠNG

Phương pháp này nhằm biến đổi phương trình lượng giác về dạng một vế là tỗng bình phương các số hạng (hay tổng các số hạng không âm) và vế còn lại bằng không và áp dụng tính chất:

$$A^2 + B^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \end{cases}$$

c) PHƯƠNG PHÁP ĐỐI LÂP

Phương pháp này nhằm biến đổi phương trình lượng giác về dạng f(x) = g(x), trong đó $f(x) \ge A, \forall x \in (a,b)$ và $g(x) \le A, \forall x \in (a,b)$ thì khi đó:

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = A \\ g(x) = A \end{cases}$$

Nếu f(x) > A và $g(x) < A, \forall x \in (a, b)$ thì kết luận phương trình vô ngiệm trên

1. Ví du

- **VÍ DU 1.** Giải phương trình $2\sin x + \cos x \sin 2x 1 = 0$.
- **VÍ DU 2.** Giải phương trình: $3 \tan^2 x + 4 \sin^2 x 2\sqrt{3} \tan x 4 \sin x + 2 = 0$.
- **VÍ DU 3.** Giải phương trình: $\cos^5 x + x^2 = 0$
- **VÍ DU 4.** Giải phương trình: $\sin^{2024} x + \cos^{2024} x = 1$ (1)

2. Bài tấp tư luân

- **BÀI 1.** Giải phương trình $\sin^2 2x + \cos^2 3x = 1$.
- **BÀI 2.** Giải phương trình $\cos^2 x \sin x \cos x = 0$.
- **BÀI 3.** Giải phương trình $\cos 4x \cdot \cos x + 1 = 0$ trên $\left[-\frac{3\pi}{2}; \pi \right]$.
- **BÀI 4.** Giải phương trình $(2\cos x 1)(2\cos 2x + 2\cos x + 3) = 3 4\sin^2 x$.
- **BÀI 5.** Giải phương trình $2\sqrt{3}\sin 5x\cos 3x = \sin 4x + 2\sqrt{3}\sin 3x\cos 5x$.
- **BÁI 6.** Giải phương trình $\sin 9x \sin x = \sin 3x \sin 7x$.
- **BÀI 7.** Tìm số nghiệm thuộc $\left[\frac{\pi}{14}; \frac{69\pi}{10}\right)$ của phương trình $2\sin 3x \left(1 4\sin^2 x\right) = 0$.
- **BÀI 8.** Tìm nghiệm dương nhỏ nhất của phương trình $(2\sin x \cos x)(1+\cos x) = \sin^2 x$.
- **BÁI 9.** Giải phương trình $4\cos x 2\cos 2x \cos 4x = 1$.
- **BÀI 10.** Tìm nghiệm dương nhỏ nhất của phương trình $2\sin x + 2\sqrt{2}\sin x\cos x = 0$.

3. Bài tấp trắc nghiệm

- **CÂU 1.** Nghiệm dương nhỏ nhất của phương trình $\sin x + \sin 2x = \cos x + 2\cos^2 x$ là
 - $\bigcirc \frac{\pi}{6}$.

- **CÂU 2.** Một nghiệm của phương trình lượng giác $\sin^2 x + \sin^2 2x + \sin^2 3x = 2$ là $\bigcirc \frac{\pi}{3}$. $\bigcirc \frac{\pi}{6}$.

- **CÂU 3.** Nghiệm dương nhỏ nhất của phương trình $2\cos^2 x + \cos x = \sin x + \sin 2x$ là
- $\mathbf{C}x = \frac{\pi}{2}. \qquad \mathbf{D}x = \frac{2\pi}{2}$

- **CÂU 5.** Cho phương trình: $4\cos^2 x + \tan^2 x + 4 = 2 \cdot (2\cos x \tan x)$. Tìm số nghiệm của phương trình trên khoảng $(0; 10\pi)$?

- **CÂU 6.** Cho phương trình $\sin^{2022} x + \cos^{2022} x = 2 \left(\sin^{2024} x + \cos^{2024} x \right)$. Số điểm biểu diễn các nghiệm của phương trình trên đường tròn lượng giác là
- **(B)**4.

- **CÂU 7.** Tổng tất cả các nghiệm của phương trình $\cos^2 x (\tan^2 x \cos 2x) = \cos^3 x \cos^2 x +$ 1 trên đoạn $[0; 43\pi]$ bằng
- $\mathbf{B} \frac{4225}{3} \pi.$
- $\mathbf{c} \frac{4230}{3} \pi$.
- **CÂU 8.** Phương trình $\sin^2 3x \cos^2 4x = \sin^2 5x \cos^2 6x$ có nghiệm là

	Ī	•								•	•													
•		•	•	•	•							•	•	•	•	•	•						•	

•	•	•	•	•	•	•	•			-	•	•	-	-	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	



SIII	CK	NOTE	
 αυι	<u> </u>	INOIL	
 	• • • • •		
 	• • • • •		
 	• • • • •		
 	• • • •		
 	• • • • •		
 	• • • • •		
 	• • • •		• • • • • • • • • • • • • • • • • • • •
 	• • • •		
 	• • • • •		
 	• • • • •		
 	• • • •		
 	• • • •		
 	• • • • •		

CÂU 9. Cho phương trình $x^2-(2\cos\alpha-3)\,x+7\cos^2\alpha-3\cos\alpha-\frac{9}{4}=0$. Gọi S là tập các giá trị của tham số α thuộc đoạn $[0;4\pi]$ để phương trình có nghiệm kép. Tổng các phần tử của tập S bằng

- $\mathbf{A} \frac{20\pi}{3}.$
- $(\mathbf{B})15\pi$.
- **(C)** 16π .
- $(\mathbf{D})17\pi$.

Bài 4.	Phương trình lượng giác cơ bản	1
A	Tóm tắt lý thuyết	1
	Dạng 1.Điều kiện có nghiệm của phương trình lượng giác cơ bản	2
	Dang 2.Phương trình lượng giác cơ bản dùng Radian	3
	Dạng 3.Phương trình lượng giác cơ bản dùng độ	5
	Dạng 4.Phương trình đưa về phương trình lượng giác cơ bản	7
	► Dạng 5.Toán thực tế liên môn	10
	ightharpoonup Dạng 6.Phương trình bận n theo một hàm số lượng giác	11
	Pang 7 Phương trình lượng giác không mẫu mực	14

