

## Bài 1. NGUYÊN HÀM

### A. KIẾN THỨC SÁCH GIÁO KHOA CẦN CẦN NHẮM

#### 1. Định nghĩa nguyên hàm

Cho hàm số  $f(x)$  xác định trên khoảng  $K$ . Hàm số  $F(x)$  được gọi là nguyên hàm của hàm số  $f(x)$  nếu  $F'(x) = f(x)$  với mọi  $x \in K$ .

**Nhận xét:** Nếu  $F(x)$  là một nguyên hàm của  $f(x)$  thì  $F(x) + C$ , ( $C \in \mathbb{R}$ ) cũng là nguyên hàm của  $f(x)$ .

Ký hiệu  $\int f(x) dx = F(x) + C$ .

#### 2. Một số tính chất của nguyên hàm

$$\left( \int f(x) dx \right)' = f(x).$$

$$\int a \cdot f(x) dx = a \cdot \int f(x) dx \quad (a \in \mathbb{R}, a \neq 0).$$

$$\int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx.$$

#### 3. Một số nguyên hàm cơ bản

Nguyên hàm của hàm số cơ bản	Nguyên hàm mở rộng
$\int a \cdot dx = ax + C, a \in \mathbb{R}$	
$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1$	$\int (ax+b)^\alpha dx = \frac{1}{a} \cdot \frac{(ax+b)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$
$\int \frac{dx}{x} = \ln x  + C, x \neq 0$	$\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a} \cdot \ln ax+b  + C$
$\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C, x > 0$	$\int \frac{dx}{\sqrt{ax+b}} = \frac{2}{a} \sqrt{ax+b} + C, x > 0$
$\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C, x \neq 0$	$\int \frac{dx}{(ax+b)^2} = -\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{ax+b} + C$
$\int \frac{dx}{x^\alpha} = -\frac{1}{(\alpha-1)x^{\alpha-1}} + C$	$\int \frac{dx}{(ax+b)^\alpha} = -\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{(\alpha-1)} \cdot (ax+b)^{\alpha-1} + C$
$\int e^x dx = e^x + C$	$\int e^{ax+b} dx = \frac{1}{a} \cdot e^{ax+b} + C$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	$\int a^{ax+\beta} dx = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{a^{ax+\beta}}{\ln a} + C$
$\int \cos x dx = \sin x + C$	$\int \cos(ax+b) dx = \frac{1}{a} \cdot \sin(ax+b) + C$
$\int \sin x dx = -\cos x + C$	$\int \sin(ax+b) dx = -\frac{1}{a} \cdot \cos(ax+b) + C$
$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$	$\int \frac{1}{\cos^2(ax+b)} dx = \frac{1}{a} \cdot \tan(ax+b) + C$
$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C$	$\int \frac{1}{\sin^2(ax+b)} dx = -\frac{1}{a} \cdot \cot(ax+b) + C$

### B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

#### Dạng 1. Định nghĩa, tính chất và các nguyên hàm cơ bản

#### 1. Các ví dụ

**VÍ DỤ 1.** Tìm nguyên hàm của hàm số  $f(x) = (x-1)^3$ .

**VÍ DỤ 2.** Tìm nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \frac{1}{1-x}$ .

**VÍ DỤ 3.** Tìm nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \sqrt{x} - 1$  trên  $(0; +\infty)$ .

## QUICK NOTE

**VÍ DỤ 4.** Tìm nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \frac{1}{2x+1} + \cos x$ .

**VÍ DỤ 5.** Tìm nguyên hàm của hàm số  $I = \int \frac{2x^2 - 7x + 5}{x-3} dx$ .

## 2. Câu hỏi trắc nghiệm

**CÂU 1.** Mệnh đề nào sau đây **sai**?

**A.**  $\int [f(x) - g(x)] dx = \int f(x) dx - \int g(x) dx$ , với mọi hàm số  $f(x), g(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$ .

**B.**  $\int f'(x) dx = f(x) + C$  với mọi hàm số  $f(x)$  có đạo hàm trên  $\mathbb{R}$ .

**C.**  $\int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$ , với mọi hàm số  $f(x), g(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$ .

**D.**  $\int kf(x) dx = k \int f(x) dx$  với mọi hằng số  $k$  và với mọi hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$ .

**CÂU 2.** Cho hàm số  $f(x) = 4x^3 + 2x + 1$ . Tìm  $\int f(x) dx$ .

**A.**  $\int f(x) dx = 12x^4 + 2x^2 + x + C$ .

**B.**  $\int f(x) dx = 12x^2 + 2$ .

**C.**  $\int f(x) dx = x^4 + x^2 + x + C$ .

**D.**  $\int f(x) dx = 12x^2 + 2 + C$ .

**CÂU 3.** Giả sử  $F(x)$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \frac{1}{3x+1}$  trên khoảng  $(-\infty; -\frac{1}{3})$ .

Mệnh đề nào sau đây đúng?

**A.**  $F(x) = \frac{1}{3} \ln(3x+1) + C$ .

**B.**  $F(x) = \frac{1}{3} \ln(-3x-1) + C$ .

**C.**  $F(x) = \ln|3x+1| + C$ .

**D.**  $F(x) = \ln(-3x-1) + C$ .

**CÂU 4.** Cho hàm số  $F(x)$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x)$  xác định trên  $K$ . Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

**A.**  $\left(x \int f(x) dx\right)' = f'(x)$ .

**B.**  $\left(\int f(x) dx\right)' = f(x)$ .

**C.**  $\left(\int f(x) dx\right)' = F'(x)$ .

**D.**  $\int f(x) dx = F(x) + C$ .

**CÂU 5.** Tìm họ nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \tan^2 2x + \frac{1}{2}$ .

**A.**  $\int \left(\tan^2 2x + \frac{1}{2}\right) dx = 2 \tan 2x - 2x + C$ .

**B.**  $\int \left(\tan^2 2x + \frac{1}{2}\right) dx = \tan 2x - \frac{x}{2} + C$ .

**C.**  $\int \left(\tan^2 2x + \frac{1}{2}\right) dx = \tan 2x - x + C$ .

**D.**  $\int \left(\tan^2 2x + \frac{1}{2}\right) dx = \frac{\tan 2x}{2} - \frac{x}{2} + C$ .

**CÂU 6.** Tìm họ nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \sqrt{2x+3}$ .

**A.**  $\int f(x) dx = \frac{2}{3} x \sqrt{2x+3} + C$ .

**B.**  $\int f(x) dx = \frac{1}{3} (2x+3) \sqrt{2x+3} + C$ .

**C.**  $\int f(x) dx = \frac{2}{3} (2x+3) \sqrt{2x+3} + C$ .

**D.**  $\int f(x) dx = \sqrt{2x+3} + C$ .

**CÂU 7.** Tìm nguyên hàm của hàm số  $f(x) = e^x (1 + e^{-x})$ .

**A.**  $\int f(x) dx = e^x + 1 + C$ .

**B.**  $\int f(x) dx = e^x + x + C$ .

**C.**  $\int f(x) dx = -e^x + x + C$ .

**D.**  $\int f(x) dx = e^x + C$ .

**CÂU 8.** Tìm họ nguyên hàm của hàm số  $f(x) = 3^x + \frac{1}{x^2}$ .

**A.**  $\int f(x) dx = 3^x + \frac{1}{x} + C$ .

**B.**  $\int f(x) dx = \frac{3^x}{\ln 3} + \frac{1}{x} + C$ .

**C.**  $\int f(x) dx = 3^x - \frac{1}{x} + C$ .

**D.**  $\int f(x) dx = \frac{3^x}{\ln 3} - \frac{1}{x} + C$ .

**CÂU 9.** Tìm nguyên hàm  $F(x)$  của hàm số  $f(x) = 4x + \sin 3x$ , biết  $F(0) = \frac{2}{3}$ .

- A.  $F(x) = 2x^2 + \cos 3x - \frac{1}{3}$ . B.  $F(x) = 2x^2 - \cos 3x + \frac{5}{3}$ .  
C.  $F(x) = 2x^2 + \frac{\cos 3x}{3} + \frac{1}{3}$ . D.  $F(x) = 2x^2 - \frac{\cos 3x}{3} + 1$ .

**CÂU 10.** Tính nguyên hàm  $I = \int \frac{2x^2 - 7x + 5}{x - 3} dx$ .

- A.  $I = x^2 - x + 2 \ln |x - 3| + C$ . B.  $I = x^2 - x - 2 \ln |x - 3| + C$ .  
C.  $I = 2x^2 - x + 2 \ln |x - 3| + C$ . D.  $I = 2x^2 - x - 2 \ln |x - 3| + C$ .

**CÂU 11.** Khẳng định nào đây sai?

- A.  $\int \frac{2}{2x+3} dx = \ln |2x+3| + C$ . B.  $\int \tan x dx = -\ln |\cos x| + C$ .  
C.  $\int e^{2x} dx = e^{2x} + C$ . D.  $\int \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = \sqrt{x} + C$ .

**CÂU 12.** Tìm một nguyên hàm  $F(x)$  của hàm số  $f(x) = ax + \frac{b}{x^2}$  ( $x \neq 0$ ) biết rằng  $F(-1) = 1$ ;  $F(1) = 4$ ;  $f(1) = 0$ .

- A.  $F(x) = \frac{3x^2}{4} + \frac{3}{2x} + \frac{7}{4}$ . B.  $F(x) = \frac{3x^2}{4} - \frac{3}{2x} - \frac{7}{4}$ .  
C.  $F(x) = \frac{3x^2}{2} + \frac{3}{4x} - \frac{7}{4}$ . D.  $F(x) = \frac{3x^2}{2} - \frac{3}{2x} - \frac{1}{2}$ .

**CÂU 13.** Một đám vi khuẩn ngày thứ  $x$  có số lượng là  $N(x)$ . Biết rằng  $N'(x) = \frac{2000}{1+x}$  và lúc đầu số lượng vi khuẩn là 5000 con. Vậy ngày thứ 12 số lượng vi khuẩn (sau khi làm tròn) là bao nhiêu con?

- A. 10130. B. 5130. C. 5154. D. 10132.

**CÂU 14.** Một đoàn tàu đang chuyển động với vận tốc  $v_0 = 72$  km/h thì hãm phanh chuyển động chậm dần đều, sau 10 giây đạt vận tốc  $v_1 = 54$  km/h. Tàu đạt vận tốc  $v = 36$  km/h tại thời điểm nào tính từ lúc bắt đầu hãm phanh.

- A. 30 giây. B. 20 giây. C. 40 giây. D. 50 giây.

**CÂU 15.** Một chiếc xe đua đang chạy 180 km/h. Tay đua nhấn ga để về đích kể từ đó xe chạy với gia tốc  $a(t) = 2t + 1$  (m/s<sup>2</sup>). Hỏi rằng 5 giây sau khi nhấn ga thì xe chạy với vận tốc bao nhiêu km/h.

- A. 200. B. 243. C. 288. D. 300.

**CÂU 16.** Cho hàm số  $f(x)$  xác định trên  $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{3}\right\}$  thỏa mãn  $f'(x) = \frac{3}{3x-1}$ ,  $f(0) = 1$  và  $f\left(\frac{2}{3}\right) = 2$ . Giá trị của biểu thức  $f(-1) + f(3)$  bằng

- A.  $5 \ln 2 + 3$ . B.  $5 \ln 2 - 2$ . C.  $5 \ln 2 + 4$ . D.  $5 \ln 2 + 2$ .

**CÂU 17.** Cho hàm số  $f(x)$  xác định trên  $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$  thỏa mãn  $f'(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$ . Biết  $f(-3) + f(3) = 0$  và  $f\left(-\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right) = 2$ . Giá trị  $T = f(-2) + f(0) + f(4)$  bằng

- A.  $T = 2 + \frac{1}{2} \ln \frac{5}{9}$ . B.  $T = 1 + \frac{1}{2} \ln \frac{9}{5}$ . C.  $T = 3 + \frac{1}{2} \ln \frac{9}{5}$ . D.  $T = \frac{1}{2} \ln \frac{9}{5}$ .

**CÂU 18.** Hàm số  $f(x)$  xác định, liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có đạo hàm là  $f'(x) = |x - 1|$ . Biết rằng  $f(0) = 3$ . Tính  $f(2) + f(4)$ ?

- A. 10. B. 12. C. 4. D. 11.

**CÂU 19.** Biết  $\int (\sin 2x - \cos 2x)^2 dx = x + \frac{a}{b} \cos 4x + C$ , với  $a, b$  là các số nguyên dương,  $\frac{a}{b}$  là phân số tối giản và  $C \in \mathbb{R}$ . Giá trị của  $a + b$  bằng

- A. 5. B. 4. C. 2. D. 3.

**CÂU 20.** Biết luôn có hai số  $a$  và  $b$  để  $F(x) = \frac{ax+b}{x+4}$  ( $4a-b \neq 0$ ) là nguyên hàm của hàm số  $f(x)$  và thỏa mãn  $2f^2(x) = (F(x) - 1)f'(x)$ . Khẳng định nào dưới đây đúng và đầy đủ nhất?

- A.  $a = 1, b = 4$ . B.  $a = 1, b = -1$ .  
C.  $a = 1, b \in \mathbb{R} \setminus \{4\}$ . D.  $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$ .

## QUICK NOTE

## QUICK NOTE

### Dạng 2. Tìm nguyên hàm bằng phương pháp đổi biến số

Nếu  $\int f(x) dx = F(x) + C$  thì  $\int f[u(x)] \cdot u'(x) dx = F[u(x)] + C$ .

Giả sử ta cần tìm họ nguyên hàm  $I = \int f(x) dx$ , trong đó ta có thể phân tích  $f(x) = g(u(x)) u'(x)$  thì ta thực hiện phép đổi biến số  $t = u(x)$ , suy ra  $dt = u'(x) dx$ .

Khi đó ta được nguyên hàm  $\int g(t) dt = G(t) + C = G[u(x)] + C$ .

**A** Sau khi tìm được họ nguyên hàm theo  $t$  thì ta phải thay  $t = u(x)$ .

## 1. Các ví dụ

**VÍ DỤ 6.** Tìm nguyên hàm của hàm số  $f(x) = x^2 \sqrt{4 + x^3}$ .

**VÍ DỤ 7.** Cho  $\int 2x \cdot (3x - 2)^6 dx = A(3x - 2)^8 + B(3x - 2)^7 + C$  với  $A, B \in \mathbb{Q}$  và  $C \in \mathbb{R}$ . Giá trị của biểu thức  $12A + 7B$  bằng bao nhiêu?

**VÍ DỤ 8.** Tìm nguyên hàm  $F(x)$  của hàm số  $f(x) = \sin^2 2x \cdot \cos^3 2x$  thỏa  $F\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$ .

**VÍ DỤ 9.** Tìm nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \sin 2x \cdot e^{\sin^2 x}$ .

**VÍ DỤ 10.** Tìm nguyên hàm của hàm số  $\int \frac{1 + \ln x}{x} dx \quad (x > 0)$ .

## 2. Câu hỏi trắc nghiệm

**CÂU 21.** Tìm họ nguyên hàm của hàm số  $f(x) = x^2 e^{x^3+1}$

**A.**  $\int f(x) dx = e^{x^3+1} + C$ .

**B.**  $\int f(x) dx = 3e^{x^3+1} + C$ .

**C.**  $\int f(x) dx = \frac{1}{3}e^{x^3+1} + C$ .

**D.**  $\int f(x) dx = \frac{x^3}{3}e^{x^3+1} + C$ .

**CÂU 22.** Tìm họ nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{2x+1}}$ .

**A.**  $\int f(x) dx = \frac{1}{2}\sqrt{2x+1} + C$ .

**B.**  $\int f(x) dx = \sqrt{2x+1} + C$ .

**C.**  $\int f(x) dx = 2\sqrt{2x+1} + C$ .

**D.**  $\int f(x) dx = \frac{1}{(2x+1)\sqrt{2x+1}} + C$ .

**CÂU 23.** Biết  $F(x)$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \sin^3 x \cdot \cos x$  và  $F(0) = \pi$ . Tính  $F\left(\frac{\pi}{2}\right)$ .

**A.**  $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\pi$ .

**B.**  $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi$ .

**C.**  $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{4} + \pi$ .

**D.**  $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{4} + \pi$ .

**CÂU 24.** Cho  $F(x)$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \frac{1}{2e^x + 3}$  thỏa mãn  $F(0) = 10$ . Tìm  $F(x)$ .

**A.**  $F(x) = \frac{1}{3} [x - \ln(2e^x + 3)] + 10 + \frac{\ln 5}{3}$ .

**B.**  $F(x) = \frac{1}{3} [x + 10 - \ln(2e^x + 3)]$ .

**C.**  $F(x) = \frac{1}{3} \left[ x - \ln \left( e^x + \frac{3}{2} \right) \right] + 10 + \ln 5 - \ln 2$ .

**D.**  $F(x) = \frac{1}{3} \left[ x - \ln \left( e^x + \frac{3}{2} \right) \right] + 10 - \frac{\ln 5 - \ln 2}{3}$ .

**CÂU 25.** Khi tính nguyên hàm  $\int \frac{x-3}{\sqrt{x+1}} dx$ , bằng cách đặt  $u = \sqrt{x+1}$  ta được nguyên hàm nào?

**A.**  $\int 2u(u^2 - 4) du$ .

**B.**  $\int (u^2 - 4) du$ .

**C.**  $\int 2(u^2 - 4) du$ .

**D.**  $\int (u^2 - 3) du$ .

**CÂU 26.** Biết  $F(x)$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \sin^3 x \cdot \cos x$  và  $F(0) = \pi$ . Tính  $F\left(\frac{\pi}{4}\right)$ .

A.  $F\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\pi$ .

B.  $F\left(\frac{\pi}{4}\right) = \pi$ .

C.  $F\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{16} + \pi$ .

D.  $F\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{16} + \pi$ .

**CÂU 27.** Tìm họ nguyên hàm của hàm số  $f(x) = x^2 e^{x^3+1}$

A.  $\int f(x) dx = e^{x^3+1} + C$ .

B.  $\int f(x) dx = 3e^{x^3+1} + C$ .

C.  $\int f(x) dx = \frac{x^3}{3} e^{x^3+1} + C$ .

D.  $\int f(x) dx = \frac{1}{3} e^{x^3+1} + C$ .

**CÂU 28.** Tìm nguyên hàm  $F(x)$  của hàm số  $f(x) = \cos x \cdot \sqrt{\sin x + 1}$ ?

A.  $F(x) = \frac{1}{3} \sin x \cdot \sqrt{\sin x + 1} + C$ .

B.  $F(x) = \frac{1}{3} (\sin x + 1) \cdot \sqrt{\sin x + 1} + C$ .

C.  $F(x) = \frac{2}{3} (\sin x + 1) \cdot \sqrt{\sin x + 1} + C$ .

D.  $F(x) = \frac{1 - 2 \sin x - 3 \sin^2 x}{2\sqrt{\sin x + 1}} + C$ .

**CÂU 29.** Hàm số nào dưới đây là một nguyên hàm của hàm số  $y = 2^{\sin x} \cdot 2^{\cos x} (\cos x - \sin x)$ ?

A.  $y = 2^{\sin x + \cos x} + C$ .

B.  $y = \frac{2^{\sin x} \cdot 2^{\cos x}}{\ln 2}$ .

C.  $y = \ln 2 \cdot 2^{\sin x + \cos x}$ .

D.  $y = -\frac{2^{\sin x + \cos x}}{\ln 2} + C$ .

**CÂU 30.** Tìm họ nguyên hàm của hàm số  $f(x) = x^2 e^{x^3+1}$

A.  $\int f(x) dx = e^{x^3+1} + C$ .

B.  $\int f(x) dx = \frac{1}{3} e^{x^3+1} + C$ .

C.  $\int f(x) dx = 3e^{x^3+1} + C$ .

D.  $\int f(x) dx = \frac{x^3}{3} e^{x^3+1} + C$ .

**CÂU 31.** Nguyên hàm  $F(x)$  của hàm số  $f(x) = \sin^2 2x \cdot \cos^3 2x$  thỏa  $F\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$  là

A.  $F(x) = \frac{1}{6} \sin^3 2x - \frac{1}{10} \sin^5 2x + \frac{1}{15}$ .

B.  $F(x) = \frac{1}{6} \sin^3 2x + \frac{1}{10} \sin^5 2x - \frac{1}{15}$ .

C.  $F(x) = \frac{1}{6} \sin^3 2x - \frac{1}{10} \sin^5 2x - \frac{1}{15}$ .

D.  $F(x) = \frac{1}{6} \sin^3 2x + \frac{1}{10} \sin^5 2x - \frac{1}{15}$ .

**CÂU 32.** Nguyên hàm của  $f(x) = \frac{1 + \ln x}{x \cdot \ln x}$  là

A.  $\int \frac{1 + \ln x}{x \cdot \ln x} dx = \ln |\ln x| + C$ .

B.  $\int \frac{1 + \ln x}{x \cdot \ln x} dx = \ln |x^2 \cdot \ln x| + C$ .

C.  $\int \frac{1 + \ln x}{x \cdot \ln x} dx = \ln |x + \ln x| + C$ .

D.  $\int \frac{1 + \ln x}{x \cdot \ln x} dx = \ln |x \cdot \ln x| + C$ .

**CÂU 33.** Hàm số  $f(x) = \frac{7 \cos x - 4 \sin x}{\cos x + \sin x}$  có một nguyên hàm  $F(x)$  thỏa mãn  $F\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{3\pi}{8}$ .

Giá trị  $F\left(\frac{\pi}{2}\right)$  bằng

A.  $\frac{3\pi - 11 \ln 2}{4}$ .

B.  $\frac{3\pi}{4}$ .

C.  $\frac{3\pi}{8}$ .

D.  $\frac{3\pi - \ln 2}{4}$ .

**CÂU 34.** Giả sử hàm số  $y = f(x)$  liên tục, nhận giá trị dương trên khoảng  $(0; +\infty)$  thỏa mãn  $f(1) = 1, f(x) = f'(x) \sqrt{3x+1}, \forall x > 0$ . Mệnh đề nào đúng trong các mệnh đề dưới đây?

A.  $\max_{x \in [2;4]} f(x) > 3$ .

B.  $\max_{x \in [2;4]} f(x) < 2$ .

C.  $2 < \max_{x \in [2;4]} f(x) < 3$ .

D.  $\max_{x \in [2;4]} f(x) = \frac{3}{2}$ .

**CÂU 35.** Cho hàm số  $y = f(x)$  thỏa mãn  $y' = x^2 \cdot y$  và  $f(-1) = 1$  thì giá trị  $f(2)$  là

A.  $e^2$ .

B.  $2e$ .

C.  $e + 1$ .

D.  $e^3$ .

**CÂU 36.** Biết rằng trên khoảng  $\left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$ , hàm số  $f(x) = \frac{20x^2 - 30x + 7}{\sqrt{2x-3}}$  có một nguyên

hàm  $F(x) = (ax^2 + bx + c) \sqrt{2x-3}$  ( $a, b, c$  là các số nguyên). Tổng  $S = a + b + c$  bằng

A. 4.

B. 3.

C. 5.

D. 6.

**CÂU 37.** Cho  $f(x) = \frac{x}{\cos^2 x}$  trên  $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$  và  $F(x)$  là một nguyên hàm của  $xf'(x)$  thỏa mãn  $F(0) = 0$ . Biết  $a \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$  thỏa mãn  $\tan a = 3$ . Tính  $F(a) - 10a^2 + 3a$ .

## QUICK NOTE

## QUICK NOTE

A.  $-\frac{1}{2} \ln 10$ .

B.  $-\frac{1}{4} \ln 10$ .

C.  $\frac{1}{2} \ln 10$ .

D.  $\ln 10$ .

**CÂU 38.** Giả sử  $\int \frac{(2x+3)dx}{x(x+1)(x+2)(x+3)+1} = -\frac{1}{g(x)} + C$  ( $C$  là hằng số). Tính tổng các nghiệm của phương trình  $g(x) = 0$ .

A.  $-1$ .

B.  $1$ .

C.  $3$ .

D.  $-3$ .

**CÂU 39.** Cho hàm số  $f(x)$  xác định trên khoảng  $(0; +\infty) \setminus \{e\}$  thỏa mãn  $f'(x) = \frac{1}{x(\ln x - 1)}$ ,  $f\left(\frac{1}{e^2}\right) = \ln 6$  và  $f(e^2) = 3$ . Giá trị của biểu thức  $f\left(\frac{1}{e}\right) + f(e^3)$  bằng

A.  $3 \ln 2 + 1$ .

B.  $2 \ln 2$ .

C.  $3(\ln 2 + 1)$ .

D.  $\ln 2 + 3$ .

**CÂU 40.** Cho hàm số  $f(x) \neq 0$  thỏa mãn điều kiện  $f'(x) = (2x+3)f^2(x)$  và  $f(0) = -\frac{1}{2}$ . Biết rằng tổng  $f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(2017) + f(2018) = \frac{a}{b}$  với  $(a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}^*)$  và  $\frac{a}{b}$  là phân số tối giản. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A.  $\frac{a}{b} < -1$ .

B.  $\frac{a}{b} > 1$ .

C.  $a + b = 1010$ .

D.  $b - a = 3029$ .

## Dạng 3. Tìm nguyên hàm bằng phương pháp từng phần

Cho hai hàm số  $u$  và  $v$  liên tục trên đoạn  $[a; b]$  và có đạo hàm liên tục trên đoạn  $[a; b]$ .

Khi đó:  $\int u dv = uv - \int v du$ . (\*)

Để tính nguyên hàm  $\int f(x) dx$  bằng từng phần ta làm như sau

☑ Bước 1. Chọn  $u, v$  sao cho  $f(x) dx = u dv$  (chú ý  $dv = v'(x) dx$ ).

Sau đó tính  $v = \int dv$  và  $du = u' \cdot dx$ .

☑ Bước 2. Thay vào công thức (\*) và tính  $\int v du$ .

⚠ Cần phải lựa chọn  $u$  và  $dv$  hợp lý sao cho ta dễ dàng tìm được  $v$  và tích phân  $\int v du$  để tính hơn  $\int u dv$ .

Ta thường gặp các dạng sau.

Dạng 1.  $I = \int P(x) \begin{bmatrix} \sin x \\ \cos x \end{bmatrix} dx$ , trong đó  $P(x)$  là đa thức.

Với dạng này, ta đặt  $\begin{cases} u = P(x) \\ dv = \begin{bmatrix} \sin x \\ \cos x \end{bmatrix} dx \end{cases}$ .

Dạng 2.  $I = \int P(x)e^{ax+b} dx$ , trong đó  $P(x)$  là đa thức.

Với dạng này, ta đặt  $\begin{cases} u = P(x) \\ dv = e^{ax+b} dx \end{cases}$ .

Dạng 3.  $I = \int P(x) \ln(mx+n) dx$ , trong đó  $P(x)$  là đa thức.

Với dạng này, ta đặt  $\begin{cases} u = \ln(mx+n) \\ dv = P(x) dx \end{cases}$ .

Dạng 4.  $I = \int \begin{bmatrix} \sin x \\ \cos x \end{bmatrix} e^x dx$ .

Với dạng này, ta đặt  $\begin{cases} u = \begin{bmatrix} \sin x \\ \cos x \end{bmatrix} \\ dv = e^x dx \end{cases}$ .

## 1. Các ví dụ

**VÍ DỤ 11.** Tìm nguyên hàm của hàm số  $f(x) = x \ln(x+2)$ .

**VÍ DỤ 12.** Tìm nguyên hàm của hàm số  $f(x) = x \cdot e^{2x}$ .

**VÍ DỤ 13.** Biết  $\int x \cos 2x dx = ax \sin 2x + b \cos 2x + C$  với  $a, b$  là các số hữu tỉ. Tính tích  $ab$ ?

**VÍ DỤ 14.** Cho  $F(x) = \frac{a}{x}(\ln x + b)$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \frac{1 + \ln x}{x^2}$ , trong đó  $a, b \in \mathbb{Z}$ . Tính  $S = a + b$ .

**VÍ DỤ 15.** Cho  $F(x) = (ax^2 + bx - c)e^{2x}$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x) = (2018x^2 - 3x + 1)e^{2x}$  trên khoảng  $(-\infty; +\infty)$ . Tính  $T = a + 2b + 4c$ .

## 2. Câu hỏi trắc nghiệm

**CÂU 41.** Phát biểu nào sau đây là đúng?

- A.**  $\int e^x \sin x dx = e^x \cos x - \int e^x \cos x dx$ .  
**B.**  $\int e^x \sin x dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x dx$ .  
**C.**  $\int e^x \sin x dx = e^x \cos x + \int e^x \cos x dx$ .  
**D.**  $\int e^x \sin x dx = -e^x \cos x - \int e^x \cos x dx$ .

**CÂU 42.** Tìm nguyên hàm của hàm số  $F(x) = \int x \cos x dx$ .

- A.**  $F(x) = x \sin x - \cos x + C$ . **B.**  $F(x) = -x \sin x - \cos x + C$ .  
**C.**  $F(x) = x \sin x + \cos x + C$ . **D.**  $F(x) = -x \sin x + \cos x + C$ .

**CÂU 43.** Cho biết  $\int x e^{2x} dx = \frac{1}{4} e^{2x}(ax + b) + C$ , trong đó  $a, b \in \mathbb{Z}$  và  $C$  là hằng số bất kì. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

- A.**  $a + 2b = 0$ . **B.**  $b > a$ . **C.**  $ab$ . **D.**  $2a + b = 0$ .

**CÂU 44.** Nguyên hàm của hàm số  $f(x) = x \sin x$  là

- A.**  $F(x) = -x \cos x - \sin x + C$ . **B.**  $F(x) = x \cos x - \sin x + C$ .  
**C.**  $F(x) = -x \cos x + \sin x + C$ . **D.**  $F(x) = x \cos x + \sin x + C$ .

**CÂU 45.** Kết quả của  $I = \int x e^x dx$  là

- A.**  $I = x e^x - e^x + C$ . **B.**  $I = e^x + x e^x + C$ .  
**C.**  $I = \frac{x^2}{2} e^x + C$ . **D.**  $I = \frac{x^2}{2} e^x + e^x + C$ .

**CÂU 46.** Tính  $I = \int (1-x) \cos x dx$ ?

- A.**  $I = (1-x) \cos x - \sin x + C$ . **B.**  $I = (1-x) \sin x - \cos x + C$ .  
**C.**  $I = (1-x) \cos x + \sin x + C$ . **D.**  $I = (1-x) \sin x + \cos x + C$ .

**CÂU 47.** Giả sử  $F(x)$  là một nguyên hàm của  $f(x) = \frac{\ln(x+3)}{x^2}$  sao cho  $F(-2) + F(1) = 0$ .

Giá trị của  $F(-1) + F(2)$  bằng

- A.**  $\frac{10}{3} \ln 2 - \frac{5}{6} \ln 5$ . **B.**  $0$ . **C.**  $\frac{7}{3} \ln 2$ . **D.**  $\frac{2}{3} \ln 2 + \frac{3}{6} \ln 5$ .

**CÂU 48.** Cho biết  $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x - \frac{1}{x}$  là một nguyên hàm của  $f(x) = \frac{(x^2 + a)^2}{x^2}$ . Tìm nguyên hàm của  $g(x) = x \cos ax$ .

- A.**  $x \sin x - \cos x + C$ . **B.**  $\frac{1}{2}x \sin 2x - \frac{1}{4} \cos 2x + C$ .  
**C.**  $x \sin x + \cos x + C$ . **D.**  $\frac{1}{2}x \sin 2x + \frac{1}{4} \cos 2x + C$ .

**CÂU 49.** Biết  $F(x) = (ax^2 + bx + c)e^x$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x) = (x^2 + 5x + 5)e^x$ . Giá trị của  $2a + 3b + c$  là

- A.**  $6$ . **B.**  $13$ . **C.**  $8$ . **D.**  $10$ .

**CÂU 50.** Biết  $\int x \cos 2x dx = ax \sin 2x + b \cos 2x + C$  với  $a, b$  là các số hữu tỉ. Tính tích  $ab$ ?

## QUICK NOTE

QUICK NOTE

A.  $ab = \frac{1}{8}$ . B.  $ab = \frac{1}{4}$ . C.  $ab = -\frac{1}{8}$ . D.  $ab = -\frac{1}{4}$ .

**CÂU 51.** Cho  $F(x) = \frac{a}{x}(\ln x + b)$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \frac{1 + \ln x}{x^2}$ , trong đó  $a, b \in \mathbb{Z}$ . Tính  $S = a + b$ .

A.  $S = -2$ . B.  $S = 1$ . C.  $S = 2$ . D.  $S = 0$ .

**CÂU 52.** Cho biết  $\int xe^{2x} dx = \frac{1}{4}e^{2x}(ax + b) + C$ , trong đó  $a, b \in \mathbb{Z}$  và  $C$  là hằng số bất kì. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

A.  $a + 2b = 0$ . B.  $b > a$ . C.  $ab$ . D.  $2a + b = 0$ .

**CÂU 53.** Biết  $F(x) = (ax^2 + bx + c)e^x$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x) = (x^2 + 5x + 5)e^x$ . Giá trị của  $2a + 3b + c$  là

A. 6. B. 13. C. 8. D. 10.

**CÂU 54.** Cho  $F(x)$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x) = e^{\sqrt[3]{x}}$  và  $F(0) = 2$ . Hãy tính  $F(-1)$ .

A.  $6 - \frac{15}{e}$ . B.  $4 - \frac{10}{e}$ . C.  $\frac{15}{e} - 4$ . D.  $\frac{10}{e}$ .

**CÂU 55.** Cho  $f(x) = \frac{x}{\cos^2 x}$  trên  $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$  và  $F(x)$  là một nguyên hàm của  $xf'(x)$  thỏa mãn  $F(0) = 0$ . Biết  $a \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$  thỏa mãn  $\tan a = 3$ . Tính  $F(a) - 10a^2 + 3a$ .

A.  $-\frac{1}{2} \ln 10$ . B.  $-\frac{1}{4} \ln 10$ . C.  $\frac{1}{2} \ln 10$ . D.  $\ln 10$ .

**CÂU 56.** Hàm số nào dưới đây là nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$  trên khoảng  $(-\infty; +\infty)$ ?

A.  $F(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + C$ . B.  $F(x) = \ln(1 + \sqrt{1+x^2}) + C$ .

C.  $F(x) = \sqrt{1+x^2} + C$ . D.  $F(x) = \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}} + C$ .

**CÂU 57.** Biết  $F(x) = a \ln x + (b + \frac{c}{x}) \ln(2x + 3)$  là nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \frac{\ln(2x + 3)}{x^2}$ . Tính  $S = a + b + c$ .

A.  $S = -1$ . B.  $S = \frac{1}{3}$ . C.  $S = \frac{7}{3}$ . D.  $S = -\frac{4}{3}$ .

**CÂU 58.** Cho  $F(x) = (x - 1)e^x$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x)e^{2x}$ . Tìm nguyên hàm của hàm số  $f'(x)e^{2x}$ .

A.  $\int f'(x)e^{2x} dx = (4 - 2x)e^x + C$ .

B.  $\int f'(x)e^{2x} dx = \frac{2-x}{2}e^x + C$ .

C.  $\int f'(x)e^{2x} dx = (2 - x)e^x + C$ .

D.  $\int f'(x)e^{2x} dx = (x - 2)e^x + C$ .

**CÂU 59.** Cho  $F(x) = -\frac{1}{3x^3}$  là một nguyên hàm của hàm số  $\frac{f(x)}{x}$ . Tìm nguyên hàm của hàm số  $f'(x) \ln x$ .

A.  $\int f'(x) \ln x dx = \frac{\ln x}{x^3} + \frac{1}{5x^5} + C$ .

B.  $\int f'(x) \ln x dx = \frac{\ln x}{x^3} - \frac{1}{5x^5} + C$ .

C.  $\int f'(x) \ln x dx = \frac{\ln x}{x^3} + \frac{1}{3x^3} + C$ .

D.  $\int f'(x) \ln x dx = -\frac{\ln x}{x^3} + \frac{1}{3x^3} + C$ .

**CÂU 60.** Cho  $I_n = \int \tan^n x dx$  với  $n \in \mathbb{N}$ . Khi đó  $I_0 + I_1 + 2(I_2 + I_3 + \dots + I_8) + I_9 + I_{10}$  bằng

A.  $\sum_{r=1}^9 \frac{(\tan x)^r}{r} + C$ .

B.  $\sum_{r=1}^9 \frac{(\tan x)^{r+1}}{r+1} + C$ .

C.  $\sum_{r=1}^{10} \frac{(\tan x)^r}{r} + C$ .

D.  $\sum_{r=1}^{10} \frac{(\tan x)^{r+1}}{r+1} + C$ .