Hàm số mũ. Hàm số logarit

Bài 18. PHÉP TÍNH LŨY THỪA VỚI SỐ MŨ THỰC

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Lũy thừa

- a) Lũy thừa với số mũ nguyên dương:
 - \odot a là số thực tùy ý, n nguyên dương: $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n \text{ chữ số}}$.

$$a \neq 0$$
: $a^0 = 1$, $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

- b) Căn bậc n (n nguyên dương): của số a là b thỏa mãn $b^n = a$.
- c) Lũy thừa với số mũ hữu tỉ: $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.
- d) Lũy thừa với số mũ thực: $a^{\alpha} = \lim_{n \to +\infty} a^{r_n}$, với $\lim_{n \to +\infty} r_n = \alpha$.

2. Tính chất lũy thừa

 \bigcirc Với $a \neq 0, b \neq 0, m, n$ là số thực:

$$a^{m} \cdot a^{n} = a^{m+n}; \quad (a^{m})^{n} = a^{mn};$$
$$\left(\frac{a}{b}\right)^{m} = \frac{a^{m}}{b^{m}}; \quad \frac{a^{m}}{a^{n}} = a^{m-n};$$
$$(ab)^{m} = a^{m} \cdot b^{m};$$

 \odot Với n, k nguyên dương, m là số nguyên:

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}; \qquad \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

$$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}; \qquad \sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a};$$

$$\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} a & \text{khi } n \text{ l\'e} \\ |a| & \text{khi } n \text{ ch\~an}. \end{cases}$$

B. CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP



Tính giá trị biểu thức chứa lũy thừa

Biến đổi các cơ số về nguyên tố, sử dụng các công thức để rút gọn và tính giá trị biểu thức.

1. Ví dụ mẫu

VÍ DỤ 1. Tính giá trị các biểu thức

a)
$$2^{-4}$$
;

b)
$$9 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{-2}$$
;

c)
$$\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} : \left(\sqrt{3}\right)^{0}$$
.

 $\boldsymbol{\mathsf{V\'i}}\;\boldsymbol{\mathsf{D}}\boldsymbol{\mathsf{U}}\;\boldsymbol{\mathsf{2}}.$ Tính giá trị của biểu thức

$$A = \left(\frac{1}{2}\right)^{-12} \cdot 8^{-3} + (0,2)^{-4} \cdot 25^{-2} + 243^{-1} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{-6}.$$

VÍ DỤ 3. Tính giá trị biểu thức

$$A = \left(\frac{1}{2}\right)^{-8} \cdot 8^{-2} + (0,2)^{-4} \cdot 25^{-2}.$$

QI	~ 1/			
	 - 7	- 1	_	_

2. Bài tập rèn luyện

BÀI 1. Tính giá trị các biểu thức

a)
$$\left(\frac{3}{4}\right)^{-2} \cdot 3^2 \cdot 12^0$$
;

b)
$$(2^{-2} \cdot 5^2)^{-2} : (5 \cdot 5^{-5}).$$

BÀI 2. Tính giá trị các biểu thức

a)
$$\left(\frac{1}{256}\right)^{-0.75} + \left(\frac{1}{27}\right)^{-\frac{4}{3}};$$
 b) $\left(\frac{1}{49}\right)^{-1.5} - \left(\frac{1}{125}\right)^{-\frac{2}{3}};$ c) $\left(4^{3+\sqrt{3}} - 4^{\sqrt{3}-1}\right) \cdot 2^{-2\sqrt{3}}.$

BÀI 3. Thực hiện các phép tính

a)
$$27^{\frac{2}{3}} + 81^{-0.75} - 25^{0.5}$$
;

b)
$$4^{2-3\sqrt{7}} \cdot 8^{2\sqrt{7}}$$
.

BÀI 4. Biết $4^a = \frac{1}{5}$. Tính giá trị các biểu thức

a)
$$16^{\alpha} + 16^{-\alpha}$$
;

b)
$$(2^{\alpha} + 2^{-\alpha})^2$$
.

BÀI 5. Định luật thứ ba của Kepler về quỹ đạo chuyển động cho biết cách ước tính khoảng thời gian P (tính theo năm Trái Đất) mà một hành tinh cần để hoàn thành một quỹ đạo quay quanh Mặt Trời. Khoảng thời gian đó được xác định bởi một hàm số $P = d^{\frac{3}{2}}$, trong đó d là khoảng cách từ hành tinh đó đến Mặt Trời tính theo đơn vị thiên văn AU (1 AU là khoảng cách từ Trái Đất đến Mặt Trời, tức là 1 AU khoảng 93 000 000 dặm) (Nguồn: R.I. Charles et al., Algebra 2, Pearson). Hỏi Sao Hỏa quay quanh Mặt Trời thì mất bao nhiêu năm Trái Đất (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)? Biết khoảng cách từ Sao Hỏa đến Mặt Trời là 1,52 AU.

BÀI 6. Nếu một khoản tiền gốc P được gửi ngân hàng với lãi suất hằng năm r (r được biểu thị dưới dạng số thập phân), được tính lãi n lần trong một năm, thì tổng số tiền A nhận được (cả vốn lẫn lãi) sau N kì gửi cho bởi công thức sau:

$$A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{N}.$$

Hỏi nếu bác An gửi tiết kiệm số tiền 120 triệu đồng theo kì hạn 6 tháng với lãi suất không đổi là 5% một năm, thì số tiền thu được (cả vốn lẫn lãi) của bác An sau 2 năm là bao nhiêu?

BÀI 7. Năm 2021, dân số của một quốc gia ở châu Á là 19 triệu người. Người ta ước tính rằng dân số của quốc gia này sẽ tăng gấp đôi sau 30 năm nữa. Khi đó dân số A (triệu người) của quốc gia đó sau t năm kể từ năm 2021 được ước tính bằng công thức $A=19\cdot 2^{\frac{t}{30}}$. Hỏi với tốc độ tăng dân số như vậy thì sau 20 năm nữa dân số của quốc gia này sẽ là bao nhiêu? (Làm tròn kết quả đến chữ số hàng triệu).

BÀI 8. Với một chỉ vàng, giả sử người thợ lành nghề có thể dát mỏng thành lá vàng rộng 1 m^2 và dày khoảng $1.94 \cdot 10^{-7}$ m. Đồng xu 5~000 đồng dày $2.2 \cdot 10^{-3}$ m. Cần chồng bao nhiêu lá vàng như trên để có độ dày bằng đồng xu loại 5 000 đồng? Làm tròn kết quả đến chữ số hàng trăm.

3. Bài tập trắc nghiệm

CÂU 1. Cho số dương a và $m, n \in \mathbb{R}$. Mệnh đề nào sau đây đúng? $\mathbf{A} a^m \cdot a^n = (a^m)^n$. $\mathbf{B} a^m \cdot a^n = a^{m+n}$. $\mathbf{C} a^m \cdot a^n = a^{mn}$.

CÂU 2. Cho $0 < a \neq 1$ và các số thực α , β . Khẳng định nào sau đây là khẳng định **sai**?

$$(\mathbf{A}) \frac{a^{\alpha}}{a^{\beta}} = a^{\alpha - \beta}. \qquad (\mathbf{B}) (a^{\alpha})^{\beta} = a^{\alpha \beta}.$$

$$\mathbf{C} a^{\alpha} \cdot a^{\beta} = a^{\alpha\beta}.$$

$$\mathbf{D} a^{\alpha} \cdot a^{\beta} = a^{\alpha + \beta}.$$

CÂU 3. Cho a là số thực tùy ý, $(a^3)^2$ bằng

$$\bigcirc$$
 a^5 .

$$\bigcirc a^9$$

$$\bigcirc$$
 a^6 .

CÂU 4. Cho các số nguyên dương m, n và số thực dương a. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

$$(\mathbf{C}) \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[m]{a} = \sqrt[n+m]{a}.$$

$$\mathbf{D} (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}.$$

CÂU 5. Tính giá trị của biểu thức $A = \frac{6}{2^{2+\sqrt{5}} \cdot 3^{1+\sqrt{5}}}$

$$(A) 6^{-\sqrt{5}}.$$

CÂU 6. Tính giá trị của biểu thức $P = 4^4 \cdot 8^{11} \cdot 2^{2017}$

$$P = 2^{2407}$$

$$P = 2^{2054}$$
.

$$P = 2^{2058}$$

$$\bigcirc P = 2^{2032}.$$

CÂU 7. Tính giá trị của biểu thức $P = 3^{10} \cdot 27^{-3} + 0.2^{-4} \cdot 25^{-2} + 128^{-1} \cdot 2^9 + 0.1^{-5} \cdot 0.2^5$.

$$P = 32.$$

$$\bigcirc P = 40.$$

$$(c) P = 30$$

$$(D) P = 38.$$

CÂU 8. Cho số thực a > 1. Nếu $a^{3x} = 2$ thì $2a^{9x}$ bằng

CÂU 9. Giá trị của biểu thức $A=\left(2+\sqrt{3}\right)^{2019}\left(2-\sqrt{3}\right)^{2020}$ bằng

$$\bigcirc$$
 $A = 1.$

B
$$A = 2 - \sqrt{3}$$
.

$$A = (2 - \sqrt{3})^{2019}$$
.

$$(\mathbf{D}) A = 2 + \sqrt{3}.$$

CÂU 10. Tính giá trị của biểu thức $P=\left(7+4\sqrt{3}\right)^{2020}\left(4\sqrt{3}-7\right)^{2019}$.

A
$$P = 7 + 4\sqrt{3}$$
.

B
$$P = 7 - 4\sqrt{3}$$
.

$$P = 1$$
.

CÂU 11. Cho $P = \left(5 - 2\sqrt{6}\right)^{2018} \left(5 + 2\sqrt{6}\right)^{2019}$. Ta có

$$\triangle P \in (9; 11).$$

$$P \in (3;7).$$

$$P \in (7;9).$$

$$(D)$$
 $P \in (7; 9).$

CÂU 12. Cho x, y là hai số nguyên thỏa mãn $3^x \cdot 6^y = \frac{2^{15} \cdot 6^{40}}{9^{59} \cdot 12^{25}}$. Tính giá trị xy. **A** -445. **B** -755. **C** -540. **D** -425.

$$\bigcirc$$
 -445.

$$(B)$$
 -755.

$$(\mathbf{C}) - 540$$

$$\bigcirc$$
 -425

CÂU 13. Cho hàm số $f(x)=\frac{4^x}{2+4^x}$ $(x\in\mathbb{R})$. Biết a+b=5 với a,b là hai số thực, hãy tinh K = f(a) + f(b-4).

$$\bigcirc K = \frac{128}{120}.$$

$$\bigcirc K = \frac{512}{513}.$$

Rút gọn biểu thức chứa lũy thừa

Sử dung các tính chất của lũy thừa để chuyển về cùng một cơ số, rồi bằng cách đặt nhân tử chung hằng đẳng thức...để rút gọn biểu thức.

1. Ví du mâu

VÍ DỤ 1. Rút gọn biểu thức $A = \frac{6^{2+\sqrt{5}} \cdot 2^{1-\sqrt{5}}}{23+\sqrt{5}}$.

VÍ DỤ 2. Rút gọn các biểu thức

a)
$$\frac{a^{\frac{7}{3}} - a^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{4}{3}} - a^{\frac{1}{3}}} - \frac{a^{\frac{5}{3}} - a^{-\frac{1}{3}}}{a^{\frac{2}{3}} - a^{-\frac{1}{3}}}, (a > 0, a \neq 1);$$

b)
$$\frac{\left(\sqrt[4]{a^3b^2}\right)^4}{\sqrt[3]{\sqrt{a^12b^6}}}$$
, $(a > 0, b > 0)$.

VÍ DỤ 3. Rút gọn biểu thức $A = \frac{\left(a^{\sqrt{2}-1}\right)^{1+\sqrt{2}}}{a^{\sqrt{5}-1}\cdot a^{3-\sqrt{5}}}.$

2. Bài tấp rèn luyên

BÀI 1. Rút gọn các biểu thức

a)
$$a^{\frac{1}{3}} \cdot a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{7}{6}}$$
;

b)
$$a^{\frac{2}{3}} \cdot a^{\frac{1}{4}} : a^{\frac{1}{6}};$$

c)
$$\left(\frac{3}{2}a^{-\frac{3}{2}}b^{-\frac{1}{2}}\right)\left(-\frac{1}{3}a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{2}}\right)$$
.

BAI 2. Rút gon các biểu thức sau

a)
$$A = \frac{x^5 y^{-2}}{x^3 y}$$
, với $x, y \neq 0$;

b)
$$B = \frac{x^{\frac{1}{3}}\sqrt{y} + y^{\frac{1}{3}}\sqrt{x}}{\sqrt[6]{x} + \sqrt[6]{y}}$$
, với x, y dương.

BÀI 3. Cho số thực dương a. Rút gọn các biểu thức

\sim	C	_			_
<i>-</i> 1		•	NI	•	

ر ه	$a^{\frac{4}{3}}\left(a^{-\frac{1}{3}} + a^{\frac{2}{3}}\right)$
a)	$a^{\frac{1}{4}} \left(a^{\frac{3}{4}} + a^{-\frac{1}{4}} \right)$

b)
$$\frac{a^{\frac{1}{5}} \left(\sqrt[5]{a^4} - \sqrt[5]{a^{-1}}\right)}{a^{\frac{2}{3}} \left(\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{a^{-2}}\right)}$$
.

BÀI 4. Tại một xí nghiệp, công thức $P(t) = 500 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{3}}$ được dùng để tính giá trị còn lại (tính theo triệu đồng) của một chiếc máy sau thời gian t (tính theo năm) kể từ khi đưa vào sử dung.

- a) Tính giá trị còn lại của máy sau 2 năm; sau 2 năm 3 tháng.
- b) Sau 1 năm đưa vào sử dụng, giá trị còn lại của máy bằng bao nhiêu phần trăm so với ban đầu?

3. Bài tập trắc nghiệm

$$(\mathbf{A}) P = a^{\frac{5}{6}}.$$

(B)
$$P = a^{\frac{11}{6}}$$
.

$$\bigcirc P = a^{\frac{7}{6}}.$$

$$(\mathbf{D})P = a^{\frac{6}{7}}.$$

CÂU 2. Rút gọn biểu thức $P = b^{\frac{1}{2}} \cdot b^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[6]{b}$ với b > 0. **(B)** $P = b^{\frac{3}{11}}$. **(C)** $P = b^{\frac{3}{11}}$

$$\bigcirc P = b$$

B
$$P = b^{\frac{3}{11}}$$
.

$$\mathbf{C} P = b^{\frac{1}{36}}.$$

CÂU 3. Rút gọn biểu thức $P = x^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[6]{x}$ với x > 0.

$$(A) P = x^{\frac{1}{8}}.$$

$$\mathbf{B}) P = x^2.$$

$$(C) P = x^{\frac{2}{9}}.$$

CÂU 4. Rút gọn biểu thức $\sqrt{81a^4b^2}$ ta được

$$\bigcirc 9a^2|b|.$$

B
$$-9a^2b$$
.

$$\bigcirc 9a^2b.$$

CÂU 5. Cho biểu thức $\sqrt[5]{8\sqrt{2\sqrt[3]{2}}} = 2^{\frac{m}{n}}$, trong đó $\frac{m}{n}$ có dạng phân số tối giản. Gọi P =

$$P \in (350; 360)$$

$$P \in (340; 350).$$

$$P \in (360; 370)$$

CÂU 6. Rút gọn biểu thức $Q = b^{\frac{5}{3}} : \sqrt[3]{b}$ với b > 0. **(A)** $Q = b^{\frac{4}{3}}$. **(B)** $Q = b^{\frac{5}{9}}$.

$$\bigcirc Q = b^{\frac{4}{3}}.$$

$$\mathbb{C}Q = b^2$$

$$\bigcirc Q = b^{-\frac{4}{3}}.$$

CÂU 7. Cho a là số thực dương tùy ý và a khác 1, đặt $A = \frac{a^{\sqrt{7}} \cdot a^{\sqrt{7}}}{(a^2)^{\sqrt{7}}}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

$$A=1.$$

$$\mathbf{B} A = \frac{2}{a^{\sqrt{7}}}.$$

$$\mathbf{C} A = \sqrt{7}.$$

$$\mathbf{C} A = \sqrt{7}.$$

$$\bigcirc A = a.$$

CÂU 8. Cho x, y là các số thực thỏa mãn $x \neq 0$ và $(3^{x^2})^{3y} = 27^x$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

$$\mathbf{A} x^2 y = 1.$$

$$(\mathbf{C})xy = 1$$

CÂU 9. Rút gọn biểu thức $P = \frac{\sqrt[6]{x}\sqrt[3]{x^4}\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x^3}}$ với x là số thực dương.

$$(A) x^{\frac{13}{15}}$$

$$\bigcirc$$
 $x^{\frac{1}{4}}$

$$(c) x^{\frac{1}{6}}.$$

$$\sum x^{\frac{13}{18}}$$
.

$$\bigcirc P = a^4$$

$$P = a^2$$

$$\bigcirc P = a^5$$

CÂU 11. Cho a là một số thực dương. Rút gọn biểu thức: $P = \frac{\left(a^{\sqrt{7}-3}\right)^{\sqrt{7}+3}}{a^{\sqrt{11}-4} \cdot a^{5-\sqrt{11}}}$?

B
$$P = a^{2\sqrt{7}-1}$$
. **C** $P = \frac{1}{a^3}$.

$$P = \frac{1}{a^3}$$
.

$$P = a^2.$$

CÂU 12. Rút gọn biểu thức $A=\frac{\sqrt[3]{a^7}\cdot a^{\frac{11}{3}}}{a^4\cdot \sqrt[7]{a^{-5}}}$ với a>0 ta được kết quả $A=a^{\frac{m}{n}}$ trong đó m,

$$m^2 - n^2 = -312.$$

CÂU 13. Cho các số dương a, b. Rút gọn biểu thức $Q = \frac{a^{\frac{4}{3}}b + ab^{\frac{4}{3}}}{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}}$.

$$\bigcirc Q = 2ab.$$

$$\mathbf{C}$$
 $Q = \sqrt{ab}$.

$$\bigcirc Q = ab.$$

CÂU 14. Cho $5^x + 5^{-x} = a$. Rút gọn biểu thức $M = \frac{25^x + 25^{-x} + 1}{5^x + 5^{-x} + 1}$ bằng $a^2 + 1$.

$$\bigcirc$$
 $a+1$

$$\bigcirc$$
 $a-1$

$$a^2 + 1$$
.

$$a^2 - 1$$
.

CÂU 15. Cho $f(x) = e^{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x+1)^2}}}$. Biết rằng $f(1) \cdot f(2) \cdot f(3) \cdots f(2019) = e^{\frac{m}{n}}$, với m, n là các số tự nhiên và $\frac{m}{n}$ tối giản. Tính $m-n^2$.

$$(A) m - n^2 = 2018.$$

(B)
$$m - n^2 = 1$$
.

$$\bigcirc m - n^2 = -2018. \bigcirc m - n^2 = -1.$$

So sánh biểu thức lũy thừa

Biến đổi các biểu thức về cùng cơ số hoặc cùng số mũ, từ đó, dựa vào tính chất lũy thừa để so sánh.

1. Ví du mẫu

VÍ DỤ 1. Không sử dụng máy tính, hãy so sánh $3^{\sqrt{8}}$ và 3^3 .

VÍ DU 2. Không sử dụng máy tính, hãy so sánh các số $8^{\sqrt{3}}$ và $4^{2\sqrt{3}}$.

2. Bài tấp rèn luyên

BÀI 1. Không sử dụng máy tính cầm tay, hãy so sánh các số sau

a)
$$\sqrt{42}$$
 và $\sqrt[3]{51}$;

b)
$$16^{\sqrt{3}}$$
 và $4^{3\sqrt{2}}$;

c)
$$(0,2)^{\sqrt{16}}$$
 và $(0,2)^{\sqrt[3]{60}}$.

BÀI 2. Không sử dụng máy tính cầm tay, hãy so sánh

a)
$$5^{6\sqrt{3}}$$
 và $5^{3\sqrt{6}}$;

b)
$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{-4}{3}}$$
 và $\sqrt{2} \cdot 2^{\frac{2}{3}}$.

3. Bài tấp trắc nghiệm

CÂU 1. Cho $\pi^{\alpha} > \pi^{\beta}$ với $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Mênh đề nào dưới đây đúng?

$$\triangle$$
 $\alpha < \beta$.

$$\bigcirc$$
 $\alpha > \beta$.

$$\alpha \leq \beta$$
.

$$\bigcirc \alpha = \beta.$$

CÂU 2. Cho a và b thuộc khoảng (0;1) và α , β là những số thực tùy ý. Khẳng định nào sau đây là khẳng định sai?

$$(a^{\alpha})^{\beta} = (a^{\beta})^{\alpha}.$$

$$(\mathbf{C}) a^{\alpha} a^{\beta} = a^{\alpha + \beta}.$$

CÂU 3. Sắp xếp các số $a=\sqrt{2^3}$, b=4, $c=\sqrt[3]{2}$ theo thứ tự từ nhỏ đến lớn ta được

$$c < b < a$$
.

CÂU 4. Cho biết $(x-2)^{-\frac{1}{3}} > (x-2)^{-\frac{1}{6}}$, khẳng định nào sau đây đúng?

B
$$2 < x < 3$$
.

$$\bigcirc x > 2.$$

$$\bigcirc 0 < x < 1.$$

CÂU 5. Cho $a>0,\,b>0$ thỏa $a^{\frac{1}{2}}>a^{\frac{1}{3}}$ và $b^{\frac{2}{3}}>b^{\frac{3}{4}}.$ Khi đó

$$\bigcirc a > 1, \ 0 < b < 1.$$

B
$$a > 1, b > 1$$

$$\bigcirc$$
 0 < a < 1, 0 < b < 1.

$$\bigcirc$$
 0 < a < 1, b > 1.

Bài 19. PHÉP TÍNH LOGARIT

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa

f Định nghĩa 19.1. Cho hai số thực dương a, b với a khác 1. Số thực c để $a^c = b$ được gọi là lôgarit cơ số a của b và kí hiệu là $\log_a b$, nghĩa là

$$c = \log_a b \Leftrightarrow a^c = b.$$



 $\log_a b$ xác định khi và chỉ khi a > 0, $a \neq 1$ và b > 0.

\sim 11	ICK	A I	\sim 1	
பை	IC K	IM	C)I	-

2. Tính chất

TÍNH CHẤT 19.1. Với số thực dương a khác 1, số thực dương b, ta có:

$$\log_a 1 = 0$$
; $\log_a a = 1$; $\log_a a^c = c$; $a^{\log_a b} = b$.

7 TÍNH CHẤT 19.2. Với ba số thực dương a, m, n và $a \neq 1$, ta có:

$$\Theta$$
 $\log_a(mn) = \log_a m + \log_a n;$

$$\bigcirc \log_a\left(\frac{m}{n}\right) = \log_a m - \log_a n.$$

↑ Ta có:

$$\log_a \left(\frac{1}{b}\right) = -\log_a b \ (a > 0, a \neq 1, b > 0).$$

† TÍNH CHẤT 19.3. Cho $a>0, a\neq 1, b>0$. Với mọi số thực α , ta có:

$$\log_a b^{\alpha} = \alpha \log_a b.$$

TÍNH CHẤT 19.4. Với a, c là hai số thực dương khác 1 và b là số thực dương, ta có:

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}.$$

7 NHẬN XÉT. Với a>0 và $a\neq 1, b>0$ và $b\neq 1, c>0, \alpha\neq 0$, ta có những công thức sau:

$$\Theta \log_a b \cdot \log_b c = \log_a c;$$

$$\Theta$$
 $\log_a b = \frac{1}{\log_b a};$

3. Lôgarit thập phân. Lôgarit tự nhiên

 $oldsymbol{\odot}$ Lôgarit cơ số 10 của số thực dương b được gọi là lôgarit thập phân của b và kí hiệu là $\log b$ hay $\lg b$.

 $\ensuremath{ \bigodot}$ Lôgarit cơ số e của số thực dương b được gọi là lôgarit tự nhiên của b và kí hiệu là $\ln b.$

4. Tính lôgarit bằng máy tính cầm tay

B. CÁC DANG TOÁN THƯỜNG GĂP



Tính giá trị biểu thức chứa lôgarít

1. Ví dụ mẫu

VÍ DỤ 1. Cho $\log a = 4$. Tính giá trị của biểu thức $P = \log(100a^2)$.

VÍ DỤ 2. Cho $\log_a b = 2$. Tính $\log_a(a^2b)$.

VÍ Dụ 3. Cho a và b là hai số thực dương thỏa mãn $a^3b^2=32$. Tính giá trị của biểu thức $P=3\log_2 a+2\log_2 b$.

VÍ DỤ 4. Cho $\log_a b = 2$, $\log_a c = 3$. Tính $Q = \log_a (b^2 c)$.

VÍ DỤ 5. Cho a là số thực dương khác 5. Tính $I = \log_{\frac{a}{5}} \left(\frac{a^3}{125} \right)$.

VÍ DỤ 6. Cho a, b là hai số thực dương thỏa mãn $ab^3 = 8$. Tính giá trị của $\log_2 a + 3\log_2 b$.

VÍ DỤ 7. Cho a > 0 và đặt $\log_2 a = x$. Tính $\log_8(4a^3)$ theo x.

VÍ DỤ 8. Cho số a > 1. Tính giá trị biểu thức $P = a^{2 \log_a 3}$.

VÍ DỤ 9. Đặt $\log_2 3 = a$, $\log_2 5 = b$. Tính $\log_5 3$ theo a, b.

VÍ DỤ 10. Tính giá trị biểu thức $Q = \log \frac{10}{11} + \log \frac{11}{12} + \log \frac{12}{13} + \dots + \log \frac{999}{1000}$.

VÍ DỤ 11. Cho a, b, c là các số thực dương, $a \neq 1$ và $\log_a b = 5$, $\log_a c = 7$. Tính giá trị của biểu thức $P = \log_{\sqrt{a}} \left(\frac{b}{c}\right)$.

VÍ DỤ 12. Cho a, b, c là các số thực khác 0 thỏa mãn $4^a = 25^b = 10^c$. Tính $T = \frac{c}{a} + \frac{c}{b}$.

VÍ DỤ 13. Cho a và b lần lượt là số hạng thứ nhất và thứ chín của một cấp số cộng có công sai $d \neq 0$. Tính giá trị của $\log_2\left(\frac{b-a}{d}\right)$.

VÍ DỤ 14. Ba số $a + \log_2 3$; $a + \log_4 3$; $a + \log_8 3$ theo thứ tự lập thành cấp số nhân. Tìm công bội của cấp số nhân này.

2. Bài tập rèn luyện

BÀI 1. Tính giá trị biểu thức $A = 2^{\log_4 9 + \log_2 5}$.

BÀI 2. Cho hai số thực dương a, b thỏa mãn $a^2b^3=64$. Tính giá trị của biểu thức $P=2\log_2 a+3\log_2 b$.

BÀI 3. Cho $0 < a \neq 1$. Tính giá trị của biểu thức $T = \log_a(a^3)$.

BÀI 4. Cho a là một số thực dương tùy ý và $a \neq 2$. Tính $P = \log_{\frac{a}{2}} \frac{a^3}{8}$

BÀI 5. Cho a là số thực dương khác 1. Tính giá trị của biểu thức $I = \log_a a^{\frac{1}{2}}.$

BÀI 6. Tính giá trị của biểu thức $M = \log_2 \sqrt{2\sqrt{32}}$.

BÀI 7. Cho a là số thực dương tùy ý khác 1, tính giá trị $P = \log_{\sqrt[3]{a}} a^3$.

BÀI 8. Tính giá trị biểu thức $10^{\log 5} + 5^0$.

BÀI 9. Biết $\log_3 5 = a$. Tính $\log_3 45$ theo a.

BÀI 10. Cho a và b là hai số thực dương khác 1 thỏa mãn $\sqrt{a} = \sqrt[3]{b}$. Tính giá trị $\log_a b$.

BÀI 11. Với a, b là hai số thực dương thỏa mãn $\log a = 11$, $\log b = 13$. Tính giá trị biểu thức $\log (ab^2)$.

BÀI 12. Cho a, b là các số thực dương lớn hơn 1 thỏa mãn $\log_a b = 3$. Tính giá trị biểu thức

$$P = \log_{a^2b} a^3 - 3\log_{a^2} 2 \cdot \log_4 \left(\frac{a}{b}\right).$$

BÀI 13. Cho hai số dương a, b với $a \neq 1$, thỏa mãn $\log_{a^2} b + \log_a b^2 = 2$. Tính $\log_a b$.

BÀI 14. Biết rằng $a = \log_2 3$, $b = \log_2 5$. Hãy biểu diễn $\log_{45} 4$ theo a và b.

BÀI 15. Cho biểu thức $f(x)=\log_2\left(x-\frac{1}{2}+\sqrt{x^2-x+\frac{17}{4}}\right),\ (0< x<1).$ Tính giá trị của biểu thức

$$T = f\left(\frac{1}{1000}\right) + f\left(\frac{2}{1000}\right) + \dots + f\left(\frac{999}{1000}\right).$$

3. Bài tập trắc nghiệm

CÂU 1. Với a là số thực dương khác 1 tuỳ ý, giá trị $\log_{a^2} a^3$ bằng

- **A** 8.
- **B** 6.
- $\frac{2}{3}$.

CÂU 2. Cho $a \neq 1$ là số thực dương và $P = \log_{\sqrt[3]{a}} a^3$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- $\bigcirc P = 3.$
- $\bigcirc P = 1.$
- $P = \frac{1}{3}$.
- $\bigcirc P = 9.$

CÂU 3. Cho a > 0, $a \neq 1$. Biểu thức $a^{\log_a a^2}$ bằng

- ${\color{red} {\color{blue} A}} \, 2.$
- lacksquare a^2 .
- \bigcirc 2a.

CÂU 4. Giá trị của $\log_{\frac{1}{a}} \sqrt[3]{a^7}$ (với $a > 0, a \neq 1$) bằng

- $-\frac{7}{3}$.
- **B** $\frac{2}{3}$.
- c $\frac{5}{3}$.
- **D** 4.

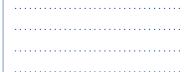
CÂU 5. Với a là số thực dương tùy ý, $\ln{(ea^{\pi})}$ bằng

- \bigcirc 1 + $a \ln \pi$.
- **B** $1 + \ln \pi + \ln a$.
- (c) $1 \pi \ln a$.
- \bigcirc 1 + $\pi \ln a$.

•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	٠	٠	•	•	•	•	•	•	•	•
•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•











QUICK NOTE	CÂU 6. Với a là số	thực dương khác 1 tù	y ý, $\log_{a^5} a^4$ bằng	
	$\frac{1}{5}$.	$lacksquare$ $\frac{4}{5}$.	© 20.	$\bigcirc \frac{5}{4}$.
	CÂU 7. Với a là thụ	$\text{ duong tùy } \circ, \ln(5a)$	$-\ln(3a)$ bằng	-
			\bigcirc $\ln(2a)$.	\bigcirc $\ln \frac{5}{3}$.
	CÂU 8. Cho $\log_a b =$ $\mathbf{A} \log_a(ab) = 3.$	$= 2$ với $a, b > 0, a$ khá $\boxed{\mathbf{B}} \log_a \left(ab^2\right) = 3$		sau đây sai ?
	CÂU 9. Với a là số	thực dương tùy ý, log	1	
	A $2020 \log_3 a$.		a. \bigcirc 1010 + $\frac{1}{2}$ log	$_3a.$ D $505\log_3 a.$
	CÂU 10. Giá trị của	a $\log_a \frac{1}{a^3}$ với $a > 0$ và	$a \neq 1$ bằng	
	\bigcirc -3 .	B 3.	$\mathbf{c} - \frac{1}{3}$.	\bigcirc $\frac{1}{3}$.
		$ \hat{b} $ thực a dương, $\log_2^2 a$		
	$\mathbf{A} \ 2\log_2^2 a.$		$2 \log_2 a^2$.	
			. Khẳng dịnh nào sau $\log(ab) = \log$	đây là khẳng định đúng? $g(a+b)$.
	$\log \left(\frac{a}{b}\right) = \log_b$	$_{b}$ a .		$\log(a-b)$.
	CÂU 13. Giá trị củ	a $\log_2 16$ bằng		
	(A) 3.	B 4.	(c) -3.	D -4.
	CAU 14. Cho a, b la (A) 4.	à các số thực dương the B 3.	hỏa mãn $a \neq 1$ và \log_a 5.	$a b = 3$. Tính $\log_a(a^2b)$.
			2	
	CAU 15. Tinh gia t	cri của $A = \log_2\left(\frac{8}{\sqrt[3]{2}}\right)$		716
	$\mathbf{A} \frac{25}{3}$.	B $\frac{164}{6}$.	$\bigcirc \frac{82}{3}$.	
			khác 1 thỏa mãn \log_2	$a=2$ và $\log_4 b=3$. Giá trị
	biểu thức $P = \log_a \theta$		$\bigcirc P = 2.$	$\bigcirc P = 1.$
	CÂU 17. Cho các số	ố thực dương a, b, c vo	ới $a \neq 1$, thỏa mãn log	$g_a b = 3$, $\log_a c = -2$. Khi đó
	$\log_a \left(a^3 b^2 \sqrt{c}\right) \text{ bằng}$ $5.$	B) 8.	© 13.	D 10.
		$(xy^3) = \log(x^2y) = 1.$		
	$\frac{1}{2}$.	$\frac{3}{5}$.	© 1.	\bigcirc $\frac{5}{3}$.
		số dương khác 1. Khi	đó giá trị của $P=a^{\mathrm{lo}}$	3
	A 48.	B 8.	3^{16} .	D 16.
	CÂU 20. Cho các se	ố a, b, c thỏa mãn log	$g_a 3 = 2, \log_b 3 = \frac{1}{4} v$	rà $\log_{abc} 3 = \frac{2}{15}$. Giá trị của
	$\log_c 3$ bằng			~ 1
	$\mathbf{A} \frac{1}{3}$.	B 3.	© 2.	\bigcirc $\frac{1}{2}$.
	CÂU 21. Giá trị của (A) 56.	a biểu thức $M = \log_2$ $8 \log_2 256$.	$2 + \log_2 4 + \log_2 8 + \cdot$ © 36.	$\cdots + \log_2 256$ bằng $\bigcirc 48.$
		a biểu thức $P = (e^3)^{l}$		40.
	A 16.	B 125.	© 32.	D 5.
		rị của biểu thức $A=1$	<u> </u>	$\cos \frac{\pi}{10}$.
	A 3.	\bigcirc $-2.$	(12) (12) (12) (12) (12)	12 D 2.
			ıg, khác 1 và thỏa mã	$ \ln \log_a b^2 = x, \log_{b^2} \sqrt{c} = y. $
	Giá trị của $\log_c a$ bằ $\frac{xy}{2}$.	$\stackrel{ ext{ (B)}}{ ext{ }} 2xy.$	<u>c</u> 1	\bigcirc $\frac{2}{}$

CÂU 25. Cho $\log_a x = 2$, $\log_b x = 5$ với a, b là các số thực lớn hơn 1. Giá trị của $\log_{\frac{a^2}{2}} x$

 $\frac{6}{5}$

CÂU 26. Cho a và b là hai số thực dương thỏa mãn $a^4b = 16$. Giá trị của $4\log_2 a + \log_2 b$ bằng

(A) 4.

(C) 16.

CÂU 27. Cho các số thực dương a và b thỏa mãn $a^2 - 16b = 0$. Tính giá trị của biểu thức

$$P = \log_{\sqrt{2}} a - \log_2 b.$$

 $\bigcirc P = 2.$

 $\bigcirc P = 16.$

 $\mathbf{D} P = \sqrt{2}.$

CÂU 28. Cho các số thực a, b, c thuộc khoảng $(1; +\infty)$ và $\log_{\sqrt{a}}^2 b + \log_b c \cdot \log_b \left(\frac{c^2}{b}\right) +$ $9\log_a c = 4\log_a b$. Giá trị của biểu thức $\log_a b + \log_b c^2$ bằng

(A) 2.

 (\mathbf{D}) 1.

CÂU 29. Cho cấp số cộng (u_n) có tất cả số hạng đều dương và $9(u_1 + u_2 + \cdots + u_{2050}) =$ $4(u_1 + u_2 + \dots + u_{3075})$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \log_3^2 u_{14} + \log_3^2 u_{41} - \log_3^2 u_{122}$.

CÂU 30. Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $a^{\log_3 7} = 27, b^{\log_7 11} = 49, c^{\log_{11} 25} = \sqrt{11}$. Giá trị của biểu thức $A = a^{(\log_3 7)^2} + b^{(\log_7 11)^2} + c^{(\log_{11} 25)^2}$ là

(**A**) 129.

D 729.

Biến đổi, rút gọn, biểu diễn biểu thức chứa lôgarít

1. Ví dụ mẫu

VÍ DỤ 1. Với a, x, y là các số thực dương tùy ý và khác 1. Rút gọn biểu thức $P = \frac{x^{\log_a y}}{y^{\log_a x}}$.

VÍ DỤ 2. Biết $\log_7 2 = m$, biểu diễn biểu thức $\log_{49} 28$ theo m.

VÍ DỤ 3. Với a là số thực dương tùy ý, rút gọn biểu thức $\log_3(a^5)$.

VÍ DỤ 4. Cho các số thực a, b. Rút gọn biểu thức $A = \log_2 2^a + \log_2 2^b$.

VÍ DỤ 5. Biết rằng $\log_2 3 = a, \log_2 5 = b$. Tính $\log_{45} 4$ theo a và b.

VÍ DỤ 6. Cho hai số dương a, b với $a \neq 1$. Đặt $M = \log_{\sqrt{a}} \sqrt[3]{b}$. Tính M theo $N = \log_a b$.

VÍ DỤ 7. Biểu diễn $\log_{120} 600$ theo $a = \log_2 3$ và $b = \log_3 5$.

VÍ DU 8. Cho $\log 5 = a$. Tính $\log 25000$ theo a.

VÍ DU 9. Cho $a = \log 2, b = \log 3$. Tính $\log \sqrt[7]{0,432}$ theo a và b.

VÍ DỤ 10. Rút gọn biểu thức $M = 2\log_{\sqrt{2}}(4x) - 12\log_4\sqrt{x} + \log_{\frac{1}{2}}\frac{8}{x}$ với x > 0.

VÍ DỤ 11. Cho $\log_2 5 = m$, $\log_3 5 = n$. Khi đó $\log_6 5$ tính theo m và n là

VÍ DỤ 12. Cho $\log_2 m = a$ và $A = \log_m (8m)$ với $m > 0, m \neq 1$. Tìm mối liên hệ giữa A và

VÍ DU 13. Cho các số thực dương x, a, b, c thỏa mãn

$$\log x = 2\log(2a) - 2\log b - 4\log\sqrt[4]{c}.$$

Biểu diễn x theo a, b, c.

9

VÍ DỤ 14. Cho các số nguyên a, b, c thỏa mãn $a + \frac{b + \log_2 5}{c + \log_2 3} = \log_6 45$. Tính tổng a + b + c.

VÍ DỤ 15. Cho $G=10^{10^{100}}$. Đặt $x=\log_{10}G;\ y=\log_xG,$ khi đó \log_yG có thể biểu diễn dưới dạng $\frac{m}{n}$ trong đó m, n là các số nguyên dương và ước chung lớn nhất của chúng bằng 1. Tính tổng các chữ số của số m+n.

_		_
GV.VÜ	NGOC	PHAT

JIC		1
	vĸ	-
лι	N 11	

2. Bài tập rèn luyện

BÀI 1. Cho a là số thực dương tùy ý, đặt $\log_3 a = \alpha$. Biểu diễn biểu thức $P = \log_{\frac{1}{a}} a - \log_{\sqrt{3}} a$

BÀI 2. Đặt $\log_5 3 = a$. Biểu diễn $\log_{\frac{1}{2}}$ 81 theo a.

BÀI 3. Cho a là số thực dương khác 1 và x,y là các số thực dương thỏa mãn $\log_a x = -1$ và $\log_a y = 4$. Rút gọn biểu thức $P = \log_a(x^2y^3)$.

BÀI 4. Cho các số thực x, y, z > 1 và $\log_{xy}(yz) = 2$. Rút gọn biểu thức $\log_{\frac{z}{x}}(x)^4 +$ $\log_{\frac{z}{n}}(xy)$.

BAI 5. Cho $\log_{12} 3 = a$. Tính $\log_{24} 18$ theo a.

BÀI 6. Đặt $a = \ln 2$ và $b = \ln 3$. Biểu diễn $S = \ln \frac{1}{2} + \ln \frac{2}{3} + \ln \frac{3}{4} + \dots + \ln \frac{71}{72}$ theo a và b.

BÀI 7. Rút gọn biểu thức $Q = (y^{\log_2 3})^{\log_5 2}$ (với y > 0).

BÀI 8. Cho $\log_2 a = x$ và $\log_2 b = y$ với $a>0,\ b>0$ và $a\neq b$. Tìm biểu diễn của $\log_{a^{-2}b^3}(a^4b)$ theo x và y.

BÀI 9. Cho $\log_2 3 = a$. Biểu diễn biểu thức $\log_9 2$ theo a.

BÀI 10. Cho $0 < x \neq 1, 0 < y$ thỏa mãn $\log_2 x = y$ và $\log_x y = \frac{3}{y}$. Tính tổng x + y.

BÀI 11. Cho các số thực dương a, b thỏa mãn $\ln a = x$, $\ln b = y$. Tính $P = \ln (a^3b^2)$.

BÀI 12. Biết $\log_{15} 20 = a + \frac{2 \log_3 2 + b}{\log_3 5 + c}$ với $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Tính T = a + b + c.

BÀI 13. Cho $\log_2 3 = x$ và $\log_2 5 = y$. Biết rằng $\log_{20} 15 = \frac{ax + by}{cy + 2}$ với a, b, c là các số nguyên dương. Tính P = a + b + c.

BÀI 14. Cho tam giác ABC vuông tại A và AD là đường cao. Biết $AB = \log y$, $AC = \log 3$, $AD = \log x, BC = \log 9. \text{ Tính } \frac{y}{x}.$

3. Bài tập trắc nghiệm

CÂU 1. Với mọi số thực a dương, $\log_2 \frac{4}{a}$ bằng

$$\bigcirc$$
 $\log_2 a - 2$.

$$\bigcirc$$
 4 - $\log_2 a$.

$$\bigcirc$$
 2 - $\log_2 a$.

$$\bigcirc$$
 2 + $\log_2 a$.

CÂU 2. Với a là số thực dương tùy ý, $\log(10a^2)$ bằng

 (\mathbf{A}) 20 log a.

$$(\mathbf{B}) 1 + 2 \log a.$$

$$\bigcirc 1 + (\log a)^2.$$

$$\bigcirc$$
 10 log a .

CÂU 3. Với a là số thực dương tùy ý, $\log \frac{5a}{2} + \log \frac{4}{a}$ bằng

(**A**) 1.

 $\log \frac{5a}{2} \cdot \log \frac{4}{a}$.

 $(\mathbf{D}) \ln 10.$

CÂU 4. Với a, b là hai số dương tùy ý thì $\log(a^3b^2)$ có giá trị bằng biểu thức nào sau đây?

 $(\mathbf{B}) 2 \log a + 3 \log b.$

 $\mathbf{(C)} 3 \log a + 2 \log b.$

CÂU 5. Cho a và b là hai số thực dương thỏa mãn $2\log_2 b - 3\log_2 a = 2$. Khẳng định nào sau đây đúng?

(A) 2b - 3a = 2.

B) $b^2 = 4a^3$.

(c) 2b - 3a = 4.

 $b^2 - a^2 = 4.$

CÂU 6. Giả sử a, b là các số thực dương bất kỳ. Biểu thức $\ln \frac{a}{h^2}$ bằng

 $(\mathbf{B}) \ln a + 2 \ln b.$

 $\bigcirc \ln a - 2 \ln b.$ $\bigcirc \ln a - \frac{1}{2} \ln b.$

CÂU 7. Cho $a = \log_3 4$. Khi đó $\log_3 36$ bằng

(B) 2a + 4.

(c) a + 2.

(D) a + 9.

CÂU 8. Xét a,b là các số thực dương thỏa mãn $4\log_2 a + 2\log_4 b = 1$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

(A) $a^4b = 2$.

B) $a^4b = 1$.

 \mathbf{c} $a^4b^2=2$.

 $\mathbf{D} a^4 b^2 = 4.$

CÂU 9. Với mọi a, b, x là các số thực dương thoả mãn $\log_2 x = 5 \log_2 a + 3 \log_2 b$. Mệnh đề nào dưới đây đúng

(A) x = 5a + 3b.

B $x = a^5 + b^3$.

 $(c) x = a^5 b^3$.

 $(\mathbf{D}) x = 3a + 5b.$

CÂU 10. Cho a và b là hai số thực dương thỏa mãn $\sqrt{a} \cdot b^3 = 27$. Giá trị của $\log_3 a + 6 \log_3 b$

(A) 3.

(C) 9.

(D) 1.

CÂU 11. Với mọi số thực dương x, $\log_3\left(\frac{x^3}{3}\right)$ bằng

(A) $3\log_3 x - 1$.

 $(\mathbf{B})\log_3 x - 1.$

 $(\mathbf{c})\log_3 x.$

(D) $3 \log_3 x + 1$.

CÂU 12. Với mọi a, b thỏa mãn $2\log_9 a - 3\log_3 b = 1$, mệnh đề nào sau đây đúng?

B 2a - 3b = 1.

 $a^2 = 3b^3$.

CÂU 13. Cho hai số thực dương a, b bất kì thỏa mãn $9\log^2 a + 4\log^2 b = 12\log a \cdot \log b$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

(A) 3a = 2b.

(B) 2a = 3b.

 \mathbf{C} $a^2 = b^3$.

CÂU 14. Đặt $x=\log_2 14$. Biết $\log_{98} 32=\frac{a}{bx-c}$ với $a,\,b,\,c$ là những số tự nhiên và biểu thức là tối giản. Giá trị của biểu thức S=2a+3b+5c là

(A) 21.

(B) 16.

D 26.

CÂU 15. Cho a, b là các số thực dương tùy ý và $a \neq 1$. Đặt $P = \log_a b^3 + \log_{a^2} b^6$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

 $\mathbf{A} P = 9 \log_a b.$

 $\mathbf{B}) P = 6 \log_a b.$

 $(\mathbf{C}) P = 27 \log_a b.$

(D) $P = 15 \log_a b$.

CÂU 16. Đặt $\log_2 3=a$. Khi đó $\log_{12} 18$ bằng $\underbrace{\frac{2+a}{1+2a}}.$

 $\bigcirc \frac{1+3a}{2+a}.$

CÂU 17. Với mọi số thực dương x, y thỏa mãn $x^2 + y^2 = 8xy$, mệnh đề nào dưới đây

(A) $\log(x+y) = \frac{1}{2}(1 + \log x + \log y)$. (B) $\log(x+y) = \frac{1}{2}(\log x + \log y)$.

 $\bigcirc \log(x+y) = 1 + \log x + \log y.$

CÂU 18. Cho các số thực dương x, y thỏa mãn $\log(xy^2) = 5$ và $\log(x^3y) = 10$. Tính $P = \log(xy).$

 $\bigcirc P = 4.$

B P = 2.

(c) P = 5.

CÂU 20. Cho a, b, c là các số lớn hơn 1, đặt $\log_a b = m$, $\log_a c = n$. Khi đó $\log_a \left(ab^2c^5\right)$

B $1 + \frac{1}{2}m + \frac{1}{5}n$. **C** $1 + \frac{1}{5}m + \frac{1}{2}n$. **D** 1 + 5m + 2n.

CÂU 21. Cho tam giác ABC có BC = a, CA = b, AB = c. Nếu a, b, c theo thứ tự lập thành một cấp số nhân thì

 $(\mathbf{A}) \ln \sin A \cdot \ln \sin C = 2 \ln \sin B.$

 $(\mathbf{B}) \ln \sin A + \ln \sin C = 2 \ln \sin B.$

(c) $\ln \sin A \cdot \ln \sin C = (\ln \sin B)^2$.

 $\ln \sin A + \ln \sin C = \ln(2\sin B).$

CÂU 22. Xét các số thực dương a và b thỏa mãn $\log_5 (5^a \cdot 25^b) = 5^{\log_5 a + \log_5 b + 1}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

 $(\mathbf{A}) a + 2b = ab.$

B) a + 2b = 5ab.

(c) 2ab - 1 = a + b. (d) a + 2b = 2ab.

CÂU 23. cho ba số thực dương a, b, c khác 1 thỏa $\log_a b + \log_c b = \log_a 2016 \cdot \log_c b$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

(A) bc = 2016.

(B) ab = 2016.

(c) ac = 2016.

(**D**) abc = 2016.

CÂU 24. Cho $\log_2 5 = a$, $\log_5 3 = b$, biết $\log_{24} 15 = \frac{ma + ab}{n + ab}$, với $m, n \in \mathbb{Z}$. Tính S = $m^2 + n^2.$

 $(\mathbf{A}) S = 2.$

B S = 10.

(c) S = 5.

(D)S = 13.

♥ VNPmath - 0962940819 ♥			3	' HÀM SỐ MŨ - LOGARIT
QUICK NOTE	CÂU 25. Cho các số	$\hat{0}$ thực a, b với $ab > 0$). Mệnh đề nào dưới đây	sai?
QUION NOTE				
			$\mathbf{D}\log(ab) = \log a$	
		a = a, tính giá trị của	<u> </u>	
	A $2(1+4a)$.		$\mathbf{C} 2(1-4a).$	\bigcirc $\frac{1-4a}{}$.
		2		=
	CAU 27. Cho $\log_2 3$ sau đây?	$B = a$, $\log_2 5 = b$, khi	đó $\log_5 675$ được biểu di	ễn theo a, b là đáp án nào
		ab+b	$\bigcirc \frac{a^3 + b^2}{b}$.	a + ab
	$\frac{\mathbf{A}}{b}$.	$\frac{\Box}{2+3a}$.	\overline{b} .	$\overline{3+2a}$.
			o. Tính $\log_{45} 4$ theo a, b .	
	$\frac{2a+b}{2}$.	$\bigcirc \mathbf{B} \frac{2b+a}{2}$.	$\bigcirc \frac{2}{2a+b}$.	\bigcirc $2ab.$
	CÂU 29 Biết log 5	$3 = a, \log_3 5 = b. \text{ Khi}$		
		$ab = a$, $\log_3 b = b$. King $ab + 1$.		\bigcirc $\frac{a(b+1)}{a+2}$.
		$\overline{a+2}$.	$\overline{a(b+1)}$.	$\overline{a+2}$.
			thỏa $\log_4 a + \log_4 b^2 = 5$	và $\log_4 a^2 + \log_4 b = 7$ thì
	tích ab nhận giá trị	bằng $(\mathbf{B}) 2^8$.	2 29	
	(A) 16.		© 2 ⁹ .	\bigcirc 2 ¹⁸ .
	CÂU 31. Cho \log_{18}	$6 = \frac{a + \log_3 2}{b + \log_3 2}$, với a	, b là các số nguyên. Giá	trị của $a+b$ bằng
	(A) 4.	(B) 5.	© 3.	D 2.
			trị của $\log_{10e}(10a)$ bằng	\smile
	$\mathbf{A} \frac{ab+b}{1+c}.$			$\mathbf{D} \frac{bc+c}{1+c}$.
	$\frac{1}{1+c}$.	$\frac{1}{1+c}$.	$\frac{\bullet}{1+c}$.	$\frac{\mathbf{b}}{1+c}$.
	4 .		ó giá trị của $\log_{125} 30$ đư	ợc tính theo a, b là
	$\frac{1+a}{3(1-b)}$.	B $\frac{4(3-a)}{3-h}$.	$\bigcirc \frac{a}{3+h}$.	\bigcirc $\frac{a}{3+a}$.
		9 0	9 0	0 0
	CÂU 34. Cho số th	nực $lpha$ thỏa mãn 9^{lpha} -	$+9^{-\alpha} = 23$. Giá trị của	a biểu thức $\frac{5+3^{\alpha}+3^{-\alpha}}{1-3^{-\alpha}-3^{\alpha}}$
	bằng 1	۳	9	
	$\mathbf{A} \frac{1}{2}$.	B $-\frac{5}{2}$.	$\bigcirc \frac{3}{2}$.	D 2.
	CÂU 25 Cha a >	0 h > 0 m² a labáa	1 thảo mãn lom b	. lam a 16 Tímh tổng
	a+b.	$0, \ \theta > 0 $ va a knac	T thoa man $\log_a \theta = \frac{1}{4}$; $\log_2 a = \frac{16}{b}$. Tính tổng
	$\stackrel{a+b.}{\bigcirc} 32.$	B) 16.	(c) 18.	D) 10.
		là các số thực dương		$4ab$, biểu thức $\log_2(a+b)$
	bằng	ia odo so virgo daong	S chock literia w 0 I	100, 5100 thub 1082(w + 0)
		$_{2} b).$	B $\frac{1}{2} (4 + \log_2 a + \log_2 a)$	$-\log_2 b$).
	$\mathbf{c} 4 + \frac{1}{2} (\log_2 a + \frac{1}{2} \log_2 a)$	- log. h)	$ (4 + \log_2 a + \log_2 a) $	
			_	
				10^{2z} đúng với mọi số thực
		$\max_{\mathbf{z}} \log(x+y) = z \text{ v}$	$\log(x^2 + y^2) = z + 1.$ (31)	a + b bang 25
	$\mathbf{A} \frac{31}{2}$.	B $\frac{29}{2}$.	\bigcirc $-\frac{31}{2}$.	$-\frac{2}{2}$.
	CÂU 38. Cho các số	$\delta a, b > 0, a \neq 1$ thỏa	a mãn $\log_{ab} \frac{a}{b} = \frac{1}{3}$. Giá tr	rị của $\log_{a^3}\left(ab^6 ight)$ bằng
	$\frac{8}{3}$.	$\mathbf{B} \frac{13}{4}$.	o o	
	$\overline{3}$.	\bullet $\overline{4}$.	$\bigcirc \frac{\circ}{9}$.	$\overline{3}$.

 $\log_y 40$ và $log_{xyz}w=12.$ Tính $\log_z w.$

(B) -60.

B 10^{100} .

A 52.

 \mathbf{A} 10^{200} .

 $\frac{bc+c}{1+c}.$ theo a, b là $\frac{a}{3+a}$. hức $\frac{5+3^{\alpha}+3^{-\alpha}}{1-3^{-\alpha}-3^{\alpha}}$ 2. $=\frac{16}{b}$. Tính tổng 10. $a ext{ thức } \log_2(a+b)$ ng với mọi số thực $\overset{\circ}{\text{ua}} \frac{a+b}{2}$ bằng $-\frac{25}{2}$. $g_{a^3}\left(ab^6\right)$ bằng **CÂU 39.** Cho x,y và z là các số thực lớn hơn 1 và gọi w là số thực dương sao cho $\log_x w = 24$, **(c)** 60. (D) - 52.**CÂU 40.** Cho các số thực dương x, y thỏa mãn $\sqrt{\log x} + \sqrt{\log y} + \log \sqrt{x} + \log \sqrt{y} = 100$ và $\sqrt{\log x}, \sqrt{\log y}, \log \sqrt{x}, \log \sqrt{y}$ là các số nguyên dương. Khi đó kết quả xy bằng $(\mathbf{C}) 10^{164}.$ \bigcirc 10¹⁴⁴.

6

Toán thực tế, liên môn

- \odot Chỉ số hay độ pH của một dung dịch được tính theo công thức: pH = $-\log[H^+]$ với $[H^+]$ là nồng độ ion hydrogen. Người ta đo được nồng độ ion hydrogen của một cốc nước cam là 10^{-4} , nước dừa là 10^{-5} (nồng độ tính bằng mol L^{-1}).
- \odot Công thức lãi kép theo N kì han

Nếu đem gửi ngân hàng một số vốn ban đầu là P theo thể thức lãi kép với lãi suất hằng năm không đổi là r và chia mỗi năm thành m kì tính lãi thì sau t năm (tức là sau tm = N kì hạn) số tiền thu được (cả vốn lẫn lãi) là

$$A_m = P\left(1 + \frac{r}{m}\right)^N.$$

Với số vốn ban đầu là P, theo thể thức lãi kép liên tục, lãi suất hằng năm không đổi là r thì sau t năm, số tiền thu được cả vốn lẫn lãi sẽ là

$$A = Pe^{tr}$$
.

1. Ví du mẫu

VÍ DU 1. Trong hóa học, độ pH của một dung dịch được tính theo công thức pH = $-\log[H^+]$, trong đó [H⁺] là nồng đô H⁺ (ion hydro) tính bằng mol/L. Các dung dịch có pH bé hơn 7 thì có tính acid, có pH lớn hơn 7 thì có tính kiềm, có pH bằng 7 thì trung tính.

- a) Tính độ pH của dung dịch có nồng độ H⁺ là 0,0001 mol/L. Dung dịch này có tính acid, hay kiềm hay trung tính?
- b) Dung dịch A có nồng độ H^+ gấp đôi nồng độ H^+ của dung dịch B. Độ pH của dung dịch nào lớn hơn và lớn hơn bao nhiêu? Làm tròn kết quả đến hàng phần nghìn.

VÍ DU 2. Bác An gửi tiết kiệm ngân hàng 100 triệu đồng kì hạn 12 tháng, với lãi suất không đổi là 6% một năm. Khi đó sau n năm gửi thì tổng số tiền bác An thu được (cả vốn lẫn lãi) cho bởi công thức sau:

$$A = 100 \cdot (1 + 0.06)^n$$
 (triệu đồng).

Hỏi sau ít nhất bao nhiêu năm, tổng số tiền bác An thu được là không dưới 150 triệu đồng?

VÍ DỤ 3. Một vi khuẩn có khối lượng khoảng $5 \cdot 10^{-13}$ gam và cứ 20 phút vi khuẩn đó tự nhân đôi một lần (Nguồn: Câu hỏi và bài tập vi sinh học, NXB DHSP, 2008). Giả sử các vi khuẩn được nuôi trong các điều kiện sinh trưởng tối ưu và mỗi con vi khuẩn đều tồn tại trong ít nhất 60 giờ. Hỏi sau bao nhiêu giờ khối lượng do tế bào vi khuẩn này sinh ra sẽ đạt tới khối lượng của Trái Đất (lấy khối lượng của Trái Đất là $6\cdot 10^{27}$ gam) (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

2. Bài tấp rèn luyên

BÀI 1. Trong nuôi trồng thuỷ sản, độ pH của môi trường nước sẽ ảnh hưởng đến sức khoẻ và sự phát triển của thuỷ sản. Độ pH thích hợp cho nước trong đầm nuôi tôm sú là từ 7,2 đến 8,8 và tốt nhất là trong khoảng từ 7,8 đến 8,5. Phân tích nồng độ $[\mathrm{H}^+]$ trong một đầm nuôi tôm sú, ta thu được [H⁺] = $8\cdot 10^{-8}$ (Nguồn: https://nongnghiep.farmvina.com). Hỏi đô pH của đầm đó có thích hợp cho tôm sú phát triển không?

BÀI 2. Biết thời gian cần thiết (tính theo năm) để tăng gấp đôi số tiền đầu tư theo thể thức lãi kép liên tục với lãi suất không đổi r mỗi năm được cho bởi công thức sau:

$$t = \frac{\ln 2}{r}.$$

Tính thời gian cần thiết để tăng gấp đôi một khoản đầu tư khi lãi suất là 6% mỗi năm (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất).

 \mathbf{B} Àl 3. Độ lớn M của một trận động đất theo thang Richter được tính theo công thức $M = \log \frac{A}{A_0}$, trong đó A là biên độ lớn nhất ghi được bởi máy đo địa chấn, A_0 là biên độ tiêu chuẩn được sử dụng để hiệu chỉnh độ lệch gây ra bởi khoảng cách của máy đo địa chấn so với tâm chấn $(A_0 = 1\mu m)$.

QUICK NOTE

•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•		•
•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•		•	•	•	•		•
		•	•	•	•	•	•	•	•						•	•	•	•	•	•	•	•			•		•					
•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	٠	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•		
•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	٠	٠	•	•	٠	•	•	•	•	•	•	•	٠	•	•	٠		٠	٠				•
		•	•	•	•	•	•								•	•	•	•	•	•	•											
																															•	
	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	٠	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•		•
		•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•		•	•	•	•	•	•	•	•	•	•		•		•	•	•	•		•
																															•	
								•	•			•										•			•			•	•	•		•

QUICK NOTE	a) Tính độ lớn của trận	động đất có biên độ	A bằng	
	i) $10^{5,1}A_0$;		ii) 65 $000A_0$.	
	 b) Một trận động đất tạ của trận động đất tại 			
	BÀI 4.			
	a) Nước cất có nồng độ l	H ⁺ là 10 ⁻⁷ mol/L. T	linh nồng đô nH của	nước cất
	b) Một dung dịch có nồ: dung dịch đó.	ng dọ H gap 20 tai	n nong dọ H · cua n	uoc cat. 11111 pH cua
	BÀI 5. Biết rằng khi độ cao dựa trên độ cao là	o tăng lên, áp suất kl	hông khí sẽ giảm và c	công thức tính áp suất
	dựa trên độ cao ia	a = 15500(5 - 1)	$-\log p),$	
	trong đó a là độ cao so với bằng pascal). Tính áp suất	•	· / ·	<u> </u>
	biển.	+ 1 > 1 ·1 1 / 1D) ? ^ 11 1 /	+^ T (+ 1 \\ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \
	BÀI 6. Mức cường độ âm L trên mét vuông, kí hiệu là V			$\operatorname{diag} \operatorname{diag} I$ (do bằng oát
		L(I) = 101	$og \frac{I}{I_0}$,	
	trong đó $I_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2$ được (gọi là ngưỡng nghe).			
	a) Cuộc trò chuyện bình			
	b) Giao thông thành phố		,	
			$d\phi I = Io W/III$.	
	3. Bài tập trắc nghi	•	2 2	
	CÂU 1. Sự phân rã của các ln 2			
	$t = \frac{\ln 2}{T}$, trong đó m_0 là kh			
	là khối lượng chất phóng xạ một nửa khối lượng chất pho			
	trình kiến trúc cổ, các nhà l	khoa học thấy rằng l	khối lượng cacbon ph	ống xạ ${}_{6}^{14}C$ trong mẫu
	gỗ đã mất 45% so với lượng khoảng bao nhiều năm? Ch			
	A 4942 (năm).	5157 (năm). (© 3561 (năm).	D 6601 (năm).
	CÂU 2. Biết rằng năm 200			
	đó là 1,7%. Cho biết sự tăn là dân số của năm lấy làm			
	năm). Hỏi nếu cứ tăng dân			
	triệu người? (A) 2020. (B)	2022. (c) 2025.	D 2026.
	CÂU 3. Một người gửi số ti			
	sau mỗi năm, số tiền lãi sẽ	sinh ra được nhập	vào vốn ban đầu để	tính lãi cho năm tiếp
	theo. Hỏi sau ít nhất bao n triệu đồng? (Giả thiết lãi sư			n cả vôn lân lài là 100
			c 4 năm.	D 5 năm.
	CÂU 4. Một người gửi 50 t	riệu đồng vào một 1	ngân hàng với lãi suấ	ất 6%/ năm. Biết nếu
	không rút tiền khỏi ngân h			
	cho năm tiếp theo. Hỏi sau đó nhiều là 100 triệu? Giả			
	đó không rút tiền ra.	-		
			© 12 năm.	D 13 năm.
	CÂU 5. Một người gửi tiết l Sau bao nhiêu năm người đ			m được nhập vào vồn.
	A 9.		© 8.	D 7.

CÂU 6. Cường độ một trận động đất M (richter) được cho bởi công thức $M = \log A - \log A_0$, với A là biên độ rung chấn tối đa và A_0 là một biên độ chuẩn (hằng số). Đầu thế kỷ 20, một trận động đất ở San Francisco có cường độ 8,3 độ richter. Trong cùng năm đó, trận động đất khác ở Nam Mỹ có biên độ rung chấn tối đa gấp 4 lần biên độ rung chấn tối đa của trận động đất ở San Francisco. Tính cường độ của trận động đất ở Nam Mỹ (làm tròn đến 1 chữ số thập phân).

- (A) 33,2 richter.
- **B**) 12,3 richter.
- **©** 8,9 richter.
- (D) 2,1 richter.

CÂU 7. Một người gửi tiết kiệm 200 triệu đồng với lãi suất 5% một năm và lãi hàng năm được nhập vào vốn. Sau 9 năm nhận được số tiền cả gốc và lãi nhận được là bao nhiêu?

- **A** 210, 55 triệu.
- **B**) 310, 27 triêu.
- **©** 300 triệu.
- (D) 352, 58 triêu.

CÂU 8. Áp suất không khí $P(\text{do bằng milimet thủy ngân, kí hiệu là mmHg) suy giảm mũ so với độ cao <math>x(\text{do bằng mét})$, tức là P giảm theo công thức $P = P_0 \cdot \mathrm{e}^{xi}$, trong đó $P_0 = 760$ mmHg là áp suất của mực nước biển (x=0), i là hệ số suy giảm. Biết rằng ở độ cao 1000 m thì áp suất của không khí là 672,71 mmHg. Hỏi áp suất không khí ở độ cao 3000 m gần bằng số nào dưới đây nhất?

- **A** 530,23 mmHg.
- **B**) 527,06 mmHg.
- **©** 554,38 mmHg.
- **D** 428,2 mmHg.

CÂU 9. Một nguồn âm đẳng hướng phát ra từ điểm O. Mức cường độ âm tại điểm M cách O một khoảng R được tính bởi công thức $L_M = \log \frac{k}{R^2}$ (Ben), với k > 0 là hằng số. Biết điểm O thuộc đoạn thẳng AB và mức cường độ âm thanh tại A và B lần lượt là $L_A = 4,3$ (Ben) và $l_B = 5$ (Ben). Tính mức cường độ âm tại trung điểm của AB (làm tròn đến hai chữ số thập phân).

- **A** 4,65 (Ben).
- **B** 4,58 (Ben).
- **©** 5,42 (Ben).
- **D** 9,40 (Ben).

Bài 20. HÀM SỐ MŨ. HÀM SỐ LOGARIT

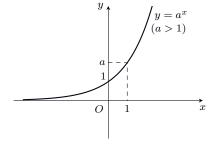
A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

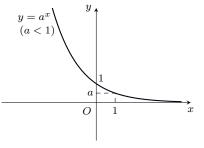
1. Định nghĩa

† Định Nghĩa 20.1. Cho số dương a khác 1. Hàm số cho tương ứng mỗi số thực x với số thực a^x được gọi là **hàm số mũ** cơ số a, kí hiệu $y=a^x$.

Nhận xét: Hàm số $y = a^x$ có tập xác định là \mathbb{R} .

Tực tung tại điểm có tung độ bằng 1, nằm ở phía trên trục hoành và đi lên nếu a>1, đi xuống nếu 0< a<1.





Nhận xét: Cho hàm số mũ $y = a^x$ $(a > 0, a \ne 1)$.

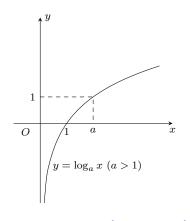
								(S	2	ι	J	(C	>	k	<		١	1	C)	T	E									
Ī	Ī		Ī												Ī	Ī			Ī	Ť		Ī			Ī								
•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	٠	٠	•	•	•	•	•	•	٠	٠	•	•	•	•	•	•	•	•	•
			•	•	•							•	•	•	•	•	•		•								•	•	•	•	•	•	•

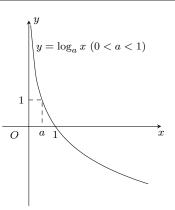
$y = a^x \ (a > a^x)$	> 1)	$y = a^x \ (0 < a < 1)$
$\mathscr{D} = \mathbb{R}; T = (0)$	$(+\infty)$.	$\mathscr{D} = \mathbb{R}, T = (0; +\infty).$
Tính liên tục: Hàm số	liên tục trên ℝ.	Tính liên tục: Hàm số liên tục trên \mathbb{R} .
Giới hạn đặc	biệt	Giới hạn đặc biệt
$\lim_{x \to -\infty} a^x = 0, \lim_{x \to +\infty}$	$a^x = +\infty.$	$\lim_{x \to -\infty} a^x = +\infty, \lim_{x \to +\infty} a^x = 0.$
Sự biến thiên: Hàm số đ	ồng biến trên \mathbb{R} .	Sự biến thiên: Hàm số nghịch biến trên \mathbb{R} .
Bảng biến t	hiên	Bảng biến thiên
$x - \infty$	$0 + \infty$	$x - \infty$ 0 $+\infty$
	+∞	+∞
$y = a^x$		$y = a^x$
0		0

† Định nghĩa 20.3. Cho số dương a khác 1. Hàm số cho tương ứng mỗi số thực dương x với số thực $\log_a x$ được gọi là **hàm số lô-ga-rít** cơ số a, kí hiệu $y = \log_a x$.

Nhận xét: Cho hàm số $y = \log_a x \ (a > 0, a \neq 1).$

_										
		$y = a^x$ ($= a^x (0 <$			
	$\mathscr{D} =$	= (0; +0)	$\circ); T = \mathbb{R}$			$\mathscr{D} =$	$=(0;+\infty$	$); T = \mathbb{R}.$		
Tí	nh liên tục: H	$lam s \delta$	liên tục tré	$en(0;+\infty)$	Tí	nh liên tục: H	Iàm số li	iên tục tro	\hat{e} n $(0; +\infty)$	၁).
	Gi	iới hạn	đặc biệt			G	iới hạn đ	lặc biệt		
	$\lim_{x \to +\infty} \log_a x$	$=+\infty,$	$\lim_{x\to 0^+}\log_a$	$x = -\infty$		$\lim_{x \to +\infty} \log_a x =$				
	Hàm số đ	ồng biế	n trên (0; -	$+\infty$).		Hàm số ng	ghịch biế	n trên (0;	$+\infty$).	
	В	ảng biế	n thiên			В	Bảng biến	n thiên		
	x	0	1	$+\infty$		x	0	1	+∞	
				$+\infty$			+∞			
	$y = \log_a x$	$-\infty$		7		$y = \log_a x$		0_	$-\infty$	





B. <u>CÁ</u>C DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

7

Tập xác định của hàm số

Hàm số $y = \log_a f(x)$ $(0 < a \neq 1)$ xác định khi f(x) > 0.

1. Ví dụ mẫu

VÍ DỤ 1. Tìm tập xác định của hàm số $y = 12^x$.

VÍ DỤ 2. Tìm tập xác định của các hàm số

a)
$$y = \log_2(3 - 2x)$$
.

b)
$$y = \log_3(x^2 + 4x)$$
.

VÍ DỤ 3. Tìm tập xác định của các hàm số sau

a)
$$y = \log |x + 3|$$
;

b)
$$y = \ln(4 - x^2)$$
.

VÍ DU 4. Tìm tập xác định của các hàm số

a)
$$y = \log_5(2x - 3);$$

b)
$$y = \log_{\frac{1}{5}} (-x^2 + 4).$$

2. Bài tấp rèn luyên

BÀI 1. Tìm tập xác định của các hàm số sau

a)
$$y = \log_6(x - 4)$$

e)
$$y = \log_2(x - x^2)$$

i)
$$y = \log_{2022} (3x - x^2)$$

b)
$$y = \log_5(2x - 1)$$

f)
$$y = \log_3(x - 4)$$

c)
$$y = \log_2(3 - 2x)$$

g)
$$y = \log_7(x+2)^2$$

d)
$$y = \log_{2021}(3 - x)$$

h)
$$y = \log(2 + x - x^2)$$

$$j) y = \log_2\left(\frac{x-6}{1+x}\right)$$

BÀI 2. Tìm tất cả giá trị của tham số m để hàm số sau xác định trên \mathbb{R}

a)
$$y = \log_2(x^2 - 2x + m)$$

d)
$$y = \ln(3x^2 + 12mx + 6)$$

b)
$$y = \log(x^2 - 2x - m + 1)$$

c)
$$y = \log_7 (x^2 - 2x - m^2 + 5)$$

e)
$$y = \log(x^2 - 8x + 10m - m^2)$$

3. Bài tập trắc nghiệm

CÂU 1. Tập xác định của hàm số $y = (2 - \sqrt{3})^x$ là

$$(\mathbf{A})(0;+\infty).$$

$$(\mathbf{B})(-\infty;+\infty).$$

$$\bigcirc$$
 $[0;+\infty).$

$$\bigcirc$$
 $(-\infty;0).$

CÂU 2. Tập xác định của hàm số $y = 7^x$ là

$$(\mathbf{B})(-\infty;+\infty).$$

$$(\mathbf{c})(0;+\infty).$$

CÂU 3. Tìm tập xác định \mathscr{D} của hàm số $y = \log_2 (x^2 - 2x - 3)$.

$$(-1;3).$$

CÂU 4. Hàm số $y = \log_3(2x - 3)$ có tập xác định là

$$lack {f A}$$
 $\Bbb R$.

$$\left(-\infty; \frac{3}{2}\right]$$
.

$$\bigcirc \left(-\infty; \frac{3}{2}\right).$$

CÂU 5. Tập xác định của hàm số $y = \log_3(2-x)$ là

$$(\mathbf{A})[2;+\infty).$$

$$(\mathbf{B})(-\infty;2].$$

$$\mathbb{C} \mathbb{R} \setminus \{2\}.$$

$$(\mathbf{D})(-\infty;2).$$

CÂU 6. Gọi \mathscr{D} là tập tất cả những giá trị của x để $\log_2(2018-x)$ có nghĩa. Tập \mathscr{D} là

A)
$$\mathscr{D} = [0; 2018].$$

B
$$\mathscr{D} = (-\infty; 2018).$$

$$\bigcirc \mathscr{D} = (-\infty \cdot 2018]$$

(B) $\mathscr{D} = (-\infty; 2018)$. (C) $\mathscr{D} = (-\infty; 2018]$. (D) $\mathscr{D} = (0; 2018)$.

CÂU 7. Tập xác định \mathscr{D} của hàm số $y = \log_2(x-3) + \log_3(x+2)$ là

$$(\mathbf{A}) \mathcal{D} = (-\infty; -2) \cup (3; +\infty).$$

$$\mathbf{B} \mathscr{D} = (-2; +\infty).$$

$$\bigcirc \mathscr{D} = (3; +\infty).$$

CÂU 8. Tìm tập xác định $\mathscr D$ của hàm số $y=\log_{13}\frac{x+2}{x-5}$

$$(\mathbf{A}) \mathcal{D} = (-\infty; 0] \cup (5; +\infty).$$

B
$$\mathscr{D} = [-2; 5).$$

$$(\mathbf{C})\,\mathscr{D}=(-\infty;-2]\cup[5;+\infty).$$

$$\bigcirc \mathscr{D} = (-\infty; -2) \cup (5; +\infty).$$

CÂU 9. Tập xác định $\mathscr D$ của hàm số $y=\log_5\frac{x+3}{x-2}$ là

$$\bigcirc \mathscr{D} = [-3; 2)$$
.

$$\mathbf{D} \mathscr{D} = (-\infty; -3] \cup (2; +\infty) .$$

CÂU 10. Tìm tập xác định \mathscr{D} của hàm số $y = \log(x^2 - 5x - 6)$.

$$\mathbf{A} \, \mathscr{D} = (-\infty; -1) \cup (6; +\infty).$$

$$\mathbf{B} \, \mathscr{D} = (-\infty; -1] \cup [6; +\infty).$$

$$\bigcirc \mathscr{D} = (-\infty; 2] \cup [3; +\infty).$$

$$\mathbf{D} \mathscr{D} = (-\infty; 2) \cup (3; +\infty).$$

CÂU 11. Tập xác định của hàm số $y = \ln(x^2 - 5x + 6)$ là

$$(-\infty; 2] \cup [3; +\infty).$$

$\overline{}$	 CK			
<i>1</i> 1		- 17	_	1 1-
$\overline{}$	 V - IV		•	ΙГ

0.011.40	Tìm tập xá	+· 1 @	? 1 \	ź 1	2-x
CAU 12.	Tim tap xa	c dinh 💯 (ua ham	so $u = \log$	
					$x^{2} + 1$

$$\mathbf{B} \, \mathscr{D} = (2; +\infty).$$

$$\bigcirc$$
 $\mathscr{D} = (-\infty; 2).$

CÂU 13. Tìm tập xác định \mathcal{D} của hàm số y = $\overline{\log_4(4-x)-3}$

$$\mathbf{B} \, \mathscr{D} = (-\infty; 4).$$

$$\bigcirc \mathscr{D} = (-\infty; -60) \cup (-60; 4].$$

CÂU 14. Tập xác định \mathscr{D} của hàm số $y = \log_5(x^2 + 2x - 3)$ là

$$\mathbf{B} \mathscr{D} = [-3; 1].$$

$$\bigcirc$$
 $\mathscr{D} = (-3; 1).$

$$\mathbf{D} \, \mathscr{D} = (-\infty; -3] \cup [1; +\infty).$$

CÂU 15. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \log_3(x^2 - 2mx + m + 6)$ có tập xác đinh là \mathbb{R} ?

CÂU 16. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \ln(x^2 - 2x + m + 1)$ có tập xác định là \mathbb{R} .

$$(\mathbf{A}) m = 0.$$

B)
$$0 < m < 3$$
.

$$\mathbf{c}$$
 $m < -1$ hoặc $m > 0$.

$$\bigcirc m > 0.$$

Sự biến thiên và đồ thị của hàm số mũ và lôgarít

1. Ví du mâu

VÍ DỤ 1. Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị hàm số $y = 3^x$.

VÍ DỤ 2. Vẽ đồ thị hàm số
$$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$$
.

VÍ DỤ 3. Vẽ đồ thị các hàm số sau:

a)
$$y = \log x$$
;

b)
$$y = \log_{\frac{1}{2}} x$$
.

VÍ DU 4. So sánh các cặp số sau:

a)
$$\log_3 7$$
 và $3\log_3 2$.

b)
$$2\log_{0,4} 5$$
 và $3\log_{0,4} 3$.

VÍ DU 5. Sử dụng tính chất của hàm số mũ, so sánh các cặp số sau:

a)
$$1.4^2$$
 và $1.4^{1.8}$.

b)
$$0.9^{-1.2}$$
 và $0.9^{-0.8}$.

c)
$$\sqrt[3]{2}$$
 và $\sqrt[5]{4}$.

2. Bài tấp rèn luyên

BÁI 1. Trong các hàm số sau, hàm số nào đồng biến, hàm số nào nghịch biến trên khoảng xác đinh của hàm số đó? Vì sao?

a)
$$y = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^x$$

a)
$$y = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^x$$
; b) $y = \left(\frac{\sqrt[3]{26}}{3}\right)^x$; c) $y = \log_{\pi} x$; d) $y = \log_{\frac{\sqrt{15}}{4}} x$.

c)
$$y = \log_{\pi} x$$
;

$$d) \ \ y = \log_{\frac{\sqrt{15}}{4}} x$$

BÀI 2. Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị hàm số $y = 4^x$;

BÀI 3. Vẽ đồ thị các hàm số sau: $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$.

BÀI 4. Vẽ đồ thị hàm số sau: $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$.

BÀI 5. Vẽ đồ thị các hàm số sau

a)
$$y = \log_{\frac{1}{4}} x$$
.

b)
$$y = \log_3 x$$

BÀI 6. So sánh các cặp số sau:

a)
$$\log_{\pi} 0.8$$
 và $\log_{\pi} 1.2$.

b)
$$\log_{0.3} 2$$
 và $\log_{0.3} 2,1$.

BÀI 7. So sánh các cặp số sau:

a)
$$1,3^{0,7}$$
 và $1,3^{0,6}$.

b)
$$0.75^{-2.3}$$
 và $0.75^{-2.4}$.

3. Bài tập trắc nghiệm

CÂU 1. Hàm số nào dưới đây đồng biến trên tập xác định của nó?

B
$$y = (0,6)^x$$
.

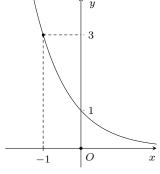
$$\mathbf{c}$$
 $y = \left(\frac{\mathrm{e}}{5}\right)^x$.

B
$$y = (0.6)^x$$
. **C** $y = \left(\frac{e}{5}\right)^x$. **D** $y = \left(\frac{3}{4}\right)^x$.

CÂU 2.

Hàm số nào sau đây có đồ thị như hình vẽ bên?

$$\mathbf{B} y = (\sqrt{3})^x.$$



CÂU 3. Hàm số nào sau đây đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$?

$$\mathbf{B} y = \left(\frac{2}{2}\right)^x$$

$$\mathbf{C}$$
 $y = \left(\frac{\pi}{3}\right)^x$

CÂU 4. Hàm số nào sau đây đồng biến trên tập xác định của nó?

B
$$y = \left(\sqrt{2020} - \sqrt{2019}\right)^x$$
.

$$\bigcirc y = \log_{\frac{1}{2}}(x+4).$$

CÂU 5. Trong các hàm số sau, hàm số nào nghich biến trên \mathbb{R} ?

$$\bigcirc y = \log_3 x^2.$$

CÂU 6. Trong các hàm số dưới đây, hàm số nào nghịch biến trên khoảng \mathbb{R} ?

$$\mathbf{A} y = (0.5)^x.$$

$$\mathbf{B} y = 2^x.$$

$$\mathbf{C} y = \pi^x$$
.

$$\mathbf{D} y = e^x$$
.

CÂU 7. Cho hàm số $y = e^x$. Mệnh đề nào sau đây là **sai**?

- (A) Đồ thị hàm số đi qua điểm A(1;0).
- (B) Tập xác định của hàm số $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.
- (**c**) Hàm số có đạo hàm $y' = e^x, \forall x \in \mathbb{R}$.
- D Đồ thị hàm số nhận trục hoành là tiệm cận ngang.

CÂU 8. Tìm tất cả các giá trị của a để hàm số $y = (2020 - a)^x$ nghịch biến trên \mathbb{R} .

$$\bigcirc$$
 $a < 2019.$

B
$$2019 < a < 2020$$
. **C** $0 < a < 1$.

$$\bigcirc 0 < a < 1.$$

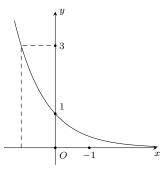
$$\bigcirc$$
 $a < 2020.$

CÂU 9.

Đồ thị trong hình vẽ bên dưới là đồ thị của hàm số nào sau

$$\mathbf{c} \left(\frac{1}{3}\right)^x$$
.

$$\bigcirc \left(\sqrt{3}\right)^x.$$



CÂU 10. Hàm số nào dưới đây nghịch biến trên tập xác định của nó?

$$\mathbf{A} y = (\sqrt{2})^x.$$

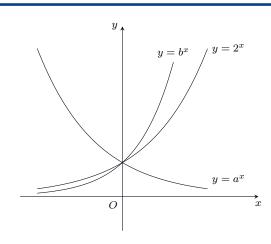
19

$$\mathbf{B} y = \left(\frac{3}{2}\right)^x.$$

$$\mathbf{C} y = \left(\frac{\pi}{e}\right)^x.$$

CÂU 11. Cho hai số thực a, b khác 1 và đồ thị của ba hàm số $y = a^x, y = b^x, y = 2^x$ trên cùng một hệ trực tọa độ có dạng như hình vẽ bên.





Mệnh đề nào sau đây đúng?

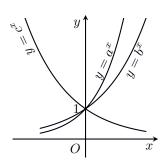
- \bigcirc 1 < a < 2, 1 < b < 2.
- \bigcirc 0 < a < 1, b > 2.

- **B**) 0 < a < 1, 1 < b < 2.
- **D** 1 < a < 2, b > 2.

CÂU 12.

Cho đồ thị ba hàm số $y = a^x$, $y = b^x$, $y = c^x$ như hình vẽ bên. Kết luận nào sau đây đúng?

- (A) 0 < c < 1 < b < a.
- **B**) 0 < a < 1 < c < b.
- $\bigcirc 0 < a < 1 < b < c.$
- \bigcirc 0 < c < 1 < a < b.



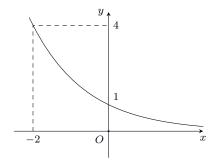
CÂU 13. Trong các hàm số sau đây, hàm số nào nghịch biến trên tập xác định của nó?

- \mathbf{A} $y = \ln x$.
- $\bigcirc y = \log_{\underline{2}} x.$
- $(\mathbf{D})y = \log_{\sqrt{3}} x.$

CÂU 14.

Đường cong ở hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?.

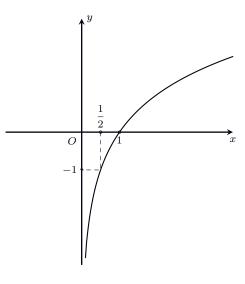
- $A y = \frac{1}{2^x}.$
- **B** $y = \log_{0.5} x$.
- $(c) y = 2^x.$
- \mathbf{D} $y = -x^2 + 2x + 1$.



CÂU 15.

Đường cong trong hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

- **(A)** $y = \log_2 x.$
- $\mathbf{B}) y = \log_{\sqrt{2}} x.$
- $\bigcirc y = \log_2 2x.$



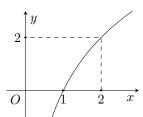
CÂU 16.

Tìm giá trị a của hàm số $y = \log_a x \; (0 < a \neq 1)$ có đồ thị như hình vẽ bên.

$$\bigcirc$$
 $a=2.$

$$a = \frac{1}{2}$$

©
$$a = \frac{1}{2}$$
. **D** $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$.



CÂU 17.

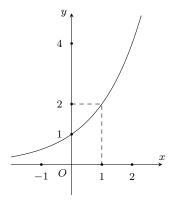
Đồ thị sau là của hàm số nào dưới đây?

$$(\mathbf{A}) y = \ln x.$$

$$(\mathbf{B}) \, y = 2^x.$$

$$\bigcirc y = \log_2 x.$$

$$\bigcirc$$
 $y = 4^x$.

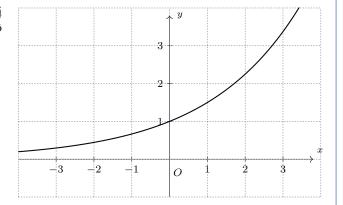


CÂU 18. Cho hàm số $y = \log_{\frac{1}{\sqrt{3}}} x$. Khẳng định nào dưới đây sai?

- \triangle Đồ thị hàm số đi qua điểm (1;0).
- B Đồ thị hàm số nằm phía trên trục hoành.
- (c) Hàm số nghịch biến trên $(0; +\infty)$.
- (D) Đồ thị hàm số nằm bên phải trực tung.

CÂU 19.

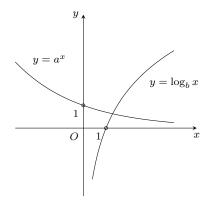
Đồ thị như hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào trong các hàm số sau



CÂU 20.

Cho đồ thị hàm số $y = a^x, y = \log_b x$ (như hình vẽ). Khẳng định nào sau đây đúng?

- (A) 0 < b < 1 < a.
- **(B)** 0 < a < 1 < b.
- (c) a, b > 1.
- $(\mathbf{D}) 0 < a, b < 1.$



CÂU 21.

.....

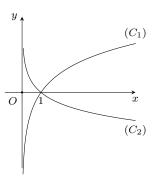
.....

.....

.....

Cho hai hàm số $y = \log_a x$, $y = \log_b x$ với a, b là hai số thực dương, khác 1 có đồ thị lần lượt là (C_1) , (C_2) như hình vẽ. Khẳng đinh nào sau đây **sai**?

- $\bigcirc 0 < b < a < 1.$
- **B** a > 1.
- $\bigcirc 0 < b < 1 < a.$
- \bigcirc 0 < b < 1.



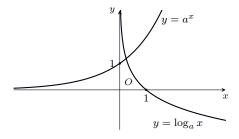
CÂU 22. Cho a là số thực dương khác 1. Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau.

- lack A Đồ thị hàmg số $y = a^x$ với 0 < a < 1 đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.
- **B** Hàm số $y = a^x$ với a > 1 nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.
- f C Đồ thị hàm số $y=a^x$ luôn đi qua điểm M(a;1).

CÂU 23.

Cho đồ thị hàm số $y=a^x,\ y=\log_b x$ như hình vẽ. Trong các khẳng định sau, đâu là khẳng định đúng?

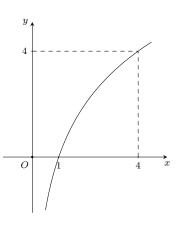
- \bigcirc 0 < b < 1 < a.
- **B**) a > 1, b > 1.
- $\bigcirc 0 < a < 1 < b.$
- \bigcirc 0 < a < 1, 0 < b < 1.



CÂU 24.

Hàm số $y = \log_a x \; (0 < a \neq 1)$ có đồ thị là hình bên. Giá trị của cơ số a bằng

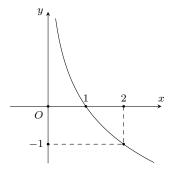
- **A** $\sqrt[4]{2}$.
- **B** 4.
- \mathbf{C} $\sqrt{2}$.
- **D** 2.



CÂU 25.

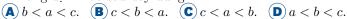
Đường cong trong hình bên dưới là đồ thị của một trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

- $\bigcirc y = \log_{\frac{1}{2}} x.$

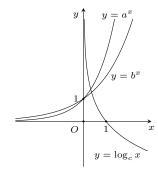


CÂU 26.

Cho đồ thị các hàm số $y = a^x$, $y = b^x$ và $y = \log_c x$ như hình vē. Khẳng định nào sau đây đúng?







CÂU 27.

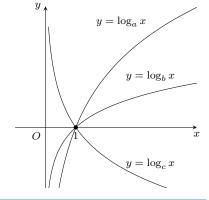
Cho đồ thị của ba hàm số $y = \log_a x, y =$ $\log_b x$, $y = \log_c x$ như hình vē. Khẳng định nào sau đây đúng?

$$(\mathbf{A})$$
 $b > c > a$.

$$\bigcirc b > a > c$$

$$(c)$$
 $c > a > b$.

B
$$b > a > c$$
.
D $c > b > a$.



Bài toán thực tế

1. Ví du mẫu

VÍ DU 1. Ta coi năm lấy làm mốc để tính dân số của một vùng (hoặc một quốc gia) là năm 0. Khi đó, dân số của quốc gia đó ở năm thứ t là hàm số theo biến t được cho bởi công thức: $S = A \cdot e^{rt}$. Trong đó A là dân số của vùng (hoặc quốc gia) đó ở năm 0 và r là tỉ lê tăng dân số hằng năm (Nguồn: Giải tích 12, NXBGD Việt Nam, 2021). Biết rằng dân số Việt Nam năm 2021 ước tính là 98564407 người và tỉ lệ tăng dân số 0.93%/năm (Nguồn: https://danso.org/viet-nam). Giả sử tỉ lệ tăng dân số hằng năm là như nhau tính từ năm 2021, nêu dư đoán dân số Việt Nam năm 2030 (làm tròn kết quả đến hàng đơn vi).

VÍ DỤ 2. Năm 2020, dân số thế giới là 7,795 tỉ người và tốc độ tăng dân số là 1,05%/năm (nguồn: http://www.worldmeters.info/world-population). Nếu tốc độ tăng này tiếp tục duy trì ở những năm tiếp theo thì dân số thế giới sau t năm kể từ năm 2020 được tính bởi công thức

$$P(t) = 7.795 \cdot (1 + 0.0105)^t$$
 (tỉ người). (*)

Khi đó, hãy tính dân số thế giới vào năm 2025 và năm 2030. (Mốc thời điểm để tính dân số của mỗi năm là ngày 1 tháng 7.)

Chú ý: Với giả thiết tốc độ tăng dân số 1,05%/năm không đổi, công thức (*) được áp dụng để tính dân số thế giới tại thời điểm bất kì sau năm 2020. Chẳng hạn, dân số thế giới tại thời điểm ngày 1 tháng 1 năm 2022 (ứng với t = 1.5) là

$$P(1,5) = 7,795 \cdot (1 + 0,0105)^{1,5} \approx 7,918$$
 (tỉ người).

VÍ DU 3. Trong Vật lí, sự phân rã của các chất phóng xạ được cho bởi công thức: m(t) =

 $m_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$; trong đó m_0 là khối lượng chất phóng xạ ban đầu (tại thời điểm t=0), m(t)

là khối lương chất phóng xa tai thời điểm t và T là chu kì bán rã (Nguồn: Giải tích 12, NXBGD Việt Nam, 2021). Hat nhân Poloni (Po) là chất phóng xa α có chu kì bán rã là 138 ngày (Nguồn: Vật lí 12, NXBGD Việt Nam, 2021). Giả sử lúc đầu có 100 gam Poloni. Tính khối lượng Poloni còn lại sau 100 ngày theo đơn vị gam (làm tròn kết quả đến hàng phần

VÍ DU 4. Lốc xoáy là hiện tượng một luồng không khí xoáy tròn mở rộng ra từ một đám mây dông xuống tới mặt đất. Các cơn lốc xoáy thường có sức tàn phá rất lớn. Tốc độ của gió (đơn vị: dặm/giờ) gần tâm của một cơn lốc xoáy được tính bởi công thức: $S = 93 \log d + 65$,

				•													•	•															
	•	•	•	•		•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•		•	•	•		•		
	•	•	•	•	٠	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•		•	•	•	•	•	٠	•	•	•	•	•	•	
•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•		•	•	•	•	•	•	•	•	•	٠	•	•		•
•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
•	•		•	•	•	•	•	•	•	•		•			•	•		•	•		•	•	•	•	•	•	•	•	•				
						•	•	•	•	•																							
				•													•	•															
			•	٠	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•		٠	٠									•	•			٠		•
	٠	٠		•	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	•	•	٠	٠	٠						٠	٠					
•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•		•
																				•													

•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•

QUICK	NOTE
 QUICK	INOIL

(Nguồn: Ron Larson, Intermediate Algebra, Cengage) trong đó d (đơn vị: dặm) là quãng đường cơn lốc xoáy di chuyển được. Hãy tính tốc độ của gió ở gần tâm (làm tròn kết quả đến hàng đơn vi) khi cơn lốc xoáy di chuyển được quãng đường là

a) $5 \, d \tilde{a} m$ b) $10 \, d \tilde{a} m$

VÍ DỤ 5. Trong âm học, mức cường độ âm được tính bới công thức $L=10\log\left(\frac{I}{I_0}\right)$ (dB)

(dB là đơn vị mức cường độ âm, đọc là đề-xi-ben), trong đó I là cường độ âm tính theo W/m^2 và $I_0=10^{-12}~W/m^2$ là cường độ âm chuẩn (cường độ âm thấp nhất mà tai người bình thường có thể nghe được).

(Nguồn: Vật lí 12, NXB Giáo dục Việt Nam, năm 2017, trang 52,53)

- a) Mức cường độ âm L thấp nhất mà tai người có thể nghe được là bao nhiêu?
- b) Cuộc trò chuyện có cường độ âm 10^{-9} W/m² thì có mức cường độ âm bằng bao nhiêu?
- c) Cường độ âm tại một khu văn phòng nằm trong miền từ 10^{-7} W/m² đến $5 \cdot 10^{-6}$ W/m² (tức là $10^{-7} \le I \le 5 \cdot 10^{-6}$). Mức cường độ âm tại khu văn phòng này nằm trong khoảng nào? (Làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

2. Bài tập rèn luyện

BÀI 1. Giả sử một chất phóng xạ bị phân rã theo cách sao cho khối lượng m(t) của chất còn lại (tính bằng kilôgam) sau t ngày được cho bởi hàm số $m(t) = 13e^{-0.0015t}$.

- a) Tìm khối lượng của chất đó tại thời điểm t = 0.
- b) Sau 45 ngày khối lượng chất đó còn lại là bao nhiêu?

BÀI 2. Các nhà tâm lí học sử dụng mô hình hàm số mũ để mô phỏng quá trình học tập của một học sinh như sau: $f(t) = c \left(1 - e^{-kt}\right)$, trong đó c là tổng số đơn vị kiến thức học sinh phải học, k (kiến thức/ngày) là tốc độ tiếp thu của học sinh, t (ngày) là thời gian học và f(t) là số đơn vị kiến thức học sinh đã học được (Nguồn: R.I. Charles et al., Algebra 2, Pearson). Giả sử một em học sinh phải tiếp thu 25 đơn vị kiến thức mới. Biết rằng tốc độ tiếp thu của em học sinh là k = 0,2. Hỏi em học sinh sẽ nhớ được (khoảng) bao nhiêu đơn vị kiến thức mới sau 2 ngày? Sau 8 ngày?

BÀI 3. Chỉ số hay độ pH của một dung dịch được tính theo công thức: pH = $-\log [\mathrm{H}^+]$. Phân tích nồng độ ion hydrogen $[\mathrm{H}^+]$ trong hai mẫu nước sông, ta có kết quả sau: Mẫu 1: $[\mathrm{H}^+] = 8 \cdot 10^{-7}$; Mẫu 2: $[\mathrm{H}^+] = 2 \cdot 10^{-9}$. Không dùng máy tính cầm tay, hãy so sánh độ pH của hai mẫu nước trên.

BÀI 4. Cường độ ánh sáng I dưới mặt biển giảm dần theo độ sâu theo công thức $I = I_0 \cdot a^d$, trong đó I_0 là cường độ ánh sáng tại mặt nước biển, a > 0 là hằng số và d là độ sâu tính bằng mét tính từ mặt nước biển.

(Nguồn: http://www.britannica.com/science/seawer/Optical-properties)

- a) Có thể khẳng định rằng 0 < a < 1 không? Giải thích.
- b) Biết rằng cường độ ánh sáng tại độ sâu 1m bằng $0.95I_0$. Tìm giá trị của a.
- c) Tại độ sâu 20m, cường độ ánh sáng bằng bao nhiêu phần trăm so với I_0 ? (Làm tròn kết quả đến hàng đơn vị.)

BÀI 5. Một người gửi 10 triệu đồng vào ngân hàng theo hình thức lãi kép có kì hạn là 12 tháng vối lãi suất 6%/năm. Giả sử qua các năm thì lãi suất không thay đổi và người đó không gửi thêm tiền vào mỗi năm. Để biết sau y (năm) thì tổng số tiền cả vốn và lãi có được là x (đồng), người đó sử dụng công thức $y = \log_{1,06} \left(\frac{x}{10}\right)$. Hỏi sau bao nhiêu năm thì người đó có được tổng số tiền cả vốn và lãi là 15 triệu đồng? 20 triệu đồng? (Làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

BÀI 6. Trong một nghiên cứu, một nhóm học sinh được cho xem cùng một danh sách các loài động vật và được kiểm tra lại xem họ còn nhớ bao nhiêu phần trăm danh sách đó sau mỗi tháng. Giả sử sau t tháng, khả năng nhớ trung bình của nhóm học sinh đó được tính theo công thức $M(t) = 75 - 20 \ln(t+1), \ 0 \le t \le 12$ (đơn vị: %). Hãy tính khả năng nhớ trung bình của nhóm học sinh đó sau 6 tháng.

BÀI 7	. Cường	độ ánh	sáng ${\cal I}$	dưới n	ıặt bi	ển giản	n dần	theo	độ s	âu the	o công	thức	I = I	$0 \cdot a^d$
trong	đó I_0 là	cường	độ ánh	sáng t	ại mà	át nước	biển.	, a >	0 là	hằng	số và	d là d	độ sâu	ı tính
bằng	mét tính	từ mặt	nước b	oiển.										

(Nquồn: http://www.britannica.com/science/seawer/Optical-properties)

- a) Có thể khẳng định rằng 0 < a < 1 không? Giải thích.
- b) Biết rằng cường độ ánh sáng tại độ sâu 1m bằng $0.95I_0$. Tìm giá trị của a.
- c) Tại độ sâu 20m, cường độ ánh sáng bằng bao nhiêu phần trăm so với I_0 ? (Làm tròn kết quả đến hàng đơn vị.)

BÀI 8. Công thức $h=-19,4\cdot\log\frac{P}{P_0}$ là mô hình đơn giản cho phép tính độ cao h so với mặt nước biển của một vị trí trong không trung (tính bằng ki-lô-mét) theo áp suất không khí P tại điểm đó và áp suất P_0 của không khí tại mặt nước biển (cùng tính bằng Pa - đơn vị áp suất, đọc là Pascal).

(Nguồn: http://doi.org/10.1007/s40828-020-0111-6)

- a) Nếu áp suất không khí ngoài máy bay bằng $\frac{1}{2}P_0$ thì máy bay đang ở độ cao nào?
- b) Áp suất không khí tại đỉnh của ngọn núi A bằng $\frac{4}{5}$ lần áp suất không khí tại đỉnh của ngọn núi B. Ngọn núi nào cao hơn và cao hơn bao nhiêu ki-lô-mét? (Làm tròn kết quả đến hàng phần mười.)

3. Bài tập trắc nghiệm

CÂU 1. Một quần thể vi khuẩn bắt đầu từ 100 cá thể và cứ sau 3 giờ thì số cá thể lại tăng gấp đôi. Bởi vậy số cá thể vi khuẩn được biểu thị theo thời gian t (đơn vị giờ) bằng công thức $N(t) = 100 \cdot 2^{\frac{t}{3}}$. Hỏi sau bao lâu thì quần thể này đạt tới 50000 cá thể (làm tròn đến hàng phần mười)?

A 36,8 giờ.

B 30,2 giờ.

c 26,9 giờ.

D 18,6 giờ.

CÂU 2. Năm 2020, một doanh nghiệp X có tổng doanh thu là 150 tỉ đồng. Dự kiến trong 10 năm tiếp theo, tổng doanh thu mỗi năm sẽ tăng thêm 12% so với năm liền trước. Theo dự kiến đó thì kể từ năm nào, tổng doanh thu của doanh nghiệp X vượt quá 360 tỉ đồng?

(A) 2026.

B) 2027.

(c) 2028.

2029

CÂU 3. Một người gửi tiền vào ngân hàng với lãi suất không thay đổi là 6%/ năm. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm, số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn ban đầu (người ta gọi là lãi kép). Người đó định gửi tiền trong vòng 3 năm, sau đó rút ra 500 triệu đồng. Hỏi số tiền ít nhất người đó phải gửi trong ngân hàng (làm tròn đến hàng triệu) là bao nhiêu triệu đồng?

(A) 420.

B) 410.

(c) 400.

D 390.

CÂU 4. Ông Hùng dự định gửi vào ngân hàng một số tiền với lãi suất 6.5% một năm. Biết rằng cứ sau mỗi năm số tiền lãi sẽ gộp vào vốn ban đầu. Số tiền x (triệu đồng, $x \in \mathbb{N}$) nhỏ nhất mà ông Hùng cần gửi vào ngân hàng để sau ba năm (mới rút lãi) thì số tiền lãi có thể mua một chiếc xe máy trị giá 60 triệu đồng là

A 280.

B) 289.

(C) 300.

D 308.

CÂU 5. Ông X gửi vào ngân hàng 60 triệu đồng theo hình thức lãi kép. Lãi suất ngân hàng là 8% trên năm. Sau 5 năm ông X tiếp tục gửi thêm 60 triệu đồng nữa. Hỏi sau 10 năm kể từ lần gửi đầu tiên ông X đến rút toàn bộ tiền gốc và tiền lãi được là bao nhiêu? (Biết lãi suất không thay đổi qua các năm ông X gửi tiền).

A 217,695 (triệu đồng).

(B) 231,815 (triệu đồng).

(c) 190,271 (triệu đồng).

(**D**) 197,201 (triệu đồng).

CÂU 6. Năm 2000 và năm 2020, giá xăng trung bình ở Việt Nam lần lượt là 5000 VND/1 lít và 15000 VND/1 lít. Giả sử r% là tỷ lệ tăng giá xăng trung bình hàng năm trong giai đoạn từ năm 2000 đến năm 2020 ở Việt Nam. Hỏi r% bằng bao nhiêu?

A 5,46%.

B) 5%.

(C) 4,56%.

(**D**) 5,64%.

QUICK NOTE	CÂU 7. Số lượng của loại vi khuẩn A trong một phòng thí nghiệm được tính theo công thức $S(t) = S(0) \cdot 2^t$, trong đó $S(0)$ là số lượng vi khuẩn A lúc ban đầu, $S(t)$ là số lượng vi khuẩn A sau t phút. Biết sau 4 phút thì số lượng vi khuẩn A trong phòng thí nghiệm là 250 nghìr con. Hỏi sao bao lâu, kể từ lúc ban đầu, số lượng vi khuẩn A trong phòng thì nghiệm là 1 triệu con?
	A 6 phút. B 64 phút. C 16 phút. D 8 phút.
	CÂU 8. Một người gửi tiết kiệm vào ngân hàng với lãi suất 7,5%/năm. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm số tiền lãi được nhập vào số tiền vốn để tính lãi cho năm tiếp theo. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu năm nữa thì số tiền người đó thu được (cả số tiền gửi ban đầu và số tiền lãi) gấp đôi số tiền đã gửi ban đầu? Giả định trong khoảng thời gian này lãi suất không thay đổi và người đó không rút tiền ra. (A) 9 năm. (B) 10 năm. (C) 12 năm. (D) 11 năm.
	Bài 21. PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ VÀ
	LÖGARIT
	A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT
	1. Phương trình mũ
······································	 Phương trình mũ là phương trình có chứa ẩn ở số mũ của lũy thừa.
	$igoplus Phương trình mũ cơ bản ẩn x có dạng a^x = b \ (a > 0, a \neq 1).$
	— Nếu $b \leq 0$ thì phương trình vô nghiệm.
	— Nếu $b>0$ thì phương trình có nghiệm duy nhất $x=\log_a b$.
	7 Nhận xét.
	\bullet Với $a > 0, a \neq 1, b > 0$ thì $a^{f(x)} = b \Leftrightarrow f(x) = \log_a b$.
	$m{\odot}$ Với $a>0, a\neq 1$ thì $a^{f(x)}=a^{g(x)}\Leftrightarrow f(x)=g(x).$ Cách giải phương trình mũ như trên thường được gọi là phương pháp đưa về cùng $c\sigma$ $s\delta$.
	co so .
	2. Phương trình lôgarit
	❷ Phương trình lôgarit là phương trình có chứa ẩn trong biểu thức dưới dấu lôgarit.
	$igoplus $ Phương trình lôgarit cơ bản có dạng $\log_a x = b \ (a > 1, a \neq 1)$. Phương trình đó có một nghiệm là $x = a^b$.
	7 NHẬN XÉT.
	$igotimes$ Với $a>0, a \neq 1$ thì $\log_a f(x)=b \Leftrightarrow f(x)=a^b.$
	3. Bất phương trình mũ
	Bất phương trình mũ là bất phương trình có chứa ẩn ở số mũ của lũy thừa.
	Bất phương trình mũ cơ bản là bất phương trình có một trong những dạng sau:
	$a^{x} > b; a^{x} < b; a^{x} \ge b; a^{x} \le b \ (a > 0, a \ne 1).$
	$a > b; a < b; a \ge b; a \le b \ (a > 0, a \ne 1).$
	$igotimes$ Xét bất phương trình mũ: $a^x > b \ (a > 0, a \neq 1)$.
	— Nếu $b \leq 0$, tập nghiệm của bất phương trình đã cho là \mathbb{R} (vì $a^x>0\geq b, \forall x\in\mathbb{R}$)
	— Nếu $b>0$ thì bất phương trình tương đương với $a^x>a^{\log_a^b}$.
	Với $a > 1$, nghiệm của bất phương trình là $x > \log_a b$. Với $0 < a < 1$, nghiệm của bất phương trình là $x < \log_a b$.
	NHẬN XÉT. Các bất phương trình mũ cơ bản còn lại được giải tương tự.

4. Bất phương trình lôgarit

- ❷ Bất phương trình lôgarit là bất phương trình có chứa ẩn trong biểu thức dưới dấu lôgarit
- ❷ Bất phương trình lôgarit cơ bản là bất phương trình lôgarit có một trong các dạng sau:

$$\log_a x > b; \log_a x < b; \log_a x \ge b; \log_a x \le b (a > 0, a \ne 1).$$

- \odot Xét bất phương trình $\log_a x > b \ (a > 0, a \neq 1)$. Bất phương trình tương đương với $\log_a x > \log_a a^b$.
 - Với a > 1, nghiệm của bất phương trình là $x > a^b$.
 - Với 0 < a < 1, nghiệm của bất phương trình là $0 < x < a^b$.
- NHẬN XÉT. Các bất phương trình lôgarit cơ bản còn lại được giải tương tự.

B. CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

Phương trình mũ, lôgarit cơ bản

Sử dụng các công thức

- $oldsymbol{\Theta} a^{f(x)} = b \Leftrightarrow f(x) = \log_a b \ (a, b > 0; a \neq 1).$
- Θ $\log_a f(x) = b \Leftrightarrow f(x) = a^b \ (a > 0; a \neq 1).$

1. Ví du mẫu

VÍ DU 1. Tìm điều kiện xác đinh của các phương trình sau

a)
$$\log_2(2x - 1) = 3$$
.

b)
$$\log_3(-x^2 + 2x) = -1$$
.

VÍ DU 2. Giải mỗi phương trình sau:

a)
$$4^{2x-3} = 5$$
;

b)
$$10^{x+1} - 2 \cdot 10^x = 8$$
.

VÍ DU 3. Giải phương trình $10^{x-1} = 2022$.

VÍ Dụ 4. Giải các phương trình sau

a)
$$2^x = \frac{1}{8}$$
.

b)
$$5 \cdot 10^x = 1$$
.

c)
$$3^{x+2} = \sqrt[3]{9}$$
.

d)
$$2 \cdot 10^{2x} = 30$$
.

VÍ DU 5. Giải mỗi phương trình sau:

a)
$$\log_2 x = 5$$
;

b)
$$\log_4(5x - 4) = 2$$
.

VÍ DU 6. Giải phương trình $4 + 3\log(2x) = 16$.

VÍ DU 7. Giải các phương trình sau

a)
$$\log_3 x = -2$$
.

b)
$$\log_{\frac{1}{2}}(x-2) = -2$$
.

2. Bài tấp rèn luyên

BÀI 1. Tìm điều kiện xác định của các phương trình sau

a)
$$\log_5(3-4x)=2$$
.

b)
$$\log(x^2 - 2x - 3) = 3$$
.

BÀI 2. Giải các phương trình sau

a)
$$(0,3)^{x-3} = 1$$
.

b)
$$3^{x-1} = 27$$
.

c)
$$5^{3x-2} = 25$$
.

d)
$$3^{x+2} = 7$$
.

e)
$$3 \cdot 10^{2x+1} = 5$$
.

f)
$$10^{1-2x} = 100000$$
.

BÀI 3. Giải các phương trình sau

a)
$$\log(x+1) = 2$$
.

b)
$$\log_6(4x+4) = 2$$
.

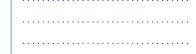
c)
$$\log_{\frac{1}{6}}(x+1) = -3$$
.

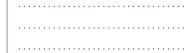
d)
$$\log_3 x + \log_3(x-2) = 1$$
.

				•												
				•												

•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	
•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	٠	٠	٠	•	٠	٠	•

•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•









 nair	1 - 09	62940	0819 ♥
ຊຸບ	ICK	NO.	TE
 • • • •			
 		• • • • •	
 		• • • • •	
 • • • •		• • • • • •	
 		• • • • •	
 		• • • • •	

3. Bài tập trắc nghiệm

CÂU 1. Điều kiện xác định của phương trình $\log_3(x-2)=1$ là

(A) x = 2.

 $(\mathbf{B}) x \geq 2.$

(D) x > 5.

CÂU 2. Điều kiện xác định của phương trình $\ln \frac{1-x}{x+1} = 3$ là

(A) x < 1.

(B) $x \neq -1$.

(c) x < -1 hoặc x > 1.

 $(\mathbf{D}) - 1 < x < 1.$

CÂU 3. Tìm nghiệm của phương trình $3^{x-1} = 27$.

(A) x = 9.

 $(\mathbf{C})x = 4.$

(D) x = 10.

(B) x = 3.

(A) $\{0; 2\}.$

CÂU 4. Tập nghiệm của phương trình $3^{2x^2-x}=3$ là

 \bigcirc $\left\{-1; \frac{1}{2}\right\}.$

CÂU 5. Tập nghiệm của phương trình $\log_2(x^2-1)=3$ là

 $(A) \{-3; 3\}.$

(B) $\{-3\}.$

 \bigcirc $\{-\sqrt{10}; \sqrt{10}\}.$

CÂU 6. Tập nghiệm của phương trình $\log(10x) = 2$ là

(B) {10}.

 $(\mathbf{C})\{1\}.$

 $(\mathbf{D})\{100\}.$

CÂU 7. Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $2^{x^2-3x+2}=1$. Tính $P=x_1^2+x_2^2$.

(A) P = 10.

(B) P = 8.

(**c**) P = 5.

(D) P = 13.

CÂU 8. Tìm tập nghiệm S của phương trình $\log_2(x-1) + \log_2(x+1) = 3$.

(A) $S = \{-3, 3\}.$

(B) $S = \{4\}.$

 $(\mathbf{C}) S = \{3\}.$

 $(\mathbf{D}) S = \{-\sqrt{10}; \sqrt{10}\}.$

CÂU 9. Phương trình $2^x + 2^{x-1} + 2^{x-2} = 3^x - 3^{x-1} + 3^{x-2}$ có nghiêm

(D) x = 3.

CÂU 10. Biết rằng phương trình $\log_2 x + \log_3 x = 1 + \log_2 x \log_3 x$ có hai nghiệm x_1, x_2 . Giá trị của $x_1^2 + x_2^2$ bằng

(A) 5.

CÂU 11. Tổng tất cả các nghiệm của phương trình $2^{x^2-2x-1} \cdot 3^{x^2-2x} = 18$ bằng

CÂU 12. Tổng tất cả các nghiệm của phương trình $\log_2|x^2+2x-3|-\log_2|x+3|=3$ bằng

(A) 9.

(B) -2.

 $(\mathbf{C}) - 4.$

Bất phương trình mũ, lôgarít cơ bản

Xét bất phương trình mũ: $a^x > b$ $(a > 0, a \neq 1)$.

• Nếu $b \leq 0$, tập nghiệm của bất phương trình đã cho là \mathbb{R} (vì $a^x > 0 \geq b, \forall x \in \mathbb{R}$).

• Nếu b > 0 thì bất phương trình tương đương với $a^x > a^{\log_a^b}$. Với a > 1, nghiệm của bất phương trình là $x > \log_a b$. Với 0 < a < 1, nghiệm của bất phương trình là $x < \log_a b$.

Bất phương trình tương đương với $\log_a x > \log_a a^b$.

• Với a > 1, nghiệm của bất phương trình là $x > a^b$.

• Với 0 < a < 1, nghiệm của bất phương trình là $0 < x < a^b$.

1. Ví dụ mấu

VÍ DU 1. Giải mỗi bất phương trình sau:

a) $5^x > 12$;

b) $(0,3)^{x+1} > 1,7$.

VÍ DỤ 2. Giải bất phương trình $16^x > \frac{1}{9}$

VÍ DU 3. Giải mỗi bất phương trình sau

a) $\log_{\frac{1}{2}} x > -2;$

b) $\log_2(x+1) > 3$.

VÍ DỤ 4. Giải các bất phương trình sau

- a) $10^x < 0.001$.
- b) $0.4^x > 2$.
- c) $\left(\frac{1}{2}\right)^x \ge 2 \cdot 4^{2x}$.

VÍ DỤ 5. Giải các bất phương trình sau

a) $\log_{\frac{1}{3}}(x+1) < 2$.

b) $\log_5(x+2) \le 1$.

2. Bài tập rèn luyện

BÀI 1. Giải mỗi bất phương trình sau

a) $3^x > \frac{1}{243}$.

b) $\log(x-1) < 0$.

BÀI 2. Giải các bất phương trình sau

a) $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x+1} \leqslant 9$.

b) $4^x > 2^{x-2}$.

BÀI 3. Giải các bất phương trình sau

a) $\log_2(x-2) < 2$.

b) $\log(x+1) \ge \log(2x-1)$.

3. Bài tập trắc nghiệm

CÂU 1. Tìm tập nghiệm của bất phương trình $\left(\frac{1}{2}\right)^x < 4$.

- $(-2;+\infty).$
- **B**) (0; 4).
- $(-\infty;-2)$
- \bigcirc $(-\infty;2).$

CÂU 2. Giải bất phương trình $3^{x+2} \ge \frac{1}{9}$.

- (c) x < 4.
- \bigcirc x < 0.

CÂU 3. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2(x-1) > 3$ là

- (\mathbf{A}) $(4; +\infty)$.
- $(9; +\infty).$
- **(c)** $(10; +\infty)$.

CÂU 4. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_3 x \le 1$ là

- $(-\infty;3].$
- $(\mathbf{B})(-\infty;1].$
- $(\mathbf{C})(0;3].$
- (0;1].

CÂU 5. Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\log_2(2x+1) \ge \log_2(x-1)$.

- $(\mathbf{A}) S = [2; +\infty).$
- $\mathbf{B}) S = [-2; +\infty).$
- $(\mathbf{C}) S = \mathbb{R}.$
- $(\mathbf{D})S = (1; +\infty).$

CÂU 6. Tập nghiệm của bất phương trình $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{x}} < \frac{1}{2}$ là

- $(\mathbf{A})(-\infty;1).$
- **B**) (0; 1).
- **(c)** $(1; +\infty)$.
- \mathbb{D} \mathbb{R} .

CÂU 7. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2(3-x) < 2$ là

- (1;3).
- $(\mathbf{B})(3;+\infty).$
- $(\mathbf{c})(-\infty;1).$
- (-1;3).

CÂU 8. Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $5^{x+1} - \frac{1}{5} > 0$.

- (A) $S = (1; +\infty).$
- (c) $S = (-2; +\infty).$
- $(\mathbf{D})S = (-1; +\infty).$

CÂU 9. Tập nghiệm của bất phương trình $\left(\frac{3}{4}\right)^{2x^2-3x} \leq \frac{4}{3}$ là

 $\boxed{\mathbf{A}} \left[\frac{1}{2}; 1 \right].$

 \bigcirc $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right] \cup [1; +\infty).$

 \bigcirc $\left(\frac{1}{2};1\right)$.

 $\bigcirc \left(-\infty; \frac{1}{2}\right) \cup (1; +\infty).$

CÂU 10. Bất phương trình $\log_3\left(x^2-x+7\right)<2$ có tập nghiệm là khoảng (a;b). Tính b-a

- $(\mathbf{A}) b a = -1.$
- **B** b a = -3.
- b a = 3.
- $\bigcirc b a = 1.$

CÂU 11. Nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}\left[\log_2(2-x^2)\right]>0$ là

 $(-1;1) \cup (2;+\infty).$

(-1;1).

 $(\mathbf{c})(-1;0) \cup (0;1).$

(D)(-1;3).

$\overline{}$	_	C	/	ΥП.	\sim	
_ 1				MI		

CÂU 12. Cho hàm số $f(x) = \log_{0.9}(x^2 + 4x - 5)$. Gọi S là tổng tất cả các giá trị nguyên của x thuộc đoạn [-15; 15] thỏa mãn bất phương trình f'(x) > 0. Tính S.

$$(A)$$
 $S = -105.$

B
$$S = 120$$
.

$$(\mathbf{C})S = -117.$$

$$(D) S = 119.$$

CÂU 13. Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $u_1=2,\ u_{n+1}=u_n^2$ với mọi $n\geq 1.$ Số tự nhiên n nhỏ nhất để $u_n>2^{2018}$ là

$$(A) n = 15.$$

B)
$$n = 13$$
.

$$(c)$$
 $n = 12.$

$$(\mathbf{D}) n = 11.$$

CÂU 14. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}} \left(\log_2 \frac{3x-1}{x+1} \right) \leq 0$ là

$$(-1; +\infty) \cup [3; +\infty).$$

$$\bigcirc$$
 [3; $+\infty$).

$$(-1; +\infty).$$

$$(-1;3].$$

Phương trình mũ, lôgarit đưa về cùng cơ số

Sử dụng các công thức

1. Ví dụ mẫu

VÍ DU 1. Tìm điều kiện xác định của các phương trình sau

a)
$$\log_2 x + \log_2(x-1) = \log_2(3-x)$$
. b) $\log_3(x^2 - 3x) = \log_3(x-1)$.

b)
$$\log_2(x^2 - 3x) = \log_2(x - 1)$$
.

VÍ DU 2. Giải phương trình $4^{x-2} = 2^{3x+1}$.

VÍ DỤ 3. Giải phương trình $3^{x+1} = \frac{1}{3^{1-2x}}$.

VÍ DỤ 4. Giải các phương trình sau

a)
$$4^{2x} = 8^{2x-1}$$
.

b)
$$\left(\frac{1}{9}\right)^x = \frac{27^x}{3}$$
.

VÍ DỤ 5. Giải phương trình $\log_8(3x-6) = -\log_{\frac{1}{2}}(2x-2)$.

VÍ DỤ 6. Giải phương trình $\log_3(x+1) = \log_3(x^2-1)$.

VÍ Dụ 7. Giải các phương trình sau

a)
$$\log_2(x^2 - 3) = \log_2 2x$$
.

b)
$$\log_2(x+6) = \log_2(x+1) + 1$$
.

2. Bài tấp rèn luyên

BÀI 1. Tìm điều kiện xác định của các phương trình sau

a)
$$\log_{0.5}(4-x) = \log_2 \frac{1}{x+2}$$
.

b)
$$\log (-x^2 + 5x + 6) = \log(x - 2)$$
.

BÀI 2. Giải các phương trình sau

a)
$$3^{x+1} = 9^{2x+1}$$
.

b)
$$9^{x-2} = 243^{x+1}$$
.

c)
$$100^{2x^2-3} = 0.1^{2x^2-18}$$
.

d)
$$5^x = 3^{2x-1}$$
.

BAI 3. Giải mỗi phương trình sau:

a)
$$\log_5(3x-5) = \log_5(2x+1)$$
.

b)
$$\log_3(x^2 - 3x + 2) = \log_3(2x - 4)$$
.

c)
$$2\log_4 x + \log_2(x-3) = 2$$
.

d)
$$\ln x + \ln(x - 1) = \ln 4x$$
.

3. Bài tấp trắc nghiệm

CÂU 1. Điều kiện xác định của phương trình $\log_2(x+1) = \log_2(2-x)$ là

$$(A) x > -1.$$

$$\bigcirc$$
 $x < 2$.

$$(c)$$
 $-1 < x < 2$.

CÂU 2. Điều kiện xác định của phương trình $\log_3(x-1) = \log_9(x-3)^2$ là

$$\bigcirc$$
 $x > 1.$

$$\bigcirc$$
 $x > 3$.

$$(c)$$
1 < x < 3.

$$\stackrel{\frown}{\mathbf{D}} x > 1 \text{ và } x \neq 3.$$

CÂU 3. Nghiệm của phương trình $2^{2x-3} = 2^x$ là

$$\mathbf{A}$$
 $x = 8$.

$$\mathbf{B} x = -8.$$

$$(c) x = 3.$$

$$\mathbf{\widehat{D}} x = -3.$$

CÂU 4. Nghiệm của phương trình $3^{2x+1} = 3^{x-2}$ là

$$\mathbf{A} x = -1.$$

$$\mathbf{B} x = 3.$$

$$(\mathbf{c}) x = -3$$

$$\bigcirc x = 1.$$

CÂU 5. Tập nghiệm của phương trình $\log_2 x = \log_2(2x+1)$ là

$$(\mathbf{C}) \varnothing$$
.

$$\bigcirc$$
 $\{-1\}.$

CÂU 6. Nghiệm của phương trình $125^{2x} = \left(\frac{1}{25}\right)^{x+1}$ là

$$\mathbf{B}) x = 4.$$

$$(\mathbf{c})x = 1.$$

CÂU 7. Nghiệm của phương trình $(4,5)^{4x-5} = \left(\frac{2}{9}\right)^{-x-1}$ là

$$\mathbf{A} x = -1.$$

$$\bigcirc x = 2.$$

$$x = \frac{5}{4}$$

CÂU 8. Nghiệm của phương trình $\log_3(x+1) + 1 = \log_3(4x+1)$ là

$$\bigcirc x = 3.$$

$$\mathbf{B} x = -3.$$

$$(c) x = 4.$$

$$\bigcirc x = 2.$$

CÂU 9. Số nghiệm của phương trình $\log_3(x^2-6) - \log_3(x-2) = 1$ là

(A) 0. (B) 3. (C) 1. (D) 2. (CÂU 10. Tổng các nghiệm thực của phương trình
$$3^{x^2-3x+8}=9^{2x-1}$$
 bằng

CÂU 11. Số nghiệm của phương trình $\log_{\frac{1}{a}}(x^3-2x^2-3x+4) + \log_2(x-1) = 0$ là

$$-2x$$

CÂU 12. Gọi S là tập nghiệm của phương trình $2\log_2(2x-2) + \log_2(x-3)^2 = 2$ trên \mathbb{R} . Tổng các phần tử của S bằng

(A) $8 + \sqrt{2}$.

$$\mathbf{B} \cdot 6 + \sqrt{2}.$$

$$\mathbf{C}$$
 4 + $\sqrt{2}$.

Bất phương trình mũ, lôgarít đưa về cùng cơ số

1. Ví du mẫu

VÍ DỤ 1. Giải bất phương trình $\log_{0,3}(x+1) \leq \log_{0,3}(2x-1)$.

VÍ DU 2. Giải các bất phương trình sau

a)
$$2^x > 16$$
.

b)
$$0.1^x \le 0.001$$
.

c)
$$\left(\frac{1}{5}\right)^{x-2} \ge \left(\frac{1}{25}\right)^x$$
.

VÍ DU 3. Giải các bất phương trình sau

a)
$$\log_2(2x - 1) \le 1$$
.

b)
$$\log_{\frac{1}{2}}(1-x) > \log_{\frac{1}{2}}(3x+2)$$
.

2. Bài tập rèn luyện

BÀI 1. Giải mỗi bất phương trình sau

a)
$$\left(\frac{2}{3}\right)^{3x-7} \le \frac{3}{2};$$

b)
$$4^{x+3} \ge 32^x$$
;

c)
$$\log_{\frac{1}{2}}(2x-1) \ge \log_{\frac{1}{2}}(x+3);$$

d)
$$\ln(x+3) \ge \ln(2x-8)$$
.

BÀI 2. Giải các bất phương trình sau

	ICI		м	
		•	м	11 12

e)	0.1^{2-x}	\ 0	14 + 2x
aı	U. I	<i>></i> ()	. 1

c)
$$\log_3(x+7) \ge -1$$
;

b)
$$2 \cdot 5^{2x+1} \le 3$$
;

d)
$$\log_{0.5}(x+7) \ge \log_{0.5}(2x-1)$$
.

3. Bài tập trắc nghiệm

CÂU 1. Tập nghiệm bất phương trình $(0,5)^3 < \left(\frac{1}{2}\right)^{3x}$ là

$$(-\infty;1)$$
.

B)
$$(-\infty; -1)$$
. **C**) $(-1; +\infty)$.

$$\bigcirc$$
 $(-1;+\infty).$

$$\bigcirc$$
 $(1; +\infty).$

CÂU 2. Tập nghiệm của bất phương trình $4^{x+1} \le 8^{x-2}$ là

$$(\mathbf{c})(-\infty;8]$$

$$\bigcirc$$
 [8; $+\infty$).

CÂU 3. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_3 \sqrt{x} \ge \log_3 x + 1$ là

$$oxed{\mathbb{B}} \left[\frac{1}{9}; +\infty \right].$$
 $oxed{\mathbb{C}} \left(0; \frac{1}{9} \right].$

$$\bigcirc$$
 $\left(0; \frac{1}{9}\right].$

$$\bigcirc$$
 $\left[0;1\frac{1}{9}\right].$

CÂU 4. Biết rằng bất phương trình $\left(\frac{2}{3}\right)^{x^2-x} \ge \left(\frac{9}{4}\right)^{x-1}$ có tập nghiệm là đoạn [a;b]. Tính

©
$$b - a = 2\sqrt{5}$$
. **D** $b - a = \sqrt{5}$.

CÂU 5. Tập nghiệm của bất phương trình $11^{\sqrt{x+6}} \ge 11^x$ là S = [a; b]. Tính a + b.

$$(c) -3.$$

$$\bigcirc$$
 -2

CÂU 6. Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\log_2(x^2 - x - 2) \le 2\log_2(3 - x)$.

$$\mathbf{C} S = \left[\frac{11}{5}; 3\right).$$

CÂU 7. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2(2x^2-x) \leq \log_{\sqrt{2}} x$ là

$$igate{A}(0;1).$$

$$\mathbf{B}\left(\frac{1}{2};1\right]. \qquad \mathbf{C}\left[\frac{1}{2};1\right].$$

$$\bigcirc \left[\frac{1}{2};1\right].$$

$$\bigcirc [0;1]$$

CÂU 8. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2\left(1+\log_{\frac{1}{9}}x-\log_9x\right)<1$ có dạng $S=\left(\frac{1}{a};b\right)$ với a,b là những số nguyên. Mối liên hệ giữa a và b là

$$\mathbf{B} a = -b.$$

$$(c)$$
 $a + b = 1.$

$$\bigcirc a = b.$$

CÂU 9. Tập nghiệm của bất phương trình $(3^x+2)(4^{x+1}-8^{2x+1}) \leq 0$ là

$$(-\infty; 4].$$

$$egin{aligned} ig(-\infty;-rac{1}{4}ig]. & igcoldsymbol{\mathbb{C}} \left[-rac{1}{4};+\infty
ight). \end{aligned}$$

$$\bigcirc \left[-\frac{1}{4}; +\infty\right).$$

CÂU 10. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{0.5}(x^2+x) < \log_{0.5}(-2x+4)$ là

$$(-4;-1).$$

$$\bigcirc$$
 $(-\infty; -4) \cup (1; +\infty).$

$$\bigcirc (-\infty; -4) \cup (1; 2).$$

CÂU 11. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\sqrt{3}} x + \log_{\sqrt[4]{3}} x + \log_{\sqrt[6]{3}} x + \cdots + \log_{\sqrt[16]{3}} x < 36$

A
$$(0; \sqrt[4]{3}).$$

$$\bigcirc$$
 $(0;\sqrt{3}).$

$$\bigcirc$$
 (0; 1).

CÂU 12. Số nghiệm nguyên của bất phương trình $\left(\sqrt{10}-3\right)^{\frac{3-x}{x-1}}>\left(\sqrt{10}+3\right)^{\frac{x+1}{x+3}}$ là

CÂU 13. Tổng tất cả các nghiệm nguyên của bất phương trình $2\log_2\sqrt{x+1} \le 2-\log_2(x-2)$ bằng

CÂU 14.

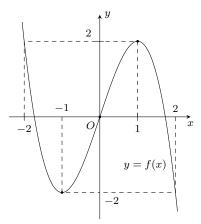
Cho hàm số bậc ba y = f(x) có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiều giá tri nguyên của tham số m thuộc đoan [0;9]sao cho bất phương trình $2^{f^2(x)+f(x)-m}-16\cdot$ $2f^{2(x)-f(x)-m}-4f(x)+16<0$ có nghiệm $x\in(-1;1)$?

(A) 8.

(B) 5.

(C) 6.

(**D**) 7.



CÂU 15. Cho bất phương trình $(3^{x^2-x}-9)(2^{x^2}-m)\leq 0$. Tìm số giá trị nguyên của mđể bất phương trình đã cho có đúng 5 nghiệm nguyên.

(A) 65022.

(B) 65024.

(D) 65023.

CÂU 16. Cho bất phương trình $\log_3(x^2-x+2)+1 \ge \log_3(x^2+x+m-3)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để bất phương trình đã cho có nghiệm đúng với mọi giá trị xthuộc đoạn [0; 6]?

(A) 3.

(B) 6.

CÂU 17. Tìm m để bất phương trình $1 + \log_5(x^2 + 1) \ge \log_5(mx^2 + 4x + m)$ thỏa mãn với moi $x \in \mathbb{R}$.

(A) 2 < m < 3.

B 2 < m < 3.

 $(\mathbf{c}) - 1 < m < 0.$

CÂU 18. Cho bất phương trình $\log_3(x^2 + 2x + 2) + 1 > \log_3(x^2 + 6x + 5 + m)$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để bất phương trình trên nghiệm đúng với mọi $x \in (1;3)$?

(A) 14.

B) 16.

C vô số.

(D) 15.

CÂU 19. Tổng tất cả các nghiệm nguyên của bất phương trình $\log_9(x+6) - \log_3\left(5 - \sqrt[4]{19 - x}\right)$ 0 là

(A) -12.

B) -11.

 (\mathbf{C}) 0.

(**D**) - 9.

CÂU 20. Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn $\ln x + \ln y \ge \ln(x^2 + y)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của P = x + y.

(A) $P = 2 + 3\sqrt{2}$.

(B) $P = \sqrt{17} + \sqrt{3}$. **(C)** P = 6.

(D) $P = 3 + 2\sqrt{2}$.

CÂU 21. Cho phương trình $(2\log_3^2 x - \log_3 x - 1)\sqrt{3^x - m} = 0$ (m là tham số thực). Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để phương trình đã cho có đúng hai nghiệm phân biệt.

(A) 26.

C Vô số.

CÂU 22. Cho $x \ge 0, y \ge 0, x+y > 0$ thỏa mãn $2^{x^2+y^2} + 2023^{x+y} \cdot \log_2 \frac{x^2+y^2}{x+y} \le 4^{x+y} + 2023^{x+y}$ 2023^{x+y} . Tìm tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x^2 + y^2 - 8x$ 2y + 10.

(A) 8.

33

B) 12.

 \mathbf{C} 4 + $6\sqrt{2}$.

(D) $14 - 6\sqrt{2}$.

Bài toán thực tế, liên môn

1. Ví du mẫu

VÍ DU 1. Dân số được ước tính theo công thức $S = A \cdot e^{rt}$, trong đó A là dân số của năm lấy làm mốc tính, S là số dân sau t năm, r là tỉ lệ tăng dân số hằng năm. Giả sử r = 1.14%/năm, hỏi sau bao nhiêu năm dân số sẽ gấp đôi dân số ban đầu?

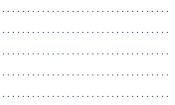
VÍ DU 2. Chỉ số hay độ pH của một dung dịch được tính theo công thức: pH = $-\log[H^+]$ (trong đó $[H^+]$ chỉ nồng độ ion hydrogen). Đo chỉ số pH của một mẫu nước sông, ta có kết quả là pH = 6,1. Hỏi nồng độ của ion hydrogen $[H^+]$ trong mẫu nước sông đó bằng bao nhiêu?

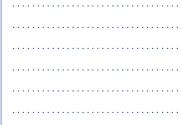
•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	
•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
																																•

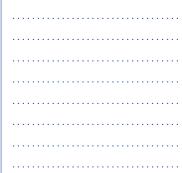
•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•











QUICK NOTE	VÍ DỤ 3. Giả sử giá trị còn lại (tính theo triệu đồng) của một chiếc ô t được mô hình hóa bằng công thức			
	$V(t) = 780 \cdot (0,905)^t.$			
	Hỏi nếu theo mô hình này, sau bao nhiêu năm sử dụng thì giá trị củ			
	không quá 300 triệu đồng? (Làm tròn kết quả đến hàng đơn vị). VÍ DỤ 4. Nếu khối lượng carbon-14 trong cơ thể sinh vật lúc chết là <i>I</i>			
	VI DO 4. Neu khoi luộng carbon-14 trong có thể sinh vật lực chết là h			
	carbon-14 còn lại (tính theo gam) sau t năm được tính theo công thức ${\cal M}$			
	trong đó $T = 5730$ (năm) là chu kì bán rã của carbon-14. Nghiên cứt sinh vật, người ta xác định được khối lượng carbon-14 hiện có trong họi Nhờ biết tỉ lệ khối lượng của carbon-14 so với carbon-12 trong cơ thể si xác định được khối lượng carbon-14 trong cơ thể lúc sinh vật chết là . Sinh vật này sống cách đầy bao phiêu năm? (Làm tròn kết quả đến hà			
	Sinh vật này sống cách đây bao nhiêu năm? (Làm tròn kết quả đến hà			
	VÍ DỤ 5. Công thức tính khối lượng còn lại của một chất phóng xạ từ			
	M_0 là $M(t)=M_0\left(rac{1}{2} ight)^{rac{1}{T}},$ trong đó t là thời gian tính từ thời điểm ba			
	bán rã của chất. Đồng vị plutonium-234 có chu kì bán rã là 9 giờ.			
	$(Ngu\`{o}n:\ https://pubchem.ncbi.nlm.nih.gov/element/Plutonium\#$			
	Từ khối lượng ban đầu $200~\mathrm{g}$, sau bao lâu thì khối lượng plutonium- $25~\mathrm{g}$			
	a) 100 g? b) 50 g? c) 20 g			
	VÍ DU 6. Nước chanh có độ pH bằng 2,4; giấm có độ pH bằng 3. Nu			
	gấp bao nhiêu lần giấm (nghĩa là có nồng độ H^+ gấp bao nhiêu lần)			
	đến hàng phần trăm).			
	2. Bài tập rèn luyện			
	BÀI 1. Một người gửi ngân hàng 100 triệu đồng theo hình thức lãi kép với lãi suất là $x \%/\text{năm}$ ($x > 0$). Sau 3 năm, người đó rút được cả g			
	triệu đồng. Tìm x , biết rằng lãi suất không thay đổi qua các năm và tiền ra trong suốt thời gian gửi.			
	BÀI 2. Sử dụng công thức tính mức cường độ âm L ở ví dụ 14, hãy tính mức cường độ làm L ở ví dụ 14, hãy tính mức cường độ làm L ở ví dụ 14, hãy tính mức cường độ làm L ở ví dụ 14, hãy tính mức cường độ làm L ở ví dụ 14, hãy tính mức cường độ làm L ở ví dụ 14, hãy tính mức cường độ làm L ở ví dụ 14, hãy tính mức cường độ làm L ở ví dụ 14, hãy tính mức cường độ làm L ở ví dụ 14, hãy tính mức cường độ làm L ở ví dụ 14, hãy tính mức cường độ làm L ở ví dụ 14, hãy tính mức cường độ làm L ở ví dụ 14, hãy tính mức cường độ làm L ở ví dụ 14, hãy tính mức cường độ làm L ở ví dụ 14, hãy tính mức cường độ làm L ở ví dụ 14, hãy tính mức cường độ làm L ở ví dụ 14, hãy tính mức cường độ làm L ở ví dụ 14, hãy tính mức cường độ làm L ở ví dụ 14, hãy tính mức cường độ làm L ở ví dụ 14, hãy tính mức cường dọ làm L ở ví dụ 14, hãy tính mức cường dọ làm L ở ví dụ 14, hãy tính mức cường dọ làm L ở ví dụ 14, hãy tính mức cường dọ làm L ở ví dụ 14, hãy tính mức cường dọ làm L ở ví dụ 14, hãy tính mức cường dọ làm L ở ví dụ 14, hãy tính mức cường dọ làm L ở ví dụ 14, hãy tính mức cường dọ làm L ở ví dụ 14, hãy tính mức cường dọ làm L ở ví dụ 14, hãy tính mức cường dọ làm L ở ví dụ 14, hãy tính mức cường dọ làm L ở ví dụ 14, hãy tính mức cường dọ làm L ở ví dụ 14, hãy tính mức cường dọ làm L ở ví dụ 14, hãy tính mức cường dọ làm L ở ví dụ 14, hãy tính mức cường dọ làm L ở ví dụ L ví dụ L ở ví dụ L			
	mà tai người có thể nghe được, biết rằng tai người có thể nghe được từ 10^{-12} W/m ² đến 10 W/m ² .			
	BÀI 3. Bác Minh gửi tiết kiệm 500 triệu đồng ở một ngân hàng với lãi			
	một năm theo thể thức lãi kép kì hạn 12 tháng. Tổng số tiền bác Mi			
	lẫn lãi) sau n năm là: $A = 500 \cdot (1 + 0.075)^n \text{ (triệu đồng)}.$			
	Tính thời gian tối thiểu gửi tiết kiệm để bác Minh thu được ít nhất 80			
	lẫn lãi).			
	BÀI 4. Số lượng vi khuẩn ban đầu trong một mẻ nuôi cấy là 500 con. N			
	vi khuẩn trong mẻ nuôi cấy đó, đếm số lượng vi khuẩn và thấy rằng khuẩn là 40% mỗi giờ. Khi đó số lượng vi khuẩn $N(t)$ sau t giờ nuôi cấy			
	công thức sau:			
	$N(t) = 500e^{0.4t}$.			
	Hỏi sau bao nhiêu giờ nuôi cấy, số lượng vi khuẩn vượt mức 80000 con			
	BÀI 5. Giả sử nhiệt độ T (°C) của một vật giảm dần theo thời gian c			
	$T = 25 + 70e^{-0.5t},$			
	trong đó thời gian t được tính bằng phút.			
	a) Tìm nhiệt độ ban đầu của vật.			
	b) Sau bao lâu nhiệt độ của vật còn lại 30°C?			
	PALE TECH when the inches on the large (1/2 1 1 2 1/2) 2 2 2 1			

 $t\hat{o}$ sau t năm sử dụng

a chiếc xe đó còn lại

 $M_0(\mathbf{g})$ thì khối lượng

 $I(t) = M_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}} (g),$

u hoá thạch của một sá thạch là $5 \cdot 10^{-13}$ g. inh vật sống, người ta $M_0 = 1.2 \cdot 10^{-12} (g).$ àng trăm.)

ừ khối lượng ban đầu

an đầu và T là chu kì

 ${\it Esection} = Atomic Mass$ -Half-Life-and-Deca)

34 còn lại là

?

ước chanh có độ acid ? (Làm tròn kết quả

có kì hạn là 12 tháng sốc và lãi là 119,1016 người đó không rút

ính mức cường độ âm âm với cường độ âm

suất không đổi 7,5% inh thu được (cả vốn

00 triệu đồng (cả vốn

Người ta lấy một mẫu tỉ lệ tăng trưởng vi y được ước tính bằng

ho bởi công thức:

BÀI 6. Tính nồng độ ion hydrogen (tính bằng mol/lít) của một dung dịch có độ pH là 8.

BÀI 7. Chất phóng xạ polonium-210 có chu kì bán rã là 138 ngày. Điều này có nghĩa là cứ sau 138 ngày, lượng polonium còn lại trong một mẫu chỉ bằng một nửa lượng ban đầu. Một mẫu 100 g có khối lượng polonium-210 còn lại sau t ngày được tính theo công thức

$$M(t) = 100 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{138}} (g).$$

(Nguồn:https://pubchem.ncbi.nlm.nih.gov/element/Polonium#section= Atomic-Mass-Half-Life-and-Decay)

- a) Khối lượng polonium-210 còn lại bao nhiêu sau 2 năm?
- b) Sau bao lâu thì còn lại 40 g polonium-210?

BÀI 8. Nhắc lại rằng, mức cường độ âm L được tính bằng công thức $L=10\log\left(\frac{I}{I_0}\right)$ (dB), trong đó I là cường độ của âm tính bằng W/m² và $I_0=10^{-12}$ W/m².

(Nguồn: Vật lí 12, NXB Giáo dục Việt Nam, năm 2017, trang 52)

- a) Một giáo viên đang giảng bài trong lớp học có mức cường độ âm là 50 dB. Cường độ âm của giọng nói giáo viên bằng bao nhiêu?
- b) Mức cường độ âm trong một nhà xưởng thay đổi trong khoảng từ 75 dB đến 90 dB. Cường độ âm trong nhà xưởng này thay đổi trong khoảng nào?

3. Bài tập trắc nghiệm

CÂU 1. Ông A gửi 100 triệu đồng vào ngân hàng theo thể thức lãi kép kì hạn một năm với lãi suất là 12% một năm. Sau n năm ông A rút toàn bộ tiền (cả vốn lẫn lãi). Tìm n nguyên dương nhỏ nhất để số tiền lãi nhận được hơn 40 triệu đồng. (Giả sử rằng lãi suất hàng năm không thay đổi).

A 5.

B) 3.

(c) 2.

D) 4.

CÂU 2. Anh A vào làm ở công ty X với mức lương ban đầu là 10 triệu đồng/ tháng. Nếu hoàn thành tốt nhiệm vụ thì cứ sau 6 tháng làm việc, mức lương của anh lại được tăng thêm 20%. Hỏi bắt đầu từ tháng thứ mấy kể từ khi vào làm ở công ty X, tiền lương mỗi tháng của anh A nhiều hơn 20 triệu đồng(biết rằng trong suốt thời gian làm ở công ty X anh A luôn hoàn thành tốt nhiệm vụ?

(A) Tháng thứ 31.

B Tháng thứ 19.

(c) Tháng thứ 37.

(D) Tháng thứ 25.

CÂU 3. Đầu năm 2018, ông An thành lập một công ty sản xuất rau sạch. Tổng số tiền ông An dùng để trả lương cho nhân viên trong năm 2018 là 1 tỷ đồng. Biết rằng cứ sau mỗi năm thì tổng số tiền dùng để trả lương cho nhân viên trong cả năm tăng thêm 15% so với năm trước. Năm đầu tiên ông An phải trả lương cho nhân viên trong cả năm vượt qua 2 tỷ đồng là năm nào?

A Năm 2020.

(B) Năm 2025.

© Năm 2022.

(D) Năm 2023.

CÂU 4. Một người gửi vào ngân hàng số tiền 30 triệu đồng, lãi suất 0,48% /tháng. Sau đúng 1 tháng kể từ ngày gửi người này gửi đều đặn thêm vào 1 triệu đồng, hai lần gửi liên tiếp cách nhau đúng 1 tháng. Giả định rằng lãi suất không thay đổi và người này không rút tiền ra, số tiền lãi của tháng trước được tính vào vốn và tính lãi cho tháng kế tiếp. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu tháng người này thu về tổng số tiền cả gốc và lãi ít nhất 50 triệu đồng.

(A) 19.

B) 20.

(C) 17.

(**D**) 18.

CÂU 5. Ông A gửi vào ngân hàng 50 triệu đồng với lãi suất 0,5%/tháng. Hỏi ít nhất bao nhiêu tháng thì ông A có số tiền cả gốc lẫn lãi nhiều hơn 60 triệu đồng? Biết rằng trong suốt thời gian gửi lãi suất ngân hàng không thay đổi và ông A không rút tiền ra.

(A) 37 tháng.

B) 38 tháng.

C 40 tháng.

(D) 36 tháng.

CÂU 6. Đầu năm 2016, ông A thành lập một công ty. Tổng số tiền ông A dùng để trả lương cho nhân viên trong năm 2016 là 1 tỷ đồng. Biết rằng cứ sau mỗi năm thì tổng số tiền để trả cho nhân viên trong cả năm đó tăng thêm 15% so với năm trước. Hỏi năm nào dưới đây là năm đầu tiên mà tổng số tiền ông A dùng để trả lương cho nhân viên trong cả năm lớn hơn 2 tỷ đồng?

(A) Năm 2021.

(B) Năm 2022.

© Năm 2023.

D Năm 2020.

QUICK NOTE		tiền vào ngân hàng với		
		khỏi ngân hàng thì cứ s là lãi suất kép). Người c		
		na nai suat kep). Nguồi c n hộ chung cư trị giá 50		
	gửi vào ngân hàng để d	có đủ tiền mua căn hộ c		
	bao nhiêu? (A) 395 triệu đồng.	B) 396 triệu đồng.	© 397 triệu đồng.	(D) 394 triệu đồng.
		ốn mua một ngôi nhà tr không đổi là 8% một n		
		r vào ngân hàng theo th		
	làm tròn đến hàng triệ	′ ~	<u> </u>	
	A 395 triệu đồng.	B 397 triệu đồng.	© 394 triệu đồng.	D 396 triệu đồng.
		300 triệu đồng vào ngất		
		g quý. Hỏi sau ít nhất b lẫn lãi) từ số vốn ban c		
	A) 29 tháng.	B) 87 tháng.	© 30 tháng.	D 90 tháng.
	CÂU 10 Để đủ tiền n	nua nhà, anh An vay n	σân hàng 500 triệu the	
		tháng. Nếu sau mỗi tl		
		ịnh là 10 triệu đồng bao		
	_	ồng thay đổi trong suốt nợ ngân hàng? (tháng c	_	
	A 66.	B 67.	© 65.	D 68.
		n A, sau khi ra trường		một năm sẽ có hơn 60
		Hàng tháng anh A phả		
		bao nhiêu?(làm tròn đ		ằng lãi suất ngân hàng
	_ '	g tháng số tiền lãi được		A 010 000 tà
	A 4 809 000 đồng.	B 4 808 000 đồng.	© 4 890 000 đồng.	D 4 812 000 đồng.
		uối năm thì một đơn vị nhất sao cho sau <i>n</i> năn		
	của nó?	imat sao cho sau n han	n, don vị tiên tệ sẽ ma	t di it illiat 9070 gia tii
	A 20.	B 16.	© 18.	D 22.
	CÂU 13. Ông A bị nh	iễm một loại vi-rút nên	phải nhập viện và đượ	sc điều trị ngay lập tức.
	= -	nập viện, sau mỗi ngày		
		ày trước đó. Hỏi sau ít at viện khi lượng vi-rút (
	A 14 ngày.	B 11 ngày.	c) 12 ngày.	D 13 ngày.
	CÂU 14. Một nghiên c	ứu cho thấy một nhóm l	học sinh được cho xem	cùng một danh sách các
	loài sinh vật và được k	iểm tra lại xem họ nhớ	bao nhiêu phần trăm r	mỗi tháng. Sau t tháng,
		nh của nhóm học sinh đ		
	t > 0 (don vị phan tra không vượt quá 10% d	m). Hỏi sau ít nhất bao anh sách đó?	nnieu thang thi nhom	i nọc sinh chi nhơ được
	A 28 tháng.	B 27 tháng.	© 24 tháng.	\bigcirc 25 tháng.
	CÂU 15. Bộ Y tế phá	ất đi một thông tin tu	yên truyền về phòng	chống dịch COVID-19.
	Thông tin này lan tru	yền đến người dân theo	công thức $P(t) = \frac{1}{1 - t}$	$\frac{1}{1-t}$, với $P(t)$ là tỉ lệ
			•	1
		ng tin vào thời điểm t và		<u>Z</u>
	với t do bằng giớ. Họi \bullet $5,5$ giờ.	cần phải ít nhất bao lâu B 8 giờ.	dễ hơn 90% dân số nh $\bigcirc 4,5$ giờ.	\bigcirc
		ác chuyên gia y tế đang		<i></i>
	một bộ xét nghiệm CC	VID-19. Giả sử cứ sau	n lần thử nghiệm và đi	ều chỉnh bộ xét nghiệm
	thì tỉ lệ chính xác của	bộ xét nghiệm đó tuâ	n theo công thức $S(n)$	$=\frac{1}{1+2020-10-0.01\pi}$.
		nhất bao nhiêu lần thử		
	bảo tỉ lệ chính xác của	bộ xét nghiệm đó đạt	trên 90%?	
	(A) 428.	B) 427.	© 426.	D 425.

LỜI GIẢI CHI TIẾT

Hàm số mũ. Hàm số logarit

Bài 18. PHÉP TÍNH LŨY THỪA VỚI SỐ MŨ THỰC

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Lũy thừa

- a) Lũy thừa với số mũ nguyên dương:
 - $\ensuremath{ \Theta}$ alà số thực tùy ý, nnguyên dương: $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \cdots a}_{n \text{ chữ số}}.$
 - $a \neq 0$: $a^0 = 1$, $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.
- b) Căn bậc n (n nguyên dương): của số a là b thỏa mãn $b^n = a$.
- c) Lũy thừa với số mũ hữu tỉ: $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.
- d) Lũy thừa với số mũ thực: $a^{\alpha} = \lim_{n \to +\infty} a^{r_n}$, với $\lim_{n \to +\infty} r_n = \alpha$.

2. Tính chất lũy thừa

 \bigcirc Với $a \neq 0, b \neq 0, m, n$ là số thực:

$$a^{m} \cdot a^{n} = a^{m+n}; \quad (a^{m})^{n} = a^{mn};$$
$$\left(\frac{a}{b}\right)^{m} = \frac{a^{m}}{b^{m}}; \quad \frac{a^{m}}{a^{n}} = a^{m-n};$$
$$(ab)^{m} = a^{m} \cdot b^{m};$$

 \bigcirc Với n, k nguyên dương, m là số nguyên:

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}; \qquad \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

$$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}; \qquad \sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a};$$

$$\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} a & \text{khi } n \text{ l\'e} \\ |a| & \text{khi } n \text{ ch\~an}. \end{cases}$$

B. CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

Tính giá trị biểu thức chứa lũy thừa

Biến đổi các cơ số về nguyên tố, sử dụng các công thức để rút gọn và tính giá trị biểu thức.

1. Ví dụ mẫu

VÍ DU 1. Tính giá trị các biểu thức

a)
$$2^{-4}$$
;

b)
$$9 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{-2}$$
;

c)
$$\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} : \left(\sqrt{3}\right)^{0}$$
.

a)
$$2^{-4} = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16};$$

b)
$$9 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{-2} = 9 \cdot \frac{1}{\left(\frac{3}{4}\right)^2} = 9 \cdot \frac{1}{\frac{9}{16}} = 9 \cdot \frac{16}{9} = 16;$$

c)
$$\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} : \left(\sqrt{3}\right)^0 = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} : 1 = \frac{1}{\frac{1}{4}} = 4.$$

VÍ DU 2. Tính giá trị của biểu thức

$$A = \left(\frac{1}{2}\right)^{-12} \cdot 8^{-3} + (0,2)^{-4} \cdot 25^{-2} + 243^{-1} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{-6}.$$

🗭 Lời giải.

Ta có

$$A = \left(\frac{1}{2}\right)^{-12} \cdot 8^{-3} + (0,2)^{-4} \cdot 25^{-2} + 243^{-1} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{-6}$$

$$= 2^{12} \cdot \frac{1}{8^3} + \left(\frac{1}{5}\right)^{-4} \cdot \frac{1}{25^2} + \frac{1}{243^1} \cdot 3^6$$

$$= \frac{2^{12}}{2^9} + \frac{5^4}{5^4} + \frac{3^6}{3^5}$$

$$= 2^3 + 1 + 3 = 12.$$

VÍ DU 3. Tính giá trị biểu thức

$$A = \left(\frac{1}{2}\right)^{-8} \cdot 8^{-2} + (0,2)^{-4} \cdot 25^{-2}.$$

🗭 Lời giải.

Ta có

$$A = 2^{8} \cdot \frac{1}{8^{2}} + \frac{1}{0.2^{4}} \cdot \frac{1}{25^{2}}$$

$$= 2^{8} \cdot \frac{1}{2^{6}} + \frac{1}{0.2^{4} \cdot 5^{4}}$$

$$= 2^{2} + \frac{1}{(0.2 \cdot 5)^{4}} = 4 + 1 = 5.$$

2. Bài tập rèn luyện

BAI 1. Tính giá trị các biểu thức

a)
$$\left(\frac{3}{4}\right)^{-2} \cdot 3^2 \cdot 12^0$$
;

b)
$$(2^{-2} \cdot 5^2)^{-2} : (5 \cdot 5^{-5}).$$

🗭 Lời giải.

a)
$$\left(\frac{3}{4}\right)^{-2} \cdot 3^2 \cdot 12^0 = \left(\frac{4}{3}\right)^2 \cdot 3^2 \cdot 1 = \frac{4^2}{3^2} \cdot 3^2 = 4^2 = 16.$$

b)
$$(2^{-2} \cdot 5^2)^{-2} : (5 \cdot 5^{-5}) = 2^4 \cdot 5^{-4} : 5^{-4} = 2^4 = 16.$$

BÀI 2. Tính giá trị các biểu thức

a)
$$\left(\frac{1}{256}\right)^{-0.75} + \left(\frac{1}{27}\right)^{-\frac{4}{3}};$$
 b) $\left(\frac{1}{49}\right)^{-1.5} - \left(\frac{1}{125}\right)^{-\frac{2}{3}};$ c) $\left(4^{3+\sqrt{3}} - 4^{\sqrt{3}-1}\right) \cdot 2^{-2\sqrt{3}}.$

🗭 Lời giải.

a) Ta có

$$\left(\frac{1}{256}\right)^{-0.75} + \left(\frac{1}{27}\right)^{-\frac{4}{3}} = \left(\frac{1}{2^8}\right)^{-0.75} + \left(\frac{1}{3^3}\right)^{-\frac{4}{3}} = \left(2^{-8}\right)^{-\frac{3}{4}} + \left(3^{-3}\right)^{-\frac{4}{3}} = 2^6 + 3^4 = 64 + 81 = 145.$$

b)
$$\left(\frac{1}{49}\right)^{-1,5} - \left(\frac{1}{125}\right)^{-\frac{2}{3}} = \left(\frac{1}{7^2}\right)^{-\frac{3}{2}} - \left(\frac{1}{5^3}\right)^{-\frac{2}{3}} = \left(7^{-2}\right)^{-\frac{3}{2}} - \left(5^{-3}\right)^{-\frac{2}{3}} = 7^3 - 5^2 = 318.$$

c)
$$\left(4^{3+\sqrt{3}}-4^{\sqrt{3}-1}\right)\cdot 2^{-2\sqrt{3}} = \left(2^{6+2\sqrt{3}}-2^{2\sqrt{3}-2}\right)\cdot 2^{-2\sqrt{3}} = 2^6-2^{-2} = 64-\frac{1}{4} = \frac{255}{4}$$
.

BÀI 3. Thực hiện các phép tính

a)
$$27^{\frac{2}{3}} + 81^{-0.75} - 25^{0.5}$$
;

b)
$$4^{2-3\sqrt{7}} \cdot 8^{2\sqrt{7}}$$
.

🗭 Lời giải.

a)

$$27^{\frac{2}{3}} + 81^{-0.75} - 25^{0.5} = (3^{3})^{\frac{2}{3}} + (3^{4})^{-0.75} - (5^{2})^{0.5}$$

$$= 3^{3 \cdot \frac{2}{3}} + 3^{4 \cdot (-0.75)} - 5^{2 \cdot (0.5)}$$

$$= 3^{2} + 3^{-3} - 5^{1}$$

$$= \frac{109}{27}.$$

b)

$$4^{2-3\sqrt{7}} \cdot 8^{2\sqrt{7}} = (2^2)^{2-3\sqrt{7}} \cdot (2^3)^{2\sqrt{7}}$$

$$= 2^{2(2-3\sqrt{7})} \cdot 2^{6\sqrt{7}}$$

$$= 2^{4-6\sqrt{7}+6\sqrt{7}}$$

$$= 16$$

BÀI 4. Biết $4^a = \frac{1}{5}$. Tính giá trị các biểu thức

a)
$$16^{\alpha} + 16^{-\alpha}$$
;

b)
$$(2^{\alpha} + 2^{-\alpha})^2$$
.

🗭 Lời giải.

a)
$$16^{\alpha} + 16^{-\alpha} = (4^{\alpha})^2 + \frac{1}{(4^{\alpha})^2} = \left(\frac{1}{5}\right)^2 + \frac{1}{\left(\frac{1}{5}\right)^2} = \frac{1}{25} + 25 = \frac{626}{25}.$$

b)
$$(2^{\alpha} + 2^{-\alpha})^2 = 4^{\alpha} + 2 + 4^{-\alpha} = \frac{1}{5} + 2 + \frac{1}{\frac{1}{5}} = \frac{36}{5}$$
.

BÀI 5. Định luật thứ ba của Kepler về quỹ đạo chuyển động cho biết cách ước tính khoảng thời gian P (tính theo năm Trái Đất) mà một hành tinh cần để hoàn thành một quỹ đạo quay quanh Mặt Trời. Khoảng thời gian đó được xác định bởi một hàm số $P = d^{\frac{3}{2}}$, trong đó d là khoảng cách từ hành tinh đó đến Mặt Trời tính theo đơn vị thiên văn AU (1 AU là khoảng cách từ Trái Đất đến Mặt Trời, tức là 1 AU khoảng 93 000 000 dặm) ($Nguồn: R.I. Charles \ et \ al., Algebra \ 2, \ Pearson$). Hỏi Sao Hỏa quay quanh Mặt Trời thì mất bao nhiêu năm Trái Đất (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)? Biết khoảng cách từ Sao Hỏa đến Mặt Trời là 1,52 AU.

🗭 Lời giải.

Sao Hỏa quay quanh Mặt Trời thì mất thời gian $P = 1.52^{\frac{3}{2}} \approx 1.87 \text{ AU}.$

BÀI 6. Nếu một khoản tiền gốc P được gửi ngân hàng với lãi suất hằng năm r (r được biểu thị dưới dạng số thập phân), được tính lãi n lần trong một năm, thì tổng số tiền A nhận được (cả vốn lẫn lãi) sau N kì gửi cho bởi công thức sau:

$$A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^N.$$

Hỏi nếu bác An gửi tiết kiệm số tiền 120 triệu đồng theo kì hạn 6 tháng với lãi suất không đổi là 5% một năm, thì số tiền thu được (cả vốn lẫn lãi) của bác An sau 2 năm là bao nhiêu?

🗩 Lời giải.

Ta có 2 năm là 24 tháng ứng với N=4 kì hạn.

Do kì hạn là 6 tháng nên mỗi năm được tính lãi n=2 lần.

Vậy số tiền cả vốn lẫn lãi bác An nhận được sau 2 năm là $A=120\left(1+\frac{0.05}{2}\right)^4\approx 132,457$ triệu đồng

BÀI 7. Năm 2021, dân số của một quốc gia ở châu Á là 19 triệu người. Người ta ước tính rằng dân số của quốc gia này sẽ tăng gấp đôi sau 30 năm nữa. Khi đó dân số A (triệu người) của quốc gia đó sau t năm kể từ năm 2021 được ước tính bằng công thức $A=19\cdot 2^{\frac{t}{30}}$. Hỏi với tốc độ tăng dân số như vậy thì sau 20 năm nữa dân số của quốc gia này sẽ là bao nhiêu? (Làm tròn kết quả đến chữ số hàng triệu).

🗭 Lời giải.

Dân số của quốc gia này sau 20 năm là $A=19\cdot 2^{\frac{20}{30}}\approx 30$ triệu người.

BÀI 8. Với một chỉ vàng, giả sử người thợ lành nghề có thể dát mỏng thành lá vàng rộng 1 m^2 và dày khoảng $1.94 \cdot 10^{-7} \text{ m}$. Đồng xu 5 000 đồng dày $2.2 \cdot 10^{-3}$ m. Cần chồng bao nhiêu lá vàng như trên để có độ dày bằng đồng xu loại 5 000 đồng? Làm tròn kết quả đến chữ số hàng trăm.

🗭 Lời giải.

Số lá vàng cần chồng là

$$\frac{2.2 \cdot 10^{-3}}{1.94 \cdot 10^{-7}} \approx 11 \ 300.$$

3. Bài tập trắc nghiệm

CÂU 1. Cho số dương a và $m, n \in \mathbb{R}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

$$\mathbf{C} a^m \cdot a^n = a^{mn}$$

Dùi giải.

Từ công thức hàm lũy thừa thì công thức đúng là $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.

Chọn đáp án (B)......

CÂU 2. Cho $0 < a \neq 1$ và các số thực α , β . Khẳng định nào sau đây là khẳng định **sai**?

$$\mathbf{A} \frac{a^{\alpha}}{a^{\beta}} = a^{\alpha - \beta}.$$

$$(\mathbf{B}) (a^{\alpha})^{\beta} = a^{\alpha\beta}.$$

$$\mathbf{C} a^{\alpha} \cdot a^{\beta} = a^{\alpha\beta}.$$

$$\mathbf{D} a^{\alpha} \cdot a^{\beta} = a^{\alpha + \beta}.$$

🗭 Lời giải.

Theo tính chất lũy thừa ta suy ra mệnh đề $a^{\alpha} \cdot a^{\beta} = a^{\alpha\beta}$ là sai.

Chọn đáp án \bigcirc

CÂU 3. Cho a là số thực tùy ý, $(a^3)^2$ bằng

$$\bigcirc$$
 a^5 .

$$(\mathbf{B})a$$
.

$$\bigcirc a^9$$
.

$$\bigcirc$$
 a^6 .

D Lời giải.

Cho a là số thực tùy ý, ta có $(a^3)^2 = a^{3 \cdot 2} = a^6$.

CÂU 4. Cho các số nguyên dương m, n và số thực dương a. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

$$(\mathbf{D})(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}.$$

🗭 Lời giải.

Ta có

$$\bigcirc$$
 $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$.

$$\bigcirc$$
 $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[nm]{a}$.

$$\bigcirc$$
 $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[m]{a} = a^{\frac{1}{n}} \cdot a^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}} = a^{\frac{m+n}{mn}} = \sqrt[mn]{a^{m+n}}.$

Chọn đáp án \bigcirc

CÂU 5. Tính giá trị của biểu thức $A = \frac{6^{3+\sqrt{5}}}{2^{2+\sqrt{5}} \cdot 3^{1+\sqrt{5}}}$.

$$\mathbf{A} 6^{-\sqrt{5}}$$
.

$$(B) \, 9.$$

Dùi giải.

Ta có
$$A = \frac{2^{3+\sqrt{5}} \cdot 3^{3+\sqrt{5}}}{2^{2+\sqrt{5}} \cdot 3^{1+\sqrt{5}}} = 2 \cdot 3^2 = 18.$$

Chọn đáp án $\overline{\mathbb{C}}$

CÂU 6. Tính giá trị của biểu thức $P = 4^4 \cdot 8^{11} \cdot 2^{2017}$.

$$(A) P = 2^{2407}.$$

B
$$P = 2^{2054}$$
.

$$(\mathbf{C})P = 2^{2058}.$$

$$P = 2^{2032}$$
.

🗭 Lời giải.

Ta có $P = 4^4 \cdot 8^{11} \cdot 2^{2017} = 2^8 \cdot 2^{33} \cdot 2^{2017} = 2^{2058}$.

Chọn đáp án $\overline{(C)}$.

CÂU 7. Tính giá trị của biểu thức $P = 3^{10} \cdot 27^{-3} + 0.2^{-4} \cdot 25^{-2} + 128^{-1} \cdot 2^9 + 0.1^{-5} \cdot 0.2^5$.

(A) P = 32.

(B)
$$P = 40$$
.

(**c**)
$$P = 30$$
.

$$(\mathbf{D}) P = 38.$$

🗭 Lời giải.

Ta có $P = 3^{10} \cdot 3^{-9} + 0, 2^{-4} \cdot 5^{-4} + 2^{-7} \cdot 2^9 + 10^5 \cdot 0, 2^5 = 3^1 + 1^{-4} + 2^2 + 2^5 = 40.$

Chọn đáp án B.....

CÂU 8. Cho số thực a > 1. Nếu $a^{3x} = 2$ thì $2a^{9x}$ bằng

(A) 6.

Lời giải.

$$a^{3x} = 2 \Leftrightarrow a^{9x} = 2^3 \Leftrightarrow 2a^{9x} = 2 \cdot 8 = 16.$$

Chọn đáp án $\overline{(C)}$ \Box

CÂU 9. Giá trị của biểu thức $A=\left(2+\sqrt{3}\right)^{2019}\left(2-\sqrt{3}\right)^{2020}$ bằng

$$\mathbf{A}$$
 $A=1$.

B)
$$A = 2 - \sqrt{3}$$
.

$$\mathbf{C} A = (2 - \sqrt{3})^{2019}.$$

(D)
$$A = 2 + \sqrt{3}$$
.

🗭 Lời giải.

Ta có
$$A = (2 + \sqrt{3})^{2019} (2 - \sqrt{3})^{2020} = [(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})]^{2019} (2 - \sqrt{3}) = 2 - \sqrt{3}.$$

Chon đáp án B....

CÂU 10. Tính giá trị của biểu thức $P=\left(7+4\sqrt{3}\right)^{2020}\left(4\sqrt{3}-7\right)^{2019}$

(A)
$$P = 7 + 4\sqrt{3}$$
.

B
$$P = 7 - 4\sqrt{3}$$
.

$$(\mathbf{C})P = 1.$$

(D)
$$P = -7 - 4\sqrt{3}$$
.

🗭 Lời giải.

$$P = (7+4\sqrt{3})^{2020} (4\sqrt{3}-7)^{2019} = (7+4\sqrt{3}) (7+4\sqrt{3})^{2019} (4\sqrt{3}-7)^{2019}$$
$$= (7+4\sqrt{3}) [(7+4\sqrt{3}) (4\sqrt{3}-7)]^{2019} = (7+4\sqrt{3}) (-1)^{2019} = -7-4\sqrt{3}.$$

CÂU 11. Cho $P = \left(5 - 2\sqrt{6}\right)^{2018} \left(5 + 2\sqrt{6}\right)^{2019}$. Ta có

$$\triangle P \in (9; 11).$$

B
$$P \in (3,7)$$
.

$$(c)$$
 $P \in (7, 9).$

$$(\mathbf{D}) P \in (7; 9).$$

🗭 Lời giải.

Ta có
$$P = (5 - 2\sqrt{6})^{2018} (5 + 2\sqrt{6})^{2018} (5 + 2\sqrt{6}) = \left[(5 + 2\sqrt{6})(5 - 2\sqrt{6}) \right]^{2018} (5 + 2\sqrt{6}) = 5 + 2\sqrt{6}.$$
 Suy ra $P \in (9; 11)$.

Chon đáp án (A).....

CÂU 12. Cho x, y là hai số nguyên thỏa mãn $3^x \cdot 6^y = \frac{2^{15} \cdot 6^{40}}{9^{59} \cdot 12^{25}}$. Tính giá trị xy.

$$\bigcirc$$
 -445.

$$(B) - 755.$$

$$-540$$

$$\bigcirc$$
 -425.

🗭 Lời giải.

Ta có
$$\frac{2^{15} \cdot 6^{40}}{9^{59} \cdot 12^{25}} = \frac{2^{15} \cdot 2^{40} \cdot 3^{40}}{3^{118} \cdot 3^{25} \cdot 2^{50}} = 2^5 \cdot 3^{-103}.$$

Chon đáp án (C)...

CÂU 13. Cho hàm số $f(x) = \frac{4^x}{2+4^x}$ $(x \in \mathbb{R})$. Biết a+b=5 với a,b là hai số thực, hãy tính K=f(a)+f(b-4).

$$\bigcirc K = 1.$$

$$\bigcirc K = \frac{128}{129}.$$

$$\bigcirc K = \frac{512}{513}.$$

Lời giải.

Ta có

$$K = f(a) + f(b-4)$$

$$= f(a) + f(1-a)$$

$$= \frac{4^a}{2+4^a} + \frac{4^{1-a}}{2+4^{1-a}}$$

$$= \frac{2 \cdot 4^a + 4 + 2 \cdot 4^{1-a} + 4}{(2+4^a)(2+4^{1-a})}$$

$$= \frac{2(a^4 + 4^{1-a}) + 8}{2(4^a + 4^{1-a}) + 8} = 1.$$

Rút gọn biểu thức chứa lũy thừa

Sử dụng các tính chất của lũy thừa để chuyển về cùng một cơ số, rồi bằng cách đặt nhân tử chung hằng đẳng thức...để rút gọn biểu thức.

1. Ví du mẫu

VÍ DỤ 1. Rút gọn biểu thức
$$A = \frac{6^{2+\sqrt{5}} \cdot 2^{1-\sqrt{5}}}{3^{3+\sqrt{5}}}$$
.

🗭 Lời giải.

Ta có

$$A = \frac{6^{2+\sqrt{5}} \cdot 2^{1-\sqrt{5}}}{3^{3+\sqrt{5}}}$$

$$= \frac{(2 \cdot 3)^{2+\sqrt{5}} \cdot 2^{1-\sqrt{5}}}{3^{3+\sqrt{5}}}$$

$$= 2^{2+\sqrt{5}} \cdot 3^{2+\sqrt{5}} \cdot 2^{1-\sqrt{5}} \cdot 3^{-3-\sqrt{5}}$$

$$= 2^{2+\sqrt{5}+1-\sqrt{5}} \cdot 3^{2+\sqrt{5}-3-\sqrt{5}} = 2^3 \cdot 3^{-1} = \frac{8}{3}.$$

VÍ DỤ 2. Rút gọn các biểu thức

a)
$$\frac{a^{\frac{7}{3}} - a^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{4}{3}} - a^{\frac{1}{3}}} - \frac{a^{\frac{5}{3}} - a^{-\frac{1}{3}}}{a^{\frac{2}{3}} - a^{-\frac{1}{3}}}, (a > 0, a \neq 1);$$

b)
$$\frac{\left(\sqrt[4]{a^3b^2}\right)^4}{\sqrt[3]{\sqrt{a^12b^6}}}$$
, $(a > 0, b > 0)$.

🗭 Lời giải.

a) Với a > 0, $a \neq 1$, ta có

$$\frac{a^{\frac{7}{3}} - a^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{4}{3}} - a^{\frac{1}{3}}} - \frac{a^{\frac{5}{3}} - a^{-\frac{1}{3}}}{a^{\frac{2}{3}} - a^{-\frac{1}{3}}} = \frac{a^{\frac{1}{3}} \left(a^2 - 1\right)}{a^{\frac{1}{3}} \left(a - 1\right)} - \frac{a^{-\frac{1}{3}} \left(a^2 - 1\right)}{a^{-\frac{1}{3}} \left(a + 1\right)}$$

$$= \frac{a^{\frac{1}{3}} (a - 1)(a + 1)}{a^{\frac{1}{3}} \left(a - 1\right)} - \frac{a^{-\frac{1}{3}} (a - 1)(a + 1)}{a^{-\frac{1}{3}} \left(a + 1\right)}$$

$$= (a + 1) - (a - 1) = 2.$$

b) Với a > 0, b > 0 ta có

$$\frac{\left(\sqrt[4]{a^3b^2}\right)^4}{\sqrt[3]{\sqrt{a^{12}b^6}}} = \frac{a^3b^2}{\sqrt[3]{a^6b^3}} = \frac{a^3b^2}{a^2b} = ab.$$

VÍ DỤ 3. Rút gọn biểu thức $A=rac{\left(a^{\sqrt{2}-1}\right)^{1+\sqrt{2}}}{a^{\sqrt{5}-1}\cdot a^{3-\sqrt{5}}}$

🗭 Lời giải.

Ta có

$$A = \frac{\left(a^{\sqrt{2}-1}\right)^{1+\sqrt{2}}}{a^{\sqrt{5}-1} \cdot a^{3-\sqrt{5}}} = \frac{a^{-1}}{a^2} = a^{-3} = \frac{1}{a^3}.$$

2. Bài tập rèn luyên

BÀI 1. Rút gọn các biểu thức

a)
$$a^{\frac{1}{3}} \cdot a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{7}{6}}$$
:

b)
$$a^{\frac{2}{3}} \cdot a^{\frac{1}{4}} : a^{\frac{1}{6}};$$

c)
$$\left(\frac{3}{2}a^{-\frac{3}{2}}b^{-\frac{1}{2}}\right)\left(-\frac{1}{3}a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{2}}\right)$$
.

🗭 Lời giải.

a)
$$a^{\frac{1}{3}}a^{\frac{1}{2}}a^{\frac{7}{6}} = a^{\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{7}{6}} = a^2$$
.

b)
$$a^{\frac{2}{3}}a^{\frac{1}{4}}: a^{\frac{1}{6}} = a^{\frac{2}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6}} = a^{\frac{3}{4}}.$$

c)
$$\left(\frac{3}{2}a^{-\frac{3}{2}}b^{-\frac{1}{2}}\right)\left(-\frac{1}{3}a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{3}{2}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)a^{\frac{-3}{2}+\frac{1}{2}}\cdot b^{-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}} = -\frac{1}{2}a^{-1}b.$$

BÀI 2. Rút gọn các biểu thức sau

a)
$$A = \frac{x^5y^{-2}}{x^3y}$$
, với $x, y \neq 0$;

b)
$$B = \frac{x^{\frac{1}{3}}\sqrt{y} + y^{\frac{1}{3}}\sqrt{x}}{\sqrt[6]{x} + \sqrt[6]{y}}$$
, với x, y dương.

Lời giải.

a)
$$A = \frac{x^5y^{-2}}{x^3y} = x^2y^{-3}$$
.

b)
$$B = \frac{x^{\frac{1}{3}}\sqrt{y} + y^{\frac{1}{3}}\sqrt{x}}{\sqrt[6]{x} + \sqrt[6]{y}} = \frac{x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}\left(x^{\frac{1}{6}} + y^{\frac{1}{6}}\right)}{x^{\frac{1}{6}}y^{\frac{1}{6}}} = x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}.$$

BAI 3. Cho số thực dương a. Rút gọn các biểu thức

a)
$$\frac{a^{\frac{4}{3}}\left(a^{-\frac{1}{3}}+a^{\frac{2}{3}}\right)}{a^{\frac{1}{4}}\left(a^{\frac{3}{4}}+a^{-\frac{1}{4}}\right)};$$

b)
$$\frac{a^{\frac{1}{5}} \left(\sqrt[5]{a^4} - \sqrt[5]{a^{-1}}\right)}{a^{\frac{2}{3}} \left(\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{a^{-2}}\right)}$$
.

Lời giải.

a)

$$\frac{a^{\frac{4}{3}}\left(a^{-\frac{1}{3}} + a^{\frac{2}{3}}\right)}{a^{\frac{1}{4}}\left(a^{\frac{3}{4}} + a^{-\frac{1}{4}}\right)} = \frac{a^{\frac{4}{3}} \cdot a^{-\frac{1}{3}}\left(1 + a\right)}{a^{\frac{1}{4}} \cdot a^{-\frac{1}{4}}\left(a + 1\right)} = \frac{a}{a^0} = a.$$

b)

$$\frac{a^{\frac{1}{5}}\left(\sqrt[5]{a^4}-\sqrt[5]{a^{-1}}\right)}{a^{\frac{2}{3}}\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{a^{-2}}\right)}=\frac{a^{\frac{1}{5}}\left(a^{\frac{4}{5}}-a^{-\frac{1}{5}}\right)}{a^{\frac{2}{3}}\left(a^{\frac{1}{3}}-a^{-\frac{2}{3}}\right)}=\frac{a^{\frac{1}{5}}\cdot a^{-\frac{1}{5}}\left(a-1\right)}{a^{\frac{2}{3}}\cdot a^{-\frac{2}{3}}\left(a-1\right)}=\frac{1}{1}=1$$

BÀI 4. Tại một xí nghiệp, công thức $P(t) = 500 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{3}}$ được dùng để tính giá trị còn lại (tính theo triệu đồng) của một chiếc máy sau thời gian t (tính theo năm) kể từ khi đưa vào sử dụng.

- a) Tính giá trị còn lại của máy sau 2 năm; sau 2 năm 3 tháng.
- b) Sau 1 năm đưa vào sử dụng, giá trị còn lại của máy bằng bao nhiêu phần trăm so với ban đầu?

🗭 Lời giải.

a) Giá trị còn lại của máy sau t=2 năm là $P=500\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}}\approx 315.$

Giá trị còn lại của máy sau sau 2 năm 3 tháng $(t=\frac{9}{4}$ năm) là $P=500\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{\overline{4}}{3}}=500\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{4}}\approx 297.$

b) Ban đầu giá trị của máy là $P_0 = 500 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 500$.

Giá trị còn lại của máy sau 1 năm sử dụng: $P = 500 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}} = 396,85$.

Suy ra
$$\frac{P}{P_0} = 79,37\%$$
.

3. Bài tập trắc nghiệm

CÂU 1. Với a là số thực dương, rút gọn $P = a\sqrt[3]{\sqrt{a}}$ ta được

B
$$P = a^{\frac{11}{6}}$$
.

$$\bigcirc P = a^{\frac{7}{6}}.$$

Ta có
$$P=a\sqrt[3]{\sqrt{a}}=a\sqrt[3]{a^{\frac{1}{2}}}=a\cdot a^{\frac{1}{6}}=a^{\frac{7}{6}}.$$
 Chọn đáp án \bigcirc

CÂU 2. Rút gọn biểu thức $P = b^{\frac{1}{2}} \cdot b^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[6]{b}$ với b > 0.

$$P=b^{\frac{3}{11}}.$$

$$(\mathbf{C})P = b^{\frac{1}{36}}.$$

Lời giải.

$$P = b^{\frac{1}{2}} \cdot b^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[6]{b} = b^{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}} = b.$$

Chọn đáp án (A).....

CÂU 3. Rút gọn biểu thức $P = x^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[6]{x}$ với x > 0.

A
$$P = x^{\frac{1}{8}}$$

$$\stackrel{\cdot}{\mathbf{B}}\stackrel{\cdot}{P}=x^2$$

$$(\mathbf{C})P = x^{\frac{2}{9}}.$$

$$\mathbf{D} P = \sqrt{x}.$$

🗭 Lời giải.

Ta có $P = x^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[6]{x} = x^{\frac{1}{3}} \cdot x^{\frac{1}{6}} = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$.

Chọn đáp án (D).....

CÂU 4. Rút gon biểu thức $\sqrt{81a^4b^2}$ ta được

$$\bigcirc 9a^2|b|.$$

B)
$$-9a^2b$$
.

$$\bigcirc 9a^2b.$$

(**D**) Kết quả khác.

🗭 Lời giải.

Ta có $\sqrt{81a^4b^2} = 9a^2|b|$.

Chon đáp án (A).....

CÂU 5. Cho biểu thức $\sqrt[5]{8\sqrt{2\sqrt[3]{2}}} = 2^{\frac{m}{n}}$, trong đó $\frac{m}{n}$ có dạng phân số tối giản. Gọi $P = m^2 + n^2$. Khẳng định nào sau đây đúng?

$$(A)$$
 $P \in (330; 340).$

B
$$P \in (350; 360)$$
.

$$P \in (340; 350).$$

$$P \in (360; 370).$$

🗭 Lời giải.

$$\text{Ta có } \sqrt[5]{8\sqrt{2\sqrt[3]{2}}} = \left(8\cdot\left(2\cdot2^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{5}} = \left(2^3\cdot2^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{5}} = \left(2^{\frac{11}{3}}\right)^{\frac{1}{5}} = 2^{\frac{11}{15}}.$$

Do đó $m = 11, n = 15 \Rightarrow P = m^2 + n^2 = 346.$

Chọn đáp án \bigcirc

CÂU 6. Rút gọn biểu thức $Q = b^{\frac{5}{3}} : \sqrt[3]{b}$ với b > 0.

$$(A) Q = b^{\frac{4}{3}}.$$

B
$$Q = b^{\frac{5}{9}}$$
.

$$\bigcirc Q = b^2.$$

$$\bigcirc Q = b^{-\frac{4}{3}}.$$

Dùi giải.

$$Q = b^{\frac{5}{3}} : \sqrt[3]{b} = b^{\frac{5}{3} - \frac{1}{3}} = b^{\frac{4}{3}}.$$

Chon đáp án A.....

CÂU 7. Cho a là số thực dương tùy ý và a khác 1, đặt $A = \frac{a^{\sqrt{7}} \cdot a^{\sqrt{7}}}{(a^2)^{\sqrt{7}}}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

$$\bigcirc A=1.$$

$$\bigcirc A = \sqrt{7}.$$

$$\bigcirc$$
 $A = a$.

🗭 Lời giải.

Ta có
$$A = \frac{a^{\sqrt{7}} \cdot a^{\sqrt{7}}}{(a^2)^{\sqrt{7}}} = \frac{a^{2\sqrt{7}}}{a^{2\sqrt{7}}} = 1.$$

Chọn đáp án (A).

CÂU 8. Cho x, y là các số thực thỏa mãn $x \neq 0$ và $\left(3^{x^2}\right)^{3y} = 27^x$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

c
$$xy = 1$$
.

$$\bigcirc 3xy = 1.$$

🗭 Lời giải.

Ta có

$$\left(3^{x^2}\right)^{3y} = 27^x \Leftrightarrow 3^{3x^2y} = 3^{3x}$$

$$\Leftrightarrow 3x^2y = 3x \Leftrightarrow xy = 1.$$

CÂU 9. Rút gọn biểu thức $P = \frac{\sqrt[6]{x}\sqrt[3]{x^4}\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x^3}}$ với x là số thực dương.

$$\mathbf{A} x^{\frac{13}{15}}$$
.

$$\mathbf{c} x^{\frac{1}{6}}$$
.

$$\mathbf{D} x^{\frac{13}{18}}.$$

D Lời giải.

Ta có
$$P = \frac{\sqrt[6]{x}\sqrt[3]{x^4}\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x^3}} = x^{\frac{1}{6} + \frac{4}{3} + \frac{1}{4} - \frac{3}{2}} = x^{\frac{1}{4}}.$$

$$P = a^4.$$

$$P = a^2.$$

$$\bigcirc P = a^5.$$

Với
$$a > 0$$
 thì $P = \frac{a^{\sqrt{7}+1} \cdot a^{2-\sqrt{7}}}{\left(a^{\sqrt{2}-2}\right)^{\sqrt{2}+2}} = \frac{a^{\sqrt{7}+1+2-\sqrt{7}}}{a^{(\sqrt{2}-2)(\sqrt{2}+2)}} = \frac{a^3}{a^{-2}} = a^5.$

Chọn đáp án (C)..

CÂU 11. Cho a là một số thực dương. Rút gọn biểu thức: $P = \frac{\left(a^{\sqrt{7}-3}\right)^{\sqrt{7}+3}}{a^{\sqrt{11}-4} \cdot a^{5-\sqrt{11}}}$?

(a) $P = a^3$.
(b) $P = a^{2\sqrt{7}-1}$.
(c) $P = \frac{1}{a^3}$.

$$P = a^3$$

$$\mathbf{C} P = \frac{1}{a^3}.$$

$$\bigcirc P = a^2.$$

🗭 Lời giải.

$$P = \frac{\left(a^{\sqrt{7}-3}\right)^{\sqrt{7}+3}}{a^{\sqrt{11}-4} \cdot a^{5-\sqrt{11}}}$$

$$= \frac{a^{\left(\sqrt{7}-3\right)\left(\sqrt{7}+3\right)}}{a^{\sqrt{11}-4+5-\sqrt{11}}}$$

$$= \frac{a^{7-9}}{a}$$

$$= \frac{1}{a^{3}}$$

Chọn đáp án (C)...

CÂU 12. Rút gọn biểu thức $A=\frac{\sqrt[3]{a^7}\cdot a^{\frac{11}{3}}}{a^4\cdot \sqrt[7]{a^{-5}}}$ với a>0 ta được kết quả $A=a^{\frac{m}{n}}$ trong đó $m,\,n\in\mathbb{N}^*$ và $\frac{m}{n}$ là phân số tối giản. Khẳng định nào sau đây đúng?

B
$$m^2 + n^2 = 543$$
. **C** $m^2 - n^2 = -312$. **D** $m^2 + n^2 = 409$.

🗭 Lời giải.

Ta có

$$A = \frac{\sqrt[3]{a^7} \cdot a^{\frac{11}{3}}}{a^4 \cdot \sqrt[7]{a^{-5}}} = \frac{a^{\frac{7}{3} + \frac{11}{3}}}{a^{4 - \frac{5}{7}}} = a^{\frac{19}{7}}.$$

Vậy $m^2 - n^2 = 312$.

Chọn đáp án (A)....

CÂU 13. Cho các số dương a, b. Rút gọn biểu thức $Q = \frac{a^{\frac{4}{3}}b + ab^{\frac{4}{3}}}{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}}$

$$\bigcirc$$
 $Q = 2ab.$

$$\bigcirc Q = \sqrt{ab}.$$

$$\bigcirc Q = ab.$$

🗭 Lời giải.

Ta có:

$$Q = \frac{a^{\frac{4}{3}}b + ab^{\frac{4}{3}}}{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}} = \frac{ab\left(a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}}\right)}{\left(a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}}\right)} = ab.$$

CÂU 14. Cho $5^x + 5^{-x} = a$. Rút gọn biểu thức $M = \frac{25^x + 25^{-x} + 1}{5^x + 5^{-x} + 1}$ bằng

$$\mathbf{A}$$
 $a+1$.

$$(\mathbf{B})a-1$$

(c)
$$a^2 + 1$$

$$\bigcirc$$
 $a^2 - 1$.

🗭 Lời giải.

Ta có $5^x + 5^{-x} = a \Leftrightarrow 25^x + 25^{-x} + 2 = a^2 \Leftrightarrow 25^x + 25^{-x} = a^2 - 2.$ Do đó $M = \frac{25^x + 25^{-x} + 1}{5^x + 5^{-x} + 1} = \frac{a^2 - 1}{a + 1} = a - 1.$

Chọn đáp án (B).....

CÂU 15. Cho $f(x) = e^{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(x+1)^2}}}$. Biết rằng $f(1)\cdot f(2)\cdot f(3)\cdots f(2019) = e^{\frac{m}{n}}$, với m, n là các số tự nhiên và $\frac{m}{n}$ tối giản. Tính $m-n^2$.

$$(A) m - n^2 = 2018.$$

B)
$$m - n^2 = 1$$
.

$$\mathbf{C}$$
 $m - n^2 = -2018$. \mathbf{D} $m - n^2 = -1$.

$$(n-1)m - n^2 = -1.$$

Ta có

$$1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{x^2(x+1)^2 + (x+1)^2 + x^2}{x^2(x+1)^2}$$
$$= \frac{x^2(x+1)^2 + 2x(x+1) + 1}{x^2(x+1)^2}$$
$$= \frac{[x(x+1)+1]^2}{x^2(x+1)^2}$$
$$= \left[\frac{x(x+1)+1}{x(x+1)}\right]^2.$$

Suy ra
$$f(x) = e^{\frac{x(x+1)+1}{x(x+1)}} = e^{1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}}$$
 vì $x > 0$.

$$f(1) \cdot f(2) \cdots f(2019) = e^{1+1-\frac{1}{2}} \cdot e^{1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}} \cdots e^{1+\frac{1}{2018}-\frac{1}{2019}} = e^{2019+1-\frac{1}{2020}} = e^{2020-\frac{1}{2020}} = e^{\frac{2020^2-1}{2020}}.$$

Suv ra $m = 2020^2 - 1$ và $n = 2020 \Rightarrow m - n^2 = -1$.

Chọn đáp án (D).....



So sánh biểu thức lũv thừa

Biến đổi các biểu thức về cùng cơ số hoặc cùng số mũ, từ đó, dựa vào tính chất lũy thừa để so sánh.

1. Ví du mẫu

VÍ DU 1. Không sử dụng máy tính, hãy so sánh $3^{\sqrt{8}}$ và 3^3 .

🗭 Lời giải.

Ta có $3 = \sqrt{9} > \sqrt{8}$. Vì cơ số 3 lớn hơn 1 nên $3^{\sqrt{8}} < 3^3$.

VÍ DU 2. Không sử dụng máy tính, hãy so sánh các số $8^{\sqrt{3}}$ và $4^{2\sqrt{3}}$.

D Lời giải.

Ta có
$$8^{\sqrt{3}} = (2^3)^{\sqrt{3}} = 2^{3\sqrt{3}}$$
 và $4^{2\sqrt{3}} = (2^2)^{2\sqrt{3}} = 2^{4\sqrt{3}}$.

Vì $3\sqrt{3} < 4\sqrt{3}$ và 2 > 1 nên $2^{3\sqrt{3}} < 2^{4\sqrt{3}}$.

Vây $8^{\sqrt{3}} < 4^{2\sqrt{3}}$.

2. Bài tấp rèn luyên

BÀI 1. Không sử dụng máy tính cầm tay, hãy so sánh các số sau

a)
$$\sqrt{42}$$
 và $\sqrt[3]{51}$;

b)
$$16^{\sqrt{3}}$$
 và $4^{3\sqrt{2}}$:

c)
$$(0.2)^{\sqrt{16}}$$
 và $(0.2)^{\sqrt[3]{60}}$.

🗭 Lời giải.

a) Ta có
$$\sqrt{42} = 42^{\frac{1}{2}}$$
 suy ra $42^3 = \left(42^{\frac{1}{2}}\right)^6$ và $\sqrt[3]{51} = 51^{\frac{1}{3}}$ suy ra $51^2 = \left(51^{\frac{1}{3}}\right)^6$.
Mà $42^3 > 51^2$ suy ra $\sqrt{42} > \sqrt[3]{51}$.

b) Ta có
$$16^{\sqrt{3}} = 4^{2\sqrt{3}}$$
 và $4^{3\sqrt{2}}$.
Do $(2\sqrt{3})^2 = 12$ và $(3\sqrt{2})^2 = 32$, nên $2\sqrt{3} < 3\sqrt{2}$.
Mặt khác cơ số $4 > 1$ nên $16^{\sqrt{3}} < 4^{3\sqrt{2}}$;

c) Ta có
$$(\sqrt{16})^6 = 16^3$$
, $(\sqrt[3]{60})^6 = 60^2$.
Suy ra $\sqrt{16} > \sqrt[3]{60}$ mà cơ số $0.2 < 1$ nên $(0.2)^{\sqrt{16}} < (0.2)^{\sqrt[3]{60}}$.

BÀI 2. Không sử dụng máy tính cầm tay, hãy so sánh

a)
$$5^{6\sqrt{3}}$$
 và $5^{3\sqrt{6}}$:

b)
$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{-4}{3}}$$
 và $\sqrt{2} \cdot 2^{\frac{2}{3}}$.

a) Ta có
$$6\sqrt{3} = \sqrt{6^2 \cdot 3} = \sqrt{108}$$
 và $3\sqrt{6} = \sqrt{3^2 \cdot 6} = \sqrt{54}$.
Do $3\sqrt{6} = \sqrt{54} < \sqrt{108} = 6\sqrt{3}$ và cơ số $5 > 1$ nên $5^{3\sqrt{6}} < 5^{6\sqrt{3}}$.

b) Ta có
$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{-4}{3}} = 2^{\frac{4}{3}}$$
 và $\sqrt{2} \cdot 2^{\frac{2}{3}} = 2^{\frac{1}{2} + \frac{2}{3}} = 2^{\frac{7}{6}}$.

Do $\frac{7}{c} < \frac{8}{c} = \frac{4}{2}$ và cơ số 2 > 1 nên $2^{\frac{7}{6}} < 2^{\frac{4}{3}}$ hay $\sqrt{2} \cdot 2^{\frac{2}{3}} < \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{-4}{3}}$.

3. Bài tấp trắc nghiệm

CÂU 1. Cho $\pi^{\alpha} > \pi^{\beta}$ với $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Mênh đề nào dưới đây đúng? $(\mathbf{A}) \alpha < \beta$. (B) $\alpha > \beta$.

 $(\mathbf{D})\alpha = \beta.$

🗭 Lời giải.

Ta có $\pi^{\alpha} > \pi^{\beta} \Rightarrow \alpha > \beta$.

Chọn đáp án (B).....

CÂU 2. Cho a và b thuộc khoảng (0;1) và α , β là những số thực tùy ý. Khẳng định nào sau đây là khẳng định sai?

 $(\mathbf{A}) (a^{\alpha})^{\beta} = (a^{\beta})^{\alpha}.$

 $(\mathbf{B}) a^{\alpha} > a^{\beta} \Leftrightarrow \alpha > \beta.$

 \mathbf{C} $a^{\alpha}a^{\beta}=a^{\alpha+\beta}$.

🗭 Lời giải.

Do 0 < a < 1 nên $a^{\alpha} > a^{\beta} \Leftrightarrow \alpha < \beta$. Vậy khẳng định $a^{\alpha} > a^{\beta} \Leftrightarrow \alpha > \beta$ là sai.

CÂU 3. Sắp xếp các số $a = \sqrt{2^3}$, b = 4, $c = \sqrt[3]{2}$ theo thứ tự từ nhỏ đến lớn ta được $(\mathbf{A}) a < b < c.$

B) c < a < b.

(**c**) c < b < a.

 (\mathbf{D}) b < a < c.

🗭 Lời giải.

Ta có $a = \sqrt{2^3} = 2^{\frac{3}{2}}, b = 4 = 2^2, c = \sqrt[3]{2} = 2^{\frac{2}{3}}.$

Vì 2 > 1 và $\frac{2}{3} < \frac{3}{2} < 2$ nên c < a < b.

CÂU 4. Cho biết $(x-2)^{-\frac{1}{3}} > (x-2)^{-\frac{1}{6}}$, khẳng đinh nào sau đây đúng?

 \mathbf{A} x > 1.

B) 2 < x < 3.

 $\bigcirc 0 < x < 1.$

Lời giải.

 $\text{Do } -\frac{1}{3} < -\frac{1}{6} \text{ và } -\frac{1}{3}; -\frac{1}{6} \notin \mathbb{Z} \text{ nên bất phương trình tương đương } \begin{cases} x-2>0 \\ x-2<1 \end{cases} \Leftrightarrow 2 < x < 3.$

Chọn đáp án (B).....

CÂU 5. Cho $a>0,\ b>0$ thỏa $a^{\frac{1}{2}}>a^{\frac{1}{3}}$ và $b^{\frac{2}{3}}>b^{\frac{3}{4}}$. Khi đó

(A) a > 1, 0 < b < 1.

(B) a > 1, b > 1.

 \bigcirc 0 < a < 1, 0 < b < 1. \bigcirc 0 < a < 1, b > 1.

🗭 Lời giải.

Ta có a > 0 và $a^{\frac{1}{2}} > a^{\frac{1}{3}}$ nên a > 1; b > 0 và $b^{\frac{2}{3}} > b^{\frac{3}{4}}$ nên 0 < b < 1.

Chon đáp án (A).....

Bài 19. PHÉP TÍNH LOGARIT

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Đinh nghĩa

 \uparrow Định nghĩa 19.1. Cho hai số thực dương a,b với a khác 1. Số thực c để $a^c=b$ được gọi là lôgarit cơ số a của b và kí hiệu là $\log_a b$, nghĩa là

$$c = \log_a b \Leftrightarrow a^c = b.$$

 $\log_a b$ xác định khi và chỉ khi a > 0, $a \neq 1$ và b > 0.

2. Tính chất

TÍNH CHẤT 19.1. Với số thực dương a khác 1, số thực dương b, ta có:

$$\log_a 1 = 0; \quad \log_a a = 1; \quad \log_a a^c = c; \quad a^{\log_a b} = b.$$

7 TÍNH CHẤT 19.2. Với ba số thực dương a, m, n và $a \neq 1$, ta có:

 Θ $\log_a(mn) = \log_a m + \log_a n;$

 Θ $\log_a\left(\frac{m}{n}\right) = \log_a m - \log_a n.$

Ta có:

$$\log_a \left(\frac{1}{b}\right) = -\log_a b \ (a > 0, a \neq 1, b > 0).$$

7 TÍNH CHẤT 19.3. Cho $a > 0, a \neq 1, b > 0$. Với mọi số thực α , ta có:

$$\log_a b^{\alpha} = \alpha \log_a b.$$

A

Cho $a>0, a\neq 1, b>0$. Với mọi số nguyên dương $n\geq 2$, ta có: $\log_a \sqrt[n]{b}=\frac{1}{n}\log_a b$.

† TÍNH CHẤT 19.4. Với a, c là hai số thực dương khác 1 và b là số thực dương, ta có:

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}.$$

7 NHẬN XÉT. Với a>0 và $a\neq 1, b>0$ và $b\neq 1, c>0, \alpha\neq 0$, ta có những công thức sau:

- Θ $\log_a b \cdot \log_b c = \log_a c$;
- \bigcirc $\log_{a^{\alpha}} b = \frac{1}{\alpha} \log_a b.$

3. Lôgarit thập phân. Lôgarit tự nhiên

- \odot Lôgarit cơ số 10 của số thực dương b được gọi là lôgarit thập phân của b và kí hiệu là $\log b$ hay $\log b$.
- \odot Lôgarit cơ số e của số thực dương b được gọi là lôgarit tự nhiên của b và kí hiệu là $\ln b$.

4. Tính lôgarit bằng máy tính cầm tay

B. CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP



Tính giá trị biểu thức chứa lôgarít

1. Ví du mẫu

VÍ DU 1. Cho $\log a = 4$. Tính giá trị của biểu thức $P = \log(100a^2)$.

♠ Lời giải.

Ta có $P = \log 100 + \log a^2 = 2 + 2 \log a = 2 + 4 \cdot 2 = 10.$

VÍ DU 2. Cho $\log_a b = 2$. Tính $\log_a (a^2 b)$.

C Lời giải.

Ta có $\log_a(a^2b) = \log_a a^2 + \log_a b = 2 + 2 = 4.$

VÍ DỤ 3. Cho a và b là hai số thực dương thỏa mãn $a^3b^2=32$. Tính giá trị của biểu thức $P=3\log_2 a+2\log_2 b$. \bigcirc Lời giải.

Ta xét

$$a^3b^2 = 32 \Leftrightarrow \log_2(a^3b^2) = \log_2 32 \Leftrightarrow \log_2 a^3 + \log_2 b^2 = 5 \Leftrightarrow 3\log_2 a + 2\log_2 b = 5.$$

Vậy P = 5.

VÍ DỤ 4. Cho $\log_a b = 2$, $\log_a c = 3$. Tính $Q = \log_a (b^2 c)$.

🗭 Lời giải.

Ta có $Q = \log_a (b^2 c) = \log_a b^2 + \log_a c = 2 \log_a b + \log_a c = 2 \cdot 2 + 3 = 7.$

VÍ DỤ 5. Cho a là số thực dương khác 5. Tính $I = \log_{\frac{a}{5}} \left(\frac{a^3}{125} \right)$.

🗭 Lời giải.

Ta có
$$I = \log_{\frac{a}{5}} \left[\left(\frac{a}{5} \right)^3 \right] = 3.$$

VÍ DỤ 6. Cho a, b là hai số thực dương thỏa mãn $ab^3 = 8$. Tính giá trị của $\log_2 a + 3\log_2 b$.

Lời giải.

Ta có $ab^3 = 8 \Leftrightarrow \log_2(ab^3) = \log_2 8 \Leftrightarrow \log_2 a + 3\log_2 b = 3$.

VÍ DỤ 7. Cho a > 0 và đặt $\log_2 a = x$. Tính $\log_8(4a^3)$ theo x.

🗭 Lời giải.

Ta có $\log_8(4a^3) = \log_8 4 + \log_8 a^3 = \frac{2}{3} + \log_2 a = \frac{2}{3} + x.$

VÍ DU 8. Cho số a > 1. Tính giá trị biểu thức $P = a^{2 \log_a 3}$.

🗭 Lời giải.

Ta có $P = a^{2 \log_a 3} = (a^{\log_a 3})^2 = 3^2 = 9.$

VÍ DỤ 9. Đặt $\log_2 3 = a$, $\log_2 5 = b$. Tính $\log_5 3$ theo a, b.

🗭 Lời giải.

Ta có $\log_5 3 = \frac{\log_2 3}{\log_2 5} = \frac{a}{b}$

VÍ DỤ 10. Tính giá trị biểu thức $Q = \log \frac{10}{11} + \log \frac{11}{12} + \log \frac{12}{13} + \dots + \log \frac{999}{1000}$

🗭 Lời aiải.

Ta có
$$Q = \log \frac{10}{11} + \log \frac{11}{12} + \log \frac{12}{13} + \dots + \log \frac{999}{1000} = \log \left(\frac{10}{11} \cdot \frac{11}{12} \cdot \dots \cdot \frac{999}{1000} \right) = \log \frac{10}{1000} = -2.$$

VÍ DỤ 11. Cho a, b, c là các số thực dương, $a \neq 1$ và $\log_a b = 5$, $\log_a c = 7$. Tính giá trị của biểu thức $P = \log_{\sqrt{a}} \left(\frac{b}{c}\right)$.

🗩 Lời giải.

Ta có
$$P = \log_{\sqrt{a}} \left(\frac{b}{c} \right) = \log_{\sqrt{a}} b - \log_{\sqrt{a}} c = 2 \log_a b - 2 \log_a c = 2 \cdot 5 - 2 \cdot 7 = -4.$$

VÍ DỤ 12. Cho a, b, c là các số thực khác 0 thỏa mãn $4^a=25^b=10^c$. Tính $T=\frac{c}{a}+\frac{c}{b}$

🗭 Lời giải.

$$\text{T\'e} \ 4^a = 25^b = 10^c \Rightarrow a \log 4 = b \log 25 = c \Rightarrow T = \frac{c}{a} + \frac{c}{b} = \log 4 + \log 25 = \log 100 = 2.$$

VÍ DỤ 13. Cho a và b lần lượt là số hạng thứ nhất và thứ chín của một cấp số cộng có công sai $d \neq 0$. Tính giá trị của $\log_2\left(\frac{b-a}{d}\right)$.

🗭 Lời giải.

Ta có
$$\log_2\left(\frac{b-a}{d}\right) = \log_2\frac{u_1 + 8d - u_1}{d} = 3.$$

VÍ DỤ 14. Ba số $a + \log_2 3$; $a + \log_4 3$; $a + \log_8 3$ theo thứ tự lập thành cấp số nhân. Tìm công bội của cấp số nhân này. \bigcirc Lời giải.

Ba số $a + \log_2 3$; $a + \log_4 3$; $a + \log_8 3$ theo thứ tự lập thành cấp số nhân nên ta có

$$(a + \log_2 3)(a + \log_8 3) = (a + \log_4 3)^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{12} \log_2^2 3 + \frac{1}{3} a \log_2 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{12} \log_2 3 (\log_2 3 + 4a) = 0$$

$$\Leftrightarrow a = -\frac{1}{4} \log_2 3.$$

Vậy công bội
$$q = \frac{-\frac{1}{4}\log_2 3 + \frac{1}{2}\log_2 3}{-\frac{1}{4}\log_2 3 + \log_2 3} = \frac{1}{3}.$$

2. Bài tập rèn luyện

BÀI 1. Tính giá tri biểu thức $A = 2^{\log_4 9 + \log_2 5}$

Dùi giải.

Ta có
$$A = 2^{\log_4 9 + \log_2 5} = 2^{\log_4 9} \cdot 2^{\log_2 5} = 3 \cdot 5 = 15.$$

Vậy
$$A = 15$$
.

BÀI 2. Cho hai số thực dương a, b thỏa mãn $a^2b^3=64$. Tính giá trị của biểu thức $P=2\log_2 a+3\log_2 b$.

🗭 Lời giải.

Ta có
$$\log_2(a^2b^3) = \log_2 64 \Leftrightarrow 2\log_2 a + 3\log_2 b = 6.$$

Vậy
$$P = 6$$
.

BÀI 3. Cho $0 < a \neq 1$. Tính giá trị của biểu thức $T = \log_a(a^3)$.

Lời giải.

Ta có $T = \log_a(a^3) = 3\log_a a = 3.$

BÀI 4. Cho a là một số thực dương tùy ý và $a \neq 2$. Tính $P = \log_{\frac{a}{2}} \frac{a^3}{8}$.

🗭 Lời giải.

Ta có
$$P = \log_{\frac{a}{2}} \frac{a^3}{8} = \log_{\frac{a}{2}} \left(\frac{a}{2}\right)^3 = 3.$$

BÀI 5. Cho a là số thực dương khác 1. Tính giá trị của biểu thức $I = \log_a a^{\frac{1}{2}}$.

🗭 Lời giải.

Ta có
$$I = \frac{1}{2} \log_a a = \frac{1}{2}$$
.

BÀI 6. Tính giá trị của biểu thức $M = \log_2 \sqrt{2\sqrt{32}}$.

🗭 Lời giải.

$$\text{Ta có } M = \log_2 \sqrt{2\sqrt{32}} = \log_2 \sqrt{2\sqrt{2^5}} = \log_2 \sqrt{2 \cdot 2^{\frac{5}{2}}} = \log_2 2^{\frac{7}{4}} = \frac{7}{4}.$$

BÀI 7. Cho a là số thực dương tùy ý khác 1, tính giá trị $P = \log_{\sqrt[3]{a}} a^3$.

🗭 Lời giải.

Ta có
$$P = \log_{\sqrt[3]{a}} a^3 = 9 \log_a a = 9.$$

BÀI 8. Tính giá tri biểu thức $10^{\log 5} + 5^{\circ}$.

🗭 Lời giải.

Ta có
$$10^{\log 5} + 5^0 = 5 + 1 = 6$$
.

BÀI 9. Biết $\log_3 5 = a$. Tính $\log_3 45$ theo a.

🗭 Lời giải.

Ta có $\log_3 45 = \log_3 5 + \log_3 9 = 2 + \log_3 5 = 2 + a$.

BÀI 10. Cho a và b là hai số thực dương khác 1 thỏa mãn $\sqrt{a} = \sqrt[3]{b}$. Tính giá trị $\log_a b$.

🗭 Lời giải.

Ta có a và b là hai số thực dương thoả $\sqrt{a}=\sqrt[3]{b} \Leftrightarrow b=a^{\frac{3}{2}}.$

Ta được

$$\log_a b = \log_a a^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}.$$

BÀI 11. Với a, b là hai số thực dương thỏa mãn $\log a = 11$, $\log b = 13$. Tính giá trị biểu thức $\log \left(ab^2\right)$. \bigcirc Lời giải.

Ta có $\log(ab^2) = \log a + \log b^2 = \log a + 2\log b = 11 + 2 \cdot 13 = 37.$

BÀI 12. Cho a, b là các số thực dương lớn hơn 1 thỏa mãn $\log_a b = 3$. Tính giá trị biểu thức

$$P = \log_{a^2 b} a^3 - 3\log_{a^2} 2 \cdot \log_4 \left(\frac{a}{b}\right).$$

🗭 Lời giải.

Ta có
$$P = \frac{1}{\log_a 3}(a^2b) - \frac{3}{2}\log_a 2 \cdot \frac{1}{2}\log_2\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{3}{\log_a a^2 + \log_a b} - \frac{3}{4}\log_a\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{3}{2 + \log_a b} - \frac{3}{4}\left(1 - \log_a b\right).$$
 Mà $\log_a b = 3$ nên $P = \frac{21}{10}$.

BÀI 13. Cho hai số dương a, b với $a \neq 1$, thỏa mãn $\log_{a^2} b + \log_a b^2 = 2$. Tính $\log_a b$.

🗭 Lời giái.

$$\text{Ta c\'o} \, \log_{a^2} b + \log_a b^2 = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \log_a b + 2 \log_a b = 2 \Leftrightarrow \frac{5}{2} \log_a b = 2 \Leftrightarrow \log_a b = \frac{4}{5}.$$

BÀI 14. Biết rằng $a = \log_2 3$, $b = \log_2 5$. Hãy biểu diễn $\log_{45} 4$ theo a và b.

🗩 Lời giải.

Ta có:
$$\log_{45} 4 = \frac{\log_2 4}{\log_2 45} = \frac{2\log_2 2}{\log_2 (5 \cdot 3^2)} = \frac{2}{\log_2 3^2 + \log_2 5} = \frac{2}{2\log_2 3 + \log_2 5} = \frac{2}{2a + b}.$$

BÀI 15. Cho biểu thức $f(x) = \log_2\left(x - \frac{1}{2} + \sqrt{x^2 - x + \frac{17}{4}}\right)$, (0 < x < 1). Tính giá trị của biểu thức

$$T = f\left(\frac{1}{1000}\right) + f\left(\frac{2}{1000}\right) + \dots + f\left(\frac{999}{1000}\right).$$

Lời giải.

Ta có
$$f(x) = \log_2\left(x - \frac{1}{2} + \sqrt{x^2 - x + \frac{17}{4}}\right) = \log_2\left(x - \frac{1}{2} + \sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 4}\right).$$

$$f(1 - x) = \log_2\left(1 - x - \frac{1}{2} + \sqrt{\left(1 - x - \frac{1}{2}\right)^2 + 4}\right) = \log_2\left(\sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)\right).$$

Khi đó

$$\begin{split} f(x) + f(1-x) &= \log_2 \left(x - \frac{1}{2} + \sqrt{\left(x - \frac{1}{2} \right)^2 + 4} \right) + \log_2 \left(\sqrt{\left(x - \frac{1}{2} \right)^2 + 4} - \left(x - \frac{1}{2} \right) \right) \\ &= \log_2 \left[\left(\sqrt{\left(x - \frac{1}{2} \right)^2 + 4} + x - \frac{1}{2} \right) \cdot \left(\sqrt{\left(x - \frac{1}{2} \right)^2 + 4} - \left(x - \frac{1}{2} \right) \right) \right] \\ &= \log_2 4 = 2. \end{split}$$

Do đó

$$\begin{split} f\left(\frac{1}{1000}\right) + f\left(1 - \frac{1}{1000}\right) &= f\left(\frac{1}{1000}\right) + f\left(\frac{999}{1000}\right) = 2\\ f\left(\frac{2}{1000}\right) + f\left(1 - \frac{2}{1000}\right) &= f\left(\frac{2}{1000}\right) + f\left(\frac{998}{1000}\right) = 2\\ \dots\\ f\left(\frac{499}{1000}\right) + f\left(1 - \frac{499}{1000}\right) &= f\left(\frac{499}{2021}\right) + f\left(\frac{501}{1000}\right) = 2. \end{split}$$

Vậy

$$T = f\left(\frac{1}{1000}\right) + f\left(\frac{2}{1000}\right) + \dots + f\left(\frac{999}{1000}\right)$$

$$= \left[f\left(\frac{1}{1000}\right) + f\left(\frac{999}{1000}\right)\right] + \left[f\left(\frac{2}{1000}\right) + f\left(\frac{998}{1000}\right)\right] + \dots + \left[f\left(\frac{499}{1000}\right) + f\left(\frac{501}{1000}\right)\right] + f\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= 499 \cdot 2 + 1 = 999$$

3. Bài tập trắc nghiệm

CÂU 1. Với a là số thực dương khác 1 tuỳ ý, giá trị $\log_{a^2} a^3$ bằng

A 8.

B) 6.

 $\frac{2}{3}$.

 $\bigcirc \frac{3}{2}.$

🗭 Lời giải.

Với a là số thực dương khác 1, ta có $\log_{a^2} a^3 = \frac{3}{2} \log_a a = \frac{3}{2}$.

Chọn đáp án D.

CÂU 2. Cho $a \neq 1$ là số thực dương và $P = \log_{\sqrt[3]{a}} a^3$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

 $\bigcirc P = 3.$

 $\bigcirc P = 1.$

 $P = \frac{1}{3}$.

 $\bigcirc P = 9.$

🗭 Lời giải.

 $P = \log_{\sqrt[3]{a}} a^3 = 3\log_a a^3 = 9\log_a a = 9 \cdot 1 = 9.$

Chọn đáp án \bigcirc D.

CÂU 3. Cho a > 0, $a \neq 1$. Biểu thức $a^{\log_a a^2}$ bằng **(B)** a^2 .

 \bigcirc 2a.

 \bigcirc 2^a .

Lời giải.

Ta có $a^{\log_a a^2} = a^2$.

Chọn đáp án (B)......

CÂU 4. Giá trị của $\log_{\frac{1}{a}} \sqrt[3]{a^7}$ (với $a>0, a\neq 1$) bằng

 $\bigcirc -\frac{7}{3}$.

 $\bigcirc \frac{5}{3}$.

D)4.

D Lời giải.

Ta có $\log_{\frac{1}{a}} \sqrt[3]{a^7} = \log_{a^{-1}} a^{\frac{3}{7}} = -\frac{3}{7} \log_a a = -\frac{3}{7}.$

Chọn đáp án (A)....

CÂU 5. Với a là số thực dương tùy ý, $\ln{(ea^{\pi})}$ bằng

 $(c) 1 - \pi \ln a.$

 \mathbf{D} 1 + $\pi \ln a$.

Lời giải.

Với a > 0, ta có $\ln(ea^{\pi}) = \ln e + \ln a^{\pi} = 1 + \pi \ln a$.

Chọn đáp án (D).....

CÂU 6. Với a là số thực dương khác 1 tùy ý, $\log_{a^5} a^4$ bằng

$$\bigcirc \frac{1}{5}.$$

B
$$\frac{4}{5}$$
.

$$\bigcirc \frac{5}{4}.$$

🗭 Lời giải.

Với $0 < a \neq 1$, ta có $\log_{a^5} a^4 = \frac{4}{5}$.

Chọn đáp án B

CÂU 7. Với a là thực dương tùy ý, $\ln(5a) - \ln(3a)$ bằng

$$\bigcirc$$
 $\ln(2a)$.

🗩 Lời giải.

Ta có $\ln(5a) - \ln(3a) = \ln \frac{5a}{3a} = \ln \frac{5}{3}$.

Chọn đáp án \bigcirc

CÂU 8. Cho $\log_a b = 2$ với a, b > 0, a khác 1. Khẳng định nào sau đây **sai**?

$$\mathbf{B}\log_a\left(ab^2\right) = 3.$$

$$\bigcirc \log_a b^2 = 4$$

$$\bigcirc \log_a \left(a^2 b \right) = 4.$$

🗭 Lời giải.

 $\log_a \left(ab^2 \right) = 3 \text{ sai vì } \log_a \left(ab^2 \right) = \log_a a + \log_a b^2 = 1 + 2\log_a b = 1 + 2 \cdot 2 = 5.$

Chọn đáp án (B)

CÂU 9. Với a là số thực dương tùy ý, $\log_{\sqrt{3}} a^{1010}$ bằng

B
$$1010 + 2\log_3 a$$
.

$$\bigcirc$$
 1010 + $\frac{1}{2}\log_3 a$.

$$\bigcirc$$
 505 $\log_3 a$.

🗭 Lời giải.

 $\log_{\sqrt{3}} a^{1010} = \log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} a^{1010} = 2 \cdot 1010 \cdot \log_3 a = 2020 \log_3 a.$

Chon đáp án (A).

CÂU 10. Giá trị của $\log_a \frac{1}{a^3}$ với a > 0 và $a \neq 1$ bằng

$$\bigcirc$$
 -3.

$$\bigcirc$$
 $-\frac{1}{3}$.

$$\bigcirc \frac{1}{3}$$
.

🗭 Lời giải.

Ta có $\log_a \frac{1}{a^3} = -3 \log_a a = -3.$

Chọn đáp án (A)

CÂU 11. Với mọi số thực a dương, $\log_2^2 a^2$ bằng

$$\bigcirc$$
 2 log₂² a.

B)
$$-4 \log_2^2 a$$
.

$$\bigcirc 2 \log_2 a^2$$
.

$$\bigcirc$$
 4 $\log_2 a$.

D Lời giải.

Ta có $\log_2^2 a^2 = (2\log_2 a)^2 = 4\log_2^2 a$

Chọn đáp án $footnote{B}$

CÂU 12. Với các số thực dương a, b bất kì. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

$$\mathbf{c} \log \left(\frac{a}{b} \right) = \log_b a.$$

🗭 Lời giải.

Với các số thực dương a, b ta có $\log(ab) = \log a + \log b$.

Chọn đáp án (A)....

CÂU 13. Giá trị của $\log_2 16$ bằng

(c)
$$-3$$
.

🗭 Lời giải.

Ta có $\log_2 16 = \log_2 2^4 = 4 \log_2 2 = 4$.

Chọn đáp án (B)

CÂU 14. Cho a, b là các số thực dương thỏa mãn $a \neq 1$ và $\log_a b = 3$. Tính $\log_a(a^2b)$.

(A) 4.

B 3

(C) 5.

(D) 6.

🗭 Lời giải.

Ta có $\log_a(a^2b) = \log_a a^2 + \log_a b = 2 + 3 = 5.$

Chọn đáp án \bigcirc

CÂU 15. Tính giá trị của $A=\log_2\left(\frac{8\cdot 2^5}{\sqrt[3]{2}\cdot 4^{-3}}\right)^2.$ $\textcircled{\textbf{B}} \ \frac{25}{6}.$

$$\triangle \frac{25}{3}$$

$$\frac{164}{6}$$

$$c \frac{82}{3}$$

$$\bigcirc \frac{716}{3}$$

🗭 Lời giải.

Ta có
$$\left(\frac{8\cdot 2^5}{\sqrt[3]{2}\cdot 4^{-3}}\right)^2 = 2^{\left[3+5-\frac{1}{3}-(-6)\right]\cdot 2} = 2^{\frac{82}{3}}$$
. Do đó $A = \frac{82}{3}$.

CÂU 16. Cho a, b là các số thực dương khác 1 thỏa mãn $\log_2 a = 2$ và $\log_4 b = 3$. Giá trị biểu thức $P = \log_a (a^2 b)$ bằng

$$(A) P = 10.$$

$$\bigcirc P = 5.$$

$$\bigcirc P = 2.$$

$$P = 1.$$

🗭 Lời giải.

$$\text{Ta có } P = \log_a \left(a^2 b \right) = \frac{\log_2 \left(a^2 b \right)}{\log_2 a} = \frac{2 \log_2 a + \log_2 b}{\log_2 a} = \frac{2 \log_2 a + 2 \log_4 b}{\log_2 a} = \frac{2 \cdot 2 + 2 \cdot 3}{2} = 5.$$

Chon đáp án B.....

CÂU 17. Cho các số thực dương a, b, c với $a \neq 1$, thỏa mãn $\log_a b = 3$, $\log_a c = -2$. Khi đó $\log_a \left(a^3 b^2 \sqrt{c}\right)$ bằng (B) 8. (**c**) 13.

Lời giải.

Ta có

$$\log_a \left(a^3 b^2 \sqrt{c} \right) = \log_a a^3 + \log_a b^2 + \log_a \sqrt{c} = 3 + 2\log_a b + \frac{1}{2}\log_a c = 3 + 6 - 1 = 8.$$

Chon đáp án (B).....

CÂU 18. Biết $\log(xy^3) = \log(x^2y) = 1$. Giá trị của $\log(xy)$ bằng

$$\bigcirc \frac{5}{3}$$
.

🗭 Lời giải.

Từ giả thiết suy ra x > 0, y > 0. Ta có

$$\begin{cases} \log(xy^3) = 1 \\ \log(x^2y) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log x + 3\log y = 1 \\ 2\log x + \log y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log x = \frac{2}{5} \\ \log y = \frac{1}{5}. \end{cases}$$

Khi đó, $\log(xy) = \log x + \log y = \frac{2}{5} + \frac{1}{5} = \frac{3}{5}$.

Chọn đáp án (B).....

CÂU 19. Cho a là số dương khác 1. Khi đó giá trị của $P=a^{\log_a \cdot \sqrt[3]{a}}$ là

(A) 48.

$$\bigcirc$$
 3¹

D 16.

🗭 Lời giải.

$$\text{Ta có } P = a^{\log_{a \cdot \sqrt[3]{a}} 16} = a^{\log_{a \cdot a} \frac{1}{3} 16} = a^{\log_{a} \frac{1}{4} 16} = a^{\frac{3}{4} \cdot \log_{a} 16} = a^{\log_{a} 8} = 8.$$

CÂU 20. Cho các số a, b, c thỏa mãn $\log_a 3 = 2$, $\log_b 3 = \frac{1}{4}$ và $\log_{abc} 3 = \frac{2}{15}$. Giá trị của $\log_c 3$ bằng

A
$$\frac{1}{3}$$
.

$$\frac{1}{2}$$
.

🗭 Lời giải.

Ta có

$$\log_{abc} 3 = \frac{1}{\log_3 abc} = \frac{1}{\log_3 a + \log_3 b + \log_3 c}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{15} = \frac{1}{\frac{1}{2} + 4 + \log_3 c}$$

$$\Rightarrow \frac{9}{2} + \log_3 c = \frac{15}{2}$$

$$\Rightarrow \log_3 c = 3$$

$$\Rightarrow \log_c 3 = \frac{1}{3}.$$

CÂU 21. Giá trị của biểu thức $M = \log_2 2 + \log_2 4 + \log_2 8 + \cdots + \log_2 256$ bằng

B $8 \log_2 256$.

(**D**) 48.

🗭 Lời giải.

Ta có $M = \log_2 2 + \log_2 4 + \log_2 8 + \dots + \log_2 256 = 1 + 2 + 3 + \dots + 8 = \frac{8 \cdot (1+8)}{2} = 36.$

CÂU 22. Giá trị của biểu thức $P = (e^3)^{\log_e 5}$ bằng

(C) 32.

 (\mathbf{D}) 5.

🗭 Lời giải.

Ta có $P = (e^3)^{\log_e 5} = (5^3)^{\log_e e} = 5^3 = 125.$

Chọn đáp án (B).....

CÂU 23. Tìm giá trị của biểu thức $A = \log_2 \left(2 \sin \frac{\pi}{12} \right) + \log_2 \cos \frac{\pi}{12}$.

(A) 3.

 \bigcirc 2.

🗭 Lời giải.

Ta có $A = \log_2\left(2\sin\frac{\pi}{12}\right) + \log_2\cos\frac{\pi}{12} = \log_2\left(2\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12}\right) = \log_2\sin\frac{\pi}{6} = \log_2\frac{1}{2} = -1.$

Chọn đáp án (C).

🗭 Lời giải.

Với a, b, c là các số dương, ta có $\log_a b^2 = x \Rightarrow \log_a b = \frac{x}{2}$, $\log_{b^2} \sqrt{c} = y \Rightarrow \log_b c = y$.

Vậy $\log_c a = \frac{1}{\log_a c} = \frac{1}{\log_a b \cdot \log_b c} = \frac{1}{\frac{x}{2} \cdot 4y} = \frac{1}{2xy}.$

Chọn đáp án (C).....

CÂU 25. Cho $\log_a x = 2$, $\log_b x = 5$ với a, b là các số thực lớn hơn 1. Giá trị của $\log_{a^2} x$ bằng

 $\text{Ta có } \log_{\frac{a^2}{b}} x = \frac{1}{\log_x \frac{a^2}{b}} = \frac{1}{\log_x a^2 - \log_x b} = \frac{1}{2 \log_x a - \log_x b} = \frac{1}{2 \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{5}} = \frac{5}{4}.$

CÂU 26. Cho a và b là hai số thực dương thỏa mãn $a^4b=16$. Giá trị của $4\log_2 a + \log_2 b$ bằng

(A) 4.

🗭 Lời giải.

Lấy logarit cơ số 2 hai về ta được $4\log_2 a + \log_2 b = 4$.

Chọn đáp án (A).....

CÂU 27. Cho các số thực dương a và b thỏa mãn $a^2 - 16b = 0$. Tính giá trị của biểu thức

$$P = \log_{\sqrt{2}} a - \log_2 b.$$

 $(\mathbf{A}) P = 2.$

 $\bigcirc P = 4.$

(c) P = 16.

 \mathbf{D} $P = \sqrt{2}$.

D Lời giải.

Ta có $b = \frac{a^2}{16}$ nên

$$P = \log_{\sqrt{2}} a - \log_2 \frac{a^2}{16} = 2\log_2 a - 2\log_2 a + \log_2 16 = \log_2 16 = 4.$$

Chọn đáp án (B).

CÂU 28. Cho các số thực a, b, c thuộc khoảng $(1; +\infty)$ và $\log_{\sqrt{a}}^2 b + \log_b c \cdot \log_b \left(\frac{c^2}{b}\right) + 9\log_a c = 4\log_a b$. Giá trị của biểu thức $\log_a b + \log_b c^2$ bằng

(**A**) 2.

 $\mathbb{B}\frac{1}{2}$.

(C) 3.

(D) 1.

Ta có

$$\log_{\sqrt{a}}^{2} b + \log_{b} c \cdot \log_{b} \left(\frac{c^{2}}{b}\right) + 9 \log_{a} c = 4 \log_{a} b$$

$$\Leftrightarrow 4 \log_{a}^{2} b - 4 \log_{a} b + \log_{b} c \cdot (2 \log_{b} c - 1) + 9 \log_{a} b \cdot \log_{b} c = 0$$

$$\Leftrightarrow 4 \log_{a}^{2} b + 9 \log_{a} b \cdot \log_{b} c + \log_{b}^{2} c - (4 \log_{a} b + \log_{b} c) = 0$$

$$\Leftrightarrow (4 \log_{a} b + \log_{b} c) (\log_{a} b + 2 \log_{b} c - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \log_{a} b + 2 \log_{b} c - 1 = 0 (\operatorname{do} 4 \log_{a} b + \log_{b} c > 0)$$

$$\Leftrightarrow \log_{a} b + \log_{b} c^{2} = 1.$$

Chon đáp án D

CÂU 29. Cho cấp số cộng (u_n) có tất cả số hạng đều dương và $9(u_1 + u_2 + \dots + u_{2050}) = 4(u_1 + u_2 + \dots + u_{3075})$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \log_3^2 u_{14} + \log_3^2 u_{41} - \log_3^2 u_{122}$.



B) -2.

(c) 1.

D 3.

Dùi giải.

Ta có

$$9(u_1 + u_2 + \dots + u_{2050}) = 4(u_1 + u_2 + \dots + u_{3075})$$

$$\Leftrightarrow 9(2050u_1 + 2100225d) = 4(3075u_1 + 4726275d)$$

$$\Leftrightarrow d = 2u_1.$$

Khi đó

$$\log_3^2(u_{14}) + \log_3^2(u_{41}) - \log_3^2(u_{122}) = \log_3^2(27u_1) + \log_3^2(81u_1) - \log_3^2(243u_1)$$
$$= (3 + \log_3 u_1)^2 + (4 + \log_3 u_1)^2 - (5 + \log_3 u_1)^2.$$

Đặt $t = \log_3 u_1$. Khi đó $P = (t+3)^2 + (t+4)^2 - (t+5)^2 = t^2 + 4t = (t+2)^2 - 4 \ge -4$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $t=-2 \Leftrightarrow \log_3 u_1=-2 \Leftrightarrow u_1=\frac{1}{9} \Rightarrow d=2u_1=\frac{2}{9}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là -4.

Chọn đáp án A.....

CÂU 30. Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $a^{\log_3 7} = 27, b^{\log_7 11} = 49, c^{\log_{11} 25} = \sqrt{11}$. Giá trị của biểu thức $A = a^{(\log_3 7)^2} + b^{(\log_7 11)^2} + c^{(\log_{11} 25)^2}$ là

A 129.

B) 519.

(c) 469.

D 729.

Lời giải.

Ta có

$$A = \left(a^{\log_3 7}\right)^{\log_3 7} + \left(b^{\log_7 11}\right)^{\log_7 11} + \left(c^{\log_{11} 25}\right)^{\log_{11} 25}$$

$$= 27^{\log_3 7} + 49^{\log_7 11} + \sqrt{11}^{\log_{11} 25}$$

$$= \left(3^{\log_3 7}\right)^3 + \left(7^{\log_7 11}\right)^2 + \left(11^{\log_{11} 25}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= 7^3 + 11^2 + 25^{\frac{1}{2}} = 469.$$

Chọn đáp án C.....



Biến đổi, rút gọn, biểu diễn biểu thức chứa lôgarít

1. Ví dụ mẫu

VÍ DỤ 1. Với a, x, y là các số thực dương tùy ý và khác 1. Rút gọn biểu thức $P = \frac{x^{\log_a y}}{y^{\log_a x}}$.

⊕ Lời giải

Ta có $x^{\log_a y} = y^{\log_a x}$ nên P = 1.

VÍ DỤ 2. Biết $\log_7 2 = m$, biểu diễn biểu thức $\log_{49} 28$ theo m.

D Lời giải.

Ta có
$$\log_{49} 28 = \log_{7^2} 28 = \frac{1}{2} \log_7 28 = \frac{\log_7 4 + 1}{2} = \frac{2 \log_7 2 + 1}{2} = \frac{2m + 1}{2}.$$

VÍ DỤ 3. Với a là số thực dương tùy ý, rút gọn biểu thức $\log_3(a^5)$.

Lời giải.

Do a > 0 nên ta có $\log_3(a^5) = 5 \log_3 a$.

VÍ DỤ 4. Cho các số thực a, b. Rút gọn biểu thức $A = \log_2 2^a + \log_2 2^b$.

Ta có $A = \log_2 2^a + \log_2 2^b = a \log_2 2 + b \log_2 2 = a + b$.

VÍ DỤ 5. Biết rằng $\log_2 3 = a, \log_2 5 = b$. Tính $\log_{45} 4$ theo a và b.

Ta có
$$\log_{45} 4 = \frac{1}{\log_4 45} = \frac{2}{\log_2(5 \cdot 9)} = \frac{2}{\log_2 5 + 2\log_2 3} = \frac{2}{2a + b}.$$

VÍ DỤ 6. Cho hai số dương a, b với $a \neq 1$. Đặt $M = \log_{\sqrt{a}} \sqrt[3]{b}$. Tính M theo $N = \log_a b$.

🗭 Lời giải.

Ta có
$$M = \log_{\sqrt{a}} \sqrt[3]{b} = \log_{a^{\frac{1}{2}}} b^{\frac{1}{3}} = \frac{2}{3} \log_a b = \frac{2}{3} N.$$

VÍ DỤ 7. Biểu diễn $\log_{120} 600$ theo $a = \log_2 3$ và $b = \log_3 5$.

Lời giải.

Từ giả thiết ta có
$$ab = \log_2 3 \cdot \log_3 5 = \log_2 5$$
.
Suy ra $\log_{120} 600 = \frac{\log_2 \left(2^3 \cdot 3 \cdot 5^2\right)}{\log_2 \left(2^3 \cdot 3 \cdot 5\right)} = \frac{3 + \log_2 3 + 2\log_2 5}{3 + \log_2 3 + \log_2 5} = \frac{3 + a + 2ab}{3 + a + ab}$.

VÍ DU 8. Cho $\log 5 = a$. Tính $\log 25000$ theo a.

Lời giải.

Ta có $\log 25000 = \log(5^2 \cdot 10^3) = \log 5^2 + \log 10^3 = 2 \log 5 + 3 = 2a + 3$.

VÍ DU 9. Cho $a = \log 2, b = \log 3$. Tính $\log \sqrt[7]{0,432}$ theo a và b.

Lời giải.

Ta có

$$\log \sqrt[7]{0,432} = \frac{1}{7}(\log 432 - 3) = \frac{1}{7}\left[\log \left(2^4 \cdot 3^3\right) - 3\right] = \frac{4a + 3b - 3}{7}.$$

VÍ DỤ 10. Rút gọn biểu thức $M = 2\log_{\sqrt{2}}(4x) - 12\log_4\sqrt{x} + \log_{\frac{1}{2}}\frac{8}{x}$ với x > 0.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{split} M &= 2\log_{\sqrt{2}}(4x) - 12\log_4\sqrt{x} + \log_{\frac{1}{2}}\frac{8}{x} \\ &= 2\log_{\frac{1}{2}}(4x) - 12\log_{2^2}\left(x^{\frac{1}{2}}\right) + \log_{2^{-1}}\left(\frac{8}{x}\right) \\ &= 4\left(\log_24 + \log_2x\right) - 3\log_2x - (\log_28 - \log_2x) \\ &= 5 + 2\log_2x. \end{split}$$

VÍ DỤ 11. Cho $\log_2 5 = m$, $\log_3 5 = n$. Khi đó $\log_6 5$ tính theo m và n là

🗭 Lời giải.

Ta có
$$\log_6 5 = \frac{1}{\log_5 6} = \frac{1}{\log_5 2 + \log_5 3} = \frac{1}{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}} = \frac{mn}{m+n}.$$

VÍ DỤ 12. Cho $\log_2 m = a$ và $A = \log_m (8m)$ với $m > 0, m \neq 1$. Tìm mối liên hệ giữa A và a. 🗭 Lời giải.

Ta có
$$A = \log_m(8m) = \log_m m + \log_m 8 = 1 + 3\log_m 2 = 1 + 3 \cdot \frac{1}{\log_2 m} = 1 + \frac{3}{a} = \frac{3+a}{a}$$
. Vậy $A = \frac{3+a}{a}$.

VÍ DU 13. Cho các số thực dương x, a, b, c thỏa mãn

$$\log x = 2\log(2a) - 2\log b - 4\log\sqrt[4]{c}$$
.

Biểu diễn x theo a, b, c.

Lời giải.

Ta có
$$\log x = 2\log(2a) - 2\log b - 4\log \sqrt[4]{c} \Leftrightarrow \log x = \log(2a)^2 - \log b^2 - \log c \Leftrightarrow x = \frac{4a^2}{b^2c}$$
.
Vậy $x = \frac{4a^2}{b^2c}$.

VÍ DỤ 14. Cho các số nguyên a, b, c thỏa mãn $a + \frac{b + \log_2 5}{c + \log_2 3} = \log_6 45$. Tính tổng a + b + c.

🗭 Lời giải.

Ta có $\log_6 45 = \log_6 2 \cdot \log_2 45 = \frac{2 \log_2 3 + \log_2 5}{1 + \log_2 3} = 2 + \frac{-1 + \log_2 5}{1 + \log_2 3}.$ Suy ra $a = 2, b = -1, c = 1 \Rightarrow a + b + c = 2.$

VÍ DỤ 15. Cho $G = 10^{10^{100}}$. Đặt $x = \log_{10} G$; $y = \log_x G$, khi đó $\log_y G$ có thể biểu diễn dưới dạng $\frac{m}{n}$ trong đó m, n là các số nguyên dương và ước chung lớn nhất của chúng bằng 1. Tính tổng các chữ số của số m + n.

🗭 Lời giải.

Ta có

$$\begin{split} G &= 10^{10^{100}} \quad \Rightarrow \quad x = \log_{10} G = \log_{10} 10^{10^{100}} = 10^{100} \\ &\Rightarrow \quad y = \log_x G = \log_{10^{100}} 10^{10^{100}} = \frac{10^{100}}{100} = 10^{98} \\ &\Rightarrow \quad \log_y G = \log_{10^{98}} 10^{10^{100}} = \frac{10^{100}}{98} = \frac{10^{99} \cdot 5}{49} = \frac{500 \dots 0}{49}. \end{split}$$

Vậy tổng các chữ số của số m+n bằng 5+4+9=18.

2. Bài tập rèn luyện

BÀI 1. Cho a là số thực dương tùy ý, đặt $\log_3 a = \alpha$. Biểu diễn biểu thức $P = \log_{\frac{1}{2}} a - \log_{\sqrt{3}} a$ theo α .

🗭 Lời giải.

Ta có

$$P = \log_{\frac{1}{3}} a - \log_{\sqrt{3}} a = \log_{3^{-1}} a - \log_{3^{\frac{1}{2}}} a = -\log_3 a - 2\log_3 a = -3\log_3 a = -3\alpha.$$

BÀI 2. Đặt $\log_5 3 = a$. Biểu diễn $\log_{\frac{1}{25}} 81$ theo a.

🗭 Lời giải.

Ta có $\log_{\frac{1}{25}} 81 = \log_{5^{-2}} 3^4 = -\frac{4}{2} \cdot \log_5 3 = -2a$.

BÀI 3. Cho a là số thực dương khác 1 và x, y là các số thực dương thỏa mãn $\log_a x = -1$ và $\log_a y = 4$. Rút gọn biểu thức $P = \log_a(x^2y^3)$.

Lời giải.

Ta có $P = \log_a(x^2y^3) = \log_a x^2 + \log_a y^3 = 2\log_a x + 3\log_a y = 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 4 = 10.$

BÀI 4. Cho các số thực x, y, z > 1 và $\log_{xy}(yz) = 2$. Rút gọn biểu thức $\log_{\frac{z}{u}}(x)^4 + \log_{\frac{z}{u}}(xy)$.

🗭 Lời giải.

Ta có

$$\log_{xy}(yz) = 2 \Leftrightarrow yz = x^2y^2 \Rightarrow \begin{cases} \frac{z}{y} = x^2 \\ \frac{z}{x} = xy. \end{cases}$$

Suy ra $\log_{\frac{z}{u}}(x)^4 + \log_{\frac{z}{u}}(xy) = \log_{x^2}(x)^4 + \log_{xy}(xy) = 3.$

BÀI 5. Cho $\log_{12} 3 = a$. Tính $\log_{24} 18$ theo a.

Lời giải.

Ta có
$$a = \log_{12} 3 = \frac{1}{\log_3 12} = \frac{1}{2\log_3 2 + 1} \Rightarrow \log_3 2 = \frac{1 - a}{2a}.$$

Có
$$\log_{24} 18 = \frac{\log_3 18}{\log_3 24} = \frac{2 + \log_3 2}{1 + 3\log_3 2} = \frac{2 + \frac{1 - a}{2a}}{1 + 3 \cdot \frac{1 - a}{2a}} = \frac{3a + 1}{3 - a}.$$

BÀI 6. Đặt $a = \ln 2$ và $b = \ln 3$. Biểu diễn $S = \ln \frac{1}{2} + \ln \frac{2}{3} + \ln \frac{3}{4} + \dots + \ln \frac{71}{72}$ theo a và b.

🗭 Lời giải.

Ta có

$$S = \ln \frac{1}{2} + \ln \frac{2}{3} + \ln \frac{3}{4} + \dots + \ln \frac{71}{72}$$
$$= \ln \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \dots \cdot \frac{71}{72} \right) = \ln \frac{1}{72}$$
$$= -\ln \left(2^3 \cdot 3^2 \right) = -3\ln 2 - 2\ln 3 = -3a - 2b.$$

BÀI 7. Rút gọn biểu thức $Q = (y^{\log_2 3})^{\log_5 2}$ (với y > 0).

🗭 Lời giải.

Ta có $Q = (y^{\log_2 3})^{\log_5 2} = y^{\log_5 2 \cdot \log_2 3} = y^{\log_5 3}$.

BÀI 8. Cho $\log_2 a = x$ và $\log_2 b = y$ với a > 0, b > 0 và $a \neq b$. Tìm biểu diễn của $\log_{a^{-2}b^3}(a^4b)$ theo x và y.

🗭 Lời giải.

Ta có
$$\log_{a^{-2}b^3}(a^4b) = \frac{\log_2(a^4b)}{\log_2(a^{-2}b^3)} = \frac{\log_2 a^4 + \log_2 b}{\log_2 a^{-2} + \log_2 b^3} = \frac{4\log_2 a + \log_2 b}{-2\log_2 a + 3\log_2 b} = \frac{4x + y}{-2x + 3y}$$
.

BÀI 9. Cho $\log_2 3 = a$. Biểu diễn biểu thức $\log_2 2$ theo a.

🗭 Lời giải.

Ta có
$$\log_9 2 = \frac{1}{\log_2 9} = \frac{1}{2\log_2 3} = \frac{1}{2a}$$
.

BÀI 10. Cho $0 < x \neq 1, \ 0 < y$ thỏa mãn $\log_2 x = y$ và $\log_x y = \frac{3}{y}$. Tính tổng x + y.

🗭 Lời giải.

Ta có
$$\log_x y = \frac{3}{y} \Leftrightarrow \frac{\log_2 y}{\log_2 x} = \frac{3}{y} \Leftrightarrow \frac{\log_2 y}{y} = \frac{3}{y} \Leftrightarrow y = 8$$
, khi đó $x = 256$.

Do đó x + y = 264.

BÀI 11. Cho các số thực dương a, b thỏa mãn $\ln a = x, \ln b = y$. Tính $P = \ln (a^3b^2)$.

Lời giải.

Với a, b là các số dương, ta có

$$P = \ln(a^3b^2) = \ln(a^3) + \ln(b^2) = 3\ln a + 2\ln b = 3x + 2y.$$

BÀI 12. Biết
$$\log_{15} 20 = a + \frac{2\log_3 2 + b}{\log_3 5 + c}$$
 với $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Tính $T = a + b + c$.

🗩 Lời giải.

Ta có

$$\begin{split} \log_{15} 20 &= \log_{15}(2^2 \cdot 5) = 2\log_{15} 2 + \log_{15} 5 \\ &= \frac{2}{\log_2 15} + \frac{1}{\log_5 15} = \frac{2}{\log_2 3 + \log_2 5} + \frac{1}{1 + \log_5 3} \\ &= \frac{2}{\frac{1}{\log_3 2} + \log_2 5} + \frac{1}{1 + \frac{1}{\log_5 3}} \\ &= \frac{2\log_3 2}{1 + \log_2 5 \cdot \log_3 2} + \frac{\log_5 3}{\log_5 3 + 1} \\ &= \frac{2\log_3 2}{1 + \log_3 5} + \frac{\log_5 3}{\log_5 3 + 1} = \frac{2\log_3 2 + \log_5 3}{\log_5 3 + 1} \\ &= \frac{2\log_3 2 - 1 + \log_5 3 + 1}{\log_5 3 + 1} = 1 + \frac{2\log_3 2 - 1}{\log_5 3 + 1}. \end{split}$$

Vậy a = 1, b = -1, c = 1, suy ra T = a + b + c = 1.

BÀI 13. Cho $\log_2 3 = x$ và $\log_2 5 = y$. Biết rằng $\log_{20} 15 = \frac{ax + by}{cy + 2}$ với a, b, c là các số nguyên dương. Tính P = a + b + c.

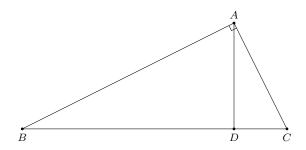
Lời giải.

Ta có
$$\log_{20} 15 = \frac{\log_2 15}{\log_2 20} = \frac{\log_2 3 + \log_2 5}{\log_2 4 + \log_2 5} = \frac{x+y}{2+y}.$$

Vây nên a = b = c = 1, suy ra P = a + b + c = 3

BÀI 14. Cho tam giác ABC vuông tại A và AD là đường cao. Biết $AB = \log y$, $AC = \log 3$, $AD = \log x$, $BC = \log 9$. Tính $\frac{y}{x}$.

Dùi giải.



Xét $\triangle ABC$ vuông tại A có

$$AB^{2} + AC^{2} = BC^{2} \Leftrightarrow \log^{2} y + \log^{2} 3 = \log^{2} 9$$

$$\Leftrightarrow \log^{2} y + \log^{2} 3 = 4 \log^{2} 3$$

$$\Leftrightarrow \log^{2} y = 3 \log^{2} 3$$

$$\Leftrightarrow \log y = \sqrt{3} \log 3 \text{ (vì } \log y = AB > 0)$$

$$\Leftrightarrow y = 10^{\sqrt{3} \log 3} = 10^{\log 3^{\sqrt{3}}} = 3^{\sqrt{3}}.$$

Xét $\triangle ABC$ vuông tại A có đường cao AD, ta có

$$\begin{array}{ll} AB \cdot AC = AD \cdot BC & \Leftrightarrow & \log y \cdot \log 3 = \log x \cdot \log 9 \\ & \Leftrightarrow & \log y \cdot \log 3 = 2 \log x \cdot \log 3 \\ & \Leftrightarrow & \log y = 2 \log x \Leftrightarrow \sqrt{3} \log 3 = 2 \log x \\ & \Leftrightarrow & \log x = \frac{\sqrt{3}}{2} \log 3 = \log 3^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \Leftrightarrow x = 3^{\frac{\sqrt{3}}{2}}. \end{array}$$

Vậy
$$y = x^2 \Leftrightarrow \frac{y}{x} = x = 3^{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$
.

3. Bài tập trắc nghiệm

CÂU 1. Với mọi số thực a dương, $\log_2 \frac{4}{a}$ bằng

$$\bigcirc \log_2 a - 2.$$

$$(\mathbf{B}) 4 - \log_2 a.$$

$$\bigcirc$$
 2 – $\log_2 a$.

$$\bigcirc$$
 2 + $\log_2 a$.

🗭 Lời giải.

Ta có $\log_2 \frac{4}{a} = \log_2 4 - \log_2 a = 2 - \log_2 a$.

Chọn đáp án C

CÂU 2. Với a là số thực dương tùy ý, $\log\left(10a^2\right)$ bằng

$$\bigcirc$$
 20 log a .

$$(c)$$
 1 + $(\log a)^2$.

$$\bigcirc$$
 $10 \log a$.

Dùi giải.

Với a là số thực dương tùy ý, ta có $\log(10a^2) = \log 10 + \log a^2 = 1 + 2\log a$.

Chọn đáp án B

CÂU 3. Với a là số thực dương tùy ý, $\log \frac{5a}{2} + \log \frac{4}{a}$ bằng

$$\bigcirc \log \frac{5a}{2} \cdot \log \frac{4}{a}.$$

$$\bigcirc$$
 ln 10.

🗭 Lời giải.

Ta có $\log \frac{5a}{2} + \log \frac{4}{a} = \log \left(\frac{5a}{2} \cdot \frac{4}{a} \right) = \log 10 = 1.$

Chọn đáp án (A)....

CÂU 4. Với a, b là hai số dương tùy ý thì $\log(a^3b^2)$ có giá trị bằng biểu thức nào sau đây?

$$\bigcirc 3\log a + 2\log b.$$

🗭 Lời giải.

Ta có $\log (a^3 b^2) = 3 \log a + 2 \log b$.

Chọn đáp án \bigcirc

CÂU 5. Cho a và b là hai số thực dương thỏa mãn $2\log_2 b - 3\log_2 a = 2$. Khẳng định nào sau đây đúng?

B
$$b^2 = 4a^3$$
.

Dòi giải.

 $\text{Ta c\'o } 2\log_2 b - 3\log_2 a = 2 \Leftrightarrow 2\log_2 b = 2 + 3\log_2 a \Leftrightarrow \log_2 b^2 = \log_2 4 + \log_2 a^3 \Leftrightarrow b^2 = 4a^3.$

Chọn đáp án B

CÂU 6. Giả sử a, b là các số thực dương bất kỳ. Biểu thức l
n $\frac{a}{b^2}$ bằng

$$\bigcirc \ln a - 2 \ln b.$$

🗭 Lời giải.

Với mọi số thực dương a, b ta có $\ln \frac{a}{b^2} = \ln a - \ln b^2 = \ln a - 2 \ln b$.

Chọn đáp án \bigcirc

CÂU 7.	Cho $a =$	log ₂ 4.	Khi	đó	log ₂ 36	bằng
	CIIO W	1053 1.	T T T T T	ao	1053.00	

 \bigcirc a+4.

B) 2a + 4.

(c) a + 2.

 \bigcirc a+9.

D Lời giải.

Ta có $\log_3 36 = \log_3 (4 \cdot 9) = \log_3 4 + \log_3 9 = a + 2$.

Chọn đáp án C

CÂU 8. Xét a, b là các số thực dương thỏa mãn $4\log_2 a + 2\log_4 b = 1$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

B $a^4b = 1$.

 $a^4b^2 = 2.$

 $\bigcirc a^4b^2 = 4$

🗩 Lời giải.

Ta có

 $4\log_2 a + 2\log_4 b = 1 \Leftrightarrow 4\log_2 a + \log_2 b = 1 \Leftrightarrow \log_2 a^4 + \log_4 b = 1 \Leftrightarrow \log_2 a^4 b = 1 \Leftrightarrow a^4 b = 2.$

Chọn đáp án \bigcirc

CÂU 9. Với mọi a, b, x là các số thực dương thoả mãn $\log_2 x = 5\log_2 a + 3\log_2 b$. Mệnh đề nào dưới đây đúng

B) $x = a^5 + b^3$.

 $(c) x = a^5 b^3.$

 \bigcirc x = 3a + 5b

🗭 Lời giải.

Ta có $\log_2 x = 5 \log_2 a + 3 \log_2 b = \log_2 a^5 + \log_2 b^3 = \log_2 (a^5 b^3) \Rightarrow x = a^5 b^3$.

CÂU 10. Cho a và b là hai số thực dương thỏa mãn $\sqrt{a} \cdot b^3 = 27$. Giá trị của $\log_3 a + 6 \log_3 b$ bằng **(A)** 3. **(B)** 6. **(C)** 9. **(D)** 1.

Dùi giải.

Ta có $\sqrt{a} \cdot b^3 = 27 \Leftrightarrow \sqrt{a} = \left(\frac{3}{b}\right)^3 \Rightarrow \log_3 \sqrt{a} = \log_3 \left(\frac{3}{b}\right)^3$

 $\Rightarrow \frac{1}{2}\log_3 a = 3(1 - \log_3 b) \Rightarrow \log_3 a + 3\log_3 b = 6$

Chọn đáp án \fbox{B}

CÂU 11. Với mọi số thực dương x, $\log_3\left(\frac{x^3}{3}\right)$ bằng

 $\mathbf{A} 3 \log_3 x - 1.$

 $\bigcirc \log_3 x - 1.$

 $\mathbf{C} \log_3 x$.

 \bigcirc $3\log_3 x + 1.$

🗭 Lời giải.

Với mọi số thực dương x, ta có $\log_3\left(\frac{x^3}{3}\right) = \log_3\left(x^3\right) - \log_3 3 = 3\log_3 x - 1$.

Chon đáp án A

CÂU 12. Với mọi a, b thỏa mãn $2\log_9 a - 3\log_3 b = 1$, mệnh đề nào sau đây đúng?

B 2a - 3b = 1.

 $a^2 = 3b^3.$

🗭 Lời giải.

Ta có

$$\begin{split} 2\log_9 a - 3\log_3 b &= 1 \Leftrightarrow 2\log_{3^2} a - 3\log_3 b = 1 \\ &\Leftrightarrow \log_3 a - \log_3 b^3 = 1 \\ &\Leftrightarrow \log_3 \left(\frac{a}{b^3}\right) = 1 \\ &\Leftrightarrow \frac{a}{b^3} = 3 \Leftrightarrow a = 3b^3. \end{split}$$

Chọn đáp án \bigcirc

CÂU 13. Cho hai số thực dương a, b bất kì thỏa mãn $9 \log^2 a + 4 \log^2 b = 12 \log a \cdot \log b$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

(A) 3a = 2b.
(B) 2a = 3b.
(C) $a^2 = b^3$.
(D) $a^3 = b^2$.

🗭 Lời giải.

Ta có

$$9 \log^2 a + 4 \log^2 b = 12 \log a \cdot \log b$$

$$\Leftrightarrow (3 \log a)^2 + (2 \log b)^2 - 2 \cdot 3 \log a \cdot 2 \log b = 0$$

$$\Leftrightarrow (3 \log a - 2 \log b)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3 \log a = 2 \log b$$

$$\Leftrightarrow \log a^3 = \log b^2$$

 $\Leftrightarrow a^3 =$

CÂU 14. Đặt $x = \log_2 14$. Biết $\log_{98} 32 = \frac{a}{bx - c}$ với a, b, c là những số tự nhiên và biểu thức là tối giản. Giá trị của biểu

thức S = 2a + 3b + 5c là (A) 21.

(C) 17.

(**D**) 26.

Lời giải.

Ta có $x = \log_2 14 = \log_2 2 + \log_2 7 \Leftrightarrow \log_2 7 = x - 1.$ Ta có $\log_{98} 32 = \frac{\log_2 32}{\log_2 98} = \frac{\log_2 2^5}{\log_2 2 + \log_2 7^2} = \frac{5}{1 + 2(x - 1)} = \frac{5}{2x - 1}.$

Vậy nên a=5, b=2, c=1, suy ra S=2a+3b+

Chọn đáp án (A).....

CÂU 15. Cho a, b là các số thực dương tùy ý và $a \neq 1$. Đặt $P = \log_a b^3 + \log_{a^2} b^6$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

 $\mathbf{A} P = 9 \log_a b.$

 $(\mathbf{B}) P = 6 \log_a b.$

(c) $P = 27 \log_a b$.

(D) $P = 15 \log_a b$.

🗭 Lời giải.

Ta có $P = \log_a b^3 + \log_{a^2} b^6 = 3\log_a b + \frac{6}{2}\log_a b = 6\log_a b.$

Chon đáp án (B).....

CÂU 16. Đặt $\log_2 3 = a$. Khi đó $\log_{12} 18$ bằng

 $(\mathbf{C})a$.

 $\bigcirc \frac{1+3a}{2+a}$.

🗭 Lời giải.

Ta có $\log_{12} 18 = \frac{\log_2 18}{\log_2 12} = \frac{\log_2 (2 \cdot 3^2)}{\log_2 (2^2 \cdot 3)} = \frac{\log_2 2 + 2\log_2 3}{2\log_2 2 + \log_2 3} = \frac{1 + 2a}{2 + a}.$

Chon đáp án (B).

CÂU 17. Với mọi số thực dương x, y thỏa mãn $x^2 + y^2 = 8xy$, mệnh đề nào dưới đây đúng?

 $(\mathbf{c})\log(x+y) = 1 + \log x + \log y.$

Lời giải.

Ta có $x^2 + y^2 = 8xy \Leftrightarrow (x+y)^2 = 10xy$. Lấy logarit thập phân hai vế ta được

$$\log(x+y)^2 = \log(10xy) \quad \Leftrightarrow \quad 2\log(x+y) = 1 + \log x + \log y$$

$$\Leftrightarrow \quad \log(x+y) = \frac{1}{2}(1 + \log x + \log y).$$

Chọn đáp án (A).....

CÂU 18. Cho các số thực dương x, y thỏa mãn $\log(xy^2) = 5$ và $\log(x^3y) = 10$. Tính $P = \log(xy)$.

 $\bigcirc P = 4.$

(c) P = 5.

(D) P = 1.

Lời giải.

Từ giả thiết ta có $\begin{cases} \log x + 2 \log y = 5 \\ 3 \log x + \log y = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log x = 3 \\ \log y = 1. \end{cases}$

Vậy ta có $P = \log xy = \log x + \log y = 4$

Chọn đáp án (A).....

CÂU 19. Nếu $\log_5 2 = m$ thì $\log \left(2^{20} \cdot 5^{19} \right)$ bằng $\underbrace{ \frac{19m + 20}{m + 1}}_{m + 1}.$

 $\bigcirc \frac{19m+20}{m-1}$.

 $\bigcirc \frac{20m+19}{m+1}$.

🗭 Lời giải.

Ta có $\log (2^{20} \cdot 5^{19}) = \frac{\log_5 (2^{20} \cdot 5^{19})}{\log_5 (10)} = \frac{20 \log_5 2 + 19}{1 + \log_5 2} = \frac{20m + 19}{m + 1}.$

Chọn đáp án (D)...

🗭 Lời giải.

Ta có $\log_a \left(ab^2c^5 \right) = \log_a a + \log_a b^2 + \log_a c^5 = 1 + 2\log_a b + 5\log_a c = 1 + 2m + 5n.$

CÂU 21. Cho tam giác ABC có BC = a, CA = b, AB = c. Nếu a, b, c theo thứ tự lập thành một cấp số nhân thì (B) $\ln \sin A + \ln \sin C = 2 \ln \sin B$. (A) $\ln \sin A \cdot \ln \sin C = 2 \ln \sin B$.

(c) $\ln \sin A \cdot \ln \sin C = (\ln \sin B)^2$.

(D) $\ln \sin A + \ln \sin C = \ln(2 \sin B)$.

Lời giải.

Do $a,\,b,\,c$ theo thứ tự lập thành một cấp số nhân nên

$$a \cdot c = b^2 \Leftrightarrow \sin A \cdot \sin C = \sin^2 B$$

 $\Leftrightarrow \ln(\sin A \cdot \sin C) = \ln(\sin^2 B)$
 $\Leftrightarrow \ln \sin A + \ln \sin C = 2 \ln \sin B.$

Chọn đáp án (B)......

CÂU 22. Xét các số thực dương a và b thỏa mãn $\log_5 (5^a \cdot 25^b) = 5^{\log_5 a + \log_5 b + 1}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

$$(c) 2ab - 1 = a + b$$

$$\bigcirc a + 2b = 2ab.$$

🗭 Lời giải.

Ta có $\log_5 (5^a \cdot 25^b) = 5^{\log_5 a + \log_5 b + 1} \Leftrightarrow \log_5 5^a + \log_5 5^{2b} = 5^{\log_5 (5ab)} \Leftrightarrow a + 2b = 5ab.$

Chọn đấp án (B)....

CÂU 23. cho ba số thực dương a, b, c khác 1 thỏa $\log_a b + \log_c b = \log_a 2016 \cdot \log_c b$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

$$(A) bc = 2016$$

B)
$$ab = 2016$$
.

$$(c)$$
 $ac = 2016.$

$$(\mathbf{D}) abc = 2016.$$

🗭 Lời giải.

$$\log_a b + \log_c b = \log_a 2016 \cdot \log_c b$$

$$\Leftrightarrow \log_a b + \log_c b = \log_a 2016 \cdot \frac{1}{\log_b a}$$

$$\Leftrightarrow \log_a b \cdot \log_b c + \log_b c \cdot \log_c b = \log_a 2016$$

$$\Leftrightarrow \log_a c + 1 = \log_a 2016$$

$$\Leftrightarrow \log_a ca = \log_a 2016$$

$$\Leftrightarrow ac = 2016.$$

Chọn đáp án \bigcirc

CÂU 24. Cho $\log_2 5 = a$, $\log_5 3 = b$, biết $\log_{24} 15 = \frac{ma + ab}{n + ab}$, với $m, n \in \mathbb{Z}$. Tính $S = m^2 + n^2$.

$$\bigcirc$$
 $S=2$

B
$$S = 10$$
.

$$S = 5.$$

$$\bigcirc S = 13.$$

🗭 Lời giải.

Ta có

$$\log_{24} 15 = \log_{24} 3 + \log_{24} 5 = \frac{1}{\log_3 24} + \frac{1}{\log_5 24}$$

$$= \frac{1}{1 + 3\log_3 2} + \frac{1}{\log_5 3 + 3\log_5 2} = \frac{1}{1 + \frac{3}{ab}} + \frac{1}{b + \frac{3}{a}}$$

$$= \frac{ab}{ab + 3} + \frac{a}{ab + 3} = \frac{a + ab}{3 + ab}.$$

Suy ra m = 1, n = 3, do đó $S = 1^2 + 3^2 = 10$.

Chọn đáp án (B).....

CÂU 25. Cho các số thực a, b với ab > 0. Mệnh đề nào dưới đây sai?

$$\bigcirc \log a^4 = 4\log|a|.$$

🗭 Lời giải.

Do ab > 0 nên $\log(ab) = \log|a| + \log|b|$.

Khi a > 0, b > 0 ta có $\log(ab) = \log a + \log b$.

Chọn đáp án (D).....

CÂU 26. Đặt $\log_2 5 = a$, tính giá trị của $\log_4 1250$ theo a.

$$\bigcirc$$
 2(1 + 4a).

B
$$\frac{1+4a}{2}$$
.

$$\bigcirc$$
 2(1 – 4a).

$$\bigcirc \frac{1-4a}{2}.$$

🗭 Lời giải.

Ta có $\log_4 1250 = \frac{1}{2} \log_2 (2 \cdot 5^4) = \frac{1}{2} (1 + 4 \log_2 5) = \frac{1}{2} (1 + 4a)$.

CÂU 27. Cho $\log_2 3 = a$, $\log_2 5 = b$, khi đó $\log_5 675$ được biểu diễn theo a, b là đáp án nào sau đây?

$$\frac{a^3 + b^2}{b}$$
.

Ta có $\log_5 675 = \frac{\log_2 675}{\log_2 5} = \frac{\log_2 (3^3 \cdot 5^2)}{\log_2 5} = \frac{3\log_2 3 + 2\log_2 5}{\log_2 5} = \frac{3a + 2b}{b}.$

Chọn đáp án (A)....

CÂU 28. Biết rằng $\log_2 3 = a$, $\log_2 5 = b$. Tính $\log_{45} 4$ theo a, b.

$$\bigcirc \frac{2}{2a+b}.$$

 \bigcirc 2ab.

🗭 Lời giải.

Ta có

$$\begin{array}{rcl} \log_{45} 4 & = & \frac{1}{\log_4 45} = \frac{2}{\log_2 45} \\ & = & \frac{2}{2\log_2 3 + \log_2 5} = \frac{2}{2a + b}. \end{array}$$

CÂU 29. Biết $\log_2 3 = a, \, \log_3 5 = b$. Khi đó $\log_{15} 12$ bằng $\underbrace{a+2}_{b+1}.$ $\underbrace{B} \frac{ab+1}{a+2}.$

$$\bigcirc \frac{a+2}{a(b+1)}.$$

$$\bigcirc \frac{a(b+1)}{a+2}.$$

Lời giải.

Ta có
$$\log_{15} 12 = \frac{\log_3 12}{\log_3 15} = \frac{1 + 2\log_3 2}{1 + \log_3 5} = \frac{1 + \frac{2}{2\log_2 3}}{1 + \log_3 5} = \frac{1 + \frac{2}{a}}{1 + b} = \frac{a + 2}{a(b + 1)}.$$

CÂU 30. Cho a, b là các số thực dương thỏa $\log_4 a + \log_4 b^2 = 5$ và $\log_4 a^2 + \log_4 b = 7$ thì tích ab nhận giá trị bằng

(A) 16.

🗭 Lời giải.

Ta có
$$\log_4 a + \log_4 b^2 = 5 \Leftrightarrow ab^2 = 4^5$$
. (1)

Mặt khác $\log_4 a^2 + \log_4 b = 7 \Leftrightarrow a^2 b = 4^7$. Từ (1) và (2) suy ra $a^3 \cdot b^3 = 4^{12} \Leftrightarrow a \cdot b = 4^4 = 2^8$. (2)

CÂU 31. Cho $\log_{18} 6 = \frac{a + \log_3 2}{b + \log_3 2}$, với a, b là các số nguyên. Giá trị của a + b bằng

(A) 4.

 (\mathbf{D}) 2.

🗭 Lời giải.

Ta có
$$\log_{18} 6 = \frac{\log_3 6}{\log_3 18} = \frac{\log_3 (2 \cdot 3)}{\log_3 (2 \cdot 3^2)} = \frac{\log_3 2 + \log_3 3}{\log_3 2 + \log_3 3^2} = \frac{1 + \log_3 2}{2 + \log_3 2}.$$

Suy ra a = 1 và b = 2.

 $V_{ay} a + b = 3.$

Chọn đáp án (C).

CÂU 32. Biết $\log a = b$ và $\ln 10 = c$. Giá trị của $\log_{10e}(10a)$ bằng

$$\bigcirc \frac{bc+b}{1+c}$$

🗭 Lời giải.

 $\log a = b \Leftrightarrow a = 10^b$.

Ta có
$$T = \log_{10e}(10a) = \frac{\ln(10 \cdot 10^b)}{\ln(10e)} = \frac{\ln 10 + b \cdot \ln 10}{\ln 10 + \ln e} = \frac{c + bc}{c + 1}.$$

Chọn đáp án (D)....

CÂU 33. Cho $\log 3 = a$, $\log 2 = b$. Khi đó giá trị của $\log_{125} 30$ được tính theo a, b là $\frac{1+a}{3(1-b)}$.

$$\frac{4(3-a)}{3-b}$$

$$\bigcirc \frac{a}{3+b}$$
.

$$\bigcirc \frac{a}{3+a}.$$

🗭 Lời giải.

Ta có

$$\begin{array}{rcl} \log_{125} 30 & = & \frac{\log 30}{\log 125} = \frac{1 + \log 3}{3 \log 5} \\ & = & \frac{1 + \log 3}{3 (1 - \log 2)} = \frac{1 + a}{3 (1 - b)} \end{array}$$

CÂU 34. Cho số thực α thỏa mãn $9^{\alpha} + 9^{-\alpha} = 23$. Giá trị của biểu thức $\frac{5 + 3^{\alpha} + 3^{-\alpha}}{1 - 3^{-\alpha} - 3^{\alpha}}$ bằng

$$\frac{1}{2}$$
.

$$\bigcirc \frac{3}{2}$$

Ta có: $9^a + 9^{-a} = 23 \Leftrightarrow 3^{2a} + 3^{-2a} = 23 \Leftrightarrow (3^a + 3^{-a})^2 - 2 = 23 \Leftrightarrow (3^a + 3^{-a})^2 = 25$

Vậy
$$\frac{5+3^a+3^{-a}}{1-3^{-a}-3^a} = \frac{5+5}{1-5} = -\frac{5}{2}$$
.

CÂU 35. Cho $a>0,\ b>0$ và a khác 1 thỏa mãn $\log_a b=\frac{b}{4};\ \log_2 a=\frac{16}{b}.$ Tính tổng a+b.



B) 16.

(D) 10.

D Lời giải.

Ta có $\log_2 a \cdot \log_a b = \frac{16}{b} \cdot \frac{b}{4} \Rightarrow \log_2 b = 4 \Rightarrow b = 16.$

Vậy $\log_2 a = \frac{16}{16} = 1 \Rightarrow a = 2 \Rightarrow a+b = 18.$

Chọn đáp án (C).....

CÂU 36. Cho a, b là các số thực dương thỏa mãn $a^2 + b^2 = 14ab$, biểu thức $\log_2(a+b)$ bằng

$$\bigcirc$$
 $\frac{1}{2}(4 + \log_2 a + \log_2 b)$

B
$$\frac{1}{2} (4 + \log_2 a + \log_2 b)$$
. **C** $4 + \frac{1}{2} (\log_2 a + \log_2 b)$.

🗭 Lời giải.

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= 14ab &\Leftrightarrow (a+b)^2 &= 16ab \\ &\Rightarrow \log_2(a+b)^2 &= \log_2(16ab) \\ &\Rightarrow 2\log_2(a+b) &= 4 + \log_2 a + \log_2 b \\ &\Rightarrow \log_2(a+b) &= \frac{1}{2}(4 + \log_2 a + \log_2 b) \end{aligned}$$

CÂU 37. Giả sử $a,\ b$ là các số thực sao cho $x^3+y^3=a\cdot 10^{3z}+b\cdot 10^{2z}$ đúng với mọi số thực dương $x,\ y,\ z$ thỏa mãn $\log(x+y)=z$ và $\log(x^2+y^2)=z+1.$ Giá trị của a+b bằng

$$\mathbf{A} \frac{31}{2}$$

$$\frac{29}{2}$$
.

$$\bigcirc$$
 $-\frac{31}{2}$.

$$\bigcirc$$
 $-\frac{25}{2}$.

🗭 Lời giải.

Ta có
$$\begin{cases} \log(x+y) = z \\ \log(x^2 + y^2) = z + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 10^z \\ x^2 + y^2 = 10^{z+1} = 10 \cdot 10^z \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 = 10(x+y).$$

Khi đó

$$x^{3} + y^{3} = a \cdot 10^{3z} + b \cdot 10^{2z} \Leftrightarrow (x+y)(x^{2} + y^{2} - xy) = a(10^{z})^{3} + b(10^{z})^{2}$$

$$\Leftrightarrow (x+y)(x^{2} + y^{2} - xy) = a(x+y)^{3} + b(x+y)^{2} \Leftrightarrow x^{2} + y^{2} - xy = a(x+y)^{2} + b(x+y)$$

$$\Leftrightarrow x^{2} + y^{2} - xy = a(x^{2} + 2xy + y^{2}) + \frac{b}{10}(x^{2} + y^{2}) \Leftrightarrow x^{2} + y^{2} - xy = \left(a + \frac{b}{10}\right)(x^{2} + y^{2}) + 2axy.$$

Đồng nhất hệ số, ta được $\begin{cases} a + \frac{b}{10} = 1 \\ 2a = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{2} \text{. Vậy } a + b = \frac{29}{2}. \end{cases}$

Chọn đáp án (B).....

CÂU 38. Cho các số $a, b > 0, a \neq 1$ thỏa mãn $\log_{ab} \frac{a}{b} = \frac{1}{3}$. Giá trị của $\log_{a^3} (ab^6)$ bằng

 $\frac{8}{3}$.

B
$$\frac{13}{4}$$
.

$$\frac{8}{9}$$
.

$$\bigcirc \frac{4}{3}$$
.

Ta có $\log_{ab} \frac{a}{b} = \log_{ab} a - \log_{ab} b \Leftrightarrow \frac{1}{3} = \frac{1}{1 + \log_{\circ} b} - \frac{1}{\log_{\circ} a + 1}$.

Đặt $\log_a b = t$, khi đó ta có

$$\frac{1}{1+t} - \frac{1}{\frac{1}{t}+1} = \frac{1}{3} \iff \frac{1}{1+t} - \frac{t}{1+t} = \frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1-t}{1+t} = \frac{1}{3} \Rightarrow t = \frac{1}{2}.$$

Vậy
$$\log_{a^3} (ab^6) = \log_{a^3} a + \log_{a^3} b^6 = \frac{1}{3} + 2\log_a b = \frac{1}{3} + 2t = \frac{4}{3}.$$

Chọn đáp án \bigcirc

CÂU 39. Cho x, y và z là các số thực lớn hơn 1 và gọi w là số thực dương sao cho $\log_x w = 24$, $\log_y 40$ và $\log_{xyz} w = 12$. Tính $\log_z w$.

(A) 52.

(B) - 60.

c 60.

(D) - 52.

Dùi giải.

$$\log_x w = 24 \Rightarrow \log_w x = \frac{1}{24}$$
$$\log_y w = 40 \Rightarrow \log_w y = \frac{1}{40}$$

Lại do

$$\log_{xyz} w = 12 \Leftrightarrow \frac{1}{\log_w xyz} = 12 \Leftrightarrow \frac{1}{\log_w x + \log_w y + \log_w z} = 12 \Leftrightarrow \frac{1}{\frac{1}{24} + \frac{1}{40} + \log_w z} = 12 \Leftrightarrow \log_w z = \frac{1}{60} \Leftrightarrow \log_z w = 60.$$

Chọn đáp án \bigcirc

CÂU 40. Cho các số thực dương x, y thỏa mãn $\sqrt{\log x} + \sqrt{\log y} + \log \sqrt{x} + \log \sqrt{y} = 100$ và $\sqrt{\log x}, \sqrt{\log y}, \log \sqrt{x}, \log \sqrt{y}$ là các số nguyên dương. Khi đó kết quả xy bằng

 $\mathbf{A} 10^{200}$.

10¹⁰⁰

 \bigcirc 10¹⁶⁴.

 \bigcirc 10^{144} .

🗭 Lời giải.

Ta có

$$\sqrt{\log x} + \sqrt{\log y} + \log \sqrt{x} + \log \sqrt{y} = 100 \Leftrightarrow (\sqrt{\log x} + 1)^2 + (\sqrt{\log y} + 1)^2 = 202.$$

Vì $\sqrt{\log x}$, $\sqrt{\log y}$ là các số nguyên dương nên $(\sqrt{\log x} + 1)^2$ và $(\sqrt{\log y} + 1)^2$ là các số nguyên dương. Do đó cần phân tích 202 thành tổng của 2 số chính phương.

Mặt khác, ta có $202 = 9^2 + 11^2$ và vai trò của x, y như nhau nên ta chỉ cần xét trường hợp:

$$\begin{cases} (\sqrt{\log x} + 1)^2 = 81 \\ (\sqrt{\log y} + 1)^2 = 121 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{\log x} = 8 \\ \sqrt{\log y} = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10^{64} \\ y = 10^{100} \end{cases} \Rightarrow xy = 10^{164}.$$

Chọn đáp án \bigcirc

Toán thực tế, liên môn

- **⊘** Chỉ số hay độ pH của một dung dịch được tính theo công thức: pH = $-\log [\mathrm{H}^+]$ với [H⁺] là nồng độ ion hydrogen. Người ta đo được nồng độ ion hydrogen của một cốc nước cam là 10^{-4} , nước dừa là 10^{-5} (nồng độ tính bằng mol L^{-1}).
- $\ensuremath{ \bigodot}$ Công thức lãi kép theo N kì hạn

Nếu đem gửi ngân hàng một số vốn ban đầu là P theo thể thức lãi kép với lãi suất hằng năm không đổi là r và chia mỗi năm thành m kì tính lãi thì sau t năm (tức là sau tm = N kì hạn) số tiền thu được (cả vốn lẫn lãi) là

$$A_m = P\left(1 + \frac{r}{m}\right)^N.$$

Với số vốn ban đầu là P, theo thể thức lãi kép liên tục, lãi suất hằng năm không đổi là r thì sau t năm, số tiền thu được cả vốn lẫn lãi sẽ là

$$A = Pe^{tr}$$
.

1. Ví du mẫu

VÍ DỤ 1. Trong hóa học, độ pH của một dung dịch được tính theo công thức pH = $-\log[\mathrm{H}^+]$, trong đó [H⁺] là nồng độ H⁺ (ion hydro) tính bằng mol/L. Các dung dịch có pH bé hơn 7 thì có tính acid, có pH lớn hơn 7 thì có tính kiềm, có pH bằng 7 thì trung tính.

- a) Tính độ pH của dung dịch có nồng độ H⁺ là 0,0001 mol/L. Dung dịch này có tính acid, hay kiềm hay trung tính?
- b) Dung dịch A có nồng độ H^+ gấp đôi nồng độ H^+ của dung dịch B. Độ pH của dung dịch nào lớn hơn và lớn hơn bao nhiêu? Làm tròn kết quả đến hàng phần nghìn.

Lời giải.

- a) $pH = -\log 0,0001 = -\log 10^{-4} = 4\log 10 = 4.$ Do 4 < 7 nên dung dịch có tính acid.
- b) Kí hiệu pH_A, pH_B lần lượt là độ pH của hai dung dịch A và B; $[H^+]_A$, $[H^+]_B$ lần lượt là nồng độ của hai dung dịch A và B. Ta có

$$pH_A = -\log[H^+]_A = -\log(2[H^+]_B) = -\log 2 - \log[H^+]_B = -\log 2 + pH_B.$$

Suy ra $pH_B - pH_A = \log 2 \approx 0.301$.

Vậy dung dịch B có độ pH lớn hơn và lớn hơn khoảng 0,301.

VÍ DỤ 2. Bác An gửi tiết kiệm ngân hàng 100 triệu đồng kì hạn 12 tháng, với lãi suất không đổi là 6% một năm. Khi đó sau n năm gửi thì tổng số tiền bác An thu được (cả vốn lẫn lãi) cho bởi công thức sau:

$$A = 100 \cdot (1 + 0.06)^n$$
 (triệu đồng).

Hỏi sau ít nhất bao nhiều năm, tổng số tiền bác An thu được là không dưới 150 triệu đồng?

🗭 Lời giải.

Ta có: $A = 100 \cdot (1 + 0.06)^n = 100 \cdot 1.06^n$.

Với A = 150, ta có: $100 \cdot 1,06^n = 150$ hay $1,06^n = 1,5$, tức là $n = \log_{1,06} 1,5 \approx 6,96$.

Vì gửi tiết kiệm kì hạn 12 tháng (tức là 1 năm) nên n phải là số nguyên.

Do đó ta chọn n=7.

Vậy sau ít nhất 7 năm thì bác An nhận được số tiền không dưới 150 triệu đồng.

VÍ DỤ 3. Một vi khuẩn có khối lượng khoảng $5 \cdot 10^{-13}$ gam và cứ 20 phút vi khuẩn đó tự nhân đôi một lần (Nguồn: Câu hỏi và bài tập vi sinh học, NXB DHSP, 2008). Giả sử các vi khuẩn được nuôi trong các điều kiện sinh trưởng tối ưu và mỗi con vi khuẩn đều tồn tại trong ít nhất 60 giờ. Hỏi sau bao nhiêu giờ khối lượng do tế bào vi khuẩn này sinh ra sẽ đạt tới khối lượng của Trái Đất (lấy khối lượng của Trái Đất là $6 \cdot 10^{27}$ gam) (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

🗭 Lời giải.

Số lần phân chia:
$$N = N_0 \cdot 2^n \Rightarrow n = \log_2\left(\frac{N}{N_0}\right) = \log_2\left(\frac{6 \cdot 10^{27}}{5 \cdot 10^{-13}}\right) = \log_2\left(1, 2 \cdot 10^{40}\right) \approx 133.$$

Thời gian cần thiết là: $133:3\approx 44,3$ giờ.

Vậy sau 45 giờ thì khối lượng do tế bào vi khuẩn này sinh ra sẽ đạt tới khối lượng của Trái Đất.

2. Bài tập rèn luyện

BÀl 1. Trong nuôi trồng thuỷ sản, độ pH của môi trường nước sẽ ảnh hưởng đến sức khoả và sự phát triển của thuỷ sản. Độ pH thích hợp cho nước trong đầm nuôi tôm sú là từ 7,2 đến 8,8 và tốt nhất là trong khoảng từ 7,8 đến 8,5. Phân tích nồng độ $[H^+]$ trong một đầm nuôi tôm sú, ta thu được $[H^+] = 8 \cdot 10^{-8}$ (Nguồn: https://nongnghiep.farmvina.com). Hỏi độ pH của đầm đó có thích hợp cho tôm sú phát triển không?

🗩 Lời giải.

Độ pH của đầm là: pH = $-\log[H^{+}] = -\log(8 \cdot 10^{-8}) \approx 7.1$.

Do vây, đô pH của đầm không thích hợp cho tôm sú phát triển.

 $textbf{BAl}$ 2. Biết thời gian cần thiết (tính theo năm) để tăng gấp đôi số tiền đầu tư theo thể thức lãi kép liên tục với lãi suất không đổi r mỗi năm được cho bởi công thức sau:

$$t = \frac{\ln 2}{r}.$$

Tính thời gian cần thiết để tăng gấp đôi một khoản đầu tư khi lãi suất là 6% mỗi năm (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất).

Lời giải.

Ta có: r = 6% = 0.06. Do đó thời gian cần thiết để tăng gấp đôi khoản đầu tư là

$$t = \frac{\ln 2}{r} = \frac{\ln 2}{0.06} \approx 11.6 \,(\text{năm}).$$

BÀI 3. Độ lớn M của một trận động đất theo thang Richter được tính theo công thức $M = \log \frac{A}{A_0}$, trong đó A là biên độ lớn nhất ghi được bởi máy đo địa chấn, A_0 là biên độ tiêu chuẩn được sử dụng để hiệu chỉnh độ lệch gây ra bởi khoảng cách của máy đo địa chấn so với tâm chấn $(A_0 = 1\mu m)$.

- a) Tính độ lớn của trận động đất có biên độ A bằng
 - i) $10^{5,1}A_0$;

- ii) $65\ 000A_0$
- b) Một trận động đất tại địa điểm N có biên độ lớn nhất gấp ba lần biên độ lớn nhất của trận động đất tại địa điểm P. So sánh độ lớn của hai trận động đất.

Lời giải.

a) Độ lớn của trận động đất có biên độ A là

i)
$$A = 10^{5,1} A_0 \Rightarrow M = \log \frac{10^{5,1} A_0}{A_0} = 5,1;$$

ii)
$$A = 65\ 000A_0 \Rightarrow M = \log \frac{65\ 000A_0}{A_0} = \log(65 \cdot 10^3) \approx 4.81.$$

b) Gọi M_N và M_P lần lượt là độ lớn của các trận động đất tại địa điểm N và P. Gọi A là biên độ lớn nhất ghi được bởi máy đo địa chấn tại địa điểm P. Ta có

$$M_P = \log \frac{A}{A_0}; \quad M_N = \log \frac{3A}{A_0} = \log 3 + \log \frac{A}{A_0}.$$

Do $\log 3 \approx 0.3 > 0$ nên $M_N > M_P$.

BÀI 4.

- a) Nước cất có nồng độ $\rm H^+$ là 10^{-7} mol/L. Tính nồng độ pH của nước cất.
- b) Một dung dịch có nồng độ H^+ gấp 20 lần nồng độ H^+ của nước cất. Tính pH của dung dịch đó.

🗭 Lời giải.

- a) Ta có pH = $-\log[H^+] = -\log 10^{-7} = 7$.
- b) Nồng độ H^+ của dung dịch là $20 \cdot 10^{-7}$ mol/L. Độ pH của dung dịch là

$$pH = -\log[20 \cdot 10^{-7}] \approx 5.7.$$

BÀI 5. Biết rằng khi độ cao tăng lên, áp suất không khí sẽ giảm và công thức tính áp suất dựa trên độ cao là

$$a = 15500(5 - \log p),$$

trong đó a là độ cao so với mực nước biển (tính bằng mét) và p là áp suất không khí (tính bằng pascal). Tính áp suất không khí ở đỉnh Everest có đô cao 8850 m so với mực nước biển.

🗭 Lời giải.

Đỉnh Everest có độ cao 8850 m so với mực nước biển suy ra

$$8850 = 15500(5 - \log p) \Leftrightarrow \log p = \frac{1373}{310} \Leftrightarrow p = 26855,44 \text{ (pascal)}.$$

Áp suất không khí ở đỉnh Everest là p = 26855,44 (pascal).

BÀI 6. Mức cường độ âm L đo bằng decibel (dB) của âm thanh có cường độ I (đo bằng oát trên mét vuông, kí hiệu là W/m^2) được định nghĩa như sau:

$$L(I) = 10 \log \frac{I}{I_0},$$

trong đó $I_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2$ là cường độ âm thanh nhỏ nhất mà tai người có thể phát hiện được (gọi là ngưỡng nghe). Xác định mức cường độ âm của mỗi âm sau:

- a) Cuộc trò chuyện bình thường có cường độ $I = 10^{-7} \text{ W/m}^2$.
- b) Giao thông thành phố đông đúc có cường độ $I = 10^{-3} \text{ W/m}^2$.

Lời giải.

a) Cuộc trò chuyện bình thường có cường độ $I=10^{-7}~{\rm W/m^2}$ có mức cường độ âm là

$$L(I) = 10 \log \frac{10^{-7}}{10^{-12}} = 50 \text{ (dB)}.$$

b) Giao thông thành phố đông đúc có cường độ $I=10^{-3}~{
m W/m^2}$ có mức cường độ âm là

$$L(I) = 10 \log \frac{10^{-3}}{10^{-12}} = 90 \text{ (dB)}.$$

3. Bài tập trắc nghiệm

CÂU 1. Sự phân rã của các chất phóng xạ được biểu diễn theo công thức $m(t) = m_0 e^{-\lambda t}$, $t = \frac{\ln 2}{T}$, trong đó m_0 là khối

lượng ban đầu của chất phóng xạ (tại thời điểm t=0), m(t) là khối lượng chất phóng xạ tại thời điểm t, T là chu kì bán rã (tức là khoảng thời gian để một nửa khối lượng chất phóng xạ biến thành chất khác). Khi phân tích một mẫu gỗ từ công trình kiến trúc cổ, các nhà khoa học thấy rằng khối lượng cacbon phóng xạ $^{14}_{6}C$ trong mẫu gỗ đã mất 45% so với lượng $^{14}_{6}C$ ban đầu của nó. Hỏi công trình kiến thúc đó có niên đại khoảng bao nhiêu năm? Cho biết chu kì bán rã của $^{14}_{6}C$ là khoảng 5730 năm.

(A) 4942 (năm).

B 5157 (năm).

(c) 3561 (năm).

(D) 6601 (năm).

Lời giải.

Từ công thức $m(t) = m_0 \mathrm{e}^{-\lambda t}$, $\lambda = \frac{\ln 2}{T}$ và $m(t) = 0.55 m_0$ ta suy ra

$$0.55 = e^{-\frac{\ln 2}{5730}t} \Leftrightarrow 0.55 = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5730}} \Rightarrow t = 5730 \cdot \log_{\frac{1}{2}} 0.55 \approx 4942 \text{ (năm)}.$$

CÂU 2. Biết rằng năm 2001, dân số Việt Nam là 78685800 người và tỉ lệ tăng dân số năm đó là 1,7%. Cho biết sự tăng dân số được ước tính theo công thức $S = A \cdot e^{Nr}$ (trong đó A là dân số của năm lấy làm mốc tính, S là dân số sau N năm, r là tỉ lệ tăng dân số hàng năm). Hỏi nếu cứ tăng dân số với tỉ lệ như vậy thì đến năm nào dân số nước ta ở mức 120 triệu người?

(A) 2020.

B) 2022.

(c) 2025.

(**D**) 2026.

🗭 Lời giải.

Ta có $S = A \cdot e^{Nr}$ nên $N = \frac{1}{r} \ln \frac{S}{A}$.

Để dân số nước ta ở mức 120 triệu người thì cần số năm $N = \frac{100}{1.7} \cdot \ln \frac{120 \cdot 10^6}{78685800} \approx 25.$

Lúc đấy là năm 2001 + 25 = 2026.

Chọn đáp án (D).....

CÂU 3. Một người gửi số tiền 80 triệu đồng vào một ngân hàng với lãi suất 6,2%/năm. Cứ sau mỗi năm, số tiền lãi sẽ sinh ra được nhập vào vốn ban đầu để tính lãi cho năm tiếp theo. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu năm thì người đó sẽ lĩnh được số tiền cả vốn lẫn lãi là 100 triệu đồng? (Giả thiết lãi suất không đối trong suốt thời gian gửi.)

 (\mathbf{A}) 3 năm.

(**B**) 2 năm.

 $(\mathbf{C})4$ năm.

 (\mathbf{D}) 5 năm.

Lời giải.

Số tiền người đó nhận được (gốc + lãi) theo công thức $T = A \cdot (1+r)^n$. Theo giả thiết $100 = 80 \left(1 + \frac{6.2}{100}\right)^n \Leftrightarrow (1,062)^n = \frac{5}{4} \Leftrightarrow n = \log_{1,062} \left(\frac{5}{4}\right) \approx 3.7$.

Vậy cần ít nhất 4 năm để người đó nhận được 100 triệu.

Chọn đáp án (C).....

CÂU 4. Một người gửi 50 triệu đồng vào một ngân hàng với lãi suất 6%/ năm. Biết nếu không rút tiền khỏi ngân hàng thì cứ mỗi năm số tiền lãi sẽ được cộng vào gốc để tính lãi cho năm tiếp theo. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu năm thì tổng số tiền cả gốc lẫn lãi của người đó nhiều là 100 triệu? Giả định trong suốt thời gian gửi, lãi suất không thay đổi và người đó không rút tiền ra.

(A) 14 năm.

B 11 năm .

(**c**) 12 năm.

(**D**) 13 năm.

Lời giải.

Gọi S_n là số tiền cả gốc lẫn lãi sau khi hết năm thứ n.

Ta có $S_n = 50(1+0.06)^n$ triệu đồng. Yêu cầu bài toán tương đương

$$S_n = 100 \Leftrightarrow 50 \cdot (1,06)^n = 100 \Leftrightarrow n = \log_{1.06} 2 \approx 11.8.$$

Vậy là n=12.

Chọn đáp án (C)

CÂU 5. Một người gửi tiết kiệm với lãi suất 8,4%/năm và lãi hàng năm được nhập vào vốn. Sau bao nhiêu năm người đó thu được gấp đôi số tiền ban đầu?

(A) 9.

Lời giải.

Số tiền gửi ban đầu A đồng với lãi suất r%, sau n năm được tính theo công thức $P_n = A(1+r)^n$. Theo đề bài ta có phương trình

$$A(1+r)^n = 2A$$

$$\Leftrightarrow 1.084^n = 2$$

 $\Leftrightarrow n = \log_{1.084} 2 \approx 8,594.$

Vậy sau 9 năm người gửi thu được gấp đôi số tiền ban đầu.

CÂU 6. Cường độ một trận động đất M (richter) được cho bởi công thức $M = \log A - \log A_0$, với A là biên độ rung chấn tối đa và A_0 là một biên độ chuẩn (hằng số). Dầu thế kỷ 20, một trận động đất ở San Francisco có cường độ 8,3 độ richter. Trong cùng năm đó, trận động đất khác ở Nam Mỹ có biên độ rung chấn tối đa gấp 4 lần biên độ rung chấn tối đa của trận động đất ở San Francisco. Tính cường độ của trận động đất ở Nam Mỹ (làm tròn đến 1 chữ số thập phân).

A 33,2 richter.

B 12,3 richter.

© 8,9 richter.

 \bigcirc 2,1 richter.

Dùi giải.

Do trận động đất khác ở Nam Mỹ có biên độ rung chấn tối đa gấp 4 lần biên độ rung chấn tối đa của trận động đất ở San Francisco nên cường độ của trận động đất ở đó là

$$\log 4A - \log A_0 = \log 4 + \log A - \log A_0 = \log 4 + M \approx 8.9.$$

Chọn đáp án \bigcirc

CÂU 7. Một người gửi tiết kiệm 200 triệu đồng với lãi suất 5% một năm và lãi hàng năm được nhập vào vốn. Sau 9 năm nhận được số tiền cả gốc và lãi nhận được là bao nhiêu?

(A) 210, 55 triệu.

B) 310, 27 triệu .

© 300 triệu.

D 352, 58 triệu.

D Lời giải.

Sau 9 năm, số tiền nhận được là $200 \cdot 10^6 (1+5\%)^9 = 310,27$ triệu.

Chọn đáp án \fbox{B}

CÂU 8. Áp suất không khí $P(\text{do bằng milimet thủy ngân, kí hiệu là mmHg) suy giảm mũ so với độ cao <math>x(\text{do bằng mét})$, tức là P giảm theo công thức $P = P_0 \cdot e^{xi}$, trong đó $P_0 = 760$ mmHg là áp suất của mực nước biển (x = 0), i là hệ số suy giảm. Biết rằng ở độ cao 1000 m thì áp suất của không khí là 672,71 mmHg. Hỏi áp suất không khí ở độ cao 3000 m gần bằng số nào dưới đây nhất?

A 530,23 mmHg.

B 527,06 mmHg.

© 554,38 mmHg.

D 428,2 mmHg.

🗭 Lời giải.

 $\mathring{\mathrm{O}}$ độ cao 1000 m, áp suất của không khí là 672,71 mmHg. Thay vào công thức, ta có

$$672,71 = 760 \cdot e^{1000i} \Leftrightarrow 1000i = \ln \frac{672,71}{760} \Leftrightarrow i = \frac{1}{1000} \ln \frac{672,71}{760}.$$

Từ đó suy ra áp suất không khí ở độ cao 3000 m là

$$P = 760 \cdot e^{3000i} = 760 \cdot e^{3 \ln \frac{672,71}{760}} \approx 527,06.$$

Chọn đáp án \fbox{B}

CÂU 9. Một nguồn âm đẳng hướng phát ra từ điểm O. Mức cường độ âm tại điểm M cách O một khoảng R được tính bởi công thức $L_M = \log \frac{k}{R^2}$ (Ben), với k > 0 là hằng số. Biết điểm O thuộc đoạn thắng AB và mức cường độ âm thanh tại A và B lần lượt là $L_A = 4,3$ (Ben) và $l_B = 5$ (Ben). Tính mức cường độ âm tại trung điểm của AB (làm tròn đến hai chữ số thập phân).

A 4,65 (Ben).

B 4,58 (Ben).

© 5,42 (Ben).

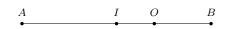
D 9,40 (Ben).

🗭 Lời giải.

Ta có 4,3 =
$$\log \frac{k}{R_A^2} \Rightarrow R_A = OA = \sqrt{\frac{k}{10^{4,3}}}$$
 và 5 = $\log \frac{k}{R_B^2} \Rightarrow R_B = OB = \sqrt{\frac{k}{10^5}}$.

Do O thuộc đoạn AB nên $AB = R_A + R_B$.

Gọi I là trung điểm của AB.



Không mất tính tổng quát, giả sử O gần B hơn so với A. Khi đó,

$$R_I = OI = OA - IA = R_A - \frac{R_A + R_B}{2} = \frac{R_A - R_B}{2} = \frac{\sqrt{k}}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{10^{4,3}}} - \frac{1}{\sqrt{10^5}} \right).$$

Tính được $L_I = \log \frac{k}{R_I^2} = \log \frac{4}{\left(\frac{1}{\sqrt{10^{4,3}}} - \frac{1}{\sqrt{10^5}}\right)^2} \approx 5,42$ (Ben).

Chọn dàp an 🖰.

Bài 20. HÀM SỐ MŨ. HÀM SỐ LOGARIT

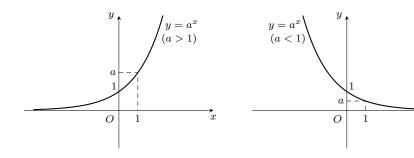
A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa

† Định nghĩa 20.1. Cho số dương a khác 1. Hàm số cho tương ứng mỗi số thực x với số thực a^x được gọi là **hàm số mũ** cơ số a, kí hiệu $y=a^x$.

Nhận xét: Hàm số $y = a^x$ có tập xác định là \mathbb{R} .

† Định NGHĨA 20.2. Đồ thị hàm số $y = a^x$ $(a > 0, a \neq 1)$ là một đường cong liền nét, cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 1, nằm ở phía trên trục hoành và đi lên nếu a > 1, đi xuống nếu 0 < a < 1.



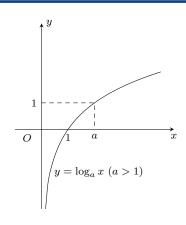
Nhận xét: Cho hàm số mũ $y = a^x \ (a > 0, a \neq 1)$.

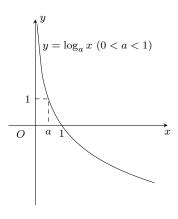
$y = a^x \ (a > 1)$					$y = a^x \ (0 < a < 1)$						
		$\mathscr{D} = \mathbb{R}; T = (0; +\infty).$				$\mathscr{D} = \mathbb{R}, \ T = (0; +\infty).$					
Tíı	nh liên tục:	liên tục: Hàm số liên tục trên \mathbb{R} .				Tính liên tục: Hàm số liên tục trên \mathbb{R} .					
	Giới hạn đặc biệt				Giới hạn đặc biệt						
	$\lim_{x \to -\infty} a^x =$	$=0, \lim_{x\to+\infty}$	$a^x = +$	$-\infty$.	$\lim_{x \to -\infty} a^x = +\infty, \lim_{x \to +\infty} a^x = 0.$				= 0.		
Sự l	Sự biến thiên: Hàm số đồng biến trên \mathbb{R} .				Sự biến thiên: Hàm số nghịch biến trên I						
	Bảng biến thiên				Bảng biến thiên						
	x	$-\infty$	0	$+\infty$		x	$-\infty$	0	+∞		
	$y = a^x$	0	_1	+∞		$y = a^x$	+∞	1_	0		

† Định nghĩa 20.3. Cho số dương a khác 1. Hàm số cho tương ứng mỗi số thực dương x với số thực $\log_a x$ được gọi là hàm số lô-ga-rít cơ số a, kí hiệu $y = \log_a x$.

Nhận xét: Cho hàm số $y = \log_a x \ (a > 0, a \neq 1)$.

$y = a^x \ (a > 1)$					$y = a^x \ (0 < a < 1)$					
	$\mathscr{D} = (0; +\infty); T = \mathbb{R}$					$\mathscr{D} = (0; +\infty); T = \mathbb{R}.$				
Tí	Tính liên tục: Hàm số liên tục trên $(0; +\infty)$.				Tí	Tính liên tục: Hàm số liên tục trên $(0; +\infty)$.				
	Giới hạn đặc biệt					Giới hạn đặc biệt				
$\lim_{x \to +\infty} \log_a x = +\infty, \lim_{x \to 0^+} \log_a x = -\infty$					$\lim_{x \to +\infty} \log_a x = -\infty, \lim_{x \to 0^+} \log_a x = +\infty.$					
	${ m H\`am\ s\'o}$ đ	ồng biế	n trên (0;	$+\infty$).		Hàm số nghịch biến trên $(0; +\infty)$.				
	Bảng biến thiên					Bảng biến thiên				
	x	0	1	+∞		x	0	1	$+\infty$	
				+∞			+∞			
	$y = \log_a x$	_	0			$y = \log_a x$		0_	•	
		$-\infty$							$-\infty$	





B. CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP



Tập xác định của hàm số

Hàm số $y = \log_a f(x)$ $(0 < a \neq 1)$ xác định khi f(x) > 0.

1. Ví dụ mẫu

VÍ DỤ 1. Tìm tập xác định của hàm số $y = 12^x$.

🗭 Lời giải.

Tập xác định của hàm số $y = 12^x$ là $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

VÍ DỤ 2. Tìm tập xác định của các hàm số

a)
$$y = \log_2(3 - 2x)$$
.

b)
$$y = \log_3(x^2 + 4x)$$
.

🗭 Lời giải.

a) Hàm số $y = \log_2(3 - 2x)$ xác định khi $3 - 2x > 0 \Leftrightarrow x < \frac{3}{2}$. Vậy tập xác định của hàm số $y = \log_2(3-2x)$ là $\mathscr{D} = \left(-\infty; \frac{3}{2}\right)$.

b) Hàm số $y = \log_3 \left(x^2 + 4x \right)$ xác định khi $x^2 + 4x > 0 \Leftrightarrow x < -4 \lor x > 0$. Vậy tập xác định của hàm số $y = \log_3(x^2 + 4x)$ là $\mathscr{D} = (-\infty; -4) \cup (0; +\infty)$.

VÍ DỤ 3. Tìm tập xác định của các hàm số sau

a)
$$y = \log |x + 3|$$
;

b)
$$y = \ln(4 - x^2)$$
.

Lời giải.

a) Hàm số xác định khi và chỉ khi $x + 3 \neq 0$ hay $x \neq -3$. Suy ra tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$.

b) Hàm số xác định khi và chỉ khi $4 - x^2 > 0$ hay -2 < x < 2. Suy ra tập xác định $\mathscr{D}=(-2;2)$.

VÍ DU 4. Tìm tập xác định của các hàm số

a)
$$y = \log_5(2x - 3)$$
;

b)
$$y = \log_{\frac{1}{5}} (-x^2 + 4)$$
.

Lời giải.

a) Điều kiện $2x - 3 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{3}{2}$ Vậy tập xác định của hàm số $y = \log_5(2x - 3)$ là $\mathscr{D} = \left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$.

b) Điều kiện $-x^2 + 4 > 0 \Leftrightarrow -2 < x < 2$. Vậy tập xác định của hàm số $y = \log_{\frac{1}{\epsilon}} \left(-x^2 + 4 \right)$ là $\mathscr{D} = (-2; 2)$.

2. Bài tập rèn luyện

BÀI 1. Tìm tập xác định của các hàm số sau

a)
$$y = \log_6(x - 4)$$

e)
$$y = \log_2(x - x^2)$$

i)
$$y = \log_{2022} (3x - x^2)$$

b)
$$y = \log_5(2x - 1)$$

f)
$$y = \log_3(x - 4)$$

c)
$$y = \log_2(3 - 2x)$$

g)
$$y = \log_7(x+2)^2$$

d)
$$y = \log_{2021}(3 - x)$$

h)
$$y = \log(2 + x - x^2)$$

$$j) y = \log_2\left(\frac{x-6}{1+x}\right)$$

🗭 Lời giải.

- a) Hàm số $y = \log_6(x-4)$ xác định khi và chỉ khi $x-4>0 \Leftrightarrow x>4$. Vậy tập xác định $\mathcal{D}=(4;+\infty)$.
- b) Điều kiện xác định $2x 1 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}$. Vậy tập xác định của hàm số đã cho là $\mathscr{D} = \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$.
- c) Biểu thức $\log_2(3-2x)$ có nghĩa $\Leftrightarrow x<\frac{3}{2}.$ Vậy tập xác định của hàm số $y=\log_2(3-2x)$ là $\mathscr{D}=(-\infty;\frac{3}{2}).$
- d) Điều kiện $3-x>0 \Leftrightarrow x<3$. Tập xác định của hàm số $\mathscr{D}=(-\infty;3)$.
- e) Điều kiện $x x^2 > 0 \Leftrightarrow x \in (0; 1)$. Tập xác định là $\mathscr{D} = (0; 1)$.
- f) Điều kiện $x-4>0 \Leftrightarrow x>4.$ Vậy tập xác định là $\mathscr{D}=(4;+\infty).$
- g) Hàm số xác định khi $(x+2)^2>0$. Điều này đúng với mọi $x\neq -2$. Tập xác định $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{-2\}$.
- h) Hàm số $y = \log(2 + x x^2)$ xác định khi $-x^2 + x + 2 > 0 \Leftrightarrow -1 < x < 2$. Tập xác định là (-1; 2).
- i) Điều kiện xác định $3x x^2 > 0 \Leftrightarrow 0 < x < 3$. Vậy tập xác định của hàm số đã cho là D = (0; 3).
- j) Hàm số xác định khi và chỉ khi

$$\frac{x-6}{x+1} > 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x < -1 \\ x > 6. \end{bmatrix}$$

Vậy tập xác định của hàm số là $\mathcal{D} = (-\infty; -1) \cup (6; +\infty)$.

BÀI 2. Tìm tất cả giá trị của tham số m để hàm số sau xác định trên \mathbb{R}

a)
$$y = \log_2(x^2 - 2x + m)$$

d)
$$y = \ln(3x^2 + 12mx + 6)$$

b)
$$y = \log(x^2 - 2x - m + 1)$$

c)
$$y = \log_7 (x^2 - 2x - m^2 + 5)$$

e)
$$y = \log(x^2 - 8x + 10m - m^2)$$

🗭 Lời giải.

a) Để hàm số $y = \log_2 (x^2 - 2x + m)$ có tập xác định là \mathbb{R} thì:

$$x^2 - 2x + m > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta' = 1 - m < 0 \Leftrightarrow m > 1.$$

- b) Hàm số có tập xác định là \mathbb{R} khi và chỉ khi $x^2 2x m + 1 > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Điều đó tương đương $\Delta' < 0 \Leftrightarrow (-1)^2 (-m+1) < 0 \Leftrightarrow m < 0$.
- c) Điều kiện: $x^2-2x-m^2+5>0$. Hàm số đã cho có tập xác định là $\mathbb R$ khi và chỉ khi $x^2-2x-m^2+5>0$, $\forall x\in\mathbb R$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta' < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 > 0 \\ m^2 - 4 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow -2 < m < 2.$$

d) Hàm số xác định trên R khi và chỉ khi

$$3x^{2} + 12mx + 6 > 0, \ \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \Delta' = (6m)^{2} - 3 \cdot 6 < 0$$

$$\Leftrightarrow 36m^{2} - 18 < 0$$

$$\Leftrightarrow -\sqrt{\frac{1}{2}} < m < \sqrt{\frac{1}{2}}.$$

e) Điều kiện để hàm số xác định trên $\mathbb R$ là

$$x^2 - 8x + 10m - m^2 > 0 \,\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta' = m^2 - 10m + 16 < 0 \Leftrightarrow 2 < m < 8.$$

3. Bài tập trắc nghiệm

CÂU 1. Tập xác định của hàm số $y = \left(2 - \sqrt{3}\right)^x$ là

 $(0; +\infty).$

 $(\mathbf{B})(-\infty;+\infty).$

 \bigcirc $[0;+\infty).$

 \bigcirc $(-\infty;0).$

Dùi giải.

Tập xác định của hàm số $y = \left(2 - \sqrt{3}\right)^x$ là $(-\infty; +\infty)$.

Chọn đáp án $\stackrel{\textstyle (B)}{}$

CÂU 2. Tập xác định của hàm số $y = 7^x$ là

(0;1).

 $(-\infty; +\infty)$.

 $(\mathbf{c})(0;+\infty).$

 \bigcirc $(1; +\infty).$

🗭 Lời giải.

Hàm số $y = 7^x$ xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$. Do đó tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Chọn đáp án B....

CÂU 3. Tìm tập xác định \mathscr{D} của hàm số $y = \log_2 (x^2 - 2x - 3)$.

(c) (-1;3).

Lời giải.

Hàm số $y = \log_2\left(x^2-2x-3\right)$ xác định khi $x^2-2x-3>0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x<-1\\ x>3. \end{bmatrix}$

Vậy tập xác định của hàm số là $\mathcal{D} = (-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$.

Chọn đáp án \bigcirc

CÂU 4. Hàm số $y = \log_3(2x - 3)$ có tập xác định là

 $lack {\bf A} \mathbb{R}.$

 $\left(\frac{3}{2};+\infty\right)$.

 $\mathbf{c}\left(-\infty; \frac{3}{2}\right].$

 \bigcirc $\left(-\infty; \frac{3}{2}\right)$.

🗭 Lời giải.

Hàm số $y = \log_3(2x - 3)$ có điều kiện xác định là $2x - 3 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{3}{2}$.

Vậy tập xác định của hàm số là $\mathscr{D} = \left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$.

Chọn đáp án (B)

CÂU 5. Tập xác định của hàm số $y = \log_3(2-x)$ là

 $(A) [2; +\infty).$

 $(\mathbf{B})(-\infty;2].$

 $\mathbb{C} \mathbb{R} \setminus \{2\}.$

 $(\mathbf{D})(-\infty;2).$

🗭 Lời giải.

Hàm số $y = \log_3(2-x)$ xác định khi và chỉ khi $2-x>0 \Leftrightarrow x<2$. Vậy tập xác định của hàm số là $\mathscr{D}=(-\infty;2)$.

Chọn đáp án $igodot{D}$

CÂU 6. Gọi $\mathscr D$ là tập tất cả những giá trị của x để $\log_2(2018-x)$ có nghĩa. Tập $\mathscr D$ là

 $\triangle \mathscr{D} = [0; 2018].$

 $\mathbf{B} \mathscr{D} = (-\infty; 2018).$

 $(\mathbf{C}) \mathscr{D} = (-\infty; 2018].$

 $\bigcirc \mathscr{D} = (0; 2018).$

p Lời giải.

Biểu thức $\log_2(2018-x)$ có nghĩa khi và chỉ khi $2018-x>0 \Leftrightarrow x<2018$. Vậy $\mathscr{D}=(-\infty;2018)$.

Chọn đáp án B.....

CÂU 7. Tập xác định \mathscr{D} của hàm số $y = \log_2(x-3) + \log_3(x+2)$ là

 $\mathbf{A} \, \mathscr{D} = (-\infty; -2) \cup (3; +\infty).$

 $\bigcirc \mathscr{D} = (3; +\infty).$

 $\bigcirc \mathcal{D} \mathscr{D} = (-2; 3).$

Điều kiện:
$$\begin{cases} x-3>0 \\ x+2>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>3 \\ x>-2 \end{cases} \Leftrightarrow x>3.$$

 $Vav \mathscr{D} = (3; +\infty)$

Chọn đáp án (C).....

CÂU 8. Tìm tập xác định \mathscr{D} của hàm số $y = \log_{13} \frac{x+2}{x-5}$

 $\mathbf{D} \mathscr{D} = (-\infty; -2) \cup (5; +\infty).$

🗭 Lời giải.

Điều kiện xác định:
$$\begin{cases} \frac{x+2}{x-5} > 0 \\ x \neq 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{bmatrix} x > 5 \\ x < -2 \\ x \neq 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x > 5 \\ x < -2 \end{cases}.$$

 $Vay \mathscr{D} = (-\infty; -2) \cup (5; +\infty).$

Chọn đáp án (D).....

CÂU 9. Tập xác định \mathscr{D} của hàm số $y = \log_5 \frac{x+3}{x-2}$ là

 $(\mathbf{C}) \mathscr{D} = [-3; 2)$.

CÂU 10. Tìm tập xác định \mathscr{D} của hàm số $y = \log(x^2 - 5x - 6)$

(A) $\mathscr{D} = (-\infty; -1) \cup (6; +\infty).$

 $(\mathbf{C}) \mathscr{D} = (-\infty; 2] \cup [3; +\infty).$

Lời giải.

Hàm số xác định khi $x^2 - 5x - 6 > 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x < -1 \\ x > 6. \end{bmatrix}$

Vậy tập xác định của hàm số là $\mathscr{D} = (-\infty; -1) \cup (6; +\infty)$.

Chọn đáp án (A).....

CÂU 11. Tập xác định của hàm số $y = \ln(x^2 - 5x + 6)$ là

- $(\mathbf{A}) (-\infty; 2] \cup [3; +\infty).$
- $(-\infty;2)\cup(3;+\infty).$
- (c) [2; 3].

 $(\mathbf{D})(2;3).$

D Lời giải.

Điều kiện xác định: $x^2 - 5x + 6 > 0 \Leftrightarrow (-\infty; 2) \cup (3; +\infty)$.

Chọn đáp án (B).....

CÂU 12. Tìm tập xác định \mathscr{D} của hàm số $y = \log \frac{2-x}{x^2+1}$

- \bigcirc $\mathscr{D} = (-\infty; 2).$
- $\bigcirc \mathscr{D} = (-1;1) \cup (2;+\infty).$

🗭 Lời giải.

Hàm số xác định $\Leftrightarrow \frac{2-x}{x^2+1} > 0 \Leftrightarrow 2-x > 0 \Leftrightarrow x < 2.$

Vậy tập xác định của hàm số là $\mathcal{D} = (-\infty; 2)$.

Chọn đáp án (C).....

CÂU 13. Tìm tập xác định \mathscr{D} của hàm số $y = \frac{2}{\log_4(4-x) - 3}$.

- $(\mathbf{A})\,\mathscr{D}=(4;+\infty).$
- $(\mathbf{C}) \mathscr{D} = (-\infty; -60) \cup (-60; 4).$

- **(D)** $\mathscr{D} = (-\infty; -60) \cup (-60; 4]$

D Lời giải.

Điều kiện xác định của hàm số là $\begin{cases} 4-x>0 \\ \log_4(4-x)-3\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<4 \\ 4-x\neq 4^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<4 \\ x\neq -60. \end{cases}$

Vậy tập xác định của hàm số là $\mathcal{D} = (-\infty; -60) \cup (-60; 4)$

Chọn đáp án (C).....

CÂU 14. Tập xác định \mathscr{D} của hàm số $y = \log_5(x^2 + 2x - 3)$ là

(A) $\mathscr{D} = (-\infty; -3) \cup (1; +\infty).$

(B) $\mathscr{D} = [-3; 1].$

$$\bigcirc \mathscr{D} = (-3; 1).$$

🗭 Lời giải.

Diều kiện
$$x^2 + 2x - 3 > 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x < -3 \\ x > 1. \end{bmatrix}$$

Vậy tập xác định của hàm số là $\mathscr{D} = (-\infty; -3) \cup (1; +\infty)$.

Chọn đáp án (A).....

CÂU 15. Có bao nhiều giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \log_3(x^2 - 2mx + m + 6)$ có tập xác định là \mathbb{R} ?





🗭 Lời giải.

Để hàm số tập xác định là \mathbb{R} thì

$$x^{2} - 2mx + m + 6 > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta' < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 > 0 \\ m^{2} - m - 6 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \in (-2; 3).$$

Chọn đáp án $\stackrel{\frown}{(A)}$

CÂU 16. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \ln(x^2 - 2x + m + 1)$ có tập xác định là \mathbb{R} .

$$\bigcirc M = 0.$$

B
$$0 < m < 3$$
.

$$\bigcirc m < -1 \text{ hoặc } m > 0.$$

$$\bigcirc m > 0.$$

Lời giải.

Điều kiện: $x^2 - 2x + m + 1 > 0$.

$$\Delta' = 1 - (m+1) = -m$$

Để hàm số có tập xác định là \mathbb{R} thì $\Delta' < 0 \Leftrightarrow m > 0$.

Chọn đáp án (D).....



Sự biến thiên và đồ thị của hàm số mũ và lôgarít

1. Ví du mẫu

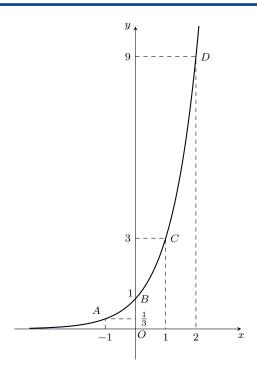
VÍ DỤ 1. Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị hàm số $y = 3^x$.

🗭 Lời giải.

Vì hàm số $y = 3^x$ có cơ số 3 > 1 nên ta có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$y = 3^x$	0	1	+∞

Đồ thị của hàm số $y = 3^x$ là một đường cong liền nét đi qua các điểm $A\left(-1; \frac{1}{3}\right), B(0; 1), C(1; 3), D(2; 9).$



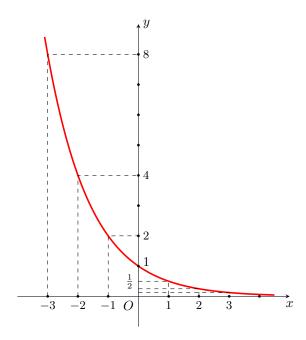
VÍ DỤ 2. Vẽ đồ thị hàm số $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

🗭 Lời giải.

Lập bảng giá trị của hàm số tại một số điểm như sau:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

Từ đó, ta vẽ được đồ thị của hàm số $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ như Hình 6.2.



Hình 6.2

VÍ DU 3. Vẽ đồ thị các hàm số sau:

a)
$$y = \log x$$
;

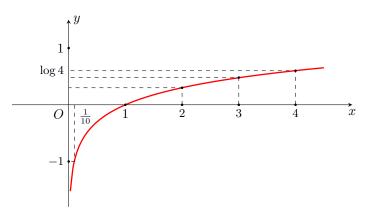
b)
$$y = \log_{\frac{1}{3}} x$$
.

🗭 Lời giải.

a) Vẽ đồ thị hàm số $y = \log x$. Lập bảng giá trị của hàm số tại một số điểm như sau:

x	$\frac{1}{10}$	1	2	3	4
$y = \log x$	-1	0	$\log 2$	$\log 3$	$\log 4$

Từ đó, ta vẽ được đồ thị của hàm số $y = \log x$ như hình bên dưới.

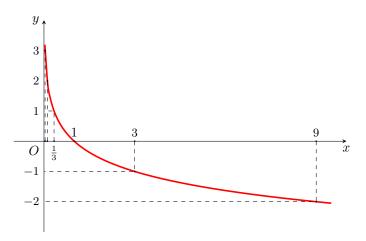


b) Vẽ đồ thị hàm số $y = \log_{\frac{1}{3}} x$.

Lập bảng giá trị của hàm số tại một số điểm như sau:

x	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9
$y = \log_{\frac{1}{3}} x$	3	2	1	0	-1	-2

Từ đó, ta vẽ được đồ thị của hàm số $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ như hình bên dưới.



VÍ DỤ 4. So sánh các cặp số sau:

a) $\log_3 7$ và $3\log_3 2$.

b) $2\log_{0.4} 5$ và $3\log_{0.4} 3$.

🗭 Lời giải.

- a) Ta có $3\log_3 2 = \log_3 2^3 = \log_3 8$. Hàm số $y = \log_3 x$ có cơ số 3 > 1 nên đồng biến trên $(0; +\infty)$. Mà 7 < 8 nên $\log_3 7 < \log_3 8$. Vậy $\log_3 7 < 3 \log_3 2$.
- b) Ta có $2\log_{0,4} 5 = \log_{0,4} 5^2 = \log_{0,4} 25$ và $3\log_{0,4} 3 = \log_{0,4} 3^3 = \log_{0,4} 27.$ Hàm số $y = \log_{0.4} x$ có cơ số 0.4 < 1 nên nghịch biến trên $(0; +\infty)$. Mà 25 < 27 nên $\log_{0.4} 25 > \log_{0.4} 27$. Vậy $2\log_{0.4} 5 > 3\log_{0.4} 3$.

VÍ DU 5. Sử dụng tính chất của hàm số mũ, so sánh các cặp số sau:

a) 1.4^2 và $1.4^{1.8}$.

b) $0.9^{-1.2}$ và $0.9^{-0.8}$.

c) $\sqrt[3]{2}$ và $\sqrt[5]{4}$.

🗭 Lời giải.

- a) Do 1,4 > 1 nên hàm số $y=1,4^x$ đồng biến trên \mathbb{R} . Mà 2 > 1,8 nên 1,4² > 1,4¹.8.
- b) Do 0.9 < 1 nên hàm số $y = 0.9^x$ nghịch biến trên \mathbb{R} . Mà -1.2 < -0.8 nên $0.9^{-1.2} > 0.9^{-0.8}$.
- c) Ta có $\sqrt[3]{2} = 2^{\frac{1}{3}}$ và $\sqrt[5]{4} = \sqrt[5]{2^2} = 2^{\frac{2}{5}}$. Do 2 > 1 nên hàm số $y = 2^x$ đồng biến trên \mathbb{R} . Mà $\frac{1}{3} < \frac{2}{5}$ nên $2^{\frac{1}{3}} < 2^{\frac{2}{5}}$, suy ra $\sqrt[3]{2} < \sqrt[5]{4}$.

2. Bài tập rèn luyện

BÀI 1. Trong các hàm số sau, hàm số nào đồng biến, hàm số nào nghịch biến trên khoảng xác định của hàm số đó? Vì sao?

a)
$$y = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^x$$
;

$$b) \ y = \left(\frac{\sqrt[3]{26}}{3}\right)^x;$$

c)
$$y = \log_{\pi} x;$$

$$d) \ y = \log_{\frac{\sqrt{15}}{4}} x.$$

🗭 Lời giải.

a) Vì
$$0 < \frac{\sqrt{3}}{2} < 1$$
 nên hàm số $y = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^x$ nghịch biến trên $\mathbb{R}.$

b) Vì
$$0 < \frac{\sqrt[3]{26}}{3} < 1$$
 nên hàm số $y = \left(\frac{\sqrt[3]{26}}{3}\right)^x$ nghịch biến trên $\mathbb{R}.$

c) Vì
$$\pi>1$$
nên hàm số $y=\log_\pi x$ đồng biến trên $(0;+\infty).$

d) Vì
$$0 < \frac{\sqrt{15}}{4} < 1$$
 nên hàm số $y = \log_{\frac{\sqrt{15}}{4}} x$ nghịch biến trên $(0; +\infty)$.

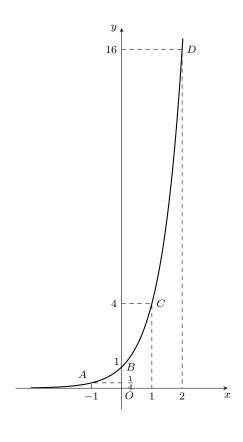
BÀI 2. Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị hàm số $y = 4^x$;

🗭 Lời giải.

Vì hàm số $y=4^x$ có cơ số 4>1 nên ta có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$y = 4^x$	0	1	+∞

Đồ thị của hàm số $y=4^x$ là một đường cong liền nét đi qua các điểm $A\left(-1;\frac{1}{4}\right),\,B(0;1),\,C(1;4),\,D(2;16).$



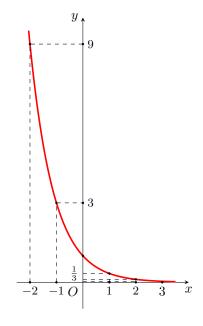
BÀI 3. Vẽ đồ thị các hàm số sau: $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$.

🗩 Lời giải.

Lập bảng giá trị của hàm số tại một số điểm như sau:

x	-2	-1	0	1	2	3	4
$y = 3^x$	9	3	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{81}$

Từ đó, ta vẽ được đồ thị của hàm số $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ như hình bên.



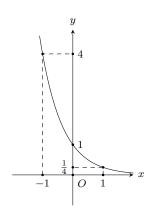
BÀI 4. Vẽ đồ thị hàm số sau: $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$.

🗭 Lời giải.

Lập bảng giá trị của hàm số ta được

x	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1
$y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

Đồ thị của hàm số $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ như bên dưới



BÀI 5. Vẽ đồ thị các hàm số sau

a)
$$y = \log_{\frac{1}{4}} x$$
.

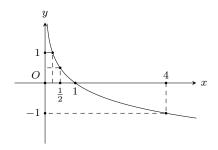
b)
$$y = \log_3 x$$

🗭 Lời giải.

a) Lập bảng giá trị của hàm số ta được

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
$y = \log_{\frac{1}{4}} x$	1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-1

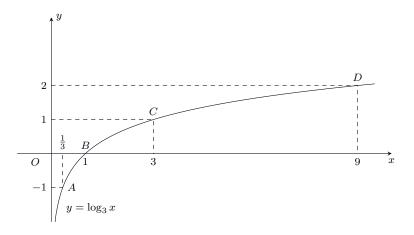
Đồ thị của hàm số $y = \log_{\frac{1}{4}} x$ như bên dưới



b) Vì hàm số $y = \log_3 x$ có cơ số 3 > 1 nên ta có bảng biến thiên như sau

x	0	1	+∞
$y = \log_3 x$	$-\infty$	0	+∞

Đồ thị của hàm số $y = \log_3 x$ là một đường cong liền nét đi qua các điểm $A\left(\frac{1}{3}; -1\right), B(1; 0), C(3; 1), D(9; 2).$



BÀI 6. So sánh các cặp số sau:

a) $\log_{\pi} 0.8$ và $\log_{\pi} 1.2$.

b) $\log_{0.3} 2$ và $\log_{0.3} 2,1$.

🗭 Lời giải.

- a) Hàm số $y=\log_\pi x$ có cơ số $\pi>1$ nên đồng biến trên $(0;+\infty)$. Mà 0.8<1,2 nên $\log_\pi 0.8<\log_\pi 1,2$.
- b) Hàm số $y=\log_{0,3}x$ có cơ số 0,3<1 nên nghịch biến trên $(0;+\infty)$. Mà 2<2,1 nên $\log_{0,3}2>\log_{0,3}2,1$.

BÀI 7. So sánh các cặp số sau:

a) $1,3^{0,7}$ và $1,3^{0,6}$.

b) $0.75^{-2.3}$ và $0.75^{-2.4}$.

🗭 Lời giải.

- a) Do 1,3 > 1 nên hàm số $y=1,3^x$ đồng biến trên \mathbb{R} . Mà 0,7 > 0,6 nên 1,30,7 > 1,30,6.
- b) Do 0.75 < 1 nên hàm số $y = 0.75^x$ nghịch biến trên \mathbb{R} . Mà -2.3 > -2.4 nên $0.75^{-2.3} < 0.75^{-2.4}$.

3. Bài tập trắc nghiệm

CÂU 1. Hàm số nào dưới đây đồng biến trên tập xác định của nó?

B
$$y = (0.6)^x$$
.

$$\mathbf{c}$$
 $y = \left(\frac{\mathrm{e}}{5}\right)^x$.

🗭 Lời giải.

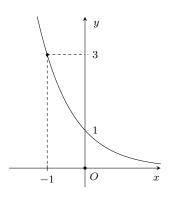
Do $\sqrt{3} > 1$ nên hàm số $y = \left(\sqrt{3}\right)^x$ đồng biến trên \mathbb{R} .

Chon đán án 🛕

CÂU 2.

Hàm số nào sau đây có đồ thị như hình vẽ bên?

$$\bigcirc y = (\sqrt{2})^x.$$



Lời giải.

Đồ thị hàm số đi qua điểm (-1;3), suy ra đây là đồ thị của hàm số $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{\infty}$.

Chon đáp án (A).....

CÂU 3. Hàm số nào sau đây đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$?

$$\mathbf{C} y = \left(\frac{\pi}{3}\right)^x.$$

🗭 Lời giải.

Hàm số mũ $y = a^x$ đồng biến trên $(-\infty; +\infty)$ khi a > 1.

Vì $\frac{\pi}{3} > 1$ nên hàm số $y = \left(\frac{\pi}{3}\right)^x$ đồng biến trên $(-\infty; +\infty)$.

Chon đáp án (C).....

CÂU 4. Hàm số nào sau đây đồng biến trên tập xác định của nó?

B
$$y = (\sqrt{2020} - \sqrt{2019})^x$$
. **C** $y = \log_{\frac{1}{2}}(x+4)$.

$$\bigcirc y = \log_{\frac{1}{2}}(x+4).$$

🗭 Lời giải.

Ta có $\sqrt{2} + \sqrt{3} >$ e nên $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{} > 1$.

Vậy hàm số $y = \left(\frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{e}\right)^x$ đồng biến trên tập xác định.

CÂU 5. Trong các hàm số sau, hàm số nào nghịch biến trên \mathbb{R} ?

$$\mathbf{B} y = \left(\frac{\mathbf{e}}{4}\right)^x.$$

$$\bigcirc y = \log_3 x^2.$$

🗭 Lời giải.

Ta có $0 < \frac{\mathrm{e}}{4} < 1$ do đó hàm số $y = \left(\frac{\mathrm{e}}{4}\right)^x$ nghịch biến trên \mathbb{R} .

CÂU 6. Trong các hàm số dưới đây, hàm số nào nghịch biến trên khoảng \mathbb{R} ?

$$\mathbf{A} y = (0.5)^x$$
.

B
$$y = 2^x$$
.

$$\mathbf{C} y = \pi^x$$
.

$$\mathbf{D} y = e^x$$
.

Lời giải.

Hàm số $y = a^x$ nghịch biến trên \mathbb{R} khi và chỉ khi 0 < a < 1.

Vì 0 < 0.5 < 1 nên hàm số $y = (0.5)^x$ nghịch biến trên \mathbb{R} .

Chọn đáp án (A).....

CÂU 7. Cho hàm số $y = e^x$. Mệnh đề nào sau đây là **sai**?

- (A) Đồ thị hàm số đi qua điểm A(1;0).
- **(c)** Hàm số có đạo hàm $y' = e^x, \forall x \in \mathbb{R}$.

- (B) Tập xác định của hàm số $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.
- D bồ thị hàm số nhận trục hoành là tiệm cận ngang.

🗭 Lời giải.

Mệnh đề sai là "Đồ thi hàm số đi qua điểm A(1;0)".

Chọn đáp án (A).....

CÂU 8. Tìm tất cả các giá trị của a để hàm số $y = (2020 - a)^x$ nghịch biến trên \mathbb{R} .

(A) a < 2019.

B) 2019 < a < 2020.

(**c**) 0 < a < 1.

(D) a < 2020.

🗭 Lời giải.

Để hàm số $y = (2020 - a)^x$ nghịch biến trên \mathbb{R} thì $0 < 2020 - a < 1 \Leftrightarrow 2019 < a < 2020$.

Chọn đáp án (B)......

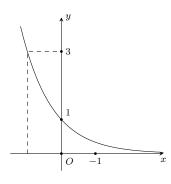
CÂU 9.

Đồ thị trong hình vẽ bên dưới là đồ thị của hàm số nào sau đây?

$$\mathbf{B} y = \left(\frac{1}{2}\right)^x. \qquad \mathbf{C} \left(\frac{1}{3}\right)^x.$$

$$\mathbf{c} \left(\frac{1}{3}\right)^x$$
.

$$\bigcirc \left(\sqrt{3}\right)^x.$$



Lời giải.

Đồ thị hàm số đi qua (-1;3), do đó trong các đáp án đã cho thì đáp án thỏa mãn là $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$.

CÂU 10. Hàm số nào dưới đây nghịch biến trên tập xác định của nó?

$$\mathbf{D} y = (0,5)^x.$$

🗭 Lời giải.

Hàm số $y = a^x$ có tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

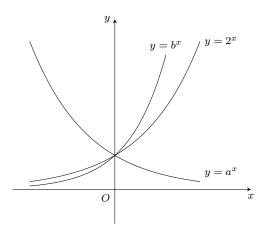
 Θ Hàm số $y = a^x$ đồng biến trên \mathbb{R} khi cơ số a > 1.

 Θ Hàm số $y = a^x$ nghịch biến trên \mathbb{R} khi cơ số 0 < a < 1.

Vây $y = (0.5)^x$ nghich biến trên tập xác định \mathbb{R} .

Chọn đáp án (D).......

CÂU 11. Cho hai số thực a, b khác 1 và đồ thị của ba hàm số $y = a^x, y = b^x, y = 2^x$ trên cùng một hệ trục tọa độ có dạng như hình vẽ bên.



Mệnh đề nào sau đây đúng?

B
$$0 < a < 1, 1 < b < 2$$
.

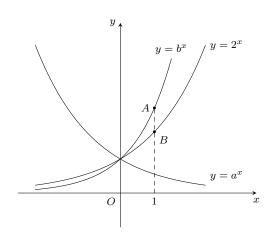
$$\bigcirc 0 < a < 1, b > 2.$$

$$\bigcirc$$
 1 < a < 2, b > 2.

🗭 Lời giải.

Quan sát đồ thị, ta thấy hàm số $y = a^x$ nghịch biến nên 0 < a < 1. Kẻ đường thẳng x=1 cắt hai đồ thị hàm số $y=b^x$ và $y=2^x$ lần lượt tại hai $\tilde{\text{diem}} A \text{ và } B.$

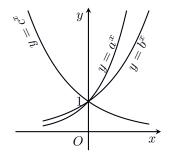
Dễ thấy $y_A = b > y_B = 2 \Leftrightarrow b > 2$.



CÂU 12.

Cho đồ thị ba hàm số $y = a^x$, $y = b^x$, $y = c^x$ như hình vẽ bên. Kết luận nào sau đây đúng?

- (A) 0 < c < 1 < b < a.
- **B**) 0 < a < 1 < c < b.
- \bigcirc 0 < a < 1 < b < c.
- \bigcirc 0 < c < 1 < a < b.



Lời giải.

- \odot Đồ thị hàm số $y = c^x$ nghịch biến trên \mathbb{R} , do đó 0 < c < 1.
- \odot Đồ thị hàm số $y = a^x$, $y = b^x$ đồng biến trên \mathbb{R} , do đó a > 1, b > 1.
- \bigcirc Với $x = 1 \Rightarrow a > b$.

Vậy a > b > 1 > c > 0.

Chọn đáp án (A)..... CÂU 13. Trong các hàm số sau đây, hàm số nào nghịch biến trên tập xác định của nó?

 $(\mathbf{A}) y = \ln x.$

(B) $y = \log x$.

 $(\mathbf{D})y = \log_{\sqrt{3}} x.$

🗭 Lời giải.

Hàm số $y = \log_{\frac{2}{a}} x$ có cơ số $a = \frac{\sqrt{2}}{e} < 1$ nên nghịch biến trên tập xác định.

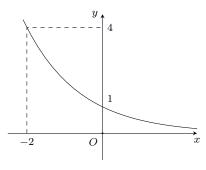
Chọn đáp án \bigcirc

CÂU 14.

Đường cong ở hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?.

(c) $y = 2^x$.

 $(\mathbf{D}) y = -x^2 + 2x + 1.$



🗭 Lời giải.

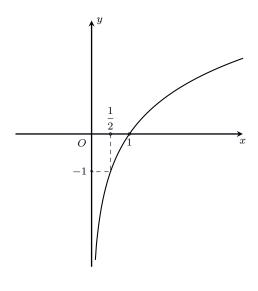
Đồ thị hàm số hình bên đi qua điểm (-2;4).

Trong các đáp án chỉ có hàm số $y = \frac{1}{2^x}$ có đồ thị đi qua (-2;4). Do đó $y = \frac{1}{2^x}$ là hàm số cần tìm.

Chọn đáp án (A).....

CÂU 15.

Đường cong trong hình bên là đồ thi của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án $A,\,B,\,C,\,D$ dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?



Lời giải.

Ta thấy đồ thị hàm số đi qua điểm $A\left(\frac{1}{2};-1\right)$ nên thỏa mãn $y=\log_2 x$.

Chọn đáp án (A).....

CÂU 16.

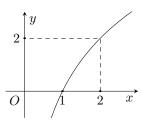
Tìm giá trị a của hàm số $y = \log_a x \ (0 < a \neq 1)$ có đồ thị như hình vẽ bên.

$$\mathbf{A} \ a = \sqrt{2}.$$

$$\bigcirc$$
 $a=2.$

$$a = \frac{1}{2}$$
.

$$\bigcirc a = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$



🗭 Lời giải.

Ta thấy $\log_a 2 = 2 \Rightarrow a = \sqrt{2}$.

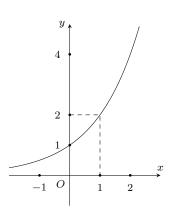
Chọn đáp án (A)....

CÂU 17.

Đồ thị sau là của hàm số nào dưới đây?

$$\mathbf{A} y = \ln x.$$

$$\bigcirc y = 4^x.$$



🗭 Lời giải.

Đồ thị hàm số luôn đi qua điểm (0; 1), suy ra đó là đồ thị của hàm số mũ.

Quan sát thấy khi x = 1 thì y = 2, suy ra đó là đồ thị của hàm số $y = 2^x$.

Chọn đáp án (B).....

CÂU 18. Cho hàm số $y = \log_{\frac{1}{\sqrt{3}}} x$. Khẳng định nào dưới đây sai?

 \triangle Đồ thị hàm số đi qua điểm (1;0).

(B) Đồ thị hàm số nằm phía trên trục hoành.

(c) Hàm số nghịch biến trên $(0; +\infty)$.

(**D**) Đồ thị hàm số nằm bên phải trực tung.

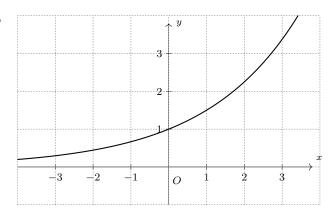
🗭 Lời giải.

Đồ thị hàm số $y = \log_a x$ luôn cắt trực hoành tại điểm (1;0), với mọi a là số dương khác 1.

Chon đáp án (B).

CÂU 19.

Đồ thị như hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào trong các hàm số



🗭 Lời giải.

Hàm số đồng biến do đó a > 1.

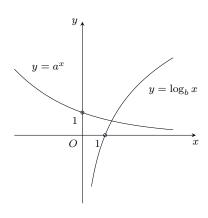
Đồ thị hàm số đi qua điểm (0;1) nên là hàm số mũ $y = \left(\frac{3}{2}\right)^x$.

Chọn đáp án (B).....

CÂU 20.

Cho đồ thị hàm số $y = a^x, y = \log_b x$ (như hình vẽ). Khẳng định nào sau đây đúng?

- (A) 0 < b < 1 < a. (B) 0 < a < 1 < b. (C) a, b > 1.
- $(\mathbf{D}) 0 < a, b < 1.$



Lời giải.

Đồ thị hàm số $y = a^x$ đi xuống nên $y = a^x$ nghịch biến. Suy ra 0 < a < 1.

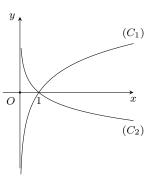
Đồ thị hàm số $y = \log_b x$ đi lên nên $y = \log_b x$ đồng biến. Suy ra b > 1.

Chon đáp án (B)....

CÂU 21.

Cho hai hàm số $y = \log_a x$, $y = \log_b x$ với a, b là hai số thực dương, khác 1 có đồ thị lần lượt là (C_1) , (C_2) như hình vẽ. Khẳng định nào sau đây **sai**?

- (A) 0 < b < a < 1.
- **(B)** a > 1.
- (c) 0 < b < 1 < a.
- **(D)** 0 < b < 1.



Lời giải.

Ta thấy $(C_1): y = \log_a x$ là hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$ suy ra a > 1.

Ta thấy (C_2) : $y = \log_b x$ là hàm số nghịch biến trên $(0; +\infty)$ suy ra 0 < b < 1

Vậy 0 < b < 1 < a. Do đó khẳng định 0 < b < a < 1 sai.

Chọn đáp án (A).....

CÂU 22. Cho a là số thực dương khác 1. Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau.

- (A) Đồ thị hàmg số $y = a^x$ với 0 < a < 1 đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.
- **B**) Hàm số $y = a^x$ với a > 1 nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.
- (**c**) Đồ thị hàm số $y = a^x$ luôn đi qua điểm M(a; 1).
- **D** Đồ thị hàm số $y = a^x$ và đồ thị hàm số $y = \log_a x$ đối xứng nhau qua đường thẳng y = x.

🗭 Lời giải.

Mệnh đề đúng là "Đồ thị hàm số $y = a^x$ và đồ thị hàm số $y = \log_a x$ đối xứng nhau qua đường thẳng y = x". Do nếu $M(m; a^m)$ thuộc đồ thị hàm số $y = a^x$ thì ta luôn suy ra điểm $N(a^m; m)$ thuộc đồ thị hàm số $y = \log_a x$.

Chọn đáp án (D).....

CÂU 23.

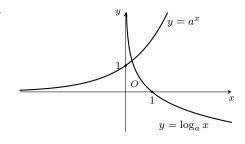
Cho đồ thị hàm số $y=a^x,\,y=\log_b x$ như hình vẽ. Trong các khẳng định sau, đâu là khẳng định đúng?

(A) 0 < b < 1 < a.

B) a > 1, b > 1.

 $(\mathbf{c}) 0 < a < 1 < b.$

 $\bigcirc 0 < a < 1, 0 < b < 1.$



🗩 Lời giải.

Dựa vào đồ thị, ta thấy hàm số $y = a^x$ đồng biến trên \mathbb{R} nên a > 1, hàm số $y = \log_b x$ nghịch biến trên $(0; +\infty)$ nên 0 < b < 1.

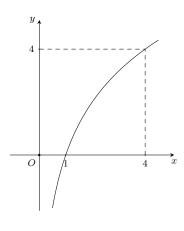
Vây 0 < b < 1 < a.

Chọn đáp án (A).....

CÂU 24.

Hàm số $y = \log_a x \; (0 < a \neq 1)$ có đồ thị là hình bên. Giá trị của cơ số a bằng

- (A) $\sqrt[4]{2}$.
- (\mathbf{B}) 4.
- (c) $\sqrt{2}$.

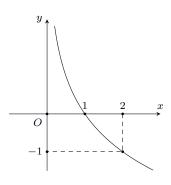


Lời giải.

Từ đồ thị ta thấy, khi x=4 thì y=4. Điều này đúng khi $a=\sqrt{2}$.

Chọn đáp án $\overline{\text{(C)}}$

Đường cong trong hình bên dưới là đồ thị của một trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?



🗭 Lời giải.

Dựa vào hình vẽ suy ra hàm số có dạng $y = \log_a x$ với cơ số a < 1.

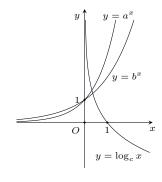
Vậy hàm số thỏa mãn đề bài là $y = \log_{\frac{1}{2}} x$.

Chọn đáp án $\overline{(C)}$

CÂU 26.

Cho đồ thị các hàm số $y=a^x, y=b^x$ và $y=\log_c x$ như hình vẽ. Khẳng định nào sau đây đúng?

- (A) b < a < c. (B) c < b < a. (C) c < a < b. (D) a < b < c.



🗭 Lời giải.

- $oldsymbol{\Theta}$ Vì hàm số $y = \log_c x$ nghịch biến nên suy ra 0 < c < 1; hai hàm số $y = a^x, \ y = b^x$ đồng biến nên a, b > 1.
- \bigcirc Với x = 1, ta có a > b.

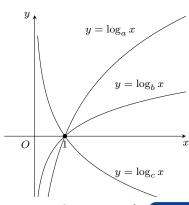
Vậy c < b < a.

CÂU 27.

Cho đồ thị của ba hàm số $y = \log_a x$, $y = \log_b x$, $y = \log_c x$ như hình vē. Khẳng định nào sau đây đúng?

- (A) b > c > a. (B) b > a > c. (C) c > a > b. (D) c > b > a.

Chọn đáp án (B).....



🗭 Lời giải.

Quan sát đồ thi ta thấy

- \odot Cả hai đồ thị của hàm số $y = \log_a x$ và $y = \log_b x$ đều đi lên từ trái sang phải nên a > 1 và b > 1.
- \odot Đồ thị của hàm số $y = \log_c x$ đi xuống từ trái sang phải nên 0 < c < 1.

Chọn đáp án \fbox{B}



Bài toán thực tế

1. Ví dụ mẫu

VÍ DỤ 1. Ta coi năm lấy làm mốc để tính dân số của một vùng (hoặc một quốc gia) là năm 0. Khi đó, dân số của quốc gia đó ở năm thứ t là hàm số theo biến t được cho bởi công thức: $S = A \cdot e^{rt}$. Trong đó A là dân số của vùng (hoặc quốc gia) đó ở năm 0 và r là tỉ lệ tăng dân số hằng năm (Nguồn: Giải tích 12, NXBGD Việt Nam, 2021). Biết rằng dân số Việt Nam năm 2021 ước tính là 98564407 người và tỉ lệ tăng dân số 0,93%/năm (Nguồn: https://danso.org/viet-nam). Giả sử tỉ lệ tăng dân số hằng năm là như nhau tính từ năm 2021, nêu dự đoán dân số Việt Nam năm 2030 (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

Dân số Việt Nam vào năm 2030 là

$$S = A \cdot e^{rt} = 98564407 \cdot e^{0.93\% \cdot 9} \approx 107169341 \text{ (người)}.$$

VÍ DỤ 2. Năm 2020, dân số thế giới là 7,795 tỉ người và tốc độ tăng dân số là 1,05%/năm (nguồn: http://www.worldmeters.info/worpopulation). Nếu tốc độ tăng này tiếp tục duy trì ở những năm tiếp theo thì dân số thế giới sau t năm kể từ năm 2020 được tính bởi công thức

$$P(t) = 7,795 \cdot (1 + 0,0105)^t$$
 (tỉ người). (*)

Khi đó, hãy tính dân số thế giới vào năm 2025 và năm 2030. (Mốc thời điểm để tính dân số của mỗi năm là ngày 1 tháng 7.) \bigcirc Lời giải.

Năm 2025 ứng với t=5 nên có dân số thế giới là

$$P(5) = 7.795 \cdot (1 + 0.0105)^5 \approx 8.213$$
 (tỉ người).

Năm 2030 ứng với t = 10 nên có dân số thế giới là

$$P(10) = 7,795 \cdot (1 + 0,0105)^{10} \approx 8,653$$
 (tỉ người).

Chú ý: Với giả thiết tốc độ tăng dân số 1,05%/năm không đổi, công thức (*) được áp dụng để tính dân số thế giới tại thời điểm bất kì sau năm 2020. Chẳng hạn, dân số thế giới tại thời điểm ngày 1 tháng 1 năm 2022 (ứng với t = 1,5) là

$$P(1,5) = 7,795 \cdot (1 + 0.0105)^{1,5} \approx 7.918$$
 (tỉ người).

VÍ DỤ 3. Trong Vật lí, sự phân rã của các chất phóng xạ được cho bởi công thức: $m(t) = m_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$; trong đó m_0 là khối

lượng chất phóng xạ ban đầu (tại thời điểm t=0), m(t) là khối lượng chất phóng xạ tại thời điểm t và T là chu kì bán rã (Nguồn: Giải tích 12, NXBGD Việt Nam, 2021). Hạt nhân Poloni (Po) là chất phóng xạ α có chu kì bán rã là 138 ngày (Nguồn: Vật lí 12, NXBGD Việt Nam, 2021). Giả sử lúc đầu có 100 gam Poloni. Tính khối lượng Poloni còn lại sau 100 ngày theo đơn vị gam (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

Lời giải.

Khối lượng Poloni còn lại sau 100 ngày là

$$m(100) = 100 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{100}{138}} \approx 60, 5(\text{ g}).$$

VÍ DỤ 4. Lốc xoáy là hiện tượng một luồng không khí xoáy tròn mở rộng ra từ một đám mây dông xuống tới mặt đất. Các cơn lốc xoáy thường có sức tàn phá rất lớn. Tốc độ của gió (đơn vị: dặm/giờ) gần tâm của một cơn lốc xoáy được tính bởi công thức: $S = 93 \log d + 65$, (Nguồn: Ron Larson, Intermediate Algebra, Cengage) trong đó d (đơn vị: dặm) là quãng đường cơn lốc xoáy di chuyển được. Hãy tính tốc độ của gió ở gần tâm (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị) khi cơn lốc xoáy di chuyển được quãng đường là

a) $5 \, \mathrm{d} \mathrm{\ddot{a}} \mathrm{m}$ b) $10 \, \mathrm{d} \mathrm{\ddot{a}} \mathrm{m}$

🗭 Lời giải.

a) Tốc độ của gió ở gần tâm khi cơn lốc xoáy di chuyển được quãng đường 5 dặm là

$$S = 93 \log 5 + 65 \approx 130 \text{ (dặm/giờ)}.$$

b) Tốc độ của gió ở gần tâm khi cơn lốc xoáy di chuyển được quãng đường 10 dặm là

$$S = 93 \log 10 + 65 = 158 \text{ (dặm/giờ)}.$$

VÍ DỤ 5. Trong âm học, mức cường độ âm được tính bới công thức $L = 10 \log \left(\frac{I}{I_0}\right)$ (dB) (dB là đơn vị mức cường độ âm, đọc là đề-xi-ben), trong đó I là cường độ âm tính theo W/m^2 và $I_0 = 10^{-12} \ W/m^2$ là cường độ âm chuẩn (cường độ âm thấp nhất mà tai người bình thường có thể nghe được).

(Nguồn: Vật lí 12, NXB Giáo dục Việt Nam, năm 2017, trang 52,53)

- a) Mức cường độ âm L thấp nhất mà tai người có thể nghe được là bao nhiêu?
- b) Cuộc trò chuyện có cường độ âm 10^{-9} W/m^2 thì có mức cường độ âm bằng bao nhiêu?
- c) Cường độ âm tại một khu văn phòng nằm trong miền từ 10^{-7} W/m² đến $5 \cdot 10^{-6}$ W/m² (tức là $10^{-7} \le I \le 5 \cdot 10^{-6}$). Mức cường độ âm tại khu văn phòng này nằm trong khoảng nào? (Làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

🗭 Lời giải.

a) Khi $I = I_0$ thì $L = 10 \log 1 = 0$ (dB). Vậy mức cường độ âm thấp nhất mà tai người bình thường có thể nghe được là 0 (dB).

b) Khi
$$I = 10^{-9}$$
 W/m², ta có $L = 10 \log \frac{10^{-9}}{10^{-12}} = 10 \log 10^3 = 30 \log 10 = 30$ (dB).

c) Với
$$I = 10^{-7} \text{ W/m}^2$$
, $L = 10 \log \frac{10^{-7}}{10^{-12}} = 10 \log 10^5 = 50 \log 10 = 50 \text{ (dB)}$.

Với
$$I = 5 \cdot 10^{-6} \text{ W/m}^2$$
, $L = 10 \log \frac{5 \cdot 10^{-6}}{10^{-12}} = 10 \log (5 \cdot 10^6) = 10(6 + \log 5) \approx 67 \text{ (dB)}$.

Hàm số $y = \log x$ đồng biến nên hàm số $y = 10 \log x$ cũng đồng biến.

Do đó, từ $10^{-7} \le I \le 5 \cdot 10^{-6}$ suy ra $50 \le L \le 67$.

Vậy mức cường độ âm tại khu văn phòng nằm trong khoảng từ 50 (dB) đến 67 (dB).

2. Bài tập rèn luyện

BÀI 1. Giả sử một chất phóng xạ bị phân rã theo cách sao cho khối lượng m(t) của chất còn lại (tính bằng kilôgam) sau t ngày được cho bởi hàm số $m(t) = 13e^{-0.0015t}$.

- a) Tìm khối lượng của chất đó tại thời điểm t=0.
- b) Sau 45 ngày khối lượng chất đó còn lại là bao nhiêu?

🗭 Lời giải.

- a) $m(0) = 13e^0 = 13$ (kilôgam).
- b) $m(45) = 13e^{-0.015 \cdot 45} \approx 6.62$ (kilôgam).

BÀl 2. Các nhà tâm lí học sử dụng mô hình hàm số mũ để mô phỏng quá trình học tập của một học sinh như sau: $f(t) = c \left(1 - e^{-kt}\right)$, trong đó c là tổng số đơn vị kiến thức học sinh phải học, k (kiến thức/ngày) là tốc độ tiếp thu của học sinh, t (ngày) là thời gian học và f(t) là số đơn vị kiến thức học sinh đã học được (Nguồn: R.I. Charles et al., Algebra 2, Pearson). Giả sử một em học sinh phải tiếp thu 25 đơn vị kiến thức mới. Biết rằng tốc độ tiếp thu của em học sinh là k = 0,2. Hỏi em học sinh sẽ nhớ được (khoảng) bao nhiều đơn vị kiến thức mới sau 2 ngày? Sau 8 ngày?

🗭 Lời giải.

Số đơn vị kiến thức mới em học sinh sẽ nhớ sau 2 ngày là

$$f(2) = 25 (1 - e^{-0.2 \cdot 2}) \approx 8.24$$
 (đơn vị).

Số đơn vị kiến thức mới em học sinh sẽ nhớ sau 8 ngày là

$$f(8) = 25 (1 - e^{-0.2 \cdot 8}) \approx 19.95$$
 (đơn vị).

BÀI 3. Chỉ số hay độ pH của một dung dịch được tính theo công thức: pH = $-\log [H^+]$. Phân tích nồng độ ion hydrogen $[H^+]$ trong hai mẫu nước sông, ta có kết quả sau: Mẫu 1: $[H^+] = 8 \cdot 10^{-7}$; Mẫu 2: $[H^+] = 2 \cdot 10^{-9}$. Không dùng máy tính cầm tay, hãy so sánh độ pH của hai mẫu nước trên.

🗭 Lời giải.

Hàm số pH = $-\log{\rm [H^+]}$ có a=10>1 nên nghịch biến trên $(0;+\infty)$. Vì $8\cdot 10^{-7}>2\cdot 10^{-9}$ nên độ pH của mẫu 1 bé hơn độ pH của mẫu 2.

BÀI 4. Cường độ ánh sáng I dưới mặt biển giảm dần theo độ sâu theo công thức $I = I_0 \cdot a^d$, trong đó I_0 là cường độ ánh sáng tại mặt nước biển, a > 0 là hằng số và d là độ sâu tính bằng mét tính từ mặt nước biển.

(Nguồn: http://www.britannica.com/science/seawer/Optical-properties)

- a) Có thể khẳng định rằng 0 < a < 1 không? Giải thích.
- b) Biết rằng cường độ ánh sáng tại độ sâu 1m bằng $0.95I_0$. Tìm giá trị của a.
- c) Tại độ sâu 20m, cường độ ánh sáng bằng bao nhiêu phần trăm so với I_0 ? (Làm tròn kết quả đến hàng đơn vị.)

🗭 Lời giải.

- a) Do I_0 là cường độ ánh sáng tại mặt nước biển là không đổi, nên cường độ ánh sáng I tỉ lệ thuận với hàm số a^d . Do I giảm dần theo độ sâu, nên hàm số a^d nghịch biến, suy ra 0 < a < 1.
- b) Tại độ sâu 1m, ta có cường độ ánh sáng $I=0.95I_0$, suy ra $0.95I_0=I_0a^1\Leftrightarrow a=0.95$.
- c) Tại độ sâu 20m, suy ra d=20. Cường độ ánh sáng tại đó là $I=I_0a^d=I_0\cdot 0.95^{20}\approx 0.4I_0$. Vây tại đô sâu 20m, cường đô ánh sáng tại đó bằng khoảng 40% so với I_0 .

BÀI 5. Một người gửi 10 triệu đồng vào ngân hàng theo hình thức lãi kép có kì hạn là 12 tháng vối lãi suất 6%/năm. Giả sử qua các năm thì lãi suất không thay đổi và người đó không gửi thêm tiền vào mỗi năm. Để biết sau y (năm) thì tổng số tiền cả vốn và lãi có được là x (đồng), người đó sử dụng công thức $y = \log_{1,06} \left(\frac{x}{10}\right)$. Hỏi sau bao nhiêu năm thì người đó có được tổng số tiền cả vốn và lãi là 15 triệu đồng? 20 triệu đồng? (Làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

🗭 Lời giải.

Người đó có được tổng số tiền cả vốn lẫn lãi là 15 triệu đồng sau

$$y = \log_{1,06} \left(\frac{15}{10} \right) \approx 7 \text{ (năm)}.$$

Người đó có được tổng số tiền cả vốn lẫn lãi là 20 triệu đồng sau

$$y = \log_{1,06} \left(\frac{20}{10}\right) \approx 12 \text{ (năm)}.$$

BÀI 6. Trong một nghiên cứu, một nhóm học sinh được cho xem cùng một danh sách các loài động vật và được kiểm tra lại xem họ còn nhớ bao nhiêu phần trăm danh sách đó sau mỗi tháng. Giả sử sau t tháng, khả năng nhớ trung bình của nhóm học sinh đó được tính theo công thức $M(t) = 75 - 20 \ln(t+1), \ 0 \le t \le 12$ (đơn vị: %). Hãy tính khả năng nhớ trung bình của nhóm học sinh đó sau 6 tháng.

🗭 Lời giải.

Khả năng nhớ trung bình của nhóm học sinh đó sau 6 tháng là

$$M(6) = 75 - 20 \ln(6+1) \approx 36.1\%.$$

BÀI 7. Cường độ ánh sáng I dưới mặt biển giảm dần theo độ sâu theo công thức $I = I_0 \cdot a^d$, trong đó I_0 là cường độ ánh sáng tại mặt nước biển, a > 0 là hằng số và d là độ sâu tính bằng mét tính từ mặt nước biển.

(Nguồn: http://www.britannica.com/science/seawer/Optical-properties)

- a) Có thể khẳng định rằng 0 < a < 1 không? Giải thích.
- b) Biết rằng cường độ ánh sáng tại độ sâu 1m bằng $0.95I_0$. Tìm giá trị của a.
- c) Tại độ sâu 20m, cường độ ánh sáng bằng bao nhiêu phần trăm so với I_0 ? (Làm tròn kết quả đến hàng đơn vị.)

Lời giải.

- a) Do I_0 là cường độ ánh sáng tại mặt nước biển là không đổi, nên cường độ ánh sáng I tỉ lệ thuận với hàm số a^d . Do I giảm dần theo độ sâu, nên hàm số a^d nghịch biến, suy ra 0 < a < 1.
- b) Tại độ sâu 1m, ta có cường độ ánh sáng $I=0.95I_0$, suy ra $0.95I_0=I_0a^1\Leftrightarrow a=0.95$.

c) Tại độ sâu 20m, suy ra d=20. Cường độ ánh sáng tại đó là $I=I_0a^d=I_0\cdot 0.95^{20}\approx 0.4I_0$. Vậy tại độ sâu 20m, cường độ ánh sáng tại đó bằng khoảng 40% so với I_0 .

BÀI 8. Công thức $h = -19,4 \cdot \log \frac{P}{P_0}$ là mô hình đơn giản cho phép tính độ cao h so với mặt nước biển của một vị trí trong không trung (tính bằng ki-lô-mét) theo áp suất không khí P tại điểm đó và áp suất P_0 của không khí tại mặt nước biển (cùng tính bằng Pa - đơn vị áp suất, đọc là Pascal).

(Nguồn: http://doi.org/10.1007/s40828-020-0111-6)

- a) Nếu áp suất không khí ngoài máy bay bằng $\frac{1}{2}P_0$ thì máy bay đang ở độ cao nào?
- b) Áp suất không khí tại đỉnh của ngọn núi A bằng $\frac{4}{5}$ lần áp suất không khí tại đỉnh của ngọn núi B. Ngọn núi nào cao hơn và cao hơn bao nhiêu ki-lô-mét? (Làm tròn kết quả đến hàng phần mười.)

🗭 Lời giải.

a) Nếu áp suất ở ngoài máy bay là $\frac{1}{2}P_0$ thì độ cao của máy bay là

$$h = -19.4 \cdot \log \frac{\frac{1}{2}P_0}{P_0} = -19.4 \cdot \log \frac{1}{2} \approx 5.8 \text{km}.$$

b) Gọi áp suất lần lượt của hai ngọn núi A và B là P_A, P_B . Ta có $P_A = \frac{4}{5}P_B$.

Độ cao của núi A và núi B là
$$\begin{cases} h_A = -19.4 \cdot \log \frac{P_A}{P_0} \\ h_B = -19.4 \cdot \log \frac{P_B}{P_0}. \end{cases}$$

Ta có

$$\begin{array}{rcl} h_A & = & -19.4 \cdot \log \frac{P_A}{P_0} = -19.4 \cdot \log \frac{\frac{4}{5}P_B}{P_0} \\ & = & -19.4 \cdot \left(\log \frac{4}{5} + \log \frac{P_B}{P_0}\right) = -19.4 \cdot \log \frac{4}{5} + h_B \approx h_B + 1.9. \end{array}$$

Vậy núi A cao hơn núi B 1,9km.

3. Bài tập trắc nghiệm

CÂU 1. Một quần thể vi khuẩn bắt đầu từ 100 cá thể và cứ sau 3 giờ thì số cá thể lại tăng gấp đôi. Bởi vậy số cá thể vi khuẩn được biểu thị theo thời gian t (đơn vị giờ) bằng công thức $N(t) = 100 \cdot 2^{\frac{t}{3}}$. Hỏi sau bao lâu thì quần thể này đạt tới 50000 cá thể (làm tròn đến hàng phần mười)?

(A) 36,8 giờ.

B) 30,2 giờ.

c 26,9 giờ.

(**D**) 18,6 giờ.

🗭 Lời giải.

Ta có $100 \cdot 2^{\frac{t}{3}} = 50000 \Leftrightarrow 2^{\frac{t}{3}} = 500 \Leftrightarrow t = 3 \cdot \log_2 500 \Rightarrow t \approx 26,9.$

CÂU 2. Năm 2020, một doanh nghiệp X có tổng doanh thu là 150 tỉ đồng. Dự kiến trong 10 năm tiếp theo, tổng doanh thu mỗi năm sẽ tăng thêm 12% so với năm liền trước. Theo dự kiến đó thì kể từ năm nào, tổng doanh thu của doanh nghiệp X vượt quá 360 tỉ đồng?

(A) 2026.

B) 2027.

C) 2028.

D 2029.

D Lời giải.

Do mỗi năm doanh thu tăng thêm 12% nên tổng doanh thu sau n năm là $P_n = P(1+r)^n$, trong đó P là số doanh thu ban đầu, r là số phần trăm tăng thêm hằng năm.

Theo đề bài ta có

$$P(1+r)^n > 360 \Leftrightarrow 150(1+12\%)^n > 360 \Leftrightarrow n > \log_{1.12} 2, 4 \approx 7,73.$$

Vậy kể từ năm 2028, tổng doanh thu của doanh nghiệp X vượt quá 360 tỉ đồng. Chon đáp án \bigcirc

CÂU 3. Một người gửi tiền vào ngân hàng với lãi suất không thay đổi là 6%/ năm. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm, số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn ban đầu (người ta gọi là lãi kép). Người đó định gửi tiền trong vòng 3 năm, sau đó rút ra 500 triệu đồng. Hỏi số tiền ít nhất người đó phải gửi trong ngân hàng (làm tròn đến hàng triệu) là bao nhiêu triệu đồng?

A 420.

B) 410.

(c) 400.

D 390.

🗭 Lời giải.

Goi A là số tiền ban đầu cần gửi, $r=0{,}06$ là lãi suất hàng năm.

Sau 3 năm, số tiền cả gốc lẫn lãi của người đó là $S = A(1+r)^3$.

Ta có $S \ge 500 \Leftrightarrow A(1+r)^3 \ge 500 \Leftrightarrow A \ge \frac{500}{(1+r)^3} = \frac{500}{1,06^3} \approx 420$ triệu.

Chọn đáp án (A)

CÂU 4. Ông Hùng dự định gửi vào ngân hàng một số tiền với lãi suất 6,5% một năm. Biết rằng cứ sau mỗi năm số tiền lãi sẽ gộp vào vốn ban đầu. Số tiền x (triệu đồng, $x \in \mathbb{N}$) nhỏ nhất mà ông Hùng cần gửi vào ngân hàng để sau ba năm (mới rút lãi) thì số tiền lãi có thể mua một chiếc xe máy trị giá 60 triệu đồng là

A 280.

B) 289.

© 300.

D 308.

🗭 Lời giải.

Số tiền thu được sau ba năm (cả tiền lãi và tiền gốc) là $x(1+6.5\%)^3$.

Ta có $x(1+6.5\%)^3 - x = 60 \Rightarrow x \approx 289$ triệu đồng.

Chọn đáp án (B).

CÂU 5. Ông X gửi vào ngân hàng 60 triệu đồng theo hình thức lãi kép. Lãi suất ngân hàng là 8% trên năm. Sau 5 năm ông X tiếp tục gửi thêm 60 triệu đồng nữa. Hỏi sau 10 năm kể từ lần gửi đầu tiên ông X đến rút toàn bộ tiền gốc và tiền lãi được là bao nhiêu? (Biết lãi suất không thay đổi qua các năm ông X gửi tiền).

A 217,695 (triệu đồng).

B 231,815 (triệu đồng).

c 190,271 (triệu đồng).

D 197,201 (triệu đồng).

Dùi giải.

Công thức tính tiền gốc lẫn lãi của hình thức gửi ngân hàng theo lãi kép là $T_n = A(1+r)^n$, trong đó A là số tiền gửi ban đầu, r là lãi suất hàng năm, n là số năm gửi.

Vậy tổng số tiền ông X nhận được là

$$60 \cdot (1 + 0.08)^{10} + 60 \cdot (1 + 0.08)^5 \approx 217,695$$
 (triệu đồng).

Chọn đáp án ${\color{red} {\Bbb A}}$

CÂU 6. Năm 2000 và năm 2020, giá xăng trung bình ở Việt Nam lần lượt là 5000 VNĐ/ 1 lít và 15000 VNĐ/ 1 lít. Giả sử r% là tỷ lệ tăng giá xăng trung bình hàng năm trong giai đoạn từ năm 2000 đến năm 2020 ở Việt Nam. Hỏi r% bằng bao nhiêu?

A 5,46%.

6%. **B** 5%.

(c) 4,56%.

D 5,64%.

🗭 Lời giải.

Từ năm 2000 đến năm 2020 có tổng thời gian là 20 năm.

Theo đề bài ta có phương trình

$$15000 = 5000(1+r)^{20} \Leftrightarrow (1+r)^{20} = 3 \Leftrightarrow 1+r = \sqrt[20]{3} \Leftrightarrow r = \sqrt[20]{3} - 1 \approx 5.64\%.$$

Chon đáp án (D)

CÂU 7. Số lượng của loại vi khuẩn A trong một phòng thí nghiệm được tính theo công thức $S(t) = S(0) \cdot 2^t$, trong đó S(0) là số lượng vi khuẩn A lúc ban đầu, S(t) là số lượng vi khuẩn A sau t phút. Biết sau 4 phút thì số lượng vi khuẩn A trong phòng thí nghiệm là 250 nghìn con. Hỏi sao bao lâu, kể từ lúc ban đầu, số lượng vi khuẩn A trong phòng thì nghiệm là 1 triêu con?

(A) 6 phút.

B 64 phút.

c 16 phút.

(D) 8 phút.

Lời giải.

Sau 4 phút, số lượng vi khuẩn A trong phòng thí nghiệm là 250 nghìn con, suy ra

$$250000 = S(0) \cdot 2^4 \Rightarrow S(0) = 15625.$$

Số lượng vi khuẩn A trong phòng thì nghiệm là 1 triệu con, suy ra

$$1000000 = 15625 \cdot 2^t \Rightarrow t = 6.$$

Vậy sau 6 phút, kể từ lúc ban đầu, số lượng vi khuẩn A trong phòng thì nghiệm là 1 triệu con.

Chon đáp án A.....

CÂU 8. Một người gửi tiết kiệm vào ngân hàng với lãi suất 7.5%/năm. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm số tiền lãi được nhập vào số tiền vốn để tính lãi cho năm tiếp theo. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu năm nữa thì số tiền người đó thu được (cả số tiền gửi ban đầu và số tiền lãi) gấp đôi số tiền đã gửi ban đầu? Giả định trong khoảng thời gian này lãi suất không thay đổi và người đó không rút tiền ra.

A 9 năm.

B) 10 năm.

(c) 12 năm.

D 11 năm.

Gọi A là số tiền gửi vào ban đầu (A>0); n là thời gian gửi (n>0). Số tiền người đó nhận được sau n năm là $A\cdot 1,075^n$ đồng. Theo yêu cầu đề bài ta có

 $A \cdot 1,075^n = 2A \Leftrightarrow 1,075^n = 2 \Leftrightarrow n = \log_{1.075} 2 \approx 9,58.$

Vậy sau ít nhất 10 năm nữa thì số tiền người đó thu được sẽ gấp đôi số tiền đã gửi ban đầu. Chọn đáp án \fbox{B}

Bài 21. PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ VÀ LÔGARIT

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Phương trình mũ

- ❷ Phương trình mũ là phương trình có chứa ẩn ở số mũ của lũy thừa.
- \odot Phương trình mũ cơ bản ẩn x có dạng $a^x = b$ $(a > 0, a \neq 1)$.
 - Nếu $b \le 0$ thì phương trình vô nghiệm.
 - Nếu b>0 thì phương trình có nghiệm duy nhất $x=\log_a b.$

7 NHẬN XÉT.

- $igodellar{\Theta}$ Với $a>0, a\neq 1, b>0$ thì $a^{f(x)}=b \Leftrightarrow f(x)=\log_a b.$
- $m{\odot}$ Với $a>0, a \neq 1$ thì $a^{f(x)}=a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x)=g(x)$. Cách giải phương trình mũ như trên thường được gọi là phương pháp **đưa về cùng cơ số**.

2. Phương trình lôgarit

- ❷ Phương trình lôgarit là phương trình có chứa ẩn trong biểu thức dưới dấu lôgarit.
- $\ensuremath{ \bigodot}$ Phương trình lôgarit cơ bản có dạng $\log_a x = b \ (a>1, a\neq 1).$ Phương trình đó có một nghiệm là $x=a^b.$

7 NHẬN XÉT.

- Θ Với $a > 0, a \neq 1$ thì $\log_a f(x) = b \Leftrightarrow f(x) = a^b$.
- **O** Cho $a > 0, a \neq 1$. Ta có: $\log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ f(x) = g(x). \end{cases}$

3. Bất phương trình mũ

- ❷ Bất phương trình mũ là bất phương trình có chứa ẩn ở số mũ của lũy thừa.
- ❷ Bất phương trình mũ cơ bản là bất phương trình có một trong những dạng sau:

$$a^x > b; a^x < b; a^x \ge b; a^x \le b \ (a > 0, a \ne 1).$$

- \odot Xét bất phương trình mũ: $a^x > b$ $(a > 0, a \neq 1)$.
 - Nếu $b \leq 0$, tập nghiệm của bất phương trình đã cho là \mathbb{R} (vì $a^x > 0 \geq b, \forall x \in \mathbb{R}$).
 - Nếu b > 0 thì bất phương trình tương đương với $a^x > a^{\log_a b}$. Với a > 1, nghiệm của bất phương trình là $x > \log_a b$. Với 0 < a < 1, nghiệm của bất phương trình là $x < \log_a b$.
- / NHẬN XÉT. Các bất phương trình mũ cơ bản còn lại được giải tương tự.

4. Bất phương trình lôgarit

- ❷ Bất phương trình lôgarit là bất phương trình có chứa ẩn trong biểu thức dưới dấu lôgarit
- ② Bất phương trình lôgarit cơ bản là bất phương trình lôgarit có một trong các dạng sau:

$$\log_a x > b; \log_a x < b; \log_a x \ge b; \log_a x \le b (a > 0, a \ne 1).$$

- \odot Xét bất phương trình $\log_a x > b \ (a > 0, a \neq 1)$. Bất phương trình tương đương với $\log_a x > \log_a a^b$.
 - Với a > 1, nghiệm của bất phương trình là $x > a^b$.
 - Với 0 < a < 1, nghiệm của bất phương trình là $0 < x < a^b$.
- NHẬN XÉT. Các bất phương trình lôgarit cơ bản còn lại được giải tương tự.

B. CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

10

Phương trình mũ, lôgarit cơ bản

Sử dụng các công thức

1. Ví dụ mẫu

VÍ DỤ 1. Tìm điều kiện xác định của các phương trình sau

a)
$$\log_2(2x - 1) = 3$$
.

b)
$$\log_3(-x^2 + 2x) = -1$$
.

🗭 Lời giải.

a) Điều kiện
$$2x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}$$
.

b) Điều kiện
$$-x^2 + 2x > 0 \Leftrightarrow 0 < x < 2$$
.

VÍ DỤ 2. Giải mỗi phương trình sau:

a)
$$4^{2x-3} = 5$$
;

b)
$$10^{x+1} - 2 \cdot 10^x = 8$$
.

🗭 Lời giải.

Ta có

a)
$$4^{2x-3} = 5 \Leftrightarrow 2x - 3 = \log_4 5 \Leftrightarrow 2x = 3 + \log_4 5 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} (3 + \log_4 5)$$
.

Vậy phương trình có nghiệm là $x = \frac{1}{2} (3 + \log_4 5)$.

b)
$$10^{x+1} - 2 \cdot 10^x = 8 \Leftrightarrow 10 \cdot 10^x - 2 \cdot 10^x = 8 \Leftrightarrow 8 \cdot 10^x = 8 \Leftrightarrow 10^x = 1 \Leftrightarrow x = \log 1 \Leftrightarrow x = 0$$
. Vậy phương trình có nghiệm là $x = 0$.

VÍ DU 3. Giải phương trình $10^{x-1} = 2022$.

🗭 Lời giải.

Lấy lôgarit thập phân hai vế của phương trình ta được $x-1=\log 2022$ hay $x=1+\log 2022$ Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=1+\log 2022$.

VÍ DU 4. Giải các phương trình sau

a)
$$2^x = \frac{1}{8}$$
.

b)
$$5 \cdot 10^x = 1$$
.

c)
$$3^{x+2} = \sqrt[3]{9}$$
.

d)
$$2 \cdot 10^{2x} = 30$$
.

🗭 Lời giải.

a)
$$2^x = \frac{1}{8} \Leftrightarrow 2^x = 2^{-3} \Leftrightarrow x = -3.$$

b)
$$5 \cdot 10^x = 1 \Leftrightarrow 10^x = \frac{1}{5} \Leftrightarrow x = \log \frac{1}{5} = -\log 5.$$

c)
$$3^{x+2} = \sqrt[3]{9} \Leftrightarrow x + 2 = \frac{2}{3} \Leftrightarrow x = -\frac{4}{3}$$
.

d)
$$2 \cdot 10^{2x} = 30 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \log_{10} 15$$
.

VÍ DỤ 5. Giải mỗi phương trình sau:

a)
$$\log_2 x = 5;$$

b)
$$\log_4(5x - 4) = 2$$
.

🗭 Lời giải.

a) Ta có $\log_2 x = 5 \Leftrightarrow x = 2^5 \Leftrightarrow x = 32$. Vậy phương trình có nghiệm là x = 32. b) Ta có $\log_4(5x-4) = 2 \Leftrightarrow 5x-4 = 4^2 \Leftrightarrow 5x = 20 \Leftrightarrow x = 4$. Vây phương trình có nghiệm là x = 4.

VÍ DU 6. Giải phương trình $4 + 3\log(2x) = 16$.

Lời giải.

Điều kiện 2x > 0 hay x > 0.

Phương trình trở thành $\log(2x) = 4$.

Từ đó $2x = 10^4$ hay x = 5000 (thỏa mãn điều kiện).

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là x = 5000.

VÍ Dụ 7. Giải các phương trình sau

a)
$$\log_3 x = -2$$
.

b)
$$\log_{\frac{1}{2}}(x-2) = -2$$
.

Lời giải.

a) Điều kiện:
$$x>0$$
.
$$\log_3 x = -2 \Leftrightarrow x = 3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}.$$

b) Điều kiện:
$$x>2$$
.
$$\log_{\frac{1}{2}}(x-2)=-2 \Leftrightarrow x-2=4 \Leftrightarrow x=6.$$

2. Bài tập rèn luyện

BÀI 1. Tìm điều kiện xác định của các phương trình sau

a)
$$\log_5(3-4x)=2$$
.

b)
$$\log(x^2 - 2x - 3) = 3$$
.

🗭 Lời giải.

a) Điều kiện
$$3-4x>0 \Leftrightarrow x<\frac{3}{4}$$

b) Điều kiện
$$x^2 - 2x - 3 > 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x > 3 \\ x < -1 \end{bmatrix}$$
.

BÀI 2. Giải các phương trình sau

a)
$$(0,3)^{x-3} = 1$$
.

b)
$$3^{x-1} = 27$$
.

c)
$$5^{3x-2} = 25$$
.

d)
$$3^{x+2} = 7$$
.

e)
$$3 \cdot 10^{2x+1} = 5$$
.

f)
$$10^{1-2x} = 100000$$
.

🗭 Lời giải.

a) Ta có
$$(0,3)^{x-3}=1 \Leftrightarrow x-3=\log_{0,3}1 \Leftrightarrow x-3=0 \Leftrightarrow x=3$$
. Vây phương trình có nghiệm là $x=3$.

b) Ta có
$$3^{x-1} = 27 \Leftrightarrow 3^{x-1} = 3^3 \Leftrightarrow x - 1 = 3 \Leftrightarrow x = 4$$
.

Vây phương trình có nghiệm là x = 4.

c) Ta có
$$5^{3x-2}=25 \Leftrightarrow 3x-2=\log_5 25 \Leftrightarrow 3x-2=2 \Leftrightarrow 3x=4 \Leftrightarrow x=\frac{4}{3}.$$
 Vậy phương trình có nghiệm là $x=\frac{4}{3}.$

d)
$$3^{x+2} = 7 \Leftrightarrow x+2 = \log_3 7 \Leftrightarrow x = \log_3 7 - 2$$
.
Vậy phương trình có nghiệm là $x = \log_3 7 - 2$.

e)
$$3 \cdot 10^{2x+1} = 5 \Leftrightarrow 2x + 1 = \log \frac{5}{3} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \left(\log \frac{5}{3} - 1\right)$$
.

Vậy phương trình có nghiệm là $x = \frac{1}{2} \left(\log \frac{5}{2} - 1 \right)$.

f)
$$10^{1-2x} = 100000 \Leftrightarrow 10^{1-2x} = 10^5 \Leftrightarrow 1-2x=5 \Leftrightarrow x=-2$$
. Vậy phương trình có nghiệm là $x=-2$.

BAI 3. Giải các phương trình sau

a) $\log(x+1) = 2$.

b) $\log_6(4x+4) = 2$.

c) $\log_{\frac{1}{2}}(x+1) = -3$.

d) $\log_3 x + \log_3(x-2) = 1$.

🗭 Lời giải.

- a) Ta có $\log(x+1) = 2 \Leftrightarrow x+1 = 10^2 \Leftrightarrow x = 99$. Vậy phương trình có nghiệm là x = 99.
- b) Ta có $\log_6(4x+4)=2 \Leftrightarrow 4x+4=6^2 \Leftrightarrow x=8$. Vậy phương trình có nghiệm là x=8.
- c) Ta có $\log_{\frac{1}{2}}(x+1) = -3 \Leftrightarrow x+1 = \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} \Leftrightarrow x+1 = 8 \Leftrightarrow x = 7.$ Vây phương trình có nghiệm là x = 7.
- d) Điều kiện x > 2.

Ta có $\log_3 x + \log_3(x-2) = 1 \Leftrightarrow \log_3 \left[x(x-2) \right] = 1 \Leftrightarrow x^2 - 2x = 3 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = -1 \text{ (loại)} \\ x = 3 \text{ (thỏa mãn)}. \end{bmatrix}$

Vậy phương trình có nghiệm là x = 3.

3. Bài tập trắc nghiệm

CÂU 1. Điều kiện xác định của phương trình $\log_3(x-2)=1$ là

 $\bigcirc X = 2.$

 $(\mathbf{c})x > 2$

 $\bigcirc x > 5.$

CÂU 2. Điều kiện xác định của phương trình $\ln \frac{1-x}{x+1} = 3$ là

 \bigcirc x < 1.

- \bigcirc $x \neq -1$.
- $(\mathbf{c}) x < -1 \text{ hoặc } x > 1.$
- $(\mathbf{D}) 1 < x < 1.$

CÂU 3. Tìm nghiệm của phương trình $3^{x-1} = 27$.

A x = 9.

 $\bigcirc \mathbf{B} x = 3.$

 $(\mathbf{c})x = 4.$

(D) x = 10.

🗭 Lời giải.

Ta có

$$3^{x-1} = 27 \Leftrightarrow 3^{x-1} = 3^3 \Leftrightarrow x - 1 = 3 \Leftrightarrow x = 4.$$

Chọn đáp án \bigcirc

CÂU 4. Tập nghiệm của phương trình $3^{2x^2-x}=3$ là

 $igate \{0; 2\}.$

- **B** $\left\{0; \frac{1}{2}\right\}$.
- (c) $\left\{-1; \frac{1}{2}\right\}.$
- $\left\{-\frac{1}{2};1\right\}.$

🗭 Lời giải.

Ta có $3^{2x^2-x} = 3 \Leftrightarrow 2x^2 - x = 1 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = 1 \\ x = -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

CÂU 5. Tập nghiệm của phương trình $\log_2(x^2-1)=3$ là

- $(A) \{-3; 3\}.$
- **(B)** $\{-3\}$.

(c) {3}.

🗭 Lời giải.

Ta có $\log_2(x^2 - 1) = 3 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 2^3 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = 3 \\ x = -3 \end{bmatrix}$

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $\{-3, 3\}$.

Chọn đáp án (A).....

CÂU 6. Tập nghiệm của phương trình $\log(10x) = 2$ là

 $\left\{\frac{1}{10}\right\}$.

B {10}.

 \bigcirc {1}.

D {100}.

Lời giải.

Ta có $\log(10x) = 2 \Leftrightarrow 10x = 10^2 \Leftrightarrow x = 10$.

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm {10}.

Chọn đáp án B.

CÂU 7. Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $2^{x^2-3x+2}=1$. Tính $P=x_1^2+x_2^2$.

- (A) P = 10.
- **(B)** P = 8.

(c) P = 5.

 $(\mathbf{D}) P = 13.$

🗭 Lời giải.

Ta có
$$2^{x^2-3x+2} = 1 \Leftrightarrow x^2 + 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = -1 \\ x = -2 \end{bmatrix} \Rightarrow P = x_1^2 + x_2^2 = 5.$$

Chon đáp án (C)...

CÂU 8. Tìm tập nghiệm S của phương trình $\log_2(x-1) + \log_2(x+1) = 3$.

$$(A)$$
 $S = \{-3; 3\}.$

B
$$S = \{4\}.$$

$$\mathbf{C} S = \{3\}.$$

🗭 Lời giải.

Từ điều kiện x > 1 ta loại được các phương án $S = \{-3, 3\}$ và $S = \{-\sqrt{10}, \sqrt{10}\}$. Thay x = 4 vào phương trình không thỏa mãn nên loại phương án $S = \{4\}$.

Chọn đáp án (C).....

CÂU 9. Phương trình
$$2^x + 2^{x-1} + 2^{x-2} = 3^x - 3^{x-1} + 3^{x-2}$$
 có nghiệm **(B)** $x = 5$.

$$\mathbf{C}$$
 $x=4$.

$$\bigcirc$$
 $x=3.$

🗭 Lời giải.

Ta có
$$2^x + 2^{x-1} + 2^{x-2} = 3^x - 3^{x-1} + 3^{x-2} \Leftrightarrow 2^x + \frac{1}{2} \cdot 2^x + \frac{1}{4} \cdot 2^x = 3^x - \frac{1}{3} \cdot 3^x + \frac{1}{9} \cdot 3^x$$

$$\Leftrightarrow \frac{7}{4} \cdot 2^x = \frac{7}{9} \cdot 3^x$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{4}{9} \Leftrightarrow x = 2.$$

Vậy phương trình có nghiệm là x=2.

Chọn đáp án (B).....

CÂU 10. Biết rằng phương trình $\log_2 x + \log_3 x = 1 + \log_2 x \log_3 x$ có hai nghiệm x_1, x_2 . Giá trị của $x_1^2 + x_2^2$ bằng

Lời giải.

Ta có phương trình tương đương

$$\begin{split} \log_2 x \left(1 - \log_3 x\right) - \left(1 - \log_3 x\right) &= 0 &\Leftrightarrow & \left(\log_2 x - 1\right) \cdot \left(1 - \log_3 x\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow & \begin{bmatrix} \log_2 x = 1 \\ \log_3 x = 1 \end{bmatrix} \\ &\Leftrightarrow & \begin{bmatrix} x_1 = 2 \\ x_2 = 3. \end{bmatrix} \end{split}$$

Vậy $x_1^2 + x_2^2 = 13$.

CÂU 11. Tổng tất cả các nghiệm của phương trình $2^{x^2-2x-1} \cdot 3^{x^2-2x} = 18$ bằng

(A) 1.

$$\bigcirc$$
 -1.

🗭 Lời giải.

Ta có $2^{x^2-2x-1} \cdot 3^{x^2-2x} = 18 \Leftrightarrow 2^{x^2-2x} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3^{x^2-2x} = 18 \Leftrightarrow 6^{x^2-2x} = 36 \Leftrightarrow x^2-2x = 2 \Leftrightarrow x = 1 \pm \sqrt{3}$.

Tổng các nghiệm của phương trình là $(1+\sqrt{3})+(1-\sqrt{3})=2$.

Chon đáp án (C).....

CÂU 12. Tổng tất cả các nghiệm của phương trình $\log_2 \left| x^2 + 2x - 3 \right| - \log_2 |x+3| = 3$ bằng

(A) 9.

$$\bigcirc$$
 -2 .

$$(c)$$
 -4.

Lời giải.

Điều kiên $x \neq -3$ và $x \neq 1$. Khi đó phương trình đã cho tương đương với

$$\log_2 \left| \frac{x^2 + 2x - 3}{x + 3} \right| = 3 \Leftrightarrow \log_2 |x - 1| = 3 \Leftrightarrow |x - 1| = 9 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = 10 \\ x = -8 \end{bmatrix}$$
 (thỏa mãn).

Vây, tổng các nghiệm của phương trình đã cho bằng 2.

Chon đáp án (D).....

Bất phương trình mũ, lôgarít cơ bản

Xét bất phương trình mũ: $a^x > b$ $(a > 0, a \neq 1)$.

- Nếu b < 0, tập nghiệm của bất phương trình đã cho là \mathbb{R} (vì $a^x > 0 \ge b, \forall x \in \mathbb{R}$).
- Nếu b>0 thì bất phương trình tương đương với $a^x>a^{\log_a^b}$. Với a > 1, nghiệm của bất phương trình là $x > \log_a b$.

Với 0 < a < 1, nghiệm của bất phương trình là $x < \log_a b$.

Bất phương trình tương đương với $\log_a x > \log_a a^b.$

- Với a > 1, nghiệm của bất phương trình là $x > a^b$.
- Với 0 < a < 1, nghiệm của bất phương trình là $0 < x < a^b$.

1. Ví dụ mẫu

VÍ DỤ 1. Giải mỗi bất phương trình sau:

a)
$$5^x > 12$$
;

b)
$$(0,3)^{x+1} > 1,7$$
.

🗭 Lời giải.

Ta có:

- a) $5^x > 12 \Leftrightarrow x > \log_5 12$. Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $(\log_5 12; +\infty)$.
- b) $(0,3)^{x+1} > 1,7 \Leftrightarrow x+1 < \log_{0,3} 1,7 \Leftrightarrow x < -1 + \log_{0,3} 1,7$. Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $(-\infty; -1 + \log_{0,3} 1,7)$.

VÍ DỤ 2. Giải bất phương trình $16^x > \frac{1}{8}$.

🗭 Lời giải.

Ta có $16^x > \frac{1}{8} \Leftrightarrow 2^{4x} > 2^{-3} \Leftrightarrow 4x > -3 \Leftrightarrow x > -\frac{3}{4}$

VÍ DU 3. Giải mỗi bất phương trình sau

a)
$$\log_{\frac{1}{2}} x > -2;$$

b)
$$\log_2(x+1) > 3$$
.

🗭 Lời giải.

Ta có

a) $\log_{\frac{1}{2}} x > -2 \Leftrightarrow 0 < x < \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} \Leftrightarrow 0 < x < 2^2 \Leftrightarrow 0 < x < 4.$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là (0;4).

b) $\log_2(x+1) > 3 \Leftrightarrow x+1 > 2^3 \Leftrightarrow x > 7$. Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $(7; +\infty)$.

VÍ DU 4. Giải các bất phương trình sau

a)
$$10^x < 0.001$$
.

b)
$$0.4^x > 2$$
.

$$c) \left(\frac{1}{2}\right)^x \ge 2 \cdot 4^{2x}.$$

🗭 Lời giải.

- a) $10^x < 0.001 \Leftrightarrow 10^x < 10^{-3} \Leftrightarrow x < -3 \text{ (do } 10 > 1 \text{)}.$
- b) $0.4^x > 2 \Leftrightarrow x < \log_{0.4} 2$ (do 0 < 0.4 < 1).

c)

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x \ge 2 \cdot 4^{2x} \Leftrightarrow \left(2^{-1}\right)^x \ge 2 \cdot \left(2^2\right)^{2x} \Leftrightarrow 2^x \ge 2^{1+4x}$$

$$\Leftrightarrow -x \ge 1 + 4x \Leftrightarrow 5x \le -1 \Leftrightarrow x \le -\frac{1}{5}.$$

VÍ DU 5. Giải các bất phương trình sau

a)
$$\log_{\frac{1}{3}}(x+1) < 2$$
.

b)
$$\log_5(x+2) \le 1$$
.

🗭 Lời giải.

a) Điều kiện: x > -1.

$$\log_{\frac{1}{3}}(x+1) < 2 \Leftrightarrow x+1 > \left(\frac{1}{3}\right)^2 \Leftrightarrow x > -\frac{8}{9}.$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x > -\frac{8}{9}$

b) Điều kiện x>-2. $\log_5(x+2) \le 1 \Leftrightarrow x+2 \le 5 \Leftrightarrow x \le 3.$ Vậy nghiệm của bất phương trình là $-2 < x \le 3$.

2. Bài tập rèn luyện

BÀI 1. Giải mỗi bất phương trình sau

a)
$$3^x > \frac{1}{243}$$
.

b) $\log(x-1) < 0$.

🗭 Lời giải.

Ta có

 $\mathrm{a)} \ \ 3^x > \frac{1}{243} \Leftrightarrow x > \log_3 \frac{1}{243} \Leftrightarrow x > -5.$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $(-5; +\infty)$.

b) $\log(x-1) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 > 0 \\ x-1 < 10^0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < x < 2.$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là (1; 2).

BÀI 2. Giải các bất phương trình sau

a)
$$\left(\frac{1}{3}\right)^{2x+1} \le 9$$
.

b) $4^x > 2^{x-2}$.

🗭 Lời giải.

- a) $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x+1} \leqslant 9 \Leftrightarrow 2x+1 \geqslant -2 \Leftrightarrow x \geqslant -\frac{3}{2}$.
- b) $4^x > 2^{x-2} \Leftrightarrow 2^{2x} > 2^{x-2} \Leftrightarrow 2x > x 2 \Leftrightarrow x > -2$.
- BÀI 3. Giải các bất phương trình sau

a)
$$\log_2(x-2) < 2$$
.

b) $\log(x+1) > \log(2x-1)$.

🗭 Lời giải.

a) Điều kiện x > 2.

$$\log_2(x-2) < 2 \Leftrightarrow x-2 < 4 \Leftrightarrow x < 6.$$

Kết hợp điều kiện ta có nghiệm của bất phương trình là 2 < x < 6.

b) Điều kiện $x > \frac{1}{2}$.

$$\log(x+1) \geqslant \log(2x-1) \Leftrightarrow x+1 \geqslant 2x-1 \Leftrightarrow x \leqslant 2.$$

Kết hợp với điều kiện, ta có nghiệm của bất phương trình là $\frac{1}{2} < x \leqslant 2$.

3. Bài tập trắc nghiệm

CÂU 1. Tìm tập nghiệm của bất phương trình $\left(\frac{1}{2}\right)^x < 4$.

$$(-2; +\infty).$$

$$\bigcirc$$
 $(-\infty;-2).$

 $\bigcirc (-\infty; 2).$

🗭 Lời giải.

Ta có
$$\left(\frac{1}{2}\right)^x < 4 \Leftrightarrow x > \log_{\frac{1}{2}} 4 = -2.$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $(-2; +\infty)$.

Chọn đáp án (A).....

CÂU 2. Giải bất phương trình $3^{x+2} \ge \frac{1}{9}$.

$$Bx \ge -4$$

🗭 Lời giải.

Ta có
$$3^{x+2} \ge \frac{1}{9} \Leftrightarrow 3^{x+2} \ge 3^{-2} \Leftrightarrow x+2 \ge -2 \Leftrightarrow x \ge -4$$
.

Chọn đáp án B

CÂU 3. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2(x-1) > 3$ là

 $(\mathbf{A})(4;+\infty).$

 $(\mathbf{B})(9;+\infty).$

(c) $(10; +\infty)$.

 $(\mathbf{D})(1;+\infty).$

🗭 Lời giải.

Ta có $\log_2(x-1) > 3 \Leftrightarrow x-1 > 8 \Leftrightarrow x > 9$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $(9; +\infty)$.

Chọn đáp án (B).....

CÂU 4. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_3 x \le 1$ là

 $(\mathbf{A})(-\infty;3].$

 $(\mathbf{B})(-\infty;1].$

 $(\mathbf{C})(0;3].$

 $(\mathbf{D})(0;1].$

🗭 Lời giải.

Ta có $\log_3 x \le 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x < 3. \end{cases}$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình $\log_3 x \le 1$ là (0;3].

Chọn đáp án \bigcirc

CÂU 5. Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\log_2(2x+1) \ge \log_2(x-1)$.

 $(\mathbf{A}) S = [2; +\infty).$

(B) $S = [-2; +\infty).$

 $(\mathbf{D}) S = (1; +\infty).$

Lời giải.

Ta có

$$\log_2(2x+1) \geq \log_2(x-1) \Leftrightarrow \begin{cases} x-1>0 \\ 2x+1 \geq x-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>1 \\ x \geq -2 \end{cases} \Leftrightarrow x>1.$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $S = (1; +\infty)$.

Chọn đáp án (D).....

CÂU 6. Tập nghiệm của bất phương trình $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{x}} < \frac{1}{2}$ là

 $(\mathbf{A})(-\infty;1).$

(0;1).

(c) $(1; +\infty)$.

 \mathbb{D} \mathbb{R} .

🗭 Lời giải.

Điều kiện x > 0.

Với điều kiện trên, bất phương trình đã cho tương đương với $\sqrt{x} > 1 \Leftrightarrow x > 1$.

Vậy tập nghiệm là $(1; +\infty)$.

Chọn đáp án (C).....

CÂU 7. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2 (3-x) < 2$ là

(A) (1; 3).

(B) $(3; +\infty)$.

 $(\mathbf{c})(-\infty;1).$

 $(\mathbf{D})(-1;3).$

🗭 Lời giải.

Điều kiện: $3 - x > 0 \Leftrightarrow x < 3$.

Ta có

$$\log_2(3-x) < 2 \Leftrightarrow 3-x < 2^2 \Leftrightarrow x > -1.$$

Kết hợp điều kiện ta có tập nghiệm của bất phương trình là S = (-1; 3).

Chọn đáp án $\overline{(D)}$

CÂU 8. Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $5^{x+1} - \frac{1}{5} > 0$.

 $(\mathbf{A}) S = (1; +\infty).$

 $\mathbf{B} S = (-\infty; -2).$

 $(\mathbf{c}) S = (-2; +\infty).$

 $(\mathbf{D}) S = (-1; +\infty).$

Lời giải.

Bất phương trình tương đương $5^{x+1} > 5^{-1} \Leftrightarrow x+1 > -1 \Leftrightarrow x > -2$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = (-2; +\infty)$.

Chọn đáp án (C).....

CÂU 9. Tập nghiệm của bất phương trình $\left(\frac{3}{4}\right)^{2x^2-3x} \leq \frac{4}{3}$ là

 $\bigcirc \left(-\infty; \frac{1}{2}\right) \cup (1; +\infty).$

🗭 Lời giải.

Ta có

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{2x^2-3x} \le \frac{4}{3} \Leftrightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^{2x^2-3x} \le \left(\frac{3}{4}\right)^{-1} \Leftrightarrow 2x^2-3x \ge -1 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x \le \frac{1}{2} \\ x \ge 1. \end{bmatrix}$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = \left(-\infty; \frac{1}{2}\right] \cup [1; +\infty).$

CÂU 10. Bất phương trình $\log_3(x^2-x+7)<2$ có tập nghiệm là khoảng (a;b). Tính b-a.

$$(A) b - a = -1.$$

B
$$b - a = -3$$
.

$$(c) b - a = 3.$$

$$\bigcirc b - a = 1.$$

D Lời giải.

Ta có
$$x^2 - x + 7 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{27}{4} > 0, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Khi đó $\log_3\left(x^2-x+7\right) < 2 \Leftrightarrow x^2-x+7 < 9 \Leftrightarrow x^2-x-2 < 0 \Leftrightarrow -1 < x < 2$.

Tập nghiệm là S = (-1, 2). Suy ra a = -1, b = 2.

Vậy b - a = 2 + 1 = 3.

Chọn đáp án (C).....

CÂU 11. Nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}\left[\log_2(2-x^2)\right]>0$ là

A
$$(-1;1) \cup (2;+\infty)$$
.

$$(-1;1).$$

$$(-1;0) \cup (0;1).$$

$$\bigcirc$$
 $(-1;3).$

Lời giải.

Bất phương trình tương đương với

$$\begin{cases} \log_2(2-x^2) > 0 \\ \log_2(2-x^2) < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2-x^2 > 1 \\ 2-x^2 < 2 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow 0 < x^2 < 1 \Leftrightarrow x \in (-1;0) \cup (0;1).$$

CÂU 12. Cho hàm số $f(x) = \log_{0.9}(x^2 + 4x - 5)$. Gọi S là tổng tất cả các giá trị nguyên của x thuộc đoạn [-15; 15] thỏa mãn bất phương trình f'(x) > 0. Tính S.

$$(A)$$
 $S = -105.$

B)
$$S = 120$$
.

$$(c)$$
 $S = -117.$

$$\bigcirc S = 119.$$

🗭 Lời giải.

Bất phương trình đã cho tương đương

$$\begin{cases} x^2 + 4x - 5 > 0 \\ \frac{2x + 4}{(x^2 + 4x - 5)\ln(0.9)} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{bmatrix} x > -1 \\ x < -5 \\ 2x + 4 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow x < -5.$$

Vây $S = -15 - 14 - \dots - 6 = -105$.

Chọn đáp án (A).....

CÂU 13. Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $u_1=2, u_{n+1}=u_n^2$ với mọi $n\geq 1$. Số tự nhiên n nhỏ nhất để $u_n>2^{2018}$ là **(A)** n = 15. $(\mathbf{D}) n = 11.$

🗭 Lời giải.

Ta có $u_1 = 2$, $u_2 = u_1^2 = 2^2$, $u_3 = u_2^2 = \left(2^2\right)^2 = 2^4, \dots$, $u_n = u_1^{2^{n-1}} = 2^{2^{n-1}}$. Ta có $u_n > 2^{2018} \Leftrightarrow 2^{2^{n-1}} > 2^{2018} \Leftrightarrow 2^{n-1} > 2018 \Leftrightarrow n-1 > \log_2 2018 \Leftrightarrow n > 1 + \log_2 2018$.

Suy ra giá trị nhỏ nhất của số tự nhiên n = 12.

Chọn đáp án (C).....

CÂU 14. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}} \left(\log_2 \frac{3x-1}{r+1} \right) \le 0$ là

$$(-1; +\infty) \cup [3; +\infty).$$

$$\blacksquare$$
 $[3; +\infty).$

$$(-1; +\infty).$$

$$(D)(-1;3].$$

Lời giải.

$$\log_{\frac{1}{2}}\left(\log_{2}\frac{3x-1}{x+1}\right) \leq 0 \Leftrightarrow \frac{3x-1}{x+1} \geq 2 \Leftrightarrow \frac{x-3}{x+1} \geq 0 \Leftrightarrow x \in (-1;+\infty) \cup [3;+\infty).$$

Chọn đáp án (A).....

Phương trình mũ, lôgarit đưa về cùng cơ số

Sử dụng các công thức

$$\Theta \log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ f(x) = g(x) \end{cases} \ (a > 0; a \neq 1).$$

1. Ví du mẫu

VÍ DỤ 1. Tìm điều kiện xác định của các phương trình sau

a)
$$\log_2 x + \log_2(x-1) = \log_2(3-x)$$
.

b)
$$\log_3(x^2 - 3x) = \log_3(x - 1)$$
.

🗭 Lời giải.

a) Điều kiện
$$\begin{cases} x > 0 \\ x - 1 > 0 \Leftrightarrow 1 < x < 3. \\ 3 - x > 0 \end{cases}$$

b) Điều kiện
$$\begin{cases} x^2 - 3x > 0 \\ x - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{bmatrix} x > 3 \\ x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 3.$$

VÍ DU 2. Giải phương trình $4^{x-2} = 2^{3x+1}$.

🗭 Lời giải.

Ta có:

$$\begin{aligned} 4^{x-2} &= 2^{3x+1} & \Leftrightarrow & 2^{2(x-3)} &= 2^{3x+1} \\ & \Leftrightarrow & 2(x-2) &= 3x+1 \\ & \Leftrightarrow & 2x-4 &= 3x+1 \Leftrightarrow x = -5. \end{aligned}$$

VÍ DỤ 3. Giải phương trình $3^{x+1} = \frac{1}{3^{1-2x}}$.

🗭 Lời giải.

Đưa vế phải về cơ số 3, ta có $\frac{1}{3^{1-2x}} = 3^{2x-1}$.

Từ đó phương trình trở thành $3^{x+1} = 3^{2x-1} \Leftrightarrow x+1 = 2x-1 \Leftrightarrow x = 2$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất x = 2.

VÍ DU 4. Giải các phương trình sau

a)
$$4^{2x} = 8^{2x-1}$$
.

b)
$$\left(\frac{1}{9}\right)^x = \frac{27^x}{3}$$
.

🗭 Lời giải.

a) Ta có
$$4^{2x} = 8^{2x-1} \Leftrightarrow 2^{4x} = 2^{6x-3} \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$$

b) Ta có

$$\left(\frac{1}{9}\right)^x = \frac{27^x}{3} \Leftrightarrow \left(3^{-2}\right)^x = \frac{\left(3^3\right)^x}{3} \Leftrightarrow 3^{-2x} = 3^{3x-1}$$
$$\Leftrightarrow -2x = 3x - 1 \Leftrightarrow 5x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{5}.$$

VÍ DỤ 5. Giải phương trình $\log_8(3x-6) = -\log_{\frac{1}{2}}(2x-2)$.

Lời giải.

Điều kiện xác định là $\begin{cases} 3x - 6 > 0 \\ 2x - 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 2.$

Ta có:

$$\log_8(3x - 6) = -\log_{\frac{1}{8}}(2x - 2) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x > 2\\ \log_8(3x - 6) = \log_8(2x - 2) \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x > 2\\ 3x - 6 = 2x - 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 4.$$

Vậy phương trình có nghiệm x = 4.

VÍ DU 6. Giải phương trình $\log_3(x+1) = \log_3(x^2-1)$. Lời giải.

Điều kiện: x + 1 > 0 và $x^2 - 1 > 0$, tức là x > 1.

Phương trình trở thành $x + 1 = x^2 - 1$ hay $x^2 - x - 2 = 0$.

Từ đó tìm được x = -1 và x = 2, nhưng chỉ có nghiệm x = 2 thỏa mãn điều kiện.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất x=2.

VÍ DU 7. Giải các phương trình sau

a)
$$\log_2(x^2 - 3) = \log_2 2x$$
.

b)
$$\log_2(x+6) = \log_2(x+1) + 1$$
.

🗭 Lời giải.

a) Điều kiện:
$$\begin{cases} x^2 - 3 > 0 \\ 2x > 0 \end{cases} (*)$$

Khi đó, phương trình đã cho trở thành $x^2 - 3 = 2x \Leftrightarrow x^2 - 3 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = -1$ hoặc x = 3. Thay lần lượt hai giá trị này vào (*), ta thấy chỉ có x = 3 thoả mãn. Vậy phương trình có nghiệm là x = 3.

b) Điều kiện:
$$\begin{cases} x > -6 \\ x > -1 \end{cases} \Leftrightarrow x > -1.$$

$$\log_2(x+6) = \log_2(x+1) + 1 \Leftrightarrow \log_2(x+6) = \log_2(2x+2) \Leftrightarrow x+6 = 2x+2 \Leftrightarrow x=4.$$

2. Bài tấp rèn luyên

BÀI 1. Tìm điều kiện xác định của các phương trình sau

a)
$$\log_{0,5}(4-x) = \log_2 \frac{1}{x+2}$$
.

b)
$$\log (-x^2 + 5x + 6) = \log(x - 2)$$
.

🗭 Lời giải.

a) Điều kiện
$$\begin{cases} 4-x>0 \\ x+2>0 \end{cases} \Leftrightarrow -2 < x < 4.$$

b) Điều kiện
$$\begin{cases} -x^2 + 5x + 6 > 0 \\ x - 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x < 6 \\ x > 2 \end{cases} \Leftrightarrow 2 < x < 6.$$

BAI 2. Giải các phương trình sau

a)
$$3^{x+1} = 9^{2x+1}$$
.

b)
$$9^{x-2} = 243^{x+1}$$
.

c)
$$100^{2x^2-3} = 0.1^{2x^2-18}$$
.

d)
$$5^x = 3^{2x-1}$$
.

🗭 Lời giải.

a) Ta có
$$3^{x+1} = 9^{2x+1} \Leftrightarrow 3^{x+1} = 3^{4x+2} \Leftrightarrow x+1 = 4x+2 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3}$$
. Vậy phương trình có nghiệm là $x = -\frac{1}{3}$.

b) Ta có

$$9^{x-2} = 243^{x+1} \quad \Leftrightarrow \quad 3^{2(x-2)} = 3^{5(x+1)}$$

$$\Leftrightarrow \quad 2(x-2) = 5(x+1)$$

$$\Leftrightarrow \quad 2x - 4 = 5x + 5$$

$$\Leftrightarrow \quad -3x = 9$$

$$\Leftrightarrow \quad x = -3.$$

Vậy phương trình có nghiệm là x = -3.

c) Ta có

$$100^{2x^2-3} = 0,1^{2x^2-18}$$

$$\Leftrightarrow 10^{2(2x^2-3)} = 10^{-(2x^2-18)}$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 - 6 = -2x^2 + 18$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 4$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = 2 \\ x = -2. \end{bmatrix}$$

Vậy phương trình có hai nghiệm là x = -3, x = 2.

d) Ta có

$$5^{x} = 3^{2x-1}$$

$$\Leftrightarrow \log_{5} 5^{x} = \log_{5} 3^{2x-1}$$

$$\Leftrightarrow x = (2x-1)\log_{5} 3$$

$$\Leftrightarrow (2\log_{5} 3 - 1) x = \log_{5} 3$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\log_{5} 3}{2\log_{5} 3 - 1}$$

$$\Leftrightarrow x = \log_{\frac{9}{5}} 3.$$

Vậy phương trình có nghiệm là $x = \log_{\underline{9}} 3.$

BÀI 3. Giải mỗi phương trình sau:

a)
$$\log_5(3x-5) = \log_5(2x+1)$$
.

c)
$$2\log_4 x + \log_2(x-3) = 2$$
.

b)
$$\log_3(x^2 - 3x + 2) = \log_3(2x - 4)$$
.

d)
$$\ln x + \ln(x - 1) = \ln 4x$$
.

🗩 Lời giải.

a) Điều kiện:
$$\begin{cases} 3x - 5 > 0 \\ 2x + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{5}{3} \\ x > -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x > \frac{5}{3}.$$

Khi đó phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{cases} x > \frac{5}{3} \\ 3x - 5 = 2x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{5}{3} \\ x = 6 \end{cases} \text{ (thỏa mãn)}.$$

Vậy phương trình có nghiệm là x = 6.

b) Điều kiện
$$\begin{cases} x^2 - 3x + 2 > 0 \\ 2x - 4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 2.$$

Khi đó phương trình đã cho tương đương với

$$x^{2} - 3x + 2 = 2x - 4 \Leftrightarrow x^{2} - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = 2 \\ x = 3. \end{bmatrix}$$

Kết hợp với điều kiện, phương trình đã cho có nghiệm x = 3.

c) Điều kiện:
$$\begin{cases} x > 0 \\ x - 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 3.$$

Khi đó phương trình đã cho tương đương với

$$2\log_{2^{2}}x + \log_{2}(x - 3) = 2$$

$$\Leftrightarrow \log_{2}x + \log_{2}(x - 3) = 2$$

$$\Leftrightarrow \log_{2}x(x - 3) = 2$$

$$\Leftrightarrow x^{2} - 3x - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = 4 \\ x = -1. \end{bmatrix}$$

Kết hợp với điều kiện, phương trình đã cho có nghiệm x = 4.

d) Điều kiện
$$\begin{cases} x>0 \\ x-1>0 \end{cases} \Leftrightarrow x>1.$$

Khi đó phương trình đã cho tương đương với

$$\ln x(x-1) = \ln 4x$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x = 4x$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 5x = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = 5 \\ x = 0. \end{bmatrix}$$

Kết hợp với điều kiện, phương trình đã cho có nghiệm x=5.

3. Bài tập trắc nghiệm

CÂU 1. Điều kiện xác định của phương trình $\log_2(x+1) = \log_2(2-x)$ là

$$(A) x > -1.$$

$$(c)$$
 $-1 < x < 2$.

🗭 Lời giải.

Điều kiện xác định của phương trình $\begin{cases} x+1>0\\ 2-x>0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < x < 2.$

Chọn đáp án \bigcirc

CÂU 2. Điều kiện xác định của phương trình $\log_3(x-1) = \log_9(x-3)^2$ là

$$(\mathbf{A}) x > 1.$$

$$\bigcirc 1 < x < 3$$

$$\bigcirc$$
 $x > 1 \text{ và } x \neq 3.$

Lời giải.

Điều kiện xác định của phương trình $\begin{cases} x-1>0 \\ x-3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < x \neq 2.$

Chọn đáp án (D).....

CÂU 3. Nghiệm của phương trình $2^{2x-3} = 2^x$ là

$$\mathbf{A} x = 8.$$

B)
$$x = -8$$
.

$$\mathbf{C}$$
 $x=3$.

$$\bigcirc$$
 $x = -3$.

Lời giải.

Ta có

$$2^{2x-3} = 2^x \Leftrightarrow 2x - 3 = x \Leftrightarrow x = 3.$$

Chọn đáp án (C).....

CÂU 4. Nghiệm của phương trình $3^{2x+1} = 3^{x-2}$ là

$$\mathbf{A}$$
 $x = -1$.

$$\bigcirc$$
 $x=3.$

$$(c) x = -3.$$

$$\bigcirc$$
 $x=1.$

🗭 Lời giải.

Ta có

$$3^{2x+1} = 3^{x-2} \Leftrightarrow 2x + 1 = x - 2 \Leftrightarrow x = -3$$

Chọn đáp án C.....

CÂU 5. Tập nghiệm của phương trình $\log_2 x = \log_2(2x+1)$ là

$$(D)\{-1\}.$$

🗭 Lời giải.

Điều kiện x > 0.

Khi đó ta có phương trình tương đương $x = 2x + 1 \Leftrightarrow x = -1$ (loại).

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

Chọn đáp án (C).....

CÂU 6. Nghiệm của phương trình $125^{2x} = \left(\frac{1}{25}\right)^{x+1}$ là

$$B x = 4.$$

$$\bigcirc x = 1$$

$$\bigcirc x = -\frac{1}{8}.$$

Ta có
$$125^{2x} = \left(\frac{1}{25}\right)^{x+1} \Leftrightarrow 5^{6x} = 5^{-2x-2} \Leftrightarrow 6x = -2x - 2 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{4}.$$

Chọn đáp án (A).....

CÂU 7. Nghiệm của phương trình $(4,5)^{4x-5} = \left(\frac{2}{9}\right)^{-x-1}$ là

$$\bigcirc x = -1.$$

$$\bigcirc x = \frac{5}{4}.$$

 \mathbf{D} x=2.

🗭 Lời giải.

Ta có

$$(4,5)^{4x-5} = \left(\frac{2}{9}\right)^{-x-1} \Leftrightarrow \left(\frac{9}{2}\right)^{4x-5} = \left(\frac{9}{2}\right)^{x+1} \Leftrightarrow 4x-5 = x+1 \Leftrightarrow x=2.$$

Chọn đáp án (B).....

CÂU 8. Nghiệm của phương trình
$$\log_3(x+1)+1=\log_3(4x+1)$$
 là \mathbf{A} $x=3$.

Điều kiện $x > -\frac{1}{4}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\log_3 3(x+1) = \log_3 (4x+1) \Leftrightarrow 3(x+1) = 4x+1 \Leftrightarrow x=2$$
 (thỏa mãn).

Vậy phương trình có nghiệm x = 2.

Chọn đáp án \bigcirc

CÂU 9. Số nghiệm của phương trình $\log_3(x^2-6) - \log_3(x-2) = 1$ là

Điều kiện xác định của phương trình $\begin{cases} x^2 - 6 > 0 \\ x - 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > \sqrt{6}.$

(A) 0. D Lời giải. **B** 3. **C** 1

Khi đó

$$\log_3(x^2-6) - \log_3(x-2) = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2-6}{x-2} = 3 \Leftrightarrow x^2-3x = 0 \Leftrightarrow x^2-3x = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x=0 \\ x=3 \end{cases} \Leftrightarrow x=3.$$

Vậy phương trình có 1 nghiệm x = 3.

Chọn đáp án (C)......

CÂU 10. Tổng các nghiệm thực của phương trình $3^{x^2-3x+8} = 9^{2x-1}$ bằng

D 7.

 \bigcirc 2.

🗭 Lời giải.

Phương trình tương đương

$$3^{x^{2}-3x+8} = 9^{2x-1} \Leftrightarrow 3^{x^{2}-3x+8} = 3^{4x-2}$$

$$\Leftrightarrow x^{2} - 3x + 8 = 4x - 2 \Leftrightarrow x^{2} - 7x + 10 = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = 5 \\ x = 2. \end{bmatrix}$$

Tổng các nghiệm của phương trình là 5+2=7.

Chọn đáp án \bigcirc

CÂU 11. Số nghiệm của phương trình $\log_{\frac{1}{2}}\left(x^3-2x^2-3x+4\right)+\log_2(x-1)=0$ là

A 1.

B) 2.

 $\bigcirc 0.$

D 3.

(1)

🗭 Lời giải.

Ta có phương trình tương đương

$$\log_2(x^3 - 2x^2 - 3x + 4) = \log_2(x - 1) \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x^3 - 2x^2 - 3x + 4 = x - 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x > 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 1 \\ x = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 1 \\ x = \frac{1 \pm \sqrt{21}}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1 + \sqrt{21}}{2}.$$

Vậy có phương trình có 1 nghiệm.

Chọn đáp án (A)......

CÂU 12. Gọi S là tập nghiệm của phương trình $2\log_2(2x-2) + \log_2(x-3)^2 = 2$ trên \mathbb{R} . Tổng các phần tử của S bằng $\textcircled{\mathbf{A}}$ $8+\sqrt{2}$. $\textcircled{\mathbf{B}}$ $6+\sqrt{2}$. $\textcircled{\mathbf{C}}$ $4+\sqrt{2}$. $\textcircled{\mathbf{D}}$ 8.

Lời giải.

Điều kiện $x > 1, x \neq 3$.

Ta có phương trình tương đương $(2x-2)|x-3|=2 \Leftrightarrow (x-1)|x-3|=1$.

Với x > 3, ta có $(1) \Leftrightarrow (x-1)(x-3) = 1 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 2 = 0 \Leftrightarrow 2 + \sqrt{2}$.

Với 1 < x < 3, ta có $(1) \Leftrightarrow (x-1)(-x+3) = 1 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2$.

Vậy $S = \{2 + \sqrt{2}; 2\}$, suy ra tổng các phần tử của S là $4 + \sqrt{2}$.

Chọn đáp án C

13 Bất phương trình mũ, lôgarít đưa về cùng cơ số

1. Ví dụ mẫu

VÍ DỤ 1. Giải bất phương trình $\log_{0.3}(x+1) \le \log_{0.3}(2x-1)$.

Lời giải.

Diều kiện: $x > \frac{1}{2}$.

Vì cơ số 0.3 < 1 nên bất phương trình trở thành $x + 1 \ge 2x - 1$, từ đó tìm được $x \le 2$.

Kết hợp điều kiện, ta được nghiệm của bất phương trình đã cho là $\frac{1}{2} < x \le 2$.

VÍ DU 2. Giải các bất phương trình sau

a)
$$2^x > 16$$
.

b)
$$0.1^x \le 0.001$$
.

c)
$$\left(\frac{1}{5}\right)^{x-2} \ge \left(\frac{1}{25}\right)^x$$
.

🗭 Lời giải.

a)
$$2^x > 16 \Leftrightarrow x > 4$$
.

b)
$$0.1^x \le 0.001 \Leftrightarrow 0.1^x \le 0.1^3 \Leftrightarrow x \ge 3$$
.

c)
$$\left(\frac{1}{5}\right)^{x-2} \geqslant \left(\frac{1}{25}\right)^x \Leftrightarrow \left(\frac{1}{5}\right)^{x-2} \geqslant \left(\frac{1}{5}\right)^{2x} \Leftrightarrow x-2 \leqslant 2x \Leftrightarrow x \geqslant -2.$$

VÍ DU 3. Giải các bất phương trình sau

a)
$$\log_2(2x - 1) \le 1$$
.

b)
$$\log_{\frac{1}{2}}(1-x) > \log_{\frac{1}{2}}(3x+2)$$
.

D Lời giải.

a) Điều kiện:
$$2x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}$$
.

Khi đó, do cơ số 2 > 1 nên bất phương trình đã cho trở thành

$$2x - 1 \le 2^1 \Leftrightarrow 2x \le 3 \Leftrightarrow x \le \frac{3}{2}.$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $\frac{1}{2} < x \leqslant \frac{3}{2}$.

b) Điều kiện:
$$\begin{cases} 1-x>0\\ 3x+2>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<1\\ x>-\frac{2}{3} \Leftrightarrow -\frac{2}{3} < x < 1. \ (*) \end{cases}$$

Khi đó, do cơ số $\frac{1}{2}$ < 1 nên bất phương trình đã cho trở thành

$$1-x<3x+2 \Leftrightarrow 4x>-1 \Leftrightarrow x>-\frac{1}{4}.$$

Kết hợp với điều kiện (*), ta được nghiệm của bất phương trình là $-\frac{1}{4} < x < 1$.

2. Bài tấp rèn luyên

BÀI 1. Giải mỗi bất phương trình sau

a)
$$\left(\frac{2}{3}\right)^{3x-7} \le \frac{3}{2};$$

b)
$$4^{x+3} \ge 32^x$$
;

c)
$$\log_{\frac{1}{2}}(2x-1) \ge \log_{\frac{1}{2}}(x+3);$$

d)
$$\ln(x+3) \ge \ln(2x-8)$$
.

D Lời giải.

Ta có

a)
$$\left(\frac{2}{3}\right)^{3x-7} \le \frac{3}{2} \Leftrightarrow 3x-7 \ge \log_{\frac{2}{3}} \frac{3}{2} \Leftrightarrow 3x \ge 6 \Leftrightarrow x \ge 2.$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $[2; +\infty)$.

b)
$$4^{x+3} \ge 32^x \Leftrightarrow 2^{2(x+3)} \ge 2^{5x} \Leftrightarrow 2(x+3) \ge 5x \Leftrightarrow -3x \ge -6 \Leftrightarrow x \le 2$$
. Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $(-\infty; 2]$.

c) Bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(2x-1) \ge \log_{\frac{1}{2}}(x+3)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 1 > 0 \\ 2x - 1 \le x + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{1}{2} \\ x < 4 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{2} < x \le 4.$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $(\frac{1}{2}; 4]$.

d) $\ln(x+3) \ge \ln(2x-8) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-8>0\\ x+3 \ge 2x-8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>4\\ x \le 11 \end{cases} \Leftrightarrow 4 < x \le 11.$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là (4;

BÀI 2. Giải các bất phương trình sau

a) $0.1^{2-x} > 0.1^{4+2x}$:

c) $\log_2(x+7) > -1$;

b) $2 \cdot 5^{2x+1} < 3$:

d) $\log_{0.5}(x+7) \ge \log_{0.5}(2x-1)$.

Lời giải.

- a) Ta có $0.1^{2-x} > 0.1^{4+2x} \Leftrightarrow 2-x < 4+2x \Leftrightarrow -3x < 2 \Leftrightarrow x > -\frac{3}{2}$;
- b) Ta có $2 \cdot 5^{2x+1} \le 3 \Leftrightarrow 5^{2x+1} \le \frac{3}{2} \Leftrightarrow 2x+1 \le \log_5 \frac{3}{2} \Leftrightarrow x \le \frac{1}{2} \left(\log_5 \frac{3}{2} 1\right);$
- c) Điều kiện: $x + 7 > 0 \Leftrightarrow x > -7$. Ta có $\log_3(x+7) \ge -1 \Leftrightarrow x+7 \ge 3^{-1} \Leftrightarrow x \ge -\frac{20}{3}$ (thỏa mãn điều kiện).
- d) Điều kiện: $\begin{cases} x+7>0\\ 2x-1>0 \end{cases} \Leftrightarrow x>\frac{1}{2}.$ Ta có $\log_{0.5}(x+7) \ge \log_{0.5}(2x-1) \Leftrightarrow x+7 \le 2x-1 \Leftrightarrow x \ge 8$ (thỏa mãn điều kiện).

3. Bài tấp trắc nghiệm

- **CÂU 1.** Tập nghiệm bất phương trình $(0,5)^3 < \left(\frac{1}{2}\right)^{3x}$ là
 - $(-\infty;1).$
- $(\mathbf{B})(-\infty;-1).$
- $(\mathbf{C})(-1;+\infty).$
- $(\mathbf{D})(1;+\infty).$

🗭 Lời giải.

Ta có $(0,5)^3 < \left(\frac{1}{2}\right)^{3x} \Leftrightarrow 3x < 3 \Leftrightarrow x < 1.$

Vậy tập nghiệm là $(-\infty; 1)$.

Chọn đáp án (A)..... **CÂU 2.** Tập nghiệm của bất phương trình $4^{x+1} \le 8^{x-2}$ là

- $(\mathbf{c})(-\infty;8].$
- (**D**) $[8; +\infty)$.

(A) (0; 8). Lời giải.

Ta có $4^{x+1} < 8^{x-2} \Leftrightarrow 2^{2x+2} < 2^{3x-6} \Leftrightarrow 2x+2 < 3x-6 \Leftrightarrow x > 8$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = [8; +\infty)$.

Chọn đáp án (D).....

- **CÂU 3.** Tập nghiệm của bất phương trình $\log_3 \sqrt{x} \ge \log_3 x + 1$ là
 - $\left(-\infty;\frac{1}{0}\right)$
- $\left| 0; 1\frac{1}{0} \right|$.

Lời aiải.

Tập xác định $\mathcal{D} = (0; +\infty)$.

 $\log_3 \sqrt{x} \ge \log_3 x + 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \log_3 x \ge \log_3 x + 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \log_3 x \le -1 \Leftrightarrow x \le 3^{-2} \Leftrightarrow x \le \frac{1}{9}$

Suy ra nghiệm của bất phương trình là $\left(0; \frac{1}{0}\right)$.

- Chọn đáp án \bigcirc **CÂU 4.** Biết rằng bất phương trình $\left(\frac{2}{3}\right)^{x^2-x} \geq \left(\frac{9}{4}\right)^{x-1}$ có tập nghiệm là đoạn [a;b]. Tính b-a.
 - $(\mathbf{A}) b a = 3.$

- $(\mathbf{D})b-a=\sqrt{5}$

🗭 Lời giải.

Bất phương trình đã cho tương đương

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{x^2-x} \geq \left(\frac{9}{4}\right)^{x-1} \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{x-x^2} \geq \left(\frac{3}{2}\right)^{2x-2} \Leftrightarrow x-x^2 \geq 2x-2 \Leftrightarrow x^2+x-2 \leq 0 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 1.$$

Vậy b - a = 1 - (-2) = 3.

Chọn đáp án (A).....

CÂU 5. Tập nghiệm của bất phương trình $11^{\sqrt{x+6}} \ge 11^x$ là S = [a; b]. Tính a + b.

B 2.

 $(\mathbf{D})-2.$

🗭 Lời giải.

Diều kiện $x \ge -6$. Ta có $11^{\sqrt{x+6}} \ge 11^x \Leftrightarrow \sqrt{x+6} \ge x$ (1).

TH1. $x \in [-6; 0) \Rightarrow (1)$ luôn đúng.

TH2. $x \ge 0$. Khi đó (1) $\Leftrightarrow x + 6 \ge x^2 \Leftrightarrow x^2 - x - 6 \le 0 \Leftrightarrow x \in [-2, 3]$. Vì $x \ge 0$ nên $x \in [0; 3]$.

Tập nghiệm của bất phương trình là $S = [-6; 0) \cup [0; 3] = [-6; 3]$.

Suy ra a = -6, b = 3. Vậy a + b = -3.

Chon đáp án (C).....

CÂU 6. Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\log_2(x^2-x-2) \le 2\log_2(3-x)$.

$$\mathbf{B} S = (-\infty; -1) \cup \left(2; \frac{11}{5}\right]. \quad \mathbf{C} S = \left[\frac{11}{5}; 3\right).$$

🗭 Lời giải.

Xét phương trình $\log_2(x^2 - x - 2) \le 2\log_2(3 - x)$.

(1)Ta có (1) \Leftrightarrow $\begin{cases} x^2 - x - 2 > 0 \\ 3 - x > 0 \\ x^2 - x - 2 \le x^2 - 6x + 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1 \\ x < 3 \\ x < \frac{11}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x < -1 \\ 2 < x \le \frac{11}{5} \end{cases}.$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = (-\infty; -1) \cup \left(2; \frac{11}{r}\right|$.

Chon đáp án (B).....

CÂU 7. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2(2x^2-x) \leq \log_{\sqrt{2}} x$ là

$$igate{A}(0;1).$$

$$\bigcirc$$
 [0;1].

🗭 Lời giải.

Điều kiện xác định của bất phương trình

$$\begin{cases} 2x^2 - x > 0 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{bmatrix} x < 0 \\ x > \frac{1}{2} \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}.$$

Với điều kiện đó, ta có

$$\begin{split} \log_2(2x^2-x) & \leq \log_{\sqrt{2}}x & \Leftrightarrow & \log_2(2x^2-x) \leq \log_2 x^2 \\ & \Leftrightarrow & 2x^2-x \leq x^2 \\ & \Leftrightarrow & x^2-x \leq 0 \\ & \Leftrightarrow & 0 \leq x \leq 1. \end{split}$$

So với điều kiện ta được tập nghiệm $S = \left(\frac{1}{2}; 1\right]$.

Chon đáp án (B).....

CÂU 8. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2\left(1+\log_{\frac{1}{9}}x-\log_9x\right)<1$ có dạng $S=\left(\frac{1}{a};b\right)$ với a,b là những số nguyên.

Mối liên hệ giữa a và b là

$$a + b = 1.$$

$$\bigcirc a = b.$$

Lời giải.

Điều kiện xác định: x > 0.

Bất phương trình đã cho tương đương

$$\begin{split} \log_2\left(1+\log_{\frac{1}{9}}x-\log_9x\right) < 1 & \Leftrightarrow & 0 < 1-2\log_9x < 2 \\ & \Leftrightarrow & \frac{1}{2} > \log_9x > -\frac{1}{2} \\ & \Leftrightarrow & 3 > x > \frac{1}{3}. \end{split}$$

Suy ra a = b = 3.

Chọn đáp án (D).....

$$\bigcirc$$
 $(-\infty;4]$

$$\left(\mathbf{c} \right) \left[-\frac{1}{4}; +\infty \right)$$

$$\bigcirc [4;+\infty).$$

🗭 Lời giải.

Do $3^x + 2 > 0$ nên ta có

$$(3^{x} + 2)(4^{x+1} - 8^{2x+1}) \le 0 \Leftrightarrow 2^{2x+2} - 2^{6x+3} \le 0 \Leftrightarrow 2x + 2 \le 6x + 3 \Leftrightarrow x \ge -\frac{1}{4}.$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = \left[-\frac{1}{4}; +\infty \right]$.

Chọn đáp án (C).....

CÂU 10. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{0.5}(x^2+x) < \log_{0.5}(-2x+4)$ là

$$(-4;-1).$$

$$(\mathbf{B})$$
 $(-\infty; -4) \cup (2; +\infty)$. (\mathbf{C}) $(-\infty; -4) \cup (1; +\infty)$.

$$(-\infty; -4) \cup (1; +\infty)$$

$$(-\infty; -4) \cup (1; 2).$$

🗭 Lời giải.

$$\log_{0,5}(x^2+x) < \log_{0,5}(-2x+4) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2+x > -2x+4 \\ -2x+4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+3x-4 > 0 \\ x < 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \begin{bmatrix} x < -4 \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x < -4 \\ 1 < x < 2. \end{cases}$$

CÂU 11. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\sqrt{3}} x + \log_{\sqrt[4]{3}} x + \log_{\sqrt[6]{3}} x + \cdots + \log_{\sqrt[16]{3}} x < 36$ là

A
$$(0; \sqrt[4]{3})$$
.

$$(\mathbf{B})(1;\sqrt{3}).$$

$$(0;\sqrt{3}).$$

$$(\mathbf{D})(0;1).$$

Lời giải.

Điều kiện x > 0. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\log_{\sqrt{3}} x + 2\log_{\sqrt{3}} x + 3\log_{\sqrt{3}} x + \dots + 8\log_{\sqrt{3}} x < 36$$

$$\Leftrightarrow (1+2+3+\cdots+8)\log_{\sqrt{3}}x < 36$$

$$\Leftrightarrow 36 \log_{\sqrt{3}} x < 36$$

$$\Leftrightarrow \ \log_{\sqrt{3}} x < 1 \Leftrightarrow x < \sqrt{3}.$$

Vậy bất phương trình có nghiệm $x \in (0; \sqrt{3})$.

Chọn đáp án \bigcirc

CÂU 12. Số nghiệm nguyên của bất phương trình $\left(\sqrt{10}-3\right)^{\frac{3-x}{x-1}} > \left(\sqrt{10}+3\right)^{\frac{x+1}{x+3}}$ là



🗭 Lời giải.

Điều kiện xác đinh: $\begin{cases} x - 1 \neq 0 \\ x + 3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x \neq -3. \end{cases}$

Ta có:

$$\left(\sqrt{10} - 3\right)^{\frac{3-x}{x-1}} > \left(\sqrt{10} + 3\right)^{\frac{x+1}{x+3}} \quad \Leftrightarrow \quad \left(\sqrt{10} + 3\right)^{\frac{x-3}{x-1}} > \left(\sqrt{10} + 3\right)^{\frac{x+1}{x+3}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{x-3}{x-1} > \frac{x+1}{x+3}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{-8}{(x-1)(x+3)} > 0$$

Vì $x \in \mathbb{Z}$ nên $x \in \{-2; -1; 0\}$.

Chọn đáp án (D).....

CÂU 13. Tổng tất cả các nghiệm nguyên của bất phương trình $2\log_2\sqrt{x+1} \le 2-\log_2(x-2)$ bằng

(A) 5. Lời giải. **(B)** 12.

(C) 3.

(D) 9.

Tập xác định của bất phương trình là $\mathscr{D} = (2; +\infty)$.

$$2\log_2\sqrt{x+1} \le 2 - \log_2(x-2)$$

$$\Leftrightarrow \log_2(x+1) + \log_2(x-2) \le 2$$

$$\Leftrightarrow \log_2(x+1)(x-2) \le \log_2 4$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x - 6 \le 0$$

$$\Leftrightarrow$$
 $-2 \le x \le 3$.

Tập nghiệm của bất phương trình là S=(2;3], có 1 nghiệm nguyên là x=3. Vậy tổng các nghiệm nguyên của bất phương trình là 3.

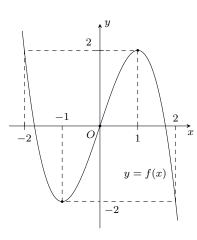
CÂU 14.

Cho hàm số bâc ba y = f(x) có đồ thi như hình vẽ. Có bao nhiêu giá tri nguyên của tham số m thuộc đoạn [0;9] sao cho bất phương trình $2^{f^2(x)+f(x)-m}-16\cdot 2^{f^2(x)-f(x)-m}$ $4^{f(x)} + 16 < 0$ có nghiệm $x \in (-1, 1)$?

(A) 8.

B 5.

(c) 6.



Lời giải.

Ta có $2^{f^2(x)+f(x)-m} - 16 \cdot 2^{f^2(x)-f(x)-m} - 4^{f(x)} + 16 < 0 \Leftrightarrow (4^{f(x)} - 16)(2^{f^2(x)-f(x)-m} - 1) < 0.$

Từ đồ thị đã cho ta thấy $x \in (-1;1) \Rightarrow -2 < f(x) < 2 \text{nên } 4^{f(x)} - 16 < 0$ với mọi $x \in (-1;1)$.

Bất phương trình đã cho có nghiệm $x \in (-1;1)$ khi và chỉ khi bất phương trình $2^{f^2(x)-f(x)-m}-1>0$ có nghiệm $x \in (-1;1)$, điều này tương đương với bất phương trình $f^2(x) - f(x) - m > 0$ có nghiệm $x \in (-1, 1)$.

Đặt $t = f(x), t \in (-2, 2)$. Bất phương trình trên trở thành $t^2 - t > m$.

Xét hàm số $g(t) = t^2 - t$ với $t \in (-2, 2)$ ta có bảng biến thiên

t	-2	$\frac{1}{2}$	2
g(t)	6	$-\frac{1}{4}$	2

Từ bảng biến thiên ta thấy bất phương trình $t^2 - t > m$ có nghiệm $t \in (-2, 2)$ khi và chỉ khi m < 6.

Vì m là số nguyên thuộc đoạn [0; 9] nên ta được $m \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$.

Chon đáp án (C).....

CÂU 15. Cho bất phương trình $(3^{x^2-x}-9)(2^{x^2}-m)\leq 0$. Tìm số giá trị nguyên của m để bất phương trình đã cho có đúng 5 nghiệm nguyên.

(A) 65022.

B) 65024.

(c) 65021.

(**D**) 65023.

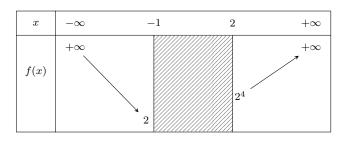
Lời giải.

Ta thấy $3^{x^2-x} - 9 < 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 < 0 \Leftrightarrow -1 < x < 2$.

Do vậy, bài toán cần tìm mnguyên
để $\left\{ x \leq -1 \vee x \geq 2 \right.$

(*) có đúng 5 nghiệm x nguyên.

Ta có bảng biến thiên của hàm số $f(x) = 2^{x^2}$



Từ bảng biến thiên, ta thấy (*) có đúng 5 nghiệm nguyên là $\{-3;-2;-1;2;3\}$, khi đó ta được $2^9 \le m < 2^{16}$. Vậy có $2^{16} - 2^9 = 65024$ giá trị nguyên của tham số m thoả đề bài.

Chon đáp án (B).....

CÂU 16. Cho bất phương trình $\log_3(x^2-x+2)+1 \ge \log_3(x^2+x+m-3)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để bất phương trình đã cho có nghiệm đúng với mọi giá trị x thuộc đoạn [0;6]?

(B) 6.

(**c**) 4.

D 5.

🗭 Lời giải.

Điều kiện xác định

$$x^{2} + x + m - 3 > 0, \forall x \in [0; 6]$$

 $\Leftrightarrow m > -x^{2} - x + 3, \forall x \in [0; 6].$ (*)

Hàm số $h(x) = -x^2 - x + 3$ nghịch biến trên [0;6] nên $(*) \Leftrightarrow m > h(0) \Leftrightarrow m > 3$. (1)

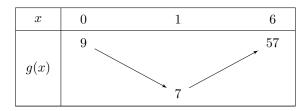
$$\log_{3}(x^{2} - x + 2) + 1 \ge \log_{3}(x^{2} + x + m - 3), \forall x \in [0; 6]$$

$$\Leftrightarrow \log_{3} 3(x^{2} - x + 2) \ge \log_{3}(x^{2} + x + m - 3), \forall x \in [0; 6]$$

$$\Leftrightarrow 3(x^{2} - x + 2) \ge x^{2} + x + m - 3, \forall x \in [0; 6]$$

$$\Leftrightarrow m \le 2x^{2} - 4x + 9, \forall x \in [0; 6]. \quad (**)$$

Bảng biến thiên của hàm số $g(x) = 2x^2 - 4x + 9$ trên [0; 6]



Từ bảng biến thiên suy ra $(**) \Leftrightarrow m \leq 7$.

Từ (1), (2) và m nguyên suy ra $m \in \{4; 5; 6; 7\}$. Chọn đáp án (C).....

CÂU 17. Tìm m để bất phương trình $1 + \log_5(x^2 + 1) \ge \log_5(mx^2 + 4x + m)$ thỏa mãn với mọi $x \in \mathbb{R}$.

 \bigcirc 2 < m < 3.

B) 2 < m < 3.

(c) -1 < m < 0.

 $(\mathbf{D}) - 1 < m < 0.$

🗭 Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} 1 + \log_5(x^2 + 1) &\geq \log_5(mx^2 + 4x + m) \\ \Leftrightarrow & \log_5[5(x^2 + 1)] &\geq \log_5(mx^2 + 4x + m) \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} 5(x^2 + 1) &\geq mx^2 + 4x + m \\ mx^2 + 4x + m &> 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} (5 - m)x^2 - 4x + 5 - m &\geq 0 \quad (1) \\ mx^2 + 4x + m &> 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy,
bất phương trình đã cho thỏa mãn với mọi $x \in \mathbb{R}$ khi và chỉ khi
 $2 < m \le 3$.

Chon đáp án (A)....

CÂU 18. Cho bất phương trình $\log_3(x^2+2x+2)+1>\log_3(x^2+6x+5+m)$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để bất phương trình trên nghiệm đúng với mọi $x \in (1;3)$?

(A) 14.

(B) 16.

(C) vô số.

D 15.

🗭 Lời giải.

Ta có

$$\log_3(x^2 + 2x + 2) + 1 > \log_3(x^2 + 6x + 5 + m)$$

$$\Leftrightarrow \log_3 (3x^2 + 6x + 6) > \log_3(x^2 + 6x + 5 + m)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 6x + 5 + m > 0 \\ 3x^2 + 6x + 6 > x^2 + 6x + 5 + m \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m > -x^2 - 6x - 5 \\ m < 2x^2 + 1. \end{cases}$$
(*)

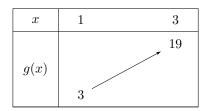
Đặt
$$f(x) = -x^2 - 6x - 5$$
, $g(x) = 2x^2 + 1$ với $x \in (1,3)$.

Khi đó, hệ (*) tương đương với
$$\begin{cases} m > \max_{(1;3)} f(x) \\ m < \min_{(1;3)} g(x). \end{cases}$$

Bảng biến thiên của hàm số f(x) trên (1; 3)

x	1	3
f(x)	-12	-32

Bảng biến thiên của hàm số g(x) trên (1;3)



Bất phương trình ban đầu có nghiệm đúng với mọi $x \in (1;3)$ khi và chỉ khi $\begin{cases} m > -12 \\ m < 3. \end{cases}$

Vì m nguyên nên $m \in \{-11; -10; -9; -8; -7; -6; -5; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2\}$

CÂU 19. Tổng tất cả các nghiệm nguyên của bất phương trình $\log_9(x+6) - \log_3(5 - \sqrt[4]{19-x}) < 0$ là (A) - 12.

Lời giải.

Ta có
$$\log_9(x+6) - \log_3(5 - \sqrt[4]{19 - x}) < 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\log_3(x+6) < \log_3(5 - \sqrt[4]{19 - x})$$

 $\Leftrightarrow \begin{cases} -6 < x \le 19\\ \sqrt{x+6} < 5 - \sqrt[4]{19 - x} \end{cases}$

Xét bất phương trình $\sqrt{x+6} < 5 - \sqrt[4]{19-x}$ với $-6 < x \le 19$

Xet bat phytong trinh
$$\sqrt{x+6} < 5 - \sqrt[3]{19} - x \text{ vol} - 6 < x \le 19.$$

$$\text{Ta có } \sqrt{x+6} < 5 - \sqrt[4]{19} - x \Leftrightarrow \sqrt{x+6} - 3 + \sqrt[4]{19} - x - 2 < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-3}{\sqrt{x+6}+3} + \frac{3-x}{\left(\sqrt[4]{19} - x + 2\right)\left(\sqrt{19} - x + 4\right)} < 0$$

$$\Leftrightarrow (x-3) \left[\frac{1}{\sqrt{x+6}+3} - \frac{1}{\left(\sqrt[4]{19} - x + 2\right)\left(\sqrt{19} - x + 4\right)} \right] < 0$$

$$\Leftrightarrow x < 3$$

$$\left(\text{Vì } \frac{1}{\sqrt{x+6}+3} - \frac{1}{\left(\sqrt[4]{19} - x + 2\right)\left(\sqrt{19} - x + 4\right)} \ge 0, \forall x \in (-6; 19] \right).$$
Sur, we hất phytong trình đã cho gó tân nghiệm $S = (-6; 2)$

$$\left(\text{Vi} \, \frac{1}{\sqrt{x+6}+3} - \frac{1}{\left(\sqrt[4]{19-x}+2\right)\left(\sqrt{19-x}+4\right)} \ge 0, \forall x \in (-6;19] \right).$$

Suy ra bất phương trình đã cho có tập nghiệm S = (-6; 3).

Vậy tổng tất cả các nghiệm nguyên của bất phương trình đã cho là

$$T = -5 + (-4) + (-3) + (-2) + (-1) + 0 + 1 + 2 = -12$$

CÂU 20. Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn $\ln x + \ln y \ge \ln(x^2 + y)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của P = x + y.

(D) $P = 3 + 2\sqrt{2}$. (A) $P = 2 + 3\sqrt{2}$. **(B)** $P = \sqrt{17} + \sqrt{3}$. **(c)** P = 6.

🗭 Lời giải.

Ta có $\ln x + \ln y \ge \ln(x^2 + y) \Leftrightarrow xy \ge x^2 + y \Leftrightarrow y(x - 1) \ge x^2 > 0$. Suy ra x > 1 và y > 0.

Khi đó $y \ge \frac{x^2}{x-1}$.

Suy ra
$$P = x + y \ge x + \frac{x^2}{x - 1} = 2(x - 1) + \frac{1}{x - 1} + 3 \ge 2\sqrt{2(x - 1) \cdot \frac{1}{x - 1}} + 3 = 2\sqrt{2} + 3.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức P là $3 + 2\sqrt{2}$.

CÂU 21. Cho phương trình $(2\log_3^2 x - \log_3 x - 1)\sqrt{3^x - m} = 0$ (m là tham số thực). Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để phương trình đã cho có đúng hai nghiệm phân biệt.

(A) 26.

(B) 25.

(C) Vô số.

(D) 24.

(D) $14 - 6\sqrt{2}$.

🗭 Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} x>0\\ 3^x-m\geq 0 \end{cases}$. Khi đó phương trình tương đương $\begin{bmatrix} \log_3 x=1\\ \log_3 x=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x=3\\ x=\frac{1}{\sqrt{3}}\\ 3^x=m \end{bmatrix}$

Vì m là số nguyên dương nên ta xét các trường hợp sau:

- \odot Trường hợp 1: Với m=1, phương trình có hai nghiệm phân biệt $x=3, x=\frac{1}{\sqrt{3}}$.
- \odot Trường hợp 2: Với m>1, khi đó phương trình $3^x=m$ luôn có nghiệm dương $x=\log_3 m$. Do đó phương trình đã cho có đúng hai nghiệm phận biệt khi và chỉ khi

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \leq \log_3 m < 3 \Leftrightarrow 3^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \leq m < 27.$$

Do m nguyên dương nên phương trình đã cho có đúng hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $m \in \{1; 2; ...; 26\}$. Vậy có 26 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chon đáp án (A).....

CÂU 22. Cho $x \geq 0, y \geq 0, x+y > 0$ thỏa mãn $2^{x^2+y^2} + 2023^{x+y} \cdot \log_2 \frac{x^2+y^2}{x+y} \leq 4^{x+y} + 2023^{x+y}$. Tìm tổng giá trị lớn nhất

Lời giải.

 $2^{x^2+y^2} + 2023^{x+y} \cdot \log_2 \frac{x^2+y^2}{x+y} \leqslant 4^{x+y} + 2023^{x+y}$

$$x + y$$

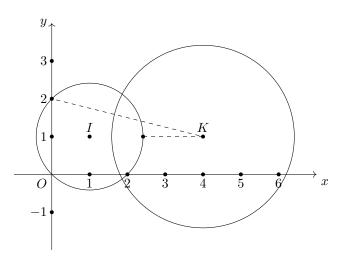
$$\Leftrightarrow 2^{x^2 + y^2} + 2023^{x+y} \cdot \log_2 \frac{x^2 + y^2}{2(x+y)} \le 4^{x+y}$$

$$\Leftrightarrow 2023^{x+y} \cdot \left[\log_2 \left(x^2 + y^2 \right) - \log_2 [2(x+y)] \right] \le 2^{2(x+y)} - 2^{x^2 + y^2}$$

Nếu $x^2 + y^2 > 2(x + y)$. Khi đó VT > 0; VP < 0 (không thoả mãn).

Nếu $x^2 + y^2 \le 2(x + y)$. Khi đó $VT \le 0; VP \ge 0$ luôn thoả mãn.

Vậy $x^2+y^2-2x-2y\leq 0 \Rightarrow (x;y)$ thuộc phần hình tròn tâm I(1;1) bán kính $r=\sqrt{2}$ (với $x\geq 0, y\geq 0, x+y>0$). Khi đó $P=x^2+y^2-8x-2y+10 \Rightarrow (x;y)$ thuộc phần đường tròn tâm K(4;1) bán kính $R=\sqrt{P+7}$ thoả mãn $x \ge 0, y \ge 0, x + y > 0; d = KI = 3.$



Dựa vào hình vẽ, để tồn tại (x;y) ta phải có d $-r \le R \le KA$, $(A(0;2)) \Leftrightarrow 3-\sqrt{2} \le \sqrt{P+7} \le \sqrt{17}$

$$11 - 6\sqrt{2} \le P + 7 \le 17 \Leftrightarrow 4 - 6\sqrt{2} \le P \le 10$$

 $P_{\text{max}} + P_{\text{min}} = 10 + 4 - 6\sqrt{2} = 14 - 6\sqrt{2}.$

Chọn đáp án \bigcirc



Bài toán thực tế, liên môn

1. Ví dụ mẫu

VÍ DỤ 1. Dân số được ước tính theo công thức $S = A \cdot e^{rt}$, trong đó A là dân số của năm lấy làm mốc tính, S là số dân sau t năm, r là tỉ lệ tăng dân số hằng năm. Giả sử $r = 1{,}14\%/$ năm, hỏi sau bao nhiều năm dân số sẽ gấp đôi dân số ban đầu? \bigcirc Lời giải.

Gọi A là dân số ban đầu. Phương trình thể hiện dân số sau t năm gấp đôi dân số ban đầu là

$$A \cdot e^{0.0114 \cdot t} = 2A \Leftrightarrow e^{0.0114 \cdot t} = 2 \Leftrightarrow 0.0114 \cdot t = \ln 2 \Leftrightarrow t = \frac{\ln 2}{0.0114} \approx 61.$$

Vậy sau 61 năm dân số sẽ gấp đôi dân số ban đầu.

VÍ DỤ 2. Chỉ số hay độ pH của một dung dịch được tính theo công thức: $pH = -\log[H^+]$ (trong đó $[H^+]$ chỉ nồng độ ion hydrogen). Do chỉ số pH của một mẫu nước sông, ta có kết quả là pH = 6,1. Hỏi nồng độ của ion hydrogen $[H^+]$ trong mẫu nước sông đó bằng bao nhiêu?

🗭 Lời giải.

Phương trình thể hiện nồng độ x của ion hydrogen $[H^+]$ trong mẫu nước sông đó là

$$-\log x = 6.1 \Leftrightarrow \log x = -6.1 \Leftrightarrow x = 10^{-6.1}$$

Vậy nồng độ của ion hydrogen $[H^+]$ trong mẫu nước sông đó là $10^{-6,1}$ (mol L^{-1}).

 $\mathbf{V}\hat{\mathbf{I}} \mathbf{D}\hat{\mathbf{U}} \mathbf{3}.$ Giả sử giá trị còn lại (tính theo triệu đồng) của một chiếc ô tô sau t năm sử dụng được mô hình hóa bằng công thức

$$V(t) = 780 \cdot (0.905)^t.$$

Hỏi nếu theo mô hình này, sau bao nhiêu năm sử dụng thì giá trị của chiếc xe đó còn lại không quá 300 triệu đồng? (Làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

🗭 Lời giải.

Giá trị còn lại của chiếc ô tô không quá 300 triệu đồng khi và chỉ khi

$$V(t) \le 300 \Leftrightarrow 780 \cdot (0,905)^t \le 300 \Leftrightarrow (0,905)^t \le \frac{5}{13} \Leftrightarrow t \ge \log_{0,905} \frac{5}{13} \approx 9,57.$$

Vậy sau 10 năm thì giá trị còn lại của chiếc ô tô không quá 300 triệu đồng.

VÍ DỤ 4. Nếu khối lượng carbon-14 trong cơ thể sinh vật lúc chết là $M_0(g)$ thì khối lượng carbon-14 còn lại (tính theo gam)

sau t năm được tính theo công thức $M(t)=M_0\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$ (g), trong đó T=5730 (năm) là chu kì bán rã của carbon-14. Nghiên

cứu hoá thạch của một sinh vật, người ta xác định được khối lượng carbon-14 hiện có trong hoá thạch là $5 \cdot 10^{-13}$ g. Nhờ biết tỉ lệ khối lượng của carbon-14 so với carbon-12 trong cơ thể sinh vật sống, người ta xác định được khối lượng carbon-14 trong cơ thể lúc sinh vật chết là $M_0 = 1, 2 \cdot 10^{-12}$ (g). Sinh vật này sống cách đây bao nhiêu năm? (Làm tròn kết quả đến hàng trăm.)

🗩 Lời giải.

Gọi t là thời gian từ lúc sinh vật chết đến nay. Ta có:

$$5 \cdot 10^{-13} = 1,2 \cdot 10^{-12} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}} = \frac{5}{12} \Leftrightarrow \frac{t}{T} = \log_{\frac{1}{2}} \frac{5}{12}$$
$$\Leftrightarrow t = T \log_{\frac{1}{2}} \frac{5}{12} = -5730 \cdot \log_{\frac{1}{2}} \frac{5}{12} \approx 7237 \approx 7200.$$

Vậy sinh vật này sống cách đây khoảng 7200 năm.

VÍ DỤ 5. Công thức tính khối lượng còn lại của một chất phóng xạ từ khối lượng ban đầu M_0 là $M(t) = M_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{T}}$, trong đó t là thời gian tính từ thời điểm ban đầu và T là chu kì bán rã của chất. Đồng vị plutonium-234 có chu kì bán rã là 9 giờ.

 $(Ngu\`{o}n: https://pubchem.ncbi.nlm.nih.gov/element/Plutonium\#section=AtomicMass)$ -Half-Life-and-Deca)

Từ khối lượng ban đầu 200 g, sau bao lâu thì khối lượng plutonium-234 còn lại là

🗭 Lời giải.

a)
$$100 = 200 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{9}} \Leftrightarrow t = 9$$
 giờ.

b)
$$50 = 200 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{9}} \Leftrightarrow t = 18 \text{ gi}.$$

c)
$$20 = 200 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{9}} \Leftrightarrow t = 9 \cdot \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{10} \approx 29.9$$
 giờ.

VÍ DỤ 6. Nước chanh có độ pH bằng 2,4; giấm có độ pH bằng 3. Nước chanh có độ acid gấp bao nhiêu lần giấm (nghĩa là có nồng độ H⁺ gấp bao nhiêu lần)? (Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

🗭 Lời giải.

Kí hiệu x, y lần lượt là nồng độ H^+ trong nước chanh và giấm.

Theo giả thiết, ta có $2.4 = -\log x$ và $3 = -\log y$.

Suy ra
$$x = 10^{-2.4}$$
 và $y = 10^{-3}$. Suy ra $\frac{x}{y} = \frac{10^{-2.4}}{10^{-3}} = 10^{0.6} \approx 3.98$.

Vậy nồng độ H^+ của nước chanh gấp 3.98 lần nồng độ H^+ của giấm.

2. Bài tập rèn luyện

BÁI 1. Một người gửi ngân hàng 100 triệu đồng theo hình thức lãi kép có kì hạn là 12 tháng với lãi suất là x %/năm (x > 0). Sau 3 năm, người đó rút được cả gốc và lãi là 119,1016 triệu đồng. Tìm x, biết rằng lãi suất không thay đổi qua các năm và người đó không rút tiền ra trong suốt thời gian gửi.

Gọi P_n là số tiền gốc và lãi nhận được sau n kì gửi.

 P_0 là số tiền gửi ban đầu.

x% lãi suất.

Với n=3 năm, $P_3=119{,}1016$ triệu; $P_0=100$ triệu, ta có

$$P_3 = P_0(1+x)^3 \Leftrightarrow (1+x)^3 = \frac{P_3}{P_0} \Leftrightarrow 1+x = \sqrt[3]{\frac{P_3}{P_0}}$$

$$\Leftrightarrow x = \sqrt[3]{\frac{P_3}{P_0}} - 1 = \sqrt[3]{\frac{119,1016}{100}} - 1 = \frac{3}{50} = 0.06 = 6\%$$

Vậy lãi suất gửi là 6%/năm

 \mathbf{B} Âl 2. Sử dụng công thức tính mức cường độ âm L ở ví dụ 14, hãy tính mức cường độ âm mà tai người có thể nghe được, biết rằng tại người có thể nghe được âm với cường độ âm từ 10^{-12} W/m^2 đến 10 W/m^2 .

Ta có công thức mức cường độ âm $L = 10 \log \frac{I}{10^{-12}}$, trong đó I (đơn vị: W/m²) là cường độ âm.

Mức cường độ âm mà tai người có thể nghe được là

$$10\log \frac{10^{-12}}{10^{-12}} < L < 10\log \frac{10}{10^{-12}} \Leftrightarrow 0 < L < 130.$$

Vậy mức cường độ âm mà tai người nghe được từ 0 đến 130 dB.

BÀI 3. Bác Minh gửi tiết kiệm 500 triệu đồng ở một ngân hàng với lãi suất không đổi 7,5% một năm theo thể thức lãi kép kì hạn 12 tháng. Tổng số tiền bác Minh thu được (cả vốn lẫn lãi) sau n năm là:

$$A = 500 \cdot (1 + 0.075)^n$$
 (triệu đồng).

Tính thời gian tối thiểu gửi tiết kiệm để bác Minh thu được ít nhất 800 triệu đồng (cả vốn lẫn lãi).

🗭 Lời giải.

Ta cần tìm n sao cho

$$A \ge 800 \Leftrightarrow 500 \cdot (1 + 0.075)^n \ge 800 \Leftrightarrow (1.075)^n \ge \frac{8}{5} \Leftrightarrow n \ge \log_{1.075} \frac{8}{5} \approx 6.5.$$

Vậy sau khoảng 6,5 năm gửi tiết kiệm, bác Minh thu được ít nhất 800 triệu đồng.

BÀI 4. Số lượng vi khuẩn ban đầu trong một mẻ nuôi cấy là 500 con. Người ta lấy một mẫu vi khuẩn trong mẻ nuôi cấy đó, đếm số lương vi khuẩn và thấy rằng tỉ lê tăng trưởng vi khuẩn là 40% mỗi giờ. Khi đó số lương vi khuẩn N(t) sau t giờ nuôi cấy được ước tính bằng công thức sau:

$$N(t) = 500e^{0.4t}$$
.

Hỏi sau bao nhiều giờ nuôi cấy, số lượng vi khuẩn vượt mức 80000 con?

Lời giải.

Kể từ lúc bắt đầu nuôi cấy, số lượng vi khuẩn vượt mức 80000 con ta có

$$500e^{0.4t} \ge 80000 \Leftrightarrow e^{0.4t} \ge 160 \Leftrightarrow 0.4t \ge \ln 160 \Leftrightarrow t \ge \frac{\ln 160}{0.4} \approx 13 \text{ (giò)}.$$

Vậy sau khoảng 13 giờ nuôi cấy, số lượng vi khuẩn vượt mức 80000 con.

BÀI 5. Giả sử nhiệt độ T (°C) của một vật giảm dần theo thời gian cho bởi công thức:

$$T = 25 + 70e^{-0.5t}$$
,

trong đó thời gian t được tính bằng phút.

- a) Tìm nhiệt độ ban đầu của vật.
- b) Sau bao lâu nhiệt độ của vật còn lại 30°C?

Lời giải.

- a) Nhiệt độ ban đầu của vật là $T_0 = 25 + 70e^{-0.5 \cdot 0} = 95$ (°C).
- b) Nhiệt độ của vật còn lại 30 °C, ta có

$$30 = 25 + 70e^{-0.5t} \Leftrightarrow 70e^{-0.5t} = 5 \Leftrightarrow e^{-0.5t} = \frac{1}{14}$$
$$\Leftrightarrow -0.5t = \ln \frac{1}{14} \Leftrightarrow t \approx 5.3 \text{ (phút)}.$$

BÀI 6. Tính nồng đô ion hydrogen (tính bằng mol/lít) của một dung dịch có độ pH là 8.

Nồng độ ion hydrogen trong dung dịch đó là $[H^+] = 10^{-8}$.

BÀI 7. Chất phóng xa polonium-210 có chu kì bán rã là 138 ngày. Điều này có nghĩa là cứ sau 138 ngày, lương polonium còn lại trong một mẫu chỉ bằng một nửa lượng ban đầu. Một mẫu 100 g có khối lượng polonium-210 còn lại sau t ngày được tính theo công thức $M(t) = 100 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{\iota}{138}}$ (g).

> (Nguồn:https://pubchem.ncbi.nlm.nih.gov/element/Polonium#section= Atomic-Mass-Half-Life-and-Decay)

- a) Khối lượng polonium-210 còn lại bao nhiêu sau 2 năm?
- b) Sau bao lâu thì còn lại 40 g polonium-210?

🗭 Lời giải.

a) Đổi 2 năm = 730 ngày. Khối lượng polonium-210 còn lại sau 2 năm là

$$M(t) = 100 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{730}{138}} \approx 2,556 \text{ g.}$$

b)
$$100\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{138}}=40\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{138}}=\frac{2}{5}\Leftrightarrow t=138\cdot\log_{\frac{1}{2}}\frac{2}{5}\approx 182,4.$$
 Vây cần 185 ngày để còn lại 40 g polonium-210.

BÀI 8. Nhắc lại rằng, mức cường độ âm L được tính bằng công thức $L = 10 \log \left(\frac{I}{I_0}\right)$ (dB), trong đó I là cường độ của âm tính bằng W/m² và $I_0 = 10^{-12}$ W/m².

(Nguồn: Vật lí 12, NXB Giáo dục Việt Nam, năm 2017, trang 52)

- a) Một giáo viên đang giảng bài trong lớp học có mức cường độ âm là 50 dB. Cường độ âm của giọng nói giáo viên bằng bao nhiêu?
- b) Mức cường độ âm trong một nhà xưởng thay đổi trong khoảng từ 75 dB đến 90 dB. Cường độ âm trong nhà xưởng này thay đổi trong khoảng nào?

🗭 Lời giải.

- a) Ta có $L=50 \Leftrightarrow 10\log\left(\frac{I}{I_0}\right)=50 \Leftrightarrow \log\left(\frac{I}{I_0}\right)=5 \Leftrightarrow I=T_0\cdot 10^5 \Leftrightarrow I=10^{-7}~\mathrm{W/m^2}.$ Vậy cường độ âm của giọng nói giáo viên bằng $10^{-7}~\mathrm{W/m^2}.$
- b) Ta có 75 < L < 90 \Leftrightarrow 7,5 < $\log\left(\frac{I}{I_0}\right)$ < 9 \Leftrightarrow 10^{-2,5} < I < 10⁻³. Vậy cường độ âm trong nhà xưởng này thay đổi trong khoảng từ 10^{-2,5} W/m² đến 10⁻³ W/m².

3. Bài tấp trắc nghiệm

CÂU 1. Ông A gửi 100 triệu đồng vào ngân hàng theo thể thức lãi kép kì hạn một năm với lãi suất là 12% một năm. Sau n năm ông A rút toàn bộ tiền (cả vốn lẫn lãi). Tìm n nguyên dương nhỏ nhất để số tiền lãi nhận được hơn 40 triệu đồng. (Giả sử rằng lãi suất hàng năm không thay đổi).



B 3.



D)4.

D Lời giải.

Số tiền lãi sau n năm là $100(1+12\%)^n-100$ (triệu đồng).

Ta có $100(1+12\%)^n - 100 > 40 \Leftrightarrow 1{,}12^n > \frac{7}{5} \Rightarrow n > 2{,}96.$

Vậy giá trị nguyên dương nhỏ nhất của n là $\stackrel{\circ}{3}$.

Chon đán án R

CÂU 2. Anh A vào làm ở công ty X với mức lương ban đầu là 10 triệu đồng/ tháng. Nếu hoàn thành tốt nhiệm vụ thì cứ sau 6 tháng làm việc, mức lương của anh lại được tăng thêm 20%. Hỏi bắt đầu từ tháng thứ mấy kể từ khi vào làm ở công ty X, tiền lương mỗi tháng của anh A nhiều hơn 20 triệu đồng(biết rằng trong suốt thời gian làm ở công ty X anh A luôn hoàn thành tốt nhiệm vu?

(A) Tháng thứ 31.

B Tháng thứ 19.

C Tháng thứ 37.

D Tháng thứ 25.

🗭 Lời giải.

Tiền lương mỗi tháng lúc ban đầu là a = 10.

Sau chu kì mỗi lần 6 tháng hoàn thành tốt nhiệm vụ, mức lương tăng thêm là r = 20%. Áp dụng công thức lãi suất kép, ta có mức lương mỗi tháng sau n kì hạn (mỗi kì hạn 6 tháng)

$$P_n = a(1+r)^n.$$

Bài toán đưa về việc tìm số tự nhiên k nhỏ nhất sao cho

$$P_k > 20 \Leftrightarrow a(1+r)^k > 20 \Leftrightarrow (1+r)^k > 2 \Leftrightarrow k > \log_{1+r} 2 \Leftrightarrow k > 3, 8 \Rightarrow k = 4.$$

Vây sau 1 tháng lương đầu tiên và 4 kì hạn tiếp theo (mỗi kì hạn 6 tháng), anh A sẽ nhận được mức lương nhiều hơn 20 triệu đồng mỗi tháng.

Chọn đáp án \bigcirc

CÂU 3. Đầu năm 2018, ông An thành lập một công ty sản xuất rau sạch. Tổng số tiền ông An dùng để trả lương cho nhân viên trong năm 2018 là 1 tỷ đồng. Biết rằng cứ sau mỗi năm thì tổng số tiền dùng để trả lương cho nhân viên trong cả năm tăng thêm 15% so với năm trước. Năm đầu tiên ông An phải trả lương cho nhân viên trong cả năm vượt qua 2 tỷ đồng là năm nào?

(A) Năm 2020.

B Năm 2025.

© Năm 2022.

D Năm 2023.

🗭 Lời giải.

Số tiền ông An trả lương cho nhân viên trong năm thứ n là $T_n = 1 \cdot \left(1 + \frac{15}{100}\right)^n$.

bao nhiêu tháng người này thu về tổng số tiền cả gốc và lãi ít nhất 50 triệu đồng.

$$T_n > 2 \Leftrightarrow \left(1 + \frac{15}{100}\right)^n > 2 \Leftrightarrow n > 4,95.$$

Vậy sau 5 năm hay năm 2023 thì số tiền ông An trả lương cho nhân viên vượt qua 2 tỷ. Chon đáp án (D).......

CÂU 4. Một người gửi vào ngân hàng số tiền 30 triệu đồng, lãi suất 0,48% /tháng. Sau đúng 1 tháng kể từ ngày gửi người này gửi đều đặn thêm vào 1 triệu đồng, hai lần gửi liên tiếp cách nhau đúng 1 tháng. Giả định rằng lãi suất không thay đổi và người này không rút tiền ra, số tiền lãi của tháng trước được tính vào vốn và tính lãi cho tháng kế tiếp. Hỏi sau ít nhất



B 20.

(C) 17.

(D) 18.

🗭 Lời giải.

Dăt r = 0.48% = 0.0048.

Tổng số tiền người này nhận được sau đúng n tháng kể từ ngày gửi là

$$A_n = 30(1+r)^n + (1+r)^{n-1} + (1+r)^{n-2} + \dots + (1+r)$$

$$= 30(1+r)^n + (1+r) \cdot \frac{(1+r)^{n-1} - 1}{r}$$

$$= (1+r)^n \left(30 + \frac{1}{r}\right) - \frac{1+r}{r}.$$

Yêu cầu bài toán

$$A_n \ge 50 \quad \Leftrightarrow \quad (1+r)^n \left(30 + \frac{1}{r}\right) - \frac{1+r}{r} \ge 50$$

$$\Leftrightarrow \quad 1,0048^n \ge \frac{50 + \frac{1,0048}{0,0048}}{30 + \frac{1}{0,0048}}$$

$$\Leftrightarrow \quad n \ge \log_{1,0048} \frac{50 + \frac{1,0048}{0,0048}}{30 + \frac{1}{0,0048}}$$

$$\approx \quad 17.6.$$

Vậy ít nhất sau 18 tháng người này thu về số tiền ít nhất 50 triệu đồng.

Chon đáp án (D).....

CÂU 5. Ông A gửi vào ngân hàng 50 triệu đồng với lãi suất 0,5%/tháng. Hỏi ít nhất bao nhiêu tháng thì ông A có số tiền cả gốc lẫn lãi nhiều hơn 60 triệu đồng? Biết rằng trong suốt thời gian gửi lãi suất ngân hàng không thay đổi và ông A không rút tiền ra.

 (\mathbf{A}) 37 tháng.

(B) 38 tháng.

C 40 tháng.

(**D**) 36 tháng.

🗭 Lời giải.

Số tiền ông Agửi sau n tháng là $P_n = 50 \cdot (1 + 0.5\%)^n$ (triệu đồng). Để số tiền ông A thu được nhiều hơn 60 triệu đồng thì

$$50 \cdot (1 + 0.5\%)^n > 60 \Leftrightarrow n > \log_{1+0.5\%} \frac{6}{5} \approx 36,555.$$

Vậy ông A phải gửi ít nhất là 37 tháng.

Chọn đáp án (A).....

CÂU 6. Đầu năm 2016, ông A thành lập một công ty. Tổng số tiền ông A dùng để trả lương cho nhân viên trong năm 2016 là 1 tỷ đồng. Biết rằng cứ sau mỗi năm thì tổng số tiền để trả cho nhân viên trong cả năm đó tăng thêm 15% so với năm trước. Hỏi năm nào dưới đây là năm đầu tiên mà tổng số tiền ông A dùng để trả lương cho nhân viên trong cả năm lớn hơn 2 tỷ đồng?

(A) Năm 2021. (B) Năm 2022. (C) Năm 2023.

(**D**) Năm 2020.

🗩 Lời giải.

Năm 2016 là năm đầu tiên ông A trả lương cho nhân viên. Tổng số tiền phải trả là $T_0=1$ tỷ.

Tổng số tiền ông A phải trả cho nhân viên ở năm thứ n là $T_n = 1 \cdot (1 + 15\%)^n$.

Theo đề bài ta có $T_n > 2 \Leftrightarrow (1 + 15\%)^n > 2 \Leftrightarrow n > \log_{(1+15\%)} 2 \approx 4.9.$

Hay sau 5 năm tức là năm 2021, tổng số tiền ông A dùng để trả lương cho nhân viên trong cả năm lớn hơn 2 tỷ đồng. Chon đáp án (A).....

CÂU 7. Một người gửi tiền vào ngân hàng với lãi suất không thay đổi là 8%/năm. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm, số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn ban đầu (người ta gọi là lãi suất kép). Người đó định gửi tiền trong vòng 3 năm, sau đó rút tiền ra để mua một căn hộ chung cư trị giá 500 triệu đồng. Hỏi số tiền ít nhất người đó phải gửi vào ngân hàng để có đủ tiền mua căn hộ chung cư (kết quả làm tròn đến hàng triệu) là bao nhiêu?

(A) 395 triệu đồng.

B) 396 triệu đồng.

(c) 397 triệu đồng.

(**D**) 394 triệu đồng.

Lời giải.

Gọi A là số tiền gửi ban đầu.

Theo công thức lãi kép, số tiền người đó nhận được sau 3 năm là $T = A(1+r)^3$.

Theo đề bài, ta cần có $T \ge 500 \Leftrightarrow A(1+r)^3 \ge 500 \Leftrightarrow A \ge \frac{500}{(1+8\%)^3} \approx 397$ triệu đồng.

Vậy người đó phải gửi ít nhất 397 triệu đồng.

Chọn đáp án (C)......

CÂU 8. Anh Nam muốn mua một ngôi nhà trị giá 500 triệu đồng sau 3 năm nữa. Biết rằng lãi suất hàng năm vẫn không đổi là 8% một năm. Vậy ngay từ bây giờ số tiền ít nhất anh Nam phải gửi tiết kiệm vào ngân hàng theo thể thức lãi kép để có đủ tiền mua nhà (kết quả làm tròn đến hàng triệu) là

(A) 395 triệu đồng.

B) 397 triệu đồng.

© 394 triệu đồng.

(D) 396 triệu đồng.

🗭 Lời giải.

Gọi x là số tiền anh Nam phải giải tiết kiệm, đơn vị triệu đồng. Khi đó sau 3 năm, theo hình thức lãi kép thì số tiền anh Nam nhận được là $x\left(1+\frac{8}{100}\right)^3$. Vậy ta cần tìm x là số nguyên nhỏ nhất thỏa mãn điều kiện

$$x\left(1 + \frac{8}{100}\right)^3 \ge 500 \Leftrightarrow x \ge \frac{500}{\left(1 + \frac{8}{100}\right)^3} \approx 396, 9.$$

Vậy x = 397 triệu đồng.

Chọn đáp án B

CÂU 9. Một người gửi 300 triệu đồng vào ngân hàng theo thể thức lãi kép kì hạn một quý, với lãi suất 1,75%/một quý. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu tháng người gửi có ít nhất 500 triệu đồng (bao gồm cả vốn lẫn lãi) từ số vốn ban đầu? (Giả sử lãi suất không thay đổi).

(A) 29 tháng.

(B) 87 tháng.

© 30 tháng.

(D) 90 tháng.

Dùi giải.

Dăt r = 1 + 1,75% = 1,0175.

Sau quý thứ nhất, người đó có $300 + 300 \cdot 1.75\% = 300r$.

Sau quý thứ hai, người đó có $300r + 300r \cdot 1,75\% = 300r^2$.

. . .

Sau quý thứ n, người đó có $300r^n$.

Ta có $300r^n \ge 500 \Leftrightarrow n \ge \log_r \frac{5}{3}$.

Mà $n \in \mathbb{N}$ nên $n \ge 30$.

Suy ra sau ít nhất 30 quý, hay nói cách khác, sau ít nhất 90 tháng, người đó có ít nhất 500 triệu đồng.

Chọn đáp án (D)...

CÂU 10. Để đủ tiền mua nhà, anh An vay ngân hàng 500 triệu theo phương thức trả góp với lãi suất 0,85% một tháng. Nếu sau mỗi tháng, kể từ thời điểm vay, anh An trả nợ cho ngân hàng số tiền cố định là 10 triệu đồng bao gồm cả tiền lãi vay và tiền gốc. Biết phương thức trả lãi và gốc không thay đổi trong suốt quá trình anh An trả nợ. Hỏi sau bao nhiêu tháng thì anh trả hết nợ ngân hàng? (tháng cuối có thể trả dưới 10 triệu đồng).

A 66.

B 67.

(c) 65.

D 68.

🗭 Lời giải.

Đặt N = 500; A = 10; r = 0.85%.

Sau một tháng anh An còn nợ: $N \cdot (1+r) - A$.

Sau hai tháng anh An còn nợ

$$(N \cdot (1+r) - A) \cdot (1+r) - A = N \cdot (1+r)^2 - A \cdot [(1+r) + 1] = N \cdot (1+r)^2 - \frac{A}{r} \left[(1+r)^2 - 1 \right].$$

Tương tự sau n tháng anh An còn nợ $N \cdot (1+r)^n - \frac{A}{r} [(1+r)^n - 1].$

Anh An trả hết nợ sau n tháng khi n là nghiệm nguyên dương nhỏ nhất của bất phương trình

$$N \cdot (1+r)^n - \frac{A}{r} [(1+r)^n - 1] \le 0 \quad \Leftrightarrow 500 \cdot (1+0.85\%)^n - \frac{10}{0.85\%} [(1+0.85\%)^n - 1] \le 0$$

$$\Leftrightarrow (1+0.85\%)^n \ge \frac{40}{23}$$

$$\Leftrightarrow n \ge \log_{1+0.85\%} \frac{40}{23} \approx 65.38.$$

 $\Rightarrow n = 66.$

Chọn đáp án (A)

CÂU 11. Anh sinh viên A, sau khi ra trường, mong muốn rằng sau một năm sẽ có hơn 60 triệu đồng để mua xe. Hàng tháng anh A phải gửi vào ngân hàng một số tiền như nhau là m. Hỏi m nhỏ nhất là bao nhiêu?(làm tròn đến nghìn đồng). Biết rằng lãi suất ngân hàng là 0.6 %/tháng và hàng tháng số tiền lãi được nhập vào gốc.

A 4 809 000 đồng.

B 4 808 000 đồng.

(C) 4 890 000 đồng.

(**D**) 4 812 000 đồng.

🗭 Lời giải.

Gọi T_n là số tiền anh A có được sau n tháng, $n \in \mathbb{N}$.

Gọi r(%) là lãi suất của ngân hàng, r > 0.

Gọi m là số tiền hàng tháng anh A gửi vào ngân hàng, m không đổi, m > 0.

Đến cuối tháng thứ nhất, anh A có số tiền là $T_1 = m + m \cdot r = m(1+r)$. Đến cuối tháng thứ hai, anh A có số tiền là

$$T_2 = (T_1 + m)(1 + r)$$

$$= m(1 + r) + m + [m(1 + r) + m]r$$

$$= m[(1 + r)^2 + (1 + r)]$$

$$= m\frac{(1 + r)^3 - (1 + r)}{r}.$$

Đến cuối tháng thứ ba, anh A có số tiền là $T_3=(T_2+m)(1+r)=m\frac{(1+r)^4-(1+r)}{T_3}$

Tổng quát, đến cuối tháng thứ n, anh A có số tiền là $T_n = m \frac{(1+r)^{n+1} - (1+r)}{r}$.

Để sau 1 năm, anh A có số tiền hơn 60 triệu đồng thì phải có

$$T_{12} = m \frac{(1+r)^{13} - (1+r)}{r} > 60 \Leftrightarrow m > \frac{60 \cdot r}{(1+r)^{13} - (1+r)} = \frac{60 \cdot 0.6\%}{(1+0.6\%)^{13} - (1+0.6\%)} \approx 4.808300.$$

Vậy anh A cần gửi vào ngân hàng mỗi tháng nhiều hơn 4 809 000 đồng.

(B) 16.

Chon đáp án (A)....

CÂU 12. Giả sử vào cuối năm thì một đơn vị tiền tệ mất 10% giá trị so với đầu năm. Tìm số nguyên dương nhỏ nhất sao cho sau n năm, đơn vị tiền tệ sẽ mất đi ít nhất 90% giá trị của nó? **(D)** 22.

(A) 20. 🗭 Lời giải.

Giả sử giá trị của đơn vị tiền tệ đang xét là A. Ta thấy

- Sau năm thứ 1: giá trị của đơn vị tiền tệ còn lại $\frac{9}{10}A$.
- Sau năm thứ 2: giá trị của đơn vị tiền tệ còn lại $\left(\frac{9}{10}\right)^2 A$.
- Sau năm thứ n: giá trị của đơn vị tiền tệ còn lại $\left(\frac{9}{10}\right)^n A$.

Theo đề bài, ta cần tìm n nhỏ nhất sao cho $\left(\frac{9}{10}\right)^n A < \frac{1}{10}A \Rightarrow n > 21.85 \Rightarrow n = 22.$

CÂU 13. Ông A bị nhiễm một loại vi-rút nên phải nhập viện và được điều trị ngay lập tức. Kể từ ngày bắt đầu nhập viện, sau mỗi ngày điều trị thì lượng vi-rút trongg cơ thể ông A giảm đi 10% so với ngày trước đó. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu ngày thì ông A sẽ được xuất viện, biết ông được xuất viện khi lượng vi-rút trong cơ thể của ông không vượt quá 30%?

🗩 Lời giải.

(A) 14 ngày.

Gọi x là số lượng vi khuẩn ban đầu.

Số lượng vi khuẩn sau n ngày là $x(1-10\%)^n$.

Theo đề bài ta có $x(1-10\%)^n \le x \cdot 30\% \Leftrightarrow (1-10\%)^n \le 30\% \Leftrightarrow x \ge \log_{1-10\%} 30\% \approx 11,42.$

Vậy sau ít nhất 12 ngày thì ông A được xuất viện.

Chon đáp án (C).....

CÂU 14. Một nghiên cứu cho thấy một nhóm học sinh được cho xem cùng một danh sách các loài sinh vật và được kiểm tra lai xem ho nhớ bao nhiều phần trăm mỗi tháng. Sau t tháng, khả năng nhớ trung bình của nhóm học sinh được cho bởi công thức $M(t) = 60 - 15 \ln(t+1)$, t > 0 (đơn vị phần trăm). Hỏi sau ít nhất bao nhiêu tháng thì nhóm học sinh chỉ nhớ được không vượt quá 10% danh sách đó?

(**A**) 28 tháng.

(**B**) 27 tháng.

(B) 11 ngày.

(**c**) 24 tháng.

(c) 12 ngày.

(**D**) 25 tháng.

(**D**) 13 ngày.

Lời giải.

Xét bất phương trình

$$\begin{split} M(t) &\leq 10\% \Leftrightarrow 60 - 15 \ln (t+1) \leq 10 \\ &\Leftrightarrow 15 \ln (t+1) \geq 50 \\ &\Leftrightarrow \ln (t+1) \geq \frac{10}{3} \\ &\Leftrightarrow t \geq \mathrm{e}^{\frac{10}{3}} - 1 \approx 27{,}03. \end{split}$$

Vậy sau ít nhất 28 tháng thì nhóm học sinh chỉ nhớ được không vượt quá 10% danh sách đó.

Chọn đáp án (A).....

CÂU 15. Bộ Y tế phát đi một thông tin tuyên truyền về phòng chống dịch COVID-19. Thông tin này lan truyền đến người dân theo công thức $P(t) = \frac{1}{1 + ae^{-kt}}$, với P(t) là tỉ lệ dân số nhận được thông tin vào thời điểm t và a, k là các hằng số dương. Cho $a=3,\,k=\frac{1}{2}$ với t đo bằng giờ. Hỏi cần phải ít nhất bao lâu để hơn 90% dân số nhận được thông tin?

 (\mathbf{A}) 5,5 giờ.

B 8 giờ.

(c) 4,5 giờ.

(**D**) 6,6 giờ.

🗭 Lời giải.

Cho
$$a=3, k=\frac{1}{2}$$
 thì $P(t)=\frac{1}{1+3\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}}$
Với $P(t)\geq 90\%\Leftrightarrow \frac{1}{1+3\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}}\geq \frac{90}{100}\Leftrightarrow t\geq -2\ln\frac{1}{27}\approx 6.6$ (giờ).

Vậy cần ít nhất 6,6 giờ để hơn 90% dân số nhận được thông tin.

Chon đáp án (D).....

CÂU 16. Một nhóm các chuyển gia y tế đang nghiên cứu và thử nghiệm độ chính xác của một bộ xét nghiệm COVID-19. Giả sử cứ sau n lần thử nghiệm và điều chỉnh bộ xét nghiệm thì tỉ lệ chính xác của bộ xét nghiệm đó tuân theo công thức $S(n) = \frac{1}{1 + 2020 \cdot 10^{-0.01n}}. \text{ Hỏi phải tiến hành ít nhất bao nhiều lần thử nghiệm và điều chỉnh bộ xét nghiệm để đảm bảo$ tỉ lệ chính xác của bộ xét nghiệm đó đạt trên 90%? (A) 428. (B) 427. (C) 426. (D) 425.

🗭 Lời giải.

Theo đề bài ta có

$$\frac{1}{1 + 2020 \cdot 10^{-0.01n}} > 90\%$$

$$\Leftrightarrow 1 + 2020 \cdot 10^{-0.01n} < \frac{1}{90\%}$$

$$\Leftrightarrow 10^{-0.01n} < \frac{1}{18180}$$

$$\Leftrightarrow -0.01n < \log\left(\frac{1}{18180}\right)$$

$$\Leftrightarrow n > \frac{\log\left(\frac{1}{18180}\right)}{-0.01} \approx 425.96.$$

Vậy số lần xét nghiệm tối thiểu là 426 lần.

Chọn đáp án $\overline{(C)}$

Hàm số mũ. Hàm số logarit		
Bài 18	. Phép tính lũy thừa với số mũ thực	1
A	Tóm tắt lý thuyết	1
B	Các dạng toán thường gặp	1
	Dạng 1. Tính giá trị biểu thức chứa lũy thừa	
	Dạng 2. Rút gọn biểu thức chứa lũy thừa	3
	Dạng 3. So sánh biểu thức lũy thừa	5
Bài 19	. Phép tính logarit	5
A	Tóm tắt lý thuyết	5
B	Các dạng toán thường gặp	6
	Dạng 4. Tính giá trị biểu thức chứa lôgarít	
	Dạng 5. Biến đổi, rút gọn, biểu diễn biểu thức chứa lôgarít	
	Dạng 6. Toán thực tế, liên môn	
Bài 20	. HÀM SỐ MŨ. HÀM SỐ LOGARIT	15
A	Tóm tắt lý thuyết	15
B	Các dạng toán thường gặp	16
	🗁 Dạng 7. Tập xác định của hàm số	
	Dạng 8. Sự biến thiên và đồ thị của hàm số mũ và lôgarít	
D\:01	Dạng 9. Bài toán thực tế	
	. Phương trình, bất phương trình mũ và lôgarit	26
A	Tóm tắt lý thuyết	
B	Các dạng toán thường gặp	
	Dạng 10. Phương trình mũ, lôgarit cơ bản	
	 Dạng 11. Bất phương trình mũ, lôgarít cơ bản Dạng 12. Phương trình mũ, lôgarit đưa về cùng cơ số 	
	Dạng 13. Bất phương trình mũ, lôgarít đưa về cùng cơ số	
	Dạng 14. Bài toán thực tế, liên môn	
LỜI GIẢI CHI TIẾT		37
Hàm số mũ. Hàm s	ố logarit	37
Bài 18	. Phép tính lũy thừa với số mũ thực	37
	Tóm tắt lý thuyết	
B	Các dạng toán thường gặp	
	Cac dạng toan thương gạp Dạng 1. Tính giá trị biểu thức chứa lũy thừa	
	Dạng 2. Rút gọn biểu thức chứa lũy thừa	
	Dạng 3. So sánh biểu thức lũy thừa	
Bài 19	. Phép tính logarit	47
A	Tóm tắt lý thuyết	47
B	Các dạng toán thường gặp	
	Dạng 4. Tính giá trị biểu thức chứa lôgarít	
	Dạng 5. Biến đổi, rút gọn, biểu diễn biểu thức chứa lôgarít	
	Dạng 6. Toán thực tế, liên môn	65

Bài 20). HÀM SỐ MŨ. HÀM SỐ LOGARIT	70
A	Tóm tắt lý thuyết	70
B	Các dạng toán thường gặp	71
•	🗁 Dạng 7. Tập xác định của hàm số	71
	🗁 Dạng 8. Sự biến thiên và đồ thị của hàm số mũ và lôgarít	
	🗁 Dạng 9. Bài toán thực tế	87
Bài 21	L. Phương trình, bất phương trình mũ và lôgarit	92
A	Tóm tắt lý thuyết	92
B	Các dạng toán thường gặp	93
	Dạng 10. Phương trình mũ, lôgarit cơ bản	93
	🗁 Dạng 11. Bất phương trình mũ, lôgarít cơ bản	96
	Dạng 12. Phương trình mũ, lôgarit đưa về cùng cơ số	100
	🗁 Dạng 13. Bất phương trình mũ, lôgarít đưa về cùng cơ số	105
	Dạng 14. Bài toán thực tế, liên môn	114

