Bài 31. ĐẠO HÀM

A. TÓM TẮT KIẾN THỨC

1. Đạo hàm của hàm số tại một điểm

ĐỊNH NGHĨA 31.1. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên khoảng $(a;b)$ và điểm $x_0 \in (a;b)$. Nếu tồn tại giới hạn hữu hạn

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

thì giới hạn đó được gọi là đạo hàm của hàm số $y=f(x)$ tại điểm x_0, kí hiệu bởi $f'(x_0)$ (hoặc $y'(x_0)$), tức là

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Để tính đạo hàm của hàm số $y=f(x)$ tại điểm $x_0\in(a;b)$, ta thực hiện theo các bước sau:

- *Tính $f(x)-f(x_0)$.*
- *Lập và rút gọn tỉ số $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ với $x\in(a;b), x\neq x_0$.*
- *Tìm giới hạn $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.*

Đặt $\Delta x = x-x_0$, khi đó đạo hàm của hàm số đã cho tại điểm x_0 có thể tính theo công thức:

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

Δx được gọi là số gia của biến số tại điểm x_0.

2. Đạo hàm của hàm số trên một khoảng

ĐỊNH NGHĨA 31.2. Hàm số $y=f(x)$ được gọi là có đạo hàm trên khoảng $(a;b)$ nếu nó có đạo hàm $f'(x)$ tại mọi điểm x thuộc khoảng đó, kí hiệu là $y'=f'(x)$.

Nếu phương trình chuyển động của một vật là $s=f(t)$ thì $v(t)=f'(t)$ là vận tốc tức thời của vật tại thời điểm t.

3. Ý nghĩa hình học của đạo hàm

3.1. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số

ĐỊNH NGHĨA 31.3. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại điểm $P(x_0;f(x_0))$ là đường thẳng đi qua P với hệ số góc $k=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ nếu giới hạn này tồn tại và hữu hạn, nghĩa là $k=f'(x_0)$. Điểm P gọi là tiếp điểm.

NHẬN XÉT. Hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại điểm $P(x_0;f(x_0))$ là đạo hàm $f'(x_0)$.

3.2. Phương trình tiếp tuyến

ĐỊNH NGHĨA 31.4. Nếu hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm tại điểm x_0 thì phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm $P(x_0;y_0)$ là

$$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0),$$

trong đó $y_0=f(x_0)$.

MATH TEACHER

ĐIỂM:

"It's not how much time you have, it's how you use it."

QUICK NOTE

QUICK NOTE

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP

Dạng 1. Tính đạo hàm của hàm số bằng định nghĩa

Ta sử dụng một trong hai cách tính sau:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \text{hoặc} \quad f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

1. Ví dụ minh hoạ

VÍ DỤ 1. Tính (bằng định nghĩa) đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = 2x - 3$ tại điểm $x_0 = 1$;

b) $y = x^2$ tại điểm $x_0 = 2$;

c) $y = x^2 + 1$ tại điểm $x_0 = -1$;

d) $y = x^2 + 2x$ tại điểm $x_0 = 3$;

e) $y = x^2 - 2x + 1$ tại điểm $x_0 = -2$;

f) $y = 2x^3$ tại điểm $x_0 = 1$;

g) $y = x^3 + 1$ tại điểm $x_0 = 2$;

h) $y = x^3 - x$ tại điểm $x_0 = 3$.

VÍ DỤ 2. Tính (bằng định nghĩa) đạo hàm của các hàm số sau:

a) $f(x) = \dfrac{2}{x}$ tại điểm $x_0 = 3$;

b) $f(x) = \sqrt{x}$ tại điểm $x_0 = 1$;

c) $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$ tại điểm $x_0 = 2$;

d) $f(x) = \sqrt{x-1}$ tại điểm $x_0 = 5$.

VÍ DỤ 3. Sử dụng định nghĩa, tìm đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = 2x - 3$;

b) $y = x^2$;

c) $y = x^2 + 1$;

d) $y = x^2 + 2x$;

e) $y = x^2 - 2x + 1$;

f) $y = 2x^3$;

g) $y = x^3 + 1$;

h) $y = x^3 - x$.

VÍ DỤ 4. Sử dụng định nghĩa, tìm đạo hàm của các hàm số sau:

a) $f(x) = \dfrac{2}{x}$;

b) $f(x) = \sqrt{x}$;

c) $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$;

d) $f(x) = \sqrt{x-1}$.

2. Bài tập áp dụng

BÀI 1. Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = \dfrac{1}{x}$ tại $x_0 = 2$ bằng định nghĩa.

BÀI 2. Tính đạo hàm của hàm số $y = -x^2 + 3x - 2$ tại điểm $x_0 = 2$ bằng định nghĩa.

BÀI 3. Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = \dfrac{1}{x-3}$ tại $x_0 = 4$.

BÀI 4. Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = \sin 3x$ tại $x_0 = \dfrac{\pi}{6}$.

BÀI 5. Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = 4x - x^2$ tại điểm $x = 2$.

BÀI 6. Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{3x+1}$ tại điểm $x = 1$.

BÀI 7. Sử dụng định nghĩa, tìm đạo hàm của các hàm số sau:

a) $f(x) = C$ (C là hằng số);

b) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ với $x \neq 0$;

c) $f(x) = x^2$;

d) $f(x) = cx^2$ với c là hằng số;

e) $f(x) = x^3$;

f) $f(x) = 3x - 5$;

g) $f(x) = \sqrt{x+2}$;

h) $f(x) = cosx$.

BÀI 8. Quãng đường rơi tự do của một vật được biểu diễn bởi công thức $s(t) = 4{,}9t^2$ với t là thời gian tính bằng giây và s tính bằng mét. Tính vận tốc tức thời của chuyển động lúc $t = 2$.

QUICK NOTE

Dạng 2. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số

1. Ví dụ minh hoạ

VÍ DỤ 1. Cho hàm số $y = -x^2$ có đồ thị (C).

a) Xác định hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm có hoành độ bằng 3.

b) Viếp phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm $M(3; -9)$.

VÍ DỤ 2. Cho (C) là đồ thị của hàm số $f(x) = \dfrac{1}{x}$ và điểm $M(1; 1) \in (C)$. Tính hệ số góc của tiếp tuyến của (C) tại điểm M và viết phương trình tiếp tuyến đó.

VÍ DỤ 3. Cho (C) là đồ thị của hàm số $y = \sqrt{x}$. Viết phương trình tiếp tuyến của (C), biết:

a) Tiếp điểm có hoành độ $x_0 = 4$;

b) Tiếp điểm có tung độ $y_0 = 3$.

VÍ DỤ 4. Viết phương trình tiếp tuyến của parabol $y = x^2 + 2x$, biết:

a) Tiếp điểm có hoành độ $x_0 = 2$;

b) Tiếp điểm có tung độ $y_0 = 3$.

2. Bài tập áp dụng

BÀI 1. Cho hàm số $y = x^2$ có đồ thị (C).

a) Xác định hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm có hoành độ bằng 2.

b) Viếp phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm $M(2; 4)$.

BÀI 2. Cho (C) là đồ thị của hàm số $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$ và điểm $M(2; 1) \in (C)$. Tính hệ số góc của tiếp tuyến của (C) tại điểm M và viết phương trình tiếp tuyến đó.

BÀI 3. Cho (C) là đồ thị của hàm số $y = \sqrt{x-1}$. Viết phương trình tiếp tuyến của (C), biết:

a) Tiếp điểm có hoành độ $x_0 = 2$;

b) Tiếp điểm có tung độ $y_0 = 3$.

BÀI 4. Viết phương trình tiếp tuyến của parabol $y = x^2 + 1$, biết:

a) Tiếp điểm có hoành độ $x_0 = 3$;

b) Tiếp điểm có tung độ $y_0 = 5$.

C. BÀI TẬP RÈN LUYỆN

BÀI 5. Tính (bằng định nghĩa) đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = x^2 - x$ tại $x_0 = 1$;

b) $y = -x^3$ tại $x_0 = -1$;

c) $f(x) = 3x^3 - 1$ tại $x_0 = 1$.

BÀI 6. Sử dụng định nghĩa, tìm đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = kx^2 + c$ (với k, c là hằng số);

b) $y = x^3$.

c) $f(x) = -x^2$;

d) $f(x) = x^3 - 2x$;

e) $f(x) = \dfrac{4}{x}$.

BÀI 7. Một chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $s(t) = 4t^3 + 6t + 2$, trong đó s tính bằng mét và t là thời gian tính bằng giây. Tính vận tốc tức thời của chuyển động tại $t = 2$.

BÀI 8. Trên Mặt Trăng, quãng đường rơi tự do của một vật được cho bởi công thức $h(t) = 0,81t^2$, với t được tính bằng giây và h tính bằng mét. Hãy tính vận tốc tức thời của vật được thả rơi tự do trên Mặt Trăng tại thời điểm $t = 2$.

QUICK NOTE

BÀI 9. Một vật được phóng theo phương thẳng đứng lên trên từ mặt đất với vận tốc ban đầu là 19,6 m/s thì độ cao h của nó (tính bằng mét) sau t giây được cho bởi công thức $h = 19{,}6t - 4{,}9t^2$. Tìm vận tốc của vật khi nó chạm đất.

BÀI 10. Tìm hệ số góc của tiếp tuyến của parabol $y = x^2$ tại điểm có hoành độ $x_0 = -1$.

BÀI 11. Viết phương trình tiếp tuyến của parabol $(P)\colon y = 3x^2$ tại điểm có hoành độ $x_0 = 1$.

BÀI 12. Cho hàm số $f(x) = -2x^2$ có đồ thị (C) và điểm $A(1; -2) \in (C)$. Tính hệ số góc của tiếp tuyến với (C) tại điểm A.

BÀI 13. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3$.

a) Tại điểm $(-1; 1)$;

b) Tại điểm có hoành độ bằng 2.

BÀI 14. Cho hàm số $y = -2x^2 + x$ có đồ thị (C).

a) Xác định hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm có hoành độ bằng 2.

b) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm $M(2; -6)$.

BÀI 15. Viết phương trình tiếp tuyến của parabol $y = -x^2 + 4x$, biết:

a) Tiếp điểm có hoành độ $x_0 = 1$;

b) Tiếp điểm có tung độ $y_0 = 0$.

BÀI 16. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2(C)$. Viết phương trình tiếp tuyến của (C):

a) Tại giao điểm của đồ thị hàm số với trục Oy

b) Tại điểm có tung độ bằng 2

c) Tại điểm M mà tiếp tuyến tại M song song với đường thẳng $y = 6x + 1$

d) Tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $y = \dfrac{-1}{9}x + 3$

BÀI 17. Chứng minh rằng hàm số $f(x) = |x|$ không có đạo hàm tại điểm $x_0 = 0$, nhưng có đạo hàm tại mọi điểm $x \neq 0$.

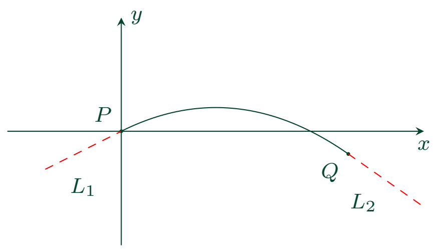
BÀI 18. Một kỹ sư thiết kế một đường ray tàu lượn, mà mặt cắt của nó gồm một cung đường cong có dạng parabol, đoạn dốc lên L_1 và đoạn dốc xuống L_2 là những phần đường thẳng có hệ số góc lần lượt là 0,5 và $-0{,}75$. Để tàu lượn chạy êm và không bị đổi hướng đột ngột, L_1 và L_2 phải là những tiếp tuyến của cung parabol tại các điểm chuyển tiếp P và Q. Giả sử gốc tọa độ đặt tại P và phương trình của paraol là $y = ax^2 + bx + c$, trong đó x tính bằng mét.

a) Tìm c.

b) Tính $y'(0)$ và tìm b.

c) Giả sử khoảng cách theo phương ngang giữa P và Q là 40m.
Tìm a.

d) Tìm chênh lệch độ cao giữa hai điểm chuyển tiếp P và Q.



BÀI 19. Giả sử chi phí C (USD) để sản xuất Q máy vô tuyến là $C(Q) = Q^2 + 80Q + 3500$.

a) Ta gọi chi phí biên là chi phí gia tăng để sản xuất thêm 1 sản phẩm từ Q sản phẩm lên $Q + 1$ sản phẩm. Giả sử chi phí biên được xác định bởi hàm số $C'(Q)$. Tìm hàm chi phí biên.

b) Tìm $C'(90)$ và giải thích ý nghĩa kết quả tìm được.

c) Hãy tính chi phí sản xuất máy vô tuyến thứ 100.

QUICK NOTE

Bài 32. CÁC QUY TẮC TÍNH ĐẠO HÀM

A. TÓM TẮT KIẾN THỨC

1. Đạo hàm của một số hàm số thường gặp

1.1. Đạo hàm của hàm số $y = x^n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$

ĐỊNH LÍ 32.1. *Hàm số $y = x^n$ $(n \in \mathbb{N})$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $(x^n)' = nx^{n-1}$.*

1.2. Đạo hàm của hàm số $y = \sqrt{x}$

ĐỊNH LÍ 32.2. *Hàm số $y = \sqrt{x}$ có đạo hàm trên khoảng $(0; +\infty)$ và $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.*

2. Đạo hàm của tổng hiệu tích thương

ĐỊNH LÍ 32.3. *Giả sử các hàm số $u = u(x)$, $v = v(x)$ có đạo hàm trên khoảng $(a; b)$. Khi đó*

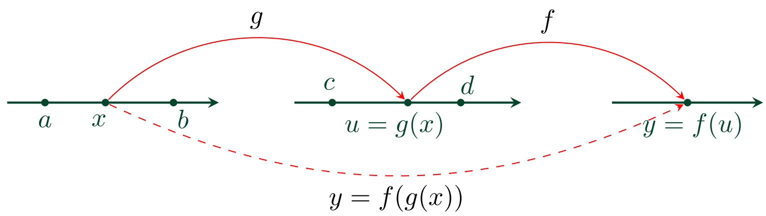
- $(u+v)' = u' + v'$;
- $(u-v)' = u' - v'$;
- $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$;
- $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$ $(v = v(x) \neq 0)$.

⚠
- *Quy tắc tính đạo hàm của tổng, hiệu có thể áp dụng cho tổng, hiệu của hai hay nhiều hàm số.*
- *Với k là một hằng số, ta có $(ku)' = k \cdot u'$.*
- *Đạo hàm của hàm số nghịch đảo: $\left(\dfrac{1}{v}\right)' = -\dfrac{v'}{v^2}$ $(v = v(x) \neq 0)$.*

3. Đạo hàm của hàm số hợp

3.1. Khái niệm hàm số hợp

ĐỊNH LÍ 32.4. *Giả sử $u = g(x)$ là hàm số xác định trên khoảng $(a; b)$, có tập giá trị chứa trong khoảng $(c; d)$ và $y = f(u)$ là hàm số xác định trên khoảng $(c; d)$. Hàm số $y = f(g(x))$ được gọi là hàm số hợp của hàm số $y = f(u)$ với $u = g(x)$.*



3.2. Đạo hàm của hàm số hợp

ĐỊNH LÍ 32.5. *Nếu hàm số $u = g(x)$ có đạo hàm u'_x tại x và hàm số $y = f(u)$ có đạo hàm y'_u tại u thì hàm số hợp $y = f(g(x))$ có đạo hàm y'_x tại x là*

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x.$$

4. Đạo hàm của hàm số lượng giác

4.1. Đạo hàm của hàm số $y = \sin x$

ĐỊNH LÍ 32.6.

- *Hàm số $y = \sin x$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $(\sin x)' = \cos x$.*
- *Đối với hàm số hợp $y = \sin u$, với $u = u(x)$, ta có $(\sin u)' = u' \cdot \cos u$.*

4.2. Đạo hàm của hàm số $y = \cos x$

ĐỊNH LÍ 32.7.

- *Hàm số $y = \cos x$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $(\cos x)' = -\sin x$.*
- *Đối với hàm số hợp $y = \cos u$, với $u = u(x)$, ta có $(\cos u)' = -u' \cdot \sin u$.*

QUICK NOTE

4.3. Đạo hàm của hàm số $y = \tan x$ và $y = \cot x$

ĐỊNH LÍ 32.8.

- *Hàm số* $y = \tan x$ *có đạo hàm tại mọi* $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ và $(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.
- *Hàm số* $y = \cot x$ *có đạo hàm tại mọi* $x \neq k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ và $(\cot x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$.
- *Đối với hàm số hợp* $y = \tan u$ và $y = \cot u$ *với* $u = u(x)$, *ta có*

$$(\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2 u};\ (\cot u)' = -\frac{u'}{\sin^2 u}$$

(giả thiết $\tan u$ *và* $\cot u$ *có nghĩa).*

5. Đạo hàm của hàm số mũ và hàm số lôgarit

5.1. Giới hạn liên quan đến hàm số mũ và hàm số lôgarit

NHẬN XÉT. Ta có các giới hạn sau:

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e};\ \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1;\ \lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 1.$$

5.2. Đạo hàm của hàm số mũ

ĐỊNH LÍ 32.9.

- *Hàm số* $y = \mathrm{e}^x$ *có đạo hàm trên* $\mathbb{R}$ *và* $(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$.
  Đối với hàm số hợp $y = \mathrm{e}^u$, *với* $u = u(x)$, *ta có* $(\mathrm{e}^u)' = u' \cdot \mathrm{e}^u$.
- *Hàm số* $y = a^x$ $(0 < a \neq 1)$ *có đạo hàm trên* $\mathbb{R}$ *và* $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$.
  Đối với hàm số hợp $y = a^u$, *với* $u = u(x)$, *ta có* $(a^u)' = u' \cdot a^u \cdot \ln a$.

5.3. Đạo hàm của hàm số logarit

ĐỊNH LÍ 32.10.

- *Hàm số* $\ln x$ *có đạo hàm trên khoảng* $(0; +\infty)$ *và* $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$.
  Đối với hàm số hợp $y = \ln u$, *với* $u = u(x)$, *ta có* $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$.
- *Hàm số* $\log_a x$ *có đạo hàm trên khoảng* $(0; +\infty)$ *và* $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$.
  Đối với hàm số hợp $y = \log_a x$, *với* $u = u(x)$, *ta có* $(\log_a x)' = \dfrac{u'}{u \ln a}$.

Với $x < 0$, *ta có:*

$$\ln|x| = \ln(-x) \text{ và } [\ln(-x)]' = \frac{(-x)'}{-x} = \frac{1}{x}.$$

Từ đó ta có:

$$(\ln|x|)' = \frac{1}{x}, \forall x \neq 0$$

Bảng đạo hàm

Đạo hàm của hàm số sơ cấp cơ bản thường gặp	**Đạo hàm của hàm hợp (ở đây $u = u(x)$)**
$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$	$(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$
$\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$	$\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{u'}{u^2}$
$(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$

$(\sin x)' = \cos x$	$(\sin u)' = u' \cdot \cos u$
$(\cos x)' = -\sin x$	$(\cos u)' = -u' \cdot \sin u$
$(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$(\tan u)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$
$(\cot x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$(\cot u)' = -\dfrac{u'}{\sin^2 u}$
$(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$	$(\mathrm{e}^u)' = u' \cdot \mathrm{e}^u$
$(a^x)' = a^x \ln a$	$(a^u) = u' \cdot a^u \ln a$
$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$	$(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$
$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$	$(\log_a u)' = \dfrac{u'}{u \ln a}$

QUICK NOTE

6. Đạo hàm cấp hai

6.1. Khái niệm đạo hàm cấp 2

ĐỊNH NGHĨA 32.1. Giả sử hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại mỗi điểm $x \in (a; b)$. Nếu hàm số $y' = f'(x)$ lại có đạo hàm tại x thì ta gọi đạo hàm của y' là đạo hàm cấp hai của hàm số $y = f(x)$ tại x. Kí hiệu là $y''(x)$.

6.2. Ý nghĩa cơ học của đạo hàm cấp hai

ĐỊNH NGHĨA 32.2. Một chuyển động có phương trình $s = f(t)$ thì đạo hàm cấp hai (nếu có) của hàm số $f(t)$ là gia tốc tức thời của chuyển động. Ta có

$$a(t) = f''(t).$$

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP

Dạng 3. Tính đạo hàm cơ bản

1. Ví dụ minh hoạ

VÍ DỤ 1. Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = \sin x$ tại điểm $x_0 = \dfrac{\pi}{3}$.

VÍ DỤ 2. Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = \tan x$ tại điểm $x_0 = \dfrac{\pi}{4}$.

VÍ DỤ 3. Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = \cot x$ tại điểm $x_0 = \dfrac{\pi}{2}$.

VÍ DỤ 4. Tính đạo hàm của hàm số $y = x^5$ tại điểm $x = 2$ và $x = -\dfrac{1}{2}$.

VÍ DỤ 5. Tính đạo hàm của hàm số $y = \sqrt{x}$ tại điểm $x = 1$ và $x = \dfrac{1}{4}$.

VÍ DỤ 6. Tìm đạo hàm của các hàm số

a) $y = \sqrt[4]{x}$ tại $x = 1$;

b) $y = \dfrac{1}{x}$ tại $x = -\dfrac{1}{4}$.

VÍ DỤ 7. Tìm đạo hàm của các hàm số

a) $y = 9^x$ tại $x = 1$;

b) $y = \ln x$ tại $x = \dfrac{1}{3}$.

VÍ DỤ 8. Tìm đạo hàm của các hàm số

a) $y = \mathrm{e}^x$ tại $x = 2\ln 3$;

b) $y = \log_5 x$ tại $x = 2$.

QUICK NOTE

2. Bài tập áp dụng

BÀI 1. Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = \cos x$ tại điểm $x_0 = \dfrac{\pi}{6}$.

BÀI 2. Tính đạo hàm của hàm số $y = \tan x$ tại $x = \dfrac{3\pi}{4}$.

BÀI 3. Tính đạo hàm của hàm số $y = x^{10}$ tại điểm $x = -1$ và $x = \sqrt[3]{2}$.

BÀI 4. Tính đạo hàm của hàm số $y = \sqrt{x}$ tại các điểm $x = 4$ và $x = \dfrac{1}{9}$.

BÀI 5. Tìm đạo hàm của các hàm số

a) $y = \sqrt[3]{x}$ tại điểm $x = 8$; b) $y = \dfrac{2}{x}$ tại $x = \dfrac{1}{5}$.

BÀI 6. Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = 2^x$ tại điểm $x_0 = 1$.

BÀI 7. Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = \ln x$ tại điểm $x_0 = 1$.

BÀI 8. Cho hàm số $f(x) = x^{10}$.

a) Tính đạo hàm của hàm số trên tại điểm x bất kì.

b) Tính đạo hàm của hàm số trên tại điểm $x_0 = 1$.

Dạng 4. Tính đạo hàm hàm hợp

1. Ví dụ minh hoạ

VÍ DỤ 1. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = \left(2x^3 + 3\right)^2$; b) $y = \cos 3x$; c) $y = \log_2\left(x^2 + 2\right)$; d) $y = e^{x^2+1}$.

VÍ DỤ 2. Tính đạo hàm của hàm số sau

a) $y = \sin\left(2x + \dfrac{\pi}{8}\right)$; b) $y = \cos\left(4x - \dfrac{\pi}{3}\right)$; c) $y = \tan\left(2x + \dfrac{\pi}{4}\right)$; d) $y = \cot\left(3x - \dfrac{\pi}{6}\right)$.

VÍ DỤ 3. Tính đạo hàm của hàm số sau

a) $y = \sqrt{x^2 + 1}$; b) $\dfrac{1}{2x - 3}$.

VÍ DỤ 4. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = 2\tan^2 x$. b) $y = 3\cot^3 x$.

VÍ DỤ 5. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = 3\sin x + \cos x$. b) $y = 4\sin x - 5\cos x$.

VÍ DỤ 6. Tính đạo hàm của các hàm số $y = \tan 3x + 2\tan x$.

VÍ DỤ 7. Tính đạo hàm của các hàm số $y = \cot 5x \cos 4x$.

2. Bài tập áp dụng

BÀI 1. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = (3x^2 + x)^3$; b) $y = \sin 2x$; c) $y = \ln\left(x^2 + 1\right)$; d) $y = 2^{x^2 - x}$.

BÀI 2. Tính đạo hàm của hàm số sau

a) $y = \sin(10x - 5)$; b) $y = \cos(3 - x)$; c) $y = \tan(5x + 7)$; d) $y = \cot(4 - 2x)$.

BÀI 3. Tính đạo hàm của hàm số sau

a) $y = \sqrt{3x - 5}$; b) $\dfrac{1}{3 - x}$.

BÀI 4. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y=\tan^2 3x$.

b) $y=\cot^3 4x$.

BÀI 5. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y=\sin 2x-3\sin x$.

b) $y=\cos 3x-4\cos x$.

BÀI 6. Tính đạo hàm của các hàm số $y=\cot 5x-4\cot x$.

BÀI 7. Tính đạo hàm của các hàm số $y=\sin x\cos 3x$.

Dạng 5. Tính đạo hàm tổng, hiệu, tích, thương

1. Ví dụ minh hoạ

VÍ DỤ 1. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y=\dfrac{1}{3}x^3-x^2+2x+1$;

b) $y=3x^2-4x+2$.

VÍ DỤ 2. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y=2x^4-\dfrac{1}{3}x^3+2\sqrt{x}-5$.

b) $y=\left(x^3-1\right)\left(1-x^2\right)$.

VÍ DỤ 3. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y=x^2\cdot 3^x$;

b) $y=\dfrac{\sqrt{x}}{\cos x}$.

VÍ DỤ 4. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y=\dfrac{2x+1}{1-3x}$.

b) $y=\dfrac{x^2-3x+3}{x-1}$.

c) $y=\dfrac{1+x-x^2}{1-x+x^2}$.

2. Bài tập áp dụng

BÀI 1. Tính đạo hàm của mỗi hàm số sau:

a) $f(x)=x^3+x$;

b) $g(x)=x^4-x^2$.

BÀI 2. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y=x\cdot\log_2 x$;

b) $y=x^3\cdot \mathrm{e}^x$.

BÀI 3. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$;

b) $y=x\sin x$;

c) $y=\dfrac{3x+2}{2x-1}$.

BÀI 4. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y=\dfrac{1}{2}x^5+\dfrac{2}{3}x^4-x^3-\dfrac{3}{2}x^2+4x-5$.

b) $y=\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{3}x+x^2-0,5x^4$.

c) $y=\dfrac{x^4}{4}-\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^2}{2}-x$.

d) $y=x^5-4x^3+2x-3\sqrt{x}$.

BÀI 5. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y=(2x-3)(x^5-2x)$.

b) $y=x(2x-1)(3x+2)$.

c) $y=(\sqrt{x}+1)\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}-1\right)$.

d) $y=\dfrac{2x-1}{x-1}$.

e) $y=\dfrac{x^2+x-1}{x-1}$.

f) $y=\dfrac{2x^2-4x+5}{2x+1}$.

g) $y=x+1-\dfrac{2}{x+1}$.

h) $y=\dfrac{5x-3}{x^2+x+1}$.

i) $y=\dfrac{x^2+x+1}{x^2-x+1}$.

QUICK NOTE

QUICK NOTE

Dạng 6. Một số ứng dụng của đạo hàm

1. Ví dụ minh hoạ

VÍ DỤ 1. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \sqrt{x}$ tại điểm có hoành độ bằng 4.

VÍ DỤ 2. Cho đường cong $(C): \; y = f(x) = \dfrac{x^2}{2} - 4x + 1$.

a) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ $x_0 = -2$.

b) Viết phương trình tiếp tuyến của (C), biết tiếp tuyến có hệ số góc $k = 1$.

VÍ DỤ 3. Cho hàm số $y = f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ có đồ thị (C). Viết phương trình tiếp tuyến của (C) biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $\Delta: \; 3x + y = 2$.

VÍ DỤ 4. Cho hàm số $y = 4x^3 - 6x^2 + 1$ (1). Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số (1), biết rằng tiếp tuyến đó đi qua điểm $M(-1; -9)$.

VÍ DỤ 5. Một vật chuyển động thẳng không đều xác định bởi phương trình $s(t) = t^2 - 4t + 3$, trong đó s là quãng đường tính bằng mét và t là thời gian tính bằng giây. Tính gia tốc của chuyển động tại thời điểm $t = 4$.

VÍ DỤ 6. Một vật chuyển động theo quy luật $s = -\dfrac{2}{3}t^3 + 4t^2 - 1$ với t (giây) là khoảng thời gian tính từ khi vật bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật di chuyển được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 5 giây, kể từ khi bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu?

2. Bài tập tự luận

BÀI 1. Viết phương trình tiếp tuyến của đường cong $(C): \; y = f(x) = x(x^2 + x - 1) + 1$ tại điểm có tung độ bằng -1.

BÀI 2. Viết phương trình tiếp tuyến của parabol $(P): \; y = f(x) = -x^2 + 4x - 3$ tại các giao điểm của (P) với trục hoành.

BÀI 3. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị $(C): \; y = \dfrac{x-1}{x+2}$ biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $\Delta: \; 3x + y - 2 = 0$.

BÀI 4. Một vật được phóng lên theo phương thẳng đứng lên trên từ mặt đất với vận tốc ban đầu $v_0 = 20\,\text{m/s}$. Trong vật lí, ta biết rằng khi bỏ qua sức cản của không khí, độ cao h so với mặt đất (tính bằng mét) của vật tại thời điểm t (giây) sau khi ném được cho bởi công thức sau: $h = v_0 t - \dfrac{1}{2}gt^2$, trong đó v_0 là vận tốc ban đầu của vật, $g = 9{,}8\,\text{m/s}^2$ là gia tốc rơi tự do. Hãy tính vận tốc của vật khi nó đạt độ cao cực đại và khi nó chạm đất.

BÀI 5. Một hòn sỏi rơi tự do có quãng đường rơi tính theo thời gian t là $s(t) = 4,9t^2$, trong đó s tính bằng mét và t tính bằng giây. Tính gia tốc rơi của hòn sỏi lúc $t = 3$.

Dạng 7. Chứng minh đẳng thức hoặc giải phương trình

1. Ví dụ minh hoạ

VÍ DỤ 1. Cho hàm số $y = \tan x$. Chứng minh rằng $y' - y^2 - 1 = 0$.

VÍ DỤ 2. Cho hàm số $y = \cot 2x$. Chứng minh rằng $y' + 2y^2 + 2 = 0$.

VÍ DỤ 3. Cho hàm số $y = \sin^6 x + \cos^6 x + 3\sin^2 x\cos^2 x$. Chứng minh rằng $y' = 0$.

VÍ DỤ 4. Cho hàm số $y = \cos^2 x - \sin x$. Giải phương trình $y' = 0$.

VÍ DỤ 5. Giải phương trình $y' = 0$ với $y = 3\cos x + 4\sin x + 5x$.

VÍ DỤ 6. Giải phương trình $y' = 0$ với $y = \tan x + \cot x$.

VÍ DỤ 7. Cho hàm số $f(x) = \dfrac{\sin 3x}{3} - \cos x - \sqrt{3}\left(\sin x - \dfrac{\cos 3x}{3}\right)$. Giải phương trình $f'(x) = 0$.

QUICK NOTE

2. Bài tập tự luận

BÀI 1. Cho hàm số $y=\cos^2\left(\frac{\pi}{3}-x\right)+\cos^2\left(\frac{\pi}{3}+x\right)+\cos^2\left(\frac{2\pi}{3}-x\right)+\cos^2\left(\frac{2\pi}{3}+x\right)-2\sin^2 x$. Chứng minh rằng $y'=0$.

BÀI 2. Cho hàm số $y=x\sin x$. Chứng minh rằng

a) $xy-2\left(y'-\sin x\right)+x\left(2\cos x-y\right)=0$. b) $\dfrac{y'}{\cos x}-x=\tan x$.

BÀI 3. Giải phương trình $y'=0$ với $y=1-\sin\left(\pi+x\right)+2\cos\left(\frac{2\pi+x}{2}\right)$.

BÀI 4. Giải phương trình $y'=0$ với $y=\sin 2x-2\cos x$.

BÀI 5. Cho hàm số $f(x)=a\sin x+b\cos x+1$ có đạo hàm là $f'(x)$. Tìm a,b biết $f'(0)=\frac{1}{2}$ và $f'\left(-\frac{\pi}{4}\right)=1$.

Dạng 8. Tính đạo hàm cấp hai

1. Ví dụ minh hoạ

VÍ DỤ 1. Gọi $g(x)$ là đạo hàm của hàm số $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$. Tìm $g(x)$.

Tính đạo hàm của hàm số $y=g(x)$.

VÍ DỤ 2. Cho hàm số $f(x)=x^4-4x^2+3$.

a) Tìm đạo hàm cấp hai của hàm số tại điểm x bất kì.

b) Tính đạo hàm cấp hai của hàm số tại điểm $x_0=-1$.

VÍ DỤ 3. Tính đạo hàm cấp hai của các hàm số:

a) $y=3x^2+5x+1$; b) $y=\sin x$; c) $y=x\cdot \mathrm{e}^{2x}$; d) $y=\ln(2x+3)$.

VÍ DỤ 4. Tìm đạo hàm cấp hai của các hàm số sau:

a) $y=\left(x^2+1\right)^3$. b) $y=\dfrac{x}{x-2}$. c) $y=\dfrac{x^2+x+1}{x+1}$.

VÍ DỤ 5. Tìm đạo hàm cấp hai của các hàm số sau:

a) $y=\sqrt{2x+5}$. b) $y=x\sqrt{x^2+1}$. c) $y=\sin x$. d) $y=\tan x$.

VÍ DỤ 6. Tính đạo hàm cấp hai của hàm số $y=x^2+\mathrm{e}^{2x-1}$. Từ đó tính $y''(0)$.

VÍ DỤ 7. Cho hàm số $h(x)=5\left(x+1\right)^3+4\left(x+1\right)$. Giải phương trình $h''(x)=0$.

2. Bài tập áp dụng

BÀI 1. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{1}{x+2}$.

a) Tìm đạo hàm cấp hai của hàm số tại điểm $x\neq -2$.

b) Tính đạo hàm cấp hai của hàm số tại điểm $x_0=2$.

BÀI 2. Tính đạo hàm cấp hai của các hàm số sau:

a) $y=x^2-x$; b) $y=\cos x$; c) $y=2x^4-5x^2+3$; d) $y=x\cdot \mathrm{e}^x$.

BÀI 3. Tìm đạo hàm cấp hai của các hàm số sau:

a) $y=-3x^4+4x^3+5x^2-2x+1$. b) $y=\dfrac{4}{5}x^5-3x^2-x+4$.

BÀI 4. Tìm đạo hàm cấp hai của các hàm số sau:

QUICK NOTE

a) $y=-\dfrac{1}{x}$. b) $y=\dfrac{1}{x-3}$ c) $y=\dfrac{-2x^2+3x}{1-x}$. d) $y=\dfrac{5x^2-3x-20}{x^2-2x-3}$.

BÀI 5. Tìm đạo hàm cấp hai của các hàm số sau:

a) $y=\sqrt{2x+1}$. b) $y=x^2\cdot\sqrt{x^3-x}$. c) $f(x)=(x+1)^3$.

BÀI 6. Tìm đạo hàm cấp hai của các hàm số sau:

a) $y=\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)$. b) $y=\sin 2x$. c) $y=\sin^2 2x$. d) $y=3\sin x+2\cos x$.

BÀI 7. Tìm đạo hàm cấp hai của các hàm số sau:

a) $y=x\cdot\sin x$. b) $y=x^2\cdot\cos^2 x$. c) $y=\dfrac{\cos x}{x^3+1}$.

BÀI 8. Cho hàm số $f(x)=\sin^3 x+x^2$. Tính giá trị $f''\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Dạng 9. Ý nghĩa của đạo hàm cấp hai

1. Ví dụ minh hoạ

VÍ DỤ 1. Một hòn sỏi rơi tự do có quãng đường rơi tính theo thời gian t là $s(t)=4,9t^2$, trong đó s tính bằng mét và t tính bằng giây. Tính gia tốc rơi của hòn sỏi lúc $t=3$.

2. Bài tập vận dụng

BÀI 1. Xét dao động điều hòa có phương trình chuyển động $S(t)=A\cos(\omega t+\varphi)$, trong đó A, ω, φ là các hằng số. Tìm gia tốc tức thời tại thời điểm t của chuyển động đó.

BÀI 2. Chuyển động của một vật gắn trên con lắc lò xo (khi bỏ qua ma sát và sức cản không khí) được cho bởi phương trình sau: $x(t)=4\cos\left(2\pi t+\dfrac{\pi}{3}\right)$. Trong đó x tính bằng centimet và thời gian t tính bằng giây. Tìm gia tốc tức thời của vật tại thời điểm $t=5$ giây (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

BÀI 3. Cho chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $s=t^3-3t^2-9t+2$ (t tính bằng giây; s tính bằng mét). Tính gia tốc của chuyển động tại thời điểm $t=2$ s.

BÀI 4. Cho chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $s=t^3-3t^2$ (t tính bằng giây; s tính bằng mét). Tính gia tốc của chuyển động tại thời điểm $t=4$ s.

Dạng 10. Chứng minh đẳng thức chứa đạo hàm cấp 2

- Tìm các đạo hàm đến cấp cao nhất có mặt trong đẳng thức cần chứng minh.
- Thay thế vào vị trí tương ứng và biến đổi vế này cho bằng vế kia. Từ đó suy ra đẳng thức cần chứng minh.

1. Ví dụ minh hoạ

VÍ DỤ 1. Cho hàm số $y=\sqrt{2x-x^2}$. Chứng minh rằng: $y^3.y''+1=0$.

VÍ DỤ 2. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2+2x+2}{2}\cdot$ Chứng minh rằng: $2y.y''-1=(y')^2$.

VÍ DỤ 3. Cho hàm số $y=x\sin x$. Chứng minh rằng: $x.y-2(y'-\sin x)+x.y''=0$.

VÍ DỤ 4. Cho hàm số $y=\dfrac{x+2}{x-1}\cdot$ Chứng minh biểu thức sau không phụ thuộc x.
$P=2(y')^2-y''(y-1)$ (Giả sử các biểu thức đều có nghĩa).

VÍ DỤ 5. Cho hàm số $y=\tan x$. Chứng minh rằng: $\dfrac{6y}{y''}-\dfrac{1}{y'}-\cos 2x=1$.

2. Bài tập áp dụng

BÀI 1. Chứng minh rằng hàm số $y=\sqrt{4x-2x^2}$ thỏa hệ thức: $y^3y''+4=0$.

BÀI 2. Cho hàm số $y=-2+\dfrac{5}{x}\cdot$ Chứng minh rằng: $\dfrac{2y'}{x}+y''=0$.

BÀI 3. Cho $y = \dfrac{x-3}{x+4}$. Chứng minh rằng: $2(y')^2 = (y-1)\,y''$.

BÀI 4. Cho hàm số $y = x\cos x$. Chứng minh rằng: $x.y - 2(y' - \cos x) + x.y'' = 0$.

BÀI 5. Cho hàm số $y = x\sin x$. Chứng minh $xy - 2y' + xy'' = -2\sin x$.

BÀI 6. Cho hàm số $y = \sin^2 x$. Chứng minh rằng: $2y + y'\tan x + y'' - 2 = 0$.

C. BÀI TẬP RÈN LUYỆN

BÀI 7. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = x^3 - 3x^2 + 2x + 1$; b) $y = x^2 - 4\sqrt{x} + 3$.

BÀI 8. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = \dfrac{2x-1}{x+2}$; b) $y = \dfrac{2x}{x^2+1}$.

BÀI 9. Tính đạo hàm của các hàm số sau

a) $y = 2x^3 - \dfrac{x^2}{2} + 4x - \dfrac{1}{3}$; b) $y = \dfrac{-2x+3}{x-4}$;

c) $y = \dfrac{x^2-2x+3}{x-1}$; d) $y = \sqrt{5x}$.

BÀI 10. Tính đạo hàm của các hàm số sau

a) $y = \left(x^2 - x\right)\cdot 2^x$; b) $y = x^2 \cdot \log_3 x$; c) $y = \mathrm{e}^{3x+1}$.

BÀI 11. Tính đạo hàm của các hàm số sau

a) $y = 2x^4 - 5x^2 + 3$; b) $y = x\cdot \mathrm{e}^x$.

BÀI 12. Tính đạo hàm của các hàm số sau

a) $y = \sin 3x$; b) $y = \cos^3 2x$; c) $y = \tan^2 x$; d) $y = \cot(4 - x^2)$.

BÀI 13. Tìm đạo hàm của mỗi hàm số sau

a) $y = 4x^3 - 3x^2 + 2x + 10$; b) $y = \dfrac{x+1}{x-1}$;

c) $y = -2x\sqrt{x}$; d) $y = 3\sin x + 4\cos x - \tan x$;

e) $y = 4^x + 2\mathrm{e}^x$; f) $y = x\ln x$.

BÀI 14. Cho hàm số $f(x) = 2^{3x+2}$.

a) Hàm số $f(x)$ là hàm hợp của các hàm số nào?

b) Tìm đạo hàm của $f(x)$.

BÀI 15. Tìm đạo hàm của mỗi hàm số sau:

a) $y = \sin 3x + \sin^2 x$; b) $y = \log_2(2x+1) + 3^{-2x+1}$.

BÀI 16. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = x\sin^2 x$; b) $y = \cos^2 x + \sin 2x$; c) $y = \sin 3x - 3\sin x$; d) $y = \tan x + \cot x$.

BÀI 17. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = 2^{3x - x^2}$; b) $y = \log_3 x$.

BÀI 18. Cho hàm số $f(x) = 2\sin^2\left(3x - \dfrac{\pi}{4}\right)$. Chứng minh rằng $|f'(x)| \le 6$ với mọi x.

BÀI 19. Một vật chuyển động rơi tự do có phương trình $h(t) = 100 - 4{,}9t^2$, ở đó độ cao h so với mặt đất tính bằng mét và thời gian t tính bằng giây. Tính vận tốc của vật:

a) Tại thời điểm $t = 5$ giây;

QUICK NOTE

QUICK NOTE

b) Khi vật chạm đất.

BÀI 20. Chuyển động của một hạt trên một dây rung được cho bởi $s(t) = 12 + 0{,}5\sin(4\pi t)$, trong đó s được tính bằng centimét và t tính bằng giây. Tính vận tốc của hạt sau t giây. Vận tốc cực đại của hạt là bao nhiêu?

BÀI 21. Cho $u = u(x), v = v(x), w = w(x)$ là các hàm số có đạo hàm tại điểm x thuộc khoảng xác định. Chứng minh rằng $(u \cdot v \cdot w)' = u' \cdot v \cdot w + u \cdot v' \cdot w + u \cdot v \cdot w'$.

BÀI 22. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị mỗi hàm số sau:

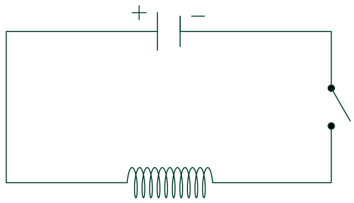
a) $y = x^3 - 3x^2 + 4$ tại điểm có hoành độ $x_0 = 2$;

b) $y = \ln x$ tại điểm có hoành độ $x_0 = \mathrm{e}$;

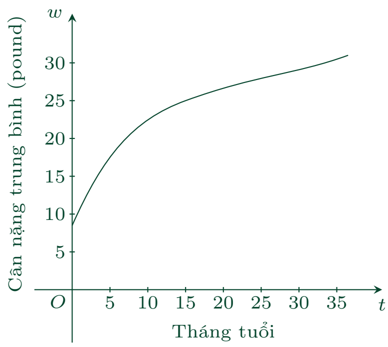
c) $y = \mathrm{e}^x$ tại điểm có hoành độ $x_0 = 0$.

BÀI 23. Một viên đạn được bắn lên từ mặt đất theo phương thẳng đứng với tốc độ ban đầu $v_0 = 196$ m/s (bỏ qua sức cản của không khí). Tìm thời điểm tại đó tốc độ của viên đạn bằng 0. Khi đó viên đạn cách mặt đất bao nhiêu mét (lấy $g = 9,8$ m/s^2)?

BÀI 24. Cho mạch điện như hình bên. Lúc đầu tụ điện có điện tích Q_0. Khi đóng khoá K, tụ điện phóng điện qua cuộn dây; điện tích q của tụ điện phụ thuộc vào thời gian t theo công thức $q(t) = Q_0 \sin \omega t$, trong đó ω là tốc độ góc. Biết rằng cường độ $I(t)$ của dòng điện tại thời điểm t được tính theo công thức $I(t) = q'(t)$. Cho biết $Q_0 = 10^{-8}$ (C) và $\omega = 10^6\pi$ (rad/s).
Tính cường độ của dòng điện tại thời điểm $t = 6$(s) (tính chính xác đến 10^{-5} (mA)).



BÀI 25. Cân nặng trung bình của một bé gái trong độ tuổi từ 0 đến 36 tháng có thể được tính gần đúng bởi hàm số $w(t) = 0,000758t^3 - 0,0596t^2 + 1,82t + 8,15$, trong đó t được tính bằng tháng và w được tính bằng pound (*nguồn:https://wwww.cdc.gov.growthcharts/data/who/GrChr* *Boys*). Tính tốc độ thay đổi cân nặng của bé gái đó tại thời điểm 10 tháng tuổi.



BÀI 26. Một công ty xác định rằng tổng chi phí của họ, tính theo nghìn đô-la, để sản xuất x mặt hàng là $C(x) = \sqrt{5x^2 + 60}$ và công ty lên kế hoạch nâng sản lượng trong t tháng kể từ nay theo hàm số $x(t) = 20t + 40$. Chi phí sẽ tăng thế nào sau 4 tháng kể từ khi công ty thực hiện kế hoạch đó?

BÀI 27. Trên Mặt Trăng, quãng đường rơi tự do của một vật được cho bởi công thức $s(t) = 0,81t^2$, trong đó t là thời gian được tính bằng giây và s tính bằng mét. Một vật thả rơi từ độ cao 200 m phía trên Mặt Trăng. Tại thời điểm $t = 2$ sau khi thả vật đó, tính quãng đường vật đã rơi.

BÀI 28. Cho hàm số $f(x) = x^2 \cdot \mathrm{e}^x$. Tính $f''(0)$.

BÀI 29. Tính đạo hàm cấp hai của các hàm số sau

a) $y = \ln(x+1)$.

b) $y = \tan 2x$.

BÀI 30. Tìm đạo hàm cấp hai của mỗi hàm số sau

a) $y = \dfrac{1}{2x+3}$.

b) $y = \log_3 x$.

c) $y = 2^x$.

BÀI 31. Tính đạo hàm cấp hai của mỗi hàm số sau

QUICK NOTE

a) $y = 3x^2 - 4x + 5$ tại điểm $x_0 = -2$.

b) $y = \log_3(2x+1)$ tại điểm $x_0 = 3$.

c) $y = \mathrm{e}^{4x+3}$ tại điểm $x_0 = 1$.

d) $y = \sin\left(2x + \dfrac{\pi}{3}\right)$ tại điểm $x_0 = \dfrac{\pi}{6}$.

e) $y = \cos\left(3x - \dfrac{\pi}{6}\right)$ tại điểm $x_0 = 0$.

BÀI 32. Cho hàm số $P(x) = ax^2 + bx + 3$, (a, b là các hằng số). Tìm a, b biết $P'(1) = 0$, $P''(1) = -2$.

BÀI 33. Cho hàm số $f(x) = 2\sin^2\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$. Chứng minh rằng $\left|f''(x)\right| \leq 4$ với mọi x.

BÀI 34. Cho hàm số $y = \cos^2 4x$. Chứng minh rằng: $32\,(2y-1) + y'' = 0$.

BÀI 35. Cho hàm số $y = x\tan x$. Chứng minh rằng: $x^2y'' - 2(x^2+y^2)(1+y) = 0$.

BÀI 36. Cho hàm số $y = \dfrac{\sin^3 x + \cos^3 x}{1 - \sin x\cos x}\cdot$ Chứng minh rằng : $y'' + y = 0$.

BÀI 37. Phương trình chuyển động của một hạt được cho bởi công thức $s(t) = 10 + 0{,}5\sin\left(2\pi t + \dfrac{\pi}{5}\right)$, trong đó s tính bằng centimét, t tính bằng giây. Gia tốc của hạt tại thời điểm $t = 5$ giây (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất).

BÀI 38. Một vật rơi tự do theo phương thẳng đứng có phương trình $s = \dfrac{1}{2}gt^2$, trong đó g là gia tốc rơi tự do, $g \approx 9,8$ m/s^2.

a) Tính vận tốc tức thời của vật tại thời điểm $t_0 = 2$ (s).

b) Tính gia tốc tức thời của vật tại thời điểm $t_0 = 2$ (s).

BÀI 39. Một chất điểm chuyển động theo phương trình $s(t) = t^3 - 3t^2 + 8t + 1$, trong đó $t > 0$, t tính bằng giây và $s(t)$ tính bằng mét. Tìm vận tốc tức thời, gia tốc tức thời của chất điểm

a) Tại thời điểm $t = 3$ (s).

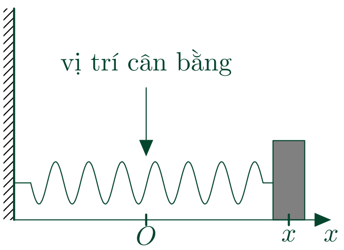
b) Tại thời điểm mà chất điểm di chuyển được 7 (m).

BÀI 40.

Một con lắc lò xo dao động điều hòa theo phương ngang trên mặt phẳng không ma sát như hình 7, có phương trình chuyển động $x = 4\sin t$, trong đó t tính bằng giây và x tính bằng centimét.

a) Tìm vận tốc tức thời và gia tốc tức thời của con lắc tại thời điểm t (s).

b) Tìm vị trí, vận tốc tức thời và gia tốc tức thời của con lắc tại thời điểm $t = \dfrac{2\pi}{3}$ (s). Tại thời điểm đó, con lắc di chuyển theo hướng nào?



Hình 7

LỜI GIẢI CHI TIẾT

Bài 31. ĐẠO HÀM

A. TÓM TẮT KIẾN THỨC

1. Đạo hàm của hàm số tại một điểm

Định nghĩa 31.1. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a;b)$ và điểm $x_0 \in (a;b)$. Nếu tồn tại giới hạn hữu hạn

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

thì giới hạn đó được gọi là đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ tại điểm x_0, kí hiệu bởi $f'(x_0)$ (hoặc $y'(x_0)$), tức là

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Để tính đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ tại điểm $x_0 \in (a;b)$, ta thực hiện theo các bước sau:

- *Tính $f(x) - f(x_0)$.*
- *Lập và rút gọn tỉ số $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ với $x \in (a;b), x \neq x_0$.*
- *Tìm giới hạn $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.*

Đặt $\Delta x = x - x_0$, khi đó đạo hàm của hàm số đã cho tại điểm x_0 có thể tính theo công thức:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

Δx được gọi là số gia của biến số tại điểm x_0.

2. Đạo hàm của hàm số trên một khoảng

Định nghĩa 31.2. Hàm số $y = f(x)$ được gọi là có đạo hàm trên khoảng $(a;b)$ nếu nó có đạo hàm $f'(x)$ tại mọi điểm x thuộc khoảng đó, kí hiệu là $y' = f'(x)$.

Nếu phương trình chuyển động của một vật là $s = f(t)$ thì $v(t) = f'(t)$ là vận tốc tức thời của vật tại thời điểm t.

3. Ý nghĩa hình học của đạo hàm

3.1. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số

Định nghĩa 31.3. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm $P(x_0; f(x_0))$ là đường thẳng đi qua P với hệ số góc $k = \lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ nếu giới hạn này tồn tại và hữu hạn, nghĩa là $k = f'(x_0)$. Điểm P gọi là tiếp điểm.

Nhận xét. Hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm $P(x_0; f(x_0))$ là đạo hàm $f'(x_0)$.

3.2. Phương trình tiếp tuyến

Định nghĩa 31.4. Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại điểm x_0 thì phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm $P(x_0; y_0)$ là

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0),$$

trong đó $y_0 = f(x_0)$.

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP

Dạng 1. Tính đạo hàm của hàm số bằng định nghĩa

Ta sử dụng một trong hai cách tính sau:

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \quad \text{hoặc} \quad f'(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

1. Ví dụ minh hoạ

VÍ DỤ 1. Tính (bằng định nghĩa) đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = 2x - 3$ tại điểm $x_0 = 1$;

b) $y = x^2$ tại điểm $x_0 = 2$;

c) $y = x^2 + 1$ tại điểm $x_0 = -1$;

d) $y = x^2 + 2x$ tại điểm $x_0 = 3$;

e) $y = x^2 - 2x + 1$ tại điểm $x_0 = -2$;

f) $y = 2x^3$ tại điểm $x_0 = 1$;

g) $y = x^3 + 1$ tại điểm $x_0 = 2$;

h) $y = x^3 - x$ tại điểm $x_0 = 3$.

Lời giải.

a) Ta có $f'(1) = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1}$.
$$= \lim_{x\to 1} \frac{(2x-3) - (2\cdot 1 - 3)}{x - 1} = \lim_{x\to 1} \frac{2(x-1)}{x-1} = \lim_{x\to 1} 2 = 2$$

b) Ta có $f'(2) = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{f(x) - f(2)}{x - 2}$.
$$= \lim_{x\to 2} \frac{x^2 - 2^2}{x - 2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim_{x\to 2}(x+2) = 4$$

c) Ta có $f'(-1) = \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{f(x) - f(-1)}{x + 1}$.
$$= \lim_{x\to -1} \frac{(x^2+1) - \left[(-1)^2 + 1\right])}{x+1} = \lim_{x\to -1} \frac{x^2 - 1}{x+1} = \lim_{x\to -1}(x-1) = -2$$

d) Ta có $f'(3) = \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{f(x) - f(3)}{x - 3}$.
$$= \lim_{x\to 3} \frac{(x^2+2x) - (3^2 + 2\cdot 3)}{x-3} = \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)(x+5)}{x-3} = \lim_{x\to 3}(x+5) = 8$$

e) Ta có $f'(-2) = \lim\limits_{x\to -2} \dfrac{f(x) - f(-2)}{x + 2}$
$$= \lim_{x\to -2} \frac{(x^2 - 2x + 1) - \left[(-2)^2 - 2\cdot(-2) + 1\right]}{x+2} = \lim_{x\to -2} \frac{(x+2)(x-4)}{x+2} = \lim_{x\to -2}(x-4) = -6$$

f). Ta có $f'(1) = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1}$.
$$= \lim_{x\to 1} \frac{2x^3 - 2\cdot 1^3}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{2(x^3-1)}{x-1} = \lim_{x\to 1} 2(x^2 + x + 1) = 6$$

g) Ta có $f'(2) = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{f(x) - f(2)}{x - 2}$.
$$= \lim_{x\to 2} \frac{(x^3+1) - (2^3+1)}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{x^3 - 2^3}{x-2} = \lim_{x\to 2}(x^2 + 2x + 4) = 12$$

h) Ta có $f'(3) = \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{f(x) - f(3)}{x - 3}$.
$$= \lim_{x\to 3} \frac{(x^3 - x) - (3^3 - 3)}{x-3} = \lim_{x\to 3} \frac{(x^3 - 3^3) - (x-3)}{x-3} = \lim_{x\to 3}(x^2 + 3x + 8) = 26$$

□

VÍ DỤ 2. Tính (bằng định nghĩa) đạo hàm của các hàm số sau:

a) $f(x) = \dfrac{2}{x}$ tại điểm $x_0 = 3$;

b) $f(x) = \sqrt{x}$ tại điểm $x_0 = 1$;

c) $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$ tại điểm $x_0 = 2$;

d) $f(x) = \sqrt{x-1}$ tại điểm $x_0 = 5$.

Lời giải.

a) Ta có: $f'(3) = \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{f(x) - f(3)}{x - 3}$.
$$= \lim_{x\to 3} \frac{\frac{2}{x} - \frac{2}{3}}{x-3} = \lim_{x\to 3} \frac{2(3-x)}{3x(x-3)} = \lim_{x\to 3} \frac{-2}{3x} = -\frac{1}{9}$$

b) Ta có: $f'(1) = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1}$.
$$= \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{(\sqrt{x}+1)(x-1)} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{\sqrt{x}+1} = \frac{1}{2}$$

c) Ta có: $f'(2) = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{f(x) - f(2)}{x - 2}$.

$$= \lim_{x \to 2} \dfrac{\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{2-1}}{x-2} = \lim_{x \to 2} \dfrac{2-x}{(x-1)(x-2)} = \lim_{x \to 2} \dfrac{-1}{x-1} = -1$$

d) Ta có: $f'(5) = \lim\limits_{x \to 5} \dfrac{f(x) - f(5)}{x - 5}$.

$$= \lim_{x \to 5} \dfrac{\sqrt{x-1} - \sqrt{5-1}}{x-5} = \lim_{x \to 5} \dfrac{x-5}{(\sqrt{x-1}+2)(x-5)} = \lim_{x \to 5} \dfrac{1}{\sqrt{x-1}+2} = \dfrac{1}{4}$$

□

VÍ DỤ 3. Sử dụng định nghĩa, tìm đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = 2x - 3$; b) $y = x^2$; c) $y = x^2 + 1$; d) $y = x^2 + 2x$;

e) $y = x^2 - 2x + 1$; f) $y = 2x^3$; g) $y = x^3 + 1$; h) $y = x^3 - x$.

Lời giải.

a) Với bất kì x_0, ta có: $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{(2x-3) - (2x_0 - 3)}{x - x_0}$.

$$= \lim_{x \to x_0} \dfrac{2(x - x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} 2 = 2$$

Vậy $(2x-3)' = 2$ trên $\mathbb{R}$.

b) Với bất kì x_0, ta có: $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

$$= \lim_{x \to x_0} \dfrac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \dfrac{(x - x_0)(x + x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} (x + x_0) = 2x_0$$

Vậy $(x^2)' = 2x$ trên $\mathbb{R}$.

c) Với bất kì x_0, ta có: $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

$$= \lim_{x \to x_0} \dfrac{(x^2+1) - (x_0^2+1)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \dfrac{x^2 - x_0}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} (x + x_0) = 2x_0$$

Vậy $(x^2+1)' = 2x$ trên $\mathbb{R}$.

d) Với bất kì x_0, ta có: $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

$$= \lim_{x \to x_0} \dfrac{(x^2+2x) - (x_0^2+2x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \dfrac{(x - x_0)(x + x_0 + 2)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} (x + x_0 + 2) = 2x_0 + 2$$

Vậy $(x^2+2x)' = 2x + 2$ trên $\mathbb{R}$.

e) Với bất kì x_0, ta có: $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

$$= \lim_{x \to x_0} \dfrac{(x^2 - 2x + 1) - (x_0^2 - 2x_0 + 1)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \dfrac{(x^2 - x_0^2) - 2(x - x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} (x + x_0 - 2) = 2x_0 - 2$$

Vậy $(x^2 - 2x + 1)' = 2x - 2$ trên $\mathbb{R}$.

f) Với bất kì x_0, ta có: $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{2x^3 - 2x_0^3}{x - x_0}$$
$$= \lim_{x \to x_0} \frac{2(x^3 - x_0^3)}{x - x_0}$$
$$= \lim_{x \to x_0} 2(x^2 + x_0 x + x_0^2) = 6x_0^2$$

Vậy $(2x^3)' = 6x^2$ trên $\mathbb{R}$.

g) Với bất kì x_0, ta có: $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{(x^3 + 1) - (x_0^3 + 1)}{x - x_0}$$
$$= \lim_{x \to x_0} \frac{x^3 - x_0^3}{x - x_0}$$
$$= \lim_{x \to x_0} (x^2 + x_0 x + x_0^2) = 3x_0^2$$

Vậy $(x^3 + 1)' = 3x^2$ trên $\mathbb{R}$.

h) Với bất kì x_0, ta có: $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{(x^3 - x) - (x_0^3 - x_0)}{x - x_0}$$
$$= \lim_{x \to x_0} \frac{(x^3 - x_0^3) - (x - x_0)}{x - x_0}$$
$$= \lim_{x \to x_0} (x^2 + x_0 x + x_0^2 - 1) = 3x_0^2 - 1$$

Vậy $(x^3 - x)' = 3x^2 - 1$ trên $\mathbb{R}$.

□

VÍ DỤ 4. Sử dụng định nghĩa, tìm đạo hàm của các hàm số sau:

a) $f(x) = \dfrac{2}{x}$; b) $f(x) = \sqrt{x}$; c) $f(x) = \dfrac{1}{x - 1}$; d) $f(x) = \sqrt{x - 1}$.

Lời giải.

a) Với bất kì $x_0 \neq 0$, ta có: $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{\frac{2}{x} - \frac{2}{x_0}}{x - x_0}$$
$$= \lim_{x \to x_0} \frac{2(x_0 - x)}{x x_0 (x - x_0)}$$
$$= \lim_{x \to x_0} \frac{-2}{x x_0}$$
$$= -\frac{2}{x_0^2}$$

Vậy $f'(x) = \left(\dfrac{2}{x}\right)' = -\dfrac{2}{x^2}$ trên các khoảng $(-\infty; 0)$ và $(0; +\infty)$.

b) Với bất kì $x_0 > 0$, ta có: $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}}{x - x_0}$$
$$= \lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{(\sqrt{x} + \sqrt{x_0})(x - x_0)}$$
$$= \lim_{x \to x_0} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}}$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$$

Vậy $f'(x) = (\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ trên $(0; +\infty)$.

c) Với bất kì $x_0 \neq 1$, ta có: $$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \\ &= \lim_{x \to x_0} \frac{\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x_0-1}}{x-x_0} \\ &= \lim_{x \to x_0} \frac{(x_0-x)}{(x-1)(x_0-1)(x-x_0)} \\ &= \lim_{x \to x_0} \frac{-1}{(x-1)(x_0-1)} \\ &= -\frac{1}{(x_0-1)^2} \end{aligned}$$

Vậy $f'(x) = \left(\frac{1}{x-1}\right)' = -\frac{1}{(x-1)^2}$ trên các khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$.

d) Với bất kì $x_0 \neq 1$, ta có: $$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \\ &= \lim_{x \to x_0} \frac{\sqrt{x-1}-\sqrt{x_0-1}}{x-x_0} \\ &= \lim_{x \to x_0} \frac{x-x_0}{\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{x_0-1}\right)(x-x_0)} \\ &= \lim_{x \to x_0} \frac{1}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x_0-1}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x_0-1}} \end{aligned}$$

Vậy $f'(x) = \left(\sqrt{x-1}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x-1}}$ trên $(1; +\infty)$.

□

2. Bài tập áp dụng

BÀI 1. Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{x}$ tại $x_0 = 2$ bằng định nghĩa.

Lời giải.

Xét Δx là số gia của biến số tại điểm $x_0 = 2$.

Ta có: $\Delta y = f(2+\Delta x) - f(2) = \frac{1}{2+\Delta x} - \frac{1}{2} = \frac{2-(2+\Delta x)}{2(2+\Delta x)} = \frac{-\Delta x}{2(2+\Delta x)}$.

Suy ra: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-1}{2(2+\Delta x)}$.

Ta thấy: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{-1}{2(2+\Delta x)} = \frac{-1}{4}$.

Vậy $f'(2) = \frac{-1}{4}$. □

BÀI 2. Tính đạo hàm của hàm số $y = -x^2 + 3x - 2$ tại điểm $x_0 = 2$ bằng định nghĩa.

Lời giải.

Đặt $\Delta x = x - 2$. Ta có

$$\begin{aligned} &\Delta y = f(2+\Delta x) - f(2) = \left[-(2+\Delta x)^2 + 3(2+\Delta x) - 2\right] - \left(-2^2 + 3\cdot 2 - 2\right) = -\Delta^2 x - \Delta x; \\ &\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\Delta x - 1; \\ &\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (-\Delta x - 1) = -1. \end{aligned}$$

Vậy $y'(2) = -1$. □

BÀI 3. Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{x-3}$ tại $x_0 = 4$.

Lời giải.

Đặt $\Delta x = x - 4$. Ta có

$$\begin{aligned}&\Delta y = f(4+\Delta x) - f(4) = \frac{1}{1+\Delta x} - 1 = \frac{-\Delta x}{1+\Delta x};\\&\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-1}{1+\Delta x};\\&\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{-1}{1+\Delta x} = -1.\end{aligned}$$

Vậy $f'(4) = -1$. □

BÀI 4. Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = \sin 3x$ tại $x_0 = \frac{\pi}{6}$.

Lời giải.

Đặt $\Delta x = x - \frac{\pi}{6}$. Ta có

$$\begin{aligned}&\Delta y = f\left(\frac{\pi}{6}+\Delta x\right) - f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}+3\Delta x\right) - \sin\frac{\pi}{2} = \cos(3\Delta x) - 1;\\&\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\cos(3\Delta x)-1}{\Delta x} = -\frac{2\sin^2\frac{3\Delta x}{2}}{\Delta x};\\&\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{-2\sin^2\frac{3\Delta x}{2}}{\Delta x} = 0.\end{aligned}$$

Vậy $f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0$. □

BÀI 5. Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = 4x - x^2$ tại điểm $x = 2$.

Lời giải.

Đáp số: $f'(2) = 0$. □

BÀI 6. Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{3x+1}$ tại điểm $x = 1$.

Lời giải.

Đáp số: $f'(1) = \frac{3}{4}$. □

BÀI 7. Sử dụng định nghĩa, tìm đạo hàm của các hàm số sau:

a) $f(x) = C$ (C là hằng số);

b) $f(x) = \frac{1}{x}$ với $x \neq 0$;

c) $f(x) = x^2$;

d) $f(x) = cx^2$ với c là hằng số;

e) $f(x) = x^3$;

f) $f(x) = 3x - 5$;

g) $f(x) = \sqrt{x+2}$;

h) $f(x) = cos x$.

Lời giải.

a) Với bất kì x_0, ta có:

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0}\frac{C-C}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} 0 = 0.$$

Vậy $f'(x) = (C)' = 0$ trên $\mathbb{R}$.

b) Với bất kì $x_0 \neq 0$, ta có:

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0}\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x_0}}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0}\frac{x_0-x}{xx_0(x-x_0)} = \lim_{x\to x_0}\frac{-1}{xx_0} = -\frac{1}{x_0^2}.$$

Vậy $f'(x) = \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$ trên các khoảng $(-\infty;0)$ và $(0;+\infty)$.

c) Với x_0 bất kì, ta có

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0}\frac{x^2-x_0^2}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0}(x+x_0) = 2x_0.$$

d) Với x_0 bất kì, ta có:

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0}\frac{cx^2-cx_0^2}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0}\frac{c(x-x_0)(x+x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} c(x+x_0) = c(x_0+x_0) = 2cx_0.$$

Vậy hàm số $y = cx^2$ (với c là hằng số) có đạo hàm là hàm số $y' = 2cx$.

e) Với bất kì x_0, ta có:

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{x^3 - {x_0}^3}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} (x^2 + xx_0 + {x_0}^2) = 3{x_0}^2.$$

Vậy $f'(x) = \left(x^3\right)' = 3x^2$ trên $\mathbb{R}$.

f) $f'(x) = (3x-5)' = 3$ trên $\mathbb{R}$.

g) $f'(x) = \left(\sqrt{x+2}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x+2}}$ trên $(-2, +\infty)$.

h) $f'(x) = (\cos x)' = -\sin x$ trên $\mathbb{R}$.

□

BÀI 8. Quãng đường rơi tự do của một vật được biểu diễn bởi công thức $s(t) = 4{,}9t^2$ với t là thời gian tính bằng giây và s tính bằng mét. Tính vận tốc tức thời của chuyển động lúc $t = 2$.

Lời giải.

Đặt: $\Delta t = t - 2$.

Ta có:

$$\begin{aligned}\Delta s &= f(2+\Delta t) - f(2)\\ &= 4{,}9\cdot(2+\Delta t)^2 - 4{,}9\cdot 2^2 = 4{,}9\cdot\left[(2+\Delta t)^2 - 2^2\right]\\ &= 4{,}9\cdot[\Delta t\cdot(\Delta t + 4)].\end{aligned}$$

Vận tốc tức thời tại thời điểm $t = 2$.

Suy ra, $f'(2) = \lim\limits_{\Delta t\to 0} \dfrac{\Delta s}{\Delta t} = \lim\limits_{\Delta t\to 0} \dfrac{4,9\cdot[\Delta t\cdot(\Delta t+4)]}{\Delta t} = \lim\limits_{\Delta t\to 0} 4,9\cdot(\Delta t + 4) = 19,6.$ □

Dạng 2. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số

1. Ví dụ minh hoạ

VÍ DỤ 1. Cho hàm số $y = -x^2$ có đồ thị (C).

a) Xác định hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm có hoành độ bằng 3.

b) Viếp phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm $M(3; -9)$.

Lời giải.

a) Tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm có hoành độ bằng 3 có hệ số góc là:

$$f'(3) = \lim_{x\to 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim_{x\to 3} \frac{-x^2 - (-3^2)}{x-3} = \lim_{x\to 3}(-x-3) = -6.$$

b) Phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm $M(3; -9)$ là

$$y = -6(x-3) + (-9) \Leftrightarrow y = -6x + 9.$$

□

VÍ DỤ 2. Cho (C) là đồ thị của hàm số $f(x) = \dfrac{1}{x}$ và điểm $M(1;1) \in (C)$. Tính hệ số góc của tiếp tuyến của (C) tại điểm M và viết phương trình tiếp tuyến đó.

Lời giải.

Ở bài trước ta tính được $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$.

- Hệ số góc của tiếp tuyến (C) tại $M(1;1)$ là $k = f'(1) = -1$.
- Phương trình tiếp tuyến của (C) tại $M(1;1)$ là $y = -x + 2$.

□

VÍ DỤ 3. Cho (C) là đồ thị của hàm số $y = \sqrt{x}$. Viết phương trình tiếp tuyến của (C), biết:

a) Tiếp điểm có hoành độ $x_0 = 4$;

b) Tiếp điểm có tung độ $y_0 = 3$.

Lời giải.

Ta có $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

a) Tiếp điểm có hoành độ $x_0 = 4$
Gọi $(x_0; y_0)$ là tọa độ tiếp điểm.
Hệ số góc tiếp tuyến $k = f'(4) = \dfrac{1}{4}$, $y_0 = f(4) = 2$.
Phương trình tiếp tuyến $y = \dfrac{1}{4}(x-4) + 2$ hay $y = \dfrac{1}{4}x + 1$.

b) Tiếp điểm có tung độ $y_0 = 3$.
Gọi $(x_0; y_0)$ là tọa độ tiếp điểm.
$y_0 = 3 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 3 \Leftrightarrow x = 9$.
Hệ số góc của tiếp tuyến $k = f'(9) = \dfrac{1}{6}$.
Phương trình tiếp tuyến $y = \dfrac{1}{6}(x-9) + 3$ hay $y = \dfrac{1}{6}x + \dfrac{3}{2}$.

□

VÍ DỤ 4. Viết phương trình tiếp tuyến của parabol $y = x^2 + 2x$, biết:

a) Tiếp điểm có hoành độ $x_0 = 2$;

b) Tiếp điểm có tung độ $y_0 = 3$.

Lời giải.

Ta có $y' = 2x + 2$.

a) Tiếp điểm có hoành độ $x_0 = 2$
Gọi $(x_0; y_0)$ là tọa độ tiếp điểm.
Hệ số góc tiếp tuyến $k = f'(2) = 6$, $y_0 = f(2) = 8$.
Phương trình tiếp tuyến $y = 6(x-2) + 8$ hay $y = 6x - 4$.

b) Tiếp điểm có tung độ $y_0 = 3$.
Gọi $(x_0; y_0)$ là tọa độ tiếp điểm.
$y_0 = 3 \Leftrightarrow x_0^2 + 2x_0 = 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = 1 \\ x_0 = -3. \end{array}\right.$

TH1. $x_0 = 1$, $k = f'(1) = 4$. Phương trình tiếp tuyến $y = 4(x-1) + 3$ hay $y = 4x - 1$.

TH2. $x = -3$, $k = f'(-3) = -4$. Phương trình tiếp tuyến $y = -4(x+3) + 3$ hay $y = -4x - 8$.

□

2. Bài tập áp dụng

BÀI 1. Cho hàm số $y = x^2$ có đồ thị (C).

a) Xác định hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm có hoành độ bằng 2.

b) Viếp phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm $M(2; 4)$.

Lời giải.

a) Tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm có hoành độ bằng 2 có hệ số góc là:

$$f'(2) = \lim_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 2^2}{x - 2} = \lim_{x \to 2} (x + 2) = 4.$$

b) Phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm $M(2; 4)$ là

$$y = 4(x-2) + 4 \Leftrightarrow y = 4x - 4.$$

□

BÀI 2. Cho (C) là đồ thị của hàm số $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$ và điểm $M(2; 1) \in (C)$. Tính hệ số góc của tiếp tuyến của (C) tại điểm M và viết phương trình tiếp tuyến đó.

Lời giải.

Ở bài trước ta tính được $f'(x) = -\dfrac{1}{(x-1)^2}$.

- Hệ số góc của tiếp tuyến (C) tại $M(2;1)$ là $k = f'(2) = -1$.
- Phương trình tiếp tuyến của (C) tại $M(2;1)$ là $y = -1(x-2) + 1 \Leftrightarrow y = -x + 3$.

BÀI 3. Cho (C) là đồ thị của hàm số $y = \sqrt{x-1}$. Viết phương trình tiếp tuyến của (C), biết:

a) Tiếp điểm có hoành độ $x_0 = 2$;

b) Tiếp điểm có tung độ $y_0 = 3$.

Lời giải.

Ta có $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}$.

a) Tiếp điểm có hoành độ $x_0 = 2$
Gọi $(x_0; y_0)$ là tọa độ tiếp điểm.
Hệ số góc tiếp tuyến $k = f'(2) = \dfrac{1}{2}$, $y_0 = f(2) = 1$.
Phương trình tiếp tuyến $y = \dfrac{1}{2}(x-2) + 1$ hay $y = \dfrac{1}{2}x$.

b) Tiếp điểm có tung độ $y_0 = 3$.
Gọi $(x_0; y_0)$ là tọa độ tiếp điểm.
$y_0 = 3 \Leftrightarrow \sqrt{x-1} = 3 \Leftrightarrow x = 10$.
Hệ số góc của tiếp tuyến $k = f'(10) = \dfrac{1}{6}$.
Phương trình tiếp tuyến $y = \dfrac{1}{6}(x-10) + 3$ hay $y = \dfrac{1}{6}x + \dfrac{4}{3}$.

BÀI 4. Viết phương trình tiếp tuyến của parabol $y = x^2 + 1$, biết:

a) Tiếp điểm có hoành độ $x_0 = 3$;

b) Tiếp điểm có tung độ $y_0 = 5$.

Lời giải.

Ta có $y' = 2x$.

a) Tiếp điểm có hoành độ $x_0 = 3$
Gọi $(x_0; y_0)$ là tọa độ tiếp điểm.
Hệ số góc tiếp tuyến $k = f'(3) = 6$, $y_0 = f(3) = 10$.
Phương trình tiếp tuyến $y = 6(x-3) + 10$ hay $y = 6x - 8$.

b) Tiếp điểm có tung độ $y_0 = 5$.
Gọi $(x_0; y_0)$ là tọa độ tiếp điểm.
$y_0 = 5 \Leftrightarrow x_0^2 + 1 = 5 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = 2 \\ x_0 = -2. \end{array}\right.$

TH1. $x_0 = 2$, $k = f'(2) = 4$. Phương trình tiếp tuyến $y = 4(x-2) + 5$ hay $y = 4x - 3$.
TH2. $x = -2$, $k = f'(-2) = -4$. Phương trình tiếp tuyến $y = -4(x+2) + 5$ hay $y = -4x - 3$.

C. BÀI TẬP RÈN LUYỆN

BÀI 5. Tính (bằng định nghĩa) đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = x^2 - x$ tại $x_0 = 1$;

b) $y = -x^3$ tại $x_0 = -1$;

c) $f(x) = 3x^3 - 1$ tại $x_0 = 1$.

Lời giải.

a) $y = x^2 - x$ tại $x_0 = 1$; Ta có $f(x) - f(1) = x^2 - x - (1^2 - 1) = x(x-1)$.
Với $x \neq 1$, $\dfrac{f(x) - f(1)}{x-1} = \dfrac{x(x-1)}{x-1} = x$.
Tính giới hạn $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1} x = 1$.
Vậy $f'(1) = 1$.

b) $y=-x^3$ tại $x_0=-1$.
Ta có $f(x)-f(-1)=-x^3-1=-(x+1)(x^2-x+1)$.
Với $x\neq 1$, $\dfrac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}=\dfrac{-(x+1)(x^2-x+1)}{x+1}=-(x^2-x+1)$.
Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim\limits_{x\to -1}-(x^2-x+1)=-3$.
Vậy $f'(-1)=-3$.

c) Xét $\Delta x=x_0-1$. Ta có:

$$\begin{aligned}\Delta y=&f(1+\Delta x)-f(1)\\=&3(1+\Delta x)^3-1-2\\=&9\Delta x+9(\Delta x)^2+3(\Delta x)^3\\=&\Delta x[9+9\Delta x+3(\Delta x)^2].\end{aligned}$$

Suy ra: $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=9+9\Delta x+3(\Delta x)^2$.
Ta thấy: $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(9+9\Delta x+3(\Delta x)^2\right)=9$.
Vậy $f'(1)=9$.

□

BÀI 6. Sử dụng định nghĩa, tìm đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y=kx^2+c$ (với k,c là hằng số);

b) $y=x^3$.

c) $f(x)=-x^2$;

d) $f(x)=x^3-2x$;

e) $f(x)=\dfrac{4}{x}$.

Lời giải.

a) $y=kx^2+c$ (với k,c là hằng số).
Với x_0 bất kì, ta có:

$$\begin{aligned}f'(x_0)&=\lim_{x\to x_0}\frac{(kx^2+c)-(kx_0^2+c)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{k(x-x_0)(x+x_0)}{x-x_0}\\&=\lim_{x\to x_0}k(x+x_0)=k(x_0+x_0)=2kx_0.\end{aligned}$$

Vậy hàm số $y=kx^2+c$ (với c,k là hằng số) có đạo hàm là hàm số $y'=2kx$.

b) $y=x^3$
Với x_0 bất kì, ta có:

$$\begin{aligned}f'(x_0)&=\lim_{x\to x_0}\frac{(x^3)-(x_0^3)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{(x-x_0)(x^2+xx_0+x_0^2)}{x-x_0}\\&=\lim_{x\to x_0}(x^2+xx_0+x_0^2)=(x_0^2+x_0x_0+x_0^2)=3x_0^2.\end{aligned}$$

Vậy hàm số $y=x^3$ có đạo hàm là hàm số $y'=3x^2$.

c) Với bất kì x_0, ta có
$f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{-x^2+{x_0}^2}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}[-(x+x_0)]=-2x_0$.
Vậy $f'(x)=-2x$ trên $\mathbb{R}$.

d) Với bất kì x_0, ta có
$f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\left[(x^3-2x)-({x_0}^3-2x_0)\right]}{x-x_0}$
$=\lim\limits_{x\to x_0}\left[x^2+xx_0+{x_0}^2-2\right]=3{x_0}^2-2$.
Vậy $f'(x)=3x^2-2$ trên $\mathbb{R}$.

e) Với mọi $x_0\neq 0$, ta có
$f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\frac{4}{x}-\frac{4}{x_0}}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{4(x_0-x)}{xx_0(x-x_0)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{-4}{xx_0}=-\dfrac{4}{x_0^2}$.
Vậy $f'(x)=\left(\dfrac{4}{x}\right)'=-\dfrac{4}{x^2}$ trên các khoảng $(-\infty;0)$ và $(0;+\infty)$.

□

BÀI 7. Một chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $s(t) = 4t^3 + 6t + 2$, trong đó s tính bằng mét và t là thời gian tính bằng giây. Tính vận tốc tức thời của chuyển động tại $t = 2$.

Lời giải.

Ta có: $v(t) = s'(t) = 12t^2 + 6$.
Vận tốc tức thời tại $t = 2$ là $v(2) = 12 \cdot 2^2 + 6 = 54\ m/s$. □

BÀI 8. Trên Mặt Trăng, quãng đường rơi tự do của một vật được cho bởi công thức $h(t) = 0,81t^2$, với t được tính bằng giây và h tính bằng mét. Hãy tính vận tốc tức thời của vật được thả rơi tự do trên Mặt Trăng tại thời điểm $t = 2$.

Lời giải.

Vận tốc rơi tức thời tại thời điểm $t = 2$ là $v(2) = h'(2) = 1{,}62 \cdot 2 = 3{,}24$ m/s. □

BÀI 9. Một vật được phóng theo phương thẳng đứng lên trên từ mặt đất với vận tốc ban đầu là 19,6 m/s thì độ cao h của nó (tính bằng mét) sau t giây được cho bởi công thức $h = 19{,}6t - 4{,}9t^2$. Tìm vận tốc của vật khi nó chạm đất.

Lời giải.

Phương trình biểu diễn độ cao của vật là $h = 19{,}6t - 4{,}9t^2$ nên vận tốc của vật theo thời gian t là $v(t) = 19{,}6 - 9{,}8t$.

Khi vật chạm đất thì $h = 0$ hay $19{,}6t - 4{,}9t^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0 \text{ (loại)} \\ t = 4 \text{ (nhận)}. \end{array}\right.$

Vận tốc của vật khi chạm đất là $v(4) = 19{,}6 - 9{,}8 \cdot 4 = -19{,}6$ m/s. □

BÀI 10. Tìm hệ số góc của tiếp tuyến của parabol $y = x^2$ tại điểm có hoành độ $x_0 = -1$.

Lời giải.

Ta tính được $(x^2)' = 2x$ nên $y'(-1) = 2 \cdot (-1) = -2$.
Vậy hệ số góc của tiếp tuyến của paraol $y = x^2$ tại điểm có hoành độ $x_0 = -1$ là $k = -2$. □

BÀI 11. Viết phương trình tiếp tuyến của parabol $(P)\colon y = 3x^2$ tại điểm có hoành độ $x_0 = 1$.

Lời giải.

Ta tính được $y' = 6x$. Do đó, hệ số góc của tiếp tuyến là $k = f'(1) = 6$. Ngoài ra, ta có $f(1) = 3$ nên phương trình tiếp tuyến cần tìm là $y - 3 = 6(x - 1)$ hay $y = 6x - 3$. □

BÀI 12. Cho hàm số $f(x) = -2x^2$ có đồ thị (C) và điểm $A(1; -2) \in (C)$. Tính hệ số góc của tiếp tuyến với (C) tại điểm A.

Lời giải.

Đạo hàm $f'(x) = -4x$.
Hệ số góc tiếp tuyến của (C) tại điểm A là

$$k = f'(1) = -4 \cdot 1 = -4.$$

□

BÀI 13. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3$.

a) Tại điểm $(-1; 1)$;

b) Tại điểm có hoành độ bằng 2.

Lời giải.

a) Ta có $f'(x) = 3x^2$ nên $f'(-1) = 3$.
Phương trình tiếp tuyến của đồ thị tại điểm $(-1; 1)$ là

$$y = f'(-1) \cdot (x + 1) + 1 \Leftrightarrow y = 3x + 4.$$

b) Gọi $A(2; 8)$ thuộc đồ thị hàm số $y = x^3$
Ta có $f'(x) = 3x^2$ nên $f'(2) = 12$.
Phương trình tiếp tuyến của đồ thị tại A là

$$y = f'(2) \cdot (x - 2) + 8 \Leftrightarrow y = 12x - 16.$$

□

BÀI 14. Cho hàm số $y = -2x^2 + x$ có đồ thị (C).

a) Xác định hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm có hoành độ bằng 2.

b) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm $M(2; -6)$.

Lời giải.

a) Tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm có hoành độ bằng 2 có hệ số góc là:

$$\begin{aligned} f'(2) &= \lim_{x\to 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} \\ &= \lim_{x\to 2} \frac{-2x^2+x-(-6)}{x-2} \\ &= \lim_{x\to 2} \frac{-2x^2+x+6}{x-3} \\ &= \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(-2x-3)}{x-2} \\ &= \lim_{x\to 2}(-2x-3) = -7. \end{aligned}$$

b) Phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm $M(2;-6)$ là

$$\begin{aligned} & y = -7(x-2)+(-6) \\ \Leftrightarrow\ & y = -7x+8. \end{aligned}$$

□

BÀI 15. Viết phương trình tiếp tuyến của parabol $y=-x^2+4x$, biết:

a) Tiếp điểm có hoành độ $x_0=1$;

b) Tiếp điểm có tung độ $y_0=0$.

Lời giải.

a) Tiếp điểm có hoành độ $x_0=1$
Gọi $(x_0;y_0)$ là tọa độ tiếp điểm.
Ta có $y'=-2x+4$.
Hệ số góc tiếp tuyến $k=f'(1)=2$, $y_0=f(1)=3$.
Phương trình tiếp tuyến $y-3=2(x-1)$ hay $y=2x+1$.

b) Tiếp điểm có tung độ $y_0=0$.
Gọi $(x_0;y_0)$ là tọa độ tiếp điểm.
$y_0=0 \Leftrightarrow -x_0^2+4x_0=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0=0 \\ x_0=4. \end{array}\right.$
TH1: $x_0=0$, $k=f'(0)=4$.
Phương trình tiếp tuyến $y-0=4(x-0)$ hay $y=4x$.
TH2: $x=4$, $k=f'(4)=-4$
Phương trình tiếp tuyến $y-0=-4(x-4)$ hay $y=-4x+16$.

□

BÀI 16. Cho hàm số $y=x^3-3x^2+2(C)$. Viết phương trình tiếp tuyến của (C):

a) Tại giao điểm của đồ thị hàm số với trục Oy

b) Tại điểm có tung độ bằng 2

c) Tại điểm M mà tiếp tuyến tại M song song với đường thẳng $y=6x+1$

d) Tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $y=\dfrac{-1}{9}x+3$

Lời giải.

Ta tính được $y'(x)=3x^2-6x$.

a) (C) cắt Oy nên $x=0 \Rightarrow y=2$. Vậy tiếp tuyến của (C) tại điểm $A(0;2)$ là $y=y'(0)(x-0)+2 \Rightarrow y=2$.

b) Điểm trên (C) có tung độ bằng $2 \Rightarrow$ hoành độ là nghiệm của phương trình $x^3-3x^2+2=2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=0; y=2; A(0;2) \\ x=3; y=2; B(3;2) \end{array}\right.$

$\Rightarrow$ phương trình tiếp tuyến $\left[\begin{array}{l} y=2 \\ y=9x-24 \end{array}\right.$

c) Tiếp tuyến song song với $y=6x+1 \Rightarrow f'(x_0)=6$ với x_0 là hoành độ tiếp điểm.
Giải phương trình ta có $\left[\begin{array}{l} x_0=1+\sqrt{3} \\ x_0=1-\sqrt{3} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y=6x-6-6\sqrt{3} \\ y=6x-6+6\sqrt{3} \end{array}\right.$

d) Tiếp tuyến vuông góc với $y = -\frac{1}{9}x + 3 \Rightarrow f'(x_0) = 9 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = 3 \\ x_0 = -1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y = 9x - 25 \\ y = 9x + 20 \end{array}\right.$

□

BÀI 17. Chứng minh rằng hàm số $f(x) = |x|$ không có đạo hàm tại điểm $x_0 = 0$, nhưng có đạo hàm tại mọi điểm $x \neq 0$.

Lời giải.

- Chứng minh rằng hàm số $f(x) = |x|$ không có đạo hàm tại điểm $x_0 = 0$.
  Xét Δx là số gia của biến số tại điểm $x_0 = 0$.
  Ta có: $\Delta y = f(0 + \Delta x) - f(0) = |\Delta x|$.
  Suy ra: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{|\Delta x|}{\Delta x}$.
  Vì: $\lim\limits_{\Delta x \to 0^+} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1$ và $\lim\limits_{\Delta x \to 0^-} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -1$.
  Nên hàm số $f(x) = |x|$ không có đạo hàm tại điểm $x_0 = 0$.

- Chứng minh rằng hàm số $f(x) = |x|$ có đạo hàm tại mọi điểm $x \neq 0$.
  Xét Δx là số gia của biến số tại điểm $x \neq 0$.
  Ta có:

$$\begin{aligned} \Delta y = & \; f(x + \Delta x) - f(x) \\ = & \; |x + \Delta x| - |x| \\ = & \; \sqrt{(x + \Delta x)^2} - \sqrt{x^2} \\ = & \; \frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\sqrt{(x + \Delta x)^2} + \sqrt{x^2}} \\ = & \; \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\sqrt{(x + \Delta x)^2} + \sqrt{x^2}}. \end{aligned}$$

  Suy ra: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x + \Delta x}{\sqrt{(x + \Delta x)^2} + \sqrt{x^2}}$.
  Ta thấy: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{2x + \Delta x}{\sqrt{(x + \Delta x)^2} + \sqrt{x^2}} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2}} = \frac{x}{|x|}$.
  Vậy $f'(x) = \frac{x}{|x|}$ với $x \neq 0$.

□

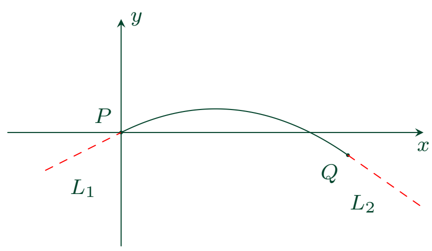
BÀI 18. Một kỹ sư thiết kế một đường ray tàu lượn, mà mặt cắt của nó gồm một cung đường cong có dạng parabol, đoạn dốc lên L_1 và đoạn dốc xuống L_2 là những phần đường thẳng có hệ số góc lần lượt là 0,5 và $-0{,}75$. Để tàu lượn chạy êm và không bị đổi hướng đột ngột, L_1 và L_2 phải là những tiếp tuyến của cung parabol tại các điểm chuyển tiếp P và Q. Giả sử gốc tọa độ đặt tại P và phương trình của paraol là $y = ax^2 + bx + c$, trong đó x tính bằng mét.

a) Tìm c.

b) Tính $y'(0)$ và tìm b.

c) Giả sử khoảng cách theo phương ngang giữa P và Q là 40m.
Tìm a.

d) Tìm chênh lệch độ cao giữa hai điểm chuyển tiếp P và Q.



Lời giải.

a) Tìm c.
Chọn hệ trục tọa độ như hình, đồ thì đi qua gốc tọa độ $P(0;0)$ nên $c = 0$.

b) Tính $y'(0)$ và tìm b.
$y' = 2ax^2 + b$ nên $y'(0) = b$.
Do hệ số góc tại P bằng 0,5 nên $y'(0) = 0{,}5$ hay $b = 0{,}5$.

c) Giả sử khoảng cách theo phương ngang giữa P và Q là 40 m. Tìm a.
Khoảng cách theo phương ngang giữa P và Q là 40 m nên $x_Q = 40$.
Hệ số góc tại Q bằng $-0{,}75$ nên $y'(40) = -0{,}75$ hay $2a \cdot 40^2 + 0{,}5 = -0{,}75 \Leftrightarrow a = \frac{-1}{2560}$.

d) Tìm chênh lệch độ cao giữa hai điểm chuyển tiếp P và Q.
$y=-\dfrac{1}{2560}x^2+\dfrac{1}{2}x$.
$y_Q=y(40)=\dfrac{155}{8}=19{,}375$ m.
Vậy chênh lệch độ cao giữa P và Q là 19,375 m.

□

BÀI 19. Giả sử chi phí C (USD) để sản xuất Q máy vô tuyến là $C(Q)=Q^2+80Q+3500$.

a) Ta gọi chi phí biên là chi phí gia tăng để sản xuất thêm 1 sản phẩm từ Q sản phẩm lên $Q+1$ sản phẩm. Giả sử chi phí biên được xác định bởi hàm số $C'(Q)$. Tìm hàm chi phí biên.

b) Tìm $C'(90)$ và giải thích ý nghĩa kết quả tìm được.

c) Hãy tính chi phí sản xuất máy vô tuyến thứ 100.

Lời giải.

a) Xét ΔQ là số gia của biến số tại điểm Q.
Ta có:
$$\begin{aligned}\Delta Q &= C(Q+\Delta Q)-C(Q)\\ &=(Q+\Delta Q)^2+80\left(Q+\Delta Q\right)+3500-\left(Q^2+80Q+3500\right)\\ &=2Q\cdot(\Delta Q)+(\Delta Q)^2+80\Delta Q.\end{aligned}$$
Suy ra: $\dfrac{\Delta y}{\Delta Q}=2Q+\Delta Q+80$.
Ta thấy: $\lim\limits_{\Delta Q\to 0}(2Q+\Delta Q+80)=2Q+80$.
Vậy $C'(Q)=2Q+80$.

b) $C'(90)=2\cdot 90+80=260$.
Chi phí gia tăng để sản xuất từ 90 sản phẩm máy vô tuyến lên 91 máy vô tuyến là 260 USD.

c) Chi phí để sản xuất máy vô tuyến thứ 100 là
$$C(100)=100^2+80\cdot 100+3500=21\ 500\ \text{(USD)}.$$
Chi phí gia tăng để sản xuất từ 99 sản phẩm máy vô tuyến lên 100 máy vô tuyến là
$$C'(99)=2\cdot 99+80=278\ \text{(USD)}.$$
Vậy tổng chi phí để sản xuất máy vô tuyến thứ 100 là
$$21\ 500+278=21\ 778\ \text{(USD)}.$$

□

Bài 32. CÁC QUY TẮC TÍNH ĐẠO HÀM

A. TÓM TẮT KIẾN THỨC

1. Đạo hàm của một số hàm số thường gặp

1.1. Đạo hàm của hàm số $y=x^n$ $(n\in\mathbb{N}^*)$

ĐỊNH LÍ 32.1. *Hàm số $y=x^n$ $(n\in\mathbb{N})$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $(x^n)'=nx^{n-1}$.*

1.2. Đạo hàm của hàm số $y=\sqrt{x}$

ĐỊNH LÍ 32.2. *Hàm số $y=\sqrt{x}$ có đạo hàm trên khoảng $(0;+\infty)$ và $(\sqrt{x})'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.*

2. Đạo hàm của tổng hiệu tích thương

ĐỊNH LÍ 32.3. *Giả sử các hàm số $u=u(x)$, $v=v(x)$ có đạo hàm trên khoảng $(a;b)$. Khi đó*

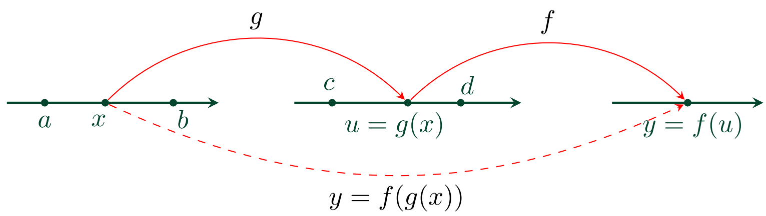
- $(u+v)'=u'+v'$;
- $(u-v)'=u'-v'$;
- $(u\cdot v)'=u'\cdot v+u\cdot v'$;
- $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'\cdot v-u\cdot v'}{v^2}$ $(v=v(x)\neq 0)$.

- *Quy tắc tính đạo hàm của tổng, hiệu có thể áp dụng cho tổng, hiệu của hai hay nhiều hàm số.*
- *Với k là một hằng số, ta có $(ku)' = k \cdot u'$.*
- *Đạo hàm của hàm số nghịch đảo:* $\left(\dfrac{1}{v}\right)' = -\dfrac{v'}{v^2}$ $(v = v(x) \neq 0)$.

3. Đạo hàm của hàm số hợp

3.1. Khái niệm hàm số hợp

Định lí 32.4. *Giả sử $u = g(x)$ là hàm số xác định trên khoảng $(a; b)$, có tập giá trị chứa trong khoảng $(c; d)$ và $y = f(u)$ là hàm số xác định trên khoảng $(c; d)$. Hàm số $y = f(g(x))$ được gọi là hàm số hợp của hàm số $y = f(u)$ với $u = g(x)$.*



3.2. Đạo hàm của hàm số hợp

Định lí 32.5. *Nếu hàm số $u = g(x)$ có đạo hàm u'_x tại x và hàm số $y = f(u)$ có đạo hàm y'_u tại u thì hàm số hợp $y = f(g(x))$ có đạo hàm y'_x tại x là*

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x.$$

4. Đạo hàm của hàm số lượng giác

4.1. Đạo hàm của hàm số $y = \sin x$

Định lí 32.6.

- *Hàm số $y = \sin x$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $(\sin x)' = \cos x$.*
- *Đối với hàm số hợp $y = \sin u$, với $u = u(x)$, ta có $(\sin u)' = u' \cdot \cos u$.*

4.2. Đạo hàm của hàm số $y = \cos x$

Định lí 32.7.

- *Hàm số $y = \cos x$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $(\cos x)' = -\sin x$.*
- *Đối với hàm số hợp $y = \cos u$, với $u = u(x)$, ta có $(\cos u)' = -u' \cdot \sin u$.*

4.3. Đạo hàm của hàm số $y = \tan x$ và $y = \cot x$

Định lí 32.8.

- *Hàm số $y = \tan x$ có đạo hàm tại mọi $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ và $(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.*
- *Hàm số $y = \cot x$ có đạo hàm tại mọi $x \neq k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ và $(\cot x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$.*
- *Đối với hàm số hợp $y = \tan u$ và $y = \cot u$ với $u = u(x)$, ta có*

$$(\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2 u};\ (\cot u)' = -\frac{u'}{\sin^2 u}$$

(giả thiết $\tan u$ và $\cot u$ có nghĩa).

5. Đạo hàm của hàm số mũ và hàm số lôgarit

5.1. Giới hạn liên quan đến hàm số mũ và hàm số lôgarit

Nhận xét. Ta có các giới hạn sau:

$$\lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e};\ \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1;\ \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 1.$$

5.2. Đạo hàm của hàm số mũ

Định lí 32.9.

- *Hàm số $y = \mathrm{e}^x$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$.*
  Đối với hàm số hợp $y = \mathrm{e}^u$, với $u = u(x)$, ta có $(\mathrm{e}^u)' = u' \cdot \mathrm{e}^u$.
- *Hàm số $y = a^x$ $(0 < a \neq 1)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$.*
  Đối với hàm số hợp $y = a^u$, với $u = u(x)$, ta có $(a^u)' = u' \cdot a^u \cdot \ln a$.

5.3. Đạo hàm của hàm số logarit

Định lí 32.10.

- *Hàm số $\ln x$ có đạo hàm trên khoảng $(0; +\infty)$ và $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$.*
  Đối với hàm số hợp $y = \ln u$, với $u = u(x)$, ta có $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$.
- *Hàm số $\log_a x$ có đạo hàm trên khoảng $(0; +\infty)$ và $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$.*
  Đối với hàm số hợp $y = \log_a x$, với $u = u(x)$, ta có $(\log_a x)' = \dfrac{u'}{u \ln a}$.

Với $x < 0$, ta có:

$$\ln|x| = \ln(-x) \text{ và } [\ln(-x)]' = \frac{(-x)'}{-x} = \frac{1}{x}.$$

Từ đó ta có:

$$(\ln|x|)' = \frac{1}{x}, \forall x \neq 0$$

Bảng đạo hàm

Đạo hàm của hàm số sơ cấp cơ bản thường gặp	Đạo hàm của hàm hợp (ở đây $u = u(x)$)
$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$	$(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$
$\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$	$\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{u'}{u^2}$
$(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$
$(\sin x)' = \cos x$	$(\sin u)' = u' \cdot \cos u$
$(\cos x)' = -\sin x$	$(\cos u)' = -u' \cdot \sin u$
$(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$(\tan u)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$
$(\cot x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$(\cot u)' = -\dfrac{u'}{\sin^2 u}$
$(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$	$(\mathrm{e}^u)' = u' \cdot \mathrm{e}^u$
$(a^x)' = a^x \ln a$	$(a^u) = u' \cdot a^u \ln a$
$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$	$(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$
$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$	$(\log_a u)' = \dfrac{u'}{u \ln a}$

6. Đạo hàm cấp hai

6.1. Khái niệm đạo hàm cấp 2

Định nghĩa 32.1. Giả sử hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại mỗi điểm $x \in (a; b)$. Nếu hàm số $y' = f'(x)$ lại có đạo hàm tại x thì ta gọi đạo hàm của y' là đạo hàm cấp hai của hàm số $y = f(x)$ tại x. Kí hiệu là $y''(x)$.

6.2. Ý nghĩa cơ học của đạo hàm cấp hai

ĐỊNH NGHĨA 32.2. Một chuyển động có phương trình $s = f(t)$ thì đạo hàm cấp hai (nếu có) của hàm số $f(t)$ là gia tốc tức thời của chuyển động. Ta có

$$a(t) = f''(t).$$

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP

Dạng 3. Tính đạo hàm cơ bản

1. Ví dụ minh hoạ

VÍ DỤ 1. Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = \sin x$ tại điểm $x_0 = \dfrac{\pi}{3}$.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = \cos x$.

Đạo hàm của hàm số trên tại điểm $x_0 = \dfrac{\pi}{3}$ là $f'\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \cos\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2}$. □

VÍ DỤ 2. Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = \tan x$ tại điểm $x_0 = \dfrac{\pi}{4}$.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x}\ \left(x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right)$.

Đạo hàm của hàm số trên tại điểm $x_0 = \dfrac{\pi}{4}$ là $f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1}{\cos^2\left(\dfrac{\pi}{4}\right)} = 2$. □

VÍ DỤ 3. Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = \cot x$ tại điểm $x_0 = \dfrac{\pi}{2}$.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = -\dfrac{1}{\sin^2 x}\ (x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z})$.

Đạo hàm của hàm số trên tại điểm $x_0 = \dfrac{\pi}{2}$ là: $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = -\dfrac{1}{\sin^2\left(\dfrac{\pi}{2}\right)} = -1$. □

VÍ DỤ 4. Tính đạo hàm của hàm số $y = x^5$ tại điểm $x = 2$ và $x = -\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Ta có $\left(x^5\right)' = 5x^4$. Từ đó, $y'(2) = 5 \cdot 2^4 = 80$ và $y'\left(-\dfrac{1}{2}\right) = 5 \cdot \left(-\dfrac{1}{2}\right)^4 = \dfrac{5}{16}$. □

VÍ DỤ 5. Tính đạo hàm của hàm số $y = \sqrt{x}$ tại điểm $x = 1$ và $x = \dfrac{1}{4}$.

Lời giải.

Ta có $y' = (\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, $x > 0$. Từ đó, $y'(1) = \dfrac{1}{2\sqrt{1}} = \dfrac{1}{2}$ và $y'\left(\dfrac{1}{4}\right) = \dfrac{1}{2\sqrt{\dfrac{1}{4}}} = \dfrac{1}{2 \cdot \dfrac{1}{2}} = 1$. □

VÍ DỤ 6. Tìm đạo hàm của các hàm số

a) $y = \sqrt[4]{x}$ tại $x = 1$;

b) $y = \dfrac{1}{x}$ tại $x = -\dfrac{1}{4}$.

Lời giải.

a) $y = \sqrt[4]{x}$ tại $x = 1$.

Ta có $y' = (\sqrt[4]{x})' = \left(x^{\frac{1}{4}}\right)' = \dfrac{1}{4} \cdot x^{\frac{1}{4}-1} = \dfrac{1}{4} \cdot x^{-\frac{3}{4}} = \dfrac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}$. Từ đó, $y'(1) = \dfrac{1}{4\sqrt[4]{1^3}} = \dfrac{1}{4}$.

b) $y = \dfrac{1}{x}$ tại $x = -\dfrac{1}{4}$.

Ta có $y' = \left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$. Từ đó, $y'\left(-\dfrac{1}{4}\right) = -\dfrac{1}{\left(-\frac{1}{4}\right)^2} = -16$.

□

VÍ DỤ 7. Tìm đạo hàm của các hàm số

a) $y = 9^x$ tại $x = 1$;

b) $y = \ln x$ tại $x = \dfrac{1}{3}$.

Lời giải.
Tìm đạo hàm của các hàm số

a) $y = 9^x$ tại $x = 1$.
Ta có $y' = (9^x)' = 9^x \cdot \ln 9$. Từ đó $y'(1) = 9^1 \cdot \ln 9 = 18 \ln 3$.

b) $y = \ln x$ tại $x = \dfrac{1}{3}$.
Ta có $y' = (\ln x)' = \dfrac{1}{x}$ $(x > 0)$. Từ đó $y'\left(\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{1}{\frac{1}{3}} = 3$.

□

VÍ DỤ 8. Tìm đạo hàm của các hàm số

a) $y = \mathrm{e}^x$ tại $x = 2\ln 3$;

b) $y = \log_5 x$ tại $x = 2$.

Lời giải.
Tìm đạo hàm của các hàm số

a) $y = \mathrm{e}^x$ tại $x = 2\ln 3$.
Ta có $y' = (\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$. Từ đó, $y'(2\ln 3) = \mathrm{e}^{2\ln 3} = \left(\mathrm{e}^{\ln 3}\right)^2 = 3^2 = 9$.

b) $y = \log_5 x$ tại $x = 2$.
Ta có $y' = (\log_5 x)' = \dfrac{1}{x \cdot \ln 5}$ $(x > 0)$. Từ đó $y'(2) = \dfrac{1}{2 \cdot \ln 5}$.

□

2. Bài tập áp dụng

BÀI 1. Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = \cos x$ tại điểm $x_0 = \dfrac{\pi}{6}$.

Lời giải.
Ta có $f'(x) = -\sin x$.
Đạo hàm của hàm số trên tại điểm $x_0 = \dfrac{\pi}{6}$ là $f'\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = -\sin\dfrac{\pi}{6} = -\dfrac{1}{2}$. □

BÀI 2. Tính đạo hàm của hàm số $y = \tan x$ tại $x = \dfrac{3\pi}{4}$.

Lời giải.
Ta có $y' = (\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ $\left(x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right)$. Vậy $y'\left(\dfrac{3\pi}{4}\right) = \dfrac{1}{\cos^2\left(\frac{3\pi}{4}\right)} = 2$. □

BÀI 3. Tính đạo hàm của hàm số $y = x^{10}$ tại điểm $x = -1$ và $x = \sqrt[3]{2}$.

Lời giải.
Ta có $\left(x^{10}\right)' = 10x^9$. Từ đó, $y'(-1) = 10 \cdot (-1)^9 = -10$ và $y'\left(\sqrt[3]{2}\right) = 10 \cdot \left(\sqrt[3]{2}\right)^9 = 80$. □

BÀI 4. Tính đạo hàm của hàm số $y = \sqrt{x}$ tại các điểm $x = 4$ và $x = \dfrac{1}{9}$.

Lời giải.
Với mọi $x \in (0; +\infty)$, ta có $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. Do đó, $y'(4) = \dfrac{1}{2\sqrt{4}} = \dfrac{1}{4}$ và $y'\left(\dfrac{1}{9}\right) = \dfrac{1}{2\sqrt{\dfrac{1}{9}}} = \dfrac{3}{2}$. □

BÀI 5. Tìm đạo hàm của các hàm số

a) $y = \sqrt[3]{x}$ tại điểm $x = 8$;

b) $y = \dfrac{2}{x}$ tại $x = \dfrac{1}{5}$.

Lời giải.

a) Ta có $y' = \left(\sqrt[3]{x}\right)' = \left(x^{\frac{1}{3}}\right)' = \dfrac{1}{3} \cdot x^{\frac{1}{3}-1} = \dfrac{1}{3} \cdot x^{-\frac{2}{3}} = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$.
Từ đó, $y'(8) = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{8^2}} = \dfrac{1}{12}$.

b) Ta có $y' = \left(\dfrac{2}{x}\right)' = -\dfrac{2}{x^2}$. Từ đó, $y'\left(\dfrac{1}{5}\right) = -\dfrac{2}{\left(\frac{1}{5}\right)^2} = -50$.

□

BÀI 6. Tính đạo hàm của hàm số $f(x)=2^x$ tại điểm $x_0=1$.

Lời giải.

Ta có $f'(x)=2^x\ln 2$.
Đạo hàm của hàm số trên tại điểm $x_0=1$ là $f'(1)=2^1\ln 2=2\ln 2$. □

BÀI 7. Tính đạo hàm của hàm số $f(x)=\ln x$ tại điểm $x_0=1$.

Lời giải.

Ta có $f'(x)=\dfrac{1}{x}\ (x>0)$.
Đạo hàm của hàm số trên tại điểm $x_0=1$ là $f'(1)=\dfrac{1}{1}=1$. □

BÀI 8. Cho hàm số $f(x)=x^{10}$.

a) Tính đạo hàm của hàm số trên tại điểm x bất kì.

b) Tính đạo hàm của hàm số trên tại điểm $x_0=1$.

Lời giải.

a) Ta có $f'(x)=\left(x^{10}\right)'=10x^9$.

b) Đạo hàm của hàm số tại điểm $x_0=1$ là $f'(1)=10\cdot 1^9=10$.

□

Dạng 4. Tính đạo hàm hàm hợp

1. Ví dụ minh hoạ

VÍ DỤ 1. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y=\left(2x^3+3\right)^2$; b) $y=\cos 3x$; c) $y=\log_2\left(x^2+2\right)$; d) $y=\mathrm{e}^{x^2+1}$.

Lời giải.

a) $y=\left(2x^3+3\right)^2$.
Đặt $u=2x^3+3$ thì $y=u^2$. Ta có $u'_x=6x$ và $y'_u=2u$.
Suy ra $y'_x=y'_u\cdot u'_x=2u\cdot 6x=2\left(2x^3+3\right)\cdot 6x=12x\left(2x^3+3\right)$.
Vậy $y'=12x\left(2x^3+3\right)$.

b) $y=\cos 3x$.
Đặt $u=3x$ thì $y=\cos u$. Ta có $u'_x=3$ và $y'_u=-\sin u$.
Suy ra $y'_x=y'_u\cdot u'_x=(-\sin u)\cdot 6=(-\sin 3x)\cdot 3=-3\sin 3x$.
Vậy $y'=-3\sin 3x$.

c) $y=\log_2\left(x^2+2\right)$.
Đặt $u=x^2+2$ thì $y=\log_2 u$. Ta có $u'_x=2x$ và $y'_u=\dfrac{1}{u\ln 2}$.
Suy ra $y'_x=y'_u\cdot u'_x=\dfrac{1}{u\ln 2}\cdot 2x=\dfrac{1}{(x^2+2)\ln 2}\cdot 2x=\dfrac{2x}{(x^2+2)\ln 2}$.
Vậy $y'=\dfrac{2x}{(x^2+2)\ln 2}$.

d) $y=\mathrm{e}^{x^2+1}$.
Đặt $u=x^2+1$ thì $y=\mathrm{e}^u$. Ta có $u'_x=2x$ và $y'_u=\mathrm{e}^u$.
Suy ra $y'_x=y'_u\cdot u'_x=\mathrm{e}^u\cdot 2x=\mathrm{e}^{x^2+1}\cdot 2x=2x\mathrm{e}^{x^2+1}$.
Vậy $y'=2x\mathrm{e}^{x^2+1}$.

□

VÍ DỤ 2. Tính đạo hàm của hàm số sau

a) $y=\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{8}\right)$; b) $y=\cos\left(4x-\dfrac{\pi}{3}\right)$; c) $y=\tan\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)$; d) $y=\cot\left(3x-\dfrac{\pi}{6}\right)$.

Lời giải.

a) Ta có $y'=\left(2x+\dfrac{\pi}{8}\right)'\cdot\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{8}\right)=2\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{8}\right)$.

b) Ta có $y' = -\left(4x - \frac{\pi}{3}\right)' \cdot \sin\left(4x - \frac{\pi}{3}\right) = -4\sin\left(4x - \frac{\pi}{3}\right)$.

c) Ta có $y' = \dfrac{\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)'}{\cos^2\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)} = \dfrac{2}{\cos^2\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)}$.

d) Ta có $y' = -\dfrac{\left(3x - \frac{\pi}{6}\right)'}{\sin^2\left(3x - \frac{\pi}{6}\right)} = \dfrac{-3}{\sin^2\left(3x - \frac{\pi}{6}\right)}$.

□

VÍ DỤ 3. Tính đạo hàm của hàm số sau

a) $y = \sqrt{x^2+1}$;

b) $\dfrac{1}{2x-3}$.

Lời giải.

a) Ta có $y' = \dfrac{(x^2+1)'}{2\sqrt{x^2+1}} = \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

b) $y' = \left(\dfrac{1}{2x-3}\right) = \dfrac{-(2x-3)'}{(2x-3)^2} = \dfrac{-2}{(2x-3)^2}$.

□

VÍ DỤ 4. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = 2\tan^2 x$.

b) $y = 3\cot^3 x$.

Lời giải.

a) $y' = (2\tan^2 x)' = 2 \cdot 2\tan x \cdot (\tan x)' = 4\tan x \cdot \dfrac{1}{\cos^2 x} = \dfrac{4\tan x}{\cos^2 x}$.

b) $y' = (3\cot^3 x) = 3 \cdot 3\cot^2 x \cdot (\cot x)'$
$= 9\cot^2 x \cdot \dfrac{-1}{\sin^2 x} = \dfrac{-9\cot^2 x}{\sin^2 x}$.

□

VÍ DỤ 5. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = 3\sin x + \cos x$.

b) $y = 4\sin x - 5\cos x$.

Lời giải.

a) $y' = (3\sin x + \cos x)' = 3 \cdot (\sin x)' + (\cos x)'$
$= 3 \cdot \cos x + (-\sin x) = 3\cos x - \sin x$.

b) $y' = (4\sin x - 5\cos x)' = 4 \cdot (\sin x)' - 5 \cdot (\cos x)'$
$= 4 \cdot \cos x - 5 \cdot (-\sin x) = 4\cos x + 5\sin x$.

□

VÍ DỤ 6. Tính đạo hàm của các hàm số $y = \tan 3x + 2\tan x$.

Lời giải.

$y' = (\tan 3x + 2\tan x)' = (\tan 3x)' + (2\tan x)'$
$= \dfrac{(3x)'}{\cos^2 3x} + 2 \cdot \dfrac{1}{\cos^2 x} = \dfrac{3}{\cos^2 3x} + \dfrac{2}{\cos^2 x}$.

□

VÍ DỤ 7. Tính đạo hàm của các hàm số $y = \cot 5x \cos 4x$.

Lời giải.

$y' = (\cot 5x \cos 4x)' = (\cot 5x)' \cdot \cos 4x + \cot 5x \cdot (\cos 4x)'$
$= \dfrac{-5}{\sin^2 5x} \cdot \cos 4x + \cot 5x \cdot (-4\sin 4x)$
$= \dfrac{-5\cos 4x}{\sin^2 5x} - 4\cot 5x \sin 4x$.

□

2. Bài tập áp dụng

BÀI 1. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = (3x^2 + x)^3$; b) $y = \sin 2x$; c) $y = \ln\left(x^2 + 1\right)$; d) $y = 2^{x^2 - x}$.

Lời giải.

a) $y = (3x^2 + x)^3$.
Đặt $u = 3x^2 + x$ thì $y = u^3$. Ta có $u'_x = 6x + 1$ và $y'_u = 3u^2$.
Suy ra $y'_x = y'_u \cdot u'_x = 3u^2 \cdot (6x + 1) = 3\left(3x^2 + x\right)^2 (6x + 1)$.
Vậy $y' = 3\left(3x^2 + x\right)^2 (6x + 1)$.

b) $y = \sin 2x$.
Đặt $u = 2x$ thì $y = \sin u$. Ta có $u'_x = 2$ và $y'_u = \cos u$.
Suy ra $y'_x = y'_u \cdot u'_x = \cos u \cdot 2 = \cos 2x \cdot 2 = 2\cos 2x$.
Vậy $y' = 2\cos 2x$.

c) Ta có $y' = \dfrac{\left(x^2 + 1\right)'}{\left(x^2 + 1\right)} = \dfrac{2x}{\left(x^2 + 1\right)}$.

d) Ta có $y' = \left(x^2 - x\right)' \cdot 2^{x^2 - x} \cdot \ln 2 = (2x - 1)\ln 2 \cdot 2^{x^2 - x}$.

□

BÀI 2. Tính đạo hàm của hàm số sau

a) $y = \sin(10x - 5)$; b) $y = \cos(3 - x)$; c) $y = \tan(5x + 7)$; d) $y = \cot(4 - 2x)$.

Lời giải.

a) Ta có $y' = (10x - 5)' \cdot \cos(10x - 5) = 10\cos(10x - 5)$.

b) Ta có $y' = -(3 - x)' \cdot \sin(3 - x) = \sin(3 - x)$.

c) Ta có $y' = \dfrac{(5x + 7)'}{\cos^2(5x + 7)} = \dfrac{5}{\cos^2(5x + 7)}$.

d) Ta có $y' = -\dfrac{(4 - 2x)'}{\sin^2(4 - 2x)} = \dfrac{2}{\sin^2(4 - 2x)}$.

□

BÀI 3. Tính đạo hàm của hàm số sau

a) $y = \sqrt{3x - 5}$; b) $\dfrac{1}{3 - x}$.

Lời giải.

a) Ta có $y' = \dfrac{(3x - 5)'}{2\sqrt{3x - 5}} = \dfrac{3}{2\sqrt{3x - 5}}$.

b) $y' = \left(\dfrac{1}{3 - x}\right)' = \dfrac{-(3 - x)'}{(3 - x)^2} = \dfrac{1}{(3 - x)^2}$.

□

BÀI 4. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = \tan^2 3x$. b) $y = \cot^3 4x$.

Lời giải.

a) $y' = (\tan^2 3x)' = 2\tan 3x \cdot (\tan 3x)' = 2\tan 3x \cdot (3x)' \cdot \dfrac{1}{\cos^2 3x} = \dfrac{6\tan 3x}{\cos^2 3x}$.

b) $y' = (\cot^3 4x)' = 3\cot^2 4x \cdot (\cot 4x)' = 3\cot^2 4x \cdot (4x)' \cdot \dfrac{-1}{\sin^2 4x} = \dfrac{-12\cot^2 4x}{\sin^2 4x}$.

□

BÀI 5. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y=\sin 2x-3\sin x$.

b) $y=\cos 3x-4\cos x$.

Lời giải.

a) $y'=(\sin 2x-3\sin x)=(\sin 2x)'-(3\sin x)'$
$=(2x)'\cdot\cos 2x-3\cdot(\sin x)'=2\cdot\cos 2x-3\cdot\cos x=2\cos 2x-3\cos x$.

b) $y'=(\cos 3x-4\cos x)'=(\cos 3x)'-(4\cos x)'$
$=(3x)'\cdot(-\sin 3x)-4\cdot(\cos x)'=3\cdot(-\sin 3x)-4\cdot(-\sin x)=-3\sin 3x+4\sin x$.

□

BÀI 6. Tính đạo hàm của các hàm số $y=\cot 5x-4\cot x$.

Lời giải.

$y'=(\cot 5x-4\cot x)'=(\cot 5x)'-(4\cot x)'$
$=\dfrac{-(5x)'}{\sin^2 5x}-4\cdot\dfrac{-1}{\sin^2 x}=\dfrac{-5}{\sin^2 5x}+\dfrac{4}{\sin^2 x}$. □

BÀI 7. Tính đạo hàm của các hàm số $y=\sin x\cos 3x$.

Lời giải.

$y'=(\sin x\cos 3x)'=(\sin x)'\cdot\cos 3x+\sin x\cdot(\cos 3x)'$
$=\cos x\cdot\cos 3x+3\sin x\cdot(-\sin 3x)$
$=\cos x\cos 3x-3\sin x\sin 3x$. □

Dạng 5. Tính đạo hàm tổng, hiệu, tích, thương

1. Ví dụ minh hoạ

VÍ DỤ 1. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y=\dfrac{1}{3}x^3-x^2+2x+1$;

b) $y=3x^2-4x+2$.

Lời giải.

a) $y=3x^2-4x+2$.
$y'=\left(3x^2-4x+2\right)'=\left(3x^2\right)'-(4x)'+(2)'=3\left(x^2\right)'-4\left(x\right)'+0=3\cdot 2x-4\cdot 1=6x-4$.

b) Ta có

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{3}\left(x^3\right)'-\left(x^2\right)'+2\left(x\right)'+1' \\ &= \frac{1}{3}\cdot 3x^2-2x+2 \\ &= x^2-2x+2. \end{aligned}$$

□

VÍ DỤ 2. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y=2x^4-\dfrac{1}{3}x^3+2\sqrt{x}-5$.

b) $y=\left(x^3-1\right)\left(1-x^2\right)$.

Lời giải.

a) Ta có $y'=4x^3-x^2+\dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

b) Ta có $y'=\left(x^3-2\right)'\left(1-x^2\right)+\left(x^3-2\right)\left(1-x^2\right)'=3x^2\left(1-x^2\right)+\left(x^3-2\right)(-2x)=-5x^4+x^3+4x$.

□

VÍ DỤ 3. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y=x^2\cdot 3^x$;

b) $y=\dfrac{\sqrt{x}}{\cos x}$.

Lời giải.

a) $y'=\left(x^2\cdot 3^x\right)'=\left(x^2\right)'\cdot 3^x+x^2\cdot\left(3^x\right)'=2x\cdot 3^x+x^2\cdot 3^x\cdot\ln 3=x\cdot 3^x\,(2+x\ln 3)$.

b) $y' = \left(\dfrac{\sqrt{x}}{\cos x}\right)' = \dfrac{(\sqrt{x})' \cdot \cos x - \sqrt{x} \cdot (\cos x)'}{\cos^2 x} = \dfrac{\dfrac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \cos x - \sqrt{x}\,(-\sin x)}{\cos^2 x} = \dfrac{\cos x + 2x \sin x}{2\sqrt{x}\cos^2 x}$.

□

VÍ DỤ 4. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = \dfrac{2x+1}{1-3x}$.

b) $y = \dfrac{x^2 - 3x + 3}{x-1}$.

c) $y = \dfrac{1 + x - x^2}{1 - x + x^2}$.

Lời giải.

a) Ta có $y' = \dfrac{(2x-1)'(1-3x) - (2x-1)(1-3x)'}{(1-3x)^2} = \dfrac{2(1-3x) - (2x-1)(-3)}{(1-3x)^2} = \dfrac{5}{(1-3x)^2}$.

b) Ta có $y' = \dfrac{\left(x^2-3x+3\right)'(x-1) - \left(x^2-3x+3\right)(x-1)'}{(x-1)^2} = \dfrac{(2x-3)(x-1) - \left(x^2-3x+3\right)}{(x-1)^2} = \dfrac{x^2-2x}{(x-1)^2}$.

c) Ta có $y' = \dfrac{\left(1+x-x^2\right)'\left(1-x+x^2\right) - \left(1+x-x^2\right)\left(1-x+x^2\right)'}{\left(1-x+x^2\right)^2}$
$= \dfrac{(1-2x)\left(1-x+x^2\right) - \left(1+x-x^2\right)(-1+2x)}{\left(1-x+x^2\right)^2} = \dfrac{2-4x}{\left(1-x+x^2\right)^2}$.

□

2. Bài tập áp dụng

BÀI 1. Tính đạo hàm của mỗi hàm số sau:

a) $f(x) = x^3 + x$;

b) $g(x) = x^4 - x^2$.

Lời giải.

a) $f'(x) = \left(x^3\right)' + (x)' = 3x^2 + 1$.

b) $g'(x) = \left(x^4\right)' - \left(x^2\right)' = 4x^3 - 2x$.

□

BÀI 2. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = x \cdot \log_2 x$;

b) $y = x^3 \cdot \mathrm{e}^x$.

Lời giải.

a) $y = x \cdot \log_2 x$.
$y' = (x \cdot \log_2 x)' = x' \cdot \log_2 x + x \cdot (\log_2 x)' = 1 \cdot \log_2 x + x \cdot \dfrac{1}{x \ln 2} = \log_2 x + \dfrac{1}{\ln 2}$.

b) $y = x^3 \cdot \mathrm{e}^x$.
$y' = \left(x^3 \cdot \mathrm{e}^x\right)' = \left(x^3\right)' \cdot \mathrm{e}^x + x^3 \cdot (\mathrm{e}^x)' = 3x^2 \cdot \mathrm{e}^x + x^3 \cdot \mathrm{e}^x = x^2\mathrm{e}^x(3+x)$.

□

BÀI 3. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = \dfrac{2x+1}{x-1}$;

b) $y = x \sin x$;

c) $y = \dfrac{3x+2}{2x-1}$.

Lời giải.

a) Ta có

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(2x+1)' \cdot (x-1) + (2x+1) \cdot (x+1)'}{(x-1)^2} \\ &= \frac{2(x-1) - (2x+1)}{(x-1)^2} \\ &= -\frac{3}{(x-1)^2}. \end{aligned}$$

b) $y = x\sin x$.
$y' = (x\sin x)' = (x)'\sin x + x(\sin x)' = 1\cdot\sin x + x\cdot\cos x = \sin x + x\cos x$.

c) $y = \dfrac{3x+2}{2x-1}$.

$$\begin{aligned} y' &= \left(\frac{3x+2}{2x-1}\right)' = \frac{(3x+2)'(2x-1)-(3x+2)(2x-1)'}{(2x-1)^2} \\ &= \frac{3\cdot(2x-1)-(3x+2)\cdot 2}{(2x-1)^2} = \frac{6x-3-6x-4}{(2x-1)^2} = \frac{-7}{(2x-1)^2}. \end{aligned}$$

□

BÀI 4. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = \dfrac{1}{2}x^5 + \dfrac{2}{3}x^4 - x^3 - \dfrac{3}{2}x^2 + 4x - 5$.

b) $y = \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{3}x + x^2 - 0,5x^4$.

c) $y = \dfrac{x^4}{4} - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^2}{2} - x$.

d) $y = x^5 - 4x^3 + 2x - 3\sqrt{x}$.

Lời giải.

a) Có $y' = \dfrac{5}{2}x^4 + \dfrac{8}{3}x^3 - 3x^2 - 3x + 4$.

b) Có $y' = -\dfrac{1}{3} + 2x - 2x^3$.

c) Có $y' = x^3 - x^2 + x - 1$.

d) Có $y' = 5x^4 - 12x^2 + 2 - \dfrac{3}{2\sqrt{x}}$.

□

BÀI 5. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = (2x-3)(x^5-2x)$.

b) $y = x(2x-1)(3x+2)$.

c) $y = (\sqrt{x}+1)\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}} - 1\right)$.

d) $y = \dfrac{2x-1}{x-1}$.

e) $y = \dfrac{x^2+x-1}{x-1}$.

f) $y = \dfrac{2x^2-4x+5}{2x+1}$.

g) $y = x + 1 - \dfrac{2}{x+1}$.

h) $y = \dfrac{5x-3}{x^2+x+1}$.

i) $y = \dfrac{x^2+x+1}{x^2-x+1}$.

Lời giải.

a) $y' = 12x^5 - 15x^4 - 8x + 6$.

b) $y' = 18x^2 + 2x - 2$.

c) Ta có $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}} - \sqrt{x}$. Suy ra $y' = -\dfrac{(\sqrt{x})'}{x} - \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = -\dfrac{1}{2x\sqrt{x}} - \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

d) $y' = \dfrac{-1}{(x-1)^2}$.

e) $y' = \dfrac{x^2-2x}{(x-1)^2}$.

f) $y' = \dfrac{4x^2+4x-14}{(2x+1)^2}$.

g) $y' = 1 + \dfrac{2}{(x+1)^2} = \dfrac{x^2+2x+3}{(x+1)^2}$.

h) $y' = \dfrac{-5x^2-6x+8}{(x^2+x+1)^2}$.

i) $y' = \dfrac{-2x^2+2}{(x^2-x+1)^2}$.

□

Dạng 6. Một số ứng dụng của đạo hàm

1. Ví dụ minh hoạ

VÍ DỤ 1. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=\sqrt{x}$ tại điểm có hoành độ bằng 4.

Lời giải.

Với $x=4$ thì $y=\sqrt{4}=2$.

Ta có $y'=(\sqrt{x})'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, $x>0$. Từ đó, $y'(4)=\dfrac{1}{2\sqrt{4}}=\dfrac{1}{4}$.

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=\sqrt{x}$ tại điểm có hoành độ bằng 4 là

$$y-2=\frac{1}{4}(x-4)\ \text{ hay }\ y=\frac{1}{4}x+1.$$

□

VÍ DỤ 2. Cho đường cong $(C):\ y=f(x)=\dfrac{x^2}{2}-4x+1$.

a) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ $x_0=-2$.

b) Viết phương trình tiếp tuyến của (C), biết tiếp tuyến có hệ số góc $k=1$.

Lời giải.

a) Ta có $f'(x)=x-4$. Với $x_0=-2\Rightarrow y_0=11$.
Do đó, tiếp tuyến cần tìm có phương trình: $y=f'(-2)(x+2)+11=-6x-1$.

b) Gọi $(x_0;y_0)$ là tiếp điểm. Ta có $f'(x_0)=1\Leftrightarrow x_0-4=1\Leftrightarrow x_0=5\Rightarrow y_0=-\dfrac{13}{2}$.
Vậy, tiếp tuyến có phương trình là $y=1(x-5)-\dfrac{13}{2}=x-\dfrac{23}{2}$.

□

VÍ DỤ 3. Cho hàm số $y=f(x)=x^3-3x^2+2$ có đồ thị (C). Viết phương trình tiếp tuyến của (C) biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $\Delta:\ 3x+y=2$.

Lời giải.

Gọi $(x_0;y_0)$ là tiếp điểm của tiếp tuyến cần tìm.

Vì tiếp tuyến song song với đường thẳng $\Delta:\ y=-3x+2$ nên ta có

$$f'(x_0)=-3\Leftrightarrow 3x_0^2-6x_0+3=0\Leftrightarrow x_0=1\Rightarrow y_0=0.$$

Do vậy, tiếp tuyến có phương trình: $y=-3(x-1)+0=-3x+3$. □

VÍ DỤ 4. Cho hàm số $y=4x^3-6x^2+1$ (1). Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số (1), biết rằng tiếp tuyến đó đi qua điểm $M(-1;-9)$.

Lời giải.

Ta có $y'=12x^2-12x$. Gọi $(x_0;y_0)$ là tiếp điểm của tiếp tuyến đó.

Khi đó, phương trình tiếp tuyến tương ứng có dạng: $y=y'(x_0)(x-x_0)+y_0$.

Mặt khác, tiếp tuyến đi qua điểm $M(-1;-9)$ nên ta có phương trình

$$-9=(12x_0^2-12x_0)(-1-x_0)+4x_0^3-6x_0^2+1\Leftrightarrow (x_0+1)^2(4x_0-5)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x_0=-1\\ x_0=\dfrac{5}{4}.\end{array}\right.$$

Với $x=-1$ ta tìm được phương trình tiếp tuyến: $y=24x+15$.

Với $x=\dfrac{5}{4}$ ta có phương trình tiếp tuyến: $y=\dfrac{15}{4}x+\dfrac{21}{4}$. □

VÍ DỤ 5. Một vật chuyển động thẳng không đều xác định bởi phương trình $s(t)=t^2-4t+3$, trong đó s là quãng đường tính bằng mét và t là thời gian tính bằng giây. Tính gia tốc của chuyển động tại thời điểm $t=4$.

Lời giải.

Ta có $s'(t)=\left(t^2-4t+3\right)'=2t-4$, $s''(t)=(2t-4)'=2$.

Gia tốc của chuyển động tại thời điểm $t=4$ là $s''(4)=2\ m/s^2$. □

VÍ DỤ 6. Một vật chuyển động theo quy luật $s=-\dfrac{2}{3}t^3+4t^2-1$ với t (giây) là khoảng thời gian tính từ khi vật bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật di chuyển được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 5 giây, kể từ khi bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu?

Lời giải.

Vận tốc của chuyển động có phương trình $v=s'=-2t^2+8t$.

Ta có $-2t^2+8t=8-2(t-2)^2\le 8$. Đẳng thức có được khi $t=2$.

Do đó, trong khoảng thời gian 5 giây, kể từ khi bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng 8 $\mathrm{m/s^2}$. □

2. Bài tập tự luận

BÀI 1. Viết phương trình tiếp tuyến của đường cong $(C): \ y = f(x) = x(x^2 + x - 1) + 1$ tại điểm có tung độ bằng -1.

Lời giải.

Đạo hàm $y' = 3x^2 + 2x - 1$. Gọi $(x_0; y_0)$ là tiếp điểm, ta có

$$y_0 = -1 \Leftrightarrow x_0(x_0^2 + x_0 - 1) + 1 = -1 \Leftrightarrow (x_0 + 2)(x_0^2 - x_0 + 1) = 0 \Leftrightarrow x_0 = -2.$$

Tính được $f'(-2) = 7$, ta có phương trình tiếp tuyến cần tìm: $y = 7x + 13$. □

BÀI 2. Viết phương trình tiếp tuyến của parabol $(P): \ y = f(x) = -x^2 + 4x - 3$ tại các giao điểm của (P) với trục hoành.

Lời giải.

Đạo hàm $y' = f'(x) = -2x + 4$. Parabol cắt trục hoành lần lượt tại $x = 1$ và $x = 3$.
+ Với $x_0 = 1, y_0 = 0 \Rightarrow f'(1) = 2$, ta có tiếp tuyến: $y = 2x - 2$.
+ Với $x_0 = 3, y_0 = 0 \Rightarrow f'(3) = -2$, ta có tiếp tuyến: $y = -2x + 6$. □

BÀI 3. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị $(C): \ y = \dfrac{x-1}{x+2}$ biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $\Delta: \ 3x + y - 2 = 0$.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$. Đạo hàm $y' = \dfrac{3}{(x+2)^2}$. Viết lại phương trình đường thẳng $\Delta: \ y = -3x + 2$. Gọi $(x_0; y_0)$ là tiếp điểm của tiếp tuyến cần tìm. Tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng Δ nên

$$f'(x_0) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{3}{(x_0+2)^2} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = 1 \\ x_0 = -5. \end{array}\right.$$

Từ đó tìm được hai tiếp tuyến thỏa mãn yêu cầu bài toán là: $y = \dfrac{x-1}{3}$ và $y = \dfrac{x+11}{3}$. □

BÀI 4. Một vật được phóng lên theo phương thẳng đứng lên trên từ mặt đất với vận tốc ban đầu $v_0 = 20\,\mathrm{m/s}$. Trong vật lí, ta biết rằng khi bỏ qua sức cản của không khí, độ cao h so với mặt đất (tính bằng mét) của vật tại thời điểm t (giây) sau khi ném được cho bởi công thức sau: $h = v_0 t - \dfrac{1}{2} g t^2$, trong đó v_0 là vận tốc ban đầu của vật, $g = 9{,}8\,\mathrm{m/s^2}$ là gia tốc rơi tự do. Hãy tính vận tốc của vật khi nó đạt độ cao cực đại và khi nó chạm đất.

Lời giải.

Phương trình chuyển động của vật là $h = v_0 t - \dfrac{1}{2} g t^2$.
Vận tốc của vật tại thời điểm t được cho bởi $v(t) = h' = v_0 - gt$.
Vận tốc của vật cao cực đại tại thời điểm $t_1 = \dfrac{v_0}{g}$, tại đó vận tốc bằng $v(t_1) = v_0 - g t_1 = 0$.
Vật chạm đất tại thời điểm t_2 mà $h(t_2) = 0$ nên ta có $v_0 t_2 - \dfrac{1}{2} g t_2^2 = 0 \Leftrightarrow t_2 = 0$ (loại) và $t_2 = \dfrac{2v_0}{g}$.
Khi chạm đất, vận tốc của vật là $v(t_2) = v_0 - g t_2 = -v_0 = -20$ (m/s).
Dấu âm của $v(t_2)$ thể hiện độ cao của vật giảm với $20\,\mathrm{m/s}$ (tức là chiều chuyển động của vật ngược với chiều dương đã chọn). □

BÀI 5. Một hòn sỏi rơi tự do có quãng đường rơi tính theo thời gian t là $s(t) = 4,9t^2$, trong đó s tính bằng mét và t tính bằng giây. Tính gia tốc rơi của hòn sỏi lúc $t = 3$.

Lời giải.

Ta có $s'(t) = \left(4{,}9t^2\right)' = 4{,}9 \cdot 2t = 9{,}8t$; $s''(t) = (9{,}8t)' = 9{,}8$.
Gia tốc rơi của hòn sỏi lúc $t = 3$ là $s''(3) = 9{,}8$ m/s^2. □

Dạng 7. Chứng minh đẳng thức hoặc giải phương trình

1. Ví dụ minh hoạ

VÍ DỤ 1. Cho hàm số $y = \tan x$. Chứng minh rằng $y' - y^2 - 1 = 0$.

Lời giải.

Ta có $y' = (\tan x)' = \tan^2 x + 1$.
Suy ra $y' - y^2 - 1 = \tan^2 x + 1 - \tan^2 x - 1 = 0$.
Vậy ta có điều phải chứng minh. □

VÍ DỤ 2. Cho hàm số $y = \cot 2x$. Chứng minh rằng $y' + 2y^2 + 2 = 0$.

Lời giải.

Ta có $y' = (\cot 2x)' = -2\left(\cot^2 2x + 1\right)$ và $y^2 = \cot^2 2x \Rightarrow 2y^2 + 2 = 2\cot^2 2x + 2$.
Suy ra $y' + 2y^2 + 2 = -2\left(\cot^2 x + 1\right) + 2\cot^2 x + 2 = 0$.
Vậy ta có điều phải chứng minh. □

VÍ DỤ 3. Cho hàm số $y=\sin^6 x+\cos^6 x+3\sin^2 x\cos^2 x$. Chứng minh rằng $y'=0$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} y &= \sin^6 x+\cos^6 x+3\sin^2 x\cos^2 x \\ &= \left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)\left[\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)^2-3\sin^2 x.\cos^2 x\right]+3\sin^2 x\cos^2 x \\ &= \left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)^2=1. \end{aligned}$$

Suy ra $y'=0$. □

VÍ DỤ 4. Cho hàm số $y=\cos^2 x-\sin x$. Giải phương trình $y'=0$.

Lời giải.

Ta có $y'=\left(\cos^2 x-\sin x\right)'=-2\sin x.\cos x-\cos x$. Suy ra

$$\begin{aligned} y'=0 &\Leftrightarrow -2\sin x.\cos x-\cos x=0 \\ &\Leftrightarrow \cos x\left(-2\sin x-1\right)=0 \\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x=0 \\ -2\sin x-1=0 \end{array}\right. \\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi \\ x=-\dfrac{\pi}{6}+k2\pi \\ x=\dfrac{7\pi}{6}+k2\pi \end{array}\right., (k\in\mathbb{Z}). \end{aligned}$$

□

VÍ DỤ 5. Giải phương trình $y'=0$ với $y=3\cos x+4\sin x+5x$.

Lời giải.

Ta có $y'=(3\cos x+4\sin x+5x)'=-3\sin x+4\cos x+5$

$$\begin{aligned} y'=0 &\Leftrightarrow -3\sin x+4\cos x+5=0 \\ &\Leftrightarrow 3\sin x-4\cos x=5 \\ &\Leftrightarrow \sin\left(x-\alpha\right)=1 \\ &\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+\alpha+k2\pi, \text{với} \begin{cases} \sin\alpha=\dfrac{4}{5} \\ \cos\alpha=\dfrac{3}{5} \end{cases}, (k\in\mathbb{Z}). \end{aligned}$$

□

VÍ DỤ 6. Giải phương trình $y'=0$ với $y=\tan x+\cot x$.

Lời giải.

Ta có $y'=(\tan x+\cot x)'=-\dfrac{\cos 2x}{\cos^2 x.\sin^2 x}$. Suy ra

$y'=0\Leftrightarrow -\dfrac{\cos 2x}{\cos^2 x.\sin^2 x}=0\Leftrightarrow \dfrac{\cos 2x}{\sin^2 2x}=0\,(*)$.

Điều kiện $\sin^2 2x\neq 0\Leftrightarrow \sin 2x\neq 0\Leftrightarrow x\neq \dfrac{k\pi}{2}$.

Khi đó $(*)\Leftrightarrow \cos 2x=0\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{k\pi}{2}$ (thỏa mãn điều kiện).

Vậy phương trình $y'=0$ có các nghiệm là $x=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{k\pi}{2}, (k\in\mathbb{Z})$. □

VÍ DỤ 7. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{\sin 3x}{3}-\cos x-\sqrt{3}\left(\sin x-\dfrac{\cos 3x}{3}\right)$. Giải phương trình $f'(x)=0$.

Lời giải.

Ta có: $f'(x)=\cos 3x+\sin x-\sqrt{3}\left(\cos x+\sin 3x\right)$.

$$\begin{aligned} f'(x)=0 &\Leftrightarrow \cos 3x+\sin x-\sqrt{3}\left(\cos x+\sin 3x\right)=0\\ &\Leftrightarrow \sin x-\sqrt{3}\cos x=\sqrt{3}\sin 3x-\cos 3x\\ &\Leftrightarrow \frac{1}{2}\sin x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 3x-\frac{1}{2}\cos 3x\\ &\Leftrightarrow \sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(3x-\frac{\pi}{6}\right)\\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-\frac{\pi}{3}=3x-\frac{\pi}{6}+k2\pi\\ x-\frac{\pi}{3}=\pi-3x+\frac{\pi}{6}+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\frac{\pi}{12}-k\pi\\ x=\frac{3\pi}{8}+k\frac{\pi}{2} \end{array}\right., (k\in\mathbb{Z}). \end{aligned}$$

□

2. Bài tập tự luận

BÀI 1. Cho hàm số $y=\cos^2\left(\frac{\pi}{3}-x\right)+\cos^2\left(\frac{\pi}{3}+x\right)+\cos^2\left(\frac{2\pi}{3}-x\right)+\cos^2\left(\frac{2\pi}{3}+x\right)-2\sin^2 x$. Chứng minh rằng $y'=0$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} y&=\cos^2\left(\frac{\pi}{3}-x\right)+\cos^2\left(\frac{\pi}{3}+x\right)+\cos^2\left(\frac{2\pi}{3}-x\right)+\cos^2\left(\frac{2\pi}{3}+x\right)-2\sin^2 x\\ &=2\cos^2\left(\frac{\pi}{3}-x\right)+2\cos^2\left(\frac{\pi}{3}+x\right)-2\sin^2 x\\ &=1+\cos\left(\frac{2\pi}{3}-2x\right)+\cos\left(\frac{2\pi}{3}+2x\right)+\cos 2x\\ &=1+2\cos\frac{2\pi}{3}.\cos 2x+\cos 2x\\ &=1-\cos 2x+\cos 2x=1 \end{aligned}$$

Suy ra $y'=0$. □

BÀI 2. Cho hàm số $y=x\sin x$. Chứng minh rằng

a) $xy-2\left(y'-\sin x\right)+x\left(2\cos x-y\right)=0$.

b) $\dfrac{y'}{\cos x}-x=\tan x$.

Lời giải.

a) Ta có: $y'=\left(x\sin x\right)'=\sin x+x\cos x$.

$$\begin{aligned} xy-2\left(y'-\sin x\right)+x\left(2\cos x-y\right)&=x^2\sin x-2\left(\sin x+x\cos x-\sin x\right)+x\left(2\cos x-x\sin x\right)\\ &=x^2\sin x-2x\cos x+2x\cos x-x^2\sin x=0. \end{aligned}$$

b) Ta có: $y'=\left(x\sin x\right)'=\sin x+x\cos x$.

$\dfrac{y'}{\cos x}-x=\dfrac{\sin x+x\cos x}{\cos x}-x=\tan x+x-x=\tan x$.

□

BÀI 3. Giải phương trình $y'=0$ với $y=1-\sin\left(\pi+x\right)+2\cos\left(\dfrac{2\pi+x}{2}\right)$.

Lời giải.

Ta có $y'=\left[1-\sin\left(\pi+x\right)+2\cos\left(\dfrac{2\pi+x}{2}\right)\right]'=\cos x+\sin\dfrac{x}{2}$.

$y'=0\Leftrightarrow \cos x+\sin\dfrac{x}{2}=0\Leftrightarrow 2\sin^2\dfrac{x}{2}-\sin\dfrac{x}{2}-1=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin\frac{x}{2}=1\\ \sin\frac{x}{2}=-\frac{1}{2}\end{array}\right.$.

Với $\sin\dfrac{x}{2}=1\Leftrightarrow x=\pi+k4\pi$.

Với $\sin\dfrac{x}{2}=-\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-\frac{\pi}{3}+k4\pi\\ x=\frac{7\pi}{3}+k4\pi\end{array}\right.$.

Vậy phương trình $y'=0$ có các nghiệm là $x=\pi+k4\pi; x=-\dfrac{\pi}{3}+k4\pi; x=\dfrac{7\pi}{3}+k4\pi, (k\in\mathbb{Z})$. □

BÀI 4. Giải phương trình $y'=0$ với $y=\sin 2x-2\cos x$.

Lời giải.

Ta có $y'=(\sin 2x-2\cos x)'=2\cos 2x+2\sin x$. Suy ra

$$y'=0\Leftrightarrow 2\cos 2x+2\sin x=0\Leftrightarrow 2\sin^2 x-\sin x-1=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=1\\ \sin x=-\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$$

Với $\sin x=1\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi$.

Với $\sin x=-\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{\pi}{6}+k2\pi\\ x=\dfrac{7\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right.$.

Vậy phương trình $y'=0$ có các nghiệm là $x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi; x=-\dfrac{\pi}{6}+k2\pi; x=\dfrac{7\pi}{6}+k2\pi, (k\in\mathbb{Z})$ □

BÀI 5. Cho hàm số $f(x)=a\sin x+b\cos x+1$ có đạo hàm là $f'(x)$. Tìm a,b biết $f'(0)=\dfrac{1}{2}$ và $f'\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)=1$.

Lời giải.

Ta có $f'(x)=a\cos x-b\sin x$. Khi đó

$$\begin{cases}f'(0)=\dfrac{1}{2}\\ f'\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a\cos 0-b\sin 0=\dfrac{1}{2}\\ a\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)+b\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)+1=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\dfrac{1}{2}\\ -\dfrac{\sqrt{2}}{2}a+\dfrac{\sqrt{2}}{2}b=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=\dfrac{1}{2}\\ a=\dfrac{1}{2}\end{cases}.$$

Vậy $a=\dfrac{1}{2}$ và $b=\dfrac{1}{2}$. □

Dạng 8. Tính đạo hàm cấp hai

1. Ví dụ minh hoạ

VÍ DỤ 1.

- Gọi $g(x)$ là đạo hàm của hàm số $y=\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)$. Tìm $g(x)$.
- Tính đạo hàm của hàm số $y=g(x)$.

Lời giải.

- $g(x)=f'(x)=\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)'\cdot\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)=2\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)$.
- $y'=g'(x)=-2\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)'\cdot\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)=-4\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)$.

□

VÍ DỤ 2. Cho hàm số $f(x)=x^4-4x^2+3$.

a) Tìm đạo hàm cấp hai của hàm số tại điểm x bất kì.

b) Tính đạo hàm cấp hai của hàm số tại điểm $x_0=-1$.

Lời giải.

a) Ta có $f'(x)=4x^3-8x$ và $f''(x)=12x^2-8$.

b) Ta có $f''(-1)=12\cdot(-1)^2-8=4$.

□

VÍ DỤ 3. Tính đạo hàm cấp hai của các hàm số:

a) $y=3x^2+5x+1$; b) $y=\sin x$; c) $y=x\cdot \mathrm{e}^{2x}$; d) $y=\ln(2x+3)$.

Lời giải.

a) $y=3x^2+5x+1$.
$y'=\left(3x^2+5x+1\right)'=6x+5$, $y''=(6x+5)'=6$.

b) $y=\sin x$.
$y'=(\sin x)'=\cos x$, $y''=(\cos x)'=-\sin x$.

c) $y'=x'\cdot\mathrm{e}^{2x}+x\cdot\left(\mathrm{e}^{2x}\right)'=\mathrm{e}^{2x}+x\cdot(2x)'\mathrm{e}^{2x}=\mathrm{e}^{2x}+2x\cdot\mathrm{e}^{2x}=\mathrm{e}^{2x}\cdot(1+2x)$;
$y''=(2x)'\mathrm{e}^{2x}\cdot(1+2x)+(1+2x)'\cdot\mathrm{e}^{2x}=2\,\mathrm{e}^{2x}\cdot(1+2x)+2\cdot\mathrm{e}^{2x}=\mathrm{e}^{2x}(4+4x)$.

d) $y' = \dfrac{(2x+3)'}{2x+3} = \dfrac{2}{2x+3}$;

$y'' = -\dfrac{2(2x+3)'}{(2x+3)^2} = -\dfrac{4}{(2x+3)^2}$.

□

VÍ DỤ 4. Tìm đạo hàm cấp hai của các hàm số sau:

a) $y = (x^2+1)^3$.

b) $y = \dfrac{x}{x-2}$.

c) $y = \dfrac{x^2+x+1}{x+1}$.

Lời giải.

a) $y = x^6 + 3x^4 + 3x^2 + 1$; $y' = 6x^5 + 12x^3 + 6x$; $y'' = 30x^4 + 36x^2 + 6$.

b) $y' = \left(\dfrac{x}{x-2}\right)' = \dfrac{-2}{(x-2)^2}$; $y'' = \left(\dfrac{-2}{(x-2)^2}\right)' = 2\cdot\dfrac{2(x-2)}{(x-2)^4} = \dfrac{4}{(x-2)^3}$.

c) $y = \dfrac{x^2+x+1}{x+1} = x + \dfrac{1}{x+1}$.

$y' = 1 - \dfrac{1}{(x+1)^2}$.

$y'' = \dfrac{2}{(x+1)^3}$.

□

VÍ DỤ 5. Tìm đạo hàm cấp hai của các hàm số sau:

a) $y = \sqrt{2x+5}$.

b) $y = x\sqrt{x^2+1}$.

c) $y = \sin x$.

d) $y = \tan x$.

Lời giải.

a) $y' = \left(\sqrt{2x+5}\right)' = \dfrac{2}{2\sqrt{2x+5}} = \dfrac{1}{\sqrt{2x+5}}$

$y'' = -\dfrac{\left(\sqrt{2x+5}\right)'}{2x+5} = -\dfrac{\dfrac{2}{2\sqrt{2x+5}}}{2x+5} = -\dfrac{1}{(2x+5)\sqrt{2x+5}}$.

b) $y' = \sqrt{x^2+1} + x\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \dfrac{2x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}$.

$y'' = \dfrac{4x\sqrt{x^2+1} - (2x^2+1)\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} = \dfrac{2x^3+3x}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$.

c) $y' = \cos x = sin\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)$; $y'' = \cos\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right) = \sin(\pi + x)$.

d) $y' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$; $y'' = -\dfrac{2\cos x(-\sin x)}{\cos^4 x} = \dfrac{2\sin x}{\cos^3 x}$.

□

VÍ DỤ 6. Tính đạo hàm cấp hai của hàm số $y = x^2 + \mathrm{e}^{2x-1}$. Từ đó tính $y''(0)$.

Lời giải.

$y' = 2x + (2x-1)'\,\mathrm{e}^{2x-1} = 2x + 2\cdot\mathrm{e}^{2x-1}$

$y'' = 2 + 2\cdot(2x-1)'\,\mathrm{e}^{2x-1} = 2 + 4\,\mathrm{e}^{2x-1}$.

$y''(0) = 2 + 4\,\mathrm{e}^{2\cdot 0-1} = 2 + 4\,\mathrm{e}^{-1} = 2 + \dfrac{4}{\mathrm{e}} = \dfrac{2\,\mathrm{e}+4}{\mathrm{e}}$. □

VÍ DỤ 7. Cho hàm số $h(x) = 5(x+1)^3 + 4(x+1)$. Giải phương trình $h''(x) = 0$.

Lời giải.

$h(x) = 5(x+1)^3 + 4(x+1)$;

$h'(x) = 15(x+1)^2 + 4$;

$h''(x) = 30(x+1)$.

$h''(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$. □

2. Bài tập áp dụng

BÀI 1. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{1}{x+2}$.

a) Tìm đạo hàm cấp hai của hàm số tại điểm $x\neq -2$.

b) Tính đạo hàm cấp hai của hàm số tại điểm $x_0=2$.

Lời giải.

a) Với $x\neq -2$, ta có
$f'(x)=\left(\dfrac{1}{x+2}\right)'=-\dfrac{(x+2)'}{(x+2)^2}=\dfrac{-1}{(x+2)^2}$.
$f''(x)=\left[\dfrac{-1}{(x+2)^2}\right]'=\dfrac{\left[(x+2)^2\right]'}{(x+2)^4}=\dfrac{2(x+2)}{(x+2)^4}=\dfrac{2}{(x+2)^3}$.

b) Ta có $f''(2)=\dfrac{2}{(2+2)^3}=\dfrac{1}{32}$.

□

BÀI 2. Tính đạo hàm cấp hai của các hàm số sau:

a) $y=x^2-x$; b) $y=\cos x$; c) $y=2x^4-5x^2+3$; d) $y=x\cdot \mathrm{e}^x$.

Lời giải.

a) $y=x^2-x$.
$y'=(x^2-x)'=2x-1$, $y''=(2x-1)'=2$.

b) $y=\cos x$.
$y'=(\cos x)'=-\sin x$, $y''=(-\sin x)'=-(\sin x)'=-\cos x$.

c) $y=2x^4-5x^2+3$.
Ta có $y'=\left(2x^4-5x^2+3\right)'=8x^3-10x$; $y''=\left(8x^3-10x\right)'=24x^2-10$.

d) $y=x\cdot \mathrm{e}^x$.
Ta có $y'=(x\cdot \mathrm{e}^x)'=x'\cdot \mathrm{e}^x+x\cdot(\mathrm{e}^x)'=1\cdot \mathrm{e}^x+x\cdot \mathrm{e}^x=(1+x)\cdot \mathrm{e}^x$.
$y''=[(1+x)\cdot \mathrm{e}^x]'=(1+x)'\cdot \mathrm{e}^x+(1+x)\cdot(\mathrm{e}^x)'=\mathrm{e}^x+(1+x)\mathrm{e}^x=(2+x)\mathrm{e}^x$.

□

BÀI 3. Tìm đạo hàm cấp hai của các hàm số sau:

a) $y=-3x^4+4x^3+5x^2-2x+1$. b) $y=\dfrac{4}{5}x^5-3x^2-x+4$.

Lời giải.

a) $y'=-12x^3+12x^2+10x-2$; $y''=-36x^2+24x+10$. b) $y'=4x^4-6x-1$; $y''=16x^3-6$.

□

BÀI 4. Tìm đạo hàm cấp hai của các hàm số sau:

a) $y=-\dfrac{1}{x}$. b) $y=\dfrac{1}{x-3}$ c) $y=\dfrac{-2x^2+3x}{1-x}$. d) $y=\dfrac{5x^2-3x-20}{x^2-2x-3}$.

Lời giải.

a) $y'=\dfrac{1}{x^2}$; $y''=-\dfrac{2}{x^3}$.

b) $y'=-\dfrac{1}{(x-3)^2}$; $y''=\dfrac{2}{(x-3)^3}$.

c) $y=2x-1+\dfrac{1}{1-x}\Rightarrow y'=2+\dfrac{1}{(1-x)^2}$; $y''=\dfrac{2}{(1-x)^3}$.

d) $y'=\dfrac{(10x-3)(x^2-2x-3)-(5x^2-3x-20)(2x-2)}{(x^2-2x-3)^2}=\dfrac{-7x^2+10x-31}{(x^2-2x-3)^2}$.
$$y''=\dfrac{(-14x+10)\cdot(x^2-2x-3)^2-(-7x^2+10x-31)\cdot 2\cdot(x^2-2x-3)\cdot(2x-2)}{(x^2-2x-3)^4}$$
$$=\dfrac{2(7x^3-15x^2+93x-77)}{(x^2-2x-3)^3}.$$

□

BÀI 5. Tìm đạo hàm cấp hai của các hàm số sau:

a) $y=\sqrt{2x+1}$.

b) $y=x^2\cdot\sqrt{x^3-x}$.

c) $f(x)=(x+1)^3$.

Lời giải.

a) $y'=\dfrac{1}{\sqrt{2x+1}}$; $y''=-\dfrac{1}{\sqrt{(2x+1)^3}}$.

b) $y'=\dfrac{x^2(7x^2-5)}{2\sqrt{x^3-x}}$; $y''=\dfrac{x^2(35x^4-54x^2+15)}{4\sqrt{(x^3-x)^3}}$.

c) $f'(x)=3(x+1)^2$;
$f''(x)=6(x+1)$.

□

BÀI 6. Tìm đạo hàm cấp hai của các hàm số sau:

a) $y=\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)$.

b) $y=\sin 2x$.

c) $y=\sin^2 2x$.

d) $y=3\sin x+2\cos x$.

Lời giải.

a) $y'=-2\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)$; $y''=-4\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)$.

b) $y'=2\cos 2x$; $y''=-4\sin 2x$.

c) $y'=2\sin 2x\,(2\cos 2x)=2\sin 4x$; $y''=8\cos 4x$.

d) $y=3\sin x+2\cos x$; $y'=3\cos x-2\sin x$; $y''=-3\sin x-2\cos x$.

□

BÀI 7. Tìm đạo hàm cấp hai của các hàm số sau:

a) $y=x\cdot\sin x$.

b) $y=x^2\cdot\cos^2 x$.

c) $y=\dfrac{\cos x}{x^3+1}$.

Lời giải.

a) $y'=\sin x+x\cos x$; $y''=2\cos x-x\sin x$.

b) $y'=2x\cos x(\cos x-x\cdot\sin x)$; $y''=(1-2x^2)\cos 2x-4x\sin 2x+1$.

c) $y'=-\dfrac{\sin x}{x^3+1}-\dfrac{3x^2\cos x}{(x^3+1)^2}$; $y''=\left(-\dfrac{1}{x^3+1}-\dfrac{6x}{(x^3+1)^2}+\dfrac{18x^4}{(x^3+1)^3}\right)\cos x+\dfrac{6x^2\sin x}{(x^3+1)^2}$.

□

BÀI 8. Cho hàm số $f(x)=\sin^3 x+x^2$. Tính giá trị $f''\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Lời giải.

$f'(x)=3\sin^2 x\cos x+2x$; $f''(x)=6\sin x\cos^2 x-3\sin^3 x+2\Rightarrow f''\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=-1$. □

Dạng 9. Ý nghĩa của đạo hàm cấp hai

1. Ví dụ minh hoạ

VÍ DỤ 1. Một hòn sỏi rơi tự do có quãng đường rơi tính theo thời gian t là $s(t)=4,9t^2$, trong đó s tính bằng mét và t tính bằng giây. Tính gia tốc rơi của hòn sỏi lúc $t=3$.

Lời giải.

Ta có $s'(t)=\left(4{,}9t^2\right)'=4{,}9\cdot 2t=9{,}8t$; $s''(t)=(9{,}8t)'=9{,}8$.
Gia tốc rơi của hòn sỏi lúc $t=3$ là $s''(3)=9{,}8\ \mathrm{m/s^2}$. □

2. Bài tập vận dụng

BÀI 1. Xét dao động điều hòa có phương trình chuyển động $S(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$, trong đó A, ω, φ là các hằng số. Tìm gia tốc tức thời tại thời điểm t của chuyển động đó.

Lời giải.

Gọi $v(t)$ là vận tốc tức thời của chuyển động tại thời điểm t, ta có

$$v(t) = s'(t) = [A\cos(\omega t + \varphi)]' = -A\sin(\omega t + \varphi).$$

Gia tốc tức thời của chuyển động tại thời điểm t là

$$S''(t) = v'(t) = [-A\sin(\omega t + \varphi)]' = -A\omega^2\cos(\omega t + \varphi).$$

□

BÀI 2. Chuyển động của một vật gắn trên con lắc lò xo (khi bỏ qua ma sát và sức cản không khí) được cho bởi phương trình sau: $x(t) = 4\cos\left(2\pi t + \dfrac{\pi}{3}\right)$. Trong đó x tính bằng centimet và thời gian t tính bằng giây. Tìm gia tốc tức thời của vật tại thời điểm $t = 5$ giây (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

Lời giải.

- Vận tốc tức thời của chuyển động tại thời điểm t là

$$v(t) = x'(t) = -\left(2\pi t + \frac{\pi}{3}\right)' \cdot 4\sin\left(2\pi t + \frac{\pi}{3}\right) = -8\pi\sin\left(2\pi t + \frac{\pi}{3}\right).$$

- Gia tốc tức thời tại thời điểm t là

$$a(t) = v'(t) = -8\pi\left(2\pi t + \frac{\pi}{3}\right)' \cdot \cos\left(2\pi t + \frac{\pi}{3}\right) = -16\pi^2\cos\left(2\pi t + \frac{\pi}{3}\right).$$

- Gia tốc của vật tại thời điểm $t = 5$ giây.

$$a(5) = -16\pi^2\cos\left(10\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -16\pi^2\cos\frac{\pi}{3} \approx -79(\text{cm/s}^2).$$

□

BÀI 3. Cho chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $s = t^3 - 3t^2 - 9t + 2$ (t tính bằng giây; s tính bằng mét). Tính gia tốc của chuyển động tại thời điểm $t = 2$ s.

Lời giải.

Gia tốc tức thời của chuyển động tại thời điểm t chính là đạo hàm cấp hai của phương trình chuyển động tại thời điểm t.

$$\begin{aligned} s' &= \left(t^3 - 3t^2 - 9t + 2\right)' = 3t^2 - 6t - 9 \\ s'' &= 6t - 6 \Rightarrow s''(2) = 6. \end{aligned}$$

□

BÀI 4. Cho chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $s = t^3 - 3t^2$ (t tính bằng giây; s tính bằng mét). Tính gia tốc của chuyển động tại thời điểm $t = 4$ s.

Lời giải.

Gia tốc tức thời của chuyển động tại thời điểm t chính là đạo hàm cấp hai của phương trình chuyển động tại thời điểm t.

$$s' = 3t^2 - 6t \Rightarrow s'' = 6t - 6 \Rightarrow s''(4) = 18.$$

□

Dạng 10. Chứng minh đẳng thức chứa đạo hàm cấp 2

- Tìm các đạo hàm đến cấp cao nhất có mặt trong đẳng thức cần chứng minh.
- Thay thế vào vị trí tương ứng và biến đổi vế này cho bằng vế kia. Từ đó suy ra đẳng thức cần chứng minh.

1. Ví dụ minh hoạ

VÍ DỤ 1. Cho hàm số $y=\sqrt{2x-x^2}$. Chứng minh rằng: $y^3.y''+1=0$.

Lời giải.

Ta có: $y'=\dfrac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}$, $y''=-\dfrac{1}{\sqrt{(2x-x^2)^3}}$

Thay vào: $y^3.y''+1=\sqrt{(2x-x^2)^3}\cdot\dfrac{(-1)}{\sqrt{(2x-x^2)^3}}+1=-1+1=0$ (đpcm). □

VÍ DỤ 2. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2+2x+2}{2}\cdot$ Chứng minh rằng: $2y.y''-1=(y')^2$.

Lời giải.

Ta có: $y'=x+1, y''=1$
Thế vào đẳng thức: $2y.y''-1=x^2+2x+1=(y')^2$ (đpcm). □

VÍ DỤ 3. Cho hàm số $y=x\sin x$. Chứng minh rằng: $x.y-2\left(y'-\sin x\right)+x.y''=0$.

Lời giải.

Ta có: $y'=\sin x+x\cos x$; $y''=2\cos x-x\sin x$
$VT=x^2\sin x-2\left(\sin x+x\cos x-\sin x\right)+2x\cos x-x^2\sin x=-2x\cos x+2x\cos x=0=VP$ (đpcm). □

VÍ DỤ 4. Cho hàm số $y=\dfrac{x+2}{x-1}\cdot$ Chứng minh biểu thức sau không phụ thuộc x.
$P=2(y')^2-y''\left(y-1\right)$ (Giả sử các biểu thức đều có nghĩa).

Lời giải.

$y'=\dfrac{-3}{(x-1)^2}\Rightarrow 2(y')^2=\dfrac{18}{(x-1)^4}$

$y''=-3\cdot\dfrac{-2\left(x-1\right)}{(x-1)^4}=\dfrac{6}{(x-1)^3}$

$y-1=\dfrac{3}{x-1}\Rightarrow y''\left(y-1\right)=\dfrac{18}{(x-1)^4}$

$P=2(y')^2-y''\left(y-1\right)=\dfrac{18}{(x-1)^4}-\dfrac{18}{(x-1)^4}=0$

Vậy đẳng thức được chứng minh xong. □

VÍ DỤ 5. Cho hàm số $y=\tan x$. Chứng minh rằng: $\dfrac{6y}{y''}-\dfrac{1}{y'}-\cos 2x=1$.

Lời giải.

$y'=\dfrac{1}{\cos^2 x}=1+\tan^2 x$; $y''=\dfrac{2\sin x}{\cos^3 x}=2\tan x\left(1+\tan^2 x\right)$

Do đó:
$\dfrac{6y}{y''}-\dfrac{1}{y'}-\cos 2x=\dfrac{6\tan x}{2\tan x\left(1+\tan^2 x\right)}-\dfrac{1}{1+\tan^2 x}-\cos 2x=\dfrac{2}{1+\tan^2 x}-\cos 2x=$
$=2\cos^2 x-\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)=1$ (đpcm). □

2. Bài tập áp dụng

BÀI 1. Chứng minh rằng hàm số $y=\sqrt{4x-2x^2}$ thỏa hệ thức: $y^3y''+4=0$.

Lời giải.

$y'=\dfrac{2-2x}{\sqrt{4x-2x^2}}$; $y''=\dfrac{-4}{\left(\sqrt{4x-2x^2}\right)^3}$

$VT=\left(\sqrt{4x-2x^2}\right)^3\cdot\dfrac{-4}{\left(\sqrt{4x-2x^2}\right)^3}+4=0=VP$ (đpcm). □

BÀI 2. Cho hàm số $y=-2+\dfrac{5}{x}\cdot$ Chứng minh rằng: $\dfrac{2y'}{x}+y''=0$.

Lời giải.

$y'=-\dfrac{5}{x^2}$; $y''=\dfrac{10}{x^3}$

$\dfrac{2y'}{x}+y''=-\dfrac{10}{x^3}+\dfrac{10}{x^3}=0$. □

BÀI 3. Cho $y=\dfrac{x-3}{x+4}$. Chứng minh rằng: $2(y')^2=\left(y-1\right)y''$.

Lời giải.

$y=\dfrac{x-3}{x+4}\Rightarrow y'=\dfrac{7}{(x+4)^2}\Rightarrow y''=-\dfrac{14}{(x+4)^3}$.

Ta có vế trái: $2(y')^2=\dfrac{98}{(x+4)^4}$.

Và vế phải:$(y-1)\,y''=\left(\dfrac{x-3}{x+4}-1\right)\left[\dfrac{-14}{(x+4)^3}\right]=\dfrac{98}{(x+4)^4}$.

Vậy $2(y')^2=(y-1)\,y''$. □

BÀI 4. Cho hàm số $y=x\cos x$. Chứng minh rằng: $x.y-2(y'-\cos x)+x.y''=0$.

Lời giải.

$y'=\cos x-x\sin x;y''=-2\sin x-x\cos x$

$VT=x.y-2\left(y'-\cos x\right)+x.y''=x.x\cos x-2\left(\cos x-x\sin x-\cos x\right)+x\left(-2\sin x-x\cos x\right)=$

$=x^2\cos x+2x\sin x-2x\sin x-x^2\cos x=0=VP$ (đpcm). □

BÀI 5. Cho hàm số $y=x\sin x$. Chứng minh $xy-2y'+xy''=-2\sin x$.

Lời giải.

$y'=\sin x+x\cos x;y''=2\cos x-x\sin x$

$xy-2y'+xy''=x^2\sin x-2(\sin x+x\cos x)+x(2\cos x-x\sin x)=-2\sin x$. □

BÀI 6. Cho hàm số $y=\sin^2 x$. Chứng minh rằng: $2y+y'\tan x+y''-2=0$.

Lời giải.

$y'=2\sin x\cos x;y''=2\cos^2 x-2\sin^2 x$

$2y+y'\tan x+y''-2=0$

$\Leftrightarrow 2\sin^2 x+2\sin x.\cos x.\dfrac{\sin x}{\cos x}+2\cos^2 x-2\sin^2 x-2=0$

$\Leftrightarrow 2\sin^2 x+2\cos^2 x-2=0\Leftrightarrow 0=0$ (đúng). □

C. BÀI TẬP RÈN LUYỆN

BÀI 7. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y=x^3-3x^2+2x+1$;

b) $y=x^2-4\sqrt{x}+3$.

Lời giải.

a) Ta có $y'=3x^2-6x+2$.

b) Ta có $y'=2x-4\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}}=2x-\dfrac{2}{\sqrt{x}}$.

□

BÀI 8. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y=\dfrac{2x-1}{x+2}$;

b) $y=\dfrac{2x}{x^2+1}$.

Lời giải.

a) Ta có $y'=\dfrac{2(x+2)-(2x-1)}{(x+2)^2}=\dfrac{5}{(x+2)^2}$.

b) Ta có $y'=\dfrac{2(x^2+1)-2x\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\dfrac{2-2x^2}{(x^2+1)^2}$.

□

BÀI 9. Tính đạo hàm của các hàm số sau

a) $y=2x^3-\dfrac{x^2}{2}+4x-\dfrac{1}{3}$;

b) $y=\dfrac{-2x+3}{x-4}$;

c) $y=\dfrac{x^2-2x+3}{x-1}$;

d) $y=\sqrt{5x}$.

Lời giải.

a) $y=2x^3-\dfrac{x^2}{2}+4x-\dfrac{1}{3}$.

$$\begin{aligned} y' &= \left(2x^3-\frac{x^2}{2}+4x-\frac{1}{3}\right)'=2\left(x^3\right)'-\frac{1}{2}\left(x^2\right)'+4(x)'-0=2\cdot 3x^2-\frac{1}{2}\cdot 2x+4\cdot 1-0\\ &= 6x^2-x+4. \end{aligned}$$

b) $y=\dfrac{-2x+3}{x-4}$.

$$\begin{aligned} y' &= \left(\frac{-2x+3}{x-4}\right)' = \frac{(-2x+3)'(x-4)-(-2x+3)(x-4)'}{(x-4)^2} = \frac{-2(x-4)-(-2x+3)1}{(x-4)^2} \\ &= \frac{5}{(x-4)^2}. \end{aligned}$$

c) $y=\dfrac{x^2-2x+3}{x-1}$.

$$\begin{aligned} y' &= \left(\frac{x^2-2x+3}{x-1}\right)' = \frac{\left(x^2-2x+3\right)'(x-1)-\left(x^2-2x+3\right)(x-1)'}{(x-1)^2} \\ &= \frac{(2x-2)(x-1)-\left(x^2-2x+3\right)1}{(x-1)^2} = \frac{\left(2x^2-4x+2\right)-\left(x^2-2x+3\right)}{(x-1)^2} \\ &= \frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2}. \end{aligned}$$

d) $y=\sqrt{5x}$.
$y'=\left(\sqrt{5x}\right)'=\dfrac{(5x)'}{2\sqrt{5x}}=\dfrac{5}{2\sqrt{5x}}=\dfrac{\sqrt{5}}{2\sqrt{x}}$.

□

BÀI 10. Tính đạo hàm của các hàm số sau

a) $y=\left(x^2-x\right)\cdot 2^x$; b) $y=x^2\cdot\log_3 x$; c) $y=\mathrm{e}^{3x+1}$.

Lời giải.

a) $y=\left(x^2-x\right)\cdot 2^x$.

$$\begin{aligned} y' &= \left[\left(x^2-x\right)\cdot 2^x\right]' = \left(x^2-x\right)'\cdot 2^x+\left(x^2-x\right)\cdot\left(2^x\right)' \\ &= (2x-1)\cdot 2^x+\left(x^2-x\right)\cdot 2^x\cdot\ln 2 \\ &= 2^x\left[(2x-1)+\left(x^2-x\right)\ln 2\right]. \end{aligned}$$

b) $y=x^2\cdot\log_3 x$.

$$\begin{aligned} y' &= \left[x^2\cdot\log_3 x\right]' = \left(x^2\right)'\cdot\log_3 x+x^2\cdot\left(\log_3 x\right)' = 2x\cdot\log_3 x+x^2\cdot\frac{1}{x\cdot\ln 3} \\ &= 2x\cdot\log_3 x+\frac{x}{\ln 3} = x\left(2\log_3 x+\frac{1}{\ln 3}\right). \end{aligned}$$

c) $y=\mathrm{e}^{3x+1}$.
$y'=\left(\mathrm{e}^{3x+1}\right)'=(3x+1)'\cdot\mathrm{e}^{3x+1}=3\cdot\mathrm{e}^{3x+1}$.

□

BÀI 11. Tính đạo hàm của các hàm số sau

a) $y=2x^4-5x^2+3$; b) $y=x\cdot\mathrm{e}^x$.

Lời giải.

a) $y=2x^4-5x^2+3$.
Ta có $y'=\left(2x^4-5x^2+3\right)'=8x^3-10x$.

b) $y=x\cdot\mathrm{e}^x$.
Ta có $y'=\left(x\cdot\mathrm{e}^x\right)'=x'\cdot\mathrm{e}^x+x\cdot\left(\mathrm{e}^x\right)'=1\cdot\mathrm{e}^x+x\cdot\mathrm{e}^x=(1+x)\cdot\mathrm{e}^x$.

□

BÀI 12. Tính đạo hàm của các hàm số sau

a) $y=\sin 3x$; b) $y=\cos^3 2x$; c) $y=\tan^2 x$; d) $y=\cot\left(4-x^2\right)$.

Lời giải.

a) $y=\sin 3x$.
$y'=(\sin 3x)'=(3x)'\cdot\cos 3x=3\cos 3x$.

b) $y=\cos^3 2x$.
$y'=\left[(\cos 2x)^3\right]'=3\left(\cos 2x\right)^2\cdot(\cos 2x)'=3\cos^2 2x\cdot(2x)'\cdot(-\sin 2x)=-6\cos^2 2x\cdot\sin 2x$.

c) $y=\tan^2 x$.
$y'=\left[(\tan x)^2\right]'=2\tan x\cdot(\tan x)'=2\tan x\cdot\dfrac{1}{\cos^2 x}=\dfrac{2\tan x}{\cos^2 x}$.

d) $y=\cot(4-x^2)$.
$y'=\left[\cot(4-x^2)\right]'=-\dfrac{(4-x^2)'}{\sin^2(4-x^2)}=\dfrac{2x}{\sin^2(4-x^2)}$.

□

BÀI 13. Tìm đạo hàm của mỗi hàm số sau

a) $y=4x^3-3x^2+2x+10$;

b) $y=\dfrac{x+1}{x-1}$;

c) $y=-2x\sqrt{x}$;

d) $y=3\sin x+4\cos x-\tan x$;

e) $y=4^x+2e^x$;

f) $y=x\ln x$.

Lời giải.

a) $y=4x^3-3x^2+2x+10\Rightarrow y'=(4x^3)'-(3x^2)'+(2x)'+(10)'=12x^2-6x+2$.

b) $y=\dfrac{x+1}{x-1}\Rightarrow y'=\dfrac{(x+1)'(x-1)-(x+1)(x-1)'}{(x-1)^2}=\dfrac{x-1-(x+1)}{(x-1)^2}=\dfrac{-2}{(x-1)^2}$.

c) $y=-2x\sqrt{x}\Rightarrow y'=(-2x)'\cdot\sqrt{x}-2x\cdot(\sqrt{x})'=-2\sqrt{x}-2x\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}}=-2\sqrt{x}-\sqrt{x}=-3\sqrt{x}$.

d) $y=3\sin x+4\cos x-\tan x\Rightarrow y'=(3\sin x)'+(4\cos x)'-(\tan x)'=3\cos x-4\sin x-\dfrac{1}{\cos^2 x}$.

e) $y=4^x+2e^x\Rightarrow y'=(4^x)'+(2e^x)'=4^x\ln 4+2e^x$.

f) $y=x\ln x\Rightarrow y'=(x)'\ln x+x(\ln x)'=\ln x+x\cdot\dfrac{1}{x}=\ln x+1$.

□

BÀI 14. Cho hàm số $f(x)=2^{3x+2}$.

a) Hàm số $f(x)$ là hàm hợp của các hàm số nào?

b) Tìm đạo hàm của $f(x)$.

Lời giải.

a) Đặt $3x+2$, ta có $f(x)=2^u$.
Vậy $f(x)=2^{3x+2}$ là hàm hợp của hai hàm số $f(x)=2^u$, $u=3x+2$.

b) Ta có $f'(x)=\left(2^{3x+2}\right)'=(3x+2)'\cdot 2^{3x+2}\cdot\ln 2=3\cdot 2^{3x+2}\cdot\ln 2$.

□

BÀI 15. Tìm đạo hàm của mỗi hàm số sau:

a) $y=\sin 3x+\sin^2 x$;

b) $y=\log_2(2x+1)+3^{-2x+1}$.

Lời giải.

a) Ta có$y=\sin 3x+\sin^2 x=\sin 3x+\dfrac{1}{2}(1-\cos 2x)$.
Do đó $y'=(\sin 3x)'+\dfrac{1}{2}(1-\cos 2x)'=3\cos 3x+\sin 2x$.

b) Ta có $y=\log_2(2x+1)+3^{-2x+1}$.
Do đó

$$\begin{aligned} y' &= \left(\log_2(2x+1)\right)' + \left(3^{-2x+1}\right)' \\ &= \frac{(2x+1)'}{(2x+1)\ln 2} + (-2x+1)'\cdot 3^{-2x+1}\cdot \ln 3 \\ &= \frac{2}{(2x+1)\ln 2} - 2\cdot 3^{-2x+1}\cdot \ln 3. \end{aligned}$$

□

BÀI 16. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y=x\sin^2 x$;
b) $y=\cos^2 x+\sin 2x$;
c) $y=\sin 3x-3\sin x$;
d) $y=\tan x+\cot x$.

Lời giải.

a) Ta có $y'=\sin^2 x+x\cdot 2\sin x\cdot\cos x$.

b) Ta có $y'=-2\cos x\cdot\sin x+2\cos 2x=-\sin 2x+2\cos 2x$.

c) Ta có $y'=3\cos 3x-3\cos x$.

d) Ta có $y'=\dfrac{1}{\cos^2 x}-\dfrac{1}{\sin^2 x}=-\dfrac{\cos 2x}{\frac{1}{4}\sin^2 2x}=-\dfrac{4\cos 2x}{\sin^2 2x}$.

□

BÀI 17. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y=2^{3x-x^2}$;
b) $y=\log_3 x$.

Lời giải.

a) Ta có $y'=(3-2x)\ln 2\cdot 2^{3x-x^2}$.

b) Ta có $y'=\dfrac{1}{x\ln 3}$.

□

BÀI 18. Cho hàm số $f(x)=2\sin^2\left(3x-\dfrac{\pi}{4}\right)$. Chứng minh rằng $|f'(x)|\le 6$ với mọi x.

Lời giải.
Ta có

$$f'(x)=4\sin\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)\cdot\cos\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)\cdot\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)'=6\sin 2\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)=6\sin\left(6x-\frac{\pi}{2}\right)=-6\cos 6x.$$

Do $|\cos 6x|\le 1$ với mọi $x\in\mathbb{R}$ suy ra $|-6\cos 6x|\le 6$ với mọi $x\in\mathbb{R}$.
Hay $|f'(x)|\le 6$ với mọi x (điều phải chứng minh). □

BÀI 19. Một vật chuyển động rơi tự do có phương trình $h(t)=100-4{,}9t^2$, ở đó độ cao h so với mặt đất tính bằng mét và thời gian t tính bằng giây. Tính vận tốc của vật:

a) Tại thời điểm $t=5$ giây;

b) Khi vật chạm đất.

Lời giải.
Một vật chuyển động rơi tự do có phương trình $h(t)=100-4{,}9t^2$ suy ra vận tốc tức thời của vật tại thời điểm t là $v(t)=h'(t)=-9{,}8t$.

Khi vật chạm đất thì $h(t)=0$ suy ra $100-4{,}9t^2=0\Leftrightarrow t=\pm\dfrac{10\sqrt{10}}{7}$.

Do $t>0$ suy ra $t=\dfrac{10\sqrt{10}}{7}$.

a) Tại thời điểm $t=5$ giây thì vận tốc của vật là $v(5)=-9{,}8\cdot 5=-49$ (m/s).

b) Khi vật chạm đất tức là tại thời điểm $t=\dfrac{10\sqrt{10}}{7}$ có vận tốc là

$$v\left(\frac{10\sqrt{10}}{7}\right)=-9{,}8\cdot\frac{10\sqrt{10}}{7}=-14\sqrt{10}\ (\text{m/s}).$$

□

BÀI 20. Chuyển động của một hạt trên một dây rung được cho bởi $s(t) = 12 + 0{,}5\sin(4\pi t)$, trong đó s được tính bằng centimét và t tính bằng giây. Tính vận tốc của hạt sau t giây. Vận tốc cực đại của hạt là bao nhiêu?

Lời giải.

a) Chuyển động của một hạt trên một dây rung được cho bởi $s(t) = 12 + 0{,}5\sin(4\pi t)$ suy ra vận tốc tức thời của hạt tại thời điểm t là
$$v(t) = s'(t) = 2\pi\cos(4\pi t).$$

b) Do $\cos(4\pi t) \le 1$ với mọi $t \in \mathbb{R}$ suy ra $2\pi\cos(4\pi t) \le 2\pi$ với mọi $t \in \mathbb{R}$.
Vậy vận tốc cực đại của hạt là 2π.

□

BÀI 21. Cho $u = u(x), v = v(x), w = w(x)$ là các hàm số có đạo hàm tại điểm x thuộc khoảng xác định. Chứng minh rằng $(u \cdot v \cdot w)' = u' \cdot v \cdot w + u \cdot v' \cdot w + u \cdot v \cdot w'$.

Lời giải.

Ta có
$$VT = (u \cdot v \cdot w)' = u' \cdot (v \cdot w) + u \cdot (v \cdot w)' = u' \cdot v \cdot w + u \cdot v' \cdot w + u \cdot v \cdot w' = VP.$$

□

BÀI 22. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị mỗi hàm số sau:

a) $y = x^3 - 3x^2 + 4$ tại điểm có hoành độ $x_0 = 2$;

b) $y = \ln x$ tại điểm có hoành độ $x_0 = \mathrm{e}$;

c) $y = \mathrm{e}^x$ tại điểm có hoành độ $x_0 = 0$.

Lời giải.

a) Ta có $y = x^3 - 3x^2 + 4 \Rightarrow y' = 3x^2 - 6x$.
Khi đó $f'(2) = 3 \cdot 2^2 - 6 \cdot 2 = 0$.
Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm $M(2,0)$ là $y = 0 \cdot (x-2) + 0$ hay $y = 0$.

b) Ta có $y = \ln x \Rightarrow y' = \dfrac{1}{x}$.
Khi đó $f'(\mathrm{e}) = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$.
Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm $N(\mathrm{e}, 1)$ là $y = \dfrac{1}{\mathrm{e}}(x - \mathrm{e}) + 1$ hay $y = \dfrac{1}{\mathrm{e}}x$.

c) Ta có $y = \mathrm{e}^x \Rightarrow y' = \mathrm{e}^x$.
Khi đó $f'(0) = 1$.
Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm $P(0,1)$ là $y = 1 \cdot (x - 0) + 1$ hay $y = x + 1$.

□

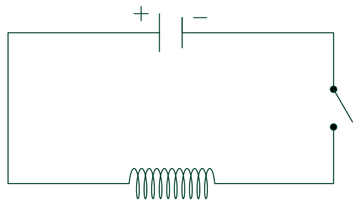
BÀI 23. Một viên đạn được bắn lên từ mặt đất theo phương thẳng đứng với tốc độ ban đầu $v_0 = 196$ m/s (bỏ qua sức cản của không khí). Tìm thời điểm tại đó tốc độ của viên đạn bằng 0. Khi đó viên đạn cách mặt đất bao nhiêu mét (lấy $g = 9,8$ m/s^2)?

Lời giải.

Cho Oy theo phương thẳng đứng, chiều dương hướng từ mặt đất lên trời, gốc O là vị trí viên đạn bắn lên, khi đó phương trình chuyển động của viên đạn là
$$y = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2.$$
Ta có vận tốc tại thời điểm t là
$$v = y'(t) = v_0 - gt.$$
Do đó
$$v = 0 \Leftrightarrow v_0 - gt = 0 \Leftrightarrow t = \frac{v_0}{g} = \frac{196}{9{,}8} = 20 \text{ (s)}.$$
Vậy khi $t = 20$ s thì viên đạn bắt đầu rơi, lúc đó viên đạn cách mặt đất
$$y = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 = 196 \cdot 20 - \frac{1}{2}9{,}8 \cdot 20^2 = 1960 \text{ m}.$$

□

BÀI 24. Cho mạch điện như hình bên. Lúc đầu tụ điện có điện tích Q_0. Khi đóng khoá K, tụ điện phóng điện qua cuộn dây; điện tích q của tụ điện phụ thuộc vào thời gian t theo công thức $q(t) = Q_0 \sin \omega t$, trong đó ω là tốc độ góc. Biết rằng cường độ $I(t)$ của dòng điện tại thời điểm t được tính theo công thức $I(t) = q'(t)$. Cho biết $Q_0 = 10^{-8}$ (C) và $\omega = 10^6\pi$ (rad/s).
Tính cường độ của dòng điện tại thời điểm $t = 6$(s) (tính chính xác đến 10^{-5} (mA)).

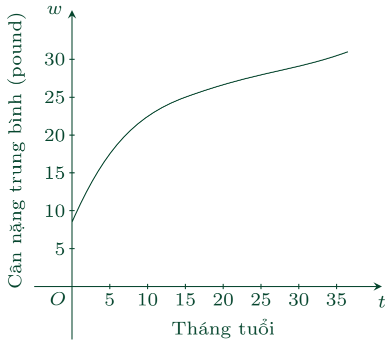


Lời giải.
Ta có $q'(t) = (Q_0 \sin \omega t)' = Q_0 \cdot \omega \cdot \cos \omega t$.
Cường độ của dòng điện tại thời điểm $t = 6$ (s) là

$$I(6) = 10^{-8} \cdot 10^6\pi \cdot \cos(10^6\pi \cdot 6) = \frac{\pi}{100} \text{ (A)} = 31{,}4159 \text{ (mA)}.$$

□

BÀI 25. Cân nặng trung bình của một bé gái trong độ tuổi từ 0 đến 36 tháng có thể được tính gần đúng bởi hàm số $w(t) = 0,000758t^3 - 0,0596t^2 + 1,82t + 8,15$, trong đó t được tính bằng tháng và w được tính bằng pound (*nguồn:https://wwww.cdc.gov.grou* *Boys*). Tính tốc độ thay đổi cân nặng của bé gái đó tại thời điểm 10 tháng tuổi.



Lời giải.
Ta có $w'(t) = 0,000758 \cdot 3t^2 - 0,0596 \cdot 2t + 1,82$.
Tốc độ thay đổi cân nặng của bé gái đó tại thời điểm 10 tháng tuổi là $w'(10) = 0,8554$ pound/tháng. □

BÀI 26. Một công ty xác định rằng tổng chi phí của họ, tính theo nghìn đô-la, để sản xuất x mặt hàng là $C(x) = \sqrt{5x^2 + 60}$ và công ty lên kế hoạch nâng sản lượng trong t tháng kể từ nay theo hàm số $x(t) = 20t + 40$. Chi phí sẽ tăng thế nào sau 4 tháng kể từ khi công ty thực hiện kế hoạch đó?
Lời giải.
Ta có $C'(x) = \dfrac{(5x^2 + 60)'}{2\sqrt{2x^2 = 60}} = \dfrac{5x}{\sqrt{5x^2 + 50}}$.
Công ty thực hiện kế hoạch nâng sản lượng sau 4 tháng có sản lượng là $x(4) = 20 \cdot 4 + 40 = 120$.
Chi phí sẽ tăng sau 4 tháng kể từ khi công ty thực hiện kế hoạch là $C'(120) \simeq 2,235$. □

BÀI 27. Trên Mặt Trăng, quãng đường rơi tự do của một vật được cho bởi công thức $s(t) = 0,81t^2$, trong đó t là thời gian được tính bằng giây và s tính bằng mét. Một vật thả rơi từ độ cao 200 m phía trên Mặt Trăng. Tại thời điểm $t = 2$ sau khi thả vật đó, tính quãng đường vật đã rơi.
Lời giải.
Ta có $s'(t) = 1,62t$.
Quãng đường vật đã rơi tại thời điểm $t = 2$ sau khi thả vật rơi từ độ cao 200 m phía trên Mặt Trăng là $s(2) = 0,81 \cdot 2^2 = 3,24$ m. □

BÀI 28. Cho hàm số $f(x) = x^2 \cdot \mathrm{e}^x$. Tính $f''(0)$.
Lời giải.
$f'(x) = 2x \cdot \mathrm{e}^x + x^2 \cdot \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x \cdot (x^2 + 2x)$.
$f''(x) = \mathrm{e}^x \cdot (x^2 + 2x) + (2x + 2) \cdot \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x \cdot \left(x^2 + 4x + 2\right)$.
$f''(0) = \mathrm{e}^0 \cdot \left(0^2 + 4 \cdot 0 + 2\right) = 2$. □

BÀI 29. Tính đạo hàm cấp hai của các hàm số sau

a) $y = \ln(x + 1)$.

b) $y = \tan 2x$.

Lời giải.

- $y' = \dfrac{(x+1)'}{x+1} = \dfrac{1}{x+1}$.
  $y'' = -\dfrac{(x+1)'}{(x+1)^2} = -\dfrac{1}{(x+1)^2}$.

$y' = \dfrac{(2x)'}{\cos^2 2x} = \dfrac{2}{\cos^2 2x}$.

$y'' = -\dfrac{2(\cos^2 2x)'}{\cos^4 2x} = \dfrac{-2 \cdot 2(2x)' \cdot \cos 2x \cdot (-\sin 2x)}{\cos^4 2x} = \dfrac{4 \cdot \sin 4x}{\cos^4 2x}$.

□

BÀI 30. Tìm đạo hàm cấp hai của mỗi hàm số sau

a) $y = \dfrac{1}{2x+3}$.

b) $y = \log_3 x$.

c) $y = 2^x$.

Lời giải.

a) $y = \dfrac{1}{2x+3}$.

$\Rightarrow y' = -\dfrac{(2x+3)'}{(2x+3)^2} = -\dfrac{2}{(2x+3)^2}$.

$\Rightarrow y'' = \left[-\dfrac{2}{(2x+3)^2}\right]' = \dfrac{2\left[(2x+3)^2\right]'}{(2x+3)^4} = \dfrac{8(2x+3)}{(2x+3)^4} = \dfrac{8}{(2x+3)^3}$.

b) $y = \log_3 x$.

$\Rightarrow y' = \dfrac{1}{x\ln 3}$.

$\Rightarrow y'' = \left(\dfrac{1}{x\ln 3}\right)' = -\dfrac{(x\ln 3)'}{(x\ln 3)^2} = -\dfrac{\ln 3}{(x\ln 3)^2} = -\dfrac{1}{x^2\ln 3}$.

c) $y = 2^x$.

$\Rightarrow y' = 2^x \ln 2$.

$\Rightarrow y'' = (2^x\ln 2)' = 2^x \ln^2 2$.

□

BÀI 31. Tính đạo hàm cấp hai của mỗi hàm số sau

a) $y = 3x^2 - 4x + 5$ tại điểm $x_0 = -2$.

b) $y = \log_3(2x+1)$ tại điểm $x_0 = 3$.

c) $y = \mathrm{e}^{4x+3}$ tại điểm $x_0 = 1$.

d) $y = \sin\left(2x + \dfrac{\pi}{3}\right)$ tại điểm $x_0 = \dfrac{\pi}{6}$.

e) $y = \cos\left(3x - \dfrac{\pi}{6}\right)$ tại điểm $x_0 = 0$.

Lời giải.

a) $y = 3x^2 - 4x + 5$ tại điểm $x_0 = -2$.

Ta có $y' = 6x - 4 \Rightarrow y'' = 6$.

b) $y = \log_3(2x+1)$ tại điểm $x_0 = 3$.

Ta có $y' = \dfrac{2}{(2x+1)\ln 3} \Rightarrow y'' = \dfrac{-2\left[(2x+1)\ln 3\right]'}{\left[(2x+1)\ln 3\right]^2} = -\dfrac{4\ln 3}{\left[(2x+1)\ln 3\right]^2} = -\dfrac{4}{(2x+1)^2\ln 3}$.

Suy ra $y''(3) = -\dfrac{4\ln 3}{\left[(2\cdot 3+1)\ln 3\right]^2} = -\dfrac{4}{49\ln 3}$.

c) $y = \mathrm{e}^{4x+3}$ tại điểm $x_0 = 1$.

Ta có $y' = 4\mathrm{e}^{4x+3} \Rightarrow y'' = 16\mathrm{e}^{4x+3}$.

d) $y = \sin\left(2x + \dfrac{\pi}{3}\right)$ tại điểm $x_0 = \dfrac{\pi}{6}$.

Ta có $y' = 2\cos\left(2x + \dfrac{\pi}{3}\right) \Rightarrow y'' = -4\sin\left(2x + \dfrac{\pi}{3}\right)$.

Suy ra $y''\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = -4\sin\left(2\cdot\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi}{3}\right) = -2\sqrt{3}$.

e) $y = \cos\left(3x - \dfrac{\pi}{6}\right)$ tại điểm $x_0 = 0$.

Ta có $y' = -3\sin\left(3x - \dfrac{\pi}{6}\right) \Rightarrow y'' = -9\cos\left(3x - \dfrac{\pi}{6}\right)$.

Suy ra $y''(0) = -9\cos\left(3\cdot 0 - \dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{-9\sqrt{3}}{2}$.

BÀI 32. Cho hàm số $P(x)=ax^2+bx+3$, (a, b là các hằng số). Tìm a, b biết $P'(1)=0$, $P''(1)=-2$.

Lời giải.

$P'(x)=2ax+b$, $P''(x)=2a$.

Giải hệ $\begin{cases}2a\cdot 1+b=0\\ 2a=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-1\\ b=2.\end{cases}$

Vậy $a=-1$, $b=2$. □

BÀI 33. Cho hàm số $f(x)=2\sin^2\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$. Chứng minh rằng $\left|f''(x)\right|\le 4$ với mọi x.

Lời giải.

$f'(x)=2\cdot 2\cdot\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)'\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)\cdot\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=2\cdot\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{2}\right)$.

$f''(x)=2\cdot\left(2x+\dfrac{\pi}{2}\right)'\cdot\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{2}\right)=4\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{2}\right)$

$\Rightarrow\left|f''(x)\right|=4\left|\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{2}\right)\right|$.

Ta có $0\le\left|\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{2}\right)\right|\le 1\Leftrightarrow 0\le 4\left|\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{2}\right)\right|\le 4$. □

BÀI 34. Cho hàm số $y=\cos^2 4x$. Chứng minh rằng: $32\,(2y-1)+y''=0$.

Lời giải.

$y'=2\cos 4x.(\cos 4x)'\Rightarrow y'=-8\cos 4x.\sin 4x\Rightarrow y'=-4\sin 8x$

$y''=-32\cos 8x$

$VT=32\,(2y-1)+y''=32\left(2\cos^2 4x-1\right)-32\cos 8x=32\cos 8x-32\cos 8x=0=VP$. □

BÀI 35. Cho hàm số $y=x\tan x$. Chứng minh rằng: $x^2y''-2(x^2+y^2)(1+y)=0$.

Lời giải.

$y'=\tan x+x+x\tan^2 x$

$y''=1+\tan^2 x+1+\tan^2 x+2x\tan x.(1+\tan^2 x)=2+2\tan^2 x+2x\tan x+2x\tan^3 x$

$VT=x^2(2+2\tan^2 x+2x\tan x+2x\tan^3 x)-2(x^2+x^2\tan^2 x)(1+x\tan x)=$

$=2x^2+2x^2\tan^2 x+2x^3\tan x+2x^3\tan^3 x-2x^2-2x^3\tan x-2x^2\tan^2 x-2x^3\tan^3 x=0=VP$. □

BÀI 36. Cho hàm số $y=\dfrac{\sin^3 x+\cos^3 x}{1-\sin x\cos x}\cdot$ Chứng minh rằng : $y''+y=0$.

Lời giải.

Ta có: $y=\dfrac{(\sin x+\cos x)\left(\sin^2 x+\cos^2 x-\sin x\cos x\right)}{1-\sin x\cos x}=\sin x+\cos x$

$\Rightarrow y'=\cos x-\sin x; y''=-\sin x-\cos x$

$\Rightarrow y''+y=0$. □

BÀI 37. Phương trình chuyển động của một hạt được cho bởi công thức $s(t)=10+0{,}5\sin\left(2\pi t+\dfrac{\pi}{5}\right)$, trong đó s tính bằng centimét, t tính bằng giây. Gia tốc của hạt tại thời điểm $t=5$ giây (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất).

Lời giải.

$v(t)=s'(t)=\left(2\pi t+\dfrac{\pi}{5}\right)'\cdot 0{,}5\cos\left(2\pi t+\dfrac{\pi}{5}\right)=\pi\cos\left(2\pi t+\dfrac{\pi}{5}\right)$.

$a(t)=v'(t)=-\pi\cdot\left(2\pi t+\dfrac{\pi}{5}\right)'\cdot\sin\left(2\pi t+\dfrac{\pi}{5}\right)=-2\pi^2\sin\left(2\pi t+\dfrac{\pi}{5}\right)$.

Gia tốc của hạt tại thời điểm $t=5$ giây là $a(5)=-2\pi^2\sin\left(2\pi 5+\dfrac{\pi}{5}\right)\approx -11{,}6\,(\mathrm{m/s^2})$. □

BÀI 38. Một vật rơi tự do theo phương thẳng đứng có phương trình $s=\dfrac{1}{2}gt^2$, trong đó g là gia tốc rơi tự do, $g\approx 9,8$ m/s^2.

a) Tính vận tốc tức thời của vật tại thời điểm $t_0=2$ (s).

b) Tính gia tốc tức thời của vật tại thời điểm $t_0=2$ (s).

Lời giải.

a) Phương trình vận tốc của vật $v(t)=s'(t)=gt$.
Vận tốc tức thời của vật tại thời điểm $t_0=2$ là $v(2)=9,8\cdot 2=19,6$ (m/s).

b) Phương trình gia tốc của vật $a(t)=v'(t)=g$. Do đó $a(2)=9,8$ (m/s^2).

□

BÀI 39. Một chất điểm chuyển động theo phương trình $s(t)=t^3-3t^2+8t+1$, trong đó $t>0$, t tính bằng giây và $s(t)$ tính bằng mét. Tìm vận tốc tức thời, gia tốc tức thời của chất điểm

a) Tại thời điểm $t = 3$ (s).

b) Tại thời điểm mà chất điểm di chuyển được 7 (m).

Lời giải.

a) Phương trình vận tốc của vật $v(t) = s'(t) = 3t^2 - 6t + 8$.
Vận tốc tại thời điểm $t = 3$ là $v(3) = 3 \cdot 3^2 - 6 \cdot 3 + 8 = 17$ (m/s).
Phương trình gia tốc của vật $a(t) = v'(t) = 6t - 6$.
Gia tốc tại thời điểm $t = 3$ là $a(3) = 6 \cdot 3 - 6 = 12$ (m/s^2).

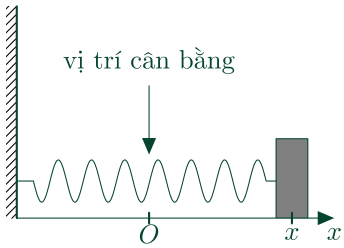
b) Tại thời điểm chất điểm di chuyển được 7m nên ta có
$t^3 - 3t^2 + 8t + 1 = 7 \Leftrightarrow t^3 - 3t^2 + 8t - 6 = 0 \Leftrightarrow t = 1$.
Vận tốc tại thời điểm $t = 1$ là $v(1) = 3 \cdot 1^2 - 6 \cdot 1 + 8 = 5$ (m/s).
Gia tốc tại thời điểm $t = 1$ là $a(1) = 6 \cdot 1 - 6 = 0$ (m/s^2).

□

BÀI 40.
Một con lắc lò xo dao động điều hòa theo phương ngang trên mặt phẳng không ma sát như hình 7, có phương trình chuyển động $x = 4\sin t$, trong đó t tính bằng giây và x tính bằng centimét.

a) Tìm vận tốc tức thời và gia tốc tức thời của con lắc tại thời điểm t (s).

b) Tìm vị trí, vận tốc tức thời và gia tốc tức thời của con lắc tại thời điểm $t = \dfrac{2\pi}{3}$ (s). Tại thời điểm đó, con lắc di chuyển theo hướng nào?



Hình 7

Lời giải.

a) Phương trình vận tốc của vật $v(x) = s'(x) = 4\cos t$ (cm/s).
Vận tốc tức thời của vật ở thời điểm t là $v(t) = 4\cos t$ (cm/s).
Phương trình gia tốc của vật $a(x) = v'(x) = -4\sin t$ (cm/s^2).
Gia tốc tức thời của vật ở thời điểm t là $a(t) = -4\sin t$ (cm/s^2).

b) Tại thời điểm $t = \dfrac{2\pi}{3}$ ta có
Vật di chuyển được quãng đường $x = 4\sin\dfrac{2\pi}{3} = 2\sqrt{3}$ (cm).
Vận tốc tức thời tại thời điểm $t = \dfrac{2\pi}{3}$ là $v\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) = 4\cos\dfrac{2\pi}{3} = -2$ (cm/s).
Gia tốc tức thời tại điểm $t = \dfrac{2\pi}{3}$ là $a\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) = -4\sin\dfrac{2\pi}{3} = -2\sqrt{3}$.
Tại thời điểm đó, vật di chuyển theo hướng ngược lại với phương Ox.

□

MỤC LỤC

Bài 31. ĐẠO HÀM 1

A Tóm tắt kiến thức 1

B Các dạng bài tập 2

Dạng 1. Tính đạo hàm của hàm số bằng định nghĩa 2

Dạng 2. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số 3

C Bài tập rèn luyện 3

Bài 32. CÁC QUY TẮC TÍNH ĐẠO HÀM 5

A Tóm tắt kiến thức 5

B Các dạng bài tập 7

Dạng 3. Tính đạo hàm cơ bản 7

Dạng 4. Tính đạo hàm hàm hợp 8

Dạng 5. Tính đạo hàm tổng, hiệu, tích, thương 9

Dạng 6. Một số ứng dụng của đạo hàm 10

Dạng 7. Chứng minh đẳng thức hoặc giải phương trình 10

Dạng 8. Tính đạo hàm cấp hai 11

Dạng 9. Ý nghĩa của đạo hàm cấp hai 12

Dạng 10. Chứng minh đẳng thức chứa đạo hàm cấp 2 12

C Bài tập rèn luyện 13

LỜI GIẢI CHI TIẾT **16**

Bài 31. ĐẠO HÀM 16

A Tóm tắt kiến thức 16

B Các dạng bài tập 16

Dạng 1. Tính đạo hàm của hàm số bằng định nghĩa 16

Dạng 2. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số 22

C Bài tập rèn luyện 24

Bài 32. CÁC QUY TẮC TÍNH ĐẠO HÀM 29

A Tóm tắt kiến thức 29

B Các dạng bài tập 32

Dạng 3. Tính đạo hàm cơ bản 32

Dạng 4. Tính đạo hàm hàm hợp 34

Dạng 5. Tính đạo hàm tổng, hiệu, tích, thương 37

Dạng 6. Một số ứng dụng của đạo hàm 39

Dạng 7. Chứng minh đẳng thức hoặc giải phương trình 41

Dạng 8. Tính đạo hàm cấp hai 44

Dạng 9. Ý nghĩa của đạo hàm cấp hai 47

Dạng 10. Chứng minh đẳng thức chứa đạo hàm cấp 2 48

C Bài tập rèn luyện 50