

Bài 1. ĐƯỜNG TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

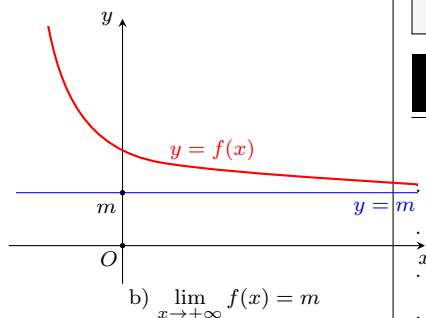
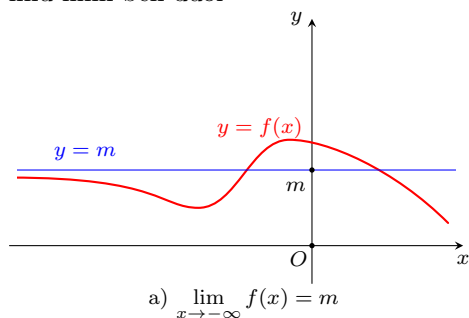
A. LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1. Đường tiệm cận ngang (TCN):

Định nghĩa: Đường thẳng $y = m$ được gọi là một **đường tiệm cận ngang** (hay **tiệm cận ngang**) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = m \text{ hoặc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = m.$$

Đường thẳng $y = m$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x)$ được minh hoạ như hình bên dưới



Các bước tìm TCN:

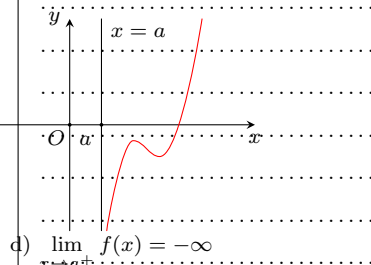
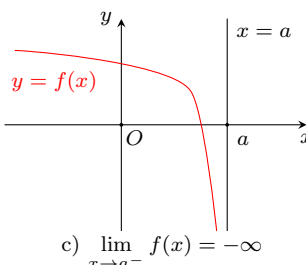
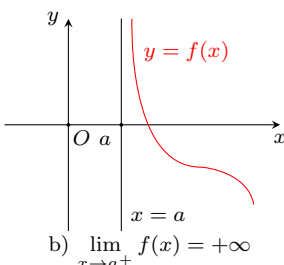
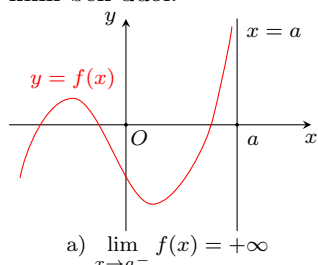
- Tính $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
- Xem ở "vị trí" nào ra kết quả hữu hạn thì ta kết luận có tiệm cận ngang ở "vị trí" đó.

2. Đường tiệm cận đứng (TCD)

Định nghĩa: Đường thẳng $x = a$ được gọi là một **đường tiệm cận đứng** (hay **tiệm cận đứng**) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau thoả mãn:

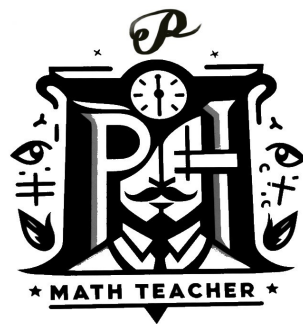
$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty.$$

Đường thẳng $x = a$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = f(x)$ được minh hoạ như hình bên dưới.



Các bước tìm TCD:

- Tìm nghiệm của mẫu, giả sử nghiệm đó là $x = x_0$.
- Tính giới hạn một bên tại x_0 . Nếu xảy ra $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \infty$ hoặc $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty$ thì ta kết luận $x = x_0$ là đường tiệm cận đứng.



ĐIỂM: _____

"It's not how much time you have, it's how you use it."

QUICK NOTE

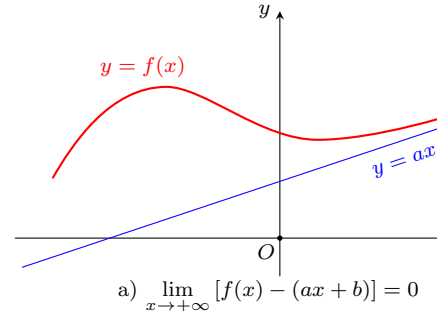
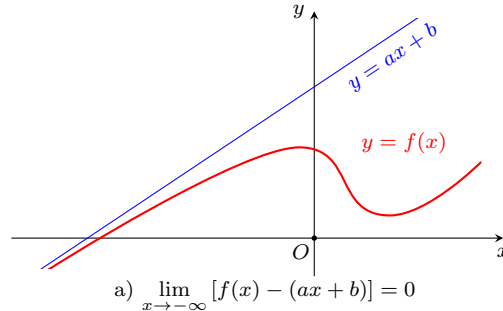
QUICK NOTE

3. Đường tiệm cận xiên

Định nghĩa: Đường thẳng $y = ax + b$, $a \neq 0$, được gọi là **đường tiệm cận xiên** (hay **tiệm cận xiên**) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0 \text{ hoặc } \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0.$$

Đường thẳng $y = ax + b$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = f(x)$ được minh họa như hình bên dưới:



Các bước tìm TCX $y = ax + b$: Ta xác định hệ số của a và b trong 2 trường hợp sau:

① Tính $a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$, $b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - ax]$.

② Tính $a = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$, $b = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - ax]$.

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Dạng 1. Bài toán tìm tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số

Cho hàm số $y = f(x)$. Để tìm tiệm cận đứng và tiệm cận ngang, ta làm như sau:

✓ Các bước tìm tiệm cận đứng:

- ① Tìm nghiệm của mẫu, giả sử nghiệm đó là $x = x_0$.
- ② Tính giới hạn một bên tại x_0 . Nếu xảy ra $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \infty$ hoặc $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \infty$ thì ta kết luận $x = x_0$ là đường tiệm cận đứng.

✓ Các bước tìm tiệm cận ngang:

- ① Tính $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
- ② Xem ở "vị trí" nào ra kết quả hữu hạn thì ta kết luận có tiệm cận ngang ở "vị trí" đó.

✓ Lưu ý: Đồ thị hàm số $y = \frac{ax + b}{cx + d}$ luôn có TCD $x = -\frac{d}{c}$ và TCN: $y = \frac{a}{c}$.

BÀI TẬP TỰ LUẬN

VÍ DỤ 1. Xác định tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số cho bởi công thức sau:

a) $y = \frac{2x - 1}{x + 1}$; b) $y = \frac{2x - 3}{1 - 2x}$; c) $y = \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 1}$; d) $y = \frac{2x - 1}{x^2 - 3x + 2}$.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

QUICK NOTE

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.

CÂU 1. Đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{2x-4}{x+2}$ là

- (A) $y = 2$. (B) $x = 2$. (C) $x = -2$. (D) $y = -2$.

CÂU 2. Tìm tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{x+1}$.

- (A) $y = -2$. (B) $x = -2$. (C) $y = 2$. (D) $x = 1$.

CÂU 3. Đường thẳng $y = 3$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số nào sau đây?

- (A) $y = \frac{1-3x}{2+x}$. (B) $y = \frac{x^2+3x+2}{x-2}$. (C) $y = \frac{1+3x}{1+x}$. (D) $y = \frac{3x^2+2}{2-x}$.

CÂU 4. Hàm số nào có đồ thị nhận đường thẳng $x = 2$ làm đường tiệm cận đứng?

- (A) $y = x - 2 + \frac{1}{x+1}$. (B) $y = \frac{1}{x+1}$. (C) $y = \frac{2}{x+2}$. (D) $y = \frac{5x}{2-x}$.

CÂU 5. Đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{3x+1}{x-2}$ là đường thẳng

- (A) $x = -2$. (B) $x = 2$. (C) $y = 3$. (D) $y = -\frac{1}{2}$.

CÂU 6. Đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{x^2+4x-5}$ có phương trình là

- (A) $x = -1$. (B) $y = 1; y = -5$. (C) $x = 1; x = -5$. (D) $x = \pm 5$.

CÂU 7. Tìm số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2-3x+2}{x^2-4}$.

- (A) 1. (B) 0. (C) 2. (D) 3.

CÂU 8. Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{3}{x-2}$ là

- (A) 1. (B) 2. (C) 0. (D) 3.

CÂU 9. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong (C) và các giới hạn $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$. Hỏi mệnh đề nào sau đây đúng?

- (A) Đường thẳng $y = 2$ là tiệm cận ngang của (C).
(B) Đường thẳng $y = 1$ là tiệm cận ngang của (C).
(C) Đường thẳng $x = 2$ là tiệm cận ngang của (C).
(D) Đường thẳng $x = 2$ là tiệm cận đứng của (C).

CÂU 10. Số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x+9}-3}{x^2+x}$ là

- (A) 3. (B) 2. (C) 0. (D) 1.

CÂU 11. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$ liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như hình vẽ. Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số là

- (A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4.

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'	$-$	$-$	0	$+$	$+$
y	-2	$+\infty$	1	$+\infty$	-2

QUICK NOTE

CÂU 12. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như hình bên. Chọn khẳng định đúng.

- (A) Đồ thị hàm số có đúng một tiệm cận ngang.
 (B) Đồ thị hàm số có hai tiệm cận ngang.
 (C) Đồ thị hàm số có đúng một tiệm cận đứng.
 (D) Đồ thị hàm số không có tiệm đứng và tiệm cận ngang.

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
y'	-		+	-
y	$+\infty$	-1	2	$-\infty$

CÂU 13. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình bên. Hỏi đồ thị hàm số đã cho có bao nhiêu đường tiệm cận?

- (A) 2. (B) 3. (C) 4. (D) 1.

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
y'			+	-
y			2	0

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.

CÂU 14. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình bên. Xét tính đúng, sai của các khẳng định sau:

Mệnh đề	Đ	S
e) $f(-5) < f(4)$.		
f) Hàm số có giá trị nhỏ nhất bằng 2.		
g) Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = 0$.		
h) Đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.		

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
y'	-		-	+
y	2	$+\infty$	2	$+\infty$

CÂU 15. Cho hàm số $y = \frac{-4x+5}{2x+3}$ có đồ thị (C). Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

Mệnh đề	Đ	S
a) Hàm số không có cực trị.		
b) Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = -3$.		
c) Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y = -2$.		
d) Các đường tiệm cận của đồ thị tạo với hai trục tọa độ một hình chữ nhật có diện tích bằng 3.		

Dạng 2. Bài toán tìm tiệm cận đứng và tiệm cận xiên của đồ thị hàm số

❖ **Các bước tìm TCX $y = ax + b$:** Ta xác định hệ số của a và b trong 2 trường hợp sau:

① Tính $a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$, $b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - ax]$.

② Tính $a = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$, $b = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - ax]$.

❖ **Lưu ý:**

① Nếu $a = 0$ thì tiệm cận xiên chính là tiệm cận ngang.

② Đối với hàm số phân thức $f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{mx + n}$, ta có thể chia đa thức, biến đổi về dạng

$$f(x) = a'x + b' + \frac{e}{mx + n}, \text{ với } e \neq 0$$

Suy ra $y = a'x + b'$ là đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số.

BÀI TẬP TỰ LUẬN

VÍ DỤ 1. Tìm các tiệm cận đứng và tiệm cận xiên của đồ thị hàm số sau:

a) $y = \frac{x^2 + 2}{2x - 4}$;

b) $y = \frac{2x^2 - 3x - 6}{x + 2}$;

c) $y = \frac{2x^2 + 9x + 11}{2x + 5}$.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.

CÂU 1. Đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = f(x) = 2x - 1 - \frac{1}{x + 1}$ có phương trình là

- ☐ A $y = x + 1$. ☐ B $y = 2x - 1$. ☐ C $y = x - 1$. ☐ D $y = 2x + 1$.

CÂU 2. Đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = f(x) = x + 3 + \frac{1}{2x + 1}$ có phương trình là

- ☐ A $y = 2x + 1$. ☐ B $y = x - 3$. ☐ C $y = x + 3$. ☐ D $y = 2x - 1$.

CÂU 3. Tìm tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = f(x) = \frac{x^2 + 3x}{x - 2}$.

- ☐ A $y = 2x - 5$. ☐ B $y = x - 2$. ☐ C $y = x + 5$. ☐ D $y = x - 5$.

CÂU 4. Tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 + 2x - 2}{x + 2}$ là

- ☐ A $y = -2$. ☐ B $y = 1$. ☐ C $y = x + 2$. ☐ D $y = x$.

CÂU 5. Tìm tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 1}{x - 2}$.

- ☐ A $y = x + 1$. ☐ B $y = -3x + 1$. ☐ C $y = x - 2$. ☐ D $y = x - 1$.

CÂU 6. Đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = \frac{2x^2 - 3x}{x + 5}$ đi qua điểm nào sau đây?

- ☐ A $(5; 3)$. ☐ B $(-4; -5)$. ☐ C $(6; -1)$. ☐ D $(2; -10)$.

CÂU 7. Giao điểm của đường tiệm cận đứng và đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = \frac{2x^2 - 3x + 2}{x - 1}$ là

- ☐ A $(1; 2)$. ☐ B $(1; 1)$. ☐ C $(1; -1)$. ☐ D $(1; 0)$.

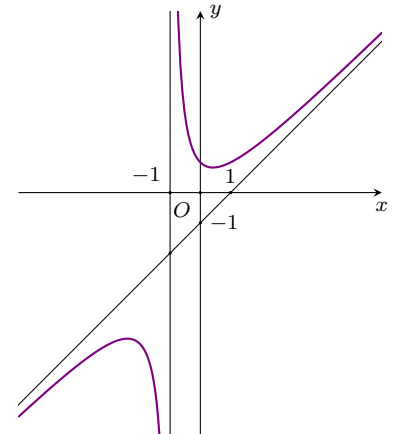
QUICK NOTE

QUICK NOTE

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.

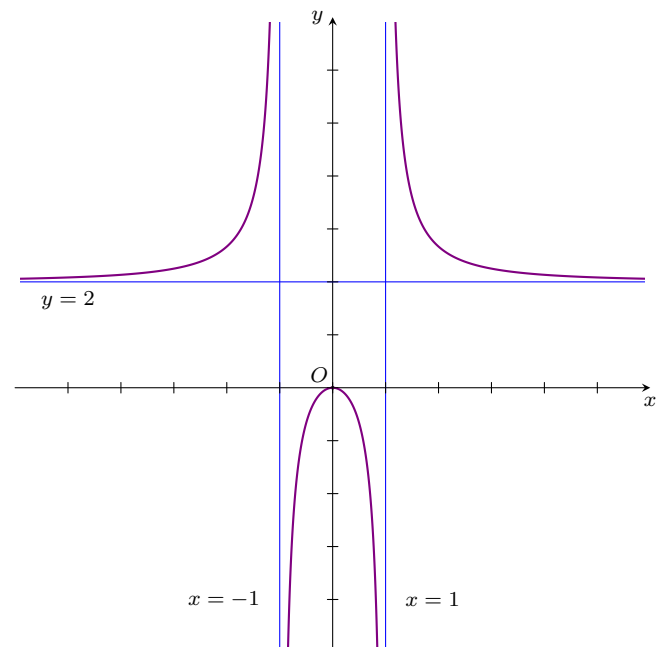
CÂU 8. Cho hàm số $y = f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{dx + e}$ có đồ thị như hình bên.

Mệnh đề	Đ	S
e) Tập xác định của hàm số là \mathbb{R} .		
f) Hàm số có hai điểm cực trị.		
g) Đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng là $x = 0$.		
h) Đồ thị hàm số có đường tiệm cận xiên là $y = x + 1$.		



CÂU 9. Cho đồ thị của hàm số $y = f(x) = \frac{2x^2}{x^2 - 1}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

Mệnh đề	Đ	S
e) Đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị.		
f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$; $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$.		
g) Đồ thị hàm số có 3 đường tiệm cận đứng $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$.		
h) Đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận ngang $y = 2$ và $y = 0$.		



Dạng 3. Bài toán về đường tiệm cận có chứa tham số

QUICK NOTE

BÀI TẬP TỰ LUẬN

VÍ DỤ 1. Tìm tham số m để đồ thị hàm số

- a) $y = \frac{3x-1}{x-m}$ có đường tiệm cận đứng là $x = 5$.
 b) $y = \frac{(m+1)x-5m}{2x-m}$ có tiệm cận ngang là đường thẳng $y = 1$.

VÍ DỤ 2. Tìm m để đồ thị hàm số

- a) $y = \frac{x-2}{x^2-mx+1}$ có hai đường tiệm cận đứng.
 b) $y = \frac{2x^2-3x+m}{x-m}$ có đường tiệm cận xiên.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.

CÂU 1. Tìm tất cả các giá trị của m để đồ thị hàm số $y = \frac{mx+2}{x-5}$ có đường tiệm cận ngang đi qua điểm $A(1;3)$.

- ☐ A $m = -3$. ☐ B $m = 1$. ☐ C $m = -1$. ☐ D $m = 3$.

CÂU 2. Tìm tham số thực m để đồ thị hàm số $y = \frac{mx+3}{x-m}$ có tiệm cận đứng là đường $x = 1$, tiệm cận ngang là đường $y = 1$.

- ☐ A $m = 1$. ☐ B $m = 2$. ☐ C $m = -1$. ☐ D $m = 3$.

CÂU 3. Biết rằng hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{x-m}$ (với m là tham số) tạo với hai trục tọa độ một hình chữ nhật có diện tích bằng 2. Giá trị của m là

- ☐ A $m = \pm 2$. ☐ B $m = -1$. ☐ C $m = 2$. ☐ D $m = \pm 1$.

CÂU 4. Tìm giá trị của m để đồ thị hàm số $y = \frac{2x^2-5x+m}{x-m}$ có tiệm cận đứng.

- ☐ A $\begin{cases} m = 0 \\ m = 2 \end{cases}$. ☐ B $m \neq 0$. ☐ C $m \neq 2$. ☐ D $\begin{cases} m \neq 0 \\ m \neq 2 \end{cases}$.

CÂU 5. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{x-4}{x^2-mx+4}$ có hai đường tiệm cận đứng?

- ☐ A $m \in (-\infty; -4] \cup [4; +\infty)$. ☐ B $m \neq 5$.
☐ C $m \in (-\infty; -4) \cup (4; +\infty) \setminus \{5\}$. ☐ D $m \in (-\infty; -4) \cup (4; +\infty)$.

CÂU 6. Cho hàm số $y = \frac{2x^2-3x+m}{x-m}$ có đồ thị (C) . Tìm tất cả các giá trị của tham số m để (C) không có tiệm cận đứng.

- ☐ A $m = 0$ hoặc $m = 1$. ☐ B $m = 2$.
☐ C $m = 1$. ☐ D $m = 0$.

CÂU 7. Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để đồ thị hàm số $y = \frac{x-2}{x^2-mx+1}$ có đúng 3 đường tiệm cận.

- ☐ A $\begin{cases} m > 2 \\ m \neq \frac{5}{2} \\ m < -2 \end{cases}$. ☐ B $\begin{cases} m > 2 \\ m < -2 \\ m \neq -\frac{5}{2} \end{cases}$. ☐ C $\begin{cases} m > 2 \\ m < -2 \end{cases}$. ☐ D $-2 < m < 2$.

QUICK NOTE

CÂU 8. Cho hàm số $y = \frac{ax + 1}{bx - 2}$, xác định a và b để đồ thị của hàm số trên nhận đường thẳng $x = 1$ làm tiệm cận đứng và đường thẳng $y = \frac{1}{2}$ làm tiệm cận ngang.

A $\begin{cases} a = -1 \\ b = -2 \end{cases}$ **B** $\begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases}$ **C** $\begin{cases} a = 2 \\ b = 2 \end{cases}$ **D** $\begin{cases} a = 2 \\ b = -2 \end{cases}$

CÂU 9. Cho hàm số $y = \frac{mx + 1}{x + 3n + 1}$. Đồ thị hàm số nhận trục hoành và trục tung làm tiệm cận ngang và tiệm cận đứng. Tính $m + n$.

A $m + n = -\frac{1}{3}$. **B** $m + n = \frac{1}{3}$. **C** $m + n = \frac{2}{3}$. **D** $m + n = 0$.

CÂU 10. Đồ thị hàm số $y = \frac{(4a - b)x^2 + ax + 1}{x^2 + ax + b - 12}$ nhận trục hoành và trục tung làm hai tiệm cận. Tính giá trị của $a + b$.

A $a + b = 10$. **B** $a + b = 12$. **C** $a + b = 18$. **D** $a + b = 15$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.

CÂU 11. Cho hàm số $y = \frac{mx^2 + 6x - 2}{x + 2}$, với m là tham số.

Mệnh đề	Đ	S
a) Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$.		
b) Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang khi $m > 0$.		
c) Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng khi $m \neq 0$.		
d) Tập hợp tất cả giá trị của m để đồ thị có hai đường tiệm cận là $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{7}{2}\right\}$.		

MỤC LỤC

Bài 1. ĐƯỜNG TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ	1
(A) LÝ THUYẾT CẦN NHỚ	1
(B) PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN	2
Dạng 1. Bài toán tìm tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số	2
Dạng 2. Bài toán tìm tiệm cận đứng và tiệm cận xiên của đồ thị hàm số	5
Dạng 3. Bài toán về đường tiệm cận có chứa tham số	7

