

# Bài 1. TÍNH ĐƠN ĐIỀU VÀ CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

## QUICK NOTE

## A. LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

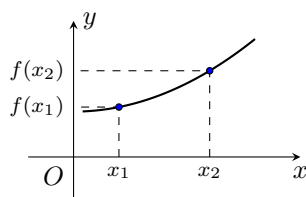
### 1. Tính đơn điệu của hàm số

**Định nghĩa:** Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định trên  $K$  ( $K$  là khoảng, đoạn hoặc nửa khoảng).

#### Ghi nhớ 1

Hàm số đồng biến trên  $K$  nếu  $\forall x_1, x_2 \in K$ ,

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

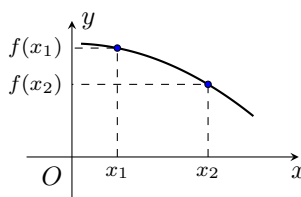


Trên  $K$ , đồ thị là một "đường đi lên" khi xét từ trái sang phải.

#### Ghi nhớ 2

Hàm số nghịch biến trên  $K$  nếu  $\forall x_1, x_2 \in K$ ,

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$



Trên  $K$ , đồ thị là một "đường đi xuống" khi xét từ trái sang phải.

**Liên hệ giữa đạo hàm và tính đơn điệu:** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm trên khoảng  $(a; b)$ .

- Nếu  $y' \geq 0, \forall x \in (a; b)$  và dấu bằng chỉ xảy ra tại hữu hạn điểm thì hàm số  $y = f(x)$  đồng biến trên  $(a; b)$ .
- Nếu  $y' \leq 0, \forall x \in (a; b)$  và dấu bằng chỉ xảy ra tại hữu hạn điểm thì hàm số  $y = f(x)$  nghịch biến trên  $(a; b)$ .

### 2. Cực trị của hàm số

**Định nghĩa:** Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định và liên tục trên khoảng  $(a; b)$  ( $a$  có thể là  $-\infty, b$  có thể là  $+\infty$ ) và điểm  $x_0 \in (a; b)$ .

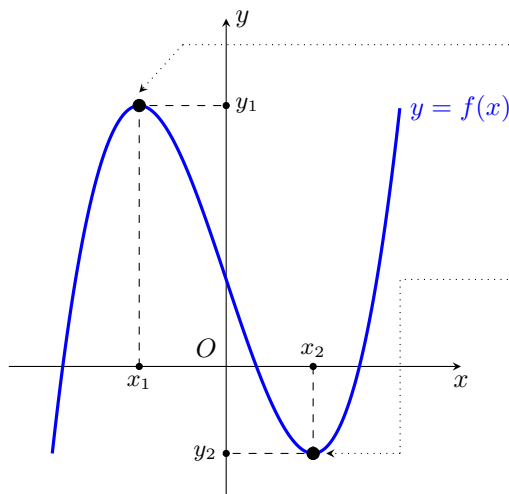
- Nếu tồn tại số  $h > 0$  sao cho  $f(x) < f(x_0)$  với mọi  $x \in (x_0 - h; x_0 + h) \subset (a; b)$  và  $x \neq x_0$  thì ta nói hàm số  $f(x)$  đạt cực đại tại  $x_0$ .
- Nếu tồn tại số  $h > 0$  sao cho  $f(x) > f(x_0)$  với mọi  $x \in (x_0 - h; x_0 + h) \subset (a; b)$  và  $x \neq x_0$  thì ta nói hàm số  $f(x)$  đạt cực tiểu tại  $x_0$ .

**Định lý:** Giả sử hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên khoảng  $(a; b)$  chứa điểm  $x_0$  và có đạo hàm trên các khoảng  $(a; x_0)$  và  $(x_0; b)$ . Khi đó:

- Nếu  $f'(x) < 0$  với mọi  $x \in (a; x_0)$  và  $f'(x) > 0$  với mọi  $x \in (x_0; b)$  thì  $x_0$  là một điểm cực tiểu của hàm số  $f(x)$ .
- Nếu  $f'(x) > 0$  với mọi  $x \in (a; x_0)$  và  $f'(x) < 0$  với mọi  $x \in (x_0; b)$  thì  $x_0$  là một điểm cực đại của hàm số  $f(x)$ .

**Các tên gọi:**

QUICK NOTE



$(x_1; y_1)$  là điểm cực đại của đồ thị hàm số;

- $x_1$  là điểm cực đại của hàm số;
- $y_1$  là giá trị cực đại của hàm số.

$(x_2; y_2)$  là điểm cực tiểu của đồ thị hàm số;

- $x_2$  là điểm cực tiểu của hàm số;
- $y_2$  là giá trị cực tiểu của hàm số.

## B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

1

### Bài toán tìm khoảng đơn điệu và cực trị của hàm số cho trước

- ① Tìm tập xác định  $\mathcal{D}$  của hàm số  $y = f(x)$ .
- ② Tính đạo hàm  $f'(x)$ . Tìm các điểm  $x_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) thuộc  $\mathcal{D}$  mà tại đó đạo hàm bằng 0 hoặc không xác định.
- ③ Sắp xếp các điểm  $x_i$  theo thứ tự tăng dần, xét dấu  $y'$  và lập bảng biến thiên. Từ đây, nêu các khoảng đồng biến, nghịch biến và các điểm cực trị.

Ghi nhớ cách xét dấu:

- A** ☒ Khi xét dấu  $f'(x)$  thì  $f'(x)$  sẽ không đổi dấu khi qua nghiệm kép (nghiệm bội chẵn) và đổi dấu khi qua nghiệm đơn (nghiệm bội lẻ).

#### BÀI TẬP TỰ LUẬN

**VÍ DỤ 1.** Tìm các khoảng đơn điệu và các điểm cực trị của hàm số sau

- a)  $y = -x^3 + 3x^2 - 4$ ;      b)  $y = x^3 - 3x^2 + 1$ ;      c)  $y = x^3 + 3x^2 + 3x + 2$ ;  
d)  $y = -2x^4 + 4x^2$ ;      e)  $y = x^4 + 4x^3 - 1$ ;      f)  $y = -16x^4 + x - 1$ .

**VÍ DỤ 2.** Tìm các khoảng đơn điệu và cực trị của các hàm số sau:

- a)  $y = \frac{2x+1}{x+1}$ ;      b)  $y = \frac{3x+1}{x-1}$ ;      c)  $y = \frac{x^2+2x+2}{x+1}$ ;  
d)  $y = x + \frac{4}{x}$ ;      e)  $y = \sqrt{x^2-2x}$ ;      f)  $y = x - 3\sqrt[3]{x^2}$ .

**VÍ DỤ 3.** Thể tích  $V$  (đơn vị: centimet khối) của 1 kg nước tại nhiệt độ  $T$  ( $0^\circ\text{C} \leq T \leq 30^\circ\text{C}$ ) được tính bởi công thức

$$V(T) = 999,87 - 0,06426T + 0,0085043T^2 - 0,0000679T^3$$

Hỏi thể tích  $V(T)$ ,  $0^\circ\text{C} \leq T \leq 30^\circ\text{C}$ , giảm trong khoảng nhiệt độ nào?

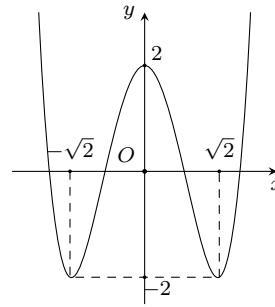
#### BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

**PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.**

**CÂU 1.**

Cho hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị như hình vẽ bên. Hàm số  $y = f(x)$  nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

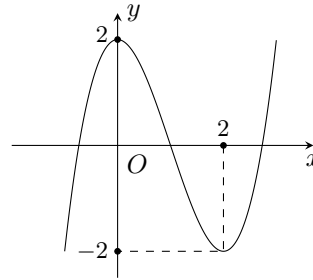
- (A)  $(\sqrt{2}; +\infty)$ . (B)  $(-2; 2)$ .  
(C)  $(-\infty; 0)$ . (D)  $(0; \sqrt{2})$ .



**CÂU 2.**

Cho hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề **sai**?

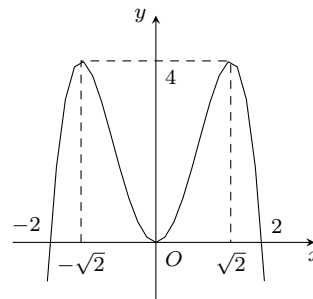
- (A) Hàm số đạt cực đại tại  $x = 0$ .  
(B) Hàm số có giá trị cực tiểu bằng  $-2$ .  
(C) Hàm số đồng biến trên  $(-\infty; 2)$ .  
(D) Hàm số nghịch biến trên  $(0; 2)$ .



**CÂU 3.**

Hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên. Hàm số  $y = f(x)$  đạt cực tiểu tại điểm nào dưới đây?

- (A)  $x = 2$ . (B)  $x = 0$ .  
(C)  $x = -2$ . (D)  $x = 4$ .



**CÂU 4.**

Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như hình bên. Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề đúng?

- (A) Hàm số đồng biến trên khoảng  $(-\infty; 3)$ .  
(B) Hàm số nghịch biến trên khoảng  $(-2; +\infty)$ .  
(C) Hàm số đạt cực đại tại  $x = 3$ .  
(D) Hàm số đạt cực tiểu tại  $x = 2$ .

$x$	$-\infty$	$-2$	$2$	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	$0$	$-$	$0$	$+$
$f(x)$	$-\infty$	$3$	$0$	$+\infty$	

**CÂU 5.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên bên dưới

$x$	$-\infty$	$-2$	$0$	$2$	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	$0$	$-$	$-$	$0$	$+$
$f(x)$	$-\infty$	$-4$	$+\infty$	$4$	$+\infty$	

Khẳng định nào sau đây là khẳng định **sai**?

- (A) Hàm số có hai điểm cực trị.  
(B) Tọa độ điểm cực đại của đồ thị hàm số là  $(-2; -4)$ .  
(C) Hàm số nghịch biến trên khoảng  $(-2; 2)$ .  
(D) Hàm số đồng biến trên khoảng  $(3; +\infty)$ .

**CÂU 6.** Cho hàm số  $y = -\frac{1}{3}x^3 - x - 3$ . Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- (A) Hàm số đồng biến trên  $(-\infty; 1)$  và trên  $(1; +\infty)$ .  
(B) Hàm số nghịch biến trên  $\mathbb{R}$ .

**QUICK NOTE**

QUICK NOTE

(C) Hàm số đồng biến trên  $(-1; 1)$ .

(D) Hàm số đồng biến trên  $\mathbb{R}$ .

**CÂU 7.** Gọi  $x_1$  là điểm cực đại  $x_2$  là điểm cực tiểu của hàm số  $y = -x^3 + 3x + 2$ . Tính  $x_1 + 2x_2$ .

(A) 2.

(B) 1.

(C) -1.

(D) 0.

**CÂU 8.** Khoảng cách giữa hai điểm cực trị của đồ thị hàm số  $y = x^3 - 3x^2 + 4$  bằng

(A)  $2\sqrt{5}$ .

(B)  $2\sqrt{2}$ .

(C) 2.

(D) 4.

**CÂU 9.** Hàm số  $y = x^4 - 2x^2 + 1$  đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

(A)  $(-1; 0)$ .

(B)  $(-1; +\infty)$ .

(C)  $(-3; 8)$ .

(D)  $(-\infty; -1)$ .

**CÂU 10.** Cho hàm số  $y = -\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2 - 3$ . Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

(A) Hàm số đạt cực tiểu tại  $x = -3$ .

(B) Hàm số đạt cực tiểu tại  $x = 0$ .

(C) Hàm số đạt cực đại tại  $x = 0$ .

(D) Hàm số đạt cực tiểu tại  $x = -1$ .

**CÂU 11.** Cho hàm số  $y = \frac{3x-1}{x-2}$ . Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

(A) Hàm số nghịch biến trên  $\mathbb{R}$ .

(B) Hàm số đồng biến trên các khoảng  $(-\infty; 2)$  và  $(2; +\infty)$ .

(C) Hàm số nghịch biến trên các khoảng  $(-\infty; 2)$  và  $(2; +\infty)$ .

(D) Hàm số đồng biến trên  $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ .

**CÂU 12.** Cho hàm số  $y = \frac{x-2}{x+3}$ . Mệnh đề nào dưới đây đúng?

(A) Hàm số nghịch biến trên khoảng  $(-\infty; -3) \cup (-3; +\infty)$ .

(B) Hàm số đồng biến trên khoảng  $(-\infty; -3)$  và  $(-3; +\infty)$ .

(C) Hàm số nghịch biến trên khoảng  $(-\infty; -3)$  và  $(-3; +\infty)$ .

(D) Hàm số đồng biến trên khoảng  $(-\infty; -3) \cup (-3; +\infty)$ .

**CÂU 13.** Gọi  $y_{CD}, y_{CT}$  lần lượt là giá trị cực đại và giá trị cực tiểu của hàm số  $y = \frac{x^2 + 3x + 3}{x + 2}$ . Giá trị của biểu thức  $y_{CD}^2 - 2y_{CT}^2$  bằng

(A) 8.

(B) 7.

(C) 9.

(D) 6.

**CÂU 14.** Tìm điểm cực tiểu của hàm số  $f(x) = (x-3)e^x$ .

(A)  $x = 3$ .

(B)  $x = 0$ .

(C)  $x = 2$ .

(D)  $x = 1$ .

**CÂU 15.** Cho hàm số  $y = x^2 + 4\ln(3-x)$ . Tìm giá trị cực đại  $y_{CD}$  của hàm số đã cho.

(A)  $y_{CD} = 2$ .

(B)  $y_{CD} = 4$ .

(C)  $y_{CD} = 1 + 4\ln 2$ .

(D)  $y_{CD} = 1$ .

**CÂU 16.** Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định trên  $\mathbb{R}$  và có đạo hàm  $y' = f'(x) = 3x^3 - 3x^2$ . Mệnh đề nào sau đây sai?

(A) Trên khoảng  $(1; +\infty)$  hàm số đồng biến.

(B) Trên khoảng  $(-1; 1)$  hàm số nghịch biến.

(C) Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị.

(D) Đồ thị hàm số có một điểm cực tiểu.

**CÂU 17.** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có đạo hàm  $f'(x) = x(x-1)^2(x-2)^3$ . Số điểm cực trị của hàm số  $y = f(x)$  là

(A) 1.

(B) 2.

(C) 0.

(D) 3.

**CÂU 18.**

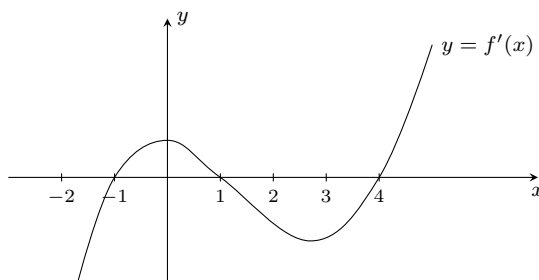
Cho hàm số bậc bốn  $y = f(x)$ . Biết  $f'(x)$  có đồ thị như hình bên. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

(A) Hàm số  $f(x)$  đồng biến trên khoảng  $(-\infty; 0)$ .

(B) Hàm số  $f(x)$  nghịch biến trên khoảng  $(-1; 1)$ .

(C) Hàm số  $f(x)$  có đúng một điểm cực tiểu.

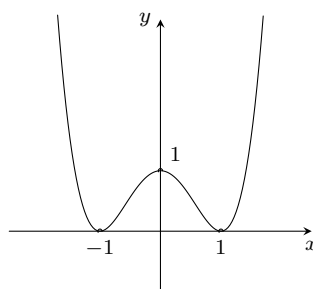
(D) Hàm số  $f(x)$  có đúng một điểm cực đại.



**CÂU 19.**

Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định và liên tục trên  $\mathbb{R}$ . Biết rằng hàm số  $f(x)$  có đạo hàm  $f'(x)$  và hàm số  $y = f'(x)$  có đồ thị như hình vẽ. Khi đó nhận xét nào sau đây đúng?

- (A) Hàm số  $f(x)$  không có cực trị.  
 (B) Đồ thị hàm số  $f(x)$  có đúng 2 điểm cực tiểu.  
 (C) Đồ thị hàm số  $f(x)$  có đúng một cực đại.  
 (D) Hàm số  $f(x)$  có 3 cực trị.



**PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.**

**CÂU 20.** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có bảng xét dấu đạo hàm như hình bên.

$x$	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$
$y'$		+	0	-	
				+	0
					+

Mệnh đề	Đ	S
a) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 1)$ .		
b) Hàm số đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$ .		
c) Hàm số đạt cực đại tại $x = 2$ .		
d) Hàm số có một điểm cực đại và hai điểm cực tiểu.		

**CÂU 21.** Cho hàm số  $y = x^3 - 3x^2 + 4$  có đồ thị  $(C)$ . Gọi  $A, B$  là hai điểm cực trị của  $(C)$ .

Mệnh đề	Đ	S
a) Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$ .		
b) Hàm số đồng biến trên khoảng $(0; 2)$ .		
c) PTĐT qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là $2x + y - 4 = 0$ .		
d) Diện tích của tam giác $OAB$ bằng 4, với $O$ là gốc tọa độ.		

**CÂU 22.** Cho hàm số  $y = \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1}$  có đồ thị  $(C)$ . Gọi  $A, B$  lần lượt là điểm cực tiểu và điểm cực đại của  $(C)$ .

Mệnh đề	Đ	S
a) Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$ .		
b) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-2; 0)$ .		
c) Tọa độ điểm $A(-2; -2), B(0; 2)$ .		
d) Khoảng cách giữa hai điểm cực trị là $AB = 2\sqrt{5}$ .		

**CÂU 23.** Xét một chất điểm chuyển động dọc theo trục  $Ox$ . Tọa độ của chất điểm tại thời điểm  $t$  được xác định bởi hàm số  $x(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$  với  $t \geq 0$ . Khi đó  $x'(t)$  là vận tốc của chất điểm tại thời điểm  $t$ , kí hiệu  $v(t)$ ;  $v'(t)$  là gia tốc chuyển động của chất điểm tại thời điểm  $t$ , kí hiệu  $a(t)$ .

Mệnh đề	Đ	S
a) Phương trình hàm vận tốc là $v(t) = 3t^2 - 6t + 9$ .		
b) Phương trình hàm gia tốc là $a(t) = 6t - 12$ .		


**QUICK NOTE**

QUICK NOTE

Mệnh đề	Đ	S
c) Vận tốc của chất điểm tăng khi $t \in (0; 1)$ hoặc $t \in (3; +\infty)$ .		
d) Vận tốc của chất điểm giảm khi $t \in (1; 3)$ .		

2

**Bài toán tìm m để hàm số đồng biến (nghịch biến) trên khoảng cho trước**

 Xét hàm số bậc ba  $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$  có  $y' = 3ax^2 + 2bx + c$ .


① Hàm số đồng biến trên  $\mathbb{R}$  khi và chỉ khi

$$y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta_{y'} \leq 0 \end{cases}.$$

② Hàm số nghịch biến trên  $\mathbb{R}$  khi và chỉ khi

$$y' \leq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta_{y'} \leq 0 \end{cases}.$$

Trường hợp hệ số  $a$  có chứa tham số, ta kiểm tra thêm trường hợp  $a = 0$ .


 Xét hàm phân thức  $y = \frac{ax+b}{cx+d}$  có  $y' = \frac{ad-cb}{(cx+d)^2}$ , với  $ad-cb \neq 0$  và  $c \neq 0$ .

① Hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định của nó khi và chỉ khi

$$y' > 0, \forall x \neq -\frac{d}{c} \Leftrightarrow ad - cb > 0.$$

② Hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định của nó khi và chỉ khi

$$y' < 0, \forall x \neq -\frac{d}{c} \Leftrightarrow ad - cb < 0.$$

 Xét hàm phân thức  $y = \frac{ax^2+bx+c}{dx+e}$  có  $y' = \frac{adx^2+2aex+be-dc}{(dx+e)^2}$ , với  $ad \neq 0$ .

① Hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định của nó khi và chỉ khi

$$y' \geq 0, \forall x \neq -\frac{e}{d} \Leftrightarrow adx^2 + 2aex + be - dc \geq 0, \forall x \neq -\frac{e}{d}.$$

② Hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định của nó khi và chỉ khi

$$y' \leq 0, \forall x \neq -\frac{e}{d} \Leftrightarrow adx^2 + 2aex + be - dc \leq 0, \forall x \neq -\frac{e}{d}.$$

**BÀI TẬP TỰ LUẬN**

**VÍ DỤ 1.** Tìm tất cả giá trị của tham số  $m$  để hàm số

- $y = x^3 + mx^2 + 2mx + 2$  đồng biến trên  $(-\infty; +\infty)$ .
- $y = -\frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (2m-3)x - m + 2$  nghịch biến trên  $\mathbb{R}$ .
- $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 - (2m+1)x + 1$  nghịch biến trên khoảng  $(0; 5)$ .
- $y = x^3 - 3x^2 + (5-m)x$  đồng biến trên khoảng  $(2; +\infty)$ .

**VÍ DỤ 2.** Tìm tất cả giá trị của tham số  $m$  để hàm số

- $y = \frac{mx+2}{x+1}$  đồng biến trên từng khoảng xác định.
- $y = \frac{mx-2}{x+m-3}$  nghịch biến trên các khoảng xác định

QUICK NOTE

c)  $y = \frac{mx - 8}{x - 2m}$  đồng biến trên  $(3; +\infty)$ .

d)  $y = \frac{mx + 9}{4x + m}$  nghịch biến trên khoảng  $(0; 4)$ .

**VÍ DỤ 3.** Tìm tất cả giá trị của tham số  $m$  để hàm số

a)  $y = \frac{2x^2 + 3x + m + 1}{x + 1}$  đồng biến trên các khoảng xác định.

b)  $y = \frac{x^2 + (m + 1)x - 1}{2 - x}$  ( $m$  là tham số) nghịch biến trên mỗi khoảng xác định.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

**PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Học sinh trả lời từ câu 1 đến câu 17. Mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.**

**CÂU 1.** Tất cả giá trị của  $m$  để hàm số  $y = \frac{x + m}{x - 2}$  nghịch biến trên từng khoảng xác định là

- (A)**  $m > -2$ . **(B)**  $m < -2$ . **(C)**  $m \leq -2$ . **(D)**  $m \geq -2$ .

**CÂU 2.** Cho hàm số  $y = \frac{mx - 2}{x + 1 - m}$ . Tìm tất cả giá trị của tham số  $m$  để hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định.

- (A)**  $\begin{cases} m > 2 \\ m < -1 \end{cases}$ . **(B)**  $-1 < m < 2$ . **(C)**  $-1 \leq m \leq 2$ . **(D)**  $\begin{cases} m \geq 2 \\ m \leq -1 \end{cases}$ .

**CÂU 3.** Cho hàm số  $y = \frac{x + m}{x + 2}$ . Tập hợp tất cả các giá trị của  $m$  để hàm số đồng biến trên khoảng  $(0; +\infty)$  là

- (A)**  $[2; +\infty)$ . **(B)**  $(2; +\infty)$ . **(C)**  $(-\infty; 2]$ . **(D)**  $(-\infty; 2)$ .

**CÂU 4.** Cho hàm số  $f(x) = \frac{mx - 4}{x - m}$  ( $m$  là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị nguyên của  $m$  để hàm số đồng biến trên khoảng  $(0; +\infty)$ ?

- (A)** 5. **(B)** 4. **(C)** 3. **(D)** 2.

**CÂU 5.** Tìm tất cả các giá trị của  $m$  để hàm số  $y = \frac{mx + 4}{x + m}$  nghịch biến trên  $(-\infty; 1)$ .

- (A)**  $-2 < m < 2$ . **(B)**  $-2 < m < -1$ . **(C)**  $-2 \leq m < -1$ . **(D)**  $-2 < m \leq -1$ .

**CÂU 6.** Số giá trị nguyên của tham số  $m$  để hàm số  $y = \frac{mx + 10}{2x + m}$  nghịch biến trên khoảng  $(0; 2)$  là

- (A)** 6. **(B)** 5. **(C)** 4. **(D)** 9.

**CÂU 7.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  để hàm số  $y = x^3 - 2mx^2 + (m^2 + 3)x$  đồng biến trên  $\mathbb{R}$ ?

- (A)** 8. **(B)** 6. **(C)** 7. **(D)** 0.

**CÂU 8.** Cho hàm số  $y = -x^3 - mx^2 + (4m + 9)x + 5$ . Có bao nhiêu giá trị nguyên của  $m$  để hàm số nghịch biến trên  $\mathbb{R}$ ?

- (A)** 7. **(B)** 4. **(C)** 5. **(D)** 6.

**CÂU 9.** Cho hàm số  $y = (m - 1)x^3 + (m - 1)x^2 - 2x + 5$  với  $m$  là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của  $m$  để hàm số nghịch biến trên khoảng  $(-\infty; +\infty)$ ?

- (A)** 5. **(B)** 7. **(C)** 8. **(D)** 6.

**CÂU 10.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  để hàm số  $y = x^3 - 3mx^2 - 9m^2x$  nghịch biến trên khoảng  $(0; 1)$ .

- (A)**  $-1 < m < \frac{1}{3}$ . **(B)**  $m < -1$ .  
**(C)**  $m > \frac{1}{3}$ . **(D)**  $m \geq \frac{1}{3}$  hoặc  $m \leq -1$ .

**CÂU 11.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  thuộc khoảng  $(-2019; 2020)$  để hàm số  $y = 2x^3 - 3(2m + 1)x^2 + 6m(m + 1)x + 2019$  đồng biến trên khoảng  $(2; +\infty)$ ?

- (A)** 2020. **(B)** 2018. **(C)** 2021. **(D)** 2019.

QUICK NOTE

**CÂU 12.** Tập hợp các giá trị thực của tham số  $m$  để hàm số  $y = -x^3 - 6x^2 + (4m - 9)x + 4$  nghịch biến trên khoảng  $(-\infty; -1)$  là

- A**  $(-\infty; 0]$ .
- B**  $\left[-\frac{3}{4}; +\infty\right)$ .
- C**  $\left(-\infty; -\frac{3}{4}\right]$ .
- D**  $[0; +\infty)$ .

**CÂU 13.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  sao cho hàm số  $y = x^3 - 6x^2 + mx + 1$  đồng biến trên khoảng  $(0; +\infty)$ .

- A**  $m \leq 12$ .
- B**  $m \geq 12$ .
- C**  $m \leq 0$ .
- D**  $m \geq 0$ .

**CÂU 14.** Tìm tất cả các giá trị  $m$  để hàm số  $y = \frac{x^2 - 8x}{x + m}$  đồng biến trên mỗi khoảng xác định.

- A**  $(-8; 0)$ .
- B**  $(0; 8)$ .
- C**  $[0; 8]$ .
- D**  $[-8; 0]$ .

**CÂU 15.** Tập hợp các giá trị thực của tham số  $m$  để hàm số  $y = x + 1 + \frac{m}{x - 2}$  đồng biến trên mỗi khoảng xác định của nó là

- A**  $(-\infty; 0)$ .
- B**  $[0; 1)$ .
- C**  $[0; +\infty) \setminus \{1\}$ .
- D**  $(-\infty; 0]$ .

**CÂU 16.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  để hàm số  $f(x) = 2x^3 - x^2 + mx + 1$  đồng biến trên khoảng  $(1; 2)$ .

- A**  $m \leq -8$ .
- B**  $m > -8$ .
- C**  $m \geq -1$ .
- D**  $m < -1$ .

**CÂU 17.** Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số  $m$  để hàm số  $f(x) = (x + 1) \ln x + (2 - m)x$  đồng biến trên khoảng  $(0; e^2)$ ?

- A** 0.
- B** 3.
- C** 5.
- D** 4.

**PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Học sinh trả lời từ câu 18 đến câu 20. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.**

**CÂU 18.** Cho hàm số  $y = mx^3 + mx^2 - (m + 1)x + 1$ , với  $m$  là tham số.

Mệnh đề	Đ	S
a) Hàm số là hàm số bậc ba khi $m \neq 0$ .		
b) Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$ .		
c) Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $m < -\frac{3}{4}$ hoặc $m \geq 0$ .		
d) Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $-\frac{3}{4} \leq m < 0$ .		

**CÂU 19.** Cho hàm số  $y = \frac{1}{3}x^3 + (m + 1)x^2 + (m^2 + 2m)x - 3$ , với  $m$  là tham số.

Mệnh đề	Đ	S
a) Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$ .		
b) Phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1 = -m$ và $x_2 = -m - 2$ .		
c) Không tồn tại giá trị của tham số $m$ để hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ .		
d) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$ khi và chỉ khi $m \geq -1$ .		


**CÂU 20.** Cho hàm số  $y = \frac{x + 5}{x + m}$ , với  $m$  là tham số.

Mệnh đề	Đ	S
a) Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$ .		
b) Hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định khi và chỉ khi $m \geq 5$ .		
c) Hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định khi và chỉ khi $m < 5$ .		
d) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -8)$ khi và chỉ khi $(5; 8)$ .		




3


### Bài toán tìm $m$ để hàm số có cực trị hoặc đạt cực trị tại điểm cho trước

 Tìm  $m$  để hàm số  $y = f(x)$  đạt cực trị tại điểm  $x_0$  cho trước ( $f(x)$  có đạo hàm tại  $x_0$ ):


- ① Giải điều kiện  $y'(x_0) = 0$ , tìm  $m$ .
- ② Lập bảng biến thiên với  $m$  vừa tìm được và chọn giá trị  $m$  nào thỏa yêu cầu.

 Biện luận cực trị hàm số  $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ .  
 Tính  $y' = 3ax^2 + 2bx + c$  với  $\Delta_{y'} = b^2 - 3ac$


- ①  $\begin{cases} \Delta_{y'} > 0 \\ a \neq 0 \end{cases}$ : Hàm số có hai điểm cực trị
- ②  $\Delta_{y'} \leq 0$  hoặc suy biến  $\begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases}$ : Hàm số không có cực trị.

 Gọi  $x_1, x_2$  là hai nghiệm phân biệt của  $y' = 0$  thì  $x_1 + x_2 = -\frac{2b}{3a}$  và  $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{3a}$ .

- $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$
- $(x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2$
- $x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2)$ .

 Các công thức tính toán thường gặp:

- Độ dài  $MN = \sqrt{(x_N - x_M)^2 + (y_N - y_M)^2}$
- Khoảng cách từ  $M$  đến  $\Delta$ :  $d(M, \Delta) = \frac{|Ax_M + By_M + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ , với  $\Delta: Ax + By + C = 0$ .
- Tam giác  $ABC$  vuông tại  $A \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow \text{hoành} \cdot \text{hoành} + \text{tung} \cdot \text{tung} = 0$ .
- Diện tích tam giác  $ABC$  là  $S = \frac{1}{2}|a_1b_2 - a_2b_1|$ , với  $\overrightarrow{AB} = (a_1; b_1)$ ,  $\overrightarrow{AC} = (a_2; b_2)$ .

 PTĐT qua hai điểm cực trị là  $y = -\frac{2}{9a}(b^2 - 3ac)x + d - \frac{bc}{9a}$ .

### BÀI TẬP TỰ LUẬN

**VÍ DỤ 1.** Tìm  $m$  để hàm số

- a)  $y = \frac{x^3}{3} - mx^2 + (m^2 - m + 1)x + 1$  đạt cực tiểu tại  $x = 3$ .
- b)  $y = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 1)x$  đạt cực đại tại  $x_0 = 1$ .

**VÍ DỤ 2.** Tìm tất cả giá trị của tham số  $m$  để hàm số (đồ thị hàm số)

- a)  $y = x^3 - 3x^2 + 2mx + m + 2024$  có hai điểm cực trị.
- b)  $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m + 2)x + 2019$  không có cực trị.
- c)  $y = x^3 - 3(m + 1)x^2 + 12mx + 2019$  có hai điểm cực trị  $x_1, x_2$  thỏa mãn  $x_1 + x_2 + 2x_1x_2 = -8$ .
- d)  $y = -x^3 - 3mx^2 + m - 2$  với  $m$  là tham số có hai điểm cực trị  $A, B$  sao cho  $AB = 2$ .

### BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

**PHẦN I.** Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.

### QUICK NOTE

QUICK NOTE

- CÂU 1.** Tìm tất cả giá trị của tham số  $m$  để hàm số  $y = \frac{1}{3}x^3 + (m+1)x^2 + (1-3m)x + 2$  có cực đại và cực tiểu.  
 (A)  $m \leq -5; m \geq 0$ . (B)  $m < -5; m > 0$ . (C)  $-5 < m < 0$ . (D)  $-5 \leq m \leq 0$ .
- CÂU 2.** Tìm tất cả các giá trị của tham số  $m$  để hàm số  $y = -x^3 - 3x^2 + mx + 2$  có cực đại và cực tiểu.  
 (A)  $m > -3$ . (B)  $m \geq 3$ . (C)  $m \geq -3$ . (D)  $m > 3$ .
- CÂU 3.** Cho hàm số  $y = x^3 - 3(m+1)x^2 + 3(7m-3)x$ . Số giá trị nguyên của tham số  $m$  để hàm số không có cực trị là  
 (A) 2. (B) 1. (C) 4. (D) 3.
- CÂU 4.** Cho hàm số  $y = x^3 - 3(m+1)x^2 + 3(7m-3)x$ . Gọi  $S$  là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số  $m$  để hàm số không có cực trị. Số phần tử của  $S$  là  
 (A) 2. (B) 4. (C) 0. (D) Vô số.
- CÂU 5.** Giả sử hàm số  $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - \frac{1}{3}mx$  có hai điểm cực trị  $x_1, x_2$  thỏa mãn  $x_1 + x_2 + 2x_1x_2 = 0$ . Giá trị của  $m$  là  
 (A)  $m = \frac{4}{3}$ . (B)  $m = -3$ . (C)  $m = 3$ . (D)  $m = 2$ .
- CÂU 6.** Cho hàm số  $f(x) = x^3 - 3x^2 + mx - 1$ . Tìm giá trị của tham số  $m$  để hàm số có hai cực trị  $x_1, x_2$  thỏa  $x_1^2 + x_2^2 = 3$ .  
 (A)  $m = \frac{1}{2}$ . (B)  $m = -2$ . (C)  $m = 1$ . (D)  $m = \frac{3}{2}$ .
- CÂU 7.** Tìm tất cả các giá trị của tham số  $m$  để đồ thị hàm số  $y = x^3 - 12x + m + 2$  có hai cực trị và hai điểm cực trị này nằm về hai phía trục hoành?  
 (A)  $m = -2$ . (B)  $-18 < m < 14$ . (C)  $\forall m \in \mathbb{R}$ . (D)  $m \neq 1$ .
- CÂU 8.** Tập hợp các giá trị của  $m$  để đồ thị hàm số  $y = x^3 + mx^2 - (m^2 - 4)x + 1$  có hai điểm cực trị nằm ở hai phía của trục  $Oy$  là  
 (A)  $(-\infty; 2)$ . (B)  $\mathbb{R} \setminus [-2; 2]$ . (C)  $(-2; 2)$ . (D)  $(2; +\infty)$ .
- CÂU 9.** Cho hàm số  $y = x^3 + 3mx^2 + 3(m^2 - 1)x + m^3$ . Tìm  $m$  để hàm số đạt cực tiểu tại điểm  $x = 0$ .  
 (A)  $m = -1$ . (B)  $m = 1$ . (C)  $m = 0$ . (D)  $m = 2$ .
- CÂU 10.** Hàm số  $y = x^3 - 2mx^2 + m^2x - 2$  đạt cực tiểu tại  $x = 1$  khi  
 (A)  $m = 3$ . (B)  $m = -3$ . (C)  $m = 1$ . (D)  $m = -1$ .
- CÂU 11.** Tìm giá trị thực của tham số  $m$  để hàm số  $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2 - 4)x + 3$  đạt cực tiểu tại  $x = 3$ .  
 (A)  $m = -1$ . (B)  $m = 1$ . (C)  $m = -7$ . (D)  $m = 5$ .
- CÂU 12.** Đồ thị hàm số  $y = x^3 - 3x^2 + 2ax + b$  (với  $a, b \in \mathbb{R}$ ) có điểm cực tiểu  $A(2; -2)$ . Khi đó  $a + b$  bằng  
 (A)  $-4$ . (B)  $4$ . (C)  $2$ . (D)  $-2$ .
- CÂU 13.** Gọi  $m_1, m_2$  là các giá trị của tham số  $m$  để đồ thị hàm số  $y = 2x^3 - 3x^2 + m - 1$  có hai điểm cực trị  $B, C$  sao cho tam giác  $OBC$  có diện tích bằng 2, với  $O$  là gốc tọa độ. Tích  $m_1 \cdot m_2$  bằng  
 (A) 12. (B) 6. (C)  $-15$ . (D)  $-20$ .
- CÂU 14.** Cho hàm số  $y = x^3 - 3mx^2 + 3m^3$ . Biết rằng có hai giá trị của tham số  $m$  để đồ thị hàm số có hai điểm cực trị  $A, B$  và tam giác  $OAB$  có diện tích bằng 48. Khi đó tổng các giá trị của  $m$  là  
 (A) 0. (B) 2. (C)  $\sqrt{2}$ . (D)  $-2$ .
- PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.**
- CÂU 15.** Cho hàm số  $y = \frac{m}{3}x^3 + 2x^2 + mx + 1$ , với  $m$  là tham số.

Mệnh đề	Đ	S
a) Hàm số có hai điểm cực trị khi $-2 < m < 2$ .		

QUICK NOTE

Mệnh đề	Đ	S
b) Hàm số có đúng một điểm cực trị khi $m = 0$ hoặc $m = 2$ .		
c) Hàm số không có cực trị khi $m \leq -2$ hoặc $m \geq 2$ .		
d) Hàm số có 2 điểm cực trị thỏa mãn $x_{CD} < x_{CT}$ khi $0 < m < 2$ .		

**CÂU 16.** Cho hàm số  $y = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 1)x - m^3$  với  $m$  là tham số.

Mệnh đề	Đ	S
a) Hàm số luôn có hai điểm cực trị với mọi $m$ .		
b) Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 3$ khi $m = 2$ .		
c) Khi đồ thị hàm số có hai điểm cực trị thì khoảng cách giữa hai điểm cực trị bằng $2\sqrt{5}$ .		
d) Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số luôn thuộc đường thẳng cố định với hệ số góc $k = -3$ .		

**CÂU 17.** Cho hàm số  $y = \frac{x^2 - 2mx + m + 2}{x - m}$ , với  $m$  là tham số.

Mệnh đề	Đ	S
a) Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R} \setminus \{m\}$ .		
b) Có hai giá trị nguyên của tham số $m$ để hàm số có hai điểm cực trị.		
c) Hàm số đạt cực đại tại $x = -1$ khi $m = \frac{1}{2}$ .		
d) Khi đồ thị hàm số có hai điểm cực trị thì đường thẳng qua hai điểm cực trị của đồ thị có phương trình là $y = 2x - 2m$ .		

4

Đơn điệu hàm hợp, hàm chứa dấu giá trị tuyệt đối

☑ Hàm  $y = f(u)$ .

- **Bước 1:** Tính đạo hàm  $y' = u' \cdot f'(u)$ .
- **Bước 2:** Lập bảng xét dấu của  $y'$ .
- **Bước 3:** Kết luận.

☑ Hàm  $y = f(u) + g(x)$ .

- **Bước 1:** Tính đạo hàm  $y' = u' f'(u) + g'(x)$ .
- **Bước 2:** Lập bảng xét dấu của  $y'$  (dựa vào tương giao giữa hai đồ thị).
- **Bước 3:** Kết luận.

☑ Hàm  $y = |f(x)|$ .

- **Bước 1:** Lập bảng biến thiên hàm  $y = f(x)$
- **Bước 2:** Lập bảng biến thiên hàm  $y = |f(x)|$  từ hàm  $y = f(x)$  bằng cách lấy đối xứng phần dưới trục  $Ox$  qua trục  $Ox$ .
- **Bước 3:** Kết luận.

**VÍ DỤ 1.** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  có bảng xét dấu như hình vẽ

$x$	$-\infty$	$-1$	$0$	$1$	$+\infty$
$f'$	$-$	$0$	$+$	$0$	$+$

Tìm các khoảng đơn điệu của hàm số sau

- a)  $y = f(4 + 3x)$ .      b)  $y = f(5 - 2x) + 3$ .      c)  $y = f(2x^2 - x)$ .

QUICK NOTE

**VÍ DỤ 2.**

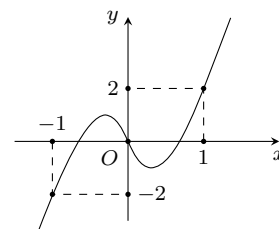
Cho hàm số  $y = f(x)$  và đồ thị của hàm số  $y = f'(x)$  như hình vẽ. Tìm các khoảng đơn điệu của hàm số sau

a)  $y = f(x) + x$ .

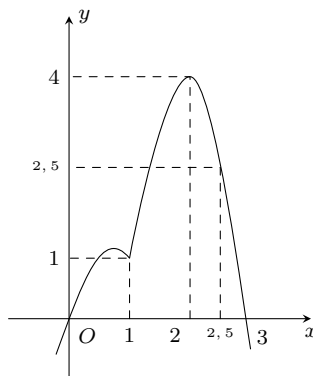
b)  $y = f(2x + 1) + 4x - 3$ .

c)  $y = f(x) - x^2$ .

d)  $y = f(2x + 1) - 2x^2 + 6x + 1$



**VÍ DỤ 3.** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  có đồ thị hàm  $y = f'(x)$  như hình vẽ.



a) Tìm các khoảng nghịch biến của hàm số  $g(x) = |f(-x^4 + 2x^3 - x^2 + 1)|$ , biết  $f(3) < 0$ .

b) Tìm các khoảng đồng biến của hàm số  $h(x) = |3f(x) - x^3|$ , biết  $f(0) = 0$ .

c) Tìm  $m$  để hàm số  $y = |3f(x) - x^3 + m|$  nghịch biến trên  $(0; 2)$ , biết  $f(2) = 1$ .

d) Tìm  $a$  để hàm số  $y = |4f(\sin x) + \cos 2x - a|$  nghịch biến trên  $(0; \frac{\pi}{2})$ , biết  $f(1) = 1$ .

**BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM**

**CÂU 1.** Cho hàm số có đạo hàm liên tục trên  $\mathbb{R}$ , dấu của đạo hàm được cho bởi bảng dưới đây:

$x$	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	0	+

Hàm số  $g(x) = f(2x - 2)$  nghịch biến trong khoảng nào dưới đây?

**(A)**  $(-1; 1)$ .

**(B)**  $(2; +\infty)$ .

**(C)**  $(1; 2)$ .

**(D)**  $(-\infty; -1)$ .

**CÂU 2.** Cho hàm số  $f(x)$  có bảng xét dấu đạo hàm như hình bên dưới

$x$	$-\infty$	$-1$	$6$	$+\infty$	
$y'$	$+$	$0$	$-$	$0$	$+$

Hàm số  $y = f(2 - x)$  đồng biến trên khoảng

**(A)**  $(-3; 4)$ .

**(B)**  $(-1; 6)$ .

**(C)**  $(-4; 3)$ .

**(D)**  $(3; +\infty)$ .

**CÂU 3.** Cho hàm số  $f(x)$  có bảng xét dấu đạo hàm như hình bên dưới

$x$	$-\infty$	1	5	$+\infty$	
$y'$	-	0	+	0	-

Hàm số  $y = f(1 - 2x) + 3$  nghịch biến trên khoảng

**(A)**  $(1; 3)$ .

**(B)**  $(-2; 0)$ .

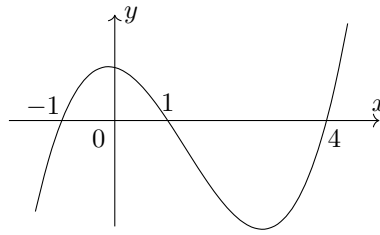
**(C)**  $(-\infty; 1)$ .

**(D)**  $(5; +\infty)$ .

**CÂU 4.**

Cho hàm số  $y = f(x)$ . Hàm số  $y = f'(x)$  có đồ thị như hình bên. Hàm số  $y = f(2-x)$  đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

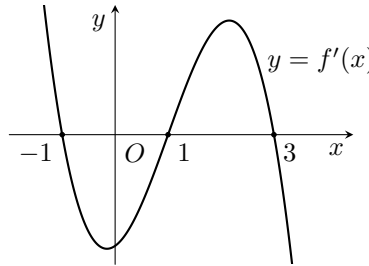
- (A)  $(1; 3)$ . (B)  $(2; +\infty)$ .  
(C)  $(-2; 1)$ . (D)  $(3; +\infty)$ .



**CÂU 5.**

Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm liên tục trên  $\mathbb{R}$ . Biết đồ thị hàm số  $y = f'(x)$  chỉ cắt trục hoành tại 3 điểm như hình bên. Hàm số  $y = f(2x+5)+1$  đồng biến trên khoảng

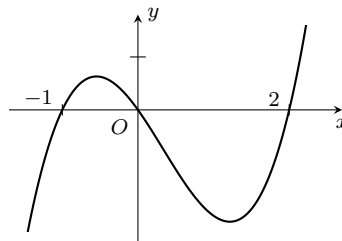
- (A)  $(-3; -2)$ . (B)  $(-2; -1)$ .  
(C)  $(-1; 1)$ . (D)  $(-3; +\infty)$ .



**CÂU 6.**

Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm liên tục trên  $\mathbb{R}$ . Biết đồ thị hàm số  $y = f'(x)$  chỉ cắt trục hoành tại 3 điểm như hình bên dưới. Hàm số  $y = f(1-3x)-4$  nghịch biến trên khoảng

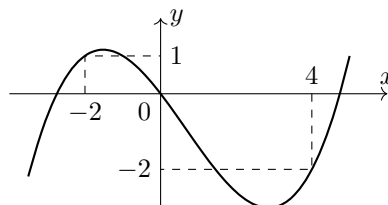
- (A)  $(-\frac{1}{3}; \frac{1}{3})$ . (B)  $(\frac{1}{3}; \frac{2}{3})$ .  
(C)  $(0; 2)$ . (D)  $(-\infty; 0)$ .



**CÂU 7.**

Cho hàm số  $f(x)$ . Hàm số  $f'(x)$  có đồ thị bên. Hàm số  $y = f(1-2x) + x^2 - x$  nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

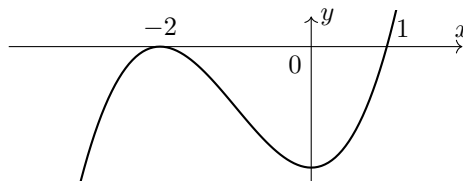
- (A)  $(1; \frac{3}{2})$ . (B)  $(0; \frac{1}{2})$ .  
(C)  $(-2; -1)$ . (D)  $(2; 3)$ .



**CÂU 8.**

Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm liên tục trên  $\mathbb{R}$ . Đồ thị hàm số  $y = f'(3x+5)$  như hình vẽ. Hàm số  $y = f(x)$  nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

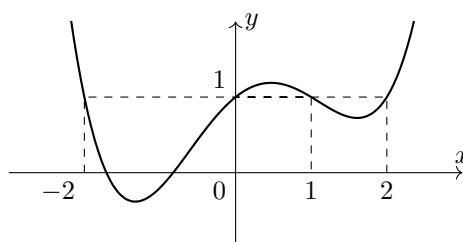
- (A)  $(-\frac{7}{3}; +\infty)$ . (B)  $(-\infty; 10)$ .  
(C)  $(\frac{4}{3}; +\infty)$ . (D)  $(-\infty; 8)$ .



**CÂU 9.** Cho đồ thị hàm số  $y = f'(2-x^3)$  như hình vẽ.

Hàm số  $y = f(x) - x - 1$  nghịch biến trong khoảng nào dưới đây?

- (A)  $(1; 2)$ . (B)  $(2; +\infty)$ .  
(C)  $(-\infty; 1)$ . (D)  $(-4; -1)$ .



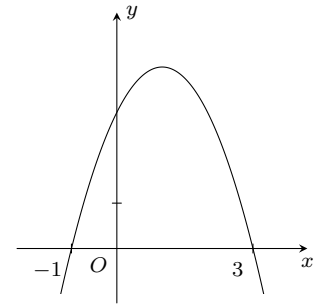
**CÂU 10.**

**QUICK NOTE**

QUICK NOTE

Cho hàm số  $y = f(x)$ . Đồ thị hàm số  $y = f'(x)$  là một parabol được cho như hình vẽ bên dưới. Hàm số  $g(x) = f(2x^4 - 1)$  đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- Ⓐ  $(\sqrt[4]{2}; +\infty)$ . Ⓑ  $(-\sqrt[4]{2}; 0)$ .  
Ⓒ  $(0; \sqrt[4]{2})$ . Ⓓ  $(-\sqrt[4]{2}; \sqrt[4]{2})$ .



**CÂU 11.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng xét dấu của đạo hàm như hình bên dưới.

$x$	$-\infty$	$-1$	$1$	$4$	$+\infty$		
$f'(x)$	$-$	$0$	$+$	$0$	$-$	$0$	$+$

Hàm số  $g(x) = f(x^2 + 1)$  nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- Ⓐ  $(-\infty; 0)$ . Ⓑ  $(0; +\infty)$ . Ⓒ  $(0; \sqrt{3})$ . Ⓓ  $(\sqrt{3}; +\infty)$ .

**CÂU 12.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng xét dấu của đạo hàm như hình bên dưới. Hàm số  $y = 3f(x + 2) - x^3 + 3x$  đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

$x$	$-\infty$	1	2	3	4	$+\infty$			
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

- Ⓐ  $(1; +\infty)$ . Ⓑ  $(-\infty; -1)$ . Ⓒ  $(-1; 0)$ . Ⓓ  $(0; 2)$ .

**CÂU 13.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng xét dấu của đạo hàm như hình bên dưới. Hàm số  $y = f(x^2) + \frac{x^4}{2} + \frac{2x^3}{3} - 6x^2$  đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

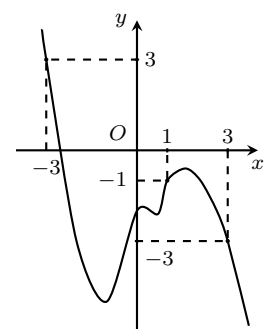
$x$	$-\infty$	$1$	$4$	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	$0$	$-$	$0$	$+$

- Ⓐ  $(-2; -1)$ . Ⓑ  $(1; 2)$ . Ⓒ  $(-4; -3)$ . Ⓓ  $(-6; -5)$ .

**CÂU 14.**

Cho hàm số  $y = f(x)$  và đồ thị của hàm số  $y = f'(x)$  như hình bên dưới. Khi đó hàm số  $y = 2f(x) + x^2$  đồng biến trên khoảng

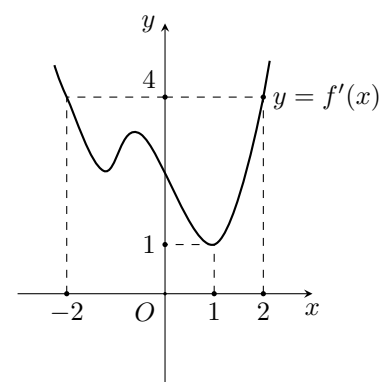
- Ⓐ  $(1; 3)$ . Ⓑ  $(0; 1)$ . Ⓒ  $(-3; 1)$ . Ⓓ  $(1; +\infty)$ .



**CÂU 15.**

Cho hàm số  $y = f(x)$  và đồ thị của hàm số  $y = f'(x)$  như hình bên dưới. Khi đó hàm số  $y = 3f(x) - x^3$  đồng biến trên khoảng

- Ⓐ  $(0; 2)$ . Ⓑ  $(-2; 2)$ . Ⓒ  $(1; 2)$ . Ⓓ  $(-2; 1)$ .



**CÂU 16.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như hình vẽ bên dưới. Tìm tất cả các giá trị của tham số  $m$  để hàm số  $y = f(\sin 2x - m)$  nghịch biến trên khoảng  $\left(\frac{3\pi}{4}; \pi\right)$ .

$x$	$-\infty$		0		3		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	0	-	

- (A)  $-3 \leq m \leq -1$ . (B)  $-2 \leq m \leq -1$ . (C)  $-3 \leq m \leq 0$ . (D)  $-2 \leq m \leq 0$ .

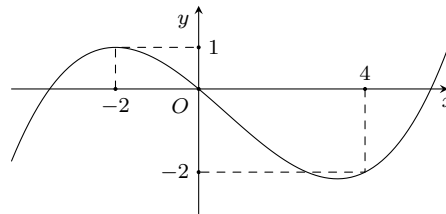
**CÂU 17.** Cho hàm số  $f(x) = |x^2 - 2mx + m + 2|$ . Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  thuộc  $[-9; 9]$  để hàm số đồng biến trên  $(0; 2)$ ?

- (A) 3. (B) 2. (C) 16. (D) 9.

**CÂU 18.**

Cho hàm số  $y = f(x)$  có  $f(0) = 0$  và đồ thị của hàm  $y = f'(x)$  như hình vẽ. Hàm số  $y = |4f(x) + x^2|$  đồng biến trên khoảng nào sau đây?

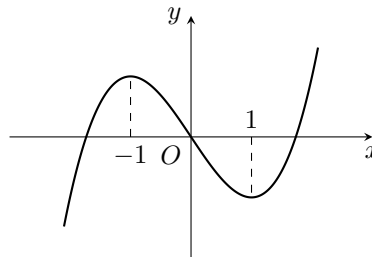
- (A)  $(0; 4)$ . (B)  $(-\infty; -2)$ .  
(C)  $(4; +\infty)$ . (D)  $(-2; 0)$ .



**CÂU 19.**

Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm trên  $\mathbb{R}$  và  $f(1) = 1$ . Đồ thị hàm số  $y = f'(x)$  như hình bên. Có bao nhiêu số nguyên dương  $a$  để hàm số  $y = |4f(\sin x) + \cos 2x - a|$  nghịch biến trên  $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ ?

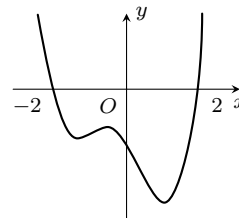
- (A) 2. (B) 3. (C) Vô số. (D) 5.



**CÂU 20.**

Cho hàm số bậc năm  $y = f(x)$  có đồ thị của đạo hàm như hình vẽ. Biết  $f(-3) < 0$ , hàm số  $y = |f(-x^4 + 2x^3 - x^2 + 1)|$  đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- (A)  $(1; 2)$ . (B)  $(-1; 0)$ . (C)  $(0; 0,5)$ . (D)  $(-2; -1)$ .



5

### Cực trị hàm hợp, hàm chứa trị tuyệt đối

☑ Các phép biến đổi đồ thị

- Đồ thị hàm  $y = f(x + a)$  vẽ bằng cách dời đồ thị  $y = f(x)$  sang trái  $a$  đơn vị.
- Đồ thị hàm  $y = f(x) + b$  vẽ bằng cách dời đồ thị  $y = f(x)$  lên trên  $b$  đơn vị.
- Đồ thị hàm  $y = f(|x|)$  vẽ bằng cách "lật qua trái".
- Đồ thị hàm  $y = |f(x)|$  vẽ bằng cách "lật lên".
- Đồ thị hàm  $y = |f(|x|)|$  vẽ bằng cách "lật lên rồi lật qua trái".

⚠ Hàm  $y = f(x)$  có  $m$  điểm cực trị,  $n$  nghiệm bội lẻ,  $p$  điểm cực trị dương. Khi đó

- Hàm  $y = f(ax + b) + c$  cũng có  $m$  điểm cực trị.
- Hàm  $y = |f(x)|$  có  $m + n$  điểm cực trị.
- Hàm  $y = f(|x|)$  có  $2p + 1$  điểm cực trị.

☑ Hàm  $y = f(u)$ .

- **Bước 1:** Tính đạo hàm  $y' = u' f'(u)$ .

### QUICK NOTE

## QUICK NOTE

— **Bước 2:** Lập bảng xét dấu của  $y'$  hoặc đếm số nghiệm bội lẻ của  $y' = 0$ .

— **Bước 3:** Kết luận.

☺ Hàm  $y = f(u) + g(x)$ .

— **Bước 1:** Tính đạo hàm  $y' = u'f'(u) + g'$ .

— **Bước 2:** Lập bảng xét dấu của  $y'$  hoặc đếm số nghiệm bội lẻ của  $y' = 0$  (dựa vào tương giao giữa hai đồ thị).

— **Bước 3:** Kết luận.

### VÍ DỤ 1.

Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như hình vẽ. Tìm các điểm cực trị, các cực trị của hàm số sau

$x$	$-\infty$	$0$	$2$	$+\infty$		
$y'$	$-$	$0$	$+$	$0$	$-$	
$y$	$+\infty$		$1$	$5$		$-\infty$

a)  $y = f(x + 2)$

b)  $y = f(x) - 3$

c)  $y = f(2x - 3) + 1$

d)  $y = f(1 - 2x) + 2025$

### VÍ DỤ 2.

Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như hình vẽ. Tìm các điểm cực trị của hàm số sau

$x$	$-\infty$	$0$	$2$	$+\infty$		
$y'$	$-$	$0$	$+$	$0$	$-$	
$y$	$+\infty$		$1$	$5$		$-\infty$

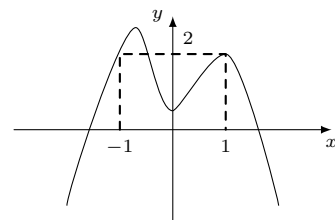
a)  $y = f(x^2)$

b)  $y = f(3x^2 - 2x)$

c)  $y = f(\sqrt{x^2 + 2x + 2})$

### VÍ DỤ 3.

Cho hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị  $y = f'(x)$  như hình vẽ. Tìm số điểm cực trị của các hàm số sau



a)  $y = f(x)$

b)  $y = 2f(x) - x$

c)  $y = f(3x) + 2x$

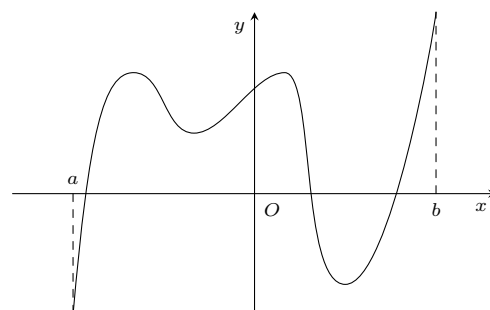
d)  $y = f(x) + \frac{x^2}{2} - x$

e)  $y = 3f(x) - 2x^3$

f)  $y = f(2x + 1) - 4x$

### VÍ DỤ 4.

Cho hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị như hình vẽ. Tìm số điểm cực trị của hàm số



a)  $y = f(|x|)$

b)  $y = |f(x)|$

c)  $y = |f(|x|)|$

d)  $y = f(|x| - a)$

e)  $y = f(|x + b|)$

f)  $y = |f(x + 2025)|$

### VÍ DỤ 5. Tìm m để

a) Hàm số  $y = |f(x)|$  có 5 điểm cực trị, với  $f(x) = 3x^3 + 3x^2 + mx + m$

b) Hàm số  $y = f(|x|)$  có 5 điểm cực trị, với  $f(x) = x^3 - (2m - 1)x^2 + (2 - m)x + 2$ .

## BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

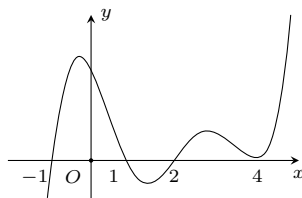


**CÂU 1.**

Cho hàm số  $f(x)$  có đồ thị  $f'(x)$  có đồ thị như hình vẽ bên dưới.

Hàm số  $y = f(1 - 2x)$  có bao nhiêu cực trị ?

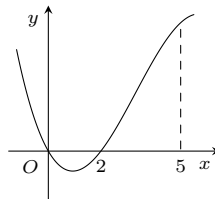
- (A) 4. (B) 7.  
(C) 3. (D) 9.



**CÂU 2.**

Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm là  $f'(x)$ . Đồ thị của hàm số  $y = f'(x)$  như hình vẽ bên. Khi đó hàm số  $y = f(x^2)$  có bao nhiêu điểm cực trị?

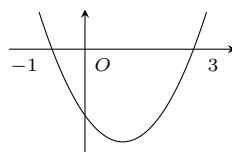
- (A) 2. (B) 4.  
(C) 3. (D) 5.



**CÂU 3.**

Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định trên  $\mathbb{R}$  và hàm số  $y = f'(x)$  có đồ thị như hình vẽ. Hàm số  $y = f(1 - x^2)$  đạt cực đại tại điểm nào sau đây?

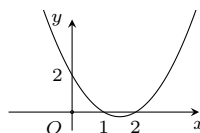
- (A)  $x = -1$ . (B)  $x = \pm\sqrt{2}$ .  
(C)  $x = 3$ . (D)  $x = 0$ .



**CÂU 4.**

Cho hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị hàm  $f'(x) = ax^2 + bx + c$  như hình bên dưới. Hỏi hàm số  $y = f(x - x^2)$  có bao nhiêu cực trị?

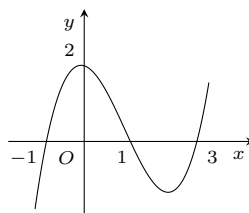
- (A) 0. (B) 1.  
(C) 2. (D) 3.



**CÂU 5.**

Cho hàm số bậc bốn  $y = f(x)$ . Hàm số  $y = f'(x)$  có đồ thị như hình bên. Số điểm cực trị của hàm số  $y = f(\sqrt{x^2 + 2x + 2})$  là

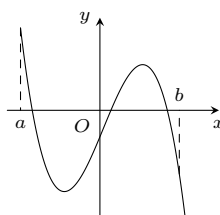
- (A) 1. (B) 2.  
(C) 4. (D) 3.



**CÂU 6.**

Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $(a, b)$  và có đồ thị như hình bên. Số điểm cực trị của hàm số  $y = [f(x)]^2$  trên  $(a, b)$  là

- (A) 4. (B) 6.  
(C) 2. (D) 5.



**CÂU 7.**

Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm trên  $\mathbb{R}$  và có bảng xét dấu  $f'(x)$  như hình bên. Hàm số  $y = f(x^2 - 2x)$  có bao nhiêu điểm cực tiểu?

- (A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4.

$x$	$-\infty$	$-2$	$1$	$3$	$+\infty$	
$y'$		$-$	$0$	$+$	$0$	$-$

**CÂU 8.**

Cho hàm số  $f(x)$  có bảng biến thiên bên dưới. Trên khoảng  $(-\sqrt{5}; \sqrt{5})$  thì hàm số  $y = f(x^2)$  đạt cực đại tại điểm nào sau đây?

- (A)  $x = \sqrt{2}$ . (B)  $x = -\sqrt{2}$ .  
(C)  $x = 0$ . (D)  $x = 2$ .

$x$	$-\infty$	$0$	$2$	$+\infty$	
$f$	$+$	$0$	$-$	$0$	$+$

**CÂU 9.**

**QUICK NOTE**

QUICK NOTE

Cho hàm số  $f(x)$  có bảng biến thiên bên dưới. Hàm số  $y = f(x^2 - 2)$  đạt cực đại tại điểm nào sau đây?

$x$	$-\infty$	$-1$	$2$	$+\infty$
$f$		$-$	$0$	$-$

- ☐ A  $x = -2$ .      ☐ B  $x = -1$ .  
☐ C  $x = 0$ .      ☐ D  $x = 2$ .

**CÂU 10.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm  $f'(x) = x^2(x - 1)(x - 4)^2$ . Khi đó hàm số  $y = f(x^2)$  có bao nhiêu điểm cực trị?

- ☐ A 4.      ☐ B 3.      ☐ C 5.      ☐ D 2.

**CÂU 11.** Cho hàm  $f(x)$  có đạo hàm  $f'(x) = x^2 - 2x, \forall x \in \mathbb{R}$ . Hàm số  $y = f\left(1 - \frac{1}{2}x\right) + 4x$  có bao nhiêu điểm cực trị?

- ☐ A 0.      ☐ B 1.      ☐ C 2.      ☐ D 3.

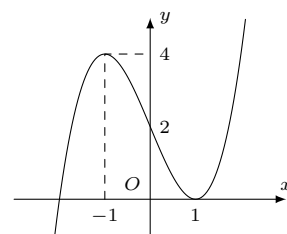
**CÂU 12.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm  $f'(x) = (x - 1)^2(x^2 - 2x)$ , với mọi  $x \in \mathbb{R}$ . Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số  $m$  để hàm số  $y = f(x^2 - 8x + m)$  có 5 điểm cực trị?

- ☐ A 15.      ☐ B 16.      ☐ C 17.      ☐ D 18.

**CÂU 13.**

Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm liên tục trên  $\mathbb{R}$ . Đồ thị hàm số  $y = f'(x)$  như hình vẽ bên. Số điểm cực trị của hàm số  $y = f(x) - 5x$  là

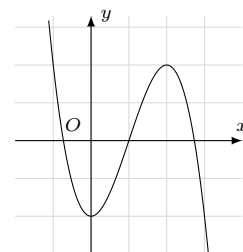
- ☐ A 2.      ☐ B 3.      ☐ C 4.      ☐ D 1.



**CÂU 14.**

Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm trên  $\mathbb{R}$ . Biết hàm số  $y = f'(x)$  có đồ thị như hình vẽ. Khẳng định nào sau đây đúng về cực trị của hàm số  $g(x) = f(x) + x$ ?

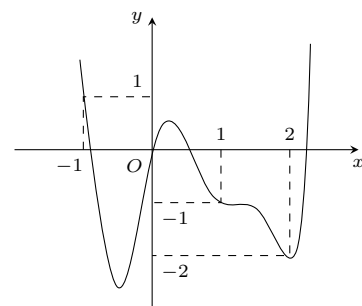
- ☐ A Hàm số có một điểm cực đại và một điểm cực tiểu.  
☐ B Hàm số không có điểm cực đại và một điểm cực tiểu.  
☐ C Hàm số có một điểm cực đại và hai điểm cực tiểu.  
☐ D Hàm số có hai điểm cực đại và một điểm cực tiểu.



**CÂU 15.**

Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm trên  $\mathbb{R}$  và có đồ thị hàm số  $f'(x)$  như hình vẽ. Hàm số  $y = 2f(x) + x^2$  đạt cực đại tại điểm nào sau đây ?

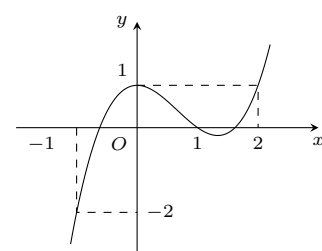
- ☐ A  $x = -1$ .      ☐ B  $x = 0$ .  
☐ C  $x = 1$ .      ☐ D  $x = 2$ .



**CÂU 16.**

Hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có đồ thị hàm số  $f'(x)$  như hình vẽ bên dưới. Hàm số  $y = f(x) - \frac{1}{3}x^3 + x^2 - x + 2$  đạt cực đại tại điểm nào sau đây ?

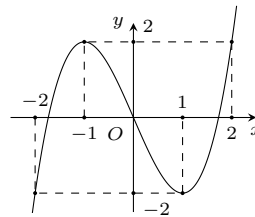
- ☐ A  $x = 1$ .      ☐ B  $x = -1$ .  
☐ C  $x = 0$ .      ☐ D  $x = 2$ .



**CÂU 17.**

Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm liên tục trên  $\mathbb{R}$  và đồ thị  $y = f'(x)$  như hình vẽ dưới đây. Xét trên khoảng  $(-\pi; 2\pi)$ , số điểm cực trị của hàm số  $g(x) = f(2\cos x) + 2\cos 2x$  là

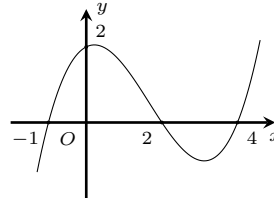
- (A) 13. (B) 10.  
(C) 11. (D) 9.



**CÂU 18.**

Cho hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị của  $y = f'(x)$  có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Hàm số  $g(x) = f(x^3 - 3x) - x^3 + 3x$  có bao nhiêu điểm cực tiểu?

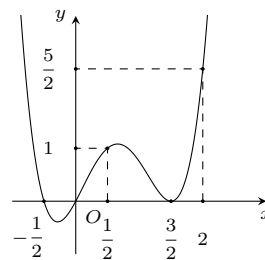
- (A) 2. (B) 4.  
(C) 3. (D) 5.



**CÂU 19.**

Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm và liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có đồ thị  $y = f'(x)$  như hình vẽ. Hàm  $y = f(x^2 - 2) - \frac{1}{2}x^4 + \frac{3}{2}x^2$  có bao nhiêu điểm cực tiểu?

- (A) 4. (B) 1.  
(C) 2. (D) 3.



**CÂU 20.**

Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên bên dưới. Số điểm cực đại và số điểm cực tiểu của hàm số  $y = f^2(2x) - 2f(2x) + 1$  lần lượt là

- (A) 2 và 3. (B) 3 và 2.  
(C) 1 và 1. (D) 2 và 2.

$x$	$-\infty$	$-1$	$2$	$+\infty$	
$f'(x)$		$-$	$0$	$+$	$-$
$f(x)$	$+\infty$		$3$		$-\infty$

**CÂU 21.** Cho hàm số bậc ba  $y = f(x)$  có đồ thị như hình bên. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  để hàm số  $y = |f^2(x) + 2f(x) + m|$  có 9 điểm cực trị?

- (A) 24. (B) Vô số. (C) 25. (D) 23.

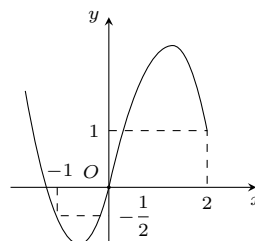
**CÂU 22.** Có bao giá trị nguyên của tham số  $m$  thỏa mãn  $|m| < 10$  sao cho hàm số  $y = |x^3 - (m-2)x^2 - mx - m^2|$  có 3 điểm cực tiểu?

- (A) 9. (B) 10. (C) 8. (D) 16.

**CÂU 23.**

Cho hàm số  $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ , ( $ae < 0$ ). Đồ thị hàm số  $y = f'(x)$  như hình bên dưới. Hàm số  $y = |4f(x) - x^2|$  có bao nhiêu điểm cực tiểu?

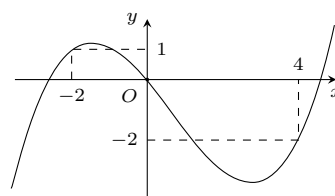
- (A) 4. (B) 5.  
(C) 3. (D) 2.



**CÂU 24.**

Cho hàm số bậc bốn  $f(x)$  có  $f(0) = -1$ . Hàm số  $y = f'(x)$  có đồ thị là hình bên. Số điểm cực trị của hàm số  $y = |4f(x+1) + x^2 + 2x|$  là

- (A) 3. (B) 5.  
(C) 4. (D) 6.



**CÂU 25.**

**QUICK NOTE**

QUICK NOTE

Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như hình vẽ. Hàm số  $y = f(|x|)$  đạt cực đại tại.

- (A)  $x = -1$ . (B)  $x = 0$ .  
(C)  $x = 2$ . (D)  $x = -2$ .

$x$	$-\infty$	$-1$	$2$	$+\infty$	
$y'$	$+$	$0$	$-$	$0$	$+$
$y$	$-\infty$	$3$	$1$	$+\infty$	

CÂU 26.

Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như hình vẽ. Tổng các giá trị cực đại của hàm số  $y = |f(x)|$  là

- (A) 9. (B) -3.  
(C) 3. (D) 7.

$x$	$-\infty$	$-1$	$0$	$1$	$+\infty$
$y'$	$-$	$0$	$+$	$0$	$+$
$y$	$+\infty$		$3$		$+\infty$
		$-2$		$-4$	

CÂU 27. Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm  $y = f'(x) = (x - 1)(x - 2)^4(x^2 - 4)$ . Số điểm cực trị của hàm số  $y = f(|x|)$  là

- (A) 3. (B) 2. (C) 4. (D) 5.

CÂU 28. Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm  $y = f'(x) = (x^3 - 2x^2)(x^3 - 2x)$  trên  $\mathbb{R}$ . Hàm số  $y = |f(4 - 2021x)|$  có nhiều nhất bao nhiêu điểm cực trị?

- (A) 9. (B) 11. (C) 2021. (D) 5.

CÂU 29. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  để hàm số  $y = |3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m|$  có 7 điểm cực trị?

- (A) 3. (B) 5. (C) 6. (D) 4.

CÂU 30. Tìm các giá trị của  $m$  để hàm số  $f(x) = |x^3 + 3x^2 + m - 3|$  có ba điểm cực trị.

- (A)  $m = 3; m = -1$ . (B)  $m \geq 1; m \leq -3$ . (C)  $1 \leq m \leq 3$ . (D)  $m \geq 3; m \leq -1$ .

CÂU 31. Cho hàm số  $y = f(x) = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 4)x + 1$ , có bao nhiêu số nguyên  $m \in (-10; 10)$  để hàm số  $y = f(|x|)$  có đúng 5 điểm cực trị.

- (A) 3. (B) 6. (C) 8. (D) 7.

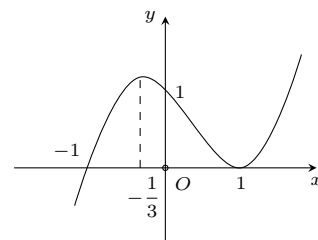
CÂU 32. Cho hàm số  $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - (2m - 1)x^2 + (8 - m)x + 2020$  với  $m$  là tham số. Tập hợp tất cả các giá trị của tham số  $m$  để hàm số  $y = f(|x|)$  có điểm 5 cực trị là khoảng  $(a; b)$ . Tích  $a \cdot b$  bằng

- (A) 12. (B) 16. (C) 10. (D) 14.

CÂU 33.

Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm liên tục trên  $\mathbb{R}$  và đồ thị hàm số  $f'(x)$  như hình vẽ. Hàm số  $y = f(x^2 - 2|x|)$  có bao nhiêu điểm cực tiểu?

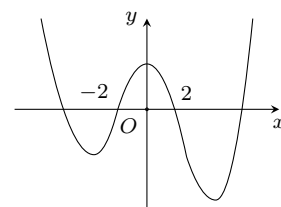
- (A) 1. (B) 2.  
(C) 5. (D) 3.



CÂU 34.

Cho hàm bậc bốn  $y = f(x)$  có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Số điểm cực trị của hàm số  $g(x) = f(|x|^3 - 3|x|)$  là

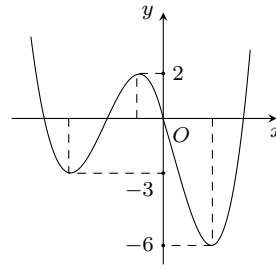
- (A) 5. (B) 3.  
(C) 7. (D) 11.



CÂU 35.

Hình vẽ dưới đây là đồ thị của hàm số  $y = f(x)$ . Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số  $m$  để hàm số  $y = |f(x+1) + m|$  có 5 cực trị?

- (A) 0. (B) 3. (C) 2. (D) 1.



## Bài 2. GIÁ TRỊ LỚN NHẤT - NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ

### A. LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định trên tập  $\mathcal{D}$ . Ta có

- ①  $M$  là giá trị lớn nhất của hàm số nếu

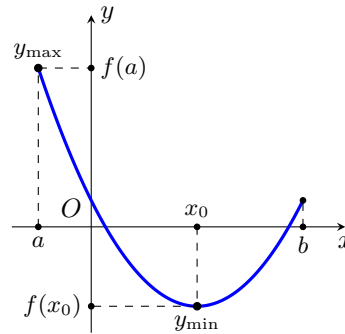
$$\begin{cases} f(x) \leq M, \forall x \in \mathcal{D} \\ \exists x_0 \in \mathcal{D} : f(x_0) = M. \end{cases}$$

Kí hiệu  $\max_{x \in \mathcal{D}} f(x) = M$

- ②  $n$  là giá trị nhỏ nhất của hàm số nếu

$$\begin{cases} f(x) \geq n, \forall x \in \mathcal{D} \\ \exists x_0 \in \mathcal{D} : f(x_0) = n. \end{cases}$$

Kí hiệu  $\min_{x \in \mathcal{D}} f(x) = n$



- ① Khi yêu cầu tìm max min của hàm số mà không nói rõ xét trên tập nào, thì ta hiểu là tìm max min trên miền xác định của hàm số đó.

- ② Để tìm max min của hàm số  $y = f(x)$  trên miền  $\mathcal{D}$ , ta thường lập bảng biến thiên của hàm số  $y = f(x)$  trên  $\mathcal{D}$ . Từ bảng biến thiên, ta kết luận:

- Điểm ở vị trí cao nhất  $\rightarrow$  Kết luận max;
- Điểm ở vị trí thấp nhất  $\rightarrow$  Kết luận min.

- ③ Để tìm max min của hàm số  $y = f(x)$  trên đoạn  $[a; b]$  ( $f(x)$  liên tục trên đoạn  $[a; b]$  và có đạo hàm trên  $(a; b)$  (có thể trừ một số hữu hạn các điểm) và  $f'(x) = 0$  chỉ tại một số hữu hạn các điểm trong  $(a; b)$ ), thì ta có thể giải như sau:

- Giải  $f'(x) = 0$  tìm các nghiệm  $x_0 \in (a; b)$ ;
- Tìm các điểm  $x_i \in (a; b)$  mà tại đó đạo hàm không xác định (nếu có).
- Tính toán  $f(a)$ ,  $f(x_0)$ ,  $f(x_i)$ ,  $f(b)$  (\*)
- Gọi  $M$ ,  $n$  lần lượt là số lớn nhất và số nhỏ nhất của các kết quả tính toán ở bước (\*) thì

$$M = \max_{[a; b]} f(x); \quad n = \min_{[a; b]} f(x)$$

- ④ Ta có thể dùng các bất đẳng thức có sẵn để đánh giá biểu thức cần tìm max, min.

### B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

6

Bài toán tìm max, min của hàm số  $y = f(x)$  trên miền  $\mathcal{D}$

#### Phương pháp giải:

- Tính  $y'$ . Giải phương trình  $y' = 0$  tìm các nghiệm  $x_i \in \mathcal{D}$  và tìm các điểm  $x_j \in \mathcal{D}$  mà tại đó  $y'$  không xác định.
- Lập bảng biến thiên của hàm số trên  $\mathcal{D}$ .
- Từ bảng biến thiên, kết luận:
  - Điểm ở vị trí cao nhất  $\rightarrow$  Kết luận max;

#### QUICK NOTE

## QUICK NOTE

- Điểm ở vị trí thấp nhất  $\rightarrow$  Kết luận min.

**Lưu ý:** Nếu  $\mathcal{D}$  là đoạn  $[a; b]$  và hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên đoạn  $[a; b]$  thì ta có thể làm như sau:

- ① Giải  $f'(x) = 0$  tìm các nghiệm  $x_0 \in (a; b)$ ;
- ② Tìm các điểm  $x_i \in (a; b)$  mà tại đó đạo hàm không xác định (nếu có).
- ③ Tính toán  $f(a), f(x_0), f(x_i), f(b)$  (\*)
- ④ Gọi  $M, n$  lần lượt là số lớn nhất và số nhỏ nhất của các kết quả tính toán ở bước (\*) thì

$$M = \max_{[a; b]} f(x); \quad n = \min_{[a; b]} f(x)$$

**A** **☑** Nếu hàm số  $y = f(x)$  đồng biến trên đoạn  $[a; b]$  thì  $\min_{[a; b]} f(x) = f(a)$  và  $\max_{[a; b]} f(x) = f(b)$ .

**☑** Nếu hàm số  $y = f(x)$  nghịch biến trên đoạn  $[a; b]$  thì  $\min_{[a; b]} f(x) = f(b)$  và  $\max_{[a; b]} f(x) = f(a)$ .

## BÀI TẬP TỰ LUẬN

**VÍ DỤ 1.** Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất (nếu có) của hàm số sau trên đoạn đã chỉ ra.

- a)  $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 10$  trên đoạn  $[-3; 1]$ .    b)  $f(x) = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 1$  trên đoạn  $[-3; 2]$ .
- c)  $f(x) = -2x^4 + 4x^2 + 3$  trên đoạn  $[0; 2]$     d)  $f(x) = \frac{2x+3}{x+1}$  trên đoạn  $[0; 4]$ .
- e)  $f(x) = x + \frac{4}{x}$  trên khoảng  $(0; +\infty)$ ;    f)  $f(x) = 3x + \frac{4}{x^2}$  trên  $(0; +\infty)$ .
- g)  $f(x) = \frac{2x^2 + 4x + 5}{x^2 + 1}$  trên  $\mathbb{R}$ .    h)  $f(x) = \sqrt{-x^2 + 2x}$  trên miền xác định.

**VÍ DỤ 2.** Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số sau trên miền đã chỉ ra.

- a)  $y = x - \sin 2x$  trên đoạn  $\left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]$     b)  $y = e^{x^3-3x+3}$  trên đoạn  $[0; 2]$
- c)  $y = e^x(x^2 - 3)$  trên đoạn  $[-2; 2]$     d)  $y = \frac{\ln^2 x}{x}$  trên đoạn  $[1; e^5]$

**VÍ DỤ 3.** Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất (nếu có) của hàm số sau trên miền đã chỉ ra.

- a)  $f(x) = \frac{5 \sin x + 1}{\sin x + 2}$  trên đoạn  $\left[0; \frac{\pi}{6}\right]$ .    b)  $y = \cos^3 x + 2 \sin^2 x + \cos x$  trên miền xác định.

## BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

**PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.**

### CÂU 1.

Hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên đoạn  $[-1; 3]$  và có bảng biến thiên như sau.

$x$	-1	0		2		3
$y'$		+	0	-	0	+
$y$		5		4		
	0	1				

Gọi  $M$  là giá trị lớn nhất của hàm số  $y = f(x)$  trên đoạn  $[-1; 3]$ . Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

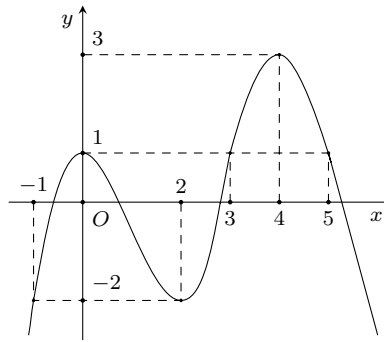
- (A)  $M = f(0)$ .  
 (B)  $M = f(-1)$ .  
 (C)  $M = f(3)$ .  
 (D)  $M = f(2)$ .

**CÂU 2.**

Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên đoạn  $[-1; 5]$  và có đồ thị như hình vẽ bên. Gọi  $M$  và  $m$  lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số đã cho trên  $[-1; 5]$ .

Giá trị của  $M + m$  bằng

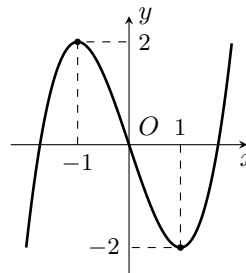
- (A) 5. (B) 6. (C) 3. (D) 1.



**CÂU 3.**

Cho hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị là đường cong ở hình bên. Tìm giá trị nhỏ nhất  $m$  của hàm số  $y = f(x)$  trên đoạn  $[-1; 1]$ .

- (A)  $m = 2$ . (B)  $m = -2$ .  
 (C)  $m = 1$ . (D)  $m = -1$ .



**CÂU 4.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên trên đoạn  $[-2; 3]$  như hình bên dưới.

$x$	$-\infty$	-2	-1	1	3	$+\infty$
$f'(x)$			+	0	-	+
$f(x)$		0	1	-2	5	

Gọi  $M$  và  $m$  lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn  $[-1; 3]$ . Giá trị của biểu thức  $M - m$  là

- (A) 5. (B) 7. (C) -1. (D) 3.

**CÂU 5.** Giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số  $y = x^3 - 12x + 1$  trên đoạn  $[-2; 3]$  lần lượt là

- (A) 17, -15. (B) 10, -26. (C) -15, 17. (D) 6, -26.

**CÂU 6.** Gọi  $M, m$  lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = x^3 + 3x^2 - 9x + 1$  trên  $[-4; 4]$ . Tính tổng  $M + m$ .

- (A) 12. (B) 98. (C) 17. (D) 73.

**CÂU 7.** Giá trị lớn nhất của hàm số  $f(x) = -x^4 + 12x^2 + 1$  trên đoạn  $[-1; 2]$  bằng

- (A) 33. (B) 37. (C) 12. (D) 1.

**CÂU 8.** Giá trị lớn nhất của hàm số  $y = x^4 - 3x^2 + 2$  trên đoạn  $[0; 3]$  bằng

- (A) 57. (B) 56. (C) 54. (D) 55.

**CÂU 9.** Giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = \frac{x-1}{x+1}$  trên đoạn  $[0; 3]$  là

- (A)  $\min_{[0;3]} y = \frac{1}{2}$ . (B)  $\min_{[0;3]} y = -3$ . (C)  $\min_{[0;3]} y = 1$ . (D)  $\min_{[0;3]} y = -1$ .

**QUICK NOTE**

QUICK NOTE

**CÂU 10.** Giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = \frac{2x+3}{x+1}$  trên đoạn  $[0; 4]$  là

- (A) 2. (B)  $\frac{7}{5}$ . (C) 3. (D)  $\frac{11}{5}$ .

**CÂU 11.** Giá trị lớn nhất của hàm số  $y = \frac{x^2-3x+3}{x-1}$  trên đoạn  $\left[-2; \frac{1}{2}\right]$  bằng

- (A) 4. (B) -3. (C)  $-\frac{7}{2}$ . (D)  $-\frac{13}{3}$ .

**CÂU 12.** Giá trị lớn nhất của hàm số  $y = \sqrt{4-x^2}$  là

- (A)  $M = -2$ . (B)  $M = 2$ . (C)  $M = 4$ . (D)  $M = 0$ .

**CÂU 13.** Tìm giá trị lớn nhất  $M$  của hàm số  $y = \sqrt{7+6x-x^2}$ .

- (A)  $M = 4$ . (B)  $M = \sqrt{7}$ . (C)  $M = 7$ . (D)  $M = 3$ .

**CÂU 14.** Tính giá trị lớn nhất của hàm số  $y = x - \ln x$  trên  $\left[\frac{1}{2}; e\right]$ .

- (A)  $\max_{x \in [\frac{1}{2}; e]} y = 1$ . (B)  $\max_{x \in [\frac{1}{2}; e]} y = e - 1$ .  
(C)  $\max_{x \in [\frac{1}{2}; e]} y = e$ . (D)  $\max_{x \in [\frac{1}{2}; e]} y = \frac{1}{2} + \ln 2$ .

**CÂU 15.** Gọi  $M, N$  lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số  $y = x^2 - 4\ln(1-x)$  trên đoạn  $[-2; 0]$ . Tính  $M - N$ .

- (A)  $M - N = 4\ln 2$ . (B)  $M - N = -1$ .  
(C)  $M - N = 4\ln 2 - 1$ . (D)  $M - N = 4\ln 3 - 4$ .

**CÂU 16.** Cho hàm số  $f(x)$  nghịch biến trên  $\mathbb{R}$ . Giá trị nhỏ nhất của hàm số  $g(x) = e^{3x^2-2x^3} - f(x)$  trên đoạn  $[0; 1]$  bằng

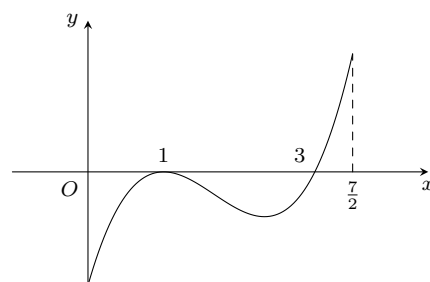
- (A)  $e - f(1)$ . (B)  $f(1)$ . (C)  $f(0)$ . (D)  $1 - f(0)$ .

**CÂU 17.**

Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định và liên tục trên đoạn  $\left[0; \frac{7}{2}\right]$ , có đồ thị của hàm số  $y = f'(x)$  như hình vẽ.

Hỏi hàm số  $y = f(x)$  đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn  $\left[0; \frac{7}{2}\right]$  tại điểm  $x_0$  nào dưới đây?

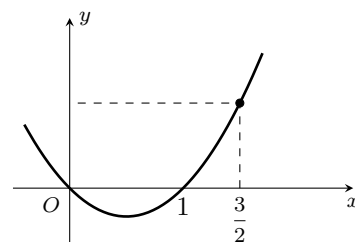
- (A)  $x_0 = 3$ . (B)  $x_0 = 2$ . (C)  $x_0 = 1$ . (D)  $x_0 = 0$ .



**CÂU 18.**

Cho hàm số  $y = f(x)$ , biết hàm số  $y = f'(x)$  có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Hàm số  $y = f(x)$  đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn  $\left[\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right]$  tại điểm nào sau đây?

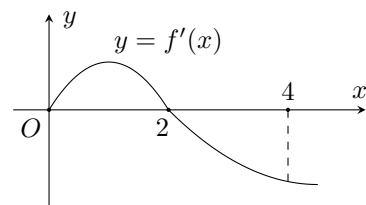
- (A)  $x = \frac{3}{2}$ . (B)  $x = \frac{1}{2}$ .  
(C)  $x = 1$ . (D)  $x = 0$ .



**CÂU 19.**

Cho hàm số  $f(x)$  có đồ thị của hàm số  $y = f'(x)$  như hình vẽ. Biết  $f(0) + f(1) - 2f(2) = f(4) - f(3)$ . Giá trị nhỏ nhất  $m$ , giá trị lớn nhất  $M$  của hàm số  $f(x)$  trên đoạn  $[0; 4]$  là

- (A)  $m = f(4), M = f(1)$ . (B)  $m = f(4), M = f(2)$ .  
(C)  $m = f(1), M = f(2)$ . (D)  $m = f(0), M = f(2)$ .



**CÂU 20.** Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = \sin^3 x - 3\sin^2 x + 2$  lần lượt là  $M, m$ . Tổng  $M + m$  bằng

- (A) 0. (B) 4. (C) 1. (D) 3.


**CÂU 21.** Giá trị nhỏ nhất của hàm số  $f(x) = (x+1)(x+2)(x+3)(x+4) + 2019$  là

- (A) 2017. (B) 2020. (C) 2018. (D) 2019.



**PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.**

**CÂU 22.** Cho hàm số  $y = f(x)$  là hàm số liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây.

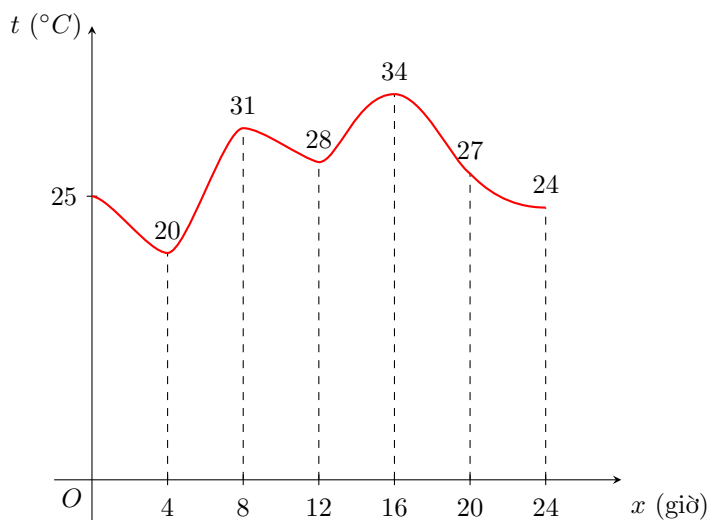
$x$	$-\infty$	$-1$	$0$	$1$	$+\infty$			
$f'(x)$		$+$	$0$	$-$	$0$	$+$	$0$	$-$
$f(x)$								

Xét tính đúng, sai của các khẳng định sau:

Mệnh đề	Đ	S
a) Cực đại của hàm số là 4.		
b) Cực tiểu của hàm số là 3.		

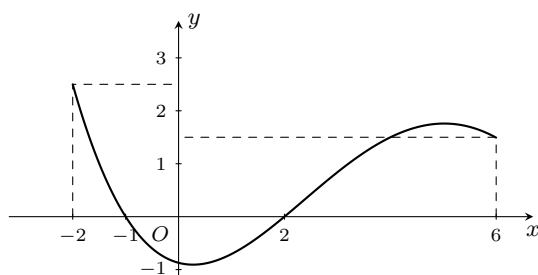
Mệnh đề	Đ	S
c) $\max_{\mathbb{R}} y = 4.$		
d) $\min_{\mathbb{R}} y = 3.$		

**CÂU 23.** Hình bên cho biết sự thay đổi của nhiệt độ ở một thành phố trong một ngày. Xét tính đúng, sai của các khẳng định sau:



Mệnh đề	Đ	S
a) Nhiệt độ cao nhất trong ngày là 28°C.		
b) Nhiệt độ thấp nhất trong ngày là 20°C.		
c) Thời điểm có nhiệt độ cao nhất trong ngày là lúc 16 giờ.		
d) Thời điểm có nhiệt độ thấp nhất trong ngày là lúc 4 giờ.		

**CÂU 24.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm  $y = f'(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và đồ thị của hàm số  $f'(x)$  trên đoạn  $[-2; 6]$  như hình vẽ bên. Xét tính đúng, sai của các khẳng định sau:

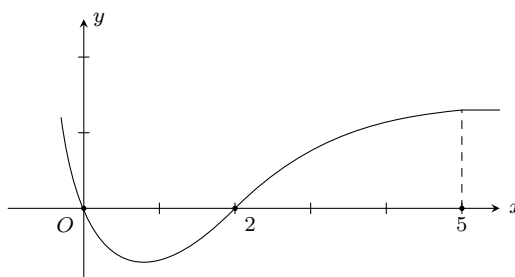


QUICK NOTE

QUICK NOTE

Mệnh đề	Đ	S
a) $\max_{[-2;6]} f(x) = f(-1)$ .		
b) $\max_{[-2;6]} f(x) = f(6)$ .		
c) $\max_{[-2;6]} f(x) = f(-2)$ .		
d) $\max_{[-2;6]} f(x) = \max \{f(-1), f(6)\}$ .		

**CÂU 25.** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm là  $f'(x)$ . Đồ thị  $y = f'(x)$  được cho như hình vẽ. Biết rằng  $f(0) + f(3) = f(2) + f(5)$ . Xét tính đúng, sai của các khẳng định sau:



Mệnh đề	Đ	S
a) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$ .		
b) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$ .		
c) $\min_{[0;5]} f(x) = f(0)$ và $\max_{[0;5]} f(x) = f(5)$ .		
d) $\min_{[0;5]} f(x) = f(2)$ và $\max_{[0;5]} f(x) = f(5)$ .		

7

Bài toán max, min có chứa tham số  $m$

BÀI TẬP TỰ LUẬN

**VÍ DỤ 1.** Tìm tất cả giá trị của tham số  $m$  để

- a) giá trị lớn nhất của hàm số  $f(x) = -x^3 - 3x^2 + m$  trên  $[-1; 1]$  bằng 0.  
 b) giá trị nhỏ nhất của hàm số  $f(x) = \frac{x+5m}{x-3}$  trên  $[1; 2]$  bằng 4.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

**CÂU 1.** Cho hàm số  $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + m$  thỏa mãn  $\min_{[0;5]} f(x) = 5$ . Khi đó giá trị của  $m$  bằng

- (A) 10. (B) 5. (C) 6. (D) 7.

**CÂU 2.** Tìm  $m$  để giá trị nhỏ nhất của hàm số  $f(x) = 3x^3 - 4x^2 + 2(m-10)$  trên đoạn  $[1; 3]$  bằng  $-5$ .

- (A)  $m = \frac{15}{2}$ . (B)  $m = -15$ . (C)  $m = 8$ . (D)  $m = -8$ .

**CÂU 3.** Tìm  $m$  để giá trị nhỏ nhất của hàm số  $f(x) = \frac{x-m^2+m}{x+1}$  trên đoạn  $[0; 1]$  bằng  $-2$ .

- (A)  $\begin{cases} m = 1 \\ m = -2 \end{cases}$ . (B)  $\begin{cases} m = 1 \\ m = 2 \end{cases}$ . (C)  $m = \frac{1 \pm \sqrt{21}}{2}$ . (D)  $\begin{cases} m = -1 \\ m = 2 \end{cases}$ .

**CÂU 4.** Hàm số  $y = \frac{x-m}{x+2}$  thỏa mãn  $\min_{x \in [0;3]} y + \max_{x \in [0;3]} y = \frac{7}{6}$ . Hỏi giá trị  $m$  thuộc khoảng nào trong các khoảng dưới đây?

- (A)  $(2; +\infty)$ . (B)  $(0; 2)$ . (C)  $(-\infty; -1)$ . (D)  $(-1; 0)$ .

**CÂU 5.** Cho hàm số  $y = \frac{x+m}{x+1}$  ( $m$  là tham số thực) thỏa mãn  $\min_{[1;2]} y + \max_{[1;2]} y = \frac{16}{3}$ . Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- (A)  $m > 4$ . (B)  $m \leq 0$ . (C)  $0 < m \leq 2$ . (D)  $2 < m \leq 4$ .

**CÂU 6.** Cho hàm số  $f(x) = \frac{x+m}{x-1}$  ( $m$  là tham số thực) thỏa mãn  $\min_{[2;4]} f(x) = 3$ . Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- (A)  $1 \leq m < 3$ . (B)  $m < -1$ . (C)  $3 < m \leq 4$ . (D)  $m > 4$ .

**CÂU 7.** Gọi  $S$  là tổng giá trị của  $m$  để hàm số  $f(x) = \frac{x-m^2-m}{x+1}$  có giá trị nhỏ nhất trên  $[0; 1]$  bằng  $-2$ . Mệnh đề nào sau đây đúng?

- (A)  $S = -1$ . (B)  $S = 1$ . (C)  $S = -2$ . (D)  $S = -3$ .

**CÂU 8.** Cho hàm số  $f(x) = x^3 + mx^2 - m^2x + 2$  với tham số  $m > 0$ . Biết  $\min_{[-m;m]} f(x) = \frac{14}{27}$ . Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- (A)  $m \in (-\infty; -3)$ . (B)  $m \in (3; +\infty)$ . (C)  $m \in (1; 3)$ . (D)  $m \in (-3; -1)$ .

**CÂU 9.** Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  để giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = x^3 + (m^2 - m + 1)x + m^3 - 4m^2 + m + 2025$  trên đoạn  $[0; 2]$  bằng 2019?

- (A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

**CÂU 10.** Gọi  $S$  là tập tất cả các giá trị của  $m$  sao cho giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = (x^3 - 3x + m)^2$  trên đoạn  $[-1; 1]$  bằng 4. Tính tổng các phần tử của  $S$ .

- (A) 0. (B) 6. (C) -5. (D) 3.

8

### Bài toán vận dụng, thực tiễn có liên quan đến max min

#### Bài toán chuyển động:

- Gọi  $s(t)$  là hàm quãng đường;  $v(t)$  là hàm vận tốc;  $a(t)$  là hàm gia tốc;
- Khi đó  $s'(t) = v(t)$ ;  $v'(t) = a(t)$ .

#### Bài toán thực tế – tối ưu:

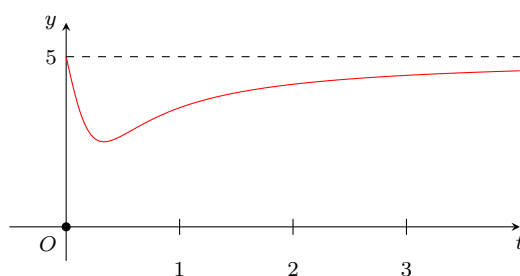
- Biểu diễn dữ kiện cần đạt max – min qua một hàm  $f(t)$ .
- Khảo sát hàm  $f(t)$  trên miền điều kiện của hàm và suy ra kết quả.

### BÀI TẬP TỰ LUẬN

**VÍ DỤ 1.** Một chất điểm chuyển động có vận tốc tức thời  $v(t)$  phụ thuộc vào thời gian  $t$  theo hàm số  $v(t) = -t^4 + 24t^2 + 500$  (m/s). Trong khoảng thời gian từ  $t = 0$  (s) đến  $t = 5$  (s) chất điểm đạt vận tốc lớn nhất tại thời điểm nào?

#### VÍ DỤ 2.

Sự phân huỷ của rác thải hữu cơ có trong nước sẽ làm tiêu hao oxygen hoà tan trong nước. Nồng độ oxygen (mg/l) trong một hồ nước sau  $t$  giờ ( $t \geq 0$ ) khi một lượng rác thải hữu cơ bị xả vào hồ được xấp xỉ bởi hàm số (có đồ thị như đường màu đỏ ở hình bên)



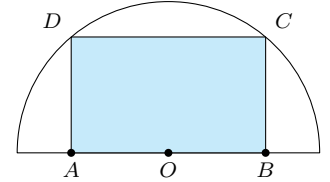
$$y(t) = 5 - \frac{15t}{9t^2 + 1}.$$

Vào các thời điểm nào nồng độ oxygen trong nước cao nhất và thấp nhất?

#### VÍ DỤ 3.

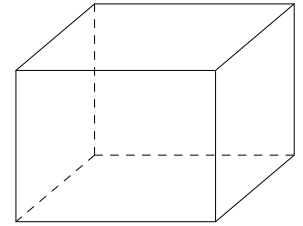
QUICK NOTE

Tính diện tích lớn nhất  $S_{\max}$  của một hình chữ nhật nội tiếp trong nửa đường tròn bán kính  $R = 6$  cm nếu một cạnh của hình chữ nhật nằm dọc theo đường kính của hình tròn mà hình chữ nhật đó nội tiếp.



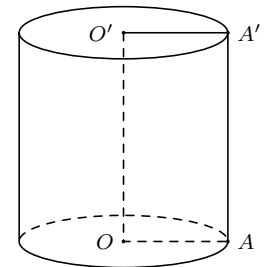
VÍ DỤ 4.

Một người muốn xây một cái bể chứa nước, dạng một khối hộp chữ nhật không nắp có thể tích bằng  $288 \text{ dm}^3$ . Đáy bể là hình chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng, giá thuê nhân công để xây bể là  $500000$  đồng/  $\text{m}^2$ . Nếu người đó biết xác định các kích thước của bể hợp lý thì chi phí thuê nhân công sẽ thấp nhất. Hỏi người đó trả chi phí thấp nhất để thuê nhân công xây dựng bể đó là bao nhiêu?



VÍ DỤ 5.

Một nhà sản xuất cần làm ra những chiếc bình có dạng hình trụ với dung tích  $1000 \text{ cm}^3$ . Mặt trên và mặt dưới của bình được làm bằng vật liệu có giá  $1,2$  nghìn đồng/  $\text{cm}^2$ , trong khi mặt bên của bình được làm bằng vật liệu có giá  $0,75$  nghìn đồng/  $\text{cm}^2$ . Tìm các kích thước của bình để chi phí vật liệu sản xuất mỗi chiếc bình là nhỏ nhất.



BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

**PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.**

**CÂU 1.** Một chất điểm chuyển động với quãng đường  $s(t)$  cho bởi công thức  $s(t) = 6t^2 - t^3$ ,  $t$  (giây) là thời gian. Hỏi trong khoảng thời gian từ  $0$  đến  $4$  giây, vận tốc tức thời của chất điểm đạt giá trị lớn nhất tại thời điểm  $t$  (giây) bằng bao nhiêu?

- (A)  $t = 3$  s. (B)  $t = 4$  s. (C)  $t = 2$  s. (D)  $t = 6$  s.

**CÂU 2.** Trong  $3$  giây đầu tiên, một chất điểm chuyển động theo phương trình  $s(t) = -t^3 + 6t^2 + t + 5$ , trong đó  $t$  tính bằng giây và  $s$  tính bằng mét. Chất điểm có vận tốc tức thời lớn nhất bằng bao nhiêu trong  $3$  giây đầu tiên đó?

- (A)  $13 \text{ m/s}$ . (B)  $10 \text{ m/s}$ . (C)  $9 \text{ m/s}$ . (D)  $12 \text{ m/s}$ .

**CÂU 3.** Độ giảm huyết áp của một bệnh nhân được cho bởi công thức  $G(x) = 0,025x^2(30 - x)$ , trong đó  $x$  là liều lượng thuốc được tiêm cho bệnh nhân ( $x$  được tính bằng miligam). Liều lượng thuốc cần tiêm cho bệnh nhân là bao nhiêu để huyết áp được giảm nhanh nhất?

- (A)  $24 \text{ mg}$ . (B)  $20 \text{ mg}$ . (C)  $15 \text{ mg}$ . (D)  $10 \text{ mg}$ .

**CÂU 4.** Trong thí nghiệm y học, người ta cấy  $1000$  vi khuẩn vào môi trường dinh dưỡng. Bằng thực nghiệm, người ta xác định số lượng vi khuẩn thay đổi theo thời gian bởi công thức

$$N(t) = 1000 + \frac{100t}{100 + t^2} (\text{con}).$$

trong đó  $t$  là thời gian tính bằng giây. Tính số lượng vi khuẩn lớn nhất kể từ khi thực hiện cấy vi khuẩn vào môi trường dinh dưỡng.

- (A)  $1008$  con. (B)  $1012$  con. (C)  $1005$  con. (D)  $1020$  con.

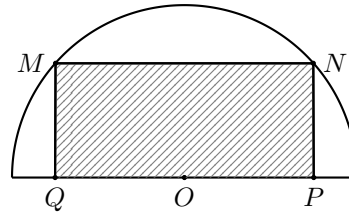
**CÂU 5.** Tam giác vuông có cạnh huyền bằng  $5 \text{ cm}$  có thể có diện tích lớn nhất bằng bao nhiêu?

- (A)  $25 \text{ cm}^2$ . (B)  $\frac{125}{4} \text{ cm}^2$ . (C)  $\frac{625}{4} \text{ cm}^2$ . (D)  $125 \text{ cm}^2$ .

**CÂU 6.**

Từ một tấm tôn có hình dạng là nửa hình tròn bán kính  $R = 3$ , người ta muốn cắt ra một hình chữ nhật (hình vẽ bên). Diện tích lớn nhất có thể của tấm tôn hình chữ nhật là

- (A)  $\frac{9}{2}$ . (B)  $6\sqrt{2}$ . (C) 9. (D)  $9\sqrt{2}$ .



**CÂU 7.** Cho một tấm tôn hình chữ nhật có kích thước  $10 \text{ cm} \times 16 \text{ cm}$ . Người ta cắt bỏ 4 góc của tấm tôn 4 miếng hình vuông bằng nhau rồi gò lại thành một hình hộp chữ nhật không có nắp. Để thể tích của hình hộp đó lớn nhất thì độ dài cạnh hình vuông của các miếng tôn bị cắt bỏ bằng

- (A) 3 m. (B) 4 m. (C) 5 m. (D) 2 m.

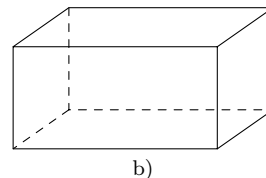
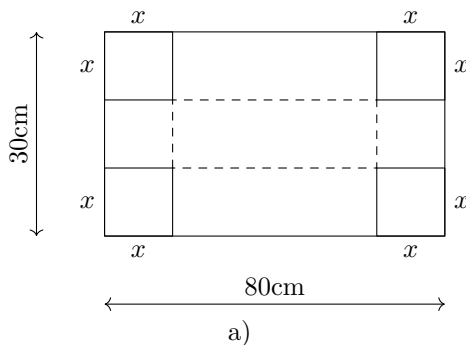
**CÂU 8.** Ông Bình dự định sử dụng hết  $5,5 \text{ m}^2$  kính để làm một bể cá bằng kính có dạng hình hộp chữ nhật không nắp, chiều dài gấp đôi chiều rộng (các mối ghép có kích thước không đáng kể). Bể cá có dung tích lớn nhất bằng bao nhiêu (làm tròn đến hàng phần trăm)?

- (A)  $1,01 \text{ m}^3$ . (B)  $1,17 \text{ m}^3$ . (C)  $1,51 \text{ m}^3$ . (D)  $1,40 \text{ m}^3$ .

**CÂU 9.** Người ta muốn xây một chiếc bể nước có hình dạng là một khối hộp chữ nhật không nắp có thể tích bằng  $\frac{500}{3} \text{ m}^3$ . Biết đáy bể là một hình chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng và giá thuê thợ xây là  $700.000 \text{ đồng/m}^2$ . Để chi phí thuê nhân công ít nhất thì chi phí thuê nhân công là

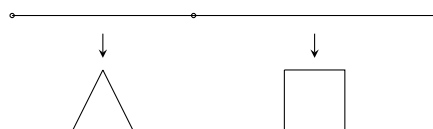
- (A) 120 triệu đồng. (B) 105 triệu đồng. (C) 115 triệu đồng. (D) 110 triệu đồng.

**CÂU 10.** Từ một tấm bìa hình chữ nhật có chiều rộng 30 cm và chiều dài 80 cm (Hình a), người ta cắt ở bốn góc bốn hình vuông có cạnh  $x$  (cm) với  $5 \leq x \leq 10$  và gấp lại để tạo thành chiếc hộp có dạng hình hộp chữ nhật không nắp như Hình b. Tìm  $x$  để thể tích chiếc hộp là lớn nhất (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).



- (A)  $x = \frac{20}{3} \text{ cm}$ . (B)  $x = \frac{20}{7} \text{ cm}$ . (C)  $x = \frac{25}{3} \text{ cm}$ . (D)  $x = \frac{25}{7} \text{ cm}$ .

**CÂU 11.** Một sợi dây có chiều dài là 6 m, được chia thành 2 phần. Phần thứ nhất được uốn thành hình tam giác đều, phần thứ hai uốn thành hình vuông. Hỏi độ dài của cạnh hình tam giác đều bằng bao nhiêu để tổng diện tích 2 hình thu được là nhỏ nhất?



- (A)  $\frac{12}{4 + \sqrt{3}} \text{ m}$ . (B)  $\frac{18\sqrt{3}}{4 + \sqrt{3}} \text{ m}$ . (C)  $\frac{36\sqrt{3}}{4 + \sqrt{3}} \text{ m}$ . (D)  $\frac{18}{9 + 4\sqrt{3}} \text{ m}$ .

**CÂU 12.** Một doanh nghiệp tư nhân A chuyên kinh doanh xe gắn máy các loại. Hiện nay doanh nghiệp đang tập trung vào chiến lược kinh doanh xe X với chi phí mua vào một chiếc là 27 triệu đồng và bán ra với giá 31 triệu đồng. Với giá bán này, số lượng xe mà khách hàng đã mua trong một năm là 600 chiếc. Nhằm mục tiêu đẩy mạnh hơn nữa lượng tiêu thụ dòng xe đang bán chạy này, doanh nghiệp dự định giảm giá bán. Bộ phận nghiên cứu thị trường ước tính rằng nếu giảm 1 triệu đồng mỗi chiếc xe thì số lượng xe bán ra trong một năm sẽ tăng thêm 200 chiếc. Hỏi theo đó, giá bán mới là bao nhiêu thì lợi nhuận thu được cao nhất?

- (A) 30 triệu đồng. (B) 30,5 triệu đồng. (C) 29,5 triệu đồng. (D) 32 triệu đồng.

QUICK NOTE

QUICK NOTE

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.

**CÂU 13.** Người ta bơm xăng vào bình xăng của một xe ô tô. Biết rằng thể tích  $V$  (lít) của lượng xăng trong bình xăng tính theo thời gian bơm xăng  $t$  (phút) được cho bởi công thức

$$V(t) = 300(t^2 - t^3) + 4 \text{ với } 0 \leq t \leq 0,5.$$

Gọi  $V'(t)$  là tốc độ tăng thể tích tại thời điểm  $t$  với  $0 \leq t \leq 0,5$ .

Mệnh đề	Đ	S
a) Lượng xăng trong bình ban đầu là 1 lít.		
b) Lượng xăng lớn nhất bơm vào bình xăng là 41,5 lít.		
c) $V'(t) = 300(2t - 3t^2) + 4$ , với $0 \leq t \leq 0,5$ .		
d) Xăng chảy vào bình xăng vào thời điểm ở giây thứ 30 có tốc độ tăng thể tích là lớn nhất.		

**CÂU 14.** Tại một xí nghiệp chuyên sản xuất vật liệu xây dựng, nếu trong một ngày xí nghiệp sản xuất  $x$  ( $m^3$ ) sản phẩm thì phải bỏ ra các khoản chi phí bao gồm: 4 triệu đồng chi phí cố định; 0,2 triệu đồng chi phí cho mỗi mét khối sản phẩm và  $0,001x^2$  triệu đồng chi phí bảo dưỡng máy móc. Biết rằng, mỗi ngày xí nghiệp sản xuất được tối đa  $100 m^3$  sản phẩm. Gọi  $C(x)$  là tổng chi phí để xí nghiệp sản xuất  $x$  ( $m^3$ ) sản phẩm trong một ngày và  $\overline{C}$  là chi phí trung bình trên mỗi mét khối sản phẩm.

Mệnh đề	Đ	S
a) $C = 0,2x + 0,001x^2$ với $0 \leq x \leq 100$ .		
b) Tổng chi phí khi sản xuất $100 m^3$ sản phẩm là 34 triệu đồng.		
c) $\overline{C} = 0,001x + \frac{4}{x} + 0,2$ với $0 < x \leq 100$ .		
d) $\overline{C}$ có giá trị thấp nhất bằng 0,326 triệu đồng (kết quả làm tròn 3 chữ số thập phân).		

**CÂU 15.** Nhà máy  $A$  chuyên sản xuất một loại sản phẩm cung cấp cho nhà máy  $B$ . Hai nhà máy thoả thuận rằng, hằng tháng  $A$  cung cấp cho  $B$  số lượng sản phẩm theo đơn đặt hàng của  $B$  (tối đa 100 tấn sản phẩm). Nếu số lượng đặt hàng là  $x$  tấn sản phẩm thì giá bán cho mỗi tấn sản phẩm là  $P(x) = 45 - 0,001x^2$  (triệu đồng). Chi phí để  $A$  sản xuất  $x$  tấn sản phẩm trong một tháng là  $C(x) = 100 + 30x$  (triệu đồng) (gồm 100 triệu đồng chi phí cố định và 30 triệu đồng cho mỗi tấn sản phẩm).

Mệnh đề	Đ	S
a) Chi phí để $A$ sản xuất 10 tấn sản phẩm trong một tháng là 400 triệu đồng.		
b) Số tiền $A$ thu được khi bán 10 tấn sản phẩm cho $B$ là 600 triệu đồng.		
c) Lợi nhuận mà $A$ thu được khi bán $x$ tấn sản phẩm ( $0 \leq x \leq 100$ ) cho $B$ là $-0,001x^3 + 15x - 100$ .		
d) $A$ bán cho $B$ khoảng 70,7 tấn sản phẩm mỗi tháng thì thu được lợi nhuận lớn nhất.		

Bài 3. ĐƯỜNG TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

A. LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

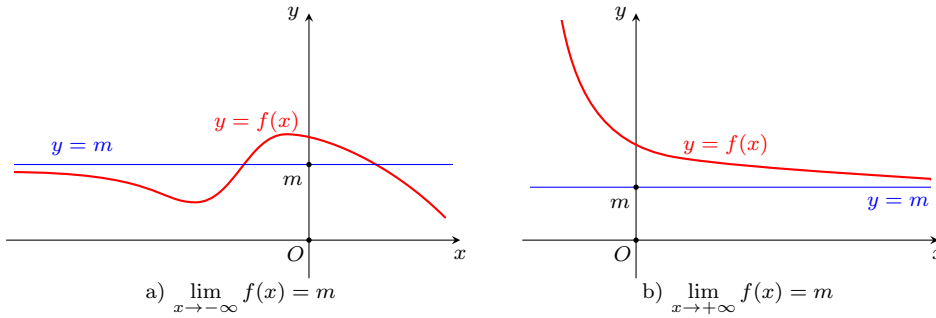
1. Đường tiệm cận ngang (TCN):

QUICK NOTE

**Định nghĩa:** Đường thẳng  $y = m$  được gọi là một **đường tiệm cận ngang** (hay **tiệm cận ngang**) của đồ thị hàm số  $y = f(x)$  nếu

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = m \text{ hoặc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = m.$$

Đường thẳng  $y = m$  là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số  $y = f(x)$  được minh hoạ như hình bên dưới



**Các bước tìm TCN:**

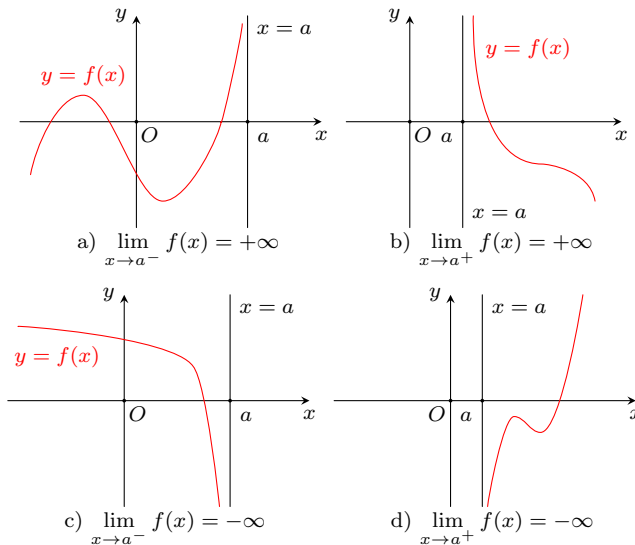
- Tính  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  và  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ .
- Xem ở "vị trí" nào ra kết quả hữu hạn thì ta kết luận có tiệm cận ngang ở "vị trí" đó.

## 2. Đường tiệm cận đứng (TCD)

**Định nghĩa:** Đường thẳng  $x = a$  được gọi là một **đường tiệm cận đứng** (hay **tiệm cận đứng**) của đồ thị hàm số  $y = f(x)$  nếu ít nhất một trong các điều kiện sau thoả mãn:

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty.$$

Đường thẳng  $x = a$  là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số  $y = f(x)$  được minh hoạ như hình bên dưới.



**Các bước tìm TCD:**

- Tìm nghiệm của mẫu, giả sử nghiệm đó là  $x = x_0$ .
- Tính giới hạn một bên tại  $x_0$ . Nếu xảy ra  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \infty$  hoặc  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \infty$  thì ta kết luận  $x = x_0$  là đường tiệm cận đứng.

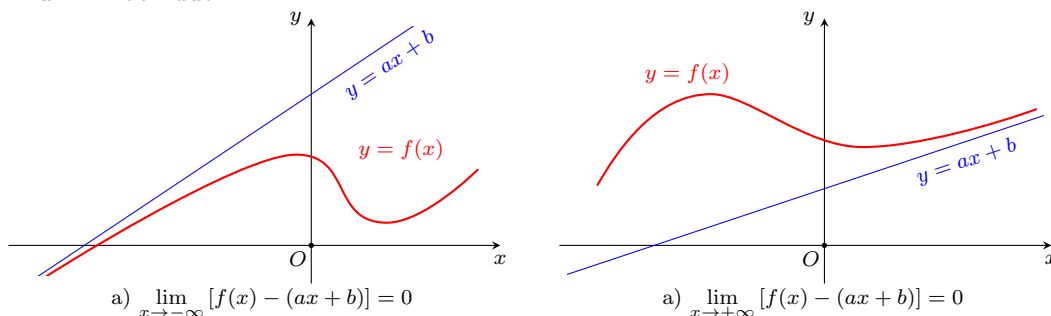
QUICK NOTE

### 3. Đường tiệm cận xiên

**Định nghĩa:** Đường thẳng  $y = ax + b$ ,  $a \neq 0$ , được gọi là **đường tiệm cận xiên** (hay **tiệm cận xiên**) của đồ thị hàm số  $y = f(x)$  nếu

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0 \text{ hoặc } \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0.$$

Đường thẳng  $y = ax + b$  là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số  $y = f(x)$  được minh họa như hình bên dưới:



**Các bước tìm TCX  $y = ax + b$ :** Ta xác định hệ số của  $a$  và  $b$  trong 2 trường hợp sau:

- ① Tính  $a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ ,  $b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - ax]$ .
- ② Tính  $a = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$ ,  $b = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - ax]$ .

## B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

9

### Bài toán tìm tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số

Cho hàm số  $y = f(x)$ . Để tìm tiệm cận đứng và tiệm cận ngang, ta làm như sau:

#### ✓ Các bước tìm tiệm cận đứng:

- ① Tìm nghiệm của mẫu, giả sử nghiệm đó là  $x = x_0$ .
- ② Tính giới hạn một bên tại  $x_0$ . Nếu xảy ra  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \infty$  hoặc  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \infty$  thì ta kết luận  $x = x_0$  là đường tiệm cận đứng.

#### ✓ Các bước tìm tiệm cận ngang:

- ① Tính  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  và  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ .
- ② Xem ở "vị trí" nào ra kết quả hữu hạn thì ta kết luận có tiệm cận ngang ở "vị trí" đó.

**✓ Lưu ý:** Đồ thị hàm số  $y = \frac{ax + b}{cx + d}$  luôn có TCD  $x = -\frac{d}{c}$  và TCN:  $y = \frac{a}{c}$ .

#### BÀI TẬP TỰ LUẬN

**VÍ DỤ 1.** Xác định tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số cho bởi công thức sau:

a)  $y = \frac{2x - 1}{x + 1}$ ;      b)  $y = \frac{2x - 3}{1 - 2x}$ ;      c)  $y = \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 1}$ ;      d)  $y = \frac{2x - 1}{x^2 - 3x + 2}$ .

#### BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

**PHẦN I.** Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.



QUICK NOTE

**CÂU 1.** Đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số  $y = \frac{2x-4}{x+2}$  là

- (A)  $y = 2$ . (B)  $x = 2$ . (C)  $x = -2$ . (D)  $y = -2$ .

**CÂU 2.** Tìm tiệm cận ngang của đồ thị hàm số  $y = \frac{2x+1}{x+1}$ .

- (A)  $y = -2$ . (B)  $x = -2$ . (C)  $y = 2$ . (D)  $x = 1$ .

**CÂU 3.** Đường thẳng  $y = 3$  là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số nào sau đây?

- (A)  $y = \frac{1-3x}{2+x}$ . (B)  $y = \frac{x^2+3x+2}{x-2}$ . (C)  $y = \frac{1+3x}{1+x}$ . (D)  $y = \frac{3x^2+2}{2-x}$ .

**CÂU 4.** Hàm số nào có đồ thị nhận đường thẳng  $x = 2$  làm đường tiệm cận đứng?

- (A)  $y = x - 2 + \frac{1}{x+1}$ . (B)  $y = \frac{1}{x+1}$ .  
(C)  $y = \frac{2}{x+2}$ . (D)  $y = \frac{5x}{2-x}$ .

**CÂU 5.** Đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số  $y = \frac{3x+1}{x-2}$  là đường thẳng

- (A)  $x = -2$ . (B)  $x = 2$ . (C)  $y = 3$ . (D)  $y = -\frac{1}{2}$ .

**CÂU 6.** Đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số  $y = \frac{x+1}{x^2+4x-5}$  có phương trình là

- (A)  $x = -1$ . (B)  $y = 1; y = -5$ . (C)  $x = 1; x = -5$ . (D)  $x = \pm 5$ .

**CÂU 7.** Tìm số đường tiệm cận của đồ thị hàm số  $y = \frac{x^2-3x+2}{x^2-4}$ .

- (A) 1. (B) 0. (C) 2. (D) 3.

**CÂU 8.** Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số  $y = \frac{3}{x-2}$  là

- (A) 1. (B) 2. (C) 0. (D) 3.

**CÂU 9.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị là đường cong (C) và các giới hạn  $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$ . Hỏi mệnh đề nào sau đây đúng?

- (A) Đường thẳng  $y = 2$  là tiệm cận ngang của (C).  
(B) Đường thẳng  $y = 1$  là tiệm cận ngang của (C).  
(C) Đường thẳng  $x = 2$  là tiệm cận ngang của (C).  
(D) Đường thẳng  $x = 2$  là tiệm cận đứng của (C).

**CÂU 10.** Số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số  $y = \frac{\sqrt{x+9}-3}{x^2+x}$  là

- (A) 3. (B) 2. (C) 0. (D) 1.

**CÂU 11.**

Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định trên  $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$  liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như hình vẽ. Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số là

- (A) 1. (B) 2.  
(C) 3. (D) 4.

$x$	$-\infty$	$-1$	$0$	$1$	$+\infty$
$y'$	$-$	$-$	$0$	$+$	$+$
$y$	$-2$	$+\infty$	$1$	$+\infty$	$-2$

**CÂU 12.**

QUICK NOTE

Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định trên  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ , liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như hình bên. Chọn khẳng định đúng.

- A) Đồ thị hàm số có đúng một tiệm cận ngang.
- B) Đồ thị hàm số có hai tiệm cận ngang.
- C) Đồ thị hàm số có đúng một tiệm cận đứng.
- D) Đồ thị hàm số không có tiệm đứng và tiệm cận ngang.

$x$	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$y'$	-		+	-
$y$	$+\infty$		2	$-\infty$

CÂU 13.

Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như hình bên. Hỏi đồ thị hàm số đã cho có bao nhiêu đường tiệm cận?

- A) 2.
- B) 3.
- C) 4.
- D) 1.

$x$	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
$y'$			+	-
$y$			2	0

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.

CÂU 14. Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như hình bên. Xét tính đúng, sai của các khẳng định sau:

$x$	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$y'$	-		- 0 +	
$y$	2		$+\infty$	$+\infty$

Mệnh đề	Đ	S
a) $f(-5) < f(4)$ .		
b) Hàm số có giá trị nhỏ nhất bằng 2.		
c) Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = 0$ .		
d) Đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.		

CÂU 15. Cho hàm số  $y = \frac{-4x + 5}{2x + 3}$  có đồ thị (C). Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

Mệnh đề	Đ	S
a) Hàm số không có cực trị.		
b) Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = -3$ .		
c) Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y = -2$ .		
d) Các đường tiệm cận của đồ thị tạo với hai trục toạ độ một hình chữ nhật có diện tích bằng 3.		

10

## Bài toán tìm tiệm cận đứng và tiệm cận xiên của đồ thị hàm số

❖ **Các bước tìm TCX  $y = ax + b$ :** Ta xác định hệ số của  $a$  và  $b$  trong 2 trường hợp sau:

① Tính  $a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ ,  $b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - ax]$ .

② Tính  $a = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$ ,  $b = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - ax]$ .

❖ **Lưu ý:**

① Nếu  $a = 0$  thì tiệm cận xiên chính là tiệm cận ngang.

② Đối với hàm số phân thức  $f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{mx + n}$ , ta có thể chia đa thức, biến đổi về dạng

$$f(x) = a'x + b' + \frac{e}{mx + n}, \text{ với } e \neq 0$$

Suy ra  $y = a'x + b'$  là đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số.

### BÀI TẬP TỰ LUẬN

**VÍ DỤ 1.** Tìm các tiệm cận đứng và tiệm cận xiên của đồ thị hàm số sau:

a)  $y = \frac{x^2 + 2}{2x - 4}$ ;

b)  $y = \frac{2x^2 - 3x - 6}{x + 2}$ ;

c)  $y = \frac{2x^2 + 9x + 11}{2x + 5}$ .

### BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

**PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.**

**CÂU 1.** Đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số  $y = f(x) = 2x - 1 - \frac{1}{x + 1}$  có phương trình là

(A)  $y = x + 1$ .

(B)  $y = 2x - 1$ .

(C)  $y = x - 1$ .

(D)  $y = 2x + 1$ .

**CÂU 2.** Đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số  $y = f(x) = x + 3 + \frac{1}{2x + 1}$  có phương trình là

(A)  $y = 2x + 1$ .

(B)  $y = x - 3$ .

(C)  $y = x + 3$ .

(D)  $y = 2x - 1$ .

**CÂU 3.** Tìm tiệm cận xiên của đồ thị hàm số  $y = f(x) = \frac{x^2 + 3x}{x - 2}$ .

(A)  $y = 2x - 5$ .

(B)  $y = x - 2$ .

(C)  $y = x + 5$ .

(D)  $y = x - 5$ .

**CÂU 4.** Tiệm cận xiên của đồ thị hàm số  $y = \frac{x^2 + 2x - 2}{x + 2}$  là

(A)  $y = -2$ .

(B)  $y = 1$ .

(C)  $y = x + 2$ .

(D)  $y = x$ .

**CÂU 5.** Tìm tiệm cận xiên của đồ thị hàm số  $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 1}{x - 2}$ .

(A)  $y = x + 1$ .

(B)  $y = -3x + 1$ .

(C)  $y = x - 2$ .

(D)  $y = x - 1$ .

**CÂU 6.** Đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số  $y = \frac{2x^2 - 3x}{x + 5}$  đi qua điểm nào sau đây?

(A)  $(5; 3)$ .

(B)  $(-4; -5)$ .

(C)  $(6; -1)$ .

(D)  $(2; -10)$ .

**CÂU 7.** Giao điểm của đường tiệm cận đứng và đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số  $y = \frac{2x^2 - 3x + 2}{x - 1}$  là

(A)  $(1; 2)$ .

(B)  $(1; 1)$ .

(C)  $(1; -1)$ .

(D)  $(1; 0)$ .

### QUICK NOTE

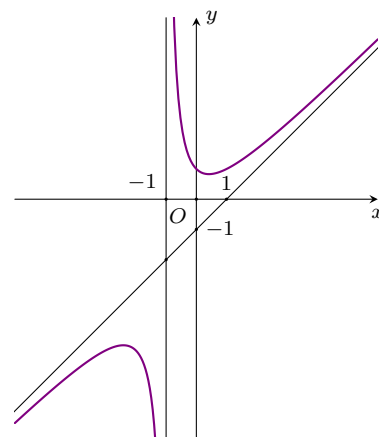
QUICK NOTE

**PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.**

**CÂU 8.**

Cho hàm số  $y = f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{dx + e}$  có đồ thị như hình bên.

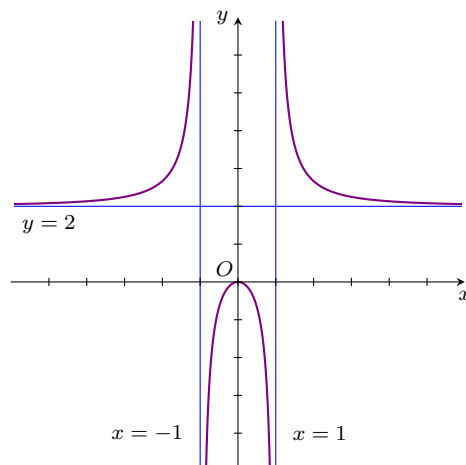
Mệnh đề	Đ	S
a) Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$ .		
b) Hàm số có hai điểm cực trị.		
c) Đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng là $x = 0$ .		
d) Đồ thị hàm số có đường tiệm cận xiên là $y = x + 1$ .		



**CÂU 9.**

Cho đồ thị của hàm số  $y = f(x) = \frac{2x^2}{x^2 - 1}$ . Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

Mệnh đề	Đ	S
a) Đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị.		
b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$ ; $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$ .		
c) Đồ thị hàm số có 3 đường tiệm cận đứng $x = -1$ , $x = 0$ , $x = 1$ .		
d) Đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận ngang $y = 2$ và $y = 0$ .		



11

Bài toán về đường tiệm cận có chứa tham số

**BÀI TẬP TỰ LUẬN**

**VÍ DỤ 1.** Tìm tham số  $m$  để đồ thị hàm số

a)  $y = \frac{3x - 1}{x - m}$  có đường tiệm cận đứng là  $x = 5$ .

b)  $y = \frac{(m + 1)x - 5m}{2x - m}$  có tiệm cận ngang là đường thẳng  $y = 1$ .

**VÍ DỤ 2.** Tìm  $m$  để đồ thị hàm số

a)  $y = \frac{x - 2}{x^2 - mx + 1}$  có hai đường tiệm cận đứng.

b)  $y = \frac{2x^2 - 3x + m}{x - m}$  có đường tiệm cận xiên.

**BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM**

**PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.**

QUICK NOTE

**CÂU 1.** Tìm tất cả các giá trị của  $m$  để đồ thị hàm số  $y = \frac{mx+2}{x-5}$  có đường tiệm cận ngang đi qua điểm  $A(1;3)$ .

- (A)  $m = -3$ . (B)  $m = 1$ . (C)  $m = -1$ . (D)  $m = 3$ .

**CÂU 2.** Tìm tham số thực  $m$  để đồ thị hàm số  $y = \frac{mx+3}{x-m}$  có tiệm cận đứng là đường  $x = 1$ , tiệm cận ngang là đường  $y = 1$ .

- (A)  $m = 1$ . (B)  $m = 2$ . (C)  $m = -1$ . (D)  $m = 3$ .

**CÂU 3.** Biết rằng hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số  $y = \frac{2x+1}{x-m}$  (với  $m$  là tham số) tạo với hai trục tọa độ một hình chữ nhật có diện tích bằng 2. Giá trị của  $m$  là

- (A)  $m = \pm 2$ . (B)  $m = -1$ . (C)  $m = 2$ . (D)  $m = \pm 1$ .

**CÂU 4.** Tìm giá trị của  $m$  để đồ thị hàm số  $y = \frac{2x^2-5x+m}{x-m}$  có tiệm cận đứng.

- (A)  $\begin{cases} m = 0 \\ m = 2 \end{cases}$ . (B)  $m \neq 0$ . (C)  $m \neq 2$ . (D)  $\begin{cases} m \neq 0 \\ m \neq 2 \end{cases}$ .

**CÂU 5.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  để đồ thị hàm số  $y = \frac{x-4}{x^2-mx+4}$  có hai đường tiệm cận đứng?

- (A)  $m \in (-\infty; -4] \cup [4; +\infty)$ . (B)  $m \neq 5$ .  
(C)  $m \in (-\infty; -4) \cup (4; +\infty) \setminus \{5\}$ . (D)  $m \in (-\infty; -4) \cup (4; +\infty)$ .

**CÂU 6.** Cho hàm số  $y = \frac{2x^2-3x+m}{x-m}$  có đồ thị  $(C)$ . Tìm tất cả các giá trị của tham số  $m$  để  $(C)$  không có tiệm cận đứng.

- (A)  $m = 0$  hoặc  $m = 1$ . (B)  $m = 2$ .  
(C)  $m = 1$ . (D)  $m = 0$ .

**CÂU 7.** Tìm tất cả các giá trị của tham số thực  $m$  để đồ thị hàm số  $y = \frac{x-2}{x^2-mx+1}$  có đúng 3 đường tiệm cận.

- (A)  $\begin{cases} m > 2 \\ m \neq \frac{5}{2} \\ m < -2 \end{cases}$ . (B)  $\begin{cases} m > 2 \\ m < -2 \\ m \neq -\frac{5}{2} \end{cases}$ . (C)  $\begin{cases} m > 2 \\ m < -2 \end{cases}$ . (D)  $-2 < m < 2$ .

**CÂU 8.** Cho hàm số  $y = \frac{ax+1}{bx-2}$ , xác định  $a$  và  $b$  để đồ thị của hàm số trên nhận đường thẳng  $x = 1$  làm tiệm cận đứng và đường thẳng  $y = \frac{1}{2}$  làm tiệm cận ngang.

- (A)  $\begin{cases} a = -1 \\ b = -2 \end{cases}$ . (B)  $\begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases}$ . (C)  $\begin{cases} a = 2 \\ b = 2 \end{cases}$ . (D)  $\begin{cases} a = 2 \\ b = -2 \end{cases}$ .

**CÂU 9.** Cho hàm số  $y = \frac{mx+1}{x+3n+1}$ . Đồ thị hàm số nhận trục hoành và trục tung làm tiệm cận ngang và tiệm cận đứng. Tính  $m+n$ .

- (A)  $m+n = -\frac{1}{3}$ . (B)  $m+n = \frac{1}{3}$ . (C)  $m+n = \frac{2}{3}$ . (D)  $m+n = 0$ .

**CÂU 10.** Đồ thị hàm số  $y = \frac{(4a-b)x^2+ax+1}{x^2+ax+b-12}$  nhận trục hoành và trục tung làm hai tiệm cận. Tính giá trị của  $a+b$ .

- (A)  $a+b = 10$ . (B)  $a+b = 12$ . (C)  $a+b = 18$ . (D)  $a+b = 15$ .

**PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.**

**CÂU 11.** Cho hàm số  $y = \frac{mx^2+6x-2}{x+2}$ , với  $m$  là tham số.

Mệnh đề	Đ	S
a) Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ .		
b) Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang khi $m > 0$ .		

QUICK NOTE

Mệnh đề	Đ	S
c) Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng khi $m \neq 0$ .		
d) Tập hợp tất cả giá trị của $m$ để đồ thị có hai đường tiệm cận là $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{7}{2} \right\}$ .		

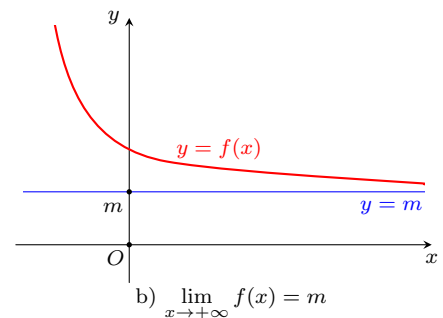
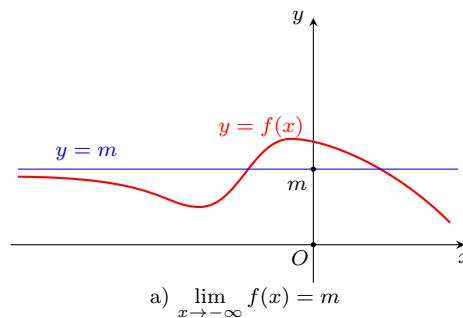
## Bài 4. ĐƯỜNG TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

### A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

#### 1. Đường tiệm cận ngang

**ĐỊNH NGHĨA 4.1.** Đường thẳng  $y = m$  là đường tiệm cận ngang (hay tiệm cận ngang) của đồ thị hàm số  $y = f(x)$  nếu ít nhất một trong các điều kiện sau được thỏa mãn:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = m, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = m.$$



**NHẬN XÉT.**

☉ Để tìm tiệm cận ngang của đồ thị hàm số ta cần tính giới hạn của hàm số tại vô cực ( $\pm\infty$ ).

☉ Tìm giới hạn ở vô cực của hàm  $y = \frac{P(x)}{Q(x)}$  với  $P(x)$ ,  $Q(x)$  là các đa thức không căn.

i) Bậc của  $P(x)$  nhỏ hơn bậc của  $Q(x) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = 0 \Rightarrow$  Tiệm cận ngang  $Ox: y = 0$ .

ii) Bậc của  $P(x)$  bằng bậc của  $Q(x) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \frac{\text{Hệ số x bậc cao của } P(x)}{\text{Hệ số x bậc cao của } Q(x)} = \alpha$   
(một số cụ thể)  $\Rightarrow y = \alpha$  là tiệm cận ngang.

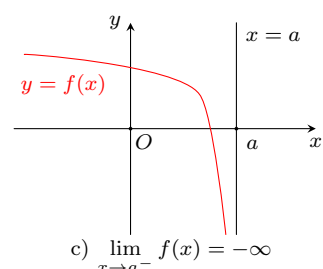
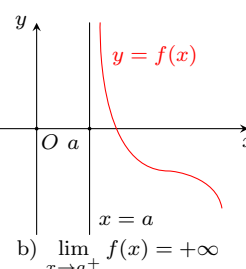
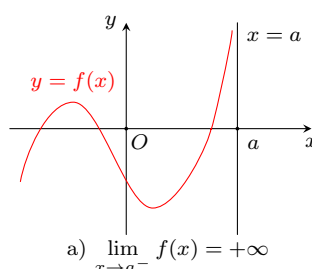
iii) Bậc của  $P(x)$  lớn hơn bậc của  $Q(x) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \pm\infty \Rightarrow$  Không có tiệm cận ngang.

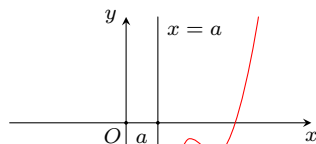
#### 2. Đường tiệm cận đứng

**ĐỊNH NGHĨA 4.2.** Đường thẳng  $x = a$  được gọi là đường tiệm cận đứng (hay tiệm cận đứng) của đồ thị hàm số  $y = f(x)$  nếu ít nhất một trong các điều kiện sau được thỏa mãn:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty;$$

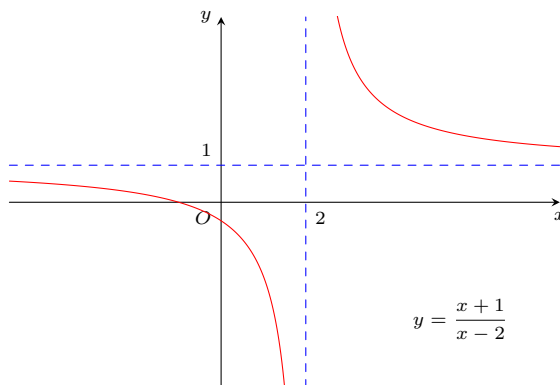
$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty.$$





d)  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$

**Đặc biệt** Đối với hàm số  $y = \frac{ax+b}{cx+d}$  có tiệm cận ngang  $y = \frac{a}{c}$  và tiệm cận đứng  $x = -\frac{d}{c}$ . Tâm đối xứng là giao điểm của hai đường tiệm cận.



### ⚡ NHẬN XÉT.

☑ Để tìm tiệm cận đứng của đồ thị hàm số, ta cần tính giới hạn một bên của  $x_0$ , với  $x_0$  thường là điều kiện của hàm số (hay tại  $x_0$  thì hàm số không xác định).

☑ Kỹ năng sử dụng máy tính (tham khảo):

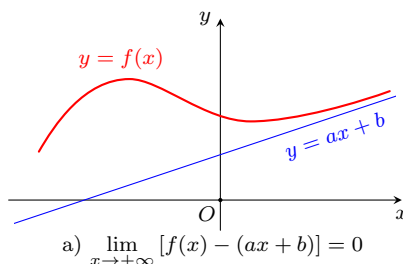
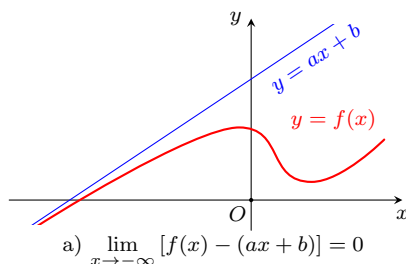
i) Tính  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$  thì nhập  $f(x)$  và CALC  $x = x_0 + 10^{-9}$ .

ii) Tính  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$  thì nhập  $f(x)$  và CALC  $x = x_0 - 10^{-9}$ .

## 3. Đường tiệm cận xiên

⚡ ĐỊNH NGHĨA 4.3. Đường thẳng  $y = ax + b$  được gọi là đường tiệm cận xiên của đồ thị  $(C): y = f(x)$  nếu

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0 \text{ hoặc } \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$$



### ⚡ NHẬN XÉT.

☑ Để tìm TCX của đồ thị hàm số  $y = f(x)$  ta giải hệ phương trình:  $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = a \neq 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - ax] = b \end{cases}$

hoặc  $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = a \neq 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - ax] = b \end{cases}$ , khi đó tiệm cận xiên của đồ thị hàm số  $y = f(x)$  là đường thẳng  $y = ax + b$ .

☑ Đồ thị hàm số  $y = \frac{mx^2 + nx + p}{cx + d} = ax + b + \frac{r}{cx + d}$  có đường tiệm cận xiên là đường thẳng  $y = ax + b$ .

☑ Hàm phân thức có bậc tử bé hơn hoặc bằng bậc mẫu, bậc tử lớn hơn bậc mẫu 2 bậc thì không có tiệm cận xiên.

### QUICK NOTE

QUICK NOTE

12

**Tìm các đường tiệm cận qua biểu thức hàm số, bảng biến thiên**

**VÍ DỤ 1.** Tìm các đường tiệm cận đứng, ngang, xiên (nếu có) của đồ thị hàm số sau

a)  $y = \frac{2x+1}{x+1}$ .

b)  $y = \frac{x}{2x-1}$ .

c)  $y = \frac{3-x}{x+1}$ .

d)  $y = 2x+1 + \frac{1}{x-3}$

e)  $y = \frac{4x^2-3x+10}{x-1}$ .

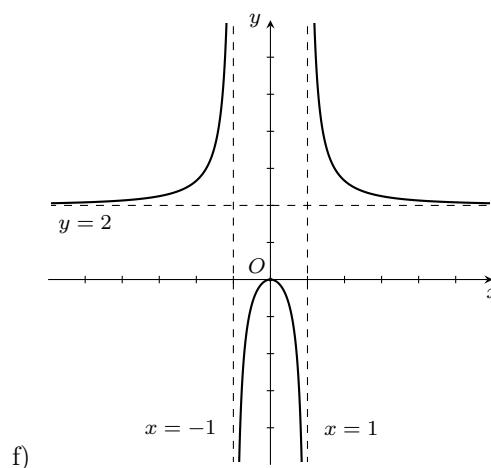
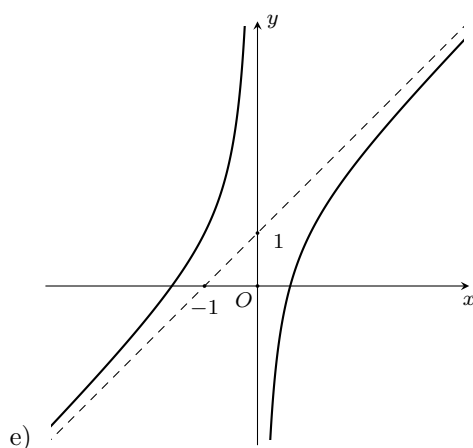
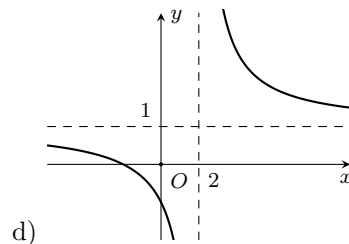
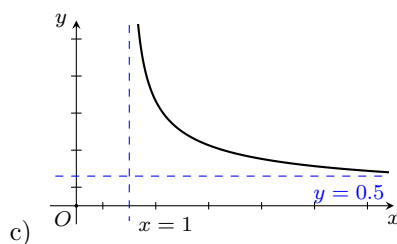
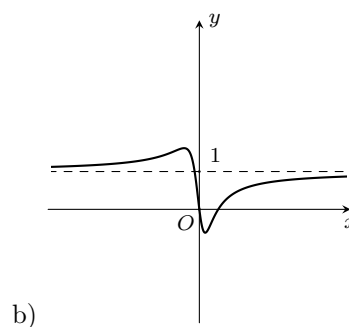
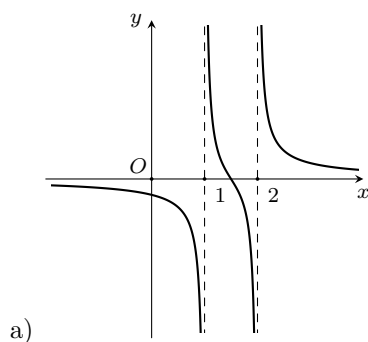
f)  $y = \frac{x^2-4x+3}{x^2-1}$ .

g)  $y = \frac{2x+4}{x^2+x-2}$ .

h)  $y = \frac{\sqrt{9-x^2}}{x-1}$ .

i)  $y = x + \sqrt{x^2-1}$

**VÍ DỤ 2.** Tìm các đường tiệm cận của đồ thị hàm số  $y = f(x)$ , biết



g)

$x$	$-\infty$	1	$+\infty$
$y'$	-	-	
$y$	2	$+\infty$	2

h)

$x$	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$y'$	+	0	-	+
$y$	0	2	$-\infty$	5

**VÍ DỤ 3.** Một bể bơi chứa 5000 lít nước tinh khiết. Người ta bơm vào bể đó nước muối có nồng độ 30 gam muối cho mỗi lít nước với tốc độ 25 lít/phút.



QUICK NOTE

- a) Lập hàm số biểu diễn nồng độ muối trong bể sau  $t$  phút.  
b) Tìm tiệm cận ngang của hàm số vừa tìm được.  
c) Nêu nhận xét về nồng độ muối trong bể khi thời gian  $t$  ngày càng lớn.

**VÍ DỤ 4.** Một mô hình kinh tế mô tả lượng cung cầu theo giá cả được cho bởi hàm:

$$Q(p) = \frac{k}{p - p_0}$$

trong đó  $Q(p)$  là lượng cung cầu,  $p$  là giá cả,  $p_0$  là mức giá tối thiểu, và  $k$  là hằng số tỷ lệ. Xác định tiệm cận đứng của hàm số này và nêu ý nghĩa của nó.

**BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM 4 PHƯƠNG ÁN**

**CÂU 1.** Đường thẳng nào dưới đây là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số  $y = \frac{x-1}{x+1}$ ?

- (A)  $y = -1$ . (B)  $x = -1$ . (C)  $y = 1$ . (D)  $x = 1$ .

**CÂU 2.** Đồ thị hàm số  $y = \frac{2x-3}{1-2x}$  có tiệm cận đứng là đường thẳng

- (A)  $x = 3$ . (B)  $x = 2$ . (C)  $x = \frac{1}{2}$ . (D)  $x = \frac{3}{2}$ .

**CÂU 3.** Đồ thị hàm số  $y = \frac{2-3x}{2x-3}$  có tiệm cận đứng và ngang lần lượt là

- (A)  $x = \frac{3}{2}$  và  $y = -\frac{3}{2}$ . (B)  $x = \frac{3}{2}$  và  $y = 1$ .  
(C)  $x = \frac{3}{2}$  và  $y = -\frac{3}{2}$ . (D)  $x = \frac{3}{2}$  và  $y = 1$ .

**CÂU 4.** Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số  $y = \frac{x+1}{x+3}$  có phương trình là

- (A)  $x = -1$ . (B)  $x = 1$ . (C)  $x = -3$ . (D)  $x = 3$ .

**CÂU 5.** Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số  $y = \frac{x-2}{x+1}$  có phương trình là

- (A)  $y = -2$ . (B)  $y = 1$ . (C)  $x = -1$ . (D)  $x = 2$ .

**CÂU 6.** Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số  $y = \frac{2x-1}{x-1}$  là đường thẳng có phương trình là

- (A)  $x = 1$ . (B)  $x = -1$ . (C)  $x = 2$ . (D)  $x = \frac{1}{2}$ .

**CÂU 7.** Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số  $y = \frac{x+1}{x-2}$  là đường thẳng có phương trình là

- (A)  $x = -1$ . (B)  $x = -2$ . (C)  $x = 2$ . (D)  $x = 1$ .

**CÂU 8.** Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số  $y = \frac{2x+1}{x-1}$  là đường thẳng có phương trình là

- (A)  $x = 2$ . (B)  $x = 1$ . (C)  $x = -\frac{1}{2}$ . (D)  $x = -1$ .

**CÂU 9.** Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số  $y = \frac{x-1}{x+2}$  là đường thẳng có phương trình là

- (A)  $x = 2$ . (B)  $x = -1$ . (C)  $x = -2$ . (D)  $x = 1$ .

**CÂU 10.** Giao điểm của tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số  $y = \frac{-2}{3x-1}$  là điểm

- (A)  $Q\left(\frac{1}{3}; -2\right)$ . (B)  $M\left(\frac{1}{3}; -\frac{2}{3}\right)$ . (C)  $N\left(\frac{1}{3}; 2\right)$ . (D)  $P\left(\frac{1}{3}; 0\right)$ .

**CÂU 11.** Đồ thị hàm số  $y = \frac{3-4x}{x-5}$  có tâm đối xứng là điểm

- (A)  $M\left(5; -\frac{3}{5}\right)$ . (B)  $P\left(5; \frac{4}{5}\right)$ . (C)  $Q(5; 3)$ . (D)  $N(5; -4)$ .

**CÂU 12.** Đồ thị hàm số nào dưới đây có tiệm cận đứng?

- (A)  $y = \frac{x^2-3x+2}{x-1}$ . (B)  $y = \frac{x^2}{x^2+1}$ . (C)  $y = \sqrt{x^2-1}$ . (D)  $y = \frac{x}{x+1}$ .

**CÂU 13.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như hình bên. Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho là

QUICK NOTE

$x$	$-\infty$	$0$	$1$	$+\infty$	
$y'$	$-$		$+$	$0$	$-$
$y$	$+\infty$			$2$	
		$-\infty$	$-1$		$-3$

- (A) 1. (B) 3. (C) 2. (D) 4.

**CÂU 14.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như hình bên. Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho là

$x$	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$y'$	-	0	+	-
$y$	8		4	2

- (A) 1. (B) 3. (C) 2. (D) 4.

**CÂU 15.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như hình bên. Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho là

$x$	$-\infty$	1	2	$+\infty$
$y'$	+		-	+
$y$	-4	3	-5	$+\infty$




- (A) 1. (B) 3. (C) 2. (D) 0.

**CÂU 16.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như hình bên. Đồ thị hàm số đã cho có tiệm cận đứng là đường thẳng

$x$	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	2	$+\infty$	4	$+\infty$

- (A)  $x = 0$ . (B)  $x = 1$ . (C)  $x = 2$ . (D)  $x = 4$ .

**CÂU 17.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như sau

$x$	$-\infty$	0		3	$+\infty$
$y'$	-		+ 0 -		
$y$	1			2	 
		$-\infty$			3
				$-3$	

Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho là

- (A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4.

**CÂU 18.** Cho hàm số  $f(x)$  có bảng biến thiên như sau

$x$	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	-		- 0 +	
$f(x)$	0	2		$+\infty$
		$-\infty$	-2	

Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho là  
 (A) 3. (B) 1. (C) 2. (D) 4.

**CÂU 19.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như hình bên. Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho là

$x$	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$y'$	+		-	-
$y$	4	2	5	-3
		$-\infty$		

(A) 1. (B) 3. (C) 2. (D) 4.

**CÂU 20.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như sau

$x$	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
$y'$	-		+	-
$y$	$+\infty$	$+\infty$	1	0
		1	$-\infty$	

Tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho bằng  
 (A) 2. (B) 1. (C) 0. (D) 3.

**CÂU 21.** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$  có bảng biến thiên như bảng sau:

$x$	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$y'$	-		+	+
$y$	1	$-\sqrt{2}$	$+\infty$	-1
			$-\infty$	

Tổng số đường tiệm cận đứng và đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số  $y = f(x)$  là  
 (A) 1. (B) 4. (C) 2. (D) 3.

**CÂU 22.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến như sau:

$x$	$-\infty$	-3	3	$+\infty$
$y'$	+		+	+
$y$	0	$+\infty$	$+\infty$	0
		$-\infty$	$-\infty$	

Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số là  
 (A) 3. (B) 1. (C) 4. (D) 2.

**CÂU 23.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như sau

QUICK NOTE

QUICK NOTE

$x$	$-\infty$	$-2$	$2$	$+\infty$
$y'$	$-$	$-$	$-$	
$y$	$0 \rightarrow -\infty$	$+\infty \rightarrow -\infty$	$+\infty \rightarrow -\infty$	

Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho là

- (A) 4. (B) 2. (C) 3. (D) 1.

**CÂU 24.** Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định và có đạo hàm trên  $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$ . Hàm số có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây.

$x$	$-\infty$	$-1$	$0$	$1$	$+\infty$
$y'$	$+$	$-$	$+$	$+$	
$y$	$-4 \rightarrow +\infty$	$-\infty \rightarrow 2 \rightarrow -\infty$	$-\infty \rightarrow -1$		

Tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho là

- (A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4.

**CÂU 25.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây.

$x$	$-\infty$	$-2$	$0$	$+\infty$
$y'$		$+$	$-$	
$y$		$-\infty \rightarrow +\infty$	$1 \rightarrow 0$	

Hỏi đồ thị của hàm số đã cho có bao nhiêu đường tiệm cận?

- (A) 3. (B) 2. (C) 4. (D) 1.

**CÂU 26.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = +\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 8$  và  $\lim_{x \rightarrow 7} f(x) = 5$ . Tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là

- (A) 4. (B) 2. (C) 1. (D) 3.

**CÂU 27.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$  và  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2$ . Mệnh đề nào sau đây đúng?

- (A) Đồ thị hàm số không có tiệm cận. (B) Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng  $x = 1$ .  
(C) Đồ thị hàm số có hai tiệm cận. (D) Đồ thị hàm số tiệm cận ngang  $y = 2$ .

**CÂU 28.** Cho hàm số  $y = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x^2-4}}$  mệnh đề nào sau đây đúng?

- (A) Đồ thị hàm số có một tiệm cận đứng và một tiệm cận ngang.  
(B) Đồ thị hàm số có một tiệm cận đứng và hai tiệm cận ngang.  
(C) Đồ thị hàm số có hai tiệm cận đứng và hai tiệm cận ngang.  
(D) Đồ thị hàm số có hai tiệm cận đứng và một tiệm cận ngang.

**CÂU 29.** Với giá trị nào của  $m$  thì đồ thị hàm số  $y = \frac{mx-1}{2x+m}$  có tiệm cận đứng là đường thẳng  $x = -1$ ?

- (A)  $m = 2$ . (B)  $m = -2$ . (C)  $m = \frac{1}{2}$ . (D)  $m = 0$ .

**CÂU 30.** Đồ thị hàm số  $y = \frac{2x - 1 - \sqrt{x^2 + x + 3}}{x^2 - 5x + 6}$  có tất cả đường tiệm cận đứng là đường thẳng

- (A)  $x = -3$  và  $x = -2$ . (B)  $x = -3$ .  
(C)  $x = 3$  và  $x = -2$ . (D)  $x = 3$ .

**CÂU 31.** Số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số  $y = \frac{\sqrt{x+9} - 3}{x^2 + x}$  là

- (A) 3. (B) 2. (C) 0. (D) 1.

**BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM ĐÚNG SAI**

**CÂU 32.** Cho hàm số  $y = \frac{2x - 3}{x - 1}$ . Xét tính đúng sai các khẳng định dưới đây

Mệnh đề	Đ	S
a) Đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số là $x = 1$ .		
b) Đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số là $y = 2$ .		
c) Đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là $x = 1$ .		
d) Đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là $y = 2$ .		

**CÂU 33.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như sau

$x$	$-\infty$	$-2$	$0$	$+\infty$
$y'$	$-$	$+$	$-$	
$y$	$+\infty$ ↘ $1$	$-\infty$ ↗ $+\infty$	$1$ ↘ $0$	

Xét tính đúng sai của các khẳng định sau

Mệnh đề	Đ	S
a) $x = 0$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = f(x)$ .		
b) $x = -2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = f(x)$ .		
c) $x = 1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = f(x)$ .		
d) $y = 0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x)$ .		

**CÂU 34.** Cho hàm số  $y = \frac{m^2x + 1}{x - 1}$ . Xét tính đúng sai của các khẳng định sau

Mệnh đề	Đ	S
a) Đồ thị hàm số luôn có tiệm cận ngang.		
b) Đồ thị hàm số luôn có tiệm cận đứng.		
c) Khi $m = 1$ đồ thị hàm số có 2 đường tiệm cận.		
d) Khi $m = 0$ đồ thị hàm số có 1 đường tiệm cận.		

**CÂU 35.** Cho hàm số  $y = \frac{mx^2 + 6x - 2}{x + 2}$ . Xét tính đúng sai của các khẳng định sau

Mệnh đề	Đ	S
a) Đồ thị hàm số luôn có tiệm cận đứng với mọi $m$ .		
b) Đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang với mọi $m$ .		

**QUICK NOTE**

QUICK NOTE

Mệnh đề	Đ	S
c) Khi $m = 1$ đồ thị hàm số có một tiệm cận xiên là $y = x + 4$ .		
d) Đồ thị hàm số luôn có tiệm cận xiên.		

**CÂU 36.** Cho hàm số  $y = \frac{x-1}{x^2-8x+m}$ ,  $m$  là tham số. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

Mệnh đề	Đ	S
a) Đồ thị hàm số có 1 đường tiệm cận ngang.		
b) Khi $m < 16$ thì đồ thị hàm số có 3 đường tiệm cận.		
c) Khi $m = 16$ thì đồ thị hàm số có 2 đường tiệm cận đứng.		
d) Có 14 giá trị nguyên dương của $m$ để đồ thị hàm số có 3 đường tiệm cận.		

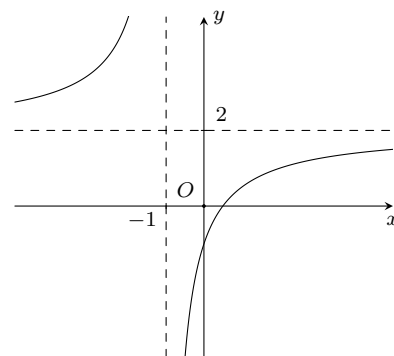
**CÂU 37.** Cho hàm số  $y = \frac{x^2+mx-1}{x-1} (C_m)$  ( $m$  là tham số). Các mệnh đề sau đúng hay sai?

Mệnh đề	Đ	S
a) Để đồ thị $(C_m)$ của hàm số có tiệm cận xiên thì $m \neq 0$ .		
b) Để tiệm cận xiên của $(C_m)$ đi qua $M(2, -5)$ thì $m = -8$ .		
c) Để tiệm cận xiên của $(C_m)$ tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng 8 thì tổng tất cả các giá trị $m$ tìm được bằng 2.		
d) Với $m = 3$ thì giao điểm của hai đường tiệm cận của $(C_m)$ nằm trên Parabol $y = x^2 + 3$ .		

**CÂU 38.**

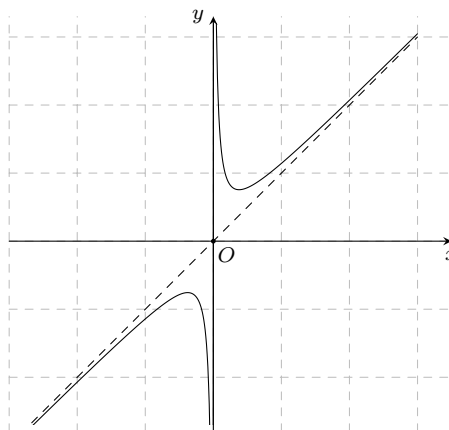
Cho hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị như hình bên. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau

Mệnh đề	Đ	S
a) $x = 2$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.		
b) $x = -1$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.		
c) Đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận.		
d) Đồ thị hàm số không có tiệm cận xiên.		



**CÂU 39.**

Cho hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị như hình bên.  
Xét tính đúng sai của các khẳng định sau



QUICK NOTE

Mệnh đề	Đ	S
a) $x = 0$ là một đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.		
b) $y = -x$ là một đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số.		
c) $y = x$ là một đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số.		
d) Đồ thị hàm số có ba đường tiệm cận.		

BÀI TẬP TỰ LUẬN TRẢ LỜI NGẮN

**CÂU 40.** Nếu đồ thị hàm số  $y = \frac{(m+1)x+2}{x-n+1}$  lần lượt nhận trục hoành và trục tung làm đường tiệm cận ngang và tiệm cận đứng thì  $m+n$  bằng bao nhiêu?

KQ:

**CÂU 41.** Tìm giá trị của  $m$  để đồ thị hàm số  $y = \frac{(2m+1)x+3}{x+1}$  có đường tiệm cận đi qua điểm  $A(-2; 7)$ .

KQ:

**CÂU 42.** Cho hàm số  $y = \frac{-3+mx}{x+n}$ . Tìm giá trị của  $m$  và  $n$  để đồ thị hàm số đã cho có tiệm cận đứng  $x = 2$  và tiệm cận ngang  $y = 2$ .

KQ:

**CÂU 43.** Để đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số  $y = \frac{mx+1}{2m+1-x}$  cùng với hai trục tọa độ tạo thành một hình chữ nhật có diện tích bằng 3 thì giá trị của  $m$  bằng bao nhiêu?

KQ:

**CÂU 44.** Đường tiệm cận đứng và đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số  $y = \frac{mx+1}{2m+1-x}$  cùng với hai trục tọa độ tạo thành một hình chữ nhật có diện tích bằng 3. Tính giá trị của  $m$ .

KQ:

**CÂU 45.** Biết rằng đồ thị của hàm số  $y = \frac{(n-3)x+n-2017}{x+m+3}$  ( $m, n$  là tham số) nhận trục hoành làm tiệm cận ngang và trục tung làm tiệm cận đứng. Tính tổng  $m-2n$ .

KQ:

**CÂU 46.** Tìm  $m$  để tiệm cận đứng của đồ thị hàm số  $y = \frac{m^2x-4m}{2x-m^2}$  đi qua điểm  $A(2; 1)$ .

KQ:

**CÂU 47.** Tìm  $m$  để đồ thị hàm số  $y = \frac{(m+1)x-5m}{2x-m}$  có tiệm cận ngang là đường thẳng  $y = 1$ .

KQ:

**CÂU 48.** Tìm tất cả các đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số  $y = \frac{\sqrt{4x^2-x+1}}{2x+1}$ .

KQ:

QUICK NOTE

**CÂU 49.** Đồ thị hàm số  $y = \frac{1 - \sqrt{x^2 + x + 1}}{x^3 + 1}$  có tất cả bao nhiêu tiệm cận đứng và ngang?

KQ:

**CÂU 50.** Đồ thị hàm số  $y = \frac{|x|}{\sqrt{x^2 - 1}}$  có tất cả bao nhiêu tiệm cận đứng và ngang?

KQ:

**CÂU 51.** Đồ thị hàm số  $y = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$  có tất cả bao nhiêu tiệm cận đứng và ngang?

KQ:

**CÂU 52.** Đồ thị hàm số  $y = \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x^2 - 5x + 6}$  có tất cả bao nhiêu tiệm cận đứng và ngang?

KQ:

**CÂU 53.** Nồng độ thuốc trong máu  $C(t)$  sau  $t$  giờ khi uống một liều thuốc có thể được mô tả bởi hàm  $C(t) = \frac{3}{1 + 2t}$ . Tìm đường tiệm cận của nồng độ thuốc khi thời gian tăng lên rất lớn.

KQ:

**CÂU 54.** Tốc độ (km/h) của một chiếc xe hơi tăng theo thời gian được mô tả bởi hàm  $v(t) = \frac{120t}{3 + t}$ . Tìm đường tiệm cận của tốc độ khi thời gian tăng lên rất lớn.

KQ:

**CÂU 55.** Nồng độ oxygen trong hồ theo thời gian  $t$  cho bởi công thức  $y(t) = 5 - \frac{15t}{9t^2 + 1}$ , với  $y$  được tính theo mg/l và  $t$  được tính theo giờ,  $t \geq 0$ . Tìm các đường tiệm cận của đồ thị hàm số  $y(t)$ . Từ đó, có nhận xét gì về nồng độ oxygen trong hồ khi thời gian  $t$  trở nên rất lớn?

KQ:

**CÂU 56.** Mô hình phát triển số lượng lợi khuẩn  $P(t)$  theo thời gian có thể được mô tả bởi hàm  $P(t) = \frac{100}{1 + 5e^{-2t}}$ . Tính số lượng lợi khuẩn khi thời gian tăng lên rất lớn.

KQ:

**CÂU 57.** Đáp ứng xung của một hệ thống điện tử the thời gian  $t$  được mô tả bởi hàm  $h(t) = 120e^{-\sqrt{3}t} \sin(2t + \pi)$ . Tìm và nêu ý nghĩa của đường tiệm cận của đáp ứng xung khi thời gian tăng.

KQ:

**CÂU 58.** Điện áp của pin sạc theo thời gian được mô tả bởi hàm  $V(t) = 220 \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$ , trong đó  $\tau$  là hằng số thời gian. Tìm và nêu ý nghĩa của đường tiệm cận của điện áp khi thời gian tăng.

KQ:

**CÂU 59.** Số lượng sản phẩm bán được của một công ty trong  $x$  (tháng) được tính theo công thức  $S(x) = 200 \left( 5 - \frac{9}{2 + x} \right)$ , trong đó  $x \geq 1$  (Nguồn: R.Larson and B.Edwards, Calculus 10e, Cengage 2014).

- Xem  $y = S(x)$  là một hàm số xác định trên nửa khoảng  $[1; +\infty)$ , hãy tìm tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đó.
- Nêu nhận xét về số lượng sản phẩm bán được của công ty trong  $x$  (tháng) khi  $x$  đủ lớn.

KQ:



**CÂU 60.** Công ty cung cấp dịch vụ internet tính 75\$ phí lắp đặt thiết bị ban đầu và phí sử dụng internet 40\$ mỗi tháng

- Lập hàm số thể hiện chi phí sử dụng trung bình mỗi tháng sau  $x$  tháng sử dụng
- Chi phí sử dụng trung bình thay đổi thế nào khi số tháng sử dụng tăng lên rất nhiều.

KQ:

**CÂU 61.** Nhà trường dự định tổ chức tiệc liên hoan chào mừng lớp 12, tiền thuê hội trường là 1 tỷ. Cứ mỗi người tham gia sẽ tính thêm phí phục vụ là 2 triệu mỗi người. Gọi  $x$  là số người tham gia bữa tiệc

- Lập hàm số thể hiện tổng chi phí của bữa tiệc
- Lập hàm số thể hiện chi phí trung bình của mỗi người bỏ ra cho bữa tiệc
- Chi phí trung bình của mỗi người thay đổi thế nào khi số người tham gia tăng lên rất lớn.

KQ:

**CÂU 62.** Số lượng vi khuẩn trong một môi trường dinh dưỡng có thể được mô tả bởi hàm:

$$N(t) = \frac{N_0}{1 - \frac{t}{T}}$$

trong đó  $N(t)$  là số lượng vi khuẩn tại thời gian  $t$ ,  $N_0$  là số lượng vi khuẩn ban đầu, và  $T$  là thời gian mà môi trường dinh dưỡng không còn đủ để hỗ trợ sự tăng trưởng của vi khuẩn. Xác định tiệm cận đứng của hàm số này và nêu ý nghĩa của nó.

KQ:

**CÂU 63.** Trong vật lý, vận tốc tối đa  $V$  của một vật rơi qua một chất lỏng được mô tả bằng phương trình:

$$V(t) = \frac{mg}{b} \left( 1 - e^{-\frac{bt}{m}} \right)$$

trong đó  $m$  là khối lượng của vật,  $g$  là gia tốc trọng trường,  $b$  là hệ số ma sát, và  $t$  là thời gian. Xác định tiệm cận đứng của hàm số này và nêu ý nghĩa của nó.

KQ:

**CÂU 64.** Trong sinh học, sự tăng trưởng của dân số  $P$  theo thời gian  $t$  có thể được mô hình bằng hàm số:

$$P(t) = \frac{P_0}{1 - kP_0t}$$

trong đó  $P_0$  là kích thước dân số ban đầu và  $k$  là hằng số tốc độ tăng trưởng. Xác định tiệm cận đứng của hàm số này và nêu ý nghĩa của nó.

KQ:

**CÂU 65.** Trong khoa học máy tính, độ phức tạp thời gian  $T(n)$  của một thuật toán với kích thước đầu vào  $n$  có thể được biểu diễn bằng hàm số:

$$T(n) = \frac{an^2 + bn + c}{n}$$

trong đó  $a$ ,  $b$ , và  $c$  là các hằng số. Xác định tiệm cận đứng của hàm số này và nêu ý nghĩa của nó.

KQ:

13

Đường tiệm cận liên quan tham số  $m$

**VÍ DỤ 1.** Tìm  $m$  để đồ thị hàm số

QUICK NOTE

- a)  $y = \frac{x-2}{x^2-mx+1}$  có hai đường tiệm cận đứng.      b)  $y = \frac{x-1}{x^2-mx+1}$  có đúng ba đường tiệm cận.
- c)  $y = \frac{\sqrt{x-3}}{x^2+x-m}$  có đúng hai đường tiệm cận.      d)  $y = \frac{\sqrt{1-x}}{x^2+4x+m}$  có ba đường tiệm cận.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM 4 PHƯƠNG ÁN

**CÂU 1.** Tìm  $m$  để đồ thị hàm số  $y = \frac{2x^2-3x+4}{x^2+mx+1}$  có duy nhất một đường tiệm cận?  
 (A)  $m \in (-2; 2)$ .      (B)  $m \in [-2; 2]$ .      (C)  $m \in \{-2; 2\}$ .      (D)  $m \in (2; +\infty)$ .

**CÂU 2.** Tìm giá trị thực của tham số  $m$  để đồ thị hàm số  $y = \frac{x-4}{m-x^2}$  có đường tiệm cận đứng.  
 (A)  $m \geq 0; m \neq 16$ .      (B)  $m \geq 0$ .      (C)  $m > 0$ .      (D)  $m > 0; m \neq 16$ .

**CÂU 3.** Có bao nhiêu giá trị của tham số  $m$  thỏa mãn đồ thị hàm số  $y = \frac{x+3}{x^2-x-m}$  có đúng hai đường tiệm cận?  
 (A) 1.      (B) 4.      (C) 2.      (D) 3.

**CÂU 4.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  để đồ thị hàm số  $y = \frac{x^2+m}{x^2-3x+2}$  có đúng hai tiệm cận.  
 (A)  $m = -1$ .      (B)  $m \in \{1; 4\}$ .      (C)  $m \in \{-1; -4\}$ .      (D)  $m = 4$ .

**CÂU 5.** Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số  $m$  để đồ thị hàm số  $y = \frac{\sqrt{9-x}}{x^2-2(m+1)x+m^2}$  có đúng hai đường tiệm cận.  
 (A) 2.      (B) 1.      (C) 4.      (D) 3.

**CÂU 6.** Cho hàm số  $y = \frac{2x-3}{\sqrt{x^2+2(m-2)x+m^2}}$  với  $m$  là tham số thực và  $m > 1$ . Hỏi đồ thị hàm số có bao nhiêu đường tiệm cận (tiệm cận ngang và tiệm cận đứng)?  
 (A) 1.      (B) 2.      (C) 3.      (D) 4.

**CÂU 7.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  để đồ thị hàm số  $y = \frac{1+\sqrt{x+1}}{\sqrt{x^2-(1-m)x+2m}}$  có hai tiệm cận đứng?  
 (A) 2.      (B) 3.      (C) 1.      (D) 0.

BÀI TẬP TỰ LUẬN TRẢ LỜI NGẮN

**CÂU 8.** Cho hàm số  $y = \frac{2x^2-3x+m}{x-m}$  có đồ thị  $(C)$ . Với tất cả các giá trị thực nào của tham số  $m$  thì đồ thị  $(C)$  không có tiệm cận đứng?

KQ: 

--	--	--	--

**CÂU 9.** Với tất cả các giá trị thực nào của tham số  $m$  thì đồ thị hàm số  $y = \frac{x^2+x-2}{x^2+x+m}$  có ba đường tiệm cận?

KQ: 

--	--	--	--

**CÂU 10.** Tìm số giá trị nguyên thuộc đoạn  $[-2025; 2025]$  của tham số  $m$  để đồ thị hàm số  $y = \frac{\sqrt{x-3}}{x^2+x-m}$  có đúng hai đường tiệm cận.

KQ: 

--	--	--	--

**CÂU 11.** Tìm tất cả giá trị thực của tham số  $m$  để đồ thị hàm số  $y = \frac{3x+2018}{\sqrt{mx^2+5x+6}}$  có hai đường tiệm cận ngang.

KQ: 

--	--	--	--

**CÂU 12.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số thực  $m$  thuộc đoạn  $[-20; 10]$  để đồ thị hàm số  $y = \frac{x+2}{\sqrt{x^2-4x+m}}$  có hai đường tiệm cận đứng?

KQ:

14

**Tìm các đường tiệm cận đồ thị hàm ẩn**

**VÍ DỤ 1.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như hình vẽ sau

$x$	$-\infty$	$-1$	$2$	$+\infty$
$y'$	+	0	-	+
$y$	1	4	-5	$+\infty$

Tìm TCD, TCN của đồ thị hàm số

a)  $y = \frac{2}{f(x)-3}$

b)  $y = \frac{-3}{f(x)+2}$

c)  $y = \frac{x-2}{f(x)+5}$

d)  $y = \frac{x+1}{f(x)-4}$

e)  $y = \frac{2}{f(x^2)+3}$

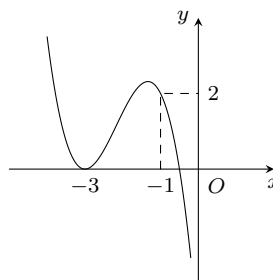
f)  $y = \frac{4f(x)-5}{3f(x)+1}$

**VÍ DỤ 2.**

Cho hàm bậc ba  $y = f(x)$  có đồ thị như hình vẽ. Tìm số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số

a)  $y = \frac{\sqrt{x+3}}{(x-1)f(x)}$

b)  $g(x) = \frac{(x^2+4x+3)\sqrt{x^2+x}}{x[f^2(x)-2f(x)]}$



**BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM**

**CÂU 1.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như hình bên. Đồ thị hàm số  $y = \frac{-5}{f(x)+4}$  có bao nhiêu tiệm cận đứng?

$x$	$-\infty$	$1$	$2$	$+\infty$
$y'$	+	-	+	
$y$	-4	3	-5	$+\infty$

**A** 1.

**B** 3.

**C** 2.

**D** 4.

**CÂU 2.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như hình bên. Đồ thị hàm số  $y = \frac{x+2}{2f(x)-1}$  có bao nhiêu tiệm cận đứng?

$x$	$-\infty$	$-1$	$0$	$1$	$+\infty$
$y'$	+	0	-	0	-
$y$	$-\infty$	0	$-\frac{5}{3}$	0	$-\infty$

QUICK NOTE

- (A) 1. (B) 3. (C) 2. (D) 0.

**CÂU 3.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như hình bên. Đồ thị hàm số  $y = \frac{1}{2f(x) - 3}$  có bao nhiêu tiệm cận đứng?

$x$	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$y'$	+	0	-	+
$y$	$-\infty$	5	-1	$+\infty$

- (A) 1. (B) 3. (C) 2. (D) 0.

**CÂU 4.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như hình bên. Đồ thị hàm số  $y = \frac{x}{f(x) - 3}$  có bao nhiêu tiệm cận đứng?

$x$	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$y'$	-	0	+	0	+
$y$	$+\infty$	0	3	0	$+\infty$

- (A) 1. (B) 3. (C) 2. (D) 4.

**CÂU 5.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như hình bên. Đồ thị hàm số  $y = \frac{4}{f(x) + 1}$  có tiệm cận ngang là đường thẳng

$x$	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
$y'$	+	0	-	+
$y$	1	4	-5	1

- (A)  $y = 1$ . (B)  $y = -5$ . (C)  $y = 2$ . (D)  $y = 4$ .

**CÂU 6.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như hình bên. Đồ thị hàm số  $y = \frac{2 - f(x)}{f(x) + 3}$  có tiệm cận ngang là đường thẳng

$x$	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$y'$	-	0	+	-
$y$	$+\infty$	1	5	$-\infty$

- (A)  $y = 1$ . (B)  $y = -3$ . (C)  $y = 2$ . (D)  $y = -1$ .

**CÂU 7.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như hình bên. Đồ thị hàm số  $y = \frac{1}{f^2(x) - 4f(x) + 4}$  có bao nhiêu tiệm cận đứng?

$x$	$-\infty$	2	$+\infty$
$y'$	-	0	+
$y$	1	-3	1

- (A) 1. (B) 3. (C) 2. (D) 0.

**CÂU 8.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như hình bên. Đồ thị hàm số  $y = \frac{1}{f(3 - x) - 2}$  có bao nhiêu tiệm cận đứng?

$x$	$-\infty$	$-2$	$2$	$+\infty$	
$y'$	$+$	$0$	$-$	$0$	$+$
$y$	$-\infty$	$3$	$0$	$+\infty$	

- (A) 1. (B) 3. (C) 2. (D) 0.

**CÂU 9.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như hình bên. Đồ thị hàm số  $y = \frac{4}{f(x^2) - 2}$  có bao nhiêu tiệm cận đứng?

$x$	$-\infty$	$0$	$3$	$+\infty$	
$y'$		$-$	$0$	$+$	$-$
$y$	$8$	$1$	$4$	$2$	

- (A) 5. (B) 3. (C) 2. (D) 4.

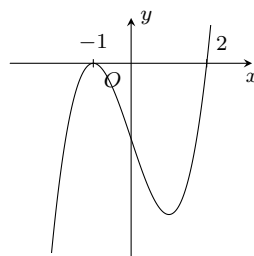
**CÂU 10.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như hình bên. Đồ thị hàm số  $y = \frac{2}{f(|x|) - 3}$  có bao nhiêu tiệm cận ngang?

$x$	$-\infty$	$0$	$2$	$+\infty$	
$y'$	$+$	$0$	$-$	$0$	$+$
$y$	$-\infty$	$3$	$-1$	$+\infty$	

- (A) 4. (B) 3. (C) 5. (D) 6.

**CÂU 11.**

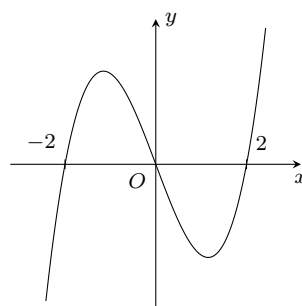
Cho hàm số bậc ba  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  có đồ thị như hình vẽ bên. Đồ thị hàm số  $g(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{(x-3) \cdot f(x)}$  có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?



- (A) 5. (B) 2. (C) 4. (D) 3.

**CÂU 12.**

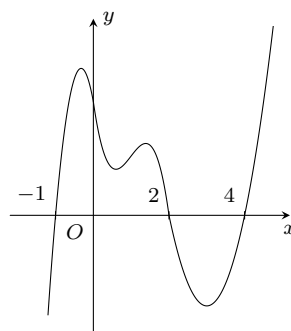
Đường cong ở hình bên là đồ thị của hàm số  $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ . Đồ thị hàm số  $y = \frac{(2x+1)\sqrt{x-1}}{x \cdot f(x-2)}$  có tất cả bao nhiêu tiệm cận đứng?



- (A) 1. (B) 3. (C) 4. (D) 2.

**CÂU 13.**

Cho hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị cắt trục hoành tại đúng 3 điểm như hình bên. Đồ thị hàm số  $y = \frac{(x+2)\sqrt{3-x}}{f(|x|)}$  có tất cả bao nhiêu tiệm cận đứng?



- (A) 1. (B) 3. (C) 4. (D) 2.

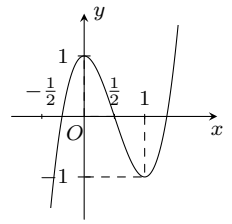
## QUICK NOTE

QUICK NOTE

**CÂU 14.**

Đường cong ở hình bên là đồ thị của hàm số  $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ . Đồ thị hàm số  $y = \frac{(2x+1)\sqrt{1-x}}{f(|x|)}$  có tất cả bao nhiêu tiệm cận đứng?

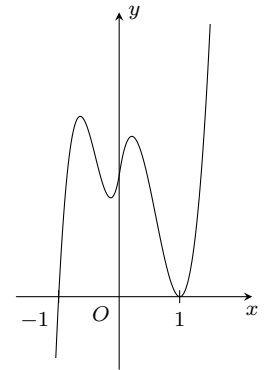
- (A) 1. (B) 3. (C) 4. (D) 2.



**CÂU 15.**

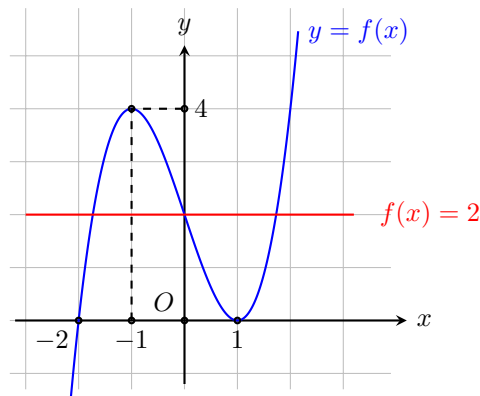
Cho đồ thị hàm số  $y = f(x)$  và trục hoành có đúng 2 điểm chung như hình bên. Đồ thị hàm số  $y = \frac{(x-1)\sqrt{3-x}}{f(x^2)}$  có tất cả bao nhiêu tiệm cận đứng?

- (A) 1. (B) 3. (C) 4. (D) 2.



**CÂU 16.** Cho hàm số  $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$  có đồ thị như hình vẽ. Đồ thị của hàm số  $g(x) = \frac{x^2 - x}{f^2(x) - 2f(x)}$  có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

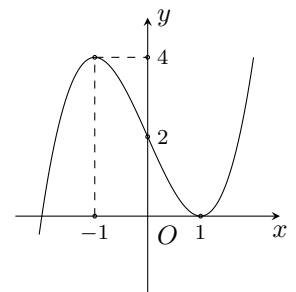
- (A) 2. (B) 3. (C) 4. (D) 5.



**CÂU 17.**

Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm liên tục trên  $\mathbb{R}$ . Đồ thị hàm  $f(x)$  như hình vẽ. Số đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số  $y = \frac{x^2 - 1}{f^2(x) - 4f(x)}$  bằng

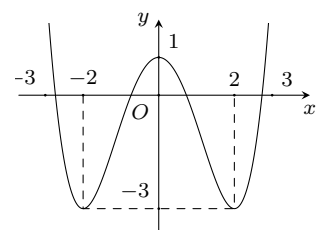
- (A) 3. (B) 1. (C) 2. (D) 4.



**CÂU 18.**

Cho hàm số  $f(x)$  có đồ thị như hình bên. Số đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số  $y = \frac{(x^2 - 4)(x^2 + 2x)}{[f(x)]^2 + 2f(x) - 3}$  là

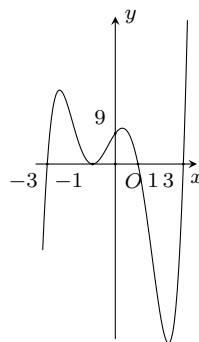
- (A) 4. (B) 5. (C) 3. (D) 2.



**CÂU 19.**

Cho hàm số  $f(x) = (x+3)(x+1)^2(x-1)(x-3)$  có đồ thị như hình vẽ. Đồ thị hàm số  $g(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{f^2(x) - 9f(x)}$  có bao nhiêu tiệm cận đứng và tiệm cận ngang?

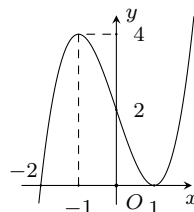
- (A) 3. (B) 4. (C) 9. (D) 8.



### CÂU 20.

Cho hàm số  $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ , có đồ thị như hình vẽ. Số đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số  $y = \frac{x^2 + x - 2}{f^2(x) - f(x)}$  là

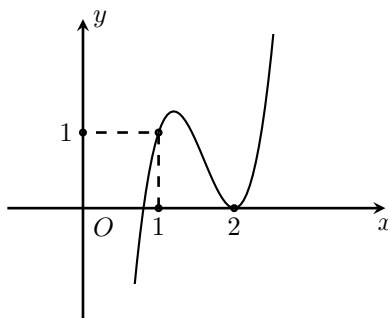
- (A) 3. (B) 2. (C) 4. (D) 5.



### CÂU 21.

Cho hàm số bậc ba  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Hỏi đồ thị hàm số  $g(x) = \frac{(x^2 - 3x + 2)\sqrt{x-1}}{x[f^2(x) - f(x)]}$  có bao nhiêu tiệm cận đứng?

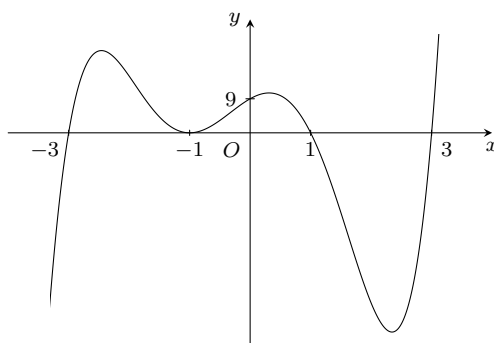
- (A) 5. (B) 6. (C) 3. (D) 4.



### CÂU 22.

Cho hàm số  $f(x) = (x+3)(x+1)^2(x-1)(x-3)$  có đồ thị như hình vẽ. Đồ thị hàm số  $g(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{f^2(x) - 9f(x)}$  có bao nhiêu tiệm cận đứng và tiệm cận ngang?

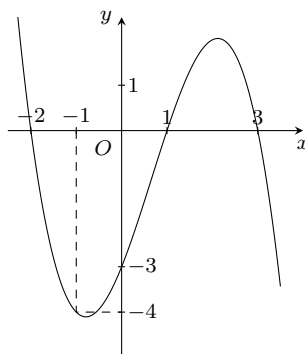
- (A) 3. (B) 4. (C) 9. (D) 8.



### CÂU 23.

Cho hàm số bậc ba  $y = f(x)$  có đồ thị như hình vẽ bên. Đồ thị hàm số  $g(x) = \frac{x\sqrt{x+1}}{f(x)[f^2(x) - 16]}$  có bao nhiêu tiệm cận đứng?

- (A) 4. (B) 5. (C) 6. (D) 7.



### CÂU 24.

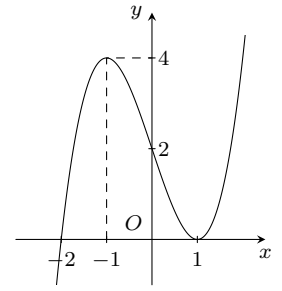
### QUICK NOTE

QUICK NOTE

Cho  $y = f(x)$  là hàm số đa thức có đồ thị như hình vẽ bên. Đặt

$$g(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{[f(x)]^2 - 2f(x)}$$
 có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

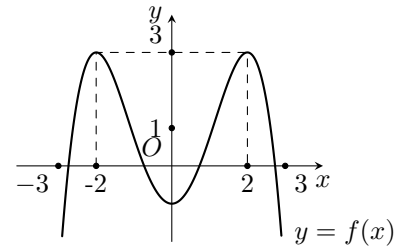
- (A) 5. (B) 3. (C) 4. (D) 2.



**CÂU 25.**

Cho hàm số  $f(x)$  có đồ thị như hình bên. Số đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số  $y = \frac{(x^2 - 4)(x^2 + 2x)}{[f(x)]^2 - 4f(x) + 3}$  là

- (A) 4. (B) 5. (C) 3. (D) 2.



15

**Tìm các đường tiệm cận đồ thị hàm ẩn**

**VÍ DỤ 1.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như hình vẽ sau

$x$	$-\infty$	$-1$	$2$	$+\infty$
$y'$	$+$	$0$	$-$	$+$
$y$	$1$	$4$	$-5$	$+\infty$

Tìm TCD, TCN của đồ thị hàm số

a)  $y = \frac{2}{f(x) - 3}$

b)  $y = \frac{-3}{f(x) + 2}$

c)  $y = \frac{x - 2}{f(x) + 5}$

d)  $y = \frac{x + 1}{f(x) - 4}$

e)  $y = \frac{2}{f(x^2) + 3}$

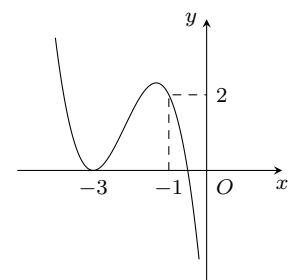
f)  $y = \frac{4f(x) - 5}{3f(x) + 1}$

**VÍ DỤ 2.**

Cho hàm bậc ba  $y = f(x)$  có đồ thị như hình vẽ. Tìm số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số

a)  $y = \frac{\sqrt{x+3}}{(x-1)f(x)}$

b)  $g(x) = \frac{(x^2 + 4x + 3)\sqrt{x^2 + x}}{x[f^2(x) - 2f(x)]}$



**BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM**

**CÂU 1.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như hình bên. Đồ thị hàm số  $y = \frac{-5}{f(x) + 4}$  có bao nhiêu tiệm cận đứng?

$x$	$-\infty$	$1$	$2$	$+\infty$
$y'$	$+$	$-$	$+$	
$y$	$-4$	$3$	$-5$	$+\infty$



QUICK NOTE

- (A) 1. (B) 3. (C) 2. (D) 4.

**CÂU 2.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như hình bên. Đồ thị hàm số  $y = \frac{x+2}{2f(x)-1}$  có bao nhiêu tiệm cận đứng?

$x$	$-\infty$	$-1$	$0$	$1$	$+\infty$				
$y'$	$+$	$0$	$-$	$0$	$+$	$0$	$-$		
$y$	$-\infty$	$\nearrow$	$0$	$\searrow$	$-\frac{5}{3}$	$\nearrow$	$0$	$\searrow$	$-\infty$

- (A) 1. (B) 3. (C) 2. (D) 0.

**CÂU 3.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như hình bên. Đồ thị hàm số  $y = \frac{1}{2f(x)-3}$  có bao nhiêu tiệm cận đứng?

$x$	$-\infty$	$0$	$1$	$+\infty$	
$y'$	$+$	$0$	$-$	$0$	$+$
$y$	$-\infty$	$5$	$-1$	$+\infty$	

- (A) 1. (B) 3. (C) 2. (D) 0.

**CÂU 4.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như hình bên. Đồ thị hàm số  $y = \frac{x}{f(x)-3}$  có bao nhiêu tiệm cận đứng?

$x$	$-\infty$	$-1$	$0$	$1$	$+\infty$		
$y'$	$-$	$0$	$+$	$0$	$-$	$0$	$+$
$y$	$+\infty$			$3$			$+\infty$
		$0$		$0$			

- (A) 1. (B) 3. (C) 2. (D) 4.

**CÂU 5.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như hình bên. Đồ thị hàm số  $y = \frac{4}{f(x)+1}$  có tiệm cận ngang là đường thẳng

$x$	$-\infty$	$-1$	$2$	$+\infty$	
$y'$	$+$	$0$	$-$	$0$	$+$
$y$	$1$	$4$	$-5$	$1$	

- (A)  $y = 1$ . (B)  $y = -5$ . (C)  $y = 2$ . (D)  $y = 4$ .

**CÂU 6.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như hình bên. Đồ thị hàm số  $y = \frac{2-f(x)}{f(x)+3}$  có tiệm cận ngang là đường thẳng

$x$	$-\infty$	$0$	$2$	$+\infty$	
$y'$	$-$	$0$	$+$	$0$	$-$
$y$	$+\infty$	$1$	$5$	$-\infty$	

- (A)  $y = 1$ . (B)  $y = -3$ . (C)  $y = 2$ . (D)  $y = -1$ .

**CÂU 7.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như hình bên. Đồ thị hàm số  $y = \frac{1}{f^2(x)-4f(x)+4}$  có bao nhiêu tiệm cận đứng?

QUICK NOTE

$x$	$-\infty$	2	$+\infty$	
$y'$		-	0	+
$y$	1		-3	1

- (A) 1. (B) 3. (C) 2. (D) 0.

**CÂU 8.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như hình bên. Đồ thị hàm số  $y = \frac{1}{f(3-x)-2}$  có bao nhiêu tiệm cận đứng?

$x$	$-\infty$	$-2$	$2$	$+\infty$			
$y'$		$+$	$0$	$-$	$0$	$+$	
$y$	$-\infty$		$3$		$0$		$+\infty$

- (A) 1. (B) 3. (C) 2. (D) 0.

**CÂU 9.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như hình bên. Đồ thị hàm số  $y = \frac{4}{f(x^2)-2}$  có bao nhiêu tiệm cận đứng?

$x$	$-\infty$	0	3	$+\infty$			
$y'$		-	0	+		-	
$y$	8		1		4		2

- (A) 5. (B) 3. (C) 2. (D) 4.

**CÂU 10.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như hình bên. Đồ thị hàm số  $y = \frac{2}{f(|x|)-3}$  có bao nhiêu tiệm cận ngang?

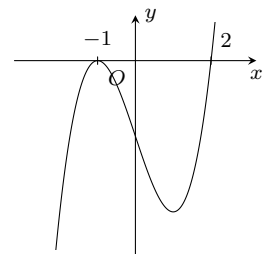
$x$	$-\infty$	0	2	$+\infty$			
$y'$		+	0	-	0	+	
$y$	$-\infty$		3		-1		$+\infty$

- (A) 4. (B) 3. (C) 5. (D) 6.

**CÂU 11.**

Cho hàm số bậc ba  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  có đồ thị như hình vẽ bên. Đồ thị hàm số  $g(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{(x-3) \cdot f(x)}$  có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

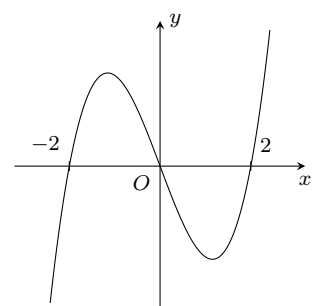
- (A) 5. (B) 2. (C) 4. (D) 3.



**CÂU 12.**

Đường cong ở hình bên là đồ thị của hàm số  $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ . Đồ thị hàm số  $y = \frac{(2x+1)\sqrt{x-1}}{x \cdot f(x-2)}$  có tất cả bao nhiêu tiệm cận đứng?

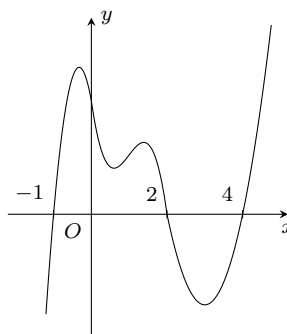
- (A) 1. (B) 3. (C) 4. (D) 2.



**CÂU 13.**

Cho hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị cắt trục hoành tại đúng 3 điểm như hình bên. Đồ thị hàm số  $y = \frac{(x+2)\sqrt{3-x}}{f(|x|)}$  có tất cả bao nhiêu tiệm cận đứng?

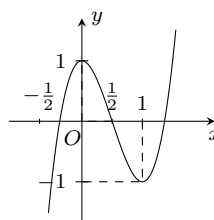
- (A) 1. (B) 3. (C) 4. (D) 2.



**CÂU 14.**

Đường cong ở hình bên là đồ thị của hàm số  $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ . Đồ thị hàm số  $y = \frac{(2x+1)\sqrt{1-x}}{f(|x|)}$  có tất cả bao nhiêu tiệm cận đứng?

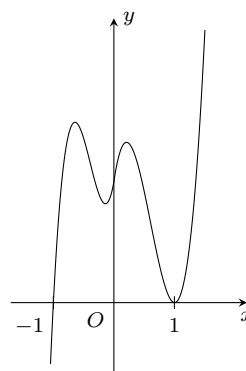
- (A) 1. (B) 3. (C) 4. (D) 2.



**CÂU 15.**

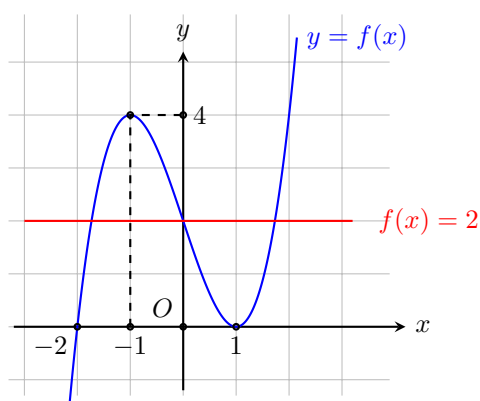
Cho đồ thị hàm số  $y = f(x)$  và trục hoành có đúng 2 điểm chung như hình bên. Đồ thị hàm số  $y = \frac{(x-1)\sqrt{3-x}}{f(x^2)}$  có tất cả bao nhiêu tiệm cận đứng?

- (A) 1. (B) 3. (C) 4. (D) 2.



**CÂU 16.** Cho hàm số  $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$  có đồ thị như hình vẽ. Đồ thị của hàm số  $g(x) = \frac{x^2 - x}{f^2(x) - 2f(x)}$  có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

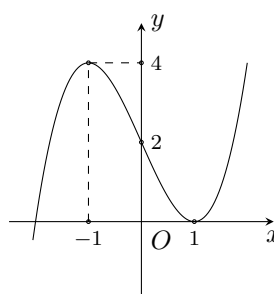
- (A) 2. (B) 3. (C) 4. (D) 5.



**CÂU 17.**

Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm liên tục trên  $\mathbb{R}$ . Đồ thị hàm  $f(x)$  như hình vẽ. Số đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số  $y = \frac{x^2 - 1}{f^2(x) - 4f(x)}$  bằng

- (A) 3. (B) 1. (C) 2. (D) 4.



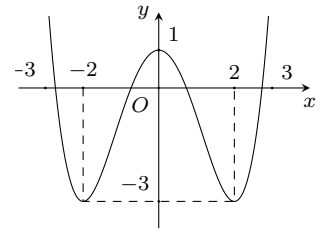
**QUICK NOTE**

QUICK NOTE

**CÂU 18.**

Cho hàm số  $f(x)$  có đồ thị như hình bên. Số đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số  $y = \frac{(x^2 - 4)(x^2 + 2x)}{[f(x)]^2 + 2f(x) - 3}$  là

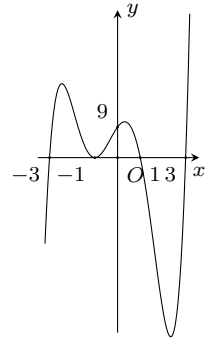
- (A) 4. (B) 5. (C) 3. (D) 2.



**CÂU 19.**

Cho hàm số  $f(x) = (x+3)(x+1)^2(x-1)(x-3)$  có đồ thị như hình vẽ. Đồ thị hàm số  $g(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{f^2(x) - 9f(x)}$  có bao nhiêu tiệm cận đứng và tiệm cận ngang?

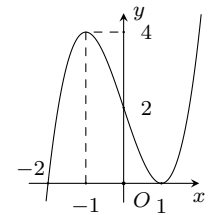
- (A) 3. (B) 4. (C) 9. (D) 8.



**CÂU 20.**

Cho hàm số  $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ , có đồ thị như hình vẽ. Số đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số  $y = \frac{x^2 + x - 2}{f^2(x) - f(x)}$  là

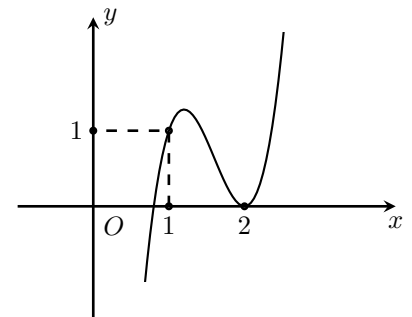
- (A) 3. (B) 2. (C) 4. (D) 5.



**CÂU 21.**

Cho hàm số bậc ba  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Hỏi đồ thị hàm số  $g(x) = \frac{(x^2 - 3x + 2)\sqrt{x-1}}{x[f^2(x) - f(x)]}$  có bao nhiêu tiệm cận đứng?

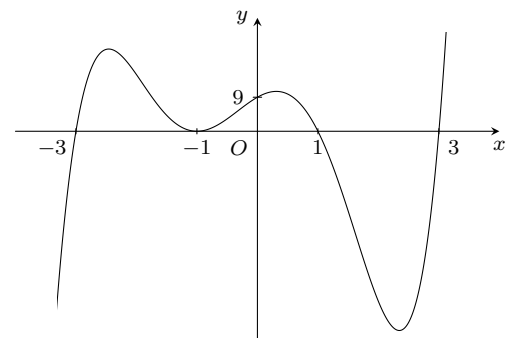
- (A) 5. (B) 6. (C) 3. (D) 4.



**CÂU 22.**

Cho hàm số  $f(x) = (x+3)(x+1)^2(x-1)(x-3)$  có đồ thị như hình vẽ. Đồ thị hàm số  $g(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{f^2(x) - 9f(x)}$  có bao nhiêu tiệm cận đứng và tiệm cận ngang?

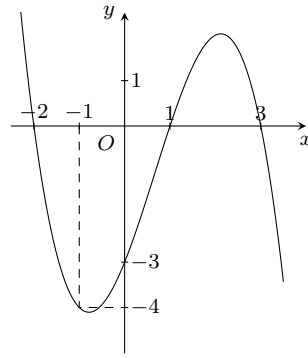
- (A) 3. (B) 4. (C) 9. (D) 8.



**CÂU 23.**

Cho hàm số bậc ba  $y = f(x)$  có đồ thị như hình vẽ bên. Đồ thị hàm số  $g(x) = \frac{x\sqrt{x+1}}{f(x)[f^2(x) - 16]}$  có bao nhiêu tiệm cận đứng?

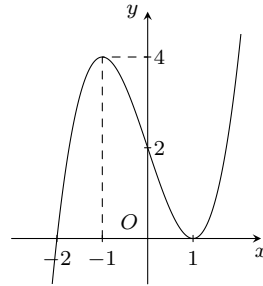
(A) 4. (B) 5. (C) 6. (D) 7.



**CÂU 24.**

Cho  $y = f(x)$  là hàm số đa thức có đồ thị như hình vẽ bên. Đặt  $g(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{[f(x)]^2 - 2f(x)}$  có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

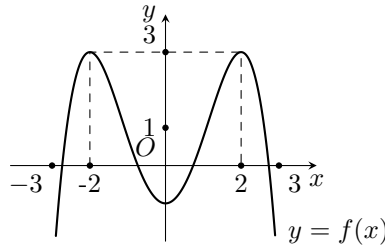
(A) 5. (B) 3. (C) 4. (D) 2.



**CÂU 25.**

Cho hàm số  $f(x)$  có đồ thị như hình bên. Số đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số  $y = \frac{(x^2 - 4)(x^2 + 2x)}{[f(x)]^2 - 4f(x) + 3}$  là

(A) 4. (B) 5. (C) 3. (D) 2.



## Bài 4. KHẢO SÁT SỰ BIẾN THIÊN VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ

### A. LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

#### 1. Khảo sát hàm số $y = f(x)$

✔ **Bước 1.** Tìm tập xác định của hàm số.

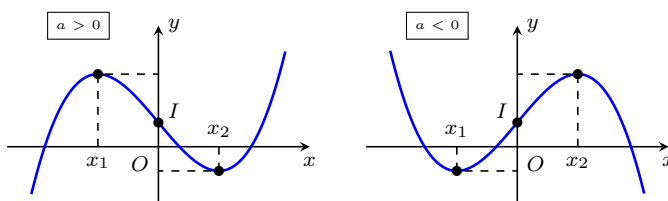
✔ **Bước 2.** Khảo sát sự biến thiên của hàm số

- Tính đạo hàm  $y'$ . Tìm các điểm mà tại đó  $y'$  bằng 0 hoặc đạo hàm không tồn tại.
- Tìm các giới hạn tại vô cực, giới hạn vô cực và tìm tiệm cận của đồ thị hàm số.
- Lập bảng biến thiên; xác định chiều biến thiên và cực trị của hàm số.

✔ **Bước 3.** Cho thêm điểm và vẽ đồ thị của hàm số dựa vào bảng biến thiên.

#### 2. Hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$

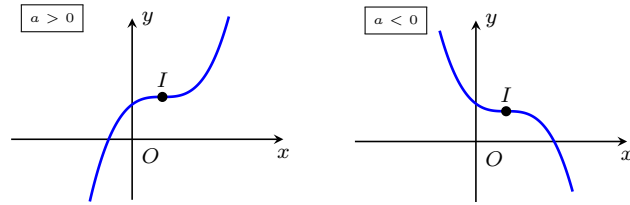
✔ **TH1.**  $y' = 0$  có hai nghiệm phân biệt  $x_1$  và  $x_2$ . Khi đó, hàm số có hai điểm cực trị  $x = x_1$  và  $x = x_2$ .



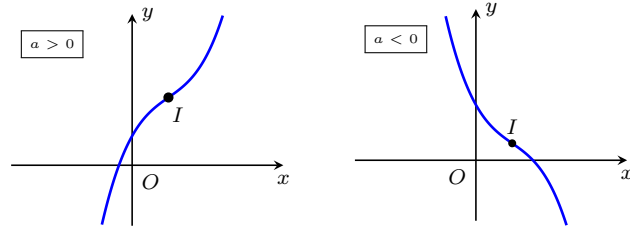
✔ **TH2.**  $y' = 0$  có nghiệm kép  $x_0$ . Khi đó, hàm số không có cực trị.

### QUICK NOTE

QUICK NOTE



☑ **TH3.**  $y' = 0$  vô nghiệm. Khi đó, hàm số không có cực trị.



GHI NHỚ

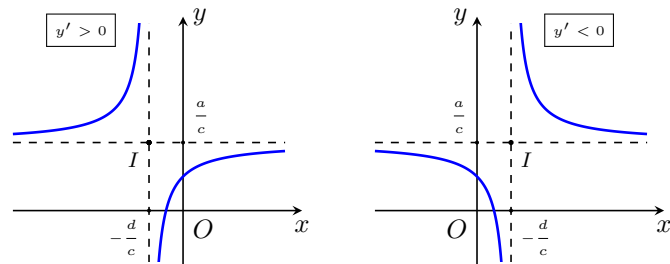
- ① Liên hệ tổng tích hai nghiệm của  $y'$   $\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{2b}{3a} \\ x_1 x_2 = \frac{c}{3a} \end{cases}$
- ② Tâm đối xứng của đồ thị là trung điểm của đoạn nối 2 điểm cực trị. Hoành độ tâm đối xứng là nghiệm phương trình  $y'' = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{b}{3a}$ .

**3. Hàm số  $y = \frac{ax + b}{cx + d}$  ( $c \neq 0, ad - bc \neq 0$ )**

☑ Tập xác định  $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{d}{c} \right\}$ ; Đạo hàm  $y' = \frac{ad - bc}{(cx + d)^2}$ .

☑ Đồ thị nhận giao điểm của hai đường tiệm cận làm tâm đối xứng.

☑ Hình dạng đồ thị:



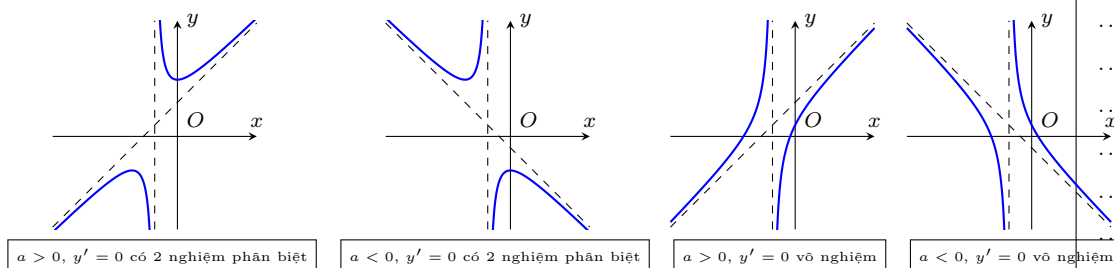
GHI NHỚ

- ① Tiệm cận đứng  $x = -\frac{d}{c}$ .
- ② Tiệm cận ngang  $y = \frac{a}{c}$ .
- ③ Giao với  $Ox$ :  $y = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{a}$ .
- ④ Giao với  $Oy$ :  $x = 0 \Rightarrow y = \frac{b}{d}$ .

**4. Hàm số  $y = \frac{ax^2 + bx + c}{dx + e}$  ( $a \neq 0, e \neq 0$ ) (đa thức tử không chia hết cho đa thức mẫu)**

☑ Tập xác định  $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{e}{d} \right\}$ ; Đạo hàm  $y' = \frac{adx^2 + 2aex + be - cd}{(dx + e)^2}$ .

- ✔ Hàm số 2 điểm cực trị khi  $y' = 0$  có 2 nghiệm phân biệt; Hàm số không có cực trị khi  $y' = 0$  vô nghiệm.
- ✔ Đồ thị nhận giao điểm của tiệm cận đứng và tiệm cận xiên làm tâm đối xứng.
- ✔ Hình dạng đồ thị:



## B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

16

Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số bậc ba

Ta khảo sát theo sơ đồ đã nhắc đến ở phần lý thuyết.

### BÀI TẬP TỰ LUẬN

**VÍ DỤ 1.** Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị các hàm số sau:

- a)  $y = x^3 - 3x^2 + 1$ ;                      b)  $y = -2x^3 - 3x^2 + 1$ ;  
 c)  $y = x^3 + 3x^2 + 3x + 2$ ;                d)  $y = x^3 - 3x^2 + 4x - 2$ .

### BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

**PHẦN I.** Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.

#### CÂU 1.

Bảng biến thiên ở hình bên là của một trong bốn hàm số sau đây. Hỏi đó là hàm số nào?

- Ⓐ  $y = -x^3 - 2x^2 + 5$ .  
 Ⓑ  $y = x^3 - 3x^2 + 5$ .  
 Ⓒ  $y = -x^3 - 3x + 5$ .  
 Ⓓ  $y = x^3 + 3x^2 + 5$ .

$x$	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$	$-\infty$	5	1	$+\infty$

#### CÂU 2.

Bảng biến thiên ở hình bên là của một trong bốn hàm số sau đây. Hỏi đó là hàm số nào?

- Ⓐ  $y = -x^3 + 3x^2$ .  
 Ⓑ  $y = x^3 - 3x^2 - 1$ .  
 Ⓒ  $y = x^4 + 2x^2 + 1$ .  
 Ⓓ  $y = -x^3 + 3x^2 + 1$ .

$x$	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$y'$		-	0	+
$y$	$+\infty$	1	5	$-\infty$

#### CÂU 3.

Bảng biến thiên ở hình bên là của một trong bốn hàm số sau đây. Hỏi đó là hàm số nào?

- Ⓐ  $y = x^3 - 3x^2 + x + 3$ .    Ⓑ  $y = x^3 - 3x + 4$ .  
 Ⓒ  $y = x^3 - 3x^2 + 3x + 1$ .    Ⓓ  $y = x^3 + 3x^2 + 5$ .

$x$	$-\infty$	1	$+\infty$
$y'$	+	0	+
$y$	$-\infty$	2	$+\infty$

### QUICK NOTE

QUICK NOTE

CÂU 4.

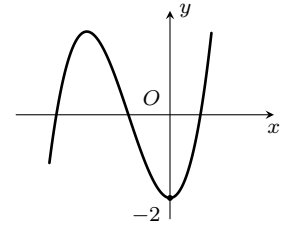
Đường cong bên là đồ thị của một trong bốn hàm số đã cho sau đây. Hỏi đó là hàm số nào?

(A)  $y = -x^3 + x^2 - 2$ .

(B)  $y = x^3 + 3x^2 - 2$ .

(C)  $y = x^3 - 3x + 2$ .

(D)  $y = x^2 - 3x - 2$ .



CÂU 5.

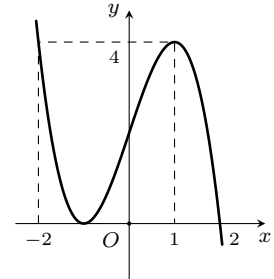
Đường cong bên là đồ thị của một trong bốn hàm số đã cho sau đây. Hỏi đó là hàm số nào?

(A)  $y = x^3 + 3x - 2$ .

(B)  $y = x^3 - 3x + 2$ .

(C)  $y = -x^3 + 3x + 2$ .

(D)  $y = -x^3 - 3x - 2$ .



CÂU 6.

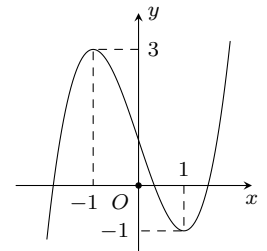
Đường cong bên là đồ thị của một trong bốn hàm số đã cho sau đây. Hỏi đó là hàm số nào?

(A)  $y = -x^3 + 3x^2 + 1$ .

(B)  $y = -x^2 - 3x - 1$ .

(C)  $y = x^4 + 2x^2 - 1$ .

(D)  $y = x^3 - 3x + 1$ .



CÂU 7.

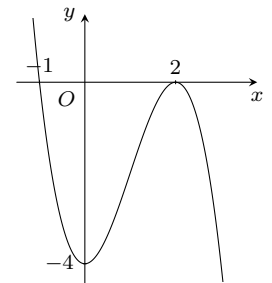
Đường cong bên là đồ thị của một trong bốn hàm số đã cho sau đây. Hỏi đó là hàm số nào?

(A)  $y = x^3 - 3x^2 - 4$ .

(B)  $y = -x^3 - 4$ .

(C)  $y = -x^3 + 3x^2 - 2$ .

(D)  $y = -x^3 + 3x^2 - 4$ .



CÂU 8.

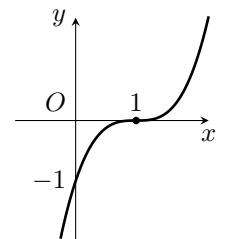
Đường cong bên là đồ thị của một trong bốn hàm số đã cho sau đây. Hỏi đó là hàm số nào?

(A)  $y = x^3 - 1$ .

(B)  $y = (x + 1)^3$ .

(C)  $y = (x - 1)^3$ .

(D)  $y = x^3 + 1$ .



CÂU 9.

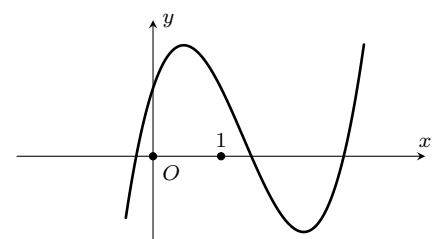
Cho hàm số  $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$  có đồ thị như hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây là đúng?

(A)  $a > 0, b > 0, c > 0, d > 0$ .

(B)  $a < 0, b < 0, c > 0, d > 0$ .

(C)  $a > 0, b < 0, c < 0, d > 0$ .

(D)  $a > 0, b < 0, c > 0, d > 0$ .

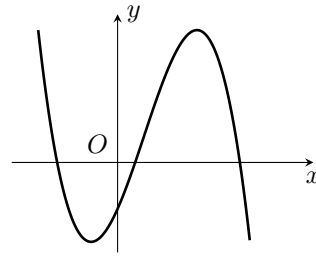


CÂU 10.



Cho hàm số  $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$  có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây đúng?

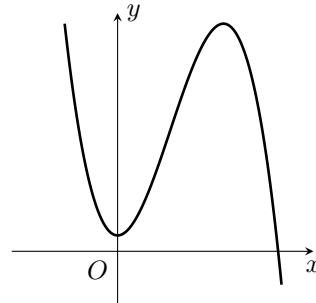
- Ⓐ  $a < 0, b < 0, c < 0, d > 0$ .  
 Ⓑ  $a < 0, b > 0, c < 0, d > 0$ .  
 Ⓒ  $a < 0, b > 0, c > 0, d < 0$ .  
 Ⓓ  $a < 0, b < 0, c > 0, d < 0$ .



**CÂU 11.**

Cho hàm số  $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$  có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- Ⓐ  $a < 0, b > 0, c > 0, d > 0$ .  
 Ⓑ  $a < 0, b < 0, c = 0, d > 0$ .  
 Ⓒ  $a < 0, b > 0, c = 0, d > 0$ .  
 Ⓓ  $a > 0, b < 0, c > 0, d > 0$ .



**CÂU 12.**

Cho hàm số  $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$  có bảng biến thiên như hình bên. Trong các hệ số  $a, b, c$  và  $d$  có bao nhiêu số âm?

- Ⓐ 2. Ⓑ 1. Ⓒ 4. Ⓓ 3.

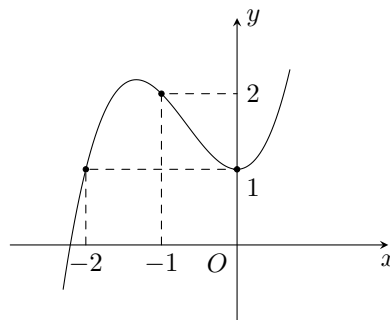
$x$	$-\infty$	$-1$	$2$	$+\infty$		
$f'(x)$		$-$	$0$	$+$	$0$	$-$
$f(x)$						

**PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.**

**CÂU 13.**

Cho hàm số  $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  có đồ thị như hình vẽ.

Mệnh đề	Đ	S
a) Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 1$ .		
b) Đồ thị hàm số cắt trục $Oy$ tại điểm $(0; 1)$ .		
c) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -1)$ .		
d) $2a + 3b + c = 9$ .		

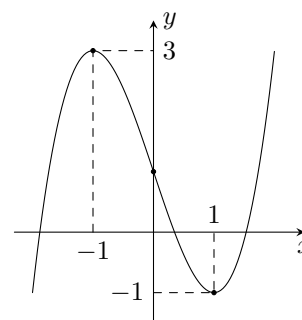


**CÂU 14.**

Cho hàm số bậc ba  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  có đồ thị như hình vẽ.

Tính tổng  $T =$ .

Mệnh đề	Đ	S
a) Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm $(0; 1)$ .		
b) Đường thẳng đi qua điểm $(0; 1)$ luôn cắt đồ thị tại ba điểm phân biệt có hoành độ lập thành 1 cấp số cộng.		
c) $a - b + c + d = -1$ .		
d) Đồ thị hàm số đi qua điểm $(3; 18)$ .		



**QUICK NOTE**

## QUICK NOTE

### CÂU 15.

Cho hàm số  $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  có bảng biến thiên như hình bên.

Mệnh đề	Đ	S
a) Hàm số đạt giá trị lớn nhất là 4.		
b) Đường thẳng $y = 2$ cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại 3 điểm phân biệt.		
c) Trong bốn hệ số $a, b, c, d$ có đúng hai số âm.		
d) Đồ thị hàm số đi qua điểm $(-4; 20)$ .		

$x$	$-\infty$	$-2$	$0$	$+\infty$		
$y'$		$-$	$0$	$+$	$0$	$-$
$y$	$+\infty$		$0$	$4$		$-\infty$

17

### Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số phân thức hữu tỉ bậc I/I

Ta khảo sát theo sơ đồ

❖ **Bước 1.** Tìm tập xác định  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{d}{c} \right\}$ .

❖ **Bước 2.** Khảo sát sự biến thiên của hàm số

— Tính đạo hàm  $y' = \frac{ad - cb}{(cx + d)^2}$ .

— Tìm các giới hạn tại vô cực, giới hạn vô cực và tìm tiệm cận của đồ thị hàm số.

— Lập bảng biến thiên; xác định chiều biến thiên và cực trị của hàm số.

❖ **Bước 3.** Cho thêm điểm và vẽ đồ thị của hàm số dựa vào bảng biến thiên.

### BÀI TẬP TỰ LUẬN

**VÍ DỤ 1.** Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị các hàm số sau:

a)  $y = \frac{x-1}{x+1};$

b)  $y = \frac{2x+1}{x-1};$

c)  $y = \frac{5+x}{2-x}.$

### BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

**PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.**

#### CÂU 1.

Hàm số nào trong bốn hàm số dưới đây có bảng biến thiên như hình bên?

Ⓐ  $y = \frac{2x-1}{x+3}.$       Ⓑ  $y = \frac{4x-6}{x-2}.$   
 Ⓒ  $y = \frac{3-x}{2-x}.$       Ⓓ  $y = \frac{x+5}{x-2}.$

$x$	$-\infty$	$2$	$+\infty$
$y'$		$-$	$-$
$y$	$1$	$+\infty$	$1$

#### CÂU 2.

Hàm số nào trong bốn hàm số dưới đây có bảng biến thiên như hình bên?

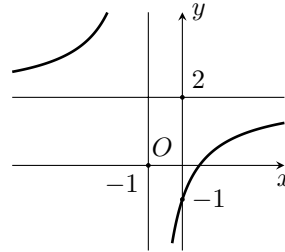
- (A)  $y = \frac{x-1}{x-3}$ . (B)  $y = \frac{x-1}{-x-3}$ .  
(C)  $y = \frac{x+5}{-x+3}$ . (D)  $y = \frac{1}{x-3}$ .

$x$	$-\infty$	3	$+\infty$
$y'$		+	+
$y$	-1	$+\infty$	-1

**CÂU 3.**

Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của một trong bốn hàm số sau. Hỏi đó là hàm số nào?

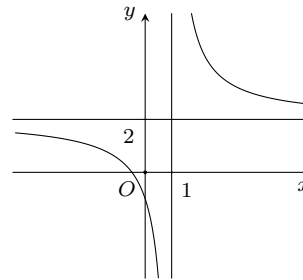
- (A)  $y = \frac{2x-1}{x+1}$ . (B)  $y = \frac{1-2x}{x+1}$ .  
(C)  $y = \frac{2x+1}{x-1}$ . (D)  $y = \frac{2x+1}{x+1}$ .



**CÂU 4.**

Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của một trong bốn hàm số sau. Hỏi đó là hàm số nào?

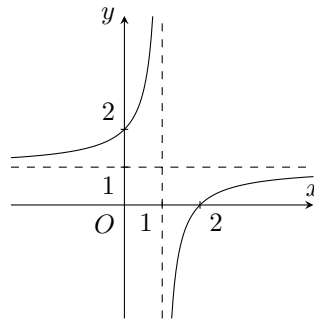
- (A)  $y = \frac{x-1}{x-2}$ . (B)  $y = x+2$ .  
(C)  $y = x^4 - 3x^2 + 1$ . (D)  $y = \frac{2x+1}{x-1}$ .



**CÂU 5.**

Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của một trong bốn hàm số sau. Hỏi đó là đồ thị của hàm số nào?

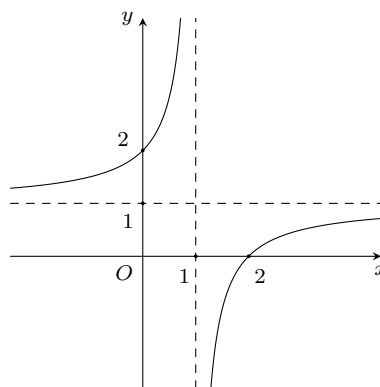
- (A)  $y = \frac{x-2}{x+1}$ . (B)  $y = \frac{x+2}{x-2}$ .  
(C)  $y = \frac{x-2}{x-1}$ . (D)  $y = \frac{x+2}{x-1}$ .



**CÂU 6.**

Cho hàm số  $y = \frac{ax-b}{x+c}$  ( $a, b, c \in \mathbb{R}$ ) có đồ thị như hình vẽ bên. Giá trị của biểu thức  $2a+b-3c$  bằng

- (A) -3. (B) 4.  
(C) 7. (D) -5.

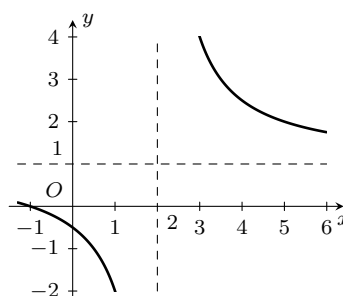


**CÂU 7.**

Cho hàm số  $y = \frac{ax+1}{bx-2}$  có đồ thị như hình vẽ. Tính

$T = a + b$

- (A)  $T = 2$ . (B)  $T = 0$ .  
(C)  $T = -1$ . (D)  $T = 3$ .



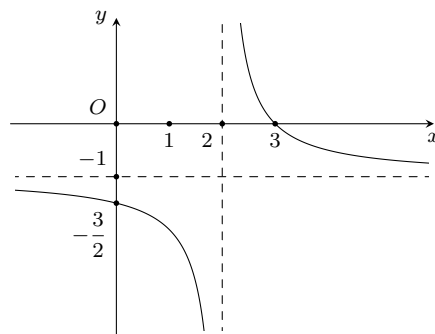
**QUICK NOTE**

QUICK NOTE

CÂU 8.

Cho hàm số  $y = \frac{ax - b}{cx + 2}$  ( $a, b, c \in \mathbb{R}; c \neq 0$ ) có đồ thị như hình vẽ bên. Giá trị của biểu thức  $a + b + c$  bằng

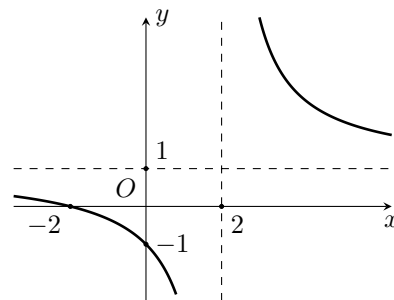
- (A) -3. (B) 5. (C) -4. (D) 3.



CÂU 9.

Hãy xác định  $a, b$  để hàm số  $y = \frac{2 - ax}{x + b}$  có đồ thị như hình vẽ?

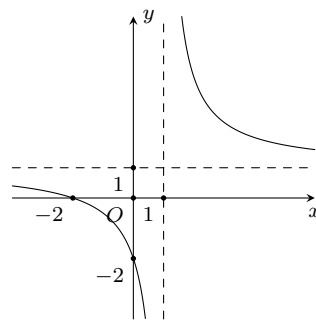
- (A)  $a = 1; b = -2$ . (B)  $a = b = 2$ .  
(C)  $a = -1; b = -2$ . (D)  $a = b = -2$ .



CÂU 10.

Cho đồ thị hàm số  $y = \frac{ax - b}{x - 1}$  như hình vẽ. Tìm khẳng định đúng?

- (A)  $a < 0, b < 0$ . (B)  $0 < b < a$ .  
(C)  $b < 0 < a$ . (D)  $a < b < 0$ .



CÂU 11.

Cho hàm số  $y = \frac{ax + 4}{bx + c}$  ( $a, b, c \in \mathbb{R}$ ) có bảng biến thiên như sau. Trong các số  $a, b, c$  có bao nhiêu số dương?

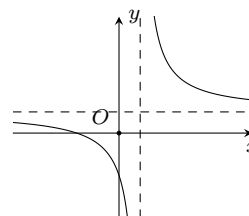
- (A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

$x$	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	+		+
$f(x)$	3	$+\infty$	3

CÂU 12.

Cho hàm số  $y = \frac{ax + b}{cx + d}$  với  $a > 0$  có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây đúng?

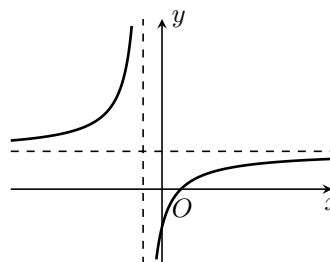
- (A)  $b < 0, c < 0, d < 0$ . (B)  $b > 0, c < 0, d < 0$ .  
(C)  $b < 0, c > 0, d < 0$ . (D)  $b > 0, c > 0, d < 0$ .



CÂU 13.

Hình vẽ bên là đồ thị của hàm số  $y = \frac{ax + b}{cx + d}$ . Mệnh đề nào sau đây là đúng?

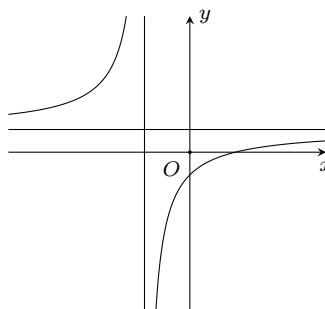
- (A)  $ab > 0, bd < 0$ . (B)  $ab < 0, ad > 0$ .  
(C)  $ab < 0, ad < 0$ . (D)  $bd > 0, ad > 0$ .



**CÂU 14.**

Hình vẽ dưới đây là đồ thị hàm số  $y = \frac{ax+b}{cx+d}$   $ac \neq 0$ ,  $ad - cb \neq 0$ . Mệnh đề nào sau đây đúng?

- (A)  $ad > 0$  và  $ab < 0$ . (B)  $bd < 0$  và  $ab > 0$ .  
(C)  $ad < 0$  và  $ab < 0$ . (D)  $ad > 0$  và  $bd > 0$ .

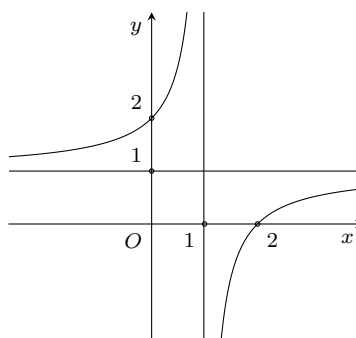


**PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.**

**CÂU 15.**

Cho hàm số  $y = \frac{x+a}{bx+c}$ ,  $(a, b, c \in \mathbb{Z})$ .

Mệnh đề	Đ	S
a) Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = 1$ .		
b) Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y = 0$ .		
c) Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ .		
d) $a - 3b - 2c = -3$ .		



**CÂU 16.** Cho hàm số  $f(x) = \frac{ax-1}{bx+c}$   $(a, b, c \in \mathbb{R})$  có bảng biến thiên như sau.

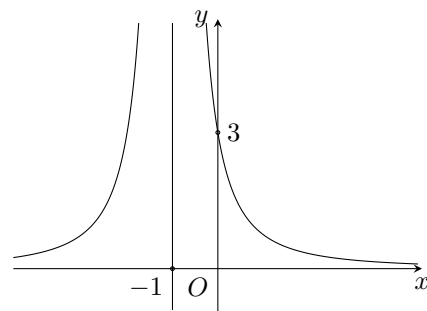
$x$	$-\infty$	3	$+\infty$
$f'(x)$	—		—
$f(x)$	$\frac{1}{2} \searrow -\infty$	$+\infty \searrow \frac{1}{2}$	

Mệnh đề	Đ	S
a) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty, \frac{1}{2})$ .		
b) Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = \frac{1}{2}$ .		
c) Đồ thị giao với trục hoành tại điểm có hoành độ nhỏ hơn 3.		
d) $\begin{cases} b > \frac{2}{3} \\ b < 0 \end{cases}$		

**CÂU 17.**

QUICK NOTE

Cho hàm số  $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$  với  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  có đồ thị hàm số  $y = f'(x)$  nhận  $x = -1$  làm tiệm cận đứng như hình vẽ bên. Biết rằng giá trị lớn nhất của hàm số  $y = f(x)$  trên đoạn  $[-3; -2]$  bằng 8.



Mệnh đề	Đ	S
a) $f'(0) = 3$ .		
b) Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-1; +\infty)$ .		
c) Giá trị của $f(-3)$ bằng 8.		
d) Giá trị của $f(2)$ bằng 4.		

18 Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số phân thức hữu tỉ bậc II/I

✓ **Bước 1.** Tập xác định  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{n}{m} \right\}$ .

✓ **Bước 2.** Khảo sát sự biến thiên của hàm số

— Tính đạo hàm  $y' = \frac{am \cdot x^2 + 2an \cdot x + b.n - m.c}{(mx + n)^2}$ . Giải  $y' = 0 \Leftrightarrow am \cdot x^2 + 2an \cdot x + b.n - m.c = 0$ , tìm nghiệm.

— Tìm các giới hạn tại vô cực, giới hạn vô cực và tìm tiệm cận của đồ thị hàm số.

— Lập bảng biến thiên; xác định chiều biến thiên và cực trị của hàm số.

✓ **Bước 3.** Cho thêm điểm và vẽ đồ thị của hàm số dựa vào bảng biến thiên.

BÀI TẬP TỰ LUẬN

**VÍ DỤ 1.** Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị các hàm số sau:

a)  $y = \frac{x^2 + 2x - 2}{x - 1}$ ;

b)  $y = -x + 2 - \frac{1}{x + 1}$ ;

c)  $y = \frac{-x^2 - 3x + 4}{x + 2}$ .

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

**PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.**

**CÂU 1.**

Bảng biến thiên sau là của một trong bốn hàm số sau. Hỏi đó là hàm số nào?

**A**  $y = \frac{x^2 - 3x + 4}{-x - 4}$ .

**B**  $y = \frac{x^2 - 4x + 4}{-x - 4}$ .

**C**  $y = \frac{x^2 - 5x + 4}{x + 4}$ .

**D**  $y = \frac{x^2 - 4x + 4}{x + 4}$ .

$x$	$-\infty$	$-10$	$-4$	$2$	$+\infty$	
$y'$	$-$	$0$	$+$	$+$	$0$	$-$
$y$	$+\infty$	$\searrow$	$\nearrow$	$0$	$\searrow$	$-\infty$
			$24$			

**CÂU 2.**

Bảng biến thiên sau là của một trong bốn hàm số sau. Hỏi đó là hàm số nào?

- (A)  $y = \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 3}$ .  
 (B)  $y = \frac{-x^2 - x + 2}{x - 3}$ .  
 (C)  $y = \frac{-x^2 + x + 2}{x - 3}$ .  
 (D)  $y = \frac{x^2 - 4x + 4}{-x + 3}$ .

**CÂU 3.**

Bảng biến thiên sau là của một trong bốn hàm số sau. Hỏi đó là hàm số nào?

- (A)  $y = \frac{x^2 - 2x + 1}{x + 4}$ .  
 (B)  $y = \frac{x^2 - 4x + 2}{x + 4}$ .  
 (C)  $y = \frac{x^2 - x + 2}{x - 4}$ .  
 (D)  $y = \frac{-x - 4}{x^2 - 3x + 4}$ .

**CÂU 4.**

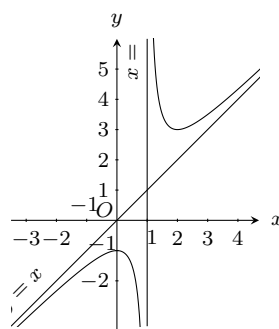
Bảng biến thiên sau là của một trong bốn hàm số sau. Hỏi đó là hàm số nào?

- (A)  $y = \frac{x^2 - 3}{x - 2}$ .  
 (B)  $y = \frac{x^2 - 4x + 2}{x - 2}$ .  
 (C)  $y = \frac{x^2 - x}{x - 2}$ .  
 (D)  $y = \frac{x^2 - 4x + 5}{x - 2}$ .

**CÂU 5.**

Đồ thị hình bên là của một trong bốn hàm số sau. Hỏi đó là hàm số nào?

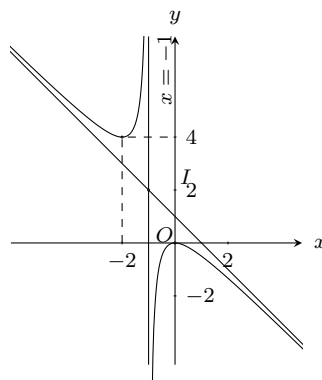
- (A)  $y = \frac{x^2 + x - 1}{x - 1}$ .  
 (B)  $y = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$ .  
 (C)  $y = \frac{x^2 - 4x - 1}{-x + 1}$ .  
 (D)  $y = \frac{x^2 - 3x - 1}{-x + 1}$ .



**CÂU 6.**

Đồ thị hình bên là của một trong bốn hàm số sau. Hỏi đó là hàm số nào?

- (A)  $y = \frac{x^2 - x}{x + 1}$ .  
 (B)  $y = \frac{x^2 - 3x}{x + 1}$ .  
 (C)  $y = \frac{x^2 + 1x + 2}{x + 1}$ .  
 (D)  $y = \frac{-x^2}{x + 1}$ .



**CÂU 7.**

**QUICK NOTE**

QUICK NOTE

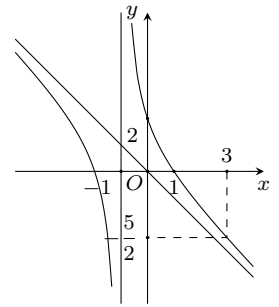
Đồ thị hình bên là của một trong bốn hàm số sau. Hỏi đó là hàm số nào?

**A**  $y = \frac{x^2 - x + 4}{x + 1}$ .

**B**  $y = \frac{x^2 - 2x + 3}{x + 1}$ .

**C**  $y = \frac{-x^2 - x + 2}{x + 1}$ .

**D**  $y = \frac{x^2 + x - 1}{x + 1}$ .



**CÂU 8.**

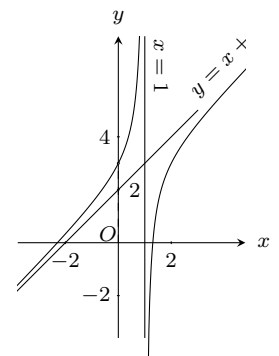
Đồ thị hình bên là của một trong bốn hàm số sau. Hỏi đó là hàm số nào?

**A**  $y = \frac{x^2 + 3}{x - 1}$ .

**B**  $y = \frac{x^2 + x - 3}{x - 1}$ .

**C**  $y = \frac{x^2 - 2x + 3}{-x + 1}$ .

**D**  $y = \frac{x^2 + 3}{-x + 1}$ .

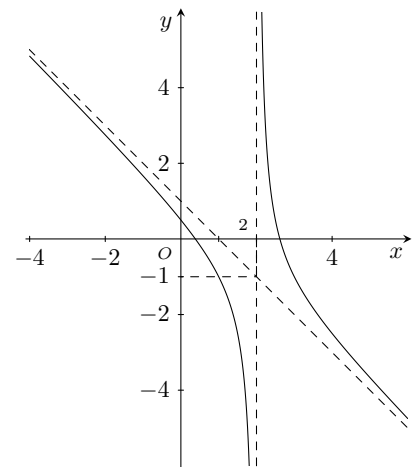


**PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.**

**CÂU 9.**

Cho hàm số  $y = \frac{ax^2 + bx + c}{mx + n}$  có đồ thị như hình bên.

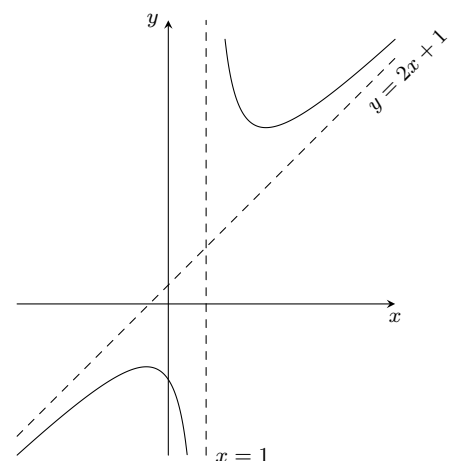
Mệnh đề	Đ	S
a) Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ .		
b) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 2)$ và $(2; +\infty)$ .		
c) Điểm $I(2; 1)$ là tâm đối xứng của đồ thị.		
d) Hệ số $a$ và $m$ trái dấu.		



**CÂU 10.**

Cho hàm số  $y = \frac{ax^2 + bx + c}{x + n}$  có đồ thị như hình bên.

Mệnh đề	Đ	S
a) Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ .		
b) Điểm $I(1; 2)$ là tâm đối xứng của đồ thị.		
c) $a + 2b = 4$ .		
d) Đồ thị qua điểm $(2; 10)$ khi $c = 4$ .		





19

Sự tương giao của hai đồ thị

✓ Xác định tọa độ giao điểm của hai đồ thị  $y = f(x)$  và  $y = g(x)$ :

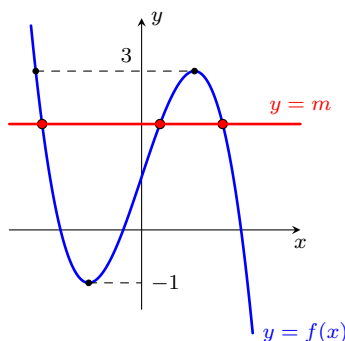
- ① Giải phương trình hoành độ giao điểm  $f(x) = g(x)$ , tìm các nghiệm  $x_0 \in \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g$ .
- ② Với  $x_0$  vừa tìm, thay vào một trong hai hàm số ban đầu để tìm  $y_0$ .
- ③ Kết luận giao điểm  $(x_0; y_0)$ .

✓ Ứng dụng đồ thị để biện luận nghiệm phương trình:

(a) Xét phương trình  $f(x) = m$ , với  $m$  là tham số. Nghiệm của phương trình này có thể coi là hoành độ giao điểm của đồ thị  $y = f(x)$  (có định) với đường thẳng  $y = m$  (nằm ngang).

(b) Từ đó, để biện luận nghiệm phương trình  $f(x) = m$ , ta có thể thực hiện các bước như sau:

- Lập bảng biến thiên của hàm số  $y = f(x)$  trên miền xác định mà đề bài yêu cầu.
- Tịnh tiến đường thẳng  $y = m$  theo hướng "lên, xuống". Quan sát số giao điểm để quy ra số nghiệm tương ứng.



BÀI TẬP TỰ LUẬN

**VÍ DỤ 1.** Xác định tọa độ giao điểm của hai đồ thị hàm số sau:

a)  $y = x^3 - 2x^2 + x - 1$  và  $y = 1 - 2x$ ;      b)  $y = \frac{x+8}{x-2}$  và  $y = x + 2$ .

**VÍ DỤ 2.** Tìm tập hợp các giá trị thực của tham số  $m$  để đồ thị hàm số  $y = (x - 2)(x^2 + mx + m^2 - 3)$  cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt.

**VÍ DỤ 3.** Tìm tham số  $m$  để phương trình  $x^3 - 3x + 2 - m = 0$  có ba nghiệm phân biệt.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

**CÂU 1.** Đường thẳng  $y = x - 1$  cắt đồ thị hàm số  $y = x^3 - x^2 + x - 1$  tại hai điểm. Tìm tổng tung độ các giao điểm đó.

- (A) -3.      (B) 2.      (C) 0.      (D) -1.

**CÂU 2.** Số giao điểm của đồ thị hàm số  $y = (x - 1)(x^2 - 3x + 2)$  và trục hoành là

- (A) 0.      (B) 1.      (C) 2.      (D) 3.

**CÂU 3.** Đồ thị hàm số  $y = x^3 - 3x^2 + 2x - 1$  cắt đồ thị hàm số  $y = x^2 - 3x + 1$  tại hai điểm phân biệt  $A, B$ . Tính độ dài  $AB$ .

- (A)  $AB = 3$ .      (B)  $AB = 2\sqrt{2}$ .      (C)  $AB = 2$ .      (D)  $AB = 1$ .

**CÂU 4.** Đồ thị của hàm số  $y = \frac{x-1}{x+1}$  cắt hai trục  $Ox$  và  $Oy$  tại  $A$  và  $B$ . Khi đó diện tích của tam giác  $OAB$  (với  $O$  là gốc tọa độ) bằng

- (A) 1.      (B)  $\frac{1}{4}$ .      (C) 2.      (D)  $\frac{1}{2}$ .

**CÂU 5.** Biết đường thẳng  $y = x - 2$  cắt đồ thị hàm số  $y = \frac{x}{x-1}$  tại 2 điểm phân biệt  $A, B$ . Tìm hoành độ trọng tâm tam giác  $OAB$  với  $O$  là gốc tọa độ.

- (A)  $\frac{2}{3}$ .      (B) 2.      (C)  $\frac{4}{3}$ .      (D) 4.

QUICK NOTE

QUICK NOTE

**CÂU 6.** Gọi  $M, N$  là giao điểm của đường thẳng  $y = x + 1$  và đường cong  $y = \frac{2x + 4}{x - 1}$ . Tìm hoành độ trung điểm của đoạn thẳng  $MN$ .

- (A)  $x = -1$ . (B)  $x = 1$ . (C)  $x = -2$ . (D)  $x = 2$ .

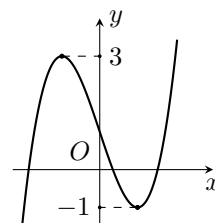
**CÂU 7.** Cho hàm số  $y = \frac{2x}{x + 1}$  có đồ thị  $(C)$ . Gọi  $A, B$  là giao điểm của đường thẳng  $d: y = x$  với đồ thị  $(C)$ . Tính độ dài đoạn  $AB$ .

- (A)  $AB = \sqrt{2}$ . (B)  $AB = \frac{\sqrt{2}}{2}$ . (C)  $AB = 1$ . (D)  $AB = 2$ .

**CÂU 8.**

Cho hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị như hình vẽ. Số nghiệm của phương trình  $2f(x) - 3 = 0$  là

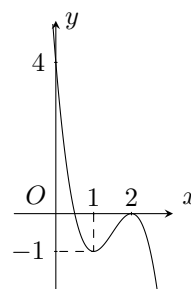
- (A) 2. (B) 1. (C) 0. (D) 3.



**CÂU 9.**

Cho hàm số  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  ( $d \neq 0$ ) có đồ thị như hình vẽ bên. Số nghiệm của phương trình  $3f(x) - 1 = 0$  bằng

- (A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3.



**CÂU 10.**

Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như sau. Số giao điểm của đồ thị hàm số  $y = f(x)$  với trục hoành là

- (A) 1. (B) 0. (C) 2. (D) 3.

$x$	$-\infty$	$0$	$1$	$+\infty$		
$y'$	$-$	$0$	$+$	$0$	$-$	
$y$	$+\infty$	$\searrow$	$\nearrow$	$3$	$\searrow$	$-\infty$

**CÂU 11.**

Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $(-\infty; +\infty)$  và có bảng biến thiên như hình bên. Số nghiệm thực của phương trình  $2|f(x)| = 7$  bằng

- (A) 3. (B) 2. (C) 4. (D) 2.

$x$	$-\infty$	1	2	$+\infty$				
$y'$		+	0	-	0	+		
$y$								
	$-\infty$		$\nearrow$	5	$\searrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$

**CÂU 12.**

Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  và có bảng biến thiên như hình bên. Hỏi phương trình  $3|f(x)| - 10 = 0$  có bao nhiêu nghiệm?

- (A) 2 nghiệm. (B) 4 nghiệm. (C) 3 nghiệm. (D) 1 nghiệm.

$x$	$-\infty$	$0$	$1$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$		$-$ $0$ $+$	
$f(x)$	$2$ $\searrow$ $-\infty$		$+\infty$ $\searrow$ $3$ $\nearrow$ $+\infty$	

**CÂU 13.**

Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định và liên tục trên  $\mathbb{R}$ , có bảng biến thiên như sau. Số nghiệm của phương trình  $2[f(x)]^2 - 3f(x) + 1 = 0$  là

- (A) 2. (B) 3. (C) 6. (D) 0.

$x$	$-\infty$	$-1$	$1$	$+\infty$			
$y'$	$+$	$0$	$-$	$0$	$+$		
$y$	$1$	$\nearrow$	$3$	$\searrow$	$\frac{1}{3}$	$\nearrow$	$1$

**CÂU 14.**

Cho hàm số  $f(x)$  có bảng biến thiên như hình bên. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  để phương trình  $f(x) = m + 1$  có ba nghiệm thực phân biệt.

$x$	$-\infty$	$-1$	$3$	$+\infty$	
$y'$	$+$	$0$	$-$	$0$	$+$
$y$	$-\infty$	$4$	$-2$	$+\infty$	

- A**  $-3 \leq m \leq 3$ .  
**B**  $-2 \leq m \leq 4$ .  
**C**  $-2 < m < 4$ .  
**D**  $-3 < m < 3$ .

#### CÂU 15.

Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như hình bên. Phương trình  $f(4x - x^2) - 2 = 0$  có bao nhiêu nghiệm thực?

$x$	$-\infty$	$0$	$4$	$+\infty$	
$y'$	$-$	$0$	$+$	$0$	$-$
$y$	$+\infty$	$-1$	$3$	$-\infty$	

- A** 2. **B** 6. **C** 0. **D** 4.

## Bài 5. ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM VÀ KHẢO SÁT HÀM SỐ ĐỂ GIẢI QUYẾT MỘT SỐ BÀI TOÁN THỰC TIỄN

### A. LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

#### 1. Tốc độ thay đổi của một đại lượng

Ta có đạo hàm  $f'(a)$  là tốc độ thay đổi tức thời của đại lượng  $y = f(x)$  đối với  $x$  tại điểm  $x = a$ . Dưới đây, chúng ta xem xét một số ứng dụng của ý tưởng này đối với vật lí, hoá học, sinh học và kinh tế:

- ☑ Nếu  $s = s(t)$  là hàm vị trí của một vật chuyển động trên một đường thẳng thì  $v = s'(t)$  biểu thị vận tốc tức thời của vật (tốc độ thay đổi của độ dịch chuyển theo thời gian). Tốc độ thay đổi tức thời của vận tốc theo thời gian là gia tốc tức thời của vật:

$$a(t) = v'(t) = s''(t).$$

- ☑ Nếu  $C = C(t)$  là nồng độ của một chất tham gia phản ứng hoá học tại thời điểm  $t$ , thì  $C'(t)$  là tốc độ phản ứng tức thời (tức là độ thay đổi nồng độ) của chất đó tại thời điểm  $t$ .
- ☑ Nếu  $P = P(t)$  là số lượng cá thể trong một quần thể động vật hoặc thực vật tại thời điểm  $t$ , thì  $P'(t)$  biểu thị tốc độ tăng trưởng tức thời của quần thể tại thời điểm  $t$ .
- ☑ Nếu  $C = C(x)$  là hàm chi phí, tức là tổng chi phí khi sản xuất  $x$  đơn vị hàng hoá, thì tốc độ thay đổi tức thời  $C'(x)$  của chi phí đối với số lượng đơn vị hàng được sản xuất được gọi là chi phí biên.
- ☑ Về ý nghĩa kinh tế, chi phí biên  $C'(x)$  xấp xỉ với chi phí để sản xuất thêm một đơn vị hàng hoá tiếp theo, tức là đơn vị hàng hoá thứ  $x + 1$  (xem SGK Toán 11 tập hai, trang 87, bộ sách Kết nối tri thức với cuộc sống).

#### 2. Bài toán tối ưu hóa

Một trong những ứng dụng phổ biến nhất của đạo hàm là cung cấp một phương pháp tổng quát, hiệu quả để giải những bài toán tối ưu hoá. Trong mục này, chúng ta sẽ giải quyết những vấn đề thường gặp như tối đa hoá diện tích, khối lượng, lợi nhuận, cũng như tối thiểu hoá khoảng cách, thời gian, chi phí.

Khi giải những bài toán như vậy, khó khăn lớn nhất thường là việc chuyển đổi bài toán thực tế cho bằng lời thành bài toán tối ưu hoá toán học bằng cách thiết lập một hàm số phù hợp mà ta cần tìm giá trị lớn nhất hoặc giá trị nhỏ nhất của nó, trên miền biến thiên phù hợp của biến số.

Quy trình giải một số bài toán tối ưu hoá đơn giản:

- ☑ **Bước 1.** Xác định đại lượng  $Q$  mà ta cần làm cho giá trị của đại lượng ấy lớn nhất hoặc nhỏ nhất và biểu diễn nó qua các đại lượng khác trong bài toán.

#### QUICK NOTE

## QUICK NOTE

- ❖ **Bước 2.** Chọn một đại lượng thích hợp nào đó, kí hiệu là  $x$ , và biểu diễn các đại lượng khác ở **Bước 1** theo  $x$ . Khi đó, đại lượng  $Q$  sẽ là hàm số của một biến  $x$ . Tìm tập xác định của hàm số  $Q = Q(x)$ .
- ❖ **Bước 3.** Tìm giá trị lớn nhất hoặc giá trị nhỏ nhất của hàm số  $Q = Q(x)$  bằng các phương pháp đã biết và kết luận.

## B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

20

### Bài toán về tốc độ thay đổi của một đại lượng

**VÍ DỤ 1.** Khi bỏ qua sức cản của không khí, độ cao (mét) của một vật được phóng thẳng đứng lên trên từ điểm cách mặt đất 2 m với vận tốc ban đầu 24,5 m/s là  $h(t) = 2 + 24,5t - 4,9t^2$  (theo Vật lí đại cương, NXB Giáo dục Việt Nam, 2016).

- a) Tìm vận tốc của vật sau 2 giây.
- b) Khi nào vật đạt độ cao lớn nhất và độ cao lớn nhất đó là bao nhiêu?
- c) Khi nào thì vật chạm đất và vận tốc của vật lúc chạm đất là bao nhiêu?

**VÍ DỤ 2.** Xét phản ứng hóa học tạo ra chất  $C$  từ hai chất  $A$  và  $B$ :  $A + B \rightarrow C$ . Giả sử nồng độ của hai chất  $A$  và  $B$  bằng nhau  $[A] = [B] = a$  (mol/l). Khi đó, nồng độ của chất  $C$  theo thời gian  $t$  ( $t > 0$ ) được cho bởi công thức:  $[C] = \frac{a^2 K t}{a K t + 1}$  (mol/l), trong đó  $K$  là hằng số dương.

- a) Tìm tốc độ phản ứng ở thời điểm  $t > 0$ .
- b) Chứng minh nếu  $x = [C]$  thì  $x'(t) = K(a - x)^2$ .
- c) Nêu hiện tượng xảy ra với nồng độ các chất khi  $t \rightarrow +\infty$ .
- d) Nêu hiện tượng xảy ra với tốc độ phản ứng khi  $t \rightarrow +\infty$ .

**VÍ DỤ 3.** Giả sử số lượng của một quần thể nấm men tại môi trường nuôi cấy trong phòng thí nghiệm được mô hình hoá bằng hàm số  $P(t) = \frac{a}{b + e^{-0,75t}}$ , trong đó thời gian  $t$  được tính bằng giờ. Tại thời điểm ban đầu  $t = 0$ , quần thể có 20 tế bào và tăng với tốc độ 12 tế bào/giờ. Tìm các giá trị của  $a$  và  $b$ . Theo mô hình này, điều gì xảy ra với quần thể nấm men về lâu dài?

**VÍ DỤ 4.** Giả sử chi phí  $C(x)$  (nghìn đồng) để sản xuất  $x$  đơn vị của một loại hàng hoá nào đó được cho bởi hàm số  $C(x) = 30000 + 300x - 2,5x^2 + 0,125x^3$ .

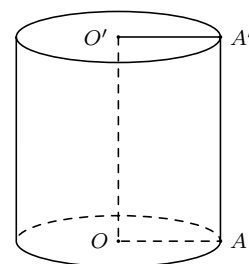
- a) Tìm hàm chi phí biên.
- b) Tìm  $C'(200)$  và giải thích ý nghĩa.
- c) So sánh  $C'(200)$  với chi phí sản xuất đơn vị hàng hoá thứ 201.

21

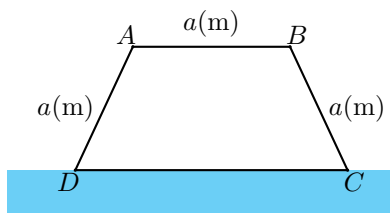
### Bài toán tối ưu hoá đơn giản

#### VÍ DỤ 1.

Một nhà sản xuất cần làm những hộp đựng hình trụ có thể tích 1 lít. Tìm các kích thước của hộp đựng để chi phí vật liệu dùng để sản xuất là nhỏ nhất (kết quả được tính theo centimet và làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai).

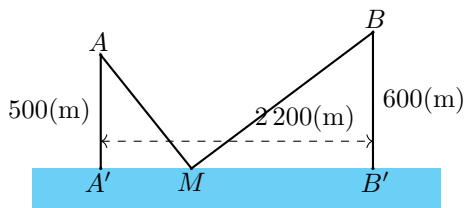


**VÍ DỤ 2.** Một bác nông dân có ba tấm lưới B40, mỗi tấm dài  $a$  (m) và muốn rào một mảnh vườn dọc bờ sông có dạng hình thang cân  $ABCD$  như Hình 36 (bờ sông là đường thẳng  $CD$  không phải rào). Hỏi bác đó có thể rào được mảnh vườn có diện tích lớn nhất là bao nhiêu mét vuông?



Hình 36

**VÍ DỤ 3.** Có hai xã  $A, B$  cùng ở một bên bờ sông Lam, khoảng cách từ hai xã đó đến bờ sông lần lượt là  $AA' = 500$  m,  $BB' = 600$  m và người ta đo được  $A'B' = 2200$  m Hình 37. Các kĩ sư muốn xây một trạm cung cấp nước sạch nằm bên bờ sông Lam cho dân hai xã. Để tiết kiệm chi phí, các kĩ sư cần phải chọn vị trí  $M$  của trạm cung cấp nước sạch đó trên đoạn  $A'B'$  sao cho tổng khoảng cách từ hai xã đến vị trí  $M$  là nhỏ nhất. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của tổng khoảng cách đó.



Hình 37

## C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

**BÀI 1.** Một tàu đổ bộ tiếp cận Mặt Trăng theo cách tiếp cận thẳng đứng và đốt cháy các tên lửa hãm ở độ cao 250 km so với bề mặt của Mặt Trăng.

Trong khoảng 50 giây đầu tiên kể từ khi đốt cháy các tên lửa hãm, độ cao  $h$  của con tàu so với bề mặt của Mặt Trăng được tính (gần đúng) bởi hàm  $h(t) = -0,01t^3 + 1,1t^2 - 30t + 250$ , trong đó  $t$  là thời gian tính bằng giây và  $h$  là độ cao tính bằng kilômét.

(Nguồn: A. Bigalke et al., *Mathematik, Grundkurs ma-1*, Cornelsen 2016).

- Vẽ đồ thị của hàm số  $y = h(t)$  với  $0 \leq t \leq 50$  (đơn vị trên trục hoành là 10 giây, đơn vị trên trục tung là 10 km).
- Gọi  $v(t)$  là vận tốc tức thời của con tàu ở thời điểm  $t$  (giây) kể từ khi đốt cháy các tên lửa hãm với  $(0 \leq t \leq 50)$ . Xác định hàm số  $v(t)$ .
- Vận tốc tức thời của con tàu lúc bắt đầu hãm phanh là bao nhiêu? Tại thời điểm  $t = 25$  (giây) là bao nhiêu?
- Tại thời điểm  $t = 25$  (giây), vận tốc tức thời của con tàu vẫn giảm hay đang tăng trở lại?
- Tìm thời điểm  $t$  ( $0 \leq t \leq 50$ ) sao cho con tàu đạt khoảng cách nhỏ nhất so với bề mặt của Mặt Trăng. Khoảng cách nhỏ nhất này là bao nhiêu?

**BÀI 2.** Để loại bỏ  $x\%$  chất gây ô nhiễm không khí từ khí thải của một nhà máy, người ta ước tính chi phí cần bỏ ra là

$$C(x) = \frac{300x}{100 - x} \text{ (triệu đồng)}, 0 \leq x < 100.$$

Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số  $y = C(x)$ . Từ đó, hãy cho biết:

- Chi phí cần bỏ ra sẽ thay đổi như thế nào khi  $x$  tăng?
- Có thể loại bỏ được 100% chất gây ô nhiễm không khí không? Vì sao?

**BÀI 3.** Khi máu di chuyển từ tim qua các động mạch chính rồi đến các mao mạch và quay trở lại qua các tĩnh mạch, huyết áp tâm thu (tức là áp lực của máu lên động mạch khi tim co bóp) liên tục giảm xuống. Giả sử một người có huyết áp tâm thu  $P$  (tính bằng mmHg) được cho bởi hàm số

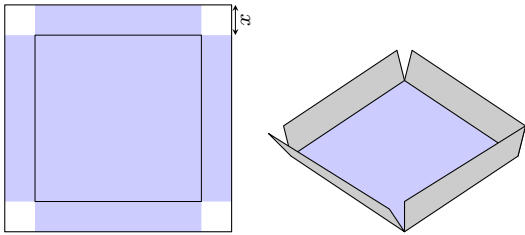
$$P(t) = \frac{25t^2 + 125}{t^2 + 1}, 0 \leq t \leq 10,$$

trong đó thời gian  $t$  được tính bằng giây. Tính tốc độ thay đổi của huyết áp sau 5 giây kể từ khi máu rời tim.

### QUICK NOTE

QUICK NOTE

**BÀI 4.** Bạn Việt muốn dùng tấm bìa hình vuông cạnh 6 dm làm một chiếc hộp không nắp, có đáy là hình vuông bằng cách cắt bỏ đi 4 hình vuông nhỏ ở bốn góc của tấm bìa (Hình bên dưới).



Bạn Việt muốn tìm độ dài cạnh hình vuông cần cắt bỏ để chiếc hộp đạt thể tích lớn nhất.

- a) Hãy thiết lập hàm số biểu thị thể tích hộp theo  $x$  với  $x$  là độ dài cạnh hình vuông cần cắt đi.
- b) Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số tìm được.  
Từ đó, hãy tư vấn cho bạn Việt cách giải quyết vấn đề và giải thích vì sao cần chọn giá trị này. (Làm tròn kết quả đến hàng phần mười.)

# MỤC LỤC

<b>Bài 1. TÍNH ĐƠN ĐIỀU VÀ CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ</b>	<b>1</b>
(A) LÝ THUYẾT CẦN NHỚ	1
(B) PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN	2
Dạng 1. Bài toán tìm khoảng đơn điệu và cực trị của hàm số cho trước	2
Dạng 2. Bài toán tìm $m$ để hàm số đồng biến (nghịch biến) trên khoảng cho trước	6
Dạng 3. Bài toán tìm $m$ để hàm số có cực trị hoặc đạt cực trị tại điểm cho trước	9
Dạng 4. Đơn điệu hàm hợp, hàm chứa dấu giá trị tuyệt đối	11
Dạng 5. Cực trị hàm hợp, hàm chứa trị tuyệt đối	15
<b>Bài 2. GIÁ TRỊ LỚN NHẤT - NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ</b>	<b>21</b>
(A) LÝ THUYẾT CẦN NHỚ	21
(B) PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN	21
Dạng 6. Bài toán tìm max, min của hàm số $y = f(x)$ trên miền $\mathcal{D}$	21
Dạng 7. Bài toán max, min có chứa tham số $m$	26
Dạng 8. Bài toán vận dụng, thực tiễn có liên quan đến max min	27
<b>Bài 3. ĐƯỜNG TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ</b>	<b>30</b>
(A) LÝ THUYẾT CẦN NHỚ	30
(B) PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN	32
Dạng 9. Bài toán tìm tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số	32
Dạng 10. Bài toán tìm tiệm cận đứng và tiệm cận xiên của đồ thị hàm số	35
Dạng 11. Bài toán về đường tiệm cận có chứa tham số	36
<b>Bài 4. TIỆM CẬN</b>	<b>38</b>
(A) TÓM TẮT LÝ THUYẾT	38
Dạng 12. Tìm các đường tiệm cận qua biểu thức hàm số, bảng biến thiên	40
Dạng 13. Đường tiệm cận liên quan tham số $m$	49
Dạng 14. Tìm các đường tiệm cận đồ thị hàm ẩn	51
Dạng 15. Tìm các đường tiệm cận đồ thị hàm ẩn	56
<b>Bài 4. KHẢO SÁT SỰ BIẾN THIÊN VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ</b>	<b>61</b>
(A) LÝ THUYẾT CẦN NHỚ	61
(B) PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN	63
Dạng 16. Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số bậc ba	63
Dạng 17. Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số phân thức hữu tỉ bậc I/I	66
Dạng 18. Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số phân thức hữu tỉ bậc II/I	70
Dạng 19. Sự tương giao của hai đồ thị	73
<b>Bài 5. ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM VÀ KHẢO SÁT HÀM SỐ ĐỂ GIẢI QUYẾT MỘT SỐ BÀI TOÁN THỰC TIỄN</b>	<b>75</b>
(A) LÝ THUYẾT CẦN NHỚ	75
(B) PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN	76
Dạng 20. Bài toán về tốc độ thay đổi của một đại lượng	76
Dạng 21. Bài toán tối ưu hoá đơn giản	76
(C) BÀI TẬP TỰ LUYỆN	77