

PHẦN ĐỀ BÀI

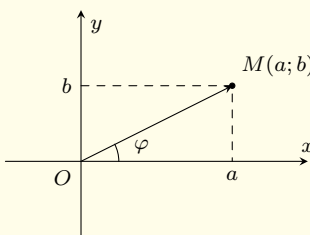
Bài 1. ĐIỂM BIỂU DIỄN SỐ PHỨC

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Biểu diễn hình học của số phức

Biểu diễn hình học của số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$).

- a) $M(a; b)$ là điểm biểu diễn của z .
b) $OM = r = \sqrt{a^2 + b^2}$ là mô-đun của z .



B. BÀI TẬP MẪU

VÍ DỤ 1. Trên mặt phẳng tọa độ, điểm biểu diễn số phức $z = 7 - 6i$ có tọa độ là

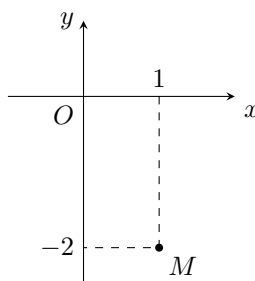
- Ⓐ $(-6; 7)$. Ⓑ $(6; 7)$. Ⓒ $(7; 6)$. Ⓓ $(7; -6)$.

C. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN

CÂU 1.

Số phức nào dưới đây có điểm biểu diễn trên mặt phẳng tọa độ là điểm M như hình vẽ bên?

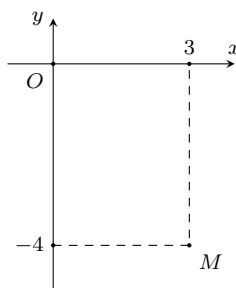
- Ⓐ $1 - 2i$. Ⓑ $i + 2$. Ⓒ $i - 2$. Ⓓ $1 + 2i$.



CÂU 2.

Điểm M trong hình bên là điểm biểu diễn của số phức z . Mệnh đề nào sau đây đúng?

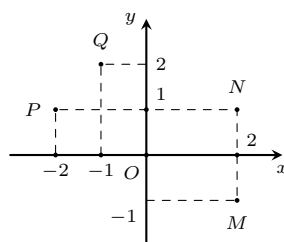
- Ⓐ Số phức z có phần thực là 3 và phần ảo là -4 .
Ⓑ Số phức z có phần thực là 3 và phần ảo là $-4i$.
Ⓒ Số phức z có phần thực là -4 và phần ảo là 3.
Ⓓ Số phức z có phần thực là -4 và phần ảo là $3i$.



CÂU 3.

Điểm nào trong hình vẽ bên là điểm biểu diễn số phức $z = -1 + 2i$?

- Ⓐ N . Ⓑ P . Ⓒ M . Ⓓ Q .



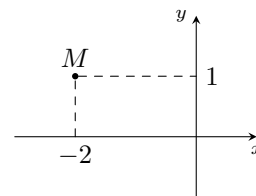
CÂU 4.

QUICK NOTE

QUICK NOTE

Số phức nào dưới đây có điểm biểu diễn trên mặt phẳng tọa độ là điểm M như hình vẽ bên?

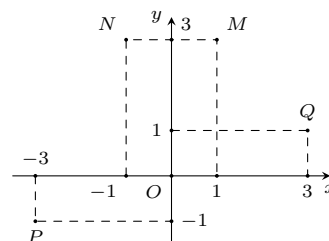
- (A) $z_4 = 2 + i$. (B) $z_2 = 1 - 2i$.
(C) $z_3 = -2 + i$. (D) $z_1 = 1 - 2i$.



CÂU 5.

Cho số phức $z = (1 + i)(2 - i)$. Điểm nào trong hình vẽ dưới đây là điểm biểu diễn của z ?

- (A) M . (B) P . (C) N . (D) Q .



CÂU 6. Trên mặt phẳng tọa độ, điểm biểu diễn số phức $z = (1 + 2i)^2$ là điểm nào dưới đây?

- (A) $P(-3; 4)$. (B) $Q(5; 4)$. (C) $N(4; -3)$. (D) $M(4; 5)$.

CÂU 7. Biết $M(1; -2)$ là điểm biểu diễn số phức \bar{z} , số phức z bằng

- (A) $2 + i$. (B) $1 + 2i$. (C) $2 - i$. (D) $1 - 2i$.

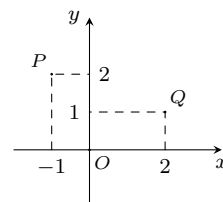
CÂU 8. Gọi M và M' lần lượt là các điểm biểu diễn cho các số phức z và \bar{z} . Xác định mệnh đề đúng.

- (A) M và M' đối xứng với nhau qua trục hoành.
(B) M và M' đối xứng với nhau qua trục tung.
(C) M và M' đối xứng với nhau qua gốc tọa độ.
(D) Ba điểm O, M, M' thẳng hàng.

CÂU 9.

Trong hình vẽ bên, điểm P biểu diễn số phức z_1 , điểm Q biểu diễn số phức z_2 . Tìm số phức $z = z_1 + z_2$?

- (A) $1 + 3i$. (B) $-3 + i$. (C) $-1 + 2i$. (D) $2 + i$.



CÂU 10. Cho số phức $z = 1 + \sqrt{3}i$. Nghịch đảo của z có điểm biểu diễn là

- (A) $N\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. (B) $M\left(\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. (C) $P\left(\frac{1}{4}; \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$. (D) $Q\left(\frac{1}{4}; -\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$.

CÂU 11. Cho số phức $z_1 = 1 - 2i$, $z_2 = -3 + i$. Điểm nào dưới đây là điểm biểu diễn của số phức $w = z_1 + z_2$ trên mặt phẳng tọa độ?

- (A) $N(4; -3)$. (B) $M(2; -5)$. (C) $P(-2; -1)$. (D) $Q(-1; 7)$.

CÂU 12. Cho số phức $z = 1 - 2i$. Điểm nào dưới đây là điểm biểu diễn của số phức $w = iz$ trên mặt phẳng tọa độ?

- (A) $Q(1; 2)$. (B) $N(2; 1)$. (C) $M(1; -2)$. (D) $P(-2; 1)$.

CÂU 13. Cho số phức $z = 3 - 2i$. Khi đó số phức $w = z + i\bar{z}$ có điểm biểu diễn trên mặt phẳng tọa độ là điểm nào dưới đây?

- (A) $H(1; -5)$. (B) $G(5; -5)$. (C) $E(1; 1)$. (D) $F(5; 1)$.

CÂU 14. Cho số phức z thỏa mãn $iz + 2 - i = 0$. Khoảng cách từ điểm biểu diễn của z trên mặt phẳng tọa độ Oxy đến điểm $M(3; -4)$ bằng

- (A) $2\sqrt{5}$. (B) $\sqrt{13}$. (C) $2\sqrt{10}$. (D) $2\sqrt{2}$.

CÂU 15. Trên mặt phẳng phức, cho điểm A biểu diễn số phức $3 - 2i$, điểm B biểu diễn số phức $-1 + 6i$. Gọi M là trung điểm của AB . Khi đó điểm M biểu diễn số phức nào trong các số phức sau?

- (A) $1 - 2i$. (B) $2 - 4i$. (C) $2 + 4i$. (D) $1 + 2i$.

CÂU 16. Trên mặt phẳng phức, các điểm A, B, C lần lượt là các điểm biểu diễn của các số phức $z_1 = -3i$ và $z_2 = 2 - 2i, z_3 = -i - 5$. Số phức z biểu diễn trọng tâm G của tam giác ABC là

- (A) $z = -1 - 2i$. (B) $z = -2 + i$. (C) $z = -1 - i$. (D) $z = -1 + i$.

CÂU 17. Nếu điểm $M(x; y)$ là điểm biểu diễn hình học của số phức z trong mặt phẳng tọa độ Oxy thỏa mãn $OM = 4$ thì

- (A) $|z| = \frac{1}{4}$. (B) $|z| = 4$. (C) $|z| = 16$. (D) $|z| = 2$.

CÂU 18. Cho các số phức z, z' có biểu diễn hình học lần lượt là các điểm M, M' trong mặt phẳng tọa độ Oxy . Nếu $OM = 2OM'$ thì

- (A) $|z| = 2|z'|$. (B) $z' = 2z$. (C) $z = 2z'$. (D) $|z'| = 2|z|$.

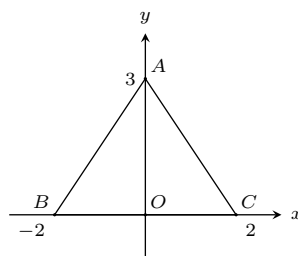
CÂU 19. Gọi M, N, P lần lượt là các điểm biểu diễn của các số phức $z_1 = 1 + i, z_2 = 8 + i, z_3 = 1 - 3i$ trong mặt phẳng phức Oxy . Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

- (A) $\triangle MNP$ vuông. (B) $\triangle MNP$ đều. (C) $\triangle MNP$ cân. (D) $\triangle MNP$ vuông cân.

CÂU 20.

Cho tam giác ABC như hình vẽ. Biết trọng tâm G của tam giác ABC là điểm biểu diễn của số phức z . Tìm phần ảo của số phức \bar{z} .

- (A) 1. (B) -1. (C) -i. (D) i.



D. BẢNG ĐÁP ÁN

1. A	2. A	3. D	4. C	5. D	6. A	7. B	8. A	9. A	10. D
11. C	12. B	13. C	14. C	15. D	16. A	17. B	18. A	19. A	20. B

Bài 2. HÀM SỐ LOGARIT

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Hàm số logarit

Với a là số thực dương khác 1.

- ☑ Hàm số logarit cho bởi công thức: $y = \log_a x$.
- ☑ Tập xác định: $\mathcal{D} = (0; +\infty)$.
- ☑ Với hàm số $y = \log_a u(x)$ thì điều kiện xác định là $u(x) > 0$.

2. Đạo hàm của hàm số logarit

- ☑ Với $y = \ln x$ thì $y' = \frac{1}{x}$.
- ☑ Với $y = \log_a x$ thì $y' = \frac{1}{x \ln a}$.
- ☑ Với $y = \ln u(x)$ thì $y' = \frac{u'(x)}{u(x)}$.
- ☑ Hàm số hợp $y = \log_a [u(x)]$ thì $y' = \frac{u'(x)}{u(x) \ln a}$.
- ☑ Với $y = \log_a |u(x)|$ thì $y' = \frac{u'(x)}{u(x) \ln a}$.

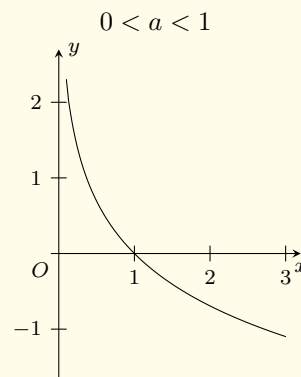
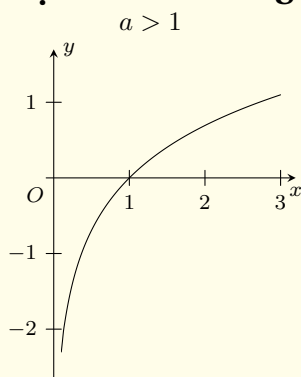
QUICK NOTE

QUICK NOTE

3. Sự biến thiên của hàm số logarit

- ☑ Với $a > 1$ thì hàm số $y = \log_a x$ đồng biến trên $(0; +\infty)$.
- ☑ Với $0 < a < 1$ thì hàm số $y = \log_a x$ nghịch biến trên $(0; +\infty)$.

4. Đồ thị của hàm số logarit



B. BÀI TẬP MẪU

VÍ DỤ 2 (Đề minh họa BGD 2022-2023). Trên khoảng $(0; +\infty)$, đạo hàm của hàm số $y = \log_3 x$ là

- (A) $y' = \frac{1}{x}$. (B) $y' = \frac{1}{x \ln 3}$. (C) $y' = \frac{\ln 2}{x}$. (D) $y' = -\frac{1}{x \ln 3}$.

C. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN

CÂU 1. Tính đạo hàm của hàm số $y = \log_3(3x + 1)$.

- (A) $y' = \frac{3}{(3x + 1) \ln 3}$. (B) $y' = \frac{1}{(3x + 1) \ln 3}$.
 (C) $y' = \frac{3}{3x + 1}$. (D) $y' = \frac{1}{3x + 1}$.

CÂU 2. Đạo hàm của hàm số $y = \log_3(1 - 2x)$ là

- (A) $y' = \frac{2}{(1 - 2x) \ln 3}$. (B) $y' = \frac{1}{(1 - 2x) \ln 3}$.
 (C) $y' = \frac{-2}{(1 - 2x) \ln 3}$. (D) $y' = \frac{-2 \ln 3}{1 - 2x}$.

CÂU 3. Đạo hàm của hàm số $y = \log_3(2 - x)$ là

- (A) $y' = \frac{1}{(x - 2) \ln 3}$. (B) $y' = \frac{\ln 3}{2 - x}$.
 (C) $y' = \frac{1}{(2 - x) \ln 3}$. (D) $y' = \frac{\ln 3}{x - 2}$.

CÂU 4. Tính đạo hàm của hàm số $y = \log_3(2x + 1)$.

- (A) $y' = \frac{1}{2x + 1}$. (B) $y' = \frac{2}{(2x + 1) \ln 3}$.
 (C) $y' = (2x + 1) \cdot \ln 3$. (D) $y' = \frac{1}{(2x + 1) \ln 3}$.

CÂU 5. Tính đạo hàm của hàm số $y = \log_3(3x + 2)$.

- (A) $y' = \frac{1}{(3x + 2)}$. (B) $y' = \frac{3}{(3x + 2)}$.
 (C) $y' = \frac{3}{(3x + 2) \ln 3}$. (D) $y' = \frac{1}{(3x + 2) \ln 3}$.

CÂU 6. Đạo hàm của hàm số $y = \ln(x^2 + x + 1)$ là hàm số nào sau đây?

- (A) $y' = \frac{-(2x + 1)}{x^2 + x + 1}$. (B) $y' = \frac{-1}{x^2 + x + 1}$. (C) $y' = \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1}$. (D) $y' = \frac{1}{x^2 + x + 1}$.

CÂU 7. Đạo hàm của hàm số $y = x + \ln^2 x$ là hàm số nào dưới đây?

- (A) $y' = 1 + 2x \ln x$. (B) $y' = 1 + 2 \ln x$. (C) $y' = 1 + \frac{2}{x \ln x}$. (D) $y' = 1 + \frac{2 \ln x}{x}$.

QUICK NOTE

CÂU 8. Tính đạo hàm của hàm số $y = \log x$.

- Ⓐ $y' = \frac{x}{\ln 10}$. Ⓑ $y' = \frac{\ln 10}{x}$. Ⓒ $y' = \frac{1}{x \ln 10}$. Ⓓ $y' = \frac{1}{x}$.

CÂU 9. Đạo hàm của hàm số $y = \log(1 - x)$ bằng

- Ⓐ $\frac{1}{x-1}$. Ⓑ $\frac{1}{(x-1) \ln 10}$. Ⓒ $\frac{1}{1-x}$. Ⓓ $\frac{1}{(1-x) \ln 10}$.

CÂU 10. Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = \ln|x|$.

- Ⓐ $f'(x) = \frac{1}{|x|}$. Ⓑ $f'(x) = \frac{1}{x}$. Ⓒ $f'(x) = -\frac{1}{x}$. Ⓓ $f'(x) = -\frac{1}{|x|}$.

CÂU 11. Đạo hàm của hàm số $y = \log_3(2x - 3)$ tại điểm $x = 2$ bằng

- Ⓐ $\frac{2}{\ln 3}$. Ⓑ $\frac{1}{2 \ln 3}$. Ⓒ $2 \ln 3$. Ⓓ 1.

CÂU 12. Đạo hàm của hàm số $y = \log_3(4x + 1)$ là

- Ⓐ $y' = \frac{4 \ln 3}{4x + 1}$. Ⓑ $y' = \frac{1}{(4x + 1) \ln 3}$.
Ⓒ $y' = \frac{4}{(4x + 1) \ln 3}$. Ⓓ $y' = \frac{\ln 3}{4x + 1}$.

CÂU 13. Tính đạo hàm của hàm số $y = \ln(3x^2 + 1)$.

- Ⓐ $y' = \frac{6x}{3x^2 + 1}$. Ⓑ $y' = \frac{6x + 1}{3x^2 + 1}$. Ⓒ $y' = \frac{1}{3x^2 + 1}$. Ⓓ $y' = \frac{3x}{3x^2 + 1}$.

CÂU 14. Tính đạo hàm của hàm số $y = \log_5(x^2 + 2)$.

- Ⓐ $y' = \frac{2x}{x^2 + 2}$. Ⓑ $y' = \frac{2x}{(x^2 + 2) \ln 5}$.
Ⓒ $y' = \frac{2x \ln 5}{x^2 + 2}$. Ⓓ $y' = \frac{1}{(x^2 + 2) \ln 5}$.

CÂU 15. Đạo hàm của hàm số $y = \log_2(x - 1)$ trên tập xác định là

- Ⓐ $\frac{1}{(x-1) \ln 2}$. Ⓑ $\frac{\ln 2}{x-1}$. Ⓒ $\frac{1}{(1-x) \ln 2}$. Ⓓ $\frac{\ln 2}{1-x}$.

CÂU 16. Tính đạo hàm của hàm số $y = \log_8(6x - 5)$.

- Ⓐ $y' = \frac{2}{(6x-5) \ln 2}$. Ⓑ $y' = \frac{1}{(6x-5) \ln 8}$.
Ⓒ $y' = \frac{6}{6x-5}$. Ⓓ $y' = \frac{6}{(6x-5) \ln 4}$.

CÂU 17. Tìm đạo hàm của hàm số $y = \log_2(1 - x)$.

- Ⓐ $y' = \frac{1}{\log_2(1-x)}$. Ⓑ $y' = \frac{1}{1-x}$.
Ⓒ $y' = \frac{\ln 2}{1-x}$. Ⓓ $y' = \frac{1}{(x-1) \ln 2}$.

CÂU 18. Tính đạo hàm của hàm số $y = \ln(\sin x)$.

- Ⓐ $y' = \tan x$. Ⓑ $y' = -\tan x$. Ⓒ $y' = \cot x$. Ⓓ $y' = -\cot x$.

CÂU 19. Đạo hàm của hàm số $y = \ln x + x^2$ là

- Ⓐ $y' = \frac{1}{x} + \frac{x^3}{3}$. Ⓑ $y' = \frac{1}{x} + x$. Ⓒ $y' = \frac{1}{x} + 2x$. Ⓓ $y' = \frac{1}{x} - 2x$.

CÂU 20. Đạo hàm của hàm số $y = \log_8(x^2 - 3x - 4)$ là

- Ⓐ $y' = \frac{2x-3}{(x^2-3x-4) \ln 2}$. Ⓑ $y' = \frac{2x-3}{x^2-3x-4}$.
Ⓒ $y' = \frac{1}{(x^2-3x-4) \ln 8}$. Ⓓ $y' = \frac{2x-3}{(x^2-3x-4) \ln 8}$.

D. BẢNG ĐÁP ÁN

1. A	2. C	3. A	4. B	5. C	6. C	7. D	8. C
9. B	10. B	11. A	12. C	13. A	14. B	15. A	16. A
		17. D	18. C	19. C	20. D		

QUICK NOTE

Bài 3. ĐẠO HÀM HÀM LŨY THỪA - HÀM MŨ - LOGARIT

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

- ☉ $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1} \Rightarrow (u^\alpha)' = \alpha \cdot u^{\alpha-1} \cdot u'.$
- ☉ $(a^u)' = a^u \ln a \cdot u' \Rightarrow (a^x)' = a^x \cdot \ln a.$
- ☉ $(e^u)' = u' \cdot e^u \Rightarrow (e^x)' = e^x.$
- ☉ $(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \Rightarrow (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}.$
- ☉ $(\ln x)' = \frac{1}{x} \Rightarrow (\ln u)' = \frac{u'}{u}.$

B. BÀI TẬP MẪU

VÍ DỤ 3 (Đề Minh họa BGD 2022-2023). Trên khoảng $(0; +\infty)$, đạo hàm của hàm số $y = x^\pi$ là

- Ⓐ $y' = \pi x^{\pi-1}.$ Ⓑ $y' = x^{\pi-1}.$ Ⓒ $y' = \frac{1}{\pi} x^{\pi-1}.$ Ⓓ $y' = \pi x^\pi.$

C. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN

CÂU 1. Trên khoảng $(0; +\infty)$, đạo hàm của hàm số $y = x^e$ là

- Ⓐ $y' = e \cdot x^{e-1}.$ Ⓑ $y' = x^{e-1}.$ Ⓒ $y' = \frac{1}{e} x^{e-1}.$ Ⓓ $y' = e \cdot x^e.$

CÂU 2. Tính đạo hàm của hàm số $y = (x^2 + x)^\alpha$ với α là hằng số.

- Ⓐ $2\alpha (x^2 + x)^{\alpha-1}.$ Ⓑ $\alpha (x^2 + x)^{\alpha+1} (2x + 1).$
 Ⓒ $\alpha (x^2 + x)^{\alpha-1} (2x + 1).$ Ⓓ $\alpha (x^2 + x)^{\alpha-1}.$

CÂU 3. Đạo hàm của hàm số $y = \sqrt[3]{x^2 \cdot \sqrt{x^3}}$ trên khoảng $(0; +\infty)$ là

- Ⓐ $\frac{7}{6} \sqrt[6]{x}.$ Ⓑ $\frac{4}{3} \sqrt[3]{x}.$ Ⓒ $7 \sqrt[6]{x}.$ Ⓓ $\sqrt[9]{x}.$

CÂU 4. Cho hàm số $y = x^\pi$. Giá trị của $y''(1)$ bằng

- Ⓐ $\ln^2 \pi.$ Ⓑ $\pi \ln \pi.$ Ⓒ $0.$ Ⓓ $\pi(\pi - 1).$

CÂU 5. Tính đạo hàm của hàm số $y = 2019^x$.

- Ⓐ $y' = 2019^{x-1}.$ Ⓑ $y' = 2019^x.$
 Ⓒ $y' = 2019^x \cdot \ln 2019.$ Ⓓ $y' = x \cdot 2019^{x-1}.$

CÂU 6. Đạo hàm của hàm số $y = 5^x$ là

- Ⓐ $5^x \cdot \ln x.$ Ⓑ $x \cdot 5^{x-1}.$ Ⓒ $5^x \cdot \ln 5.$ Ⓓ $5^x.$

CÂU 7. Đạo hàm của hàm số $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ là

- Ⓐ $f'(x) = -\left(\frac{1}{2}\right)^x \cdot \ln 2.$ Ⓑ $f'(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x \cdot \log 2.$
 Ⓒ $f'(x) = -\left(\frac{1}{2}\right)^x \cdot \log 2.$ Ⓓ $f'(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x \cdot \ln 2.$

CÂU 8. Đạo hàm của hàm số $y = 2^{2x^2+x}$ là

- Ⓐ $2^{2x^2+x} \cdot \ln 2.$ Ⓑ $(4x + 1) \cdot 2^{2x^2+x} \cdot \ln 2.$
 Ⓒ $(2x^2 + x) 2^{2x^2+x} \ln 2.$ Ⓓ $(4x + 1) \ln(2x^2 + x).$

CÂU 9. Đạo hàm của hàm số $y = e^{2x-3}$ là

- Ⓐ $y' = 2e^{2x}.$ Ⓑ $y' = e^{2x-3}.$
 Ⓒ $y' = (2x - 3)e^{2x-3}.$ Ⓓ $y' = 2e^{2x-3}.$

CÂU 10. Đạo hàm của hàm số $y = e^{x^2+x}$ là

- Ⓐ $(x^2 + x) \cdot e^{2x+1}.$ Ⓑ $(2x + 1) \cdot e^{2x+1}.$ Ⓒ $(2x + 1) \cdot e^{x^2+x}.$ Ⓓ $(2x + 1) \cdot e^x.$

CÂU 11. Tính đạo hàm của hàm số $y = e^{\cos 2x}$.

- (A) $y' = \sin 2x \cdot e^{\cos 2x}$. (B) $y' = \frac{1}{2} \sin 2x \cdot e^{\cos 2x}$.
(C) $y' = 2 \cos 2x \cdot e^{\sin 2x}$. (D) $y' = -2 \sin 2x \cdot e^{\cos 2x}$.

CÂU 12. Hàm số $f(x) = 2^{x^2+3x+1}$ có đạo hàm là

- (A) $f'(x) = \frac{2x+3}{2^{x^2+3x+1} \ln 2}$. (B) $f'(x) = 2^{x^2+3x+1} (2x+3) \ln 2$.
(C) $f'(x) = \frac{2x+3}{2^{x^2+3x+1}}$. (D) $f'(x) = 2^{x^2+3x+1} (2x+3)$.

CÂU 13. Đạo hàm của hàm số $y = 3^x + 1$ là

- (A) $y' = 3^x \ln 3$. (B) $y' = 3^x$. (C) $y' = \frac{3^x}{\ln 3}$. (D) $y' = x 3^{x-1}$.

CÂU 14. Đạo hàm của hàm số $y = 5^{\sin x}$ là

- (A) $5^{\sin x} \cdot \ln 5 \cdot \cos x$. (B) $5^{\sin x} \cdot \cos x$.
(C) $5^{\sin x-1} \cdot \sin x$. (D) $5^{\sin x} \cdot \ln 5$.

CÂU 15. Đạo hàm của hàm số $y = (x^2 - 2x + 2)e^x$ là

- (A) $(x^2 + 2)e^x$. (B) $x^2 e^x$. (C) $(2x - 2)e^x$. (D) $-2xe^x$.

CÂU 16. Đạo hàm của hàm số $y = \log_2 (2x + 1)$ là

- (A) $\frac{2}{(2x+1) \cdot \ln x}$. (B) $\frac{2}{(2x+1) \cdot \ln 2}$. (C) $\frac{2 \cdot \ln 2}{x+1}$. (D) $\frac{2}{(x+1) \cdot \ln 2}$.

CÂU 17. Đạo hàm của hàm số $y = \log_2 (x^2 + 1)$ là

- (A) $\frac{2x}{(x^2+1) \cdot \ln 2}$. (B) $\frac{1}{x^2+1}$. (C) $\frac{1}{(x^2+1) \cdot \ln 2}$. (D) $\frac{2x}{x^2+1}$.

CÂU 18. Đạo hàm của hàm số $y = \log (x^2 - x)$ là

- (A) $\frac{1}{(x^2-x) \cdot \ln 10}$. (B) $\frac{2x-1}{x^2-x}$. (C) $\frac{2x-1}{(x^2-x) \cdot \ln 10}$. (D) $\frac{2x-1}{(x^2-1) \cdot \log e}$.

CÂU 19. Đạo hàm của hàm số $y = \log (e^x + 2)$ là

- (A) $\frac{e^x}{(e^x+2) \cdot \ln 10}$. (B) $\frac{e^x}{e^x+2}$. (C) $\frac{1}{(e^x+2) \cdot \ln 10}$. (D) $\frac{1}{e^x+2}$.

CÂU 20. Đạo hàm của hàm số $y = e^x - \ln(3x)$ là

- (A) $e^x - \frac{1}{3x}$. (B) $e^x - \frac{1}{x}$. (C) $e^x - \frac{3}{x}$. (D) $e^x + \frac{1}{x}$.

D. BẢNG ĐÁP ÁN

1. A	2. C	3. A	4. D	5. C	6. C	7. A	8. B	9. D	10. C
11. D	12. B	13. A	14. A	15. B	16. B	17. A	18. C	19. A	20. B

Bài 4. PHƯƠNG TRÌNH MŨ – BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Công thức nghiệm của phương trình mũ

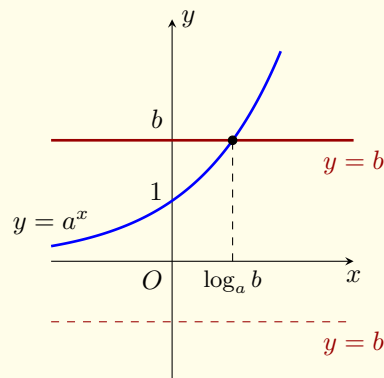
- ☉ Dạng $a^x = b$ (1), với $a > 0$ và $a \neq 1$.
- ☉ Về mặt đồ thị, nghiệm của (1) là hoành độ giao điểm của đồ thị $y = a^x$ với đường thẳng $y = b$ (nằm ngang).

QUICK NOTE

QUICK NOTE

Từ hình vẽ, ta có các kết quả sau:

- a) $b > 0$ (1) có nghiệm duy nhất $x = \log_a b$.
 b) $b \leq 0$ (1) vô nghiệm.

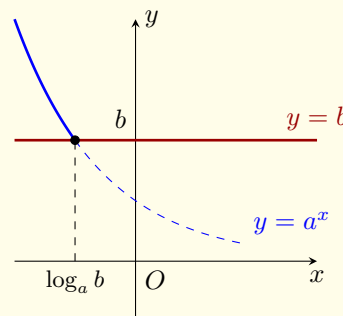
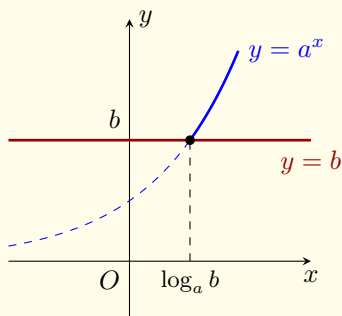


☺ **Tóm lại:** Với $a > 0$ và $a \neq 1$, $b > 0$, ta có các công thức sau đây:

- a) $a^{f(x)} = b \Leftrightarrow f(x) = \log_a b$. b) $a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$.

2. Công thức nghiệm của bất phương trình mũ

Minh họa dạng $a^x > b$, với $a > 0$ và $a \neq 1$.



- Nếu $b \leq 0$ thì tập nghiệm của bất phương trình là \mathbb{R} .
- Nếu $b > 0$, ta có hai trường hợp:
 - a) Với $a > 1$ thì $a^x > b \Leftrightarrow x > \log_a b$ (Hình 1).
 - b) Với $0 < a < 1$ thì $a^x > b \Leftrightarrow x < \log_a b$ (Hình 2).

B. BÀI TẬP MẪU

VÍ DỤ 4. Tập nghiệm của bất phương trình $2^{x+1} < 4$ là

- (A) $(-\infty; 1]$. (B) $(1; +\infty)$. (C) $[1; +\infty)$. (D) $(-\infty; 1)$.

C. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN

CÂU 1. Phương trình $\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-2x-3} = 3^{x+1}$ có bao nhiêu nghiệm?

- (A) 2. (B) 1. (C) 0. (D) 3.

CÂU 2. Nghiệm của phương trình $4^{x+1} = 8^{2x-3}$ là

- (A) $x = \frac{11}{2}$. (B) $x = \frac{11}{3}$. (C) $x = \frac{11}{4}$. (D) $x = \frac{11}{5}$.

CÂU 3. Tìm tập nghiệm của phương trình $4^{x^2} = 2^{x+1}$.

- (A) $S = \{0; 1\}$. (B) $S = \left\{-\frac{1}{2}; 1\right\}$.
 (C) $S = \left\{\frac{1-\sqrt{5}}{2}; \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}$. (D) $S = \left\{-1; \frac{1}{2}\right\}$.

CÂU 4. Nghiệm của phương trình $3^{2x+1} = 27$ là

- (A) $x = 2$. (B) $x = 1$. (C) $x = \frac{1}{2}$. (D) $x = \frac{3}{2}$.

QUICK NOTE

CÂU 5. Tập nghiệm của bất phương trình $3^{x+2} < 9^{2x+7}$.

- (A) $(-5; +\infty)$. (B) $(-\infty; -5)$. (C) $(-4; +\infty)$. (D) $(-\infty; -4)$.

CÂU 6. Tập nghiệm của bất phương trình $2^{100x} \geq 4^{200}$ là

- (A) $(-\infty; 4]$. (B) $[4; +\infty)$. (C) $[2; +\infty)$. (D) $(4; +\infty)$.

CÂU 7. Nghiệm của phương trình $5^{x-4} = \left(\frac{1}{25}\right)^{3x-1}$ là

- (A) $x = \frac{6}{7}$. (B) $x = \frac{1}{3}$. (C) $x = 1$. (D) $x = \frac{7}{6}$.

CÂU 8. Bất phương trình $3^{x^2+1} > 3^{2x+1}$ có tập nghiệm là

- (A) $S = (-2; 0)$. (B) $S = (0; 2)$.
(C) $S = \mathbb{R}$. (D) $S = (-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$.

CÂU 9. Nghiệm của phương trình $5^{2x+1} = 125$ là

- (A) $x = 1$. (B) $x = 3$. (C) $x = 2$. (D) $x = 4$.

CÂU 10. Tập nghiệm của phương trình $2^{x^2-3x} = \frac{1}{4}$ là

- (A) $S = \emptyset$. (B) $S = \{1; 2\}$. (C) $S = \{0\}$. (D) $S = \{1\}$.

CÂU 11. Bất phương trình $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-2x} > \frac{1}{8}$ có tập nghiệm là $(a; b)$. Khi đó giá trị của $b - a$ là

- (A) -2 . (B) -4 . (C) 2 . (D) 4 .

CÂU 12. Giải phương trình $\left(\frac{1}{25}\right)^{x-1} = 125^{2x}$.

- (A) $x = -\frac{1}{8}$. (B) $x = \frac{1}{4}$. (C) $x = 4$. (D) $x = -\frac{1}{4}$.

CÂU 13. Nghiệm của phương trình $(\sqrt{2})^{2x+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{3x}$ là

- (A) $x = -\frac{1}{2}$. (B) $x = -\frac{1}{5}$. (C) $x = \frac{1}{4}$. (D) $x = -\frac{1}{8}$.

CÂU 14. Tập nghiệm của bất phương trình $2^{2x} < 2^{x+6}$ là

- (A) $(-\infty; 6)$. (B) $(0; 64)$. (C) $(6; +\infty)$. (D) $(0; 6)$.

CÂU 15. Tìm tập nghiệm của bất phương trình $2^{x^2-5x+4} \leq 1$.

- (A) $[1; 4]$. (B) $(-\infty; 1] \cup [4; +\infty)$.
(C) $(-\infty; 1]$. (D) $[4; +\infty)$.

CÂU 16. Nghiệm của phương trình $2^{x+2} = 32$ là

- (A) $x = 7$. (B) $x = 8$. (C) $x = 3$. (D) $x = 4$.

CÂU 17. Nghiệm của phương trình $5^{x-4} = \left(\frac{1}{25}\right)^{3x-1}$ là

- (A) $x = \frac{7}{6}$. (B) $x = \frac{6}{7}$. (C) $x = \frac{1}{3}$. (D) $x = 1$.

CÂU 18. Tập nghiệm của phương trình $2^{x^2+x+1} = 8$ là

- (A) $\{1\}$. (B) $\{-2; 1\}$. (C) $\{-2\}$. (D) $\{1; 2\}$.

CÂU 19. Nghiệm của phương trình $3^{2x-1} = 27$

- (A) $x = 1$. (B) $x = 2$. (C) $x = 3$. (D) $x = 4$.

CÂU 20. Tập nghiệm của phương trình $2^{x^2-3x} = \frac{1}{4}$ là

- (A) $S = \{0\}$. (B) $S = \{1\}$. (C) $S = \emptyset$. (D) $S = \{1; 2\}$.

CÂU 21. Số nghiệm của phương trình $3^x = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ là

- (A) 2 . (B) 3 . (C) 0 . (D) 1 .

CÂU 22. Tập nghiệm của bất phương trình $2^{x+2} < \left(\frac{1}{4}\right)^x$ là

- (A) $(-\infty; 0)$. (B) $\left(-\frac{2}{3}; +\infty\right)$. (C) $(0; +\infty) \setminus \{1\}$. (D) $\left(-\infty; -\frac{2}{3}\right)$.

QUICK NOTE

CÂU 23. Tập nghiệm bất phương trình $2^{x^2-3x} < 16$ là**(A)** $(4; +\infty)$.**(B)** $(-1; 4)$.**(C)** $(-\infty; -1) \cup (4; +\infty)$.**(D)** $(-\infty; -1)$.**D. BẢNG ĐÁP ÁN**

1. A	2. C	3. B	4. B	5. C	6. B	7. A	8. D
9. A	10. B	11. D	12. B	13. D	14. A	15. A	16. C
17. B	18. B	19. B	20. D	21. D	22. D	23. B	

Bài 5. CẤP SỐ CỘNG, CẤP SỐ NHÂN**A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ****1. Nhận dạng cấp số cộng, cấp số nhân**

- ☑ Nếu $u_{n+1} = u_n + d$, với d là hằng số $\Rightarrow (u_n)$ là cấp số cộng.
- ☑ Nếu $u_{n+1} = u_n \cdot q$, với q là hằng số $\Rightarrow (u_n)$ là cấp số nhân.

2. Số hạng tổng quát, số hạng thứ n

- ☑ Nếu (u_n) là cấp số cộng thì số hạng tổng quát của (u_n) là $u_n = u_1 + (n-1) \cdot d$.
- ☑ Nếu (u_n) là cấp số nhân, thì số hạng tổng quát của (u_n) là $u_n = u_1 \cdot q^{n-1}$.

3. Công sai, công bội

- ☑ Cấp số cộng (u_n) có công sai là $d = u_{n+1} - u_n$.
- ☑ Cấp số nhân (u_n) có công bội là $q = \frac{u_{n+1}}{u_n}$.

4. Tổng n số hạng đầu của cấp số cộng, cấp số nhân

- ☑ Tổng n số hạng đầu tiên S_n của cấp số cộng (u_n) được xác định bởi công thức

$$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n = \frac{n}{2} (u_1 + u_n) = \frac{n}{2} [2u_1 + (n-1)d].$$

- ☑ Tổng n số hạng đầu tiên S_n của cấp số nhân (u_n) được xác định bởi công thức

$$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n = u_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}.$$

5. Điều kiện tạo thành cấp số cộng, cấp số nhân

- ☑ Ba số a, b, c theo thứ tự tạo thành một cấp số cộng $\Leftrightarrow a + c = 2b$.
- ☑ Ba số a, b, c theo thứ tự tạo thành một cấp số nhân $\Leftrightarrow a \cdot c = b^2$.

B. BÀI TẬP MẪU

VÍ DỤ 5 (Đề minh họa BGD 2020-2021). Cho cấp số nhân (u_n) với $u_1 = 2$ và công bội $q = \frac{1}{2}$. Giá trị u_3 bằng

(A) 3.**(B)** $\frac{1}{2}$.**(C)** $\frac{1}{4}$.**(D)** $\frac{7}{2}$.

QUICK NOTE

QUICK NOTE

CÂU 18. Cho cấp số nhân (u_n) , biết $u_2 = 1; u_3 = 5$. Công bội q của cấp số nhân đã cho bằng

- (A) 5. (B) ± 4 . (C) 4. (D) 21.

CÂU 19. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 = 3$, công bội $q = 2$. Ta có u_5 bằng

- (A) 11. (B) 48. (C) 9. (D) 24.

CÂU 20. Cho cấp số nhân (u_n) , với $u_1 = -9, u_4 = \frac{1}{3}$. Công bội của cấp số nhân đã cho bằng

- (A) $-\frac{1}{3}$. (B) -3 . (C) 3. (D) $\frac{1}{3}$.

D. BẢNG ĐÁP ÁN

1. A	2. A	3. C	4. B	5. C	6. A	7. C	8. C
9. D	10. B	11. A	12. D	13. B	14. B	15. D	16. C
		17. A	18. A	19. B	20. A		

Bài 6. PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẪNG

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Phương trình mặt phẳng

- Trong không gian, véc-tơ \vec{n} khác $\vec{0}$ là véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) nếu giá của nó vuông góc với mặt phẳng (P) . Hơn nữa với $k \neq 0$ ta cũng có $k\vec{n}$ cũng là một véc-tơ pháp tuyến của (P) .
- Trong không gian $Oxyz$. Đường thẳng (d) đi qua điểm $A(x_0; y_0; z_0)$ và nhận $\vec{n} = (a; b; c)$ làm véc-tơ pháp tuyến có phương trình tổng quát là

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0.$$

- Trong không gian $Oxyz$. Phương trình

$$ax + by + cz + d = 0$$

(với a, b, c không đồng thời bằng 0) là phương trình của một đường thẳng nào đó có véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n} = (a; b; c)$.

2. Phương trình đường thẳng

- Trong không gian, véc-tơ \vec{u} khác $\vec{0}$ là véc-tơ chỉ phương của đường thẳng d nếu giá của nó song song với đường thẳng d . Hơn nữa với $k \neq 0$ ta cũng có $k\vec{u}$ cũng là một véc-tơ chỉ phương của đường thẳng d .
- Trong không gian $Oxyz$ Đường thẳng d đi qua điểm $A(x_0; y_0; z_0)$ và nhận $\vec{u} = (a; b; c)$ làm véc-tơ chỉ phương có phương trình là

$$\text{Phương trình tham số } d: \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$$

$$\text{Phương trình chính tắc } d: \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c} \text{ (với } abc \neq 0).$$

B. BÀI TẬP MẪU

VÍ DỤ 6 (Đề minh họa BGD 2022-2023). Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng $(P): x + y + z + 1 = 0$ có một véc-tơ pháp tuyến là

- (A) $\vec{n}_1 = (-1; 1; 1)$. (B) $\vec{n}_4 = (1; 1; -1)$. (C) $\vec{n}_3 = (1; 1; 1)$. (D) $\vec{n}_2 = (1; -1; 1)$.

C. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN

CÂU 1. Trong không gian $Oxyz$. Mặt phẳng (Oxy) có một véc-tơ pháp tuyến là

- (A) $\vec{i} = (1; 0; 0)$. (B) $\vec{j} = (0; 1; 0)$. (C) $\vec{k} = (0; 0; 1)$. (D) $\vec{i} = (1; 1; 1)$.

CÂU 2. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 4x - 2y + z - 1 = 0$. Véc-tơ nào dưới đây là một véc-tơ pháp tuyến của (P) ?

- (A) $\vec{n}_1 = (4; -2; -1)$. (B) $\vec{n}_4 = (4; 2; 1)$.
(C) $\vec{n}_3 = (4; -2; 0)$. (D) $\vec{n}_2 = (4; -2; 1)$.

CÂU 3. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha): 2x - y + 3z - 1 = 0$. Véc-tơ nào sau đây là véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (α) ?

- (A) $\vec{n} = (2; 1; 3)$. (B) $\vec{n} = (-4; 2; -6)$. (C) $\vec{n} = (2; 1; -3)$. (D) $\vec{n} = (-2; 1; 3)$.

CÂU 4. Trong hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) có phương trình $3x - z + 1 = 0$. Véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) có tọa độ là

- (A) $(-3; 1; 1)$. (B) $(3; 0; -1)$. (C) $(3; -1; 1)$. (D) $(3; -1; 0)$.

CÂU 5. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, mặt phẳng $(Q): x - 2y + 5z + 2023 = 0$ có một véc-tơ pháp tuyến là

- (A) $\vec{n}_2 = (3; 6; 15)$. (B) $\vec{n}_3 = (-1; 2; 5)$.
(C) $\vec{n}_1 = (-2; 4; -10)$. (D) $\vec{n}_4 = (-2; 4; 10)$.

CÂU 6. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng $(P): 2x + y + 3z - 1 = 0$ có một véc-tơ pháp tuyến là

- (A) $\vec{n}_3 = (2; 1; 3)$. (B) $\vec{n}_2 = (-1; 3; 2)$. (C) $\vec{n}_4 = (1; 3; 2)$. (D) $\vec{n}_1 = (3; 1; 2)$.

CÂU 7. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, véc-tơ nào sau đây không phải véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng $(P): x + 3y - 5z + 2 = 0$?

- (A) $\vec{n} = (2; 6; -10)$. (B) $\vec{n} = (-2; -6; -10)$.
(C) $\vec{n} = (-3; -9; 15)$. (D) $\vec{n} = (-1; -3; -5)$.

CÂU 8. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, phương trình mặt phẳng nào sau đây nhận véc-tơ $\vec{n} = (2; 1; -1)$ làm véc-tơ pháp tuyến?

- (A) $2x + y - z - 1 = 0$. (B) $2x + y + z - 1 = 0$.
(C) $4x + 2y - z - 1 = 0$. (D) $-2x - y - z + 1 = 0$.

CÂU 9. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): \frac{x}{3} + \frac{y}{2} + \frac{z}{1} = 1$. Véc-tơ nào dưới đây là véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) ?

- (A) $\vec{n} = (3; 2; 6)$. (B) $\vec{n} = (2; 3; 6)$. (C) $\vec{n} = (3; 2; 1)$. (D) $\vec{n} = (3; -2; -2)$.

CÂU 10. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(-1; 1; 3)$, $B(2; 1; 0)$ và $C(4; -1; 5)$. Một véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (ABC) có tọa độ là

- (A) $(2; 7; 2)$. (B) $(-2; 7; -2)$. (C) $(16; 1; 6)$. (D) $(16; -1; 6)$.

CÂU 11. Trong không gian $Oxyz$, véc-tơ nào dưới đây là véc-tơ chỉ phương của đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{-1}$.

- (A) $\vec{u}_2 = (1; 1; 2)$. (B) $\vec{u}_3 = (1; -1; 2)$. (C) $\vec{u}_4 = (2; 1; -1)$. (D) $\vec{u}_1 = (2; 1; 1)$.

CÂU 12. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, véc-tơ nào sau đây là một véc-tơ chỉ phương của đường thẳng $d: \frac{x}{2} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z}{1}$?

- (A) $\vec{u} = (1; -3; 2)$. (B) $\vec{u} = (2; 3; 1)$. (C) $\vec{u} = (2; -6; 1)$. (D) $\vec{u} = (4; -6; 2)$.

CÂU 13. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 1 + t \\ z = t + 2 \end{cases} (t \in \mathbb{R})$. Tìm tọa độ một véc-tơ chỉ phương của đường thẳng d .

- (A) $(-2; 1; 1)$. (B) $(1; 1; 1)$. (C) $(2; -1; -2)$. (D) $(-2; 1; 2)$.

CÂU 14. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \frac{x+1}{-3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+1}{1}$. Tìm tọa độ một véc-tơ chỉ phương của Δ .

- (A) $(-1; 2; -1)$. (B) $(1; -2; 1)$. (C) $(3; -2; -1)$. (D) $(-3; 2; 0)$.

QUICK NOTE

QUICK NOTE

CÂU 15. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 + 4t \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z = 5 - t \end{cases}$. Véc-tơ nào

dưới đây là một véc-tơ chỉ phương của đường thẳng d ?

(A) $\vec{u}_2 = (2; 3; 5)$.

(B) $\vec{u}_3 = (0; 4; -1)$.

(C) $\vec{u}_1 = (2; 4; -1)$.

(D) $\vec{u}_4 = (2; -4; -1)$.

CÂU 16. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng (Δ) có phương trình $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z+1}{-1}$. Véc-tơ chỉ phương của đường thẳng là

(A) $\vec{u} = (2; 3; -1)$.

(B) $\vec{u} = (2; 3; 1)$.

(C) $\vec{u} = (-2; 3; -1)$.

(D) $\vec{u} = (-2; -3; -1)$.

CÂU 17. Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng $d: \frac{x-1}{3} = \frac{y-5}{2} = \frac{z+2}{-5}$ có một véc-tơ chỉ phương là

(A) $\vec{u} = (1; 5; -2)$.

(B) $\vec{u} = (3; 2; -5)$.

(C) $\vec{u} = (-3; 2; -5)$.

(D) $\vec{u} = (2; 3; -5)$.

CÂU 18. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x+2}{1} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z+1}{2}$. Véc-tơ nào sau đây là một véc-tơ chỉ phương của đường thẳng d ?

(A) $\vec{u}_1 = (-2; 1; -1)$.

(B) $\vec{u}_1 = (1; -3; 2)$.

(C) $\vec{u}_3 = (-1; -3; 2)$.

(D) $\vec{u}_4 = (1; 3; -2)$.

CÂU 19. Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng d song song với đường thẳng $\Delta: \frac{x+2}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-3}{1}$ có véc-tơ chỉ phương là

(A) $\vec{u} = (1; -2; 1)$.

(B) $\vec{u} = (-1; -3; 4)$.

(C) $\vec{u} = (-2; -1; 3)$.

(D) $\vec{u} = (0; -2; 3)$.

CÂU 20. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{5} = \frac{y-2}{-8} = \frac{z+3}{7}$. Véc-tơ nào sau đây là một véc-tơ chỉ phương của d ?

(A) $\vec{u}_3 = (1; 2; -3)$.

(B) $\vec{u}_4 = (7; -8; 5)$.

(C) $\vec{u}_1 = (-1; -2; 3)$.

(D) $\vec{u}_3 = (5; -8; 7)$.

D. BẢNG ĐÁP ÁN

1. C	2. D	3. B	4. B	5. C	7. B	8. A	9. B
10. A	11. C	12. D	13. A	14. C	15. B	16. A	17. B
18. B		19. A	20. D				

Bài 7. BÀI TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN GIAO ĐIỂM GIỮA CÁC ĐỒ THỊ

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Số giao điểm của hai đồ thị

- Muốn tìm số giao điểm giữa đồ thị hàm $y = f(x)$ và đường thẳng $y = a$ ta chỉ việc vẽ đường thẳng $y = a$ (là đường thẳng song song với trục Ox và đi qua điểm có tọa độ $(0; a)$) và xác định số giao điểm.
- Chú ý: Phương trình của trục hoành (hay trục Ox) là $y = 0$.
- Cho hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$, khi đó số giao điểm giữa hai đồ thị hàm số trên bằng số nghiệm của phương trình hoành độ giao điểm $f(x) = g(x)$.
- Trường hợp đề cho bảng biến thiên của hàm $y = f(x)$, để biểu diễn đường $y = a$ ta vẽ một đường ngang sao cho hợp lí với đề bài.

2. Tìm giao điểm của hai đồ thị

- ☑ Dựa vào đồ thị để tìm tọa độ giao điểm.
- ☑ Tìm nghiệm của phương trình hoành độ giao điểm, ta được hoành độ của giao điểm sau đó thay vào hàm số để tìm tung độ.
- ☑ Muốn tìm nghiệm của phương trình $f(u(x)) = a$, ta đi giải phương trình $u(x) = x_0$ (trong đó x_0 là nghiệm của phương trình $f(x) = a$).

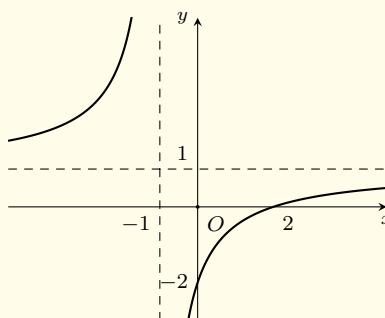
QUICK NOTE

B. BÀI TẬP MẪU

VÍ DỤ 7 (Đề tham khảo BGD 2023).

Cho hàm số $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Tọa độ giao điểm của đồ thị hàm số với trục hoành là

- (A) $(0; -2)$. (B) $(2; 0)$.
 (C) $(-2; 0)$. (D) $(0; 2)$.

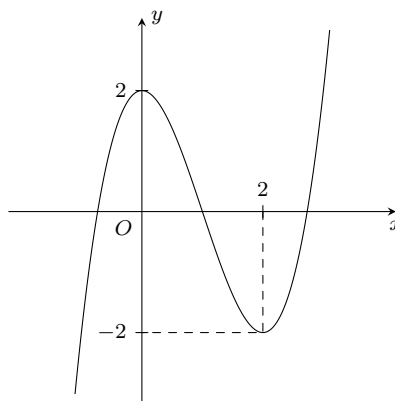


C. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN

CÂU 1.

Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình bên. Phương trình $3f(x) + 4 = 0$ có tất cả bao nhiêu nghiệm?

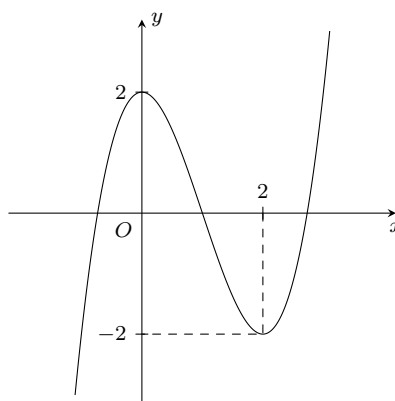
- (A) 3. (B) 0. (C) 1. (D) 2.



CÂU 2.

Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình bên. Phương trình $2f(x) - 5 = 0$ có tất cả bao nhiêu nghiệm?

- (A) 3. (B) 0. (C) 1. (D) 2.

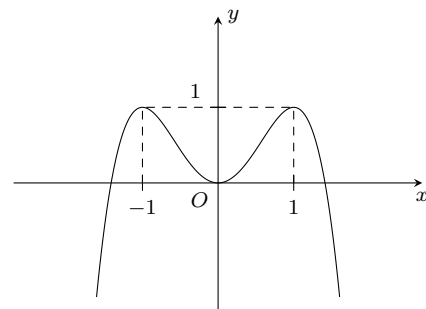


CÂU 3.

QUICK NOTE

Cho hàm số $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị như hình bên. Số nghiệm thực của phương trình $4f(x) - 3 = 0$ là

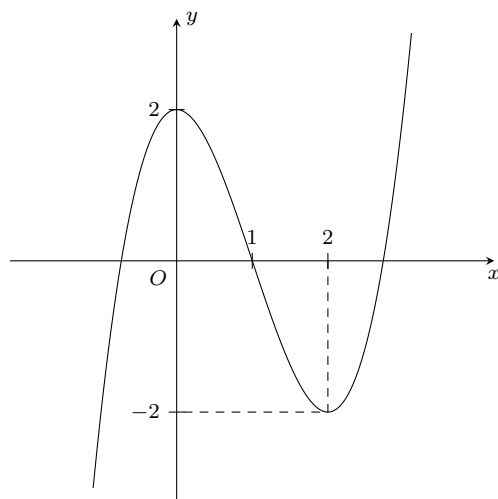
- (A) 4. (B) 3. (C) 2. (D) 0.



CÂU 4.

Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình bên. Số nghiệm thực của phương trình $f(x^2) = -2$ là

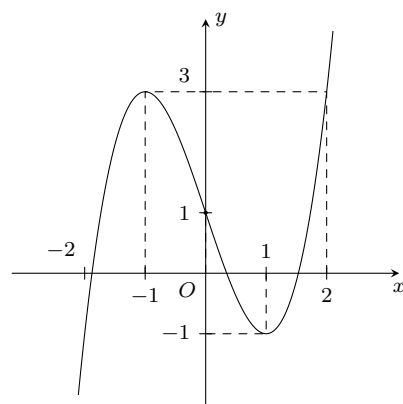
- (A) 3. (B) 4. (C) 0. (D) 2.



CÂU 5.

Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình bên. Phương trình $f(x^2 - 2) = 3$ có tất cả bao nhiêu nghiệm?

- (A) 3. (B) 2. (C) 1. (D) 4.



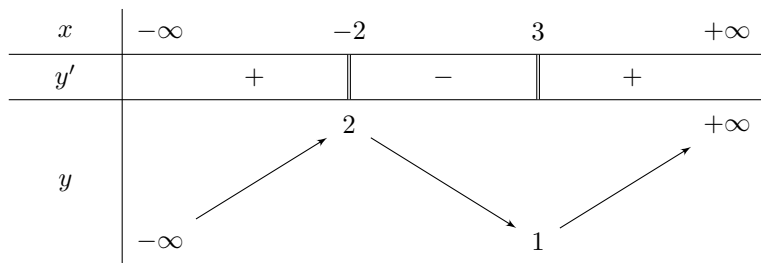
CÂU 6. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$			
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$+\infty$			1			$+\infty$	

Số nghiệm của phương trình $2f(x) + 3 = 0$ là

- (A) 4. (B) 3. (C) 2. (D) 1.

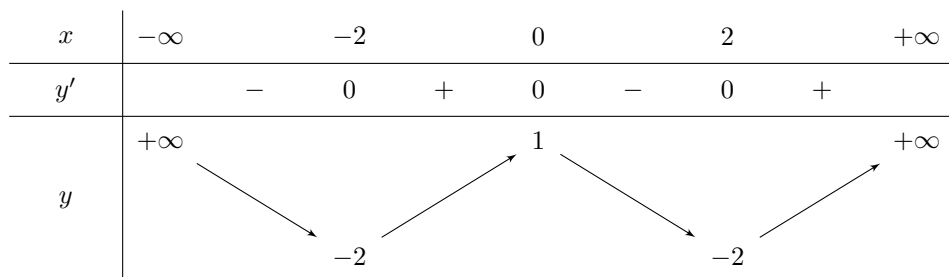
CÂU 7. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ.



Số nghiệm thực của phương trình $2f(x) - 3 = 0$ là

- (A) 2. (B) 1. (C) 3. (D) 4.

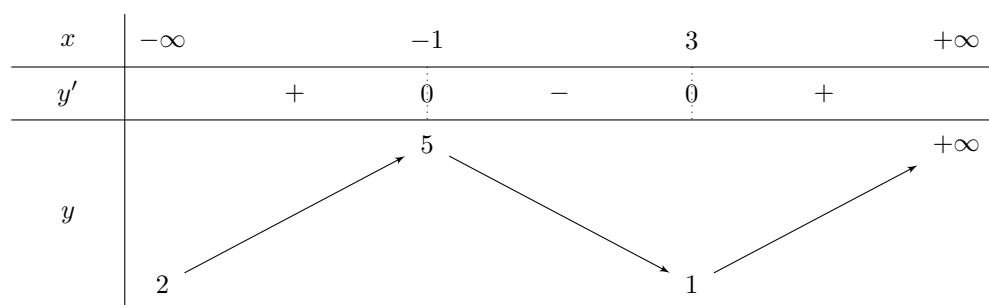
CÂU 8. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ.



Số nghiệm của phương trình $2f(x) - 3 = 0$ là

- (A) 4. (B) 3. (C) 2. (D) 1.

CÂU 9. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ.



Phương trình $f(x) - 2 = 0$ có bao nhiêu nghiệm?

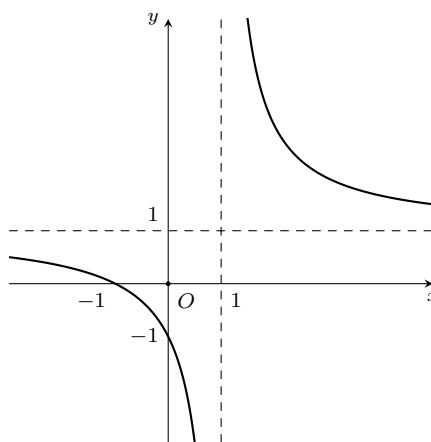
- (A) 1. (B) 3. (C) 2. (D) 0.

CÂU 10.

Cho hàm số $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ có đồ thị như hình bên.

Tìm tọa độ giao điểm của đồ thị hàm số bên với đường thẳng $y = -1$.

- (A) $(0; 1)$. (B) $(0; -1)$.
(C) $(-1; -1)$. (D) $(-1; 0)$.



CÂU 11. Giao điểm của đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{x+1}$ với trục hoành là điểm

- (A) $N\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$. (B) $P\left(\frac{1}{2}; 0\right)$. (C) $Q(-1; 0)$. (D) $M(0; 1)$.

CÂU 12. Cho hàm số $y = x^3 - 3x$ có đồ thị (C) . Tìm số giao điểm của (C) và trục hoành.

- (A) 3. (B) 1. (C) 0. (D) 2.

QUICK NOTE

QUICK NOTE

CÂU 13. Đồ thị hàm số $y = (x^2 - 1)(x^2 + 1)$ cắt trục hoành tại bao nhiêu điểm phân biệt?

- (A) 1. (B) 2. (C) 0. (D) 4.

CÂU 14. Đường thẳng $y = x - 1$ cắt đồ thị hàm số $y = x^3 - x^2 + x - 1$ tại hai điểm phân biệt. Tìm tổng tung độ các giao điểm đó.

- (A) 2. (B) -1. (C) -3. (D) 0.

CÂU 15. Tính tổng hoành độ của các giao điểm của đồ thị hàm số $y = \frac{5x+6}{x+2}$ và đường thẳng $y = -x$.

- (A) -5. (B) -7. (C) 5. (D) 7.

CÂU 16. Đồ thị của hàm số $y = 4x^4 - 2x^2 + 1$ và đồ thị của hàm số $y = x^2 + x + 1$ có tất cả bao nhiêu điểm chung?

- (A) 4. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

CÂU 17. Trong các điểm sau điểm nào là giao điểm của đồ thị hàm số $y = x + \frac{2}{x-1}$ và đường thẳng $y = 2x$.

- (A) (2; -4). (B) (-2; -2). (C) (-1; 2). (D) (2; 4).

CÂU 18. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
y'	-	+	0	-
y	$-\infty$	2	$+\infty$	-4

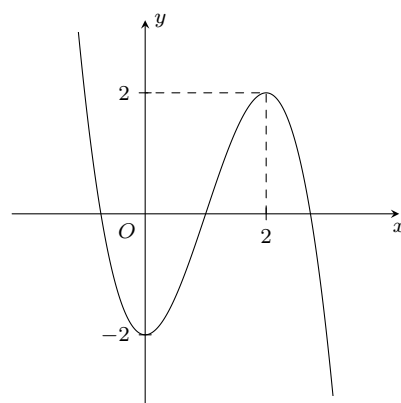
Tìm số nghiệm thực của phương trình $f(x) - 1 = 0$?

- (A) 3. (B) 1. (C) 2. (D) 0.

CÂU 19.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị trong hình bên. Phương trình $f(x) - 1 = 0$ có bao nhiêu nghiệm thực phân biệt nhỏ hơn 2?

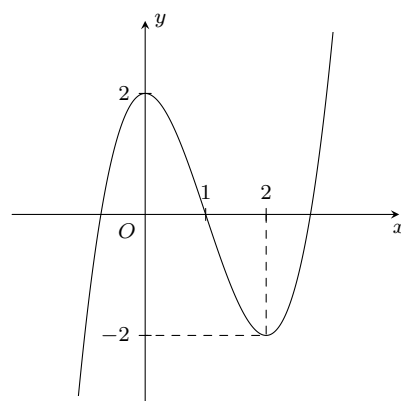
- (A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 0.



CÂU 20.

Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình bên. Phương trình $3f(x) - 2 = 0$ có bao nhiêu nghiệm lớn hơn 1?

- (A) 3. (B) 0. (C) 1. (D) 2.



D. BẢNG ĐÁP ÁN

1. A	2. C	3. A	4. D	5. D	6. A	7. C	8. C
9. C	10. B	11. A	12. A	13. B	14. B	15. B	16. D
		17. D	18. A	19. B	20. C		

BÀI 8. TÍNH CHẤT TÍCH PHÂN

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Định nghĩa

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$. Giả sử $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a; b]$, hiệu số $F(b) - F(a)$ được gọi là tích phân từ a đến b (hay tích phân xác định trên đoạn $[a; b]$) của hàm số $f(x)$.

Kí hiệu $\int_a^b f(x)dx$.

2. Các tính chất

$$\odot \int_a^a f(x)dx = 0.$$

$$\odot \int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du = \dots$$

$$\odot \int_a^b kf(x)dx = k \int_a^b f(x)dx \text{ (với } k \text{ là hằng số).}$$

$$\odot \int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx.$$

$$\odot \int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx.$$

$$\odot \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \text{ (với } a < b < c).$$

B. BÀI TẬP MẪU

VÍ DỤ 8 (Đề minh họa BGD 2022-2023). Nếu $\int_{-1}^4 f(x)dx = 2$ và $\int_{-1}^4 g(x)dx = 3$ thì

$\int_{-1}^4 [f(x) + g(x)]dx$ bằng

(A) 5.

(B) 6.

(C) 1.

(D) 7.

C. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN

CÂU 1. Biết $\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{3}$ và $\int_0^1 g(x)dx = \frac{4}{3}$. Khi đó $\int_0^1 [f(x) - g(x)]dx$ bằng

QUICK NOTE

QUICK NOTE

- (A) $\frac{5}{3}$. (B) -1 . (C) 1 . (D) $-\frac{5}{3}$.

CÂU 2. Cho $I = \int_1^5 f(x)dx = 4$, $J = \int_1^5 g(x)dx = 3$. Khi đó $K = \int_1^5 [4f(x) - 3g(x)] dx$ bằng

- (A) 4 . (B) 2 . (C) 7 . (D) 8 .

CÂU 3. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[a; b]$, nếu $\int_a^d f(x)dx = 5$ và $\int_b^d f(x)dx = 2$ với

$a < d < b$ thì $\int_a^b f(x)dx$ bằng

- (A) 10 . (B) 3 . (C) 7 . (D) $\frac{5}{2}$.

CÂU 4. Cho hàm số $f(x)$, $g(x)$ liên tục trên K và a, b, c thuộc K . Công thức nào sau đây sai?

(A) $\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$

(B) $\int_a^b kf(x)dx = k \int_a^b f(x)dx.$

(C) $\int_a^b f(x)dx = \int_b^a f(x)dx.$

(D) $\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx.$

CÂU 5. Cho $\int_1^0 f(x)dx = 3$ và $\int_0^1 g(x)dx = -4$. Giá trị của $\int_0^1 [f(x) - 2g(x)] dx$ bằng

- (A) 11 . (B) 7 . (C) -1 . (D) 5 .

CÂU 6. Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn $\int_1^2 f(x)dx = -3$ và $\int_2^3 f(x)dx = 4$. Khi đó $\int_1^3 f(x)dx$ bằng

- (A) 12 . (B) -12 . (C) 1 . (D) 7 .

CÂU 7. Biết $\int_0^1 f(x)dx = 3$, khi đó $\int_0^1 [4x - 3f(x)] dx$ bằng

- (A) -9 . (B) -7 . (C) -5 . (D) 11 .

CÂU 8. Biết $\int_0^1 f(x)dx = 2$, $\int_0^1 g(x)dx = -4$. Khi đó $\int_0^1 [f(x) + 2g(x)] dx$ bằng

- (A) -6 . (B) 6 . (C) -2 . (D) 2 .

CÂU 9. Cho hai số thực $a; b$ tùy ý, $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên tập \mathbb{R} . Mệnh đề nào sau đây đúng?

(A) $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$

(B) $\int_a^b f(x)dx = F(a) - F(b).$

(C) $\int_a^b f(x)dx = F(b) + F(a).$

(D) $\int_a^b f(x)dx = f(b) - f(a).$

CÂU 10. Cho $\int_{-1}^2 f(x)dx = 2$ và $\int_{-1}^2 g(x)dx = -1$. Giá trị của $\int_{-1}^2 [2f(x) + 3g(x)] dx$ bằng

QUICK NOTE

- (A) -7. (B) 1. (C) 5. (D) 7.

CÂU 11. Nếu $\int_{-1}^3 f(x)dx = 2$ và $\int_{-1}^3 g(x)dx = -1$ thì $\int_{-1}^3 [f(x) - g(x)] dx$ bằng

- (A) 3. (B) 4. (C) -3. (D) -1.

CÂU 12. Cho $\int_0^1 f(x)dx = 2$ và $\int_0^1 g(x)dx = 5$, khi đó $\int_0^1 [3f(x) - 2g(x)] dx$ bằng:

- (A) 11. (B) -4. (C) 16. (D) -3.

CÂU 13. Nếu $\int_0^2 f(x)dx = 3$ và $\int_0^2 g(x)dx = -2$ thì $\int_0^2 [f(x) - g(x)] dx$ bằng

- (A) 5. (B) 1. (C) -1. (D) -5.

CÂU 14. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} và có $\int_0^2 f(x)dx = 9$; $\int_2^4 f(x)dx = 4$. Tính

$$I = \int_0^4 f(x)dx.$$

- (A) $I = 5$. (B) $I = \frac{9}{4}$. (C) $I = 36$. (D) $I = 13$.

CÂU 15. Cho $\int_{-2}^3 f(x)dx = -4$ và $\int_1^3 f(x)dx = 2$. Khi đó $\int_{-2}^1 f(x)dx$ bằng

- (A) -2. (B) 6. (C) -8. (D) -6.

CÂU 16. Cho $f(x), g(x)$ là các hàm số liên tục trên \mathbb{R} . Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

- (A) $\int f(x)g(x)dx = \int f(x)dx \cdot \int g(x)dx$.
 (B) $\int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$.
 (C) $\int [f(x) - g(x)] dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx$.
 (D) $\int 2f(x)dx = 2 \int f(x)dx$.

CÂU 17. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[2; 4]$ và thỏa mãn $f(2) = 2$, $f(4) = 2020$. Tính $I = \int_1^2 f'(2x)dx$.

- (A) $I = 1009$. (B) $I = 2018$. (C) $I = 2022$. (D) $I = 1011$.

CÂU 18. Cho $\int_1^3 f(x)dx = 18$. Khi đó $\int_1^3 [5 - 2f(x)] dx$ bằng

- (A) -26. (B) 16. (C) -31. (D) -46.

CÂU 19. Cho $\int_0^2 f(x)dx = 3$ và $\int_0^2 g(x)dx = 7$, khi đó $\int_0^2 [f(x) + 3g(x)] dx$ bằng

- (A) 10. (B) 16. (C) -18. (D) 24.

CÂU 20. Cho $\int_1^5 f(x)dx = 5$, $\int_4^5 f(u)du = 2$ và $\int_1^4 g(x)dx = 3$. Tính $I = \int_1^4 [f(x) + g(x)] dx$.

- (A) $I = 5$. (B) $I = 10$. (C) $I = 3$. (D) $I = 6$.

D. BẢNG ĐÁP ÁN

1. B 2. C 3. B 4. C 5. D 6. C 7. B 8. A

QUICK NOTE

9. A

10. B

11. A

12. B

13. A

14. D

15. D

16. A

17. A

18. A

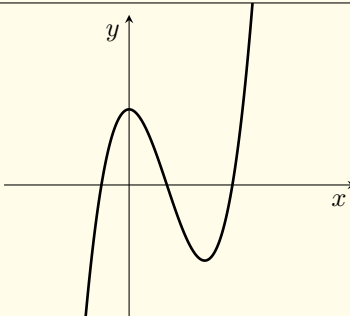
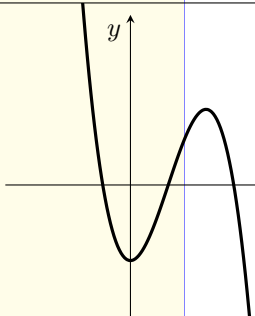
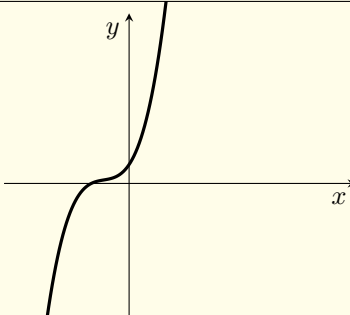
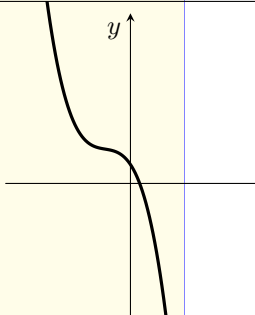
19. D

20. D

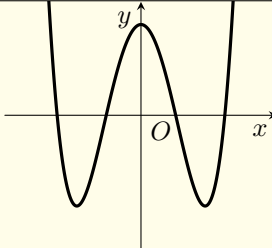
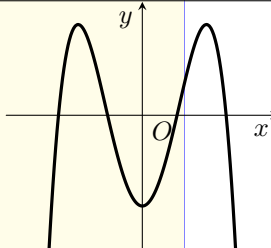
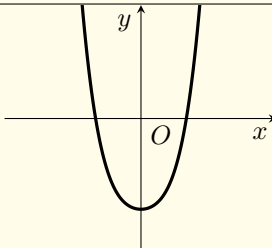
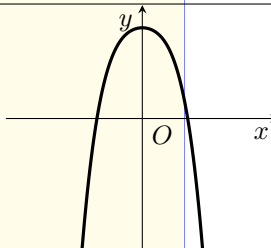
Bài 9. NHẬN DẠNG ĐỒ THỊ HÀM SỐ

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

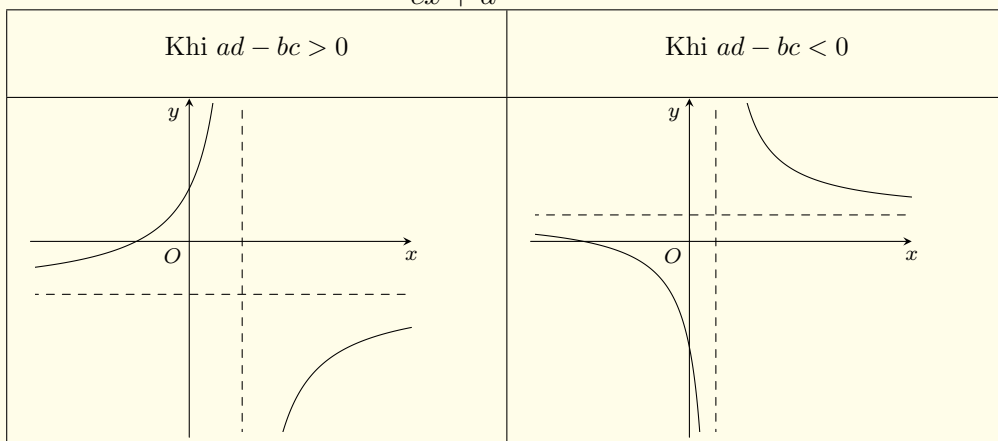
1. Hàm số bậc 3: $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$)

Trường hợp	$a > 0$	$a < 0$
$y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt ($b^2 - 3ac > 0$)		
$y' = 0$ có nghiệm kép hoặc vô nghiệm ($b^2 - 3ac \leq 0$)		

2. Hàm số trùng phương $y = ax^4 + bx^2 + c$ ($a \neq 0$)

Trường hợp	$a > 0$	$a < 0$
Phương trình $y' = 0$ có 3 nghiệm phân biệt ($a.b < 0$)		
Phương trình $y' = 0$ có 1 nghiệm ($a.b \geq 0$)		

3. Hàm số nhất biến $y = \frac{ax + b}{cx + d}, (ab - bc \neq 0)$



QUICK NOTE

B. BÀI TẬP MẪU

VÍ DỤ 9 (De Tham khảo BGD 2023).

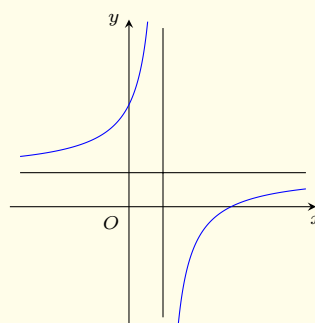
Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình bên

(A) $y = x^4 - 3x^2 + 2.$

(B) $y = \frac{x-3}{x-1}.$

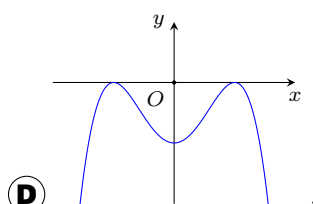
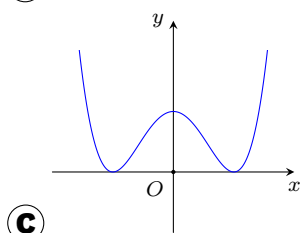
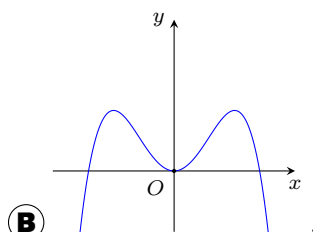
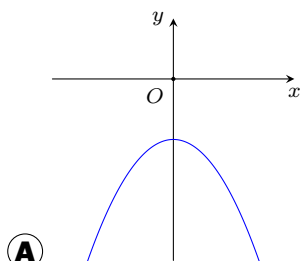
(C) $y = x^2 - 4x + 1.$

(D) $y = x^3 - 3x - 5.$



C. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN

CÂU 1. Đồ thị hàm số $y = -x^4 + 2x^2$ là hình nào sau đây?



CÂU 2.

QUICK NOTE

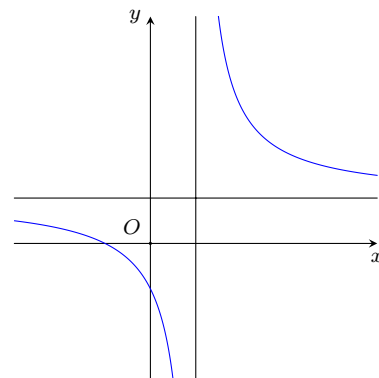
Đường cong ở hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?

(A) $y = \frac{x-1}{x+1}$.

(B) $y = x^3 - 3x^2 - 1$.

(C) $y = -x^3 + 3x + 1$.

(D) $y = \frac{x+1}{x-1}$.

**CÂU 3.**

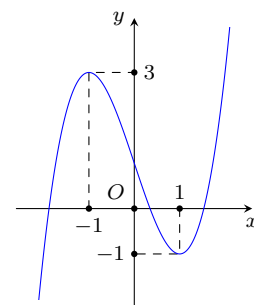
Đồ thị sau đây là của hàm số nào?

(A) $y = -x^3 + 3x^2 + 1$.

(B) $y = x^3 - 3x + 1$.

(C) $y = -x^3 - 3x^2 - 1$.

(D) $y = x^3 - 3x - 1$.

**CÂU 4.**

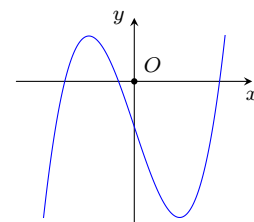
Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?

(A) $y = x^3 - 3x - 1$.

(B) $y = x^4 - 3x^2 - 1$.

(C) $y = -x^3 - 3x - 1$.

(D) $y = -x^4 + x^2 - 1$.

**CÂU 5.**

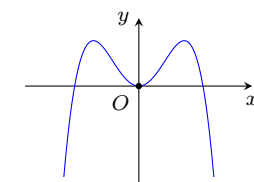
Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?

(A) $y = -x^3 + 3x^2$.

(B) $y = x^4 + 2x^2$.

(C) $y = x^3 - 3x^2$.

(D) $y = -x^4 + 2x^2$.

**CÂU 6.**

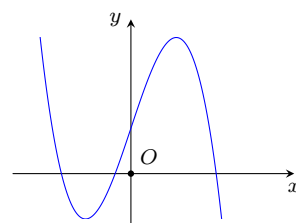
Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?

(A) $y = x^4 - 2x^2 + 1$.

(B) $y = -x^4 + 2x^2 + 1$.

(C) $y = -x^3 + 3x + 1$.

(D) $y = x^3 - 3x + 1$.

**CÂU 7.**

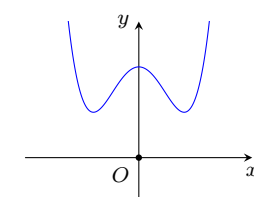
Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?

(A) $y = x^4 - 2x^2 + 2$.

(B) $y = x^3 - x^2 + 2$.

(C) $y = x^3 - x + 2$.

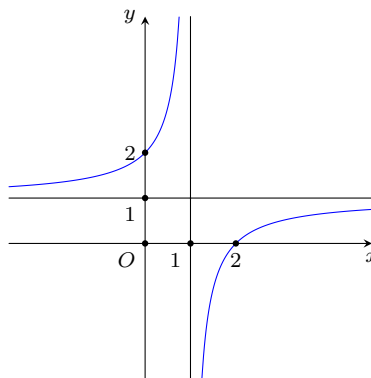
(D) $y = -x^4 + x^2 + 2$.

**CÂU 8.**

Đường cong ở hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?

A $y = \frac{x-2}{x+1}$
C $y = \frac{x+2}{x-2}$

B $y = \frac{x+2}{x-1}$
D $y = \frac{x-2}{x-1}$

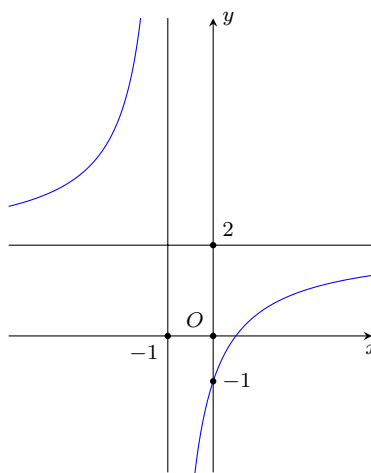


CÂU 9.

Đường cong ở hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?

A $y = \frac{1-2x}{x+1}$
C $y = \frac{2x+1}{x-1}$

B $y = \frac{2x+1}{x+1}$
D $y = \frac{2x-1}{x+1}$

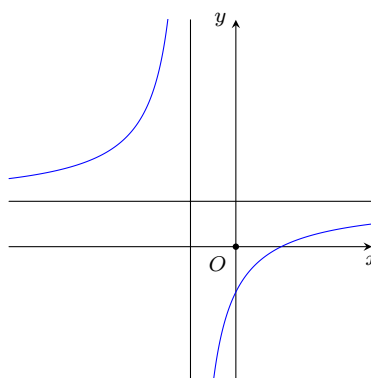


CÂU 10.

Đường cong ở hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?

A $y = \frac{x+2}{x+1}$
C $y = \frac{x-1}{x+1}$

B $y = x^3 - 3x^2 + 1$
D $y = -x^4 + 2x^2 + 1$

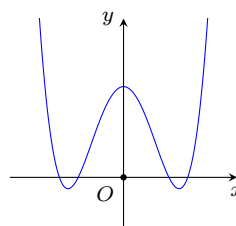


CÂU 11.

Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng đường cong như hình vẽ?

A $y = x^3 - 2x^2 - 2$
C $y = -x^4 + 3x^2 + 2$

B $y = x^3 - 3x^2 + 2$
D $y = x^4 - 3x^2 + 2$



CÂU 12.

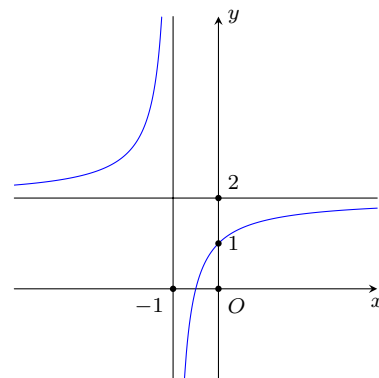
QUICK NOTE

QUICK NOTE

Đường cong ở hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?

(A) $y = \frac{x-1}{x+1}$.
(C) $y = \frac{2x+1}{x+1}$.

(B) $y = \frac{x+2}{x+1}$.
(D) $y = \frac{x+3}{1-x}$.

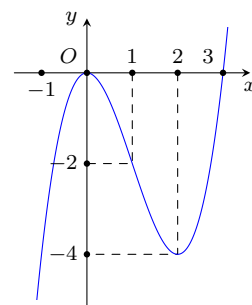


CÂU 13.

Đồ thị sau đây là của hàm số nào?

(A) $y = x^3 + 3x^2$.
(C) $y = x^3 - 3x^2$.

(B) $y = x^3 + 3x$.
(D) $y = x^3 - 3x$.



CÂU 14.

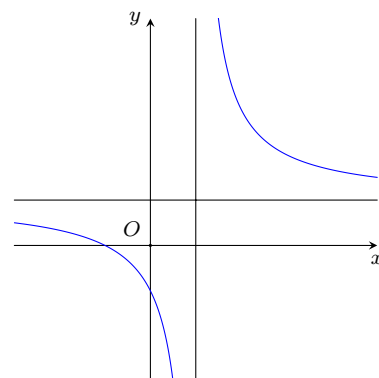
Đường cong ở hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?

(A) $y = \frac{x+1}{x-1}$.

(B) $y = x^4 + x^2 + 1$.

(C) $y = x^3 - 3x - 1$.

(D) $y = \frac{2x-1}{x-1}$.



CÂU 15.

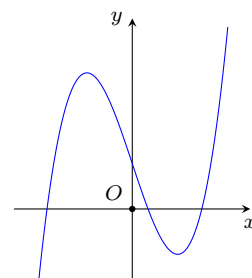
Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?

(A) $y = -x^3 + 3x + 1$.

(B) $y = x^4 - 3x^2 + 1$.

(C) $y = x^3 - 3x + 1$.

(D) $y = x^2 - 3x + 1$.



CÂU 16.

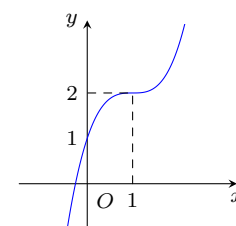
Hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào?

(A) $y = x^3 - 3x + 1$.

(B) $y = x^4 - 2x^2 + 3$.

(C) $y = x^3 - 3x^2 + 3x + 1$.

(D) $y = -x^3 - 3x^2 - 1$.



CÂU 17. Hàm số nào sau đây có bảng biến thiên như hình dưới?

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	2	-2	$+\infty$	

(A) $y = -x^3 + 3x^2 + 1.$

(B) $y = -x^3 + 3x.$

(C) $y = x^3 - 3x^2 - 1.$

(D) $y = x^3 - 3x.$

CÂU 18. Hàm số nào sau đây có bảng biến thiên như hình dưới?

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$		
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$			4		$-\infty$
		\searrow		\nearrow		\searrow
			0			

(A) $y = x^4 - 2x^2 - 3.$

(B) $y = -x^3 + 3x + 2.$

(C) $y = x^3 - 3x + 4.$

(D) $y = \frac{x-1}{2x-1}.$

CÂU 19. Hàm số nào sau đây có bảng biến thiên như hình dưới?

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$		
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$			-3			$-\infty$
		-4			-4		



(A) $y = 2|x^3| - 3x^2 - 3.$

(B) $y = 2x^4 - 4x^2 - 3.$

(C) $y = 2|x^3| - 3|x| - 3.$

(D) $y = \frac{1}{2}x^4 - x^2 - 3.$

CÂU 20. Hàm số nào sau đây có bảng biến thiên như hình dưới?

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$		$-$
$f(x)$	-2  $-\infty$	$-\infty$  -2	

(A) $y = \frac{-2x+3}{x+1}.$

(B) $y = \frac{-2x-4}{x+1}.$

(C) $y = \frac{x-4}{2x+2}.$

(D) $y = \frac{2-x}{x+1}.$

D. BẢNG ĐÁP ÁN

1. B	2. D	3. B	4. A	5. D	6. C	7. A	8. D
9. D	10. C	11. D	12. C	13. C	14. A	15. C	16. C
		17. D	18. B	19. A	20. A		

Bài 10. PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU

QUICK NOTE

QUICK NOTE

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

- ☉ Mặt cầu $(S): (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$ có tâm $I(a; b; c)$, bán kính R .
- ☉ Mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$ (với $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$) có tâm $I(a; b; c)$, bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$.

B. BÀI TẬP MẪU

VÍ DỤ 10 (Đề minh họa BGD 2022-2023). Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z + 1 = 0$. Tâm của (S) có tọa độ là

(A) $(-1; -2; -3)$. (B) $(2; 4; 6)$. (C) $(-2; -4; -6)$. (D) $(1; 2; 3)$.

C. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN

CÂU 1. Trong không gian $Oxyz$, tâm của mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y + 6z - 2 = 0$ là

- (A) $B(-2; 1; 3)$. (B) $D(2; -1; -3)$. (C) $A(-4; 2; 6)$. (D) $C(4; -2; -6)$.

CÂU 2. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 6y - 8z - 10 = 0$. Bán kính R của mặt cầu (S) là

- (A) $R = 36$. (B) $R = \sqrt{6}$. (C) $R = \sqrt{114}$. (D) $R = 6$.

CÂU 3. Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu $(S): (x+4)^2 + (y-5)^2 + (z+6)^2 = 9$ có tâm và bán kính lần lượt là

- (A) $I(4; -5; 6), R = 81$. (B) $I(-4; 5; -6), R = 81$.
(C) $I(4; -5; 6), R = 3$. (D) $I(-4; 5; -6), R = 3$.

CÂU 4. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y+3)^2 + (z-4)^2 = 4$. Tìm tọa độ tâm I và bán kính R của mặt cầu (S) là

- (A) $I(1; -3; 4), R = 4$. (B) $I(-1; 3; -4), R = 4$.
(C) $I(-1; 3; -4), R = 2$. (D) $I(1; -3; 4), R = 2$.

CÂU 5. Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 2z - 10 = 0$ có bán kính bằng

- (A) 6. (B) 3. (C) 4. (D) 5.

CÂU 6. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-2)^2 + (y+4)^2 + (z-1)^2 = 9$. Tâm của (S) có tọa độ là

- (A) $(2; 4; 1)$. (B) $(-2; -4; -1)$. (C) $(-2; 4; -1)$. (D) $(2; -4; 1)$.

CÂU 7. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y - 8z - 3 = 0$. Tâm của (S) có tọa độ là

- (A) $(4; -6; 8)$. (B) $(2; -3; 4)$. (C) $(-4; 6; -8)$. (D) $(-2; 3; -4)$.

CÂU 8. Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu $(S): (x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 4$ có tâm và bán kính lần lượt là

- (A) $I(-1; 2; -3), R = 2$. (B) $I(1; -2; 3), R = 2$.
(C) $I(1; -2; 3), R = 4$. (D) $I(-1; 2; -3), R = 4$.

CÂU 9. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + z^2 = 16$. Tâm của (S) có tọa độ là

- (A) $(1; -2; 0)$. (B) $(-1; 2; 0)$. (C) $(-1; -2; 0)$. (D) $(1; 2; 0)$.

CÂU 10. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z - 2 = 0$. Tọa độ tâm I của mặt cầu (S) là

- (A) $I(2; 4; 6)$. (B) $I(-2; -4; -6)$. (C) $I(1; 2; 3)$. (D) $I(-1; -2; -3)$.

CÂU 11. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x+3)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 = 2$. Xác định tọa độ tâm của mặt cầu (S) .

- (A) $(-3; -1; 1)$. (B) $(3; -1; 1)$. (C) $(-3; 1; -1)$. (D) $(3; 1; -1)$.

CÂU 12. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 9$. Tâm I và bán kính R của mặt cầu là

- (A) $I(1; 2; 3), R = 3$. (B) $I(-1; 2; -3), R = 3$.
(C) $I(1; -2; 3), R = 3$. (D) $I(1; 2; -3), R = 3$.

CÂU 13. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 4y - 8z + 4 = 0$. Tìm tọa độ tâm I và tính bán kính R của mặt cầu (S) .

- (A) $I(-3; 2; -4), R = 5$. (B) $I(3; -2; 4), R = 5$.
(C) $I(-3; 2; -4), R = 25$. (D) $I(3; -2; 4), R = 25$.

CÂU 14. Trong không gian $Oxyz$, tâm của mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y + 6z - 1 = 0$ có tọa độ là

- (A) $(1; -2; 3)$. (B) $(2; -4; 6)$. (C) $(-2; 4; -6)$. (D) $(-1; 2; -3)$.

CÂU 15. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 1 = 0$. Tâm của mặt cầu (S) có tọa độ là

- (A) $(-1; 2; 0)$. (B) $(2; -1; 0)$. (C) $(1; -2; 0)$. (D) $(-2; 1; 0)$.

CÂU 16. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình $(S): x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 4y + 8z = 0$. Tìm tọa độ tâm I và bán kính R .

- (A) $I(2; -2; 4), R = 2\sqrt{6}$. (B) $I(-2; 2; -4), R = 24$.
(C) $I(2; -2; 4), R = 24$. (D) $I(-2; 2; -4), R = 2\sqrt{6}$.

CÂU 17. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z - 12 = 0$, gọi $I(a; b; c)$ là tâm của mặt cầu (S) . Tính $T = a + b - c$.

- (A) 2. (B) -4. (C) 4. (D) 5.

CÂU 18. Trong không gian $Oxyz$, tâm I của mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 2y + 1 = 0$ có tọa độ là

- (A) $I(4; 1; 0)$. (B) $I(4; -1; 0)$. (C) $I(-4; 1; 0)$. (D) $I(-4; -1; 0)$.

CÂU 19. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z+3)^2 = 16$. Tọa độ tâm I của (S) là

- (A) $I(-1; -2; -3)$. (B) $I(-1; 2; 3)$. (C) $I(1; -2; -3)$. (D) $I(1; -2; 3)$.

CÂU 20. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 6z + 10 = 0$ có bán kính R bằng

- (A) $R = 1$. (B) $R = 2$. (C) $R = 3$. (D) $R = 4$.

D. BẢNG ĐÁP ÁN

1. B	2. D	3. D	4. D	5. C	6. D	7. B	8. A
9. D	10. C	11. A	12. C	13. B	14. D	15. C	16. D
17. B	18. A	19. C	20. B				

Bài 11. GÓC GIỮA HAI MẶT PHẪNG

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

✓ Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ và $(Q): a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$. Khi đó

$$\cos((P), (Q)) = |\cos(\vec{n}_{(P)}, \vec{n}_{(Q)})| = \frac{|a_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot b_2 + c_1 \cdot c_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}.$$

✓ Lưu ý: $0^\circ \leq ((P), (Q)) \leq 90^\circ$.

QUICK NOTE

QUICK NOTE

B. BÀI TẬP MẪU

VÍ DỤ 11 (Đề minh họa BGD 2022-2023). Trong không gian $Oxyz$, góc giữa hai mặt phẳng (Oxy) và (Oyz) bằng

- (A) 30° . (B) 45° . (C) 60° . (D) 90° .

C. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN

CÂU 1. Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): x - 2y - z + 1 = 0$ và $(Q): x + y + 2z + 7 = 0$. Tính góc giữa hai mặt phẳng đó.

- (A) 30° . (B) 60° . (C) 45° . (D) 120° .

CÂU 2. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x - z - 3 = 0$. Tính góc giữa (P) và mặt phẳng (Oxy) .

- (A) 45° . (B) 90° . (C) 30° . (D) 60° .

CÂU 3. Trong không gian $Oxyz$, biết hình chiếu của O lên mặt phẳng (P) là $H(2; -1; -2)$. Số đo góc giữa mặt phẳng (P) với mặt phẳng $(Q): x - y - 5 = 0$ là

- (A) 90° . (B) 60° . (C) 45° . (D) 30° .

CÂU 4. Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): x - y - 6 = 0$ và (Q) . Biết rằng điểm $H(2; -1; -2)$ là hình chiếu vuông góc của gốc tọa độ $O(0; 0; 0)$ xuống mặt phẳng (Q) . Số đo góc giữa mặt phẳng (P) và mặt phẳng (Q) bằng

- (A) 45° . (B) 60° . (C) 30° . (D) 90° .

CÂU 5. Trong không gian $Oxyz$, góc giữa mặt phẳng $(\alpha): \sqrt{2}x + y + z - 5 = 0$ và mặt phẳng (Oxy) là

- (A) 90° . (B) 30° . (C) 45° . (D) 60° .

CÂU 6. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $H(2; -1; -2)$ là hình chiếu vuông góc của gốc tọa độ O xuống mặt phẳng (P) , số đo góc giữa mặt (P) và mặt phẳng $(Q): x - y - 11 = 0$ bằng bao nhiêu?

- (A) 90° . (B) 60° . (C) 45° . (D) 30° .

CÂU 7. Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): x - 2y - z + 2 = 0$ và $(Q): 2x - y + z + 1 = 0$. Góc giữa (P) và (Q) là

- (A) 120° . (B) 90° . (C) 30° . (D) 60° .

CÂU 8. Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): x + (m+1)y - 2z + m = 0$ và $(Q): 2x - y + 3 = 0$, với m là tham số thực. Để (P) vuông góc với (Q) thì giá trị của m bằng bao nhiêu?

- (A) $m = 3$. (B) $m = -1$. (C) $m = -5$. (D) $m = 1$.

CÂU 9. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) đi qua các điểm $A(-2; 0; 0)$, $B(0; 3; 0)$, $C(0; 0; -3)$. Mặt phẳng (P) vuông góc với mặt phẳng nào trong các mặt phẳng sau?

- (A) $3x - 2y + 2z + 6 = 0$. (B) $x - 2y - z - 3 = 0$.
(C) $2x + 2y - z - 1 = 0$. (D) $x + y + z + 1 = 0$.

CÂU 10. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $x - my + z - 1 = 0$ ($m \in \mathbb{R}$), mặt phẳng (Q) chứa trục Ox và qua điểm $A(1; -3; 1)$. Tìm số thực m để hai mặt phẳng (P) , (Q) vuông góc.

- (A) $m = -\frac{1}{3}$. (B) $m = \frac{1}{3}$. (C) $m = 3$. (D) $m = -3$.

CÂU 11. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x + 2y - 2z + 3 = 0$, mặt phẳng $(Q): x - 3y + 5z - 2 = 0$. Cô-sin của góc giữa hai mặt phẳng (P) , (Q) là

- (A) $-\frac{5}{7}$. (B) $-\frac{\sqrt{35}}{7}$. (C) $\frac{5}{7}$. (D) $\frac{\sqrt{35}}{7}$.

CÂU 12. Trong không gian $Oxyz$, gọi α là góc giữa hai mặt phẳng $(P): x - \sqrt{3}y + 2z + 1 = 0$ và mặt phẳng (Oxy) . Khẳng định nào sau đây đúng?

- (A) $\alpha = 30^\circ$. (B) $\alpha = 60^\circ$. (C) $\alpha = 90^\circ$. (D) $\alpha = 45^\circ$.

CÂU 13. Trong hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): \frac{x-2}{3} + \frac{y-1}{2} + \frac{z-4}{-6} = 1$ và $(Q): x + 2y + 3z + 7 = 0$. Tính tan góc tạo bởi hai mặt phẳng đã cho.

QUICK NOTE

- ☐ A $\frac{3}{\sqrt{19}}$
☐ B $\frac{3}{5\sqrt{19}}$
☐ C $\frac{5}{3\sqrt{19}}$
☐ D $\frac{3\sqrt{19}}{5}$

CÂU 14. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x - 2y + 2z - 5 = 0$. Xét mặt phẳng $(Q): x + (2m - 1)z + 7 = 0$, với m là tham số thực. Tìm tất cả giá trị của m để (P) tạo với (Q) góc $\frac{\pi}{4}$.

- ☐ A $\begin{cases} m = 1 \\ m = 4 \end{cases}$
☐ B $\begin{cases} m = 2 \\ m = -2\sqrt{2} \end{cases}$
☐ C $\begin{cases} m = 2 \\ m = 4 \end{cases}$
☐ D $\begin{cases} m = 4 \\ m = \sqrt{2} \end{cases}$

CÂU 15. Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(\alpha): x + y + z - 1 = 0$ và $(\beta): 2x - y + mz - m + 1 = 0$, với m là tham số thực. Giá trị của m để $(\alpha) \perp (\beta)$ là

- ☐ A 1.
 ☐ B -4.
 ☐ C -1.
 ☐ D 0.

CÂU 16. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha): 2x - y + z - 3 = 0$ và $(\beta): 3x - 4y + 5z = 0$. Góc tạo bởi hai mặt phẳng (α) và (β) bằng

- ☐ A 90° .
 ☐ B 30° .
 ☐ C 60° .
 ☐ D 45° .

CÂU 17. Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): x - y - 6 = 0$ và (Q) . Biết rằng điểm $H(2; -1; -2)$ là hình chiếu vuông góc của gốc tọa độ $O(0; 0; 0)$ xuống mặt phẳng (Q) . Số đo góc giữa mặt phẳng (P) và mặt phẳng (Q) bằng

- ☐ A 60° .
 ☐ B 45° .
 ☐ C 30° .
 ☐ D 90° .

CÂU 18. Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng (P) và (Q) lần lượt có hai véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}_{(P)}$ và $\vec{n}_{(Q)}$. Biết góc giữa hai véc-tơ $\vec{n}_{(P)}$ và $\vec{n}_{(Q)}$ bằng 30° . Góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) bằng

- ☐ A 30° .
 ☐ B 45° .
 ☐ C 60° .
 ☐ D 90° .

CÂU 19. Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng (P) và (Q) lần lượt có hai véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}_{(P)}$ và $\vec{n}_{(Q)}$. Biết góc giữa hai véc-tơ $\vec{n}_{(P)}$ và $\vec{n}_{(Q)}$ bằng 120° . Góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) bằng

- ☐ A 30° .
 ☐ B 45° .
 ☐ C 60° .
 ☐ D 90° .

CÂU 20. Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng (P) và (Q) lần lượt có hai véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}_{(P)}$ và $\vec{n}_{(Q)}$. Biết cô-sin góc giữa hai véc-tơ $\vec{n}_{(P)}$ và $\vec{n}_{(Q)}$ bằng $\frac{1}{2}$. Góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) bằng

- ☐ A 30° .
 ☐ B 45° .
 ☐ C 60° .
 ☐ D 90° .

D. BẢNG ĐÁP ÁN

1. B	2. A	3. C	4. A	5. D	6. C	7. D	8. D
9. C	10. C	11. D	12. D	13. D	14. A	15. C	16. B
		17. B	18. A	19. C	20. C		

Bài 12. CÁC PHÉP TOÁN CƠ BẢN CỦA SỐ PHỨC

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Định nghĩa

- a) Một số phức là một biểu thức dạng $z = a + bi$ với $a, b \in \mathbb{R}$ và $i^2 = -1$, i được gọi là đơn vị ảo, a được gọi là phần thực và b được gọi là phần ảo của số phức $z = a + bi$.
- b) Tập hợp các số phức được kí hiệu là \mathbb{C} , $\mathbb{C} = \{a + bi | a, b \in \mathbb{R}; i^2 = -1\}$.
- c) Chú ý

- ☑ Khi phần ảo $b = 0 \Leftrightarrow z = a$ là số thực.
- ☑ Khi phần thực $a = 0 \Leftrightarrow z = bi \Leftrightarrow z$ là số thuần ảo.
- ☑ Số $0 = 0 + 0i$ vừa là số thực, vừa là số ảo.

QUICK NOTE

d) Hai số phức bằng nhau $a + bi = c + di \Leftrightarrow \begin{cases} a = c \\ b = d \end{cases}$ với $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

e) Hai số phức $z_1 = a + bi; z_2 = -a - bi$ được gọi là hai số phức đối nhau.

2. Số phức liên hợp

Số phức liên hợp của $z = a + bi$ với $a, b \in \mathbb{R}$ là $a - bi$ và được kí hiệu bởi \bar{z} . Rõ ràng $\overline{\bar{z}} = z$.

3. Biểu diễn hình học

Trong mặt phẳng phức Oxy (Ox là trục thực, Oy là trục ảo), số phức $z = a + bi$ với $a, b \in \mathbb{R}$ được biểu diễn bằng điểm $M(a; b)$.

4. Mô-đun của số phức

Mô-đun của số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) là $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

5. Các phép toán trên tập số phức

Cho hai số phức $z = a + bi; z' = a' + b'i$ với $a, b, a', b' \in \mathbb{R}$ và số $k \in \mathbb{R}$.

a) Tổng hai số phức: $z + z' = a + a' + (b + b')i$.

b) Hiệu hai số phức: $z - z' = a - a' + (b - b')i$.

c) Nhân hai số phức: $z \cdot z' = (a + bi)(a' + b'i) = (a \cdot a' - b \cdot b') + (a \cdot b' + a' \cdot b)i$.

d) Chia 2 số phức:

☉ Số phức nghịch đảo: $\frac{1}{z} = \frac{1}{|z|^2} \bar{z}$.

☉ Nếu $z \neq 0$ thì $\frac{z'}{z} = \frac{z' \cdot \bar{z}}{|z|^2}$, nghĩa là nếu muốn chia số phức z' cho số phức $z \neq 0$ thì ta nhân cả tử và mẫu của thương $\frac{z'}{z}$ cho \bar{z} .

B. BÀI TẬP MẪU

VÍ DỤ 12 (ĐỀ MINH HỌA BGD 2022-2023). Cho số phức $z = 2 + 9i$, phần thực của số phức z^2 bằng

(A) -77.

(B) 4.

(C) 36.

(D) 85.

C. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN

CÂU 1. Số phức liên hợp của $z = (2 + 4i) + (1 - 3i)$ là

(A) $\bar{z} = -3 - i$.

(B) $\bar{z} = 1 + 3i$.

(C) $\bar{z} = 3 + i$.

(D) $\bar{z} = 3 - i$.

CÂU 2. Tìm phần ảo của số phức \bar{z} , biết $z = \frac{(1 + i)3i}{1 - i}$.

(A) 0.

(B) -1.

(C) 3.

(D) -3.

CÂU 3. Số phức liên hợp của số phức $3 - 2i$ là

(A) $3 + 2i$.

(B) $-3 - 2i$.

(C) $-2 + 3i$.

(D) $-3 + 2i$.

CÂU 4. Cho các số phức $z_1 = 2 + 3i, z_2 = 4 + 5i$. Số phức liên hợp của số phức $w = 2(z_2 - z_1)$ là

(A) $\bar{w} = 8 - 15i$.

(B) $\bar{w} = 4 + 4i$.

(C) $\bar{w} = 4 - 4i$.

(D) $\bar{w} = 8 + 15i$.

CÂU 5. Cho số phức $z = 4 - 2i$. Phần ảo của số phức $3 - 4z$ là

(A) -4.

(B) -8.

(C) -2.

(D) 8.

CÂU 6. Cho số phức $z = 2 - 3i$. Tìm mô-đun của số phức $w = 2z + (1 + i)\bar{z}$.

(A) $|w| = \sqrt{10}$.

(B) $|w| = 4$.

(C) $|w| = \sqrt{15}$.

(D) $|w| = \sqrt{2}$.

CÂU 7. Phần ảo của số phức $z = (2 - 3i)^2 - (1 + i)^2$ là

(A) -10.

(B) -10i.

(C) -14i.

(D) -14.

QUICK NOTE

CÂU 8. Cho số phức $z = -2 + xi$, ($x \in \mathbb{R}$) có mô-đun bằng

- (A) $\sqrt{x^2 + 2}$. (B) $\sqrt{x^2 + 4}$. (C) $|x| + 2$. (D) $|2x|$.

CÂU 9. Cho hai số phức $z_1 = 1 + 2i$ và $z_2 = 2 - 3i$. Phần ảo của số phức $w = 3z_1 - 2z_2$ là

- (A) 1. (B) 11. (C) 12. (D) $12i$.

CÂU 10. Cho số phức z thỏa mãn $z(2 - i) + 13i = 1$. Tính mô-đun của số phức z .

- (A) $|z| = \frac{5\sqrt{34}}{3}$. (B) $|z| = 34$. (C) $|z| = \sqrt{34}$. (D) $|z| = \frac{\sqrt{34}}{3}$.

CÂU 11. Cho số phức $z = (1 + i)^2(1 + 2i)$. Số phức z có phần ảo là

- (A) -4. (B) $2i$. (C) 4. (D) 2.

CÂU 12. Tìm số phức liên hợp của số phức $z = 3 + 2i$.

- (A) $\bar{z} = 3 - 2i$. (B) $\bar{z} = -3 - 2i$. (C) $\bar{z} = 2 - 3i$. (D) $\bar{z} = -2 - 3i$.

CÂU 13. Số phức $z = 4 - 3i$ có mô-đun bằng

- (A) $2\sqrt{2}$. (B) 25. (C) 5. (D) 8.

CÂU 14. Cho số phức $z = 5 - 4i$. Số phức $z - 2$ có

- (A) Phần thực bằng 5 và phần ảo bằng -4.
(B) Phần thực bằng 3 và phần ảo bằng -4.
(C) Phần thực bằng -4 và phần ảo bằng 3.
(D) Phần thực bằng 3 và phần ảo bằng $-4i$.

CÂU 15. Cho số phức $z_1 = 2 + 3i$ và $z_2 = 1 - 2i$. Số phức liên hợp của số phức $w = z_1 + z_2$ là

- (A) $\bar{w} = 3 + i$. (B) $\bar{w} = 3 - i$. (C) $\bar{w} = 3 - 2i$. (D) $\bar{w} = 1 - 4i$.

CÂU 16. Cho các số phức $z_1 = 2 - 3i$, $z_2 = 1 + 4i$. Tìm số phức liên hợp với số phức $z_1 z_2$.

- (A) $-14 - 5i$. (B) $-10 - 5i$. (C) $-10 + 5i$. (D) $14 - 5i$.

CÂU 17. Cho hai số phức $z_1 = 1 + i$ và $z_2 = 2 - 3i$. Tính mô-đun của số phức $z_1 + z_2$.

- (A) $|z_1 + z_2| = 5$. (B) $|z_1 + z_2| = \sqrt{13}$. (C) $|z_1 + z_2| = 1$. (D) $|z_1 + z_2| = \sqrt{5}$.

CÂU 18. Tìm số phức liên hợp của số phức $z = (-3 - 4i)(2 + i) + 1 - 3i$.

- (A) $\bar{z} = -1 + 14i$. (B) $\bar{z} = 1 - 14i$. (C) $\bar{z} = 1 + 14i$. (D) $\bar{z} = -1 - 14i$.

CÂU 19. Cho hai số phức $z_1 = 1 + i$ và $z_2 = 2 - 3i$. Tính mô-đun của $z_1 + z_2$.

- (A) $|z_1 + z_2| = 1$. (B) $|z_1 + z_2| = \sqrt{5}$. (C) $|z_1 + z_2| = \sqrt{13}$. (D) $|z_1 + z_2| = 5$.

CÂU 20. Cho hai số phức $z_1 = 3 + i$ và $z_2 = 2 - 4i$. Mô-đun của số phức $z_1 z_2$ bằng

- (A) 10. (B) $10\sqrt{2}$. (C) -10. (D) 20.

D. BẢNG ĐÁP ÁN

1. D	2. A	3. A	4. C	5. D	6. A	7. D	8. B
9. C	10. C	11. D	12. A	13. C	14. B	15. B	16. D
		17. B	18. A	19. C	20. B		

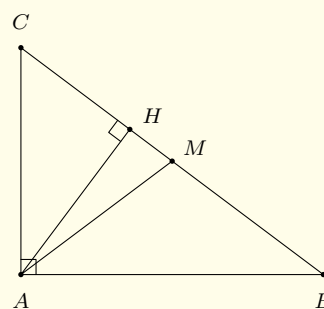
Bài 13. TÍNH THỂ TÍCH KHỐI LĂNG TRỤ ĐỨNG

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

- a) Thể tích khối lăng trụ $V = B \cdot h$ với B : diện tích đáy, h : chiều cao.
b) Các hệ thức lượng trong tam giác vuông.

QUICK NOTE

Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH , trung tuyến AM . Khi đó



- ☑ $BC^2 = AB^2 + AC^2$.
- ☑ $BH \cdot BC = AB^2$; $CH \cdot CB = CA^2$.
- ☑ $AB \cdot AC = AH \cdot BC$; $AM = \frac{1}{2}BC$.
- ☑ $CH \cdot BH = AH^2$.
- ☑ $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}$.
- ☑ $\sin \widehat{ABC} = \frac{AC}{BC}$; $\cos \widehat{ABC} = \frac{AB}{BC}$;
 $\tan \widehat{ABC} = \frac{AC}{AB}$; $\cot \widehat{ABC} = \frac{AB}{AC}$.

c) Đường chéo của hình vuông cạnh a có độ dài bằng $a\sqrt{2}$.

d) Đường cao của tam giác đều cạnh a có độ dài bằng $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

e) Diện tích tam giác bất kỳ

- ☑ $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_a = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h_b = \frac{1}{2} \cdot c \cdot h_c$, trong đó h_a, h_b, h_c lần lượt là đường cao hạ từ các đỉnh A, B, C của tam giác ABC ; $BC = a, AC = b, AB = c$.
- ☑ $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot c \cdot \sin B = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin C$.
- ☑ $S_{\triangle ABC} = \frac{abc}{4R}$, trong đó R là bán kính đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$.
- ☑ $S_{\triangle ABC} = p \cdot r$, trong đó r là bán kính đường tròn nội tiếp $\triangle ABC$.
- ☑ $S_{\triangle ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, trong đó $p = \frac{a+b+c}{2}$.

f) Trường hợp đặc biệt

- ☑ Diện tích tam giác $\triangle ABC$ vuông tại A là $S = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC$.
- ☑ Diện tích của tam giác đều cạnh a là $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

g) Diện tích hình chữ nhật $S = a \cdot b$, trong đó a, b lần lượt là chiều dài và chiều rộng của hình chữ nhật.

h) Diện tích hình vuông cạnh a là $S = a^2$.

i) Diện tích hình thoi $S = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BD$, trong đó AC và BD là hai đường chéo.

j) Diện tích hình thang $S = \frac{(\text{đáy lớn} + \text{đáy bé}) \cdot h}{2}$, trong đó h là chiều cao của hình thang.

k) Diện tích hình bình hành $ABCD$ là $S = AH \cdot CD$, trong đó AH là chiều cao của tam giác ABD .

l) Định lý hàm số sin: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$.

m) Định lý hàm số cosin

$$\text{☑ } a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A.$$

☉ $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos B.$

☉ $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C.$

n) Công thức đường trung tuyến

☉ $m_a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4}.$ ☉ $m_b^2 = \frac{a^2 + c^2}{2} - \frac{b^2}{4}.$ ☉ $m_c^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4}.$

B. BÀI TẬP MẪU

VÍ DỤ 13 (Đề tham khảo 2023). Cho khối lăng trụ có diện tích đáy $B = 3$ và chiều cao $h = 4$. Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

- (A) 4. (B) 12. (C) 8. (D) 6.

C. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN

CÂU 21. Thể tích của khối hộp chữ nhật có độ dài các cạnh lần lượt là $a, 2a, 3a$ bằng

- (A) $3a^3.$ (B) $2a^3.$ (C) $6a^3.$ (D) $\frac{2a^3}{3}.$

CÂU 22. Gọi h, S, V lần lượt là chiều cao, diện tích đáy và thể tích của hình lăng trụ. Chiều cao khối lăng trụ là

- (A) $\frac{V}{S}.$ (B) $\frac{S}{V}.$ (C) $\frac{3V}{S}.$ (D) $\frac{1}{3}SV.$

CÂU 23. Cho lăng trụ tứ giác $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình vuông cạnh a và có thể tích bằng $3a^3$. Tính chiều cao h của lăng trụ đã cho.

- (A) $h = a.$ (B) $h = 3a.$ (C) $h = 9a.$ (D) $h = \frac{a}{3}.$

CÂU 24. Một khối lăng trụ có chiều cao bằng $2a$ và diện tích đáy bằng $2a^2$. Thể tích khối lăng trụ đã cho bằng

- (A) $V = \frac{2a^3}{3}.$ (B) $V = 4a^3.$ (C) $V = \frac{4a^3}{3}.$ (D) $V = \frac{4a^2}{3}.$

CÂU 25. Thể tích khối lăng trụ có diện tích đáy bằng 4 và chiều cao bằng 3 là

- (A) 4. (B) 48. (C) 16. (D) 12.

CÂU 26. Khối lăng trụ có diện tích đáy bằng 24 cm^2 , chiều cao bằng 3 cm thì có thể tích bằng

- (A) $8 \text{ cm}^3.$ (B) $72 \text{ cm}^3.$ (C) $126 \text{ cm}^3.$ (D) $24 \text{ cm}^3.$

CÂU 27. Cho khối lăng trụ có diện tích đáy bằng $4a^2$ và khoảng cách giữa hai đáy bằng a . Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

- (A) $4a^3.$ (B) $\frac{1}{3}a^3.$ (C) $3a^3.$ (D) $a^3.$

CÂU 28. Khối lăng trụ có chiều cao bằng h , diện tích đáy bằng B có thể tích là

- (A) $V = \frac{1}{3}B \cdot h.$ (B) $V = \frac{1}{2}B \cdot h.$ (C) $V = \frac{1}{6}B \cdot h.$ (D) $V = B \cdot h.$

CÂU 29. Biết rằng thể tích của một khối lập phương bằng 8. Tính tổng diện tích các mặt của hình lập phương đó?

- (A) 36. (B) 27. (C) 16. (D) 24.

CÂU 30. Khối lăng trụ có diện tích đáy bằng 4 cm^2 , chiều cao bằng 2 cm có thể tích bằng

- (A) $8 \text{ cm}^3.$ (B) $\frac{8}{3} \text{ cm}^3.$ (C) $4 \text{ cm}^3.$ (D) $6 \text{ cm}^3.$

CÂU 31. Thể tích của khối lăng trụ có diện tích đáy a^2 và chiều cao a là

- (A) $a^3.$ (B) $\frac{a^3}{3}.$ (C) $3a^3.$ (D) $2a^3.$

CÂU 32. Nếu một khối lăng trụ đứng có diện tích đáy bằng B và cạnh bên bằng h thì có thể tích là

- (A) $Bh.$ (B) $\frac{1}{3}Bh.$ (C) $\frac{1}{2}Bh.$ (D) $3Bh.$

QUICK NOTE

QUICK NOTE

CÂU 33. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có diện tích đáy là 15 và chiều cao của lăng trụ là 10. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là

- (A) 200. (B) 150. (C) 100. (D) 50.

CÂU 34. Nếu cạnh của hình lập phương tăng lên gấp 2 lần thì thể tích của hình lập phương đó sẽ tăng lên bao nhiêu lần?

- (A) 9. (B) 8. (C) 6. (D) 4.

CÂU 35. Thể tích của khối lăng trụ đứng tam giác đều có tất cả các cạnh bằng a bằng

- (A) $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$. (B) $\frac{a^3}{3}$. (C) $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$. (D) $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

CÂU 36. Tính thể tích của khối lăng trụ tam giác đều có cạnh đáy bằng $2a$ và cạnh bên bằng a .

- (A) $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$. (B) a^3 . (C) $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. (D) $a^3\sqrt{3}$.

CÂU 37. Tính thể tích V của khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ biết $AC' = 2a\sqrt{3}$.

- (A) $V = a^3$. (B) $V = 24\sqrt{3}a^3$. (C) $V = 8a^3$. (D) $V = 3\sqrt{3}a^3$.

CÂU 38. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A . Biết $AB = a$, $AC = 2a$, $AA' = 3a$. Thể tích khối lăng trụ đã cho bằng

- (A) $3a^3$. (B) $6a^3$. (C) a^3 . (D) $3a^2$.

CÂU 39. Thể tích của khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có các cạnh $AB = 4$, $AD = 5$ và $AA' = 6$ là

- (A) $V = 200$. (B) $V = 100$. (C) $V = 120$. (D) $V = 130$.

CÂU 40. Cho khối lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình thoi có độ dài hai đường chéo $AC = 2a$ và $BD = a$, cạnh bên $AA' = 3a$. Thể tích V của khối lăng trụ đã cho là

- (A) $V = 6a^3$. (B) $V = 12a^3$. (C) $V = 3a^3$. (D) $V = 2a^3$.

D. BẢNG ĐÁP ÁN

21. C	22. A	23. B	24. B	25. D	26. B	27. A	28. D
29. D	30. A	31. A	32. A	33. B	34. B	35. C	36. D
		37. C	38. A	39. C	40. C		

Bài 14. THỂ TÍCH KHỐI CHÓP

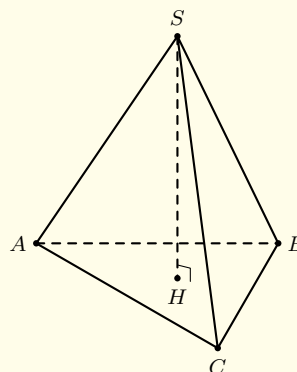
A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Thể tích khối chóp

$$V = \frac{1}{3} \cdot B \cdot h.$$

Trong đó:

- ☉ B là diện tích đa giác đáy.
- ☉ h là chiều cao khối chóp.

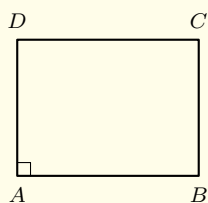
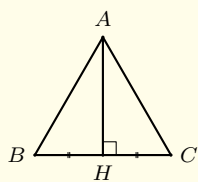
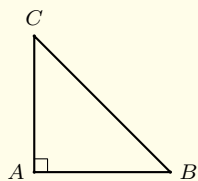


2. Diện tích đa giác

☑ Diện tích tam giác vuông: $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot AC$.

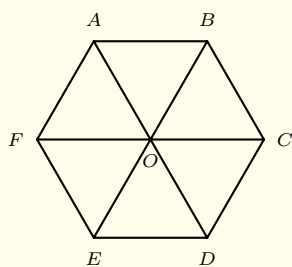
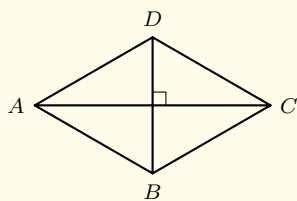
☑ Diện tích tam giác đều: $S_{\triangle ABC} = \frac{AB^2\sqrt{3}}{4}$.

☑ Diện tích hình chữ nhật: $S_{ABCD} = \frac{1}{2}AB \cdot AD$.



☑ Diện tích hình thoi: $S_{ABCD} = \frac{1}{2}AC \cdot BD$.

☑ Diện tích lục giác đều: $S_{ABCDEF} = 6 \cdot S_{\triangle OAB}$.



QUICK NOTE

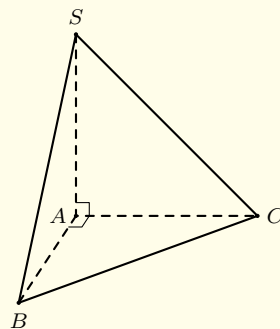
B. BÀI TẬP MẪU

VÍ DỤ 14 (Đề minh họa BGD 2022-2023).

QUICK NOTE

Cho khối chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại A , $AB = 2$, SA vuông góc với đáy và $SA = 3$ (Tham khảo hình vẽ). Thể tích khối chóp đã cho bằng

- (A) 12. (B) 2. (C) 6. (D) 4.



C. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN

CÂU 1. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B . Cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy, $SA = AB = 2a$, $BC = 3a$. Thể tích của khối chóp $S.ABC$ là

- (A) a^3 . (B) $3a^3$. (C) $4a^3$. (D) $2a^3$.

CÂU 2. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đường cao SA và đáy $ABCD$ là hình thoi. Thể tích khối chóp đã cho được tính theo công thức nào sau đây?

- (A) $\frac{1}{3} SA \cdot AB^2$. (B) $\frac{1}{3} SA \cdot AC \cdot BD$.
(C) $\frac{1}{6} SA \cdot AC \cdot BD$. (D) $\frac{1}{2} SA \cdot AB^2$.

CÂU 3. Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) . Biết $SA = 2a$ và tam giác ABC vuông tại A có $AB = 3a$, $AC = 4a$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$ theo a .

- (A) $6a^3$. (B) $8a^3$. (C) $4a^3$. (D) $12a^3$.

CÂU 4. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , cạnh bên SA vuông góc với đáy, $SA = a$. Thể tích của khối chóp $S.ABC$ bằng

- (A) $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$. (B) $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$. (C) $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. (D) $\frac{a^3}{4}$.

CÂU 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a . Biết $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{3}$. Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ là

- (A) $a^3\sqrt{3}$. (B) $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$. (C) $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. (D) $\frac{a^3}{4}$.

CÂU 6. Cho khối chóp $S.ABC$ có chiều cao bằng 3, đáy ABC có diện tích bằng 10. Thể tích của khối chóp $S.ABC$ bằng

- (A) 2. (B) 15. (C) 10. (D) 30.

CÂU 7. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B , $AB = a$, $BC = 2a$, $SA \perp (ABC)$, $SA = 3a$. Thể tích của khối chóp $S.ABC$ bằng

- (A) a^3 . (B) $\frac{1}{3}a^3$. (C) $3a^3$. (D) $\frac{1}{6}a^3$.

CÂU 8. Cho hình chóp $S.ABC$ có các cạnh SA, SB, SC đôi một vuông góc với nhau. Biết $SA = 3$, $SB = 4$, $SC = 5$, thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng

- (A) 60. (B) 10. (C) 20. (D) 30.

CÂU 9. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A , $AC = 2a$. Cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a$. Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng

- (A) $4a^3$. (B) $\frac{2a^3}{3}$. (C) $2a^3$. (D) $\frac{4a^3}{3}$.

CÂU 10. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a$. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng

- (A) $\frac{1}{3}a^3$. (B) $2a^3$. (C) $3a^3$. (D) a^3 .

CÂU 11. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = 3a$ và $AD = 4a$. Cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SA = a\sqrt{2}$. Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ bằng

- (A) $4\sqrt{2}a^3$. (B) $12\sqrt{2}a^3$. (C) $\frac{4\sqrt{2}a^3}{3}$. (D) $\frac{2\sqrt{2}a^3}{3}$.

QUICK NOTE

CÂU 12. Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với đáy. Tam giác ABC vuông cân tại B , biết $SA = AC = 2a$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

- (A) $\frac{2\sqrt{2}}{3}a^3$. (B) $\frac{4}{3}a^3$. (C) $\frac{2}{3}a^3$. (D) $\frac{1}{3}a^3$.

CÂU 13. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , $SA = 3a$ và SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

- (A) $3a^3$. (B) $\frac{a^3}{3}$. (C) $9a^3$. (D) a^3 .

CÂU 14. Cho khối chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A , $AC = 3$, $AB = 4$, SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) và $SA = 3$. Thể tích của khối chóp đã cho bằng

- (A) 12. (B) 6. (C) 18. (D) 20.

CÂU 15. Cho khối chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với đáy, $SA = 4$, $AB = 6$, $BC = 10$ và $CA = 8$. Thể tích V của khối chóp $S.ABC$

- (A) $V = 32$. (B) $V = 192$. (C) $V = 40$. (D) $V = 24$.

CÂU 16. Cho hình chóp lục giác đều có cạnh đáy bằng 1 chiều cao bằng 4. Thể tích của khối chóp đã cho bằng

- (A) $2\sqrt{3}$. (B) $6\sqrt{3}$. (C) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. (D) $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

CÂU 17. Cho khối chóp tam giác đều có cạnh đáy bằng 2 và chiều cao $h = 12$. Thể tích của khối chóp đã cho bằng

- (A) $24\sqrt{3}$. (B) $12\sqrt{3}$. (C) $6\sqrt{3}$. (D) $4\sqrt{3}$.

CÂU 18. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh bằng $a\sqrt{3}$ và các cạnh bên bằng $a\sqrt{2}$. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng

- (A) $\frac{a^3\sqrt{2}}{2}$. (B) $\frac{a^3\sqrt{2}}{6}$. (C) $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. (D) $\frac{a^3\sqrt{6}}{6}$.

CÂU 19. Cho khối chóp tứ giác đều có cạnh đáy bằng a , có chiều cao bằng $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. Thể tích của khối chóp đã cho bằng

- (A) $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$. (B) $\frac{a^3\sqrt{2}}{6}$. (C) $\frac{\sqrt{2}a^3}{2}$. (D) $\frac{\sqrt{3}a^3}{4}$.

CÂU 20. Thể tích khối tứ diện đều có cạnh bằng 3 là

- (A) $\frac{4\sqrt{2}}{9}$. (B) $2\sqrt{2}$. (C) $\frac{9\sqrt{2}}{4}$. (D) $\sqrt{2}$.

D. BẢNG ĐÁP ÁN

1. D	2. C	3. C	4. A	5. C	6. C	7. A	8. B
9. B	10. A	11. A	12. C	13. D	14. B	15. A	16. A
17. D	18. A	19. B	20. C				

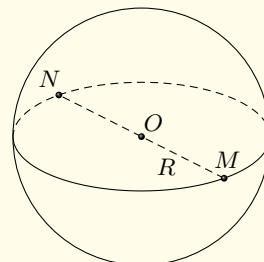
Bài 15. ĐỊNH NGHĨA, TÍNH CHẤT, VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI LIÊN QUAN ĐẾN MẶT CẦU

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Định nghĩa liên quan mặt cầu

- ☉ Tập hợp các điểm M trong không gian cách điểm O cho trước một khoảng cách luôn bằng R không đổi được gọi là mặt cầu tâm O , bán kính R , kí hiệu $S(O, R)$, tức là

$$S(O, R) = \{M \mid OM = R\}.$$



- ☉ Đoạn thẳng nối 2 điểm phân biệt trên mặt cầu gọi là dây cung của mặt cầu.
☉ Dây cung lớn nhất của mặt cầu được gọi là đường kính của mặt cầu (gấp đôi bán kính).

QUICK NOTE

kính).

2. Các công thức tính toán

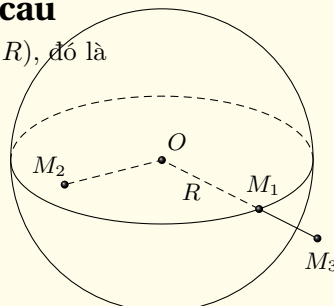
☉ Diện tích mặt cầu có bán kính R là $S = 4\pi R^2$.

☉ Thể tích khối cầu có bán kính R là $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.

3. Vị trí tương đối giữa một điểm và mặt cầu

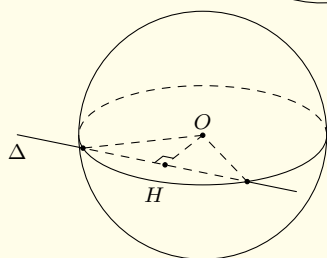
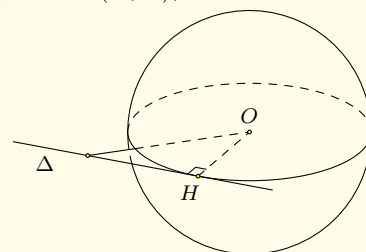
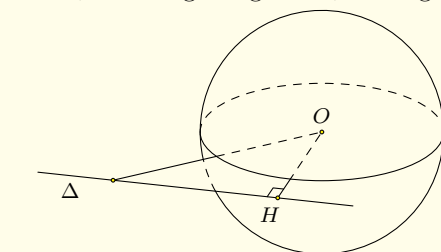
Có 3 vị trí tương đối giữa một điểm M và mặt cầu $S(O, R)$, đó là

- ☉ M thuộc $S(O, R)$ khi và chỉ khi $OM = R$.
- ☉ M nằm bên trong $S(O, R)$ khi và chỉ khi $OM < R$.
- ☉ M nằm ngoài $S(O, R)$ khi và chỉ khi $OM > R$.



4. Vị trí tương đối giữa đường thẳng và mặt cầu

Có 3 vị trí tương đối giữa một đường thẳng Δ và mặt cầu $S(O, R)$, đó là

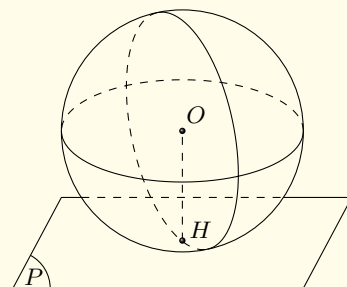
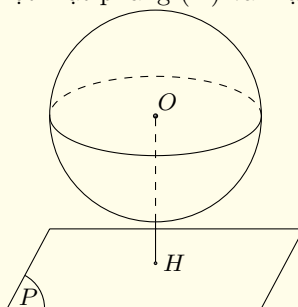


- ☉ Δ không có điểm chung với $S(O, R)$ khi và chỉ khi $d(O, \Delta) > R$.
- ☉ Δ tiếp xúc với $S(O, R)$ khi và chỉ khi Δ và $S(O, R)$ có 1 điểm chung $\Leftrightarrow d(O, \Delta) = R$.
- ☉ Δ cắt $S(O, R)$ tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi $d(O, \Delta) < R$.

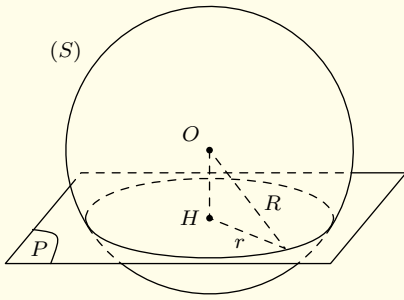
A Trường hợp đường thẳng Δ tiếp xúc với mặt cầu tại H ta gọi Δ là tiếp tuyến của mặt cầu và H là tiếp điểm của Δ với mặt cầu.

5. Vị trí tương đối giữa mặt phẳng và mặt cầu

Có 3 vị trí tương đối giữa một mặt phẳng (P) và mặt cầu $S(O, R)$, đó là



QUICK NOTE



- ☉ (P) không có điểm chung với $S(O, R)$ khi và chỉ khi $d(O, (P)) > R$.
- ☉ (P) tiếp xúc $S(O, R)$ khi và chỉ khi (P) và $S(O, R)$ có 1 điểm chung $\Leftrightarrow d(O, (P)) = R$.
- ☉ (P) cắt $S(O, R)$ theo giao tuyến là một đường tròn khi và chỉ khi $d(O, (P)) < R$.
- ⚠️
 - ☑ Trường hợp mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu tại H ta gọi (P) là tiếp diện của mặt cầu và H là tiếp điểm của (P) với mặt cầu.
 - ☑ Trường hợp mặt phẳng đi qua tâm của mặt cầu thì đường tròn giao tuyến được gọi là đường tròn lớn và mặt phẳng được gọi là mặt phẳng kính của mặt cầu.
 - ☑ Khi mặt phẳng cắt mặt cầu theo giao tuyến là đường tròn (C) thì (C) có tâm H là hình chiếu vuông góc của tâm O mặt cầu lên mặt phẳng (P), đồng thời (C) có bán kính r tính theo công thức $r = \sqrt{R^2 - d^2}$, với $d = d(O, (P))$.

B. BÀI TẬP MẪU

VÍ DỤ 15 (Đề tham khảo 2023). Cho mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu $S(O; R)$. Gọi d là khoảng cách từ O đến (P). Khẳng định nào dưới đây đúng?

- (A) $d < R$. (B) $d > R$. (C) $d = R$. (D) $d = 0$.

C. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN

CÂU 1. Cho mặt cầu có diện tích bằng 36π thì khối cầu tương ứng có thể tích bằng

- (A) 72π . (B) 18π . (C) 9π . (D) 36π .

CÂU 2. Diện tích mặt cầu có đường kính R là

- (A) $2\pi R^2$. (B) $4\pi R^2$. (C) $\frac{4}{3}\pi R^2$. (D) πR^2 .

CÂU 3. Cho khối cầu có bán kính $R = 3$. Thể tích khối cầu đã cho bằng

- (A) 108π . (B) 36π . (C) 4π . (D) 12π .

CÂU 4. Diện tích S của mặt cầu có bán kính r bằng

- (A) $S = 4\pi r^2$. (B) $S = 3\pi r^2$. (C) $S = \pi r^2$. (D) $S = 2\pi r^2$.

CÂU 5. Công thức tính thể tích khối cầu bán kính R là

- (A) $V = 4\pi R^3$. (B) $V = \frac{4}{3}\pi R^3$. (C) $V = \frac{1}{3}\pi R^3$. (D) $V = \pi R^3$.

CÂU 6. Cho khối cầu có bán kính $R = 2$. Thể tích khối cầu đã cho bằng

- (A) 32π . (B) 16π . (C) $\frac{16\pi}{3}$. (D) $\frac{32\pi}{3}$.

CÂU 7. Cho khối cầu (T) tâm O bán kính R. Gọi S và V lần lượt là diện tích mặt cầu và thể tích khối cầu tương ứng. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- (A) $S = \pi R^2$. (B) $V = \frac{4}{3}\pi R^3$. (C) $S = 2\pi R^2$. (D) $V = 4\pi R^3$.

CÂU 8. Khối cầu có bán kính $R = 6$ có thể tích bằng bao nhiêu?

- (A) 144π . (B) 288π . (C) 48π . (D) 72π .

QUICK NOTE

CÂU 9. Cho mặt cầu có diện tích bằng $\frac{8\pi a^2}{3}$. Khi đó bán kính của mặt cầu là

- (A) $R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. (B) $R = \frac{a\sqrt{2}}{3}$. (C) $R = \frac{a\sqrt{6}}{3}$. (D) $R = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.

CÂU 10. Cho mặt cầu có bán kính $r = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Diện tích của mặt cầu đã cho bằng

- (A) $3\sqrt{3}\pi$. (B) $\frac{3}{2}\pi$. (C) $\sqrt{3}\pi$. (D) 3π .

CÂU 11. Mặt cầu có bán kính bằng 6 thì diện tích bằng

- (A) 36π . (B) 288π . (C) 144π . (D) 72π .

CÂU 12. Cho mặt cầu (S_1) có bán kính R_1 , mặt cầu (S_2) có bán kính $R_2 = 2R_1$. Tính tỉ số diện tích của mặt cầu (S_2) và (S_1) .

- (A) 2. (B) $\frac{1}{2}$. (C) 3. (D) 4.

CÂU 13. Mặt cầu có bán kính bằng 1 thì diện tích bằng

- (A) 4π . (B) 16π . (C) $\frac{4\pi}{3}$. (D) 2π .

CÂU 14. Cho mặt cầu có bán kính $R = 5$. Diện tích của mặt cầu đã cho bằng

- (A) $\frac{100\pi}{3}$. (B) $\frac{500\pi}{3}$. (C) 100π . (D) 25π .

CÂU 15. Một mặt cầu có diện tích bằng 36π , bán kính của mặt cầu đó bằng

- (A) 3. (B) $3\sqrt{3}$. (C) $3\sqrt{2}$. (D) 6.

CÂU 16. Diện tích của mặt cầu có bán kính $R = 3$ bằng

- (A) 12π . (B) 6π . (C) 36π . (D) 18π .

CÂU 17. Số mặt cầu chứa một đường tròn cho trước là

- (A) 0. (B) Vô số. (C) 2. (D) 1.

CÂU 18. Cho hai điểm A, B phân biệt. Tập hợp tâm những mặt cầu đi qua hai điểm A và B là

- (A) Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB .
(B) Trung điểm của đường thẳng AB .
(C) Đường thẳng trung trực của đoạn thẳng AB .
(D) Mặt phẳng song song với đường thẳng AB .

CÂU 19. Cho mặt cầu $S(O; R)$ và điểm A cố định nằm ngoài mặt cầu với $OA = d$. Qua A kẻ đường thẳng Δ tiếp xúc với mặt cầu $S(O; R)$ tại M . Công thức nào sau đây được dùng để tính độ dài đoạn thẳng AM ?

- (A) $\sqrt{R^2 - 2d^2}$. (B) $\sqrt{R^2 + d^2}$. (C) $\sqrt{d^2 - R^2}$. (D) $\sqrt{2R^2 - d^2}$.

CÂU 20. Số điểm chung giữa mặt cầu và mặt phẳng không thể là

- (A) 2. (B) Vô số. (C) 0. (D) 1.

D. BẢNG ĐÁP ÁN

1. D	2. D	3. B	4. A	5. B	6. D	7. B	8. B
9. C	10. D	11. C	12. D	13. A	14. C	15. A	16. C
		17. B	18. A	19. C	20. A		

Bài 16. SỐ PHỨC VÀ CÁC PHÉP TOÁN

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Phần thực, phần ảo của số phức, số phức liên hợp

- Số phức có dạng $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1$). Phần thực của z là a , phần ảo của z là b và i được gọi là đơn vị ảo.
- Số phức liên hợp của z là $\bar{z} = \overline{a + bi} = a - bi$.

$$\oplus z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2$$

$$\oplus \overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$$

$$\oplus \overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$$

$$\oplus \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$$

⊕ Tổng và tích của z và \bar{z} luôn là một số thực.

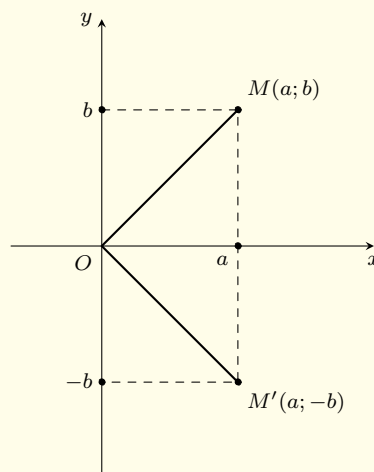
- Lưu ý: $i^{4n} = 1; i^{4n+1} = i; i^{4n+2} = -1; i^{4n+3} = -i$; với $n \in \mathbb{N}$.

2. Hai số phức bằng nhau

Cho hai số phức $z_1 = a_1 + b_1i, z_2 = a_2 + b_2i$ ($a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$).
Khi đó:

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = a_2 \\ b_1 = b_2 \end{cases}$$

3. Biểu diễn hình học của số phức, môđun của số phức



• Biểu diễn hình học của số phức

- ☑ Số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) được biểu diễn bởi điểm $M(a; b)$ trong mặt phẳng tọa độ.
- ☑ z và \bar{z} được biểu diễn bởi hai điểm đối xứng nhau qua trục Ox .

• Môđun của số phức

- ☑ Môđun của số phức z là $|z| = |\overrightarrow{OM}| = \sqrt{a^2 + b^2}$.
- ☑ Ta có: $|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}}; |z| = |\bar{z}|$.

QUICK NOTE

B. BÀI TẬP MẪU

VÍ DỤ 16 (Đề minh họa BGD 2022-2023). Phần ảo của số phức $z = 2 - 3i$ là

- (A) -3. (B) -2. (C) 2. (D) 3.

C. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN

CÂU 1. Phần thực và phần ảo của số phức $z = (1 + 2i)i$ lần lượt là

- (A) 1 và 2. (B) -2 và 1. (C) 1 và -2. (D) 2 và 1.

CÂU 2. Cho hai số phức $z_1 = 5 - 3i, z_2 = -1 + 2i$. Tổng phần thực, phần ảo của tổng hai số phức đã cho là

- (A) $S = 3$. (B) $S = 7$. (C) $S = 4$. (D) $S = 5$.

CÂU 3. Phần ảo của số phức $z = 4 - 5i$ là

- (A) $-5i$. (B) -5. (C) 5. (D) 4.

QUICK NOTE

CÂU 4. Số phức liên hợp của số phức $1 - 2i$ là

- (A) $-1 + 2i$. (B) $-1 - 2i$. (C) $1 + 2i$. (D) $-2 + i$.

CÂU 5. Cho số phức $z = 2 - 3i$. Số phức liên hợp \bar{z} là

- (A) $\bar{z} = -2 - 3i$. (B) $\bar{z} = 3 - 2i$. (C) $\bar{z} = -2 + 3i$. (D) $\bar{z} = 2 + 3i$.

CÂU 6. Số phức z thỏa mãn $z = 5 - 8i$ có phần ảo là

- (A) 8. (B) $-8i$. (C) -8 . (D) 5.

CÂU 7. Mô-đun của số phức $z = 4 - 2i$ bằng

- (A) $2\sqrt{5}$. (B) 4. (C) $2\sqrt{3}$. (D) $3\sqrt{2}$.

CÂU 8. Cho $z = 3 + 2i$. Tìm mô-đun của z .

- (A) $|z| = 5$. (B) $|z| = 13$. (C) $|z| = \sqrt{13}$. (D) $|z| = \sqrt{5}$.

CÂU 9. Số phức liên hợp của số phức $z = 6 - 8i$ là

- (A) $-6 + 8i$. (B) $6 + 8i$. (C) $-6 - 8i$. (D) $8 - 6i$.

CÂU 10. Số phức liên hợp của số phức z có phần thực bằng 4, phần ảo bằng 5 là

- (A) $\bar{z} = 4 + 5i$. (B) $\bar{z} = 4 - 5i$. (C) $\bar{z} = 5 - 4i$. (D) $\bar{z} = 5 + 4i$.

CÂU 11. Cho số phức $z = 3 - 4i$. Mệnh đề nào dưới đây sai?

- (A) Số phức liên hợp của z là $3 - 4i$.
 (B) Phần thực và phần ảo của z lần lượt là 3 và -4 .
 (C) Biểu diễn số phức z lên mặt phẳng tọa độ là điểm $M(3; -4)$.
 (D) Mô-đun của số phức z bằng 5.

CÂU 12. Số phức nào dưới đây là số thuần ảo

- (A) $z = -2i$. (B) $z = 2 + 2i$. (C) $z = -1 + \sqrt{2}i$. (D) $z = -2$.

CÂU 13. Phần ảo của số phức $z = 2 + 3i$ là

- (A) $2i$. (B) $3i$. (C) 2. (D) 3.

CÂU 14. Số phức liên hợp của số phức $z = 2 - 3i$ là

- (A) $\bar{z} = 2 + 3i$. (B) $\bar{z} = -2 + 3i$. (C) $\bar{z} = 3 + 2i$. (D) $\bar{z} = 3 - 2i$.

CÂU 15. Mô-đun của số phức $z = 7 - 5i$ bằng

- (A) $2\sqrt{6}$. (B) 74. (C) 24. (D) $\sqrt{74}$.

CÂU 16. Cho số phức $z = 3 + 4i$. Tính $|z|$.

- (A) $|z| = \sqrt{5}$. (B) $|z| = 13$. (C) $|z| = \sqrt{13}$. (D) $|z| = 5$.

CÂU 17. Cho số phức $z = 3 - 4i$. Mô-đun của z bằng

- (A) 12. (B) 5. (C) 7. (D) 1.

CÂU 18. Cho số phức z thỏa mãn $z = 5 - 8i$ có phần ảo là

- (A) -8 . (B) 8. (C) 5. (D) $-8i$.

CÂU 19. Mô-đun của số phức $2 + 3i$ bằng

- (A) $\sqrt{13}$. (B) 13. (C) $\sqrt{5}$. (D) 5.

CÂU 20. Mô-đun của số phức $z = 3 + 4i$ là

- (A) 5. (B) 7. (C) 3. (D) 4.

CÂU 21. Gọi a, b lần lượt là phần thực và phần ảo của số phức $z = -3 + 2i$. Giá trị $a - b$ bằng

- (A) 1. (B) 5. (C) -5 . (D) -1 .

CÂU 22. Số phức có phần thực bằng 3 và phần ảo bằng 2 là

- (A) $3 - 2i$. (B) $3 + 2i$. (C) $2 + 3i$. (D) $2 - 3i$.

CÂU 23. Với x, y là các số thực thì số phức $z = x - 1 + (y + 2)i$ là số ảo khi và chỉ khi

- (A) $y = -2$. (B) $x = 1, y \neq -2$. (C) $y = -2, x \neq 1$. (D) $x = 1$.

CÂU 24. Cho số phức $z = -2 + i$. Tìm phần thực và phần ảo của số phức \bar{z} .

- (A) Phần thực bằng 2 và phần ảo bằng 1.
 (B) Phần thực bằng 2 và phần ảo bằng i .

QUICK NOTE

- (C) Phần thực bằng -2 và phần ảo bằng $-i$.
(D) Phần thực bằng -2 và phần ảo bằng -1 .

CÂU 25. Mô-đun của số phức $z = 5 - 4i$ bằng

- (A) 1. (B) 41. (C) $\sqrt{41}$. (D) 3.

CÂU 26. Cho số phức $z = 2 + \sqrt{3}i$. Mô-đun của z bằng

- (A) 5. (B) $\sqrt{5}$. (C) $\sqrt{7}$. (D) 7.

CÂU 27. Phần thực của số phức $(2 - i)(1 + 2i)$ là

- (A) 5. (B) 3. (C) 4. (D) 0.

CÂU 28. Số phức liên hợp của số phức $z = 1 - 2i$ là

- (A) $-1 + 2i$. (B) $-1 - 2i$. (C) $2 - i$. (D) $1 + 2i$.

CÂU 29. Mô-đun của số phức $z = 5 - 2i$ bằng

- (A) 29. (B) $\sqrt{29}$. (C) 3. (D) 7.

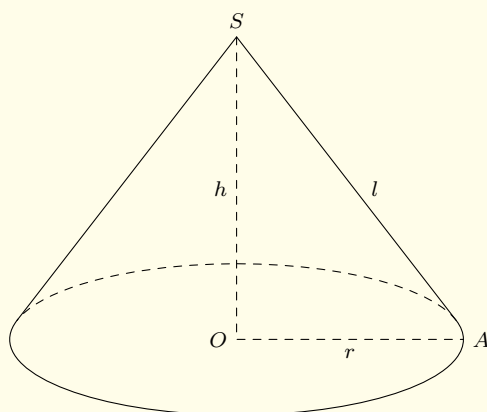
D. BẢNG ĐÁP ÁN

1. B	2. A	3. B	4. C	5. D	6. C	7. A	8. C
9. B	10. B	11. A	12. A	13. D	14. A	15. D	16. D
17. B	18. A	19. A	20. A	21. C	22. B	23. D	24. D
25. C	26. C	27. C	28. D	29. B			

Bài 17. HÌNH NÓN, HÌNH TRỤ

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Hình nón, khối nón

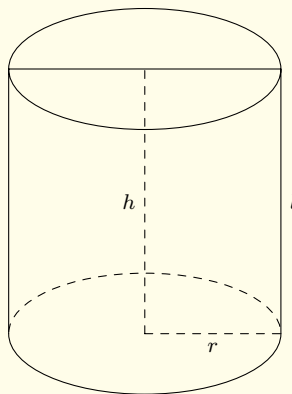


- ☑ Công thức tính diện tích xung quanh của hình nón $S_{xq} = \pi rl$.
- ☑ Công thức tính diện tích toàn phần của hình nón $S_{tp} = S_{xq} + S_{đáy} = \pi rl + \pi r^2 = \pi r(l + r)$.
- ☑ Công thức tính thể tích của khối nón $V_{nón} = \frac{1}{3}\pi r^2 h$.
- ☑ Áp dụng Pitago và các hệ thức lượng giác trong tam giác vuông SOA , ta có

$$l^2 = h^2 + r^2; \cos \widehat{ASO} = \frac{h}{l}; \sin \widehat{ASO} = \frac{r}{l}; \tan \widehat{ASO} = \frac{r}{h}.$$

QUICK NOTE

2. Hình trụ, khối trụ



- ☑ Công thức tính diện tích xung quanh của hình trụ $S_{xq} = 2\pi rl$.
- ☑ Công thức tính diện tích toàn phần của hình trụ $S_{tp} = S_{xq} + 2S_{\text{đáy}} = 2\pi rl + 2\pi r^2$.
- ☑ Công thức tính thể tích của khối nón $V_{\text{trụ}} = \pi r^2 h$.

B. BÀI TẬP MẪU

VÍ DỤ 17 (Đề minh họa BGD 2022-2023). Cho hình nón có đường kính đáy $2r$ và độ dài đường sinh ℓ . Diện tích xung quanh của hình nón đã cho bằng

(A) $2\pi r\ell$. (B) $\frac{2}{3}\pi r\ell^2$. (C) $\pi r\ell$. (D) $\frac{1}{3}\pi r^2\ell$.

C. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN

CÂU 30. Cho hình nón có bán kính đáy $r = a$ và độ dài đường sinh $l = 3a$. Diện tích xung quanh của hình nón đã cho bằng

- (A) $3\pi a^2$. (B) πa^2 . (C) $4\pi a^2$. (D) $10\pi a^2$.

CÂU 31. Một khối nón có chiều cao bằng 3, độ dài đường sinh bằng 5. Thể tích của khối nón là

- (A) 12π . (B) 16π . (C) 15π . (D) $\frac{80\pi}{3}$.

CÂU 32. Cho khối nón có bán kính đáy bằng $R = 1$, đường sinh $l = 4$. Diện tích xung quanh của khối nón là

- (A) 8π . (B) 12π . (C) 4π . (D) 6π .

CÂU 33. Cho khối nón có bán kính đáy $r = \sqrt{3}$ và chiều cao $h = 4$. Thể tích của khối nón đã cho bằng

- (A) 4π . (B) 12π . (C) 12 . (D) 4 .

CÂU 34. Cho khối nón có độ dài đường cao bằng $2a$ và bán kính đáy bằng a . Thể tích của khối nón đã cho bằng

- (A) $2\pi a^3$. (B) $\frac{4\pi a^3}{3}$. (C) $\frac{\pi a^3}{3}$. (D) $\frac{2\pi a^3}{3}$.

CÂU 35. Cho khối nón có bán kính đáy $r = 2$, chiều cao $h = \sqrt{3}$. Thể tích của khối nón đã cho bằng

- (A) $\frac{2\pi\sqrt{3}}{3}$. (B) $4\pi\sqrt{3}$. (C) $\frac{4\pi\sqrt{3}}{3}$. (D) $\frac{4\pi}{3}$.

CÂU 36. Cho khối nón có thể tích V . Khi tăng bán kính đường tròn đáy lên 2 lần thì được khối nón mới có thể tích bằng

- (A) $4V$. (B) $2V$. (C) $\frac{2V}{3}$. (D) $\frac{4V}{3}$.

CÂU 37. Diện tích xung quanh của hình nón có độ dài đường sinh l và bán kính đáy $\frac{r}{2}$ bằng

- (A) $\frac{1}{2}\pi rl$. (B) πrl . (C) $\frac{1}{6}\pi rl$. (D) $2\pi rl$.

CÂU 38. Một khối trụ có chiều cao bằng $2a$ và diện tích đáy bằng $2a^2$. Tính thể tích khối lăng trụ?

- (A) $V = \frac{4a^2}{3}$. (B) $V = \frac{4a^3}{3}$. (C) $V = 4a^3$. (D) $V = \frac{2a^3}{3}$.

CÂU 39. Diện tích xung quanh của hình trụ có độ dài đường sinh l và bán kính đáy $r = \frac{1}{2}l$ là

- (A) l^2 . (B) πl^2 . (C) $2\pi l^3$. (D) $2\pi l$.

CÂU 40. Một hình trụ có bán kính đáy $r = 5$ cm, chiều cao $h = 7$ cm. Diện tích xung quanh của hình trụ này là

- (A) 70π cm². (B) $\frac{70}{3}\pi$ cm². (C) $\frac{35}{3}\pi$ cm². (D) 35π cm².

CÂU 41. Một hình trụ tròn có bán kính đáy $r = 50$ cm và chiều cao $h = 50$ cm. Diện tích xung quanh hình trụ bằng

- (A) 5000π cm². (B) 5000 cm². (C) 2500π cm². (D) 2500 cm².

CÂU 42. Diện tích xung quanh của hình trụ có độ dài đường cao h và bán kính đáy r bằng

- (A) $4\pi rh$. (B) πrh . (C) $2\pi rh$. (D) $\frac{1}{3}\pi rh$.

CÂU 43. Cho một khối trụ có độ dài đường sinh bằng 10 cm. Biết thể tích khối trụ bằng 90π cm³. Tính diện tích xung quanh của khối trụ.

- (A) 36π cm². (B) 81π cm². (C) 60π cm². (D) 78π cm².

CÂU 44. Tính diện tích xung quanh của một hình trụ có chiều cao 20 m, chu vi đáy bằng 5 m.

- (A) 100π m². (B) 100 m². (C) 50 m². (D) 50π m².

CÂU 45. Cho khối trụ có bán kính đáy bằng a và chiều cao bằng $3a\sqrt{3}$. Thể tích của khối trụ đó là

- (A) $3\pi a^3$. (B) $3\pi a^3\sqrt{3}$. (C) πa^3 . (D) $\pi a^3\sqrt{3}$.

CÂU 46. Cho hình trụ có bán kính đáy bằng a , chu vi của thiết diện qua trục bằng $12a$. Thể tích của khối trụ đã cho bằng

- (A) πa^3 . (B) $4\pi a^3$. (C) $6\pi a^3$. (D) $5\pi a^3$.

CÂU 47. Cho khối trụ có đường sinh bằng 2 , thể tích 18π . Diện tích toàn phần của khối trụ bằng

- (A) 20π . (B) 10π . (C) 12π . (D) 30π .

CÂU 48. Cho khối trụ có bán kính đáy bằng 2 , chiều cao bằng 3 . Thể tích của khối trụ đã cho bằng

- (A) 12π . (B) 6π . (C) 4π . (D) 18π .

CÂU 49. Công thức tính thể tích khối trụ tròn xoay có bán kính r và chiều cao h là

- (A) $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$. (B) $V = \pi rh$. (C) $V = \pi r^2 h$. (D) $V = 2\pi rh$.

D. BẢNG ĐÁP ÁN

30. A	31. B	32. C	33. A	34. D	35. C	36. A	37. A
38. C	39. B	40. A	41. A	42. C	43. C	44. B	45. B
		46. B	47. D	48. A	49. C		

Bài 18. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

QUICK NOTE

QUICK NOTE

1. Phương trình đường thẳng

- ☉ Đường thẳng d đi qua điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ và có véc-tơ chỉ phương (VTCP) $\vec{u}_d = (a_1; a_2; a_3)$ có phương trình tham số
$$\begin{cases} x = x_0 + a_1 t \\ y = y_0 + a_2 t \\ z = z_0 + a_3 t \end{cases}, (t \in \mathbb{R}).$$

- ☉ Điểm M thuộc đường thẳng $d \Leftrightarrow M(x_0 + at_1; y_0 + at_2; z_0 + at_3)$.

- ☉ Nếu $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \neq 0$ thì $\frac{x-x_0}{a_1} = \frac{y-y_0}{a_2} = \frac{z-z_0}{a_3}$ được gọi là phương trình chính tắc của d .

B. BÀI TẬP MẪU

VÍ DỤ 18. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+3}{-2}$. Điểm nào dưới đây thuộc d ?

- (A) $P(1; 2; 3)$. (B) $Q(1; 2; -3)$. (C) $N(2; 1; 2)$. (D) $M(2; -1; -2)$.

C. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN

CÂU 1. Cho đường thẳng $\Delta: \frac{x-2}{2} = \frac{y-3}{3} = \frac{z}{1}$. Khi đó Δ đi qua điểm M có tọa độ

- (A) $(2; 3; 0)$. (B) $(0; 0; 1)$. (C) $(1; -1; 2)$. (D) $(0; 2; -1)$.

CÂU 2. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z-1}{2}$. Điểm nào dưới đây không thuộc d ?

- (A) $N(1; 0; 1)$. (B) $F(3; -4; 5)$. (C) $M(0; 2; 1)$. (D) $E(2; -2; 3)$.

CÂU 3. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+3}{-2}$. Điểm nào dưới đây thuộc d ?

- (A) $N(2; 3; -2)$. (B) $M(1; 1; -3)$. (C) $Q(3; 2; -2)$. (D) $P(-1; 1; -3)$.

CÂU 4. Trong không gian $Oxyz$, điểm nào dưới đây thuộc đường thẳng $d: \frac{x+2}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+2}{2}$?

- (A) $P(1; 1; 2)$. (B) $N(2; -1; 2)$. (C) $Q(-2; 1; -2)$. (D) $M(-2; -2; 1)$.

CÂU 5. Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z+3}{5}$ không đi qua điểm nào dưới đây?

- (A) $N(0; 5; -8)$. (B) $Q(1; 2; -3)$. (C) $M(2; -1; 2)$. (D) $P(0; 2; -8)$.

CÂU 6. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho đường thẳng Δ có phương trình $\Delta: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z+3}{4}$. Đường thẳng Δ đi qua điểm M nào bên dưới?

- (A) $M(5; -4; 7)$. (B) $M(-5; 11; -15)$.
(C) $M(-5; 7; -12)$. (D) $M(5; 4; -7)$.

CÂU 7. Trong không gian $Oxyz$, điểm nào dưới đây thuộc đường thẳng $d: \frac{x+2}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+2}{2}$.

- (A) $Q(-2; 1; -2)$. (B) $M(-2; -2; 1)$. (C) $P(1; 1; 2)$. (D) $N(2; -1; 2)$.

CÂU 8. Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng $d: \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = -1 - 4t \\ z = 5t \end{cases}$ đi qua điểm nào sau đây?

- (A) $M(5; 5; 5)$. (B) $M(3; -4; 5)$. (C) $M(2; -1; 0)$. (D) $M(8; 9; 10)$.

QUICK NOTE

CÂU 9. Trong không gian $Oxyz$, điểm nào sau đây không nằm trên đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{2} =$

$$\frac{y+1}{1} = \frac{z}{3}?$$

- (A) $M(1; -1; 0)$. (B) $N(3; 0; 3)$. (C) $P(-3; -3; -6)$. (D) $Q(5; 1; 5)$.

CÂU 10. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $(d): \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2t \\ z = 2 + t \end{cases}$. Điểm nào dưới đây

thuộc (d) ?

- (A) $M(1; 2; 2)$. (B) $N(0; 2; 3)$. (C) $P(-1; 4; 2)$. (D) $Q(-1; 2; 1)$.

CÂU 11. Trong không gian $Oxyz$, điểm nào dưới đây thuộc đường thẳng $d: \frac{x-2}{-3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+3}{1}$?

- (A) $(3; -2; 1)$. (B) $(2; -1; -3)$. (C) $(-2; 1; 3)$. (D) $(-3; 2; 1)$.

CÂU 12. Trong không gian $Oxyz$, điểm nào sau đây không thuộc đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3 - 4t \\ z = 6 - 5t \end{cases}$?

- (A) $P(-1; -3; -6)$. (B) $Q(-1; 7; 11)$. (C) $M(1; 3; 6)$. (D) $N(3; -1; 1)$.

CÂU 13. Trong không gian $Oxyz$, điểm nào sau đây thuộc đường thẳng $d: \frac{x+1}{-1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-1}{3}$?

- (A) $M(1; 2; 1)$. (B) $Q(1; -2; -1)$. (C) $N(-1; 3; 2)$. (D) $P(-1; 2; 1)$.

CÂU 14. Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - 3t \\ z = 3 - t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ không đi qua điểm nào dưới đây?

- (A) $Q(1; 2; 3)$. (B) $M(3; -1; 2)$. (C) $P(2; -2; 3)$. (D) $N(-1; 5; 4)$.

CÂU 15. Trong không gian $Oxyz$, điểm nào dưới đây thuộc đường thẳng $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-2}{3}$?

- (A) $P(2; -1; 3)$. (B) $M(-1; 1; -2)$. (C) $N(1; -1; 2)$. (D) $Q(-2; 1; -3)$.

CÂU 16. Trong không gian $Oxyz$, điểm nào dưới đây thuộc đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 5 + t \\ z = 2 + 3t \end{cases}$?

- (A) $P(1; 2; 5)$. (B) $N(1; 5; 2)$. (C) $Q(-1; 1; 3)$. (D) $M(1; 1; 3)$.

CÂU 17. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, đường thẳng $d: \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{-4} = \frac{z-3}{-5}$ đi qua điểm

- (A) $(-1; 2; -3)$. (B) $(1; -2; 3)$. (C) $(-3; 4; 5)$. (D) $(3; -4; -5)$.

CÂU 18. Trong không gian $Oxyz$, điểm nào dưới đây thuộc đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 5 + t \\ z = 2 + 3t \end{cases}$?

- (A) $P(1; 2; 5)$. (B) $N(1; 5; 2)$. (C) $M(1; 1; 3)$. (D) $Q(-1; 1; 3)$.

CÂU 19. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-3}{-1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+1}{-2}$. Điểm nào sau đây không thuộc d ?

- (A) $P(3; 2; -1)$. (B) $Q(-3; -2; 1)$. (C) $M(4; -1; 1)$. (D) $N(2; 5; -3)$.

CÂU 20. Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z}{3}$ đi qua điểm nào dưới đây?

- (A) $(3; 2; 3)$. (B) $(2; 1; 3)$. (C) $(3; 1; 2)$. (D) $(3; 1; 3)$.

QUICK NOTE

CÂU 21. Đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{-2}$ không đi qua điểm nào sau đây?

- (A) $M(1; 2; -1)$. (B) $M(1; 2; 1)$. (C) $M(-1; 1; 1)$. (D) $M(5; 4; -5)$.

CÂU 22. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x+2}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z}{-5}$. Đường thẳng d không đi qua điểm nào sau đây?

- (A) $P(3; 1; 5)$. (B) $Q(0; 7; -10)$. (C) $M(-2; 3; 0)$. (D) $N(-1; 5; -5)$.

CÂU 23. Trong không gian $Oxyz$, điểm nào dưới đây thuộc đường thẳng

$$d: \begin{cases} x = -2 + t \\ y = 2 - 2t \\ z = 3 + \end{cases} ?$$

- (A) $Q(0; 1; 4)$. (B) $M(3; 2; -2)$. (C) $N(1; 1; 2)$. (D) $M(3; 3; -6)$.

CÂU 24. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z-1}{2}$. Điểm nào dưới đây không thuộc d ?

- (A) $N(1; 0; 1)$. (B) $F(3; -4; 5)$. (C) $M(0; 2; 1)$. (D) $E(2; -2; 3)$.

CÂU 25. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z+2}{-2}$. Điểm nào dưới đây KHÔNG thuộc đường thẳng d ?

- (A) $N(1; -1; -2)$. (B) $P(-1; 0; 0)$. (C) $Q(-3; 1; -2)$. (D) $M(3; -2; -4)$.

CÂU 26. Trong không gian $Oxyz$, điểm nào sau đây không thuộc đường thẳng $d: \frac{x+2}{2} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z-4}{2}$?

- (A) $Q(2; -5; 4)$. (B) $N(0; -2; 6)$. (C) $P(4; -8; 10)$. (D) $M(-2; 1; 4)$.

D. BẢNG ĐÁP ÁN

1. A	2. C	3. D	4. C	5. D	6. B	7. A	8. C
9. D	10. B	11. B	12. A	13. D	14. C	15. C	16. B
17. B	18. B	19. B	20. D	21. B	22. A	23. D	24. C
			25. C	26. A			

Bài 19. TÌM CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ BIẾT BẢNG BIẾN THIÊN HOẶC ĐỒ THỊ

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Dựa vào bảng biến thiên hoặc đồ thị hàm số nhận biết việc đổi dấu của đạo hàm $f'(x)$ để kết luận

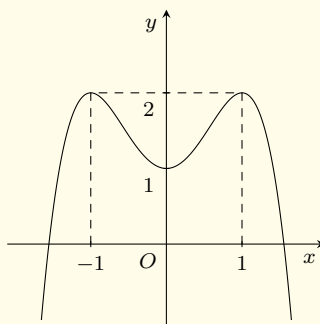
- ☑ Nếu $f'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương khi qua điểm x_0 thì x_0 là điểm cực tiểu của hàm số.
- ☑ Nếu $f'(x)$ đổi dấu từ dương sang âm khi qua điểm x_0 thì x_0 là điểm cực đại của hàm số.

B. BÀI TẬP MẪU

VÍ DỤ 19 (Đề minh họa BGD 2022-2023).

Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số đã cho có tọa độ là

- Ⓐ $(-1; 2)$. Ⓑ $(0; 1)$. Ⓒ $(1; 2)$. Ⓓ $(1; 0)$.

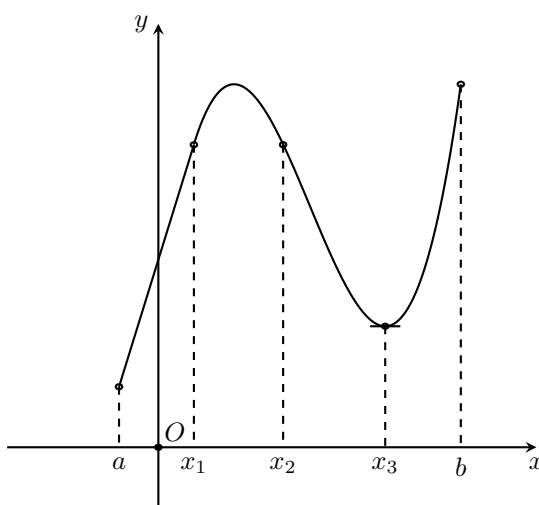


C. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN

CÂU 27.

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trong khoảng (a, b) và có đồ thị như hình bên dưới. Trong các khẳng định dưới đây, khẳng định nào **sai**?

- Ⓐ Hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trong khoảng $(a; b)$.
 Ⓑ $f'(x_2) > 0$.
 Ⓒ $f'(x_3) = 0$.
 Ⓓ $f'(x_1) > 0$.



CÂU 28. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$	0	$+$
y	$+\infty$		3		$+\infty$

Chọn khẳng định **sai**.

- Ⓐ $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.
 Ⓑ Hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(3; +\infty)$.
 Ⓒ Hàm số $f(x)$ đạt cực đại tại $x = 3$.
 Ⓓ Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên $(-\infty; -3)$.

CÂU 29. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} và có bảng xét dấu của đạo hàm như hình vẽ.

x	$-\infty$	-1	0	2	4	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$+$	0	$+$

Hàm số đã cho có bao nhiêu điểm cực trị?

- Ⓐ 2. Ⓑ 1. Ⓒ 3. Ⓓ 4.

CÂU 30. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} và có bảng biến thiên như bảng sau.

QUICK NOTE

QUICK NOTE

x	$-\infty$	-3	-2	3	$+\infty$
y'	$-$	$+$	0	$-$	$+$
y	$+\infty$	21	22	-3	$+\infty$

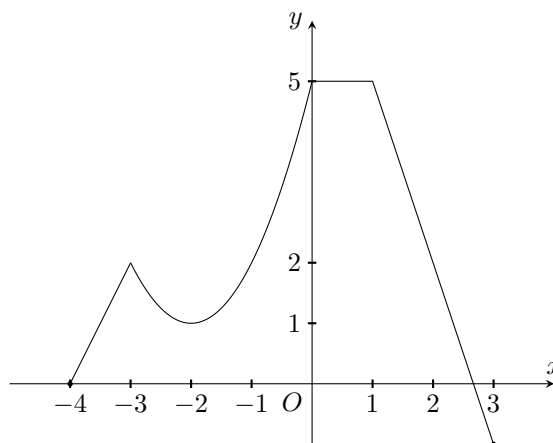
Tổng các giá trị cực tiểu của hàm số trên bằng

- (A) 19. (B) 18. (C) 0. (D) 22.

CÂU 31.

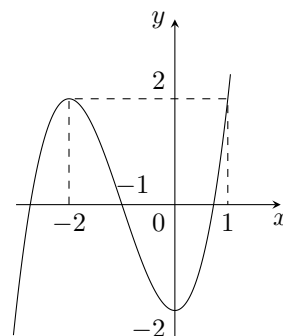
Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-4; 3]$ và có đồ thị trên đoạn $[-4; 3]$ như hình bên. Hãy xác định số điểm cực đại của đồ thị hàm số đó.

- (A) 3.
(B) 0.
(C) 2.
(D) 1.



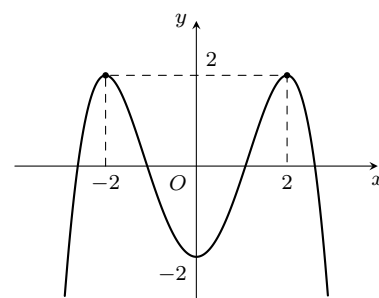
CÂU 32. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, với a, b, c, d là các số thực và $a \neq 0$, có đồ thị như hình bên. Khẳng định nào sau đây **sai**?

- (A) $y' < 0, \forall x \in (-2; 0)$.
(B) Hàm số đạt giá trị lớn nhất tại điểm $x = -2$.
(C) Đồ thị hàm số có đúng hai điểm cực trị.
(D) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 0 \end{cases}$.

**CÂU 33.**

Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} và có đồ thị là đường cong như hình vẽ bên. Tìm điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $y = f(x)$.

- (A) $x = 0$.
(B) $y = -2$.
(C) $M(0; -2)$.
(D) $N(2; 2)$.



CÂU 34. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên từng khoảng xác định và có bảng biến thiên như sau.

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
y'	$+$	$-$	$+$	
y	$-\infty$	$+\infty$	0	$+\infty$


Khẳng định nào sau đây **đúng**?

- (A) Hàm số đã cho không có cực trị.

QUICK NOTE

- (B) Hàm số đã cho có một điểm cực tiểu và không có điểm cực đại.
 (C) Hàm số đã cho có một điểm cực đại và có một điểm cực tiểu.
 (D) Hàm số đã cho có một điểm cực đại và không có điểm cực tiểu.

CÂU 35. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $(-\infty; 4]$ và có bảng biến thiên như hình vẽ sau

x	$-\infty$	1		2	3		4	
y'		+	0	-		+	0	-
y								

Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

- (A) 4. (B) 3. (C) 2. (D) 5.

CÂU 36. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} và có bảng biến thiên như sau.

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$-\infty$	4	3	4	$-\infty$	

Khẳng định nào dưới đây **sai**?

- (A) Hàm số có ba điểm cực trị. (B) Hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x = 0$.
 (C) Hàm số có giá trị cực tiểu bằng 0. (D) Hàm số có giá trị cực tiểu bằng 3.

CÂU 37. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} và có bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau

x	$-\infty$	-2	1	5	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	$-$	0	$-$	0	$+$

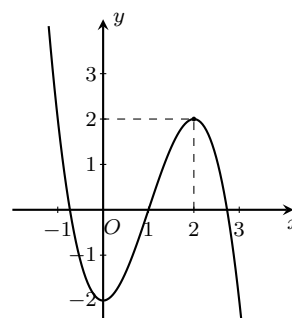
Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$ là

- (A) 3. (B) 2. (C) 0. (D) 1.

CÂU 38.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên \mathbb{R} . Biết rằng hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Đặt $g(x) = f(x) + x$. Hỏi hàm số có bao nhiêu điểm cực đại và bao nhiêu điểm cực tiểu trên khoảng $(-1; 3)$?

- (A) Hàm số có một điểm cực đại và hai điểm cực tiểu.
 (B) Hàm số có một điểm cực đại và một điểm cực tiểu.
 (C) Hàm số không có điểm cực đại và có một điểm cực tiểu.
 (D) Hàm số có hai điểm cực đại và một điểm cực tiểu.



CÂU 39. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ.

QUICK NOTE

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	$+\infty$		1		$-\infty$

Hàm số $y = f(f(x))$ có bao nhiêu điểm cực trị?

- (A) 5. (B) 6. (C) 4. (D) 7.

CÂU 40. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên \mathbb{R} và có đạo hàm $f'(x) = x^3(x+1)^2(2-x)$. Hàm số đã cho có bao nhiêu điểm cực trị?

- (A) 3. (B) 2. (C) 0. (D) 1.

CÂU 41. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên \mathbb{R} và có bảng biến thiên như hình vẽ sau

x	$-\infty$	-1	0	2	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	1	-2	1	$-\infty$

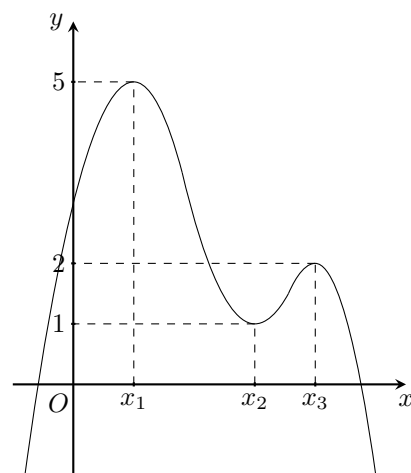
Hàm số $y = f(2x)$ đạt cực đại tại điểm nào dưới đây?

- (A) $x = \frac{1}{2}$. (B) $x = -2$. (C) $x = 1$. (D) $x = -1$.

CÂU 42.

Cho hàm số bậc năm $y = f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} , hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $y = f(x) + \frac{2017 - 2018x}{2017}$ có số điểm cực trị là

- (A) 3. (B) 2. (C) 1. (D) 4.



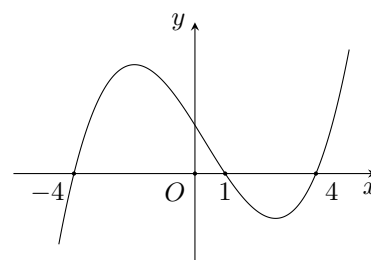
CÂU 43. Cho hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị nhận hai điểm $A(1; 3)$ và $B(3; -1)$ làm hai điểm cực trị. Khi đó số điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = |ax^2|x + bx^2 + c|x| + d|$ là

- (A) 7. (B) 11. (C) 5. (D) 9.

CÂU 44.

Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$. Biết rằng hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hỏi hàm số $y = f(5 - x^2)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

- (A) 4. (B) 7. (C) 3. (D) 9.



CÂU 45. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	5	1	$+\infty$	

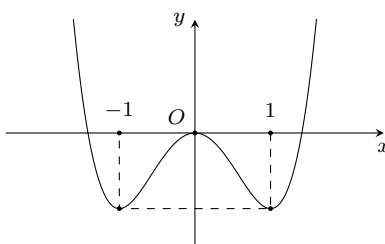
Đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

- (A) 2. (B) 5. (C) 3. (D) 4.

CÂU 46.

Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hỏi đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

- (A) 5. (B) 3. (C) 4. (D) 2.



D. BẢNG ĐÁP ÁN

27. B	28. C	29. D	30. B	31. D	32. B	33. C	34. B
35. B	36. C	37. B	38. D	39. B	40. B	41. C	42. D
43. B	44. B	45. C	46. A				

Bài 20. ĐƯỜNG TIỆM CẬN

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Đường tiệm cận ngang

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên một khoảng vô hạn (là khoảng dạng $(a; +\infty)$, $(-\infty; a)$ hoặc $(-\infty; +\infty)$). Đường thẳng $y = y_0$ là đường **tiệm cận ngang** (hay tiệm cận ngang) của đồ thị $y = f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau được thỏa mãn

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = y_0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = y_0.$$

Như vậy, để tìm tiệm cận ngang của đồ thị hàm số ta chỉ cần tính giới hạn của hàm số đó tại vô cực.

2. Đường tiệm cận đứng

Đường thẳng $x = x_0$ được gọi là đường **tiệm cận đứng** (hay tiệm cận đứng) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau được thỏa mãn

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = +\infty.$$

B. BÀI TẬP MẪU

VÍ DỤ 20 (Đề minh họa BGD 2022-2023). Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số

$y = \frac{2x+1}{3x-1}$ là đường thẳng có phương trình

- (A) $y = \frac{1}{3}$. (B) $y = -\frac{2}{3}$. (C) $y = -\frac{1}{3}$. (D) $y = \frac{2}{3}$.

QUICK NOTE

QUICK NOTE

C. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN

CÂU 1. Đồ thị của hàm số nào trong các hàm số sau đây có tiệm cận ngang?

(A) $y = \frac{2-x}{x}$.

(B) $y = x^3 - x^2 + x - 3$.

(C) $y = x^4 - x^2 - 2$.

(D) $y = \frac{3x^2 - 1}{x + 1}$.

CÂU 2. Đường thẳng nào dưới đây là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = 10 + \frac{1}{x-10}$?

(A) $y = -10$.

(B) $x = -10$.

(C) $y = 10$.

(D) $x = 10$.

CÂU 3. Đồ thị hàm số $y = \frac{x-2}{x+1}$ có đường tiệm cận đứng là

(A) $x = 1$.

(B) $x = -1$.

(C) $y = 1$.

(D) $y = -1$.

CÂU 4. Tìm tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{x-1}$.

(A) $x = -1$.

(B) $y = -1$.

(C) $x = 1$.

(D) $y = 2$.

CÂU 5. Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{x-1}{x+1}$ là

(A) 2.

(B) 1.

(C) 3.

(D) 0.

CÂU 6. Đường thẳng $x = 1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số nào sau đây?

(A) $y = \frac{2x^2 + 3x + 2}{2-x}$.

(B) $y = \frac{2x-2}{x+2}$.

(C) $y = \frac{1+x^2}{1+x}$.

(D) $y = \frac{1+x}{1-x}$.

CÂU 7. Đường thẳng $y = -1$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số nào sau đây?

(A) $y = \frac{1+x}{1-x}$.

(B) $y = \frac{2x^2 + 3x + 2}{2-x}$.

(C) $y = \frac{2x-2}{x+2}$.

(D) $y = \frac{1+x^2}{1+x}$.

CÂU 8. Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{2x-1}$ là

(A) $x = 1$.

(B) $x = \frac{1}{2}$.

(C) $y = \frac{1}{2}$.

(D) $y = 1$.

CÂU 9. Đồ thị hàm số $y = \frac{x+3}{x-2}$ có các đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang lần lượt là

(A) $x = 2$ và $y = 1$.

(B) $x = 1$ và $y = 2$.

(C) $x = 2$ và $y = -3$.

(D) $x = -2$ và $y = 1$.

CÂU 10. Cho hàm số $y = \frac{x-2}{x-1}$. Đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số là

(A) $x = 2$.

(B) $y = 2$.

(C) $x = 1$.

(D) $y = 1$.

CÂU 11. Đường tiệm ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{2x-6}{x-2}$ là

(A) $y - 3 = 0$.

(B) $x - 2 = 0$.

(C) $x - 3 = 0$.

(D) $y - 2 = 0$.

CÂU 12. Đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{1-2x}{-x+2}$ là

(A) $x = -2, y = -2$.

(B) $x = -2, y = -2$.

(C) $x = -2, y = -2$.

(D) $x = 2, y = 2$.

CÂU 13. Đồ thị hàm số $y = \frac{x-1}{x^2+1}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận (nếu chỉ tính TCD và TCN)?

(A) 3.

(B) 2.

(C) 0.

(D) 1.

CÂU 14. Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{x-2}{x+3}$ là

(A) $x = -3$.

(B) $y = 1$.

(C) $x = 1$.

(D) $y = -1$.

CÂU 15. Đồ thị của hàm số nào sau đây không có tiệm cận ngang?

(A) $y = \frac{1}{2x^2 + x}$.

(B) $y = e^x$.

(C) $y = 2x^2 + x$.

(D) $y = \frac{2x+1}{x+2}$.

CÂU 16. Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{2-x}{x+1}$ là

- (A) $y = -1$. (B) $y = 2$. (C) $x = -1$. (D) $x = 2$.

CÂU 17. Đường thẳng nào dưới đây là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{1-4x}{2x-1}$?

- (A) $y = \frac{1}{2}$. (B) $y = -2$. (C) $y = 2$. (D) $y = 4$.

CÂU 18. Đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{x+1}$ có tiệm cận đứng là

- (A) $y = 2$. (B) $x = -1$. (C) $y = -1$. (D) $x = 1$.

CÂU 19. Đồ thị hàm số nào sau đây có đường tiệm cận đứng là $x = 1$?

- (A) $y = \frac{x-1}{x}$. (B) $y = \frac{2x}{1+x^2}$. (C) $y = \frac{2x}{1-x}$. (D) $y = \frac{x-1}{x+1}$.

CÂU 20. Đường thẳng nào dưới đây là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{2-x}{x+3}$?

- (A) $x = 2$. (B) $x = -3$. (C) $y = -1$. (D) $y = -3$.

D. BẢNG ĐÁP ÁN

1. A	2. C	3. B	4. D	5. D	6. D	7. A	8. B
9. A	10. C	11. D	12. D	13. D	14. A	15. C	16. A
		17. B	18. B	19. C	20. B		

Bài 21. PHƯƠNG TRÌNH VÀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH LOGARIT

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Phương trình logarit

☑ $\log_a x = b \Leftrightarrow x = a^b$.

☑ $\log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) > 0 \\ f(x) = g(x) \end{cases}$.

2. Bất phương trình logarit

a) Nếu $a > 1$ thì

☑ $\log_a x > b \Leftrightarrow x > a^b$.

☑ $\log_a x < b \Leftrightarrow 0 < x < a^b$.

☑ $\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow f(x) > g(x) > 0$.

b) Nếu $0 < a < 1$ thì

☑ $\log_a x > b \Leftrightarrow 0 < x < a^b$.

☑ $\log_a x < b \Leftrightarrow x > a^b$.

☑ $\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow g(x) > f(x) > 0$.

B. BÀI TẬP MẪU

VÍ DỤ 21 (Đề minh họa BGD 2022-2023). Tập nghiệm của bất phương trình $\log(x-2) > 0$ là

- (A) $(2; 3)$. (B) $(-\infty; 3)$. (C) $(3; +\infty)$. (D) $(12; +\infty)$.

C. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN

CÂU 1. Nghiệm của phương trình $\log_2(x-1) = 4$ là

- (A) $x = 15$. (B) $x = 9$. (C) $x = 17$. (D) $x = 2$.

QUICK NOTE

QUICK NOTE

CÂU 2. Nghiệm nhỏ nhất của phương trình $\log_5 (x^2 - 3x + 5) = 1$ là

- (A) 1. (B) 3. (C) 0. (D) -3.

CÂU 3. Tìm nghiệm của phương trình $\log_{64} (x + 1) = \frac{1}{2}$.

- (A) 7. (B) $-\frac{1}{2}$. (C) -1. (D) 4.

CÂU 4. Tìm nghiệm của phương trình $\log_{25} (x + 1) = \frac{1}{2}$.

- (A) $x = \frac{23}{2}$. (B) $x = -6$. (C) $x = 6$. (D) $x = 4$.

CÂU 5. Nghiệm của phương trình $\log_5 (2x - 1)^3 = 6$ là

- (A) 10. (B) 12. (C) 13. (D) 14.

CÂU 6. Tìm các nghiệm của phương trình $\log_3 (2x - 3) = 2$.

- (A) $x = \frac{9}{2}$. (B) $x = 6$. (C) $x = 5$. (D) $x = \frac{11}{2}$.

CÂU 7. Số nghiệm của phương trình $\log_2 (x^2 - 2x) = 2$ là

- (A) 1. (B) 2. (C) 4. (D) 3.

CÂU 8. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2 (x^2 + 3x) \leq 2$ là

- (A) $[-4; -3] \cup (0; 1]$. (B) $(0; 1]$.
(C) $(-\infty; -3) \cup (0; +\infty)$. (D) $\left(0; \frac{1}{2}\right]$.

CÂU 9. Tập nghiệm S của phương trình $\log_3 (2x + 3) = 1$.

- (A) $S = \{1\}$. (B) $S = \{3\}$. (C) $S = \{-1\}$. (D) $S = \{0\}$.

CÂU 10. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_5 (2x - 1) < \log_5 (x + 2)$ là

- (A) $S = (-\infty; 3)$. (B) $S = \left(\frac{1}{2}; 3\right)$. (C) $S = (-2; 3)$. (D) $S = (3; +\infty)$.

CÂU 11. Tập nghiệm của bất phương trình $\log x \geq 2$ là

- (A) $(10; +\infty)$. (B) $(0; +\infty)$. (C) $[100; +\infty)$. (D) $(-\infty; 10)$.

CÂU 12. Phương trình $\log_2 (3x + 1) = -4$ có tập nghiệm là

- (A) \emptyset . (B) $\left\{-\frac{5}{16}\right\}$. (C) $\left\{\frac{17}{48}\right\}$. (D) $\{5\}$.

CÂU 13. Tập hợp nghiệm của bất phương trình $\log_2 x \geq 3$ là

- (A) $[6; +\infty)$. (B) $[9; +\infty)$. (C) $(8; +\infty)$. (D) $[8; +\infty)$.

CÂU 14. Tập nghiệm của phương trình $\log_2 (x^2 - 1) = \log_2 (2x - 1)$ là

- (A) $\{2\}$. (B) \emptyset . (C) $\{0; 1; 2\}$. (D) $\{0; 2\}$.

CÂU 15. Nghiệm của phương trình $\log_2 (x + 3) + \log_2 (x - 1) = \log_2 5$ là

- (A) $x = 2$. (B) $x = 1$. (C) $x = 4$. (D) $x = 3$.

CÂU 16. Tập nghiệm S của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}} (x^2 - 6x + 5) + \log_2 (x - 1) > 0$ là

- (A) $(5; 6)$. (B) $[5; 6)$. (C) $(1; 6)$. (D) $(1; +\infty)$.

CÂU 17. Số nghiệm nguyên của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}} (x - 3) \geq \log_{\frac{1}{2}} 4$ là

- (A) 1. (B) 4. (C) 2. (D) 3.

CÂU 18. Nghiệm của phương trình $\log_3 (x - 2) + \log_{\frac{1}{3}} (x - 4) = 1$ là

- (A) $x = 3$. (B) $x = 6$. (C) $x = 4$. (D) $x = 5$.

CÂU 19. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{\pi}{4}} (x + 1) > \log_{\frac{\pi}{4}} (2x - 5)$ là

- (A) $(-1; 6)$. (B) $\left(\frac{5}{2}; 6\right)$. (C) $(-\infty; 6)$. (D) $(6; +\infty)$.

CÂU 20. Tập nghiệm của phương trình $\log_2 (x - 1) = \log_4 (2x)$ là

- (A) $\{2 \pm \sqrt{3}\}$. (B) $\{2 + \sqrt{3}\}$. (C) $\left\{\frac{3}{2}\right\}$. (D) $\{2 - \sqrt{3}\}$.

D. BẢNG ĐÁP ÁN

1. C	2. C	3. A	4. D	5. C	6. B	7. B	8. A
9. D	10. B	11. C	12. B	13. D	14. A	15. A	16. A
		17. B	18. D	19. D	20. B		

QUICK NOTE

Bài 22. PHÉP ĐẾM - HOÁN VỊ - CHỈNH HỢP - TỔ HỢP

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Quy tắc cộng

Một công việc được hoàn thành bởi một trong hai hành động. Nếu hành động này có m cách thực hiện, hành động kia có n cách thực hiện không trùng với bất kì cách nào của hành động thứ nhất thì công việc đó có $m + n$ cách thực hiện.

2. Quy tắc nhân

Một công việc được hoàn thành bởi hai hành động liên tiếp. Nếu có m cách thực hiện hành động thứ nhất và ứng với mỗi cách đó có n cách thực hiện cho hành động thứ hai thì có $m \cdot n$ cách hoàn thành công việc.

3. Hoán vị

☉ Cho tập hợp A gồm n phần tử ($n \geq 1$). Mỗi kết quả của sự sắp xếp thứ tự n phần tử của tập hợp A được gọi là một hoán vị của n phần tử đó.

☉ Số các hoán vị của n phần tử là $P_n = n(n-1) \cdots 2 \cdot 1 = n!$.

4. Chỉnh hợp

☉ Cho tập hợp A gồm n phần tử ($n \geq 1$). Kết quả của việc lấy k phần tử khác nhau từ n phần tử của tập hợp A và sắp xếp chúng theo một thứ tự nào đó được gọi là một chỉnh hợp chập k của n phần tử đã cho.

☉ Số chỉnh hợp chập k của n phần tử là $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$ với $1 \leq k \leq n$.

5. Tổ hợp

☉ Cho tập hợp A gồm n phần tử ($n \geq 1$). Mỗi tập con gồm k phần tử của A được gọi là một tổ hợp chập k của n phần tử đã cho.

☉ Số các tổ hợp chập k của n phần tử là $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ với $0 \leq k \leq n$.

☉ Một số tính chất của các số C_n^k :

i) $C_n^k = C_n^{n-k}$ với $0 \leq k \leq n$.

ii) $C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k = C_n^k$ với $1 \leq k < n$.

B. BÀI TẬP MẪU

VÍ DỤ 22 (Đề minh họa BGD 2022-2023). Cho tập hợp A có 15 phần tử. Số tập con gồm hai phần tử của A bằng

(A) 225.

(B) 30.

(C) 210.

(D) 105.

C. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN

CÂU 1. Với k, n là hai số nguyên dương tùy ý thỏa mãn $k \leq n$, mệnh đề nào dưới đây sai?

(A) $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$.

(B) $C_n^k = \frac{P_n}{k!}$.

QUICK NOTE

$$\textcircled{C} C_n^k = \frac{A_n^k}{k!}.$$

$$\textcircled{D} C_n^k = C_n^{n-k}.$$

CÂU 2. Cho n là số tự nhiên lớn hơn 2. Số các chỉnh hợp chập 2 của n phần tử là

$$\textcircled{A} n(n-1).$$

$$\textcircled{B} 2n.$$

$$\textcircled{C} \frac{n(n-1)}{2!}.$$

$$\textcircled{D} 2! \cdot n(n-1).$$

CÂU 3. Cho tập $A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$, có bao nhiêu tập con gồm 3 phần tử của tập hợp A ?

$$\textcircled{A} A_6^3.$$

$$\textcircled{B} P_6.$$

$$\textcircled{C} P_3.$$

$$\textcircled{D} C_6^3.$$

CÂU 4. Cho $n, k \in \mathbb{N}^*$ và $n \geq k$. Tìm công thức đúng.

$$\textcircled{A} C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

$$\textcircled{B} A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}.$$

$$\textcircled{C} A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

$$\textcircled{D} C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!(k+1)!}.$$

CÂU 5. Số tập con có hai phần tử của tập hợp gồm 10 phần tử là

$$\textcircled{A} 20.$$

$$\textcircled{B} 90.$$

$$\textcircled{C} 100.$$

$$\textcircled{D} 45.$$

CÂU 6. Cho tập hợp X gồm 10 phần tử. Số các hoán vị của 10 phần tử của tập hợp X là

$$\textcircled{A} 10^{10}.$$

$$\textcircled{B} 10^2.$$

$$\textcircled{C} 2^{10}.$$

$$\textcircled{D} 10!.$$

CÂU 7. Cho tập $A = \{1; 2; 3; \dots; 9; 10\}$. Một tổ hợp chập 2 của 10 phần tử của A là

$$\textcircled{A} \{1; 2\}.$$

$$\textcircled{B} 2!.$$

$$\textcircled{C} A_{10}^2.$$

$$\textcircled{D} C_{10}^2.$$

CÂU 8. Công thức nào dưới đây đúng?

$$\textcircled{A} A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

$$\textcircled{B} A_n^k = \frac{(n-k)!}{k!}.$$

$$\textcircled{C} A_n^k = \frac{n!}{k!}.$$

$$\textcircled{D} A_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

CÂU 9. Với n là số nguyên dương, công thức nào dưới đây đúng?

$$\textcircled{A} P_n = n!.$$

$$\textcircled{B} P_n = n - 1.$$

$$\textcircled{C} P_n = (n-1)!.$$

$$\textcircled{D} P_n = n.$$

CÂU 10. Lớp 12A có 43 học sinh và lớp 12B có 30 học sinh. Chọn ngẫu nhiên 1 học sinh từ lớp 12A và 12B. Hỏi có bao nhiêu cách chọn?

$$\textcircled{A} 43.$$

$$\textcircled{B} 30.$$

$$\textcircled{C} 1290.$$

$$\textcircled{D} 73.$$

CÂU 11. Một học sinh cần mua một cây bút mực và một cây bút chì. Các cây bút mực có 8 màu khác nhau và các cây bút chì cũng có 8 màu khác nhau. Như vậy, học sinh đó có bao nhiêu cách chọn?

$$\textcircled{A} 16.$$

$$\textcircled{B} 2.$$

$$\textcircled{C} 3.$$

$$\textcircled{D} 64.$$

CÂU 12. Một học sinh cần mua một cây bút để viết bài. Bút mực có 8 loại khác nhau, bút chì có 8 loại khác nhau. Như vậy, học sinh đó có bao nhiêu cách chọn?

$$\textcircled{A} 16.$$

$$\textcircled{B} 2.$$

$$\textcircled{C} 3.$$

$$\textcircled{D} 64.$$

CÂU 13. Có bao nhiêu cách chọn ra 3 học sinh từ một nhóm có 7 học sinh nam và 3 học sinh nữ?

$$\textcircled{A} C_3^3.$$

$$\textcircled{B} C_{10}^3.$$

$$\textcircled{C} A_{10}^3.$$

$$\textcircled{D} P_3.$$

CÂU 14. Từ thành phố A có 10 con đường đến thành phố B , từ thành phố B có 7 con đường đến thành phố C . Từ A đến C phải qua B , hỏi có bao nhiêu cách đi từ A đến C mà chỉ đi qua B đúng một lần?

$$\textcircled{A} 10.$$

$$\textcircled{B} 7.$$

$$\textcircled{C} 17.$$

$$\textcircled{D} 70.$$

CÂU 15. Một người vào cửa hàng ăn, người đó chọn thực đơn gồm 1 món ăn trong 5 món, 1 loại quả trong 5 loại, 1 loại nước uống trong 3 loại. Hỏi có bao nhiêu cách lập thực đơn?

$$\textcircled{A} 73.$$

$$\textcircled{B} 75.$$

$$\textcircled{C} 85.$$

$$\textcircled{D} 95.$$

CÂU 16. Một tổ có 4 học sinh nam và 6 học sinh nữ. Hỏi có bao nhiêu cách chọn ra 3 học sinh trong đó có 2 học sinh nam?

$$\textcircled{A} C_4^2 + C_6^1.$$

$$\textcircled{B} C_4^2 \cdot C_6^1.$$

$$\textcircled{C} A_4^2 \cdot A_6^1.$$

$$\textcircled{D} A_4^2 + A_6^1.$$

CÂU 17. Trong một trận chung kết bóng đá phải phân định thắng thua bằng đá luân lưu 11 mét. Huấn luyện viên của mỗi đội cần trình với trọng tài một danh sách sắp thứ tự 5

cầu thủ trong 11 cầu thủ để đá luân lưu 5 quả sút luân lưu. Hỏi huấn luyện viên của mỗi đội sẽ có bao nhiêu cách lập danh sách thứ tự đá luân lưu?

- (A) C_{11}^5 . (B) A_{11}^5 . (C) $5!$. (D) $11!$.

CÂU 18. Có 15 học sinh giỏi gồm 6 học sinh khối 12, 5 học sinh khối 11 và 4 học sinh khối 10. Hỏi có bao nhiêu cách chọn ra 6 học sinh sao cho mỗi khối có đúng 2 học sinh?

- (A) $C_6^2 \cdot C_5^2 \cdot C_4^2$. (B) $A_6^2 \cdot A_5^2 \cdot A_4^2$. (C) $C_6^2 + C_5^2 + C_4^2$. (D) $A_6^2 + A_5^2 + A_4^2$.

CÂU 19. Một câu lạc bộ có 30 thành viên. Có bao nhiêu cách chọn một ban quản lý gồm 1 chủ tịch, 1 phó chủ tịch và 1 thư kí?

- (A) A_{30}^3 . (B) C_{30}^3 . (C) $30!$. (D) $3!$.

CÂU 20. Một hộp chứa 10 quả cầu phân biệt. Số cách lấy ra cùng lúc 3 quả cầu từ hộp đó là

- (A) 720. (B) 10^3 . (C) 120. (D) 3^{10} .

CÂU 21. Giả sử ta dùng 6 màu để tô cho 4 nước khác nhau trên bản đồ và không có màu nào được dùng 2 lần. Số cách để chọn ra những màu cần dùng và tô lên bản đồ là

- (A) A_6^4 . (B) 10. (C) C_6^4 . (D) 6^4 .

CÂU 22. Có bao nhiêu cách phân công 3 bạn từ một tổ có 9 bạn để làm trực nhật?

- (A) 9^3 . (B) 3^9 . (C) A_9^3 . (D) C_9^3 .

CÂU 23. Cho 20 điểm phân biệt nằm trên một đường tròn. Hỏi có bao nhiêu tam giác được tạo thành từ các điểm này?

- (A) 8000. (B) 1140. (C) 6480. (D) 600.

CÂU 24. Trong một bình đựng 4 viên bi đỏ và 3 viên bi xanh. Lấy ngẫu nhiên đồng thời 2 viên. Có bao nhiêu cách lấy?

- (A) 18. (B) 21. (C) 42. (D) 10.

CÂU 25. Số cách sắp xếp 6 học sinh nữ và 4 học sinh nam thành một hàng dọc là

- (A) $6! + 4!$. (B) $6! \cdot 4!$. (C) $C_{10}^4 \cdot C_{10}^6$. (D) $10!$.

CÂU 26. Cho tập hợp $X = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$. Từ tập hợp X , hỏi có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm ba chữ số đôi một khác nhau?

- (A) 35. (B) 210. (C) 840. (D) 5040.

CÂU 27. Có bao nhiêu số tự nhiên có hai chữ số khác nhau mà các chữ số được lấy từ tập hợp $X = \{1; 2; 3; 4; 5\}$?

- (A) 5^2 . (B) 2^5 . (C) A_5^2 . (D) C_5^2 .

CÂU 28. Giả sử 9 vận động viên tham gia một cuộc thi bơi lội. Nếu không kể trường hợp có hai vận động viên về đích cùng một lúc thì có bao nhiêu kết quả có thể xảy ra đối với các vị trí thứ nhất, thứ nhì và thứ ba?

- (A) 84. (B) 729. (C) 504. (D) 3^9 .

CÂU 29. Có bao nhiêu tập con gồm 3 phần tử của tập hợp $X = \{1; 2; 3; 4; 7; 8; 9\}$?

- (A) C_7^3 . (B) A_9^3 . (C) A_7^3 . (D) C_9^3 .

CÂU 30. Một hộp có 8 bi xanh, 5 bi đỏ và 4 bi vàng. Có bao nhiêu cách chọn ra 3 viên bi sao cho có đúng 1 bi đỏ?

- (A) $C_5^1 \cdot C_8^1 \cdot C_4^1$. (B) $A_5^1 \cdot A_8^2 \cdot A_4^1$. (C) $C_5^1 \cdot C_{12}^2$. (D) $A_5^1 \cdot A_8^1 \cdot A_4^1$.

D. BẢNG ĐÁP ÁN

1. B	2. A	3. D	4. C	5. D	6. D	7. A	8. A
9. A	10. D	11. D	12. A	13. B	14. D	15. B	16. B
17. B	18. A	19. A	20. C	21. A	22. D	23. B	24. B
	25. D	26. B	27. C	28. C	29. A	30. C	

Bài 23. NGUYỄN HÀM

QUICK NOTE

QUICK NOTE

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Định nghĩa nguyên hàm

Cho hàm số $f(x)$ xác định trên \mathbb{K} . Hàm số $F(x)$ được gọi là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên \mathbb{K} nếu $F'(x) = f(x), \forall x \in \mathbb{K}$.

Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên \mathbb{K} thì mọi nguyên hàm của $f(x)$ trên \mathbb{K} đều có dạng $F(x) + C$ với C là hằng số.

2. Tính chất của nguyên hàm

- $\int f'(x) dx = f(x) + C$.
- $\int kf(x) dx = k \int f(x) dx$ với $k \neq 0$.
- $\int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$.

3. Bảng nguyên hàm của một số hàm số thường gặp

Nguyên hàm cơ bản	Nguyên hàm mở rộng
<ul style="list-style-type: none"> $\int 0 dx = C$ $\int dx = x + C$ $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, (\alpha \neq -1)$ $\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$ $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, (0 < a \neq 1)$ $\int e^x dx = e^x + C$ $\int \sin x dx = -\cos x + C$ $\int \cos x dx = \sin x + C$ $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$ $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C$ 	<ul style="list-style-type: none"> $\int (ax+b)^\alpha dx = \frac{1}{a} \frac{(ax+b)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, (\alpha \neq -1)$ $\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \cdot \ln ax+b + C$ $\int a^{ax+b} dx = \frac{1}{a} \cdot \frac{a^{ax+b}}{\ln a} + C$ $\int e^{(ax+b)} dx = \frac{1}{a} \cdot e^{(ax+b)} + C$ $\int \sin(ax+b) dx = -\frac{1}{a} \cos(ax+b) + C, (a \neq 0)$ $\int \cos(ax+b) dx = \frac{1}{a} \sin(ax+b) + C, (a \neq 0)$ $\int \frac{1}{\cos^2(ax+b)} dx = \frac{1}{a} \tan(ax+b) + C, (a \neq 0)$ $\int \frac{1}{\sin^2(ax+b)} dx = -\frac{1}{a} \cot(ax+b) + C, (a \neq 0)$

B. BÀI TẬP MẪU

VÍ DỤ 23. Cho $\int \frac{1}{x} dx = F(x) + C$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

- (A) $F'(x) = \frac{2}{x^2}$. (B) $F'(x) = \ln x$. (C) $F'(x) = \frac{1}{x}$. (D) $F'(x) = -\frac{1}{x^2}$.

C. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN

CÂU 31. Hàm số $f(x) = \cos(4x+7)$ có một nguyên hàm là

- (A) $\frac{1}{4} \sin(4x+7) - 3$. (B) $-\frac{1}{4} \sin(4x+7) + 3$.
(C) $\sin(4x+7) - 1$. (D) $-\sin(4x+7) + x$.

CÂU 32. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{x^2} - x^2 - \frac{1}{3}$ là:

- (A) $-\frac{x^3}{3} - \frac{1}{x} - \frac{x}{3} + C$. (B) $-\frac{2}{x^2} - 2x + C$.
(C) $-\frac{x^4 + x^2 + 3}{3x} + C$. (D) $-\frac{x^4 + x^2 + 3}{3x} + C$.

CÂU 33. Tìm $\int \sin 5x dx$

QUICK NOTE

(A) $\int \sin 5x \, dx = \frac{1}{5} \cos 5x + C.$

(B) $\int \sin 5x \, dx = -\frac{1}{5} \cos 5x + C.$

(C) $\int \sin 5x \, dx = -\cos 5x + C.$

(D) $\int \sin 5x \, dx = -5 \cos 5x + C.$

CÂU 34. Tìm họ nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \cos(2x + 3)$.

(A) $F(x) = \frac{1}{2} \sin(2x + 3) + C.$

(B) $F(x) = -\frac{1}{2} \sin(2x + 3) + C.$

(C) $F(x) = \sin(2x + 3) + C.$

(D) $F(x) = -\sin(2x + 3) + C.$

CÂU 35. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3^{2x+1}$ là:

(A) $\frac{1}{2 \ln 3} 3^{2x+1} + C.$

(B) $\frac{1}{\ln 3} 3^{2x+1} + C.$

(C) $\frac{1}{2} 3^{2x+1} + C.$

(D) $\frac{1}{2} 3^{2x+1} \ln 3 + C.$

CÂU 36. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3x^2 + e^x + 1$ là

(A) $F(x) = x^3 + e^x + x + C.$

(B) $F(x) = x^3 + e^x + 1 + C.$

(C) $F(x) = 2x^3 + e^x + x + C.$

(D) $F(x) = 6x + e^x + C.$

CÂU 37. Công thức nguyên hàm nào sau đây không đúng?

(A) $\int \frac{1}{x} \, dx = \ln x + C.$

(B) $\int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx = \tan x + C.$

(C) $\int x^\alpha \, dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1).$

(D) $\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (0 < a \neq 1).$

CÂU 38. Họ các nguyên hàm của hàm số $y = e^{-3x+1}$ là

(A) $-3e^{-3x+1} + C.$

(B) $\frac{1}{3}e^{-3x+1} + C.$

(C) $-\frac{1}{3}e^{-3x+1} + C.$

(D) $3e^{-3x+1} + C.$

CÂU 39. Họ tất cả nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos x + 6x$ là

(A) $-\sin x + C.$

(B) $-\sin x + 3x^2 + C.$

(C) $\sin x + 3x^2 + C.$

(D) $\cos x + 6x^2 + C.$

CÂU 40. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin 2x + \cos x$ là

(A) $\cos^2 x - \sin x + C.$

(B) $\sin^2 x + \sin x + C.$

(C) $\cos 2x - \sin x + C.$

(D) $-\cos 2x + \sin x + C.$

CÂU 41. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^{-x} - 1$ là

(A) $-e^x - x + C.$

(B) $e^{-x} - x + C.$

(C) $e^x + x + C.$

(D) $-e^{-x} - x + C.$

CÂU 42. Khẳng định nào đây đúng?

(A) $\int \sin x \, dx = -\sin x + C.$

(B) $\int \sin x \, dx = \frac{1}{2} \sin^2 x + C.$

(C) $\int \sin x \, dx = \cos x + C.$

(D) $\int \sin x \, dx = -\cos x + C.$

CÂU 43. Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2^x + 4x$ là

(A) $2^x \ln 2 + 2x^2 + C.$

(B) $\frac{2^x}{\ln 2} + 2x^2 + C.$

(C) $2^x \ln 2 + C.$

(D) $\frac{2^x}{\ln 2} + C.$

CÂU 44. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2x^3 - 9$ là:

(A) $\frac{1}{4}x^4 + C.$

(B) $4x^3 - 9x + C.$

(C) $\frac{1}{2}x^4 - 9x + C.$

(D) $4x^4 - 9x + C.$

CÂU 45. Mệnh đề nào sau đây đúng?

(A) $\int \sin x \, dx = \cos x + C.$

(B) $\int \cos x \, dx = \sin x + C.$

(C) $\int a^x \, dx = a^x + C \quad (0 < a \neq 1).$

(D) $\int \frac{1}{x} \, dx = -\frac{1}{x^2} + C \quad (x \neq 0).$

CÂU 46. Khẳng định nào sau đây là sai?

(A) Mọi hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ đều có nguyên hàm trên đoạn $[a; b]$.

(B) $\int e^x \, dx = e^x + C$ (C là hằng số).

(C) $\int \frac{1}{x} \, dx = \ln|x| + C$ (C là hằng số) với $x \neq 0$.

(D) $\int x^\alpha \, dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$ (C là hằng số, α là hằng số).

QUICK NOTE

CÂU 47. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{x^2} - x^2 - \frac{1}{3}$ là

(A) $-\frac{x^4 + x^2 + 3}{3x} + C.$

(B) $\frac{-x^3}{3} - \frac{1}{x} - \frac{x}{3} + C.$

(C) $-\frac{x^4 + x^2 + 3}{3x} + C.$

(D) $\frac{-2}{x^2} - 2x + C.$

CÂU 48. Nếu hàm số $y = \sin x$ là một nguyên hàm của hàm số $y = f(x)$ thì

(A) $f(x) = -\sin x.$

(B) $f(x) = -\cos x.$

(C) $f(x) = \sin x.$

(D) $f(x) = \cos x.$

CÂU 49. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sqrt[3]{x}$ là

(A) $F(x) = \frac{3x\sqrt[3]{x}}{4} + C.$

(B) $F(x) = \frac{4x}{3\sqrt[3]{x}} + C.$

(C) $F(x) = \frac{4x}{3\sqrt[3]{x^2}} + C.$

(D) $F(x) = \frac{3\sqrt[3]{x^2}}{4} + C.$

CÂU 50. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{x-1}$ là

(A) $\ln|x-1| + C.$

(B) $-\frac{1}{(x-1)^2} + C.$

(C) $2\ln|x-1| + C.$

(D) $\ln(x-1) + C.$

D. BẢNG ĐÁP ÁN

31. A	32. A	33. A	34. A	35. A	36. A	37. A	38. C
39. C	40. B	41. D	42. D	43. B	44. C	45. B	46. D
		47. B	48. D	49. A	50. A		

Bài 24. TÍCH PHÂN

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Định nghĩa tích phân

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và xác định trên đoạn $[a; b]$. Giả sử $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên đoạn $[a; b]$.

Hiệu số $F(b) - F(a)$ được gọi là tích phân từ a đến b của hàm số $f(x)$. Kí hiệu là

$$\int_a^b f(x) dx.$$

$$\text{Vậy } \int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

2. Tính chất tích phân xác định

Tính chất của tích phân xác định.

$$\textcircled{A} \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \text{ với } a < c < b.$$

$$\textcircled{B} k \int_a^b f(x) dx = \int_a^b kf(x) dx \text{ với } (k \neq 0).$$

$$\textcircled{C} \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx.$$

$$\textcircled{D} \int_a^b (f(x) \pm g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx.$$

$$\textcircled{E} \int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(z) dz.$$

$$\omin� \int_a^b f'(x) dx = f(x) \Big|_a^b = f(b) - f(a).$$

B. BÀI TẬP MẪU

VÍ DỤ 24 (Đề minh họa BGD 2022-2023). Nếu $\int_0^2 f(x) dx = 4$ thì $\int_0^2 \left[\frac{1}{2} f(x) - 2 \right] dx$ bằng

(A) 0. (B) 6. (C) 8. (D) -2.

C. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN

CÂU 1. Cho $\int_1^2 f(x) dx = 3$ và $\int_1^2 [3f(x) - g(x)] dx = 10$, khi đó $\int_1^2 g(x) dx$ bằng

(A) -1. (B) -4. (C) 17. (D) 1.

CÂU 2. Trong các công thức sau đây, công thức nào đúng?

- (A) $\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_b^a v du.$ (B) $\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du.$
- (C) $\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b + \int_a^b v du.$ (D) $\int_a^b u dv = uv - \int_b^a v du.$

CÂU 3. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên đoạn $[1; 3]$, $f(3) = 5$ và $\int_1^3 f'(x) dx = 6$. Khi đó $f(1)$ bằng

(A) 10. (B) 11. (C) 1. (D) -1.

CÂU 4. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên đoạn $[a; b]$ và $\int_a^b f(x) dx = 1$; $F(b) = 2$. Tính $F(a)$.

(A) 1. (B) 3. (C) -1. (D) 2.

CÂU 5. Cho $\int_{-3}^2 f(x) dx = -7$. Tính $\int_{-3}^2 3 \cdot f(x) dx$

(A) 4. (B) 21. (C) -21. (D) -4.

CÂU 6. Nếu $\int_1^4 f(x) dx = 9$ và $\int_3^4 f(x) dx = -1$ thì $\int_1^3 f(x) dx$ bằng

(A) -8. (B) -10. (C) 8. (D) 10.

CÂU 7. Nếu $F'(x) = \frac{1}{2x+1}$ và $F(1) = 1$ thì giá trị của $F(2)$ bằng

(A) $1 + \frac{1}{2} \ln 5.$ (B) $1 + \frac{1}{2} \ln \frac{5}{3}.$ (C) $1 + \ln \frac{5}{3}.$ (D) $1 + \ln 5.$

CÂU 8. Cho hàm số f, g liên tục trên K và a, b, c thuộc K . Công thức nào sau đây sai?

- (A) $\int_a^b kf(x) dx = k \int_a^b f(x) dx.$
- (B) $\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx$ với $a < b < c.$

QUICK NOTE

$$\textcircled{C} \int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx.$$

$$\textcircled{D} \int_a^b f(x) dx = \int_b^a f(x) dx.$$

CÂU 9. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$. Khi đó hiệu số $F(1) - F(2)$ bằng

$$\textcircled{A} \int_1^2 [-F(x)] dx.$$

$$\textcircled{B} \int_1^2 f(x) dx.$$

$$\textcircled{C} \int_1^2 [-f(x)] dx.$$

$$\textcircled{D} \int_2^1 F(x) dx.$$

CÂU 10. Với mọi hàm số $f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} , ta có

$$\textcircled{A} \int_0^3 f(x) dx = \int_3^0 f(x) dx.$$

$$\textcircled{B} \int_0^3 f(x) dx = \int_{-3}^0 f(x) dx.$$

$$\textcircled{C} \int_0^3 f(x) dx = -\int_3^0 f(x) dx.$$

$$\textcircled{D} \int_0^3 f(x) dx = -\int_{-3}^0 f(x) dx.$$

CÂU 11. Nếu $\int_{-1}^3 f(x) dx = 2$ và $\int_{-1}^3 g(x) dx = -1$ thì $\int_{-1}^3 [f(x) - g(x)] dx$ bằng

$$\textcircled{A} -3.$$

$$\textcircled{B} -1.$$

$$\textcircled{C} 3.$$

$$\textcircled{D} 4.$$

CÂU 12. Nếu $\int_{-1}^0 f(x) dx = -3$ và $\int_0^1 f(x) dx = -1$ thì $\int_{-1}^1 f(x) dx$ bằng

$$\textcircled{A} 3.$$

$$\textcircled{B} -2.$$

$$\textcircled{C} 2.$$

$$\textcircled{D} -4.$$

CÂU 13. Cho $\int_1^2 f(x) dx = 1$ và $\int_2^3 f(x) dx = -2$. Giá trị của $\int_1^3 f(x) dx$ bằng

$$\textcircled{A} 3.$$

$$\textcircled{B} 1.$$

$$\textcircled{C} -3.$$

$$\textcircled{D} -1.$$

CÂU 14. Cho $f(x)$ là một hàm số liên tục trên \mathbb{R} và $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số

$f(x)$ thỏa $\int_1^2 f(x) dx = 5$; $F(2) = 11$. Khi đó $F(1)$ bằng

$$\textcircled{A} 16.$$

$$\textcircled{B} 4.$$

$$\textcircled{C} 6.$$

$$\textcircled{D} 7.$$

CÂU 15. Nếu $\int_{-1}^2 f(x) dx = 2$ và $\int_2^5 f(x) dx = -3$ thì $\int_{-1}^5 f(x) dx$ bằng

$$\textcircled{A} -6.$$

$$\textcircled{B} -1.$$

$$\textcircled{C} -5.$$

$$\textcircled{D} 5.$$

CÂU 16. Nếu $\int_1^2 f(x) dx = 5$ và $\int_2^3 f(x) dx = -2$ thì $\int_1^3 f(x) dx$ bằng

$$\textcircled{A} -7.$$

$$\textcircled{B} 3.$$

$$\textcircled{C} 7.$$

$$\textcircled{D} -10.$$

CÂU 17. Giả sử $\int_0^9 f(x) dx = 37$ và $\int_9^0 g(x) dx = 16$. Khi đó, $I = \int_0^9 [2f(x) + 3g(x)] dx$ bằng

$$\textcircled{A} I = 143.$$

$$\textcircled{B} I = 58.$$

$$\textcircled{C} I = 122.$$

$$\textcircled{D} I = 26.$$

CÂU 18. Cho $\int_2^5 f(x) dx = 10$. Khi đó $\int_2^5 [2 - 4f(x)] dx$ bằng

$$\textcircled{A} 36.$$

$$\textcircled{B} -36.$$

$$\textcircled{C} 34.$$

$$\textcircled{D} -34.$$

CÂU 19. Nếu $\int_1^0 f(x) dx = 3$ và $\int_0^1 g(x) dx = -4$ thì $\int_1^0 [f(x) - 2g(x)] dx$ bằng bao nhiêu?

QUICK NOTE

- (A) 11. (B) 5. (C) -1. (D) 7.

CÂU 20. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên khoảng K và $a, b, c \in K$. Mệnh đề nào sau đây sai?

- (A) $\int_a^b f(x) dx + \int_c^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx.$ (B) $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt.$
(C) $\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx.$ (D) $\int_a^a f(x) dx = 0.$

CÂU 21. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[a; b]$ và $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$. Tìm khẳng định sai.

- (A) $\int_a^b f(x) dx = F(a) - F(b).$ (B) $\int_a^a f(x) dx = 0.$
(C) $\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx.$ (D) $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$

CÂU 22. Cho hàm số phức $f(x)$ và $g(x)$ liên tục trên đoạn $[1; 7]$ sao cho $\int_1^7 f(x) dx = 2$ và

$\int_1^7 g(x) dx = -3$. Giá trị của $\int_1^7 [f(x) - g(x)] dx$ bằng

- (A) -1. (B) -5. (C) 5. (D) 6.

CÂU 23. Cho các số thực a, b ($a < b$). Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm là hàm số liên tục trên \mathbb{R} thì

- (A) $\int_a^b f(x) dx = f'(a) - f'(b).$ (B) $\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a).$
(C) $\int_a^b f(x) dx = f'(b) - f'(a).$ (D) $\int_a^b f'(x) dx = f(a) - f(b).$

CÂU 24. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên \mathbb{R} , có $f(8) = 20$; $f(4) = 12$. Tính tích phân $I = \int_4^8 f'(x) dx$.

- (A) $I = 16.$ (B) $I = 4.$ (C) $I = 32.$ (D) $I = 8.$

CÂU 25. Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn điều kiện $f(1) = 12$, $f'(x)$ liên tục trên \mathbb{R} và $\int_1^4 f'(x) dx = 17$. Khi đó $f(4)$ bằng

- (A) 5. (B) 29. (C) 19. (D) 9.

CÂU 26. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên khoảng K và $a, b, c \in K$. Mệnh đề nào sau đây sai?

- (A) $\int_a^b f(x) dx + \int_c^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx.$ (B) $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt.$
(C) $\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx.$ (D) $\int_a^a f(x) dx = 0.$

CÂU 27. Cho $\int_1^5 h(x) dx = 4$ và $\int_1^7 h(x) dx = 10$, khi đó $\int_5^7 h(x) dx$ bằng

- (A) 6. (B) 5. (C) 7. (D) 2.

QUICK NOTE

CÂU 28. Cho $\int_{-2}^2 f(x) dx = 1$, $\int_{-2}^4 f(t) dt = -4$. Tính $I = \int_2^4 f(y) dy$.

- (A) $I = -3$. (B) $I = -5$. (C) $I = 5$. (D) $I = 3$.

CÂU 29. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $[a; b]$, $f(b) = 5$ và $\int_a^b f'(x) dx = 1$,

khi đó $f(a)$ bằng

- (A) 4. (B) 6. (C) -4. (D) -6.

CÂU 30. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- (A) $\int_a^b f(x) dx + \int_b^a f(x) dx = 0$.
 (B) $\int_a^b f(x) dx = F(a) - F(b)$ ($F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$).
 (C) $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$.
 (D) $\int_a^b f(x) dx + \int_a^c f(x) dx = \int_b^c f(x) dx$.

CÂU 31. Cho $\int_{-1}^2 f(x) dx = 2$ và $\int_{-1}^2 g(x) dx = -1$. Tính $I = \int_{-1}^2 [x + 2f(x) + 3g(x)] dx$

bằng

- (A) $I = \frac{5}{2}$. (B) $I = \frac{7}{2}$. (C) $I = \frac{17}{2}$. (D) $I = \frac{11}{2}$.

CÂU 32. Cho $\int_{-1}^2 f(x) dx = 2$ và $\int_{-1}^2 g(x) dx = -1$. Tính $I = \int_{-1}^2 [x + 2f(x) + 3g(x)] dx$

bằng

- (A) $I = \frac{17}{2}$. (B) $I = \frac{5}{2}$. (C) $I = \frac{11}{2}$. (D) $I = \frac{7}{2}$.

CÂU 33. Tính $I = \int_0^1 e^{3x} dx$.

- (A) $I = e^3 + \frac{1}{2}$. (B) $I = e^3 - 1$. (C) $I = e - 1$. (D) $\frac{e^3 - 1}{3}$.

CÂU 34. Nếu $\int_1^2 f(x) dx = 5$ thì $\int_2^1 \pi f(x) dx$ bằng

- (A) 5π . (B) $\frac{\pi}{5}$. (C) -5π . (D) $-\frac{\pi}{5}$.

CÂU 35. Cho $\int_1^2 f(x) dx = -3$ và $\int_2^3 f(x) dx = 4$, khi đó tích phân $\int_1^3 f(x) dx$ bằng

- (A) 7. (B) 1. (C) 12. (D) -12.

CÂU 36. Nếu $\int_0^1 f(x) dx = 2$ và $\int_0^1 g(x) dx = 3$ thì $\int_0^1 [f(x) + g(x)] dx$ bằng

- (A) 2. (B) 6. (C) 5. (D) 3.

CÂU 37. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $[a; b]$, $f(b) = 5$ và $\int_a^b f'(x) dx =$

$3\sqrt{5}$. Tính $f(a)$.

- (A) $f(a) = \sqrt{5}(\sqrt{5} - 3)$. (B) $f(a) = 3\sqrt{5}$.

Ⓒ $f(a) = \sqrt{5}(3 - \sqrt{5})$.

Ⓓ $f(a) = \sqrt{3}(\sqrt{5} - 3)$.

CÂU 38. Tính tích phân $I = \int_0^2 (2x + 1) dx$.

Ⓐ $I = 2$.

Ⓑ $I = 4$.

Ⓒ $I = 5$.

Ⓓ $I = 6$.

CÂU 39. Tích phân $\int_1^2 3^{x-1} dx$ bằng

Ⓐ $\frac{2}{\ln 3}$.

Ⓑ $2 \ln 3$.

Ⓒ $\frac{3}{2}$.

Ⓓ 2 .

D. BẢNG ĐÁP ÁN

1. A	2. B	3. D	4. A	5. C	6. D	7. B	8. D
9. C	10. D	11. C	12. D	13. D	14. C	15. B	16. B
17. D	18. D	19. B	20. A	21. A	22. C	23. B	24. D
25. B	26. A	27. A	28. B	29. A	30. A	31. A	32. B
	34. C	35. B	36. C	37. A	38. D	39. A	

Bài 25. NGUYÊN HÀM

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Định nghĩa

☉ $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên K nếu $F'(x) = f(x), \forall x \in K$.

Họ nguyên hàm của $f(x)$ trên K là $\int f(x) dx = F(x) + C$

2. Tính chất

☉ $\int f'(x) dx = f(x) + C$.

☉ $\int kf(x) dx = k \int f(x) dx, \forall k \neq 0$.

☉ $\int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$.

3. Một số công thức nguyên hàm cơ bản

☉ $\int 0 dx = C$,

☉ $\int 1 dx = x + C$,

☉ $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \longrightarrow \int (ax+b)^n dx = \frac{1}{a} \cdot \frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1} + C$,

☉ $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C \longrightarrow \int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \ln|ax+b| + C$,

☉ $\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + C \longrightarrow \int \frac{1}{(ax+b)^2} dx = -\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{ax+b} + C$,

☉ $\int \sin x dx = -\cos x + C \longrightarrow \int \sin(ax+b) dx = -\frac{1}{a} \cos(ax+b) + C$,

☉ $\int \cos x dx = \sin x + C \longrightarrow \int \cos(ax+b) dx = \frac{1}{a} \sin(ax+b) + C$,

QUICK NOTE

$$\odot \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C \rightarrow \int \frac{1}{\cos^2(ax+b)} dx = \frac{1}{a} \tan(ax+b) + C,$$

$$\odot \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C \rightarrow \int \frac{1}{\sin^2(ax+b)} dx = -\frac{1}{a} \cot(ax+b) + C,$$

$$\odot \int e^x dx = e^x + C \rightarrow \int e^{ax+b} dx = \frac{1}{a} e^{ax+b} + C,$$

$$\odot \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \rightarrow \int a^{mx+n} dx = \frac{1}{m} \cdot \frac{a^{mx+n}}{\ln a} + C.$$

B. BÀI TẬP MẪU

VÍ DỤ 25 (Đề minh họa BGD 2022-2023). Cho hàm số $f(x) = \cos x + x$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

$$\textcircled{A} \int f(x) dx = -\sin x + x^2 + C.$$

$$\textcircled{B} \int f(x) dx = \sin x + x^2 + C.$$

$$\textcircled{C} \int f(x) dx = -\sin x + \frac{x^2}{2} + C.$$

$$\textcircled{D} \int f(x) dx = \sin x + \frac{x^2}{2} + C.$$

C. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN

CÂU 1. Họ nguyên hàm của hàm $f(x) = \sin x$ là

$$\textcircled{A} \int f(x) dx = \cos x + C.$$

$$\textcircled{B} \int f(x) dx = -\sin x + C.$$

$$\textcircled{C} \int f(x) dx = -\cos x + C.$$

$$\textcircled{D} \int f(x) dx = \sin x + C.$$

CÂU 2. Họ nguyên hàm của hàm $f(x) = 4^x$ là

$$\textcircled{A} \int f(x) dx = 4^x \ln 4 + C.$$

$$\textcircled{B} \int f(x) dx = 4^{x+1} + C.$$

$$\textcircled{C} \int f(x) dx = \frac{4^{x+1}}{x+1} + C.$$

$$\textcircled{D} \int f(x) dx = \frac{4^x}{\ln 4} + C.$$

CÂU 3. Họ nguyên hàm của hàm $f(x) = \cos 2x$ là

$$\textcircled{A} \int f(x) dx = 2 \sin 2x + C.$$

$$\textcircled{B} \int f(x) dx = \frac{1}{2} \sin 2x + C.$$

$$\textcircled{C} \int f(x) dx = \frac{1}{2} \cos 2x + C.$$

$$\textcircled{D} \int f(x) dx = -\frac{1}{2} \sin 2x + C.$$

CÂU 4. Họ nguyên hàm của hàm $f(x) = 2x + 3$ là

$$\textcircled{A} \int f(x) dx = 2x^2 + 3x + C.$$

$$\textcircled{B} \int f(x) dx = x^2 + C.$$

$$\textcircled{C} \int f(x) dx = x^2 + 3x + C.$$

$$\textcircled{D} \int f(x) dx = 2x^2 + C.$$

CÂU 5. Họ nguyên hàm của hàm $f(x) = e^{2x} - 2x$ là

$$\textcircled{A} \int f(x) dx = \frac{1}{2x+1} e^{2x} - x^2 + C.$$

$$\textcircled{B} \int f(x) dx = \frac{1}{2} e^{2x} - x^2 + C.$$

$$\textcircled{C} \int f(x) dx = e^{2x} - x^2 + C.$$

$$\textcircled{D} \int f(x) dx = 2e^{2x} - 2 + C.$$

CÂU 6. Họ nguyên hàm của hàm $f(x) = \frac{1}{2x+1}$ là

$$\textcircled{A} \int f(x) dx = -\frac{1}{2} \ln |2x+1| + C.$$

$$\textcircled{B} \int f(x) dx = -\ln |2x+1| + C.$$

$$\textcircled{C} \int f(x) dx = \frac{1}{2} \ln |2x+1| + C.$$

$$\textcircled{D} \int f(x) dx = \ln |2x+1| + C.$$

CÂU 7. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sai?

$$\textcircled{A} \int 0 dx = C.$$

$$\textcircled{B} \int e^x dx = e^x + C.$$

$$\textcircled{C} \int dx = x + C.$$

$$\textcircled{D} \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C.$$

CÂU 8. Họ nguyên hàm của hàm $f(x) = \sin(2x+1)$ là

QUICK NOTE

- ☐ $\int f(x) dx = -\frac{1}{2} \cos(2x+1) + C.$
☐ $\int f(x) dx = 2 \cos(2x+1) + C.$
- ☐ $\int f(x) dx = -2 \cos(2x+1) + C.$
☐ $\int f(x) dx = \frac{1}{2} \cos(2x+1) + C.$

CÂU 9. Họ nguyên hàm của hàm $f(x) = -4 \sin 2x + 2 \cos x - e^x$ là

- ☐ $\int f(x) dx = 4 \cos 2x - 2 \sin x - e^x + C.$
- ☐ $\int f(x) dx = 2 \cos 2x + 2 \sin x - e^x + C.$
- ☐ $\int f(x) dx = -8 \cos 2x + 2 \sin x - e^x + C.$
- ☐ $\int f(x) dx = 8 \cos 2x + 2 \sin x - e^x + C.$

CÂU 10. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **đúng**?

- ☐ $\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C.$
☐ $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = \cot x + C.$
- ☐ $\int \cos x dx = -\sin x + C.$
☐ $\int (2^x + e^x) dx = \frac{2^x}{\ln 2} + e^x + C.$

CÂU 11. Họ nguyên hàm của hàm $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5$ là

- ☐ $\int f(x) dx = \frac{x^4}{4} - x^3 + 5x + C.$
☐ $\int f(x) dx = x^4 - x^3 + 5x + C.$
- ☐ $\int f(x) dx = 3x^2 - 6x + C.$
☐ $\int f(x) dx = x^4 - \frac{1}{3}x^3 + 5x + C.$

CÂU 12. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

- ☐ $\int x^e dx = \frac{x^{e+1}}{e+1} + C.$
☐ $\int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + C.$
- ☐ $\int e^x dx = \frac{e^{x+1}}{x+1} + C.$
☐ $\int x^7 dx = \frac{1}{8}x^8 + C.$

CÂU 13. $F(x) = \sin 2x$ là nguyên hàm của hàm số nào dưới đây?

- ☐ $f(x) = \cos 2x.$
☐ $f(x) = 2 \cos 2x.$
- ☐ $f(x) = -2 \cos 2x.$
☐ $f(x) = -\frac{1}{2} \cos 2x.$

CÂU 14. Họ nguyên hàm của hàm $f(x) = 2x + \frac{1}{x}$ là

- ☐ $\int f(x) dx = 4x^2 - \frac{1}{x^2} + C.$
☐ $\int f(x) dx = x^2 - \frac{1}{x^2} + C.$
- ☐ $\int f(x) dx = 4x^2 + \ln|x| + C.$
☐ $\int f(x) dx = x^2 + \ln|x| + C.$

CÂU 15. Họ nguyên hàm của hàm $f(x) = x^3 - \frac{2}{x} + \sqrt{x}$ là

- ☐ $\int f(x) dx = \frac{1}{4}x^4 - 2 \ln|x| - \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + C.$
- ☐ $\int f(x) dx = \frac{1}{4}x^4 + 2 \ln|x| + \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + C.$
- ☐ $\int f(x) dx = \frac{1}{4}x^4 - 2 \ln|x| + \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + C.$
- ☐ $\int f(x) dx = \frac{1}{4}x^4 + 2 \ln|x| - \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + C.$

CÂU 16. Họ nguyên hàm của hàm $f(x) = \sin 3x + \cos 4x$ là

- ☐ $\int f(x) dx = -\frac{1}{3} \cos x + \frac{1}{4} \sin x + C.$
☐ $\int f(x) dx = -\frac{1}{3} \cos 3x + \frac{1}{4} \sin 4x + C.$
- ☐ $\int f(x) dx = 3 \cos 3x - 4 \sin 4x + C.$
☐ $\int f(x) dx = \frac{1}{3} \cos 3x - \frac{1}{4} \sin 4x + C.$

CÂU 17. Họ nguyên hàm của hàm $f(x) = \cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$ là

- ☐ $\int f(x) dx = \frac{1}{6} \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) + C.$
☐ $\int f(x) dx = \frac{1}{2} \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) + C.$
- ☐ $\int f(x) dx = \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) + C.$
☐ $\int f(x) dx = -\frac{1}{2} \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) + C.$

CÂU 18. Họ nguyên hàm của hàm $f(x) = 2x^2 + x + 1$ là

QUICK NOTE

$$\textcircled{A} \int f(x) dx = \frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x + C.$$

$$\textcircled{B} \int f(x) dx = 4x + 1 + C.$$

$$\textcircled{C} \int f(x) dx = \frac{2x^3}{3} + x^2 + x + C.$$

$$\textcircled{D} \int f(x) dx = \frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x.$$

CÂU 19. Họ nguyên hàm của hàm $f(x) = 7^x$ là

$$\textcircled{A} \int f(x) dx = \frac{7^x}{\ln 7} + C.$$

$$\textcircled{B} \int f(x) dx = \frac{7^{x+1}}{x+1} + C.$$

$$\textcircled{C} \int f(x) dx = 7^x \ln 7 + C.$$

$$\textcircled{D} \int f(x) dx = 7^{x+1} + C.$$

CÂU 20. Họ nguyên hàm của hàm $f(x) = \frac{1}{1+x}$ là

$$\textcircled{A} \int f(x) dx = -\frac{1}{(1+x)^2} + C.$$

$$\textcircled{B} \int f(x) dx = \ln(1+x) + C.$$

$$\textcircled{C} \int f(x) dx = \log|1+x| + C.$$

$$\textcircled{D} \int f(x) dx = \ln|1+x| + C.$$

D. BẢNG ĐÁP ÁN

1. C	2. D	3. B	4. C	5. B	6. C	7. D	8. A
9. B	10. D	11. A	12. C	13. B	14. D	15. C	16. B
		17. B	18. A	19. A	20. D		

Bài 26. XÉT TÍNH ĐƠN ĐIỆU DỰA VÀO BẢNG BIẾN THIÊN CỦA HÀM SỐ

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Định lý.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên K .

- a) Nếu $f'(x) > 0$ với mọi x thuộc K thì hàm số $f(x)$ đồng biến trên K .
- b) Nếu $f'(x) < 0$ với mọi x thuộc K thì hàm số $f(x)$ nghịch biến trên K .

Chú ý:

- ☉ $f(x)$ đồng biến trên K : đồ thị hàm số là đường đi lên từ trái sang phải.
- ☉ $f(x)$ nghịch biến trên K : đồ thị hàm số là đường đi xuống từ trái sang phải.

B. BÀI TẬP MẪU

VÍ DỤ 26 (Đề tham khảo BGD 2022-2023). Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	+
$f(x)$	$-\infty$	2	0	$+\infty$

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- \textcircled{A} $(0; 2)$.
- \textcircled{B} $(3; +\infty)$.
- \textcircled{C} $(-\infty; 1)$.
- \textcircled{D} $(1; 3)$.

C. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN

CÂU 1. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$				3				$+\infty$
			1			1			

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- Ⓐ $(0; 2)$. Ⓑ $(0; +\infty)$. Ⓒ $(-2; 0)$. Ⓓ $(2; +\infty)$.

CÂU 2. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên

x	$-\infty$	1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$+\infty$	-2		2		$-\infty$

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng

- Ⓐ $(-\infty; 1)$. Ⓑ $(3; +\infty)$. Ⓒ $(1; 3)$. Ⓓ $(-2; -2)$.

CÂU 3. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$				-3				$+\infty$
			4				-4		

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- Ⓐ $(-\infty; -1)$. Ⓑ $(0; +\infty)$. Ⓒ $(0; 1)$. Ⓓ $(-1; 0)$.

CÂU 4. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như hình bên dưới. Mệnh đề nào sau đây đúng?

x	$-\infty$	-1	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

- Ⓐ Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1; 0)$.
 Ⓑ Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1; 3)$.
 Ⓒ Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1; 2)$.
 Ⓓ Hàm số đồng biến trên khoảng $(-2; -1)$.

CÂU 5. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau.

x	$-\infty$	-3	2	$+\infty$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$+\infty$		3		$-\infty$
		2			

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- Ⓐ $(2; 3)$. Ⓑ $(-3; 2)$. Ⓒ $(2; +\infty)$. Ⓓ $(-\infty; -3)$.

CÂU 6. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

QUICK NOTE

QUICK NOTE

x	$-\infty$	-2	1	2	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$		$+\infty$		$+\infty$
		2		3	
					$-\infty$

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- (A) $(-2; 1)$. (B) $(-2; 2)$. (C) $(-\infty; -2)$. (D) $(1; +\infty)$.

CÂU 7. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0
$f(x)$			3		3
	$-\infty$			-1	
					$-\infty$

Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- (A) $(-2; 0)$. (B) $(-\infty; -2)$. (C) $(0; 2)$. (D) $(0; +\infty)$.

CÂU 8. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$			5	
	$-\infty$			3
				$+\infty$

Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?

- (A) $(0; +\infty)$. (B) $(0; 2)$. (C) $(-\infty; 5)$. (D) $(2; +\infty)$.

CÂU 9. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	2	3	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$			4	
	$+\infty$			2
				$-\infty$

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào sau đây?

- (A) $(2; +\infty)$. (B) $(-\infty; -2)$. (C) $(2; 3)$. (D) $(-2; 3)$.

CÂU 10. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên dưới. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$			0	
	$-\infty$			-1
				$+\infty$

- (A) $(0; +\infty)$. (B) $(0; 1)$. (C) $(-3; -2)$. (D) $(-1; +\infty)$.

CÂU 11. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-3	-2	-1	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	0	$-\infty$	$+\infty$	0	$+\infty$

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- Ⓐ $(-\infty; -3)$. Ⓑ $(-3; -2)$. Ⓒ $(-3; -1)$. Ⓓ $(-1; +\infty)$.

CÂU 12. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$		
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$			3			$+\infty$
		2			2		

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- Ⓐ $(-\infty; 1)$. Ⓑ $(0; 1)$. Ⓒ $(-2; 3)$. Ⓓ $(1; +\infty)$.

CÂU 13. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	$+\infty$	-2	2	$-\infty$	

Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

- Ⓐ Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-1; 1)$.
 Ⓑ Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(1; +\infty)$.
 Ⓒ Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$.
 Ⓓ Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-2; 2)$.

CÂU 14. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$+$
$f(x)$	1	$+\infty$	3

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- Ⓐ $(2; +\infty)$. Ⓑ $(1; +\infty)$. Ⓒ $(-\infty; 3)$. Ⓓ $(-\infty; +\infty)$.

CÂU 15. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình bên dưới

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$	$+$	$-$
y	$+\infty$	3	$+\infty$	1	$-\infty$

QUICK NOTE

QUICK NOTE

Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- (A) $(-\infty; 1)$. (B) $(-2; 2)$. (C) $(0; 2)$. (D) $(3; +\infty)$.

CÂU 16. Hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	1	-3	$+\infty$	

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng

- (A) $(2; 3)$. (B) $(-2; 3)$. (C) $(-3; +\infty)$. (D) $(-\infty; 1)$.

CÂU 17. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$	0	$+$
y	$+\infty$	-2	1	-2	$+\infty$

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- (A) $(-\infty; 0)$. (B) $(0; 2)$. (C) $(2; +\infty)$. (D) $(-2; 2)$.

CÂU 18. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$		
y'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$+\infty$	-2	0	-2	$+\infty$		

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- (A) $(0; 1)$. (B) $(-1; 0)$. (C) $(-2; 0)$. (D) $(0; +\infty)$.

CÂU 19. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên khoảng $(-\infty; +\infty)$, có bảng biến thiên như hình sau

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	2	-1	$+\infty$	

Mệnh đề nào sau đây đúng?

- (A) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1; +\infty)$.
 (B) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1; +\infty)$.
 (C) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -1)$.
 (D) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 1)$.

CÂU 20. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên dưới

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
y'		$+$	$+$
y	2	$+\infty$	$-\infty$

Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A** Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -1)$.
B Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.
C Hàm số đồng biến trên \mathbb{R} .
D Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 2)$.

D. BẢNG ĐÁP ÁN

1. A	2. C	3. D	4. D	5. B	6. A	7. A	8. D	9. B	10. C
11. B	12. D	13. D	14. A	15. C	16. A	17. B	18. B	19. C	20. A

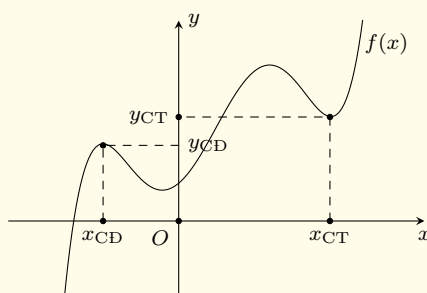
Bài 27. TÌM CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ DỰA VÀO ĐỒ THỊ

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Định nghĩa

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên khoảng $(a; b)$ (có thể a là $-\infty$, b là $+\infty$) và điểm $x_0 \in (a; b)$.

- ☑ Nếu tồn tại số $h > 0$ sao cho $f(x) < f(x_0)$ với mọi $x \in (x_0 - h; x_0 + h)$ và $x \neq x_0$ thì ta nói hàm số $f(x)$ đạt **cực đại** tại x_0 .
 ☑ Nếu tồn tại số $h > 0$ sao cho $f(x) > f(x_0)$ với mọi $x \in (x_0 - h; x_0 + h)$ và $x \neq x_0$ thì ta nói hàm số $f(x)$ đạt **cực tiểu** tại x_0 .



2. Chú ý

- a) Nếu hàm số $f(x)$ đạt cực đại (cực tiểu) tại x_0 thì x_0 được gọi là điểm cực đại (điểm cực tiểu) của hàm số; $f(x_0)$ được gọi là giá trị cực đại (giá trị cực tiểu) của hàm số, kí hiệu là y_{CD} (y_{CT}), còn điểm $M(x_0; f(x_0))$ được gọi là điểm cực đại (điểm cực tiểu) của đồ thị.
 b) Các điểm cực đại và cực tiểu được gọi chung là điểm cực trị.

B. BÀI TẬP MẪU

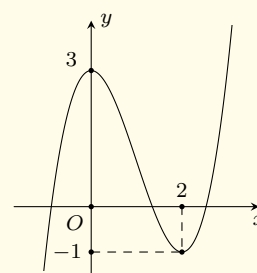
VÍ DỤ 27 (Đề tham khảo BGD 2022-2023).

QUICK NOTE

QUICK NOTE

Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Giá trị cực đại của hàm số đã cho là

- (A) -1. (B) 3. (C) 2. (D) 0.

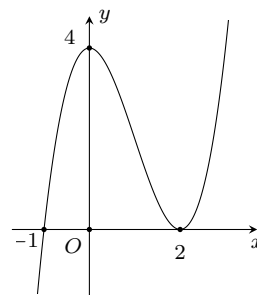


C. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN

CÂU 1.

Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

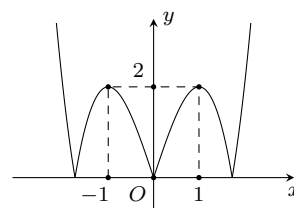
- (A) Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$.
 (B) Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 2$.
 (C) Hàm số đạt cực đại tại $x = 4$.
 (D) Hàm số có hai điểm cực trị.



CÂU 2.

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} và có đồ thị như hình bên. Hỏi hàm số có bao nhiêu điểm cực trị?

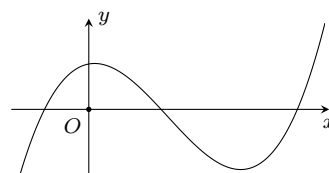
- (A) 2. (B) 3. (C) 4. (D) 5.



CÂU 3.

Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hàm số đã cho có bao nhiêu điểm cực trị?

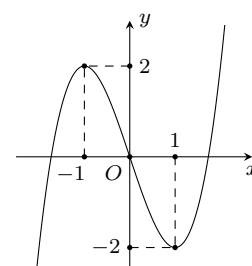
- (A) 2. (B) 1. (C) 3. (D) 4.



CÂU 4.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Tìm điểm cực đại của hàm số.

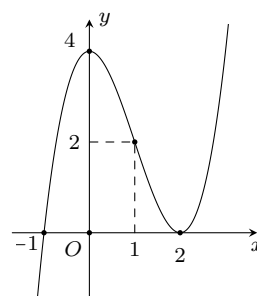
- (A) $y = -2$. (B) $x = -1$. (C) $x = 1$. (D) $y = 2$.



CÂU 5.

Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên. Tìm mệnh đề đúng.

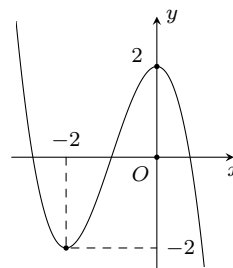
- (A) Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$.
 (B) Hàm số $y = f(x)$ có hai cực trị.
 (C) Hàm số $y = f(x)$ đạt cực tiểu tại $x = 2$.
 (D) Hàm số $y = f(x)$ chỉ có một cực trị.



CÂU 6.

Cho hàm số $f(x)$ xác định, liên tục trên tập số thực \mathbb{R} và có đồ thị như hình bên. Hàm số $y = f(x)$ đạt cực tiểu tại điểm nào dưới đây?

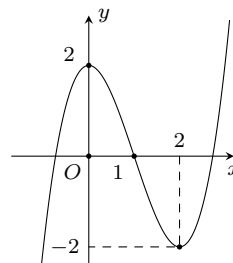
- (A) $x = 0$. (B) $x = -2$ và $x = 0$.
(C) $x = -2$. (D) $x = 1$.



CÂU 7.

Tìm điểm cực tiểu của hàm số $y = f(x)$, biết hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.

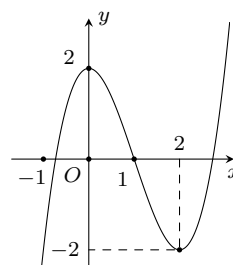
- (A) $x = 0$. (B) $x = -2$. (C) $x = 1$. (D) $x = 2$.



CÂU 8.

Cho hàm đa thức bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Biết hàm số $f(x)$ có các điểm cực trị là x_1, x_2 . Tích x_1x_2 bằng

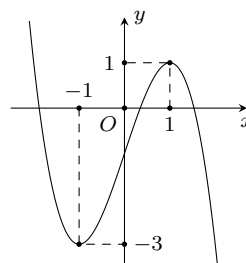
- (A) 4. (B) 0. (C) -4. (D) -2.



CÂU 9.

Cho đồ thị hàm số như hình vẽ bên. Giá trị cực đại của hàm số là

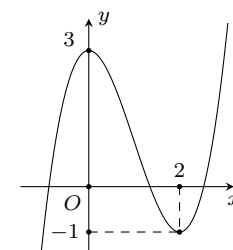
- (A) 1. (B) 4. (C) -1. (D) -3.



CÂU 10.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

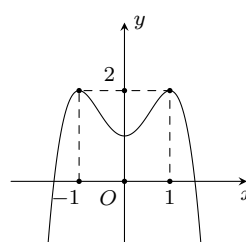
- (A) Giá trị cực đại của hàm số là 0.
(B) Giá trị cực tiểu của hàm số bằng -1.
(C) Điểm cực tiểu của hàm số là -1.
(D) Điểm cực đại của hàm số là 3.



CÂU 11.

Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$, ($a \neq 0$) có đồ thị như hình vẽ bên. Số điểm cực đại của hàm số là

- (A) 3. (B) 4. (C) 1. (D) 2.



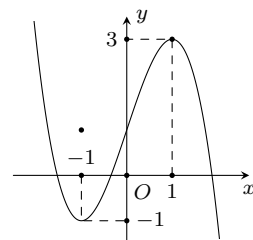
CÂU 12.

QUICK NOTE

QUICK NOTE

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên. Giá trị cực đại của hàm số bằng

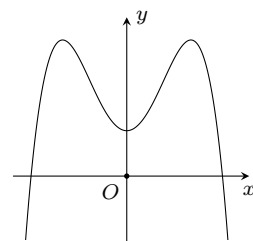
- (A) 1. (B) 3. (C) 2. (D) -1.



CÂU 13.

Cho hàm số có đồ thị như hình vẽ bên. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

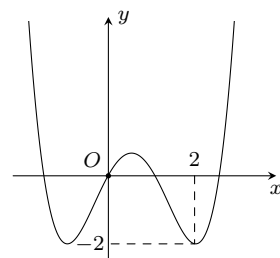
- (A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 0.



CÂU 14.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ sau. Khẳng định nào sau đây đúng?

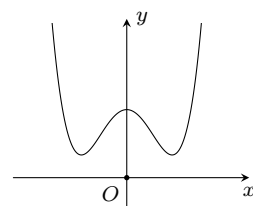
- (A) Hàm số có hai điểm cực trị âm và một điểm cực trị dương.
 (B) Hàm số có hai điểm cực trị dương và một điểm cực trị âm.
 (C) Hàm số đạt cực tiểu tại $x = -2$.
 (D) Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$.



CÂU 15.

Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị hàm số như hình bên. Số điểm cực tiểu của hàm số đã cho là

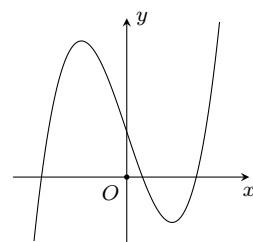
- (A) 2. (B) 1. (C) 3. (D) 0.



CÂU 16.

Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$), có đồ thị như hình vẽ bên. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

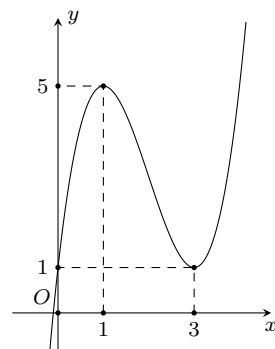
- (A) 2. (B) 0. (C) 3. (D) 1.



CÂU 17.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Giá trị cực tiểu của hàm số là

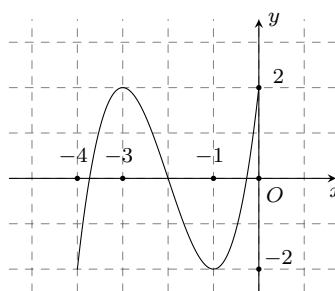
- (A) 2. (B) 0. (C) 5. (D) 1.



CÂU 18.

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên đoạn $[-4; 0]$ và có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên. Hàm số $f(x)$ đạt cực tiểu tại điểm nào dưới đây?

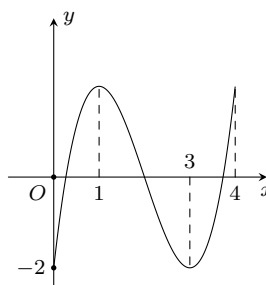
- (A) $x = -2$. (B) $x = -1$. (C) $x = -3$. (D) $x = 2$.



CÂU 19.

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[0; 4]$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây đúng?

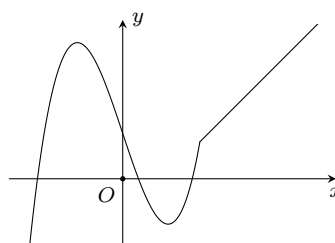
- (A) Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 3$.
(B) Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$.
(C) Hàm số đạt cực đại tại $x = 4$.
(D) Hàm số đạt cực đại tại $x = 2$.



CÂU 20.

Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Số điểm cực đại của hàm số đã cho là

- (A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3.



D. BẢNG ĐÁP ÁN

1. C	2. D	3. A	4. B	5. D	6. C	7. D	8. B
9. A	10. B	11. D	12. B	13. C	14. B	15. A	16. A
17. D	18. B	19. A	20. B				

Bài 28. LÔGARIT

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

☑ Cho hai số dương a, b với $a \neq 1$. Số α thỏa mãn đẳng thức $a^\alpha = b$ được gọi là lôgarit cơ số a của b và kí hiệu là $\log_a b$. Ta viết $\alpha = \log_a b \Leftrightarrow a^\alpha = b$

a) ☑ $\log_a a = 1, \log_a 1 = 0$

☑ $a^{\log_a b} = b, \log_a(a^\alpha) = \alpha$

b) Lôgarit của một tích: Cho 3 số dương a, b_1, b_2 với $a \neq 1$, ta có:

• $\log_a(b_1 b_2) = \log_a b_1 + \log_a b_2$

c) Lôgarit của một thương: Cho 3 số dương a, b_1, b_2 với $a \neq 1$, ta có:

☑ $\log_a \frac{b_1}{b_2} = \log_a b_1 - \log_a b_2$

☑ Đặc biệt: với $a, b > 0, a \neq 1$ $\log_a \frac{1}{a} = -\log_a b$

d) Lôgarit của lũy thừa: Cho $a, b > 0, a \neq 1$, với mọi α ta có:

☑ $\log_a b^\alpha = \alpha \log_a b$

e) Công thức đổi cơ số: Cho 3 số dương a, b, c với $a \neq 1, c \neq 1$, ta có:

☑ $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$

QUICK NOTE

QUICK NOTE

f) Lôgarit thập phân và Lôgarit tự nhiên

- ☉ Lôgarit thập phân là lôgarit cơ số 10
Viết: $\log_{10} b = \log b = \lg b$
- ☉ Lôgarit tự nhiên và lôgarit cơ số e
Viết: $\log_e b = \ln b$ với $e \approx 2,71828 \dots$

B. BÀI TẬP MẪU

VÍ DỤ 28 (Đề tham khảo BGD 2022-2023). Với a là số thực dương tùy ý, $\ln(3a) - \ln(2a)$ bằng

- (A) $\ln a$. (B) $\ln \frac{2}{3}$. (C) $\ln(6a^2)$. (D) $\ln \frac{3}{2}$.

CÂU 1. Với a là số nguyên dương tùy ý, $\log_{\frac{1}{2}} a^3$ bằng

- (A) $-3 \log_2 a$. (B) $3 - \log_2 a$. (C) $\frac{3}{2} \log_2 a$. (D) $3 \log_2 a$.

CÂU 2. Với a là số thực dương tùy ý, $\log_3 \sqrt{a}$ bằng

- (A) $\frac{1}{2} \log_3 a$. (B) $\frac{1}{2} + \log_3 a$. (C) $2 \log_3 a$. (D) $-\frac{1}{2} \log_3 a$.

CÂU 3. Với a là số thực dương tùy ý, $\log_3 \left(\frac{3}{a}\right)$ bằng

- (A) $1 - \log_3 a$. (B) $3 - \log_3 a$. (C) $\frac{1}{\log_3 a}$. (D) $1 + \log_3 a$.

CÂU 4. Với a là số thực dương khác 1, giá trị $\log_a (a^3 \sqrt[4]{a})$ bằng

- (A) $\frac{3}{4}$. (B) 7. (C) 12. (D) $\frac{13}{4}$.

CÂU 5. Với mọi a, b, x là các số thực dương thỏa mãn $\log_2 x = 5 \log_2 a + 3 \log_2 b$. Mệnh đề nào dưới đây đúng

- (A) $x = 5a + 3b$. (B) $x = a^5 + b^3$. (C) $x = a^5 b^3$. (D) $x = 3a + 5b$.

CÂU 6. Cho $0 < a \neq 1$. Giá trị của biểu thức $A = \log_a (a^3 \sqrt{a^7})$ là

- (A) 3. (B) $\frac{7}{2}$. (C) $\frac{13}{2}$. (D) $\frac{5}{3}$.

CÂU 7. Cho hai số thực dương $x, y > 1$ thỏa mãn $y = x\sqrt{x}$. Giá trị của $\log_x (x^2 y)$ bằng

- (A) $\frac{5}{2}$. (B) $\frac{8}{3}$. (C) 3. (D) $\frac{7}{2}$.

CÂU 8. Với a là số thực dương tùy ý, $\log_2 \left(\frac{a^2}{4}\right)$ bằng

- (A) $2(1 - \log_2 a)$. (B) $2 \log_2 a - 1$. (C) $2(\log_2 a - 1)$. (D) $2(\log_2 a + 1)$.

CÂU 9. Cho a là số thực dương $a \neq 1$ và $\log_{\sqrt[3]{a}} a^3$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- (A) $P = 1$. (B) $P = 9$. (C) $P = \frac{1}{3}$. (D) $P = 3$.

CÂU 10. Với a, b là hai số thực dương tùy ý, $\log_3 (a^3 \sqrt{b})$ bằng

- (A) $3 \log_3 a + \frac{1}{2} \log_3 b$. (B) $3 \log_3 a + 2 \log_3 b$.
(C) $\frac{3}{2} \log_3 (ab)$. (D) $\frac{3}{2} \log_3 (a + b)$.

CÂU 11. Xét tất cả các số thực dương a và b thỏa mãn $\log_3 a = \log_{27} (a^2 \sqrt{b})$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- (A) $a = b$. (B) $a^2 = b$. (C) $a = b^2$. (D) $a^3 = b$.

CÂU 12. Với a là số thực dương tùy ý, $\log_2 a^2$ bằng

- (A) $\frac{1}{2} \log_2 a$. (B) $2 + \log_2 a$. (C) $2 \log_2 a$. (D) $\frac{1}{2} + \log_2 a$.

CÂU 13. Với a là số thực dương tùy ý, $\log_{\frac{1}{3}} (9a^2)$ bằng

- (A) $-2 - 2 \log_3 a$. (B) $-2 - 2 \log_{\frac{1}{3}} a$. (C) $2 + 2 \log_{\frac{1}{3}} a$. (D) $2 + 2 \log_3 a$.

CÂU 14. Cho $0 < a \neq 1$. Giá trị của biểu thức $P = \log_a (a \cdot \sqrt[3]{a^2})$ là

- (A) 3. (B) $\frac{5}{3}$. (C) $\frac{5}{2}$. (D) $\frac{4}{3}$.

CÂU 15. Cho a là số thực dương tùy ý. Giá trị của $\log_2(4a^2)$ bằng

- (A) $4 + \frac{1}{2} \log_2 a$. (B) $2(\log_2 a + 1)$. (C) $2 + \log_2 a$. (D) $8 \log_2 a$.

CÂU 16. Cho a là số thực dương tùy ý, $\ln\left(\frac{e}{a^2}\right)$ bằng

- (A) $1 + 2 \ln a$. (B) $1 - 2 \ln a$. (C) $1 + \ln(2a)$. (D) $1 - \ln(2a)$.

CÂU 17. Cho a và b là hai số thực dương thỏa mãn $\sqrt{a} \cdot b^3 = 27$. Giá trị của $\log_3 a + 6 \log_3 b$ bằng

- (A) 3. (B) 6. (C) 9. (D) 1.

CÂU 18. Giá trị của $\log_2(4\sqrt{2})$ bằng

- (A) $\frac{5}{2}$. (B) 4. (C) 3. (D) $\frac{3}{2}$.

CÂU 19. Với a là số thực dương khác 1, $\log_{a^2}(a\sqrt{a})$ bằng

- (A) $\frac{1}{4}$. (B) $\frac{3}{4}$. (C) 3. (D) $\frac{3}{2}$.

CÂU 20. Cho a, b là các số thực dương và a khác 1, thỏa mãn $\log_{a^3}\left(\frac{a^5}{\sqrt[4]{b}}\right) = 2$. Giá trị của biểu thức $\log_a b$ bằng

- (A) $\frac{1}{4}$. (B) $-\frac{1}{4}$. (C) 4. (D) -4.

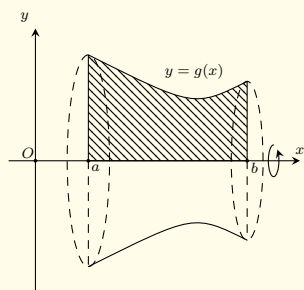
C. BẢNG ĐÁP ÁN

1. B	2. A	3. A	4. D	5. C	6. C	7. D	8. C
9. B	10. A	11. B	12. C	13. A	14. B	15. B	16. B
		17. B	18. A	19. B	20. D		

Bài 29. ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN TÍNH THỂ TÍCH VẬT THỂ TRÒN XOAY

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

- ☉ Thể tích khối tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ quanh trục Ox



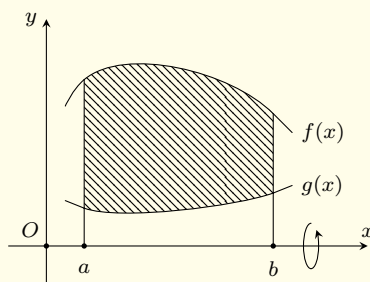
$$\begin{cases} (C): y = f(x) \\ (Ox): y = 0 \\ x = a \\ x = b \end{cases}$$

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

- ☉ Thể tích khối tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, $y = g(x)$ (cùng nằm một phía so với Ox) và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ quanh trục Ox :

QUICK NOTE

QUICK NOTE



$$V = \pi \int_a^b |f^2(x) - g^2(x)| dx$$

B. BÀI TẬP MẪU

VÍ DỤ 29 (Đề tham khảo BGD 2022-2023). Thể tích khối tròn xoay thu được khi quay hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y = -x^2 + 2x$ và $y = 0$ quanh trục Ox bằng

(A) $\frac{16}{15}$.

(B) $\frac{16\pi}{9}$.

(C) $\frac{16}{9}$.

(D) $\frac{16\pi}{15}$.

C. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN

CÂU 21. Cho hình phẳng \mathcal{D} giới hạn bởi đường cong $y = e^x$, trục hoành và các đường thẳng $x = 0, x = 1$. Khối tròn xoay tạo thành khi quay \mathcal{D} quanh trục hoành có thể tích V bằng bao nhiêu?

(A) $V = \frac{\pi(e^2 + 1)}{2}$.

(B) $V = \frac{\pi(e^2 - 1)}{2}$.

(C) $\frac{\pi e^2}{2}$.

(D) $V = \frac{e^2 - 1}{2}$.

CÂU 22. Cho hình phẳng \mathcal{D} giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{2019x + 2020}$, trục Ox và hai đường thẳng $x = 0; x = 1$. Gọi V là thể tích của khối tròn xoay được tạo thành khi quay \mathcal{D} quanh trục Ox . Khẳng định nào sau đây đúng?

(A) $V = \int_0^1 (2019x + 2020) dx$.

(B) $V = \pi \int_0^1 (2019x + 2020) dx$.

(C) $V = \int_0^1 \sqrt{2019x + 2020} dx$.

(D) $V = \pi \int_0^1 \sqrt{2019x + 2020} dx$.

CÂU 23. Cho hình phẳng \mathcal{H} giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x \cdot \ln x$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 1; x = 2$. Thể tích vật thể tròn xoay sinh bởi \mathcal{H} khi nó quay quanh trục hoành có thể tích V được xác định bởi

(A) $V = \pi \int_1^2 (x \cdot \ln x) dx$.

(B) $V = \int_1^2 (x \cdot \ln x) dx$.

(C) $V = \int_1^2 (x \cdot \ln x)^2 dx$.

(D) $V = \pi \int_1^2 (x \cdot \ln x)^2 dx$.

CÂU 24. Gọi \mathcal{D} là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \frac{x}{4}, y = 0, x = 1, x = 4$. Tính thể tích vật thể tròn xoay tạo thành khi quay hình \mathcal{D} quanh trục Ox .

(A) $\frac{15\pi}{8}$.

(B) $\frac{21\pi}{16}$.

(C) $\frac{21}{16}$.

(D) $\frac{15}{16}$.

CÂU 25. Cho hình phẳng \mathcal{H} giới hạn bởi các đường $y = x^2 + 3, y = 0, x = 1, x = 3$. Gọi V là thể tích của khối tròn xoay được tạo thành khi quay \mathcal{H} xung quanh trục Ox . Mệnh đề nào sau đây đúng?

(A) $V = \int_1^3 (x^2 + 3) dx$.

(B) $V = \pi \int_1^3 (x^2 + 3) dx$.

(C) $V = \pi \int_1^3 (x^2 + 3)^2 dx$.

(D) $V = \int_1^3 (x^2 + 3)^2 dx$.

CÂU 26. Cho hình phẳng \mathcal{D} được giới hạn bởi các đường $f(x) = \sqrt{2x + 1}, Ox, x = 0, x = 1$. Gọi V là thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay \mathcal{D} xung quanh trục Ox . Khẳng định nào sau đây đúng?

QUICK NOTE

(A) $V = \pi \int_0^1 \sqrt{2x+1} \, dx.$

(B) $V = \int_0^1 (2x+1) \, dx.$

(C) $V = \pi \int_0^1 (2x+1) \, dx.$

(D) $V = \int_0^1 \sqrt{2x+1} \, dx.$

CÂU 27. Thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x \cdot e^x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$ xung quanh trục Ox là

(A) $V = \pi \int_0^1 x e^x \, dx.$

(B) $V = \pi \int_0^1 x^2 e^{2x} \, dx.$

(C) $V = \pi \int_0^1 x^2 e^x \, dx.$

(D) $V = \int_0^1 x^2 e^{2x} \, dx.$

CÂU 28. Thể tích khối tròn xoay sinh ra khi quay quanh trục hoành hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = e^{\frac{x}{2}}$, trục hoành, trục tung và đường thẳng $x = 2$ bằng

(A) $\pi e^2.$

(B) $e^2 - 1.$

(C) $\pi (e^2 - 1).$

(D) $\pi (e - 1).$

CÂU 29. Cho hình phẳng \mathcal{H} được giới hạn bởi các đường $x = 0$, $x = \pi$, $y = 0$ và $y = -\cos x$. Gọi V là thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay \mathcal{H} xung quanh trục Ox . Khẳng định nào sau đây đúng?

(A) $V = \pi \int_0^\pi \cos^2 x \, dx.$

(B) $V = \pi \left| \int_0^\pi (-\cos x) \, dx \right|.$

(C) $V = \pi \int_0^\pi |\cos x| \, dx.$

(D) $V = \int_0^\pi \cos^2 x \, dx.$

CÂU 30. Cho hình phẳng \mathcal{H} giới hạn bởi các đường $y = x^3 - x + 1$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$. Gọi V là thể tích khối tròn xoay được tạo thành khi quay \mathcal{H} xung quanh trục Ox . Mệnh đề nào sau đây đúng?

(A) $V = \pi \int_0^2 (x^3 - x^2 + 1) \, dx.$

(B) $V = \pi \int_0^2 (x^3 - x + 1) \, dx.$

(C) $V = \int_0^2 (x^3 - x + 1)^2 \, dx.$

(D) $V = \pi \int_0^2 (x^3 - x + 1)^2 \, dx.$

CÂU 31. Cho hình phẳng \mathcal{H} giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \frac{1}{x}$ và các đường thẳng $y = 0$, $x = 1$, $x = 4$. Thể tích V của khối tròn xoay sinh ra khi cho hình phẳng \mathcal{H} quay quanh trục Ox bằng

(A) $\frac{3}{4}.$

(B) $2 \ln 2.$

(C) $2\pi \ln 2.$

(D) $\frac{3\pi}{4}.$

CÂU 32. Cho hình phẳng \mathcal{D} được giới hạn bởi các đường $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$ và $y = \sqrt{2x+1}$. Gọi V là thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay \mathcal{D} xung quanh trục Ox . Mệnh đề nào sau đây đúng?

(A) $V = \pi \int_0^1 (2x+1) \, dx.$

(B) $V = \int_0^1 (2x+1) \, dx.$

(C) $V = \int_0^1 \sqrt{2x+1} \, dx.$

(D) $V = \pi \int_0^1 \sqrt{2x+1} \, dx.$

CÂU 33. Cho hình phẳng \mathcal{H} được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \sqrt{x}$ và các đường thẳng $x = 0$; $x = 1$ và trục hoành. Tính thể tích V của khối tròn xoay sinh bởi hình \mathcal{H} quay xung quanh trục Ox .

(A) $\frac{\pi}{2}.$

(B) $\sqrt{\pi}.$

(C) $\frac{\pi}{3}.$

(D) $\pi.$

CÂU 34. Gọi \mathcal{H} là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = e^x$, trục Ox và hai đường thẳng $x = 0$, $x = 1$. Thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay \mathcal{H} xung quanh trục Ox bằng

(A) $\frac{\pi}{2} (e^2 + 1).$

(B) $\pi (e^2 - 1).$

(C) $\frac{\pi}{2} (e^2 - 1).$

(D) $\pi (e^2 + 1).$

QUICK NOTE

CÂU 35. Cho hình phẳng \mathcal{D} giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \sin x$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 0$; $x = \pi$. Thể tích khối tròn xoay thu được khi quay \mathcal{D} quanh trục Ox bằng

- (A) $\frac{\pi^2}{2}$. (B) $\frac{\pi^2}{4}$. (C) $\frac{\pi}{4}$. (D) $\frac{\pi}{2}$.

CÂU 36. Tính thể tích khối tròn xoay được tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = 3x - x^2$ và trục hoành, quanh trục hoành.

- (A) $\frac{41\pi}{7}$. (B) $\frac{8\pi}{7}$. (C) $\frac{81\pi}{10}$. (D) $\frac{85\pi}{10}$.

CÂU 37. Tính thể tích vật thể tròn xoay tạo thành khi cho hình phẳng giới hạn bởi các đường parabol $y = x^2$, trục hoành và đường thẳng $x = 1$ quay xung quanh trục Ox .

- (A) $\frac{1}{5}$. (B) $\frac{1}{3}$. (C) $\frac{\pi}{5}$. (D) $\frac{\pi}{3}$.

CÂU 38. Cho hình phẳng \mathcal{D} giới hạn bởi đường cong $y = \sqrt{2 + \cos x}$, trục hoành và các đường thẳng $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$. Khối tròn xoay tạo thành khi cho \mathcal{D} quay quanh trục hoành có thể tích V bằng bao nhiêu?

- (A) $V = (\pi - 1)\pi$. (B) $V = (\pi + 1)\pi$. (C) $V = \pi - 1$. (D) $V = \pi + 1$.

CÂU 39. Ký hiệu \mathcal{H} là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = 2x - x^2$ và $y = 0$. Tính thể tích vật thể tròn xoay được sinh ra bởi hình phẳng \mathcal{H} khi quay quanh trục Ox .

- (A) $\frac{19\pi}{15}$. (B) $\frac{17\pi}{15}$. (C) $\frac{18\pi}{15}$. (D) $\frac{16\pi}{15}$.

CÂU 40. Cho hình phẳng \mathcal{H} giới hạn bởi các đường $y = \cos x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = \frac{\pi}{4}$. Thể tích của khối tròn xoay được tạo thành khi quay \mathcal{H} xung quanh trục Ox bằng

- (A) $\frac{\pi + 2}{8}$. (B) $\frac{\pi(\pi + 2)}{8}$. (C) $\frac{\pi^2 + 1}{4}$. (D) $\frac{\pi(\pi + 2)}{4}$.

D. BẢNG ĐÁP ÁN

21. B	22. B	23. D	24. B	25. C	26. C	27. B	28. C
29. A	30. D	31. D	32. A	33. A	34. C	35. A	36. C
		37. C	38. B	39. D	40. B		

Bài 30. GÓC GIỮA HAI MẶT PHẪNG TRONG KHÔNG GIAN

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Góc giữa hai mặt phẳng

1.1. Khái niệm

- ☑ Góc giữa 2 mặt phẳng là góc được tạo bởi hai đường thẳng lần lượt vuông góc với hai mặt phẳng đó.
- ☑ Trong không gian 3 chiều, góc giữa 2 mặt phẳng còn được gọi là ‘góc khối’, là phần không gian bị giới hạn bởi 2 mặt phẳng. Góc giữa 2 mặt phẳng được đo bằng góc giữa 2 đường thẳng trên mặt 2 phẳng có cùng trục giao với giao tuyến của 2 mặt phẳng.

1.2. Tính chất

- ☑ Góc giữa 2 mặt phẳng song song bằng 0 độ;
- ☑ Góc giữa 2 mặt phẳng trùng nhau bằng 0 độ.

2. Cách xác định góc giữa 2 mặt phẳng

Để có thể xác định chính xác góc giữa 2 mặt phẳng, chúng ta thường áp dụng những cách sau:

Gọi P là mặt phẳng 1, Q là mặt phẳng 2.

QUICK NOTE

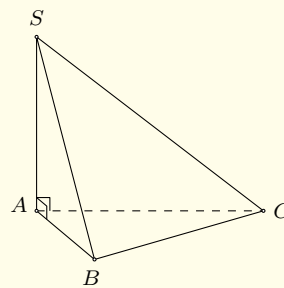
- ☉ **Trường hợp 1:** Hai mặt phẳng $(P), (Q)$ song song hoặc trùng nhau thì góc của 2 mặt phẳng bằng 0° ;
- ☉ **Trường hợp 2:** Hai mặt phẳng $(P), (Q)$ không song song hoặc trùng nhau.
- *Cách 1:* Dựng 2 đường thẳng n và p vuông góc lần lượt với 2 mặt phẳng $(P), (Q)$. Khi đó góc giữa 2 mặt phẳng $(P), (Q)$ là góc giữa 2 đường thẳng n và p .
 - *Cách 2:* Để xác định góc giữa 2 mặt phẳng đầu tiên bạn cần xác định giao tuyến Δ của 2 mặt phẳng (P) và (Q) . Tiếp theo, bạn tìm một mặt phẳng (R) vuông góc với giao tuyến Δ của 2 mặt phẳng $(P), (Q)$ và cắt 2 mặt phẳng tại các giao tuyến a, b . Khi đó, góc giữa 2 mặt phẳng $(P), (Q)$ là góc giữa a và b .

B. BÀI TẬP MẪU

VÍ DỤ 30 (Đề tham khảo BGD 2022-2023).

Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại B , SA vuông góc với đáy và $SA = AB$ (tham khảo hình bên). Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) bằng

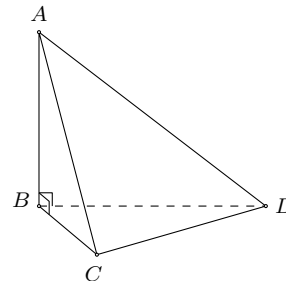
- (A) 60° . (B) 30° .
(C) 90° . (D) 45° .



C. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN

CÂU 1. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB \perp (BCD)$. Góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (BCD) là

- (A) 90° . (B) 45° . (C) 60° . (D) 120° .

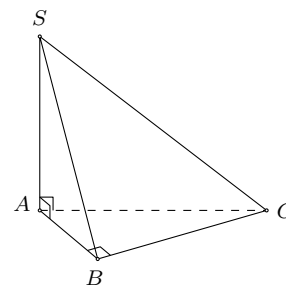


CÂU 2. Gọi α là số đo góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) . Nếu (P) và (Q) song song nhau thì α bằng

- (A) 45° . (B) 90° . (C) 60° . (D) 0° .

CÂU 3. Cho hình chóp $SABC$ có $SA \perp (ABC)$ và $AB \perp BC$. Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) là góc nào sau đây?

- (A) \widehat{ASB} . (B) \widehat{SCB} . (C) \widehat{SBA} . (D) \widehat{SCA} .



CÂU 4. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đáy là $ABCD$ và độ dài các cạnh đáy bằng a , $SA = SB = SC = SD = a$. Tính \cos góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) .

- (A) 0. (B) $\frac{1}{3}$. (C) $\frac{1}{2}$. (D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

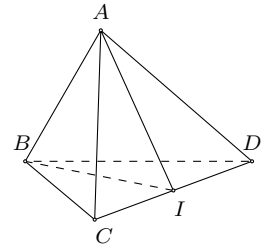
CÂU 5. Gọi α là số đo góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) . Nếu (P) và (Q) trùng nhau thì α bằng

- (A) 180° . (B) 90° . (C) 60° . (D) 0° .

QUICK NOTE

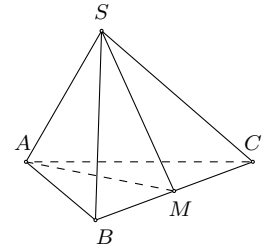
CÂU 6. Cho tứ diện $ABCD$ có $AC = AD$ và $BC = BD$. Gọi I là trung điểm của CD . Khẳng định nào sau đây sai?

- (A) $(ACD) \perp (AIB)$.
 (B) Góc giữa 2 mặt phẳng (ACD) và (BCD) là góc $(AI; BI)$.
 (C) $(BCD) \perp (AIB)$.
 (D) Góc giữa 2 mặt phẳng (ABC) và (ABD) là góc CBD .



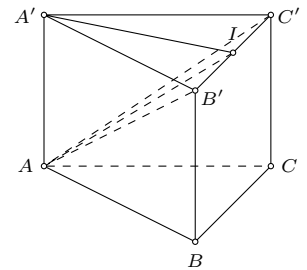
CÂU 7. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A và $AB = a\sqrt{2}$. Biết $SA \perp (ABC)$ và $SA = a$. Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) bằng

- (A) 60° . (B) 90° . (C) 45° . (D) 30° .



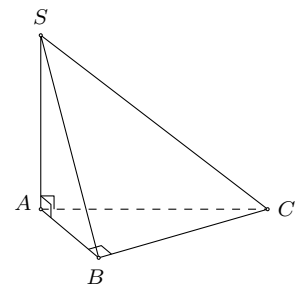
CÂU 8. Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng $2a$, cạnh bên bằng a . Tính góc giữa hai mặt phẳng $(AB'C')$ và $(A'B'C')$.

- (A) $\frac{\pi}{2}$. (B) $\frac{3\pi}{2}$. (C) $\frac{\pi}{6}$. (D) $\frac{\pi}{3}$.



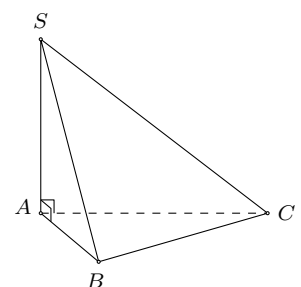
CÂU 9. Cho hình chóp $S.ABC$ có tam giác ABC vuông cân tại B , $AB = BC = a$, $SA = a\sqrt{3}$, $SA \perp (ABC)$. Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) là

- (A) 60° . (B) 90° . (C) 30° . (D) 45° .



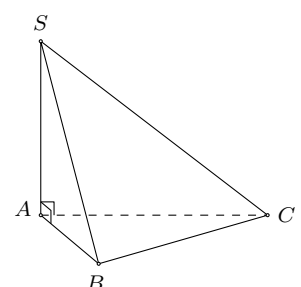
CÂU 10. Cho hình chóp $S.ABC$ có cạnh SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) , biết $AB = AC = a$, $BC = a\sqrt{3}$. Tính góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) .

- (A) 60° . (B) 45° . (C) 30° . (D) 90° .



CÂU 11. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a , $SA \perp (ABC)$, góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (SBC) là 60° . Độ dài cạnh SA bằng

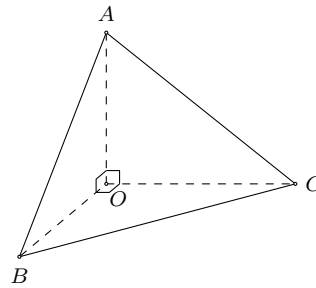
- (A) $\frac{a}{\sqrt{3}}$. (B) $\frac{a}{2}$. (C) $a\sqrt{3}$. (D) $\frac{3a}{2}$.



QUICK NOTE

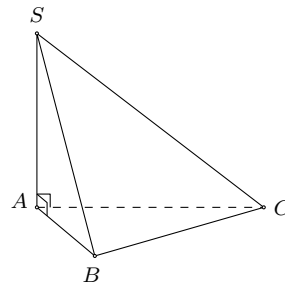
CÂU 12. Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc và $OB = OC = a\sqrt{6}, OA = a$. Tính góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (OBC) .

- (A) 90° . (B) 60° . (C) 30° . (D) 45° .



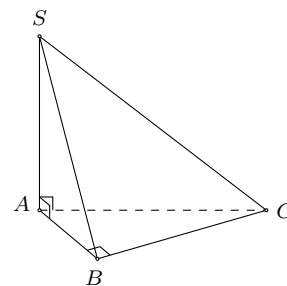
CÂU 13. Cho hình chóp $S.ABC$ có cạnh SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) , biết $AB = AC = a, BC = a\sqrt{3}$. Tính góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) .

- (A) 60° . (B) 150° . (C) 30° . (D) 120° .



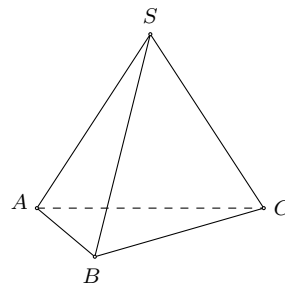
CÂU 14. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$ và $AB \perp BC$, gọi I là trung điểm BC . Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) là góc nào sau đây?

- (A) \widehat{SIA} . (B) \widehat{SBA} . (C) \widehat{SCA} . (D) \widehat{SCB} .



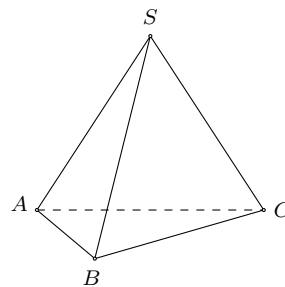
CÂU 15. Cho hình chóp tam giác đều có cạnh đáy bằng a . Góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng 60° (tham khảo hình vẽ bên). Cosin của góc giữa mặt bên và mặt đáy của hình chóp là.

- (A) $\frac{1}{\sqrt{13}}$. (B) $\frac{1}{2\sqrt{3}}$. (C) $\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{13}}$. (D) $\frac{1}{\sqrt{3}}$.



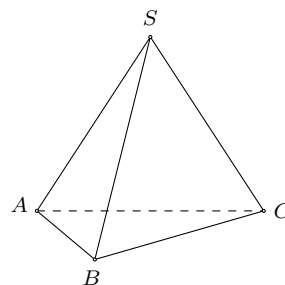
CÂU 16. Cho tứ diện đều $ABCD$. Cosin của góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (DBC) bằng

- (A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$. (B) $\frac{\sqrt{2}}{2}$. (C) $\frac{1}{2}$. (D) $\frac{1}{3}$.



CÂU 17. Cho khối chóp $S.ABC$ có mặt đáy ABC là tam giác cân tại A với $BC = 2a$, góc $\widehat{BAC} = 120^\circ$. Biết cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy và thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng $\frac{a^3}{9}$. Tính góc hợp bởi mặt phẳng (SBC) và mặt phẳng đáy.

- (A) 45° . (B) 60° . (C) 30° . (D) 90° .



CÂU 18. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Góc giữa hai mặt phẳng $(A'AC)$ và $(ABCD)$ bằng

QUICK NOTE

Ⓐ 90° .Ⓑ 60° .Ⓒ 30° .Ⓓ 45° .

CÂU 19. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Góc giữa hai mặt phẳng $(ADD'A')$ và $(ABC'D')$ bằng

Ⓐ 60° .Ⓑ 45° .Ⓒ 90° .Ⓓ 30° .

CÂU 20. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Tính góc giữa mặt phẳng $(ABB'A')$ và $(ABC'D')$.

Ⓐ 30° .Ⓑ 90° .Ⓒ 45° .Ⓓ 60° .

D. BẢNG ĐÁP ÁN

1. A	2. D	3. C	4. B	5. D	6. D	7. C	8. C
9. A	10. A	11. D	12. C	13. A	14. B	15. A	16. D
		17. A	18. A	19. C	20. C		

LỜI GIẢI CHI TIẾT

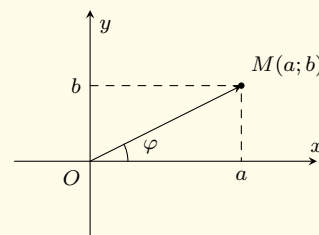
Bài 31. ĐIỂM BIỂU DIỄN SỐ PHỨC

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Biểu diễn hình học của số phức

Biểu diễn hình học của số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$).

- a) $M(a; b)$ là điểm biểu diễn của z .
b) $OM = r = \sqrt{a^2 + b^2}$ là mô-đun của z .



B. BÀI TẬP MẪU

VÍ DỤ 31. Trên mặt phẳng tọa độ, điểm biểu diễn số phức $z = 7 - 6i$ có tọa độ là

(A) $(-6; 7)$.

(B) $(6; 7)$.

(C) $(7; 6)$.

(D) $(7; -6)$.

Lời giải.

Điểm biểu diễn số phức $z = 7 - 6i$ có tọa độ là $(7; -6)$.

Chọn đáp án **(D)**

□

C. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN

CÂU 1.

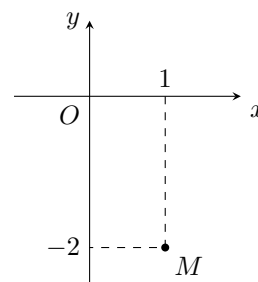
Số phức nào dưới đây có điểm biểu diễn trên mặt phẳng tọa độ là điểm M như hình vẽ bên?

(A) $1 - 2i$.

(B) $i + 2$.

(C) $i - 2$.

(D) $1 + 2i$.



Lời giải.

Vì $M(1; -2) \Rightarrow M$ là điểm biểu diễn của số phức $z = 1 - 2i$.

Chọn đáp án **(A)**

□

CÂU 2.

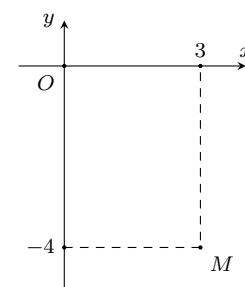
Điểm M trong hình bên là điểm biểu diễn của số phức z . Mệnh đề nào sau đây đúng?

(A) Số phức z có phần thực là 3 và phần ảo là -4 .

(B) Số phức z có phần thực là 3 và phần ảo là $-4i$.

(C) Số phức z có phần thực là -4 và phần ảo là 3.

(D) Số phức z có phần thực là -4 và phần ảo là $3i$.



Lời giải.

Số phức z có phần thực là 3 và phần ảo là -4 .

Chọn đáp án **(A)**

□

CÂU 3.

Điểm nào trong hình vẽ bên là điểm biểu diễn số phức

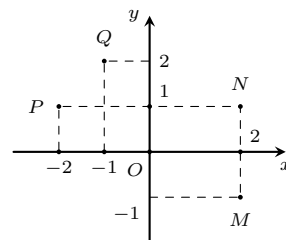
$$z = -1 + 2i?$$

(A) N.

(B) P.

(C) M.

(D) Q.



Lời giải.

Điểm biểu diễn số phức $z = -1 + 2i$ là $Q(-1; 2)$.

Chọn đáp án (D)

CÂU 4.

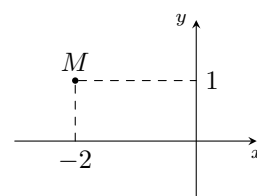
Số phức nào dưới đây có điểm biểu diễn trên mặt phẳng tọa độ là điểm M như hình vẽ bên?

(A) $z_4 = 2 + i$.

(B) $z_2 = 1 - 2i$.

(C) $z_3 = -2 + i$.

(D) $z_1 = 1 - 2i$.



Lời giải.

Điểm $M(-2; 1)$ biểu diễn số phức $z_3 = -2 + i$.

Chọn đáp án (C)

CÂU 5.

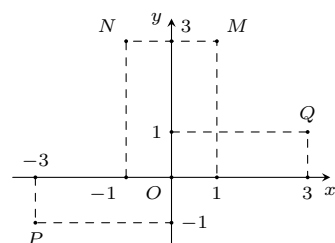
Cho số phức $z = (1 + i)(2 - i)$. Điểm nào trong hình vẽ dưới đây là điểm biểu diễn của z ?

(A) M.

(B) P.

(C) N.

(D) Q.



Lời giải.

Ta có $z = (1 + i)(2 - i) = 3 + i$.

Vậy điểm biểu diễn cho số phức z là $Q(3; 1)$.

Chọn đáp án (D)

CÂU 6. Trên mặt phẳng tọa độ, điểm biểu diễn số phức $z = (1 + 2i)^2$ là điểm nào dưới đây?

(A) $P(-3; 4)$.

(B) $Q(5; 4)$.

(C) $N(4; -3)$.

(D) $M(4; 5)$.

Lời giải.

Ta có $z = (1 + 2i)^2 = -3 + 4i$ có điểm biểu diễn là $P(-3; 4)$.

Chọn đáp án (A)

CÂU 7. Biết $M(1; -2)$ là điểm biểu diễn số phức \bar{z} , số phức z bằng

(A) $2 + i$.

(B) $1 + 2i$.

(C) $2 - i$.

(D) $1 - 2i$.

Lời giải.

Vì $M(1; -2)$ là điểm biểu diễn của số phức \bar{z} nên $\bar{z} = 1 - 2i$. Từ đó suy ra $z = 1 + 2i$.

Chọn đáp án (B)

CÂU 8. Gọi M và M' lần lượt là các điểm biểu diễn cho các số phức z và \bar{z} . Xác định mệnh đề đúng.

(A) M và M' đối xứng với nhau qua trục hoành.

(B) M và M' đối xứng với nhau qua trục tung.

(C) M và M' đối xứng với nhau qua gốc tọa độ.

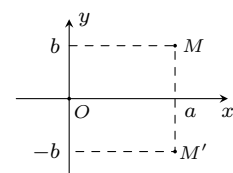
(D) Ba điểm O, M, M' thẳng hàng.

Lời giải.

Viết $z = a + bi \Rightarrow \bar{z} = a - bi$, với $a, b \in \mathbb{R}$.

Suy ra các điểm biểu diễn cho các số phức z và \bar{z} lần lượt là $M(a; b)$ và $M'(a; -b)$.

Vậy M và M' đối xứng với nhau qua trục hoành.

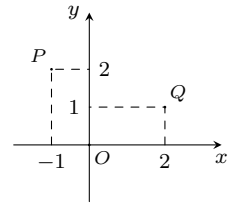


Chọn đáp án (A)

CÂU 9.

Trong hình vẽ bên, điểm P biểu diễn số phức z_1 , điểm Q biểu diễn số phức z_2 . Tìm số phức $z = z_1 + z_2$?

- (A) $1 + 3i$. (B) $-3 + i$. (C) $-1 + 2i$. (D) $2 + i$.



Lời giải.

Nhìn vào hình vẽ trên ta thấy $z_1 = -1 + 2i$, $z_2 = 2 + i$.

Khi đó $z_1 + z_2 = 1 + 3i$.

Chọn đáp án (A)

CÂU 10. Cho số phức $z = 1 + \sqrt{3}i$. Nghịch đảo của z có điểm biểu diễn là

- (A) $N\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. (B) $M\left(\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. (C) $P\left(\frac{1}{4}; \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$. (D) $Q\left(\frac{1}{4}; -\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$.

Lời giải.

Ta có $\frac{1}{z} = \frac{1}{1 + \sqrt{3}i} = \frac{1 - \sqrt{3}i}{4} = \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}i$.

Vậy điểm biểu diễn cho số phức $\frac{1}{z}$ là điểm $Q\left(\frac{1}{4}; -\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$.

Chọn đáp án (D)

CÂU 11. Cho số phức $z_1 = 1 - 2i$, $z_2 = -3 + i$. Điểm nào dưới đây là điểm biểu diễn của số phức $w = z_1 + z_2$ trên mặt phẳng tọa độ?

- (A) $N(4; -3)$. (B) $M(2; -5)$. (C) $P(-2; -1)$. (D) $Q(-1; 7)$.

Lời giải.

Ta có $w = z_1 + z_2 = (1 - 2i) + (-3 + i) = -2 - i$.

Vậy điểm biểu diễn cho số phức w là $P(-2; -1)$.

Chọn đáp án (C)

CÂU 12. Cho số phức $z = 1 - 2i$. Điểm nào dưới đây là điểm biểu diễn của số phức $w = iz$ trên mặt phẳng tọa độ?

- (A) $Q(1; 2)$. (B) $N(2; 1)$. (C) $M(1; -2)$. (D) $P(-2; 1)$.

Lời giải.

Ta có $w = iz = i(1 - 2i) = 2 + i$.

Vậy điểm biểu diễn cho số phức w là $N(2; 1)$.

Chọn đáp án (B)

CÂU 13. Cho số phức $z = 3 - 2i$. Khi đó số phức $w = z + i\bar{z}$ có điểm biểu diễn trên mặt phẳng tọa độ là điểm nào dưới đây?

- (A) $H(1; -5)$. (B) $G(5; -5)$. (C) $E(1; 1)$. (D) $F(5; 1)$.

Lời giải.

Ta có $w = z + i\bar{z} = (3 - 2i) + i(3 + 2i) = 3 - 2i + 3i - 2 = 1 + i$.

Vậy điểm biểu diễn cho số phức w là $E(1; 1)$.

Chọn đáp án (C)

CÂU 14. Cho số phức z thỏa mãn $iz + 2 - i = 0$. Khoảng cách từ điểm biểu diễn của z trên mặt phẳng tọa độ Oxy đến điểm $M(3; -4)$ bằng

- (A) $2\sqrt{5}$. (B) $\sqrt{13}$. (C) $2\sqrt{10}$. (D) $2\sqrt{2}$.

Lời giải.

Ta có $iz + 2 - i = 0 \Leftrightarrow z = \frac{-2 + i}{i} = 1 + 2i$.

Khi đó điểm biểu diễn cho z là $A(1; 2) \Rightarrow \overrightarrow{MA} = (-2; 6)$.

Vậy khoảng cách từ A đến M là $|\overrightarrow{MA}| = \sqrt{(-2)^2 + 6^2} = 2\sqrt{10}$.

Chọn đáp án (C)

CÂU 15. Trên mặt phẳng phức, cho điểm A biểu diễn số phức $3 - 2i$, điểm B biểu diễn số phức $-1 + 6i$. Gọi M là trung điểm của AB . Khi đó điểm M biểu diễn số phức nào trong các số phức sau?

- (A) $1 - 2i$. (B) $2 - 4i$. (C) $2 + 4i$. (D) $1 + 2i$.

Lời giải.

Ta có $A(3; -2)$ và $B(-1; 6)$.

Vì M là trung điểm AB nên $\begin{cases} x_M = \frac{3 + (-1)}{2} = 1 \\ y_M = \frac{-2 + 6}{2} = 2 \end{cases} \Rightarrow M(1; 2)$.

Vậy điểm M biểu diễn cho số phức $1 + 2i$.

Chọn đáp án (D)

CÂU 16. Trên mặt phẳng phức, các điểm A, B, C lần lượt là các điểm biểu diễn của các số phức $z_1 = -3i$ và $z_2 = 2 - 2i$, $z_3 = -i - 5$. Số phức z biểu diễn trọng tâm G của tam giác ABC là

(A) $z = -1 - 2i$.

(B) $z = -2 + i$.

(C) $z = -1 - i$.

(D) $z = -1 + i$.

Lời giải.

Ta có $A(0; -3), B(2; -2), C(-5; -1)$.

Vì G là trọng tâm $\triangle ABC$ nên $\begin{cases} x_G = \frac{0 + 2 + (-5)}{3} = -1 \\ y_G = \frac{-3 + (-2) + (-1)}{3} = -2 \end{cases} \Rightarrow G(-1; -2)$.

Vậy điểm G biểu diễn cho số phức $z = -1 - 2i$.

Chọn đáp án (A)

CÂU 17. Nếu điểm $M(x; y)$ là điểm biểu diễn hình học của số phức z trong mặt phẳng tọa độ Oxy thỏa mãn $OM = 4$ thì

(A) $|z| = \frac{1}{4}$.

(B) $|z| = 4$.

(C) $|z| = 16$.

(D) $|z| = 2$.

Lời giải.

Theo bài ra $OM = 4 \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = 4 \Rightarrow |z| = 4$.

Chọn đáp án (B)

CÂU 18. Cho các số phức z, z' có biểu diễn hình học lần lượt là các điểm M, M' trong mặt phẳng tọa độ Oxy . Nếu $OM = 2OM'$ thì

(A) $|z| = 2|z'|$.

(B) $z' = 2z$.

(C) $z = 2z'$.

(D) $|z'| = 2|z|$.

Lời giải.

Ta có $|z| = OM, |z'| = OM'$. Do đó, nếu $OM = 2OM'$ thì $|z| = 2|z'|$.

Chọn đáp án (A)

CÂU 19. Gọi M, N, P lần lượt là các điểm biểu diễn của các số phức $z_1 = 1 + i, z_2 = 8 + i, z_3 = 1 - 3i$ trong mặt phẳng phức Oxy . Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

(A) $\triangle MNP$ vuông.

(B) $\triangle MNP$ đều.

(C) $\triangle MNP$ cân.

(D) $\triangle MNP$ vuông cân.

Lời giải.

Ta có $M(1; 1), N(8; 1), P(1; -3)$.

Dễ dàng tính được $MN = 7, NP = \sqrt{65}, MP = 4 \Rightarrow MN^2 + MP^2 = NP^2$.

Vậy tam giác MNP vuông tại M .

Chọn đáp án (A)

CÂU 20.

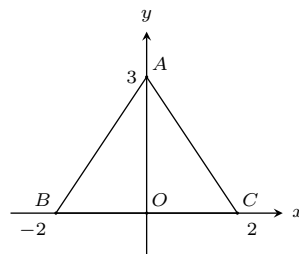
Cho tam giác ABC như hình vẽ. Biết trọng tâm G của tam giác ABC là điểm biểu diễn của số phức z . Tìm phần ảo của số phức \bar{z} .

(A) 1.

(B) -1.

(C) $-i$.

(D) i .



Lời giải.

Theo giả thiết, ta có $A(0; 3), B(-2; 0), C(2; 0)$.

Tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC là $G(0; 1)$ nên $z = i \Rightarrow \bar{z} = -i$.

Chọn đáp án (B)

D. BẢNG ĐÁP ÁN

1. A	2. A	3. D	4. C	5. D	6. A	7. B	8. A	9. A	10. D
11. C	12. B	13. C	14. C	15. D	16. A	17. B	18. A	19. A	20. B

Bài 2. HÀM SỐ LOGARIT

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Hàm số logarit

Với a là số thực dương khác 1.

- ☑ Hàm số logarit cho bởi công thức: $y = \log_a x$.
- ☑ Tập xác định: $\mathcal{D} = (0; +\infty)$.
- ☑ Với hàm số $y = \log_a u(x)$ thì điều kiện xác định là $u(x) > 0$.

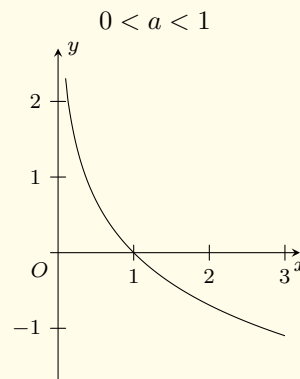
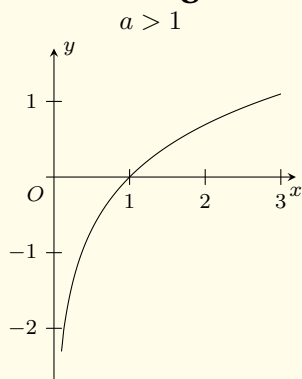
2. Đạo hàm của hàm số logarit

- ☑ Với $y = \ln x$ thì $y' = \frac{1}{x}$.
- ☑ Với $y = \log_a x$ thì $y' = \frac{1}{x \ln a}$.
- ☑ Với $y = \ln u(x)$ thì $y' = \frac{u'(x)}{u(x)}$.
- ☑ Hàm số hợp $y = \log_a [u(x)]$ thì $y' = \frac{u'(x)}{u(x) \ln a}$.
- ☑ Với $y = \log_a |u(x)|$ thì $y' = \frac{u'(x)}{u(x) \ln a}$.

3. Sự biến thiên của hàm số logarit

- ☑ Với $a > 1$ thì hàm số $y = \log_a x$ đồng biến trên $(0; +\infty)$.
- ☑ Với $0 < a < 1$ thì hàm số $y = \log_a x$ nghịch biến trên $(0; +\infty)$.

4. Đồ thị của hàm số logarit



B. BÀI TẬP MẪU

VÍ DỤ 32 (Đề minh họa BGD 2022-2023). Trên khoảng $(0; +\infty)$, đạo hàm của hàm số $y = \log_3 x$ là

- ☐ A $y' = \frac{1}{x}$.
 ☐ B $y' = \frac{1}{x \ln 3}$.
 ☐ C $y' = \frac{\ln 2}{x}$.
 ☐ D $y' = -\frac{1}{x \ln 3}$.

☞ **Lời giải.**

Đạo hàm của hàm số $y = \log_3 x$ là $y' = \frac{1}{x \ln 3}$.

Chọn đáp án ☒ B



C. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN

CÂU 1. Tính đạo hàm của hàm số $y = \log_3(3x + 1)$.

(A) $y' = \frac{3}{(3x+1)\ln 3}$.

(B) $y' = \frac{1}{(3x+1)\ln 3}$.

(C) $y' = \frac{3}{3x+1}$.

(D) $y' = \frac{1}{3x+1}$.

☞ Lời giải.

Ta có $y = \log_3(3x+1) \Rightarrow y' = \frac{3}{(3x+1)\ln 3}$.

Chọn đáp án **(A)**

CÂU 2. Đạo hàm của hàm số $y = \log_3(1-2x)$ là

(A) $y' = \frac{2}{(1-2x)\ln 3}$.

(B) $y' = \frac{1}{(1-2x)\ln 3}$.

(C) $y' = \frac{-2}{(1-2x)\ln 3}$.

(D) $y' = \frac{-2\ln 3}{1-2x}$.

☞ Lời giải.

Với $x \in \left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$, ta có $y' = \frac{(1-2x)'}{(1-2x)\ln 3} = \frac{-2}{(1-2x)\ln 3}$.

Chọn đáp án **(C)**

CÂU 3. Đạo hàm của hàm số $y = \log_3(2-x)$ là

(A) $y' = \frac{1}{(x-2)\ln 3}$.

(B) $y' = \frac{\ln 3}{2-x}$.

(C) $y' = \frac{1}{(2-x)\ln 3}$.

(D) $y' = \frac{\ln 3}{x-2}$.

☞ Lời giải.

Ta có $y' = \frac{(2-x)'}{(2-x)\ln 3} = \frac{1}{(x-2)\ln 3}$.

Chọn đáp án **(A)**

CÂU 4. Tính đạo hàm của hàm số $y = \log_3(2x+1)$.

(A) $y' = \frac{1}{2x+1}$.

(B) $y' = \frac{2}{(2x+1)\ln 3}$.

(C) $y' = (2x+1) \cdot \ln 3$.

(D) $y' = \frac{1}{(2x+1)\ln 3}$.

☞ Lời giải.

Đạo hàm của hàm số $y = \log_3(2x+1)$ là $y' = \frac{2}{(2x+1)\ln 3}$.

Chọn đáp án **(B)**

CÂU 5. Tính đạo hàm của hàm số $y = \log_3(3x+2)$.

(A) $y' = \frac{1}{(3x+2)}$.

(B) $y' = \frac{3}{(3x+2)}$.

(C) $y' = \frac{3}{(3x+2)\ln 3}$.

(D) $y' = \frac{1}{(3x+2)\ln 3}$.

☞ Lời giải.

Ta có $y' = \frac{3}{(3x+2)\ln 3}$.

Chọn đáp án **(C)**

CÂU 6. Đạo hàm của hàm số $y = \ln(x^2+x+1)$ là hàm số nào sau đây?

(A) $y' = \frac{-(2x+1)}{x^2+x+1}$.

(B) $y' = \frac{-1}{x^2+x+1}$.

(C) $y' = \frac{2x+1}{x^2+x+1}$.

(D) $y' = \frac{1}{x^2+x+1}$.

☞ Lời giải.

Ta có $y' = \frac{(x^2+x+1)'}{x^2+x+1} = \frac{2x+1}{x^2+x+1}$.

Chọn đáp án **(C)**

CÂU 7. Đạo hàm của hàm số $y = x + \ln^2 x$ là hàm số nào dưới đây?

(A) $y' = 1 + 2x \ln x$.

(B) $y' = 1 + 2 \ln x$.

(C) $y' = 1 + \frac{2}{x \ln x}$.

(D) $y' = 1 + \frac{2 \ln x}{x}$.

☞ Lời giải.

Ta có $y' = 1 + 2 \ln x \cdot (\ln x)' = 1 + \frac{2 \ln x}{x}$.

Chọn đáp án **(D)**

CÂU 8. Tính đạo hàm của hàm số $y = \log x$.

(A) $y' = \frac{x}{\ln 10}$.

(B) $y' = \frac{\ln 10}{x}$.

(C) $y' = \frac{1}{x \ln 10}$.

(D) $y' = \frac{1}{x}$.

☞ Lời giải.

Ta có $y' = (\log x)' = \frac{1}{x \ln 10}$.

Chọn đáp án **(C)**

CÂU 9. Đạo hàm của hàm số $y = \log(1-x)$ bằng

(A) $\frac{1}{x-1}$.

(B) $\frac{1}{(x-1)\ln 10}$.

(C) $\frac{1}{1-x}$.

(D) $\frac{1}{(1-x)\ln 10}$.

Lời giải.

Ta có $y' = [\log(1-x)]' = \frac{(1-x)'}{(1-x)\ln 10} = \frac{-1}{(1-x)\ln 10} = \frac{1}{(x-1)\ln 10}$.

Chọn đáp án (B)

CÂU 10. Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = \ln|x|$.

- (A) $f'(x) = \frac{1}{|x|}$. (B) $f'(x) = \frac{1}{x}$. (C) $f'(x) = -\frac{1}{x}$. (D) $f'(x) = -\frac{1}{|x|}$.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = \frac{1}{x}, \forall x \neq 0$.

Chọn đáp án (B)

CÂU 11. Đạo hàm của hàm số $y = \log_3(2x-3)$ tại điểm $x = 2$ bằng

- (A) $\frac{2}{\ln 3}$. (B) $\frac{1}{2\ln 3}$. (C) $2\ln 3$. (D) 1.

Lời giải.

Ta có $y' = \frac{(2x-3)'}{(2x-3)\ln 3} = \frac{2}{(2x-3)\ln 3} \Rightarrow y'(2) = \frac{2}{\ln 3}$.

Chọn đáp án (A)

CÂU 12. Đạo hàm của hàm số $y = \log_3(4x+1)$ là

- (A) $y' = \frac{4\ln 3}{4x+1}$. (B) $y' = \frac{1}{(4x+1)\ln 3}$. (C) $y' = \frac{4}{(4x+1)\ln 3}$. (D) $y' = \frac{\ln 3}{4x+1}$.

Lời giải.

Với $x > -\frac{1}{4}$, ta có $y' = \frac{(4x+1)'}{(4x+1)\ln 3} = \frac{4}{(4x+1)\ln 3}$.

Chọn đáp án (C)

CÂU 13. Tính đạo hàm của hàm số $y = \ln(3x^2+1)$.

- (A) $y' = \frac{6x}{3x^2+1}$. (B) $y' = \frac{6x+1}{3x^2+1}$. (C) $y' = \frac{1}{3x^2+1}$. (D) $y' = \frac{3x}{3x^2+1}$.

Lời giải.

Ta có $y' = \frac{6x}{3x^2+1}$.

Chọn đáp án (A)

CÂU 14. Tính đạo hàm của hàm số $y = \log_5(x^2+2)$.

- (A) $y' = \frac{2x}{x^2+2}$. (B) $y' = \frac{2x}{(x^2+2)\ln 5}$. (C) $y' = \frac{2x\ln 5}{x^2+2}$. (D) $y' = \frac{1}{(x^2+2)\ln 5}$.

Lời giải.

Ta có $y' = [\log_5(x^2+2)]' = \frac{(x^2+2)'}{(x^2+2)\ln 5} = \frac{2x}{(x^2+2)\ln 5}$

Vậy $y' = \frac{2x}{(x^2+2)\ln 5}$.

Chọn đáp án (B)

CÂU 15. Đạo hàm của hàm số $y = \log_2(x-1)$ trên tập xác định là

- (A) $\frac{1}{(x-1)\ln 2}$. (B) $\frac{\ln 2}{x-1}$. (C) $\frac{1}{(1-x)\ln 2}$. (D) $\frac{\ln 2}{1-x}$.

Lời giải.

Ta có $y' = \frac{1}{(x-1)\ln 2}$.

Chọn đáp án (A)

CÂU 16. Tính đạo hàm của hàm số $y = \log_8(6x-5)$.

- (A) $y' = \frac{2}{(6x-5)\ln 2}$. (B) $y' = \frac{1}{(6x-5)\ln 8}$. (C) $y' = \frac{6}{6x-5}$. (D) $y' = \frac{6}{(6x-5)\ln 4}$.

Lời giải.

Tập xác định của hàm số $\mathcal{D} = \left(\frac{5}{6}; +\infty\right)$.

Khi đó ta có $y' = [\log_8(6x-5)]' = \frac{(6x-5)'}{(6x-5)\ln 8} = \frac{6}{(6x-5) \cdot 3 \cdot \ln 2} = \frac{2}{(6x-5)\ln 2}$.

Chọn đáp án (A)

CÂU 17. Tìm đạo hàm của hàm số $y = \log_2(1-x)$.

(A) $y' = \frac{1}{\log_2(1-x)}$.

(B) $y' = \frac{1}{1-x}$.

(C) $y' = \frac{\ln 2}{1-x}$.

(D) $y' = \frac{1}{(x-1)\ln 2}$.

☞ **Lời giải.**

Ta có $y' = \frac{(1-x)'}{(1-x) \cdot \ln 2} = \frac{1}{(x-1)\ln 2}$.

Chọn đáp án (D) □

CÂU 18. Tính đạo hàm của hàm số $y = \ln(\sin x)$.

(A) $y' = \tan x$.

(B) $y' = -\tan x$.

(C) $y' = \cot x$.

(D) $y' = -\cot x$.

☞ **Lời giải.**

Ta có $y' = (\ln(\sin x))' = \frac{(\sin x)'}{\sin x} = \frac{\cos x}{\sin x} = \cot x$.

Chọn đáp án (C) □

CÂU 19. Đạo hàm của hàm số $y = \ln x + x^2$ là

(A) $y' = \frac{1}{x} + \frac{x^3}{3}$.

(B) $y' = \frac{1}{x} + x$.

(C) $y' = \frac{1}{x} + 2x$.

(D) $y' = \frac{1}{x} - 2x$.

☞ **Lời giải.**

Ta có $y' = \frac{1}{x} + 2x$.

Chọn đáp án (C) □

CÂU 20. Đạo hàm của hàm số $y = \log_8(x^2 - 3x - 4)$ là

(A) $y' = \frac{2x-3}{(x^2-3x-4)\ln 2}$.

(B) $y' = \frac{2x-3}{x^2-3x-4}$.

(C) $y' = \frac{1}{(x^2-3x-4)\ln 8}$.

(D) $y' = \frac{2x-3}{(x^2-3x-4)\ln 8}$.

☞ **Lời giải.**

Ta có $y' = \frac{(x^2-3x-4)'}{(x^2-3x-4)\ln 8} = \frac{2x-3}{(x^2-3x-4)\ln 8}$.

Chọn đáp án (D) □

D. BẢNG ĐÁP ÁN

1. A	2. C	3. A	4. B	5. C	6. C	7. D	8. C
9. B	10. B	11. A	12. C	13. A	14. B	15. A	16. A
		17. D	18. C	19. C	20. D		

Bài 3. ĐẠO HÀM HÀM LŨY THỪA - HÀM MŨ - LOGARIT

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

☞ $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1} \Rightarrow (u^\alpha)' = \alpha \cdot u^{\alpha-1} \cdot u'.$

☞ $(a^u)' = a^u \ln a \cdot u' \Rightarrow (a^x)' = a^x \cdot \ln a.$

☞ $(e^u)' = u' \cdot e^u \Rightarrow (e^x)' = e^x.$

☞ $(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \Rightarrow (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}.$

☞ $(\ln x)' = \frac{1}{x} \Rightarrow (\ln u)' = \frac{u'}{u}.$

B. BÀI TẬP MẪU

VÍ DỤ 33 (Đề Minh họa BGD 2022-2023). Trên khoảng $(0; +\infty)$, đạo hàm của hàm số $y = x^\pi$ là

(A) $y' = \pi x^{\pi-1}$.

(B) $y' = x^{\pi-1}$.

(C) $y' = \frac{1}{\pi} x^{\pi-1}$.

(D) $y' = \pi x^\pi$.

☞ **Lời giải.**

Đạo hàm của hàm số $y = x^\pi$ là $y' = \pi x^{\pi-1}$.

Chọn đáp án (A) □

C. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN

CÂU 1. Trên khoảng $(0; +\infty)$, đạo hàm của hàm số $y = x^e$ là

(A) $y' = e \cdot x^{e-1}$.

(B) $y' = x^{e-1}$.

(C) $y' = \frac{1}{e} x^{e-1}$.

(D) $y' = e \cdot x^e$.

☞ **Lời giải.**

Đạo hàm của hàm số $y = x^e$ là $y' = e \cdot x^{e-1}$.

Chọn đáp án (A)

CÂU 2. Tính đạo hàm của hàm số $y = (x^2 + x)^\alpha$ với α là hằng số.

(A) $2\alpha (x^2 + x)^{\alpha-1}$.

(B) $\alpha (x^2 + x)^{\alpha+1} (2x + 1)$.

(C) $\alpha (x^2 + x)^{\alpha-1} (2x + 1)$.

(D) $\alpha (x^2 + x)^{\alpha-1}$.

☞ **Lời giải.**

Ta có $y' = \alpha (x^2 + x)^{\alpha-1} \cdot (x^2 + x)' = \alpha (x^2 + x)^{\alpha-1} (2x + 1)$.

Chọn đáp án (C)

CÂU 3. Đạo hàm của hàm số $y = \sqrt[3]{x^2 \cdot \sqrt{x^3}}$ trên khoảng $(0; +\infty)$ là

(A) $\frac{7}{6} \sqrt[6]{x}$.

(B) $\frac{4}{3} \sqrt[3]{x}$.

(C) $7 \sqrt[6]{x}$.

(D) $\sqrt[9]{x}$.

☞ **Lời giải.**

Ta có $y = x^{\frac{7}{6}}$. Do đó $y' = \frac{7}{6} \cdot x^{\frac{1}{6}} = \frac{7}{6} \cdot \sqrt[6]{x}$.

Chọn đáp án (A)

CÂU 4. Cho hàm số $y = x^\pi$. Giá trị của $y''(1)$ bằng

(A) $\ln^2 \pi$.

(B) $\pi \ln \pi$.

(C) 0.

(D) $\pi(\pi - 1)$.

☞ **Lời giải.**

Đạo hàm cấp một: $y' = \pi \cdot x^{\pi-1}$.

Đạo hàm cấp hai: $y'' = \pi \cdot (\pi - 1) \cdot x^{\pi-2}$. Do đó $y''(1) = \pi(\pi - 1)$.

Chọn đáp án (D)

CÂU 5. Tính đạo hàm của hàm số $y = 2019^x$.

(A) $y' = 2019^{x-1}$.

(B) $y' = 2019^x$.

(C) $y' = 2019^x \cdot \ln 2019$.

(D) $y' = x \cdot 2019^{x-1}$.

☞ **Lời giải.**

Áp dụng công thức $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$

Ta có $y = 2019^x \Rightarrow y' = 2019^x \cdot \ln 2019$.

Chọn đáp án (C)

CÂU 6. Đạo hàm của hàm số $y = 5^x$ là

(A) $5^x \cdot \ln x$.

(B) $x \cdot 5^{x-1}$.

(C) $5^x \cdot \ln 5$.

(D) 5^x .

☞ **Lời giải.**

Ta có $(5^x)' = 5^x \cdot \ln 5$.

Chọn đáp án (C)

CÂU 7. Đạo hàm của hàm số $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ là

(A) $f'(x) = -\left(\frac{1}{2}\right)^x \cdot \ln 2$.

(B) $f'(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x \cdot \log 2$.

(C) $f'(x) = -\left(\frac{1}{2}\right)^x \cdot \log 2$.

(D) $f'(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x \cdot \ln 2$.

☞ **Lời giải.**

Ta có $f'(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x \cdot \ln \frac{1}{2} = -\left(\frac{1}{2}\right)^x \cdot \ln 2$.

Chọn đáp án (A)

CÂU 8. Đạo hàm của hàm số $y = 2^{2x^2+x}$ là

(A) $2^{2x^2+x} \cdot \ln 2$.

(B) $(4x + 1) \cdot 2^{2x^2+x} \cdot \ln 2$.

(C) $(2x^2 + x) 2^{2x^2+x} \ln 2$.

(D) $(4x + 1) \ln (2x^2 + x)$.

☞ **Lời giải.**

$y' = (2x^2 + x)' \cdot 2^{2x^2+x} \cdot \ln 2 = (4x + 1) \cdot 2^{2x^2+x} \cdot \ln 2$.

Chọn đáp án (B)

CÂU 9. Đạo hàm của hàm số $y = e^{2x-3}$ là

(A) $y' = 2e^{2x}$.

(B) $y' = e^{2x-3}$.

(C) $y' = (2x - 3)e^{2x-3}$.

(D) $y' = 2e^{2x-3}$.

☞ **Lời giải.**

Ta có $y' = (e^{2x-3})' \Rightarrow y' = 2e^{2x-3}$.

Chọn đáp án (D)

CÂU 10. Đạo hàm của hàm số $y = e^{x^2+x}$ là

(A) $(x^2 + x) \cdot e^{2x+1}$.

(B) $(2x + 1) \cdot e^{2x+1}$.

(C) $(2x + 1) \cdot e^{x^2+x}$.

(D) $(2x + 1) \cdot e^x$.

Lời giải.

Học sinh ghi công thức $(e^u)' = u' \cdot e^u$

$$\Rightarrow y' = (x^2 + x)' \cdot e^{x^2+x} = (2x + 1) \cdot e^{x^2+x}.$$

Chọn đáp án (C)

□

CÂU 11. Tính đạo hàm của hàm số $y = e^{\cos 2x}$.

(A) $y' = \sin 2x \cdot e^{\cos 2x}$.

(B) $y' = \frac{1}{2} \sin 2x \cdot e^{\cos 2x}$.

(C) $y' = 2 \cos 2x \cdot e^{\sin 2x}$.

(D) $y' = -2 \sin 2x \cdot e^{\cos 2x}$.

Lời giải.

Ta có $(\cos u)' = -u' \sin u$.

$$\Rightarrow y' = (\cos 2x)' \cdot e^{\cos 2x} = -2 \sin 2x \cdot e^{\cos 2x}.$$

Chọn đáp án (D)

□

CÂU 12. Hàm số $f(x) = 2^{x^2+3x+1}$ có đạo hàm là

(A) $f'(x) = \frac{2x+3}{2^{x^2+3x+1} \ln 2}$.

(B) $f'(x) = 2^{x^2+3x+1} (2x+3) \ln 2$.

(C) $f'(x) = \frac{2x+3}{2^{x^2+3x+1}}$.

(D) $f'(x) = 2^{x^2+3x+1} (2x+3)$.

Lời giải.

$$(2^{x^2+3x+1})' = 2^{x^2+3x+1} \cdot (x^2 + 3x + 1)' \cdot \ln 2 = 2^{x^2+3x+1} \cdot (2x + 3) \cdot \ln 2.$$

Chọn đáp án (B)

□

CÂU 13. Đạo hàm của hàm số $y = 3^x + 1$ là

(A) $y' = 3^x \ln 3$.

(B) $y' = 3^x$.

(C) $y' = \frac{3^x}{\ln 3}$.

(D) $y' = x 3^{x-1}$.

Lời giải.

Đạo hàm của hàm số $y = 3^x + 1$ là $y' = 3^x \cdot \ln 3$.

Chọn đáp án (A)

□

CÂU 14. Đạo hàm của hàm số $y = 5^{\sin x}$ là

(A) $5^{\sin x} \cdot \ln 5 \cdot \cos x$.

(B) $5^{\sin x} \cdot \cos x$.

(C) $5^{\sin x-1} \cdot \sin x$.

(D) $5^{\sin x} \cdot \ln 5$.

Lời giải.

Ta có $(a^u)' = u' \cdot a^u \cdot \ln a$ và $(\sin x)' = \cos x$

$$\Rightarrow y' = 5^{\sin x} \cdot \ln 5 \cdot \cos x.$$

Chọn đáp án (A)

□

CÂU 15. Đạo hàm của hàm số $y = (x^2 - 2x + 2) e^x$ là

(A) $(x^2 + 2) e^x$.

(B) $x^2 e^x$.

(C) $(2x - 2) e^x$.

(D) $-2x e^x$.

Lời giải.

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + v' \cdot u$$

$$\Rightarrow y' = (x^2 - 2x + 2)' e^x + (e^x)' \cdot (x^2 - 2x + 2) = (2x - 2) \cdot e^x + e^x \cdot (x^2 - 2x + 2) = x^2 e^x.$$

Chọn đáp án (B)

□

CÂU 16. Đạo hàm của hàm số $y = \log_2 (2x + 1)$ là

(A) $\frac{2}{(2x + 1) \cdot \ln x}$.

(B) $\frac{2}{(2x + 1) \cdot \ln 2}$.

(C) $\frac{2 \cdot \ln 2}{x + 1}$.

(D) $\frac{2}{(x + 1) \cdot \ln 2}$.

Lời giải.

$$\text{Áp dụng công thức } (\log_a u)' = \frac{u'}{u \cdot \ln a}.$$

$$\text{Ta có } y' = \frac{(2x + 1)'}{(2x + 1) \cdot \ln 2} = \frac{2}{(2x + 1) \cdot \ln 2}.$$

Chọn đáp án (B)

□

CÂU 17. Đạo hàm của hàm số $y = \log_2 (x^2 + 1)$ là

(A) $\frac{2x}{(x^2 + 1) \cdot \ln 2}$.

(B) $\frac{1}{x^2 + 1}$.

(C) $\frac{1}{(x^2 + 1) \cdot \ln 2}$.

(D) $\frac{2x}{x^2 + 1}$.

Lời giải.

$$\text{Áp dụng công thức } (\log_a u)' = \frac{u'}{u \cdot \ln a}.$$

$$\text{Ta có } y' = \frac{(x^2 + 1)'}{(x^2 + 1) \cdot \ln 2} = \frac{2x}{(x^2 + 1) \cdot \ln 2}.$$

Chọn đáp án (A)

□

CÂU 18. Đạo hàm của hàm số $y = \log(x^2 - x)$ là

(A) $\frac{1}{(x^2 - x) \cdot \ln 10}$

(B) $\frac{2x - 1}{x^2 - x}$

(C) $\frac{2x - 1}{(x^2 - x) \cdot \ln 10}$

(D) $\frac{2x - 1}{(x^2 - 1) \cdot \log e}$

Lời giải.

Áp dụng công thức $(\log_a u)' = \frac{u'}{u \cdot \ln a}$.

Ta có $y' = \frac{(x^2 - x)'}{(x^2 - x) \cdot \ln 10} = \frac{2x - 1}{(x^2 - x) \cdot \ln 10}$.

Chọn đáp án **(C)**

CÂU 19. Đạo hàm của hàm số $y = \log(e^x + 2)$ là

(A) $\frac{e^x}{(e^x + 2) \cdot \ln 10}$

(B) $\frac{e^x}{e^x + 2}$

(C) $\frac{1}{(e^x + 2) \cdot \ln 10}$

(D) $\frac{1}{e^x + 2}$

Lời giải.

Áp dụng công thức $(\log_a u)' = \frac{u'}{u \cdot \ln a}$.

Ta có $y' = \frac{(e^x + 2)'}{(e^x + 2) \cdot \ln 10} = \frac{e^x}{(e^x + 2) \cdot \ln 10}$.

Chọn đáp án **(A)**

CÂU 20. Đạo hàm của hàm số $y = e^x - \ln(3x)$ là

(A) $e^x - \frac{1}{3x}$

(B) $e^x - \frac{1}{x}$

(C) $e^x - \frac{3}{x}$

(D) $e^x + \frac{1}{x}$

Lời giải.

Ta có $y' = e^x - \frac{(3x)'}{3x} = e^x - \frac{1}{x}$.

Chọn đáp án **(B)**

D. BẢNG ĐÁP ÁN

1. A	2. C	3. A	4. D	5. C	6. C	7. A	8. B	9. D	10. C
11. D	12. B	13. A	14. A	15. B	16. B	17. A	18. C	19. A	20. B

Bài 4. PHƯƠNG TRÌNH MŨ – BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Công thức nghiệm của phương trình mũ

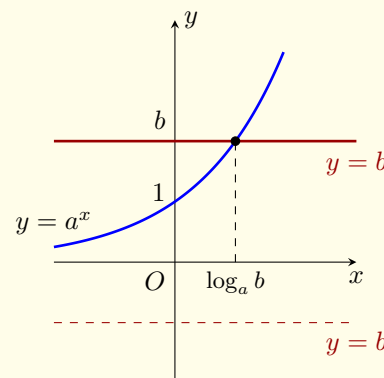
☑ Dạng $a^x = b$ (1), với $a > 0$ và $a \neq 1$.

☑ Về mặt đồ thị, nghiệm của (1) là hoành độ giao điểm của đồ thị $y = a^x$ với đường thẳng $y = b$ (nằm ngang).

Từ hình vẽ, ta có các kết quả sau:

a) $b > 0$ (1) có nghiệm duy nhất $x = \log_a b$.

b) $b \leq 0$ (1) vô nghiệm.



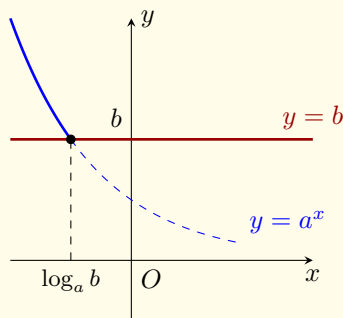
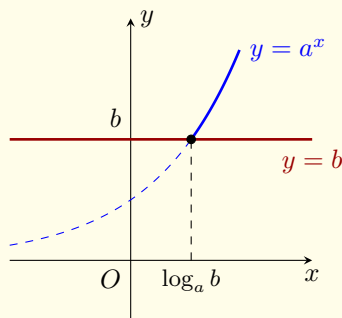
☑ **Tóm lại:** Với $a > 0$ và $a \neq 1$, $b > 0$, ta có các công thức sau đây:

a) $a^{f(x)} = b \Leftrightarrow f(x) = \log_a b$.

b) $a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$.

2. Công thức nghiệm của bất phương trình mũ

Minh họa dạng $a^x > b$, với $a > 0$ và $a \neq 1$.



- Nếu $b \leq 0$ thì tập nghiệm của bất phương trình là \mathbb{R} .
- Nếu $b > 0$, ta có hai trường hợp:
 - Với $a > 1$ thì $a^x > b \Leftrightarrow x > \log_a b$ (Hình 1).
 - Với $0 < a < 1$ thì $a^x > b \Leftrightarrow x < \log_a b$ (Hình 2).

B. BÀI TẬP MẪU

VÍ DỤ 34. Tập nghiệm của bất phương trình $2^{x+1} < 4$ là

(A) $(-\infty; 1]$.

(B) $(1; +\infty)$.

(C) $[1; +\infty)$.

(D) $(-\infty; 1)$.

☞ **Lời giải.**

Ta có $2^{x+1} < 4 \Leftrightarrow 2^{x+1} < 2^2 \Leftrightarrow x+1 < 2 \Leftrightarrow x < 1$.

Tập nghiệm của bất phương trình là $(-\infty; 1)$.

Chọn đáp án (D)



C. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN

CÂU 1. Phương trình $\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-2x-3} = 3^{x+1}$ có bao nhiêu nghiệm?

(A) 2.

(B) 1.

(C) 0.

(D) 3.

☞ **Lời giải.**

Ta có $\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-2x-3} = 3^{x+1} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-2x-3} = \left(\frac{1}{3}\right)^{-x-1} \Leftrightarrow x^2-2x-3 = -x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2. \end{cases}$

Vậy phương trình có 2 nghiệm $x = -1; x = 2$.

Chọn đáp án (A)



CÂU 2. Nghiệm của phương trình $4^{x+1} = 8^{2x-3}$ là

(A) $x = \frac{11}{2}$.

(B) $x = \frac{11}{3}$.

(C) $x = \frac{11}{4}$.

(D) $x = \frac{11}{5}$.

☞ **Lời giải.**

Ta có $4^{x+1} = 8^{2x-3} \Leftrightarrow 2^{2x+2} = 2^{3(2x-3)} \Leftrightarrow 2x+2 = 6x-9 \Leftrightarrow x = \frac{11}{4}$.

Chọn đáp án (C)



CÂU 3. Tìm tập nghiệm của phương trình $4^{x^2} = 2^{x+1}$.

(A) $S = \{0; 1\}$.

(B) $S = \left\{-\frac{1}{2}; 1\right\}$.

(C) $S = \left\{\frac{1-\sqrt{5}}{2}; \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}$.

(D) $S = \left\{-1; \frac{1}{2}\right\}$.

☞ **Lời giải.**

Ta có $4^{x^2} = 2^{x+1} \Leftrightarrow 2^{2x^2} = 2^{x+1} \Leftrightarrow 2x^2 = x+1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -\frac{1}{2}. \end{cases}$

Vậy $S = \left\{-\frac{1}{2}; 1\right\}$.

Chọn đáp án (B)

CÂU 4. Nghiệm của phương trình $3^{2x+1} = 27$ là

- (A) $x = 2$. (B) $x = 1$. (C) $x = \frac{1}{2}$. (D) $x = \frac{3}{2}$.

Lời giải.

Ta có $3^{2x+1} = 27 \Leftrightarrow 3^{2x+1} = 3^3 \Leftrightarrow 2x + 1 = 3 \Leftrightarrow x = 1$.

Chọn đáp án (B)

CÂU 5. Tập nghiệm của bất phương trình $3^{x+2} < 9^{2x+7}$.

- (A) $(-5; +\infty)$. (B) $(-\infty; -5)$. (C) $(-4; +\infty)$. (D) $(-\infty; -4)$.

Lời giải.

Ta có $3^{x+2} < 9^{2x+7} \Leftrightarrow 3^{x+2} < 3^{2(2x+7)} \Leftrightarrow x + 2 < 4x + 14 \Leftrightarrow x > -4$.

Vậy $S = (-4; +\infty)$.

Chọn đáp án (C)

CÂU 6. Tập nghiệm của bất phương trình $2^{100x} \geq 4^{200}$ là

- (A) $(-\infty; 4]$. (B) $[4; +\infty)$. (C) $[2; +\infty)$. (D) $(4; +\infty)$.

Lời giải.

Ta có $2^{100x} \geq 4^{200} \Leftrightarrow 2^{100x} \geq 2^{400} \Leftrightarrow 100x \geq 400 \Leftrightarrow x \geq 4$. Vậy $S = [4; +\infty)$.

Chọn đáp án (B)

CÂU 7. Nghiệm của phương trình $5^{x-4} = \left(\frac{1}{25}\right)^{3x-1}$ là

- (A) $x = \frac{6}{7}$. (B) $x = \frac{1}{3}$. (C) $x = 1$. (D) $x = \frac{7}{6}$.

Lời giải.

Ta có $5^{x-4} = \left(\frac{1}{25}\right)^{3x-1} \Leftrightarrow 5^{x-4} = 5^{-6x+2} \Leftrightarrow x - 4 = -6x + 2 \Leftrightarrow x = \frac{6}{7}$.

Chọn đáp án (A)

CÂU 8. Bất phương trình $3^{x^2+1} > 3^{2x+1}$ có tập nghiệm là

- (A) $S = (-2; 0)$. (B) $S = (0; 2)$. (C) $S = \mathbb{R}$. (D) $S = (-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$.

Lời giải.

Ta có $3^{x^2+1} > 3^{2x+1} \Leftrightarrow x^2 + 1 > 2x + 1 \Leftrightarrow x^2 - 2x > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x < 0. \end{cases}$

Do đó $S = (-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$.

Chọn đáp án (D)

CÂU 9. Nghiệm của phương trình $5^{2x+1} = 125$ là

- (A) $x = 1$. (B) $x = 3$. (C) $x = 2$. (D) $x = 4$.

Lời giải.

Ta có $5^{2x+1} = 125 \Leftrightarrow 5^{2x+1} = 5^3 \Leftrightarrow 2x + 1 = 3 \Leftrightarrow x = 1$.

Vậy nghiệm của phương trình là $x = 1$.

Chọn đáp án (A)

CÂU 10. Tập nghiệm của phương trình $2^{x^2-3x} = \frac{1}{4}$ là

- (A) $S = \emptyset$. (B) $S = \{1; 2\}$. (C) $S = \{0\}$. (D) $S = \{1\}$.

Lời giải.

Ta có $2^{x^2-3x} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow 2^{x^2-3x} = 2^{-2} \Leftrightarrow x^2 - 3x = -2 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2. \end{cases}$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{1; 2\}$.

Chọn đáp án (B)

CÂU 11. Bất phương trình $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-2x} > \frac{1}{8}$ có tập nghiệm là $(a; b)$. Khi đó giá trị của $b - a$ là

- (A) -2 . (B) -4 . (C) 2 . (D) 4 .

Lời giải.

$\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-2x} > \frac{1}{8} \Leftrightarrow x^2 - 2x < \log_2 \left(\frac{1}{8}\right) \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 < 0 \Leftrightarrow -1 < x < 3$.

Tập nghiệm của bất phương trình là $(-1; 3)$.

Khi đó $a = -1$ và $b = 3$. Vậy $b - a = 4$.

Chọn đáp án (D)

CÂU 12. Giải phương trình $\left(\frac{1}{25}\right)^{x-1} = 125^{2x}$.

(A) $x = -\frac{1}{8}$.

(B) $x = \frac{1}{4}$.

(C) $x = 4$.

(D) $x = -\frac{1}{4}$.

Lời giải.

Ta có $\left(\frac{1}{25}\right)^{x-1} = 125^{2x} = 125^{2x} \Leftrightarrow 5^{-2x+2} = 5^{6x} \Leftrightarrow -2x+2 = 6x \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}$.

Chọn đáp án (B)

CÂU 13. Nghiệm của phương trình $(\sqrt{2})^{2x+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{3x}$ là

(A) $x = -\frac{1}{2}$.

(B) $x = -\frac{1}{5}$.

(C) $x = \frac{1}{4}$.

(D) $x = -\frac{1}{8}$.

Lời giải.

Ta có $(\sqrt{2})^{2x+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{3x} \Leftrightarrow 2^{\frac{1}{2}(2x+1)} = 2^{-3x} \Leftrightarrow x + \frac{1}{2} = -3x \Leftrightarrow x = -\frac{1}{8}$.

Chọn đáp án (D)

CÂU 14. Tập nghiệm của bất phương trình $2^{2x} < 2^{x+6}$ là

(A) $(-\infty; 6)$.

(B) $(0; 64)$.

(C) $(6; +\infty)$.

(D) $(0; 6)$.

Lời giải.

Ta có $2^{2x} < 2^{x+6} \Leftrightarrow 2x < x+6 \Leftrightarrow x < 6$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = (-\infty; 6)$.

Chọn đáp án (A)

CÂU 15. Tìm tập nghiệm của bất phương trình $2^{x^2-5x+4} \leq 1$.

(A) $[1; 4]$.

(B) $(-\infty; 1] \cup [4; +\infty)$.

(C) $(-\infty; 1]$.

(D) $[4; +\infty)$.

Lời giải.

Ta có $2^{x^2-5x+4} \leq 1 \Leftrightarrow 2^{x^2-5x+4} \leq 2^0 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 4$.

Vậy $S = [1; 4]$.

Chọn đáp án (A)

CÂU 16. Nghiệm của phương trình $2^{x+2} = 32$ là

(A) $x = 7$.

(B) $x = 8$.

(C) $x = 3$.

(D) $x = 4$.

Lời giải.

Ta có $2^{x+2} = 32 \Leftrightarrow 2^{x+2} = 2^5 \Leftrightarrow x+2 = 5 \Leftrightarrow x = 3$.

Vậy phương trình có nghiệm $x = 3$.

Chọn đáp án (C)

CÂU 17. Nghiệm của phương trình $5^{x-4} = \left(\frac{1}{25}\right)^{3x-1}$ là

(A) $x = \frac{7}{6}$.

(B) $x = \frac{6}{7}$.

(C) $x = \frac{1}{3}$.

(D) $x = 1$.

Lời giải.

Ta có $5^{x-4} = \left(\frac{1}{25}\right)^{3x-1} \Leftrightarrow 5^{x-4} = 5^{-6x+2} \Leftrightarrow x-4 = -6x+2 \Leftrightarrow x = \frac{6}{7}$.

Chọn đáp án (B)

CÂU 18. Tập nghiệm của phương trình $2^{x^2+x+1} = 8$ là

(A) $\{1\}$.

(B) $\{-2; 1\}$.

(C) $\{-2\}$.

(D) $\{1; 2\}$.

Lời giải.

Ta có $2^{x^2+x+1} = 8 \Leftrightarrow 2^{x^2+x+1} = 2^3 \Leftrightarrow x^2 + x + 1 = 3 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -2 \end{cases}$.

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{-2; 1\}$.

Chọn đáp án (B)

CÂU 19. Nghiệm của phương trình $3^{2x-1} = 27$

(A) $x = 1$.

(B) $x = 2$.

(C) $x = 3$.

(D) $x = 4$.

Lời giải.

Ta có $3^{2x-1} = 27 \Leftrightarrow 3^{2x-1} = 3^3 \Leftrightarrow 2x-1 = 3 \Leftrightarrow 2x = 4 \Leftrightarrow x = 2$.

Chọn đáp án (B)

CÂU 20. Tập nghiệm của phương trình $2^{x^2-3x} = \frac{1}{4}$ là

- (A) $S = \{0\}$. (B) $S = \{1\}$. (C) $S = \emptyset$. (D) $S = \{1; 2\}$.

☞ **Lời giải.**

Ta có $2^{x^2-3x} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow 2^{x^2-3x} = 2^{-2} \Leftrightarrow x^2 - 3x = -2 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2. \end{cases}$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{1; 2\}$.

Chọn đáp án (D)

CÂU 21. Số nghiệm của phương trình $3^x = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ là

- (A) 2. (B) 3. (C) 0. (D) 1.

☞ **Lời giải.**

Ta có $3^x = \left(\frac{1}{3}\right)^x \Leftrightarrow 3^x = 3^{-x} \Leftrightarrow x = -x \Leftrightarrow x = 0$.

Chọn đáp án (D)

CÂU 22. Tập nghiệm của bất phương trình $2^{x+2} < \left(\frac{1}{4}\right)^x$ là

- (A) $(-\infty; 0)$. (B) $\left(-\frac{2}{3}; +\infty\right)$. (C) $(0; +\infty) \setminus \{1\}$. (D) $\left(-\infty; -\frac{2}{3}\right)$.

☞ **Lời giải.**

Ta có $2^{x+2} < \left(\frac{1}{4}\right)^x \Leftrightarrow 2^{x+2} < 2^{-2x} \Leftrightarrow x + 2 < -2x \Leftrightarrow x < -\frac{2}{3}$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $\left(-\infty; -\frac{2}{3}\right)$.

Chọn đáp án (D)

CÂU 23. Tập nghiệm bất phương trình $2^{x^2-3x} < 16$ là

- (A) $(4; +\infty)$. (B) $(-1; 4)$. (C) $(-\infty; -1) \cup (4; +\infty)$. (D) $(-\infty; -1)$.

☞ **Lời giải.**

Ta có $2^{x^2-3x} < 16 \Leftrightarrow 2^{x^2-3x} < 2^4 \Leftrightarrow x^2 - 3x < 4 \Leftrightarrow -1 < x < 4$.

Chọn đáp án (B)

D. BẢNG ĐÁP ÁN

1. A	2. C	3. B	4. B	5. C	6. B	7. A	8. D
9. A	10. B	11. D	12. B	13. D	14. A	15. A	16. C
17. B	18. B	19. B	20. D	21. D	22. D	23. B	

Bài 5. CẤP SỐ CỘNG, CẤP SỐ NHÂN

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Nhận dạng cấp số cộng, cấp số nhân

- ☞ Nếu $u_{n+1} = u_n + d$, với d là hằng số $\Rightarrow (u_n)$ là cấp số cộng.
- ☞ Nếu $u_{n+1} = u_n \cdot q$, với q là hằng số $\Rightarrow (u_n)$ là cấp số nhân.

2. Số hạng tổng quát, số hạng thứ n

- ☞ Nếu (u_n) là cấp số cộng thì số hạng tổng quát của (u_n) là $u_n = u_1 + (n-1) \cdot d$.
- ☞ Nếu (u_n) là cấp số nhân, thì số hạng tổng quát của (u_n) là $u_n = u_1 \cdot q^{n-1}$.

3. Công sai, công bội

- ☞ Cấp số cộng (u_n) có công sai là $d = u_{n+1} - u_n$.
- ☞ Cấp số nhân (u_n) có công bội là $q = \frac{u_{n+1}}{u_n}$.

4. Tổng n số hạng đầu của cấp số cộng, cấp số nhân

- ☑ Tổng n số hạng đầu tiên S_n của cấp số cộng (u_n) được xác định bởi công thức

$$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n = \frac{n}{2} (u_1 + u_n) = \frac{n}{2} [2u_1 + (n-1)d].$$

- ☑ Tổng n số hạng đầu tiên S_n của cấp số nhân (u_n) được xác định bởi công thức

$$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n = u_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}.$$

5. Điều kiện tạo thành cấp số cộng, cấp số nhân

- ☑ Ba số a, b, c theo thứ tự tạo thành một cấp số cộng $\Leftrightarrow a + c = 2b$.
 ☑ Ba số a, b, c theo thứ tự tạo thành một cấp số nhân $\Leftrightarrow a \cdot c = b^2$.

B. BÀI TẬP MẪU

VÍ DỤ 35 (Đề minh họa BGD 2020-2021). Cho cấp số nhân (u_n) với $u_1 = 2$ và công bội $q = \frac{1}{2}$. Giá trị u_3 bằng

- (A) 3. (B) $\frac{1}{2}$. (C) $\frac{1}{4}$. (D) $\frac{7}{2}$.

☞ **Lời giải.**

Ta có: $u_n = u_1 \cdot q^{n-1} \Rightarrow u_3 = u_1 \cdot q^2 \Leftrightarrow u_3 = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$.

Chọn đáp án (B)



C. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN

CÂU 1. Trong các dãy số sau, dãy số nào là một cấp số nhân?

- (A) 1; 2; 4; 8; 16; 32; ... (B) 2; 4; 6; 8; 16; 32; ...
 (C) -2; -3; -4; -5; -6; -7; ... (D) 1; 2; 3; 4; 5; 6; ...

☞ **Lời giải.**

Nhận thấy $\frac{u_2}{u_1} \neq \frac{u_3}{u_2}$ nên các dãy số ở đáp án B, C và D không phải là cấp số nhân.

Riêng đối với dãy 1; 2; 4; 8; 16; 32; ... ở đáp án A thỏa mãn: $u_{n+1} = 2 \cdot u_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Vậy dãy số 1; 2; 4; 8; 16; 32; ... là cấp số nhân với $u_1 = 1$ và công bội $q = 2$.

Chọn đáp án (A)



CÂU 2. Cho cấp số nhân (u_n) với $u_1 = 3$ và $u_2 = 6$. Công bội của cấp số nhân đã cho bằng

- (A) 2. (B) 9. (C) 3. (D) $\frac{1}{2}$.

☞ **Lời giải.**

Gọi q là công bội của cấp số nhân đã cho, ta có $q = \frac{u_2}{u_1} = 2$.

Chọn đáp án (A)



CÂU 3. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 = 2$ và công bội $q = 2$. Tính u_3 ?

- (A) $u_3 = 18$. (B) $u_3 = 6$. (C) $u_3 = 8$. (D) $u_3 = 4$.

☞ **Lời giải.**

Ta có $u_3 = u_1 \cdot q^2 = 2 \cdot 2^2 = 8$.

Chọn đáp án (C)



CÂU 4. Cho cấp số nhân (u_n) thỏa mãn $u_1 = 3; u_5 = 48$. Công bội của cấp số nhân bằng

- (A) 2. (B) ± 2 . (C) 16. (D) -2.

☞ **Lời giải.**

Gọi q là công bội của cấp số nhân (u_n) .

$$\text{Với } u_1 = 3; u_5 = 48 \text{ suy ra } \begin{cases} u_1 = 3 \\ u_1 \cdot q^4 = 48 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 3 \\ q^4 = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 3 \\ q = \pm 2. \end{cases}$$

Vậy công bội của cấp số nhân (u_n) là $q = \pm 2$.

Chọn đáp án (B)

CÂU 5. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = -2$ và công sai $d = 3$. Số hạng tổng quát u_n của cấp số cộng là

- (A) $u_n = -3n + 2$. (B) $u_n = 3n - 2$. (C) $u_n = 3n - 5$. (D) $u_n = -2n + 3$.

Lời giải.

Ta có: $u_n = u_1 + (n - 1)d = -2 + (n - 1) \cdot 3 = 3n - 5$.

Vậy số hạng tổng quát u_n của cấp số cộng là $u_n = 3n - 5$.

Chọn đáp án (C)

CÂU 6. Cho cấp số cộng (u_n) với số hạng đầu u_1 và công sai d . Tìm số hạng tổng quát của (u_n) ?

- (A) $u_n = u_1 + (n - 1)d, n \geq 2$. (B) $u_n = u_1 \cdot d^n$.
(C) $u_n = u_1 \cdot d^{n-1}$. (D) $u_n = u_1 + nd$.

Lời giải.

Số hạng tổng quát của (u_n) là: $u_n = u_1 + (n - 1)d, n \geq 2$.

Chọn đáp án (A)

CÂU 7. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = -3, u_6 = 27$. Tính công sai d ?

- (A) $d = 5$. (B) $d = 8$. (C) $d = 6$. (D) $d = 7$.

Lời giải.

Ta có $u_6 = u_1 + 5d \Leftrightarrow 27 = -3 + 5d \Leftrightarrow d = 6$.

Chọn đáp án (C)

CÂU 8. Cho cấp số cộng (u_n) với $u_1 = 3$ và công sai $d = 4$. Số hạng thứ hai của cấp số cộng đã cho là

- (A) 12. (B) 10. (C) 7. (D) -1.

Lời giải.

Ta có số hạng thứ hai là $u_2 = u_1 + d = 3 + 4 = 7$.

Chọn đáp án (C)

CÂU 9. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_2 = 1$ và $u_3 = 3$. Giá trị của u_4 bằng

- (A) 6. (B) 9. (C) 4. (D) 5.

Lời giải.

Công sai $d = u_3 - u_2 = 2$.

Vậy $u_4 = u_3 + d = 3 + 2 = 5$.

Chọn đáp án (D)

CÂU 10. Cho cấp số nhân (u_n) với $u_1 = 2$ và $u_2 = -6$. Công bội của cấp số nhân đã cho bằng

- (A) 3. (B) -3. (C) $-\frac{1}{3}$. (D) $\frac{1}{3}$.

Lời giải.

Công bội của cấp số nhân đã cho là $q = \frac{u_2}{u_1} = \frac{-6}{2} = -3$.

Chọn đáp án (B)

CÂU 11. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = 123, u_3 - u_{15} = 84$. Số hạng u_{17} bằng

- (A) 11. (B) 12. (C) 132. (D) 235.

Lời giải.

Giả sử cấp số cộng (u_n) có công sai d .

Theo giả thiết ta có: $u_3 - u_{15} = 84 \Leftrightarrow u_1 + 2d - u_1 - 14d = 84 \Leftrightarrow -12d = 84 \Leftrightarrow d = -7$.

Vậy $u_{17} = u_1 + 16d = 123 + 16 \cdot (-7) = 11$.

Chọn đáp án (A)

CÂU 12. Cho cấp số cộng với số hạng đầu $u_1 = -3$, số hạng cuối $u_n = 487$ và công sai $d = 5$. Hỏi cấp số cộng có bao nhiêu số hạng?

- (A) 69. (B) 79. (C) 89. (D) 99.

Lời giải.

Ta có: công thức cấp số cộng $u_n = u_1 + (n - 1)d \Rightarrow n = \frac{u_n - u_1}{d} + 1 = 99$.

Chọn đáp án (D)

CÂU 13. Cho cấp số nhân (u_n) với $u_2 = 2$ và $u_4 = 18$. Công bội của cấp số nhân đã cho bằng

- (A) 16. (B) ± 3 . (C) $\frac{1}{9}$. (D) 9.

Lời giải.

Ta có: $u_n = u_1 \cdot q^{n-1}$ nên $\begin{cases} u_2 = u_1 \cdot q = 2 \\ u_4 = u_1 \cdot q^3 = 18 \end{cases} \Rightarrow q^2 = 9 \Leftrightarrow q = \pm 3$.

Chọn đáp án (B)

CÂU 14. Cho cấp số nhân (u_n) với $u_1 = 3$ và $u_4 = -24$. Công bội của cấp số nhân đã cho bằng

- (A) 2. (B) -2. (C) -8. (D) $-\frac{4}{3}$.

Lời giải.

Ta có: $u_4 = u_1 \cdot q^3 \Leftrightarrow q^3 = \frac{u_4}{u_1} \Leftrightarrow q^3 = \frac{-24}{3} \Leftrightarrow q^3 = -8 \Leftrightarrow q = -2$.

Chọn đáp án (B)

CÂU 15. Cho cấp số nhân (u_n) có số hạng đầu $u_1 = 2$ và công bội $q = 3$. Giá trị của u_6 bằng

- (A) 729. (B) 1458. (C) 243. (D) 486.

Lời giải.

Ta có $u_6 = u_1 \cdot q^5 = 2 \cdot 3^5 = 486$.

Chọn đáp án (D)

CÂU 16. Cho cấp số nhân (u_n) có số hạng đầu $u_1 = 2$ và công bội $q = 3$. Số hạng thứ 5 bằng

- (A) 48. (B) 486. (C) 162. (D) 96.

Lời giải.

Số hạng tổng quát $u_n = u_1 \cdot q^{n-1}$ suy ra $u_5 = u_1 \cdot q^4 = 2 \cdot 3^4 = 162$.

Chọn đáp án (C)

CÂU 17. Cho cấp số nhân (u_n) có số hạng đầu $u_1 = 2$ và $u_6 = 486$. Công bội q bằng

- (A) $q = 3$. (B) $q = 5$. (C) $q = \frac{3}{2}$. (D) $q = \frac{2}{3}$.

Lời giải.

Theo đề ra ta có: $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_6 = 486 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 2 \\ 486 = u_1 \cdot q^5 \end{cases} \Rightarrow q^5 = 243 = 3^5 \Rightarrow q = 3$.

Chọn đáp án (A)

CÂU 18. Cho cấp số nhân (u_n) , biết $u_2 = 1$; $u_3 = 5$. Công bội q của cấp số nhân đã cho bằng

- (A) 5. (B) ± 4 . (C) 4. (D) 21.

Lời giải.

Theo công thức tổng quát của cấp số nhân $u_3 = u_2 \cdot q \Leftrightarrow 5 = 1 \cdot q \Leftrightarrow q = 5$.

Chọn đáp án (A)

CÂU 19. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 = 3$, công bội $q = 2$. Ta có u_5 bằng

- (A) 11. (B) 48. (C) 9. (D) 24.

Lời giải.

Cấp số nhân (u_n) với $u_1 = 3$, công bội $q = 2$ có số hạng tổng quát là $u_n = 3 \cdot 2^{n-1}$, $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

Do đó $u_5 = 3 \cdot 2^4 = 48$.

Chọn đáp án (B)

CÂU 20. Cho cấp số nhân (u_n) , với $u_1 = -9$, $u_4 = \frac{1}{3}$. Công bội của cấp số nhân đã cho bằng

- (A) $-\frac{1}{3}$. (B) -3. (C) 3. (D) $\frac{1}{3}$.

Lời giải.

Nếu (u_n) là cấp số nhân với công bội q thì $u_n = u_1 \cdot q^{n-1}$, $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

Theo đề ta có $u_4 = u_1 \cdot q^3 \Leftrightarrow \frac{1}{3} = -9 \cdot q^3 \Rightarrow q = -\frac{1}{3}$.

Chọn đáp án (A)

D. BẢNG ĐÁP ÁN

1. A	2. A	3. C	4. B	5. C	6. A	7. C	8. C
9. D	10. B	11. A	12. D	13. B	14. B	15. D	16. C
		17. A	18. A	19. B	20. A		

Bài 6. PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẪNG

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Phương trình mặt phẳng

- Trong không gian, véc-tơ \vec{n} khác $\vec{0}$ là véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) nếu giá của nó vuông góc với mặt phẳng (P) . Hơn nữa với $k \neq 0$ ta cũng có $k\vec{n}$ cũng là một véc-tơ pháp tuyến của (P) .
- Trong không gian $Oxyz$. Đường thẳng (d) đi qua điểm $A(x_0; y_0; z_0)$ và nhận $\vec{n} = (a; b; c)$ làm véc-tơ pháp tuyến có phương trình tổng quát là

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0.$$

- Trong không gian $Oxyz$. Phương trình

$$ax + by + cz + d = 0$$

(với a, b, c không đồng thời bằng 0) là phương trình của một đường thẳng nào đó có véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n} = (a; b; c)$.

2. Phương trình đường thẳng

- Trong không gian, véc-tơ \vec{u} khác $\vec{0}$ là véc-tơ chỉ phương của đường thẳng d nếu giá của nó song song với đường thẳng d . Hơn nữa với $k \neq 0$ ta cũng có $k\vec{u}$ cũng là một véc-tơ chỉ phương của đường thẳng d .
- Trong không gian $Oxyz$ Đường thẳng d đi qua điểm $A(x_0; y_0; z_0)$ và nhận $\vec{u} = (a; b; c)$ làm véc-tơ chỉ phương có phương trình là

$$\text{Phương trình tham số } d: \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$$

$$\text{Phương trình chính tắc } d: \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c} \text{ (với } abc \neq 0).$$

B. BÀI TẬP MẪU

VÍ DỤ 36 (Đề minh họa BGD 2022-2023). Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng $(P): x + y + z + 1 = 0$ có một véc-tơ pháp tuyến là

(A) $\vec{n}_1 = (-1; 1; 1).$

(B) $\vec{n}_4 = (1; 1; -1).$

(C) $\vec{n}_3 = (1; 1; 1).$

(D) $\vec{n}_2 = (1; -1; 1).$

Lời giải.

Mặt phẳng $(P): x + y + z + 1 = 0$ có một véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n} = (1; 1; 1).$

Chọn đáp án **(C)**



C. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN

CÂU 1. Trong không gian $Oxyz$. Mặt phẳng (Oxy) có một véc-tơ pháp tuyến là

(A) $\vec{i} = (1; 0; 0).$

(B) $\vec{j} = (0; 1; 0).$

(C) $\vec{k} = (0; 0; 1).$

(D) $\vec{t} = (1; 1; 1).$

Lời giải.

Ta có $Oz \perp (Oxy)$ do đó véc-tơ $\vec{k} = (0; 0; 1)$ là véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (Oxy) .

Chọn đáp án **(C)**



CÂU 2. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 4x - 2y + z - 1 = 0$. Véc-tơ nào dưới đây là một véc-tơ pháp tuyến của (P) ?

(A) $\vec{n}_1 = (4; -2; -1).$

(B) $\vec{n}_4 = (4; 2; 1).$

(C) $\vec{n}_3 = (4; -2; 0).$

(D) $\vec{n}_2 = (4; -2; 1).$

Lời giải.

Mặt phẳng $(P): 4x - 2y + z - 1 = 0$ suy ra (P) có một véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}_2 = (4; -2; 1).$

Chọn đáp án **(D)**



CÂU 3. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha): 2x - y + 3z - 1 = 0$. Véc-tơ nào sau đây là véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (α) ?

Ⓐ $\vec{n} = (2; 1; 3)$.

Ⓑ $\vec{n} = (-4; 2; -6)$.

Ⓒ $\vec{n} = (2; 1; -3)$.

Ⓓ $\vec{n} = (-2; 1; 3)$.

☞ **Lời giải.**

Mặt phẳng (α) có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n} = (2; -1; 3)$ nên (α) cũng nhận véc-tơ $-2\vec{n} = (-4; 2; -6)$ làm véc-tơ pháp tuyến.
Chọn đáp án Ⓑ

CÂU 4. Trong hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) có phương trình $3x - z + 1 = 0$. Véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) có tọa độ là

Ⓐ $(-3; 1; 1)$.

Ⓑ $(3; 0; -1)$.

Ⓒ $(3; -1; 1)$.

Ⓓ $(3; -1; 0)$.

☞ **Lời giải.**

Mặt phẳng (P) có một véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n} = (3; 0; -1)$.
Chọn đáp án Ⓑ

CÂU 5. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, mặt phẳng $(Q): x - 2y + 5z + 2023 = 0$ có một véc-tơ pháp tuyến là

Ⓐ $\vec{n}_2 = (3; 6; 15)$.

Ⓑ $\vec{n}_3 = (-1; 2; 5)$.

Ⓒ $\vec{n}_1 = (-2; 4; -10)$.

Ⓓ $\vec{n}_4 = (-2; 4; 10)$.

☞ **Lời giải.**

Mặt phẳng (Q) có một véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n} = (1; -2; 5)$ nên $-2\vec{n} = (-2; 4; -10)$ cũng là một véc-tơ pháp tuyến của (Q) .
Chọn đáp án Ⓒ

CÂU 6. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng $(P): 2x + y + 3z - 1 = 0$ có một véc-tơ pháp tuyến là

Ⓐ $\vec{n}_3 = (2; 1; 3)$.

Ⓑ $\vec{n}_2 = (-1; 3; 2)$.

Ⓒ $\vec{n}_4 = (1; 3; 2)$.

Ⓓ $\vec{n}_1 = (3; 1; 2)$.

☞ **Lời giải.**

Mặt phẳng (P) có một véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n} = (2; 1; 3)$.

CÂU 7. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, véc-tơ nào sau đây không phải véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng $(P): x + 3y - 5z + 2 = 0$?

Ⓐ $\vec{n} = (2; 6; -10)$.

Ⓑ $\vec{n} = (-2; -6; -10)$.

Ⓒ $\vec{n} = (-3; -9; 15)$.

Ⓓ $\vec{n} = (-1; -3; -5)$.

☞ **Lời giải.**

Mặt phẳng (P) có một véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}_1 = (1; 3; -5)$.

Ta có $\vec{n} = (-2; -6; -10)$ không cùng phương với \vec{n}_1 vì $\frac{1}{-2} = \frac{3}{-6} \neq \frac{-5}{-10}$.

Do đó $\vec{n} = (-2; -6; -10)$ không là véc-tơ pháp tuyến của (P) .

Chọn đáp án Ⓑ

CÂU 8. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, phương trình mặt phẳng nào sau đây nhận véc-tơ $\vec{n} = (2; 1; -1)$ làm véc-tơ pháp tuyến?

Ⓐ $2x + y - z - 1 = 0$.

Ⓑ $2x + y + z - 1 = 0$.

Ⓒ $4x + 2y - z - 1 = 0$.

Ⓓ $-2x - y - z + 1 = 0$.

☞ **Lời giải.**

Mặt phẳng $(P): 2x + y - z - 1 = 0$ có một véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n} = (2; 1; -1)$.

Chọn đáp án Ⓐ

CÂU 9. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): \frac{x}{3} + \frac{y}{2} + \frac{z}{1} = 1$. Véc-tơ nào dưới đây là véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) ?

Ⓐ $\vec{n} = (3; 2; 6)$.

Ⓑ $\vec{n} = (2; 3; 6)$.

Ⓒ $\vec{n} = (3; 2; 1)$.

Ⓓ $\vec{n} = (3; -2; -2)$.

☞ **Lời giải.**

Ta có $(P): \frac{x}{3} + \frac{y}{2} + \frac{z}{1} = 1 \Leftrightarrow 2x + 3y + 6z - 6 = 0$ có một véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n} = (2; 3; 6)$.

Chọn đáp án Ⓑ

CÂU 10. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(-1; 1; 3)$, $B(2; 1; 0)$ và $C(4; -1; 5)$. Một véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (ABC) có tọa độ là

Ⓐ $(2; 7; 2)$.

Ⓑ $(-2; 7; -2)$.

Ⓒ $(16; 1; 6)$.

Ⓓ $(16; -1; 6)$.

☞ **Lời giải.**

Ta có $\overrightarrow{AB} = (3; 0; -3)$; $\overrightarrow{AC} = (5; -2; 2)$.

Mặt phẳng (ABC) có cặp véc-tơ chỉ phương là \overrightarrow{AB} và \overrightarrow{AC} nên có một véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n} = -\frac{1}{3} [\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}] = (2; 7; 2)$.

Chọn đáp án Ⓐ

CÂU 11. Trong không gian $Oxyz$, véc-tơ nào dưới đây là véc-tơ chỉ phương của đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{-1}$.

Ⓐ $\vec{u}_2 = (1; 1; 2)$.

Ⓑ $\vec{u}_3 = (1; -1; 2)$.

Ⓒ $\vec{u}_4 = (2; 1; -1)$.

Ⓓ $\vec{u}_1 = (2; 1; 1)$.

☞ **Lời giải.**

Đường thẳng d có một véc-tơ chỉ phương là $\vec{u} = (2; 1; -1)$.

Chọn đáp án Ⓒ

CÂU 12. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, véc-tơ nào sau đây là một véc-tơ chỉ phương của đường thẳng $d: \frac{x}{2} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z}{1}$?

(A) $\vec{u} = (1; -3; 2)$.

(B) $\vec{u} = (2; 3; 1)$.

(C) $\vec{u} = (2; -6; 1)$.

(D) $\vec{u} = (4; -6; 2)$.

Lời giải.

Đường thẳng d có một véc-tơ chỉ phương là $\vec{t} = (2; -3; 1)$. Do đó $\vec{u} = 2\vec{t} = (4; -6; 2)$ cũng là một véc-tơ chỉ phương của d .
Chọn đáp án (D) □

CÂU 13. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 1 + t \\ z = t + 2 \end{cases} (t \in \mathbb{R})$. Tìm tọa độ một véc-tơ chỉ phương của đường thẳng d .

(A) $(-2; 1; 1)$.

(B) $(1; 1; 1)$.

(C) $(2; -1; -2)$.

(D) $(-2; 1; 2)$.

Lời giải.

Đường thẳng d có một véc-tơ chỉ phương là $\vec{t} = (-2; 1; 1)$.
Chọn đáp án (A) □

CÂU 14. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \frac{x+1}{-3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+1}{1}$. Tìm tọa độ một véc-tơ chỉ phương của Δ .

(A) $(-1; 2; -1)$.

(B) $(1; -2; 1)$.

(C) $(3; -2; -1)$.

(D) $(-3; 2; 0)$.

Lời giải.

Đường thẳng Δ có một véc-tơ chỉ phương là $\vec{u} = (-3; 2; 1)$ nên $\vec{v} = -\vec{u} = (3; -2; -1)$ cũng là véc-tơ chỉ phương của Δ .
Chọn đáp án (C) □

CÂU 15. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 + 4t \\ z = 5 - t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$. Véc-tơ nào dưới đây là một véc-tơ chỉ phương của đường thẳng d ?

(A) $\vec{u}_2 = (2; 3; 5)$.

(B) $\vec{u}_3 = (0; 4; -1)$.

(C) $\vec{u}_1 = (2; 4; -1)$.

(D) $\vec{u}_4 = (2; -4; -1)$.

Lời giải.

Đường thẳng $d: \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 + 4t \\ z = 5 - t \end{cases}$ có $\vec{u}_3 = (0; 4; -1)$ là một véc-tơ chỉ phương.

Chọn đáp án (B) □

CÂU 16. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng (Δ) có phương trình $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z+1}{-1}$. Véc-tơ chỉ phương của đường thẳng là

(A) $\vec{u} = (2; 3; -1)$.

(B) $\vec{u} = (2; 3; 1)$.

(C) $\vec{u} = (-2; 3; -1)$.

(D) $\vec{u} = (-2; -3; -1)$.

Lời giải.

Đường thẳng (Δ) có một véc-tơ chỉ phương là $\vec{u} = (2; 3; -1)$.
Chọn đáp án (A) □

CÂU 17. Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng $d: \frac{x-1}{3} = \frac{y-5}{2} = \frac{z+2}{-5}$ có một véc-tơ chỉ phương là

(A) $\vec{u} = (1; 5; -2)$.

(B) $\vec{u} = (3; 2; -5)$.

(C) $\vec{u} = (-3; 2; -5)$.

(D) $\vec{u} = (2; 3; -5)$.

Lời giải.

Đường thẳng d có một véc-tơ chỉ phương là $\vec{u} = (3; 2; -5)$.
Chọn đáp án (B) □

CÂU 18. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x+2}{1} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z+1}{2}$. Véc-tơ nào sau đây là một véc-tơ chỉ phương của đường thẳng d ?

(A) $\vec{u}_1 = (-2; 1; -1)$.

(B) $\vec{u}_1 = (1; -3; 2)$.

(C) $\vec{u}_3 = (-1; -3; 2)$.

(D) $\vec{u}_4 = (1; 3; -2)$.

Lời giải.

Đường thẳng d có một véc-tơ chỉ phương là $\vec{u}_1 = (1; -3; 2)$.
Chọn đáp án (B) □

CÂU 19. Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng d song song với đường thẳng $\Delta: \frac{x+2}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-3}{1}$ có véc-tơ chỉ phương là

(A) $\vec{u} = (1; -2; 1)$.

(B) $\vec{u} = (-1; -3; 4)$.

(C) $\vec{u} = (-2; -1; 3)$.

(D) $\vec{u} = (0; -2; 3)$.

Lời giải.

Ta có Δ có một véc-tơ chỉ phương là $\vec{u} = (1; -2; 1)$.

Vì d song song với Δ nên cũng có véc-tơ chỉ phương là $\vec{u} = (1; -2; 1)$.

Chọn đáp án (A) □

CÂU 20. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{5} = \frac{y-2}{-8} = \frac{z+3}{7}$. Véc-tơ nào sau đây là một véc-tơ chỉ phương của d ?

(A) $\vec{u}_3 = (1; 2; -3)$.

(B) $\vec{u}_4 = (7; -8; 5)$.

(C) $\vec{u}_1 = (-1; -2; 3)$.

(D) $\vec{u}_3 = (5; -8; 7)$. □

Lời giải.

Đường thẳng d có một véc-tơ chỉ phương là $\vec{u}_3 = (5; -8; 7)$.

Chọn đáp án (D) □

D. BẢNG ĐÁP ÁN

1. C	2. D	3. B	4. B	5. C	7. B	8. A	9. B
10. A	11. C	12. D	13. A	14. C	15. B	16. A	17. B
		18. B	19. A	20. D			

Bài 7. BÀI TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN GIAO ĐIỂM GIỮA CÁC ĐỒ THỊ**A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ****1. Số giao điểm của hai đồ thị**

- ☑ Muốn tìm số giao điểm giữa đồ thị hàm $y = f(x)$ và đường thẳng $y = a$ ta chỉ việc vẽ đường thẳng $y = a$ (là đường thẳng song song với trục Ox và đi qua điểm có tọa độ $(0; a)$) và xác định số giao điểm.
- ☑ Chú ý: Phương trình của trục hoành (hay trục Ox) là $y = 0$.
- ☑ Cho hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$, khi đó số giao điểm giữa hai đồ thị hàm số trên bằng số nghiệm của phương trình hoành độ giao điểm $f(x) = g(x)$.
- ☑ Trường hợp đề cho bảng biến thiên của hàm $y = f(x)$, để biểu diễn đường $y = a$ ta vẽ một đường ngang sao cho hợp lí với đề bài.

2. Tìm giao điểm của hai đồ thị

- ☑ Dựa vào đồ thị để tìm tọa độ giao điểm.
- ☑ Tìm nghiệm của phương trình hoành độ giao điểm, ta được hoành độ của giao điểm sau đó thay vào hàm số để tìm tung độ.
- ☑ Muốn tìm nghiệm của phương trình $f(u(x)) = a$, ta đi giải phương trình $u(x) = x_0$ (trong đó x_0 là nghiệm của phương trình $f(x) = a$).

B. BÀI TẬP MẪU**VÍ DỤ 37 (Đề tham khảo BGD 2023).**

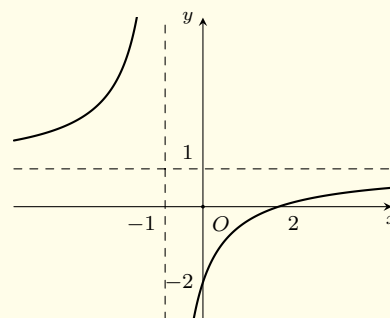
Cho hàm số $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Tọa độ giao điểm của đồ thị hàm số với trục hoành là

(A) $(0; -2)$.

(B) $(2; 0)$.

(C) $(-2; 0)$.

(D) $(0; 2)$.

**Lời giải.**

Nhìn vào hình trên ta thấy tọa độ giao điểm là $(2; 0)$.

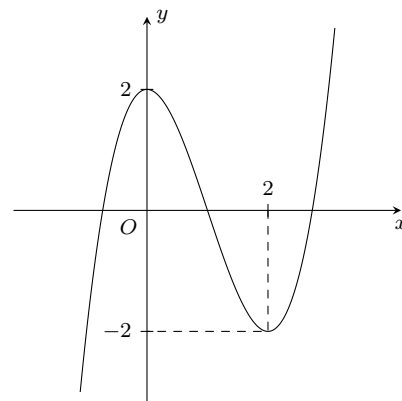
Chọn đáp án (B)

C. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN

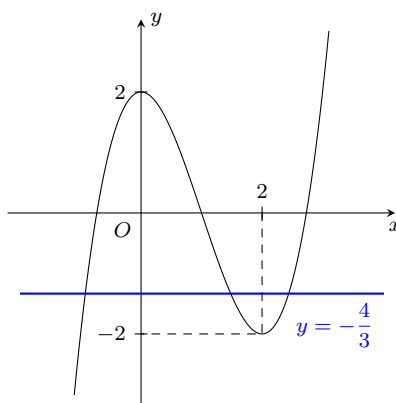
CÂU 1.

Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình bên. Phương trình $3f(x) + 4 = 0$ có tất cả bao nhiêu nghiệm?

- (A) 3. (B) 0. (C) 1. (D) 2.



🗨️ Lời giải.



Ta có $3f(x) + 4 = 0 \Leftrightarrow f(x) = -\frac{4}{3}$.

Số nghiệm của phương trình là số giao điểm của $(C): y = f(x)$ (hình vẽ) và $d: y = -\frac{4}{3}$.

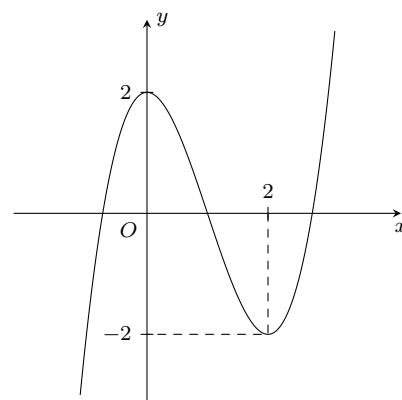
Vậy phương trình có 3 nghiệm.

Chọn đáp án (A)

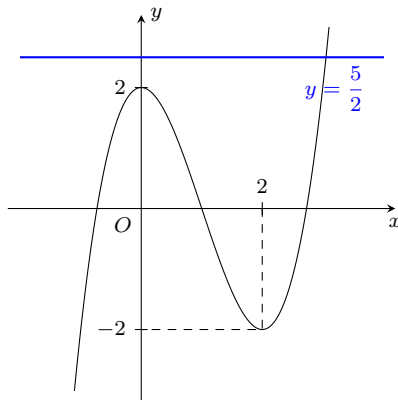
CÂU 2.

Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình bên. Phương trình $2f(x) - 5 = 0$ có tất cả bao nhiêu nghiệm?

- (A) 3. (B) 0. (C) 1. (D) 2.



🗨️ Lời giải.



Ta có $2f(x) - 5 = 0 \Leftrightarrow f(x) = \frac{5}{2}$.

Số nghiệm của phương trình là số giao điểm của $(C): y = f(x)$ (hình vẽ) và $d: y = \frac{5}{2}$.

Vậy phương trình có 1 nghiệm.

Chọn đáp án (C)

□

CÂU 3.

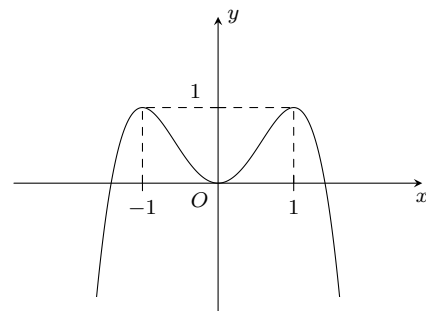
Cho hàm số $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị như hình bên. Số nghiệm thực của phương trình $4f(x) - 3 = 0$ là

(A) 4.

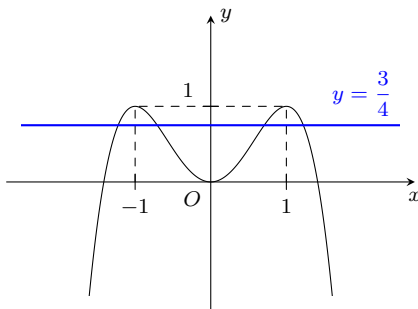
(B) 3.

(C) 2.

(D) 0.



☞ Lời giải.



Ta có $4f(x) - 3 = 0 \Leftrightarrow f(x) = \frac{3}{4}$.

Số nghiệm của phương trình là số giao điểm của $(C): y = f(x)$ (hình vẽ) và $d: y = \frac{3}{4}$.

Vậy phương trình có 4 nghiệm.

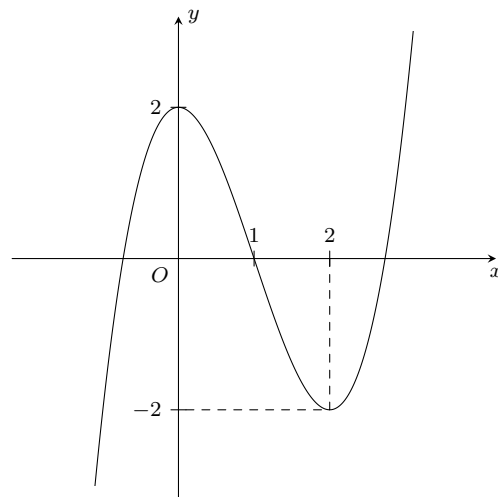
Chọn đáp án (A)

□

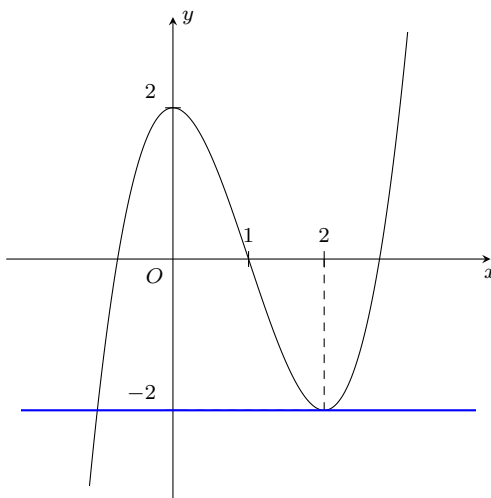
CÂU 4.

Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình bên. Số nghiệm thực của phương trình $f(x^2) = -2$ là

- (A) 3. (B) 4. (C) 0. (D) 2.



Lời giải.



Nhìn đồ thị ta thấy $f(x^2) = -2 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = x_0 < 0 \\ x^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}.$

Vậy phương trình có 2 nghiệm thực phân biệt.

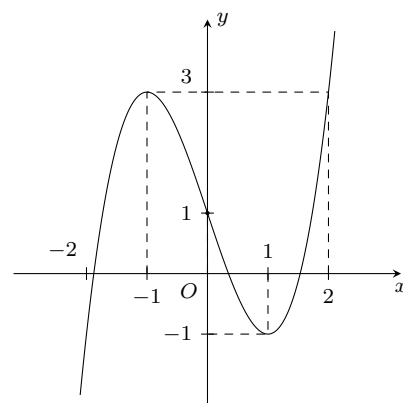
Chọn đáp án (D)



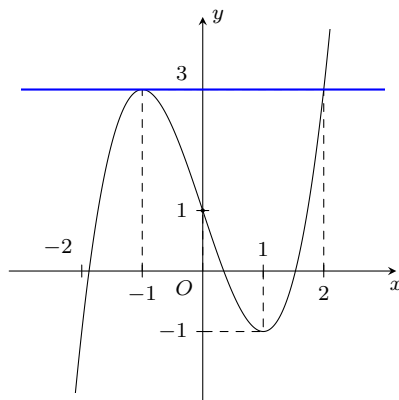
CÂU 5.

Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình bên. Phương trình $f(x^2 - 2) = 3$ có tất cả bao nhiêu nghiệm?

- (A) 3. (B) 2. (C) 1. (D) 4.



Lời giải.



Nhìn đồ thị ta thấy $f(x^2 - 2) = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2 = -1 \\ x^2 - 2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ x = \pm 2 \end{cases}$.

Vậy phương trình có 4 nghiệm phân biệt.

Chọn đáp án (D)

CÂU 6. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$				
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$			1			$+\infty$		

</

Số nghiệm của phương trình $2f(x) + 3 = 0$ là

(A) 4.

(B) 3.

(C) 2.

(D) 1.

Lời giải.

Ta có $2f(x) + 3 = 0 \Leftrightarrow f(x) = -\frac{3}{2}$.

(*)

Số nghiệm phương trình (*) là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng $y = -\frac{3}{2}$.

Bảng biến thiên.

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$				
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$			1			$+\infty$		

A graph of the function $y = \frac{3}{2x}$ is shown. The horizontal axis is labeled x and the vertical axis is labeled y . The graph consists of two hyperbolic branches: one in the first quadrant and one in the third quadrant. The branches approach the x -axis as $x \rightarrow \pm\infty$ and approach the y -axis as $y \rightarrow \pm\infty$. A horizontal blue line is drawn at $y = \frac{3}{2}$, which is tangent to the branch in the first quadrant at the point $(1, \frac{3}{2})$. Arrows indicate the direction of the branches as x increases or decreases. The point $(1, \frac{3}{2})$ is marked with a dot and labeled 1 on the x -axis. The y -axis has labels $+\infty$ at the top and $-\infty$ at the bottom. The x -axis has labels $-\infty$, -2 , 0 , 2 , and $+\infty$. The y' row has labels $-$, 0 , $+$, 0 , $-$, 0 , $+$ corresponding to the intervals of x .

Dựa vào bảng biến thiên ta được phương trình $f(x) = -\frac{3}{2}$ có bốn nghiệm phân biệt.

Chọn đáp án (A)

CÂU 7. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\infty$	-2	3	$+\infty$
y'		$+$	$-$	$+$
y	$-\infty$	2	1	$+\infty$

Số nghiệm thực của phương trình $2f(x) - 3 = 0$ là

(A) 2.

(B) 1.

(C) 3.

(D) 4.

Lời giải.

Ta có $2f(x) - 3 = 0 \Leftrightarrow f(x) = \frac{3}{2}$.

(*)

Số nghiệm phương trình (*) là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng $y = \frac{3}{2}$.

Bảng biến thiên.

x	$-\infty$	-2	3	$+\infty$
y'		+	-	+
y	$-\infty$	2	1	$+\infty$

Đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng $y = \frac{3}{2}$ cắt nhau tại 3 điểm.

Dựa vào bảng biến thiên ta được phương trình $f(x) = \frac{3}{2}$ có ba nghiệm phân biệt.

Chọn đáp án (C)

□

CÂU 8. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$			
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$+\infty$		-2	1	-2		$+\infty$	

Số nghiệm của phương trình $2f(x) - 3 = 0$ là

(A) 4.

(B) 3.

(C) 2.

(D) 1.

Lời giải.

Ta có phương trình $2f(x) - 3 = 0 \Leftrightarrow f(x) = \frac{3}{2}$.

(*)

Số nghiệm phương trình (*) là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng $y = \frac{3}{2}$.

Xét bảng biến thiên.

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$			
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$+\infty$		-2	1	-2		$+\infty$	

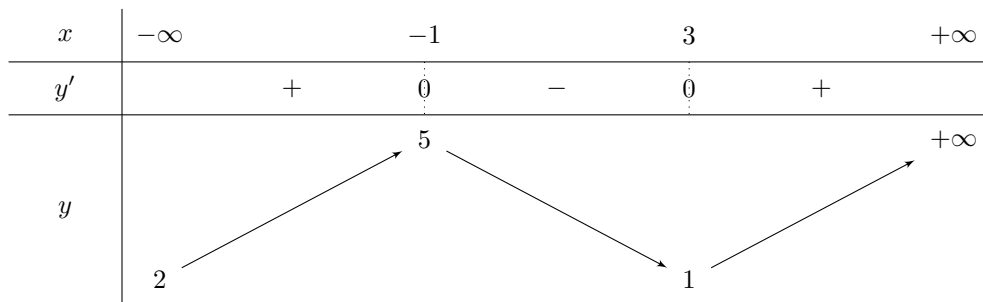
Đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng $y = \frac{3}{2}$ cắt nhau tại 2 điểm.

Dựa vào bảng biến thiên ta được phương trình $f(x) = \frac{3}{2}$ có hai nghiệm phân biệt.

Chọn đáp án (C)

□

CÂU 9. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ.



Phương trình $f(x) - 2 = 0$ có bao nhiêu nghiệm?

(A) 1.

(B) 3.

(C) 2.

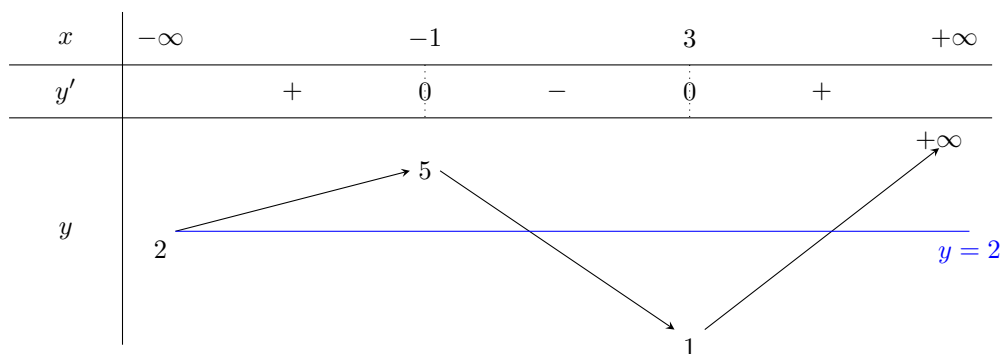
(D) 0.

Lời giải.

Ta có $f(x) - 2 = 0 \Leftrightarrow f(x) = 2$.

Số nghiệm phương trình (*) là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng $y = 2$.

Bảng biến thiên.



Ta có $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$.

Dựa vào bảng biến thiên ta được phương trình $f(x) = 2$ có hai nghiệm phân biệt.

Chọn đáp án (C)

CÂU 10.

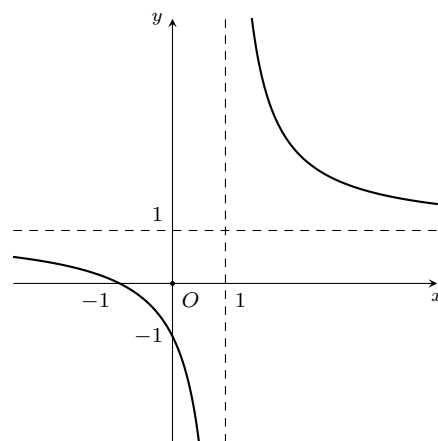
Cho hàm số $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ có đồ thị như hình bên. Tìm tọa độ giao điểm của đồ thị hàm số bên với đường thẳng $y = -1$.

(A) $(0; 1)$.

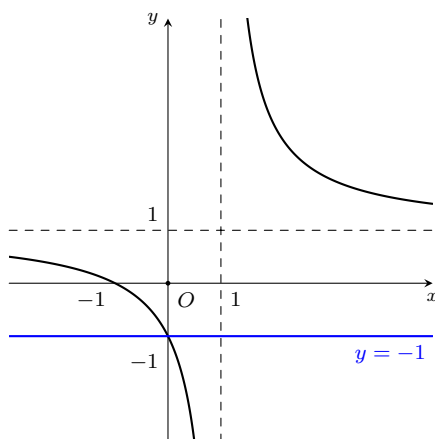
(B) $(0; -1)$.

(C) $(-1; -1)$.

(D) $(-1; 0)$.



Lời giải.



Nhìn vào hình trên ta thấy tọa độ giao điểm là $(0; -1)$.

Chọn đáp án (B)

CÂU 11. Giao điểm của đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{x+1}$ với trục hoành là điểm

- (A) $N\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$. (B) $P\left(\frac{1}{2}; 0\right)$. (C) $Q(-1; 0)$. (D) $M(0; 1)$.

Lời giải.

Giao với trục Oy cho $y = 0 \Leftrightarrow \frac{2x+1}{x+1} = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$.

Vậy giao điểm của đồ thị hàm số với trục Oy là điểm $N\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$.

Chọn đáp án (A)

CÂU 12. Cho hàm số $y = x^3 - 3x$ có đồ thị (C) . Tìm số giao điểm của (C) và trục hoành.

- (A) 3. (B) 1. (C) 0. (D) 2.

Lời giải.

Xét phương trình hoành độ giao điểm của (C) và trục hoành: $x^3 - 3x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{3} \end{cases}$.

Vậy số giao điểm của (C) và trục hoành là 3.

Chọn đáp án (A)

CÂU 13. Đồ thị hàm số $y = (x^2 - 1)(x^2 + 1)$ cắt trục hoành tại bao nhiêu điểm phân biệt?

- (A) 1. (B) 2. (C) 0. (D) 4.

Lời giải.

Ta có $y = 0 \Rightarrow x = \pm 1$. Do đó đồ thị cắt trục hoành tại 2 điểm phân biệt.

Chọn đáp án (B)

CÂU 14. Đường thẳng $y = x - 1$ cắt đồ thị hàm số $y = x^3 - x^2 + x - 1$ tại hai điểm phân biệt. Tìm tổng tung độ các giao điểm đó.

- (A) 2. (B) -1. (C) -3. (D) 0.

Lời giải.

Xét phương trình $x^3 - x^2 + x - 1 = x - 1 \Leftrightarrow x^3 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2(x - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$.

Với $x = 0 \Rightarrow y = -1 = y_1$.

Với $x = 1 \Rightarrow y = 0 = y_2$.

Vậy tổng các tung độ của các giao điểm là $y_1 + y_2 = -1 + 0 = -1$.

Chọn đáp án (B)

CÂU 15. Tính tổng hoành độ của các giao điểm của đồ thị hàm số $y = \frac{5x+6}{x+2}$ và đường thẳng $y = -x$.

- (A) -5. (B) -7. (C) 5. (D) 7.

Lời giải.

Xét phương trình hoành độ giao điểm: $\frac{5x+6}{x+2} = -x$ (với $x \neq -2$)

$$\Leftrightarrow 5x + 6 = -x(x + 2) \Leftrightarrow x^2 + 7x + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -6 \end{cases}$$

Khi đó tổng hoành độ của các giao điểm là -7.

Chọn đáp án (B)

CÂU 16. Đồ thị của hàm số $y = 4x^4 - 2x^2 + 1$ và đồ thị của hàm số $y = x^2 + x + 1$ có tất cả bao nhiêu điểm chung?

- (A) 4. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm: $4x^4 - 2x^2 + 1 = x^2 + x + 1 \Leftrightarrow 4x^4 - 3x^2 - x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases}$ Vậy đồ thị hai hàm số có

3 điểm chung.

Chọn đáp án (D)

CÂU 17. Trong các điểm sau điểm nào là giao điểm của đồ thị hàm số $y = x + \frac{2}{x-1}$ và đường thẳng $y = 2x$.

(A) $(2; -4)$.

(B) $(-2; -2)$.

(C) $(-1; 2)$.

(D) $(2; 4)$.

Lời giải.

Ta có phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị:

$$x + \frac{2}{x-1} = 2x \Leftrightarrow \frac{2}{x-1} = x \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2. \end{cases}$$

Từ đó ta có 2 giao điểm là $A(-1; -2)$ và $B(2; 4)$.

Chọn đáp án (D)

CÂU 18. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
y'	$-$	$+$	0	$-$
y	$-\infty$	2	$+\infty$	$+\infty$

Tìm số nghiệm thực của phương trình $f(x) - 1 = 0$?

(A) 3.

(B) 1.

(C) 2.

(D) 0.

Lời giải.

Số nghiệm phương trình $f(x) - 1 = 0$ là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng $y = 1$.
Bảng biến thiên.

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
y'	$-$	$+$	0	$-$
y	$-\infty$	2	$+\infty$	$+\infty$

$y = 1$

Dựa vào bảng biến thiên ta được kết quả là 3 nghiệm.

Chọn đáp án (A)

CÂU 19.

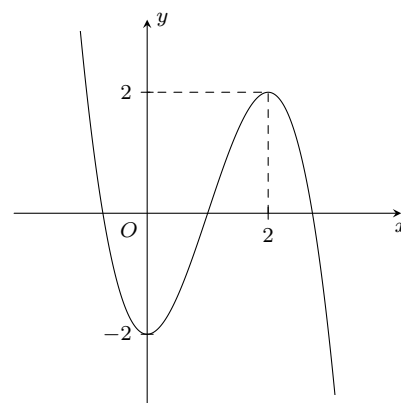
Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị trong hình bên. Phương trình $f(x) - 1 = 0$ có bao nhiêu nghiệm thực phân biệt nhỏ hơn 2?

(A) 1.

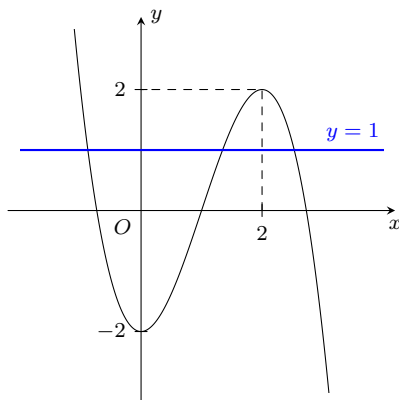
(B) 2.

(C) 3.

(D) 0.



Lời giải.



Ta có $f(x) - 1 = 0 \Leftrightarrow f(x) = 1$.

Số nghiệm của phương trình là số giao điểm của $(C): y = f(x)$ (hình vẽ) và $d: y = 1$.

Vậy phương trình có 2 nghiệm thực phân biệt nhỏ hơn 2.

Chọn đáp án (B)

CÂU 20.

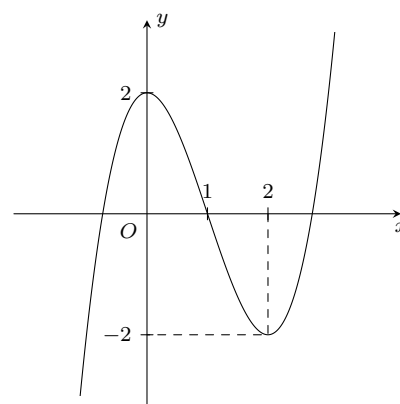
Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình bên. Phương trình $3f(x) - 2 = 0$ có bao nhiêu nghiệm lớn hơn 1?

(A) 3.

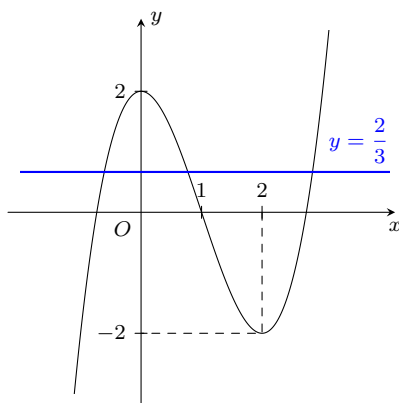
(B) 0.

(C) 1.

(D) 2.



☞ Lời giải.



Ta có $3f(x) - 2 = 0 \Leftrightarrow f(x) = \frac{2}{3}$.

Số nghiệm của phương trình là số giao điểm của $(C): y = f(x)$ (hình vẽ) và $d: y = \frac{2}{3}$.

Vậy phương trình có 1 nghiệm lớn hơn 1.

Chọn đáp án (C)

D. BẢNG ĐÁP ÁN

1. A	2. C	3. A	4. D	5. D	6. A	7. C	8. C
9. C	10. B	11. A	12. A	13. B	14. B	15. B	16. D
17. D	18. A	19. B	20. C				

Bài 8. TÍNH CHẤT TÍCH PHÂN

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Định nghĩa

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$. Giả sử $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a; b]$, hiệu số $F(b) - F(a)$ được gọi là tích phân từ a đến b (hay tích phân xác định trên đoạn $[a; b]$) của hàm số $f(x)$.

Kí hiệu $\int_a^b f(x)dx$.

2. Các tính chất

$$\textcircled{A} \int_a^a f(x)dx = 0.$$

$$\textcircled{A} \int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du = \dots$$

$$\textcircled{A} \int_a^b kf(x)dx = k \int_a^b f(x)dx \text{ (với } k \text{ là hằng số).}$$

$$\textcircled{A} \int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx.$$

$$\textcircled{A} \int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx.$$

$$\textcircled{A} \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \text{ (với } a < b < c).$$

B. BÀI TẬP MẪU

VÍ DỤ 38 (Đề minh họa BGD 2022-2023). Nếu $\int_{-1}^4 f(x)dx = 2$ và $\int_{-1}^4 g(x)dx = 3$ thì $\int_{-1}^4 [f(x) + g(x)]dx$ bằng

(A) 5.

(B) 6.

(C) 1.

(D) 7.

☞ Lời giải.

$$\text{Ta có } \int_{-1}^4 [f(x) + g(x)]dx = \int_{-1}^4 f(x)dx + \int_{-1}^4 g(x)dx = 2 + 3 = 5.$$

Chọn đáp án **(A)**



C. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN

CÂU 1. Biết $\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{3}$ và $\int_0^1 g(x)dx = \frac{4}{3}$. Khi đó $\int_0^1 [f(x) - g(x)]dx$ bằng

(A) $\frac{5}{3}$.

(B) -1 .

(C) 1.

(D) $-\frac{5}{3}$.

☞ Lời giải.

$$\text{Ta có } \int_0^1 [f(x) - g(x)]dx = \int_0^1 f(x)dx - \int_0^1 g(x)dx = \frac{1}{3} - \frac{4}{3} = -1.$$

Chọn đáp án **(B)**



CÂU 2. Cho $I = \int_1^5 f(x)dx = 4$, $J = \int_1^5 g(x)dx = 3$. Khi đó $K = \int_1^5 [4f(x) - 3g(x)] dx$ bằng

(A) 4. (B) 2. (C) 7. (D) 8.

☞ **Lời giải.**

$$\text{Ta có } K = \int_1^5 [4f(x) - 3g(x)] dx = 4 \int_1^5 f(x)dx - 3 \int_1^5 g(x)dx = 16 - 9 = 7.$$

Chọn đáp án (C)

CÂU 3. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[a; b]$, nếu $\int_a^d f(x)dx = 5$ và $\int_b^d f(x)dx = 2$ với $a < d < b$ thì $\int_a^b f(x)dx$ bằng

(A) 10. (B) 3. (C) 7. (D) $\frac{5}{2}$.

☞ **Lời giải.**

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^d f(x)dx + \int_d^b f(x)dx = \int_a^d f(x)dx - \int_b^d f(x)dx = 5 - 2 = 3.$$

Chọn đáp án (B)

CÂU 4. Cho hàm số $f(x)$, $g(x)$ liên tục trên K và a, b, c thuộc K . Công thức nào sau đây sai?

- (A) $\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$ (B) $\int_a^b kf(x)dx = k \int_a^b f(x)dx.$
- (C) $\int_a^b f(x)dx = \int_b^a f(x)dx.$ (D) $\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx.$

☞ **Lời giải.**

Chọn đáp án (C)

CÂU 5. Cho $\int_1^0 f(x)dx = 3$ và $\int_0^1 g(x)dx = -4$. Giá trị của $\int_0^1 [f(x) - 2g(x)] dx$ bằng

(A) 11. (B) 7. (C) -1. (D) 5.

☞ **Lời giải.**

$$\text{Ta có } \int_0^1 [f(x) - 2g(x)] dx = \int_0^1 f(x)dx - 2 \int_0^1 g(x)dx = - \int_1^0 f(x)dx - 2 \int_0^1 g(x)dx = -3 - 2 \cdot (-4) = 5.$$

Chọn đáp án (D)

CÂU 6. Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn $\int_1^2 f(x)dx = -3$ và $\int_2^3 f(x)dx = 4$. Khi đó $\int_1^3 f(x)dx$ bằng

(A) 12. (B) -12. (C) 1. (D) 7.

☞ **Lời giải.**

$$\text{Ta có } \int_1^3 f(x)dx = \int_1^2 f(x)dx + \int_2^3 f(x)dx = -3 + 4 = 1.$$

Chọn đáp án (C)

CÂU 7. Biết $\int_0^1 f(x)dx = 3$, khi đó $\int_0^1 [4x - 3f(x)] dx$ bằng

(A) -9. (B) -7. (C) -5. (D) 11.

☞ **Lời giải.**

$$\text{Ta có } \int_0^1 [4x - 3f(x)] dx = \int_0^1 4xdx - 3 \int_0^1 f(x)dx = 2x^2 \Big|_0^1 - 3 \cdot 3 = 2 - 9 = -7.$$

Chọn đáp án (B)

CÂU 8. Biết $\int_0^1 f(x)dx = 2$, $\int_0^1 g(x)dx = -4$. Khi đó $\int_0^1 [f(x) + 2g(x)] dx$ bằng

(A) -6.

(B) 6.

(C) -2.

(D) 2.

☞ **Lời giải.**

$$\text{Ta có } \int_0^1 [f(x) + 2g(x)] dx = \int_0^1 f(x)dx + 2 \int_0^1 g(x)dx = 2 + 2 \cdot (-4) = -6.$$

Chọn đáp án (A)

CÂU 9. Cho hai số thực $a; b$ tùy ý, $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên tập \mathbb{R} . Mệnh đề nào sau đây đúng?

(A) $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$

(B) $\int_a^b f(x)dx = F(a) - F(b).$

(C) $\int_a^b f(x)dx = F(b) + F(a).$

(D) $\int_a^b f(x)dx = f(b) - f(a).$

☞ **Lời giải.**

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Chọn đáp án (A)

CÂU 10. Cho $\int_{-1}^2 f(x)dx = 2$ và $\int_{-1}^2 g(x)dx = -1$. Giá trị của $\int_{-1}^2 [2f(x) + 3g(x)] dx$ bằng

(A) -7.

(B) 1.

(C) 5.

(D) 7.

☞ **Lời giải.**

Áp dụng tính chất của tích phân ta có

$$\int_{-1}^2 [2f(x) + 3g(x)] dx = 2 \int_{-1}^2 f(x)dx + 3 \int_{-1}^2 g(x)dx = 4 - 3 = 1.$$

Chọn đáp án (B)

CÂU 11. Nếu $\int_{-1}^3 f(x)dx = 2$ và $\int_{-1}^3 g(x)dx = -1$ thì $\int_{-1}^3 [f(x) - g(x)] dx$ bằng

(A) 3.

(B) 4.

(C) -3.

(D) -1.

☞ **Lời giải.**

$$\int_{-1}^3 [f(x) - g(x)] dx = \int_{-1}^3 f(x)dx - \int_{-1}^3 g(x)dx = 2 - (-1) = 3.$$

Chọn đáp án (A)

CÂU 12. Cho $\int_0^1 f(x)dx = 2$ và $\int_0^1 g(x)dx = 5$, khi đó $\int_0^1 [3f(x) - 2g(x)] dx$ bằng:

(A) 11.

(B) -4.

(C) 16.

(D) -3.

☞ **Lời giải.**

$$\int_0^1 [3f(x) - 2g(x)] dx = 3 \int_0^1 f(x)dx - 2 \int_0^1 g(x)dx = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 5 = -4.$$

Chọn đáp án (B)

CÂU 13. Nếu $\int_0^2 f(x)dx = 3$ và $\int_0^2 g(x)dx = -2$ thì $\int_0^2 [f(x) - g(x)] dx$ bằng

(A) 5.

(B) 1.

(C) -1.

(D) -5.

☞ **Lời giải.**

$$\int_0^2 [f(x) - g(x)] dx = \int_0^2 f(x) dx - \int_0^2 g(x) dx = 3 + 2 = 5.$$

Chọn đáp án (A)

CÂU 14. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} và có $\int_0^2 f(x) dx = 9$; $\int_2^4 f(x) dx = 4$. Tính $I = \int_0^4 f(x) dx$.

(A) $I = 5$.

(B) $I = \frac{9}{4}$.

(C) $I = 36$.

(D) $I = 13$.

Lời giải.

Ta có $\int_0^4 f(x) dx = \int_0^2 f(x) dx + \int_2^4 f(x) dx = 9 + 4 = 13$.

Chọn đáp án (D)

CÂU 15. Cho $\int_{-2}^3 f(x) dx = -4$ và $\int_1^3 f(x) dx = 2$. Khi đó $\int_{-2}^1 f(x) dx$ bằng

(A) -2 .

(B) 6 .

(C) -8 .

(D) -6 .

Lời giải.

Ta có $\int_{-2}^3 f(x) dx = \int_{-2}^1 f(x) dx + \int_1^3 f(x) dx$.

Vậy $\int_{-2}^1 f(x) dx = \int_{-2}^3 f(x) dx - \int_1^3 f(x) dx = -4 - 2 = -6$.

Chọn đáp án (D)

CÂU 16. Cho $f(x)$, $g(x)$ là các hàm số liên tục trên \mathbb{R} . Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

(A) $\int f(x)g(x) dx = \int f(x) dx \cdot \int g(x) dx$.

(B) $\int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$.

(C) $\int [f(x) - g(x)] dx = \int f(x) dx - \int g(x) dx$.

(D) $\int 2f(x) dx = 2 \int f(x) dx$.

Lời giải.

Mệnh đề sai là $\int f(x)g(x) dx = \int f(x) dx \cdot \int g(x) dx$.

Chọn đáp án (A)

CÂU 17. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[2; 4]$ và thỏa mãn $f(2) = 2$, $f(4) = 2020$. Tính $I = \int_1^2 f'(2x) dx$.

(A) $I = 1009$.

(B) $I = 2018$.

(C) $I = 2022$.

(D) $I = 1011$.

Lời giải.

Ta có $I = \int_1^2 f'(2x) dx = \frac{1}{2} f(2x) \Big|_1^2 = \frac{1}{2} [f(4) - f(2)] = \frac{1}{2} (2020 - 2) = 1009$.

Chọn đáp án (A)

CÂU 18. Cho $\int_1^3 f(x) dx = 18$. Khi đó $\int_1^3 [5 - 2f(x)] dx$ bằng

(A) -26 .

(B) 16 .

(C) -31 .

(D) -46 .

Lời giải.

$\int_1^3 [5 - 2f(x)] dx = \int_1^3 5 dx - 2 \int_1^3 f(x) dx = 5x \Big|_1^3 - 2 \cdot 18 = 10 - 36 = -26$.

Chọn đáp án (A)

CÂU 19. Cho $\int_0^2 f(x) dx = 3$ và $\int_0^2 g(x) dx = 7$, khi đó $\int_0^2 [f(x) + 3g(x)] dx$ bằng

(A) 10 .

(B) 16 .

(C) -18 .

(D) 24 .

Lời giải.

Ta có $\int_0^2 [f(x) + 3g(x)] dx = \int_0^2 f(x) dx + 3 \int_0^2 g(x) dx = 24.$

Chọn đáp án (D)

CÂU 20. Cho $\int_1^5 f(x) dx = 5$, $\int_4^5 f(u) du = 2$ và $\int_1^4 g(x) dx = 3$. Tính $I = \int_1^4 [f(x) + g(x)] dx$.

(A) $I = 5$.

(B) $I = 10$.

(C) $I = 3$.

(D) $I = 6$.

Lời giải.

Ta có $\int_4^5 f(u) du = 2 \Rightarrow \int_4^5 f(x) dx = 2.$

$\int_1^5 f(x) dx = \int_1^4 f(x) dx + \int_4^5 f(x) dx \Rightarrow \int_1^4 f(x) dx = \int_1^5 f(x) dx - \int_4^5 f(x) dx = 5 - 2 = 3.$

$I = \int_1^4 [f(x) + g(x)] dx = \int_1^4 f(x) dx + \int_1^4 g(x) dx = 3 + 3 = 6.$

Chọn đáp án (D)

D. BẢNG ĐÁP ÁN

1. B	2. C	3. B	4. C	5. D	6. C	7. B	8. A
9. A	10. B	11. A	12. B	13. A	14. D	15. D	16. A
		17. A	18. A	19. D	20. D		

Bài 9. NHẬN DẠNG ĐỒ THỊ HÀM SỐ

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Hàm số bậc 3: $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$)

Trường hợp	$a > 0$	$a < 0$
$y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt ($b^2 - 3ac > 0$)		
$y' = 0$ có nghiệm kép hoặc vô nghiệm ($b^2 - 3ac \leq 0$)		

2. Hàm số trùng phương $y = ax^4 + bx^2 + c$ ($a \neq 0$)

Trường hợp	$a > 0$	$a < 0$
Phương trình $y' = 0$ có 3 nghiệm phân biệt ($a \cdot b < 0$)		
Phương trình $y' = 0$ có 1 nghiệm ($a \cdot b \geq 0$)		

3. Hàm số nhất biến $y = \frac{ax+b}{cx+d}$, ($ab - bc \neq 0$)

Khi $ad - bc > 0$	Khi $ad - bc < 0$

B. BÀI TẬP MẪU

VÍ DỤ 39 (De Tham khảo BGD 2023).

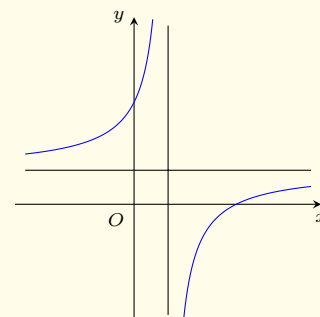
Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình bên

(A) $y = x^4 - 3x^2 + 2$.

(B) $y = \frac{x-3}{x-1}$.

(C) $y = x^2 - 4x + 1$.

(D) $y = x^3 - 3x - 5$.



Lời giải.

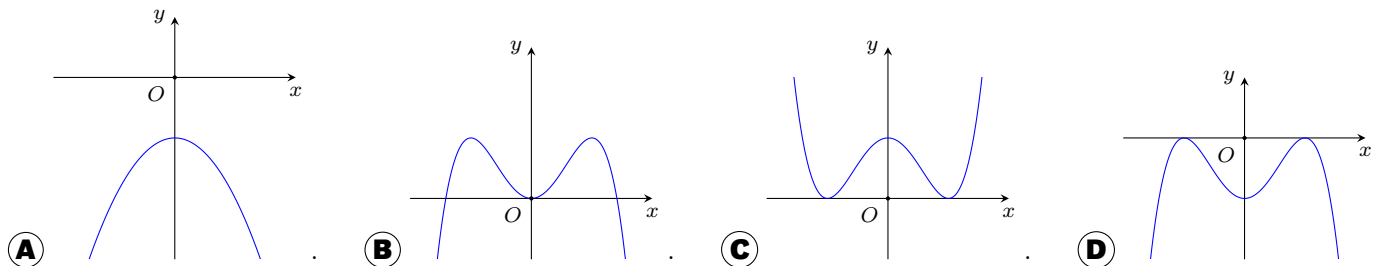
Đồ thị của hàm số $y = \frac{x-3}{x-1}$ có dạng như đường cong trong hình.

Chọn đáp án (B)



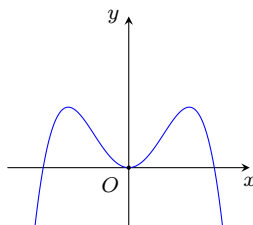
C. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN

CÂU 1. Đồ thị hàm số $y = -x^4 + 2x^2$ là hình nào sau đây?



Lời giải.

Vì đồ thị hàm số $y = -x^4 + 2x^2$ đi qua gốc tọa độ $O(0;0)$ nên chỉ có phương án B thỏa mãn.

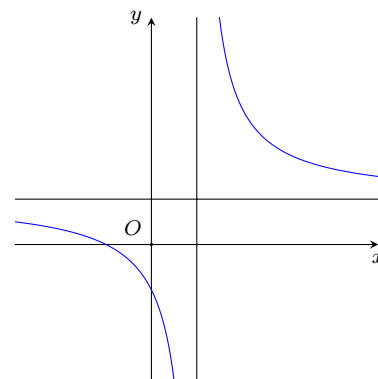


Chọn đáp án (B)

CÂU 2.

Đường cong ở hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?

- (A) $y = \frac{x-1}{x+1}$. (B) $y = x^3 - 3x^2 - 1$.
 (C) $y = -x^3 + 3x + 1$. (D) $y = \frac{x+1}{x-1}$.



Lời giải.

Đồ thị hàm số đã cho có đường tiệm cận đứng $x = x_0 > 0$ và đường tiệm cận ngang là $y = y_0 > 0$.

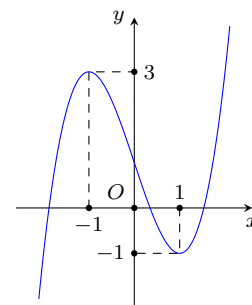
Nên trong các hàm số đã cho chỉ có đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{x-1}$ thỏa mãn.

Chọn đáp án (D)

CÂU 3.

Đồ thị sau đây là của hàm số nào?

- (A) $y = -x^3 + 3x^2 + 1$. (B) $y = x^3 - 3x + 1$.
 (C) $y = -x^3 - 3x^2 - 1$. (D) $y = x^3 - 3x - 1$.



Lời giải.

Hàm số có dạng $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Dựa vào đồ thị hàm số ta có

- ☑ Hệ số $a > 0$.
 ☑ Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị lần lượt là $A(-1; 3)$ và $B(1; -1)$.

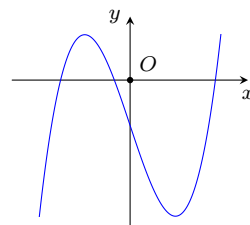
Trong các hàm số đã cho, chỉ có hàm số $y = x^3 - 3x + 1$ thỏa mãn.

Chọn đáp án (B)

CÂU 4.

Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?

- (A) $y = x^3 - 3x - 1$. (B) $y = x^4 - 3x^2 - 1$. (C) $y = -x^3 - 3x - 1$. (D) $y = -x^4 + x^2 - 1$.



Lời giải.

Đồ thị hàm số là đồ thị của hàm số bậc ba có hệ số $a > 0$.

Nên chỉ có hàm số $y = x^3 - 3x - 1$ thỏa mãn.

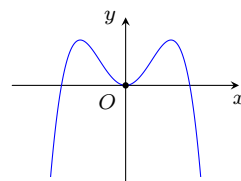
Chọn đáp án (A)



CÂU 5.

Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?

- (A) $y = -x^3 + 3x^2$. (B) $y = x^4 + 2x^2$. (C) $y = x^3 - 3x^2$. (D) $y = -x^4 + 2x^2$.



Lời giải.

Đồ thị hàm số là đồ thị của hàm số dạng $y = ax^4 + bx^2 + c$ có hệ số $a < 0$ nên chỉ có hàm số $y = -x^4 + 2x^2$ thỏa mãn.

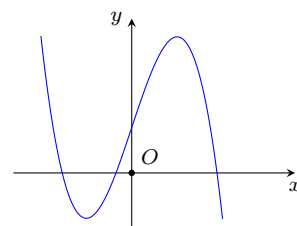
Chọn đáp án (D)



CÂU 6.

Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?

- (A) $y = x^4 - 2x^2 + 1$. (B) $y = -x^4 + 2x^2 + 1$.
(C) $y = -x^3 + 3x + 1$. (D) $y = x^3 - 3x + 1$.



Lời giải.

Đồ thị hàm số là đồ thị của hàm số bậc ba có hệ số $a < 0$.

Nên chỉ có hàm số $y = -x^3 + 3x + 1$ thỏa mãn.

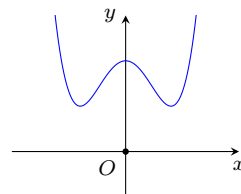
Chọn đáp án (C)



CÂU 7.

Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?

- (A) $y = x^4 - 2x^2 + 2$. (B) $y = x^3 - x^2 + 2$. (C) $y = x^3 - x + 2$. (D) $y = -x^4 + x^2 + 2$.



Lời giải.

Đồ thị hàm số là đồ thị của hàm số dạng $y = ax^4 + bx^2 + c$ có hệ số $a > 0$.

Nên chỉ có hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 2$ thỏa mãn.

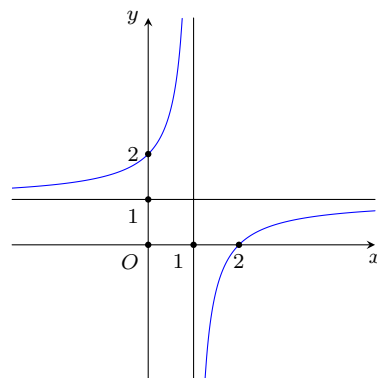
Chọn đáp án (A)



CÂU 8.

Đường cong ở hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?

- (A) $y = \frac{x-2}{x+1}$. (B) $y = \frac{x+2}{x-1}$. (C) $y = \frac{x+2}{x-2}$. (D) $y = \frac{x-2}{x-1}$.



Lời giải.

Đồ thị hàm số đã cho có đường tiệm cận đứng $x = 1$ và đường tiệm cận ngang là $y = 1$.

Mặt khác đồ thị hàm số đi qua điểm $(0; 2)$.

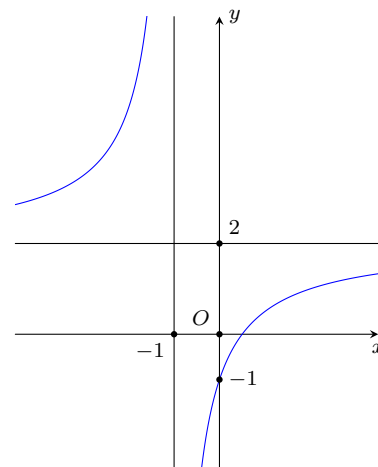
Nên trong các hàm số đã cho chỉ có hàm số $y = \frac{x-2}{x-1}$ thỏa mãn.

Chọn đáp án (D)

CÂU 9.

Đường cong ở hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?

- (A) $y = \frac{1-2x}{x+1}$. (B) $y = \frac{2x+1}{x+1}$. (C) $y = \frac{2x+1}{x-1}$. (D) $y = \frac{2x-1}{x+1}$.



Lời giải.

Hàm số có đồ thị trong đề bài có dạng $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ với $c \neq 0$, $ad - bc \neq 0$.

Dựa vào đồ thị ta có đường thẳng $x = -1$ là tiệm cận đứng, $y = 2$ là tiệm cận ngang, đồ thị hàm số đi qua điểm $(0; -1)$.

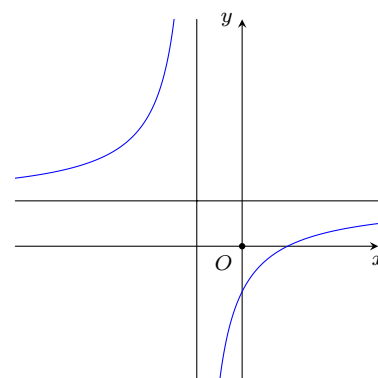
Trong các hàm số đã cho, chỉ có hàm số $y = \frac{2x-1}{x+1}$ là thỏa mãn.

Chọn đáp án (D)

CÂU 10.

Đường cong ở hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?

- (A) $y = \frac{x+2}{x+1}$. (B) $y = x^3 - 3x^2 + 1$.
(C) $y = \frac{x-1}{x+1}$. (D) $y = -x^4 + 2x^2 + 1$.



Lời giải.

Nhìn vào đồ thị hàm số ta thấy đây là đồ thị hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ với $c \neq 0$, $ad - bc \neq 0$.

Cũng từ đồ thị hàm số suy ra hàm số đồng biến trên mỗi khoảng xác định của nó.

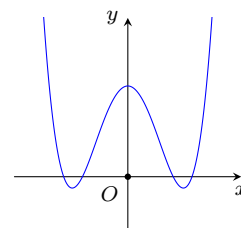
Trong các hàm số đã cho, chỉ có hàm số $y = \frac{x-1}{x+1}$ là thỏa mãn.

Chọn đáp án (C)

CÂU 11.

Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng đường cong như hình vẽ?

- (A) $y = x^3 - 2x^2 - 2$. (B) $y = x^3 - 3x^2 + 2$.
(C) $y = -x^4 + 3x^2 + 2$. (D) $y = x^4 - 3x^2 + 2$.



Lời giải.

Đồ thị hàm số là đồ thị của hàm số dạng $y = ax^4 + bx^2 + c$ có hệ số $a > 0$.

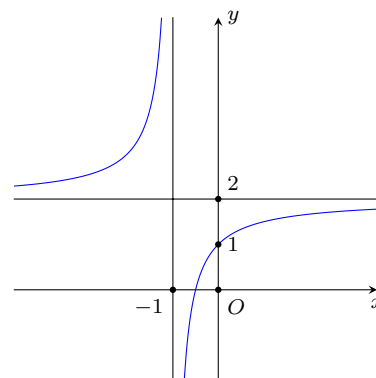
Nên chỉ có hàm số $y = x^4 - 3x^2 + 2$ thỏa mãn.

Chọn đáp án (D)

CÂU 12.

Đường cong ở hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?

- (A) $y = \frac{x-1}{x+1}$. (B) $y = \frac{x+2}{x+1}$. (C) $y = \frac{2x+1}{x+1}$. (D) $y = \frac{x+3}{1-x}$.



Lời giải.

Dựa vào đồ thị ta có đường thẳng $x = -1$ là tiệm cận đứng, $y = 2$ là tiệm cận ngang.

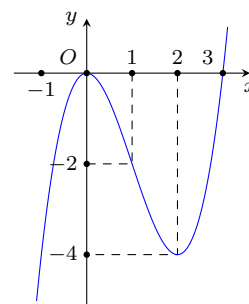
Trong các hàm số đã cho, chỉ có hàm số $y = \frac{2x+1}{x+1}$ là thỏa mãn.

Chọn đáp án (C)

CÂU 13.

Đồ thị sau đây là của hàm số nào?

- (A) $y = x^3 + 3x^2$. (B) $y = x^3 + 3x$. (C) $y = x^3 - 3x^2$. (D) $y = x^3 - 3x$.



Lời giải.

Ta có

☑ Đồ thị hàm số đi qua điểm có tọa độ $(1; -2)$ nên loại $y = x^3 + 3x^2$ và $y = x^3 + 3x$.

☑ Đồ thị hàm số đi qua điểm có tọa độ $(2; -4)$ nên loại $y = x^3 - 3x$.

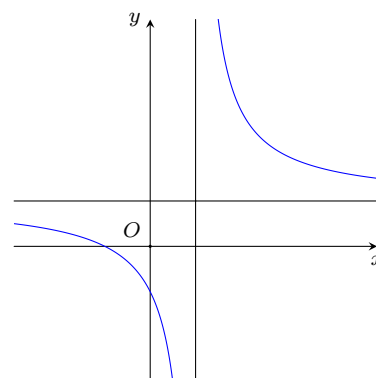
Vậy chỉ có hàm số $y = x^3 - 3x^2$ thỏa mãn.

Chọn đáp án (C)

CÂU 14.

Đường cong ở hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?

- (A) $y = \frac{x+1}{x-1}$. (B) $y = x^4 + x^2 + 1$. (C) $y = x^3 - 3x - 1$. (D) $y = \frac{2x-1}{x-1}$.



Lời giải.

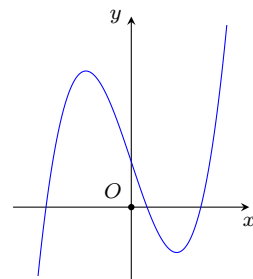
Đồ thị hàm số đã cho có đường tiệm cận đứng $x = x_0 > 0$ và đường tiệm cận ngang là $y = y_0 > 0$, cắt trục tung tại điểm có tung độ $y = y_1 < 0$, nên trong các hàm số đã cho chỉ có hàm số $y = \frac{x+1}{x-1}$ thỏa mãn.

Chọn đáp án (A)

CÂU 15.

Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?

- (A) $y = -x^3 + 3x + 1$. (B) $y = x^4 - 3x^2 + 1$. (C) $y = x^3 - 3x + 1$. (D) $y = x^2 - 3x + 1$.



Lời giải.

Đồ thị hàm số là đồ thị của hàm số bậc ba có hệ số $a > 0$.

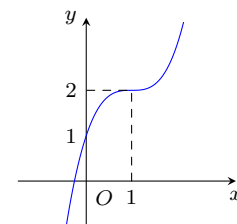
Nên chỉ có hàm số $y = x^3 - 3x + 1$ thỏa mãn.

Chọn đáp án (C)

CÂU 16.

Hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào?

- (A) $y = x^3 - 3x + 1$. (B) $y = x^4 - 2x^2 + 3$.
(C) $y = x^3 - 3x^2 + 3x + 1$. (D) $y = -x^3 - 3x^2 - 1$.



Lời giải.

Vì đồ thị hàm số đi qua các điểm $(0; 1)$ và $(1; 2)$.

Nên chỉ có hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 3x + 1$ thỏa mãn.

Chọn đáp án (C)

CÂU 17. Hàm số nào sau đây có bảng biến thiên như hình dưới?

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	2	-2	$+\infty$	

- (A) $y = -x^3 + 3x^2 + 1$. (B) $y = -x^3 + 3x$. (C) $y = x^3 - 3x^2 - 1$. (D) $y = x^3 - 3x$.

Lời giải.

Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$ nên loại hai hàm số $y = -x^3 + 3x^2 + 1$ và $y = -x^3 + 3x$.

Phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm $x = \pm 1$.

Hàm số $y = x^3 - 3x$ có $y' = 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$.

Do đó hàm số $y = x^3 - 3x$ thỏa mãn.

Chọn đáp án (D)

CÂU 18. Hàm số nào sau đây có bảng biến thiên như hình dưới?

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$		
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$			4		$-\infty$
			0			

- (A) $y = x^4 - 2x^2 - 3$. (B) $y = -x^3 + 3x + 2$. (C) $y = x^3 - 3x + 4$. (D) $y = \frac{x-1}{2x-1}$.

Lời giải.

Bảng biến thiên của hàm số bậc ba có hệ số $a < 0$.

Nên chỉ có hàm số $y = -x^3 + 3x + 2$ thỏa mãn.

Chọn đáp án (B)

CÂU 19. Hàm số nào sau đây có bảng biến thiên như hình dưới?

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$		-3		$-\infty$
		-4		-4	

- (A) $y = 2|x^3| - 3x^2 - 3$. (B) $y = 2x^4 - 4x^2 - 3$. (C) $y = 2|x^3| - 3|x| - 3$. (D) $y = \frac{1}{2}x^4 - x^2 - 3$.

Lời giải.

Từ bảng biến thiên ta có

☑ $y(\pm 1) = -4$ nên loại $y = 2x^4 - 4x^2 - 3$ và $y = \frac{1}{2}x^4 - x^2 - 3$.

☑ Hàm số $y = 2|x^3| - 3|x| - 3$ không có đạo hàm tại $x = 0$ nên hàm số $y = 2|x^3| - 3|x| - 3$ không thỏa mãn.

Vậy hàm số $y = 2|x^3| - 3x^2 - 3$ thỏa mãn.

Chọn đáp án (A)

CÂU 20. Hàm số nào sau đây có bảng biến thiên như hình dưới?

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$-$
$f(x)$	-2		$-\infty$

- (A) $y = \frac{-2x+3}{x+1}$. (B) $y = \frac{-2x-4}{x+1}$. (C) $y = \frac{x-4}{2x+2}$. (D) $y = \frac{2-x}{x+1}$.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên ta có tiệm cận đứng của đồ thị hàm số là đường thẳng $x = -1$; tiệm cận ngang là đường thẳng $y = -2$.

Ta cũng có $y' < 0, \forall x \neq -1$.

Trong các hàm số đã cho, chỉ có hàm số $y = \frac{-2x+3}{x+1}$ thỏa mãn.

Chọn đáp án (A)

D. BẢNG ĐÁP ÁN

1. B	2. D	3. B	4. A	5. D	6. C	7. A	8. D
9. D	10. C	11. D	12. C	13. C	14. A	15. C	16. C
		17. D	18. B	19. A	20. A		

Bài 10. PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

- ☑ Mặt cầu $(S): (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$ có tâm $I(a; b; c)$, bán kính R .
 ☑ Mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$ (với $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$) có tâm $I(a; b; c)$, bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$.

B. BÀI TẬP MẪU

VÍ DỤ 40 (Đề minh họa BGD 2022-2023). Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z + 1 = 0$. Tâm của (S) có tọa độ là

- (A) $(-1; -2; -3)$. (B) $(2; 4; 6)$. (C) $(-2; -4; -6)$. (D) $(1; 2; 3)$.

Lời giải.

Gọi $I(a; b; c)$ là tâm của mặt cầu (S) , ta có
$$\begin{cases} -2a = -2 \\ -2b = -4 \\ -2c = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ c = 3. \end{cases}$$

Do đó tâm của (S) có tọa độ là $I(1; 2; 3)$.

Chọn đáp án (D) □

C. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN

CÂU 1. Trong không gian $Oxyz$, tâm của mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y + 6z - 2 = 0$ là

- (A) $B(-2; 1; 3)$. (B) $D(2; -1; -3)$. (C) $A(-4; 2; 6)$. (D) $C(4; -2; -6)$.

☞ **Lời giải.**

Mặt cầu (S) có tâm $D(2; -1; -3)$.

Chọn đáp án (B) □

CÂU 2. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 6y - 8z - 10 = 0$. Bán kính R của mặt cầu (S) là

- (A) $R = 36$. (B) $R = \sqrt{6}$. (C) $R = \sqrt{114}$. (D) $R = 6$.

☞ **Lời giải.**

Mặt cầu (S) có tâm $I(1; -3; 4)$ và bán kính $R = \sqrt{1^2 + (-3)^2 + 4^2 - (-10)} = 6$.

Chọn đáp án (D) □

CÂU 3. Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu $(S): (x + 4)^2 + (y - 5)^2 + (z + 6)^2 = 9$ có tâm và bán kính lần lượt là

- (A) $I(4; -5; 6)$, $R = 81$. (B) $I(-4; 5; -6)$, $R = 81$. (C) $I(4; -5; 6)$, $R = 3$. (D) $I(-4; 5; -6)$, $R = 3$.

☞ **Lời giải.**

Tọa độ tâm và bán kính mặt cầu lần lượt là $I(-4; 5; -6)$, $R = 3$.

Chọn đáp án (D) □

CÂU 4. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x - 1)^2 + (y + 3)^2 + (z - 4)^2 = 4$. Tìm tọa độ tâm I và bán kính R của mặt cầu (S) là

- (A) $I(1; -3; 4)$, $R = 4$. (B) $I(-1; 3; -4)$, $R = 4$. (C) $I(-1; 3; -4)$, $R = 2$. (D) $I(1; -3; 4)$, $R = 2$.

☞ **Lời giải.**

Ta có tâm $I(1; -3; 4)$, $R = 2$.

Chọn đáp án (D) □

CÂU 5. Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 2z - 10 = 0$ có bán kính bằng

- (A) 6. (B) 3. (C) 4. (D) 5.

☞ **Lời giải.**

Bán kính của mặt cầu là $R = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 1^2 - (-10)} = 4$.

Chọn đáp án (C) □

CÂU 6. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x - 2)^2 + (y + 4)^2 + (z - 1)^2 = 9$. Tâm của (S) có tọa độ là

- (A) $(2; 4; 1)$. (B) $(-2; -4; -1)$. (C) $(-2; 4; -1)$. (D) $(2; -4; 1)$.

☞ **Lời giải.**

Mặt cầu (S) có tâm $I(2; -4; 1)$.

Chọn đáp án (D) □

CÂU 7. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y - 8z - 3 = 0$. Tâm của (S) có tọa độ là

- (A) $(4; -6; 8)$. (B) $(2; -3; 4)$. (C) $(-4; 6; -8)$. (D) $(-2; 3; -4)$.

☞ **Lời giải.**

Mặt cầu (S) có tâm $I(2; -3; 4)$.

Chọn đáp án (B) □

CÂU 8. Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu $(S): (x + 1)^2 + (y - 2)^2 + (z + 3)^2 = 4$ có tâm và bán kính lần lượt là

- (A) $I(-1; 2; -3)$, $R = 2$. (B) $I(1; -2; 3)$, $R = 2$. (C) $I(1; -2; 3)$, $R = 4$. (D) $I(-1; 2; -3)$, $R = 4$.

☞ **Lời giải.**

Tọa độ tâm và bán kính lần lượt là $I(-1; 2; -3)$, $R = 2$.

Chọn đáp án (A) □

CÂU 9. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x - 1)^2 + (y - 2)^2 + z^2 = 16$. Tâm của (S) có tọa độ là

- (A) $(1; -2; 0)$. (B) $(-1; 2; 0)$. (C) $(-1; -2; 0)$. (D) $(1; 2; 0)$.

☞ **Lời giải.**

Tâm của mặt cầu (S) có tọa độ là $(1; 2; 0)$.

Chọn đáp án **(D)**

CÂU 10. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S): $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z - 2 = 0$. Tọa độ tâm I của mặt cầu (S) là

- (A)** $I(2; 4; 6)$. **(B)** $I(-2; -4; -6)$. **(C)** $I(1; 2; 3)$. **(D)** $I(-1; -2; -3)$.

Lời giải.

Tọa độ tâm của mặt cầu (S) là $I(1; 2; 3)$.

Chọn đáp án **(C)**

CÂU 11. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S): $(x + 3)^2 + (y + 1)^2 + (z - 1)^2 = 2$. Xác định tọa độ tâm của mặt cầu (S).

- (A)** $(-3; -1; 1)$. **(B)** $(3; -1; 1)$. **(C)** $(-3; 1; -1)$. **(D)** $(3; 1; -1)$.

Lời giải.

Mặt cầu (S) có tâm là $I(-3; -1; 1)$.

Chọn đáp án **(A)**

CÂU 12. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S): $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 3)^2 = 9$. Tâm I và bán kính R của mặt cầu là

- (A)** $I(1; 2; 3)$, $R = 3$. **(B)** $I(-1; 2; -3)$, $R = 3$. **(C)** $I(1; -2; 3)$, $R = 3$. **(D)** $I(1; 2; -3)$, $R = 3$.

Lời giải.

Mặt cầu (S) có tâm $I(1; -2; 3)$, bán kính $R = 3$.

Chọn đáp án **(C)**

CÂU 13. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S): $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 4y - 8z + 4 = 0$. Tìm tọa độ tâm I và tính bán kính R của mặt cầu (S).

- (A)** $I(-3; 2; -4)$, $R = 5$. **(B)** $I(3; -2; 4)$, $R = 5$. **(C)** $I(-3; 2; -4)$, $R = 25$. **(D)** $I(3; -2; 4)$, $R = 25$.

Lời giải.

Mặt cầu (S) có tâm $I(3; -2; 4)$, bán kính $R = \sqrt{3^2 + (-2)^2 + 4^2 - 4} = 5$.

Chọn đáp án **(B)**

CÂU 14. Trong không gian $Oxyz$, tâm của mặt cầu (S): $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y + 6z - 1 = 0$ có tọa độ là

- (A)** $(1; -2; 3)$. **(B)** $(2; -4; 6)$. **(C)** $(-2; 4; -6)$. **(D)** $(-1; 2; -3)$.

Lời giải.

Tâm của mặt cầu (S) là $I(-1; 2; -3)$.

Chọn đáp án **(D)**

CÂU 15. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S): $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 1 = 0$. Tâm của mặt cầu (S) có tọa độ là

- (A)** $(-1; 2; 0)$. **(B)** $(2; -1; 0)$. **(C)** $(1; -2; 0)$. **(D)** $(-2; 1; 0)$.

Lời giải.

Tọa độ tâm của mặt cầu (S) đã cho là $I(1; -2; 0)$.

Chọn đáp án **(C)**

CÂU 16. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình (S): $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 4y + 8z = 0$. Tìm tọa độ tâm I và bán kính R .

- (A)** $I(2; -2; 4)$, $R = 2\sqrt{6}$. **(B)** $I(-2; 2; -4)$, $R = 24$. **(C)** $I(2; -2; 4)$, $R = 24$. **(D)** $I(-2; 2; -4)$, $R = 2\sqrt{6}$.

Lời giải.

Mặt cầu (S) có tâm $I(-2; 2; -4)$ và bán kính $R = \sqrt{(-2)^2 + 2^2 + (-4)^2} = 2\sqrt{6}$.

Chọn đáp án **(D)**

CÂU 17. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S): $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z - 12 = 0$, gọi $I(a; b; c)$ là tâm của mặt cầu (S). Tính $T = a + b - c$.

- (A)** 2. **(B)** -4. **(C)** 4. **(D)** 5.

Lời giải.

Mặt cầu (S) có tâm $I(1; -2; 3)$; suy ra $a = 1$, $b = -2$, $c = 3$.

Vậy $T = a + b - c = -4$.

Chọn đáp án **(B)**

CÂU 18. Trong không gian $Oxyz$, tâm I của mặt cầu (S): $x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 2y + 1 = 0$ có tọa độ là

- (A)** $I(4; 1; 0)$. **(B)** $I(4; -1; 0)$. **(C)** $(-4; 1; 0)$. **(D)** $(-4; -1; 0)$.

Lời giải.

Tọa độ tâm I của mặt cầu (S) là $I(4; 1; 0)$.

Chọn đáp án **(A)**

CÂU 19. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z+3)^2 = 16$. Tọa độ tâm I của (S) là

- (A) $I(-1; -2; -3)$. (B) $I(-1; 2; 3)$. (C) $I(1; -2; -3)$. (D) $I(1; -2; 3)$.

☞ **Lời giải.**

Tọa độ tâm I là $I(1; -2; -3)$.

Chọn đáp án (C) □

CÂU 20. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 6z + 10 = 0$ có bán kính R bằng

- (A) $R = 1$. (B) $R = 2$. (C) $R = 3$. (D) $R = 4$.

☞ **Lời giải.**

Ta có $a = 1, b = 2, c = -3, d = 10$.

Suy ra $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d} = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-3)^2 - 10} = 2$.

Chọn đáp án (B) □

D. BẢNG ĐÁP ÁN

1. B	2. D	3. D	4. D	5. C	6. D	7. B	8. A
9. D	10. C	11. A	12. C	13. B	14. D	15. C	16. D
		17. B	18. A	19. C	20. B		

Bài 11. GÓC GIỮA HAI MẶT PHẪNG

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

☑ Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ và $(Q): a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$. Khi đó

$$\cos((P), (Q)) = |\cos(\vec{n}_{(P)}, \vec{n}_{(Q)})| = \frac{|a_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot b_2 + c_1 \cdot c_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}.$$

☑ Lưu ý: $0^\circ \leq ((P), (Q)) \leq 90^\circ$.

B. BÀI TẬP MẪU

VÍ DỤ 11 (Đề minh họa BGD 2022-2023). Trong không gian $Oxyz$, góc giữa hai mặt phẳng (Oxy) và (Oyz) bằng

- (A) 30° . (B) 45° . (C) 60° . (D) 90° .

☞ **Lời giải.**

Mặt phẳng (Oxy) và (Oyz) vuông góc với nhau nên góc giữa chúng bằng 90° .

Chọn đáp án (D) □

C. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN

CÂU 1. Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): x - 2y - z + 1 = 0$ và $(Q): x + y + 2z + 7 = 0$. Tính góc giữa hai mặt phẳng đó.

- (A) 30° . (B) 60° . (C) 45° . (D) 120° .

☞ **Lời giải.**

$\vec{n}_P = (1; -2; -1)$ là một vectơ pháp tuyến của (P) .

$\vec{n}_Q = (1; 1; 2)$ là một vectơ pháp tuyến của (Q) .

Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) , ta có

$$\cos \alpha = \frac{|\vec{n}_P \cdot \vec{n}_Q|}{|\vec{n}_P| \cdot |\vec{n}_Q|} = \frac{|1 - 2 - 2|}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{6}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 60^\circ.$$

Chọn đáp án (B) □

CÂU 2. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x - z - 3 = 0$. Tính góc giữa (P) và mặt phẳng (Oxy) .

- (A) 45° . (B) 90° . (C) 30° . (D) 60° .

☞ **Lời giải.**

Mặt phẳng (P) có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}_1 = (1; 0; -1)$, mặt phẳng (Oxy) có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}_2 = (0; 0; 1)$.
Gọi α là góc giữa mặt phẳng (P) và mặt phẳng (Oxy) , ta có $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \alpha = 45^\circ$.

Chọn đáp án (A)

CÂU 3. Trong không gian $Oxyz$, biết hình chiếu của O lên mặt phẳng (P) là $H(2; -1; -2)$. Số đo góc giữa mặt phẳng (P) với mặt phẳng $(Q): x - y - 5 = 0$ là

- (A) 90° . (B) 60° . (C) 45° . (D) 30° .

Lời giải.

Gọi α là góc giữa mặt phẳng (P) với mặt phẳng (Q) .

Ta có $\vec{OH} = (2; -1; -2)$ là một véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) , $\vec{n} = (1; -1; 0)$ là một véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (Q) .

$$\text{Khi đó } \cos \alpha = \left| \cos(\vec{OH}, \vec{n}) \right| = \frac{|\vec{OH} \cdot \vec{n}|}{|\vec{OH}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \alpha = 45^\circ.$$

Chọn đáp án (C)

CÂU 4. Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): x - y - 6 = 0$ và (Q) . Biết rằng điểm $H(2; -1; -2)$ là hình chiếu vuông góc của gốc tọa độ $O(0; 0; 0)$ xuống mặt phẳng (Q) . Số đo góc giữa mặt phẳng (P) và mặt phẳng (Q) bằng

- (A) 45° . (B) 60° . (C) 30° . (D) 90° .

Lời giải.

Mặt phẳng (P) có một véc-tơ pháp tuyến $\vec{n} = (1; -1; 0)$.

Vì $H(2; -1; -2)$ là hình chiếu vuông góc của gốc tọa độ $O(0; 0; 0)$ xuống mặt phẳng (Q) nên (Q) nhận $\vec{OH} = (2; -1; -2)$ là véc-tơ pháp tuyến.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \cos((P), (Q)) &= \left| \cos(\vec{n}, \vec{OH}) \right| = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{OH}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{OH}|} \\ &= \frac{|1 \cdot 2 + (-1) \cdot (-1) + 0 \cdot (-2)|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 0^2} \sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-2)^2}} \\ &= \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

Vậy góc giữa mặt phẳng (P) và mặt phẳng (Q) bằng 45° .

Chọn đáp án (A)

CÂU 5. Trong không gian $Oxyz$, góc giữa mặt phẳng $(\alpha): \sqrt{2}x + y + z - 5 = 0$ và mặt phẳng (Oxy) là

- (A) 90° . (B) 30° . (C) 45° . (D) 60° .

Lời giải.

Ta có véc-tơ pháp tuyến của (α) và (Oxy) lần lượt là $\vec{n} = (\sqrt{2}; 1; 1)$ và $\vec{k} = (0; 0; 1)$.

$$\text{Gọi } \varphi \text{ là góc giữa mặt phẳng } (\alpha) \text{ và } (Oxy), \text{ khi đó } \cos \varphi = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{k}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{k}|} = \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi = 60^\circ.$$

Chọn đáp án (D)

CÂU 6. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $H(2; -1; -2)$ là hình chiếu vuông góc của gốc tọa độ O xuống mặt phẳng (P) , số đo góc giữa mặt (P) và mặt phẳng $(Q): x - y - 11 = 0$ bằng bao nhiêu?

- (A) 90° . (B) 60° . (C) 45° . (D) 30° .

Lời giải.

Vì $H(2; -1; -2)$ là hình chiếu vuông góc của O xuống mặt (P) nên $OH \perp (P)$.

Do đó (P) có véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}_{(P)} = (2; -1; -2)$.

(Q) có véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}_{(Q)} = (1; -1; 0)$.

$$\cos((P), (Q)) = \left| \cos(\vec{n}_{(P)}, \vec{n}_{(Q)}) \right| = \frac{|\vec{n}_{(P)} \cdot \vec{n}_{(Q)}|}{|\vec{n}_{(P)}| \cdot |\vec{n}_{(Q)}|} = \frac{|2 \cdot 1 - 1 \cdot (-1) - 2 \cdot 0|}{\sqrt{4 + 1 + 4} \cdot \sqrt{1 + 1 + 0}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Suy ra $((P), (Q)) = 45^\circ$.

Chọn đáp án (C)

CÂU 7. Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): x - 2y - z + 2 = 0$ và $(Q): 2x - y + z + 1 = 0$. Góc giữa (P) và (Q) là

- (A) 120° . (B) 90° . (C) 30° . (D) 60° .

Lời giải.

(P): $x - 2y - z + 2 = 0$ có véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}_1 = (1; -2; -1)$.

(Q): $2x - y + z + 1 = 0$ có véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}_2 = (2; -1; 1)$.

Áp dụng công thức

$$\cos((P), (Q)) = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{|1 \cdot 2 + (-2) \cdot (-1) + (-1) \cdot 1|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + (-1)^2} \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \frac{1}{2}.$$

Suy ra góc giữa (P) và (Q) là 60° .

Chọn đáp án (D) □

CÂU 8. Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng (P): $x + (m+1)y - 2z + m = 0$ và (Q): $2x - y + 3 = 0$, với m là tham số thực. Để (P) vuông góc với (Q) thì giá trị của m bằng bao nhiêu?

(A) $m = 3$.

(B) $m = -1$.

(C) $m = -5$.

(D) $m = 1$.

☞ **Lời giải.**

Mặt phẳng (P) có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}_1 = (1; m+1; -2)$, mặt phẳng (Q) có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}_2 = (2; -1; 0)$.

Để $(P) \perp (Q) \Leftrightarrow \vec{n}_1 \perp \vec{n}_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0 \Leftrightarrow 2 - m - 1 = 0 \Leftrightarrow m = 1$.

Chọn đáp án (D) □

CÂU 9. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) đi qua các điểm $A(-2; 0; 0)$, $B(0; 3; 0)$, $C(0; 0; -3)$. Mặt phẳng (P) vuông góc với mặt phẳng nào trong các mặt phẳng sau?

(A) $3x - 2y + 2z + 6 = 0$.

(B) $x - 2y - z - 3 = 0$.

(C) $2x + 2y - z - 1 = 0$.

(D) $x + y + z + 1 = 0$.

☞ **Lời giải.**

Mặt phẳng (P) cắt các trục tọa độ Ox , Oy , Oz lần lượt tại các điểm $A(-2; 0; 0)$, $B(0; 3; 0)$, $C(0; 0; -3)$.

Áp dụng phương trình của mặt phẳng theo đoạn chắn, ta có phương trình của mặt phẳng (P) là

$$\frac{x}{-2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{-3} = 1 \Leftrightarrow 3x - 2y + 2z + 6 = 0.$$

Mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến $\vec{n}_{(P)} = (3; -2; 2)$.

☑ Mặt phẳng $3x - 2y + 2z + 6 = 0$ trùng với mặt phẳng (P) nên loại $3x - 2y + 2z + 6 = 0$.

☑ Mặt phẳng $x - 2y - z - 3 = 0$ có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}_1 = (1; -2; -1)$. Ta có $\vec{n}_{(P)} \cdot \vec{n}_1 = 5 \neq 0$ nên loại $x - 2y - z - 3 = 0$.

☑ Mặt phẳng $2x + 2y - z - 1 = 0$ có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}_2 = (2; 2; -1)$. Ta có $\vec{n}_{(P)} \cdot \vec{n}_2 = 0$ nên chọn $2x + 2y - z - 1 = 0$.

☑ Mặt phẳng $x + y + z + 1 = 0$ có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}_3 = (1; 1; 1)$. Ta có $\vec{n}_{(P)} \cdot \vec{n}_3 = 3 \neq 0$ nên loại $x + y + z + 1 = 0$.

Chọn đáp án (C) □

CÂU 10. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $x - my + z - 1 = 0$ ($m \in \mathbb{R}$), mặt phẳng (Q) chứa trục Ox và qua điểm $A(1; -3; 1)$. Tìm số thực m để hai mặt phẳng (P), (Q) vuông góc.

(A) $m = -\frac{1}{3}$.

(B) $m = \frac{1}{3}$.

(C) $m = 3$.

(D) $m = -3$.

☞ **Lời giải.**

Ta có $\vec{OA} = (1; -3; 1)$, $\vec{i} = (1; 0; 0)$.

Mặt phẳng (Q) qua điểm $A(1; -3; 1)$ và chứa trục Ox suy ra (Q) có véc-tơ pháp tuyến

$\vec{n}_Q = [\vec{OA}, \vec{i}] = (0; 1; 3)$.

Mặt phẳng (P) có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}_P = (1; -m; 1)$.

$$(P) \perp (Q) \Leftrightarrow \vec{n}_P \cdot \vec{n}_Q = 0 \Leftrightarrow 0 \cdot 1 + 1 \cdot (-m) + 1 \cdot 3 = 0 \Leftrightarrow m = 3.$$

Chọn đáp án (C) □

CÂU 11. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng (P): $x + 2y - 2z + 3 = 0$, mặt phẳng (Q): $x - 3y + 5z - 2 = 0$. Cô-sin của góc giữa hai mặt phẳng (P), (Q) là

(A) $-\frac{5}{7}$.

(B) $-\frac{\sqrt{35}}{7}$.

(C) $\frac{5}{7}$.

(D) $\frac{\sqrt{35}}{7}$.

☞ **Lời giải.**

Ta có véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) là $\vec{n}_{(P)} = (1; 2; -2)$, véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (Q) là $\vec{n}_{(Q)} = (1; -3; 5)$.

Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (P), (Q) ta có

$$\cos \alpha = \frac{|\vec{n}_{(P)} \cdot \vec{n}_{(Q)}|}{|\vec{n}_{(P)}| \cdot |\vec{n}_{(Q)}|} = \frac{|1 \cdot 1 + 2 \cdot (-3) - 2 \cdot 5|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2} \cdot \sqrt{1^2 + (-3)^2 + 5^2}} = \frac{15}{3\sqrt{35}} = \frac{\sqrt{35}}{7}.$$

Chọn đáp án (D) □

CÂU 12. Trong không gian $Oxyz$, gọi α là góc giữa hai mặt phẳng $(P): x - \sqrt{3}y + 2z + 1 = 0$ và mặt phẳng (Oxy) . Khẳng định nào sau đây đúng?

- (A) $\alpha = 30^\circ$. (B) $\alpha = 60^\circ$. (C) $\alpha = 90^\circ$. (D) $\alpha = 45^\circ$.

Lời giải.

Mặt phẳng (P) có một véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}_{(P)} = (1; -\sqrt{3}; 2)$.

Mặt phẳng $(Oxy): z = 0$ có một véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n} = (0; 0; 1)$.

Ta có $\cos \alpha = \frac{|\vec{n}_{(P)} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}_{(P)}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \alpha = 45^\circ$.

Chọn đáp án (D) □

CÂU 13. Trong hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): \frac{x-2}{3} + \frac{y-1}{2} + \frac{z-4}{-6} = 1$ và $(Q): x + 2y + 3z + 7 = 0$. Tính tan góc tạo bởi hai mặt phẳng đã cho.

- (A) $\frac{3}{\sqrt{19}}$. (B) $\frac{3}{5\sqrt{19}}$. (C) $\frac{5}{3\sqrt{19}}$. (D) $\frac{3\sqrt{19}}{5}$.

Lời giải.

Ta có $(P): \frac{x-2}{3} + \frac{y-1}{2} + \frac{z-4}{-6} = 1 \Leftrightarrow (P): 2x + 3y - z - 9 = 0$ suy ra (P) có một véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}_{(P)} = (2; 3; -1)$.

$(Q): x + 2y + 3z + 7 = 0 \Rightarrow (Q)$ có một véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}_{(Q)} = (1; 2; 3)$.

Gọi α ($0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$) là góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) . Ta có

$$\cos \alpha = \frac{|\vec{n}_{(P)} \cdot \vec{n}_{(Q)}|}{|\vec{n}_{(P)}| \cdot |\vec{n}_{(Q)}|} = \frac{|2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + (-1) \cdot 3|}{\sqrt{2^2 + 3^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2}} = \frac{5}{14}.$$

Từ đó ta tìm được

$$\tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} - 1 = \frac{171}{25} \Rightarrow \tan \alpha = \frac{3\sqrt{19}}{5}.$$

Chọn đáp án (D) □

CÂU 14. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x - 2y + 2z - 5 = 0$. Xét mặt phẳng $(Q): x + (2m - 1)z + 7 = 0$, với m là tham số thực. Tìm tất cả giá trị của m để (P) tạo với (Q) góc $\frac{\pi}{4}$.

- (A) $\begin{cases} m = 1 \\ m = 4 \end{cases}$. (B) $\begin{cases} m = 2 \\ m = -2\sqrt{2} \end{cases}$. (C) $\begin{cases} m = 2 \\ m = 4 \end{cases}$. (D) $\begin{cases} m = 4 \\ m = \sqrt{2} \end{cases}$.

Lời giải.

Mặt phẳng $(P), (Q)$ có véc-tơ pháp tuyến lần lượt là $\vec{n}_{(P)} = (1; -2; 2)$, $\vec{n}_{(Q)} = (1; 0; 2m - 1)$. Vì (P) tạo với (Q) góc $\frac{\pi}{4}$ nên

$$\begin{aligned} \cos \frac{\pi}{4} &= |\cos(\vec{n}_{(P)}, \vec{n}_{(Q)})| \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{|1 + 2(2m - 1)|}{3 \cdot \sqrt{1 + (2m - 1)^2}} \\ &\Leftrightarrow 2(4m - 1)^2 = 9(4m^2 - 4m + 2) \\ &\Leftrightarrow 4m^2 - 20m + 16 = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = 4 \end{cases} \end{aligned}$$

Chọn đáp án (A) □

CÂU 15. Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(\alpha): x + y + z - 1 = 0$ và $(\beta): 2x - y + mz - m + 1 = 0$, với m là tham số thực. Giá trị của m để $(\alpha) \perp (\beta)$ là

- (A) 1. (B) -4. (C) -1. (D) 0.

Lời giải.

Mặt phẳng (α) có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}_{(\alpha)} = (1; 1; 1)$ và (β) có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}_{(\beta)} = (2; -1; m)$.

Ta có $(\alpha) \perp (\beta) \Leftrightarrow \vec{n}_{(\alpha)} \perp \vec{n}_{(\beta)} \Leftrightarrow \vec{n}_{(\alpha)} \cdot \vec{n}_{(\beta)} = 0 \Leftrightarrow 1 + m = 0 \Leftrightarrow m = -1$.

Chọn đáp án (C) □

CÂU 16. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha): 2x - y + z - 3 = 0$ và $(\beta): 3x - 4y + 5z = 0$. Góc tạo bởi hai mặt phẳng (α) và (β) bằng

- (A) 90° . (B) 30° . (C) 60° . (D) 45° .

Lời giải.

Gọi φ là góc tạo bởi hai mặt phẳng (α) và (β) .

Ta có $\vec{n}_{(\alpha)} = (2; -1; 1)$, $\vec{n}_{(\beta)} = (3; -4; 5)$. Suy ra

$$\cos \varphi = \frac{|\vec{n}_{(\alpha)} \cdot \vec{n}_{(\beta)}|}{|\vec{n}_{(\alpha)}| \cdot |\vec{n}_{(\beta)}|} = \frac{|6 + 4 + 5|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2} \cdot \sqrt{3^2 + (-4)^2 + 5^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \varphi = 30^\circ.$$

Chọn đáp án (B) □

CÂU 17. Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): x - y - 6 = 0$ và (Q) . Biết rằng điểm $H(2; -1; -2)$ là hình chiếu vuông góc của gốc tọa độ $O(0; 0; 0)$ xuống mặt phẳng (Q) . Số đo góc giữa mặt phẳng (P) và mặt phẳng (Q) bằng

(A) 60° .

(B) 45° .

(C) 30° .

(D) 90° .

Lời giải.

Ta có $(P): x - y - 6 = 0 \Rightarrow \vec{n}_{(P)} = (1; -1; 0)$.

Theo giả thiết điểm $H(2; -1; -2)$ là hình chiếu vuông góc của gốc tọa độ $O(0; 0; 0)$ xuống mặt phẳng (Q) nên $\vec{n}_{(Q)} = \overrightarrow{OH} = (2; -1; -2)$. Do đó

$$\cos \left(\widehat{(P), (Q)} \right) = \frac{|\vec{n}_{(P)} \cdot \vec{n}_{(Q)}|}{|\vec{n}_{(P)}| \cdot |\vec{n}_{(Q)}|} = \frac{|1 \cdot 2 + (-1) \cdot (-1) + 0 \cdot (-2)|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 0^2} \cdot \sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-2)^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Suy ra $\left(\widehat{(P), (Q)} \right) = 45^\circ$.

Chọn đáp án (B) □

CÂU 18. Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng (P) và (Q) lần lượt có hai véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}_{(P)}$ và $\vec{n}_{(Q)}$. Biết góc giữa hai véc-tơ $\vec{n}_{(P)}$ và $\vec{n}_{(Q)}$ bằng 30° . Góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) bằng

(A) 30° .

(B) 45° .

(C) 60° .

(D) 90° .

Lời giải.

Ta có $\left(\widehat{\vec{n}_{(P)}, \vec{n}_{(Q)}} \right) = 30^\circ \Rightarrow \left(\widehat{(P), (Q)} \right) = 30^\circ$.

Chọn đáp án (A) □

CÂU 19. Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng (P) và (Q) lần lượt có hai véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}_{(P)}$ và $\vec{n}_{(Q)}$. Biết góc giữa hai véc-tơ $\vec{n}_{(P)}$ và $\vec{n}_{(Q)}$ bằng 120° . Góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) bằng

(A) 30° .

(B) 45° .

(C) 60° .

(D) 90° .

Lời giải.

Ta có $\left(\widehat{\vec{n}_{(P)}, \vec{n}_{(Q)}} \right) = 120^\circ \Rightarrow \left(\widehat{(P), (Q)} \right) = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$.

Chọn đáp án (C) □

CÂU 20. Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng (P) và (Q) lần lượt có hai véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}_{(P)}$ và $\vec{n}_{(Q)}$. Biết cosin góc giữa hai véc-tơ $\vec{n}_{(P)}$ và $\vec{n}_{(Q)}$ bằng $\frac{1}{2}$. Góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) bằng

(A) 30° .

(B) 45° .

(C) 60° .

(D) 90° .

Lời giải.

Ta có $\cos \left(\widehat{(P), (Q)} \right) = \left| \cos \left(\widehat{\vec{n}_{(P)}, \vec{n}_{(Q)}} \right) \right| = \left| \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2} \Rightarrow \left(\widehat{(P), (Q)} \right) = 60^\circ$.

Chọn đáp án (C) □

D. BẢNG ĐÁP ÁN

1. B	2. A	3. C	4. A	5. D	6. C	7. D	8. D
9. C	10. C	11. D	12. D	13. D	14. A	15. C	16. B
17. B	18. A	19. C	20. C				

Bài 12. CÁC PHÉP TOÁN CƠ BẢN CỦA SỐ PHỨC

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Định nghĩa

- a) Một số phức là một biểu thức dạng $z = a + bi$ với $a, b \in \mathbb{R}$ và $i^2 = -1$, i được gọi là đơn vị ảo, a được gọi là phần thực và b được gọi là phần ảo của số phức $z = a + bi$.

b) Tập hợp các số phức được kí hiệu là \mathbb{C} , $\mathbb{C} = \{a + bi | a, b \in \mathbb{R}; i^2 = -1\}$.

c) Chú ý

- ☑ Khi phần ảo $b = 0 \Leftrightarrow z = a$ là số thực.
- ☑ Khi phần thực $a = 0 \Leftrightarrow z = bi \Leftrightarrow z$ là số thuần ảo.
- ☑ Số $0 = 0 + 0i$ vừa là số thực, vừa là số ảo.

d) Hai số phức bằng nhau $a + bi = c + di \Leftrightarrow \begin{cases} a = c \\ b = d \end{cases}$ với $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

e) Hai số phức $z_1 = a + bi$; $z_2 = -a - bi$ được gọi là hai số phức đối nhau.

2. Số phức liên hợp

Số phức liên hợp của $z = a + bi$ với $a, b \in \mathbb{R}$ là $a - bi$ và được kí hiệu bởi \bar{z} . Rõ ràng $\bar{\bar{z}} = z$

3. Biểu diễn hình học

Trong mặt phẳng phức Oxy (Ox là trục thực, Oy là trục ảo), số phức $z = a + bi$ với $a, b \in \mathbb{R}$ được biểu diễn bằng điểm $M(a; b)$.

4. Mô-đun của số phức

Mô-đun của số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) là $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

5. Các phép toán trên tập số phức

Cho hai số phức $z = a + bi$; $z' = a' + b'i$ với $a, b, a', b' \in \mathbb{R}$ và số $k \in \mathbb{R}$.

- a) Tổng hai số phức: $z + z' = a + a' + (b + b')i$.
- b) Hiệu hai số phức: $z - z' = a - a' + (b - b')i$.
- c) Nhân hai số phức: $z \cdot z' = (a + bi)(a' + b'i) = (a \cdot a' - b \cdot b') + (a \cdot b' + a' \cdot b)i$.
- d) Chia 2 số phức:

☑ Số phức nghịch đảo: $\frac{1}{z} = \frac{1}{|z|^2} \bar{z}$.

☑ Nếu $z \neq 0$ thì $\frac{z'}{z} = \frac{z' \cdot \bar{z}}{|z|^2}$, nghĩa là nếu muốn chia số phức z' cho số phức $z \neq 0$ thì ta nhân cả tử và mẫu của thương $\frac{z'}{z}$ cho \bar{z} .

B. BÀI TẬP MẪU

VÍ DỤ 12 (ĐỀ MINH HỌA BGD 2022-2023). Cho số phức $z = 2 + 9i$, phần thực của số phức z^2 bằng

(A) -77 .

(B) 4 .

(C) 36 .

(D) 85 .

 **Lời giải.**

Ta có $z^2 = (2 + 9i)^2 = 4 + 36i + 81i^2 = -77 + 36i$ nên phần thực của số phức z^2 bằng -77 .

Chọn đáp án (A) □

C. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN

CÂU 1. Số phức liên hợp của $z = (2 + 4i) + (1 - 3i)$ là

(A) $\bar{z} = -3 - i$.

(B) $\bar{z} = 1 + 3i$.

(C) $\bar{z} = 3 + i$.

(D) $\bar{z} = 3 - i$.

 **Lời giải.**

Ta có $z = (2 + 4i) + (1 - 3i) = 3 + i \Rightarrow \bar{z} = 3 - i$.

Chọn đáp án (D) □

CÂU 2. Tìm phần ảo của số phức \bar{z} , biết $z = \frac{(1 + i)3i}{1 - i}$.

(A) 0 .

(B) -1 .

(C) 3 .

(D) -3 .

 **Lời giải.**

Ta có $z = \frac{(1+i)3i}{1-i} = \frac{(1+i)^2 \cdot 3i}{1-i^2} = \frac{2i \cdot 3i}{2} = -3$.

Suy ra $\bar{z} = -3$.

Vậy phần ảo của số phức \bar{z} là 0.

Chọn đáp án (A)

CÂU 3. Số phức liên hợp của số phức $3 - 2i$ là

- (A) $3 + 2i$. (B) $-3 - 2i$. (C) $-2 + 3i$. (D) $-3 + 2i$.

Lời giải.

Số phức liên hợp của số phức $3 - 2i$ là $3 + 2i$.

Chọn đáp án (A)

CÂU 4. Cho các số phức $z_1 = 2 + 3i$, $z_2 = 4 + 5i$. Số phức liên hợp của số phức $w = 2(z_2 - z_1)$ là

- (A) $\bar{w} = 8 - 15i$. (B) $\bar{w} = 4 + 4i$. (C) $\bar{w} = 4 - 4i$. (D) $\bar{w} = 8 + 15i$.

Lời giải.

Ta có $w = 2(z_2 - z_1) = 2[(4 + 5i) - (2 + 3i)] = 4 + 4i \Rightarrow \bar{w} = 4 - 4i$.

Chọn đáp án (C)

CÂU 5. Cho số phức $z = 4 - 2i$. Phần ảo của số phức $3 - 4z$ là

- (A) -4 . (B) -8 . (C) -2 . (D) 8 .

Lời giải.

Ta có $3 - 4z = 3 - 4(4 - 2i) = -13 + 8i$.

Vậy phần ảo của $3 - 4z$ bằng 8.

Chọn đáp án (D)

CÂU 6. Cho số phức $z = 2 - 3i$. Tìm mô-đun của số phức $w = 2z + (1 + i)\bar{z}$.

- (A) $|w| = \sqrt{10}$. (B) $|w| = 4$. (C) $|w| = \sqrt{15}$. (D) $|w| = \sqrt{2}$.

Lời giải.

Ta có $w = (2 - 3i) + (1 + i)(2 + 3i) = 3 - i \Rightarrow |w| = \sqrt{3^2 + (-1)^2} = \sqrt{10}$.

Chọn đáp án (A)

CÂU 7. Phần ảo của số phức $z = (2 - 3i)^2 - (1 + i)^2$ là

- (A) -10 . (B) $-10i$. (C) $-14i$. (D) -14 .

Lời giải.

Ta có $z = (2 - 3i)^2 - (1 + i)^2 = -5 - 14i$.

Suy ra, phần ảo của số phức z là -14 .

Chọn đáp án (D)

CÂU 8. Cho số phức $z = -2 + xi$, ($x \in \mathbb{R}$) có mô-đun bằng

- (A) $\sqrt{x^2 + 2}$. (B) $\sqrt{x^2 + 4}$. (C) $|x| + 2$. (D) $|2x|$.

Lời giải.

Ta có $|z| = |-2 + xi| = \sqrt{(-2)^2 + x^2} = \sqrt{x^2 + 4}$.

Chọn đáp án (B)

CÂU 9. Cho hai số phức $z_1 = 1 + 2i$ và $z_2 = 2 - 3i$. Phần ảo của số phức $w = 3z_1 - 2z_2$ là

- (A) 1. (B) 11. (C) 12. (D) $12i$.

Lời giải.

Ta có $w = 3z_1 - 2z_2 = 3(1 + 2i) - 2(2 - 3i) = -1 + 12i$.

Vậy phần ảo của số phức w là 12.

Chọn đáp án (C)

CÂU 10. Cho số phức z thỏa mãn $z(2 - i) + 13i = 1$. Tính mô-đun của số phức z .

- (A) $|z| = \frac{5\sqrt{34}}{3}$. (B) $|z| = 34$. (C) $|z| = \sqrt{34}$. (D) $|z| = \frac{\sqrt{34}}{3}$.

Lời giải.

Ta có $z(2 - i) + 13i = 1 \Leftrightarrow z = \frac{1 - 13i}{2 - i} = \frac{(1 - 13i)(2 + i)}{5} = \frac{15 - 25i}{5} = 3 - 5i$.

Suy ra $|z| = \sqrt{3^2 + (-5)^2} = \sqrt{34}$.

Chọn đáp án (C)

CÂU 11. Cho số phức $z = (1 + i)^2(1 + 2i)$. Số phức z có phần ảo là

- (A) -4 . (B) $2i$. (C) 4. (D) 2.

Lời giải.

Ta có $z = (1 + i)^2(1 + 2i) = 2i(1 + 2i) = -4 + 2i$.

Do đó phần ảo của z là 2.

Chọn đáp án (D)

CÂU 12. Tìm số phức liên hợp của số phức $z = 3 + 2i$.

(A) $\bar{z} = 3 - 2i$.

(B) $\bar{z} = -3 - 2i$.

(C) $\bar{z} = 2 - 3i$.

(D) $\bar{z} = -2 - 3i$.

Lời giải.

Ta có $\bar{z} = 3 - 2i$.

Chọn đáp án (A)

CÂU 13. Số phức $z = 4 - 3i$ có mô-đun bằng

(A) $2\sqrt{2}$.

(B) 25.

(C) 5.

(D) 8.

Lời giải.

Ta có $|z| = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = 5$.

Chọn đáp án (C)

CÂU 14. Cho số phức $z = 5 - 4i$. Số phức $z - 2$ có

(A) Phần thực bằng 5 và phần ảo bằng -4 .

(B) Phần thực bằng 3 và phần ảo bằng -4 .

(C) Phần thực bằng -4 và phần ảo bằng 3.

(D) Phần thực bằng 3 và phần ảo bằng $-4i$.

Lời giải.

Với $z = 5 - 4i$ ta có $z - 2 = 5 - 4i - 2 = 3 - 4i$ có phần thực là 3 và phần ảo là -4 .

Chọn đáp án (B)

CÂU 15. Cho số phức $z_1 = 2 + 3i$ và $z_2 = 1 - 2i$. Số phức liên hợp của số phức $w = z_1 + z_2$ là

(A) $\bar{w} = 3 + i$.

(B) $\bar{w} = 3 - i$.

(C) $\bar{w} = 3 - 2i$.

(D) $\bar{w} = 1 - 4i$.

Lời giải.

Vì $z_1 = 2 + 3i$ và $z_2 = 1 - 2i$ nên $w = z_1 + z_2 = 2 + 3i + 1 - 2i = 3 + i$.

Suy ra $\bar{w} = 3 - i$.

Chọn đáp án (B)

CÂU 16. Cho các số phức $z_1 = 2 - 3i$, $z_2 = 1 + 4i$. Tìm số phức liên hợp với số phức $z_1 z_2$.

(A) $-14 - 5i$.

(B) $-10 - 5i$.

(C) $-10 + 5i$.

(D) $14 - 5i$.

Lời giải.

Ta có $z_1 z_2 = (2 - 3i)(1 + 4i) = 14 + 5i$.

Vậy $\overline{z_1 z_2} = 14 - 5i$.

Chọn đáp án (D)

CÂU 17. Cho hai số phức $z_1 = 1 + i$ và $z_2 = 2 - 3i$. Tính mô-đun của số phức $z_1 + z_2$.

(A) $|z_1 + z_2| = 5$.

(B) $|z_1 + z_2| = \sqrt{13}$.

(C) $|z_1 + z_2| = 1$.

(D) $|z_1 + z_2| = \sqrt{5}$.

Lời giải.

Ta có $z_1 + z_2 = (1 + i) + (2 - 3i) = 3 - 2i$.

Vậy $|z_1 + z_2| = |3 - 2i| = \sqrt{3^2 + (-2)^2} = \sqrt{13}$.

Chọn đáp án (B)

CÂU 18. Tìm số phức liên hợp của số phức $z = (-3 - 4i)(2 + i) + 1 - 3i$.

(A) $\bar{z} = -1 + 14i$.

(B) $\bar{z} = 1 - 14i$.

(C) $\bar{z} = 1 + 14i$.

(D) $\bar{z} = -1 - 14i$.

Lời giải.

Ta có $z = (-3 - 4i)(2 + i) + 1 - 3i = -1 - 14i$.

Vậy số phức liên hợp của z là $\bar{z} = -1 + 14i$.

Chọn đáp án (A)

CÂU 19. Cho hai số phức $z_1 = 1 + i$ và $z_2 = 2 - 3i$. Tính mô-đun của $z_1 + z_2$.

(A) $|z_1 + z_2| = 1$.

(B) $|z_1 + z_2| = \sqrt{5}$.

(C) $|z_1 + z_2| = \sqrt{13}$.

(D) $|z_1 + z_2| = 5$.

Lời giải.

Ta có $z_1 + z_2 = 3 - 2i$.

Vậy $|z_1 + z_2| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$.

Chọn đáp án (C)

CÂU 20. Cho hai số phức $z_1 = 3 + i$ và $z_2 = 2 - 4i$. Mô-đun của số phức $z_1 z_2$ bằng

(A) 10.

(B) $10\sqrt{2}$.

(C) -10 .

(D) 20.

Lời giải.

Ta có $z_1 z_2 = (3 + i)(2 - 4i) = 10 - 10i$.

Vậy $|z_1 z_2| = \sqrt{10^2 + 10^2} = 10\sqrt{2}$.

Chọn đáp án (B)

D. BẢNG ĐÁP ÁN

1. D	2. A	3. A	4. C	5. D	6. A	7. D	8. B
9. C	10. C	11. D	12. A	13. C	14. B	15. B	16. D
		17. B	18. A	19. C	20. B		

Bài 13. TÍNH THỂ TÍCH KHỐI LĂNG TRỤ ĐỨNG**A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ**a) Thể tích khối lăng trụ $V = B \cdot h$ với B : diện tích đáy, h : chiều cao.

b) Các hệ thức lượng trong tam giác vuông.

Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH , trung tuyến AM . Khi đó

☉ $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

☉ $BH \cdot BC = AB^2$; $CH \cdot CB = CA^2$.

☉ $AB \cdot AC = AH \cdot BC$; $AM = \frac{1}{2}BC$.

☉ $CH \cdot BH = AH^2$.

☉ $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}$.

☉ $\sin \widehat{ABC} = \frac{AC}{BC}$; $\cos \widehat{ABC} = \frac{AB}{BC}$; $\tan \widehat{ABC} = \frac{AC}{AB}$; $\cot \widehat{ABC} = \frac{AB}{AC}$.

c) Đường chéo của hình vuông cạnh a có độ dài bằng $a\sqrt{2}$.d) Đường cao của tam giác đều cạnh a có độ dài bằng $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

e) Diện tích tam giác bất kỳ

☉ $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_a = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h_b = \frac{1}{2} \cdot c \cdot h_c$, trong đó h_a, h_b, h_c lần lượt là đường cao hạ từ các đỉnh A, B, C của tam giác ABC ; $BC = a, AC = b, AB = c$.

☉ $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot c \cdot \sin B = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin C$.

☉ $S_{\triangle ABC} = \frac{abc}{4R}$, trong đó R là bán kính đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$.

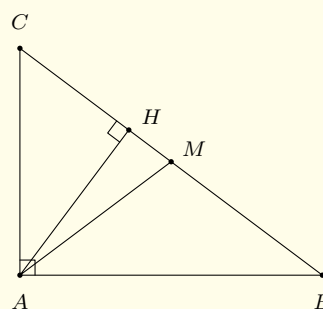
☉ $S_{\triangle ABC} = p \cdot r$, trong đó r là bán kính đường tròn nội tiếp $\triangle ABC$.

☉ $S_{\triangle ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, trong đó $p = \frac{a+b+c}{2}$.

f) Trường hợp đặc biệt

☉ Diện tích tam giác $\triangle ABC$ vuông tại A là $S = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC$.

☉ Diện tích của tam giác đều cạnh a là $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

g) Diện tích hình chữ nhật $S = a \cdot b$, trong đó a, b lần lượt là chiều dài và chiều rộng của hình chữ nhật.h) Diện tích hình vuông cạnh a là $S = a^2$.i) Diện tích hình thoi $S = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BD$, trong đó AC và BD là hai đường chéo.

- j) Diện tích hình thang $S = \frac{(\text{đáy lớn} + \text{đáy bé}) \cdot h}{2}$, trong đó h là chiều cao của hình thang.
- k) Diện tích hình bình hành $ABCD$ là $S = AH \cdot CD$, trong đó AH là chiều cao của tam giác ABD .
- l) Định lý hàm số sin: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$.
- m) Định lý hàm số cosin

☑ $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$.

☑ $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos B$.

☑ $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C$.

n) Công thức đường trung tuyến

☑ $m_a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4}$.

☑ $m_b^2 = \frac{a^2 + c^2}{2} - \frac{b^2}{4}$.

☑ $m_c^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4}$.

B. BÀI TẬP MẪU

VÍ DỤ 13 (Đề tham khảo 2023). Cho khối lăng trụ có diện tích đáy $B = 3$ và chiều cao $h = 4$. Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

- (A) 4. (B) 12. (C) 8. (D) 6.

☞ **Lời giải.**

Thể tích của khối lăng trụ đã cho là $V = B \cdot h = 3 \cdot 4 = 12$.

Chọn đáp án (B)



C. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN

CÂU 21. Thể tích của khối hộp chữ nhật có độ dài các cạnh lần lượt là $a, 2a, 3a$ bằng

- (A) $3a^3$. (B) $2a^3$. (C) $6a^3$. (D) $\frac{2a^3}{3}$.

☞ **Lời giải.**

Thể tích của khối hộp chữ nhật là $V = a \cdot 2a \cdot 3a = 6a^3$.

Chọn đáp án (C)



CÂU 22. Gọi h, S, V lần lượt là chiều cao, diện tích đáy và thể tích của hình lăng trụ. Chiều cao khối lăng trụ là

- (A) $\frac{V}{S}$. (B) $\frac{S}{V}$. (C) $\frac{3V}{S}$. (D) $\frac{1}{3}SV$.

☞ **Lời giải.**

Ta có $V = S \cdot h \Rightarrow h = \frac{V}{S}$.

Chọn đáp án (A)



CÂU 23. Cho lăng trụ tứ giác $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình vuông cạnh a và có thể tích bằng $3a^3$. Tính chiều cao h của lăng trụ đã cho.

- (A) $h = a$. (B) $h = 3a$. (C) $h = 9a$. (D) $h = \frac{a}{3}$.

☞ **Lời giải.**

Gọi S là diện tích đáy và h là chiều cao của khối lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$.

Khi đó, thể tích của khối lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ là $V = S \cdot h \Rightarrow h = \frac{V}{S} = \frac{3a^3}{a^2} \Rightarrow h = 3a$.

Chọn đáp án (B)



CÂU 24. Một khối lăng trụ có chiều cao bằng $2a$ và diện tích đáy bằng $2a^2$. Thể tích khối lăng trụ đã cho bằng

- (A) $V = \frac{2a^3}{3}$. (B) $V = 4a^3$. (C) $V = \frac{4a^3}{3}$. (D) $V = \frac{4a^2}{3}$.

☞ **Lời giải.**

Thể tích khối lăng trụ đã cho bằng $V = 2a \cdot 2a^2 = 4a^3$.

Chọn đáp án (B)



CÂU 25. Thể tích khối lăng trụ có diện tích đáy bằng 4 và chiều cao bằng 3 là

(A) 4.

(B) 48.

(C) 16.

(D) 12.

Lời giải.

Thể tích của khối lăng trụ có chiều cao h và diện tích đáy bằng B là $V = B \cdot h = 4 \cdot 3 = 12$.

Chọn đáp án (D)

CÂU 26. Khối lăng trụ có diện tích đáy bằng 24 cm^2 , chiều cao bằng 3 cm thì có thể tích bằng

(A) 8 cm^3 .(B) 72 cm^3 .(C) 126 cm^3 .(D) 24 cm^3 .**Lời giải.**

Áp dụng công thức tính thể tích khối lăng trụ $V = B \cdot h = 24 \cdot 3 = 72 \text{ cm}^3$.

Chọn đáp án (B)

CÂU 27. Cho khối lăng trụ có diện tích đáy bằng $4a^2$ và khoảng cách giữa hai đáy bằng a . Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

(A) $4a^3$.(B) $\frac{1}{3}a^3$.(C) $3a^3$.(D) a^3 .**Lời giải.**

Áp dụng công thức tính thể tích khối lăng trụ $V = B \cdot h = 4a^2 \cdot a = 4a^3$.

Chọn đáp án (A)

CÂU 28. Khối lăng trụ có chiều cao bằng h , diện tích đáy bằng B có thể tích là

(A) $V = \frac{1}{3}B \cdot h$.(B) $V = \frac{1}{2}B \cdot h$.(C) $V = \frac{1}{6}B \cdot h$.(D) $V = B \cdot h$.**Lời giải.**

Thể tích khối lăng trụ là $V = B \cdot h$.

Chọn đáp án (D)

CÂU 29. Biết rằng thể tích của một khối lập phương bằng 8. Tính tổng diện tích các mặt của hình lập phương đó?

(A) 36.

(B) 27.

(C) 16.

(D) 24.

Lời giải.

Gọi a là độ dài một cạnh của khối lập phương ($a > 0$).

Theo giả thiết ta có $a^3 = 8 \Leftrightarrow a = 2$.

Diện tích một mặt của khối lập phương cạnh bằng 2 là $2^2 = 4$.

Tổng diện tích các mặt của khối lập phương là $6 \cdot 4 = 24$.

Chọn đáp án (D)

CÂU 30. Khối lăng trụ có diện tích đáy bằng 4 cm^2 , chiều cao bằng 2 cm có thể tích bằng

(A) 8 cm^3 .(B) $\frac{8}{3} \text{ cm}^3$.(C) 4 cm^3 .(D) 6 cm^3 .**Lời giải.**

Thể tích khối lăng trụ là $V = B \cdot h = 4 \cdot 2 = 8 \text{ cm}^3$.

Chọn đáp án (A)

CÂU 31. Thể tích của khối lăng trụ có diện tích đáy a^2 và chiều cao a là

(A) a^3 .(B) $\frac{a^3}{3}$.(C) $3a^3$.(D) $2a^3$.**Lời giải.**

Thể tích của khối lăng trụ là $V = a^2 \cdot a = a^3$.

Chọn đáp án (A)

CÂU 32. Nếu một khối lăng trụ đứng có diện tích đáy bằng B và cạnh bên bằng h thì có thể tích là

(A) Bh .(B) $\frac{1}{3}Bh$.(C) $\frac{1}{2}Bh$.(D) $3Bh$.**Lời giải.**

Thể tích của khối lăng trụ là $V = Bh$.

Chọn đáp án (A)

CÂU 33. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có diện tích đáy là 15 và chiều cao của lăng trụ là 10. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là

(A) 200.

(B) 150.

(C) 100.

(D) 50.

Lời giải.

Áp dụng công thức tính thể tích khối lăng trụ $V = B \cdot h = 10 \cdot 15 = 150$.

Chọn đáp án (B)

CÂU 34. Nếu cạnh của hình lập phương tăng lên gấp 2 lần thì thể tích của hình lập phương đó sẽ tăng lên bao nhiêu lần?

- (A) 9. (B) 8. (C) 6. (D) 4.

Lời giải.

Ta có thể tích của hình lập phương cạnh a là a^3 .

Do đó khi tăng cạnh hình lập phương lên 2 lần thì thể tích là $(2a)^3 = 8a^3$.

Chọn đáp án (B)

CÂU 35. Thể tích của khối lăng trụ đứng tam giác đều có tất cả các cạnh bằng a bằng

- (A) $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$. (B) $\frac{a^3}{3}$. (C) $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$. (D) $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Lời giải.

Diện tích đáy là $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

\Rightarrow Thể tích của khối lăng trụ cần tìm là $V = a \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}$.

Chọn đáp án (C)

CÂU 36. Tính thể tích của khối lăng trụ tam giác đều có cạnh đáy bằng $2a$ và cạnh bên bằng a .

- (A) $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$. (B) a^3 . (C) $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. (D) $a^3\sqrt{3}$.

Lời giải.

Vì lăng trụ đứng nên đường cao bằng a .

Vì đáy là tam giác đều nên diện tích đáy là $S = \frac{(2a)^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = a^2\sqrt{3}$.

Thể tích của khối lăng trụ cần tìm là $V = S \cdot h = a^2\sqrt{3} \cdot a = a^3\sqrt{3}$.

Chọn đáp án (D)

CÂU 37. Tính thể tích V của khối lập phương $ABCD \cdot A'B'C'D'$ biết $AC' = 2a\sqrt{3}$.

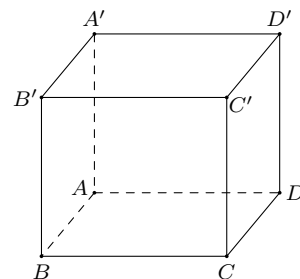
- (A) $V = a^3$. (B) $V = 24\sqrt{3}a^3$. (C) $V = 8a^3$. (D) $V = 3\sqrt{3}a^3$.

Lời giải.

Gọi độ dài cạnh hình lập phương bằng x . Suy ra $AC' = x\sqrt{3}$.

Ta có $x\sqrt{3} = 2a\sqrt{3} \Leftrightarrow x = 2a$.

Thể tích khối lập phương là $V = x^3 = 8a^3$.



Chọn đáp án (C)

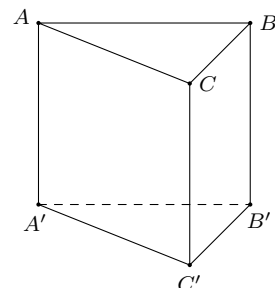
CÂU 38. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A . Biết $AB = a$, $AC = 2a$, $AA' = 3a$. Thể tích khối lăng trụ đã cho bằng

- (A) $3a^3$. (B) $6a^3$. (C) a^3 . (D) $3a^2$.

Lời giải.

Diện tích tam giác ABC là $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot a \cdot 2a = a^2$.

Thể tích của khối lăng trụ đã cho là $V = AA' \cdot S_{ABC} = 3a \cdot a^2 = 3a^3$.



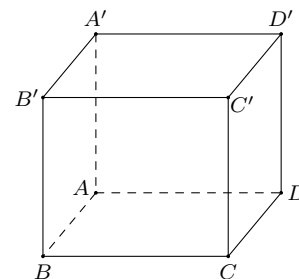
Chọn đáp án (A)

CÂU 39. Thể tích của khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có các cạnh $AB = 4$, $AD = 5$ và $AA' = 6$ là

- (A) $V = 200$. (B) $V = 100$. (C) $V = 120$. (D) $V = 130$.

Lời giải.

Thể tích của khối hộp chữ nhật là $V = AB \cdot AD \cdot AA' = 4 \cdot 5 \cdot 6 = 120$.



Chọn đáp án (C)

CÂU 40. Cho khối lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình thoi có độ dài hai đường chéo $AC = 2a$ và $BD = a$, cạnh bên $AA' = 3a$. Thể tích V của khối lăng trụ đã cho là

(A) $V = 6a^3$.

(B) $V = 12a^3$.

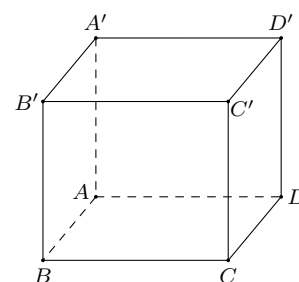
(C) $V = 3a^3$.

(D) $V = 2a^3$.

Lời giải.

Diện tích đáy hình thoi là $S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD = \frac{1}{2} a \cdot 2a = a^2$.

Thể tích khối lăng trụ đã cho là $V = S_{ABCD} \cdot AA' = a^2 \cdot 3a = 3a^3$.



Chọn đáp án (C)

D. BẢNG ĐÁP ÁN

21. C	22. A	23. B	24. B	25. D	26. B	27. A	28. D
29. D	30. A	31. A	32. A	33. B	34. B	35. C	36. D
		37. C	38. A	39. C	40. C		

Bài 14. THỂ TÍCH KHỐI CHÓP

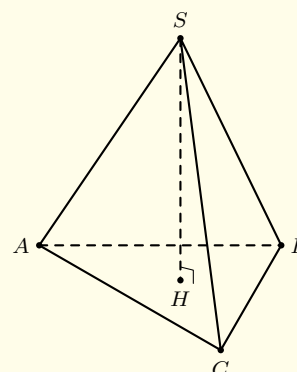
A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Thể tích khối chóp

$$V = \frac{1}{3} \cdot B \cdot h.$$

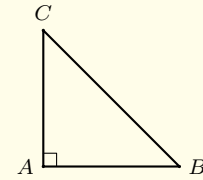
Trong đó:

- ☑ B là diện tích đa giác đáy.
- ☑ h là chiều cao khối chóp.

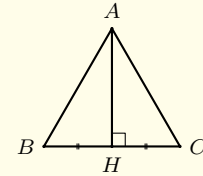


2. Diện tích đa giác

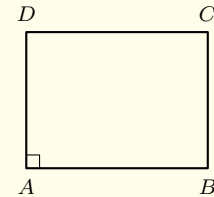
☑ Diện tích tam giác vuông: $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot AC$.



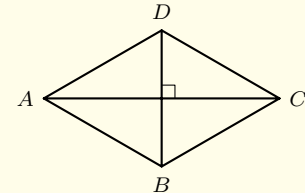
☑ Diện tích tam giác đều: $S_{\triangle ABC} = \frac{AB^2\sqrt{3}}{4}$.



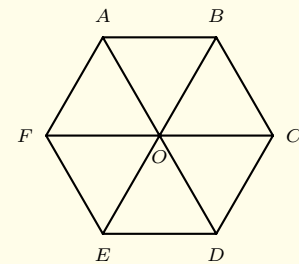
☑ Diện tích hình chữ nhật: $S_{ABCD} = \frac{1}{2}AB \cdot AD$.



☑ Diện tích hình thoi: $S_{ABCD} = \frac{1}{2}AC \cdot BD$.



☑ Diện tích lục giác đều: $S_{ABCDEF} = 6 \cdot S_{\triangle OAB}$.

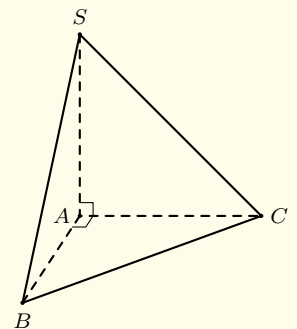


B. BÀI TẬP MẪU

VÍ DỤ 14 (ĐỀ minh họa BGD 2022-2023).

Cho khối chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại A , $AB = 2$, SA vuông góc với đáy và $SA = 3$ (Tham khảo hình vẽ). Thể tích khối chóp đã cho bằng

- (A) 12. (B) 2. (C) 6. (D) 4.



☞ Lời giải.

Thể tích khối chóp là $V = \frac{1}{3} \cdot S_{\triangle ABC} \cdot SA = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot SA = \frac{1}{6} \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2$.

Chọn đáp án (B)

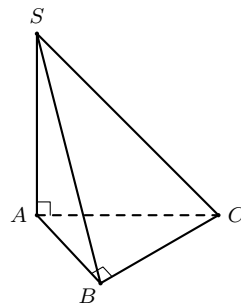


C. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN

CÂU 1. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B . Cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy, $SA = AB = 2a$, $BC = 3a$. Thể tích của khối chóp $S.ABC$ là

- (A) a^3 . (B) $3a^3$. (C) $4a^3$. (D) $2a^3$.

Lời giải. $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC \cdot SA = 2a^3.$



Chọn đáp án (D)

CÂU 2. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đường cao SA và đáy $ABCD$ là hình thoi. Thể tích khối chóp đã cho được tính theo công thức nào sau đây?

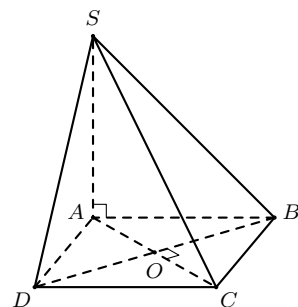
- (A) $\frac{1}{3} SA \cdot AB^2.$ (B) $\frac{1}{3} SA \cdot AC \cdot BD.$ (C) $\frac{1}{6} SA \cdot AC \cdot BD.$ (D) $\frac{1}{2} SA \cdot AB^2.$

Lời giải.

Diện tích đáy của hình chóp là $S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD.$

Ta có thể tích khối chóp $S.ABCD$ là

$$V = \frac{1}{3} \cdot S_{ABCD} \cdot SA = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BD \cdot SA = \frac{1}{6} SA \cdot AC \cdot BD.$$



Chọn đáp án (C)

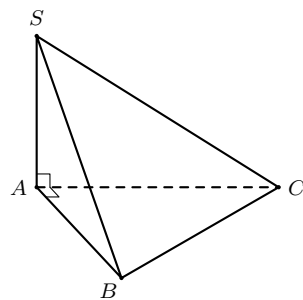
CÂU 3. Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) . Biết $SA = 2a$ và tam giác ABC vuông tại A có $AB = 3a, AC = 4a$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$ theo a .

- (A) $6a^3.$ (B) $8a^3.$ (C) $4a^3.$ (D) $12a^3.$

Lời giải.

Ta có $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot 3a \cdot 4a = 6a^2.$

$$V_{SABC} = \frac{1}{3} \cdot SA \cdot S_{\triangle ABC} = \frac{1}{3} \cdot 2a \cdot 6a^2 = 4a^3.$$



Chọn đáp án (C)

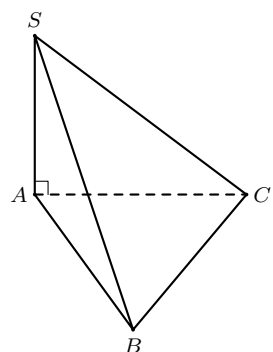
CÂU 4. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , cạnh bên SA vuông góc với đáy, $SA = a$. Thể tích của khối chóp $S.ABC$ bằng

- (A) $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}.$ (B) $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}.$ (C) $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}.$ (D) $\frac{a^3}{4}.$

Lời giải.

Thể tích của khối chóp $S.ABC$ bằng

$$V = \frac{1}{3} \cdot S_{\triangle ABC} \cdot SA = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot a = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}.$$



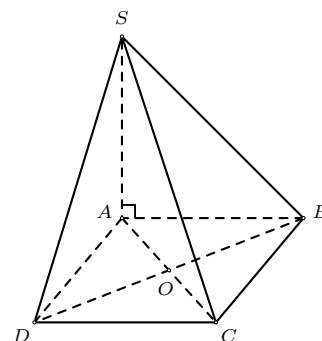
Chọn đáp án (A)

CÂU 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a . Biết $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{3}$. Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ là

- (A) $a^3\sqrt{3}$. (B) $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$. (C) $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. (D) $\frac{a^3}{4}$.

Lời giải.

Ta có $h = SA = a\sqrt{3}$; $B = S_{ABCD} = a^2$.
 Thể tích khối chóp là $V = \frac{1}{3}Bh = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}$.



Chọn đáp án (C)

CÂU 6. Cho khối chóp $S.ABC$ có chiều cao bằng 3, đáy ABC có diện tích bằng 10. Thể tích của khối chóp $S.ABC$ bằng

- (A) 2. (B) 15. (C) 10. (D) 30.

Lời giải.

Thể tích khối chóp $S.ABC$ là $V = \frac{1}{3}Bh = \frac{1}{3}10 \cdot 3 = 10$.

Chọn đáp án (C)

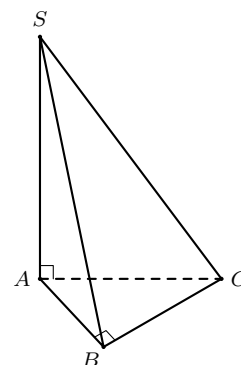
CÂU 7. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B , $AB = a$, $BC = 2a$, $SA \perp (ABC)$, $SA = 3a$. Thể tích của khối chóp $S.ABC$ bằng

- (A) a^3 . (B) $\frac{1}{3}a^3$. (C) $3a^3$. (D) $\frac{1}{6}a^3$.

Lời giải.

Thể tích khối chóp là

$$V_{S.ABC} = \frac{1}{3}S_{\triangle ABC} \cdot SA = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}BA \cdot BC \cdot SA = \frac{1}{6}a \cdot 2a \cdot 3a = a^3.$$



Chọn đáp án (A)

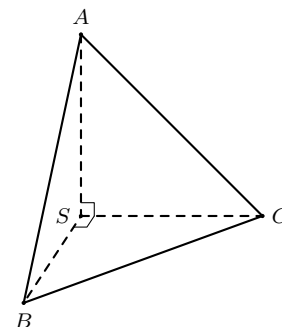
CÂU 8. Cho hình chóp $S.ABC$ có các cạnh SA, SB, SC đôi một vuông góc với nhau. Biết $SA = 3$, $SB = 4$, $SC = 5$, thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng

- (A) 60. (B) 10. (C) 20. (D) 30.

Lời giải.

Dễ thấy $SA \perp (SBC)$

$$\text{nên } V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot S_{\triangle SBC} \cdot SA = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 5 \cdot 3 = 10.$$



Chọn đáp án (B)

CÂU 9. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A , $AC = 2a$. Cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a$. Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng

(A) $4a^3$.

(B) $\frac{2a^3}{3}$.

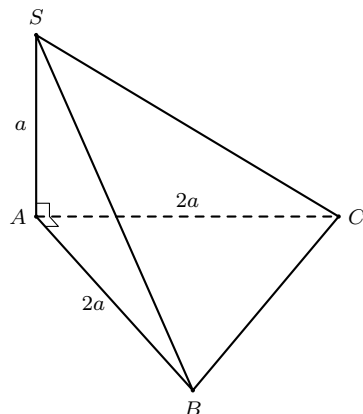
(C) $2a^3$.

(D) $\frac{4a^3}{3}$.

☞ **Lời giải.**

Diện tích đáy $S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot 2a = 2a^2$.

Thể tích khối chóp là $V = \frac{1}{3} \cdot SA \cdot S_{\triangle ABC} = \frac{1}{3} \cdot a \cdot 2a^2 = \frac{2a^3}{3}$.



Chọn đáp án (B)

CÂU 10. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a$. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng

(A) $\frac{1}{3}a^3$.

(B) $2a^3$.

(C) $3a^3$.

(D) a^3 .

☞ **Lời giải.**

Ta có $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot SA \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot a \cdot a^2 = \frac{1}{3}a^3$.

Chọn đáp án (A)

CÂU 11. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = 3a$ và $AD = 4a$. Cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SA = a\sqrt{2}$. Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ bằng

(A) $4\sqrt{2}a^3$.

(B) $12\sqrt{2}a^3$.

(C) $\frac{4\sqrt{2}a^3}{3}$.

(D) $\frac{2\sqrt{2}a^3}{3}$.

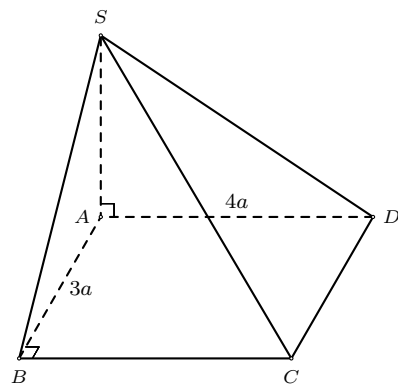
☞ **Lời giải.**

Diện tích đáy hình chữ nhật là

$S_{ABCD} = AB \cdot AD = 3a \cdot 4a = 12a^2$.

Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ là

$V = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot SA = \frac{1}{3} \cdot 12a^2 \cdot a\sqrt{2} = 4\sqrt{2}a^3$.



Chọn đáp án (A)

CÂU 12. Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với đáy. Tam giác ABC vuông cân tại B , biết $SA = AC = 2a$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

(A) $\frac{2\sqrt{2}}{3}a^3$.

(B) $\frac{4}{3}a^3$.

(C) $\frac{2}{3}a^3$.

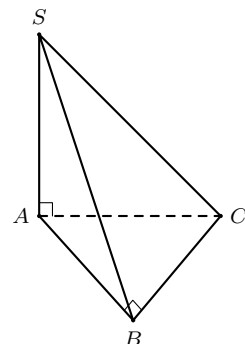
(D) $\frac{1}{3}a^3$.

☞ **Lời giải.**

Ta có $AB = BC = \frac{AC}{\sqrt{2}} = \frac{2a}{\sqrt{2}} = a\sqrt{2}$.

Thể tích khối chóp $S.ABC$ là

$V = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC} \cdot SA = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} AB^2 \cdot SA = \frac{1}{6} \cdot (a\sqrt{2})^2 \cdot 2a = \frac{2}{3}a^3$.



Chọn đáp án (C)

CÂU 13. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , $SA = 3a$ và SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

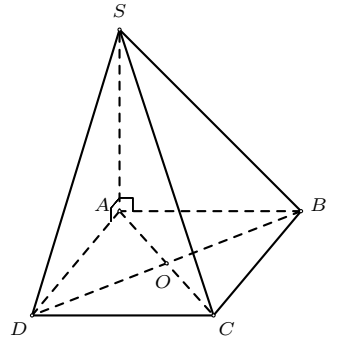
- (A) $3a^3$. (B) $\frac{a^3}{3}$. (C) $9a^3$. (D) a^3 .

Lời giải.

Ta có $S_{ABCD} = a^2$, đường cao $SA = 3a$.

Vậy thể tích khối chóp $S.ABCD$ là

$$V = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot SA = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot 3a = a^3.$$



Chọn đáp án (D)

CÂU 14. Cho khối chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A , $AC = 3$, $AB = 4$, SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) và $SA = 3$. Thể tích của khối chóp đã cho bằng

- (A) 12. (B) 6. (C) 18. (D) 20.

Lời giải.

☑ Diện tích tam giác ABC là $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 = 6$.

☑ Thể tích khối chóp $S.ABC$ là $V = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC} \cdot SA = \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot 3 = 6$.

Chọn đáp án (B)

CÂU 15. Cho khối chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với đáy, $SA = 4$, $AB = 6$, $BC = 10$ và $CA = 8$. Thể tích V của khối chóp $S.ABC$

- (A) $V = 32$. (B) $V = 192$. (C) $V = 40$. (D) $V = 24$.

Lời giải.

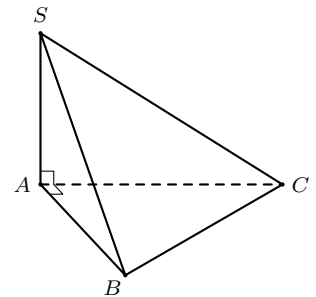
Ta có $10^2 = 8^2 + 6^2$ hay $BC^2 = CA^2 + AB^2$.

Suy ra $\triangle ABC$ vuông tại A .

Diện tích $\triangle ABC$ là $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 = 24$.

Thể tích của khối chóp $S.ABC$:

$$V = \frac{1}{3} \cdot S_{ABC} \cdot SA = \frac{1}{3} \cdot 24 \cdot 4 = 32.$$



Chọn đáp án (A)

CÂU 16. Cho hình chóp lục giác đều có cạnh đáy bằng 1 chiều cao bằng 4. Thể tích của khối chóp đã cho bằng

- (A) $2\sqrt{3}$. (B) $6\sqrt{3}$. (C) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. (D) $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải.

Giả sử đáy là hình lục giác đều $ABCDEF$ tâm O .

Ta có diện tích của hình lục giác đều là $S = 6 \cdot S_{\triangle OAB} = 6 \cdot \frac{1^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Vậy thể tích của khối chóp là $V = \frac{1}{3} \cdot S \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot 4 = 2\sqrt{3}$.

Chọn đáp án (A)

CÂU 17. Cho khối chóp tam giác đều có cạnh đáy bằng 2 và chiều cao $h = 12$. Thể tích của khối chóp đã cho bằng

- (A) $24\sqrt{3}$. (B) $12\sqrt{3}$. (C) $6\sqrt{3}$. (D) $4\sqrt{3}$.

Lời giải.

Ta có thể tích của khối chóp tam giác đều là $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{2^2 \sqrt{3}}{4} \cdot 12 = 4\sqrt{3}$.

Chọn đáp án (D)

CÂU 18. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh bằng $a\sqrt{3}$ và các cạnh bên bằng $a\sqrt{2}$. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng

(A) $\frac{a^3\sqrt{2}}{2}$.

(B) $\frac{a^3\sqrt{2}}{6}$.

(C) $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

(D) $\frac{a^3\sqrt{6}}{6}$.

Lời giải.

Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$.

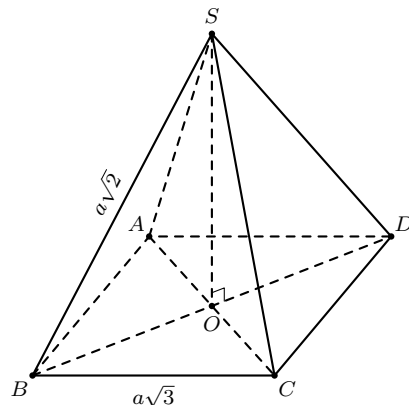
Vì $S.ABCD$ là hình chóp đều nên $SO \perp (ABCD)$.

Ta có $S_{ABCD} = (a\sqrt{3})^2 = 3a^2$; $OB = \frac{1}{2}BD = \frac{a\sqrt{6}}{2}$;

$$SO = \sqrt{SB^2 - OB^2} = \sqrt{2a^2 - \frac{6a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Thể tích khối chóp đều $S.ABCD$ là

$$V = \frac{1}{3}S_{ABCD} \cdot SO = \frac{1}{3} \cdot 3a^2 \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a^3\sqrt{2}}{2}.$$



Chọn đáp án (A)

CÂU 19. Cho khối chóp tứ giác đều có cạnh đáy bằng a , có chiều cao bằng $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. Thể tích của khối chóp đã cho bằng

(A) $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$.

(B) $\frac{a^3\sqrt{2}}{6}$.

(C) $\frac{\sqrt{2}a^3}{2}$.

(D) $\frac{\sqrt{3}a^3}{4}$.

Lời giải.

$$h = \frac{a\sqrt{2}}{2}; S = a^2 \Rightarrow V = \frac{1}{3}h \cdot S = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot a^2 = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}.$$

Chọn đáp án (B)

CÂU 20. Thể tích khối tứ diện đều có cạnh bằng 3 là

(A) $\frac{4\sqrt{2}}{9}$.

(B) $2\sqrt{2}$.

(C) $\frac{9\sqrt{2}}{4}$.

(D) $\sqrt{2}$.

Lời giải.

Cho $ABCD$ là tứ diện đều.

Gọi F là trung điểm CD , G là tâm của tam giác đều BCD , ta có $AG \perp (BCD)$;

$$BF = \sqrt{BC^2 - CF^2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Xét tam giác ABG vuông tại G :

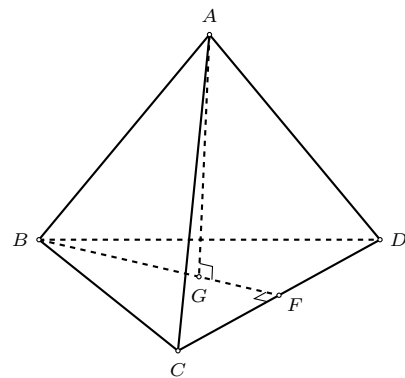
$$AB = 3, BG = \frac{2}{3}BF = \frac{2}{3} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3},$$

$$AG = \sqrt{AB^2 - BG^2} = \sqrt{3^2 - (\sqrt{3})^2} = \sqrt{6}.$$

$$\text{Ta có } S_{\triangle BCD} = \frac{1}{2}BF \cdot CD = \frac{3^2\sqrt{3}}{4} = \frac{9\sqrt{3}}{4}.$$

$$\text{Vậy } V_{ABCD} = \frac{1}{3}AG \cdot S_{\triangle BCD} = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{6} \cdot \frac{9\sqrt{3}}{4} = \frac{9\sqrt{2}}{4}.$$

Chọn đáp án (C)



D. BẢNG ĐÁP ÁN

1. D	2. C	3. C	4. A	5. C	6. C	7. A	8. B
9. B	10. A	11. A	12. C	13. D	14. B	15. A	16. A
		17. D	18. A	19. B	20. C		

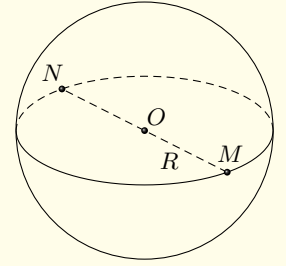
Bài 15. ĐỊNH NGHĨA, TÍNH CHẤT, VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI LIÊN QUAN ĐẾN MẶT CẦU

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Định nghĩa liên quan mặt cầu

- ☉ Tập hợp các điểm M trong không gian cách điểm O cho trước một khoảng cách luôn bằng R không đổi được gọi là mặt cầu tâm O , bán kính R , kí hiệu $S(O, R)$, tức là

$$S(O, R) = \{M \mid OM = R\}.$$



- ☉ Đoạn thẳng nối 2 điểm phân biệt trên mặt cầu gọi là dây cung của mặt cầu.
- ☉ Dây cung lớn nhất của mặt cầu được gọi là đường kính của mặt cầu (gấp đôi bán kính).

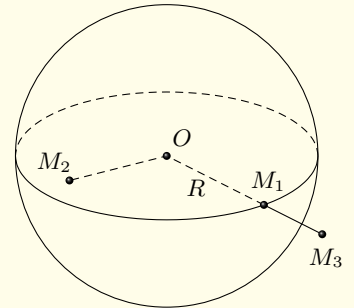
2. Các công thức tính toán

- ☉ Diện tích mặt cầu có bán kính R là $S = 4\pi R^2$.
- ☉ Thể tích khối cầu có bán kính R là $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.

3. Vị trí tương đối giữa một điểm và mặt cầu

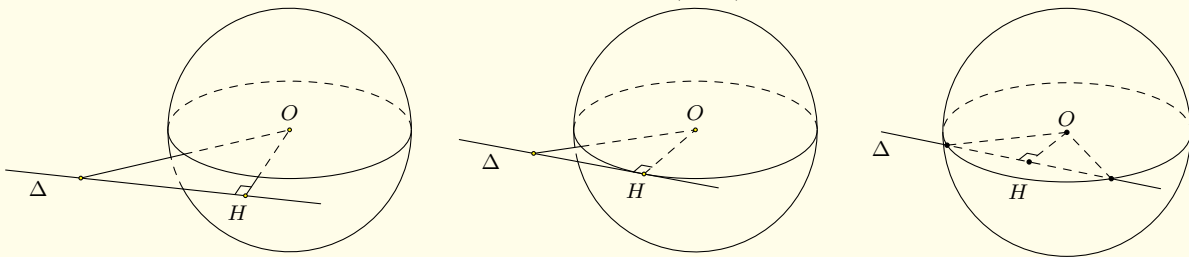
Có 3 vị trí tương đối giữa một điểm M và mặt cầu $S(O, R)$, đó là

- ☉ M thuộc $S(O, R)$ khi và chỉ khi $OM = R$.
- ☉ M nằm bên trong $S(O, R)$ khi và chỉ khi $OM < R$.
- ☉ M nằm ngoài $S(O, R)$ khi và chỉ khi $OM > R$.



4. Vị trí tương đối giữa đường thẳng và mặt cầu

Có 3 vị trí tương đối giữa một đường thẳng Δ và mặt cầu $S(O, R)$, đó là

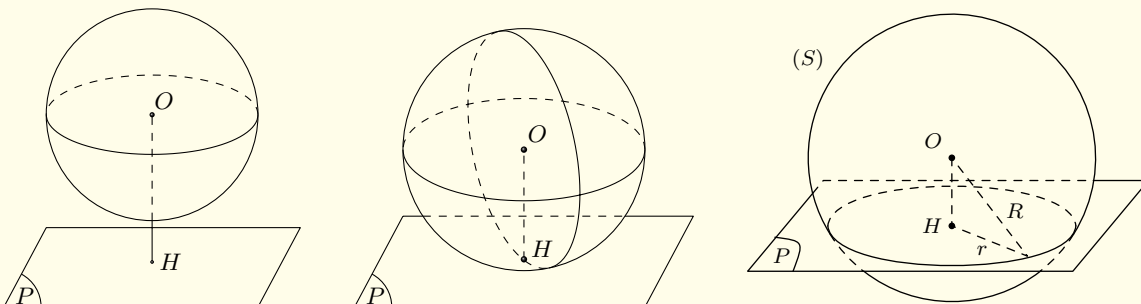


- ☉ Δ không có điểm chung với $S(O, R)$ khi và chỉ khi $d(O, \Delta) > R$.
- ☉ Δ tiếp xúc với $S(O, R)$ khi và chỉ khi Δ và $S(O, R)$ có 1 điểm chung $\Leftrightarrow d(O, \Delta) = R$.
- ☉ Δ cắt $S(O, R)$ tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi $d(O, \Delta) < R$.

A Trường hợp đường thẳng Δ tiếp xúc với mặt cầu tại H ta gọi Δ là tiếp tuyến của mặt cầu và H là tiếp điểm của Δ với mặt cầu.

5. Vị trí tương đối giữa mặt phẳng và mặt cầu

Có 3 vị trí tương đối giữa một mặt phẳng (P) và mặt cầu $S(O, R)$, đó là



- ☑ (P) không có điểm chung với $S(O, R)$ khi và chỉ khi $d(O, (P)) > R$.
 - ☑ (P) tiếp xúc $S(O, R)$ khi và chỉ khi (P) và $S(O, R)$ có 1 điểm chung $\Leftrightarrow d(O, (P)) = R$.
 - ☑ (P) cắt $S(O, R)$ theo giao tuyến là một đường tròn khi và chỉ khi $d(O, (P)) < R$.
- A** ☑ Trường hợp mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu tại H ta gọi (P) là tiếp diện của mặt cầu và H là tiếp điểm của (P) với mặt cầu.
- ☑ Trường hợp mặt phẳng đi qua tâm của mặt cầu cầu thì đường tròn giao tuyến được gọi là đường tròn lớn và mặt phẳng được gọi là mặt phẳng kính của mặt cầu.
- ☑ Khi mặt phẳng cắt mặt cầu theo giao tuyến là đường tròn (C) thì (C) có tâm H là hình chiếu vuông góc của tâm O mặt cầu lên mặt phẳng (P) , đồng thời (C) có bán kính r tính theo công thức $r = \sqrt{R^2 - d^2}$, với $d = d(O, (P))$.

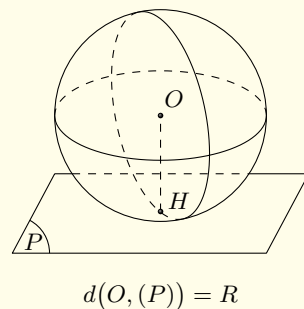
B. BÀI TẬP MẪU

VÍ DỤ 15 (Đề tham khảo 2023). Cho mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu $S(O; R)$. Gọi d là khoảng cách từ O đến (P) . Khẳng định nào dưới đây đúng?

- Ⓐ $d < R$. Ⓑ $d > R$. Ⓒ $d = R$. Ⓓ $d = 0$.

☞ **Lời giải.**

Mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu $S(O, R)$ khi và chỉ khi $d(O, (P)) = R \Leftrightarrow d = R$.



Chọn đáp án Ⓒ



C. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN

CÂU 1. Cho mặt cầu có diện tích bằng 36π thì khối cầu tương ứng có thể tích bằng

- Ⓐ 72π . Ⓑ 18π . Ⓒ 9π . Ⓓ 36π .

☞ **Lời giải.**

Với R là bán kính mặt cầu ta có $S = 4\pi R^2 = 36\pi \Rightarrow R = 3$.

Khi đó thể tích khối cầu tương ứng là $V = \frac{4}{3} \cdot \pi R^3 = 36\pi$.

Chọn đáp án Ⓓ



CÂU 2. Diện tích mặt cầu có đường kính R là

- Ⓐ $2\pi R^2$. Ⓑ $4\pi R^2$. Ⓒ $\frac{4}{3}\pi R^2$. Ⓓ πR^2 .

☞ **Lời giải.**

Mặt cầu có đường kính R thì có bán kính bằng $\frac{R}{2}$.

Do đó diện tích của mặt cầu là $S = 4\pi \left(\frac{R}{2}\right)^2 = \pi R^2$.

Chọn đáp án Ⓓ



CÂU 3. Cho khối cầu có bán kính $R = 3$. Thể tích khối cầu đã cho bằng

- Ⓐ 108π . Ⓑ 36π . Ⓒ 4π . Ⓓ 12π .

☞ **Lời giải.**

Thể tích khối cầu có bán kính R là $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 3^3 = 36\pi$.

Chọn đáp án Ⓑ



CÂU 4. Diện tích S của mặt cầu có bán kính r bằng

(A) $S = 4\pi r^2$.

(B) $S = 3\pi r^2$.

(C) $S = \pi r^2$.

(D) $S = 2\pi r^2$.

Lời giải.

Diện tích của mặt cầu có bán kính bằng r là $S = 4\pi r^2$.

Chọn đáp án **(A)**

CÂU 5. Công thức tính thể tích khối cầu bán kính R là

(A) $V = 4\pi R^3$.

(B) $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.

(C) $V = \frac{1}{3}\pi R^3$.

(D) $V = \pi R^3$.

Lời giải.

Công thức tính thể tích khối cầu bán kính R là $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.

Chọn đáp án **(B)**

CÂU 6. Cho khối cầu có bán kính $R = 2$. Thể tích khối cầu đã cho bằng

(A) 32π .

(B) 16π .

(C) $\frac{16\pi}{3}$.

(D) $\frac{32\pi}{3}$.

Lời giải.

Thể tích khối cầu có bán kính $R = 2$ là $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 2^3 = \frac{32\pi}{3}$.

Chọn đáp án **(D)**

CÂU 7. Cho khối cầu (\mathcal{T}) tâm O bán kính R . Gọi S và V lần lượt là diện tích mặt cầu và thể tích khối cầu tương ứng. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

(A) $S = \pi R^2$.

(B) $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.

(C) $S = 2\pi R^2$.

(D) $V = 4\pi R^3$.

Lời giải.

Công thức đúng là $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.

Chọn đáp án **(B)**

CÂU 8. Khối cầu có bán kính $R = 6$ có thể tích bằng bao nhiêu?

(A) 144π .

(B) 288π .

(C) 48π .

(D) 72π .

Lời giải.

Thể tích khối cầu có bán kính $R = 6$ là $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 6^3 = 288\pi$.

Chọn đáp án **(B)**

CÂU 9. Cho mặt cầu có diện tích bằng $\frac{8\pi a^2}{3}$. Khi đó bán kính của mặt cầu là

(A) $R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

(B) $R = \frac{a\sqrt{2}}{3}$.

(C) $R = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

(D) $R = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.

Lời giải.

Gọi R là bán kính của mặt cầu.

Diện tích mặt cầu là $S = 4\pi R^2 \Leftrightarrow R^2 = \frac{S}{4\pi} = \frac{8\pi a^2}{12\pi} = \frac{2a^2}{3} \Rightarrow R = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Vậy bán kính mặt cầu là $R = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Chọn đáp án **(C)**

CÂU 10. Cho mặt cầu có bán kính $r = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Diện tích của mặt cầu đã cho bằng

(A) $3\sqrt{3}\pi$.

(B) $\frac{3}{2}\pi$.

(C) $\sqrt{3}\pi$.

(D) 3π .

Lời giải.

Diện tích mặt cầu có bán kính $r = \frac{\sqrt{3}}{2}$ là $S = 4\pi r^2 = 3\pi$.

Chọn đáp án **(D)**

CÂU 11. Mặt cầu có bán kính bằng 6 thì diện tích bằng

(A) 36π .

(B) 288π .

(C) 144π .

(D) 72π .

Lời giải.

Mặt cầu có bán kính bằng 6 thì diện tích bằng $S = 4 \cdot \pi \cdot 6^2 = 144\pi$.

Chọn đáp án **(C)**

CÂU 12. Cho mặt cầu (S_1) có bán kính R_1 , mặt cầu (S_2) có bán kính $R_2 = 2R_1$. Tính tỉ số diện tích của mặt cầu (S_2) và (S_1).

(A) 2.

(B) $\frac{1}{2}$.

(C) 3.

(D) 4.

Lời giải.

Gọi S_1, S_2 lần lượt là diện tích mặt cầu (S_1) và (S_2). Khi đó $\begin{cases} S_1 = 4\pi R_1^2 \\ S_2 = 4\pi R_2^2 \end{cases}$

$$\text{Vậy } \frac{S_2}{S_1} = \frac{4\pi R_2^2}{4\pi R_1^2} = \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2 = 4.$$

Chọn đáp án (D) □

CÂU 13. Mặt cầu có bán kính bằng 1 thì diện tích bằng(A) 4π .(B) 16π .(C) $\frac{4\pi}{3}$.(D) 2π .**Lời giải.**

Mặt cầu có bán kính $R = 1$ thì có diện tích $S = 4\pi R^2 = 4\pi$.

Chọn đáp án (A) □

CÂU 14. Cho mặt cầu có bán kính $R = 5$. Diện tích của mặt cầu đã cho bằng(A) $\frac{100\pi}{3}$.(B) $\frac{500\pi}{3}$.(C) 100π .(D) 25π .**Lời giải.**

Diện tích của mặt cầu có bán kính $R = 5$ là $S = 4\pi R^2 = 4 \cdot \pi \cdot 5^2 = 100\pi$.

Chọn đáp án (C) □

CÂU 15. Một mặt cầu có diện tích bằng 36π , bán kính của mặt cầu đó bằng

(A) 3.

(B) $3\sqrt{3}$.(C) $3\sqrt{2}$.

(D) 6.

Lời giải.

Gọi R là bán kính của mặt cầu.

Khi đó, ta có diện tích mặt cầu: $S = 4\pi R^2 = 36\pi \Leftrightarrow R^2 = 9 \Leftrightarrow R = 3$.

Chọn đáp án (A) □

CÂU 16. Diện tích của mặt cầu có bán kính $R = 3$ bằng(A) 12π .(B) 6π .(C) 36π .(D) 18π .**Lời giải.**

Áp dụng công thức tính diện tích mặt cầu $S = 4\pi R^2 = 4\pi \cdot 3^2 = 36\pi$.

Chọn đáp án (C) □

CÂU 17. Số mặt cầu chứa một đường tròn cho trước là

(A) 0.

(B) Vô số.

(C) 2.

(D) 1.

Lời giải.

Có vô số mặt cầu chứa một đường tròn cho trước, các mặt cầu đó đi qua 1 điểm trên đường tròn đồng thời có tâm I thuộc đường thẳng vuông góc với mặt phẳng chứa đường tròn tại tâm của đường tròn.

Chọn đáp án (B) □

CÂU 18. Cho hai điểm A, B phân biệt. Tập hợp tâm những mặt cầu đi qua hai điểm A và B là(A) Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB .(B) Trung điểm của đường thẳng AB .(C) Đường thẳng trung trực của đoạn thẳng AB .(D) Mặt phẳng song song với đường thẳng AB .**Lời giải.**

I là tâm của mặt cầu (S)

Gọi (S) là mặt cầu đi qua 2 điểm A, B cho trước. Khi đó ta có $\Leftrightarrow IA = IB$

Vậy

$\Leftrightarrow I \in (P)$: mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB .

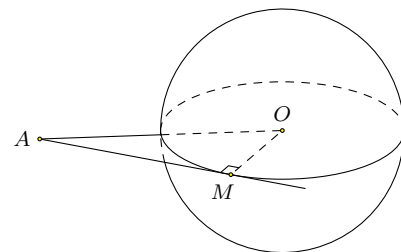
tập hợp tâm các mặt cầu đi qua hai điểm A, B cho trước là mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB .

Chọn đáp án (A) □

CÂU 19. Cho mặt cầu $S(O; R)$ và điểm A cố định nằm ngoài mặt cầu với $OA = d$. Qua A kẻ đường thẳng Δ tiếp xúc với mặt cầu $S(O; R)$ tại M . Công thức nào sau đây được dùng để tính độ dài đoạn thẳng AM ?(A) $\sqrt{R^2 - 2d^2}$.(B) $\sqrt{R^2 + d^2}$.(C) $\sqrt{d^2 - R^2}$.(D) $\sqrt{2R^2 - d^2}$.**Lời giải.**

Vì Δ tiếp xúc với mặt cầu $S(O; R)$ tại M nên Δ tiếp xúc với một đường tròn lớn của mặt cầu $S(O; R)$ tại M .

Do đó $\triangle OMA$ vuông tại M , suy ra $AM = \sqrt{OA^2 - OM^2} = \sqrt{d^2 - R^2}$.



Chọn đáp án (C)

CÂU 20. Số điểm chung giữa mặt cầu và mặt phẳng không thể là

(A) 2.

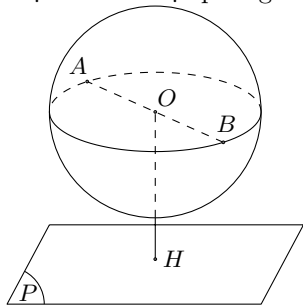
(B) Vô số.

(C) 0.

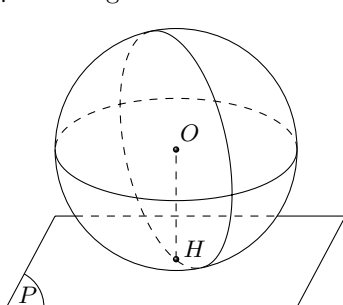
(D) 1.

Lời giải.

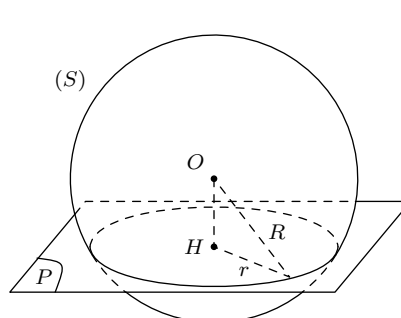
Mặt cầu và mặt phẳng có 3 vị trí tương đối với số điểm chung như các hình vẽ sau:



không có điểm chung



có 1 điểm chung



có vô số điểm chung

Vậy không xảy ra trường hợp mặt phẳng và mặt cầu có đúng 2 điểm chung.

Chọn đáp án (A)

D. BẢNG ĐÁP ÁN

1. D	2. D	3. B	4. A	5. B	6. D	7. B	8. B
9. C	10. D	11. C	12. D	13. A	14. C	15. A	16. C
		17. B	18. A	19. C	20. A		

Bài 16. SỐ PHỨC VÀ CÁC PHÉP TOÁN

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Phần thực, phần ảo của số phức, số phức liên hợp

• Số phức có dạng $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1$). Phần thực của z là a , phần ảo của z là b và i được gọi là đơn vị ảo.

• Số phức liên hợp của z là $\bar{z} = \overline{a + bi} = a - bi$.

$$\oplus z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2$$

$$\oplus \overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$$

$$\oplus \overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$$

$$\oplus \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$$

⊕ Tổng và tích của z và \bar{z} luôn là một số thực.

• Lưu ý: $i^{4n} = 1; i^{4n+1} = i; i^{4n+2} = -1; i^{4n+3} = -i$; với $n \in \mathbb{N}$.

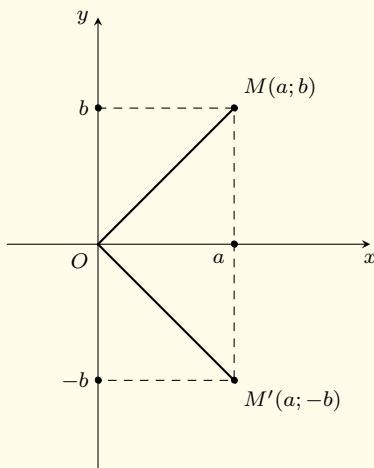
2. Hai số phức bằng nhau

Cho hai số phức $z_1 = a_1 + b_1i, z_2 = a_2 + b_2i$ ($a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$).

Khi đó:

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = a_2 \\ b_1 = b_2 \end{cases}$$

3. Biểu diễn hình học của số phức, môđun của số phức



• Biểu diễn hình học của số phức

- ☑ Số phức $z = a + bi (a, b \in \mathbb{R})$ được biểu diễn bởi điểm $M(a; b)$ trong mặt phẳng tọa độ.
- ☑ z và \bar{z} được biểu diễn bởi hai điểm đối xứng nhau qua trục Ox .

• Môđun của số phức

- ☑ Môđun của số phức z là $|z| = |\overrightarrow{OM}| = \sqrt{a^2 + b^2}$.
- ☑ Ta có: $|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}}; |z| = |\bar{z}|$.

B. BÀI TẬP MẪU

VÍ DỤ 16 (Đề minh họa BGD 2022-2023). Phần ảo của số phức $z = 2 - 3i$ là

- (A) -3 . (B) -2 . (C) 2 . (D) 3 .

☞ **Lời giải.**

Phần ảo của số phức $z = 2 - 3i$ là -3 .

Chọn đáp án (A)



C. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN

CÂU 1. Phần thực và phần ảo của số phức $z = (1 + 2i)i$ lần lượt là

- (A) 1 và 2 . (B) -2 và 1 . (C) 1 và -2 . (D) 2 và 1 .

☞ **Lời giải.**

Ta có $z = (1 + 2i)i = i + 2i^2 = -2 + i$.

Vậy phần thực và phần ảo của z lần lượt là -2 và 1 .

Chọn đáp án (B)



CÂU 2. Cho hai số phức $z_1 = 5 - 3i$, $z_2 = -1 + 2i$. Tổng phần thực, phần ảo của tổng hai số phức đã cho là

- (A) $S = 3$. (B) $S = 7$. (C) $S = 4$. (D) $S = 5$.

☞ **Lời giải.**

Ta có $z_1 + z_2 = (5 - 3i) + (-1 + 2i) = 4 - i$.

Vậy tổng phần thực và phần ảo của tổng hai số phức đã cho là $S = 3$.

Chọn đáp án (A)



CÂU 3. Phần ảo của số phức $z = 4 - 5i$ là

- (A) $-5i$. (B) -5 . (C) 5 . (D) 4 .

☞ **Lời giải.**

Phần ảo của số phức $z = 4 - 5i$ là -5 .

Chọn đáp án (B)



CÂU 4. Số phức liên hợp của số phức $1 - 2i$ là

- (A) $-1 + 2i$. (B) $-1 - 2i$. (C) $1 + 2i$. (D) $-2 + i$.

Lời giải.

Theo định nghĩa số phức liên hợp của số phức $z = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$ là số phức $\bar{z} = a - bi$, $a, b \in \mathbb{R}$.

Chọn đáp án (C)

CÂU 5. Cho số phức $z = 2 - 3i$. Số phức liên hợp \bar{z} là

(A) $\bar{z} = -2 - 3i$.

(B) $\bar{z} = 3 - 2i$.

(C) $\bar{z} = -2 + 3i$.

(D) $\bar{z} = 2 + 3i$.

Lời giải.

Ta có $z = a + bi \Rightarrow \bar{z} = a - bi$. Do đó $z = 2 - 3i \Rightarrow \bar{z} = 2 + 3i$.

Chọn đáp án (D)

CÂU 6. Số phức z thỏa mãn $z = 5 - 8i$ có phần ảo là

(A) 8.

(B) $-8i$.

(C) -8 .

(D) 5.

Lời giải.

Số phức $z = 5 - 8i$ có phần ảo là -8 .

Chọn đáp án (C)

CÂU 7. Mô-đun của số phức $z = 4 - 2i$ bằng

(A) $2\sqrt{5}$.

(B) 4.

(C) $2\sqrt{3}$.

(D) $3\sqrt{2}$.

Lời giải.

Ta có $|z| = \sqrt{4^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{5}$.

Chọn đáp án (A)

CÂU 8. Cho $z = 3 + 2i$. Tìm mô-đun của z .

(A) $|z| = 5$.

(B) $|z| = 13$.

(C) $|z| = \sqrt{13}$.

(D) $|z| = \sqrt{5}$.

Lời giải.

Ta có $|z| = |3 + 2i| = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13}$.

Chọn đáp án (C)

CÂU 9. Số phức liên hợp của số phức $z = 6 - 8i$ là

(A) $-6 + 8i$.

(B) $6 + 8i$.

(C) $-6 - 8i$.

(D) $8 - 6i$.

Lời giải.

Ta có số phức $z = a + bi$ sẽ có số phức liên hợp là $\bar{z} = a - bi$.

Do đó số phức liên hợp của $z = 6 - 8i$ là $\bar{z} = 6 + 8i$.

Chọn đáp án (B)

CÂU 10. Số phức liên hợp của số phức z có phần thực bằng 4, phần ảo bằng 5 là

(A) $\bar{z} = 4 + 5i$.

(B) $\bar{z} = 4 - 5i$.

(C) $\bar{z} = 5 - 4i$.

(D) $\bar{z} = 5 + 4i$.

Lời giải.

Ta có số phức z có phần thực bằng 4, phần ảo bằng 5 là $z = 4 + 5i$.

Do đó $\bar{z} = 4 - 5i$.

Chọn đáp án (B)

CÂU 11. Cho số phức $z = 3 - 4i$. Mệnh đề nào dưới đây sai?

(A) Số phức liên hợp của z là $3 - 4i$.

(B) Phần thực và phần ảo của z lần lượt là 3 và -4 .

(C) Biểu diễn số phức z lên mặt phẳng tọa độ là điểm $M(3; -4)$.

(D) Mô-đun của số phức z bằng 5.

Lời giải.

Số phức liên hợp của $z = 3 - 4i$ là $\bar{z} = 3 + 4i$.

Mệnh đề "Số phức liên hợp của z là $3 - 4i$ " sai.

Chọn đáp án (A)

CÂU 12. Số phức nào dưới đây là số thuần ảo

(A) $z = -2i$.

(B) $z = 2 + 2i$.

(C) $z = -1 + \sqrt{2}i$.

(D) $z = -2$.

Lời giải.

Số phức thuần ảo là $z = -2i$.

Chọn đáp án (A)

CÂU 13. Phần ảo của số phức $z = 2 + 3i$ là

(A) $2i$.

(B) $3i$.

(C) 2.

(D) 3.

Lời giải.

Ta có $z = 2 + 3i$. Phần ảo của số phức z là 3.

Chọn đáp án (D)

CÂU 14. Số phức liên hợp của số phức $z = 2 - 3i$ là

(A) $\bar{z} = 2 + 3i$.

(B) $\bar{z} = -2 + 3i$.

(C) $z = 3 + 2i$.

(D) $\bar{z} = 3 - 2i$.

Lời giải.

Số phức liên hợp của số phức $z = 2 - 3i$ là $\bar{z} = 2 + 3i$.

Chọn đáp án (A)

CÂU 15. Mô-đun của số phức $z = 7 - 5i$ bằng

(A) $2\sqrt{6}$.

(B) 74.

(C) 24.

(D) $\sqrt{74}$.

Lời giải.

Ta có $|z| = \sqrt{7^2 + 5^2} = \sqrt{74}$.

Chọn đáp án (D)

CÂU 16. Cho số phức $z = 3 + 4i$. Tính $|z|$.

(A) $|z| = \sqrt{5}$.

(B) $|z| = 13$.

(C) $|z| = \sqrt{13}$.

(D) $|z| = 5$.

Lời giải.

$z = 3 + 4i \Rightarrow |z| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$.

Chọn đáp án (D)

CÂU 17. Cho số phức $z = 3 - 4i$. Mô-đun của z bằng

(A) 12.

(B) 5.

(C) 7.

(D) 1.

Lời giải.

Mô-đun của z bằng $|z| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5$.

Chọn đáp án (B)

CÂU 18. Cho số phức z thỏa mãn $z = 5 - 8i$ có phần ảo là

(A) -8 .

(B) 8.

(C) 5.

(D) $-8i$.

Lời giải.

Ta có $z = 5 - 8i$ có phần ảo bằng -8 .

Chọn đáp án (A)

CÂU 19. Mô-đun của số phức $2 + 3i$ bằng

(A) $\sqrt{13}$.

(B) 13.

(C) $\sqrt{5}$.

(D) 5.

Lời giải.

Ta có $|2 + 3i| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$.

Chọn đáp án (A)

CÂU 20. Mô-đun của số phức $z = 3 + 4i$ là

(A) 5.

(B) 7.

(C) 3.

(D) 4.

Lời giải.

$|z| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$.

Chọn đáp án (A)

CÂU 21. Gọi a, b lần lượt là phần thực và phần ảo của số phức $z = -3 + 2i$. Giá trị $a - b$ bằng

(A) 1.

(B) 5.

(C) -5 .

(D) -1 .

Lời giải.

Số phức $z = -3 + 2i$, có phần thực $a = -3$, phần ảo $b = 2$. Do đó $a - b = -3 - 2 = -5$.

Chọn đáp án (C)

CÂU 22. Số phức có phần thực bằng 3 và phần ảo bằng 2 là

(A) $3 - 2i$.

(B) $3 + 2i$.

(C) $2 + 3i$.

(D) $2 - 3i$.

Lời giải.

Số phức có phần thực bằng 3 và phần ảo bằng 2 là $z = 3 + 2i$.

Chọn đáp án (B)

CÂU 23. Với x, y là các số thực thì số phức $z = x - 1 + (y + 2)i$ là số ảo khi và chỉ khi

(A) $y = -2$.

(B) $x = 1, y \neq -2$.

(C) $y = -2, x \neq 1$.

(D) $x = 1$.

Lời giải.

Ta có $z = x - 1 + (y + 2)i$ là số thuần ảo $\Leftrightarrow x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Chọn đáp án (D)

CÂU 24. Cho số phức $z = -2 + i$. Tìm phần thực và phần ảo của số phức \bar{z} .

- (A) Phần thực bằng 2 và phần ảo bằng 1. (B) Phần thực bằng 2 và phần ảo bằng i .
(C) Phần thực bằng -2 và phần ảo bằng $-i$. (D) Phần thực bằng -2 và phần ảo bằng -1 .

Lời giải.

Phần thực bằng -2 và phần ảo bằng -1 .

Chọn đáp án (D)



CÂU 25. Mô-đun của số phức $z = 5 - 4i$ bằng

- (A) 1. (B) 41. (C) $\sqrt{41}$. (D) 3.

Lời giải.

$$|z| = \sqrt{5^2 + (-4)^2} = \sqrt{41}.$$

Chọn đáp án (C)



CÂU 26. Cho số phức $z = 2 + \sqrt{3}i$. Mô-đun của z bằng

- (A) 5. (B) $\sqrt{5}$. (C) $\sqrt{7}$. (D) 7.

Lời giải.

$$\text{Ta có } |z| = \sqrt{2^2 + 3} = \sqrt{7}.$$

Chọn đáp án (C)



CÂU 27. Phần thực của số phức $(2 - i)(1 + 2i)$ là

- (A) 5. (B) 3. (C) 4. (D) 0.

Lời giải.

$$\text{Ta có } (2 - i)(1 + 2i) = 2 + 4i - i - 2i^2 = 4 + 3i.$$

Chọn đáp án (C)



CÂU 28. Số phức liên hợp của số phức $z = 1 - 2i$ là

- (A) $-1 + 2i$. (B) $-1 - 2i$. (C) $2 - i$. (D) $1 + 2i$.

Lời giải.

Số phức liên hợp của số phức $z = 1 - 2i$ là $\bar{z} = 1 + 2i$.

Chọn đáp án (D)



CÂU 29. Mô-đun của số phức $z = 5 - 2i$ bằng

- (A) 29. (B) $\sqrt{29}$. (C) 3. (D) 7.

Lời giải.

$$\text{Ta có } |z| = |5 - 2i| = \sqrt{5^2 + (-2)^2} = \sqrt{29}.$$

Chọn đáp án (B)



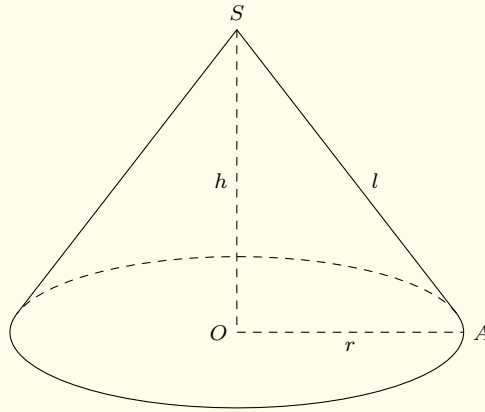
D. BẢNG ĐÁP ÁN

1. B	2. A	3. B	4. C	5. D	6. C	7. A	8. C
9. B	10. B	11. A	12. A	13. D	14. A	15. D	16. D
17. B	18. A	19. A	20. A	21. C	22. B	23. D	24. D
	25. C	26. C	27. C	28. D	29. B		

Bài 17. HÌNH NÓN, HÌNH TRỤ

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

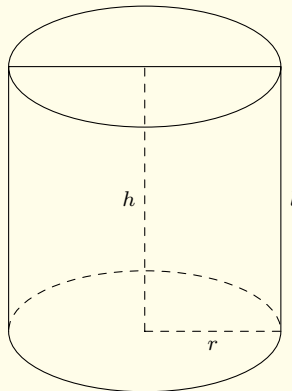
1. Hình nón, khối nón



- ☑ Công thức tính diện tích xung quanh của hình nón $S_{xq} = \pi r l$.
- ☑ Công thức tính diện tích toàn phần của hình nón $S_{tp} = S_{xq} + S_{đáy} = \pi r l + \pi r^2 = \pi r(l + r)$.
- ☑ Công thức tính thể tích của khối nón $V_{nón} = \frac{1}{3} \pi r^2 h$.
- ☑ Áp dụng Pitago và các hệ thức lượng giác trong tam giác vuông SOA , ta có

$$l^2 = h^2 + r^2; \cos \widehat{ASO} = \frac{h}{l}; \sin \widehat{ASO} = \frac{r}{l}; \tan \widehat{ASO} = \frac{r}{h}.$$

2. Hình trụ, khối trụ



- ☑ Công thức tính diện tích xung quanh của hình trụ $S_{xq} = 2\pi r l$.
- ☑ Công thức tính diện tích toàn phần của hình trụ $S_{tp} = S_{xq} + 2S_{đáy} = 2\pi r l + 2\pi r^2$.
- ☑ Công thức tính thể tích của khối trụ $V_{trụ} = \pi r^2 h$.

B. BÀI TẬP MẪU

VÍ DỤ 17 (ĐỀ minh họa BGD 2022-2023). Cho hình nón có đường kính đáy $2r$ và độ dài đường sinh l . Diện tích xung quanh của hình nón đã cho bằng

- (A) $2\pi r l$. (B) $\frac{2}{3} \pi r l^2$. (C) $\pi r l$. (D) $\frac{1}{3} \pi r^2 l$.

☞ **Lời giải.**

Công thức tính diện tích xung quanh hình nón là $S_{xq} = \pi r l$.

Chọn đáp án (C) □

C. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN

CÂU 30. Cho hình nón có bán kính đáy $r = a$ và độ dài đường sinh $l = 3a$. Diện tích xung quanh của hình nón đã cho bằng

(A) $3\pi a^2$.

(B) πa^2 .

(C) $4\pi a^2$.

(D) $10\pi a^2$.

Lời giải.

Diện tích xung quanh của hình nón là $S_{xq} = \pi r l = \pi a \cdot 3a = 3\pi a^2$.

Chọn đáp án **(A)**

CÂU 31. Một khối nón có chiều cao bằng 3, độ dài đường sinh bằng 5. Thể tích của khối nón là

(A) 12π .

(B) 16π .

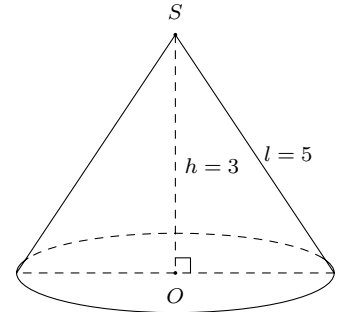
(C) 15π .

(D) $\frac{80\pi}{3}$.

Lời giải.

Bán kính đáy $r = \sqrt{l^2 - h^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$.

Thể tích khối nón $V = \frac{1}{3}Bh = \frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot h = \frac{1}{3}\pi \cdot 4^2 \cdot 3 = 16\pi$.



Chọn đáp án **(B)**

CÂU 32. Cho khối nón có bán kính đáy bằng $R = 1$, đường sinh $l = 4$. Diện tích xung quanh của khối nón là

(A) 8π .

(B) 12π .

(C) 4π .

(D) 6π .

Lời giải.

$S_{xq} = \pi R l = 4\pi$.

Chọn đáp án **(C)**

CÂU 33. Cho khối nón có bán kính đáy $r = \sqrt{3}$ và chiều cao $h = 4$. Thể tích của khối nón đã cho bằng

(A) 4π .

(B) 12π .

(C) 12 .

(D) 4 .

Lời giải.

Thể tích của khối nón là $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi (\sqrt{3})^2 \cdot 4 = 4\pi$.

Chọn đáp án **(A)**

CÂU 34. Cho khối nón có độ dài đường cao bằng $2a$ và bán kính đáy bằng a . Thể tích của khối nón đã cho bằng

(A) $2\pi a^3$.

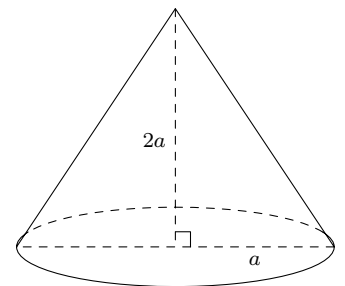
(B) $\frac{4\pi a^3}{3}$.

(C) $\frac{\pi a^3}{3}$.

(D) $\frac{2\pi a^3}{3}$.

Lời giải.

Thể tích khối nón: $V = \frac{1}{3} \cdot 2a \cdot \pi a^2 = \frac{2\pi a^3}{3}$.



Chọn đáp án **(D)**

CÂU 35. Cho khối nón có bán kính đáy $r = 2$, chiều cao $h = \sqrt{3}$. Thể tích của khối nón đã cho là

(A) $\frac{2\pi\sqrt{3}}{3}$.

(B) $4\pi\sqrt{3}$.

(C) $\frac{4\pi\sqrt{3}}{3}$.

(D) $\frac{4\pi}{3}$.

Lời giải.

Áp dụng công thức tính thể tích khối nón, thể tích khối nón đã cho là

$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \cdot 2^2 \sqrt{3} = \frac{4\pi\sqrt{3}}{3}$ (đvtt).

Chọn đáp án **(C)**

CÂU 36. Cho khối nón có thể tích V . Khi tăng bán kính đường tròn đáy lên 2 lần thì được khối nón mới có thể tích bằng

(A) $4V$.

(B) $2V$.

(C) $\frac{2V}{3}$.

(D) $\frac{4V}{3}$.

Lời giải.

Ta có thể tích khối nón ban đầu là $V = \frac{1}{3}\pi hr^2$.

Tăng bán kính đáy lên 2 lần thì thể tích khối nón mới là $V_m = \frac{1}{3}\pi h(2r)^2 = 4\left(\frac{1}{3}\pi hr^2\right) = 4V$.

Chọn đáp án (A)

CÂU 37. Diện tích xung quanh của hình nón có độ dài đường sinh l và bán kính đáy $\frac{r}{2}$ bằng

(A) $\frac{1}{2}\pi rl$.

(B) πrl .

(C) $\frac{1}{6}\pi rl$.

(D) $2\pi rl$.

Lời giải.

Diện tích xung quanh của hình nón đó là $S_{xq} = \pi \frac{r}{2} l = \frac{1}{2}\pi rl$.

Chọn đáp án (A)

CÂU 38. Một khối trụ có chiều cao bằng $2a$ và diện tích đáy bằng $2a^2$. Tính thể tích khối lăng trụ?

(A) $V = \frac{4a^2}{3}$.

(B) $V = \frac{4a^3}{3}$.

(C) $V = 4a^3$.

(D) $V = \frac{2a^3}{3}$.

Lời giải.

Thể tích khối trụ là $V = Bh = 2a^2 \cdot 2a = 4a^3$.

Chọn đáp án (C)

CÂU 39. Diện tích xung quanh của hình trụ có độ dài đường sinh l và bán kính đáy $r = \frac{1}{2}l$ là

(A) l^2 .

(B) πl^2 .

(C) $2\pi l^3$.

(D) $2\pi l$.

Lời giải.

Diện tích xung quanh hình trụ là $S = 2\pi rl = 2\pi \cdot \frac{1}{2}l \cdot l = \pi l^2$.

Chọn đáp án (B)

CÂU 40. Một hình trụ có bán kính đáy $r = 5$ cm, chiều cao $h = 7$ cm. Diện tích xung quanh của hình trụ này là

(A) 70π cm².

(B) $\frac{70}{3}\pi$ cm².

(C) $\frac{35}{3}\pi$ cm².

(D) 35π cm².

Lời giải.

Diện tích xung quanh của hình trụ là $S_{xq} = 2\pi rh = 2 \cdot \pi \cdot 5 \cdot 7 = 70\pi$ cm².

Chọn đáp án (A)

CÂU 41. Một hình trụ tròn có bán kính đáy $r = 50$ cm và chiều cao $h = 50$ cm. Diện tích xung quanh hình trụ bằng

(A) 5000π cm².

(B) 5000 cm².

(C) 2500π cm².

(D) 2500 cm².

Lời giải.

Diện tích xung quanh của hình trụ đó là $S_{xq} = 2\pi rl = 2\pi \cdot 50 \cdot 50 = 5000\pi$ cm².

Chọn đáp án (A)

CÂU 42. Diện tích xung quanh của hình trụ có độ dài đường cao h và bán kính đáy r bằng

(A) $4\pi rh$.

(B) πrh .

(C) $2\pi rh$.

(D) $\frac{1}{3}\pi rh$.

Lời giải.

Diện tích xung quanh của hình trụ là $S_{xq} = 2\pi rh$.

Chọn đáp án (C)

CÂU 43. Cho một khối trụ có độ dài đường sinh bằng 10 cm. Biết thể tích khối trụ bằng 90π cm³. Tính diện tích xung quanh của khối trụ.

(A) 36π cm².

(B) 81π cm².

(C) 60π cm².

(D) 78π cm².

Lời giải.

Ta có $h = l = 10$ cm.

$V = 90\pi \Leftrightarrow \pi r^2 \cdot h = 90\pi \Leftrightarrow r^2 = 9 \Leftrightarrow r = 3$ cm.

Vậy $S_{xq} = 2\pi rl = 60\pi$ cm².

Chọn đáp án (C)

CÂU 44. Tính diện tích xung quanh của một hình trụ có chiều cao 20 m, chu vi đáy bằng 5 m.

(A) 100π m².

(B) 100 m².

(C) 50 m².

(D) 50π m².

Lời giải.

Ta có chu vi đáy $C = 2\pi R = 5$ m.

Diện tích xung quanh của hình trụ là $S_{xq} = 2\pi Rl = 5 \cdot 20 = 100$ m².

Chọn đáp án (B)

CÂU 45. Cho khối trụ có bán kính đáy bằng a và chiều cao bằng $3a\sqrt{3}$. Thể tích của khối trụ đó là

- (A) $3\pi a^3$. (B) $3\pi a^3\sqrt{3}$. (C) πa^3 . (D) $\pi a^3\sqrt{3}$.

Lời giải.

Ta có $V = \pi R^2 h = \pi a^2 \cdot 3a\sqrt{3} = 3\pi a^3\sqrt{3}$.

Chọn đáp án (B)

CÂU 46. Cho hình trụ có bán kính đáy bằng a , chu vi của thiết diện qua trục bằng $12a$. Thể tích của khối trụ đã cho bằng

- (A) πa^3 . (B) $4\pi a^3$. (C) $6\pi a^3$. (D) $5\pi a^3$.

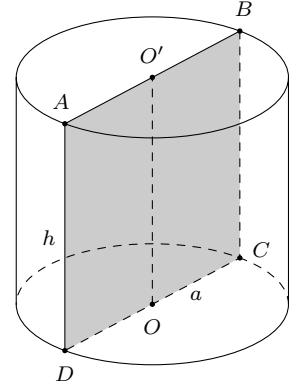
Lời giải.

Ta có bán kính $r = a$. Gọi h là chiều cao của hình trụ.

Thiết diện qua trục của hình trụ là hình chữ nhật.

Theo bài ra ta có $2(h + 2a) = 12a \Leftrightarrow h = 4a$.

Vậy thể tích của khối trụ bằng $V = \pi r^2 h = \pi a^2(4a) = 4\pi a^3$.



Chọn đáp án (B)

CÂU 47. Cho khối trụ có đường sinh bằng 2, thể tích 18π . Diện tích toàn phần của khối trụ bằng

- (A) 20π . (B) 10π . (C) 12π . (D) 30π .

Lời giải.

Ta có hình trụ $l = h = 2$.

Khối trụ có: $V = 18\pi \Rightarrow \pi R^2 h = 18\pi \Rightarrow \pi R^2 \cdot 2 = 18\pi \Rightarrow R^2 = 9 \Rightarrow R = 3$.

Ta có $S_{tp} = S_{xq} + S_{2\text{đáy}} = 2\pi Rl + 2\pi R^2 = 2\pi \cdot 3 \cdot 2 + 2 \cdot \pi \cdot 3^2 = 30\pi$.

Chọn đáp án (D)

CÂU 48. Cho khối trụ có bán kính đáy bằng 2, chiều cao bằng 3. Thể tích của khối trụ đã cho bằng

- (A) 12π . (B) 6π . (C) 4π . (D) 18π .

Lời giải.

Ta có $V = \pi \cdot r^2 \cdot h = \pi \cdot 2^2 \cdot 3 = 12\pi$.

Chọn đáp án (A)

CÂU 49. Công thức tính thể tích khối trụ tròn xoay có bán kính r và chiều cao h là

- (A) $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$. (B) $V = \pi r h$. (C) $V = \pi r^2 h$. (D) $V = 2\pi r h$.

Lời giải.

Công thức tính thể tích khối trụ tròn xoay có bán kính r và chiều cao h là $V = \pi r^2 h$.

Chọn đáp án (C)

D. BẢNG ĐÁP ÁN

30. A	31. B	32. C	33. A	34. D	35. C	36. A	37. A
38. C	39. B	40. A	41. A	42. C	43. C	44. B	45. B
		46. B	47. D	48. A	49. C		

Bài 18. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Phương trình đường thẳng

- ☑ Đường thẳng d đi qua điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ và có véc-tơ chỉ phương (VTCP) $\vec{u}_d = (a_1; a_2; a_3)$ có phương trình tham số
$$\begin{cases} x = x_0 + a_1 t \\ y = y_0 + a_2 t \\ z = z_0 + a_3 t \end{cases}, (t \in \mathbb{R}).$$
- ☑ Điểm M thuộc đường thẳng $d \Leftrightarrow M(x_0 + at_1; y_0 + at_2; z_0 + at_3)$.
- ☑ Nếu $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \neq 0$ thì $\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3}$ được gọi là phương trình chính tắc của d .

B. BÀI TẬP MẪU

VÍ DỤ 18. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+3}{-2}$. Điểm nào dưới đây thuộc d ?

- (A) $P(1; 2; 3)$. (B) $Q(1; 2; -3)$. (C) $N(2; 1; 2)$. (D) $M(2; -1; -2)$.

☞ **Lời giải.**

Thay tọa độ điểm $Q(1; 2; -3)$ vào phương trình d ta có

$$\frac{1-1}{2} = \frac{2-2}{-1} = \frac{-3+3}{-2}. \text{ Suy ra } Q \in d.$$

Chọn đáp án (B) □

C. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN

CÂU 1. Cho đường thẳng $\Delta: \frac{x-2}{2} = \frac{y-3}{3} = \frac{z}{1}$. Khi đó Δ đi qua điểm M có tọa độ

- (A) $(2; 3; 0)$. (B) $(0; 0; 1)$. (C) $(1; -1; 2)$. (D) $(0; 2; -1)$.

☞ **Lời giải.**

Dễ thấy Δ đi qua điểm $M(2; 3; 0)$.

Chọn đáp án (A) □

CÂU 2. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z-1}{2}$. Điểm nào dưới đây không thuộc d ?

- (A) $N(1; 0; 1)$. (B) $F(3; -4; 5)$. (C) $M(0; 2; 1)$. (D) $E(2; -2; 3)$.

☞ **Lời giải.**

Thay tọa độ điểm $E(2; -2; 3)$ vào d ta được $\frac{2-1}{1} = \frac{-2}{-2} = \frac{3-1}{2}$ thỏa mãn nên loại $E(2; -2; 3)$.

Thay tọa độ điểm $N(1; 0; 1)$ vào d ta được $\frac{1-1}{1} = \frac{0}{-2} = \frac{1-1}{2}$ thỏa mãn nên loại $N(1; 0; 1)$.

Thay tọa độ điểm $F(3; -4; 5)$ vào d ta được $\frac{3-1}{1} = \frac{-4}{-2} = \frac{5-1}{2}$ thỏa mãn nên loại $F(3; -4; 5)$.

Thay tọa độ điểm $M(0; 2; 1)$ vào d ta được $\frac{0-1}{1} = \frac{2}{-2} = \frac{1-1}{2}$ không thỏa mãn nên chọn $M(0; 2; 1)$.

Chọn đáp án (C) □

CÂU 3. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+3}{-2}$. Điểm nào dưới đây thuộc d ?

- (A) $N(2; 3; -2)$. (B) $M(1; 1; -3)$. (C) $Q(3; 2; -2)$. (D) $P(-1; 1; -3)$.

☞ **Lời giải.**

Đường thẳng d đi qua điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ nhận véc-tơ chỉ phương $\vec{u} = (u_1; u_2; u_3)$ có phương trình

$$\frac{x - x_0}{u_1} = \frac{y - y_0}{u_2} = \frac{z - z_0}{u_3}.$$

Nên theo đề bài thì đường thẳng d đi qua điểm $P(-1; 1; -3)$.

Chọn đáp án (D) □

CÂU 4. Trong không gian $Oxyz$, điểm nào dưới đây thuộc đường thẳng $d: \frac{x+2}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+2}{2}$?

- (A) $P(1; 1; 2)$. (B) $N(2; -1; 2)$. (C) $Q(-2; 1; -2)$. (D) $M(-2; -2; 1)$.

☞ **Lời giải.**

Đường thẳng $d: \frac{x+2}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+2}{2}$ đi qua điểm $(-2; 1; -2)$.

Chọn đáp án (C) □

CÂU 5. Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z+3}{5}$ không đi qua điểm nào dưới đây?

- (A) $N(0; 5; -8)$. (B) $Q(1; 2; -3)$. (C) $M(2; -1; 2)$. (D) $P(0; 2; -8)$.

Lời giải.

Lần lượt thay tọa độ các điểm vào phương trình đường thẳng

☑ $\frac{0-1}{1} = \frac{5-2}{-3} = \frac{-8+3}{5} = -1$. Suy ra $N \in d$.

☑ $\frac{1-1}{1} = \frac{2-2}{-3} = \frac{-3+3}{5} = 0$. Suy ra $Q \in d$.

☑ $\frac{2-1}{1} = \frac{-1-2}{-3} = \frac{2+3}{5} = 1$. Suy ra $M \in d$.

☑ $\frac{0-1}{1} = \frac{2-2}{-3} \neq \frac{-8+3}{5}$. Suy ra $P \notin d$.

Chọn đáp án (D) □

CÂU 6. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho đường thẳng Δ có phương trình $\Delta: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z+3}{4}$. Đường thẳng Δ đi qua điểm M nào bên dưới?

- (A) $M(5; -4; 7)$. (B) $M(-5; 11; -15)$. (C) $M(-5; 7; -12)$. (D) $M(5; 4; -7)$.

Lời giải.

Thay tọa độ các điểm M trong bốn đáp án A, B, C, D vào phương trình đường thẳng Δ ta thấy điểm $M(-5; 11; -15)$ thỏa mãn. Vậy đường thẳng Δ đi qua điểm $M(-5; 11; -15)$.

Chọn đáp án (B) □

CÂU 7. Trong không gian $Oxyz$, điểm nào dưới đây thuộc đường thẳng $d: \frac{x+2}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+2}{2}$.

- (A) $Q(-2; 1; -2)$. (B) $M(-2; -2; 1)$. (C) $P(1; 1; 2)$. (D) $N(2; -1; 2)$.

Lời giải.

Đường thẳng $d: \frac{x+2}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+2}{2}$ đi qua điểm $(-2; 1; -2)$.

Chọn đáp án (A) □

CÂU 8. Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng $d: \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = -1 - 4t \\ z = 5t \end{cases}$ đi qua điểm nào sau đây?

- (A) $M(5; 5; 5)$. (B) $M(3; -4; 5)$. (C) $M(2; -1; 0)$. (D) $M(8; 9; 10)$.

Lời giải.

Thay $t = 0$ vào phương trình đường thẳng d ta được $\begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \\ z = 0 \end{cases}$

Do đó điểm $M(2; -1; 0)$ thuộc d .

Chọn đáp án (C) □

CÂU 9. Trong không gian $Oxyz$, điểm nào sau đây không nằm trên đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{3}$?

- (A) $M(1; -1; 0)$. (B) $N(3; 0; 3)$. (C) $P(-3; -3; -6)$. (D) $Q(5; 1; 5)$.

Lời giải.

Thay tọa độ M vào phương trình đường thẳng Δ ta được $0 = 0 = 0$ (đúng). Suy ra $M \in \Delta$.

Thay tọa độ N vào phương trình đường thẳng Δ ta được $1 = 1 = 1$ (đúng). Suy ra $N \in \Delta$.

Thay tọa độ P vào phương trình đường thẳng Δ ta được $-2 = -2 = -2$ (đúng). Suy ra $P \in \Delta$.

Thay tọa độ Q vào phương trình đường thẳng Δ ta được $2 = 2 = \frac{5}{3}$ (Vô lý)

$\Rightarrow Q \notin \Delta$.

Chọn đáp án (D) □

CÂU 10. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $(d): \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2t \\ z = 2 + t \end{cases}$. Điểm nào dưới đây thuộc (d) ?

- (A) $M(1; 2; 2)$. (B) $N(0; 2; 3)$. (C) $P(-1; 4; 2)$. (D) $Q(-1; 2; 1)$.

Lời giải.

Thay lần lượt tọa độ các điểm vào phương trình đường thẳng (d), ta thấy chỉ có đáp án $N(0; 2; 3)$ thỏa mãn.

Chọn đáp án (B)

CÂU 11. Trong không gian $Oxyz$, điểm nào dưới đây thuộc đường thẳng $d: \frac{x-2}{-3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+3}{1}$?

(A) $(3; -2; 1)$.

(B) $(2; -1; -3)$.

(C) $(-2; 1; 3)$.

(D) $(-3; 2; 1)$.

Lời giải.

Do đường thẳng $\Delta: \frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$ luôn đi qua điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ nên đường thẳng đã cho đi qua điểm $A(2; -1; -3)$, các điểm còn lại không thuộc d .

Chọn đáp án (B)

CÂU 12. Trong không gian $Oxyz$, điểm nào sau đây không thuộc đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3 - 4t \\ z = 6 - 5t \end{cases}$?

(A) $P(-1; -3; -6)$.

(B) $Q(-1; 7; 11)$.

(C) $M(1; 3; 6)$.

(D) $N(3; -1; 1)$.

Lời giải.

Điểm M, N và Q thuộc đường thẳng d . Do đó loại $Q(-1; 7; 11), M(1; 3; 6), N(3; -1; 1)$. Điểm $P(-1; -3; -6) \notin d \Rightarrow$ chọn $P(-1; -3; -6)$.

Chọn đáp án (A)

CÂU 13. Trong không gian $Oxyz$, điểm nào sau đây thuộc đường thẳng $d: \frac{x+1}{-1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-1}{3}$?

(A) $M(1; 2; 1)$.

(B) $Q(1; -2; -1)$.

(C) $N(-1; 3; 2)$.

(D) $P(-1; 2; 1)$.

Lời giải.

Theo phương trình đường thẳng, đường thẳng d đi qua điểm $P(-1; 2; 1)$.

Chọn đáp án (D)

CÂU 14. Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - 3t \\ z = 3 - t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ không đi qua điểm nào dưới đây?

(A) $Q(1; 2; 3)$.

(B) $M(3; -1; 2)$.

(C) $P(2; -2; 3)$.

(D) $N(-1; 5; 4)$.

Lời giải.

Thay tọa độ 4 điểm M, N, P, Q vào phương trình đường thẳng d ta có:

$$\textcircled{\heartsuit} \begin{cases} 1 = 1 + 2t \\ 2 = 2 - 3t \Rightarrow t = 0 \Rightarrow Q \in d. \\ 3 = 3 - t \end{cases}$$

$$\textcircled{\heartsuit} \begin{cases} 3 = 1 + 2t \\ -1 = 2 - 3t \Rightarrow t = 1 \Rightarrow M \in d. \\ 2 = 3 - t \end{cases}$$

$$\textcircled{\heartsuit} \begin{cases} 2 = 1 + 2t \\ -2 = 2 - 3t \Rightarrow \begin{cases} t = \frac{1}{2} \\ t = \frac{4}{3} \end{cases} \Rightarrow \text{hệ vô nghiệm} \Rightarrow P \notin d. \\ 3 = 3 - t \\ t = 0 \end{cases}$$

$$\textcircled{\heartsuit} \begin{cases} -1 = 1 + 2t \\ 5 = 2 - 3t \Rightarrow t = -1 \Rightarrow N \in d \\ 4 = 3 - t \end{cases}$$

Chọn đáp án (C)

CÂU 15. Trong không gian $Oxyz$, điểm nào dưới đây thuộc đường thẳng $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-2}{3}$?

(A) $P(2; -1; 3)$.

(B) $M(-1; 1; -2)$.

(C) $N(1; -1; 2)$.

(D) $Q(-2; 1; -3)$.

Lời giải.

Xét điểm $N(1; -1; 2)$ ta có $\frac{1-1}{2} = \frac{-1+1}{-1} = \frac{2-2}{3}$ nên điểm $N(1; -1; 2)$ thuộc đường thẳng đã cho.

Chọn đáp án (C)

CÂU 16. Trong không gian $Oxyz$, điểm nào dưới đây thuộc đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 5 + t \\ z = 2 + 3t \end{cases}$?

- (A) $P(1; 2; 5)$. (B) $N(1; 5; 2)$. (C) $Q(-1; 1; 3)$. (D) $M(1; 1; 3)$.

Lời giải.

☑ **Cách 1.** Nếu d qua $M(x_0; y_0; z_0)$, có vectơ chỉ phương $\vec{u}(a; b; c)$ thì phương trình đường thẳng d là

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}, \text{ ta chọn đáp án } N(1; 5; 2).$$

☑ **Cách 2.** Thay tọa độ các điểm vào phương trình đường thẳng d , ta có

$$\begin{cases} 1 = 1 - t \\ 2 = 5 + t \\ 5 = 2 + 3t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = -3 \\ t = 1 \end{cases} \text{ (Vô lý).}$$

Loại đáp án $P(1; 2; 5)$.

Thay tọa độ điểm N vào phương trình đường thẳng d , ta có $\begin{cases} 1 = 1 - t \\ 5 = 5 + t \\ 2 = 2 + 3t \end{cases} \Leftrightarrow t = 0$. Nhận đáp án $N(1; 5; 2)$.

Chọn đáp án (B)

CÂU 17. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, đường thẳng $d: \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{-4} = \frac{z-3}{-5}$ đi qua điểm

- (A) $(-1; 2; -3)$. (B) $(1; -2; 3)$. (C) $(-3; 4; 5)$. (D) $(3; -4; -5)$.

Lời giải.

Chọn đáp án (B)

CÂU 18. Trong không gian $Oxyz$, điểm nào dưới đây thuộc đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 5 + t \\ z = 2 + 3t \end{cases}$

- (A) $P(1; 2; 5)$. (B) $N(1; 5; 2)$. (C) $M(1; 1; 3)$. (D) $Q(-1; 1; 3)$.

Lời giải.

Với $t = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 5 \\ z = 2 \end{cases} \Rightarrow N(1; 5; 2) \in d.$

Chọn đáp án (B)

CÂU 19. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-3}{-1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+1}{-2}$. Điểm nào sau đây không thuộc d ?

- (A) $P(3; 2; -1)$. (B) $Q(-3; -2; 1)$. (C) $M(4; -1; 1)$. (D) $N(2; 5; -3)$.

Lời giải.

Thay lần lượt các tọa độ trên vào phương trình đường thẳng d , ta thấy $Q(-3; -2; 1)$ là điểm không thuộc d .

Chọn đáp án (B)

CÂU 20. Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z}{3}$ đi qua điểm nào dưới đây?

- (A) $(3; 2; 3)$. (B) $(2; 1; 3)$. (C) $(3; 1; 2)$. (D) $(3; 1; 3)$.

Lời giải.

Thay $\begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \\ z = 3 \end{cases}$ vào phương trình đường thẳng d ta được $\frac{2}{2} = \frac{1}{1} = \frac{3}{3}$ (đúng).

Chọn đáp án (D)

CÂU 21. Đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{-2}$ không đi qua điểm nào sau đây?

- (A) $M(1; 2; -1)$. (B) $M(1; 2; 1)$. (C) $M(-1; 1; 1)$. (D) $M(5; 4; -5)$.

Lời giải.

Thay tọa độ các điểm vào phương trình đường thẳng d

☑ $\frac{1-1}{2} = \frac{2-2}{1} = \frac{-1+1}{-2} = 0$. Suy ra $M \in d$.

☑ $\frac{1-1}{2} = \frac{2-2}{1} \neq \frac{1+1}{-2}$. Suy ra $M \notin d$.

☑ $\frac{-1-1}{2} = \frac{1-2}{1} = \frac{1+1}{-2}$. Suy ra $M \in d$.

☑ $\frac{5-1}{2} = \frac{4-2}{1} = \frac{-5+1}{-2}$. Suy ra $M \in d$.

Chọn đáp án (B) □

CÂU 22. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x+2}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z}{-5}$. Đường thẳng d không đi qua điểm nào sau đây?

(A) $P(3; 1; 5)$.

(B) $Q(0; 7; -10)$.

(C) $M(-2; 3; 0)$.

(D) $N(-1; 5; -5)$.

☞ **Lời giải.**

Đường thẳng có phương trình chính tắc $\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$ đi qua điểm $M(x_0; y_0; z_0)$, suy ra đường thẳng đã cho đi qua điểm $M(-2; 3; 0)$.

Thay tọa độ điểm $N(-1; 5; -5)$ vào phương trình đường thẳng d ta có

$$\frac{-1+2}{1} = \frac{5-3}{2} = \frac{-5}{-5} = 1.$$

Suy ra điểm N thuộc đường thẳng d .

Thay tọa độ điểm $P(3; 1; 5)$ vào phương trình đường thẳng d ta có

$$\frac{3+2}{1} \neq \frac{1-3}{2}.$$

Suy ra điểm P không thuộc đường thẳng d .

Chọn đáp án (A) □

CÂU 23. Trong không gian $Oxyz$, điểm nào dưới đây thuộc đường thẳng

$$d: \begin{cases} x = -2 + t \\ y = 2 - 2t \\ z = 3 + t \end{cases} ?$$

(A) $Q(0; 1; 4)$.

(B) $M(3; 2; -2)$.

(C) $N(1; 1; 2)$.

(D) $M(3; 3; -6)$.

☞ **Lời giải.**

Thay tọa độ của lần lượt các điểm đã cho vào phương trình đường thẳng d chỉ thấy tọa độ của điểm M thỏa mãn.

Chọn đáp án (D) □

CÂU 24. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z-1}{2}$. Điểm nào dưới đây không thuộc d ?

(A) $N(1; 0; 1)$.

(B) $F(3; -4; 5)$.

(C) $M(0; 2; 1)$.

(D) $E(2; -2; 3)$.

☞ **Lời giải.**

Thay tọa độ các điểm E, N, F vào phương trình đường thẳng d ta thấy thỏa mãn nên E, N, F thuộc d .

Thay tọa độ các điểm M vào phương trình đường thẳng d ta thấy không thỏa mãn nên M không thuộc d .

Chọn đáp án (C) □

CÂU 25. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z+2}{-2}$. Điểm nào dưới đây KHÔNG thuộc đường thẳng d ?

(A) $N(1; -1; -2)$.

(B) $P(-1; 0; 0)$.

(C) $Q(-3; 1; -2)$.

(D) $M(3; -2; -4)$.

☞ **Lời giải.**

Thay lần lượt tọa độ các điểm vào phương trình đường thẳng d ta thấy tọa độ của Q không thỏa mãn phương trình $\left(\frac{-3-1}{2} = \frac{1+1}{-1} \neq \frac{-2+2}{-2}\right)$.

Vậy điểm Q không thuộc đường thẳng d .

Chọn đáp án (C) □

CÂU 26. Trong không gian $Oxyz$, điểm nào sau đây không thuộc đường thẳng $d: \frac{x+2}{2} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z-4}{2}$?

(A) $Q(2; -5; 4)$.

(B) $N(0; -2; 6)$.

(C) $P(4; -8; 10)$.

(D) $M(-2; 1; 4)$.

☞ **Lời giải.**

Vì khi thay điểm $Q(2; -5; 4)$ vào phương trình đường thẳng d ta được

$$\frac{2+2}{2} = \frac{-5-1}{-3} = \frac{4-4}{2} \text{ (sai).}$$

Chọn đáp án (A)

D. BẢNG ĐÁP ÁN

1. A	2. C	3. D	4. C	5. D	6. B	7. A	8. C
9. D	10. B	11. B	12. A	13. D	14. C	15. C	16. B
17. B	18. B	19. B	20. D	21. B	22. A	23. D	24. C
			25. C	26. A			

Bài 19. TÌM CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ BIẾT BẢNG BIẾN THIÊN HOẶC ĐỒ THỊ

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Dựa vào bảng biến thiên hoặc đồ thị hàm số nhận biết việc đổi dấu của đạo hàm $f'(x)$ để kết luận

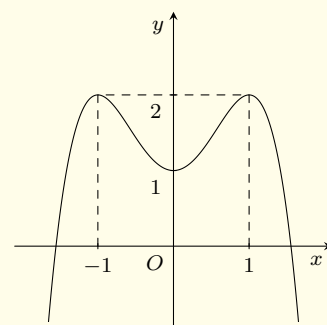
- ☑ Nếu $f'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương khi qua điểm x_0 thì x_0 là điểm cực tiểu của hàm số.
- ☑ Nếu $f'(x)$ đổi dấu từ dương sang âm khi qua điểm x_0 thì x_0 là điểm cực đại của hàm số.

B. BÀI TẬP MẪU

VÍ DỤ 19 (Đề minh họa BGD 2022-2023).

Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số đã cho có tọa độ là

- (A) $(-1; 2)$. (B) $(0; 1)$. (C) $(1; 2)$. (D) $(1; 0)$.



☞ Lời giải.

Quan sát đồ thị ta thấy điểm cực tiểu của đồ thị hàm số đã cho có tọa độ là $(0; 1)$.

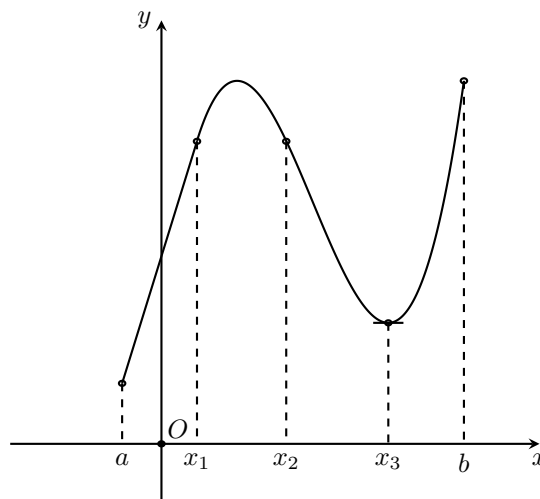
Chọn đáp án (B)

C. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN

CÂU 27.

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trong khoảng (a, b) và có đồ thị như hình bên dưới. Trong các khẳng định dưới đây, khẳng định nào sai?

- (A) Hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trong khoảng $(a; b)$.
 (B) $f'(x_2) > 0$.
 (C) $f'(x_3) = 0$.
 (D) $f'(x_1) > 0$.



☞ Lời giải.

Dựa vào đồ thị ta thấy hàm số có đạo hàm và nghịch biến trong khoảng $(c; d)$ chứa x_2 , suy ra $f'(x_2) \leq 0$.

Chọn đáp án (B)

CÂU 28. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$		
y'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$+\infty$			3			$+\infty$
		0			0		

Chọn khẳng định **sai**.

(A) $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

(B) Hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(3; +\infty)$.

(C) Hàm số $f(x)$ đạt cực đại tại $x = 3$.

(D) Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên $(-\infty; -3)$.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy hàm số $f'(x)$ tại điểm $x = 3$ không đổi dấu nên $f(x)$ không đạt cực trị tại $x = 3$.

Chọn đáp án (C)

CÂU 29. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} và có bảng xét dấu của đạo hàm như hình vẽ.

x	$-\infty$	-1	0	2	4	$+\infty$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$+$	0	$+$

Hàm số đã cho có bao nhiêu điểm cực trị?

(A) 2.

(B) 1.

(C) 3.

(D) 4.

Lời giải.

Ta thấy $f'(x)$ đổi dấu 4 lần, và $f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} , suy ra hàm số có 4 điểm cực trị.

Chọn đáp án (D)

CÂU 30. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} và có bảng biến thiên như bảng sau.

x	$-\infty$	-3	-2	3	$+\infty$
y'	$-$	$+$	0	$-$	$+$
y	$+\infty$	21	22	-3	$+\infty$

Tổng các giá trị cực tiểu của hàm số trên bằng

(A) 19.

(B) 18.

(C) 0.

(D) 22.

Lời giải.

Tổng các giá trị cực tiểu của hàm số là $21 - 3 = 18$.

Chọn đáp án (B)

CÂU 31.

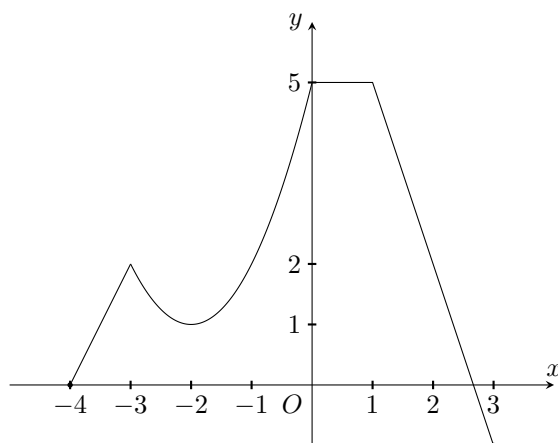
Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-4; 3]$ và có đồ thị trên đoạn $[-4; 3]$ như hình bên. Hãy xác định số điểm cực đại của đồ thị hàm số đó.

(A) 3.

(B) 0.

(C) 2.

(D) 1.



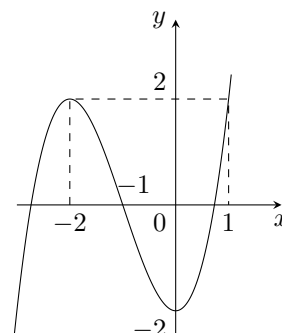
Lời giải.

Từ đồ thị bài cho ta thấy y' đổi dấu từ dương sang âm tại $x = -3$ nên hàm số đạt cực đại tại đó. Vậy hàm số có một cực đại.

Chọn đáp án (D)

CÂU 32. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, với a, b, c, d là các số thực và $a \neq 0$, có đồ thị như hình bên. Khẳng định nào sau đây **sai**?

- (A) $y' < 0, \forall x \in (-2; 0)$.
 (B) Hàm số đạt giá trị lớn nhất tại điểm $x = -2$.
 (C) Đồ thị hàm số có đúng hai điểm cực trị.
 (D) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 0 \end{cases}$.



Lời giải.

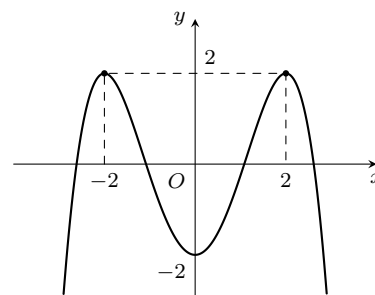
Khẳng định **sai** là: “Hàm số đạt giá trị lớn nhất tại điểm $x = -2$ ”. Lí do: có thể thấy với $x > 1$ thì $f(x) > f(-2)$.
 Sửa lại đúng: “Hàm số đạt cực đại tại điểm $x = -2$ ”.

Chọn đáp án (B)

CÂU 33.

Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} và có đồ thị là đường cong như hình vẽ bên. Tìm điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $y = f(x)$.

- (A) $x = 0$.
 (B) $y = -2$.
 (C) $M(0; -2)$.
 (D) $N(2; 2)$.



Lời giải.

Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số là $M(0; -2)$.

Chọn đáp án (C)

CÂU 34. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên từng khoảng xác định và có bảng biến thiên như sau.

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
y'		+	-	+
y	$-\infty$	$+\infty$	0	$+\infty$

Khẳng định nào sau đây **đúng**?

- (A) Hàm số đã cho không có cực trị.
 (B) Hàm số đã cho có một điểm cực tiểu và không có điểm cực đại.
 (C) Hàm số đã cho có một điểm cực đại và có một điểm cực tiểu.
 (D) Hàm số đã cho có một điểm cực đại và không có điểm cực tiểu.

Lời giải.

Hàm số không xác định tại x_1 nên x_1 không là điểm cực trị.

Tại x_2 hàm số không có đạo hàm nhưng vẫn xác định, đồng thời đạo hàm đổi dấu khi qua x_2 nên x_2 là điểm cực tiểu.

Chọn đáp án (B)

CÂU 35. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $(-\infty; 4]$ và có bảng biến thiên như hình vẽ sau

x	$-\infty$	1	2	3	4	
y'	+	0	-	+	0	-
y	$-\infty$	1	0	2	-1	

Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

- (A) 4. (B) 3. (C) 2. (D) 5.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy hàm số đã cho có 3 điểm cực trị.

Chọn đáp án (B)

CÂU 36. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} và có bảng biến thiên như sau.

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$-\infty$	4	3	4	$-\infty$	

Khẳng định nào dưới đây **sai**?

- (A) Hàm số có ba điểm cực trị. (B) Hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x = 0$.
(C) Hàm số có giá trị cực tiểu bằng 0. (D) Hàm số có giá trị cực tiểu bằng 3.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy

- ☑ Hàm số đạt cực đại tại $x = \pm 1$. Giá trị cực đại $y = 4$.
☑ Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$. Giá trị cực tiểu là $y = 3$.

Chọn đáp án (C)

CÂU 37. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} và có bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau

x	$-\infty$	-2	1	5	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	$-$	0	$-$	0	$+$

Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$ là

- (A) 3. (B) 2. (C) 0. (D) 1.

Lời giải.

Dựa vào bảng xét dấu của $f'(x)$ ta thấy $f'(x)$ đổi dấu hai lần.

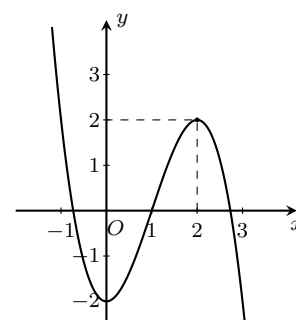
Vậy số điểm cực trị của hàm số là 2.

Chọn đáp án (B)

CÂU 38.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên \mathbb{R} . Biết rằng hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Đặt $g(x) = f(x) + x$. Hỏi hàm số có bao nhiêu điểm cực đại và bao nhiêu điểm cực tiểu trên khoảng $(-1; 3)$?

- (A) Hàm số có một điểm cực đại và hai điểm cực tiểu.
(B) Hàm số có một điểm cực đại và một điểm cực tiểu.
(C) Hàm số không có điểm cực đại và có một điểm cực tiểu.
(D) Hàm số có hai điểm cực đại và một điểm cực tiểu.



Lời giải.

Hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên \mathbb{R} nên hàm số $g(x) = f(x) + x$ cũng có đạo hàm trên \mathbb{R} và $g'(x) = f'(x) + 1; g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = -1$.

Dựa vào đồ thị $f'(x)$ ta có $f'(x) = -1$ có ba nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3 với $x_1 < x_2 < x_3$.

Bảng biến thiên của $g(x)$:

x	-1	x_1	x_2	x_3	3		
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$g(x)$	$g(-1)$	$g(x_1)$	$g(x_2)$	$g(x_3)$	$g(3)$		

Hàm số có hai điểm cực đại và một điểm cực tiểu.

Chọn đáp án (D)

CÂU 39. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	$+\infty$	-3	1	$-\infty$	

Hàm số $y = f(f(x))$ có bao nhiêu điểm cực trị?

(A) 5.

(B) 6.

(C) 4.

(D) 7.

Lời giải.

Ta có $y = f(f(x)) \Rightarrow y' = f'(f(x)) \cdot f'(x)$.

Nên $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(f(x)) = 0 \\ f'(x) = 0. \end{cases}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2$.

$f'(f(x)) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 & (1) \\ f(x) = 2. & (2) \end{cases}$

Phương trình (1) cho chúng ta 3 nghiệm phân biệt, (2) cho chúng ta 1 nghiệm và không trùng với nghiệm $x = 0, x = 2$ nên $y = f(f(x))$ có 6 điểm cực trị.

Chọn đáp án (B)

CÂU 40. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên \mathbb{R} và có đạo hàm $f'(x) = x^3(x+1)^2(2-x)$. Hàm số đã cho có bao nhiêu điểm cực trị?

(A) 3.

(B) 2.

(C) 0.

(D) 1.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = 0$ có ba nghiệm $x = 0, x = -1, x = 2$. Trong đó $x = 0$ là nghiệm bội 3, $x = -1$ là nghiệm kép, $x = 2$ là nghiệm đơn nên hàm số $y = f(x)$ có hai điểm cực trị là $x = 0$ và $x = 2$.

Chọn đáp án (B)

CÂU 41. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên \mathbb{R} và có bảng biến thiên như hình vẽ sau

x	$-\infty$	-1	0	2	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	1	-2	1	$-\infty$

Hàm số $y = f(2x)$ đạt cực đại tại điểm nào dưới đây?

(A) $x = \frac{1}{2}$.

(B) $x = -2$.

(C) $x = 1$.

(D) $x = -1$.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên, ta suy ra bảng xét dấu đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ như sau:

x	$-\infty$	-1	0	2	$+\infty$			
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

Xét hàm số $y = f(2x)$, ta có $y' = 2 \cdot f'(2x)$.

Ta suy ra

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2 \cdot f'(2x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = -1 \\ 2x = 0 \\ 2x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ x = 0 \\ x = 1. \end{cases}$$

Bảng xét dấu của $y' = 2 \cdot f'(2x)$ là

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	0	1	$+\infty$		
$2f'(2x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

Từ đó suy ra hàm số $y = f(2x)$ đạt cực đại tại $x = -\frac{1}{2}$ và $x = 1$.

Chọn đáp án (C)

CÂU 42.

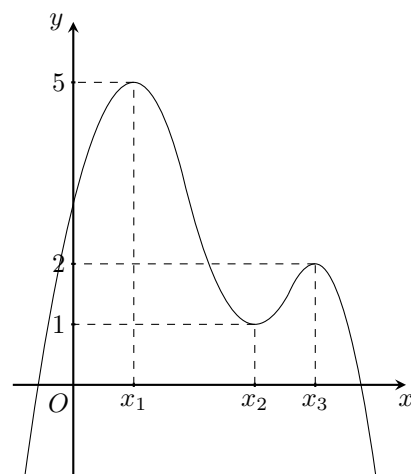
Cho hàm số bậc năm $y = f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} , hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $y = f(x) + \frac{2017 - 2018x}{2017}$ có số điểm cực trị là

(A) 3.

(B) 2.

(C) 1.

(D) 4.



Lời giải.

Ta có $y' = f'(x) - \frac{2018}{2017}$.

Khi đó $y' = 0 \Rightarrow f'(x) - \frac{2018}{2017} = 0 \Rightarrow f'(x) = \frac{2018}{2017}$.

Dựa vào đồ thị ta thấy phương trình $f'(x) = 0$ có 4 nghiệm phân biệt. Do đó hàm số đã cho có 4 điểm cực trị.

Chọn đáp án (D)

CÂU 43. Cho hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị nhận hai điểm $A(1; 3)$ và $B(3; -1)$ làm hai điểm cực trị. Khi đó số điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = |ax^2|x| + bx^2 + c|x| + d|$ là

(A) 7.

(B) 11.

(C) 5.

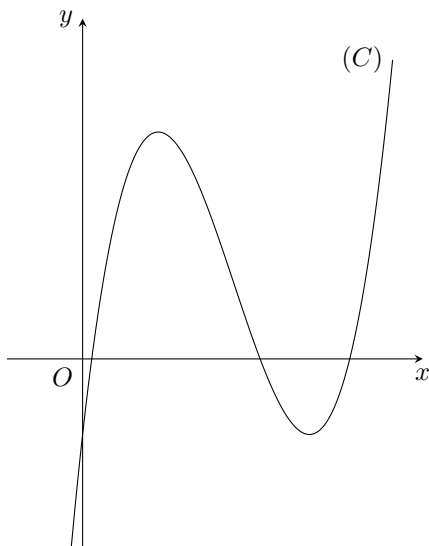
(D) 9.

Lời giải.

Xét hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có $y' = 3ax^2 + 2bx + c$.

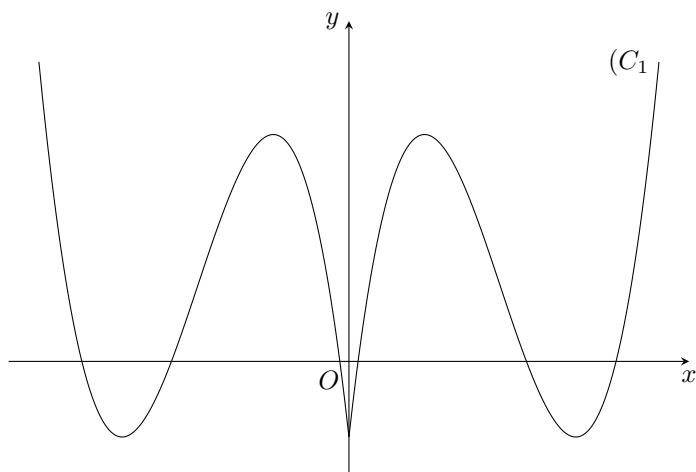
Theo giả thiết, ta có hệ phương trình
$$\begin{cases} y(1) = 3 \\ y'(1) = 0 \\ y(3) = -1 \\ y'(3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b + c + d = 3 \\ 3a + 2b + c = 0 \\ 27a + 9b + 3c + d = -1 \\ 27a + 6b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -6 \\ c = 9 \\ d = -1. \end{cases}$$

Vậy hàm số đã cho là $y = f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$ có đồ thị (C) như sau:



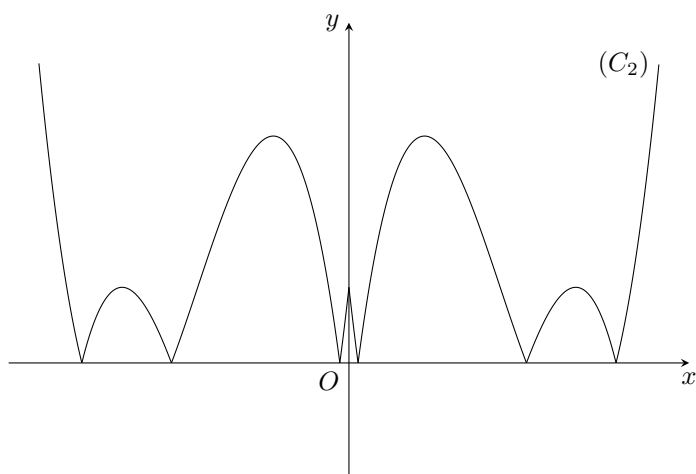
Từ đồ thị (C) , ta suy ra đồ thị (C_1) của hàm số $y = |x|^3 - 6x^2 + 9|x| - 1$ gồm có hai phần:

- + Phần 1: Giữ nguyên phần đồ thị (C) bên phải trục tung.
- + Phần 2: Lấy đối xứng của phần 1 qua trục tung



Từ đó suy ra đồ thị (C_2) của hàm số $y = \left| |x|^3 - 6x^2 + 9|x| - 1 \right|$ gồm có hai phần:

- + Phần 1: Giữ nguyên phần đồ thị (C_1) phía trên trục hoành.
- + Phần 2: Lấy đối xứng của phần đồ thị (C_1) phía dưới trục hoành qua trục hoành.



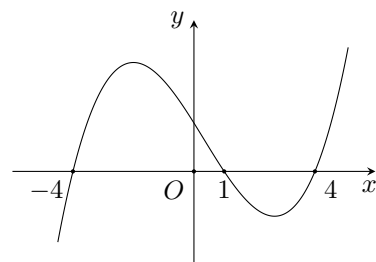
Do đó, đồ thị (C_2) có 11 điểm cực trị.

Chọn đáp án **(B)**

CÂU 44.

Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$. Biết rằng hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hỏi hàm số $y = f(5 - x^2)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

- (A) 4. (B) 7. (C) 3. (D) 9.



Lời giải.

Xét hàm số $y = f(5 - x^2)$, ta có

$$y' = -2x \cdot f'(5 - x^2) \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 5 - x^2 = -4 \\ 5 - x^2 = 1 \\ 5 - x^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = 9 \\ x^2 = 4 \\ x^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 3 \\ x = \pm 2 \\ x = \pm 1. \end{cases}$$

Do đó hàm số $y = f(5 - x^2)$ có 7 điểm cực trị.

Chọn đáp án (B)

CÂU 45. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$			
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$			5		1		$+\infty$
	$-\infty$						

Đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

- (A) 2. (B) 5. (C) 3. (D) 4.

Lời giải.

$$\text{Ta có } y = |f(x)| = \begin{cases} f(x), & \text{nếu } f(x) \geq 0 \\ -f(x), & \text{nếu } f(x) < 0 \end{cases}$$

Suy ra bảng biến thiên của hàm số $y = |f(x)|$ có dạng:

x	$-\infty$	x_0	-1	3	$+\infty$	
y'	$-$	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$+\infty$		0	5	1	$+\infty$

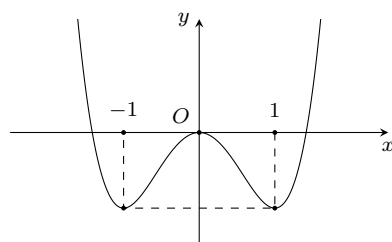
Do đó đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ có 3 điểm cực trị.

Chọn đáp án (C)

CÂU 46.

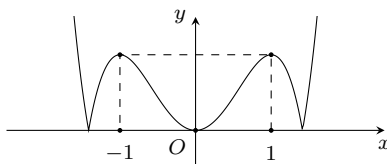
Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hỏi đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

- (A) 5. (B) 3. (C) 4. (D) 2.



Lời giải.

Đồ thị hàm số $y = |f(x)|$.



Suy ra đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ có 5 cực trị.

Chọn đáp án (A)

D. BẢNG ĐÁP ÁN

27. B	28. C	29. D	30. B	31. D	32. B	33. C	34. B
35. B	36. C	37. B	38. D	39. B	40. B	41. C	42. D
		43. B	44. B	45. C	46. A		

Bài 20. ĐƯỜNG TIỆM CẬN

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Đường tiệm cận ngang

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên một khoảng vô hạn (là khoảng dạng $(a; +\infty)$, $(-\infty; a)$ hoặc $(-\infty; +\infty)$). Đường thẳng $y = y_0$ là đường **tiệm cận ngang** (hay tiệm cận ngang) của đồ thị $y = f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau được thỏa mãn

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = y_0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = y_0.$$

Như vậy, để tìm tiệm cận ngang của đồ thị hàm số ta chỉ cần tính giới hạn của hàm số đó tại vô cực.

2. Đường tiệm cận đứng

Đường thẳng $x = x_0$ được gọi là đường **tiệm cận đứng** (hay tiệm cận đứng) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau được thỏa mãn

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = +\infty.$$

B. BÀI TẬP MẪU

VÍ DỤ 20 (Đề minh họa BGD 2022-2023). Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{3x-1}$ là đường thẳng có phương trình

(A) $y = \frac{1}{3}$.

(B) $y = -\frac{2}{3}$.

(C) $y = -\frac{1}{3}$.

(D) $y = \frac{2}{3}$.

☛ **Lời giải.**

Ta có: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x+1}{3x-1} = \frac{2}{3}$.

Suy ra $y = \frac{2}{3}$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Chọn đáp án (D)

C. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN

CÂU 1. Đồ thị của hàm số nào trong các hàm số sau đây có tiệm cận ngang?

(A) $y = \frac{2-x}{x}$.

(B) $y = x^3 - x^2 + x - 3$.

(C) $y = x^4 - x^2 - 2$.

(D) $y = \frac{3x^2 - 1}{x + 1}$.

☛ **Lời giải.**

Xét đáp án $y = x^4 - x^2 - 2$ có $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \pm\infty$ nên đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.

Xét đáp án $y = \frac{3x^2 - 1}{x + 1}$ có $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \pm\infty$ nên đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.

Xét đáp án $y = \frac{2-x}{x}$ có tiệm cận ngang là đường thẳng $y = -1$.

Xét đáp án $y = x^3 - x^2 + x - 3$ có $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \pm\infty$ nên đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.

Chọn đáp án (A)

CÂU 2. Đường thẳng nào dưới đây là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = 10 + \frac{1}{x-10}$?

(A) $y = -10$.

(B) $x = -10$.

(C) $y = 10$.

(D) $x = 10$.

☞ **Lời giải.**

Ta có $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(10 + \frac{1}{x-10}\right) = 10 \Rightarrow y = 10$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Chọn đáp án (C)

CÂU 3. Đồ thị hàm số $y = \frac{x-2}{x+1}$ có đường tiệm cận đứng là

(A) $x = 1$.

(B) $x = -1$.

(C) $y = 1$.

(D) $y = -1$.

☞ **Lời giải.**

Ta có $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} (x-2) = -3$ và $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} (x+1) = 0$ nên

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} y = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{x-2}{x+1} = -\infty \text{ và } \lim_{x \rightarrow (-1)^-} y = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{x-2}{x+1} = +\infty.$$

Do đó đồ thị hàm số $y = \frac{x-2}{x+1}$ có đường tiệm cận đứng là $x = -1$.

Chọn đáp án (B)

CÂU 4. Tìm tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{x-1}$.

(A) $x = -1$.

(B) $y = -1$.

(C) $x = 1$.

(D) $y = 2$.

☞ **Lời giải.**

$$\text{Vì } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x+1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2 + \frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x}} = \frac{2+0}{1-0} = 2.$$

Do đó, tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{x-1}$ là $y = 2$.

Chọn đáp án (D)

CÂU 5. Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{x-1}{x+1}$ là

(A) 2.

(B) 1.

(C) 3.

(D) 0.

☞ **Lời giải.**

Ta có $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x-1}{x+1} = 1$, suy ra $y = 1$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho.

$\lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{x-1}{x+1} = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{x-1}{x+1} = -\infty$, suy ra $x = -1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho.

Vậy đồ thị hàm số đã cho có hai đường tiệm cận.

Chọn đáp án (D)

CÂU 6. Đường thẳng $x = 1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số nào sau đây?

(A) $y = \frac{2x^2+3x+2}{2-x}$.

(B) $y = \frac{2x-2}{x+2}$.

(C) $y = \frac{1+x^2}{1+x}$.

(D) $y = \frac{1+x}{1-x}$.

☞ **Lời giải.**

Đồ thị hàm số $y = \frac{1+x}{1-x}$ có tiệm cận đứng là đường thẳng $x = 1$.

Chọn đáp án (D)

CÂU 7. Đường thẳng $y = -1$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số nào sau đây?

(A) $y = \frac{1+x}{1-x}$.

(B) $y = \frac{2x^2+3x+2}{2-x}$.

(C) $y = \frac{2x-2}{x+2}$.

(D) $y = \frac{1+x^2}{1+x}$.

☞ **Lời giải.**

Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+x}{1-x} = -1$. Suy ra $y = -1$ là TCN của đồ thị hàm số $y = \frac{1+x}{1-x}$.

Chọn đáp án (A)

CÂU 8. Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{2x-1}$ là

(A) $x = 1$.

(B) $x = \frac{1}{2}$.

(C) $y = \frac{1}{2}$.

(D) $y = 1$.

☞ **Lời giải.**

Ta có $\lim_{x \rightarrow (\frac{1}{2})^+} \frac{2x+1}{2x-1} = +\infty$ và $\lim_{x \rightarrow (\frac{1}{2})^-} \frac{2x+1}{2x-1} = -\infty$, do đó đường thẳng $x = \frac{1}{2}$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Chọn đáp án (B)

CÂU 9. Đồ thị hàm số $y = \frac{x+3}{x-2}$ có các đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang lần lượt là

- (A) $x = 2$ và $y = 1$. (B) $x = 1$ và $y = 2$. (C) $x = 2$ và $y = -3$. (D) $x = -2$ và $y = 1$.

☞ **Lời giải.**

Ta có $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x+3}{x-2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1 + \frac{3}{x}}{1 - \frac{2}{x}} = 1$ nên $y = 1$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Và $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x+3}{x-2} = +\infty$ và $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x+3}{x-2} = -\infty$ nên đồ thị nhận đường thẳng $x = 2$ là tiệm cận đứng.

Chọn đáp án (A)

CÂU 10. Cho hàm số $y = \frac{x-2}{x-1}$. Đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số là

- (A) $x = 2$. (B) $y = 2$. (C) $x = 1$. (D) $y = 1$.

☞ **Lời giải.**

Ta có $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-2}{x-1} = -\infty$ và $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x-2}{x-1} = +\infty$, do đó đường thẳng $x = 1$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Chọn đáp án (C)

CÂU 11. Đường tiệm ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{2x-6}{x-2}$ là

- (A) $y - 3 = 0$. (B) $x - 2 = 0$. (C) $x - 3 = 0$. (D) $y - 2 = 0$.

☞ **Lời giải.**

Ta có $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x-6}{x-2} = 2$. Suy ra đường thẳng $y = 2$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Chọn đáp án (D)

CÂU 12. Đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{1-2x}{-x+2}$ là

- (A) $x = -2, y = -2$. (B) $x = -2, y = 2$. (C) $x = -2, y = -2$. (D) $x = 2, y = 2$.

☞ **Lời giải.**

Đồ thị của hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ có đường tiệm cận ngang $y = \frac{a}{c}$ và tiệm cận đứng $x = -\frac{d}{c}$.

Vậy đồ thị của hàm số $y = \frac{1-2x}{-x+2}$ có đường tiệm cận ngang $y = 2$ và tiệm cận đứng $x = 2$.

Chọn đáp án (D)

CÂU 13. Đồ thị hàm số $y = \frac{x-1}{x^2+1}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận (nếu chỉ tính TCD và TCN)?

- (A) 3. (B) 2. (C) 0. (D) 1.

☞ **Lời giải.**

Ta có $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x-1}{x^2+1} = 0$ nên đường tiệm cận ngang là $y = 0$.

Đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng.

Chọn đáp án (D)

CÂU 14. Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{x-2}{x+3}$ là

- (A) $x = -3$. (B) $y = 1$. (C) $x = 1$. (D) $y = -1$.

☞ **Lời giải.**

Ta có $\lim_{x \rightarrow (-3)^+} \frac{x-2}{x+3} = +\infty$ và $\lim_{x \rightarrow (-3)^-} \frac{x-2}{x+3} = -\infty$, do đó đường thẳng $x = -3$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Chọn đáp án (A)

CÂU 15. Đồ thị của hàm số nào sau đây **không** có tiệm cận ngang?

- (A) $y = \frac{1}{2x^2+x}$. (B) $y = e^x$. (C) $y = 2x^2+x$. (D) $y = \frac{2x+1}{x+2}$.

☞ **Lời giải.**

Vì $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = +\infty$ nên đồ thị hàm số $y = 2x^2+x$ không có tiệm cận ngang.

Chọn đáp án (C)

CÂU 16. Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{2-x}{x+1}$ là

- (A) $y = -1$. (B) $y = 2$. (C) $x = -1$. (D) $x = 2$.

☞ **Lời giải.**

Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2-x}{x+1} = -1$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2-x}{x+1} = -1$.

Suy ra $y = -1$ là tiệm cận ngang của đồ thị.

Chọn đáp án (A)

CÂU 17. Đường thẳng nào dưới đây là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{1-4x}{2x-1}$?

(A) $y = \frac{1}{2}$.

(B) $y = -2$.

(C) $y = 2$.

(D) $y = 4$.

Lời giải.

Vì $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\frac{1}{2} - 4}{2 - \frac{1}{x}} = -2$. Suy ra $y = -2$ là tiệm cận ngang của hàm số.

Chọn đáp án (B)

CÂU 18. Đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{x+1}$ có tiệm cận đứng là

(A) $y = 2$.

(B) $x = -1$.

(C) $y = -1$.

(D) $x = 1$.

Lời giải.

Hàm số $y = \frac{2x+1}{x+1}$ có tập xác định: $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Ta có $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{2x+1}{x+1} = -\infty$ và $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{2x+1}{x+1} = +\infty$ nên $x = -1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{x+1}$.

Chọn đáp án (B)

CÂU 19. Đồ thị hàm số nào sau đây có đường tiệm cận đứng là $x = 1$?

(A) $y = \frac{x-1}{x}$.

(B) $y = \frac{2x}{1+x^2}$.

(C) $y = \frac{2x}{1-x}$.

(D) $y = \frac{x-1}{x+1}$.

Lời giải.

☑ Đồ thị hàm số $y = \frac{x-1}{x}$ có tiệm cận đứng $x = 0$ loại đáp án A.

☑ Hàm số $y = \frac{2x}{1+x^2}$ xác định với $\forall x \in \mathbb{R}$ suy ra đồ thị không có tiệm cận đứng.

☑ Đồ thị hàm số $y = \frac{x-1}{x+1}$ có tiệm cận đứng $x = -1$ loại đáp án D.

☑ Đồ thị hàm số $y = \frac{2x}{1-x}$ có tiệm cận ngang $y = -2$ và tiệm cận đứng $x = 1$ (thỏa mãn).

Chọn đáp án (C)

CÂU 20. Đường thẳng nào dưới đây là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{2-x}{x+3}$?

(A) $x = 2$.

(B) $x = -3$.

(C) $y = -1$.

(D) $y = -3$.

Lời giải.

TXĐ: $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$.

Ta có $\lim_{x \rightarrow (-3)^-} y = \lim_{x \rightarrow (-3)^-} \frac{2-x}{x+3} = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow (-3)^+} y = \lim_{x \rightarrow (-3)^+} \frac{2-x}{x+3} = +\infty$.

Vậy đồ thị hàm số đã cho có tiệm cận đứng $x = -3$.

Chọn đáp án (B)

D. BẢNG ĐÁP ÁN

1. A	2. C	3. B	4. D	5. D	6. D	7. A	8. B
9. A	10. C	11. D	12. D	13. D	14. A	15. C	16. A
		17. B	18. B	19. C	20. B		

Bài 21. PHƯƠNG TRÌNH VÀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH LOGARIT

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Phương trình logarit

☑ $\log_a x = b \Leftrightarrow x = a^b.$

☑ $\log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) > 0 \\ f(x) = g(x). \end{cases}$

2. Bất phương trình logarit

a) Nếu $a > 1$ thì

☑ $\log_a x > b \Leftrightarrow x > a^b.$

☑ $\log_a x < b \Leftrightarrow 0 < x < a^b.$

☑ $\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow f(x) > g(x) > 0.$

b) Nếu $0 < a < 1$ thì

☑ $\log_a x > b \Leftrightarrow 0 < x < a^b.$

☑ $\log_a x < b \Leftrightarrow x > a^b.$

☑ $\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow g(x) > f(x) > 0.$

B. BÀI TẬP MẪU

VÍ DỤ 21 (Đề minh họa BGD 2022-2023). Tập nghiệm của bất phương trình $\log(x-2) > 0$ là

Ⓐ $(2; 3).$

Ⓑ $(-\infty; 3).$

Ⓒ $(3; +\infty).$

Ⓓ $(12; +\infty).$

☞ **Lời giải.**

Điều kiện: $x > 2.$

Ta có $\log(x-2) > 0 \Leftrightarrow x-2 > 10^0 \Leftrightarrow x-2 > 1 \Leftrightarrow x > 3.$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $(3; +\infty).$

Chọn đáp án Ⓒ



C. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN

CÂU 1. Nghiệm của phương trình $\log_2(x-1) = 4$ là

Ⓐ $x = 15.$

Ⓑ $x = 9.$

Ⓒ $x = 17.$

Ⓓ $x = 2.$

☞ **Lời giải.**

Ta có $\log_2(x-1) = 4 \Leftrightarrow x-1 = 2^4 \Leftrightarrow x-1 = 16 \Leftrightarrow x = 17.$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là $x = 17.$

Chọn đáp án Ⓒ



CÂU 2. Nghiệm nhỏ nhất của phương trình $\log_5(x^2 - 3x + 5) = 1$ là

Ⓐ 1.

Ⓑ 3.

Ⓒ 0.

Ⓓ -3.

☞ **Lời giải.**

Điều kiện: $x \in \mathbb{R}$ vì $x^2 - 3x + 5 > 0, \forall x \in \mathbb{R}.$

$$\log_5(x^2 - 3x + 5) = 1 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 5 = 5 \Leftrightarrow x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = 0. \end{cases}$$

Vậy nghiệm nhỏ nhất của phương trình $\log_5(x^2 - 3x + 5) = 1$ là 0.

Chọn đáp án Ⓒ



CÂU 3. Tìm nghiệm của phương trình $\log_{64}(x+1) = \frac{1}{2}.$

Ⓐ 7.

Ⓑ $-\frac{1}{2}.$

Ⓒ -1.

Ⓓ 4.

☞ **Lời giải.**

Điều kiện: $x > -1.$

Ta có $\log_{64}(x+1) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x+1 = 8 \Leftrightarrow x = 7$ (thỏa điều kiện).

Chọn đáp án Ⓐ



CÂU 4. Tìm nghiệm của phương trình $\log_{25}(x+1) = \frac{1}{2}$.

(A) $x = \frac{23}{2}$.

(B) $x = -6$.

(C) $x = 6$.

(D) $x = 4$.

Lời giải.

Điều kiện: $x > -1$.

Phương trình $\log_{25}(x+1) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x+1 = 5 \Leftrightarrow x = 4$.

Chọn đáp án (D)

CÂU 5. Nghiệm của phương trình $\log_5(2x-1)^3 = 6$ là

(A) 10.

(B) 12.

(C) 13.

(D) 14.

Lời giải.

Điều kiện: $2x-1 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}$.

$\log_5(2x-1)^3 = 6 \Leftrightarrow 3\log_5(2x-1) = 6 \Leftrightarrow 2x-1 = 5^2 \Leftrightarrow x = 13$.

Chọn đáp án (C)

CÂU 6. Tìm các nghiệm của phương trình $\log_3(2x-3) = 2$.

(A) $x = \frac{9}{2}$.

(B) $x = 6$.

(C) $x = 5$.

(D) $x = \frac{11}{2}$.

Lời giải.

$\log_3(2x-3) = 2 \Leftrightarrow 2x-3 = 9 \Leftrightarrow x = 6$.

Chọn đáp án (B)

CÂU 7. Số nghiệm của phương trình $\log_2(x^2-2x) = 2$ là

(A) 1.

(B) 2.

(C) 4.

(D) 3.

Lời giải.

$\log_2(x^2-2x) = 2 \Leftrightarrow x^2-2x = 4 \Leftrightarrow x^2-2x-4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - \sqrt{5} \\ x = 1 + \sqrt{5} \end{cases}$

Chọn đáp án (B)

CÂU 8. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2(x^2+3x) \leq 2$ là

(A) $[-4; -3) \cup (0; 1]$.

(B) $(0; 1]$.

(C) $(-\infty; -3) \cup (0; +\infty)$.

(D) $\left(0; \frac{1}{2}\right]$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} & \log_2(x^2+3x) \leq 2 \\ \Leftrightarrow & 0 < x^2+3x \leq 2^2 \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x^2+3x > 0 \\ x^2+3x-4 \leq 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x < -3 \\ x > 0 \\ -4 \leq x \leq 1 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} -4 \leq x < -3 \\ 0 < x \leq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $[-4; -3) \cup (0; 1]$.

Chọn đáp án (A)

CÂU 9. Tập nghiệm S của phương trình $\log_3(2x+3) = 1$.

(A) $S = \{1\}$.

(B) $S = \{3\}$.

(C) $S = \{-1\}$.

(D) $S = \{0\}$.

Lời giải.

Điều kiện: $2x+3 > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{3}{2}$.

$\log_3(2x+3) = 1 \Leftrightarrow 2x+3 = 3 \Leftrightarrow x = 0$.

Vậy $S = \{0\}$.

Chọn đáp án (D)

CÂU 10. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_5(2x-1) < \log_5(x+2)$ là

(A) $S = (-\infty; 3)$.

(B) $S = \left(\frac{1}{2}; 3\right)$.

(C) $S = (-2; 3)$.

(D) $S = (3; +\infty)$.

Lời giải.

Điều kiện: $\begin{cases} 2x - 1 > 0 \\ x + 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}.$

Ta có: $\log_5 (2x - 1) < \log_5 (x + 2) \Leftrightarrow 2x - 1 < x + 2 \Leftrightarrow x < 3.$

Kết hợp điều kiện, tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $\frac{1}{2} < x < 3.$

Chọn đáp án (B)

CÂU 11. Tập nghiệm của bất phương trình $\log x \geq 2$ là

- (A) $(10; +\infty).$ (B) $(0; +\infty).$ (C) $[100; +\infty).$ (D) $(-\infty; 10).$

Lời giải.

Điều kiện $x > 0.$

Bất phương trình $\log x \geq 2 \Leftrightarrow x \geq 100.$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $[100; +\infty).$

Chọn đáp án (C)

CÂU 12. Phương trình $\log_2 (3x + 1) = -4$ có tập nghiệm là

- (A) $\emptyset.$ (B) $\left\{-\frac{5}{16}\right\}.$ (C) $\left\{\frac{17}{48}\right\}.$ (D) $\{5\}.$

Lời giải.

Ta có $\log_2 (3x + 1) = -4 \Leftrightarrow 3x + 1 = \frac{1}{16} \Leftrightarrow 3x = -\frac{15}{16} \Leftrightarrow x = -\frac{5}{16}.$

Chọn đáp án (B)

CÂU 13. Tập hợp nghiệm của bất phương trình $\log_2 x \geq 3$ là

- (A) $[6; +\infty).$ (B) $[9; +\infty).$ (C) $(8; +\infty).$ (D) $[8; +\infty).$

Lời giải.

Ta có: $\log_2 x \geq 3 \Leftrightarrow x \geq 2^3 \Leftrightarrow x \geq 8.$

Do đó, tập hợp nghiệm của bất phương trình $\log_2 x \geq 3$ là $[8; +\infty).$

Chọn đáp án (D)

CÂU 14. Tập nghiệm của phương trình $\log_2 (x^2 - 1) = \log_2 (2x - 1)$ là

- (A) $\{2\}.$ (B) $\emptyset.$ (C) $\{0; 1; 2\}.$ (D) $\{0; 2\}.$

Lời giải.

Điều kiện: $x > 1.$

$$\log_2 (x^2 - 1) = \log_2 (2x - 1) \Leftrightarrow x^2 - 1 = 2x - 1 \Leftrightarrow x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 & (\text{loại}) \\ x = 2 & (\text{nhận}) \end{cases}.$$

Chọn đáp án (A)

CÂU 15. Nghiệm của phương trình $\log_2 (x + 3) + \log_2 (x - 1) = \log_2 5$ là

- (A) $x = 2.$ (B) $x = 1.$ (C) $x = 4.$ (D) $x = 3.$

Lời giải.

Điều kiện: $\begin{cases} x + 3 > 0 \\ x - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 1.$

Ta có

$$\begin{aligned} & \log_2 (x + 3) + \log_2 (x - 1) = \log_2 5 \\ \Leftrightarrow & \log_2 [(x + 3)(x - 1)] = \log_2 5 \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x > 1 \\ (x + 3)(x - 1) = 5 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x > 1 \\ x^2 + 2x - 8 = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & x = 2. \end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = 2.$

Chọn đáp án (A)

CÂU 16. Tập nghiệm S của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}} (x^2 - 6x + 5) + \log_2 (x - 1) > 0$ là

- (A) $(5; 6).$ (B) $[5; 6).$ (C) $(1; 6).$ (D) $(1; +\infty).$

Lời giải.

Điều kiện: $\begin{cases} x^2 - 6x + 5 > 0 \\ x - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 5.$

Với điều kiện trên, bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 6x + 5) + \log_2(x - 1) > 0$ tương đương với

$$\begin{aligned} & -\log_2(x^2 - 6x + 5) + \log_2(x - 1) > 0 \\ \Leftrightarrow & \log_2(x^2 - 6x + 5) < \log_2(x - 1) \\ \Leftrightarrow & x^2 - 6x + 5 < x - 1 \\ \Leftrightarrow & x^2 - 7x + 6 < 0 \\ \Leftrightarrow & 1 < x < 6. \end{aligned}$$

Kết hợp với điều kiện ta được tập nghiệm của bất phương trình là: $S = (5; 6)$.

Chọn đáp án (A) □

CÂU 17. Số nghiệm nguyên của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(x - 3) \geq \log_{\frac{1}{2}} 4$ là

- (A) 1. (B) 4. (C) 2. (D) 3.

☞ **Lời giải.**

Bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(x - 3) \geq \log_{\frac{1}{2}} 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3 \leq 4 \\ x - 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 7 \\ x > 3 \end{cases} \Leftrightarrow 3 < x \leq 7.$

Vì $\begin{cases} x \in \mathbb{Z} \\ 3 < x \leq 7 \end{cases}$ nên ta chọn $x \in \{4; 5; 6; 7\}$.

Vậy bất phương trình đã cho có tất cả 4 nghiệm nguyên.

Chọn đáp án (B) □

CÂU 18. Nghiệm của phương trình $\log_3(x - 2) + \log_{\frac{1}{3}}(x - 4) = 1$ là

- (A) $x = 3$. (B) $x = 6$. (C) $x = 4$. (D) $x = 5$.

☞ **Lời giải.**

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & \begin{cases} x > 4 \\ \log_3(x - 2) - \log_3(x - 4) = 1 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x > 4 \\ \log_3 \frac{x - 2}{x - 4} = 1 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x > 4 \\ \frac{x - 2}{x - 4} = 3 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x > 4 \\ x - 2 = 3x - 12 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & x = 5. \end{aligned}$$

Chọn đáp án (D) □

CÂU 19. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{\pi}{4}}(x + 1) > \log_{\frac{\pi}{4}}(2x - 5)$ là

- (A) $(-1; 6)$. (B) $\left(\frac{5}{2}; 6\right)$. (C) $(-\infty; 6)$. (D) $(6; +\infty)$.

☞ **Lời giải.**

Ta có $\log_{\frac{\pi}{4}}(x + 1) > \log_{\frac{\pi}{4}}(2x - 5) \Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 > 0 \\ 2x - 5 > 0 \\ x + 1 < 2x - 5 \end{cases} \Leftrightarrow x > 6.$

Chọn đáp án (D) □

CÂU 20. Tập nghiệm của phương trình $\log_2(x - 1) = \log_4(2x)$ là

- (A) $\{2 \pm \sqrt{3}\}$. (B) $\{2 + \sqrt{3}\}$. (C) $\left\{\frac{3}{2}\right\}$. (D) $\{2 - \sqrt{3}\}$.

☞ **Lời giải.**

Điều kiện: $x > 1$.

Ta có

$$\begin{aligned} \log_2(x-1) &= \log_4(2x) \\ \Leftrightarrow 2\log_2(x-1) &= \log_2 2x \\ \Leftrightarrow (x-1)^2 &= 2x \\ \Leftrightarrow x^2 - 4x - 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + \sqrt{3} \\ x = 2 - \sqrt{3} \end{cases} \end{aligned}$$

Đối chiếu với điều kiện ta được: $x = 2 + \sqrt{3}$.

Chọn đáp án (B)



D. BẢNG ĐÁP ÁN

1. C	2. C	3. A	4. D	5. C	6. B	7. B	8. A
9. D	10. B	11. C	12. B	13. D	14. A	15. A	16. A
		17. B	18. D	19. D	20. B		

Bài 22. PHÉP ĐẾM - HOÁN VỊ - CHỈNH HỢP - TỔ HỢP

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Quy tắc cộng

Một công việc được hoàn thành bởi một trong hai hành động. Nếu hành động này có m cách thực hiện, hành động kia có n cách thực hiện không trùng với bất kì cách nào của hành động thứ nhất thì công việc đó có $m + n$ cách thực hiện.

2. Quy tắc nhân

Một công việc được hoàn thành bởi hai hành động liên tiếp. Nếu có m cách thực hiện hành động thứ nhất và ứng với mỗi cách đó có n cách thực hiện cho hành động thứ hai thì có $m \cdot n$ cách hoàn thành công việc.

3. Hoán vị

- ☑ Cho tập hợp A gồm n phần tử ($n \geq 1$). Mỗi kết quả của sự sắp xếp thứ tự n phần tử của tập hợp A được gọi là một hoán vị của n phần tử đó.
- ☑ Số các hoán vị của n phần tử là $P_n = n(n-1) \cdots 2 \cdot 1 = n!$.

4. Chỉnh hợp

- ☑ Cho tập hợp A gồm n phần tử ($n \geq 1$). Kết quả của việc lấy k phần tử khác nhau từ n phần tử của tập hợp A và sắp xếp chúng theo một thứ tự nào đó được gọi là một chỉnh hợp chập k của n phần tử đã cho.
- ☑ Số chỉnh hợp chập k của n phần tử là $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$ với $1 \leq k \leq n$.

5. Tổ hợp

- ☑ Cho tập hợp A gồm n phần tử ($n \geq 1$). Mỗi tập con gồm k phần tử của A được gọi là một tổ hợp chập k của n phần tử đã cho.
- ☑ Số các tổ hợp chập k của n phần tử là $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ với $0 \leq k \leq n$.
- ☑ Một số tính chất của các số C_n^k :
 - i) $C_n^k = C_n^{n-k}$ với $0 \leq k \leq n$.
 - ii) $C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k = C_n^k$ với $1 \leq k < n$.

B. BÀI TẬP MẪU

VÍ DỤ 22 (Đề minh họa BGD 2022-2023). Cho tập hợp A có 15 phần tử. Số tập con gồm hai phần tử của A bằng

(A) 225.

(B) 30.

(C) 210.

(D) 105.

☞ **Lời giải.**

Số tập con gồm hai phần tử của A có 15 phần tử là số tổ hợp chập 2 của 15 phần tử. Do đó, số tập con gồm hai phần tử của A là $C_{15}^2 = 105$.

Chọn đáp án (D) □

C. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN

CÂU 1. Với k, n là hai số nguyên dương tùy ý thỏa mãn $k \leq n$, mệnh đề nào dưới đây **sai**?

(A) $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$.

(B) $C_n^k = \frac{P_n}{k!}$.

(C) $C_n^k = \frac{A_n^k}{k!}$.

(D) $C_n^k = C_n^{n-k}$.

☞ **Lời giải.**

$$C_n^k = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{1}{k!} \cdot A_n^k \Rightarrow A_n^k = k! \cdot C_n^k.$$

Chọn đáp án (B) □

CÂU 2. Cho n là số tự nhiên lớn hơn 2. Số các chỉnh hợp chập 2 của n phần tử là

(A) $n(n-1)$.

(B) $2n$.

(C) $\frac{n(n-1)}{2!}$.

(D) $2! \cdot n(n-1)$.

☞ **Lời giải.**

$$\text{Ta có } A_n^2 = \frac{n!}{(n-2)!} = n(n-1).$$

Chọn đáp án (A) □

CÂU 3. Cho tập $A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$, có bao nhiêu tập con gồm 3 phần tử của tập hợp A ?

(A) A_6^3 .

(B) P_6 .

(C) P_3 .

(D) C_6^3 .

☞ **Lời giải.**

Số tập con có 3 phần tử của tập hợp A gồm 6 phần tử là số tổ hợp chập 3 của 6 phần tử. Do đó, số tập con cần tìm là C_6^3 .
Chọn đáp án (D) □

CÂU 4. Cho $n, k \in \mathbb{N}^*$ và $n \geq k$. Tìm công thức đúng.

(A) $C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$.

(B) $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}$.

(C) $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$.

(D) $C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!(k+1)!}$.

☞ **Lời giải.**

$$\text{Công thức đúng là } A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Chọn đáp án (C) □

CÂU 5. Số tập con có hai phần tử của tập hợp gồm 10 phần tử là

(A) 20.

(B) 90.

(C) 100.

(D) 45.

☞ **Lời giải.**

Số tập hợp con có hai phần tử của tập hợp gồm 10 phần tử là $C_{10}^2 = 45$.

Chọn đáp án (D) □

CÂU 6. Cho tập hợp X gồm 10 phần tử. Số các hoán vị của 10 phần tử của tập hợp X là

(A) 10^{10} .

(B) 10^2 .

(C) 2^{10} .

(D) $10!$.

☞ **Lời giải.**

Số các hoán vị của 10 phần tử là $10!$.

Chọn đáp án (D) □

CÂU 7. Cho tập $A = \{1; 2; 3; \dots; 9; 10\}$. Một tổ hợp chập 2 của 10 phần tử của A là

(A) $\{1; 2\}$.

(B) $2!$.

(C) A_{10}^2 .

(D) C_{10}^2 .

☞ **Lời giải.**

Mỗi tập hợp con gồm 2 phần tử của A được gọi là một tổ hợp chập 2 của 10 phần tử của tập A . Mà $\{1; 2\}$ là một tập con gồm 2 phần tử của A hay một tổ hợp chập 2 của 10 phần tử của A .

Chọn đáp án (A) □

CÂU 8. Công thức nào dưới đây đúng?

- (A) $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$. (B) $A_n^k = \frac{(n-k)!}{k!}$. (C) $A_n^k = \frac{n!}{k!}$. (D) $A_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Lời giải.

Công thức tính số chỉnh hợp chập k của n là $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$.

Chọn đáp án (A)

CÂU 9. Với n là số nguyên dương, công thức nào dưới đây đúng?

- (A) $P_n = n!$. (B) $P_n = n - 1$. (C) $P_n = (n - 1)!$. (D) $P_n = n$.

Lời giải.

Ta có P_n là kí hiệu số các hoán vị của n phần tử. Do đó $P_n = n!$.

Chọn đáp án (A)

CÂU 10. Lớp 12A có 43 học sinh và lớp 12B có 30 học sinh. Chọn ngẫu nhiên 1 học sinh từ lớp 12A và 12B. Hỏi có bao nhiêu cách chọn?

- (A) 43. (B) 30. (C) 1290. (D) 73.

Lời giải.

Tổng số học sinh của hai lớp là $43 + 30 = 73$. Do đó số cách chọn là 73.

Chọn đáp án (D)

CÂU 11. Một học sinh cần mua một cây bút mực và một cây bút chì. Các cây bút mực có 8 màu khác nhau và các cây bút chì cũng có 8 màu khác nhau. Như vậy, học sinh đó có bao nhiêu cách chọn?

- (A) 16. (B) 2. (C) 3. (D) 64.

Lời giải.

Mua một cây bút mực có 8 cách.

Mua một cây bút chì có 8 cách.

Theo quy tắc nhân, để mua được 1 cây bút mực và 1 cây bút chì ta có $8 \cdot 8 = 64$ cách.

Chọn đáp án (D)

CÂU 12. Một học sinh cần mua một cây bút để viết bài. Bút mực có 8 loại khác nhau, bút chì có 8 loại khác nhau. Như vậy, học sinh đó có bao nhiêu cách chọn?

- (A) 16. (B) 2. (C) 3. (D) 64.

Lời giải.

Công việc mua bút có 2 phương án thực hiện độc lập nhau.

Phương án 1: Mua một cây bút mực có 8 cách.

Phương án 2: Mua một cây bút chì có 8 cách.

Theo quy tắc cộng, ta có $8 + 8 = 16$ cách mua một cây bút chì để viết bài

Chọn đáp án (A)

CÂU 13. Có bao nhiêu cách chọn ra 3 học sinh từ một nhóm có 7 học sinh nam và 3 học sinh nữ?

- (A) C_3^3 . (B) C_{10}^3 . (C) A_{10}^3 . (D) P_3 .

Lời giải.

Số cách chọn ra 3 học sinh từ 10 học sinh là C_{10}^3 .

Chọn đáp án (B)

CÂU 14. Từ thành phố A có 10 con đường đến thành phố B, từ thành phố B có 7 con đường đến thành phố C. Từ A đến C phải qua B, hỏi có bao nhiêu cách đi từ A đến C mà chỉ đi qua B đúng một lần?

- (A) 10. (B) 7. (C) 17. (D) 70.

Lời giải.

Để đi từ A đến C ta thực hiện hai hành động liên tiếp.

Hành động 1: Đi từ A đến B có 10 cách.

Hành động 2: Đi từ B đến C có 7 cách.

Theo quy tắc nhân, đi từ A đến C có $10 \cdot 7 = 70$ cách.

Chọn đáp án (D)

CÂU 15. Một người vào cửa hàng ăn, người đó chọn thực đơn gồm 1 món ăn trong 5 món, 1 loại quả trong 5 loại, 1 loại nước uống trong 3 loại. Hỏi có bao nhiêu cách lập thực đơn?

- (A) 73. (B) 75. (C) 85. (D) 95.

Lời giải.

Lập thực đơn gồm 3 hành động liên tiếp.

Hành động 1: Chọn 1 món ăn có 5 cách.

Hành động 2: Chọn 1 loại quả có 5 cách.

Hành động 3: Chọn 1 loại nước uống có 3 cách.
 Theo quy tắc nhân, có $5 \cdot 5 \cdot 3 = 75$ cách lập thực đơn.
 Chọn đáp án (B)

CÂU 16. Một tổ có 4 học sinh nam và 6 học sinh nữ. Hỏi có bao nhiêu cách chọn ra 3 học sinh trong đó có 2 học sinh nam?

- (A) $C_4^2 + C_6^1$. (B) $C_4^2 \cdot C_6^1$. (C) $A_4^2 \cdot A_6^1$. (D) $A_4^2 + A_6^1$.

Lời giải.

Để chọn 3 học sinh trong đó có 2 học sinh nam thì ta thực hiện 2 hành động liên tiếp.

Hành động 1: Chọn 2 học sinh nam có C_4^2 cách.

Hành động 2: Chọn 1 học sinh nữ có C_6^1 cách.

Theo quy tắc nhân, ta có $C_4^2 \cdot C_6^1$ cách chọn thỏa mãn yêu cầu.

Chọn đáp án (B)

CÂU 17. Trong một trận chung kết bóng đá phải phân định thắng thua bằng đá luân lưu 11 mét. Huấn luyện viên của mỗi đội cần trình với trọng tài một danh sách sắp thứ tự 5 cầu thủ trong 11 cầu thủ để đá luân lưu 5 quả sút luân lưu. Hỏi huấn luyện viên của mỗi đội sẽ có bao nhiêu cách lập danh sách thứ tự đá luân lưu?

- (A) C_{11}^5 . (B) A_{11}^5 . (C) $5!$. (D) $11!$.

Lời giải.

Mỗi cách chọn và sắp thứ tự 5 cầu thủ trong 11 cầu thủ để đá luân lưu là một chỉnh hợp chập 5 của 11 phần tử. Vậy số cách lập danh sách thứ tự đá luân lưu là A_{11}^5 .

Chọn đáp án (B)

CÂU 18. Có 15 học sinh giỏi gồm 6 học sinh khối 12, 5 học sinh khối 11 và 4 học sinh khối 10. Hỏi có bao nhiêu cách chọn ra 6 học sinh sao cho mỗi khối có đúng 2 học sinh?

- (A) $C_6^2 \cdot C_5^2 \cdot C_4^2$. (B) $A_6^2 \cdot A_5^2 \cdot A_4^2$. (C) $C_6^2 + C_5^2 + C_4^2$. (D) $A_6^2 + A_5^2 + A_4^2$.

Lời giải.

Chọn 2 học sinh khối 12 có C_6^2 cách.

Chọn 2 học sinh khối 11 có C_5^2 cách.

Chọn 2 học sinh khối 10 có C_4^2 cách.

Theo quy tắc nhân, có $C_6^2 \cdot C_5^2 \cdot C_4^2$ cách chọn thỏa mãn yêu cầu.

Chọn đáp án (A)

CÂU 19. Một câu lạc bộ có 30 thành viên. Có bao nhiêu cách chọn một ban quản lí gồm 1 chủ tịch, 1 phó chủ tịch và 1 thư kí?

- (A) A_{30}^3 . (B) C_{30}^3 . (C) $30!$. (D) $3!$.

Lời giải.

Mỗi cách chọn ra 3 người và sắp xếp vào 3 vị trí là một chỉnh hợp chập 3 của 30 thành viên. Vậy số cách chọn thỏa mãn yêu cầu là A_{30}^3 .

Chọn đáp án (A)

CÂU 20. Một hộp chứa 10 quả cầu phân biệt. Số cách lấy ra cùng lúc 3 quả cầu từ hộp đó là

- (A) 720. (B) 10^3 . (C) 120. (D) 3^{10} .

Lời giải.

Số cách chọn cùng lúc 3 quả cầu từ một hộp chứa 10 quả cầu phân biệt là C_{10}^3 .

Chọn đáp án (C)

CÂU 21. Giả sử ta dùng 6 màu để tô cho 4 nước khác nhau trên bản đồ và không có màu nào được dùng 2 lần. Số cách để chọn ra những màu cần dùng và tô lên bản đồ là

- (A) A_6^4 . (B) 10. (C) C_6^4 . (D) 6^4 .

Lời giải.

Số cách chọn 4 màu từ 6 màu và tô vào 4 nước trên bản đồ (không có màu nào được dùng 2 lần) là A_6^4 .

Chọn đáp án (A)

CÂU 22. Có bao nhiêu cách phân công 3 bạn từ một tổ có 9 bạn để làm trực nhật?

- (A) 9^3 . (B) 3^9 . (C) A_9^3 . (D) C_9^3 .

Lời giải.

Mỗi cách phân công ba bạn từ một tổ có 9 bạn để làm trực nhật là một tổ hợp chập 3 của 9. Nên số cách phân công là C_9^3 .

Chọn đáp án (D)

CÂU 23. Cho 20 điểm phân biệt nằm trên một đường tròn. Hỏi có bao nhiêu tam giác được tạo thành từ các điểm này?

- (A) 8000. (B) 1140. (C) 6480. (D) 600.

Lời giải.

Chọn 3 điểm từ 20 điểm ta được một tam giác nên số tam giác được tạo thành từ 20 điểm đã cho là C_{20}^3 .

Chọn đáp án (B)

CÂU 24. Trong một bình đựng 4 viên bi đỏ và 3 viên bi xanh. Lấy ngẫu nhiên đồng thời 2 viên. Có bao nhiêu cách lấy?

- (A) 18. (B) 21. (C) 42. (D) 10.

Lời giải.

Số cách lấy 2 viên bi từ 7 viên bi là $C_7^2 = 21$.

Chọn đáp án (B)

CÂU 25. Số cách sắp xếp 6 học sinh nữ và 4 học sinh nam thành một hàng dọc là

- (A) $6! + 4!$. (B) $6! \cdot 4!$. (C) $C_{10}^4 \cdot C_{10}^6$. (D) $10!$.

Lời giải.

Số cách sắp xếp 6 học sinh nữ và 4 học sinh nam thành một hàng dọc là $10!$.

Chọn đáp án (D)

CÂU 26. Cho tập hợp $X = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$. Từ tập hợp X , hỏi có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm ba chữ số đôi một khác nhau?

- (A) 35. (B) 210. (C) 840. (D) 5040.

Lời giải.

Số cách lập số tự nhiên gồm ba chữ số khác nhau từ tập hợp X là $A_7^3 = 210$.

Chọn đáp án (B)

CÂU 27. Có bao nhiêu số tự nhiên có hai chữ số khác nhau mà các chữ số được lấy từ tập hợp $X = \{1; 2; 3; 4; 5\}$?

- (A) 5^2 . (B) 2^5 . (C) A_5^2 . (D) C_5^2 .

Lời giải.

Từ 5 chữ số của tập X , ta lấy 2 chữ số bất kì rồi sắp xếp vị trí được một số có hai chữ số. Như vậy có A_5^2 số được tạo thành.

Chọn đáp án (C)

CÂU 28. Giả sử 9 vận động viên tham gia một cuộc thi bơi lội. Nếu không kể trường hợp có hai vận động viên về đích cùng một lúc thì có bao nhiêu kết quả có thể xảy ra đối với các vị trí thứ nhất, thứ nhì và thứ ba?

- (A) 84. (B) 729. (C) 504. (D) 3^9 .

Lời giải.

Số kết quả có thể xảy ra đối với các vị trí thứ nhất, thứ nhì và thứ ba là $A_9^3 = 504$ kết quả.

Chọn đáp án (C)

CÂU 29. Có bao nhiêu tập con gồm 3 phần tử của tập hợp $X = \{1; 2; 3; 4; 7; 8; 9\}$?

- (A) C_7^3 . (B) A_9^3 . (C) A_7^3 . (D) C_9^3 .

Lời giải.

Số tập con gồm 3 phần tử của tập hợp $X = \{1; 2; 3; 4; 7; 8; 9\}$ là số tổ hợp chập 3 của 7 phần tử. Vậy có C_7^3 tập hợp.

Chọn đáp án (A)

CÂU 30. Một hộp có 8 bi xanh, 5 bi đỏ và 4 bi vàng. Có bao nhiêu cách chọn ra 3 viên bi sao cho có đúng 1 bi đỏ?

- (A) $C_5^1 \cdot C_8^1 \cdot C_4^1$. (B) $A_5^1 \cdot A_{12}^2$. (C) $C_5^1 \cdot C_{12}^2$. (D) $A_5^1 \cdot A_8^1 \cdot A_4^1$.

Lời giải.

Chọn 1 bi đỏ có C_5^1 cách.

Chọn 2 bi còn lại có C_{12}^2 cách.

Theo quy tắc nhân, ta có $C_5^1 \cdot C_{12}^2$ cách chọn thỏa mãn yêu cầu.

Chọn đáp án (C)

D. BẢNG ĐÁP ÁN

1. B	2. A	3. D	4. C	5. D	6. D	7. A	8. A
9. A	10. D	11. D	12. A	13. B	14. D	15. B	16. B
17. B	18. A	19. A	20. C	21. A	22. D	23. B	24. B
	25. D	26. B	27. C	28. C	29. A	30. C	

Bài 23. NGUYÊN HÀM

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Định nghĩa nguyên hàm

Cho hàm số $f(x)$ xác định trên \mathbb{K} . Hàm số $F(x)$ được gọi là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên \mathbb{K} nếu $F'(x) = f(x), \forall x \in \mathbb{K}$.

Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên \mathbb{K} thì mọi nguyên hàm của $f(x)$ trên \mathbb{K} đều có dạng $F(x) + C$ với C là hằng số.

2. Tính chất của nguyên hàm

- $\int f'(x) dx = f(x) + C$.
- $\int kf(x) dx = k \int f(x) dx$ với $k \neq 0$.
- $\int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$.

3. Bảng nguyên hàm của một số hàm số thường gặp

Nguyên hàm cơ bản	Nguyên hàm mở rộng
<ul style="list-style-type: none"> • $\int 0 dx = C$ • $\int dx = x + C$ • $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, (\alpha \neq -1)$ • $\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$ • $\int \alpha^x dx = \frac{\alpha^x}{\ln \alpha} + C, (0 < \alpha \neq 1)$ • $\int e^x dx = e^x + C$ • $\int \sin x dx = -\cos x + C$ • $\int \cos x dx = \sin x + C$ • $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$ • $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C$ 	<ul style="list-style-type: none"> • $\int (ax+b)^\alpha dx = \frac{1}{a} \frac{(ax+b)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, (\alpha \neq -1)$ • $\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \cdot \ln ax+b + C$ • $\int \alpha^{ax+b} dx = \frac{1}{a} \cdot \frac{\alpha^{ax+b}}{\ln \alpha} + C$ • $\int e^{(ax+b)} dx = \frac{1}{a} \cdot e^{(ax+b)} + C$ • $\int \sin(ax+b) dx = -\frac{1}{a} \cos(ax+b) + C, (a \neq 0)$ • $\int \cos(ax+b) dx = \frac{1}{a} \sin(ax+b) + C, (a \neq 0)$ • $\int \frac{1}{\cos^2(ax+b)} dx = \frac{1}{a} \tan(ax+b) + C, (a \neq 0)$ • $\int \frac{1}{\sin^2(ax+b)} dx = -\frac{1}{a} \cot(ax+b) + C, (a \neq 0)$

B. BÀI TẬP MẪU

VÍ DỤ 23. Cho $\int \frac{1}{x} dx = F(x) + C$. Khẳng định nào dưới đây **đúng**?

(A) $F'(x) = \frac{2}{x^2}$.

(B) $F'(x) = \ln x$.

(C) $F'(x) = \frac{1}{x}$.

(D) $F'(x) = -\frac{1}{x^2}$.

☞ **Lời giải.**

Ta có $F'(x) = \left(\int \frac{1}{x} dx \right)' = \frac{1}{x}$.

Chọn đáp án (C)



C. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN

CÂU 31. Hàm số $f(x) = \cos(4x+7)$ có một nguyên hàm là

(A) $\frac{1}{4} \sin(4x+7) - 3$.

(B) $-\frac{1}{4} \sin(4x+7) + 3$.

(C) $\sin(4x+7) - 1$.

(D) $-\sin(4x+7) + x$.

☞ **Lời giải.**

Ta có $\int \cos(4x+7) dx = \frac{1}{4} \sin(4x+7) + C$ nên hàm số $f(x) = \cos(4x+7)$ có một nguyên hàm là $\frac{1}{4} \sin(4x+7) - 3$.

Chọn đáp án (A)



CÂU 32. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{x^2} - x^2 - \frac{1}{3}$ là:

(A) $\frac{-x^3}{3} - \frac{1}{x} - \frac{x}{3} + C.$

(B) $\frac{-2}{x^2} - 2x + C.$

(C) $-\frac{x^4 + x^2 + 3}{3x} + C.$

(D) $\frac{-x^4 + x^2 + 3}{3x} + C.$

Lời giải.

Ta có $\int \left(\frac{1}{x^2} - x^2 - \frac{1}{3} \right) dx = -\frac{1}{x} - \frac{x^3}{3} - \frac{x}{3} + C.$

Chọn đáp án **(A)**

CÂU 33. Tìm $\int \sin 5x \, dx$

(A) $\int \sin 5x \, dx = \frac{1}{5} \cos 5x + C.$

(B) $\int \sin 5x \, dx = -\frac{1}{5} \cos 5x + C.$

(C) $\int \sin 5x \, dx = -\cos 5x + C.$

(D) $\int \sin 5x \, dx = -5 \cos 5x + C.$

Lời giải.

Ta có $\int \sin 5x \, dx = -\frac{1}{5} \cos 5x + C.$

Chọn đáp án **(A)**

CÂU 34. Tìm họ nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \cos(2x + 3)$.

(A) $F(x) = \frac{1}{2} \sin(2x + 3) + C.$

(B) $F(x) = -\frac{1}{2} \sin(2x + 3) + C.$

(C) $F(x) = \sin(2x + 3) + C.$

(D) $F(x) = -\sin(2x + 3) + C.$

Lời giải.

$F(x) = \int \cos(2x + 3) \, dx = \frac{1}{2} \sin(2x + 3) + C.$

Chọn đáp án **(A)**

CÂU 35. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3^{2x+1}$ là:

(A) $\frac{1}{2 \ln 3} 3^{2x+1} + C.$

(B) $\frac{1}{\ln 3} 3^{2x+1} + C.$

(C) $\frac{1}{2} 3^{2x+1} + C.$

(D) $\frac{1}{2} 3^{2x+1} \ln 3 + C.$

Lời giải.

Áp dụng công thức: $\int a^{mx+n} \, dx = \frac{a^{mx+n}}{m \ln a} + C.$

Ta có: $\int 3^{2x+1} \, dx = \frac{3^{2x+1}}{2 \ln 3} + C.$

Chọn đáp án **(A)**

CÂU 36. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3x^2 + e^x + 1$ là

(A) $F(x) = x^3 + e^x + x + C.$

(B) $F(x) = x^3 + e^x + 1 + C.$

(C) $F(x) = 2x^3 + e^x + x + C.$

(D) $F(x) = 6x + e^x + C.$

Lời giải.

Ta có $\int f(x) \, dx = \int (3x^2 + e^x + 1) \, dx = x^3 + e^x + x + C.$

Chọn đáp án **(A)**

CÂU 37. Công thức nguyên hàm nào sau đây không đúng?

(A) $\int \frac{1}{x} \, dx = \ln x + C.$

(B) $\int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx = \tan x + C.$

(C) $\int x^\alpha \, dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1).$

(D) $\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (0 < a \neq 1).$

Lời giải.

Ta có: $\int \frac{1}{x} \, dx = \ln |x| + C \Rightarrow \int \frac{1}{x} \, dx = \ln x + C$ sai.

Chọn đáp án **(A)**

CÂU 38. Họ các nguyên hàm của hàm số $y = e^{-3x+1}$ là

(A) $-3e^{-3x+1} + C.$

(B) $\frac{1}{3}e^{-3x+1} + C.$

(C) $-\frac{1}{3}e^{-3x+1} + C.$

(D) $3e^{-3x+1} + C.$

Lời giải.

Ta có $\int e^{-3x+1} \, dx = -\frac{1}{3}e^{-3x+1} + C.$

Chọn đáp án **(C)**

CÂU 39. Họ tất cả nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos x + 6x$ là

(A) $-\sin x + C.$

(B) $-\sin x + 3x^2 + C.$

(C) $\sin x + 3x^2 + C.$

(D) $\cos x + 6x^2 + C.$

Lời giải.

$$\int f(x) dx = \sin x + 3x^2 + C.$$

Chọn đáp án (C)

CÂU 40. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin 2x + \cos x$ là

(A) $\cos^2 x - \sin x + C.$

(B) $\sin^2 x + \sin x + C.$

(C) $\cos 2x - \sin x + C.$

(D) $-\cos 2x + \sin x + C.$

Lời giải.

Ta có:

$$\begin{aligned} \int (\sin 2x + \cos x) dx &= -\frac{1}{2} \cos 2x + \sin x + C' \\ &= -\frac{1}{2} (1 - 2 \sin^2 x) + \sin x + C' \\ &= \sin^2 x + \sin x + C \quad \left(C = C' - \frac{1}{2} \right). \end{aligned}$$

Chọn đáp án (B)

CÂU 41. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^{-x} - 1$ là

(A) $-e^x - x + C.$

(B) $e^{-x} - x + C.$

(C) $e^x + x + C.$

(D) $-e^{-x} - x + C.$

Lời giải.

Ta có $\int f(x) dx = -e^{-x} - x + C.$

Chọn đáp án (D)

CÂU 42. Khẳng định nào đây đúng?

(A) $\int \sin x dx = -\sin x + C.$

(B) $\int \sin x dx = \frac{1}{2} \sin^2 x + C.$

(C) $\int \sin x dx = \cos x + C.$

(D) $\int \sin x dx = -\cos x + C.$

Lời giải.

Ta có $\int \sin x dx = -\cos x + C.$

Chọn đáp án (D)

CÂU 43. Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2^x + 4x$ là

(A) $2^x \ln 2 + 2x^2 + C.$

(B) $\frac{2^x}{\ln 2} + 2x^2 + C.$

(C) $2^x \ln 2 + C.$

(D) $\frac{2^x}{\ln 2} + C.$

Lời giải.

Ta có: $\int f(x) dx = \int (2^x + 4x) dx = \int 2^x dx + \int 4x dx = \frac{2^x}{\ln 2} + 2x^2 + C.$

Chọn đáp án (B)

CÂU 44. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2x^3 - 9$ là:

(A) $\frac{1}{4}x^4 + C.$

(B) $4x^3 - 9x + C.$

(C) $\frac{1}{2}x^4 - 9x + C.$

(D) $4x^4 - 9x + C.$

Lời giải.

Ta có $\int f(x) dx = \int (2x^3 - 9) dx = 2 \frac{x^4}{4} - 9x + C = \frac{x^4}{2} - 9x + C.$

Chọn đáp án (C)

CÂU 45. Mệnh đề nào sau đây đúng?

(A) $\int \sin x dx = \cos x + C.$

(B) $\int \cos x dx = \sin x + C.$

(C) $\int a^x dx = a^x + C \quad (0 < a \neq 1).$

(D) $\int \frac{1}{x} dx = -\frac{1}{x^2} + C \quad (x \neq 0).$

Lời giải.

Ta có $\int \cos x dx = \sin x + C.$

Chọn đáp án (B)

CÂU 46. Khẳng định nào sau đây là sai?

(A) Mọi hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ đều có nguyên hàm trên đoạn $[a; b]$.

(B) $\int e^x dx = e^x + C \quad (C \text{ là hằng số}).$

Ⓒ $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$ (C là hằng số) với $x \neq 0$.

Ⓓ $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$ (C là hằng số, α là hằng số).

☞ **Lời giải.**

$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$ (C là hằng số, α là hằng số và $\alpha \neq -1$).

Chọn đáp án Ⓓ

CÂU 47. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{x^2} - x^2 - \frac{1}{3}$ là

Ⓐ $-\frac{x^4 + x^2 + 3}{3x} + C$.

Ⓑ $-\frac{x^3}{3} - \frac{1}{x} - \frac{x}{3} + C$.

Ⓒ $-\frac{x^4 + x^2 + 3}{3x} + C$.

Ⓓ $\frac{-2}{x^2} - 2x + C$.

☞ **Lời giải.**

Ta có $\int \left(\frac{1}{x^2} - x^2 - \frac{1}{3} \right) dx = \int \left(x^{-2} - x^2 - \frac{1}{3} \right) dx = -\frac{1}{x} - \frac{x^3}{3} - \frac{x}{3} + C$.

Chọn đáp án Ⓑ

CÂU 48. Nếu hàm số $y = \sin x$ là một nguyên hàm của hàm số $y = f(x)$ thì

Ⓐ $f(x) = -\sin x$.

Ⓑ $f(x) = -\cos x$.

Ⓒ $f(x) = \sin x$.

Ⓓ $f(x) = \cos x$.

☞ **Lời giải.**

Ta có $f(x) = (\sin x)' = \cos x$.

Chọn đáp án Ⓓ

CÂU 49. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sqrt[3]{x}$ là

Ⓐ $F(x) = \frac{3x\sqrt[3]{x}}{4} + C$.

Ⓑ $F(x) = \frac{4x}{3\sqrt[3]{x}} + C$.

Ⓒ $F(x) = \frac{4x}{3\sqrt[3]{x^2}} + C$.

Ⓓ $F(x) = \frac{3\sqrt[3]{x^2}}{4} + C$.

☞ **Lời giải.**

$\int \sqrt[3]{x} dx = \int x^{\frac{1}{3}} dx = \frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + C = \frac{3}{4} \sqrt[3]{x^4} + C = \frac{3}{4} x \sqrt[3]{x} + C$.

Chọn đáp án Ⓐ

CÂU 50. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{x-1}$ là

Ⓐ $\ln|x-1| + C$.

Ⓑ $-\frac{1}{(x-1)^2} + C$.

Ⓒ $2\ln|x-1| + C$.

Ⓓ $\ln(x-1) + C$.

☞ **Lời giải.**

Có $\int \frac{1}{x-1} dx = \ln|x-1| + C$.

Vậy họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{x-1}$ là $\ln|x-1| + C$.

Chọn đáp án Ⓐ

D. BẢNG ĐÁP ÁN

31. A	32. A	33. A	34. A	35. A	36. A	37. A	38. C
39. C	40. B	41. D	42. D	43. B	44. C	45. B	46. D
		47. B	48. D	49. A	50. A		

Bài 24. TÍCH PHÂN

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Định nghĩa tích phân

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và xác định trên đoạn $[a; b]$. Giả sử $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên đoạn $[a; b]$.

Hiệu số $F(b) - F(a)$ được gọi là tích phân từ a đến b của hàm số $f(x)$. Kí hiệu là $\int_a^b f(x) dx$.

Vậy $\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a).$

2. Tính chất tích phân xác định

Tính chất của tích phân xác định.

☉ $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$ với $a < c < b.$

☉ $k \int_a^b f(x) dx = \int_a^b kf(x) dx$ với $(k \neq 0).$

☉ $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx.$

☉ $\int_a^b (f(x) \pm g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx.$

☉ $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(z) dz.$

☉ $\int_a^b f'(x) dx = f(x) \Big|_a^b = f(b) - f(a).$

B. BÀI TẬP MẪU

VÍ DỤ 24 (Đề minh họa BGD 2022-2023). Nếu $\int_0^2 f(x) dx = 4$ thì $\int_0^2 \left[\frac{1}{2} f(x) - 2 \right] dx$ bằng

- (A) 0. (B) 6. (C) 8. (D) -2.

☞ **Lời giải.**

PHÂN TÍCH:

1. **Dạng toán:** là dạng toán sử dụng tính chất để tính tích phân xác định của hàm số.

2. **Hướng giải:**

B1. Dựa trên giả thiết $I = \int_0^2 \left[\frac{1}{2} f(x) - 2 \right] dx$, ta tính tích phân $\frac{1}{2} \int_0^2 f(x) dx - 2 \int_0^2 dx$.

B2. Ta có $I = \frac{1}{2} \int_0^2 f(x) dx - 2 \int_0^2 dx$.

Ta có $\int_0^2 \left[\frac{1}{2} f(x) - 2 \right] dx = \frac{1}{2} \int_0^2 f(x) dx - 2 \int_0^2 dx = \frac{1}{2} \cdot 4 - 2 \left(x \Big|_0^2 \right) = -2.$

Chọn đáp án (D)



C. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN

CÂU 1. Cho $\int_1^2 f(x) dx = 3$ và $\int_1^2 [3f(x) - g(x)] dx = 10$, khi đó $\int_1^2 g(x) dx$ bằng

- (A) -1. (B) -4. (C) 17. (D) 1.

☞ **Lời giải.**

Ta có

$$\begin{aligned} \int_1^2 [3f(x) - g(x)] dx &= 10 \Leftrightarrow 3 \int_1^2 f(x) dx - \int_1^2 g(x) dx = 10 \\ &\Leftrightarrow 3 \cdot 3 - \int_1^2 g(x) dx = 10 \\ &\Leftrightarrow \int_1^2 g(x) dx = -1. \end{aligned}$$

Chọn đáp án (A)

CÂU 2. Trong các công thức sau đây, công thức nào đúng?

(A) $\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du.$ (B) $\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du.$ (C) $\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b + \int_a^b v du.$ (D) $\int_a^b u dv = uv - \int_b^a v du.$

☞ **Lời giải.**

Công thức tích phân từng phần $\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du.$

Chọn đáp án (B)

CÂU 3. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên đoạn $[1; 3]$, $f(3) = 5$ và $\int_1^3 f'(x) dx = 6$. Khi đó $f(1)$ bằng

(A) 10. (B) 11. (C) 1. (D) -1.

☞ **Lời giải.**

Ta có $\int_1^3 f'(x) dx = 6 \Leftrightarrow f(x) \Big|_1^3 = 6 \Leftrightarrow f(3) - f(1) = 6 \Leftrightarrow 5 - f(1) = 6 \Leftrightarrow f(1) = -1.$

Vậy $f(1) = -1.$

Chọn đáp án (D)

CÂU 4. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên đoạn $[a; b]$ và $\int_a^b f(x) dx = 1$; $F(b) = 2$. Tính $F(a)$.

(A) 1. (B) 3. (C) -1. (D) 2.

☞ **Lời giải.**

Ta có $1 = \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = 2 - F(a)$. Suy ra $F(a) = 2 - 1 = 1.$

Chọn đáp án (A)

CÂU 5. Cho $\int_{-3}^2 f(x) dx = -7$. Tính $\int_{-3}^2 3 \cdot f(x) dx$?

(A) 4. (B) 21. (C) -21. (D) -4.

☞ **Lời giải.**

Ta có $\int_{-3}^2 3f(x) dx = 3 \int_{-3}^2 f(x) dx = 3 \cdot (-7) = -21.$

Chọn đáp án (C)

CÂU 6. Nếu $\int_1^4 f(x) dx = 9$ và $\int_3^4 f(x) dx = -1$ thì $\int_1^3 f(x) dx$ bằng

(A) -8. (B) -10. (C) 8. (D) 10.

☞ **Lời giải.**

Ta có

$$\begin{aligned}\int_1^4 f(x) dx &= \int_1^3 f(x) dx + \int_3^4 f(x) dx \Leftrightarrow \int_1^3 f(x) dx = \int_1^4 f(x) dx - \int_3^4 f(x) dx \\ &\Leftrightarrow \int_1^3 f(x) dx = 9 - (-1) = 10.\end{aligned}$$

Chọn đáp án (D)

CÂU 7. Nếu $F'(x) = \frac{1}{2x+1}$ và $F(1) = 1$ thì giá trị của $F(2)$ bằng

- (A) $1 + \frac{1}{2} \ln 5$. (B) $1 + \frac{1}{2} \ln \frac{5}{3}$. (C) $1 + \ln \frac{5}{3}$. (D) $1 + \ln 5$.

☞ **Lời giải.**

$$\text{Ta có } \int_1^2 F'(x) dx = F(x) \Big|_1^2 = F(2) - F(1).$$

$$\text{Mặt khác } \int_1^2 F'(x) dx = \int_1^2 \frac{1}{2x+1} dx = \frac{1}{2} \ln |2x+1| \Big|_1^2 = \frac{1}{2} \ln 5 - \frac{1}{2} \ln 3 = \frac{1}{2} \ln \frac{5}{3}.$$

$$\text{Suy ra } F(2) - F(1) = \frac{1}{2} \ln \frac{5}{3}.$$

$$\text{Do đó } F(2) = \frac{1}{2} \ln \frac{5}{3} + F(1) = \frac{1}{2} \ln \frac{5}{3} + 1.$$

Chọn đáp án (B)

CÂU 8. Cho hàm số f, g liên tục trên K và a, b, c thuộc K . Công thức nào sau đây **sai**?

- (A) $\int_a^b k f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$. (B) $\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx$ với $a < b < c$.
(C) $\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$. (D) $\int_a^b f(x) dx = \int_b^a f(x) dx$.

☞ **Lời giải.**

$$\text{Ta có } \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx \text{ nên } \int_a^b f(x) dx = \int_b^a f(x) dx \text{ sai.}$$

Chọn đáp án (D)

CÂU 9. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$. Khi đó hiệu số $F(1) - F(2)$ bằng

- (A) $\int_1^2 [-F(x)] dx$. (B) $\int_1^2 f(x) dx$. (C) $\int_1^2 [-f(x)] dx$. (D) $\int_2^1 F(x) dx$.

☞ **Lời giải.**

$$\text{Ta có } F(1) - F(2) = F(x) \Big|_2^1 = \int_2^1 f(x) dx = \int_1^2 [-f(x)] dx.$$

Chọn đáp án (C)

CÂU 10. Với mọi hàm số $f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} , ta có

- (A) $\int_0^3 f(x) dx = \int_3^0 f(x) dx$. (B) $\int_0^3 f(x) dx = \int_{-3}^0 f(x) dx$.
(C) $\int_0^3 f(x) dx = - \int_3^0 f(x) dx$. (D) $\int_0^3 f(x) dx = - \int_{-3}^0 f(x) dx$.

☞ **Lời giải.**

$$\text{Áp dụng công thức } \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx, \text{ với } a < b.$$

Ta có $\int_0^3 f(x) dx = - \int_3^0 f(x) dx$.

Chọn đáp án (D)

CÂU 11. Nếu $\int_{-1}^3 f(x) dx = 2$ và $\int_{-1}^3 g(x) dx = -1$ thì $\int_{-1}^3 [f(x) - g(x)] dx$ bằng

(A) -3.

(B) -1.

(C) 3.

(D) 4.

 **Lời giải.**

Ta có $\int_{-1}^3 [f(x) - g(x)] dx = \int_{-1}^3 f(x) dx - \int_{-1}^3 g(x) dx = 2 - (-1) = 3$.

Chọn đáp án (C)

CÂU 12. Nếu $\int_{-1}^0 f(x) dx = -3$ và $\int_0^1 f(x) dx = -1$ thì $\int_{-1}^1 f(x) dx$ bằng

(A) 3.

(B) -2.

(C) 2.

(D) -4.

 **Lời giải.**

Ta có $\int_{-1}^1 f(x) dx = \int_{-1}^0 f(x) dx + \int_0^1 f(x) dx = -3 - 1 = -4$.

Chọn đáp án (D)

CÂU 13. Cho $\int_1^2 f(x) dx = 1$ và $\int_2^3 f(x) dx = -2$. Giá trị của $\int_1^3 f(x) dx$ bằng

(A) 3.

(B) 1.

(C) -3.

(D) -1.

 **Lời giải.**

Ta có $\int_1^3 f(x) dx = \int_1^2 f(x) dx + \int_2^3 f(x) dx = -1$.

Chọn đáp án (D)

CÂU 14. Cho $f(x)$ là một hàm số liên tục trên \mathbb{R} và $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ thỏa $\int_1^2 f(x) dx = 5$;

$F(2) = 11$. Khi đó $F(1)$ bằng

(A) 16.

(B) 4.

(C) 6.

(D) 7.

 **Lời giải.**

Ta có $\int_1^2 f(x) dx = 5 \Leftrightarrow F(2) - F(1) = 5 \Leftrightarrow 11 - F(1) = 5 \Leftrightarrow F(1) = 6$.

Chọn đáp án (C)

CÂU 15. Nếu $\int_{-1}^2 f(x) dx = 2$ và $\int_2^5 f(x) dx = -3$ thì $\int_{-1}^5 f(x) dx$ bằng

(A) -6.

(B) -1.

(C) -5.

(D) 5.

 **Lời giải.**

Ta có $\int_{-1}^5 f(x) dx = \int_{-1}^2 f(x) dx + \int_2^5 f(x) dx = 2 + (-3) = -1$.

Chọn đáp án (B)

CÂU 16. Nếu $\int_1^2 f(x) dx = 5$ và $\int_2^3 f(x) dx = -2$ thì $\int_1^3 f(x) dx$ bằng

(A) -7.

(B) 3.

(C) 7.

(D) -10.

 **Lời giải.**

Áp dụng công thức $\int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$ với $a < c < b$, ta có

$$\int_1^3 f(x) dx = \int_1^2 f(x) dx + \int_2^3 f(x) dx = 5 + (-2) = 3.$$

Chọn đáp án (B)

CÂU 17. Giả sử $\int_0^9 f(x) dx = 37$ và $\int_9^0 g(x) dx = 16$. Khi đó, $I = \int_0^9 [2f(x) + 3g(x)] dx$ bằng

(A) $I = 143$.

(B) $I = 58$.

(C) $I = 122$.

(D) $I = 26$.

☞ **Lời giải.**

Ta có $I = \int_0^9 [2f(x) + 3g(x)] dx = 2 \int_0^9 f(x) dx - 3 \int_9^0 g(x) dx = 26$.

Chọn đáp án (D)

CÂU 18. Cho $\int_2^5 f(x) dx = 10$. Khi đó $\int_2^5 [2 - 4f(x)] dx$ bằng

(A) 36.

(B) -36.

(C) 34.

(D) -34.

☞ **Lời giải.**

Ta có $\int_2^5 [2 - 4f(x)] dx = 2 \int_2^5 dx - 4 \int_2^5 f(x) dx = \left(2x \Big|_2^5\right) - 4 \cdot 10 = 2(5 - 2) - 40 = -34$.

Chọn đáp án (D)

CÂU 19. Nếu $\int_1^0 f(x) dx = 3$ và $\int_0^1 g(x) dx = -4$ thì $\int_0^1 [f(x) - 2g(x)] dx$ bằng bao nhiêu?

(A) 11.

(B) 5.

(C) -1.

(D) 7.

☞ **Lời giải.**

Ta có $\int_0^1 [f(x) - 2g(x)] dx = - \int_1^0 f(x) dx - 2 \int_0^1 g(x) dx = -3 - 2 \cdot (-4) = 5$.

Chọn đáp án (B)

CÂU 20. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên khoảng K và $a, b, c \in K$. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

(A) $\int_a^b f(x) dx + \int_c^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx$.

(B) $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt$.

(C) $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$.

(D) $\int_a^a f(x) dx = 0$.

☞ **Lời giải.**

Mệnh đề sai là $\int_a^b f(x) dx + \int_c^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx$.

Chọn đáp án (A)

CÂU 21. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[a; b]$ và $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$. Tìm khẳng định **sai**.

(A) $\int_a^b f(x) dx = F(a) - F(b)$.

(B) $\int_a^a f(x) dx = 0$.

(C) $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$.

(D) $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$.

☞ **Lời giải.**

Khẳng định $\int_a^b f(x) dx = F(a) - F(b)$ sai.

Chọn đáp án (A)

CÂU 22. Cho hàm số phức $f(x)$ và $g(x)$ liên tục trên đoạn $[1; 7]$ sao cho $\int_1^7 f(x) dx = 2$ và $\int_1^7 g(x) dx = -3$. Giá trị của

$$\int_1^7 [f(x) - g(x)] dx \text{ bằng}$$

(A) -1.

(B) -5.

(C) 5.

(D) 6.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \int_1^7 [f(x) - g(x)] dx = \int_1^7 f(x) dx - \int_1^7 g(x) dx = 2 - (-3) = 5.$$

Chọn đáp án (C)

CÂU 23. Cho các số thực a, b ($a < b$). Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm là hàm số liên tục trên \mathbb{R} thì

(A) $\int_a^b f(x) dx = f'(a) - f'(b).$

(B) $\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a).$

(C) $\int_a^b f(x) dx = f'(b) - f'(a).$

(D) $\int_a^b f'(x) dx = f(a) - f(b).$

Lời giải.

$$\text{Ta có } \int_a^b f'(x) dx = f(x) \Big|_a^b = f(b) - f(a).$$

Chọn đáp án (B)

CÂU 24. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên R , có $f(8) = 20$; $f(4) = 12$. Tính tích phân $I = \int_4^8 f'(x) dx$.

(A) $I = 16.$

(B) $I = 4.$

(C) $I = 32.$

(D) $I = 8.$

Lời giải.

$$\text{Ta có } I = \int_4^8 f'(x) dx = f(x) \Big|_4^8 = f(8) - f(4) = 8.$$

Chọn đáp án (D)

CÂU 25. Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn điều kiện $f(1) = 12$, $f'(x)$ liên tục trên \mathbb{R} và $\int_1^4 f'(x) dx = 17$. Khi đó $f(4)$ bằng

(A) 5.

(B) 29.

(C) 19.

(D) 9.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \int_1^4 f'(x) dx = 17 \Leftrightarrow f(x) \Big|_1^4 = 17 \Leftrightarrow f(4) - f(1) = 17 \Leftrightarrow f(4) = 29.$$

Chọn đáp án (B)

CÂU 26. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên khoảng K và $a, b, c \in K$. Mệnh đề nào sau đây sai?

(A) $\int_a^b f(x) dx + \int_c^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx.$

(B) $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt.$

(C) $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx.$

(D) $\int_a^a f(x) dx = 0.$

Lời giải.

Mệnh đề sai là $\int_a^b f(x) dx + \int_c^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx$.

Chọn đáp án (A)

CÂU 27. Cho $\int_1^5 h(x) dx = 4$ và $\int_1^7 h(x) dx = 10$, khi đó $\int_5^7 h(x) dx$ bằng

(A) 6.

(B) 5.

(C) 7.

(D) 2.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} \int_1^5 h(x) dx + \int_5^7 h(x) dx &= \int_1^7 h(x) dx \Leftrightarrow \int_5^7 h(x) dx = \int_1^7 h(x) dx - \int_1^5 h(x) dx \\ &\Leftrightarrow \int_5^7 h(x) dx = 10 - 4 = 6. \end{aligned}$$

Chọn đáp án (A)

CÂU 28. Cho $\int_{-2}^2 f(x) dx = 1$, $\int_{-2}^4 f(t) dt = -4$. Tính $I = \int_2^4 f(y) dy$.

(A) $I = -3$.

(B) $I = -5$.

(C) $I = 5$.

(D) $I = 3$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \int_{-2}^4 f(t) dt = \int_{-2}^4 f(x) dx = \int_{-2}^2 f(x) dx + \int_2^4 f(x) dx = \int_{-2}^2 f(x) dx + \int_2^4 f(y) dy.$$

$$\text{Suy ra } \int_2^4 f(y) dy = \int_{-2}^4 f(t) dt - \int_{-2}^2 f(x) dx = -4 - 1 = -5.$$

Chọn đáp án (B)

CÂU 29. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $[a; b]$, $f(b) = 5$ và $\int_a^b f'(x) dx = 1$, khi đó $f(a)$ bằng

(A) 4.

(B) 6.

(C) -4.

(D) -6.

Lời giải.

$$\text{Ta có } 1 = \int_a^b f'(x) dx = f(x) \Big|_a^b = f(b) - f(a) = 5 - f(a) \Rightarrow f(a) = 4.$$

Chọn đáp án (A)

CÂU 30. Mệnh đề nào sau đây đúng?

(A) $\int_a^b f(x) dx + \int_b^a f(x) dx = 0.$

(B) $\int_a^b f(x) dx = F(a) - F(b)$ ($F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$).

(C) $\int_{-a}^a f(x) dx = 0.$

(D) $\int_a^b f(x) dx + \int_a^c f(x) dx = \int_b^c f(x) dx.$

Lời giải.

$$\text{Ta có } \int_a^b f(x) dx + \int_b^a f(x) dx = \int_a^a f(x) dx = 0 \text{ là đúng.}$$

Do $\int_a^b f(x) dx + \int_a^c f(x) dx = \int_b^c f(x) dx \Leftrightarrow \int_a^c f(x) dx = \int_b^c f(x) dx - \int_a^b f(x) dx$ là sai.

Vì $\int_a^b f(x) dx = F(a) - F(b)$ là sai vì $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$.

Vì $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$ là sai vì $\int_{-a}^a f(x) dx = \left(x \Big|_{-a}^a\right) = 2a$.

Chọn đáp án (A)

CÂU 31. Cho $\int_{-1}^2 f(x) dx = 2$ và $\int_{-1}^2 g(x) dx = -1$. Tính $I = \int_{-1}^2 [x + 2f(x) + 3g(x)] dx$ bằng

(A) $I = \frac{5}{2}$.

(B) $I = \frac{7}{2}$.

(C) $I = \frac{17}{2}$.

(D) $I = \frac{11}{2}$.

Lời giải.

Ta có

$$I = \int_{-1}^2 [x + 2f(x) + 3g(x)] dx = \int_{-1}^2 x dx + 2 \int_{-1}^2 f(x) dx + 3 \int_{-1}^2 g(x) dx = \left(\frac{x^2}{2} \Big|_{-1}^2\right) + 2 \cdot 2 + 3 \cdot (-1) = \frac{5}{2}.$$

Chọn đáp án (A)

CÂU 32. Cho $\int_{-1}^2 f(x) dx = 2$ và $\int_{-1}^2 g(x) dx = -1$. Tính $I = \int_{-1}^2 [x + 2f(x) + 3g(x)] dx$ bằng

(A) $I = \frac{17}{2}$.

(B) $I = \frac{5}{2}$.

(C) $I = \frac{11}{2}$.

(D) $I = \frac{7}{2}$.

Lời giải.

Ta có $I = \left(\frac{x^2}{2} \Big|_{-1}^2\right) + 2 \int_{-1}^2 f(x) dx + 3 \int_{-1}^2 g(x) dx = \frac{3}{2} + 4 - 3 = \frac{5}{2}$.

Chọn đáp án (B)

CÂU 33. Tính $I = \int_0^1 e^{3x} dx$.

(A) $I = e^3 + \frac{1}{2}$.

(B) $I = e^3 - 1$.

(C) $I = e - 1$.

(D) $\frac{e^3 - 1}{3}$.

Lời giải.

Ta có $I = \int_0^1 e^{3x} dx = \left(\frac{1}{3} e^{3x} \Big|_0^1\right) = \frac{e^3 - 1}{3}$.

CÂU 34. Nếu $\int_1^2 f(x) dx = 5$ thì $\int_2^1 \pi f(x) dx$ bằng

(A) 5π .

(B) $\frac{\pi}{5}$.

(C) -5π .

(D) $\frac{-\pi}{5}$.

Lời giải.

Ta có $\int_2^1 \pi f(x) dx = -\pi \int_1^2 f(x) dx = -5\pi$.

Chọn đáp án (C)

CÂU 35. Cho $\int_1^2 f(x) dx = -3$ và $\int_2^3 f(x) dx = 4$, khi đó tích phân $\int_1^3 f(x) dx$ bằng

(A) 7.

(B) 1.

(C) 12.

(D) -12.

Lời giải.

Ta có $\int_1^3 f(x) dx = \int_1^2 f(x) dx + \int_2^3 f(x) dx = -3 + 4 = 1$.

Chọn đáp án (B)

CÂU 36. Nếu $\int_0^1 f(x) dx = 2$ và $\int_0^1 g(x) dx = 3$ thì $\int_0^1 [f(x) + g(x)] dx$ bằng

- (A) 2. (B) 6. (C) 5. (D) 3.

☞ **Lời giải.**

$$\text{Ta có } \int_0^1 [f(x) + g(x)] dx = \int_0^1 f(x) dx + \int_0^1 g(x) dx = 2 + 3 = 5.$$

Chọn đáp án (C)

CÂU 37. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $[a; b]$, $f(b) = 5$ và $\int_a^b f'(x) dx = 3\sqrt{5}$. Tính $f(a)$.

- (A) $f(a) = \sqrt{5}(\sqrt{5} - 3)$. (B) $f(a) = 3\sqrt{5}$. (C) $f(a) = \sqrt{5}(3 - \sqrt{5})$. (D) $f(a) = \sqrt{3}(\sqrt{5} - 3)$.

☞ **Lời giải.**

$$\text{Ta có } \int_a^b f'(x) dx = \left(f(x) \Big|_a^b \right) = f(b) - f(a) = 3\sqrt{5}.$$

$$\text{Suy ra } f(a) = f(b) - 3\sqrt{5} = 5 - 3\sqrt{5} = \sqrt{5}(\sqrt{5} - 3).$$

Chọn đáp án (A)

CÂU 38. Tính tích phân $I = \int_0^2 (2x + 1) dx$.

- (A) $I = 2$. (B) $I = 4$. (C) $I = 5$. (D) $I = 6$.

☞ **Lời giải.**

$$\text{Ta có } I = \int_0^2 (2x + 1) dx = \left(x^2 + x \Big|_0^2 \right) = 4 + 2 = 6.$$

Chọn đáp án (D)

CÂU 39. Tích phân $\int_1^2 3^{x-1} dx$ bằng

- (A) $\frac{2}{\ln 3}$. (B) $2 \ln 3$. (C) $\frac{3}{2}$. (D) 2.

☞ **Lời giải.**

$$\text{Ta có } \int_1^2 3^{x-1} dx = \int_1^2 3^{x-1} d(x-1) = \left(\frac{3^{x-1}}{\ln 3} \Big|_1^2 \right) = \frac{2}{\ln 3}.$$

Chọn đáp án (A)

D. BẢNG ĐÁP ÁN

1. A	2. B	3. D	4. A	5. C	6. D	7. B	8. D
9. C	10. D	11. C	12. D	13. D	14. C	15. B	16. B
17. D	18. D	19. B	20. A	21. A	22. C	23. B	24. D
25. B	26. A	27. A	28. B	29. A	30. A	31. A	32. B
	34. C	35. B	36. C	37. A	38. D	39. A	

Bài 25. NGUYÊN HÀM

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Định nghĩa

☉ $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên K nếu $F'(x) = f(x), \forall x \in K$.

Họ nguyên hàm của $f(x)$ trên K là $\int f(x) dx = F(x) + C$

2. Tính chất

☉ $\int f'(x) dx = f(x) + C$.

☉ $\int kf(x) dx = k \int f(x) dx, \forall k \neq 0$.

☉ $\int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$.

3. Một số công thức nguyên hàm cơ bản

☉ $\int 0 dx = C$,

☉ $\int 1 dx = x + C$,

☉ $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \rightarrow \int (ax+b)^n dx = \frac{1}{a} \cdot \frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1} + C$,

☉ $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C \rightarrow \int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \ln|ax+b| + C$,

☉ $\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + C \rightarrow \int \frac{1}{(ax+b)^2} dx = -\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{ax+b} + C$,

☉ $\int \sin x dx = -\cos x + C \rightarrow \int \sin(ax+b) dx = -\frac{1}{a} \cos(ax+b) + C$,

☉ $\int \cos x dx = \sin x + C \rightarrow \int \cos(ax+b) dx = \frac{1}{a} \sin(ax+b) + C$,

☉ $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C \rightarrow \int \frac{1}{\cos^2(ax+b)} dx = \frac{1}{a} \tan(ax+b) + C$,

☉ $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C \rightarrow \int \frac{1}{\sin^2(ax+b)} dx = -\frac{1}{a} \cot(ax+b) + C$,

☉ $\int e^x dx = e^x + C \rightarrow \int e^{ax+b} dx = \frac{1}{a} e^{ax+b} + C$,

☉ $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \rightarrow \int a^{mx+n} dx = \frac{1}{m} \cdot \frac{a^{mx+n}}{\ln a} + C$.

B. BÀI TẬP MẪU

VÍ DỤ 25 (Đề minh họa BGD 2022-2023). Cho hàm số $f(x) = \cos x + x$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

Ⓐ $\int f(x) dx = -\sin x + x^2 + C$.

Ⓑ $\int f(x) dx = \sin x + x^2 + C$.

Ⓒ $\int f(x) dx = -\sin x + \frac{x^2}{2} + C$.

Ⓓ $\int f(x) dx = \sin x + \frac{x^2}{2} + C$.

☛ **Lời giải.**

Ta có $\int f(x) dx = \int (\cos x + x) dx = \sin x + \frac{x^2}{2} + C$.

Chọn đáp án Ⓓ



C. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN

CÂU 1. Họ nguyên hàm của hàm $f(x) = \sin x$ là

(A) $\int f(x) dx = \cos x + C.$

(C) $\int f(x) dx = -\cos x + C.$

(B) $\int f(x) dx = -\sin x + C.$

(D) $\int f(x) dx = \sin x + C.$

Lời giải.

Ta có $\int f(x) dx = \int \sin x dx = -\cos x + C.$

Chọn đáp án (C)

CÂU 2. Họ nguyên hàm của hàm $f(x) = 4^x$ là

(A) $\int f(x) dx = 4^x \ln 4 + C.$

(C) $\int f(x) dx = \frac{4^{x+1}}{x+1} + C.$

(B) $\int f(x) dx = 4^{x+1} + C.$

(D) $\int f(x) dx = \frac{4^x}{\ln 4} + C.$

Lời giải.

Ta có $\int f(x) dx = \int 4^x dx = \frac{4^x}{\ln 4} + C.$

Chọn đáp án (D)

CÂU 3. Họ nguyên hàm của hàm $f(x) = \cos 2x$ là

(A) $\int f(x) dx = 2 \sin 2x + C.$

(C) $\int f(x) dx = \frac{1}{2} \cos 2x + C.$

(B) $\int f(x) dx = \frac{1}{2} \sin 2x + C.$

(D) $\int f(x) dx = -\frac{1}{2} \sin 2x + C.$

Lời giải.

Ta có $\int f(x) dx = \int \cos 2x dx = \frac{1}{2} \sin 2x + C.$

Chọn đáp án (B)

CÂU 4. Họ nguyên hàm của hàm $f(x) = 2x + 3$ là

(A) $\int f(x) dx = 2x^2 + 3x + C.$

(C) $\int f(x) dx = x^2 + 3x + C.$

(B) $\int f(x) dx = x^2 + C.$

(D) $\int f(x) dx = 2x^2 + C.$

Lời giải.

Ta có $\int f(x) dx = \int (2x + 3) dx = x^2 + 3x + C.$

Chọn đáp án (C)

CÂU 5. Họ nguyên hàm của hàm $f(x) = e^{2x} - 2x$ là

(A) $\int f(x) dx = \frac{1}{2x+1} e^{2x} - x^2 + C.$

(C) $\int f(x) dx = e^{2x} - x^2 + C.$

(B) $\int f(x) dx = \frac{1}{2} e^{2x} - x^2 + C.$

(D) $\int f(x) dx = 2e^{2x} - 2 + C.$

Lời giải.

Ta có $\int f(x) dx = \int (e^{2x} - 2x) dx = \frac{1}{2} e^{2x} - x^2 + C.$

Chọn đáp án (B)

CÂU 6. Họ nguyên hàm của hàm $f(x) = \frac{1}{2x+1}$ là

(A) $\int f(x) dx = -\frac{1}{2} \ln |2x+1| + C.$

(C) $\int f(x) dx = \frac{1}{2} \ln |2x+1| + C.$

(B) $\int f(x) dx = -\ln |2x+1| + C.$

(D) $\int f(x) dx = \ln |2x+1| + C.$

Lời giải.

Ta có $\int f(x) dx = \int \frac{1}{2x+1} dx = \frac{1}{2} \ln |2x+1| + C.$

Chọn đáp án (C)

CÂU 7. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sai ?

(A) $\int 0 dx = C.$

(B) $\int e^x dx = e^x + C.$

(C) $\int dx = x + C.$

(D) $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C.$

Lời giải.

Ta có $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ chỉ đúng khi $n \neq -1$.

Chọn đáp án (D)

CÂU 8. Họ nguyên hàm của hàm $f(x) = \sin(2x + 1)$ là

(A) $\int f(x) dx = -\frac{1}{2} \cos(2x + 1) + C.$

(B) $\int f(x) dx = 2 \cos(2x + 1) + C.$

(C) $\int f(x) dx = -2 \cos(2x + 1) + C.$

(D) $\int f(x) dx = \frac{1}{2} \cos(2x + 1) + C.$

Lời giải.

Ta có $\int f(x) dx = \int \sin(2x + 1) dx = -\frac{1}{2} \cos(2x + 1) + C.$

Chọn đáp án (A)

CÂU 9. Họ nguyên hàm của hàm $f(x) = -4 \sin 2x + 2 \cos x - e^x$ là

(A) $\int f(x) dx = 4 \cos 2x - 2 \sin x - e^x + C.$

(B) $\int f(x) dx = 2 \cos 2x + 2 \sin x - e^x + C.$

(C) $\int f(x) dx = -8 \cos 2x + 2 \sin x - e^x + C.$

(D) $\int f(x) dx = 8 \cos 2x + 2 \sin x - e^x + C.$

Lời giải.

Ta có $\int f(x) dx = \int (-4 \sin 2x + 2 \cos x - e^x) dx = 2 \cos 2x + 2 \sin x - e^x + C.$

Chọn đáp án (B)

CÂU 10. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

(A) $\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C.$

(B) $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = \cot x + C.$

(C) $\int \cos x dx = -\sin x + C.$

(D) $\int (2^x + e^x) dx = \frac{2^x}{\ln 2} + e^x + C.$

Lời giải.

Ta có

☒ $\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C$

☒ $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C$

☒ $\int \cos x dx = \sin x + C$

☒ $\int (2^x + e^x) dx = \frac{2^x}{\ln 2} + e^x + C$

Chọn đáp án (D)

CÂU 11. Họ nguyên hàm của hàm $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5$ là

(A) $\int f(x) dx = \frac{x^4}{4} - x^3 + 5x + C.$

(B) $\int f(x) dx = x^4 - x^3 + 5x + C.$

(C) $\int f(x) dx = 3x^2 - 6x + C.$

(D) $\int f(x) dx = x^4 - \frac{1}{3}x^3 + 5x + C.$

Lời giải.

Ta có $\int f(x) dx = \int (x^3 - 3x^2 + 5) dx = \frac{x^4}{4} - x^3 + 5x + C.$

Chọn đáp án (A)

CÂU 12. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sai?

(A) $\int x^e dx = \frac{x^{e+1}}{e+1} + C.$

(B) $\int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + C.$

(C) $\int e^x dx = \frac{e^{x+1}}{x+1} + C.$

(D) $\int x^7 dx = \frac{1}{8}x^8 + C.$

Lời giải.

Ta có $\int e^x dx = e^x + C.$

Chọn đáp án (C)

CÂU 13. $F(x) = \sin 2x$ là nguyên hàm của hàm số nào dưới đây?

(A) $f(x) = \cos 2x$.

(B) $f(x) = 2 \cos 2x$.

(C) $f(x) = -2 \cos 2x$.

(D) $f(x) = -\frac{1}{2} \cos 2x$.

Lời giải.

Ta có $F'(x) = (\sin 2x)' = 2 \cos 2x$, nên $F(x) = \sin 2x$ là nguyên hàm của $f(x) = 2 \cos 2x$.

Chọn đáp án (B)

CÂU 14. Họ nguyên hàm của hàm $f(x) = 2x + \frac{1}{x}$ là

(A) $\int f(x) dx = 4x^2 - \frac{1}{x^2} + C$.

(B) $\int f(x) dx = x^2 - \frac{1}{x^2} + C$.

(C) $\int f(x) dx = 4x^2 + \ln |x| + C$.

(D) $\int f(x) dx = x^2 + \ln |x| + C$.

Lời giải.

$$\int f(x) dx = \int \left(2x + \frac{1}{x} \right) dx = x^2 + \ln |x| + C.$$

Chọn đáp án (D)

CÂU 15. Họ nguyên hàm của hàm $f(x) = x^3 - \frac{2}{x} + \sqrt{x}$ là

(A) $\int f(x) dx = \frac{1}{4}x^4 - 2 \ln |x| - \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + C$.

(B) $\int f(x) dx = \frac{1}{4}x^4 + 2 \ln |x| + \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + C$.

(C) $\int f(x) dx = \frac{1}{4}x^4 - 2 \ln |x| + \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + C$.

(D) $\int f(x) dx = \frac{1}{4}x^4 + 2 \ln |x| - \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + C$.

Lời giải.

$$\int f(x) dx = \int \left(x^3 - \frac{2}{x} + \sqrt{x} \right) dx = \frac{1}{4}x^4 - 2 \ln |x| + \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + C.$$

Chọn đáp án (C)

CÂU 16. Họ nguyên hàm của hàm $f(x) = \sin 3x + \cos 4x$ là

(A) $\int f(x) dx = -\frac{1}{3} \cos x + \frac{1}{4} \sin x + C$.

(B) $\int f(x) dx = -\frac{1}{3} \cos 3x + \frac{1}{4} \sin 4x + C$.

(C) $\int f(x) dx = 3 \cos 3x - 4 \sin 4x + C$.

(D) $\int f(x) dx = \frac{1}{3} \cos 3x - \frac{1}{4} \sin 4x + C$.

Lời giải.

$$\int f(x) dx = \int (\sin 3x + \cos 4x) dx = -\frac{1}{3} \cos 3x + \frac{1}{4} \sin 4x + C.$$

Chọn đáp án (B)

CÂU 17. Họ nguyên hàm của hàm $f(x) = \cos \left(2x + \frac{\pi}{6} \right)$ là

(A) $\int f(x) dx = \frac{1}{6} \sin \left(2x + \frac{\pi}{6} \right) + C$.

(B) $\int f(x) dx = \frac{1}{2} \sin \left(2x + \frac{\pi}{6} \right) + C$.

(C) $\int f(x) dx = \sin \left(2x + \frac{\pi}{6} \right) + C$.

(D) $\int f(x) dx = -\frac{1}{2} \sin \left(2x + \frac{\pi}{6} \right) + C$.

Lời giải.

$$\int f(x) dx = \int \cos \left(2x + \frac{\pi}{6} \right) dx = \frac{1}{2} \sin \left(2x + \frac{\pi}{6} \right) + C.$$

Chọn đáp án (B)

CÂU 18. Họ nguyên hàm của hàm $f(x) = 2x^2 + x + 1$ là

(A) $\int f(x) dx = \frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x + C$.

(B) $\int f(x) dx = 4x + 1 + C$.

(C) $\int f(x) dx = \frac{2x^3}{3} + x^2 + x + C$.

(D) $\int f(x) dx = \frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x$.

Lời giải.

$$\int f(x) dx = \int (2x^2 + x + 1) dx = \frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x + C.$$

Chọn đáp án (A)

CÂU 19. Họ nguyên hàm của hàm $f(x) = 7^x$ là

(A) $\int f(x) dx = \frac{7^x}{\ln 7} + C$. (B) $\int f(x) dx = \frac{7^{x+1}}{x+1} + C$. (C) $\int f(x) dx = 7^x \ln 7 + C$. (D) $\int f(x) dx = 7^{x+1} + C$.

Lời giải.

$$\int f(x) dx = \int 7^x dx = \frac{7^x}{\ln 7} + C.$$

Chọn đáp án (A)

CÂU 20. Họ nguyên hàm của hàm $f(x) = \frac{1}{1+x}$ là

Ⓐ $\int f(x) dx = -\frac{1}{(1+x)^2} + C.$

Ⓑ $\int f(x) dx = \ln(1+x) + C.$

Ⓒ $\int f(x) dx = \log|1+x| + C.$

Ⓓ $\int f(x) dx = \ln|1+x| + C.$

☞ **Lời giải.**

Ta có $\int f(x) dx = \int \frac{1}{1+x} dx = \ln|1+x| + C.$

Chọn đáp án Ⓓ



D. BẢNG ĐÁP ÁN

1. C	2. D	3. B	4. C	5. B	6. C	7. D	8. A
9. B	10. D	11. A	12. C	13. B	14. D	15. C	16. B
		17. B	18. A	19. A	20. D		

Bài 26. XÉT TÍNH ĐƠN ĐIỆU DỰA VÀO BẢNG BIẾN THIÊN CỦA HÀM SỐ

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Định lý.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên K .

a) Nếu $f'(x) > 0$ với mọi x thuộc K thì hàm số $f(x)$ đồng biến trên K .

b) Nếu $f'(x) < 0$ với mọi x thuộc K thì hàm số $f(x)$ nghịch biến trên K .

Chú ý:

☉ $f(x)$ đồng biến trên K : đồ thị hàm số là đường đi lên từ trái sang phải.

☉ $f(x)$ nghịch biến trên K : đồ thị hàm số là đường đi xuống từ trái sang phải.

B. BÀI TẬP MẪU

VÍ DỤ 26 (Đề tham khảo BGD 2022-2023). Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$-\infty$	2	0	$+\infty$	

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

Ⓐ $(0; 2).$

Ⓑ $(3; +\infty).$

Ⓒ $(-\infty; 1).$

Ⓓ $(1; 3).$

☞ **Lời giải.**

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số nghịch biến trên $(1; 3).$

Chọn đáp án Ⓓ



C. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN

CÂU 1. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$								$+\infty$

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- (A) $(0; 2)$. (B) $(0; +\infty)$. (C) $(-2; 0)$. (D) $(2; +\infty)$.

Lời giải.

Ta có $f'(x) < 0 \Leftrightarrow \forall x \in (-\infty; -2) \cup (0; 2)$.

Suy ra $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -2)$ và $(0; 2)$.

Chọn đáp án (A)

CÂU 2. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên

x	$-\infty$	1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$+\infty$	-2		2		$-\infty$

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng

- (A) $(-\infty; 1)$. (B) $(3; +\infty)$. (C) $(1; 3)$. (D) $(-2; -2)$.

Lời giải.

Quan sát bảng biến thiên đã cho nhận thấy hàm số đồng biến trên khoảng $(1; 3)$.

Chọn đáp án (C)

CÂU 3. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$								$+\infty$

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- (A) $(-\infty; -1)$. (B) $(0; +\infty)$. (C) $(0; 1)$. (D) $(-1; 0)$.

Lời giải.

Từ bảng biến thiên ta có hàm số đồng biến trên khoảng $(-1; 0)$.

Chọn đáp án (D)

CÂU 4. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như hình bên dưới. Mệnh đề nào sau đây đúng?

x	$-\infty$	-1	0	2	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$

- (A) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1; 0)$. (B) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1; 3)$.
(C) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1; 2)$. (D) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-2; -1)$.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên ta có

Hàm số đồng biến trên $(-\infty; -1)$ và $(2; +\infty)$.

Hàm số nghịch biến trên $(-1; 0)$ và $(0; 2)$.

Chọn đáp án (D)

CÂU 5. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau.

x	$-\infty$	-3	2	$+\infty$		
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$+\infty$		2	3		$-\infty$

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

(A) $(2; 3)$.

(B) $(-3; 2)$.

(C) $(2; +\infty)$.

(D) $(-\infty; -3)$.

Lời giải.

Từ bảng biến thiên suy ra hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-3; 2)$.

Chọn đáp án (B)

CÂU 6. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-2	1	2	$+\infty$					
$f'(x)$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$		
$f(x)$	$+\infty$			2	$+\infty$		3		$-\infty$	$-\infty$

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

(A) $(-2; 1)$.

(B) $(-2; 2)$.

(C) $(-\infty; -2)$.

(D) $(1; +\infty)$.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên ta có hàm số đồng biến trên $(-2; 1)$ và $(1; 2)$.

Chọn đáp án (A)

CÂU 7. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$		
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$-\infty$	3	-1	3	$-\infty$		

Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

(A) $(-2; 0)$.

(B) $(-\infty; -2)$.

(C) $(0; 2)$.

(D) $(0; +\infty)$.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-2; 0)$ và $(2; +\infty)$.

Chọn đáp án (A)

CÂU 8. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$-\infty$	5	3	$+\infty$	

Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?

(A) $(0; +\infty)$.

(B) $(0; 2)$.

(C) $(-\infty; 5)$.

(D) $(2; +\infty)$.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên suy ra hàm số đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$.

Chọn đáp án (D)

CÂU 9. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	0	-	
$f(x)$	$+\infty$				4		$-\infty$

\swarrow \nearrow \searrow
 2 2 $-\infty$

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào sau đây?

(A) $(2; +\infty)$.

(B) $(-\infty; -2)$.

(C) $(2; 3)$.

(D) $(-2; 3)$.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên ta có hàm số nghịch biến trên $(-\infty; -2)$.

Chọn đáp án (B)

CÂU 10. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên dưới. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	$-\infty$		0		-1		$+\infty$

\nearrow \searrow \nearrow
 0 -1 $+\infty$

(A) $(0; +\infty)$.

(B) $(0; 1)$.

(C) $(-3; -2)$.

(D) $(-1; +\infty)$.

Lời giải.

Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên các khoảng $(-\infty; 0)$ và $(1; +\infty)$.

Ta có $(-3; -2) \subset (-\infty; 0)$ nên hàm số đồng biến trên khoảng $(-3; -2)$.

Chọn đáp án (C)

CÂU 11. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-3		-2		-1		$+\infty$
y'		+	0	-		-	0	+	
y	$-\infty$		0		$+\infty$		0		$+\infty$

\nearrow \searrow \nearrow
 0 $+\infty$ 0 $+\infty$

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

(A) $(-\infty; -3)$.

(B) $(-3; -2)$.

(C) $(-3; -1)$.

(D) $(-1; +\infty)$.

Lời giải.

Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số nghịch biến trên khoảng $(-3; -2)$.

Chọn đáp án (B)

CÂU 12. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	0	-	0	+	
$f(x)$	$+\infty$				3		2		$+\infty$

\searrow \nearrow \searrow \nearrow
 2 3 2 $+\infty$

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

(A) $(-\infty; 1)$.

(B) $(0; 1)$.

(C) $(-2; 3)$.

(D) $(1; +\infty)$.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ ta có hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(1; +\infty)$.

Chọn đáp án (D)

CÂU 13. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$					2	
			-2				$-\infty$

Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

- (A)** Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-1; 1)$. **(B)** Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(1; +\infty)$.
(C) Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$. **(D)** Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-2; 2)$.

Lời giải.

Từ BBT suy ra hàm số $y = f(x)$ vừa nghịch biến vừa đồng biến trên khoảng $(-2; 2)$.

x	$-\infty$	-2	-1		1	2	$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$					2	
			-2				$-\infty$

Chọn đáp án **(D)**

CÂU 14. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$+$
$f(x)$	1	$+\infty$	3

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- (A)** $(2; +\infty)$. **(B)** $(1; +\infty)$. **(C)** $(-\infty; 3)$. **(D)** $(-\infty; +\infty)$.

Lời giải.

Quan sát bảng biến thiên, ta thấy hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty; 2)$ và $(2; +\infty)$, vậy hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.

Chọn đáp án **(A)**

CÂU 15. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình bên dưới

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$	$+$	$-$
y	$+\infty$		3	1	$-\infty$

Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- (A)** $(-\infty; 1)$. **(B)** $(-2; 2)$. **(C)** $(0; 2)$. **(D)** $(3; +\infty)$.

Lời giải.

Quan sát bảng biến thiên, ta thấy hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-2; 0)$ và $(0; 2)$, vậy hàm số đồng biến trên khoảng $(-2; 2)$.

Chọn đáp án **(C)**

CÂU 16. Hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	1	-3	$+\infty$	

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng

(A) $(2; 3)$.

(B) $(-2; 3)$.

(C) $(-3; +\infty)$.

(D) $(-\infty; 1)$.

Lời giải.

Theo BBT hàm số đồng biến trên khoảng $(2; 3)$.

Chọn đáp án (A)

CÂU 17. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$		
y'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$+\infty$	-2	1	-2	$+\infty$		

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

(A) $(-\infty; 0)$.

(B) $(0; 2)$.

(C) $(2; +\infty)$.

(D) $(-2; 2)$.

Lời giải.

Theo BBT hàm số đồng biến trên khoảng $(0; 2)$.

Chọn đáp án (B)

CÂU 18. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$		
y'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$+\infty$	-2	0	-2	$+\infty$		

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

(A) $(0; 1)$.

(B) $(-1; 0)$.

(C) $(-2; 0)$.

(D) $(0; +\infty)$.

Lời giải.

Theo bảng biến thiên hàm số $f(x)$ đồng biến trên các khoảng $(-1; 0)$ và $(1; +\infty)$.

Do đó hàm số đồng biến trên $(-1; 0)$.

Chọn đáp án (B)

CÂU 19. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên khoảng $(-\infty; +\infty)$, có bảng biến thiên như hình sau

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	2	-1	$+\infty$	

Mệnh đề nào sau đây đúng?

(A) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1; +\infty)$.

(B) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1; +\infty)$.

(C) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -1)$.

(D) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 1)$.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -1)$.

Chọn đáp án (C)

CÂU 20. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên dưới

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
y'		+	+
y	2	$+\infty$	2

Mệnh đề nào sau đây đúng?

(A) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -1)$.

(B) Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

(C) Hàm số đồng biến trên \mathbb{R} .

(D) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 2)$.

Lời giải.

Nhìn vào bảng biến thiên ta thấy $y' > 0, \forall x \neq -1$.

Từ đó suy ra hàm số luôn đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(-1; +\infty)$.

Chọn đáp án (A)

D. BẢNG ĐÁP ÁN

1. A	2. C	3. D	4. D	5. B	6. A	7. A	8. D	9. B	10. C
11. B	12. D	13. D	14. A	15. C	16. A	17. B	18. B	19. C	20. A

Bài 27. TÌM CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ DỰA VÀO ĐỒ THỊ

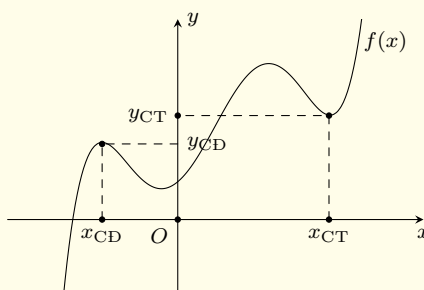
A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Định nghĩa

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên khoảng $(a; b)$ (có thể a là $-\infty$, b là $+\infty$) và điểm $x_0 \in (a; b)$.

☉ Nếu tồn tại số $h > 0$ sao cho $f(x) < f(x_0)$ với mọi $x \in (x_0 - h; x_0 + h)$ và $x \neq x_0$ thì ta nói hàm số $f(x)$ đạt **cực đại** tại x_0 .

☉ Nếu tồn tại số $h > 0$ sao cho $f(x) > f(x_0)$ với mọi $x \in (x_0 - h; x_0 + h)$ và $x \neq x_0$ thì ta nói hàm số $f(x)$ đạt **cực tiểu** tại x_0 .



2. Chú ý

a) Nếu hàm số $f(x)$ đạt cực đại (cực tiểu) tại x_0 thì x_0 được gọi là điểm cực đại (điểm cực tiểu) của hàm số; $f(x_0)$ được gọi là giá trị cực đại (giá trị cực tiểu) của hàm số, kí hiệu là y_{CD} (y_{CT}), còn điểm $M(x_0; f(x_0))$ được gọi là điểm cực đại (điểm cực tiểu) của đồ thị.

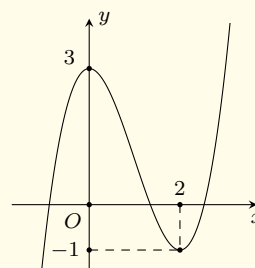
b) Các điểm cực đại và cực tiểu được gọi chung là điểm cực trị.

B. BÀI TẬP MẪU

VÍ DỤ 27 (Đề tham khảo BGD 2022-2023).

Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Giá trị cực đại của hàm số đã cho là

- (A) -1. (B) 3. (C) 2. (D) 0.



Lời giải.

Từ đồ thị ta thấy hàm số $f(x)$ có giá trị cực đại là $y_{CD} = 3$.

Chọn đáp án (B)

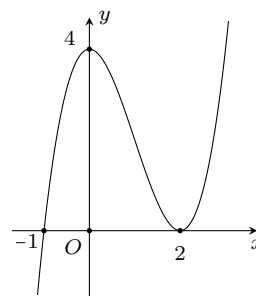


C. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN

CÂU 1.

Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

- (A) Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$. (B) Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 2$.
(C) Hàm số đạt cực đại tại $x = 4$. (D) Hàm số có hai điểm cực trị.



Lời giải.

Từ đồ thị ta thấy hàm số $f(x)$ đạt cực đại tại $x = 0$ nên mệnh đề “Hàm số đạt cực đại tại $x = 4$ ” là mệnh đề sai.

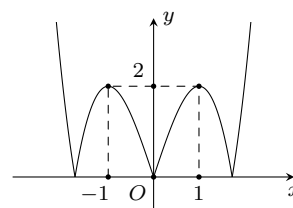
Chọn đáp án (C)



CÂU 2.

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} và có đồ thị như hình bên. Hỏi hàm số có bao nhiêu điểm cực trị?

- (A) 2. (B) 3. (C) 4. (D) 5.



Lời giải.

Dựa vào đồ thị hàm số ta thấy hàm số có 5 điểm cực trị.

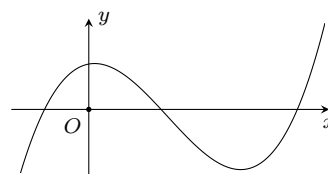
Chọn đáp án (D)



CÂU 3.

Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hàm số đã cho có bao nhiêu điểm cực trị?

- (A) 2. (B) 1. (C) 3. (D) 4.



Lời giải.

Từ đồ thị ta thấy hàm số đã cho có 2 điểm cực trị.

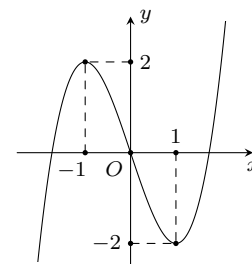
Chọn đáp án (A)



CÂU 4.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Tìm điểm cực đại của hàm số.

- (A) $y = -2$. (B) $x = -1$. (C) $x = 1$. (D) $y = 2$.



Lời giải.

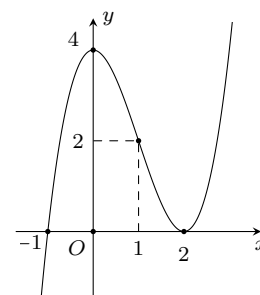
Từ đồ thị ta thấy hàm số đạt cực đại tại điểm $x = -1$.

Chọn đáp án (B)

CÂU 5.

Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên. Tìm mệnh đề đúng.

- (A) Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$.
 (B) Hàm số $y = f(x)$ có hai cực trị.
 (C) Hàm số $y = f(x)$ đạt cực tiểu tại $x = 2$.
 (D) Hàm số $y = f(x)$ chỉ có một cực trị.



Lời giải.

Từ đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ ta có bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$+$

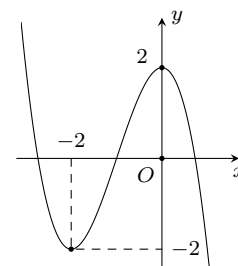
Do đó hàm số $y = f(x)$ chỉ có một cực trị.

Chọn đáp án (D)

CÂU 6.

Cho hàm số $f(x)$ xác định, liên tục trên tập số thực \mathbb{R} và có đồ thị như hình bên. Hàm số $y = f(x)$ đạt cực tiểu tại điểm nào dưới đây?

- (A) $x = 0$. (B) $x = -2$ và $x = 0$. (C) $x = -2$. (D) $x = 1$.



Lời giải.

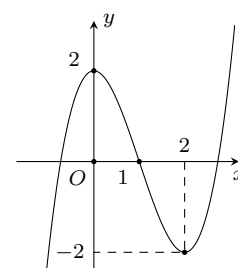
Dựa vào đồ thị hàm số $y = f(x)$, ta thấy hàm số đạt cực tiểu tại $x = -2$.

Chọn đáp án (C)

CÂU 7.

Tìm điểm cực tiểu của hàm số $y = f(x)$, biết hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.

- (A) $x = 0$. (B) $x = -2$. (C) $x = 1$. (D) $x = 2$.



Lời giải.

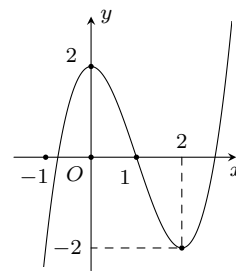
Dựa vào đồ thị, ta thấy hàm số đạt cực tiểu tại $x = 2$.

Chọn đáp án (D)

CÂU 8.

Cho hàm đa thức bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Biết hàm số $f(x)$ có các điểm cực trị là x_1, x_2 . Tích x_1x_2 bằng

- (A) 4. (B) 0. (C) -4. (D) -2.



Lời giải.

Dựa vào đồ thị, ta thấy hàm số $f(x)$ có điểm cực đại $x = 0$ và điểm cực tiểu $x = 2$.

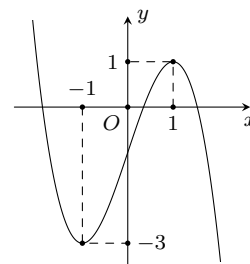
Vậy tích các điểm cực đại và cực tiểu của hàm số $f(x)$ là $0 \times 2 = 0$.

Chọn đáp án (B)

CÂU 9.

Cho đồ thị hàm số như hình vẽ bên. Giá trị cực đại của hàm số là

- (A) 1. (B) 4. (C) -1. (D) -3.



Lời giải.

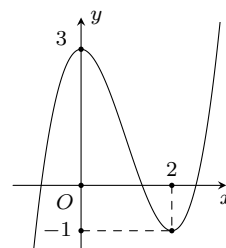
Dựa vào đồ thị ta thấy được điểm cực đại của đồ thị có tọa độ là $(1; 1)$ nên giá trị cực đại của hàm số là $y_{CD} = 1$.

Chọn đáp án (A)

CÂU 10.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- (A) Giá trị cực đại của hàm số là 0. (B) Giá trị cực tiểu của hàm số bằng -1.
(C) Điểm cực tiểu của hàm số là -1. (D) Điểm cực đại của hàm số là 3.



Lời giải.

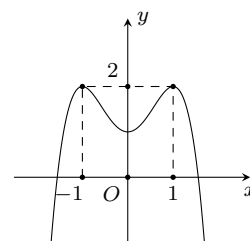
Từ đồ thị ta thấy giá trị cực tiểu của hàm số bằng -1.

Chọn đáp án (B)

CÂU 11.

Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$, ($a \neq 0$) có đồ thị như hình vẽ bên. Số điểm cực đại của hàm số là

- (A) 3. (B) 4. (C) 1. (D) 2.



Lời giải.

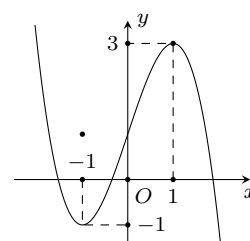
Từ đồ thị ta thấy hàm số đã cho có 2 điểm cực đại.

Chọn đáp án (D)

CÂU 12.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên. Giá trị cực đại của hàm số bằng

- (A) 1. (B) 3. (C) 2. (D) -1.



Lời giải.

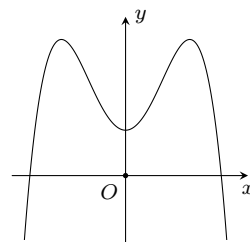
Từ đồ thị ta có giá trị cực đại của hàm số là $y_{CD} = 3$.

Chọn đáp án (B)

CÂU 13.

Cho hàm số có đồ thị như hình vẽ bên. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

- (A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 0.



Lời giải.

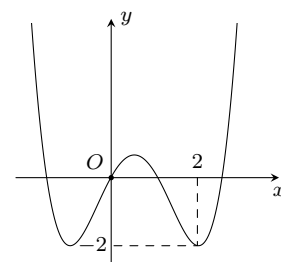
Từ đồ thị ta thấy hàm số $f(x)$ có 3 điểm cực trị.

Chọn đáp án (C)

CÂU 14.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ sau. Khẳng định nào sau đây đúng?

- (A) Hàm số có hai điểm cực trị âm và một điểm cực trị dương.
 (B) Hàm số có hai điểm cực trị dương và một điểm cực trị âm.
 (C) Hàm số đạt cực tiểu tại $x = -2$.
 (D) Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$.



Lời giải.

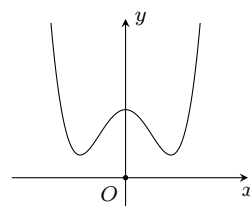
Từ đồ thị ta thấy hàm số $y = f(x)$ có hai điểm cực trị dương và một điểm cực trị âm.

Chọn đáp án (B)

CÂU 15.

Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị hàm số như hình bên. Số điểm cực tiểu của hàm số đã cho là

- (A) 2. (B) 1. (C) 3. (D) 0.



Lời giải.

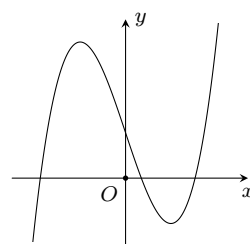
Từ đồ thị ta thấy hàm số $y = f(x)$ có 2 điểm cực tiểu.

Chọn đáp án (A)

CÂU 16.

Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$), có đồ thị như hình vẽ bên. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

- (A) 2. (B) 0. (C) 3. (D) 1.



Lời giải.

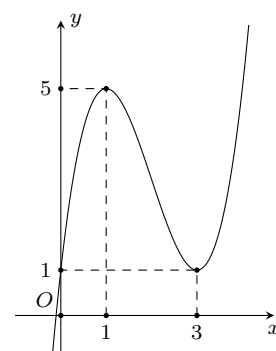
Từ đồ thị ta thấy hàm số đã cho có 2 điểm cực trị.

Chọn đáp án (A)

CÂU 17.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Giá trị cực tiểu của hàm số là

- (A) 2. (B) 0. (C) 5. (D) 1.



Lời giải.

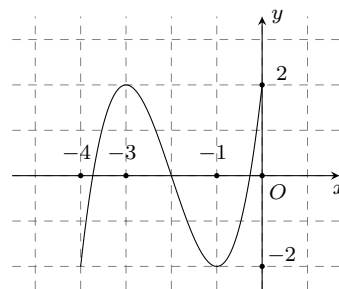
Từ đồ thị ta thấy giá trị cực tiểu của hàm số là $y_{CT} = 1$.

Chọn đáp án (D)

CÂU 18.

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên đoạn $[-4; 0]$ và có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên. Hàm số $f(x)$ đạt cực tiểu tại điểm nào dưới đây?

- (A) $x = -2$. (B) $x = -1$. (C) $x = -3$. (D) $x = 2$.

**Lời giải.**

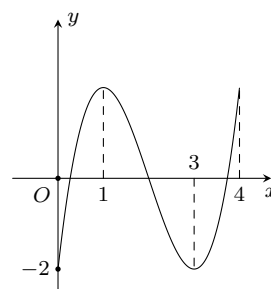
Từ đồ thị ta thấy hàm số đã cho đạt cực tiểu tại $x = -1$.

Chọn đáp án (B)

CÂU 19.

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[0; 4]$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- (A) Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 3$. (B) Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$.
(C) Hàm số đạt cực đại tại $x = 4$. (D) Hàm số đạt cực đại tại $x = 2$.

**Lời giải.**

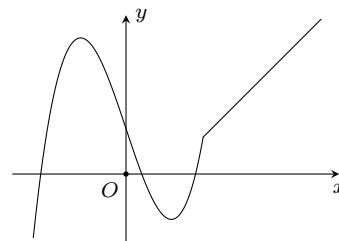
Mệnh đề “Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 3$ ” là mệnh đề đúng.

Chọn đáp án (A)

CÂU 20.

Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Số điểm cực đại của hàm số đã cho là

- (A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

**Lời giải.**

Từ đồ thị ta thấy hàm số đã cho có 1 điểm cực đại.

Chọn đáp án (B)

D. BẢNG ĐÁP ÁN

1. C	2. D	3. A	4. B	5. D	6. C	7. D	8. B
9. A	10. B	11. D	12. B	13. C	14. B	15. A	16. A
		17. D	18. B	19. A	20. B		

Bài 28. LÔGARIT**A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ**

- ☑ Cho hai số dương a, b với $a \neq 1$. Số α thỏa mãn đẳng thức $a^\alpha = b$ được gọi là lôgarit cơ số a của b và kí hiệu là $\log_a b$. Ta viết $\alpha = \log_a b \Leftrightarrow a^\alpha = b$

- a) ☑ $\log_a a = 1, \log_a 1 = 0$
☑ $a^{\log_a b} = b, \log_a(a^\alpha) = \alpha$

- b) Lôgarit của một tích: Cho 3 số dương a, b_1, b_2 với $a \neq 1$, ta có:

• $\log_a(b_1 b_2) = \log_a b_1 + \log_a b_2$

c) Lôgarit của một thương: Cho 3 số dương a, b_1, b_2 với $a \neq 1$, ta có:

☑ $\log_a \frac{b_1}{b_2} = \log_a b_1 - \log_a b_2$

☑ Đặc biệt: với $a, b > 0, a \neq 1$ $\log_a \frac{1}{a} = -\log_a b$

d) Lôgarit của lũy thừa: Cho $a, b > 0, a \neq 1$, với mọi α ta có:

☑ $\log_a b^\alpha = \alpha \log_a b$

e) Công thức đổi cơ số: Cho 3 số dương a, b, c với $a \neq 1, c \neq 1$, ta có:

☑ $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$

f) Lôgarit thập phân và Lôgarit tự nhiên

☑ Lôgarit thập phân là lôgarit cơ số 10
Viết: $\log_{10} b = \log b = \lg b$

☑ Lôgarit tự nhiên và lôgarit cơ số e
Viết: $\log_e b = \ln b$ với $e \approx 2,71828 \dots$

B. BÀI TẬP MẪU

VÍ DỤ 28 (Đề tham khảo BGD 2022-2023). Với a là số thực dương tùy ý, $\ln(3a) - \ln(2a)$ bằng

(A) $\ln a$.

(B) $\ln \frac{2}{3}$.

(C) $\ln(6a^2)$.

(D) $\ln \frac{3}{2}$.

☞ **Lời giải.**

Ta có $\ln(3a) - \ln(2a) = \ln\left(\frac{3a}{2a}\right) = \ln \frac{3}{2}$.

□

CÂU 1. Với a là số nguyên dương tùy ý, $\log_{\frac{1}{2}} a^3$ bằng

(A) $-3 \log_2 a$.

(B) $3 - \log_2 a$.

(C) $\frac{3}{2} \log_2 a$.

(D) $3 \log_2 a$.

☞ **Lời giải.**

Ta có $\log_{\frac{1}{2}} a^3 = 3 \log_{2^{-1}} a = -3 \log_2 a$.

Chọn đáp án (B)

□

CÂU 2. Với a là số thực dương tùy ý, $\log_3 \sqrt{a}$ bằng

(A) $\frac{1}{2} \log_3 a$.

(B) $\frac{1}{2} + \log_3 a$.

(C) $2 \log_3 a$.

(D) $-\frac{1}{2} \log_3 a$.

☞ **Lời giải.**

Ta có $\log_3 \sqrt{a} = \log_3 a^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \log_3 a$.

Chọn đáp án (A)

□

CÂU 3. Với a là số thực dương tùy ý, $\log_3 \left(\frac{3}{a}\right)$ bằng

(A) $1 - \log_3 a$.

(B) $3 - \log_3 a$.

(C) $\frac{1}{\log_3 a}$.

(D) $1 + \log_3 a$.

☞ **Lời giải.**

Ta có $\log_3 \left(\frac{3}{a}\right) = \log_3 3 - \log_3 a = 1 - \log_3 a$.

Chọn đáp án (A)

□

CÂU 4. Với a là số thực dương khác 1, giá trị $\log_a (a^3 \sqrt[4]{a})$ bằng

(A) $\frac{3}{4}$.

(B) 7.

(C) 12.

(D) $\frac{13}{4}$.

☞ **Lời giải.**

Ta có $\log_a (a^3 \sqrt[4]{a}) = \log_a (a^3 \cdot a^{\frac{1}{4}}) = \log_a a^{3+\frac{1}{4}} = \log_a a^{\frac{13}{4}} = \frac{13}{4} \log_a a = \frac{13}{4}$.

Chọn đáp án (D)

CÂU 5. Với mọi a, b, x là các số thực dương thỏa mãn $\log_2 x = 5 \log_2 a + 3 \log_2 b$. Mệnh đề nào dưới đây đúng

- (A) $x = 5a + 3b$. (B) $x = a^5 + b^3$. (C) $x = a^5 b^3$. (D) $x = 3a + 5b$.

☞ **Lời giải.**

Ta có $\log_2 x = 5 \log_2 a + 3 \log_2 b = \log_2 a^5 + \log_2 b^3 = \log_2 (a^5 b^3) \Rightarrow x = a^5 b^3$.

Chọn đáp án (C)

CÂU 6. Cho $0 < a \neq 1$. Giá trị của biểu thức $A = \log_a (a^3 \sqrt{a^7})$ là

- (A) 3. (B) $\frac{7}{2}$. (C) $\frac{13}{2}$. (D) $\frac{5}{3}$.

☞ **Lời giải.**

Ta có $P = \log_a (a^3 \sqrt{a^7}) = \log_a (a^3 a^{\frac{7}{2}}) = \log_a a^{\frac{13}{2}} = \frac{13}{2}$.

Chọn đáp án (C)

CÂU 7. Cho hai số thực dương $x, y > 1$ thỏa mãn $y = x\sqrt{x}$. Giá trị của $\log_x (x^2 y)$ bằng

- (A) $\frac{5}{2}$. (B) $\frac{8}{3}$. (C) 3. (D) $\frac{7}{2}$.

☞ **Lời giải.**

Ta có $\log_x (x^2 y) = \log_x x^2 + \log_x y = 2 \log_x x + \log_x x\sqrt{x} = 2 + \log_x x^{\frac{3}{2}} = 2 + \frac{3}{2} = \frac{7}{2}$.

Chọn đáp án (D)

CÂU 8. Với a là số thực dương tùy ý, $\log_2 \left(\frac{a^2}{4}\right)$ bằng

- (A) $2(1 - \log_2 a)$. (B) $2 \log_2 a - 1$. (C) $2(\log_2 a - 1)$. (D) $2(\log_2 a + 1)$.

☞ **Lời giải.**

Ta có $\log_2 \left(\frac{a^2}{4}\right) = 2 \log_2 a - 2 = 2(\log_2 a - 1)$.

Chọn đáp án (C)

CÂU 9. Cho a là số thực dương $a \neq 1$ và $\log_{\sqrt[3]{a}} a^3$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- (A) $P = 1$. (B) $P = 9$. (C) $P = \frac{1}{3}$. (D) $P = 3$.

☞ **Lời giải.**

Ta có $\log_{\sqrt[3]{a}} a^3 = \log_{a^{\frac{1}{3}}} a^3 = 9$.

Chọn đáp án (B)

CÂU 10. Với a, b là hai số thực dương tùy ý, $\log_3 (a^3 \sqrt{b})$ bằng

- (A) $3 \log_3 a + \frac{1}{2} \log_3 b$. (B) $3 \log_3 a + 2 \log_3 b$. (C) $\frac{3}{2} \log_3 (ab)$. (D) $\frac{3}{2} \log_3 (a + b)$.

☞ **Lời giải.**

Ta có $\log_3 (a^3 \sqrt{b}) = \log_3 a^3 + \log_3 \sqrt{b} = 3 \log_3 a + \frac{1}{2} \log_3 b$.

Chọn đáp án (A)

CÂU 11. Xét tất cả các số thực dương a và b thỏa mãn $\log_3 a = \log_{27} (a^2 \sqrt{b})$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- (A) $a = b$. (B) $a^2 = b$. (C) $a = b^2$. (D) $a^3 = b$.

☞ **Lời giải.**

Ta có

$$\log_3 a = \log_{27} (a^2 \sqrt{b}) \Leftrightarrow \log_3 a = \frac{1}{3} \log_3 (a^2 \sqrt{b}) \Leftrightarrow 3 \log_3 a = \log_3 (a^2 \sqrt{b})$$

$$\Leftrightarrow \log_3 a^3 = \log_3 (a^2 \sqrt{b}) \Leftrightarrow a = \sqrt{b} \Leftrightarrow a^2 = b.$$

Chọn đáp án (B)

CÂU 12. Với a là số thực dương tùy ý, $\log_2 a^2$ bằng

- (A) $\frac{1}{2} \log_2 a$. (B) $2 + \log_2 a$. (C) $2 \log_2 a$. (D) $\frac{1}{2} + \log_2 a$.

☞ **Lời giải.**

Vì a là số thực dương tùy ý nên $\log_2 a^2 = 2 \log_2 a$.

Chọn đáp án (C)

CÂU 13. Với a là số thực dương tùy ý, $\log_{\frac{1}{3}}(9a^2)$ bằng

- (A) $-2 - 2\log_3 a$. (B) $-2 - 2\log_{\frac{1}{3}} a$. (C) $2 + 2\log_{\frac{1}{3}} a$. (D) $2 + 2\log_3 a$.

Lời giải.

Ta có $\log_{\frac{1}{3}}(9a^2) = -\log_3(9a^2) = -(\log_3 9 + \log_3 a^2) = -(2 + 2\log_3 a) = -2 - 2\log_3 a$.

Chọn đáp án (A) ☐

CÂU 14. Cho $0 < a \neq 1$. Giá trị của biểu thức $P = \log_a(a \cdot \sqrt[3]{a^2})$ là

- (A) 3. (B) $\frac{5}{3}$. (C) $\frac{5}{2}$. (D) $\frac{4}{3}$.

Lời giải.

Ta có $P = \log_a(a \cdot \sqrt[3]{a^2}) = \log_a a + \log_a \sqrt[3]{a^2} = 1 + \log_a a^{\frac{2}{3}} = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$.

Chọn đáp án (B) ☐

CÂU 15. Cho a là số thực dương tùy ý. Giá trị của $\log_2(4a^2)$ bằng

- (A) $4 + \frac{1}{2}\log_2 a$. (B) $2(\log_2 a + 1)$. (C) $2 + \log_2 a$. (D) $8\log_2 a$.

Lời giải.

Ta có $\log_2(4a^2) = \log_2 4 + \log_2 a^2 = 2 + 2\log_2 a = 2(1 + \log_2 a)$.

Chọn đáp án (B) ☐

CÂU 16. Cho a là số thực dương tùy ý, $\ln\left(\frac{e}{a^2}\right)$ bằng

- (A) $1 + 2\ln a$. (B) $1 - 2\ln a$. (C) $1 + \ln(2a)$. (D) $1 - \ln(2a)$.

Lời giải.

Với $a > 0$, ta có: $\ln\left(\frac{e}{a^2}\right) = \ln e - \ln a^2 = 1 - 2\ln a$.

Chọn đáp án (B) ☐

CÂU 17. Cho a và b là hai số thực dương thỏa mãn $\sqrt{a} \cdot b^3 = 27$. Giá trị của $\log_3 a + 6\log_3 b$ bằng

- (A) 3. (B) 6. (C) 9. (D) 1.

Lời giải.

Ta có $\sqrt{a} \cdot b^3 = 27 \Leftrightarrow \sqrt{a} = \left(\frac{3}{b}\right)^3 \Rightarrow \log_3 \sqrt{a} = \log_3 \left(\frac{3}{b}\right)^3$

$\Rightarrow \frac{1}{2}\log_3 a = 3(1 - \log_3 b) \Rightarrow \log_3 a + 3\log_3 b = 6$

Chọn đáp án (B) ☐

CÂU 18. Giá trị của $\log_2(4\sqrt{2})$ bằng

- (A) $\frac{5}{2}$. (B) 4. (C) 3. (D) $\frac{3}{2}$.

Lời giải.

Ta có $\log_2(4\sqrt{2}) = \log_2(2^2 \cdot 2^{\frac{1}{2}}) = \log_2 2^{\frac{5}{2}} = \frac{5}{2}$.

Chọn đáp án (A) ☐

CÂU 19. Với a là số thực dương khác 1, $\log_{a^2}(a\sqrt{a})$ bằng

- (A) $\frac{1}{4}$. (B) $\frac{3}{4}$. (C) 3. (D) $\frac{3}{2}$.

Lời giải.

Ta có $\log_{a^2}(a\sqrt{a}) = \log_{a^2} a^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$.

Chọn đáp án (B) ☐

CÂU 20. Cho a, b là các số thực dương và a khác 1, thỏa mãn $\log_{a^3}\left(\frac{a^5}{\sqrt[4]{b}}\right) = 2$. Giá trị của biểu thức $\log_a b$ bằng

- (A) $\frac{1}{4}$. (B) $-\frac{1}{4}$. (C) 4. (D) -4.

Lời giải.

Xét $\log_{a^3}\left(\frac{a^5}{\sqrt[4]{b}}\right) = 2 \Leftrightarrow \log_{a^3} a^5 - \log_{a^3} b^{\frac{1}{4}} = 2 \Leftrightarrow \frac{5}{3} - \frac{1}{12}\log_a b = 2 \Leftrightarrow \log_a b = -4$.

Chọn đáp án (D) ☐

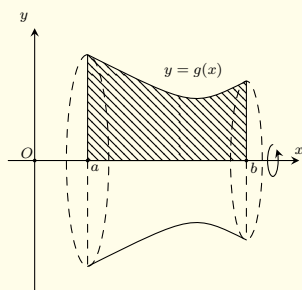
C. BẢNG ĐÁP ÁN

1. B	2. A	3. A	4. D	5. C	6. C	7. D	8. C
9. B	10. A	11. B	12. C	13. A	14. B	15. B	16. B
		17. B	18. A	19. B	20. D		

Bài 29. ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN TÍNH THỂ TÍCH VẬT THỂ TRÒN XOAY

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

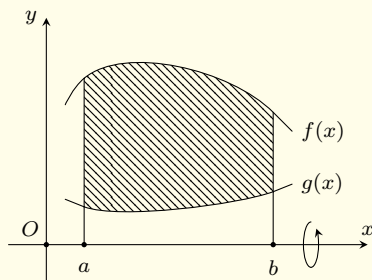
- ☑ Thể tích khối tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ quanh trục Ox



$$\begin{cases} (C): y = f(x) \\ (Ox): y = 0 \\ x = a \\ x = b \end{cases}$$

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

- ☑ Thể tích khối tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, $y = g(x)$ (cùng nằm một phía so với Ox) và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ quanh trục Ox :



$$V = \pi \int_a^b |f^2(x) - g^2(x)| dx$$

B. BÀI TẬP MẪU

VÍ DỤ 29 (Đề tham khảo BGD 2022-2023). Thể tích khối tròn xoay thu được khi quay hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y = -x^2 + 2x$ và $y = 0$ quanh trục Ox bằng

Ⓐ $\frac{16}{15}$.

Ⓑ $\frac{16\pi}{9}$.

Ⓒ $\frac{16}{9}$.

Ⓓ $\frac{16\pi}{15}$.

☞ **Lời giải.**

Hoành độ giao điểm của đồ thị và trục Ox là nghiệm của phương trình

$$-x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2. \end{cases}$$

$$\text{Khi đó } V = \pi \int_0^2 f^2(x) dx = \pi \int_0^2 (x^4 - 4x^3 + 4x^2) dx = \pi \left(\frac{x^5}{5} - x^4 + \frac{4}{3}x^3 \right) \Big|_0^2 = \frac{16\pi}{15}.$$

Chọn đáp án Ⓓ



C. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN

CÂU 21. Cho hình phẳng \mathcal{D} giới hạn bởi đường cong $y = e^x$, trục hoành và các đường thẳng $x = 0$, $x = 1$. Khối tròn xoay tạo thành khi quay \mathcal{D} quanh trục hoành có thể tích V bằng bao nhiêu?

Ⓐ $V = \frac{\pi(e^2 + 1)}{2}$.

Ⓑ $V = \frac{\pi(e^2 - 1)}{2}$.

Ⓒ $\frac{\pi e^2}{2}$.

Ⓓ $V = \frac{e^2 - 1}{2}$.

Lời giải.

Thể tích khối tròn xoay cần tính là $V = \pi \int_0^1 (e^x)^2 dx = \pi \left(\frac{e^{2x}}{2} \right) \Big|_0^1 = \frac{\pi(e^2 - 1)}{2}$.

Chọn đáp án (B)

CÂU 22. Cho hình phẳng \mathcal{D} giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{2019x + 2020}$, trục Ox và hai đường thẳng $x = 0$; $x = 1$. Gọi V là thể tích của khối tròn xoay được tạo thành khi quay \mathcal{D} quanh trục Ox . Khẳng định nào sau đây đúng?

- (A) $V = \int_0^1 (2019x + 2020) dx$. (B) $V = \pi \int_0^1 (2019x + 2020) dx$.
(C) $V = \int_0^1 \sqrt{2019x + 2020} dx$. (D) $V = \pi \int_0^1 \sqrt{2019x + 2020} dx$.

Lời giải.

Thể tích V của khối tròn xoay được tạo thành khi quay \mathcal{D} quanh trục Ox được tính bởi công thức

$$V = \pi \int_0^1 (\sqrt{2019x + 2020})^2 dx = \pi \int_0^1 (2019x + 2020) dx.$$

Chọn đáp án (B)

CÂU 23. Cho hình phẳng \mathcal{H} giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x \cdot \ln x$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 1$; $x = 2$. Thể tích vật thể tròn xoay sinh bởi \mathcal{H} khi nó quay quanh trục hoành có thể tích V được xác định bởi

- (A) $V = \pi \int_1^2 (x \cdot \ln x) dx$. (B) $V = \int_1^2 (x \cdot \ln x) dx$. (C) $V = \int_1^2 (x \cdot \ln x)^2 dx$. (D) $V = \pi \int_1^2 (x \cdot \ln x)^2 dx$.

Lời giải.

Thể tích vật thể tròn xoay sinh bởi (H) : $\begin{cases} y = x \cdot \ln x \\ y = 0 \\ x = 1; x = 2 \end{cases}$ khi quay quanh trục hoành được tính bởi công thức $V =$

$$\pi \int_1^2 (x \cdot \ln x)^2 dx.$$

Chọn đáp án (D)

CÂU 24. Gọi \mathcal{D} là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \frac{x}{4}$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 4$. Tính thể tích vật thể tròn xoay tạo thành khi quay hình \mathcal{D} quanh trục Ox .

- (A) $\frac{15\pi}{8}$. (B) $\frac{21\pi}{16}$. (C) $\frac{21}{16}$. (D) $\frac{15}{16}$.

Lời giải.

Thể tích vật thể tròn xoay tạo thành khi quay hình \mathcal{D} quanh trục Ox là

$$V = \pi \int_1^4 \left(\frac{x}{4} \right)^2 dx = \frac{\pi x^3}{48} \Big|_1^4 = \frac{21\pi}{16}.$$

Chọn đáp án (B)

CÂU 25. Cho hình phẳng \mathcal{H} giới hạn bởi các đường $y = x^2 + 3$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 3$. Gọi V là thể tích của khối tròn xoay được tạo thành khi quay \mathcal{H} xung quanh trục Ox . Mệnh đề nào sau đây đúng?

- (A) $V = \int_1^3 (x^2 + 3) dx$. (B) $V = \pi \int_1^3 (x^2 + 3) dx$. (C) $V = \pi \int_1^3 (x^2 + 3)^2 dx$. (D) $V = \int_1^3 (x^2 + 3)^2 dx$.

Lời giải.

Thể tích của khối tròn xoay được tạo thành khi quay \mathcal{H} xung quanh trục Ox là

$$V = \pi \int_1^3 (x^2 + 3)^2 dx.$$

Chọn đáp án (C)

CÂU 26. Cho hình phẳng \mathcal{D} được giới hạn bởi các đường $f(x) = \sqrt{2x+1}$, Ox , $x=0$, $x=1$. Gọi V là thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay \mathcal{D} xung quanh trục Ox . Khẳng định nào sau đây đúng?

- (A) $V = \pi \int_0^1 \sqrt{2x+1} dx$. (B) $V = \int_0^1 (2x+1) dx$. (C) $V = \pi \int_0^1 (2x+1) dx$. (D) $V = \int_0^1 \sqrt{2x+1} dx$.

☞ **Lời giải.**

$$\text{Ta có } V = \pi \int_0^1 (\sqrt{2x+1})^2 dx = \pi \int_0^1 (2x+1) dx.$$

Chọn đáp án (C) □

CÂU 27. Thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x \cdot e^x$, $y=0$, $x=0$, $x=1$ xung quanh trục Ox là

- (A) $V = \pi \int_0^1 x e^x dx$. (B) $V = \pi \int_0^1 x^2 e^{2x} dx$. (C) $V = \pi \int_0^1 x^2 e^x dx$. (D) $V = \int_0^1 x^2 e^{2x} dx$.

☞ **Lời giải.**

$$\text{Ta có } V = \pi \int_0^1 (x e^x)^2 dx = \pi \int_0^1 x^2 e^{2x} dx.$$

Chọn đáp án (B) □

CÂU 28. Thể tích khối tròn xoay sinh ra khi quay quanh trục hoành hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = e^{\frac{x}{2}}$, trục hoành, trục tung và đường thẳng $x=2$ bằng

- (A) πe^2 . (B) $e^2 - 1$. (C) $\pi (e^2 - 1)$. (D) $\pi (e - 1)$.

☞ **Lời giải.**

$$\text{Ta có } V = \pi \int_0^2 e^x dx = \pi \cdot e^x \Big|_0^2 = \pi (e^2 - 1).$$

Chọn đáp án (C) □

CÂU 29. Cho hình phẳng \mathcal{H} được giới hạn bởi các đường $x=0$, $x=\pi$, $y=0$ và $y=-\cos x$. Gọi V là thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay \mathcal{H} xung quanh trục Ox . Khẳng định nào sau đây đúng?

- (A) $V = \pi \int_0^\pi \cos^2 x dx$. (B) $V = \pi \left| \int_0^\pi (-\cos x) dx \right|$. (C) $V = \pi \int_0^\pi |\cos x| dx$. (D) $V = \int_0^\pi \cos^2 x dx$.

☞ **Lời giải.**

Ta có thể tích V của khối tròn xoay tạo thành khi quay \mathcal{H} xung quanh trục Ox được tính theo công thức

$$V = \pi \int_0^\pi (-\cos x)^2 dx = \pi \int_0^\pi \cos^2 x dx.$$

Chọn đáp án (A) □

CÂU 30. Cho hình phẳng \mathcal{H} giới hạn bởi các đường $y = x^3 - x + 1$, $y=0$, $x=0$, $x=2$. Gọi V là thể tích khối tròn xoay được tạo thành khi quay \mathcal{H} xung quanh trục Ox . Mệnh đề nào sau đây đúng?

- (A) $V = \pi \int_0^2 (x^3 - x^2 + 1) dx$. (B) $V = \pi \int_0^2 (x^3 - x + 1) dx$.
(C) $V = \int_0^2 (x^3 - x + 1)^2 dx$. (D) $V = \pi \int_0^2 (x^3 - x + 1)^2 dx$.

☞ **Lời giải.**

Thể tích khối tròn xoay được tạo thành khi quay \mathcal{H} xung quanh trục Ox là

$$V = \pi \int_0^2 (x^3 - x + 1)^2 dx.$$

Chọn đáp án (D) □

CÂU 31. Cho hình phẳng \mathcal{H} giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \frac{1}{x}$ và các đường thẳng $y = 0$, $x = 1$, $x = 4$. Thể tích V của khối tròn xoay sinh ra khi cho hình phẳng \mathcal{H} quay quanh trục Ox bằng

- (A) $\frac{3}{4}$. (B) $2 \ln 2$. (C) $2\pi \ln 2$. (D) $\frac{3\pi}{4}$.

Lời giải.

Thể tích V của khối tròn xoay sinh ra khi cho hình phẳng \mathcal{H} quay quanh trục Ox là

$$V = \pi \int_1^4 \left(\frac{1}{x}\right)^2 dx = \pi \left(-\frac{1}{x}\right) \Big|_1^4 = \pi \left(-\frac{1}{4} + 1\right) = \frac{3\pi}{4}.$$

Chọn đáp án (D)

CÂU 32. Cho hình phẳng \mathcal{D} được giới hạn bởi các đường $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$ và $y = \sqrt{2x+1}$. Gọi V là thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay \mathcal{D} xung quanh trục Ox . Mệnh đề nào sau đây đúng?

- (A) $V = \pi \int_0^1 (2x+1) dx$. (B) $V = \int_0^1 (2x+1) dx$. (C) $V = \int_0^1 \sqrt{2x+1} dx$. (D) $V = \pi \int_0^1 \sqrt{2x+1} dx$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } V = \pi \int_0^1 (\sqrt{2x+1})^2 dx = \pi \int_0^1 (2x+1) dx.$$

Chọn đáp án (A)

CÂU 33. Cho hình phẳng \mathcal{H} được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \sqrt{x}$ và các đường thẳng $x = 0$; $x = 1$ và trục hoành. Tính thể tích V của khối tròn xoay sinh bởi hình \mathcal{H} quay xung quanh trục Ox .

- (A) $\frac{\pi}{2}$. (B) $\sqrt{\pi}$. (C) $\frac{\pi}{3}$. (D) π .

Lời giải.

$$\text{Thể tích } V \text{ của khối tròn xoay cần tìm là } V = \pi \int_0^1 x dx = \frac{\pi x^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{\pi}{2} \text{ (đvtt)}.$$

Chọn đáp án (A)

CÂU 34. Gọi \mathcal{H} là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = e^x$, trục Ox và hai đường thẳng $x = 0$, $x = 1$. Thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay \mathcal{H} xung quanh trục Ox bằng

- (A) $\frac{\pi}{2} (e^2 + 1)$. (B) $\pi (e^2 - 1)$. (C) $\frac{\pi}{2} (e^2 - 1)$. (D) $\pi (e^2 + 1)$.

Lời giải.

$$\text{Thể tích khối tròn xoay } V = \pi \int_0^1 e^{2x} dx = \frac{\pi}{2} e^{2x} \Big|_0^1 = \frac{\pi}{2} (e^2 - 1).$$

Chọn đáp án (C)

CÂU 35. Cho hình phẳng \mathcal{D} giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \sin x$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 0$; $x = \pi$. Thể tích khối tròn xoay thu được khi quay \mathcal{D} quanh trục Ox bằng

- (A) $\frac{\pi^2}{2}$. (B) $\frac{\pi^2}{4}$. (C) $\frac{\pi}{4}$. (D) $\frac{\pi}{2}$.

Lời giải.

Thể tích khối tròn xoay thu được khi quay \mathcal{D} quanh trục Ox là

$$V = \pi \int_0^\pi (\sin x)^2 dx = \pi \int_0^\pi \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \frac{\pi}{2} \left(x - \frac{1}{2} \sin 2x\right) \Big|_0^\pi = \frac{\pi^2}{2}.$$

Chọn đáp án (A)

CÂU 36. Tính thể tích khối tròn xoay được tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = 3x - x^2$ và trục hoành, quanh trục hoành.

- (A) $\frac{41\pi}{7}$. (B) $\frac{8\pi}{7}$. (C) $\frac{81\pi}{10}$. (D) $\frac{85\pi}{10}$.

Lời giải.

Ta có $3x - x^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 3. \end{cases}$

Thể tích khối tròn xoay cần tìm là

$$V = \pi \int_0^3 (3x - x^2)^2 dx = \pi \int_0^3 (9x^2 - 6x^3 + x^4) dx = \pi \left(3x^3 - \frac{3x^4}{2} + \frac{x^5}{5} \right) \Big|_0^3 = \frac{81\pi}{10}.$$

Chọn đáp án (C)

CÂU 37. Tính thể tích vật thể tròn xoay tạo thành khi cho hình phẳng giới hạn bởi các đường parabol $y = x^2$, trục hoành và đường thẳng $x = 1$ quay xung quanh trục Ox .

(A) $\frac{1}{5}$.

(B) $\frac{1}{3}$.

(C) $\frac{\pi}{5}$.

(D) $\frac{\pi}{3}$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm $x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Thể tích vật thể tròn xoay cần tìm là

$$V = \pi \int_0^1 (x^2)^2 dx = \pi \int_0^1 x^4 dx = \pi \frac{x^5}{5} \Big|_0^1 = \frac{\pi}{5}.$$

Chọn đáp án (C)

CÂU 38. Cho hình phẳng \mathcal{D} giới hạn bởi đường cong $y = \sqrt{2 + \cos x}$, trục hoành và các đường thẳng $x = 0, x = \frac{\pi}{2}$. Khối tròn xoay tạo thành khi cho \mathcal{D} quay quanh trục hoành có thể tích V bằng bao nhiêu?

(A) $V = (\pi - 1)\pi$.

(B) $V = (\pi + 1)\pi$.

(C) $V = \pi - 1$.

(D) $V = \pi + 1$.

Lời giải.

Ta có

$$V = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sqrt{2 + \cos x})^2 dx = \pi (2x + \sin x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi(\pi + 1).$$

Chọn đáp án (B)

CÂU 39. Kí hiệu \mathcal{H} là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = 2x - x^2$ và $y = 0$. Tính thể tích vật thể tròn xoay được sinh ra bởi hình phẳng \mathcal{H} khi quay quanh trục Ox .

(A) $\frac{19\pi}{15}$.

(B) $\frac{17\pi}{15}$.

(C) $\frac{18\pi}{15}$.

(D) $\frac{16\pi}{15}$.

Lời giải.

Xét phương trình $2x - x^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2. \end{cases}$

Thể tích của vật thể cần tính là

$$V = \pi \int_0^2 (2x - x^2)^2 dx = \frac{16\pi}{15}.$$

Chọn đáp án (D)

CÂU 40. Cho hình phẳng \mathcal{H} giới hạn bởi các đường $y = \cos x, y = 0, x = 0, x = \frac{\pi}{4}$. Thể tích của khối tròn xoay được tạo thành khi quay \mathcal{H} xung quanh trục Ox bằng

(A) $\frac{\pi + 2}{8}$.

(B) $\frac{\pi(\pi + 2)}{8}$.

(C) $\frac{\pi^2 + 1}{4}$.

(D) $\frac{\pi(\pi + 2)}{4}$.

Lời giải.

Ta có

$$V = \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \cos 2x) dx = \frac{\pi}{2} \left(x + \frac{\sin 2x}{2} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{2} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \right) = \frac{\pi(\pi + 2)}{8}.$$

Chọn đáp án (B)

D. BẢNG ĐÁP ÁN

21. B	22. B	23. D	24. B	25. C	26. C	27. B	28. C
29. A	30. D	31. D	32. A	33. A	34. C	35. A	36. C
		37. C	38. B	39. D	40. B		

Bài 30. GÓC GIỮA HAI MẶT PHẪNG TRONG KHÔNG GIAN

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Góc giữa hai mặt phẳng

1.1. Khái niệm

- ☉ Góc giữa 2 mặt phẳng là góc được tạo bởi hai đường thẳng lần lượt vuông góc với hai mặt phẳng đó.
- ☉ Trong không gian 3 chiều, góc giữa 2 mặt phẳng còn được gọi là ‘góc khối’, là phần không gian bị giới hạn bởi 2 mặt phẳng. Góc giữa 2 mặt phẳng được đo bằng góc giữa 2 đường thẳng trên mặt 2 phẳng có cùng trục giao với giao tuyến của 2 mặt phẳng.

1.2. Tính chất

- ☉ Góc giữa 2 mặt phẳng song song bằng 0 độ;
- ☉ Góc giữa 2 mặt phẳng trùng nhau bằng 0 độ.

2. Cách xác định góc giữa 2 mặt phẳng

Để có thể xác định chính xác góc giữa 2 mặt phẳng, chúng ta thường áp dụng những cách sau:
Gọi P là mặt phẳng 1, Q là mặt phẳng 2.

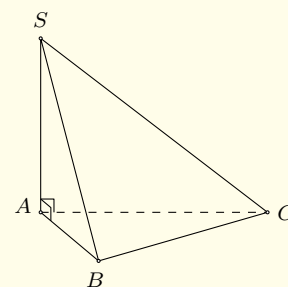
- ☉ **Trường hợp 1:** Hai mặt phẳng (P) , (Q) song song hoặc trùng nhau thì góc của 2 mặt phẳng bằng 0° ;
- ☉ **Trường hợp 2:** Hai mặt phẳng (P) , (Q) không song song hoặc trùng nhau.
 - *Cách 1:* Dựng 2 đường thẳng n và p vuông góc lần lượt với 2 mặt phẳng (P) , (Q) . Khi đó góc giữa 2 mặt phẳng (P) , (Q) là góc giữa 2 đường thẳng n và p .
 - *Cách 2:* Để xác định góc giữa 2 mặt phẳng đầu tiên bạn cần xác định giao tuyến Δ của 2 mặt phẳng (P) và (Q) . Tiếp theo, bạn tìm một mặt phẳng (R) vuông góc với giao tuyến Δ của 2 mặt phẳng (P) , (Q) và cắt 2 mặt phẳng tại các giao tuyến a , b . Khi đó, góc giữa 2 mặt phẳng (P) , (Q) là góc giữa a và b .

B. BÀI TẬP MẪU

VÍ DỤ 30 (Đề tham khảo BGD 2022-2023).

Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại B , SA vuông góc với đáy và $SA = AB$ (tham khảo hình bên). Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) bằng

- ☐ A 60° .
 ☐ B 30° .
 ☐ C 90° .
 ☐ D 45° .



☞ Lời giải.

Ta có $SA \perp (ABC)$, $AB \perp BC$ nên $SB \perp BC$.

Suy ra góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) bằng $\widehat{SBA} = 45^\circ$ ($\triangle SAB$ vuông tại A có $SA = AB$).

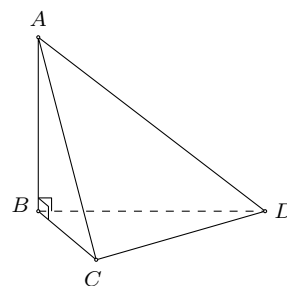
Chọn đáp án ☒ D



C. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN

CÂU 1. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB \perp (BCD)$. Góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (BCD) là

- (A) 90° . (B) 45° . (C) 60° . (D) 120° .



Lời giải.

Ta có: $\begin{cases} AB \perp (BCD) \\ AB \subset (ABC) \end{cases} \Rightarrow (ABC) \perp (BCD).$

Vậy góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (BCD) là 90°

Chọn đáp án (A)



CÂU 2. Gọi α là số đo góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) . Nếu (P) và (Q) song song nhau thì α bằng

- (A) 45° . (B) 90° . (C) 60° . (D) 0° .

Lời giải.

A sai vì góc của hai mặt phẳng từ 0° đến 90° .

B sai vì góc của hai mặt phẳng (P) và (Q) là 90° thì hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc nhau.

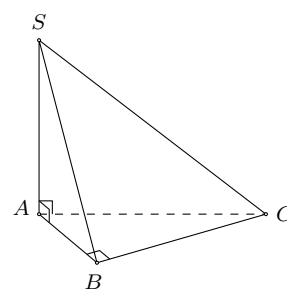
C sai vì góc của hai mặt phẳng (P) và (Q) là 60° thì hai mặt phẳng (P) và (Q) cắt nhau.

Chọn đáp án (D)



CÂU 3. Cho hình chóp $SABC$ có $SA \perp (ABC)$ và $AB \perp BC$. Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) là góc nào sau đây?

- (A) \widehat{ASB} . (B) \widehat{SCB} . (C) \widehat{SBA} . (D) \widehat{SCA} .



Lời giải.

Ta có: $\begin{cases} (SBC) \cap (ABC) = BC \\ BC \perp AB \\ BC \perp SB \end{cases} \Rightarrow (\widehat{SB}; AB) = \widehat{SBA}$

Chọn đáp án (C)



CÂU 4. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đáy là $ABCD$ và độ dài các cạnh đáy bằng a , $SA = SB = SC = SD = a$. Tính \cos góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) .

- (A) 0. (B) $\frac{1}{3}$. (C) $\frac{1}{2}$. (D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.

Gọi I là trung điểm đoạn SA . Ta có tam giác SAD và tam giác SAB đều.

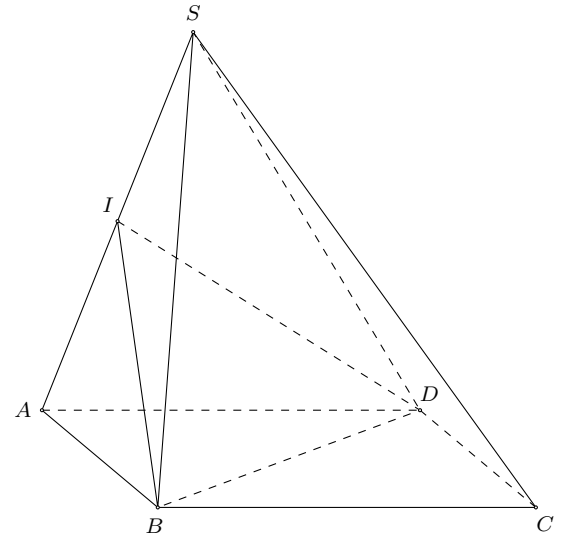
Suy ra $BI \perp SA, DI \perp SA$.

Do đó, $((SAB), (SAD)) = (\widehat{BI, DI})$.

Áp dụng định lý cosin vào tam giác BID ta được:

$$\begin{aligned}\cos \widehat{BID} &= \frac{IB^2 + ID^2 - BD^2}{2 \cdot IB \cdot ID} \\ &= \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2 - (a\sqrt{2})^2}{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}a}.\end{aligned}$$

Suy ra góc $\cos((SAB), (SAD)) = \frac{1}{3}$.



Chọn đáp án (B)

CÂU 5. Gọi α là số đo góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) . Nếu (P) và (Q) trùng nhau thì α bằng

- (A) 180° . (B) 90° . (C) 60° . (D) 0° .

Lời giải.

A sai vì góc của hai mặt phẳng từ 0° đến 90° .

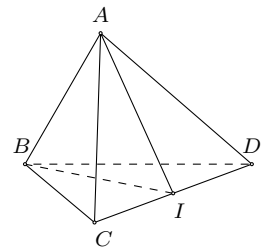
B sai vì góc của hai mặt phẳng (P) và (Q) là 90° thì hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc nhau.

C vì góc của hai mặt phẳng (P) và (Q) là 60° thì hai mặt phẳng (P) và (Q) cắt nhau

Chọn đáp án (D)

CÂU 6. Cho tứ diện $ABCD$ có $AC = AD$ và $BC = BD$. Gọi I là trung điểm của CD . Khẳng định nào sau đây sai?

- (A) $(ACD) \perp (AIB)$.
(B) Góc giữa 2 mặt phẳng (ACD) và (BCD) là góc $(AI; BI)$.
(C) $(BCD) \perp (AIB)$.
(D) Góc giữa 2 mặt phẳng (ABC) và (ABD) là góc $(CB; DB)$.



Lời giải.

Nếu AB không vuông góc với (BCD) nên góc giữa 2 mặt phẳng (ABC) và (ABD) không thể là góc $(CB; DB)$.

Xét đáp án B có:

$$\left. \begin{array}{l} CD \perp AI \\ CD \perp BI \end{array} \right\} \Rightarrow CD \perp (AIB); CD \subset (BCD) \text{ nên } (BCD) \perp (AIB). \text{ B đúng.}$$

Chứng minh tương tự $(ACD) \perp (AIB)$. D đúng.

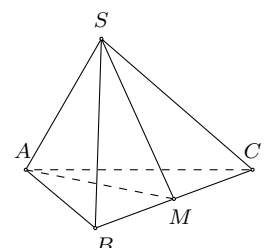
Xét đáp án A:

$$\left. \begin{array}{l} CD \perp AI \\ CD \perp BI \\ CD = (ACD) \cap (BCD) \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Góc giữa 2 mặt phẳng } (ACD) \text{ và } (BCD) \text{ là góc giữa } (AI; BI).$$

Chọn đáp án (D)

CÂU 7. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A và $AB = a\sqrt{2}$. Biết $SA \perp (ABC)$ và $SA = a$. Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) bằng

- (A) 60° . (B) 90° . (C) 45° . (D) 30° .



Lời giải.

Trong mặt phẳng (ABC) kẻ $AM \perp BC$ tại M .

$$\text{Ta có } \begin{cases} (SBC) \cap (ABC) = BC \\ (SAM) \perp BC \\ (SAM) \cap (SBC) = SM \\ (SAM) \cap (ABC) = AM \end{cases} \Rightarrow \widehat{(SBC), (ABC)} = \widehat{(SM, AM)}.$$

Suy ra góc giữa (SBC) và (ABC) bằng góc \widehat{SMA} .

Xét tam giác ABC ta có $BC = AB \cdot \sqrt{2} = a\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2a \Rightarrow AM = \frac{1}{2}BC = a$.

Xét tam giác SAM vuông tại A ta có $\tan \widehat{SMA} = \frac{SA}{AM} = \frac{a}{a} = 1 \Rightarrow \widehat{SMA} = 45^\circ$.

Chọn đáp án (C)

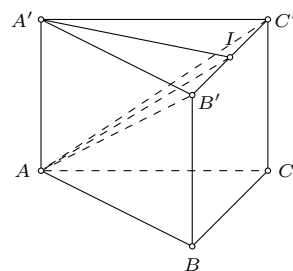
CÂU 8. Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng $2a$, cạnh bên bằng a . Tính góc giữa hai mặt phẳng $(AB'C')$ và $(A'B'C')$.

(A) $\frac{\pi}{2}$.

(B) $\frac{3\pi}{2}$.

(C) $\frac{\pi}{6}$.

(D) $\frac{\pi}{3}$.



Lời giải.

Gọi I là trung điểm của $B'C'$ ta có $\begin{cases} AI \perp B'C' \\ A'I \perp B'C' \end{cases} \Rightarrow ((AB'C'), (A'B'C')) = \widehat{(AI, A'I)} = \widehat{AIA'}$.

Xét tam giác AIA' vuông tại A' ta có: $\tan \widehat{AIA'} = \frac{AA'}{A'I} = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\Rightarrow \widehat{AIA'} = ((AB'C'), (A'B'C')) = \frac{\pi}{6}$.

Chọn đáp án (C)

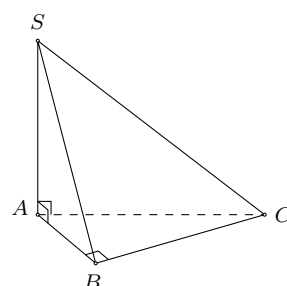
CÂU 9. Cho hình chóp $S.ABC$ có tam giác ABC vuông cân tại B , $AB = BC = a$, $SA = a\sqrt{3}$, $SA \perp (ABC)$. Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) là

(A) 60° .

(B) 90° .

(C) 30° .

(D) 45° .



Lời giải.

Ta có $BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SA$.

Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) là góc \widehat{SBA} .

$$\tan \widehat{SBA} = \frac{SA}{AB} = \frac{a\sqrt{3}}{a} = \sqrt{3}$$

$\Rightarrow \widehat{SBA} = 60^\circ$.

Chọn đáp án (A)

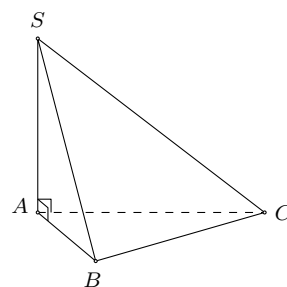
CÂU 10. Cho hình chóp $S.ABC$ có cạnh SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) , biết $AB = AC = a$, $BC = a\sqrt{3}$. Tính góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) .

(A) 60° .

(B) 45° .

(C) 30° .

(D) 90° .



Lời giải.

Vì $SA \perp (ABC)$ nên $SA \perp AB$ và $SA \perp AC$.

$$\text{Ta có: } \begin{cases} (SAB) \cap (SAC) = SA \\ SA \perp AB \\ SA \perp AC \end{cases} \Rightarrow \widehat{(SAB), (SAC)} = \widehat{(AB, AC)}.$$

Xét $\triangle ABC$ có $\cos \widehat{BAC} = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \cdot AB \cdot AC} = \frac{a^2 + a^2 - (a\sqrt{3})^2}{2 \cdot a \cdot a} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{BAC} = 120^\circ$.

Vậy $(\widehat{SAB}), (\widehat{SAC}) = 180^\circ - \widehat{BAC} = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$.

Chọn đáp án (A)

□

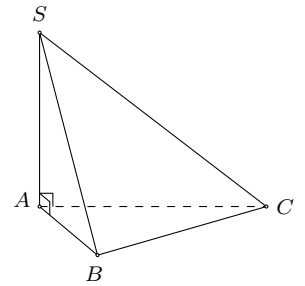
CÂU 11. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a , $SA \perp (ABC)$, góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (SBC) là 60° . Độ dài cạnh SA bằng

(A) $\frac{a}{\sqrt{3}}$.

(B) $\frac{a}{2}$.

(C) $a\sqrt{3}$.

(D) $\frac{3a}{2}$.



Lời giải.

Gọi I là trung điểm BC , khi đó $BC \perp AI$.

Mặt khác $BC \perp AI, BC \perp SA \Rightarrow BC \perp (SAI) \Rightarrow BC \perp SI$.

Suy ra góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (SBC) là \widehat{SIA} .

Tam giác SIA vuông tại A nên $\tan \widehat{SIA} = \frac{SA}{AI} \Leftrightarrow SA = IA \cdot \tan \widehat{SIA} = \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{3} = \frac{3a}{2}$.

Chọn đáp án (D)

□

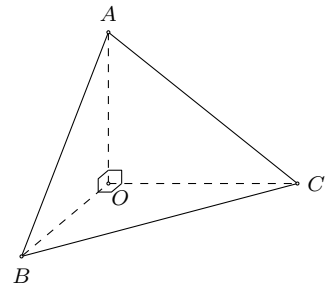
CÂU 12. Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc và $OB = OC = a\sqrt{6}$, $OA = a$. Tính góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (OBC) .

(A) 90° .

(B) 60° .

(C) 30° .

(D) 45° .



Lời giải.

Gọi I là trung điểm của $BC \Rightarrow AI \perp BC$. Mà $OA \perp BC$ nên $AI \perp BC$.

Ta có: $\begin{cases} (OBC) \cap (ABC) = BC \\ BC \perp AI \\ BC \perp OA \end{cases} \Rightarrow (\widehat{OBC}), (\widehat{ABC}) = (\widehat{OI}, \widehat{AI}) = \widehat{OIA}$.

Ta có: $OI = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}\sqrt{OB^2 + OC^2} = a\sqrt{3}$.

Xét tam giác OAI vuông tại A có $\tan \widehat{OIA} = \frac{OA}{OI} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \widehat{OIA} = 30^\circ$.

Vậy $(\widehat{OBC}), (\widehat{ABC}) = 30^\circ$.

Chọn đáp án (C)

□

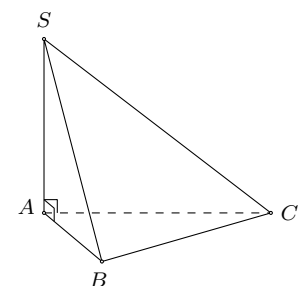
CÂU 13. Cho hình chóp $S.ABC$ có cạnh SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) , biết $AB = AC = a$, $BC = a\sqrt{3}$. Tính góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) .

(A) 60° .

(B) 150° .

(C) 30° .

(D) 120° .



Lời giải.

Ta có: $\begin{cases} AB \perp SA, AB \subset (SAB) \\ AC \perp SA, AC \subset (SAC) \end{cases} \Rightarrow ((SAB), (SAC)) = (\widehat{AB}, \widehat{AC})$.

Xét tam giác ABC ta có: $\cos \widehat{BAC} = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \cdot AB \cdot AC} = \frac{a^2 + a^2 - 3a^2}{2 \cdot a \cdot a} = -\frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \widehat{BAC} = 120^\circ.$$

Vậy $((SAB), (SAC)) = (AB, AC) = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$.

Chọn đáp án (A)



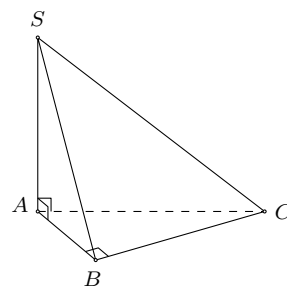
CÂU 14. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$ và $AB \perp BC$, gọi I là trung điểm BC . Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) là góc nào sau đây?

(A) \widehat{SIA} .

(B) \widehat{SBA} .

(C) \widehat{SCA} .

(D) \widehat{SCB} .



Lời giải.

$(SBC) \cap (ABC) = BC$; $BC \perp BA$; $BC \perp SA$ nên $BC \perp (SAB)$

Vậy $((SBC), (ABC)) = (\widehat{SB}, \widehat{AB}) = \widehat{SBA}$

Chọn đáp án (B)



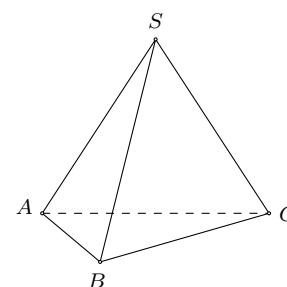
CÂU 15. Cho hình chóp tam giác đều có cạnh đáy bằng a . Góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng 60° (tham khảo hình vẽ bên). Cosin của góc giữa mặt bên và mặt đáy của hình chóp là.

(A) $\frac{1}{\sqrt{13}}$.

(B) $\frac{1}{2\sqrt{3}}$.

(C) $\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{13}}$.

(D) $\frac{1}{\sqrt{3}}$.



Lời giải.

Gọi M là trung điểm cạnh BC và O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

Góc giữa cạnh bên SA và mặt đáy (ABC) là 60° .

$$\Rightarrow \widehat{SAO} = 60^\circ \Rightarrow SO = OA \cdot \tan 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{3} \cdot \sqrt{3} = a.$$

Góc giữa mặt bên (SBC) và mặt đáy (ABC) là \widehat{SMO} .

$$\text{Ta có } \cos \widehat{SMO} = \frac{OM}{SM} = \frac{OM}{\sqrt{SO^2 + OM^2}} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{6}}{\sqrt{a^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{13}}.$$

Chọn đáp án (A)



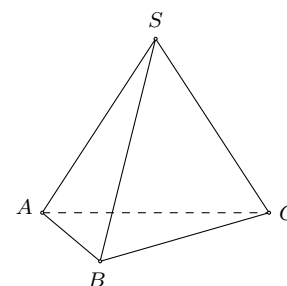
CÂU 16. Cho tứ diện đều $ABCD$. Cosin của góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (DBC) bằng

(A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(B) $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(C) $\frac{1}{2}$.

(D) $\frac{1}{3}$.



Lời giải.

Gọi tứ diện $ABCD$ là tứ diện đều cạnh a .

Gọi H là tâm của tam giác ABC . Khi đó $DH \perp (ABC)$ tại H .

Gọi I là trung điểm của BC . Khi đó góc giữa mặt phẳng (DBC) và (ABC) là góc \widehat{DIH}

$$\text{Ta có } \cos((\widehat{ABC}), (\widehat{DBC})) = \cos \widehat{DIH} = \frac{IH}{ID}.$$

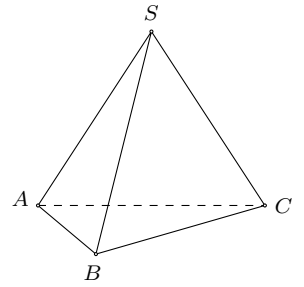
$$\text{Tam giác } ABC \text{ đều} \Rightarrow IH = \frac{1}{3}IA = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6}.$$

$$\text{Tam giác } DBC \text{ đều} \Rightarrow ID = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \cos((\widehat{ABC}), (\widehat{DBC})) = \frac{1}{3}.$$

Chọn đáp án (D)



CÂU 17. Cho khối chóp $S.ABC$ có mặt đáy ABC là tam giác cân tại A với $BC = 2a$, góc $\widehat{BAC} = 120^\circ$. Biết cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy và thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng $\frac{a^3}{9}$. Tính góc hợp bởi mặt phẳng (SBC) và mặt phẳng đáy.



- (A) 45° . (B) 60° . (C) 30° . (D) 90° .

Lời giải.

Gọi I là trung điểm BC , xét tam giác AIB vuông tại I ta có:

$$\tan 60^\circ = \sqrt{3} = \frac{BI}{AI} \Leftrightarrow AI = \frac{a\sqrt{3}}{3} \text{ (Do góc } BAI = 60^\circ, AI \text{ là phân giác góc } 120^\circ)$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AI \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{3} \cdot 2a = \frac{a^2\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{Do đó } V_{SABC} = \frac{1}{3} SA \cdot S_{\triangle ABC} = \frac{a^3}{9} \Leftrightarrow SA = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{Mà } \begin{cases} BC \perp AI \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAI) \Rightarrow BC \perp SI.$$

Vậy góc hợp bởi mặt phẳng (SBC) và mặt phẳng đáy là góc \widehat{SIA} .

Suy ra tam giác SIA vuông cân tại A nên $\widehat{SIA} = 45^\circ$

Chọn đáp án (A)



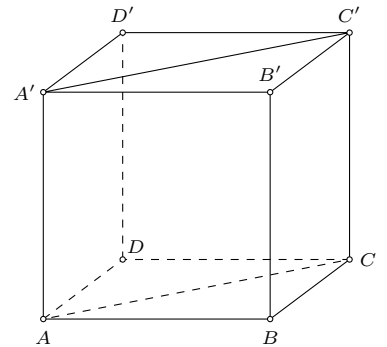
CÂU 18. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Góc giữa hai mặt phẳng $(A'AC)$ và $(ABCD)$ bằng

- (A) 90° . (B) 60° . (C) 30° . (D) 45° .

Lời giải.

Vì $AA' \perp (ABCD)$ nên $(A'AC) \perp (ABCD)$.

Do đó góc giữa hai mặt phẳng $(A'AC)$ và $(ABCD)$ bằng 90° .



Chọn đáp án (A)



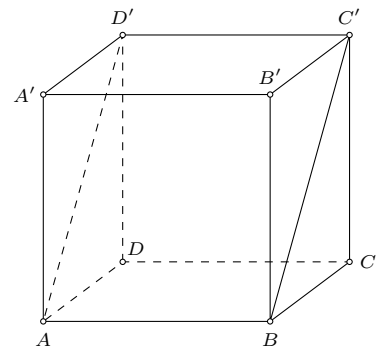
CÂU 19. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Góc giữa hai mặt phẳng $(ADD'A')$ và $(ABC'D')$ bằng

- (A) 60° . (B) 45° . (C) 90° . (D) 30° .

Lời giải.

Ta có $AB \perp (ADD'A')$, suy ra $(ABC'D') \perp (ADD'A')$.

Do đó, $(ADD'A'), (ABC'D') = 90^\circ$.



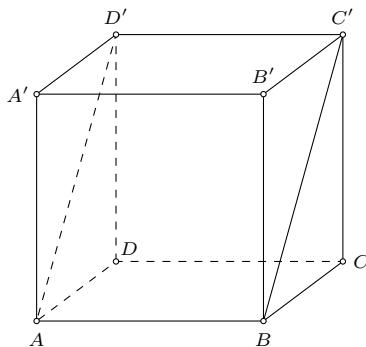
Chọn đáp án (C)



CÂU 20. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Tính góc giữa mặt phẳng $(ABB'A')$ và $(ABC'D')$.

- (A) 30° . (B) 90° . (C) 45° . (D) 60° .

Lời giải.



Ta có

$$\left. \begin{array}{l} (ABB'A') \cap (ABC'D') = AB \\ AB \perp (BCC'B') \\ (ABB'A') \cap (BCC'B') = BB' \\ (ABC'D') \cap (BCC'B') = BC' \end{array} \right\} \Rightarrow \widehat{(ABB'A'), (ABC'D')} = \widehat{C'BB'} = 45^\circ.$$

Chọn đáp án ☒ C



D. BẢNG ĐÁP ÁN

1. A	2. D	3. C	4. B	5. D	6. D	7. C	8. C
9. A	10. A	11. D	12. C	13. A	14. B	15. A	16. D
		17. A	18. A	19. C	20. C		

MỤC LỤC

PHẦN ĐỀ BÀI

Bài 1. Điểm biểu diễn số phức	1
(A) Kiến thức cần nhớ	1
(B) Bài tập mẫu	1
(C) Bài tập tương tự và phát triển	1
(D) Bảng đáp án	3
Bài 2. Hàm số logarit	3
(A) Kiến thức cần nhớ	3
(B) Bài tập mẫu	4
(C) Bài tập tương tự và phát triển	4
(D) Bảng đáp án	5
Bài 3. Đạo hàm hàm lũy thừa - Hàm mũ - logarit	6
(A) Kiến thức cần nhớ	6
(B) Bài tập mẫu	6
(C) Bài tập tương tự và phát triển	6
(D) Bảng đáp án	7
Bài 4. Phương trình mũ – Bất phương trình mũ	7
(A) Kiến thức cần nhớ	7
(B) Bài tập mẫu	8
(C) Bài tập tương tự và phát triển	8
(D) Bảng đáp án	10
Bài 5. Cấp số cộng, cấp số nhân	10
(A) Kiến thức cần nhớ	10
(B) Bài tập mẫu	10
(C) Bài tập tương tự và phát triển	11
(D) Bảng đáp án	12
Bài 6. Phương trình mặt phẳng	12
(A) Kiến thức cần nhớ	12
(B) Bài tập mẫu	12
(C) Bài tập tương tự và phát triển	13
(D) Bảng đáp án	14
Bài 7. Bài toán liên quan đến giao điểm giữa các đồ thị	14
(A) Kiến thức cần nhớ	14
(B) Bài tập mẫu	15
(C) Bài tập tương tự và phát triển	15
(D) Bảng đáp án	19

Bài 8. Tính chất tích phân	19
(A) Kiến thức cần nhớ.....	19
(B) Bài tập mẫu.....	19
(C) Bài tập tương tự và phát triển.....	19
(D) Bảng đáp án.....	21
Bài 9. Nhận dạng đồ thị hàm số	22
(A) Kiến thức cần nhớ.....	22
(B) Bài tập mẫu.....	23
(C) Bài tập tương tự và phát triển.....	23
(D) Bảng đáp án.....	27
Bài 10. Phương trình mặt cầu	27
(A) Kiến thức cần nhớ.....	28
(B) Bài tập mẫu.....	28
(C) Bài tập tương tự và phát triển.....	28
(D) Bảng đáp án.....	29
Bài 11. Góc giữa hai mặt phẳng	29
(A) Kiến thức cần nhớ.....	29
(B) Bài tập mẫu.....	30
(C) Bài tập tương tự và phát triển.....	30
(D) Bảng đáp án.....	31
Bài 12. Các phép toán cơ bản của số phức	31
(A) Kiến thức cần nhớ.....	31
(B) Bài tập mẫu.....	32
(C) Bài tập tương tự và phát triển.....	32
(D) Bảng đáp án.....	33
Bài 13. Tính thể tích khối lăng trụ đứng	33
(A) Kiến Thức Cần Nhớ.....	33
(B) Bài tập mẫu.....	35
(C) Bài tập tương tự và phát triển.....	35
(D) Bảng đáp án.....	36
Bài 14. Thể tích khối chóp	36
(A) Kiến thức cần nhớ.....	36
(B) Bài tập mẫu.....	37
(C) Bài tập tương tự và phát triển.....	38
(D) Bảng đáp án.....	39
Bài 15. Định nghĩa, tính chất, vị trí tương đối liên quan đến mặt cầu	39
(A) Kiến thức cần nhớ.....	39
(B) Bài tập mẫu.....	41
(C) Bài tập tương tự và phát triển.....	41
(D) Bảng đáp án.....	42

Bài 16. Số phức và các phép toán	42
(A) Kiến thức cần nhớ.....	42
(B) Bài tập mẫu.....	43
(C) Bài tập tương tự và phát triển.....	43
(D) Bảng đáp án.....	45
Bài 17. Hình nón, hình trụ	45
(A) Kiến thức cần nhớ.....	45
(B) Bài tập mẫu.....	46
(C) Bài tập tương tự và phát triển.....	46
(D) Bảng đáp án.....	47
Bài 18. Phương trình đường thẳng	47
(A) Kiến thức cần nhớ.....	47
(B) Bài tập mẫu.....	48
(C) Bài tập tương tự và phát triển.....	48
(D) Bảng đáp án.....	50
Bài 19. Tìm cực trị của hàm số biết bảng biến thiên hoặc đồ thị	50
(A) Kiến thức cần nhớ.....	50
(B) Bài tập mẫu.....	50
(C) Bài tập tương tự và phát triển.....	51
(D) Bảng đáp án.....	55
Bài 20. Đường tiệm cận	55
(A) Kiến thức cần nhớ.....	55
(B) Bài tập mẫu.....	55
(C) Bài tập tương tự và phát triển.....	56
(D) Bảng đáp án.....	57
Bài 21. Phương trình và bất phương trình logarit	57
(A) Kiến thức cần nhớ.....	57
(B) Bài tập mẫu.....	57
(C) Bài tập tương tự và phát triển.....	57
(D) Bảng đáp án.....	59
Bài 22. Phép đếm - Hoán vị - Chỉnh hợp - Tổ hợp	59
(A) Kiến thức cần nhớ.....	59
(B) Bài tập mẫu.....	59
(C) Bài tập tương tự và phát triển.....	59
(D) Bảng đáp án.....	61
Bài 23. Nguyên hàm	61
(A) Kiến thức cần nhớ.....	62
(B) Bài tập mẫu.....	62
(C) Bài tập tương tự và phát triển.....	62
(D) Bảng đáp án.....	64

Bài 24. Tích phân	64
(A) Kiến thức cần nhớ.....	64
(B) Bài tập mẫu.....	65
(C) Bài tập tương tự và phát triển.....	65
(D) Bảng đáp án.....	69
Bài 25. Nguyên hàm	69
(A) Kiến thức cần nhớ.....	69
(B) Bài tập mẫu.....	70
(C) Bài tập tương tự và phát triển.....	70
(D) Bảng đáp án.....	72
Bài 26. Xét tính đơn điệu dựa vào bảng biến thiên của hàm số	72
(A) Kiến thức cần nhớ.....	72
(B) Bài tập mẫu.....	72
(C) Bài tập tương tự và phát triển.....	72
(D) Bảng đáp án.....	77
Bài 27. Tìm cực trị của hàm số dựa vào đồ thị	77
(A) Kiến thức cần nhớ.....	77
(B) Bài tập mẫu.....	77
(C) Bài tập tương tự và phát triển.....	78
(D) Bảng đáp án.....	81
Bài 28. Lôgarit	81
(A) Kiến thức cần nhớ.....	81
(B) Bài tập mẫu.....	82
(C) Bảng đáp án.....	83
Bài 29. Ứng dụng tích phân tính thể tích vật thể tròn xoay	83
(A) Kiến thức cần nhớ.....	83
(B) Bài tập mẫu.....	84
(C) Bài tập tương tự và phát triển.....	84
(D) Bảng đáp án.....	86
Bài 30. Góc giữa hai mặt phẳng trong không gian	86
(A) Kiến thức cần nhớ.....	86
(B) Bài tập mẫu.....	87
(C) Bài tập tương tự và phát triển.....	87
(D) Bảng đáp án.....	90
LỜI GIẢI CHI TIẾT	91
Bài 31. Điểm biểu diễn số phức	91
(A) Kiến thức cần nhớ.....	91
(B) Bài tập mẫu.....	91
(C) Bài tập tương tự và phát triển.....	91
(D) Bảng đáp án.....	94

Bài 2. Hàm số logarit	95
(A) Kiến thức cần nhớ.....	95
(B) Bài tập mẫu.....	95
(C) Bài tập tương tự và phát triển.....	95
(D) Bảng đáp án.....	98
Bài 3. Đạo hàm hàm lũy thừa - Hàm mũ - logarit	98
(A) Kiến thức cần nhớ.....	98
(B) Bài tập mẫu.....	98
(C) Bài tập tương tự và phát triển.....	99
(D) Bảng đáp án.....	101
Bài 4. Phương trình mũ – Bất phương trình mũ	101
(A) Kiến thức cần nhớ.....	101
(B) Bài tập mẫu.....	102
(C) Bài tập tương tự và phát triển.....	102
(D) Bảng đáp án.....	105
Bài 5. Cấp số cộng, cấp số nhân	105
(A) Kiến thức cần nhớ.....	105
(B) Bài tập mẫu.....	106
(C) Bài tập tương tự và phát triển.....	106
(D) Bảng đáp án.....	108
Bài 6. Phương trình mặt phẳng	109
(A) Kiến thức cần nhớ.....	109
(B) Bài tập mẫu.....	109
(C) Bài tập tương tự và phát triển.....	109
(D) Bảng đáp án.....	112
Bài 7. Bài toán liên quan đến giao điểm giữa các đồ thị	112
(A) Kiến thức cần nhớ.....	112
(B) Bài tập mẫu.....	112
(C) Bài tập tương tự và phát triển.....	113
(D) Bảng đáp án.....	121
Bài 8. Tính chất tích phân	121
(A) Kiến thức cần nhớ.....	122
(B) Bài tập mẫu.....	122
(C) Bài tập tương tự và phát triển.....	122
(D) Bảng đáp án.....	126
Bài 9. Nhận dạng đồ thị hàm số	126
(A) Kiến thức cần nhớ.....	126
(B) Bài tập mẫu.....	127
(C) Bài tập tương tự và phát triển.....	127
(D) Bảng đáp án.....	133

Bài 10. Phương trình mặt cầu	133
(A) Kiến thức cần nhớ.....	133
(B) Bài tập mẫu.....	133
(C) Bài tập tương tự và phát triển.....	134
(D) Bảng đáp án.....	136
Bài 11. Góc giữa hai mặt phẳng	136
(A) Kiến thức cần nhớ.....	136
(B) Bài tập mẫu.....	136
(C) Bài tập tương tự và phát triển.....	136
(D) Bảng đáp án.....	140
Bài 12. Các phép toán cơ bản của số phức	140
(A) Kiến thức cần nhớ.....	140
(B) Bài tập mẫu.....	141
(C) Bài tập tương tự và phát triển.....	141
(D) Bảng đáp án.....	144
Bài 13. Tính thể tích khối lăng trụ đứng	144
(A) Kiến Thức Cần Nhớ.....	144
(B) Bài tập mẫu.....	145
(C) Bài tập tương tự và phát triển.....	145
(D) Bảng đáp án.....	148
Bài 14. Thể tích khối chóp	148
(A) Kiến thức cần nhớ.....	148
(B) Bài tập mẫu.....	149
(C) Bài tập tương tự và phát triển.....	149
(D) Bảng đáp án.....	154
Bài 15. Định nghĩa, tính chất, vị trí tương đối liên quan đến mặt cầu	154
(A) Kiến thức cần nhớ.....	155
(B) Bài tập mẫu.....	156
(C) Bài tập tương tự và phát triển.....	156
(D) Bảng đáp án.....	159
Bài 16. Số phức và các phép toán	159
(A) Kiến thức cần nhớ.....	159
(B) Bài tập mẫu.....	160
(C) Bài tập tương tự và phát triển.....	160
(D) Bảng đáp án.....	163
Bài 17. Hình nón, hình trụ	163
(A) Kiến thức cần nhớ.....	163
(B) Bài tập mẫu.....	164
(C) Bài tập tương tự và phát triển.....	164
(D) Bảng đáp án.....	167

Bài 18. Phương trình đường thẳng	167
(A) Kiến thức cần nhớ.....	167
(B) Bài tập mẫu.....	168
(C) Bài tập tương tự và phát triển.....	168
(D) Bảng đáp án.....	173
Bài 19. Tìm cực trị của hàm số biết bảng biến thiên hoặc đồ thị	173
(A) Kiến thức cần nhớ.....	173
(B) Bài tập mẫu.....	173
(C) Bài tập tương tự và phát triển.....	173
(D) Bảng đáp án.....	181
Bài 20. Đường tiệm cận	181
(A) Kiến thức cần nhớ.....	181
(B) Bài tập mẫu.....	181
(C) Bài tập tương tự và phát triển.....	181
(D) Bảng đáp án.....	184
Bài 21. Phương trình và bất phương trình logarit	184
(A) Kiến thức cần nhớ.....	185
(B) Bài tập mẫu.....	185
(C) Bài tập tương tự và phát triển.....	185
(D) Bảng đáp án.....	189
Bài 22. Phép đếm - Hoán vị - Chỉnh hợp - Tổ hợp	189
(A) Kiến thức cần nhớ.....	189
(B) Bài tập mẫu.....	190
(C) Bài tập tương tự và phát triển.....	190
(D) Bảng đáp án.....	193
Bài 23. Nguyên hàm	193
(A) Kiến thức cần nhớ.....	194
(B) Bài tập mẫu.....	194
(C) Bài tập tương tự và phát triển.....	194
(D) Bảng đáp án.....	197
Bài 24. Tích phân	197
(A) Kiến thức cần nhớ.....	197
(B) Bài tập mẫu.....	198
(C) Bài tập tương tự và phát triển.....	198
(D) Bảng đáp án.....	206
Bài 25. Nguyên hàm	206
(A) Kiến thức cần nhớ.....	206
(B) Bài tập mẫu.....	207
(C) Bài tập tương tự và phát triển.....	208
(D) Bảng đáp án.....	211

Bài 26. Xét tính đơn điệu dựa vào bảng biến thiên của hàm số	211
(A) Kiến thức cần nhớ.....	211
(B) Bài tập mẫu.....	211
(C) Bài tập tương tự và phát triển.....	211
(D) Bảng đáp án.....	217
Bài 27. Tìm cực trị của hàm số dựa vào đồ thị	217
(A) Kiến thức cần nhớ.....	217
(B) Bài tập mẫu.....	218
(C) Bài tập tương tự và phát triển.....	218
(D) Bảng đáp án.....	222
Bài 28. Lôgarit	222
(A) Kiến thức cần nhớ.....	222
(B) Bài tập mẫu.....	223
(C) Bảng đáp án.....	226
Bài 29. Ứng dụng tích phân tính thể tích vật thể tròn xoay	226
(A) Kiến thức cần nhớ.....	226
(B) Bài tập mẫu.....	226
(C) Bài tập tương tự và phát triển.....	226
(D) Bảng đáp án.....	230
Bài 30. Góc giữa hai mặt phẳng trong không gian	231
(A) Kiến thức cần nhớ.....	231
(B) Bài tập mẫu.....	231
(C) Bài tập tương tự và phát triển.....	232
(D) Bảng đáp án.....	238