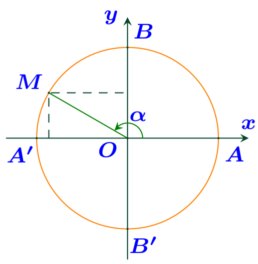
# TỔNG HỢP LÝ THUYẾT GÓC LƯỢNG GIÁC - GTLG

## A. GTLG GÓC LƯỢNG GIÁC

- **Đổi đơn vị đo:** $\boxed{1 \text{ vòng} = 360^\circ = 2\pi\ rad}$, $\boxed{180^\circ = \pi rad}$

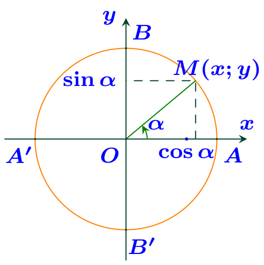
| Độ | $0^\circ$ | $30^\circ$ | $45^\circ$ | $60^\circ$ | $90^\circ$ | $120^\circ$ | $135^\circ$ | $150^\circ$ | $180^\circ$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Radian | $0$ | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\frac{3\pi}{4}$ | $\frac{5\pi}{6}$ | $\pi$ |

- **Độ dài cung tròn** bán kính $R$ số đo $\alpha$ rad là $\boxed{l = R\alpha}$.
- **Điểm biểu diễn góc lượng giác $\alpha$** lên đường tròn lượng giác là $M$. Khi đó $M$ cũng biểu diễn các góc lượng giác $\alpha + k2\pi$.
  Góc $\alpha$ và $\beta$ có chung điểm biểu diễn khi $\boxed{\alpha - \beta = k2\pi}$ (chẵn lần $\pi$)




### Định nghĩa GTLG

- $\cos\alpha = x$
- $\sin\alpha = y$
- $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{y}{x}$
- $\cot\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \dfrac{x}{y}$



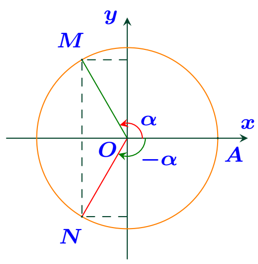

### Các công thức lượng giác cơ bản

- $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$
- $1 + \tan^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$ $\left(\alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right)$
- $1 + \cot^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$ $(\alpha \neq k\pi, k \in \mathbb{Z})$
- $\tan\alpha \cdot \cot\alpha = 1$ $\left(\alpha \neq \dfrac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right)$

*Chú ý:* $\tan\alpha$ *xác định khi* $\alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$ *và* $\cot\alpha$ *xác định khi* $\alpha \neq k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$.

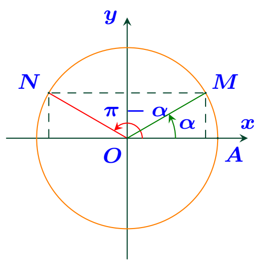
### cos đối

- $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$
- $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$
- $\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$
- $\cot(-\alpha) = -\cot\alpha$



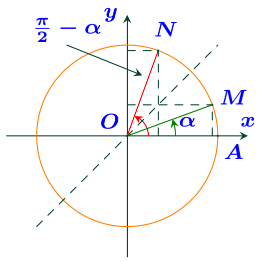

### sin bù

- $\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$
- $\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$
- $\tan(\pi - \alpha) = -\tan\alpha$
- $\cot(\pi - \alpha) = -\cot\alpha$



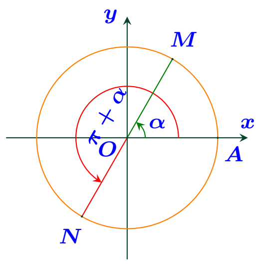

### phụ chéo

- $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha$
- $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha$
- $\tan\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot\alpha$
- $\cot\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right) = \tan\alpha$




### $\pm\pi$ tan, cot

- $\sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha$
- $\cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha$
- $\tan(\pi + \alpha) = \tan\alpha$
- $\cot(\pi + \alpha) = \cot\alpha$



# B. CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC

## 1. Công thức cộng

**Công thức cộng**

- $\cos(a-b) = \cos a\cos b + \sin a\sin b$.
- $\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b$.
- $\sin(a-b) = \sin a\cos b - \sin b\cos a$.
- $\sin(a+b) = \sin a\cos b + \sin b\cos a$.
- $\tan(a-b) = \dfrac{\tan a - \tan b}{1+\tan a\tan b}$.
- $\tan(a+b) = \dfrac{\tan a + \tan b}{1-\tan a\tan b}$.

**Trường hợp đặc biệt**

- $\sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$.
- $\sqrt{3}\sin x + \cos x = 2\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right) = 2\cos\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)$.
- $\sin x + \sqrt{3}\cos x = 2\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right) = 2\cos\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)$.

## 2. Công thức nhân đôi

**Công thức nhân đôi**

- $\sin 2a = 2\sin a\cos a$.
- $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$.
- $\tan 2a = \dfrac{2\tan a}{1-\tan^2 a}$.

**Công thức hạ bậc**

- $\sin^2 a = \dfrac{1-\cos 2a}{2}$.
- $\cos^2 a = \dfrac{1+\cos 2a}{2}$.
- $\tan^2 a = \dfrac{1-\cos 2a}{1+\cos 2a}$.

*Áp dụng công thức cộng cho* $\mathbf{3a = a + 2a}$, *ta có công thức nhân ba:*

**Công thức nhân ba**

- $\sin 3a = 3\sin a - 4\sin^3 a$.
- $\cos 3a = 4\cos^3 a - 3\cos a$.
- $\tan 3a = \dfrac{3\tan a - \tan^3 a}{1-3\tan^2 a}$.

## 3. Công thức biến đổi tích thành tổng

**Công thức tích thành tổng**

- $\cos a\cos b = \dfrac{1}{2}\left[\cos(a-b)+\cos(a+b)\right]$.
- $\sin a\sin b = \dfrac{1}{2}\left[\cos(a-b)-\cos(a+b)\right]$.
- $\sin a\cos b = \dfrac{1}{2}\left[\sin(a-b)+\sin(a+b)\right]$.

## 4. Công thức biến đổi tổng thành tích

Công thức biến đổi tổng thành tích được xây dựng bằng cách $a = \dfrac{a+b}{2}, b = \dfrac{a-b}{2}$ trong công thức biến đổi tích thành tổng.

**Công thức tổng thành tích**

- $\cos a + \cos b = 2\cos\dfrac{a+b}{2}\cos\dfrac{a-b}{2}$.
- $\cos a - \cos b = -2\sin\dfrac{a+b}{2}\sin\dfrac{a-b}{2}$.
- $\sin a + \sin b = 2\sin\dfrac{a+b}{2}\cos\dfrac{a-b}{2}$.
- $\sin a - \sin b = 2\cos\dfrac{a+b}{2}\sin\dfrac{a-b}{2}$.

## C. HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

### Hàm số chẵn, hàm số lẻ

- Hàm số $f(x)$ được gọi là **hàm số chẵn** nếu $\forall x \in \mathscr{D}$ thì $-x \in \mathscr{D}$ và $f(-x) = f(x)$. Đồ thị của một **hàm số chẵn** nhận **trục tung** là trục đối xứng.
- Hàm số $f(x)$ được gọi là **hàm số lẻ** nếu $\forall x \in \mathscr{D}$ thì $-x \in \mathscr{D}$ và $f(-x) = -f(x)$. Đồ thị của một **hàm số lẻ** nhận **gốc toạ độ** là tâm đối xứng.

Các hàm số $y = \sin x$, $y = \tan x$, $y = \cot x$ là hàm số *lẻ*, hàm số $y = \cos x$ là hàm số *chẵn*.

### Hàm số tuần hoàn

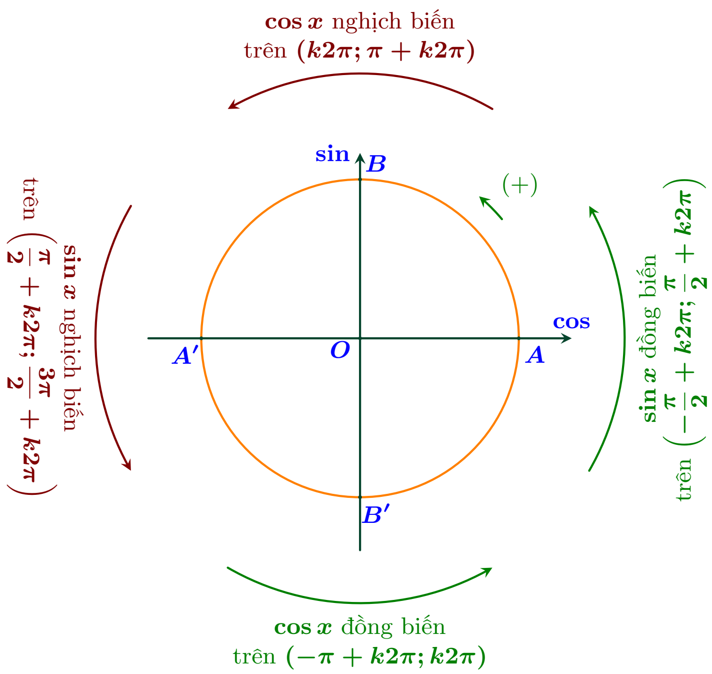
ĐỊNH NGHĨA 0.1. Hàm số $y = f(x)$ có tập xác định $\mathscr{D}$ được gọi là **hàm số tuần hoàn** nếu tồn tại số $T \neq 0$ sao cho với mọi $x \in \mathscr{D}$ ta có:

- $x + T \in \mathscr{D}$ và $x - T \in \mathscr{D}$;
- $f(x + T) = f(x)$.

Số $T$ dương nhỏ nhất thỏa mãn các điều kiện trên (nếu có) được gọi là **chu kì** của hàm số tuần hoàn đó.

Các hàm số $y = A\sin\omega x$ và $y = A\cos\omega x$ $(\omega > 0)$ là những hàm số tuần hoàn với chu kì $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$.

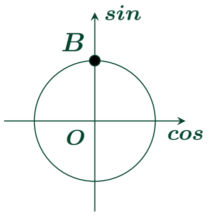
Các hàm số $y = A\tan\omega x$ và $y = A\cot\omega x$ $(\omega > 0)$ là những hàm số tuần hoàn với chu kì $T = \dfrac{\pi}{\omega}$.



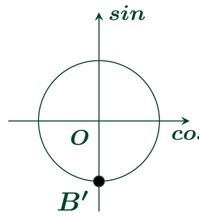

## D. PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

### Phương trình $\sin x = a$.

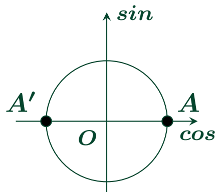
- Trường hợp $a > 1$ hoặc $a < -1$ phương trình vô nghiệm.
- Trường hợp $a \in \{-1; 0; 1\}$.




$\boxed{\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi}$




$\boxed{\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi}$

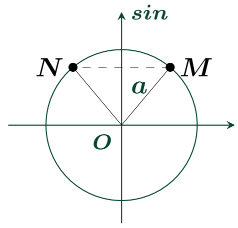



$\boxed{\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi}$

☑ Trường hợp $a \in \left\{\pm\dfrac{1}{2}; \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}; \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right\}$ hoặc $a \in (-1;1)$. Ta bấm máy SHIFT sin để đổi tìm góc $\alpha$ hoặc $\beta°$.

① Công thức theo đơn vị rad: $\sin x = \sin\alpha \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \alpha + k2\pi \\ x = \pi - \alpha + k2\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$

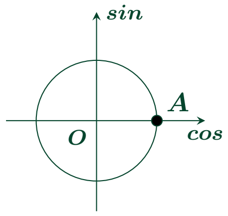
② Công thức theo đơn vị độ: $\sin x = \sin\beta° \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \beta° + k360° \\ x = 180° - \beta° + k360° \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$



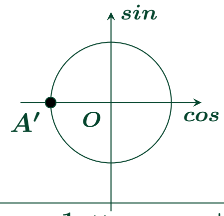

## Phương trình $\cos x = a$.

☑ Trường hợp $a > 1$ hoặc $a < -1$ phương trình vô nghiệm.

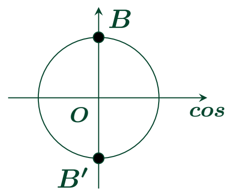
☑ Trường hợp $a \in \{-1; 0; 1\}$.




$\boxed{\cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi}$




$\boxed{\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi}$

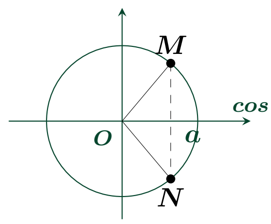



$\boxed{\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi}$

☑ Trường hợp $a \in \left\{\pm\dfrac{1}{2}; \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}; \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right\}$ hoặc $a \in (-1;1)$. Ta bấm máy SHIFT cos để tìm góc $\alpha$ hoặc $\beta°$ tương ứng.

① Công thức theo đơn vị rad: $\cos x = \cos\alpha \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \alpha + k2\pi \\ x = -\alpha + k2\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$

② Công thức theo đơn vị độ: $\cos x = \cos\beta° \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \beta° + k360° \\ x = -\beta° + k360° \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$




## Phương trình $\tan x = a$ và $\cot x = b$.

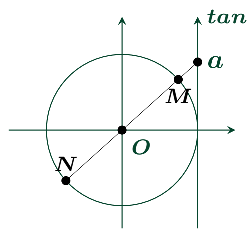
☑ Trường hợp $a \in \left\{0; \pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}; \pm 1; \pm\sqrt{3}\right\}$ hoặc $a$ bất kì. Ta bấm máy SHIFT tan để tìm góc $\alpha$ hoặc $\beta°$ tương ứng.

① Công thức theo đơn vị rad:

$$\tan x = \tan\alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

② Công thức theo đơn vị độ:

$$\tan x = \tan\beta° \Leftrightarrow x = \beta° + k180°,\ k \in \mathbb{Z}$$




★ **Phương trình $\cot x = b$.** $b \in \left\{\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}; \pm 1; \pm\sqrt{3}\right\}$ hoặc $b$ bất kì. Ta bấm máy SHIFT tan $\boxed{\frac{1}{b}}$ để tìm góc $\alpha$ hoặc $\beta°$ tương ứng. Riêng $b = 0$ thì $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$. Công thức nghiệm tương tự phương trình $\tan x = a$