

Bài 2. HÀM SỐ BẬC HAI

A. KIẾN THỨC TRỌNG TÂM

1. Khái niệm hàm số bậc hai

Hàm số bậc hai theo biến x là hàm số cho bởi công thức $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ với a, b, c là các số thực và $a \neq 0$.

Tập xác định của hàm số bậc hai là $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

2. Đồ thị của hàm số bậc hai

- ✓ Đồ thị hàm số bậc hai $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ là một đường parabol có **đỉnh** $I\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$, có **trục đối xứng** là đường thẳng $x = -\frac{b}{2a}$. Parabol này quay bề lõm lên trên nếu $a > 0$, xuống dưới nếu $a < 0$.
- ✓ Để vẽ đường parabol $y = ax^2 + bx + c$ ta tiến hành theo các bước sau
 - Xác định tọa độ đỉnh $I\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$;
 - Vẽ trục đối xứng $x = -\frac{b}{2a}$;
 - Xác định tọa độ các giao điểm của parabol với trục tung, trục hoành (nếu có) và một vài điểm đặc biệt trên parabol;
 - Vẽ Parabol.

Nhận xét.

Với $a > 0$	Với $a < 0$
Hàm số nghịch biến trên $(-\infty; -\frac{b}{2a})$; Hàm số đồng biến trên $(-\frac{b}{2a}; +\infty)$; $-\frac{\Delta}{4a}$ là giá trị nhỏ nhất của hàm số.	Hàm số nghịch biến trên $(-\frac{b}{2a}; +\infty)$; Hàm số đồng biến trên $(-\infty; -\frac{b}{2a})$; $-\frac{\Delta}{4a}$ là giá trị lớn nhất của hàm số.

B. CÁC DẠNG TOÁN

1

Tập xác định, bảng biến thiên, tính đơn điệu, GTLN, GTNN của hàm số bậc hai

Với $a > 0$			
x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
y	$+\infty$	$\frac{-\Delta}{4a}$	$+\infty$

Với $a < 0$			
x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
y	$+\infty$	$\frac{-\Delta}{4a}$	$-\infty$

VÍ DỤ 1. Xét sự biến thiên của hàm số $y = x^2 - 2x + 3$.

VÍ DỤ 2. Xét tính đơn điệu của hàm số $y = -x^2 + 2x - 3$.

VÍ DỤ 3. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^2 - 4x + 5$.

VÍ DỤ 4. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = -\sqrt{2}x^2 + 4x$.

QUICK NOTE

QUICK NOTE

2

Xác định hàm số bậc hai

Ta thực hiện theo các bước sau.

Bước 1: Giả sử parabol (P): $y = ax^2 + bx + c$ với $a \neq 0$.

Bước 2: Dựa vào giả thiết đề bài để xác định a, b, c .

Một số giả thiết thường gặp ở bước này và cách xử lí.

✓ Parabol đi qua điểm $M(x_0; y_0) \Rightarrow y_0 = ax_0^2 + bx_0 + c$.

✓ Parabol có trục đối xứng $x = x_0 \Rightarrow x_0 = -\frac{b}{2a}$.

✓ Parabol có đỉnh $I(x_0; y_0) \Rightarrow \begin{cases} x_0 = -\frac{b}{2a} \\ y_0 = -\frac{\Delta}{4a} \end{cases}$ hoặc $y_0 = ax_0^2 + bx_0 + c$

✓ Parabol có giá trị nhỏ nhất (hoặc giá trị lớn nhất) bằng $y_0 \Rightarrow \begin{cases} a > 0 \\ y_0 = -\frac{\Delta}{4a} \end{cases}$
 (hoặc $\begin{cases} a < 0 \\ y_0 = -\frac{\Delta}{4a} \end{cases}$).

Bước 3: Kết luận.

VÍ DỤ 1. Xác định parabol $y = ax^2 + bx + 3$, biết rằng parabol đi qua hai điểm $A(1; 2)$ và $B(-2; 11)$.

VÍ DỤ 2. Cho parabol (P): $y = -x^2 + bx + c$. Xác định b, c biết (P) đi qua điểm $M(-2; 4)$ và có trục đối xứng $x = -2$.

3

Đồ thị của hàm số bậc hai

Để vẽ đường parabol $y = ax^2 + bx + c$ ta tiến hành theo các bước sau

a) Xác định tọa độ đỉnh $I\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$;

b) Vẽ trục đối xứng $x = -\frac{b}{2a}$;

c) Xác định tọa độ các giao điểm của parabol với trực tung, trực hoành (nếu có) và một vài điểm đặc biệt trên parabol;

d) Vẽ Parabol.

VÍ DỤ 1. Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = x^2 - 2x$.

VÍ DỤ 2. Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - 2$.

4

Bài toán tương giao

✓ Dựa vào các công thức cần nhớ để tìm tọa độ của đỉnh, giao điểm của parabol với các trục tọa độ. Tuy nhiên, khi tìm tọa độ của đỉnh I thì ta chỉ cần tìm hoành độ $x_0 = -\frac{b}{2a}$. Rồi sau đó thế x_0 vào hàm số ban đầu để tìm $y_0 = ax_0^2 + bx_0 + c$ là tung độ của đỉnh I .

✓ Dựa vào phương trình hoành độ giao điểm để xác định giao điểm của parabol (P) với đường thẳng.

VÍ DỤ 1. Cho hàm số $y = x^2 - 4x + 3$ có đồ thị là parabol (P). Tìm tọa độ của đỉnh, giao điểm của đồ thị với trực tung và trực hoành.

VÍ DỤ 2. Cho hàm số $y = -x^2 - 3x + 1$ có đồ thị là parabol (P). Tìm tọa độ của đỉnh, giao

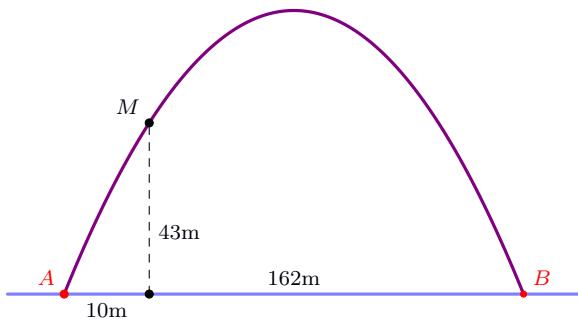
điểm của đồ thị với trục tung và trục hoành.

5

Bài toán thực tế liên quan đến hàm số bậc hai

VÍ DỤ 1. Một viên bi rơi tự do từ độ cao 19,6 m xuống mặt đất. Độ cao h (mét) so với mặt đất của viên bi trong khi rơi phụ thuộc vào thời gian t (giây) theo công thức $h = 19,6 - 4,9t^2$, $h, t \geq 0$. Hỏi sau bao nhiêu giây kể từ khi rơi viên bi chạm đất?

VÍ DỤ 2. Cổng Arch tại thành phố St Louis của Mỹ có hình dạng là một parabol (hình vẽ). Biết khoảng cách giữa hai chân cổng bằng 162m. Trên thành cổng, tại vị trí có độ cao 43m so với mặt đất (diễn M), người ta thả một sợi dây chạm đất (dây căng theo phương vuông góc với đất). Vị trí chạm đất của đầu sợi dây này cách cổng A một đoạn 10m. Giả sử các số liệu trên là chính xác. Hãy xác tính độ cao của cổng Arch (tính từ mặt đất đến điểm cao nhất của cổng).



C. BÀI TẬP TỰ LUẬN

1. Tập xác định, bảng biến thiên, tính đơn điệu, GTLN-GTNN

BÀI 1. Lập bảng biến thiên của hàm số $y = x^2 + 6x + 5$.

BÀI 2. Lập bảng biến thiên của hàm số $y = x^2 + 4x + 3$.

2. Xác định hàm số bậc hai

BÀI 3. Cho hàm số $y = x^2 + ax + b$. Tìm các hệ số a, b biết đồ thị hàm số đi qua hai điểm $M(-1; 0)$ và $N(-2; -1)$.

BÀI 4. Xác định Parabol (P): $y = ax^2 + bx + c$ biết (P) đi qua ba điểm $A(1; 1)$, $B(-3; 2)$, $C(2; 5)$.

BÀI 5. Tìm parabol $y = ax^2 + bx + c$, biết rằng parabol đó

a) đi qua điểm $P(-3; 9)$ và có trục đối xứng $x = -1$;

b) có đỉnh $I(-2; 19)$.

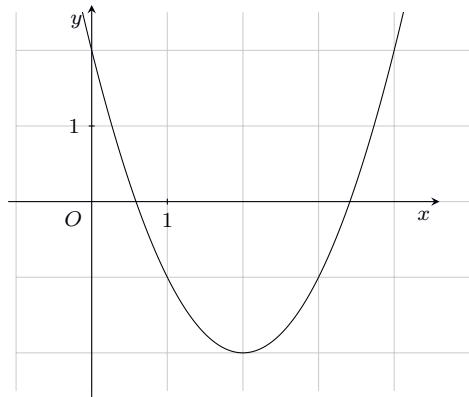
3. Đồ thị của hàm số bậc hai

BÀI 6. Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = -x^2 + 4x - 3$.

BÀI 7. Cho hàm số $y = x^2 - 4x + 3$. Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số.

BÀI 8.

Xác định dấu của các hệ số a, b, c và dấu của biệt thức $\Delta = b^2 - 4ac$ của hàm số bậc hai $y = ax^2 + bx + c$, biết đồ thị của nó có dạng như hình bên.



QUICK NOTE

QUICK NOTE

4. Bài toán tương giao

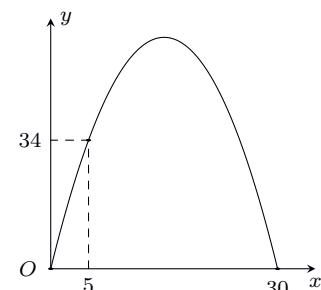
BÀI 9. Tìm tọa độ giao điểm của hai đồ thị hàm số $y = x^2 - x + 1$ và $y = 2x - 1$.

BÀI 10. Tìm tham số m để (P) : $y = x^2 - 2x$ cắt đường thẳng $y = m$ tại hai điểm phân biệt.

5. Bài toán thực tế liên quan

BÀI 11.

Tháp cầu vượt hai tầng Ngã ba Huế là điểm nhấn kiến trúc mới cho đô thị Đà Nẵng, có hình parabol. Một nhóm học sinh muốn đo chiều cao của tháp bằng cách lập một hệ trục tọa độ sao cho một chân tháp đi qua gốc tọa độ, chân kia của tháp có tọa độ $(30; 0)$, và đo được một điểm M trên tháp có tọa độ $(5; 34)$. Tính chiều cao của tháp.



BÀI 12. Một quả bóng cầu thủ sút lên rồi rơi xuống theo quỹ đạo là parabol. Biết rằng ban đầu quả bóng được sút lên từ độ cao 1 m, sau đó 1 giây nó đạt độ cao 10 m và 3,5 giây nó ở độ cao 6,25 m. Hỏi độ cao cao nhất mà quả bóng đạt được là bao nhiêu mét?

BÀI 13. Một rạp chiếu phim có sức chứa 1 000 người. Với giá vé là 40 000 đồng, trung bình sẽ có khoảng 300 người đến rạp xem phim mỗi ngày. Để tăng số lượng vé bán ra, rạp chiếu phim đã khảo sát thị trường và thấy rằng nếu giá vé cứ giảm 10 000 đồng thì sẽ có thêm 100 người đến rạp mỗi ngày.

- Tìm công thức của hàm số $R(x)$ mô tả doanh thu từ tiền bán vé mỗi ngày của rạp chiếu phim khi giá vé là x nghìn đồng.
- Tìm mức giá vé để doanh thu từ tiền bán vé mỗi ngày của rạp là lớn nhất

BÀI 14. Một hòn đá được ném lên trên theo phương thẳng đứng. Khi bỏ qua sức cản không khí, chuyển động của hòn đá tuân theo phương trình sau

$$y = -4,9t^2 + mt + n,$$

với m, n là các hằng số. Ở đây $t = 0$ là thời điểm hòn đá được ném lên, $y(t)$ là độ cao của hòn đá tại thời điểm t (giây) sau khi ném và $y = 0$ ứng với bóng chạm đất.

- Tìm phương trình chuyển động của hòn đá, biết rằng điểm ném cách mặt đất 1,5 m và thời gian để hòn đá đạt độ cao lớn nhất là 1,2 giây sau khi ném.
- Tìm độ cao của hòn đá sau 2 giây kể từ khi bắt đầu ném.
- Sau bao lâu kể từ khi ném, hòn đá rơi xuống mặt đất (Kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai)?

D. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

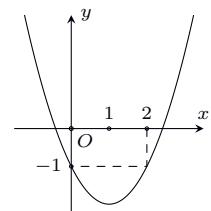
CÂU 1. Hàm số nào sau đây là hàm số bậc hai?

- A** $y = 2x + 1$. **B** $y = 3x - 4$. **C** $y = x^2 - 1$. **D** $y = \frac{x+2}{x-1}$.

CÂU 2.

Đồ thị hình bên là của hàm số nào sau đây?

- A** $y = -x^2 - 2x + 3$. **B** $y = x^2 + 2x - 2$.
C $y = 2x^2 - 4x - 2$. **D** $y = x^2 - 2x - 1$.



CÂU 3. Bảng biến thiên bên dưới là của hàm số nào?

x	$-\infty$	2	$+\infty$
y	$+\infty$		$+\infty$

Arrows indicate the behavior of the function: from $+\infty$ to 2, then to $-\infty$ (labeled -6), and finally increasing to $+\infty$.

- (A)** $y = -x^2 + 4x + 2$. **(B)** $y = x^2 - 4x - 2$.
(C) $y = x^2 - 4x + 1$. **(D)** $y = x^2 - 4x + 2$.

QUICK NOTE

CÂU 4. Toa độ đỉnh của đồ thị hàm số $y = 2x^2 + 5x - 7$ là

- A** $\left(\frac{-5}{4}; \frac{-81}{8}\right)$. **B** $\left(\frac{-5}{4}; \frac{-81}{2}\right)$. **C** $\left(\frac{-5}{2}; \frac{-81}{2}\right)$. **D** $\left(\frac{-5}{2}; \frac{-81}{4}\right)$.

CÂU 5. Cho hàm số bậc hai $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) có đồ thị (P), tọa độ đỉnh I của nó được xác định bởi công thức nào?

- $$\textcircled{A} \quad I\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right). \quad \textcircled{B} \quad I\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{2a}\right). \quad \textcircled{C} \quad I\left(-\frac{b}{a}; -\frac{\Delta}{4a}\right). \quad \textcircled{D} \quad I\left(\frac{b}{a}; -\frac{\Delta}{4a}\right).$$

CÂU 6. Parabol $y = x^2 + 5x + 6$ có toa độ đỉnh là

- A** $\left(5; \frac{1}{2}\right)$. **B** $\left(-\frac{5}{2}; \frac{1}{2}\right)$. **C** $\left(\frac{5}{2}; \frac{1}{4}\right)$. **D** $\left(-\frac{5}{2}; -\frac{1}{4}\right)$.

CÂU 7. Hoành độ đỉnh của parabol (P) : $y = 2x^2 - 4x + 3$ bằng

- A** -2 **B** 2 **C** -1 **D** 1

CÂU 8. Đường thẳng nào sau đây là trục đối xứng của đồ thị hàm số $y = 2x^2 + 8x + 5$?

- A** $x \equiv -2$. **B** $x \equiv 2$. **C** $x \equiv 4$. **D** $x \equiv -4$.

CÂU 9. Hàm số $y = x^2 + 3x + 7$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A** $(-\infty; -\frac{3}{2})$. **B** $(-\frac{3}{2}; +\infty)$. **C** $(-\infty; +\infty)$. **D** $(-3; -1)$.

CÂU 10. Cho hàm số $y = -x^2 - 2x + 8$. Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề đúng?

- A** Hàm số nghịch biến trên $(2; 3)$. **B** Hàm số nghịch biến trên $(-\infty; -1)$.
C Hàm số đồng biến trên $(-1; +\infty)$. **D** hàm số đồng biến trên $(-4; 2)$.

CÂU 11. Cho hàm số $y = x^2 - 2x - 1$, mệnh đề nào sai?

- A** Hàm số đồng biến trên $(1; +\infty)$.
 - B** Hàm số nghịch biến trên $(-\infty; 1)$.
 - C** Đồ thị hàm số có đỉnh $I(1; -2)$.
 - D** Đồ thị hàm số có trục đối xứng $x = -2$.

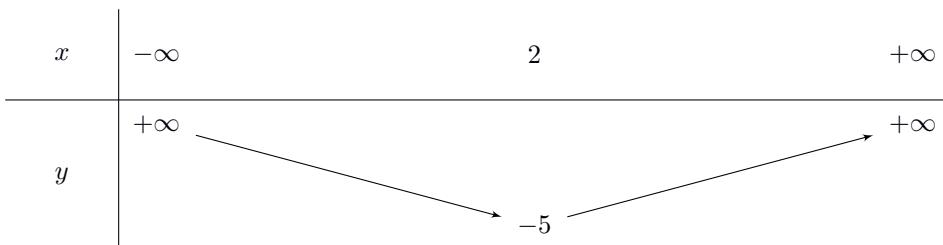
CÂU 12. Cho hàm số $y = x^2 - 2x - 3$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A** Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 2)$.
 - B** Đồ thị hàm số là parabol có đỉnh $I(2; -3)$.
 - C** Hàm số đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$.
 - D** Đồ thị hàm số cắt trục tung tại $M(3; 0)$.

CÂU 13. Cho hàm số: $y = x^2 - 2x - 1$, mệnh đề nào sai?

- A** Hàm số nghịch biến trên $(-\infty; 1)$.
 - B** Đồ thị hàm số có đỉnh $I(1; -2)$.
 - C** Hàm số đồng biến trên $(1; +\infty)$.
 - D** Đồ thị hàm số có trục đối xứng: $x = -2$.

CÂU 14. Bảng biến thiên ở dưới là bảng biến thiên của hàm số nào trong các hàm số được cho ở bốn phương án A, B, C, D sau đây?



- (A)** $y = -x^2 + 4x$. **(B)** $y = -x^2 + 4x - 9$.
(C) $y = x^2 - 4x - 1$. **(D)** $y = x^2 - 4x - 5$.

QUICK NOTE

CÂU 15. Tìm tất cả các giá trị của b để hàm số $y = x^2 + 2(b+6)x + 4$ đồng biến trên khoảng $(6; +\infty)$.

- Ab \geq 0. **Bb = -12. **Cb \geq -12. **Db \geq -9.********

CÂU 16. Cho hàm số $y = -x^2 + 4x + 5$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A\max_{x \in (0;3)} y = 9. **B\min_{x \in (0;3)} y = 8. **C\max_{x \in (0;3)} y = 8. **D\min_{x \in (0;3)} y = 5.********

CÂU 17. Tìm giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ m nhất của hàm số $y = f(x) = x^2 - 3x$ trên đoạn $[0; 2]$.

- AM = -2; $m = -\frac{9}{4}$. **BM = \frac{9}{4}; $m = 0$.
CM = 0; $m = -\frac{9}{4}$. **DM = 2; $m = -\frac{9}{4}$.******

CÂU 18. Tìm m để hàm số $y = x^2 - 2x + 2m + 3$ có giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[2; 5]$ bằng -3 .

- Am = -9. **Bm = 0. **Cm = -3. **Dm = 1.********

CÂU 19. Cho hàm số $y = x^2 - 2(m+1)x + 3$ (với m là tham số). Trên đoạn $[-2018; 2018]$ có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$?

- ABCD**

CÂU 20. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = x^2 + (m-1)x + 2m - 1$ đồng biến trên $(-2; +\infty)$. Khi đó tập hợp $(-10; 10) \cap S$ là tập hợp nào?

- A(-10; 5). **B[5; 10). **C(5; 10). **D(-10; 5].********

CÂU 21. Parabol (P) : $y = ax^2 + bx + 1$ đi qua hai điểm $A(1; 4)$ và $B(-1; 2)$ là

- Ay = x^2 + 2x + 1. **By = 2x^2 + x + 1.
Cy = -x^2 + 4x + 1. **Dy = -2x^2 - x + 1.******

CÂU 22. Parabol $y = ax^2 + bx + c$ đi qua $A(0; -1)$, $B(1; -1)$, $C(-1; 1)$ có phương trình là

- Ay = x^2 - x - 1. **By = x^2 + x - 1. **Cy = x^2 + x + 1. **Dy = x^2 - x + 1.********

CÂU 23. Parabol $y = ax^2 + bx + c$ đi qua $A(0; 6)$ và có đỉnh $I(-2; 4)$ có phương trình là

- Ay = x^2 + 2x + 6. **By = \frac{1}{2}x^2 + 2x + 6.
Cy = x^2 + x + 4. **Dy = x^2 + 6x + 6.******

CÂU 24. Cho (P) : $y = x^2 + bx + c$ có đỉnh $I(-1; 4)$. Tính $M = 2b + c$?

- AM = 7. **BM = 9. **CM = -3. **DM = -4.********

CÂU 25. Parabol $y = ax^2 - 4x + c$ nhận $I(-2; -1)$ làm đỉnh, có phương trình là

- Ay = x^2 - 4x - 1. **By = -x^2 - 4x - 5.
Cy = -x^2 - 4x - 13. **Dy = x^2 - 4x - 5.******

CÂU 26. Cho Parabol (P) : $y = (m-1)x^2 - 2(m-2)x + m - 3$. Tìm m để (P) có đỉnh là $S(-1; -2)$.

- A\frac{1}{3}. **BC\frac{3}{2}. **D\frac{2}{3}.******

CÂU 27. Xác định hàm số $y = ax^2 + bx + c$ biết đồ thị hàm số đi qua điểm $A(-1; -8)$ và có đỉnh $I(2; 1)$.

- Ay = -x^2 + 4x - 3. **By = x^2 - 4x + 3.
Cy = -x^2 - 4x - 3. **Dy = x^2 - 2x - 1.******

CÂU 28. Cho hàm số $y = ax^2 + 2x + c$, biết rằng hàm số đạt giá trị nhỏ nhất bằng 1 tại điểm $x = -1$. Khi đó giá trị của a và c là

- Aa = 1, c = 2. **Ba = 1, c = -2. **Ca = -1, c = 2. **Da = 1, c = 5.********

CÂU 29. Biết hàm số $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) đạt giá trị lớn nhất bằng 3 tại $x = 2$ và có đồ thị hàm số đi qua điểm $A(0; -1)$. Tính tổng $S = a + b + c$.

- AS = 4. **BS = 2. **CS = -4. **DS = -1.********

CÂU 30. Biết rằng parabol (P) : $y = ax^2 - bx + c$ cắt trục tung tại điểm có tung độ là 4, đi qua điểm $A(3; 7)$ và có trục đối xứng là đường thẳng $x = 2$. Giá trị của biểu thức $S = abc$ là

- AS = 8. **BS = -16. **CS = -8. **DS = 16.********

CÂU 31. Xác định parabol (P) : $y = ax^2 + bx + c$, biết rằng (P) có đỉnh $I(2; -1)$ và cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng -3 .

- Ay = x^2 - 2x - 3. **By = -x^2 - 2x - 3.
Cy = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - 3. **Dy = \frac{1}{2}x^2 - 2x - 3.******

CÂU 32. Xác định parabol $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$), biết rằng đỉnh của parabol đó có tung độ bằng -25 , đồng thời parabol đó cắt trục hoành tại hai điểm $A(-4; 0)$ và $B(6; 0)$.

CÂU 33. Cho các số nguyên a, c sao cho parabol $y = ax^2 - 4x + c$ đi qua điểm $M(4; 2)$ và có tung độ đỉnh là -2 . Tính tổng $S = a + c$.

- AS = 3. **BS = 4. **CS = -1. **DS = 1.********

CÂU 34. Tìm các số thực a, c ($c > 0$) sao cho parabol (P) : $y = ax^2 + 2x + c$ đi qua điểm $M(2; 3)$ và có tung độ đỉnh là 4 .

- Aa = 1, c = -5. **Ba = -2, c = 7. **Ca = 2, c = -9. **Da = -1, c = 3.********

CÂU 35. Cho Parabol (P) : $y = ax^2 + bx + c$ ($a, b, c \in \mathbb{Z}$). Biết (P) đi qua điểm $A(1; -1)$, $B(3; -11)$ và đỉnh của (P) có tung độ bằng $-\frac{7}{8}$. Tính $S = a + b - c$.

- AS = 3. **BS = 5. **CS = 7. **DS = 4.********

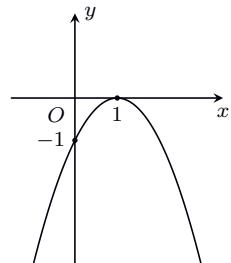
CÂU 36. Cho hàm số $y = x^2 - 2(m+2)x - m+3$ có đồ thị là parabol (P) . Khi m thay đổi, đỉnh I của (P) luôn di chuyển trên một parabol cố định. Phương trình parabol đó là

- Ay = x^2 - 4x + 2. **By = -x^2 - x + 5.
Cy = -x^2 + 4x - 3. **Dy = -x^2 - 5x - 1.******

CÂU 37.

Hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào?

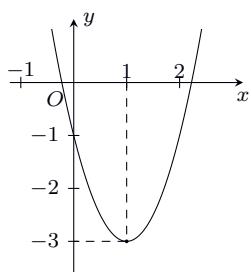
- Ay = -x^2 + 2x - 1. **By = x^2 - 2x - 1.
Cy = -x^2 - 2x - 1. **Dy = -x^2 + 2x + 3.******



CÂU 38.

Cho hàm số $y = ax^2 + bx + c$ với ($a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$) có đồ thị như hình bên. Đồ thị bên là của hàm số nào?

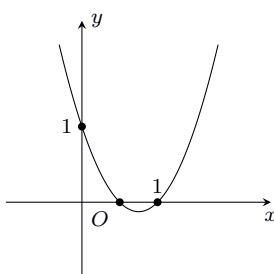
- Ay = 2x^2 - 4x - 1. **By = x^2 - 4x - 1.
Cy = 2x^2 - 4x + 1. **Dy = -2x^2 - 4x - 1.******



CÂU 39.

Hàm số nào trong 4 phương án liệt kê ở A, B, C, D dưới đây có đồ thị như hình bên?

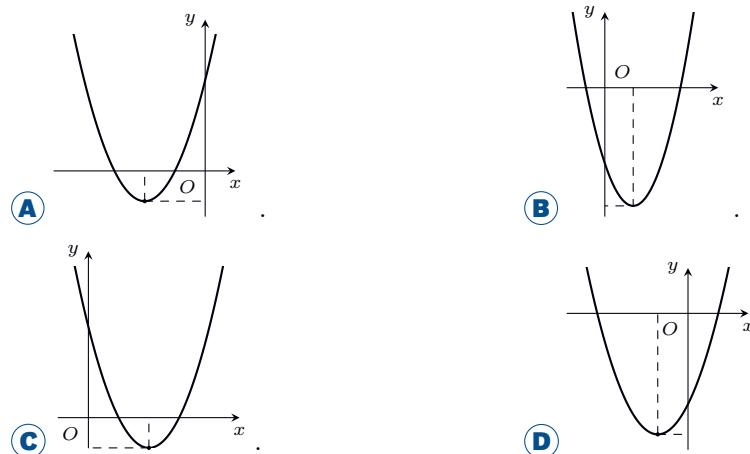
- Ay = -x^2 + 3x - 1. **By = -2x^2 + 3x - 1.
Cy = 2x^2 - 3x + 1. **Dy = x^2 - 3x + 2.******



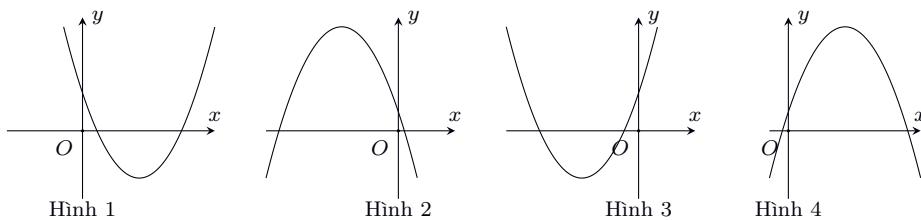
CÂU 40. Đồ thị hàm số $y = 4x^2 - 3x - 1$ có dạng nào trong các dạng sau đây?

QUICK NOTE

QUICK NOTE

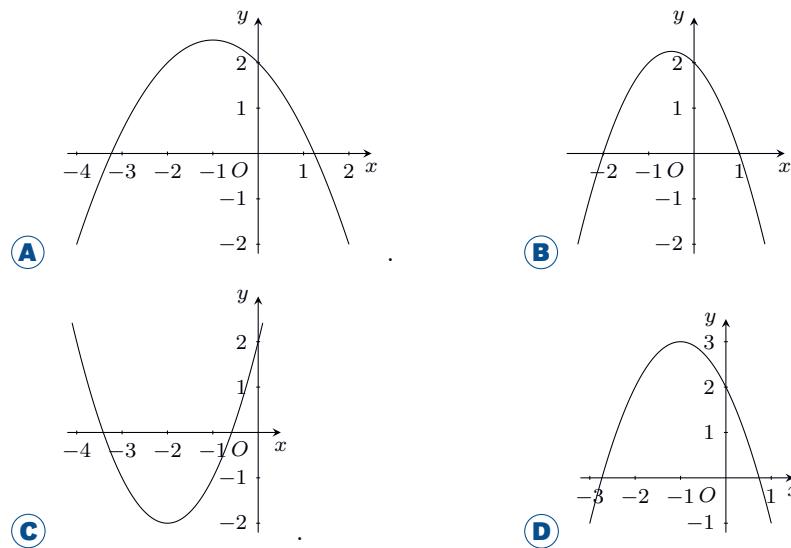


CÂU 41. Cho hàm số $y = ax^2 + bx + c$ với $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$. Đồ thị của hàm số là hình nào trong các hình dưới đây?



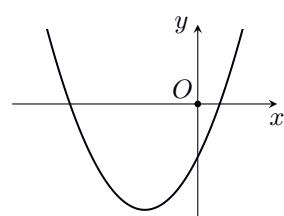
- A** Hình (4). **B** Hình (3). **C** Hình (1). **D** Hình (2).

CÂU 42. Cho hàm số $y = -\frac{1}{2}x^2 - x + 2$ có đồ thị là hình nào dưới đây?



CÂU 43. Nếu hàm số $y = ax^2 + bx + c$ có đồ thị như hình vẽ thì dấu của các hệ số a , b , c là

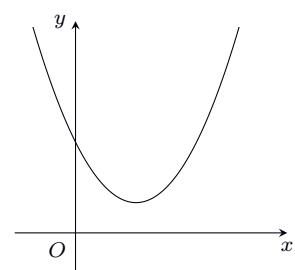
- A** $a > 0$, $b < 0$, $c < 0$. **B** $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$.
C $a < 0$, $b > 0$, $c > 0$. **D** $a > 0$, $b > 0$, $c < 0$.



CÂU 44.

Cho hàm số $y = ax^2 + bx + c$ có đồ thị như hình bên. Khẳng định nào sau đây đúng?

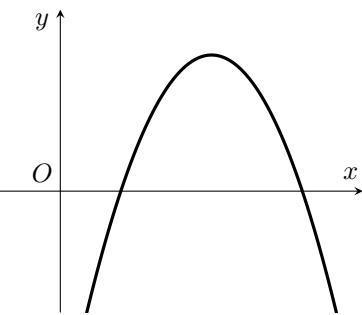
- A** $a > 0$, $b < 0$, $c < 0$. **B** $a < 0$, $b < 0$, $c > 0$.
C $a > 0$, $b < 0$, $c > 0$. **D** $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$.



CÂU 45.

Cho parabol (P) : $y = ax^2 + bx + c$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Hãy tìm khẳng định đúng

- (A) $a > 0; b > 0; c > 0.$ (B) $a > 0; b \geq 0; c < 0.$
 (C) $a < 0; b > 0; c < 0.$ (D) $a < 0; b \leq 0; c < 0.$



CÂU 46. Tìm số giao điểm của parabol (P) : $y = x^2 - 3x + 5$ với trục Ox .

- (A) 3. (B) 0. (C) 1. (D) 2.

CÂU 47. Giao điểm của parabol $y = x^2 - 3x + 2$ với đường thẳng $y = x - 1$ là

- (A) $(2; 1), (3; 2).$ (B) $(1; 0), (3; 2).$ (C) $(0; -1), (-2; -3).$ (D) $(-1; 2), (2; 1).$

CÂU 48. Tọa độ giao điểm của (P) : $y = x^2 - 4x$ với đường thẳng d : $y = -x - 2$ là

- (A) $M(0; -2); N(2; -4).$ (B) $M(-1; -1); N(-2; 0).$
 (C) $M(-3; 1); N(3; -5).$ (D) $M(1; -3); N(2; -4).$

CÂU 49. Parabol nào sau đây cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt?

- (A) $y = -x^2 + 2x - 1.$ (B) $y = x^2 - 2x + 3.$
 (C) $y = -x^2 - 1.$ (D) $y = 2x^2 - 5x + 2.$

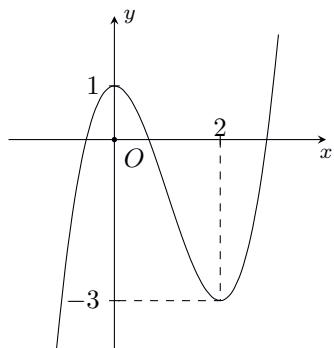
CÂU 50. Tổng tung độ hai giao điểm của parabol (P) : $y = x^2 - 5x + 6$ và đường thẳng (d) : $y = 2x - 2$ bằng

- (A) $7 + 2\sqrt{17}.$ (B) 12. (C) $2\sqrt{17} - 4.$ (D) 10.

CÂU 51.

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên \mathbb{R} có đồ thị như hình vẽ. Phương trình $2f(x) - 1 = 0$ có bao nhiêu nghiệm?

- (A) 1. (B) 3. (C) 2. (D) 4.



CÂU 52. Đồ thị hàm số $y = x^2 + 5$ và $y = -mx + 1$ cắt nhau tại một điểm thì m bằng

- (A) $m = 4$ hoặc $m = -4.$ (B) $m = 0$ hoặc $m = 4.$
 (C) $m = 0$ hoặc $m = -4.$ (D) $m = 0$ hoặc $m = -4$ hoặc $m = 4.$

CÂU 53. Đồ thị hàm số $y = x^2 + 5$ và $y = -mx + 1$ cắt nhau tại hai điểm phân biệt khi

- (A) $m > 4.$ (B) $m < -4.$
 (C) $-4 < m < 4.$ (D) $m > 4$ hoặc $m < -4.$

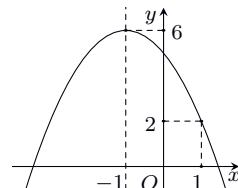
CÂU 54. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để đường thẳng $y = mx - 3$ không có điểm chung với Parabol $y = x^2 + 1$?

- (A) 6. (B) 9. (C) 7. (D) 8.

CÂU 55. Cho hàm số $y = -x^2 - 2x + 5$ có đồ thị bên

Tất cả giá trị của m để đường thẳng $y = m$ cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt trong đó có đúng 1 điểm có hoành độ lớn hơn 1.

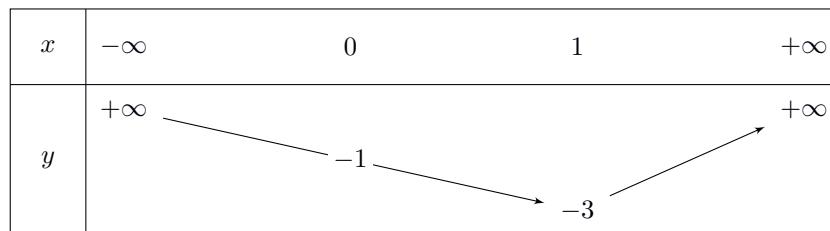
- (A) $m > 2.$ (B) $m < 1.$ (C) $m < 2.$ (D) $m > 1.$



CÂU 56. Cho hàm số bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$ có bảng biến thiên như hình vẽ.

QUICK NOTE

QUICK NOTE



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-2018; 2018]$ để phương trình $f(x) - m - 4 = 0$ có một nghiệm dương duy nhất?

- A** 2026. **B** 2020. **C** 2025. **D** 2024.

CÂU 57. Một vật chuyển động với vận tốc $v = 40 + 18t - t^2$ (m/s). Trong 20 giây đầu vận tốc lớn nhất của vật là bao nhiêu?

- A** 121 m/s. **B** 212 m/s. **C** 40 m/s. **D** 4 m/s.

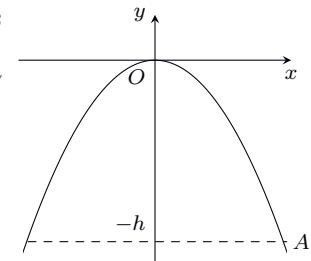
CÂU 58. Một quả bóng chày được đánh lên ở độ cao 3 feet (1 feet = 0,3048 mét) so với mặt đất với vận tốc 100 feet/giây và ở một góc 45° so với mặt đất. Đường đi của quả bóng chày được cho bởi hàm số $f(x) = -0,0032x^2 + x + 2$ trong đó $f(x)$ là chiều cao của bóng chày (theo feet) và x là khoảng cách theo chiều ngang của quả bóng tính từ vị trí ban đầu của quả bóng được đánh lên (theo feet). Tính chiều cao tối đa mà bóng chày đạt được?

- A** 78,125 feet. **B** 79,125 feet. **C** 80,125 feet. **D** 81,125 feet.

CÂU 59.

Một chiếc cổng hình parabol có dạng của đồ thị hàm số $y = -\frac{1}{2}x^2$ và có chiều rộng $d = 8$ m (hình minh họa). Hãy tính chiều cao h của cổng.

- A** $h = 8$ m. **B** $h = 9$ m. **C** $h = 7$ m. **D** $h = 5$ m.



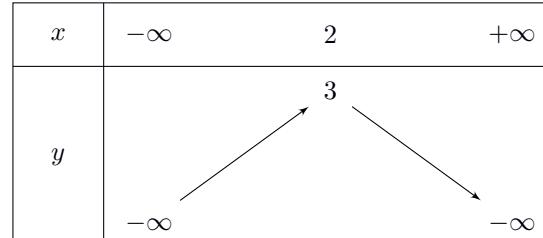
CÂU 60. Tìm m để Parabol (P): $y = x^2 - 2(m+1)x + m^2 - 3$ cắt trục hoành tại 2 điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 sao cho $x_1 \cdot x_2 = 1$.

- A** $m = 2$. **B** Không tồn tại m .
C $m = -2$. **D** $m = \pm 2$.

CÂU 61. Cho hàm số $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ biết $f(0) = 0$; $f(1) = 3$; $f(2) = 8$. Xét tính đúng sai của mỗi khẳng định sau

Mệnh đề	D	S
a) $a = 1; b = 2; c = 0$.		
b) $P = a \cdot b - 2c = 2$.		
c) Giá trị của hàm số tại điểm $x = -10$ là 120.		
d) Phương trình $f(x) = -1$ có nghiệm kép.		

CÂU 62. Cho hàm số $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) có bảng biến thiên



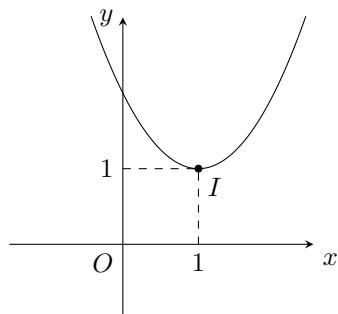
Mệnh đề	D	S
a) $a > 0$.		
b) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 2)$.		

Mệnh đề	D	S
c) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(2; +\infty)$.		
d) $4a + 2b + c = 0$.		

CÂU 63. Cho hàm số $y = x^2 - 4x + 3$ có đồ thị là (P) .

Mệnh đề	D	S
a) Tọa độ đỉnh của đồ thị (P) là $I(2; -1)$.		
b) Đồ thị đi qua gốc tọa độ $O(0; 0)$.		
c) Trục đối xứng của đồ thị là đường thẳng $x = 3$.		
d) Đồ thị (P) có dạng		

CÂU 64. Cho hàm số $y = x^2 + bx + c$ có đồ thị (P) như hình vẽ.



Mệnh đề	D	S
a) Trục đối xứng của đồ thị (P) là $x = 1$.		
b) Đồ thị (P) có đỉnh $I(1; 1)$.		
c) Đồ thị (P) có phương trình $y = x^2 - 2x$.		
d) Đồ thị (P) và đường thẳng (d) : $y = 2x + 2$ cắt nhau tại hai điểm A và B . Khi đó $AB = 3\sqrt{5}$.		

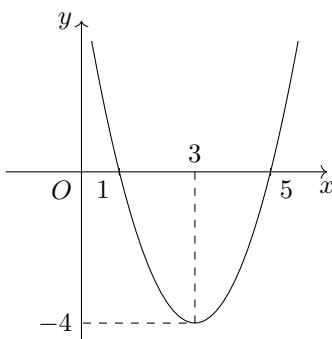
CÂU 65. Cho hàm số bậc hai $y = f(x) = -(x - a)(x - b)$ có đồ thị là (P) ($a < b$). Biết (P) có đỉnh $I(1; 4)$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

Mệnh đề	D	S
a) $a + 2b = 1$.		
b) Đường thẳng (d) : $y = x + 1$ luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt.		
c) $f(x) > 0$, $\forall x \in (-1; 2)$.		
d) Giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên $\left[-\frac{1}{2}; 2\right]$ là $\frac{7}{4}$.		

CÂU 66. Cho hàm số bậc hai có đồ thị như hình vẽ

QUICK NOTE

QUICK NOTE



Các khẳng định sau đây đúng hay sai?

Mệnh đề	D	S
a) Đồ thị hàm số bậc hai có đỉnh là $(-4; 3)$.		
b) Hàm số nhận giá trị âm với mọi $x \in (1; 5)$.		
c) Đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị hàm số đã cho khi và chỉ khi $m > -4$.		
d) Đường thẳng $x = n$ cắt đồ thị hàm số đã cho khi và chỉ khi $n > 0$.		

CÂU 67. Cho hàm số $y = x^2 + 4x - 5$ có đồ thị (P) . Các mệnh đề sau đúng hay sai?

Mệnh đề	D	S
a) (P) có trục đối xứng là $x = -2$.		
b) (P) cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng -5 .		
c) Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^2 + 4x - 5$ bằng -10 .		
d) Với $m = \frac{5}{2}$ thì đường thẳng $d: y = 4x - m$ cắt đồ thị (P) tại 2 điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 = 5$.		

CÂU 68. Cho hàm số $y = x^2 - 3x + 1$ có đồ thị (P) và đường thẳng $d: y = x - m$. Các khẳng định sau đây đúng hay sai?

Mệnh đề	D	S
a) Đường thẳng d luôn song song với đường thẳng $\Delta: y = x$.		
b) Khi $m = 2$, đường thẳng d cắt đồ thị (P) tại hai điểm $(1; -1)$ và $(3; 1)$.		
c) Đường thẳng d cắt đồ thị (P) tại hai điểm khi và chỉ khi $m < \frac{5}{2}$.		
d) Đường thẳng d cắt đồ thị (P) tại hai điểm có hoành độ trái dấu khi và chỉ khi $m < -1$.		

CÂU 69. Cho hàm số $y = x^2 + (2m - 1)x - m + 1$, trong đó m là tham số.

Mệnh đề	D	S
a) $y = x^2 + (2m - 1)x - m + 1$ không phải hàm số bậc hai một ẩn.		
b) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-2m + 1; +\infty)$.		
c) Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty; -\frac{2m - 1}{2}\right)$.		
d) Với $m \geq 3$ thì hàm số đồng biến trên $(-1; +\infty)$.		

CÂU 70. Cho hàm số $y = x^2 - 2(m - 1)x - 3$ (với m là tham số).

Mệnh đề	D	S
a) Hàm số đã cho là hàm số bậc hai.		

Mệnh đề	D	S
b) Đồ thị hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; m - 1)$.		
c) Đồ thị hàm số nghịch biến trên khoảng $(m - 2; m + 2)$.		
d) Với $m < 2$ thì hàm số đồng biến trên $(2; +\infty)$.		

QUICK NOTE

Bài 3. DẤU CỦA TAM THỨC BẬC HAI

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Dấu của tam thức bậc hai

ĐỊNH NGHĨA 3.1. Tam thức bậc hai là biểu thức có dạng $f(x) = ax^2 + bx + c$, trong đó a, b, c là những hệ số, $a \neq 0$. Nghiệm của tam thức bậc hai là giá trị của x làm cho tam thức có giá trị bằng 0.

ĐỊNH LÝ 3.1. [Định lý về dấu của tam thức bậc hai] Cho tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0, \Delta = b^2 - 4ac$. Khi đó:

- Ⓐ $\Delta < 0 \Rightarrow af(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.
- Ⓑ $\Delta = 0 \Rightarrow af(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{b}{2a}\right\}$ và $f\left(-\frac{b}{2a}\right) = 0$.
- Ⓒ $\Delta > 0 \Rightarrow \begin{cases} af(x) > 0, \forall x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty) \\ af(x) < 0, \forall x \in (x_1; x_2). \end{cases}$

Với x_1, x_2 là nghiệm của phương trình $f(x) = 0$, $x_1 < x_2$.

2. Bất phương trình bậc hai

ĐỊNH NGHĨA 3.2. Bất phương trình bậc hai một ẩn số là bất phương trình có dạng $ax^2 + bx + c > 0$ (hoặc $ax^2 + bx + c > 0; ax^2 + bx + c \geq 0; ax^2 + bx + c \leq 0$) với a, b, c là những số thực đã cho, $a \neq 0$, x là ẩn số.

B. CÁC DẠNG TOÁN

1 Nhận dạng và xét dấu của tam thức bậc hai

Đa thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$ với a, b, c là các hệ số, $a \neq 0$ và x là biến số thực gọi là tam thức bậc hai.

Phương pháp xét dấu của tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$

Bước 1: Tính và xác định dấu của biệt thức $\Delta = b^2 - 4ac$.

Bước 2: Xác định nghiệm của $f(x)$ (nếu có).

Bước 3: Xác định dấu của hệ số a .

Bước 4: Xác định dấu của $f(x)$.

Nếu $\Delta < 0$ thì $f(x)$ cùng dấu với a với mọi giá trị x .

Nếu $\Delta = 0$ và $x = -\frac{b}{2a}$ là nghiệm kép của $f(x)$ thì $f(x)$ cùng dấu với a với mọi x khác x_0 .

Nếu $\Delta > 0$ và x_1, x_2 là hai nghiệm của $f(x)$ ($x_1 < x_2$) thì $f(x)$ trái dấu với a với mọi x thuộc khoảng $(x_1; x_2)$ và $f(x)$ cùng dấu với a với mọi x thuộc hai khoảng $(-\infty; x_1)$ và $(x_2; +\infty)$.

1. Ví dụ minh họa

VÍ DỤ 1. Đa thức nào sau đây là tam thức bậc hai?

- a) $4x^2 + 3x + 1$. b) $x^3 + 3x^2 - 1$. c) $2x^2 + 4x - 1$.

QUICK NOTE

VÍ DỤ 2. Xác định giá trị của tham số m để các đa thức sau là tam thức bậc hai.

a) $(m+1)x^2 + 2x + m.$ b) $mx^3 + 2x^2 - x + m.$ c) $-5x^2 + 2x - m + 1.$

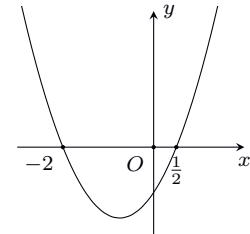
VÍ DỤ 3. Tìm các giá trị của tham số m để biểu thức $f(x) = (m^2 - 1)x^2 + 3mx - 6$ là một tam thức bậc hai có $x = 2$ là một nghiệm.

VÍ DỤ 4. Xét dấu của các tam thức bậc hai sau

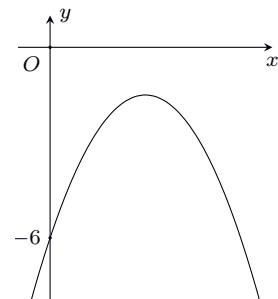
a) $f(x) = 2x^2 + 4x + 2.$ b) $f(x) = -3x^2 + 2x + 21.$ c) $f(x) = -2x^2 - x - 2.$
 d) $f(x) = -4x(x+3) - 9.$ e) $f(x) = (2x+5)(x-3).$

VÍ DỤ 5. Dựa vào đồ thị của các hàm số bậc hai sau, hãy lập bảng xét dấu của tam thức bậc hai tương ứng.

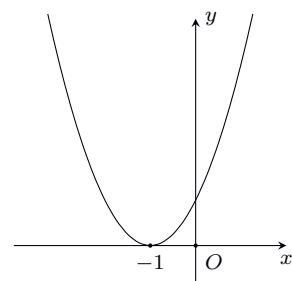
a)
 $f(x) = x^2 + 1,5x - 1.$



b)
 $f(x) = -0,5x^2 + 3x - 6.$



c)
 $f(x) = x^2 + 2x + 1.$



2. Bài tập tự luận

BÀI 1. Xét dấu của mỗi tam thức bậc hai sau

- a) $f(x) = 3x^2 - 4x + 1.$
 b) $f(x) = 9x^2 + 6x + 1.$
 c) $f(x) = 2x^2 - 3x + 10.$
 d) $f(x) = -5x^2 + 2x + 3.$
 e) $f(x) = -4x^2 + 8x - 4.$
 f) $f(x) = -3x^2 + 3x - 1.$

BÀI 2. Tính biệt thức và nghiệm (nếu có) của các tam thức bậc hai. Xác định dấu của chúng tại $x = -2$.

- a) $f(x) = -2x^2 + 3x - 4.$
 b) $g(x) = 2x^2 + 8x + 8.$

c) $h(x) = 3x^2 + 7x - 10$.

BÀI 3. Tìm tham số m để

a) $f(x) = (2m - 8)x^2 + 2mx + 1$ là một tam thức bậc hai.

b) $f(x) = (2m + 3)x^2 + 3x - 4m^2$ là một tam thức bậc hai có $x = 3$ là một nghiệm.

c) $f(x) = 2x^2 + mx - 3$ dương tại $x = 2$.

BÀI 4. Tìm các giá trị của tham số m để

a) $f(x) = (m^2 + 9)x^2 + (m + 6)x + 1$ là một tam thức bậc hai có một nghiệm duy nhất.

b) $f(x) = (m - 1)x^2 + 3x + 1$ là một tam thức bậc hai có hai nghiệm phân biệt.

c) $f(x) = mx^2 + (m + 2)x + 1$ là một tam thức bậc hai vô nghiệm.

3. Câu hỏi trắc nghiệm

CÂU 1. Bảng xét dấu nào sau đây là bảng xét dấu của tam thức $f(x) = -x^2 - x + 6$?

(A)	<table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"> <tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>-2</td><td>3</td><td>$+\infty$</td></tr> <tr><td>$f(x)$</td><td>-</td><td>0</td><td>+</td><td>0</td></tr> </table>	x	$-\infty$	-2	3	$+\infty$	$f(x)$	-	0	+	0
x	$-\infty$	-2	3	$+\infty$							
$f(x)$	-	0	+	0							

(B)	<table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"> <tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>-2</td><td>3</td><td>$+\infty$</td></tr> <tr><td>$f(x)$</td><td>+</td><td>0</td><td>-</td><td>0</td></tr> </table>	x	$-\infty$	-2	3	$+\infty$	$f(x)$	+	0	-	0
x	$-\infty$	-2	3	$+\infty$							
$f(x)$	+	0	-	0							

(C)	<table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"> <tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>-3</td><td>2</td><td>$+\infty$</td></tr> <tr><td>$f(x)$</td><td>-</td><td>0</td><td>+</td><td>0</td></tr> </table>	x	$-\infty$	-3	2	$+\infty$	$f(x)$	-	0	+	0
x	$-\infty$	-3	2	$+\infty$							
$f(x)$	-	0	+	0							

(D)	<table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"> <tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>-3</td><td>2</td><td>$+\infty$</td></tr> <tr><td>$f(x)$</td><td>+</td><td>0</td><td>-</td><td>0</td></tr> </table>	x	$-\infty$	-3	2	$+\infty$	$f(x)$	+	0	-	0
x	$-\infty$	-3	2	$+\infty$							
$f(x)$	+	0	-	0							

CÂU 2. Bảng xét dấu nào dưới đây là của tam thức $f(x) = -x^2 + 6x - 9$?

(A)	<table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"> <tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>3</td><td>$+\infty$</td></tr> <tr><td>$f(x)$</td><td>+</td><td>0</td><td>-</td></tr> </table>	x	$-\infty$	3	$+\infty$	$f(x)$	+	0	-
x	$-\infty$	3	$+\infty$						
$f(x)$	+	0	-						

(B)	<table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"> <tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>3</td><td>$+\infty$</td></tr> <tr><td>$f(x)$</td><td>-</td><td>0</td><td>+</td></tr> </table>	x	$-\infty$	3	$+\infty$	$f(x)$	-	0	+
x	$-\infty$	3	$+\infty$						
$f(x)$	-	0	+						

(C)	<table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"> <tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>3</td><td>$+\infty$</td></tr> <tr><td>$f(x)$</td><td>-</td><td>0</td><td>-</td></tr> </table>	x	$-\infty$	3	$+\infty$	$f(x)$	-	0	-
x	$-\infty$	3	$+\infty$						
$f(x)$	-	0	-						

(D)	<table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"> <tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>3</td><td>$+\infty$</td></tr> <tr><td>$f(x)$</td><td>+</td><td>0</td><td>+</td></tr> </table>	x	$-\infty$	3	$+\infty$	$f(x)$	+	0	+
x	$-\infty$	3	$+\infty$						
$f(x)$	+	0	+						

CÂU 3. Tam thức $f(x) = x^2 - 2x - 3$ nhận giá trị dương khi và chỉ khi

(A) $x \in (-\infty; -3) \cup (-1; +\infty)$.

(B) $x \in (-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$.

(C) $x \in (-1; 3)$.

(D) $x \in (-3; 1)$.

CÂU 4. Tam thức $f(x) = x^2 - 12x - 13$ nhận giá trị âm khi và chỉ khi

(A) $x < -13$ hoặc $x > 1$.

(B) $x < -1$ hoặc $x > 13$.

(C) $-13 < x < 1$.

(D) $-1 < x < 13$.

CÂU 5. Tìm tham số m để tam thức $f(x) = 3x^2 - 2mx + 1$ dương tại $x = 1$.

(A) $m < 2$.

(B) $m > 2$.

(C) $m > -2$.

(D) $m < 4$.

CÂU 6. Có bao nhiêu số nguyên dương của tham số m để tam thức bậc hai $f(x) = (m - 1)x^2 + 3x + 1$ có hai nghiệm phân biệt.

(A) 4.

(B) 1.

(C) 2.

(D) 3.

CÂU 7. Tam thức bậc hai nào trong các tam thức dưới đây luôn dương với mọi $x \in \mathbb{R}$?

(A) $f(x) = x^2 + 2x + 3$.

(B) $f(x) = -x^2 + 2x + 3$.

(C) $f(x) = x^2 + 2x - 3$.

(D) $f(x) = -x^2 + 2x - 3$.

CÂU 8. Cho tam thức bậc hai $f(x) = x^2 + bx + c$ có bảng xét dấu như hình vẽ

QUICK NOTE

QUICK NOTE

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$
$f(x)$	+	0	-	0 +

Tính $b + c$.

- (A) $b + c = -5$. (B) $b + c = 5$. (C) $b + c = -1$. (D) $b + c = 1$.

CÂU 9. Tam thức bậc hai nào dưới đây có bảng xét dấu như hình vẽ?

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$
$f(x)$	-	0	+	0 -

- (A) $f(x) = x^2 - 4x + 3$. (B) $f(x) = -2x^2 + 8x - 6$.
 (C) $f(x) = -x^2 - 4x - 3$. (D) $f(x) = 3x^2 + 12x + 9$.

CÂU 10. Cho tam thức $f(x) = x^2 + bx + c$ với b, c là các số thực thoả mãn $b + c = -1$ và $c < 0$. Biểu thức nào dưới đây là đúng?

- (A) $f(0) \cdot f(1) > 0$. (B) $f(0) \cdot f(2) > 0$. (C) $f(0) \cdot f(3) < 0$. (D) $f(2) \cdot f(3) < 0$.

2

Giải bất phương trình bậc hai

Phương pháp giải: Xét dấu về trái suy ra tập nghiệm.

1. Ví dụ minh họa

VÍ DỤ 1. Giải các bất phương trình sau

- a) $x^2 - 7x + 10 \geq 0$. c) $-x^2 + 5x + 6 > 0$.
 b) $-2x^2 + 4x - 2 \leq 0$. d) $2x^2 - 3x + 1 > 0$.

VÍ DỤ 2. Tìm tập xác định của các hàm số sau

- a) $y = \sqrt{x^2 - 4x + 3}$.
 b) $y = \sqrt{-x^2 + 7x - 12}$.
 c) $y = \sqrt{x^2 + 4x + 4}$.

2. Câu hỏi trắc nghiệm

CÂU 1. Tập nghiệm của bất phương trình $x^2 - 5x + 6 \leq 0$ là

- (A) $(-\infty; 2)$. (B) $(-\infty; 2] \cup [3; +\infty)$.
 (C) $[3; +\infty)$. (D) $[2; 3]$.

CÂU 2. Cho các mệnh đề

- (I) Với mọi $x \in [-1; 4]$ thì $-x^2 + 4x + 5 \geq 0$.
 (II) Với mọi $x \in (-\infty; 4) \cup (5; 10)$ thì $x^2 + 9x - 10 > 0$.
 (III) Với mọi $x \in [2; 3]$ thì $x^2 - 5x + 6 \leq 0$.

- (A) Mệnh đề (I) và (III) đúng. (B) Chỉ mệnh đề (I) đúng.
 (C) Chỉ mệnh đề (III) đúng. (D) Cả ba mệnh đề đều sai.

CÂU 3. Tìm tập xác định của hàm số $y = \sqrt{2x^2 - 5x + 2}$.

- (A) $(-\infty; \frac{1}{2}]$. (B) $[\frac{1}{2}; 2]$.
 (C) $(-\infty; \frac{1}{2}] \cup [2; +\infty)$. (D) $[2; +\infty)$.

CÂU 4. Cho tam thức bậc hai $f(x) = -x^2 - 4x + 5$. Tìm tất cả giá trị của x để $f(x) \geq 0$.

- (A) $x \in (-\infty; -1] \cup [5; +\infty)$. (B) $x \in [-1; 5]$.
 (C) $x \in [-5; 1]$. (D) $x \in (-5; 1)$.

CÂU 5. Tập nghiệm của bất phương trình $x^2 - 2x - 3 \leq 0$ chứa trong tập hợp nào sau đây?

- (A) $(-1 - \sqrt{2}; 3 + \sqrt{2})$. (B) $(-1; 3]$.
 (C) $(-1 - \sqrt{2}; 3 - \sqrt{2})$. (D) $[1; 3]$.

CÂU 6. Bất phương trình $\frac{2x+1}{x-1} < 1$ có tập nghiệm là

- (A) $(-2; 1)$. (B) $(-\infty; -2)$. (C) $\left(-\frac{2}{3}; 1\right)$. (D) $\left(-\frac{1}{2}; 1\right)$.

3

Tìm giá trị của tham số để tam thức thoả đk cho trước

1. Ví dụ minh họa

VÍ DỤ 1. Tìm các giá trị của tham số m để phương trình

$$x^2 - 2(m+1)x + 3m^2 - 3 = 0 \quad (1)$$

- a) có nghiệm;
 b) có hai nghiệm trái dấu.

VÍ DỤ 2. Tìm các giá trị của tham số m để bất phương trình sau nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$

$$x^2 + 2(m-2)x + 2m - 1 \geq 0 \quad (2)$$

2. Bài tập tự luận

BÀI 1. Tìm các giá trị của tham số m để

- a) Phương trình $x^2 - 2mx - m^2 + 8m - 6 = 0$ vô nghiệm.
 b) $f(x) = (m-1)x^2 - 2mx + 3m - 2$ là một tam thức bậc hai có hai nghiệm dương phân biệt.

BÀI 2. Tìm m để

- a) Tam thức bậc hai $f(x) = x^2 + 2(3-4m)x + 8m - 3$ dương với mọi $x \in \mathbb{R}$.
 b) $(3-3m)x^2 + (3m+6)x - m + 3 < 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

BÀI 3. Tìm m để hàm số $y = \frac{1}{\sqrt{x^2 - mx + m}}$ xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$.

BÀI 4. Tìm các giá trị của tham số m để bất phương trình sau vô nghiệm

$$(m+1)x^2 + 2(m+1)x + 3m - 6 \geq 0.$$

BÀI 5. Tìm các giá trị của tham số m để bất phương trình $-1 \leq \frac{x^2 - 2x - m}{x^2 + 2x + 2022} < 2$ nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$.

BÀI 6. Tìm các giá trị của tham số m để

- a) Phương trình $(m+2)x^2 - 3x + 2m - 3 = 0$ có 2 nghiệm trái dấu.
 b) $f(x) = x^2 - 6mx + 2 - 2m + 9m^2$ là một tam thức bậc hai có hai nghiệm âm phân biệt.

BÀI 7. Tìm các giá trị của tham số m để

- a) $f(x) = x^2 - (m+2)x + 8m + 1$ không âm với mọi $x \in \mathbb{R}$.
 b) $(2m^2 - 3m - 2)x^2 + 2(m-2)x - 1 \leq 0$ có tập nghiệm là \mathbb{R} .

BÀI 8. Tìm các giá trị của tham số m để

- a) $5x^2 - x + m \leq 0$ vô nghiệm.
 b) $-x^2 + 2x - m - 1 > 0$ vô nghiệm.
 c) $(1-m)x^2 - 2(m-1)x + m - 3 \geq 0$ vô nghiệm.

BÀI 9. Tìm các giá trị của tham số m để hàm số $y = \sqrt{x^2 - 4x + m - 5}$ có tập xác định là \mathbb{R} .

BÀI 10. Xác định m để bất phương trình $\frac{x^2 + mx - 1}{2x^2 - 2x + 3} < 1$ đúng với mọi số thực x .

QUICK NOTE

QUICK NOTE

3. Câu hỏi trắc nghiệm

CÂU 1. Tập hợp các giá trị của tham số thực m để phương trình $(m+1)x^2 - 2x - 3 + m = 0$ có hai nghiệm trái dấu là $(a; b)$, với a, b là các số thực, $a < b$. Tính $T = a^2 + b^2$.

- AT = 9. **BT = 8. **CT = 1. **DT = 10.********

CÂU 2. Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình $x^2 - 4mx - 4m^2 + 16m - 6 = 0$ có nghiệm.

$$\text{A) } -\frac{3}{2} \leq m \leq -\frac{1}{2}. \quad \text{B) } \begin{cases} m \geq \frac{3}{2} \\ m \leq \frac{1}{2} \end{cases}. \quad \text{C) } -\frac{3}{2} < m < -\frac{1}{2}. \quad \text{D) } \begin{cases} m > -\frac{1}{2} \\ m < -\frac{3}{2} \end{cases}.$$

CÂU 3. Giá trị nào của m thì phương trình $(m-3)x^2 + (m+3)x - (m+1) = 0$ (1) có hai nghiệm phân biệt?

- Am \in \mathbb{R} \setminus \{3\}. **Bm \in \left(-\infty; -\frac{3}{5}\right) \cup (1; +\infty) \setminus \{3\}.
Cm \in \left(-\frac{3}{5}; 1\right). **Dm \in \left(-\frac{3}{5}; +\infty\right).******

CÂU 4. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $(m+1)x^2 - 2(m+1)x + 4 \geq 0$ có tập nghiệm $S = \mathbb{R}$?

- Am > -1. **B-1 \leq m \leq 3. **C-1 < m \leq 3. **D-1 < m < 3.********

CÂU 5. Tìm các giá trị của tham số m để bất phương trình $(m-2)x^2 - 2(m-3)x + m + 1 > 0$ có tập nghiệm là \mathbb{R} .

- Am > 3. **Bm < \frac{11}{5}. **Cm < -3. **Dm > \frac{11}{5}.********

CÂU 6. Cho $f(x) = x^2 - (m^2 + m + 1)x + m^3 + m^2$ với m là tham số thực. Biết rằng có đúng 2 giá trị m_1, m_2 để $f(x)$ không âm với mọi giá trị của x . Tính tổng $m_1 + m_2$.

- ABCD**

CÂU 7. Tìm các giá trị của tham số m để hàm số $y = \sqrt{mx^2 - mx + 3}$ có tập xác định là $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

- A[0; 12]. **B(0; 12). **C[0; 12). **D(0; 12].********

CÂU 8. Giá trị của m để bất phương trình $(m-1)x^2 - 2(m+1)x + 3(m-2) > 0$ vô nghiệm là

- Am \geq 5. **Bm \leq \frac{1}{2}. **Cm < \frac{1}{2}. **D\frac{1}{2} \leq m < 1.********

CÂU 9. Với giá trị nào của m thì với mọi x ta có $-1 \leq \frac{x^2 + 5x + m}{2x^2 - 3x + 2} < 7$:

- Am \leq -\frac{5}{3}. **B-\frac{5}{3} < m < 1. **Cm < 1.
DE-\frac{5}{3} \leq m < 1.******

CÂU 10. Cho hàm số $y = \frac{2x-1}{\sqrt{mx^4 + mx^3 + (m+1)x^2 + mx + 1}}$. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số xác định với mọi x thuộc \mathbb{R} .

- ABCD**

4

Ứng dụng thực tế

1. Ví dụ minh họa

VÍ DỤ 1. Một vật được ném theo phương thẳng đứng xuống dưới từ độ cao 320 m với vận tốc ban đầu $v_0 = 20$ m/s. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu giây, vật đó cách mặt đất không quá 100 m? Giả thiết rằng sức cản của không khí là không đáng kể.

VÍ DỤ 2. Để xây dựng phương án kinh doanh cho một loại sản phẩm, doanh nghiệp tính toán lợi nhuận y (đồng) theo công thức sau $y = -200x^2 + 92000x - 8400000$, trong đó x là số sản phẩm được bán ra. Cho biết doanh nghiệp có lãi khi nào, bị lỗ khi nào.

VÍ DỤ 3. Một công ty du lịch thông báo giá tiền cho chuyến đi tham quan của một nhóm khách du lịch như sau:

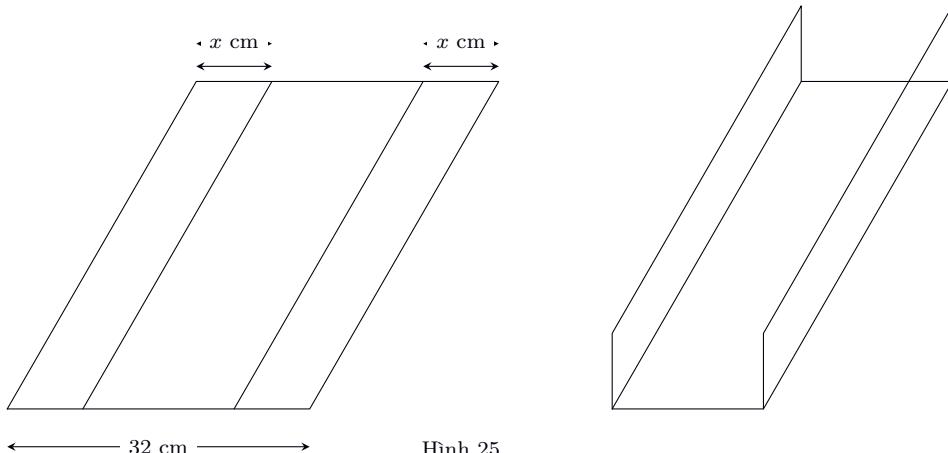
50 khách đầu tiên có giá là 300 000 đồng/người. Nếu có nhiều hơn 50 người đăng ký thì cứ có thêm 1 người, giá vé sẽ giảm 5 000 đồng/người cho toàn bộ hành khách.

a) Gọi x là số lượng khách từ người thứ 51 trở lên của nhóm. Biểu thị doanh thu theo x .

b) Số người của nhóm khách du lịch nhiều nhất là bao nhiêu thì công ty không bị lỗ?

Biết rằng chi phí thực sự cho chuyến đi là 15 080 000 đồng.

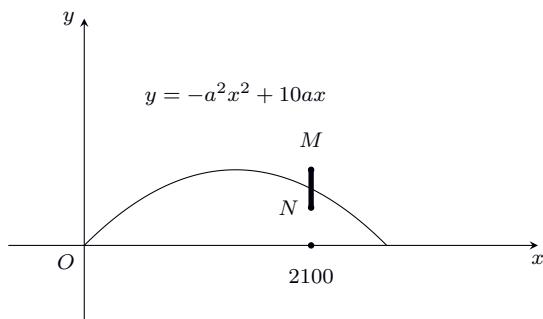
VÍ DỤ 4. Bác Dũng muốn uốn tấm tôn phẳng có dạng hình chữ nhật với bề ngang 32 cm thành một rãnh dẫn nước bằng cách chia tấm tôn đó thành ba phần rồi gấp hai bên lại theo một góc vuông (Hình 25). Để đảm bảo kĩ thuật, diện tích mặt cắt ngang của rãnh dẫn nước phải lớn hơn hoặc bằng 120 cm^2 .



Hình 25

VÍ DỤ 5.

Một tinh huống trong huấn luyện pháo binh được mô tả như sau: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , khẩu đại bác được biểu thị bằng điểm $O(0; 0)$ và bia mục tiêu được biểu thị bằng đoạn thẳng MN với $M(2100; 25)$ và $N(2100; 15)$ (Hình 29). Xạ thủ cần xác định parabol $y = -a^2x^2 + 10ax$ ($a > 0$) mô tả quỹ đạo chuyển động của viên đạn sao cho viên đạn bắn ra từ khẩu đại bác phải chạm vào bia mục tiêu. Tìm giá trị lớn nhất của a để xạ thủ đạt được mục đích trên.



2. Bài tập tự luận

BÀI 1. Bộ phận nghiên cứu thị trường của một xí nghiệp xác định tổng chi phí để sản xuất Q sản phẩm là $Q^2 + 180Q + 140000$ (nghìn đồng). Giả sử giá mỗi sản phẩm bán ra thị trường là 1200 nghìn đồng.

- Xác định lợi nhuận xí nghiệp thu được sau khi bán hết Q sản phẩm đó, biết rằng lợi nhuận là hiệu của doanh thu trừ đi tổng chi phí để sản xuất.
- Xí nghiệp sản xuất bao nhiêu sản phẩm thì hòa vốn?
- Xí nghiệp cần sản xuất số sản phẩm là bao nhiêu để không bị lỗ?

BÀI 2. Xét hệ tọa độ Oth trên mặt phẳng, trong đó trục Ot biểu thị thời gian t (tính bằng giây) và trục Oh biểu thị độ cao h (tính bằng mét). Một quả bóng được đá lên từ điểm $A(0; 0,2)$ và chuyển động theo quỹ đạo là một cung parabol. Quả bóng đạt độ cao 8,5 m sau 1 giây và đạt độ cao 6 m sau 2 giây.

- Hãy tìm hàm số bậc hai biểu thị quỹ đạo chuyển động của quả bóng.
- Trong khoảng thời gian nào thì quả bóng vẫn chưa chạm đất?

BÀI 3. Công ty An Bình thông báo giá tiền cho chuyến đi tham quan của một nhóm khách du lịch như sau 10 khách đầu tiên có giá là 800 000 đồng/người. Nếu có nhiều hơn 10 người đăng ký thì cứ có thêm 1 người, giá vé sẽ giảm 10 000 đồng/người cho toàn bộ hành khách.

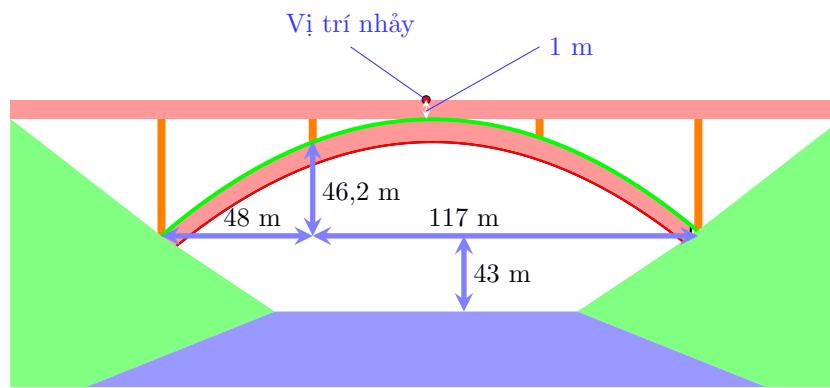
QUICK NOTE

QUICK NOTE

a) Gọi x là số lượng khách từ người thứ 11 trở lên của nhóm. Biểu thị doanh thu theo x .

b) Số người của nhóm khách du lịch nhiều nhất là bao nhiêu thì công ty không bị lỗ? Biết rằng chi phí thực sự cho chuyến đi là 700000 đồng/người.

BÀI 4. Nhảy bungee là một trò chơi mạo hiểm. Trong trò chơi này, người chơi đứng ở vị trí trên cao, thắt dây an toàn và nhảy xuống. Sợi dây này có tính đàn hồi và được tính toán chiều dài để nó kéo người chơi lại khi gần chạm đất (hoặc mặt nước).



Chiếc cầu trong hình vẽ trên có bộ phận chống đỡ dạng parabol. Một người muốn thực hiện một cú nhảy bungee từ giữa cầu xuống với dây an toàn. Người này cần trang bị sợi dây an toàn dài bao nhiêu mét? Biết rằng chiều dài của sợi dây đó bằng một phần ba khoảng cách từ vị trí bắt đầu nhảy đến mặt nước.

BÀI 5. Khi một vật từ vị trí y_0 được ném xiên lên cao theo góc α (so với phương ngang) với vận tốc ban đầu v_0 thì phương trình chuyển động của vật này là

$$y = \frac{-gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} + \tan \alpha \cdot x + y_0.$$

- a) Vật bị ném xiên như vậy có chuyển động theo đường xiên hay không? Tại sao?
- b) Giả sử góc ném có số đo là 45° , vận tốc ban đầu của vật là 3 m/s và vật được ném xiên từ độ cao 1 m so với mặt đất, hãy viết phương trình chuyển động của vật.
- c) Một vận động viên ném lao đã lập kỷ lục với độ xa 90 m. Biết người này ném lao từ độ cao 0,9 m và góc ném là khoảng 45° . Hỏi vận tốc đầu của lao khi được ném là bao nhiêu?

A *Lấy giá trị $g = 10 \text{ m/s}^2$ cho gia tốc trọng trường và làm tròn kết quả đến 2 chữ số thập phân.*

Bài 4. PHƯƠNG TRÌNH QUY VỀ PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Phương trình dạng $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{dx^2 + ex + f}$

Để giải phương trình $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{dx^2 + ex + f}$, bình phương hai vế sau đó thu gọn ta được phương trình

$$(a-d)x^2 + (b-e)x + (c-f) = 0. \quad (1)$$

Giải phương trình (1) được các nghiệm, sau đó thay vào phương trình ban đầu để thử lại xem nghiệm nào thoả mãn và kết luận.

Chú ý rằng nếu x_0 là một nghiệm của phương trình (1) thì khi thử lại ta chỉ cần kiểm tra xem, nếu $ax_0^2 + bx_0 + c \geq 0$ thì x_0 sẽ là nghiệm của phương trình đã cho.

2. Phương trình dạng $\sqrt{ax^2 + bx + c} = dx + e$

Để giải phương trình $\sqrt{ax^2 + bx + c} = dx + e$, bình phương hai vế sau đó thu gọn ta được phương trình

$$(a - d^2)x^2 + (b - 2de)x + (c - e^2) = 0. \quad (2)$$

Giải phương trình (2) được các nghiệm, sau đó thay vào phương trình ban đầu để thử lại xem nghiệm nào thoả mãn và kết luận.

Chú ý rằng nếu x_0 là một nghiệm của phương trình (2) thì khi thử lại ta chỉ cần kiểm tra xem, nếu $dx_0 + e \geq 0$ thì x_0 sẽ là nghiệm của phương trình đã cho.

B. CÁC DẠNG TOÁN

1

Phương trình $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$

- Bình phương 2 vế và giải.
- Kiểm tra nghiệm và kết luận.

1. Ví dụ minh họa

VÍ DỤ 1. Giải phương trình $\sqrt{x^2 - 2x - 4} = \sqrt{2 - x}$.

VÍ DỤ 2. Giải phương trình $\sqrt{2x^2 - 5x + 2} - \sqrt{6 - 3x} = 0$.

VÍ DỤ 3. Giải phương trình $\sqrt{x^2 + 3x} = 2\sqrt{3x - 2}$.

VÍ DỤ 4. Tìm điều kiện của tham số m để phương trình sau có nghiệm:

$$\sqrt{x^2 + x + 1} = \sqrt{2x^2 + mx + m + 1}. \quad (1)$$

2. Bài tập tự luận

BÀI 1. Giải phương trình $\sqrt{3x^2 - 4x - 4} = \sqrt{2x + 5}$.

BÀI 2. Giải phương trình $\sqrt{2x - 1} - \frac{1}{2}\sqrt{x + 3} = 0$.

BÀI 3. Giải phương trình $\sqrt{x^2 + 3x} = \sqrt{2(x + 1)}$.

BÀI 4. Giải phương trình $\sqrt{2x^2 - 3x + 4} = \frac{3}{2}\sqrt{x + 5}$.

BÀI 5. Giải phương trình sau: $\sqrt{2x^2 + x} - \sqrt{3} = 0$.

BÀI 6. Giải phương trình sau: $2\sqrt{(x + 1)^2 + 7} = \sqrt{7(x + 5)}$.

BÀI 7. Giải phương trình sau: $\sqrt{(x + 1)(x - 3)} - \sqrt{x} = 0$.

BÀI 8. Giải phương trình $\sqrt{x - 3} = 3\sqrt{x^2 - 9}$.

BÀI 9. Giải phương trình $\sqrt{x^2 - 1 + \sqrt{2x + 3}} = \sqrt{x^2 + x - 1}$.

BÀI 10. Tìm điều kiện của tham số m để phương trình sau có nghiệm:

$$\sqrt{2x^2 + x + 1} = \sqrt{x^2 + mx + m - 1}. \quad (1)$$

3. Câu hỏi trắc nghiệm

CÂU 1. Phương trình sau có bao nhiêu nghiệm $\sqrt{x} = \sqrt{-x}$

- (A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) Vô số.

CÂU 2. Điều kiện xác định của phương trình $\sqrt{x - 1} = \sqrt{x + 2}$ là

- (A) $x > 1$. (B) $x \geq -2$. (C) $x > -2$. (D) $x \geq 1$.

CÂU 3. Phương trình sau có bao nhiêu nghiệm: $\sqrt{x - 2} = \sqrt{2 - x}$

- (A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) Vô số.

CÂU 4. Nghiệm của phương trình $\sqrt{x - 1} = (\sqrt{3 - x})^2$ là

- (A) $x = 2; x = 5$. (B) $x = 2$. (C) $x = 1; x = 3$. (D) $x = -1; x = -3$.

CÂU 5. Tổng các nghiệm của phương trình $\sqrt{3x^2 - 8x + 5} - \sqrt{11 - x} = 0$ là

- (A) $\frac{7}{3}$. (B) $\frac{11}{3}$. (C) $-\frac{11}{3}$. (D) $\frac{1}{3}$.

QUICK NOTE

QUICK NOTE

- CÂU 6.** Phương trình $\sqrt{2x^2 - 3x + 12} = 2\sqrt{-x^2 + x + 3}$ có các nghiệm
(A) không âm. **(B)** không dương. **(C)** dương. **(D)** âm.
- CÂU 7.** Số nghiệm của phương trình $\sqrt{x^2 - 3x - 2} = \sqrt{x - 3}$ là
(A) 1. **(B)** 0. **(C)** 2. **(D)** 3.
- CÂU 8.** Số nghiệm của phương trình $\sqrt{x^2 - 3x + 18} = \sqrt{14x + 2}$ là
(A) 2. **(B)** 0. **(C)** 1. **(D)** 3.
- CÂU 9.** Số nghiệm của phương trình $\sqrt{x^2 - 5x + 2} = \sqrt{-x - 1}$ là
(A) 0. **(B)** 1. **(C)** 2. **(D)** 4.
- CÂU 10.** Tổng bình phương các nghiệm của phương trình $3\sqrt{x - 1} = \sqrt{x^2 + 8x - 11}$ là
(A) 4. **(B)** 8. **(C)** 5. **(D)** 7.

BẢNG ĐÁP ÁN**2****Phương trình $\sqrt{f(x)} = g(x)$**

- ✓ Giải bất phương trình $g(x) \geq 0$ (*) để tìm tập nghiệm của bất phương trình này.
- ✓ Bình phương hai vế của phương trình ta được $f(x) = [g(x)]^2$ rồi tìm tập nghiệm của phương trình đó.
- ✓ Trong những nghiệm của phương trình trên, ta giữ lại những nghiệm thuộc tập nghiệm của bất phương trình (*). Tập nghiệm giữ lại đó chính là tập nghiệm cần tìm.

1. Ví dụ minh họa**VÍ DỤ 1.** Giải phương trình $\sqrt{x^2 + 3x - 1} = 3$.**VÍ DỤ 2.** Giải phương trình $\sqrt{x^2 - 8x + 13} = 2x - 3$.**VÍ DỤ 3.** Giải phương trình $\sqrt{-x^2 - 2x + 1} = -x - 3$.**VÍ DỤ 4.** Tìm điều kiện của tham số m để phương trình sau có đúng một nghiệm:

$$\sqrt{2x + m - 4} = x - 1. \quad (1)$$

2. Bài tập tự luận**BÀI 1.** Giải phương trình $\sqrt{2 - x^2} + x = 0$.**BÀI 2.** Giải phương trình $\sqrt{3x - 8} = x - 2$.**BÀI 3.** Giải phương trình $\sqrt{5x - x^2} + x = 3$.**BÀI 4.** Giải phương trình $\sqrt{8x^2 - 10x + 1} = 2x + 1$.**BÀI 5.** Giải phương trình $\sqrt{x^2 - 3x + 2} = -1$.**BÀI 6.** Giải phương trình $\sqrt{3x^2 + 63x + 229} = 2x + 15$.**BÀI 7.** Giải phương trình $\sqrt{x^2 + 7x + 11} = 2$.**BÀI 8.** Giải phương trình $1 + \sqrt{11 - x} = x$.**BÀI 9.** Giải phương trình $\sqrt{2x^2 + x} = -x - 2$.**BÀI 10.** Tìm điều kiện của tham số m để phương trình sau có hai nghiệm phân biệt:

$$\sqrt{-x^2 + 6x + m} = x - 1. \quad (1)$$

3. Câu hỏi trắc nghiệm**CÂU 1.** Số nghiệm của phương trình $\sqrt{4x^2 - 5x + 1} = -3$ là

- (A)** 0. **(B)** 1. **(C)** 2. **(D)** vô số.

CÂU 2. Tập nghiệm của phương trình $\sqrt{2x^2 - 3} = x - 1$ là

- (A)** $\{-1 - \sqrt{5}; -1 + \sqrt{5}\}$. **(B)** $\{-1 - \sqrt{5}\}$.
(C) $\{-1 + \sqrt{5}\}$. **(D)** \emptyset .

CÂU 3. Tập nghiệm của phương trình $\sqrt{2x^2 + 9x + 10} = -x - 4$ là

- (A) $\{-3; 2\}$. (B) $\{2\}$. (C) $\{-3\}$. (D) \emptyset .

CÂU 4. Tổng các nghiệm của phương trình $\sqrt{3x^2 + 23x + 29} = x + 4$ là

- (A) -1 . (B) $-\frac{15}{2}$. (C) $-\frac{13}{2}$. (D) 0 .

CÂU 5. Tổng các nghiệm của phương trình $\sqrt{3x^2 + 45x + 67} = 2x + 9$ là

- (A) 2 . (B) 7 . (C) 9 . (D) 0 .

CÂU 6. Tập nghiệm của phương trình $\sqrt{x^2 - 3x - 2} = x + 1$ là

- (A) $\{-1 - \sqrt{5}; -1 + \sqrt{5}\}$. (B) $\{-1 - \sqrt{5}\}$.
(C) $\left\{-\frac{3}{5}\right\}$. (D) \emptyset .

CÂU 7. Biết α là nghiệm của phương trình $\sqrt{2x^2 - 4x - 1} = 2 - x$. Chọn khẳng định đúng.

- (A) $2 < \alpha < 3$. (B) $-2 < \alpha < 2$. (C) $\alpha^2 > 5$. (D) $-3 < \alpha < -2$.

CÂU 8. Số nghiệm của phương trình $\sqrt{2x^2 - 8x - 5} = 5 - 3x$ là

- (A) 2 . (B) 0 . (C) 1 . (D) vô số.

CÂU 9. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-10; 0]$ để phương trình sau có nghiệm?

$$\sqrt{x^2 - x + m} = x - 2. \quad (1)$$

- (A) 10 . (B) 9 . (C) 11 . (D) 0 .

CÂU 10. Tất cả các giá trị của tham số m để phương trình

$$\sqrt{-x^2 - 4x + m} = x - 1. \quad (1)$$

có nghiệm là

- (A) $m \geq \frac{1}{2}$. (B) $m > 5$. (C) $m \geq 5$. (D) $\frac{1}{2} \leq m \leq 5$.

BẢNG ĐÁP ÁN

3

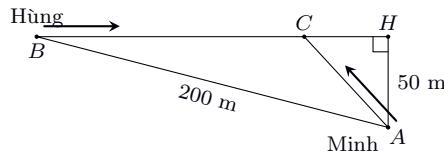
Toán thực tế

1. Ví dụ minh họa

VÍ DỤ 1. Bác Việt sống và làm việc tại trạm hải đăng cách bờ biển 4 km. Hằng tuần bác chèo thuyền vào vị trí gần nhất trên bờ biển là bến Bính để nhận hàng hoá do cơ quan cung cấp. Tuần này, do trực trặc về vận chuyển nên toàn bộ số hàng vẫn đang nằm ở thôn Hoành, bên bờ biển cách bến Bính 9,25 km và sẽ được anh Nam vận chuyển trên con đường dọc bờ biển tới bến Bính bằng xe kéo. Bác Việt đã gọi điện thông nhất với anh Nam là họ sẽ gặp nhau ở vị trí nào đó giữa bến Bính và thôn Hoành để hai người có mặt tại đó cùng lúc, không mất thời gian chờ nhau. Tìm vị trí hai người dự định gặp nhau, biết rằng vận tốc kéo xe của anh Nam là 5 km/h và thuyền của bác Việt di chuyển với vận tốc 4 km/h. Ngoài ra giả thiết rằng đường bờ biển từ thôn Hoành đến bến Bính là đường thẳng và bác Việt cũng luôn chèo thuyền tới một điểm trên bờ biển theo một đường thẳng.

VÍ DỤ 2.

Hàng ngày, bạn Hùng đều đón bạn Minh đi học tại một vị trí trên lề đường thẳng đến trường. Minh đứng tại vị trí A cách lề đường một khoảng 50 m để chờ Hùng. Khi nhìn thấy Hùng đạp xe đến địa điểm B, cách mình một đoạn



200 m thì Minh bắt đầu đi bộ ra lề đường để bắt kịp xe. Vận tốc đi bộ của Minh là 5 km/h, vận tốc xe đạp của Hùng là 15 km/h. Hãy xác định vị trí C trên lề đường để hai bạn gặp nhau mà không bạn nào phải chờ người kia (làm tròn kết quả đến hàng phần mươi).

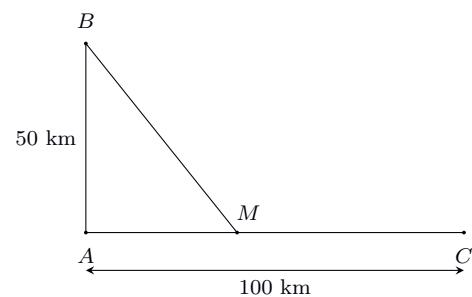
QUICK NOTE

QUICK NOTE

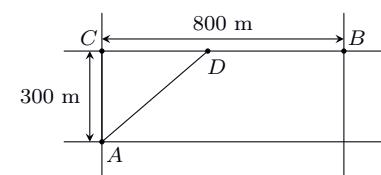
2. Bài tập tự luận

BÀI 1.

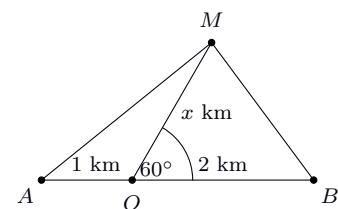
Có một nhà máy nước nọ muốn tìm vị trí M để xây dựng trạm cấp nước sao cho khoảng cách từ nhà máy đến hai thị xã B , C là bằng nhau. Biết hai thị xã trên lần lượt cách thành phố A lần lượt 50 km và 100 km (như hình vẽ). Tính khoảng cách từ nhà máy nước đến thành phố A .

**BÀI 2.**

Một người đứng ở điểm A trên một bờ sông rộng 300 m, chèo thuyền đến vị trí D , sau đó chạy bộ đến vị trí B cách C một khoảng 800 m (hình vẽ). Vận tốc chèo thuyền là 6 km/h, vận tốc chạy bộ là 10 km/h và giả sử vận tốc dòng nước không đáng kể. Tính khoảng cách từ vị trí C đến vị trí D , biết tổng thời gian người đó chèo thuyền và chạy bộ từ A đến B là 7,2 phút.

**BÀI 3.**

Một con tàu biển M rời cảng O và chuyển động thẳng theo phương tạo với bờ biển một góc 60° . Trên bờ biển có hai đài quan sát A và B nằm về hai phía so với cảng O và lần lượt cách cảng O khoảng cách 1 km và 2 km.



- Đặt độ dài của MO là x km. Biểu diễn khoảng cách từ tàu đến A và từ tàu đến B theo x .
- Tìm x để khoảng cách từ tàu đến B bằng $\frac{4}{5}$ khoảng cách từ tàu đến A .
- Tìm x để khoảng cách từ tàu đến B nhỏ hơn khoảng cách từ tàu đến O đúng 500 m.

LỜI GIẢI CHI TIẾT

Bài 2. HÀM SỐ BẬC HAI

A. KIẾN THỨC TRỌNG TÂM

1. Khái niệm hàm số bậc hai

Hàm số bậc hai theo biến x là hàm số cho bởi công thức $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ với a, b, c là các số thực và $a \neq 0$. Tập xác định của hàm số bậc hai là $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

2. Đồ thị của hàm số bậc hai

Đồ thị hàm số bậc hai $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) là một đường parabol có **đỉnh** $I\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$, có **trục đối xứng** là đường thẳng $x = -\frac{b}{2a}$.

Parabol này quay bề lõm lên trên nếu $a > 0$, xuông dưới nếu $a < 0$.

Dể vẽ đường parabol $y = ax^2 + bx + c$ ta tiến hành theo các bước sau

a) Xác định tọa độ đỉnh $I\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$;

b) Vẽ trục đối xứng $x = -\frac{b}{2a}$;

c) Xác định tọa độ các giao điểm của parabol với trục tung, trục hoành (nếu có) và một vài điểm đặc biệt trên parabol;

d) Vẽ Parabol.

Nhận xét.

Với $a > 0$	Với $a < 0$
Hàm số nghịch biến trên $(-\infty; -\frac{b}{2a})$; Hàm số đồng biến trên $(-\frac{b}{2a}; +\infty)$; $-\frac{\Delta}{4a}$ là giá trị nhỏ nhất của hàm số.	Hàm số nghịch biến trên $(-\frac{b}{2a}; +\infty)$; Hàm số đồng biến trên $(-\infty; -\frac{b}{2a})$; $-\frac{\Delta}{4a}$ là giá trị lớn nhất của hàm số.

B. CÁC DẠNG TOÁN

1

Tập xác định, bảng biến thiên, tính đơn điệu, GTLN, GTNN của hàm số bậc hai

Với $a > 0$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
y	$+\infty$	$\frac{-\Delta}{4a}$	$+\infty$

Với $a < 0$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
y	$-\infty$	$\frac{-\Delta}{4a}$	$-\infty$

VÍ DỤ 1. Xét sự biến thiên của hàm số $y = x^2 - 2x + 3$.

Lời giải:

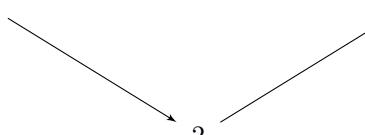
- Tập xác định: $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

- Ta có $x = -\frac{b}{2a} = 1$ và $y = -\frac{\Delta}{4a} = 2$.

- Do $a = 1 > 0$ nên hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 1)$ và đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$.

- Bảng biến thiên

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y	$+\infty$		$+\infty$
		2	



VÍ DỤ 2. Xét tính đơn điệu của hàm số $y = -x^2 + 2x - 3$.

 **Lời giải.**

- Tập xác định: $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

- Ta có $x = -\frac{b}{2a} = 1$.

- Do $a = -1 < 0$ nên hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 1)$ và nghịch biến trên khoảng $(1; +\infty)$.

VÍ DỤ 3. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^2 - 4x + 5$.

 **Lời giải.**

Hàm số $y = x^2 - 4x + 5$ có đồ thị là Parabol, bề lõm hướng lên.

Đồ thị hàm số có đỉnh $I(2; 1)$.

Suy ra giá trị nhỏ nhất của hàm số $y_{\min} = 1$ đạt tại $x = 2$.

VÍ DỤ 4. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = -\sqrt{2}x^2 + 4x$.

 **Lời giải.**

Hàm số $y = -\sqrt{2}x^2 + 4x$ có đồ thị là Parabol, bề lõm hướng xuống.

Đồ thị hàm số có đỉnh $I(\sqrt{2}; 2\sqrt{2})$.

Suy ra giá trị lớn nhất của hàm số $y_{\max} = 2\sqrt{2}$ đạt tại $x = \sqrt{2}$.

2

Xác định hàm số bậc hai

Ta thực hiện theo các bước sau.

Bước 1: Giả sử parabol $(P) : y = ax^2 + bx + c$ với $a \neq 0$.

Bước 2: Dựa vào giả thiết để bài để xác định a, b, c .

Một số giả thiết thường gặp ở bước này và cách xử lí.

Ⓐ Parabol đi qua điểm $M(x_0; y_0) \Rightarrow y_0 = ax_0^2 + bx_0 + c$.

Ⓑ Parabol có trực đối xứng $x = x_0 \Rightarrow x_0 = -\frac{b}{2a}$.

Ⓒ Parabol có đỉnh $I(x_0; y_0) \Rightarrow \begin{cases} x_0 = -\frac{b}{2a} \\ y_0 = -\frac{\Delta}{4a} \end{cases}$ hoặc $y_0 = ax_0^2 + bx_0 + c$

Ⓓ Parabol có giá trị nhỏ nhất (hoặc giá trị lớn nhất) bằng $y_0 \Rightarrow \begin{cases} a > 0 \\ y_0 = -\frac{\Delta}{4a} \end{cases} \quad \left(\text{hoặc } \begin{cases} a < 0 \\ y_0 = -\frac{\Delta}{4a} \end{cases} \right)$.

Bước 3: Kết luận.

VÍ DỤ 1. Xác định parabol $y = ax^2 + bx + 3$, biết rằng parabol đi qua hai điểm $A(1; 2)$ và $B(-2; 11)$.

 **Lời giải.**

Parabol $(P) : y = ax^2 + bx + 3$ ($a \neq 0$). Ta có $c = 3$.

Vì (P) đi qua $A(1; 2)$ nên $2 = a + b + 3 \Leftrightarrow a + b = -1$. (1)

Vì (P) đi qua $B(-2; 11)$ nên $11 = 4a - 2b + 3 \Leftrightarrow 4a - 2b = 8$. (2)

Từ (1) và (2) ta có $\begin{cases} a + b = -1 \\ 4a - 2b = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \end{cases}$.

Vậy parabol $(P) : y = x^2 - 2x + 3$.

VÍ DỤ 2. Cho parabol $(P) : y = -x^2 + bx + c$. Xác định b, c biết (P) đi qua điểm $M(-2; 4)$ và có trực đối xứng $x = -2$.

 **Lời giải.**

Parabol (P): $y = -x^2 + bx + c$. Ta có $a = -1$.

Vì (P) có trục đối xứng $x = -2$ nên $-\frac{b}{2a} = -2 \Leftrightarrow b = 4a = 4 \cdot (-1) = -4$.

Vì $M(-2; 4) \in (P)$ nên $4 = -(-2)^2 + b \cdot (-2) + c \Leftrightarrow 4 = -4 - 2b + c \Leftrightarrow -2b + c = 8$. Mà $b = -4$ nên $8 + c = 8 \Leftrightarrow c = 0$.

Vậy (P): $y = -x^2 - 4x$.

3

Đồ thị của hàm số bậc hai

Để vẽ đường parabol $y = ax^2 + bx + c$ ta tiến hành theo các bước sau

- Xác định tọa độ đỉnh $I\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$;
- Vẽ trục đối xứng $x = -\frac{b}{2a}$;
- Xác định tọa độ các giao điểm của parabol với trục tung, trục hoành (nếu có) và một vài điểm đặc biệt trên parabol;
- Vẽ Parabol.

VÍ DỤ 1. Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = x^2 - 2x$.

Lời giải.

Ta có $a = 1, b = -2, c = 0$. Suy ra tọa độ đỉnh là $I(1; -1)$.

Vậy bảng biến thiên là

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y	$+\infty$	-1	$+\infty$

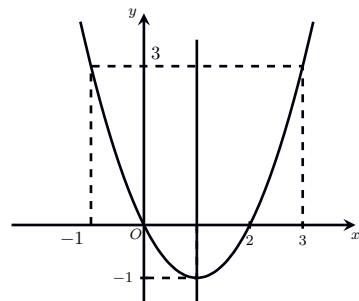
Do đó hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 1)$ và đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$.

*Vẽ đồ thị: Ta có đỉnh là $I(1; -1)$ và trục đối xứng là $x = 1$.

Bảng giá trị

x	-1	0	1	2	3
y	3	0	-1	0	3

Ta có đồ thị của hàm số $y = x^2 - 2x$ là



VÍ DỤ 2. Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - 2$.

Lời giải.

Ta có $a = -\frac{1}{2}, b = 2, c = -2$. Suy ra tọa độ đỉnh là $I(2; 0)$.

Vậy bảng biến thiên là

x	$-\infty$	2	$+\infty$
y	$-\infty$	0	$-\infty$

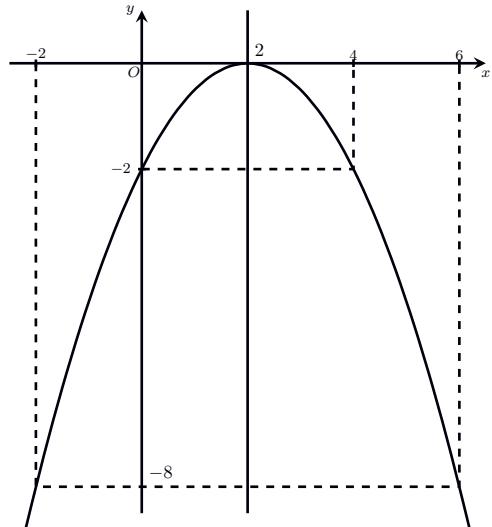
Do đó hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 2)$ và nghịch biến trên khoảng $(2; +\infty)$.

*Vẽ đồ thị: Ta có đỉnh là $I(2; 0)$ và trục đối xứng là $x = 2$.

Bảng giá trị

x	-2	0	2	4	6
y	-8	-2	0	-2	-8

Ta có đồ thị của hàm số $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - 2$ là



4

Bài toán tương giao

- ⦿ Dựa vào các công thức cần nhớ để tìm tọa độ của đỉnh, giao điểm của parabol với các trục tọa độ. Tuy nhiên, khi tìm tọa độ của đỉnh I thì ta chỉ cần tìm hoành độ $x_0 = -\frac{b}{2a}$. Rồi sau đó thế x_0 vào hàm số ban đầu để tìm $y_0 = ax_0^2 + bx_0 + c$ là tung độ của đỉnh I .
- ⦿ Dựa vào phương trình hoành độ giao điểm để xác định giao điểm của parabol (P) với đường thẳng.

VÍ DỤ 1. Cho hàm số $y = x^2 - 4x + 3$ có đồ thị là parabol (P). Tìm tọa độ của đỉnh, giao điểm của đồ thị với trục tung và trục hoành.

 **Lời giải.**

Từ đề ta có: $a = 1, b = -4, c = 3$. Vậy hoành độ của đỉnh I là: $x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{-4}{2 \cdot 1} = 2$.

$$\Rightarrow y_0 = 2^2 - 4 \cdot 2 + 3 = -1. \text{ Vậy đỉnh } I(2; -1).$$

Giao điểm của (P) và trục Oy : Cho $x = 0 \Rightarrow y = 3$. Vậy (P) cắt trục Oy tại điểm $A(0; 3)$.

Giao điểm của (P) với trục Ox : Xét phương trình: $x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3. \end{cases}$

Vậy (P) cắt trục Ox tại hai điểm $B(1; 0)$ và $C(3; 0)$.

VÍ DỤ 2. Cho hàm số $y = -x^2 - 3x + 1$ có đồ thị là parabol (P). Tìm tọa độ của đỉnh, giao điểm của đồ thị với trục tung và trục hoành.

 **Lời giải.**

Từ đề ta có: $a = -1, b = -3, c = 1$. Vậy hoành độ của đỉnh I là: $x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{-3}{-2 \cdot 1} = -\frac{3}{2}$.

$$\Rightarrow y_0 = -\left(-\frac{3}{2}\right)^2 - 3 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) + 1 = \frac{13}{4}. \text{ Vậy đỉnh } I\left(-\frac{3}{2}; \frac{13}{4}\right).$$

Giao điểm của (P) và trục Oy : Cho $x = 0 \Rightarrow y = 1$. Vậy (P) cắt trục Oy tại điểm $A(0; 1)$.

Giao điểm của (P) với trục Ox : Xét phương trình: $-x^2 - 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-3 + \sqrt{13}}{2} \\ x = \frac{-3 - \sqrt{13}}{2}. \end{cases}$

Vậy (P) cắt trục Ox tại hai điểm $B\left(\frac{-3 + \sqrt{13}}{2}; 0\right)$ và $C\left(\frac{-3 - \sqrt{13}}{2}; 0\right)$.

5

Bài toán thực tế liên quan đến hàm số bậc hai

VÍ DỤ 1. Một viên bi rơi tự do từ độ cao 19,6 m xuống mặt đất. Độ cao h (mét) so với mặt đất của viên bi trong khi rơi phụ thuộc vào thời gian t (giây) theo công thức $h = 19,6 - 4,9t^2$, $h, t \geq 0$. Hỏi sau bao nhiêu giây kể từ khi rơi viên bi chạm đất?

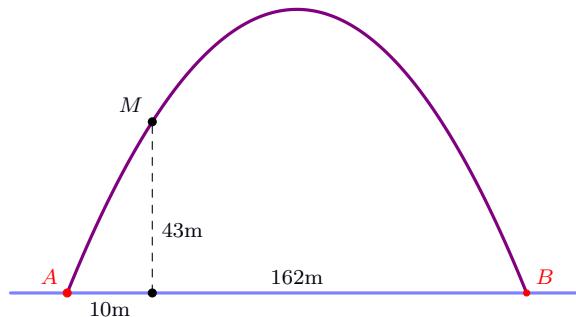
Lời giải:

Viên bi chạm đất ta có $h = 0$.

$$19,6 - 4,9t^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = -2 \end{cases} \Leftrightarrow t = 2.$$

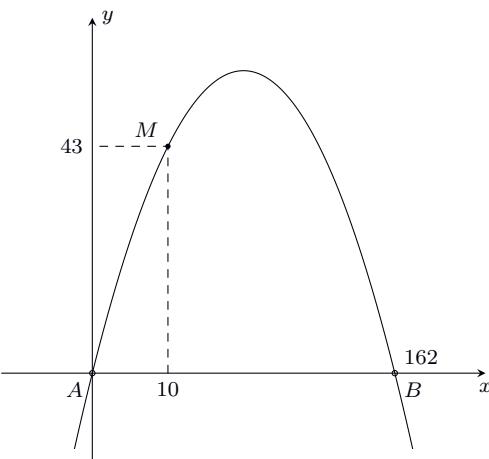
Vậy sau thời gian $t = 2$ s thì viên bi chạm đất.

VÍ DỤ 2. Cổng Arch tại thành phố St Louis của Mỹ có hình dạng là một parabol (hình vẽ). Biết khoảng cách giữa hai chân cổng bằng 162m. Trên thành cổng, tại vị trí có độ cao 43m so với mặt đất (điểm M), người ta thả một sợi dây chạm đất (dây căng theo phương vuông góc với đất). Vị trí chạm đất của đầu sợi dây này cách cổng A một đoạn 10m. Giả sử các số liệu trên là chính xác. Hãy xác tính độ cao của cổng Arch (tính từ mặt đất đến điểm cao nhất của cổng).



Lời giải:

Chọn hệ trục Oxy như hình vẽ



Phương trình parabol (P) có dạng $y = ax^2 + bx + c$.

Phương trình (P) đi qua ba điểm $A(0; 0)$, $B(162; 0)$, $M(10; 43)$ nên ta có

$$\begin{cases} c = 0 \\ 162^2a + 162b + c = 0 \\ 10^2a + 10b + c = 43 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{43}{1520} \\ b = \frac{3483}{760} \\ c = 0 \end{cases} \Rightarrow (P): y = -\frac{43}{1520}x^2 + \frac{3483}{760}$$

Do đó chiều cao của cổng là $h = -\frac{\Delta}{4a} = \frac{b^2 - 4ac}{4a} \approx 185,6m$.

C. BÀI TẬP TỰ LUẬN

1. Tập xác định, bảng biến thiên, tính đơn điệu, GTLN-GTNN

BÀI 1. Lập bảng biến thiên của hàm số $y = x^2 + 6x + 5$.

Lời giải:

Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Dỉnh $I(-3; -4)$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-3	$+\infty$
y	$+\infty$		$+\infty$

Hàm số đồng biến trên khoảng $(-3; +\infty)$ và nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -3)$

BÀI 2. Lập bảng biến thiên của hàm số $y = x^2 + 4x + 3$.

 **Lời giải.**

Hàm số $y = x^2 + 4x + 3$ có đỉnh $I(-2; -1)$ nên có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
y	$+\infty$		$+\infty$

2. Xác định hàm số bậc hai

BÀI 3. Cho hàm số $y = x^2 + ax + b$. Tìm các hệ số a, b biết đồ thị hàm số đi qua hai điểm $M(-1; 0)$ và $N(-2; -1)$.

 **Lời giải.**

Do đồ thị hàm số đã cho đi qua hai điểm M và N nên

$$\begin{cases} (-1)^2 - a + b = 0 \\ (-2)^2 - 2a + b = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 3. \end{cases}$$

BÀI 4. Xác định Parabol (P): $y = ax^2 + bx + c$ biết (P) đi qua ba điểm $A(1; 1)$, $B(-3; 2)$, $C(2; 5)$.

 **Lời giải.**

Parabol (P) đi qua ba điểm $A(1; 1)$, $B(-3; 2)$, $C(2; 5)$ nên ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} a + b + c = 1 \\ 9a - 3b + c = 2 \\ 4a + 2b + c = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{17}{20} \\ b = \frac{29}{20} \\ c = \frac{13}{10}. \end{cases}$$

Vậy (P): $y = \frac{17}{20}x^2 + \frac{29}{20}x - \frac{13}{10}$.

BÀI 5. Tìm parabol $y = ax^2 + bx + 3$, biết rằng parabol đó

- a) đi qua điểm $P(-3; 9)$ và có trục đối xứng $x = -1$;
- b) có đỉnh $I(-2; 19)$.

 **Lời giải.**

- a) Parabol nhận $x = -1$ làm trục đối xứng nên $-\frac{b}{2a} = -1 \Leftrightarrow b = 2a$.

Điểm $P(-3; 9)$ thuộc parabol nên $9a - 3b + 3 = 9 \Leftrightarrow 3a - b = 2$.

Do đó ta có $\begin{cases} b = 2a \\ 3a - b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 4. \end{cases}$

Vậy parabol cần tìm là $y = 2x^2 + 4x + 3$.

- b) Parabol có đỉnh là $I(-2; 19)$ nên ta có

$$\begin{cases} -\frac{b}{2a} = -2 \\ 4a - 2b + 3 = 19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 4a \\ 2a - b = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -4 \\ b = -16. \end{cases}$$

Vậy parabol cần tìm là $y = -4x^2 - 16x + 3$.

3. Đồ thị của hàm số bậc hai

BÀI 6. Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = -x^2 + 4x - 3$.

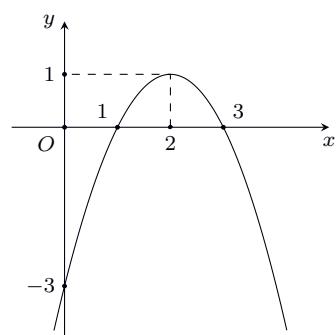
 **Lời giải.**

Ta có $-\frac{b}{2a} = 2$, $y(2) = 1$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	2	$+\infty$
y	$-\infty$	1	$-\infty$

Đồ thị hàm số là parabol có đỉnh là điểm $(2; 1)$, trục đối xứng là đường thẳng $x = 2$, cắt trục tung tại điểm $(0; -3)$ và cắt trục hoành tại hai điểm $(1; 0), (3; 0)$.



BÀI 7. Cho hàm số $y = x^2 - 4x + 3$. Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số.

 **Lời giải.**

Xét hàm số $y = x^2 - 4x + 3$ có đồ thị là parabol (P) .

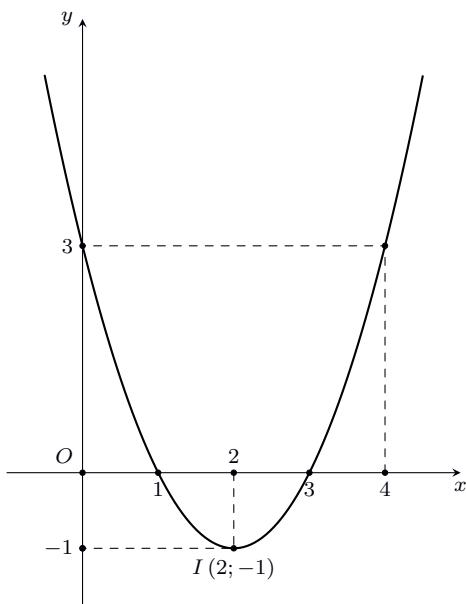
 (P) có tọa độ đỉnh là $I(2; -1)$ và trục đối xứng $x = 2$.

 Bảng biến thiên của hàm số

x	$-\infty$	2	$+\infty$
y	$+\infty$	-1	$+\infty$

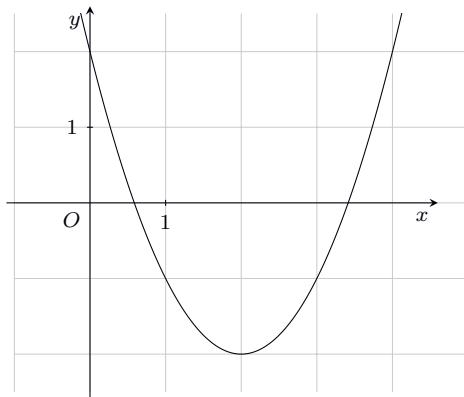
Hàm số đồng biến trên $(2; +\infty)$ và nghịch biến trên $(-\infty; 2)$.

 Đồ thị



BÀI 8.

Xác định dấu của các hệ số a, b, c và dấu của biệt thức $\Delta = b^2 - 4ac$ của hàm số bậc hai $y = ax^2 + bx + c$, biết đồ thị của nó có dạng như hình bên.

**Lời giải.**

Từ đồ thị của hàm số ta thấy:

- Ⓐ Đồ thị quay bùn lõm lên nên $a > 0$.
- Ⓑ Đồ thị cắt trục tung tại điểm có tung độ dương nên $c > 0$.

Ⓒ Hoành độ đỉnh $x = -\frac{b}{2a}$ có giá trị dương nên a và b trái dấu. Vì $a > 0$ nên $b < 0$.

Mặt khác, vì đồ thị hàm số cắt trục hoành Ox tại hai điểm phân biệt, tức là phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có hai nghiệm phân biệt nên $\Delta = b^2 - 4ac > 0$.

Vậy $a > 0, b < 0, c > 0$ và $\Delta = b^2 - 4ac > 0$.

4. Bài toán tương giao

BÀI 9. Tìm tọa độ giao điểm của hai đồ thị hàm số $y = x^2 - x + 1$ và $y = 2x - 1$.

Lời giải.

Ⓐ Phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị là $x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \Rightarrow y = 1 \\ x = 2 \Rightarrow y = 3 \end{cases}$.

Ⓑ Vậy tọa độ giao điểm là: $A(1; 1), B(2; 3)$.

BÀI 10. Tìm tham số m để $(P): y = x^2 - 2x$ cắt đường thẳng $y = m$ tại hai điểm phân biệt.

Lời giải.

Xét phương trình hoành độ giao điểm

$$x^2 - 2x = m \Leftrightarrow x^2 - 2x - m = 0. \quad (1)$$

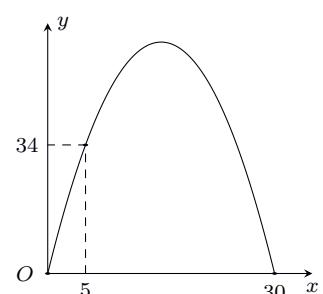
Ta có $\Delta' = 1 + m$, (P) cắt đường thẳng $y = m$ tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi (1) có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow 1 + m > 0 \Leftrightarrow m > -1.$$

Vậy $m > -1$.

5. Bài toán thực tế liên quan**BÀI 11.**

Tháp cầu vượt hai tầng Ngã ba Huế là điểm nhấn kiến trúc mới cho đô thị Đà Nẵng, có hình parabol. Một nhóm học sinh muốn đo chiều cao của tháp bằng cách lập một hệ trục tọa độ sao cho một chân tháp đi qua gốc tọa độ, chân kia của tháp có tọa độ $(30; 0)$, và đo được một điểm M trên tháp có tọa độ $(5; 34)$. Tính chiều cao của tháp.

**Lời giải.**

Giả sử parabol có phương trình $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$).

Parabol đi qua ba điểm $O(0; 0); M(5; 34)$ và $N(30; 0)$ nên ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} c = 0 \\ 25a + 5b + c = 34 \\ 900a + 30b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{34}{125} \\ b = \frac{204}{25} \\ c = 0 \end{cases}$$

Từ đó, phương trình của parabol là $y = -\frac{34}{125}x^2 + \frac{204}{25}x$.

Parabol này có đỉnh $I\left(15; \frac{306}{5}\right)$, nên tháp có chiều cao $h = \frac{306}{5}$.

Vậy chiều cao của tháp là $h = \frac{306}{5}$.

BÀI 12. Một quả bóng cầu thủ sút lên rồi rơi xuống theo quỹ đạo là parabol. Biết rằng ban đầu quả bóng được sút lên từ độ cao 1 m, sau đó 1 giây nó đạt độ cao 10 m và 3,5 giây nó ở độ cao 6,25 m. Hỏi độ cao cao nhất mà quả bóng đạt được là bao nhiêu mét?

 **Lời giải.**

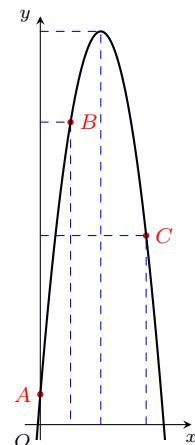
Biết rằng quỹ đạo của quả bóng là một cung parabol nên phương trình có dạng $(P): y = ax^2 + bx + c$.

Chọn hệ tọa độ như hình vẽ. Với các điểm $A(0; 1)$, $B(1; 10)$, $C(3,5; 6,25)$, ta có

$$\begin{cases} A(0; 1) \in (P) \\ B(1; 10) \in (P) \\ C(3,5; 6,25) \in (P) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 1 \\ a + b + c = 10 \\ 12,25a + 3,5b + c = 6,25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = 12 \\ c = 1 \end{cases}$$

Suy ra phương trình parabol là $y = -3x^2 + 12x + 1$.

Parabol có đỉnh $I(2; 13)$. Khi đó quả bóng đạt vị trí cao nhất tại đỉnh tức $h = 13$ m.



BÀI 13. Một rạp chiếu phim có sức chứa 1 000 người. Với giá vé là 40 000 đồng, trung bình sẽ có khoảng 300 người đến rạp xem phim mỗi ngày. Để tăng số lượng vé bán ra, rạp chiếu phim đã khảo sát thị trường và thấy rằng nếu giá vé cứ giảm 10 000 đồng thì sẽ có thêm 100 người đến rạp mỗi ngày.

- Tìm công thức của hàm số $R(x)$ mô tả doanh thu từ tiền bán vé mỗi ngày của rạp chiếu phim khi giá vé là x nghìn đồng.
- Tìm mức giá vé để doanh thu từ tiền bán vé mỗi ngày của rạp là lớn nhất

 **Lời giải.**

- Khi giá vé là x (nghìn đồng) thì số tiền giảm giá mỗi vé so với mức giá cũ là $40 - x$ (nghìn đồng).

Số người tăng lên sau khi giảm giá vé là $\frac{100(40-x)}{10} = 10(40-x)$.

Số người đến rạp chiếu phim mỗi ngày sau khi giảm giá là

$$300 + 10(40 - x) = 700 - 10x.$$

Công thức của hàm số $R(x)$ mô tả doanh thu từ tiền bán vé mỗi ngày khi giá vé là x (nghìn đồng) là

$$R(x) = x(700 - 10x) = -10x^2 + 700x \text{ (nghìn đồng)}.$$

- Hàm số $R(x) = -10x^2 + 700x$ đạt giá trị lớn nhất tại $x = 35$. Khi đó

$$R(35) = 12\,250.$$

Vậy doanh thu lớn nhất mà rạp chiếu có thể thu được mỗi ngày là 12 250 000 đồng khi bán vé là 35 000 đồng.

BÀI 14. Một hòn đá được ném lên trên theo phương thẳng đứng. Khi bỏ qua sức cản không khí, chuyển động của hòn đá tuân theo phương trình sau

$$y = -4,9t^2 + mt + n,$$

với m , n là các hằng số. Ở đây $t = 0$ là thời điểm hòn đá được ném lên, $y(t)$ là độ cao của hòn đá tại thời điểm t (giây) sau khi ném và $y = 0$ ứng với bóng chạm đất.

- Tìm phương trình chuyển động của hòn đá, biết rằng điểm ném cách mặt đất 1,5 m và thời gian để hòn đá đạt độ cao lớn nhất là 1,2 giây sau khi ném.
- Tìm độ cao của hòn đá sau 2 giây kể từ khi bắt đầu ném.
- Sau bao lâu kể từ khi ném, hòn đá rơi xuống mặt đất (Kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai)?

 **Lời giải.**

a) Theo giả thiết điểm ném ở độ cao 1,5 m so với mặt đất nên $n = 1,5$.

$$\text{Hòn đá đạt độ cao lớn nhất khi } t = -\frac{m}{2 \cdot (-4,9)} = \frac{m}{9,8}.$$

$$\text{Theo đề bài ta có } \frac{m}{9,8} = 1,2 \Leftrightarrow m = 11,76.$$

Vậy phương trình chuyển động của hòn đá là $y = -4,9t^2 + 11,76t + 1,5$.

b) Khi $t = 2$ ta có $y = -4,9 \cdot 2^2 + 11,76 \cdot 2 + 1,5 = 5,42$.

Vậy sau 2 giây, hòn đá có độ cao là 5,42 m.

c) Hòn đá rơi xuống mặt đất tức là $y = 0$. Xét phương trình

$$-4,9t^2 + 11,76t + 1,5 = 0 \Leftrightarrow t \approx 2,52 \text{ hoặc } t \approx -0,12 \text{ (loại).}$$

Vậy sau khoảng 2,52 giây kể từ khi ném thì hòn đá rơi xuống mặt đất.

D. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

CÂU 1. Hàm số nào sau đây là hàm số bậc hai?

(A) $y = 2x + 1$.

(B) $y = 3x - 4$.

(C) $y = x^2 - 1$.

(D) $y = \frac{x+2}{x-1}$.

 **Lời giải.**

Hàm số bậc hai có dạng: $y = ax^2 + bx + c$, ($a \neq 0$) nên $y = x^2 - 1$ là hàm số bậc hai.

Chọn đáp án (C) 

CÂU 2.

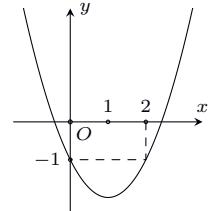
Đồ thị hình bên là của hàm số nào sau đây?

(A) $y = -x^2 - 2x + 3$.

(B) $y = x^2 + 2x - 2$.

(C) $y = 2x^2 - 4x - 2$.

(D) $y = x^2 - 2x - 1$.



 **Lời giải.**

Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm $(0; -1)$ suy ra hàm số cần tìm là $y = x^2 - 2x - 1$.

Chọn đáp án (D) 

CÂU 3. Bảng biến thiên bên dưới là của hàm số nào?

x	$-\infty$	2	$+\infty$
y	$+\infty$		$+\infty$
			

(A) $y = -x^2 + 4x + 2$.

(B) $y = x^2 - 4x - 2$.

(C) $y = x^2 - 4x + 1$.

(D) $y = x^2 - 4x + 2$.

 **Lời giải.**

Từ bảng biến thiên suy ra hàm số đạt giá trị nhỏ nhất bằng -6 tại $x = 2$.

Do đó bảng biến thiên là của hàm số $y = x^2 - 4x - 2$.

Chọn đáp án (B) 

CÂU 4. Tọa độ đỉnh của đồ thị hàm số $y = 2x^2 + 5x - 7$ là

(A) $\left(\frac{-5}{4}; \frac{-81}{8}\right)$.

(B) $\left(\frac{-5}{4}; \frac{-81}{2}\right)$.

(C) $\left(\frac{-5}{2}; \frac{-81}{2}\right)$.

(D) $\left(\frac{-5}{2}; \frac{-81}{4}\right)$.

 **Lời giải.**

Đồ thị của hàm số $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) là Parabol có đỉnh $I\left(\frac{-b}{2a}; \frac{-\Delta}{4a}\right)$. Từ đây, ta có đỉnh của đồ thị hàm số $y = 2x^2 + 5x - 7$ là $I\left(\frac{-5}{4}; \frac{-81}{8}\right)$.

Chọn đáp án (A) 

CÂU 5. Cho hàm số bậc hai $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) có đồ thị (P), tọa độ đỉnh I của nó được xác định bởi công thức nào?

(A) $I\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$.

(B) $I\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{2a}\right)$.

(C) $I\left(-\frac{b}{a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$.

(D) $I\left(\frac{b}{a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$.

 Lời giải.

Tọa độ đỉnh của parabol (P) là $I\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$.

Chọn đáp án **A** □

CÂU 6. Parabol $y = x^2 + 5x + 6$ có tọa độ đỉnh là

- A** $\left(5; \frac{1}{2}\right)$. **B** $\left(-\frac{5}{2}; \frac{1}{2}\right)$. **C** $\left(\frac{5}{2}; \frac{1}{4}\right)$. **D** $\left(-\frac{5}{2}; -\frac{1}{4}\right)$.

 Lời giải.

Tọa độ đỉnh của parabol là: $\begin{cases} x = -\frac{b}{2a} = -\frac{5}{2} \\ y = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow I\left(-\frac{5}{2}; -\frac{1}{4}\right)$.

Chọn đáp án **D** □

CÂU 7. Hoành độ đỉnh của parabol (P) : $y = 2x^2 - 4x + 3$ bằng

- A** -2 . **B** 2 . **C** -1 . **D** 1 .

 Lời giải.

Ta có $x_I = -\frac{b}{2a} = 1$. Vậy hoành độ đỉnh của (P) là $x_I = 1$.

Chọn đáp án **D** □

CÂU 8. Dường thẳng nào sau đây là trực đối xứng của đồ thị hàm số $y = 2x^2 + 8x + 5$?

- A** $x = -2$. **B** $x = 2$. **C** $x = 4$. **D** $x = -4$.

 Lời giải.

Trục đối xứng của đồ thị hàm số $y = 2x^2 + 8x + 5$ là đường thẳng $x = \frac{-b}{2a} = \frac{-8}{2 \cdot 2} = -2$.

Chọn đáp án **A** □

CÂU 9. Hàm số $y = x^2 + 3x + 7$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A** $\left(-\infty; -\frac{3}{2}\right)$. **B** $\left(-\frac{3}{2}; +\infty\right)$. **C** $(-\infty; +\infty)$. **D** $(-3; -1)$.

 Lời giải.

Ta có $-\frac{b}{2a} = -\frac{3}{2}$. Vì hệ số $a = 1 > 0$ nên hàm số đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{3}{2}; +\infty\right)$.

Chọn đáp án **B** □

CÂU 10. Cho hàm số $y = -x^2 - 2x + 8$. Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề đúng?

- A** Hàm số nghịch biến trên $(2; 3)$. **B** Hàm số nghịch biến trên $(-\infty; -1)$.
C Hàm số đồng biến trên $(-1; +\infty)$. **D** hàm số đồng biến trên $(-4; 2)$.

 Lời giải.

Ta có tọa độ đỉnh $I(-1; 9)$.

Hệ số $a = -1 \Rightarrow$ hàm số đồng biến trên $(-\infty; -1)$ và nghịch biến trên $(-1; +\infty)$.

Từ đó suy ra hàm số nghịch biến trên $(2; 3)$.

Chọn đáp án **A** □

CÂU 11. Cho hàm số $y = x^2 - 2x - 1$, mệnh đề nào sai?

- A** Hàm số đồng biến trên $(1; +\infty)$. **B** Hàm số nghịch biến trên $(-\infty; 1)$.
C Đồ thị hàm số có đỉnh $I(1; -2)$. **D** Đồ thị hàm số có trực đối xứng $x = -2$.

 Lời giải.

Ta có $a = 1 > 0$; $b = -2$; $c = -1$.

Hàm số đồng biến trên $\left(-\frac{b}{2a}; +\infty\right)$ hay $(1; +\infty)$.

Hàm số nghịch biến trên $\left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right)$ hay $(-\infty; 1)$.

Tọa độ đỉnh $I\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$ hay $I(1; -2)$.

Đồ thị hàm số có trực đối xứng là $x = 1$.

Chọn đáp án (D)

CÂU 12. Cho hàm số $y = x^2 - 2x - 3$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- (A) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 2)$.
 (B) Đồ thị hàm số là parabol có đỉnh $I(2; -3)$.
 (C) Hàm số đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$.
 (D) Đồ thị hàm số cắt trục tung tại $M(3; 0)$.

Lời giải.

Hàm số có dạng $y = ax^2 + bx + c$, với $a = 1 > 0$, nên đồ thị hàm số là parabol có toạ độ đỉnh dạng $I\left(\frac{-b}{2a}; \frac{-\Delta}{4a}\right)$ là $I(1; 0)$, suy ra hàm số nghịch biến trên $(-\infty; 1)$, đồng biến trên $(1; +\infty)$; đồ thị cắt trục tung tại điểm $N(0; -3)$.

Chọn đáp án (C)

CÂU 13. Cho hàm số: $y = x^2 - 2x - 1$, mệnh đề nào sai?

- (A) Hàm số nghịch biến trên $(-\infty; 1)$.
 (B) Đồ thị hàm số có đỉnh $I(1; -2)$.
 (C) Hàm số đồng biến trên $(1; +\infty)$.
 (D) Đồ thị hàm số có trục đối xứng: $x = -2$.

Lời giải.

Ta có bảng biến thiên của hàm số $y = x^2 - 2x - 1$.

Bảng biến thiên

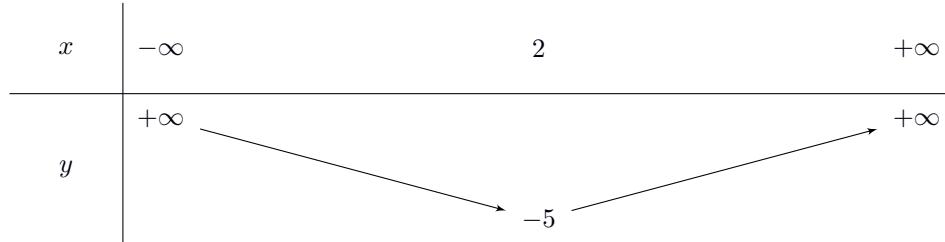
x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	→	-2

Nhìn vào bảng biến thiên ta thấy A, B, C đúng.

Đồ thị hàm số có trục đối xứng $x = 1$ nên D sai.

Chọn đáp án (D)

CÂU 14. Bảng biến thiên ở dưới là bảng biến thiên của hàm số nào trong các hàm số được cho ở bốn phương án A, B, C, D sau đây?



- (A) $y = -x^2 + 4x$. (B) $y = -x^2 + 4x - 9$. (C) $y = x^2 - 4x - 1$. (D) $y = x^2 - 4x - 5$.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hệ số $a > 0$, do đó loại phương án " $y = -x^2 + 4x$ " và " $y = -x^2 + 4x - 9$ ". Xét hàm số $y = x^2 - 4x - 1$.

Toạ độ đỉnh của hàm số trên là $I = \left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right) \Rightarrow I(2; -5)$.

Chọn đáp án (C)

CÂU 15. Tìm tất cả các giá trị của b để hàm số $y = x^2 + 2(b+6)x + 4$ đồng biến trên khoảng $(6; +\infty)$.

- (A) $b \geq 0$. (B) $b = -12$. (C) $b \geq -12$. (D) $b \geq -9$.

Lời giải.

Vì hệ số $a = 1 > 0$ và hoành độ đỉnh của parabol là $x = -(b+6)$ nên hàm số đồng biến trên khoảng $(-b-6; +\infty)$. Để hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(6; +\infty)$ thì $-(b+6) \leq 6 \Leftrightarrow b \geq -12$.

Chọn đáp án (C)

CÂU 16. Cho hàm số $y = -x^2 + 4x + 5$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- (A) $\max_{x \in (0;3)} y = 9$. (B) $\min_{x \in (0;3)} y = 8$. (C) $\max_{x \in (0;3)} y = 8$. (D) $\min_{x \in (0;3)} y = 5$.

Lời giải.

Ta có bảng biến thiên:

x	0	2	3
y	5	9	8

Từ bảng biến thiên ta thấy $\max_{x \in (0;3)} y = 9$.

Chọn đáp án **(A)** □

CÂU 17. Tìm giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ m nhất của hàm số $y = f(x) = x^2 - 3x$ trên đoạn $[0; 2]$.

- (A)** $M = -2; m = -\frac{9}{4}$. **(B)** $M = \frac{9}{4}; m = 0$. **(C)** $M = 0; m = -\frac{9}{4}$. **(D)** $M = 2; m = -\frac{9}{4}$.

Lời giải.

Hàm số $y = f(x) = x^2 - 3x$ có đồ thị là một Parabol, có đỉnh $I\left(\frac{3}{2}; -\frac{9}{4}\right)$.

Do $a = 1 > 0$ nên hàm số trên có bảng biến thiên trên $[0; 2]$ như sau

x	0	$\frac{3}{2}$	2
$f(x)$	0	$-\frac{9}{4}$	-2

Từ bảng biến thiên suy ra $M = 0; m = -\frac{9}{4}$.

Chọn đáp án **(C)** □

CÂU 18. Tìm m để hàm số $y = x^2 - 2x + 2m + 3$ có giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[2; 5]$ bằng -3 .

- (A)** $m = -9$. **(B)** $m = 0$. **(C)** $m = -3$. **(D)** $m = 1$.

Lời giải.

Parabol $y = x^2 - 2x + 2m + 3$ có $a = 1 > 0$ và đỉnh $I(1; 2m + 2)$ nên hàm số $y = x^2 - 2x + 2m + 3$ đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$.

Do đó giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^2 - 2x + 2m + 3$ trên đoạn $[2; 5]$ bằng $y(2) = 2m + 3 = -3 \Rightarrow m = -3$.

Chọn đáp án **(C)** □

CÂU 19. Cho hàm số $y = x^2 - 2(m+1)x + 3$ (với m là tham số). Trên đoạn $[-2018; 2018]$ có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$?

- (A)** 2019. **(B)** 2018. **(C)** 2021. **(D)** 2020.

Lời giải.

Ta có $a = 1 > 0 \Rightarrow$ hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -\frac{b}{2a})$.

Để hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$ thì $-1 < -\frac{b}{2a} \Leftrightarrow -1 < \frac{2(m+1)}{2} \Leftrightarrow m > -2$.

Mà $m \in [-2018; 2018]$ nên $m \in (-2; 2018]$, do $m \in \mathbb{Z}$ suy ra $m \in \{-1; 0; \dots; 2018\}$.

Do đó có 2020 giá trị nguyên m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án **(D)** □

CÂU 20. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = x^2 + (m-1)x + 2m - 1$ đồng biến trên $(-2; +\infty)$. Khi đó tập hợp $(-10; 10) \cap S$ là tập hợp nào?

- (A)** $(-10; 5)$. **(B)** $[5; 10)$. **(C)** $(5; 10)$. **(D)** $(-10; 5]$.

Lời giải.

Hàm số có hệ số $a = 1 > 0$ nên hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; \frac{1-m}{2})$ và đồng biến trên khoảng $(\frac{1-m}{2}; +\infty)$.

Do đó, để hàm số đồng biến trên $(-2; +\infty)$ thì $\frac{1-m}{2} \leq -2 \Leftrightarrow m \geq 5$.

Suy ra $S = [5; +\infty)$.

Khi đó tập hợp $(-10; 10) \cap S = [5; 10)$.

Chọn đáp án (B) □

CÂU 21. Parabol (P) : $y = ax^2 + bx + 1$ đi qua hai điểm $A(1; 4)$ và $B(-1; 2)$ là

- (A) $y = x^2 + 2x + 1$. (B) $y = 2x^2 + x + 1$. (C) $y = -x^2 + 4x + 1$. (D) $y = -2x^2 - x + 1$.

Lời giải.

(P) đi qua $A(1; 4)$ và $B(-1; 2)$ nên ta có hệ $\begin{cases} 4 = a + b + 1 \\ 2 = a - b + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 3 \\ a - b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases}$.

Suy ra (P) : $y = 2x^2 + x + 1$.

Chọn đáp án (B) □

CÂU 22. Parabol $y = ax^2 + bx + c$ đi qua $A(0; -1)$, $B(1; -1)$, $C(-1; 1)$ có phương trình là

- (A) $y = x^2 - x - 1$. (B) $y = x^2 + x - 1$. (C) $y = x^2 + x + 1$. (D) $y = x^2 - x + 1$.

Lời giải.

Parabol $y = ax^2 + bx + c$ đi qua $A(0; -1)$, $B(1; -1)$, $C(-1; 1)$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} c = -1 \\ a + b + c = -1 \\ a - b + c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \\ c = -1 \end{cases}$$

Vậy parabol có phương trình là $y = x^2 - x - 1$.

Chọn đáp án (A) □

CÂU 23. Parabol $y = ax^2 + bx + c$ đi qua $A(0; 6)$ và có đỉnh $I(-2; 4)$ có phương trình là

- (A) $y = x^2 + 2x + 6$. (B) $y = \frac{1}{2}x^2 + 2x + 6$. (C) $y = x^2 + x + 4$. (D) $y = x^2 + 6x + 6$.

Lời giải.

Parabol có đỉnh $I(-2; 4)$ nên ta có $\begin{cases} -\frac{b}{2a} = -2 \\ 4 = a \cdot (-2)^2 - b \cdot 2 + c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a - b = 0 \\ 4a - 2b + c = 4 \end{cases}$ (1).

Parabol đi qua $A(0; 6)$ nên ta có $c = 6$ (2).

Từ (1) và (2) ta có $\begin{cases} 4a - b = 0 \\ 4a - 2b + 6 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = 2 \\ c = 6 \end{cases}$.

Vậy phương trình parabol cần tìm là: $y = \frac{1}{2}x^2 + 2x + 6$.

Chọn đáp án (B) □

CÂU 24. Cho (P) : $y = x^2 + bx + c$ có đỉnh $I(-1; 4)$. Tính $M = 2b + c$?

- (A) $M = 7$. (B) $M = 9$. (C) $M = -3$. (D) $M = -4$.

Lời giải.

Ta có $x_I = \frac{-b}{2a} = -1 \Rightarrow b = 2$

Thay $I(-1; 4)$ vào (P) ta được $4 = (-1)^2 + 2(-1) + c \Rightarrow c = 5$

Từ đó $M = 2 \cdot 2 + 5 = 9$.

Chọn đáp án (B) □

CÂU 25. Parabol $y = ax^2 - 4x + c$ nhận $I(-2; -1)$ làm đỉnh, có phương trình là

- (A) $y = x^2 - 4x - 1$. (B) $y = -x^2 - 4x - 5$. (C) $y = -x^2 - 4x - 13$. (D) $y = x^2 - 4x - 5$.

Lời giải.

$I(-2; -1)$ là đỉnh của parabol $y = ax^2 - 4x + c \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{4}{2a} = -2 \\ a \cdot (-2)^2 + 4 \cdot 2 + c = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ c = -5 \end{cases}$.

Vậy parabol cần tìm có phương trình là $y = -x^2 - 4x - 5$.

Chọn đáp án (B) □

CÂU 26. Cho Parabol (P) : $y = (m-1)x^2 - 2(m-2)x + m-3$. Tìm m để (P) có đỉnh là $S(-1; -2)$.

- (A) $\frac{1}{3}$. (B) 0. (C) $\frac{3}{2}$. (D) $\frac{2}{3}$.

Lời giải.

Điều kiện $m \neq 1$.

Ta có trực đối xứng của đồ thị hàm số là $x = -1 \Leftrightarrow \frac{m-2}{m-1} = -1 \Rightarrow m = \frac{3}{2}$.

Thử lại với $m = \frac{3}{2}$ ta có hàm số $y = \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{3}{2}$ có tọa độ đỉnh là $S(-1; -2)$.

Chọn đáp án **(C)** □

CÂU 27. Xác định hàm số $y = ax^2 + bx + c$ biết đồ thị hàm số đi qua điểm $A(-1; -8)$ và có đỉnh $I(2; 1)$.

- (A)** $y = -x^2 + 4x - 3$. **(B)** $y = x^2 - 4x + 3$. **(C)** $y = -x^2 - 4x - 3$. **(D)** $y = x^2 - 2x - 1$.

Lời giải.

Từ giả thiết, suy ra

$$\begin{cases} -\frac{b}{2a} = 2 \\ a - b + c = -8 \\ 4a + 2b + c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 4 \\ c = -3. \end{cases}$$

Chọn đáp án **(A)** □

CÂU 28. Cho hàm số $y = ax^2 + 2x + c$, biết rằng hàm số đạt giá trị nhỏ nhất bằng 1 tại điểm $x = -1$. Khi đó giá trị của a và c là

- (A)** $a = 1, c = 2$. **(B)** $a = 1, c = -2$. **(C)** $a = -1, c = 2$. **(D)** $a = 1, c = 5$.

Lời giải.

Thay $x = -1, y = 1$ vào phương trình hàm số đã cho ta được $1 = a \cdot (-1)^2 + 2 \cdot (-1) + c \Leftrightarrow a + c = 3$.

Vì hàm số bậc 2 có giá trị nhỏ nhất nên $a > 0$.

Hàm bậc 2 đạt giá trị nhỏ nhất tại $x = -\frac{b}{2a} = \frac{-2}{2a} = -1 \Leftrightarrow a = 1 \Rightarrow c = 2$.

Chọn đáp án **(A)** □

CÂU 29. Biết hàm số $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) đạt giá trị lớn nhất bằng 3 tại $x = 2$ và có đồ thị hàm số đi qua điểm $A(0; -1)$. Tính tổng $S = a + b + c$.

- (A)** $S = 4$. **(B)** $S = 2$. **(C)** $S = -4$. **(D)** $S = -1$.

Lời giải.

Hàm số $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) đạt giá trị lớn nhất bằng 3 tại $x = 2$ và có đồ thị hàm số đi qua điểm $A(0; -1)$ nên ta có:

$$\begin{cases} a < 0 \\ -\frac{b}{2a} = 2 \\ 4a + 2b + c = 3 \\ c = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ c = -1 \\ a = -1 \\ b = 4 \end{cases}$$

Vậy $S = a + b + c = 2$.

Chọn đáp án **(B)** □

CÂU 30. Biết rằng parabol (P): $y = ax^2 - bx + c$ cắt trục tung tại điểm có tung độ là 4, đi qua điểm $A(3; 7)$ và có trục đối xứng là đường thẳng $x = 2$. Giá trị của biểu thức $S = abc$ là

- (A)** $S = 8$. **(B)** $S = -16$. **(C)** $S = -8$. **(D)** $S = 16$.

Lời giải.

Parabol cắt trục tung tại điểm có tung độ là 4 nên $c = 4$.

Parabol đi qua điểm $A(3; 7)$ nên có phương trình $9a - 3b + c = 7$.

Parabol có trục đối xứng là đường thẳng $x = 2$ nên $\frac{b}{2a} = 2$.

Ta được hệ phương trình $\begin{cases} 9a - 3b + c = 7 \\ b = 4a \\ c = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -4 \\ c = 4. \end{cases}$

Vậy $S = abc = 16$.

Chọn đáp án **(D)** □

CÂU 31. Xác định parabol (P) : $y = ax^2 + bx + c$, biết rằng (P) có đỉnh $I(2; -1)$ và cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng -3 .

- (A) $y = x^2 - 2x - 3$. (B) $y = -x^2 - 2x - 3$. (C) $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - 3$. (D) $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x - 3$.

 **Lời giải.**

(P) cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng -3 , suy ra $c = -3$. (1)

$$(P) \text{ có đỉnh } I(2; -1), \text{ suy ra } \begin{cases} -1 = 4a + 2b + c \\ -\frac{b}{2a} = 2 \end{cases} \quad (2)$$

Từ (1) và hệ (2), ta tìm được $a = -\frac{1}{2}$, $b = 2$, $c = -3$.

Vậy (P) : $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - 3$.

Chọn đáp án (C) 

CÂU 32. Xác định parabol $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$), biết rằng đỉnh của parabol đó có tung độ bằng -25 , đồng thời parabol đó cắt trục hoành tại hai điểm $A(-4; 0)$ và $B(6; 0)$.

 **Lời giải.**

Vì parabol đó cắt trục hoành tại hai điểm $A(-4; 0)$ và $B(6; 0)$ nên trục đối xứng của nó có phương trình là $x = 1$. Do đó parabol có đỉnh $I(1; -25)$. Từ đó ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} 16a - 4b + c = 0 \\ 36a + 6b + c = 0 \\ a + b + c = -25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c = -24 \end{cases}$$

Vậy parabol có phương trình $y = x^2 - 2x - 24$.

CÂU 33. Cho các số nguyên a, c sao cho parabol $y = ax^2 - 4x + c$ đi qua điểm $M(4; 2)$ và có tung độ đỉnh là -2 . Tính tổng $S = a + c$.

- (A) $S = 3$. (B) $S = 4$. (C) $S = -1$. (D) $S = 1$.

 **Lời giải.**

Parabol P đi qua điểm $M(4; 2)$ nên ta có $2 = 16a - 16 + c \Leftrightarrow c = 18 - 16a$.

Tung độ đỉnh là -2 nên $-16 + 4ac = -2.4a \Leftrightarrow -16 + 4a(18 - 16a) + 8a = 0 \Leftrightarrow 4a^2 - 5a + 1 = 0 \Leftrightarrow a = 1$ hoặc $a = \frac{1}{4}$ (loại)

Với $a = 1$ suy ra $c = 2$. Vậy $S = a + c = 3$.

Chọn đáp án (A) 

CÂU 34. Tìm các số thực a, c ($c > 0$) sao cho parabol (P) : $y = ax^2 + 2x + c$ đi qua điểm $M(2; 3)$ và có tung độ đỉnh là 4 .

- (A) $a = 1, c = -5$. (B) $a = -2, c = 7$. (C) $a = 2, c = -9$. (D) $a = -1, c = 3$.

 **Lời giải.**

Điểm $M(2; 3) \in (P) \Leftrightarrow 3 = a \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 + c \Leftrightarrow c = -1 - 4a$ (1).

(P) có tung độ đỉnh bằng 4 khi và chỉ khi $-\frac{\Delta}{4a} = 4$.

$$\Leftrightarrow \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a} = 4 \Leftrightarrow -(2^2 - 4ac) = 16a \Leftrightarrow ac - 1 = 4a \quad (2)$$

Thay (1) vào (2), ta được: $a(-1 - 4a) - 1 = 4a \Leftrightarrow -4a^2 - 5a - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \Rightarrow c = 3 \text{ (nhận)} \\ a = -\frac{1}{4} \Rightarrow c = 0 \text{ (loại)} \end{cases}$

Chọn đáp án (D) 

CÂU 35. Cho Parabol (P) : $y = ax^2 + bx + c$ ($a, b, c \in \mathbb{Z}$). Biết (P) đi qua điểm $A(1; -1)$, $B(3; -11)$ và đỉnh của (P) có tung độ bằng $-\frac{7}{8}$. Tính $S = a + b - c$.

- (A) $S = 3$. (B) $S = 5$. (C) $S = 7$. (D) $S = 4$.

 **Lời giải.**

Vì \$(P)\$ đi qua điểm \$A(1; -1)\$, \$B(3; -11)\$ và đỉnh của \$(P)\$ có tung độ bằng \$-\frac{7}{8}\$, ta có

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{array}{l} -1 = a + b + c \\ -11 = 9a + 3b + c \\ -\frac{7}{8} = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} c = -a - b - 1 \\ -11 = 9a + 3b - a - b - 1 \\ 7a = 2[b^2 - 4a(-a - b - 1)] \end{array} \right. \\ & \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} c = -a - b - 1 \\ 4a + b = -5 \\ 8a^2 + 2b^2 + 8ab + a = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} c = -a - b - 1 \\ b = -4a - 5 \\ 8a^2 + 2(-4a - 5)^2 + 8a(-4a - 5) + a = 0 \end{array} \right. \\ & \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} c = -a - b - 1 \\ b = -4a - 5 \\ 8a^2 + 41a + 50 = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = -2 \in \mathbb{Z} \\ a = -\frac{25}{8} \notin \mathbb{Z} \text{ (loại)} \\ b = 3 \\ c = -2. \end{array} \right. \end{aligned}$$

Vậy \$S = a + b - c = 3\$.

Chọn đáp án **(A)** □

CÂU 36. Cho hàm số \$y = x^2 - 2(m+2)x - m + 3\$ có đồ thị là parabol \$(P)\$. Khi \$m\$ thay đổi, đỉnh \$I\$ của \$(P)\$ luôn di chuyển trên một parabol cố định. Phương trình parabol đó là

- (A)** \$y = x^2 - 4x + 2\$. **(B)** \$y = -x^2 - x + 5\$. **(C)** \$y = -x^2 + 4x - 3\$. **(D)** \$y = -x^2 - 5x - 1\$.

Lời giải.

Tọa độ đỉnh \$I\$ của parabol \$(P)\$ là \$\left\{ \begin{array}{l} x_I = m + 2 \quad (1) \\ y_I = (m+2)^2 - 2(m+2)^2 - m + 3 \quad (2) \end{array} \right.\$.

Từ (1) suy ra \$m = x_I - 2\$, thay vào (2) ta có

$$y_I = x_I^2 - 2x_I^2 - x_I + 5 \Leftrightarrow y_I = -x_I^2 - x_I + 5.$$

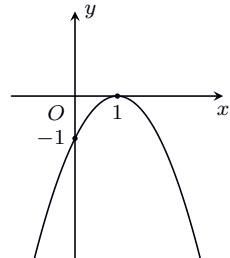
Vậy \$I\$ luôn di chuyển trên parabol cố định có phương trình \$y = -x^2 - x + 5\$.

Chọn đáp án **(B)** □

CÂU 37.

Hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào?

- (A)** \$y = -x^2 + 2x - 1\$. **(B)** \$y = x^2 - 2x - 1\$. **(C)** \$y = -x^2 - 2x - 1\$. **(D)** \$y = -x^2 + 2x + 3\$.



Lời giải.

Đồ thị có bề lõm quay xuống, đỉnh \$I(1; 0)\$.

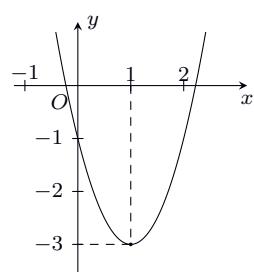
Giao của đồ thị với trục tung là \$(0; -1)\$. Nên đồ thị hàm số cần tìm là \$y = -x^2 + 2x - 1\$.

Chọn đáp án **(A)** □

CÂU 38.

Cho hàm số \$y = ax^2 + bx + c\$ với \$(a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0)\$ có đồ thị như hình bên. Đồ thị bên là của hàm số nào?

- (A)** \$y = 2x^2 - 4x - 1\$. **(B)** \$y = x^2 - 4x - 1\$. **(C)** \$y = 2x^2 - 4x + 1\$. **(D)** \$y = -2x^2 - 4x - 1\$.



Lời giải.

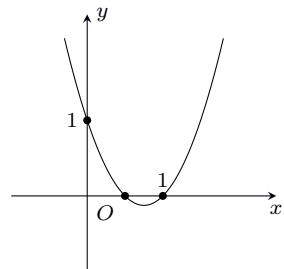
Đồ thị hàm số đi qua điểm \$(0; -1)\$ và có tọa độ đỉnh là \$(1; -3)\$. Ta có

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \cdot a + 0 \cdot b + c = -1 \\ 1^2 \cdot a + 1 \cdot b + c = -3 \\ -\frac{b}{2a} = 1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} c = -1 \\ a + b + c = -3 \\ 2a + b = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = 2 \\ b = -4 \Rightarrow y = 2x^2 - 4x - 1 \\ c = -1 \end{array} \right.$$

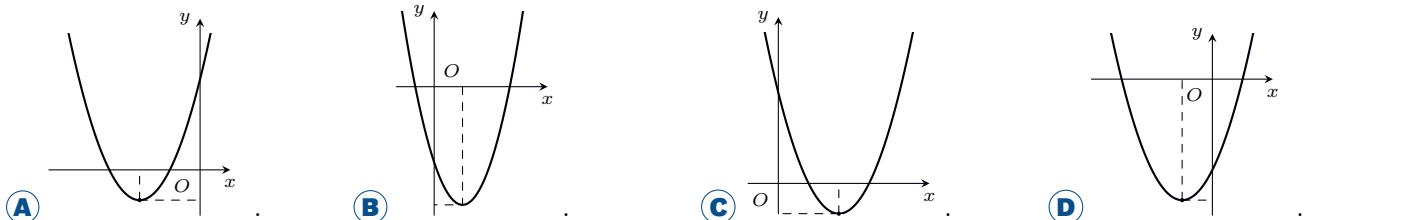
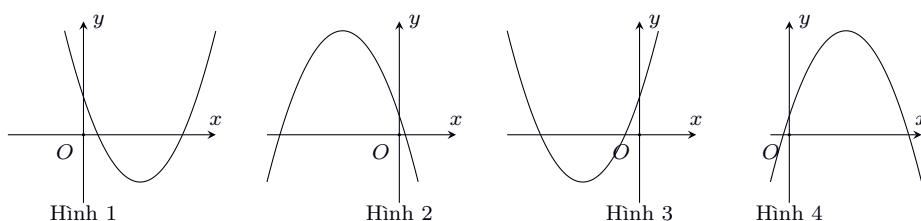
Chọn đáp án **(A)** **CÂU 39.**

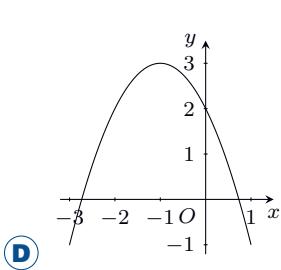
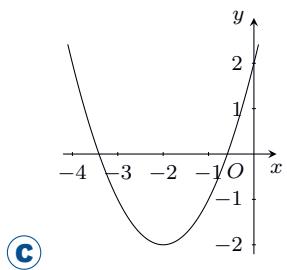
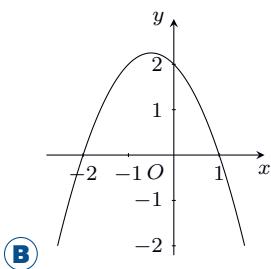
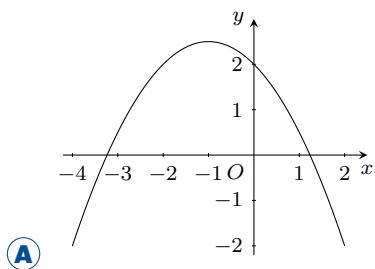
Hàm số nào trong 4 phương án liệt kê ở A, B, C, D dưới đây có đồ thị như hình bên?

- (A)** $y = -x^2 + 3x - 1$. **(B)** $y = -2x^2 + 3x - 1$.
(C) $y = 2x^2 - 3x + 1$. **(D)** $y = x^2 - 3x + 2$.

**Lời giải.**

- Đồ thị hàm số $y = -x^2 + 3x - 1$ cắt trục tung tại điểm có tọa độ $(0; -1)$ nên không thỏa.
 Đồ thị hàm số $y = -2x^2 + 3x - 1$ cắt trục tung tại điểm có tọa độ $(0; -1)$ nên không thỏa.
 Đồ thị hàm số $y = x^2 - 3x + 2$ cắt trục tung tại điểm có tọa độ $(0; 2)$ nên không thỏa.
 Đồ thị hàm số $y = 2x^2 - 3x + 1$ cắt trục tung tại điểm có tọa độ $(0; 1)$ và cắt trục hoành tại hai điểm có tọa độ $(\frac{1}{2}; 0)$ và $(1; 0)$ nên thỏa mãn.

Chọn đáp án **(C)** **CÂU 40.** Đồ thị hàm số $y = 4x^2 - 3x - 1$ có dạng nào trong các dạng sau đây?**Lời giải.**Tọa độ đỉnh của Parabol $S \left(\frac{3}{8}; -\frac{25}{16} \right)$.Trục đối xứng $x = \frac{3}{8} > 0$.Đồ thị cắt trục Oy tại điểm $A(0; -1)$.Chọn đáp án **(B)** **CÂU 41.** Cho hàm số $y = ax^2 + bx + c$ với $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$. Đồ thị của hàm số là hình nào trong các hình dưới đây?**(A)** Hình (4).**(B)** Hình (3).**(C)** Hình (1).**(D)** Hình (2).**Lời giải.**Dựa vào hình dáng đồ thị, vì $a > 0$ nên loại hình (2) và hình (4).Vì $b > 0$ nên $-\frac{b}{a} < 0$, do đó đỉnh của parabol nằm bên trái trục tung, do đó chọn hình (3).Chọn đáp án **(B)** **CÂU 42.** Cho hàm số $y = -\frac{1}{2}x^2 - x + 2$ có đồ thị là hình nào dưới đây?



Lời giải.

Vì $a = -\frac{1}{2} < 0$ nên đồ thị quay bè lõm xuống dưới.

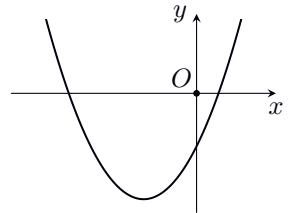
Phương trình hoành độ giao điểm $-\frac{1}{2}x^2 - x + 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 + \sqrt{5} \approx 1,23 > 1 \\ x = -1 - \sqrt{5} \approx -3,23 < -3. \end{cases}$

Chọn đáp án **(A)**

CÂU 43.

Nếu hàm số $y = ax^2 + bx + c$ có đồ thị như hình vẽ thì dấu của các hệ số a, b, c là

- | | |
|-----------------------------------|-----------------------------------|
| (A) $a > 0, b < 0, c < 0.$ | (B) $a > 0, b > 0, c > 0.$ |
| (C) $a < 0, b > 0, c > 0.$ | (D) $a > 0, b > 0, c < 0.$ |



Lời giải.

Bè lõm của parabol hướng lên nên $a > 0$.

Parabol cắt trực tung tại điểm có tung độ âm nên $c < 0$.

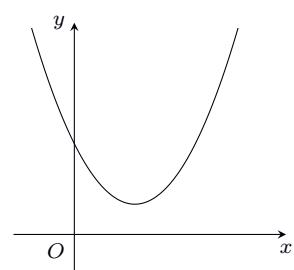
Đỉnh của parabol có hoành độ âm nên $-\frac{b}{2a} < 0 \Rightarrow b > 0$.

Chọn đáp án **(D)**

CÂU 44.

Cho hàm số $y = ax^2 + bx + c$ có đồ thị như hình bên. Khẳng định nào sau đây đúng?

- (A)** $a > 0, b < 0, c < 0.$ **(B)** $a < 0, b < 0, c > 0.$ **(C)** $a > 0, b < 0, c > 0.$ **(D)** $a > 0, b > 0, c > 0.$



Lời giải.

Dựa vào đồ thị $y = ax^2 + bx + c$ ta có

Đồ thị có bè lõm hướng lên nên $a > 0$.

Đồ thị cắt trực tung tại điểm có tung độ dương nên $c > 0$.

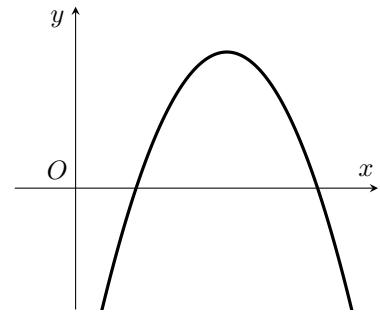
Trục đối xứng của đồ thị nằm bên phải Oy nên $-\frac{b}{2a} > 0$. Mà $a > 0$ nên $b < 0$.

Chọn đáp án **(C)**

CÂU 45.

Cho parabol (P) : $y = ax^2 + bx + c$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Hãy tìm khẳng định đúng

- Aa > 0; b > 0; c > 0. **Ba > 0; b \geq 0; c < 0.
Ca < 0; b > 0; c < 0. **Da < 0; b \leq 0; c < 0.******

**Lời giải.**

↪ Đồ thị hướng bắc lõm xuống dưới $\Rightarrow a < 0.$

↪ Đồ thị có đỉnh có hoành độ dương $\Rightarrow -\frac{b}{2a} > 0 \stackrel{a < 0}{\Leftrightarrow} b > 0.$

Suy ra chọn “ $a < 0; b > 0; c < 0$ ”.

Chọn đáp án **C** □

CÂU 46. Tìm số giao điểm của parabol (P) : $y = x^2 - 3x + 5$ với trục Ox .

- A** 3. **B** 0. **C** 1. **D** 2.

Lời giải.

Xét phương trình hoành độ giao điểm của (P) với Ox là $x^2 - 3x + 5 = 0$ có $\Delta = 9 - 20 = -11 < 0$ nên phương trình vô nghiệm.

Vậy không có giao điểm của (P) với Ox .

Chọn đáp án **B** □

CÂU 47. Giao điểm của parabol $y = x^2 - 3x + 2$ với đường thẳng $y = x - 1$ là

- A** $(2; 1), (3; 2).$ **B** $(1; 0), (3; 2).$ **C** $(0; -1), (-2; -3).$ **D** $(-1; 2), (2; 1).$

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm: $x^2 - 3x + 2 = x - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \Rightarrow y = 0 \\ x = 3 \Rightarrow y = 2. \end{cases}$

Chọn đáp án **B** □

CÂU 48. Tọa độ giao điểm của (P) : $y = x^2 - 4x$ với đường thẳng d : $y = -x - 2$ là

- A** $M(0; -2); N(2; -4).$ **B** $M(-1; -1); N(-2; 0).$ **C** $M(-3; 1); N(3; -5).$ **D** $M(1; -3); N(2; -4).$

Lời giải.

Hoành độ giao điểm của (P) và (d) là nghiệm của phương trình

$$x^2 - 4x = -x - 2 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2. \end{cases}$$

Vậy tọa độ giao điểm là $M(1; -3); N(2; -4)$.

Chọn đáp án **D** □

CÂU 49. Parabol nào sau đây cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt?

- A** $y = -x^2 + 2x - 1.$ **B** $y = x^2 - 2x + 3.$ **C** $y = -x^2 - 1.$ **D** $y = 2x^2 - 5x + 2.$

Lời giải.

Ta có $2x^2 - 5x + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases}$ nên parabol $y = 2x^2 - 5x + 2$ cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt.

Chọn đáp án **D** □

CÂU 50. Tổng tung độ hai giao điểm của parabol (P) : $y = x^2 - 5x + 6$ và đường thẳng (d) : $y = 2x - 2$ bằng

- A** $7 + 2\sqrt{17}.$ **B** 12. **C** $2\sqrt{17} - 4.$ **D** 10.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của parabol (P) : $y = x^2 - 5x + 6$ và đường thẳng (d) : $y = 2x - 2$:

$$x^2 - 5x + 6 = 2x - 2 \Leftrightarrow x^2 - 7x + 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{7 - \sqrt{17}}{2} \\ x = \frac{7 + \sqrt{17}}{2}. \end{cases}$$

$$x = \frac{7 - \sqrt{17}}{2} \Rightarrow y = 2x - 2 = 5 - \sqrt{17}$$

$$x = \frac{7 + \sqrt{17}}{2} \Rightarrow y = 2x - 2 = 5 + \sqrt{17}$$

Tổng tung độ hai giao điểm bằng 10.

Chọn đáp án **(D)**

CÂU 51.

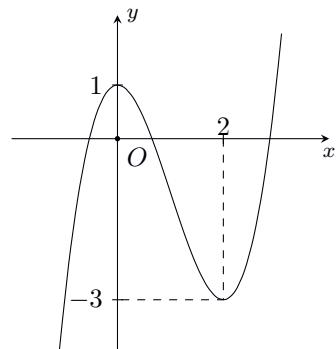
Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên \mathbb{R} có đồ thị như hình vẽ. Phương trình $2f(x) - 1 = 0$ có bao nhiêu nghiệm?

(A) 1.

(B) 3.

(C) 2.

(D) 4.



Lời giải.

Ta có $2f(x) - 1 = 0 \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{2}$.

Dựa vào đồ thị ta thấy đường thẳng $y = \frac{1}{2}$ cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại 3 điểm phân biệt.

Vậy phương trình $2f(x) - 1 = 0$ có 3 nghiệm phân biệt.

Chọn đáp án **(B)**

CÂU 52.

Đồ thị hàm số $y = x^2 + 5$ và $y = -mx + 1$ cắt nhau tại một điểm thì m bằng

(A) $m = 4$ hoặc $m = -4$.

(B) $m = 0$ hoặc $m = 4$.

(C) $m = 0$ hoặc $m = -4$.

(D) $m = 0$ hoặc $m = -4$ hoặc $m = 4$.

Lời giải.

Ta có phương trình hoành độ giao điểm $x^2 + 5 = -mx + 1 \Leftrightarrow x^2 + mx + 4 = 0$. Phương trình có một nghiệm khi và chỉ khi $\Delta' = 0 \Leftrightarrow m^2 - 16 = 0 \Leftrightarrow m = \pm 4$.

Chọn đáp án **(A)**

CÂU 53.

Đồ thị hàm số $y = x^2 + 5$ và $y = -mx + 1$ cắt nhau tại hai điểm phân biệt khi

(A) $m > 4$.

(B) $m < -4$.

(C) $-4 < m < 4$.

(D) $m > 4$ hoặc $m < -4$.

Lời giải.

Ta có phương trình hoành độ giao điểm $x^2 + 5 = -mx + 1 \Leftrightarrow x^2 + mx + 4 = 0$.

Phương trình có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $\Delta' > 0 \Leftrightarrow m^2 - 16 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > 4 \\ m < -4. \end{cases}$

Chọn đáp án **(D)**

CÂU 54.

Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để đường thẳng $y = mx - 3$ không có điểm chung với Parabol $y = x^2 + 1$?

(A) 6.

(B) 9.

(C) 7.

(D) 8.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm: $x^2 + 1 = mx - 3 \Leftrightarrow x^2 - mx + 4 = 0$. (1)

Ta có $\Delta = (-m)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = m^2 - 16$.

Để đường thẳng và Parabol không có điểm chung thì phương trình (1) vô nghiệm

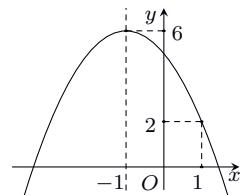
$\Leftrightarrow \Delta = m^2 - 16 < 0 \Leftrightarrow -4 < m < 4 \Rightarrow m \in \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3\}$.

Chọn đáp án **(C)**

CÂU 55.

Cho hàm số $y = -x^2 - 2x + 5$ có đồ thị bên

Tất cả giá trị của m để đường thẳng $y = m$ cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt trong đó có đúng 1 điểm có hoành độ lớn hơn 1.

(A) $m > 2$.(B) $m < 1$.(C) $m < 2$.(D) $m > 1$.**Lời giải.**

Ta có: $x > 1$ thì $-x^2 < -1$; $-2x < -2$, suy ra: $y = -x^2 - 2x + 5 < 2$. Vậy $m < 2$.

Cách 2: Nhìn trên đồ thị ta thấy với $x > 1$ thì $y < 2$ hay $m < 2$.

Chọn đáp án (C) □

CÂU 56. Cho hàm số bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$ có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
y	$+\infty$			$+\infty$
		→	→	
		-1	-3	

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-2018; 2018]$ để phương trình $f(x) - m - 4 = 0$ có một nghiệm dương duy nhất.

(A) 2026.

(B) 2020.

(C) 2025.

(D) 2024.

Lời giải.

Phương trình $f(x) - m - 4 = 0 \Leftrightarrow f(x) = m + 4$ có một nghiệm dương duy nhất khi và chỉ khi đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt đường thẳng $y = m + 4$ cắt nhau tại duy nhất một điểm có hoành độ dương

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m + 4 = -3 \\ m + 4 \geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -7 \\ m \geq -5. \end{cases}$$

Do m thuộc đoạn $[-2018; 2018]$ và nguyên nên có 2024 giá trị thỏa mãn.

Chọn đáp án (D) □

CÂU 57. Một vật chuyển động với vận tốc $v = 40 + 18t - t^2$ (m/s). Trong 20 giây đầu vận tốc lớn nhất của vật là bao nhiêu?

(A) 121 m/s.

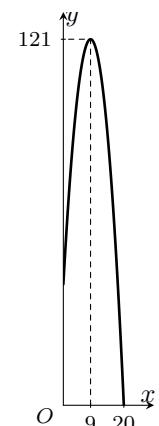
(B) 212 m/s.

(C) 40 m/s.

(D) 4 m/s.

Lời giải.

Đồ thị của hàm vận tốc v có dạng Parabol bẻ lõm hướng xuống dưới. Đỉnh của Parabol là $I(9; 121)$. Do đó trong đoạn $[0; 20]$, vận tốc lớn nhất của vật là 121 m/s.



Chọn đáp án (A) □

CÂU 58. Một quả bóng chày được đánh lên ở độ cao 3 feet (1 feet = 0,3048 mét) so với mặt đất với vận tốc 100 feet/giây và ở một góc 45° so với mặt đất. Đường đi của quả bóng chày được cho bởi hàm số $f(x) = -0,0032x^2 + x + 2$ trong đó $f(x)$ là chiều cao của bóng chày (theo feet) và x là khoảng cách theo chiều ngang của quả bóng tính từ vị trí ban đầu của quả bóng được đánh lên (theo feet). Tính chiều cao tối đa mà bóng chày đạt được?

(A) 78,125 feet.

(B) 79,125 feet.

(C) 80,125 feet.

(D) 81,125 feet.

Lời giải.

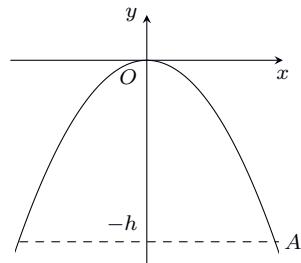
Chiều cao tối đa h của quả bóng là tung độ đỉnh của đồ thị hàm số $f(x) = -0,0032x^2 + x + 2$.

Ta tính được $h = 80,125$.

Chọn đáp án **C** □

CÂU 59.

Một chiếc cổng hình parabol có dạng của đồ thị hàm số $y = -\frac{1}{2}x^2$ và có chiều rộng $d = 8$ m (hình minh họa). Hãy tính chiều cao h của cổng.



- A** $h = 8$ m. **B** $h = 9$ m. **C** $h = 7$ m. **D** $h = 5$ m.

Lời giải.

Dường thẳng $d: y = 8$ cắt (P) tại $A(4; -h)$.

$$\text{Điểm } A \in (P) \Rightarrow -h = -\frac{1}{2} \cdot 4^2 \Rightarrow h = 8\text{m.}$$

Chọn đáp án **A** □

CÂU 60. Tìm m để Parabol $(P): y = x^2 - 2(m+1)x + m^2 - 3$ cắt trục hoành tại 2 điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 sao cho $x_1 \cdot x_2 = 1$.

- A** $m = 2$. **B** Không tồn tại m . **C** $m = -2$. **D** $m = \pm 2$.

Lời giải.

$$\Delta' = 2m + 4 > 0 \Leftrightarrow m > -2.$$

$$x_1 \cdot x_2 = m^2 - 3 = 1 \Rightarrow m = \pm 2. \text{ Vậy } m = 2.$$

Chọn đáp án **A** □

CÂU 61. Cho hàm số $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ biết $f(0) = 0$; $f(1) = 3$; $f(2) = 8$. Xét tính đúng sai của mỗi khẳng định sau

Mệnh đề		D	S
a) $a = 1$; $b = 2$; $c = 0$.		X	
b) $P = a \cdot b - 2c = 2$.		X	
c) Giá trị của hàm số tại điểm $x = -10$ là 120.			X
d) Phương trình $f(x) = -1$ có nghiệm kép.		X	

Lời giải.

- a) **D** Vì $f(0) = 0$ nên ta có

$$0 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c \Rightarrow c = 0.$$

Do đó hàm số đã cho có dạng $y = ax^2 + bx$.

Vì $f(1) = 3$ nên ta có

$$3 = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 \Rightarrow a + b = 3.$$

Vì $f(2) = 8$ nên ta có

$$8 = a \cdot 2^2 + b \cdot 2 \Rightarrow 4a + 2b = 8.$$

Do đó ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} a + b = 3 \\ 4a + 2b = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2. \end{cases}$$

- b) **D** Ta có $P = a \cdot b - 2c = 1 \cdot 2 - 2 \cdot 0 = 2$.

- c) **S** Hàm số đã cho có dạng $y = x^2 + 2x$.

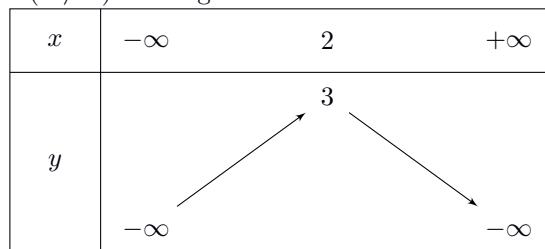
Do đó ta có $f(-10) = (-10)^2 - 2 \cdot 10 = 80$.

- d) **D** Ta có

$$f(x) = -1 \Leftrightarrow x^2 + 2x = -1 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x + 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -1.$$

Chọn đáp án a đúng | b đúng | c sai | d đúng □

CÂU 62. Cho hàm số $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) có bảng biến thiên



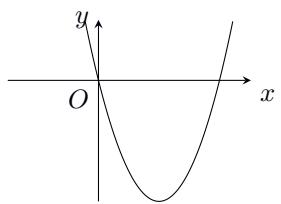
Mệnh đề	Đ	S
a) $a > 0$.		X
b) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 2)$.	X	
c) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(2; +\infty)$.	X	
d) $4a + 2b + c = 0$.		X

 **Lời giải.**

- a) **(S)** Từ bảng biến thiên, ta có $a < 0$.
- b) **(D)** Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 2)$.
- c) **(D)** Hàm số nghịch biến trên khoảng $(2; +\infty)$.
- d) **(S)** Vì đồ thị có đỉnh $I(2; 3)$ nên $a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c = 3 \Leftrightarrow 4a + 2b + c = 3$.

Chọn đáp án a sai b đúng c đúng d sai

CÂU 63. Cho hàm số $y = x^2 - 4x + 3$ có đồ thị là (P) .

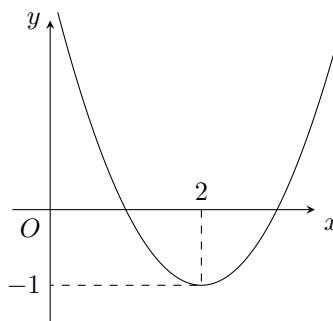
Mệnh đề	Đ	S
a) Tọa độ đỉnh của đồ thị (P) là $I(2; -1)$.	X	
b) Đồ thị đi qua gốc tọa độ $O(0; 0)$.		X
c) Trục đối xứng của đồ thị là đường thẳng $x = 3$.		X
d) Đồ thị (P) có dạng		X
		

 **Lời giải.**

- a) **(D)** Ta có
 - ✓ Hoành độ đỉnh I là $x_I = -\frac{b}{2a} = 2$.
 - ✓ Tung độ đỉnh I là $y_I = 2^2 - 4 \cdot 2 + 3 = -1$.

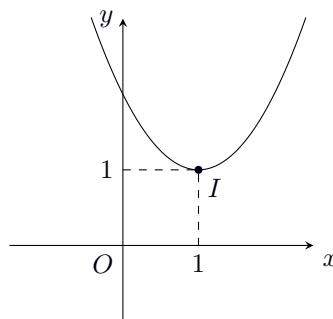
Vậy $I(2; -1)$.

- b) **(S)** Thé $x = 0, y = 0$ vào phương trình $y = x^2 - 4x + 3$, ta có $0 = 0^2 - 4 \cdot 0 + 3$, sai.
Vậy $O \notin (P)$.
- c) **(S)** Trục đối xứng của đồ thị là đường thẳng $x = -\frac{b}{2a} = 2$.
- d) **(S)** Đồ thị của hàm số (P) là



Chọn đáp án [a đúng | b sai | c sai | d sai]

CÂU 64. Cho hàm số $y = x^2 + bx + c$ có đồ thị (P) như hình vẽ.



Mệnh đề	D	S
a) Trục đối xứng của đồ thị (P) là $x = 1$.	X	
b) Đồ thị (P) có đỉnh $I(1; 1)$.	X	
c) Đồ thị (P) có phương trình $y = x^2 - 2x$.		X
d) Đồ thị (P) và đường thẳng (d): $y = 2x + 2$ cắt nhau tại hai điểm A và B . Khi đó $AB = 3\sqrt{5}$.		X

Lời giải.

- a) **D** Trục đối xứng của đồ thị (P) là $x = 1$.
- b) **D** Đồ thị (P) có đỉnh $I(1; 1)$
- c) **S** Vì (P) có đỉnh $I(1; 1)$ nên
 - Đỉnh $I(1; 1) \in (P) \Rightarrow 1 = 1 + b + c$. (1)
 - Hoành độ đỉnh $x = \frac{-b}{2a} = 1 \Leftrightarrow b = -2a = -2$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $b = -2, c = 2$.

Vậy (P): $y = x^2 - 2x + 2$

- d) Xét phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d)

$$x^2 - 2x + 2 = 2x + 2 \Leftrightarrow x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = 2 \\ x = 4 \Rightarrow y = 10. \end{cases}$$

Suy ra $A(0; 2), B(4; 10)$, $\overrightarrow{AB} = (4; 8) \Rightarrow AB = \sqrt{4^2 + 8^2} = 4\sqrt{5}$.

Chọn đáp án [a đúng | b đúng | c sai | d sai]

CÂU 65. Cho hàm số bậc hai $y = f(x) = -(x - a)(x - b)$ có đồ thị là (P) ($a < b$). Biết (P) có đỉnh $I(1; 4)$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

Mệnh đề	D	S
a) $a + 2b = 1$.		X
b) Đường thẳng (d): $y = x + 1$ luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt.	X	

Mệnh đề	D	S
c) $f(x) > 0, \forall x \in (-1; 2)$.	X	
d) Giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên $\left[-\frac{1}{2}; 2\right]$ là $\frac{7}{4}$.	X	

 Lời giải.

Ta có (P) : $y = -x^2 + (a+b)x - ab$.

Vì (P) có đỉnh $I(1; 4)$ nên ta có

$$\begin{aligned} & \begin{cases} 4 = -1 + (a+b) - ab \\ \frac{a+b}{2} = 1 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} ab = -3 \\ a+b = 2 \end{cases} \\ \Rightarrow & a(2-a) = -3 \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} a = -1 \Rightarrow b = 3 \text{ (nhận)} \\ a = 3 \Rightarrow b = -1 \text{ (loại).} \end{cases} \end{aligned}$$

a)  Sai.

Ta có $a+2b=5$.

b)  Đúng.

Ta có (P) : $y = -(x+1)(x-3) = -x^2 + 2x + 3$.

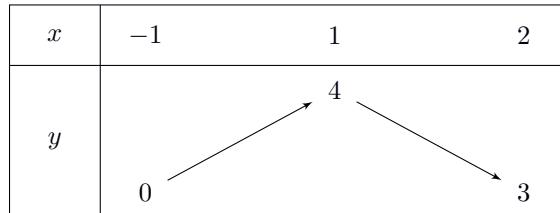
Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d)

$$-x^2 + 2x + 3 = x + 1 \Leftrightarrow -x^2 + x + 2 = 0 \quad \begin{cases} x = -1 \\ x = 2. \end{cases}$$

Vậy đường thẳng (d) : $y = x + 1$ luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt.

c)  Đúng.

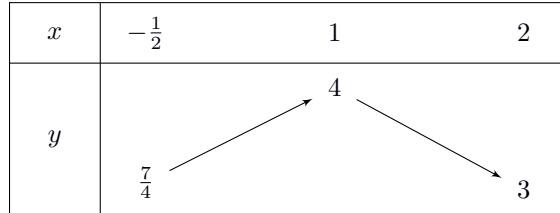
Vì (P) : $y = -x^2 + 2x + 3$ có đỉnh $I(1; 4)$ và bề lõm quay xuống nên ta có bảng biến thiên sau



Vậy $f(x) > 0, \forall x \in (-1; 2)$.

d)  Đúng.

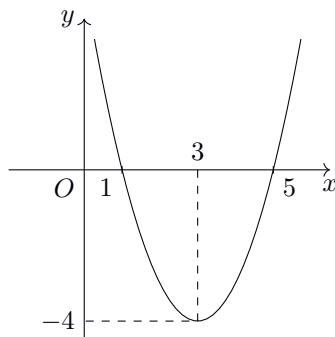
Vì (P) : $y = -x^2 + 2x + 3$ có đỉnh $I(1; 4)$ và bề lõm quay xuống nên ta có bảng biến thiên sau



Khi đó giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên $\left[-\frac{1}{2}; 2\right]$ là $\frac{7}{4}$.

Chọn đáp án [a sai | b đúng | c đúng | d đúng] 

CÂU 66. Cho hàm số bậc hai có đồ thị như hình vẽ



Các khẳng định sau đây đúng hay sai?

Mệnh đề	D	S
a) Đồ thị hàm số bậc hai có đỉnh là $(-4; 3)$.		X
b) Hàm số nhận giá trị âm với mọi $x \in (1; 5)$.	X	
c) Đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị hàm số đã cho khi và chỉ khi $m > -4$.	X	
d) Đường thẳng $x = n$ cắt đồ thị hàm số đã cho khi và chỉ khi $n > 0$.		X

Lời giải.

- a) **(S)** Đồ thị hàm số bậc hai có đỉnh là $(3; -4)$
- b) **(D)** Hàm số nhận giá trị âm với mọi $x \in (1; 5)$ vì trên $(1; 5)$ đồ thị nằm dưới trục hoành.
- c) **(D)** Đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị hàm số đã cho khi và chỉ khi $m > -4$
- d) **(S)** Đường thẳng $x = n$ luôn cắt đồ thị hàm số bậc hai với mọi n .

Chọn đáp án a sai b đúng c đúng d sai

CÂU 67. Cho hàm số $y = x^2 + 4x - 5$ có đồ thị (P) . Các mệnh đề sau đúng hay sai?

Mệnh đề	D	S
a) (P) có trục đối xứng là $x = -2$.	X	
b) (P) cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng -5 .	X	
c) Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^2 + 4x - 5$ bằng -10 .		X
d) Với $m = \frac{5}{2}$ thì đường thẳng $d: y = 4x - m$ cắt đồ thị (P) tại 2 điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 = 5$.	X	

Lời giải.

- a) **(D)** (P) có trục đối xứng là $x = -2$
- b) **(D)** (P) cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng -5 .
- c) **(S)** Xét hàm số $y = f(x) = x^2 + 4x - 5$, có $a > 0$ nên giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^2 + 4x - 5$ là $y = f\left(-\frac{b}{2a}\right) = f(-2) = -9$.
- d) **(D)** Phương trình hoành độ giao điểm của $d: y = 4x - m$ và đồ thị là $x^2 + 4x - 5 = 4x - m \Leftrightarrow x^2 - m + 5 = 0$.
Phương trình đã cho có 2 nghiệm phân biệt khi $\Delta > 0 \Leftrightarrow m < 5$.

Áp dụng hệ thức Vi-ét cho phương trình, ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 \cdot x_2 = m - 5 \end{cases}$.

Khi đó $x_1^2 + x_2^2 = 5 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 5$. Suy ra $0^2 - 2(m - 5) = 5 \Leftrightarrow m = \frac{5}{2}$.

Chọn đáp án a đúng b đúng c sai d đúng

CÂU 68. Cho hàm số $y = x^2 - 3x + 1$ có đồ thị (P) và đường thẳng $d: y = x - m$. Các khẳng định sau đây đúng hay sai?

Mệnh đề	D	S
a) Đường thẳng d luôn song song với đường thẳng $\Delta : y = x$.		X
b) Khi $m = 2$, đường thẳng d cắt đồ thị (P) tại hai điểm $(1; -1)$ và $(3; 1)$.	X	
c) Đường thẳng d cắt đồ thị (P) tại hai điểm khi và chỉ khi $m < \frac{5}{2}$.		X
d) Đường thẳng d cắt đồ thị (P) tại hai điểm có hoành độ trái dấu khi và chỉ khi $m < -1$.	X	

 Lời giải.

- a) **(S)** Khi $m = 0$ thì d trùng với Δ .
 b) **(D)** Với $m = 2$, $d : y = x - 2$. Phương trình hoành độ giao điểm

$$x^2 - 3x + 1 = x - 2 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3. \end{cases}$$

Suy ra đường thẳng d cắt đồ thị (P) tại hai điểm $(1; -1)$ và $(3; 1)$.

- c) **(S)** Phương trình hoành độ giao điểm

$$x^2 - 3x + 1 = x - m \Leftrightarrow x^2 - 4x + m + 1 = 0. \quad (1)$$

Đường thẳng d cắt đồ thị (P) tại hai điểm khi và chỉ khi (1) có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta' = 4 - m - 1 > 0 \Leftrightarrow m < 3.$$

- d) **(D)** Đường thẳng d cắt đồ thị (P) tại hai điểm có hoành độ trái dấu khi và chỉ khi phương trình $x^2 - 4x + m + 1 = 0$ có hai nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow m + 1 < 0 \Leftrightarrow m < -1$.

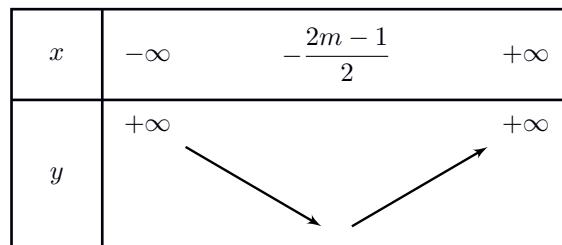
Chọn đáp án a sai | b đúng | c sai | d đúng 

CÂU 69. Cho hàm số $y = x^2 + (2m - 1)x - m + 1$, trong đó m là tham số.

Mệnh đề	D	S
a) $y = x^2 + (2m - 1)x - m + 1$ không phải hàm số bậc hai một ẩn.		X
b) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-2m + 1; +\infty)$.		X
c) Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty; -\frac{2m - 1}{2}\right)$.	X	
d) Với $m \geq 3$ thì hàm số đồng biến trên $(-1; +\infty)$.	X	

 Lời giải.

- a) **(S)** Vì $a = 1 \neq 0$ nên hàm số đã cho là hàm số bậc hai một ẩn.
 b) **(S)** Bảng biến thiên của hàm số.



Hàm số đồng biến trên $\left(-\frac{2m - 1}{2}; +\infty\right)$.

- c) **(D)** Hàm nghịch biến trên $\left(-\infty; -\frac{2m - 1}{2}\right)$.
 d) **(D)** Hàm số đồng biến trên $(-1; +\infty)$ thì $-\frac{2m - 1}{2} \leq -1 \Leftrightarrow 2m - 1 \geq 2 \Leftrightarrow m \geq 1$.
 Vậy với $m \geq 3$ thì hàm số đồng biến trên $(-1; +\infty)$.

Chọn đáp án [a sai | b sai | c đúng | d đúng]

CÂU 70. Cho hàm số $y = x^2 - 2(m-1)x - 3$ (với m là tham số).

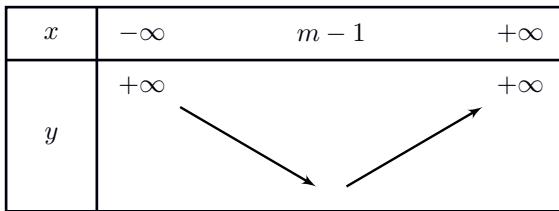
Mệnh đề	D	S
a) Hàm số đã cho là hàm số bậc hai.	X	
b) Đồ thị hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; m-1)$.		X
c) Đồ thị hàm số nghịch biến trên khoảng $(m-2; m+2)$.		X
d) Với $m < 2$ thì hàm số đồng biến trên $(2; +\infty)$.	X	

Lời giải.

Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Ta có hoành độ đỉnh $x = -\frac{b}{2a} = m-1$.

Do $a = 1 > 0$ nên ta có bảng biến thiên như sau



- a) **D** Vì $a = 1 \neq 0$ nên hàm số đã cho là hàm số bậc hai.
- b) **S** Hàm số đồng biến trên khoảng $(m-1; +\infty)$.
- c) **S** Vì $m-2 < m-1 < m+2$ nên hàm số không nghịch biến trên khoảng $(m-2; m+2)$
- d) **D** Hàm số đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$ thì $m-1 \leq 1 \Leftrightarrow m \leq 2$.
Vậy $m < 2$ thì hàm số đồng biến trên $(2; +\infty)$.

Chọn đáp án [a đúng | b sai | c sai | d đúng]

Bài 3. DẤU CỦA TAM THỨC BẬC HAI

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Dấu của tam thức bậc hai

ĐỊNH NGHĨA 3.1. Tam thức bậc hai là biểu thức có dạng $f(x) = ax^2 + bx + c$, trong đó a, b, c là những hệ số, $a \neq 0$.
Nghiệm của tam thức bậc hai là giá trị của x làm cho tam thức có giá trị bằng 0.

ĐỊNH LÝ 3.1. [Định lý về dấu của tam thức bậc hai] Cho tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0, \Delta = b^2 - 4ac$. Khi đó:

↪ $\Delta < 0 \Rightarrow af(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

↪ $\Delta = 0 \Rightarrow af(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{b}{2a}\right\}$ và $f\left(-\frac{b}{2a}\right) = 0$.

↪ $\Delta > 0 \Rightarrow \begin{cases} af(x) > 0, \forall x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty) \\ af(x) < 0, \forall x \in (x_1; x_2). \end{cases}$

Với x_1, x_2 là nghiệm của phương trình $f(x) = 0$, $x_1 < x_2$.

2. Bất phương trình bậc hai

ĐỊNH NGHĨA 3.2. Bất phương trình bậc hai một ẩn số là bất phương trình có dạng $ax^2 + bx + c > 0$ (hoặc $ax^2 + bx + c > 0; ax^2 + bx + c \geq 0; ax^2 + bx + c \leq 0$) với a, b, c là những số thực đã cho, $a \neq 0$, x là ẩn số.

B. CÁC DẠNG TOÁN

1

Nhận dạng và xét dấu của tam thức bậc hai

Đa thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$ với a, b, c là các hệ số, $a \neq 0$ và x là biến số thực gọi là tam thức bậc hai.

Phương pháp xét dấu của tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$

Bước 1: Tính và xác định dấu của biệt thức $\Delta = b^2 - 4ac$.

Bước 2: Xác định nghiệm của $f(x)$ (nếu có).

Bước 3: Xác định dấu của hệ số a .

Bước 4: Xác định dấu của $f(x)$.

Nếu $\Delta < 0$ thì $f(x)$ cùng dấu với a với mọi giá trị x .

Nếu $\Delta = 0$ và $x = -\frac{b}{2a}$ là nghiệm kép của $f(x)$ thì $f(x)$ cùng dấu với a với mọi x khác x_0 .

Nếu $\Delta > 0$ và x_1, x_2 là hai nghiệm của $f(x)$ ($x_1 < x_2$) thì $f(x)$ trái dấu với a với mọi x thuộc khoảng $(x_1; x_2)$ và $f(x)$ cùng dấu với a với mọi x thuộc hai khoảng $(-\infty; +\infty)$.

1. Ví dụ minh họa

VÍ DỤ 1. Da thức nào sau đây là tam thức bậc hai?

a) $4x^2 + 3x + 1$.

b) $x^3 + 3x^2 - 1$.

c) $2x^2 + 4x - 1$.

Lời giải.

Tam thức bậc hai là đa thức có dạng $f(x) = ax^2 + bx + c$ với $a \neq 0$.

Do đó các đa thức $4x^2 + 3x + 1$ và $2x^2 + 4x - 1$ là các tam thức bậc hai.

Đa thức $x^3 + 3x^2 - 1$ có một hạng tử là x^3 nên không là tam thức bậc hai.

VÍ DỤ 2. Xác định giá trị của tham số m để các đa thức sau là tam thức bậc hai.

a) $(m+1)x^2 + 2x + m.$ b) $mx^3 + 2x^2 - x + m.$ c) $-5x^2 + 2x - m + 1.$

Lời giải.

- a) Đa thức $(m+1)x^2 + 2x + m$ là tam thức bậc hai khi và chỉ khi $m+1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -1.$
- b) Đa thức $mx^3 + 2x^2 - x + m$ là tam thức bậc hai khi và chỉ khi $m = 0.$
- c) Đa thức $-5x^2 + 2x - m + 1$ luôn là tam thức bậc hai với mọi $m \in \mathbb{R}.$

VÍ DỤ 3. Tìm các giá trị của tham số m để biểu thức $f(x) = (m^2 - 1)x^2 + 3mx - 6$ là một tam thức bậc hai có $x = 2$ là một nghiệm.

Lời giải.

Ta có $f(x)$ là một tam thức bậc hai khi và chỉ khi $m^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 1$ và $m \neq -1.$

Do $x = 2$ là một nghiệm của $f(x)$ nên $f(2) = 0$

$$\Leftrightarrow 4(m^2 - 1) + 6m - 6 = 0 \Leftrightarrow 4m^2 + 6m - 10 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 & (\text{loại}) \\ m = -\frac{5}{2} & (\text{nhận}). \end{cases}$$

Vậy $m = -\frac{5}{2}.$

VÍ DỤ 4. Xét dấu của các tam thức bậc hai sau

a) $f(x) = 2x^2 + 4x + 2.$ b) $f(x) = -3x^2 + 2x + 21.$ c) $f(x) = -2x^2 - x - 2.$
 d) $f(x) = -4x(x+3) - 9.$ e) $f(x) = (2x+5)(x-3).$

Lời giải.

a) $f(x) = 2x^2 + 4x + 2$ có $\Delta = 0,$ nghiệm kép là $x_0 = -1$ và $a = 2 > 0.$
 Vậy $f(x) > 0$ với mọi $x \neq -1.$

b) $f(x) = -3x^2 + 2x + 21$ có $\Delta = 256,$ hai nghiệm phân biệt là $x_1 = -\frac{7}{3}$ và $x_2 = 3,$ hệ số $a = -3 < 0.$

Ta có bảng xét dấu của $f(x)$ như sau

x	$-\infty$	$-\frac{7}{3}$	3	$+\infty$
$f(x)$	-	0	+	0

Từ bảng xét dấu, suy ra $f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\infty; -\frac{7}{3}\right) \cup (3; +\infty);$

$f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\frac{7}{3}; 3\right).$

c) $f(x) = -2x^2 - x - 2$ có $\Delta = -15 < 0$ và $a = -2 < 0$ nên $f(x)$ luôn âm với mọi $x \in \mathbb{R}.$

d) $f(x) = -4x(x+3) - 9 = -4x^2 - 12x - 9$ có $\Delta = 0,$ nghiệm kép $x_0 = -\frac{3}{2}$ và hệ số $a = -4 < 0.$

Do đó $f(x) < 0$ với mọi $x \neq -\frac{3}{2}.$

e) $f(x) = (2x+5)(x-3) = 2x^2 - x - 15$ có $\Delta = 121 > 0,$ hai nghiệm $x_1 = -\frac{5}{2}, x_2 = 3$ và hệ số $a = 2 > 0$

Ta có bảng xét dấu của $f(x)$ như sau

x	$-\infty$	$-\frac{5}{2}$	3	$+\infty$
$f(x)$	+	0	-	0

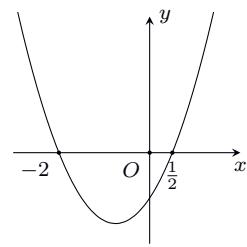
Từ bảng xét dấu, suy ra $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\frac{5}{2}; 3\right);$

$f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\infty; -\frac{5}{2}\right) \cup (3; +\infty).$

VÍ DỤ 5. Dựa vào đồ thị của các hàm số bậc hai sau, hãy lập bảng xét dấu của tam thức bậc hai tương ứng.

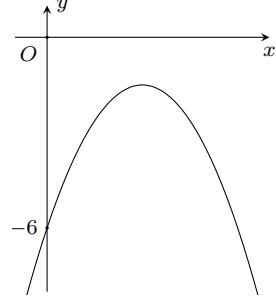
a)

$$f(x) = x^2 + 1,5x - 1.$$



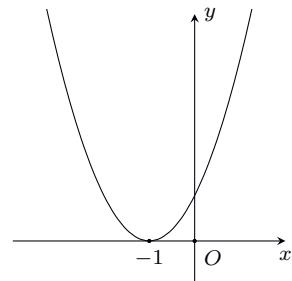
b)

$$f(x) = -0,5x^2 + 3x - 6.$$



c)

$$f(x) = x^2 + 2x + 1.$$



Lời giải.

Từ các đồ thị, ta có bảng xét dấu của các tam thức bậc hai như sau

a)

x	$-\infty$	-2	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f(x)$	+	0	-	0

b)

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	-	

c)

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f(x)$	+	0	+

2. Bài tập tự luận

BÀI 1. Xét dấu của mỗi tam thức bậc hai sau

a) $f(x) = 3x^2 - 4x + 1.$

b) $f(x) = 9x^2 + 6x + 1.$

c) $f(x) = 2x^2 - 3x + 10.$

d) $f(x) = -5x^2 + 2x + 3$.

e) $f(x) = -4x^2 + 8x - 4$.

f) $f(x) = -3x^2 + 3x - 1$.

Lời giải.

a) $f(x) = 3x^2 - 4x + 1$ có $\Delta = 4 > 0$, hai nghiệm $x_1 = \frac{1}{3}$, $x_2 = 1$ và hệ số $a > 3 > 0$.

Bảng xét dấu của $f(x)$

x	$-\infty$	$\frac{1}{3}$	1	$+\infty$
$f(x)$	+	0	-	0

Dựa vào bảng xét dấu, suy ra $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\infty; \frac{1}{3}\right) \cup (1; +\infty)$.

$$f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in \left(\frac{1}{3}; 1\right).$$

b) $f(x) = 9x^2 + 6x + 1$ có $\Delta = 0$, nghiệm kép $x = -\frac{1}{3}$ và hệ số $a = 9 > 0$.

Do đó $f(x) > 0$ với mọi $x \neq -\frac{1}{3}$.

c) $f(x) = 2x^2 - 3x + 10$ có $\Delta = -71 < 0$ và hệ số $a = 2 > 0$ nên $f(x) > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

d) $f(x) = -5x^2 + 2x + 3$ có $\Delta = 64 > 0$, hai nghiệm $x_1 = -\frac{3}{5}$, $x_2 = 1$ và hệ số $a = -5 < 0$.

Bảng xét dấu của $f(x)$

x	$-\infty$	$-\frac{3}{5}$	1	$+\infty$
$f(x)$	-	0	+	0

Dựa vào bảng xét dấu, suy ra

$$f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\infty; -\frac{3}{5}\right) \cup (1; +\infty).$$

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\frac{3}{5}; 1\right).$$

e) $f(x) = -4x^2 + 8x - 4$ có $\Delta = 0$, nghiệm kép $x = 1$ và hệ số $a = -4 < 0$.

Do đó $f(x) < 0$ với mọi $x \neq 1$.

f) $f(x) = -3x^2 + 3x - 1$ có $\Delta = -3 < 0$ và hệ số $a = -3 < 0$ nên $f(x) < 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

BÀI 2. Tính biệt thức và nghiệm (nếu có) của các tam thức bậc hai. Xác định dấu của chúng tại $x = -2$.

a) $f(x) = -2x^2 + 3x - 4$.

b) $g(x) = 2x^2 + 8x + 8$.

c) $h(x) = 3x^2 + 7x - 10$.

Lời giải.

a) $f(x) = -2x^2 + 3x - 4$ có $\Delta = -23 < 0$ nên $f(x)$ vô nghiệm.

Lại có $f(-2) = -18 < 0$.

b) $g(x) = 2x^2 + 8x + 8$ có $\Delta = 0$ nên $g(x)$ có nghiệm kép $x = -2$.

Do đó $g(-2) = 0$.

c) $h(x) = 3x^2 + 7x - 10$ có $\Delta = 169 > 0$ nên $h(x)$ có hai nghiệm $x_1 = -\frac{10}{3}$ và $x_2 = 1$.

Lại có $h(-2) = -12 < 0$.

BÀI 3. Tìm tham số m để

- a) $f(x) = (2m - 8)x^2 + 2mx + 1$ là một tam thức bậc hai.
- b) $f(x) = (2m + 3)x^2 + 3x - 4m^2$ là một tam thức bậc hai có $x = 3$ là một nghiệm.
- c) $f(x) = 2x^2 + mx - 3$ dương tại $x = 2$.

Lời giải.

- a) $f(x) = (2m - 8)x^2 + 2mx + 1$ là một tam thức bậc hai khi và chỉ khi

$$2m - 8 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 4.$$

- b) $f(x) = (2m + 3)x^2 + 3x - 4m^2$ là một tam thức bậc hai khi và chỉ khi

$$2m + 3 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -\frac{3}{2}.$$

Do $x = 3$ là một nghiệm của $f(x)$ nên $f(3) = 0$

$$\Leftrightarrow 9(2m + 3) + 9 - 4m^2 = 0 \Leftrightarrow -4m^2 + 18m + 36 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 6 & (\text{nhận}) \\ m = -\frac{3}{2} & (\text{loại}). \end{cases}$$

Vậy $m = 6$.

- c) $f(x) = 2x^2 + mx - 3$ dương tại $x = 2$

$$\Leftrightarrow f(2) > 0 \Leftrightarrow 8 + 2m - 3 > 0 \Leftrightarrow m > -\frac{5}{2}.$$

BÀI 4. Tìm các giá trị của tham số m để

- a) $f(x) = (m^2 + 9)x^2 + (m + 6)x + 1$ là một tam thức bậc hai có một nghiệm duy nhất.

- b) $f(x) = (m - 1)x^2 + 3x + 1$ là một tam thức bậc hai có hai nghiệm phân biệt.

- c) $f(x) = mx^2 + (m + 2)x + 1$ là một tam thức bậc hai vô nghiệm.

Lời giải.

- a) $f(x) = (m^2 + 9)x^2 + (m + 6)x + 1$ luôn là một tam thức bậc hai do $m^2 + 9 \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

$$f(x) \text{ có nghiệm duy nhất} \Leftrightarrow \Delta = 0 \Leftrightarrow (m + 6)^2 - 4(m^2 + 9) = 0 \Leftrightarrow -3m^2 + 12m = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 4. \end{cases}$$

Vậy $m = 0$ và $m = 4$ thì $f(x)$ là tam thức bậc hai có nghiệm duy nhất.

- b) $f(x) = (m - 1)x^2 + 3x + 1$ là một tam thức bậc hai khi và chỉ khi $m - 1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 1$.

$$f(x) \text{ có hai nghiệm phân biệt} \Leftrightarrow \Delta > 0 \Leftrightarrow 9 - 4(m - 1) > 0 \Leftrightarrow m < \frac{13}{4}.$$

Vậy $m \in \left(-\infty; \frac{13}{4}\right) \setminus \{1\}$.

- c) $f(x) = mx^2 + (m + 2)x + 1$ là một tam thức bậc hai khi và chỉ khi $m \neq 0$.

$$f(x) \text{ vô nghiệm} \Leftrightarrow \Delta < 0 \Leftrightarrow (m + 2)^2 - 4m < 0 \Leftrightarrow m^2 + 4 < 0 \text{ (vô lí)}.$$

Do đó không tìm được m .

3. Câu hỏi trắc nghiệm**CÂU 1.** Bảng xét dấu nào sau đây là bảng xét dấu của tam thức $f(x) = -x^2 - x + 6$?

A

x	$-\infty$	-2	3	$+\infty$
$f(x)$	-	0	+	0 -

B

x	$-\infty$	-2	3	$+\infty$
$f(x)$	+	0	-	0 +

C

x	$-\infty$	-3	2	$+\infty$
$f(x)$	-	0	+	0 -

D

x	$-\infty$	-3	2	$+\infty$
$f(x)$	+	0	-	0 +

Lời giải.

Tam thức $f(x) = -x^2 - x - 6$ có $\Delta = 25 > 0$, hai nghiệm $x_1 = -3, x_2 = 2$ và hệ số $a = -1 < 0$.

Suy ra bảng xét dấu của $f(x)$ như sau

x	$-\infty$	-3	2	$+\infty$
$f(x)$	-	0	+	0

Chọn đáp án **(C)** □

CÂU 2. Bảng xét dấu nào dưới đây là của tam thức $f(x) = -x^2 + 6x - 9$?

A	<table border="1"> <tr> <td>x</td><td>$-\infty$</td><td>3</td><td>$+\infty$</td></tr> <tr> <td>$f(x)$</td><td>+</td><td>0</td><td>-</td></tr> </table>	x	$-\infty$	3	$+\infty$	$f(x)$	+	0	-
x	$-\infty$	3	$+\infty$						
$f(x)$	+	0	-						
C	<table border="1"> <tr> <td>x</td><td>$-\infty$</td><td>3</td><td>$+\infty$</td></tr> <tr> <td>$f(x)$</td><td>-</td><td>0</td><td>-</td></tr> </table>	x	$-\infty$	3	$+\infty$	$f(x)$	-	0	-
x	$-\infty$	3	$+\infty$						
$f(x)$	-	0	-						

B	<table border="1"> <tr> <td>x</td><td>$-\infty$</td><td>3</td><td>$+\infty$</td></tr> <tr> <td>$f(x)$</td><td>-</td><td>0</td><td>+</td></tr> </table>	x	$-\infty$	3	$+\infty$	$f(x)$	-	0	+
x	$-\infty$	3	$+\infty$						
$f(x)$	-	0	+						
D	<table border="1"> <tr> <td>x</td><td>$-\infty$</td><td>3</td><td>$+\infty$</td></tr> <tr> <td>$f(x)$</td><td>+</td><td>0</td><td>+</td></tr> </table>	x	$-\infty$	3	$+\infty$	$f(x)$	+	0	+
x	$-\infty$	3	$+\infty$						
$f(x)$	+	0	+						

Lời giải.

Tam thức $f(x) = -x^2 + 6x - 9$ có $\Delta = 0$, nghiệm kép $x = 3$ và hệ số $a = -1 < 0$ nên có bảng xét dấu như sau

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$f(x)$	-	0	-

Chọn đáp án **(C)** □

CÂU 3. Tam thức $f(x) = x^2 - 2x - 3$ nhận giá trị dương khi và chỉ khi

- A** $x \in (-\infty; -3) \cup (-1; +\infty)$. **B** $x \in (-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$.
C $x \in (-1; 3)$. **D** $x \in (-3; 1)$.

Lời giải.

Tam thức $f(x) = x^2 - 2x - 3$ có $\Delta = 16 > 0$, hai nghiệm $x_1 = -1$, $x_2 = 3$ và hệ số $a = 1 > 0$.

Bảng xét dấu của $f(x)$ như sau

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$
$f(x)$	+	0	-	0

Do đó $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$.

Chọn đáp án **(B)** □

CÂU 4. Tam thức $f(x) = x^2 - 12x - 13$ nhận giá trị âm khi và chỉ khi

- A** $x < -13$ hoặc $x > 1$. **B** $x < -1$ hoặc $x > 13$. **C** $-13 < x < 1$. **D** $-1 < x < 13$.

Lời giải.

Tam thức $f(x) = x^2 - 12x - 13$ có $\Delta = 196 > 0$, hai nghiệm $x_1 = -1$, $x_2 = 13$ và hệ số $a = 1 > 0$.

Bảng xét dấu của $f(x)$ như sau

x	$-\infty$	-1	13	$+\infty$
$f(x)$	+	0	-	0

Do đó $f(x) < 0$ khi $-1 < x < 13$.

Chọn đáp án **(D)** □

CÂU 5. Tìm tham số m để tam thức $f(x) = 3x^2 - 2mx + 1$ dương tại $x = 1$.

- A** $m < 2$. **B** $m > 2$. **C** $m > -2$. **D** $m < 4$.

Lời giải.

$f(x) = 3x^2 - 2mx + 1$ dương tại $x = 1 \Leftrightarrow f(1) > 0 \Leftrightarrow 3 - 2m + 1 > 0 \Leftrightarrow m < 2$.

Chọn đáp án **(A)** □

CÂU 6. Có bao nhiêu số nguyên dương của tham số m để tam thức bậc hai $f(x) = (m-1)x^2 + 3x + 1$ có hai nghiệm phân biệt.

- A** 4. **B** 1. **C** 2. **D** 3.

Lời giải.

$f(x) = (m-1)x^2 + 3x + 1$ là một tam thức bậc hai khi và chỉ khi $m-1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 1$.

$f(x)$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta > 0 \Leftrightarrow 9 - 4(m-1) > 0 \Leftrightarrow m < \frac{13}{4}$.

Mà m là số nguyên dương và $m \neq 1$ nên $m \in 2; 3$.

Vậy có 2 giá trị nguyên m .

Chọn đáp án **(C)** □

CÂU 7. Tam thức bậc hai nào trong các tam thức dưới đây luôn dương với mọi $x \in \mathbb{R}$?

- (A)** $f(x) = x^2 + 2x + 3$. **(B)** $f(x) = -x^2 + 2x + 3$. **(C)** $f(x) = x^2 + 2x - 3$. **(D)** $f(x) = -x^2 + 2x - 3$.

Lời giải.

Tam thức $f(x) = ax^2 + bx + c$ luôn dương với mọi $x \in \mathbb{R}$, suy ra $a > 0$.

Do đó, ta loại các phương án $f(x) = -x^2 + 2x + 3$ và $f(x) = -x^2 + 2x - 3$.

Xét phương án $f(x) = x^2 + 2x + 3$ có $\Delta = -8 < 0$ nên $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Xét phương án $f(x) = x^2 + 2x - 3$ có $\Delta = 16 > 0$, hai nghiệm $x_1 = -3, x_2 = 1$ nên có bảng xét dấu

x	$-\infty$	-3	1	$+\infty$
$f(x)$	+	0	-	0

Do đó $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; 3) \cup (1; +\infty)$.

Chọn đáp án **(A)** □

CÂU 8. Cho tam thức bậc hai $f(x) = x^2 + bx + c$ có bảng xét dấu như hình vẽ

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$
$f(x)$	+	0	-	0

Tính $b+c$.

- (A)** $b+c = -5$. **(B)** $b+c = 5$. **(C)** $b+c = -1$. **(D)** $b+c = 1$.

Lời giải.

Tam thức $f(x)$ có hai nghiệm $x_1 = -1, x_2 = 3$.

Theo định lí Vi-et, ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = -b \\ x_1 x_2 = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -2 \\ c = -3 \end{cases}$.

Vậy $b+c = -5$.

Chọn đáp án **(A)** □

CÂU 9. Tam thức bậc hai nào dưới đây có bảng xét dấu như hình vẽ?

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$
$f(x)$	-	0	+	0

- (A)** $f(x) = x^2 - 4x + 3$. **(B)** $f(x) = -2x^2 + 8x - 6$. **(C)** $f(x) = -x^2 - 4x - 3$. **(D)** $f(x) = 3x^2 + 12x + 9$.

Lời giải.

Từ bảng xét dấu, suy ra tam thức $f(x) = ax^2 + bx + c$ có hệ số $a < 0$ và có hai nghiệm $x_1 = 1, x_2 = 3$.

Do đó, ta loại hai phương án $f(x) = x^2 - 4x + 3$ và $f(x) = 3x^2 + 12x + 9$.

Xét phương án $f(x) = -2x^2 + 8x - 6$ có $\Delta = 16 > 0$, hai nghiệm $x_1 = 1, x_2 = 3$ (thoả mãn bảng xét dấu).

Xét phương án $f(x) = -x^2 - 4x - 3$ có $\Delta = 4 > 0$, hai nghiệm $x_1 = -3, x_2 = -1$ (không thoả mãn bảng xét dấu).

Vậy $f(x) = -2x^2 + 8x - 6$.

Chọn đáp án **(B)** □

CÂU 10. Cho tam thức $f(x) = x^2 + bx + c$ với b, c là các số thực thoả mãn $b+c = -1$ và $c < 0$. Biểu thức nào dưới đây là đúng?

- (A)** $f(0) \cdot f(1) > 0$. **(B)** $f(0) \cdot f(2) > 0$. **(C)** $f(0) \cdot f(3) < 0$. **(D)** $f(2) \cdot f(3) < 0$.

Lời giải.

Tam thức $f(x) = x^2 + bx + c$ có hệ số $a > 0$.

Do $1+b+c = 0$ nên $f(x)$ có hai nghiệm $x_1 = 1$ và $x_2 = c < 0$.

Ta có bảng xét dấu của $f(x)$ như sau

x	$-\infty$	c	1	$+\infty$
$f(x)$	+	0	-	0

Suy ra $f(0) < 0, f(1) = 0, f(2) > 0, f(3) > 0.$

Nên $f(0) \cdot f(1) = 0; f(0) \cdot f(2) < 0; f(0) \cdot f(3) < 0; f(2) \cdot f(3) > 0.$

Vậy $f(0) \cdot f(3) < 0.$

Chọn đáp án **C** □

2**Giải bất phương trình bậc hai**

Phương pháp giải: Xét dấu về trái suy ra tập nghiệm.

1. Ví dụ minh họa

VÍ DỤ 1. Giải các bất phương trình sau

a) $x^2 - 7x + 10 \geq 0.$

c) $-x^2 + 5x + 6 > 0.$

b) $-2x^2 + 4x - 2 \leq 0.$

d) $2x^2 - 3x + 1 > 0.$

Lời giải.

↪ Tam thức bậc hai $f(x) = x^2 - 7x + 10$ có $a = 1 > 0$ và có hai nghiệm $x_1 = 2, x_2 = 5.$

Suy ra $x^2 - 7x + 10 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ x \geq 5. \end{cases}$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = (-\infty; 2] \cup [5; +\infty).$

b) Tam thức bậc hai $f(x) = -2x^2 + 4x - 2$ có $a = -2 < 0$ và $\Delta = 0.$

$f(x)$ trái dấu với hệ số a nên $f(x) \leq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = \mathbb{R}.$

c) Tam thức bậc hai $f(x) = -x^2 + 5x + 6 > 0$ có $a = -1 < 0$ và có hai nghiệm là $x = -1$ và $x = 6.$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = (-1; 6).$

d) Tam thức bậc hai $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$ có $a = 2 > 0$ và có hai nghiệm $x_1 = 1, x_2 = \frac{1}{2}.$

Suy ra $2x^2 - 3x + 1 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x < \frac{1}{2}. \end{cases}$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = \left(-\infty; \frac{1}{2}\right) \cup (1; +\infty).$

VÍ DỤ 2. Tìm tập xác định của các hàm số sau

a) $y = \sqrt{x^2 - 4x + 3}.$

b) $y = \sqrt{-x^2 + 7x - 12}.$

c) $y = \sqrt{x^2 + 4x + 4}.$

Lời giải.

↪ Hàm số $y = \sqrt{x^2 - 4x + 3}$ xác định $\Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 \geq 0.$

Có $x^2 - 4x + 3 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ x \geq 3. \end{cases}$

Vậy tập xác định của hàm số đã cho là $\mathcal{D} = (-\infty; 1] \cup [3; +\infty).$

b) Hàm số $y = \sqrt{-x^2 + 7x - 12}$ xác định $\Leftrightarrow -x^2 + 7x - 12 \geq 0.$

Có $-x^2 + 7x - 12 \geq 0 \Leftrightarrow 3 \leq x \leq 4.$

Vậy tập xác định của hàm số đã cho là $\mathcal{D} = [3; 4].$

c) Hàm số $y = \sqrt{x^2 + 4x + 4}$ xác định $\Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 \geq 0.$

Có $x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2 \geq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ nên hàm số đã cho xác định với mọi $x \in \mathbb{R}.$

Vậy tập xác định của hàm số đã cho là $\mathcal{D} = \mathbb{R}.$

2. Câu hỏi trắc nghiệm

CÂU 1. Tập nghiệm của bất phương trình $x^2 - 5x + 6 \leq 0$ là

- (A) $(-\infty; 2)$. (B) $(-\infty; 2) \cup [3; +\infty)$. (C) $[3; +\infty)$. (D) $[2; 3]$.

 **Lời giải.**

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 3. \end{cases}$$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	2	3	$+\infty$
$f(x)$	+	0	-	0

Chọn đáp án (D) 

CÂU 2. Cho các mệnh đề

- (I) Với mọi $x \in [-1; 4]$ thì $-x^2 + 4x + 5 \geq 0$.
 (II) Với mọi $x \in (-\infty; 4) \cup (5; 10)$ thì $x^2 + 9x - 10 > 0$.
 (III) Với mọi $x \in [2; 3]$ thì $x^2 - 5x + 6 \leq 0$.

- (A) Mệnh đề (I) và (III) đúng.
 (B) Chỉ mệnh đề (I) đúng.
 (C) Chỉ mệnh đề (III) đúng.
 (D) Cả ba mệnh đề đều sai.

 **Lời giải.**

↪ $-x^2 + 4x + 5 \geq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 5$, suy ra mệnh đề (I) đúng.

↪ $x^2 + 9x - 10 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x < -10 \end{cases}$, suy ra mệnh đề (II) sai.

↪ $x^2 - 5x + 6 \leq 0 \Leftrightarrow 2 \leq x \leq 3$, suy ra mệnh đề (III) đúng.

Chọn đáp án (A) 

CÂU 3. Tìm tập xác định của hàm số $y = \sqrt{2x^2 - 5x + 2}$.

- (A) $(-\infty; \frac{1}{2}]$. (B) $[\frac{1}{2}; 2]$. (C) $(-\infty; \frac{1}{2}] \cup [2; +\infty)$. (D) $[2; +\infty)$.

 **Lời giải.**

Hàm số xác định khi và chỉ khi $2x^2 - 5x + 2 \geq 0$

Suy ra $x \in (-\infty; \frac{1}{2}] \cup [2; +\infty)$.

Chọn đáp án (C) 

CÂU 4. Cho tam thức bậc hai $f(x) = -x^2 - 4x + 5$. Tìm tất cả giá trị của x để $f(x) \geq 0$.

- (A) $x \in (-\infty; -1] \cup [5; +\infty)$. (B) $x \in [-1; 5]$. (C) $x \in [-5; 1]$. (D) $x \in (-5; 1)$.

 **Lời giải.**

Ta có $f(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 - 4x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = 1, x = -5$.

Mà hệ số $a = -1 < 0$ nên: $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in [-5; 1]$.

Chọn đáp án (C) 

CÂU 5. Tập nghiệm của bất phương trình $x^2 - 2x - 3 \leq 0$ chứa trong tập hợp nào sau đây?

- (A) $(-1 - \sqrt{2}; 3 + \sqrt{2})$. (B) $(-1; 3]$. (C) $(-1 - \sqrt{2}; 3 - \sqrt{2})$. (D) $[1; 3]$.

 **Lời giải.**

Ta có $x^2 - 2x - 3 \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 3$ nên $S = [-1; 3] \subset (-1 - \sqrt{2}; 3 + \sqrt{2})$

Chọn đáp án (A) 

CÂU 6. Bất phương trình $\frac{2x+1}{x-1} < 1$ có tập nghiệm là

- (A) $(-2; 1)$. (B) $(-\infty; -2)$. (C) $(-\frac{2}{3}; 1)$. (D) $(-\frac{1}{2}; 1)$.

Lời giải.

$$\text{BPT} \Leftrightarrow \frac{2x+1}{x-1} - 1 < 0 \Leftrightarrow \frac{2x+1-x+1}{x-1} < 0 \Leftrightarrow \frac{x+2}{x-1} < 0 \Leftrightarrow (x+2)(x-1) < 0 \Leftrightarrow -2 < x < 1.$$

Chọn đáp án **(A)** □

3**Tìm giá trị của tham số để tam thức thoả đk cho trước****1. Ví dụ minh họa**

VÍ DỤ 1. Tìm các giá trị của tham số m để phương trình

$$x^2 - 2(m+1)x + 3m^2 - 3 = 0 \quad (1)$$

- a) có nghiệm;
- b) có hai nghiệm trái dấu.

Lời giải.

Biết thức thu gọn của tam thức $f(x) = x^2 - 2(m+1)x + 3m^2 - 3$ là

$$\Delta' = -2m^2 + 2m + 4.$$

- a) Phương trình (1) có nghiệm khi và chỉ khi $\Delta' = -2m^2 + 2m + 4 \geq 0$, tức là

$$-1 \leq m \leq 2.$$

- b) Phương trình (1) có hai nghiệm trái dấu khi và chỉ khi $ac = 3m^2 - 3 < 0$, tức là $-1 < m < 1$.

VÍ DỤ 2. Tìm các giá trị của tham số m để bất phương trình sau nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$

$$x^2 + 2(m-2)x + 2m - 1 \geq 0 \quad (2)$$

Lời giải.

Vì hệ số $a = 1 > 0$, nên bất phương trình (2) nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$ khi và chỉ khi

$$\begin{aligned} \Delta &= (m-2)^2 - (2m-1) \leq 0 \\ \Leftrightarrow m^2 - 6m + 5 &\leq 0 \\ \Leftrightarrow 1 \leq m &\leq 5. \end{aligned}$$

Vậy bất phương trình (2) nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$ khi và chỉ khi $1 \leq m \leq 5$.

2. Bài tập tự luận

BÀI 1. Tìm các giá trị của tham số m để

- a) Phương trình $x^2 - 2mx - m^2 + 8m - 6 = 0$ vô nghiệm.
- b) $f(x) = (m-1)x^2 - 2mx + 3m - 2$ là một tam thức bậc hai có hai nghiệm dương phân biệt.

Lời giải.

- a) Phương trình bậc hai vô nghiệm

$$\Leftrightarrow \Delta < 0 \Leftrightarrow (-2m)^2 - 4(-m^2 + 8m - 6) < 0 \Leftrightarrow 8m^2 - 32m + 24 < 0.$$

Bảng xét dấu $f(m) = 8m^2 - 32m + 24$

m	$-\infty$	1	3	$+\infty$
$f(m)$	+	0	-	0

Vậy phương trình vô nghiệm $\Leftrightarrow 1 < m < 3$.

b) $f(x)$ có hai nghiệm dương phân biệt khi và chỉ khi phương trình $f(x) = 0$ có hai nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = m - 1 \neq 0 \\ \Delta' = m^2 - (m-1)(3m-2) > 0 \\ S = \frac{2m}{m-1} > 0 \\ P = \frac{3m-2}{m-1} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ \frac{1}{2} < m < 2 \\ m \in (-\infty; 0) \cup (1; +\infty) \\ m \in \left(-\infty; \frac{2}{3}\right) \cup (1; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow 1 < m < 2.$$

BÀI 2. Tìm m để

a) Tam thức bậc hai $f(x) = x^2 + 2(3-4m)x + 8m - 3$ dương với mọi $x \in \mathbb{R}$.

b) $(3-3m)x^2 + (3m+6)x - m + 3 < 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

 **Lời giải.**

a) Do $a = 1 > 0$ nên $f(x) = x^2 + 2(3-4m)x + 8m - 3 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ khi và chỉ khi

$$\Delta' = (3-4m)^2 - 8m + 3 < 0 \Leftrightarrow 16m^2 - 32m + 12 < 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} < m < \frac{3}{2}.$$

b) Đặt $f(x) = (3-3m)x^2 + (3m+6)x - m + 3$, ta xét

 $3-3m=0 \Leftrightarrow m=1: f(x)=9x+2<0 \Leftrightarrow x<-\frac{2}{9}.$

Vậy $m=1$ không thỏa mãn yêu cầu bài toán.

 $m \neq 1: f(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ -27m^2 + 108m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ [m < 0 \Leftrightarrow m > 4] \\ m > 4 \end{cases}$$

Vậy $m > 4$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

BÀI 3. Tìm m để hàm số $y = \frac{1}{\sqrt{x^2 - mx + m}}$ xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$.

 **Lời giải.**

Hàm số xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow x^2 - mx + m > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 > 0 \\ \Delta = m^2 - 4m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < 4.$$

Vậy với $m \in (0; 4)$ thì hàm số đã cho xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$.

BÀI 4. Tìm các giá trị của tham số m để bất phương trình sau vô nghiệm

$$(m+1)x^2 + 2(m+1)x + 3m - 6 \geq 0.$$

 **Lời giải.**

Bất phương trình $(m+1)x^2 + 2(m+1)x + 3m - 6 \geq 0$ vô nghiệm tương đương với

$$(m+1)x^2 + 2(m+1)x + 3m - 6 < 0, \text{ với mọi } x \in \mathbb{R}.$$

 Xét $m+1=0 \Leftrightarrow m=-1$ thay vào bất phương trình ta được $-9 < 0$ luôn đúng với mọi giá trị $x \in \mathbb{R}$. Vậy $m=-1$ là một giá trị cần tìm.

 Xét $m+1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -1$, ta có

$$\begin{aligned} & (m+1)x^2 + 2(m+1)x + 3m - 6 < 0, \forall x \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} m+1 < 0 \\ \Delta' = (m+1)^2 - 3(m+1)(m-2) < 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} m \in (-\infty; -1) \\ m \in (-\infty; -1) \cup \left(\frac{7}{2}; +\infty\right) \end{cases} \\ \Leftrightarrow & m \in (-\infty; -1). \end{aligned}$$

Vậy tất cả giá trị m cần tìm là $m \in (-\infty; -1]$.

BÀI 5. Tìm các giá trị của tham số m để bất phương trình $-1 \leq \frac{x^2 - 2x - m}{x^2 + 2x + 2022} < 2$ nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Lời giải.

Vì $x^2 + 2x + 2022 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên

$$\begin{aligned} -1 \leq \frac{x^2 - 2x - m}{x^2 + 2x + 2022} < 2 &\Leftrightarrow \begin{cases} -(x^2 + 2x + 2022) \leq x^2 - 2x - m \\ x^2 - 2x - m < 2(x^2 + 2x + 2022) \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - m + 2022 \geq 0 \quad (1) \\ x^2 + 6x + m + 4044 > 0 \quad (2) \end{cases} \end{aligned}$$

Bất phương trình đã cho đúng $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (1), (2)$ đúng $\forall x \in \mathbb{R}$. Điều này tương đương với

$$\begin{cases} 0^2 - 4 \cdot 2(-m + 2022) \leq 0 \\ 3^2 - (m + 4044) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 2022 \\ m > -4035 \end{cases} \Leftrightarrow -4035 < m \leq 2022.$$

BÀI 6. Tìm các giá trị của tham số m để

a) Phương trình $(m+2)x^2 - 3x + 2m - 3 = 0$ có 2 nghiệm trái dấu.

b) $f(x) = x^2 - 6mx + 2 - 2m + 9m^2$ là một tam thức bậc hai có hai nghiệm âm phân biệt.

Lời giải.

a) Phương trình có 2 nghiệm trái dấu khi và chỉ khi

$$(m+2)(2m-3) < 0 \Leftrightarrow -2 < m < \frac{3}{2}.$$

b) Phương trình đã cho có hai nghiệm âm phân biệt khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \Delta' > 0 \\ -\frac{b}{a} < 0 \\ \frac{c}{a} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9m^2 - (2 - 2m + 9m^2) > 0 \\ 6m < 0 \\ 9m^2 - 2m + 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m - 2 > 0 \\ m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \{m < 0\}.$$

Vậy không có giá trị của m thỏa mãn.

BÀI 7. Tìm các giá trị của tham số m để

a) $f(x) = x^2 - (m+2)x + 8m + 1$ không âm với mọi $x \in \mathbb{R}$.

b) $(2m^2 - 3m - 2)x^2 + 2(m-2)x - 1 \leq 0$ có tập nghiệm là \mathbb{R} .

Lời giải.

a) Tam thức $f(x)$ có $a = 1 > 0$. Do đó

$$f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (m+2)^2 - 4(8m+1) \leq 0 \Leftrightarrow m^2 - 28m \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq m \leq 28.$$

Vậy $0 \leq m \leq 28$ là các giá trị cần tìm.

b) Ta có $2m^2 - 3m - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -\frac{1}{2} \\ m = 2. \end{cases}$

Trường hợp 1.

↪ Với $m = -\frac{1}{2}$, bất phương trình đã cho trở thành $-5x - 1 \leq 0$ có nghiệm $x \geq -\frac{1}{5}$, không nghiệm đúng với mọi x .
Vậy $m = -\frac{1}{2}$ không thỏa mãn yêu cầu bài toán.

↪ Với $m = 2$, bất phương trình đã cho trở thành $-1 \leq 0$, nghiệm đúng với mọi x .
Vậy $m = 2$ là giá trị thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Trường hợp 2. Khi $m \neq -\frac{1}{2}$ và $m \neq 2$, yêu cầu bài toán thỏa mãn khi

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{array}{l} 2m^2 - 3m - 2 < 0 \\ (m-2)^2 + (2m^2 - 3m - 2) \leq 0 \end{array} \right. \\ \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{l} 2m^2 - 3m - 2 < 0 \\ 3m^2 - 7m + 2 \leq 0 \end{array} \right. \\ \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{2} < m < 2 \\ \frac{1}{3} \leq m \leq 2 \end{array} \right. \\ \Leftrightarrow & \frac{1}{3} \leq m < 2. \end{aligned}$$

Kết hợp hai trường hợp ta được $\frac{1}{3} \leq m \leq 2$ là các giá trị cần tìm.

BÀI 8. Tìm các giá trị của tham số m để

- a) $5x^2 - x + m \leq 0$ vô nghiệm.
- b) $-x^2 + 2x - m - 1 > 0$ vô nghiệm.
- c) $(1-m)x^2 - 2(m-1)x + m - 3 \geq 0$ vô nghiệm.

 **Lời giải.**

- a) Bất phương trình vô nghiệm khi và chỉ khi

$$5x^2 - x + m > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 - 20m < 0 \Leftrightarrow m > \frac{1}{20}.$$

- b) $-x^2 + 2x - m - 1 > 0$ vô nghiệm $\Leftrightarrow -x^2 + 2x - m - 1 \leq 0$ nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta' \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < 0 \\ -m \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq 0.$$

- c) Đặt $f(x) = (1-m)x^2 - 2(m-1)x + m - 3$.

Bất phương trình $f(x) \geq 0$ vô nghiệm khi và chỉ khi $f(x) < 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

TH1: $m = 1$ thì $f(x) = -2 < 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ nên $m = 1$ thỏa mãn.

TH2: $m \neq 1$, ta có

$$f(x) < 0, \quad \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 - m < 0 \\ \Delta' = 2m^2 - 6m + 4 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ 1 < m < 2 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < m < 2.$$

Vậy $m \in [1; 2)$ thỏa mãn.

BÀI 9. Tìm các giá trị của tham số m để hàm số $y = \sqrt{x^2 - 4x + m - 5}$ có tập xác định là \mathbb{R} .

 **Lời giải.**

Hàm số $y = \sqrt{x^2 - 4x + m - 5}$ có tập xác định là \mathbb{R} khi và chỉ khi

$$x^2 - 4x + m - 5 \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 > 0 \\ \Delta' = 9 - m \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq 9.$$

BÀI 10. Xác định m để bất phương trình $\frac{x^2 + mx - 1}{2x^2 - 2x + 3} < 1$ đúng với mọi số thực x .

 **Lời giải.**

Vì $x^2 + 2x + 2022 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên

$$\frac{x^2 + mx - 1}{2x^2 - 2x + 3} < 1 \Leftrightarrow \frac{-x^2 + (m+2)x - 4}{2x^2 - 2x + 3} < 0 \Leftrightarrow -x^2 + (m+2)x - 4 < 0.$$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 < 0 \\ \Delta < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m^2 + 4m - 12 < 0 \Leftrightarrow m \in (-6; 2)$.

3. Câu hỏi trắc nghiệm

CÂU 1. Tập hợp các giá trị của tham số thực m để phương trình $(m+1)x^2 - 2x - 3 + m = 0$ có hai nghiệm trái dấu là $(a; b)$, với a, b là các số thực, $a < b$. Tính $T = a^2 + b^2$.

- A** $T = 9$. **B** $T = 8$. **C** $T = 1$. **D** $T = 10$.

Lời giải:

Phương trình có 2 nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow ac < 0 \Leftrightarrow (m+1)(m-3) < 0 \Leftrightarrow m \in (-1; 3)$
 $\Rightarrow a = -1, b = 3 \Rightarrow T = 10$.

Chọn đáp án **D** □

CÂU 2. Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình $x^2 - 4mx - 4m^2 + 16m - 6 = 0$ có nghiệm.

- A** $-\frac{3}{2} \leq m \leq -\frac{1}{2}$. **B** $\begin{cases} m \geq \frac{3}{2} \\ m \leq \frac{1}{2} \end{cases}$. **C** $-\frac{3}{2} < m < -\frac{1}{2}$. **D** $\begin{cases} m > -\frac{1}{2} \\ m < -\frac{3}{2} \end{cases}$.

Lời giải:

Phương trình có nghiệm khi $(-2m)^2 - (-4m^2 + 16m - 6) \geq 0 \Leftrightarrow 8m^2 - 16m + 6 \geq 0$.

Bảng xét dấu $f(m) = 8m^2 - 16m + 6$

m	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$f(m)$	+	0	-	0

Vậy $\begin{cases} m \geq \frac{3}{2} \\ m \leq \frac{1}{2} \end{cases}$ thỏa mãn.

Chọn đáp án **B** □

CÂU 3. Giá trị nào của m thì phương trình $(m-3)x^2 + (m+3)x - (m+1) = 0$ (1) có hai nghiệm phân biệt?

- A** $m \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$. **B** $m \in \left(-\infty; -\frac{3}{5}\right) \cup (1; +\infty) \setminus \{3\}$.
C $m \in \left(-\frac{3}{5}; 1\right)$. **D** $m \in \left(-\frac{3}{5}; +\infty\right)$.

Lời giải:

Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} m-3 \neq 0 \\ \Delta = (m+3)^2 + 4(m-3)(m+1) > 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 3 \\ 5m^2 - 2m - 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 3 \\ \begin{cases} x < -\frac{3}{5} \Leftrightarrow m \in \left(-\infty; -\frac{3}{5}\right) \cup (1; +\infty) \setminus \{3\} \\ x > 1 \end{cases} \end{cases}$$

Chọn đáp án **B** □

CÂU 4. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $(m+1)x^2 - 2(m+1)x + 4 \geq 0$ có tập nghiệm $S = \mathbb{R}$?

- A** $m > -1$. **B** $-1 \leq m \leq 3$. **C** $-1 < m \leq 3$. **D** $-1 < m < 3$.

Lời giải:

Trường hợp 1: $m+1 = 0 \Leftrightarrow m = -1$ bất phương trình đã cho trở thành

$$4 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \text{ (luôn đúng).} \quad (*)$$

Trường hợp 2: $m+1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -1$ bất phương trình đã cho có tập nghiệm $S = \mathbb{R}$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta' \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m+1 > 0 \\ m^2 - 2m - 3 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < m \leq 3 \quad (**)$$

Từ (*) và (**) ta suy ra $-1 \leq m \leq 3$.

Chọn đáp án **B** □

CÂU 5. Tìm các giá trị của tham số m để bất phương trình $(m-2)x^2 - 2(m-3)x + m + 1 > 0$ có tập nghiệm là \mathbb{R} .

(A) $m > 3$.(B) $m < \frac{11}{5}$.(C) $m < -3$.(D) $m > \frac{11}{5}$. **Lời giải.**

Xét $m - 2 = 0 \Leftrightarrow m = 2$, ta có $2x + 3 > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{3}{2}$ (không thỏa mãn yêu cầu bài toán).

Xét $m \neq 2$, ta có

$$(m-2)x^2 - 2(m-3)x + m+1 > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} m-2 > 0 \\ \Delta' < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 2 \\ -5m+11 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > \frac{11}{5}.$$

Chọn đáp án (D)

CÂU 6. Cho $f(x) = x^2 - (m^2 + m + 1)x + m^3 + m^2$ với m là tham số thực. Biết rằng có đúng 2 giá trị m_1, m_2 để $f(x)$ không âm với mọi giá trị của x . Tính tổng $m_1 + m_2$.

(A) 1.

(B) -1.

(C) 2.

(D) -2.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} &\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 > 0 \\ \Delta = (m^2 + m + 1)^2 - 4(m^3 + m^2) \leq 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow m^4 + m^2 + 1 + 2m^3 + 2m^2 + 2m - 4m^3 - 4m^2 \leq 0 \\ &\Leftrightarrow m^4 - 2m^3 - m^2 + 2m + 1 \leq 0. \end{aligned}$$

Trường hợp 1: $m = 0 \Rightarrow 1 \leq 0$ (vô lý). Do đó $m = 0$ không thỏa mãn bất phương trình.

Trường hợp 2: $m \neq 0$, chia cả 2 vế cho m^2 ta được $m^2 - 2m - 1 + \frac{2}{m} + \frac{1}{m^2} \leq 0$

$$\Leftrightarrow \left(m^2 + \frac{1}{m^2} \right) - 2 \left(m - \frac{1}{m} \right) - 1 \leq 0 \quad (1).$$

Đặt $t = m - \frac{1}{m} \Rightarrow m^2 + \frac{1}{m^2} = t^2 + 2$.

Khi đó (1) $\Leftrightarrow t^2 - 2t + 1 \leq 0 \Leftrightarrow t = 1$.

$$\text{Với } t = 1 \Rightarrow m - \frac{1}{m} = 1 \Leftrightarrow m^2 - m - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ m = \frac{1-\sqrt{5}}{2}. \end{cases}$$

Vậy tổng $m_1 + m_2 = 1$.

Chọn đáp án (A)

CÂU 7. Tìm các giá trị của tham số m để hàm số $y = \sqrt{mx^2 - mx + 3}$ có tập xác định là $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

(A) $[0; 12]$.(B) $(0; 12)$.(C) $[0; 12]$.(D) $(0; 12]$. **Lời giải.**

Hàm số có tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R} \Leftrightarrow mx^2 - mx + 3 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$. (*)

Với $m = 0$, (*) $\Leftrightarrow 3 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Giá trị $m = 0$ thỏa mãn.

Với $m \neq 0$, (*) $\Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m^2 - 12m \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ 0 \leq m \leq 12 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m \leq 12$.

Vậy $0 \leq m \leq 12$.

Chọn đáp án (A)

CÂU 8. Giá trị của m để bất phương trình $(m-1)x^2 - 2(m+1)x + 3(m-2) > 0$ vô nghiệm là

(A) $m \geq 5$.(B) $m \leq \frac{1}{2}$.(C) $m < \frac{1}{2}$.(D) $\frac{1}{2} \leq m < 1$. **Lời giải.**

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow f(x) = (m-1)x^2 - 2(m+1)x + 3(m-2) \leq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

- Xét $m = 1$ thì $f(x) = -4x - 3 \leq 0$ không đúng với mọi x (loại).

- Xét $m \neq 1$ thì $f(x) \leq 0$ với mọi x

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m-1 < 0 \\ \Delta' \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 1 \\ -2m^2 + 11m - 5 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 1 \\ \begin{cases} m \geq 5 \\ m \leq \frac{1}{2} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow m \leq \frac{1}{2}.$$

Chọn đáp án (B)

CÂU 9. Với giá trị nào của m thì với mọi x ta có $-1 \leq \frac{x^2 + 5x + m}{2x^2 - 3x + 2} < 7$:

- (A) $m \leq -\frac{5}{3}$. (B) $-\frac{5}{3} < m < 1$. (C) $m < 1$. (D) . (E) $-\frac{5}{3} \leq m < 1$.

Lời giải:

Vì $2x^2 - 3x + 2 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ suy ra

$$-1 \leq \frac{x^2 + 5x + m}{2x^2 - 3x + 2} < 7 \text{ với } \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow -1(2x^2 - 3x + 2) \leq x^2 + 5x + m < 7(2x^2 - 3x + 2) \text{ với } \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 + 2x + m + 2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \\ 13x^2 - 26x - m + 14 > 0, \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'_1 = 1 - 3(m+2) \leq 0 \\ \Delta'_2 = 169 - 13(-m+14) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -\frac{5}{3} \\ m < 1 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{5}{3} \leq m < 1.$$

Chọn đáp án (D) □

CÂU 10. Cho hàm số $y = \frac{2x - 1}{\sqrt{mx^4 + mx^3 + (m+1)x^2 + mx + 1}}$. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số xác định với mọi x thuộc \mathbb{R} .

- (A) 4. (B) 3. (C) 5. (D) Vô số.

Lời giải:

Hàm số xác định với mọi x thuộc \mathbb{R} khi và chỉ khi

$$\begin{aligned} & mx^4 + mx^3 + (m+1)x^2 + mx + 1 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow & m(x^4 + x^3 + x^2 + x) + x^2 + 1 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow & m(x^2 + x)(x^2 + 1) + x^2 + 1 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow & m(x^2 + x) + 1 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow & mx^2 + mx + 1 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (*) \end{aligned}$$

✓ Trường hợp 1: $m = 0$ thì (*) trở thành $1 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

✓ Trường hợp 2: $m \neq 0$ thì $(*) \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ \Delta = m^2 - 4m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < 4$.

Vậy các giá trị m thỏa mãn yêu cầu là 0, 1, 2, 3.

Chọn đáp án (A) □

4

Ứng dụng thực tế

1. Ví dụ minh họa

VÍ DỤ 1. Một vật được ném theo phương thẳng đứng xuống dưới từ độ cao 320 m với vận tốc ban đầu $v_0 = 20 \text{ m/s}$. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu giây, vật đó cách mặt đất không quá 100 m? Giả thiết rằng sức cản của không khí là không đáng kể.

Lời giải:

Với $g = 10 \text{ m/s}^2$, ta có phương trình chuyển động $h(t) = 5t^2 + 20t - 320$.

Vật cách mặt đất không quá 100 m, tức là $-100 < h(t) = 5t^2 + 20t - 320 < 0$.

Giải các bất phương trình ta được $-2 + 4\sqrt{3} \leq t < -2 + 2\sqrt{17}$.

VÍ DỤ 2. Để xây dựng phương án kinh doanh cho một loại sản phẩm, doanh nghiệp tính toán lợi nhuận y (đồng) theo công thức sau $y = -200x^2 + 92000x - 8400000$, trong đó x là số sản phẩm được bán ra. Cho biết doanh nghiệp có lãi khi nào, bị lỗ khi nào.

Lời giải:

Xét tam thức bậc hai $f(x) = -200x^2 + 92000x - 8400000$.

$f(x)$ có hai nghiệm là $x_1 = \frac{-460 + \sqrt{43600}}{-2} \approx 125,6$ và $x_2 = \frac{-460 - \sqrt{43600}}{-2} \approx 334,4$ và hệ số $a = -200 < 0$. Ta có bảng xét dấu như sau

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
$f(x)$	-	0	+	-

Vì x là số nguyên dương nên:

✓ Doanh nghiệp có lãi khi và chỉ khi $f(x) > 0$, tức là $126 \leq x \leq 334$.

✓ Doanh nghiệp bị lỗ khi và chỉ khi $f(x) < 0$, tức là $x \leq 125$ hoặc $x \geq 335$.

Vậy doanh nghiệp có lãi khi bán từ 126 đến 334 sản phẩm, doanh nghiệp bị lỗ khi bán tối đa 125 sản phẩm hoặc bán tối thiểu 335 sản phẩm.

VÍ DỤ 3. Một công ty du lịch thông báo giá tiền cho chuyến đi tham quan của một nhóm khách du lịch như sau: 50 khách đầu tiên có giá là 300 000 đồng/người. Nếu có nhiều hơn 50 người đăng ký thì cứ có thêm 1 người, giá vé sẽ giảm 5 000 đồng/người cho toàn bộ hành khách.

- Gọi x là số lượng khách từ người thứ 51 trở lên của nhóm. Biểu thị doanh thu theo x .
- Số người của nhóm khách du lịch nhiều nhất là bao nhiêu thì công ty không bị lỗ? Biết rằng chi phí thực sự cho chuyến đi là 15 080 000 đồng.

Lời giải.

- Do x là số lượng khách thứ 51 trở lên nên $x > 0$.

Cứ thêm 1 người thì giá còn $(300000 - 5000 \cdot 1)$ đồng/người cho toàn bộ hành khách. Thêm x người thì giá còn $(300000 - 5000 \cdot x)$ đồng/người cho toàn bộ hành khách.

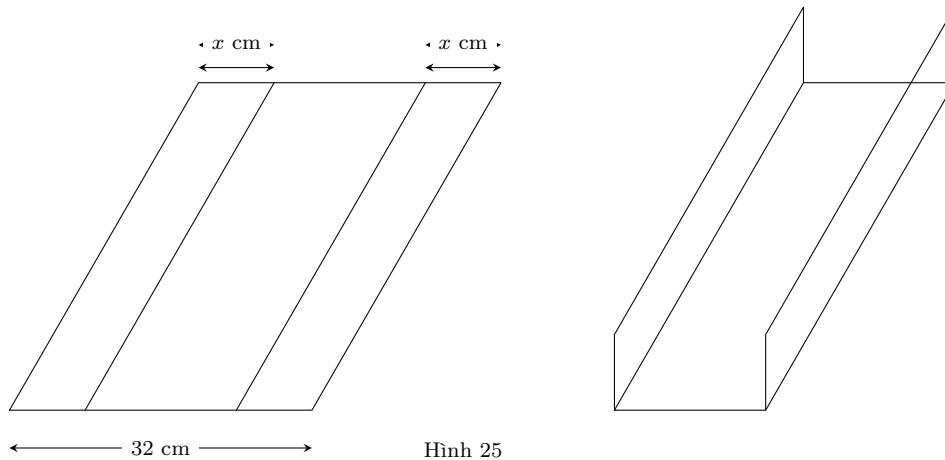
Doanh thu theo x là $(50 + x) \cdot (300000 - 5000 \cdot x)$ đồng.

- Do chi phí thực sự cho chuyến đi là 15 080 000 đồng nên để công ty không bị lỗ thì doanh thu phải lớn hơn hoặc bằng 15 080 000 đồng. Khi đó:

$$\begin{aligned} (50 + x) \cdot (300000 - 5000x) &\geq 15080000 \\ \Leftrightarrow (50 + x) \cdot 5000 \cdot (60 - x) &\geq 15080000 \\ \Leftrightarrow (x + 50)(60 - x) &\geq 3016 \\ \Leftrightarrow -x^2 + 10x + 3000 &\geq 3016 \\ \Leftrightarrow -x^2 + 10x - 16 &\geq 0 \\ \Leftrightarrow 2 \leq x &\leq 8 \end{aligned}$$

Vậy số người của nhóm du khách nhiều nhất là 58 người thì công ty không bị lỗ.

VÍ DỤ 4. Bác Dũng muốn uốn tấm tôn phẳng có dạng hình chữ nhật với bề ngang 32 cm thành một rãnh dẫn nước bằng cách chia tấm tôn đó thành ba phần rồi gấp hai bên lại theo một góc vuông (Hình 25). Để đảm bảo kỹ thuật, diện tích mặt cắt ngang của rãnh dẫn nước phải lớn hơn hoặc bằng 120 cm^2 .



Lời giải.

Khi chia tấm tôn đó thành ba phần rồi gấp hai bên lại theo một góc vuông như Hình 25 thì kích thước của mặt cắt ngang là x (cm) và $32 - 2x$ (cm). Khi đó diện tích mặt cắt ngang là $(32 - 2x) \text{ cm}^2$.

Ta thấy: Diện tích mặt cắt ngang của rãnh dẫn nước lớn hơn 120 cm^2 khi và chỉ khi

$$(32 - 2x)x \geq 120 \Leftrightarrow -2x^2 + 32x - 120 \geq 0.$$

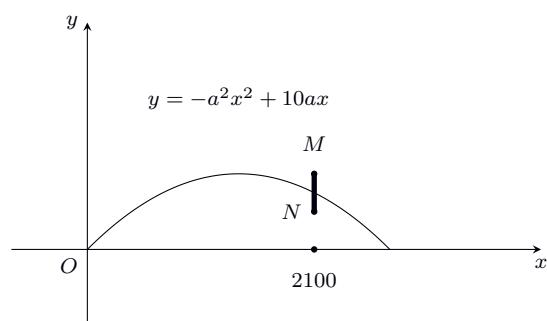
Tam thức $-2x^2 + 32x - 120$ có hai nghiệm $x_1 = 6, x_2 = 10$ và hệ số $a = -2 < 0$. Sử dụng định lí về dấu của tam thức bậc hai, ta thấy tập hợp những giá trị của x sao cho tam thức $-2x^2 + 32x - 120$ mang dấu "+" là $(6; 10]$.

Do đó tập nghiệm của bất phương trình $-2x^2 + 32x - 120 \geq 0$ là $[6; 10]$.

Vậy rãnh dẫn nước phải có độ cao ít nhất là 6 (cm).

VÍ DỤ 5.

Một tinh huống trong huấn luyện pháo binh được mô tả như sau: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , khẩu đại bác được biểu thị bằng điểm $O(0; 0)$ và bia mục tiêu được biểu thị bằng đoạn thẳng MN với $M(2100; 25)$ và $N(2100; 15)$ (Hình 29). Xạ thủ cần xác định parabol $y = -a^2x^2 + 10ax$ ($a > 0$) mô tả quỹ đạo chuyển động của viên đạn sao cho viên đạn bắn ra từ khẩu đại bác phải chạm vào bia mục tiêu. Tìm giá trị lớn nhất của a để xạ thủ đạt được mục đích trên.



LỜI GIẢI.

Tại vị trí $x = 2100$, độ cao của viên đạn là

$$y = -a^2 \cdot 2100^2 + 10a \cdot 2100 = -4410000a^2 + 21000a.$$

Viên đạn chạm được vào bia mục tiêu khi và chỉ khi a thoả mãn các bất phương trình sau

$$2100 \leq \frac{10}{a}; \quad (5)$$

$$-4410000a^2 + 21000a \leq 25; \quad (6)$$

$$-4410000a^2 + 21000a \geq 15. \quad (7)$$

Ⓐ (5) $\Leftrightarrow \frac{1}{a} \geq 210 \Leftrightarrow a \leq \frac{1}{210}$. Vì $a > 0$ nên $a \in \left(0; \frac{1}{210}\right]$.

Ⓑ (6) $\Leftrightarrow 4410000a^2 - 21000a + 25 \geq 0 \Leftrightarrow (2100a - 5)^2 \geq 0$. Bất phương trình này đúng $\forall a > 0$.

Ⓒ (7) $\Leftrightarrow 4410000a^2 - 21000a + 15 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{420} - \frac{\sqrt{10}}{2100} \leq a \leq \frac{1}{420} + \frac{\sqrt{10}}{2100}$
 $\Leftrightarrow a \in \left[\frac{1}{420} - \frac{\sqrt{10}}{2100}; \frac{1}{420} + \frac{\sqrt{10}}{2100}\right].$

Do $\frac{1}{420} - \frac{\sqrt{10}}{2100} > 0$ và $\frac{1}{420} + \frac{\sqrt{10}}{2100} < \frac{1}{210}$ nên

$$\left(0; \frac{1}{210}\right] \cap \left[\frac{1}{420} - \frac{\sqrt{10}}{2100}; \frac{1}{420} + \frac{\sqrt{10}}{2100}\right] = \left[\frac{1}{420} - \frac{\sqrt{10}}{2100}; \frac{1}{420} + \frac{\sqrt{10}}{2100}\right].$$

Vì thế, viên đạn chạm được vào bia mục tiêu khi và chỉ khi

$$a \in \left[\frac{1}{420} - \frac{\sqrt{10}}{2100}; \frac{1}{420} + \frac{\sqrt{10}}{2100}\right].$$

Vậy giá trị lớn nhất của a là $\frac{1}{420} + \frac{\sqrt{10}}{2100}$.

2. Bài tập tự luận

BÀI 1. Bộ phận nghiên cứu thị trường của một xí nghiệp xác định tổng chi phí để sản xuất Q sản phẩm là $Q^2 + 180Q + 140000$ (nghìn đồng). Giá sử giá mỗi sản phẩm bán ra thị trường là 1200 nghìn đồng.

- Xác định lợi nhuận xí nghiệp thu được sau khi bán hết Q sản phẩm đó, biết rằng lợi nhuận là hiệu của doanh thu trừ đi tổng chi phí để sản xuất.
- Xí nghiệp sản xuất bao nhiêu sản phẩm thì hòa vốn?
- Xí nghiệp cần sản xuất số sản phẩm là bao nhiêu để không bị lỗ?

LỜI GIẢI.

- Doanh thu khi bán hết Q sản phẩm là $1200 \cdot Q$ (nghìn đồng). Lợi nhuận xí nghiệp thu được sau khi bán hết Q sản phẩm là

$$1200Q - (Q^2 + 180Q + 140000) = -Q^2 + 1020Q - 140000.$$

b) Xí nghiệp hòa vốn khi và chỉ khi $-Q^2 + 1020Q - 140000 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} Q \approx 163,45 \\ Q \approx 856,55. \end{cases}$

Vậy xí nghiệp sản xuất 163 sản phẩm hoặc 857 sản phẩm thì hòa vốn.

- c) Để xí nghiệp không bị lỗ thì

$$-Q^2 + 1020Q - 140000 \geq 0 \Leftrightarrow 163,45 \leq Q \leq 856,55.$$

Vậy để không bị lỗ thì xí nghiệp cần sản xuất số sản phẩm nằm trong [163; 856].

BÀI 2. Xét hệ toạ độ Oth trên mặt phẳng, trong đó trục Ot biểu thị thời gian t (tính bằng giây) và trục Oh biểu thị độ cao h (tính bằng mét). Một quả bóng được đá lên từ điểm $A(0; 0,2)$ và chuyển động theo quỹ đạo là một cung parabol. Quả bóng đạt độ cao 8,5 m sau 1 giây và đạt độ cao 6 m sau 2 giây.

- a) Hãy tìm hàm số bậc hai biểu thị quỹ đạo chuyển động của quả bóng.
b) Trong khoảng thời gian nào thì quả bóng vẫn chưa chạm đất?

 **Lời giải.**

- a) Giả sử hàm số có dạng $h = at^2 + bt + c$, trong đó h là độ cao, t là thời gian, a, b, c là các hằng số cần tìm với $a \neq 0$.
Quỹ đạo của quả bóng là một parabol đi qua điểm $A(0; 0,2)$ nên thay $t = 0$ và $h = 0,2$ vào hàm số ta được $c = 0,2$.
Suy ra $h = at^2 + bt + 0,2$.

Lại có quả bóng đạt độ cao 8,5 m sau 1 giây và 6 m sau 2 giây, do đó quỹ đạo của bóng là parabol đi qua các điểm có tọa độ $(1; 8,5)$ và $(2; 6)$.

$$\text{Ta có hệ } \begin{cases} a + b + 0,2 = 8,5 \\ 4a + 2b + 0,2 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -5,4 \\ b = 13,7. \end{cases}$$

Vậy hàm số bậc hai biểu thị quỹ đạo chuyển động của quả bóng là $h = -5,4t^2 + 13,7t + 0,2$.

- b) Bóng chạm đất nếu khi độ cao $h = 0$, vậy bóng chưa chạm đất khi độ cao $h > 0$.

Suy ra $-5,4t^2 + 13,7t + 0,2 > 0$, đây là bất phương trình bậc hai một ẩn với ẩn t .

$$\text{Tam thức bậc hai } -5,4t^2 + 13,7t + 0,2 \text{ có hai nghiệm } t_1 = \frac{137}{108} - \frac{\sqrt{19201}}{108}, t_2 = \frac{137}{108} + \frac{\sqrt{19201}}{108}.$$

Sử dụng định lí về dấu của tam thức bậc hai ta có

$$\begin{aligned} & -5,4t^2 + 13,7t + 0,2 > 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{137}{108} - \frac{\sqrt{19201}}{108} < t < \frac{137}{108} + \frac{\sqrt{19201}}{108}. \end{aligned}$$

Lại có thời gian $t > 0$.

$$\text{Do đó } 0 < t < \frac{137}{108} + \frac{\sqrt{19201}}{108}.$$

$$\text{Mà } \frac{137}{108} + \frac{\sqrt{19201}}{108} \approx 2,55.$$

Vậy trong khoảng thời gian từ 0 đến 2,55 giây thì bóng vẫn chưa chạm đất.

BÀI 3. Công ty An Bình thông báo giá tiền cho chuyến đi tham quan của một nhóm khách du lịch như sau 10 khách đầu tiên có giá là 800000 đồng/người. Nếu có nhiều hơn 10 người đăng ký thì cứ có thêm 1 người, giá vé sẽ giảm 10000 đồng/người cho toàn bộ hành khách.

- a) Gọi x là số lượng khách từ người thứ 11 trở lên của nhóm. Biểu thị doanh thu theo x .
b) Số người của nhóm khách du lịch nhiều nhất là bao nhiêu thì công ty không bị lỗ?
Biết rằng chi phí thực sự cho chuyến đi là 700000 đồng/người.

 **Lời giải.**

- a) x là số lượng khách từ người thứ 11 trở lên của nhóm.

Tổng số khách là $10 + x$ (người). Nếu có nhiều hơn 10 người đăng ký thì cứ có thêm 1 người, giá vé sẽ giảm 10000 đồng/người cho toàn bộ hành khách, do đó giá tiền cho chuyến đi của một người khi có $10 + x$ người tham gia là $800000 - 10000x$ (đồng). Khi đó doanh thu của công ty là

$$\begin{aligned} y &= (800000 - 10000x)(10 + x) \\ \Leftrightarrow y &= 8000000 + 800000x - 100000x - 10000x^2 \\ \Leftrightarrow y &= -10000x^2 + 700000x + 8000000 \end{aligned}$$

Vậy doanh thu của công ty theo x là $y = -10000x^2 + 700000x + 8000000$.

- b) Chi phí thực sự cho chuyến đi là 700000 đồng/người nên tổng chi phí cho $10 + x$ người tham gia là $700000(10 + x)$ (đồng).

Để công ty không bị lỗ thì doanh thu phải lớn hơn hoặc bằng tổng chi phí.

Do đó

$$\begin{aligned} y &\geq 700000(10 + x) \\ \Leftrightarrow -10000x^2 + 700000x + 8000000 &\geq 700000(10 + x) \\ \Leftrightarrow -10000x^2 + 1000000 &\geq 0 \\ \Leftrightarrow x^2 - 100 &\leq 0. \end{aligned}$$

Áp dụng định lý dấu của tam thức bậc hai, ta giải được bất phương trình trên.

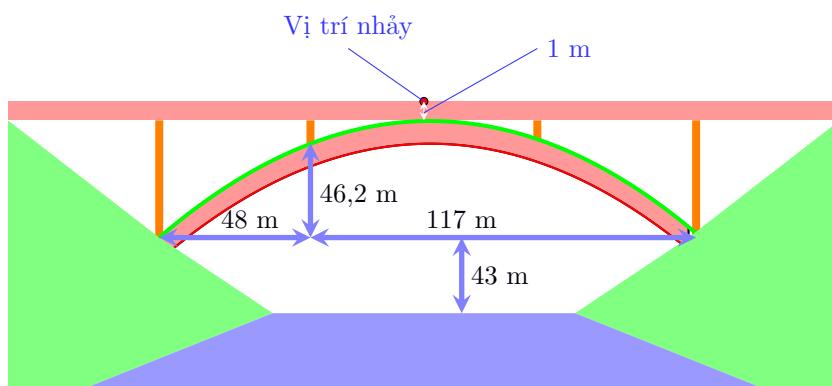
Ta có $x^2 - 100 \leq 0 \Leftrightarrow -10 \leq x \leq 10$.

Mà x là số tự nhiên nên $0 \leq x \leq 10$.

Do đó thêm nhiều nhất là 10 người nữa thì công ty không bị lỗ hay số người của nhóm khách du lịch lúc này là $10 + 10 = 20$ người.

Vậy số người có nhóm du lịch nhiều nhất 20 người thì công ty không bị lỗ.

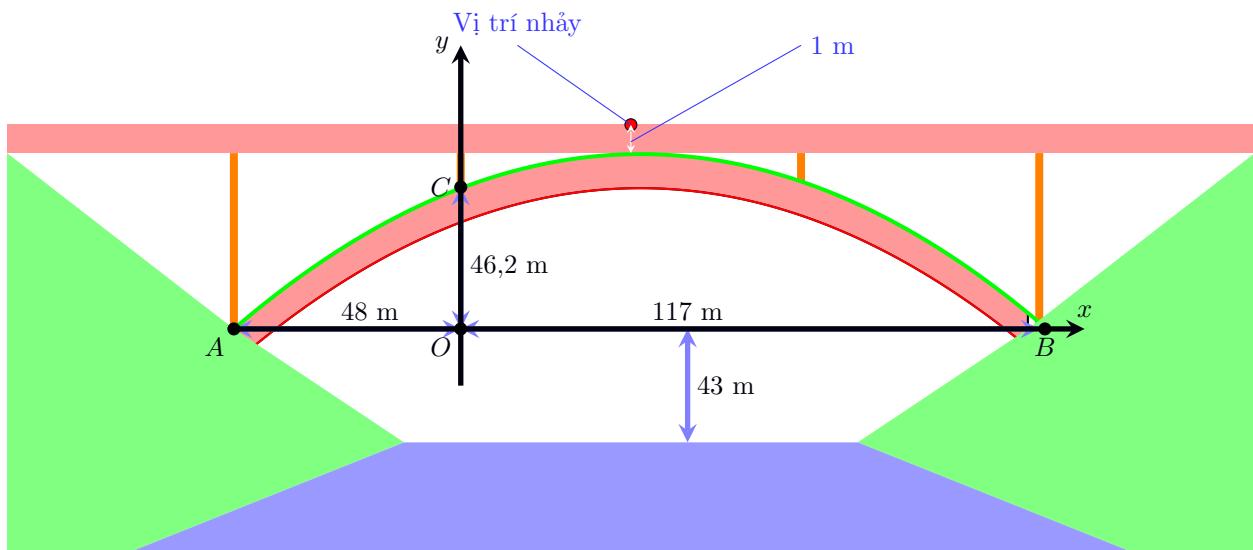
BÀI 4. Nhảy bungee là một trò chơi mạo hiểm. Trong trò chơi này, người chơi đứng ở vị trí trên cao, thắt dây an toàn và nhảy xuống. Sợi dây này có tính đàn hồi và được tính toán chiều dài để nó kéo người chơi lại khi gần chạm đất (hoặc mặt nước).



Chiếc cầu trong hình vẽ trên có bộ phận chống đỡ dạng parabol. Một người muốn thực hiện một cú nhảy bungee từ giữa cầu xuống với dây an toàn. Người này cần trang bị sợi dây an toàn dài bao nhiêu mét? Biết rằng chiều dài của sợi dây đó bằng một phần ba khoảng cách từ vị trí bắt đầu nhảy đến mặt nước.

 **Lời giải:**

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ, ta có bộ phận chống đỡ có dạng parabol đi qua ba điểm $A(-48; 0)$; $B(117; 0)$; $C(0; 46,2)$.



Hàm số bậc hai tương ứng với parabol này có công thức $y = ax^2 + bx + c$ với a khác 0.

Ta có $c = 46,2$ và

$$\begin{cases} (-48)^2 a - 48b + 46,2 = 0 \\ 117^2 a + 117b + 46,2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{77}{9360} \\ b = \frac{1771}{3120} \end{cases}$$

Dỉnh S của parabol có $x_S = \frac{69}{2}$; $y_S \approx 56$.

Chiều dài sợi dây an toàn cần trang bị bằng một phần ba khoảng cách từ vị trí bắt đầu nhảy xuống đến mặt nước nên ta tính như sau:

$$L = \frac{1}{3} \cdot (y_S + 1 + 43) = \frac{1}{3} \cdot (56 + 1 + 43) = \frac{100}{3} \approx 33,33 \text{ m.}$$

Người đó cần trang bị sợi dây bảo hiểm dài khoảng 33,3 m.

BÀI 5. Khi một vật từ vị trí y_0 được ném xiên lên cao theo góc α (so với phương ngang) với vận tốc ban đầu v_0 thì phương trình chuyển động của vật này là

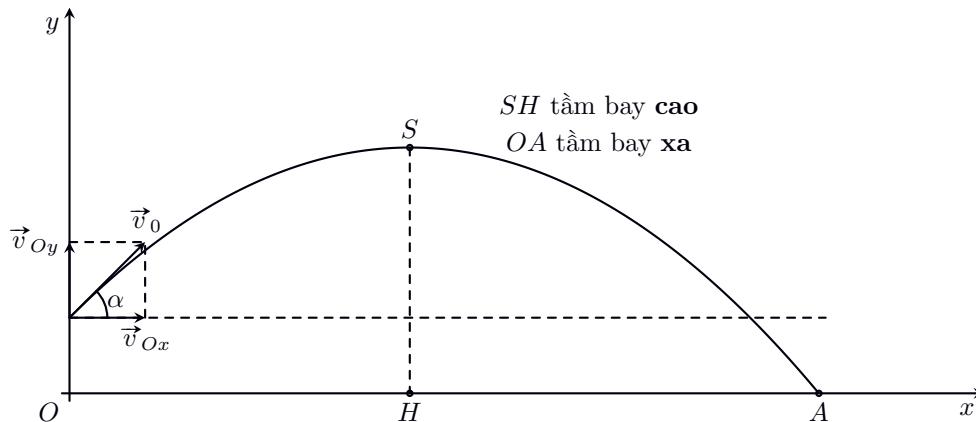
$$y = \frac{-gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} + \tan \alpha \cdot x + y_0.$$

- a) Vật bị ném xiên như vậy có chuyển động theo đường xiên hay không? Tại sao?
- b) Giả sử góc ném có số đo là 45° , vận tốc ban đầu của vật là 3 m/s và vật được ném xiên từ độ cao 1 m so với mặt đất, hãy viết phương trình chuyển động của vật.
- c) Một vận động viên ném lao đã lập kỉ lục với độ xa 90 m. Biết người này ném lao từ độ cao 0,9 m và góc ném là khoảng 45° . Hỏi vận tốc đầu của lao khi được ném đi là bao nhiêu?

 *Lấy giá trị $g = 10 \text{ m/s}^2$ cho gia tốc trọng trường và làm tròn kết quả đến 2 chữ số thập phân.*

Lời giải.

- a) Với các giá trị đã biết là góc ném, vận tốc đầu và gia tốc trọng trường g là hằng số thì phương trình chuyển động trong ném xiên là một hàm số bậc hai theo x . Do vậy đồ thị hàm số là 1 parabol. Quỹ đạo chuyển động các vật cũng là một phần trên parabol này nên nó không thể chuyển động theo đường xiên.
 - b) Với góc ném có số đo là 45° , vận tốc ban đầu của vật là 3 m/s và vật được ném xiên từ độ cao 1 m so với mặt đất, ta có phương trình chuyển động của vật này là
- $$y = \frac{-gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} + \tan \alpha \cdot x + y_0 = \frac{-10x^2}{2 \cdot 3^2 \cdot \cos^2 45^\circ} + \tan 45^\circ \cdot x + 1 = -\frac{10}{9}x^2 + x + 1.$$
- c) Theo giả thiết bài toán, ta có phương trình chuyển động của lao sau khi ném là
- $$y = \frac{-gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} + \tan \alpha \cdot x + y_0 = \frac{-10x^2}{2v_0^2 \cdot \cos^2 45^\circ} + \tan 45^\circ \cdot x + 0,9 = -\frac{10}{v_0^2}x^2 + x + 0,9.$$



Mặt khác, lao được ném đi đạt độ xa 90 m tức là $OA = 90$. Nói cách khác điểm $A(90; 0)$ thuộc đồ thị hàm số.

Xét hàm số $f(90) = 0$ hay $-\frac{10}{v_0^2} \cdot 90^2 + 90 + 0,9 = 0$.

Giải theo v_0 , ta được $v_0^2 = \frac{90000}{101}$. Suy ra $v_0 \approx 29,85 \text{ m/s}$.

Bài 4. PHƯƠNG TRÌNH QUY VỀ PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Phương trình dạng $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{dx^2 + ex + f}$

Để giải phương trình $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{dx^2 + ex + f}$, bình phương hai vế sau đó thu gọn ta được phương trình

$$(a-d)x^2 + (b-e)x + (c-f) = 0. \quad (1)$$

Giải phương trình (1) được các nghiệm, sau đó thay vào phương trình ban đầu để thử lại xem nghiệm nào thỏa mãn và kết luận.

Chú ý rằng nếu x_0 là một nghiệm của phương trình (1) thì khi thử lại ta chỉ cần kiểm tra xem, nếu $ax_0^2 + bx_0 + c \geq 0$ thì x_0 sẽ là nghiệm của phương trình đã cho.

2. Phương trình dạng $\sqrt{ax^2 + bx + c} = dx + e$

Để giải phương trình $\sqrt{ax^2 + bx + c} = dx + e$, bình phương hai vế sau đó thu gọn ta được phương trình

$$(a-d^2)x^2 + (b-2de)x + (c-e^2) = 0. \quad (2)$$

Giải phương trình (2) được các nghiệm, sau đó thay vào phương trình ban đầu để thử lại xem nghiệm nào thỏa mãn và kết luận.

Chú ý rằng nếu x_0 là một nghiệm của phương trình (2) thì khi thử lại ta chỉ cần kiểm tra xem, nếu $dx_0 + e \geq 0$ thì x_0 sẽ là nghiệm của phương trình đã cho.

B. CÁC DẠNG TOÁN

1

Phương trình $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$

- Bình phương 2 vế và giải.
- Kiểm tra nghiệm và kết luận.

1. Ví dụ minh họa

VÍ DỤ 1. Giải phương trình $\sqrt{x^2 - 2x - 4} = \sqrt{2 - x}$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 - 2x - 4} &= \sqrt{2 - x} \\ \Rightarrow x^2 - 2x - 4 &= 2 - x \\ \Rightarrow x^2 - x - 6 &= 0 \\ \Rightarrow &\begin{cases} x = -2 \\ x = 3. \end{cases} \end{aligned}$$

Chỉ có $x = -2$ thỏa mãn phương trình ban đầu.

Vậy phương trình có nghiệm $x = -2$.

VÍ DỤ 2. Giải phương trình $\sqrt{2x^2 - 5x + 2} - \sqrt{6 - 3x} = 0$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} \sqrt{2x^2 - 5x + 2} - \sqrt{6 - 3x} &= 0 \\ \Rightarrow \sqrt{2x^2 - 5x + 2} &= \sqrt{6 - 3x} \\ \Rightarrow 2x^2 - 5x + 2 &= 6 - 3x \\ \Rightarrow x^2 - x - 2 &= 0 \\ \Rightarrow &\begin{cases} x = -1 \\ x = 2. \end{cases} \end{aligned}$$

Các nghiệm thỏa mãn phương trình ban đầu.

Vậy nghiệm của phương trình là $x = -1$ và $x = 2$.

VÍ DỤ 3. Giải phương trình $\sqrt{x^2 + 3x} = 2\sqrt{3x - 2}$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 + 3x} &= 2\sqrt{3x - 2} \\ \Rightarrow x^2 + 3x &= 4(3x - 2) \\ \Rightarrow x^2 - 9x + 8 &= 0 \\ \Rightarrow &\begin{cases} x = 1 \\ x = 8. \end{cases} \end{aligned}$$

Các nghiệm thỏa mãn phương trình ban đầu.

Vậy nghiệm của phương trình là $x = 1$ và $x = 8$.

VÍ DỤ 4. Tìm điều kiện của tham số m để phương trình sau có nghiệm:

$$\sqrt{x^2 + x + 1} = \sqrt{2x^2 + mx + m + 1}. \quad (1)$$

 **Lời giải.**

Bình phương hai vế của phương trình (1) và thu gọn ta được

$$x^2 + (m-1)x + m = 0. \quad (2)$$

Nhận thấy rằng tam thức bậc hai $x^2 + x + 1$ có $a = 1 > 0$ và $\Delta = -3 < 0$.

Suy ra $x^2 + x + 1 > 0$ với mọi x . Như vậy nếu phương trình (2) có nghiệm x_0 thì khi thử lại ta thấy $x_0^2 + x_0 + 1 > 0$, tức là x_0 thỏa mãn phương trình (1).

Vậy phương trình (1) có nghiệm khi và chỉ khi phương trình (2) có nghiệm.

Điều này tương đương với $\Delta = (m-1)^2 - 4m \geq 0$ hay $m^2 - 6m + 1 \geq 0$.

Từ đó ta được $m \leq 3 - 2\sqrt{2}$ hoặc $m \geq 3 + 2\sqrt{2}$.

2. Bài tập tự luận

BÀI 1. Giải phương trình $\sqrt{3x^2 - 4x - 4} = \sqrt{2x + 5}$.

 **Lời giải.**

$$\begin{aligned} \sqrt{3x^2 - 4x - 4} = \sqrt{2x + 5} &\Rightarrow 3x^2 - 4x - 4 = 2x + 5 \\ &\Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3. \end{cases} \end{aligned}$$

Các nghiệm thỏa mãn phương trình ban đầu.

Vậy phương trình có nghiệm $x = -1$; $x = 3$.

BÀI 2. Giải phương trình $\sqrt{2x - 1} - \frac{1}{2}\sqrt{x + 3} = 0$.

 **Lời giải.**

$$\begin{aligned} \sqrt{2x - 1} - \frac{1}{2}\sqrt{x + 3} = 0 &\Rightarrow \sqrt{2x - 1} = \frac{1}{2}\sqrt{x + 3} \\ &\Rightarrow 2x - 1 = \frac{1}{4}(x + 3) \\ &\Rightarrow 4(2x - 1) = x + 3 \\ &\Rightarrow 7x - 7 = 0 \\ &\Rightarrow x = 1. \end{aligned}$$

Nghiệm thỏa mãn phương trình ban đầu.

Vậy nghiệm của phương trình là $x = 1$.

BÀI 3. Giải phương trình $\sqrt{x^2 + 3x} = \sqrt{2(x + 1)}$.

 **Lời giải.**

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 + 3x} = \sqrt{2(x + 1)} &\Rightarrow x^2 + 3x = 2(x + 1) \\ &\Rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \\ &\Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -2. \end{cases} \end{aligned}$$

Chỉ có nghiệm $x = 1$ thỏa mãn phương trình ban đầu.

Vậy nghiệm của phương trình là $x = 1$.

BÀI 4. Giải phương trình $\sqrt{2x^2 - 3x + 4} = \frac{3}{2}\sqrt{x + 5}$.

 **Lời giải.**

$$\begin{aligned} \sqrt{2x^2 - 3x + 4} = \frac{3}{2}\sqrt{x + 5} &\Rightarrow 2x^2 - 3x + 4 = \frac{9}{4}(x + 5) \\ &\Rightarrow 4(2x^2 - 3x + 4) = 9(x + 5) \\ &\Rightarrow 8x^2 - 21x - 29 = 0 \\ &\Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = \frac{29}{8}. \end{cases} \end{aligned}$$

Các nghiệm thỏa mãn phương trình ban đầu.

Vậy nghiệm của phương trình là $x = -1$ và $x = \frac{29}{8}$.

BÀI 5. Giải phương trình sau: $\sqrt{2x^2 + x} - \sqrt{3} = 0$.

Lời giải.

$$\begin{aligned}\sqrt{2x^2 + x} - \sqrt{3} = 0 &\Rightarrow \sqrt{2x^2 + x} = \sqrt{3} \\ &\Rightarrow 2x^2 + x = 3 \\ &\Rightarrow 2x^2 + x - 3 = 0 \\ &\Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -\frac{3}{2}. \end{cases}\end{aligned}$$

Các nghiệm thỏa mãn phương trình ban đầu.

Vậy nghiệm của phương trình là $x = 1$ và $x = -\frac{3}{2}$.

BÀI 6. Giải phương trình sau: $2\sqrt{(x+1)^2 + 7} = \sqrt{7(x+5)}$.

Lời giải.

$$\begin{aligned}2\sqrt{(x+1)^2 + 7} = \sqrt{7(x+5)} &\Rightarrow 4[(x+1)^2 + 7] = 7(x+5) \\ &\Rightarrow 4(x^2 + 2x + 8) = 7x + 35 \\ &\Rightarrow 4x^2 + x - 3 = 0 \\ &\Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = \frac{3}{4}. \end{cases}\end{aligned}$$

Các nghiệm thỏa mãn phương trình ban đầu.

Vậy nghiệm của phương trình là $x = -1$ và $x = \frac{3}{4}$.

BÀI 7. Giải phương trình sau: $\sqrt{(x+1)(x-3)} - \sqrt{x} = 0$.

Lời giải.

$$\begin{aligned}\sqrt{(x+1)(x-3)} - \sqrt{x} = 0 &\Rightarrow \sqrt{(x+1)(x-3)} = \sqrt{x} \\ &\Rightarrow (x+1)(x-3) = x \\ &\Rightarrow x^2 - 3x - 3 = 0 \\ &\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3 + \sqrt{21}}{2} \\ x = \frac{3 - \sqrt{21}}{2}. \end{cases}\end{aligned}$$

Chỉ có nghiệm $x = \frac{3 + \sqrt{21}}{2}$ thỏa mãn phương trình ban đầu.

Vậy nghiệm của phương trình là $x = \frac{3 + \sqrt{21}}{2}$.

BÀI 8. Giải phương trình $\sqrt{x-3} = 3\sqrt{x^2 - 9}$.

Lời giải.

$$\begin{aligned}\sqrt{x-3} = 3\sqrt{x^2 - 9} &\Rightarrow x - 3 = 9(x^2 - 9) \\ &\Rightarrow 9x^2 - x - 78 = 0 \\ &\Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -\frac{26}{9}. \end{cases}\end{aligned}$$

Chỉ có nghiệm $x = 3$ thỏa mãn phương trình ban đầu.

Vậy phương trình có tập nghiệm $S = \{3\}$.

BÀI 9. Giải phương trình $\sqrt{x^2 - 1 + \sqrt{2x+3}} = \sqrt{x^2 + x - 1}$.

Lời giải.

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2 - 1 + \sqrt{2x+3}} = \sqrt{x^2 + x - 1} &\Rightarrow x^2 - 1 + \sqrt{2x+3} = x^2 + x - 1 \\ &\Rightarrow \sqrt{2x+3} = x \\ &\Rightarrow 2x+3 = x^2 \\ &\Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \\ &\Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -1. \end{cases}\end{aligned}$$

Chỉ có nghiệm $x = 3$ thỏa mãn phương trình ban đầu.

Vậy phương trình có tập nghiệm $S = \{3\}$.

BÀI 10. Tìm điều kiện của tham số m để phương trình sau có nghiệm:

$$\sqrt{2x^2 + x + 1} = \sqrt{x^2 + mx + m - 1}. \quad (1)$$

Lời giải.

Bình phương hai vế phương trình đã cho và thu gọn ta được

$$x^2 + (1-m)x + 2 - m = 0. \quad (2)$$

Do $2x^2 + x + 1 > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ (vì $a = 2 > 0$ và $\Delta = -7 < 0$) nên nếu x_0 là một nghiệm của phương trình (2) thì khi thử lại ta được $2x_0^2 + x_0 + 1 > 0$, tức là x_0 thoả mãn phương trình đã cho.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi phương trình (2) có nghiệm.

Điều này tương đương với

$$\begin{aligned} \Delta &= (1-m)^2 - 4(2-m) \geq 0 \\ \Leftrightarrow m^2 + 2m - 7 &\geq 0 \\ \Leftrightarrow m &\geq -1 + 2\sqrt{2} \text{ hoặc } m \leq -1 - 2\sqrt{2}. \end{aligned}$$

3. Câu hỏi trắc nghiệm

CÂU 1. Phương trình sau có bao nhiêu nghiệm $\sqrt{x} = \sqrt{-x}$

- (A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) Vô số.

Lời giải.

Điều kiện xác định: $\begin{cases} x \geq 0 \\ -x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x = 0.$

Ta thấy $x = 0$ thoả mãn phương trình. Nghiệm thoả mãn phương trình ban đầu.

Vậy phương trình đã cho có 1 nghiệm.

Chọn đáp án (B) □

CÂU 2. Điều kiện xác định của phương trình $\sqrt{x-1} = \sqrt{x+2}$ là

- (A) $x > 1$. (B) $x \geq -2$. (C) $x > -2$. (D) $x \geq 1$.

Lời giải.

Do $x+2 > x-1$ nên

Phương trình xác định khi và chỉ khi $x-1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1$.

Chọn đáp án (D) □

CÂU 3. Phương trình sau có bao nhiêu nghiệm: $\sqrt{x-2} = \sqrt{2-x}$

- (A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) Vô số.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} x-2 \geq 0 \\ 2-x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x \leq 2 \end{cases} \Rightarrow x = 2.$

Thay $x = 2$ vào phương trình ta được $0 = 0$ hay $x = 2$ là nghiệm của phương trình.

Chọn đáp án (B) □

CÂU 4. Nghiệm của phương trình $\sqrt{x-1} = (\sqrt{3-x})^2$ là

- (A) $x = 2; x = 5$. (B) $x = 2$. (C) $x = 1; x = 3$. (D) $x = -1; x = -3$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} \sqrt{x-1} &= (\sqrt{3-x})^2 \Rightarrow \sqrt{x-1} = 3-x \\ &\Rightarrow x-1 = (3-x)^2 \\ &\Rightarrow x^2 - 7x + 10 = 0 \\ &\Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 5 \end{cases}. \end{aligned}$$

Chỉ có nghiệm $x = 2$ thoả mãn phương trình ban đầu.

Vậy $S = \{2\}$.

Chọn đáp án (B) □

CÂU 5. Tổng các nghiệm của phương trình $\sqrt{3x^2 - 8x + 5} - \sqrt{11 - x} = 0$ là

- (A) $\frac{7}{3}$. (B) $\frac{11}{3}$. (C) $-\frac{11}{3}$. (D) $\frac{1}{3}$.

 **Lời giải.**

$$\begin{aligned} \text{Phương trình } &\Rightarrow \sqrt{3x^2 - 8x + 5} = \sqrt{11 - x} \\ &\Rightarrow 3x^2 - 8x + 5 = 11 - x \\ &\Rightarrow 3x^2 - 7x - 6 = 0 \\ &\Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -\frac{2}{3}. \end{cases} \end{aligned}$$

Các nghiệm thỏa mãn phương trình ban đầu.

Nên phương trình có tập nghiệm $S = \left\{3; -\frac{2}{3}\right\}$.

Vậy tổng các nghiệm là $\frac{7}{3}$.

Chọn đáp án (A) □

CÂU 6. Phương trình $\sqrt{2x^2 - 3x + 12} = 2\sqrt{-x^2 + x + 3}$ có các nghiệm

- (A) không âm. (B) không dương. (C) dương. (D) âm.

 **Lời giải.**

$$\begin{aligned} \sqrt{2x^2 - 3x + 12} = 2\sqrt{-x^2 + x + 3} &\Rightarrow 2x^2 - 3x + 12 = 4(-x^2 + x + 3) \\ &\Rightarrow 6x^2 - 7x = 0 \\ &\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{7}{6}. \end{cases} \end{aligned}$$

Các nghiệm thỏa mãn phương trình ban đầu.

Vậy phương trình có các nghiệm không âm và tập nghiệm $S = \left\{0; \frac{7}{6}\right\}$.

Chọn đáp án (A) □

CÂU 7. Số nghiệm của phương trình $\sqrt{x^2 - 3x - 2} = \sqrt{x - 3}$ là

- (A) 1. (B) 0. (C) 2. (D) 3.

 **Lời giải.**

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 - 3x - 2} = \sqrt{x - 3} &\Rightarrow x^2 - 3x - 2 = x - 3 \\ &\Rightarrow x^2 - 4x + 1 = 0 \\ &\Rightarrow \begin{cases} x = 2 + \sqrt{3} \\ x = 2 - \sqrt{3}. \end{cases} \end{aligned}$$

Chỉ có nghiệm $x = 2 + \sqrt{3}$ thỏa mãn phương trình ban đầu.

Vậy phương trình có 1 nghiệm và $S = \{2 + \sqrt{3}\}$

Chọn đáp án (A) □

CÂU 8. Số nghiệm của phương trình $\sqrt{x^2 - 3x + 18} = \sqrt{14x + 2}$ là

- (A) 2. (B) 0. (C) 1. (D) 3.

 **Lời giải.**

Điều kiện $\begin{cases} x^2 - 3x + 18 \geq 0 \\ 14x + 2 \geq 0. \end{cases}$

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 - 3x + 18} = \sqrt{14x + 2} &\Rightarrow x^2 - 3x + 18 = 14x + 2 \\ &\Rightarrow x^2 - 17x + 16 = 0 \\ &\Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 16. \end{cases} \end{aligned}$$

Các nghiệm thỏa mãn phương trình ban đầu.

Vậy phương trình có 2 nghiệm và tập nghiệm $S = \{1; 16\}$.

Chọn đáp án (A) □

CÂU 9. Số nghiệm của phương trình $\sqrt{x^2 - 5x + 2} = \sqrt{-x - 1}$ là

- (A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 4.

Lời giải.

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2 - 5x + 2} &= \sqrt{-x - 1} \Rightarrow x^2 - 5x + 2 = -x - 1 \\ &\Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \\ &\Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3. \end{cases}\end{aligned}$$

Các nghiệm không thỏa mãn phương trình ban đầu.

Vậy phương trình có tập nghiệm $S = \emptyset$.

Chọn đáp án (A) □

CÂU 10. Tổng bình phương các nghiệm của phương trình $3\sqrt{x-1} = \sqrt{x^2 + 8x - 11}$ là

- (A) 4. (B) 8. (C) 5. (D) 7.

Lời giải.

$$\begin{aligned}3\sqrt{x-1} &= \sqrt{x^2 + 8x - 11} \Rightarrow 9(x-1) = x^2 + 8x - 11 \\ &\Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \\ &\Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -1. \end{cases}\end{aligned}$$

Chỉ có nghiệm $x = 2$ thỏa mãn phương trình ban đầu.

Nên phương trình có tập nghiệm $S = \{2\}$.

Vậy tổng bình phương các nghiệm là 4.

Chọn đáp án (A) □

BẢNG ĐÁP ÁN

2

Phương trình $\sqrt{f(x)} = g(x)$

- ✓ Giải bất phương trình $g(x) \geq 0$ (*) để tìm tập nghiệm của bất phương trình này.
- ✓ Bình phương hai vế của phương trình ta được $f(x) = [g(x)]^2$ rồi tìm tập nghiệm của phương trình đó.
- ✓ Trong những nghiệm của phương trình trên, ta giữ lại những nghiệm thuộc tập nghiệm của bất phương trình (*). Tập nghiệm giữ lại đó chính là tập nghiệm cần tìm.

1. Ví dụ minh họa

VÍ DỤ 1. Giải phương trình $\sqrt{x^2 + 3x - 1} = 3$.

Lời giải.

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2 + 3x - 1} &= 3 \\ \Rightarrow x^2 + 3x - 1 &= 3^2 \\ \Rightarrow x^2 + 3x - 10 &= 0 \\ \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -5. \end{cases}\end{aligned}$$

Trong hai giá trị trên đều thỏa mãn.

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm $S = \{2; -5\}$.

VÍ DỤ 2. Giải phương trình $\sqrt{x^2 - 8x + 13} = 2x - 3$.

Lời giải.

Trước hết ta giải bất phương trình $2x - 3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{3}{2}$. (*)

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2 - 8x + 13} &= 2x - 3 \\ \Rightarrow x^2 - 8x + 13 &= (2x - 3)^2 \\ \Rightarrow x^2 - 8x + 13 &= 4x^2 - 12x + 9\end{aligned}$$

$$\Rightarrow 3x^2 - 4x - 4 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -\frac{2}{3}. \end{cases}$$

Trong hai giá trị trên, chỉ có $x = 2$ thỏa mãn (*).

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm $S = \{2\}$.

VÍ DỤ 3. Giải phương trình $\sqrt{-x^2 - 2x + 1} = -x - 3$.

Lời giải.

Trước hết ta giải bất phương trình $-x - 3 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -3$. (*)

$$\begin{aligned} & \sqrt{-x^2 - 2x + 1} = -x - 3 \\ \Rightarrow & -x^2 - 2x + 1 = (-x - 3)^2 \\ \Rightarrow & -x^2 - 2x + 1 = x^2 + 6x + 9 \\ \Rightarrow & 2x^2 + 8x + 8 = 0 \\ \Rightarrow & x = -2. \end{aligned}$$

Thấy $x = -2$ không thỏa mãn (*).

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

VÍ DỤ 4. Tìm điều kiện của tham số m để phương trình sau có đúng một nghiệm:

$$\sqrt{2x + m - 4} = x - 1. \quad (1)$$

Lời giải.

Trước hết ta giải bất phương trình $x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$. (*)

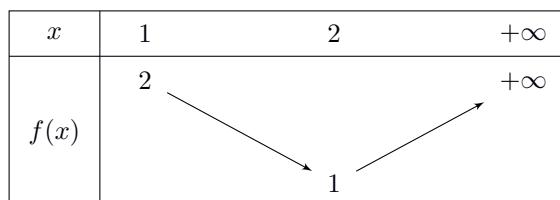
Bình phương hai vế của phương trình (1) ta được

$$2x + m - 4 = (x - 1)^2 \Leftrightarrow m = x^2 - 4x + 5. \quad (2)$$

Phương trình (1) có đúng một nghiệm khi và chỉ khi phương trình (2) có đúng một nghiệm thỏa mãn (*).

Xét hàm số $f(x) = x^2 - 4x + 5$ với $x \geq 1$.

Bảng biến thiên



Từ bảng biến thiên suy ra, phương trình (2) có đúng một nghiệm thỏa mãn (*) khi và chỉ khi

$$\begin{cases} m = 1 \\ m > 2. \end{cases}$$

Vậy với $\begin{cases} m = 1 \\ m > 2. \end{cases}$ thì phương trình (1) có đúng một nghiệm.

2. Bài tập tự luận

BÀI 1. Giải phương trình $\sqrt{2 - x^2} + x = 0$.

Lời giải.

Ta có $\sqrt{2 - x^2} + x = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2 - x^2} = -x$.

Trước hết ta giải bất phương trình $-x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 0$. (*)

$$\begin{aligned} & \sqrt{2 - x^2} = -x \\ \Rightarrow & 2 - x^2 = (-x)^2 \\ \Rightarrow & x^2 = 1 \\ \Rightarrow & \begin{cases} x = 1 \\ x = -1. \end{cases} \end{aligned}$$

Trong hai giá trị trên, chỉ có $x = -1$ thỏa mãn (*).

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm $S = \{-1\}$.

BÀI 2. Giải phương trình $\sqrt{3x-8} = x-2$.

 **Lời giải.**

Trước hết ta giải bất phương trình $x-2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$. (*)

$$\begin{aligned}\sqrt{3x-8} &= x-2 \\ \Rightarrow 3x-8 &= (x-2)^2 \\ \Rightarrow x^2-7x+12 &= 0 \\ \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=4 \end{cases} &\end{aligned}$$

Cả hai giá trị trên đều thỏa mãn (*).

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm $S = \{3; 4\}$.

BÀI 3. Giải phương trình $\sqrt{5x-x^2} + x = 3$.

 **Lời giải.**

Ta có $\sqrt{5x-x^2} + x = 3 \Leftrightarrow \sqrt{5x-x^2} = 3-x$.

Trước hết ta giải bất phương trình $3-x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 3$. (*)

$$\begin{aligned}\sqrt{5x-x^2} &= 3-x \\ \Rightarrow 5x-x^2 &= (3-x)^2 \\ \Rightarrow 2x^2-11x+9 &= 0 \\ \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=\frac{9}{2} \end{cases} &\end{aligned}$$

Trong hai giá trị trên, chỉ có $x=1$ thỏa mãn (*).

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm $S = \{1\}$.

BÀI 4. Giải phương trình $\sqrt{8x^2-10x+1} = 2x+1$.

 **Lời giải.**

Trước hết ta giải bất phương trình $2x+1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{2}$. (*)

$$\begin{aligned}\sqrt{8x^2-10x+1} &= 2x+1 \\ \Rightarrow 8x^2-10x+1 &= (2x+1)^2 \\ \Rightarrow 4x^2-14x &= 0 \\ \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=\frac{7}{2} \end{cases} &\end{aligned}$$

Cả hai giá trị trên đều thỏa mãn (*).

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm $S = \left\{0; \frac{7}{2}\right\}$.

BÀI 5. Giải phương trình $\sqrt{x^2-3x+2} = -1$.

 **Lời giải.**

Ta thấy vế phải của phương trình luôn âm. Khi $\sqrt{x^2-3x+2}$ có nghĩa thì vế trái phương trình luôn không âm.

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

BÀI 6. Giải phương trình $\sqrt{3x^2+63x+229} = 2x+15$.

 **Lời giải.**

Trước hết ta giải bất phương trình $2x+15 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{15}{2}$. (*)

$$\begin{aligned}\sqrt{3x^2+63x+229} &= 2x+15 \\ \Rightarrow 3x^2+63x+229 &= (2x+15)^2 \\ \Rightarrow x^2-3x-4 &= 0 \\ \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=4 \end{cases} &\end{aligned}$$

Cả hai giá trị trên đều thỏa mãn (*).

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm $S = \{-1; 4\}$.

BÀI 7. Giải phương trình $\sqrt{x^2 + 7x + 11} = 2$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} & \sqrt{x^2 + 7x + 11} = 2 \\ \Rightarrow & x^2 + 7x + 11 = 2^2 \\ \Rightarrow & x^2 + 7x + 7 = 0 \\ \Rightarrow & \begin{cases} x = \frac{-7 + \sqrt{21}}{2} \\ x = \frac{-7 - \sqrt{21}}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

Trong hai giá trị trên đều thỏa mãn.

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm $S = \left\{ \frac{-7 + \sqrt{21}}{2}; \frac{-7 - \sqrt{21}}{2} \right\}$.

BÀI 8. Giải phương trình $1 + \sqrt{11 - x} = x$.

Lời giải.

Ta có $1 + \sqrt{11 - x} = x \Leftrightarrow \sqrt{11 - x} = x - 1$.

Trước hết ta giải bất phương trình $x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$. (*)

$$\begin{aligned} & \sqrt{11 - x} = x - 1 \\ \Rightarrow & 11 - x = (x - 1)^2 \\ \Rightarrow & x^2 - x - 10 = 0 \\ \Rightarrow & \begin{cases} x = \frac{1 + \sqrt{41}}{2} \\ x = \frac{1 - \sqrt{41}}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

Trong hai giá trị trên, chỉ có $x = \frac{1 + \sqrt{41}}{2}$ thỏa mãn (*).

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm $S = \left\{ \frac{1 + \sqrt{41}}{2} \right\}$.

BÀI 9. Giải phương trình $\sqrt{2x^2 + x} = -x - 2$.

Lời giải.

Trước hết ta giải bất phương trình $-x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -2$. (*)

$$\begin{aligned} & \sqrt{2x^2 + x} = -x - 2 \\ \Rightarrow & 2x^2 + x = (-x - 2)^2 \\ \Rightarrow & x^2 - 3x - 4 = 0 \\ \Rightarrow & \begin{cases} x = -1 \\ x = 4 \end{cases} \end{aligned}$$

Cả hai giá trị trên đều không thỏa mãn (*).

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

BÀI 10. Tìm điều kiện của tham số m để phương trình sau có hai nghiệm phân biệt:

$$\sqrt{-x^2 + 6x + m} = x - 1. \quad (1)$$

Lời giải.

Trước hết ta giải bất phương trình $x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$. (*)

Bình phương hai vế của phương trình (1) ta được

$$-x^2 + 6x + m = (x - 1)^2 \Leftrightarrow m = 2x^2 - 8x + 1. \quad (2)$$

Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn (*).

Xét hàm số $f(x) = 2x^2 - 8x + 1$ với $x \geq 1$.

Bảng biến thiên

x	1	2	$+\infty$
$f(x)$	-5	-7	$+\infty$

Theo bảng biến thiên, ta có:

- Khi $x = 1$, $f(x) = -5$.
- Khi $x = 2$, $f(x) = -7$.
- Khi $x \rightarrow +\infty$, $f(x) \rightarrow +\infty$.

Từ bảng biến thiên suy ra, phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn (*) khi và chỉ khi $-7 < m < -5$.
Vậy với $-7 < m < -5$ thì phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt.

3. Câu hỏi trắc nghiệm

CÂU 1. Số nghiệm của phương trình $\sqrt{4x^2 - 5x + 1} = -3$ là

- (A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) vô số.

Lời giải.

Ta thấy vẽ phác của phương trình luôn âm. Khi $\sqrt{4x^2 - 5x + 1}$ có nghĩa thì vẽ trái phương trình luôn không âm.
Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

Chọn đáp án (A) □

CÂU 2. Tập nghiệm của phương trình $\sqrt{2x^2 - 3} = x - 1$ là

- (A) $\{-1 - \sqrt{5}; -1 + \sqrt{5}\}$. (B) $\{-1 - \sqrt{5}\}$. (C) $\{-1 + \sqrt{5}\}$. (D) \emptyset .

Lời giải.

Trước hết ta giải bất phương trình $x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$. (*)

$$\begin{aligned} \sqrt{2x^2 - 3} &= x - 1 \\ \Rightarrow 2x^2 - 3 &= (x - 1)^2 \\ \Rightarrow x^2 + 2x - 4 &= 0 \\ \Rightarrow \begin{cases} x = -1 - \sqrt{5} \\ x = -1 + \sqrt{5} \end{cases} \end{aligned}$$

Trong hai giá trị trên, chỉ có $x = -1 + \sqrt{5}$ thỏa mãn (*).

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm $S = \{-1 + \sqrt{5}\}$.

Chọn đáp án (C) □

CÂU 3. Tập nghiệm của phương trình $\sqrt{2x^2 + 9x + 10} = -x - 4$ là

- (A) $\{-3; 2\}$. (B) $\{2\}$. (C) $\{-3\}$. (D) \emptyset .

Lời giải.

Trước hết ta giải bất phương trình $-x - 4 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -4$. (*)

$$\begin{aligned} \sqrt{2x^2 + 9x + 10} &= -x - 4 \\ \Rightarrow 2x^2 + 9x + 10 &= (-x - 4)^2 \\ \Rightarrow x^2 + x - 6 &= 0 \\ \Rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

Trong hai giá trị trên đều không thỏa mãn (*).

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm $S = \emptyset$.

Chọn đáp án (D) □

CÂU 4. Tổng các nghiệm của phương trình $\sqrt{3x^2 + 23x + 29} = x + 4$ là

- (A) -1 . (B) $-\frac{15}{2}$. (C) $-\frac{13}{2}$. (D) 0 .

Lời giải.

Trước hết ta giải bất phương trình $x + 4 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -4$. (*)

$$\begin{aligned} \sqrt{3x^2 + 23x + 29} &= x + 4 \\ \Rightarrow 3x^2 + 23x + 29 &= (x + 4)^2 \\ \Rightarrow 2x^2 + 15x + 13 &= 0 \\ \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -\frac{13}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

Trong hai giá trị trên, chỉ có $x = -1$ thỏa mãn (*).

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm $S = \{-1\}$, nên tổng của chúng bằng -1 .

Chọn đáp án (A) □

CÂU 5. Tổng các nghiệm của phương trình $\sqrt{3x^2 + 45x + 67} = 2x + 9$ là

- (A) 2. (B) 7. (C) 9. (D) 0.

Lời giải.

Trước hết ta giải bất phương trình $2x + 9 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{9}{2}$. (*)

$$\begin{aligned}\sqrt{3x^2 + 45x + 67} &= 2x + 9 \\ \Rightarrow 3x^2 + 45x + 67 &= (2x + 9)^2 \\ \Rightarrow x^2 - 9x + 14 &= 0 \\ \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 7. \end{cases} \end{aligned}$$

Cả hai giá trị trên đều thỏa mãn (*).

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm $S = \{2; 7\}$, nên tổng của chúng bằng 14.

Chọn đáp án (C) □

CÂU 6. Tập nghiệm của phương trình $\sqrt{x^2 - 3x - 2} = x + 1$ là

- (A) $\{-1 - \sqrt{5}; -1 + \sqrt{5}\}$. (B) $\{-1 - \sqrt{5}\}$. (C) $\left\{-\frac{3}{5}\right\}$. (D) \emptyset .

Lời giải.

Trước hết ta giải bất phương trình $x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1$. (*)

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2 - 3x - 2} &= x + 1 \\ \Rightarrow x^2 - 3x - 2 &= (x + 1)^2 \\ \Rightarrow 5x &= -3 \\ \Rightarrow x &= -\frac{3}{5}. \end{aligned}$$

Giá trị $x = -\frac{3}{5}$ thỏa mãn (*).

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm $S = \left\{-\frac{3}{5}\right\}$.

Chọn đáp án (C) □

CÂU 7. Biết α là nghiệm của phương trình $\sqrt{2x^2 - 4x - 1} = 2 - x$. Chọn khẳng định đúng.

- (A) $2 < \alpha < 3$. (B) $-2 < \alpha < 2$. (C) $\alpha^2 > 5$. (D) $-3 < \alpha < -2$.

Lời giải.

Trước hết ta giải bất phương trình $2 - x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 2$. (*)

$$\begin{aligned}\sqrt{2x^2 - 4x - 1} &= 2 - x = 2 - x \\ \Rightarrow 2x^2 - 4x - 1 &= (2 - x)^2 \\ \Rightarrow x^2 &= 5 \\ \Rightarrow \begin{cases} x = -\sqrt{5} \\ x = \sqrt{5}. \end{cases} \end{aligned}$$

Trong hai giá trị trên, chỉ có $x = -\sqrt{5}$ thỏa mãn (*).

Vậy phương trình đã cho có một nghiệm $x = -\sqrt{5}$.

Chọn đáp án (D) □

CÂU 8. Số nghiệm của phương trình $\sqrt{2x^2 - 8x - 5} = 5 - 3x$ là

- (A) 2. (B) 0. (C) 1. (D) vô số.

Lời giải.

Trước hết ta giải bất phương trình $5 - 3x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{5}{3}$. (*)

$$\begin{aligned}\sqrt{2x^2 - 8x - 5} &= 5 - 3x \\ \Rightarrow 2x^2 - 8x - 5 &= (5 - 3x)^2 \\ \Rightarrow 7x^2 - 22x + 30 &= 0. \text{ phương trình này vô nghiệm.} \end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

Chọn đáp án (B) □

CÂU 9. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-10; 0]$ để phương trình sau có nghiệm?

$$\sqrt{x^2 - x + m} = x - 2. \quad (1)$$

(A) 10.

(B) 9.

(C) 11.

(D) 0.

Lời giải.

Trước hết ta giải bất phương trình $x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$. (*)

Bình phương hai vế của phương trình (1) ta được

$$x^2 - x + m = (x - 2)^2 \Leftrightarrow x = \frac{4 - m}{3}. \quad (2)$$

Phương trình (1) có nghiệm khi và chỉ khi phương trình (2) có nghiệm thỏa mãn

$$x \geq 2 \Leftrightarrow \frac{4 - m}{3} \geq 2 \Leftrightarrow m \leq -2.$$

Lại có m nguyên thuộc đoạn $[-10; 0]$ nên $m \in \{-10; -9; \dots; -2\}$.

Chọn đáp án (B) □

CÂU 10. Tất cả các giá trị của tham số m để phương trình

$$\sqrt{-x^2 - 4x + m} = x - 1. \quad (1)$$

có nghiệm là

(A) $m \geq \frac{1}{2}$.(B) $m > 5$.(C) $m \geq 5$.(D) $\frac{1}{2} \leq m \leq 5$. **Lời giải.**

Trước hết ta giải bất phương trình $x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$. (*)

Bình phương hai vế của phương trình (1) ta được

$$-x^2 - 4x + m = (x - 1)^2 \Leftrightarrow m = 2x^2 + 2x + 1. \quad (2)$$

Phương trình (1) có nghiệm khi và chỉ khi phương trình (2) có nghiệm thỏa mãn $x \geq 1$.

Xét hàm số $f(x) = 2x^2 + 2x + 1$ với $x \geq 1$.

Bảng biến thiên

x	1	$+\infty$
$f(x)$	5	$+\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra phương trình (2) có nghiệm thỏa mãn $x \geq 1$ khi và chỉ khi $m \geq 5$.

Chọn đáp án (C) □

BẢNG ĐÁP ÁN

3

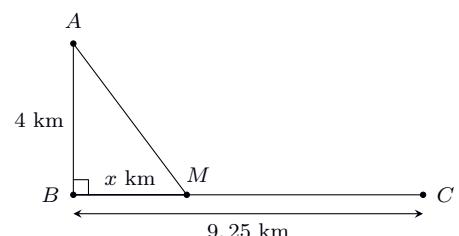
Toán thực tế

1. Ví dụ minh họa

VÍ DỤ 1. Bác Việt sống và làm việc tại trạm hải đăng cách bờ biển 4 km. Hàng tuần bác chèo thuyền vào vị trí gần nhất trên bờ biển là bến Bính để nhận hàng hoá do cơ quan cung cấp. Tuần này, do trực trặc về vận chuyển nên toàn bộ số hàng vẫn đang nằm ở thôn Hoành, bến bờ biển cách bến Bính 9,25 km và sẽ được anh Nam vận chuyển trên con đường dọc bờ biển tới bến Bính bằng xe kéo. Bác Việt đã gọi điện thoại nhất với anh Nam là họ sẽ gặp nhau ở vị trí nào đó giữa bến Bính và thôn Hoành để hai người có mặt tại đó cùng lúc, không mất thời gian chờ nhau. Tìm vị trí hai người dự định gặp nhau, biết rằng vận tốc kéo xe của anh Nam là 5 km/h và thuyền của bác Việt di chuyển với vận tốc 4 km/h. Ngoài ra giả thiết rằng đường bờ biển từ thôn Hoành đến bến Bính là đường thẳng và bác Việt cũng luôn chèo thuyền tới một điểm trên bờ biển theo một đường thẳng.

 Lời giải.

Ta mô hình hóa bài toán như trong hình vẽ. Trạm hải đăng ở vị trí A ; bến Bính ở B và thôn Hoành ở C . Giả sử bắc Việt chèo thuyền cập bến ở vị trí M và ta đặt $BM = x$ ($x > 0$). Để hai người không phải chờ nhau thì thời gian chèo thuyền bằng thời gian kéo xe nên ta có phương trình

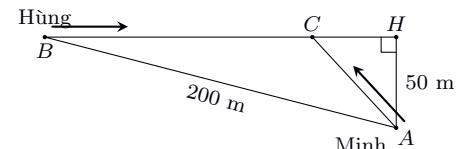


$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{x^2 + 16}}{4} &= \frac{9,25 - x}{5} \Rightarrow 25(x^2 + 16) = 16(9,25)^2 \\ \Rightarrow 9x^2 + 296x - 969 &= 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -\frac{323}{9} \end{cases}. \end{aligned}$$

Thử lại, kết hợp với điều kiện $x > 0$, ta được $BM = x = 3$ km. Vậy vị trí gặp nhau cách thôn Bính 3 km.

VÍ DỤ 2.

Hàng ngày, bạn Hùng đều đón bạn Minh đi học tại một vị trí trên lề đường thẳng đến trường. Minh đứng tại vị trí A cách lề đường một khoảng 50 m để chờ Hùng. Khi nhìn thấy Hùng đạp xe đến địa điểm B , cách mình một đoạn



200 m thì Minh bắt đầu đi bộ ra lề đường để bắt kịp xe. Vận tốc đi bộ của Minh là 5 km/h, vận tốc xe đạp của Hùng là 15 km/h. Hãy xác định vị trí C trên lề đường để hai bạn gặp nhau mà không bạn nào phải chờ người kia (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

 Lời giải.

Đặt $CH = x$ m, $x > 0$. Ta có $BH = 50\sqrt{15}$ m và $AC = \sqrt{x^2 + 2500}$ m. Tốc độ của Hùng và Minh lần lượt là 250 m/phút và $\frac{250}{3}$ m/phút. Khi đó thời gian để Hùng và Minh di chuyển từ vị trí của mình đến C lần lượt là $\frac{50\sqrt{15} - x}{250}$ phút và $\frac{3\sqrt{x^2 + 2500}}{250}$ phút. Để Hùng và Minh không phải chờ nhau thì

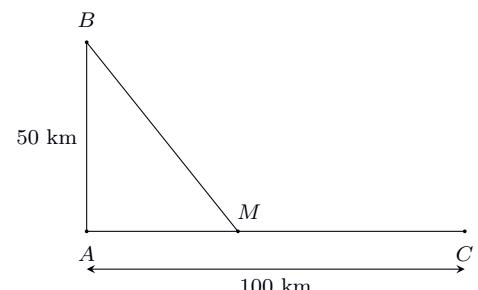
$$\begin{aligned} \frac{50\sqrt{15} - x}{250} &= \frac{3\sqrt{x^2 + 2500}}{250} \Rightarrow (x - 50\sqrt{15})^2 = 9(x^2 + 2500) \\ \Rightarrow 8x^2 + 100\sqrt{15}x - 15000 &= 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{25(3\sqrt{7} + \sqrt{15})}{4} \\ x = \frac{25(3\sqrt{7} - \sqrt{15})}{4} \end{cases}. \end{aligned}$$

Thử lại, kết hợp với $x > 0$, ta được $CH = \frac{25(3\sqrt{7} - \sqrt{15})}{4} \approx 25,4$ m.

2. Bài tập tự luận

BÀI 1.

Có một nhà máy nước nọ muốn tìm vị trí M để xây dựng trạm cấp nước sao cho khoảng cách từ nhà máy đến hai thị xã B , C là bằng nhau. Biết hai thị xã trên lần lượt cách thành phố A lần lượt 50 km và 100 km (như hình vẽ). Tính khoảng cách từ nhà máy nước đến thành phố A .



 Lời giải.

Đặt $AM = x$ km, $x > 0$. Khi đó, ta có

$$\sqrt{x^2 + 50^2} = BM = CM = 100 - x \Rightarrow x^2 + 2500 = (100 - x)^2 \Rightarrow x = 37,5.$$

Thử lại, ta được khoảng cách từ nhà máy nước đến thành phố A là $AM = 37,5$ km.

BÀI 2.

Một người đứng ở điểm A trên một bờ sông rộng 300 m, chèo thuyền đến vị trí D , sau đó chạy bộ đến vị trí B cách C một khoảng 800 m (hình vẽ). Vận tốc chèo thuyền là 6 km/h, vận tốc chạy bộ là 10 km/h và giả sử vận tốc dòng nước không đáng kể. Tính khoảng cách từ vị trí C đến vị trí D , biết tổng thời gian người đó chèo thuyền và chạy bộ từ A đến B là $7,2$ phút.

Lời giải.

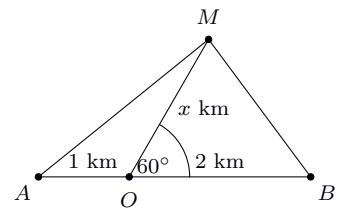
Đặt $CD = x$ m, $x > 0$. Ta có vận tốc của người đó khi trèo thuyền và chạy bộ lần lượt là 100 m/phút và $\frac{500}{3}$ m/phút. Khi đó thời gian người đó chèo thuyền và chạy bộ lần lượt là $\frac{\sqrt{x^2 + 300^2}}{100}$ phút và $\frac{3(800 - x)}{500}$ phút. Theo giả thiết, ta có phương trình

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{x^2 + 300^2}}{100} + \frac{3(800 - x)}{500} &= 7,2 \Rightarrow \sqrt{x^2 + 300^2} = 240 + \frac{3x}{5} \\ \Rightarrow x^2 + 300^2 &= \left(240 + \frac{3x}{5}\right)^2 \Rightarrow \frac{16x^2}{25} - 288x + 32400 = 0 \Rightarrow x = 225. \end{aligned}$$

Thử lại, ta được $CD = 225$ m.

BÀI 3.

Một con tàu biển M rời cảng O và chuyển động thẳng theo phương tạo với bờ biển một góc 60° . Trên bờ biển có hai đài quan sát A và B nằm về hai phía so với cảng O và lần lượt cách cảng O khoảng cách 1 km và 2 km.



- a) Đặt độ dài của MO là x km. Biểu diễn khoảng cách từ tàu đến A và từ tàu đến B theo x .
- b) Tìm x để khoảng cách từ tàu đến B bằng $\frac{4}{5}$ khoảng cách từ tàu đến A .
- c) Tìm x để khoảng cách từ tàu đến B nhỏ hơn khoảng cách từ tàu đến O đúng 500 m.

Lời giải.

- a) Áp dụng định lí cos-sin, ta có

$$\begin{aligned} MA &= \sqrt{OM^2 + OA^2 - 2OM \cdot OA \cdot \cos 120^\circ} = \sqrt{x^2 + x + 1}, \\ MB &= \sqrt{OM^2 + OB^2 - 2OM \cdot OB \cdot \cos 60^\circ} = \sqrt{x^2 - 2x + 4}. \end{aligned}$$

- b) Theo yêu cầu, ta cần có $MB = \frac{4}{5}MA$, suy ra

$$\begin{aligned} 5\sqrt{x^2 - 2x + 4} &= 4\sqrt{x^2 + x + 1} \Rightarrow 25(x^2 - 2x + 4) = 16(x^2 + x + 1) \\ \Rightarrow 9x^2 - 66x + 84 &= 0 \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{11 - \sqrt{37}}{3} \\ x = \frac{11 + \sqrt{37}}{3} \end{cases} \end{aligned}$$

Thử lại, cả hai giá trị trên đều thỏa mãn. Vậy hoặc $x \approx 1,64$ km hoặc $x \approx 5,69$ km.

- c) Theo yêu cầu, ta cần có $MB = MO - 0,5$, suy ra

$$\sqrt{x^2 - 2x + 4} = x - 0,5 \Rightarrow x^2 - 2x + 4 = (x - 0,5)^2 \Rightarrow x = 3,75.$$

Thử lại, ta thấy thỏa mãn. Vậy $x = 3,75$ km.

MỤC LỤC

Bài 2. Hàm Số Bậc Hai	1
(A) Kiến thức trọng tâm	1
(B) Các dạng toán	1
↳ Dạng 1. Tập xác định, bảng biến thiên, tính đơn điệu, GTLN, GTNN của hàm số bậc hai	1
↳ Dạng 2. Xác định hàm số bậc hai	2
↳ Dạng 3. Đồ thị của hàm số bậc hai	2
↳ Dạng 4. Bài toán tương giao	2
↳ Dạng 5. Bài toán thực tế liên quan đến hàm số bậc hai	3
(C) Bài tập tự luận	3
(D) Bài tập trắc nghiệm	4
Bài 3. Dấu của tam thức bậc hai	13
(A) Tóm tắt lý thuyết	13
(B) Các dạng toán	13
↳ Dạng 1. Nhận dạng và xét dấu của tam thức bậc hai	13
↳ Dạng 2. Giải bất phương trình bậc hai	16
↳ Dạng 3. Tìm giá trị của tham số để tam thức thoả đk cho trước	17
↳ Dạng 4. Ứng dụng thực tế	18
Bài 4. Phương trình quy về phương trình bậc hai	20
(A) Tóm tắt lý thuyết	20
(B) Các dạng toán	21
↳ Dạng 1. Phương trình $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$	21
Bảng đáp án	22
↳ Dạng 2. Phương trình $\sqrt{f(x)} = g(x)$	22
Bảng đáp án	23
↳ Dạng 3. Toán thực tế	23

LỜI GIẢI CHI TIẾT

Bài 2. Hàm Số Bậc Hai	25
(A) Kiến thức trọng tâm	25
(B) Các dạng toán	25
↳ Dạng 1. Tập xác định, bảng biến thiên, tính đơn điệu, GTLN, GTNN của hàm số bậc hai	25
↳ Dạng 2. Xác định hàm số bậc hai	26
↳ Dạng 3. Đồ thị của hàm số bậc hai	27
↳ Dạng 4. Bài toán tương giao	28
↳ Dạng 5. Bài toán thực tế liên quan đến hàm số bậc hai	28
(C) Bài tập tự luận	29
(D) Bài tập trắc nghiệm	34
Bài 3. Dấu của tam thức bậc hai	53
(A) Tóm tắt lý thuyết	53
(B) Các dạng toán	53
↳ Dạng 1. Nhận dạng và xét dấu của tam thức bậc hai	54
↳ Dạng 2. Giải bất phương trình bậc hai	61
↳ Dạng 3. Tìm giá trị của tham số để tam thức thoả đk cho trước	63
↳ Dạng 4. Ứng dụng thực tế	69

Bài 4. Phương trình quy về phương trình bậc hai

74

(A) Tóm tắt lý thuyết.....	74
(B) Các dạng toán.....	75
➲ Dạng 1. Phương trình $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$	75
Bảng đáp án.....	80
➲ Dạng 2. Phương trình $\sqrt{f(x)} = g(x)$	80
Bảng đáp án.....	86
➲ Dạng 3. Toán thực tế.....	86

