

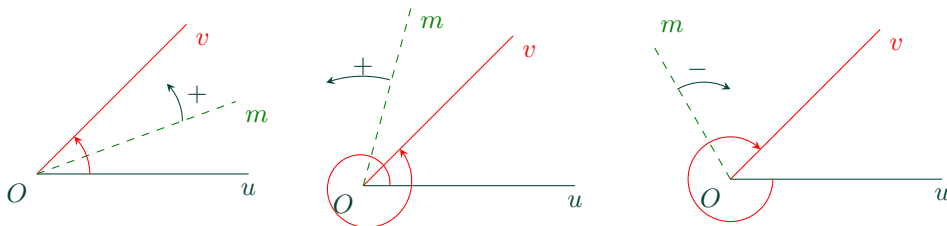
Bài 1. GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT GÓC LƯỢNG GIÁC

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Khái niệm góc lượng giác và số đo của góc lượng giác

Trong mặt phẳng, cho hai tia Ou, Ov . Xét tia Om cùng nằm trong mặt phẳng này. Nếu tia Om quay quanh điểm O , theo một chiều nhất định từ Ou đến Ov , thì ta nói nó quét một góc lượng giác với tia đầu Ou , tia cuối Ov và kí hiệu là (Ou, Ov) .

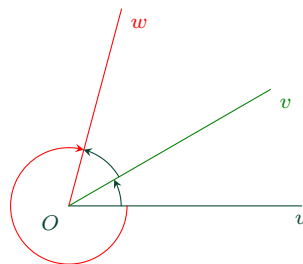
Mỗi góc lượng giác gốc O được xác định bởi tia đầu Ou , tia cuối Ov và số đo của nó.



2. Hệ thức Chasles

Hệ thức Chasles: Với ba tia Ou, Ov, Ow bất kì, ta có

$$\text{sđ}(Ou, Ov) + \text{sđ}(Ov, Ow) = \text{sđ}(Ou, Ow) + k360^\circ (k \in \mathbb{Z}).$$



Nhận xét. Từ hệ thức Chasles, ta suy ra: Với ba tia tùy ý Ox, Ou, Ov ta có

$$\text{sđ}(Ou, Ov) = \text{sđ}(Ox, Ov) - \text{sđ}(Ox, Ou) + k360^\circ (k \in \mathbb{Z}).$$

Hệ thức này đóng vai trò quan trọng trong việc tính toán số đo của góc lượng giác.

3. Đơn vị đo góc và cung tròn

Đơn vị độ: Để đo góc, ta dùng đơn vị độ. Ta đã biết: Góc 1° bằng $\frac{1}{180}$ góc bẹt.

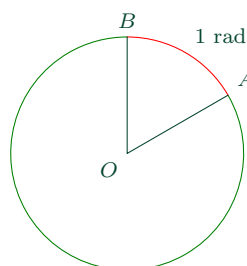
Đơn vị độ được chia thành những đơn vị nhỏ hơn: $1^\circ = 60'; 1' = 60''$.

Đối với các góc lượng giác, khi mà số vòng quay trong chuyển động tương ứng từ tia đầu đến tia cuối là khá lớn thì số đo của chúng tính bằng độ sẽ trở nên cồng kềnh. Do đó, trong khoa học và kĩ thuật, bên cạnh việc đo bằng độ, người ta còn sử dụng đơn vị đo góc bằng radian.

Đơn vị radian: Cho đường tròn (O) tâm O , bán kính R và một cung AB trên (O) . Ta nói cung tròn AB có số đo bằng 1 radian nếu độ dài của nó đúng bằng bán kính R .

Khi đó ta cũng nói rằng góc AOB có số đo bằng 1 radian và viết:

$$\widehat{AOB} = 1 \text{ rad}.$$

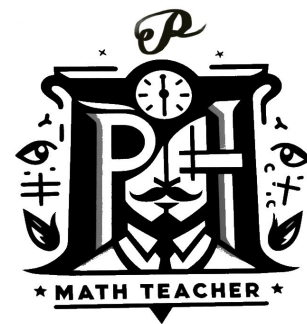


Quan hệ giữa độ và radian: Do đường tròn có độ dài là $2\pi R$ nên nó có số đo 2π rad. Mặt khác, đường tròn có số đo bằng 360° nên ta có $360^\circ = 2\pi$ rad.

Do đó ta viết:

$$1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad} \quad \text{và} \quad 1 \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ.$$

⚠ Khi viết số đo của một góc theo đơn vị radian, người ta thường không viết chữ rad sau số đo. Chẳng hạn góc $\frac{\pi}{2}$ được hiểu là góc $\frac{\pi}{2}$ rad.



ĐIỂM:

"It's not how much time you have, it's how you use it."

QUICK NOTE

QUICK NOTE

A Dưới đây là bảng tương ứng giữa số đo bằng độ và số đo bằng radian của các góc đặc biệt trong phạm vi từ 0° đến 180° .

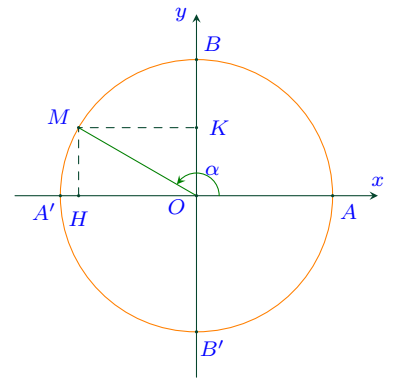
Độ	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
Radian	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π

4. Độ dài cung tròn

Một cung của đường tròn bán kính R và có số đo α rad thì có độ dài $l = R\alpha$.

5. Đường tròn lượng giác

- Đường tròn lượng giác là đường tròn có tâm tại gốc toạ độ, bán kính bằng 1, được định hướng và lấy điểm $A(1; 0)$ làm điểm gốc của đường tròn.
- Điểm trên đường tròn lượng giác biểu diễn góc lượng giác có số đo α (độ hoặc radian) là điểm M trên đường tròn lượng giác sao cho $sđ(OA, OM) = \alpha$.



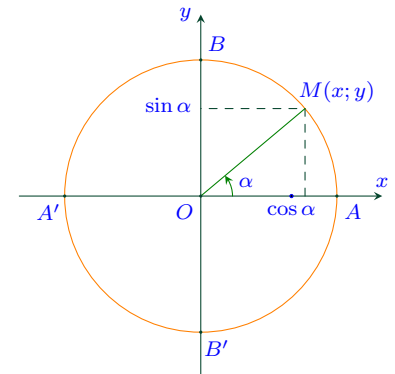
6. Các giá trị lượng giác của góc lượng giác

- Hoành độ x của điểm M được gọi là cosin của α , kí hiệu là $\cos \alpha$.

$$\cos \alpha = x.$$

- Tung độ y của điểm M được gọi là sin của α , kí hiệu là $\sin \alpha$.

$$\sin \alpha = y.$$



- Nếu $\cos \alpha \neq 0$, tỉ số $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ được gọi là tang của α , kí hiệu là $\tan \alpha$.

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{y}{x} \quad (x \neq 0).$$

- Nếu $\sin \alpha \neq 0$, tỉ số $\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$ được gọi là cotang của α , kí hiệu là $\cot \alpha$.

$$\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{x}{y} \quad (y \neq 0).$$

- A** a) Ta còn gọi trục tung là trục sin, trục hoành là trục cosin.
b) Từ định nghĩa ta suy ra:

- $\sin \alpha, \cos \alpha$ xác định với mọi giá trị của α và ta có:

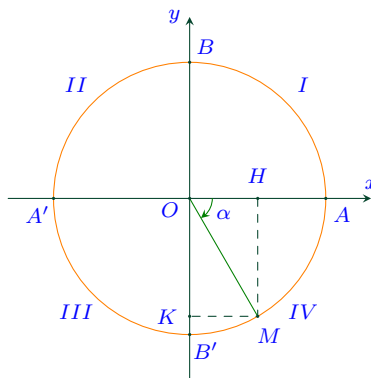
$$-1 \leq \sin \alpha \leq 1; \quad -1 \leq \cos \alpha \leq 1; \quad \sin(\alpha + k2\pi) = \sin \alpha; \quad \cos(\alpha + k2\pi) = \cos \alpha \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

- $\tan \alpha$ xác định khi $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$.

- $\cot \alpha$ xác định khi $\alpha \neq k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$.

- Dấu của các giá trị lượng giác của một góc lượng giác phụ thuộc vào vị trí điểm biểu diễn M trên đường tròn lượng giác.

Giá trị lượng giác	Góc phần tư			
	I	II	III	IV
$\sin \alpha$	+	+	-	-
$\cos \alpha$	+	-	-	+
$\tan \alpha$	+	-	+	-
$\cot \alpha$	+	-	+	-



7. Giá trị lượng giác của các góc đặc biệt

Góc α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan \alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	Không xác định
$\cot \alpha$	Không xác định	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

8. Các công thức lượng giác cơ bản

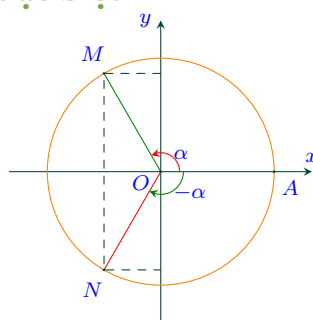
Đối với các giá trị lượng giác, ta có các hệ thức cơ bản sau

- $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$
- $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \left(\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right)$
- $1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \left(\alpha \neq k\pi, k \in \mathbb{Z} \right)$
- $\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1 \left(\alpha \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right)$

9. Giá trị lượng giác của các góc có liên quan đặc biệt

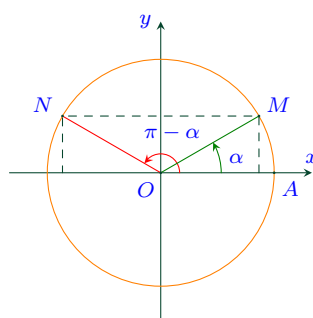
a) Góc đối nhau (α và $-\alpha$)

- $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$
- $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$
- $\tan(-\alpha) = -\tan \alpha$
- $\cot(-\alpha) = -\cot \alpha$



b) Góc bù nhau (α và $\pi - \alpha$)

- $\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$
- $\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$
- $\tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha$
- $\cot(\pi - \alpha) = -\cot \alpha$



c) Góc phụ nhau (α và $\frac{\pi}{2} - \alpha$)

QUICK NOTE

QUICK NOTE

$$\checkmark \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha$$

$$\checkmark \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha$$

$$\checkmark \tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot \alpha$$

$$\checkmark \cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \tan \alpha$$

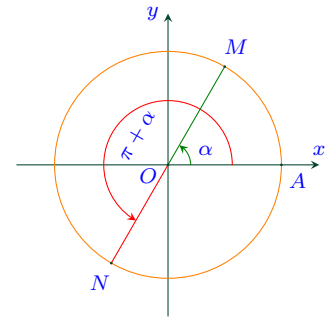
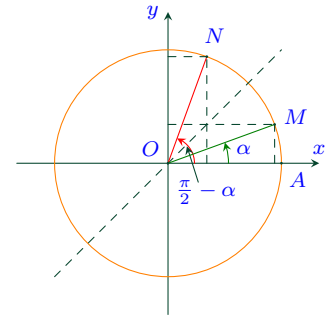
d) Góc hơn kém π (α và $\pi + \alpha$)

$$\checkmark \sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha$$

$$\checkmark \cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\checkmark \tan(\pi + \alpha) = \tan \alpha$$

$$\checkmark \cot(\pi + \alpha) = \cot \alpha$$



B. CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

Dạng 1. Chuyển đổi đơn vị độ - radian

Để chuyển đổi đơn vị độ - radian cần nhớ:

$$\checkmark 1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad} \Rightarrow a^\circ = \frac{a \cdot \pi}{180} \text{ rad}$$

$$\checkmark 1 \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ \Rightarrow n \text{ rad} = \left(\frac{n \cdot 180}{\pi}\right)^\circ$$

1. Ví dụ mẫu

VÍ DỤ 1. Đổi 50° sang radian.

VÍ DỤ 2. Đổi $\frac{3\pi}{4}$ rad sang độ.

VÍ DỤ 3.

a) Đổi từ độ sang radian các số đo sau: 45° ; 150° .

b) Đổi từ radian sang độ các số đo sau: $\frac{\pi}{3}$; $\frac{5\pi}{4}$.

VÍ DỤ 4. Đổi số đo của các góc sau ra radian: 72° ; 600° ; $-37^\circ 45' 30''$.

VÍ DỤ 5. Đổi số đo của các góc sau ra độ: $\frac{5\pi}{18}$; $\frac{3\pi}{5}$; -4 .

VÍ DỤ 6. Hoàn thành bảng chuyển đổi số đo độ và số đo radian của một số góc đặc biệt sau

Độ	30°	?	60°	?	120°	?	180°
Radian	?	$\frac{\pi}{4}$?	$\frac{\pi}{2}$?	$\frac{3\pi}{4}$?

2. Bài tập rèn luyện

BÀI TẬP TỰ LUẬN

BÀI 1. Đổi 60° sang radian.

BÀI 2. Đổi $\frac{2\pi}{3}$ rad sang độ.

BÀI 3. Hãy hoàn thành bảng chuyển đổi số đo độ và số đo radian của một số góc sau.

Độ	18°	?	72°	?
Radian	?	$\frac{2\pi}{9}$?	$\frac{5\pi}{6}$

BÀI 4. Đổi các số đo góc sau đây từ radian sang độ hoặc ngược lại

- a) -60° . b) $\frac{2\pi}{5}$ rad. c) 3 rad.

BÀI 5. Đổi số đo của các góc sau ra radian: 54° ; $30^\circ 45'$; -60° ; -210° .

BÀI 6. Đổi số đo của các góc sau ra độ: $\frac{\pi}{5}$; $-\frac{5\pi}{6}$; $\frac{4\pi}{3}$; $3, 56\pi$.

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

CÂU 1. Chọn khẳng định đúng.

- ☐ A $1 \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ$ ☐ B $1 \text{ rad} = 60^\circ$. ☐ C $1 \text{ rad} = 180^\circ$. ☐ D $1 \text{ rad} = 1^\circ$.

CÂU 2. Cung tròn có số đo là π . Hãy chọn số đo độ của cung tròn đó trong các cung tròn sau đây.

- ☐ A 30° . ☐ B 45° . ☐ C 90° . ☐ D 180° .

CÂU 3. Góc có số đo 135° đổi sang radian là

- ☐ A $\frac{4\pi}{3}$. ☐ B $\frac{3\pi}{4}$. ☐ C $\frac{5\pi}{6}$. ☐ D $\frac{3\pi}{5}$.

CÂU 4. Đổi sang radian góc có số đo 108° ta được

- ☐ A $\frac{\pi}{4}$. ☐ B $\frac{\pi}{10}$. ☐ C $\frac{3\pi}{2}$. ☐ D $\frac{3\pi}{5}$.

CÂU 5. Đổi sang radian góc có số đo 960° ta được

- ☐ A $\frac{8}{3}\pi$. ☐ B $\frac{16}{3}\pi$. ☐ C $\frac{16}{3}$. ☐ D $\frac{3}{16}\pi$.

CÂU 6. Đổi sang radian góc có số đo 250° ta được

- ☐ A $\frac{25\pi}{12}$. ☐ B $\frac{25\pi}{18}$. ☐ C $\frac{25\pi}{9}$. ☐ D $\frac{35\pi}{18}$.

CÂU 7. Đổi sang radian góc có số đo $\frac{5\pi}{4}$ ta được

- ☐ A 172° . ☐ B 15° . ☐ C 225° . ☐ D 5° .

CÂU 8. Góc có số đo $\frac{\pi}{12}$ đổi sang độ là

- ☐ A 15° . ☐ B 16° . ☐ C $17^\circ 30'$. ☐ D 14° .

CÂU 9. Đổi góc $\alpha = \frac{\pi}{9}$ ra đơn vị độ ta được

- ☐ A $\alpha = 20^\circ$. ☐ B $\alpha = 10^\circ$. ☐ C $\alpha = 15^\circ$. ☐ D $\alpha = 25^\circ$.

CÂU 10. Nếu một cung tròn có số đo bằng radian là $\frac{17\pi}{6}$ thì số đo bằng độ của cung tròn đó là

- ☐ A 30° . ☐ B 390° . ☐ C 510° . ☐ D 520° .

CÂU 11. Bánh xe của người đi xe đạp quay được 11 vòng trong 5 giây. Tìm góc theo radian mà bánh xe quay được trong 1 giây.

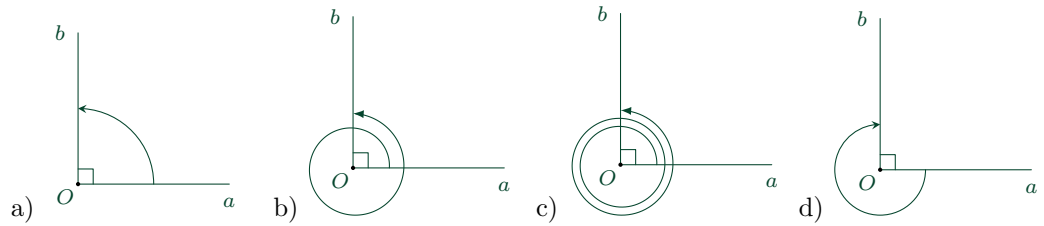
- ☐ A $\frac{22\pi}{5}$ rad. ☐ B $\frac{11\pi}{5}$ rad. ☐ C 22π rad. ☐ D 11π rad.

QUICK NOTE

QUICK NOTE

1. Ví dụ mẫu

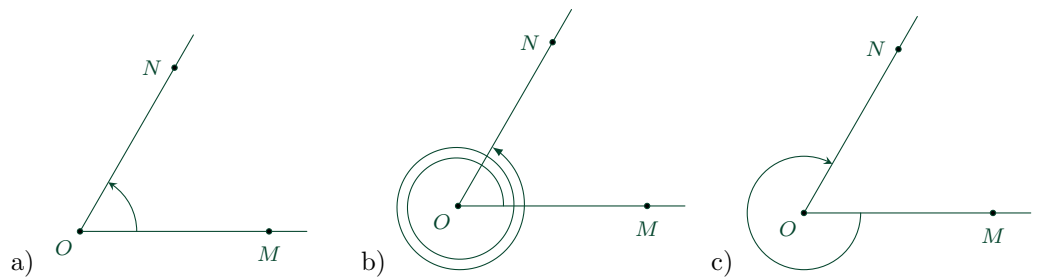
VÍ DỤ 1. Xác định số đo của các góc lượng giác (Oa, Ob) trong hình sau



2. Bài tập rèn luyện

BÀI TẬP TỰ LUẬN

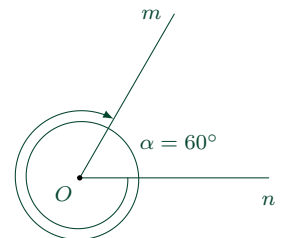
BÀI 1. Cho $\widehat{MON} = 60^\circ$. Xác định số đo của các góc lượng giác được biểu diễn trong hình vẽ và viết công thức tổng quát của số đo góc lượng giác (OM, ON) .



BÀI 2. Tìm góc lượng giác (Ou, Ov) có số đo dương nhỏ nhất và số đo âm lớn nhất, biết một góc lượng giác (Ou, Ov) có số đo bằng 1000° .

BÀI 3.

Góc lượng giác được biểu diễn ở hình bên có số đo bao nhiêu độ?



BÀI 4. Trong các khoảng thời gian từ 0 giờ đến 2 giờ 15 phút, kim phút quét một góc lượng giác là bao nhiêu độ?

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

CÂU 1. Góc lượng giác nào sau đây có cùng điểm cuối với góc $\frac{13\pi}{4}$?

- ☐ A $-\frac{3\pi}{4}$.
 ☐ B $\frac{3\pi}{4}$.
 ☐ C $-\frac{\pi}{4}$.
 ☐ D $\frac{3\pi}{2}$.

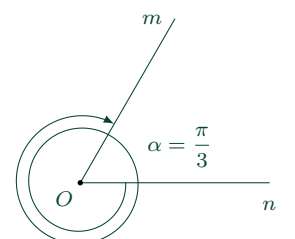
CÂU 2. Cặp góc lượng giác có cùng tia đầu và tia cuối là

- ☐ A 35° và -265° .
 ☐ B -130° và 590° .
 ☐ C $\frac{\pi}{3}$ và $\frac{5\pi}{3}$.
 ☐ D $-\frac{37\pi}{6}$ và $\frac{5\pi}{6}$.

CÂU 3.

Góc lượng giác nào sau đây **không** thuộc họ góc lượng giác cho trên hình vẽ bên?

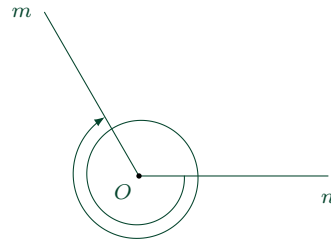
- ☐ A $\frac{\pi}{3}$.
 ☐ B $\frac{7\pi}{3}$.
 ☐ C $\frac{4\pi}{3}$.
 ☐ D $-\frac{5\pi}{3}$.



CÂU 4.

Cho góc $\widehat{mOn} = 120^\circ$. Góc nào sau đây có cùng điểm cuối với góc đã cho ở hình bên?

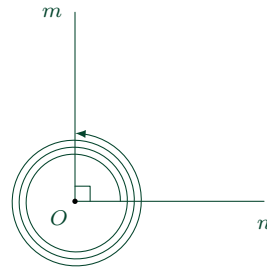
- (A) 240° . (B) -120° . (C) -60° . (D) -240° .



CÂU 5.

Góc lượng giác trên hình có số đo bao nhiêu?

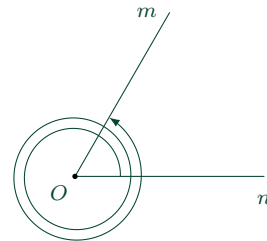
- (A) $\frac{\pi}{2}$. (B) $\frac{13\pi}{2}$. (C) $-\frac{13\pi}{2}$. (D) $\frac{5\pi}{2}$.



CÂU 6.

Biết góc $\widehat{mOn} = \frac{\pi}{3}$, hỏi góc lượng giác nào sau đây có cùng tia cuối với góc ở hình bên?

- (A) $\frac{7\pi}{3}$. (B) $\frac{13\pi}{3}$. (C) $-\frac{4\pi}{3}$. (D) $-\frac{\pi}{3}$.



CÂU 7. Góc lượng giác nào sau đây có cùng điểm cuối với góc $\frac{2023\pi}{4}$?

- (A) $-\frac{3\pi}{4}$. (B) $-\frac{\pi}{4}$. (C) $\frac{\pi}{4}$. (D) $\frac{3\pi}{4}$.

CÂU 8. Góc lượng giác nào sau đây có cùng điểm cuối với góc $-\frac{2\pi}{3}$?

- (A) $\frac{4\pi}{3}$. (B) $\frac{2\pi}{3}$. (C) $-\frac{5\pi}{3}$. (D) $\frac{7\pi}{3}$.

CÂU 9. Góc lượng giác nào sau đây có cùng điểm cuối với góc $-\frac{\pi}{6}$?

- (A) $\frac{11\pi}{6}$. (B) $\frac{17\pi}{6}$. (C) $-\frac{5\pi}{6}$. (D) $-\frac{7\pi}{6}$.

CÂU 10. Góc lượng giác nào sau đây có cùng điểm cuối với góc $\frac{3\pi}{4}$?

- (A) $-\frac{3\pi}{4}$. (B) $\frac{11\pi}{4}$. (C) $-\frac{\pi}{4}$. (D) $\frac{3\pi}{2}$.

Dạng 3. Độ dài của một cung tròn

1. Ví dụ mẫu

VÍ DỤ 1. Một đường tròn có bán kính 20 cm. Tìm độ dài các cung trên đường tròn đó có số đo sau:

- a) $\frac{\pi}{12}$; b) 1,5; c) 35° ; d) 315° .

VÍ DỤ 2. Một vệ tinh được định vị tại vị trí A trong không gian. Từ vị trí A, vệ tinh bắt đầu chuyển động quanh Trái Đất theo quỹ đạo là đường tròn với tâm là tâm O của Trái Đất, bán kính 9 000 km. Biết rằng vệ tinh chuyển động hết một vòng của quỹ đạo trong 2 giờ.

- a) Hãy tính quãng đường vệ tinh đã chuyển động được sau 1 giờ; 3 giờ; 5 giờ.
b) Vệ tinh chuyển động được quãng đường 200 000 km sau bao nhiêu giờ (làm tròn đến kết quả hàng đơn vị)?

QUICK NOTE

QUICK NOTE

2. Bài tập rèn luyện

BÀI TẬP TỰ LUẬN

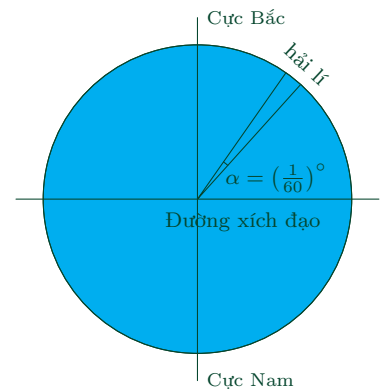
BÀI 1. Một đường tròn có bán kính $R = 75$ cm. Độ dài của cung trên đường tròn đó có số đo $\alpha = \frac{\pi}{25}$ là

BÀI 2. Trên đường tròn bán kính bằng 4, cung có số đo $\frac{\pi}{8}$ thì có độ dài là bao nhiêu?

BÀI 3. Trạm vũ trụ Quốc tế ISS (tên Tiếng Anh: International Space Station) nằm trong quỹ đạo tròn cách bề mặt Trái Đất khoảng 400 km. Nếu trạm mặt đất theo dõi được trạm vũ trụ ISS khi nó nằm trong góc 45° ở tâm của quỹ đạo tròn này phía trên ăng-ten theo dõi, thì trạm vũ trụ ISS đã di chuyển được bao nhiêu kilômét trong khi nó đang được trạm mặt đất theo dõi? Giả sử rằng bán kính của Trái Đất là 6400 km. Làm tròn kết quả đến hàng đơn vị.

BÀI 4.

Hải lí là một đơn vị chiều dài hàng hải, được tính bằng độ dài một cung chắn một góc $\alpha = \left(\frac{1}{60}\right)^\circ$ của đường kinh tuyến (Hình 17). Đổi số đo α sang radian và cho biết 1 hải lí bằng khoảng bao nhiêu kilômét, biết bán kính trung bình của Trái Đất là 6371 km. Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm.



Hình 17

BÀI 5. Bánh xe của người đi xe đạp quay được 11 vòng trong 5 giây. Tính độ dài quãng đường mà người đi xe đã đi được trong 1 phút, biết rằng đường kính của bánh xe đạp là 680 mm.

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

CÂU 1. Tính độ dài cung tròn có số đo góc ở tâm bằng $\frac{\pi}{6}$ của đường tròn lượng giác.

- ☐ A $\frac{\pi}{6}$. ☐ B $\frac{\pi}{12}$. ☐ C $\frac{\pi}{3}$. ☐ D $\frac{\pi}{24}$.

CÂU 2. Trên đường tròn lượng giác đường kính 36, cung có số đo $\frac{\pi}{6}$ thì có độ dài bằng bao nhiêu?

- ☐ A $l = \frac{\pi}{54}$. ☐ B $l = \frac{54}{\pi}$. ☐ C $l = 3\pi$. ☐ D $l = 6\pi$.

CÂU 3. Một đường tròn có bán kính $R = 3$ cm. Tính độ dài l của cung trên đường tròn đó có số đo bằng 60° .

- ☐ A $l = \frac{\pi}{2}$ cm. ☐ B $l = \pi$ cm. ☐ C $l = \frac{\pi}{4}$ cm. ☐ D $l = 2\pi$ cm.

CÂU 4. Một cung tròn có độ dài bằng bán kính. Khi đó số đo bằng radian của cung tròn đó là

- ☐ A 2. ☐ B 3. ☐ C π . ☐ D 1.

CÂU 5. Cung tròn bán kính $R = 4$ cm và có số đo $\frac{3\pi}{4}$ thì có độ dài là (kết quả làm tròn đến số thập phân thứ 2)

- ☐ A 0,59 cm. ☐ B 1,05 cm. ☐ C 17,76 cm. ☐ D 9,42 cm.

CÂU 6. Trên đường tròn bán kính bằng 4, cung có số đo $\frac{\pi}{8}$ thì có độ dài là

- ☐ A $\frac{\pi}{3}$. ☐ B $\frac{\pi}{2}$. ☐ C $\frac{\pi}{16}$. ☐ D $\frac{\pi}{4}$.

CÂU 7. Cho đường tròn (O) đường kính bằng 10 cm. Tính độ dài cung có số đo $\frac{7\pi}{12}$.

- ☐ A $\frac{17\pi}{3}$ cm. ☐ B $\frac{35\pi}{2}$ cm. ☐ C $\frac{35\pi}{6}$ cm. ☐ D $\frac{35\pi}{12}$ cm.

CÂU 8. Trên đường tròn có đường kính 20 cm. Độ dài của một cung tròn có số đo $\frac{\pi}{4}$ là

- (A) $\frac{5}{2}$ cm. (B) 5 cm. (C) $\frac{5\pi}{2}$ cm. (D) 5π cm.

CÂU 9. Một đường tròn có bán kính 4 cm. Độ dài cung tròn có số đo 45° là

- (A) $\frac{1}{20\pi}$ cm. (B) 9 cm. (C) 180 cm. (D) π cm.

CÂU 10. Một đường tròn có đường kính bằng 10 cm. Tính độ dài l của cung tròn có số đo $\frac{\pi}{5}$.

- (A) $l = 2\pi$ cm. (B) $l = \pi$ cm. (C) $l = 5\pi$ cm. (D) $l = 1$ cm.

Dạng 4. Biểu diễn góc trên đường tròn lượng giác

Để biểu diễn các góc lượng giác trên đường tròn lượng giác ta thường sử dụng các kết quả sau:

- ✓ Góc α (a°) và cung có số đo $\alpha + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ ($a^\circ + k360^\circ$) có cùng điểm biểu diễn trên đường tròn lượng giác.
- ✓ Số điểm trên đường tròn lượng giác biểu diễn góc lượng giác số đo có dạng $\alpha + \frac{k2\pi}{m}$ (hay $a^\circ + \frac{k360^\circ}{m}$) (với k là số nguyên và m là số nguyên dương) là m . Từ đó để biểu diễn các góc lượng giác đó ta lần lượt cho k từ 0 tới $m - 1$ rồi biểu diễn các góc đó.

1. Ví dụ mẫu

VÍ DỤ 1. Biểu diễn trên đường tròn lượng giác các góc lượng giác có số đo là

- a) 865° ; b) -1485° ; c) $\frac{13}{3}\pi$; d) $-\frac{7}{3}\pi$.

VÍ DỤ 2. Biểu diễn trên đường tròn lượng giác các góc lượng giác có số đo sau (với k là số nguyên tùy ý)

- a) $\alpha = k\pi$; b) $\alpha = \frac{\pi}{3} + k\pi$.

2. Bài tập vận dụng

BÀI 1. Biểu diễn trên đường tròn lượng giác các góc lượng giác có số đo sau:

- a) 750° ; b) -1125° .

BÀI 2. Biểu diễn trên đường tròn lượng giác các góc lượng giác có số đo sau:

- a) $\frac{9\pi}{2}$; b) $-\frac{37\pi}{6}$.

BÀI 3. Biểu diễn trên đường tròn lượng giác các góc lượng giác có số đo sau:

- a) $\frac{\pi}{6} + k\pi$; b) $-\frac{\pi}{4} + \frac{k2\pi}{3}$.

BÀI 4. Khi biểu diễn các góc lượng giác có số đo $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ và $y = \frac{\pi}{2} + k2\pi$ lên đường tròn lượng giác, số điểm chung nhận được là bao nhiêu?

BÀI 5. Xác định công thức hợp nhất của hai góc lượng giác $x_1 = k\pi$ và $x_2 = \frac{\pi}{2} + k\pi$.

3. Bài tập trắc nghiệm

CÂU 1. Góc lượng giác $\frac{31\pi}{7}$ có cùng điểm biểu diễn trên đường tròn lượng giác với góc lượng giác nào sau đây?

- (A) $\frac{3\pi}{7}$. (B) $\frac{10\pi}{7}$. (C) $-\frac{25\pi}{7}$. (D) $\frac{2\pi}{5}$.

CÂU 2. Các góc lượng giác nào sau đây có cùng điểm biểu diễn trên đường tròn lượng giác?

- (A) 45° ; 405° ; 750° . (B) 30° ; 405° ; 750° . (C) 60° ; 405° ; 750° . (D) 45° ; 405° ; 765° .

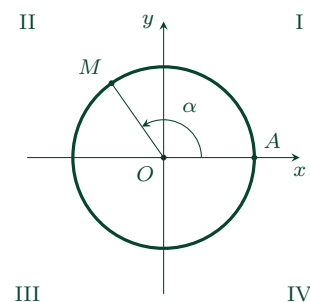
QUICK NOTE

QUICK NOTE

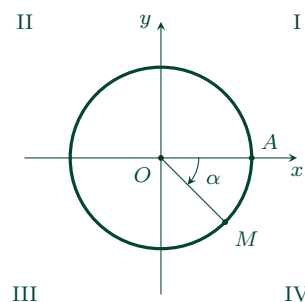
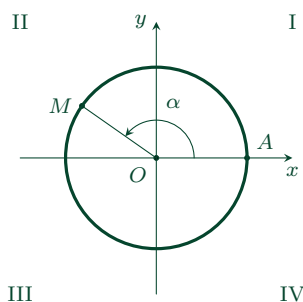
CÂU 3.

Hình vẽ bên dưới biểu diễn cho góc lượng giác nào sau đây?

- (A) 30° . (B) 90° . (C) 125° . (D) -60° .

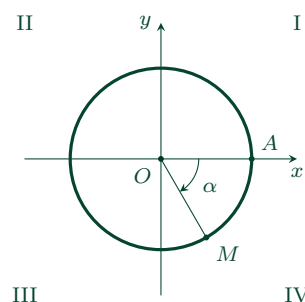
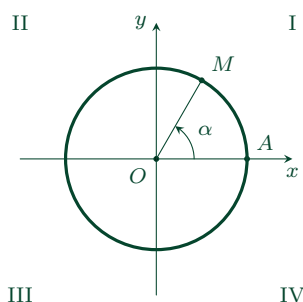


CÂU 4. Hình vẽ nào dưới đây biểu diễn góc lượng giác có số đo $\alpha = -765^\circ$?



(A)

(B)



(C)

(D)

CÂU 5. Có bao nhiêu điểm trên đường tròn lượng giác biểu diễn cho góc lượng giác $x = \frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2}$?

(A) 1.

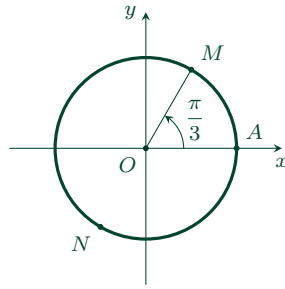
(B) 2.

(C) 3.

(D) 4.

CÂU 6. Hình vẽ bên dưới biểu diễn cho góc lượng giác nào sau đây?

QUICK NOTE



- ☐ A $\frac{\pi}{3}$.
 ☐ B $\frac{\pi}{3} + k2\pi$.
 ☐ C $\frac{\pi}{3} + k\pi$.
 ☐ D $\frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2}$.

CÂU 7. Trên đường tròn lượng giác với điểm gốc là A. Điểm M thuộc đường tròn sao cho $\widehat{AOM} = 75^\circ$. Gọi N là điểm đối xứng với điểm M qua gốc tọa độ O, số đo góc lượng giác \widehat{AON} bằng

- ☐ A 255° .
 ☐ B -105° .
☐ C -105° hoặc 255° .
 ☐ D $-105^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}$.

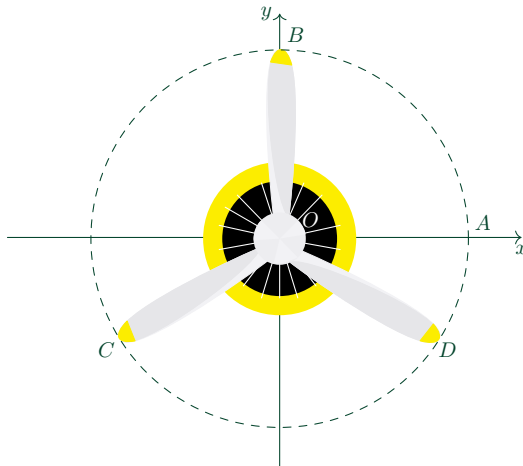
CÂU 8. Trên đường tròn lượng giác gốc A, cung lượng giác nào có các điểm biểu diễn tạo thành hình vuông?

- ☐ A $\frac{k\pi}{2}$.
 ☐ B $k\pi$.
 ☐ C $\frac{k2\pi}{3}$.
 ☐ D $\frac{k\pi}{3}$.

CÂU 9. Cho góc lượng giác có số đo $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ với k là số nguyên tùy ý. Có bao nhiêu giá trị k thỏa mãn $x \in [2\pi; 5\pi]$?

- ☐ A 1.
 ☐ B 2.
 ☐ C 3.
 ☐ D 4.

CÂU 10. Hình vẽ bên dưới biểu diễn cánh quạt của động cơ máy bay. Các vị trí B, C, D trên cánh quạt có thể biểu diễn cho góc lượng giác nào sau đây?



- ☐ A $\frac{\pi}{4} + 2\pi$.
 ☐ B $\frac{\pi}{2} + k\pi$.
 ☐ C $\frac{\pi}{2} + \frac{k2\pi}{3}$.
 ☐ D $-\frac{\pi}{4} + \frac{k2\pi}{3}$.

Dạng 5. Dấu của các giá trị lượng giác

VÍ DỤ 1. Xét dấu các giá trị lượng giác của góc lượng giác $\alpha = -\frac{3\pi}{4}$.

VÍ DỤ 2. Xác định dấu các biểu thức:

- a) $A = \sin 50^\circ \cdot \cos (-100^\circ)$;
 b) $B = \sin 195^\circ \cdot \tan \frac{20\pi}{7}$.

VÍ DỤ 3. Cho $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$. Xét dấu các biểu thức sau:

QUICK NOTE

a) $A = \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right);$

b) $B = \tan\left(\frac{2019\pi}{2} - \alpha\right).$

1. Bài tập vận dụng

BÀI 1. Xét dấu các giá trị lượng giác của góc lượng giác $\alpha = \frac{5\pi}{6}$.

BÀI 2. Xác định dấu của $\sin \alpha, \cos \alpha, \tan \alpha$, biết

a) $\frac{3\pi}{2} < \alpha < \frac{7\pi}{4};$

b) $3\pi < \alpha < \frac{10\pi}{3};$

c) $\frac{5\pi}{2} < \alpha < \frac{11\pi}{4}.$

BÀI 3. Cho $0^\circ < \alpha < 90^\circ$. Xét dấu các biểu thức sau:

a) $A = \cos(\alpha + 90^\circ);$

b) $B = \sin(\alpha + 80^\circ).$

BÀI 4. Cho $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$. Xét dấu các biểu thức sau

a) $A = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$

b) $B = \sin\left(\alpha + \frac{1119\pi}{2}\right).$

2. Bài tập trắc nghiệm

CÂU 1. Cho góc lượng giác $\alpha = \frac{\pi}{3}$. Khẳng định nào sau đây là sai?

☐ A $\sin \alpha > 0.$

☐ B $\cos \alpha > 0.$

☐ C $\tan \alpha < 0.$

☐ D $\cot \alpha > 0.$

CÂU 2. Cho góc lượng giác $\alpha = -\frac{\pi}{6}$. Khẳng định nào sau đây là sai?

☐ A $\sin \alpha < 0.$

☐ B $\cos \alpha < 0.$

☐ C $\tan \alpha < 0.$

☐ D $\cot \alpha < 0.$

CÂU 3. Cho $0^\circ < \alpha < 90^\circ$. Khẳng định nào sau đây đúng?

☐ A $\sin(90^\circ + \alpha) < 0.$

☐ B $\cos(90^\circ + \alpha) < 0.$

☐ C $\sin(150^\circ + \alpha) > 0.$

☐ D $\cos(180^\circ + \alpha) > 0.$

CÂU 4. Cho $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

☐ A $\sin\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right) > 0.$

☐ B $\cos\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) > 0.$

☐ C $\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) > 0.$

☐ D $\cos\left(\frac{2\pi}{3} + \alpha\right) > 0.$

CÂU 5. Cho $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

☐ A $\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) < 0.$

☐ B $\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{5}\right) > 0.$

☐ C $\sin\left(\frac{2\pi}{5} + \alpha\right) < 0.$

☐ D $\sin\left(\frac{2\pi}{3} + \alpha\right) > 0.$

Dạng 6. Tính giá trị lượng giác của một góc

☒ $\sin^2 a + \cos^2 a = 1.$

☒ $\tan a \cdot \cot a = 1.$

☒ $\tan^2 a + 1 = \frac{1}{\cos^2 a}.$

☒ $\cot^2 a + 1 = \frac{1}{\sin^2 a}.$

1. Ví dụ mẫu

VÍ DỤ 1. Cho góc lượng giác có số đo bằng $-\frac{\pi}{3}$.

a) Xác định điểm M trên đường tròn lượng giác biểu diễn góc lượng giác đã cho.

b) Tính các giá trị lượng giác của góc lượng giác đã cho.

VÍ DỤ 2. Tính các giá trị lượng giác của góc α , biết

a) $\cos \alpha = \frac{1}{5}$ và $0 < \alpha < \frac{\pi}{2};$

b) $\sin \alpha = \frac{2}{5}$ và $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi;$

c) $\tan \alpha = \sqrt{5}$ và $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2};$

d) $\cot \alpha = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ và $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi.$

2. Bài tập rèn luyện

BÀI TẬP TỰ LUẬN

BÀI 1. Biết $\sin \alpha = \frac{1}{3}$ ($90^\circ < \alpha < 180^\circ$). Hỏi giá trị của $\cos \alpha$ là bao nhiêu?

BÀI 2. Biết $\tan \alpha = 2$, tính $\cot \alpha$.

BÀI 3. Cho $\sin \alpha = -\frac{1}{3}$ với $\alpha \in \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$. Khi đó, giá trị của $\cos \alpha$ bằng

BÀI 4. Cho $\tan a = 2$, $\left(\pi < a < \frac{3\pi}{2}\right)$. Tính $A = \sin a + \cos a$.

BÀI 5. Cho $\cot \alpha = 2$. Tính giá trị của biểu thức $A = \frac{\cos^2 \alpha + \tan^2 \alpha - 1}{\sin^2 \alpha}$.

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

CÂU 1. Cho α là góc tù. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- ☐ A $\sin \alpha < 0$. ☐ B $\cos \alpha > 0$. ☐ C $\tan \alpha < 0$. ☐ D $\cot \alpha > 0$.

CÂU 2. Giá trị của $\sin(-240^\circ)$ là

- ☐ A $\frac{\sqrt{3}}{2}$. ☐ B $\frac{1}{2}$. ☐ C $-\frac{\sqrt{3}}{2}$. ☐ D $-\frac{1}{2}$.

CÂU 3. Với điều kiện của α đã được thỏa mãn. Chọn khẳng định **sai** trong các khẳng định sau?

- ☐ A $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$. ☐ B $\tan \alpha \cdot \cot \alpha = -1$.
☐ C $1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$. ☐ D $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$.

CÂU 4. Giá trị của $\tan 180^\circ$ là

- ☐ A 1. ☐ B 0. ☐ C -1. ☐ D Không xác định.

CÂU 5. Cho $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Chọn khẳng định đúng.

- ☐ A $\sin \alpha > 0$, $\cos \alpha > 0$. ☐ B $\sin \alpha < 0$, $\cos \alpha < 0$.
☐ C $\sin \alpha > 0$, $\cos \alpha < 0$. ☐ D $\sin \alpha < 0$, $\cos \alpha > 0$.

CÂU 6. Biểu thức $f(x) = \cos^4 x + \cos^2 x \sin^2 x + \sin^2 x$ có giá trị bằng

- ☐ A 1. ☐ B 2. ☐ C -2. ☐ D -1.

CÂU 7. Cho $\cot x = -5$. Giá trị của $P = \frac{\sin x - 2 \cos x}{3 \sin x + 4 \cos x}$ là

- ☐ A $-\frac{7}{11}$. ☐ B $\frac{7}{11}$. ☐ C $-\frac{11}{17}$. ☐ D $\frac{11}{17}$.

CÂU 8. Cho $\cos 2\alpha = \frac{3}{5}$ ($\frac{3\pi}{4} < \alpha < \pi$). Giá trị của $\sin \alpha$ bằng

- ☐ A $\frac{\sqrt{5}}{5}$. ☐ B $\frac{2\sqrt{5}}{5}$. ☐ C $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$. ☐ D $-\frac{\sqrt{5}}{5}$.

CÂU 9. Cho α là một góc lượng giác thỏa mãn $\tan \alpha = -2$, với $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Khi đó, giá trị $\cos \alpha$ bằng

- ☐ A $\cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$. ☐ B $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{5}$. ☐ C $\cos \alpha = \frac{-1}{5}$. ☐ D $\cos \alpha = \frac{1}{5}$.

CÂU 10. Giá trị của $\sin \alpha$ biết $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$ và $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ bằng

- ☐ A $\sin \alpha = -\frac{3}{5}$. ☐ B $\sin \alpha = \frac{1}{5}$. ☐ C $\sin \alpha = \frac{3}{5}$. ☐ D $\sin \alpha = -\frac{1}{5}$.

CÂU 11. Cho $\tan a = 2$. Khi đó, giá trị $A = \frac{1}{\cos^2 a} + \frac{\cos a + \sin a}{\cos a - \sin a} - 5$ bằng

- ☐ A $A = -5$. ☐ B $A = -4$. ☐ C $A = -3$. ☐ D $A = -2$.

CÂU 12. Cho $\cot a = 4 \tan a$ và $a \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$. Khi đó $\sin a$ bằng

- ☐ A $-\frac{\sqrt{5}}{5}$. ☐ B $\frac{1}{2}$. ☐ C $\frac{2\sqrt{5}}{5}$. ☐ D $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

QUICK NOTE

QUICK NOTE

- CÂU 13.** Cho $\tan \alpha = -2$. Giá trị của biểu thức $P = \frac{-\sin \alpha + 4 \cos \alpha}{\sin \alpha + 3 \cos \alpha}$ bằng
 (A) 6. (B) 2. (C) 3. (D) 12.
- CÂU 14.** Cho $\sin a + 2 \cos a = 0$ và $a \in \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$. Khi đó $\cos a$ bằng
 (A) $-\frac{\sqrt{5}}{5}$. (B) $\frac{1}{2}$. (C) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$. (D) $\frac{\sqrt{5}}{5}$.
- CÂU 15.** Cho $\tan x = 2$. Tính $A = \frac{\sin^2 x - 2 \sin x \cdot \cos x}{\cos^2 x + 3 \cdot \sin^2 x}$.
 (A) $A = 4$. (B) $A = 0$. (C) $A = 1$. (D) $A = 2$.

Dạng 7. Giá trị lượng giác của các góc có liên quan đặc biệt

1. Ví dụ mẫu

VÍ DỤ 1. Không dùng máy tính cầm tay, tính giá trị của biểu thức

$$A = \cos \frac{\pi}{9} - \sin \frac{13\pi}{36} + \cos \frac{5\pi}{36} + \cos \frac{8\pi}{9} - \cos \pi.$$

VÍ DỤ 2. Tính giá trị đúng của các biểu thức sau (không dùng máy tính cầm tay).

- a) $A = \sin \frac{\pi}{36} + \sin \frac{5\pi}{6} - \sin \frac{35\pi}{36} + \sin \pi$; b) $B = \cos \frac{\pi}{12} + \cos \frac{7\pi}{36} - \sin \frac{5\pi}{12} - \sin \frac{11\pi}{36}$;
 c) $C = \tan \frac{5\pi}{36} \cdot \tan \frac{\pi}{4} \cdot \tan \frac{23\pi}{36}$; d) $D = \cot \frac{\pi}{18} \cdot \cot \frac{\pi}{6} \cdot \cot \frac{5\pi}{9}$.

2. Bài tập rèn luyện

BÀI TẬP TỰ LUẬN

BÀI 1. Tính $\sin \alpha + \sin \left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) - \cos \alpha + \cos \left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$.

BÀI 2. Cho $\cos \alpha = \frac{-3}{7}$, $\left(\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi\right)$. Tính $\sin(-\alpha)$.

BÀI 3. Với mọi tam giác ABC , chứng minh $\cos \frac{A+B-C}{2} = \sin A$.

BÀI 4. Với mọi $\alpha \in \mathbb{R}$, tính giá trị của biểu thức $\cos \alpha + \cos \left(\alpha + \frac{\pi}{5}\right) + \dots + \cos \left(\alpha + \frac{9\pi}{5}\right)$.

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

CÂU 1. Trong các đẳng thức sau, đẳng thức nào đúng?

- (A) $\sin(180^\circ - a) = -\cos a$. (B) $\sin(180^\circ - a) = -\sin a$.
 (C) $\sin(180^\circ - a) = \sin a$. (D) $\sin(180^\circ - a) = \cos a$.

CÂU 2. Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau.

- (A) $\tan(\pi - a) = \tan a$. (B) $\cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = -\sin a$.
 (C) $\cot\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = -\tan a$. (D) $\sin(\pi + a) = \sin a$.

CÂU 3. Trong các đẳng thức sau, đẳng thức nào sai?

- (A) $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$. (B) $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$.
 (C) $\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cot x$. (D) $\tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cot x$.

CÂU 4. Giá trị của $\sin \frac{47\pi}{6}$ là

- (A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$. (B) $\frac{1}{2}$. (C) $-\frac{1}{2}$. (D) $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

CÂU 5. Tính $\cos 18^\circ - \cos 342^\circ$

- (A) 1. (B) 0. (C) $2 \cos 18^\circ$. (D) $-2 \cos 18^\circ$.

CÂU 6. Chỉ ra đẳng thức **sai** trong các đẳng thức sau

- (A) $\sin \frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. (B) $\cos \frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2}$.
(C) $\sin \frac{2\pi}{3} = \sin \frac{\pi}{3}$. (D) $\cos \frac{2\pi}{3} = \cos \frac{\pi}{3}$.

CÂU 7. $\tan \alpha - (-\tan \alpha)$ bằng

- (A) 0. (B) $2 \tan \alpha$. (C) $-2 \tan \alpha$. (D) $\tan 2\alpha$.

CÂU 8. Cho tam giác ABC vuông tại A . Khẳng định nào sau đây là **đúng**?

- (A) $\sin \widehat{B} = \sin \widehat{C}$. (B) $\tan \widehat{B} = \sin \widehat{C}$. (C) $\cot \widehat{B} = \tan \widehat{C}$. (D) $\sin \widehat{B} = -\cos \widehat{C}$.

CÂU 9. Cho tam giác ABC . Khẳng định nào sau đây là **sai**?

- (A) $\cos \frac{B+C}{2} = \sin \frac{A}{2}$. (B) $\tan \frac{B+C}{2} = \cos \frac{A}{2}$.
(C) $\cot \frac{B+C}{2} = \tan \frac{A}{2}$. (D) $\sin \frac{B+C}{2} = \cos \frac{A}{2}$.

CÂU 10. Cho tam giác ABC . Khẳng định nào sau đây là **sai**?

- (A) $\sin(A+B) = -\sin C$. (B) $\tan(A+B) = -\tan C$.
(C) $\cos(A+B) = -\cos C$. (D) $\cot(A+B) = -\cot C$.

CÂU 11. Cho $\cos x = \frac{1}{3}$. Tính $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 2 \cos(-x)$.

- (A) 1. (B) 3. (C) 0. (D) -1.

CÂU 12. Cho $\sin \alpha = \frac{4}{5}$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Tính $\cos(\pi + \alpha)$.

- (A) $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$. (B) $\cos \alpha = -\frac{3}{5}$. (C) $\cos \alpha = \frac{3}{4}$. (D) $\cos \alpha = \frac{3}{5}$.

CÂU 13. Cho $A = \frac{\sin 515^\circ \cos(-475^\circ) + \cot 222^\circ \cot 408^\circ}{\cot 415^\circ \cot(-505^\circ) + \tan 197^\circ \tan 73^\circ}$. Giá trị của A bằng

- (A) $\frac{1}{2} \cos^2 25^\circ$. (B) $-\frac{1}{2} \cos^2 25^\circ$. (C) $\frac{1}{2} \sin^2 25^\circ$. (D) $-\frac{1}{2} \sin^2 25^\circ$.

CÂU 14. Cho tam giác ABC không có góc 45° . Mệnh đề nào sau đây là **sai**?

- (A) $\sin A = \sin(B+C)$. (B) $\sin \frac{A+B}{2} = \cos \frac{C}{2}$.
(C) $\cos(3A+B+C) = \cos 2A$. (D) $\cos \frac{A}{2} = \sin \frac{B+C}{2}$.

CÂU 15. Giá trị biểu thức $\cos^2 1^\circ + \cos^2 2^\circ + \cos^2 3^\circ + \dots + \cos^2 87^\circ + \cos^2 88^\circ + \cos^2 89^\circ$ bằng

- (A) $\frac{89}{2}$. (B) 44. (C) 45. (D) $\frac{91}{2}$.

QUICK NOTE

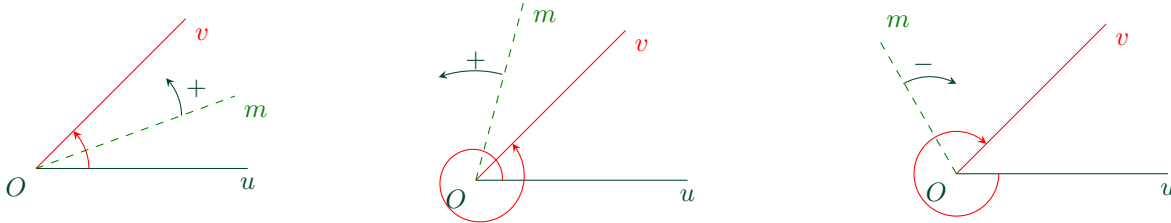
LỜI GIẢI CHI TIẾT

Bài 1. GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT GÓC LƯỢNG GIÁC

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Khái niệm góc lượng giác và số đo của góc lượng giác

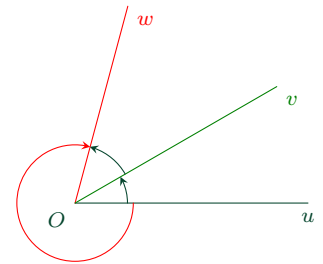
Trong mặt phẳng, cho hai tia Ou, Ov . Xét tia Om cùng nằm trong mặt phẳng này. Nếu tia Om quay quanh điểm O , theo một chiều nhất định từ Ou đến Ov , thì ta nói nó quét một góc lượng giác với tia đầu Ou , tia cuối Ov và kí hiệu là (Ou, Ov) . Mỗi góc lượng giác gốc O được xác định bởi tia đầu Ou , tia cuối Ov và số đo của nó.



2. Hệ thức Chasles

Hệ thức Chasles: Với ba tia Ou, Ov, Ow bất kì, ta có

$$\text{sđ}(Ou, Ov) + \text{sđ}(Ov, Ow) = \text{sđ}(Ou, Ow) + k360^\circ (k \in \mathbb{Z}).$$



Nhận xét. Từ hệ thức Chasles, ta suy ra: Với ba tia tùy ý Ox, Ou, Ov ta có

$$\text{sđ}(Ou, Ov) = \text{sđ}(Ox, Ov) - \text{sđ}(Ox, Ou) + k360^\circ (k \in \mathbb{Z}).$$

Hệ thức này đóng vai trò quan trọng trong việc tính toán số đo của góc lượng giác.

3. Đơn vị đo góc và cung tròn

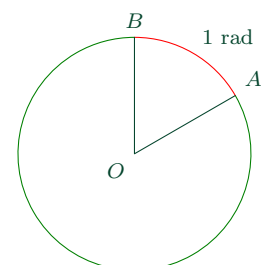
Đơn vị độ: Để đo góc, ta dùng đơn vị độ. Ta đã biết: Góc 1° bằng $\frac{1}{180}$ góc bẹt.

Đơn vị độ được chia thành những đơn vị nhỏ hơn: $1^\circ = 60'$; $1' = 60''$.

Đối với các góc lượng giác, khi mà số vòng quay trong chuyển động tương ứng từ tia đầu đến tia cuối là khá lớn thì số đo của chúng tính bằng độ sẽ trở nên cồng kềnh. Do đó, trong khoa học và kĩ thuật, bên cạnh việc đo bằng độ, người ta còn sử dụng đơn vị đo góc bằng radian.

Đơn vị radian: Cho đường tròn (O) tâm O , bán kính R và một cung AB trên (O) . Ta nói cung tròn AB có số đo bằng 1 radian nếu độ dài của nó đúng bằng bán kính R .

Khi đó ta cũng nói rằng góc AOB có số đo bằng 1 radian và viết: $\widehat{AOB} = 1 \text{ rad}$.



Quan hệ giữa độ và radian: Do đường tròn có độ dài là $2\pi R$ nên nó có số đo 2π rad. Mặt khác, đường tròn có số đo bằng 360° nên ta có $360^\circ = 2\pi \text{ rad}$.

Do đó ta viết:

$$1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad} \quad \text{và} \quad 1 \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ.$$

A Khi viết số đo của một góc theo đơn vị radian, người ta thường không viết chữ rad sau số đo. Chẳng hạn góc $\frac{\pi}{2}$ được hiểu là góc $\frac{\pi}{2} \text{ rad}$.

A Dưới đây là bảng tương ứng giữa số đo bằng độ và số đo bằng radian của các góc đặc biệt trong phạm vi từ 0° đến 180° .

Độ	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
Radian	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π

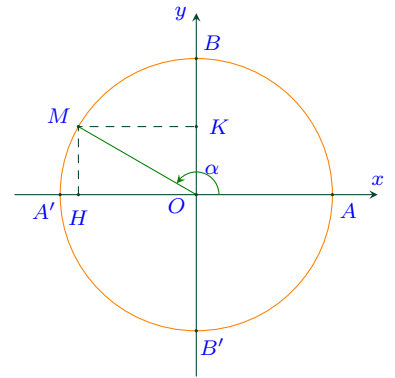
4. Độ dài cung tròn

Một cung của đường tròn bán kính R và có số đo α rad thì có độ dài $l = R\alpha$.

5. Đường tròn lượng giác

☑ Đường tròn lượng giác là đường tròn có tâm tại gốc toạ độ, bán kính bằng 1, được định hướng và lấy điểm $A(1;0)$ làm điểm gốc của đường tròn.

☑ Điểm trên đường tròn lượng giác biểu diễn góc lượng giác có số đo α (độ hoặc radian) là điểm M trên đường tròn lượng giác sao cho $sđ(OA, OM) = \alpha$.



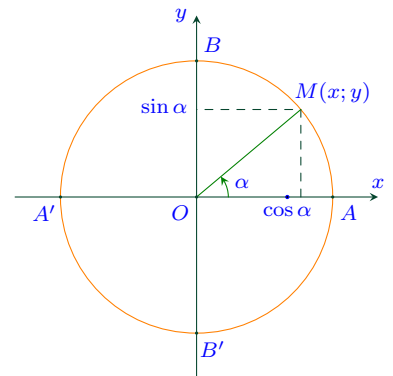
6. Các giá trị lượng giác của góc lượng giác

☑ Hoành độ x của điểm M được gọi là cosin của α , kí hiệu là $\cos \alpha$.

$$\cos \alpha = x.$$

☑ Tung độ y của điểm M được gọi là sin của α , kí hiệu là $\sin \alpha$.

$$\sin \alpha = y.$$



☑ Nếu $\cos \alpha \neq 0$, tỉ số $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ được gọi là tang của α , kí hiệu là $\tan \alpha$.

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{y}{x} \quad (x \neq 0).$$

☑ Nếu $\sin \alpha \neq 0$, tỉ số $\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$ được gọi là cotang của α , kí hiệu là $\cot \alpha$.

$$\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{x}{y} \quad (y \neq 0).$$

A a) Ta còn gọi trục tung là trục sin, trục hoành là trục cosin.
b) Từ định nghĩa ta suy ra:

☑ $\sin \alpha$, $\cos \alpha$ xác định với mọi giá trị của α và ta có:

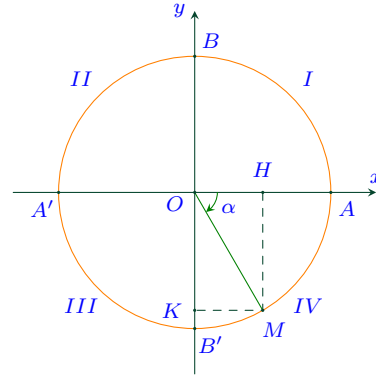
$$-1 \leq \sin \alpha \leq 1; \quad -1 \leq \cos \alpha \leq 1; \quad \sin(\alpha + k2\pi) = \sin \alpha; \quad \cos(\alpha + k2\pi) = \cos \alpha \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

☑ $\tan \alpha$ xác định khi $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$.

☑ $\cot \alpha$ xác định khi $\alpha \neq k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$.

☑ Dấu của các giá trị lượng giác của một góc lượng giác phụ thuộc vào vị trí điểm biểu diễn M trên đường tròn lượng giác.

Giá trị lượng giác	Góc phần tư			
	I	II	III	IV
$\sin \alpha$	+	+	-	-
$\cos \alpha$	+	-	-	+
$\tan \alpha$	+	-	+	-
$\cot \alpha$	+	-	+	-



7. Giá trị lượng giác của các góc đặc biệt

Góc α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan \alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	Không xác định
$\cot \alpha$	Không xác định	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

8. Các công thức lượng giác cơ bản

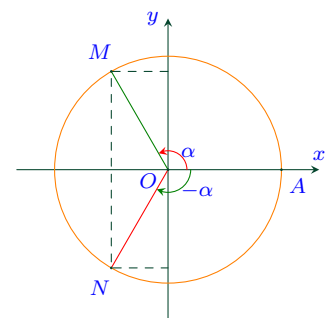
Đối với các giá trị lượng giác, ta có các hệ thức cơ bản sau

- $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$
- $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \left(\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right)$
- $1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \left(\alpha \neq k\pi, k \in \mathbb{Z} \right)$
- $\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1 \left(\alpha \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right)$

9. Giá trị lượng giác của các góc có liên quan đặc biệt

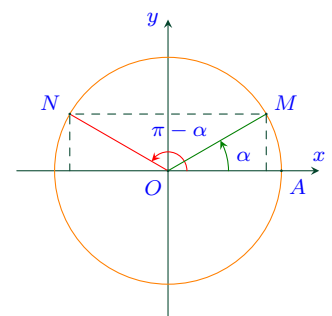
a) Góc đối nhau (α và $-\alpha$)

- ☑ $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$
- ☑ $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$
- ☑ $\tan(-\alpha) = -\tan \alpha$
- ☑ $\cot(-\alpha) = -\cot \alpha$



b) Góc bù nhau (α và $\pi - \alpha$)

- ☑ $\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$
- ☑ $\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$
- ☑ $\tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha$
- ☑ $\cot(\pi - \alpha) = -\cot \alpha$



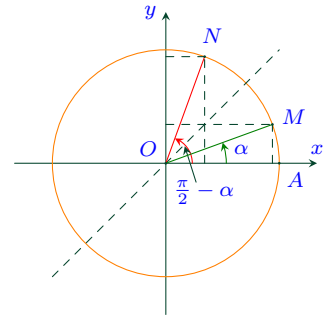
c) Góc phụ nhau (α và $\frac{\pi}{2} - \alpha$)

$$\checkmark \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha$$

$$\checkmark \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha$$

$$\checkmark \tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot \alpha$$

$$\checkmark \cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \tan \alpha$$



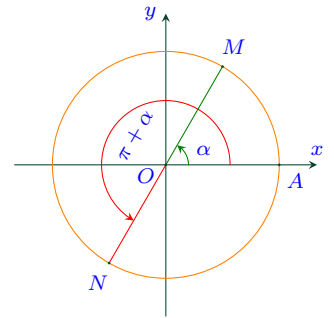
d) Góc hơn kém π (α và $\pi + \alpha$)

$$\checkmark \sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha$$

$$\checkmark \cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\checkmark \tan(\pi + \alpha) = \tan \alpha$$

$$\checkmark \cot(\pi + \alpha) = \cot \alpha$$



B. CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

Dạng 1. Chuyển đổi đơn vị độ - radian

Để chuyển đổi đơn vị độ - radian cần nhớ:

$$\checkmark 1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad} \Rightarrow a^\circ = \frac{a \cdot \pi}{180} \text{ rad}$$

$$\checkmark 1 \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ \Rightarrow n \text{ rad} = \left(\frac{n \cdot 180}{\pi}\right)^\circ$$

1. Ví dụ mẫu

VÍ DỤ 1. Đổi 50° sang radian.

💬 **Lời giải.**

Ta có $1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad}$.

Nên $50^\circ = 50 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{5\pi}{18} \text{ rad}$.

VÍ DỤ 2. Đổi $\frac{3\pi}{4} \text{ rad}$ sang độ.

💬 **Lời giải.**

Ta có $1 \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ$.

Nên $\frac{3\pi}{4} \text{ rad} = \left(\frac{3\pi}{4} \cdot \frac{180}{\pi}\right)^\circ = 135^\circ$.

VÍ DỤ 3.

a) Đổi từ độ sang radian các số đo sau: 45° ; 150° .

b) Đổi từ radian sang độ các số đo sau: $\frac{\pi}{3}$; $\frac{5\pi}{4}$.

💬 **Lời giải.**

a) Ta có:

$$45^\circ = 45 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{4},$$

$$150^\circ = 150 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{5\pi}{6}.$$

b) Ta có

$$\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} \cdot \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ = 60^\circ,$$

$$\frac{5\pi}{4} = \frac{5\pi}{4} \cdot \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ = 225^\circ.$$

VÍ DỤ 4. Đổi số đo của các góc sau ra radian: 72° ; 600° ; $-37^\circ 45' 30''$.

Lời giải.

Vì $1^\circ = \frac{\pi}{180}$ rad nên

$$72^\circ = 72 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{2\pi}{5};$$

$$600^\circ = 600 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{10\pi}{3};$$

$$-37^\circ 45' 30'' = -37^\circ - \left(\frac{45}{60}\right)^\circ - \left(\frac{30}{60 \cdot 60}\right)^\circ = \left(\frac{4531}{120}\right)^\circ = \frac{4531}{120} \cdot \frac{\pi}{180} \approx 0,6587.$$

VÍ DỤ 5. Đổi số đo của các góc sau ra độ: $\frac{5\pi}{18}$; $\frac{3\pi}{5}$; -4 .

Lời giải.

Vì $1 \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ$ nên

$$\frac{5\pi}{18} = \left(\frac{5\pi}{18} \cdot \frac{180}{\pi}\right)^\circ = 50^\circ;$$

$$\frac{3\pi}{5} = \left(\frac{3\pi}{5} \cdot \frac{180}{\pi}\right)^\circ = 108^\circ;$$

$$-4 = -\left(4 \cdot \frac{180}{\pi}\right)^\circ \approx -2260^\circ 48'.$$

VÍ DỤ 6. Hoàn thành bảng chuyển đổi số đo độ và số đo radian của một số góc đặc biệt sau

Độ	30°	?	60°	?	120°	?	180°
Radian	?	$\frac{\pi}{4}$?	$\frac{\pi}{2}$?	$\frac{3\pi}{4}$?

Lời giải.

Ta có bảng chuyển đổi số đo độ và số đo radian của một số góc đặc biệt.

Độ	30°	45°	60°	90°	120°	135°	180°
Radian	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	π

2. Bài tập rèn luyện

BÀI TẬP TỰ LUẬN

BÀI 1. Đổi 60° sang radian.

Lời giải.

Ta có $1^\circ = \frac{\pi}{180}$ rad.

$$\text{Nên } 60^\circ = 60 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{3} \text{ rad.}$$

BÀI 2. Đổi $\frac{2\pi}{3}$ rad sang độ.

Lời giải.

Ta có $1 \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ$.

$$\text{Nên } \frac{2\pi}{3} \text{ rad} = \left(\frac{2\pi}{3} \cdot \frac{180}{\pi}\right)^\circ = 120^\circ.$$

BÀI 3. Hãy hoàn thành bảng chuyển đổi số đo độ và số đo radian của một số góc sau.

Độ	18°	?	72°	?
Radian	?	$\frac{2\pi}{9}$?	$\frac{5\pi}{6}$

Ta có bảng chuyển đổi số đo độ và số đo radian của một số góc.

Độ	18°	40°	72°	150°
Radian	$\frac{\pi}{10}$	$\frac{2\pi}{9}$	$\frac{2\pi}{5}$	$\frac{5\pi}{6}$

a) -60° . b) $\frac{2\pi}{5}$ rad. c) 3 rad.

$$\begin{aligned} \text{a) } -60^\circ &= -\frac{60\pi}{180} \text{ rad} = -\frac{\pi}{3} \text{ rad.} \\ \text{b) } \frac{2\pi}{5} \text{ rad} &= \left(\frac{2\pi}{5} \cdot \frac{180}{\pi} \right)^\circ = 72^\circ. \\ \text{c) } 3 \text{ rad} &= \left(3 \cdot \frac{180}{\pi} \right)^\circ = \left(\frac{540}{\pi} \right)^\circ \approx 171,89^\circ. \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} 54^\circ &= 54 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{3\pi}{10}; \\ 30^\circ 45' &= 30^\circ + \left(\frac{45}{60}\right)^\circ = \left(\frac{123}{4}\right)^\circ = \frac{123}{4} \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{41\pi}{240} \approx 0,5367; \\ -60^\circ &= -60 \cdot \frac{\pi}{180} = -\frac{\pi}{3}; \\ -210^\circ &= -210 \cdot \frac{\pi}{180} = -\frac{7\pi}{6}. \end{aligned}$$
$$\begin{aligned}\frac{\pi}{5} &= \left(\frac{\pi}{5} \cdot \frac{180}{\pi}\right)^{\circ} = 36^{\circ}; \\ -\frac{5\pi}{6} &= -\left(\frac{5\pi}{6} \cdot \frac{180}{\pi}\right)^{\circ} = 150^{\circ}; \\ \frac{4\pi}{3} &= \left(\frac{4\pi}{3} \cdot \frac{180}{\pi}\right)^{\circ} = 240^{\circ}; \\ 3,56\pi &= \left(3,56\pi \cdot \frac{180}{\pi}\right)^{\circ} \approx 640^{\circ}48' .\end{aligned}$$

Ⓐ $1 \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ$. Ⓑ $1 \text{ rad} = 60^\circ$. Ⓒ $1 \text{ rad} = 180^\circ$. Ⓓ $1 \text{ rad} = 1^\circ$.

Chọn đáp án **A**

CÂU 2. Cung tròn có số đo là π . Hãy chọn số đo độ của cung tròn đó trong các cung tròn sau đây.

- (A) 30° . (B) 45° . (C) 90° . (D) 180° .

Lời giải.

$$\text{Ta có } \pi \text{ rad} = \left(\frac{180 \cdot \pi}{\pi} \right)^\circ = 180^\circ.$$

Chọn đáp án (D) ☐

CÂU 3. Góc có số đo 135° đổi sang radian là

- (A) $\frac{4\pi}{3}$. (B) $\frac{3\pi}{4}$. (C) $\frac{5\pi}{6}$. (D) $\frac{3\pi}{5}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } 1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad.}$$

$$\text{Vậy } 135^\circ = 135 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{3\pi}{4} \text{ rad.}$$

Chọn đáp án (B) ☐

CÂU 4. Đổi sang radian góc có số đo 108° ta được

- (A) $\frac{\pi}{4}$. (B) $\frac{\pi}{10}$. (C) $\frac{3\pi}{2}$. (D) $\frac{3\pi}{5}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } 108^\circ = 108 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{3\pi}{5}.$$

Chọn đáp án (D) ☐

CÂU 5. Đổi sang radian góc có số đo 960° ta được

- (A) $\frac{8}{3}\pi$. (B) $\frac{16}{3}\pi$. (C) $\frac{16}{3}$. (D) $\frac{3}{16}\pi$.

Lời giải.

$$\text{Số đo góc } 960^\circ \text{ theo đơn vị radian là } \frac{960}{180}\pi = \frac{16}{3}\pi.$$

Chọn đáp án (B) ☐

CÂU 6. Đổi sang radian góc có số đo 250° ta được

- (A) $\frac{25\pi}{12}$. (B) $\frac{25\pi}{18}$. (C) $\frac{25\pi}{9}$. (D) $\frac{35\pi}{18}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } 250^\circ = \frac{\pi}{180} \cdot 250 = \frac{25\pi}{18}.$$

Chọn đáp án (B) ☐

CÂU 7. Đổi sang radian góc có số đo $\frac{5\pi}{4}$ ta được

- (A) 172° . (B) 15° . (C) 225° . (D) 5° .

Lời giải.

$$\text{Ta có } \frac{5\pi}{4} = \left(\frac{180}{\pi} \cdot \frac{5\pi}{4} \right)^\circ = 225^\circ.$$

Chọn đáp án (C) ☐

CÂU 8. Góc có số đo $\frac{\pi}{12}$ đổi sang độ là

- (A) 15° . (B) 16° . (C) $17^\circ 30'$. (D) 14° .

Lời giải.

$$\text{Ta có } \frac{\pi}{12} \text{ rad} = \left(\frac{\pi}{12} \cdot \frac{180}{\pi} \right)^\circ = 15^\circ.$$

Chọn đáp án (A) ☐

CÂU 9. Đổi góc $\alpha = \frac{\pi}{9}$ ra đơn vị độ ta được

- (A) $\alpha = 20^\circ$. (B) $\alpha = 10^\circ$. (C) $\alpha = 15^\circ$. (D) $\alpha = 25^\circ$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \frac{\pi}{9} = \frac{180^\circ}{9} = 20^\circ.$$

Chọn đáp án (A) ☐

CÂU 10. Nếu một cung tròn có số đo bằng radian là $\frac{17\pi}{6}$ thì số đo bằng độ của cung tròn đó là

- (A) 30° . (B) 390° . (C) 510° . (D) 520° .

Lời giải.

Ta có $\frac{17\pi}{6}(\text{rad}) = \left(\frac{17\pi}{6} \cdot \frac{180}{\pi}\right)^\circ = 510^\circ$.

Chọn đáp án **C** □

CÂU 11. Bánh xe của người đi xe đạp quay được 11 vòng trong 5 giây. Tìm góc theo radian mà bánh xe quay được trong 1 giây.

A $\frac{22\pi}{5}$ rad.

B $\frac{11\pi}{5}$ rad.

C 22π rad.

D 11π rad.

Lời giải.

Trong 1 giây, bánh xe quay được $\frac{11}{5}$ vòng.

Một vòng ứng với số đo là 2π rad.

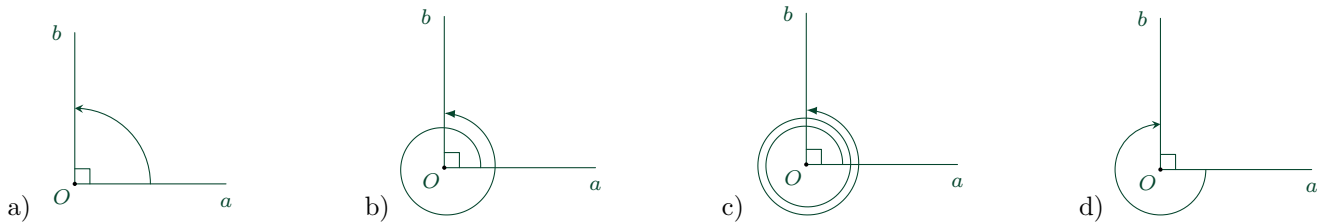
Vậy trong 1 giây bánh xe quay được một góc $\frac{11}{5} \cdot 2\pi = \frac{22\pi}{5}$.

Chọn đáp án **A** □

Dạng 2. Số đo của một góc lượng giác

1. Ví dụ mẫu

VÍ DỤ 1. Xác định số đo của các góc lượng giác (Oa, Ob) trong hình sau



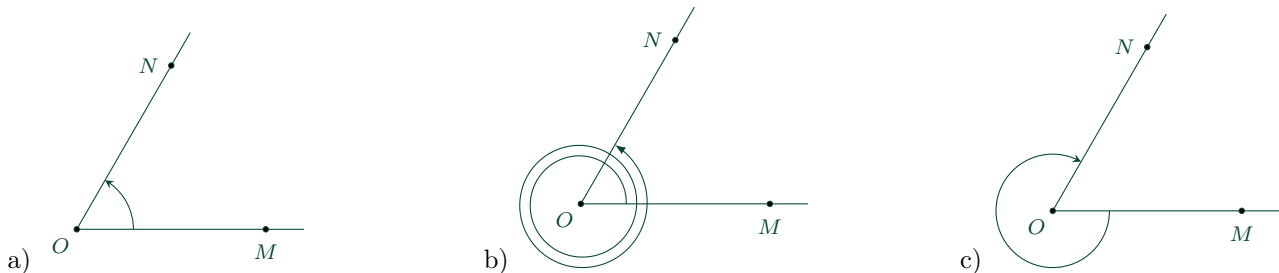
Lời giải.

- a) Số đo của góc lượng giác (Oa, Ob) trong hình vẽ là 90° .
- b) Số đo của góc lượng giác (Oa, Ob) trong hình vẽ là $90^\circ + 360^\circ = 450^\circ$.
- c) Số đo của góc lượng giác (Oa, Ob) trong hình vẽ là $90^\circ + 2 \cdot 360^\circ = 810^\circ$.
- d) Số đo của góc lượng giác (Oa, Ob) trong hình vẽ là $\frac{3}{4} \cdot (-360^\circ) = -270^\circ$.

2. Bài tập rèn luyện

BÀI TẬP TỰ LUẬN

BÀI 1. Cho $\widehat{MON} = 60^\circ$. Xác định số đo của các góc lượng giác được biểu diễn trong hình vẽ và viết công thức tổng quát của số đo góc lượng giác (OM, ON) .



Lời giải.

- a) Số đo của góc lượng giác (OM, ON) là 60° .
- b) Số đo của góc lượng giác (OM, ON) là $60^\circ + 2 \cdot 360^\circ = 780^\circ$.

c) Số đo của góc lượng giác (OM, ON) là -300° .

Công thức tổng quát: $\text{sd}(OM, ON) = 60^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}$.

BÀI 2. Tìm góc lượng giác (Ou, Ov) có số đo dương nhỏ nhất và số đo âm lớn nhất, biết một góc lượng giác (Ou, Ov) có số đo bằng 1000° .

Lời giải.

Ta có $(Ou, Ov) = 1000^\circ + k360^\circ$ với $k \in \mathbb{Z}$.

Gọi α là góc có số đo dương nhỏ nhất thỏa mãn yêu cầu bài toán.

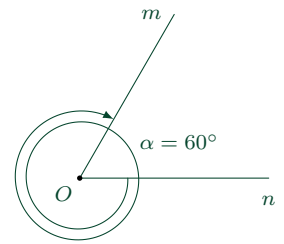
Ta có $\alpha > 0 \Leftrightarrow 1000^\circ + k360^\circ > 0 \Leftrightarrow k > -\frac{25}{9}$. Mà α dương nhỏ nhất nên $k = -2$, khi đó $\alpha = 280^\circ$.

Gọi β là góc có số đo âm lớn nhất thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Ta có $\beta < 0 \Leftrightarrow 1000^\circ + k360^\circ < 0 \Leftrightarrow k < -\frac{25}{9}$. Mà β âm lớn nhất nên $k = -3$, khi đó $\beta = -80^\circ$.

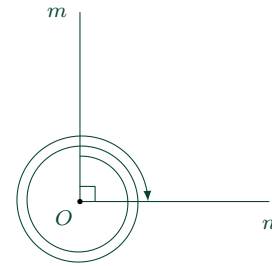
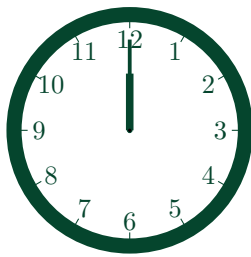
BÀI 3.

Góc lượng giác được biểu diễn ở hình bên có số đo bao nhiêu độ?



BÀI 4. Trong các khoảng thời gian từ 0 giờ đến 2 giờ 15 phút, kim phút quét một góc lượng giác là bao nhiêu độ?

Lời giải.



Gọi Om, On là các tia biểu diễn cho vị trí của kim phút lần lượt tại 0 giờ và 2 giờ 15 phút.

Khi đó kim phút đã quay hết 2 vòng và đi tiếp $\frac{1}{4}$ vòng của đồng hồ.

Mà kim phút chuyển động theo chiều âm nên ta có

$$(Om, On) = \frac{1}{4} \cdot (-360^\circ) + 2 \cdot (-360^\circ) = -810^\circ.$$

Vậy kim phút đã quét hết một góc lượng giác là -810° .

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

CÂU 1. Góc lượng giác nào sau đây có cùng điểm cuối với góc $\frac{13\pi}{4}$?

(A) $-\frac{3\pi}{4}$.

(B) $\frac{3\pi}{4}$.

(C) $-\frac{\pi}{4}$.

(D) $\frac{3\pi}{2}$.

Lời giải.

Ta có $\frac{13\pi}{4} = 4\pi - \frac{3\pi}{4}$, suy ra $\frac{13\pi}{4}$ và $-\frac{3\pi}{4}$ có cùng điểm cuối trên vòng tròn lượng giác.

Chọn đáp án **(A)** ☐

CÂU 2. Cặp góc lượng giác có cùng tia đầu và tia cuối là

(A) 35° và -265° .

(B) -130° và 590° .

(C) $\frac{\pi}{3}$ và $\frac{5\pi}{3}$.

(D) $-\frac{37\pi}{6}$ và $\frac{5\pi}{6}$.

Lời giải.

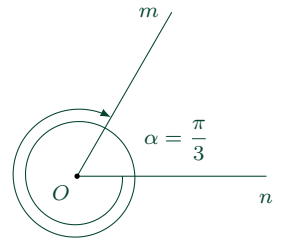
$-130^\circ = -360^\circ + 230^\circ$ và $590^\circ = 360^\circ + 230^\circ$ nên điểm cuối của hai góc lượng giác -130° và 590° cùng trùng với điểm cuối của góc lượng giác 230° .

Chọn đáp án **(B)** ☐

CÂU 3.

Góc lượng giác nào sau đây **không** thuộc họ góc lượng giác cho trên hình vẽ bên?

- (A) $\frac{\pi}{3}$. (B) $\frac{7\pi}{3}$. (C) $\frac{4\pi}{3}$. (D) $-\frac{5\pi}{3}$.



Lời giải.

Dựa vào hình vẽ, ta có góc lượng giác đã cho trong hình là $\alpha = \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

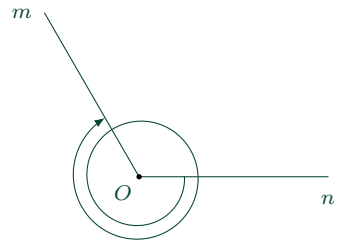
Vậy góc $\frac{4\pi}{3}$ không thuộc họ góc lượng giác đã cho.

Chọn đáp án (C) ☐

CÂU 4.

Cho góc $\widehat{mOn} = 120^\circ$. Góc nào sau đây có cùng điểm cuối với góc đã cho ở hình bên?

- (A) 240° . (B) -120° . (C) -60° . (D) -240° .



Lời giải.

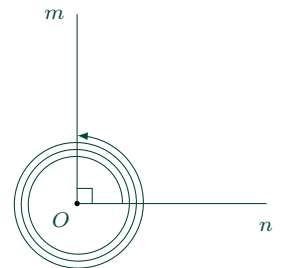
Ta có $(Om, On) = -240^\circ + k360^\circ$, vậy trong các góc trên chỉ có góc -240° thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án (D) ☐

CÂU 5.

Góc lượng giác trên hình có số đo bao nhiêu?

- (A) $\frac{\pi}{2}$. (B) $\frac{13\pi}{2}$. (C) $-\frac{13\pi}{2}$. (D) $\frac{5\pi}{2}$.



Lời giải.

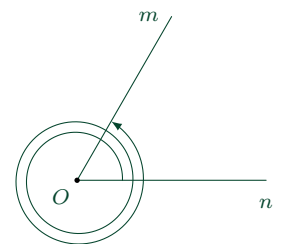
Dựa vào hình vẽ, ta thấy góc lượng giác đã cho có số đo $\frac{\pi}{2} + 3 \cdot 2\pi = \frac{13\pi}{2}$.

Chọn đáp án (B) ☐

CÂU 6.

Biết góc $\widehat{mOn} = \frac{\pi}{3}$, hỏi góc lượng giác nào sau đây có cùng tia cuối với góc ở hình bên?

- (A) $\frac{7\pi}{3}$. (B) $\frac{13\pi}{3}$. (C) $-\frac{4\pi}{3}$. (D) $-\frac{\pi}{3}$.



Lời giải.

Dựa vào hình vẽ, ta thấy góc đề bài cho bằng $\frac{\pi}{3} + 4\pi = \frac{13\pi}{3}$.

Chọn đáp án (B) ☐

CÂU 7. Góc lượng giác nào sau đây có cùng điểm cuối với góc $\frac{2023\pi}{4}$?

- (A) $-\frac{3\pi}{4}$. (B) $-\frac{\pi}{4}$. (C) $\frac{\pi}{4}$. (D) $\frac{3\pi}{4}$.

Lời giải.

Ta có $\frac{2023\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} + 253 \cdot 2\pi$, suy ra $\frac{2023\pi}{4}$ và $-\frac{\pi}{4}$ có cùng điểm cuối trên vòng tròn lượng giác.

Chọn đáp án (B) ☐

CÂU 8. Góc lượng giác nào sau đây có cùng điểm cuối với góc $-\frac{2\pi}{3}$?

(A) $\frac{4\pi}{3}$.

(B) $\frac{2\pi}{3}$.

(C) $-\frac{5\pi}{3}$.

(D) $\frac{7\pi}{3}$.

Lời giải.

Ta có $-\frac{2\pi}{3} = \frac{4\pi}{3} - 2\pi$, suy ra $\frac{2\pi}{3}$ và $-\frac{4\pi}{3}$ có cùng điểm cuối trên vòng tròn lượng giác.

Chọn đáp án (A) □

CÂU 9. Góc lượng giác nào sau đây có cùng điểm cuối với góc $-\frac{\pi}{6}$?

(A) $\frac{11\pi}{6}$.

(B) $\frac{17\pi}{6}$.

(C) $-\frac{5\pi}{6}$.

(D) $-\frac{7\pi}{6}$.

Lời giải.

Ta có $\frac{11\pi}{6} = -\frac{\pi}{6} + 2\pi$, suy ra $\frac{11\pi}{6}$ và $-\frac{\pi}{6}$ có cùng điểm cuối trên vòng tròn lượng giác.

Chọn đáp án (A) □

CÂU 10. Góc lượng giác nào sau đây có cùng điểm cuối với góc $\frac{3\pi}{4}$?

(A) $-\frac{3\pi}{4}$.

(B) $\frac{11\pi}{4}$.

(C) $-\frac{\pi}{4}$.

(D) $\frac{3\pi}{2}$.

Lời giải.

Ta có $\frac{11\pi}{4} = 2\pi + \frac{3\pi}{4}$, suy ra $\frac{11\pi}{4}$ và $\frac{3\pi}{4}$ có cùng điểm cuối trên vòng tròn lượng giác.

Chọn đáp án (B) □

Dạng 3. Độ dài của một cung tròn

1. Ví dụ mẫu

VÍ DỤ 1. Một đường tròn có bán kính 20 cm. Tìm độ dài các cung trên đường tròn đó có số đo sau:

a) $\frac{\pi}{12}$;

b) 1,5;

c) 35° ;

d) 315° .

Lời giải.

a) $l = R\alpha = 20 \cdot \frac{\pi}{12} = \frac{5\pi}{3}$ cm;

b) $l = R\alpha = 20 \cdot 1,5 = 30$ cm;

c) Đổi $35^\circ = 35 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{7\pi}{36}$ rad.

Độ dài cung tròn là $l = R\alpha = 20 \cdot \frac{7\pi}{36} = \frac{35\pi}{9}$ cm;

d) Đổi $315^\circ = 315 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{7\pi}{4}$ rad.

Độ dài cung tròn là $l = R\alpha = 20 \cdot \frac{7\pi}{4} = 35\pi$ cm.

VÍ DỤ 2. Một vệ tinh được định vị tại vị trí A trong không gian. Từ vị trí A, vệ tinh bắt đầu chuyển động quanh Trái Đất theo quỹ đạo là đường tròn với tâm là tâm O của Trái Đất, bán kính 9 000 km. Biết rằng vệ tinh chuyển động hết một vòng của quỹ đạo trong 2 giờ.

a) Hãy tính quãng đường vệ tinh đã chuyển động được sau 1 giờ; 3 giờ; 5 giờ.

b) Vệ tinh chuyển động được quãng đường 200 000 km sau bao nhiêu giờ (làm tròn đến kết quả hàng đơn vị)?

Lời giải.

a) Sau 1 giờ, vệ tinh chuyển động hết $\frac{1}{2}$ vòng của quỹ đạo.

Suy ra quãng đường vệ tinh đã chuyển động là

$$S = \frac{1}{2} \cdot 2\pi \cdot 9\,000 = 9\,000\pi \approx 28247,3 \text{ km.}$$

Sau 3 giờ, vệ tinh chuyển động hết $\frac{3}{2}$ vòng của quỹ đạo.

Suy ra quãng đường vệ tinh đã chuyển động là

$$S = \frac{3}{2} \cdot 2\pi \cdot 9\,000 = 27\,000\pi \approx 84823 \text{ km.}$$

Sau 5 giờ, vệ tinh chuyển động hết $\frac{5}{2}$ vòng của quỹ đạo.
Suy ra quãng đường vệ tinh đã chuyển động là

$$S = \frac{5}{2} \cdot 2\pi \cdot 9\,000 = 45\,000\pi \approx 141\,371,7 \text{ km.}$$

b) Vệ tinh chuyển động được quãng đường 200 000 km. Gọi x là thời gian vệ tinh chuyển động. Khi đó

$$200\,000 = x \cdot 2\pi \cdot 9\,000 \Leftrightarrow x \approx 11,1 \text{ giờ.}$$

2. Bài tập rèn luyện

BÀI TẬP TỰ LUẬN

BÀI 1. Một đường tròn có bán kính $R = 75$ cm. Độ dài của cung trên đường tròn đó có số đo $\alpha = \frac{\pi}{25}$ là

Lời giải.

Độ dài của cung trên đường tròn đó có số đo $\alpha = \frac{\pi}{25}$ là $\ell = R \cdot \alpha = 75 \cdot \frac{\pi}{25} = 3\pi$ cm.

BÀI 2. Trên đường tròn bán kính bằng 4, cung có số đo $\frac{\pi}{8}$ thì có độ dài là bao nhiêu?

Lời giải.

Cung có số đo α rad của đường tròn bán kính R có độ dài $\ell = R \cdot \alpha$.

Vậy $\alpha = \frac{\pi}{8}$; $R = 4$ thì $\ell = R \cdot \alpha = \frac{\pi}{2}$.

BÀI 3. Trạm vũ trụ Quốc tế ISS (tên Tiếng Anh: International Space Station) nằm trong quỹ đạo tròn cách bề mặt Trái Đất khoảng 400 km. Nếu trạm mặt đất theo dõi được trạm vũ trụ ISS khi nó nằm trong góc 45° ở tâm của quỹ đạo tròn này phía trên ăng-ten theo dõi, thì trạm vũ trụ ISS đã di chuyển được bao nhiêu kilômét trong khi nó đang được trạm mặt đất theo dõi? Giả sử rằng bán kính của Trái Đất là 6400 km. Làm tròn kết quả đến hàng đơn vị.

Lời giải.

Bán kính quỹ đạo của trạm vũ trụ quốc tế là $R = 6400 + 400 = 6800$ (km).

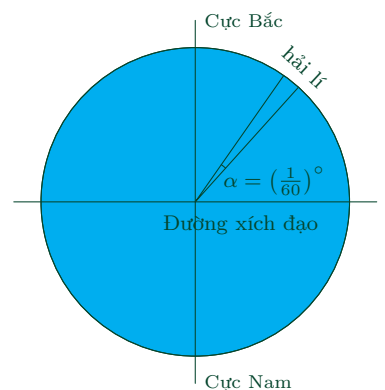
Đổi $45^\circ = 45 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{4}$ rad.

Vậy trong khi được trạm mặt đất theo dõi, trạm ISS đã di chuyển một quãng đường có độ dài là

$$\ell = R\alpha = 6800 \cdot \frac{\pi}{4} \approx 5340,708 \approx 5341 \text{ (km).}$$

BÀI 4.

Hải lí là một đơn vị chiều dài hàng hải, được tính bằng độ dài một cung chắn một góc $\alpha = \left(\frac{1}{60}\right)^\circ$ của đường kinh tuyến (Hình 17). Đổi số đo α sang radian và cho biết 1 hải lí bằng khoảng bao nhiêu kilômét, biết bán kính trung bình của Trái Đất là 6371 km. Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm.



Hình 17

Lời giải.

1 hải lí $= \alpha \cdot R = \frac{1 \cdot \pi}{60 \cdot 180} \cdot 6371 \approx 1,85$ km.

BÀI 5. Bánh xe của người đi xe đạp quay được 11 vòng trong 5 giây. Tính độ dài quãng đường mà người đi xe đã đi được trong 1 phút, biết rằng đường kính của bánh xe đạp là 680 mm.

Lời giải.

Đổi 1 phút = 60 s.

Trong 60 giây, bánh xe quay được số vòng là $\frac{11}{5} \cdot 60 = 132$ (vòng).

Chu vi mỗi vòng xe là 680π (mm).

Độ dài quãng đường người đó đi trong 1 phút là $132 \cdot 680\pi = 89760\pi$ (mm).

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

CÂU 1. Tính độ dài cung tròn có số đo góc ở tâm bằng $\frac{\pi}{6}$ của đường tròn lượng giác.

- (A) $\frac{\pi}{6}$. (B) $\frac{\pi}{12}$. (C) $\frac{\pi}{3}$. (D) $\frac{\pi}{24}$.

Lời giải.

Đường tròn lượng giác có bán kính $R = 1$.

Độ dài cung tròn có số đo góc ở tâm bằng $\alpha = \frac{\pi}{6}$ là $\ell = R\alpha = 1 \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$.

Chọn đáp án (A) ☐

CÂU 2. Trên đường tròn lượng giác đường kính 36, cung có số đo $\frac{\pi}{6}$ thì có độ dài bằng bao nhiêu?

- (A) $\ell = \frac{\pi}{54}$. (B) $\ell = \frac{54}{\pi}$. (C) $\ell = 3\pi$. (D) $\ell = 6\pi$.

Lời giải.

Độ dài cung có số đo $\frac{\pi}{6}$ là $\ell = R \cdot \alpha \Rightarrow \ell = 18 \cdot \frac{\pi}{6} = 3\pi$.

Chọn đáp án (C) ☐

CÂU 3. Một đường tròn có bán kính $R = 3$ cm. Tính độ dài ℓ của cung trên đường tròn đó có số đo bằng 60° .

- (A) $\ell = \frac{\pi}{2}$ cm. (B) $\ell = \pi$ cm. (C) $\ell = \frac{\pi}{4}$ cm. (D) $\ell = 2\pi$ cm.

Lời giải.

Ta có số đo cung $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

$\ell = R \cdot \alpha = 3 \cdot \frac{\pi}{3} = \pi$ cm.

Chọn đáp án (B) ☐

CÂU 4. Một cung tròn có độ dài bằng bán kính. Khi đó số đo bằng radian của cung tròn đó là

- (A) 2. (B) 3. (C) π . (D) 1.

Lời giải.

Theo định nghĩa 1 radian là số đo của cung có độ dài bằng bán kính.

Chọn đáp án (D) ☐

CÂU 5. Cung tròn bán kính $R = 4$ cm và có số đo $\frac{3\pi}{4}$ thì có độ dài là (kết quả làm tròn đến số thập phân thứ 2)

- (A) 0,59 cm. (B) 1,05 cm. (C) 17,76 cm. (D) 9,42 cm.

Lời giải.

Ta có $\ell = \alpha \cdot R = \frac{3\pi}{4} \cdot 4 = 3\pi \approx 9,42$.

Chọn đáp án (D) ☐

CÂU 6. Trên đường tròn bán kính bằng 4, cung có số đo $\frac{\pi}{8}$ thì có độ dài là

- (A) $\frac{\pi}{3}$. (B) $\frac{\pi}{2}$. (C) $\frac{\pi}{16}$. (D) $\frac{\pi}{4}$.

Lời giải.

Cung có số đo α rad của đường tròn bán kính R có độ dài $\ell = R \cdot \alpha$.

Vậy $\alpha = \frac{\pi}{8}$; $R = 4$ thì $\ell = R \cdot \alpha = \frac{\pi}{2}$.

Chọn đáp án (B) ☐

CÂU 7. Cho đường tròn (O) đường kính bằng 10 cm. Tính độ dài cung có số đo $\frac{7\pi}{12}$.

- (A) $\frac{17\pi}{3}$ cm. (B) $\frac{35\pi}{2}$ cm. (C) $\frac{35\pi}{6}$ cm. (D) $\frac{35\pi}{12}$ cm.

Lời giải.

Độ dài cung tròn cần tìm là $\ell = \alpha \cdot R = \frac{7\pi}{12} \cdot \frac{10}{2} = \frac{35\pi}{12}$ (cm).

Chọn đáp án (D) ☐

CÂU 8. Trên đường tròn có đường kính 20 cm. Độ dài của một cung tròn có số đo $\frac{\pi}{4}$ là

- (A) $\frac{5}{2}$ cm. (B) 5 cm. (C) $\frac{5\pi}{2}$ cm. (D) 5π cm.

Lời giải.

Đường tròn có bán kính $R = 10$ cm.

Gọi ℓ là độ dài cung tròn cần tìm, ta có $\ell = R \cdot \alpha = 10 \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{2}$.

Chọn đáp án **C**.....

CÂU 9. Một đường tròn có bán kính 4 cm. Độ dài cung tròn có số đo 45° là

- A** $\frac{1}{20\pi}$ cm. **B** 9 cm. **C** 180 cm. **D** π cm.

Lời giải.

Áp dụng tính độ dài cung tròn công thức $\ell = \frac{\pi R \alpha}{180}$, suy ra độ dài cung tròn là $\ell = \frac{\pi \cdot 4 \cdot 45}{180} = \pi$.

Chọn đáp án **D**.....

CÂU 10. Một đường tròn có đường kính bằng 10 cm. Tính độ dài l của cung tròn có số đo $\frac{\pi}{5}$.

- A** $l = 2\pi$ cm. **B** $l = \pi$ cm. **C** $l = 5\pi$ cm. **D** $l = 1$ cm.

Lời giải.

Ta có $l = 10 \cdot \frac{\pi}{5} = 2\pi$ cm.

Chọn đáp án **A**.....

Dạng 4. Biểu diễn góc trên đường tròn lượng giác

Để biểu diễn các góc lượng giác trên đường tròn lượng giác ta thường sử dụng các kết quả sau:

- ✔ Góc α (a°) và cung có số đo $\alpha + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ ($a^\circ + k360^\circ$) có cùng điểm biểu diễn trên đường tròn lượng giác.
- ✔ Số điểm trên đường tròn lượng giác biểu diễn góc lượng giác số đo có dạng $\alpha + \frac{k2\pi}{m}$ (hay $a^\circ + \frac{k360^\circ}{m}$) (với k là số nguyên và m là số nguyên dương) là m . Từ đó để biểu diễn các góc lượng giác đó ta lần lượt cho k từ 0 tới $m - 1$ rồi biểu diễn các góc đó.

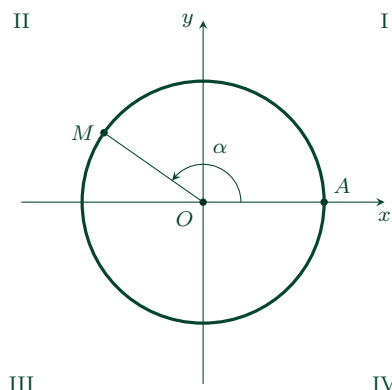
1. Ví dụ mẫu

VÍ DỤ 1. Biểu diễn trên đường tròn lượng giác các góc lượng giác có số đo là

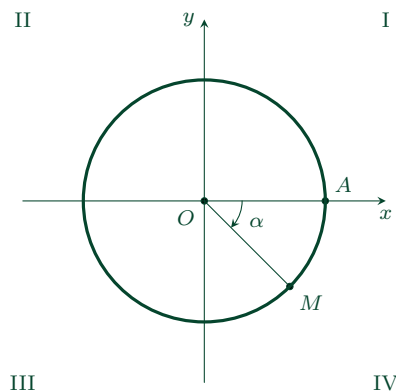
- a) 865° ; b) -1485° ; c) $\frac{13}{3}\pi$; d) $-\frac{7}{3}\pi$.

Lời giải.

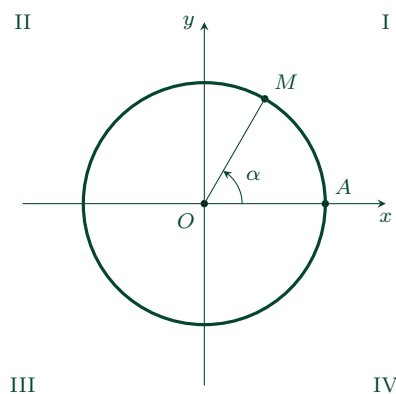
- a) Ta có $865^\circ = 145^\circ + 2 \cdot 360^\circ$. Vậy điểm biểu diễn góc lượng giác có số đo 865° là điểm M trên phần đường tròn lượng giác thuộc góc phần tư thứ II sao cho $\widehat{AOM} = 145^\circ$.



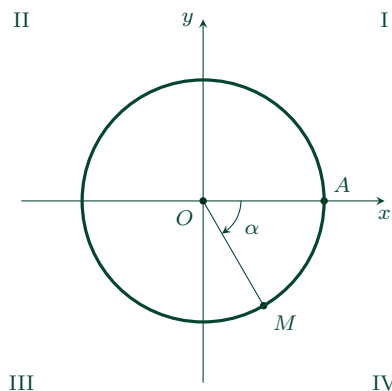
- b) Ta có $-1485^\circ = -45^\circ - 3 \cdot 360^\circ$. Vậy điểm biểu diễn góc lượng giác có số đo -1485° là điểm M trên phần đường tròn lượng giác thuộc góc phần tư thứ IV sao cho $\widehat{AOM} = 145^\circ$.



c) Ta có $\frac{13}{3}\pi = \frac{\pi}{3} + 2 \cdot 2\pi$. Vậy điểm biểu diễn góc lượng giác có số đo $\frac{13}{3}\pi$ là điểm M trên phần đường tròn lượng giác thuộc góc phần tư thứ I sao cho $\widehat{AOM} = \frac{\pi}{3}$.



d) Ta có $-\frac{7}{3}\pi = -\frac{\pi}{3} - 2\pi$. Vậy điểm biểu diễn góc lượng giác có số đo $-\frac{7}{3}\pi$ là điểm M trên phần đường tròn lượng giác thuộc góc phần tư thứ IV sao cho $\widehat{AOM} = \frac{\pi}{3}$.



VÍ DỤ 2. Biểu diễn trên đường tròn lượng giác các góc lượng giác có số đo sau (với k là số nguyên tùy ý)

a) $\alpha = k\pi$;

b) $\alpha = \frac{\pi}{3} + k\pi$.

 **Lời giải.**

a) Ta có $\alpha = k\pi = \frac{k2\pi}{2}$ do đó có hai điểm biểu diễn bởi góc có số đo α .

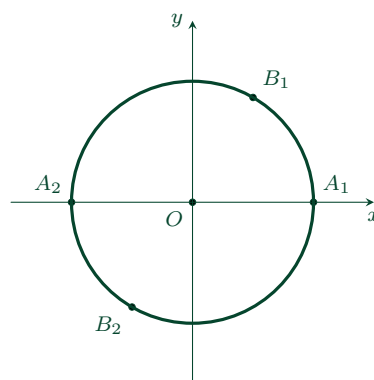
Với $k = 0$, ta có $\alpha = 0$ được biểu diễn bởi điểm A_1 .

Với $k = 1$, ta có $\alpha = \pi$ được biểu diễn bởi điểm A_2 .

b) Ta có $\alpha = \frac{\pi}{3} + k\pi = \frac{\pi}{3} + \frac{k2\pi}{2}$ do đó có hai điểm biểu diễn bởi góc có số đo α .

Với $k = 0$, ta có $\alpha = \frac{\pi}{3}$ được biểu diễn bởi điểm B_1 .

Với $k = 1$, ta có $\alpha = \frac{4\pi}{3}$ được biểu diễn bởi điểm B_2 .



2. Bài tập vận dụng

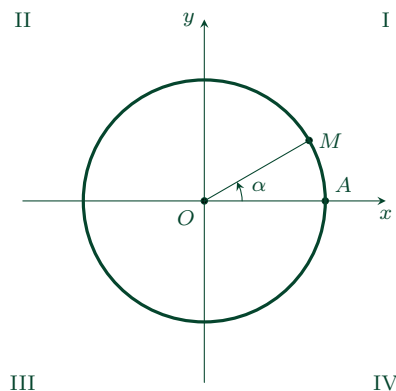
BÀI 1. Biểu diễn trên đường tròn lượng giác các góc lượng giác có số đo sau:

a) 750° ;

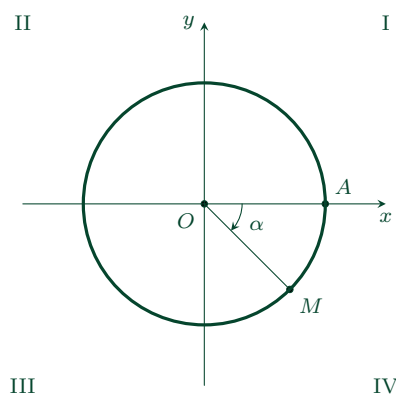
b) -1125° .

 **Lời giải.**

a) Ta có $750^\circ = 30^\circ + 2 \cdot 360^\circ$. Vậy điểm biểu diễn góc lượng giác có số đo 750° là điểm M trên phần đường tròn lượng giác thuộc góc phần tư thứ I sao cho $\widehat{AOM} = 30^\circ$.



- b) Ta có $-1125^\circ = -45^\circ - 3 \cdot 360^\circ$. Vậy điểm biểu diễn góc lượng giác có số đo -1125° là điểm M trên phần đường tròn lượng giác thuộc góc phần tư thứ IV sao cho $\widehat{AOM} = 45^\circ$.



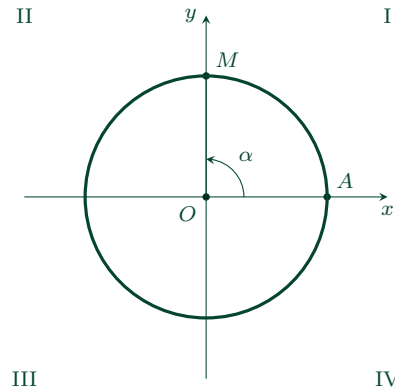
BÀI 2. Biểu diễn trên đường tròn lượng giác các góc lượng giác có số đo sau:

a) $\frac{9\pi}{2}$;

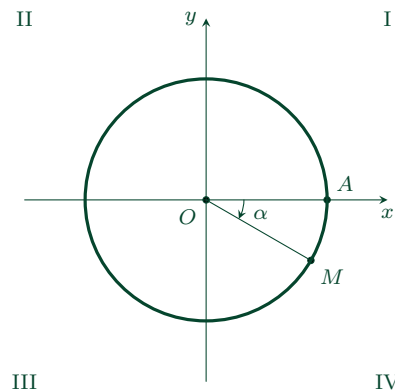
b) $-\frac{37\pi}{6}$.

Lời giải.

- a) Ta có $\frac{9\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + 2 \cdot 2\pi$. Vậy điểm biểu diễn góc lượng giác có số đo $\frac{9\pi}{2}$ là điểm M trên phần đường tròn lượng giác sao cho $\widehat{AOM} = \frac{\pi}{2}$.



b) Ta có $-\frac{37\pi}{6} = -\frac{\pi}{6} - 3 \cdot 2\pi$. Vậy điểm biểu diễn góc lượng giác có số đo $-\frac{37\pi}{6}$ là điểm M trên phần đường tròn lượng giác thuộc góc phần tư thứ IV sao cho $\widehat{AOM} = \frac{\pi}{6}$.



BÀI 3. Biểu diễn trên đường tròn lượng giác các góc lượng giác có số đo sau:

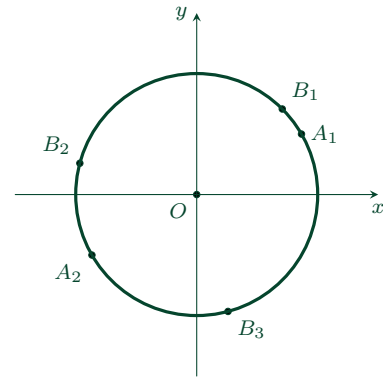
a) $\frac{\pi}{6} + k\pi$;

b) $-\frac{\pi}{4} + \frac{k2\pi}{3}$.

 **Lời giải.**

a) Ta có $\alpha = \frac{\pi}{6} + k\pi = \frac{\pi}{6} + \frac{k2\pi}{2}$ do đó có hai điểm biểu diễn góc α lần lượt là $\frac{\pi}{6}$ biểu diễn bởi A_1 và $\frac{7\pi}{6}$ biểu diễn bởi A_2 .

b) Ta có $\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{k2\pi}{3}$ có ba điểm biểu diễn góc α lần lượt là $\frac{\pi}{4}$ biểu diễn bởi B_1 , $\frac{11\pi}{12}$ biểu diễn bởi B_2 và $\frac{19\pi}{12}$ biểu diễn bởi B_3 .



BÀI 4. Khi biểu diễn các góc lượng giác có số đo $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ và $y = \frac{\pi}{2} + k2\pi$ lên đường tròn lượng giác, số điểm chung nhận được là bao nhiêu?

Lời giải.

Ta có $x = \frac{\pi}{2} + k\pi = \frac{\pi}{2} + \frac{k2\pi}{2}$. Vậy có 2 điểm biểu diễn góc lượng giác có số đo x .

✓ Với $k = 0$, $x_1 = \frac{\pi}{2}$, được biểu diễn bởi điểm B .

✓ Với $k = 1$, $x_2 = \frac{3\pi}{2}$ được biểu diễn bởi điểm B' .

Ta có $y = \frac{\pi}{2} + k2\pi$. Vậy có 1 điểm biểu diễn góc lượng giác có số đo y . Với $k = 0$, $y = \frac{\pi}{2}$, được biểu diễn bởi điểm B . Vậy số điểm chung nhận được là 1 điểm chung.

BÀI 5. Xác định công thức hợp nhất của hai góc lượng giác $x_1 = k\pi$ và $x_2 = \frac{\pi}{2} + k\pi$.

Lời giải.

Ta có $x_1 = k\pi = \frac{k2\pi}{2}$ có hai điểm biểu diễn cho góc x_1 với 0 biểu diễn bởi A_1 và π biểu diễn bởi A_2 .

$x_2 = \frac{\pi}{2} + k\pi = \frac{\pi}{2} + \frac{k2\pi}{2}$ có hai điểm biểu diễn với $\frac{\pi}{2}$ biểu diễn bởi B_1 và $\frac{3\pi}{2}$ biểu diễn bởi B_2 .

Dễ thấy 4 điểm này cách đều nhau do đó có thể gộp hai góc lượng giác này lại thành công thức duy nhất là $\frac{k2\pi}{4} = \frac{k\pi}{2}$.

3. Bài tập trắc nghiệm

CÂU 1. Góc lượng giác $\frac{31\pi}{7}$ có cùng điểm biểu diễn trên đường tròn lượng giác với góc lượng giác nào sau đây?

- (A) $\frac{3\pi}{7}$. (B) $\frac{10\pi}{7}$. (C) $\frac{-25\pi}{7}$. (D) $\frac{2\pi}{5}$.

Lời giải.

Ta có $\frac{31\pi}{7} = \frac{3\pi}{7} + 2 \cdot 2\pi$, do đó góc lượng giác $\frac{31\pi}{7}$ có cùng điểm biểu diễn với góc $\frac{3\pi}{7}$.

Chọn đáp án (A) □

CÂU 2. Các góc lượng giác nào sau đây có cùng điểm biểu diễn trên đường tròn lượng giác?

- (A) 45° ; 405° ; 750° . (B) 30° ; 405° ; 750° . (C) 60° ; 405° ; 750° . (D) 45° ; 405° ; 765° .

Lời giải.

Ta có $405^\circ = 45^\circ + 360^\circ$ và $765^\circ = 45^\circ + 2 \cdot 360^\circ$.

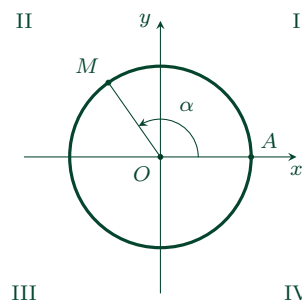
Do đó 45° ; 405° ; 765° có cùng điểm biểu diễn trên đường tròn lượng giác.

Chọn đáp án (D) □

CÂU 3.

Hình vẽ bên dưới biểu diễn cho góc lượng giác nào sau đây?

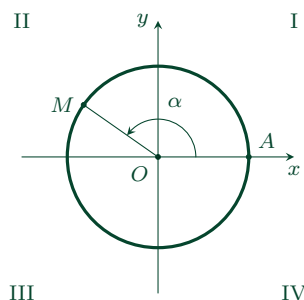
- A** 30° . **B** 90° . **C** 125° . **D** -60° .



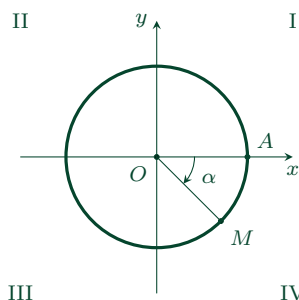
Lời giải.

Chọn đáp án **C**.....

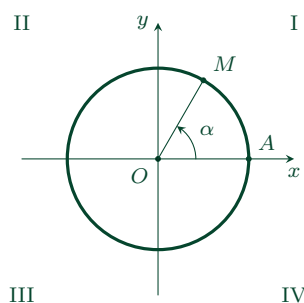
CÂU 4. Hình vẽ nào dưới đây biểu diễn góc lượng giác có số đo $\alpha = -765^\circ$?



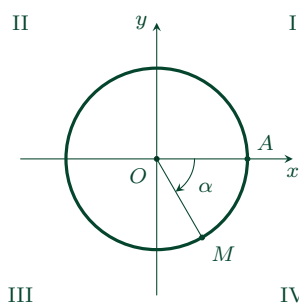
A



B



C



D

Lời giải.

Ta có $-765^\circ = -45^\circ - 2 \cdot 360^\circ$. Do đó góc -765° có điểm biểu diễn tại vị trí góc phần tư thứ IV và góc $\widehat{AOM} = 45^\circ$.

Chọn đáp án **B**.....

CÂU 5. Có bao nhiêu điểm trên đường tròn lượng giác biểu diễn cho góc lượng giác $x = \frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2}$?

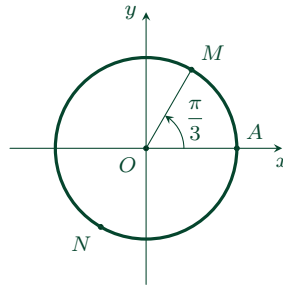
- A** 1. **B** 2. **C** 3. **D** 4.

Lời giải.

Ta có $x = \frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2} = \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{4}$. Do đó có 4 điểm biểu diễn cho góc x .

Chọn đáp án **D**.....

CÂU 6. Hình vẽ bên dưới biểu diễn cho góc lượng giác nào sau đây?



- ☐ A $\frac{\pi}{3}$.
 ☐ B $\frac{\pi}{3} + k2\pi$.
 ☒ C $\frac{\pi}{3} + k\pi$.
 ☐ D $\frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2}$.

Lời giải.

Ta thấy $\widehat{AOM} = \frac{\pi}{3}$ và có hai điểm M, N đối xứng nhau qua O biểu diễn cho góc lượng giác α . Do đó, α có thể viết dưới dạng $\frac{\pi}{3} + \frac{k2\pi}{2} = \frac{\pi}{3} + k\pi$.

Chọn đáp án ☒ C ☐

CÂU 7. Trên đường tròn lượng giác với điểm gốc là A . Điểm M thuộc đường tròn sao cho $\widehat{AOM} = 75^\circ$. Gọi N là điểm đối xứng với điểm M qua gốc tọa độ O , số đo góc lượng giác \widehat{AON} bằng

- ☐ A 255° .
 ☐ B -105° .
 ☒ C -105° hoặc 255° .
 ☐ D $-105^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}$.

Lời giải.

Vì N đối xứng với M qua gốc tọa độ O . Do đó $\widehat{AON} = \widehat{AOM} \pm 180^\circ$, suy ra $\widehat{AON} = 255^\circ$ hoặc $\widehat{AON} = -105^\circ$.

Chọn đáp án ☒ C ☐

CÂU 8. Trên đường tròn lượng giác gốc A , cung lượng giác nào có các điểm biểu diễn tạo thành hình vuông?

- ☐ A $\frac{k\pi}{2}$.
 ☐ B $k\pi$.
 ☒ C $\frac{k2\pi}{3}$.
 ☐ D $\frac{k\pi}{3}$.

Lời giải.

Ta có $\alpha = \frac{k\pi}{2} = \frac{k2\pi}{4}$. Do đó có 4 điểm biểu diễn cho góc α và 4 điểm này tạo thành hình vuông trên đường tròn lượng giác.

Chọn đáp án ☒ A ☐

CÂU 9. Cho góc lượng giác có số đo $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ với k là số nguyên tùy ý. Có bao nhiêu giá trị k thỏa mãn $x \in [2\pi; 5\pi]$?

- ☐ A 1.
 ☐ B 2.
 ☒ C 3.
 ☐ D 4.

Lời giải.

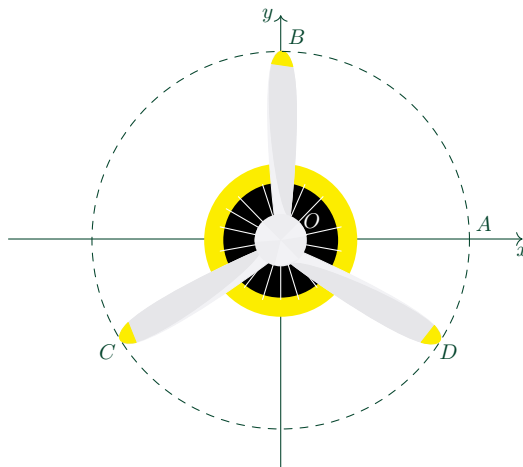
$$\text{Giải hệ bất phương trình } \begin{cases} \frac{\pi}{4} + k\pi > 2\pi \\ \frac{\pi}{4} + k\pi < 5\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k > \frac{7}{4} \\ k < \frac{19}{4} \end{cases}.$$

Từ đó, để $x \in [2\pi; 5\pi]$ thì $\frac{7}{4} < k < \frac{19}{4}$.

Vì k là số nguyên nên có 3 giá trị của k , là 2, 3, 4, thỏa mãn ycbt.

Chọn đáp án ☒ C ☐

CÂU 10. Hình vẽ bên dưới biểu diễn cánh quạt của động cơ máy bay. Các vị trí B, C, D trên cánh quạt có thể biểu diễn cho góc lượng giác nào sau đây?



A $\frac{\pi}{4} + 2\pi$.

B $\frac{\pi}{2} + k\pi$.

C $\frac{\pi}{2} + \frac{k2\pi}{3}$.

D $\frac{-\pi}{4} + \frac{k2\pi}{3}$.

Lời giải.

Ta thấy $\widehat{AOB} = \frac{\pi}{2}$ và có điểm biểu diễn cho góc α . Do đó α có thể viết dưới dạng $\frac{\pi}{2} + \frac{k2\pi}{3}$.

Chọn đáp án **C**..... □

Dạng 5. Dấu của các giá trị lượng giác

VÍ DỤ 1. Xét dấu các giá trị lượng giác của góc lượng giác $\alpha = -\frac{3\pi}{4}$.

Lời giải.

Do $-\pi < -\frac{3\pi}{4} < -\frac{\pi}{2}$ nên $\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right) < 0$; $\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) < 0$; $\tan\left(-\frac{3\pi}{4}\right) > 0$; $\cot\left(-\frac{3\pi}{4}\right) > 0$.

VÍ DỤ 2. Xác định dấu các biểu thức:

a) $A = \sin 50^\circ \cdot \cos(-100^\circ)$;

b) $B = \sin 195^\circ \cdot \tan \frac{20\pi}{7}$.

Lời giải.

a) $A = \sin 50^\circ \cdot \cos(-100^\circ)$.

Ta có điểm cuối của cung 50° thuộc góc phần tư thứ I nên $\sin 50^\circ > 0$. Điểm cuối của cung -100° thuộc góc phần tư thứ III nên $\cos(-100^\circ) < 0$.

Do đó, $A < 0$.

b) $B = \sin 195^\circ \cdot \tan \frac{20\pi}{7}$.

Ta có: điểm cuối của cung 195° thuộc góc phần tư thứ III nên $\sin 195^\circ < 0$. Điểm cuối của cung $\frac{20\pi}{7} = \frac{6\pi}{7} + 2\pi$ thuộc

góc phần tư thứ II nên $\tan \frac{20\pi}{7} < 0$.

Do đó, $B > 0$.

VÍ DỤ 3. Cho $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$. Xét dấu các biểu thức sau:

a) $A = \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$;

b) $B = \tan\left(\frac{2019\pi}{2} - \alpha\right)$.

Lời giải.

a) $A = \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha < 0$.

b) $B = \tan\left(\frac{2019\pi}{2} - \alpha\right) = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha + 1009\pi\right) = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot \alpha > 0$.

1. Bài tập vận dụng

BÀI 1. Xét dấu các giá trị lượng giác của góc lượng giác $\alpha = \frac{5\pi}{6}$.

Lời giải.

Do $\frac{\pi}{2} < \frac{5\pi}{6} < \pi$ nên $\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) > 0$; $\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) < 0$; $\tan\left(\frac{5\pi}{6}\right) < 0$; $\cot\left(\frac{5\pi}{6}\right) < 0$.

BÀI 2. Xác định dấu của $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\tan \alpha$, biết

a) $\frac{3\pi}{2} < \alpha < \frac{7\pi}{4}$;

b) $3\pi < \alpha < \frac{10\pi}{3}$;

c) $\frac{5\pi}{2} < \alpha < \frac{11\pi}{4}$.

Lời giải.

a) $\frac{3\pi}{2} < \alpha < \frac{7\pi}{4}$. Ta có điểm cuối của cung α thuộc góc phần tư thứ IV nên $\sin \alpha < 0$, $\cos \alpha > 0$, $\tan \alpha < 0$.

b) $3\pi < \alpha < \frac{10\pi}{3}$. Ta có điểm cuối của cung α thuộc góc phần tư thứ III nên $\sin \alpha < 0$, $\cos \alpha < 0$, $\tan \alpha > 0$.

c) $\frac{5\pi}{2} < \alpha < \frac{11\pi}{4}$. Ta có điểm cuối của cung α thuộc góc phần tư thứ II nên $\sin \alpha > 0$, $\cos \alpha < 0$, $\tan \alpha < 0$.

BÀI 3. Cho $0^\circ < \alpha < 90^\circ$. Xét dấu các biểu thức sau:

a) $A = \cos(\alpha + 90^\circ)$;

b) $B = \sin(\alpha + 80^\circ)$.

Lời giải.

a) $A = \cos(\alpha + 90^\circ) = \cos(90^\circ - (-\alpha)) = \sin(-\alpha) = -\sin \alpha$.
 Vì $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ nên $\sin \alpha > 0$.
 Do đó $A < 0$.

b) $B = \sin(\alpha + 80^\circ)$.
 Vì $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ nên $80^\circ < \alpha + 80^\circ < 170^\circ$.
 Do đó, điểm cuối của cung $\alpha + 80^\circ$ thuộc góc phần tư thứ I hoặc thứ II nên $B > 0$.

BÀI 4. Cho $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$. Xét dấu các biểu thức sau

a) $A = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$

b) $B = \sin\left(\alpha + \frac{1119\pi}{2}\right)$.

Lời giải.

a) $A = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - (-\alpha)\right) = \cos(-\alpha) = \cos \alpha < 0$.

b)

$$\begin{aligned} B &= \sin\left(\alpha + \frac{1119\pi}{2}\right) = \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2} + 280 \cdot 2\pi\right) \\ &= \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = -\cos \alpha > 0 \end{aligned}$$

2. Bài tập trắc nghiệm

CÂU 1. Cho góc lượng giác $\alpha = \frac{\pi}{3}$. Khẳng định nào sau đây là sai?

(A) $\sin \alpha > 0$.

(B) $\cos \alpha > 0$.

(C) $\tan \alpha < 0$.

(D) $\cot \alpha > 0$.

Lời giải.

Với $\alpha = \frac{\pi}{3}$, ta có $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ thuộc góc phần tư thứ I nên $\sin \alpha > 0$, $\cos \alpha > 0$, $\tan \alpha > 0$, $\cot \alpha > 0$.

Chọn đáp án (C) ☐

CÂU 2. Cho góc lượng giác $\alpha = -\frac{\pi}{6}$. Khẳng định nào sau đây là sai?

(A) $\sin \alpha < 0$.

(B) $\cos \alpha < 0$.

(C) $\tan \alpha < 0$.

(D) $\cot \alpha < 0$.

Lời giải.

Với $\alpha = -\frac{\pi}{6}$, ta có α thuộc góc phần tư thứ IV nên $\sin \alpha < 0$, $\cos \alpha > 0$, $\tan \alpha < 0$, $\cot \alpha < 0$.

Chọn đáp án (B) ☐

CÂU 3. Cho $0^\circ < \alpha < 90^\circ$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- ☐ A $\sin(90^\circ + \alpha) < 0$. ☐ B $\cos(90^\circ + \alpha) < 0$. ☐ C $\sin(150^\circ + \alpha) > 0$. ☐ D $\cos(180^\circ + \alpha) > 0$.

Lời giải.

Ta có $0^\circ < \alpha < 90^\circ \Leftrightarrow 90^\circ < \alpha + 90^\circ < 180^\circ$ thuộc góc phần tư thứ II, nên $\cos(90^\circ + \alpha) < 0$.

Chọn đáp án ☐ B.

CÂU 4. Cho $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- ☐ A $\sin\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right) > 0$. ☐ B $\cos\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) > 0$. ☐ C $\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) > 0$. ☐ D $\cos\left(\frac{2\pi}{3} + \alpha\right) > 0$.

Lời giải.

Ta có $0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{6} + \alpha < \frac{2\pi}{3}$ thuộc góc phần tư thứ I và II, nên $\sin\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right) > 0$.

Chọn đáp án ☐ A.

CÂU 5. Cho $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- ☐ A $\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) < 0$. ☐ B $\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{5}\right) > 0$. ☐ C $\sin\left(\frac{2\pi}{5} + \alpha\right) < 0$. ☐ D $\sin\left(\frac{2\pi}{3} + \alpha\right) > 0$.

Lời giải.

Ta có $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{7\pi}{5} < \frac{2\pi}{5} + \alpha < \frac{19\pi}{10}$ thuộc góc phần tư thứ III và IV, nên $\sin\left(\frac{2\pi}{5} + \alpha\right) < 0$.

Chọn đáp án ☐ C.

Dạng 6. Tính giá trị lượng giác của một góc

☒ $\sin^2 a + \cos^2 a = 1$.

☒ $\tan a \cdot \cot a = 1$.

☒ $\tan^2 a + 1 = \frac{1}{\cos^2 a}$.

☒ $\cot^2 a + 1 = \frac{1}{\sin^2 a}$.

1. Ví dụ mẫu

VÍ DỤ 1. Cho góc lượng giác có số đo bằng $-\frac{\pi}{3}$.

a) Xác định điểm M trên đường tròn lượng giác biểu diễn góc lượng giác đã cho.

b) Tính các giá trị lượng giác của góc lượng giác đã cho.

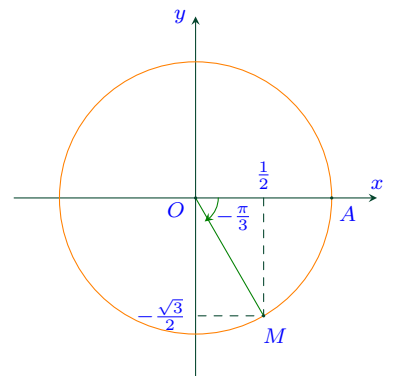
Lời giải.

a) Điểm M trên đường tròn lượng giác biểu diễn góc lượng giác có số đo là $-\frac{\pi}{3}$ được xác định trong hình bên.

b) Ta có $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$; $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;

$$\tan\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)}{\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)} = -\sqrt{3};$$

$$\cot\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)}{\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)} = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$$



VÍ DỤ 2. Tính các giá trị lượng giác của góc α , biết

a) $\cos \alpha = \frac{1}{5}$ và $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$;

b) $\sin \alpha = \frac{2}{5}$ và $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$;

c) $\tan \alpha = \sqrt{5}$ và $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$;

d) $\cot \alpha = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ và $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.

Lời giải.

a) Ta có $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} \sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} \\ \sin \alpha = -\sqrt{1 - \cos^2 \alpha} \end{cases}$

Vì $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ nên $\sin \alpha > 0$, suy ra $\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$.

$$\Rightarrow \sin \alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{24}{25}} = \frac{2\sqrt{6}}{5}.$$

Mà $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ nên $\tan \alpha = \frac{2\sqrt{6}}{5} : \frac{1}{5} = 2\sqrt{6}$ và $\cot \alpha = \frac{\sqrt{6}}{12}$.

b) Ta có $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} \cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} \\ \cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} \end{cases}$

Vì $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ nên $\cos \alpha < 0$, suy ra $\cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$.

$$\Rightarrow \cos \alpha = -\sqrt{1 - \left(\frac{2}{5}\right)^2} = -\sqrt{\frac{21}{25}} = -\frac{\sqrt{21}}{5}.$$

Mà $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ nên $\tan \alpha = \frac{2}{5} : \left(-\frac{\sqrt{21}}{5}\right) = -\frac{2\sqrt{21}}{21}$ và $\cot \alpha = -\frac{\sqrt{21}}{2}$.

c) Vì $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ nên $\cos \alpha < 0$, do đó từ công thức:

$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}, \text{ suy ra } \cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \tan^2 \alpha}.$$

$$\Rightarrow \cos \alpha = -\frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}} = -\frac{1}{\sqrt{1 + (\sqrt{5})^2}} = -\frac{\sqrt{6}}{6};$$

$$\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = \frac{\sqrt{5}}{5} \text{ và } \sin \alpha = \tan \alpha \cdot \cos \alpha = -\frac{\sqrt{30}}{6}.$$

d) Vì $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ nên $\sin \alpha < 0$, do đó từ công thức:

$$1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}, \text{ suy ra } \sin^2 \alpha = \frac{1}{1 + \cot^2 \alpha}.$$

$$\Rightarrow \sin \alpha = -\frac{1}{\sqrt{1 + \cot^2 \alpha}} = -\frac{1}{\sqrt{1 + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}} = -\frac{\sqrt{6}}{3};$$

$$\tan \alpha = \frac{1}{\cot \alpha} = -\sqrt{2} \text{ và } \cos \alpha = \cot \alpha \cdot \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

2. Bài tập rèn luyện

BÀI TẬP TỰ LUẬN

BÀI 1. Biết $\sin \alpha = \frac{1}{3}$ ($90^\circ < \alpha < 180^\circ$). Hỏi giá trị của $\cos \alpha$ là bao nhiêu?

Lời giải.

Vì $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ nên $\cos \alpha < 0$. Ta có $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Leftrightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \frac{1}{9} \Leftrightarrow \cos \alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

BÀI 2. Biết $\tan \alpha = 2$, tính $\cot \alpha$.

Lời giải.

Áp dụng hệ thức $\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1 \Leftrightarrow \cot \alpha = \frac{1}{2}$.

BÀI 3. Cho $\sin \alpha = -\frac{1}{3}$ với $\alpha \in \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$. Khi đó, giá trị của $\cos \alpha$ bằng

Lời giải.

Vì $\alpha \in \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$ nên $\cos \alpha > 0$.

Ta có $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = \frac{8}{9} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

BÀI 4. Cho $\tan a = 2$, $\left(\pi < a < \frac{3\pi}{2}\right)$. Tính $A = \sin a + \cos a$.

Lời giải.

Ta có $1 + \tan^2 a = \frac{1}{\cos^2 a} \Leftrightarrow \cos^2 a = \frac{1}{5} \Rightarrow \cos a = -\frac{\sqrt{5}}{5}$ (vì $\pi < a < \frac{3\pi}{2}$).

$$\sin^2 a = 1 - \cos^2 a = \frac{4}{5} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin a = -\frac{2\sqrt{5}}{5} \\ \sin a = \frac{2\sqrt{5}}{5} \end{cases}$$

Vì $\pi < a < \frac{3\pi}{2}$ nên $\sin a = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

$$\text{Do đó } A = -\frac{2\sqrt{5}}{5} - \frac{\sqrt{5}}{5} = -\frac{3\sqrt{5}}{5}.$$

BÀI 5. Cho $\cot \alpha = 2$. Tính giá trị của biểu thức $A = \frac{\cos^2 \alpha + \tan^2 \alpha - 1}{\sin^2 \alpha}$.

 **Lời giải.**

$$\begin{aligned} A &= \frac{\cos^2 \alpha + \tan^2 \alpha - 1}{\sin^2 \alpha} \\ &= \frac{-\sin^2 \alpha + \tan^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} \\ &= -\frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} + \frac{\tan^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} \\ &= -1 + \frac{1}{\cos^2 \alpha} \\ &= -1 + 1 + \tan^2 \alpha \\ &= \frac{1}{\cot^2 \alpha} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

CÂU 1. Cho α là góc tù. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- ☐ A $\sin \alpha < 0$. ☐ B $\cos \alpha > 0$. ☐ C $\tan \alpha < 0$. ☐ D $\cot \alpha > 0$.

 **Lời giải.**

Vì α là góc tù, nên $\sin \alpha > 0$, $\cos \alpha < 0$ nên $\tan \alpha < 0$.

Chọn đáp án ☒ C ☐

CÂU 2. Giá trị của $\sin(-240^\circ)$ là

- ☐ A $\frac{\sqrt{3}}{2}$. ☐ B $\frac{1}{2}$. ☐ C $-\frac{\sqrt{3}}{2}$. ☐ D $-\frac{1}{2}$.

 **Lời giải.**

Ta có $\sin(-240^\circ) = \sin(120^\circ - 360^\circ) = \sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Chọn đáp án ☐ A ☐

CÂU 3. Với điều kiện của α đã được thỏa mãn. Chọn khẳng định **sai** trong các khẳng định sau?

- ☐ A $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$. ☐ B $\tan \alpha \cdot \cot \alpha = -1$. ☐ C $1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$. ☐ D $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$.

 **Lời giải.**

Ta có $\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1$.

Chọn đáp án ☐ B ☐

CÂU 4. Giá trị của $\tan 180^\circ$ là

- ☐ A 1. ☐ B 0. ☐ C -1. ☐ D Không xác định.

 **Lời giải.**

Ta có $\tan 180^\circ = 0$.

Chọn đáp án ☐ B ☐

CÂU 5. Cho $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Chọn khẳng định đúng.

- ☐ A $\sin \alpha > 0$, $\cos \alpha > 0$. ☐ B $\sin \alpha < 0$, $\cos \alpha < 0$. ☐ C $\sin \alpha > 0$, $\cos \alpha < 0$. ☐ D $\sin \alpha < 0$, $\cos \alpha > 0$.

 **Lời giải.**

Với $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ là góc phần tư thứ II, nên $\sin \alpha > 0$, $\cos \alpha < 0$.

Chọn đáp án ☒ C ☐

CÂU 6. Biểu thức $f(x) = \cos^4 x + \cos^2 x \sin^2 x + \sin^2 x$ có giá trị bằng

- (A) 1. (B) 2. (C) -2. (D) -1.

Lời giải.

Ta có $f(x) = \cos^4 x + \cos^2 x \sin^2 x + \sin^2 x = \cos^2 x (\cos^2 x + \sin^2 x) + \sin^2 x = \cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

Chọn đáp án (A) □

CÂU 7. Cho $\cot x = -5$. Giá trị của $P = \frac{\sin x - 2 \cos x}{3 \sin x + 4 \cos x}$ là

- (A) $-\frac{7}{11}$. (B) $\frac{7}{11}$. (C) $-\frac{11}{17}$. (D) $\frac{11}{17}$.

Lời giải.

Biến đổi được $P = \frac{1 - 2 \cot x}{3 + 4 \cot x} = \frac{1 - 2(-5)}{3 + 4(-5)} = -\frac{11}{17}$.

Chọn đáp án (C) □

CÂU 8. Cho $\cos 2\alpha = \frac{3}{5}$ ($\frac{3\pi}{4} < \alpha < \pi$). Giá trị của $\sin \alpha$ bằng

- (A) $\frac{\sqrt{5}}{5}$. (B) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$. (C) $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$. (D) $-\frac{\sqrt{5}}{5}$.

Lời giải.

Ta có

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} = \frac{1 - \frac{3}{5}}{2} = \frac{1}{5} \Leftrightarrow \sin \alpha = \pm \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

Do $\frac{3\pi}{4} < \alpha < \pi$ nên $\sin \alpha > 0$. Suy ra $\sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

Chọn đáp án (A) □

CÂU 9. Cho α là một góc lượng giác thỏa mãn $\tan \alpha = -2$, với $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Khi đó, giá trị $\cos \alpha$ bằng

- (A) $\cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$. (B) $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{5}$. (C) $\cos \alpha = -\frac{1}{5}$. (D) $\cos \alpha = \frac{1}{5}$.

Lời giải.

Ta có $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Leftrightarrow 1 + (-2)^2 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Leftrightarrow \cos \alpha = \pm \frac{\sqrt{5}}{5}$.

Vì $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ nên $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{5}$.

Chọn đáp án (B) □

CÂU 10. Giá trị của $\sin \alpha$ biết $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$ và $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ bằng

- (A) $\sin \alpha = -\frac{3}{5}$. (B) $\sin \alpha = \frac{1}{5}$. (C) $\sin \alpha = \frac{3}{5}$. (D) $\sin \alpha = -\frac{1}{5}$.

Lời giải.

Vì $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ nên $\sin \alpha = -\sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = -\sqrt{1 - \left(-\frac{4}{5}\right)^2} = \sin \alpha = -\frac{3}{5}$.

Chọn đáp án (A) □

CÂU 11. Cho $\tan a = 2$. Khi đó, giá trị $A = \frac{1}{\cos^2 a} + \frac{\cos a + \sin a}{\cos a - \sin a} - 5$ bằng

- (A) $A = -5$. (B) $A = -4$. (C) $A = -3$. (D) $A = -2$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{\cos^2 a} + \frac{\cos a + \sin a}{\cos a - \sin a} - 5 \\ &= 1 + \tan^2 a + \frac{\cos a + \sin a}{\cos a - \sin a} - 5 \\ &= 1 + \tan^2 a + \frac{\cos a}{\cos a - \sin a} - 5 \\ &= 1 + \tan^2 a + \frac{1 + \tan a}{1 - \tan a} - 5 \\ &= 1 + 4 + \frac{1 + 2}{1 - 2} - 5 = -3. \end{aligned}$$

Chọn đáp án (C) □

CÂU 12. Cho $\cot a = 4 \tan a$ và $a \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$. Khi đó $\sin a$ bằng

- (A) $-\frac{\sqrt{5}}{5}$. (B) $\frac{1}{2}$. (C) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$. (D) $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

Lời giải.

Từ giả thiết ta có

$$\cot^2 a = 4 \tan a \cdot \cot a = 4 \Rightarrow \sin^2 a = \frac{1}{1 + \cot^2 a} = \frac{1}{5} \Rightarrow \sin a = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Chọn đáp án (D).

CÂU 13. Cho $\tan \alpha = -2$. Giá trị của biểu thức $P = \frac{-\sin \alpha + 4 \cos \alpha}{\sin \alpha + 3 \cos \alpha}$ bằng

- (A) 6. (B) 2. (C) 3. (D) 12.

Lời giải.

$$P = \frac{-\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + 4}{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + 3} = \frac{-\tan \alpha + 4}{\tan \alpha + 3} = \frac{2 + 4}{-2 + 3} = 6.$$

Chọn đáp án (A).

CÂU 14. Cho $\sin a + 2 \cos a = 0$ và $a \in \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$. Khi đó $\cos a$ bằng

- (A) $-\frac{\sqrt{5}}{5}$. (B) $\frac{1}{2}$. (C) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$. (D) $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

Lời giải.

Ta có $\sin a + 2 \cos a = 0 \Leftrightarrow \sin a = -2 \cos a \Leftrightarrow \tan a = -2$.

$$\begin{aligned} \cos^2 a &= \frac{1}{1 + \tan^2 a} = \frac{1}{1 + (-2)^2} = \frac{1}{5} \\ \Rightarrow \cos a &= -\frac{\sqrt{5}}{5} \text{ (vì } \frac{3\pi}{2} < a < 2\pi). \end{aligned}$$

Chọn đáp án (A).

CÂU 15. Cho $\tan x = 2$. Tính $A = \frac{\sin^2 x - 2 \sin x \cdot \cos x}{\cos^2 x + 3 \cdot \sin^2 x}$.

- (A) $A = 4$. (B) $A = 0$. (C) $A = 1$. (D) $A = 2$.

Lời giải.

Chia cả tử và mẫu của A cho $\cos^2 x$ ta được

$$A = \frac{\tan^2 x - 2 \tan x}{1 + 3 \tan^2 x} = \frac{2^2 - 2 \cdot 2}{1 + 3 \cdot 2} = 0.$$

Chọn đáp án (B).

Dạng 7. Giá trị lượng giác của các góc có liên quan đặc biệt

1. Ví dụ mẫu

VÍ DỤ 1. Không dùng máy tính cầm tay, tính giá trị của biểu thức

$$A = \cos \frac{\pi}{9} - \sin \frac{13\pi}{36} + \cos \frac{5\pi}{36} + \cos \frac{8\pi}{9} - \cos \pi.$$

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} A &= \cos \frac{\pi}{9} - \sin \frac{13\pi}{36} + \cos \frac{5\pi}{36} + \cos \frac{8\pi}{9} - \cos \pi \\ &= \cos \frac{\pi}{9} - \sin \frac{13\pi}{36} + \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{36}\right) + \cos \left(\pi - \frac{\pi}{9}\right) + 1 \\ &= \cos \frac{\pi}{9} - \sin \frac{13\pi}{36} + \sin \frac{13\pi}{36} - \cos \frac{\pi}{9} + 1 \\ &= 1. \end{aligned}$$

Vậy $A = 1$.

VÍ DỤ 2. Tính giá trị đúng của các biểu thức sau (không dùng máy tính cầm tay).

a) $A = \sin \frac{\pi}{36} + \sin \frac{5\pi}{6} - \sin \frac{35\pi}{36} + \sin \pi$;

b) $B = \cos \frac{\pi}{12} + \cos \frac{7\pi}{36} - \sin \frac{5\pi}{12} - \sin \frac{11\pi}{36}$;

c) $C = \tan \frac{5\pi}{36} \cdot \tan \frac{\pi}{4} \cdot \tan \frac{23\pi}{36}$;

d) $D = \cot \frac{\pi}{18} \cdot \cot \frac{\pi}{6} \cdot \cot \frac{5\pi}{9}$.

Lời giải.

a) $A = \sin \frac{\pi}{36} + \sin \frac{5\pi}{6} - \sin \frac{35\pi}{36} + \sin \pi = \sin \frac{\pi}{36} + \sin \left(\pi - \frac{\pi}{6} \right) - \sin \left(\pi - \frac{\pi}{36} \right) + \sin \pi$
 $= \sin \frac{\pi}{36} + \sin \frac{\pi}{6} - \sin \frac{\pi}{36} + \sin \pi = \sin \frac{\pi}{6} + \sin \pi = \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2}$.

b) $B = \cos \frac{\pi}{12} + \cos \frac{7\pi}{36} - \sin \frac{5\pi}{12} - \sin \frac{11\pi}{36} = \cos \frac{\pi}{12} + \cos \frac{7\pi}{36} - \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12} \right) - \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{7\pi}{36} \right)$
 $= \cos \frac{\pi}{12} + \cos \frac{7\pi}{36} - \cos \frac{\pi}{12} - \cos \frac{7\pi}{36} = 0$.

c) $C = \tan \frac{5\pi}{36} \cdot \tan \frac{\pi}{4} \cdot \tan \frac{23\pi}{36} = \tan \frac{5\pi}{36} \cdot \tan \frac{\pi}{4} \cdot \tan \left(\pi - \frac{13\pi}{36} \right)$
 $= \tan \frac{5\pi}{36} \cdot \tan \frac{\pi}{4} \cdot \left(-\tan \frac{13\pi}{36} \right) = -\tan \frac{5\pi}{36} \cdot \tan \frac{\pi}{4} \cdot \tan \frac{13\pi}{36}$
 $= -\tan \frac{5\pi}{36} \cdot \tan \frac{\pi}{4} \cdot \tan \left(\frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{36} \right) = -\tan \frac{5\pi}{36} \cdot \tan \frac{\pi}{4} \cdot \cot \frac{5\pi}{36}$
 $= -\left(\tan \frac{5\pi}{36} \cdot \cot \frac{5\pi}{36} \right) \tan \frac{\pi}{4} = -1 \cdot 1 = -1$.

d) $D = \cot \frac{\pi}{18} \cdot \cot \frac{\pi}{6} \cdot \cot \frac{5\pi}{9} = \cot \frac{\pi}{18} \cdot \cot \frac{\pi}{6} \cdot \cot \left(\pi - \frac{4\pi}{9} \right)$
 $= \cot \frac{\pi}{18} \cdot \cot \frac{\pi}{6} \cdot \left(-\cot \frac{4\pi}{9} \right) = -\cot \frac{\pi}{18} \cdot \cot \frac{\pi}{6} \cdot \cot \frac{4\pi}{9}$
 $= -\cot \frac{\pi}{18} \cdot \cot \frac{\pi}{6} \cdot \cot \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{18} \right) = -\cot \frac{\pi}{18} \cdot \cot \frac{\pi}{6} \cdot \tan \frac{\pi}{18}$
 $= -\left(\cot \frac{\pi}{18} \cdot \tan \frac{\pi}{18} \right) \cot \frac{\pi}{6} = -1 \cdot \sqrt{3} = -\sqrt{3}$.

2. Bài tập rèn luyện

BÀI TẬP TỰ LUẬN

BÀI 1. Tính $\sin \alpha + \sin \left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right) - \cos \alpha + \cos \left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right)$.

Lời giải.

Ta có $\sin \left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right) = \sin \left(\frac{\pi}{2} - (-\alpha) \right) = \cos(-\alpha) = \cos \alpha$.

$\cos \left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right) = \cos \left(\frac{\pi}{2} - (-\alpha) \right) = \sin(-\alpha) = -\sin \alpha$.

Suy ra $\sin \alpha + \sin \left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right) - \cos \alpha + \cos \left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right) = \sin \alpha + \cos \alpha - \cos \alpha - \sin \alpha = 0$.

BÀI 2. Cho $\cos \alpha = \frac{-3}{7}$, $\left(\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \right)$. Tính $\sin(-\alpha)$.

Lời giải.

Do $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ nên $\sin \alpha > 0$.

Ta có $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, suy ra $\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{9}{49}} = \frac{2\sqrt{10}}{7}$.

Mà $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha = -\frac{2\sqrt{10}}{7}$.

BÀI 3. Với mọi tam giác ABC , chứng minh $\cos \frac{A+B-C}{2} = \sin A$.

Lời giải.

Với mọi tam giác ABC , ta có

$$\cos \frac{A+B-C}{2} = \cos \frac{2A - (A+B+C)}{2} = \cos \frac{2A - 180^\circ}{2} = \cos(A - 90^\circ) = \sin A.$$

BÀI 4. Với mọi $\alpha \in \mathbb{R}$, tính giá trị của biểu thức $\cos \alpha + \cos \left(\alpha + \frac{\pi}{5} \right) + \dots + \cos \left(\alpha + \frac{9\pi}{5} \right)$.

Lời giải.

Áp dụng quan hệ hai cung hơn kém π , ta có

$$\begin{aligned}\cos \left(\alpha + \frac{5\pi}{5} \right) &= -\cos \alpha, \\ \cos \left(\alpha + \frac{6\pi}{5} \right) &= -\cos \left(\alpha + \frac{\pi}{5} \right), \\ \cos \left(\alpha + \frac{7\pi}{5} \right) &= -\cos \left(\alpha + \frac{2\pi}{5} \right), \\ \cos \left(\alpha + \frac{8\pi}{5} \right) &= -\cos \left(\alpha + \frac{3\pi}{5} \right), \\ \cos \left(\alpha + \frac{9\pi}{5} \right) &= -\cos \left(\alpha + \frac{4\pi}{5} \right).\end{aligned}$$

Suy ra $\cos \alpha + \cos \left(\alpha + \frac{\pi}{5} \right) + \dots + \cos \left(\alpha + \frac{9\pi}{5} \right) = 0$.

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

CÂU 1. Trong các đẳng thức sau, đẳng thức nào đúng?

- ☐ A $\sin(180^\circ - a) = -\cos a$. ☐ B $\sin(180^\circ - a) = -\sin a$. ☐ C $\sin(180^\circ - a) = \sin a$. ☐ D $\sin(180^\circ - a) = \cos a$.

Lời giải.

Ta có: $\sin(180^\circ - a) = \sin a$.

Chọn đáp án ☐ C.....

CÂU 2. Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau.

- ☐ A $\tan(\pi - a) = \tan a$. ☐ B $\cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = -\sin a$. ☐ C $\cot\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = -\tan a$. ☐ D $\sin(\pi + a) = \sin a$.

Lời giải.

Ta có $\cot\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = \cot\left(\frac{\pi}{2} - (-a)\right) = \tan(-a) = -\tan a$.

Chọn đáp án ☐ C.....

CÂU 3. Trong các đẳng thức sau, đẳng thức nào sai?

- ☐ A $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$. ☐ B $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$. ☐ C $\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cot x$. ☐ D $\tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cot x$.

Lời giải.

Ta có: $\tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \tan\left(\frac{\pi}{2} - (-x)\right) = \cot(-x) = -\cot x$.

Chọn đáp án ☐ D.....

CÂU 4. Giá trị của $\sin \frac{47\pi}{6}$ là

- ☐ A $\frac{\sqrt{3}}{2}$. ☐ B $\frac{1}{2}$. ☐ C $-\frac{1}{2}$. ☐ D $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải.

Ta có $\sin \frac{47\pi}{6} = \sin\left(8\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\sin \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$.

Chọn đáp án ☐ C.....

CÂU 5. Tính $\cos 18^\circ - \cos 342^\circ$

- ☐ A 1. ☐ B 0. ☐ C $2 \cos 18^\circ$. ☐ D $-2 \cos 18^\circ$.

Lời giải.

Ta có: $342^\circ = -18^\circ + 360^\circ$. Nên $\cos 342^\circ = \cos(-18^\circ) = \cos 18^\circ$.

$\Rightarrow \cos 18^\circ - \cos 342^\circ = \cos 18^\circ - \cos 18^\circ = 0$.

Chọn đáp án ☐ B.....

CÂU 6. Chỉ ra đẳng thức sai trong các đẳng thức sau

- ☐ A $\sin \frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. ☐ B $\cos \frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2}$. ☐ C $\sin \frac{2\pi}{3} = \sin \frac{\pi}{3}$. ☐ D $\cos \frac{2\pi}{3} = \cos \frac{\pi}{3}$.

Lời giải.

Ta có: $\cos \frac{2\pi}{3} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\cos \frac{\pi}{3}$.

Chọn đáp án ☐ D.....

CÂU 7. $\tan \alpha - (-\tan \alpha)$ bằng

- (A) 0. (B) $2 \tan \alpha$. (C) $-2 \tan \alpha$. (D) $\tan 2\alpha$.

Lời giải.

Ta có: $\tan \alpha - (-\tan \alpha) = \tan \alpha + \tan \alpha = 2 \tan \alpha$.

Chọn đáp án (B) □

CÂU 8. Cho tam giác ABC vuông tại A . Khẳng định nào sau đây là **đúng**?

- (A) $\sin \widehat{B} = \sin \widehat{C}$. (B) $\tan \widehat{B} = \sin \widehat{C}$. (C) $\cot \widehat{B} = \tan \widehat{C}$. (D) $\sin \widehat{B} = -\cos \widehat{C}$.

Lời giải.

Vì $\widehat{B} + \widehat{C} = 90^\circ$ nên $\cot \widehat{B} = \tan \widehat{C}$.

Chọn đáp án (C) □

CÂU 9. Cho tam giác ABC . Khẳng định nào sau đây là **sai**?

- (A) $\cos \frac{B+C}{2} = \sin \frac{A}{2}$. (B) $\tan \frac{B+C}{2} = \cos \frac{A}{2}$. (C) $\cot \frac{B+C}{2} = \tan \frac{A}{2}$. (D) $\sin \frac{B+C}{2} = \cos \frac{A}{2}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } A + B + C = \pi \Rightarrow \frac{B+C}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{A}{2} \Rightarrow \begin{cases} \cos \frac{B+C}{2} = \sin \frac{A}{2} \\ \cot \frac{B+C}{2} = \tan \frac{A}{2} \\ \sin \frac{B+C}{2} = \cos \frac{A}{2} \end{cases}$$

Vậy khẳng định “ $\tan \frac{B+C}{2} = \cos \frac{A}{2}$ ” là sai.

Chọn đáp án (B) □

CÂU 10. Cho tam giác ABC . Khẳng định nào sau đây là **sai**?

- (A) $\sin(A+B) = -\sin C$. (B) $\tan(A+B) = -\tan C$. (C) $\cos(A+B) = -\cos C$. (D) $\cot(A+B) = -\cot C$.

Lời giải.

Ta có $\widehat{A} + \widehat{B} = 180^\circ - \widehat{C} \Rightarrow \sin(A+B) = \sin(180^\circ - C) = \sin C$.

Chọn đáp án (A) □

CÂU 11. Cho $\cos x = \frac{1}{3}$. Tính $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 2\cos(-x)$.

- (A) 1. (B) 3. (C) 0. (D) -1.

Lời giải.

Ta có $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 2\cos(-x) = \cos x + 2\cos x = 1$.

Chọn đáp án (A) □

CÂU 12. Cho $\sin \alpha = \frac{4}{5}$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Tính $\cos(\pi + \alpha)$.

- (A) $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$. (B) $\cos \alpha = -\frac{3}{5}$. (C) $\cos \alpha = \frac{3}{4}$. (D) $\cos \alpha = \frac{3}{5}$.

Lời giải.

Ta có $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{9}{25}$.

Vì $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ nên suy ra $\cos \alpha = \frac{3}{5}$.

Mà $\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha = -\frac{3}{5}$

Chọn đáp án (B) □

CÂU 13. Cho $A = \frac{\sin 515^\circ \cos(-475^\circ) + \cot 222^\circ \cot 408^\circ}{\cot 415^\circ \cot(-505^\circ) + \tan 197^\circ \tan 73^\circ}$. Giá trị của A bằng

- (A) $\frac{1}{2} \cos^2 25^\circ$. (B) $-\frac{1}{2} \cos^2 25^\circ$. (C) $\frac{1}{2} \sin^2 25^\circ$. (D) $-\frac{1}{2} \sin^2 25^\circ$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} \sin 515^\circ &= \sin(-25^\circ + 180^\circ + 360^\circ) = -\sin(-25^\circ) = \sin 25^\circ, \\ \cos(-475^\circ) &= \cos(-25^\circ - 90^\circ - 360^\circ) = \sin(-25^\circ) = -\sin 25^\circ, \\ \cot 408^\circ &= \cot(720^\circ - 90^\circ - 222^\circ) = -\tan(-222^\circ) = \tan 222^\circ, \\ \cot(-505^\circ) &= \cot(-415^\circ - 90^\circ) = -\tan(-415^\circ) = \tan 415^\circ, \\ \tan 197^\circ &= \tan(-73^\circ + 90^\circ + 180^\circ) = -\tan(-73^\circ + 90^\circ) = \cot 73^\circ. \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } A = \frac{\sin 25^\circ (-\sin 25^\circ) + \cot 222^\circ \tan 222^\circ}{\cot 415^\circ \tan 415^\circ + \cot 73^\circ \tan 73^\circ} = \frac{-\sin^2 25^\circ + 1}{1 + 1} = \frac{1}{2} \cos^2 25^\circ.$$

Chọn đáp án (A) □

CÂU 14. Cho tam giác ABC không có góc 45° . Mệnh đề nào sau đây là **sai**?

(A) $\sin A = \sin(B + C)$.

(B) $\sin \frac{A+B}{2} = \cos \frac{C}{2}$.

(C) $\cos(3A + B + C) = \cos 2A$.

(D) $\cos \frac{A}{2} = \sin \frac{B+C}{2}$.

☞ **Lời giải.**

Ta có

$$\cos(3A + B + C) = \cos(2A + A + B + C) = \cos(2A + 180^\circ) = -\cos 2A \neq \cos 2A.$$

Chọn đáp án (C) □

CÂU 15. Giá trị biểu thức $\cos^2 1^\circ + \cos^2 2^\circ + \cos^2 3^\circ + \dots + \cos^2 87^\circ + \cos^2 88^\circ + \cos^2 89^\circ$ bằng

(A) $\frac{89}{2}$.

(B) 44.

(C) 45.

(D) $\frac{91}{2}$.

☞ **Lời giải.**

Áp dụng quan hệ hai cung phụ nhau, ta có

$$\cos^2 1^\circ + \cos^2 89^\circ = \cos^2 1^\circ + \sin^2 1^\circ = 1,$$

$$\cos^2 2^\circ + \cos^2 88^\circ = \cos^2 2^\circ + \sin^2 2^\circ = 1,$$

...

$$\cos^2 44^\circ + \cos^2 46^\circ = \cos^2 44^\circ + \sin^2 44^\circ = 1.$$

Suy ra

$$\cos^2 1^\circ + \cos^2 2^\circ + \cos^2 3^\circ + \dots + \cos^2 87^\circ + \cos^2 88^\circ + \cos^2 89^\circ = 44 + \cos^2 45^\circ = \frac{89}{2}.$$

Chọn đáp án (A) □

MỤC LỤC

Bài 1. Giá trị lượng giác của một góc lượng giác

A

Tóm tắt lý thuyết

1

B

Các dạng toán thường gặp

4

Dạng 1.Chuyển đổi đơn vị độ - radian

4

Dạng 2.Số đo của một góc lượng giác

5

Dạng 3.Độ dài của một cung tròn

7

Dạng 4.Biểu diễn góc trên đường tròn lượng giác

9

Dạng 5.Dấu của các giá trị lượng giác

11

Dạng 6.Tính giá trị lượng giác của một góc

12

Dạng 7.Giá trị lượng giác của các góc có liên quan đặc biệt

14

LỜI GIẢI CHI TIẾT

16

Bài 1. Giá trị lượng giác của một góc lượng giác

A

Tóm tắt lý thuyết

16

B

Các dạng toán thường gặp

19

Dạng 1.Chuyển đổi đơn vị độ - radian

19

Dạng 2.Số đo của một góc lượng giác

23

Dạng 3.Độ dài của một cung tròn

26

Dạng 4.Biểu diễn góc trên đường tròn lượng giác

29

Dạng 5.Dấu của các giá trị lượng giác

37

Dạng 6.Tính giá trị lượng giác của một góc

39

Dạng 7.Giá trị lượng giác của các góc có liên quan đặc biệt

43

