

Bài 3. ĐƯỜNG TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

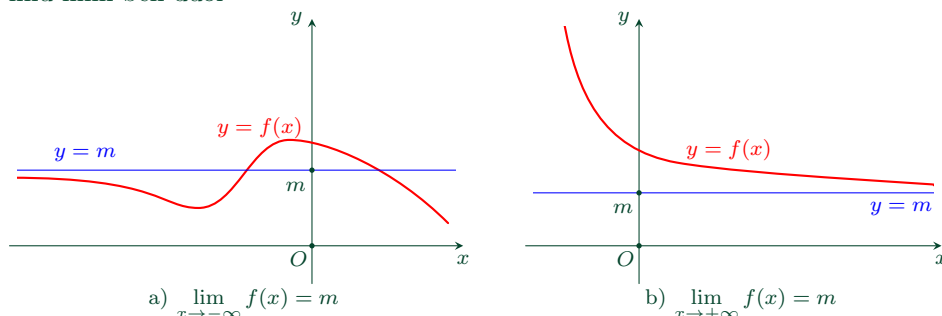
A. LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1. Đường tiệm cận ngang (TCN):

Định nghĩa: Đường thẳng $y = m$ được gọi là một **đường tiệm cận ngang** (hay **tiệm cận ngang**) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = m \text{ hoặc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = m.$$

Đường thẳng $y = m$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x)$ được minh hoạ như hình bên dưới



Các bước tìm TCN:

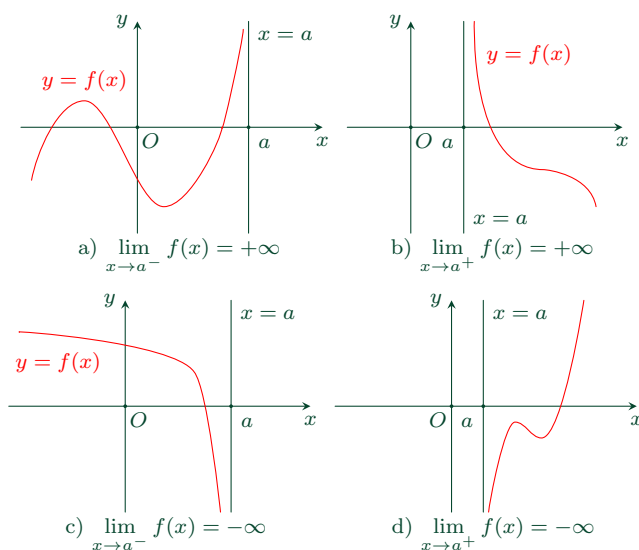
- Tính $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
- Xem ở "vị trí" nào ra kết quả hữu hạn thì ta kết luận có tiệm cận ngang ở "vị trí" đó.

2. Đường tiệm cận đứng (TCD)

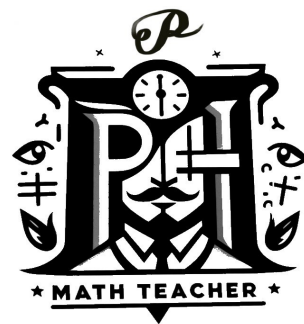
Định nghĩa: Đường thẳng $x = a$ được gọi là một **đường tiệm cận đứng** (hay **tiệm cận đứng**) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau thoả mãn:

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty.$$

Đường thẳng $x = a$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = f(x)$ được minh hoạ như hình bên dưới.



Các bước tìm TCD:



ĐIỂM:

"It's not how much time you have, it's how you use it."

QUICK NOTE

QUICK NOTE

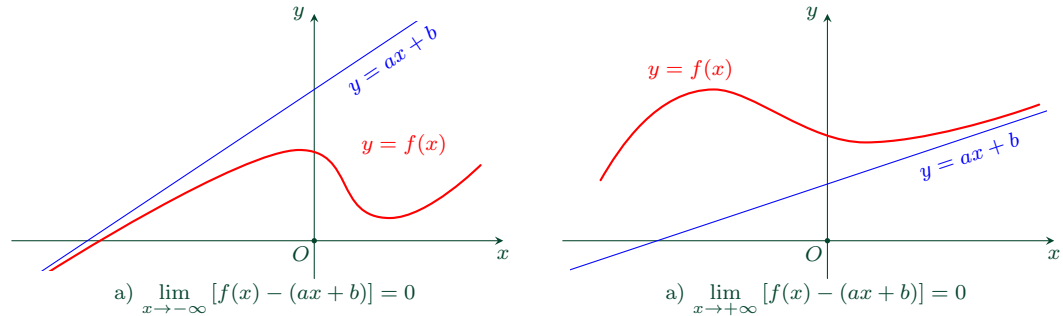
- ① Tìm nghiệm của mẫu, giả sử nghiệm đó là $x = x_0$.
- ② Tính giới hạn một bên tại x_0 . Nếu xảy ra $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \infty$ hoặc $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \infty$ thì ta kết luận $x = x_0$ là đường tiệm cận đứng.

3. Đường tiệm cận xiên

Định nghĩa: Đường thẳng $y = ax + b$, $a \neq 0$, được gọi là **đường tiệm cận xiên** (hay **tiệm cận xiên**) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0 \text{ hoặc } \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0.$$

Đường thẳng $y = ax + b$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = f(x)$ được minh họa như hình bên dưới:



Các bước tìm TCX $y = ax + b$: Ta xác định hệ số của a và b trong 2 trường hợp sau:

- ① Tính $a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$, $b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - ax]$.
- ② Tính $a = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$, $b = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - ax]$.

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Dạng 1. Bài toán tìm tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số

Cho hàm số $y = f(x)$. Để tìm tiệm cận đứng và tiệm cận ngang, ta làm như sau:

✓ Các bước tìm tiệm cận đứng:

- ① Tìm nghiệm của mẫu, giả sử nghiệm đó là $x = x_0$.
- ② Tính giới hạn một bên tại x_0 . Nếu xảy ra $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \infty$ hoặc $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \infty$ thì ta kết luận $x = x_0$ là đường tiệm cận đứng.

✓ Các bước tìm tiệm cận ngang:

- ① Tính $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
- ② Xem ở "vị trí" nào ra kết quả hữu hạn thì ta kết luận có tiệm cận ngang ở "vị trí" đó.

Lưu ý: Đồ thị hàm số $y = \frac{ax + b}{cx + d}$ luôn có TCD $x = -\frac{d}{c}$ và TCN: $y = \frac{a}{c}$.

BÀI TẬP TỰ LUẬN

VÍ DỤ 1. Xác định tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số cho bởi công thức sau:

a) $y = \frac{2x - 1}{x + 1}$; b) $y = \frac{2x - 3}{1 - 2x}$; c) $y = \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 1}$; d) $y = \frac{2x - 1}{x^2 - 3x + 2}$.

QUICK NOTE

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.

CÂU 1. Đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{2x-4}{x+2}$ là

- (A) $y = 2$. (B) $x = 2$. (C) $x = -2$. (D) $y = -2$.

CÂU 2. Tìm tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{x+1}$.

- (A) $y = -2$. (B) $x = -2$. (C) $y = 2$. (D) $x = 1$.

CÂU 3. Đường thẳng $y = 3$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số nào sau đây?

- (A) $y = \frac{1-3x}{2+x}$. (B) $y = \frac{x^2+3x+2}{x-2}$. (C) $y = \frac{1+3x}{1+x}$. (D) $y = \frac{3x^2+2}{2-x}$.

CÂU 4. Hàm số nào có đồ thị nhận đường thẳng $x = 2$ làm đường tiệm cận đứng?

- (A) $y = x - 2 + \frac{1}{x+1}$. (B) $y = \frac{1}{x+1}$.
(C) $y = \frac{2}{x+2}$. (D) $y = \frac{5x}{2-x}$.

CÂU 5. Đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{3x+1}{x-2}$ là đường thẳng

- (A) $x = -2$. (B) $x = 2$. (C) $y = 3$. (D) $y = -\frac{1}{2}$.

CÂU 6. Đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{x^2+4x-5}$ có phương trình là

- (A) $x = -1$. (B) $y = 1; y = -5$. (C) $x = 1; x = -5$. (D) $x = \pm 5$.

CÂU 7. Tìm số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2-3x+2}{x^2-4}$.

- (A) 1. (B) 0. (C) 2. (D) 3.

CÂU 8. Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{3}{x-2}$ là

- (A) 1. (B) 2. (C) 0. (D) 3.

CÂU 9. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong (C) và các giới hạn $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$. Hỏi mệnh đề nào sau đây đúng?

- (A) Đường thẳng $y = 2$ là tiệm cận ngang của (C).
(B) Đường thẳng $y = 1$ là tiệm cận ngang của (C).
(C) Đường thẳng $x = 2$ là tiệm cận ngang của (C).
(D) Đường thẳng $x = 2$ là tiệm cận đứng của (C).

CÂU 10. Số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x+9}-3}{x^2+x}$ là

- (A) 3. (B) 2. (C) 0. (D) 1.

CÂU 11.

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$ liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như hình vẽ. Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số là

- (A) 1. (B) 2.
(C) 3. (D) 4.

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'	-	-	0	+	+
y	-2 ↘ $-\infty$	$+\infty$ ↘ 1	$+\infty$ ↗ $+\infty$	$+\infty$ ↗ $-\infty$	-2

QUICK NOTE

CÂU 12.

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như hình bên. Chọn khẳng định đúng.

- A** Đồ thị hàm số có đúng một tiệm cận ngang.
B Đồ thị hàm số có hai tiệm cận ngang.
C Đồ thị hàm số có đúng một tiệm cận đứng.
D Đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng và tiệm cận ngang.

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
y'	-	+	0	-
y	$+\infty$ ↘ -1		2 ↗ $-\infty$ ↘ $-\infty$	

CÂU 13.

Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình bên. Hỏi đồ thị hàm số đã cho có bao nhiêu đường tiệm cận?

- A** 2. **B** 3. **C** 4. **D** 1.

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
y'			+	-
y			2 ↗ $-\infty$	1 ↘ 0

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.

CÂU 14. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình bên. Xét tính đúng, sai của các khẳng định sau:

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
y'	-	-	0	+
y	2 ↘ $-\infty$	$+\infty$ ↘ 2	$+\infty$ ↗ $+\infty$	

Mệnh đề	Đ	S
a) $f(-5) < f(4)$.		
b) Hàm số có giá trị nhỏ nhất bằng 2.		
c) Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = 0$.		
d) Đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.		

CÂU 15. Cho hàm số $y = \frac{-4x + 5}{2x + 3}$ có đồ thị (C). Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

Mệnh đề	Đ	S
a) Hàm số không có cực trị.		
b) Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = -3$.		
c) Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y = -2$.		
d) Các đường tiệm cận của đồ thị tạo với hai trục tọa độ một hình chữ nhật có diện tích bằng 3.		

Dạng 2. Bài toán tìm tiệm cận đứng và tiệm cận xiên của đồ thị hàm số

✓ **Các bước tìm TCX $y = ax + b$:** Ta xác định hệ số của a và b trong 2 trường hợp sau:

① Tính $a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$, $b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - ax]$.

② Tính $a = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$, $b = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - ax]$.

✓ **Lưu ý:**

① Nếu $a = 0$ thì tiệm cận xiên chính là tiệm cận ngang.

② Đối với hàm số phân thức $f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{mx + n}$, ta có thể chia đa thức, biến đổi về dạng

$$f(x) = a'x + b' + \frac{e}{mx + n}, \text{ với } e \neq 0$$

Suy ra $y = a'x + b'$ là đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số.

BÀI TẬP TỰ LUẬN

VÍ DỤ 1. Tìm các tiệm cận đứng và tiệm cận xiên của đồ thị hàm số sau:

a) $y = \frac{x^2 + 2}{2x - 4}$;

b) $y = \frac{2x^2 - 3x - 6}{x + 2}$;

c) $y = \frac{2x^2 + 9x + 11}{2x + 5}$.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.

CÂU 1. Đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = f(x) = 2x - 1 - \frac{1}{x + 1}$ có phương trình là

- (A) $y = x + 1$. (B) $y = 2x - 1$. (C) $y = x - 1$. (D) $y = 2x + 1$.

CÂU 2. Đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = f(x) = x + 3 + \frac{1}{2x + 1}$ có phương trình là

- (A) $y = 2x + 1$. (B) $y = x - 3$. (C) $y = x + 3$. (D) $y = 2x - 1$.

CÂU 3. Tìm tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = f(x) = \frac{x^2 + 3x}{x - 2}$.

- (A) $y = 2x - 5$. (B) $y = x - 2$. (C) $y = x + 5$. (D) $y = x - 5$.

CÂU 4. Tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 + 2x - 2}{x + 2}$ là

- (A) $y = -2$. (B) $y = 1$. (C) $y = x + 2$. (D) $y = x$.

CÂU 5. Tìm tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 1}{x - 2}$.

- (A) $y = x + 1$. (B) $y = -3x + 1$. (C) $y = x - 2$. (D) $y = x - 1$.

CÂU 6. Đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = \frac{2x^2 - 3x}{x + 5}$ đi qua điểm nào sau đây?

- (A) $(5; 3)$. (B) $(-4; -5)$. (C) $(6; -1)$. (D) $(2; -10)$.

CÂU 7. Giao điểm của đường tiệm cận đứng và đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = \frac{2x^2 - 3x + 2}{x - 1}$ là

- (A) $(1; 2)$. (B) $(1; 1)$. (C) $(1; -1)$. (D) $(1; 0)$.

QUICK NOTE

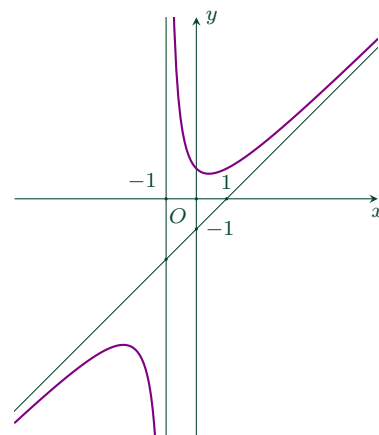
QUICK NOTE

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.

CÂU 8.

Cho hàm số $y = f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{dx + e}$ có đồ thị như hình bên.

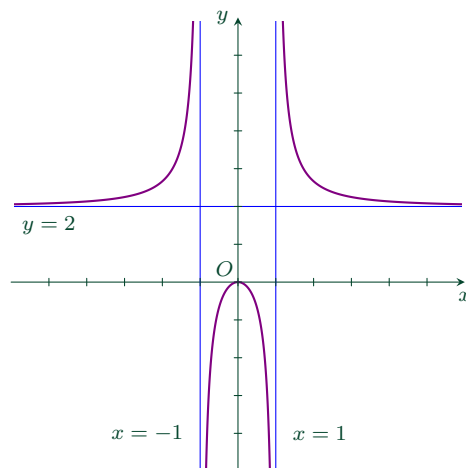
Mệnh đề	Đ	S
a) Tập xác định của hàm số là \mathbb{R} .		
b) Hàm số có hai điểm cực trị.		
c) Đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng là $x = 0$.		
d) Đồ thị hàm số có đường tiệm cận xiên là $y = x + 1$.		



CÂU 9.

Cho đồ thị của hàm số $y = f(x) = \frac{2x^2}{x^2 - 1}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

Mệnh đề	Đ	S
a) Đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị.		
b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$; $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$.		
c) Đồ thị hàm số có 3 đường tiệm cận đứng $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$.		
d) Đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận ngang $y = 2$ và $y = 0$.		



Dạng 3. Bài toán về đường tiệm cận có chứa tham số

BÀI TẬP TỰ LUẬN

VÍ DỤ 1. Tìm tham số m để đồ thị hàm số

- a) $y = \frac{3x - 1}{x - m}$ có đường tiệm cận đứng là $x = 5$.
- b) $y = \frac{(m + 1)x - 5m}{2x - m}$ có tiệm cận ngang là đường thẳng $y = 1$.

VÍ DỤ 2. Tìm m để đồ thị hàm số

- a) $y = \frac{x - 2}{x^2 - mx + 1}$ có hai đường tiệm cận đứng.
- b) $y = \frac{2x^2 - 3x + m}{x - m}$ có đường tiệm cận xiên.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.

QUICK NOTE

CÂU 1. Tìm tất cả các giá trị của m để đồ thị hàm số $y = \frac{mx+2}{x-5}$ có đường tiệm cận ngang đi qua điểm $A(1;3)$.

- ☐ A $m = -3$. ☐ B $m = 1$. ☐ C $m = -1$. ☐ D $m = 3$.

CÂU 2. Tìm tham số thực m để đồ thị hàm số $y = \frac{mx+3}{x-m}$ có tiệm cận đứng là đường $x = 1$, tiệm cận ngang là đường $y = 1$.

- ☐ A $m = 1$. ☐ B $m = 2$. ☐ C $m = -1$. ☐ D $m = 3$.

CÂU 3. Biết rằng hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{x-m}$ (với m là tham số) tạo với hai trục tọa độ một hình chữ nhật có diện tích bằng 2. Giá trị của m là

- ☐ A $m = \pm 2$. ☐ B $m = -1$. ☐ C $m = 2$. ☐ D $m = \pm 1$.

CÂU 4. Tìm giá trị của m để đồ thị hàm số $y = \frac{2x^2-5x+m}{x-m}$ có tiệm cận đứng.

- ☐ A $\begin{cases} m = 0 \\ m = 2 \end{cases}$. ☐ B $m \neq 0$. ☐ C $m \neq 2$. ☐ D $\begin{cases} m \neq 0 \\ m \neq 2 \end{cases}$.

CÂU 5. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{x-4}{x^2-mx+4}$ có hai đường tiệm cận đứng?

- ☐ A $m \in (-\infty; -4] \cup [4; +\infty)$. ☐ B $m \neq 5$.
☐ C $m \in (-\infty; -4) \cup (4; +\infty) \setminus \{5\}$. ☐ D $m \in (-\infty; -4) \cup (4; +\infty)$.

CÂU 6. Cho hàm số $y = \frac{2x^2-3x+m}{x-m}$ có đồ thị (C) . Tìm tất cả các giá trị của tham số m để (C) không có tiệm cận đứng.

- ☐ A $m = 0$ hoặc $m = 1$. ☐ B $m = 2$.
☐ C $m = 1$. ☐ D $m = 0$.

CÂU 7. Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để đồ thị hàm số $y = \frac{x-2}{x^2-mx+1}$ có đúng 3 đường tiệm cận.

- ☐ A $\begin{cases} m > 2 \\ m \neq \frac{5}{2} \\ m < -2 \end{cases}$. ☐ B $\begin{cases} m > 2 \\ m < -2 \\ m \neq -\frac{5}{2} \end{cases}$. ☐ C $\begin{cases} m > 2 \\ m < -2 \end{cases}$. ☐ D $-2 < m < 2$.

CÂU 8. Cho hàm số $y = \frac{ax+1}{bx-2}$, xác định a và b để đồ thị của hàm số trên nhận đường thẳng $x = 1$ làm tiệm cận đứng và đường thẳng $y = \frac{1}{2}$ làm tiệm cận ngang.

- ☐ A $\begin{cases} a = -1 \\ b = -2 \end{cases}$. ☐ B $\begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases}$. ☐ C $\begin{cases} a = 2 \\ b = 2 \end{cases}$. ☐ D $\begin{cases} a = 2 \\ b = -2 \end{cases}$.

CÂU 9. Cho hàm số $y = \frac{mx+1}{x+3n+1}$. Đồ thị hàm số nhận trục hoành và trục tung làm tiệm cận ngang và tiệm cận đứng. Tính $m+n$.

- ☐ A $m+n = -\frac{1}{3}$. ☐ B $m+n = \frac{1}{3}$. ☐ C $m+n = \frac{2}{3}$. ☐ D $m+n = 0$.

CÂU 10. Đồ thị hàm số $y = \frac{(4a-b)x^2+ax+1}{x^2+ax+b-12}$ nhận trục hoành và trục tung làm hai tiệm cận. Tính giá trị của $a+b$.

- ☐ A $a+b = 10$. ☐ B $a+b = 12$. ☐ C $a+b = 18$. ☐ D $a+b = 15$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.

CÂU 11. Cho hàm số $y = \frac{mx^2+6x-2}{x+2}$, với m là tham số.

Mệnh đề	Đ	S
a) Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$.		

QUICK NOTE

b) Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang khi $m > 0$.

c) Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng khi $m \neq 0$.

d) Tập hợp tất cả giá trị của m để đồ thị có hai đường tiệm cận là $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{7}{2} \right\}$.

Dạng 4. Tìm các đường tiệm cận đồ thị hàm ẩn

VÍ DỤ 1. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ sau

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
y'	$+$	0	$-$	$+$
y	1	4	-5	$+\infty$

Tìm TCD, TCN của đồ thị hàm số

a) $y = \frac{2}{f(x) - 3}$

b) $y = \frac{-3}{f(x) + 2}$

c) $y = \frac{x - 2}{f(x) + 5}$

d) $y = \frac{x + 1}{f(x) - 4}$

e) $y = \frac{2}{f(x^2) + 3}$

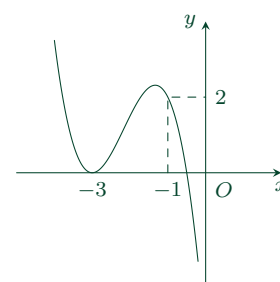
f) $y = \frac{4f(x) - 5}{3f(x) + 1}$

VÍ DỤ 2.

Cho hàm bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Tìm số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số

a) $y = \frac{\sqrt{x+3}}{(x-1)f(x)}$

b) $g(x) = \frac{(x^2 + 4x + 3)\sqrt{x^2 + x}}{x[f^2(x) - 2f(x)]}$



BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

CÂU 1. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình bên. Đồ thị hàm số $y = \frac{-5}{f(x) + 4}$ có bao nhiêu tiệm cận đứng?

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$
y'	$+$	0	$-$	$+$
y	-4	3	-5	$+\infty$

A 1.

B 3.

C 2.

D 4.

CÂU 2. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình bên. Đồ thị hàm số $y = \frac{x+2}{2f(x)-1}$ có bao nhiêu tiệm cận đứng?

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	0	$-\frac{5}{3}$	0	$-\infty$

QUICK NOTE

- (A) 1. (B) 3. (C) 2. (D) 0.

CÂU 3. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình bên. Đồ thị hàm số $y = \frac{1}{2f(x) - 3}$ có bao nhiêu tiệm cận đứng?

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$	
y'	+	0	-	0	+
y	$-\infty$	5	-1	$+\infty$	

- (A) 1. (B) 3. (C) 2. (D) 0.

CÂU 4. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình bên. Đồ thị hàm số $y = \frac{x}{f(x) - 3}$ có bao nhiêu tiệm cận đứng?

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$	0	$+$
y	$+\infty$	0	3	0	$+\infty$

- (A) 1. (B) 3. (C) 2. (D) 4.

CÂU 5. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình bên. Đồ thị hàm số $y = \frac{4}{f(x) + 1}$ có tiệm cận ngang là đường thẳng

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	1	4	-5	1	

- (A) $y = 1$. (B) $y = -5$. (C) $y = 2$. (D) $y = 4$.

CÂU 6. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình bên. Đồ thị hàm số $y = \frac{2 - f(x)}{f(x) + 3}$ có tiệm cận ngang là đường thẳng

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
y'	-	0	+	0	-
y	$+\infty$	1	5	$-\infty$	

- (A) $y = 1$. (B) $y = -3$. (C) $y = 2$. (D) $y = -1$.

CÂU 7. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình bên. Đồ thị hàm số $y = \frac{1}{f^2(x) - 4f(x) + 4}$ có bao nhiêu tiệm cận đứng?

x	$-\infty$	2	$+\infty$
y'	-	0	+
y	1	-3	1

- (A) 1. (B) 3. (C) 2. (D) 0.

QUICK NOTE

CÂU 8. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình bên. Đồ thị hàm số $y = \frac{1}{f(3-x)-2}$ có bao nhiêu tiệm cận đứng?

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	3	0	$+\infty$	

- (A) 1. (B) 3. (C) 2. (D) 0.

CÂU 9. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình bên. Đồ thị hàm số $y = \frac{4}{f(x^2)-2}$ có bao nhiêu tiệm cận đứng?

x	$-\infty$	0	3	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$	$-$
y	8	1	4	2

- (A) 5. (B) 3. (C) 2. (D) 4.

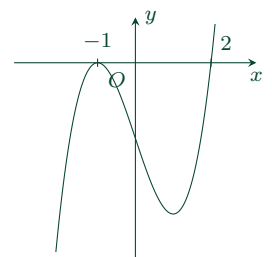
CÂU 10. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình bên. Đồ thị hàm số $y = \frac{2}{f(|x|)-3}$ có bao nhiêu tiệm cận ngang?

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	3	-1	$+\infty$	

- (A) 4. (B) 3. (C) 5. (D) 6.

CÂU 11.

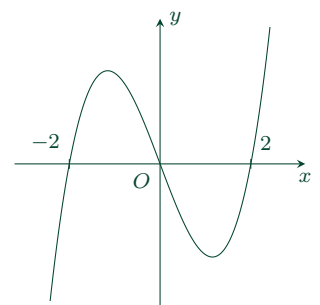
Cho hàm số bậc ba $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên. Đồ thị hàm số $g(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{(x-3) \cdot f(x)}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?



- (A) 5. (B) 2. (C) 4. (D) 3.

CÂU 12.

Đường cong ở hình bên là đồ thị của hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Đồ thị hàm số $y = \frac{(2x+1)\sqrt{x-1}}{x \cdot f(x-2)}$ có tất cả bao nhiêu tiệm cận đứng?

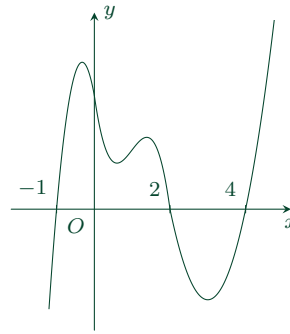


- (A) 1. (B) 3. (C) 4. (D) 2.

CÂU 13.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị cắt trục hoành tại đúng 3 điểm như hình bên. Đồ thị hàm số $y = \frac{(x+2)\sqrt{3-x}}{f(|x|)}$ có tất cả bao nhiêu tiệm cận đứng?

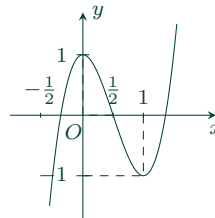
- (A) 1. (B) 3. (C) 4. (D) 2.



CÂU 14.

Đường cong ở hình bên là đồ thị của hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Đồ thị hàm số $y = \frac{(2x+1)\sqrt{1-x}}{f(|x|)}$ có tất cả bao nhiêu tiệm cận đứng?

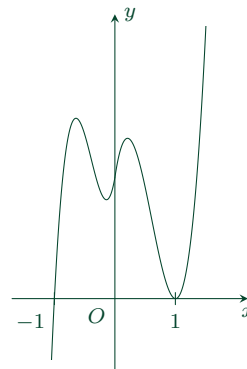
- (A) 1. (B) 3. (C) 4. (D) 2.



CÂU 15.

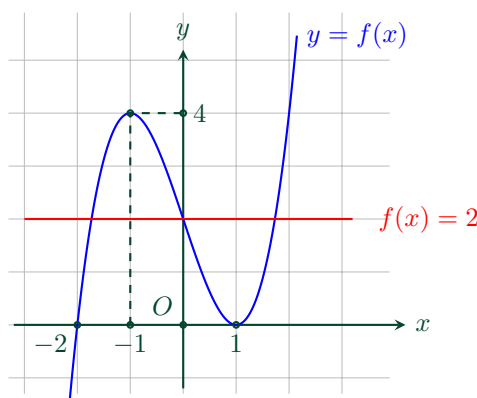
Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ và trục hoành có đúng 2 điểm chung như hình bên. Đồ thị hàm số $y = \frac{(x-1)\sqrt{3-x}}{f(x^2)}$ có tất cả bao nhiêu tiệm cận đứng?

- (A) 1. (B) 3. (C) 4. (D) 2.



CÂU 16. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ. Đồ thị của hàm số $g(x) = \frac{x^2 - x}{f^2(x) - 2f(x)}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

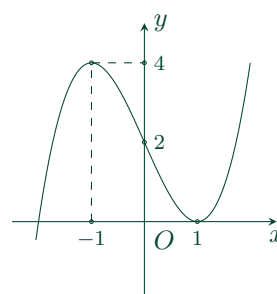
- (A) 2. (B) 3. (C) 4. (D) 5.



CÂU 17.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên \mathbb{R} . Đồ thị hàm $f(x)$ như hình vẽ. Số đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 - 1}{f^2(x) - 4f(x)}$ bằng

- (A) 3. (B) 1. (C) 2. (D) 4.



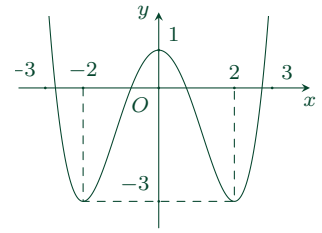
QUICK NOTE

QUICK NOTE

CÂU 18.

Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình bên. Số đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{(x^2 - 4)(x^2 + 2x)}{[f(x)]^2 + 2f(x) - 3}$ là

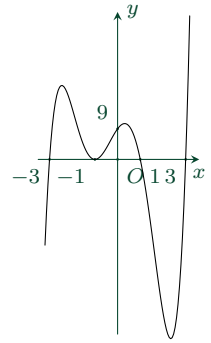
- (A) 4. (B) 5. (C) 3. (D) 2.



CÂU 19.

Cho hàm số $f(x) = (x+3)(x+1)^2(x-1)(x-3)$ có đồ thị như hình vẽ. Đồ thị hàm số $g(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{f^2(x) - 9f(x)}$ có bao nhiêu tiệm cận đứng và tiệm cận ngang?

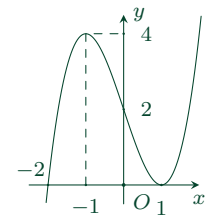
- (A) 3. (B) 4. (C) 9. (D) 8.



CÂU 20.

Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, có đồ thị như hình vẽ. Số đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 + x - 2}{f^2(x) - f(x)}$ là

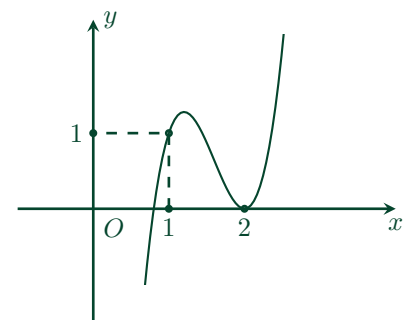
- (A) 3. (B) 2. (C) 4. (D) 5.



CÂU 21.

Cho hàm số bậc ba $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Hỏi đồ thị hàm số $g(x) = \frac{(x^2 - 3x + 2)\sqrt{x-1}}{x[f^2(x) - f(x)]}$ có bao nhiêu tiệm cận đứng?

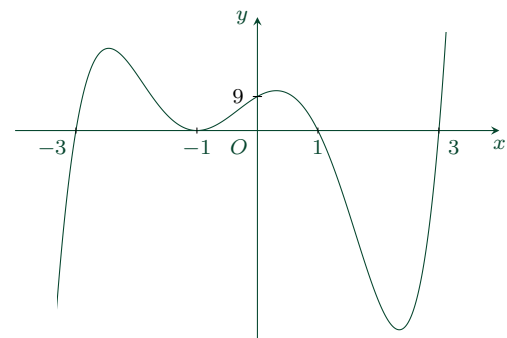
- (A) 5. (B) 6. (C) 3. (D) 4.



CÂU 22.

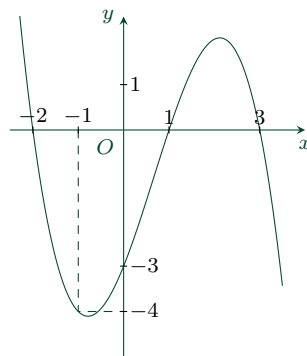
Cho hàm số $f(x) = (x+3)(x+1)^2(x-1)(x-3)$ có đồ thị như hình vẽ. Đồ thị hàm số $g(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{f^2(x) - 9f(x)}$ có bao nhiêu tiệm cận đứng và tiệm cận ngang?

- (A) 3. (B) 4. (C) 9. (D) 8.



CÂU 23.

Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Đồ thị hàm số $g(x) = \frac{x\sqrt{x+1}}{f(x)[f^2(x)-16]}$ có bao nhiêu tiệm cận đứng?

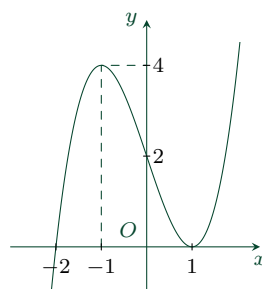


QUICK NOTE

CÂU 24.

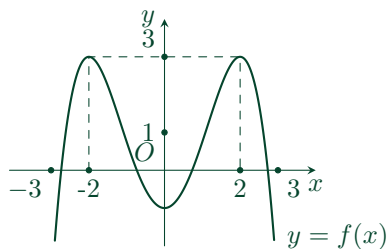
Cho $y = f(x)$ là hàm số đa thức có đồ thị như hình vẽ bên. Đặt

$g(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{[f(x)]^2 - 2f(x)}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?



CÂU 25.

Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình bên. Số đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{(x^2 - 4)(x^2 + 2x)}{[f(x)]^2 - 4f(x) + 3}$ là



LỜI GIẢI CHI TIẾT

Bài 3. ĐƯỜNG TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

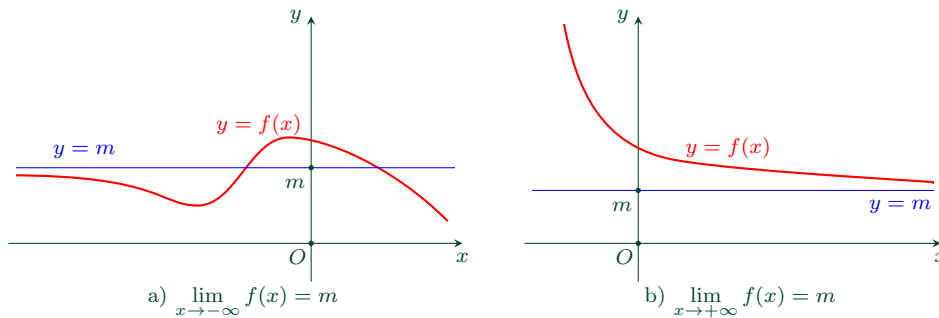
A. LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1. Đường tiệm cận ngang (TCN):

Định nghĩa: Đường thẳng $y = m$ được gọi là một **đường tiệm cận ngang** (hay **tiệm cận ngang**) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = m \text{ hoặc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = m.$$

Đường thẳng $y = m$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x)$ được minh họa như hình bên dưới



Các bước tìm TCN:

① Tính $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

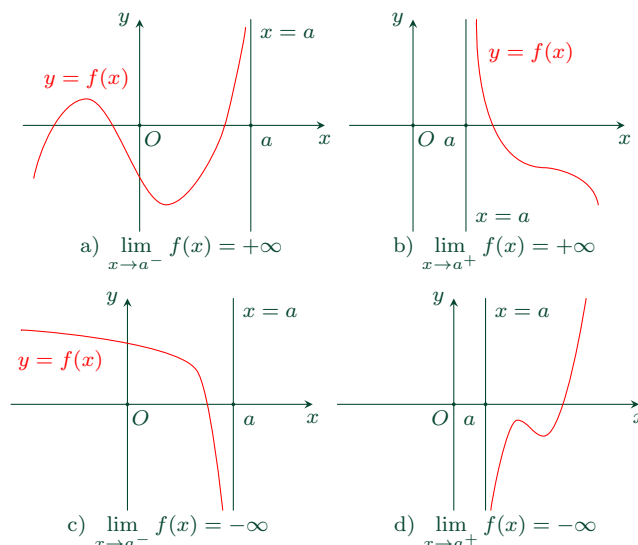
② Xem ở "vị trí" nào ra kết quả hữu hạn thì ta kết luận có tiệm cận ngang ở "vị trí" đó.

2. Đường tiệm cận đứng (TCD)

Định nghĩa: Đường thẳng $x = a$ được gọi là một **đường tiệm cận đứng** (hay **tiệm cận đứng**) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau thỏa mãn:

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty.$$

Đường thẳng $x = a$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = f(x)$ được minh họa như hình bên dưới.



Các bước tìm TCD:

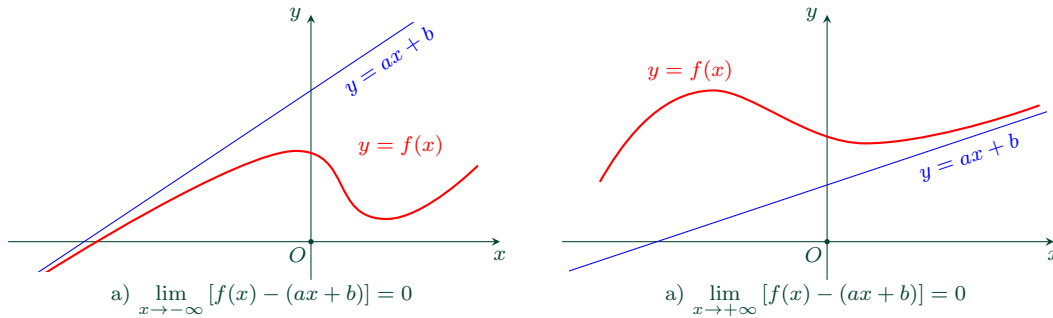
- ① Tìm nghiệm của mẫu, giả sử nghiệm đó là $x = x_0$.
- ② Tính giới hạn một bên tại x_0 . Nếu xảy ra $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \infty$ hoặc $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \infty$ thì ta kết luận $x = x_0$ là đường tiệm cận đứng.

3. Đường tiệm cận xiên

Định nghĩa: Đường thẳng $y = ax + b$, $a \neq 0$, được gọi là **đường tiệm cận xiên** (hay **tiệm cận xiên**) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0 \text{ hoặc } \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0.$$

Đường thẳng $y = ax + b$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = f(x)$ được minh họa như hình bên dưới:



Các bước tìm TCX $y = ax + b$: Ta xác định hệ số của a và b trong 2 trường hợp sau:

- ① Tính $a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$, $b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - ax]$.
- ② Tính $a = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$, $b = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - ax]$.

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Dạng 1. Bài toán tìm tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số

Cho hàm số $y = f(x)$. Để tìm tiệm cận đứng và tiệm cận ngang, ta làm như sau:

✓ Các bước tìm tiệm cận đứng:

- ① Tìm nghiệm của mẫu, giả sử nghiệm đó là $x = x_0$.
- ② Tính giới hạn một bên tại x_0 . Nếu xảy ra $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \infty$ hoặc $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \infty$ thì ta kết luận $x = x_0$ là đường tiệm cận đứng.

✓ Các bước tìm tiệm cận ngang:

- ① Tính $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
- ② Xem ở "vị trí" nào ra kết quả hữu hạn thì ta kết luận có tiệm cận ngang ở "vị trí" đó.

Lưu ý: Đồ thị hàm số $y = \frac{ax + b}{cx + d}$ luôn có TCD $x = -\frac{d}{c}$ và TCN: $y = \frac{a}{c}$.

BÀI TẬP TỰ LUẬN

VÍ DỤ 1. Xác định tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số cho bởi công thức sau:

- a) $y = \frac{2x - 1}{x + 1}$; b) $y = \frac{2x - 3}{1 - 2x}$; c) $y = \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 1}$; d) $y = \frac{2x - 1}{x^2 - 3x + 2}$.

Lời giải.

- a) Xét $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{2x-1}{x+1} = -\infty$ (hoặc $\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{2x-1}{x+1} = +\infty$) nên đường thẳng $x = -1$ là tiệm cận đứng.
 Xét $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x-1}{x+1} = 2$ nên đường thẳng $y = 2$ là tiệm cận ngang.

b) Ta có

$$\begin{aligned} \textcircled{A} \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} y &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x-3}{1-2x} = -1 \text{ suy ra } y = -1 \text{ là tiệm cận ngang.} \\ \textcircled{B} \quad \begin{cases} \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} \frac{2x-3}{1-2x} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} \frac{2x-3}{1-2x} = -\infty \end{cases} &\text{ suy ra } x = \frac{1}{2} \text{ là tiệm cận đứng.} \end{aligned}$$

c) Điều kiện xác định: $\begin{cases} x \neq -1 \\ x \neq 1. \end{cases}$

$$\begin{aligned} \textcircled{A} \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2-5x+4}{x^2-1} &= 1 \\ \textcircled{B} \quad \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{x^2-5x+4}{x^2-1} &= +\infty \\ \textcircled{C} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-5x+4}{x^2-1} &= -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

Vậy đồ thị hàm số có một tiệm cận ngang $y = 1$ và một tiệm cận đứng $x = -1$.

d) Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{1; 2\}$.
 Ta có

$$\begin{aligned} \textcircled{A} \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} y &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x-1}{x^2-3x+2} = 0 \text{ nên } y = 0 \text{ là đường tiệm cận ngang.} \\ \textcircled{B} \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} y &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x-1}{x^2-3x+2} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x-1}{(x-1)(x-2)} = +\infty \text{ và } \lim_{x \rightarrow 1^+} y = -\infty \text{ nên } x = 1 \text{ là đường tiệm cận đứng.} \\ \textcircled{C} \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} y &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2x-1}{x^2-3x+2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2x-1}{(x-1)(x-2)} = -\infty \text{ và } \lim_{x \rightarrow 2^+} y = +\infty \text{ nên } x = 2 \text{ là đường tiệm cận} \\ &\text{đứng.} \end{aligned}$$

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.

CÂU 1. Đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{2x-4}{x+2}$ là

- ☐ A $y = 2$. ☐ B $x = 2$. ☐ C $x = -2$. ☐ D $y = -2$.

Lời giải.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x-4}{x+2} = 2 \text{ và } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-4}{x+2} = 2 \text{ nên hàm số có tiệm cận ngang là } y = 2.$$

Chọn đáp án ☐ A

CÂU 2. Tìm tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{x+1}$.

- ☐ A $y = -2$. ☐ B $x = -2$. ☐ C $y = 2$. ☐ D $x = 1$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x+1}{-x+1} = -2.$$

Chọn đáp án ☐ A

CÂU 3. Đường thẳng $y = 3$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số nào sau đây?

- ☐ A $y = \frac{1-3x}{2+x}$. ☐ B $y = \frac{x^2+3x+2}{x-2}$. ☐ C $y = \frac{1+3x}{1+x}$. ☐ D $y = \frac{3x^2+2}{2-x}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1+3x}{1+x} = 3 \text{ nên } y = 3 \text{ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số } y = \frac{1+3x}{1+x}.$$

Chọn đáp án ☐ C

CÂU 4. Hàm số nào có đồ thị nhận đường thẳng $x = 2$ làm đường tiệm cận đứng?

- (A) $y = x - 2 + \frac{1}{x+1}$. (B) $y = \frac{1}{x+1}$. (C) $y = \frac{2}{x+2}$. (D) $y = \frac{5x}{2-x}$.

Lời giải.

Xét hàm số $y = \frac{5x}{2-x}$

Ta có $\lim_{x \rightarrow 2^+} 5x = 10 > 0$; $\lim_{x \rightarrow 2^+} (2-x) = 0^+$ và $x-2 < 0$ khi $x > 2$ suy ra $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{5x}{2-x} = -\infty$.

Vậy đồ thị hàm số $y = \frac{5x}{2-x}$ nhận đường thẳng $x = 2$ làm tiệm cận đứng.

Chọn đáp án (D) □

CÂU 5. Đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{3x+1}{x-2}$ là đường thẳng

- (A) $x = -2$. (B) $x = 2$. (C) $y = 3$. (D) $y = -\frac{1}{2}$.

Lời giải.

Ta có: $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3x+1}{x-2} = +\infty$.

Chọn đáp án (B) □

CÂU 6. Đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{x^2+4x-5}$ có phương trình là

- (A) $x = -1$. (B) $y = 1; y = -5$. (C) $x = 1; x = -5$. (D) $x = \pm 5$.

Lời giải.

Ta có $\lim_{x \rightarrow 1^+} y = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} y = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 5^+} y = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 5^-} y = -\infty$.

Vậy đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận đứng là $x = 1$ và $x = -5$.

Chọn đáp án (C) □

CÂU 7. Tìm số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2-3x+2}{x^2-4}$.

- (A) 1. (B) 0. (C) 2. (D) 3.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{\pm 2\}$.

Ta có $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = 1 \Rightarrow$ đồ thị hàm số có 1 tiệm cận ngang là $y = 1$.

Ta lại có $\lim_{x \rightarrow 2} y = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-1}{x+2} = \frac{1}{4}$ và $\lim_{x \rightarrow -2} y = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x-1}{x+2} = -\infty$ nên đồ thị hàm số có 1 tiệm cận đứng là $x = -2$.

Vậy đồ thị hàm số đã cho có 2 đường tiệm cận.

Chọn đáp án (C) □

CÂU 8. Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{3}{x-2}$ là

- (A) 1. (B) 2. (C) 0. (D) 3.

Lời giải.

Tiệm cận đứng $x = 2$.

Tiệm cận ngang $y = 0$.

Chọn đáp án (B) □

CÂU 9. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong (C) và các giới hạn $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$. Hỏi mệnh đề nào sau đây đúng?

- (A) Đường thẳng $y = 2$ là tiệm cận ngang của (C). (B) Đường thẳng $y = 1$ là tiệm cận ngang của (C).
(C) Đường thẳng $x = 2$ là tiệm cận ngang của (C). (D) Đường thẳng $x = 2$ là tiệm cận đứng của (C).

Lời giải.

Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2 \Rightarrow y = 2$ là tiệm cận ngang của (C).

Chọn đáp án (A) □

CÂU 10. Số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x+9}-3}{x^2+x}$ là

- (A) 3. (B) 2. (C) 0. (D) 1.

Lời giải.

Tập xác định $\mathcal{D} = [-9; +\infty) \setminus \{-1; 0\}$.

Ta có
$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{\sqrt{x+9}-3}{x^2+x} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{\sqrt{x+9}-3}{x^2+x} = -\infty \end{cases} \Rightarrow x = -1 \text{ là tiệm cận đứng.}$$

Ngoài ra $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+9}-3}{x^2+x} = \frac{1}{6}$ nên $x = 0$ không thể là một tiệm cận được.

Chọn đáp án **(D)** ☐

CÂU 11.

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$ liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như hình vẽ. Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số là

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'	$-$	$-$	0	$+$	$+$
y	-2 \searrow $-\infty$	$+\infty$ \searrow 1	$+\infty$ \nearrow 1	$+\infty$ \nearrow $-\infty$	-2 \nearrow $-\infty$

- (A)** 1. **(B)** 2. **(C)** 3. **(D)** 4.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên ta có:

$$\lim_{x \rightarrow -1^\pm} f(x) = \pm\infty. \quad \lim_{x \rightarrow 1^\pm} f(x) = \mp\infty.$$

Do đó $x = 1$ và $x = -1$ là các đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Lại có $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = -2$. Do đó $y = -2$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Vậy đồ thị hàm số có 3 đường tiệm cận.

Chọn đáp án **(C)** ☐

CÂU 12.

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như hình bên. Chọn khẳng định đúng.

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
y'	$-$	$+$	0	$-$
y	$+\infty$ \searrow -1	$+\infty$ \nearrow 2	2 \searrow $-\infty$	$-\infty$ \searrow $-\infty$

- (A)** Đồ thị hàm số có đúng một tiệm cận ngang.
(B) Đồ thị hàm số có hai tiệm cận ngang.
(C) Đồ thị hàm số có đúng một tiệm cận đứng.
(D) Đồ thị hàm số không có tiệm đứng và tiệm cận ngang.

Lời giải.

Do $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = -\infty$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = +\infty$ nên đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.

Do $\lim_{x \rightarrow 0^+} y = +\infty$ suy ra $x = 0$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Chọn đáp án **(C)** ☐

CÂU 13.

Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình bên. Hỏi đồ thị hàm số đã cho có bao nhiêu đường tiệm cận?

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
y'		$+$	$-$	
y		$-\infty$ \nearrow 2	2 \searrow 1	0 \searrow 0

- (A)** 2. **(B)** 3. **(C)** 4. **(D)** 1.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên của hàm số, suy ra

✓ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $y = 0$.

✓ $\lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x) = -\infty$, đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x = -2$. Vậy đồ thị hàm số đã cho có 2 đường tiệm cận.

Chọn đáp án **(A)** ☐

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.

CÂU 14. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình bên. Xét tính đúng, sai của các khẳng định sau:

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
y'	$-$	$-$	0	$+$
y	2	$+\infty$	2	$+\infty$

Mệnh đề	Đ	S
a) $f(-5) < f(4)$.	X	
b) Hàm số có giá trị nhỏ nhất bằng 2.		X

Mệnh đề	Đ	S
c) Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = 0$.	X	
d) Đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.		X

Lời giải.

a) Từ bảng biến thiên ta thấy $f(-5) < 2$ và $f(4) > 2$ nên $f(-5) < f(4)$.

b) Do $\lim_{x \rightarrow 0^-} y = -\infty$ nên hàm số không có giá trị nhỏ nhất.

c) Do $\lim_{x \rightarrow 0^-} y = -\infty$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = 0$.

d) Do $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = 2$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y = 2$.

Chọn đáp án ☐ a đúng ☐ b sai ☐ c đúng ☐ d sai

CÂU 15. Cho hàm số $y = \frac{-4x+5}{2x+3}$ có đồ thị (C) . Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

Mệnh đề	Đ	S
a) Hàm số không có cực trị.	X	
b) Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = -3$.		X
c) Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y = -2$.		X
d) Các đường tiệm cận của đồ thị tạo với hai trục tọa độ một hình chữ nhật có diện tích bằng 3.	X	

Lời giải.

Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{3}{2} \right\}$

$\lim_{x \rightarrow (-\frac{3}{2})^+} y = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow (-\frac{3}{2})^-} y = -\infty$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = -\frac{3}{2}$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = -2$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = -2$ nên đồ thị hàm số có một tiệm cận ngang là $y = -2$

Diện tích hình chữ nhật cần tìm là $S = \left| -\frac{3}{2} \right| \cdot |-2| = 3$

Chọn đáp án ☐ a đúng ☐ b sai ☐ c sai ☐ d đúng

Dạng 2. Bài toán tìm tiệm cận đứng và tiệm cận xiên của đồ thị hàm số

✓ **Các bước tìm TCX $y = ax + b$:** Ta xác định hệ số của a và b trong 2 trường hợp sau:

① Tính $a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$, $b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - ax]$.

② Tính $a = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$, $b = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - ax]$.

✓ **Lưu ý:**

① Nếu $a = 0$ thì tiệm cận xiên chính là tiệm cận ngang.

② Đối với hàm số phân thức $f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{mx + n}$, ta có thể chia đa thức, biến đổi về dạng

$$f(x) = a'x + b' + \frac{e}{mx + n}, \text{ với } e \neq 0$$

Suy ra $y = a'x + b'$ là đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số.

BÀI TẬP TỰ LUẬN

VÍ DỤ 1. Tìm các tiệm cận đứng và tiệm cận xiên của đồ thị hàm số sau:

a) $y = \frac{x^2 + 2}{2x - 4};$

b) $y = \frac{2x^2 - 3x - 6}{x + 2};$

c) $y = \frac{2x^2 + 9x + 11}{2x + 5}.$

Lời giải.

a) Hàm số $y = f(x) = \frac{x^2 + 2}{2x - 4}$ có tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

☑ Ta có $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 + 2}{2x - 4} = -\infty; \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 + 2}{2x - 4} = +\infty.$

Suy ra đường thẳng $x = 2$ là một tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

☑ Ta có $a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \frac{2}{x}}{2x - 4} = \frac{1}{2};$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - ax] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + 2}{2x - 4} - \frac{1}{2}x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + 2}{2x - 4} = 1.$$

Ta cũng có $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{2}; \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - \frac{1}{2}x] = 1.$

Do đó, đồ thị hàm số có tiệm cận xiên là đường thẳng $y = \frac{1}{2}x + 1.$

b) Hàm số $y = f(x) = \frac{2x^2 - 3x - 6}{x + 2}$ có tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

☑ Ta có $\lim_{x \rightarrow (-2)^-} \frac{2x^2 - 3x - 6}{x + 2} = -\infty; \lim_{x \rightarrow (-2)^+} \frac{2x^2 - 3x - 6}{x + 2} = +\infty.$

Suy ra đường thẳng $x = -2$ là một tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

☑ Ta có $a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - 3 - \frac{6}{x}}{x + 2} = 2;$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - ax] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x^2 - 3x - 6}{x + 2} - 2x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-7x - 6}{x + 2} = -7.$$

Ta cũng có $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 2; \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - 2x] = -7.$

Do đó, đồ thị hàm số có tiệm cận xiên là đường thẳng $y = 2x - 7.$

c) Hàm số $y = f(x) = \frac{2x^2 + 9x + 11}{2x + 5}$ có tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{5}{2} \right\}.$

☑ Ta có $\lim_{x \rightarrow \left(-\frac{5}{2}\right)^-} \frac{2x^2 + 9x + 11}{2x + 5} = -\infty; \lim_{x \rightarrow \left(-\frac{5}{2}\right)^+} \frac{2x^2 + 9x + 11}{2x + 5} = +\infty.$

Suy ra đường thẳng $x = -\frac{5}{2}$ là một tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

☑ Ta có $a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + 9 + \frac{11}{x}}{2x + 5} = 1;$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - ax] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x^2 + 9x + 11}{2x + 5} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x + 11}{2x + 5} = 2.$$

Ta cũng có $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 1; \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - x] = 2.$

Do đó, đồ thị hàm số có tiệm cận xiên là đường thẳng $y = x + 2.$

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.

CÂU 1. Đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = f(x) = 2x - 1 - \frac{1}{x+1}$ có phương trình là

- (A) $y = x + 1$. (B) $y = 2x - 1$. (C) $y = x - 1$. (D) $y = 2x + 1$.

☞ **Lời giải.**

Do $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (2x - 1)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{x+1} = 0$ nên đường thẳng $y = 2x - 1$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số đã cho.

Chọn đáp án (B) □

CÂU 2. Đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = f(x) = x + 3 + \frac{1}{2x+1}$ có phương trình là

- (A) $y = 2x + 1$. (B) $y = x - 3$. (C) $y = x + 3$. (D) $y = 2x - 1$.

☞ **Lời giải.**

Do $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - (x + 3)] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{2x+1} = 0$ nên đường thẳng $y = x + 3$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số đã cho.

Chọn đáp án (C) □

CÂU 3. Tìm tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = f(x) = \frac{x^2 + 3x}{x-2}$.

- (A) $y = 2x - 5$. (B) $y = x - 2$. (C) $y = x + 5$. (D) $y = x - 5$.

☞ **Lời giải.**

Ta có

$$\textcircled{v} a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 3x}{x(x-2)} = 1$$

$$\textcircled{v} \text{ và } b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x}{x-2} = 5.$$

Vậy đường thẳng $y = x + 5$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số đã cho (khi $x \rightarrow +\infty$).

Tương tự, do $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - x] = 5$ nên đường thẳng $y = x + 5$ cũng là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số đã cho (khi $x \rightarrow -\infty$).

Chọn đáp án (C) □

CÂU 4. Tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 + 2x - 2}{x+2}$ là

- (A) $y = -2$. (B) $y = 1$. (C) $y = x + 2$. (D) $y = x$.

☞ **Lời giải.**

$$\text{Ta có } y = \frac{x^2 + 2x - 2}{x+2} = \frac{x(x+2) - 2}{x+2} = x - \frac{2}{x+2}.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [y - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2}{x+2} = 0 \text{ và } \lim_{x \rightarrow -\infty} [y - x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2}{x+2} = 0.$$

Vậy đồ thị hàm số có tiệm cận xiên là đường thẳng $y = x$.

Chọn đáp án (D) □

CÂU 5. Tìm tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 1}{x-2}$.

- (A) $y = x + 1$. (B) $y = -3x + 1$. (C) $y = x - 2$. (D) $y = x - 1$.

☞ **Lời giải.**

Tập xác định: $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

$$\text{Ta có } a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 3x + 1}{x^2 - 2x} = 1;$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - ax] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 - 3x + 1}{x-2} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x+1}{x-2} = -1.$$

$$\text{Ta cũng có } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 1; \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - x] = -1.$$

Do đó, đồ thị hàm số có tiệm cận xiên là đường thẳng $y = x - 1$.

Chọn đáp án (D) □

CÂU 6. Đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = \frac{2x^2 - 3x}{x + 5}$ đi qua điểm nào sau đây?

(A) (5; 3).

(B) (-4; -5).

(C) (6; -1).

(D) (2; -10).

Lời giải.

Tập xác định: $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-5\}$.

Ta có $a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - 3x}{x^2 + 5x} = 2$;

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - ax] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x^2 - 3x}{x + 5} - 2x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-13x}{x + 5} = -13.$$

Ta cũng có $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 2$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - x] = -13$.

Do đó, đồ thị hàm số có tiệm cận xiên là đường thẳng $y = 2x - 13$. Đường thẳng này qua (6; -1).

Chọn đáp án (C) ☐

CÂU 7. Giao điểm của đường tiệm cận đứng và đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = \frac{2x^2 - 3x + 2}{x - 1}$ là

(A) (1; 2).

(B) (1; 1).

(C) (1; -1).

(D) (1; 0).

Lời giải.

Ta viết lại $y = \frac{2x^2 - 3x + 2}{x - 1} = 2x - 1 + \frac{1}{x - 1}$. Suy ra

- Tiệm cận đứng $x = 1$;
- Tiệm cận ngang $y = 2x - 1$.

Xét hệ $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$

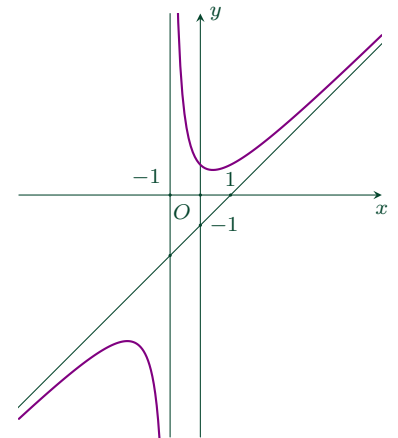
Chọn đáp án (B) ☐

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.

CÂU 8.

Cho hàm số $y = f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{dx + e}$ có đồ thị như hình bên.

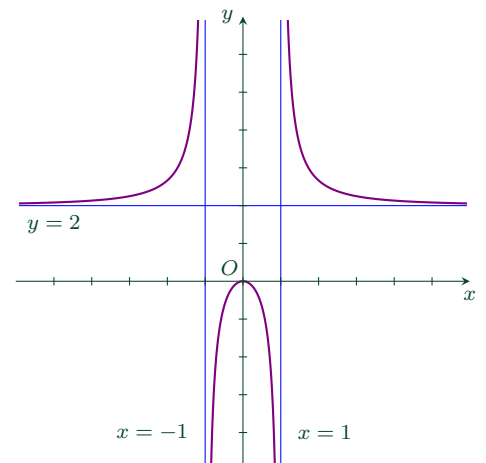
Mệnh đề	Đ	S
a) Tập xác định của hàm số là \mathbb{R} .		X
b) Hàm số có hai điểm cực trị.	X	
c) Đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng là $x = 0$.		X
d) Đồ thị hàm số có đường tiệm cận xiên là $y = x + 1$.		X



CÂU 9.

Cho đồ thị của hàm số $y = f(x) = \frac{2x^2}{x^2 - 1}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

Mệnh đề	Đ	S
a) Đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị.		X
b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$; $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$.		X
c) Đồ thị hàm số có 3 đường tiệm cận đứng $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$.		X
d) Đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận ngang $y = 2$ và $y = 0$.		X



Lời giải.

- a) Đồ thị hàm số có một điểm cực trị $(0; 0)$.
 b) Theo hình vẽ thì $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$; $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$.
 c) Đồ thị hàm số có 2 đường tiệm cận đứng $x = \pm 1$.
 d) Đồ thị hàm số có 1 đường tiệm cận ngang $y = 2$.

Chọn đáp án ☐ a sai ☐ b sai ☐ c sai ☐ d sai ☐

Dạng 3. Bài toán về đường tiệm cận có chứa tham số

BÀI TẬP TỰ LUẬN

VÍ DỤ 1. Tìm tham số m để đồ thị hàm số

- a) $y = \frac{3x-1}{x-m}$ có đường tiệm cận đứng là $x = 5$.
 b) $y = \frac{(m+1)x-5m}{2x-m}$ có tiệm cận ngang là đường thẳng $y = 1$.

Lời giải.

- a) Điều kiện để đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $-3m+1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \frac{1}{3}$.
 Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = m$.
 Theo đề bài ta có $m = 5$ (thỏa mãn).
 b) Điều kiện để đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $-m(m+1)+10m \neq 0$.
 Tiệm cận ngang là $y = \frac{a}{c} = \frac{m+1}{2}$.
 Theo đề bài ta có $\frac{m+1}{2} = 1 \Leftrightarrow m+1 = 2 \Leftrightarrow m = 1$ (thỏa mãn).

VÍ DỤ 2. Tìm m để đồ thị hàm số

- a) $y = \frac{x-2}{x^2-mx+1}$ có hai đường tiệm cận đứng.
 b) $y = \frac{2x^2-3x+m}{x-m}$ có đường tiệm cận xiên.

Lời giải.

- a) Đồ thị hàm số có hai tiệm cận đứng \Leftrightarrow phương trình $g(x) = x^2 - mx + 1 = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác 2.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \neq 0 \text{ (LĐ)} \\ \Delta = m^2 - 4 > 0 \\ g(2) = 2^2 - 2m + 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -2 \\ m > 2 \\ m \neq \frac{5}{2} \end{cases}.$$

$$\text{Vậy } m \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty) \setminus \left\{ \frac{5}{2} \right\}.$$

- b) Đồ thị hàm số có đường tiệm cận xiên khi và chỉ khi phương trình $g(x) = 2x^2 - 3x + m = 0$ không có nghiệm $x = m$.
 Tức là:

$$g(m) \neq 0 \Leftrightarrow 2m^2 - 2m \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m \neq 1 \end{cases}.$$

Vậy $m \in \mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$ là các giá trị cần tìm.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.

CÂU 1. Tìm tất cả các giá trị của m để đồ thị hàm số $y = \frac{mx+2}{x-5}$ có đường tiệm cận ngang đi qua điểm $A(1;3)$.

- (A) $m = -3$. (B) $m = 1$. (C) $m = -1$. (D) $m = 3$.

Lời giải.

Tiệm cận ngang $y = m$ đi qua điểm $A(1;3)$ nên $m = 3$.

Chọn đáp án (D) □

CÂU 2. Tìm tham số thực m để đồ thị hàm số $y = \frac{mx+3}{x-m}$ có tiệm cận đứng là đường $x = 1$, tiệm cận ngang là đường $y = 1$.

- (A) $m = 1$. (B) $m = 2$. (C) $m = -1$. (D) $m = 3$.

Lời giải.

✓ Điều kiện để đồ thị hàm số có tiệm cận là $-m^2 - 3 \neq 0 \forall m$

✓ Phương trình đường tiệm cận đứng là $x = m$ nên có $m = 1$

✓ Phương trình đường tiệm cận ngang là $y = m$ nên có $m = 1$
Vậy $m = 1$.

Chọn đáp án (A) □

CÂU 3. Biết rằng hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{x-m}$ (với m là tham số) tạo với hai trục tọa độ một hình chữ nhật có diện tích bằng 2. Giá trị của m là

- (A) $m = \pm 2$. (B) $m = -1$. (C) $m = 2$. (D) $m = \pm 1$.

Lời giải.

Điều kiện $m \neq -\frac{1}{2}$.

Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+1}{x-m} = 2$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x+1}{x-m} = 2 \Rightarrow y = 2$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

✓ Xét $m > -\frac{1}{2}$, ta có $\lim_{x \rightarrow m^+} \frac{2x+1}{x-m} = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow m^-} \frac{2x+1}{x-m} = -\infty \Rightarrow x = m$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

✓ Xét $m < -\frac{1}{2}$, ta có $\lim_{x \rightarrow m^+} \frac{2x+1}{x-m} = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow m^-} \frac{2x+1}{x-m} = +\infty \Rightarrow x = m$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Diện tích hình chữ nhật là $|2m| = 2 \Rightarrow m = \pm 1$ (thỏa mãn).

Chọn đáp án (D) □

CÂU 4. Tìm giá trị của m để đồ thị hàm số $y = \frac{2x^2 - 5x + m}{x - m}$ có tiệm cận đứng.

- (A) $\begin{cases} m = 0 \\ m = 2 \end{cases}$. (B) $m \neq 0$. (C) $m \neq 2$. (D) $\begin{cases} m \neq 0 \\ m \neq 2 \end{cases}$.

Lời giải.

Ta có $x - m = 0 \Leftrightarrow x = m$.

Để đồ thị hàm số có tiệm cận đứng thì $2(m)^2 - 5(m) + m \neq 0 \Leftrightarrow 2m^2 - 4m \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m \neq 2 \end{cases}$.

Chọn đáp án (D) □

CÂU 5. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{x-4}{x^2 - mx + 4}$ có hai đường tiệm cận đứng?

- (A) $m \in (-\infty; -4] \cup [4; +\infty)$. (B) $m \neq 5$.
(C) $m \in (-\infty; -4) \cup (4; +\infty) \setminus \{5\}$. (D) $m \in (-\infty; -4) \cup (4; +\infty)$.

Lời giải.

Đồ thị hàm số có hai tiệm cận đứng khi phương trình $x^2 - mx + 4 = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác 4 $\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 16 > 0 \\ 16 - 4m + 4 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \in (-\infty; -4) \cup (4; +\infty) \setminus \{5\}$

Chọn đáp án (C) □

CÂU 6. Cho hàm số $y = \frac{2x^2 - 3x + m}{x - m}$ có đồ thị (C). Tìm tất cả các giá trị của tham số m để (C) không có tiệm cận đứng.

- (A) $m = 0$ hoặc $m = 1$. (B) $m = 2$. (C) $m = 1$. (D) $m = 0$.

Lời giải.

Đồ thị (C) không có tiệm cận đứng khi m là nghiệm của $2x^2 - 3x + m$

$$\Leftrightarrow 2m^2 - 3m + m = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 1. \end{cases}$$

Chọn đáp án **A** □

CÂU 7. Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để đồ thị hàm số $y = \frac{x-2}{x^2-mx+1}$ có đúng 3 đường tiệm cận.

- A** $\begin{cases} m > 2 \\ m \neq \frac{5}{2} \\ m < -2 \end{cases}$ **B** $\begin{cases} m > 2 \\ m < -2 \\ m \neq -\frac{5}{2} \end{cases}$ **C** $\begin{cases} m > 2 \\ m < -2 \end{cases}$ **D** $-2 < m < 2$.

Lời giải.

ĐKXD : $x^2 - mx + 1 \neq 0$

Ta có $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x-2}{x^2-mx+1} = 0 \Rightarrow y = 0$ là tiệm cận ngang.

Do đó đồ thị hàm số $y = \frac{x-2}{x^2-mx+1}$ có đúng 3 đường tiệm cận khi và chỉ khi phương trình $x^2 - mx + 1 = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác 2.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = m^2 - 4 > 0 \\ 2^2 - 2m + 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 2 \\ m < -2 \\ m \neq \frac{5}{2} \end{cases}$$

Chọn đáp án **A** □

CÂU 8. Cho hàm số $y = \frac{ax+1}{bx-2}$, xác định a và b để đồ thị của hàm số trên nhận đường thẳng $x = 1$ làm tiệm cận đứng và đường thẳng $y = \frac{1}{2}$ làm tiệm cận ngang.

- A** $\begin{cases} a = -1 \\ b = -2 \end{cases}$ **B** $\begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases}$ **C** $\begin{cases} a = 2 \\ b = 2 \end{cases}$ **D** $\begin{cases} a = 2 \\ b = -2 \end{cases}$.

Lời giải.

$$\text{Yêu cầu bài toán} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a}{b} = \frac{1}{2} \\ \frac{2}{b} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2 \\ a = 1 \end{cases}$$

Chọn đáp án **B** □

CÂU 9. Cho hàm số $y = \frac{mx+1}{x+3n+1}$. Đồ thị hàm số nhận trục hoành và trục tung làm tiệm cận ngang và tiệm cận đứng.

Tính $m+n$.

- A** $m+n = -\frac{1}{3}$. **B** $m+n = \frac{1}{3}$. **C** $m+n = \frac{2}{3}$. **D** $m+n = 0$.

Lời giải.

☑ Điều kiện để đồ thị hàm số có tiệm cận là $m(3n+1) \neq 0$

☑ Phương trình đường tiệm cận đứng là $x = -3n - 1$ nên có $n = -\frac{1}{3}$

☑ Phương trình đường tiệm cận ngang là $y = m$ nên có $m = 0$

$$\text{Vậy } m+n = -\frac{1}{3}.$$

Chọn đáp án **A** □

CÂU 10. Đồ thị hàm số $y = \frac{(4a-b)x^2+ax+1}{x^2+ax+b-12}$ nhận trục hoành và trục tung làm hai tiệm cận. Tính giá trị của $a+b$.

- A** $a+b = 10$. **B** $a+b = 12$. **C** $a+b = 18$. **D** $a+b = 15$.

Lời giải.

Tiệm cận đứng $x = 0 \Rightarrow 0^2 + a \cdot 0 + b - 12 = 0 \Leftrightarrow b = 12$.

Tiệm cận ngang $y = 0 \Rightarrow 4a - b = 0 \Leftrightarrow 4a - 12 = 0 \Leftrightarrow a = 3$.

Kết luận: $a+b = 15$.

Chọn đáp án **D** □

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.

CÂU 11. Cho hàm số $y = \frac{mx^2 + 6x - 2}{x + 2}$, với m là tham số.

Mệnh đề	Đ	S
a) Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$.	X	
b) Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang khi $m > 0$.		X
c) Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng khi $m \neq 0$.		X
d) Tập hợp tất cả giá trị của m để đồ thị có hai đường tiệm cận là $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{7}{2}\right\}$.	X	

Lời giải.

a) Điều kiện $x + 2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -2$. Vậy Tập xác định là $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$

b) Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang khi hệ số của x^2 trên tử số phải bằng 0. Suy ra $m = 0$.

c) Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng khi $x = -2$ không là nghiệm của tam thức $g(x) = mx^2 + 6x - 2$. Suy ra

$$g(-2) \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \frac{7}{2}$$

d) Đồ thị hàm số chắc chắn có 1 tiệm cận xiên (hoặc ngang). Suy ra, để đồ thị có hai đường tiệm cận thì nó phải có 1 tiệm cận đứng. Điều này tương đương với $m \neq \frac{7}{2}$.

Chọn đáp án ☐ a đúng ☐ b sai ☐ c sai ☐ d đúng

Dạng 4. Tìm các đường tiệm cận đồ thị hàm ẩn

VÍ DỤ 1. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ sau

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
y'	+	0	-	+
y	1	4	-5	$+\infty$

Tìm TCD, TCN của đồ thị hàm số

a) $y = \frac{2}{f(x) - 3}$

b) $y = \frac{-3}{f(x) + 2}$

c) $y = \frac{x - 2}{f(x) + 5}$

d) $y = \frac{x + 1}{f(x) - 4}$

e) $y = \frac{2}{f(x^2) + 3}$

f) $y = \frac{4f(x) - 5}{3f(x) + 1}$

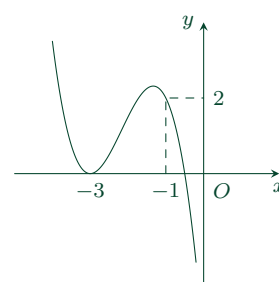
Lời giải.

VÍ DỤ 2.

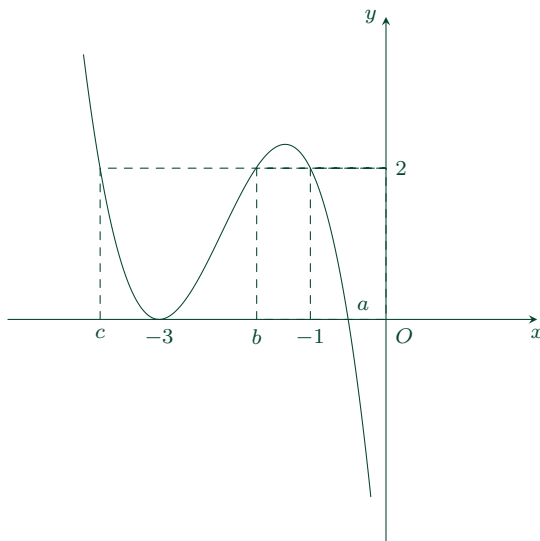
Cho hàm bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Tìm số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số

a) $y = \frac{\sqrt{x+3}}{(x-1)f(x)}$

b) $g(x) = \frac{(x^2 + 4x + 3)\sqrt{x^2 + x}}{x[f^2(x) - 2f(x)]}$



Lời giải.



$$g(x) = \frac{(x^2 + 4x + 3)\sqrt{x^2 + x}}{x[f^2(x) - 2f(x)]} = \frac{(x+1)(x+3)\sqrt{x(x+1)}}{x[f^2(x) - 2f(x)]}.$$

Điều kiện của căn là $x \leq -1; x \geq 0$.

Dựa vào đồ thị ta có

$$x[f^2(x) - 2f(x)] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ f(x) = 0 \\ f(x) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ (nhận)} \\ x = -3 \text{ (nhận); } x = a \text{ (loại)} \\ x = -1 \text{ (nhận); } x = b \text{ (nhận); } x = c \text{ (nhận)} \end{cases}$$

Số TCD lúc này chính là số nghiệm không bị rút gọn của mẫu, vậy có bốn TCD là $x = 0; x = -3; x = b; x = c$.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

CÂU 1. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình bên. Đồ thị hàm số $y = \frac{-5}{f(x) + 4}$ có bao nhiêu tiệm cận đứng?

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$
y'	+		-	+
y	-4	3	-5	$+\infty$

(A) 1.

(B) 3.

(C) 2.

(D) 4.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên suy ra $f(x) + 4 = 0 \Leftrightarrow f(x) = -4$, phương trình này có 2 nghiệm phân biệt nên đồ thị hàm số $y = \frac{-5}{f(x) + 4}$ có 2 tiệm cận đứng.

Chọn đáp án (C) □

CÂU 2. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình bên. Đồ thị hàm số $y = \frac{x+2}{2f(x)-1}$ có bao nhiêu tiệm cận đứng?

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'	+	0	-	0	-
y	$-\infty$	0	$-\frac{5}{3}$	0	$-\infty$

(A) 1.

(B) 3.

(C) 2.

(D) 0.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên suy ra $2f(x) - 1 = 0 \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{2}$, phương trình này có 0 nghiệm nên đồ thị hàm số $y = \frac{x+2}{2f(x)-1}$ không có tiệm cận đứng.

Chọn đáp án (D) □

CÂU 3. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình bên. Đồ thị hàm số $y = \frac{1}{2f(x) - 3}$ có bao nhiêu tiệm cận đứng?

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$	
y'	+	0	-	0	+
y	$-\infty$	5	-1	$+\infty$	

- (A) 1. (B) 3. (C) 2. (D) 0.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên suy ra $2f(x) - 3 = 0 \Leftrightarrow f(x) = \frac{3}{2}$, phương trình này có 3 nghiệm phân biệt nên đồ thị hàm số $y = \frac{1}{2f(x) - 3}$ có ba tiệm cận đứng.

Chọn đáp án (B) ☐

CÂU 4. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình bên. Đồ thị hàm số $y = \frac{x}{f(x) - 3}$ có bao nhiêu tiệm cận đứng?

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$	
y'	$-$	0	$+$	$-$	0	$+$
y	$+\infty$	0	3	0	$+\infty$	

- (A) 1. (B) 3. (C) 2. (D) 4.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên suy ra $f(x) - 3 = 0 \Leftrightarrow f(x) = 3$, phương trình này có 2 nghiệm phân biệt khác 0 và một nghiệm bội chẵn $x = 0$ nên đồ thị hàm số $y = \frac{x}{f(x) - 3}$ có ba tiệm cận đứng.

Chọn đáp án (B) ☐

CÂU 5. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình bên. Đồ thị hàm số $y = \frac{4}{f(x) + 1}$ có tiệm cận ngang là đường thẳng

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	1	4	-5	1	

- (A) $y = 1$. (B) $y = -5$. (C) $y = 2$. (D) $y = 4$.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên suy ra $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{4}{f(x) + 1} = 2$ nên đồ thị hàm số đã cho có tiệm cận ngang là $y = 2$.

Chọn đáp án (C) ☐

CÂU 6. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình bên. Đồ thị hàm số $y = \frac{2 - f(x)}{f(x) + 3}$ có tiệm cận ngang là đường thẳng

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
y'	-	0	+	0	-
y	$+\infty$			5	
		1			$-\infty$

- (A) $y = 1$. (B) $y = -3$. (C) $y = 2$. (D) $y = -1$.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên suy ra $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2-f(x)}{f(x)+3} = -1$ nên đồ thị hàm số $y = \frac{2-f(x)}{f(x)+3}$ có tiệm cận ngang là $y = -1$.

Chọn đáp án (D) □

CÂU 7. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình bên. Đồ thị hàm số $y = \frac{1}{f^2(x) - 4f(x) + 4}$ có bao nhiêu tiệm cận đứng?

x	$-\infty$	2	$+\infty$
y'	-	0	+
y	1	-3	1

(A) 1.

(B) 3.

(C) 2.

(D) 0.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên suy ra $f^2(x) - 4f(x) + 4 = 0 \Leftrightarrow f(x) = 2$, phương trình $f(x) = 2$ vô nghiệm nên đồ thị hàm số đã cho không có tiệm cận đứng.

CÂU 8. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình bên. Đồ thị hàm số $y = \frac{1}{f(3-x) - 2}$ có bao nhiêu tiệm cận đứng?

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$
y'	+	0	-	+
y	$-\infty$	3	0	$+\infty$

(A) 1.

(B) 3.

(C) 2.

(D) 0.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên suy ra $f(3-x) - 2 = 0 \Leftrightarrow f(3-x) = 2$, phương trình này có 3 nghiệm phân biệt nên đồ thị hàm số đã cho có 3 tiệm cận đứng.

Chọn đáp án (B) □

CÂU 9. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình bên. Đồ thị hàm số $y = \frac{4}{f(x^2) - 2}$ có bao nhiêu tiệm cận đứng?

x	$-\infty$	0	3	$+\infty$
y'	-	0	+	-
y	8	1	4	2

(A) 5.

(B) 3.

(C) 2.

(D) 4.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên suy ra $f(x^2) - 2 = 0 \Leftrightarrow f(x^2) = 2$. Kẻ đường thẳng $y = 2$ ta thấy đường thẳng cắt đồ thị hàm số tại hai điểm phân biệt. Suy ra

$$\begin{cases} x^2 = a & (a < 0) \\ x^2 = b & (b > 0) \end{cases} \Rightarrow x = \pm\sqrt{b}.$$

Do đó đồ thị hàm số đã cho có 2 tiệm cận đứng.

Chọn đáp án (C) □

CÂU 10. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình bên. Đồ thị hàm số $y = \frac{2}{f(|x|) - 3}$ có bao nhiêu tiệm cận ngang?

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
y'	+	0	-	+
y	$-\infty$	3	-1	$+\infty$

- (A) 4. (B) 3. (C) 5. (D) 6.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên suy ra $f(|x|) - 3 = 0 \Leftrightarrow f(|x|) = 3$.
Bảng biến thiên hàm số $y = f(|x|)$ như sau

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$		
y'		$-$	0	$+$	0	$+$	
y	$+\infty$		-1	3	-1		$+\infty$

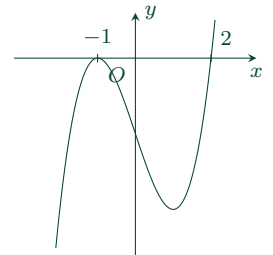
Dựa vào bảng biến thiên hàm số $y = f(|x|)$, phương trình $f(|x|) = 3$ có ba nghiệm phân biệt, do đó đồ thị hàm số $y = \frac{2}{f(|x|) - 3}$ có 3 tiệm cận đứng.

Chọn đáp án (B) ☐

CÂU 11.

Cho hàm số bậc ba $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên. Đồ thị hàm số $g(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{(x-3) \cdot f(x)}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

- (A) 5. (B) 2. (C) 4. (D) 3.



Lời giải.

* Điều kiện: $\begin{cases} x \neq 3 \\ f(x) \neq 0 \\ x \geq -1. \end{cases}$

Nhìn hình vẽ ta thấy $f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 & (\text{nghiệm kép}) \\ x = 2 & (\text{nghiệm đơn}). \end{cases}$

Vậy $g(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{(x-3) \cdot a(x+1)^2(x-2)}$.

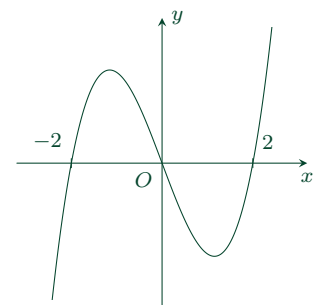
Đồ thị hàm số $g(x)$ có 3 đường tiệm cận đứng.

Chọn đáp án (D) ☐

CÂU 12.

Đường cong ở hình bên là đồ thị của hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Đồ thị hàm số $y = \frac{(2x+1)\sqrt{x-1}}{x \cdot f(x-2)}$ có tất cả bao nhiêu tiệm cận đứng?

- (A) 1. (B) 3. (C) 4. (D) 2.



Lời giải.

* Điều kiện: $\begin{cases} x \neq 0 \\ f(x-2) \neq 0 \\ x \geq 1. \end{cases}$

Nhìn hình vẽ ta thấy $f(x-2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-2 = -2 \\ x-2 = 0 \\ x-2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 & (\text{không thỏa mãn}) \\ x = 2 & (\text{nghiệm đơn}) \\ x = 4 & (\text{nghiệm đơn}). \end{cases}$

Vậy $g(x) = \frac{(2x+1)\sqrt{x-1}}{x \cdot f(x-2)} = \frac{(x-1)\sqrt{x+2}}{x \cdot ax(x-2)(x-4)}$.

Đồ thị hàm số $g(x)$ có 2 đường tiệm cận đứng.

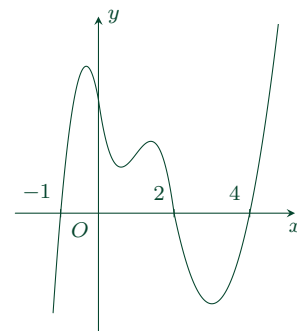
Chọn đáp án (D) ☐

CÂU 13.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị cắt trục hoành tại đúng 3 điểm như hình bên. Đồ thị hàm số

$$y = \frac{(x+2)\sqrt{3-x}}{f(|x|)}$$
 có tất cả bao nhiêu tiệm cận đứng?

- (A) 1. (B) 3. (C) 4. (D) 2.



Lời giải.

* Điều kiện: $\begin{cases} f(|x|) \neq 0 \\ x \leq 3. \end{cases}$

Nhìn hình vẽ ta thấy $f(|x|) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} |x| = -1 \\ |x| = 2 \\ |x| = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 2 \\ x = -4 \\ x = 4 \end{cases}$ (nghiem đơn)
(nghiem đơn)
(không thỏa mãn).

$$\text{Vậy } y = \frac{(x+2)\sqrt{3-x}}{a(x-2)(x+2)(x+4)(x-4)}$$

Đồ thị hàm số có 2 đường tiệm cận đứng.

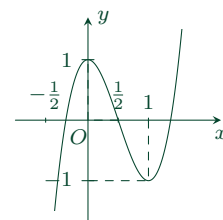
Chọn đáp án (D) □

CÂU 14.

Đường cong ở hình bên là đồ thị của hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Đồ thị hàm số $y = \frac{(2x+1)\sqrt{1-x}}{f(|x|)}$

có tất cả bao nhiêu tiệm cận đứng?

- (A) 1. (B) 3. (C) 4. (D) 2.



Lời giải.

* Điều kiện: $\begin{cases} f(|x|) \neq 0 \\ x \leq 1. \end{cases}$

Nhìn hình vẽ ta thấy $f(|x|) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} |x| = -\frac{1}{2} \\ |x| = \frac{1}{2} \\ |x| = x_1 > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm \frac{1}{2} \\ x = -x_1 \\ x = x_1 \end{cases}$ (hai nghiệm đơn)
(nghiem đơn)
(không thỏa mãn).

$$\text{Vậy } y = \frac{(2x+1)\sqrt{1-x}}{f(|x|)} = \frac{(2x+1)\sqrt{1-x}}{a\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)(x+x_1)(x-x_1)}$$

Đồ thị hàm số có 2 đường tiệm cận đứng.

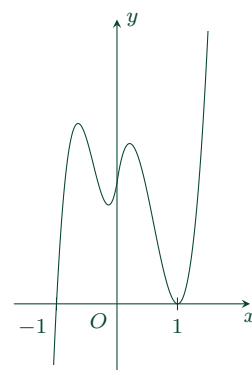
Chọn đáp án (D) □

CÂU 15.

Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ và trục hoành có đúng 2 điểm chung như hình bên. Đồ thị hàm số

$$y = \frac{(x-1)\sqrt{3-x}}{f(x^2)}$$
 có tất cả bao nhiêu tiệm cận đứng?

- (A) 1. (B) 3. (C) 4. (D) 2.



Lời giải.

* Điều kiện: $\begin{cases} f(x^2) \neq 0 \\ x \leq 3. \end{cases}$

Nhìn hình vẽ ta thấy $f(x^2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = -1 \\ x^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = \pm 1$ (nghiệm kép).

$$\text{Vậy } y = \frac{(x-1)\sqrt{3-x}}{f(x^2)} = \frac{(x-1)\sqrt{3-x}}{(x-1)^2(x+1)^2}$$

Đồ thị hàm số có 2 đường tiệm cận đứng.

Chọn đáp án **(D)** ☐

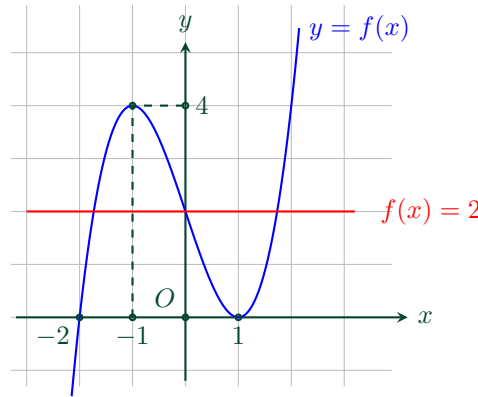
CÂU 16. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ. Đồ thị của hàm số $g(x) = \frac{x^2 - x}{f^2(x) - 2f(x)}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

(A) 2.

(B) 3.

(C) 4.

(D) 5.



Lời giải.

$$\text{Xét phương trình } f^2(x) - 2f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 \\ f(x) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \text{ (nghiệm kép trùng nghiệm đơn ở tử số)} \\ x = -2 \text{ (nghiệm đơn khác nghiệm của tử)} \\ x = a \in (-2; -1) \\ x = 0 \text{ (nghiệm đơn trùng nghiệm ở tử)} \\ x = b \in (1; 2) \end{cases}$$

Kết luận: Đồ thị hàm số có 4 đường tiệm cận đứng.

Chọn đáp án **(C)** ☐

CÂU 17.

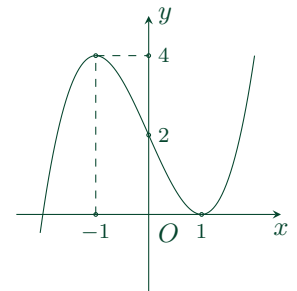
Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên \mathbb{R} . Đồ thị hàm $f(x)$ như hình vẽ. Số đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 - 1}{f^2(x) - 4f(x)}$ bằng

(A) 3.

(B) 1.

(C) 2.

(D) 4.



Lời giải.

$$\text{Xét } f^2(x) - 4f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 \\ f(x) = 4 \end{cases}$$

Xét $f(x) = 0$ có hai nghiệm, nghiệm $x_1 \neq \pm 1$ và nghiệm $x_2 = 1$ là nghiệm bội (do đồ thị tiếp xúc với trục hoành tại $x = 1$). Trường hợp này có 2 tiệm cận đứng.

Xét $f(x) = 4$ có hai nghiệm, nghiệm $x_3 \neq \pm 1$ và nghiệm $x_4 = -1$ là nghiệm bội (do đồ thị tiếp xúc với đường thẳng $y = 4$ tại $x = -1$). Trường hợp này có 2 tiệm cận đứng.

Vậy đồ thị có 4 tiệm cận đứng.

Chọn đáp án **(D)** ☐

CÂU 18.

Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình bên. Số đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số

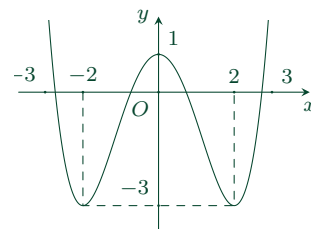
$$y = \frac{(x^2 - 4)(x^2 + 2x)}{[f(x)]^2 + 2f(x) - 3} \text{ là}$$

(A) 4.

(B) 5.

(C) 3.

(D) 2.



Lời giải.

Ta có $y = \frac{(x^2 - 4)(x^2 + 2x)}{[f(x)]^2 + 2f(x) - 3}$ có các nghiệm ở tử là $x = 0$ (bội 1), $x = 2$ (bội 1), $x = -2$ (bội 2).

Mặt khác, từ đồ thị $f(x)$ ta thấy hàm số $y = \frac{(x^2 - 4)(x^2 + 2x)}{[f(x)]^2 + 2f(x) - 3}$ có các nghiệm ở mẫu là $f^2(x) + 2f(x) - 3 = 0 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} f(x) = 1 \\ f(x) = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, x = x_1, x = x_2 \\ x = -2, x = 2. \end{cases}$$

Trong đó nghiệm $x = 0, x = -2, x = 2$ đều có bội 2 và x_1, x_2 khác các nghiệm của tử.

So sánh bội nghiệm ở mẫu và bội nghiệm ở tử thì thấy đồ thị có các tiệm cận đứng là $x = 0, x = 2; x = x_1; x = x_2$.

Chọn đáp án (A) ☐

CÂU 19.

Cho hàm số $f(x) = (x+3)(x+1)^2(x-1)(x-3)$ có đồ thị như hình vẽ. Đồ thị hàm số $g(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{f^2(x) - 9f(x)}$

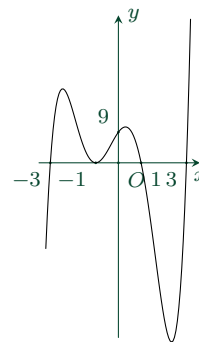
có bao nhiêu tiệm cận đứng và tiệm cận ngang?

(A) 3.

(B) 4.

(C) 9.

(D) 8.



Lời giải.

Điều kiện xác định của hàm số $g(x)$ là $\begin{cases} x \geq 1 \\ f^2(x) - 9f(x) \neq 0. \end{cases}$

$$\text{Từ } f^2(x) - 9f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 \\ f(x) = 9. \end{cases}$$

Với $f(x) = 0$ có nghiệm là $x = \pm 1, x = \pm 3$.

Dựa vào đồ thị ta thấy nghiệm của phương trình $f(x) = 9$ là hoành độ giao điểm của đường thẳng $y = 9$ với đồ thị hàm số $y = f(x)$ nên có nghiệm là $-3 < x_3 < x_2 < -1 < 0 < x_1 < 1 < 3 < x_0$.

Do đó tập xác định của hàm số $y = g(x)$ là $\mathcal{D} = [1; +\infty) \setminus \{1; 3; x_0\}$.

Khi đó ta có

$$\textcircled{v} \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x-1}}{f(x)(f(x)-9)} = +\infty \text{ (vì } x \text{ tiến gần bên phải 1 thì } f(x) < 0, f(x) - 9 < 0\text{), suy ra đường thẳng } x = 1 \text{ là tiệm cận đứng.}$$

$$\textcircled{v} \lim_{x \rightarrow 3^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{\sqrt{x-1}}{f(x)(f(x)-9)} = -\infty \text{ (vì } x \text{ tiến gần bên phải 3 thì } f(x) > 0, f(x) - 9 < 0\text{), suy ra đường thẳng } x = 3 \text{ là tiệm cận đứng.}$$

$$\textcircled{v} \lim_{x \rightarrow x_0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{\sqrt{x-1}}{f(x)(f(x)-9)} = +\infty \text{ (vì } x \text{ tiến gần bên phải } x_0 \text{ thì } f(x) > 0, f(x) - 9 > 0\text{), suy ra đường thẳng } x = x_0 \text{ là tiệm cận đứng.}$$

$$\text{Và } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x-1}}{f(x)(f(x)-9)} = 0 \text{ (vì bậc ở mẫu của } y = g(x) \text{ là 10 và bậc tử của nó là } \frac{1}{2}\text{). Do vậy đồ thị hàm số}$$

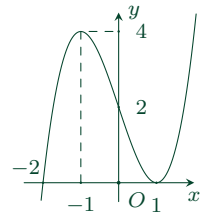
$y = g(x)$ có một tiệm cận ngang là đường thẳng $y = 0$.

Vậy đồ thị hàm số $y = g(x)$ có bốn tiệm cận ngang và đứng.

Chọn đáp án (B) ☐

CÂU 20.

Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, có đồ thị như hình vẽ. Số đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 + x - 2}{f^2(x) - f(x)}$ là



- (A) 3. (B) 2. (C) 4. (D) 5.

Lời giải.

☑ $x^2 + x - 2 = (x - 1)(x + 2)$.

☑ Dựa vào đồ thị hàm số $y = f(x)$ ta có $f^2(x) - f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 \\ f(x) = 1. \end{cases}$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -2, x = 1$ (nghiệm kép).

$f(x) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_1, (x_1 \in (-2; -1)) \\ x = x_2, (x_2 \in (0; 1)) \\ x = x_3, (x_3 > 1). \end{cases}$

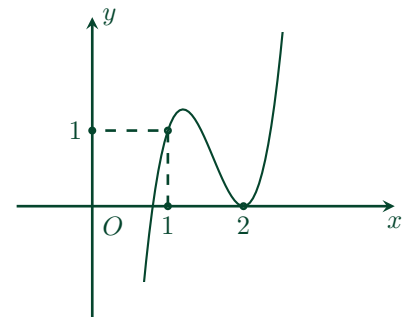
☑ Do đó $y = \frac{(x - 1)(x + 2)}{a^2(x + 2)(x - 1)^2(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}$.

Suy ra đồ thị có các đường tiệm cận đứng $x = 1, x = x_1, x = x_2, x = x_3$.

Chọn đáp án (C) □

CÂU 21.

Cho hàm số bậc ba $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Hỏi đồ thị hàm số $g(x) = \frac{(x^2 - 3x + 2)\sqrt{x - 1}}{x[f^2(x) - f(x)]}$ có bao nhiêu tiệm cận đứng?



- (A) 5. (B) 6. (C) 3. (D) 4.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} x \geq 1 \\ x \neq 0 \\ f^2(x) - f(x) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ f(x) \neq 0 \\ f(x) \neq 1. \end{cases}$

Dựa vào đồ thị hàm số $y = f(x)$, ta thấy $f(x) = 0$ có hai nghiệm, một nghiệm $x_1 < 1$ và một nghiệm kép bằng 2. Do đó ta biểu diễn được $f(x)$ dưới dạng

$$f(x) = a(x - x_1)(x - 2)^2.$$

Dựa vào đồ thị hàm số $y = f(x)$, ta thấy phương trình $f(x) = 1$ có ba nghiệm $1, x_2, x_3$, với $1 < x_2 < 2 < x_3$. Do đó ta biểu diễn được $f(x) - 1$ dưới dạng

$$f(x) - 1 = a(x - 1)(x - x_2)(x - x_3).$$

Lúc này điều kiện được viết lại như sau $\begin{cases} x > 1 \\ x \neq x_2, x \neq 2, x \neq x_3. \end{cases}$

Với điều kiện đó thì $g(x)$ được viết lại là

$$g(x) = \frac{\sqrt{x - 1}}{a^2x(x - x_1)(x - x_2)(x - 2)(x - x_3)}.$$

Ta có

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x-1}}{a^2 x(x-x_1)(x-x_2)(x-2)(x-x_3)} = 0,$$

($x = 1$ không là tiệm cận đứng)

$$\lim_{x \rightarrow x_2^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow x_2^+} \frac{\sqrt{x-1}}{a^2 x(x-x_1)(x-x_2)(x-2)(x-x_3)} = +\infty,$$

($x = x_2$ là tiệm cận đứng)

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{x-1}}{a^2 x(x-x_1)(x-x_2)(x-2)(x-x_3)} = -\infty,$$

($x = 2$ là tiệm cận đứng)

$$\lim_{x \rightarrow x_3^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow x_3^+} \frac{\sqrt{x-1}}{a^2 x(x-x_1)(x-x_2)(x-2)(x-x_3)} = +\infty,$$

($x = x_3$ là tiệm cận đứng)

Vậy đồ thị hàm số $g(x)$ có tất cả 3 tiệm cận đứng.

Chọn đáp án **C** □

CÂU 22.

Cho hàm số $f(x) = (x+3)(x+1)^2(x-1)(x-3)$ có đồ thị như hình vẽ. Đồ

thị hàm số $g(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{f^2(x) - 9f(x)}$ có bao nhiêu tiệm cận đứng và tiệm cận

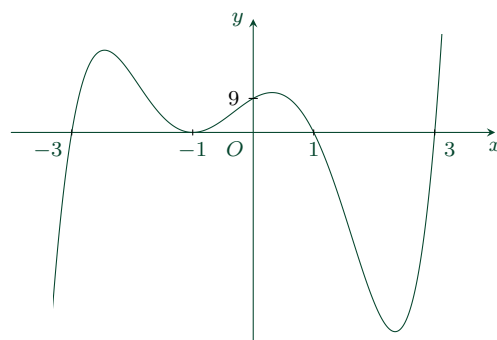
ngang?

A 3.

B 4.

C 9.

D 8.



Lời giải.

Cho hàm số đa thức $y = f(x)$ có đồ thị (C). Tìm số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $g(x) = \frac{\sqrt{ax+b}}{P(f(x))}$, trong đó $P(f(x))$ là một đa thức của $f(x)$. Nếu $a > 0$ thì $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$.

Nếu $a < 0$ thì $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0$.

Do đó đồ thị hàm số $y = g(x)$ luôn có duy nhất một đường tiệm cận ngang là $y = 0$.

Gọi $x = x_0$ là một nghiệm của phương trình $P(f(x)) = 0$ thỏa mãn điều kiện $ax + b \geq 0$. Rõ ràng khi đó $\lim_{x \rightarrow x_0^+} g(x) = +\infty$

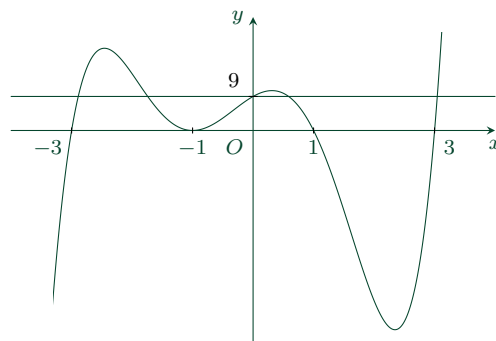
hoặc $\lim_{x \rightarrow x_0^+} g(x) = -\infty$.

Bởi vậy, số đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = g(x)$ chính là số nghiệm của phương trình $P(f(x)) = 0$ thỏa mãn điều kiện $ax + b \geq 0$.

Ta có $f^2(x) - 9f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 \\ f(x) = 9. \end{cases}$

✔ $f(x) = 0$ có các nghiệm thuộc $[1; +\infty)$ là $x = 1$ và $x = 3$.

✔ Đường thẳng $y = 9$ cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại duy nhất một điểm có hoành độ thuộc $[1; +\infty)$ là $x = a > 3$.



Bởi vậy, hàm số $g(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{f^2(x) - 9f(x)}$ có tập xác định là $\mathcal{D} = [1; 3) \cup (3; a) \cup (a; +\infty)$.

Khi đó ta có

✔ $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$ nên đồ thị hàm số $y = g(x)$ có một đường tiệm cận ngang là đường thẳng $y = 0$.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x-1}}{f(x)[f(x)-9]} = +\infty; \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} g(x) &= \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{\sqrt{x-1}}{f(x)[f(x)-9]} = -\infty; \\ \lim_{x \rightarrow a^+} g(x) &= \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{\sqrt{x-1}}{f(x)[f(x)-9]} = +\infty.\end{aligned}$$

Do đó nên đồ thị hàm số $y = g(x)$ có 3 đường tiệm cận đứng là các đường thẳng $x = 1$, $x = 3$ và $x = a$.

Như vậy, đồ thị hàm số $y = g(x)$ có 4 đường tiệm cận, trong đó có 1 đường tiệm cận ngang và 3 đường tiệm cận đứng.

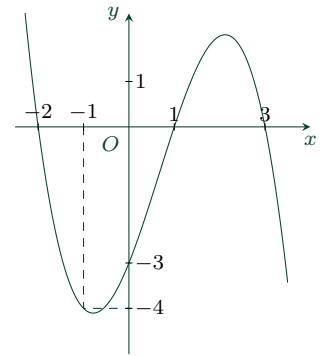
Chọn đáp án (B) □

CÂU 23.

Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Đồ thị hàm số $g(x) = \frac{x\sqrt{x+1}}{f(x)[f^2(x)-16]}$

có bao nhiêu tiệm cận đứng?

- (A) 4. (B) 5. (C) 6. (D) 7.



Lời giải.

Xét phương trình $f(x)[f^2(x)-16] = 0$ (*), với điều kiện $x \in [-1; +\infty)$.

$$\text{Ta có } f(x)[f^2(x)-16] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 \\ f(x) = 4 \\ f(x) = -4. \end{cases}$$

- ☑ Phương trình $f(x) = 0$ có hai nghiệm $x \in [-1; +\infty)$ là $x = 1$ và $x = 3$.
- ☑ Phương trình $f(x) = 4$ có không có nghiệm $x \in [-1; +\infty)$.
- ☑ Phương trình $f(x) = -4$ có hai nghiệm $x \in [-1; +\infty)$ là $-1 < x_1 < 0$ và $x_2 > 3$.

Rõ ràng $\lim_{x \rightarrow x_0^+} g(x) = +\infty$ hoặc $\lim_{x \rightarrow x_0^+} g(x) = -\infty$, trong đó $x = x_0$ là nghiệm thuộc $[-1; +\infty)$ của phương trình (*). Do đó đường thẳng $x = x_0$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = g(x)$.

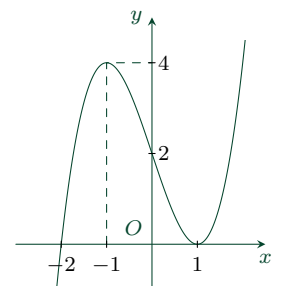
Từ đó suy ra đồ thị hàm số $g(x) = \frac{x\sqrt{x+1}}{f(x)[f^2(x)-16]}$ có 4 tiệm cận đứng.

Chọn đáp án (A) □

CÂU 24.

Cho $y = f(x)$ là hàm số đa thức có đồ thị như hình vẽ bên. Đặt $g(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{[f(x)]^2 - 2f(x)}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

- (A) 5. (B) 3. (C) 4. (D) 2.



Lời giải.

Xét phương trình $[f(x)]^2 - 2f(x) = 0$ (*), với điều kiện $x \in [1; +\infty)$.

$$\text{Ta có } [f(x)]^2 - 2f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 \\ f(x) = 2. \end{cases}$$

- ☑ Phương trình $f(x) = 0$ có một nghiệm $x \in [1; +\infty)$ là $x = 1$.
- ☑ Phương trình $f(x) = 2$ có một nghiệm $x \in [1; +\infty)$ là $x = x_1 > 1$.

Rõ ràng $\lim_{x \rightarrow x_0^+} g(x) = +\infty$ hoặc $\lim_{x \rightarrow x_0^+} g(x) = -\infty$, trong đó $x = x_0$ là nghiệm thuộc $[1; +\infty)$ của phương trình (*). Do đó đường thẳng $x = x_0$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = g(x)$.

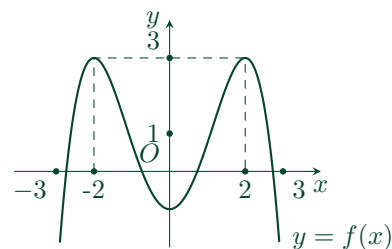
Từ đó suy ra đồ thị hàm số $g(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{[f(x)]^2 - 2f(x)}$ có 2 tiệm cận đứng.

Chọn đáp án (D) □

CÂU 25.

Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình bên. Số đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số

$$y = \frac{(x^2 - 4)(x^2 + 2x)}{[f(x)]^2 - 4f(x) + 3}$$



(A) 4.

(B) 5.

(C) 3.

(D) 2.

Lời giải.

Xét hàm số $y = g(x) = \frac{(x^2 - 4)(x^2 + 2x)}{[f(x)]^2 - 4f(x) + 3}$.

Giải phương trình $(x^2 - 4)(x^2 + 2x) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4 = 0 \\ x^2 + 2x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 2 \\ x = 0. \end{cases}$$

Giải phương trình $[f(x)]^2 - 4f(x) + 3 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 1 \\ f(x) = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = a \\ x = b \\ x = c \\ x = d. \end{cases}$$

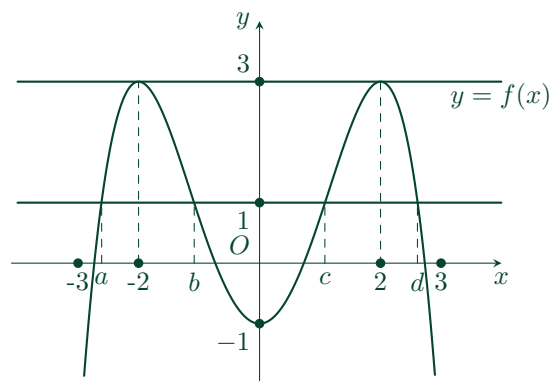
với $-3 < a < -2 < b < c < 2 < d < 3$.

Trong điều kiện xác định của hàm số $y = g(x)$ ta có thể viết

$$y = g(x) = \frac{x(x-2)(x+2)^2}{(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)(x-2)^2(x+2)^2} = \frac{x}{(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)(x-2)}$$

Vậy số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = g(x)$ bằng 5.

Chọn đáp án (B) □



MỤC LỤC

Bài 3. ĐƯỜNG TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

A

LÝ THUYẾT CẦN NHỚ1

B

PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN2

Dạng 1.Bài toán tìm tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số

2

Dạng 2.Bài toán tìm tiệm cận đứng và tiệm cận xiên của đồ thị hàm số

5

Dạng 3.Bài toán về đường tiệm cận có chứa tham số

6

Dạng 4.Tìm các đường tiệm cận đồ thị hàm ẩn

8

LỜI GIẢI CHI TIẾT14

Bài 3. ĐƯỜNG TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

A

LÝ THUYẾT CẦN NHỚ14

B

PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN15

Dạng 1.Bài toán tìm tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số

15

Dạng 2.Bài toán tìm tiệm cận đứng và tiệm cận xiên của đồ thị hàm số

19

Dạng 3.Bài toán về đường tiệm cận có chứa tham số

23

Dạng 4.Tìm các đường tiệm cận đồ thị hàm ẩn

26

GV.VŨ NGỌC PHÁT

38