Giới hạn. Hàm số liên tục

Bài 15. GIỚI HẠN DÃY SỐ

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Dãy số có giới hạn 0

Định nghĩa 15.1. Ta nói dãy số (u_n) có giới hạn là 0 khi n dần tới dương vô cực, nếu $|u_n|$ có thể nhỏ hơn một số dương bé tuỳ ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi, kí hiệu $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ hay $u_n \to 0$ khi $n \to +\infty$.

Từ định nghĩa dãy số có giới hạn 0, ta có các kết quả sau:

- $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^k} = 0$ với k là một số nguyên dương;
- $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$ nếu $|q| < 1$;
- Nếu $|u_n| \le v_n$ với mọi $n \ge 1$ và $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ thì $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

2. Dãy số có giới hạn hữu hạn

Định nghĩa 15.2. Ta nói dãy số (u_n) có giới hạn là số thực a khi n dần tới dương vô cực nếu

$$\lim_{n\to+\infty} (u_n - a) = 0,$$

kí hiệu $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$ hay $u_n \to a$ khi $n \to +\infty$.

- Nếu $u_n = c$ (c là hằng số) thì $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = c$.
- $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$ khi và chỉ khi $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n - a) = 0$.

3. Các quy tắc tính giới hạn

Tính chất 15.1.

a) *Nếu* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$ *và* $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = b$ *thì*

-) $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + v_n) = a + b$.

-) $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n - v_n) = a - b$.

-) $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n \cdot v_n) = a \cdot b$.

-) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = \dfrac{a}{b}$ *(nếu* $b \neq 0$*).*

b) *Nếu* $u_n \ge 0$ *với mọi* n *và* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$ *thì* $a \ge 0$ *và* $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{u_n} = \sqrt{a}$.

B. CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

Dạng 1. Phương pháp đặt thừa số chung (lim hữu hạn)

1. Ví dụ mẫu

VÍ DỤ 1. Tìm giới hạn sau $\lim \dfrac{2n^3 - 2n + 3}{1 - 4n^3}$.

VÍ DỤ 2. Tìm giới hạn sau $\lim \dfrac{\sqrt{n^4 + 2n + 2}}{n^2 + 1}$.

VÍ DỤ 3. Tìm giới hạn sau $\lim \dfrac{3^{n+1} - 4^n}{4^{n-1} + 3}$.

VÍ DỤ 4. Tìm giới hạn sau $\lim \dfrac{1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^n}{1 + 3 + 3^2 + \cdots + 3^n}$.

ĐIỂM:

"It's not how much time you have, it's how you use it."

QUICK NOTE

QUICK NOTE

2. Câu hỏi trắc nghiệm

CÂU 1. Tính giới hạn $I = \lim \dfrac{2n+2023}{3n+2024}$.

Ⓐ $I = \dfrac{2}{3}$. Ⓑ $I = \dfrac{3}{2}$. Ⓒ $I = \dfrac{2023}{2024}$. Ⓓ $I = 1$.

CÂU 2. Phát biểu nào sau đây là **sai**?

Ⓐ $\lim u_n = c$ ($u_n = c$ là hằng số). Ⓑ $\lim q^n = 0$ ($|q| > 1$).

Ⓒ $\lim \dfrac{1}{n} = 0$. Ⓓ $\lim \dfrac{1}{n^k} = 0$ ($k > 1$).

CÂU 3. Giá trị của $\lim \dfrac{2-n}{n+1}$ bằng

Ⓐ 1. Ⓑ 2. Ⓒ -1. Ⓓ 0.

CÂU 4. Tính giới hạn $\lim \dfrac{4n+2024}{2n+1}$.

Ⓐ $\dfrac{1}{2}$. Ⓑ 4. Ⓒ 2. Ⓓ 2024.

CÂU 5. $\lim \dfrac{2n^2-3}{n^6+5n^5}$ bằng

Ⓐ 2. Ⓑ 0. Ⓒ $\dfrac{-3}{5}$. Ⓓ -3.

CÂU 6. Tính $\lim \dfrac{2n+1}{1+n}$ được kết quả là

Ⓐ 2. Ⓑ 0. Ⓒ $\dfrac{1}{2}$. Ⓓ 1.

CÂU 7. Dãy số nào sau đây có giới hạn khác 0?

Ⓐ $\dfrac{1}{n}$. Ⓑ $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$. Ⓒ $\dfrac{n+1}{n}$. Ⓓ $\dfrac{\sin n}{\sqrt{n}}$.

CÂU 8. Giới hạn $\lim \dfrac{\sqrt{n}}{2n^2+3}$ có kết quả là

Ⓐ 2. Ⓑ 0. Ⓒ $+\infty$. Ⓓ 4.

CÂU 9. Dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{1}{2n}$, chọn $M = \dfrac{1}{100}$, để $\dfrac{1}{2n} < \dfrac{1}{100}$ thì n phải lấy từ số hạng thứ bao nhiêu trở đi?

Ⓐ 51. Ⓑ 49. Ⓒ 48. Ⓓ 50.

CÂU 10. Giới hạn $\lim \dfrac{3^n+2^n}{4^n}$ có kết quả là

Ⓐ 0. Ⓑ $\dfrac{5}{4}$. Ⓒ $\dfrac{3}{4}$. Ⓓ $+\infty$.

CÂU 11. Tính giới hạn $\lim \left[\dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{2\cdot 3} + \dfrac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \dfrac{1}{n(n+1)}\right]$.

Ⓐ 0. Ⓑ 2. Ⓒ 1. Ⓓ $\dfrac{3}{2}$.

CÂU 12. Tính $\lim \sqrt{\dfrac{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}{2n(n+7)(6n+5)}}$.

Ⓐ $\dfrac{1}{6}$. Ⓑ $\dfrac{1}{2\sqrt{6}}$. Ⓒ $\dfrac{1}{2}$. Ⓓ $+\infty$.

CÂU 13. Giới hạn $\lim \dfrac{(2n-1)(3-n)^2}{(4n-5)^3}$ có kết quả bằng

Ⓐ 0. Ⓑ $\dfrac{1}{32}$. Ⓒ $\dfrac{3}{2}$. Ⓓ $\dfrac{1}{2}$.

CÂU 14. Tìm $L = \lim \left(\dfrac{1}{1} + \dfrac{1}{1+2} + \cdots + \dfrac{1}{1+2+\cdots+n}\right)$.

Ⓐ $L = \dfrac{5}{2}$. Ⓑ $L = +\infty$. Ⓒ $L = 2$. Ⓓ $L = \dfrac{3}{2}$.

CÂU 15. Đặt $f(n) = \left(n^2+n+1\right)^2 + 1$. Xét dãy số (u_n) sao cho $u_n = \dfrac{f(1)\cdot f(3)\cdot f(5)\cdots f(2n-1)}{f(2)\cdot f(4)\cdot f(6)\cdots f(2n)}$. Tính $\lim n\sqrt{u_n}$.

Ⓐ $\lim n\sqrt{u_n} = \sqrt{2}$. Ⓑ $\lim n\sqrt{u_n} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

QUICK NOTE

Ⓒ $\lim n\sqrt{u_n} = \sqrt{3}$. Ⓓ $\lim n\sqrt{u_n} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

CÂU 16. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số a thuộc khoảng $(0; 2024)$ để có

$$\lim \sqrt{\frac{9^n + 3^{n+1}}{5^n + 9^{n+a}}} \leq \frac{1}{2187}\ ?$$

Ⓐ 2017. Ⓑ 2016. Ⓒ 2023. Ⓓ 2024.

Dạng 2. Phương pháp lượng liên hợp (lim hữu hạn)

Nếu giới hạn của dãy số ở dạng vô định thì ta sử dụng các phép biến đổi để đưa về dạng cơ bản.
Một số phép biến đổi liên hợp:

$$f(n) - g(n) = \frac{(f(n))^2 - (g(n))^2}{f(n) + g(n)}$$
$$\sqrt{f(n)} - \sqrt{g(n)} = \frac{f(n) - g(n)}{\sqrt{f(n)} + \sqrt{g(n)}}$$
$$\sqrt{f(n)} - g(n) = \frac{f(n) - (g(n))^2}{\sqrt{f(n)} + g(n)}$$
$$\sqrt[3]{f(n)} - \sqrt[3]{g(n)} = \frac{f(n) - g(n)}{\sqrt[3]{(f(n))^2} + \sqrt[3]{f(n)g(n)} + \sqrt[3]{(g(n))^2}}$$

1. Ví dụ mẫu

VÍ DỤ 1. Tính giới hạn $I = \lim \left(\sqrt{n^2 - 2n + 3} - n\right)$.

VÍ DỤ 2. Tính giới hạn $I = \lim \left(\sqrt{n^2 + 7} - \sqrt{n^2 + 5}\right)$.

VÍ DỤ 3. Tính giới hạn $I = \lim \left(\sqrt{n^2 + 2n} - \sqrt{n^2 - 2n}\right)$.

VÍ DỤ 4. Tính giới hạn $I = \lim \left(\sqrt{2n^2 - n + 1} - \sqrt{2n^2 - 3n + 2}\right)$.

VÍ DỤ 5. Tính giới hạn $I = \lim \left(n - \sqrt[3]{n^3 + 3n^2 + 1}\right)$.

2. Câu hỏi trắc nghiệm

CÂU 1. Tính giới hạn $I = \lim \left(\sqrt{n^2 + 2n + 3} - n\right)$

Ⓐ 1. Ⓑ 0. Ⓒ 2. Ⓓ 3.

CÂU 2. Tính giới hạn $I = \lim \left(\sqrt{n^2 + 1} - \sqrt{n^2 - 2}\right)$

Ⓐ 3. Ⓑ 0. Ⓒ $\sqrt{3}$. Ⓓ $\dfrac{3}{2}$.

CÂU 3. Tính giới hạn $I = \lim \left(n - \sqrt{n^2 + 2n - 3}\right)$

Ⓐ 0. Ⓑ -2. Ⓒ -1. Ⓓ 2.

CÂU 4. Tính giới hạn $I = \lim \left(\sqrt{n^2 - n + 1} - n\right)$

Ⓐ $\dfrac{1}{2}$. Ⓑ 1. Ⓒ $-\dfrac{1}{2}$. Ⓓ 0.

CÂU 5. Tính giới hạn $I = \lim \left(\sqrt[3]{n^3 - n^2} - n\right)$

Ⓐ $-\dfrac{1}{3}$. Ⓑ $\dfrac{1}{3}$. Ⓒ 1. Ⓓ 0.

CÂU 6. Tính giới hạn $I = \lim \left(\sqrt{2n^2 + 2n - 1} - \sqrt{2n^2 + n}\right)$

Ⓐ 0. Ⓑ $\dfrac{1}{4}$. Ⓒ $\dfrac{1}{2}$. Ⓓ $\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$.

CÂU 7. Tính giới hạn $I = \lim \left(\sqrt[3]{n^3 + 2} - \sqrt[3]{n^3 + 1}\right)$

Ⓐ 0. Ⓑ $-\dfrac{1}{3}$. Ⓒ 1. Ⓓ $\dfrac{1}{3}$.

QUICK NOTE

CÂU 8. Tính giới hạn $I = \lim n\left(\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2+n-8}\right)$

(A) 0. (B) ∞. (C) 2. (D) $\frac{9}{2}$.

Dạng 3. Giới hạn vô cực

Ta nói dãy $\{u_n\}$ có giới hạn là $+\infty$ khi $n \to +\infty$, nếu u_n có thể lớn hơn một số dương bất kì, kể từ một số hạng nào đó trở đi.
Kí hiệu: $\lim u_n = +\infty$ hay $u_n \to +\infty$ khi $n \to +\infty$.
Dãy số $\{u_n\}$ có giới hạn là $-\infty$ khi $n \to +\infty$, nếu $\lim -u_n = +\infty$.
Kí hiệu: $\lim u_n = -\infty$ hay $u_n \to -\infty$ khi $n \to +\infty$.

Một số giới hạn đặc biệt và định lí về giới hạn dãy số

Giới hạn đặc biệt:

$\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$

$\lim\limits_{n\to+\infty} n^k = +\infty$ với k là số nguyên dương.

$\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$ nếu $q > 1$

Định lý:

Nếu $\lim u_n = a > 0$ và $\lim v_n = 0$ với $v_n > 0$ thì $\lim \dfrac{u_n}{v_n} = +\infty$.

Nếu $\lim u_n = +\infty$ và $\lim v_n = a > 0$ thì $\lim u_n v_n = +\infty$.

1. Ví dụ mẫu

VÍ DỤ 1. Tìm giới hạn

a) $\lim(n^3+n^2+n+1)$.

b) $\lim\left(n^2-n\sqrt{n}+1\right)$.

VÍ DỤ 2. Tìm giới hạn

a) $\lim \dfrac{n^5+n^4-n-2}{4n^3+6n^2+9}$.

b) $\lim \dfrac{\sqrt[3]{n^6-7n^3-5n+8}}{n+12}$.

c) $\lim\left(n+\sqrt{n^2-n+1}\right)$.

VÍ DỤ 3. Tìm giới hạn

a) $\lim \dfrac{1^3+2^3+\ldots+n^3}{n^2+3n\sqrt{n}+2}$.

b) $\lim\left(n+\sqrt[3]{n^3-2n+1}\right)$.

c) $\lim \dfrac{n^3-3n}{2n+15}$.

Dạng 4. Tính tổng của dãy cấp số nhân lùi vô hạn

ĐỊNH NGHĨA 15.3. Cấp số nhân vô hạn $u_1, u_1q, \ldots, u_1q^{n-1}, \ldots$ có công bội q thỏa mãn $|q| < 1$ được gọi là cấp số nhân lùi vô hạn. Tổng của cấp số nhân lùi vô hạn đã cho là

$$S = u_1 + u_1q + u_1q^2 + \ldots = \frac{u_1}{1-q}.$$

1. Ví dụ mẫu

VÍ DỤ 1. Cho cấp số nhân (u_n), với $u_1 = 1$ và công bội $q = \dfrac{1}{2}$.

a) So sánh $|q|$ với 1.

b) Tính $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$ từ đó hãy tính $\lim S_n$.

VÍ DỤ 2. Tính tổng $T = 1 + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3^2} + \ldots + \dfrac{1}{3^n} + \ldots$

VÍ DỤ 3. Tính tổng $S = 1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{8} + \ldots + \left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1} + \ldots$.

VÍ DỤ 4. Biểu diễn số thập phân vô hạn tuần hoàn $2{,}222\ldots$ dưới dạng phân số.

VÍ DỤ 5. Biểu diễn số thập phân vô hạn tuần hoàn $0,(3)$ dưới dạng phân số.

QUICK NOTE

2. Câu hỏi trắc nghiệm

CÂU 1. Cho cấp số nhân $u_1, u_2, \ldots$ với công bội q thỏa điều kiện $|q| < 1$. Lúc đó, ta nói cấp số nhân đã cho là lùi vô hạn. Tổng của cấp số nhân đã cho là $S = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots$ bằng

Ⓐ $\dfrac{u_1}{q-1}$. Ⓑ $\dfrac{u_1(q^n-1)}{q-1}$. Ⓒ $\dfrac{u_1}{1+q}$. Ⓓ $\dfrac{u_1}{1-q}$.

CÂU 2. Gọi $S = \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{9} + \cdots + \dfrac{(-1)^{n+1}}{3^n}$. Khi đó, $\lim S$ bằng

Ⓐ $\dfrac{3}{4}$. Ⓑ $\dfrac{1}{4}$. Ⓒ $\dfrac{1}{2}$. Ⓓ 1.

CÂU 3. Tổng $S = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3^2} + \cdots + \dfrac{1}{3^n} + \cdots$ có giá trị là

Ⓐ $\dfrac{1}{3}$. Ⓑ $\dfrac{1}{2}$. Ⓒ $\dfrac{1}{9}$. Ⓓ $\dfrac{1}{4}$.

CÂU 4. Tính $S = 9 + 3 + 1 + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{9} + \cdots + \dfrac{1}{3^{n-3}} + \cdots$. Kết quả là

Ⓐ $\dfrac{27}{2}$. Ⓑ 14. Ⓒ 16. Ⓓ 15.

CÂU 5. Tổng các cấp số nhân vô hạn: $1, -\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}, -\dfrac{1}{8}, \ldots, \dfrac{(-1)^{n+1}}{2^{n-1}}, \ldots$ là

Ⓐ $\dfrac{3}{2}$. Ⓑ $\dfrac{2}{3}$. Ⓒ $-\dfrac{2}{3}$. Ⓓ 2.

CÂU 6. Gọi $S = 1 + \dfrac{2}{3} + \dfrac{4}{9} + \cdots + \dfrac{2^n}{3^n} + \cdots$. Giá trị của S bằng

Ⓐ 3. Ⓑ 5. Ⓒ 6. Ⓓ 4.

CÂU 7. Số thập phân vô hạn tuần hoàn $0{,}233333\ldots$ biểu diễn dưới dạng số là

Ⓐ $\dfrac{1}{23}$. Ⓑ $\dfrac{2333}{10000}$. Ⓒ $\dfrac{23333}{10^5}$. Ⓓ $\dfrac{7}{30}$.

CÂU 8. Số thập phân vô hạn tuần hoàn $0{,}212121\ldots$ biểu diễn dưới dạng phân số là

Ⓐ $\dfrac{2121}{10^4}$. Ⓑ $\dfrac{1}{21}$. Ⓒ $\dfrac{7}{33}$. Ⓓ $\dfrac{212121}{10^6}$.

CÂU 9. Số thập phân vô hạn tuần hoàn $0{,}271414\ldots$ được biểu diễn bằng phân số:

Ⓐ $\dfrac{2714}{9900}$. Ⓑ $\dfrac{2617}{9900}$. Ⓒ $\dfrac{2786}{9900}$. Ⓓ $\dfrac{2687}{9900}$.

CÂU 10. Tổng của cấp số nhân lùi vô hạn: $-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{8}, \ldots, \dfrac{(-1)^n}{2^n}, \ldots$ là

Ⓐ $-\dfrac{1}{3}$. Ⓑ $-\dfrac{1}{4}$. Ⓒ -1. Ⓓ $\dfrac{1}{2}$.

CÂU 11. Số thập phân vô hạn tuần hoàn $0{,}511111\cdots$ được biểu diễn bởi phân số

Ⓐ $\dfrac{47}{90}$. Ⓑ $\dfrac{46}{90}$. Ⓒ $\dfrac{6}{11}$. Ⓓ $\dfrac{43}{90}$.

CÂU 12. Tổng của cấp số nhân vô hạn $\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{8}, \ldots \dfrac{(-1)^{n+1}}{2^n}, \ldots$ là

Ⓐ $-\dfrac{2}{3}$. Ⓑ 1. Ⓒ $-\dfrac{1}{3}$. Ⓓ $\dfrac{1}{3}$.

CÂU 13. Tổng của cấp số nhân lùi vô hạn $\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{6}, \dfrac{1}{18}, \ldots, \dfrac{(-1)^{n+1}}{2 \cdot 3^{n-1}}, \ldots$ là

Ⓐ $\dfrac{3}{4}$. Ⓑ $\dfrac{8}{3}$. Ⓒ $\dfrac{2}{3}$. Ⓓ $\dfrac{3}{8}$.

CÂU 14. Tổng của cấp số nhân lùi vô hạn $\dfrac{1}{3}, -\dfrac{1}{9}, \dfrac{1}{27}, \ldots, \dfrac{(-1)^{n+1}}{3^n}, \ldots$ là

Ⓐ 4. Ⓑ $\dfrac{1}{2}$. Ⓒ $\dfrac{3}{4}$. Ⓓ $\dfrac{1}{4}$.

CÂU 15. Số thập phân vô hạn tuần hoàn $0{,}17232323\ldots$ được biểu diễn bởi phân số?

Ⓐ $\dfrac{1706}{9900}$. Ⓑ $\dfrac{153}{990}$. Ⓒ $\dfrac{164}{990}$. Ⓓ $\dfrac{853}{4950}$.

Dạng 5. Toán thực tế, liên môn liên quan đến giới hạn dãy số

$$S = u_1 + u_1 q + u_1 q^2 + \ldots = \frac{u_1}{1-q}.$$

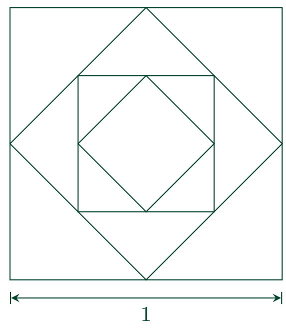
QUICK NOTE

1. Ví dụ mẫu

VÍ DỤ 1.
Từ hình vuông có độ dài cạnh bằng 1, người ta nối các trung điểm của cạnh hình vuông để tạo ra hình vuông mới như hình bên. Tiếp tục quá trình này đến vô hạn.

a) Tính diện tích S_n của hình vuông được tạo thành từ bước thứ n.

b) Tính tổng diện tích của tất cả các hình vuông được tạo thành.



VÍ DỤ 2. Có 1 kg chất phóng xạ độc hại. Biết rằng, cứ sau một khoảng thời gian $T = 24000$ năm thì một nửa số chất phóng xạ này bị phân rã thành chất khác không độc hại đối với sức khỏe của con người (T được gọi là *chu kì bán rã*).

(Nguồn: Đại số và giải tích 11, NXB GD Việt Nam, 2021)

Gọi u_n là khối lượng chất phóng xạ còn lại sau chu kì thứ n.

a) Tìm số hạng tổng quát u_n của dãy số (u_n).

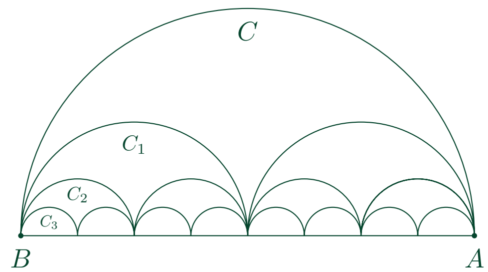
b) Chứng minh rằng (u_n) có giới hạn là 0.

c) Từ kết quả câu 2, chứng tỏ rằng sau một số năm nào đó khối lượng phóng xạ đã cho ban đầu không còn độc hại với con người, biết rằng chất phóng xạ này sẽ không độc hại nữa nếu khối lượng chất phóng xạ còn lại bé hơn 10^{-6} g.

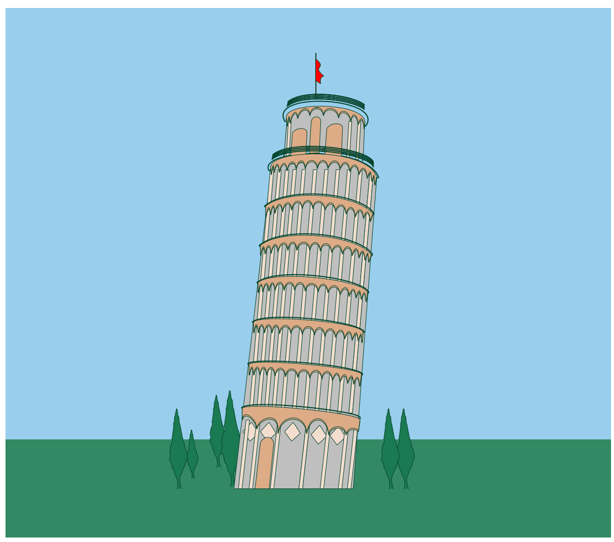
VÍ DỤ 3. Gọi C là nửa đường tròn đường kính $AB = 2R$.
C_1 là đường gồm hai nửa đường tròn đường kính $\dfrac{AB}{2}$,
C_2 là đường gồm bốn nửa đường tròn đường kính $\dfrac{AB}{4}, \cdots$
C_n là đường gồm 2^n nửa đường tròn đường kính $\dfrac{AB}{2^n}, \cdots$
Gọi p_n là độ dài của C_n, S_n là diện tích hình phẳng giới hạn bởi C_n và đoạn thẳng AB.

a) Tính p_n, S_n.

b) Tính giới hạn của các dãy số (p_n) và (S_n).



VÍ DỤ 4.
Từ độ cao $55,8$ m của tháp nghiêng Pisa nước Ý, người ta thả một quả bóng cao su chạm xuống đất hình bên dưới. Giả sử mỗi lần chạm đất quả bóng lại nảy lên độ cao bằng $\dfrac{1}{10}$ độ cao mà quả bóng đạt được trước đó. Gọi S_n là tổng độ dài quãng đường di chuyển của quả bóng tính từ lúc thả ban đầu cho đến khi quả bóng đó chạm đất n lần. Tính $\lim S_n$.



VÍ DỤ 5. Cho một tam giác đều ABC cạnh a. Tam giác $A_1B_1C_1$ có các đỉnh là trung điểm các cạnh của tam giác ABC, tam giác $A_2B_2C_2$ có các đỉnh là trung điểm các cạnh của tam

QUICK NOTE

giác $A_1B_1C_1, \ldots$, tam giác $A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}$ có các đỉnh là trung điểm các cạnh của tam giác $A_nB_nC_n, \ldots$ Gọi $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$ và $S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$ theo thứ tự là chu vi và diện tích của các tam giác $A_1B_1C_1, A_2B_2C_2, \ldots, A_nB_nC_n, \ldots$.

a) Tìm giới hạn của các dãy số (p_n) và (S_n).

b) Tìm các tổng $p_1 + p_2 + \ldots + p_n + \ldots$ và $S_1 + S_2 + \ldots + S_n + \ldots$.

2. Câu hỏi trắc nghiệm

CÂU 1. Có 1 kg chất phóng xạ độc hại. Biết rằng, cứ sau một khoảng thời gian $T = 24000$ năm thì một nửa số chất phóng xạ này bị phân rã thành chất khác không độc hại đối với sức khỏe của con người (T được gọi là *chu kì bán rã*). Gọi u_n là khối lượng chất phóng xạ còn lại sau chu kì thứ n. Sau ít nhất bao nhiêu chu kì bán rã thì khối lượng phóng xạ đã cho ban đầu không còn độc hại với con người, biết rằng chất phóng xạ này sẽ không độc hại nữa nếu khối lượng chất phóng xạ còn lại bé hơn 10^{-6} g.

Ⓐ 24. Ⓑ 30. Ⓒ 100. Ⓓ 15.

CÂU 2. Có 1 kg chất phóng xạ độc hại. Biết rằng, cứ sau một khoảng thời gian $T = 24000$ năm thì một nửa số chất phóng xạ này bị phân rã thành chất khác không độc hại đối với sức khỏe của con người (T được gọi là *chu kì bán rã*). Gọi u_n là khối lượng chất phóng xạ còn lại sau chu kì thứ n. Sau ít nhất bao nhiêu năm thì khối lượng phóng xạ đã cho ban đầu không còn độc hại với con người, biết rằng chất phóng xạ này sẽ không độc hại nữa nếu khối lượng chất phóng xạ còn lại bé hơn 10^{-6} g.

Ⓐ 30. Ⓑ 2400. Ⓒ 720000. Ⓓ 10000.

CÂU 3. Từ hình vuông có độ dài cạnh bằng 1, người ta nối các trung điểm của cạnh hình vuông để tạo ra hình vuông mới như hình bên. Tiếp tục quá trình này đến vô hạn. Tính tổng diện tích của tất cả các hình vuông được tạo thành.

Ⓐ 1. Ⓑ 2. Ⓒ 3. Ⓓ 4.

CÂU 4. Từ hình vuông đầu tiên có cạnh bằng 1 (đơn vị độ dài), nối các trung điểm của bốn cạnh để có hình vuông thứ hai. Tiếp tục nối các trung điểm của bốn cạnh của hình vuông thứ hai để được hình vuông thứ ba. Cứ tiếp tục làm như thế, nhận được một dãy hình vuông. Tính tổng chu vi của dãy các hình vuông trên.

Ⓐ $8 + \sqrt{2}$. Ⓑ $2 + \sqrt{2}$. Ⓒ $8 + 4\sqrt{2}$. Ⓓ $4 + 4\sqrt{2}$.

CÂU 5. Từ độ cao $55,8$ m của tháp nghiêng Pisa nước Ý, người ta thả một quả bóng cao su chạm xuống đất hình bên dưới. Giả sử mỗi lần chạm đất quả bóng lại nảy lên độ cao bằng $\dfrac{1}{10}$ độ cao mà quả bóng đạt được trước đó. Gọi S_n là tổng độ dài quãng đường di chuyển của quả bóng tính từ lúc thả ban đầu cho đến khi quả bóng đó chạm đất n lần. Tính $\lim S_n$.

Ⓐ 58,8. Ⓑ 67,2. Ⓒ 68. Ⓓ 68,2.

Dạng 6. Nguyên lý kẹp

Để tìm giới hạn của dãy số theo nguyên lý kẹp ta cần nhớ:

- Cho hai dãy số (u_n) và (v_n). Nếu $|u_n| \le v_n$ với mọi n và $\lim v_n = 0$ thì $\lim u_n = 0$.
- Cho ba dãy số (u_n), (v_n) và (w_n). Nếu $u_n \le v_n \le w_n$ với mọi n và $\lim u_n = \lim w_n = L$ thì $\lim v_n = L$.

1. Ví dụ mẫu

VÍ DỤ 1. Chứng minh rằng các dãy số với số hạng tổng quát sau đây có giới hạn 0.

a) $u_n = \dfrac{(-1)^n}{3n+2}$.

b) $u_n = \dfrac{n \sin 2n}{n^3+2}$.

c) $u_n = \dfrac{(-1)^n \cos n}{\sqrt{n}}$.

d) $u_n = \dfrac{3\sin n - 4\cos n}{2n^2+1}$.

VÍ DỤ 2. Chứng minh rằng các dãy số với số hạng tổng quát sau đây có giới hạn 0.

QUICK NOTE

a) $u_n = \sqrt{n^3+2} - \sqrt{n^3+1}$.

b) $u_n = \dfrac{3^n \sin 2n + 4^n}{2^n + 4 \cdot 5^n}$.

c) $u_n = \dfrac{n + \sin 2n}{n^2 + n}$.

d) $u_n = \dfrac{n + \cos \dfrac{n\pi}{5}}{n\sqrt{n} + \sqrt{n}}$.

VÍ DỤ 3. Cho dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{n}{3^n}$.

a) Chứng minh rằng $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \dfrac{2}{3}$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

b) Bằng phương pháp quy nạp chứng minh rằng $0 < u_n < \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

c) Dãy (u_n) có giới hạn 0.

VÍ DỤ 4. Chứng minh rằng

a) $\lim \left(\dfrac{-n^3}{n^3+1}\right) = -1$.

b) $\lim \left(\dfrac{n^2+3n+2}{2n^2+n}\right) = \dfrac{1}{2}$.

VÍ DỤ 5. Chứng minh rằng

a) $\lim \left(\dfrac{3 \cdot 3^n - \sin 3n}{3^n}\right) = 3$.

b) $\lim \left(\sqrt{n^2+n} - n\right) = \dfrac{1}{2}$.

VÍ DỤ 6. Tìm các giới hạn sau

a) $\lim \left(\dfrac{1}{\sqrt{4n^2+1}} + \dfrac{1}{\sqrt{4n^2+2}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{4n^2+n}}\right)$.

b) $\lim \dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)}$.

Bài 16. GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Giới hạn hữu hạn của hàm số tại một điểm

ĐỊNH NGHĨA 16.1. Cho điểm x_0 thuộc khoảng K và hàm số $y = f(x)$ xác định trên K hoặc $K \setminus \{x_0\}$.
Ta nói hàm số $y = f(x)$ ***có giới hạn hữu hạn*** là số L khi x dần tới x_0 nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_n \in K \setminus \{x_0\}$ và $x_n \to x_0$ thì $f(x_n) \to L$, kí hiệu $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ hay $f(x) \to L$ khi $x \to x_0$.

$\lim\limits_{x \to x_0} x = x_0$; $\lim\limits_{x \to x_0} c = c$ (c là hằng số).

2. Các phép toán về giới hạn hữu hạn của hàm số

a) Cho $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ và $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = M$. Khi đó:

- $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) + g(x)] = L + M$;
- $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) - g(x)] = L - M$;
- $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) \cdot g(x)] = L \cdot M$;
- $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L}{M}$ (với $M \neq 0$).

b) Nếu $f(x) \geq 0$ và $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ thì $L \geq 0$ và $\lim\limits_{x \to x_0} \sqrt{f(x)} = \sqrt{L}$.
(Dấu của $f(x)$ được xét trên khoảng tìm giới hạn, $x \neq x_0$).

a) $\lim\limits_{x \to x_0} x^k = x_0^k$, k là số nguyên dương;

QUICK NOTE

b) $\lim\limits_{x\to x_0}[cf(x)] = c\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ ($c\in\mathbb{R}$, *nếu tồn tại* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\in\mathbb{R}$).

3. Giới hạn một phía

ĐỊNH NGHĨA 16.2.

- Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên khoảng $(x_0;b)$.
Ta nói hàm số $y=f(x)$ ***có giới hạn bên phải*** là số L khi x dần tới x_0 nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_0<x_n<b$ và $x_n\to x_0$ thì $f(x_n)\to L$, kí hiệu $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=L$.

- Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên khoảng $(a;x_0)$.
Ta nói hàm số $y=f(x)$ ***có giới hạn bên trái*** là số L khi x dần tới x_0 nếu với dãy số (x_n) bất kì, $a<x_n<x_0$ và $x_n\to x_0$ thì $f(x_n)\to L$, kí hiệu $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=L$.

a) *Ta thừa nhận các kết quả sau:*

- $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=L$ *và* $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=L$ *khi và chỉ khi* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L$;
- *Nếu* $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)\neq \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ *thì không tồn tại* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.

b) *Các phép toán về giới hạn hữu hạn của hàm số ở Mục 2 vẫn đúng khi ta thay* $x\to x_0$ *bằng* $x\to x_0^+$ *hoặc* $x\to x_0^-$.

4. Giới hạn hữu hạn của hàm số tại vô cực

ĐỊNH NGHĨA 16.3.

- Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên khoảng $(a;+\infty)$.
Ta nói hàm số $y=f(x)$ ***có giới hạn hữu hạn*** là số L khi $x\to+\infty$ nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_n>a$ và $x_n\to+\infty$ thì $f(x_n)\to L$, kí hiệu $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=L$ hay $f(x)\to L$ khi $x\to+\infty$.

- Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên khoảng $(-\infty;a)$.
Ta nói hàm số $y=f(x)$ ***có giới hạn hữu hạn*** là số L khi $x\to-\infty$ nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_n<a$ và $x_n\to-\infty$ thì $f(x_n)\to L$, kí hiệu $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=L$ hay $f(x)\to L$ khi $x\to-\infty$.

a) *Với c là hằng số và k là số nguyên dương, ta luôn có:*

$$\lim_{x\to\pm\infty} c = c \quad \text{và} \quad \lim_{x\to\pm\infty}\frac{c}{x^k}=0.$$

b) *Các phép toán trên giới hạn hàm số ở Mục 2 vẫn đúng khi thay* $x\to x_0$ *bằng* $x\to+\infty$ *hoặc* $x\to-\infty$.

5. Giới hạn vô cực của hàm số tại một điểm

ĐỊNH NGHĨA 16.4. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên khoảng $(x_0;b)$.

- Ta nói hàm số $y=f(x)$ ***có giới hạn bên phải*** là $+\infty$ khi x dần tới x_0 về bên phải nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_0<x_n<b$ và $x_n\to x_0$ thì $f(x_n)\to+\infty$, kí hiệu $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=+\infty$ hay $f(x)\to+\infty$ khi $x\to x_0^+$.

- Ta nói hàm số $y=f(x)$ ***có giới hạn bên phải*** là $-\infty$ khi x dần tới x_0 về bên phải nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_0<x_n<b$ và $x_n\to x_0$ thì $f(x_n)\to-\infty$, kí hiệu $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=-\infty$ hay $f(x)\to-\infty$ khi $x\to x_0^+$.

a) *Các giới hạn* $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ *được định nghĩa như trên.*

b) *Ta có các giới hạn thường dùng như sau:*

QUICK NOTE

- $\lim\limits_{x\to a^+} \dfrac{1}{x-a} = +\infty$ *và* $\lim\limits_{x\to a^-} \dfrac{1}{x-a} = -\infty$ $(a \in \mathbb{R})$;
- $\lim\limits_{x\to+\infty} x^k = +\infty$ *với k nguyên dương;*
- $\lim\limits_{x\to-\infty} x^k = +\infty$ *với k là số chẵn;*
- $\lim\limits_{x\to-\infty} x^k = -\infty$ *với k là số lẻ.*

c) Các phép toán trên giới hạn hàm số của Mục 2 chỉ áp dụng được khi tất cả các hàm số được xét có giới hạn hữu hạn. Với giới hạn vô cực, ta có một số quy tắc sau đây.

Nếu $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = L \neq 0$ *và* $\lim\limits_{x\to x_0^+} g(x) = +\infty$ *(hoặc* $\lim\limits_{x\to x_0^+} g(x) = -\infty$*) thì* $\lim\limits_{x\to x_0^+} [f(x)\cdot g(x)]$ *được tính theo quy tắc cho bởi bảng sau:*

$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$	$\lim\limits_{x\to x_0^+} g(x)$	$\lim\limits_{x\to x_0^+} [f(x)\cdot g(x)]$
$L>0$	$+\infty$	$+\infty$
$L>0$	$-\infty$	$-\infty$
$L<0$	$+\infty$	$-\infty$
$L<0$	$-\infty$	$+\infty$

Các quy tắc trên vẫn đúng khi thay x_0^+ *thành* x_0^- *(hoặc* $+\infty$, $-\infty$*).*

B. CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

Dạng 1. Thay số trực tiếp

1. Ví dụ mẫu

VÍ DỤ 1. Tính các giới hạn sau

a) $\lim\limits_{x\to1}(x^2-4x+2)$;

b) $\lim\limits_{x\to2} \dfrac{3x-2}{2x+1}$.

VÍ DỤ 2. Tìm các giới hạn sau

a) $\lim\limits_{x\to3} \sqrt{\dfrac{x^2}{x^3-x-6}}$.

b) $\lim\limits_{x\to-2} \sqrt[3]{\dfrac{2x^4+3x+2}{x^2-x+2}}$.

VÍ DỤ 3. Cho $f(x)$ là một đa thức thỏa mãn $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{f(x)-16}{x-1} = 24$. Tính giới hạn sau

$$\lim_{x\to1} \frac{f(x)-16}{(x-1)\left(\sqrt{2f(x)+4}+6\right)}.$$

2. Câu hỏi trắc nghiệm

CÂU 1. Biết $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = m$, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = n$. Tính $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x)+g(x)]$.

Ⓐ $m+n$. Ⓑ $m-n$. Ⓒ mn. Ⓓ $\dfrac{m}{n}$.

CÂU 2. Khẳng định nào sau đây là đúng?

Ⓐ $\lim\limits_{x\to x_0} \sqrt[3]{f(x)+g(x)} = \sqrt[3]{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)} + \sqrt[3]{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$.

Ⓑ $\lim\limits_{x\to x_0} \sqrt[3]{f(x)+g(x)} = \lim\limits_{x\to x_0} \sqrt[3]{f(x)} + \lim\limits_{x\to x_0} \sqrt[3]{g(x)}$.

Ⓒ $\lim\limits_{x\to x_0} \sqrt[3]{f(x)+g(x)} = \sqrt[3]{\lim\limits_{x\to x_0} [f(x)+g(x)]}$.

Ⓓ $\lim\limits_{x\to x_0} \sqrt[3]{f(x)+g(x)} = \lim\limits_{x\to x_0} \left[\sqrt[3]{f(x)} + \sqrt[3]{g(x)}\right]$.

CÂU 3. Cho các giới hạn $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 2$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 3$. Tính $M = \lim\limits_{x\to x_0} [3f(x)-4g(x)]$.

Ⓐ $M=5$. Ⓑ $M=2$. Ⓒ $M=-6$. Ⓓ $M=3$.

QUICK NOTE

CÂU 4. Biết $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=m$, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=n$. Tính $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-g(x)]$.

Ⓐ $m+n$. Ⓑ $m-n$. Ⓒ mn. Ⓓ $\dfrac{m}{n}$.

CÂU 5. Cho $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$, kết quả của $\lim\limits_{x\to a}[-3\cdot f(x)]$ bằng

Ⓐ $+\infty$. Ⓑ 0. Ⓒ 3. Ⓓ $-\infty$.

CÂU 6. Cho $k\in\mathbb{Z}$, kết quả của $\lim\limits_{x\to-\infty} x^{2k+1}$ bằng

Ⓐ 0. Ⓑ $-\infty$. Ⓒ $+\infty$. Ⓓ 5.

CÂU 7. Cho $\lim\limits_{x\to3} f(x)=-2$. Giá trị $\lim\limits_{x\to3}[f(x)+4x-1]$ bằng

Ⓐ 5. Ⓑ 6. Ⓒ -11. Ⓓ 9.

CÂU 8. Cho $\lim\limits_{x\to2} f(x)=3$. Giá trị của $\lim\limits_{x\to2}[f(x)+x]$ bằng

Ⓐ 5. Ⓑ 6. Ⓒ 1. Ⓓ 4.

CÂU 9. Với k là số nguyên dương. Kết quả của giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{2k}$ là

Ⓐ $+\infty$. Ⓑ 0. Ⓒ $-\infty$. Ⓓ 1.

CÂU 10. Cho c là hằng số, k là số nguyên dương. Khẳng định nào sau đây **sai**?

Ⓐ $\lim\limits_{x\to+\infty} c=+\infty$. Ⓑ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{c}{x^k}=0$. Ⓒ $\lim\limits_{x\to x_0} c=c$. Ⓓ $\lim\limits_{x\to x_0} x=x_0$.

CÂU 11. Cho $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=a$, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=b$. Hỏi mệnh đề nào sau đây là mệnh đề **sai**?

Ⓐ $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)\cdot g(x)]=ab$. Ⓑ $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-g(x)]=a-b$.

Ⓒ $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)+g(x)]=a+b$. Ⓓ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{a}{b}$.

CÂU 12. Với k là số nguyên dương thì $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x^k}$ bằng

Ⓐ $+\infty$. Ⓑ $-\infty$. Ⓒ x. Ⓓ 0.

CÂU 13. Tính $I=\lim\limits_{x\to2}\left(x^2+x-6\right)$.

Ⓐ 0. Ⓑ 1. Ⓒ 2. Ⓓ 3.

CÂU 14. Tính $I=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+2x+3}{2x-1}$.

Ⓐ 4. Ⓑ 5. Ⓒ 6. Ⓓ 7.

CÂU 15. Tính $I=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{|x|}{x}$.

Ⓐ 1. Ⓑ -1. Ⓒ Không tồn tại . Ⓓ 0.

Dạng 2. Phương pháp đặt thừa số chung - kết quả hữu hạn

- Nếu tam thức bậc hai ax^2+bx+c có hai nghiệm x_1, x_2 thì $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$.
- $a^n-b^n=(a-b)\left(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1}\right)$.
- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} c=c$; $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{c}{x^k}=0$ với c là hằng số và $k\in\mathbb{N}$.
- $a\sqrt{b}=\begin{cases}\sqrt{a^2b} & a\ge0\\ -\sqrt{a^2b} & a<0.\end{cases}$

1. Ví dụ mẫu

VÍ DỤ 1 (NB). Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-9}{x-3}$.

VÍ DỤ 2 (TH). Tính giới hạn $I=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-5x+6}{x-2}$.

VÍ DỤ 3 (TH). Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^4+7}{x^4+1}$.

QUICK NOTE

VÍ DỤ 4 (TH). Tìm giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{x^2+1}{2x^4+x^2-3}}$.

VÍ DỤ 5 (TH). Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$.

VÍ DỤ 6 (VDT). Cho m,n là các số thực khác 0. Nếu giới hạn $\lim\limits_{x\to-5}\dfrac{x^2+mx+n}{x+5}=3$, hãy tìm mn.

VÍ DỤ 7 (VDT). Tìm số thực a thỏa mãn $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{a\sqrt{2x^2+3}+2024}{2x+2023}=\dfrac{1}{2}$.

2. Câu hỏi trắc nghiệm

CÂU 1. Tìm $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{9-x^2}{x^2-4x+3}$. Kết quả là

(A) -3. (B) 4. (C) -4. (D) 3.

CÂU 2. Tìm $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{x^2-16}{x-4}$. Kết quả là

(A) 7. (B) 8. (C) 5. (D) 6.

CÂU 3. Tính giới hạn $A=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-1}{x-1}$.

(A) $A=-\infty$. (B) $A=0$. (C) $A=3$. (D) $A=+\infty$.

CÂU 4. Chọn kết quả đúng trong các kết quả sau của $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2+2x+1}{2x+2}$ là

(A) $-\infty$. (B) 0. (C) $\dfrac{1}{2}$. (D) $+\infty$.

CÂU 5. Giới hạn $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{x^2+2x-15}{x-3}$ bằng

(A) $\dfrac{1}{8}$. (B) 9. (C) $+\infty$. (D) 8.

CÂU 6. Tính giới hạn $I=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x-2}{2x+1}$.

(A) $I=-2$. (B) $I=-\dfrac{3}{2}$. (C) $I=2$. (D) $I=\dfrac{3}{2}$.

CÂU 7. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-2}{x+3}$ bằng

(A) $-\dfrac{2}{3}$. (B) 1. (C) 2. (D) -3.

CÂU 8. Giới hạn $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-3x+2}{x^3-x^2+x-1}$ bằng

(A) -2. (B) -1. (C) $-\dfrac{1}{2}$. (D) $\dfrac{1}{2}$.

CÂU 9. Giới hạn $T=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^4-3x+2}{x^3+2x-3}$ bằng

(A) $\dfrac{2}{9}$. (B) $\dfrac{2}{5}$. (C) $\dfrac{1}{5}$. (D) $+\infty$.

CÂU 10. Giới hạn $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^3-x^2-x-2}$ bằng

(A) 0. (B) $-\dfrac{1}{7}$. (C) -7. (D) $+\infty$.

CÂU 11. Tìm $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^4-3x^2+2}{x^3+2x-3}$.

(A) $-\dfrac{5}{2}$. (B) $-\dfrac{2}{5}$. (C) $\dfrac{1}{5}$. (D) $+\infty$.

CÂU 12. Tính $\lim\limits_{x\to2}\left(\dfrac{1}{x^2-3x+2}+\dfrac{1}{x^2-5x+6}\right)$.

(A) 2. (B) $+\infty$. (C) -2. (D) 0.

CÂU 13. Giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+2}-2}{x-2}$ bằng

(A) $-\infty$. (B) 1. (C) $+\infty$. (D) -1.

QUICK NOTE

CÂU 14. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{(4x+1)^3(2x+1)^4}{(3+2x)^7}$. Tính $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

(A) 2. (B) 8. (C) 4. (D) 0.

CÂU 15. Biết $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2+bx+c}{x-3}=8,\ (b,c\in\mathbb{R})$. Tính $P=b+c$.

(A) $P=-13$. (B) $P=-11$. (C) $P=5$. (D) $P=-12$.

CÂU 16. Cho a,b là số nguyên và $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{ax^2+bx-5}{x-1}=7$. Tính a^2+b^2+a+b.

(A) 18. (B) 1. (C) 15. (D) 5.

CÂU 17. Biết rằng $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x-2}+ax-b\right)=-5$. Tính tổng $a+b$.

(A) 6. (B) 7. (C) 8. (D) 5.

CÂU 18. Cho hai số thực a và b thỏa mãn $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{4x^2-3x+1}{x+2}-ax-b\right)=0$. Khi đó $a+b$ bằng

(A) -4. (B) 4. (C) 7. (D) -7.

CÂU 19. Cho $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)+1}{x-1}=-1$. Tính $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\left(x^2+x\right)f(x)+2}{x-1}$.

(A) $I=5$. (B) $I=-4$. (C) $I=4$. (D) $I=-5$.

CÂU 20. Gọi A là giới hạn của hàm số $f(x)=\dfrac{x+x^2+x^3+\cdots+x^{50}-50}{x-1}$ khi x tiến đến 1. Tính giá trị của A.

(A) A không tồn tại. (B) $A=1725$.

(C) $A=1527$. (D) $A=1275$.

Dạng 3. Phương pháp đặt thừa số chung - kết quả vô cực

Để tìm giới hạn của hàm số ta cần nhớ

- $\lim\limits_{x\to+\infty} x^k=+\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} x^k=\begin{cases}+\infty, k=2n\\-\infty, k=2n+1.\end{cases}$
- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} c=c$; $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{c}{x^k}=0$; $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x}=\infty$.

1. Ví dụ mẫu

VÍ DỤ 1 (NB). Tính $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3$.

VÍ DỤ 2 (TH). Tính $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^3+3x+1\right)$.

VÍ DỤ 3 (TH). Tính $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-4x^5-3x^3+x+1\right)$.

VÍ DỤ 4 (TH). Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{x+2}{(x+3)^2}$.

VÍ DỤ 5 (VDT). Tìm tất cả các giá trị nguyên của tham số m để $I=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[(m^2-1)x^3+2x\right]=-\infty$.

2. Câu hỏi trắc nghiệm

CÂU 1. Giá trị của $\lim\limits_{x\to-\infty}(-x^3)$ bằng

(A) $+\infty$. (B) $-\infty$. (C) 1. (D) -1.

CÂU 2. Giới hạn $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(3x^3+5x^2-9\sqrt{3}x-2022\right)$ bằng

(A) $-\infty$. (B) 3. (C) -3. (D) $+\infty$.

CÂU 3. Tính $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^3+3x-3)$.

(A) 2. (B) 1. (C) $-\infty$. (D) $+\infty$.

QUICK NOTE

CÂU 4. Với k là số nguyên dương chẵn. Kết quả của $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-3x^k\right)$ là

(A) 0. (B) $-\infty$. (C) $-3x_0^k$. (D) $+\infty$.

CÂU 5. Cho hai hàm số $f(x)$, $g(x)$ thỏa mãn $\lim\limits_{x\to1} f(x)=2$ và $\lim\limits_{x\to1} g(x)=+\infty$. Giá trị của $\lim\limits_{x\to1}[f(x)\cdot g(x)]$ bằng

(A) $+\infty$. (B) $-\infty$. (C) 2. (D) -2.

CÂU 6. Giới hạn $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x+1}{(x+2)^2}$ bằng

(A) $-\infty$. (B) $\dfrac{3}{16}$. (C) 0. (D) $+\infty$.

CÂU 7. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-3x^3+2x\right)$ bằng

(A) $-\infty$. (B) $+\infty$. (C) 1. (D) -1.

CÂU 8. Tìm $L=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{2x^2+x-3}{(x+1)^2}$.

(A) $L=+\infty$. (B) $L=2$.

(C) Không tồn tại $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{2x^2+x-3}{(x+1)^2}$. (D) $L=-\infty$.

CÂU 9. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-2x^3-2x\right)$ bằng

(A) $-\infty$. (B) $+\infty$. (C) 2. (D) -2.

CÂU 10. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2+1}{x-2}$.

(A) 1. (B) $-\dfrac{1}{2}$. (C) $+\infty$. (D) $-\infty$.

CÂU 11. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

(A) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^4-x}}{1-2x}=+\infty$. (B) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^4-x}}{1-2x}=1$.

(C) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^4-x}}{1-2x}=-\infty$. (D) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^4-x}}{1-2x}=0$.

CÂU 12. Biết $\lim\limits_{x\to-2} f(x)=-1$. Khi đó $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{f(x)}{(x+2)^4}$ bằng

(A) -1. (B) $+\infty$. (C) $-\infty$. (D) 0.

CÂU 13. Biết $\lim\limits_{x\to1} f(x)=-2$. Khi đó $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)}{(x-1)^2}$ bằng

(A) $-\infty$. (B) 0. (C) $+\infty$. (D) -2.

CÂU 14. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc $[-5;5]$ để $L=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x-2(m^2-4)x^3\right]=-\infty$?

(A) 5. (B) 10. (C) 3. (D) 6.

CÂU 15. Có bao nhiêu giá trị m nguyên thuộc đoạn $[-20;20]$ để $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2-3x+2}+mx-1\right)=-\infty$?

(A) 21. (B) 22. (C) 18. (D) 41.

Dạng 4. Phương pháp lượng liên hợp kết quả hữu hạn

Nội dung và phương pháp giải

1. Ví dụ mẫu

VÍ DỤ 1. Cho $P=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}$. Tính P.

(A) $P=\dfrac{1}{4}$. (B) $P=\dfrac{1}{2}$. (C) $P=1$. (D) $P=0$.

VÍ DỤ 2. Cho m là hằng số. Tính $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x^2+mx-x-m}$.

(A) $\dfrac{1}{m}$. (B) 1. (C) $\dfrac{1}{4}$. (D) $\dfrac{1}{4(m+1)}$.

VÍ DỤ 3. Biết $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+1}+x+1\right)=a$. Tính $2a+1$.

Ⓐ -1. Ⓑ -3. Ⓒ 0. Ⓓ 3.

VÍ DỤ 4. Biết $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2-3x+1}-(ax+b)\right)=0$. Tính giá trị biểu thức $T=a-4b$.

Ⓐ $T=-2$. Ⓑ $T=5$. Ⓒ $T=-1$. Ⓓ $T=3$.

VÍ DỤ 5. Cho $f(x)$ là hàm đa thức thỏa $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{f(x)+1}{x-2}=a$ và tồn tại $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{f(x)+2x+1}-x}{x^2-4}=T$. Chọn đẳng thức đúng

Ⓐ $T=\dfrac{a+2}{16}$. Ⓑ $T=\dfrac{a+2}{8}$. Ⓒ $T=\dfrac{a-2}{8}$. Ⓓ $T=\dfrac{a-2}{16}$.

2. Câu hỏi trắc nghiệm

CÂU 1. Biết $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+ax-1}-x\right)=5$. Khi đó giá trị của tham số a là

Ⓐ 10. Ⓑ -6. Ⓒ 6. Ⓓ -10.

CÂU 2. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+m^2x}-x)=\dfrac{1}{2}$?

Ⓐ 0. Ⓑ 1. Ⓒ 2. Ⓓ 4.

CÂU 3. Tính $L=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-7x+1}-\sqrt{x^2-3x+2}\right)$.

Ⓐ $L=+\infty$. Ⓑ $L=-\infty$. Ⓒ $L=2$. Ⓓ $L=-2$.

CÂU 4. Giá trị của $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+2}}{x-1}$ là

Ⓐ $-\dfrac{\sqrt3}{5}$. Ⓑ $-\dfrac{\sqrt3}{6}$. Ⓒ $\dfrac{\sqrt3}{6}$. Ⓓ $\dfrac{\sqrt3}{5}$.

CÂU 5. Cho $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\sqrt[3]{1-x}}{x}=\dfrac{m}{n}$, trong đó m,n là các số nguyên và $\dfrac{m}{n}$ tối giản. Tính $A=2m-n$.

Ⓐ $A=1$. Ⓑ $A=-1$. Ⓒ $A=0$. Ⓓ $A=-2$.

CÂU 6. Giới hạn $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x+1-\sqrt{5x+1}}{x-\sqrt{4x-3}}=\dfrac{a}{b}$, với $a,b\in\mathbb{Z},b>0$ và $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản. Giá trị của $a-b$ là

Ⓐ $\dfrac{1}{9}$. Ⓑ -1. Ⓒ $\dfrac{9}{8}$. Ⓓ 1.

CÂU 7. Cho $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\sqrt{3x+4}-4}{x-4}=\dfrac{a}{b}$, với $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $2a+b^2$.

Ⓐ 22. Ⓑ 66. Ⓒ 14. Ⓓ 70.

CÂU 8. Tính $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3x+2}-x\right)$.

Ⓐ $-\dfrac{3}{2}$. Ⓑ $\dfrac{3}{2}$. Ⓒ $\dfrac{7}{2}$. Ⓓ $-\dfrac{7}{2}$.

CÂU 9. Tìm giới hạn $M=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-4x}-\sqrt{x^2-x}\right)$.

Ⓐ $M=-\dfrac{1}{2}$. Ⓑ $M=\dfrac{3}{2}$. Ⓒ $M=-\dfrac{3}{2}$. Ⓓ $M=\dfrac{1}{2}$.

CÂU 10. Biết rằng $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{2x^2-3x+1}+x\sqrt2\right)=\dfrac{a}{b}\sqrt2$, $\left(a,b\in\mathbb{Z},b>0,\dfrac{a}{b}\text{ tối giản}\right)$. Tổng $a+b$ có giá trị là

Ⓐ 5. Ⓑ 4. Ⓒ 7. Ⓓ 1.

CÂU 11. Tìm giới hạn $I=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+1-\sqrt{x^2-x+2}\right)$.

Ⓐ $I=\dfrac{1}{2}$. Ⓑ $I=\dfrac{46}{31}$. Ⓒ $I=\dfrac{17}{11}$. Ⓓ $I=\dfrac{3}{2}$.

CÂU 12. Cho $f(x)$ là một đa thức thỏa mãn $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{f(x)-15}{x-2}=3$. Tính

$$\lim_{x\to2}\frac{f(x)-15}{(x^2-4)\left(\sqrt{2f(x)+6}+3\right)}.$$

QUICK NOTE

QUICK NOTE

(A) $\frac{1}{10}$. (B) $\frac{1}{6}$. (C) $\frac{1}{12}$. (D) $\frac{1}{8}$.

CÂU 13. Biết rằng $b>0$, $a+b=5$ và $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{ax+1}-\sqrt{1-bx}}{x}=2$. Khẳng định nào dưới đây là **sai**?

(A) $a^2+b^2>10$. (B) $a^2-b^2>6$. (C) $a-b\geq 0$. (D) $1\leq a\leq 3$.

Dạng 5. Toán thực tế, liên môn về hàm số liên tục

1. Ví dụ mẫu

VÍ DỤ 1. Tính $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3x\sqrt{x}}-x+1\right)$.

(A) $+\infty$. (B) 4. (C) $-\infty$. (D) $\frac{1}{2}$.

VÍ DỤ 2. Giới hạn hàm số $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-x\sqrt{|x|+3}+x}\right)$ bằng

(A) 0. (B) $\frac{1}{2}$. (C) $+\infty$. (D) $-\infty$.

VÍ DỤ 3. Tìm giới hạn $I=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^4+4x^3+1}-x^2\right)$

(A) $I=-4$. (B) $I=1$. (C) $I=-2$. (D) $I=-1$.

VÍ DỤ 4. Tính $L=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-7x\sqrt{|x|}+1}-\sqrt{x^2-3x\sqrt{|x|}+2}\right)$.

(A) $L=+\infty$. (B) $L=-\infty$. (C) $L=2$. (D) $L=-2$.

VÍ DỤ 5. Tìm tham số m để $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^3+mx^2}-x\sqrt{x})=-\infty$.

(A) $m=0$. (B) $m>0$. (C) $m<0$. (D) $m=2$.

2. Câu hỏi trắc nghiệm

CÂU 1. Tính $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3x\sqrt{x}}-x\right)$.

(A) $+\infty$. (B) 4. (C) $-\infty$. (D) $\frac{1}{2}$.

CÂU 2. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2+3x+1}+mx\right)=+\infty$ nếu

(A) $m<2$. (B) $m>2$. (C) $m\geq 2$. (D) $m\leq 2$.

CÂU 3. Biết $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(2-a)x-3}{x-\sqrt{x^2+1}}=+\infty$ (với a là tham số). Giá trị nhỏ nhất của $P=a^2-2a+4$ là

(A) 3. (B) 4. (C) 5. (D) 1.

CÂU 4. Tìm số các số nguyên m thỏa mãn $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3\sqrt{mx^2+2x+1}-mx\right)=+\infty$.

(A) 4. (B) 10. (C) 3. (D) 9.

CÂU 5. Giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-3x+1}+x\right)$ bằng

(A) $+\infty$. (B) $-\infty$. (C) 0. (D) 2.

CÂU 6. Biết $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+ax\sqrt{|x|}-1}-x\right)=-\infty$. Khi đó giá trị của tham số a là

(A) $a<0$. (B) $a>0$. (C) $a=6$. (D) $a=10$.

CÂU 7. Tính $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{7x^2+2x\sqrt{|x|}}+x\sqrt{7}\right)$.

(A) 0. (B) $-\frac{5\sqrt{7}}{14}$. (C) $-\infty$. (D) $+\infty$.

CÂU 8. Cho số thực a thỏa mãn $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^4+5ax^3-1}-x^2\right)=-\infty$. Tìm số thực a.

(A) $(a<0$. (B) $a\in(-10;-5)$. (C) $a>0$. (D) $a\in(-3;-1)$.

QUICK NOTE

CÂU 9. Tính $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3x^2+1-\sqrt{9x^4-6x^3+1}\right)$.

Ⓐ $\dfrac{1}{4}$. Ⓑ $\dfrac{1}{2}$. Ⓒ $+\infty$. Ⓓ $-\infty$.

CÂU 10. Tính $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x-\sqrt{x^2-x+1}\right)$.

Ⓐ $+\infty$. Ⓑ $-\infty$. Ⓒ $\dfrac{1}{2}$. Ⓓ $-\dfrac{1}{2}$.

CÂU 11. Tìm giới hạn $M=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-4x\sqrt{|x|}}-\sqrt{x^2-x\sqrt{|x|}}\right)$.

Ⓐ $M=-\infty$. Ⓑ $M=+\infty$. Ⓒ $M=-\dfrac{3}{2}$. Ⓓ $M=\dfrac{1}{2}$.

CÂU 12. Giá trị của $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+5}-x\right)$ là

Ⓐ $+\infty$. Ⓑ $-\infty$. Ⓒ 1. Ⓓ 0.

CÂU 13. Giá trị của $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+5x\sqrt{x}}-x\right)$ là

Ⓐ $+\infty$. Ⓑ $-\infty$. Ⓒ 1. Ⓓ 0.

Dạng 6. Giới hạn một bên

1. Ví dụ

VÍ DỤ 1. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{x^2-3x+2}{\sqrt{2-x}}$.

VÍ DỤ 2. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to(-1)^+}\dfrac{x^3+1}{x^3+2x^2+x}$.

VÍ DỤ 3. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\sqrt{9-x^2} & \text{khi } -3\le x<3\\ 1 & \text{khi } x=3\\ \sqrt{x^2-9} & \text{khi } x>3.\end{cases}$

Hàm số $f(x)$ có giới hạn khi $x\to3$ hay không?

VÍ DỤ 4. Ta gọi phần nguyên của số thực x là số nguyên lớn nhất không lớn hơn x và kí hiệu nó là $[x]$. Ví dụ $[5]=5$; $[3,12]=3$; $[-2{,}725]=-3$.
Tìm $\lim\limits_{x\to1^-}[x]$ và $\lim\limits_{x\to1^+}[x]$. Giới hạn $\lim\limits_{x\to1}[x]$ có tồn tại hay không?

VÍ DỤ 5. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-\sqrt{2x}}{4-x^2} & \text{khi } x<2\\ x^2-x+m & \text{khi } x\ge2\end{cases}$ (m là tham số).

Tìm m để hàm số $f(x)$ có giới hạn khi $x\to2$.

2. Câu hỏi trắc nghiệm

CÂU 1. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to(-2)^-}\dfrac{3+2x}{x+2}$.

Ⓐ $-\infty$. Ⓑ 2. Ⓒ $+\infty$. Ⓓ $\dfrac{3}{2}$.

CÂU 2. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}2x^2-2 & \text{khi } x\ge6\\ x-2 & \text{khi } x<6\end{cases}$. Tính $\lim\limits_{x\to6^-}f(x)$ bằng

Ⓐ 2. Ⓑ 5. Ⓒ 1. Ⓓ 4.

CÂU 3. $\lim\limits_{x\to5^+}\dfrac{|10-2x|}{x^2-6x+5}$ là

Ⓐ $\dfrac{1}{2}$. Ⓑ 0. Ⓒ $+\infty$. Ⓓ $-\dfrac{1}{2}$.

CÂU 4. Tính $\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{|2-x|}{x^2-x-2}$.

Ⓐ $+\infty$. Ⓑ 0. Ⓒ $-\dfrac{1}{3}$. Ⓓ $\dfrac{1}{3}$.

CÂU 5. Trong các giới hạn sau, giới hạn nào không tồn tại?

Ⓐ $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+1}{x^2+1}$. Ⓑ $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{\sqrt{x+1}}$. Ⓒ $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x}{(x+1)^2}$. Ⓓ $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x}$.

QUICK NOTE

CÂU 6. Gọi a là số thực để hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + 2 & \text{khi } x > 2 \\ 2x^2 - x + 1 & \text{khi } x \leqslant 2 \end{cases}$ có giới hạn khi $x \to 2$. Hãy chọn hệ thức đúng.

(A) $2a^2 + 3a + 1 = 0$.
(B) $a^2 - 3a + 2 = 0$.
(C) $4a^2 - 1 = 0$.
(D) $a^2 - 4 = 0$.

CÂU 7. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - 3x^2 + 2}{x - 1} & \text{nếu } x > 1 \\ ax + 3 & \text{nếu } x \leq 1 \end{cases}$. Tìm a để $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ tồn tại.

(A) $a = 6$.
(B) $a = 1$.
(C) $a = 0$.
(D) $a = -6$.

CÂU 8. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x-1|}{x-1} & \text{khi } x < 1 \\ x + 2 + a & \text{khi } 1 \leq x \leq 3 \\ \dfrac{x^2 - 81}{\sqrt{x} - 3} & \text{khi } x > 3 \end{cases}$. Tìm tất cả giá trị của tham số a để hàm số có giới hạn tại $x = 3$.

(A) $a = 12\left(3 + \sqrt{3}\right)$.
(B) $a = 12\left(3 - \sqrt{3}\right)$.
(C) $a = 12\left(3 + \sqrt{3}\right) - 5$.
(D) $a = 12\left(3 - \sqrt{3}\right) + 5$.

Dạng 7. Toán thực tế, liên môn về giới hạn hàm số

1. Ví dụ

VÍ DỤ 1. Chiều dài một loài động vật nhỏ được tính theo công công thức $h(t) = \dfrac{300}{1 + 9 \cdot (0{,}8)^t}$ mm, trong đó t số ngày sau khi sinh của loài động vật đó. Tính chiều dài cuối cùng của nó (chiều dài khi $t \to +\infty$).

VÍ DỤ 2. Theo thuyết tương đối, khối lượng m của một hạt phụ thuộc vào vận tốc v của nó, theo công thức

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}$$

trong đó m_0 là khối lượng khi hạt đứng yên và c là tốc độ ánh sáng. Tìm giới hạn của khối lượng khi v tiến đến c^-.

VÍ DỤ 3. Một chất điểm chuyển động thẳng với phương trình $s(t)$. Khi đó vận tốc tức thời tại thời điểm t_0 được định nghĩa là $\lim\limits_{\Delta t} \dfrac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}$. Tính vận tốc tức thời của chất điểm với phương trình chuyển động $s(t) = 3t^2 - 2t + 3$ ($s(t)$ có đơn vị là m, t đơn vị là giây), tại thời điểm $t = 4$ giây.

VÍ DỤ 4. Số lượng đơn vị hàng tồn kho trong một công ty được cho bởi

$$N(t) = 200\left(3\left[\frac{t+3}{3}\right] - t\right)$$

trong đó t là thời gian tính bằng ngày, $[x]$ là số nguyên lớn nhất không vượt quá x (ví dụ $[-1{,}5] = -2$, $[8{,}8] = 8$).

a) Tính $\lim\limits_{t \to 55^+} N(t)$.

b) Tính $\lim\limits_{t \to 201^-} N(t)$.

VÍ DỤ 5. Một chất điểm chuyển động thẳng với vận tốc $v(t)$. Khi đó gia tốc tức thời tại thời điểm t_0 được định nghĩa là $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{v(t_0 + \Delta t) - v(t_0)}{\Delta t}$. Một chất điểm chuyển động với vận tốc $v(t) = 0{,}1t^2 - 0{,}4t + 1$ (m/s), tính gia tốc tức thời tại thời điểm $t = 8$ giây.

VÍ DỤ 6. Một người lái xe từ thành phố A đến thành phố B với vận tốc trung bình là x km/h. Trên chuyến trở về, vận tốc trung bình là y km/h. Vận tốc trung bình của cả đi và về là 60 km/h. (Giả sử người lái xe đi trên cùng một con đường trên cả chuyến đi và về).

QUICK NOTE

a) Chứng minh rằng $y = \dfrac{30x}{x-30}$.

b) Tìm giới hạn của y khi $x \to 30^+$.

VÍ DỤ 7. Một hình elip với bán trục lớn a và bán trục nhỏ b thì diện tích được tính theo công thức $S = \pi ab$. Tính giới hạn diện tích của elip khi tiêu cự gần tới 0.

VÍ DỤ 8. Các nhà vật lý thấy rằng thuyết tương đối hẹp của Einstein quy về cơ học Newton khi $c \to +\infty$, trong đó c là tốc độ ánh sáng. Điều này được minh họa bởi ví dụ: Một hòn đá được ném thẳng đứng từ mặt đất để nó quay trở lại trái đất một giây sau đó. Sử dụng các định luật Newton, chúng ta thấy rằng chiều cao tối đa của hòn đá là $h = \dfrac{g}{8}$ mét ($g = 9{,}8\text{m/s}^2$). Theo thuyết tương đối hẹp, khối lượng của hòn đá phụ thuộc vào vận tốc của nó chia cho c, và có chiều cao cực đại là

$$h(c) = c\sqrt{\frac{c^2}{g^2} + \frac{1}{4}} - \frac{c^2}{g}.$$

Tính $\lim\limits_{c \to +\infty} h(c)$.

2. Bài tập rèn luyện

BÀI 1. Thế Lennard-Jones có dạng

$$U(r) = \frac{B}{r^{12}} - \frac{A}{r^6}$$

trong đó A, B là các hằng số và r là khoảng cách giữa các hạt. Tính $\lim\limits_{r \to +\infty} U(r)$.

BÀI 2. Trong thuyết tương đối, chiều dài của một vật thể đối với người quan sát phụ thuộc vào tốc độ mà vật thể đang chuyển động đối với người quan sát. Nếu người quan sát đo chiều dài của vật thể là L_0 khi đứng yên, thì ở tốc độ v chiều dài là

$$L = L_0\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

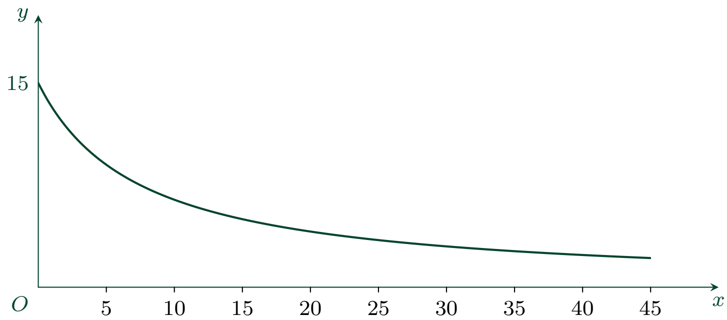
trong đó c là tốc độ ánh sáng trong chân không. Tìm $\lim\limits_{v \to c^-} L$.

BÀI 3. Trong kỹ thuật ứng dụng, chúng ta thường xuyên ghi nhận được các hàm số mà giá trị của nó thay đổi đột ngột tại một thời điểm t xác định. Ví dụ: Sự thay đổi điện áp của một mạch điện tại thời điểm t khi đóng hoặc ngắt mạch. Thông thường, giá trị $t = 0$ luôn được chọn là thời điểm bắt đầu cho việc đóng hoặc ngắt điện áp. Quá trình đóng, ngắt mạch trên có thể mô tả bằng mô hình toán học bởi hàm Heaviside

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } t < 0 \\ 1 & \text{nếu } t \geq 0. \end{cases}$$

Có tồn tại giới hạn $\lim\limits_{t \to 0} u(t)$ hay không?

BÀI 4. Trong một cuộc thi các môn thể thao trên tuyết, người ta muốn thiết kế một đường trượt bằng băng cho nội dung đổ dốc tốc độ đường dài.



Vận động viên sẽ xuất phát từ vị trí $(0; 15)$ cao 15 m so với mặt đất (trục Ox). Đường trượt phải thoả mãn yêu cầu là càng ra xa thì càng gần mặt đất để tiết kiệm lượng tuyết nhân tạo. Một nhà thiết kế đề nghị sử dụng đường cong là đồ thị hàm số $y = f(x) = \dfrac{150}{x+10}$, với $x \geq 0$. Hãy kiểm tra xem hàm số $y = f(x)$ có thoả mãn các điều kiện dưới đây hay không:

QUICK NOTE

a) Có đồ thị qua điểm $(0;15)$;

b) Giảm trên $[0;+\infty)$;

c) Càng ra xa (x càng lớn), đồ thị của hàm số càng gần trục Ox với khoảng cách nhỏ tuỳ ý.

BÀI 5. Chiều dài một loài động vật nhỏ được tính theo công công thức $h(t) = \dfrac{100}{2+3\cdot(0{,}4)^t}$ mm, trong đó t số ngày sau khi sinh của loài động vật đó. Tính chiều dài cuối cùng của nó (chiều dài khi $t \to +\infty$).

BÀI 6. Một chất điểm chuyển động thẳng với phương trình $s(t)$. Khi đó vận tốc tức thời tại thời điểm t_0 được định nghĩa là $\lim\limits_{\Delta t} \dfrac{s(t_0+\Delta t)-s(t_0)}{\Delta t}$. Tính vận tốc tức thời của chất điểm với phương trình chuyển động $s(t) = 4t^2 - 3t + 1$ ($s(t)$ có đơn vị là m, t đơn vị là giây), tại thời điểm $t = 8$ giây.

BÀI 7. Bỏ qua lực cản của không khí, độ cao tối đa mà tên lửa đạt được khi phóng với vận tốc ban đầu v_0 là $h = \dfrac{v_0^2 R}{19{,}6R - v_0^2}$, trong đó R là bán kính của trái đất. Tính $\lim\limits_{R\to+\infty} h$.

BÀI 8. Một hình elip với bán trục lớn a và bán trục nhỏ b thì diện tích được tính theo công thức $S = \pi ab$. Cho elip có bán trục nhỏ bằng 30 cm, tính giới hạn diện tích của elip khi tiêu cự gần tới 0.

BÀI 9. Số lượng đơn vị hàng tồn kho trong một công ty nhỏ được cho bởi

$$N(t) = 25\left(2\left[\frac{t+2}{2}\right] - t\right)$$

trong đó t là thời gian tính bằng tháng, $[x]$ là số nguyên lớn nhất không vượt quá x (ví dụ $[2{,}4] = 2$, $[-2{,}7] = -3$).

a) Tính $\lim\limits_{t\to 8^+} N(t)$.

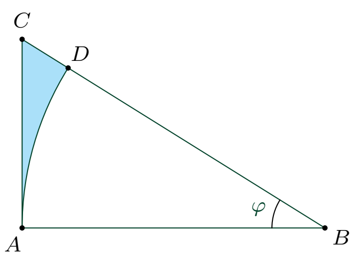
b) Tính $\lim\limits_{t\to 16^-} N(t)$.

BÀI 10. Định luật Boyle được phát biểu: "Đối với một lượng khí ở nhiệt độ không đổi, áp suất P tỷ lệ nghịch với thể tích V". Tìm giới hạn của P là $V \to 0^+$.

BÀI 11. Một vật khối lượng m (không đổi) bắt đầu chuyển động với vận tốc $v_0 = 0$, được gia tốc bởi một lực F không đổi trong t giây. Theo định luật Newton về chuyển động, vật tốc của vật là $v_N = \dfrac{Ft}{m}$. Theo thuyết tương đối Einstein, vật có vận tốc $v_E = \dfrac{Fct}{\sqrt{m^2c^2 + F^2t^2}}$, với c là vận tốc ánh sáng. Tính $\lim\limits_{t\to+\infty} v_N$ và $\lim\limits_{t\to+\infty} v_E$.

BÀI 12.

Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường tròn bán kính 10 và tam giác vuông (hình vẽ bên).



a) Đặt $S = f(\varphi)$, với $f(\varphi)$ là hàm số của φ (Đơn vị rad). Tìm công thức của $f(\varphi)$ với $0 < \varphi < \dfrac{\pi}{2}$.

b) Tính giới hạn của $f(\varphi)$ khi $\varphi \to \dfrac{\pi}{2}^-$.

BÀI 13. Trên một chuyến đi dài d km đến một thành phố khác, vận tốc trung bình của một tài xế xe tải là x km/h. Trên chuyến trở về, vận tốc trung bình là y km/h. Vận tốc trung bình của cả đi và về là 50 km/h.

a) Chứng minh rằng $y = \dfrac{25x}{x-25}$.

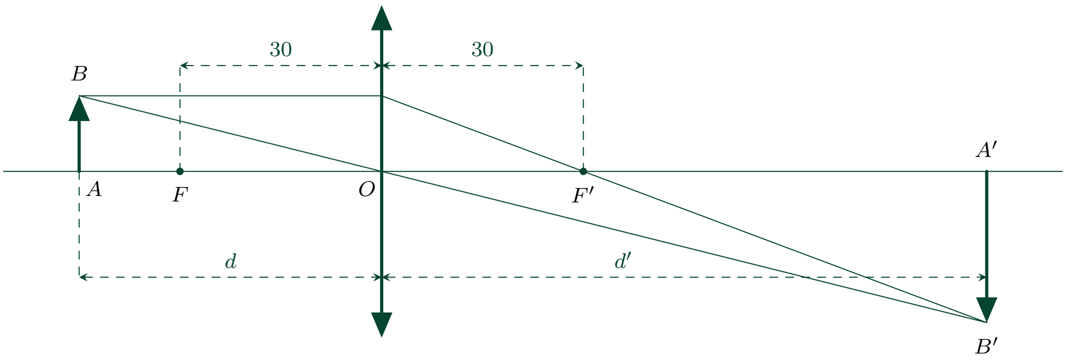
b) Tìm giới hạn của y khi $x \to 25^+$ và giải thích ý nghĩa của nó.

BÀI 14. Một chất điểm chuyển động thẳng với vận tốc $v(t)$. Khi đó gia tốc tức thời tại thời điểm t_0 được định nghĩa là $\lim\limits_{\Delta t\to 0} \dfrac{v(t_0+\Delta t)-v(t_0)}{\Delta t}$. Một chất điểm chuyển động với vận tốc $v(t) = 5\sin(4\pi t)$ (m/s), tính gia tốc tức thời tại thời điểm $t = 5$ giây. (Biết $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$).

QUICK NOTE

BÀI 15. Một bể chứa 5000 lít nước tinh khiết. Nước muối chứa 30 g muối trên một lít nước được bơm vào bể với tốc độ 25 lít/phút. Gọi nồng độ của muối sau t phút (tính bằng gam trên lít) là $C(t)$. Tính $\lim\limits_{t\to+\infty} C(t)$. Giải thích ý nghĩa của giới hạn này.

BÀI 16. Một thấu kính hội tụ có tiêu cự $f = 30$ cm. Trong Vật lí, ta biết rằng nếu đặt vật thật AB cách quang tâm của thấu kính một khoảng $d > 30$ (cm) thì được ảnh thật $A'B'$ cách quang tâm của thấu kính một khoảng d' (cm) (Hình vẽ dưới). Ngược lại, nếu $0 < d < 30$, ta có ảnh ảo. Công thức của thấu kính là $\dfrac{1}{d} + \dfrac{1}{d'} = \dfrac{1}{30}$.



a) Từ công thức của thấu kính, hãy tìm biểu thức xác định hàm số $d' = h(d)$.

b) Tìm các giới hạn $\lim\limits_{d\to 30^+} h(d)$; $\lim\limits_{d\to 30^-} h(d)$ và $\lim\limits_{d\to+\infty} h(d)$. Sử dụng các kết quả này để giải thích ý nghĩa đã biết trong Vật lí.

Bài 17. HÀM SỐ LIÊN TỤC

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Hàm số liên tục tại một điểm

- Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; b)$ chứa điểm x_0. Hàm số $f(x)$ được gọi là liên tục tại điểm x_0 nếu $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.
- Hàm số $f(x)$ không liên tục tại x_0 được gọi là gián đoạn tại điểm đó.

Hàm số $y = f(x)$ liên tục tại x_0 khi và chỉ khi $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0)$.

2. Hàm số liên tục trên một khoảng

- Hàm số $y = f(x)$ được gọi là liên tục trên khoảng $(a; b)$ nếu nó liên tục tại mọi điểm thuộc khoảng này.
- Hàm số $y = f(x)$ được gọi là liên tục trên đoạn $[a; b]$ nếu nó liên tục trên khoảng $(a; b)$ và $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = f(a)$, $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = f(b)$.
- Các khái niệm hàm số liên tục trên nửa khoảng như $(a; b]$, $[a; +\infty)\ldots$ được định nghĩa theo cách tương tự.
- Đồ thị của hàm số liên tục trên một khoảng là một đường liền nét trên khoảng đó.

3. Tính chất 1

- Hàm số đa thức và các hàm số $y = \sin x$, $y = \cos x$ liên tục trên R.
- Các hàm số $y = \tan x$, $y = \cot x$, $y = \sqrt{x}$ và các hàm phân thức hữu tỉ (thương của hai đa thức) liên tục trên mỗi khoảng xác định của chúng.

4. Tính chất 2

Giả sử hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ liên tục tại điểm x_0. Khi đó:

- Các hàm số $y = f(x) + g(x)$, $y = f(x) - g(x)$ và $y = f(x) \cdot g(x)$ liên tục tại x_0.
- Hàm số $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ liên tục tại x_0 nếu $g(x_0) \neq 0$.

QUICK NOTE

B. CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

Dạng 1. Dựa vào đồ thị xét tính liên tục của hàm số tại một điểm, một khoảng.

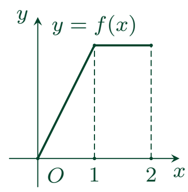
Để xét tính liên tục của hàm số khi biết đồ thị, ta cần nhớ:

- Đồ thị của hàm số liên tục trên một khoảng là một đường liền nét trên khoảng đó.
- Hàm số $y = f(x)$ liên tục tại x_0 khi và chỉ khi $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$.

1. Ví dụ mẫu

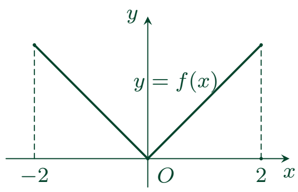
VÍ DỤ 1.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.
Xét tính liên tục của hàm số $y = f(x)$ trên khoảng $(0; 2)$.



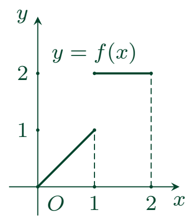
VÍ DỤ 2.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.
Xét tính liên tục của hàm số $y = f(x)$ trên khoảng $(-2; 2)$.



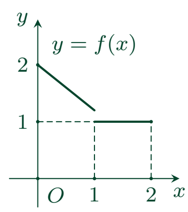
VÍ DỤ 3.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.
Xét tính liên tục của hàm số $y = f(x)$ trên khoảng $(0; 2)$.



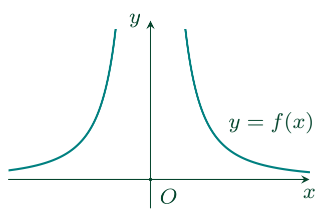
VÍ DỤ 4.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.
Xét tính liên tục của hàm số $y = f(x)$ trên khoảng $(0; 2)$.



VÍ DỤ 5.

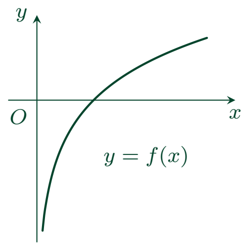
Cho hàm số $y = f(x)$ có tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ và có đồ thị như hình bên. Xét tính liên tục của hàm số $y = f(x)$ trên $\mathscr{D}$.



QUICK NOTE

2. Câu hỏi trắc nghiệm

CÂU 1. Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:



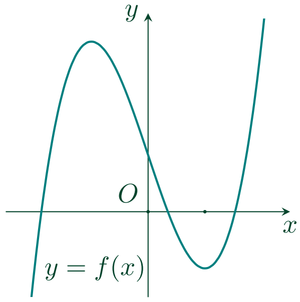
(A) Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

(B) Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên khoảng $(0, +\infty)$.

(C) Hàm số $y = f(x)$ liên tục tại điểm $x_0 = 0$.

(D) $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$.

CÂU 2. Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Chọn mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau:



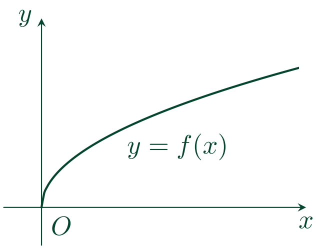
(A) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

(B) Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

(C) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

(D) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

CÂU 3. Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:



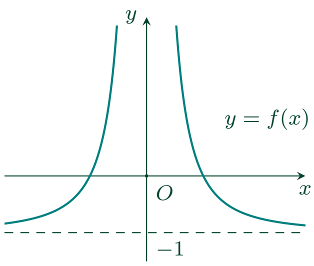
(A) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

(B) Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên khoảng $(0; +\infty)$.

(C) Hàm số $y = f(x)$ liên tục tại điểm $x_0 = 0$.

(D) Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

CÂU 4. Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Chọn mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau:



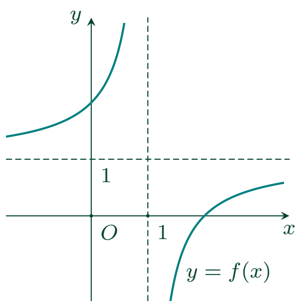
(A) Hàm số gián đoạn tại điểm $x_0 = 0$.

(B) Hàm số liên tục trên khoảng $(-\infty; 0)$.

(C) Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

(D) Hàm số liên tục trên khoảng $(0; +\infty)$.

CÂU 5. Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Chọn mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau:



(A) Hàm số gián đoạn tại điểm $x_0 = 1$.

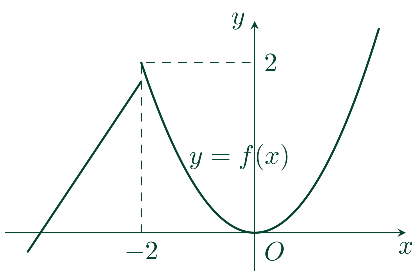
(B) Hàm số liên tục trên khoảng $(-\infty; 1)$.

(C) Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

(D) Hàm số liên tục trên khoảng $(1; +\infty)$.

CÂU 6.

Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:



(A) Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

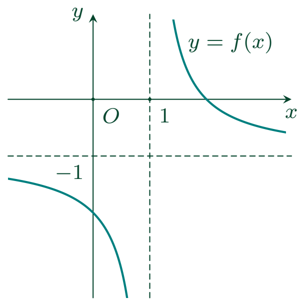
(B) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

(C) Hàm số liên tục tại điểm $x_0 = -2$.

(D) Hàm số gián đoạn tại điểm $x_0 = -2$.

QUICK NOTE

CÂU 7. Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:



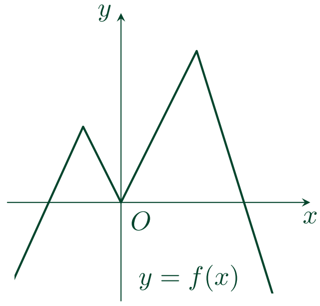
A $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$.

B Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

C $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = -\infty$.

D $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = +\infty$.

CÂU 8. Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:



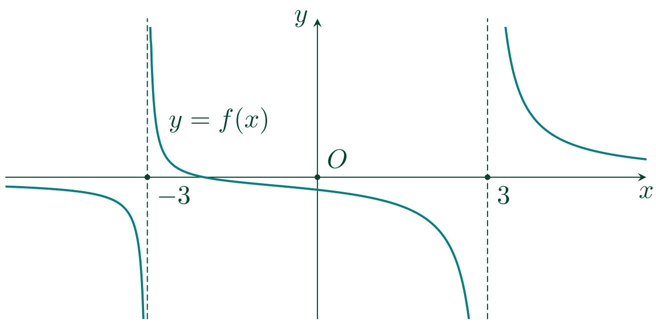
A Hàm số $y = f(x)$ gián đoạn tại $x_0 = 0$.

B $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -1$.

C $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -1$.

D Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

CÂU 9. Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:



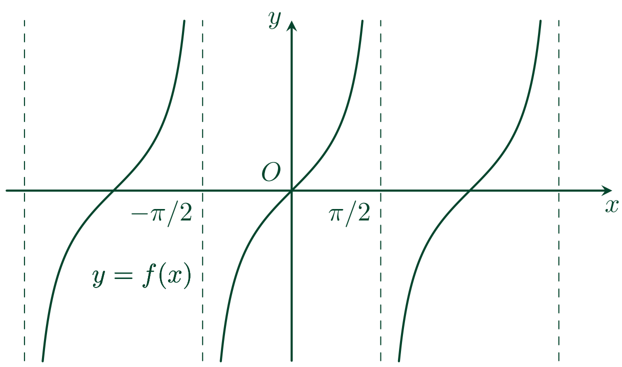
A Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

B Hàm số $y = f(x)$ liên tục tại $x_0 = -3$.

C $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

D Hàm số $y = f(x)$ gián đoạn tại $x_0 = 3$.

CÂU 10. Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:



A Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

B Hàm số $y = f(x)$ liên tục tại điểm $x_0 = \dfrac{\pi}{2}$.

C Hàm số $y = f(x)$ liên tục tại điểm $x_0 = -\dfrac{\pi}{2}$.

D Hàm số $y = f(x)$ gián đoạn tại điểm $x_0 = \dfrac{\pi}{2}$.

QUICK NOTE

Dạng 2. Hàm số liên tục tại một điểm

Để kiểm tra tính liên tục của hàm số $y = f(x)$ tại điểm $x = x_0$ ta cần làm như sau:

- Bước 1: Tính $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.
- Bước 2: Tính $f(x_0)$. Nếu $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ thì kết luận hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = x_0$. Nếu $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$ thì kết luận hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = x_0$.

1. Ví dụ mẫu

VÍ DỤ 1. Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x - 2} & \text{khi } x \neq 2 \\ 4x - 7 & \text{khi } x = 2 \end{cases}$ tại điểm $x_0 = 2$.

VÍ DỤ 2. Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1 - \sqrt{2x - 3}}{2 - x} & \text{nếu } x \neq 2 \\ 1 & \text{nếu } x = 2 \end{cases}$ tại điểm $x_0 = 2$.

VÍ DỤ 3. Biết rằng $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$. Hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\tan x}{x} & \text{khi } x \neq 0 \\ 0 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$. Xét tính liên tục của $y = f(x)$ tại $x = 0$?

VÍ DỤ 4. Hàm số $f(x) = \begin{cases} 3 & \text{khi } x = -1 \\ \dfrac{x^4 + x}{x^2 + x} & \text{khi } x \neq -1,\ x \neq 0 \\ 1 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$. Xét tính liên tục của hàm số tại $x = -1, x = 0$.

VÍ DỤ 5. Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{nếu } x > 0 \\ x & \text{nếu } x \leq 0 \end{cases}$ tại điểm $x_0 = 0$.

VÍ DỤ 6. Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} 1 - \cos x & \text{khi } x \leq 0 \\ \sqrt{x + 1} & \text{khi } x > 0 \end{cases}$ tại $x = 0$?

2. Bài tập rèn luyện

BÀI 1. Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 6x + 5}{x^2 - 1} & \text{nếu } x \neq 1 \\ -2 & \text{nếu } x = 1 \end{cases}$ tại điểm $x_0 = 1$.

BÀI 2. Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x + 5} - 3} & \text{nếu } x \neq 4 \\ -\dfrac{3}{2} & \text{nếu } x = 4 \end{cases}$ tại điểm $x_0 = 4$.

BÀI 3. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{x} \text{ khi } x < 1, x \neq 0 \\ 0 \text{ khi } x = 0 \\ \sqrt{x} \text{ khi } x \geq 1 \end{cases}$. Xét tính liên tục của hàm số $f(x)$ tại $x = 0, x = 1$?

BÀI 4. Cho hàm số $y = \begin{cases} \dfrac{1 - x^3}{1 - x}, \text{khi } x < 1 \\ 1 \text{ , khi } x \geq 1 \end{cases}$. Xét tính liên tục phải của hàm số tại $x = 1$?

BÀI 5. Cho hàm số $y = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 7x + 12}{x - 3} & \text{khi } x \neq 3 \\ -1 & \text{khi } x = 3 \end{cases}$. Xét tính liên tục của hàm số tại $x = 3$.

BÀI 6. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x - 2}{\sqrt{x + 2} - 2} & \text{khi } x \neq 2 \\ 4 & \text{khi } x = 2 \end{cases}$. Xét tính liên tục của hàm số tại $x = 2$?

QUICK NOTE

BÀI 7. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos x}{x^2} & \text{khi } x \neq 0 \\ 1 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$. Xét tính liên tục của hàm số tại $x = 0$?

BÀI 8. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} -x\cos x & \text{khi } x < 0 \\ \dfrac{x^2}{1+x} & \text{khi } 0 \leq x < 1 \\ x^3 & \text{khi } x \geq 1 \end{cases}$. Xét tính liên tục của hàm số tại $x = 0$?

3. Câu hỏi trắc nghiệm

CÂU 1. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng K và $x_0 \in K$. Hàm số $y = f(x)$ liên tục tại x_0 nếu

(A) $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0)$.
(B) $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0)$.
(C) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.
(D) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \neq f(x_0)$.

CÂU 2. Cho hàm số $f(x) = \dfrac{x^2+3x-4}{x+4}$ với $x \neq -4$. Để hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = -4$ thì ta cần bổ sung giá trị $f(-4)$ bằng bao nhiêu?

(A) 5. (B) -5. (C) 3. (D) 0.

CÂU 3. Cho hàm số $f(x) = \dfrac{2x-1}{x^3-x}$. Kết luận nào sau đây đúng?

(A) Hàm số liên tục tại $x = -1$.
(B) Hàm số liên tục tại $x = 0$.
(C) Hàm số liên tục tại $x = 1$.
(D) Hàm số liên tục tại $x = \dfrac{1}{2}$.

CÂU 4. Hàm số nào sau đây liên tục tại $x = 1$:

(A) $f(x) = \dfrac{x^2+x+1}{x-1}$.
(B) $f(x) = \dfrac{x^2-x-2}{x^2-1}$.
(C) $f(x) = \dfrac{x^2+x+1}{x}$.
(D) $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$.

CÂU 5. Hàm số nào dưới đây gián đoạn tại điểm $x_0 = -1$.

(A) $y = (x+1)\left(x^2+2\right)$.
(B) $y = \dfrac{2x-1}{x+1}$.
(C) $y = \dfrac{x}{x-1}$.
(D) $y = \dfrac{x+1}{x^2+1}$.

CÂU 6. Hàm số nào sau đây gián đoạn tại $x = 2$?

(A) $y = \dfrac{3x-4}{x-2}$.
(B) $y = \sin x$.
(C) $y = x^4 - 2x^2 + 1$.
(D) $y = \tan x$.

CÂU 7. Hàm số $y = \dfrac{x}{x+1}$ gián đoạn tại điểm x_0 bằng?

(A) $x_0 = 2018$. (B) $x_0 = 1$. (C) $x_0 = 0$. (D) $x_0 = -1$.

CÂU 8. Hàm số nào dưới đây gián đoạn tại điểm $x = 1$?

(A) $y = \dfrac{x-1}{x^2+x+1}$.
(B) $y = \dfrac{x^2-x+1}{x+1}$.
(C) $y = (x-1)(x^2+x+1)$.
(D) $y = \dfrac{x^2+2}{x-1}$.

CÂU 9. Cho hàm số $y = \dfrac{x-3}{x^2-1}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

(A) Hàm số không liên tục tại các điểm $x = \pm 1$.
(B) Hàm số liên tục tại mọi $x \in \mathbb{R}$.
(C) Hàm số liên tục tại các điểm $x = -1$.
(D) Hàm số liên tục tại các điểm $x = 1$.

CÂU 10. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos x}{x^2} & \text{khi } x \neq 0 \\ 1 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$. Khẳng định nào đúng trong các khẳng định sau?

(A) Hàm số gián đoạn tại $x = \sqrt{2}$.
(B) $f(\sqrt{2}) < 0$.

QUICK NOTE

(C) $f(x)$ liên tục tại $x=0$. (D) $f(x)$ gián đoạn tại $x=0$.

Dạng 3. Hàm số liên tục trên khoảng, đoạn

- Hàm số $y=f(x)$ được gọi là liên tục trên một khoảng nếu nó liên tục tại mọi điểm của khoảng đó.
- Hàm số $y=f(x)$ được gọi là liên tục trên đoạn $[a,b]$ nếu nó liên tục trên khoảng (a,b) và
$$\lim_{x\to a^+} f(x)=f(a),\ \lim_{x\to b^-} f(x)=f(b).$$
- Đồ thị của hàm số liên tục trên một khoảng là một đường liền nét trên khoảng đó.

1. Ví dụ mẫu

VÍ DỤ 1. Xét tính liên tục của hàm số sau trên tập xác định của chúng.

a) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-x-2}{x+1} & \text{khi } x\neq -1\\ -3 & \text{khi } x=-1\end{cases}$.

b) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x+1}{(x-1)^2} & \text{khi } x\neq 1\\ 3 & \text{khi } x=1\end{cases}$.

VÍ DỤ 2. Xét tính liên tục của hàm số sau trên tập xác định của chúng.

a) $f(x)=\begin{cases}x^2+3x & \text{khi } x\geq 2\\ 6x+1 & \text{khi } x<2.\end{cases}$

b) $f(x)=\begin{cases}x^2-3x+5 & \text{khi } x>1\\ 3 & \text{khi } x=1\\ 2x+1 & \text{khi } x<1.\end{cases}$

2. Bài tập rèn luyện

BÀI 1. Xét tính liên tục của hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-2}{x^2-4} & \text{khi } x\neq 2\\ 1 & \text{khi } x=2\end{cases}$ trên tập xác định.

BÀI 2. Xét tính liên tục của hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-1}{x-1} & \text{khi } x\neq 1\\ 3 & \text{khi } x=1\end{cases}$ trên tập xác định.

BÀI 3. Xét tính liên tục của hàm số $f(x)=\begin{cases}x^2 & \text{khi } x\geq -2\\ 2-x & \text{khi } x<-2\end{cases}$ trên tập xác định.

BÀI 4. Xét tính liên tục của hàm số $f(x)=\begin{cases}3x-2 & \text{khi } x>-1\\ 1 & \text{khi } x=-1\\ x^2-6 & \text{khi } x<-1\end{cases}$ trên tập xác định.

BÀI 5. Cho hàm số $y=f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-x}{\sqrt{2-x}-1} & \text{khi } x<1\\ 2x & \text{khi } x\geq 1\end{cases}$. Xét sự liên tục của hàm số trên tập xác định.

BÀI 6. Tìm số điểm gián đoạn của hàm số $f(x)=\begin{cases}0,5 & \text{khi } x=-1\\ \dfrac{x(x+1)}{x^2-1} & \text{khi } x\neq -1,\ x\neq 1\\ 1 & \text{khi } x=1\end{cases}$?

BÀI 7. Tìm điểm gián đoạn của hàm số $h(x)=\begin{cases}2x & \text{khi } x<0\\ x^2+1 & \text{khi } 0\leq x\leq 2\\ 3x-1 & \text{khi } x>2\end{cases}$?

QUICK NOTE

BÀI 8. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}-x\cos x & \text{khi } x<0\\ \dfrac{x^2}{1+x} & \text{khi } 0\le x<1\\ x^3 & \text{khi } x\ge 1\end{cases}$. Hàm số $f(x)$ gián đoạn tại điểm nào?

3. Câu hỏi trắc nghiệm

CÂU 1. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $(a;b)$. Điều kiện cần và đủ để hàm số liên tục trên $[a;b]$ là

(A) $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=f(a)$ và $\lim\limits_{x\to b^+} f(x)=f(b)$.

(B) $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=f(a)$ và $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=f(b)$.

(C) $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=f(a)$ và $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=f(b)$.

(D) $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=f(a)$ và $\lim\limits_{x\to b^+} f(x)=f(b)$.

CÂU 2. Cho hàm số $y=\begin{cases}\dfrac{1-x^3}{1-x} & \text{khi } x<1\\ 1 & \text{khi } x\ge 1\end{cases}$. Hãy chọn kết luận đúng

(A) y liên tục phải tại $x=1$.
(B) y liên tục tại $x=1$.
(C) y liên tục trái tại $x=1$.
(D) y liên tục trên $\mathbb{R}$.

CÂU 3. Trong các hàm số sau, hàm số nào liên tục trên $\mathbb{R}$?

(A) $y=x^3-x$.
(B) $y=\cot x$.
(C) $y=\dfrac{2x-1}{x-1}$.
(D) $y=\sqrt{x^2-1}$.

CÂU 4. Trong các hàm số sau, hàm số nào liên tục trên $\mathbb{R}$?

(A) $f(x)=\tan x+5$.
(B) $f(x)=\dfrac{x^2+3}{5-x}$.
(C) $f(x)=\sqrt{x-6}$.
(D) $f(x)=\dfrac{x+5}{x^2+4}$.

CÂU 5. Cho hàm số $y=\begin{cases}-x^2+x+3 & \text{khi } x\ge 2\\ 5x+2 & \text{khi } x<2\end{cases}$. Chọn mệnh đề sai trong các mệnh đề sau:

(A) Hàm số liên tục tại $x_0=1$.

(B) Hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

(C) Hàm số liên tục trên các khoảng $(-\infty;2)$, $(2;+\infty)$.

(D) Hàm số gián đoạn tại $x_0=2$.

CÂU 6. Hàm số nào sau đây liên tục trên $\mathbb{R}$?

(A) $f(x)=\sqrt{x}$.
(B) $f(x)=x^4-4x^2$.
(C) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^4-4x^2}{x+1}}$.
(D) $f(x)=\dfrac{x^4-4x^2}{x+1}$.

CÂU 7. Cho bốn hàm số $f_1(x)=\sqrt{x-1}$; $f_2(x)=x$; $f_3(x)=\tan x$; $f_4(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x-1} & \text{khi } x\ne 1\\ 2 & \text{khi } x=1\end{cases}$.

Hỏi trong bốn hàm số trên có bao nhiêu hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$?

(A) 1.
(B) 2.
(C) 3.
(D) 4.

CÂU 8. Hàm số nào dưới đây liên tục trên $\mathbb{R}$?

(A) $y=x^3+3x-2$.
(B) $y=\sqrt{x^2-1}$.
(C) $y=\dfrac{x+1}{x-1}$.
(D) $y=x+\tan x$.

CÂU 9. Hàm số $f(x)=\begin{cases}3 & \text{khi } x=-1\\ \dfrac{x^4+x}{x^2+x} & \text{khi } x\ne -1, x\ne 0\\ 1 & \text{khi } x=0\end{cases}$ liên tục tại

(A) mọi điểm trừ $x=0, x=-1$.
(B) mọi điểm $x\in\mathbb{R}$.
(C) mọi điểm trừ $x=-1$.
(D) mọi điểm trừ $x=0$.

QUICK NOTE

CÂU 10. Số điểm gián đoạn của hàm số $f(x)=\begin{cases}0,5 & \text{khi } x=-1\\ \dfrac{x(x+1)}{x^2-1} & \text{khi } x\neq \pm 1\\ 1 & \text{khi } x=1\end{cases}$ là

A 0. **B** 1. **C** 2. **D** 3.

CÂU 11. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^5+x^2}{x^3+x^2} & \text{khi } x\neq 0; x\neq -1\\ 3 & \text{khi } x=-1\\ 1 & \text{khi } x=0\end{cases}$. Khi đó

A Hàm số liên tục tại mỗi điểm $x\in\mathbb{R}$.

B Hàm số liên tục tại mỗi điểm trừ $x=0$.

C Hàm số liên tục tại mỗi điểm trừ $x=-1$.

D Hàm số liên tục tại mỗi điểm trừ $x=-1; x=0$.

Dạng 4. Bài toán chứa tham số

1. Ví dụ mẫu

VÍ DỤ 1. Tìm m để hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-16}{x-4} \text{ khi } x>4\\ mx+1 \text{ khi } x\leq 4\end{cases}$ liên tục tại điểm $x=4$.

VÍ DỤ 2. Tìm m để hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-x-2}{x+1} \text{ khi } x>-1\\ mx-2m^2 \text{ khi } x\leq -1\end{cases}$ liên tục tại $x=-1$.

VÍ DỤ 3. Tìm giá trị của tham số m để hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+3x+2}{x^2-1} & \text{khi} \quad x<-1\\ mx+2 & \text{khi} \quad x\geq -1\end{cases}$ liên tục tại $x=-1$?

VÍ DỤ 4. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-3x+2}{\sqrt{x+2}-2} & khi\ x>2\\ m^2x-4m+6 & khi\ \ x\leq 2\end{cases}$, m là tham số. Với giá trị nào của m thì hàm số đã cho liên tục tại $x=2$?

VÍ DỤ 5. Tìm giá trị của m để hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{x} & \text{khi} \quad x<0\\ m+\dfrac{1-x}{1+x} & \text{khi} \quad x\geq 0\end{cases}$ liên tục tại $x=0$?

2. Bài tập rèn luyện

BÀI 1. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x-1} & \text{khi } x<3,\ x\neq 1\\ 4 & \text{khi } x=1\\ \sqrt{x+1} & \text{khi } x\geq 3\end{cases}$. Xét tính liên tục của hàm số $f(x)$?

BÀI 2. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1} & \text{khi } (x>1)\\ m^2+m+\dfrac{1}{4} & \text{khi } (x\leq 1)\end{cases}$. Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để hàm số $f(x)$ liên tục tại $x=1$?

BÀI 3. Tìm a để hàm số $f(x)=\begin{cases}2x+a & \text{khi} \quad x\leq 1\\ \dfrac{x^3-x^2+2x-2}{x-1} & \text{khi} \quad x>1\end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$?

BÀI 4. Tìm m để hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+4x+3}{x+1} \text{ khi } x>-1\\ mx+2 \text{ khi } x\leq -1\end{cases}$ liên tục tại điểm $x=-1$.

QUICK NOTE

BÀI 5. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \sin \pi x & \text{khi } |x| \le 1 \\ x+1 & \text{khi } |x| > 1 \end{cases}$. Tìm các khoảng liên tục của hàm số?

BÀI 6. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{nếu } \cos x \ge 0 \\ 1+\cos x & \text{nếu } \cos x < 0 \end{cases}$. Hỏi hàm số f có tất cả bao nhiêu điểm gián đoạn trên khoảng $(0; 2018)$?

BÀI 7. Tìm m để hàm số $y = f(x) = \begin{cases} x^2 + 2\sqrt{x-2} \text{ khi } x \ge 2 \\ 5x - 5m + m^2 \text{ khi } x < 2 \end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$?

BÀI 8. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 3x + a - 1 \text{ khi } x \le 0 \\ \dfrac{\sqrt{1+2x}-1}{x} \text{ khi } x > 0 \end{cases}$. Tìm tất cả giá trị thực của a để hàm số đã cho liên tục trên $\mathbb{R}$.

BÀI 9. Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m để hàm số $f(x) = \begin{cases} m^2x^2 & \text{khi } x \le 2 \\ (1-m)x & \text{khi } x > 2 \end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$?

BÀI 10. Tìm P để hàm số $y = \begin{cases} \dfrac{x^2-4x+3}{x-1} \text{ khi } x > 1 \\ 6Px - 3 \text{ khi } x \le 1 \end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

BÀI 11. Hàm số $f(x) = \begin{cases} ax + b + 1 \text{ khi } x > 0 \\ a\cos x + b\sin x \text{ khi } x \le 0 \end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi

BÀI 12. Cho hàm số $y = \begin{cases} 3x + 1 \text{ khi } x \ge -1 \\ x + m \text{ khi } x < -1 \end{cases}$, m là tham số. Tìm m để hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

Dạng 5. Chứng minh phương trình có nghiệm

Để chứng minh minh một phương trình có nghiệm, ta thường tiến hành

- Đặt $f(x)$ là vế trái của phương trình (ứng với vế phải bằng 0).
- Lập luận hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ hoặc trên một đoạn con của $\mathbb{R}$ liên quan tới bài toán.
- Chỉ ra tồn tại các số a, b $(a < b)$ với a, b thuộc đoạn con đang xét mà $f(a)\cdot f(b) < 0$. Dựa vào tính chất của hàm số liên tục ta suy ra phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm thuộc khoảng $(a; b)$.

Nếu bài toán yêu cầu chứng minh phương trình có k nghiệm thì cần lập luận k đoạn con như trên.
Nhiều trường hợp việc chỉ ra các số a, b gặp khó khăn, ta có thể khai thác $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ hoặc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ để có cơ sở lập luận.

1. Ví dụ mẫu

VÍ DỤ 1. Chứng minh rằng phương trình $x^5 + 4x^3 - x^2 - 1 = 0$ có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(0; 1)$.

VÍ DỤ 2. Chứng minh rằng phương trình $x^5 - 5x^3 + 4x - 1 = 0$ có đúng 5 nghiệm phân biệt.

VÍ DỤ 3. Chứng minh rằng phương trình $x^3 - 2mx^2 - x + m = 0$ luôn có nghiệm với mọi m (m là tham số).

VÍ DỤ 4. Chứng minh rằng phương trình $(1-m^2)(x+1)^3 + x^2 - x - 3$ luôn có nghiệm với mọi giá trị của tham số m.

VÍ DỤ 5. Chứng minh rằng phương trình $m(x-8)^3(x-9)^4 + 2x - 17 = 0$ luôn có nghiệm với mọi giá trị của m.

VÍ DỤ 6. Chứng minh rằng phương trình $m(x+1)^2(x-2)^3 + (x+2)(x-3) = 0$ luôn có nghiệm với mọi tham số m.

VÍ DỤ 7. Với mọi giá trị thực của tham số m, chứng minh phương trình $(m^2+1)x^3 - 2m^2x^2 - 4x + m^2 + 1 = 0$ luôn có ba nghiệm thực.

QUICK NOTE

VÍ DỤ 8. Chứng minh rằng phương trình sau luôn có nghiệm với mọi giá trị của tham số $m \geq -1$
$$(m-1)x^6 + \left(m^2 - \sqrt{4m+4}\right)x^3 + 6x - 3 = 0.$$

VÍ DỤ 9. Với mọi giá trị thực của tham số m, chứng minh phương trình $x^5 + x^2 - \left(m^2+2\right)x - 1 = 0$ luôn có ít nhất ba nghiệm thực.

VÍ DỤ 10. Cho a, b là hai số thực thỏa mãn $9a + 24b > 128$. Chứng minh phương trình $ax^2 + bx - 2 = 0$ có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(0;1)$.

VÍ DỤ 11. Cho phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ với $5a + 3b + 3c = 0$. Chứng minh rằng phương trình luôn có nghiệm.

2. Bài tập rèn luyện

BÀI 1. Chứng minh rằng phương trình $x^5 + 4x^3 - x^2 - 1 = 0$ có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(0;1)$.

BÀI 2. Chứng minh rằng phương trình $2x^4 - 3x^3 - 5 = 0$ có ít nhất một nghiệm.

BÀI 3. Chứng minh rằng phương trình $-3x^5 + 8x^2 - 1 = 0$ có ít nhất một nghiệm.

BÀI 4. Chứng minh phương trình $\left(m^2 - 2m + 3\right)x^4 - 2x - 4 = 0$ luôn có nghiệm âm với mọi giá trị thực của tham số m.

BÀI 5. Chứng minh phương trình $x^4 + x^3 + mx^2 + x\,(2m-1) + m\sin(\pi x) = 1$ có nghiệm với mọi m.

BÀI 6. Chứng minh phương trình $x^4 + mx^2 + (3m-1)x - 5 + 2m = 0$ luôn có ít nhất một nghiệm với mọi số thực m.

BÀI 7. Chứng minh rằng phương trình $m(x-8)^3(x-9)^4 + 2x - 17 = 0$ luôn có nghiệm với mọi giá trị của m.

BÀI 8. Chứng minh phương trình $\left(m^2 - 2m + 3\right)x^4 - 2x - 4 = 0$ luôn có nghiệm âm với mọi giá trị thực của tham số m.

BÀI 9. Chứng minh rằng phương trình $m \cdot \sin 2x + x^2 \cdot \cos x + \left(m^2+1\right) \cdot \cos 2x = 0$ luôn có nghiệm thuộc khoảng $\left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$ với mọi tham số m.

BÀI 10. Chứng minh phương trình $x^3 + mx^2 - 4mx = 19 - 3m$ có nghiệm với mọi m.

BÀI 11. Cho $f(x)$ là hàm số liên tục trên đoạn $[a;b]$ sao cho với mọi $x \in [a;b]$ thì $a \leq f(x) \leq b$. Chứng minh rằng phương trình $f(x) = x$ có ít nhất một nghiệm thuộc đoạn $[a;b]$.

BÀI 12. Cho hai số a và b dương, $c \neq 0$ và m, n là hai số thực tùy ý. Chứng minh phương trình $\dfrac{a}{x-m} + \dfrac{b}{x-n} = c$ luôn có nghiệm thực.

BÀI 13. Cho a, b, c là ba số thực tùy ý. Chứng minh rằng phương trình
$$ab(x-a)(x-b) + bc(x-b)(x-c) + ca(x-c)(x-a) = 0$$
luôn có nghiệm.

BÀI 14. Cho phương trình $x^3 - 3x^2 + (2m-2)x + m - 3 = 0$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình có ba nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3 thỏa mãn $x_1 < -1 < x_2 < x_3$.

BÀI 15. Cho $2a + 6b + 19c = 0$. Chứng minh rằng phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có nghiệm $x_0 \in \left[0; \dfrac{1}{3}\right]$.

BÀI 16. Cho phương trình $a\cos 2x + b\cos x + c = 0$, với a, b, c là các số thực thỏa mãn $3b + 7c = 3a$. Chứng minh phương trình đã cho luôn có nghiệm.

BÀI 17. Giả sử hai hàm số $y = f(x)$ và $y = f(x+1)$ đều liên tục trên đoạn $[0;2]$ và $f(0) = f(2)$. Chứng minh phương trình $f(x) - f(x+1) = 0$ luôn có nghiệm thuộc đoạn $[0;1]$.

LỜI GIẢI CHI TIẾT

Giới hạn. Hàm số liên tục

Bài 15. GIỚI HẠN DÃY SỐ

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Dãy số có giới hạn 0

Định nghĩa 15.1. Ta nói dãy số (u_n) có giới hạn là 0 khi n dần tới dương vô cực, nếu $|u_n|$ có thể nhỏ hơn một số dương bé tuỳ ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi, kí hiệu $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ hay $u_n \to 0$ khi $n \to +\infty$.

Từ định nghĩa dãy số có giới hạn 0, ta có các kết quả sau:

- $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^k} = 0$ với k là một số nguyên dương;
- $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$ nếu $|q| < 1$;
- Nếu $|u_n| \le v_n$ với mọi $n \ge 1$ và $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ thì $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

2. Dãy số có giới hạn hữu hạn

Định nghĩa 15.2. Ta nói dãy số (u_n) có giới hạn là số thực a khi n dần tới dương vô cực nếu

$$\lim_{n\to+\infty} (u_n - a) = 0,$$

kí hiệu $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$ hay $u_n \to a$ khi $n \to +\infty$.

- Nếu $u_n = c$ (c là hằng số) thì $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = c$.
- $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$ khi và chỉ khi $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n - a) = 0$.

3. Các quy tắc tính giới hạn

Tính chất 15.1.

a) Nếu $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$ và $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = b$ thì

-) $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + v_n) = a + b$.

-) $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n - v_n) = a - b$.

-) $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n \cdot v_n) = a \cdot b$.

-) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = \dfrac{a}{b}$ *(nếu $b \ne 0$).*

b) Nếu $u_n \ge 0$ với mọi n và $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$ thì $a \ge 0$ và $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{u_n} = \sqrt{a}$.

B. CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

Dạng 6. Phương pháp đặt thừa số chung (lim hữu hạn)

1. Ví dụ mẫu

VÍ DỤ 1. Tìm giới hạn sau $\lim \dfrac{2n^3-2n+3}{1-4n^3}$.

Lời giải.

$$\lim \frac{2n^3-2n+3}{1-4n^3}=\lim \frac{2-\dfrac{2}{n^2}+\dfrac{3}{n^3}}{\dfrac{1}{n^3}-4}=-\frac{1}{2}.$$

□

VÍ DỤ 2. Tìm giới hạn sau $\lim \dfrac{\sqrt{n^4+2n+2}}{n^2+1}$.

Lời giải.

$$\lim \frac{\sqrt{n^4+2n+2}}{n^2+1}=\lim \frac{\sqrt{1+\dfrac{2}{n^3}+\dfrac{2}{n^4}}}{1+\dfrac{1}{n^2}}=1.$$

□

VÍ DỤ 3. Tìm giới hạn sau $\lim \dfrac{3^{n+1}-4^n}{4^{n-1}+3}$.

Lời giải.

$$\lim \frac{3^{n+1}-4^n}{4^{n-1}+3}=\lim \frac{9\cdot 3^{n-1}-4\cdot 4^{n-1}}{4^{n-1}+3}=\lim \frac{9\cdot\left(\dfrac{3}{4}\right)^{n-1}-4}{1+3\cdot\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}}=-4.$$

□

VÍ DỤ 4. Tìm giới hạn sau $\lim \dfrac{1+2+2^2+\cdots+2^n}{1+3+3^2+\cdots+3^n}$.

Lời giải.

$$\lim \frac{1+2+2^2+\cdots+2^n}{1+3+3^2+\cdots+3^n}=\lim \frac{\dfrac{1-2^{n+1}}{-1}}{\dfrac{1-3^{n+1}}{-2}}=\lim \frac{\left(1-2^{n+1}\right)\cdot 2}{1-3^{n+1}}=\lim \frac{\left(\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n+1}-\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n+1}\right)\cdot 2}{\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n+1}-1}=0.$$

□

2. Câu hỏi trắc nghiệm

CÂU 1. Tính giới hạn $I=\lim \dfrac{2n+2023}{3n+2024}$.

A. $I=\dfrac{2}{3}$. B. $I=\dfrac{3}{2}$. C. $I=\dfrac{2023}{2024}$. D. $I=1$.

Lời giải.

Ta có $I=\lim \dfrac{2n+2023}{3n+2024}=\lim \dfrac{2+\dfrac{2017}{n}}{3+\dfrac{2018}{n}}=\dfrac{2}{3}$.

Chọn đáp án A □

CÂU 2. Phát biểu nào sau đây là **sai**?

A. $\lim u_n=c$ ($u_n=c$ là hằng số). B. $\lim q^n=0$ ($|q|>1$).

C. $\lim \dfrac{1}{n}=0$. D. $\lim \dfrac{1}{n^k}=0$ ($k>1$).

Lời giải.

Theo định nghĩa giới hạn hữu hạn của dãy số thì $\lim q^n=0$ ($|q|<1$).

Chọn đáp án B □

CÂU 3. Giá trị của $\lim \dfrac{2-n}{n+1}$ bằng

A. 1. B. 2. C. -1. D. 0.

Lời giải.

Ta có $\lim \dfrac{2-n}{n+1}=\lim \dfrac{\dfrac{2}{n}-1}{1+\dfrac{1}{n}}=\dfrac{0-1}{1+0}=-1$.

Chọn đáp án (C) □

CÂU 4. Tính giới hạn $\lim \dfrac{4n+2024}{2n+1}$.

(A) $\dfrac{1}{2}$. (B) 4. (C) 2. (D) 2024.

Lời giải.

Ta có $\lim \dfrac{4n+2024}{2n+1} = \lim \dfrac{4+\dfrac{2024}{n}}{2+\dfrac{1}{n}} = 2.$

Chọn đáp án (C) □

CÂU 5. $\lim \dfrac{2n^2-3}{n^6+5n^5}$ bằng

(A) 2. (B) 0. (C) $\dfrac{-3}{5}$. (D) -3.

Lời giải.

Ta có $\lim \dfrac{2n^2-3}{n^6+5n^5} = \lim \dfrac{\dfrac{2}{n^4}-\dfrac{3}{n^6}}{1+\dfrac{5}{n}} = 0.$

Chọn đáp án (B) □

CÂU 6. Tính $\lim \dfrac{2n+1}{1+n}$ được kết quả là

(A) 2. (B) 0. (C) $\dfrac{1}{2}$. (D) 1.

Lời giải.

Ta có $\lim \dfrac{2n+1}{1+n} = \lim \dfrac{n\left(2+\dfrac{1}{n}\right)}{n\left(\dfrac{1}{n}+1\right)} = \lim \dfrac{2+\dfrac{1}{n}}{\dfrac{1}{n}+1} = \dfrac{2+0}{0+1} = 2.$

Chọn đáp án (A) □

CÂU 7. Dãy số nào sau đây có giới hạn khác 0?

(A) $\dfrac{1}{n}$. (B) $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$. (C) $\dfrac{n+1}{n}$. (D) $\dfrac{\sin n}{\sqrt{n}}$.

Lời giải.

Có $\lim \dfrac{n+1}{n} = \lim 1 + \lim \dfrac{1}{n} = 1.$

Chọn đáp án (C) □

CÂU 8. Giới hạn $\lim \dfrac{\sqrt{n}}{2n^2+3}$ có kết quả là

(A) 2. (B) 0. (C) $+\infty$. (D) 4.

Lời giải.

$\lim \dfrac{\sqrt{n}}{2n^2+3} = \lim \dfrac{\sqrt{\dfrac{1}{n^3}}}{2+\dfrac{3}{n^2}} = \dfrac{0}{2+0} = 0.$

Chọn đáp án (B) □

CÂU 9. Dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{1}{2n}$, chọn $M = \dfrac{1}{100}$, để $\dfrac{1}{2n} < \dfrac{1}{100}$ thì n phải lấy từ số hạng thứ bao nhiêu trở đi?

(A) 51. (B) 49. (C) 48. (D) 50.

Lời giải.

Ta có $\dfrac{1}{2n} < \dfrac{1}{100} \Leftrightarrow 2n > 100 \Leftrightarrow n > 50.$

Vậy n phải lấy từ số hạng thứ 51 trở đi.

Chọn đáp án (A) □

CÂU 10. Giới hạn $\lim \dfrac{3^n+2^n}{4^n}$ có kết quả là

(A) 0. (B) $\dfrac{5}{4}$. (C) $\dfrac{3}{4}$. (D) $+\infty$.

Lời giải.

Ta có $\lim \dfrac{3^n+2^n}{4^n}=\lim \dfrac{\left(\dfrac{3}{4}\right)^n+\left(\dfrac{2}{4}\right)^n}{1}=0$.

Chọn đáp án (A) □

CÂU 11. Tính giới hạn $\lim \left[\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)}\right]$.

(A) 0. (B) 2. (C) 1. (D) $\dfrac{3}{2}$.

Lời giải.

Ta có $\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n-1}-\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}=1-\dfrac{1}{n+1}$.

Vậy $\lim \left[\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)}\right]=\lim\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right)=1$.

Chọn đáp án (C) □

CÂU 12. Tính $\lim \sqrt{\dfrac{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}{2n(n+7)(6n+5)}}$.

(A) $\dfrac{1}{6}$. (B) $\dfrac{1}{2\sqrt{6}}$. (C) $\dfrac{1}{2}$. (D) $+\infty$.

Lời giải.

Ta có $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Khi đó $\lim \sqrt{\dfrac{1^2+2^2+3^3+\cdots+n^2}{2n(n+7)(6n+5)}}=\lim \sqrt{\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{12n(n+7)(6n+5)}}=\lim \sqrt{\dfrac{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\left(2+\dfrac{1}{n}\right)}{12\left(1+\dfrac{7}{n}\right)\left(6+\dfrac{5}{n}\right)}}=\dfrac{1}{6}$.

Chọn đáp án (A) □

CÂU 13. Giới hạn $\lim \dfrac{(2n-1)(3-n)^2}{(4n-5)^3}$ có kết quả bằng

(A) 0. (B) $\dfrac{1}{32}$. (C) $\dfrac{3}{2}$. (D) $\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

$$\lim \dfrac{(2n-1)(3-n)^2}{(4n-5)^3}=\lim \dfrac{\left(2-\dfrac{1}{n}\right)\left(\dfrac{3}{n}-1\right)^2}{\left(4-\dfrac{5}{n}\right)^3}=\dfrac{2}{4^3}=\dfrac{1}{32}.$$

Chọn đáp án (B) □

CÂU 14. Tìm $L=\lim\left(\dfrac{1}{1}+\dfrac{1}{1+2}+\cdots+\dfrac{1}{1+2+\cdots+n}\right)$.

(A) $L=\dfrac{5}{2}$. (B) $L=+\infty$. (C) $L=2$. (D) $L=\dfrac{3}{2}$.

Lời giải.

Ta có $1+2+3+\cdots+k$ là tổng của cấp số cộng có $u_1=1$, $d=1$ nên $1+2+3+\cdots+k=\dfrac{(1+k)k}{2}$. Khi đó

$$\dfrac{1}{1+2+\cdots+k}=\dfrac{2}{k(k+1)}=\dfrac{2}{k}-\dfrac{2}{k+1},\ \forall k\in\mathbb{N}^*.$$

Suy ra

$$L=\lim\left(\dfrac{2}{1}-\dfrac{2}{2}+\dfrac{2}{2}-\dfrac{2}{3}+\dfrac{2}{3}-\dfrac{2}{4}+\cdots+\dfrac{2}{n}-\dfrac{2}{n+1}\right)=\lim\left(\dfrac{2}{1}-\dfrac{2}{n+1}\right)=2.$$

Chọn đáp án (C) □

CÂU 15. Đặt $f(n)=\left(n^2+n+1\right)^2+1$. Xét dãy số (u_n) sao cho $u_n=\dfrac{f(1)\cdot f(3)\cdot f(5)\cdots f(2n-1)}{f(2)\cdot f(4)\cdot f(6)\cdots f(2n)}$. Tính $\lim n\sqrt{u_n}$.

(A) $\lim n\sqrt{u_n}=\sqrt{2}$. (B) $\lim n\sqrt{u_n}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. (C) $\lim n\sqrt{u_n}=\sqrt{3}$. (D) $\lim n\sqrt{u_n}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Lời giải.

Xét $g(n)=\dfrac{f(2n-1)}{f(2n)}\Rightarrow g(n)=\dfrac{\left(4n^2-2n+1\right)^2+1}{\left(4n^2+2n+1\right)^2+1}$.

$g(n)=\dfrac{\left(4n^2+1\right)^2-4n\left(4n^2+1\right)+\left(4n^2+1\right)}{\left(4n^2+1\right)^2+4n\left(4n^2+1\right)+\left(4n^2+1\right)}=\dfrac{4n^2+1-4n+1}{4n^2+1+4n+1}=\dfrac{(2n-1)^2+1}{(2n+1)^2+1}$

$\Rightarrow u_n = \frac{2}{10} \cdot \frac{10}{26} \cdot \frac{26}{50} \cdot \ldots \cdot \frac{(2n-3)^2+1}{(2n-1)^2+1} \cdot \frac{(2n-1)^2+1}{(2n+1)^2+1} = \frac{2}{(2n+1)^2+1}$

$\Rightarrow \lim n\sqrt{u_n} = \lim \sqrt{\frac{2n^2}{4n^2+4n+2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Chọn đáp án (D) □

CÂU 16. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số a thuộc khoảng $(0; 2024)$ để có

$$\lim \sqrt{\frac{9^n+3^{n+1}}{5^n+9^{n+a}}} \le \frac{1}{2187}\ ?$$

(A) 2017. (B) 2016. (C) 2023. (D) 2024.

Lời giải.

Do $\frac{9^n+3^{n+1}}{5^n+9^{n+a}} > 0$ với $\forall n$ nên $\lim \sqrt{\frac{9^n+3^{n+1}}{5^n+9^{n+a}}} = \sqrt{\lim \frac{9^n+3^{n+1}}{5^n+9^{n+a}}} = \sqrt{\lim \frac{1+3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n}{\left(\frac{5}{9}\right)^n+9^a}} = \sqrt{\frac{1}{9^a}} = \frac{1}{3^a}$.

Theo đề bài ta có $\lim \sqrt{\frac{9^n+3^{n+1}}{5^n+9^{n+a}}} \le \frac{1}{2187} \Leftrightarrow \frac{1}{3^a} \le \frac{1}{2187} \Leftrightarrow a \ge 7$.

Do a là số nguyên thuộc khoảng $(0; 2024)$ nên có $a \in \{7; 8; 9; \ldots; 2023\} \Rightarrow$ có 2017 giá trị của a.

Chọn đáp án (A) □

Dạng 7. Phương pháp lượng liên hợp (lim hữu hạn)

Nếu giới hạn của dãy số ở dạng vô định thì ta sử dụng các phép biến đổi để đưa về dạng cơ bản.
Một số phép biến đổi liên hợp:

$$\begin{aligned}
f(n)-g(n) &= \frac{(f(n))^2-(g(n))^2}{f(n)+g(n)}\\
\sqrt{f(n)}-\sqrt{g(n)} &= \frac{f(n)-g(n)}{\sqrt{f(n)}+\sqrt{g(n)}}\\
\sqrt{f(n)}-g(n) &= \frac{f(n)-(g(n))^2}{\sqrt{f(n)}+g(n)}\\
\sqrt[3]{f(n)}-\sqrt[3]{g(n)} &= \frac{f(n)-g(n)}{\sqrt[3]{(f(n))^2}+\sqrt[3]{f(n)g(n)}+\sqrt[3]{(g(n))^2}}
\end{aligned}$$

1. Ví dụ mẫu

VÍ DỤ 1. Tính giới hạn $I = \lim\left(\sqrt{n^2-2n+3}-n\right)$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}
I &= \lim\left(\sqrt{n^2-2n+3}-n\right)\\
&= \lim \frac{n^2-2n+3-n^2}{\sqrt{n^2-2n+3}+n}\\
&= \lim \frac{-2n+3}{\sqrt{n^2-2n+3}+n}\\
&= \lim \frac{-2+\frac{3}{n}}{\sqrt{1-\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}}+1}\\
&= \frac{-2}{\sqrt{1}+1} = -1
\end{aligned}$$

□

VÍ DỤ 2. Tính giới hạn $I = \lim\left(\sqrt{n^2+7}-\sqrt{n^2+5}\right)$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}I &= \lim\left(\sqrt{n^2+7}-\sqrt{n^2+5}\right)\\ &= \lim\frac{n^2+7-(n^2+5)}{\sqrt{n^2+7}+\sqrt{n^2+5}}\\ &= \lim\frac{2}{\sqrt{n^2+7}+\sqrt{n^2+5}}\\ &= 0\end{aligned}$$

□

VÍ DỤ 3. Tính giới hạn $I=\lim\left(\sqrt{n^2+2n}-\sqrt{n^2-2n}\right)$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}I &= \lim\left(\sqrt{n^2+2n}-\sqrt{n^2-2n}\right)\\ &= \lim\frac{n^2+2n-(n^2-2n)}{\sqrt{n^2+2n}+\sqrt{n^2-2n}}\\ &= \lim\frac{4n}{\sqrt{n^2+2n}+\sqrt{n^2-2n}}\\ &= \lim\frac{4}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\sqrt{1-\frac{2}{n}}}\\ &= \frac{4}{\sqrt{1}+\sqrt{1}}=2\end{aligned}$$

□

VÍ DỤ 4. Tính giới hạn $I=\lim\left(\sqrt{2n^2-n+1}-\sqrt{2n^2-3n+2}\right)$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}I &= \lim\left(\sqrt{2n^2-n+1}-\sqrt{2n^2-3n+2}\right)\\ &= \lim\frac{2n^2-n+1-(2n^2-3n+2)}{\sqrt{2n^2-n+1}+\sqrt{2n^2-3n+2}}\\ &= \lim\frac{2n-1}{\sqrt{2n^2-n+1}+\sqrt{2n^2-3n+2}}\\ &= \lim\frac{2-\frac{1}{n}}{\sqrt{2-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{2-\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}}}\\ &= \frac{2}{\sqrt{2}+\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\end{aligned}$$

□

VÍ DỤ 5. Tính giới hạn $I=\lim\left(n-\sqrt[3]{n^3+3n^2+1}\right)$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}I &= \lim\left(n-\sqrt[3]{n^3+3n^2+1}\right)\\ &= \lim\frac{n^3-(n^3+3n^2+1)}{n^2+\sqrt[3]{n^3+3n^2+1}+\sqrt[3]{(n^3+3n^2+1)^2}}\\ &= \lim\frac{-3n^2-1}{n^2+\sqrt[3]{n^3+3n^2+1}+\sqrt[3]{(n^3+3n^2+1)^2}}\\ &= \lim\frac{-3-\frac{1}{n^2}}{1+\sqrt[3]{1+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^3}}+\sqrt[3]{\left(1+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^3}\right)^2}}\\ &= \frac{-3}{1+\sqrt[3]{1}+\sqrt[3]{1}}=-1\end{aligned}$$

□

2. Câu hỏi trắc nghiệm

CÂU 1. Tính giới hạn $I=\lim\left(\sqrt{n^2+2n+3}-n\right)$

Ⓐ 1. Ⓑ 0. Ⓒ 2. Ⓓ 3.

Lời giải.

Ta có $I=\lim\left(\sqrt{n^2+2n+3}-n\right)=\lim\dfrac{2n+3}{\sqrt{n^2+2n+3}+n}=\lim\dfrac{2+\dfrac{3}{n}}{\sqrt{1+\dfrac{2}{n}+\dfrac{3}{n^2}}+1}=1$

Chọn đáp án Ⓐ □

CÂU 2. Tính giới hạn $I=\lim\left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-2}\right)$

Ⓐ 3. Ⓑ 0. Ⓒ $\sqrt{3}$. Ⓓ $\dfrac{3}{2}$.

Lời giải.

Ta có $I=\lim\left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-2}\right)=\lim\dfrac{3}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-2}}=0$

Chọn đáp án Ⓑ □

CÂU 3. Tính giới hạn $I=\lim\left(n-\sqrt{n^2+2n-3}\right)$

Ⓐ 0. Ⓑ -2. Ⓒ -1. Ⓓ 2.

Lời giải.

Ta có $I=\lim\left(n-\sqrt{n^2+2n-3}\right)=\lim\dfrac{-2n+3}{n+\sqrt{n^2+2n-3}}=\lim\dfrac{-2+\dfrac{3}{n}}{1+\sqrt{1+\dfrac{2}{n}-\dfrac{3}{n^2}}}=-1$

Chọn đáp án Ⓒ □

CÂU 4. Tính giới hạn $I=\lim\left(\sqrt{n^2-n+1}-n\right)$

Ⓐ $\dfrac{1}{2}$. Ⓑ 1. Ⓒ $-\dfrac{1}{2}$. Ⓓ 0.

Lời giải.

Ta có $I=\lim\left(\sqrt{n^2-n+1}-n\right)=\lim\dfrac{-n+1}{\sqrt{n^2-n+1}+n}=\lim\dfrac{-1+\dfrac{1}{n}}{\sqrt{1-\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}}+1}=-\dfrac{1}{2}$

Chọn đáp án Ⓒ □

CÂU 5. Tính giới hạn $I=\lim\left(\sqrt[3]{n^3-n^2}-n\right)$

Ⓐ $-\dfrac{1}{3}$. Ⓑ $\dfrac{1}{3}$. Ⓒ 1. Ⓓ 0.

Lời giải.

Ta có $I=\lim\left(\sqrt[3]{n^3-n^2}-n)\right)=\lim\dfrac{-n^2}{\sqrt[3]{(n^3-n^2)^2}+n\sqrt[3]{(n^3-n^2)}+n^2}=\lim\dfrac{-1}{\sqrt[3]{\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^2}+\sqrt[3]{1-\dfrac{1}{n}}+1}=-\dfrac{1}{3}$

Chọn đáp án Ⓐ □

CÂU 6. Tính giới hạn $I=\lim\left(\sqrt{2n^2+2n-1}-\sqrt{2n^2+n}\right)$

Ⓐ 0. Ⓑ $\dfrac{1}{4}$. Ⓒ $\dfrac{1}{2}$. Ⓓ $\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$.

Lời giải.

Ta có $I=\lim\left(\sqrt{2n^2+2n-1}-\sqrt{2n^2+n}\right)=\lim\dfrac{n}{\sqrt{2n^2+2n-1}+\sqrt{2n^2+n}}=\lim\dfrac{1}{\sqrt{2+\dfrac{2}{n}-\dfrac{1}{n^2}}+\sqrt{2+\dfrac{2}{n}}}=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$

Chọn đáp án Ⓓ □

CÂU 7. Tính giới hạn $I=\lim\left(\sqrt[3]{n^3+2}-\sqrt[3]{n^3+1}\right)$

Ⓐ 0. Ⓑ $-\dfrac{1}{3}$. Ⓒ 1. Ⓓ $\dfrac{1}{3}$.

Lời giải.

Ta có $I=\lim\left(\sqrt[3]{n^3+2}-\sqrt[3]{n^3+1}\right)=\lim\dfrac{1}{\sqrt[3]{(n^3+2)^2}+\sqrt[3]{(n^3+2)(n^3+1)}+\sqrt[3]{(n^3+1)^2}}=0$

Chọn đáp án Ⓐ □

CÂU 8. Tính giới hạn $I=\lim n\left(\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2+n-8}\right)$

(A) 0. (B) ∞. (C) 2. (D) $\dfrac{9}{2}$.

Lời giải.

Ta có $I=\lim n\left(\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2+n-8}\right)=\lim\dfrac{9n}{\sqrt{n^2+n+1}+\sqrt{n^2+n-8}}$

$=\lim\dfrac{9}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}}+\sqrt{1+\dfrac{1}{n}-\dfrac{8}{n^2}}}=\dfrac{9}{2}$

Chọn đáp án (D) □

Dạng 8. Giới hạn vô cực

Ta nói dãy $\{u_n\}$ có giới hạn là $+\infty$ khi $n\to+\infty$, nếu u_n có thể lớn hơn một số dương bất kì, kể từ một số hạng nào đó trở đi.
Kí hiệu: $\lim u_n=+\infty$ hay $u_n\to+\infty$ khi $n\to+\infty$.
Dãy số $\{u_n\}$ có giới hạn là $-\infty$ khi $n\to+\infty$, nếu $\lim -u_n=+\infty$.
Kí hiệu: $\lim u_n=-\infty$ hay $u_n\to-\infty$ khi $n\to+\infty$.

Một số giới hạn đặc biệt và định lí về giới hạn dãy số

Giới hạn đặc biệt:

$\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{n}=+\infty$

$\lim\limits_{n\to+\infty}n^k=+\infty$ với k là số nguyên dương.

$\lim\limits_{n\to+\infty}q^n=+\infty$ nếu $q>1$

Định lý:

Nếu $\lim u_n=a>0$ và $\lim v_n=0$ với $v_n>0$ thì $\lim\dfrac{u_n}{v_n}=+\infty$.

Nếu $\lim u_n=+\infty$ và $\lim v_n=a>0$ thì $\lim u_nv_n=+\infty$.

1. Ví dụ mẫu

VÍ DỤ 1. Tìm giới hạn

a) $\lim(n^3+n^2+n+1)$. b) $\lim\left(n^2-n\sqrt{n}+1\right)$.

Lời giải.

a) $\lim(n^3+n^2+n+1)=\lim n^3\left(1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{1}{n^3}\right)=+\infty$.

b) $\lim\left(n^2-n\sqrt{n}+1\right)=\lim n^2\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{n}}+\dfrac{1}{n^2}\right)=+\infty$.

□

VÍ DỤ 2. Tìm giới hạn

a) $\lim\dfrac{n^5+n^4-n-2}{4n^3+6n^2+9}$. b) $\lim\dfrac{\sqrt[3]{n^6-7n^3-5n+8}}{n+12}$. c) $\lim\left(n+\sqrt{n^2-n+1}\right)$.

Lời giải.

a) $\lim\dfrac{n^5+n^4-n-2}{4n^3+6n^2+9}=\lim\dfrac{n^2+n-\dfrac{1}{n^2}-\dfrac{2}{n^3}}{4+\dfrac{6}{n}+\dfrac{9}{n^3}}=\lim\dfrac{n^2+n}{4}=+\infty$.

b) $\lim\dfrac{\sqrt[3]{n^6-7n^3-5n+8}}{n+12}=\lim\dfrac{n^2\sqrt[3]{1-\dfrac{7}{n^3}-\dfrac{5}{n^5}+\dfrac{8}{n^6}}}{n+12}=\lim\dfrac{n\sqrt[3]{1-\dfrac{7}{n^3}-\dfrac{5}{n^5}+\dfrac{8}{n^6}}}{1+\dfrac{12}{n}}=+\infty$.

c) $\lim\left(n+\sqrt{n^2-n+1}\right)=n\left(1+\sqrt{1-\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}}\right)=\lim 2n=+\infty$

□

VÍ DỤ 3. Tìm giới hạn

a) $\lim \dfrac{1^3+2^3+...+n^3}{n^2+3n\sqrt{n}+2}$.   b) $\lim \left(n+\sqrt[3]{n^3-2n+1}\right)$.   c) $\lim \dfrac{n^3-3n}{2n+15}$.

Lời giải.

a) $\lim \dfrac{1^3+2^3+...+n^3}{n^2+3n\sqrt{n}+2} = \lim \dfrac{\frac{1}{4}n^2(n+1)^2}{n^2+3n\sqrt{n}+2} = \lim \dfrac{\frac{1}{4}(n+1)^2}{1+\frac{3}{\sqrt{n}}+\frac{2}{n^2}} = \lim \dfrac{1}{4}(n+1)^2 = +\infty$.

b) $\lim \left(n+\sqrt[3]{n^3-2n+1}\right) = n\left(1+\sqrt[3]{1-\dfrac{2}{n^2}+\dfrac{1}{n^3}}\right) = \lim 2n = +\infty$.

c) $\lim \dfrac{n^3-3n}{2n+15} = \lim \dfrac{n^2-3}{2+\frac{15}{n}} = +\infty$

□

Dạng 9. Tính tổng của dãy cấp số nhân lùi vô hạn

ĐỊNH NGHĨA 15.3. Cấp số nhân vô hạn $u_1, u_1q, ..., u_1q^{n-1}, ...$ có công bội q thỏa mãn $|q|<1$ được gọi là cấp số nhân lùi vô hạn. Tổng của cấp số nhân lùi vô hạn đã cho là

$$S = u_1 + u_1q + u_1q^2 + ... = \frac{u_1}{1-q}.$$

1. Ví dụ mẫu

VÍ DỤ 1. Cho cấp số nhân (u_n), với $u_1 = 1$ và công bội $q = \dfrac{1}{2}$.

a) So sánh $|q|$ với 1.

b) Tính $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$ từ đó hãy tính $\lim S_n$.

Lời giải.

a) Ta có $|q| = \left|\dfrac{1}{2}\right| = \dfrac{1}{2} < 1$.

b) Ta có $S_n = \dfrac{u_1\left(1-q^n\right)}{1-q} = \dfrac{1\cdot\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]}{1-\frac{1}{2}} = 2\cdot\left(1-\dfrac{1}{2^n}\right) = 2-\dfrac{1}{2^{n-1}}$.

Khi đó $\lim S_n = \lim\left(2-\dfrac{1}{2^{n-1}}\right) = 2$.

□

VÍ DỤ 2. Tính tổng $T = 1+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3^2}+\ldots+\dfrac{1}{3^n}+\ldots$

Lời giải.

Các số hạn của tổng lập thành cấp số nhân (u_n), có $u_1 = 1$, $q = \dfrac{1}{3}$ nên

$$T = 1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{3^n}+\ldots = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3}.$$

□

VÍ DỤ 3. Tính tổng $S = 1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{8}+\ldots+\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}+\ldots$.

Lời giải.

Đây là tổng của cấp số nhân lùi vô hạng với $u_1 = 1$ và $q = -\dfrac{1}{2}$. Do đó $S = \dfrac{u_1}{1-q} = \dfrac{1}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)} = \dfrac{2}{3}$. □

VÍ DỤ 4. Biểu diễn số thập phân vô hạn tuần hoàn 2,222... dưới dạng phân số.

Lời giải.

Ta có $2{,}222\ldots = 2 + 0{,}2 + 0{,}02 + 0{,}002 + \ldots = 2 + 2\cdot 10^{-1} + 2\cdot 10^{-2} + 2\cdot 10^{-3} + \ldots$.
Đây là tổng của cấp số nhân lùi vô hạn với $u_1 = 2, q = 10^{-1}$ nên

$$2{,}222\ldots = \frac{u_1}{1-q} = \frac{2}{1-\dfrac{1}{10}} = \frac{20}{9}.$$

□

VÍ DỤ 5. Biểu diễn số thập phân vô hạn tuần hoàn $0,(3)$ dưới dạng phân số.

Lời giải.

Ta có $0,(3) = \dfrac{3}{10} + \dfrac{3}{10^2} + \ldots + \dfrac{3}{10^n} + \ldots = \dfrac{\dfrac{3}{10}}{1-\dfrac{1}{10}} = \dfrac{1}{3}$. □

2. Câu hỏi trắc nghiệm

CÂU 1. Cho cấp số nhân $u_1, u_2, \ldots$ với công bội q thỏa điều kiện $|q| < 1$. Lúc đó, ta nói cấp số nhân đã cho là lùi vô hạn. Tổng của cấp số nhân đã cho là $S = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots$ bằng

Ⓐ $\dfrac{u_1}{q-1}$. Ⓑ $\dfrac{u_1\left(q^n-1\right)}{q-1}$. Ⓒ $\dfrac{u_1}{1+q}$. Ⓓ $\dfrac{u_1}{1-q}$.

Lời giải.

Theo định nghĩa cấp số nhân lùi vô hạn ta chứng minh được.
$S = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots = u_1 + u_1q^1 + u_1q^2 + \cdots + u_1q^{n-1} + \cdots = \dfrac{u_1}{1-q}$.

Chọn đáp án (D) □

CÂU 2. Gọi $S = \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{9} + \cdots + \dfrac{(-1)^{n+1}}{3^n}$. Khi đó, $\lim S$ bằng

Ⓐ $\dfrac{3}{4}$. Ⓑ $\dfrac{1}{4}$. Ⓒ $\dfrac{1}{2}$. Ⓓ 1.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}
& S = \frac{1}{3} - \frac{1}{9} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{3^n}\\
\Leftrightarrow\quad & S = -\left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{(-1)^n}{3^n}\right)\\
\Leftrightarrow\quad & S = \frac{1}{3}\cdot\frac{1-\left(\dfrac{-1}{3}\right)^n}{1-\dfrac{-1}{3}}\\
\Leftrightarrow\quad & S = \frac{1}{4}\cdot\left(1-\left(\frac{-1}{3}\right)^n\right).
\end{aligned}$$

Suy ra $\lim S = \lim \dfrac{1}{4}\cdot\left(1-\left(\dfrac{-1}{3}\right)^n\right) = \dfrac{1}{4}$.

Chọn đáp án (B) □

CÂU 3. Tổng $S = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3^2} + \cdots + \dfrac{1}{3^n} + \cdots$ có giá trị là

Ⓐ $\dfrac{1}{3}$. Ⓑ $\dfrac{1}{2}$. Ⓒ $\dfrac{1}{9}$. Ⓓ $\dfrac{1}{4}$.

Lời giải.

Ta có $S = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3^2} + \cdots + \dfrac{1}{3^n} + \cdots = \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{1-\frac{1}{3}} = \dfrac{1}{2}$.

Chọn đáp án (B) □

CÂU 4. Tính $S = 9 + 3 + 1 + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{9} + \cdots + \dfrac{1}{3^{n-3}} + \cdots$. Kết quả là

Ⓐ $\dfrac{27}{2}$. Ⓑ 14. Ⓒ 16. Ⓓ 15.

Lời giải.

Ta có $S = 9 + 3 + 1 + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{9} + \cdots + \dfrac{1}{3^{n-3}} + \cdots = 13 + \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{1-\frac{1}{3}} = 13 + \dfrac{1}{2} = \dfrac{27}{2}$.

Chọn đáp án (A) □

CÂU 5. Tổng các cấp số nhân vô hạn: $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \ldots, \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n-1}}, \ldots$ là

(A) $\frac{3}{2}$. (B) $\frac{2}{3}$. (C) $-\frac{2}{3}$. (D) 2.

Lời giải.

Ta có $S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n-1}} + \cdots = 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.

Chọn đáp án (B) □

CÂU 6. Gọi $S = 1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \cdots + \frac{2^n}{3^n} + \cdots$. Giá trị của S bằng

(A) 3. (B) 5. (C) 6. (D) 4.

Lời giải.

Ta có $S = 1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \cdots + \frac{2^n}{3^n} + \cdots = 1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{2}{3}} = 1 + 2 = 3$.

Chọn đáp án (A) □

CÂU 7. Số thập phân vô hạn tuần hoàn $0{,}233333\ldots$ biểu diễn dưới dạng số là

(A) $\frac{1}{23}$. (B) $\frac{2333}{10000}$. (C) $\frac{23333}{10^5}$. (D) $\frac{7}{30}$.

Lời giải.

$0{,}233333\ldots = 0{,}2 + 3\left(\frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \ldots\right) = 0{,}2 + 3 \cdot \frac{1}{100} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{1}{5} + \frac{1}{30} = \frac{7}{30}$.

Chọn đáp án (D) □

CÂU 8. Số thập phân vô hạn tuần hoàn $0{,}212121\ldots$ biểu diễn dưới dạng phân số là

(A) $\frac{2121}{10^4}$. (B) $\frac{1}{21}$. (C) $\frac{7}{33}$. (D) $\frac{212121}{10^6}$.

Lời giải.

$0{,}212121\ldots = 21\left(\frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^4} + \ldots\right) = 21 \cdot \frac{1}{10^2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{7}{33}$.

Chọn đáp án (C) □

CÂU 9. Số thập phân vô hạn tuần hoàn $0{,}271414\ldots$ được biểu diễn bằng phân số:

(A) $\frac{2714}{9900}$. (B) $\frac{2617}{9900}$. (C) $\frac{2786}{9900}$. (D) $\frac{2687}{9900}$.

Lời giải.

$0{,}271414\cdots = 0{,}27 + 14\left(\frac{1}{10^4} + \frac{1}{10^6}\ldots\right) = 0{,}27 + 14 \cdot \frac{1}{10^4} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{27}{100} + \frac{7}{4950} = \frac{2687}{9900}$.

Chọn đáp án (D) □

CÂU 10. Tổng của cấp số nhân lùi vô hạn: $-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots, \frac{(-1)^n}{2^n}, \ldots$ là

(A) $-\frac{1}{3}$. (B) $-\frac{1}{4}$. (C) -1. (D) $\frac{1}{2}$.

Lời giải.

Từ $-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots, \frac{(-1)^n}{2^n}, \ldots$ có $u_1 = -\frac{1}{2}$ và $q = -\frac{1}{2}$.

Có $S = -\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{(-1)^n}{2^n} + \cdots = \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} = -\frac{1}{3}$.

Chọn đáp án (A) □

CÂU 11. Số thập phân vô hạn tuần hoàn $0{,}511111\cdots$ được biểu diễn bởi phân số

(A) $\frac{47}{90}$. (B) $\frac{46}{90}$. (C) $\frac{6}{11}$. (D) $\frac{43}{90}$.

Lời giải.

Ta có

$0{,}511111\cdots = 0{,}5 + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3}\ldots = \frac{1}{2} + \frac{1}{10^2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{90} = \frac{23}{45}$.

Chọn đáp án (B) □

CÂU 12. Tổng của cấp số nhân vô hạn $\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots \frac{(-1)^{n+1}}{2^n}, \ldots$ là

(A) $-\frac{2}{3}$. (B) 1. (C) $-\frac{1}{3}$. (D) $\frac{1}{3}$.

Lời giải.

Ta có $S=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{8}+\cdots+\dfrac{(-1)^{n+1}}{2^n}+\cdots=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{1+\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{3}$.

Chọn đáp án D □

CÂU 13. Tổng của cấp số nhân lùi vô hạn $\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{6},\dfrac{1}{18},\ldots,\dfrac{(-1)^{n+1}}{2\cdot3^{n-1}},\ldots$ là

A $\dfrac{3}{4}$. **B** $\dfrac{8}{3}$. **C** $\dfrac{2}{3}$. **D** $\dfrac{3}{8}$.

Lời giải.

Cấp số nhân có $u_1=\dfrac{1}{2}, q=-\dfrac{1}{3}$. Do đó tổng cần tìm là

$$S=\frac{u_1}{1-q}=\frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{3}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}=\frac{3}{8}.$$

Chọn đáp án D □

CÂU 14. Tổng của cấp số nhân lùi vô hạn $\dfrac{1}{3},-\dfrac{1}{9},\dfrac{1}{27},\ldots,\dfrac{(-1)^{n+1}}{3^n},\ldots$ là

A 4. **B** $\dfrac{1}{2}$. **C** $\dfrac{3}{4}$. **D** $\dfrac{1}{4}$.

Lời giải.

Cấp số nhân có $u_1=\dfrac{1}{3}, q=-\dfrac{1}{3}$. Do đó tổng cần tìm là

$$S=\frac{u_1}{1-q}=\frac{\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}}=\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}=\frac{1}{4}.$$

Chọn đáp án D □

CÂU 15. Số thập phân vô hạn tuần hoàn $0{,}17232323\ldots$ được biểu diễn bởi phân số?

A $\dfrac{1706}{9900}$. **B** $\dfrac{153}{990}$. **C** $\dfrac{164}{990}$. **D** $\dfrac{853}{4950}$.

Lời giải.

$0{,}17232323\ldots=0{,}17+23\left(\dfrac{1}{10^4}+\dfrac{1}{10^6}+\ldots\right)=\dfrac{17}{100}+23\cdot\dfrac{1}{10^4}\cdot\dfrac{1}{1-\frac{1}{100}}=\dfrac{17}{100}+\dfrac{23}{9900}=\dfrac{853}{4950}$.

Chọn đáp án D □

Dạng 10. Toán thực tế, liên môn liên quan đến giới hạn dãy số

$$S=u_1+u_1q+u_1q^2+\ldots=\frac{u_1}{1-q}.$$

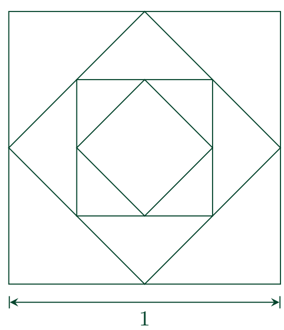
1. Ví dụ mẫu

VÍ DỤ 1.

Từ hình vuông có độ dài cạnh bằng 1, người ta nối các trung điểm của cạnh hình vuông để tạo ra hình vuông mới như hình bên. Tiếp tục quá trình này đến vô hạn.

a) Tính diện tích S_n của hình vuông được tạo thành từ bước thứ n.

b) Tính tổng diện tích của tất cả các hình vuông được tạo thành.



Lời giải.

a) Từ giả thiết suy ra diện tích hình vuông sau bằng $\dfrac{1}{2}$ diện tích hình vuông trước.

Khi đó diện tích của các hình vuông tạo thành một cấp số nhân lùi vô hạn với số hạng đầu $S_1=1$ và công bội $q=\dfrac{1}{2}$.

Diện tích S_n của hình vuông được tạo thành từ bước thứ n là $S_n=S_1\cdot q^{n-1}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$.

b) Tổng diện tích của tất cả các hình vuông được tạo thành là:

$$S = \frac{u_1}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2.$$

□

VÍ DỤ 2. Có 1 kg chất phóng xạ độc hại. Biết rằng, cứ sau một khoảng thời gian $T = 24000$ năm thì một nửa số chất phóng xạ này bị phân rã thành chất khác không độc hại đối với sức khỏe của con người (T được gọi là *chu kì bán rã*).

(*Nguồn: Đại số và giải tích 11, NXB GD Việt Nam, 2021*)

Gọi u_n là khối lượng chất phóng xạ còn lại sau chu kì thứ n.

a) Tìm số hạng tổng quát u_n của dãy số (u_n).

b) Chứng minh rằng (u_n) có giới hạn là 0.

c) Từ kết quả câu 2, chứng tỏ rằng sau một số năm nào đó khối lượng phóng xạ đã cho ban đầu không còn độc hại với con người, biết rằng chất phóng xạ này sẽ không độc hại nữa nếu khối lượng chất phóng xạ còn lại bé hơn 10^{-6} g.

Lời giải.

a) Khối lượng chất phóng xạ còn lại sau chu kì bán rã thứ 1 là $u_1 = \frac{1}{2} \cdot 1 = 1$ kg.

Khối lượng chất phóng xạ còn lại sau chu kì bán rã thứ 2 là $u_2 = \frac{1}{2} \cdot u_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2^2}$ kg.

Khối lượng chất phóng xạ còn lại sau chu kì bán rã thứ 3 là $u_3 = \frac{1}{2} \cdot u_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2^3}$ kg.

Khối lượng chất phóng xạ còn lại sau chu kì bán rã thứ n là $u_n = \frac{1}{2^n}$ kg.

b) $\lim u_n = \lim \frac{1}{2^n} = \lim \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$.

c) Chất phóng xạ sẽ không độc hại nữa nếu khối lượng chất phóng xạ còn lại bé hơn 10^{-6} g $= 10^{-9}$ kg

$$\Leftrightarrow u_n < 10^{-9} \Leftrightarrow \frac{1}{2^n} < 10^{-9} \Leftrightarrow 2^n > 10^9 \Leftrightarrow n \geq 30.$$

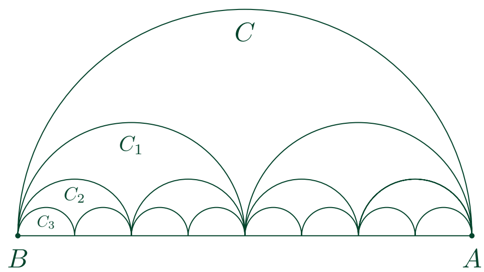
Vậy sau ít nhất 30 chu kì bằng $30 \cdot 24000 = 720000$ năm thì khối lượng phóng xạ đã cho ban đầu không còn độc hại với con người nữa.

□

VÍ DỤ 3. Gọi C là nữa đường tròn đường kính $AB = 2R$.
C_1 là đường gồm hai nửa đường tròn đường kính $\frac{AB}{2}$,
C_2 là đường gồm bốn nửa đường tròn đường kính $\frac{AB}{4}, \cdots$
C_n là đường gồm 2^n nửa đường tròn đường kính $\frac{AB}{2^n}, \cdots$
Gọi p_n là độ dài của C_n, S_n là diện tích hình phẳng giới hạn bởi C_n và đoạn thẳng AB.

a) Tính p_n, S_n.

b) Tính giới hạn của các dãy số (p_n) và (S_n).



Lời giải.

a) Ta có

$$\begin{aligned} p_n &= 2^n \cdot \pi r = 2^n \cdot \pi \cdot \frac{AB}{2 \cdot 2^n} \\ &= \frac{\pi AB}{2} \\ &= \frac{\pi \cdot 2R}{2} \\ &= \pi R. \end{aligned}$$

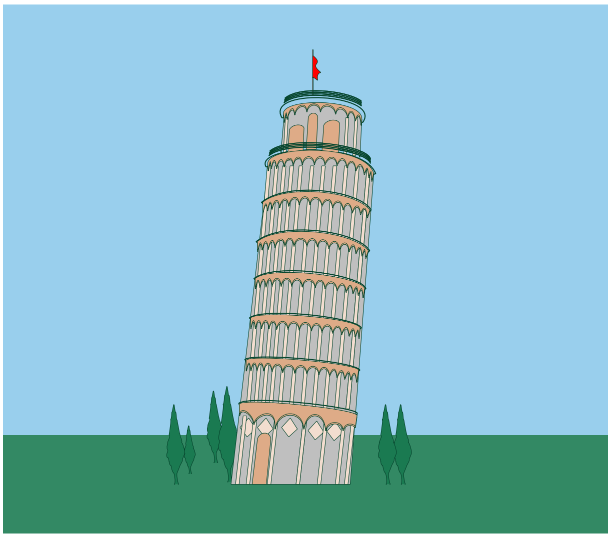
$$\begin{aligned} S_n &= 2^n \cdot \frac{1}{2}\pi r^2 \\ &= 2^n \cdot \frac{1}{2}\pi\left(\frac{AB}{2\cdot 2^n}\right)^2 \\ &= 2^n \cdot \frac{1}{2}\pi\left(\frac{2R}{2\cdot 2^n}\right)^2 \\ &= 2^n \cdot \frac{1}{2}\pi\frac{R^2}{(2^n)^2} \\ &= \frac{\pi R^2}{2^{n+1}}. \end{aligned}$$

b) $\lim p_n = \lim(\pi R) = \pi R$.
$\lim S_n = \lim \dfrac{\pi R^2}{2^{n+1}} = 0$ (Vì $\lim\left(\pi R^2\right) = \pi R^2$ và $\lim 2^{n+1} = +\infty$).

□

VÍ DỤ 4.

Từ độ cao $55,8$ m của tháp nghiêng Pisa nước Ý, người ta thả một quả bóng cao su chạm xuống đất hình bên dưới. Giả sử mỗi lần chạm đất quả bóng lại nảy lên độ cao bằng $\dfrac{1}{10}$ độ cao mà quả bóng đạt được trước đó. Gọi S_n là tổng độ dài quãng đường di chuyển của quả bóng tính từ lúc thả ban đầu cho đến khi quả bóng đó chạm đất n lần. Tính $\lim S_n$.



Lời giải.

Mỗi khi chạm đất quả bóng lại nảy lên một độ cao bằng $\dfrac{1}{10}$ độ cao của lần rơi ngay trước đó và sau đó lại rơi xuống từ độ cao thứ hai này. Do đó, độ dài hành trình của quả bóng kể từ thời điểm rơi ban đầu đến:

Thời điểm chạm đất lần thứ nhất là $d_1 = 55{,}8$.

Thời điểm chạm đất lần thứ hai là $d_2 = 55{,}8 + 2\cdot\dfrac{55{,}8}{10}$.

Thời điểm chạm đất lần thứ ba là $d_3 = 55{,}8 + 2\cdot\dfrac{55{,}8}{10} + 2\cdot\dfrac{55{,}8}{10^2}$.

Thời điểm chạm đất lần thứ tư là $d_4 = 55{,}8 + 2\cdot\dfrac{55{,}8}{10} + 2\cdot\dfrac{55,8}{10^2} + 2\cdot\dfrac{55{,}8}{10^3}$.

...

Thời điểm chạm đất lần thứ n $(n > 1)$ là

$$d_n = 55{,}8 + 2\cdot 55{,}8 + 2\cdot\frac{55{,}8}{10^2} + 2\cdot\frac{55{,}8}{10^3} + \ldots + 2\cdot\frac{55{,}8}{10^{n-1}}.$$

Do đó, quãng đường mà quả bóng đi được kể từ thời điểm rơi đến khi nằm yên trên mặt đất là:

$$d = 55{,}8 + 2.55{,}8 + 2\cdot\frac{55{,}8}{10^2} + 2\cdot\frac{55{,}8}{10^3} + \ldots + 2\cdot\frac{55{,}8}{10^{n-1}} + \ldots = \lim d_n.$$

Vì $2\cdot\dfrac{55{,}8}{10}; 2\cdot\dfrac{55{,}8}{10^2}; 2\cdot\dfrac{55{,}8}{10^3}; \ldots; 2\cdot\dfrac{55{,}8}{10^{n-1}}; \ldots$ là một cấp số nhân lùi vô hạn với công bội $q = \dfrac{1}{10}$ nên ta có:

$$2\cdot\frac{55,8}{10} + 2\cdot\frac{55{,}8}{10^2} + 2\cdot\frac{55{,}8}{10^3} + \ldots + 2\cdot\frac{55{,}8}{10^{n-1}} + \ldots = \frac{2\cdot\dfrac{55{,}8}{10}}{1-\dfrac{1}{10}} = 12{,}4.$$

Vậy $d = 55{,}8 + 12{,}4 = 68{,}2$ m.

□

VÍ DỤ 5. Cho một tam giác đều ABC cạnh a. Tam giác $A_1B_1C_1$ có các đỉnh là trung điểm các cạnh của tam giác ABC, tam giác $A_2B_2C_2$ có các đỉnh là trung điểm các cạnh của tam giác $A_1B_1C_1, \ldots$, tam giác $A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}$ có các đỉnh là trung điểm các cạnh của tam giác $A_nB_nC_n, \ldots$ Gọi $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$ và $S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$ theo thứ tự là chu vi và diện tích của các tam giác $A_1B_1C_1, A_2B_2C_2, \ldots, A_nB_nC_n, \ldots$.

a) Tìm giới hạn của các dãy số (p_n) và (S_n).

b) Tìm các tổng $p_1 + p_2 + \ldots + p_n + \ldots$ và $S_1 + S_2 + \ldots + S_n + \ldots$.

Lời giải.

a) Ta có $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$ lần lượt là chu vi của các tam giác $A_1B_1C_1, A_2B_2C_2, \ldots, A_nB_nC_n, \ldots$

$$p_1 = 3a$$
$$p_2 = 3 \cdot \frac{1}{2}a$$
$$\ldots$$
$$p_n = 3 \cdot \frac{1}{2^{n-1}}a$$

suy ra $\lim p_n = \lim 3 \cdot \frac{1}{2^{n-1}}a = 0$.

$$S_1 = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$
$$S_2 = \frac{1}{4}\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$
$$\ldots$$
$$S_n = \frac{1}{4^{n-1}} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

suy ra $\lim S_n = \lim \frac{1}{4^{n-1}} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 0$.

b) Dựa vào dữ kiện đề bài suy ra tổng (p_n) là tổng của cấp số nhân lùi vô hạn với công bội $q = \frac{1}{2}$ và $p_1 + p_2 + \ldots + p_n + \ldots = \lim (p_n) = \frac{p_1}{1-q} = \frac{3a}{1-\frac{1}{2}} = 6a$.

Dựa vào dữ kiện đề bài suy ra tổng (S_n) là tổng của cấp số nhân lùi vô hạn với công bội $q = \frac{1}{4}$ và $S_1 + S_2 + \ldots + S_n + \ldots = \lim (S_n) = \frac{S_1}{1-q} = \frac{\frac{a^2\sqrt{3}}{4}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{a^2\sqrt{3}}{12}$.

□

2. Câu hỏi trắc nghiệm

CÂU 1. Có 1 kg chất phóng xạ độc hại. Biết rằng, cứ sau một khoảng thời gian $T = 24000$ năm thì một nửa số chất phóng xạ này bị phân rã thành chất khác không độc hại đối với sức khỏe của con người (T được gọi là *chu kì bán rã*). Gọi u_n là khối lượng chất phóng xạ còn lại sau chu kì thứ n. Sau ít nhất bao nhiêu chu kì bán rã thì khối lượng phóng xạ đã cho ban đầu không còn độc hại với con người, biết rằng chất phóng xạ này sẽ không độc hại nữa nếu khối lượng chất phóng xạ còn lại bé hơn 10^{-6} g.

(A) 24. (B) 30. (C) 100. (D) 15.

Lời giải.

Chất phóng xạ sẽ không độc hại nữa nếu khối lượng chất phóng xạ còn lại bé hơn 10^{-6} g $= 10^{-9}$ kg

$$\Leftrightarrow u_n < 10^{-9} \Leftrightarrow \frac{1}{2^n} < 10^{-9} \Leftrightarrow 2^n > 10^9 \Leftrightarrow n \geq 30.$$

Vậy sau ít nhất 30 chu kì thì khối lượng phóng xạ đã cho ban đầu không còn độc hại với con người nữa.
Chọn đáp án (B) □

CÂU 2. Có 1 kg chất phóng xạ độc hại. Biết rằng, cứ sau một khoảng thời gian $T = 24000$ năm thì một nửa số chất phóng xạ này bị phân rã thành chất khác không độc hại đối với sức khỏe của con người (T được gọi là *chu kì bán rã*). Gọi u_n là khối lượng chất phóng xạ còn lại sau chu kì thứ n. Sau ít nhất bao nhiêu năm thì khối lượng phóng xạ đã cho ban đầu không còn độc hại với con người, biết rằng chất phóng xạ này sẽ không độc hại nữa nếu khối lượng chất phóng xạ còn lại bé hơn 10^{-6} g.

(A) 30. (B) 2400. (C) 720000. (D) 10000.

Lời giải.

Chất phóng xạ sẽ không độc hại nữa nếu khối lượng chất phóng xạ còn lại bé hơn 10^{-6} g $= 10^{-9}$ kg

$$\Leftrightarrow u_n < 10^{-9} \Leftrightarrow \frac{1}{2^n} < 10^{-9} \Leftrightarrow 2^n > 10^9 \Leftrightarrow n \geq 30.$$

Vậy sau ít nhất 30 chu kì bằng $30 \cdot 24000 = 720000$ năm thì khối lượng phóng xạ đã cho ban đầu không còn độc hại với con người nữa.
Chọn đáp án (C) □

CÂU 3. Từ hình vuông có độ dài cạnh bằng 1, người ta nối các trung điểm của cạnh hình vuông để tạo ra hình vuông mới như hình bên. Tiếp tục quá trình này đến vô hạn. Tính tổng diện tích của tất cả các hình vuông được tạo thành.

A 1. **B** 2. **C** 3. **D** 4.

Lời giải.

Từ giả thiết suy ra diện tích hình vuông sau bằng $\frac{1}{2}$ diện tích hình vuông trước.

Khi đó diện tích của các hình vuông tạo thành một cấp số nhân lùi vô hạn với số hạng đầu $S_1 = 1$ và công bội $q = \frac{1}{2}$.

Diện tích S_n của hình vuông được tạo thành từ bước thứ n là $S_n = S_1 \cdot q^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

Tổng diện tích của tất cả các hình vuông được tạo thành là:

$$S = \frac{u_1}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2.$$

Chọn đáp án (B) □

CÂU 4. Từ hình vuông đầu tiên có cạnh bằng 1 (đơn vị độ dài), nối các trung điểm của bốn cạnh để có hình vuông thứ hai. Tiếp tục nối các trung điểm của bốn cạnh của hình vuông thứ hai để được hình vuông thứ ba. Cứ tiếp tục làm như thế, nhận được một dãy hình vuông. Tính tổng chu vi của dãy các hình vuông trên.

A $8 + \sqrt{2}$. **B** $2 + \sqrt{2}$. **C** $8 + 4\sqrt{2}$. **D** $4 + 4\sqrt{2}$.

Lời giải.

Hình vuông thứ nhất có chu vi bằng 4, hình vuông thứ 2 có chu vi là $2\sqrt{2}$, hình vuông thứ 3 có chu vi là 2.

Suy ra hình vuông thứ n có chu vi bằng $p_n = 4 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1}$. Tổng chu vi của n hình vuông đầu tiên là tổng của cấp số nhân có số hạng đầu $p_1 = 4$ và công bội $q = \frac{\sqrt{2}}{2}$ nên

$$Q_n = \frac{p_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{4\left(1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n\right)}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}} = \left(8+4\sqrt{2}\right)\left[1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n\right].$$

$\lim Q_n = \left(8+4\sqrt{2}\right)\lim\left[1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n\right] = \left(8+4\sqrt{2}\right)(1-0) = 8+4\sqrt{2}$.

Chọn đáp án (C) □

CÂU 5. Từ độ cao $55,8$ m của tháp nghiêng Pisa nước Ý, người ta thả một quả bóng cao su chạm xuống đất hình bên dưới. Giả sử mỗi lần chạm đất quả bóng lại nảy lên độ cao bằng $\frac{1}{10}$ độ cao mà quả bóng đạt được trước đó. Gọi S_n là tổng độ dài quãng đường di chuyển của quả bóng tính từ lúc thả ban đầu cho đến khi quả bóng đó chạm đất n lần. Tính $\lim S_n$.

A 58,8. **B** 67,2. **C** 68. **D** 68,2.

Lời giải.

Mỗi khi chạm đất quả bóng lại nảy lên một độ cao bằng $\frac{1}{10}$ độ cao của lần rơi ngay trước đó và sau đó lại rơi xuống từ độ cao thứ hai này. Do đó, độ dài hành trình của quả bóng kể từ thời điểm rơi ban đầu đến:
Thời điểm chạm đất lần thứ nhất là $d_1 = 55{,}8$.
Thời điểm chạm đất lần thứ hai là $d_2 = 55{,}8 + 2 \cdot \frac{55{,}8}{10}$.
Thời điểm chạm đất lần thứ ba là $d_3 = 55{,}8 + 2 \cdot \frac{55{,}8}{10} + 2 \cdot \frac{55{,}8}{10^2}$.
Thời điểm chạm đất lần thứ tư là $d_4 = 55{,}8 + 2 \cdot \frac{55{,}8}{10} + 2 \cdot \frac{55,8}{10^2} + 2 \cdot \frac{55{,}8}{10^3}$.
...
Thời điểm chạm đất lần thứ n $(n > 1)$ là

$$d_n = 55{,}8 + 2 \cdot 55{,}8 + 2 \cdot \frac{55{,}8}{10^2} + 2 \cdot \frac{55{,}8}{10^3} + \ldots + 2 \cdot \frac{55{,}8}{10^{n-1}}.$$

Do đó, quãng đường mà quả bóng đi được kể từ thời điểm rơi đến khi nằm yên trên mặt đất là:

$$d = 55{,}8 + 2.55{,}8 + 2\cdot\frac{55{,}8}{10^2} + 2\cdot\frac{55{,}8}{10^3} + \ldots + 2\cdot\frac{55{,}8}{10^{n-1}} + \ldots = \lim d_n.$$

Vì $2\cdot\frac{55{,}8}{10}; 2\cdot\frac{55{,}8}{10^2}; 2\cdot\frac{55{,}8}{10^3}; \ldots; 2\cdot\frac{55{,}8}{10^{n-1}}; \ldots$ là một cấp số nhân lùi vô hạn với công bội $q = \frac{1}{10}$ nên ta có:

$$2\cdot\frac{55{,}8}{10} + 2\cdot\frac{55{,}8}{10^2} + 2\cdot\frac{55{,}8}{10^3} + \ldots + 2\cdot\frac{55{,}8}{10^{n-1}} + \ldots = \frac{2\cdot\frac{55{,}8}{10}}{1-\frac{1}{10}} = 12{,}4.$$

Vậy $d = 55{,}8 + 12{,}4 = 68{,}2$ m.

Chọn đáp án (D) □

Dạng 11. Nguyên lý kẹp

Để tìm giới hạn của dãy số theo nguyên lý kẹp ta cần nhớ:

- Cho hai dãy số (u_n) và (v_n). Nếu $|u_n| \le v_n$ với mọi n và $\lim v_n = 0$ thì $\lim u_n = 0$.
- Cho ba dãy số (u_n), (v_n) và (w_n). Nếu $u_n \le v_n \le w_n$ với mọi n và $\lim u_n = \lim w_n = L$ thì $\lim v_n = L$.

1. Ví dụ mẫu

VÍ DỤ 1. Chứng minh rằng các dãy số với số hạng tổng quát sau đây có giới hạn 0.

a) $u_n = \dfrac{(-1)^n}{3n+2}$.

b) $u_n = \dfrac{n\sin 2n}{n^3+2}$.

c) $u_n = \dfrac{(-1)^n\cos n}{\sqrt{n}}$.

d) $u_n = \dfrac{3\sin n - 4\cos n}{2n^2+1}$.

Lời giải.

a) Ta có: $0 \leqslant |u_n| = \dfrac{1}{3n+2} < \dfrac{1}{3n} < \dfrac{1}{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Mà $\lim\dfrac{1}{n} = 0$ nên suy ra $\lim\dfrac{(-1)^n}{3n+2} = 0$.

b) Ta có $0 \leqslant |u_n| = \dfrac{n|\sin 2n|}{n^3+2} \leqslant \dfrac{n}{n^3+2} < \dfrac{n}{n^3} \leqslant \dfrac{1}{n^2}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Mà $\lim\dfrac{1}{n^2} = 0$ nên suy ra $\lim\dfrac{n\sin 2n}{n^3+2} = 0$.

c) Ta có $0 \leqslant \left|\dfrac{(-1)^n\cos n}{\sqrt{n}}\right| \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{n}}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Mà $\lim\dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$ nên suy ra $\lim\dfrac{(-1)^n\cos n}{\sqrt{n}} = 0$.

d) Theo bất đẳng thức Bunhiacopxki, ta có

$|3\sin n - 4\cos n| \leqslant \sqrt{(3^2+4^2)\left(\sin^2 n + \cos^2 n\right)} = 5$.

Do đó $0 \leqslant \left|\dfrac{3\sin n - 4\cos n}{2n^2+1}\right| \leqslant \dfrac{5}{2n^2+1} < \dfrac{5}{2n^2}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Mà $\lim\dfrac{5}{2n^2+1} = 0$ nên suy ra $\lim\dfrac{3\sin n - 4\cos n}{2n^2+1} = 0$.

□

VÍ DỤ 2. Chứng minh rằng các dãy số với số hạng tổng quát sau đây có giới hạn 0.

a) $u_n = \sqrt{n^3+2} - \sqrt{n^3+1}$.

b) $u_n = \dfrac{3^n\sin 2n + 4^n}{2^n + 4\cdot 5^n}$.

c) $u_n = \dfrac{n+\sin 2n}{n^2+n}$.

d) $\dfrac{n+\cos\frac{n\pi}{5}}{n\sqrt{n}+\sqrt{n}}$.

Lời giải.

a) Ta có $u_n = \sqrt{n^3+2} - \sqrt{n^3+1} = \dfrac{n^3+2-(n^3+1)}{\sqrt{n^3+2}+\sqrt{n^3+1}} = \dfrac{1}{\sqrt{n^3+2}+\sqrt{n^3+1}}$.

Do đó $0 \leqslant |u_n| = \dfrac{1}{\sqrt{n^3+2}+\sqrt{n^3+1}} < \dfrac{2}{\sqrt{n^2}+\sqrt{n^2}} = \dfrac{2}{2n} = \dfrac{1}{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Mà $\lim \dfrac{1}{n} = 0$ nên suy ra $\lim\left(\sqrt{n^3+2} - \sqrt{n^3+1}\right) = 0$.

b) Ta có $0 \leqslant \left|\dfrac{3^n \sin 2n + 4^n}{2^n + 4.5^n}\right| \leqslant \dfrac{3^n |\sin 2n| + 4^n}{2^n + 4\cdot 5^n} \leqslant \dfrac{3^n + 4^n}{2^n + 4\cdot 5^n} = \dfrac{\left(\frac{3}{5}\right)^n + \left(\frac{4}{5}\right)^n}{\left(\frac{2}{5}\right)^n + 4}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Mà $\lim\left[\left(\dfrac{3}{5}\right)^n + \left(\dfrac{4}{5}\right)^n\right] = \lim\left(\dfrac{3}{5}\right)^n + \lim\left(\dfrac{4}{5}\right)^n = 0$ và

$$\lim\left[\left(\frac{2}{5}\right)^n + 4\right] = \lim\left(\frac{2}{5}\right)^n + 4 = 0 + 4 = 4$$

nên $\lim \dfrac{3^n \sin 2n + 4^n}{2^n + 4\cdot 5^n} = 0$.

c) Ta có $0 \leqslant \left|\dfrac{n + \sin 2n}{n^2+n}\right| \leqslant \dfrac{n + |\sin 2n|}{n^2+n} \leqslant \dfrac{n+1}{n^2+n} = \dfrac{1}{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Mà $\lim \dfrac{1}{n} = 0$ nên suy ra $\lim \dfrac{n+\sin 2n}{n^2+n} = 0$.

d) Ta có $0 \leqslant \left|\dfrac{n + \cos\frac{n\pi}{5}}{n\sqrt{n}+\sqrt{n}}\right| \leqslant \dfrac{n + \left|\cos\frac{n\pi}{5}\right|}{n\sqrt{n}+\sqrt{n}} \leqslant \dfrac{n+1}{n\sqrt{n}+\sqrt{n}} = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Mà $\lim \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$ nên suy ra $\lim \dfrac{n + \cos\frac{n\pi}{5}}{n\sqrt{n}+\sqrt{n}} = 0$. □

VÍ DỤ 3. Cho dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{n}{3^n}$.

a) Chứng minh rằng $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \dfrac{2}{3}$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

b) Bằng phương pháp quy nạp chứng minh rằng $0 < u_n < \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

c) Dãy (u_n) có giới hạn 0.

Lời giải.

a) Với mọi $n \in \mathbb{N}$, ta có $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{\frac{n+1}{3^{n+1}}}{\frac{n}{3^n}} = \dfrac{n+1}{n} \cdot \dfrac{1}{3}$.

Mặt khác, $n+1 \leqslant n+n \leqslant 2n$. Suy ra $\dfrac{n+1}{n} \leqslant 2$.

Do đó $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \dfrac{2}{3}$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

b) Rõ ràng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, ta có $u_n > 0$. Do đó ta chỉ cần chứng minh $u_n < \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$.

- Với $n = 1$, ta có $u_1 = \dfrac{1}{3^1} = \dfrac{1}{3} < \left(\dfrac{2}{3}\right)^1$. Nghĩa là mệnh đề đúng với $n = 1$.
- Giả sử mệnh đề đúng với $n = k \geqslant 1$, tức là $u_k < \left(\dfrac{2}{3}\right)^k$.
- Bây giờ ta cần chứng minh mệnh đề đúng với $n = k+1$, tức là cần chứng minh $u_{k+1} < \left(\dfrac{2}{3}\right)^{k+1}$.

  Theo chứng minh câu a) ta có $\dfrac{u_{k+1}}{u_k} \leqslant \dfrac{2}{3}$ suy ra $u_{k+1} \leqslant \dfrac{2}{3}\cdot u_k < \dfrac{2}{3}\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^k = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{k+1}$ hay $u_{k+1} < \left(\dfrac{2}{3}\right)^{k+1}$.

  Nghĩa là mệnh đề cũng đúng với $n = k+1$. Vậy $0 < u_n < \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

c) Theo câu b), ta có $0 < u_n < \left(\frac{2}{3}\right)^n$. Mà $\lim \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$. Do đó $\lim u_n = 0$.

□

VÍ DỤ 4. Chứng minh rằng

a) $\lim \left(\frac{-n^3}{n^3+1}\right) = -1$.

b) $\lim \left(\frac{n^2+3n+2}{2n^2+n}\right) = \frac{1}{2}$.

Lời giải.

a) Ta có $\lim \left(\frac{-n^3}{n^3+1} - (-1)\right) = \lim \left(\frac{1}{n^3+1}\right)$.

Vì $0 \leqslant \left|\frac{1}{n^3+1}\right| < \frac{1}{n^3}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Mà $\lim \frac{1}{n^3} = 0$ nên suy ra $\lim \left(\frac{1}{n^3+1}\right) = 0$.

Do đó $\lim \left(\frac{-n^3}{n^3+1}\right) = -1$.

b) Ta có $\lim \left(\frac{n^2+3n+2}{2n^2+n} - \frac{1}{2}\right) = \lim \frac{5n+4}{2(2n^2+n)}$.

Vì $0 < \left|\frac{5n+4}{2(2n^2+n)}\right| < \frac{5n+5}{2n(n+1)} = \frac{5}{2}\cdot\frac{1}{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Mà $\lim \left(\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{n}\right) = \frac{5}{2}\cdot \lim \frac{1}{n} = 0$ nên suy ra $\lim \frac{5n+4}{2(2n^2+n)} = 0$.

Do đó $\lim \left(\frac{n^2+3n+2}{2n^2+n}\right) = \frac{1}{2}$.

□

VÍ DỤ 5. Chứng minh rằng

a) $\lim \left(\frac{3\cdot 3^n - \sin 3n}{3^n}\right) = 3$.

b) $\lim \left(\sqrt{n^2+n} - n\right) = \frac{1}{2}$.

Lời giải.

a) Ta có $\lim \left(\frac{3.3^n - \sin 3n}{3^n} - 3\right) = \lim \left(\frac{-\sin 3n}{3^n}\right)$.

Vì $0 \leqslant \left|\frac{-\sin 3n}{3^n}\right| = \frac{|-\sin 3n|}{3^n} \leqslant \frac{1}{3^n} = \left(\frac{1}{3}\right)^n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Mà $\lim \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$ nên suy ra $\lim \left(\frac{-\sin 3n}{3^n}\right) = 0$.

Do đó $\lim \left(\frac{3.3^n - \sin 3n}{3^n}\right) = 3$.

b) Ta có $\lim \left(\sqrt{n^2+n} - n - \frac{1}{2}\right) = \lim \frac{2\sqrt{n^2+n} - (2n+1)}{2} = \lim \frac{-1}{2\left(2\sqrt{n^2+n} + (2n+1)\right)}$.

Vì $0 \leqslant \left|\frac{-1}{2\left(2\sqrt{n^2+n} + (2n+1)\right)}\right| \leqslant \frac{1}{2\left(2\sqrt{n^2+n} + (2n+1)\right)} \leqslant \frac{1}{2\left(2\sqrt{n^2} + 2n\right)} = \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Mà $\lim \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{n} = \frac{1}{8}\lim\frac{1}{n} = 0$ nên suy ra $\lim \left(\sqrt{n^2+n} - n - \frac{1}{2}\right)$.

Do đó $\lim \left(\sqrt{n^2+n} - n\right) = \frac{1}{2}$.

□

VÍ DỤ 6. Tìm các giới hạn sau

a) $\lim \left(\frac{1}{\sqrt{4n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{4n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{4n^2+n}}\right)$.

b) $\lim \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}$.

Lời giải.

a) Ta có

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{4n^2}} + \frac{1}{\sqrt{4n^2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{4n^2}} &\leqslant \frac{1}{\sqrt{4n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{4n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{4n^2+n}}\\ &\leqslant \frac{1}{\sqrt{4n^2+n}} + \frac{1}{\sqrt{4n^2+n}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{4n^2+n}}.\end{aligned}$$

hay

$$\frac{n}{\sqrt{4n^2}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{4n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{4n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{4n^2+n}} \leqslant \frac{n}{\sqrt{4n^2+n}} \text{ với mọi } n \in \mathbb{N}^*.$$

Mà $\lim \dfrac{n}{\sqrt{4n^2}} = \lim \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$; $\lim \dfrac{n}{\sqrt{4n^2+n}} = \lim \dfrac{1}{\sqrt{4+\dfrac{1}{n}}} = \dfrac{1}{\sqrt{4+0}} = \dfrac{1}{2}$.

Do đó $\lim \left(\dfrac{1}{\sqrt{4n^2+1}} + \dfrac{1}{\sqrt{4n^2+2}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{4n^2+n}}\right) = \dfrac{1}{2}$.

b) Ta có $u_n = \dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)}$, suy ra

$$u_n^2 = \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdots (2n-1)^2}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdots (2n)^2} = \frac{1 \cdot 3}{2^2} \cdot \frac{3 \cdot 5}{4^2} \cdots \frac{(2n-1)(2n+1)}{(2n)^2} \cdot \frac{1}{2n+1} < \frac{1}{2n+1}.$$

(do $\dfrac{1 \cdot 3}{2^2} \cdot \dfrac{3 \cdot 5}{4^2} \cdots \dfrac{(2n-1)(2n+1)}{(2n)^2} < \dfrac{2^2}{2^2} \cdot \dfrac{4^2}{4^2} \cdots \dfrac{(2n)^2}{(2n)^2} = 1$)

Vậy ta có $0 < u_n < \dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Mà $\lim \dfrac{1}{\sqrt{2n+1}} = 0$ nên suy ra

$$\lim \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} = 0.$$

□

Bài 16. GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Giới hạn hữu hạn của hàm số tại một điểm

ĐỊNH NGHĨA 16.1. Cho điểm x_0 thuộc khoảng K và hàm số $y = f(x)$ xác định trên K hoặc $K \setminus \{x_0\}$.
Ta nói hàm số $y = f(x)$ ***có giới hạn hữu hạn*** là số L khi x dần tới x_0 nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_n \in K \setminus \{x_0\}$ và $x_n \to x_0$ thì $f(x_n) \to L$, kí hiệu $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ hay $f(x) \to L$ khi $x \to x_0$.

$\lim\limits_{x \to x_0} x = x_0$; $\lim\limits_{x \to x_0} c = c$ (c là hằng số).

2. Các phép toán về giới hạn hữu hạn của hàm số

a) Cho $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ và $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = M$. Khi đó:

- $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) + g(x)] = L + M$;
- $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) - g(x)] = L - M$;
- $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) \cdot g(x)] = L \cdot M$;
- $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L}{M}$ (với $M \neq 0$).

b) Nếu $f(x) \geq 0$ và $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ thì $L \geq 0$ và $\lim\limits_{x \to x_0} \sqrt{f(x)} = \sqrt{L}$.
(Dấu của $f(x)$ được xét trên khoảng tìm giới hạn, $x \neq x_0$).

a) $\lim\limits_{x \to x_0} x^k = x_0^k$, k là số nguyên dương;

b) $\lim\limits_{x \to x_0} [cf(x)] = c \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ ($c \in \mathbb{R}$, nếu tồn tại $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \in \mathbb{R}$).

3. Giới hạn một phía

ĐỊNH NGHĨA 16.2.

- Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(x_0; b)$.
Ta nói hàm số $y = f(x)$ ***có giới hạn bên phải*** là số L khi x dần tới x_0 nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_0 < x_n < b$ và $x_n \to x_0$ thì $f(x_n) \to L$, kí hiệu $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = L$.

- Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên khoảng $(a;x_0)$.
  Ta nói hàm số $y=f(x)$ ***có giới hạn bên trái*** là số L khi x dần tới x_0 nếu với dãy số (x_n) bất kì, $a<x_n<x_0$ và $x_n\to x_0$ thì $f(x_n)\to L$, kí hiệu $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=L$.

a) Ta thừa nhận các kết quả sau:

- $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=L$ *và* $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=L$ *khi và chỉ khi* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L$;
- *Nếu* $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)\neq \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ *thì không tồn tại* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.

b) Các phép toán về giới hạn hữu hạn của hàm số ở Mục 2 vẫn đúng khi ta thay $x\to x_0$ *bằng* $x\to x_0^+$ *hoặc* $x\to x_0^-$.

4. Giới hạn hữu hạn của hàm số tại vô cực

ĐỊNH NGHĨA 16.3.

- Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên khoảng $(a;+\infty)$.
  Ta nói hàm số $y=f(x)$ ***có giới hạn hữu hạn*** là số L khi $x\to+\infty$ nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_n>a$ và $x_n\to+\infty$ thì $f(x_n)\to L$, kí hiệu $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=L$ hay $f(x)\to L$ khi $x\to+\infty$.

- Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên khoảng $(-\infty;a)$.
  Ta nói hàm số $y=f(x)$ ***có giới hạn hữu hạn*** là số L khi $x\to-\infty$ nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_n<a$ và $x_n\to-\infty$ thì $f(x_n)\to L$, kí hiệu $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=L$ hay $f(x)\to L$ khi $x\to-\infty$.

a) Với c là hằng số và k là số nguyên dương, ta luôn có:

$$\lim_{x\to\pm\infty} c=c \quad \textit{và} \quad \lim_{x\to\pm\infty}\frac{c}{x^k}=0.$$

b) Các phép toán trên giới hạn hàm số ở Mục 2 vẫn đúng khi thay $x\to x_0$ *bằng* $x\to+\infty$ *hoặc* $x\to-\infty$.

5. Giới hạn vô cực của hàm số tại một điểm

ĐỊNH NGHĨA 16.4. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên khoảng $(x_0;b)$.

- Ta nói hàm số $y=f(x)$ ***có giới hạn bên phải*** là $+\infty$ khi x dần tới x_0 về bên phải nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_0<x_n<b$ và $x_n\to x_0$ thì $f(x_n)\to+\infty$, kí hiệu $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=+\infty$ hay $f(x)\to+\infty$ khi $x\to x_0^+$.

- Ta nói hàm số $y=f(x)$ ***có giới hạn bên phải*** là $-\infty$ khi x dần tới x_0 về bên phải nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_0<x_n<b$ và $x_n\to x_0$ thì $f(x_n)\to-\infty$, kí hiệu $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=-\infty$ hay $f(x)\to-\infty$ khi $x\to x_0^+$.

a) Các giới hạn $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ *được định nghĩa như trên.*

b) Ta có các giới hạn thường dùng như sau:

- $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{1}{x-a}=+\infty$ *và* $\lim\limits_{x\to a^-}\dfrac{1}{x-a}=-\infty$ *(*$a\in\mathbb{R}$*);*
- $\lim\limits_{x\to+\infty} x^k=+\infty$ *với k nguyên dương;*
- $\lim\limits_{x\to-\infty} x^k=+\infty$ *với k là số chẵn;*
- $\lim\limits_{x\to-\infty} x^k=-\infty$ *với k là số lẻ.*

c) Các phép toán trên giới hạn hàm số của Mục 2 chỉ áp dụng được khi tất cả các hàm số được xét có giới hạn hữu hạn. Với giới hạn vô cực, ta có một số quy tắc sau đây.
Nếu $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=L\neq 0$ *và* $\lim\limits_{x\to x_0^+} g(x)=+\infty$ *(hoặc* $\lim\limits_{x\to x_0^+} g(x)=-\infty$*) thì* $\lim\limits_{x\to x_0^+}[f(x)\cdot g(x)]$ *được tính theo quy tắc cho bởi bảng sau:*

$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$	$\lim\limits_{x\to x_0^+} g(x)$	$\lim\limits_{x\to x_0^+} [f(x)\cdot g(x)]$
$L>0$	$+\infty$	$+\infty$
$L>0$	$-\infty$	$-\infty$
$L<0$	$+\infty$	$-\infty$
$L<0$	$-\infty$	$+\infty$

Các quy tắc trên vẫn đúng khi thay x_0^+ thành x_0^- (hoặc $+\infty$, $-\infty$).

B. CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

Dạng 1. Thay số trực tiếp

1. Ví dụ mẫu

VÍ DỤ 1. Tính các giới hạn sau

a) $\lim\limits_{x\to 1}(x^2-4x+2)$;

b) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x-2}{2x+1}$.

Lời giải.

a) $\lim\limits_{x\to 1}(x^2-4x+2)=\lim\limits_{x\to 1}x^2-\lim\limits_{x\to 1}(4x)+\lim\limits_{x\to 1}2=1^2-4\lim\limits_{x\to 1}x+2=1-4\cdot 1+2=-1$;

b) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x-2}{2x+1}=\dfrac{\lim\limits_{x\to 2}(3x-2)}{\lim\limits_{x\to 2}(2x+1)}=\dfrac{3\lim\limits_{x\to 2}x-2}{2\lim\limits_{x\to 2}x+1}=\dfrac{3\cdot 2-2}{2\cdot 2+1}=\dfrac{4}{5}$.

□

VÍ DỤ 2. Tìm các giới hạn sau

a) $\lim\limits_{x\to 3}\sqrt{\dfrac{x^2}{x^3-x-6}}$.

b) $\lim\limits_{x\to -2}\sqrt[3]{\dfrac{2x^4+3x+2}{x^2-x+2}}$.

Lời giải.

a) $\lim\limits_{x\to 3}\sqrt{\dfrac{x^2}{x^3-x-6}}$; do $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2}{x^3-x-6}=\dfrac{3^2}{3^3-3-6}=\dfrac{1}{2}>0$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 3}\sqrt{\dfrac{x^2}{x^3-x-6}}=\sqrt{\dfrac{1}{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

b) $\lim\limits_{x\to -2}\sqrt[3]{\dfrac{2x^4+3x+2}{x^2-x+2}}$; do $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2x^4+3x+2}{x^2-x+2}=\dfrac{7}{2}\Rightarrow \lim\limits_{x\to -2}\sqrt[3]{\dfrac{2x^4+3x+2}{x^2-x+2}}=\sqrt[3]{\dfrac{7}{2}}=\dfrac{\sqrt[3]{28}}{2}$.

□

VÍ DỤ 3. Cho $f(x)$ là một đa thức thỏa mãn $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-16}{x-1}=24$. Tính giới hạn sau

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-16}{(x-1)\left(\sqrt{2f(x)+4}+6\right)}.$$

Lời giải.

Vì $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-16}{x-1}=24$ nên $f(1)=16$. Khi đó

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-16}{(x-1)\left(\sqrt{2f(x)+4}+6\right)}=\frac{1}{12}\cdot\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-16}{x-1}=2.$$

□

2. Câu hỏi trắc nghiệm

CÂU 1. Biết $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=m$, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=n$. Tính $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)+g(x)]$.

(A) $m+n$. (B) $m-n$. (C) mn. (D) $\dfrac{m}{n}$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)+g(x)]=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)+\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=m+n$.

Chọn đáp án (A) □

CÂU 2. Khẳng định nào sau đây là đúng?

(A) $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt[3]{f(x)+g(x)}=\sqrt[3]{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}+\sqrt[3]{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$.

(B) $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt[3]{f(x)+g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt[3]{f(x)}+\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt[3]{g(x)}$.

(C) $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt[3]{f(x)+g(x)}=\sqrt[3]{\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]}$.

(D) $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt[3]{f(x)+g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\left[\sqrt[3]{f(x)}+\sqrt[3]{g(x)}\right]$.

Lời giải.

Theo định lý về giới hạn của thì $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt[3]{f(x)+g(x)}=\sqrt[3]{\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]}$.

Chọn đáp án (C) □

CÂU 3. Cho các giới hạn $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=2$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=3$. Tính $M=\lim\limits_{x\to x_0}[3f(x)-4g(x)]$.

(A) $M=5$. (B) $M=2$. (C) $M=-6$. (D) $M=3$.

Lời giải.

Ta có $M=\lim\limits_{x\to x_0}[3f(x)-4g(x)]=3\lim\limits_{x\to x_0} f(x)-4\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=6-12=-6$.

Chọn đáp án (C) □

CÂU 4. Biết $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=m$, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=n$. Tính $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-g(x)]$.

(A) $m+n$. (B) $m-n$. (C) mn. (D) $\dfrac{m}{n}$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-g(x)]=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=m-n$.

Chọn đáp án (B) □

CÂU 5. Cho $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$, kết quả của $\lim\limits_{x\to a}[-3\cdot f(x)]$ bằng

(A) $+\infty$. (B) 0. (C) 3. (D) $-\infty$.

Lời giải.

Có $\lim\limits_{x\to a}[-3\cdot f(x)]=-3\cdot\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$.

Chọn đáp án (A) □

CÂU 6. Cho $k\in\mathbb{Z}$, kết quả của $\lim\limits_{x\to-\infty} x^{2k+1}$ bằng

(A) 0. (B) $-\infty$. (C) $+\infty$. (D) 5.

Lời giải.

Theo tính chất của giới hạn hàm số, ta có $\lim\limits_{x\to-\infty} x^{2k+1}=-\infty$.

Chọn đáp án (B) □

CÂU 7. Cho $\lim\limits_{x\to3} f(x)=-2$. Giá trị $\lim\limits_{x\to3}[f(x)+4x-1]$ bằng

(A) 5. (B) 6. (C) -11. (D) 9.

Lời giải.

$\lim\limits_{x\to3}[f(x)+4x-1]=\lim\limits_{x\to3} f(x)+\lim\limits_{x\to3} 4x-1=-2+4\cdot3-1=9$.

Chọn đáp án (D) □

CÂU 8. Cho $\lim\limits_{x\to2} f(x)=3$. Giá trị của $\lim\limits_{x\to2}[f(x)+x]$ bằng

(A) 5. (B) 6. (C) 1. (D) 4.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to2}[f(x)+x]=\lim\limits_{x\to2} f(x)+\lim\limits_{x\to2} x=3+2=5$.

Chọn đáp án (A) □

CÂU 9. Với k là số nguyên dương. Kết quả của giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{2k}$ là

(A) $+\infty$. (B) 0. (C) $-\infty$. (D) 1.

Lời giải.

Với k nguyên dương thì $\lim\limits_{x\to+\infty} x^k=+\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} x^{2k}=+\infty$.

Chọn đáp án (A) □

CÂU 10. Cho c là hằng số, k là số nguyên dương. Khẳng định nào sau đây **sai**?

(A) $\lim\limits_{x\to+\infty} c=+\infty$.
(B) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{c}{x^k}=0$.
(C) $\lim\limits_{x\to x_0} c=c$.
(D) $\lim\limits_{x\to x_0} x=x_0$.

Lời giải.

Theo định lý về giới hạn, khẳng định sai là $\lim\limits_{x\to+\infty} c=+\infty$.

Chọn đáp án (A) □

CÂU 11. Cho $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=a$, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=b$. Hỏi mệnh đề nào sau đây là mệnh đề **sai**?

(A) $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)\cdot g(x)]=ab$.
(B) $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-g(x)]=a-b$.
(C) $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)+g(x)]=a+b$.
(D) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{a}{b}$.

Lời giải.

Khi $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=b=0$ thì $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{a}{b}$ không đúng.

Chọn đáp án (D) □

CÂU 12. Với k là số nguyên dương thì $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x^k}$ bằng

(A) $+\infty$.
(B) $-\infty$.
(C) x.
(D) 0.

Lời giải.

Vì $\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty} 1=1\\ \lim\limits_{x\to-\infty} x^k=\pm\infty\end{cases}$ nên $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x^k}=0$.

Chọn đáp án (D) □

CÂU 13. Tính $I=\lim\limits_{x\to2}\left(x^2+x-6\right)$.

(A) 0.
(B) 1.
(C) 2.
(D) 3.

Lời giải.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to2}\left(x^2+x-6\right)&=\lim_{x\to2}x^2+\lim_{x\to2}x-\lim_{x\to2}6\\&=4+2-6\\&=0.\end{aligned}$$

Chọn đáp án (A) □

CÂU 14. Tính $I=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+2x+3}{2x-1}$.

(A) 4.
(B) 5.
(C) 6.
(D) 7.

Lời giải.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1}\frac{x^2+2x+3}{2x-1}&=\frac{\lim\limits_{x\to1}\left(x^2+2x+3\right)}{\lim\limits_{x\to1}(2x-1)}\\&=\frac{\lim\limits_{x\to1}x^2+\lim\limits_{x\to1}(2x)+\lim\limits_{x\to1}3}{\lim\limits_{x\to1}(2x)-\lim\limits_{x\to1}1}\\&=\frac{1+2+3}{2-1}\\&=6.\end{aligned}$$

Chọn đáp án (C) □

CÂU 15. Tính $I=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{|x|}{x}$.

(A) 1.
(B) -1.
(C) Không tồn tại .
(D) 0.

Lời giải.

Ta có :

$\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{|x|}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} 1 = 1.$

$\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{|x|}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{(-x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-} (-1) = -1.$

Vậy không tồn tại $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{|x|}{x}$.

Chọn đáp án (C) □

Dạng 2. Phương pháp đặt thừa số chung - kết quả hữu hạn

- Nếu tam thức bậc hai ax^2+bx+c có hai nghiệm x_1, x_2 thì $ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$.
- $a^n - b^n = (a-b)\left(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}\right)$.
- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} c = c$; $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{c}{x^k} = 0$ với c là hằng số và $k \in \mathbb{N}$.
- $a\sqrt{b} = \begin{cases} \sqrt{a^2b} & a \ge 0 \\ -\sqrt{a^2b} & a < 0. \end{cases}$

1. Ví dụ mẫu

VÍ DỤ 1 (NB). Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-9}{x-3}$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-9}{x-3} = \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{(x-3)(x+3)}{x-3} = \lim\limits_{x\to 3} (x+3) = 6.$ □

VÍ DỤ 2 (TH). Tính giới hạn $I = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-5x+6}{x-2}$.

Lời giải.

$I = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-5x+6}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{(x-2)(x-3)}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2} (x-3) = -1.$ □

VÍ DỤ 3 (TH). Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^4+7}{x^4+1}$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^4+7}{x^4+1} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^4\left(1+\dfrac{7}{x^4}\right)}{x^4\left(1+\dfrac{1}{x^4}\right)} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1+\dfrac{7}{x^4}}{1+\dfrac{1}{x^4}} = 1.$ □

VÍ DỤ 4 (TH). Tìm giới hạn $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{\dfrac{x^2+1}{2x^4+x^2-3}}$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{\dfrac{x^2+1}{2x^4+x^2-3}} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x}{x^2} \cdot \sqrt{\dfrac{\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^4}}{2+\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{3}{x^4}}} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{x} \cdot \sqrt{\dfrac{\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^4}}{2+\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{3}{x^4}}} = 0.$ □

VÍ DỤ 5 (TH). Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{1-x} - \dfrac{3}{1-x^3}\right)$.

Lời giải.

$\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{1-x} - \dfrac{3}{1-x^3}\right) = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1+x+x^2-3}{1-x^3} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x-1)(x+2)}{(1-x)\left(1+x+x^2\right)} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{-(x+2)}{1+x+x^2} = -1.$ □

VÍ DỤ 6 (VDT). Cho m, n là các số thực khác 0. Nếu giới hạn $\lim\limits_{x\to -5} \dfrac{x^2+mx+n}{x+5} = 3$, hãy tìm mn.

Lời giải.

Vì $\lim\limits_{x\to -5} \dfrac{x^2+mx+n}{x-5} = 3$ nên $x = -5$ là nghiệm của phương trình $x^2+mx+n = 0$.

$\Rightarrow -5m+n+25 = 0 \Leftrightarrow n = 5m-25.$

Khi đó $\lim\limits_{x\to-5}\dfrac{x^2+mx+n}{x-1}=\lim\limits_{x\to-5}\dfrac{x^2+mx+5m-25}{x+5}$
$$=\lim_{x\to-5}\frac{(x+5)(x-5+m)}{x+5}$$
$$=\lim_{x\to-5}(x-5+m)=m-10.$$
Ta có $m-10=3\Leftrightarrow m=13\Rightarrow n=40$.
Vậy $mn=13\cdot 40=520$. □

VÍ DỤ 7 (VDT). Tìm số thực a thỏa mãn $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{a\sqrt{2x^2+3}+2024}{2x+2023}=\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{a\sqrt{2x^2+3}+2024}{2x+2023}=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{a\sqrt{2+\dfrac{3}{x^2}}+\dfrac{2024}{x}}{2+\dfrac{2023}{x}}=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow\dfrac{a\sqrt{2}}{2}=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow a=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. □

2. Câu hỏi trắc nghiệm

CÂU 1. Tìm $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{9-x^2}{x^2-4x+3}$. Kết quả là

(A) -3. (B) 4. (C) -4. (D) 3.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{9-x^2}{x^2-4x+3}=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{(3-x)(3+x)}{(x-3)(x-1)}=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{-(x+3)}{x-1}=-3$.
Chọn đáp án (A) □

CÂU 2. Tìm $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{x^2-16}{x-4}$. Kết quả là

(A) 7. (B) 8. (C) 5. (D) 6.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{x^2-16}{x-4}=\lim\limits_{x\to4}\dfrac{(x-4)(x+4)}{x-4}=\lim\limits_{x\to4}(x+4)=8$.
Chọn đáp án (B) □

CÂU 3. Tính giới hạn $A=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-1}{x-1}$.

(A) $A=-\infty$. (B) $A=0$. (C) $A=3$. (D) $A=+\infty$.

Lời giải.

Ta có $A=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)\left(x^2+x+1\right)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\left(x^2+x+1\right)=3$.
Chọn đáp án (C) □

CÂU 4. Chọn kết quả đúng trong các kết quả sau của $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2+2x+1}{2x+2}$ là

(A) $-\infty$. (B) 0. (C) $\dfrac{1}{2}$. (D) $+\infty$.

Lời giải.

$\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2+2x+1}{2x+2}=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{(x+1)^2}{2(x+1)}=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x+1}{2}=0$.
Chọn đáp án (B) □

CÂU 5. Giới hạn $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{x^2+2x-15}{x-3}$ bằng

(A) $\dfrac{1}{8}$. (B) 9. (C) $+\infty$. (D) 8.

Lời giải.

$\lim\limits_{x\to4}\dfrac{x^2+2x-15}{x-3}=\lim\limits_{x\to4}\dfrac{(x-3)(x+5)}{x-3}=9$.
Chọn đáp án (B) □

CÂU 6. Tính giới hạn $I=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x-2}{2x+1}$.

(A) $I=-2$. (B) $I=-\dfrac{3}{2}$. (C) $I=2$. (D) $I=\dfrac{3}{2}$.

Lời giải.

Ta có $I=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x-2}{2x+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x\left(3-\dfrac{2}{x}\right)}{x\left(2+\dfrac{1}{x}\right)}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3-\dfrac{2}{x}}{2+\dfrac{1}{x}}=\dfrac{3}{2}$.

Chọn đáp án D □

CÂU 7. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-2}{x+3}$ bằng

A $-\dfrac{2}{3}$. **B** 1. **C** 2. **D** -3.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-2}{x+3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\left(1-\dfrac{2}{x}\right)}{x\left(1+\dfrac{3}{x}\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-\dfrac{2}{x}}{1+\dfrac{3}{x}}=\dfrac{1}{1}=1$.

Chọn đáp án B □

CÂU 8. Giới hạn $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-3x+2}{x^3-x^2+x-1}$ bằng

A -2. **B** -1. **C** $-\dfrac{1}{2}$. **D** $\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-3x+2}{x^3-x^2+x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x^2+1)}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-2}{x^2+1}=-\dfrac{1}{2}$.

Chọn đáp án C □

CÂU 9. Giới hạn $T=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^4-3x+2}{x^3+2x-3}$ bằng

A $\dfrac{2}{9}$. **B** $\dfrac{2}{5}$. **C** $\dfrac{1}{5}$. **D** $+\infty$.

Lời giải.

$T=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^4-3x+2}{x^3+2x-3}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)\left(x^3+x^2+x-2\right)}{(x-1)\left(x^2+x+3\right)}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3+x^2+x-2}{x^2+x+3}=\dfrac{1^3+1^2+1-2}{1^2+1+3}=\dfrac{1}{5}$.

Chọn đáp án C □

CÂU 10. Giới hạn $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^3-x^2-x-2}$ bằng

A 0. **B** $-\dfrac{1}{7}$. **C** -7. **D** $+\infty$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^3-x^2-x-2}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{(x-2)(x-3)}{(x-2)\left(x^2+x+1\right)}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x-3}{x^2+x+1}=\dfrac{-1}{7}$.

Chọn đáp án B □

CÂU 11. Tìm $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^4-3x^2+2}{x^3+2x-3}$.

A $-\dfrac{5}{2}$. **B** $-\dfrac{2}{5}$. **C** $\dfrac{1}{5}$. **D** $+\infty$.

Lời giải.

$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^4-3x^2+2}{x^3+2x-3}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)(x+1)\left(x^2-2\right)}{(x-1)\left(x^2+x+3\right)}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x+1)\left(x^2-2\right)}{x^2+x+3}=-\dfrac{2}{5}$.

Chọn đáp án B □

CÂU 12. Tính $\lim\limits_{x\to2}\left(\dfrac{1}{x^2-3x+2}+\dfrac{1}{x^2-5x+6}\right)$.

A 2. **B** $+\infty$. **C** -2. **D** 0.

Lời giải.

$\lim\limits_{x\to2}\left(\dfrac{1}{x^2-3x+2}+\dfrac{1}{x^2-5x+6}\right)=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{2x^2-8x+8}{\left(x^2-3x+2\right)\left(x^2-5x+6\right)}$

$=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{2(x-2)^2}{(x-1)(x-2)(x-2)(x-3)}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{2}{(x-1)(x-3)}=-2$.

Chọn đáp án C □

CÂU 13. Giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+2}-2}{x-2}$ bằng

A $-\infty$. **B** 1. **C** $+\infty$. **D** -1.

Lời giải.

$$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+2}-2}{x-2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{1+\dfrac{2}{x^2}}-2}{x-2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+\dfrac{2}{x^2}}-\dfrac{2}{x}}{1-\dfrac{2}{x}}=1.$$

Chọn đáp án (B) □

CÂU 14. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{(4x+1)^3(2x+1)^4}{(3+2x)^7}$. Tính $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$.

(A) 2. (B) 8. (C) 4. (D) 0.

Lời giải.

$$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{(4x+1)^3(2x+1)^4}{(3+2x)^7}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\left(4+\dfrac{1}{x}\right)^3\left(2+\dfrac{1}{x}\right)^4}{\left(\dfrac{3}{x}+2\right)^7}=2^3=8.$$

Chọn đáp án (B) □

CÂU 15. Biết $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2+bx+c}{x-3}=8$, $(b,c\in\mathbb{R})$. Tính $P=b+c$.

(A) $P=-13$. (B) $P=-11$. (C) $P=5$. (D) $P=-12$.

Lời giải.

Vì $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2+bx+c}{x-3}=8$ là hữu hạn nên tam thức x^2+bx+c có nghiệm $x=3$.
$\Rightarrow 3b+c+9=0\Leftrightarrow c=-9-3b$.
Khi đó $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2+bx+c}{x-3}=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2+bx-9-3b}{x-3}=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{(x-3)(x+3+b)}{x-3}$
$=\lim\limits_{x\to3}(x+3+b)=8\Leftrightarrow 6+b=8\Leftrightarrow b=2\Rightarrow c=-15.$
Vậy $P=b+c=-13$.
Chọn đáp án (A) □

CÂU 16. Cho a,b là số nguyên và $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{ax^2+bx-5}{x-1}=7$. Tính a^2+b^2+a+b.

(A) 18. (B) 1. (C) 15. (D) 5.

Lời giải.

Vì $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{ax^2+bx-5}{x-1}=7$ hữu hạn nên $x=1$ phải là nghiệm của phương trình $ax^2+bx-5=0$ suy ra $a+b-5=0\Rightarrow b=5-a$.
Khi đó $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{ax^2+(5-a)x-5}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)(ax+5)}{x-1}=a+5=7\Rightarrow a=2$ nên $b=3$.
Suy ra $a^2+b^2+a+b=18$.
Chọn đáp án (A) □

CÂU 17. Biết rằng $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x-2}+ax-b\right)=-5$. Tính tổng $a+b$.

(A) 6. (B) 7. (C) 8. (D) 5.

Lời giải.

$$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+1}{x-2}+ax-b\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{(a+1)x^2-(2a+b)x+2b+1}{x-2}\right)=-5$$

$\Leftrightarrow\begin{cases}a+1=0\\2a+b=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-1\\b=7.\end{cases}$
Vậy $a+b=6$.
Chọn đáp án (A) □

CÂU 18. Cho hai số thực a và b thỏa mãn $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{4x^2-3x+1}{x+2}-ax-b\right)=0$. Khi đó $a+b$ bằng

(A) -4. (B) 4. (C) 7. (D) -7.

Lời giải.

$$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{4x^2-3x+1}{x+2}-ax-b\right)=0\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\left((4-a)x-b-11+\frac{23}{x+2}\right)=0.$$

$\Rightarrow\begin{cases}4-a=0\\-11-b=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=4\\b=-11\end{cases}\Rightarrow a+b=-7.$

Chọn đáp án (D) □

CÂU 19. Cho $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)+1}{x-1}=-1$. Tính $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\left(x^2+x\right)f(x)+2}{x-1}$.

Ⓐ $I=5$. Ⓑ $I=-4$. Ⓒ $I=4$. Ⓓ $I=-5$.

Lời giải.

$$\lim_{x\to1}\frac{\left(x^2+x\right)f(x)+2}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{\left(x^2+x\right)\left(f(x)+1\right)-x^2-x+2}{x-1}=\lim_{x\to1}\left(\frac{\left(x^2+x\right)\left(f(x)+1\right)}{x-1}-x-2\right)=-5.$$

Chọn đáp án D □

CÂU 20. Gọi A là giới hạn của hàm số $f(x)=\dfrac{x+x^2+x^3+\cdots+x^{50}-50}{x-1}$ khi x tiến đến 1. Tính giá trị của A.

Ⓐ A không tồn tại. Ⓑ $A=1725$. Ⓒ $A=1527$. Ⓓ $A=1275$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1}f(x)&=\lim_{x\to1}\frac{x+x^2+x^3+\cdots+x^{50}-50}{x-1}\\&=\lim_{x\to1}\left[1+(x+1)+\left(x^2+x+1\right)+\cdots+\left(x^{49}+x^{48}+\cdots+1\right)\right]\\&=1+2+3+\cdots+50=25(1+50)=1275.\end{aligned}$$

Vậy $A=\lim\limits_{x\to1}f(x)=1275$.

Chọn đáp án D □

Dạng 3. Phương pháp đặt thừa số chung - kết quả vô cực

Để tìm giới hạn của hàm số ta cần nhớ

- $\lim\limits_{x\to+\infty}x^k=+\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty}x^k=\begin{cases}+\infty,k=2n\\-\infty,k=2n+1.\end{cases}$
- $\lim\limits_{x\to\pm\infty}c=c$; $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{c}{x^k}=0$; $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x}=\infty$.

1. Ví dụ mẫu

VÍ DỤ 1 (NB). Tính $\lim\limits_{x\to+\infty}x^3$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}x^3=+\infty$. □

VÍ DỤ 2 (TH). Tính $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^3+3x+1\right)$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^3+3x+1\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[x^3\left(1+\dfrac{3}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}\right)\right]=-\infty$.

Vì $\lim\limits_{x\to-\infty}x^3=-\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\dfrac{3}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}\right)=1>0$. □

VÍ DỤ 3 (TH). Tính $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-4x^5-3x^3+x+1\right)$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-4x^5-3x^3+x+1\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}x^5\left(-4-\dfrac{3}{x^2}+\dfrac{1}{x^4}+\dfrac{1}{x^5}\right)=+\infty$.

Vì $\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-4-\dfrac{3}{x^2}+\dfrac{1}{x^4}+\dfrac{1}{x^5}\right)=-4<0\\\lim\limits_{x\to-\infty}x^5=-\infty.\end{cases}$ □

VÍ DỤ 4 (TH). Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{x+2}{(x+3)^2}$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{x+2}{(x+3)^2}=-\infty$.

Vì $\lim\limits_{x\to-3}(x+2)=-3+2=-1<0$, $\lim\limits_{x\to-3}(x+3)^2=0$ và $(x+3)^2>0$ khi $x\neq-3$. □

VÍ DỤ 5 (VDT). Tìm tất cả các giá trị nguyên của tham số m để $I=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[(m^2-1)x^3+2x\right]=-\infty$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(m^2-1\right)x^3+2x\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}x^3\left[m^2-1+\dfrac{2}{x^2}\right]$.

Vì $\lim\limits_{x\to+\infty}x^3=+\infty$ nên $I=-\infty\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\left[m^2-1+\dfrac{2}{x^2}\right]<0\Leftrightarrow m^2-1<0\Leftrightarrow -1<m<1$.

Do $m\in\mathbb{Z}$ nên $m=0$. □

2. Câu hỏi trắc nghiệm

CÂU 1. Giá trị của $\lim\limits_{x\to-\infty}(-x^3)$ bằng

(A) $+\infty$. (B) $-\infty$. (C) 1. (D) -1.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty}(-x^3)=+\infty$.

Chọn đáp án (A) □

CÂU 2. Giới hạn $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(3x^3+5x^2-9\sqrt{3}x-2022\right)$ bằng

(A) $-\infty$. (B) 3. (C) -3. (D) $+\infty$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(3x^3+5x^2-9\sqrt{3}x-2022\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}x^3\left(3+5\cdot\dfrac{1}{x}-9\sqrt{3}\cdot\dfrac{1}{x^2}-2022\cdot\dfrac{1}{x^3}\right)=-\infty$.

Chọn đáp án (A) □

CÂU 3. Tính $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^3+3x-3)$.

(A) 2. (B) 1. (C) $-\infty$. (D) $+\infty$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^3+3x-3\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[x^3\left(1+\dfrac{3}{x^2}-\dfrac{3}{x^3}\right)\right]=-\infty$.

Vì $\lim\limits_{x\to-\infty}x^3=-\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\dfrac{3}{x^2}-\dfrac{3}{x^3}\right)=1>0$.

Chọn đáp án (C) □

CÂU 4. Với k là số nguyên dương chẵn. Kết quả của $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-3x^k\right)$ là

(A) 0. (B) $-\infty$. (C) $-3x_0^k$. (D) $+\infty$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty}x^k=+\infty$ khi k là số nguyên dương chẵn.

Suy ra $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-3x^k\right)=-\infty$.

Chọn đáp án (B) □

CÂU 5. Cho hai hàm số $f(x)$, $g(x)$ thỏa mãn $\lim\limits_{x\to1}f(x)=2$ và $\lim\limits_{x\to1}g(x)=+\infty$. Giá trị của $\lim\limits_{x\to1}[f(x)\cdot g(x)]$ bằng

(A) $+\infty$. (B) $-\infty$. (C) 2. (D) -2.

Lời giải.

Theo quy tắc giới hạn vô cực ta có $\lim\limits_{x\to1}f(x)=2>0$ và $\lim\limits_{x\to1}g(x)=+\infty$ thì $\lim\limits_{x\to1}[f(x)\cdot g(x)]=+\infty$.

Chọn đáp án (A) □

CÂU 6. Giới hạn $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x+1}{(x+2)^2}$ bằng

(A) $-\infty$. (B) $\dfrac{3}{16}$. (C) 0. (D) $+\infty$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x+1}{(x+2)^2}=-\infty$.

Vì $\lim\limits_{x\to-2}(x+1)=-2+1=-1<0$, $\lim\limits_{x\to-2}(x+2)^2=0$ và $(x+2)^2>0$ khi $x\neq-2$.

Chọn đáp án (A) □

CÂU 7. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-3x^3+2x\right)$ bằng

(A) $-\infty$. (B) $+\infty$. (C) 1. (D) -1.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-3x^3+2x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty} x^3\left(-3+\dfrac{2}{x^2}\right)=+\infty$.

Vì $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3=-\infty$ và $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-3+\dfrac{2}{x^2}\right)=-3<0$.

Chọn đáp án (B) □

CÂU 8. Tìm $L=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{2x^2+x-3}{(x+1)^2}$.

(A) $L=+\infty$.

(B) $L=2$.

(C) Không tồn tại $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{2x^2+x-3}{(x+1)^2}$.

(D) $L=-\infty$.

Lời giải.

$$\lim_{x\to-1}\frac{2x^2+x-3}{(x+1)^2}=-\infty \text{ vì } \begin{cases}\lim\limits_{x\to-1}(2x^2+x-3)=-2\\ \lim\limits_{x\to-1}(x+1)^2=0\\ x\to-1\Rightarrow(x+1)^2>0.\end{cases}$$

Chọn đáp án (D) □

CÂU 9. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-2x^3-2x\right)$ bằng

(A) $-\infty$.

(B) $+\infty$.

(C) 2.

(D) -2.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-2x^3-2x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty} x^3\left(-2-\dfrac{2}{x^2}\right)$.

Mà $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3=+\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty}(-2-\dfrac{2}{x^2})=-2<0$ nên $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3\left(-2-\dfrac{2}{x^2}\right)=-\infty$.

Vậy $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-2x^3-2x\right)=-\infty$.

Chọn đáp án (A) □

CÂU 10. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2+1}{x-2}$.

(A) 1.

(B) $-\dfrac{1}{2}$.

(C) $+\infty$.

(D) $-\infty$.

Lời giải.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+1}{x-2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x}\cdot\frac{1+\dfrac{1}{x^2}}{1-\dfrac{2}{x}}=\lim_{x\to-\infty} x\cdot\frac{1+\dfrac{1}{x^2}}{1-\dfrac{2}{x}}.$$

Do $\lim\limits_{x\to-\infty} x=-\infty$ và $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1+\dfrac{1}{x^2}}{1-\dfrac{2}{x}}=1$ nên $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2+1}{x-2}=-\infty$.

Chọn đáp án (D) □

CÂU 11. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

(A) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^4-x}}{1-2x}=+\infty$.

(B) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^4-x}}{1-2x}=1$.

(C) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^4-x}}{1-2x}=-\infty$.

(D) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^4-x}}{1-2x}=0$.

Lời giải.

$$\text{Vì } \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^4-x}}{1-2x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2\cdot\sqrt{1-\dfrac{1}{x^3}}}{x\cdot\left(\dfrac{1}{x}-2\right)}=\lim_{x\to-\infty} x\cdot\frac{\sqrt{1-\dfrac{1}{x^3}}}{\dfrac{1}{x}-2}=+\infty.$$

Chọn đáp án (A) □

CÂU 12. Biết $\lim\limits_{x\to-2} f(x)=-1$. Khi đó $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{f(x)}{(x+2)^4}$ bằng

(A) -1.

(B) $+\infty$.

(C) $-\infty$.

(D) 0.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to-2} f(x)=-1<0$; $\lim\limits_{x\to-2}(x+2)^4=0$ và $\forall x\neq-2$ thì $(x+2)^4>0$.

Suy ra $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{f(x)}{(x+2)^4}=-\infty$.

Chọn đáp án (C) □

CÂU 13. Biết $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = -2$. Khi đó $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f(x)}{(x-1)^2}$ bằng

(A) $-\infty$. (B) 0. (C) $+\infty$. (D) -2.

Lời giải.

Có $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = -2 < 0$, $\lim\limits_{x\to 1} (x-1)^2 = 0$ và $(x-1)^2 > 0$, $\forall x \neq 1$ nên $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f(x)}{(x-1)^2} = -\infty$.

Chọn đáp án (A) □

CÂU 14. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc $[-5;5]$ để $L = \lim\limits_{x\to+\infty} \left[x - 2(m^2-4)x^3\right] = -\infty$?

(A) 5. (B) 10. (C) 3. (D) 6.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} \left[x - 2\left(m^2-4\right)x^3\right] = \lim\limits_{x\to+\infty} x^3\left[\dfrac{1}{x^2} - 2\left(m^2-4\right)\right]$.

Ta có

$$\lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty \Rightarrow L = -\infty \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{x^2} - 2\left(m^2-4\right)\right] < 0$$

$$\Leftrightarrow \quad -2(m^2-4) < 0 \Leftrightarrow m^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > 2 \\ m < -2. \end{array}\right.$$

Lại có m thuộc đoạn $[-5;5]$ nên các giá trị nguyên thỏa mãn bài toán của m là $\{-5;-4;-3;3;4;5\}$.
Vậy có 6 số nguyên thỏa mãn bài toán.

Chọn đáp án (D) □

CÂU 15. Có bao nhiêu giá trị m nguyên thuộc đoạn $[-20;20]$ để $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\sqrt{4x^2-3x+2} + mx - 1\right) = -\infty$?

(A) 21. (B) 22. (C) 18. (D) 41.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\sqrt{4x^2-3x+2} + mx - 1\right) = \lim\limits_{x\to-\infty} x\left(-\sqrt{4 - \dfrac{3}{x} + \dfrac{2}{x^2}} + m - \dfrac{1}{x}\right)$.

Có $\lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$ và $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\sqrt{4 - \dfrac{3}{x} + \dfrac{2}{x^2}} + m - \dfrac{1}{x}\right) = m - 2$

Để $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\sqrt{4x^2-3x+2} + mx - 1\right) = -\infty$ suy ra $m - 2 > 0 \Leftrightarrow m > 2$.

Với $m \in \mathbb{Z}$ và $m \in [-20;20]$ có $m \in \{3;4;5;\ldots;20\}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.
Kết luận: Vậy có 18 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án (C) □

Dạng 4. Phương pháp lượng liên hợp kết quả hữu hạn

Nội dung và phương pháp giải

1. Ví dụ mẫu

VÍ DỤ 1. Cho $P = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}$. Tính P.

(A) $P = \dfrac{1}{4}$. (B) $P = \dfrac{1}{2}$. (C) $P = 1$. (D) $P = 0$.

Lời giải.

Ta có: $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x+2}-2}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x-2}{(x-2)\left(\sqrt{x+2}+2\right)} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{1}{\sqrt{x+2}+2} = \dfrac{1}{4}$.

Vậy $P = \dfrac{1}{4}$.

Chọn đáp án (A) □

VÍ DỤ 2. Cho m là hằng số. Tính $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x^2+mx-x-m}$.

(A) $\dfrac{1}{m}$. (B) 1. (C) $\dfrac{1}{4}$. (D) $\dfrac{1}{4(m+1)}$.

Lời giải.

$\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x^2+mx-x-m} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{(x-1)(x+m)\left(\sqrt{x+3}+2\right)} = \dfrac{1}{4(m+1)}$.

Chọn đáp án (D) □

VÍ DỤ 3. Biết $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+1}+x+1\right)=a$. Tính $2a+1$.

(A) -1. (B) -3. (C) 0. (D) 3.

Lời giải.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+1}+x+1\right) &= \lim_{x\to-\infty}\frac{-2x}{\sqrt{x^2+1}-(x+1)}\\ &= \lim_{x\to-\infty}\frac{-2}{-\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}-\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}\\ &= 1\\ \Rightarrow &\quad a=1.\end{aligned}$$

Vậy $2a+1=3$.
Chọn đáp án (D) □

VÍ DỤ 4. Biết $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2-3x+1}-(ax+b)\right)=0$. Tính giá trị biểu thức $T=a-4b$.

(A) $T=-2$. (B) $T=5$. (C) $T=-1$. (D) $T=3$.

Lời giải.

Từ giả thiết, đường thẳng $y=ax+b$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y=\sqrt{4x^2-3x+1}$, khi $x\to+\infty$. Từ đó,

$$\begin{aligned}a &= \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{4x^2-3x+1}}{x}=2,\\ b &= \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2-3x+1}-2x\right)\\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{-3x+1}{\sqrt{4x^2-3x+1}+2x}\\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{-3+\frac{1}{x}}{\sqrt{4-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}+2}=-\frac{3}{4}.\end{aligned}$$

Suy ra $a-4b=5$.
Chọn đáp án (B) □

VÍ DỤ 5. Cho $f(x)$ là hàm đa thức thỏa $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{f(x)+1}{x-2}=a$ và tồn tại $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{f(x)+2x+1}-x}{x^2-4}=T$. Chọn đẳng thức đúng

(A) $T=\dfrac{a+2}{16}$. (B) $T=\dfrac{a+2}{8}$. (C) $T=\dfrac{a-2}{8}$. (D) $T=\dfrac{a-2}{16}$.

Lời giải.

Vì $f(x)$ là đa thức và $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{f(x)+1}{x-2}=a$ nên suy ra $f(x)+1=(x-2)g(x), g(2)=a$.

Do đó

$$\begin{aligned}T &= \lim_{x\to2}\frac{\sqrt{(x-2)g(x)+2x}-x}{x^2-4}\\ &= \lim_{x\to2}\frac{(x-2)g(x)+2x-x^2}{(x-2)(x+2)\left[\sqrt{(x-2)g(x)+2x}+x\right]}\\ &= \lim_{x\to2}\frac{g(x)-x}{(x+2)\left[\sqrt{(x-2)g(x)+2x}+x\right]}\\ &= \frac{a-2}{16}.\end{aligned}$$

Chọn đáp án (D) □

2. Câu hỏi trắc nghiệm

CÂU 1. Biết $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+ax-1}-x\right)=5$. Khi đó giá trị của tham số a là

(A) 10. (B) -6. (C) 6. (D) -10.

Lời giải.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+ax-1}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+ax-1-x^2}{\sqrt{x^2+ax-1}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{a-\dfrac{1}{x}}{\sqrt{1+\dfrac{a}{x}-\dfrac{1}{x^2}}+1}=\frac{a}{2}=5.$$

Suy ra $a=10$.
Chọn đáp án (A) □

CÂU 2. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+m^2x}-x)=\dfrac{1}{2}$?

Ⓐ 0. Ⓑ 1. Ⓒ 2. Ⓓ 4.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+m^2x}-x\right)&=\lim_{x\to+\infty}\frac{m^2x}{\sqrt{x^2+m^2x}+x}\\&=\lim_{x\to+\infty}\frac{m^2}{\sqrt{1+\frac{m^2}{x}}+1}\\&=\frac{m^2}{2}.\end{aligned}$$

Do đó $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+m^2x}-x)=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow\dfrac{m^2}{2}=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow m=\pm1$. Vậy có hai giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn yêu cầu của bài toán.

Chọn đáp án Ⓒ □

CÂU 3. Tính $L=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-7x+1}-\sqrt{x^2-3x+2}\right)$.

Ⓐ $L=+\infty$. Ⓑ $L=-\infty$. Ⓒ $L=2$. Ⓓ $L=-2$.

Lời giải.

$$\begin{aligned}L&=\lim_{x\to-\infty}\frac{-4x-1}{\sqrt{x^2-7x+1}+\sqrt{x^2-3x+2}}\\&=\lim_{x\to-\infty}\frac{-4x-1}{-x\sqrt{1-\frac{7}{x}+\frac{1}{x^2}}-x\sqrt{1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}}\\&=\lim_{x\to-\infty}\frac{-4-\frac{1}{x}}{-\sqrt{1-\frac{7}{x}+\frac{1}{x^2}}-\sqrt{1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}}\\&=2.\end{aligned}$$

Chọn đáp án Ⓒ □

CÂU 4. Giá trị của $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+2}}{x-1}$ là

Ⓐ $-\dfrac{\sqrt{3}}{5}$. Ⓑ $-\dfrac{\sqrt{3}}{6}$. Ⓒ $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$. Ⓓ $\dfrac{\sqrt{3}}{5}$.

Lời giải.

Ta có

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+2}}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{(x-1)\left(\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+2}\right)}=\lim_{x\to1}\frac{1}{\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+2}}=\frac{1}{2\sqrt{3}}.$$

Chọn đáp án Ⓒ □

CÂU 5. Cho $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\sqrt[3]{1-x}}{x}=\dfrac{m}{n}$, trong đó m,n là các số nguyên và $\dfrac{m}{n}$ tối giản.

Tính $A=2m-n$.

Ⓐ $A=1$. Ⓑ $A=-1$. Ⓒ $A=0$. Ⓓ $A=-2$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\sqrt[3]{1-x}}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{x\cdot\left(1+\sqrt[3]{1-x}+\sqrt[3]{(1-x)^2}\right)}=\dfrac{1}{3}$.

Vậy $A=2m-n=2\cdot1-3=-1$.

Chọn đáp án Ⓑ □

CÂU 6. Giới hạn $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x+1-\sqrt{5x+1}}{x-\sqrt{4x-3}}=\dfrac{a}{b}$, với $a,b\in\mathbb{Z},b>0$ và $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản. Giá trị của $a-b$ là

Ⓐ $\dfrac{1}{9}$. Ⓑ -1. Ⓒ $\dfrac{9}{8}$. Ⓓ 1.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 3}\frac{x+1-\sqrt{5x+1}}{x-\sqrt{4x-3}} &= \lim_{x\to 3}\frac{\dfrac{(x+1)^2-(5x+1)}{x+1+\sqrt{5x+1}}}{\dfrac{x^2-(4x-3)}{x+\sqrt{4x-3}}}\\
&= \lim_{x\to 3}\frac{\left(x+\sqrt{4x-3}\right)(x-3)x}{\left(x+1+\sqrt{5x+1}\right)(x-3)(x-1)}\\
&= \lim_{x\to 3}\frac{x\left(x+\sqrt{4x-3}\right)}{\left(x+1+\sqrt{5x+1}\right)(x-1)}=\frac{9}{8}.
\end{aligned}$$

Vậy $a=9, b=8$, suy ra $a-b=1$.

Chọn đáp án (D) □

CÂU 7. Cho $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{3x+4}-4}{x-4}=\dfrac{a}{b}$, với $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $2a+b^2$.

(A) 22. (B) 66. (C) 14. (D) 70.

Lời giải.

Có $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{3x+4}-4}{x-4}=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{3(x-4)}{(x-4)\left(\sqrt{3x+4}+4\right)}=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{3}{\sqrt{3x+4}+4}=\dfrac{3}{8}$.

$\Rightarrow 2a+b^2=6+64=70$.

Chọn đáp án (D) □

CÂU 8. Tính $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3x+2}-x\right)$.

(A) $-\dfrac{3}{2}$. (B) $\dfrac{3}{2}$. (C) $\dfrac{7}{2}$. (D) $-\dfrac{7}{2}$.

Lời giải.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3x+2}-x\right) &= \lim_{x\to+\infty}\frac{3x+2}{\sqrt{x^2+3x+2}+x}\\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(3+\dfrac{2}{x}\right)}{|x|\sqrt{1+\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{x^2}}+x}\\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(3+\dfrac{2}{x}\right)}{x\left(\sqrt{1+\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{x^2}}+1\right)}\\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{3+\dfrac{2}{x}}{\sqrt{1+\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{x^2}}+1}=\frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

Chọn đáp án (B) □

CÂU 9. Tìm giới hạn $M=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-4x}-\sqrt{x^2-x}\right)$.

(A) $M=-\dfrac{1}{2}$. (B) $M=\dfrac{3}{2}$. (C) $M=-\dfrac{3}{2}$. (D) $M=\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}
M &= \lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-4x}-\sqrt{x^2-x}\right)\\
&= \lim_{x\to-\infty}\frac{-3x}{\sqrt{x^2-4x}+\sqrt{x^2-x}}\\
&= \lim_{x\to-\infty}\frac{-3x}{|x|\left(\sqrt{1-\dfrac{4}{x}}+\sqrt{1-\dfrac{1}{x}}\right)}\\
&= \lim_{x\to-\infty}\frac{3}{\sqrt{1-\dfrac{4}{x}}+\sqrt{1-\dfrac{1}{x}}}=\frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

Chọn đáp án (B) □

CÂU 10. Biết rằng $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{2x^2-3x+1}+x\sqrt{2}\right)=\dfrac{a}{b}\sqrt{2}$, $\left(a,b\in\mathbb{Z},b>0,\dfrac{a}{b}\text{ tối giản}\right)$. Tổng $a+b$ có giá trị là

A 5. B 4. C 7. D 1.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{2x^2-3x+1}+x\sqrt{2}\right)&=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2-3x+1-2x^2}{\sqrt{2x^2-3x+1}-x\sqrt{2}}\\&=\lim_{x\to-\infty}\frac{-3x+1}{\sqrt{2x^2-3x+1}-x\sqrt{2}}\\&=\lim_{x\to-\infty}\frac{-3+\dfrac{1}{x}}{-\sqrt{2-\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{x^2}}-\sqrt{2}}\\&=\frac{3}{4}\cdot\sqrt{2}.\end{aligned}$$

Vậy $a=3,b=4$. Tổng $a+b=7$.

Chọn đáp án C □

CÂU 11. Tìm giới hạn $I=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+1-\sqrt{x^2-x+2}\right)$.

A $I=\dfrac{1}{2}$. B $I=\dfrac{46}{31}$. C $I=\dfrac{17}{11}$. D $I=\dfrac{3}{2}$.

Lời giải.

Ta có: $I=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+1-\sqrt{x^2-x+2}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2-x^2+x-2}{x+\sqrt{x^2-x+2}}+1\right)$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x-2}{x+\sqrt{x^2-x+2}}+1\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1-\dfrac{2}{x}}{1+\sqrt{1-\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x^2}}}+1\right)=\dfrac{3}{2}$.

Chọn đáp án D □

CÂU 12. Cho $f(x)$ là một đa thức thỏa mãn $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{f(x)-15}{x-2}=3$. Tính

$$\lim_{x\to2}\frac{f(x)-15}{(x^2-4)\left(\sqrt{2f(x)+6}+3\right)}.$$

A $\dfrac{1}{10}$. B $\dfrac{1}{6}$. C $\dfrac{1}{12}$. D $\dfrac{1}{8}$.

Lời giải.

Do $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{f(x)-15}{x-2}=3$ và $\lim\limits_{x\to2}(x-2)=0$ nên $\lim\limits_{x\to2}(f(x)-15)=0\Rightarrow f(2)=15$.

Ta có

$$\begin{aligned}\lim_{x\to2}\frac{f(x)-15}{(x^2-4)\left(\sqrt{2f(x)+6}+3\right)}&=\lim_{x\to2}\left[\frac{f(x)-15}{x-2}\cdot\frac{1}{(x+2)\left(\sqrt{2f(x)+6}+3\right)}\right]\\&=3\cdot\frac{1}{4\cdot(\sqrt{2\cdot15+6}+3)}=\frac{1}{12}.\end{aligned}$$

Chọn đáp án C □

CÂU 13. Biết rằng $b>0$, $a+b=5$ và $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[3]{ax+1}-\sqrt{1-bx}}{x}=2$. Khẳng định nào dưới đây là **sai**?

A $a^2+b^2>10$. B $a^2-b^2>6$. C $a-b\geq0$. D $1\leq a\leq3$.

Lời giải.

Ta có

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{ax+1}-\sqrt{1-bx}}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{ax+1}-1}{x}-\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1-bx}-1}{x}.$$

Với $L_1=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[3]{ax+1}-1}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{ax}{x\left(\sqrt[3]{(ax+1)^2}+\sqrt[3]{ax+1}+1\right)}=\dfrac{a}{3}$.

Với $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1-bx}-1}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-bx}{x\left(\sqrt{1-bx}+1\right)}=-\dfrac{b}{2}$.

Từ giả thiết bài toán ta có

$$L = L_1 - L_2 = 2 \Leftrightarrow \frac{a}{3} + \frac{b}{2} = 2 \Leftrightarrow 2a + 3b = 12.$$

Ta có hệ phương trình $\begin{cases} a + b = 5 \\ 2a + 3b = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 2. \end{cases}$

Kiểm tra trực tiếp từng đáp án ta thấy $a^2 - b^2 > 6$ là sai.

Chọn đáp án (B) □

Dạng 5. Toán thực tế, liên môn về hàm số liên tục

1. Ví dụ mẫu

VÍ DỤ 1. Tính $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 + 3x\sqrt{x}} - x + 1\right)$.

(A) $+\infty$. (B) 4. (C) $-\infty$. (D) $\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Có: $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 + 3x\sqrt{x}} - x + 1\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x^2 + 3x\sqrt{x} - x^2}{\sqrt{x^2 + 3x\sqrt{x}} + x} + 1\right)$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{3x\sqrt{x}}{\sqrt{x^2 + 3x\sqrt{x}} + x} + 1\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x}\dfrac{3}{\sqrt{1 + 3\sqrt{x}} + 1} + 1\right) = +\infty.$

Chọn đáp án (A) □

VÍ DỤ 2. Giới hạn hàm số $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^2 - x\sqrt{|x|} + 3} + x\right)$ bằng

(A) 0. (B) $\dfrac{1}{2}$. (C) $+\infty$. (D) $-\infty$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^2 - x\sqrt{|x|} + 3} + x\right) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\left(\sqrt{x^2 - x\sqrt{|x|} + 3} + x\right)\left(\sqrt{x^2 - x\sqrt{|x|} + 3} - x\right)}{\sqrt{x^2 - x\sqrt{|x|} + 3} - x}$

$= \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-x\sqrt{|x|} + 3}{\sqrt{x^2 - x\sqrt{|x|} + 3} - x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{|x|}\dfrac{-1 + \dfrac{3}{x\sqrt{|x|}}}{-\sqrt{1 - \sqrt{|x|} + \dfrac{3}{x^2}} - 1} = +\infty.$

Chọn đáp án (C) □

VÍ DỤ 3. Tìm giới hạn $I = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^4 + 4x^3 + 1} - x^2\right)$

(A) $I = -4$. (B) $I = 1$. (C) $I = -2$. (D) $I = -1$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} I &= \lim_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^4 + 4x^3 + 1} - x^2\right) = \lim_{x \to -\infty} \frac{\left(\sqrt{x^4 + 4x^3 + 1} + x^2\right)\left(\sqrt{x^4 + 4x^3 + 1} - x^2\right)}{\sqrt{x^4 + 4x^3 + 1} + x^2} \\ &= \lim_{x \to -\infty} \frac{4x^3 + 1}{\sqrt{x^4 + 4x^3 + 1} + x^2} = \lim_{x \to -\infty} \frac{4x^3 + 1}{\sqrt{x^4 + 4x^3 + 1} + x^2} \\ &= \lim_{x \to -\infty} x\frac{4 + \dfrac{1}{x^3}}{\sqrt{1 + \dfrac{4}{x} + \dfrac{1}{x^4}} + 1} = -\infty. \end{aligned}$$

Chọn đáp án (C) □

VÍ DỤ 4. Tính $L = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^2 - 7x\sqrt{|x|} + 1} - \sqrt{x^2 - 3x\sqrt{|x|} + 2}\right)$.

(A) $L = +\infty$. (B) $L = -\infty$. (C) $L = 2$. (D) $L = -2$.

Lời giải.

$$\begin{aligned}
L &= \lim_{x\to-\infty} \frac{-4x\sqrt{|x|}-1}{\sqrt{x^2-7x\sqrt{|x|}+1}+\sqrt{x^2-3x\sqrt{|x|}+2}}\\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{-4x\sqrt{|x|}-1}{-x\sqrt{1-\frac{7}{\sqrt{|x|}}+\frac{1}{x^2}}-x\sqrt{1-\frac{3}{\sqrt{|x|}}+\frac{2}{x^2}}}\\
&= \lim_{x\to-\infty} \sqrt{|x|}\frac{-4-\frac{1}{x\sqrt{|x|}}}{-\sqrt{1-\frac{7}{\sqrt{|x|}}+\frac{1}{x^2}}-\sqrt{1-\frac{3}{\sqrt{|x|}}+\frac{2}{x^2}}}\\
&= +\infty.
\end{aligned}$$

Chọn đáp án C □

VÍ DỤ 5. Tìm tham số m để $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^3+mx^2}-x\sqrt{x})=-\infty$.

A $m=0$. **B** $m>0$. **C** $m<0$. **D** $m=2$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^3+mx^2}-x\sqrt{x}\right) &= \lim_{x\to+\infty}\frac{mx^2}{\sqrt{x^3+mx^2}+x\sqrt{x}}\\
&= \lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}\frac{m}{\sqrt{1+\frac{m}{x}}+1}.
\end{aligned}$$

Do đó $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^3+mx^2}-x\sqrt{x})=-\infty \Leftrightarrow m<0$.

Chọn đáp án C □

2. Câu hỏi trắc nghiệm

CÂU 1. Tính $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3x\sqrt{x}}-x\right)$.

A $+\infty$. **B** 4. **C** $-\infty$. **D** $\frac{1}{2}$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3x\sqrt{x}}-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+3x\sqrt{x}-x^2}{\sqrt{x^2+3x\sqrt{x}}+x}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x\sqrt{x}}{\sqrt{x^2+3x\sqrt{x}}+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}\dfrac{3}{\sqrt{1+\frac{3}{x}}+1}=+\infty$.

Chọn đáp án A □

CÂU 2. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2+3x+1}+mx\right)=+\infty$ nếu

A $m<2$. **B** $m>2$. **C** $m\ge 2$. **D** $m\le 2$.

Lời giải.

Ta có

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2+3x+1}+mx\right)=\lim_{x\to-\infty}\left[x\cdot\left(-\sqrt{4+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}+m\right)\right].$$

Do $\lim\limits_{x\to-\infty}x=-\infty$ và $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\sqrt{4+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}+m\right)=-2+m$ nên để $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2+3x+1}+mx\right)=+\infty$ thì $-2+m<0\Leftrightarrow m<2$.

Chọn đáp án A □

CÂU 3. Biết $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(2-a)x-3}{x-\sqrt{x^2+1}}=+\infty$ (với a là tham số). Giá trị nhỏ nhất của $P=a^2-2a+4$ là

A 3. **B** 4. **C** 5. **D** 1.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(2-a)x-3}{x-\sqrt{x^2+1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{((2-a)x-3)\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}{x^2-x^2-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}((a-2)x+3)\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$

- Với $a = 2$,
$$\lim_{x\to+\infty}((a-2)x+3)\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) = \lim_{x\to+\infty} 3(x+\sqrt{x^2+1}) = +\infty.$$

- Với $a > 2$ suy ra $a - 2 > 0$, nên
$$\lim_{x\to+\infty}((a-2)x+3)\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) = \lim_{x\to+\infty} x\left((a-2)+\frac{3}{x}\right)\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right) = +\infty.$$

- Với $a < 2$ suy ra $a - 2 < 0$, nên
$$\lim_{x\to+\infty}((a-2)x+3)\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) = \lim_{x\to+\infty} x\left((a-2)+\frac{3}{x}\right)\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right) = -\infty.$$

Vậy $a \geq 2$ thì $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(2-a)x-3}{x-\sqrt{x^2+1}} = +\infty$. Xét hàm số $f(a) = a^2 - 2a + 4$ với $a \geq 2$. Ta có bảng biến thiên sau

a	2	$+\infty$
$f(a)$	4 ↗	$+\infty$

Suy ra $\min P = 4$.
Chọn đáp án (B) □

CÂU 4. Tìm số các số nguyên m thỏa mãn $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3\sqrt{mx^2+2x+1}-mx\right) = +\infty$.

(A) 4. (B) 10. (C) 3. (D) 9.

Lời giải.

- Với $m = 0$ thì $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3\sqrt{2x+1}\right) = +\infty$ (thỏa yêu cầu bài toán).

- Với $m \neq 0$ ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3\sqrt{mx^2+2x+1}-mx\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} x\left(3\sqrt{m+\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}}-m\right) = +\infty$.

  Suy ra $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3\sqrt{m+\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}}-m\right) = 3\sqrt{m}-m > 0$, $(m > 0)$.

  Ta có $3\sqrt{m}-m > 0 \Leftrightarrow 3\sqrt{m} > m \Leftrightarrow m^2 - 9m < 0 \Leftrightarrow 0 < m < 9$. Do đó $m \in \{1; 2; \ldots; 8\}$.

Vậy $m \in \{0; 1; 2; \ldots; 8\}$.
Chọn đáp án (D) □

CÂU 5. Giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-3x+1}+x\right)$ bằng

(A) $+\infty$. (B) $-\infty$. (C) 0. (D) 2.

Lời giải.

Ta có
$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-3x+1}+x\right) &= \lim_{x\to+\infty}\left(x\sqrt{1-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}+x\right)\\ &= \lim_{x\to+\infty}\left(x\left(\sqrt{1-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}+1\right)\right) = +\infty.\end{aligned}$$

Vì $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ và $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{1-\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{x^2}}+1\right) = 2$.
Chọn đáp án (A) □

CÂU 6. Biết $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+ax\sqrt{|x|}-1}-x\right) = -\infty$. Khi đó giá trị của tham số a là

(A) $a < 0$. (B) $a > 0$. (C) $a = 6$. (D) $a = 10$.

Lời giải.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+ax\sqrt{|x|}-1}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+ax\sqrt{|x|}-1-x^2}{\sqrt{x^2+ax\sqrt{|x|}-1}+x}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{|x|}\frac{a-\dfrac{1}{x\sqrt{|x|}}}{\sqrt{1+\dfrac{a}{\sqrt{|x|}}-\dfrac{1}{x^2}}+1}.$$

Để $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+ax\sqrt{|x|}-1}-x\right)=-\infty\Leftrightarrow a<0$.

Chọn đáp án (A) □

CÂU 7. Tính $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{7x^2+2x\sqrt{|x|}}+x\sqrt{7}\right)$.

(A) 0. (B) $-\dfrac{5\sqrt{7}}{14}$. (C) $-\infty$. (D) $+\infty$.

Lời giải.

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{7x^2+2x\sqrt{|x|}}+x\sqrt{7}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x\sqrt{|x|}}{\sqrt{7x^2+2x\sqrt{|x|}}-x\sqrt{7}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x\sqrt{|x|}}{-x\sqrt{7+\dfrac{2}{x}}-x\sqrt{7}}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\sqrt{|x|}\frac{2}{-\sqrt{7+\dfrac{2}{x}}-\sqrt{7}}=-\infty.$$

Chọn đáp án (C) □

CÂU 8. Cho số thực a thỏa mãn $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^4+5ax^3-1}-x^2\right)=-\infty$. Tìm số thực a.

(A) $(a<0$. (B) $a\in(-10;-5)$. (C) $a>0$. (D) $a\in(-3;-1)$.

Lời giải.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^4+5ax^3-1}-x^2\right)&=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^4+5ax^3-1-x^4}{\sqrt{x^4+5ax^3-1}+x^2}\\&=\lim_{x\to-\infty}x\frac{5a-\dfrac{1}{x^3}}{\sqrt{1+\dfrac{5a}{x}-\dfrac{1}{x^4}}+1}.\end{aligned}$$

Để $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^4+5ax^3-1}-x^2\right)=-\infty\Leftrightarrow a>0$.

Chọn đáp án (C) □

CÂU 9. Tính $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3x^2+1-\sqrt{9x^4-6x^3+1}\right)$.

(A) $\dfrac{1}{4}$. (B) $\dfrac{1}{2}$. (C) $+\infty$. (D) $-\infty$.

Lời giải.

Vì $x\to+\infty$ nên ta có

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to+\infty}\left(3x^2+1-\sqrt{9x^4-6x^3+1}\right)\\&=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(3x^2+1-\sqrt{9x^4-6x^3+1}\right)\left(3x^2+1+\sqrt{9x^4-6x^3+1}\right)}{3x^2+1+\sqrt{9x^4-6x^3+1}}\\&=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(3x^2+1\right)^2-\left(9x^4-6x^3+1\right)}{3x^2+1+\sqrt{9x^4-6x^2+1}}\\&=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3\left(6+\dfrac{6}{x}\right)}{x^2\left(3+\dfrac{1}{x^2}+\sqrt{9-6\cdot\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^4}}\right)}\\&=\lim_{x\to+\infty}x\frac{6+\dfrac{6}{x}}{3+\dfrac{1}{x}+\sqrt{9-6\cdot\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}}\\&=+\infty.\end{aligned}$$

Chọn đáp án (C) □

CÂU 10. Tính $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x-\sqrt{x^2-x+1}\right)$.

Ⓐ $+\infty$. Ⓑ $-\infty$. Ⓒ $\frac{1}{2}$. Ⓓ $-\frac{1}{2}$.

Lời giải.

Vì $x\to+\infty$ nên $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x-\sqrt{x^2-x+1}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}x\cdot\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2-\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\right)=+\infty$.

Chọn đáp án Ⓐ □

CÂU 11. Tìm giới hạn $M=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-4x\sqrt{|x|}}-\sqrt{x^2-x\sqrt{|x|}}\right)$.

Ⓐ $M=-\infty$. Ⓑ $M=+\infty$. Ⓒ $M=-\frac{3}{2}$. Ⓓ $M=\frac{1}{2}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}M&=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-4x\sqrt{|x|}}-\sqrt{x^2-x\sqrt{|x|}}\right)\\&=\lim_{x\to-\infty}\frac{-3x\sqrt{|x|}}{\sqrt{x^2-4x\sqrt{|x|}}+\sqrt{x^2-x\sqrt{|x|}}}\\&=\lim_{x\to-\infty}\sqrt{|x|}\frac{-3}{-\sqrt{1-\frac{4}{\sqrt{|x|}}}-\sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{|x|}}}}\\&=+\infty.\end{aligned}$$

Chọn đáp án Ⓑ □

CÂU 12. Giá trị của $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+5}-x\right)$ là

Ⓐ $+\infty$. Ⓑ $-\infty$. Ⓒ 1. Ⓓ 0.

Lời giải.

Ta có

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+5}-x\right)=\lim_{x\to-\infty}x\left(-\sqrt{1+\frac{5}{x^2}}-1\right)=+\infty.$$

Chọn đáp án Ⓐ □

CÂU 13. Giá trị của $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+5x\sqrt{x}}-x\right)$ là

Ⓐ $+\infty$. Ⓑ $-\infty$. Ⓒ 1. Ⓓ 0.

Lời giải.

Ta có

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+5x\sqrt{x}}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{5x\sqrt{x}}{\sqrt{x^2+5x\sqrt{x}}+x}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}\frac{5}{\sqrt{1+\frac{5}{\sqrt{x}}}+1}=+\infty.$$

Chọn đáp án Ⓐ □

Dạng 6. Giới hạn một bên

1. Ví dụ

VÍ DỤ 1. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to2^-}\frac{x^2-3x+2}{\sqrt{2-x}}$.

Lời giải.

Ta có

$$\lim_{x\to2^-}\frac{x^2-3x+2}{\sqrt{2-x}}=\lim_{x\to2^-}\frac{(2-x)(1-x)}{\sqrt{2-x}}=\lim_{x\to2^-}(1-x)\sqrt{2-x}=0.$$

□

VÍ DỤ 2. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to(-1)^+}\frac{x^3+1}{x^3+2x^2+x}$.

Lời giải.

Ta có

$$\lim_{x\to(-1)^+}\frac{x^3+1}{x^3+2x^2+x}=\lim_{x\to(-1)^+}\frac{(x+1)(x^2-x+1)}{x(x+1)^2}=\lim_{x\to(-1)^+}\frac{x^2-x+1}{x(x+1)}.$$

Khi $x\to(-1)^+$ thì $\begin{cases}x+1\to 0\\ x+1>0\\ \dfrac{x^2-x+1}{x}\to -3\end{cases}$ suy ra $\lim\limits_{x\to(-1)^+}\dfrac{x^2-x+1}{x(x+1)}=-\infty.$

Vậy $\lim\limits_{x\to(-1)^+}\dfrac{x^3+1}{x^3+2x^2+x}=-\infty.$ □

VÍ DỤ 3. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\sqrt{9-x^2} & \text{khi } -3\le x<3\\ 1 & \text{khi } x=3\\ \sqrt{x^2-9} & \text{khi } x>3.\end{cases}$

Hàm số $f(x)$ có giới hạn khi $x\to 3$ hay không?

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to 3^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 3^-}\sqrt{9-x^2}=0$; $\lim\limits_{x\to 3^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+}\sqrt{x^2-9}=0.$

Suy ra $\lim\limits_{x\to 3^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+}f(x)=0.$

Vậy $\lim\limits_{x\to 3}f(x)=0.$ □

VÍ DỤ 4. Ta gọi phần nguyên của số thực x là số nguyên lớn nhất không lớn hơn x và kí hiệu nó là $[x]$. Ví dụ $[5]=5$; $[3,12]=3$; $[-2{,}725]=-3$.

Tìm $\lim\limits_{x\to 1^-}[x]$ và $\lim\limits_{x\to 1^+}[x]$. Giới hạn $\lim\limits_{x\to 1}[x]$ có tồn tại hay không?

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to 1^-}[x]=0$; $\lim\limits_{x\to 1^+}[x]=1.$

Suy ra $\lim\limits_{x\to 1^+}[x]\ne\lim\limits_{x\to 1^-}[x].$

Vậy giới hạn $\lim\limits_{x\to 1}[x]$ không tồn tại. □

VÍ DỤ 5. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-\sqrt{2x}}{4-x^2} & \text{khi } x<2\\ x^2-x+m & \text{khi } x\ge 2\end{cases}$ (m là tham số).

Tìm m để hàm số $f(x)$ có giới hạn khi $x\to 2$.

Lời giải.

Ta có

$$\lim_{x\to 2^-}f(x)=\lim_{x\to 2^-}\frac{x-\sqrt{2x}}{4-x^2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{x(x-2)}{-(x-2)(x+2)(x+\sqrt{2x})}=-\frac{1}{8};$$
$$\lim_{x\to 2^+}f(x)=\lim_{x\to 2^+}(x^2-x+m)=2+m.$$

Hàm số $f(x)$ có giới hạn khi $x\to 2$ khi và chỉ khi

$$\lim_{x\to 2^-}f(x)=\lim_{x\to 2^+}f(x)\Leftrightarrow -\frac{1}{8}=2+m\Leftrightarrow m=-\frac{17}{8}.$$

□

2. Câu hỏi trắc nghiệm

CÂU 1. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to(-2)^-}\dfrac{3+2x}{x+2}$.

(A) $-\infty$. (B) 2. (C) $+\infty$. (D) $\dfrac{3}{2}$.

Lời giải.

Khi $x\to(-2)^-$ thì $\begin{cases}3+3x\to -1\\ x+2\to 0\\ x+2<0.\end{cases}$

Suy ra $\lim\limits_{x\to(-2)^-}\dfrac{3+2x}{x+2}=+\infty.$

Chọn đáp án (C) □

CÂU 2. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}2x^2-2 & \text{khi } x\geq 6\\ x-2 & \text{khi } x<6\end{cases}$. Tính $\lim\limits_{x\to 6^-} f(x)$ bằng

(A) 2. (B) 5. (C) 1. (D) 4.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to 6^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 6^-}(x-2)=6-2=4$.

Chọn đáp án (D) □

CÂU 3. $\lim\limits_{x\to 5^+}\dfrac{|10-2x|}{x^2-6x+5}$ là

(A) $\dfrac{1}{2}$. (B) 0. (C) $+\infty$. (D) $-\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to 5^+}\dfrac{|10-2x|}{x^2-6x+5}=\lim\limits_{x\to 5^+}\dfrac{2x-10}{(x-1)(x-5)}=\lim\limits_{x\to 5^+}\dfrac{2}{x-1}=\dfrac{1}{2}$.

Chọn đáp án (A) □

CÂU 4. Tính $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{|2-x|}{x^2-x-2}$.

(A) $+\infty$. (B) 0. (C) $-\dfrac{1}{3}$. (D) $\dfrac{1}{3}$.

Lời giải.

Vì $x\to 2^+$ nên $x>2$. Do đó $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{|2-x|}{x^2-x-2}=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x-2}{(x-2)(x+1)}=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{1}{3}$.

Chọn đáp án (D) □

CÂU 5. Trong các giới hạn sau, giới hạn nào không tồn tại?

(A) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+1}{x^2+1}$. (B) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{x}+1}$. (C) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x}{(x+1)^2}$. (D) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}$.

Lời giải.

$\lim\limits_{x\to 0^+}=\dfrac{1}{x}=+\infty$; $\lim\limits_{x\to 0^-}=\dfrac{1}{x}=-\infty$ nên giới hạn không tồn tại.

Chọn đáp án (D) □

CÂU 6. Gọi a là số thực để hàm số $f(x)=\begin{cases}x^2+ax+2 & \text{khi } x>2\\ 2x^2-x+1 & \text{khi } x\leqslant 2\end{cases}$ có giới hạn khi $x\to 2$. Hãy chọn hệ thức đúng.

(A) $2a^2+3a+1=0$. (B) $a^2-3a+2=0$. (C) $4a^2-1=0$. (D) $a^2-4=0$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\left(x^2+ax+2\right)=2a+6\\ \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}\left(2x^2-x+1\right)=7.\end{cases}$$

Để hàm số có giới hạn khi $x\to 2$ thì

$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^-} f(x)\Leftrightarrow 2a+6=7\Leftrightarrow a=\frac{1}{2}.$$

Khi đó $4a^2-1=0$ là hệ thức đúng.

Chọn đáp án (C) □

CÂU 7. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-3x^2+2}{x-1} & \text{nếu } x>1\\ ax+3 & \text{nếu } x\leq 1\end{cases}$. Tìm a để $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ tồn tại.

(A) $a=6$. (B) $a=1$. (C) $a=0$. (D) $a=-6$.

Lời giải.

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^3-3x^2+2}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{(x-1)(x^2-2x-2)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}(x^2-2x-2)=-3$.

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(ax+3)=3+a$.

Giới hạn $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ tồn tại khi $3+a=-3\Rightarrow a=-6$.

Chọn đáp án (D) □

CÂU 8. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x-1|}{x-1} & \text{khi } x<1\\ x+2+a & \text{khi } 1\le x\le 3\\ \dfrac{x^2-81}{\sqrt{x}-3} & \text{khi } x>3\end{cases}$. Tìm tất cả giá trị của tham số a để hàm số có giới hạn tại $x=3$.

Ⓐ $a=12\left(3+\sqrt{3}\right)$. Ⓑ $a=12\left(3-\sqrt{3}\right)$. Ⓒ $a=12\left(3+\sqrt{3}\right)-5$. Ⓓ $a=12\left(3-\sqrt{3}\right)+5$.

Lời giải.

Với $1\le x\le 3$ thì $f(x)=x+2+a$ nên $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^-}(x+2-a)=5+a$.

Với $x>3$ thì $f(x)=\dfrac{x^2-81}{\sqrt{x}-3}=(\sqrt{x}+3)(x+9)$ nên $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+}(\sqrt{x}+3)(x+9)=12\left(3+\sqrt{3}\right)$.

Do đó, để hàm số có giới hạn tại $x=3$ thì $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)\Leftrightarrow a=12\left(3+\sqrt{3}\right)-5$.

Chọn đáp án Ⓒ □

Dạng 7. Toán thực tế, liên môn về giới hạn hàm số

1. Ví dụ

VÍ DỤ 1. Chiều dài một loài động vật nhỏ được tính theo công công thức $h(t)=\dfrac{300}{1+9\cdot(0{,}8)^t}$ mm, trong đó t số ngày sau khi sinh của loài động vật đó. Tính chiều dài cuối cùng của nó (chiều dài khi $t\to+\infty$).

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{300}{1+9\cdot(0{,}8)^t}=300$.

Vậy chiều dài cuối cùng của loài động vật là 300 mm. □

VÍ DỤ 2. Theo thuyết tương đối, khối lượng m của một hạt phụ thuộc vào vận tốc v của nó, theo công thức

$$m=\frac{m_0}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}$$

trong đó m_0 là khối lượng khi hạt đứng yên và c là tốc độ ánh sáng. Tìm giới hạn của khối lượng khi v tiến đến c^-.

Lời giải.

Với $m_0=0$ thì $\lim\limits_{v\to c^-}=0$.

Với $m_0\ne 0$.

Khi $c\to c^-$ thì $\begin{cases}\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}\to 0\\ \sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}>0\end{cases}$ suy ra $\lim\limits_{v\to c^-}\dfrac{m_0}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}=+\infty$.

Vậy nếu một hạt có khối lượng nghỉ khác 0 thì khối lượng của hạt sẽ lớn vô cùng khi vận tốc tiến gần vận tốc ánh sáng. □

VÍ DỤ 3. Một chất điểm chuyển động thẳng với phương trình $s(t)$. Khi đó vận tốc tức thời tại thời điểm t_0 được định nghĩa là $\lim\limits_{\Delta t}\dfrac{s(t_0+\Delta t)-s(t_0)}{\Delta t}$. Tính vận tốc tức thời của chất điểm với phương trình chuyển động $s(t)=3t^2-2t+3$ ($s(t)$ có đơn vị là m, t đơn vị là giây), tại thời điểm $t=4$ giây.

Lời giải.

Vận tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm $t=4$ giây là

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta t\to 0}\frac{s(4+\Delta t)-s(4)}{\Delta t}&=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{3(4+\Delta t)^2-2(4+\Delta t)+3-43}{\Delta t}\\&=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{3(\Delta t)^2+22\Delta t}{\Delta t}=22\ \text{m/s}.\end{aligned}$$

□

VÍ DỤ 4. Số lượng đơn vị hàng tồn kho trong một công ty được cho bởi

$$N(t)=200\left(3\left[\frac{t+3}{3}\right]-t\right)$$

trong đó t là thời gian tính bằng ngày, $[x]$ là số nguyên lớn nhất không vượt quá x (ví dụ $[-1{,}5]=-2$, $[8{,}8]=8$).

a) Tính $\lim\limits_{t\to 55^+} N(t)$.

b) Tính $\lim\limits_{t\to 201^-} N(t)$.

Lời giải.

a) Khi $t\to 55^+$, ta có $\left[\dfrac{t+3}{3}\right]=19$.

Suy ra $\lim\limits_{t\to 55^+} N(t)=\lim\limits_{t\to 55^+} 200\left(3\left[\dfrac{t+3}{3}\right]-t\right)=200(3\cdot 19-55)=400$.

b) Khi $t\to 201^-$, ta có $\left[\dfrac{t+3}{3}\right]=201$.

Suy ra $\lim\limits_{t\to 201^-} N(t)=\lim\limits_{t\to 201^-} 200\left(3\left[\dfrac{t+3}{3}\right]-t\right)=200\cdot 0=0$.

□

VÍ DỤ 5. Một chất điểm chuyển động thẳng với vận tốc $v(t)$. Khi đó gia tốc tức thời tại thời điểm t_0 được định nghĩa là $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{v(t_0+\Delta t)-v(t_0)}{\Delta t}$. Một chất điểm chuyển động với vận tốc $v(t)=0{,}1t^2-0{,}4t+1$ (m/s), tính gia tốc tức thời tại thời điểm $t=8$ giây.

Lời giải.

Gia tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm $t=8$ giây là

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta t\to 0}\frac{v(8+\Delta t)-v(8)}{\Delta t}&=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{0{,}1(8+\Delta t)^2-0{,}4(8+\Delta t)+1-4{,}2}{\Delta t}\\&=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{0{,}1(\Delta t)^2+1{,}2\Delta t}{\Delta t}\\&=\lim_{\Delta t\to 0}(0{,}1\Delta t+1{,}2)\\&=1{,}2.\end{aligned}$$

Vậy gia tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm $t=8$ giây là $1{,}2$ (m/s^2). □

VÍ DỤ 6. Một người lái xe từ thành phố A đến thành phố B với vận tốc trung bình là x km/h. Trên chuyến trở về, vận tốc trung bình là y km/h. Vận tốc trung bình của cả đi và về là 60 km/h. (Giả sử người lái xe đi trên cùng một con đường trên cả chuyến đi và về).

a) Chứng minh rằng $y=\dfrac{30x}{x-30}$.

b) Tìm giới hạn của y khi $x\to 30^+$.

Lời giải.

a) Gọi khoảng cách giữa A và B là s km.
Thời gian chuyến đi là $\dfrac{s}{x}$, thời gian chuyến trở về là $\dfrac{s}{y}$.
Suy ra
$$\frac{2s}{60}=\frac{s}{x}+\frac{s}{y}\Leftrightarrow\frac{1}{y}=\frac{1}{30}-\frac{1}{x}\Leftrightarrow y=\frac{30x}{x-30}.$$

b) Ta có $\lim\limits_{x\to 30^+} y=\lim\limits_{x\to 30^+}\dfrac{30x}{x-30}=+\infty$.

□

VÍ DỤ 7. Một hình elip với bán trục lớn a và bán trục nhỏ b thì diện tích được tính theo công thức $S=\pi ab$. Tính giới hạn diện tích của elip khi tiêu cự gần tới 0.

Lời giải.

Ta có $S=\pi ab=\pi a\sqrt{a^2-c^2}$.
Vậy $\lim\limits_{c\to 0} S=\lim\limits_{c\to 0}\pi a\sqrt{a^2-c^2}=\pi a^2$.
Ta thấy khi $c\to 0$, thì giới hạn diện tích của elip là diện tích hình tròn bán kính $R=a$. □

VÍ DỤ 8. Các nhà vật lý thấy rằng thuyết tương đối hẹp của Einstein quy về cơ học Newton khi $c\to+\infty$, trong đó c là tốc độ ánh sáng. Điều này được minh họa bởi ví dụ: Một hòn đá được ném thẳng đứng từ mặt đất để nó quay trở lại trái đất một giây sau đó. Sử dụng các định luật Newton, chúng ta thấy rằng chiều cao tối đa của hòn đá là $h=\dfrac{g}{8}$ mét ($g=9{,}8\text{m/s}^2$). Theo thuyết tương đối hẹp, khối lượng của hòn đá phụ thuộc vào vận tốc của nó chia cho c, và có chiều cao cực đại là

$$h(c)=c\sqrt{\frac{c^2}{g^2}+\frac{1}{4}}-\frac{c^2}{g}.$$

Tính $\lim\limits_{c\to+\infty} h(c)$.

Lời giải.

Ta có

$$\lim_{c\to+\infty} c\sqrt{\frac{c^2}{g^2}+\frac{1}{4}}-\frac{c^2}{g}=\lim_{c\to+\infty}\frac{c\left(\frac{c^2}{g^2}+\frac{1}{4}-\frac{c^2}{g^2}\right)}{\sqrt{\frac{c^2}{g^2}+\frac{1}{4}}+\frac{c}{g}}=\lim_{c\to+\infty}\frac{\frac{1}{4}}{\sqrt{\frac{1}{g^2}+\frac{1}{4c^2}}+\frac{1}{g}}=\frac{g}{8}.$$

□

2. Bài tập rèn luyện

BÀI 1. Thế Lennard-Jones có dạng

$$U(r)=\frac{B}{r^{12}}-\frac{A}{r^6}$$

trong đó A, B là các hằng số và r là khoảng cách giữa các hạt. Tính $\lim\limits_{r\to+\infty} U(r)$.

Lời giải.

Ta có

$$\lim_{r\to+\infty} U(r)=\lim_{r\to+\infty}\left(\frac{B}{r^{12}}-\frac{A}{r^6}\right)=0.$$

□

BÀI 2. Trong thuyết tương đối, chiều dài của một vật thể đối với người quan sát phụ thuộc vào tốc độ mà vật thể đang chuyển động đối với người quan sát. Nếu người quan sát đo chiều dài của vật thể là L_0 khi đứng yên, thì ở tốc độ v chiều dài là

$$L=L_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

trong đó c là tốc độ ánh sáng trong chân không. Tìm $\lim\limits_{v\to c^-} L$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{v\to c^-} L=\lim\limits_{v\to c^-} L_0\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}=\lim\limits_{v\to c^-} L_0\sqrt{1-\dfrac{c^2}{c^2}}=0.$ □

BÀI 3. Trong kỹ thuật ứng dụng, chúng ta thường xuyên ghi nhận được các hàm số mà giá trị của nó thay đổi đột ngột tại một thời điểm t xác định. Ví dụ: Sự thay đổi điện áp của một mạch điện tại thời điểm t khi đóng hoặc ngắt mạch. Thông thường, giá trị t = 0 luôn được chọn là thời điểm bắt đầu cho việc đóng hoặc ngắt điện áp. Quá trình đóng, ngắt mạch trên có thể mô tả bằng mô hình toán học bởi hàm Heaviside

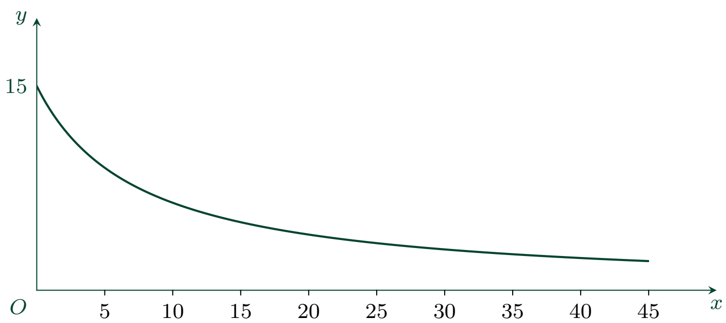
$$u(t)=\begin{cases}0 & \text{nếu } t<0\\ 1 & \text{nếu } t\geq 0.\end{cases}$$

Có tồn tại giới hạn $\lim\limits_{t\to 0} u(t)$ hay không?

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{t\to 0^+} u(t)=\lim\limits_{t\to 0^+} 1=1$; $\lim\limits_{t\to 0^-} u(t)=\lim\limits_{t\to 0^-} 0=0$.
Vậy giới hạn $\lim\limits_{t\to 0} u(t)$ không tồn tại. □

BÀI 4. Trong một cuộc thi các môn thể thao trên tuyết, người ta muốn thiết kế một đường trượt bằng băng cho nội dung đổ dốc tốc độ đường dài.



Vận động viên sẽ xuất phát từ vị trí $(0;15)$ cao 15 m so với mặt đất (trục Ox). Đường trượt phải thoả mãn yêu cầu là càng ra xa thì càng gần mặt đất để tiết kiệm lượng tuyết nhân tạo. Một nhà thiết kế đề nghị sử dụng đường cong là đồ thị hàm số $y=f(x)=\dfrac{150}{x+10}$, với $x\geq 0$. Hãy kiểm tra xem hàm số $y=f(x)$ có thoả mãn các điều kiện dưới đây hay không:

a) Có đồ thị qua điểm $(0;15)$;

b) Giảm trên $[0;+\infty)$;

c) Càng ra xa (x càng lớn), đồ thị của hàm số càng gần trục Ox với khoảng cách nhỏ tuỳ ý.

Lời giải.

a) Ta có $f(0)=\dfrac{150}{10}$ nên đồ thị hàm số $f(x)$ đi qua điểm $(0;15)$.

b) Chọn bất kì $x_1,x_2\in[0;+\infty]$ và $x_1\neq x_2$.
Ta có $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\dfrac{\dfrac{150}{x_2+10}-\dfrac{150}{x_1+10}}{x_2-x_1}=\dfrac{x_1-x_2}{(x_2-x_1)(x_1+10)(x_2+10)}=-\dfrac{1}{(x_1+10)(x_2+10)}<0$.
Suy ra hàm số nghịch biến trên $[0;+\infty)$ hay hàm số giảm trên $[0;+\infty)$.

c) Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{150}{x+10}=0$.
Vậy khi x càng lớn, đồ thị của hàm số càng gần trục Ox với khoảng cách nhỏ tuỳ ý.

□

BÀI 5. Chiều dài một loài động vật nhỏ được tính theo công công thức $h(t)=\dfrac{100}{2+3\cdot(0{,}4)^t}$ mm, trong đó t số ngày sau khi sinh của loài động vật đó. Tính chiều dài cuối cùng của nó (chiều dài khi $t\to+\infty$).

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{t\to+\infty}h(t)=\dfrac{100}{2+3\cdot(0{,}4)^t}=100$.
Vậy chiều dài của loài động vật khi trưởng thành là 100 mm. □

BÀI 6. Một chất điểm chuyển động thẳng với phương trình $s(t)$. Khi đó vận tốc tức thời tại thời điểm t_0 được định nghĩa là $\lim\limits_{\Delta t}\dfrac{s(t_0+\Delta t)-s(t_0)}{\Delta t}$. Tính vận tốc tức thời của chất điểm với phương trình chuyển động $s(t)=4t^2-3t+1$ ($s(t)$ có đơn vị là m, t đơn vị là giây), tại thời điểm $t=8$ giây.

Lời giải.

Vận tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm $t=8$ giây là

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta t\to 0}\frac{s(8+\Delta t)-s(8)}{\Delta t}&=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{4(8+\Delta t)^2-3(8+\Delta t)+1-233}{\Delta t}\\&=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{4(\Delta t)^2+61\Delta t}{\Delta t}=61\text{ m/s}.\end{aligned}$$

□

BÀI 7. Bỏ qua lực cản của không khí, độ cao tối đa mà tên lửa đạt được khi phóng với vận tốc ban đầu v_0 là $h=\dfrac{v_0^2R}{19{,}6R-v_0^2}$, trong đó R là bán kính của trái đất. Tính $\lim\limits_{R\to+\infty}h$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}\lim_{R\to+\infty}h&=\lim_{R\to+\infty}\frac{v_0^2R}{19{,}6R-v_0^2}\\&=\lim_{R\to+\infty}\frac{v_0^2}{19{,}6-\dfrac{v_0^2}{R}}=\frac{v_0^2}{19{,}6}.\end{aligned}$$

□

BÀI 8. Một hình elip với bán trục lớn a và bán trục nhỏ b thì diện tích được tính theo công thức $S=\pi ab$. Cho elip có bán trục nhỏ bằng 30 cm, tính giới hạn diện tích của elip khi tiêu cự gần tới 0.

Lời giải.

Ta có $S=\pi ab=\pi b\sqrt{b^2+c^2}$.
Vậy $\lim\limits_{c\to 0}S=\lim\limits_{c\to 0}\pi b\sqrt{b^2+c^2}=\pi b^2=900\pi$ cm^2. □

BÀI 9. Số lượng đơn vị hàng tồn kho trong một công ty nhỏ được cho bởi

$$N(t)=25\left(2\left[\frac{t+2}{2}\right]-t\right)$$

trong đó t là thời gian tính bằng tháng, $[x]$ là số nguyên lớn nhất không vượt quá x (ví dụ $[2{,}4]=2$, $[-2{,}7]=-3$).

a) Tính $\lim\limits_{t \to 8^+} N(t)$.

b) Tính $\lim\limits_{t \to 16^-} N(t)$.

Lời giải.

a) Khi $t \to 8^+$, ta có $\left[\dfrac{t+2}{2}\right] = 5$.

Suy ra $\lim\limits_{t \to 8^+} N(t) = \lim_{t \to 8^+} 25\left(2\left[\frac{t+2}{2}\right] - t\right) = 50$.

b) Khi $t \to 16^-$, ta có $\left[\dfrac{t+2}{2}\right] = 8$.

Suy ra $\lim\limits_{t \to 16^-} N(t) = \lim_{t \to 16^-} 25\left(2\left[\frac{t+2}{2}\right] - t\right) = 0$.

□

BÀI 10. Định luật Boyle được phát biểu: "Đối với một lượng khí ở nhiệt độ không đổi, áp suất P tỷ lệ nghịch với thể tích V". Tìm giới hạn của P là $V \to 0^+$.

Lời giải.

Ta có $P = \dfrac{k}{V}$ với k là số thực dương không đổi.

Khi đó $\lim\limits_{V \to 0^+} P = \dfrac{k}{V} = +\infty$. □

BÀI 11. Một vật khối lượng m (không đổi) bắt đầu chuyển động với vận tốc $v_0 = 0$, được gia tốc bởi một lực F không đổi trong t giây. Theo định luật Newton về chuyển động, vật tốc của vật là $v_N = \dfrac{Ft}{m}$. Theo thuyết tương đối Einstein, vật có vận tốc $v_E = \dfrac{Fct}{\sqrt{m^2c^2 + F^2t^2}}$, với c là vận tốc ánh sáng. Tính $\lim\limits_{t \to +\infty} v_N$ và $\lim\limits_{t \to +\infty} v_E$.

Lời giải.

Ta có

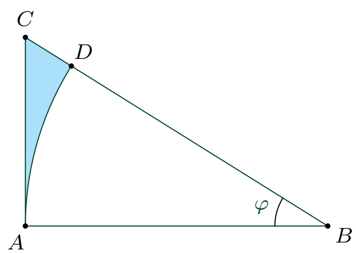
$$\lim_{t \to +\infty} v_N = \lim_{t \to +\infty} \frac{Ft}{m} = +\infty;$$

$$\lim_{t \to +\infty} v_E = \lim_{t \to +\infty} \frac{Fct}{\sqrt{m^2c^2 + F^2t^2}} = \lim_{t \to +\infty} \frac{Fc}{\sqrt{\dfrac{m^2c^2}{t^2} + F^2}} = \frac{c}{F}.$$

□

BÀI 12.

Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường tròn bán kính 10 và tam giác vuông (hình vẽ bên).



a) Đặt $S = f(\varphi)$, với $f(\varphi)$ là hàm số của φ (Đơn vị rad). Tìm công thức của $f(\varphi)$ với $0 < \varphi < \dfrac{\pi}{2}$.

b) Tính giới hạn của $f(\varphi)$ khi $\varphi \to \dfrac{\pi}{2}^-$.

Lời giải.

a) Diện tích tam giác ABC là $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}AB \cdot AC = \dfrac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4\tan\varphi = 8\tan\varphi$.

Diện tích hình quạt ABD là $S_q = \dfrac{4^2\varphi}{2} = 8\varphi$.

Diện tích hình phẳng S là $S = f(\varphi) = S_{ABC} - S_q = 8(\tan\varphi - \varphi)$.

b) Khi $\varphi \to \frac{\pi}{2}^-$ thì $\begin{cases} \cos\varphi \to 0 \\ \cos\varphi > 0. \end{cases}$

Suy ra $\lim\limits_{\varphi \to \frac{\pi}{2}^-} f(\varphi) = \lim\limits_{\varphi \to \frac{\pi}{2}^-} 8\left(\dfrac{\sin\varphi}{\cos\varphi} - \varphi\right) = +\infty$.

□

BÀI 13. Trên một chuyến đi dài d km đến một thành phố khác, vận tốc trung bình của một tài xế xe tải là x km/h. Trên chuyến trở về, vận tốc trung bình là y km/h. Vận tốc trung bình của cả đi và về là 50 km/h.

a) Chứng minh rằng $y = \dfrac{25x}{x - 25}$.

b) Tìm giới hạn của y khi $x \to 25^+$ và giải thích ý nghĩa của nó.

Lời giải.

a) Thời gian chuyến đi là $\dfrac{d}{x}$, thời gian chuyến trở về là $\dfrac{d}{y}$.
Suy ra
$$\frac{2d}{50} = \frac{d}{x} + \frac{d}{y} \Leftrightarrow \frac{1}{y} = \frac{1}{25} - \frac{1}{x} \Leftrightarrow y = \frac{25x}{x-25}.$$

b) Ta có $\lim\limits_{x\to 25^+} y = \lim\limits_{x\to 25^+} \dfrac{25x}{x-25} = +\infty$.
Khi vận tốc trung bình chuyến đi bằng 25 km/h, thì vận tốc trung bình chuyến của cả chuyến đi và về không thể là 50 km/h.

□

BÀI 14. Một chất điểm chuyển động thẳng với vận tốc $v(t)$. Khi đó gia tốc tức thời tại thời điểm t_0 được định nghĩa là $\lim\limits_{\Delta t\to 0} \dfrac{v(t_0+\Delta t)-v(t_0)}{\Delta t}$. Một chất điểm chuyển động với vận tốc $v(t) = 5\sin(4\pi t)$ (m/s), tính gia tốc tức thời tại thời điểm $t = 5$ giây. (Biết $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$).

Lời giải.

Gia tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm $t = 5$ giây là
$$\begin{aligned}\lim_{\Delta t\to 0} \frac{v(5+\Delta t)-s(5)}{\Delta t} &= \lim_{\Delta t\to 0} \frac{5\sin(20\pi+4\pi\Delta t)-5\sin(20\pi)}{\Delta t}\\ &= \lim_{\Delta t\to 0} \frac{5\sin(4\pi\Delta t)}{\Delta t}\\ &= \lim_{\Delta t\to 0} \frac{20\pi\sin(4\pi\Delta t)}{4\pi\Delta t}\\ &= 20\pi.\end{aligned}$$

Vậy gia tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm $t = 5$ giây là 20π (m/s^2). □

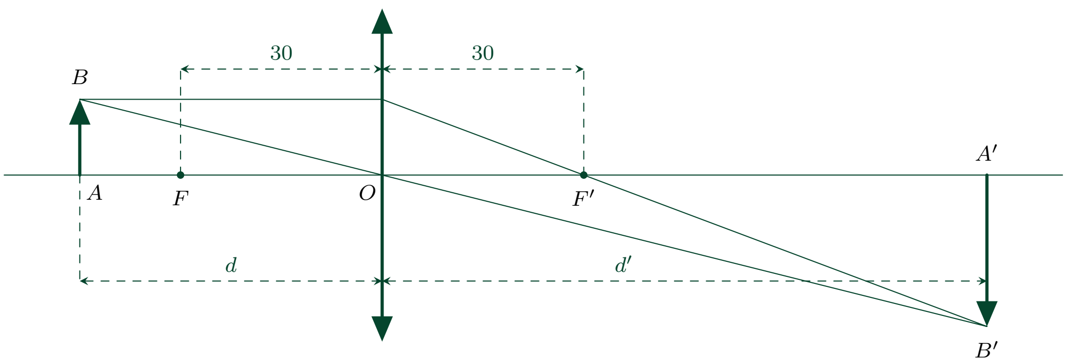
BÀI 15. Một bể chứa 5000 lít nước tinh khiết. Nước muối chứa 30 g muối trên một lít nước được bơm vào bể với tốc độ 25 lít/phút. Gọi nồng độ của muối sau t phút (tính bằng gam trên lít) là $C(t)$. Tính $\lim\limits_{t\to+\infty} C(t)$. Giải thích ý nghĩa của giới hạn này.

Lời giải.

Số lít nước muối được bơm vào bể sau t phút là $25t$ lít.
Số g muối có trong $25t$ lít nước muối là $30\cdot 25t = 750t$ gam.
Nồng độ của muối trong bể sau t phút là
$$\frac{750t}{25t+5000} = \frac{30t}{t+200} \text{ gam/lít.}$$

Ta có $\lim\limits_{t\to+\infty} C(t) = \lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{30t}{t+200} = 30$ gam/lít.
Khi thời gian tiến tới vô hạn thì nồng độ của muối trong bể bằng nồng độ của nước muối bơm vào bể. □

BÀI 16. Một thấu kính hội tụ có tiêu cự $f = 30$ cm. Trong Vật lí, ta biết rằng nếu đặt vật thật AB cách quang tâm của thấu kính một khoảng $d > 30$ (cm) thì được ảnh thật $A'B'$ cách quang tâm của thấu kính một khoảng d' (cm) (Hình vẽ dưới). Ngược lại, nếu $0 < d < 30$, ta có ảnh ảo. Công thức của thấu kính là $\dfrac{1}{d} + \dfrac{1}{d'} = \dfrac{1}{30}$.



a) Từ công thức của thấu kính, hãy tìm biểu thức xác định hàm số $d' = h(d)$.

b) Tìm các giới hạn $\lim\limits_{d\to 30^+} h(d)$; $\lim\limits_{d\to 30^-} h(d)$ và $\lim\limits_{d\to +\infty} h(d)$. Sử dụng các kết quả này để giải thích ý nghĩa đã biết trong Vật lí.

Lời giải.

a) Ta có $\dfrac{1}{d}+\dfrac{1}{d'}=\dfrac{1}{30} \Leftrightarrow \dfrac{1}{d'}=\dfrac{1}{30}-\dfrac{1}{d}=\dfrac{d-30}{30d} \Leftrightarrow d'=\dfrac{30d}{d-30}$.

Vậy $d'=h(d)=\dfrac{30d}{d-30}$.

b) Khi $d\to 30^+$, ta có $d-30\to 0$, $d-30>0$ và $30d\to 900$.

Suy ra $\lim\limits_{d\to 30^+} h(d)=\lim\limits_{d\to 30^+}\dfrac{30d}{d-30}=+\infty$.

Khi $d\to 30^-$, ta có $d-30\to 0$, $d-30<0$ và $30d\to 900$.

Suy ra $\lim\limits_{d\to 30^-} h(d)=\lim\limits_{d\to 30^-}\dfrac{30d}{d-30}=-\infty$.

Ta có $\lim\limits_{d\to +\infty} h(d)=\lim\limits_{d\to +\infty}\dfrac{30d}{d-30}=\lim\limits_{d\to +\infty}\dfrac{30}{1-\dfrac{30}{d}}=30$.

Vậy

- Khi vị trí của vật tiến gần tiêu điểm F $(d>f)$ thì vị trí ảnh thật của vật dần ra xa vô cực.
- Khi vị trí của vật tiến gần tiêu điểm F $(d<f)$ thì vị trí ảnh ảo của vật dần ra xa vô cực.
- Khi vị trí của vật tiến ra xa vô cực thì ảnh thật của vật dần tới tiêu điểm.

□

Bài 17. HÀM SỐ LIÊN TỤC

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Hàm số liên tục tại một điểm

- Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên khoảng $(a;b)$ chứa điểm x_0. Hàm số $f(x)$ được gọi là liên tục tại điểm x_0 nếu $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.
- Hàm số $f(x)$ không liên tục tại x_0 được gọi là gián đoạn tại điểm đó.

⚠ *Hàm số $y=f(x)$ liên tục tại x_0 khi và chỉ khi $\lim\limits_{x\to {x_0}^+} f(x)=\lim\limits_{x\to {x_0}^-} f(x)=f(x_0)$.*

2. Hàm số liên tục trên một khoảng

- Hàm số $y=f(x)$ được gọi là liên tục trên khoảng $(a;b)$ nếu nó liên tục tại mọi điểm thuộc khoảng này.
- Hàm số $y=f(x)$ được gọi là liên tục trên đoạn $[a;b]$ nếu nó liên tục trên khoảng $(a;b)$ và $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=f(a)$, $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=f(b)$.
- Các khái niệm hàm số liên tục trên nửa khoảng như $(a;b]$, $[a;+\infty)\ldots$ được định nghĩa theo cách tương tự.
- Đồ thị của hàm số liên tục trên một khoảng là một đường liền nét trên khoảng đó.

3. Tính chất 1

- Hàm số đa thức và các hàm số $y=\sin x$, $y=\cos x$ liên tục trên R.
- Các hàm số $y=\tan x$, $y=\cot x$, $y=\sqrt{x}$ và các hàm phân thức hữu tỉ (thương của hai đa thức) liên tục trên mỗi khoảng xác định của chúng.

4. Tính chất 2

Giả sử hai hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ liên tục tại điểm x_0. Khi đó:

- Các hàm số $y=f(x)+g(x)$, $y=f(x)-g(x)$ và $y=f(x)\cdot g(x)$ liên tục tại x_0.
- Hàm số $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ liên tục tại x_0 nếu $g(x_0)\neq 0$.

B. CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

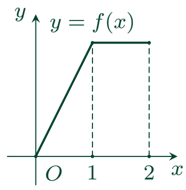
Dạng 1. Dựa vào đồ thị xét tính liên tục của hàm số tại một điểm, một khoảng.

Để xét tính liên tục của hàm số khi biết đồ thị, ta cần nhớ:

- Đồ thị của hàm số liên tục trên một khoảng là một đường liền nét trên khoảng đó.
- Hàm số $y = f(x)$ liên tục tại x_0 khi và chỉ khi $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$.

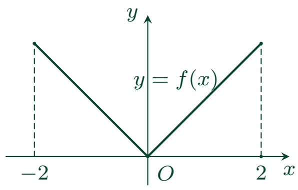
1. Ví dụ mẫu

VÍ DỤ 1.
Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.
Xét tính liên tục của hàm số $y = f(x)$ trên khoảng $(0; 2)$.



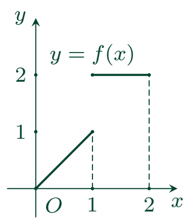
Lời giải.
Đồ thị hàm số là một đường liền nét trên khoảng $(0; 2)$ nên hàm số đã cho liên tục trên khoảng $(0; 2)$. □

VÍ DỤ 2.
Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.
Xét tính liên tục của hàm số $y = f(x)$ trên khoảng $(-2; 2)$.



Lời giải.
Đồ thị hàm số là một đường liền nét trên khoảng $(-2; 2)$ nên hàm số đã cho liên tục trên khoảng $(-2; 2)$. □

VÍ DỤ 3.
Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.
Xét tính liên tục của hàm số $y = f(x)$ trên khoảng $(0; 2)$.

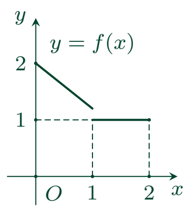


Lời giải.

- Đồ thị hàm số là các đường liền nét trên các khoảng $(0; 1)$, $(1; 2)$ do đó hàm số liên tục trên các khoảng này.
- Đồ thị hàm số không liền nét tại điểm $x = 1$ do đó hàm số đã cho gián đoạn tại điểm này.

□

VÍ DỤ 4.
Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.
Xét tính liên tục của hàm số $y = f(x)$ trên khoảng $(0; 2)$.



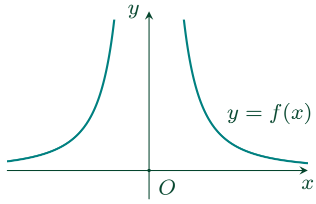
Lời giải.

- Đồ thị hàm số là các đường liền nét trên các khoảng $(0; 1)$, $(1; 2)$ do đó hàm số liên tục trên các khoảng này.
- Ta có $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) > f(1) = 1$ và $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = f(1) = 1$.
  Do đó $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$.
  Vậy hàm số đã cho gián đoạn tại $x = 1$.

□

VÍ DỤ 5.

Cho hàm số $y = f(x)$ có tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ và có đồ thị như hình bên. Xét tính liên tục của hàm số $y = f(x)$ trên $\mathscr{D}$.



Lời giải.

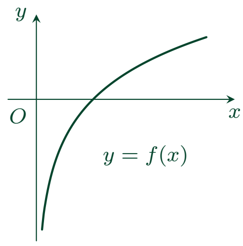
Vì hàm số đã cho có tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ nên

- $f(x)$ xác định trên khoảng $(-\infty; 0)$ nên liên tục trên khoảng này.
- $f(x)$ xác định trên khoảng $(0; +\infty)$ nên liên tục trên khoảng này.
- $f(x)$ không xác định tại điểm $x = 0$ nên gián đoạn tại điểm này.

□

2. Câu hỏi trắc nghiệm

CÂU 1. Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:



(A) Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

(B) Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên khoảng $(0, +\infty)$.

(C) Hàm số $y = f(x)$ liên tục tại điểm $x_0 = 0$.

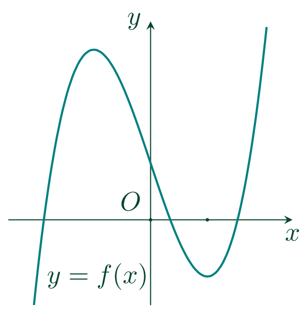
(D) $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$.

Lời giải.

Đồ thị hàm số là một đường liền nét trên khoảng $(0, +\infty)$ nên liên tục trên khoảng này.

Chọn đáp án (B) □

CÂU 2. Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Chọn mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau:



(A) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

(B) Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

(C) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

(D) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

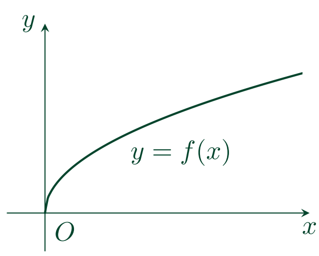
Lời giải.

Quan sát đồ thị hàm số, ta có

- Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.
- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

Chọn đáp án (A) □

CÂU 3. Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:



(A) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

(B) Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên khoảng $(0; +\infty)$.

(C) Hàm số $y = f(x)$ liên tục tại điểm $x_0 = 0$.

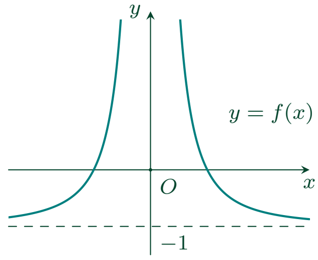
(D) Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Lời giải.

Quan sát đồ thị hàm số, thấy đồ thị hàm số là một đường liền nét trên khoảng $(0;+\infty)$ do đó hàm số đã cho liên tục trên khoảng này.

Chọn đáp án (B)

CÂU 4. Cho đồ thị hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Chọn mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau:



(A) Hàm số gián đoạn tại điểm $x_0=0$.

(B) Hàm số liên tục trên khoảng $(-\infty;0)$.

(C) Hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

(D) Hàm số liên tục trên khoảng $(0;+\infty)$.

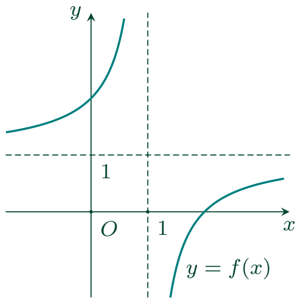
Lời giải.

Quan sát đồ thị hàm số, ta có

- Hàm số gián đoạn tại điểm $x_0=0$.
- Hàm số liên tục trên khoảng $(-\infty;0)$.
- Hàm số liên tục trên khoảng $(0;+\infty)$.

Chọn đáp án (C)

CÂU 5. Cho đồ thị hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Chọn mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau:



(A) Hàm số gián đoạn tại điểm $x_0=1$.

(B) Hàm số liên tục trên khoảng $(-\infty;1)$.

(C) Hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

(D) Hàm số liên tục trên khoảng $(1;+\infty)$.

Lời giải.

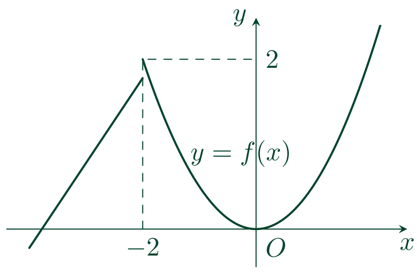
Quan sát đồ thị hàm số, ta có

- Hàm số gián đoạn tại điểm $x_0=1$.
- Hàm số liên tục trên khoảng $(-\infty;1)$.
- Hàm số liên tục trên khoảng $(1;+\infty)$.

Chọn đáp án (C)

CÂU 6.

Cho đồ thị hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:



(A) Hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

(B) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$.

(C) Hàm số liên tục tại điểm $x_0=-2$.

(D) Hàm số gián đoạn tại điểm $x_0=-2$.

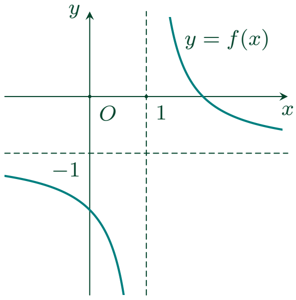
Lời giải.

Quan sát đồ thị hàm số, ta có

- Đồ thị hàm số là các đường liền nét trên các khoảng $(-\infty;-2)$, $(-2;+\infty)$ do đó hàm số liên tục trên các khoảng này.
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$
- Ta có $\lim\limits_{x\to(-2)^-} f(x)<f(-2)=2$ và $\lim\limits_{x\to(-2)^+} f(x)=f(-2)=2$. Do đó $\lim\limits_{x\to(-2)^-} f(x)\neq\lim\limits_{x\to(-2)^+} f(x)$.
  Vậy hàm số đã cho gián đoạn tại $x_0=-2$.

Chọn đáp án (D)

CÂU 7. Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:



Ⓐ $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$.

Ⓑ Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Ⓒ $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = -\infty$.

Ⓓ $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = +\infty$.

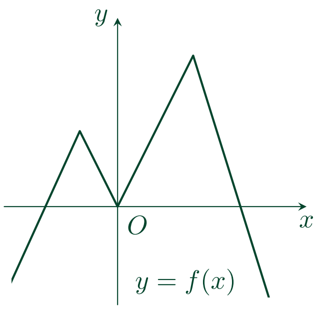
Lời giải.

Quan sát đồ thị hàm số, ta có

- Đồ thị hàm số là các đường liền nét trên các khoảng $(-\infty; 1)$, $(1; +\infty)$ do đó hàm số liên tục trên các khoảng này.
- $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = -1$.
- Ta có $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$ và $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$. Do đó $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$.
  Vậy hàm số đã cho gián đoạn tại $x_0 = 1$.

Chọn đáp án Ⓐ □

CÂU 8. Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:



Ⓐ Hàm số $y = f(x)$ gián đoạn tại $x_0 = 0$.

Ⓑ $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = -1$.

Ⓒ $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = -1$.

Ⓓ Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

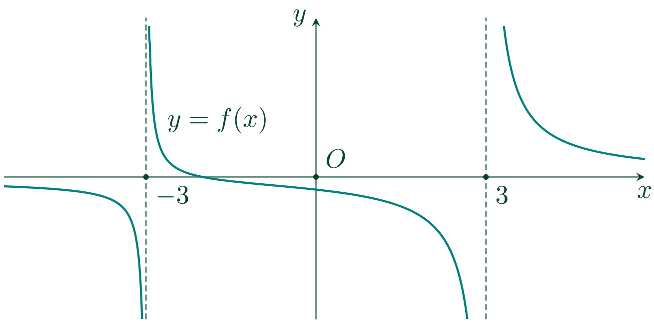
Lời giải.

Quan sát đồ thị hàm số, ta có

- Đồ thị hàm số là các đường liền nét trên khoảng $(-\infty; +\infty)$ do đó hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.
- $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = -\infty$.
- $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$.

Chọn đáp án Ⓓ □

CÂU 9. Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:



Ⓐ Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Ⓑ Hàm số $y = f(x)$ liên tục tại $x_0 = -3$.

Ⓒ $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$.

Ⓓ Hàm số $y = f(x)$ gián đoạn tại $x_0 = 3$.

Lời giải.

Quan sát đồ thị hàm số, ta có

- Đồ thị hàm số là các đường liền nét trên khoảng $(-\infty; -3)$, $(-3; 3)$, $(3; +\infty)$ do đó hàm số liên tục trên các khoảng này.
- $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = 0$.
- Hàm số $y = f(x)$ gián đoạn tại các điểm $x_0 = 3$ và $x_0 = -3$.

Chọn đáp án (D) □

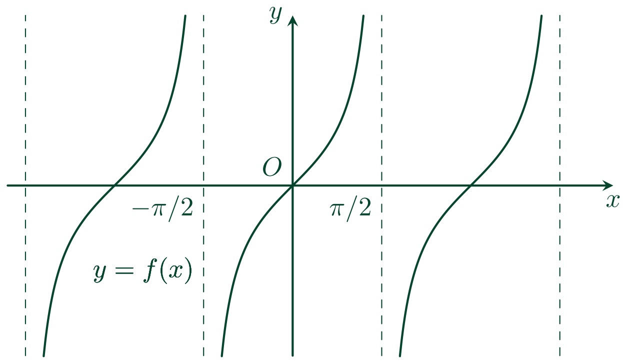
CÂU 10. Cho đồ thị hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:

(A) Hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

(B) Hàm số $y=f(x)$ liên tục tại điểm $x_0=\dfrac{\pi}{2}$.

(C) Hàm số $y=f(x)$ liên tục tại điểm $x_0=-\dfrac{\pi}{2}$.

(D) Hàm số $y=f(x)$ gián đoạn tại điểm $x_0=\dfrac{\pi}{2}$.



Lời giải.

Quan sát đồ thị hàm số, ta có

- Đồ thị hàm số là các đường liền nét trên khoảng $(-\dfrac{\pi}{2};0)$, $(0;\dfrac{\pi}{2})$ do đó hàm số liên tục trên các khoảng này.
- Hàm số $y=f(x)$ gián đoạn tại các điểm $x_0=\dfrac{\pi}{2}$ và $x_0=-\dfrac{\pi}{2}$.

Chọn đáp án (D) □

Dạng 2. Hàm số liên tục tại một điểm

Để kiểm tra tính liên tục của hàm số $y=f(x)$ tại điểm $x=x_0$ ta cần làm như sau:

- Bước 1: Tính $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.
- Bước 2: Tính $f(x_0)$. Nếu $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$ thì kết luận hàm số $f(x)$ liên tục tại $x=x_0$. Nếu $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\neq f(x_0)$ thì kết luận hàm số $f(x)$ liên tục tại $x=x_0$.

1. Ví dụ mẫu

VÍ DỤ 1. Xét tính liên tục của hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-3x+2}{x-2} & \text{khi } x\neq 2\\ 4x-7 & \text{khi } x=2\end{cases}$ tại điểm $x_0=2$.

Lời giải.

Ta có $f(x_0)=f(2)=4\cdot 2-7=1$.

$\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-3x+2}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-1)(x-2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}(x-1)=1$.

Suy ra $f(2)=\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ nên hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm $x_0=2$. □

VÍ DỤ 2. Xét tính liên tục của hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\sqrt{2x-3}}{2-x} & \text{nếu } x\neq 2\\ 1 & \text{nếu } x=2\end{cases}$ tại điểm $x_0=2$.

Lời giải.

Ta có

- $f(2)=1$.
- $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1-\sqrt{2x-3}}{2-x}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1-(2x-3)}{(2-x)(1+\sqrt{2x-3})}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2(2-x)}{(2-x)(1+\sqrt{2x-3})}$
  $=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2}{1+\sqrt{2x-3}}=1=f(2)$

Vậy hàm số $f(x)$ liên tục tại $x_0=2$. □

VÍ DỤ 3. Biết rằng $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$. Hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\tan x}{x} & \text{khi } x\neq 0\\ 0 & \text{khi } x=0\end{cases}$. Xét tính liên tục của $y=f(x)$ tại $x=0$?

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi | k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Ta có $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\cdot\dfrac{1}{\cos x}=1\cdot\dfrac{1}{\cos 0}=1\neq f(0)\Rightarrow f(x)$ không liên tục tại $x=0$. □

VÍ DỤ 4. Hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}3 & \text{khi } x=-1\\ \dfrac{x^4+x}{x^2+x} & \text{khi } x\neq -1,\ x\neq 0\\ 1 & \text{khi } x=0\end{cases}$. Xét tính liên tục của hàm số tại $x=-1, x=0$.

Lời giải.

Hàm số $y=f\left(x\right)$ có tập xác định $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.
Dễ thấy hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên mỗi khoảng $(-\infty;-1),(-1;0)$ và $(0;+\infty)$.
(i) Xét tại $x=-1$, ta có
$\lim\limits_{x\to-1} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^4+x}{x^2+x}=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x\left(x+1\right)\left(x^2-x+1\right)}{x\left(x+1\right)}=\lim\limits_{x\to-1}\left(x^2-x+1\right)=3=f\left(-1\right)$. Vậy hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục tại $x=-1$.
(ii) Xét tại $x=0$, ta có
$\lim\limits_{x\to0} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^4+x}{x^2+x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\left(x+1\right)\left(x^2-x+1\right)}{x\left(x+1\right)}=\lim\limits_{x\to0}\left(x^2-x+1\right)=1=f\left(0\right)$. Vậy hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục tại $x=0$. □

VÍ DỤ 5. Xét tính liên tục của hàm số $f(x)=\begin{cases}x^2+1 & \text{nếu } x>0\\ x & \text{nếu } x\leq 0\end{cases}$ tại điểm $x_0=0$.

Lời giải.

Ta có:

- $f(0)=0$.
- $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\left(x^2+1\right)=1$.
- $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to0^-} x=0$.

Ta có: $f(0)=\lim\limits_{x\to0^-} f(x)\neq\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$. Vậy hàm số $f(x)$ gián đoạn tại điểm $x=0$. □

VÍ DỤ 6. Xét tính liên tục của hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}1-\cos x & \text{khi } x\leq 0\\ \sqrt{x+1} & \text{khi } x>0\end{cases}$ tại $x=0$?

Lời giải.

Hàm số xác định với mọi $x\in\mathbb{R}$.
Ta có $f\left(x\right)$ liên tục trên $(-\infty;0)$ và $(0;+\infty)$.
Mặt khác $\begin{cases}f\left(0\right)=1\\ \lim\limits_{x\to0^-} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to0^-}\left(1-\cos x\right)=1-\cos 0=0\\ \lim\limits_{x\to0^+} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to0^+}\sqrt{x+1}=\sqrt{0+1}=1\end{cases}\Rightarrow f\left(x\right)$ gián đoạn tại $x=0$. □

2. Bài tập rèn luyện

BÀI 1. Xét tính liên tục của hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-6x+5}{x^2-1} & \text{nếu } x\neq 1\\ -2 & \text{nếu } x=1\end{cases}$ tại điểm $x_0=1$.

Lời giải.

Ta có: $f(1)=-2$.
$\lim\limits_{x\to1} f(x)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-6x+5}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-5)(x-1)}{(x-1)(x+1)}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-5}{x+1}=-2=f(1)$.
Vậy hàm số $f(x)$ liên tục tại $x=1$. □

BÀI 2. Xét tính liên tục của hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x+5}-3} & \text{nếu } x\neq 4\\ -\dfrac{3}{2} & \text{nếu } x=4\end{cases}$ tại điểm $x_0=4$.

Lời giải.

Ta có:

- $f(4)=-\dfrac{3}{2}$.
- $\lim\limits_{x\to4} f(x)=\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x+5}-3}=\lim\limits_{x\to4}\dfrac{(\sqrt{x+5}+3)(x-4)}{(x+5-9)(\sqrt{x}+2)}$
$=\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\sqrt{x+5}+3}{\sqrt{x}+2}=\dfrac{6}{4}=\dfrac{3}{2}\neq f(4)$.

Vậy hàm số $f(x)$ gián đoạn tại điểm $x=4$. □

BÀI 3. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{x} \text{ khi } x<1, x\neq 0\\ 0 \text{ khi } x=0\\ \sqrt{x} \text{ khi } x\geq 1\end{cases}$. Xét tính liên tục của hàm số $f(x)$ tại $x=0, x=1$?

Lời giải.

Hàm số $y=f(x)$ có tập xác định $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.
Dễ thấy hàm số $y=f(x)$ liên tục trên mỗi khoảng $(-\infty;0),(0;1)$ và $(1;+\infty)$.

Ta có $\begin{cases}f(0)=0\\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x^2}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-} x=0\\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^2}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+} x=0\end{cases}\Rightarrow f(x)$ liên tục tại $x=0$.

Ta có $\begin{cases}f(1)=1\\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^2}{x}=\lim\limits_{x\to 1^-} x=1\\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\sqrt{x}=1\end{cases}\Rightarrow f(x)$ liên tục tại $x=1$. □

BÀI 4. Cho hàm số $y=\begin{cases}\dfrac{1-x^3}{1-x}, \text{khi } x<1\\ 1 \text{ , khi } x\geq 1\end{cases}$. Xét tính liên tục phải của hàm số tại $x=1$?

Lời giải.

Ta có $y(1)=1$.

Ta có $\lim\limits_{x\to 1^+} y=1$; $\lim\limits_{x\to 1^-} y=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{1-x^3}{1-x}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{(1-x)\left(1+x+x^2\right)}{1-x}=\lim\limits_{x\to 1^-}\left(1+x+x^2\right)=4$.
Nhận thấy $\lim\limits_{x\to 1^+} y=y(1)$, suy ra y liên tục phải tại $x=1$. □

BÀI 5. Cho hàm số $y=\begin{cases}\dfrac{x^2-7x+12}{x-3} & \text{khi } x\neq 3\\ -1 & \text{khi } x=3\end{cases}$. Xét tính liên tục của hàm số tại $x=3$.

Lời giải.

$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-7x+12}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3}(x-4)=-1=y(3)$ nên hàm số liên tục tại $x_0=3$. □

BÀI 6. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-2}{\sqrt{x+2}-2} & \text{khi } x\neq 2\\ 4 & \text{khi } x=2\end{cases}$. Xét tính liên tục của hàm số tại $x=2$?

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.

$\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{\sqrt{x+2}-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\left(\sqrt{x+2}+2\right)=4$.
$f(2)=4\Rightarrow \lim\limits_{x\to 2} f(x)=f(2)$. Vậy hàm số liên tục tại $x=2$. □

BÀI 7. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos x}{x^2} & \text{khi } x\neq 0\\ 1 & \text{khi } x=0\end{cases}$. Xét tính liên tục của hàm số tại $x=0$?

Lời giải.

Hàm số xác định trên $\mathbb{R}$.

Ta có $f(0)=1$ và $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\frac{x}{2}}{4\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^2}=\dfrac{1}{2}$.

Vì $f(0)\neq \lim\limits_{x\to 0} f(x)$ nên $f(x)$ gián đoạn tại $x=0$. Do đó $f(x)$không có đạo hàm tại $x=0$.
Vì $\forall x\neq 0,\ f(x)=\dfrac{1-\cos x}{x^2}\geq 0$ nên $f\left(\sqrt{2}\right)>0$. Vậy $f(x)$ gián đoạn tại $x=0$. □

BÀI 8. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}-x\cos x & \text{khi } x<0\\ \dfrac{x^2}{1+x} & \text{khi } 0\leq x<1\\ x^3 & \text{khi } x\geq 1\end{cases}$. Xét tính liên tục của hàm số tại $x=0$?

Lời giải.

• $f(x)$ liên tục tại $x \neq 0$ và $x \neq 1$.
• Tại $x = 0$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} (-x\cos x) = 0$, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x^2}{1+x} = 0$, $f(0) = 0$.
Suy ra $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$. Hàm số liên tục tại $x = 0$.
• Tại $x = 1$

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x^2}{1+x} = \dfrac{1}{2}$, $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} x^3 = 1$.
Suy ra $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$. Hàm số gián đoạn tại $x = 1$. □

3. Câu hỏi trắc nghiệm

CÂU 1. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng K và $x_0 \in K$. Hàm số $y = f(x)$ liên tục tại x_0 nếu

(A) $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0)$. (B) $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0)$. (C) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. (D) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \neq f(x_0)$.

Lời giải.

Theo định nghĩa: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng K và $x_0 \in K$. Hàm số $y = f(x)$ liên tục tại x_0 nếu $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Chọn đáp án (C) □

CÂU 2. Cho hàm số $f(x) = \dfrac{x^2+3x-4}{x+4}$ với $x \neq -4$. Để hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = -4$ thì ta cần bổ sung giá trị $f(-4)$ bằng bao nhiêu?

(A) 5. (B) -5. (C) 3. (D) 0.

Lời giải.

$f(-4) = \lim\limits_{x\to -4} \dfrac{x^2+3x-4}{x+4} = \lim\limits_{x\to -4} \dfrac{(x-1)(x+4)}{x+4} = \lim\limits_{x\to -4} (x-1) = -5$.

Chọn đáp án (B) □

CÂU 3. Cho hàm số $f(x) = \dfrac{2x-1}{x^3-x}$. Kết luận nào sau đây đúng?

(A) Hàm số liên tục tại $x = -1$. (B) Hàm số liên tục tại $x = 0$.
(C) Hàm số liên tục tại $x = 1$. (D) Hàm số liên tục tại $x = \dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Tại $x = \dfrac{1}{2}$, ta có $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} f(x) = \lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} \dfrac{2x-1}{x^3-1} = 0 = f\left(\dfrac{1}{2}\right)$. Vậy hàm số liên tục tại $x = 2$.

Chọn đáp án (D) □

CÂU 4. Hàm số nào sau đây liên tục tại $x = 1$:

(A) $f(x) = \dfrac{x^2+x+1}{x-1}$. (B) $f(x) = \dfrac{x^2-x-2}{x^2-1}$. (C) $f(x) = \dfrac{x^2+x+1}{x}$. (D) $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$.

Lời giải.

• $f(x) = \dfrac{x^2+x+1}{x-1}$

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$ suy ra $f(x)$ không liên tục tại $x = 1$.

• $f(x) = \dfrac{x^2-x-2}{x^2-1}$

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x-2}{x-1} = -\infty$ suy ra $f(x)$ không liên tục tại $x = 1$.

• $f(x) = \dfrac{x^2+x+1}{x}$

$\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2+x+1}{x} = 3 = f(1)$ suy ra $f(x)$ liên tục tại $x = 1$.

• $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x+1}{x-1} = +\infty$ suy ra $f(x)$ không liên tục tại $x = 1$.

Chọn đáp án (C) □

CÂU 5. Hàm số nào dưới đây gián đoạn tại điểm $x_0 = -1$.

(A) $y = (x+1)(x^2+2)$. (B) $y = \dfrac{2x-1}{x+1}$. (C) $y = \dfrac{x}{x-1}$. (D) $y = \dfrac{x+1}{x^2+1}$.

Lời giải.

Ta có $y = \dfrac{2x-1}{x+1}$ không xác định tại $x_0 = -1$ nên gián đoạn tại $x_0 = -1$.

Chọn đáp án B □

CÂU 6. Hàm số nào sau đây gián đoạn tại $x = 2$?

A $y = \dfrac{3x-4}{x-2}$. **B** $y = \sin x$. **C** $y = x^4 - 2x^2 + 1$. **D** $y = \tan x$.

Lời giải.

Ta có $y = \dfrac{3x-4}{x-2}$ có tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$, do đó gián đoạn tại $x = 2$.

Chọn đáp án A □

CÂU 7. Hàm số $y = \dfrac{x}{x+1}$ gián đoạn tại điểm x_0 bằng?

A $x_0 = 2018$. **B** $x_0 = 1$. **C** $x_0 = 0$. **D** $x_0 = -1$.

Lời giải.

Vì hàm số $y = \dfrac{x}{x+1}$ có tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ nên hàm số gián đoạn tại điểm $x_0 = -1$.

Chọn đáp án D □

CÂU 8. Hàm số nào dưới đây gián đoạn tại điểm $x = 1$?

A $y = \dfrac{x-1}{x^2+x+1}$. **B** $y = \dfrac{x^2-x+1}{x+1}$. **C** $y = (x-1)(x^2+x+1)$. **D** $y = \dfrac{x^2+2}{x-1}$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x^2+2}{x-1} = +\infty$ và $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x^2+2}{x-1} = -\infty$ nên hàm số $y = \dfrac{x^2+2}{x-1}$ gián đoạn tại điểm $x = 1$.

Chọn đáp án D □

CÂU 9. Cho hàm số $y = \dfrac{x-3}{x^2-1}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A Hàm số không liên tục tại các điểm $x = \pm 1$.

B Hàm số liên tục tại mọi $x \in \mathbb{R}$.

C Hàm số liên tục tại các điểm $x = -1$.

D Hàm số liên tục tại các điểm $x = 1$.

Lời giải.

Hàm số $y = \dfrac{x-3}{x^2-1}$ có tập xác định $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$. Do đó hàm số không liên tục tại các điểm $x = \pm 1$.

Chọn đáp án A □

CÂU 10. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos x}{x^2} & \text{khi } x \neq 0 \\ 1 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$. Khẳng định nào đúng trong các khẳng định sau?

A Hàm số gián đoạn tại $x = \sqrt{2}$.

B $f(\sqrt{2}) < 0$.

C $f(x)$ liên tục tại $x = 0$.

D $f(x)$ gián đoạn tại $x = 0$.

Lời giải.

Hàm số xác định trên $\mathbb{R}$.

Ta có $f(0) = 1$ và $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\sin^2 \dfrac{x}{2}}{4 \cdot \left(\dfrac{x}{2}\right)^2} = \dfrac{1}{2}$.

Vì $f(0) \neq \lim\limits_{x\to 0} f(x)$ nên $f(x)$ gián đoạn tại $x = 0$.

Chọn đáp án D □

Dạng 3. Hàm số liên tục trên khoảng, đoạn

- Hàm số $y = f(x)$ được gọi là liên tục trên một khoảng nếu nó liên tục tại mọi điểm của khoảng đó.
- Hàm số $y = f(x)$ được gọi là liên tục trên đoạn $[a,b]$ nếu nó liên tục trên khoảng (a,b) và

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a), \quad \lim_{x\to b^-} f(x) = f(b).$$

- Đồ thị của hàm số liên tục trên một khoảng là một đường liền nét trên khoảng đó.

1. Ví dụ mẫu

VÍ DỤ 1. Xét tính liên tục của hàm số sau trên tập xác định của chúng.

a) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-x-2}{x+1} & \text{khi } x\neq -1\\ -3 & \text{khi } x=-1\end{cases}$.

b) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x+1}{(x-1)^2} & \text{khi } x\neq 1\\ 3 & \text{khi } x=1\end{cases}$.

Lời giải.

a) Tập xác định của hàm số là $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.

Khi $x\neq -1$, $f(x)=\dfrac{x^2-x-2}{x+1}$ là hàm phân thức hữu tỉ nên liên tục trên $(-\infty;-1)\cup(-1;+\infty)$.

Tại điểm $x=-1$, ta có $f(-1)=-3$.
$\lim\limits_{x\to -1} f(x)=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-x-2}{x+1}=\lim\limits_{x\to -1}(x-2)=-3=f(-1)$.
Do đó hàm số liên tục tại $x=-1$.

Vậy hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

b) Tập xác định của hàm số là $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.

Khi $x\neq 1$, $f(x)=\dfrac{2x+1}{(x-1)^2}$ là hàm phân thức hữu tỉ nên liên tục trên $(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$.

Tại điểm $x=1$, ta có $f(1)=3$.
$\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x+1}{(x-1)^2}=+\infty\neq f(-1)$.
Do đó hàm số gián đoạn tại $x=1$.

Vậy hàm số liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

□

VÍ DỤ 2. Xét tính liên tục của hàm số sau trên tập xác định của chúng.

a) $f(x)=\begin{cases}x^2+3x & \text{khi } x\geq 2\\ 6x+1 & \text{khi } x<2.\end{cases}$

b) $f(x)=\begin{cases}x^2-3x+5 & \text{khi } x>1\\ 3 & \text{khi } x=1\\ 2x+1 & \text{khi } x<1.\end{cases}$

Lời giải.

a) Tập xác định của hàm số là $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.

Khi $x>2$, $f(x)=x^2+3x$ là hàm đa thức nên liên tục trên $(2;+\infty)$.

Khi $x<2$, $f(x)=6x+1$ là hàm đa thức nên liên tục trên $(-\infty;2)$.

Tại điểm $x=2$, ta có $f(2)=10$.
$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}(x^2+3x)=10$ và $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}(6x+1)=13$.
Vì không tồn tại $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ nên hàm số gián đoạn tại $x=2$.

Vậy hàm số liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{2\}$.

b) Tập xác định của hàm số là $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.

Khi $x>1$, $f(x)=x^2-3x+5$ là hàm đa thức nên liên tục trên $(1;+\infty)$.

Khi $x<1$, $f(x)=2x+1$ là hàm đa thức nên liên tục trên $(-\infty;1)$.

Tại điểm $x=1$, ta có $f(1)=3$.
$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(x^2-3x+5)=3$ và $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(2x+1)=3$.
Vì $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=f(1)$ nên hàm số liên tục tại $x=1$.

Vậy hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

□

2. Bài tập rèn luyện

BÀI 1. Xét tính liên tục của hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-2}{x^2-4} & \text{khi } x\neq 2\\ 1 & \text{khi } x=2\end{cases}$ trên tập xác định.

Lời giải.

Tập xác định của hàm số là $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.
Khi $x\neq 2, f(x)=\dfrac{x-2}{x^2-4}$ là hàm phân thức hữu tỉ nên liên tục trên $(-\infty;2)\cup(2;+\infty)$.
Tại điểm $x=2$, ta có $f(2)=1$.
$\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{x+2}=\dfrac{1}{4}\neq f(2)$.
Do đó hàm số gián đoạn tại $x=2$.
Vậy hàm số liên tục trên $(-\infty;2)$ và $(2;+\infty)$. □

BÀI 2. Xét tính liên tục của hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-1}{x-1} & \text{khi } x\neq 1\\ 3 & \text{khi } x=1\end{cases}$ trên tập xác định.

Lời giải.

Tập xác định của hàm số là $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.
Khi $x\neq 1, f(x)=\dfrac{x^3-1}{x-1}$ là hàm phân thức hữu tỉ nên liên tục trên $(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$.
Tại điểm $x=1$, ta có $f(1)=3$.
$\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}(x^2+x+1)=3=f(1)$.
Do đó hàm số liên tục tại $x=1$.
Vậy hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$. □

BÀI 3. Xét tính liên tục của hàm số $f(x)=\begin{cases}x^2 & \text{khi } x\geq -2\\ 2-x & \text{khi } x<-2\end{cases}$ trên tập xác định.

Lời giải.

Tập xác định của hàm số là $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.
Khi $x>-2, f(x)=x^2$ là hàm đa thức nên liên tục trên $(-2;+\infty)$.
Khi $x<-2, f(x)=2-x$ là hàm đa thức nên liên tục trên $(-\infty;-2)$.
Tại điểm $x=-2$, ta có $f(-2)=4$.
$\lim\limits_{x\to(-2)^+} f(x)=\lim\limits_{x\to(-2)^+} x^2=4$ và $\lim\limits_{x\to(-2)^-} f(x)=\lim\limits_{x\to(-2)^-}(2-x)=4$. Vì $\lim\limits_{x\to(-2)^+} f(x)=\lim\limits_{x\to(-2)^-} f(x)=f(-2)$ nên hàm số liên tục tại $x=2$.
Vậy hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$. □

BÀI 4. Xét tính liên tục của hàm số $f(x)=\begin{cases}3x-2 & \text{khi } x>-1\\ 1 & \text{khi } x=-1\\ x^2-6 & \text{khi } x<-1\end{cases}$ trên tập xác định.

Lời giải.

Tập xác định của hàm số là $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.
Khi $x>-1, f(x)=3x-2$ là hàm đa thức nên liên tục trên $(-1;+\infty)$.
Khi $x<-1, f(x)=x^2-6$ là hàm đa thức nên liên tục trên $(-\infty;-1)$.
Tại điểm $x=-1$, ta có $f(-1)=1$.
$\lim\limits_{x\to(-1)^+} f(x)=\lim\limits_{x\to(-1)^+}(3x-2)=-5$ và $\lim\limits_{x\to(-1)^-} f(x)=\lim\limits_{x\to(-1)^-}(x^2-6)=3$.
Vì không tồn tại $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ nên hàm số gián đoạn tại $x=-1$. Vậy hàm số liên tục trên $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$. □

BÀI 5. Cho hàm số $y=f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-x}{\sqrt{2-x}-1} & \text{khi } x<1\\ 2x & \text{khi } x\geq 1\end{cases}$. Xét sự liên tục của hàm số trên tập xác định.

Lời giải.

- Hàm số xác định và liên tục trên $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$.
- Xét tính liên tục tại $x=1$

$$f(1)=2\cdot 1=2.$$

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{\sqrt{2-x}-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(1-x)(\sqrt{2-x}+1)}{2-x-1}=\lim_{x\to 1}(\sqrt{2-x}+1)=2.$$

Ta thấy $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=f(1)$ nên hàm số liên tục tại x = 1.

Vậy hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$. □

BÀI 6. Tìm số điểm gián đoạn của hàm số $f(x)=\begin{cases}0,5 & \text{khi } x=-1\\ \dfrac{x(x+1)}{x^2-1} & \text{khi } x\neq -1,\ x\neq 1\\ 1 & \text{khi } x=1\end{cases}$?

Lời giải.

Hàm số $y=f(x)$ có tập xác định $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.

Hàm số $f(x)=\dfrac{x(x+1)}{x^2-1}$ liên tục trên mỗi khoảng $(-\infty;-1)$, $(-1;1)$ và $(1;+\infty)$.

(i) Xét tại $x=-1$, ta có $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x(x+1)}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x}{x-1}=\dfrac{1}{2}=f(-1)\Rightarrow$ Hàm số liên tục tại $x=-1$.

(ii) Xét tại $x=1$, ta có $\begin{cases}\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x(x+1)}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x}{x-1}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x(x+1)}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x}{x-1}=-\infty\end{cases}$ $\Rightarrow$Hàm số $y=f(x)$ gián đoạn tại $x=1$. □

BÀI 7. Tìm điểm gián đoạn của hàm số $h(x)=\begin{cases}2x & \text{khi } x<0\\ x^2+1 & \text{khi } 0\le x\le 2\\ 3x-1 & \text{khi } x>2\end{cases}$?

Lời giải.

Hàm số $y=h(x)$ có tập xác định $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.

Dễ thấy hàm số $y=h(x)$ liên tục trên mỗi khoảng $(-\infty;0),(0;2)$ và $(2;+\infty)$.

Ta có $\begin{cases}h(0)=1\\ \lim\limits_{x\to 0^-} h(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} 2x=0\end{cases}\Rightarrow f(x)$ không liên tục tại $x=0$.

Ta có $\begin{cases}h(2)=5\\ \lim\limits_{x\to 2^-} h(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}(x^2+1)=5\\ \lim\limits_{x\to 2^+} h(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}(3x-1)=5\end{cases}\Rightarrow f(x)$ liên tục tại $x=2$. □

BÀI 8. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}-x\cos x & \text{khi } x<0\\ \dfrac{x^2}{1+x} & \text{khi } 0\le x<1\\ x^3 & \text{khi } x\ge 1\end{cases}$. Hàm số $f(x)$ gián đoạn tại điểm nào?

Lời giải.

Hàm số $y=f(x)$ có tập xác định $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.

Dễ thấy $f(x)$ liên tục trên mỗi khoảng $(-\infty;0),(0;1)$ và $(1;+\infty)$.

Ta có $\begin{cases}f(0)=0\\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(-x\cos x)=0\\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^2}{1+x}=0\end{cases}\Rightarrow f(x)$ liên tục tại $x=0$.

Ta có $\begin{cases}f(1)=1\\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^2}{1+x}=\dfrac{1}{2}\\ \lim\limits_{x\to 1^+}\ \lim f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\ \lim x^3=1\end{cases}\Rightarrow f(x)$ không liên tục tại $x=1$.

□

3. Câu hỏi trắc nghiệm

CÂU 1. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $(a;b)$. Điều kiện cần và đủ để hàm số liên tục trên $[a;b]$ là

Ⓐ $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=f(a)$ và $\lim\limits_{x\to b^+} f(x)=f(b)$.

Ⓑ $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=f(a)$ và $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=f(b)$.

Ⓒ $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=f(a)$ và $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=f(b)$.

Ⓓ $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=f(a)$ và $\lim\limits_{x\to b^+} f(x)=f(b)$.

Lời giải.

Theo định nghĩa hàm số liên tục trên đoạn $[a;b]$. Chọn $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=f(a)$ và $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=f(b)$.

Chọn đáp án Ⓒ □

CÂU 2. Cho hàm số $y=\begin{cases}\dfrac{1-x^3}{1-x} & \text{khi } x<1\\ 1 & \text{khi } x\ge 1\end{cases}$. Hãy chọn kết luận đúng

(A) y liên tục phải tại $x=1$.
(B) y liên tục tại $x=1$.
(C) y liên tục trái tại $x=1$.
(D) y liên tục trên $\mathbb{R}$.

Lời giải.

Ta có $y(1)=1$.

Ta có $\lim\limits_{x\to 1^+} y=1$; $\lim\limits_{x\to 1^-} y=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{1-x^3}{1-x}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{(1-x)\left(1+x+x^2\right)}{1-x}=\lim\limits_{x\to 1^-}\left(1+x+x^2\right)=4$.

Nhận thấy $\lim\limits_{x\to 1^+} y=y(1)$, suy ra y liên tục phải tại $x=1$.

Chọn đáp án (A) □

CÂU 3. Trong các hàm số sau, hàm số nào liên tục trên $\mathbb{R}$?

(A) $y=x^3-x$.
(B) $y=\cot x$.
(C) $y=\dfrac{2x-1}{x-1}$.
(D) $y=\sqrt{x^2-1}$.

Lời giải.

Vì $y=x^3-x$ là đa thức nên liên tục trên $\mathbb{R}$.

Chọn đáp án (A) □

CÂU 4. Trong các hàm số sau, hàm số nào liên tục trên $\mathbb{R}$?

(A) $f(x)=\tan x+5$.
(B) $f(x)=\dfrac{x^2+3}{5-x}$.
(C) $f(x)=\sqrt{x-6}$.
(D) $f(x)=\dfrac{x+5}{x^2+4}$.

Lời giải.

Hàm số $f(x)=\dfrac{x+5}{x^2+4}$ là hàm phân thức hữu tỉ và có tập xác định là $\mathscr{D}=\mathbb{R}$ do đó hàm số $f(x)=\dfrac{x+5}{x^2+4}$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Chọn đáp án (D) □

CÂU 5. Cho hàm số $y=\begin{cases}-x^2+x+3 & \text{khi } x\ge 2\\ 5x+2 & \text{khi } x<2\end{cases}$. Chọn mệnh đề sai trong các mệnh đề sau:

(A) Hàm số liên tục tại $x_0=1$.
(B) Hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.
(C) Hàm số liên tục trên các khoảng $(-\infty;2)$, $(2;+\infty)$.
(D) Hàm số gián đoạn tại $x_0=2$.

Lời giải.

+ Với $x>2$, ta có $f(x)=-x^2+x+3$ là hàm đa thức $\Rightarrow$ hàm số $f(x)$ liên tục trên khoảng $(2;+\infty)$.
+ Với $x<2$, ta có $f(x)=5x+2$ là hàm đa thức $\Rightarrow$ hàm số $f(x)$ liên tục trên khoảng $(-\infty;2)$.
+ Tại $x=2$.
$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\left(-x^2+x+3\right)=1$ $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}(5x+2)=12\Rightarrow \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)\ne\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$. Do đó không tồn tại $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$. Vậy hàm số gián đoạn tại $x_0=2$ hay Hàm số không liên tục trên $\mathbb{R}$.

Chọn đáp án (B) □

CÂU 6. Hàm số nào sau đây liên tục trên $\mathbb{R}$?

(A) $f(x)=\sqrt{x}$.
(B) $f(x)=x^4-4x^2$.
(C) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^4-4x^2}{x+1}}$.
(D) $f(x)=\dfrac{x^4-4x^2}{x+1}$.

Lời giải.

Vì hàm số $f(x)=x^4-4x^2$ có dạng đa thức với $\mathscr{D}=\mathbb{R}$ nên hàm số này liên tục trên $\mathbb{R}$

Chọn đáp án (B) □

CÂU 7. Cho bốn hàm số $f_1(x)=\sqrt{x-1}$; $f_2(x)=x$; $f_3(x)=\tan x$; $f_4(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x-1} & \text{khi } x\ne 1\\ 2 & \text{khi } x=1\end{cases}$. Hỏi trong bốn hàm số trên có bao nhiêu hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$?

(A) 1.
(B) 2.
(C) 3.
(D) 4.

Lời giải.

+ Hàm số $f_1(x)=\sqrt{x-1}$ và $f_3(x)=\tan x$ không có tập xác định là $\mathbb{R}$ nên hàm số không liên tục trên $\mathbb{R}$.
+ Hàm số $f_2(x)=x$ liên tục trên $\mathbb{R}$.
+ Hàm số $f_4(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x-1} \text{ khi } x\ne 1\\ 2 \text{ khi } x=1\end{cases}$ có tập xác định là $\mathbb{R}$ và hàm số liên tục trên các khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$. Ta cần xét tính liên tục của hàm số $y=f_4(x)$ tại $x=1$.

Ta có $f_4(1)=2$ và $\lim\limits_{x\to 1} f_4(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}(x+1)=2=f_4(1)$ nên hàm số liên tục tại $x=1$. Do đó, hàm số $y=f_4(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Vậy trong bốn hàm số trên có 2 hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

Chọn đáp án (B) □

CÂU 8. Hàm số nào dưới đây liên tục trên $\mathbb{R}$?

Ⓐ $y=x^3+3x-2$. Ⓑ $y=\sqrt{x^2-1}$. Ⓒ $y=\dfrac{x+1}{x-1}$. Ⓓ $y=x+\tan x$.

Lời giải.

Hàm số $y=x^3+3x-2$ có tập xác định là $\mathbb{R}$ nên liên tục trên $\mathbb{R}$.
Hàm số $y=\sqrt{x^2-1}$ có tập xác định là $(-\infty;-1]\cup[1;+\infty)$ nên liên tục trên $(-\infty;-1]\cup[1;+\infty)$.
Hàm số $y=\dfrac{x+1}{x-1}$ liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.
Hàm số $y=x+\tan x$ liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}$.
Chọn đáp án Ⓐ □

CÂU 9. Hàm số $f(x)=\begin{cases}3 & \text{khi } x=-1\\ \dfrac{x^4+x}{x^2+x} & \text{khi } x\neq -1, x\neq 0\\ 1 & \text{khi } x=0\end{cases}$ liên tục tại

Ⓐ mọi điểm trừ $x=0,x=-1$. Ⓑ mọi điểm $x\in\mathbb{R}$.
Ⓒ mọi điểm trừ $x=-1$. Ⓓ mọi điểm trừ $x=0$.

Lời giải.

Dễ thấy hàm số $f(x)$ liên tục tại mọi điểm $x\neq -1,x\neq 0$.
+) Tại $x=0$:
Ta có $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^4+x}{x^2+x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x^3+1)}{(x+1)}=1$ và $f(0)=1$, suy ra hàm số liên tục tại $x=0$.
+) Tại $x=-1$:
Ta có $\lim\limits_{x\to -1}f(x)=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^4+x}{x^2+x}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(x+1)(x^2-x+1)}{(x+1)}=3=f(-1)$, suy ra hàm số liên tục tại $x=-1$.
Vậy hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.
Chọn đáp án Ⓑ □

CÂU 10. Số điểm gián đoạn của hàm số $f(x)=\begin{cases}0,5 & \text{khi } x=-1\\ \dfrac{x(x+1)}{x^2-1} & \text{khi } x\neq \pm 1\\ 1 & \text{khi } x=1\end{cases}$ là

Ⓐ 0. Ⓑ 1. Ⓒ 2. Ⓓ 3.

Lời giải.

Hàm số liên tục trên các khoảng $(-\infty;-1)$, $(-1;1)$ và $(1;+\infty)$
Ta có $f(-1)=0,5$, $f(1)=1$
$+\lim\limits_{x\to -1}f(x)=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x(x+1)}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x}{x-1}=\dfrac{-1}{-1-1}=0,5=f(-1)$ nên hàm số liên tục tại $x=-1$
$+\lim\limits_{x\to 1}f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x(x+1)}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x}{x-1}$
Vì $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x}{x-1}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x}{x-1}=-\infty$ nên không tồn tại giới hạn $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$
Suy ra hàm số gián đoạn tại $x=1$
Vậy hàm số có một điểm gián đoạn.
Chọn đáp án Ⓑ □

CÂU 11. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^5+x^2}{x^3+x^2} & \text{khi } x\neq 0; x\neq -1\\ 3 & \text{khi } x=-1\\ 1 & \text{khi } x=0\end{cases}$. Khi đó

Ⓐ Hàm số liên tục tại mỗi điểm $x\in\mathbb{R}$. Ⓑ Hàm số liên tục tại mỗi điểm trừ $x=0$.
Ⓒ Hàm số liên tục tại mỗi điểm trừ $x=-1$. Ⓓ Hàm số liên tục tại mỗi điểm trừ $x=-1;x=0$.

Lời giải.

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$
Xét $x\neq 0,x\neq -1$:
$f(x)=\dfrac{x^5+x^2}{x^3+x^2}=\dfrac{x^2(x^3+1)}{x^2(x+1)}=x^2-x+1\Rightarrow$ hàm đa thức liên tục khi $x\neq 0,x\neq -1$.
Xét: $x=-1$:
$f(-1)=3$, $\lim\limits_{x\to -1}f(x)=(-1)^2-(-1)+1=3=f(-1)\Rightarrow$ hàm số liên tục khi $x=-1$.
Xét: $x=0$:
$f(0)=1$, $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0^2-0+1=1\Rightarrow$ hàm số liên tục khi $x=0$.

Vậy hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.
Chọn đáp án (A) □

Dạng 4. Bài toán chứa tham số

1. Ví dụ mẫu

VÍ DỤ 1. Tìm m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-16}{x-4} \text{ khi } x > 4 \\ mx+1 \text{ khi } x \le 4 \end{cases}$ liên tục tại điểm $x = 4$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x) = f(4) = 4m+1$; $\lim\limits_{x\to 4^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 4^+} \dfrac{x^2-16}{x-4} = \lim\limits_{x\to 4^+}(x+4) = 8$.

Hàm số liên tục tại điểm $x = 4 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 4^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 4^+} f(x) = f(4) \Leftrightarrow 4m+1 = 8 \Leftrightarrow m = \dfrac{7}{4}$. □

VÍ DỤ 2. Tìm m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-x-2}{x+1} \text{ khi } x > -1 \\ mx-2m^2 \text{ khi } x \le -1 \end{cases}$ liên tục tại $x = -1$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

- $f(-1) = -m-2m^2$
- $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^-} (mx-2m^2) = -m-2m^2$.
- $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{x^2-x-2}{x+1} = \lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{(x+1)(x-2)}{x+1} = \lim\limits_{x\to -1^+}(x-2) = -3$.

Hàm số liên tục tại $x = -1$ khi và chỉ khi $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = f(-1)$

$\Leftrightarrow -m-2m^2 = -3 \Leftrightarrow 2m^2+m-3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = -\dfrac{3}{2} \end{array}\right.$.

Vậy các giá trị của m là $m \in \left\{1; -\dfrac{3}{2}\right\}$. □

VÍ DỤ 3. Tìm giá trị của tham số m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+3x+2}{x^2-1} & \text{khi} \quad x < -1 \\ mx+2 & \text{khi} \quad x \ge -1 \end{cases}$ liên tục tại $x = -1$?

Lời giải.

Ta có

- $f(-1) = -m+2$.
- $\lim\limits_{x\to (-1)^+} f(x) = -m+2$.
- $\lim\limits_{x\to (-1)^-} f(x) = \lim\limits_{x\to (-1)^-} \dfrac{x^2+3x+2}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to (-1)^-} \dfrac{(x+1)(x+2)}{(x-1)(x+1)} = \lim\limits_{x\to (-1)^-} \dfrac{x+2}{x-1} = \dfrac{-1}{2}$.

Hàm số liên tục tại $x = -1 \Leftrightarrow f(-1) = \lim\limits_{x\to (-1)^+} f(x) = \lim\limits_{x\to (-1)^-} f(x) \Leftrightarrow -m+2 = \dfrac{-1}{2} \Leftrightarrow m = \dfrac{5}{2}$. □

VÍ DỤ 4. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-3x+2}{\sqrt{x+2}-2} & khi\ x > 2 \\ m^2x-4m+6 & khi\ x \le 2 \end{cases}$, m là tham số. Với giá trị nào của m thì hàm số đã cho liên tục tại $x = 2$?

Lời giải.

Ta có

$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{x^2-3x+2}{\sqrt{x+2}-2} = \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{(x-2)(x-1)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2^+}(x-1)\left(\sqrt{x+2}+2\right) = 4$.

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-}\left(m^2x-4m+6\right) = 2m^2-4m+6$.

$f(2) = 2m^2-4m+6$.

Để hàm số liên tục tại $x = 2$ thì $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = f(2) \Leftrightarrow 2m^2-4m+6 = 4 \Leftrightarrow 2m^2-4m+2 = 0 \Leftrightarrow m = 1$.

Vậy có một giá trị của m thỏa mãn hàm số đã cho liên tục tại $x = 2$. □

VÍ DỤ 5. Tìm giá trị của m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{x} & \text{khi} \quad x < 0 \\ m + \dfrac{1-x}{1+x} & \text{khi} \quad x \ge 0 \end{cases}$ liên tục tại $x = 0$?

Lời giải.

Ta có

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(m+\dfrac{1-x}{1+x}\right) = m+1$. $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-}\left(\dfrac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{x}\right) = \lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{-2x}{x\left(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}\right)} = \lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{-2}{\left(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}\right)} = -1$.

$f(0) = m+1$.

Để hàm liên tục tại $x=0$ thì $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = f(0) \Leftrightarrow m+1=-1 \Rightarrow m=-2$. □

2. Bài tập rèn luyện

BÀI 1. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1} & \text{khi } x<3,\ x\neq 1 \\ 4 & \text{khi } x=1 \\ \sqrt{x+1} & \text{khi } x\geq 3 \end{cases}$. Xét tính liên tục của hàm số $f(x)$?

Lời giải.

Hàm số $y=f(x)$ có tập xác định $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.

Dễ thấy hàm số $y=f(x)$ liên tục trên mỗi khoảng $(-\infty;1),(1;3)$ và $(3;+\infty)$.

Ta có $\begin{cases} f(1)=4 \\ \lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}(x+1)=2 \end{cases} \Rightarrow f(x)$ gián đoạn tại $x=1$.

Ta có $\begin{cases} f(3)=2 \\ \lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{x^2-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 3^-}(x+1)=4 \end{cases} \Rightarrow f(x)$ gián đoạn tại $x=3$. □

BÀI 2. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1} & \text{khi } (x>1) \\ m^2+m+\dfrac{1}{4} & \text{khi } (x\leq 1) \end{cases}$. Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để hàm số $f(x)$ liên tục tại $x=1$?

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{1}{\sqrt{x+3}+2} = \dfrac{1}{4}$; $f(1) = \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = m^2+m+\dfrac{1}{4}$.

Để hàm số $f(x)$ liên tục tại $x=1$ thì $m^2+m+\dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-1 \\ m=0 \end{array}\right.$. □

BÀI 3. Tìm a để hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x+a & \text{khi } x\leq 1 \\ \dfrac{x^3-x^2+2x-2}{x-1} & \text{khi } x>1 \end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$?

Lời giải.

Khi $x<1$ thì $f(x)=2x+a$ là hàm đa thức nên liên tục trên khoảng $(-\infty;\ 1)$.

Khi $x>1$ thì $f(x) = \dfrac{x^3-x^2+2x-2}{x-1}$ là hàm phân thức hữu tỉ xác định trên khoảng $(1;\ +\infty)$ nên liên tục trên khoảng $(1;\ +\infty)$.

Xét tính liên tục của hàm số tại điểm $x=1$, ta có

$+\ f(1) = 2+a$.

$+\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-}(2x+a) = 2+a$.

$+\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^3-x^2+2x-2}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{(x-1)\left(x^2+2\right)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^+}\left(x^2+2\right) = 3$.

Hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow$ hàm số $f(x)$ liên tục tại $x=1$.

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = f(1) \to 2a+1=3 \to a=1$. □

BÀI 4. Tìm m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+4x+3}{x+1} & \text{khi } x>-1 \\ mx+2 & \text{khi } x\leq -1 \end{cases}$ liên tục tại điểm $x=-1$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to(-1)^+} f(x) = \lim\limits_{x\to(-1)^+}\dfrac{x^2+4x+3}{x+1} = \lim\limits_{x\to(-1)^+}\dfrac{(x+1)(x+3)}{x+1} = \lim\limits_{x\to(-1)^+}(x+3) = 2$.

$\lim\limits_{x\to(-1)^-} f(x) = \lim\limits_{x\to(-1)^-}(mx+2) = -m+2$.

$f(-1) = -m+2$.

Để hàm số đã cho liên tục tại điểm $x=-1$ thì $\lim\limits_{x\to(-1)^+} f(x) = \lim\limits_{x\to(-1)^-} f(x) = f(-1) \Leftrightarrow 2=-m+2 \Leftrightarrow m=0$. □

BÀI 5. Cho hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}\sin\pi x & \text{khi } |x|\le 1\\ x+1 & \text{khi } |x|>1\end{cases}$. Tìm các khoảng liên tục của hàm số?

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to 1^+}(x+1)=2$ và $\lim\limits_{x\to 1^-}\sin\pi x=0\Rightarrow \lim\limits_{x\to 1^+}f\left(x\right)\ne\lim\limits_{x\to 1^-}f\left(x\right)$ do đó hàm số gián đoạn tại $x=1$.
Tương tự $\lim\limits_{x\to(-1)^-}(x+1)=0$ và $\lim\limits_{x\to(-1)^+}\sin\pi x=0$
$\Rightarrow \lim\limits_{x\to(-1)^+}f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to(-1)^-}f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to -1}f\left(x\right)=f\left(-1\right)$ do đó hàm số liên tục tại $x=-1$.
Với $x\ne\pm 1$ thì hàm số liên tục trên tập xác định.
Vậy hàm số đã cho liên tục trên các khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$. □

BÀI 6. Cho hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}\sin x & \text{nếu } \cos x\ge 0\\ 1+\cos x & \text{nếu } \cos x<0\end{cases}$. Hỏi hàm số f có tất cả bao nhiêu điểm gián đoạn trên khoảng $(0;2018)$?

Lời giải.

Vì f là hàm lượng giác nên hàm số f gián đoạn khi và chỉ khi hàm số f gián đoạn tại x làm cho $\cos x=0\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi\ (k\in\mathbb{Z})\in(0;2018)\Leftrightarrow 0<\dfrac{\pi}{2}+k\pi<2018\Leftrightarrow 0<\dfrac{1}{2}+k<\dfrac{2018}{\pi}\Leftrightarrow -\dfrac{1}{2}<k<\dfrac{2018}{\pi}-\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow 0\le k\le 641$. □

BÀI 7. Tìm m để hàm số $y=f\left(x\right)=\begin{cases}x^2+2\sqrt{x-2} & \text{khi } x\ge 2\\ 5x-5m+m^2 & \text{khi } x<2\end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$?

Lời giải.

Tập xác định $\mathbb{R}$.
+ Xét trên $(2;+\infty)$ khi đó $f\left(x\right)=x^2+2\sqrt{x-2}$.
$\forall x_0\in(2;+\infty)$, $\lim\limits_{x\to x_0}\left({x_0}^2+2\sqrt{x_0-2}\right)=x_0^2+2\sqrt{x_0-2}=f\left(x_0\right)$ $\Rightarrow$hàm số liên tục trên $(2;+\infty)$.
+ Xét trên $(-\infty;2)$ khi đó $f\left(x\right)=5x-5m+m^2$ là hàm đa thức liên tục trên $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ hàm số liên tục trên $(-\infty;2)$.
+ Xét tại $x_0=2$, ta có $f\left(2\right)=4$.
$\lim\limits_{x\to 2^+}f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 2^+}\left(x^2+2\sqrt{x-2}\right)=4$; $\lim\limits_{x\to 2^-}f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 2^-}\left(5x-5m+m^2\right)=m^2-5m+10$. Để hàm số đã cho liên tục trên $\mathbb{R}$ thì nó phải liên tục tại $x_0=2$.
$\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to 2^+}f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 2^-}f\left(x\right)=f\left(2\right)\Leftrightarrow m^2-5m+10=4\Leftrightarrow m^2-5m+6=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=2\\ m=3\end{array}\right.$. □

BÀI 8. Cho hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}3x+a-1 & \text{khi } x\le 0\\ \dfrac{\sqrt{1+2x}-1}{x} & \text{khi } x>0\end{cases}$. Tìm tất cả giá trị thực của a để hàm số đã cho liên tục trên $\mathbb{R}$.

Lời giải.

Hàm số liên tục tại mọi điểm $x\ne 0$ với mọi a.
Với $x=0$, ta có $f\left(0\right)=a-1$.
$\lim\limits_{x\to 0^-}f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 0^-}(3x+a-1)=a-1$.
$$\lim\limits_{x\to 0^+}f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sqrt{1+2x}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{2x}{x\left(\sqrt{1+2x}+1\right)}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{2}{\sqrt{1+2x}+1}=1.$$
Hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi hàm số liên tục tại $x=0\Leftrightarrow a-1=1\Leftrightarrow a=2$. □

BÀI 9. Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m để hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}m^2x^2 & \text{khi } x\le 2\\ (1-m)\,x & \text{khi } x>2\end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$?

Lời giải.

Ta có hàm số luôn liên tục với $\forall x\ne 2$.
Tại $x=2$, ta có $\lim\limits_{x\to 2^+}f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 2^-}(1-m)\,x=(1-m)\,2$;
$\lim\limits_{x\to 2^-}f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 2^-}\left(m^2x^2\right)=4m^2$; $f\left(2\right)=4m^2$.
Hàm số liên tục tại $x=2$ khi và chỉ khi
$\lim\limits_{x\to 2^+}f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 2^+}f\left(x\right)=f\left(2\right)\Leftrightarrow 4m^2=(1-m)\,2\Leftrightarrow 4m^2+2m-2=0.\ (1)$
Phương trình luôn có hai nghiệm thực phân biệt. Vậy có hai giá trị của m.
□

BÀI 10. Tìm P để hàm số $y=\begin{cases}\dfrac{x^2-4x+3}{x-1} & \text{khi } x>1\\ 6Px-3 & \text{khi } x\le 1\end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Lời giải.

Hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}\Rightarrow y=f\left(x\right)$ liên tục tại $x=1\Rightarrow\lim\limits_{x\to 1^+}f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 1^-}f\left(x\right)=f\left(1\right)$.
$$\lim\limits_{x\to 1^+}f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^2-4x+3}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}(x-3)=-2.$$

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} (6Px - 3) = 6P - 3$.
$f(1) = 6P - 3$.
Do đó $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = f(1) \Leftrightarrow 6P - 3 = -2 \Leftrightarrow P = \dfrac{1}{6}$. □

BÀI 11. Hàm số $f(x) = \begin{cases} ax + b + 1 \text{ khi } x > 0 \\ a\cos x + b\sin x \text{ khi } x \leq 0 \end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi

Lời giải.
Khi $x < 0$ thì $f(x) = a\cos x + b\sin x$ liên tục với $x < 0$.
Khi $x > 0$ thì $f(x) = ax + b + 1$ liên tục với mọi $x > 0$.
Tại $x = 0$ ta có $f(0) = a$.
$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} (ax + b + 1) = b + 1$.
$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} (a\cos x + b\sin x) = a$.
Để hàm số liên tục tại $x = 0$ thì $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = f(0) \Leftrightarrow a = b + 1 \Leftrightarrow a - b = 1$. □

BÀI 12. Cho hàm số $y = \begin{cases} 3x + 1 \text{ khi } x \geq -1 \\ x + m \text{ khi } x < -1 \end{cases}$, m là tham số. Tìm m để hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

Lời giải.
Ta có hàm số liên tục trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(-1; +\infty)$.
Xét tính liên tục của hàm số tại $x = -1$.
Có $y(-1) = -2 = \lim\limits_{x\to -1^+} y$ và $\lim\limits_{x\to -1^-} y = -1 + m$.
Để hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ thì $y(-1) = \lim\limits_{x\to -1^+} y = \lim\limits_{x\to -1^-} y \Leftrightarrow -2 = -1 + m \Leftrightarrow m = -1$. □

Dạng 5. Chứng minh phương trình có nghiệm

Để chứng minh minh một phương trình có nghiệm, ta thường tiến hành

- Đặt $f(x)$ là vế trái của phương trình (ứng với vế phải bằng 0).
- Lập luận hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ hoặc trên một đoạn con của $\mathbb{R}$ liên quan tới bài toán.
- Chỉ ra tồn tại các số a, b $(a < b)$ với a, b thuộc đoạn con đang xét mà $f(a) \cdot f(b) < 0$. Dựa vào tính chất của hàm số liên tục ta suy ra phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm thuộc khoảng $(a; b)$.

Nếu bài toán yêu cầu chứng minh phương trình có k nghiệm thì cần lập luận k đoạn con như trên. Nhiều trường hợp việc chỉ ra các số a, b gặp khó khăn, ta có thể khai thác $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ hoặc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ để có cơ sở lập luận.

1. Ví dụ mẫu

VÍ DỤ 1. Chứng minh rằng phương trình $x^5 + 4x^3 - x^2 - 1 = 0$ có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(0; 1)$.
Lời giải.
Đặt $f(x) = x^5 + 4x^3 - x^2 - 1$. Khi đó $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên cũng liên tục trên đoạn $[0; 1]$.
Ta có $f(0) = -1$ và $f(1) = 3$ nên $f(0) \cdot f(1) < 0$.
Do đó phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm thuộc $(0; 1)$. □

VÍ DỤ 2. Chứng minh rằng phương trình $x^5 - 5x^3 + 4x - 1 = 0$ có đúng 5 nghiệm phân biệt.
Lời giải.
Đặt $f(x) = x^5 - 5x^3 + 4x - 1$. Khi đó $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.
Ta có $f(-2) = -1 < 0$; $f\left(-\dfrac{3}{2}\right) = \dfrac{173}{32} > 0$; $f(0) = -1 < 0$; $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{18}{32} > 0$; $f(1) = -1 < 0$; $f(3) = 119 > 0$.
Dựa vào tính chất liên tục của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$, suy ra trên mỗi khoảng $\left(-2; -\dfrac{3}{2}\right)$; $\left(-\dfrac{3}{2}; 0\right)$; $\left(0; \dfrac{1}{2}\right)$; $\left(\dfrac{1}{2}; 1\right)$; $(1; 3)$ có ít nhất một nghiệm.
Do đó phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất 5 nghiệm phân biệt. Vì $f(x)$ là phương trình bậc 5 nên có tối đa 5 nghiệm.
Vậy phương trình $f(x) = 0$ có đúng 5 nghiệm phân biệt. □

VÍ DỤ 3. Chứng minh rằng phương trình $x^3 - 2mx^2 - x + m = 0$ luôn có nghiệm với mọi m (m là tham số).
Lời giải.
Xét hàm số $f(x) = x^3 - 2mx^2 - x + m$. Khi đó $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.
Ta có $f(0) = m$ và $f(1) = -m$ nên $f(0) \cdot f(1) = -m^2 \leq 0$ với mọi m nên phương trình $f(x) = 0$ luôn có nghiệm thuộc đoạn $[0; 1]$ với mọi m. □

VÍ DỤ 4. Chứng minh rằng phương trình $\left(1-m^2\right)(x+1)^3+x^2-x-3$ luôn có nghiệm với mọi giá trị của tham số m.

Lời giải.

Đặt $f(x)=\left(1-m^2\right)(x+1)^3+x^2-x-3$ thì $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Ta có

$$f(0)=-m^2-2<0, \forall m.$$

và

$$f(-2)=m^2+2>0,\ \forall m.$$

Vì $f(-2)\cdot f(0)<0$ nên phương trình $f(x)=0$ luôn có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(-2;0)$ với mọi m. □

VÍ DỤ 5. Chứng minh rằng phương trình $m(x-8)^3(x-9)^4+2x-17=0$ luôn có nghiệm với mọi giá trị của m.

Lời giải.

Xét hàm số $f(x)=m(x-8)^3(x-9)^4+2x-17$. Hàm số đã cho liên tục trên $\mathbb{R}$.
Ta có $f(8)=-1, f(9)=1$. Vậy $f(8)\cdot f(9)<0$. Điều này suy ra phương trình có ít nhất một nghiệm trên $(8;9)$. □

VÍ DỤ 6. Chứng minh rằng phương trình $m(x+1)^2(x-2)^3+(x+2)(x-3)=0$ luôn có nghiệm với mọi tham số m.

Lời giải.

Xét hàm số $f(x)=m(x+1)^2(x-2)^3+(x+2)(x-3)$ xác định và liên tục trên $[-2;3]$.
Ta có $f(-2)=-64m$, $f(3)=16m$, $f(-2)\cdot f(3)=-1024m^2\leq 0$.

- Với $m=0$ suy ra $f(-2)=f(3)=0$ suy ra phương trình $f(x)=0$ có hai nghiệm $x=-2$ và $x=3$.
- Với $m\neq 0$ suy ra $f(-2)\cdot f(3)<0$, suy ra tồn tại $x_0\in(-2;3)$ sao cho $f(x_0)=0$.

Do đó phương trình $f(x)=0$ luôn có nghiệm.
Vậy phương trình ban đầu luôn có nghiệm. □

VÍ DỤ 7. Với mọi giá trị thực của tham số m, chứng minh phương trình $\left(m^2+1\right)x^3-2m^2x^2-4x+m^2+1=0$ luôn có ba nghiệm thực.

Lời giải.

Đặt $f(x)=\left(m^2+1\right)x^3-2m^2x^2-4x+m^2+1$.
Hàm số $f(x)=\left(m^2+1\right)x^3-2m^2x^2-4x+m^2+1$ là một hàm số đa thức nên nó liên tục trên $\mathbb{R}$. Suy ra, nó cũng liên tục trên mỗi đoạn $[-3;0]$, $[0;1]$, $[1;2]$. Ta có

- $f(-3)=-27m^2-27-18m^2+12+m^2+1=-44m^2-14<0$, với mọi $m\in\mathbb{R}$.
- $f(0)=m^2+1>0$, với mọi $m\in\mathbb{R}$.
- $f(1)=m^2+1-2m^2-4+m^2+1=-2<0$.
- $f(2)=8m^2+8-8m^2-8+m^2+1=m^2+1>0$, với mọi $m\in\mathbb{R}$.

Vì $f(-3)\cdot f(0)<0$ nên phương trình đã cho có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(-3;0)$.
Vì $f(0)\cdot f(1)<0$ nên phương trình đã cho có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(0;1)$.
Vì $f(1)\cdot f(2)<0$ nên phương trình đã cho có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(1;2)$.
Phương trình $\left(m^2+1\right)x^3-2m^2x^2-4x+m^2+1=0$ là một phương trình bậc ba (vì $m^2+1\neq 0, \forall m\in\mathbb{R}$).
Vậy phương trình $\left(m^2+1\right)x^3-2m^2x^2-4x+m^2+1=0$ luôn có ba nghiệm thực. □

VÍ DỤ 8. Chứng minh rằng phương trình sau luôn có nghiệm với mọi giá trị của tham số $m\geq -1$

$$(m-1)x^6+\left(m^2-\sqrt{4m+4}\right)x^3+6x-3=0.$$

Lời giải.

Đặt $f(x)=(m-1)x^6+\left(m^2-\sqrt{4m+4}\right)x^3+6x-3$. Khi đó $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$. Ta có

$$\begin{aligned}f(1)&=(m-1)+\left(m^2-\sqrt{4m+4}\right)+6-3\\&=m^2+(m+1)-2\sqrt{m+1}+1\\&=m^2+\left(\sqrt{m+1}-1\right)^2.\end{aligned}$$

- Nếu $m=\sqrt{m+1}-1=0$ hay $m=0$ thì $f(1)=0$.
- Nếu $m\neq 0$ thì $f(1)>0$, mà $f(0)=-3<0$ nên $f(x)$ có một nghiệm trong khoảng $(0;1)$.

Vậy phương trình $f(x)=0$ luôn có nghiệm với mọi $m\geq -1$. □

VÍ DỤ 9. Với mọi giá trị thực của tham số m, chứng minh phương trình $x^5+x^2-\left(m^2+2\right)x-1=0$ luôn có ít nhất ba nghiệm thực.

Lời giải.

Xét hàm số $f(x)=x^5+x^2-\left(m^2+2\right)x-1$ liên tục trên $\mathbb{R}$.
Ta có $f(0)=-1<0$, $f(-1)=m^2+1>0$.
Mặt khác, vì $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ nên tồn tại $a<-1$ sao cho $f(a)<0$.
Vì $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ nên tồn tại $b>0$ sao cho $f(b)>0$.
Khi đó

- $f(a)\cdot f(-1)<0$ suy ra phương trình $f(x)=0$ có ít nhất 1 nghiệm thuộc $(a;-1)$,
- $f(-1)\cdot f(0)<0$ suy ra phương trình $f(x)=0$ có ít nhất 1 nghiệm thuộc $(-1;0)$,
- $f(0)\cdot f(b)<0$ suy ra phương trình $f(x)=0$ có ít nhất 1 nghiệm thuộc $(0;b)$.

Vậy phương trình đã cho có ít nhất 3 nghiệm. □

VÍ DỤ 10. Cho a, b là hai số thực thỏa mãn $9a+24b>128$. Chứng minh phương trình $ax^2+bx-2=0$ có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(0;1)$.

Lời giải.

Xét hàm số $f(x)=x^2+bx-2$ liên tục trên $\mathbb{R}$.
Ta có $f(0)=-2<0$.
Ta có $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{a}{4}+\dfrac{b}{2}-2$, $f(1)=a+b-2$.
Khi đó $2f(1)+4f\left(\dfrac{1}{2}\right)=3a+4b-12>\dfrac{128}{3}-12=\dfrac{92}{3}>0$. Suy ra một trong hai số $f(1)$ hoặc $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$ là số dương.
Do đó $\left[\begin{array}{l} f(0)\cdot f\left(\dfrac{1}{2}\right)<0 \\ f(0)\cdot f(1)<0. \end{array}\right.$
Khi đó phương trình $f(x)=0$ có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(0;1)$. □

VÍ DỤ 11. Cho phương trình $ax^2+bx+c=0$ với $5a+3b+3c=0$. Chứng minh rằng phương trình luôn có nghiệm.

Lời giải.

Do $5a+3b+3c=0$ nên $b=-\dfrac{5}{3}a-c$.
Xét hàm số $f(x)=ax^2+bx+c$ trên $\left[0;\dfrac{5}{3}\right]$.
Ta có $f(0)=c$, $f\left(\dfrac{5}{3}\right)=\dfrac{25}{9}\cdot a+\dfrac{5}{3}\cdot b+c=\dfrac{25}{9}\cdot a+\dfrac{5}{3}\left(-\dfrac{5}{3}a-c\right)+c=-\dfrac{2}{3}c$.

- Nếu $c=0$ thì $f(0)=f\left(\dfrac{5}{3}\right)=0$, phương trình đã cho có hai nghiệm là $x=0$, $x=\dfrac{5}{3}$.
- Nếu $c\neq 0$ thì $f(0)\cdot f\left(\dfrac{5}{3}\right)=-\dfrac{2}{3}c^2<0$. Vì $f(x)$ là hàm đa thức nên liên tục trên $\mathbb{R}$.

  Do đó, nó liên tục trên $\left[0;\dfrac{5}{3}\right]$.

  Từ đó suy ra phương trình $f(x)=0$ có ít nhất một nghiệm trên $\left(0;\dfrac{5}{3}\right)$.

Vậy phương trình đã cho luôn có nghiệm. □

2. Bài tập rèn luyện

BÀI 1. Chứng minh rằng phương trình $x^5+4x^3-x^2-1=0$ có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(0;1)$.

Lời giải.

Đặt $f(x)=x^5+4x^3-x^2-1$ liên tục trên $[0;1]$.
Ta có $f(0)=-1$ và $f(1)=3$ nên $f(0)\cdot f(1)<0$.
Do đó phương trình $f(x)=0$ có ít nhất một nghiệm thuộc $(0;1)$. □

BÀI 2. Chứng minh rằng phương trình $2x^4-3x^3-5=0$ có ít nhất một nghiệm.

Lời giải.

Đặt $f(x)=2x^4-3x^3-5$, $f(x)$ là hàm đa thức nên liên tục trên $\mathbb{R}$.
Do đó $f(x)$ liên tục trên đoạn $[1;2]$.
Ta có $\begin{cases} f(1)=-6 \\ f(2)=3 \end{cases}$ suy ra $f(1)\cdot f(2)=-18<0$.

Nên phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm nằm trong khoảng $(1; 2)$.
Vậy phương trình đã cho có ít nhất một nghiệm. □

BÀI 3. Chứng minh rằng phương trình $-3x^5 + 8x^2 - 1 = 0$ có ít nhất một nghiệm.

Lời giải.

Xét hàm số $f(x) = -3x^5 + 8x^2 - 1$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên liên tục trên đoạn $[0; 1]$. Ta có $f(0) \cdot f(1) = -1 \cdot 4 = -4 < 0$.
Vậy có ít nhất một số $x_0 = c \in (0; 1)$ để $f(x_0) = 0$, hay nói cách khác phương trình $f(x) = 0 \Leftrightarrow -3x^5 + 8x^2 - 1 = 0$ có nghiệm. □

BÀI 4. Chứng minh phương trình $\left(m^2 - 2m + 3\right) x^4 - 2x - 4 = 0$ luôn có nghiệm âm với mọi giá trị thực của tham số m.

Lời giải.

Hàm số $f(x) = \left(m^2 - 2m + 3\right) x^4 - 2x - 4$ liên tục trên $\mathbb{R}$.
Ta có $f(0) = -4$.
Vì $m^2 - 2m + 3 = (m-1)^2 + 2 > 0,\ \forall m$ nên

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} x^4 \left(m^2 - 2m + 3 - \frac{2}{x^3} - \frac{4}{x^4}\right) = +\infty.$$

Do đó, tồn tại $a < 0$ sao cho $f(a) > 0$.
Vì hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên nó cũng liên tục trên $[a; 0]$. Hơn nữa $f(a) \cdot f(0) < 0$ nên phương trình $f(x) = 0$ luôn có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(a; 0)$.
Vậy phương trình đã cho luôn có nghiệm âm với mọi giá trị thực của tham số m. □

BÀI 5. Chứng minh phương trình $x^4 + x^3 + mx^2 + x(2m-1) + m \sin(\pi x) = 1$ có nghiệm với mọi m.

Lời giải.

$x^4 + x^3 + mx^2 + x(2m-1) + m \sin(\pi x) = 1 \Leftrightarrow x^4 + x^3 - x - 1 + m\left(x^2 + \sin \pi x + 2x\right) = 0$.
Đặt $f(x) = x^4 + x^3 - x - 1 + m\left(x^2 + \sin \pi x + 2x\right)$.
Ta có $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.
$f(0) = -1$ và $f(-2) = 9 \Rightarrow f(0) \cdot f(-2) < 0$.
Suy ra phương trình đã cho luôn có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(-2; 0)$. □

BÀI 6. Chứng minh phương trình $x^4 + mx^2 + (3m-1)x - 5 + 2m = 0$ luôn có ít nhất một nghiệm với mọi số thực m.

Lời giải.

Đặt $f(x) = x^4 + mx^2 + (3m-1)x - 5 + 2m$.
Vì $f(x)$ là hàm đa thức nên $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.
Lại có $f(-2) = 13, f(-1) = -3 \Rightarrow f(-3) \cdot f(-1) < 0$, do đó phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm trên $(-3; -1)$.
Do đó phương trình luôn có nghiệm với mọi m. □

BÀI 7. Chứng minh rằng phương trình $m(x-8)^3(x-9)^4 + 2x - 17 = 0$ luôn có nghiệm với mọi giá trị của m.

Lời giải.

Xét hàm số $f(x) = m(x-8)^3(x-9)^4 + 2x - 17$. Hàm số đã cho liên tục trên $\mathbb{R}$.
Ta có $f(8) = -1, f(9) = 1$. Vậy $f(8) \cdot f(9) < 0$. Điều này suy ra phương trình có ít nhất một nghiệm trên $(8; 9)$. □

BÀI 8. Chứng minh phương trình $\left(m^2 - 2m + 3\right) x^4 - 2x - 4 = 0$ luôn có nghiệm âm với mọi giá trị thực của tham số m.

Lời giải.

Hàm số $f(x) = \left(m^2 - 2m + 3\right) x^4 - 2x - 4$ có tập xác định là $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.
Ta có $f(0) = -4$.
Vì $m^2 - 2m + 3 = (m-1)^2 + 2 > 0,\ \forall m$ nên

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} x^4 \left(m^2 - 2m + 3 - \frac{2}{x^3} - \frac{4}{x^4}\right) = +\infty.$$

Do đó, tồn tại $a < 0$ sao cho $f(a) > 0$.
Vì hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên nó cũng liên tục trên $[a; 0]$. Hơn nữa $f(a) \cdot f(0) < 0$ nên phương trình $f(x) = 0$ luôn có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(a; 0)$.
Vậy phương trình đã cho luôn có nghiệm âm với mọi giá trị thực của tham số m. □

BÀI 9. Chứng minh rằng phương trình $m \cdot \sin 2x + x^2 \cdot \cos x + \left(m^2 + 1\right) \cdot \cos 2x = 0$ luôn có nghiệm thuộc khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ với mọi tham số m.

Lời giải.

Đặt $f(x) = m \cdot \sin 2x + x^2 \cdot \cos x + \left(m^2 + 1\right) \cdot \cos 2x$.

- $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.
- Ta có $f(0) = m^2 + 1 > 0\ \forall m$ và $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -m^2 - 1 < 0\ \forall m$.

Suy ra phương trình $f(x)=0$ có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$. □

BÀI 10. Chứng minh phương trình $x^3+mx^2-4mx=19-3m$ có nghiệm với mọi m.

Lời giải.

Ta có $x^3+mx^2-4mx=19-3m \Leftrightarrow x^3+mx^2-4mx-19+3m=0$.
Đặt $f(x)=x^3+mx^2-4mx-19+3m$.
$f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.
$f(1)=-18$, $f(3)=8$,
$\Rightarrow f(1)f(3)<0$
$\Rightarrow$ phương trình có nghiệm với mọi m. □

BÀI 11. Cho $f(x)$ là hàm số liên tục trên đoạn $[a;b]$ sao cho với mọi $x\in[a;b]$ thì $a\le f(x)\le b$. Chứng minh rằng phương trình $f(x)=x$ có ít nhất một nghiệm thuộc đoạn $[a;b]$.

Lời giải.

Xét hàm số $h(x)=f(x)-x$, khi đó $h(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$.
Vì $a\le f(x)\le b$ với mọi $x\in[a;b]$ nên ta có

$$h(a)=f(a)-a\ge 0;\ \ h(b)=f(b)-b\le 0.$$

Suy ra $h(a)\cdot h(b)\le 0$. Do đó xảy ra một trong hai khả năng

- Nếu $h(a)\cdot h(b)=0$ thì $\left[\begin{array}{l}h(a)=0\\ h(b)=0\end{array}\right.$, do đó phương trình $h(x)=0$ có nghiệm $x=a$ hoặc $x=b$.
  Dẫn đến phương trình $f(x)=x$ có nghiệm $x=a$ hoặc $x=b$.
- Nếu $h(a)\cdot h(b)<0$ thì do tính liên tục của $h(x)$ nên phương trình $h(x)=0$ có nghiệm thuộc khoảng $(a;b)$.
  Dẫn đến phương trình $f(x)=x$ cũng có nghiệm thuộc khoảng $(a;b)$.

□

BÀI 12. Cho hai số a và b dương, $c\ne 0$ và m, n là hai số thực tùy ý. Chứng minh phương trình $\dfrac{a}{x-m}+\dfrac{b}{x-n}=c$ luôn có nghiệm thực.

Lời giải.

Điều kiện xác định của phương trình $x\ne m$ và $x\ne n$.
Khi $m=n$, ta có

$$\frac{a}{x-m}+\frac{b}{x-n}=c\Leftrightarrow\frac{a}{x-m}+\frac{b}{x-m}=c\Leftrightarrow a+b=c\left(x-m\right)\Leftrightarrow x=m+\frac{a+b}{c}.$$

Như vậy, khi $m=n$, phương trình đã cho luôn có nghiệm.
Khi $m\ne n$, ta có

$$\frac{a}{x-m}+\frac{b}{x-n}=c\Leftrightarrow a(x-n)+b(x-m)-c(x-m)(x-n)=0.$$

Xét hàm số $f(x)=a(x-n)+b(x-m)-c(x-m)(x-n)$.
Ta có hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.
Dễ thấy $f(m)=a(m-n)$, $f(n)=b(n-m)=-b(m-n)$.
Do đó $f(m)\cdot f(n)=-ab(m-n)^2<0, \forall a>0,\, b>0,\, m\ne n$.
Do đó phương trình đã cho có ít nhất một nghiệm thuộc $(m;,n)$ nếu $m<n$, hoặc ít nhất một nghiệm thuộc $(n;m)$ nếu $m>n$.
Vậy phương trình đã cho luôn có nghiệm thực. □

BÀI 13. Cho a, b, c là ba số thực tùy ý. Chứng minh rằng phương trình

$$ab(x-a)(x-b)+bc(x-b)(x-c)+ca(x-c)(x-a)=0$$

luôn có nghiệm.

Lời giải.

Đặt $f(x)=ab(x-a)(x-b)+bc(x-b)(x-c)+ca(x-c)(x-a)$ thì $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.
Ta có

$$\begin{aligned}f(a)\cdot f(b)\cdot f(c)\cdot f(0) &= [bc(a-b)(a-c)+ca(b-c)(b-a)+ab(c-a)(c-b)]\\ &= -a^2b^2c^2\cdot(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2\cdot\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)\\ &\le 0.\quad (1)\end{aligned}$$

Xảy ra một trong hai khả năng

- Nếu $f(a) \cdot f(b) \cdot f(c) \cdot f(0) = 0$ thì phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm là một trong các số a, b, c, 0.
- Nếu $f(a) \cdot f(b) \cdot f(c) \cdot f(0) < 0$ thì từ (1) suy ra a, b, c khác 0.
Vì tích bốn số nhỏ hơn 0 nên phải tồn tại hai số trong các số $f(a)$, $f(b)$, $f(c)$, $f(0)$ trái dấu. Dù là hai số nào cũng đều dẫn đến phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm.

□

BÀI 14. Cho phương trình $x^3 - 3x^2 + (2m-2)x + m - 3 = 0$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình có ba nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3 thỏa mãn $x_1 < -1 < x_2 < x_3$.

Lời giải.

Ta giải bài toán bằng điều kiện cần và điều kiện đủ.

- *Điều kiện cần.*
Đặt $f(x) = x^3 - 3x^2 + (2m-2)x + m - 3$ thì $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.
Giả sử phương trình có ba nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3 thỏa mãn $x_1 < -1 < x_2 < x_3$.
Ta có $f(x) = (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot (x - x_3)$.
Từ giả thiết $x_1 < -1 < x_2$ suy ra
$$f(-1) > 0 \Leftrightarrow -m - 5 > 0 \Rightarrow m < -5.$$
Đó là điều kiện cần của bài toán. Ta chứng minh đó cũng là điều kiện đủ.
- *Điều kiện đủ.*
Với $m < -5$. Ta có $f(-1) = -m - 5 > 0$.
Lai có $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ nên tồn tại $a < -1$ để $f(a) < 0$.
Ta có $f(0) = m - 3 < 0$.
Lại có có $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ nên tồn tại $b > 0$ để $f(b) > 0$.
Vì $f(a) \cdot f(-1) < 0$; $f(-1) \cdot f(0) < 0$; $f(0) \cdot f(b) < 0$ nên theo tính chất của hàm số liên tục, phương trình $f(x) = 0$ có các nghiệm $x_1 \in (a; -1)$, $x_2 \in (-1; 0)$; $x_3 \in (0; b)$.
Do đó phương trình $f(x) = 0$ có ba nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3 thỏa mãn $x_1 < -1 < x_2 < x_3$.

Vậy $m < -5$ là điều kiện cần và đủ của bài toán. □

BÀI 15. Cho $2a + 6b + 19c = 0$. Chứng minh rằng phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có nghiệm $x_0 \in \left[0; \dfrac{1}{3}\right]$.

Lời giải.

Đặt $f(x) = ax^2 + bx + c$ thì $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.
Xét các giá trị sau
$$f(0) = c;\ 18 \cdot f\left(\frac{1}{3}\right) = 2a + 6b + 18c = (2a + 6b + 19c) - c = -c.$$
Do đó $18 \cdot f(0) \cdot f\left(\dfrac{1}{3}\right) = -c^2 \leq 0$. Xét hai khả năng

- Nếu $c = 0$ thì $18 \cdot f(0) \cdot f\left(\dfrac{1}{3}\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(0) = 0 \\ f\left(\dfrac{1}{3}\right) = 0 \end{array}\right.$, suy ra phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm $x = 0$ hoặc $x = \dfrac{1}{3}$.
- Nếu $c \neq 0$ thì $18 \cdot f(0) \cdot f\left(\dfrac{1}{3}\right) = -c^2 < 0$ nên phương trình luôn có nghiệm thuộc khoảng $\left(0; \dfrac{1}{3}\right)$.

Vậy phương trình luôn có nghiệm thuộc đoạn $\left[0; \dfrac{1}{3}\right]$. □

BÀI 16. Cho phương trình $a\cos 2x + b\cos x + c = 0$, với a, b, c là các số thực thỏa mãn $3b + 7c = 3a$. Chứng minh phương trình đã cho luôn có nghiệm.

Lời giải.

Đặt $t = \cos x$, điều kiện $|t| \leq 1$.
Khi đó, ta có $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = 2t^2 - 1$. Phương trình đã cho trở thành
$$a(2t^2 - 1) + bt + c = 0 \Leftrightarrow 2at^2 + bt + (c - a) = 0. \qquad (1)$$
Phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi phương trình (1) có nghiệm $t \in [-1; 1]$.
Xét $f(t) = 2at^2 + bt + (c - a)$, liên tục trên $\mathbb{R}$.
Ta có $f(0) = c - a$, và
$$f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3}\left(\frac{4}{3}a + b\right) + (c - a) = \frac{2}{3}\left(\frac{4a + 3b}{3}\right) + (c - a).$$

Theo giả thiết, ta có

$$3b + 7c = 3a \Rightarrow 3b = 3a - 7c \Rightarrow 4a + 3b = 7(a - c).$$

Do đó $f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3} \cdot \frac{7(a-c)}{3} + (c - a) = \frac{5}{9}(a - c)$.

Suy ra $f(0)f\left(\frac{2}{3}\right) = -\frac{5}{9}(c-a)^2 \leq 0$.

Vì f liên tục trên $\mathbb{R}$ nên f liên tục trên $\left[0; \frac{2}{3}\right]$. Do đó tồn tại $t_0 \in \left[0; \frac{2}{3}\right]$ sao cho $f(t_0) = 0$.

Suy ra phương trình (1) có nghiệm thuộc $\left[0; \frac{2}{3}\right]$, cũng thuộc $[-1; 1]$.

Vậy, phương trình $a\cos 2x + b\cos x + c = 0$ luôn có nghiệm. □

BÀI 17. Giả sử hai hàm số $y = f(x)$ và $y = f(x+1)$ đều liên tục trên đoạn $[0; 2]$ và $f(0) = f(2)$. Chứng minh phương trình $f(x) - f(x+1) = 0$ luôn có nghiệm thuộc đoạn $[0; 1]$.

Lời giải.

Xét hàm số $g(x) = f(x) - f(x+1)$ trên đoạn $[0; 1]$.
Vì $y = f(x)$ và $y = f(x+1)$ đều liên tục trên đoạn $[0; 2]$ nên hàm số $g(x)$ liên tục trên đoạn $[0; 1]$.

Ta có $\begin{cases} g(0) = f(0) - f(1) \\ g(1) = f(1) - f(2) = f(1) - f(0). \end{cases}$

Ta xét các trường hợp sau

- Nếu $f(0) - f(1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} g(0) = 0 \\ g(1) = 0 \end{cases}$. Suy ra phương trình $g(x) = 0$ có nghiệm $x = 0$, $x = 1$. (1)
- Nếu $f(0) - f(1) \neq 0$ thì $g(0) \cdot g(1) = [f(0) - f(1)] \cdot [f(1) - f(0)] < 0$. Suy ra phương trình $g(x) = 0$ luôn có ít nhất một nghiệm thuộc đoạn $[0; 1]$. (2)

Từ (1) và (2), suy ra phương trình $f(x) - f(x+1) = 0$ luôn có nghiệm thuộc đoạn $[0; 1]$. □

MỤC LỤC