Bài 3. PHƯƠNG PHÁP QUY NẠP TOÁN HỌC

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Phương pháp quy nạp toán học

Để chứng minh một mệnh đề đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ bằng phương pháp quy nạp toán học, ta thực hiện các bước sau:

Bước 1: Kiểm tra mệnh đề đúng với $n = 1$.

Bước 2: Giả sử mệnh đề đúng với $n = k \geq 1$ (giả thiết quy nạp).

Bước 3: Cần chứng minh mệnh đề đúng với $n = k + 1$.

Trong trường hợp chứng minh một mệnh đề đúng với mọi số tự nhiên $n \geq p$ (p là số tự nhiên) thì thuật toán là

Bước 1: Kiểm tra mệnh đề đúng với $n = p$.

Bước 2: Giả sử mệnh đề đúng với $n = k \geq 1$ (giả thiết quy nạp)

Bước 3: Cần chứng minh mệnh đề đúng với $n = k + 1$.

B. VÍ DỤ

VÍ DỤ 1. Chứng minh rằng $n^3 + 2\text{n}$ chia hết cho 3 với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

VÍ DỤ 2. Chứng minh rằng đẳng thức sau đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$

$$1 + q + q^2 + q^3 + q^4 + \ldots + q^{n-1} = \frac{1 - q^n}{1 - q} \quad (q \neq 1).$$

VÍ DỤ 3. Chứng minh rằng trong mặt phẳng, n đường thẳng khác nhau cùng đi qua một điểm chia mặt phẳng thành $2n$ phần ($n \in \mathbb{N}^*$).

C. MỘT SỐ ỨNG DỤNG CỦA PHƯƠNG PHÁP QUY NẠP TOÁN HỌC

1. Chứng minh tính chất chia hết

VÍ DỤ 1. Chứng minh rằng, với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, ta có $5^{2n} - 1$ chia hết cho 24.

2. Chứng minh đẳng thức

VÍ DỤ 2. Chứng minh đẳng thức sau đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \ldots + n \cdot (n + 1) = \frac{n(n + 1)(n + 2)}{3}.$$

3. Chứng minh bất đẳng thức

VÍ DỤ 3. Chứng minh rằng bất đẳng thức $2^{n+1} > n^2 + n + 2, \forall n \geq 3$.

4. Chứng minh công thức lãi kép

VÍ DỤ 4. (Công thức lãi kép) Một khoản tiền A đồng (gọi là vốn) được gửi tiết kiệm có kì hạn ở một ngân hàng theo thể thức lãi kép (tiền lãi sau mỗi kì hạn nếu không rút ra thì được cộng vào vốn của kì kế tiếp). Giả sử lãi suất theo kì là r không đổi qua các kì hạn, người gửi không rút tiền vốn và lãi trong suốt các kì hạn đề cập sau đây. Gọi T_n là tổng số tiền vốn và lãi của người gửi sau kì hạn thứ n ($n \in \mathbb{N}^*$).

a) Tính T_1, T_2, T_3.

b) Từ đó, dự đoán công thức tính T_n và chứng minh công thức đó bằng phương pháp quy nạp toán học.

ĐIỂM:

"It's not how much time you have, it's how you use it."

QUICK NOTE

QUICK NOTE

5. Dự đoán công thức tổng hữu hạn và chứng minh bằng phương pháp quy nạp

VÍ DỤ 5. Cho dãy số (u_n) xác định bởi: $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_n = 2u_{n-1} + 3 \end{cases}$, $\forall n \geq 2$.

a) Viết năm số hạng đầu của dãy.

b) Chứng minh rằng $u_n = 2^{n+1} - 3$.

D. BÀI TẬP TỰ LUẬN

BÀI 1. Cho $S_n = 1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^n$ và $T_n = 2^{n+1} - 1$, với $n \in \mathbb{N}^*$.

a) So sánh S_1 và T_1; S_2 và T_2; S_3 và T_3.

b) Dự đoán công thức tính S_n và chứng minh bằng phương pháp quy nạp toán học.

BÀI 2. Cho $S_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^2} + \ldots + \dfrac{1}{2^n}$ và $T_n = 2 - \dfrac{1}{2^n}$, với $n \in \mathbb{N}^*$.

a) So sánh S_1 và T_1; S_2 và T_2; S_3 và T_3.

b) Dự đoán công thức tính S_n và chứng minh bằng phương pháp quy nạp toán học.

BÀI 3. Cho $S_n = \dfrac{1}{1 \cdot 5} + \dfrac{1}{5 \cdot 9} + \dfrac{1}{9 \cdot 13} + \ldots + \dfrac{1}{(4n-3)(4n+1)}$, với $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Tính S_1, S_2, S_3, S_4.

b) Dự đoán công thức tính S_n và chứng minh bằng phương pháp quy nạp toán học.

BÀI 4. Cho q là số thực khác 1. Chứng minh $1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1} = \dfrac{1 - q^n}{1 - q}$, với $n \in \mathbb{N}^*$.

BÀI 5. Chứng minh với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, ta có

a) $4^n + 15n - 1$ chia hết cho 9;

b) $13^n - 1$ chia hết cho 6.

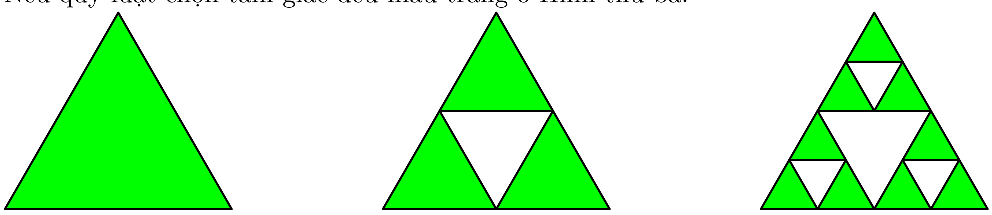
BÀI 6. Chứng minh $n^n > (n+1)^{n-1}$ với $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$.

BÀI 7. Chứng minh $a^n - b^n = (a - b)\left(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1}\right)$ với $n \in \mathbb{N}^*$.

BÀI 8. Cho tam đều màu xanh (Hình thứ nhất).

a) Nêu quy luật chọn tam giác đều màu trắng ở Hình thứ hai.

b) Nêu quy luật chọn tam giác đều màu trắng ở Hình thứ ba.



Hình thứ nhất   Hình thứ hai   Hình thứ ba

c) Nêu quy luật tiếp tục chọn các tam giác đều màu trắng từ Hình thứ tư và các tam giác đều màu trắng ở những hình sau đó.

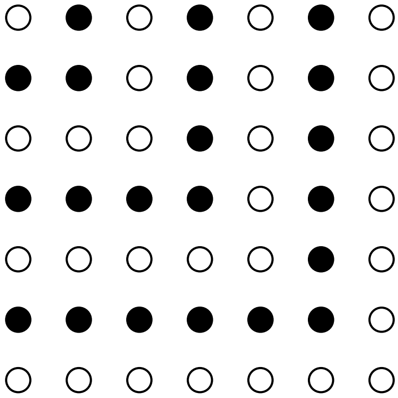
d) Tính số tam giác đều màu xanh lần lượt trong các Hình thứ nhất, Hình thứ hai, Hình thứ ba.

e) Dự đoán số tam giác đều màu xanh trong hình thứ n. Chứng minh kết quả đó bằng quy nạp toán học.

BÀI 9. Quan sát Hình 6.

a) Nêu quy luật sắp xếp các chấm trắng và đen xen kẽ nhau khi xếp các chấm đó từ góc trên bên trái xuống góc dưới bên phải (tạo thành hình vuông).

b) Giả sử hình vuông thứ n có mỗi cạnh chứa n chấm. Tính tổng số chấm được xếp trong hình vuông (kể cả trên cạnh). Chứng minh kết quả đó bằng phương pháp quy nạp toán học.



BÀI 10. Giả sử năm đầu tiên, cô Hạnh gửi vào ngân hàng A (đồng) với lãi suất $r\%/$ năm. Hết năm đầu tiên, cô Hạnh không rút tiền ra và gửi thêm A (đồng) nữa. Hết năm thứ hai, cô Hạnh cũng không rút tiền ra và lại gửi thêm A (đồng) nữa. Cứ tiếp tục như vậy cho những năm sau. Chứng minh số tiền cả vốn lẫn lãi mà cô Hạnh có được sau n (năm) là $T_n = \dfrac{A(100+r)}{r}\left[\left(1+\dfrac{r}{100}\right)^n - 1\right]$ (đồng), nếu trong khoảng thời gian này lãi suất không thay đổi.

BÀI 11. Một người gửi số tiền A (đồng) vào ngân hàng. Biểu lãi suất của ngân hàng như sau: Chia mỗi năm thành m kì hạn và lãi suất $r\%$/năm. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi kì hạn, số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn ban đầu. Chứng minh số tiền nhận được (bao gồm cả vốn lẫn lãi) sau n (năm) gửi là $S_n = A\left(1+\dfrac{r}{100m}\right)^{m\cdot n}$ (đồng), nếu trong khoảng thời gian này người gửi không rút tiền ra và lãi suất không thay đổi.

BÀI 12. Sử dụng phương pháp quy nạp toán học, chứng minh các đẳng thức sau đúng với mọi số tự nhiên $n \geq 1$.

a) $2+4+6+\ldots+2n = n(n+1)$;

b) $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

BÀI 13. Mỗi khẳng định sau là đúng hay sai? Nếu em nghĩ là nó đúng, hãy chứng minh nó. Nếu em nghĩ là nó sai, hãy đưa ra một phản ví dụ.

a) $p(n) = n^2 - n + 11$ là số nguyên tố với mọi số tự nhiên n.

b) $n^2 > n$ với mọi số tự nhiên $n \geq 2$.

BÀI 14. Chứng minh rằng $n^3 - n + 3$ chia hết cho 3 với mọi số tự nhiên $n \geq 1$.

BÀI 15. Chứng minh rằng $n^2 - n + 41$ là số lẻ với mọi số nguyên dương n.

BÀI 16. Chứng minh rằng nếu $x > -1$ thì $(1+x)^n \geq 1 + nx$ với mọi số tự nhiên n.

BÀI 17. Cho tổng $S_n = \dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \dfrac{1}{n\cdot(n+1)}$.

a) Tính S_1, S_2, S_3.

b) Dự đoán công thức tính tổng S_n và chứng minh bằng quy nạp.

BÀI 18. Sử dụng phương pháp quy nạp toán học, chứng minh rằng số đường chéo của một đa giác n cạnh $(n \geq 4)$ là $\dfrac{n(n-3)}{2}$.

BÀI 19. Ta sẽ "lập luận" bằng quy nạp toán học để chỉ ra rằng "Mọi con mèo đều có cùng màu". Ta gọi $P(n)$ với n nguyên dương là mệnh đề sau: "Mọi con mèo trong một đàn gồm n con đều có cùng màu".
Bước 1. Với $n = 1$ thì mệnh đề $P(1)$ là "Mọi con mèo trong một đàn gồm 1 con đều có cùng màu". Hiển nhiên mệnh đề này đúng!

QUICK NOTE

QUICK NOTE

Bước 2. Giả sử $P(k)$ đúng với một số nguyên dương k nào đó. Xét một đàn mèo gồm $k+1$ con. Gọi chúng là $M_1, M_2, ..., M_{k+1}$. Bỏ con mèo M_{k+1} ra khỏi đàn, ta nhận được một đàn mèo gồm k con là $M_1, M_2, ..., M_k$. Theo giả thiết quy nạp, các con mèo có cùng màu. Bây giờ, thay vì bỏ con mèo M_{k+1}, ta bỏ con mèo M_1 để có đàn mèo gồm k con là $M_2, M_3, ..., M_{k+1}$. Vẫn theo giả thiết quy nạp thì các con mèo $M_2, M_3, ..., M_{k+1}$ có cùng màu. Cuối cùng, đưa con mèo M_1 trở lại đàn để có đàn mèo ban đầu. Theo các lập luận trên: các con mèo $M_1, M_2, ..., M_k$ có cùng màu và các con mèo $M_2, M_3, ..., M_{k+1}$ có cùng màu. Từ đó suy ra tất cả các con mèo $M_1, M_2, ..., M_{k+1}$ đều có cùng màu.
Vậy, theo nguyên lí quy nạp thì $P(n)$ đúng với mọi số nguyên dương n. Nói riêng nếu gọi N là số mèo hiện tại trên Trái Đất thì việc $P(N)$ đúng cho thấy tất cả các con mèo (trên Trái Đất) đều có cùng màu!
Tất nhiên là ta có thể tìm được các con mèo khác màu nhau! Theo em thì lập luận trên đây sai ở chỗ nào?

BÀI 20. Chứng minh rằng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, ta có $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. $(*)$

BÀI 21. Chứng minh rằng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, ta có

$$1\cdot 2 + 2\cdot 3 + 3\cdot 4 + \ldots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}. \ (*)$$

BÀI 22. Chứng minh

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{n-1} = 2^n - 1 \quad (*)$$

BÀI 23. Chứng minh

$5^{2n} - 1$ chia hết cho $24(*)$

BÀI 24. Chứng minh rằng $n^3 + 5n$ chia hết cho 6 với mọi số tự nhiên $n \geq 1$.

BÀI 25. Cho $a, b \geq 0$. Chứng minh rằng bất đẳng thức sau đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{a^n + b^n}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^n$$

BÀI 26. Chứng minh rằng bất đẳng thức sau đúng với mọi số tự nhiên $n \geq 2$:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} > \frac{2n}{n+1} \quad (*)$$

BÀI 27. Trong mặt phẳng, cho đa giác $A_1A_2A_3\ldots A_n$ có n cạnh $(n \geq 3)$. Gọi S_n là tổng số đo các góc trong của đa giác.

a) Tính $S_3,\ S_4,\ S_5$ tương ứng với trường hợp tam giác, tứ giác và ngũ giác.

b) Từ đó, dự đoán công thức tính S_n và chứng minh công thức đó bằng phương pháp quy nạp toán học.

BÀI 28. Hàng tháng, một người gửi vào ngân hàng một khoản tiền tiết kiệm không đổi a đồng. Giả sử lãi suất hằng thàng là r không đổi và theo thể thức lãi kép (tiền lãi của tháng trước được cộng vào vốn của tháng kế tiếp). Gọi $T_n\,(n \geq 1)$, là tổng số tiền vốn và lãi của người đó có trong ngân hàng sau n tháng.

a) Tính T_1, T_2, T_3.

b) Từ đó, dự đoán công thức tính T_n, và chứng minh công thức đó bằng phương pháp quy nạp toán học.