ĐIỂM: ____________

"It's not how much time you have, it's how you use it."

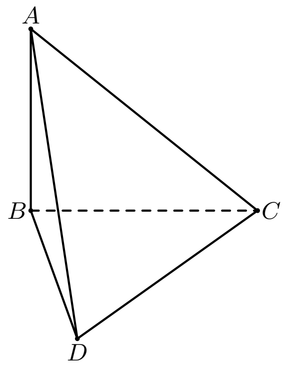
QUICK NOTE

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

CÂU 1.

Cho tứ diện $ABCD$. Các vectơ có điểm đầu là A và điểm cuối là các đỉnh còn lại của hình tứ diện là

Ⓐ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AD}$. Ⓑ $\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$. Ⓒ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{DA}$. Ⓓ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$.



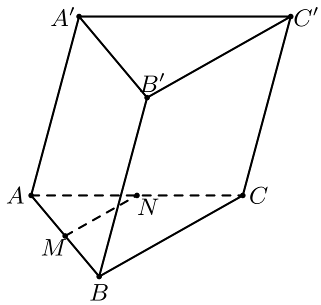
Lời giải.

Chọn đáp án D .... □

CÂU 2.

Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$.Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, AC. Trong 4 vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{B'C'}$, $\overrightarrow{A'C'}$ vectơ nào cùng hướng với vectơ $\overrightarrow{MN}$

Ⓐ $\overrightarrow{AB}$. Ⓑ $\overrightarrow{CB}$. Ⓒ $\overrightarrow{B'C'}$. Ⓓ $\overrightarrow{A'C'}$.



Lời giải.

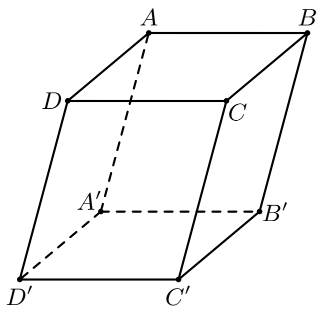
Vì MN là đường trung bình của tam giác ABC nên MN song song với BC. Mà tứ giác $BCC'B'$ là hình bình hành. Do đó MN song song với $B'C'$. Vậy hai vectơ $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{B'C'}$ cùng hướng.

Chọn đáp án C .... □

CÂU 3.

Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$.Số các vectơ có điểm đầu, điểm cuối là các đỉnh của hình hộp và bằng vectơ $\overrightarrow{AB}$ là

Ⓐ 1. Ⓑ 2. Ⓒ 3. Ⓓ 4.



Lời giải.

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{D'C'} = \overrightarrow{A'B'}$

Chọn đáp án C .... □

CÂU 4. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Trong các khẳng định dưới đây, đâu là khẳng định đúng?

Ⓐ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC'}$. Ⓑ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC'}$. Ⓒ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$. Ⓓ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AD} = \vec{0}$.

Lời giải.

Xét hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ ta có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC'}$

Chọn đáp án B .... □

CÂU 5. Trong không gian cho tam giác ABC có G là trọng tâm và điểm M nằm ngoài mặt phẳng (ABC). Khẳng định nào sau đây là đúng?

Ⓐ $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$. Ⓑ $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 0$.

Ⓒ $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MG}$. Ⓓ $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$.

Lời giải.

Xét hình chóp $M \cdot ABC$ ta có: $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$

Chọn đáp án D .... □

CÂU 6. Cho hình chóp đều $S\cdot ABCD$ tất cả các cạnh bằng $2\sqrt{3}$ (đvđd). Tính độ dài vectơ $\vec{u}=\overrightarrow{SA}-\overrightarrow{SC}$

(A) $\sqrt{3}$. (B) $\sqrt{2}$. (C) $2\sqrt{6}$. (D) $2\sqrt{2}$.

Lời giải.

Ta có: $|\vec{u}|=\left|\overrightarrow{SA}-\overrightarrow{SC}\right|=\left|\overrightarrow{CA}\right|=2\sqrt{6}$

Chọn đáp án (C) ....

CÂU 7. Cho tứ diện $ABCD$. Mệnh đề nào dưới đây là mệnh đề đúng?

(A) $\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{DC}$. (B) $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{BC}$. (C) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{DC}$. (D) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CB}$.

Lời giải.

HINH O DAY

Ta có: $\begin{cases}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CB}\\ \overrightarrow{DB}-\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{CB}\end{cases}\Rightarrow \overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{DC}$

Chọn đáp án (C) ....

CÂU 8. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$, M là trung điểm của BB'. Đặt $\overrightarrow{CA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{CB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AA'}=\vec{c}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

(A) $\overrightarrow{AM}=\vec{b}+\vec{c}-\frac{1}{2}\vec{a}$. (B) $\overrightarrow{AM}=\vec{a}-\vec{c}+\frac{1}{2}\vec{b}$. (C) $\overrightarrow{AM}=\vec{a}+\vec{c}-\frac{1}{2}\vec{b}$. (D) $\overrightarrow{AM}=\vec{b}-\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{c}$.

Lời giải.

HINH O DAY

Ta có: $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BB'}=\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AA'}=\vec{b}-\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{c}$

Chọn đáp án (D) ....

CÂU 9. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Tính độ dài véctơ $\vec{x}=\overrightarrow{A'C'}-\overrightarrow{A'A}$ theo a?

(A) $a\sqrt{2}$. (B) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. (C) $a\sqrt{6}$. (D) $a\sqrt{3}$.

Lời giải.

HINH O DAY

Ta có $\vec{x}=\overrightarrow{A'C'}-\overrightarrow{A'A}=\overrightarrow{AC'}$

Chọn đáp án (D) ....

CÂU 10. Cho tứ diện $S\cdot ABC$ có M, N, P là trung điểm của SA, SB, SC. Tìm khẳng định đúng? HINH O DAY

(A) $\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{PN}-\overrightarrow{PM}\right)$. (B) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{PN}-\overrightarrow{PM}$. (C) $\overrightarrow{AB}=2\left(\overrightarrow{PM}-\overrightarrow{PN}\right)$. (D) $\overrightarrow{AB}=2\left(\overrightarrow{PN}-\overrightarrow{PM}\right)$.

Lời giải.

Ta có: $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{MN}=2\left(\overrightarrow{PN}-\overrightarrow{PM}\right)$

Chọn đáp án (D) ....

CÂU 11. Cho tứ diện $S\cdot ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a, SB vuông góc với đáy và $SB=\sqrt{3}a$. Góc giữa hai vectơ $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AS}\right)$ là HINH O DAY

(A) 60°. (B) 30°. (C) 45°. (D) 90°.

Lời giải.

Ta có: $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AS}\right)=\widehat{SAB}$.

Xét $\triangle SBA$ vuông tại B ta có: $\tan\left(\widehat{SAB}\right)=\frac{SB}{AB}=\sqrt{3}$. Suy ra: $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AS}\right)=60^\circ$

Chọn đáp án (A) ....

CÂU 12. Cho hình chóp $S\cdot ABC$ có $AB=4, \widehat{BAC}=60^\circ, \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=6$. Khi đó độ dài $\overrightarrow{AC}$ là

(A) 3. (B) 6. (C) 4. (D) 12.

Lời giải.

Ta có: $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=AB\cdot AC\cdot\cos\widehat{BAC}\Leftrightarrow 6=4\cdot AC\cdot\cos 60^\circ\Leftrightarrow AC=3$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai

Chọn đáp án (A) ....

CÂU 13. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB=AC=AD=a$ và $\widehat{BAC}=\widehat{BAD}=60^\circ, \widehat{CAD}=90^\circ$. Gọi I là điểm trên cạnh AB sao cho $AI=3IB$ và J là trung điểm của CD. Gọi α là góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{IJ}$. HINH O DAY a) Tam giác BCD vuông cân b) $\overrightarrow{IJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$ c) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}=\frac{a^2}{2}$ d) $\cos\alpha=-\frac{\sqrt{5}}{5}$

Lời giải.

a) (Đ). b) (S). c) (S). d) (Đ).

HINH O DAY

a) Dễ thấy tam giác ABC, ABD đều cạnh bằng a, tam giác ACD vuông cân đỉnh $A \Rightarrow CD = a\sqrt{2}$. Vậy tam giác BCD có $BC = BD = a, CD = a\sqrt{2}$ nên tam giác BCD vuông cân.
b) $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AJ} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}\right) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} - \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$.
c) Ta có: $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$; $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = AB \cdot AD \cdot cos60^\circ = \frac{a^2}{2}$; $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{a^2}{2}$.
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} = a^2$.
d) Ta có $IJ^2 = \overrightarrow{IJ}^2 = \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} - \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(\frac{17}{4}a^2 + 2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} - 3\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}\right) = \frac{5a^2}{16} \Rightarrow IJ = \frac{a\sqrt{5}}{4}$.
$\overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} - \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}\right) \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} - \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}^2\right) = -\frac{a^2}{4}$.

$$\cos\left(\overrightarrow{IJ}, \overrightarrow{AB}\right) = \frac{\overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{AB}}{IJ \cdot AB} = \frac{-\frac{a^2}{4}}{\frac{a\sqrt{5}}{4} \cdot a} = -\frac{\sqrt{5}}{5}$$

CÂU 14. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N, P, Q, R, S, G lần lượt là trung điểm các đoạn thẳng AB, CD, AC, BD, AD, BC, MN. HINH O DAY a) $\overrightarrow{MR} = \overrightarrow{SN}$. b) $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$. c) $2\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$. d) $\left|\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID}\right|$ nhỏ nhất khi và chỉ khi điểm I trùng với điểm G

Lời giải.
a. (Đ). b. (Đ). c. (S). d. (Đ).
HINH O DAY

a. $\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{MR} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD} \\ \overrightarrow{SN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD} \end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{MR} = \overrightarrow{SN}$.

b. Vì M là trung điểm của AB nên $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = 2\overrightarrow{GM}$
Vì N là trung điểm của CD nên $\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = 2\overrightarrow{GN}$
Vì G là trung điểm của MN nên $\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{GN} = \vec{0}$
Do đó: $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = 2\left(\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{GN}\right) = 2 \cdot \vec{0} = \vec{0}$.
c. $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AQ} - \overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right) - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$
d. Ta có:
$\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = 4\overrightarrow{IG} + \left(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD}\right) = 4\overrightarrow{IG}$.
$\Rightarrow \left|\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID}\right| = \left|4\overrightarrow{IG}\right| = 4IG$
Do đó: $\left|\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID}\right|$ nhỏ nhất khi $IG = 0 \Leftrightarrow I \equiv G$

CÂU 15. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD \cdot EFGH$ có $AB = AE = 2$, $AD = 3$ và đặt $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$, $\vec{c} = \overrightarrow{AE}$. Lấy điểm M thỏa $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AD}$ và điểm N thỏa $\overrightarrow{EN} = \frac{2}{5}\overrightarrow{EC}$. (tham khảo hình vẽ) HINH O DAY Khi đó ta có a) $\overrightarrow{MA} = -\frac{1}{5}\vec{b}$. b) $\overrightarrow{EN} = \frac{2}{5}\left(\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}\right)$. c) $\left(m \cdot \vec{a} + n \cdot \vec{b} + n \cdot \vec{c}\right)^2 = m^2 \cdot \vec{a}^2 + n^2 \cdot \vec{b}^2 + p^2 \cdot \vec{c}^2$ với m, n, p là các số thực. d) $MN = \frac{\sqrt{61}}{5}$

Lời giải.
FB tác giả: Đặng Phước Thiên A B C D Đúng Sai Đúng Đúng Ta có $\overrightarrow{MA} = -\overrightarrow{AM} = -\frac{1}{5}\overrightarrow{AD} = -\frac{1}{5}\vec{b}$.
$\overrightarrow{EN} = \frac{2}{5}\overrightarrow{EC} = \frac{2}{5}\left(\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{EH} + \overrightarrow{EA}\right) = \frac{2}{5}\left(\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}\right)$.
$\left(m \cdot \vec{a} + n \cdot \vec{b} + p \cdot \vec{c}\right)^2 = m^2 \cdot \vec{a}^2 + n^2 \cdot \vec{b}^2 + p^2 \cdot \vec{c}^2 + 2mn \cdot \vec{a} \cdot \vec{b} + 2np \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} + 2mp \cdot \vec{a} \cdot \vec{c}$
$= m^2 \cdot \vec{a}^2 + n^2 \cdot \vec{b}^2 + p^2 \cdot \vec{c}^2$. (vì $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đôi một vuông góc nên $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} = 0$).
Ta có $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EN} = -\frac{1}{5}\vec{b} + \vec{c} + \frac{2}{5}\left(\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}\right) = \frac{2}{5}\vec{a} + \frac{1}{5}\vec{b} + \frac{3}{5}\vec{c}$.
$MN^2 = \overrightarrow{MN}^2 = \left(\frac{2}{5}\vec{a} + \frac{1}{5}\vec{b} + \frac{3}{5}\vec{c}\right)^2 = \frac{4}{25}\vec{a}^2 + \frac{1}{25}\vec{b}^2 + \frac{9}{25}\vec{c}^2 = \frac{4}{25} \cdot 4 + \frac{1}{25} \cdot 9 + \frac{9}{25} \cdot 4 = \frac{61}{25}$.
Suy ra $MN = \frac{\sqrt{61}}{5}$

CÂU 16. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC \cdot A_1B_1C_1$ có cạnh đáy bằng x và chiều cao bằng y. (tham khảo hình vẽ) HINH O DAY Khi đó ta có a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}x^2$. b) $\overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AA_1}$. c) $\overrightarrow{CB_1} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AA_1}$. d) Góc $(AC_1, CB_1) > 60^\circ$ khi $\frac{y}{x} < \sqrt{2}$

Lời giải.
FB tác giả: Đặng Phước Thiên A B C D Đúng Đúng Sai Đúng Ta có $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \cdot AC \cdot \cos 60^\circ = \frac{1}{2}x^2$.

$\overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AA_1}$
ACC_1A_1 là hình chữ nhật nên ta có $\overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AA_1}$.
$\overrightarrow{CB_1} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AA_1}$.
Ta có $\overrightarrow{AC_1} \cdot \overrightarrow{CB_1} = \left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AA_1}\right) \cdot \left(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AA_1}\right) = y^2 - \frac{1}{2}x^2$ và $AC_1 = CB_1 = \sqrt{x^2+y^2}$.
Khi đó $\cos\left(AC_1, CB_1\right) = \left|\cos\left(\overrightarrow{AC_1}, \overrightarrow{CB_1}\right)\right| = \dfrac{\left|\overrightarrow{AC_1} \cdot \overrightarrow{CB_1}\right|}{AC_1 \cdot CB_1} = \dfrac{\left|y^2 - \frac{1}{2}x^2\right|}{x^2+y^2}$.
Theo đề $\left(AC_1, CB_1\right) > 60^\circ$, suy ra $\dfrac{\left|y^2 - \frac{1}{2}x^2\right|}{x^2+y^2} < \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow 3y^4 - 6x^2y^2 < 0 \Leftrightarrow \dfrac{y}{x} < \sqrt{2}$.
PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 3

CÂU 17. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{AA'} = \vec{b}, \overrightarrow{AC} = \vec{c}$. Ta biểu diễn $\overrightarrow{B'C} = m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c}$, khi đó $m+n+p$ bằng bao nhiêu? HINH O DAY

Lời giải.

Trả lời: -1.
Ta có
$\overrightarrow{B'C} = \overrightarrow{B'B} + \overrightarrow{BC}$
$= -\overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{BB'} - \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$
$= -\vec{b} - \vec{a} + \vec{c}$
$\Rightarrow \overrightarrow{B'C} = -\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$.
Suy ra $m = -1; n = -1; p = 1$. Do đó $m+n+p = -1$

CÂU 18. Cho tứ diện$ABCD$, gọi I,J lần lượt là trung điểm của AB và CD. 1) $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}\right)$. 2) $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}\right)$. 3) $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BD}\right)$. 4) $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}\right)$. Trong các đẳng thức trên có bao nhiêu đẳng thức đúng?

Lời giải.

Trả lời: 3.
HINH O DAY
Ta có:
1) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{JC} + \overrightarrow{BI} + \overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{JD} = 2\overrightarrow{IJ} \Rightarrow \overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}\right)$. Nên 1) đúng.
2) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{JD} + \overrightarrow{BI} + \overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{JC} = 2\overrightarrow{IJ} \Rightarrow \overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}\right)$. Nên 2) đúng.
3) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{JC} + \overrightarrow{BI} + \overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{JD} = 2\overrightarrow{IJ} \Rightarrow \overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BD}\right)$. Nên 3) đúng.
4) $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AJ} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}\right) = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD}\right) = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BC}\right) = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + 2\overrightarrow{BC}\right)$.
Nên 4) là sai

CÂU 19. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng 4. Giá trị tích vô hướng $\overrightarrow{AB}\left(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CA}\right)$ bằng

Lời giải.

Trả lời: 24.
Ta có:
$\overrightarrow{AB}\left(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CA}\right) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}^2 + \left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AC}\right| \cdot \cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$
$= AB^2 + AB \cdot AC \cdot \cos\left(\widehat{BAC}\right) = 4^2 + 4 \cdot 4 \cdot \cos 60^\circ = 4^2 + \frac{4^2}{2} = \frac{3 \cdot 4^2}{2} = 24$

CÂU 20. Trong không gian, cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ có cùng độ dài bằng 6. Biết độ dài của vectơ $\vec{a} + 2\vec{b}$ bằng $6\sqrt{3}$. Biết số đo góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là x độ. Giá trị của x là bao nhiêu?

Lời giải.

Trả lời: 120.
Ta có $6\sqrt{3} = \left|\vec{a} + 2\vec{b}\right| \Leftrightarrow \left(6\sqrt{3}\right)^2 = \left|\vec{a} + 2\vec{b}\right|^2 = \left(\vec{a} + 2\vec{b}\right)^2$
$\Leftrightarrow a^2 + 4b^2 + 4\vec{a} \cdot \vec{b} = 108 \Leftrightarrow 6^2 + 4 \cdot 6^2 + 4 \cdot \vec{a} \cdot \vec{b} = 108 \Leftrightarrow 4 \cdot \vec{a} \cdot \vec{b} = -72 \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = -18$.
Lại có $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \cos\left(\vec{a}, \vec{b}\right) \Leftrightarrow \cos\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right|} = \dfrac{-18}{6 \cdot 6} = \dfrac{-1}{2} \Leftrightarrow \left(\vec{a}, \vec{b}\right) = 120^\circ$.
Khi đó góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là 120°

CÂU 21. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng 15. Biết độ dài của $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$ bằng $a\sqrt{6}$, khi đó giá trị của a là?

Lời giải.

Trả lời: 15.
HINH O DAY
Gọi G là trọng tâm tâm giác BCD, M là trung điểm CD.

Ta có $\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0} \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AB}\right)+\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AC}\right)+\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AD}\right)=\vec{0} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{GA}+\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right)=\vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=-3\overrightarrow{GA}=3\overrightarrow{AG} \Rightarrow \left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right|=\left|3\overrightarrow{AG}\right|=3AG.$

Xét tam giác đều BCD có $BM=BC\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{15\sqrt{3}}{2} \Rightarrow BG=\dfrac{2}{3}BM=5\sqrt{3}$.

Vì tứ diện $ABCD$ đều nên $AG\perp(BCD) \Rightarrow \widehat{AGB}=90^\circ$.

Xét tam giác ABG có $AG=\sqrt{AB^2-BG^2}=\sqrt{15^2-\left(5\sqrt{3}\right)^2}=5\sqrt{6}$.

Do đó $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right|=3AG=15\sqrt{6} \Rightarrow a=15$.

Vậy giá trị của $a=15$

CÂU 22. Một chiếc cân đòn tay đang cân một vật có khối lượng $m=3\,\text{kg}$ được thiết kế với đĩa cân được giữ bởi bốn đoạn xích SA, SB, SC, SD sao cho $S\cdot ABCD$ là hình chóp tứ giác đều có $\widehat{ASC}=90^\circ$. Biết độ lớn của lực căng cho mỗi sợi xích có dạng $\dfrac{a\sqrt{2}}{4}$. Lấy $g=10\,\text{m/s}^2$, khi đó giá trị của a bằng bao nhiêu? HINH O DAY

Lời giải.

Trả lời: 30.

HINH O DAY

Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$.

Ta có $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{OS}+\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{OS}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{OS}+\overrightarrow{SC}+\overrightarrow{OS}+\overrightarrow{SD}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}+\overrightarrow{SD}=-4\overrightarrow{OS}=4\overrightarrow{SO} \Rightarrow \left|\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}+\overrightarrow{SD}\right|=\left|4\overrightarrow{SO}\right|=4SO.$

Trọng lượng của vật nặng là $P=mg=3\cdot 10=30\,(N)$. Suy ra $4\left|\overrightarrow{SO}\right|=P=30\,(N) \Rightarrow SO=\dfrac{15}{2}$.

Lại có tam giác ASC vuông cân tại S nên

$$SO=SA\cdot\sin\widehat{SAC} \Rightarrow SA=\dfrac{SO}{\sin\widehat{SAC}}=\dfrac{\frac{15}{2}}{\sin 45^\circ}=\dfrac{15\sqrt{2}}{2}=\dfrac{30\sqrt{2}}{4} \Rightarrow a=30.$$

Vậy $a=30$