Bài 3. PHƯƠNG PHÁP QUY NẠP TOÁN HỌC

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Phương pháp quy nạp toán học

Để chứng minh một mệnh đề đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ bằng phương pháp quy nạp toán học, ta thực hiện các bước sau:

Bước 1: Kiểm tra mệnh đề đúng với $n = 1$.

Bước 2: Giả sử mệnh đề đúng với $n = k \geq 1$ (giả thiết quy nạp).

Bước 3: Cần chứng minh mệnh đề đúng với $n = k + 1$.

Trong trường hợp chứng minh một mệnh đề đúng với mọi số tự nhiên $n \geq p$ (p là số tự nhiên) thì thuật toán là

Bước 1: Kiểm tra mệnh đề đúng với $n = p$.

Bước 2: Giả sử mệnh đề đúng với $n = k \geq 1$ (giả thiết quy nạp)

Bước 3: Cần chứng minh mệnh đề đúng với $n = k + 1$.

B. VÍ DỤ

VÍ DỤ 1. Chứng minh rằng $n^3 + 2n$ chia hết cho 3 với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Lời giải.

Bước 1 . Với $n = 1$, ta có $1^3 + 2 \cdot 1 = 3 \,\vdots\, 3$. Do đó khẳng định đúng với $n = 1$.

Bước 2. Giả sử khẳng định đúng với $n = k \geq 1$, nghĩa là có $k^3 + 2k \,\vdots\, 3$.
Bước 3 . Ta cần chứng minh đẳng thức đúng với $n = k + 1$, nghĩa là cần chứng minh

$$(k+1)^3 + 2(k+1) \,\vdots\, 3.$$

Sử dụng giả thiết quy nạp, ta có

$$(k+1)^3 + 2(k+1) = k^3 + 3k^2 + 3k + 1 + 2k + 2 = \left(k^3 + 2k\right) + \left(3k^2 + 3k + 3\right).$$

Vì $\left(k^3 + 2k\right)$ và $\left(3k^2 + 3k + 3\right)$ đều chia hết cho 3 nên $\left(k^3 + 2k\right) + \left(3k^2 + 3k + 3\right) \,\vdots\, 3$ hay $(k+1)^3 + 2(k+1) \,\vdots\, 3$. Vậy khẳng định đúng với $n = k + 1$. Theo nguyên lí quy nạp toán học, khẳng định đúng với mọi số tự nhiên $n \geq 1$.

VÍ DỤ 2. Chứng minh rằng đẳng thức sau đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$

$$1 + q + q^2 + q^3 + q^4 + \ldots + q^{n-1} = \frac{1 - q^n}{1 - q} \quad (q \neq 1).$$

Lời giải.

Bước 1. Với $n = 1$, ta có $q^{1-1} = q^0 = 1 = \dfrac{1 - q}{1 - q} = \dfrac{1 - q^1}{1 - q}$. Do đó đẳng thức đúng với $n = 1$.
Bước 2. Giả sử đẳng thức đúng với $n = k \geq 1$, nghĩa là có

$$1 + q + q^2 + q^3 + q^4 + \ldots + q^{k-1} = \frac{1 - q^k}{1 - q}.$$

Bước 3 . Ta cần chứng minh đẳng thức đúng với $n = k + 1$, nghĩa là cần chứng minh

$$1 + q + q^2 + q^3 + q^4 + \ldots + q^{k-1} + q^{(k+1)-1} = \frac{1 - q^{k+1}}{1 - q}$$

Sử dụng giả thiết quy nạp, ta có

$$\begin{aligned} &1 + q + q^2 + q^3 + q^4 + \ldots + q^{k-1} + q^{(k+1)-1} \\ =&\frac{1 - q^k}{1 - q} + q^{(k+1)-1} = \frac{1 - q^k}{1 - q} + q^k = \frac{1 - q^k + q^k(1 - q)}{1 - q} = \frac{1 - q^k + q^k - q^{k+1}}{1 - q} = \frac{1 - q^{k+1}}{1 - q}. \end{aligned}$$

Vậy đẳng thức đúng với $n = k + 1$. Theo nguyên lí quy nạp toán học, đẳng thức đúng với mọi số tự nhiên $n \geq 1$.

VÍ DỤ 3. Chứng minh rằng trong mặt phẳng, n đường thẳng khác nhau cùng đi qua một điểm chia mặt phẳng thành $2n$ phần ($n \in \mathbb{N}^*$).

Lời giải.

Bước 1. Với $n=1$, ta có rõ ràng một đường thẳng chia mặt phẳng thành 2 phần.
Bước 2. Giả sử khẳng định đúng với $n=k \geq 1$, nghĩa là có k đường thẳng khác nhau đi qua một điểm chia mặt phẳng ra thành $2k$ phần.
Bước 3 . Ta cần chứng minh khẳng định đúng với $n=k+1$, nghĩa là cần chứng minh $(k+1)$ đường thẳng khác nhau đi qua một điểm chia mặt phẳng ra thành $2(k+1)$ phần.
Sử dụng giả thiết quy nạp, ta có
Nếu dựng đường thẳng đi qua điểm đã cho và không trùng với đường thẳng nào trong số những đường thẳng còn lại, thì ta nhận thêm 2 phần của mặt phẳng.
Như vậy tổng số phần mặt phẳng là của $2k$ cộng thêm 2 , nghĩa là $2(k+1)$.
Vậy khẳng định đúng với $n=k+1$. Theo nguyên lí quy nạp toán học, khẳng định đúng với mọi số tự nhiên $n \geq 1$.

C. MỘT SỐ ỨNG DỤNG CỦA PHƯƠNG PHÁP QUY NẠP TOÁN HỌC

1. Chứng minh tính chất chia hết

VÍ DỤ 1. Chứng minh rằng, với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, ta có $5^{2n}-1$ chia hết cho 24.

Lời giải.

Bước 1 . Với $n=1$, ta có $5^{2\cdot 1}-1=24 \vdots 24$. Do đó khẳng định đúng với $n=1$.
Bước 2. Giả sử khẳng định đúng với $n=k \geq 1$, nghĩa là có $5^{2k}-1 : 24$.

Bước 3. Ta cần chứng minh đẳng thức đúng với $n=k+1$, nghĩa là cần chứng minh $5^{2(k+1)}-1 \vdots 24$.
Sử dụng giả thiết quy nạp, ta có $5^{2(k+1)}-1=5^{2k+2}-1=25\cdot 5^{2k}-1=24\cdot 5^{2k}+\left(5^{2k}-1\right)$.

Vì $24\cdot 5^{2k}$ và $\left(5^{2k}-1\right)$ đều chia hết cho 24 nên $24\cdot 5^{2k}+\left(5^{2k}-1\right) \vdots 24$ hay $5^{2(k+1)}-1 \vdots 24$.
Vậy khẳng định đúng với $n=k+1$.
Theo nguyên lí quy nạp toán học, khẳng định đúng với mọi số tự nhiên $n \geq 1$.

2. Chứng minh đẳng thức

VÍ DỤ 2. Chứng minh đẳng thức sau đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$

$$1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\ldots+n\cdot(n+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

Lời giải.

Bước 1 . Với $n=1$, ta có $1(1+1)=2=\dfrac{1(1+1)(1+2)}{3}$. Do đó đẳng thức đúng với $n=1$.
Bước 2. Giả sử đẳng thức đúng với $n=k \geq 1$, nghĩa là có

$$1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\ldots+k\cdot(k+1)=\frac{k(k+1)(k+2)}{3}.$$

Bước 3. Ta cần chứng minh đẳng thức đúng với $n=k+1$, nghĩa là cần chứng minh

$$1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\ldots+k\cdot(k+1)+(k+1)[(k+1)+1]=\frac{(k+1)[(k+1)+1][(k+1)+2]}{3}.$$

Sử dụng giả thiết quy nạp, ta có

$$\begin{aligned}
&1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\ldots+k\cdot(k+1)+(k+1)[(k+1)+1]\\
=&\frac{k(k+1)(k+2)}{3}+(k+1)(k+2)\\
=&\frac{k(k+1)(k+2)}{3}+\frac{3(k+1)(k+2)}{3}\\
=&\frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}\\
=&\frac{(k+1)[(k+1)+1][(k+1)+2]}{3}.
\end{aligned}$$

Vậy đẳng thức đúng với $n=k+1$.
Theo nguyên lí quy nạp toán học, đẳng thức đúng với mọi số tự nhiên $n \geq 1$.

3. Chứng minh bất đẳng thức

VÍ DỤ 3. Chứng minh rằng bất đẳng thức $2^{n+1} > n^2 + n + 2, \forall n \geq 3$.

Lời giải.

Bước 1. Với $n = 3$, ta có $2^{3+1} = 16 > 14 = 3^2 + 3 + 2$. Do đó bất đẳng thức đúng với $n = 3$.
Bước 2. Giả sử bất đẳng thức đúng với $n = k \geq 3$, nghĩa là có $2^{k+1} > k^2 + k + 2$.
Bước 3. Ta cần chứng minh đẳng thức đúng với $\mathrm{n} = \mathrm{k} + 1$,
nghĩa là cần chứng minh $2^{(k+1)+1} > (k+1)^2 + (k+1) + 2$.
Sử dụng giả thiết quy nạp, với lưu ý $k \geq 3$, ta có

$$2^{(k+1)+1} = 2 \cdot 2^{k+1} > 2(k2 + k + 2) = 2k^2 + 2k + 4 = k^2 + k^2 + 2k + 4 > k^2 + k + 2k + 4$$
$$= \left(k^2 + 2k + 1\right) + (k+1) + 2 = (k+1)^2 + (k+1) + 2.$$

Vậy bất đẳng thức đúng với $n = k + 1$.
Theo nguyên lí quy nạp toán học, bất đẳng thức đúng với mọi số tự nhiên $n \geq 3$.

4. Chứng minh công thức lãi kép

VÍ DỤ 4. (Công thức lãi kép) Một khoản tiền A đồng (gọi là vốn) được gửi tiết kiệm có kì hạn ở một ngân hàng theo thể thức lãi kép (tiền lãi sau mỗi kì hạn nếu không rút ra thì được cộng vào vốn của kì kế tiếp). Giả sử lãi suất theo kì là r không đổi qua các kì hạn, người gửi không rút tiền vốn và lãi trong suốt các kì hạn đề cập sau đây. Gọi T_n là tổng số tiền vốn và lãi của người gửi sau kì hạn thứ n $(n \in \mathbb{N}^*)$.

a) Tính T_1, T_2, T_3.

b) Từ đó, dự đoán công thức tính T_n và chứng minh công thức đó bằng phương pháp quy nạp toán học.

Lời giải.

a)
- Tổng số tiền (cả vốn lẫn lãi) T_1 nhận được sau kì thứ 1 là $T_1 = A + Ar = A(1+r)$.
- Tổng số tiền (cả vốn lẫn lãi) T_2 nhận được sau kì thứ 2 là

$$T_2 = A(1+r) + A(1+r)r = A(1+r)(1+r) = A(1+r)^2.$$

- Tổng số tiền (cả vốn lẫn lãi) T_3 nhận được sau kì thứ 3 là

$$T_3 = A(1+r)^2 + A(1+r)^2 r = A(1+r)^3.$$

b) Từ câu a) ta có thể dự đoán $\mathrm{T_n} = \mathrm{A}(1+\mathrm{r})^{\mathrm{n}}$. Ta chứng minh bằng quy nạp toán học.
Bước 1. Với $n = 1$ ta có $T_1 = A(1+r) = A(1+r)^1$. Như vậy khẳng định đúng cho trường hợp $\mathrm{n} = 1$. Bước 2. Giả sử khẳng định đúng với $\mathrm{n} = \mathrm{k} \geq 1$, tức là ta có $T_k = A(1+r)^k$.
Bước 3. Ta sẽ chứng minh rằng khẳng định cũng đúng với $n = k + 1$, nghĩa là ta sẽ chứng minh

$$T_{k+1} = A(1+r)^{k+1}.$$

Thật vậy, tổng số tiền (cả vốn lẫn lãi) T_{k+1} nhận được sau kì thứ $(k+1)$ là

$$\mathrm{T_{k+1}} = \mathrm{A}(1+r)^{\mathrm{k}} + \mathrm{A}(1+r)^{\mathrm{k}} \cdot \mathrm{r} = \mathrm{A}(1+r)^{\mathrm{k}}(1+r) = \mathrm{A}(1+r)^{\mathrm{k}+1}.$$

Vậy khẳng định đúng với $\mathrm{n} = \mathrm{k} + 1$.
Theo nguyên lí quy nạp toán học, khẳng định đúng với mọi số tự nhiên $n \geq 1$.
Vậy $T_n = A(1+r)^n$ với mọi số tự nhiên $n \geq 1$.

5. Dự đoán công thức tổng hữu hạn và chứng minh bằng phương pháp quy nạp

VÍ DỤ 5. Cho dãy số (u_n) xác định bởi: $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_n = 2u_{n-1} + 3 \end{cases}, \forall n \geq 2.$

a) Viết năm số hạng đầu của dãy.

b) Chứng minh rằng $u_n = 2^{n+1} - 3$.

Lời giải.

a) Ta có 5 số hạng đầu của dãy là
$u_1 = 1; u_2 = 2u_1 + 3 = 5; u_3 = 2u_2 + 3 = 13; u_4 = 2u_3 + 3 = 29;\ u_5 = 2u_4 + 3 = 61.$

b) Ta chứng minh bài toán bằng phương pháp quy nạp
- Với $n = 1 \Rightarrow u_1 = 2^{1+1} - 3 = 1 \Rightarrow$ bài toán đúng với $n = 1$.
- Giả sử $u_k = 2^{k+1} - 3$, ta chứng minh $u_{k+1} = 2^{k+2} - 3$.
Thật vậy, theo công thức truy hồi ta có $u_{k+1} = 2u_k + 3 = 2\left(2^{k+1} - 3\right) + 3 = 2^{k+2} - 3$.

D. BÀI TẬP TỰ LUẬN

BÀI 1. Cho $S_n = 1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^n$ và $T_n = 2^{n+1} - 1$, với $n \in \mathbb{N}^*$.

a) So sánh S_1 và T_1; S_2 và T_2; S_3 và T_3.

b) Dự đoán công thức tính S_n và chứng minh bằng phương pháp quy nạp toán học.

Lời giải.

a) Ta có $S_1 = 3$, $T_1 = 3$ suy ra $S_1 = T_1$.
$S_2 = 1 + 2 + 2^2 = 7$, $T_2 = 2^3 - 1 = 7$ suy ra $S_2 = T_2$.
$S_3 = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 = 15$, $T_3 = 2^4 - 1 = 15$ suy ra $S_3 = T_3$.

b) Dự đoán $S_n = 1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1$, với $n \in \mathbb{N}^*$.
Chứng minh bằng quy nạp toán học.
Cho $n = 1$ ta được $S_1 = 3$ (đúng).
Giả sử đẳng thức đúng với $n = k > 1$, $n \in \mathbb{N}^*$ tức là

$$S_k = 1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^k = 2^{k+1} - 1.$$

Ta chứng minh đẳng thức đúng với $n = k + 1$, $n \in \mathbb{N}^*$ tức là

$$S_{k+1} = 1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1.$$

Thật vậy $S_{k+1} = \left(1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^k\right) + 2^{k+1}$
$= 2^{k+1} - 1 + 2^{k+1}$
$= 2 \cdot 2^{k+1} - 1$
$= 2^{k+2} - 1.$
Vậy $S_n = 1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1$, với $n \in \mathbb{N}^*$.

BÀI 2. Cho $S_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^2} + \ldots + \dfrac{1}{2^n}$ và $T_n = 2 - \dfrac{1}{2^n}$, với $n \in \mathbb{N}^*$.

a) So sánh S_1 và T_1; S_2 và T_2; S_3 và T_3.

b) Dự đoán công thức tính S_n và chứng minh bằng phương pháp quy nạp toán học.

Lời giải.

a) Ta có $S_1 = 1 + \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2}$, $T_1 = 2 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2}$ suy ra $S_1 = T_1$.
$S_2 = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^2} = \dfrac{7}{4}$, $T_2 = 2 - \dfrac{1}{2^2} = \dfrac{7}{4}$ suy ra $S_2 = T_2$.
$S_3 = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{2^3} = \dfrac{15}{8}$, $T_3 = 2 - \dfrac{1}{2^3} = \dfrac{15}{8}$ suy ra $S_3 = T_3$.

b) Dự đoán $S_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^2} + \ldots + \dfrac{1}{2^n} = 2 - \dfrac{1}{2^n}$, với $n \in \mathbb{N}^*$.
Chứng minh bằng quy nạp toán học.
Cho $n = 1$ ta được $S_1 = \dfrac{3}{2}$ (đúng).
Giả sử đẳng thức đúng với $n = k > 1$, $n \in \mathbb{N}^*$ tức là

$$S_k = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^k} = 2 - \frac{1}{2^k}.$$

Ta chứng minh đẳng thức đúng với $n = k + 1$, $n \in \mathbb{N}^*$ tức là

$$S_{k+1} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{k+1}} = 2 - \frac{1}{2^{k+1}}.$$

Thật vậy $S_{k+1} = \left(1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^2} + \ldots + \dfrac{1}{2^k}\right) + \dfrac{1}{2^{k+1}}$
$= 2 - \dfrac{1}{2^k} + \dfrac{1}{2^{k+1}}$
$= 2 - \dfrac{1}{2^{k+1}}.$
Vậy $S_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^2} + \ldots + \dfrac{1}{2^n} = 2 - \dfrac{1}{2^n}$, với $n \in \mathbb{N}^*$.

BÀI 3. Cho $S_n = \dfrac{1}{1\cdot 5} + \dfrac{1}{5\cdot 9} + \dfrac{1}{9\cdot 13} + \ldots + \dfrac{1}{(4n-3)(4n+1)}$, với $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Tính S_1, S_2, S_3, S_4.

b) Dự đoán công thức tính S_n và chứng minh bằng phương pháp quy nạp toán học.

Lời giải.

a) Ta có $S_1 = \dfrac{1}{1\cdot 5} = \dfrac{1}{5}$, $S_2 = \dfrac{1}{1\cdot 5} + \dfrac{1}{5\cdot 9} = \dfrac{2}{9}$, $S_3 = \dfrac{1}{1\cdot 5} + \dfrac{1}{5\cdot 9} + \dfrac{1}{9\cdot 13} = \dfrac{3}{13}$, $S_4 = \dfrac{1}{1\cdot 5} + \dfrac{1}{5\cdot 9} + \dfrac{1}{9\cdot 13} + \dfrac{1}{13\cdot 17} = \dfrac{4}{17}$.

b) Ta có $\dfrac{1}{(4n-3)(4n+1)} = \dfrac{1}{4}\cdot\left(\dfrac{1}{4n-3} - \dfrac{1}{4n+1}\right)$ nên

$$S_n = \frac{1}{4}\cdot\left(1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{4n-3} - \frac{1}{4n+1}\right) = \frac{1}{4}\cdot\left(1 - \frac{1}{4n+1}\right) = \frac{n}{4n+1}.$$

Dự đoán $S_n = \dfrac{1}{1\cdot 5} + \dfrac{1}{5\cdot 9} + \dfrac{1}{9\cdot 13} + \ldots + \dfrac{1}{(4n-3)(4n+1)} = \dfrac{n}{4n+1}$, với $n \in \mathbb{N}^*$.

Cho $n = 1$ ta được $S_1 = \dfrac{1}{5}$ (đúng).

Giả sử đẳng thức đúng với $n = k \in \mathbb{N}^*, n > 1$, tức là

$$S_k = \frac{1}{1\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 9} + \frac{1}{9\cdot 13} + \ldots + \frac{1}{(4k-3)\cdot(4k+1)} = \frac{k}{4k+1}.$$

Ta chứng minh đẳng thức đúng với $n = k+1, n \in \mathbb{N}^*$, tức là

$$S_{k+1} = \frac{1}{1\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 9} + \frac{1}{9\cdot 13} + \ldots + \frac{1}{(4k-3)\cdot(4k+1)} + \frac{1}{(4k+1)\cdot(4k+5)} = \frac{k+1}{4k+5}.$$

Thật vậy, $S_{k+1} = \left(\dfrac{1}{1\cdot 5} + \dfrac{1}{5\cdot 9} + \dfrac{1}{9\cdot 13} + \ldots + \dfrac{1}{(4k-3)\cdot(4k+1)}\right) + \dfrac{1}{(4k+1)\cdot(4k+5)}$

$= \dfrac{k}{4k+1} + \dfrac{1}{(4k+1)\cdot(4k+5)}$

$= \dfrac{k+1}{4k+5}$.

Vậy $S_n = \dfrac{1}{1\cdot 5} + \dfrac{1}{5\cdot 9} + \dfrac{1}{9\cdot 13} + \ldots + \dfrac{1}{(4n-3)(4n+1)} = \dfrac{n}{4n+1}$, với $n \in \mathbb{N}^*$.

BÀI 4. Cho q là số thực khác 1. Chứng minh $1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1} = \dfrac{1-q^n}{1-q}$, với $n \in \mathbb{N}^*$.

Lời giải.

Cho $n = 1$ ta được $q^0 = \dfrac{1-q}{1-q}$ (đúng).

Giả sử đẳng thức đúng với $n = k > 1, n \in \mathbb{N}^*$, tức là

$$1 + q + q^2 + \ldots + \frac{1-q^k}{1-q}, \text{với } n \in \mathbb{N}^*, n > 1.$$

Ta chứng minh đẳng thức đúng với $n = k+1$, $n \in \mathbb{N}^*$ tức là

$$1 + q + q^2 + \ldots + q^{k-1} + q^k = \frac{1-q^{k+1}}{1-q}, \text{với } k \in \mathbb{N}^*.$$

Thật vậy, $\mathrm{VT} = \left(1 + q + q^2 + \ldots + q^{k-1}\right) + q^k$

$= \dfrac{1-q^k}{1-q} + q^k$

$= \dfrac{1-q^{k+1}}{1-q} = \mathrm{VP}, \text{với } k \in \mathbb{N}^*$

Vậy $1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1} = \dfrac{1-q^n}{1-q}$, với $n \in \mathbb{N}^*$.

BÀI 5. Chứng minh với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, ta có

a) $4^n + 15n - 1$ chia hết cho 9;

b) $13^n - 1$ chia hết cho 6.

Lời giải.

a) Cho $n = 1$ ta được $4^1 + 15 \cdot 1 - 1 = 18$ chia hết cho 9 (đúng).
Giả sử mệnh đề đúng với $n = k \in \mathbb{N}^*$, tức là $4^k + 15k - 1$ chia hết cho 9.
Ta chứng minh mệnh đề đúng với $n = k + 1$, $n \in \mathbb{N}^*$ tức là $4^{k+1} + 15(k+1) - 1$ chia hết cho 9.
Thật vậy $4^{k+1} + 15(k+1) - 1 = 4 \cdot 4^k + 15k + 14 = 4\left(4^k + 15k - 1\right) - 45k + 18$ chia hết cho 9.
Vậy $4^n + 15n - 1$ chia hết cho 9.

b) Cho $n = 1$ ta được $13^1 - 1 = 12$ chia hết cho 6.
Giả sử mệnh đề đúng với $n = k \in \mathbb{N}^*$, tức là $13^k - 1$ chia hết cho 6.
Ta chứng minh mệnh đề đúng với $n = k + 1$, $n \in \mathbb{N}^*$, tức là $13^{k+1} - 1$ chia hết cho 6.
Thật vậy, $13^{k+1} - 1 = 13 \cdot 13^k - 1 = 13\left(13^k - 1\right) + 12$ chia hết cho 6.
Vậy $13^n - 1$ chia hết cho 6.

BÀI 6. Chứng minh $n^n > (n+1)^{n-1}$ với $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$.

Lời giải.

Cho $n = 2$ ta được $2^2 > (2+1)^{2-1}$ (đúng).

Giả sử bất đẳng thức đúng với $n = k > 2$, $n \in \mathbb{N}^*$ tức là $k^k > (k+1)^{k-1} \Rightarrow \dfrac{k^k}{(k+1)^{k-1}} > 1$, với $k \in \mathbb{N}^*$, $k > 2$.

Ta chứng minh bất đẳng thức đúng với $n = k + 1$, tức là $(k+1)^{k+1} > (k+2)^k$, với $k \in \mathbb{N}^*$, $k > 2$.

Thật vậy $\quad (k+1)^2 > k(k+2)$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow (k+1)^{2k} > [k(k+2)]^k \\
&\Rightarrow \frac{(k+1)^{2k}}{(k+2)^k} > k^k \\
&\Rightarrow \frac{(k+1)^{k+1}}{(k+2)^k} > \frac{k^k}{(k+1)^{k-1}} > 1 \\
&\Rightarrow (k+1)^{k+1} > (k+2)^k.
\end{aligned}$$

Vậy $n^n > (n+1)^{n-1}$ với $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$.

BÀI 7. Chứng minh $a^n - b^n = (a-b)\left(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1}\right)$ với $n \in \mathbb{N}^*$.

Lời giải.

Khi $n = 1$ ta có $a^1 - b^1 = a - b$ (luôn đúng).
Giả sử đẳng thức đúng với $n = k$, $n \in \mathbb{N}^*$, tức là $a^k - b^k = (a-b)\left(a^{k-1} + a^{k-2}b + \ldots + ab^{k-2} + b^{k-1}\right)$ với $k \in \mathbb{N}^*$.
Ta chứng minh đẳng thức đúng với $n = k + 1$, $n \in \mathbb{N}^*$ tức là

$$a^{k+1} - b^{k+1} = (a-b)\left[a^{(k+1)-1} + a^{(k+1)-2}b + \ldots + ab^{(k+1)-2} + b^{(k+1)-1}\right].$$

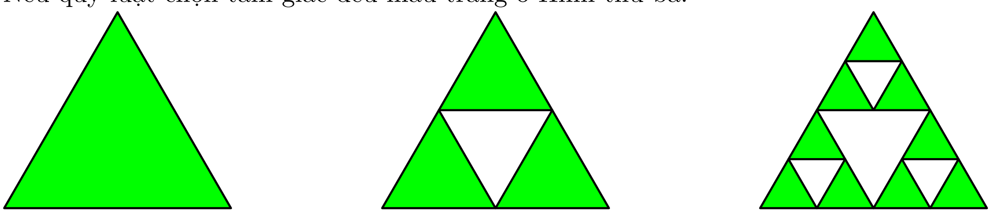
Thật vậy
$$\begin{aligned}
a^{k+1} - b^{k+1} &= a \cdot a^k - b \cdot b^k \\
&= a \cdot a^k - a \cdot b^k + a \cdot b^k - b \cdot b^k \\
&= a\left(a^k - b^k\right) + b^k(a-b) \\
&= a\left[(a-b)\left(a^{k-1} + a^{k-2}b + \ldots + ab^{k-2} + b^{k-1}\right)\right] + b^k(a-b) \\
&= (a-b)\left[a^{(k+1)-1} + a^{(k+1)-2}b + \ldots + ab^{(k+1)-2} + b^{(k+1)-1}\right].
\end{aligned}$$

Vậy $a^n - b^n = (a-b)\left(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1}\right)$ với $n \in \mathbb{N}^*$.

BÀI 8. Cho tam đều màu xanh (Hình thứ nhất).

a) Nêu quy luật chọn tam giác đều màu trắng ở Hình thứ hai.

b) Nêu quy luật chọn tam giác đều màu trắng ở Hình thứ ba.



Hình thứ nhất Hình thứ hai Hình thứ ba

c) Nêu quy luật tiếp tục chọn các tam giác đều màu trắng từ Hình thứ tư và các tam giác đều màu trắng ở những hình sau đó.

d) Tính số tam giác đều màu xanh lần lượt trong các Hình thứ nhất, Hình thứ hai, Hình thứ ba.

e) Dự đoán số tam giác đều màu xanh trong hình thứ n. Chứng minh kết quả đó bằng quy nạp toán học.

Lời giải.

a) Tam giác màu trắng được tạo thành từ các đường trung bình của tam giác màu xanh.

b) Cứ mỗi tam giác màu xanh ở hình thứ hai ta được một tam giác màu trắng ở hình thứ ba.

c) Quy luật chọn các tam giác màu trắng ở hình thứ ba, hình thứ tư và các hình tiếp theo là $1; 4; 4+3\cdot 3 = 13; 13+12\cdot 3 = 49; 49 + 48 \cdot 3 \ldots$

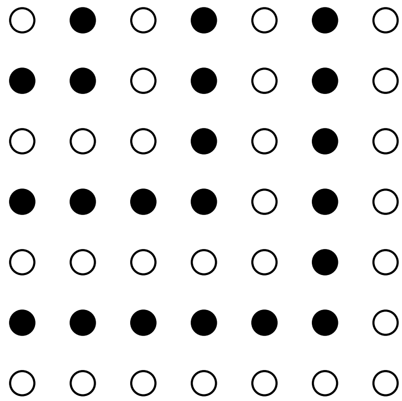
d) Số tam giác màu xanh ở hình thứ nhất là 1, số tam giác màu xanh ở hình thứ hai là 3, số tam giác màu xanh ở hình thứ ba là 9.

e) Dự đoán số tam giác đều màu xanh trong hình thứ n là $T_n = 3^n$.

BÀI 9. Quan sát Hình 6.

a) Nêu quy luật sắp xếp các chấm trắng và đen xen kẽ nhau khi xếp các chấm đó từ góc trên bên trái xuống góc dưới bên phải (tạo thành hình vuông).

b) Giả sử hình vuông thứ n có mỗi cạnh chứa n chấm. Tính tổng số chấm được xếp trong hình vuông (kể cả trên cạnh). Chứng minh kết quả đó bằng phương pháp quy nạp toán học.



Lời giải.

a) Số chấm trắng và số chấm đen được sắp xếp kín hai cạnh của một hình vuông.

b) Tổng số chấm trắng tính từ góc trên bên trái xuống góc dưới bên phải của một hình vuông có độ dài cạnh $2n$ chấm là

$$S_1 = (2\cdot 1 - 1) + (2\cdot 3 - 1) + (2\cdot 5 - 1) + \ldots + [2\cdot(2n-1) - 1]$$

Tổng số chấm đen tính từ góc trên bên trái xuống góc dưới bên phải của một hình vuông có độ dài cạnh $2n$ chấm là

$$S_2 = (2\cdot 2 - 1) + (2\cdot 4 - 1) + ... + (2\cdot 2n - 1).$$

Tổng số chấm tính từ góc trên bên trái xuống góc dưới bên phải của một hình vuông có độ dài cạnh $2n$ chấm là

$$S = S_1 + S_2 = (2\cdot 1 - 1) + (2\cdot 2 - 1) + \ldots + (2\cdot 2n - 1) = 2\left(1 + 2 + 3 + \ldots + 2n\right) - 2n.$$

Tổng số chấm tính từ góc trên bên trái xuống góc dưới bên phải của một hình vuông có độ dài cạnh n chấm là

$$\frac{S}{4} = \frac{1}{2}\cdot(1 + 2 + 3 + \ldots + 2n) - \frac{n}{2}.$$

Ta cũng có tổng số chấm trong hình vuông mỗi cạnh chứa n chấm là n^2.
Như vậy $\frac{1}{2}\cdot(1+2+3+\ldots+2n) - \frac{n}{2} = n^2$.
Chứng minh bằng quy nạp.
Cho $n = 1$ ta được $\frac{1}{2}\cdot(1+2) - \frac{1}{2} = 1$ (đúng).
Giả sử đẳng thức đúng khi $n = k \in \mathbb{N}^*$, tức là $\frac{1}{2}\cdot(1+2+3+\ldots+2k) - \frac{k}{2} = k^2$.
Ta chứng minh đẳng thức đúng khi $n = k+1, n \in \mathbb{N}^*$, tức là

$$\frac{1}{2}\cdot[1+2+3+\ldots+2k+(2k+1)+2(k+1)] - \frac{k+1}{2} = (k+1)^2.$$

$$\begin{aligned}\text{Thật vậy VT} &= \frac{1}{2}\cdot(1+2+3+\ldots+2k)+2k+\frac{3}{2}-\frac{k}{2}-\frac{1}{2}\\ &= k^2+2k+1\\ &= (k+1)^2=\text{VP}.\end{aligned}$$

Vậy $\frac{1}{2}\cdot(1+2+3+\ldots+2n)-\frac{n}{2}=n^2$.

BÀI 10. Giả sử năm đầu tiên, cô Hạnh gửi vào ngân hàng A (đồng) với lãi suất $r\%/$ năm. Hết năm đầu tiên, cô Hạnh không rút tiền ra và gửi thêm A (đồng) nữa. Hết năm thứ hai, cô Hạnh cũng không rút tiền ra và lại gửi thêm A (đồng) nữa. Cứ tiếp tục như vậy cho những năm sau. Chứng minh số tiền cả vốn lẫn lãi mà cô Hạnh có được sau n (năm) là $T_n=\frac{A(100+r)}{r}\left[\left(1+\frac{r}{100}\right)^n-1\right]$ (đồng), nếu trong khoảng thời gian này lãi suất không thay đổi.

Lời giải.

Hết năm đầu tiên số tiền cô Hạnh có được là $A\left(1+\frac{r}{100}\right)$.

Đầu năm thứ hai số tiền cô Hạnh có được là $A\left(1+\frac{r}{100}\right)+A$.

Cuối năm thứ hai số tiền cô Hạnh có được là $\left[A\left(1+\frac{r}{100}\right)+A\right]\cdot\left(1+\frac{r}{100}\right)=A\left(1+\frac{r}{100}\right)^2+A\left(1+\frac{r}{100}\right)$.

Đầu năm thứ ba số tiền cô Hạnh có được là $A\left(1+\frac{r}{100}\right)^2+A\left(1+\frac{r}{100}\right)+A$.

Cuối năm ba số tiền cô Hạnh có được là $\left[A\left(1+\frac{r}{100}\right)^2+A\left(1+\frac{r}{100}\right)+A\right]\cdot\left(1+\frac{r}{100}\right)=A\left(1+\frac{r}{100}\right)^3+A\left(1+\frac{r}{100}\right)^2+A\left(1+\frac{r}{100}\right)$.

$\vdots$

Cuối năm thứ n số tiền cô Hạnh có được là

$$\begin{aligned}T_n &= A\left(1+\frac{r}{100}\right)^n+A\left(1+\frac{r}{100}\right)^{n-1}+\ldots+A\left(1+\frac{r}{100}\right)^2+A\left(1+\frac{r}{100}\right)\\ &= A\left[\left(1+\frac{r}{100}\right)^n+\left(1+\frac{r}{100}\right)^{n-1}+\ldots+\left(1+\frac{r}{100}\right)^2+\left(1+\frac{r}{100}\right)\right]\\ &= \frac{A(100+r)}{r}\left[\left(1+\frac{r}{100}\right)^n-1\right].\end{aligned}$$

BÀI 11. Một người gửi số tiền A (đồng) vào ngân hàng. Biểu lãi suất của ngân hàng như sau: Chia mỗi năm thành m kì hạn và lãi suất $r\%$/năm. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi kì hạn, số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn ban đầu. Chứng minh số tiền nhận được (bao gồm cả vốn lẫn lãi) sau n (năm) gửi là $S_n=A\left(1+\frac{r}{100m}\right)^{m\cdot n}$ (đồng), nếu trong khoảng thời gian này người gửi không rút tiền ra và lãi suất không thay đổi.

Lời giải.

Số tiền người đó có được sau kì hạn đầu tiên là $A\left(1+\frac{r}{100m}\right)$.

Số tiền người đó có được sau kì hạn thứ hai là $A\left(1+\frac{r}{100m}\right)\cdot\left(1+\frac{r}{100m}\right)=A\cdot\left(1+\frac{r}{100m}\right)^2$.

$\vdots$

Số tiền người đó có được sau năm đầu tiên (m kì hạn) là $A\left(1+\frac{r}{100m}\right)^m$.

Số tiền người đó có được sau năm đầu tiên và kì hạn đầu tiên của năm thứ hai là $A\left(1+\frac{r}{100m}\right)^m\left(1+\frac{r}{100m}\right)=A\left(1+\frac{r}{100m}\right)^{m+1}$.

$\vdots$

Số tiền người đó có được sau n năm là $S_n=A\left(1+\frac{r}{100m}\right)^{\overbrace{m+\ldots+m}^{\text{n số m}}}=A\left(1+\frac{r}{100m}\right)^{m\cdot n}$.

BÀI 12. Sử dụng phương pháp quy nạp toán học, chứng minh các đẳng thức sau đúng với mọi số tự nhiên $n\geq 1$.

a) $2+4+6+\ldots+2n=n(n+1)$;

b) $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Lời giải.

a) Cho $n=1$ ta được $2=1\cdot(1+1)$ (đúng).
Giả sử đẳng thức đúng khi $n=k, n\in\mathbb{N}^*, n>1$, tức là $2+4+6+\ldots+2k=k(k+1)$.
Ta chứng minh đẳng thức đúng khi $n=k+1$, $n\in\mathbb{N}^*, n>1$, tức là

$$2+4+6+\ldots+2k+2(k+1)=(k+1)(k+2).$$

Thật vậy, với $k\in\mathbb{N}^*, k>1$ ta có $VT=2+4+6+\ldots+2k+2(k+1)$
$$=k(k+1)+2(k+1)$$
$$=(k+1)(k+2)=VP.$$
Vậy $2+4+6+\ldots+2n=n(n+1)$, với $n\in\mathbb{N}^*$, $n>1$.

b) Cho $n=1$ ta được $1^3=\dfrac{1(1+1)(2\cdot1+1)}{6}$ (đúng).
Giả sử đẳng thức đúng khi $n=k, n\in\mathbb{N}^*, n>1$, tức là

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}.$$

Ta chứng minh đẳng thức đúng khi $n=k+1$, $n\in\mathbb{N}^*, n>1$, tức là

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+k^2+(k+1)^2=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

Thật vậy, với $k\in\mathbb{N}^*, k>1$ ta có $VT=1^2+2^2+3^2+\ldots+k^2+(k+1)^2$
$$=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2$$
$$=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}=VP.$$
Vậy $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, với $n\in\mathbb{N}^*$, $n\geq1$.

BÀI 13. Mỗi khẳng định sau là đúng hay sai? Nếu em nghĩ là nó đúng, hãy chứng minh nó. Nếu em nghĩ là nó sai, hãy đưa ra một phản ví dụ.

a) $p(n)=n^2-n+11$ là số nguyên tố với mọi số tự nhiên n.

b) $n^2>n$ với mọi số tự nhiên $n\geq2$.

Lời giải.

a) Mệnh đề đã cho là mệnh đề đúng.
Chứng minh mệnh đề bằng quy nạp.
Cho $n=1$ ta được $1^2-1+11=11$ là số nguyên tố (đúng).
Giả sử mệnh đề đúng với $n=k$, $k\in\mathbb{N}^*$, $k>1$, tức là k^2-k+11 là số nguyên tố.
Ta chứng minh mệnh đề đúng với $n=k+1$, $k\in\mathbb{N}$, $k>1$ tức là $(k+1)^2-(k+1)+11$ là số nguyên tố,
Thật vậy, đặt $u=k+1$, $u\in\mathbb{N}$, $u>1$ thì $(k+1)^2-(k+1)+11=u^2-u+11$.
Theo giả thuyết quy nạp thì u^2-u+11, $u\in\mathbb{N}$, $u>1$ là số nguyên tố.
Vậy $p(n)=n^2-n+11$ là số nguyên tố với mọi số tự nhiên n.

b) Mệnh đề đã cho là mệnh đề đúng.
Chứng minh bằng phương pháp quy nạp.
Cho $n=2$ ta được $2^2>2$ (đúng).
Giả sử mệnh đề đúng với $n=k$, $k\in\mathbb{N}, k>2$, tức là $k^2>k$.
Ta chứng minh mệnh đề đúng với $n=k+1$, $k\in\mathbb{N}, k>2$, tức là $(k+1)^2>k+1$.
Thật vậy, $(k+1)^2=k^2+2k+1>3k+1>k+1$, $k\in\mathbb{N}$, $k>2$.
Vậy $n^2>n$ với mọi số tự nhiên $n\geq2$.

BÀI 14. Chứng minh rằng n^3-n+3 chia hết cho 3 với mọi số tự nhiên $n\geq1$.

Lời giải.

Ta chứng minh khẳng định trên bằng quy nạp theo n, với $n\geq1$.

Với $n=1$, ta thấy $n^3-n+3=3\,\vdots\,3$. Vậy khẳng định đúng với $n=1$.

Giả sử khẳng định đúng với $n=k\geq1$, tức là $k^3-k+3\,\vdots\,3$.

Ta cần chứng minh khẳng định đúng với $n=k+1$, tức là chứng minh $(k+1)^3-(k+1)+3\,\vdots\,3$. Thật vậy, theo giả thiết quy nạp, ta có

$$(k+1)^3-(k+1)+3=\left(k^3-k+3\right)+3k^2+3k+3\,\vdots\,3$$

Vậy khẳng định đúng với mọi số tự nhiên $n\geq 1$.

BÀI 15. Chứng minh rằng n^2-n+41 là số lẻ với mọi số nguyên dương n.

Lời giải.

Ta chứng minh $n^2-n+41\not\vdots\,2$ bằng quy nạp theo n, với $n\geq 1$.

Với $n=1$, ta thấy $n^2-n+41=41\not\vdots\,2$. Vậy khẳng định trên đúng với $n=1$.

Giả sử khẳng định đúng với $n=k\geq 1$, tức là $k^2-k+41\not\vdots\,2$.
Ta cần chứng minh khẳng định đúng với $n=k+1$, tức là chứng minh $(k+1)^2-(k+1)+41$ $\not\vdots\,2$. Thật vậy, theo giả thiết quy nạp, ta có

$$(k+1)^2-(k+1)+41=(k^2-k+41)+2k\not\vdots\,2.$$

Vậy khẳng định đúng với mọi số nguyên dương n.

BÀI 16. Chứng minh rằng nếu $x>-1$ thì $(1+x)^n\geq 1+nx$ với mọi số tự nhiên n.

Lời giải.

Xét số thực $x>-1$, ta chứng minh $(1+x)^n\geq 1+nx$ bằng quy nạp theo n.
Với $n=0$, ta thấy $(1+x)^0\geq 1+0.x$ đúng. Vậy khẳng định đúng với $n=0$.
Giả sử khẳng định đúng với $n=k$, tức là $(1+x)^k\geq 1+kx$.
Ta cần chứng minh khẳng định đúng với $n=k+1$, tức là chứng minh

$$(1+x)^{k+1}\geq 1+(k+1)x$$

Thật vậy, theo giả thiết quy nạp, ta có

$$(1+x)^{k+1}=(1+x)^k(1+x)\geq(1+kx)(1+x)=1+(k+1)x+kx^2\geq 1+(k+1)x.$$

(Vì $1+x>0$ và $kx^2\geq 0$)
Vậy khẳng định đúng với mọi số tự nhiên n.

BÀI 17. Cho tổng $S_n=\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\dfrac{1}{n\cdot(n+1)}$.

a) Tính S_1,S_2,S_3.

b) Dự đoán công thức tính tổng S_n và chứng minh bằng quy nạp.

Lời giải.

a) $S_1=\dfrac{1}{1.2}=\dfrac{1}{2},S_2=\dfrac{1}{1.2}+\dfrac{1}{2.3}=\dfrac{2}{3},S_3=\dfrac{3}{4}$.

b) Ta sẽ chứng minh $S_n=\dfrac{n}{n+1}$ bằng quy nạp theo $n\in\mathbb{Z}^+$.
Theo câu a), khẳng định đúng với $n=1$.
Giả sử khẳng định đúng với $n=k\geq 1$, tức là $S_k=\dfrac{k}{k+1}$.
Ta cần chứng minh khẳng định đúng với $n=k+1$, tức là chứng minh $S_{k+1}=\dfrac{k+1}{k+2}$. Thật vậy, theo giả thiết quy nạp, ta có
$S_{k+1}=\dfrac{1}{1.2}+\dfrac{1}{2.3}+...+\dfrac{1}{k(k+1)}+\dfrac{1}{(k+1)(k+2)}=S_k+\dfrac{1}{(k+1)(k+2)}=$
$\dfrac{k}{k+1}+\dfrac{1}{k+1}-\dfrac{1}{k+2}=1-\dfrac{1}{k+2}=\dfrac{k+1}{k+2}$.
Vậy khẳng định đúng với mọi số nguyên dương n.

BÀI 18. Sử dụng phương pháp quy nạp toán học, chứng minh rằng số đường chéo của một đa giác n cạnh ($n\geq 4$) là $\dfrac{n(n-3)}{2}$.

Lời giải.

Với $n=4$, đa giác 4 cạnh có đúng $2\left(=\dfrac{4(4-3)}{2}\right)$ đường chéo. Vậy khẳng định đúng với $n=4$.

Giả sử khẳng định đúng với $n=k\geq 4$, tức là số đường chéo của đa giác k cạnh là $\dfrac{k(k-3)}{2}$.

Ta cần chứng minh khẳng định đúng với $n=k+1$, tức là chứng minh số đường chéo của đa giác $k+1$ cạnh là $\dfrac{(k+1)(k-2)}{2}$.

Thật vậy, theo giả thiết quy nạp, ta có đa giác k cạnh có $\frac{k(k-3)}{2}$ đường chéo, bây giờ ta xóa đi một cạnh bất kì và thay vào đó hai cạnh mới, thì đa giác thu được có $k+1$ cạnh, đa giác này có $\frac{k(k-3)}{2}$ ban đầu và có thêm $k-1$ đường chéo mới. Như vậy số đường chéo của đa giác $k+1$ cạnh sẽ là $\frac{k(k-3)}{2}+k-1=\frac{k^2-k-2}{2}=\frac{(k+1)(k-2)}{2}$.
Vậy khẳng định đúng với mọi số nguyên dương $n \geq 4$.

BÀI 19. Ta sẽ "lập luận" bằng quy nạp toán học để chỉ ra rằng "Mọi con mèo đều có cùng màu". Ta gọi $P(n)$ với n nguyên dương là mệnh đề sau: "Mọi con mèo trong một đàn gồm n con đều có cùng màu".
Bước 1. Với $n=1$ thì mệnh đề $P(1)$ là "Mọi con mèo trong một đàn gồm 1 con đều có cùng màu". Hiển nhiên mệnh đề này đúng!
Bước 2. Giả sử $P(k)$ đúng với một số nguyên dương k nào đó. Xét một đàn mèo gồm $k+1$ con. Gọi chúng là $M_1, M_2, ..., M_{k+1}$. Bỏ con mèo M_{k+1} ra khỏi đàn, ta nhận được một đàn mèo gồm k con là $M_1, M_2, ..., M_k$. Theo giả thiết quy nạp, các con mèo có cùng màu. Bây giờ, thay vì bỏ con mèo M_{k+1}, ta bỏ con mèo M_1 để có đàn mèo gồm k con là $M_2, M_3, ..., M_{k+1}$. Vẫn theo giả thiết quy nạp thì các con mèo $M_2, M_3, ..., M_{k+1}$ có cùng màu. Cuối cùng, đưa con mèo M_1 trở lại đàn để có đàn mèo ban đầu. Theo các lập luận trên: các con mèo $M_1, M_2, ..., M_k$ có cùng màu và các con mèo $M_2, M_3, ..., M_{k+1}$ có cùng màu. Từ đó suy ra tất cả các con mèo $M_1, M_2, ..., M_{k+1}$ đều có cùng màu.
Vậy, theo nguyên lí quy nạp thì $P(n)$ đúng với mọi số nguyên dương n. Nói riêng nếu gọi N là số mèo hiện tại trên Trái Đất thì việc $P(N)$ đúng cho thấy tất cả các con mèo (trên Trái Đất) đều có cùng màu!
Tất nhiên là ta có thể tìm được các con mèo khác màu nhau! Theo em thì lập luận trên đây sai ở chỗ nào?

Lời giải.

Lập luận này sai ở Bước 2 khi $k=2$.
Với $k=2$, tức là đàn mèo có 2 con M_1, M_2. Khi đó việc tách đàn mèo này thành hai đàn mèo nhỏ, mỗi đàn 1 con mèo sẽ dẫn đến việc hai tập hợp $\{M_1, M_2, \ldots, M_k\}$ (lúc này chỉ là $\{M_1\}$) và $\{M_2, M_3, \ldots, M_k+1\}$ (lúc này chỉ là $\{M_2\}$) không có phần tử giao nhau. Do đó không thể suy ra tất cả các con mèo $M_1, M_2, \ldots, M_{k+1}$ đều có cùng màu.

BÀI 20. Chứng minh rằng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, ta có $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. $(*)$

Lời giải.

- Với $n=1$, ta có $VT_{(*)}=VP_{(*)}=1$. Suy ra, $(*)$ đúng với $n=1$.
- Giả sử $(*)$ đúng với $n=k$, nghĩa là ta có
$$1^2+2^2+3^2+\ldots+k^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}.$$
- Ta cần chứng minh $1^2+2^2+3^2+\ldots+(k+1)^2=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$.
Thật vậy, ta có
$$\begin{aligned}\underbrace{1^2+2^2+3^2+\ldots+(k)^2}_{\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}}+(k+1)^2 &= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2\\ &= \frac{(k+1)(2k^2+k+6k+6)}{6}\\ &= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}.\end{aligned}$$
$\Rightarrow (*)$ đúng khi $n=k+1$.
- Vậy theo nguyên lý quy nạp, $(*)$ đúng với mọi số nguyên dương n.

BÀI 21. Chứng minh rằng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, ta có
$$1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\ldots+n(n+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}.\ (*)$$

Lời giải.

- Với $n=1$, ta có $VT_{(*)}=VP_{(*)}=2$. Suy ra, $(*)$ đúng với $n=1$.
- Giả sử $(*)$ đúng với $n=k$, nghĩa là ta có
$$1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\ldots+k(k+1)=\frac{k(k+1)(k+2)}{3}.$$

- Ta cần chứng minh $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \ldots + (k+1)(k+2) = \dfrac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}$.

  Thật vậy, ta có

$$\begin{aligned}\underbrace{1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \ldots + k(k+1)}_{\dfrac{k(k+1)(k+2)}{3}} + (k+1)(k+2) &= \frac{k(k+1)(k+2)}{3} + (k+1)(k+2)\\ &= \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}.\end{aligned}$$

  $\Rightarrow (*)$ đúng khi $n = k+1$.

- Vậy theo nguyên lý quy nạp, $(*)$ đúng với mọi số nguyên dương n.

BÀI 22. Chứng minh

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{n-1} = 2^n - 1 \quad (*)$$

Lời giải.

Bước 1. Với $n = 1$, ta có $1 = 2^1 - 1$ (đúng).

Bước 2. Giả sử (*) đúng với $n = k$ $(k \in \mathbb{N}, k \geq 1)$, ta sẽ chứng minh công thức đúng với $n = k+1$. Tức là chứng minh:

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{k-1} + 2^k = 2^{k+1} - 1$$

Thật vậy, ta có:

$$\begin{aligned}1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{k-1} + 2^k &= (2^k + 1) + 2^k\\ &= 2.2^k + 1\\ &= 2^{k+1} + 1\end{aligned}$$

Do đó, (*) đúng với $n = k+1$.

Vậy (*) đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

BÀI 23. Chứng minh

$$5^{2n} - 1 \text{ chia hết cho } 24 (*)$$

Lời giải.

Bước 1. Với $n = 1$, ta có $5^2 - 1 = 24 \,\vdots\, 24$ (đúng).

Bước 2. Giả sử (*) đúng với $n = k$ $(k \in \mathbb{N}, k \geq 1)$, ta sẽ chứng minh công thức đúng với $n = k+1$. Tức là chứng minh:

$$5^{2(k+1)} - 1 \vdots 24$$

Thật vậy, ta có:

$$\begin{aligned}5^{2(k+1)} - 1 &= 5^{2k+2} - 1\\ &= 25.5^{2k} - 25 + 24\\ &= 25.(5^{2k} - 1) + 24\end{aligned}$$

Vì $\left(5^{2k} - 1\right) \vdots 24$ do giả thiết quy nạp, và $24 \,\vdots\, 24$, nên:

$$\left(5^{2(k+1)} - 1\right) \text{ chia hết cho } 24$$

Do đó, (*) đúng với $n = k+1$.

Vậy (*) đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

BÀI 24. Chứng minh rằng $n^3 + 5n$ chia hết cho 6 với mọi số tự nhiên $n \geq 1$.

Lời giải.

Ta chứng minh khẳng định trên bằng quy nạp theo n, với $n \geq 1$.

Với $n = 1$, ta thấy $n^3 + 5n = 6 \,\vdots\, 3$. Vậy khẳng định đúng với $n = 1$.

Giả sử khẳng định đúng với $n = k \geq 1$, tức là $k^3 + 5k \,\vdots\, 6$.

Ta cần chứng minh khẳng định đúng với $n = k+1$, tức là chứng minh $(k+1)^3 + 5(k+1) \,\vdots\, 6$. Thật vậy, theo giả thiết quy nạp, ta có

$$(k+1)^3+5(k+1)=\left(k^3+5k+6+3k(k+1)\right)\vdots 6 \text{ (do } k(k+1) \text{ chia hết cho 2)}$$

Vậy khẳng định đúng với mọi số tự nhiên $n \geq 1$.

BÀI 25. Cho $a, b \geq 0$. Chứng minh rằng bất đẳng thức sau đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{a^n+b^n}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^n$$

Lời giải.

Trước hết nhận xét rằng nếu $a=b$ thì bất đẳng thức (5) xảy ra dấu bằng) với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.
Giả sử $a \neq b$.
Nếu $n=1$ thì bất đẳng thức (5) đúng và dấu bằng xảy ra.
Ta sẽ chứng minh với $n \geq 2$ thì bất đẳng thức (5) đúng, bằng phương pháp quy nạp. Thật vậy:
Với $n=2$ thì (5) có dạng $\dfrac{a^2+b^2}{2} \geq \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2$ hay $(a-b)^2 \geq 0$.
Rõ ràng bất đẳng thức này đúng và dấu bằng không xảy ra.
Giả sử bất đẳng thức (5) đúng với $a \neq b$ và $n=k \geq 2$, tức là $\dfrac{a^k+b^k}{2}>\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^k$
Nhân hai vế của bất đẳng thức này với $a+b>0$, ta có $\dfrac{a^k+b^k}{2} \cdot(a+b)>\dfrac{(a+b)^{k+1}}{2^k}$
hay $\dfrac{a^{k+1}+a^k b+a b^k+b^{k+1}}{2}>\dfrac{(a+b)^{k+1}}{2^k}(*)$
Vì $a^{k+1}+b^{k+1}-\left(a^k b+a b^k\right)=a^k(a-b)-b^k(a-b)=(a-b)\left(a^k-b^k\right)>0$ nên

$$a^{k+1}+b^{k+1}>a^k b+a b^k(**).$$

Từ $(*)$ và $(*)$ suy ra

$$\frac{\left(a^{k+1}+b^{k+1}\right)+\left(a^{k+1}+b^{k+1}\right)}{2}>\frac{(a+b)^{k+1}}{2^k}$$

hay $\dfrac{a^{k+1}+b^{k+1}}{2}>\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^{k+1}$; nghĩa là bất đẳng thức (5) đúng với $n=k+1$.
Vậy bất đẳng thức đã được chứng minh.

BÀI 26. Chứng minh rằng bất đẳng thức sau đúng với mọi số tự nhiên $n \geq 2$:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}>\frac{2n}{n+1} \quad (*)$$

Lời giải.

Với $n=2$ thì $1+\dfrac{1}{2}>\dfrac{2.2}{2+1} \Leftrightarrow \dfrac{3}{2}>\dfrac{4}{3}$ (Đúng).
Giả sử $(*)$ đúng với $n=k\,(k \geq 2)$, tức là: $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{k}>\dfrac{2k}{k+1}$
Ta chứng minh $(*)$ đúng với $n=k+1$.
Ta có $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{k+1}=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{k}+\dfrac{1}{k+1}>\dfrac{2k}{k+1}+\dfrac{1}{k+1}=\dfrac{2k+1}{k+1}$
Mặt khác $\dfrac{2k+1}{k+1}>\dfrac{2(k+1)}{k+2}(1)$
Vì $(1) \Leftrightarrow(2k+1)(k+2)>2(k+1)(k+1) \Leftrightarrow 2k^2+5k+2>2k^2+4k+2 \Leftrightarrow k>0$ (Đúng).
Do đó, $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{k+1}>\dfrac{2(k+1)}{k+2}$
Vậy bất đẳng thức đã được chứng minh.

BÀI 27. Trong mặt phẳng, cho đa giác $A_1 A_2 A_3 \ldots A_n$ có n cạnh $(n \geq 3)$. Gọi S_n là tổng số đo các góc trong của đa giác.

a) Tính $S_3,\ S_4,\ S_5$ tương ứng với trường hợp tam giác, tứ giác và ngũ giác.

b) Từ đó, dự đoán công thức tính S_n và chứng minh công thức đó bằng phương pháp quy nạp toán học.

Lời giải.

a) $S_3=180^{\circ},\ S_4=360^{\circ},\ S_5=540^{\circ}$.

b) Ta dự đoán $S_n=(n-2) .180^{\circ}$.
Ta chứng minh công thức trên bằng phương pháp quy nạp toán học.

Bước 1. Với $n=3$, ta có tổng 3 góc trong tam giác bằng $180^{\circ}=(3-2) .180^{\circ}$. Vậy công thức đúng với $n=3$.

Bước 2. Gỉa sử công thức đúng với $n = k$ $(k \in \mathbb{N}, k \geq 3)$, ta sẽ chứng minh công thức đúng với $n = k + 1$. Tức là chứng minh:

$$S_{k+1} = [(k+1) - 2].180^\circ = (k-1).180^\circ$$

Thật vậy, xét đa giác có $k+1$ cạnh $A_1A_2 \ldots A_kA_{k+1}$, nối hai đỉnh A_1 và A_k, ta được đa giác có k cạnh $A_1A_2 \ldots A_k$. Theo giả thiết quy nạp, ta có tổng các góc trong đa giác k cạnh này là $S_k = (k-2).180^\circ$.
Dễ thấy tổng các góc trong đa giác $A_1A_2 \ldots A_kA_{k+1}$ bằng với tổng các góc trong đa giác $A_1A_2 \ldots A_k$ và tổng các góc trong tam giác $A_1A_kA_{k+1}$, tức là:

$$S_{k+1} = (k-2).180^\circ + 180^\circ = (k-1).180^\circ$$

Do đó, công thức đúng với $n = k + 1$

Vậy công thức đúng với mọi đa giác n cạnh $(n \geq 3)$.

BÀI 28. Hàng tháng, một người gửi vào ngân hàng một khoản tiền tiết kiệm không đổi a đồng. Giả sử lãi suất hằng thàng là r không đổi và theo thể thức lãi kép (tiền lãi của tháng trước được cộng vào vốn của tháng kế tiếp). Gọi T_n $(n \geq 1)$, là tổng số tiền vốn và lãi của người đó có trong ngân hàng sau n tháng.

a) Tính T_1, T_2, T_3.

b) Từ đó, dự đoán công thức tính T_n, và chứng minh công thức đó bằng phương pháp quy nạp toán học.

Lời giải.

a) $T_1 = A + Ar = A(1+r)$
$T_2 = A(1+r) + A(1+r)r = A(1+r)(1+r) = A(1+r)^2$
$T_3 = A(1+r)^2 + A(1+r)^2 r = A(1+r)^2(1+r) = A(1+r)^3$

b) Từ câu a) ta dự đoán: $T_n = A(1+r)^n n \geq 1(2)$ Ta sẽ chứng minh (2) đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ bằng phương pháp quy nạp toán học.

Bước 1. Ở câu a) ta đã biết (2) đúng với $n = 1$.

Bước 2. Giả sử (2) đúng với $n = k \geq 1$, tức là tổng tiền vốn và lãi của người đó sau kì hạn thứ k là $T_k = A(1+r)^k$. Số tiền trên là vốn của kì hạn thứ $k+1$. Do đó số tiền vốn và lãi của người đó sau kì hạn thứ $k+1$ là:

$$\begin{aligned} T_k &= A(1+r)^k + A(1+r)^k r \\ &= A(1+r)^{k+1} \end{aligned}$$

Do đó (2) đúng với $n = k + 1$.

Theo nguyên lí quy nạp công thức (2) đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Bài 4. NHỊ THỨC NEWTON

A. LÍ THUYẾT

1. Công thức nhị thức Niu-tơn

ĐỊNH NGHĨA 4.1. Cho $a, b \in \mathbb{R}$ và $n \in \mathbb{N}^*$, ta có

$$(a+b)^n = \mathrm{C}_n^0 a^n + \mathrm{C}_n^1 a^{n-1} b + \mathrm{C}_n^2 a^{n-2} b^2 + \cdots + \mathrm{C}_n^{n-1} a b^{n-1} + \mathrm{C}_n^n b^n. \quad (1)$$

Công thức (1) gọi là **công thức nhị thức Newton**, gọi tắt là **nhị thức Newton**.

NHẬN XÉT.
- Trong khai triển $(a \pm b)^n$ có $n+1$ số hạng và các hệ số của cặp số hạng cách đều số hạng đầu và số hạng cuối thì bằng nhau: $\mathrm{C}_n^k = \mathrm{C}_n^{n-k}$.
- Số hạng tổng quát dạng: $T_{n+1} = \mathrm{C}_n^k \cdot a^{n-k} \cdot b^k$ và số hạng thứ N thì $k = N - 1$.
- Trong khai triển $(a-b)^n$ thì dấu đan nhau, nghĩa là: $+$, rồi $-$, rồi $+$,...
- Số mũ của a giảm dần, số mũ của b tăng dần nhưng tổng số mũ a và b bằng n.

VÍ DỤ 6. Hãy khai triển $(a+b)^6$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} (a+b)^6 &= \mathrm{C}_6^0 a^6 + \mathrm{C}_6^1 a^5 b + \mathrm{C}_6^2 a^4 b^2 + \mathrm{C}_6^3 a^3 b^3 + \mathrm{C}_6^4 a^2 b^4 + \mathrm{C}_6^5 a b^5 + \mathrm{C}_6^6 b^6 \\ &= a^6 + 6a^5 b + 15a^4 b^2 + 31a^3 b^3 + 15a^2 b^4 + 6ab^5 + b^6. \end{aligned}$$

VÍ DỤ 7. Hãy khai triển $(x+1)^5$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} (x-1)^5 &= \mathrm{C}_5^0 x^5 + \mathrm{C}_5^1 x^4(-1) + \mathrm{C}_5^2 x^3(-1)^2 + \mathrm{C}_5^3 x^2(-1)^3 + \mathrm{C}_5^4 x(-1)^4 + \mathrm{C}_5^5(-1)^5 \\ &= x^5 - 5x^4 + 10x^3 - 10x^2 + 5x - 1. \end{aligned}$$

2. Tam giác Pascal

ĐỊNH NGHĨA 4.2. Các hệ số của các khai triển $(a+b)^0$, $(a+b)^1$, $(a+b)^2$, ..., $(a+b)^n$ có thể xếp thành một tam giác gọi là tam giác Pascal.

$$\begin{array}{llllllllll}
n=0: & 1 \\
n=1: & 1 & 1 \\
n=2: & 1 & 2 & 1 \\
n=3: & 1 & 3 & 3 & 1 \\
n=4: & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\
n=5: & 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \\
n=6: & 1 & 6 & 15 & 31 & 15 & 6 & 1 \\
n=7: & 1 & 7 & 21 & 35 & 35 & 21 & 7 & 1
\end{array}$$

HẰNG ĐẲNG THỨC PASCAL

$$\mathrm{C}_{n-1}^{k-1}+\mathrm{C}_{n-1}^{k}=\mathrm{C}_{n}^{k}.$$

VÍ DỤ 8. Sử dụng tam giác Pascal hãy khai triển $(a+2b)^5$.

Lời giải.

$$\begin{aligned}(a+2b)^5 &= a^5+5\cdot a^4\cdot 2b+10\cdot a^3\cdot(2b)^2+10\cdot a^2\cdot(2b)^3+5\cdot a\cdot(2b)^4+(2b)^5\\ &= a^5+10a^4b+40a^3b^2+80a^2b^3+80ab^4+32b^5.\end{aligned}$$

VÍ DỤ 9. Sử dụng tam giác Pascal hãy khai triển $(2x-1)^6$.

Lời giải.

$$\begin{aligned}(2x-1)^6 &= (2x)^6+6\cdot(2x)^5(-1)+15\cdot(2x)^4(-1)^2+31\cdot(2x)^3(-1)^3\\ &\quad +15\cdot(2x)^2(-1)^4+6\cdot(2x)(-1)^5+(-1)^6\\ &= 64x^6-192x^5+240x^4-160x^3+60x^2-12x+1.\end{aligned}$$

B. VẬN DỤNG CÔNG THỨC NHỊ THỨC NEWTON

VÍ DỤ 10. Xác định hệ số của x^8y^9 trong khai triển $(2x-3y)^{17}$.

Lời giải.

Số hạng tổng quát trong khai triển $(2x-3y)^{17}$ là $\mathrm{C}_{17}^k(2x)^{17-k}(-3y)^k=\mathrm{C}_{17}^k2^{17-k}(-3)^kx^{17-k}y^k$.
Để có số hạng chứa x^8y^9 thì $k=9$.
Vậy hệ số của số hạng chứa x^8y^9 là $\mathrm{C}_{17}^9\cdot 2^8\cdot(-3)^9=-2^83^9\mathrm{C}_{17}^9$.

VÍ DỤ 11. Cho a là một số thực dương. Biết rằng trong khai khiển $(5x+a)^{10}$, hệ số của x^5 là 252. Hãy tìm giá trị của a.

Lời giải.

Số hạng tổng quát trong khai triển $(5x+a)^{10}$ là $\mathrm{C}_{10}^k\cdot(5x)^{10-k}\cdot(a)^k=\mathrm{C}_{10}^k\cdot 5^{10-k}\cdot a^k\cdot x^{10-k}$.
Để có số hạng chứa x^5 thì $k=5$. Hệ số của số hạng này là $\mathrm{C}_{10}^5\cdot 5^5\cdot a^5=252\Leftrightarrow a=\dfrac{1}{5}$.
Vậy $a=\dfrac{1}{5}$ là giá trị cần tìm.

VÍ DỤ 12. Chứng minh $\mathrm{C}_{2n}^0+\mathrm{C}_{2n}^2+\cdots+\mathrm{C}_{2n}^{2n}=\mathrm{C}_{2n}^1+\mathrm{C}_{2n}^3+\cdots+\mathrm{C}_{2n}^{2n-1}=2^{2n-1}$.

Lời giải.

Xét $(1+1)^{2n}=\sum\limits_{k=0}^{2n}\mathrm{C}_{2n}^k\cdot 1^{2n-k}\cdot 1^k=\mathrm{C}_{2n}^0+\mathrm{C}_{2n}^1+\mathrm{C}_{2n}^2+\mathrm{C}_{2n}^3+\mathrm{C}_{2n}^4+\cdots+\mathrm{C}_{2n}^{2n}$. (1)

Xét $(1-1)^{2n}=\sum\limits_{k=0}^{2n}\mathrm{C}_{2n}^k\cdot 1^{2n-k}\cdot(-1)^k=\mathrm{C}_{2n}^0-\mathrm{C}_{2n}^1+\mathrm{C}_{2n}^2-\mathrm{C}_{2n}^3+\mathrm{C}_{2n}^4+\cdots+\mathrm{C}_{2n}^{2n}$. (2)

Lấy (1) cộng (2) ta được

$$\begin{aligned}&2^{2n}+0^{2n}=2\left(\mathrm{C}_{2n}^0+\mathrm{C}_{2n}^2+\mathrm{C}_{2n}^4+\mathrm{C}_{2n}^6+\cdots+\mathrm{C}_{2n}^{2n}\right)\\ \Leftrightarrow\ &\mathrm{C}_{2n}^0+\mathrm{C}_{2n}^2+\mathrm{C}_{2n}^4+\mathrm{C}_{2n}^6+\cdots+\mathrm{C}_{2n}^{2n}=2^{2n-1}.\end{aligned}$$

Lấy (1) trừ (2) ta được

$$\begin{aligned}&2^{2n}-0^{2n}=2\left(\mathrm{C}_{2n}^1+\mathrm{C}_{2n}^3+\mathrm{C}_{2n}^5+\mathrm{C}_{2n}^7+\cdots+\mathrm{C}_{2n}^{2n-1}\right)\\ \Leftrightarrow\ &\mathrm{C}_{2n}^1+\mathrm{C}_{2n}^3+\mathrm{C}_{2n}^5+\mathrm{C}_{2n}^7+\cdots+\mathrm{C}_{2n}^{2n-1}=2^{2n-1}.\end{aligned}$$

Vậy $\mathrm{C}_{2n}^0+\mathrm{C}_{2n}^2+\cdots+\mathrm{C}_{2n}^{2n}=\mathrm{C}_{2n}^1+\mathrm{C}_{2n}^3+\cdots+\mathrm{C}_{2n}^{2n-1}=2^{2n-1}$.

VÍ DỤ 13. Tính tổng $S = \mathrm{C}_5^0 + 2\mathrm{C}_5^1 + 2^2\mathrm{C}_5^2 + \cdots + 2^5\mathrm{C}_5^5$.

Lời giải.

Ta có $(a+b)^5 = \mathrm{C}_5^0 a^5 + \mathrm{C}_5^1 a^4 b + \mathrm{C}_5^2 a^3 b^2 + \mathrm{C}_5^3 a^2 b^3 + \mathrm{C}_5^4 a b^4 + \mathrm{C}_5^5 b^5$.
Cho $a = 1$, $b = 2$, ta có

$$3^5 = \mathrm{C}_5^0 + 2\mathrm{C}_5^1 + 2^2\mathrm{C}_5^2 + 2^3\mathrm{C}_5^3 + 2^4\mathrm{C}_5^4 + 2^5\mathrm{C}_5^5.$$

Vậy $S = 3^5$.

BÀI 29. Khai triển các biểu thức sau

a) $(2x+y)^6$;
b) $(x-3y)^6$;
c) $(x-1)^n$;
d) $(x+2)^n$;
e) $(x+y)^{2n}$;
f) $(x-y)^{2n}$,

trong đó n là số nguyên dương.

Lời giải.

a) Ta có

$$\begin{aligned}(2x+y)^6 &= \mathrm{C}_6^0(2x)^6 + \mathrm{C}_6^1(2x)^5 y + \mathrm{C}_6^2(2x)^4 y^2 + \mathrm{C}_6^3(2x)^3 y^3 + \mathrm{C}_6^4(2x)^2 y^4 + \mathrm{C}_6^5 2xy^5 + \mathrm{C}_6^6 y^6\\ &= 2^6 x^6 + \mathrm{C}_6^1 2^5 x^5 y + \mathrm{C}_6^2 2^4 x^4 y^2 + \mathrm{C}_6^3 2^3 x^3 y^3 + \mathrm{C}_6^4 2^2 x^2 y^4 + \mathrm{C}_6^5 2xy^5 + \mathrm{C}_6^6 y^6\\ &= 64x^6 + 192x^5 y + 240x^4 y^2 + 160x^3 y^3 + 60x^2 y^4 + 12xy^5 + y^6.\end{aligned}$$

b) Ta có

$$\begin{aligned}(x-3y)^6 &= \mathrm{C}_6^0 x^6 + \mathrm{C}_6^1 x^5(-3y) + \mathrm{C}_6^2 x^4(-3y)^2 + \mathrm{C}_6^3 x^3(-3y)^3\\ &\quad + \mathrm{C}_6^4 x^2(-3y)^4 + \mathrm{C}_6^5 x(-3y)^5 + \mathrm{C}_6^6(-3y)^6\\ &= \mathrm{C}_6^0 x^6 + \mathrm{C}_6^1(-3)x^5 y + \mathrm{C}_6^2 x^4(-3)^2 y^2 + \mathrm{C}_6^3 x^3(-3)^3 y^3\\ &\quad + \mathrm{C}_6^4 x^2(-3)^4 y^4 + \mathrm{C}_6^5 x(-3)^5 y^5 + \mathrm{C}_6^6(-3)^6 y^6\\ &= x^6 - 18x^5 y + 135x^4 y^2 - 540x^3 y^3 + 1215x^2 y^4 - 1458xy^5 + 729y^6\end{aligned}$$

c) Ta có

$$\begin{aligned}(x-1)^n &= \mathrm{C}_n^0 x^n + \mathrm{C}_n^1 x^{n-1}(-1) + \mathrm{C}_n^2 x^{n-2}(-1)^2 + \cdots + \mathrm{C}_n^{n-1} x(-1)^{n-1} + \mathrm{C}_n^n(-1)^n\\ &= x^n - \mathrm{C}_n^1 x^{n-1} + \mathrm{C}_n^2 x^{n-2} - \cdots + (-1)^{n-1}\mathrm{C}_n^{n-1} x + (-1)^n\end{aligned}$$

d) Ta có

$$\begin{aligned}(x+2)^n &= \mathrm{C}_n^0 x^n + \mathrm{C}_n^1 x^{n-1} 2 + \mathrm{C}_n^2 x^{n-2} 2^2 + \cdots + \mathrm{C}_n^{n-1} x 2^{n-1} + \mathrm{C}_n^n 2^n\\ &= x^n + 2\mathrm{C}_n^1 x^{n-1} + 4\mathrm{C}_n^2 x^{n-2} + \cdots + 2^{n-1}\mathrm{C}_n^{n-1} x + 2^n.\end{aligned}$$

e) Ta có

$$\begin{aligned}(x+y)^{2n} &= \mathrm{C}_{2n}^0 x^{2n} + \mathrm{C}_{2n}^1 x^{2n-1} y + \mathrm{C}_{2n}^2 x^{2n-2} y^2 + \cdots + \mathrm{C}_{2n}^{2n-1} xy^{2n-1} + \mathrm{C}_{2n}^{2n} y^{2n}\\ &= x^{2n} + \mathrm{C}_{2n}^1 x^{2n-1} y + \mathrm{C}_{2n}^2 x^{2n-2} y^2 + \cdots + \mathrm{C}_{2n}^{2n-1} xy^{2n-1} + y^{2n}.\end{aligned}$$

f) Ta có

$$\begin{aligned}(x-y)^{2n} &= \mathrm{C}_{2n}^0 x^{2n} + \mathrm{C}_{2n}^1 x^{2n-1}(-y) + \mathrm{C}_{2n}^2 x^{2n-2}(-y)^2 + \cdots + \mathrm{C}_{2n}^{2n-1} x(-y)^{2n-1} + \mathrm{C}_{2n}^{2n}(-y)^{2n}\\ &= x^{2n} - \mathrm{C}_{2n}^1 x^{2n-1} y + \mathrm{C}_{2n}^2 x^{2n-2} y^2 - \cdots - \mathrm{C}_{2n}^{2n-1} xy^{2n-1} + y^{2n}.\end{aligned}$$

BÀI 30. Tính

a) $S = \mathrm{C}_{2022}^0 9^{2022} + \mathrm{C}_{2022}^1 9^{2021} + \cdots + \mathrm{C}_{2022}^k 9^{2022-k} + \cdots + \mathrm{C}_{2022}^{2021} 9 + \mathrm{C}_{2022}^{2022}$.

b) $T = \mathrm{C}_{2022}^0 4^{2022} - \mathrm{C}_{2022}^1 4^{2021} \cdot 3 + \cdots - \mathrm{C}_{2022}^{2021} 4 \cdot 3^{2021} + \mathrm{C}_{2022}^{2022} 3^{2022}$.

Lời giải.

a) Ta có

$$\begin{aligned}S &= \mathrm{C}_{2022}^0 9^{2022} + \mathrm{C}_{2022}^1 9^{2021} + \cdots + \mathrm{C}_{2022}^k 9^{2022-k} + \cdots + \mathrm{C}_{2022}^{2021} 9 + \mathrm{C}_{2022}^{2022}\\ &= \mathrm{C}_{2022}^0 9^{2022} + \mathrm{C}_{2022}^1 9^{2021} \cdot 1 + \cdots + \mathrm{C}_{2022}^k 9^{2022-k} \cdot 1^k + \cdots + \mathrm{C}_{2022}^{2021} 9 \cdot 1^{2021} + \mathrm{C}_{2022}^{2022} \cdot 1^{2022}\\ &= (9+1)^{2020} = 10^{2022}.\end{aligned}$$

b) Ta có

$$\begin{aligned} T &= \mathrm{C}_{2022}^{0}4^{2022} - \mathrm{C}_{2022}^{1}4^{2021}\cdot 3 + \cdots - \mathrm{C}_{2022}^{2021}4\cdot 3^{2021} + \mathrm{C}_{2022}^{2022}3^{2022} \\ &= \mathrm{C}_{2022}^{0}4^{2022} + \mathrm{C}_{2022}^{1}4^{2021}\cdot(-3) + \cdots + \mathrm{C}_{2022}^{2021}4\cdot(-3)^{2021} + \mathrm{C}_{2022}^{2022}(-3)^{2022} \\ &= (4-3)^{2022} = 1^{2022} = 1. \end{aligned}$$

BÀI 31. Chứng minh

$$\mathrm{C}_n^0 3^n + \mathrm{C}_n^1 3^{n-1} + \cdots + \mathrm{C}_n^k 3^{n-k} + \cdots + \mathrm{C}_n^{n-1}3 + \mathrm{C}_n^n = \mathrm{C}_n^0 + \mathrm{C}_n^1 3 + \cdots + \mathrm{C}_n^k 3^k + \cdots + \mathrm{C}_n^{n-1}3^{n-1} + \mathrm{C}_n^n 3^n$$

với $0 \le k \le n$; $k, n \in \mathbb{N}$.

Lời giải.

- Ta có

$$\begin{aligned} &\mathrm{C}_n^0 3^n + \mathrm{C}_n^1 3^{n-1} + \cdots + \mathrm{C}_n^k 3^{n-k} + \cdots + \mathrm{C}_n^{n-1}3 + \mathrm{C}_n^n \\ =\ &\mathrm{C}_n^0 3^n + \mathrm{C}_n^1 3^{n-1}\cdot 1 + \cdots + \mathrm{C}_n^k 3^{n-k}\cdot 1^k + \cdots + \mathrm{C}_n^{n-1}3\cdot 1^{n-1} + \mathrm{C}_n^n\cdot 1^n \\ =\ &(3+1)^n = 4^n. \qquad (1) \end{aligned}$$

- Ta có

$$\begin{aligned} &\mathrm{C}_n^0 + \mathrm{C}_n^1 3 + \cdots + \mathrm{C}_n^k 3^k + \cdots + \mathrm{C}_n^{n-1}3^{n-1} + \mathrm{C}_n^n 3^n \\ =\ &\mathrm{C}_n^0\cdot 1^n + \mathrm{C}_n^1\cdot 1^{n-1}\cdot 3 + \cdots + \mathrm{C}_n^k\cdot 1^{n-k}\cdot 3^k + \cdots + \mathrm{C}_n^{n-1}\cdot 1\cdot 3^{n-1} + \mathrm{C}_n^n 3^n \\ =\ &(1+3)^n = 4^n. \qquad (2) \end{aligned}$$

Từ (1), (2) vậy

$$\mathrm{C}_n^0 3^n + \mathrm{C}_n^1 3^{n-1} + \cdots + \mathrm{C}_n^k 3^{n-k} + \cdots + \mathrm{C}_n^{n-1}3 + \mathrm{C}_n^n = \mathrm{C}_n^0 + \mathrm{C}_n^1 3 + \cdots + \mathrm{C}_n^k 3^k + \cdots + \mathrm{C}_n^{n-1}3^{n-1} + \mathrm{C}_n^n 3^n.$$

BÀI 32. Xác định hệ số của

a) x^{12} trong khai triển của $(x+4)^{30}$;

b) x^{10} trong khai triển của $(3+2x)^{30}$;

c) x^{15} và x^{16} trong khai triển của $\left(\dfrac{2x}{3} - \dfrac{1}{7}\right)^{51}$.

Lời giải.

a) Số hạng chứa x^{12} trong khai triển là $\mathrm{C}_{30}^{18}x^{12}4^{18}$.
Hệ số của x^{12} là $\mathrm{C}_{30}^{18}4^{18}$.

b) Số hạng chứa x^{10} trong khai triển là $\mathrm{C}_{30}^{10}3^{20}(2x)^{10}$ hay $\mathrm{C}_{30}^{10}3^{20}2^{10}x^{10}$.
Hệ số của x^{10} là $\mathrm{C}_{30}^{10}3^{20}2^{10}$.

c) Số hạng chứa x^{15} trong khai triển là $\mathrm{C}_{51}^{36}\left(\dfrac{2x}{3}\right)^{15}\left(-\dfrac{1}{7}\right)^{36}$ hay $\mathrm{C}_{51}^{36}\dfrac{2^{15}}{3^{15}\cdot 7^{36}}\cdot x^{15}$.

Hệ số của x^{15} là $\mathrm{C}_{51}^{36}\dfrac{2^{15}}{3^{15}\cdot 7^{36}}$.

Số hạng chứa x^{16} trong khai triển là $\mathrm{C}_{51}^{35}\left(\dfrac{2x}{3}\right)^{16}\left(-\dfrac{1}{7}\right)^{35}$ hay $-\mathrm{C}_{51}^{35}\dfrac{2^{16}}{3^{16}\cdot 7^{35}}\cdot x^{16}$.

Hệ số của x^{16} là $-\mathrm{C}_{51}^{35}\dfrac{2^{16}}{3^{16}\cdot 7^{35}}$.

BÀI 33. Xét khai triển của $\left(x + \dfrac{5}{2}\right)^{12}$.

a) Xác định hệ số của x^7.

b) Nêu hệ số của x^k với $k \in \mathbb{N}$, $k \le 12$.

Lời giải.

a) Số hạng chứa x^7 trong khai triển là $\mathrm{C}_{12}^{5}x^7\left(\dfrac{5}{2}\right)^5$.

Hệ số của x^7 là $\mathrm{C}_{12}^{5}\left(\dfrac{5}{2}\right)^5$.

b) Số hạng chứa x^k trong khai triển là $\mathrm{C}_{12}^{12-k} x^k \left(\frac{5}{2}\right)^{12-k}$.

Hệ số của x^k là $\mathrm{C}_{12}^{12-k} \left(\frac{5}{2}\right)^{12-k}$.

BÀI 34. Xét khai triển của $\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{5}\right)^{21}$.

a) Xác định hệ số của x^{10}.

b) Nêu hệ số của x^k với $k \in \mathbb{N}$, $k \leq 21$.

Lời giải.

a) Số hạng chứa x^{10} trong khai triển là $\mathrm{C}_{21}^{11} \left(\frac{x}{2}\right)^{10} \left(\frac{1}{5}\right)^{11}$.

Hệ số của x^{10} là $\mathrm{C}_{21}^{11} \left(\frac{1}{2}\right)^{10} \left(\frac{1}{5}\right)^{11}$ hay $\mathrm{C}_{21}^{1}1\frac{1}{2^{10}\cdot 5^{11}}$.

b) Số hạng chứa x^k trong khai triển là $\mathrm{C}_{21}^{21-k} \left(\frac{x}{2}\right)^{k} \left(\frac{1}{5}\right)^{21-k}$.

Hệ số của x^k là $\mathrm{C}_{21}^{21-k}\frac{1}{2^k\cdot 5^{21-k}}$.

BÀI 35. Tìm hệ số lớn nhất trong khai triển của

a) $(a+b)^8$

b) $(a+b)^9$

Lời giải.

a) Ta có $\mathrm{C}_8^0 < \mathrm{C}_8^1 < \mathrm{C}_8^2 < \mathrm{C}_8^3 < \mathrm{C}_8^4$ và $\mathrm{C}_8^4 > \mathrm{C}_8^5 > \mathrm{C}_8^6 > \mathrm{C}_8^7 > \mathrm{C}_8^8$.
Vậy hệ số lớn nhất trong khai triển $(a+b)^8$ là C_8^4.

b) Ta có $\mathrm{C}_9^0 < \mathrm{C}_9^1 < \mathrm{C}_9^2 < \mathrm{C}_9^3 < \mathrm{C}_9^4 = \mathrm{C}_9^5$ và $\mathrm{C}_9^5 > \mathrm{C}_9^6 > \mathrm{C}_9^7 > \mathrm{C}_9^8 > \mathrm{C}_9^9$.
Vậy hệ số lớn nhất trong khai triển $(a+b)^9$ là C_9^4 và C_9^5.

BÀI 36. Chứng minh công thức nhị thức Newton bằng phương pháp quy nạp

$$(a+b)^n = \mathrm{C}_n^0 a^n + \mathrm{C}_n^1 a^{n-1} b + \cdots + \mathrm{C}_n^{n-1} a b^{n-1} + \mathrm{C}_n^n b^n$$

với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$.

Lời giải.

- Với $n=1$, ta có $(a+b)^1 = a+b = \mathrm{C}_1^0 a^1 b^0 + \mathrm{C}_1^1 a^0 b^1$.
Vậy công thức đúng với $n=1$.

- Với $n=k$ là số nguyên dương tùy ý mà công thức đúng, ta phải chứng minh công thức cũng đúng với $n=k+1$, tức là

$$(a+b)^{k+1} = \mathrm{C}_{k+1}^0 a^{k+1} + \mathrm{C}_{k+1}^1 a^{(k+1)-1} b + \cdots + \mathrm{C}_{k+1}^{(k+1)-1} a b^{(k+1)-1} + \mathrm{C}_{k+1}^{k+1} b^{k+1}.$$

Thật vậy, theo giả thiết ta có

$$(a+b)^k = \mathrm{C}_k^0 a^k + \mathrm{C}_k^1 a^{k-1} b + \cdots + \mathrm{C}_k^{k-1} a b^{k-1} + \mathrm{C}_k^k b^k.$$

Khi đó

$$\begin{aligned}
(a+b)^{k+1} &= (a+b)(a+b)^k = a(a+b)^k + b(a+b)^k \\
&= a\left(\mathrm{C}_k^0 a^k + \mathrm{C}_k^1 a^{k-1} b + \cdots + \mathrm{C}_k^{k-1} a b^{k-1} + \mathrm{C}_k^k b^k\right) \\
&\quad + b\left(\mathrm{C}_k^0 a^k + \mathrm{C}_k^1 a^{k-1} b + \cdots + \mathrm{C}_k^{k-1} a b^{k-1} + \mathrm{C}_k^k b^k\right) \\
&= \left(\mathrm{C}_k^0 a^{k+1} + \mathrm{C}_k^1 a^k b + \cdots + \mathrm{C}_k^{k-1} a^2 b^{k-1} + \mathrm{C}_k^k a b^k\right) \\
&\quad + \left(\mathrm{C}_k^0 a^k b + \mathrm{C}_k^1 a^{k-1} b^2 + \cdots + \mathrm{C}_k^{k-1} a b^k + \mathrm{C}_k^k b^{k+1}\right) \\
&= \mathrm{C}_k^0 a^{k+1} + \left(\mathrm{C}_k^1 + \mathrm{C}_k^0\right) a^k b + \left(\mathrm{C}_k^1 + \mathrm{C}_k^2\right) a^{k-1} b^2 \\
&\quad + \cdots + \left(\mathrm{C}_k^{k-2} + \mathrm{C}_k^{k-1}\right) a^2 b^{k-1} + \left(\mathrm{C}_k^{k-1} + \mathrm{C}_k^k\right) a b^k + \mathrm{C}_k^k b^{k+1} \\
&= a^{k+1} + \mathrm{C}_{k+1}^1 a^k b + \mathrm{C}_{k+1}^2 a^{k-1} b^2 + \cdots + \mathrm{C}_{k+1}^{k-1} a^2 b^{k-1} + \mathrm{C}_{k+1}^k a b^k + b^{k+1} \\
&= \mathrm{C}_{k+1}^0 a^{k+1} + \mathrm{C}_{k+1}^1 a^{(k+1)-1} b + \cdots + \mathrm{C}_{k+1}^{(k+1)-1} a b^{(k+1)-1} + \mathrm{C}_{k+1}^{k+1} b^{k+1}.
\end{aligned}$$

Vậy công thức đúng với $n=k+1$.

Do đó, theo nguyên lí quy nạp toán học, đẳng thức đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

BÀI 37. Bằng phương pháp quy nạp, chứng minh

a) $n^5 - n$ chia hết cho 5 với mọi $n \in \mathbb{N}^*$;

b) $n^7 - n$ chia hết cho 7 với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Lời giải.

a)
- Với $n = 1$, ta có $1^5 - 1$ chia hết cho 5 là mệnh đề đúng.
- Với $n = k$ là một số nguyên dương tùy ý mà mệnh đề đúng, ta phải chứng minh mệnh đề cũng đúng với $n = k+1$, tức là
$$(k+1)^5 - (k+1) \text{ chia hết cho } 5.$$
Thật vậy, theo giả thiết quy nạp ta có $k^5 - k$ chia hết cho 5.
Khi đó
$$\begin{aligned}(k+1)^5 - (k+1) &= (k^5 + 5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k + 1) - (k+1)\\ &= (k^5 - k) + (5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k).\end{aligned}$$
Mà $(k^5 - k)$ và $(5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k)$ đều chia hết cho 5, do đó
$$(k^5 - k) + (5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k) \text{ chia hết cho } 5.$$
Vậy mệnh đề đúng với $n = k + 1$.

Do đó, theo nguyên lí quy nạp toán học, đẳng thức đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

b)
- Với $n = 1$, ta có $1^7 - 1$ chia hết cho 7 là mệnh đề đúng.
- Với $n = k$ là một số nguyên dương tùy ý mà mệnh đề đúng, ta phải chứng minh mệnh đề cũng đúng với $n = k+1$, tức là
$$(k+1)^7 - (k+1)^7 \text{ chia hết cho } 7.$$
Khi đó
$$\begin{aligned}(k+1)^7 - (k+1)^7 &= (k^7 + 7k^6 + 21k^5 + 35k^4 + 35k^3 + 21k^2 + 7k + 1) - (k+1)\\ &= (k^7 - k) + (7k^6 + 21k^5 + 35k^4 + 35k^3 + 21k^2 + 7k).\end{aligned}$$
Mà $(k^7 - k)$ và $(7k^6 + 21k^5 + 35k^4 + 35k^3 + 21k^2 + 7k)$ đều chia hết cho 7, do đó
$$(k^7 - k) + (7k^6 + 21k^5 + 35k^4 + 35k^3 + 21k^2 + 7k) \text{ chia hết cho } 7.$$
Vậy mệnh đề đúng với $n = k + 1$.

Do đó, theo nguyên lí quy nạp toán học, đẳng thức đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

BÀI 38. Cho tập hợp $A = \{x_1; x_2; x_3; \ldots; x_n\}$ có n phần tử. Tính số tập hợp con của A.

Lời giải.

Vì A có n phần tử nên số tập hợp con có k phần tử $(k \le n)$ của tập hợp A là C_n^k.
Vậy tổng số tập con của tập hợp A là
$$\mathrm{C}_n^0 + \mathrm{C}_n^1 + \mathrm{C}_n^2 + \cdots + \mathrm{C}_n^{n-1} + \mathrm{C}_n^n.$$
Lại có $\mathrm{C}_n^0 + \mathrm{C}_n^1 + \mathrm{C}_n^2 + \cdots + \mathrm{C}_n^{n-1} + \mathrm{C}_n^n = 2^n$.
Vậy tập hợp A có tất cả 2^n tập con.

BÀI 39. Một nhóm gồm 10 học sinh tham gia chiến dịch Mùa hè xanh. Nhà trường muốn chọn ra một đội công tác có ít nhất hai học sinh trong những học sinh trên. Hỏi có bao nhiêu cách lập đội công tác như thế?

Lời giải.

Đội cộng tác có thể có từ 2 đến 10 học sinh.
Nếu đội cộng tác có k học sinh thì ta có C_{10}^k cách chọn.
Như vậy tổng số cách chọn là $\mathrm{C}_{10}^2 + \mathrm{C}_{10}^3 + \cdots + \mathrm{C}_{10}^{10}$.
Mà
$$\begin{aligned}&\mathrm{C}_{10}^0 + \mathrm{C}_{10}^1 + \mathrm{C}_{10}^2 + \mathrm{C}_{10}^3 + \cdots + \mathrm{C}_{10}^{10} = 2^{10} = 1024\\ \Rightarrow\ &\mathrm{C}_{10}^2 + \mathrm{C}_{10}^3 + \cdots + \mathrm{C}_{10}^{10} = 1024 - \mathrm{C}_{10}^0 - \mathrm{C}_{10}^1 = 1013.\end{aligned}$$
Vậy có 1013 cách lập đội.

BÀI 40. Để tham gia một cuộc thi làm bánh, bạn Tiếm làm 12 chiếc bánh có màu khác nhau và chọn ra số nguyên dương chẵn chiếc bánh để cho vào hộp trưng bày. Hỏi bạn Tiến có bao nhiêu cách để chọn bánh cho vào hộp trưng bày đó?

Lời giải.

Số bánh bạn Tiến có thể chọn để cho vào hộp có thể là 2, 4, 6, 8, 10 hoặc 12.
Vậy tổng số cách chọn là $\mathrm{C}_{12}^2+\mathrm{C}_{12}^4+\cdots+\mathrm{C}_{12}^{12}$.
Mà

$$\begin{aligned}&\mathrm{C}_{12}^0+\mathrm{C}_{12}^2+\mathrm{C}_{12}^4+\cdots+\mathrm{C}_{12}^{12}=2^{2\cdot 6-1}\\ \Rightarrow\ &\mathrm{C}_{12}^2+\mathrm{C}_{12}^4+\cdots+\mathrm{C}_{12}^{12}=2048-1=2047.\end{aligned}$$

Vậy có 2047 cách chọn.

BÀI 41. Bác Thành muốn mua quà cho con nhân dịp sinh nhật nên đã đến một cửa hàng đồ chơi. Bác dự định chọn một trong năm loại đồ chơi. Ở cửa hàng, mỗi loại đồ chơi đó chỉ có 10 sản phẩm khác nhau bày bán. Biết rằng nếu mua bộ trực thăng điều kiển từ xa, bác sẽ chỉ mua 1 sản phẩm; nếu mua bộ đồ chơi lego, bác sẽ mua 3 sản phẩm khác nhau; nếu mua bộ lắp ghép robot chạy bằng năng lượng mặt trời, bác sẽ mua 5 sản phẩm khác nhau; nếu mua rubik, bác sẽ mua 7 sản phẩm khác nhau; còn nếu mua mô hình khủng long, bác sẽ mua 9 sản phẩm khác nhau. Bác Thành có bao nhiêu cách chọn quà sinh nhật cho con?

Lời giải.

Số cách chọn nếu bác Thành mua

- Bộ trực thăng điều kiển từ xa là C_{10}^1.
- Bộ đồ chơi lego là C_{10}^3.
- Bộ lắp ghép robot chạy bằng năng lượng mặt trời là C_{10}^5.
- Rubik là C_{10}^7.
- Mô hình khủng long là C_{10}^9.

Tổng số cách chọn là $\mathrm{C}_{10}^1+\mathrm{C}_{10}^3+\mathrm{C}_{10}^5+\mathrm{C}_{10}^7+\mathrm{C}_{10}^9=2^{2\cdot 5-1}=2^9=512$.
Vậy có 512 cách chọn.

BÀI 42. Giả sử tính trạng ở một loài cây được quy định do tác động cộng gộp của n cặp alen phân li độc lập A_1a_1, A_2a_2, $\ldots$, A_na_n. Cho cây F_1 dị hợp về n cặp alen giao phối với nhau. Tỉ lệ phân li kiểu hình của F_2 là hệ số của khai triển nhị thức Newton $(a+b)^{2n}$, nghĩa là tỉ lệ phân li kiểu hình của F_2 là $\mathrm{C}_{2n}^0:\mathrm{C}_{2n}^1:\mathrm{C}_{2n}^2:\ \ldots:\mathrm{C}_{2n}^{2n-2}:\mathrm{C}_{2n}^{2n-1}:\mathrm{C}_{2n}^{2n}$.
Cho biết một loại cây có tính trạng được quy định bởi tác động cộng gộp của 4 cặp alen phân li độc lập. Tìm tỉ lệ phân li kiểu hình của F_2 nếu cây F_1 dị hợp về 4 cặp alen giao phối với nhau.

Lời giải.

Với $n=2$, tỉ lệ phân li kiểu hình của F_2 nếu cây F_1 dị hợp về 4 cặp alen giao phối với nhau là

$$\mathrm{C}_{2\cdot 4}^0:\mathrm{C}_{2\cdot 4}^1:\mathrm{C}_{2\cdot 4}^2:\ \cdots:\mathrm{C}_{2\cdot 4}^{2\cdot 4}.$$

Hay

$$\mathrm{C}_8^0:\mathrm{C}_8^1:\mathrm{C}_8^2:\mathrm{C}_8^3:\mathrm{C}_8^4:\mathrm{C}_8^5:\mathrm{C}_8^6:\mathrm{C}_8^7:\mathrm{C}_8^8.$$

BÀI 43. Sử dụng tam giác Pascal, viết khai triển

a) $(x-1)^5$;

b) $(2x-3y)^4$.

Lời giải.

a) Dựa vào hàng 5 của tam giác Pascal, ta có

$$(a+b)^5=a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5.$$

Với $a=x$, $b=-1$, thay vào ta được

$$\begin{aligned}(x-1)^5&=x^5+5x^4\cdot(-1)+10x^3(-1)^2+10x^2(-1)^3+5x(-1)^4+(-1)^5\\&=x^5-5x^4+10x^3-10x^2+5x-1.\end{aligned}$$

b) Dựa vào hàng 4 của tam giác Pascal, ta có

$$(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4.$$

Với $a=2x$, $b=-3y$, thay vào ta được

$$\begin{aligned}(2x-3y)^4&=(2x)^4+4(2x)^3(-3y)+6(2x)^2(-3y)^2+4(2x)(-3y)^3+(-3y)^4\\&=16x^4-96x^3y+216x^2y^2-216xy^3+81y^4.\end{aligned}$$

BÀI 44. Viết khai triển theo nhị thức Newton

a) $(x+y)^6$; b) $(1-2x)^5$.

Lời giải.

a) Theo công thức nhị thức Newton, ta có

$$\begin{aligned}(x+y)^6 &= \mathrm{C}_6^0x^6+\mathrm{C}_6^1x^5y+\mathrm{C}_6^2x^4y^2+\mathrm{C}_6^3x^3y^3+\mathrm{C}_6^4x^2y^4+\mathrm{C}_6^5xy^5+\mathrm{C}_6^6y^6\\ &= x^6+\mathrm{C}_6^1x^5y+\mathrm{C}_6^2x^4y^2+\mathrm{C}_6^3x^3y^3+\mathrm{C}_6^4x^2y^4+\mathrm{C}_6^5xy^5+y^6.\end{aligned}$$

b) Theo công thức nhị thức Newton, ta có

$$\begin{aligned}(1-2x)^5 &= \mathrm{C}_5^0 1^5+\mathrm{C}_5^1(-2x)^1+\mathrm{C}_5^2(-2x)^2+\mathrm{C}_5^3(-2x)^3+\mathrm{C}_5^4(-2x)^4+\mathrm{C}_5^5(-2x)^5\\ &= -32x^5+80x^4-80x^3+40x^2-10x+1.\end{aligned}$$

C. BÀI TẬP TỰ LUẬN

BÀI 45. Tìm hệ số của x^8 trong khai triển của $(2x+3)^{10}$.

Lời giải.

Số hạng chứa x^k trong khai triển của $(2x+3)^{10}$ là $T_{k+1}=\mathrm{C}_{10}^{10-k}\cdot(2x)^k3^{10-k}$.
Số hạng chứa x^8 ứng với $k=8$, tức là số hạng $\mathrm{C}_{10}^2\cdot(2x)^8\cdot 3^2=103680x^8$.
Vậy hệ số của x^8 trong khai triển của $(2x+3)^{10}$ là 103680.

BÀI 46. Biết hệ số của x^2 trong khai triển của $(1-3x)^n$ là 90. Tìm n.

Lời giải.

Số hạng chứa x^2 trong khai triển của $(1-3x)^n$ là $T_{k+1}=\mathrm{C}_n^k\cdot(-3x)^k=(-3)^k\cdot\mathrm{C}_n^k\cdot x^k$.
Suy ra hệ số của x^2 trong khai triển của $(1-3x)^n$ ứng với $k=2$ là $(-3)^2\mathrm{C}_n^2$.
Ta có: $(-3)^2\mathrm{C}_n^2=90\Leftrightarrow 9\cdot\dfrac{n(n-1)}{2}=90\Leftrightarrow n(n-1)=20\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}n=4\\ n=5.\end{array}\right.$

BÀI 47. Từ khai triển biểu thức $(3x-5)^4$ thành đa thức, hãy tính tổng các hệ số của đa thức nhận được.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}f(x) &= (3x-5)^4\\ &= \mathrm{C}_{2n}^0+\mathrm{C}_{2n}^2+\mathrm{C}_{2n}^4+\cdots+\mathrm{C}_{2n}^{2n}=2^{2021}\\ &= \mathrm{C}_4^0\cdot(3x)^4+\mathrm{C}_4^1\cdot(3x)^3(-5)+\mathrm{C}_4^2\cdot(3x)^2(-5)^2+\mathrm{C}_4^3\cdot(3x)(-5)^3+\mathrm{C}_4^4\cdot(-5)^4.\end{aligned}$$

Suy ra tổng các hệ số của khai triển là

$$S=\mathrm{C}_4^0\cdot 3^4+\mathrm{C}_4^1\cdot 3^3\cdot(-5)+\mathrm{C}_4^2\cdot 3^2\cdot(-5)^2+\mathrm{C}_4^3\cdot 3\cdot(-5)^3+\mathrm{C}_4^4\cdot(-5)^4=f(1)=(3-5)^4=16.$$

BÀI 48. Tìm hệ số của x^5 trong khai triển thành đa thức của biểu thức

$$x(1-2x)^5+x^2(1+3x)^{10}.$$

Lời giải.

Hệ số của x^5 trong khai triển thành đa thức của biểu thức $x(1-2x)^5+x^2(1+3x)^{10}$ là

$$\mathrm{C}_5^4\cdot(-2)^4+\mathrm{C}_{10}^3\cdot 3^3=3320.$$

BÀI 49. Tính tổng sau đây:

$$\mathrm{C}_{2021}^0-2\mathrm{C}_{2021}^1+2^2\mathrm{C}_{2021}^2-2^3\mathrm{C}_{2021}^3+\cdots-2^{2021}\mathrm{C}_{2021}^{2021}.$$

Lời giải.

Ta có

$$\mathrm{C}_{2021}^0-2\mathrm{C}_{2021}^1+2^2\mathrm{C}_{2021}^2-2^3\mathrm{C}_{2021}^3+\cdots-2^{2021}\mathrm{C}_{2021}^{2021}=(1-2)^{2021}=-1.$$

BÀI 50. Tìm số tự nhiên n thỏa mãn

$$\mathrm{C}_{2n}^0+\mathrm{C}_{2n}^2+\mathrm{C}_{2n}^4+\cdots+\mathrm{C}_{2n}^{2n}=2^{2021}.$$

Lời giải.

Xét khai triển

$$2^{2n}=(1+1)^{2n}=\mathrm{C}_{2n}^0+\mathrm{C}_{2n}^1+\mathrm{C}_{2n}^2+\cdots+\mathrm{C}_{2n}^k+\cdots+\mathrm{C}_{2n}^{2n}\ \ (1).$$
$$0^{2n}=(1-1)^{2n}=\mathrm{C}_{2n}^0-\mathrm{C}_{2n}^1+\mathrm{C}_{2n}^2-\cdots+(-1)^k\mathrm{C}_{2n}^k+\cdots+\mathrm{C}_{2n}^{2n}\ \ (2).$$

Ta có :

$$\begin{aligned} \mathrm{C}_{2n}^0+\mathrm{C}_{2n}^2+\mathrm{C}_{2n}^4+\cdots+\mathrm{C}_{2n}^{2n} &= \mathrm{C}_{2n}^1+\mathrm{C}_{2n}^3+\mathrm{C}_{2n}^5+\cdots+\mathrm{C}_{2n}^{2n-1}\\ &\Rightarrow \mathrm{C}_{2n}^0+\mathrm{C}_{2n}^2+\mathrm{C}_{2n}^4+\cdots+\mathrm{C}_{2n}^{2n}=2^{2021}\\ &\Leftrightarrow 2n-1=2021\\ &\Leftrightarrow n=1011. \end{aligned}$$

BÀI 51. Tìm số nguyên dương n sao cho $\mathrm{C}_n^0+2\mathrm{C}_n^1+4\mathrm{C}_n^2+\cdots+2^n\mathrm{C}_n^2=243$.

Lời giải.

Ta có :

$$\mathrm{C}_n^0+2\mathrm{C}_n^1+4\mathrm{C}_n^2+\cdots+2^n\mathrm{C}_n^2=243\Leftrightarrow(1+2)^n=243\Leftrightarrow 3^n=3^5\Leftrightarrow n=5.$$

BÀI 52. Biết rằng $(2+x)^{100}=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{100}x^{100}$. Với giá trị nào của k $(0\le k\le 100)$ thì a_k lớn nhất?

Lời giải.

Ta có : $(2+x)^{100}=\mathrm{C}_{100}^0 2^{100}+\mathrm{C}_{100}^1 2^{99}x+\mathrm{C}_{100}^2 2^{98}x^2+\cdots+\mathrm{C}_{100}^{99}2x^{99}+\mathrm{C}_{100}^{100}x^{100}$.
Suy ra $a_k=\mathrm{C}_{100}^k 2^{100-k}$.

$$\begin{aligned} a_k \text{ lớn nhất} &\Leftrightarrow \begin{cases} a_k\ge a_{k-1}\\ a_k\ge a_{k+1}\end{cases}\\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{C}_{100}^k 2^{100-k}\ge \mathrm{C}_{100}^{k-1}2^{100-k+1}\\ \mathrm{C}_{100}^k 2^{100-k}\ge \mathrm{C}_{100}^{k+1}2^{100-k-1}\end{cases}\\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{100!}{k!(100-k)!}\cdot 2^{100-k}\ge \dfrac{100!}{(k-1)!(100-k+1)!}\cdot 2^{100-k+1}\\ \dfrac{100!}{k!(100-k)!}\cdot 2^{100-k}\ge \dfrac{100!}{(k+1)!(100-k-1)!}\cdot 2^{100-k+1}\end{cases}\\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{k}\ge\dfrac{2}{201-k}\\ \dfrac{2}{100-k}\ge\dfrac{1}{k+1}\end{cases}\\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 100-2k\ge 2k\\ 2(k+1)\ge 100-k\end{cases}\\ &\Leftrightarrow \frac{98}{3}\le k\le\frac{101}{3}\\ &\Rightarrow k=33. \end{aligned}$$

Vậy $k=33$ thì $a_{33}=\mathrm{C}_{100}^{33}\cdot 2^{67}$ lớn nhất.

BÀI 53. Khai triển biểu thức:

a) $(x-2y)^6$.

b) $(3x-1)^5$.

Lời giải.

a) Ta có

$$\begin{aligned}(x-2y)^6 &= \mathrm{C}_6^0x^6-\mathrm{C}_6^1x^5 2y+\mathrm{C}_6^2x^4(2y)^2-\mathrm{C}_6^3x^3(2y)^3+\mathrm{C}_6^4x^2(2y)^4-\mathrm{C}_6^5x(2y)^5+\mathrm{C}_6^6(2y)^6\\ &= x^6-12x^5y+60x^4y^2-160x^3y^3+240x^2y^4-192xy^5+64y^6.\end{aligned}$$

b) Ta có

$$\begin{aligned}(3x-1)^5 &= \mathrm{C}_5^0(3x)^5-\mathrm{C}_5^1(3x)^4+\mathrm{C}_5^2(3x)^3-\mathrm{C}_5^3(3x)^2+\mathrm{C}_5^4 3x-\mathrm{C}_5^5\\ &= 243x^5-405x^4+270x^3-90x^2+15x-1.\end{aligned}$$

BÀI 54. Tìm hệ số của x^{10} trong khai triển của biểu thức $(2-x)^{12}$.

Lời giải.

Số hạng chứa x^k trong khai triển của $(2-x)^{12}$ là $T=\mathrm{C}_{12}^{12-k}\cdot 2^k\cdot(-x)^{12-k}$.
Số hạng chứa x^{10} ứng với $k=2$, tức là số hạng $\mathrm{C}_{12}^{10}\cdot 2^2\cdot x^{10}=264x^{10}$.
Vậy hệ số của x^{10} trong khai triển của $(2-x)^{12}$ là 264.

BÀI 55. Biết rằng a là một số thực khác 0 và trong khai triển của $(ax+1)^6$, hệ số của x^4 gấp bốn lần hệ số của x^2. Tìm giá trị của a.

Lời giải.

Số hạng chứa x^k trong khai triển của $(ax+1)^6$ là $T = \mathrm{C}_6^{6-k} \cdot (ax)^k$.
Số hạng chứa x^4 ứng với $k=4$, tức là số hạng $\mathrm{C}_6^2 \cdot a^4x^4 = 15a^4x^4$.
Số hạng chứa x^2 ứng với $k=2$, tức là số hạng $\mathrm{C}_6^4 \cdot a^2x^2 = 15a^2x^2$.
Do hệ số của x^4 gấp bốn lần hệ số của x^2 nên

$$15a^4 = 15a^2 \Leftrightarrow 15a^2(a^2-1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=0 \\ a=1 \text{ (nhận)} \\ a=-1. \end{array}\right.$$

Vậy $a=1$.

BÀI 56. Biết rằng hệ số của x^2 trong khai triển của $(1+3x)^n$ là 90. Tìm giá trị của n.

Lời giải.

Số hạng chứa x^2 trong khai triển của $(1+3x)^n$ là $T = \mathrm{C}_n^k \cdot (3x)^k = 3^k \cdot \mathrm{C}_n^k \cdot x^k$.
Suy ra hệ số của x^2 trong khai triển của $(1+3x)^n$ ứng với $k=2$ là $3^2\mathrm{C}_n^2$.
Ta có: $3^2\mathrm{C}_n^2 = 90 \Leftrightarrow 9 \cdot \dfrac{n(n-1)}{2} = 90 \Leftrightarrow n(n-1) = 20 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n=4 \\ n=5. \end{array}\right.$

BÀI 57. Chứng minh công thức nhị thức Newton (công thức (1), trang 35) bằng phương pháp quy nạp toán học.
Chứng minh rằng: $(a+b)^n = \mathrm{C}_n^0a^n + \mathrm{C}_n^1a^{n-1}b + \mathrm{C}_n^2a^{n-2}b^2 + \cdots + \mathrm{C}_n^ka^{n-k}b^k + \cdots + \mathrm{C}_n^nb^n \quad (1)$.

Lời giải.

Chứng minh: Ta chứng minh (1) bằng phương pháp quy nạp theo n.
• Khi $n=1$, ta có : $(a+b)^1 = a+b = \mathrm{C}_1^0a + \mathrm{C}_1^1b$.
Vậy công thức (1) đúng với $n=1$.
• Với giả thiết (1) là đúng với $n=m$, tức là ta có :

$$(a+b)^m = \mathrm{C}_m^0a^m + \mathrm{C}_m^1a^{m-1}b + \cdots + \mathrm{C}_m^{m-1}ab^{m-1} + \mathrm{C}_m^mb^m.$$

Ta sẽ chứng minh

$$(a+b)^{m+1} = \mathrm{C}_{m+1}^0a^{m+1} + \mathrm{C}_{m+1}^1a^mb + \ldots + C_{m+1}^{m}ab^m + C_{m+1}^{m+1}b^{m+1} \quad (2).$$

Thật vậy, ta có

$$\begin{aligned} & (a+b)^{m+1} \\ = \; & (a+b)^m(a+b) \\ = \; & \left(\mathrm{C}_m^0a^m + \mathrm{C}_m^1a^{m-1}b + \cdots + \mathrm{C}_m^{m-1}ab^{m-1} + \mathrm{C}_m^mb^m\right)(a+b) \\ = \; & \left(\mathrm{C}_m^0a^m + \mathrm{C}_m^1a^{m-1}b + \cdots + \mathrm{C}_m^mb^m\right)a + \left(\mathrm{C}_m^0a^m + \mathrm{C}_m^1a^{m-1}b + \cdots + \mathrm{C}_m^mb^m\right)b \\ = \; & \mathrm{C}_m^0a^{m+1} + \left(\mathrm{C}_m^1 + \mathrm{C}_m^0\right)a^mb + \cdots + \left(\mathrm{C}_m^k + \mathrm{C}_m^{k-1}\right)a^{m+1-k}b^k + \cdots + \mathrm{C}_m^mb^m. \end{aligned}$$

+ Vì $\mathrm{C}_m^0 = 1 = \mathrm{C}_{m+1}^0, \mathrm{C}_m^m = 1 = \mathrm{C}_{m+1}^{m+1}, \mathrm{C}_m^k + \mathrm{C}_m^{k-1} = \mathrm{C}_{m+1}^k$ nên ta có (2).
Vậy công thức nhị thức Newton là đúng với mọi số nguyên dương n.
Chú ý: Số hạng thứ $(k+1)$ trong khai triển của $(a+b)^n$ thành dạng (1) là

$$T_{k+1} = \mathrm{C}_n^ka^{n-k}b^k.$$

BÀI 58. Biết rằng $(3x-1)^7 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x4 + a_5x^5 + a_6x^6 + a_7x^7$.
Hãy tính:

a) $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7$;

b) $a_0 + a_2 + a_4 + a_6$.

Lời giải.

a) Với $x=1$ ta có $2^7 = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7$. (1)

b) Với $x=-1$ ta có $(-4)^7 = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - a_5 + a_6 - a_7$. (2)
Từ (1) và (2) ta có $2^7 + (-4)^7 = 2(a_0 + a_2 + a_4 + a_6) \Leftrightarrow a_0 + a_2 + a_4 + a_6 = -8128$.

BÀI 59. Một tập hợp có 12 phần tử thì có tất cả bao nhiêu tập hợp con?

Lời giải.

Một tập hợp có 12 phần tử thì có tất cả 2^{12} tập hợp con.

BÀI 60. Từ 15 bút chì màu có màu khác nhau đôi một.

a) Có bao nhiêu cách chọn ra một số bút chì màu, tính cả trường hợp không chọn cái nào?

b) Có bao nhiêu cách chọn ra ít nhất 8 bút chì màu?

Lời giải.

a) Số cách chọn ra một số bút chì màu theo yêu cầu bài toán chính là số tập con của tập hợp gồm 15 phần tử.
Vậy số cách chọn là $n = \mathrm{C}_{15}^0 + \mathrm{C}_{15}^1 + \cdots + \mathrm{C}_{15}^{15} = 2^{15} = 32768$.

b) Do $n = \mathrm{C}_{15}^0 + \mathrm{C}_{15}^1 + \cdots + \mathrm{C}_{15}^{15} = 2(\mathrm{C}_{15}^0 + \mathrm{C}_{15}^1 + \cdots + \mathrm{C}_{15}^8)$.
Suy ra số cách chọn ra ít nhất 8 bút chì màu là

$$\mathrm{C}_{15}^8 + \mathrm{C}_{15}^9 + \mathrm{C}_{15}^{10} + \mathrm{C}_{15}^{11} + \mathrm{C}_{15}^{12} + \mathrm{C}_{15}^{13} + \mathrm{C}_{15}^{14} + \mathrm{C}_{15}^{15} = \frac{n}{2} = 16384.$$

MỤC LỤC