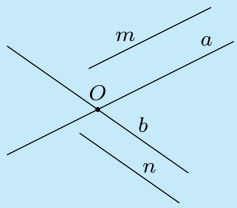
Bài 22. HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC

A. TRỌNG TÂM KIẾN THỨC

1. Góc giữa hai đường thẳng

Góc giữa hai đường thẳng m và n trong không gian, kí hiệu (m, n), là góc giữa hai đường thẳng a và b cùng đi qua một điểm và tương ứng song song với m và n.



- *Để xác định góc giữa hai đường thẳng chéo nhau a và b, ta có thể lấy một điểm O thuộc đường thẳng a và qua đó kẻ đường thẳng b' song song với b. Khi đó $(a, b) = (a, b')$.*
- *Với hai đường thẳng a, b bất kì $0^\circ \leq (a, b) \leq 90^\circ$.*
- *Nếu a song song hoặc trùng với a' và b song song hoặc trùng với b' thì $(a, b) = (a', b')$.*

2. Hai đường thẳng vuông góc

Hai đường thẳng a, b được gọi là vuông góc với nhau, kí hiệu $a \perp b$, nếu góc giữa chúng bằng 90°.

Nếu đường thẳng a vuông góc với đường thẳng b thì a có vuông góc với các đường thẳng song song với b.

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP

1 Xác định góc giữa hai đường thẳng trong không gian

1. Ví dụ minh hoạ

VÍ DỤ 1. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có các mặt là các hình vuông. Tính các góc (AA', CD), $(A'C', BD)$, (AC, DC').

VÍ DỤ 2. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh là a. Tính góc giữa các cặp đường thẳng sau đây

a) AB và $A'D'$.

b) AD và $A'C'$.

c) BC' và $B'D'$.

VÍ DỤ 3. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC = AB = AC = a\sqrt{2}$ và $BC = 2a$. Tính góc giữa hai đường thẳng AC và SB.

2. Bài tập áp dụng

BÀI 1. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh là $2a$, tam giác SBC vuông cân tại S, $SA = 2a$.

a) Tính góc giữa hai đường thẳng SB và AC.

b) Gọi G là trọng tâm của tam giác SBC. Tính góc tạo bởi AG và SC.

BÀI 2. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a. Gọi M là điểm trên cạnh AB sao cho $BM = 3AM$. Tính góc tạo bởi hai đường thẳng CM và BD.

BÀI 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a, các tam giác SAB và SAD cùng vuông góc tại A. Biết rằng $SA = a\sqrt{2}$, gọi M là trung điểm của cạnh SB.

★ MATH TEACHER ★

ĐIỂM:

"It's not how much time you have, it's how you use it."

QUICK NOTE

QUICK NOTE

a) Tính góc tạo bởi hai vec-tơ $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{SD}$.

b) Tính góc tạo bởi hai đường thẳng AM và SC.

BÀI 4. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a, gọi M là trung điểm của AB, N là điểm trên cạnh $B'C'$ sao cho $B'N = 2C'N$. Tính cos của góc tạo bởi hai đường thẳng DM và AN.

2 Sử dụng tính chất vuông góc trong mặt phẳng.

Để chứng minh hai đường thẳng Δ và Δ' vuông góc với nhau ta có thể sử dụng tính chất vuông góc trong mặt phẳng, cụ thể:

- Tam giác ABC vuông tại A khi và chỉ khi $\widehat{BAC} = 90° \Leftrightarrow \widehat{ABC} + \widehat{ACB} = 90°$.
- Tam giác ABC vuông tại A khi và chỉ khi $AB^2 + AC^2 = BC^2$.
- Tam giác ABC vuông tại A khi và chỉ khi trung tuyến xuất phát từ A có độ dài bằng nửa cạnh BC.
- Nếu tam giác ABC cân tại A thì đường trung tuyến xuất phát từ A cũng là đường cao của tam giác.

Ngoài ra, chúng ta cũng sử dụng tính chất: Nếu $d \perp \Delta$ và $\Delta' \parallel d$ thì Δ' cũng vuông góc với đường thẳng Δ.

1. Ví dụ minh hoạ

VÍ DỤ 1. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = AC = AD$, $\widehat{BAC} = \widehat{BAD} = 60°$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và CD, chứng minh rằng MN là đường vuông góc chung của các đường thẳng AB và CD.

VÍ DỤ 2. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$.

a) Xác định vị trí tương đối của hai đường thẳng AC và $B'D'$.

b) Chứng minh rằng AC và $B'D'$ vuông góc với nhau khi và chỉ khi $ABCD$ là một hình thoi.

VÍ DỤ 3. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC = a$, $\widehat{ASB} = 60°, \widehat{BSC} = 90°, \widehat{CSA} = 120°$. Cho H là trung điểm AC. Chứng minh rằng:

a) $SH \perp AC$.

b) $AB \perp BC$.

VÍ DỤ 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA = x$ và tất cả các cạnh còn lại đều bằng 1. Chứng minh rằng $SA \perp SC$.

2. Bài tập áp dụng

BÀI 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O và $SA = SB = SC = SD$. Chứng minh rằng $SO \perp AB$ và $SO \perp AD$.

BÀI 2. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có M, N lần lượt là trung điểm $BC, C'D'$. Chứng minh rằng $AM \perp B'N$.

BÀI 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông và có tất cả các cạnh đều bằng a. Cho M và N lần lượt là trung điểm của AD và SD, chứng minh rằng $MN \perp SC$.

BÀI 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $2a$, tam giác SAB đều và $SC = 2a\sqrt{2}$. Gọi H, K lần lượt là trung điểm của AB, CD. Chứng minh rằng $SH \perp AK$.

BÀI 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B, $AD = 2a, AB = BC = a$. $SA \perp AD$ và $SA \perp AC$. Chứng minh rằng $SC \perp DC$.

BÀI 6. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = x$, tất cả các cạnh còn lại có độ dài bằng a. K là trung điểm AB và I là điểm bất kỳ trên cạnh CD, chứng minh rằng $IK \perp AB$.

3 Hai đường thẳng song song cùng vuông góc với một đường thẳng thứ ba

Để chứng minh đường thẳng $a \perp b$, ta chứng minh $a \parallel a'$, ở đó $a' \perp b$.

QUICK NOTE

1. Ví dụ minh hoạ

VÍ DỤ 1. Cho hình chóp $S.ABC$ có $AB = AC$. Lấy M, N và P lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, SB và SC. Chứng minh rằng AM vuông góc với NP.

VÍ DỤ 2. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều. Lấy M là trung điểm của cạnh BC. Chứng minh rằng AM vuông góc với $B'C'$.

VÍ DỤ 3. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Các điểm M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC. Trên cạnh $B'C'$ lấy điểm P sao cho $C'P = x$ $(0 < x < a)$. Trên cạnh $C'D'$ lấy điểm Q sao cho $C'Q = x$. Chứng minh rằng MN vuông góc với PQ.

2. Bài tập áp dụng

BÀI 1. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$. Gọi G, G' lần lượt là trọng tâm hai đáy. Chứng minh rằng GG' vuông góc với BC.

BÀI 2. Cho tứ diện đều $ABCD$. Gọi M, N, P và Q lần lượt là trung điểm các cạnh AB, CD, AD và AC. Chứng minh rằng MN vuông góc với PQ.

BÀI 3. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = CD = 2a$ $(a > 0)$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh BC, AD. Biết rằng $MN = a\sqrt{2}$. Chứng minh rằng AB vuông góc với CD.

BÀI 4. Cho tứ diện $ABCD$, có $AB = CD$. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABD, M thuộc cạnh AC sao cho $AC = 3AM$, các điểm N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh AD, BC. Chứng minh rằng MG vuông góc với NP.

Bài 23. ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC VỚI MẶT PHẲNG

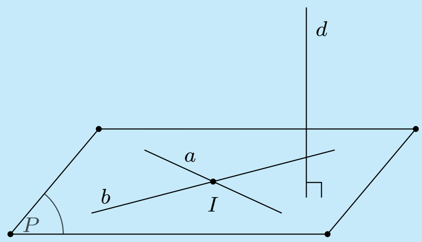
A. TRỌNG TÂM KIẾN THỨC

1. Đường thẳng vuông góc với mặt phẳng

Đường thẳng Δ được gọi là vuông góc với mặt phẳng (P) nếu Δ vuông góc với mọi đường thẳng nằm trong (P).

- *Khi Δ vuông góc với (P), ta còn nói (P) vuông góc với Δ hoặc Δ và (P) vuông góc với nhau, kí hiệu $\Delta \perp (P)$.*
- *Nếu đường thẳng Δ và mặt phẳng (P) vuông góc với nhau thì chúng cắt nhau.*

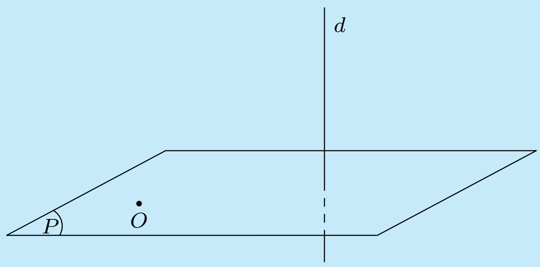
Nếu đường thẳng vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau thuộc cùng một mặt phẳng thì nó vuông góc với mặt phẳng đó.



Nếu một đường thẳng vuông góc với hai cạnh của một tam giác thì vuông góc với cạnh thứ ba.

2. Tính chất

Có duy nhất một mặt phẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một đường thẳng cho trước.



QUICK NOTE

Nhận xét. Nếu ba đường thẳng đôi một phân biệt a, b, c cùng đi qua một điểm O và cùng vuông góc với một đường thẳng Δ thì ba đường thẳng đó cùng nằm trong mặt phẳng đi qua O và vuông góc với Δ.

Mặt phẳng đi qua trung điểm của đoạn thẳng AB và vuông góc với đường thẳng AB được gọi là mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB. Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB là tập hợp các điểm cách đều hai điểm A, B.

Có duy nhất một đường thẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một mặt phẳng cho trước.

3. Liên hệ giữa quan hệ song song và quan hệ vuông góc của đường thẳng và mặt phẳng

- Nếu đường thẳng a vuông góc với mặt phẳng (P) thì các đường thẳng song song với a cũng vuông góc với (P).
- Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.

- Nếu đường thẳng Δ vuông góc với mặt phẳng (P) thì Δ cũng vuông góc với các mặt phẳng song song với (P).
- Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.

- Nếu đường thẳng Δ vuông góc với mặt phẳng (P) thì Δ vuông góc với mọi đường thẳng song song với (P).
- Nếu đường thẳng a và mặt phẳng (P) cùng vuông góc với một đường thẳng Δ thì a nằm trong (P) hoặc song song với (P).

4. Phép chiếu vuông góc

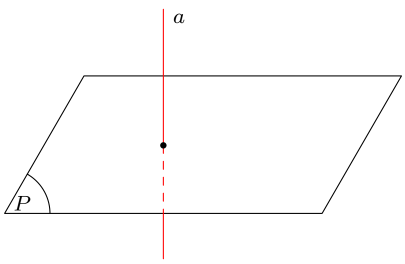
Phép chiếu song song lên mặt phẳng (P) theo phương Δ vuông góc với (P) được gọi là *phép chiếu vuông góc* lên mặt phẳng (P).

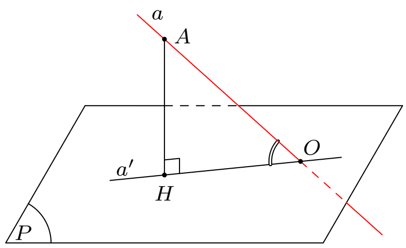
- *Vì phép chiếu vuông góc lên một mặt phẳng là một trường hợp đặc biệt của phép chiếu song song nên nó có mọi tính chất của phép chiếu song song.*
- *Phép chiếu vuông góc lên mặt phẳng (P) còn được gọi đơn giản là phép chiếu lên mặt phẳng (P). Hình chiếu vuông góc $\mathscr{H}'$ của hình $\mathscr{H}$ trên mặt phẳng (P) còn được gọi là hình chiếu của $\mathscr{H}$ trên mặt phẳng (P).*

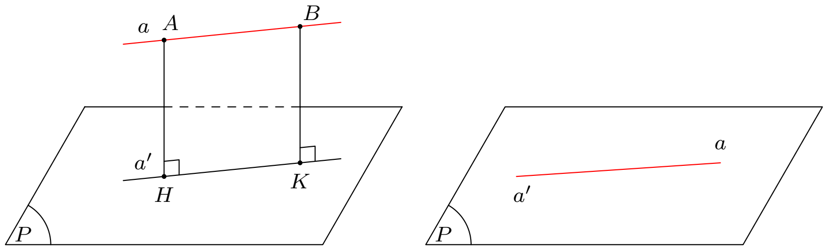
Cho đường thẳng a và mặt phẳng (P) không vuông góc với nhau. Khi đó, một đường thẳng b nằm trong mặt phẳng (P) vuông góc với đường thẳng a khi và chỉ khi b vuông góc với hình chiếu vuông góc a' của a trên (P).

5. Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

Nếu đường thẳng a vuông góc với mặt phẳng (P) thì ta nói rằng góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) bằng 90°.
Nếu đường thẳng a không vuông góc với mặt phẳng (P) thì góc giữa a và hình chiếu a' của nó trên (P) được gọi là góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P).



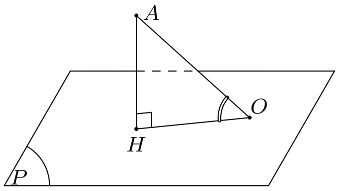




Chú ý: Nếu α là góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) thì $0 \leq \alpha \leq 90°$.

NHẬN XÉT.

Cho điểm A có hình chiếu H trên mặt phẳng (P). Lấy điểm O thuộc mặt phẳng (P), O không trùng H. Khi đó góc giữa đường thẳng AO và mặt phẳng (P) bằng góc AOH



B. CÁC DẠNG BÀI TẬP

1 Chứng minh đường thẳng vuông góc đường thẳng, mặt phẳng

1. Ví dụ minh hoạ

VÍ DỤ 1. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC vuông tại B và cạnh SA vuông góc với các cạnh AB, AC. Chứng minh rằng $BC \perp (SAB)$.

VÍ DỤ 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là một hình vuông, $SA \perp (ABCD)$. Kẻ AH vuông góc với SC (H thuộc SC), BM vuông góc với SC (M thuộc SC). Chứng minh rằng $SC \perp (MBD)$ và $AH \parallel (MBD)$.

VÍ DỤ 3. Cho tứ diện $OABC$ có các cạnh OA, OB, OC tương ứng vuông góc với nhau. Gọi M, N tương ứng là trọng tâm của các tam giác ABC, OBC. Chứng minh rằng đường thẳng MN vuông góc với mặt phẳng (OBC).

VÍ DỤ 4. Cho hình chóp $S.ABC$. Các điểm M, N, P tương ứng là trung điểm của SA, SB, SC. Đường thẳng qua S vuông góc với mặt phẳng (ABC) và cắt mặt phẳng đó tại H. Chứng minh rằng $SH \perp (MNP)$.

VÍ DỤ 5. Cho tứ diện $ABCD$ có ABD và DBC là những tam giác cân tại A và D. Gọi I là trung điểm của BC và AH là đường cao của tam giác ADI.

a) Chứng minh $BC \perp AD$.

b) Chứng minh $AH \perp (BCD)$.

VÍ DỤ 6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O và $SA \perp (ABCD)$. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của A trên SB và SD.

a) Chứng minh $BC \perp SB$ và $CD \perp SD$.

b) Chứng minh $BD \perp (SAC)$.

c) Chứng minh $HK \perp (SAC)$.

d) Chứng minh $AH \perp (SBC)$.

e) Chứng minh $AK \perp (SCD)$.

f) Gọi I là hình chiếu của A lên SC. Chứng minh AH, AI, AK đồng phẳng.

2. Bài tập áp dụng

BÀI 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi, $SA \perp (ABCD)$. Chứng minh rằng $BD \perp (SAC)$.

BÀI 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$, đáy $ABCD$ là hình bình hành có AC cắt BD tại O. Gọi M là trung điểm của SC. Chứng minh rằng $OM \perp (ABCD)$.

BÀI 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi, tâm O. Biết $SA = SC$ và $SB = SD$.

a) Chứng minh: $SO \perp (ABCD)$.

b) Gọi I, K lần lượt là trung điểm của BA và BC. Chứng minh: $IK \perp SD$.

QUICK NOTE

QUICK NOTE

BÀI 4. Cho hình chóp $S.ABC$ có tam giác ABC vuông tại B và $SA \perp (ABC)$. Gọi AH, AK lần lượt là các đường cao trong tam giác SAB và SAC.

a) Chứng minh tam giác SBC vuông.

b) Chứng minh tam giác AHK vuông.

c) Chứng minh $SC \perp (AHK)$.

d) Chứng minh tam giác SHK vuông.

e) Gọi $I = HK \cap BC$. Chứng minh $IA \perp (SAC)$.

BÀI 5. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, tam giác ABC vuông cân tại B. Gọi G là trọng tâm của tam giác SAC và N là điểm thuộc cạnh SB sao cho $SN = 2NB$.

a) Chứng minh $BC \perp (SAB)$.

b) Chứng minh $NG \perp (SAC)$.

2 Một số bài toán liên hệ giữa quan hệ song song và quan hệ vuông góc khác

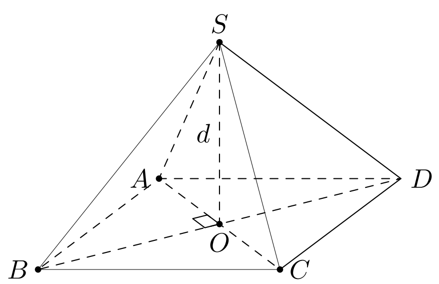
1. Ví dụ minh hoạ

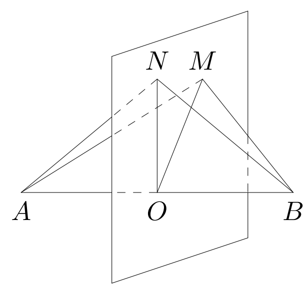
VÍ DỤ 1. Cho mặt phẳng (P) và ba điểm A, B, C thỏa mãn $(P) \perp AB$ và $(P) \perp BC$. Chứng minh rằng $(P) \perp AC$.

VÍ DỤ 2.

a) Cho hình chóp $S.ABCD$ có các cạnh bên bằng nhau, đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O (Hình bên trái). Gọi d là đường thẳng đi qua S và vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Chứng minh d đi qua O.

b) Cho đoạn thẳng AB có O là trung điểm. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua O và vuông góc với AB; M, N là hai điểm cách đều hai đầu của đoạn thẳng AB sao cho M, N, O không thẳng hàng (Hình bên phải). Chứng minh M và N thuộc mặt phẳng (P).



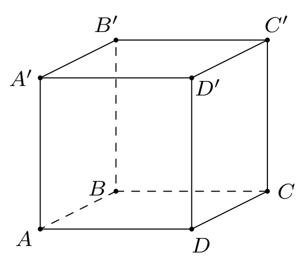


VÍ DỤ 3.

Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $AA' \perp (ABCD)$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và BC.

a) Qua M vẽ đường thẳng a song song với AA'. Chứng minh $a \perp (ABCD)$.

b) Qua N vẽ đường thẳng b vuông góc với $(ABCD)$. Chứng minh $b \parallel AA'$.



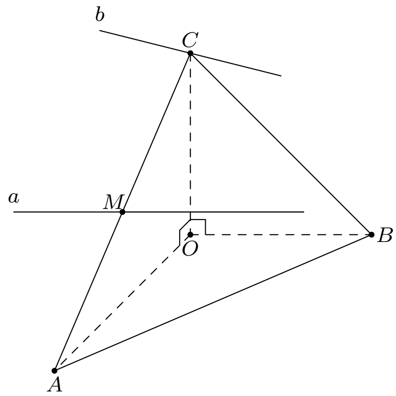
VÍ DỤ 4. Cho mặt phẳng (P) và đường thẳng a cắt (P) tại O sao cho $a \perp (P)$. Giả sử b là đường thẳng đi qua điểm O và $b \perp a$. Chứng minh rằng $b \subset (P)$.

VÍ DỤ 5.

Cho ba đoạn thẳng OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau.

a) Cho M là trung điểm của CA và a là đường thẳng tùy ý đi qua M và song song với mặt phẳng (OAB). Chứng minh $a \perp OC$.

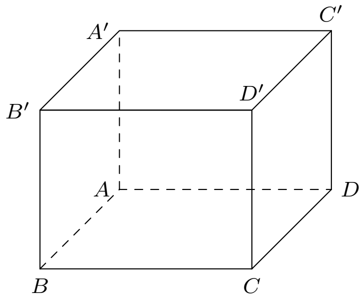
b) Gọi b là một đường thẳng tuỳ ý đi qua C và b vuông góc với OC. Chứng minh $b \parallel (OAB)$.



2. Bài tập áp dụng

BÀI 1. Giả sử $ABCD$ và $ABMN$ là hai hình chữ nhật không cùng nằm trong một mặt phẳng. Chứng minh rằng $(ADN) \parallel (BCM)$.

BÀI 2.
Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $AA' \perp (ABCD)$. Chứng minh rằng $AA' \perp (A'B'C'D')$.



BÀI 3. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$. Mặt phẳng (P) khác mặt phẳng (ABC), vuông góc với đường thẳng SA và lần lượt cắt các đường thẳng SB, SC tại B', C'. Chứng minh rằng $B'C' \parallel BC$.

BÀI 4. Cho mặt phẳng (P) và đường thẳng a cắt nhau tại điểm O, $a \perp (P)$. Giả sử điểm M thỏa mãn $OM \perp (P)$. Chứng minh rằng $M \in a$.

BÀI 5. Cho đường thẳng d và mặt phẳng (P) cắt nhau tại O. Lấy các điểm A, B thuộc d và khác O; các điểm A', B' thuộc (P) thỏa mãn $AA' \perp (P)$, $BB' \perp (P)$. Chứng minh rằng $\dfrac{AA'}{BB'} = \dfrac{OA}{OB}$.

3 Phép chiếu vuông góc

1. Ví dụ minh hoạ

VÍ DỤ 1. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC$. Gọi O là hình chiếu của S trên mặt phẳng (ABC).

a) Chứng minh rằng O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

b) Xác định hình chiếu của đường thẳng SA trên mặt phẳng (ABC).

c) Chứng minh rằng nếu $AO \perp BC$ thì $SA \perp BC$.

d) Xác định hình chiếu của các tam giác SBC, SCA, SAB trên mặt phẳng (ABC).

2. Bài tập áp dụng

BÀI 1. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, tam giác ABC vuông tại B.

a) Xác định hình chiếu của điểm S trên mặt phẳng (ABC).

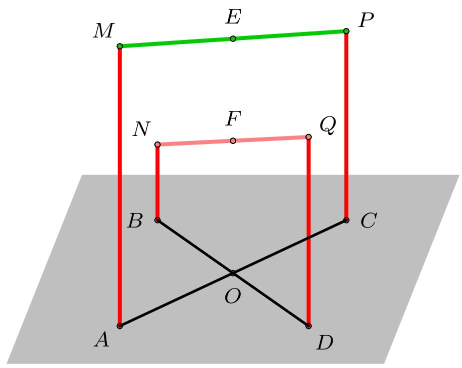
b) Xác định hình chiếu của tam giác SBC trên mặt phẳng (ABC).

c) Xác định hình chiếu của tam giác SBC trên mặt phẳng (SAB).

QUICK NOTE

QUICK NOTE

BÀI 2.
Trên một sân phẳng nằm ngang, tại các điểm A, B, C, D người ta dựng các cột thẳng đứng AM, BN, CP, DQ và nối các sợi dây thẳng giữa M và P, N và Q như hình bên.



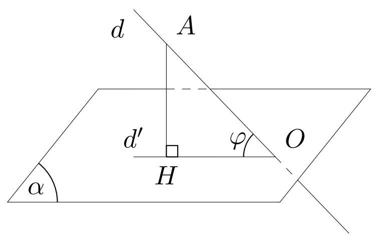
a) Hãy chỉ ra hình chiếu của các dây MP và NQ trên sân.

b) Chứng minh rằng nếu $BD \perp AC$ thì $BD \perp MP$.

c) Chứng minh rằng nếu $ABCD$ là một hình bình hành thì các trung điểm E, F tương ứng của các đoạn thẳng MP và NQ có cùng hình chiếu trên sân.

4 Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

Cho đường thẳng d và mặt phẳng (P) cắt nhau.
Nếu $d \perp (P)$ thì $(d, (P)) = 90^\circ$.



Nếu $d \not\perp (P)$ thì để xác định góc giữa d và (P), ta thường làm như sau

a) Xác định giao điểm O của d và (P).

b) Lấy một điểm A trên d (A khác O). Xác định hình chiếu vuông góc (vuông góc) H của A lên (P). Lúc đó $(d, (P)) = (d, d') = \widehat{AOH}$.

1. Ví dụ minh hoạ

VÍ DỤ 1. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, $SA = a$, $CA = CB = a\sqrt{7}$, $AB = 2a$.

a) Gọi α là góc giữa SB và (ABC). Tính $\tan\alpha$.

b) Tính góc giữa SC và (SAB).

VÍ DỤ 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, $SA = a\sqrt{6}$ và SA vuông góc $(ABCD)$. Hãy xác định các góc giữa

a) SC và $(ABCD)$.

b) SC và (SAB).

c) SB và (SAC).

d) AC và (SBC).

VÍ DỤ 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, tâm O, SO vuông góc $(ABCD)$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm SA, BC. Biết rằng góc giữa MN và $(ABCD)$ bằng 60°. Tính góc giữa MN và (SBD).

2. Bài tập áp dụng

BÀI 1. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, $SA = 2a$ và SA vuông góc với đáy. Tính góc giữa

a) SC và (ABC).

b) SC và (SAB).

BÀI 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O, cạnh a, SO vuông góc $(ABCD)$ và $SO = a\sqrt{6}$.

a) Tính góc giữa cạnh bên SC và mặt đáy.

b) Tính góc giữa SO và (SAD).

c) Gọi I là trung điểm BC. Tính góc giữa SI và (SAD).

BÀI 3. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, $BC = a$, $SA = SB = SC = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Tính góc giữa SA và (ABC).

BÀI 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và B, $AB = BC = a$, $AD = 2a$. Cạnh bên $SA = a\sqrt{2}$ và vuông góc với đáy. Tính góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (SAC).

BÀI 5. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a và AA' vuông góc (ABC). Đường chéo BC' của mặt bên $(BCC'B')$ hợp với $(ABB'A')$ một góc 30°.

a) Tính AA'.

b) Gọi M, N lần lượt là trung điểm AC và BB'. Tính góc giữa MN và $(ACC'A')$.

C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

CÂU 1. Khẳng định nào sau đây đúng?

(A) Hai mặt phẳng cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.

(B) Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.

(C) Hai mặt phẳng song song khi và chỉ khi góc giữa chúng bằng 0°.

(D) Hai đường thẳng trong không gian cắt nhau khi và chỉ khi góc giữa chúng lớn hơn 0° và nhỏ hơn 90°.

CÂU 2. Cho hai đường thẳng phân biệt a, b và mặt phẳng (P), trong đó $a \perp (P)$. Chọn mệnh đề **sai** trong các mệnh đề dưới đây.

(A) Nếu $b \parallel a$ thì $b \perp (P)$.
(B) Nếu $b \perp (P)$ thì $a \parallel b$.
(C) Nếu $a \perp b$ thì $b \parallel (P)$.
(D) Nếu $b \subset (P)$ thì $b \perp a$.

CÂU 3. Cho hai đường thẳng phân biệt a, b và mặt phẳng (α). Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **đúng**?

(A) Nếu $a \parallel (\alpha)$ và $b \parallel (\alpha)$ thì $b \parallel a$.
(B) Nếu $a \perp (\alpha)$ và $b \perp (\alpha)$ thì $b \parallel (\alpha)$.
(C) Nếu $a \parallel (\alpha)$ và $b \perp (\alpha)$ thì $a \perp b$.
(D) Nếu $a \parallel (\alpha)$ và $b \perp a$ thì $b \perp (\alpha)$.

CÂU 4. Trong không gian cho đường thẳng Δ và điểm O. Qua O có bao nhiêu đường thẳng vuông góc với Δ?

(A) Vô số. (B) 3. (C) 2. (D) 1.

CÂU 5. Trong không gian, số mặt phẳng đi qua điểm M và vuông góc với đường thẳng a là

(A) 1. (B) 2. (C) 0. (D) vô số.

CÂU 6. Trong không gian cho các đường thẳng a, b, c và mặt phẳng (P). Mệnh đề nào sau đây là **sai**?

(A) Nếu $a \perp (P)$ và $b \parallel (P)$ thì $a \perp b$.

(B) Nếu $a \perp b$, $c \perp b$ và a cắt c thì b vuông góc với mặt phẳng chứa a và c.

(C) Nếu $a \parallel b$ và $b \perp c$ thì $c \perp a$.

(D) Nếu $a \perp b$ và $b \perp c$ thì $a \parallel c$.

CÂU 7. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau

(A) Nếu $a \parallel (\alpha)$ và $b \perp a$ thì $b \parallel (\alpha)$.
(B) Nếu $a \parallel (\alpha)$ và $b \perp a$ thì $b \perp (\alpha)$.
(C) Nếu $a \parallel (\alpha)$ và $b \perp (\alpha)$ thì $a \perp b$.
(D) Nếu $a \parallel (\alpha)$ và $b \parallel a$ thì $b \parallel (\alpha)$.

CÂU 8. Trong không gian cho đường thẳng a và điểm M. Có bao nhiêu đường thẳng đi qua M và vuông góc với đường thẳng a?

(A) Không có.
(B) Có hai.
(C) Có vô số.
(D) Có một và chỉ một.

CÂU 9. Trong không gian, cho hai đường thẳng phân biệt a, b và mặt phẳng (P), trong đó $a \perp (P)$. Trong các mệnh đề sau, có bao nhiêu mệnh đề đúng?

(I) Nếu $b \parallel a$ thì $b \perp (P)$.
(III) Nếu $b \perp a$ thì $b \parallel (P)$.
(II) Nếu $b \perp (P)$ thì $b \parallel a$.
(IV) Nếu $b \parallel (P)$ thì $b \perp a$.

QUICK NOTE

QUICK NOTE

(A) 1. (B) 2. (C) 4. (D) 3.

CÂU 10. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông, $SA \perp (ABCD)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

(A) $AB \perp (SAD)$. (B) $AB \perp (SAC)$. (C) $AB \perp (SBC)$. (D) $AB \perp (SCD)$.

CÂU 11. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều, biết $SA \perp (ABC)$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định **đúng**?

(A) $AB \perp BC$. (B) $SA \perp BC$. (C) $SB \perp AB$. (D) $SC \perp BC$.

CÂU 12. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O. Biết rằng $SA = SC$, $SB = SD$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

(A) $CD \perp (SBD)$. (B) $AB \perp (SAC)$. (C) $SO \perp (ABCD)$. (D) $CD \perp AC$.

CÂU 13. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi H là trực tâm của tam giác BCD và AH vuông góc với mặt phẳng đáy. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

(A) $AB \perp CD$. (B) $AB = CD$. (C) $AC = BD$. (D) $CD \perp BD$.

CÂU 14. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$ và đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O. Gọi I là trung điểm của SC. Xét các khẳng định sau

1. $OI \perp (ABCD)$.
2. $BD \perp SC$.
3. (SAC) là mặt phẳng trung trực của đoạn BD.
4. $SB = SC = SD$.

Trong bốn khẳng định trên, số khẳng định **sai** là?

(A) 1. (B) 4. (C) 2. (D) 3.

CÂU 15. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi AE, AF lần lượt là đường cao của tam giác SAB và tam giác SAD. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

(A) $SC \perp (AEF)$. (B) $SC \perp (AED)$. (C) $SC \perp (AFB)$. (D) $SC \perp (AEC)$.

CÂU 16. Cho hình chóp $S.ABCD$ với đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D, có $AD = CD = a$, $AB = 2a$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy $(ABCD)$, E là trung điểm của AB. Chỉ ra mệnh đề **sai** trong các mệnh đề dưới đây.

(A) $CE \perp (SAB)$. (B) $CE \perp (SDC)$.

(C) $CB \perp (SAC)$. (D) Tam giác SDC vuông tại D.

CÂU 17. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, cạnh bên SA vuông góc với đáy. Gọi H là chân đường cao kẻ từ A của tam giác SAB. Khẳng định nào dưới đây là **sai**?

(A) $AH \perp BC$. (B) $AH \perp AC$. (C) $AH \perp SC$. (D) $SA \perp BC$.

CÂU 18. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác cân tại C. Cạnh bên SA vuông góc với đáy. Gọi H, K lần lượt là trung điểm của AB và SB. Khẳng định nào dưới đây **sai**?

(A) $CH \perp AK$. (B) $AK \perp SB$. (C) $CH \perp SB$. (D) $CH \perp SA$.

CÂU 19. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$, SA vuông góc với đáy. Kẻ AH vuông góc với SB ($H \in SB$). Chọn mệnh đề đúng.

(A) $AH \perp SC$. (B) $AH \perp (SBD)$. (C) $AH \perp (SCD)$. (D) $AH \perp SD$.

CÂU 20. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành, hai đường chéo AC, BD cắt nhau tại O và $SA = SB = SC = SD$. Khi đó, khẳng định nào sau đây là **sai**?

(A) $AC \perp BD$. (B) $SO \perp BD$. (C) $SO \perp AC$. (D) $SO \perp (ABCD)$.

CÂU 21. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Có bao nhiêu phát biểu đúng trong các phát biểu sau

a) $AC \perp B'D'$ b) $AC \perp B'C'$ c) $AC \perp DD'$ d) $AC' \perp BD$

(A) 4. (B) 3. (C) 2. (D) 1.

CÂU 22. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = AC$, $DB = DC$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

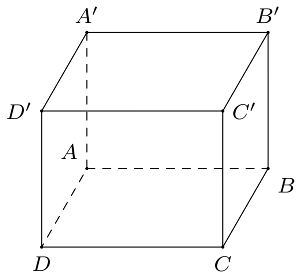
(A) $AB \perp BC$. (B) $CD \perp (ABD)$. (C) $BC \perp AD$. (D) $AB \perp (ABC)$.

CÂU 23. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông, cạnh bên SA vuông góc với đáy $(ABCD)$.
Khẳng định nào sau đây **sai**?
Ⓐ $CD \perp (SBC)$. Ⓑ $SA \perp (ABC)$. Ⓒ $BC \perp (SAB)$. Ⓓ $BD \perp (SAC)$.

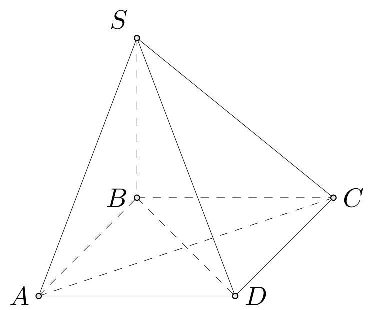
CÂU 24. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, SA vuông góc với $(ABCD)$. Mệnh đề nào dưới đây **sai**?
Ⓐ $SA \perp BD$. Ⓑ $CD \perp SD$. Ⓒ $SD \perp AC$. Ⓓ $BC \perp SB$.

CÂU 25. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = AC = 2$, $DB = DC = 3$. Khẳng định nào sau đây **đúng**?
Ⓐ $BC \perp AD$. Ⓑ $AC \perp BD$. Ⓒ $AB \perp (BCD)$. Ⓓ $DC \perp (ABC)$.

CÂU 26.
Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Tính góc giữa AC' và BD.
Ⓐ $90°$. Ⓑ $45°$. Ⓒ $60°$. Ⓓ $120°$.

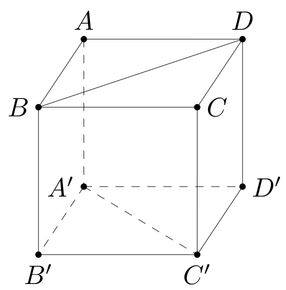


CÂU 27.
Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông và SB vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ (tham khảo hình vẽ). Khẳng định nào sau đây đúng?
Ⓐ $AC \perp (SCD)$. Ⓑ $AC \perp (SBD)$.
Ⓒ $AC \perp (SBC)$. Ⓓ $AC \perp (SAB)$.



CÂU 28. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC vuông tại B, SA vuông góc với đáy ABC. Khẳng định nào dưới đây là **sai**?
Ⓐ $SB \perp BC$. Ⓑ $SA \perp AB$. Ⓒ $SB \perp AC$. Ⓓ $SA \perp BC$.

CÂU 29.
Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Khi đó góc giữa hai đường thẳng BD và $A'C'$ bằng
Ⓐ $90°$. Ⓑ $30°$. Ⓒ $60°$. Ⓓ $45°$.



CÂU 30. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$ và $\triangle ABC$ vuông ở B. Gọi AH là đường cao của $\triangle SAB$. Khẳng định nào sau đây là **sai?**
Ⓐ $SA \perp BC$. Ⓑ $AH \perp AC$. Ⓒ $AH \perp BC$. Ⓓ $AH \perp SC$.

CÂU 31. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$ và $\triangle ABC$ vuông ở C, AH là đường cao của $\triangle SAC$ .Khẳng định nào sau đây đúng?
Ⓐ $SA \perp SC$. Ⓑ $AH \perp BC$. Ⓒ $SA \perp AH$. Ⓓ $AH \perp AC$.

CÂU 32. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC$ và tam giác ABC vuông tại A. Vẽ $SH \perp (ABC), H \in (ABC)$. Khẳng định nào sau đây đúng?
Ⓐ H trùng với trung điểm của BC. Ⓑ H trùng với trực tâm tam giác ABC.
Ⓒ H trùng với trọng tâm tam giác ABC. Ⓓ H trùng với trung điểm của AC.

CÂU 33. Cho tứ diện $ABCD$ có $AC = AD$ và $BC = BD$. Khẳng định nào sau đây đúng?
Ⓐ $AB \perp (ABC)$. Ⓑ $BC \perp CD$. Ⓒ $AB \perp CD$. Ⓓ $CD \perp (ABC)$.

QUICK NOTE

QUICK NOTE

CÂU 34. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy$ABCD$ là hình thoi tâm O. Biết $SA = SC$ và $SB = SD$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

Ⓐ $BD \perp (SAC)$. Ⓑ $AB \perp (SBC)$. Ⓒ $SO \perp (ABCD)$. Ⓓ $AC \perp (SBD)$.

CÂU 35. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ với O là tâm đa giác đáy $ABCD$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

Ⓐ $BD \perp (SAC)$. Ⓑ $BC \perp (SAB)$. Ⓒ $AC \perp (SBD)$. Ⓓ $OS \perp (ABCD)$.

CÂU 36. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều, cạnh bên SA vuông góc với đáy, M là trung điểm BC, J là trung điểm BM. Khẳng định nào sau đây đúng ?

Ⓐ $BC \perp (SAM)$. Ⓑ $BC \perp (SAC)$. Ⓒ $BC \perp (SAJ)$. Ⓓ $BC \perp (SAB)$.

CÂU 37. Cho tứ diện đều $ABCD$ có điểm M là trung điểm của cạnh CD. Chọn mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau.

Ⓐ $BM \perp AD$. Ⓑ $BM \perp CD$. Ⓒ $AM \perp CD$. Ⓓ $AB \perp CD$.

CÂU 38. Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$, đường thẳng AC_1 vuông góc với mặt phẳng nào sau đây?

Ⓐ (A_1DC_1). Ⓑ (A_1BD). Ⓒ (A_1CD_1). Ⓓ (A_1B_1CD).

CÂU 39. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật và SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi AE, AF lần lượt là các đường cao của tam giác SAB và SAD. Mệnh đề nào sau đây đúng?

Ⓐ $SC \perp (AED)$. Ⓑ $SC \perp (ACE)$. Ⓒ $SC \perp (AFB)$. Ⓓ $SC \perp (AEF)$.

CÂU 40. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O. Biết $SA = SC, SB = SD$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

Ⓐ $AC \perp (SBD)$. Ⓑ $AC \perp SO$. Ⓒ $AC \perp SB$. Ⓓ $SC \perp AD$.

CÂU 41. Trong hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các cạnh đều bằng nhau. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

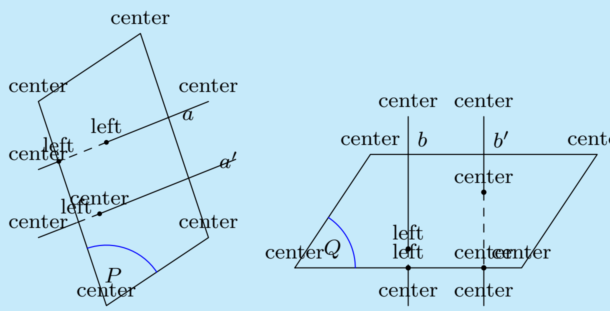
Ⓐ $BB' \perp BD$. Ⓑ $A'C' \perp BD$. Ⓒ $A'B \perp DC'$. Ⓓ $BC' \perp A'D$.

Bài 24. HAI MẶT PHẲNG VUÔNG GÓC

A. TRỌNG TÂM KIẾN THỨC

1. Góc giữa hai mặt phẳng, hai mặt phẳng vuông góc

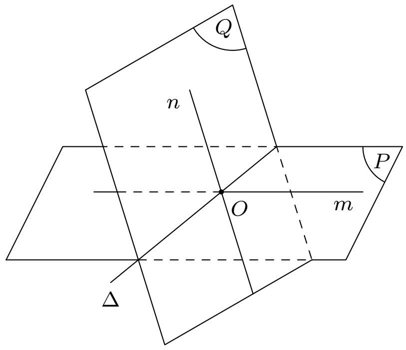
- Cho hai mặt phẳng (P) và (Q). Lấy các đường thẳng a, b tương ứng vuông góc với $(P), (Q)$. Khi đó, góc giữa a và b không phụ thuộc vào vị trí của a, b và được gọi là góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q).
- Hai mặt phẳng (P) và (Q) được gọi là vuông góc với nhau nếu góc giữa chúng bằng $90°$.



⚠ ***Chú ý.*** *Nếu φ là góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) thì $0° \le \varphi \le 90°$.*

Nhận xét.

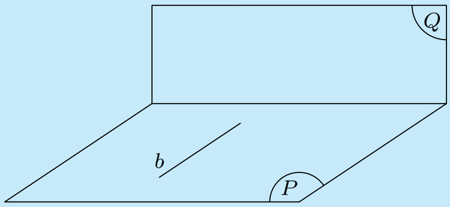
Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) cắt nhau theo giao tuyến Δ. Lấy hai đường thẳng m, n tương ứng thuộc (P), (Q) cùng vuông góc với Δ tại một điểm O (nói cách khác, lấy một mặt phẳng vuông góc với Δ, cắt (P), (Q) tương ứng theo các giao tuyến m, n). Khi đó góc giữa (P) và (Q) bằng góc giữa m và n. Đặc biệt, (P) vuông góc với (Q) khi và chỉ khi m vuông góc với n.



2. Điều kiện hai mặt phẳng vuông góc

Hai mặt phẳng vuông góc với nhau nếu mặt phẳng này chứa một đường thẳng vuông góc với mặt phẳng kia.
Kí hiệu

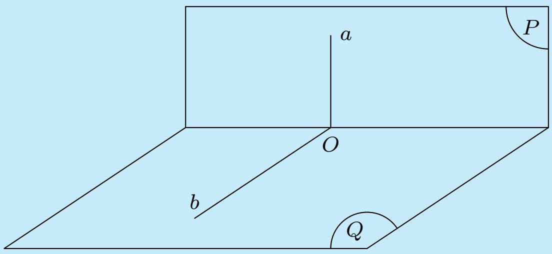
$$\begin{cases} b \subset (P) \\ b \perp (P) \end{cases} \Rightarrow (P) \perp (Q).$$



3. Tính chất hai mặt phẳng vuông góc

Với hai mặt phẳng vuông góc với nhau, bất kì đường thẳng nào nằm trong mặt phẳng này mà vuông góc với giao tuyến cũng vuông góc với mặt phẳng kia.
Kí hiệu

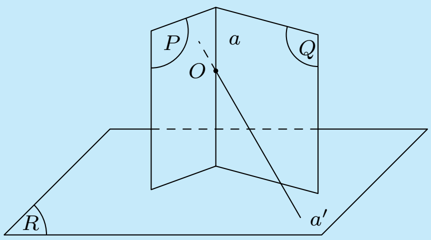
$$\begin{cases} (P) \perp (Q) \\ (P) \cap (Q) = c \\ a \subset (P), a \perp c \end{cases} \Rightarrow a \perp (Q).$$



NHẬN XÉT. Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau. Mỗi đường thẳng qua điểm O thuộc (P) và vuông góc với mặt phẳng (Q) thì đường thẳng đó thuộc mặt phẳng (P).

Nếu hai mặt phẳng cắt nhau và cùng vuông góc với một mặt phẳng thứ ba thì giao tuyến của chúng vuông góc với mặt phẳng thứ ba đó.
Kí hiệu

$$\begin{cases} (P) \cap (Q) = a,\ (P) \perp (Q) \\ (P) \perp (R),\ (Q) \perp (R) \end{cases} \Rightarrow a \perp (R)$$

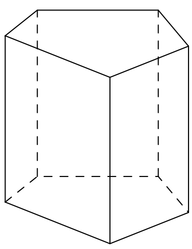


4. Một số hình lăng trụ đặc biệt

4.1. Hình lăng trụ đứng

Hình lăng trụ đứng là hình lăng trụ có các cạnh bên vuông góc với mặt đáy.

Hình lăng trụ đứng có các mặt bên là các hình chữ nhật và vuông góc với mặt đáy.



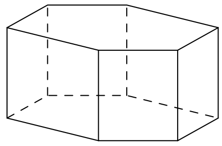
4.2. Hình lăng trụ đều

QUICK NOTE

QUICK NOTE

Hình lăng trụ đều là hình lăng trụ đứng có đáy là đa giác đều.

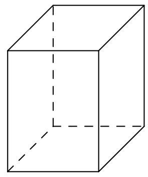
Hình lăng trụ đều có các mặt bên là các hình chữ nhật có cùng kích thước.



4.3. Hình hộp đứng

Hình hộp đứng là hình lăng trụ đứng có đáy là hình bình hành.

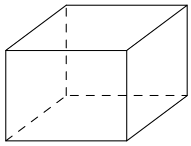
Hình hộp đứng có các mặt bên là các hình chữ nhật.



4.4. Hình hộp chữ nhật

Hình hộp chữ nhật là hình hộp đứng có đáy là hình chữ nhật.

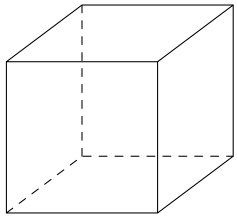
Hình hộp chữ nhật có các mặt bên là hình chữ nhật. Các đường chéo của hình hộp chữ nhật có độ dài bằng nhau và chúng cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường.



4.5. Hình lập phương

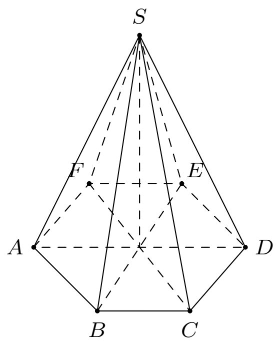
Hình lập phương là hình hộp chữ nhật có tất cả các cạnh bằng nhau.

Hình lập phương có các mặt là các hình vuông.



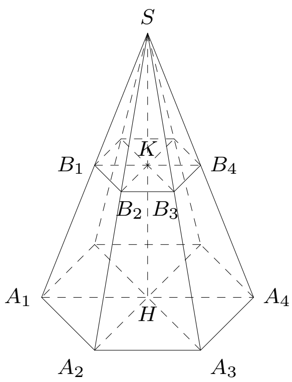
5. Hình chóp đều và hình chóp cụt đều

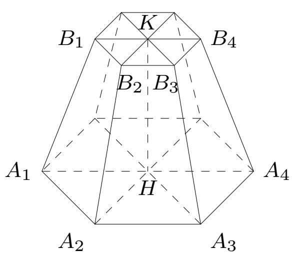
Hình chóp đều là hình chóp có đáy là đa giác đều và các cạnh bên bằng nhau.



Tương tự như đối với hình chóp, khi đáy của hình chóp đều là tam giác đều, hình vuông, ngũ giác đều, ... đôi khi ta cũng gọi rõ chúng tương ứng là chóp tam giác đều, tứ giác đều, ngũ giác đều, ...

Một hình chóp là đều khi và chỉ khi đáy của nó là một hình đa giác đều và hình chiếu của đỉnh trên mặt phẳng đáy là tâm của mặt đáy.





Cho hình chóp đều $S.A_1A_2\ldots A_n$. Một mặt phẳng không đi qua S và song song với mặt phẳng đáy, cắt các cạnh $SA_1, SA_2, \ldots SA_n$ tương ứng tại $B_1, B_2, \ldots, B_n$. Khi đó

- $S.B_1B_2\ldots B_n$ là một hình chóp đều.

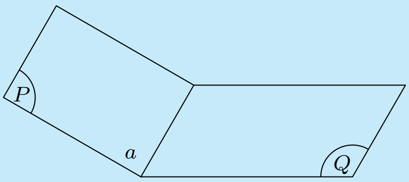
QUICK NOTE

- Gọi H là tâm của đa giác $A_1A_2\dots A_n$ thì đường thẳng SH đi qua tâm K của đa giác đều $B_1B_2\dots B_n$ và HK vuông góc với các mặt phẳng $(A_1A_2\dots A_n)$, $(B_1B_2\dots B_n)$.

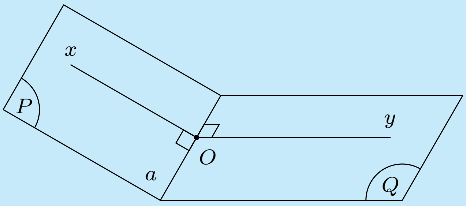
- Hình gồm các đa giác đều $A_1A_2\dots A_n$, $B_1B_2\dots B_n$ và các hình thang cân $A_1A_2B_2B_1$, $A_2A_3B_3B_2, \dots, A_nA_1B_1B_n$ được tạo thành như trên được gọi là một *hình chóp cụt đều* (nói đơn giản là hình chóp cụt được tạo thành từ hình chóp đều $S.A_1A_2\dots A_n$ sau khi cắt đi chóp đều $S.B_1B_2\dots B_n$), kí hiệu là $A_1A_2\dots A_n.B_1B_2\dots B_n$.
- Các đa giác $A_1A_2\dots A_n$ và $B_1B_2\dots B_n$ được gọi là hai *mặt đáy*, các hình thang $A_1A_2B_2B_1$, $A_2A_3B_3B_2, \dots, A_nA_1B_1B_n$ được gọi là các *mặt bên* của hình chóp cụt. Các đoạn thẳng A_1B_1, $A_2B_2, \dots, A_nB_n$ được gọi là các *cạnh bên*; các cạnh của mặt đáy được gọi là các *cạnh đáy* của hình chóp cụt.
- Đoạn thẳng HK nối hai tâm của đáy được gọi là *đường cao* của hình chóp cụt đều. Độ dài của đường cao được gọi là *chiều cao* của hình chóp cụt.

6. Góc nhị diện

Hình gồm hai nửa mặt phẳng (P), (Q) có chung bờ a được gọi là một góc nhị diện, kí hiệu là $[P, a, Q]$. Đường thẳng a và các nửa mặt phẳng (P), (Q) tương ứng được gọi là các mặt phẳng của góc nhị diện đó.



Từ một điểm O bất kì thuộc cạnh a của góc nhị diện $[P, a, Q]$, vẽ các tia Ox, Oy tương ứng thuộc (P), (Q) và vuông góc với a. Góc xOy được gọi là một góc phẳng của góc nhị diện $[P, a, Q]$ (gọi tắt là góc phẳng nhị diện). Số đo của góc xOy không phụ thuộc vào vị trí của O trên a, được gọi là số đo của góc nhị diện $[P, a, Q]$.



- *Số đo của góc nhị diện có thể nhận từ 0° đến 180°. Góc nhị diện được gọi là vuông, nhọn, tù nếu nó có số đo tương ứng bằng, nhỏ hơn, lớn hơn 90°.*
- *Đối với hai điểm M, N không thuộc đường thẳng a, ta kí hiệu $[M, a, N]$ là góc nhị diện có cạnh a và các mặt phẳng tương ứng chứa M, N.*
- *Hai mặt phẳng cắt nhau tạo thành bốn góc nhị diện. Nếu một trong bốn góc nhị diện đó là góc nhị diện vuông thì các góc nhị diện còn lại cũng là góc nhị diện vuông.*

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP

1 Chứng minh hai mặt phẳng vuông góc

1. Ví dụ minh hoạ

VÍ DỤ 1. Cho tứ diện $OABC$ có $OA \perp OB$ và $OA \perp OC$. Chứng minh $(OAB) \perp (OBC)$, $(OAC) \perp (OBC)$.

VÍ DỤ 2. Cho hình chóp $S.ABC$ có SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng (ABC). Gọi M là trung điểm của AB. Chứng minh $SM \perp (ABC)$.

VÍ DỤ 3. Cho hình chóp $S.ABC$ có tam giác ABC vuông tại A, $SA \perp (ABC)$. Gọi H và K lần lượt là hình chiếu của B trên các đường thẳng SA và SC. Chứng minh rằng:

a) $(SAC) \perp (SAB)$. b) $(SAC) \perp (BHK)$.

VÍ DỤ 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật và $SA \perp (ABCD)$. Gọi B', C', D' tương ứng là hình chiếu của A trên SB, SC, SD. Chứng minh rằng

QUICK NOTE

a) $(SBC) \perp (SAB)$, $AB' \perp (SBC)$, $AD' \perp (SCD)$.

b) Các điểm A, B', C', D' cùng thuộc một mặt phẳng.

VÍ DỤ 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, $SA \perp (ABCD)$. Chứng minh rằng:

a) $(SAC) \perp (SBD)$. b) $(SAB) \perp (SBC)$.

VÍ DỤ 6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, $SA \perp (ABCD)$. Gọi M và N lần lượt là hình chiếu của A lên SB và SD. Chứng minh rằng $(SAC) \perp (AMN)$.

VÍ DỤ 7. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O với $AB = a$, $AC = \dfrac{2a\sqrt{6}}{3}$, $SO \perp (ABCD)$, $SB = a$. Chứng minh rằng $(SAB) \perp (SAD)$.

2. Bài tập áp dụng

BÀI 1. Cho tứ diện $ABCD$ có AB, AC, AD đôi một vuông góc với nhau. Chứng minh rằng các mặt phẳng $(ABC), (BAD), (CAD)$ đôi một vuông góc với nhau.

BÀI 2. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, $SA = 2a$, $SA \perp (ABC)$. Gọi I là trung điểm của BC. Chứng minh rằng $(SAI) \perp (SBC)$.

BÀI 3. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$. Gọi H và K lần lượt là trực tâm các tam giác ABC và SBC. Chứng minh rằng $(SBC) \perp (CHK)$.

BÀI 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi và $SA = SB = SC$. Chứng minh rằng $(SBD) \perp (ABCD)$.

BÀI 5. Trong mặt phẳng (P) cho hình vuông $ABCD$. Gọi S là một điểm không thuộc (P) sao cho SAB là tam giác đều và $(SAB) \perp (ABCD)$. Chứng minh rằng $(SAD) \perp (SAB)$.

BÀI 6. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $AB = AC = a$, $AC = a\sqrt{2}$. Gọi M là trung điểm của AC. Chứng minh rằng $(BC'M) \perp (ACC'A')$.

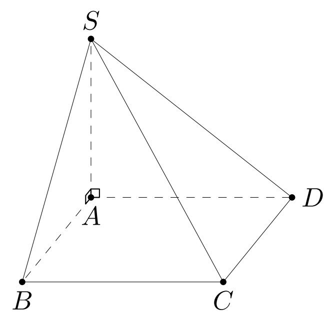
BÀI 7. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a$, $AD = a\sqrt{2}$ và $SA \perp (ABCD)$. Gọi M là trung điểm AD. Chứng minh rằng $(SAC) \perp (SMB)$.

BÀI 8. Cho hình vuông $ABCD$ và tam giác đều SAB cạnh a nằm trong hai mặt phẳng vuông góc nhau. Gọi I và F lần lượt là trung điểm AB và AD. Chứng minh rằng $(SID) \perp (SFC)$.

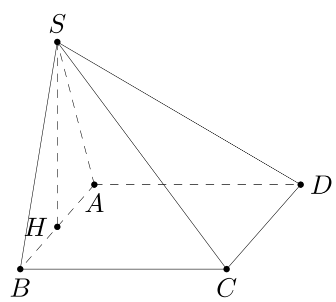
BÀI 9.
Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$, đáy $ABCD$ là hình chữ nhật (Hình bên). Chứng minh rằng:

a) $(SAB) \perp (ABCD)$;

b) $(SAB) \perp (SAD)$.



BÀI 10.
Cho hình chóp $S.ABCD$ có $(SAB) \perp (ABCD)$, đáy $ABCD$ là hình chữ nhật (Hình bên). Chứng minh rằng: $(SBC) \perp (SAB)$



2 Tính góc giữa hai mặt phẳng

1. Ví dụ minh hoạ

VÍ DỤ 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính góc giữa hai mặt phẳng

a) (SAC) và (SAD).

b) (SAB) và (SAD).

VÍ DỤ 2. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh $a, SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{3}$. Tính số đo của góc giữa các mặt phẳng sau:

a) $((SBC),(ABC)) = ?$

b) $((SBD),(ABD)) = ?$

c) $((SAB),(SCD)) = ?$

VÍ DỤ 3. Cho tứ diện $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, $SA \perp (ABC)$ và $SA = \dfrac{3a}{2}$. Tính góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC).

2. Bài tập rèn luyện

BÀI 1. Cho tứ diện $S.ABC$ có $\widehat{ABC} = 90^\circ, AB = 2a; BC = a\sqrt{3}, SA \perp (ABC); SA = 2a$. Gọi M là trung điểm AB. Hãy tính:

a) $\left(\widehat{(SBC),(ABC)}\right)$.

b) Đường cao AH của $\triangle AMC$.

c) $\varphi = \left(\widehat{(SMC),(ABC)}\right)$.

BÀI 2. Trong mặt phẳng (P) cho một $\triangle ABC$ vuông cân, cạnh huyền $BC = a$. Trên nửa đường thẳng vuông góc với (P) tại A lấy điểm S.

a) Tính góc giữa hai mặt phẳng $((SAB),(CAB))$ và $((SAC),(BAC))$ và $((CSA),(BSA))$.

b) Tính SA để góc giữa hai mặt phẳng $((SBC),(ABC))$ có số đo 30°.

BÀI 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a, AD = a\sqrt{3}$, $SA \perp (ABCD)$.

a) Tính góc giữa hai mặt phẳng (SCD) và $(ABCD)$ với $SA = a$.

b) Tìm $x = SA$ để góc giữa hai mặt phẳng (SCD) và $(ABCD)$ bằng 60°.

BÀI 4. Cho tam giác vuông ABC có cạnh huyền BC nằm trên mặt phẳng (P). Gọi α, β lần lượt là góc hợp bởi hai đường thẳng AB, AC và mặt phẳng (P). Gọi φ là hợp bởi (ABC) và (P). Chứng minh rằng $\sin^2\varphi = \sin^2\alpha + \sin^2\beta$.

3 Một số bài toán khác về hình lăng trụ đặc biệt, hình chóp đều, chóp cụt đều

1. Ví dụ minh hoạ

VÍ DỤ 1. Cho hình lăng trụ đều $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh đáy $AB = a$ và cạnh bên $AA' = h$. Tính đường chéo $A'C$ theo a và h.

VÍ DỤ 2. Cho hình chóp cụt tứ giác đều $ABCD.A'B'C'D'$, đáy lớn $ABCD$ có cạnh bằng a, đáy nhỏ $A'B'C'D'$ có cạnh bằng b, chiều cao $OO' = h$ với O, O' lần lượt là tâm của hai đáy. Tính độ dài cạnh bên CC' của hình chóp cụt đó.

VÍ DỤ 3. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$. Chứng minh rằng $AA'C'C$ là một hình chữ nhật.

VÍ DỤ 4. Cho hình chóp đều $S.ABC$ có cạnh đáy $AB = a$ và cạnh bên $SA = b$. Tính độ dài đường cao SO theo a, b.

QUICK NOTE

QUICK NOTE

2. Bài tập áp dụng

BÀI 1. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Chứng minh rằng $A'BD$ là tam giác đều.

BÀI 2. Chứng minh rằng một hình chóp là đều khi và chỉ khi đáy của nó là một đa giác đều và các cạnh bên tạo với mặt phẳng đáy các góc bằng nhau.

BÀI 3. Cho hình chóp cụt đều $ABC.A'B'C'$ có chiều cao bằng h, các đáy là các tam giác đều ABC, $A'B'C'$ có cạnh tương ứng là a, a' $(a > a')$. Tính độ dài các cạnh bên của hình chóp cụt.

4 Tính góc giữa hai mặt phẳng, góc nhị diện

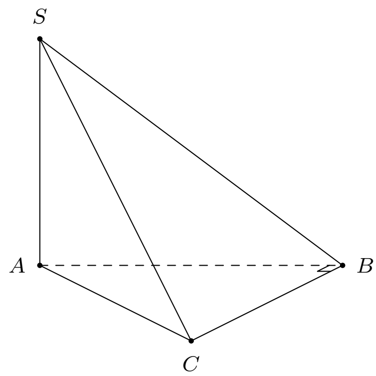
1. Ví dụ minh hoạ

VÍ DỤ 1.

Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, $AB = a$, $SA \perp (ABC)$, $SA = a\sqrt{3}$ (Hình bên). Tính số đo theo đơn vị độ của mỗi góc nhị diện sau:

a) $[B, SA, C]$;

b) $[A, BC, S]$.



VÍ DỤ 2. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$. Gọi H là hình chiếu của A trên BC.

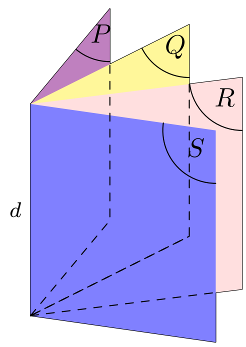
a) Chứng minh rằng $(ASB) \perp (ABC)$ và $(SAH) \perp (SBC)$.

b) Giả sử tam giác ABC vuông tại A, $\widehat{ABC} = 30^\circ$, $AC = a$, $SA = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.
Tính số đo của góc nhị diện $[S, BC, A]$.

2. Bài tập rèn luyện

BÀI 1.

Trong không gian cho bốn nửa mặt phẳng (P), (Q), (R), (S) cắt nhau theo giao tuyến d (Hình bên). Hãy chỉ ra ba góc nhị diện có cạnh của góc nhị diện là đường thẳng d.



BÀI 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$, đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a và $AC = a$.

a) Tính số đo của góc nhị diện $[B, SA, C]$.

b) Tính số đo của góc nhị diện $[B, SA, D]$.

c) Biết $SA = a$, tính số đo của góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$.

BÀI 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$, đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh bằng a, $AC = a$, $SA = \dfrac{1}{2}a$. Gọi O là giao điểm của hai đường chéo hình thoi $ABCD$ và H là hình chiếu của O trên SC.

a) Tính số đo của các góc nhị diện $[B, SA, D]$; $[S, BD, A]$; $[S, BD, C]$.

b) Chứng minh rằng $\widehat{BHD}$ là một góc phẳng của góc nhị diện $[B, SC, D]$.

BÀI 4. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a.

a) Tính độ dài đường chéo của hình lập phương.

b) Chứng minh rằng $(ACC'A') \perp (BDD'B')$.

c) Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$. Chứng minh rằng $\widehat{COC'}$ là một góc phẳng của góc nhị diện $[C, BD, C']$. Tính (gần đúng) số đo của các góc nhị diện $[C, BD, C]$, $[A, BD, C']$.

QUICK NOTE

C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

CÂU 1. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

(A) Nếu hình hộp có bốn đường chéo bằng nhau thì nó là hình lập phương.

(B) Nếu hình hộp có sau mặt bằng nhau thì nó là hình lập phương.

(C) Nếu hình hộp có hai mặt là hình vuông thì nó là hình lập phương.

(D) Nếu hình hộp có ba mặt chung một đỉnh là hình vuông thì nó là hình lập phương.

CÂU 2. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sau đây là đúng?

(A) Hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì mọi đường thẳng nằm trong mặt phẳng này và vuông góc với giao tuyến của hai mặt phẳng sẽ vuông góc với mặt phẳng kia.

(B) Hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì mọi đường thẳng nằm trong mặt phẳng này sẽ vuông góc với mặt phẳng kia.

(C) Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì vuông góc với nhau.

(D) Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.

CÂU 3. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

(A) Qua một đường thẳng có duy nhất một mặt phẳng vuông góc với một đường thẳng cho trước.

(B) Qua một điểm có duy nhất một mặt phẳng vuông góc với một mặt phẳng cho trước.

(C) Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.

(D) Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.

CÂU 4. Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) song song với nhau và một điểm M không thuộc (P) và (Q). Qua M có bao nhiêu mặt phẳng vuông góc với (P) và (Q)?

(A) 1. (B) 2. (C) Vô số. (D) 3.

CÂU 5. Cho tam giác đều ABC cạnh a. Gọi D là điểm đối xứng với A qua BC. Trên đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (ABC) tại D lấy điểm S sao cho $SD = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$. Gọi I là trung điểm BC, kẻ IH vuông góc $SA\,(H \in SA)$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

(A) $(SDB) \perp (SDC)$. (B) $(SAB) \perp (SAC)$.

(C) $BH \perp HC$. (D) $SA \perp BH$.

CÂU 6. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $\widehat{ABC} = 60^\circ$, tam giác SBC là tam giác đều có bằng cạnh $2a$ và nằm trong mặt phẳng vuông với đáy. Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (ABC). Mệnh đề nào sau đây đúng?

(A) $\tan\varphi = \dfrac{\sqrt{3}}{6}$. (B) $\tan\varphi = \dfrac{1}{2}$. (C) $\varphi = 60^\circ$. (D) $\tan\varphi = 2\sqrt{3}$.

CÂU 7. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại C. Gọi H là trung điểm AB. Biết rằng SH vuông góc với mặt phẳng (ABC) và $AB = SH = a$. Tính cosin của góc α tọa bởi hai mặt phẳng (SAB) và (SAC).

(A) $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{3}$. (B) $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$. (C) $\cos\alpha = \dfrac{2}{3}$. (D) $\cos\alpha = \dfrac{1}{3}$.

CÂU 8. Trong không gian cho tam giác đều SAB và hình vuông $ABCD$ cạnh a nằm trên hai mặt phẳng vuông góc. Gọi H, K lần lượt là trung điểm của AB, CD. Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SCD). Mệnh đề nào sau đây đúng?

(A) $\tan\varphi = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$. (B) $\tan\varphi = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$. (C) $\tan\varphi = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. (D) $\tan\varphi = \dfrac{\sqrt{2}}{3}$.

CÂU 9. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, cạnh bên SA vuông góc với đáy. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và AC. Góc giữa hai mặt phẳng (SEF) và (SBC) là

(A) $\widehat{BSE}$. (B) $\widehat{CSF}$. (C) $\widehat{BSF}$. (D) $\widehat{CSE}$.

QUICK NOTE

CÂU 10. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại C, mặt bên SAC là tam giác đều và mằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi I là trung điểm của SC. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A $AI \perp SC$. **B** $(ABI) \perp (SBC)$. **C** $(SBC) \perp (SAC)$. **D** $AI \perp BC$.

CÂU 11. Cho hình chóp đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a, góc giữa mặt bên và mặt đáy bằng 60°. Tính độ dài đường cao SH của khối chóp.

A $SH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **B** $SH = \dfrac{a\sqrt{2}}{3}$. **C** $SH = \dfrac{a}{2}$. **D** $SH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

CÂU 12. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm I, cạnh a, góc $\widehat{BAD} = 60^\circ$,

$SA = SB = SD = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và $(ABCD)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A $\tan\varphi = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$. **B** $\tan\varphi = \sqrt{5}$. **C** $\varphi = 45^\circ$. **D** $\tan\varphi = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

CÂU 13. Cho tứ diện $SABC$ có SBC và ABC nằm trong hai mặt phẳng vuông góc với nhau. Tam giác SBC đều, tam giác ABC vuông tại A. Gọi H, I lần lượt là trung điểm của BC và AB. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A $HI \perp AB$. **B** $(SHI) \perp (SAB)$. **C** $SH \perp AB$. **D** $(SAB) \perp (SAC)$.

CÂU 14. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng a. Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và (SCD). Mệnh đề nào sau đây đúng?

A $\tan\varphi = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **B** $\tan\varphi = \sqrt{2}$. **C** $\tan\varphi = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **D** $\tan\varphi = \sqrt{6}$.

CÂU 15. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, SA vuông góc với đáy. Gọi M là trung điểm AC. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A $BM \perp AC$. **B** $(SAB) \perp (SAC)$.
C $(SAB) \perp (SBC)$. **D** $(SBM) \perp (SAC)$.

CÂU 16. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O, cạnh a. Đường thẳng SO vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$ và $SO = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Tính góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$.

A 30°. **B** 60°. **C** 90°. **D** 45°.

CÂU 17. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Cạnh bên $SA = a\sqrt{3}$ và vuông góc với mặt đáy (ABC). Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC). Mệnh đề nào sau đây đúng?

A $\varphi = 60^\circ$. **B** $\sin\varphi = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$. **C** $\sin\varphi = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$. **D** $\varphi = 30^\circ$.

CÂU 18. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Cạnh bên $SA = x$ và vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Xác định x để hai mặt phẳng (SBC) và (SCD) tạo với nhau một góc 60°.

A $x = \dfrac{3a}{2}$. **B** $x = a$. **C** $x = 2a$. **D** $x = \dfrac{a}{2}$.

CÂU 19. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông $ABCD$ vuông tại A và D, $AB = 2a$, $AD = CD = a$. Cạnh bên $SA = a$ và vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A $\tan\varphi = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **B** $\varphi = 30^\circ$. **C** $\varphi = 45^\circ$. **D** $\varphi = 60^\circ$.

CÂU 20. Cho hai tam giác ACD và BCD nằm trên hai mặt phẳng vuông góc với nhau và $AC = AD = BC = BD = a, CD = 2x$. Với giá trị nào của x thì hai mặt phẳng (ABC) và (ABD) vuông góc.

A $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **B** $\dfrac{a}{2}$. **C** $\dfrac{a}{3}$. **D** $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

CÂU 21. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng a. Gọi M là trung điểm SC. Tính góc φ giữa hai mặt phẳng (MBD) và $(ABCD)$.

A $\varphi = 45^\circ$. **B** $\varphi = 90^\circ$. **C** $\varphi = 30^\circ$. **D** $\varphi = 60^\circ$.

CÂU 22. Cho hình lăng trụ tứ giác đều $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy cạnh bằng a, góc giữa hai mặt phẳng $(ABCD)$ và (ABC') có số đo bằng $60°$. Độ dài cạnh bên của hình lăng trụ bằng

A $2a$. **B** $a\sqrt{2}$. **C** $3a$. **D** $a\sqrt{3}$.

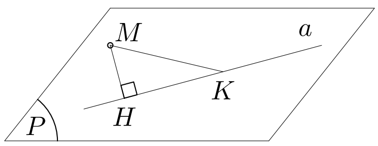
CÂU 23. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật tâm O với $AB = a, AD = 2a$. Cạnh bên $SA = a$ và vuông góc với đáy. Gọi (α) là mặt phẳng qua SO và vuông góc với (SAD). Tính diện tích S của thiết diện tạo bởi (α) và hình chóp đã cho.

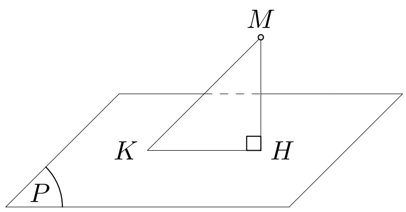
A $S = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$. **B** $S = a^2$. **C** $S = \dfrac{a^2\sqrt{2}}{2}$. **D** $S = \dfrac{a^2}{2}$.

Bài 25. KHOẢNG CÁCH TRONG KHÔNG GIAN

A. TRỌNG TÂM KIẾN THỨC

1. Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng, đến một mặt phẳng





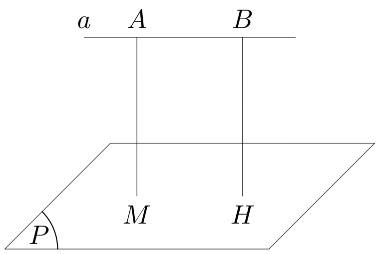
- Khoảng cách từ một điểm M đến một đường thẳng a, kí hiệu $\mathrm{d}(M, a)$, là khoảng cách giữa M và hình chiếu H của M trên a.
- Khoảng cách từ một điểm M đến một mặt phẳng (P), kí hiệu $\mathrm{d}(M,(P))$, là khoảng cách giữa M và hình chiếu H của M trên (P).

$\mathrm{d}(M, a) = 0$ khi và chỉ khi $M \in a$; $\mathrm{d}(M,(P)) = 0$ khi và chỉ khi $M \in (P)$.

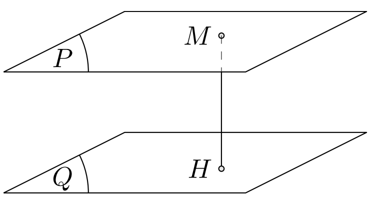
NHẬN XÉT. Khoảng cách từ M đến đường thẳng a (mặt phẳng (P)) là khoảng cách nhỏ nhất giữa M và một điểm thuộc a (thuộc (P)).

Khoảng cách từ đỉnh đến mặt phẳng chứa mặt đáy của một hình chóp được gọi là chiều cao của hình chóp đó.

2. Khoảng cách giữa các đường thẳng và mặt phẳng song song, giữa hai mặt phẳng song song



Khoảng cách giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) song song với a, kí hiệu $\mathrm{d}(a,(P))$, là khoảng cách từ một điểm bất kì trên a đến (P).



QUICK NOTE

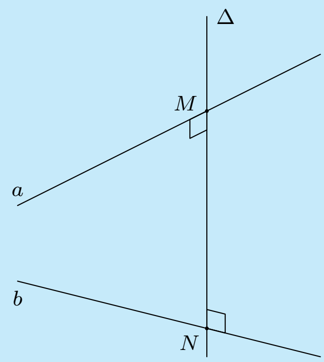
QUICK NOTE

- Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song (P) và (Q), kí hiệu $\mathrm{d}((P),(Q))$, là khoảng cách từ một điểm bất kì thuộc mặt phẳng này đến mặt phẳng kia.
- Khoảng cách giữa hai đường thẳng song song m và n, kí hiệu $\mathrm{d}(m,n)$, là khoảng cách từ một điểm thuộc đường thẳng này đến đường thẳng kia.

Khoảng cách giữa hai đáy của một hình lăng trụ được gọi là chiều cao của hình lăng trụ đó.

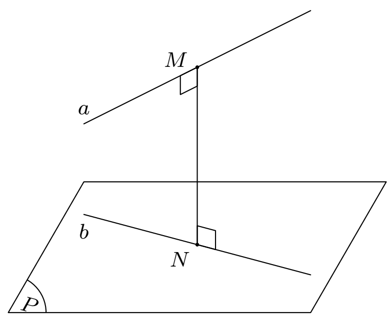
3. Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau

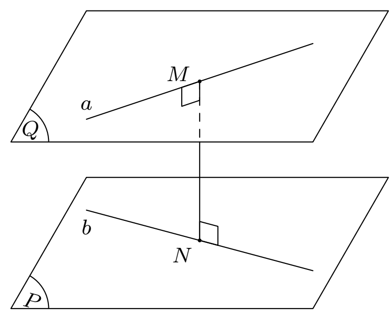
Đường thẳng Δ cắt hai đường thẳng chớ nhau a, b và vuông góc với cả hai đường thẳng đó được gọi là đường vuông góc chung của a và b.
Nếu đường vuông góc chung Δ cắt a, b tương ứng tại M, N thì độ dài đoạn MN được gọi là khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau a, b.



Nhận xét

- Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau bằng khoảng cách giữa một trong hai đường thẳng đó đến mặt phẳng song song với nó và chứa đường thẳng còn lại.
- Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau bằng khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song tương ứng chứa hai đường thẳng đó.



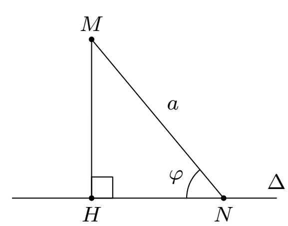


B. CÁC DẠNG BÀI TẬP

1 **Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng, đến một mặt phẳng**

1. Ví dụ minh hoạ

VÍ DỤ 1.
Cho đoạn thẳng MN có độ dài a và đường thẳng Δ đi qua N thoả mãn góc giữa hai đường thẳng MN và Δ là φ $(0^\circ < \varphi < 90^\circ)$. Tính khoảng cách từ M đến Δ theo a, φ.



VÍ DỤ 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, tâm O, $SA = a$ và vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi I, M theo thứ tự là trung điểm của SC, AB.

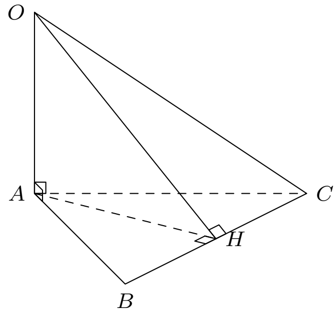
a) Chứng minh $OI \perp (ABCD)$.

b) Tính khoảng cách từ I đến CM, từ đó suy ra khoảng cách từ S tới CM.

VÍ DỤ 3.
Cho hình chóp $O.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a và $OA \perp (ABC)$. Cho biết $OA = a$.

a) Tính khoảng cách từ điểm O đến (ABC).

b) Tính khoảng cách từ điểm O đến đường thẳng BC.



VÍ DỤ 4. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = a\sqrt{3}$, $SA \perp (ABC)$, tam giác ABC vuông tại B và $AB = a$. Tính khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC).

VÍ DỤ 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với $(ABCD)$, tứ giác $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Gọi H là trung điểm của AB. Tính khoảng cách từ điểm H đến mặt phẳng (SCD).

VÍ DỤ 6. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $AB = 1, AC = \sqrt{3}$. Tam giác SBC đều và nằm trong mặt phẳng vuông với đáy. Tính khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SAC).

VÍ DỤ 7. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh bên là $2a$ và diện tích đáy là $4a^2$. Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC).

VÍ DỤ 8. Cho hình chóp $S.ABC$ có cạnh $SA = SB = SC = a$ và SA, SB, SC đôi một vuông góc với nhau. Tính theo a khoảng cách h từ điểm S đến mặt phẳng (ABC).

VÍ DỤ 9. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng 1. Tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy $(ABCD)$. Tính khoảng cách từ A đến (SCD).

2. Bài tập áp dụng

BÀI 1. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Chứng minh rằng khoảng cách từ điểm B, C, D, A', B', D' đến đường chéo AC' đều bằng nhau. Tính khoảng cách đó.

BÀI 2. Cho hình chóp đều $S.ABC$. Biết độ dài cạnh đáy, cạnh bên tương ứng bằng a, b $(a < b\sqrt{3})$. Tính chiều cao của hình chóp.

BÀI 3. Cho tứ diện $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh $a\sqrt{3}$. Cạnh $SA = 2a$ là vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính khoảng cách d từ điểm A đến mặt phẳng (SBC).

BÀI 4. Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ có $AB = BC = 2a$ và $\widehat{ABC} = 120°$. Cạnh $SA = 3a$ và vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính khoảng cách d cách từ A đến mặt phẳng (SBC).

BÀI 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật có $AB = a\sqrt{2}$. Cạnh bên $SA = 2a$ và vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$. Tính khoảng cách từ D đến mặt phẳng (SBC).

BÀI 6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a; SA vuông góc với đáy; SB hợp với đáy góc $45°$. Tính khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng (SBD).

BÀI 7. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là một tam giác đều cạnh a, cạnh SA vuông góc với (ABC) và $SA = h$, góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) bằng $60°$. Tính khoảng cách từ A đến (SBC) theo a và h.

BÀI 8. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các mặt đều là hình thoi cạnh a, các góc $\widehat{BAA'} = \widehat{BAD} = \widehat{DAA'} = 60°$. Tính khoảng cách từ A' đến $(ABCD)$.

2 Khoảng cách giữa ĐT và MP song song, giữa hai MP song song

1. Ví dụ minh hoạ

VÍ DỤ 1. Cho một hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$, đáy là các hình thoi có cạnh bằng a, $\widehat{BAD} = 120°$, $AA' = h$. Tính các khoảng cách giữa $A'C'$ và $(ABCD)$, AA' và $(BDD'B')$.

VÍ DỤ 2.

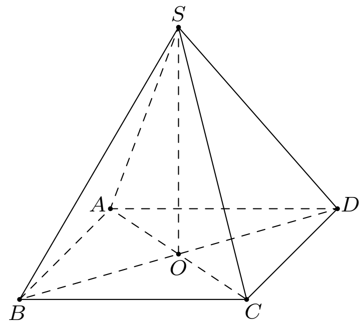
QUICK NOTE

QUICK NOTE

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, O là giao điểm của AC và BD, $SO \perp (ABCD)$, $SO = a$. Tính

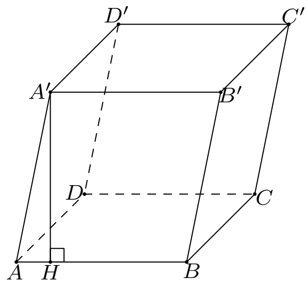
a) Khoảng cách từ điểm S đến mặt phẳng $(ABCD)$;

b) Khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (SAC).



VÍ DỤ 3.

Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $AA' = a$, góc giữa hai đường thẳng AB và DD' bằng $60°$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và $A'B'$.



VÍ DỤ 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA = a\sqrt{6}$ và vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, đáy $(ABCD)$ là nửa lục giác đều nội tiếp trong đường tròn đường kính $AD = 2a$.

a) Tính khoảng cách từ A, B đến mặt phẳng (SCD).

b) Tính khoảng cách từ đường thẳng AD đến mặt phẳng (SBC).

c) Tính diện tích thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ với mặt phẳng (α) song song với mặt phẳng (SAD) và cách (SAD) một khoảng bằng $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

VÍ DỤ 5. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có các cạnh đều bằng a và $\widehat{BAD} = \widehat{BAA'} = \widehat{DAA'} = 60°$. Tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng đáy $(ABCD)$ và $A'B'C'D'$.

VÍ DỤ 6. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng a, mặt bên (SBC) vuông góc với đáy. Gọi M, N, P theo thứ tự là trung điểm AB, SA, AC. Tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng (MNP) và (SBC).

2. Bài tập áp dụng

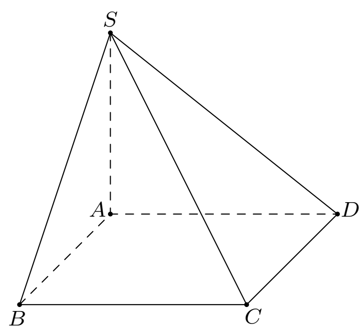
BÀI 1. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Tính theo a:

a) Khoảng cách giữa đường thẳng DD' và $(AA'C'C)$.

b) Khoảng cách giữa hai mặt phẳng $(AA'D'D)$ và $(BB'C'C)$.

BÀI 2.

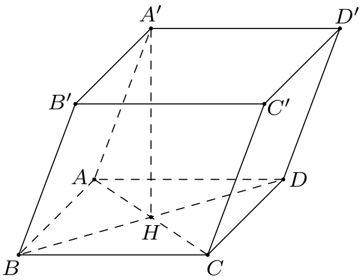
Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, $SA \perp (ABCD)$. Chứng minh $CD \parallel (SAB)$ và tính khoảng cách giữa CD và mặt phẳng (SAB).



BÀI 3.

QUICK NOTE

Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các cạnh bằng a và đáy là hình vuông. Hình chiếu của A' trên mặt phẳng $(ABCD)$ là giao điểm H của AC và BD. Tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng $(ABCD)$ và $(A'B'C'D')$.



BÀI 4. Hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a và cạnh bên bằng $a\sqrt{2}$.

a) Tính khoảng cách từ S tới $(ABCD)$.

b) Tính khoảng cách giữa đường thẳng AB và mặt (SCD).

BÀI 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, $SA \perp (ABCD)$ và $SA = 2a$.

a) Tính khoảng cách từ A tới (SBC) và khoảng cách từ C tới (SBD).

b) M, N lần lượt là trung điểm của AB và AD. Tính khoảng cách từ MN tới (SBD).

c) Mặt phẳng (P) qua BC cắt SA, SD theo thứ tự tại E, F. Cho biết AD cách (P) một khoảng là $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$, tính khoảng cách từ S tới (P) và diện tích tứ giác $BCFE$.

BÀI 6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA = 2a$ và vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B, $AB = BC = a, AD = 2a$.

a) Tính khoảng cách từ A, B tới mặt phẳng (SCD).

b) Tính khoảng cách giữa đường thẳng AD và mặt phẳng (SBC).

c) Tính diện tích của thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ với mặt phẳng song song với (SAD) và cách một khoảng bằng $\dfrac{a}{3}$.

3 Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau

VÍ DỤ 1. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, $AB = a$, $\widehat{ABC} = 60°$.
Xác định đường vuông góc chung và tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC.

VÍ DỤ 2. **Luyện tập 3.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, $SA \perp (ABCD)$, $SA = a\sqrt{2}$.

a) Tính khoảng cách từ A đến SC.

b) Chứng minh rằng $BD \perp (SAC)$.

c) Xác định đường vuông góc chung và tính khoảng cách giữa BD và SC.

VÍ DỤ 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ cạnh a, có cạnh $SA = h$ và vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Dựng và tính độ dài đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau:

a) SB và CD. b) SC và BD. c) SC và AB.

VÍ DỤ 4. Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC vuông góc với nhau đôi một và $OA = OB = OC = a$. Gọi I là trung điểm của BC. Hãy dựng và tính độ dài đoạn vuông góc chung của các cặp đường thẳng chéo nhau:

a) OA và BC. b) AI và OC.

VÍ DỤ 5. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A với $AB = a$, $AC = 2a$; cạnh bên $AA' = 2a$. Hãy dựng và tính độ dài đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng BC' và AA'.

VÍ DỤ 6. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a. $SA = 2a$ và vuông góc với mặt đáy. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và AC.

VÍ DỤ 7. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh bằng a, SA vuông góc với đáy và $SA = a$. M là trung điểm của SB. Tính khoảng cách giữa các đường thẳng:

QUICK NOTE

a) SC và BD. b) AC và SD. c) SD và AM.

1. Bài tập áp dụng

VÍ DỤ 8. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ cạnh a, cạnh $SA = a$ và vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng:

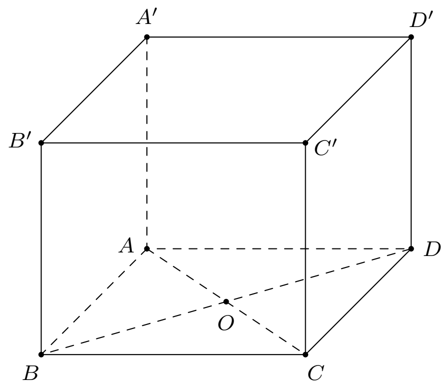
a) SB và CD.

b) AB và SC.

VÍ DỤ 9.
Cho lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$, O là giao điểm của AC và BD, $AA' = a$, AA' vuông góc với mặt phẳng chứa đáy. Tính

a) $\mathrm{d}(AC, A'B')$;

b) $\mathrm{d}(CC', BD)$.



VÍ DỤ 10. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh bằng a; SA vuông góc với đáy và $SA = a$; M, N lần lượt là trung điểm của AB và SC. Chứng minh rằng MN là đoạn vuông góc chung của AB và SC. Tính khoảng cách giữa AB và SC.

VÍ DỤ 11. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Xác định đường vuông góc chung của hai đường thẳng BD và $B'C$.

VÍ DỤ 12. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O cạnh a, SO vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$ và $SO = a$. Tính Khoảng cách giữa hai đường thẳng SC và AB.

VÍ DỤ 13. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy, mặt bên SBC tạo với đáy một góc 60°. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng:

a) SA và BC. b) SB và AC.

VÍ DỤ 14. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng BC' và CD'.

C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

CÂU 1. Cho hình chóp $S.ACBD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B. Cạnh bên SA vuông góc với đáy, $SA = AB = BC = 1$, $AD = 2$. Tính khoảng cách d từ điểm A đến mặt phẳng (SBD).

(A) $d = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$. (B) $d = 1$. (C) $d = \dfrac{2a}{3}$. (D) $d = \dfrac{2}{3}$.

CÂU 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D với $AB = 2a$, $AD = DC = a$. Hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với đáy. Góc giữa SC và mặt đáy bằng 60°. Tính khoảng cách d giữa hai đường thẳng AC và SB.

(A) $d = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$. (B) $d = a\sqrt{2}$. (C) $d = \dfrac{2a\sqrt{15}}{5}$. (D) $d = 2a$.

CÂU 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, tam giác SAD đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính khoảng cách d giữa hai đường thẳng SA và BD.

(A) $d = \dfrac{a\sqrt{21}}{7}$. (B) $d = a$. (C) $d = \dfrac{a\sqrt{21}}{14}$. (D) $d = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

CÂU 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B với $AB = BC = a, AD = 2a$. Cạnh bên $SA = a$ và vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Tính khoảng cách d từ điểm A đến mặt phẳng (SCD).

(A) $d = \dfrac{2a}{\sqrt{5}}$. (B) $d = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. (C) $d = a\sqrt{2}$. (D) $d = 2a$.

CÂU 5. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a và cạnh bên bằng $\dfrac{a\sqrt{21}}{6}$. Tính khoảng cách d từ đỉnh A đến mặt phẳng (SBC).

Ⓐ $d=\dfrac{a}{4}$. Ⓑ $d=\dfrac{3}{4}$. Ⓒ $d=\dfrac{3a}{4}$. Ⓓ $d=\dfrac{a\sqrt{3}}{6}$.

CÂU 6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O, cạnh a. Cạnh bên $SA=\dfrac{a\sqrt{15}}{2}$ và vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$. Tính khoảng cách d từ O đến mặt phẳng (SBC).

Ⓐ $d=\dfrac{\sqrt{285}}{38}$. Ⓑ $d=\dfrac{a\sqrt{285}}{38}$. Ⓒ $d=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. Ⓓ $d=\dfrac{a\sqrt{285}}{19}$.

CÂU 7. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $AB=3a$, $BC=4a$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy. Góc tạo bởi giữa SC và đáy bằng 60°. Gọi M là trung điểm của AC, tính khoảng cách d giữa hai đường thẳng AB và SM.

Ⓐ $d=\dfrac{5a}{2}$. Ⓑ $d=\dfrac{10a\sqrt{3}}{\sqrt{79}}$. Ⓒ $d=a\sqrt{3}$. Ⓓ $d=5a\sqrt{3}$.

CÂU 8. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng 1, cạnh bên hợp với mặt đáy một góc 60°. Tính khoảng cách d từ O đến mặt phẳng (SBC).

Ⓐ $d=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Ⓑ $d=\dfrac{1}{2}$. Ⓒ $d=\dfrac{\sqrt{7}}{2}$. Ⓓ $d=\dfrac{\sqrt{42}}{14}$.

CÂU 9. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O, cạnh a. Cạnh bên SA vuông góc với đáy, góc $\widehat{SBD}=60^\circ$. Tính khoảng cách d giữa hai đường thẳng AB và SO.

Ⓐ $d=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. Ⓑ $d=\dfrac{a\sqrt{6}}{4}$. Ⓒ $d=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. Ⓓ $d=\dfrac{a\sqrt{5}}{5}$.

CÂU 10. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh có độ dài bằng $2a$. Hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trung điểm H của BC. Tính khoảng cách d giữa hai đường thẳng BB' và $A'H$.

Ⓐ $d=a$. Ⓑ $d=2a$. Ⓒ $d=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Ⓓ $d=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

CÂU 11. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật có $AB=a\sqrt{2}$. Cạnh bên $SA=2a$ và vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$. Tính khoảng cách d từ D đến mặt phẳng (SBC).

Ⓐ $d=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. Ⓑ $d=\dfrac{a\sqrt{10}}{2}$. Ⓒ $d=\dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$. Ⓓ $d=a\sqrt{2}$.

CÂU 12. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, các cạnh bên của hình chóp bằng nhau và bằng $2a$. Tính khoảng cách d từ A đến mặt phẳng (SCD).

Ⓐ $d=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. Ⓑ $d=\dfrac{a}{2}$. Ⓒ $d=\dfrac{2a\sqrt{7}}{\sqrt{30}}$. Ⓓ $d=\dfrac{a\sqrt{7}}{\sqrt{30}}$.

CÂU 13. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng 1. Tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy $(ABCD)$. Tính khoảng cách d từ A đến (SCD).

Ⓐ $d=1$. Ⓑ $d=\dfrac{\sqrt{21}}{7}$. Ⓒ $d=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$. Ⓓ $d=\sqrt{2}$.

CÂU 14. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a. Tam giác ABC đều, hình chiếu vuông góc H của đỉnh S trên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với trọng tâm của tam giác ABC. Đường thẳng SD hợp với mặt phẳng $(ABCD)$ góc 30°. Tính khoảng cách d từ B đến mặt phẳng (SCD) theo a.

Ⓐ $d=a$. Ⓑ $d=\dfrac{2a\sqrt{21}}{21}$. Ⓒ $d=a\sqrt{3}$. Ⓓ $d=\dfrac{a\sqrt{21}}{7}$.

CÂU 15. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB=a, AD=2a$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy, góc giữa SD với đáy bằng 60°. Tính khoảng cách d từ điểm C đến mặt phẳng (SBD) theo a.

Ⓐ $d=\dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$. Ⓑ $d=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Ⓒ $d=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Ⓓ $d=\dfrac{a\sqrt{5}}{2}$.

CÂU 16. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, tâm O. Cạnh bên $SA=2a$ và vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$. Gọi H và K lần lượt là trung điểm của cạnh BC và CD. Tính khoảng cách d giữa hai đường thẳng HK và SD.

Ⓐ $d=2a$. Ⓑ $d=\dfrac{a}{2}$. Ⓒ $d=\dfrac{2a}{3}$. Ⓓ $d=\dfrac{a}{3}$.

QUICK NOTE

QUICK NOTE

CÂU 17. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B, $AD = 2BC$,
$AB = BC = a\sqrt{3}$. Đường thẳng SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi E là trung điểm của cạnh SC. Tính khoảng cách d từ điểm E đến mặt phẳng (SAD).

A $d = \sqrt{3}$. **B** $d = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **C** $d = a\sqrt{3}$. **D** $d = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

CÂU 18. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Cạnh bên $SA = a\sqrt{3}$ và vuông góc với mặt đáy (ABC). Tính khoảng cách d từ A đến mặt phẳng (SBC).

A $d = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **B** $d = a$. **C** $d = \dfrac{a\sqrt{15}}{5}$. **D** $d = \dfrac{a\sqrt{5}}{5}$.

CÂU 19. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng 1. Tính khoảng cách d từ điểm A đến mặt phẳng (BDA').

A $d = \dfrac{\sqrt{6}}{4}$. **B** $d = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **C** $d = \sqrt{3}$. **D** $d = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

CÂU 20. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O, cạnh bằng $4a$. Cạnh bên $SA = 2a$. Hình chiếu vuông góc của đỉnh S trên mặt phẳng $(ABCD)$ là trung điểm của H của đoạn thẳng AO. Tính khoảng cách d giữa các đường thẳng SD và AB.

A $d = \dfrac{4a\sqrt{22}}{11}$. **B** $d = 2a$. **C** $d = 4a$. **D** $d = \dfrac{3a\sqrt{2}}{\sqrt{11}}$.

CÂU 21. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AD = 2AB = 2a$. Cạnh bên $SA = 2a$ và vuông góc với đáy. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SB và SD. Tính khoảng cách d từ S đến mặt phẳng (AMN).

A $d = a\sqrt{5}$. **B** $d = 2a$. **C** $d = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. **D** $d = \dfrac{3a}{2}$.

CÂU 22. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AC = 2a, BC = a$. Đỉnh S cách đều các điểm A, B, C. Tính khoảng cách d từ trung điểm M của SC đến mặt phẳng (SBD).

A $d = a$. **B** $d = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$. **C** $d = a\sqrt{5}$. **D** $d = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$.

CÂU 23. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a. Cạnh bên SA vuông góc với đáy, SB hợp với mặt đáy một góc $60°$. Tính khoảng cách d từ điểm D đến mặt phẳng (SBC).

A $d = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **B** $d = a$. **C** $d = a\sqrt{3}$. **D** $d = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

CÂU 24. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O, cạnh bằng 2. Đường thẳng SO vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$ và $SO = \sqrt{3}$. Tính khoảng cách d giữa hai đường thẳng SA và BD.

A $d = \sqrt{2}$. **B** $d = 2$. **C** $d = \dfrac{\sqrt{30}}{5}$. **D** $d = 2\sqrt{2}$.

CÂU 25. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $AB = a, AC = a\sqrt{3}$. Tam giác SBC đều và nằm trong mặt phẳng vuông với đáy. Tính khoảng cách d từ B đến mặt phẳng (SAC).

A $d = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **B** $d = \dfrac{a\sqrt{39}}{13}$. **C** $d = a$. **D** $d = \dfrac{2a\sqrt{39}}{13}$.

CÂU 26. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $a\sqrt{2}$, $AA' = 2a$. Tính khoảng cách d giữa hai đường thẳng BD và CD'.

A $d = a\sqrt{2}$. **B** $d = \dfrac{a\sqrt{5}}{5}$. **C** $d = \dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$. **D** $d = 2a$.

CÂU 27. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng 10. Cạnh bện SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SC = 10\sqrt{5}$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA và CD. Tính khoảng cách d giữa BD và MN.

A $d = \sqrt{5}$. **B** $d = 10$. **C** $d = 3\sqrt{5}$. **D** $d = 5$.

CÂU 28. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, SA vuông góc với mặt phẳng (ABC); góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (ABC) bằng $60°$. Gọi M là trung điểm của cạnh AB. Tính khoảng cách d từ B đến mặt phẳng (SMC).

A $d = a\sqrt{3}$. **B** $d = \dfrac{a}{2}$. **C** $d = a$. **D** $d = \dfrac{a\sqrt{39}}{13}$.

QUICK NOTE

CÂU 29. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông với $AC = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy, SB hợp với đáy góc $60°$. Tính khoảng cách d giữa hai đường thẳng AD và SC.

Ⓐ $d = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$. Ⓑ $d = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Ⓒ $d = \dfrac{a}{2}$. Ⓓ $d = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

CÂU 30. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O cạnh a. Cạnh bên $SA = a\sqrt{2}$ và vuông góc với đáy $(ABCD)$. Tính khoảng cách d từ điểm B đến mặt phẳng (SCD).

Ⓐ $d = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. Ⓑ $d = a\sqrt{3}$. Ⓒ $d = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Ⓓ $d = a$.

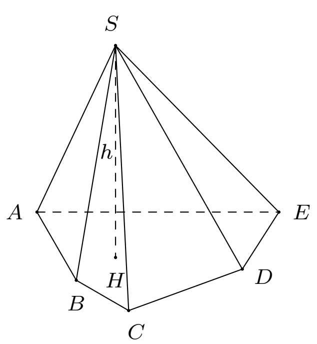
Bài 26. THỂ TÍCH

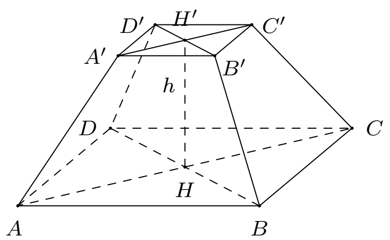
A. TRỌNG TÂM KIẾN THỨC

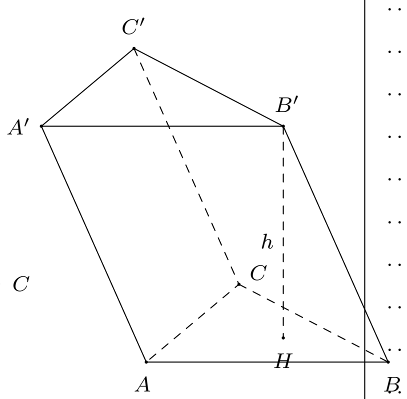
Công thức tính thể tích

Phần không gian được giới hạn bởi hình chóp, hình chóp cụt đều, hình lăng trụ, hình hộp tương ứng được gọi là khối chóp, khối chóp cụt đều, khối lăng trụ, khối hộp. Đỉnh, mặt, cạnh, đường cao của các khối đó lần lượt là đỉnh, cạnh, đường cao của hình chóp, hình chóp cụt đều, hình lăng trụ, hình hộp tương ứng

- Thể tích của khối chóp có diện tích đáy S và chiều cao h là
$$V = \frac{1}{3} \cdot h \cdot .$$
- Thể tích của khối chóp cụt đều có diện tích đáy lớn S, diện tích đáy bé S' và chiều cao h là
$$V\frac{1}{3} \cdot h \cdot (S + S' + \sqrt{S \cdot S'}).$$
- Thể tích của khối lăng trụ có diện tích đáy S và chiều cao h là
$$V = h \cdot S.$$







Nhận xét.
- Thể tích khối tứ diện bằng một phần ba tích của chiều cao từ một đỉnh và diện tích mặt đối diện với đỉnh đó.
- Thể tích của khối hộp bằng tích của một mặt và chiều cao của khối hộp ứng với mặt đó.

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP

1 **Thể tích khối chóp đều, chóp cụt đều**

1. Ví dụ minh hoạ

VÍ DỤ 1. Cho khối chóp đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$ biết cạnh bên bằng $2a$.

QUICK NOTE

VÍ DỤ 2. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$, cạnh đáy $AB = 2a\sqrt{3}$, mặt bên tạo với đáy góc $60°$. Tính thể tích thể tích của khối chóp $S.ABCD$.

VÍ DỤ 3. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh bên bằng a, góc giữa cạnh bên hợp với mặt đáy bằng $60°$. Tính theo a thể tích khối chóp $S.ABCD$.

VÍ DỤ 4. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đáy là hình vuông tâm O cạnh bằng $2a$. Gọi I là trung điểm của SO. Biết khoảng cách từ I đến mặt phẳng (SBC) bằng $\dfrac{a\sqrt{5}}{5}$. Tính thể tích của khối chóp $S.ABCD$.

VÍ DỤ 5. Cho khối chóp cụt tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có chiều cao bằng $3a$, $AB = 4a$, $A'B' = a$. Tính thể tích của khối chóp cụt đều $ABC.A'B'C'$.

2. Bài tập áp dụng

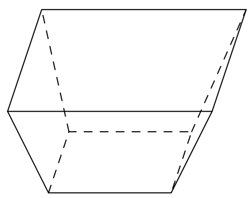
BÀI 1. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có $AB = a$, cạnh bên $SA = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. Tính thể tích của khối chóp $S.ABC$.

BÀI 2. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a và mặt bên tạo với đáy một góc $45°$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

BÀI 3. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a, cạnh bên tạo với đáy một góc $45°$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

BÀI 4. Cho hình chóp đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a, khoảng cách giữa cạnh bên SA và cạnh đáy BC bằng $\dfrac{3a}{4}$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

BÀI 5.
Một sọt đựng đồ có dạng hình chóp cụt đều. Đáy và miệng sọt là các hình vuông tương ứng có cạnh bằng 60 cm, 30 cm, cạnh bên của sọt dài 50 cm. Tính thể tích của sọt.

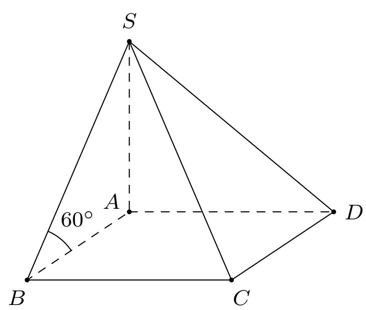


2 **Thể tích khối chóp có cạnh bên vuông góc với mặt đáy**

1. Ví dụ minh hoạ

VÍ DỤ 1. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Cạnh SA vuông góc với mặt đáy (ABC) và $SA = a\sqrt{3}$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

VÍ DỤ 2.
Tính thể tích của khối chóp $S.ABCD$. Biết đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, $SA \perp (ABCD)$, góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng $60°$.



VÍ DỤ 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với đáy, cạnh bên SC tạo với đáy một góc $60°$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

VÍ DỤ 4. Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng đáy, tam giác SBC đều cạnh a, góc giữa mặt phẳng (SBC) và mặt phẳng đáy là $30°$. Tính thể tích của khối chóp $S.ABC$.

VÍ DỤ 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a và cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy. Gọi E là trung điểm của cạnh CD. Biết khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBE) bằng $\dfrac{2a}{3}$, tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ theo a.

2. Bài tập áp dụng

BÀI 1. Cho khối tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau và $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$. Tính thể tích của khối tứ diện.

BÀI 2. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, $SA = 2a$ vuông góc với mặt đáy. Tính thể tích của khối chóp $S.ABCD$.

BÀI 3. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là hình tam giác vuông cân tại B và SA vuông với (ABC). Biết $AC = 3a\sqrt{2}$ và góc giữa cạnh bên SB và (ABC) bằng $45°$. Tính thể tích của khối chóp $S.ABC$.

BÀI 4. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, SA vuông góc với đáy ABC; góc giữa 2 mặt phẳng (SBC) và (ABC) bằng $30°$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$

BÀI 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B, $AB = BC = a$, $SA = a$ và vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Khoảng cách từ D đến mặt phẳng (SAC) bằng $a\sqrt{2}$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

3 Thể tích khối chóp có mặt bên vuông góc với mặt đáy

1. Ví dụ minh hoạ

VÍ DỤ 1. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Mặt bên SAB là tam giác đều nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy $(ABCD)$. Tính thể tích của khối chóp $S.ABC$.

VÍ DỤ 2. Cho khối chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình vuông cạnh $3a$. Tam giác SAB cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ biết góc giữa SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng $60°$.

VÍ DỤ 3. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a; mặt bên SAB nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy và tam giác SAB vuông cân tại S. Tính thể tích của khối chóp $S.ABC$.

VÍ DỤ 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a, mặt bên SAB là tam giác đều nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy, $SD = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

2. Bài tập áp dụng

BÀI 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Mặt bên SAB là tam giác đều nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy $(ABCD)$. Tính thể tích của khối chóp $S.ABCD$.

BÀI 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật với $AB = 2a$, $AD = a$. Hình chiếu của S lên $(ABCD)$ là trung điểm H của AB; SC tạo với đáy một góc $45°$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

BÀI 3. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại C; mặt bên SAB là tam giác đều cạnh a và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy (ABC). Tính thể tích của khối chóp $S.ABC$.

BÀI 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh $a\sqrt{2}$, mặt bên SAB là tam giác vuông cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy, $SC = a\sqrt{2}$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

4 Thể tích khối lăng trụ đứng

1. Ví dụ minh hoạ

VÍ DỤ 1. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $AA' = a$, đáy ABC là tam giác vuông cân tại A và $AB = a$. Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

VÍ DỤ 2. Cho hình lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình vuông cạnh $2a$. Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho theo a, biết $A'B = 3a$.

QUICK NOTE

QUICK NOTE

VÍ DỤ 3. Tính theo a thể tích V của khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$. Biết rằng mặt phẳng $(A'BC)$ hợp với đáy $(ABCD)$ một góc 60°, $A'C$ hợp với đáy $(ABCD)$ một góc 30° và $AA' = a\sqrt{3}$.

2. Bài tập áp dụng

BÀI 1. Khối lăng trụ tam giác đều có tất cả các cạnh bằng a. Tính thể tích khối lăng trụ đó.

BÀI 2. Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a, chiều cao h. Tính thể tích khối lăng trụ.

BÀI 3. Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác ABC vuông tại A, $AC = a$, $\widehat{ACB} = 60^\circ$. Đường thẳng BC' tạo với mặt phẳng $(AA'C'C)$ góc 30°. Tính thể tích khối lăng trụ đã cho.

5 Khối lăng trụ xiên

1. Ví dụ minh hoạ

VÍ DỤ 1. Cho khối hộp $ABCD \cdot A'B'C'D'$ có $AB = 8$ cm, $AD = 5$ cm, $AA' = 6$ cm, $\widehat{BAD} = 30^\circ$, góc giữa AA' và $(ABCD)$ bằng 45°. Tính thể tích của khối hộp.

VÍ DỤ 2. Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng a. Hình chiếu vuông góc của A' trên mặt phẳng (ABC) trùng với trung điểm H của cạnh AB. Góc giữa cạnh bên của lăng trụ và mặt đáy bằng 30°. Tính thể tích của lăng trụ đã cho theo a.

VÍ DỤ 3. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của điểm A' lên (ABC) trùng với trọng tâm tam giác ABC. Biết khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và BC bằng $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$. Tính thể tích V của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

VÍ DỤ 4. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O, cạnh bằng a, $BD = a\sqrt{3}$. Góc giữa CC' và mặt đáy là 60°, trung điểm H của AO là hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng $ABCD$. Tính thể tích V của khối hộp.

2. Bài tập áp dụng

BÀI 1. Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là các tam giác đều cạnh a, mặt $(ACC'A')$ vuông góc với hai mặt đáy, tam giác $A'AC$ cân tại A và $AA' = b$ $(a < 2b)$. Tính thể tích của khối lăng trụ

BÀI 2. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh 3 cm , cạnh bên $2\sqrt{3}$ cm tạo với mặt phẳng đáy một góc 30°. Tính thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

BÀI 3. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình chữ nhật với $AB = \sqrt{3}$ cm , $AD = \sqrt{7}$ cm. Hai mặt bên $(ABB'A')$ và $(ADD'A')$ lần lượt tạo với đáy những góc 45° và 60°. Tính thể tích khối hộp nếu biết cạnh bên bằng 1 cm.

BÀI 4. Cho lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có $ABCD$ là hình chữ nhật $AB = a$, $AD = a\sqrt{3}$, $A'A = A'B = A'D = 2a$. Tính thể tích khối lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$.

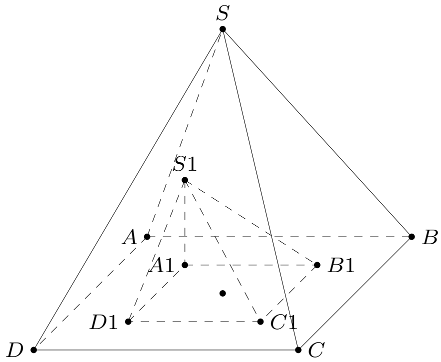
6 Quan hệ tỷ số thể tích của hai khối chóp chung mặt đáy

Ở đây ta xét trường hợp đáy là tứ giác, các trường hợp còn lại suy ra tương tự.

QUICK NOTE

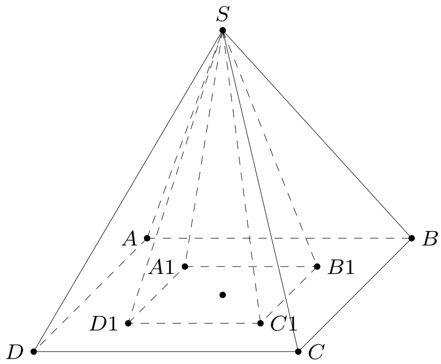
Cho hai hình chóp $S.ABCD$ và $S_1.A_1B_1C_1D_1$ có $(ABCD) \equiv (A_1B_1C_1D_1) \equiv (P)$. Khi đó ta có

$$\frac{V_{S.ABCD}}{V_{S_1.A_1B_1C_1D_1}} = \frac{\mathrm{d}(S;(P))}{\mathrm{d}(S_1;(P))} \cdot \frac{S_{ABCD}}{S_{A_1B_1C_1D_1}}.$$



Đặc biệt, nếu $S \equiv S_1$ thì ta có

$$\frac{V_{S.ABCD}}{V_{S.A_1B_1C_1D_1}} = \frac{S_{ABCD}}{S_{A_1B_1C_1D_1}}.$$

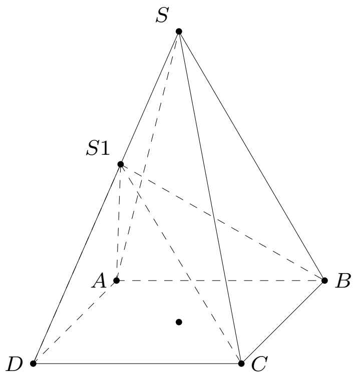


Đặc biệt, xét hai hình chóp $S.ABCD$ và $S_1.ABCD$ ta có

$$\frac{V_{S.ABCD}}{V_{S_1.ABCD}} = \frac{\mathrm{d}(S;(P))}{\mathrm{d}(S_1;(P))}.$$

Nếu S_1 nằm trên một cạnh nào đó, giả sử là SD thì

$$\frac{\mathrm{d}(S;(P))}{\mathrm{d}(S_1;(P))} = \frac{SD}{S_1D}.$$



1. Ví dụ minh hoạ

VÍ DỤ 1. Cho hình chóp $O.ABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau. Biết $OA = a, OB = 2a, OC = 3a$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của AB, BC, CA. Tính thể tích của khối $O.MNP$.

VÍ DỤ 2. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng a. Gọi G là trọng tâm tam giác SBC. Tính thể tích khối chóp $G.ABCD$.

VÍ DỤ 3. Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a, SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Biết góc giữa SB và mặt đáy bằng $60°$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BA và BC. Tính thể tích khối chóp $S.BMN$.

2. Bài tập áp dụng

BÀI 1. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, $SA = a$ và vuông góc với (ABC). Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của SB, BC, CS. Tính thể tích khối chóp $A.MNP$

BÀI 2. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a. Các cạnh bên hợp với đáy một góc $45°$. Gọi M thuộc cạnh SB sao cho $SM = \dfrac{1}{4}SB$. Tính thể tích của khối chóp $M.ABCD$.

BÀI 3. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại A, SA vuông góc với đáy. Biết $SA = AB = a$. Gọi M, N lần lượt thuộc các cạnh BA, BC sao cho $\dfrac{BM}{BA} = \dfrac{BN}{BC} = \dfrac{1}{3}$. Tính thể tích của khối chóp $S.BMN$.

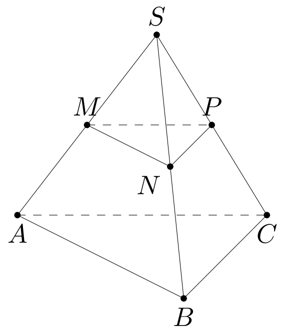
QUICK NOTE

7 Công thức tỷ số thể tích trong khối tứ diện

Cho hình chóp $S.ABC$. Trên các đoạn thẳng SA, SB, SC lần lượt lấy các điểm M, N, P khác S. Khi đó:

$$\frac{V_{S.MNP}}{V_{S.ABC}} = \frac{SM}{SA} \cdot \frac{SN}{SB} \cdot \frac{SP}{SC}.$$

Ta không áp dụng công thức trên cho hình chóp tứ giác.



1. Ví dụ minh hoạ

VÍ DỤ 1. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Cạnh bên $SA = a$ và vuông góc với đáy. Gọi M, N, P lần lượt thuộc các cạnh SA, SB, SC sao cho $\frac{SM}{SA} = \frac{1}{3}, \frac{SN}{SB} = \frac{3}{4}, \frac{SP}{SC} = \frac{1}{2}$. Tính thể tích V của khối chóp $S.MNP$.

VÍ DỤ 2. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại C. Tam giác SAB đều nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Biết $CA = CB = a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SB, SC. Tính thể tích khối chóp $S.AMN$.

VÍ DỤ 3. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại $C, CA = 2a, CB = a, SA = a$ và vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của A lên SB, SC. Tính các tỷ số $\frac{SH}{SB}, \frac{SK}{SC}$ và tính thể tích của khối chóp $S.AHK$.

VÍ DỤ 4. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$. Gọi M, N, P, Q lần lượt thuộc các cạnh SA, SB, SC, SD sao cho $\frac{SM}{SA} = \frac{SN}{SB} = \frac{SP}{SC} = \frac{SQ}{SD} = \frac{1}{4}$. Tính $\frac{V_{S.MNPQ}}{V_{S.ABCD}}$.

VÍ DỤ 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi M là một điểm thuộc SA sao cho $SM = 2MA$. Mặt phẳng (DCM) chia khối chóp thành hai phần. Tính tỷ số thể tích của hai khối đó.

2. Bài tập áp dụng

BÀI 1. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại $B, AB = a, SA = a$ và vuông góc với đáy. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA, SB, P là điểm thuộc cạnh SC sao cho $SP = 2PC$. Tính thể tích khối chóp $S.MNP$.

BÀI 2. Cho tứ diện vuông $O.ABC$ có $OA = a, OB = 2a, OC = 3a$. Gọi M là trung điểm của AB, điểm N thuộc cạnh AC thỏa mãn $AN = \frac{2}{3}AC$. Tính thể tích của khối $O.MNBC$.

BÀI 3. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại $C, CA = 2a, CB = a, SA = 2a$ và vuông góc với mặt đáy. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của A lên SB, SC. Tính thể tích của khối chóp $S.AHK$.

BÀI 4. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$. Gọi M, N, P, Q lần lượt thuộc các cạnh SA, SB, SC, SD sao cho $\frac{SM}{SA} = \frac{SN}{SB} = \frac{SP}{SC} = \frac{SQ}{SD} = \frac{1}{3}$. Tính $\frac{V_{S.MNPQ}}{V_{S.ABCD}}$.

BÀI 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi M là trung điểm của SA. Mặt phẳng (DCM) chia khối chóp thành hai phần. Tính tỷ số thể tích của hai khối đó.

C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

CÂU 1. Cho khối chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a, $SA = a\sqrt{3}$. Tính thể tích của khối chóp $S.ABC$

(A) $V = \frac{\sqrt{3}a^3}{6}$. (B) $V = \frac{\sqrt{2}a^3}{2}$. (C) $V = \frac{\sqrt{35}a^3}{24}$. (D) $V = \frac{\sqrt{2}a^3}{6}$.

CÂU 2. Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, $SA = SB = SC = SD = a\sqrt{2}$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

(A) $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. (B) $\frac{a^3\sqrt{6}}{9}$. (C) $\frac{a^3\sqrt{6}}{6}$. (D) $\frac{a^3\sqrt{6}}{12}$.

QUICK NOTE

CÂU 3. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a. Gọi điểm O là giao điểm của AC và BD. Biết khoảng cách từ O đến SD bằng $\dfrac{a}{\sqrt{6}}$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

Ⓐ $\dfrac{a^3}{4}$. Ⓑ $\dfrac{a^3}{8}$. Ⓒ $\dfrac{a^3}{12}$. Ⓓ $\dfrac{a^3}{6}$.

CÂU 4. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng x. Diện tích xung quanh gấp đôi diện tích đáy. Tính thể tích hình chóp $S.ABCD$.

Ⓐ $\dfrac{x^3\sqrt{3}}{6}$. Ⓑ $\dfrac{x^3\sqrt{3}}{2}$. Ⓒ $\dfrac{x^3\sqrt{3}}{12}$. Ⓓ $\dfrac{x^3\sqrt{3}}{3}$..

CÂU 5. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đáy hợp với mặt bên một góc 45°. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ bằng $\sqrt{2}$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

Ⓐ $\dfrac{32\sqrt{2}}{9}$. Ⓑ $\dfrac{128\sqrt{2}}{81}$. Ⓒ $\dfrac{64\sqrt{2}}{27}$. Ⓓ $\dfrac{64\sqrt{2}}{81}$.

CÂU 6. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy (ABC) là tam giác vuông tại A với $AB = a$, $AC = 2a$ cạnh SA vuông góc với (ABC) và $SA = a\sqrt{3}$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

Ⓐ $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$. Ⓑ $a^3\sqrt{3}$. Ⓒ $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$. Ⓓ $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

CÂU 7. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại A, $AB = a$, $BC = a\sqrt{3}$. Cạnh bên SB vuông góc với mặt phẳng đáy và cạnh bên SA tạo với đáy một góc 30°. Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng

Ⓐ $\dfrac{a^3}{3}$. Ⓑ $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{18}$. Ⓒ $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{6}$. Ⓓ $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{12}$.

CÂU 8. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy, góc giữa mặt phẳng (SBD) và mặt phẳng đáy bằng 60°. Tính thể tích của khối chóp $S.ABCD$.

Ⓐ $V = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{6}$. Ⓑ $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$. Ⓒ $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$. Ⓓ $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{7}$.

CÂU 9. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh bằng a, SA vuông góc với (ABC). Diện tích tam giác SBC bằng $\dfrac{\sqrt{3}a^2}{2}$. Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng

Ⓐ $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{8}$. Ⓑ $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$. Ⓒ $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$. Ⓓ $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{9}$.

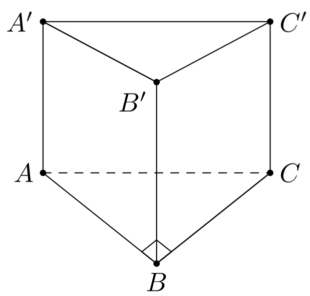
CÂU 10. Cho khối chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại A và $AB = AC = a\sqrt{2}$. Tam giác SBC có diện tích bằng $2a^2$ và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt đáy. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

Ⓐ $V = \dfrac{4a^3}{3}$. Ⓑ $V = \dfrac{a^3}{3}$. Ⓒ $V = 2a^3$. Ⓓ $V = \dfrac{2a^3}{3}$.

CÂU 11.

Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, $AB = BB' = a$ (*tham khảo hình vẽ bên*). Tính thể tích V của khối lăng trụ.

Ⓐ $V = \dfrac{a^3}{3}$. Ⓑ $V = a^3$. Ⓒ $V = \dfrac{a^3}{2}$. Ⓓ $V = \dfrac{a^3}{6}$.



CÂU 12. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật tâm I, $AB = a$, $BC = a\sqrt{3}$. Tam giác SIA cân tại S, (SAD) vuông góc với đáy. Biết góc giữa SD và $(ABCD)$ bằng 60°. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là

Ⓐ $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$. Ⓑ $\dfrac{5a^3\sqrt{3}}{4}$. Ⓒ $\dfrac{2a^3\sqrt{3}}{3}$. Ⓓ $\dfrac{4a^3\sqrt{3}}{3}$.

CÂU 13. Tính thể tích hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ biết $AB = 3a$, $AC = 5a$, $AA' = 2a$.

Ⓐ $12a^3$. Ⓑ $30a^3$. Ⓒ $8a^3$. Ⓓ $24a^3$.

CÂU 14. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác với $AB = a$, $AC = 2a$, $\widehat{BAC} = 120^\circ$, $AA' = 2a\sqrt{5}$. Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

Ⓐ $V = 4a^3\sqrt{5}$. Ⓑ $V = a^3\sqrt{15}$. Ⓒ $V = \dfrac{a^3\sqrt{15}}{3}$. Ⓓ $V = \dfrac{4a^3\sqrt{5}}{3}$.

QUICK NOTE

CÂU 15. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy tam giác ABC vuông tại B, $AB = 2a, BC = a, AA' = 2a\sqrt{3}$. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là

A $4a^3\sqrt{3}$. B $2a^3\sqrt{3}$. C $\dfrac{2a^3\sqrt{3}}{3}$. D $\dfrac{4a^3\sqrt{3}}{3}$.

CÂU 16. Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng $a\sqrt{2}$ và mỗi mặt bên đều có diện tích bằng $4a^2$. Thể tích khối lăng trụ là

A $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{2}$. B $a^3\sqrt{6}$. C $2a^3\sqrt{6}$. D $\dfrac{2a^3\sqrt{6}}{3}$.

CÂU 17. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của A' xuống (ABC) là trung điểm của AB. Mặt bên $(ACC'A')$ tạo với đáy góc $45°$. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A $\dfrac{3a^3}{16}$. B $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$. C $\dfrac{2a^3\sqrt{3}}{3}$. D $\dfrac{a^3}{16}$.

CÂU 18. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh $2a$. Hình chiếu vuông góc của A' lên (ABC) trùng với trọng tâm G của tam giác ABC. Biết khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và BC bằng $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Tính thể tích V của khối lăng trụ.

A $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$. B $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$. C $\dfrac{2a^3\sqrt{3}}{3}$. D $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{24}$.

CÂU 19. Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại $B, AB = a, BC = a\sqrt{3}$, hình chiếu của A' xuống mặt đáy (ABC) là trung điểm H của đoạn AC. Biết thể tích khối lăng trụ đã cho là $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$. Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng $(A'BC)$.

A $\dfrac{a\sqrt{13}}{13}$. B $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. C $\dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$. D $\dfrac{2a\sqrt{3}}{13}$.

CÂU 20. Cho khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh $a, \widehat{BAD} = 60°$. Biết $AA' = A'B = A'D$, góc giữa cạnh bên BB' và mặt đáy $(ABCD)$ bằng $60°$. Tính thể tích V của tứ diện $ACB'D'$ theo a.

A $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$. B $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$. C $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$. D $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$.

CÂU 21. Cho lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = \sqrt{6}$, $AD = \sqrt{3}$, $A'C = 3$ và mặt phẳng $(AA'C'C)$ vuông góc với mặt đáy. Biết hai mặt phẳng $(AA'C'C)$, $(AA'B'B)$ tạo với nhau một góc α thỏa mãn $\tan\alpha = \dfrac{3}{4}$. Tính thể tích V của khối lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$.

A $V = 8$. B $V = 12$. C $V = 10$. D $V = 6$.

CÂU 22. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, tam giác ABC vuông cân tại B, $AC = 2a$ và $SA = a$. Gọi M là trung điểm cạnh SB. Tính thể tích khối chóp $S.AMC$.

A $\dfrac{a^3}{6}$. B $\dfrac{a^3}{3}$. C $\dfrac{a^3}{9}$. D $\dfrac{a^3}{12}$.

CÂU 23. Cho tứ diện $ABCD$ có thể tích V. Xét điểm P, Q, R lần lượt thuộc các cạnh AB, BC, DB sao cho $PA = 2PB$, $QB = 3QC$, $RB = 4RD$. Tính thể tích khối đa diện $APRQCD$

A $\dfrac{4}{5}V$. B $\dfrac{2}{3}V$. C $\dfrac{3}{4}V$. D $\dfrac{5}{6}V$.

CÂU 24. Cho khối chóp $S.ABC$ có thể tích bằng 72. Gọi M là trung điểm của SA và N là điểm thuộc cạnh SC sao cho $NC = 2NS$. Tính thể tích V của khối đa diện $MNABC$.

A $V = 48$. B $V = 30$. C $V = 24$. D $V = 60$.

CÂU 25. Cho hình chóp $SABC$, trên các cạnh SA, SB, SC lần lượt lấy các điểm A', B', C' sao cho $SA' = \dfrac{3}{4}SA$; $SB' = \dfrac{4}{5}SB$; $SC' = \dfrac{k}{k+1}SC$. Biết rằng $V_{S.A'B'C'} = \dfrac{2}{5}V_{S.ABC}$. Lựa chọn phương án đúng.

A $k = 4$. B $k = 2$. C $k = 3$. D $k = 5$.

CÂU 26. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có M, N, P, Q lần lượt là trung điểm các cạnh SA, SB, SC, SD. Biết khối chóp $S.ABCD$ có thể tích bằng $16a^3$. Tính thể tích khối chóp $S.MNPQ$.

A $V_{MNPQ} = a^3$. B $V_{MNPQ} = 8a^3$. C $V_{MNPQ} = 2a^3$. D $V_{MNPQ} = 4a^3$.

CÂU 27. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng a. Khi đó thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng

QUICK NOTE

Ⓐ $\dfrac{a^3}{6}$. Ⓑ $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$. Ⓒ $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{12}$. Ⓓ $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{24}$.

CÂU 28. Cho hình chóp $O.ABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau. Biết $OA = OB = OC = a$. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. Tính thể tích khối chóp $O.GBC$.

Ⓐ $\dfrac{a^3}{9}$. Ⓑ $\dfrac{a^3}{18}$. Ⓒ $\dfrac{a^3}{54}$. Ⓓ $\dfrac{a^3}{27}$.

CÂU 29. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi M là trung điểm của SA. Biết khối chóp $S.ABCD$ có thể tích V. Tính thể tích khối chóp $M.ABC$ theo V.

Ⓐ $\dfrac{V}{4}$. Ⓑ $\dfrac{V}{2}$. Ⓒ $\dfrac{V}{8}$. Ⓓ $\dfrac{2}{3}$.

CÂU 30. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M là trung điểm của AB và N trên cạnh CD sao cho $CN = 2ND$. Biết thể tích khối tứ diện $ABCD$ là V. Tính thể tích khối $MBCN$.

Ⓐ $\dfrac{2V}{3}$. Ⓑ $\dfrac{3V}{4}$. Ⓒ $\dfrac{V}{2}$. Ⓓ $\dfrac{V}{3}$.

CÂU 31. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, $SA = a$ và vuông góc với đáy. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA và MC. Tính thể tích của khối chóp $N.ABC$.

Ⓐ $\dfrac{a^3}{12}$. Ⓑ $\dfrac{a^3}{6}$. Ⓒ $\dfrac{a^3}{8}$. Ⓓ $\dfrac{a^3}{24}$.

MỤC LỤC