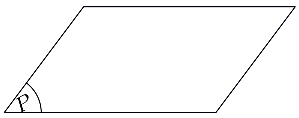
# Bài 10. ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG TRONG KHÔNG GIAN

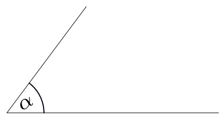
## A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

### 1. CÁC KHÁI NIỆM MỞ ĐẦU

**Mặt phẳng:** Để biểu diễn mặt phẳng, người ta dùng hình bình hành hay một miền góc



Kí hiệu $(P)$ hoặc mp$(P)$



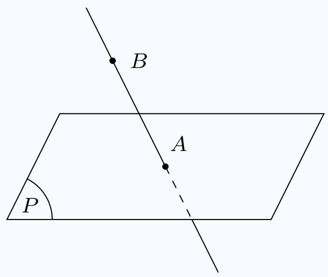
Kí hiệu $(\alpha)$ hoặc mp$(\alpha)$

**Điểm thuộc mặt phẳng:** Cho điểm $A$, $B$ và mặt phẳng $(\alpha)$.

① Khi $A$ thuộc mặt phẳng $(\alpha)$, ta kí hiệu $A \in (\alpha)$.

② Khi $B$ không thuộc mặt phẳng $(\alpha)$, ta kí hiệu $B \notin (\alpha)$.

*Dấu hiệu nhận biết $A \in (\alpha)$ là điểm $A$ thuộc một đường thẳng nằm trong $(\alpha)$*




**Biểu diễn hình không gian lên một mặt phẳng:**

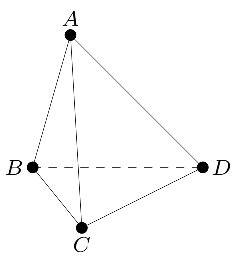
① Dùng nét vẽ liền để biểu diễn cho những đường trông thấy và dùng nét đứt đoạn (- - - -) để biểu diễn cho những đường bị che khuất.

① Quan hệ thuộc, song song được giữ nguyên, nghĩa là

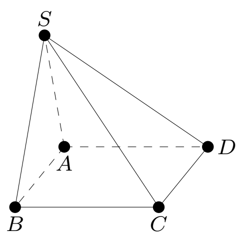
— Nếu hình thực tế điểm $A$ thuộc đường thẳng $\Delta$ thì hình biểu diễn phải giữ nguyên quan hệ đó.

— Nếu hình thực tế hai đường thẳng song song thì hình biểu diễn phải giữ nguyên quan hệ đó.

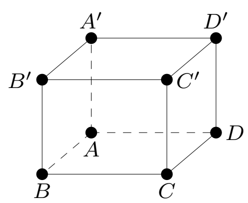
**Hình biểu diễn của các mô hình không gian thường gặp:**




Hình tứ diện




Hình chóp tứ giác đáy hbh




Hình lập phương, hộp chữ nhật

### 2. CÁC TÍNH CHẤT THỪA NHẬN

Xét trong không gian, ta thừa nhận các tính chất sau:

**Tính chất 1:** Có một và chỉ một đường thẳng đi qua hai điểm phân biệt.

**ĐIỂM:**

"It's not how much time you have, it's how you use it."

**QUICK NOTE**

QUICK NOTE

**Tính chất 2:** Có một và chỉ một mặt phẳng đi qua ba điểm không thẳng hàng.

**Tính chất 3:** Tồn tại 4 điểm không cùng thuộc một mặt phẳng.

Một mặt phẳng hoàn toàn xác định nếu biết ba điểm không thẳng hàng thuộc mặt phẳng đó. Ta kí hiệu mặt phẳng đi qua ba điểm không thẳng hàng $A$, $B$, $C$ là $(ABC)$. Nếu có nhiều điểm cùng thuộc một mặt phẳng thì ta nói những điểm đó đồng phẳng. Nếu *không* có mặt phẳng nào chứa các điểm đó thì ta nói những điểm đó *không đồng phẳng*.

**Tính chất 4:** Nếu một đường thẳng có hai điểm thuộc một mặt phẳng thì tất cả các điểm của đường thẳng đều thuộc mặt phẳng đó.

Cho đường thẳng $d$ và mặt phẳng $(\alpha)$.

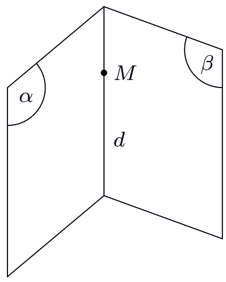
① Khi $d$ nằm trong $(\alpha)$, ta kí hiệu $d \subset (\alpha)$ hoặc $(P) \supset d$ . (không được viết $d \in (\alpha)$ nhé!!!)

② Khi $d$ không nằm trong $(\alpha)$, ta kí hiệu $d \not\subset (\alpha)$.

*Dấu hiệu nhận biết $d \subset (\alpha)$ là trên $d$ có hai điểm phân biệt thuộc $(\alpha)$*

**Tính chất 5:** Nếu hai mặt phẳng phân biệt có điểm chung thì các điểm chung của hai mặt phẳng là một đường thẳng đi qua điểm chung đó.

Đường thẳng chung $d$ (nếu có) của hai mặt phẳng phân biệt $(P)$ và $(Q)$ được gọi là giao tuyến của hai mặt phẳng đó và kí hiệu là $d = (P) \cap (Q)$.




**Tính chất 6:** Trên mỗi mặt phẳng các kết quả đã biết trong hình học phẳng đều đúng.

## 3. CÁCH XÁC ĐỊNH MỘT MẶT PHẲNG

Ba cách xác định một mặt phẳng

- Một mặt phẳng được xác định nếu biết nó đi qua ba điểm $A, B, C$ không thẳng hàng của mặt phẳng, kí hiệu $(ABC)$.
- Một mặt phẳng được xác định nếu biết nó đi qua một đường thẳng $d$ và một điểm $A$ không thuộc $d$, kí hiệu $(A, d)$.
- Một mặt phẳng được xác định nếu biết nó đi qua hai đường thẳng $a, b$ cắt nhau, kí hiệu $(a, b)$.

## 4. HÌNH CHÓP VÀ HÌNH TỨ DIỆN

**Hình chóp:**

**Định nghĩa:** Cho đa giác $A_1A_2 \ldots A_n$ và cho điểm $S$ nằm ngoài mặt phẳng chứa đa giác đó. Nối $S$ với các đỉnh $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ta được $n$ miền đa giác $SA_1A_2, SA_2A_3, \ldots, SA_{n-1}A_n$. Hình gồm $n$ tam giác đó và đa giác $A_1A_2A_3 \ldots A_n$ được gọi là hình chóp $S.A_1A_2A_3 \ldots A_n$.

QUICK NOTE

**Các tên gọi:**

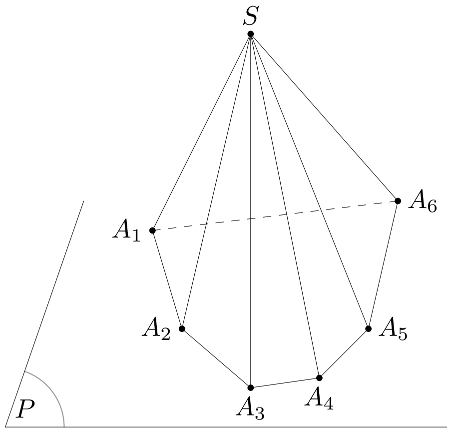
— Điểm $S$ gọi là đỉnh của hình chóp.

— Đa giác $A_1A_2\ldots A_n$ gọi là mặt đáy của hình chóp.

— Các đoạn thẳng $A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_{n-1}A_n$ gọi là các cạnh đáy của hình chóp.

— Các đoạn thẳng $SA_1, SA_2, \ldots, SA_n$ gọi là các cạnh bên của hình chóp.

— Các miền tam giác $SA_1A_2, SA_2A_3, \ldots, SA_{n-1}A_n$ gọi là các mặt bên của hình chóp.




**Hình tứ diện:**

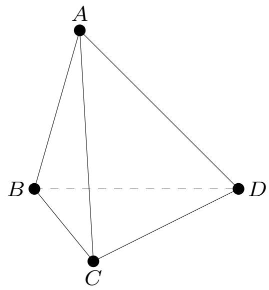
**Định nghĩa:** Cho bốn điểm $A, B, C, D$ không đồng phẳng. Hình gồm bốn tam giác $ABC$, $ACD$, $ABD$, $BCD$ được gọi là hình tứ diện và được kí hiệu là $ABCD$.

**Chú ý:**

— Hai cạnh không có đỉnh chung gọi là hai cạnh đối diện, đỉnh không nằm trên một mặt được gọi là đỉnh đối diện với mặt đó.

— Hình chóp tam giác còn được gọi là hình tứ diện.

— Hình tứ diện có bốn mặt là những tam giác đều hay có tất cả các cạnh bằng nhau được gọi là hình tứ diện đều.




Hình tứ diện

# B. PHÂN LOẠI, PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

## 1 Các quan hệ cơ bản

① Chứng minh điểm $A$ thuộc $(\alpha)$: Ta chứng tỏ điểm $A$ thuộc đường thẳng $\Delta$ nằm trong $\alpha$, nghĩa là

$$A \in \Delta, \Delta \subset (\alpha) \Rightarrow A \in (\alpha).$$

② Chứng minh đường thẳng $d$ nằm trong $(\alpha)$: Ta chứng tỏ $d$ có hai điểm phân biệt cùng thuộc $(\alpha)$, nghĩa là

$$\begin{cases} A \in (\alpha), B \in (\alpha) \\ A,\ B \in d \end{cases} \Rightarrow d \subset (\alpha).$$

③ Chứng minh $A$ là điểm chung của hai mặt phẳng $(\alpha)$ và $(\beta)$:Ta thường sử dụng một trong hai cách sau

$$\begin{cases} A \in (\alpha) \\ A \in (\beta) \end{cases} \Rightarrow A \in (\alpha) \cap (\beta) \text{ hoặc } \begin{cases} d \subset (\alpha) \\ \Delta \subset (\beta) \\ d \cap \Delta = A \end{cases} \Rightarrow A \in (\alpha) \cap (\beta).$$

**VÍ DỤ 1.** Cho tam giác $ABC$ và điểm $S$ không thuộc mặt phẳng $(ABC)$. Lấy $D, E$ là các điểm lần lượt thuộc các cạnh $SA, SB$ $(D, E$ khác $S)$.

a) Đường thẳng $DE$ có nằm trong mặt phẳng $(SAB)$ không?

b) Giả sử $DE$ cắt $AB$ tại $F$. Chứng minh rằng $F$ là điểm chung của hai mặt phẳng $(SAB)$ và $(CDE)$.

QUICK NOTE

**VÍ DỤ 2.** Cho hình chóp $S.ABCD$, gọi $O$ là giao điểm của $AC$ và $BD$. Lấy $M, N$ lần lượt thuộc các cạnh $SA, SC$.

a) Chứng minh rằng đường thẳng $MN$ nằm trong mặt phẳng $(SAC)$.

b) Chứng minh rằng $O$ là điểm chung của hai mặt phẳng $(SAC)$ và $(SBD)$.

**VÍ DỤ 3.** Cho hình tứ diện $ABCD$. Gọi $I$ là trung điểm cạnh $CD$. Gọi $M, N$ lần lượt là trọng tâm của các tam giác $BCD, CDA$.

a) Chứng minh rằng các điểm $M, N$ thuộc mặt phẳng $(ABI)$.

b) Gọi $G$ là giao điểm của $AM$ và $BN$. Chứng minh rằng $\dfrac{GM}{GA} = \dfrac{GN}{GB} = \dfrac{1}{3}$.

## 2 Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng

Cho hai mặt phẳng $(\alpha)$ và $(\beta)$ cắt nhau. Để xác định giao tuyến của chúng, ta đi tìm hai điểm chung phân biệt. Cụ thể, ta thường gặp một trong ba trường hợp sau:

① Hai mặt phẳng $(\alpha)$ và $(\beta)$ có sẵn hai điểm chung phân biệt: Khi đó giao tuyến là đường thẳng qua hai điểm chung đó.

② Hai mặt phẳng $(\alpha)$ và $(\beta)$ thấy trước một điểm chung $A$:

- $A$ là điểm chung thứ nhất hay $A \in (\alpha) \cap (\beta)$.
- Ta tìm điểm chung thứ 2: Trong $(\alpha)$ tìm một đường thẳng $d_1$, trong $(\beta)$ tìm một đường thẳng $d_2$ sao cho chúng có thể cắt nhau (đồng phẳng). Gọi $B = d_1 \cap d_2$, suy ra $B \in (\alpha) \cap (\beta)$. Vậy $AB = (\alpha) \cap (\beta)$.

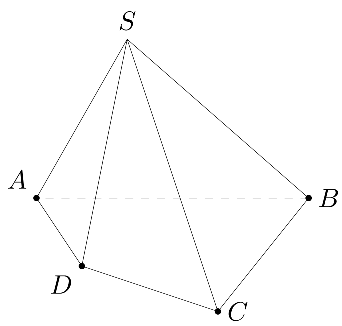
③ Hai mặt phẳng $(\alpha)$ và $(\beta)$ chưa thấy điểm chung: Ta mở rộng mặt phẳng để tìm điểm chung tương tự như cách tìm điểm chung ở mục số ②.

**VÍ DỤ 1.**
Cho tứ giác $ABCD$ sao cho các cạnh đối không song song với nhau. Lấy một điểm $S$ không thuộc mặt phẳng $(ABCD)$. Xác định giao tuyến của

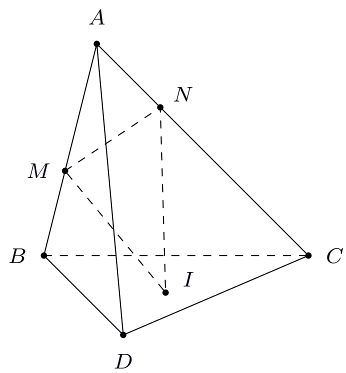
a) Mặt phẳng $(SAC)$ và mặt phẳng $(SBD)$.

b) Mặt phẳng $(SAB)$ và mặt phẳng $(SCD)$.

c) Mặt phẳng $(SAD)$ và mặt phẳng $(SBC)$.




**VÍ DỤ 2.**
Cho tứ diện $ABCD$. Lấy các điểm $M$ thuộc cạnh $AB$, $N$ thuộc cạnh $AC$ sao cho $MN$ cắt $BC$. Gọi $I$ là điểm bên trong tam giác $BCD$. Tìm giao tuyến của mặt phẳng $(MNI)$ với các mặt phẳng $(ABC)$, $(BCD)$, $(ABD)$, $(ACD)$.




**VÍ DỤ 3.** Cho tứ diện $ABCD$. Gọi $I$, $J$ lần lượt là trung điểm các cạnh $AD$, $BC$.

a) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng $(IBC)$ và mặt phẳng $(JAD)$.

b) Lấy điểm $M$ thuộc cạnh $AB$, $N$ thuộc cạnh $AC$ sao cho $M$, $N$ không là trung điểm. Tìm giao tuyến của mặt phẳng $(IBC)$ và mặt phẳng $(DMN)$.

**VÍ DỤ 4.** Cho tứ diện $ABCD$, $M$ là một điểm bên trong tam giác $ABD$, $N$ là một điểm bên trong tam giác $ACD$. Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng sau

a) $(AMN)$ và $(BCD)$.

b) $(DMN)$ và $(ABC)$.

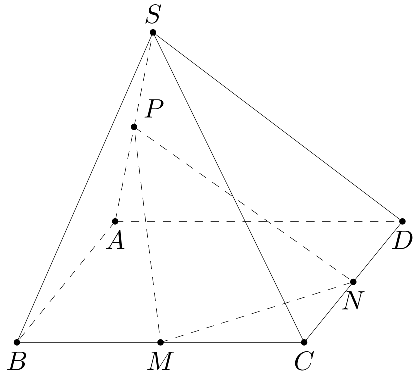
**VÍ DỤ 5.**
Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy là hình bình hành tâm $O$. Gọi $M$, $N$, $P$ lần lượt là trung điểm của cạnh $BC$, $CD$, $SA$. Tìm giao tuyến của

a) $(MNP)$ và $(SAB)$.

b) $(MNP)$ và $(SBC)$.

c) $(MNP)$ và $(SAD)$.

d) $(MNP)$ và $(SCD)$.




**VÍ DỤ 6.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi $M, P$ lần lượt là trung điểm của $SA, BC$. $N$ là điểm trên cạnh $SB$ sao cho $BN = \frac{1}{4}BS$. Xác định giao tuyến của mặt phẳng $(MNP)$ với các mặt phẳng

a) $(ABCD)$.

b) $(SAD)$.

c) $(SCD)$.

## 3 Tìm giao điểm của đường thẳng và mặt phẳng

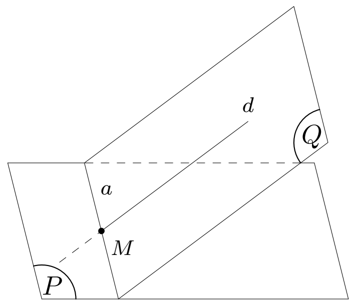
*Muốn tìm giao điểm của đường thẳng $d$ và mặt phẳng $(P)$ (phân biệt, không song song), ta tìm giao điểm của $d$ với một đường thẳng $a$ nằm trong $(P)$. Xét hai khả năng:*

① Nếu đường thẳng $a$ dễ tìm, nghĩa là có sẵn $a \subset (P)$ và $a$ cắt được $d$. Khi đó

- Gọi $M = d \cap a$ thì $\begin{cases} M \in d \\ M \in a \subset (P) \end{cases}$.
- Vậy $M = d \cap (P)$.

② Nếu đường thẳng $a$ khó tìm, ta thực hiện các bước sau:

- Tìm một mặt phẳng $(Q)$ chứa đường thẳng $d$ và dễ tìm giao tuyến với $(P)$;
- Tìm $(Q) \cap (P) = a$.
- Tìm $M = d \cap a$, suy ra $M = d \cap (P)$.




**VÍ DỤ 1.** Cho tứ diện $ABCD$. Gọi $M, N$ lần lượt là trung điểm của $AC$ và $BC$. $K$ là điểm nằm trên $BD$ sao cho $KD < KB$.

a) Tìm giao điểm của $CD$ với mặt phẳng $(MNK)$.

b) Tìm giao điểm của $AD$ với mặt phẳng $(MNK)$.

**VÍ DỤ 2.** Cho tứ diện $ABCD$. trên cạnh $AC$ và $AD$ lấy hai điểm $M, N$ sao cho $AC = 3AM$ và $AN = \frac{2}{3}AD$. Gọi $O$ là điểm bên trong tam giác $(BCD)$.

a) Tìm giao điểm của $BC$ với $(OMN)$.

b) Tìm giao điểm của $BD$ với $(OMN)$.

**VÍ DỤ 3.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi $M$ là trung điểm của $SC$.

a) Tìm giao điểm $I$ của đường thẳng $AM$ và mặt phẳng $(SBD)$. Chứng minh $IA = 2IM$.

b) Tìm giao điểm $E$ của đường thẳng $SD$ và mặt phẳng $(ABM)$.

c) Gọi $N$ là một điểm tuỳ ý trên cạnh $AB$. Tìm giao điểm của đường thẳng $MN$ và mặt phẳng $(SBD)$.

QUICK NOTE

QUICK NOTE

**VÍ DỤ 4.** Cho tứ giác $ABCD$ và một điểm $S$ không thuộc mặt phẳng $(ABCD)$. Trên đoạn $AB$ lấy một điểm $M$, trên đoạn $SC$ lấy một điểm $N$ ($M, N$ không trùng với các đầu mút).

a) Tìm giao điểm của đường thẳng $AN$ với mặt phẳng $(SBD)$.

b) Tìm giao điểm của đường thẳng $MN$ với mặt phẳng $(SBD)$.

### 4 Chứng minh ba điểm thẳng hàng

*Muốn chứng minh ba điểm $A$, $B$, $C$ thẳng hàng, ta chứng minh ba điểm đó lần lượt thuộc hai mặt phẳng phân biệt $(\alpha)$ và $(\beta)$, nghĩa là chúng cùng nằm trên một đường giao tuyến.*

**VÍ DỤ 1.** Cho tứ diện $ABCD$ có $G$ là trọng tâm tam giác $BCD$, Gọi $M$, $N$, $P$ lần lượt là trung điểm của $AB$, $BC$, $CD$.

a) Tìm giao tuyến của $(AND)$ và $(ABP)$.

b) Gọi $I = AG \cap MP$, $J = CM \cap AN$. Chứng minh $D$, $I$, $J$ thẳng hàng.

**VÍ DỤ 2.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi $O$ là giao điểm của $AC$ và $BD$ ; $M, N$ lần lượt là trung điểm của $SB, SD$; $P$ thuộc đoạn $SC$ và không là trung điểm của $SC$.

a) Tìm giao điểm $E$ của đường thẳng $SO$ và mặt phẳng $(MNP)$.

b) Tìm giao điểm $Q$ của đường thẳng $SA$ và mặt phẳng $(MNP)$.

c) Gọi $I, J, K$ lần lượt là giao điểm của $QM$ và $AB$, $QP$ và $AC$, $QN$ và $AD$. Chứng minh rằng $I, J, K$ thẳng hàng.

### 5 Vận dụng thực tiễn

**VÍ DỤ 1.** Giải thích tại sao ghế bốn chân có thể bị khập khiễng còn ghế ba chân thì không.

**VÍ DỤ 2.** Giải thích tại sao chân máy ảnh có thể đặt ở hầu hết các loại hình mà vẫn đứng vững.

**VÍ DỤ 3.** Hãy giải thích tại sao phần giao nhau giữa 2 vách tường nhà luôn là 1 đường thẳng

**VÍ DỤ 4.** Hãy giải thích vì sao khi gấp đôi một tờ giấy thì nếp gấp luôn là 1 đường thẳng

## C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

**BÀI 1.** Cho tứ diện $ABCD$. Trên $AB$, $AC$ lấy 2 điểm $M$, $N$ sao cho $MN$ không song song $BC$. Gọi $O$ là một điểm trong tam giác $BCD$.

a) Tìm giao tuyến của $(OMN)$ và $(BCD)$.

b) Tìm giao điểm của $DC$, $BD$ với $(OMN)$.

**BÀI 2.** Cho hình chóp $S.ABCD$. Gọi $O$ là giao điểm của $AC$ và $BD$. $M$, $N$, $P$ lần lượt là các điểm trên $SA$, $SB$, $SD$.

a) Tìm giao điểm $I$ của $SO$ với mặt phẳng $(MNP)$.

b) Tìm giao điểm $Q$ của $SC$ với mặt phẳng $(MNP)$.

**BÀI 3.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang với $AB$ song song với $CD$. O là giao điểm của hai đường chéo, $M$ thuộc $SB$.

a) Xác định giao tuyến của các cặp mặt phẳng: $(SAC)$ và $(SBD)$; $(SAD)$ và $(SBC)$.

b) Tìm giao điểm $SO \cap (MCD)$; $SA \cap (MCD)$.

**BÀI 4.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm $O$. Gọi $M$, $N$ lần lượt là trung điểm của $AB$, $SC$.

a) Tìm $I = AN \cap (SBD)$.

b) Tìm $K = MN \cap (SBD)$.

c) Tính tỉ số $\dfrac{KM}{KN}$.

d) Chứng minh $B, I, K$ thẳng hàng. Tính $\dfrac{IB}{IK}$.

**BÀI 5.** Cho hình chóp $S.ABCD$ với đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi $M$ là điểm bất kỳ thuộc $SB$, $N$ thuộc miền trong tam giác $S\Delta SCD$.

a) Tìm giao điểm của $MN$ và mặt phẳng $(ABCD)$

b) Tìm $SC \cap (AMN)$ và $SD \cap (AMN)$

c) Tìm $SA \cap (CMN)$

**BÀI 6.** Cho tứ diện $ABCD$ . Gọi $M$ là trung điểm $AB$, $K$ là trọng tâm của tam giác $ACD$.

a) Xác định giao tuyến của $(AKM)$ và $(BCD)$.

b) Tìm giao điểm $H$ của $MK$ và mp$(BCD)$. Chứng minh $K$ là trọng tâm của tam giác $ABH$.

c) Trên $BC$ lấy điểm $N$. Tìm giao điểm $P, Q$ của $CD$, $AD$ với mp$(MNK)$.

**BÀI 7.** Cho tứ giác $ABCD$ và $S \notin (ABCD)$. Gọi $I$, $J$ là hai điểm trên $AD$ và $SB$, $AD$ cắt $BC$ tại $O$ và $OJ$ cắt $SC$ tại $M$.

a) Tìm giao điểm $K = IJ \cap (SAC)$.

b) Xác định giao điểm $L = DJ \cap (SAC)$.

c) Chứng minh $A$, $K$, $L$, $M$ thẳng hàng.

**BÀI 8.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ và hình bình hành. Gọi $G$ là trọng tâm của tam giác $SAD$, $M$ là trung điểm của $SB$.

a) Tìm giao điểm $N$ của $MG$ và mặt phẳng $(ABCD)$.

b) Chứng minh ba điểm $C, D, N$ thẳng hàng và $D$ là trung điểm của $CN$.

**BÀI 9.** Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm $O$. Gọi $M$ là trung điểm của $SC$.

a) Xác định giao tuyến của $(ABM)$ và $(SCD)$.

b) Gọi $N$ là trung điểm của $BO$. Xác định giao điểm $I$ của $(AMN)$ với $SD$. Chứng minh $\dfrac{SI}{ID} = \dfrac{2}{3}$.

**BÀI 10.** Cho tứ diện $SABC$. Gọi $I$, $H$ lần lượt là trung điểm của $SA$, $AB$. Trên cạnh $SC$ lấy điểm $K$ sao cho $CK = 3SK$.

a) Tìm giao điểm $F$ của $BC$ với mặt phẳng $(IHK)$. Tính tỉ số $\dfrac{FB}{FC}$.

b) Gọi $M$ là trung điểm của đoạn thẳng $IH$. Tìm giao điểm của $KM$ và mặt phẳng $(ABC)$.

## D. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

**CÂU 1.** Cho tứ giác $ABCD$. Có thể xác định được bao nhiêu mặt phẳng chứa tất cả các đỉnh của tứ giác $ABCD$?

**A** 1. **B** 3. **C** 0. **D** 2.

**CÂU 2.** Hình chóp tam giác có số cạnh là

**A** 6. **B** 4. **C** 5. **D** 3.

**CÂU 3.** Hình chóp lục giác có bao nhiêu mặt?

**A** 10. **B** 6. **C** 8. **D** 7.

**CÂU 4.** Các yếu tố nào sau đây xác định một mặt phẳng duy nhất?

**A** Một điểm và một đường thẳng.

**B** Hai đường thẳng cắt nhau.

**C** Bốn điểm phân biệt.

**D** Ba điểm phân biệt.

QUICK NOTE

QUICK NOTE

**CÂU 5.** Khẳng định nào sau đây là **sai**?

(A) Nếu hai mặt phẳng phân biệt có một điểm chung thì chúng có một đường thẳng chung duy nhất.

(B) Nếu hai mặt phẳng có một điểm chung thì chúng có vô số điểm chung khác nữa.

(C) Nếu ba điểm phân biệt cùng thuộc hai mặt phẳng phân biệt thì chúng thẳng hàng.

(D) Nếu hai mặt phẳng có một điểm chung thì chúng có một đường thẳng chung duy nhất.

**CÂU 6.** Cho 5 điểm $A, B, C, D, E$ trong đó không có 4 điểm nào đồng phẳng. Hỏi có bao nhiêu mặt phẳng tạo bởi 3 trong 5 điểm đã cho?

(A) 10. (B) 14. (C) 12. (D) 8.

**CÂU 7.** Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

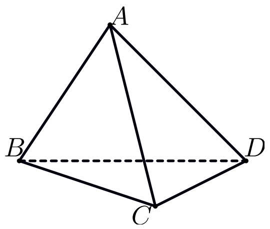
(A) Qua 3 điểm phân biệt bất kì có duy nhất một mặt phẳng.

(B) Qua 4 điểm phân biệt bất kì có duy nhất một mặt phẳng.

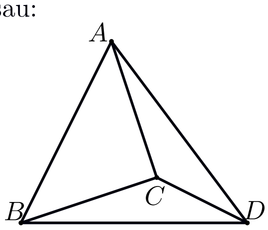
(C) Qua 2 điểm phân biệt có duy nhất một mặt phẳng.

(D) Qua 3 điểm không thẳng hàng có duy nhất một mặt phẳng.

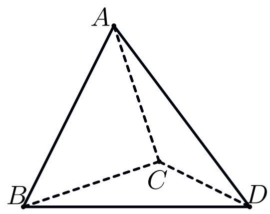
**CÂU 8.** Cho các hình vẽ sau:



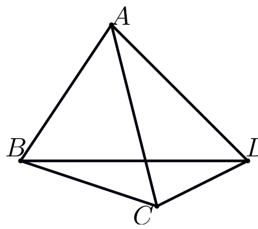
Hình (1)



Hình (2)



Hình (3)



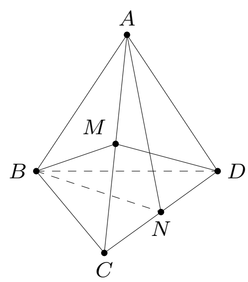
Hình (4)

Trong các hình trên, những hình nào biểu diễn cho tứ diện?

(A) Hình (1) và hình (2). (B) Hình (1), hình (2) và hình (3).

(C) Hình (1) và hình (3). (D) Hình (1), hình (3) và hình (4).

**CÂU 9.** Cho tứ diện $ABCD$. Gọi $M, N$ lần lượt là trung điểm của $AC, CD$. Giao tuyến của hai mặt phẳng $(MBD)$ và $(ABN)$ là



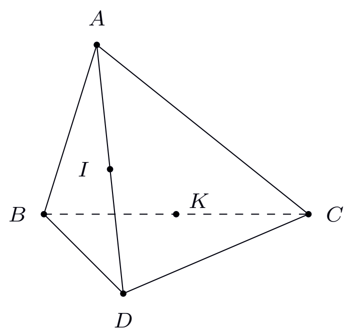

(A) đường thẳng $BG$ ($G$ là trọng tâm tam giác $ACD$).

(B) đường thẳng $AH$ ($H$ là trực tâm tam giác $ACD$).

(C) đường thẳng $MN$.

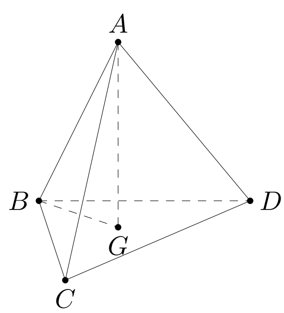
(D) đường thẳng $AM$.

**CÂU 10.** Cho 4 điểm không đồng phẳng $A, B, C, D$. Gọi $I, K$ lần lượt là trung điểm của $AD$ và $BC$. Giao tuyến của $(IBC)$ và $(KAD)$ là




(A) $IK$. (B) $DK$. (C) $AK$. (D) $BC$.

**CÂU 11.** Cho tứ diện $ABCD$. Gọi $G$ là trọng tâm của tam giác $BCD$. Giao tuyến của mặt phẳng $(ACD)$ và $(GAB)$ là




(A) $AH$ ($H$ là hình chiếu của $B$ trên $CD$).

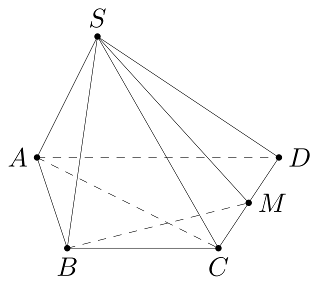
(B) $AM$ ($M$ là trung điểm của $AB$).

(C) $AK$ ($K$ là hình chiếu của $C$ trên $BD$).

(D) $AN$ ($N$ là trung điểm của $CD$).

QUICK NOTE

**CÂU 12.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang $ABCD\,(AD \parallel BC)$. Gọi $M$ là trung điểm $CD$. Giao tuyến của hai mặt phẳng $(MSB)$ và $(SAC)$ là

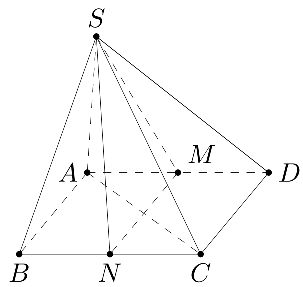



Ⓐ $SJ$ ($J$ là giao điểm của $AM$ và $BD$).
Ⓑ $SI$ ($I$ là giao điểm của $AC$ và $BM$).
Ⓒ $SO$ ($O$ là giao điểm của $AC$ và $BD$).
Ⓓ $SP$ ($P$ là giao điểm của $AB$ và $CD$).

**CÂU 13.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang $ABCD\,(AB \parallel CD)$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

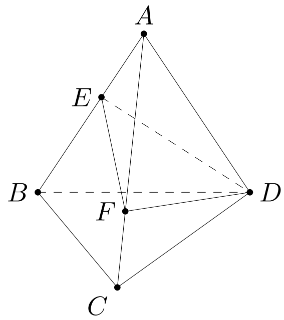
Ⓐ Hình chóp $S.ABCD$ có 4 mặt bên.
Ⓑ Giao tuyến của hai mặt phẳng $(SAC)$ và $(SBD)$ là $SO$ ($O$ là giao điểm của $AC$ và $BD$).
Ⓒ Giao tuyến của hai mặt phẳng $(SAB)$ và $(SAD)$ là đường trung bình của $ABCD$ .
Ⓓ Giao tuyến của hai mặt phẳng $(SAD)$ và $(SBC)$ là $SI$ ($I$ là giao điểm của $AD$ và $BC$).

**CÂU 14.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi $M, N$ lần lượt là trung điểm $AD$ và $BC$. Giao tuyến của hai mặt phẳng $(SMN)$ và $(SAC)$ là



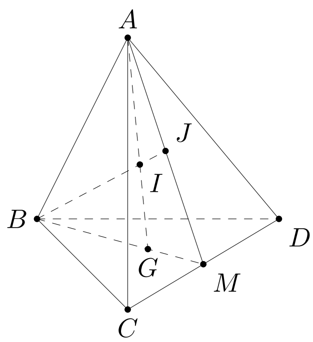

Ⓐ $SG$ ($G$ là trung điểm $AB$).
Ⓑ $SD$.
Ⓒ $SO$ ($O$ là tâm hình bình hành $ABCD$).
Ⓓ $SF$ ($F$ là trung điểm $CD$).

**CÂU 15.** Cho điểm $A$ không nằm trên mặt phẳng $(\alpha)$ chứa tam giác $BCD$. Lấy $E, F$ là các điểm lần lượt nằm trên các cạnh $AB, AC$. Khi $EF$ và $BC$ cắt nhau tại $I$ thì $I$ không phải là điểm chung của hai mặt phẳng nào sau đây?



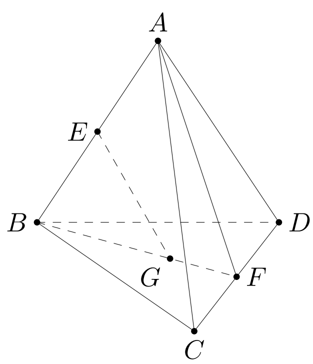

Ⓐ $(BCD)$ và $(ABC)$. Ⓑ $(BCD)$ và $(ABD)$.
Ⓒ $(BCD)$ và $(AEF)$. Ⓓ $(BCD)$ và $(DEF)$.

**CÂU 16.** Cho tứ diện $ABCD$. Gọi $G$ là trọng tâm tam giác $BCD$, $M$ là trung điểm $CD$, $I$ là điểm ở trên đoạn thẳng $AG$, $BI$ cắt mặt phẳng $(ACD)$ tại $J$. Khẳng định nào sau đây **sai**?




Ⓐ $J$ là trung điểm của $AM$.
Ⓑ $AM = (ACD) \cap (ABG)$.
Ⓒ $A, J, M$ thẳng hàng.
Ⓓ $DJ = (ACD) \cap (BDJ)$.

**CÂU 17.** Cho tứ diện $ABCD$. Gọi $E$ và $F$ lần lượt là trung điểm của $AB$ và $CD$; $G$ là trọng tâm tam giác $BCD$. Giao điểm của đường thẳng $EG$ và mặt phẳng $(ACD)$ là




Ⓐ Giao điểm của đường thẳng $EG$ và $CD$.
Ⓑ Giao điểm của đường thẳng $EG$ và $AC$.
Ⓒ Giao điểm của đường thẳng $EG$ và $AF$.
Ⓓ Điểm $F$.

QUICK NOTE

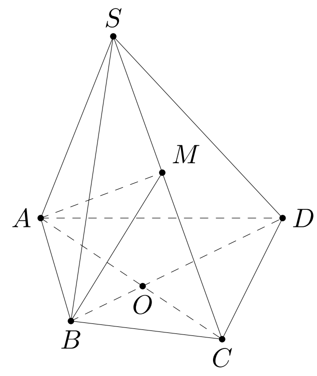
**CÂU 18.** Cho tứ giác $ABCD$ có $AC$ và $BD$ giao nhau tại $O$ và một điểm $S$ không thuộc mặt phẳng $(ABCD)$. Trên đoạn $SC$ lấy một điểm $M$ không trùng với $S$ và $C$. Giao điểm của đường thẳng $SD$ với mặt phẳng $(ABM)$ là

(A) Giao điểm của $SD$ và $BK$ (với $K = SO \cap AM$).

(B) Giao điểm của $SD$ và $AB$.

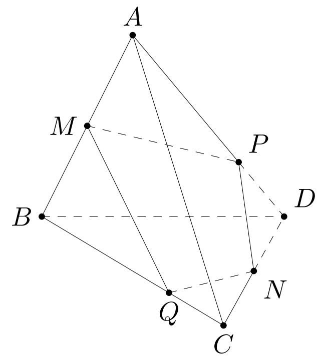
(C) Giao điểm của $SD$ và $MK$ (với $K = SO \cap AM$).

(D) Giao điểm của $SD$ và $AM$.



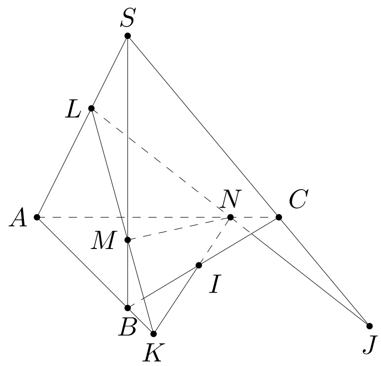

**CÂU 19.** Cho tứ diện $ABCD$. Gọi $M, N$ lần lượt là trung điểm của $AB$ và $CD$. Mặt phẳng $(\alpha)$ qua $MN$ cắt $AD, BC$ lần lượt tại $P$ và $Q$. Biết $MP$ cắt $NQ$ tại $I$. Ba điểm nào sau đây thẳng hàng?

(A) $I, B, D$.
(B) $I, A, C$.
(C) $I, C, D$ .
(D) $I, A, B$.




**CÂU 20.** Cho tứ diện $SABC$. Gọi $L, M, N$ lần lượt là các điểm trên các cạnh $SA, SB$ và $AC$ sao cho $LM$ không song song với $AB, LN$ không song song với $SC$. Mặt phẳng $(LMN)$ cắt các cạnh $AB, BC, SC$ lần lượt tại $K, I, J$. Ba điểm nào sau đây thẳng hàng?

(A) $M, K, J$.
(B) $N, I, J$.
(C) $K, I, J$.
(D) $M, I, J$.



QUICK NOTE

# Bài 11. HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG

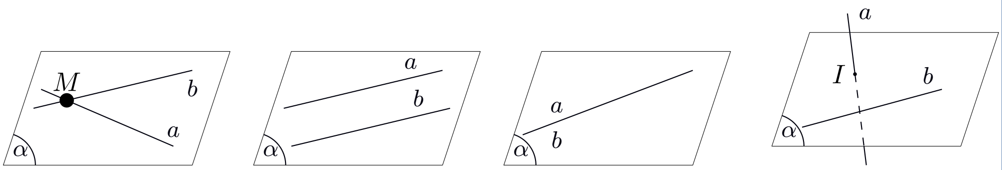
## A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

### 1. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA HAI ĐƯỜNG THẲNG

Trong không gian, cho hai đường thẳng $a$ và $b$.

**Các trường hợp có thể xảy ra:**

- Nếu $a$ và $b$ đồng phẳng (cùng thuộc một mặt phẳng) thì chúng có các khả năng: cắt nhau; song song nhau hoặc trùng nhau.
- Nếu $a$ và $b$ không đồng phẳng (không tồn tại mặt phẳng chưa được cả $a$ và $b$) thì ta nói $a$ và $b$ chéo nhau.




* $a$ cắt $b$ — * Kí hiệu $a \cap b = M$

* $a$ song song $b$ — * Kí hiệu $a \parallel b$

* $a$ trùng $b$ — * Kí hiệu $a \equiv b$

* $a$ chéo $b$ — * $a$, $b$ không điểm chung

**Chú ý:** Cho hai đường thẳng $a$ và $b$ phân biệt.

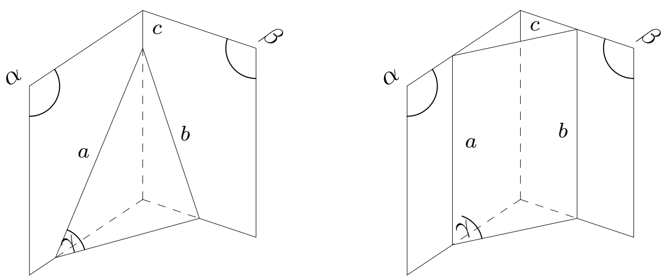
- Khi kiểm tra hai đường thẳng $a$ và $b$ **song song** hay **cắt nhau** thì trước tiên chúng phải đồng phẳng (cùng thuộc một mặt phẳng nào đó);
- Khi $a$ và $b$ không có điểm chung thì chúng có thể song song hoặc chéo nhau. Vấn đề này các bạn hay bị nhầm lẫn, cần chú ý.

### 2. CÁC ĐỊNH LÝ VÀ HỆ QUẢ CẦN NHỚ

**Định lý 1:** Trong không gian, qua một điểm không nằm trên đường thẳng cho trước, có một và chỉ một đường thẳng song song với đường thẳng đã cho.

**Định lý 2:** Hai đường thẳng phân biệt cùng song song với đường thẳng thứ ba thì song song với nhau.

**Định lý 3:** Nếu ba mặt phẳng phân biệt đôi một cắt nhau theo ba giao tuyến phân biệt thì ba giao tuyến đó hoặc đồng quy hoặc đôi một song song với nhau.




***Hệ quả:*** *Nếu hai mặt phẳng phân biệt lần lượt chứa hai đường thẳng song song thì giao tuyến của chúng (nếu có) cũng song song với hai đường thẳng đó hoặc trùng với một trong hai đường thẳng đó.*

## B. PHÂN LOẠI, PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

### 1 Xét vị trí tương đối của hai đường thẳng

Cho hai đường thẳng $a$ và $b$ phân biệt. Xét vị trí tương đối của $a$ với $b$, ta thực hiện các bước sau:

**Bước 1:** Kiểm tra xem hai đường thẳng $a$ và $b$ có đồng phẳng không?

- Nếu $a$ và $b$ không đồng phẳng thì $a$ và $b$ chéo nhau.
- Nếu $a$ và $b$ đồng phẳng chuyển sang bước 2.

**Bước 2:** Kiểm tra xem $a$ và $b$ có điểm chung hay không?

- Nếu $a$ và $b$ không có điểm chung thì $a \parallel b$.

QUICK NOTE

Nếu $a$ và $b$ có một điểm chung thì $a$ và $b$ cắt nhau.

**VÍ DỤ 1.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Xét vị trí tương đối của các cặp đường thẳng sau

a) $AB$ và $CD$.
b) $SA$ và $SC$.
c) $SA$ và $BC$.

**VÍ DỤ 2.** Cho tứ diện $ABCD$ có $M, N$ lần lượt là trung điểm của $AB, AC$. Xét vị trí tương đối của các cặp đường thẳng sau

a) $MN$ và $BC$.
b) $AN$ và $CD$.
c) $MN$ và $CD$.

## 2 Chứng minh hai đường thẳng song song

**Phương pháp thường dùng:**

① Sử dụng các kết quả của hình học phẳng như:

- Cặp cạnh đối hình bình hành thì song song nhau;...
- Đường trung bình của tam giác thì song song và bằng nửa cạnh đáy.

② Sử dụng tỉ lệ (Định lý Thales)

- Nếu $\dfrac{AE}{AB} = \dfrac{AF}{AC}$ thì $EF \parallel BC$.
- Chú ý tỉ lệ trọng tâm: $AG = \dfrac{2}{3}AM$.

**VÍ DỤ 1.** Cho tứ diện $ABCD$ có $I$, $J$ lần lượt là trọng tâm của tam giác $ABC$ và $ABD$. Chứng minh rằng $IJ \parallel CD$.

**VÍ DỤ 2.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang với $AB$ là đáy lớn và $AB = 2CD$. Gọi $M, N$ lần lượt là trung điểm của các cạnh $SA$ và $SB$. Chứng minh rằng $NC \parallel MD$.

**VÍ DỤ 3.** Cho tứ diện $ABCD$. Gọi $I, J$ lần lượt là trung điểm của các cạnh $BC, CD$. Trên cạnh $AC$ lấy điểm $K$. Gọi $M$ là giao điểm của $BK$ và $AI$, $N$ là giao điểm của $DK$ và $AJ$. Chứng minh rằng $MN \parallel BD$.

**VÍ DỤ 4.** Cho tứ diện $ABCD$. Gọi $M$, $N$, $P$, $Q$, $R$, $S$ lần lượt là trung điểm của $AB$, $CD$, $BC$, $AD$, $AC$, $BD$.

a) Chứng minh $MPNQ$ là hình bình hành.

b) Chứng minh ba đoạn thẳng $MN$, $PQ$, $RS$ cắt nhau tại trung điểm $G$ của mỗi đoạn.

**VÍ DỤ 5.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi $M, N, P, Q$ lần lượt là trung điểm $BC, CD, SB, SD$.

a) Chứng minh rằng $MN \parallel PQ$.

b) Gọi $I$ là trọng tâm của tam giác $ABC$, $J$ thuộc $SA$ sao cho $\dfrac{JS}{JA} = \dfrac{1}{2}$. Chứng minh $IJ \parallel SM$.

## 3 Xác định giao tuyến $d$ của hai mặt phẳng cắt nhau

**Ta thực hiện một trong hai cách sau đây:**

- **Cách 1:** Tìm hai điểm chung phân biệt (đã xét ở bài học trước)
- **Cách 2:** Tìm 1 điểm chung. Sau đó nếu hai mặt phẳng có cặp đường thẳng song song nhau thì giao tuyến $d$ sẽ đi qua điểm chung và song song (hoặc trùng) với một trong hai đường thẳng đó.

**VÍ DỤ 1.** Cho tứ diện $ABCD$. Trên $AB$, $AC$ lần lượt lấy $M$, $N$ sao cho $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC}$. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng $(DBC)$ và $(DMN)$.

QUICK NOTE

**VÍ DỤ 2.** Cho tứ diện $ABCD$. Gọi $M$, $N$ lần lượt là trung điểm của $AD$ và $BD$; $G$ là trọng tâm tam giác $ABC$. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng $(ABC)$ và $(MNG)$.

**VÍ DỤ 3.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Điểm $M$ thuộc cạnh $SA$. Điểm $E$, $F$ lần lượt là trung điểm của $AB$ và $BC$.

a) Tìm $(SAB) \cap (SCD)$.

b) Tìm $(MBC) \cap (SAD)$.

c) Tìm $(MEF) \cap (SAC)$.

d) Tìm $AD \cap (MEF)$.

e) Tìm $SD \cap (MEF)$.

## C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

**BÀI 1.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm $O$. Gọi $M$, $N$ lần lượt là trung điểm của $SA$, $SD$. Chứng minh

a) $MN \parallel AD$ và $MN \parallel BC$;

b) $MO \parallel SC$ và $NO \parallel SB$.

**BÀI 2.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm $O$. Gọi $M$, $N$ lần lượt là trung điểm của $AB$, $AD$. Gọi $I$, $J$, $G$ lần lượt là trọng tâm của các tam giác $SAB$, $SAD$ và $AOD$. Chứng minh

a) $IJ \parallel MN$;

b) $IJ \parallel BD$ và $GJ \parallel SO$.

**BÀI 3.** Cho hình chóp $SABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang đáy lớn $AB$. Gọi $E$, $F$ lần lượt là trung điểm của $SA$ và $SB$.

a) Chứng minh $EF \parallel CD$.

b) Tìm $I = AF \cap (SCD)$.

c) Chứng minh $SI \parallel AB \parallel CD$.

**BÀI 4.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi $M$, $N$ lần lượt là trung điểm của $SA$, $SB$. Gọi $P$ là một điểm trên cạnh $BC$. Tìm giao tuyến của

a) $(SBC)$ và $(SAD)$;

b) $(SAB)$ và $(SCD)$;

c) $(MNP)$ và $(ABCD)$.

**BÀI 5.** Cho tứ diện $SABC$. Gọi $E$ và $F$ lần lượt là trung điểm của các cạnh $SB$ và $AB$, $G$ là một điểm trên cạnh $AC$. Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng sau

a) $(SAC)$ và $(EFC)$;

b) $(SAC)$ và $(EFG)$.

**BÀI 6.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi $G$ là trọng tâm tam giác $ABD$, $N$ là trung điểm $SG$. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng $(ABN)$ và $(SCD)$.

**BÀI 7.** Cho tứ diện $ABCD$. Gọi $M, N$ theo thứ tự là trung điểm của $AB, BC$ và $Q$ là một điểm nằm trên cạnh $AD$ $(QA \neq QD)$ và $P$ là giao điểm của $CD$ với mặt phẳng $(MNQ)$. Chứng minh rằng $PQ \parallel MN$ và $PQ \parallel AC$.

**BÀI 8.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang với $AD$ là đáy lớn và $AD = 2BC$. Gọi $M$, $N$, $P$ lần lượt thuộc các đoạn $SA$, $AD$, $BC$ sao cho $MA = 2MS$, $NA = 2ND$, $PC = 2PB$.

a) Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng sau: $(SAD)$ và $(SBC)$, $(SAC)$ và $(SBD)$.

b) Xác định giao điểm $Q$ của $SB$ với $(MNP)$.

c) Gọi $K$ là trung điểm của $SD$. Chứng minh $CK = (MQK) \cap (SCD)$.

**BÀI 9.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có $O$ là tâm của hình bình hành $ABCD$, điểm $M$ thuộc cạnh $SA$ sao cho $SM = 2MA$, $N$ là trung điểm của $AD$.

a) Tìm giao tuyến của mặt phẳng $(SAD)$ và $(MBC)$.

b) Tìm giao điểm $I$ của $SB$ và $(CMN)$, giao điểm $J$ của $SA$ và $(ICD)$.

c) Chứng minh ba đường thẳng $ID$, $JC$, $SO$ cắt nhau tại $E$. Tính tỉ số $\dfrac{SE}{SO}$.

**BÀI 10.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi $M, N, P, Q$ lần lượt là trung điểm của các cạnh $AB, BC, CD, DA$; gọi $I, J, K, L$ lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng $SM, SN, SP, SQ$.

a) Chứng minh rằng bốn điểm $I, J, K, L$ đồng phẳng và tứ giác $IJKL$ là hình bình hành.

b) Chứng minh rằng $IK \parallel BC$.

c) Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng $(IJKL)$ và $(SBC)$.

QUICK NOTE

## D. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

**CÂU 1.** Hai đường thẳng không có điểm chung thì
(A) chéo nhau. (B) song song.
(C) cắt nhau. (D) chéo nhau hoặc song song.

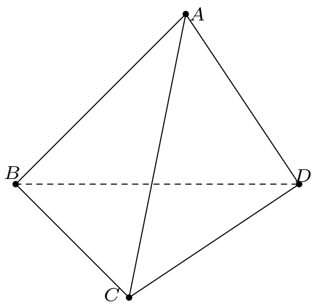
**CÂU 2.** Hai đường thẳng phân biệt không song song thì
(A) chéo nhau. (B) có điểm chung.
(C) cắt nhau hoặc chéo nhau. (D) không có điểm chung.

**CÂU 3.** Cho hai đường thẳng phân biệt không có điểm chung cùng nằm trong một mặt phẳng thì hai đường thẳng đó
(A) trùng nhau. (B) chéo nhau. (C) song song. (D) cắt nhau.

**CÂU 4.** Chọn khẳng định **sai**
(A) Hai đường thẳng phân biệt cùng song song với đường thẳng thứ ba thì song song với nhau.
(B) Nếu hai đường thẳng chéo nhau thì chúng không đồng phẳng.
(C) Hai đường thẳng song song thì không đồng phẳng và không có điểm chung.
(D) Hai đường thẳng cắt nhau thì đồng phẳng và có một điểm chung.

**CÂU 5.** Cho đường thẳng $a$ cắt mặt phẳng $(P)$ tại điểm $A$. Mệnh đề nào sau đây đúng?
(A) Mọi đường thẳng nằm trong $(P)$ đều chéo với $a$.
(B) Mọi đường thẳng nằm trong $(P)$ đều cắt $a$.
(C) Mọi đường thẳng nằm trong $(P)$ hoặc chéo với $a$, hoặc cắt $a$.
(D) Mọi đường thẳng nằm trong $(P)$ đều không cắt $a$.

**CÂU 6.** Cho tứ diện $ABCD$. Gọi $M$ và $N$ là hai điểm phân biệt nằm trên đường thẳng $AB$, $M'$ và $N'$ là hai điểm phân biệt nằm trên đường thẳng $CD$. Các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào đúng?
(A) Hai đường thẳng $MM'$ và $NN'$ có thể cắt nhau.
(B) Hai đường thẳng $MM'$ và $NN'$ có thể song song với nhau.
(C) Hai đường thẳng $MM'$ và $NN'$ hoặc cắt nhau hoặc song song với nhau.
(D) Hai đường thẳng $MM'$ và $NN'$ chéo nhau.




**CÂU 7.** Cho tứ diện $ABCD$, lấy $M, N$ lần lượt là trung điểm của $CD, AB$. Khi đó, xác định vị trí tương đối giữa hai đường thẳng $BC$ và $MN$.
(A) Chéo nhau. (B) Có hai điểm chung.
(C) Song song. (D) Cắt nhau.

**CÂU 8.** Cho tứ diện $MNPQ$. Mệnh đề nào trong các mệnh đề dưới đây là đúng?
(A) $MN \parallel PQ$. (B) $MN$ cắt $PQ$.
(C) $MN$ và $PQ$ đồng phẳng. (D) $MN$ và $PQ$ chéo nhau.

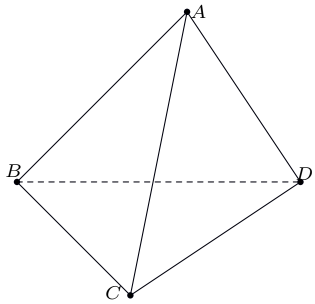
**CÂU 9.** Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình bình hành. Điểm $M$ thuộc cạnh $SC$ sao cho $SM = 3MC$, $N$ là giao điểm của $SD$ và $(MAB)$. Khi đó tứ giác $ABMN$ là hình gì?
(A) Tứ giác không có cặp cạnh nào song song.
(B) Hình vuông.
(C) Hình thang.
(D) Hình bình hành.

**CÂU 10.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang $AB \parallel CD$. Gọi $d$ là giao tuyến của hai mặt phẳng $(ASB)$ và $(SCD)$. Khẳng định nào sau đây là đúng?
(A) $d \parallel AB$. (B) $d$ cắt $AB$. (C) $d$ cắt $AD$. (D) $d$ cắt $CD$.

**CÂU 11.** Cho hình chóp $S.ABCD$. Gọi $G$, $E$ lần lượt là trọng tâm các tam giác $SAD$ và $SCD$. Lấy $M$, $N$ lần lượt là trung điểm $AB$, $BC$ . Khi đó ta có:
(A) $GE$ và $MN$ trùng nhau. (B) $GE$ và $MN$ chéo nhau.
(C) $GE$ và $MN$ song song với nhau. (D) $GE$ cắt $BC$.

QUICK NOTE

**CÂU 12.** Cho tứ diện $ABCD$ có $P, Q$ lần lượt là trọng tâm tam giác $ABC$ và $BCD$. Xác định giao tuyến của mặt phẳng $(ABQ)$ và mặt phẳng $(CDP)$.




A. Giao tuyến là đường thẳng đi qua trung điểm hai cạnh $AB$ và $CD$.
B. Giao tuyến là đường thẳng đi qua trung điểm hai cạnh $AB$ và $AD$.
C. Giao tuyến là đường thẳng $PQ$.
D. Giao tuyến là đường thẳng $QA$.

**CÂU 13.** Cho tứ diện $ABCD$. Gọi $I$ và $J$ theo thứ tự là trung điểm của $AD$ và $AC, G$ là trọng tâm tam giác $BCD$. Giao tuyến của hai mặt phẳng $(GIJ)$ và $(BCD)$ là đường thẳng

A. qua $J$ và song song với $BD$.
B. qua $G$ và song song với $BC$.
C. qua $I$ và song song với $AB$.
D. qua $G$ và song song với $CD$.

**CÂU 14.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang với các cạnh đáy là $AB$ và $CD$. Gọi $(ACI)$ lần lượt là trung điểm của $AD$ và $BC$ và $G$ là trọng tâm của tam giác $SAB$. Giao tuyến của $(SAB)$ và $(IJG)$ là

A. đường thẳng qua $S$ và song song với $AB$.
B. đường thẳng qua $G$ và song song với $DC$.
C. $SC$.
D. đường thẳng qua $G$ và cắt $BC$.

**CÂU 15.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi $I, J, E, F$ lần lượt là trung điểm $SA, SB, SC, SD$. Trong các đường thẳng sau, đường thẳng nào không song song với $IJ$?

A. $DC$.
B. $AB$.
C. $AD$.
D. $EF$.

**CÂU 16.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi $d$ là giao tuyến của hai mặt phẳng $(SAD)$ và $(SBC)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $d$ qua $S$ và song song với $DC$.
B. $d$ qua $S$ và song song với $BD$.
C. $d$ qua $S$ và song song với $BC$.
D. $d$ qua $S$ và song song với $AB$.

**CÂU 17.** Cho tứ diện $ABCD$. Gọi $M, N$ là hai điểm phân biệt cùng thuộc đường thẳng $AB$. $P, Q$ là hai điểm phân biệt cùng thuộc đường thẳng $CD$. Xét vị trí tương đối của hai đường thẳng $MP, NQ$.

A. $MP \parallel NQ$.
B. $MP$ cắt $NQ$.
C. $MP$ trùng $NQ$.
D. $MP, NQ$ chéo nhau.

**CÂU 18.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang với đáy lớn $AB$ đáy nhỏ $CD$. Gọi $M, N$ lần lượt là trung điểm của $SA$ và $SB$. Gọi $P$ là giao điểm của $SC$ và $(AND)$. Gọi $I$ là giao điểm của $AN$ và $DP$. Hỏi tứ giác $SABI$ là hình gì?

A. Hình bình hành.
B. Hình thoi.
C. Hình vuông.
D. Hình chữ nhật.

**CÂU 19.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi $M, N, P, Q$ lần lượt là trung điểm của các cạnh $SA, SB, SC, SD$. Gọi $I$ là một điểm trên cạnh $B$. Thiết diện của hình chóp với mặt phẳng $(IMN)$ là hình gì?

A. Tam giác $MNQ$.
B. Tam giác $MNI$.
C. Hình thang $MNIJ$.
D. Hình bình hành $MNIJ$.

**CÂU 20.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi $I$ là trung điểm $SA$. Thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi mặt phẳng $(IBC)$ là

A. Tam giác $IBC$.
B. Tứ giác $IBCD$.
C. Hình thang $IGBC$ ($G$ là trung điểm $SB$).
D. Hình thang $IBCJ$ ($J$ là trung điểm $SD$).

# LỜI GIẢI CHI TIẾT

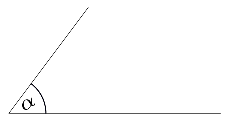
## Bài 10. ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG TRONG KHÔNG GIAN

## A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

### 1. CÁC KHÁI NIỆM MỞ ĐẦU

**Mặt phẳng:** Để biểu diễn mặt phẳng, người ta dùng hình bình hành hay một miền góc


Kí hiệu $(P)$ hoặc mp$(P)$



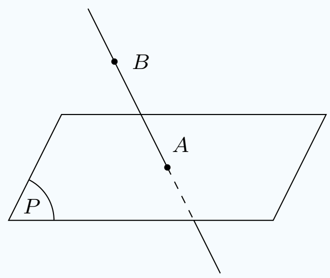

Kí hiệu $(\alpha)$ hoặc mp$(\alpha)$

**Điểm thuộc mặt phẳng:** Cho điểm $A$, $B$ và mặt phẳng $(\alpha)$.

① Khi $A$ thuộc mặt phẳng $(\alpha)$, ta kí hiệu $A \in (\alpha)$.

② Khi $B$ không thuộc mặt phẳng $(\alpha)$, ta kí hiệu $B \notin (\alpha)$.

*Dấu hiệu nhận biết $A \in (\alpha)$ là điểm $A$ thuộc một đường thẳng nằm trong $(\alpha)$*




**Biểu diễn hình không gian lên một mặt phẳng:**

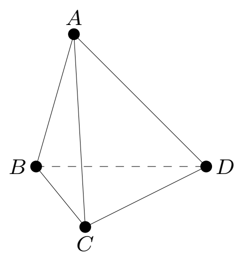
① Dùng nét vẽ liền để biểu diễn cho những đường trông thấy và dùng nét đứt đoạn (- - - -) để biểu diễn cho những đường bị che khuất.

① Quan hệ thuộc, song song được giữ nguyên, nghĩa là

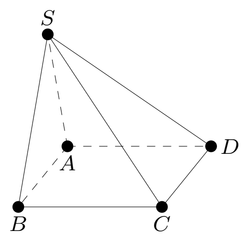
— Nếu hình thực tế điểm $A$ thuộc đường thẳng $\Delta$ thì hình biểu diễn phải giữ nguyên quan hệ đó.

— Nếu hình thực tế hai đường thẳng song song thì hình biểu diễn phải giữ nguyên quan hệ đó.

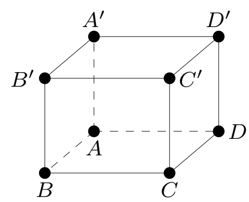
**Hình biểu diễn của các mô hình không gian thường gặp:**




Hình tứ diện




Hình chóp tứ giác đáy hbh




Hình lập phương, hộp chữ nhật

### 2. CÁC TÍNH CHẤT THỪA NHẬN

Xét trong không gian, ta thừa nhận các tính chất sau:

**Tính chất 1:** Có một và chỉ một đường thẳng đi qua hai điểm phân biệt.

**Tính chất 2:** Có một và chỉ một mặt phẳng đi qua ba điểm không thẳng hàng.

**Tính chất 3:** Tồn tại 4 điểm không cùng thuộc một mặt phẳng.

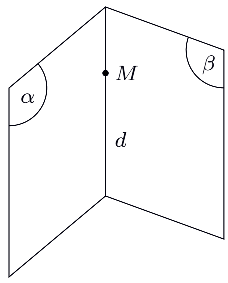
> Một mặt phẳng hoàn toàn xác định nếu biết ba điểm không thẳng hàng thuộc mặt phẳng đó. Ta kí hiệu mặt phẳng đi qua ba điểm không thẳng hàng $A$, $B$, $C$ là $(ABC)$. Nếu có nhiều điểm cùng thuộc một mặt phẳng thì ta nói những điểm đó đồng phẳng. Nếu *không* có mặt phẳng nào chứa các điểm đó thì ta nói những điểm đó *không đồng phẳng*.

**Tính chất 4:** Nếu một đường thẳng có hai điểm thuộc một mặt phẳng thì tất cả các điểm của đường thẳng đều thuộc mặt phẳng đó.

> Cho đường thẳng $d$ và mặt phẳng $(\alpha)$.
>
> ① Khi $d$ nằm trong $(\alpha)$, ta kí hiệu $d \subset (\alpha)$ hoặc $(P) \supset d$ .   (không được viết $d \in (\alpha)$ nhé!!!)
>
> ② Khi $d$ không nằm trong $(\alpha)$, ta kí hiệu $d \not\subset (\alpha)$.
>
> *Dấu hiệu nhận biết $d \subset (\alpha)$ là trên $d$ có hai điểm phân biệt thuộc $(\alpha)$*

**Tính chất 5:** Nếu hai mặt phẳng phân biệt có điểm chung thì các điểm chung của hai mặt phẳng là một đường thẳng đi qua điểm chung đó.

> Đường thẳng chung $d$ (nếu có) của hai mặt phẳng phân biệt $(P)$ và $(Q)$ được gọi là giao tuyến của hai mặt phẳng đó và kí hiệu là $d = (P) \cap (Q)$.




**Tính chất 6:** Trên mỗi mặt phẳng các kết quả đã biết trong hình học phẳng đều đúng.

## 3. CÁCH XÁC ĐỊNH MỘT MẶT PHẲNG

Ba cách xác định một mặt phẳng

> - Một mặt phẳng được xác định nếu biết nó đi qua ba điểm $A, B, C$ không thẳng hàng của mặt phẳng, kí hiệu $(ABC)$.
> - Một mặt phẳng được xác định nếu biết nó đi qua một đường thẳng $d$ và một điểm $A$ không thuộc $d$, kí hiệu $(A, d)$.
> - Một mặt phẳng được xác định nếu biết nó đi qua hai đường thẳng $a, b$ cắt nhau, kí hiệu $(a, b)$.

## 4. HÌNH CHÓP VÀ HÌNH TỨ DIỆN

**Hình chóp:**

**Định nghĩa:** Cho đa giác $A_1A_2 \ldots A_n$ và cho điểm $S$ nằm ngoài mặt phẳng chứa đa giác đó. Nối $S$ với các đỉnh $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ta được $n$ miền đa giác $SA_1A_2, SA_2A_3, \ldots, SA_{n-1}A_n$. Hình gồm $n$ tam giác đó và đa giác $A_1A_2A_3 \ldots A_n$ được gọi là hình chóp $S.A_1A_2A_3 \ldots A_n$.

**Các tên gọi:**

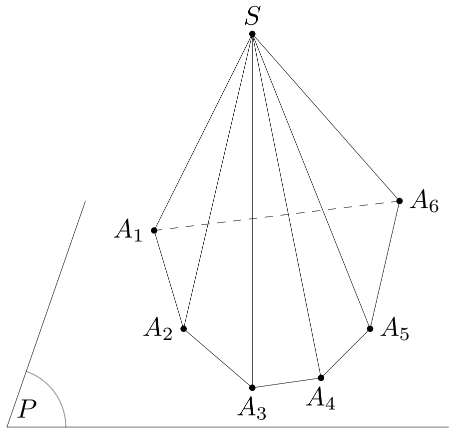
— Điểm $S$ gọi là đỉnh của hình chóp.

— Đa giác $A_1A_2\ldots A_n$ gọi là mặt đáy của hình chóp.

— Các đoạn thẳng $A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_{n-1}A_n$ gọi là các cạnh đáy của hình chóp.

— Các đoạn thẳng $SA_1, SA_2, \ldots, SA_n$ gọi là các cạnh bên của hình chóp.

— Các miền tam giác $SA_1A_2, SA_2A_3, \ldots, SA_{n-1}A_n$ gọi là các mặt bên của hình chóp.




**Hình tứ diện:**

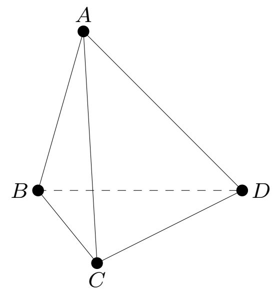
**Định nghĩa:** Cho bốn điểm $A, B, C, D$ không đồng phẳng. Hình gồm bốn tam giác $ABC$, $ACD$, $ABD$, $BCD$ được gọi là hình tứ diện và được kí hiệu là $ABCD$.

**Chú ý:**

— Hai cạnh không có đỉnh chung gọi là hai cạnh đối diện, đỉnh không nằm trên một mặt được gọi là đỉnh đối diện với mặt đó.

— Hình chóp tam giác còn được gọi là hình tứ diện.

— Hình tứ diện có bốn mặt là những tam giác đều hay có tất cả các cạnh bằng nhau được gọi là hình tứ diện đều.




Hình tứ diện

## B. PHÂN LOẠI, PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

### 1 Các quan hệ cơ bản

① Chứng minh điểm $A$ thuộc $(\alpha)$: Ta chứng tỏ điểm $A$ thuộc đường thẳng $\Delta$ nằm trong $\alpha$, nghĩa là

$$A \in \Delta, \Delta \subset (\alpha) \Rightarrow A \in (\alpha).$$

② Chứng minh đường thẳng $d$ nằm trong $(\alpha)$: Ta chứng tỏ $d$ có hai điểm phân biệt cùng thuộc $(\alpha)$, nghĩa là

$$\begin{cases} A \in (\alpha), B \in (\alpha) \\ A,\ B \in d \end{cases} \Rightarrow d \subset (\alpha).$$

③ Chứng minh $A$ là điểm chung của hai mặt phẳng $(\alpha)$ và $(\beta)$:Ta thường sử dụng một trong hai cách sau

$$\begin{cases} A \in (\alpha) \\ A \in (\beta) \end{cases} \Rightarrow A \in (\alpha) \cap (\beta) \text{ hoặc } \begin{cases} d \subset (\alpha) \\ \Delta \subset (\beta) \\ d \cap \Delta = A \end{cases} \Rightarrow A \in (\alpha) \cap (\beta).$$

**VÍ DỤ 1.** Cho tam giác $ABC$ và điểm $S$ không thuộc mặt phẳng $(ABC)$. Lấy $D, E$ là các điểm lần lượt thuộc các cạnh $SA, SB$ $(D, E$ khác $S)$.

a) Đường thẳng $DE$ có nằm trong mặt phẳng $(SAB)$ không?

b) Giả sử $DE$ cắt $AB$ tại $F$. Chứng minh rằng $F$ là điểm chung của hai mặt phẳng $(SAB)$ và $(CDE)$.

**VÍ DỤ 2.** Cho hình chóp $S.ABCD$, gọi $O$ là giao điểm của $AC$ và $BD$. Lấy $M, N$ lần lượt thuộc các cạnh $SA, SC$.

a) Chứng minh rằng đường thẳng $MN$ nằm trong mặt phẳng $(SAC)$.

b) Chứng minh rằng $O$ là điểm chung của hai mặt phẳng $(SAC)$ và $(SBD)$.

**VÍ DỤ 3.** Cho hình tứ diện $ABCD$. Gọi $I$ là trung điểm cạnh $CD$. Gọi $M, N$ lần lượt là trọng tâm của các tam giác $BCD, CDA$.

a) Chứng minh rằng các điểm $M, N$ thuộc mặt phẳng $(ABI)$.

b) Gọi $G$ là giao điểm của $AM$ và $BN$. Chứng minh rằng $\dfrac{GM}{GA} = \dfrac{GN}{GB} = \dfrac{1}{3}$.

## 2 Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng

Cho hai mặt phẳng $(\alpha)$ và $(\beta)$ cắt nhau. Để xác định giao tuyến của chúng, ta đi tìm hai điểm chung phân biệt. Cụ thể, ta thường gặp một trong ba trường hợp sau:

① Hai mặt phẳng $(\alpha)$ và $(\beta)$ có sẵn hai điểm chung phân biệt: Khi đó giao tuyến là đường thẳng qua hai điểm chung đó.

② Hai mặt phẳng $(\alpha)$ và $(\beta)$ thấy trước một điểm chung $A$:

- $A$ là điểm chung thứ nhất hay $A \in (\alpha) \cap (\beta)$.
- Ta tìm điểm chung thứ 2: Trong $(\alpha)$ tìm một đường thẳng $d_1$, trong $(\beta)$ tìm một đường thẳng $d_2$ sao cho chúng có thể cắt nhau (đồng phẳng). Gọi $B = d_1 \cap d_2$, suy ra $B \in (\alpha) \cap (\beta)$. Vậy $AB = (\alpha) \cap (\beta)$.

③ Hai mặt phẳng $(\alpha)$ và $(\beta)$ chưa thấy điểm chung: Ta mở rộng mặt phẳng để tìm điểm chung tương tự như cách tìm điểm chung ở mục số ②.

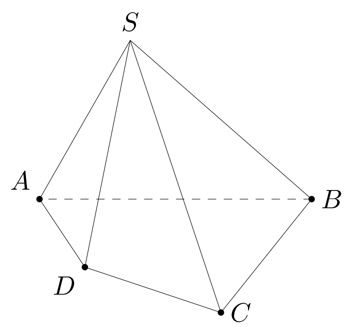
**VÍ DỤ 1.**

Cho tứ giác $ABCD$ sao cho các cạnh đối không song song với nhau. Lấy một điểm $S$ không thuộc mặt phẳng $(ABCD)$. Xác định giao tuyến của

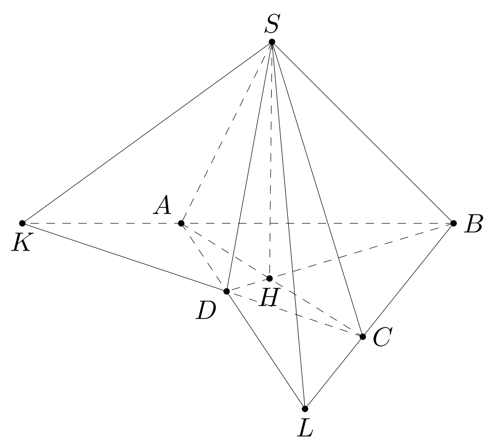
a) Mặt phẳng $(SAC)$ và mặt phẳng $(SBD)$.

b) Mặt phẳng $(SAB)$ và mặt phẳng $(SCD)$.

c) Mặt phẳng $(SAD)$ và mặt phẳng $(SBC)$.




**Lời giải.**




a) Gọi $H$ là giao điểm của $AC$ với $BD$. Khi đó

$$\begin{cases} H \in AC \\ H \in BD \end{cases} \Rightarrow H \in (SAC) \cap (SBD) \quad (1).$$

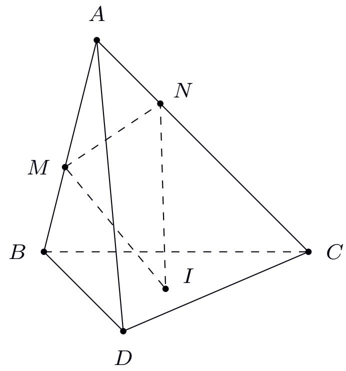
Dễ thấy $S \in (SAC) \cap (SBD) \quad (2)$.
Từ (1) và (2) suy ra $SH = (SBD) \cap (SAC)$.

b) Gọi $K$ là giao điểm của hai đường thẳng $CD$ và $AB$.
Khi đó $\begin{cases} K \in AB \\ K \in CD \end{cases} \Rightarrow K \in (SAB) \cap (SCD) \quad (3).$
Dễ thấy $S \in (SAB) \cap (SCD) \quad (4)$.
Từ (3) và (4) suy ra $SK = (SAB) \cap (SCD)$.

c) Gọi $L$ là giao điểm của hai đường thẳng $AD$ và $BC$.
Khi đó $\begin{cases} L \in AD \\ K \in BC \end{cases} \Rightarrow L \in (SAD) \cap (SBC) \quad (5)$. Mặt khác $S \in (SAD) \cap (SBC) \quad (6)$.
Từ (5) và (6) suy ra $SL = (SAD) \cap (SBC)$.

**VÍ DỤ 2.**

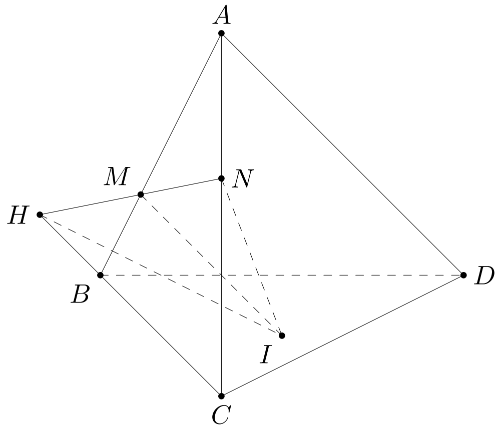
Cho tứ diện $ABCD$. Lấy các điểm $M$ thuộc cạnh $AB$, $N$ thuộc cạnh $AC$ sao cho $MN$ cắt $BC$. Gọi $I$ là điểm bên trong tam giác $BCD$. Tìm giao tuyến của mặt phẳng $(MNI)$ với các mặt phẳng $(ABC)$, $(BCD)$, $(ABD)$, $(ACD)$.




**Lời giải.**

a) Dễ thấy $(MNI) \cap (ABC) = MN$.

b) Tìm $(MNI) \cap (BCD)$.




- Gọi $H$ là giao điểm của $MN$ và $BC$. Suy ra

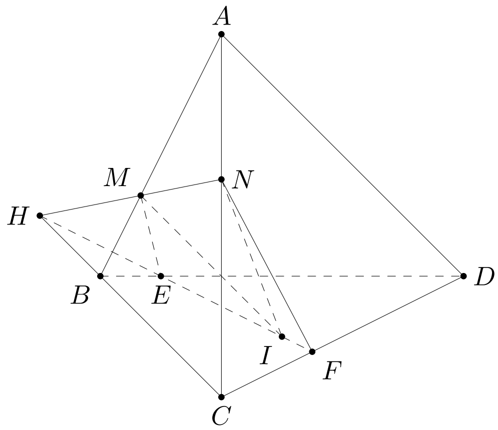
$$H \in (MNI) \cap (BCD) \quad (1).$$

- Do $I$ là điểm trong $\triangle BCD$ nên

$$I \in (MNI) \cap (BCD) \quad (2).$$

Từ (1) và (2) suy ra $IH = (MNI) \cap (BCD)$.

c) Tìm $(MNI) \cap (ABD)$.




- Gọi $E = IH \cap BD$. Ta có

$$\begin{cases} E \in BD \\ E \in IH \end{cases} \Rightarrow E \in (MNI) \cap (ABD) \quad (3).$$

- Dễ thấy $M \in (ABD) \cap (MNI)$ (4).

.
Từ (3) và (4) suy ra $ME = (ABD) \cap (MNI)$.

d) Tìm $(MNI) \cap (BCD)$.

- Gọi $F = IH \cap CD$. Ta có

$$\begin{cases} F \in CD \\ F \in IH \end{cases} \Rightarrow F \in (MNI) \cap (ACD) \quad (5).$$

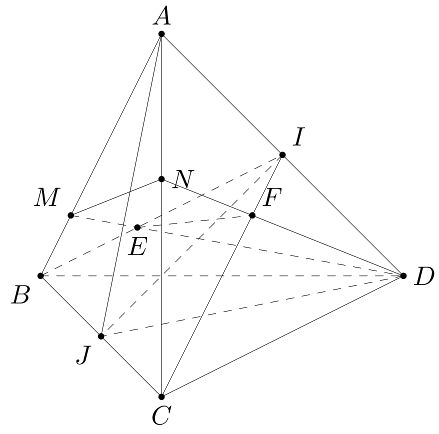
- Mặt khác: $N \in AC$ nên $N \in (ACD)$. Suy ra $N \in (MNI) \cap (ACD)$ (6).
Từ (5) và (6) suy ra $NF = (ACD) \cap (MNI)$.

**VÍ DỤ 3.** Cho tứ diện $ABCD$. Gọi $I$, $J$ lần lượt là trung điểm các cạnh $AD$, $BC$.

a) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng $(IBC)$ và mặt phẳng $(JAD)$.

b) Lấy điểm $M$ thuộc cạnh $AB$, $N$ thuộc cạnh $AC$ sao cho $M$, $N$ không là trung điểm. Tìm giao tuyến của mặt phẳng $(IBC)$ và mặt phẳng $(DMN)$.

**Lời giải.**




a) Do giả thiết $I \in AD$ nên $I \in (JAD)$. Suy ra

$$I \in (BCI) \cap (ADJ) \quad (1).$$

Tương tự, ta có $J \in (BCI) \cap (ADJ) \quad (2)$.
Từ (1) và (2) suy ra $IJ = (BCI) \cap (ADJ)$.

b) Gọi $E = DM \cap BI$. Khi đó

$$\begin{cases} E \in BI \\ E \in DM \end{cases} \Rightarrow E \in (MND) \cap (IBC) \quad (3).$$

Tương tự, gọi $F = DN \cap CI$ suy ra

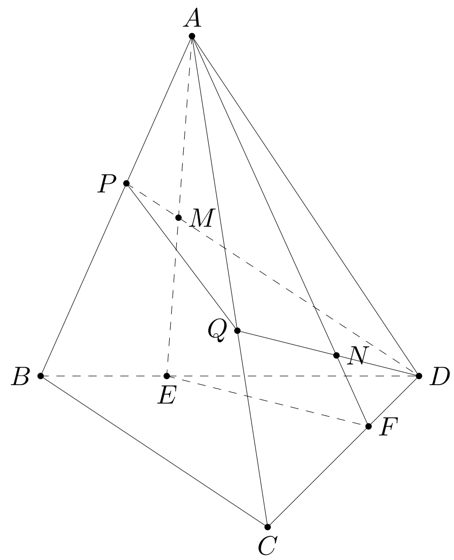
$$F \in (BCI) \cap (MND) \quad (4).$$

Từ (3) và (4) suy ra $EF = (BCI) \cap (MND)$.

**VÍ DỤ 4.** Cho tứ diện $ABCD$, $M$ là một điểm bên trong tam giác $ABD$, $N$ là một điểm bên trong tam giác $ACD$. Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng sau

a) $(AMN)$ và $(BCD)$. b) $(DMN)$ và $(ABC)$.

**Lời giải.**




a) Tìm $(AMN) \cap (BCD)$.
Trong $(ABD)$, gọi $E = AM \cap BD$.
Ta có $\begin{cases} E \in AM \subset (AMN) \\ E \in BD \subset (BCD) \end{cases} \Rightarrow E \in (AMN) \cap (BCD)$ (1).
Trong $(ACD)$, gọi $F = AN \cap CD$.
Ta có $\begin{cases} F \in AN \subset (AMN) \\ F \in CD \subset (BCD) \end{cases} \Rightarrow F \in (AMN) \cap (BCD)$ (2).
Từ (1) và (2) suy ra $(AMN) \cap (BCD) = EF$.

b) Tìm $(DMN) \cap (ABC)$.
Trong $(ABD)$, gọi $P = DM \cap AB$.
Ta có $\begin{cases} P \in DM \subset (DMN) \\ P \in AB \subset (ABC) \end{cases} \Rightarrow P \in (DMN) \cap (ABC)$ (3).
Trong $(ACD)$, gọi $Q = DN \cap AC$.
Ta có $\begin{cases} Q \in DN \subset (DMN) \\ Q \in AC \subset (ABC) \end{cases} \Rightarrow Q \in (DMN) \cap (ABC)$ (4).
Từ (3) và (4) suy ra $(DMN) \cap (ABC) = PQ$.

**VÍ DỤ 5.**

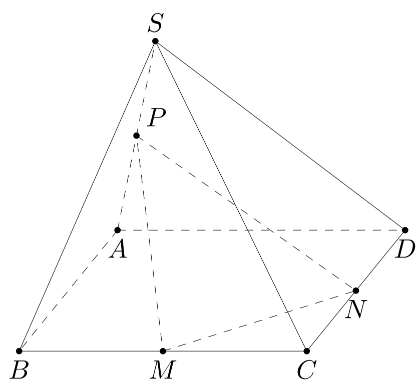
Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy là hình bình hành tâm $O$. Gọi $M$, $N$, $P$ lần lượt là trung điểm của cạnh $BC$, $CD$, $SA$. Tìm giao tuyến của

a) $(MNP)$ và $(SAB)$.

b) $(MNP)$ và $(SBC)$.

c) $(MNP)$ và $(SAD)$.

d) $(MNP)$ và $(SCD)$.

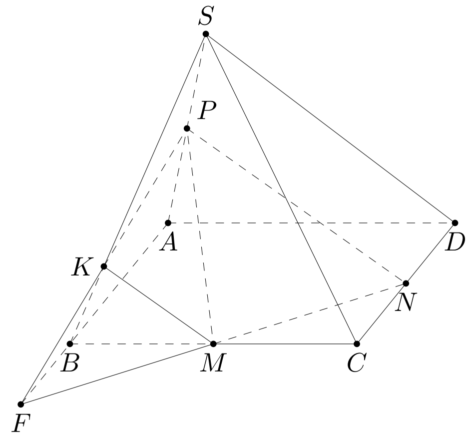



**Lời giải.**

a) Tìm $(MNP) \cap (SAB)$.

- Ta có $P \in (MNP) \cap (SAB)$ (1).
- Gọi $F = MN \cap AB$ thì $\begin{cases} F \in MN \subset (MNP) \\ F \in AB \subset (SAB) \end{cases}$ nên $F \in (MNP) \cap (SAB)$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $(MNP) \cap (SAB) = PF$.




b) Tìm $(MNP) \cap (SBC)$.

- Ta có $M \in (MNP) \cap (SBC)$ (3).
- Gọi $K = PF \cap SB$ thì $\begin{cases} K \in PF \subset (MNP) \\ K \in SB \subset (SBC) \end{cases}$ nên $K \in (MNP) \cap (SBC)$ (4).

Từ (3) và (4) suy ra $(MNP) \cap (SBC) = MK$.

c) Tìm $(MNP) \cap (SAD)$.

- Ta có $P \in (MNP) \cap (SAD)$ (5).
- Gọi $E = MN \cap AD$, suy ra

$$E \in (MNP) \cap (SAD) \quad (6).$$

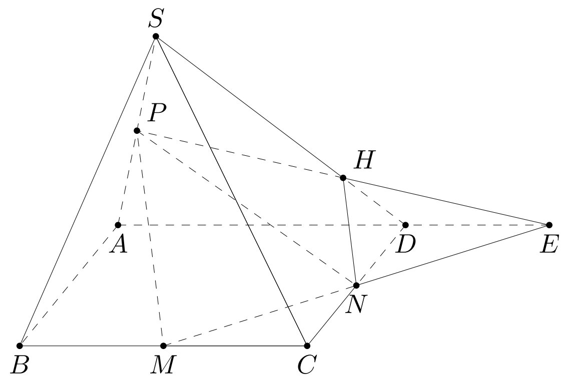
Từ (5) và (6) suy ra $(MNP) \cap (SAD) = EP$.

d) Tìm $(MNP) \cap (SCD)$.

- Ta có $N \in (MNP) \cap (SCD)$ (7).
- Gọi $H = PE \cap SD$, suy ra

$$H \in (MNP) \cap (SCD) \quad (8).$$

Từ (7) và (8) suy ra $(MNP) \cap (SCD) = HN$.




**VÍ DỤ 6.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi $M, P$ lần lượt là trung điểm của $SA, BC$. $N$ là điểm trên cạnh $SB$ sao cho $BN = \frac{1}{4}BS$. Xác định giao tuyến của mặt phẳng $(MNP)$ với các mặt phẳng

a) $(ABCD)$. b) $(SAD)$. c) $(SCD)$.

**Lời giải.**

a) Gọi $I$ là giao điểm của $MN$ và $AB$, khi đó ta có $\begin{cases} I \in MN \\ I \in AB \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I \in (MNP) \\ I \in (ABCD) \end{cases}$. (1)

Hiển nhiên $\begin{cases} P \in (MNP) \\ P \in (ABCD) \end{cases}$. (2)

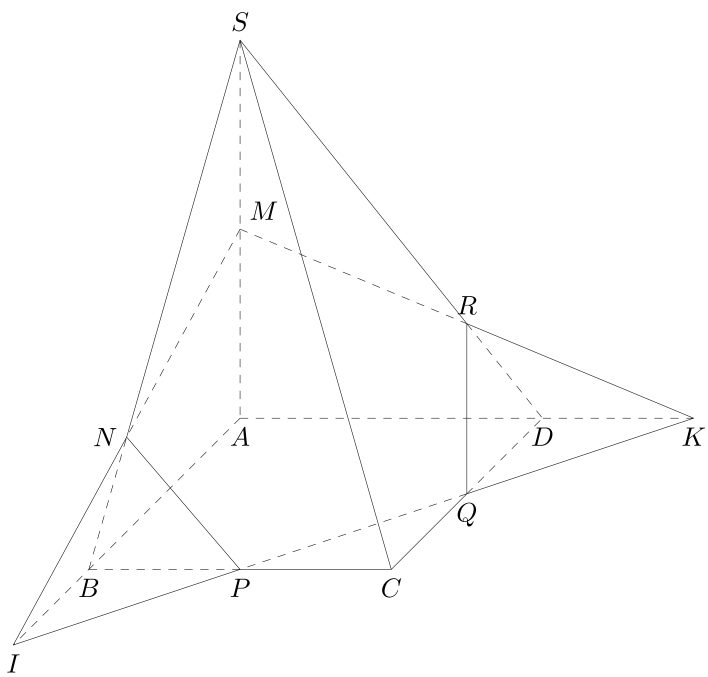
Từ (1) và (2) suy ra $PI$ là giao tuyến của các mặt phẳng $(MNP)$ và $(ABCD)$.

b) Gọi $K$ là giao điểm của $IP$ với $AD$, khi đó $\begin{cases} K \in IP \\ K \in AD \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} K \in (MNP) \\ K \in (SAD) \end{cases}$. (3)

Hiển nhiên $\begin{cases} M \in (MNP) \\ M \in (ABCD) \end{cases}$. (4)

Từ (3) và (4) suy ra $MK$ là giao tuyến của các mặt phẳng $(MNP)$ và $(ABCD)$.

c) Gọi $Q$ là giao điểm của $IP$ và $CD$, $R$ là giao điểm của $MK$ và $SD$. Khi đó ta chứng minh được $QR$ là giao tuyến của các mặt phẳng $(MNP)$ và $(SCD)$.



## 3 Tìm giao điểm của đường thẳng và mặt phẳng

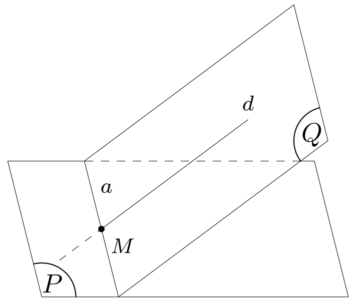
*Muốn tìm giao điểm của đường thẳng $d$ và mặt phẳng $(P)$ (phân biệt, không song song), ta tìm giao điểm của $d$ với một đường thẳng $a$ nằm trong $(P)$. Xét hai khả năng:*

① Nếu đường thẳng $a$ dễ tìm, nghĩa là có sẵn $a \subset (P)$ và $a$ cắt được $d$. Khi đó

- Gọi $M = d \cap a$ thì $\begin{cases} M \in d \\ M \in a \subset (P) \end{cases}$.
- Vậy $M = d \cap (P)$.

② Nếu đường thẳng $a$ khó tìm, ta thực hiện các bước sau:

- Tìm một mặt phẳng $(Q)$ chứa đường thẳng $d$ và dễ tìm giao tuyến với $(P)$;
- Tìm $(Q) \cap (P) = a$.
- Tìm $M = d \cap a$, suy ra $M = d \cap (P)$.




**VÍ DỤ 1.** Cho tứ diện $ABCD$. Gọi $M, N$ lần lượt là trung điểm của $AC$ và $BC$. $K$ là điểm nằm trên $BD$ sao cho $KD < KB$.

a) Tìm giao điểm của $CD$ với mặt phẳng $(MNK)$.

b) Tìm giao điểm của $AD$ với mặt phẳng $(MNK)$.

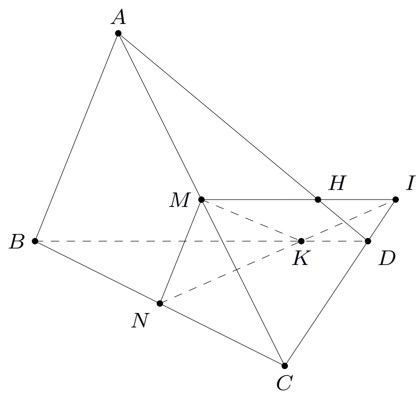
**Lời giải.**

Tìm giao điểm của $CD$ với mp$(MNK)$.

*Dễ thấy trong mặt phẳng $(MNK)$ có đường thẳng $NK$ có thể cắt được đường $CD$. Nên ta giải như sau:*

- Do $KD < KC$ nên $K$ không là trung điểm của $BD$, suy ra $NK$ cắt $CD$;
- Gọi $I = CD \cap NK$, ta có

$$\begin{cases} I \in CD \\ I \in NK, NK \subset (MNK) \end{cases} \Rightarrow I = CD \cap (MNK).$$




Tìm giao điểm của $AD$ và $(MNK)$.
Trong mặt phẳng $(ACD)$, gọi $H = AD \cap MI$. Ta có

$$\begin{cases} H \in AD \\ H \in MI, MI \subset (MNK) \end{cases} \Rightarrow H = AD \cap (MNK).$$

**VÍ DỤ 2.** Cho tứ diện $ABCD$. trên cạnh $AC$ và $AD$ lấy hai điểm $M$, $N$ sao cho $AC = 3AM$ và $AN = \dfrac{2}{3}AD$. Gọi $O$ là điểm bên trong tam giác $(BCD)$.

a) Tìm giao điểm của $BC$ với $(OMN)$.

b) Tìm giao điểm của $BD$ với $(OMN)$.

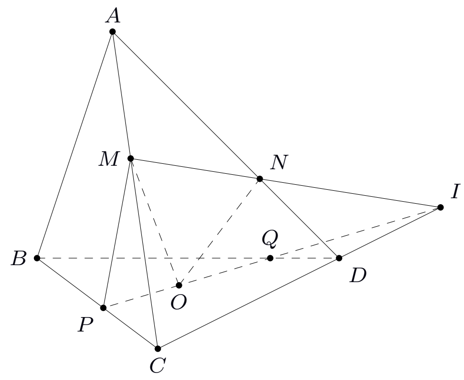
**Lời giải.**

a) Tìm giao điểm của $BC$ với $(OMN)$.
Xét $BC \subset (BCD)$. Ta đi tìm giao tuyến của $(BCD)$ với $(OMN)$.

- Gọi $I = CD \cap MN \Rightarrow I \in (BCD) \cap (OMN)$ (1).
- Mặt khác $O \in (BCD) \cap (OMN)$ (2).

Từ (1) và (2), suy ra $OI = (BCD) \cap (OMN)$.
Trong $(BCD)$, gọi $P = OI \cap BC$. Ta có

$$\begin{cases} P \in BC \\ P \in OI, OI \subset (OMN) \end{cases} \Rightarrow P = BC \cap (OMN).$$




b) Tìm giao điểm của $BD$ với $(OMN)$.
Trong $(BCD)$, gọi $Q = OI \cap BD$. Ta có $\begin{cases} Q \in BD \\ Q \in OI, OI \subset (OMN) \end{cases} \Rightarrow Q = BD \cap (OMN)$.

**VÍ DỤ 3.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi $M$ là trung điểm của $SC$.

a) Tìm giao điểm $I$ của đường thẳng $AM$ và mặt phẳng $(SBD)$. Chứng minh $IA = 2IM$.

b) Tìm giao điểm $E$ của đường thẳng $SD$ và mặt phẳng $(ABM)$.

c) Gọi $N$ là một điểm tuỳ ý trên cạnh $AB$. Tìm giao điểm của đường thẳng $MN$ và mặt phẳng $(SBD)$.

**VÍ DỤ 4.** Cho tứ giác $ABCD$ và một điểm $S$ không thuộc mặt phẳng $(ABCD)$. Trên đoạn $AB$ lấy một điểm $M$, trên đoạn $SC$ lấy một điểm $N$ ($M, N$ không trùng với các đầu mút).

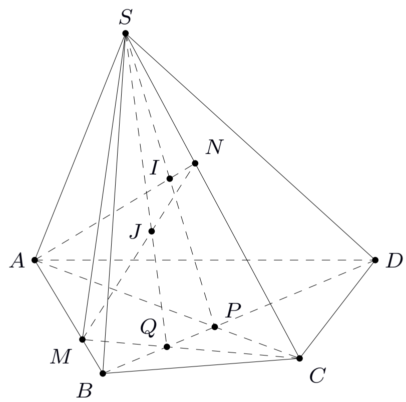
a) Tìm giao điểm của đường thẳng $AN$ với mặt phẳng $(SBD)$.

b) Tìm giao điểm của đường thẳng $MN$ với mặt phẳng $(SBD)$.

**Lời giải.**

a) **Tìm giao điểm của đường thẳng $AN$ với mặt phẳng $(SBD)$.**

- Chọn mặt phẳng phụ $(SAC) \supset AN$. Ta tìm giao tuyến của $(SAC)$ và $(SBD)$.
Trong $(ABCD)$ gọi $P = AC \cap BD$. Suy ra $(SAC) \cap (SBD) = SP$.
- Trong $(SAC)$ gọi $I = AN \cap SP$.
$\begin{cases} I \in AN \\ I \in SP, SP \subset (SBD) \end{cases} \Rightarrow I = AN \cap (SBD)$.




b) **Tìm giao điểm của đường thẳng $MN$ với mặt phẳng $(SBD)$.**

- Chọn mặt phẳng phụ $(SMC) \supset MN$. Ta tìm giao tuyến của $(SMC)$ và $(SBD)$.
Trong $(ABCD)$ gọi $Q = MC \cap BD$. Suy ra $(SMC) \cap (SBD) = SQ$.
- Trong $(SMC)$ gọi $J = MN \cap SQ$.
$\begin{cases} J \in MN \\ J \in SQ, SQ \subset (SBD) \end{cases} \Rightarrow J = MN \cap (SBD)$.

## 4 Chứng minh ba điểm thẳng hàng

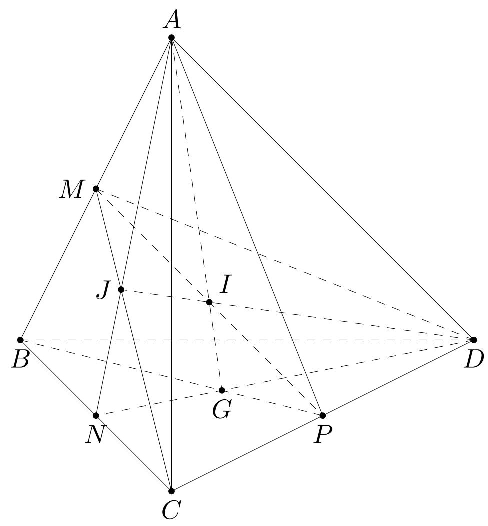
*Muốn chứng minh ba điểm A, B, C thẳng hàng, ta chứng minh ba điểm đó lần lượt thuộc hai mặt phẳng phân biệt $(\alpha)$ và $(\beta)$, nghĩa là chúng cùng nằm trên một đường giao tuyến.*

**VÍ DỤ 1.** Cho tứ diện $ABCD$ có $G$ là trọng tâm tam giác $BCD$, Gọi $M$, $N$, $P$ lần lượt là trung điểm của $AB$, $BC$, $CD$.

a) Tìm giao tuyến của $(AND)$ và $(ABP)$.

b) Gọi $I = AG \cap MP$, $J = CM \cap AN$. Chứng minh $D$, $I$, $J$ thẳng hàng.

**Lời giải.**




a) Tìm giao tuyến của $(AND)$ và $(ABP)$.
$A \in (ABP) \cap (ADN)$. (1)
Ta có $G = BP \cap DN$, có $\begin{cases} G \in BP,\ BP \subset (ABP) \\ G \in DN,\ DN \subset (ADN) \end{cases} \Rightarrow G \in (ABP) \cap (ADN)$. (2)
Từ (1) và (2) ta có $AG = (ABP) \cap (ADN)$.

b) Chứng minh $D$, $I$, $J$ thẳng hàng.
$I = AG \cap MP$, $AG \subset (ADG)$, $MP \subset (DMN) \Rightarrow I \in (ADG) \cap (DMN)$. (3)
$J = CM \cap AN$, $AN \subset (ADG)$, $CM \subset (DMN) \Rightarrow J \in (ADG) \cap (DMN)$. (4)
$D \in (ADG) \cap (DMN)$. (5)
Từ (3), (4), (5) suy ra ba điểm $D$, $I$, $J$ thuộc giao tuyến của hai mặt phẳng $(ADG)$ và $(DMN)$.
Vậy ba điểm $D$, $I$, $J$ thẳng hàng.

**VÍ DỤ 2.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi $O$ là giao điểm của $AC$ và $BD$ ; $M, N$ lần lượt là trung điểm của $SB, SD$; $P$ thuộc đoạn $SC$ và không là trung điểm của $SC$.

a) Tìm giao điểm $E$ của đường thẳng $SO$ và mặt phẳng $(MNP)$.

b) Tìm giao điểm $Q$ của đường thẳng $SA$ và mặt phẳng $(MNP)$.

c) Gọi $I, J, K$ lần lượt là giao điểm của $QM$ và $AB$, $QP$ và $AC$, $QN$ và $AD$. Chứng minh rằng $I, J, K$ thẳng hàng.

## 5 Vận dụng thực tiễn

**VÍ DỤ 1.** Giải thích tại sao ghế bốn chân có thể bị khập khiễng còn ghế ba chân thì không.

**Lời giải.**

Dựa vào tính chất được thừa nhận của hình học không gian, có một và chỉ một mặt phẳng đi qua ba điểm không thẳng hàng cho trước. Do đó qua bốn điểm có thể không cùng nằm trên một phẳng phẳng.

**VÍ DỤ 2.** Giải thích tại sao chân máy ảnh có thể đặt ở hầu hết các loại hình mà vẫn đứng vững.

**Lời giải.**

Dựa vào tính chất được thừa nhận của hình học không gian, có một và chỉ một mặt phẳng đi qua ba điểm không thẳng hàng cho trước. Do đó giá đỡ ba chân của máy ảnh khi đặt trên mặt đất không bị cập kênh.

**VÍ DỤ 3.** Hãy giải thích tại sao phần giao nhau giữa 2 vách tường nhà luôn là 1 đường thẳng

**Lời giải.**

Do mỗi vách tường nhà là 1 phần của mặt phẳng nên phần giao nhau là giao tuyến của của 2 mặt phẳng tức là 1 đường thẳng.

**VÍ DỤ 4.** Hãy giải thích vì sao khi gấp đôi một tờ giấy thì nếp gấp luôn là 1 đường thẳng

**Lời giải.**

Do khi gấp đôi tờ giấy thì mỗi phần của tờ giấy trở thành một phần của mặt phẳng khác nhau và nếp gấp là phần chung tức là giao tuyến của 2 mặt phẳng đó.

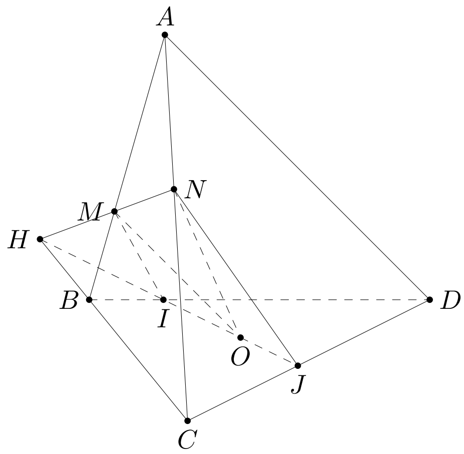
## C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

**BÀI 1.** Cho tứ diện $ABCD$. Trên $AB$, $AC$ lấy 2 điểm $M$, $N$ sao cho $MN$ không song song $BC$. Gọi $O$ là một điểm trong tam giác $BCD$.

a) Tìm giao tuyến của $(OMN)$ và $(BCD)$.

b) Tìm giao điểm của $DC$, $BD$ với $(OMN)$.

**Lời giải.**




a) Tìm $(OMN) \cap (BCD)$. Trong $(ABC)$, gọi $H = MN \cap BC$.
Ta có $\begin{cases} H \in MN \subset (MNO) \\ H \in BC \subset (BCD) \end{cases} \Rightarrow H \in (BCD) \cap (MNO)$ (1).
Mặt khác $O \in (BCD) \cap (MNO)$ (2).
Từ (1) và (2) suy ra $(BCD) \cap (MNO) = HO$.

b) Tìm $DC \cap (OMN)$ và $BD \cap (OMN)$.
Trong $(BCD)$, gọi $I = BD \cap HO$.
Ta có $\begin{cases} I \in BD \\ I \in HO \subset (MNO) \end{cases} \Rightarrow I = BD \cap (MNO)$.
Trong $(BCD)$, gọi $J = CD \cap HO$.
Ta có $\begin{cases} J \in CD \\ J \in HO \subset (MNO) \end{cases} \Rightarrow J = CD \cap (MNO)$.

**BÀI 2.** Cho hình chóp $S.ABCD$. Gọi $O$ là giao điểm của $AC$ và $BD$. $M$, $N$, $P$ lần lượt là các điểm trên $SA$, $SB$, $SD$.

a) Tìm giao điểm $I$ của $SO$ với mặt phẳng $(MNP)$.

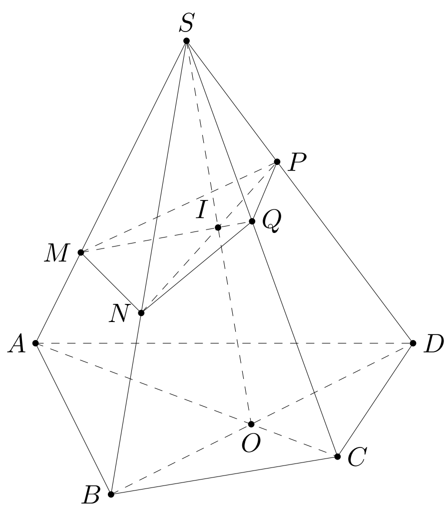
b) Tìm giao điểm $Q$ của $SC$ với mặt phẳng $(MNP)$.

**Lời giải.**

a) Tìm giao điểm $I$ của $SO$ với mặt phẳng $(MNP)$.

Trong mặt phẳng $(SBD)$, gọi $I = SO \cap NP$, có

$$\begin{cases} I \in SO \\ I \in NP \subset (MNP) \end{cases} \Rightarrow I = SO \cap (MNP).$$




b) Tìm giao điểm $Q$ của $SC$ với mặt phẳng $(MNP)$.
• Chọn mặt phẳng phụ $(SAC) \supset SC$.
• Tìm giao tuyến của $(SAC)$ và $(MNP)$.
Ta có $\begin{cases} M \in (MNP) \\ M \in SA,\ SA \subset (SAC) \end{cases} \Rightarrow M \in (MNP) \cap (SAC)$. (1)
Và $\begin{cases} I \in SP,\ SP \subset (MNP) \\ I \in SO,\ SO \subset (SAC) \end{cases} \Rightarrow I \in (MNP) \cap (SAC)$. (2)

Từ (1) và (2) có $(MNP) \cap (SAC) = MI$.

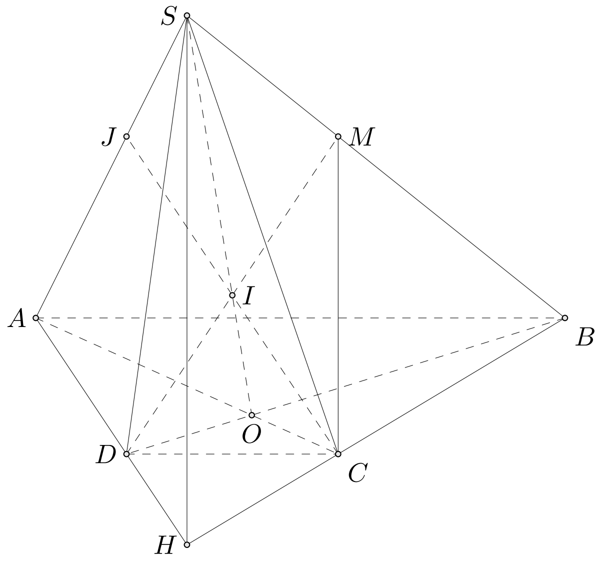
- Trong mặt phẳng $(SAC)$ gọi $Q = SC \cap MI$, có $\begin{cases} Q \in SC \\ Q \in MI,\ MI \subset (MNP) \end{cases} \Rightarrow Q = SC \cap (MNP)$.

**BÀI 3.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang với $AB$ song song với $CD$. O là giao điểm của hai đường chéo, $M$ thuộc $SB$.

a) Xác định giao tuyến của các cặp mặt phẳng: $(SAC)$ và $(SBD)$; $(SAD)$ và $(SBC)$.

b) Tìm giao điểm $SO \cap (MCD)$; $SA \cap (MCD)$.

**Lời giải.**




a) Xác định giao tuyến của $(SAC)$ và $(SBD)$.
Ta có $S$ là điểm chung thứ nhất và $O$ là điểm chung thứ hai của hai mặt phẳng $(SAC)$ và $(SBD)$.
Vậy $(SAC) \cap (SBD) = SO$.
Xác định giao tuyến của $(SAD)$ và $(SBC)$.
Ta có $S \in (SAD) \cap (SBC)$. (1)
Trong mặt phẳng $(ABCD)$ gọi $H = AD \cap BC$, có $\begin{cases} H \in AD, AD \subset (SAD) \\ H \in BC, BC \subset (SBC) \end{cases} \Rightarrow H \in (SAD) \cap (SBC)$. (2)
Từ (1) và (2) suy ra $(SAD) \cap (SBC) = SH$.

b) Tìm giao điểm $SO \cap (MCD)$; $SA \cap (MCD)$.
Gọi $I = SO \cap DM$ (vì $SO, DM \subset (SBD)$).
Ta có $\begin{cases} I \in SO \\ I \in DM, DM \subset (MCD) \end{cases} \Rightarrow I = SO \cap (MCD)$.
Gọi $J = SA \cap CI$ (vì $SA, CI \subset (SAC)$).
Ta có $\begin{cases} J \in SA \\ J \in CI, CI \subset (MCD) \end{cases} \Rightarrow J = SA \cap (MCD)$.

**BÀI 4.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm $O$. Gọi $M$, $N$ lần lượt là trung điểm của $AB$, $SC$.

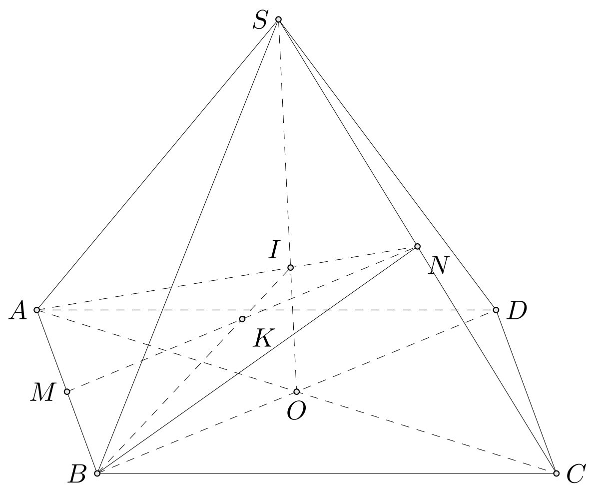
a) Tìm $I = AN \cap (SBD)$.

b) Tìm $K = MN \cap (SBD)$.

c) Tính tỉ số $\dfrac{KM}{KN}$.

d) Chứng minh $B, I, K$ thẳng hàng. Tính $\dfrac{IB}{IK}$.

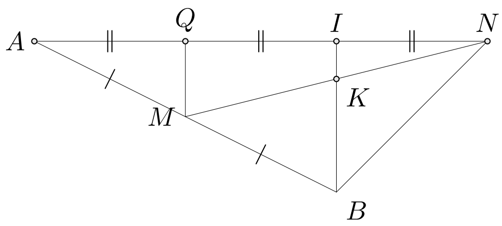
**Lời giải.**




a) Tìm $I = AN \cap (SBD)$.
Trước hết ta tìm giao tuyến của mp$(SAC)$ và mp$(SBD)$. Ta có $S \in (SAC) \cap (SBD)$. (1)
Có $\begin{cases} O \in AC, AC \subset (SAC) \\ O \in BD, BD \subset (SBD) \end{cases} \Rightarrow O \in (SAC) \cap (SBD)$. (2)
Từ (1) và (2) suy ra $SO = (SAC) \cap (SBD)$.
Gọi $I = SO \cap AN$ (vì $SO, AN \subset (SAC)$). Suy ra $I = AN \cap (SBD)$.

b) Tìm $K = MN \cap (SBD)$.
Chọn mp$(ABN)$ chứa $MN$. Tìm giao tuyến của mp$(ABN)$ và mp$(SBD)$.
Có $\begin{cases} I \in SO, SO \subset (SBD) \\ I \in AN, AN \subset (ABN) \end{cases} \Rightarrow I \in (ABN) \cap (SBD)$. (3)
Có $B \in (ABN) \cap (SBD)$. (4)
Từ (3) và (4) suy ra $BI = (ABN) \cap (SBD)$; $K = BI \cap MN$. Khi đó $K = MN \cap (SBD)$.

c) Tính tỉ số $\dfrac{KM}{KN}$.




Gọi $Q$ là trung điểm của $AI$. Ta có $AQ = QI = IN$ (vì $I$ là trọng tâm tam giác $SAC$). Có $MQ$ là đường trung bình của tam giác $ABI$. Suy ra $MQ \parallel BI$. Ta có $IK$ là đường trung bình tam giác $MNQ$. Vậy $K$ là trung điểm $MN$. Suy ra $\dfrac{KM}{KN} = 1$.

d) Chứng minh $B, I, K$ thẳng hàng. Tính tỉ số $\dfrac{IB}{IK}$.
Theo cách tìm giao tuyến của câu 2 thì ba điểm $B$, $K$, $I$ thẳng hàng.
Trong tam giác $ABI$, có $QM = \dfrac{1}{2}BI \Rightarrow IB = 4IK \Leftrightarrow \dfrac{IB}{IK} = 4$.

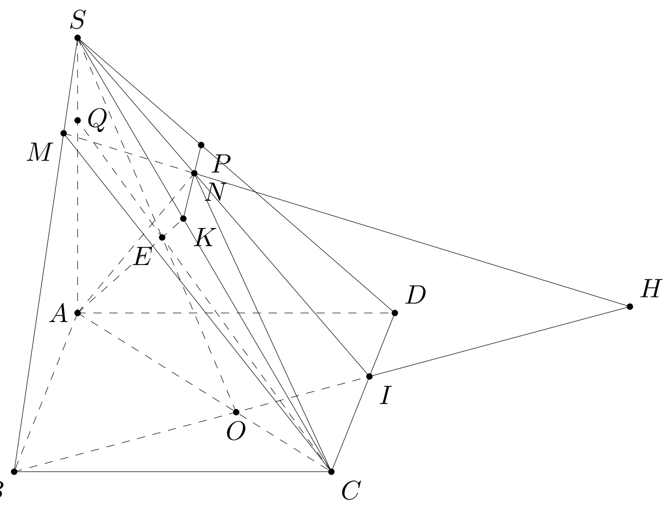
**BÀI 5.** Cho hình chóp $S.ABCD$ với đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi $M$ là điểm bất kỳ thuộc $SB$, $N$ thuộc miền trong tam giác $S\Delta SCD$.

a) Tìm giao điểm của $MN$ và mặt phẳng $(ABCD)$

b) Tìm $SC \cap (AMN)$ và $SD \cap (AMN)$

c) Tìm $SA \cap (CMN)$

**Lời giải.**




a) Tìm giao điểm của $MN$ và $(ABCD)$.
Gọi $I = SN \cap CD$ (vì $SN,\ CD \subset (SCD)$). Chọn mặt phẳng $(SBI)$ chứa $MN$. Ta có $B$ và $I$ là hai điểm chung của hai mặt phẳng $(SBI)$ và $(ABCD)$. Vậy $(SBI) \cap (ABCD) = BI$.
Gọi $H = MN \cap BI$ (vì $MN,\ BI \subset (SBI)$) Ta có $\begin{cases} H \in MN \\ H \in BI,\ BI \subset (ABCD) \end{cases} \Rightarrow H = MN \cap (ABCD)$

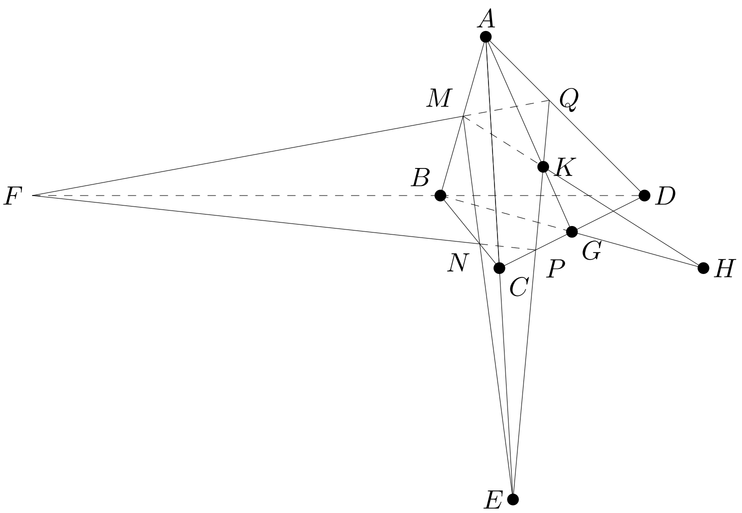
b) Tìm $SC \cap (MAN)$.
Đầu tiên ta tìm giao tuyến của mặt phẳng $(SAC)$ và $(SBI)$. Gọi $O = AC \cap BI$ (vì $AC,\ BI \subset (ABCD)$).
Ta có $S$ và $O$ là hai điểm chung của hai mặt phẳng $(SAC)$ và $(SBI)$.
Vậy $SO = (SAC) \cap (SBI)$.
Gọi $E = SO \cap MN$ (vì $SO,\ MN \subset (SBI)$). Chọn mặt phẳng $(SAC)$ chứa $SC$. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng $(SAC)$ và $(AMN)$

c)

**BÀI 6.** Cho tứ diện $ABCD$ . Gọi $M$ là trung điểm $AB$, $K$ là trọng tâm của tam giác $ACD$.

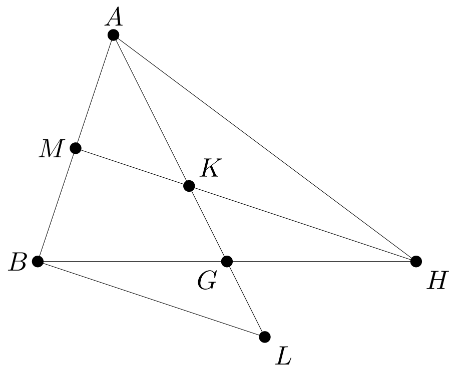
a) Xác định giao tuyến của $(AKM)$ và $(BCD)$.
b) Tìm giao điểm $H$ của $MK$ và mp$(BCD)$. Chứng minh $K$ là trọng tâm của tam giác $ABH$.
c) Trên $BC$ lấy điểm $N$. Tìm giao điểm $P, Q$ của $CD$, $AD$ với mp$(MNK)$.

**Lời giải.**




a) **Xác định giao tuyến của $(AKM)$ và $(BCD)$.**
Gọi $G = AK \cap CD$ (vì $AK, CD \subset (ACD)$).
Ta có $\begin{cases} G \in AK, AK \subset (AKM) \\ G \in CD, CD \subset (BCD) \end{cases}$
$\Rightarrow G \in (AKM) \cap (BCD)$. (1)
$B \in (ABG) \cap (BCD)$. (2)
Từ (1) và (2) suy ra $(ABG) \cap (BCD) = BG$.

b) **Tìm giao điểm $H$ của $MK$ và mp$(BCD)$.**
Trong mp$(ABG)$, gọi $H = MK \cap BG$,
có $\begin{cases} H \in MK \\ H \in BG, BG \subset (BCD) \end{cases}$
$\Rightarrow H = MK \cap (BCD)$.
**Chứng minh $K$ là trọng tâm của tam giác $ABH$.**




Vì $K$ là trọng tâm của tam giác $ACD$ nên $K$ chia đoạn $AG$ thành ba phần bằng nhau.
Gọi $L$ là điểm đối xứng của $K$ qua $G$ thì $K$ là trung điểm của $AL$.
Trong $\triangle ABL$, $MK$ là đường trung bình của tam giác.
Ta có $\triangle BGL = \triangle HGK$(g.c.g) $\Rightarrow BG = HG$.
Vậy $K$ là trọng tâm của tam giác $ABH$.

c) **Tìm giao điểm $P, Q$ của $CD, AD$ với mp$(MNK)$.**
Trong mp$(ABC)$ gọi $E = MN \cap AC$. Trong mp$(ACD)$ đường thẳng $EK$ cắt $CD$ và $AD$ lần lượt tại $P, Q$, thì $P$ và $Q$ chính là giao điểm của $CD$ và $AD$ với mp$(MNK)$.

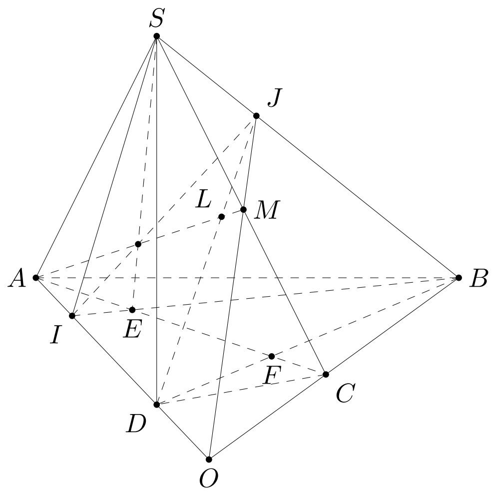
**BÀI 7.** Cho tứ giác $ABCD$ và $S \notin (ABCD)$. Gọi $I$, $J$ là hai điểm trên $AD$ và $SB$, $AD$ cắt $BC$ tại $O$ và $OJ$ cắt $SC$ tại $M$.

a) Tìm giao điểm $K = IJ \cap (SAC)$.

b) Xác định giao điểm $L = DJ \cap (SAC)$.

c) Chứng minh $A$, $K$, $L$, $M$ thẳng hàng.

**Lời giải.**




a) Tìm giao điểm $K = IJ \cap (SAC)$.
Chọn mặt phẳng phụ $(SIB)$ chứa $IJ$.
Tìm giao tuyến của $(SIB)$ và $(SAC)$.
có $S \in (SBI) \cap (SAC)$ (1)
Trong mặt phẳng $(ABCD)$ gọi $E = AC \cap BI$, ta có:
$\begin{cases} E \in AC,\ AC \subset (SAC) \\ E \in BI,\ BI \subset (SBI) \end{cases} \Rightarrow E = (SAC) \cap (SBI)$ (2)
Từ (1) và (2) suy ra $SE = (SBI) \cap (SAC)$.

Trong mặt phẳng $(SIB)$, gọi $K = IJ \cap SE$.
Ta có $\begin{cases} K \in IJ \\ K \in SE, SE \subset (SAC) \end{cases} \Rightarrow K = IJ \cap (SAC)$

b) Xác định giao điểm $L = DJ \cap (SAC)$.
Chọn mặt phẳng phụ $(SBD)$ chứa $DJ$. Tìm giao tuyến của $(SBD)$ với $(SAC)$.
Ta có $S \in (SBD) \cap (SAC)$ (3)
Trong mặt phẳng $(ABCD)$ gọi $F = AC \subset BD$. Suy ra $F$ là điểm chung thứ hai của hai mặt phẳng $(SBD)$ và $(SAC)$. (4)
Từ (3) và (4) suy ra $SF = (SBD) \subset (SAC)$. Trong mặt phẳng $(SBD)$ gọi $L = DJ \cap SF$.
Vậy $\begin{cases} L \in DJ \\ L \in SF,\ SF \subset (SAC) \end{cases} \Rightarrow L = DJ \cap (SAC)$

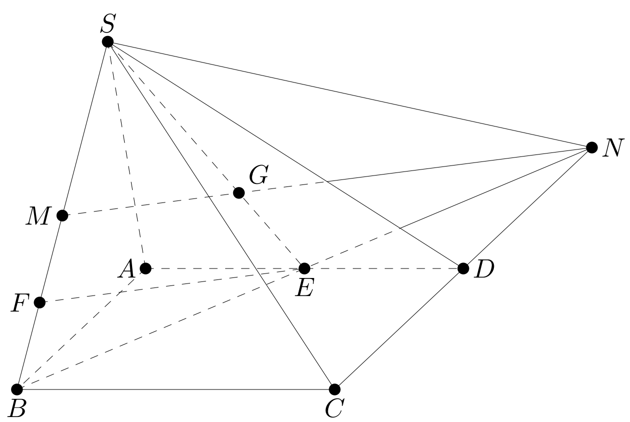
c) Chứng minh $A$, $K$, $L$, $M$ thẳng hàng.
Ta có $A \in (SAC) \cap (AJO)$ (3)
và $\begin{cases} K \in IJ,\ IJ \subset (AJO) \\ K \in SE,\ SE \subset (SAC) \end{cases} \Rightarrow K \in (SAC) \cap (AJO)$. (4)
có $\begin{cases} L \in DJ,\ DJ \subset (AJO) \\ L \in SF,\ SF \subset (SAC) \end{cases} \Rightarrow L \in (SAC) \cap (AJO)$ (5)
có $\begin{cases} M \in JO,\ JO \subset (AJO) \\ M \in SC,\ SC \subset (SAC) \end{cases} \Rightarrow M \in (SAC) \cap (AJO)$ (6)
Từ (3), (4), (5) và (6) suy ra bốn điểm $A$, $K$, $L$, $M$ cùng thuộc giao tuyến của hai mặt phẳng $(SAC)$ và $(AJO)$. Vậy $A$, $K$, $L$, $M$ thẳng hàng.

**BÀI 8.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ và hình bình hành. Gọi $G$ là trọng tâm của tam giác $SAD$, $M$ là trung điểm của $SB$.

a) Tìm giao điểm $N$ của $MG$ và mặt phẳng $(ABCD)$.

b) Chứng minh ba điểm $C, D, N$ thẳng hàng và $D$ là trung điểm của $CN$.

**Lời giải.**




a) Trong mặt phẳng chứa $MG$, gọi $N$ là giao điểm của $MG$ và $BE$. Vì $BE$ thuộc mặt phẳng $(ABCD)$, nên $N$ thuộc $(ABCD)$. Vậy $N$ là giao điểm của $MG$ và mặt phẳng $(ABCD)$.

b) Trong mặt phẳng $(SBN)$, kẻ $EF \parallel MN$ ($F$ thuộc $SB$).
Trong tam giác $SEF$ có $MG \parallel EF$ nên

$$\frac{SM}{MF} = \frac{SG}{GE} = 2 \Rightarrow SM = 2MF \Leftrightarrow BM = 2MF.$$

Vậy $F$ là trung điểm của $BM$.

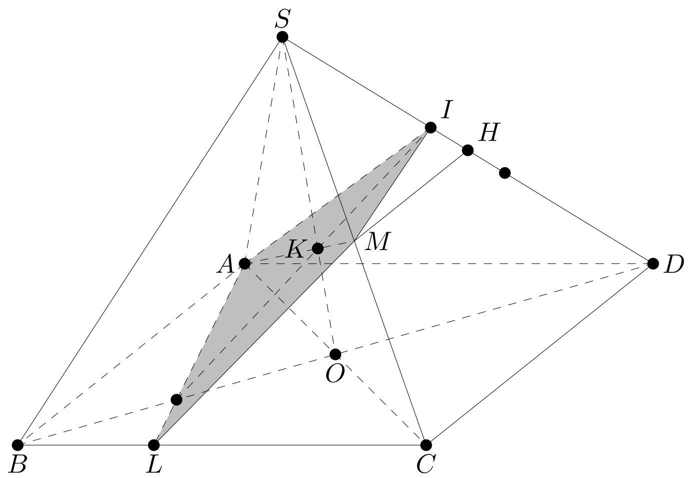
Trong $\triangle BMN$ có $EF \parallel MN$ nên $\dfrac{BF}{FM} = \dfrac{BE}{EN} = 1 \Rightarrow BE = EN$. Vậy $E$ là trung điểm của $BN$.
Dễ dàng chứng minh $\triangle AEB = \triangle DEN$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{ABE} = \widehat{END}$.
Hai góc này bằng nhau theo trường hợp so le trong nên $AB \parallel DN$, mà $AB \parallel CD$ nên $C, D, N$ thẳng hàng.
$ED$ là đường trung bình của tam giác $NBC$ suy ra $D$ là trung điểm của $CN$.

**BÀI 9.** Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm $O$. Gọi $M$ là trung điểm của $SC$.

a) Xác định giao tuyến của $(ABM)$ và $(SCD)$.

b) Gọi $N$ là trung điểm của $BO$. Xác định giao điểm $I$ của $(AMN)$ với $SD$. Chứng minh $\dfrac{SI}{ID} = \dfrac{2}{3}$.

**Lời giải.**




a) Xác định giao tuyến của $(ABM)$ và $(SCD)$.

Ta có $\begin{cases} M \in (ABM) \cap (SCD) \\ AB \parallel CD \\ AB \subset (ABM), CD \subset (SCD) \end{cases} \Rightarrow (ABM) \cap (SCD) = MH$ ($MH \parallel AB \parallel CD$.)

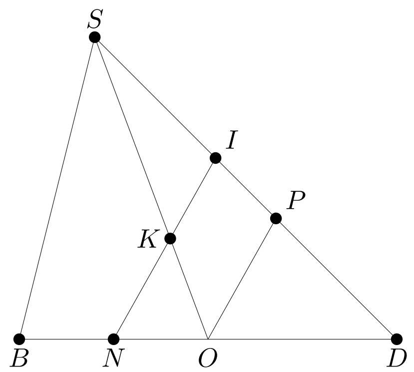
b) Xác định giao điểm $I$ của $(AMN)$ và $SD$ Ta có $(SAC) \cap (SBD) = SO$. Gọi $K = AM \cap SO$ $(AM, SO \subset (SAC))$.

**Tìm giao tuyến** $(AMN)$ **và** $(SBD)$**.**

Ta có $\begin{cases} N \in (AMN) \\ N \in BD, BD \subset (SBD) \end{cases} \Rightarrow N \in (AMN) \cap (SBD)$. (1)

$\begin{cases} K \in AM, AM \subset (AMN) \\ K \in BD, BD \subset (SBD) \end{cases} \Rightarrow K \in (AMN) \cap (SBD)$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $(AMN) \cap (SBD) = NK$. $NK$ cắt $SD$ tại điểm $I$, thì $I$ chính là giao điểm của $(AMN)$ và $SD$.




Trong mặt phẳng $(SBD)$, từ $O$ dựng $OP \parallel NI (P \in SD)$.

Trong $\triangle DNI$, có $OP \parallel DI$ nên có $\dfrac{DO}{ON} = \dfrac{DP}{PI} = \dfrac{2}{1} = 2 \Rightarrow DP = 2PI$. (3)

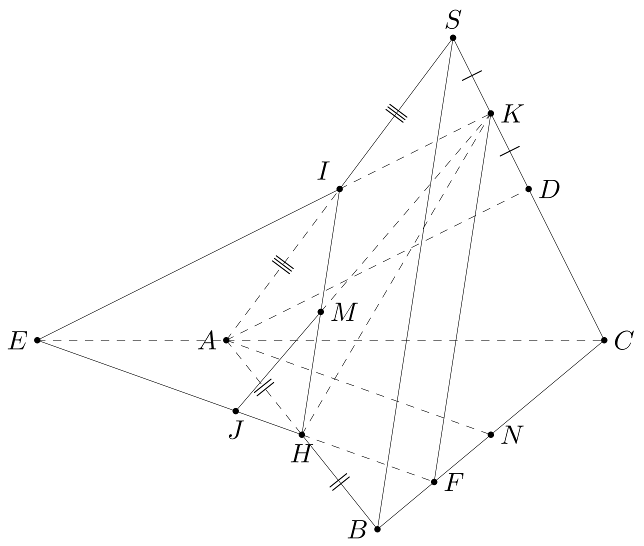
Trong $\triangle SOP$ có $KI \parallel OP$ nên có $\dfrac{SK}{KO} = \dfrac{SI}{PI} = \dfrac{2}{1} = 2 \Rightarrow SI = 2PI$. (4) $(K)$ là trọng tâm của $\triangle SAC$. Từ (3) và (4) suy ra $\dfrac{IS}{ID} = \dfrac{2}{3}$.

**BÀI 10.** Cho tứ diện $SABC$. Gọi $I$, $H$ lần lượt là trung điểm của $SA$, $AB$. Trên cạnh $SC$ lấy điểm $K$ sao cho $CK = 3SK$.

a) Tìm giao điểm $F$ của $BC$ với mặt phẳng $(IHK)$. Tính tỉ số $\dfrac{FB}{FC}$.

b) Gọi $M$ là trung điểm của đoạn thẳng $IH$. Tìm giao điểm của $KM$ và mặt phẳng $(ABC)$.

**Lời giải.**




a) Tìm giao điểm $F$ của $BC$ với mặt phẳng $(IHK)$. Tính tỉ số $\dfrac{FB}{FC}$.

• Ta tìm giao tuyến của $(ABC)$ và $(IHK)$ trước.
Gọi $E = AC \cap KI$ $(AC, KI \subset (SAC))$, ta có
$\begin{cases} E \in AC,\ AC \subset (ABC) \\ E \in KI,\ KI \subset (IHK) \end{cases} \Rightarrow E \in (ABC) \cap (IHK).$ (1)
$\begin{cases} H \in (IHK) \\ H \in AB,\ AB \subset (ABC) \end{cases} \Rightarrow H \in (ABC) \cap (IHK).$ (2)
Từ (1) và (2) suy ra $EH = (ABC) \cap (IHK)$.
• Gọi $F = EH \cap BC$ $(EH, BC \subset (ABC))$, có

$$\begin{cases} F \in BC \\ F \in EH,\ EH \subset (IHK) \end{cases} \Rightarrow F = BC \cap (IHK).$$

Gọi $D$ là trung điểm của $SC$, ta có $IK$ là đường trung bình của $\triangle SAD$.
Trong $\triangle CEK$ có $\dfrac{CA}{AE} = \dfrac{CD}{DK} = 2 \Rightarrow CA = 2CK$.
Trong mặt phẳng $(ABC)$ kẻ $AN \parallel EF$ $(N \in BC)$. Ta có

$$HF \parallel AN \Rightarrow \frac{BH}{HA} = \frac{BF}{FN} = 1 \Rightarrow BF = FN.$$
$$EF \parallel AN \Rightarrow \frac{CA}{AE} = \frac{CN}{NF} = 2 \Rightarrow CN = 2NF.$$

Do đó $\dfrac{FB}{FC} = \dfrac{FB}{FN + NC} = \dfrac{FB}{3FB} = \dfrac{1}{3}$.

b) Tìm giao điểm của $KM$ và mặt phẳng $(ABC)$.
Ta có $KM \subset (IHK)$. Gọi $J = KM \cap EH$ $(EH, KM \subset (IHK))$.
Ta có $\begin{cases} J \in KM \\ J \in EH,\ EH \subset (ABC) \end{cases} \Rightarrow J = KM \cap (ABC)$.

## D. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

**CÂU 1.** Cho tứ giác $ABCD$. Có thể xác định được bao nhiêu mặt phẳng chứa tất cả các đỉnh của tứ giác $ABCD$?

(A) 1. (B) 3. (C) 0. (D) 2.

**Lời giải.**

4 điểm $A, B, C, D$ tạo thành 1 tứ giác, khi đó 4 điểm $A, B, C, D$ đã đồng phẳng và tạo thành 1 mặt phẳng duy nhất là mặt phẳng $(ABCD)$.

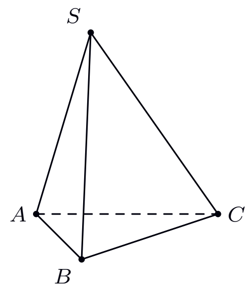
Chọn đáp án (A) ............................................................ □

**CÂU 2.** Hình chóp tam giác có số cạnh là

(A) 6. (B) 4. (C) 5. (D) 3.

**Lời giải.**

Xét hình chóp tam giác $S.ABC$ có các cạnh là $SA$, $SB$, $SC$, $AB$, $BC$ và $CA$. Vậy hình chóp có số cạnh là 6.




Chọn đáp án (A) ..........

**CÂU 3.** Hình chóp lục giác có bao nhiêu mặt?

(A) 10. (B) 6. (C) 8. (D) 7.

**Lời giải.**

Hình chóp có 7 mặt trong đó có 6 mặt bên và 1 mặt đáy.

Chọn đáp án (D) ..........

**CÂU 4.** Các yếu tố nào sau đây xác định một mặt phẳng duy nhất?

(A) Một điểm và một đường thẳng. (B) Hai đường thẳng cắt nhau.

(C) Bốn điểm phân biệt. (D) Ba điểm phân biệt.

**Lời giải.**

- Mệnh đề "Ba điểm phân biệt" sai. Trong trường hợp 3 điểm phân biệt thẳng hàng thì sẽ có vô số mặt phẳng chứa 3 điểm thẳng hàng đã cho.

- Mệnh đề "Một điểm và một đường thẳng" sai. Trong trường hợp điểm thuộc đường thẳng đã cho, khi đó ta chỉ có 1 đường thẳng, có vô số mặt phẳng đi qua đường thẳng đó.

- Mệnh đề "Bốn điểm phân biệt" sai. Trong trường hợp 4 điểm phân biệt thẳng hàng thì có vô số mặt phẳng đi qua 4 điểm đó hoặc trong trường hợp 4 điểm mặt phẳng không đồng phẳng thì sẽ không tạo được mặt phẳng nào đi qua cả 4 điểm.

Chọn đáp án (B) ..........

**CÂU 5.** Khẳng định nào sau đây là **sai**?

(A) Nếu hai mặt phẳng phân biệt có một điểm chung thì chúng có một đường thẳng chung duy nhất.

(B) Nếu hai mặt phẳng có một điểm chung thì chúng có vô số điểm chung khác nữa.

(C) Nếu ba điểm phân biệt cùng thuộc hai mặt phẳng phân biệt thì chúng thẳng hàng.

(D) Nếu hai mặt phẳng có một điểm chung thì chúng có một đường thẳng chung duy nhất.

**Lời giải.**

Hai mặt phẳng có một điểm chung thì có thể trùng nhau, khi đó chúng có vô số đường thẳng chung.

Chọn đáp án (D) ..........

**CÂU 6.** Cho 5 điểm $A, B, C, D, E$ trong đó không có 4 điểm nào đồng phẳng. Hỏi có bao nhiêu mặt phẳng tạo bởi 3 trong 5 điểm đã cho?

(A) 10. (B) 14. (C) 12. (D) 8.

**Lời giải.**

Với 3 điểm phân biệt không thẳng hàng, ta luôn tạo được 1 mặt phẳng xác định. Ta có $\mathrm{C}_5^3$ cách chọn 3 điểm trong 5 điểm đã cho để tạo được 1 mặt phẳng xác định. Vậy số mặt phẳng tạo được là 10.

Chọn đáp án (A) ..........

**CÂU 7.** Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

(A) Qua 3 điểm phân biệt bất kì có duy nhất một mặt phẳng.

(B) Qua 4 điểm phân biệt bất kì có duy nhất một mặt phẳng.

(C) Qua 2 điểm phân biệt có duy nhất một mặt phẳng.

(D) Qua 3 điểm không thẳng hàng có duy nhất một mặt phẳng.

**Lời giải.**

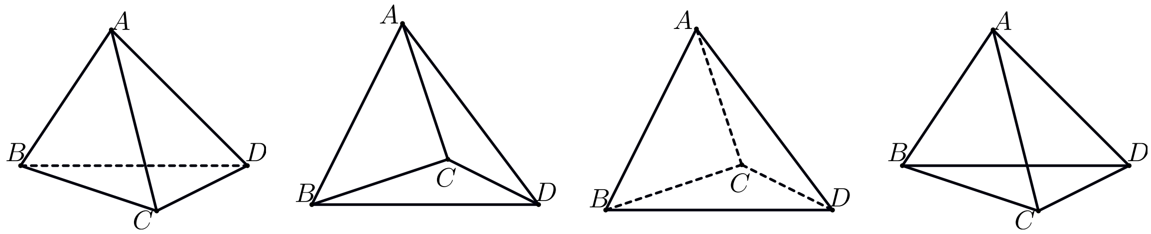
- Mệnh đề "Qua 2 điểm phân biệt có duy nhất một mặt phẳng" sai. Vì qua 2 điểm phân biệt, tạo được 1 đường thẳng, khi đó chưa đủ điều kiện để lập một mặt phẳng xác định. Có vô số mặt phẳng đi qua 2 điểm đã cho.

- Mệnh đề "Qua 3 điểm phân biệt bất kì có duy nhất một mặt phẳng" sai. Vì trong trường hợp 3 điểm phân biệt thẳng hàng thì chỉ tạo được đường thẳng, khi đó có vô số mặt phẳng đi qua 3 điểm phân biệt thẳng hàng.

- Mệnh đề "Qua 4 điểm phân biệt bất kì có duy nhất một mặt phẳng" sai. Vì trong trường hợp 4 điểm phân biệt thẳng hàng thì có vô số mặt phẳng đi qua 4 điểm đó hoặc trong trường hợp 4 điểm mặt phẳng không đồng phẳng thì sẽ tạo không tạo được mặt phẳng nào đi qua cả 4 điểm.

Chọn đáp án D ........................................................................................ □

**CÂU 8.** Cho các hình vẽ sau:




Hình (1) Hình (2) Hình (3) Hình (4)

Trong các hình trên, những hình nào biểu diễn cho tứ diện?

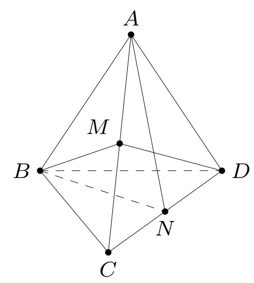
**A** Hình (1) và hình (2).

**B** Hình (1), hình (2) và hình (3).

**C** Hình (1) và hình (3).

**D** Hình (1), hình (3) và hình (4).

**CÂU 9.** Cho tứ diện $ABCD$. Gọi $M, N$ lần lượt là trung điểm của $AC, CD$. Giao tuyến của hai mặt phẳng $(MBD)$ và $(ABN)$ là



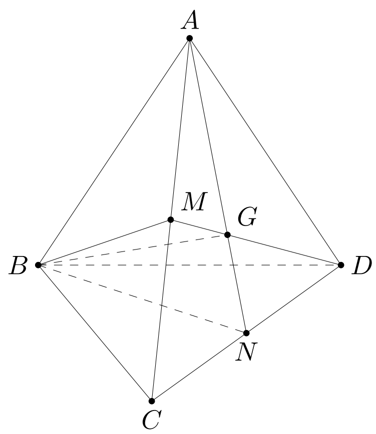

**A** đường thẳng $BG$ ($G$ là trọng tâm tam giác $ACD$).

**B** đường thẳng $AH$ ($H$ là trực tâm tam giác $ACD$).

**C** đường thẳng $MN$.

**D** đường thẳng $AM$.

**Lời giải.**




- $B$ là điểm chung thứ nhất giữa hai mặt phẳng $(MBD)$ và $(ABN)$.
- Vì $M, N$ lần lượt là trung điểm của $AC, CD$ nên suy ra $AN, DM$ là hai trung tuyến của tam giác $ACD$.

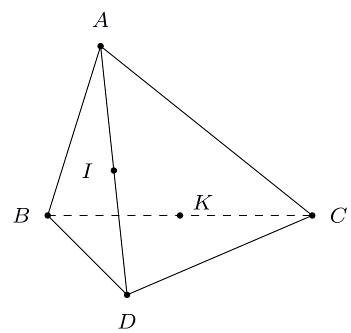
  Gọi $G = AN \cap DM \Rightarrow \begin{cases} G \in AN \subset (ABN) \Rightarrow G \in (ABN) \\ G \in DM \subset (MBD) \Rightarrow G \in (MBD) \end{cases}$

  $\Rightarrow G$ là điểm chung thứ hai giữa hai mặt phẳng $(MBD)$ và $(ABN)$.

Vậy $(ABN) \cap (MBD) = BG$.

Chọn đáp án A ........................................................................................ □

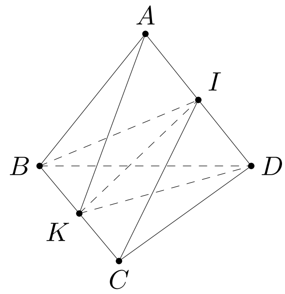
**CÂU 10.** Cho 4 điểm không đồng phẳng $A, B, C, D$. Gọi $I, K$ lần lượt là trung điểm của $AD$ và $BC$. Giao tuyến của $(IBC)$ và $(KAD)$ là




**A** $IK$. **B** $DK$. **C** $AK$. **D** $BC$.

**Lời giải.**

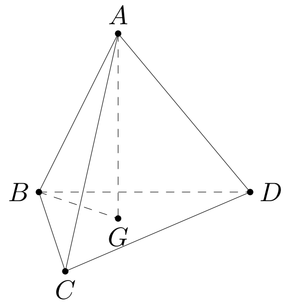
Điểm $K$ là trung điểm của $BC$ suy ra $K \in (IBC) \Rightarrow IK \subset (IBC)$.
Điểm $I$ là trung điểm của $AD$ suy ra $I \in (KAD) \Rightarrow IK \subset (KAD)$.
Vậy giao tuyến của hai mặt phẳng $(IBC)$ và $(KAD)$ là $IK$.




Chọn đáp án (A) ........................................................................ □

**CÂU 11.** Cho tứ diện $ABCD$. Gọi $G$ là trọng tâm của tam giác $BCD$. Giao tuyến của mặt phẳng $(ACD)$ và $(GAB)$ là

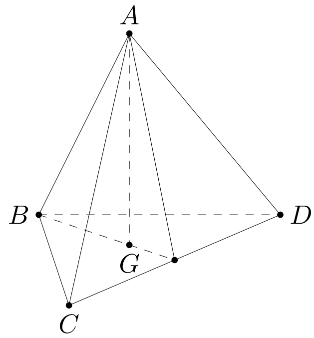
(A) $AH$ ($H$ là hình chiếu của $B$ trên $CD$).
(B) $AM$ ($M$ là trung điểm của $AB$).
(C) $AK$ ($K$ là hình chiếu của $C$ trên $BD$).
(D) $AN$ ($N$ là trung điểm của $CD$).




**Lời giải.**

- $A$ là điểm chung thứ nhất giữa hai mặt phẳng $(ACD)$ và $(GAB)$.
- Ta có $BG \cap CD = N$
$$\Rightarrow \begin{cases} N \in BG \subset (ABG) \Rightarrow N \in (ABG) \\ N \in CD \subset (ACD) \Rightarrow N \in (ACD). \end{cases}$$
$\Rightarrow N$ là điểm chung thứ hai giữa hai mặt phẳng $(ACD)$ và $(GAB)$.

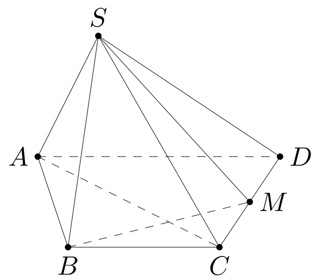
Vậy $(ABG) \cap (ACD) = AN$.




Chọn đáp án (D) ........................................................................ □

**CÂU 12.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang $ABCD\,(AD \parallel BC)$. Gọi $M$ là trung điểm $CD$. Giao tuyến của hai mặt phẳng $(MSB)$ và $(SAC)$ là

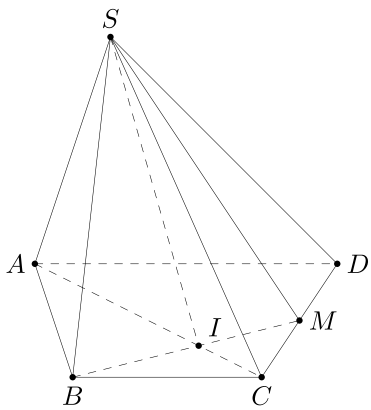
(A) $SJ$ ($J$ là giao điểm của $AM$ và $BD$).
(B) $SI$ ($I$ là giao điểm của $AC$ và $BM$).
(C) $SO$ ($O$ là giao điểm của $AC$ và $BD$).
(D) $SP$ ($P$ là giao điểm của $AB$ và $CD$).




**Lời giải.**

- $S$ là điểm chung thứ nhất giữa hai mặt phẳng $(MSB)$ và $(SAC)$.
- Ta có $\begin{cases} I \in BM \subset (SBM) \Rightarrow I \in (SBM) \\ I \in (AC) \in (SAC) \Rightarrow I \in (SAC) \end{cases}$
$\Rightarrow I$ là điểm chung thứ hai giữa hai mặt phẳng $(SAC)$ và $(SAC)$.

Vậy $(MSB) \cap (SAC) = SI$.




Chọn đáp án (B) ........................................................................ □

**CÂU 13.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang $ABCD\,(AB \parallel CD)$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

(A) Hình chóp $S.ABCD$ có 4 mặt bên.

(B) Giao tuyến của hai mặt phẳng $(SAC)$ và $(SBD)$ là $SO$ ($O$ là giao điểm của $AC$ và $BD$).

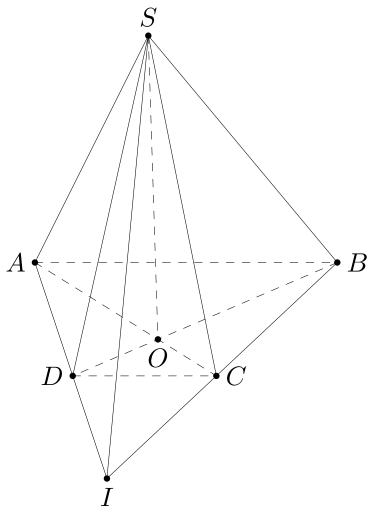
(C) Giao tuyến của hai mặt phẳng $(SAB)$ và $(SAD)$ là đường trung bình của $ABCD$ .

(D) Giao tuyến của hai mặt phẳng $(SAD)$ và $(SBC)$ là $SI$ ($I$ là giao điểm của $AD$ và $BC$).

**Lời giải.**

- Hình chóp $S.ABCD$ có 4 mặt bên: $(SAB)\,,(SBC)\,,(SCD)\,,(SAD)$.
- là điểm chung thứ nhất của hai mặt phẳng $(SAC)$ và $(SBD)$. $\begin{cases} O\in AC\subset(SAC)\Rightarrow O\in(SAC)\\ O\in BD\subset(SBD)\Rightarrow O\in(SBD)\end{cases}$ $\Rightarrow$ $O$ là điểm chung thứ hai của hai mặt phẳng $(SAC)$ và $(SBD)$.
$\Rightarrow (SAC)\cap(SBD)=SO$.
- Tương tự, ta có $(SAD)\cap(SBC)=SI$.
- $(SAB)\cap(SAD)=SA$ mà $SA$ không phải là đường trung bình của hình thang $ABCD$.

Vậy "Giao tuyến của hai mặt phẳng $(SAB)$ và $(SAD)$ là đường trung bình của $ABCD$" là mệnh đề sai.



Chọn đáp án (C) ..................... □

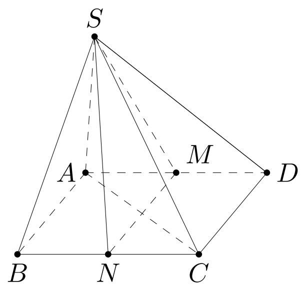
**CÂU 14.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi $M,N$ lần lượt là trung điểm $AD$ và $BC$. Giao tuyến của hai mặt phẳng $(SMN)$ và $(SAC)$ là

(A) $SG$ ($G$ là trung điểm $AB$).

(B) $SD$.

(C) $SO$ ($O$ là tâm hình bình hành $ABCD$).

(D) $SF$ ($F$ là trung điểm $CD$).



**Lời giải.**

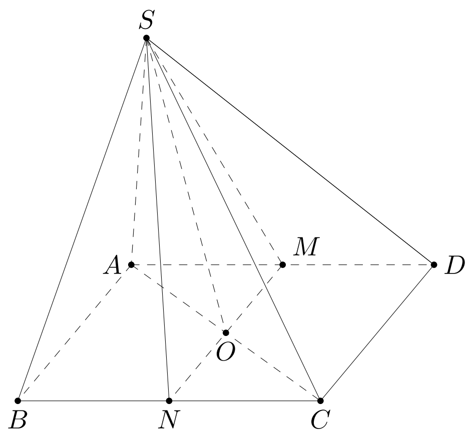
- $S$ là điểm chung thứ nhất giữa hai mặt phẳng $(SMN)$ và $(SAC)$.
- Gọi $O=AC\cap BD$ là tâm của hình hình hành.

Trong mặt phẳng $(ABCD)$, gọi $T=AC\cap MN$

$\Rightarrow\begin{cases} O\in AC\subset(SAC)\Rightarrow O\in(SAC)\\ O\in MN\subset(SMN)\Rightarrow O\in(SMN)\end{cases}$

$\Rightarrow O$ là điểm chung thứ hai giữa hai mặt phẳng $(SMN)$ và $(SAC)$.

Vậy $(SMN)\cap(SAC)=SO$.



Chọn đáp án (C) ..................... □

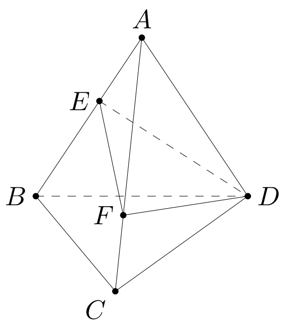
**CÂU 15.** Cho điểm $A$ không nằm trên mặt phẳng $(\alpha)$ chứa tam giác $BCD$. Lấy $E,F$ là các điểm lần lượt nằm trên các cạnh $AB,AC$. Khi $EF$ và $BC$ cắt nhau tại $I$ thì $I$ không phải là điểm chung của hai mặt phẳng nào sau đây?

(A) $(BCD)$ và $(ABC)$.

(B) $(BCD)$ và $(ABD)$.

(C) $(BCD)$ và $(AEF)$.

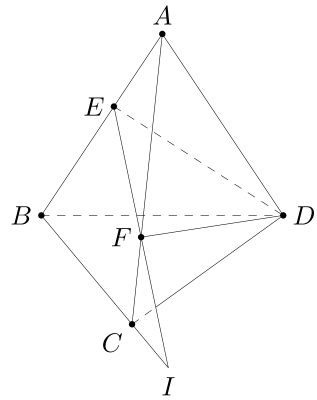
(D) $(BCD)$ và $(DEF)$.



**Lời giải.**

Điểm $I$ là giao điểm của $EF$ và $BC$,

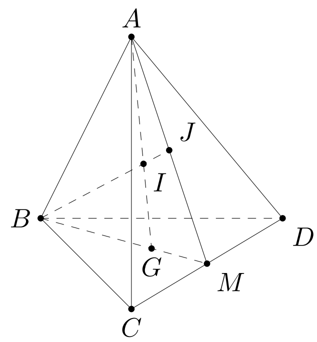
mà $\begin{cases} EF \subset (DEF) \\ EF \subset (ABC) \\ EF \subset (AEF) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I = (BCD) \cap (DEF) \\ I = (BCD) \cap (ABC) \\ I = (BCD) \cap (AEF) \end{cases}.$




Chọn đáp án B ................................................................................................ □

**CÂU 16.** Cho tứ diện $ABCD$. Gọi $G$ là trọng tâm tam giác $BCD$, $M$ là trung điểm $CD$, $I$ là điểm ở trên đoạn thẳng $AG, BI$ cắt mặt phẳng $(ACD)$ tại $J$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

**A** $J$ là trung điểm của $AM$. **B** $AM = (ACD) \cap (ABG)$.
**C** $A, J, M$ thẳng hàng. **D** $DJ = (ACD) \cap (BDJ)$.




**Lời giải.**

Ta có $A$ là điểm chung thứ nhất giữa hai mặt phẳng $(ACD)$ và $(GAB)$.

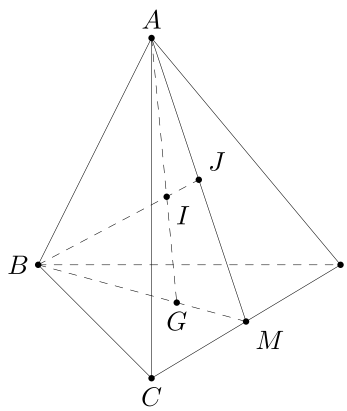
Do $BG \cap CD = M \Rightarrow \begin{cases} M \in BG \subset (ABG) \Rightarrow M \in (ABG) \\ M \in CD \subset (ACD) \Rightarrow M \in (ACD) \end{cases}$

$\Rightarrow M$ là điểm chung thứ hai giữa hai mặt phẳng $(ABG)$ và $(ACD)$

$\Rightarrow (ABG) \cap (ACD) = AM$.

Ta có $\begin{cases} BI \subset (ABG) \\ AM \subset (ABM) \\ (ABG) \equiv (ABM) \end{cases} \Rightarrow AM, BI$ đồng phẳng.

$\Rightarrow J = BI \cap AM \Rightarrow A, J, M$ thẳng hàng.

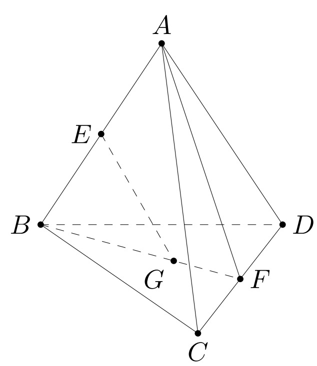



Ta có $\begin{cases} DJ \subset (ACD) \\ DJ \subset (BDJ) \end{cases} \Rightarrow DJ = (ACD) \cap (BDJ)$. Điểm $I$ di động trên $AG$ nên $J$ có thể không phải là trung điểm của $AM$.

Chọn đáp án A ................................................................................................ □

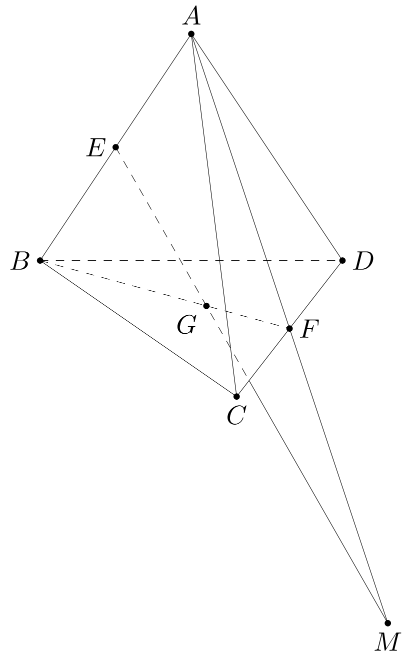
**CÂU 17.** Cho tứ diện $ABCD$. Gọi $E$ và $F$ lần lượt là trung điểm của $AB$ và $CD$; $G$ là trọng tâm tam giác $BCD$. Giao điểm của đường thẳng $EG$ và mặt phẳng $(ACD)$ là

**A** Giao điểm của đường thẳng $EG$ và $CD$. **B** Giao điểm của đường thẳng $EG$ và $AC$.
**C** Giao điểm của đường thẳng $EG$ và $AF$. **D** Điểm $F$.



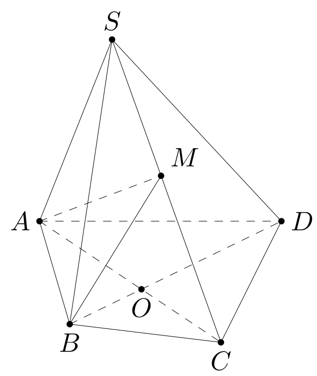

**Lời giải.**

Vì $G$ là trọng tâm tam giác $BCD$, $F$ là trung điểm của $CD$
$\Rightarrow G \in (ABF)$.
Ta có $E$ là trung điểm của $AB$
$\Rightarrow E \in (ABF)$.
Gọi $M$ là giao điểm của $EG$ và $AF$ mà $AF \subset (ACD)$ suy ra $M \in (ACD)$.
Vậy giao điểm của $EG$ và $(ACD)$ là $M = EG \cap AF$.




Chọn đáp án (C) . . . . . . . . . . □

**CÂU 18.** Cho tứ giác $ABCD$ có $AC$ và $BD$ giao nhau tại $O$ và một điểm $S$ không thuộc mặt phẳng $(ABCD)$. Trên đoạn $SC$ lấy một điểm $M$ không trùng với $S$ và $C$. Giao điểm của đường thẳng $SD$ với mặt phẳng $(ABM)$ là




- **A** Giao điểm của $SD$ và $BK$ (với $K = SO \cap AM$).
- **B** Giao điểm của $SD$ và $AB$.
- **C** Giao điểm của $SD$ và $MK$ (với $K = SO \cap AM$).
- **D** Giao điểm của $SD$ và $AM$.

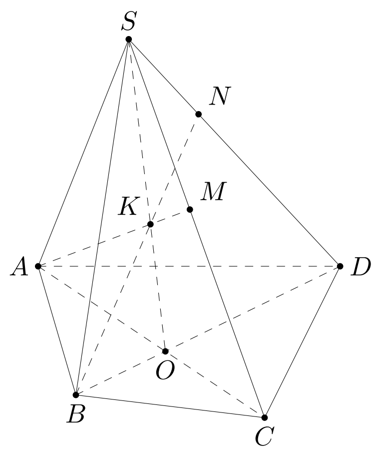
**Lời giải.**

- Chọn mặt phẳng phụ $(SBD)$ chứa $SD$.
- Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng $(SBD)$ và $(ABM)$. Ta có $B$ là điểm chung thứ nhất của $(SBD)$ và $(ABM)$.
- Trong mặt phẳng $(ABCD)$, gọi $O = AC \cap BD$. Trong mặt phẳng $(SAC)$, gọi $K = AM \cap SO$. Ta có:

  — $K \in SO$ mà $SO \subset (SBD)$ suy ra $K \in (SBD)$.

  — $K \in AM$ mà $AM \subset (ABM)$ suy ra $K \in (AMB)$.

  Suy ra $K$ là điểm chung thứ hai của $BCD$ và $(MNP)$. Do đó $(SBD) \cap (ABM) = BK$.
- Trong mặt phẳng $(SBD)$, gọi $N = SD \cap BK$. Ta có: $N \in BK$, mà $BK \cap (ABM)$ suy ra $N \cap (ABM)$. Mặt khác $N \in SD$.

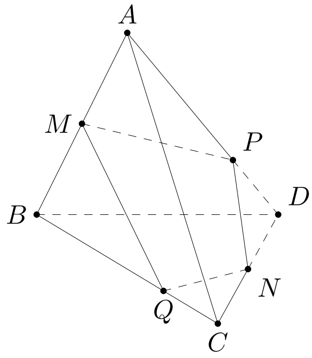



Vậy $N = SD \cap (ABM)$.

Chọn đáp án (A) . . . . . . . . . . □

**CÂU 19.** Cho tứ diện $ABCD$. Gọi $M, N$ lần lượt là trung điểm của $AB$ và $CD$. Mặt phẳng $(\alpha)$ qua $MN$ cắt $AD, BC$ lần lượt tại $P$ và $Q$. Biết $MP$ cắt $NQ$ tại $I$. Ba điểm nào sau đây thẳng hàng?

**A** $I, B, D$. **B** $I, A, C$. **C** $I, C, D$ . **D** $I, A, B$.

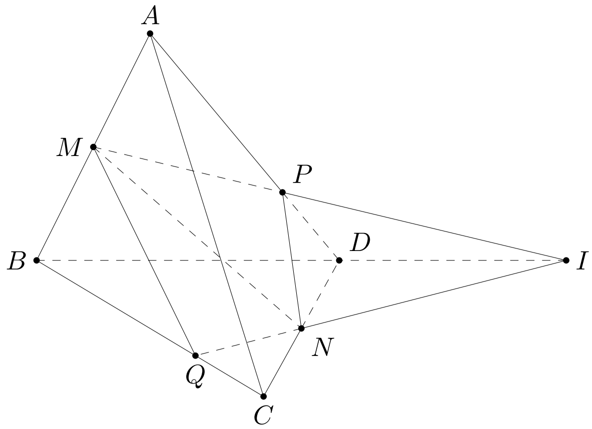



**Lời giải.**

Ta có $(ABD) \cap (BCD) = BD$. Lại có $\begin{cases} I \in MP \subset (ABD) \\ I \in NQ \subset (BCD) \end{cases}$

$\Rightarrow I$ thuộc giao tuyến của $(ABC)$ và $(BCD)$

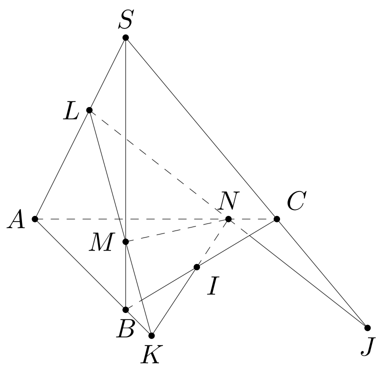
$\Rightarrow I \in BD \Rightarrow I, B, D$ thẳng hàng.




Chọn đáp án A ................................................................ □

**CÂU 20.** Cho tứ diện $SABC$. Gọi $L, M, N$ lần lượt là các điểm trên các cạnh $SA, SB$ và $AC$ sao cho $LM$ không song song với $AB$, $LN$ không song song với $SC$. Mặt phẳng $(LMN)$ cắt các cạnh $AB, BC, SC$ lần lượt tại $K, I, J$. Ba điểm nào sau đây thẳng hàng?

**A** $M, K, J$. **B** $N, I, J$. **C** $K, I, J$. **D** $M, I, J$.

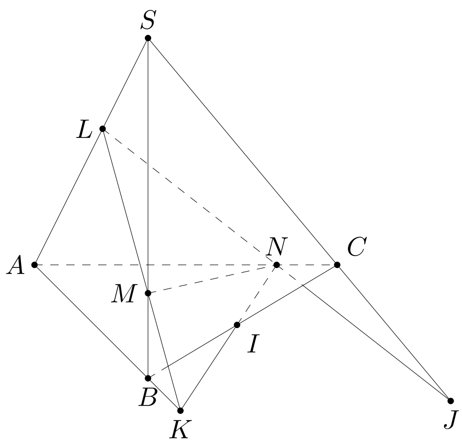



**Lời giải.**

Ta có

- $M \in SB$ suy $M$ là điểm chung của $(LMN)$ và $(SBC)$.
- $I$ là điểm chung của $(LMN)$ và $(SBC)$.
- $J$ là điểm chung của $(LMN)$ và $(SBC)$.

Vậy $M, I, J$ thẳng hàng vì cùng thuộc giao tuyến của $(LMN)$ và $(SBC)$.




Chọn đáp án D ................................................................ □

# Bài 11. HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG

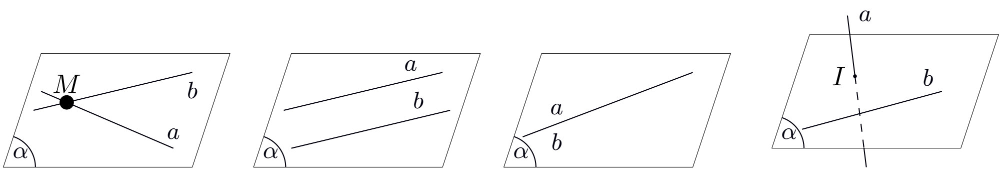
## A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

### 1. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA HAI ĐƯỜNG THẲNG

Trong không gian, cho hai đường thẳng $a$ và $b$.

**Các trường hợp có thể xảy ra:**

- Nếu $a$ và $b$ đồng phẳng (cùng thuộc một mặt phẳng) thì chúng có các khả năng: cắt nhau; song song nhau hoặc trùng nhau.
- Nếu $a$ và $b$ không đồng phẳng (không tồn tại mặt phẳng chứa được cả $a$ và $b$) thì ta nói $a$ và $b$ chéo nhau.




* $a$ cắt $b$ * Kí hiệu $a \cap b = M$ | * $a$ song song $b$ * Kí hiệu $a \parallel b$ | * $a$ trùng $b$ * Kí hiệu $a \equiv b$ | * $a$ chéo $b$ * $a$, $b$ không điểm chung

**Chú ý:** Cho hai đường thẳng $a$ và $b$ phân biệt.

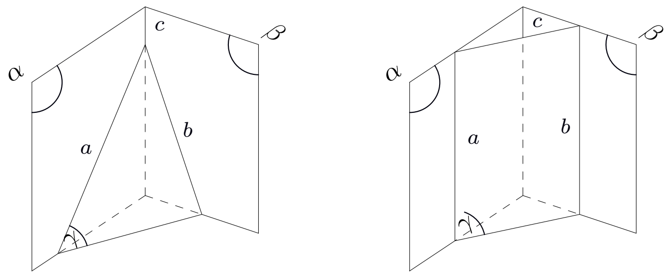
- Khi kiểm tra hai đường thẳng $a$ và $b$ **song song** hay **cắt nhau** thì trước tiên chúng phải đồng phẳng (cùng thuộc một mặt phẳng nào đó);
- Khi $a$ và $b$ không có điểm chung thì chúng có thể song song hoặc chéo nhau. Vấn đề này các bạn hay bị nhầm lẫn, cần chú ý.

### 2. CÁC ĐỊNH LÝ VÀ HỆ QUẢ CẦN NHỚ

**Định lý 1:** Trong không gian, qua một điểm không nằm trên đường thẳng cho trước, có một và chỉ một đường thẳng song song với đường thẳng đã cho.

**Định lý 2:** Hai đường thẳng phân biệt cùng song song với đường thẳng thứ ba thì song song với nhau.

**Định lý 3:** Nếu ba mặt phẳng phân biệt đôi một cắt nhau theo ba giao tuyến phân biệt thì ba giao tuyến đó hoặc đồng quy hoặc đôi một song song với nhau.




***Hệ quả:*** *Nếu hai mặt phẳng phân biệt lần lượt chứa hai đường thẳng song song thì giao tuyến của chúng (nếu có) cũng song song với hai đường thẳng đó hoặc trùng với một trong hai đường thẳng đó.*

## B. PHÂN LOẠI, PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

### 1 Xét vị trí tương đối của hai đường thẳng

Cho hai đường thẳng $a$ và $b$ phân biệt. Xét vị trí tương đối của $a$ với $b$, ta thực hiện các bước sau:

**Bước 1:** Kiểm tra xem hai đường thẳng $a$ và $b$ có đồng phẳng không?

- Nếu $a$ và $b$ không đồng phẳng thì $a$ và $b$ chéo nhau.
- Nếu $a$ và $b$ đồng phẳng chuyển sang bước 2.

**Bước 2:** Kiểm tra xem $a$ và $b$ có điểm chung hay không?

- Nếu $a$ và $b$ không có điểm chung thì $a \parallel b$.
- Nếu $a$ và $b$ có một điểm chung thì $a$ và $b$ cắt nhau.

**VÍ DỤ 1.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Xét vị trí tương đối của các cặp đường thẳng sau

a) $AB$ và $CD$. b) $SA$ và $SC$. c) $SA$ và $BC$.

**VÍ DỤ 2.** Cho tứ diện $ABCD$ có $M, N$ lần lượt là trung điểm của $AB, AC$. Xét vị trí tương đối của các cặp đường thẳng sau

a) $MN$ và $BC$. b) $AN$ và $CD$. c) $MN$ và $CD$.

## 2 Chứng minh hai đường thẳng song song

**Phương pháp thường dùng:**

① Sử dụng các kết quả của hình học phẳng như:

— Cặp cạnh đối hình bình hành thì song song nhau;...

— Đường trung bình của tam giác thì song song và bằng nửa cạnh đáy.

② Sử dụng tỉ lệ (Định lý Thales)

— Nếu $\dfrac{AE}{AB} = \dfrac{AF}{AC}$ thì $EF \parallel BC$.

— Chú ý tỉ lệ trọng tâm: $AG = \dfrac{2}{3}AM$.

**VÍ DỤ 1.** Cho tứ diện $ABCD$ có $I$, $J$ lần lượt là trọng tâm của tam giác $ABC$ và $ABD$. Chứng minh rằng $IJ \parallel CD$.

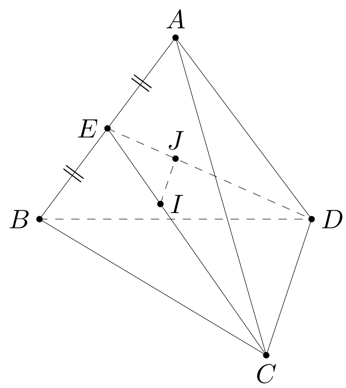
**Lời giải.**

Gọi $E$ là trung điểm $AB$. Ta có $\begin{cases} I \in CE \\ J \in DE \end{cases} \Rightarrow IJ$ và $CD$ đồng phẳng.

Vì $I$, $J$ lần lượt là trọng tâm của tam giác $ABC$ và $ABD$ nên

$$\frac{EI}{EC} = \frac{EJ}{ED} = \frac{1}{3}.$$

Theo định lí đảo Thales suy ra $IJ \parallel CD$ (đpcm).




**VÍ DỤ 2.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang với $AB$ là đáy lớn và $AB = 2CD$. Gọi $M, N$ lần lượt là trung điểm của các cạnh $SA$ và $SB$. Chứng minh rằng $NC \parallel MD$.

**VÍ DỤ 3.** Cho tứ diện $ABCD$. Gọi $I, J$ lần lượt là trung điểm của các cạnh $BC, CD$. Trên cạnh $AC$ lấy điểm $K$. Gọi $M$ là giao điểm của $BK$ và $AI$, $N$ là giao điểm của $DK$ và $AJ$. Chứng minh rằng $MN \parallel BD$.

**VÍ DỤ 4.** Cho tứ diện $ABCD$. Gọi $M$, $N$, $P$, $Q$, $R$, $S$ lần lượt là trung điểm của $AB$, $CD$, $BC$, $AD$, $AC$, $BD$.

a) Chứng minh $MPNQ$ là hình bình hành.

b) Chứng minh ba đoạn thẳng $MN$, $PQ$, $RS$ cắt nhau tại trung điểm $G$ của mỗi đoạn.

**Lời giải.**

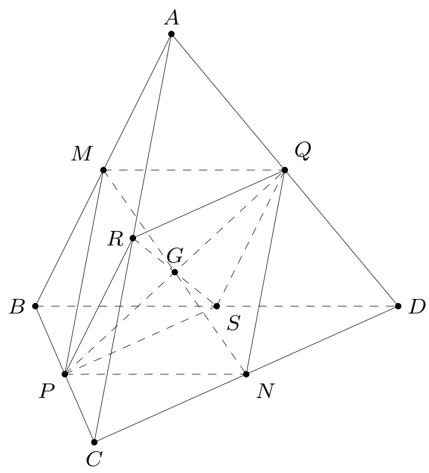
a) Vì $MP$ là đường trung bình của $\triangle ABC$ nên $\begin{cases} MP \parallel AC \\ MP = \dfrac{1}{2}AC. \end{cases}$ (1)

Vì $NQ$ là đường trung bình của $\triangle ACD$ nên $\begin{cases} NQ \parallel AC \\ NQ = \dfrac{1}{2}AC. \end{cases}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\begin{cases} MP \parallel NQ \\ MP = NQ. \end{cases}$

Do đó, $MPNQ$ là hình bình hành.

b) Do $MPNQ$ là hình bình hành nên $MN$, $PQ$ cắt nhau tại trung điểm $G$ của mỗi đoạn.
Mặt khá, chứng minh tương tự ta được $PSQR$ là hình bình hành nên $PQ$, $RS$ cắt nhau tại trung điểm $G$ của mỗi đoạn.
Vậy $MN$, $PQ$, $RS$ cắt nhau tại trung điểm $G$ của mỗi đoạn.

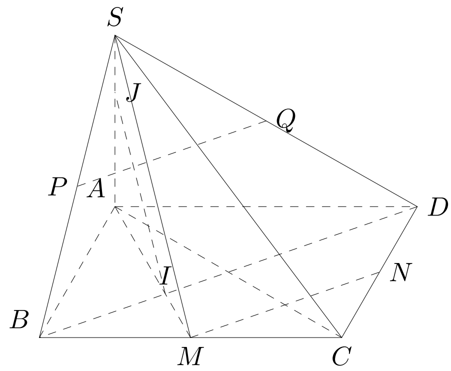


**VÍ DỤ 5.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi $M, N, P, Q$ lần lượt là trung điểm $BC, CD, SB, SD$.

a) Chứng minh rằng $MN \parallel PQ$.

b) Gọi $I$ là trọng tâm của tam giác $ABC$, $J$ thuộc $SA$ sao cho $\dfrac{JS}{JA} = \dfrac{1}{2}$. Chứng minh $IJ \parallel SM$.

**Lời giải.**




a) Chứng minh $MN \parallel PQ$.
Ta có: $MN \parallel BD$ ($MN$ là đường trung bình của $\Delta BCD$).
và $PQ \parallel BD$ ($PQ$ là đường trung bình của $\Delta SBD$).
Suy ra $MN \parallel PQ$

b) Chứng minh $IJ \parallel SM$.
$\dfrac{AJ}{AS} = \dfrac{2}{3}$.
$\dfrac{JS}{JA} = \dfrac{1}{2}$.
$\dfrac{AI}{AM} = \dfrac{2}{3}$ ($I$ là trọng tâm của $\Delta ABC$).
Suy ra $\dfrac{AJ}{AS} = \dfrac{AI}{AM}$.
Theo định lí Viet đảo ta có $IJ \parallel SM$.

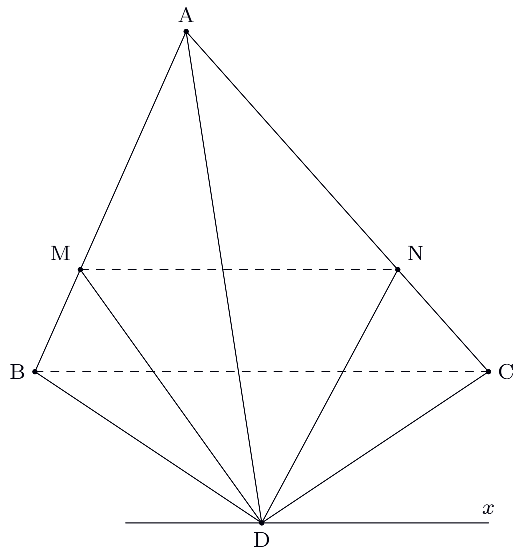
## 3 Xác định giao tuyến $d$ của hai mặt phẳng cắt nhau

**Ta thực hiện một trong hai cách sau đây:**

- **Cách 1:** Tìm hai điểm chung phân biệt (đã xét ở bài học trước)
- **Cách 2:** Tìm 1 điểm chung. Sau đó nếu hai mặt phẳng có cặp đường thẳng song song nhau thì giao tuyến $d$ sẽ đi qua điểm chung và song song (hoặc trùng) với một trong hai đường thẳng đó.

**VÍ DỤ 1.** Cho tứ diện $ABCD$. Trên $AB$, $AC$ lần lượt lấy $M$, $N$ sao cho $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC}$. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng $(DBC)$ và $(DMN)$.

**Lời giải.**



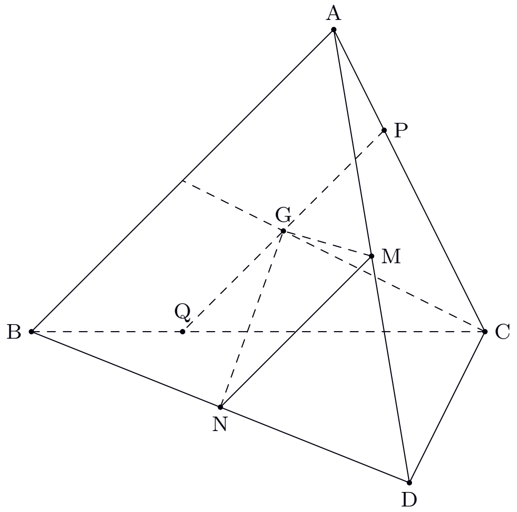

Trong tam giác $ABC$, theo giả thiết $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC}$ suy ra $MN \parallel BC$.

Ta có $\begin{cases} D \in (DBC) \cap (DMN) \\ BC \subset (DBC), MN \subset (DMN) \\ BC \parallel MN \end{cases}$ suy ra

$(DBC) \cap (DMN) = Dx \parallel BC \parallel MN$.

**VÍ DỤ 2.** Cho tứ diện $ABCD$. Gọi $M$, $N$ lần lượt là trung điểm của $AD$ và $BD$; $G$ là trọng tâm tam giác $ABC$. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng $(ABC)$ và $(MNG)$.

**Lời giải.**




Do $M$, $N$ lần lượt là trung điểm của $AD$ và $BD$ nên $MN \parallel AB$.

Ta có $\begin{cases} G \in (ABC) \cap (MNG) \\ AB \subset (ABC), MN \subset (MNG) \\ AB \parallel MN \end{cases}$ suy ra

$(ABC) \cap (MNG) = PQ \parallel AB \parallel MN$,

với $PQ$ qua $G$ và song song với $AB$.

**VÍ DỤ 3.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Điểm $M$ thuộc cạnh $SA$. Điểm $E$, $F$ lần lượt là trung điểm của $AB$ và $BC$.

a) Tìm $(SAB) \cap (SCD)$.

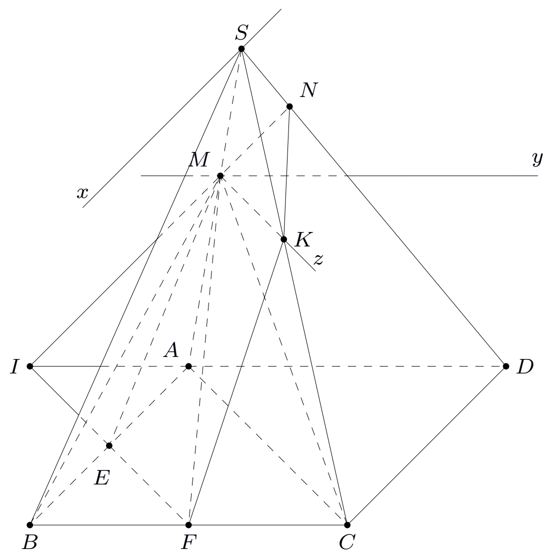
b) Tìm $(MBC) \cap (SAD)$.

c) Tìm $(MEF) \cap (SAC)$.

d) Tìm $AD \cap (MEF)$.

e) Tìm $SD \cap (MEF)$.

**Lời giải.**




a) $\begin{cases} S \in (SAB) \cap (SCD) \\ AB \subset (SAB),\ CD \subset (SCD) \\ AB \parallel CD \end{cases}$

$\Rightarrow (SAB) \cap (SCD) = Sx$ với $Sx \parallel AB \parallel CD$.

b) $\begin{cases} M \in (MBC) \cap (SAD) \\ BC \subset (MBC),\ AD \subset (SAD) \\ BC \parallel AD \end{cases}$

$\Rightarrow (MBC) \cap (SAD) = My$ với $My \parallel BC \parallel AD$.

c) $\begin{cases} M \in (MEF) \cap (SAC) \\ EF \subset (MEF),\ AC \subset (SAC) \\ EF \parallel AC \end{cases}$

$\Rightarrow (MEF) \cap (SAC) = Mz$ với $Mz \parallel EF \parallel AC$.

d) Trong $(ABCD)$, gọi $I = EF \cap AD$.
Mà $EF \subset (MEF)$ nên $AD \cap (MEF) = I$.

e) Trong $(SAD)$, gọi $N = SD \cap IM$.
Mà $IM \subset (MEF)$ nên $SD \cap (MEF) = N$.

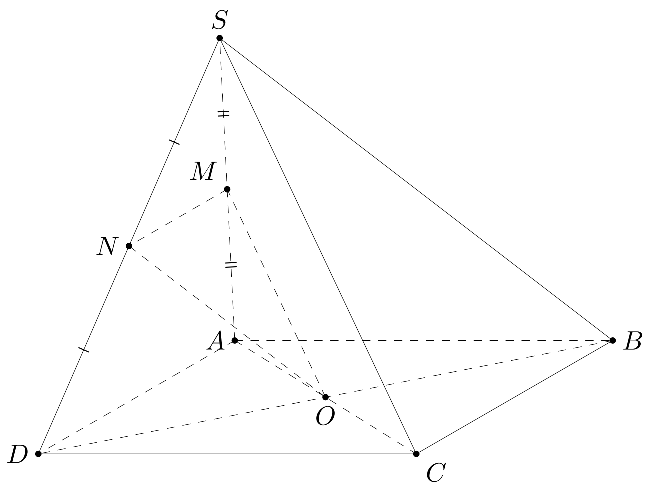
## C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

**BÀI 1.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm $O$. Gọi $M$, $N$ lần lượt là trung điểm của $SA$, $SD$. Chứng minh

a) $MN \parallel AD$ và $MN \parallel BC$;

b) $MO \parallel SC$ và $NO \parallel SB$.

**Lời giải.**




a) Xét tam giác $SAD$ có

- $M$ là trung điểm của $SA$ (giả thiết);
- $N$ là trung điểm của $SD$ (giả thiết).

Suy ra $MN$ là đường trung bình của $\triangle SAD$. Do đó $MN \parallel AD$.

Ta có $\begin{cases} MN \parallel AD \text{ (chứng minh trên)} \\ BC \parallel AD \text{ (} ABCD \text{ là hình bình hành)} \end{cases} \Rightarrow MN \parallel BC$.

b) Xét tam giác $ASC$ có

- $M$ là trung điểm của $SA$ (giả thiết);
- $O$ là trung điểm của $AC$ ($O$ là tâm của hình bình hành $ABCD$).

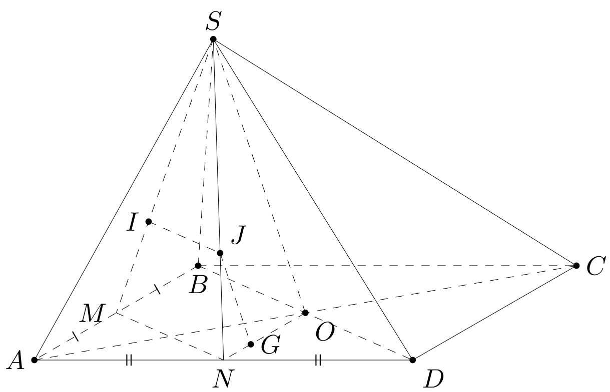
Suy ra $OM$ là đường trung bình của $\triangle SAC$. Do đó $MO \parallel SC$.
Tương tự, $NO$ là đường trung bình của $\triangle SDB$ nên $NO \parallel SB$.

**BÀI 2.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm $O$. Gọi $M$, $N$ lần lượt là trung điểm của $AB$, $AD$. Gọi $I$, $J$, $G$ lần lượt là trọng tâm của các tam giác $SAB$, $SAD$ và $AOD$. Chứng minh

a) $IJ \parallel MN$;

b) $IJ \parallel BD$ và $GJ \parallel SO$.

**Lời giải.**




a) Xét tam giác $SMN$ có

- $SI = \dfrac{2}{3}SM$ ($I$ là trọng tâm của $\triangle SAB$);
- $SJ = \dfrac{2}{3}SN$ ($J$ là trọng tâm của $\triangle SAD$).

suy ra $IJ \parallel MN$ (định lý Ta-lét đảo).

b) Vì $MN$ là đường trung bình của $\triangle ABD$ nên $MN \parallel BD$.
Mà $IJ \parallel MN$ (chứng minh trên) nên $IJ \parallel BD$.
Xét tam giác $SON$ có

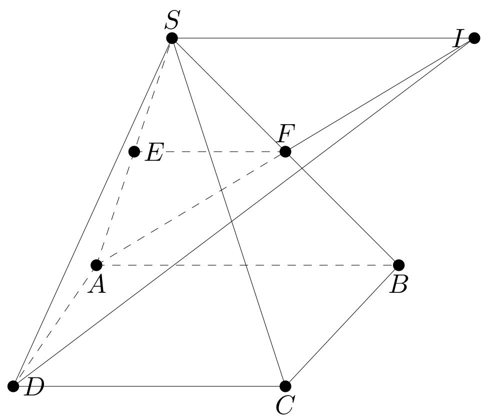
- $NG = \dfrac{1}{3}NO$ ($G$ là trọng tâm của $\triangle AOD$);
- $NJ = \dfrac{1}{3}SN$ ($J$ là trọng tâm của $\triangle SAD$).

suy ra $GJ \parallel SO$ (định lý Ta-lét đảo).

**BÀI 3.** Cho hình chóp $SABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang đáy lớn $AB$. Gọi $E$, $F$ lần lượt là trung điểm của $SA$ và $SB$.

a) Chứng minh $EF \parallel CD$. b) Tìm $I = AF \cap (SCD)$. c) Chứng minh $SI \parallel AB \parallel CD$.

**Lời giải.**




a) Ta có $EF$ là đường trung bình của tam giác $SAB$ nên $EF \parallel AB$
mà $AB \parallel CD$ (hai đáy của hình thang)
nên $EF \parallel CD$.

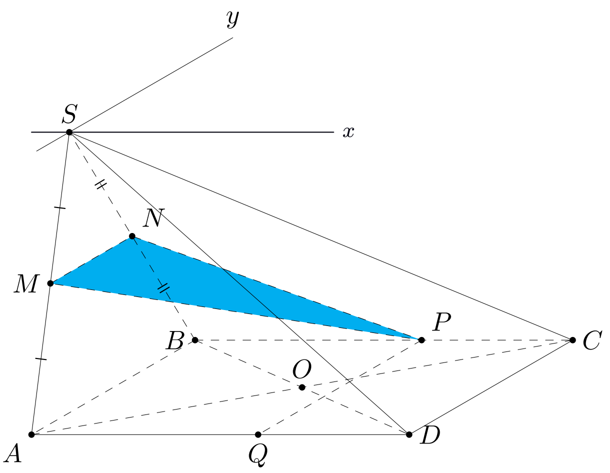
b) Hai mặt phẳng $(SAB)$ và $(SCD)$ có $AB \parallel CD$ nên giao tuyến là đường thẳng $Sx \parallel AB \parallel CD$.
Kéo dài $AF$ cắt $Sx$ tại $I$.
Ta thấy $I$ là điểm chung của $AF$ và $(SCD)$.

c) Theo ý 2.

**BÀI 4.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi $M$, $N$ lần lượt là trung điểm của $SA$, $SB$. Gọi $P$ là một điểm trên cạnh $BC$. Tìm giao tuyến của

a) $(SBC)$ và $(SAD)$; b) $(SAB)$ và $(SCD)$; c) $(MNP)$ và $(ABCD)$.

**Lời giải.**




a) Ta có

- $(SBC) \cap (ABCD) = BC$;
- $(SAD) \cap (ABCD) = AD$;
- $AD \parallel BC$ ($ABCD$ là hình bình hành).

Mà $S$ là điểm chung của 2 mặt phẳng $(SBC)$ và $(SAD)$ nên giao tuyến của 2 mặt phẳng $(SBC)$ và $(SAD)$ là đường thẳng $Sx \parallel BC \parallel AD$.

b) Giao tuyến của hai mặt phẳng $(SAB)$ và $(SCD)$ là đường thẳng $Sy \parallel AB \parallel CD$.

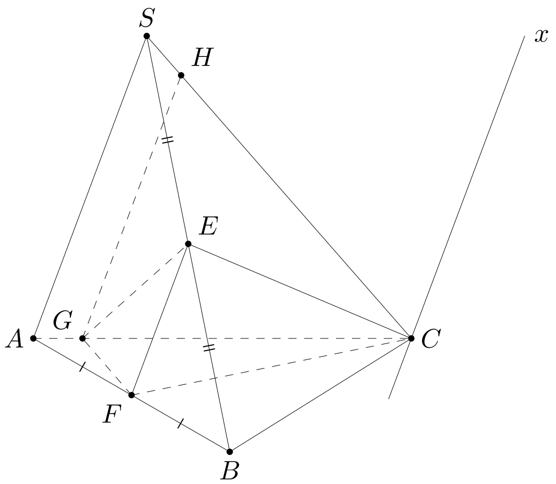
c) Vì $MN \parallel AB$ ($MN$ là đường trung bình của $\triangle SAB$) nên qua $P$ kẻ $PQ \parallel AB$ ($Q \in AD$). Khi đó giao tuyến của hai mặt phẳng $(MNP)$ và $(ABCD)$ là đường thẳng $PQ$.

**BÀI 5.** Cho tứ diện $SABC$. Gọi $E$ và $F$ lần lượt là trung điểm của các cạnh $SB$ và $AB$, $G$ là một điểm trên cạnh $AC$. Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng sau

a) $(SAC)$ và $(EFC)$;

b) $(SAC)$ và $(EFG)$.

**Lời giải.**




a) Ta có

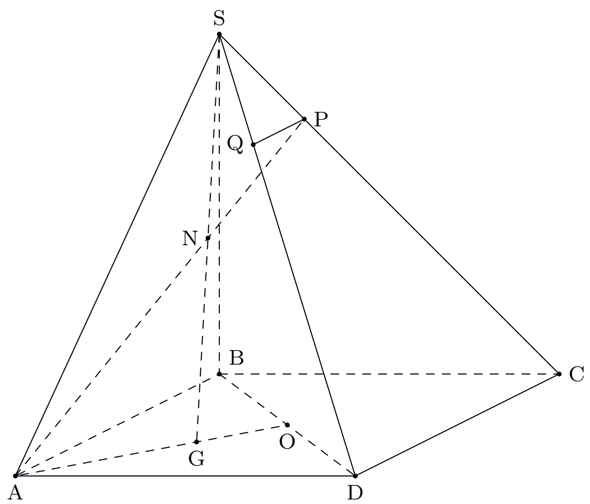
- $(SAC) \cap (SAB) = SA$;
- $(EFC) \cap (SAB) = EF$;
- $SA \parallel EF$ ($EF$ là đường trung bình của $\triangle SAB$).

Do đó giao tuyến của 2 mặt phẳng $(SAC)$ và $(EFC)$ sẽ song song với $SA$ và $EF$.
Mà $C$ là điểm chung của 2 mặt phẳng $(SAC)$ và $(EFC)$ nên giao tuyến của chúng là đường thẳng $Cx \parallel SA \parallel EF$.

b) Vì $EF \parallel SA$ ($EF$ là đường trung bình của $\triangle SAB$) nên qua $G$ kẻ $GH \parallel SA$ ($H \in SC$). Khi đó giao tuyến của hai mặt phẳng $(SAC)$ và $(EFG)$ là đường thẳng $GH$.

**BÀI 6.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi $G$ là trọng tâm tam giác $ABD$, $N$ là trung điểm $SG$. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng $(ABN)$ và $(SCD)$.

**Lời giải.**

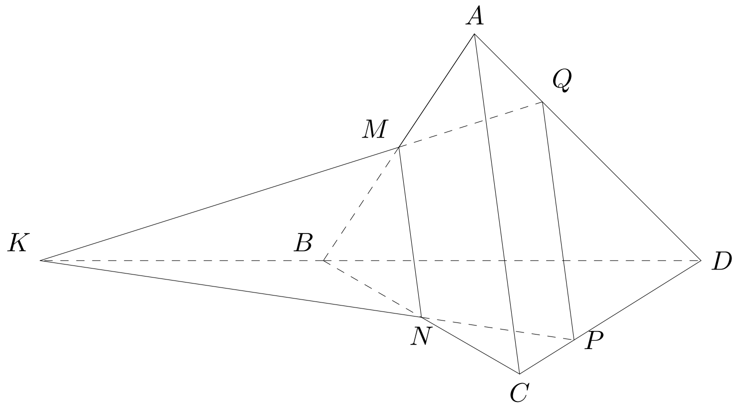


Trong mặt phẳng $(SAC)$, gọi $P = AN \cap SC$. Ta có
$P \in AN$ mà $AN \subset (ABN)$ suy ra $P \in (ABN)$.
$P \in SC$ mà $SC \subset (SCD)$ suy ra $P \in (SCD)$.
Do đó $P \in (ABN) \cap (SCD)$.
Ta có $\begin{cases} P \in (ABN) \cap (SCD) \\ AB \subset (ABN), CD \subset (SCD) \\ AB \parallel CD \end{cases}$ suy ra
$(ABN) \cap (SCD) = PQ \parallel CD \parallel AB$.

**BÀI 7.** Cho tứ diện $ABCD$. Gọi $M, N$ theo thứ tự là trung điểm của $AB, BC$ và $Q$ là một điểm nằm trên cạnh $AD$ $(QA \neq QD)$ và $P$ là giao điểm của $CD$ với mặt phẳng $(MNQ)$. Chứng minh rằng $PQ \parallel MN$ và $PQ \parallel AC$.

**Lời giải.**

Vì $QA \neq QD$ nên gọi $K = QM \cap BD$ suy ra $K N \cap CD = P$.
Theo định lý về giao tuyến ba mặt phẳng
Ta xét ba mặt phẳng $(ABC)$ $(ACD)$ và $(MNQ)$.
Ta có: $\begin{cases} (ABC) \cap (ACD) = AC \\ (ABC) \cap (MNQ) = MN \\ (ACD) \cap (MNQ) = QP \end{cases}$.
Vậy $AC \parallel MN$ nên $AC \parallel QP \parallel NM$.



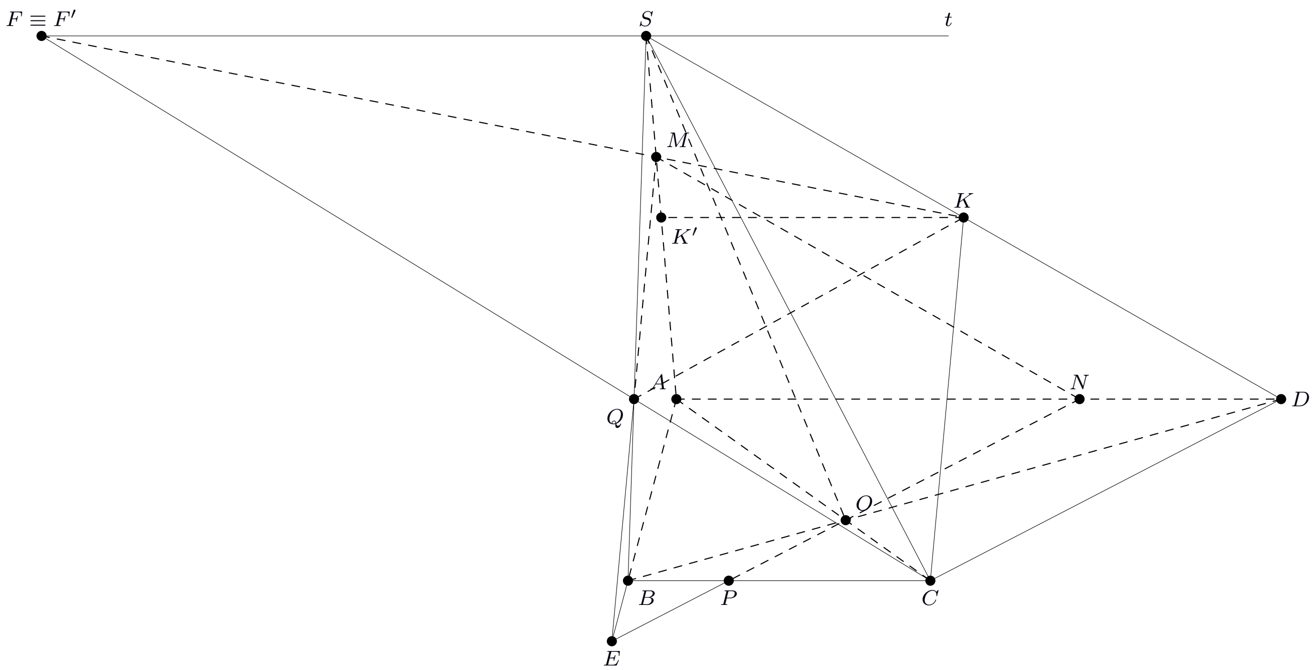

**BÀI 8.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang với $AD$ là đáy lớn và $AD = 2BC$. Gọi $M$, $N$, $P$ lần lượt thuộc các đoạn $SA$, $AD$, $BC$ sao cho $MA = 2MS$, $NA = 2ND$, $PC = 2PB$.

a) Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng sau: $(SAD)$ và $(SBC)$, $(SAC)$ và $(SBD)$.

b) Xác định giao điểm $Q$ của $SB$ với $(MNP)$.

c) Gọi $K$ là trung điểm của $SD$. Chứng minh $CK = (MQK) \cap (SCD)$.

**Lời giải.**




a) Vì $\begin{cases} S \in (SAD) \cap (SBC) \\ AD \subset (SAD) \text{ và } BC \subset (SBC) \\ AD \parallel BC \end{cases}$
nên $(SAD) \cap (SBC) = St \parallel AD \parallel BC$.
Gọi $O = AC \cap BD \Rightarrow \begin{cases} O \in AC \subset (SAC) \\ O \in BD \subset (SBD) \end{cases}$ suy ra $SO = (SAC) \cap (SBD)$.

b) Gọi $E = NP \cap AB$ và $Q = EM \cap SB$. Vì $\begin{cases} Q \in SB \\ Q \in ME \subset (MNP) \end{cases}$ nên $Q = SB \cap (MNP)$.

c) Gọi $F = MK \cap St$ và $F' = QC \cap St$. Dựa vào các vị trí các điểm $Q$, $C$, $M$ và $K$ của giả thiết cho, dễ thấy $F$ và $F'$ cùng nằm về một phía so với mặt phẳng $(SAB)$.
Trong mặt phẳng $(SF'BC)$, áp dụng định lý Thales (để ý rằng $SF' \parallel BC$) ta có

$$\frac{QS}{QB} = \frac{BC}{SF'} = \frac{1}{2}. \quad (1)$$

Gọi $K'$ là trung điểm của $SA$. suy ra $\dfrac{MK'}{MS} = \dfrac{1}{2}$.
Trong mặt phẳng $(SFAD)$, áp dụng định lý Thales (để ý rằng $SF \parallel KK'$) ta có

$$\frac{MK'}{MS} = \frac{KK'}{SF} = \frac{1}{2}. \quad (2)$$

Từ (1), (2) và $AD = 2BC$ suy ra $SF = SF'$. Do đó $F \equiv F'$, suy ra bốn điểm $Q$, $C$, $M$ và $K$ đồng phẳng.
Vậy $CK = (MQK) \cap (SCD)$.

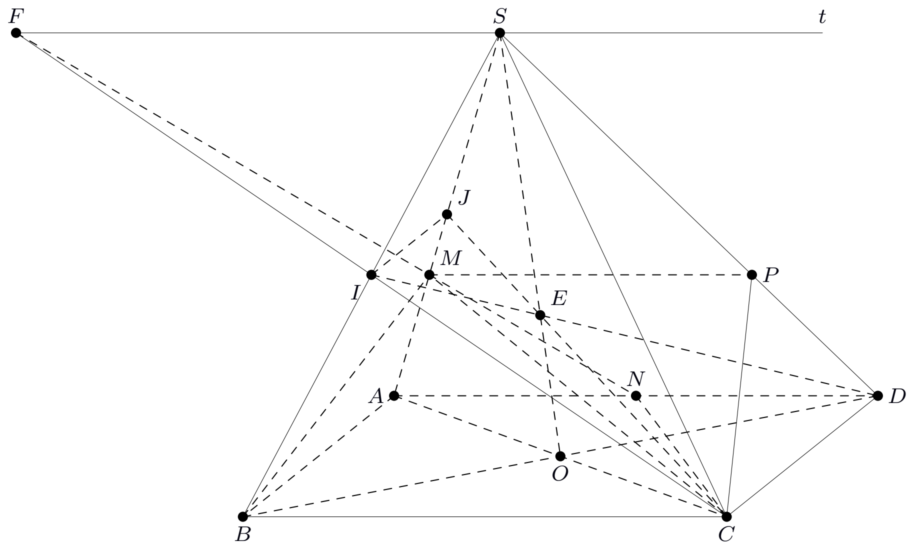
**BÀI 9.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có $O$ là tâm của hình bình hành $ABCD$, điểm $M$ thuộc cạnh $SA$ sao cho $SM = 2MA$, $N$ là trung điểm của $AD$.

a) Tìm giao tuyến của mặt phẳng $(SAD)$ và $(MBC)$.

b) Tìm giao điểm $I$ của $SB$ và $(CMN)$, giao điểm $J$ của $SA$ và $(ICD)$.

c) Chứng minh ba đường thẳng $ID$, $JC$, $SO$ cắt nhau tại $E$. Tính tỉ số $\dfrac{SE}{SO}$.

**Lời giải.**




a) Vì $\begin{cases} M \in (MBC) \cap (SAD) \\ BC \subset (MBC) \text{ và } AD \subset (SAD) \\ BC \parallel AD \end{cases}$
nên $(SAD) \cap (MBC) = MP \parallel BC \parallel AD$ (với $P \in SD$).

b) Vì $\begin{cases} S \in (SAD) \cap (SBC) \\ AD \subset (SAD) \text{ và } BC \subset (SBC) \\ AD \parallel BC \end{cases}$
nên $(SAD) \cap (SBC) = St \parallel AD \parallel BC$.
Gọi $F = MN \cap St$; $I = CF \cap SB$.
Vì $\begin{cases} I \in SB \\ I \in CF \subset (CMN) \end{cases}$ nên $I = SB \cap (CMN)$.
Qua $I$ kẻ đường thẳng song song với $AB$ cắt $SA$ tại $J$.
Vì $\begin{cases} J \in SA \\ J \in JI \subset (ICD)(\text{vì } IJ \parallel CD \Rightarrow (IJCD) \equiv (ICD)) \end{cases}$ nên $J = SA \cap (ICD)$.

c) Xét 3 mặt phẳng $(SAC)$, $(SBD)$ và $(CDJI)$, ta có

$$\begin{cases} SO = (SAC) \cap (SBD) \\ ID = (SBD) \cap (CDJI) \\ JC = (SAC) \cap (CDJI). \end{cases}$$

Do đó ba đường thẳng $ID$, $JC$, $SO$ đồng quy. Gọi điểm đồng quy là $E$.
Trong mặt phẳng $(SFAD)$, áp dụng định lý Thales (để ý rằng $AN \parallel SF$) ta có

$$\frac{MA}{MS} = \frac{AN}{SF} = \frac{1}{2}.$$

Suy ra $SF = AD = BC$ và $SFBC$ là hình bình hành.
$I = SB \cap CF$ nên $I$ là trung điểm của $SB$.
$\triangle SBD$ có $DI$ và $SO$ là trung tuyến nên $E$ là trọng tâm của $\triangle SBD$.
Vậy $\dfrac{SE}{SO} = \dfrac{2}{3}$.

**BÀI 10.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi $M, N, P, Q$ lần lượt là trung điểm của các cạnh $AB, BC, CD, DA$; gọi $I, J, K, L$ lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng $SM, SN, SP, SQ$.

a) Chứng minh rằng bốn điểm $I, J, K, L$ đồng phẳng và tứ giác $IJKL$ là hình bình hành.

b) Chứng minh rằng $IK \parallel BC$.

c) Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng $(IJKL)$ và $(SBC)$.

## D. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

**CÂU 1.** Hai đường thẳng không có điểm chung thì
(A) chéo nhau. (B) song song.
(C) cắt nhau. (D) chéo nhau hoặc song song.

**CÂU 2.** Hai đường thẳng phân biệt không song song thì
(A) chéo nhau. (B) có điểm chung. (C) cắt nhau hoặc chéo nhau. (D) không có điểm chung.

**CÂU 3.** Cho hai đường thẳng phân biệt không có điểm chung cùng nằm trong một mặt phẳng thì hai đường thẳng đó
(A) trùng nhau. (B) chéo nhau. (C) song song. (D) cắt nhau.

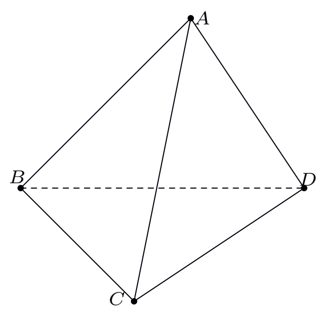
**Lời giải.**
Hai đường thẳng phân biệt không có điểm chung cùng nằm trong một mặt phẳng thì hai đường thẳng đó song song.
Chọn đáp án C ............ □

**CÂU 4.** Chọn khẳng định **sai**
(A) Hai đường thẳng phân biệt cùng song song với đường thẳng thứ ba thì song song với nhau.
(B) Nếu hai đường thẳng chéo nhau thì chúng không đồng phẳng.
(C) Hai đường thẳng song song thì không đồng phẳng và không có điểm chung.
(D) Hai đường thẳng cắt nhau thì đồng phẳng và có một điểm chung.

**Lời giải.**
Khẳng định sai là "Hai đường thẳng song song thì không đồng phẳng và không có điểm chung".
Chọn đáp án C ............ □

**CÂU 5.** Cho đường thẳng $a$ cắt mặt phẳng $(P)$ tại điểm $A$. Mệnh đề nào sau đây đúng?
(A) Mọi đường thẳng nằm trong $(P)$ đều chéo với $a$.
(B) Mọi đường thẳng nằm trong $(P)$ đều cắt $a$.
(C) Mọi đường thẳng nằm trong $(P)$ hoặc chéo với $a$, hoặc cắt $a$.
(D) Mọi đường thẳng nằm trong $(P)$ đều không cắt $a$.

**CÂU 6.** Cho tứ diện $ABCD$. Gọi $M$ và $N$ là hai điểm phân biệt nằm trên đường thẳng $AB$, $M'$ và $N'$ là hai điểm phân biệt nằm trên đường thẳng $CD$. Các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào đúng?
(A) Hai đường thẳng $MM'$ và $NN'$ có thể cắt nhau.
(B) Hai đường thẳng $MM'$ và $NN'$ có thể song song với nhau.
(C) Hai đường thẳng $MM'$ và $NN'$ hoặc cắt nhau hoặc song song với nhau.
(D) Hai đường thẳng $MM'$ và $NN'$ chéo nhau.



**CÂU 7.** Cho tứ diện $ABCD$, lấy $M, N$ lần lượt là trung điểm của $CD, AB$. Khi đó, xác định vị trí tương đối giữa hai đường thẳng $BC$ và $MN$.

(A) Chéo nhau. (B) Có hai điểm chung. (C) Song song. (D) Cắt nhau.

**CÂU 8.** Cho tứ diện $MNPQ$. Mệnh đề nào trong các mệnh đề dưới đây là đúng?

(A) $MN \parallel PQ$. (B) $MN$ cắt $PQ$. (C) $MN$ và $PQ$ đồng phẳng. (D) $MN$ và $PQ$ chéo nhau.

**CÂU 9.** Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình bình hành. Điểm $M$ thuộc cạnh $SC$ sao cho $SM = 3MC$, $N$ là giao điểm của $SD$ và $(MAB)$. Khi đó tứ giác $ABMN$ là hình gì?

(A) Tứ giác không có cặp cạnh nào song song. (B) Hình vuông.
(C) Hình thang. (D) Hình bình hành.

**CÂU 10.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang $AB \parallel CD$. Gọi $d$ là giao tuyến của hai mặt phẳng $(ASB)$ và $(SCD)$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

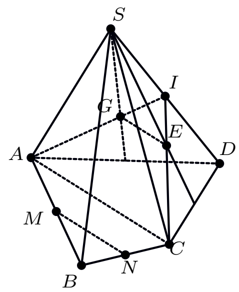
(A) $d \parallel AB$. (B) $d$ cắt $AB$. (C) $d$ cắt $AD$. (D) $d$ cắt $CD$.

**CÂU 11.** Cho hình chóp $S.ABCD$. Gọi $G$, $E$ lần lượt là trọng tâm các tam giác $SAD$ và $SCD$. Lấy $M$, $N$ lần lượt là trung điểm $AB$, $BC$ . Khi đó ta có:

(A) $GE$ và $MN$ trùng nhau. (B) $GE$ và $MN$ chéo nhau.
(C) $GE$ và $MN$ song song với nhau. (D) $GE$ cắt $BC$.

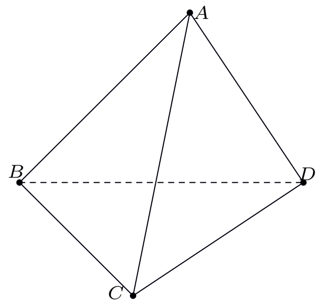
**Lời giải.**

Gọi $I$ là trung điểm của $SD$. Xét tam giác $IAC$ có: $\dfrac{IG}{IA} = \dfrac{IE}{IC} = \dfrac{1}{3}$.
Theo định lí đảo của định lí Thalet, ta có $GE||AC$ (1).
Mặt khác, ta có $MN$ là đường trung bình của $\triangle ABC$ nên suy ra $MN||AC$ (2).
Từ (1) và (2) ta có $MN||GE$




Chọn đáp án (C) ............................................................ □

**CÂU 12.** Cho tứ diện $ABCD$ có $P, Q$ lần lượt là trọng tâm tam giác $ABC$ và $BCD$. Xác định giao tuyến của mặt phẳng $(ABQ)$ và mặt phẳng $(CDP)$.



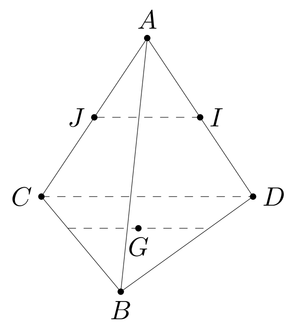

(A) Giao tuyến là đường thẳng đi qua trung điểm hai cạnh $AB$ và $CD$.
(B) Giao tuyến là đường thẳng đi qua trung điểm hai cạnh $AB$ và $AD$.
(C) Giao tuyến là đường thẳng $PQ$.
(D) Giao tuyến là đường thẳng $QA$.

**CÂU 13.** Cho tứ diện $ABCD$. Gọi $I$ và $J$ theo thứ tự là trung điểm của $AD$ và $AC, G$ là trọng tâm tam giác $BCD$. Giao tuyến của hai mặt phẳng $(GIJ)$ và $(BCD)$ là đường thẳng

(A) qua $J$ và song song với $BD$. (B) qua $G$ và song song với $BC$.
(C) qua $I$ và song song với $AB$. (D) qua $G$ và song song với $CD$.

**Lời giải.**

Ta có $\begin{cases} (GIJ) \cap (BCD) = G \\ IJ \subset (GIJ)\,,\ CD \subset (BCD) \\ IJ \parallel CD \end{cases}$
$\Rightarrow (GIJ) \cap (BCD) = Gx \parallel IJ \parallel CD$.



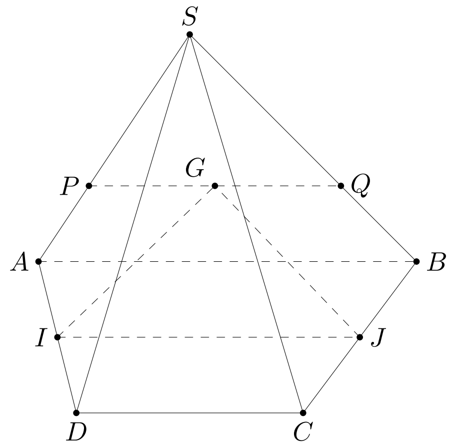

Chọn đáp án (D) ............................................................ □

**CÂU 14.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang với các cạnh đáy là $AB$ và $CD$. Gọi $(ACI)$ lần lượt là trung điểm của $AD$ và $BC$ và $G$ là trọng tâm của tam giác $SAB$. Giao tuyến của $(SAB)$ và $(IJG)$ là

(A) đường thẳng qua $S$ và song song với $AB$.
(B) đường thẳng qua $G$ và song song với $DC$.
(C) $SC$.
(D) đường thẳng qua $G$ và cắt $BC$.

**Lời giải.**

Ta có: $I, J$ lần lượt là trung điểm của $AD$ và $BC \Rightarrow IJ$ là đường trung bình của hình thang $ABCD \Rightarrow IJ \parallel AB \parallel CD$.
Gọi $d = (SAB) \cap (IJG)$ Ta có: $G$ là điểm chung giữa hai mặt phẳng $(SAB)$ và $(IJG)$
Mặt khác: $\begin{cases}(SAB) \supset AB; (IJG) \supset IJ \\ AB \parallel IJ\end{cases}$
$\Rightarrow$Giao tuyến $d$ của $(SAB)$ và $(IJG)$ là đường thẳng qua $G$ và song song với $AB$ và $IJ$.



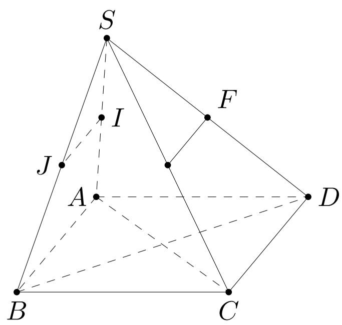

Chọn đáp án (B) ..........

**CÂU 15.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi $I, J, E, F$ lần lượt là trung điểm $SA, SB, SC, SD$. Trong các đường thẳng sau, đường thẳng nào không song song với $IJ$?

(A) $DC$.
(B) $AB$.
(C) $AD$.
(D) $EF$.

**Lời giải.**

Ta có $IJ \parallel AB$ (tính chất đường trung bình trong tam giác $SAB$) và $EF \parallel CD$ (tính chất đường trung bình trong tam giác $SCD$).
Mà $CD \parallel AB$ (đáy là hình bình hành)
$\Rightarrow CD \parallel AB \parallel EF \parallel IJ$.



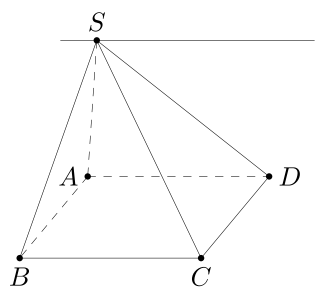

Chọn đáp án (C) ..........

**CÂU 16.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi $d$ là giao tuyến của hai mặt phẳng $(SAD)$ và $(SBC)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

(A) $d$ qua $S$ và song song với $DC$.
(B) $d$ qua $S$ và song song với $BD$.
(C) $d$ qua $S$ và song song với $BC$.
(D) $d$ qua $S$ và song song với $AB$.

**Lời giải.**

Ta có $\begin{cases}(SAD) \cap (SBC) = S \\ AD \subset (SAD), BC \subset (SBC) \\ AD \parallel BC\end{cases}$
$\Rightarrow (SAD) \cap (SBC) = Sx \parallel AD \parallel BC$ (với $d \equiv Sx$).



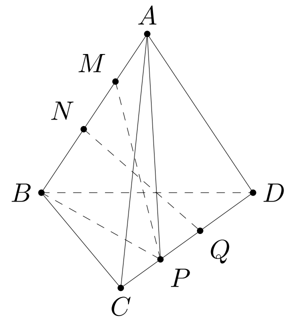

Chọn đáp án (C) ..........

**CÂU 17.** Cho tứ diện $ABCD$. Gọi $M, N$ là hai điểm phân biệt cùng thuộc đường thẳng $AB$. $P, Q$ là hai điểm phân biệt cùng thuộc đường thẳng $CD$. Xét vị trí tương đối của hai đường thẳng $MP, NQ$.

(A) $MP \parallel NQ$.
(B) $MP$ cắt $NQ$.
(C) $MP$ trùng $NQ$.
(D) $MP, NQ$ chéo nhau.

**Lời giải.**

Xét mặt phẳng $(ABP)$.
Ta có: $M, N$ thuộc $AB \Rightarrow M, N$ thuộc mặt phẳng $(ABP)$.
Mặt khác: $CD \cap (ABP) = P$.
Mà: $Q \in CD \Rightarrow Q \notin (ABP)$
$\Rightarrow M, N, P, Q$ không đồng phẳng.



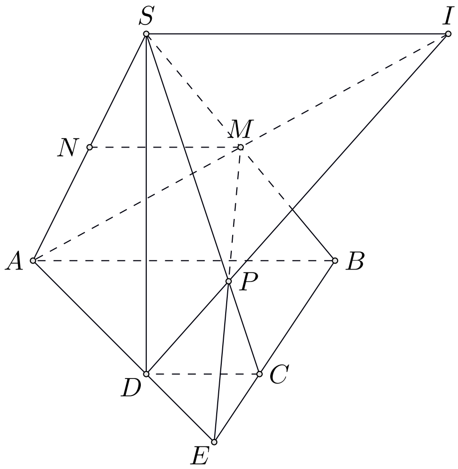

Chọn đáp án (D) ................................................................................................ □

**CÂU 18.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang với đáy lớn $AB$ đáy nhỏ $CD$. Gọi $M, N$ lần lượt là trung điểm của $SA$ và $SB$. Gọi $P$ là giao điểm của $SC$ và $(AND)$. Gọi $I$ là giao điểm của $AN$ và $DP$. Hỏi tứ giác $SABI$ là hình gì?

(A) Hình bình hành. (B) Hình thoi. (C) Hình vuông. (D) Hình chữ nhật.

**Lời giải.**

Gọi $E = AD \cap BC, P = NE \cap SC$. Suy ra $P = SC \cap (AND)$.
Ta có $S$ là điểm chung thứ nhất của hai mặt phẳng $(SAB)$ và $(SCD)$; $I = DP \cap AN \Rightarrow I$ là điểm chung thứ hai của hai mặt phẳng $(SAB)$ và $(SCD)$.
Suy ra $SI = (SAB) \cap (SCD)$.
Mà $AB \parallel CD \Rightarrow SI \parallel AB \parallel CD$. Vì $MN$ là đường trung bình của tam giác $SAB$ và chứng minh được cũng là đường trung bình của tam giác $SAI$ nên suy ra $SI = AB$.
Vậy $SABI$ là hình bình hành.




Chọn đáp án (A) ................................................................................................ □

**CÂU 19.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi $M, N, P, Q$ lần lượt là trung điểm của các cạnh $SA, SB, SC, SD$. Gọi $I$ là một điểm trên cạnh $B$. Thiết diện của hình chóp với mặt phẳng $(IMN)$ là hình gì?

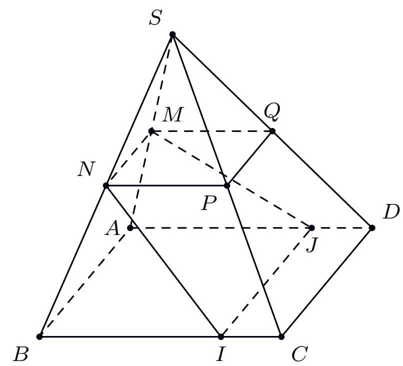
(A) Tam giác $MNQ$. (B) Tam giác $MNI$. (C) Hình thang $MNIJ$. (D) Hình bình hành $MNIJ$.

**Lời giải.**

Ta có $MN \parallel AB$; $MN = \frac{1}{2}AB$ và $PQ \parallel CD$; $PQ = \frac{1}{2}CD$. Từ đó, suy ra $MN = PQ$ và $MN \parallel PQ$.
Vậy $MNPQ$ là hình bình hành.

Ta có $\begin{cases} I \in (IMN) \cap (ABCD) \\ AB \subset (ABCD) \\ MN \subset (IMN) \\ AB \parallel MN \end{cases}$. $\Rightarrow (IMN) \cap (ABCD) = IJ \parallel AB \parallel MN$ với $J \in AD$.

Thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng $(IMN)$ là hình thang $MNIJ$.




Chọn đáp án (C) ................................................................................................ □

**CÂU 20.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi $I$ là trung điểm $SA$. Thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi mặt phẳng $(IBC)$ là

(A) Tam giác $IBC$.
(B) Tứ giác $IBCD$.
(C) Hình thang $IGBC$ ($G$ là trung điểm $SB$).
(D) Hình thang $IBCJ$ ($J$ là trung điểm $SD$).

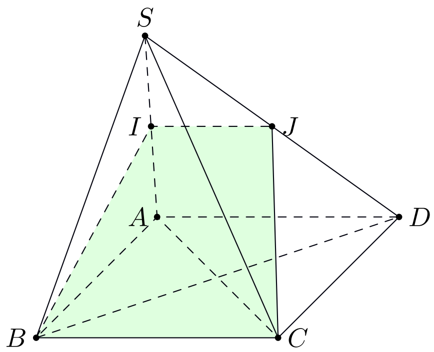
**Lời giải.**

Ta có $\begin{cases}(IBC)\cap(SAD)=I\\ BC\subset(IBC), AD\subset(SAD)\\ BC \mathbin{/\!/} AD\end{cases}$

Suy ra $(IBC)\cap(SAD)=Ix \mathbin{/\!/} BC \mathbin{/\!/} AD$.

Trong mặt phẳng $(SAD)$ ta có $Ix \mathbin{/\!/} AD$.

Gọi $Ix\cap SD=J \Rightarrow IJ \mathbin{/\!/} BC$. Vậy thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi mặt phẳng $(IBC)$ là hình thang $IBCJ$.




Chọn đáp án D ........................................................................................

# MỤC LỤC