

QUICK NOTE

B. CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Tính giá trị biểu thức lượng giác

Áp dụng các công thức lượng giác

1. Ví dụ

VÍ DỤ 1. Không dùng máy tính, tính giá trị của các biểu thức sau

- a) $A = \sin 45^\circ \cot 135^\circ + \cos 60^\circ \cdot \sin 150^\circ - \cos 30^\circ \cdot \sin 120^\circ$.
 b) $B = \tan 135^\circ + \cot 60^\circ \cot 30^\circ - \tan 60^\circ \tan 150^\circ$.
 c) $C = 2 \sin 60^\circ \tan 150^\circ - \cos 180^\circ \cdot \cot 45^\circ$.

VÍ DỤ 2. a) Cho $\cos \alpha = \frac{3}{4}$ với $0^\circ < \alpha < 90^\circ$. Tính $A = \frac{\tan \alpha + 3 \cot \alpha}{\tan \alpha + \cot \alpha}$.

b) Cho $\tan \alpha = \sqrt{2}$. Tính $B = \frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{\sin^3 \alpha + 3 \cos^3 \alpha + 2 \sin \alpha}$.

2. Bài tập tự luận

BÀI 1. Tính giá trị của các biểu thức

- a) $A = \sin 45^\circ + 2 \sin 60^\circ + \tan 120^\circ + \cos 135^\circ$;
 b) $B = \tan 45^\circ \cdot \cot 135^\circ - \sin 30^\circ \cdot \cos 120^\circ - \sin 60^\circ \cdot \cos 150^\circ$;
 c) $C = \cos^2 5^\circ + \cos^2 25^\circ + \cos^2 45^\circ + \cos^2 65^\circ + \cos^2 85^\circ$;
 d) $D = \frac{12}{1 + \tan^2 73^\circ} - 4 \tan 75^\circ \cdot \cot 105^\circ + 12 \sin^2 107^\circ - 2 \tan 40^\circ \cdot \cos 60^\circ \cdot \tan 50^\circ$;
 e) $E = 4 \tan 32^\circ \cdot \cos 60^\circ \cdot \cot 148^\circ + \frac{5 \cot^2 108^\circ}{1 + \tan^2 18^\circ} + 5 \sin^2 72^\circ$.

BÀI 2. Chứng minh rằng

- a) $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha$;
 b) $\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha = 1 - 3 \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha$;
 c) $\sqrt{\sin^4 \alpha + 6 \cos^2 \alpha + 3} + \sqrt{\cos^4 \alpha + 4 \sin^2 \alpha} = 4$.

BÀI 3. Cho góc α với $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ thỏa mãn $\sin \alpha = \frac{3}{4}$. Tính giá trị của biểu thức $F = \frac{\tan \alpha + 2 \cot \alpha}{\tan \alpha + \cot \alpha}$.

BÀI 4. Cho góc α thỏa mãn $0^\circ < \alpha < 180^\circ$ và $\tan \alpha = \sqrt{2}$. Tính giá trị của các biểu thức sau

$$K = \frac{\sin^3 \alpha + \sin \alpha \cdot \cos^2 \alpha + 2 \sin^2 \alpha \cdot \cos \alpha - 4 \cos^3 \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha}.$$

Dạng 2. Tìm các GTLG khi biết một GTLG của góc

Áp dụng tính chất về dấu của GTLG của một góc và các công thức lượng giác cơ bản.

1. Ví dụ minh họa

VÍ DỤ 1.

- a) Cho $\sin \alpha = \frac{1}{3}$ với $90^\circ < \alpha < 180^\circ$. Tính $\cos \alpha$ và $\tan \alpha$.
 b) Cho $\cos \alpha = -\frac{2}{3}$ và $\sin \alpha > 0$. Tính $\sin \alpha$ và $\cot \alpha$.
 c) Cho $\tan \alpha = -2\sqrt{2}$, tính giá trị lượng giác còn lại.

2. Bài tập tự luận

BÀI 1. Cho góc α , $0^\circ < \alpha < 180^\circ$ thỏa mãn $\cos \alpha = \frac{-1}{3}$.

- a) Tính $\tan \alpha$.
b) Tính giá trị của biểu thức $P = \tan \alpha + 2 \cot \alpha$.

BÀI 2. Cho góc α thỏa mãn $0^\circ < \alpha < 180^\circ$ và $\tan \alpha = 2$. Tính giá trị của các biểu thức sau

- a) $G = 2 \sin \alpha + \cos \alpha$;
b) $H = \frac{2 \sin \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha}$.

C. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

CÂU 1. Giá trị của $\cos 60^\circ + \sin 30^\circ$ bằng bao nhiêu?

- ☐ A $\frac{\sqrt{3}}{2}$. ☐ B $\sqrt{3}$. ☐ C $\frac{\sqrt{3}}{3}$. ☐ D 1.

CÂU 2. Giá trị của $\tan 30^\circ + \cot 30^\circ$ bằng bao nhiêu?

- ☐ A $\frac{4}{\sqrt{3}}$. ☐ B $\frac{1 + \sqrt{3}}{3}$. ☐ C $\frac{2}{\sqrt{3}}$. ☐ D 2.

CÂU 3. Trong các đẳng thức sau đây, đẳng thức nào sai?

- ☐ A $\sin 0^\circ + \cos 0^\circ = 1$. ☐ B $\sin 90^\circ + \cos 90^\circ = 1$.
☐ C $\sin 180^\circ + \cos 180^\circ = -1$. ☐ D $\sin 60^\circ + \cos 60^\circ = 1$.

CÂU 4. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sai?

- ☐ A $\cos 60^\circ = \sin 30^\circ$. ☐ B $\cos 60^\circ = \sin 120^\circ$.
☐ C $\cos 30^\circ = \sin 120^\circ$. ☐ D $\sin 60^\circ = -\cos 120^\circ$.

CÂU 5. Đẳng thức nào sau đây sai?

- ☐ A $\sin 45^\circ + \sin 45^\circ = \sqrt{2}$. ☐ B $\sin 30^\circ + \cos 60^\circ = 1$.
☐ C $\sin 60^\circ + \cos 150^\circ = 0$. ☐ D $\sin 120^\circ + \cos 30^\circ = 0$.

CÂU 6. Giá trị $\cos 45^\circ + \sin 45^\circ$ bằng bao nhiêu?

- ☐ A 1. ☐ B $\sqrt{2}$. ☐ C $\sqrt{3}$. ☐ D 0.

CÂU 7. Trong các đẳng thức sau, đẳng thức nào đúng?

- ☐ A $\sin(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$. ☐ B $\sin(180^\circ - \alpha) = -\sin \alpha$.
☐ C $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$. ☐ D $\sin(180^\circ - \alpha) = \cos \alpha$.

CÂU 8. Trong các đẳng thức sau, đẳng thức nào sai?

- ☐ A $\sin 0^\circ + \cos 0^\circ = 0$. ☐ B $\sin 90^\circ + \cos 90^\circ = 1$.
☐ C $\sin 180^\circ + \cos 180^\circ = -1$. ☐ D $\sin 60^\circ + \cos 60^\circ = \frac{\sqrt{3} + 1}{2}$.

CÂU 9. Cho α là góc tù. Điều khẳng định nào sau đây là đúng?

- ☐ A $\sin \alpha < 0$. ☐ B $\cos \alpha > 0$. ☐ C $\tan \alpha < 0$. ☐ D $\cot \alpha > 0$.

CÂU 10. Giá trị của $E = \sin 36^\circ \cos 6^\circ - \sin 126^\circ \cos 84^\circ$ là

- ☐ A $\frac{1}{2}$. ☐ B $\frac{\sqrt{3}}{2}$. ☐ C 1. ☐ D -1.

CÂU 11. Giá trị của biểu thức $A = \sin^2 51^\circ + \sin^2 55^\circ + \sin^2 39^\circ + \sin^2 35^\circ$ là

- ☐ A 3. ☐ B 4. ☐ C 1. ☐ D 2.

CÂU 12. Giá trị của biểu thức $A = \tan 1^\circ \tan 2^\circ \tan 3^\circ \dots \tan 88^\circ \tan 89^\circ$ là

- ☐ A 0. ☐ B 2. ☐ C 3. ☐ D 1.

CÂU 13. Tổng $\sin^2 2^\circ + \sin^2 4^\circ + \sin^2 6^\circ + \dots + \sin^2 84^\circ + \sin^2 86^\circ + \sin^2 88^\circ$ bằng

- ☐ A 21. ☐ B 23. ☐ C 22. ☐ D 24.

CÂU 14. Giá trị của $A = \tan 5^\circ \cdot \tan 10^\circ \cdot \tan 15^\circ \dots \tan 80^\circ \cdot \tan 85^\circ$ là

- ☐ A 2. ☐ B 1. ☐ C 0. ☐ D -1.

QUICK NOTE

QUICK NOTE

CÂU 15. Giá trị của $B = \cos^2 73^\circ + \cos^2 87^\circ + \cos^2 3^\circ + \cos^2 17^\circ$ là

- (A) $\sqrt{2}$. (B) 2. (C) -2. (D) 1.

CÂU 16. Cho $\cos x = \frac{1}{2}$. Tính biểu thức $P = 3 \sin^2 x + 4 \cos^2 x$

- (A) $\frac{13}{4}$. (B) $\frac{7}{4}$. (C) $\frac{11}{4}$. (D) $\frac{15}{4}$.

CÂU 17. Biết $\cos \alpha = \frac{1}{3}$. Giá trị đúng của biểu thức $P = \sin^2 \alpha + 3 \cos^2 \alpha$ là

- (A) $\frac{1}{3}$. (B) $\frac{10}{9}$. (C) $\frac{11}{9}$. (D) $\frac{4}{3}$.

CÂU 18. Cho biết $\tan \alpha = \frac{1}{2}$. Tính $\cot \alpha$.

- (A) $\cot \alpha = 2$. (B) $\cot \alpha = \sqrt{2}$. (C) $\cot \alpha = \frac{1}{4}$. (D) $\cot \alpha = \frac{1}{2}$.

CÂU 19. Cho biết $\cos \alpha = -\frac{2}{3}$ và $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Tính $\tan \alpha$?

- (A) $\frac{5}{4}$. (B) $-\frac{5}{2}$. (C) $\frac{\sqrt{5}}{2}$. (D) $-\frac{\sqrt{5}}{2}$.

CÂU 20. Cho α là góc tù và $\sin \alpha = \frac{5}{13}$. Giá trị của biểu thức $3 \sin \alpha + 2 \cos \alpha$ là

- (A) 3. (B) $-\frac{9}{13}$. (C) -3. (D) $\frac{9}{13}$.

CÂU 21. Cho biết $\sin \alpha + \cos \alpha = a$. Giá trị của $\sin \alpha \cdot \cos \alpha$ bằng bao nhiêu?

- (A) $\sin \alpha \cdot \cos \alpha = a^2$. (B) $\sin \alpha \cdot \cos \alpha = 2a$.
(C) $\sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{1 - a^2}{2}$. (D) $\sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{a^2 - 1}{2}$.

CÂU 22. Cho biết $\cos \alpha = -\frac{2}{3}$. Tính giá trị của biểu thức $E = \frac{\cot \alpha + 3 \tan \alpha}{2 \cot \alpha + \tan \alpha}$?

- (A) $-\frac{19}{13}$. (B) $\frac{19}{13}$. (C) $\frac{25}{13}$. (D) $-\frac{25}{13}$.

CÂU 23. Cho biết $\cot \alpha = 5$. Tính giá trị của $E = 2 \cos^2 \alpha + 5 \sin \alpha \cos \alpha + 1$?

- (A) $\frac{10}{26}$. (B) $\frac{100}{26}$. (C) $\frac{50}{26}$. (D) $\frac{101}{26}$.

CÂU 24. Cho $\cot \alpha = \frac{1}{3}$. Giá trị của biểu thức $A = \frac{3 \sin \alpha + 4 \cos \alpha}{2 \sin \alpha - 5 \cos \alpha}$ là

- (A) $-\frac{15}{13}$. (B) -13. (C) $\frac{15}{13}$. (D) 13.

CÂU 25. Cho biết $\cos \alpha = -\frac{2}{3}$. Giá trị của biểu thức $E = \frac{\cot \alpha - 3 \tan \alpha}{2 \cot \alpha - \tan \alpha}$ bằng bao nhiêu?

- (A) $-\frac{25}{3}$. (B) $-\frac{11}{13}$. (C) $-\frac{11}{3}$. (D) $-\frac{25}{13}$.

CÂU 26. Biết $\sin a + \cos a = \sqrt{2}$. Hỏi giá trị của $\sin^4 a + \cos^4 a$ bằng bao nhiêu?

- (A) $\frac{3}{2}$. (B) $\frac{1}{2}$. (C) -1. (D) 0.

CÂU 27. Cho $\tan \alpha + \cot \alpha = m$. Tìm m để $\tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha = 7$.

- (A) $m = 9$. (B) $m = 3$. (C) $m = -3$. (D) $m = \pm 3$.

CÂU 28. Cho biết $3 \cos \alpha - \sin \alpha = 1$, $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ Giá trị của $\tan \alpha$ bằng

- (A) $\tan \alpha = \frac{4}{3}$. (B) $\tan \alpha = \frac{3}{4}$. (C) $\tan \alpha = \frac{4}{5}$. (D) $\tan \alpha = \frac{5}{4}$.

CÂU 29. Cho biết $2 \cos \alpha + \sqrt{2} \sin \alpha = 2$, $0^\circ < \alpha < 90^\circ$. Tính giá trị của $\cot \alpha$.

- (A) $\cot \alpha = \frac{\sqrt{5}}{4}$. (B) $\cot \alpha = \frac{\sqrt{3}}{4}$. (C) $\cot \alpha = \frac{\sqrt{2}}{4}$. (D) $\cot \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

CÂU 30. Cho biết $\cos \alpha + \sin \alpha = \frac{1}{3}$. Giá trị của $P = \sqrt{\tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha}$ bằng bao nhiêu?

- (A) $P = \frac{5}{4}$. (B) $P = \frac{7}{4}$. (C) $P = \frac{9}{4}$. (D) $P = \frac{11}{4}$.

CÂU 31. Cho biết $\sin \alpha - \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$. Giá trị của $P = \sqrt{\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha}$ bằng bao nhiêu?

- (A) $P = \frac{\sqrt{15}}{5}$. (B) $P = \frac{\sqrt{17}}{5}$. (C) $P = \frac{\sqrt{19}}{5}$. (D) $P = \frac{\sqrt{21}}{5}$.

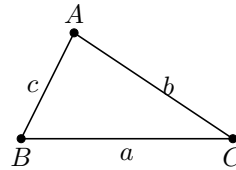
Bài 2. HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Định lý Cosine

Cho tam giác ABC có $BC = a$, $AC = b$ và $AB = c$.

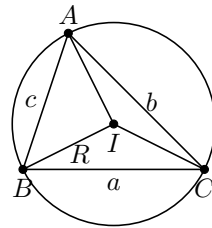
- $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A \Rightarrow \cos A = \dots\dots\dots$
- $b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cdot \cos B \Rightarrow \cos B = \dots\dots\dots$
- $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C \Rightarrow \cos C = \dots\dots\dots$



2. Định lý Sine

Cho tam giác ABC có $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ và R là bán kính đường tròn ngoại tiếp. Ta có

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$



A Ghi nhớ: Tỷ lệ "cạnh chia sin góc đối" thì bằng nhau.

3. Công thức tính diện tích tam giác

Gọi S là diện tích tam giác ABC . Ta có

- $S = \frac{1}{2}a \cdot h_a = \frac{1}{2}b \cdot h_b = \frac{1}{2}c \cdot h_c$,
- $S = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2}ca \sin B = \frac{1}{2}ab \sin C$,
- $S = \frac{abc}{4R}$, $S = p \cdot r$, (đọc thêm)
- $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

Trong đó:

- h_a, h_b, h_c là độ dài đường cao lần lượt tương ứng với các cạnh BC, CA, AB .
- R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác.
- r là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác.
- $p = \frac{a+b+c}{2}$ là nửa chu vi tam giác.

B. CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Áp dụng định lý cosine

Nhận dạng định lý:

- Cho tam giác biết trước độ dài hai cạnh và số đo của một góc.
- Cho tam giác biết trước độ dài ba cạnh.

1. Ví dụ minh họa

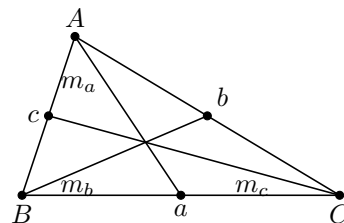
VÍ DỤ 1. Cho tam giác ABC có $b = 5$, $c = 7$ và $\cos A = \frac{3}{5}$. Tính cạnh a và cosin các góc còn lại của tam giác đó.

VÍ DỤ 2. Cho tam giác ABC có $AC = 10\text{cm}$, $BC = 16\text{cm}$ và $C = 120^\circ$, tính độ dài cạnh AB .

A Cho tam giác ABC có m_a, m_b, m_c lần lượt là các trung tuyến kẻ từ A, B, C . Ta có

QUICK NOTE

$$\begin{aligned} \bullet m_a^2 &= \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4} \\ \bullet m_b^2 &= \frac{a^2 + c^2}{2} - \frac{b^2}{4} \\ \bullet m_c^2 &= \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4} \end{aligned}$$

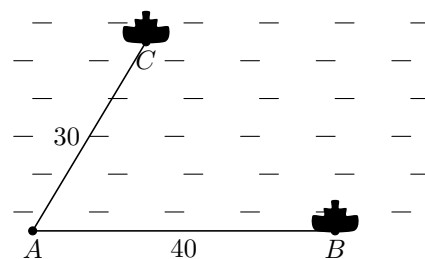


VÍ DỤ 3. Cho tam giác ABC có $AB = 4$ cm, $AC = 3$ cm và $BC = 6$ cm. Tính độ dài trung tuyến kẻ từ C của tam giác ABC .

VÍ DỤ 4. Cho tam giác ABC có $BC = 3$, $CA = 4$ và $AB = 6$. Tính cosin của góc có số đo lớn nhất của tam giác đã cho.

VÍ DỤ 5.

Hai chiếc tàu thủy cùng xuất phát từ một vị trí A , đi thẳng theo hai hướng tạo với nhau góc 60° . Tàu B chạy với tốc độ 20 hải lý một giờ. Tàu C chạy với tốc độ 15 hải lý một giờ. Hỏi sau hai giờ, hai tàu cách nhau bao nhiêu hải lý?



VÍ DỤ 6. Tam giác ABC có $AB = c$; $BC = a$; $CA = b$. Các cạnh a, b, c liên hệ với nhau bởi đẳng thức $b(b^2 - a^2) = c(a^2 - c^2)$. Tính số đo góc \widehat{BAC} .

2. Bài tập tự luận

BÀI 1. Cho tam giác ABC có $\widehat{A} = 60^\circ$, $AB = 6$, $AC = 8$. Tính BC .

BÀI 2. Cho tam giác ABC có các cạnh $BC = 6$, $CA = 4\sqrt{2}$, $AB = 2$. Tính $\cos A$ và góc \widehat{A} .

BÀI 3. Cho tam giác ABC có $AB = 6$ cm; $AC = 5$ cm và $\widehat{ACB} = 60^\circ$. Tính BC .

BÀI 4. Tam giác ABC có $b = 6$, $c = 8$ và $m_a = 5$. Tính a , \widehat{A} .

BÀI 5. Cho tam giác ABC , gọi l_a là độ dài đường phân giác trong kẻ từ đỉnh A của tam giác ABC . Chứng minh rằng $l_a = \frac{bc \sin A}{(b + c) \sin \frac{A}{2}}$.

BÀI 6. Hai lực \vec{f}_1 và \vec{f}_2 cho trước cùng tác dụng lên một vật và tạo thành góc nhọn $(\vec{f}_1, \vec{f}_2) = \alpha$. Hãy lập công thức tính cường độ của hợp lực \vec{S} .

Dạng 2. Áp dụng định lý sin

Nhận dạng định lý:

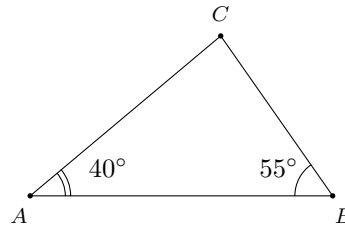
- Cho tam giác biết trước độ dài hai cạnh và số đo của một góc.
- Cho tam giác biết trước độ dài một cạnh và số đo của hai góc.
- Cho tam giác biết trước độ dài một cạnh, số đo góc đối diện và bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác.

1. Ví dụ minh họa

VÍ DỤ 1. Cho tam giác ABC có $\widehat{A} = 120^\circ$ và $BC = 10$ cm. Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

VÍ DỤ 2.

Cho tam giác ABC có $\widehat{A} = 40^\circ$, $\widehat{B} = 55^\circ$ và $AB = 100$.
 Tính độ dài cạnh BC (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).



VÍ DỤ 3. Cho tam giác ABC có $\frac{AB}{2} = \frac{BC}{3}$ và $\widehat{A} = 45^\circ$. Tính các góc B, C của tam giác đó (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

VÍ DỤ 4. Cho tam giác ABC có $\widehat{A} = 30^\circ$, $\widehat{B} = 50^\circ$ và bán kính đường tròn ngoại tiếp bằng 10 cm. Tính độ dài các cạnh của tam giác ABC (làm tròn đến hàng phần mười).

VÍ DỤ 5. Cho tam giác ABC . Chứng minh rằng $\sin^2 A = \sin B \sin C$ khi và chỉ khi $a^2 = bc$.

VÍ DỤ 6. Cho tam giác ABC . Biết $AB = 5$ cm, $BC = 6$ cm và $2 \sin A = \sin B + \sin C$. Tính độ dài cạnh AC .

2. Bài tập tự luận

BÀI 1. Cho tam giác ABC có $\widehat{B} = 70^\circ$ và $AC = 15$ cm. Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

BÀI 2. Cho tam giác ABC có $\widehat{B} = 30^\circ$, $\widehat{C} = 65^\circ$ và $BC = 50$. Tính độ dài cạnh AB (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

BÀI 3. Cho tam giác ABC có $\frac{BC}{3} = \frac{AC}{5}$ và $\widehat{A} = 30^\circ$. Tính các góc B, C của tam giác đó (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

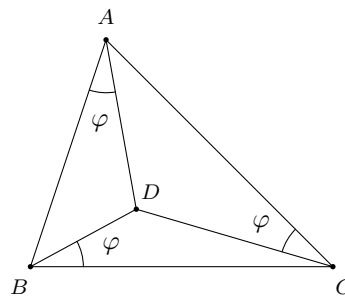
BÀI 4. Cho tam giác ABC thỏa mãn $a \sin B = c \sin A$. Chứng minh rằng tam giác ABC cân.

BÀI 5. Cho tam giác ABC thỏa mãn $\sin^2 A = \sin^2 B + \sin^2 C$. Chứng minh rằng tam giác ABC vuông.

BÀI 6.

Cho tam giác ABC . Gọi D là điểm thuộc miền trong tam giác ABC sao cho $\widehat{BAD} = \widehat{CBD} = \widehat{ACD} = \varphi$.
 Chứng minh rằng

$$\sin^3 \varphi = \sin(A - \varphi) \sin(B - \varphi) \sin(C - \varphi).$$



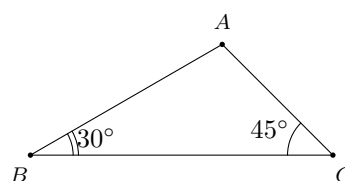
Dạng 3. Giải tam giác và ứng dụng

Giải tam giác là bài toán tìm độ dài tất cả các cạnh và độ lớn tất cả các góc của tam giác.

1. Ví dụ minh họa

VÍ DỤ 1.

Cho tam giác ABC có $BC = 40$ cm, $\widehat{B} = 30^\circ$, $\widehat{C} = 45^\circ$.
 Tính góc A và độ dài các cạnh AB, AC của tam giác đó (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

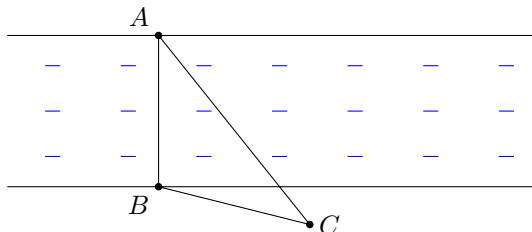


VÍ DỤ 2. Cho tam giác ABC có $AB = 25$, $AC = 20$, $\widehat{A} = 120^\circ$. Tính cạnh BC và các góc B, C của tam giác đó.

VÍ DỤ 3.

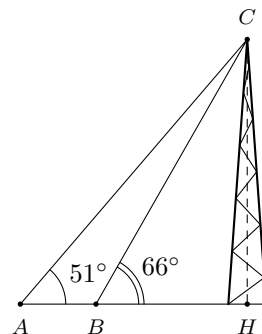
QUICK NOTE

Để đo chiều rộng AB của một khúc sông, người ta chọn điểm C . Sau đó, đo khoảng cách BC , các góc B và C . Biết rằng $BC = 200$ m, $\widehat{B} = 107^\circ$, $\widehat{C} = 28^\circ$. Tìm chiều rộng AB của khúc sông đó (làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất).



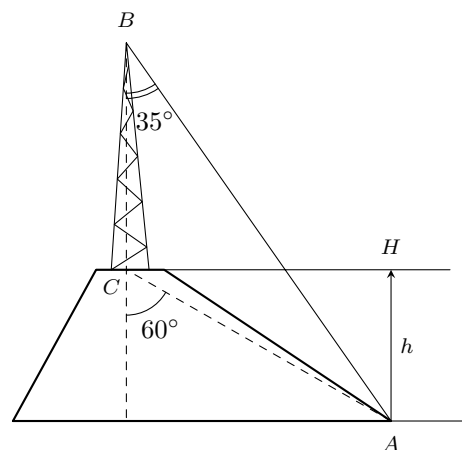
VÍ DỤ 4.

Để đo chiều cao CH của một tháp truyền hình, người ta chọn hai điểm quan sát A, B trên mặt đất (hình vẽ). Biết $\widehat{CAH} = 51^\circ$, $\widehat{CBH} = 66^\circ$ và $AB = 75$ m, tính chiều cao của tháp.



VÍ DỤ 5.

Trên ngọn đồi có một cái tháp cao 120 m. Đỉnh tháp B và chân tháp C nhìn điểm A ở chân đồi dưới các góc tương ứng bằng 35° và 60° so với phương thẳng đứng. Xác định chiều cao HA của ngọn đồi. (Làm tròn đến phần mười)



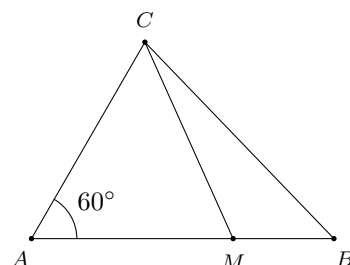
2. Bài tập tự luận

BÀI 1. Cho tam giác ABC có $AB = 8$, $BC = 10$, $AC = 15$. Tính $\widehat{A} + 2\widehat{C}$ (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

BÀI 2. Cho tam giác ABC có $AB = 15$ cm, $AC = 21$ cm, $\widehat{A} = 30^\circ$. Tính cạnh BC và các góc B, C của tam giác đó (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

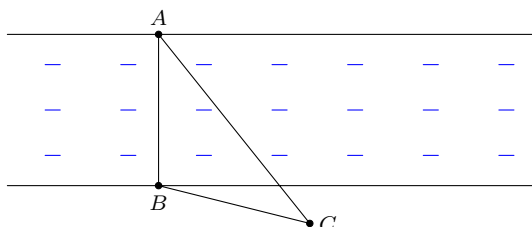
BÀI 3.

Cho tam giác ABC có $AB = 15$, $AC = 12$, $\widehat{A} = 60^\circ$. M là điểm thuộc cạnh AB sao cho $AM = 2BM$. Tính cạnh CM , góc \widehat{BCM} và bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác BCM (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).



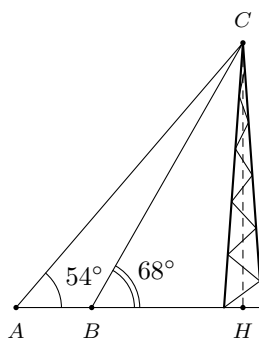
BÀI 4.

Để đo chiều rộng AB của một khúc sông, người ta chọn điểm C , đo khoảng cách BC , các góc B và C . Biết rằng $BC = 250$ m, $\widehat{B} = 104^\circ$, $\widehat{C} = 31^\circ$. Tìm chiều rộng AB của khúc sông đó (làm tròn đến chữ số hàng đơn vị).



BÀI 5.

Để đo chiều cao CH của một tháp truyền hình, người ta chọn hai điểm quan sát A, B trên mặt đất (hình vẽ). Biết $\widehat{CAH} = 54^\circ$, $\widehat{CBH} = 68^\circ$ và $AB = 80$ m, tính chiều cao của tháp (Làm tròn đến hàng đơn vị).



Dạng 4. Bài tập tổng hợp

1. Ví dụ minh họa

VÍ DỤ 1. Cho tam giác ABC có $\widehat{A} = 60^\circ$ và $AB = 8$ cm, $AC = 5$ cm.

- Tính diện tích của tam giác ABC .
- Tính độ dài đường cao hạ từ đỉnh A của tam giác ABC .
- Tính bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC .

VÍ DỤ 2. Cho hình bình hành $ABCD$ có $AB = 6$, $BC = 8$ và $\widehat{ABC} = 60^\circ$. Tính diện tích hình bình hành $ABCD$.

VÍ DỤ 3. Cho tam giác ABC có $\widehat{A} = 120^\circ$, $\widehat{B} = 30^\circ$, diện tích tam giác ABC bằng $9\sqrt{3}$. Tính các cạnh của tam giác ABC .

VÍ DỤ 4. Cho tam giác ABC có $AB = 2$, $AC = 2\sqrt{7}$ và $BC = 4$.

- Tính góc B và diện tích tam giác ABC .
- Tính độ dài đường phân giác trong của góc B của tam giác ABC .

2. Bài tập tự luận

BÀI 1. Cho tam giác với ba cạnh $a = 13$, $b = 14$, $c = 15$. Tính diện tích của tam giác và độ dài đường cao h_c .

BÀI 2. Cho tam giác ABC có $AB = 10$, $BC = 6$ và góc $\widehat{B} = 120^\circ$.

- Tính AC và diện tích tam giác ABC .
- Tính đường cao AH và bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC .
- Tính độ dài đường phân giác trong BD của tam giác ABC .

BÀI 3. Cho tam giác ABC có $AB = 2$, $AC = 3$ và $\widehat{BAC} = 120^\circ$. Tính độ dài BC , diện tích tam giác ABC , độ dài đường phân giác trong AD của tam giác ABC .

BÀI 4. Cho tam giác ABC có $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$. Gọi h_a , h_b , h_c lần lượt là các đường cao tương ứng xuất phát từ các đỉnh A, B, C và r là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC . Chứng minh $\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r}$.

BÀI 5. Cho tam giác ABC không vuông ở A , chứng minh $S = \frac{1}{4}(b^2 + c^2 - a^2) \tan A$.

C. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

CÂU 1. Tam giác ABC có $AB = 5$, $BC = 7$, $CA = 8$. Số đo góc \widehat{A} bằng

- (A) 90° . (B) 45° . (C) 60° . (D) 30° .

CÂU 2. Tam giác ABC có $AB = \sqrt{2}$, $AC = \sqrt{3}$ và $\widehat{C} = 45^\circ$. Tính độ dài cạnh BC .

- (A) $BC = \sqrt{5}$. (B) $BC = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}$.
(C) $BC = \sqrt{6}$. (D) $BC = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}$.

QUICK NOTE

QUICK NOTE

CÂU 3. Tam giác ABC có $AB = 2$, $AC = 1$ và $\widehat{A} = 60^\circ$. Tính độ dài cạnh BC .

- (A) $BC = \sqrt{2}$. (B) $BC = \sqrt{3}$. (C) $BC = 1$. (D) $BC = 2$.

CÂU 4. Tam giác ABC có $AB = 3$, $AC = 6$, $\widehat{BAC} = 60^\circ$. Tính độ dài đường cao h_a của tam giác.

- (A) $h_a = 3\sqrt{3}$. (B) $h_a = \sqrt{3}$. (C) $h_a = \frac{3}{2}$. (D) $h_a = 3$.

CÂU 5. Tam giác ABC có $AB = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}$, $BC = \sqrt{3}$, $CA = \sqrt{2}$. Gọi D là chân đường phân giác trong góc \widehat{A} . Khi đó góc \widehat{ADB} bằng

- (A) 90° . (B) 45° . (C) 60° . (D) 75° .

CÂU 6. Tam giác ABC có $AB = 4$, $BC = 6$, $AC = 2\sqrt{7}$. Điểm M thuộc đoạn BC sao cho $MC = 2MB$. Tính độ dài cạnh AM .

- (A) $AM = 4\sqrt{2}$. (B) $AM = 3\sqrt{2}$. (C) $AM = 2\sqrt{3}$. (D) $AM = 3$.

CÂU 7. Cho hình thoi $ABCD$ cạnh bằng 1 cm và có $\widehat{BAD} = 60^\circ$. Tính độ dài cạnh AC .

- (A) $AC = 2$. (B) $AC = \sqrt{3}$. (C) $AC = 2\sqrt{3}$. (D) $AC = \sqrt{2}$.

CÂU 8. Khoảng cách từ A đến B không thể đo trực tiếp được vì phải qua một đầm lầy. Người ta xác định được một điểm C mà từ đó có thể nhìn được A và B dưới một góc $78^\circ 24'$. Biết $CA = 250$ m, $CB = 120$ m. Khoảng cách AB bằng bao nhiêu?

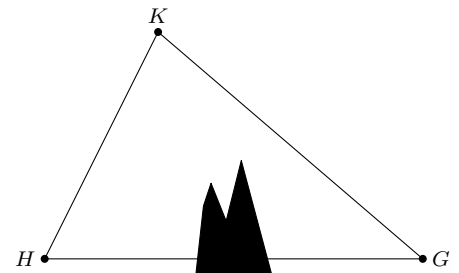
- (A) 266 m. (B) 255 m. (C) 166 m. (D) 298 m.

CÂU 9. Cho tam giác ABC có $BC = 2\sqrt{3}$, $AB = \sqrt{6} - \sqrt{2}$, $AC = 2\sqrt{2}$. AD là tia phân giác của góc \widehat{BAD} . Tính góc \widehat{BAD} .

- (A) 60° . (B) 90° . (C) 45° . (D) 75° .

CÂU 10.

Một ô tô muốn đi từ địa điểm H đến địa điểm G , nhưng giữa H và G là một ngọn núi cao nên ô tô phải đi thành 2 đoạn từ H lên K (ô tô leo dốc lên núi) và từ K đến G (ô tô xuống núi). Các đoạn đường tạo thành tam giác HKG với $HK = 15$ km, $KG = 20$ km và $\widehat{HKG} = 120^\circ$. Giả sử cứ chạy 1 km, ô tô tiêu thụ hết 0,3 lít xăng. Giá thành xăng hiện nay là 13050 đồng một lít xăng. Hỏi ô tô đi từ H đến G hết bao nhiêu tiền xăng?



- (A) 137025 đồng. (B) 107025 đồng. (C) 12278 đồng. (D) 137000 đồng.

CÂU 11. Cho tam giác ABC có góc $\widehat{B} = 45^\circ$, $AC = 28$, $BC = 25$. Tính số đo góc A của tam giác (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

- (A) $39,1^\circ$. (B) $40,2^\circ$. (C) $39,2^\circ$. (D) 40° .

CÂU 12. Cho tam giác ABC có góc $\widehat{B} = 30^\circ$, $\widehat{C} = 75^\circ$, $AB = 20$. Độ dài cạnh AC là

- (A) $20(\sqrt{6} - \sqrt{2})$. (B) $10(\sqrt{6} - \sqrt{2})$. (C) $10(\sqrt{6} - 1)$. (D) $5(\sqrt{6} + \sqrt{2})$.

CÂU 13. Cho tam giác ABC có $\widehat{B} = 30^\circ$, $\widehat{C} = 45^\circ$ và $BC = 30$ cm. Tính độ dài cạnh AB (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

- (A) $15(\sqrt{3} + 1)$ cm. (B) $15(\sqrt{3} - 1)$ cm. (C) $30(2\sqrt{3} - 1)$ cm. (D) $30(\sqrt{3} - 1)$ cm.

CÂU 14. Cho tam giác ABC có $BC = 11$, $\widehat{A} = 30^\circ$. Độ dài cạnh AB lớn nhất bằng bao nhiêu?

- (A) $11\sqrt{3}$. (B) $\frac{22\sqrt{3}}{2}$. (C) 22. (D) $11(\sqrt{3} + 1)$.

CÂU 15. Cho tam giác ABC có $\widehat{C} = 30^\circ$ và $AB = 30$ cm. Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

- (A) $30\sqrt{3}$ cm. (B) $15\sqrt{3}$ cm. (C) 30 cm. (D) 15 cm.

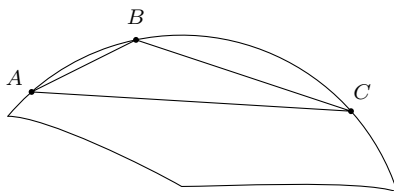
CÂU 16. Cho tam giác MNK có $MN = a$, $MK = 3a$, $\widehat{M} = 120^\circ$. Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp R của tam giác MNK .

- (A) $\frac{a\sqrt{39}}{3}$. (B) $\frac{a\sqrt{21}}{3}$. (C) $\frac{a\sqrt{33}}{3}$. (D) $\frac{a\sqrt{42}}{3}$.

CÂU 17.

Đề đo bán kính của một chiếc đĩa cổ chỉ còn lại một phần, các nhà khảo cổ chọn 3 điểm trên chiếc đĩa (hình vẽ). Biết $\widehat{A} = 33^\circ$, $BC = 15,3$ cm, tính bán kính của chiếc đĩa (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

- ☐ **A** 13,8cm.
 ☐ **B** 12,6cm.
- ☐ **C** 12,9cm.
 ☐ **D** 13,1cm.



CÂU 18. Cho tam giác ABC có $b^2 = a^2 + c^2 + ac$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- (A)** $\sin^2 A = \sin^2 B + \sin^2 C + \sin B \sin C.$ **(B)** $\sin^2 B = \sin^2 A + \sin^2 C + \sin A \sin C.$
(C) $\hat{A} = 120^\circ.$ **(D)** $\hat{A} = 60^\circ.$

CÂU 19. Cho tam giác ABC . Khẳng định nào sau đây đúng?

- (A)** $\cot A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$
(B) $\cot A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{abc}$
- (C)** $\cot A = \frac{R(b^2 + c^2 - a^2)}{2abc}$
(D) $\cot A = \frac{R(b^2 + c^2 - a^2)}{abc}$

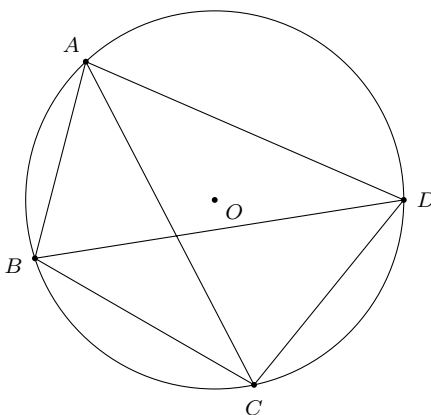
CÂU 20.

Cho tam giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn tâm O .

Biết $\widehat{ACB} = 32^\circ$, $\widehat{ADC} = 75^\circ$ và $BC = 8,8$ cm.

Tính bán kính đường tròn đường tròn (O). (Làm tròn kết quả đến hàng phần mười)

- (A) 7,8 cm. (B) 7,5 cm.
 (C) 6,6 cm. (D) 6,5 cm.



CÂU 21. Cho tam giác ABC có $AB = 12$, $BC = 15$, $AC = 18$. Tính $\widehat{A} + 2\widehat{C}$ (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

- ☐ **A** $129,3^\circ$.
 ☐ **B** $142,7^\circ$.
 ☐ **C** $118,4^\circ$.
 ☐ **D** $138,6^\circ$.

CÂU 22. Cho tam giác ABC có góc $\widehat{A} = 60^\circ$, $\widehat{B} = 45^\circ$, $AB = 25$. Độ dài cạnh BC gần với giá trị nào nhất dưới đây?

- Ⓐ 22. Ⓑ 22,5. Ⓒ 24,5. Ⓓ 21,5.

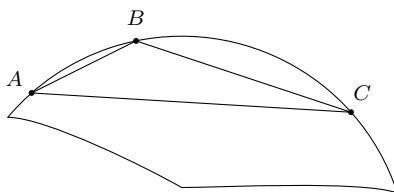
CÂU 23. Cho tam giác ABC có $AB = 8$, $AC = 11$, $\hat{A} = 30^\circ$. Số đo góc B gần với giá trị nào nhất dưới đây?

- (A)** $50,5^\circ$. **(B)** $45,8^\circ$. **(C)** $65,3^\circ$. **(D)** $55,2^\circ$.

CÂU 24.

Đề đo bán kính của một chiếc đĩa cổ chỉ còn lại một phần, các nhà khảo cổ chọn ba điểm trên chiếc đĩa (hình vẽ). Biết $AB = 7,1$ cm, $BC = 16,3$ cm, $AC = 19,6$ cm, tính bán kính của chiếc đĩa (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

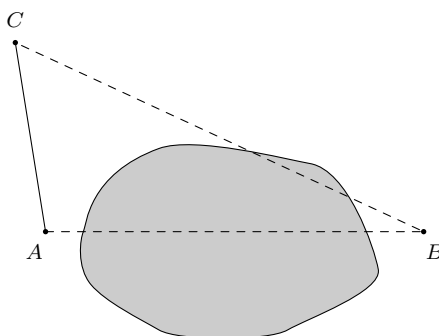
- ☐ **A** 11,1cm.
 ☐ **B** 9,8cm.
- ☐ **C** 10,3cm.
 ☐ **D** 10,1cm.



CÂU 25.

Đề đo khoảng cách từ A đến B ngang qua một đầm lầy, người ta chọn điểm C , sau đó khoảng cách từ A đến C và các góc A, C . Tính khoảng cách từ A đến B biết $AC = 115$ m, $\widehat{A} = 98^\circ$, $\widehat{C} = 52^\circ$.

- (A) 188,1 m. (B) 190,7 m.
 (C) 181,2 m. (D) 193,6 m.



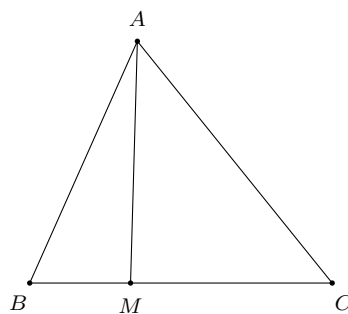
QUICK NOTE

QUICK NOTE

CÂU 26.

Cho tam giác ABC có $AB = 8$, $AC = 10$, $\hat{A} = 75^\circ$. M là điểm thuộc cạnh BC sao cho $CM = 2BM$. Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABM gần nhất với giá trị nào dưới đây?

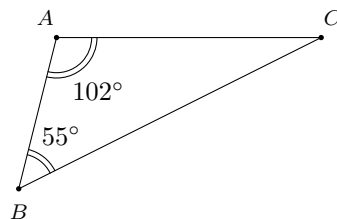
- (A) 3,8. (B) 4,1. (C) 3,6. (D) 3,5.



CÂU 27.

Tàu A rời cảng vào lúc 6h00 và chuyển động với vận tốc 30 km/h. Tàu B rời cảng vào lúc 6h30. Vào lúc 9h30 tàu B gặp tàu A tại điểm C (hình vẽ). Giả sử hai tàu chuyển động thẳng và có vận tốc không đổi trong suốt quá trình di chuyển, tính vận tốc tàu B (kết quả làm tròn đến hàng phần mười).

- (A) 42,5 km/h. (B) 44,8 km/h.
(C) 41,7 km/h. (D) 45,4 km/h.



CÂU 28. Chọn công thức đúng trong các đáp án sau

- (A) $S = \frac{1}{2}bc \sin B$. (B) $S = \frac{1}{2}bc \sin A$. (C) $S = \frac{1}{2}ab \sin B$. (D) $S = \frac{1}{2}ac \sin A$.

CÂU 29. Cho $\triangle ABC$ với các cạnh $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$. Gọi R , r , S lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp và diện tích của tam giác ABC . Trong các phát biểu sau, phát biểu nào sai?

- (A) $S = \frac{abc}{4R}$. (B) $R = \frac{a}{\sin A}$.
(C) $S = \frac{1}{2}ab \sin C$. (D) $a^2 + b^2 - c^2 = 2ab \cos C$.

CÂU 30. Cho tam giác ABC có $AB = 4$, $AC = 3$, $\widehat{BAC} = 30^\circ$. Khi đó diện tích tam giác ABC bằng

- (A) 3. (B) $4\sqrt{3}$. (C) $6\sqrt{3}$. (D) 6.

CÂU 31. Tìm chu vi tam giác ABC , biết $AB = 6$ và $2 \sin A = 3 \sin B = 4 \sin C$.

- (A) 26. (B) 13. (C) $5\sqrt{26}$. (D) $10\sqrt{6}$.

CÂU 32. Cho tam giác ABC có $a = 13$ m, $b = 14$ m, $c = 15$ m. Tính diện tích S của tam giác ABC .

- (A) $S = 84 \text{ m}^2$. (B) $S = 90 \text{ m}^2$. (C) $S = 76 \text{ m}^2$. (D) $S = 80 \text{ m}^2$.

CÂU 33. Cho tam giác ABC . Biết $AB = 3$, $AC = 4$, $BC > 5$ và diện tích tam giác ABC bằng $3\sqrt{3}$. Số đo góc \widehat{BAC} bằng

- (A) 120° . (B) 60° . (C) 135° . (D) 45° .

CÂU 34. Cho tam giác ABC có $AB = 2$, $AC = 3$, $BC = 4$. Khi đó độ dài đường cao của tam giác ABC kẻ từ A bằng

- (A) $\frac{3\sqrt{15}}{2}$. (B) $\frac{3\sqrt{15}}{4}$. (C) $\frac{3\sqrt{15}}{8}$. (D) $3\sqrt{15}$.

CÂU 35. Cho tam giác ABC có $AB = 9\text{cm}$, $AC = 12\text{cm}$ và $BC = 15\text{cm}$. Khi đó đường trung tuyến BM của tam giác ABC có độ dài là

- (A) 117cm. (B) 18,82cm. (C) 10,82cm. (D) 7,5cm.

CÂU 36. Tam giác ABC có các trung tuyến $m_a = 10$, $m_b = 8$ và $m_c = 6$. Tính diện tích S của tam giác ABC .

- (A) $S = 32$. (B) $S = 24$. (C) $S = 48$. (D) $S = 64$.

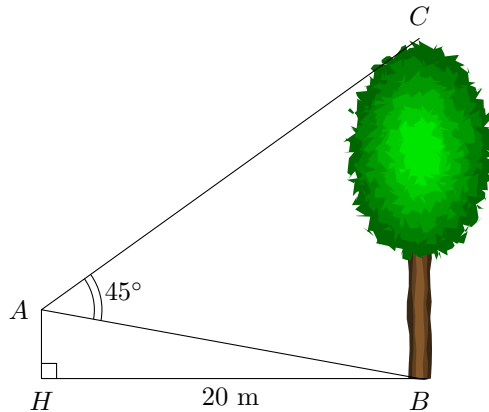
CÂU 37. Cho tam giác ABC có chu vi bằng 26 cm và $\frac{\sin A}{2} = \frac{\sin B}{6} = \frac{\sin C}{5}$. Tính diện tích của tam giác ABC .

- (A) $2\sqrt{23} \text{ (cm}^2\text{)}$. (B) $6\sqrt{13} \text{ (cm}^2\text{)}$. (C) $3\sqrt{39} \text{ (cm}^2\text{)}$. (D) $5\sqrt{21} \text{ (cm}^2\text{)}$.

CÂU 38. Cho tam giác ABC vuông tại C và $BC = 6$, $CA = 8$. Tính bán kính đường tròn nội tiếp của tam giác ABC .

- Ⓐ 2. Ⓑ $2\sqrt{2}$. Ⓒ $\sqrt{2}$. Ⓓ 4.

CÂU 39. Từ vị trí A người ta quan sát một cây cao (Hình vẽ). Biết $AH = 4$ m, $HB = 20$ m, $\widehat{BAC} = 45^\circ$. Chiều cao của cây gần nhất với giá trị nào sau đây?



- Ⓐ 14 m. Ⓑ 15 m. Ⓒ 17 m. Ⓓ 16 m.

CÂU 40. Một miếng giấy hình tam giác ABC diện tích S có I là trung điểm BC và O là trung điểm của AI . Cắt miếng giấy theo một đường thẳng qua O , đường thẳng này đi qua M, N lần lượt trên các cạnh AB, AC . Khi đó diện tích miếng giấy chứa điểm A có diện tích thuộc đoạn $[mS; nS]$. Tính $T = \frac{1}{m} + \frac{1}{n}$.

- Ⓐ $T = \frac{7}{12}$. Ⓑ $T = 12$. Ⓒ $T = 7$. Ⓓ $T = \frac{12}{7}$.

QUICK NOTE

MỤC LỤC

GTLG - HỆ THỨC LƯỢNG TAM GIÁC	1
Bài 1. GTLG CỦA MỘT GÓC TỪ 0° ĐẾN 180°	1
Ⓐ Tóm tắt lí thuyết.....	1
Ⓑ Các dạng toán.....	2
📁 Dạng 1. Tính giá trị biểu thức lượng giác.....	2
📁 Dạng 2. Tìm các GTLG khi biết một GTLG của góc.....	2
Ⓒ Câu hỏi trắc nghiệm.....	3
Bài 2. HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC	5
Ⓐ Tóm tắt lí thuyết.....	5
Ⓑ Các dạng toán.....	5
📁 Dạng 1. Áp dụng định lý cosine.....	5
📁 Dạng 2. Áp dụng định lý sin.....	6
📁 Dạng 3. Giải tam giác và ứng dụng.....	7
📁 Dạng 4. Bài tập tổng hợp.....	9
Ⓒ Câu hỏi trắc nghiệm.....	9

