

# Một số yếu tố thống kê và xác suất

## A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

### 1. Mẫu số liệu ghép nhóm

- Mẫu số liệu ghép nhóm** là mẫu số liệu cho dưới dạng bảng tần số ghép nhóm.
- Mỗi số liệu gồm một số giá trị của mẫu số liệu được ghép nhóm theo một tiêu chí xác định có dạng  $[a; b)$ , trong đó  $a$  là *đầu mút trái*,  $b$  là *đầu mút phải*. Độ dài nhóm là  $b - a$ .
- Tần số tích lũy** của một nhóm là số số liệu trong mẫu số liệu có giá trị nhỏ hơn giá trị đầu mút phải của nhóm đó. Tần số tích lũy của nhóm 1, nhóm 2, ..., nhóm  $m$  kí hiệu lần lượt là  $cf_1, cf_2, \dots, cf_m$ .

### 2. Số trung bình cộng (số trung bình)

- Trung điểm  $x_i$  của nửa khoảng (tính bằng trung bình cộng của hai đầu mút) ứng với nhóm  $i$  là *giá trị đại diện* của nhóm đó.
- Số trung bình cộng** của mẫu số liệu ghép nhóm, kí hiệu  $\bar{x}$ , được tính theo công thức

$$\bar{x} = \frac{n_1x_1 + n_2x_2 + \dots + n_mx_m}{n}.$$

### 3. Trung vị

Để tính trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm, ta làm như sau:

- ✔ **Bước 1:** Xác định nhóm chứa trung vị. Giả sử đó là nhóm thứ  $p : [a_p; a_{p+1})$ .
- ✔ **Bước 2:** Trung vị là

$$M_e = a_p + \frac{\frac{n}{2} - (m_1 + \dots + m_{p-1})}{m_p} \cdot (a_{p+1} - a_p)$$

trong đó  $n$  là cỡ mẫu,  $m_p$  là tần số nhóm  $p$ . Với  $p = 1$  ta quy ước  $m_1 + \dots + m_{p-1} = 0$ .

⚠ **Nhóm chứa trung vị** là nhóm đầu tiên có tần số tích lũy  $cf_p = m_1 + \dots + m_{p-1}$  lớn hơn hoặc bằng  $\frac{n}{2}$

### 4. Tứ phân vị

Để tính tứ phân vị thứ nhất  $Q_1$  của mẫu số liệu ghép nhóm, trước hết ta xác định nhóm chứa  $Q_1$ , giả sử đó là nhóm thứ  $p : [a_p; a_{p+1})$ . Khi đó

$$Q_1 = a_p + \frac{\frac{n}{4} - (m_1 + \dots + m_{p-1})}{m_p} \cdot (a_{p+1} - a_p).$$

trong đó,  $n$  là cỡ mẫu,  $m_p$  là tần số nhóm  $p$ . Với  $p = 1$ , ta quy ước  $m_1 + \dots + m_{p-1} = 0$ . Để tính tứ phân vị thứ ba  $Q_3$  của mẫu số liệu ghép nhóm, trước hết ta xác định nhóm chứa  $Q_3$ , giả sử đó là nhóm thứ  $p : [a_p; a_{p+1})$ . Khi đó

$$Q_3 = a_p + \frac{\frac{3n}{4} - (m_1 + \dots + m_{p-1})}{m_p} \cdot (a_{p+1} - a_p).$$

Trong đó  $n$  là cỡ mẫu,  $m_p$  là tần số nhóm  $p$ . Với  $p = 1$ , ta quy ước  $m_1 + \dots + m_{p-1} = 0$ . Tứ phân vị thứ hai  $Q_2$  chính là trung vị  $M_e$ .



ĐIỂM:

"It's not how much time you have, it's how you use it."

QUICK NOTE

QUICK NOTE

5. Một của mẫu số liệu ghép nhóm

Để tìm một của mẫu số liệu ghép nhóm, ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1. Xác định nhóm có tần số lớn nhất (gọi là nhóm chứa một), giả sử là nhóm  $j : [a_j; a_{j+1})$ .

Bước 2. Một được xác định là  $M_o = a_j + \frac{m_i - m_{j-1}}{(m_i - m_{j-1}) + (m_i - m_{j+1})} \cdot h$ .

trong đó,  $m_j$  là tần số nhóm  $j$  (quy ước  $m_0 = m_{k+1} = 0$ ) và  $h$  là độ dài của nhóm.

B. CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

Dạng 1. Mẫu số liệu ghép nhóm

1. Ví dụ mẫu

VÍ DỤ 1.

Bảng bên biểu diễn mẫu số liệu ghép nhóm được cho dưới dạng bảng tần số ghép nhóm. Hãy cho biết

- a) Mẫu số liệu có bao nhiêu số liệu; bao nhiêu nhóm?
- b) Tần số của mỗi nhóm.

Nhóm	Tần số
[0; 5)	11
[5; 10)	31
[10; 15)	45
[15; 20)	21
[20; 26)	12
	$n = 120$

VÍ DỤ 2. Một cửa hàng đã thống kê số ba lô bán được mỗi ngày trong tháng 9 với kết quả cho như sau:

12	29	12	19	15	21	19	29	28	12	15	25	16	20	29
21	12	24	14	10	12	10	23	27	28	18	16	10	20	21

Hãy chia mẫu số liệu trên thành 5 nhóm, lập bảng tần số ghép nhóm, hiệu chỉnh bảng tần số ghép nhóm và xác định giá trị đại diện cho mỗi nhóm.

VÍ DỤ 3. Bảng thống kê sau cho biết thời gian chạy (phút) của 30 vận động viên (VĐV) trong một giải chạy Marathon.

Thời gian	129	130	133	134	135	136	138	141	142	143	144	145
Số VĐV	1	2	1	1	1	2	3	3	4	5	2	5

Hãy chuyển mẫu số liệu trên sang mẫu số liệu ghép nhóm gồm sáu nhóm có độ dài bằng nhau và bằng 3.

VÍ DỤ 4. Một trường trung học phổ thông chọn 36 học sinh nam của khối 11, đo chiều cao của các bạn học sinh đó và thu được mẫu số liệu sau (đơn vị: centimét):

160	161	161	162	162	162	163	163	163	164	164	164
164	165	165	165	165	165	166	166	166	166	167	167
168	168	168	168	169	169	170	171	171	172	172	174

Lập bảng tần số ghép nhóm bao gồm cả tần số tích lũy cho mẫu số liệu trên có 5 nhóm ứng với 5 nửa khoảng:

$[160; 163)$ ,  $[163; 169)$ ,  $[166; 169)$ ,  $[169; 172)$ ,  $[172; 175)$ .

2. Bài tập rèn luyện

BÀI 1. Trong các mẫu số liệu sau, mẫu nào là mẫu số liệu ghép nhóm? Đọc và giải thích mẫu số liệu ghép nhóm đó.

- a) Số tiền mà sinh viên chi cho thanh toán cước điện thoại trong tháng.

Số tiền (nghìn đồng)	[0; 50)	[50; 100)	[100; 150)	[150; 200)	[200; 250)
Số sinh viên	5	12	23	17	3

b) Thống kê nhiệt độ tại một điểm trong 40 ngày, ta có bảng số liệu sau

Nhiệt độ (° C)	[19; 22)	[22; 25)	[25; 28)	[28; 31)
Số ngày	7	15	12	6

**BÀI 2.** Số sản phẩm một công nhân làm được trong một ngày được cho như sau:

18	25	39	12	54	27	46	25	19	8	36	22	
20	19	17	44	5	18	23	28	25	34	46	27	16

Hãy chuyển mẫu số liệu sang dạng ghép nhóm với sáu nhóm có độ dài bằng nhau.

**BÀI 3.** Thời gian ra sân (giờ) của một số cựu cầu thủ ở giải ngoại hạng Anh qua các thời kì được cho như sau:

653	632	609	572	565	535	516	514
508	505	504	504	503	499	496	492

Hãy chuyển mẫu số liệu trên sang dạng ghép nhóm với bảy nhóm có độ dài bằng nhau.

**Dạng 2. Số trung bình cộng (số trung bình)**

**1. Ví dụ mẫu**

**VÍ DỤ 1.**

Một nhà thực vật học đo chiều dài của 74 lá cây (đơn vị: milimét) và thu được bảng tần số như bảng bên. Tính chiều dài trung bình của 74 lá cây trên theo đơn vị milimét (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

Nhóm	Giá trị đại diện	Tần số
[5,45; 5,85)	5,65	5
[5,85; 6,25)	6,05	9
[6,25; 6,65)	6,45	15
[6,65; 7,05)	6,85	19
[7,05; 7,45)	7,25	16
[7,45; 7,85)	7,65	8
[7,85; 8,25)	8,05	2
		$n = 74$

**VÍ DỤ 2.** Kết quả khảo sát cân nặng của 25 quả cam ở mỗi lô hàng A và B được cho ở bảng sau:

Cân nặng (g)	[150; 155)	[155; 160)	[160; 165)	[165; 170)	[170; 175)
Số quả cam ở lô hàng A	2	6	12	4	1
Số quả cam ở lô hàng B	1	3	7	10	4

a) Hãy ước lượng cân nặng trung bình của mỗi quả cam ở lô hàng A và lô hàng B.

b) Nếu so sánh theo số trung bình thì cam ở lô hàng nào nặng hơn?

**VÍ DỤ 3.** Tìm cân nặng trung bình của học sinh lớp 11D cho trong Bảng 3.5.

Cân nặng	[40,5; 45,5)	[45,5; 50,5)	[50,5; 55,5)	[55,5; 60,5)	[60,5; 65,5)	[65,5; 70,5)
Số học sinh	10	7	16	4	2	3

Bảng 3.5. Cân nặng của học sinh lớp 11D.

**2. Bài tập rèn luyện**

**BÀI 1.** Mẫu số liệu dưới đây ghi lại tốc độ của 40 ô tô khi đi qua một trạm đo tốc độ (đơn vị: km/h)

48,5	43	50	55	45	60	53	55,5	44	65
51	62,5	41	44,5	57	57	68	49	46,5	53,5
61	49,5	54	62	59	56	47	50	60	61
49,5	52,5	57	47	60	55	45	47,5	48	61,5

a) Lập bảng tần số ghép nhóm cho mẫu số liệu trên có sáu nhóm ứng với sáu nửa khoảng:

[40; 45), [45; 50), [50; 55), [55; 60), [60; 65), [65; 70).

**QUICK NOTE**

## QUICK NOTE

b) Xác định số trung bình cộng của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

**BÀI 2.** Tuổi thọ (năm) của 50 bình ắc quy ô tô được cho như sau:

Tuổi thọ (năm)	[2; 2,5)	[2,5; 3)	[3; 3,5)	[3,5; 4)	[4; 4,5)	[4,5; 5)
Tần số	4	9	14	11	7	5

Tính tuổi thọ trung bình của 50 bình ắc quy ô tô này.

**BÀI 3.**

Phỏng vấn một số học sinh lớp 11 về thời gian (giờ) ngủ của một buổi tối, thu được bảng số liệu ở bên. So sánh thời gian ngủ trung bình của các bạn học sinh nam và nữ.

Thời gian	Số học sinh nam	Số học sinh nữ
[4; 5)	6	4
[5; 6)	10	8
[6; 7)	13	10
[7; 8)	9	11
[8; 9)	7	8

**BÀI 4.** Quãng đường (km) từ nhà đến nơi làm việc của 40 công nhân một nhà máy được ghi lại như sau:

5	3	10	20	25	11	13	7	12	31
19	10	12	17	18	11	32	17	16	2
7	9	7	8	3	5	12	15	18	3
12	14	2	9	6	15	15	7	6	12

a) Ghép nhóm dãy số liệu trên thành các khoảng có độ rộng bằng nhau, khoảng đầu tiên là  $[0; 5)$ . Tìm giá trị đại diện cho mỗi nhóm.

b) Tính số trung bình của mẫu số liệu không ghép nhóm và mẫu số liệu ghép nhóm. Giá trị nào chính xác hơn?

**BÀI 5.** Anh Văn ghi lại cự li 30 lần ném lao của mình ở bảng sau (đơn vị: mét):

72,1	72,9	70,2	70,9	72,2	71,5	72,5	69,3	72,3	69,7
72,3	71,5	71,2	69,8	72,3	71,1	69,5	72,2	71,9	73,1
71,6	71,3	72,2	71,8	70,8	72,2	72,2	72,9	72,7	70,7

a) Tính cự li trung bình của mỗi lần ném.

b) Tổng hợp lại kết quả ném của anh Văn vào bảng tần số ghép nhóm theo mẫu sau:

Cự li (m)	[69,2; 70)	[70; 70,8)	[70,8; 71,6)	[71,6; 72,4)	[72,4; 73,2)
Số lần	?	?	?	?	?

c) Hãy ước lượng cự li trung bình mỗi lần ném từ bảng tần số ghép nhóm trên.

d) Khả năng anh Văn ném được khoảng bao nhiêu mét là cao nhất?

**BÀI 6.** Người ta đếm số xe ô tô đi qua một trạm thu phí mỗi phút trong khoảng thời gian từ 9 giờ đến 9 giờ 30 phút sáng. Kết quả được ghi lại ở bảng sau:

15	16	13	21	17	23	15	21	6	11	12	23	19	25	11
25	7	29	10	28	29	24	6	11	23	11	21	9	27	15

a) Tính số xe trung bình đi qua trạm thu phí trong mỗi phút.

b) Tổng hợp lại số liệu trên vào bảng tần số ghép nhóm theo mẫu sau:

Số xe	[6; 10]	[11; 15]	[16; 20]	[21; 25]	[26; 30]
Số lần	?	?	?	?	?

c) Hãy ước lượng trung bình số xe đi qua trạm thu phí trong mỗi phút từ bảng tần số ghép nhóm trên.

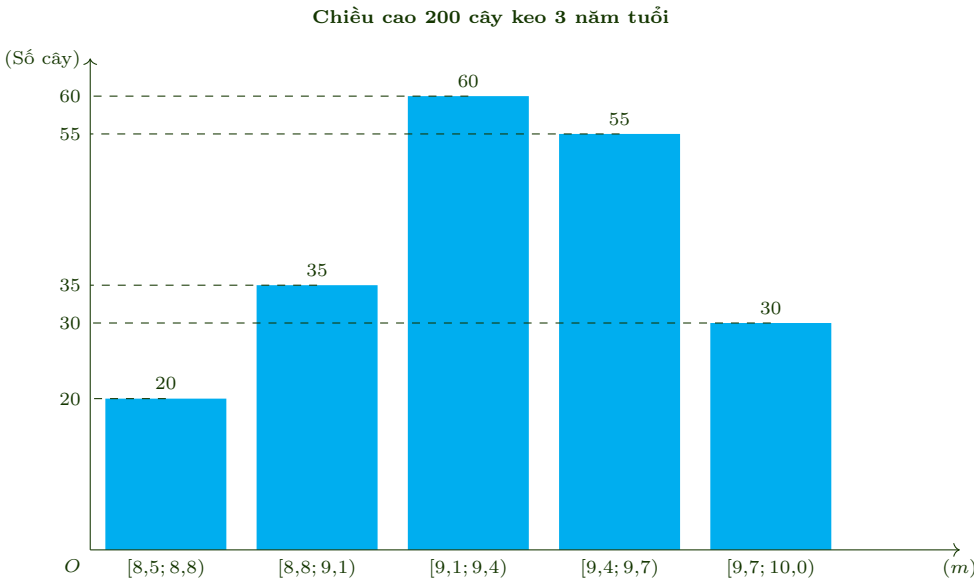
**BÀI 7.** Một thư viện thống kê số lượng sách được mượn mỗi ngày trong ba tháng ở bảng sau:

QUICK NOTE

Số sách	[16; 20]	[21; 25]	[26; 30]	[31; 35]	[36; 40]	[41; 45]	[46; 50]
Số ngày	3	6	15	27	22	14	5

Hãy ước lượng số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

**BÀI 8.** Kết quả đo chiều cao của 200 cây keo 3 năm tuổi ở một nông trường được biểu diễn ở biểu đồ dưới đây.



Hãy ước lượng số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

**BÀI 9.** Kiểm tra điện lượng của một số viên pin tiểu do một hãng sản xuất thu được kết quả như sau:

Điện lượng (nghìn mAh)	[0,9; 0,95)	[0,95; 1,0)	[1,0; 1,05)	[1,05; 1,1)	[1,1; 1,15)
Số viên pin	10	20	35	15	5

Hãy ước lượng số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

Dạng 3. Trung vị

1. Ví dụ mẫu

VÍ DỤ 1.

Sau khi kiểm tra về số học sinh trong 100 lớp học, người ta chia mẫu số liệu đó thành năm nhóm căn cứ vào số lượng học sinh của mỗi lớp (đơn vị: học sinh) và lập bảng tần số ghép nhóm bao gồm tần số tích lũy như bảng bên. Tìm trung vị của mẫu số liệu đó.

Nhóm	Tần số	Tần số tích lũy
[36; 38)	9	9
[38; 40)	15	24
[40; 42)	25	49
[42; 44)	30	79
[44; 46)	21	100
	$n = 100$	

**VÍ DỤ 2.** Thời gian (phút) truy cập internet mỗi buổi tối của một số học sinh được cho trong bảng sau:

Thời gian (phút)	[9,5; 12,5)	[12,5; 15,5)	[15,5; 18,5)	[18,5; 21,5)	[21,5; 24,5)
Số học sinh	3	12	15	24	2

Tính trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm này.

**VÍ DỤ 3.** Kết quả khảo sát cân nặng của 25 quả bơ ở một lô hàng cho trong bảng sau:

Cân nặng (g)	[150; 155)	[155; 160)	[160; 165)	[165; 170)	[170; 175)
Số quả bơ	1	7	12	3	2

## QUICK NOTE

Hãy tìm trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

**VÍ DỤ 4.** Trong tuần lễ bảo vệ môi trường, các học sinh khối 11 tiến hành thu nhặt vỏ chai nhựa để tái chế. Nhà trường thống kê kết quả thu nhặt vỏ chai của học sinh khối 11 ở bảng sau

Số vỏ chai nhựa	[11; 15]	[16; 29]	[21; 25]	[26; 30]	[31; 35]
Số học sinh	53	82	48	39	18

Hãy tìm trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

**VÍ DỤ 5.** Trong một hội thao, thời gian chạy 200m của một nhóm các vận động viên được ghi lại ở bảng sau

Thời gian (giây)	[21; 21,5]	[21,5; 22]	[22; 22,5]	[22,5; 23]	[23; 23,5]
Số vận động viên	5	12	32	45	30

Dựa vào bảng số liệu trên, ban tổ chức muốn chọn ra khoảng 50% số vận động viên chạy nhanh nhất để tiếp tục thi vòng 2. Ban tổ chức nên chọn các vận động viên có thời gian chạy không quá bao nhiêu giây?

## 2. Bài tập rèn luyện

### BÀI 1.

Bảng bên cho ta bảng tần số ghép nhóm số liệu thống kê chiều cao của 40 mẫu cây ở một vườn thực vật (đơn vị: centimét). Xác định trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

Nhóm	Tần số	Tần số tích lũy
[30; 40)	4	4
[40; 50)	10	14
[50; 60)	14	28
[60; 70)	6	34
[70; 80)	4	38
[80; 90)	2	40
	$n = 40$	

**BÀI 2.** Mẫu số liệu sau ghi lại cân nặng của 30 bạn học sinh (đơn vị: kilôgam)

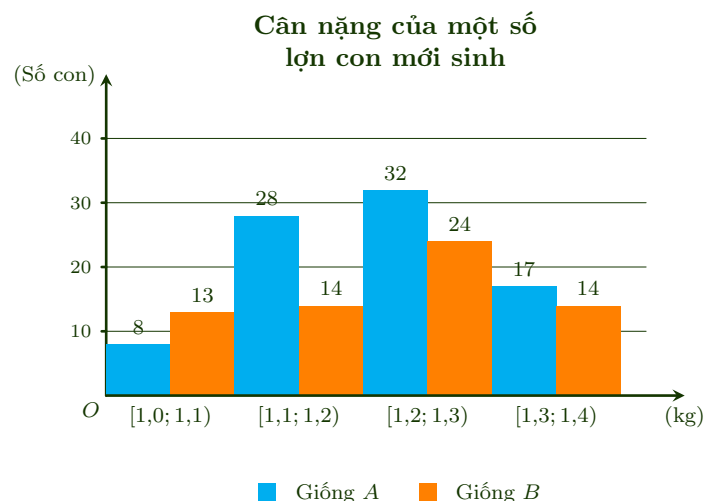
17    40    39    40,5    42    51    41,5    39    41    30  
 40    42    40,5    39,5    41    40,5    37    39,5    40    41  
 38,5    39,5    40    41    39    40,5    40    38,5    39,5    41,5

a) Lập bảng tần số ghép nhóm cho mẫu số liệu trên có tám nhóm ứng với tám nửa khoảng:

[15; 20), [20; 25), [25; 30), [30; 35), [35; 40), [40; 45), [45; 50), [50; 55).

b) Xác định trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

**BÀI 3.** Cân nặng của một số lợn con mới sinh thuộc hai giống A và B được cho ở biểu đồ dưới đây (đơn vị: kg).



Hãy so sánh cân nặng của lợn con mới sinh giống A và giống B theo số trung bình và trung vị.

Dạng 4. Tứ phân vị

QUICK NOTE

1. Ví dụ mẫu

VÍ DỤ 1.

Bảng bên cho biết tần số ghép nhóm số liệu thống kê cân nặng của 40 học sinh lớp 11A trong một trường trung học phổ thông (đơn vị: kilôgam). Xác định tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm.

Nhóm	Tần số	Tần số tích lũy
[30; 40)	2	2
[40; 50)	10	12
[50; 60)	16	28
[60; 70)	8	36
[70; 80)	2	38
[80; 90)	2	40
	$n = 40$	

2. Bài tập rèn luyện

**BÀI 1.** Thời gian (phút) truy cập internet mỗi buổi tối của một số học sinh được cho trong bảng sau:

Thời gian (phút)	[9,5; 12,5)	[12,5; 15,5)	[15,5; 18,5)	[18,5; 21,5)	[21,5; 24,5)
Số học sinh	3	12	15	24	2

Tìm tứ phân vị thứ nhất  $Q_1$  và tứ phân vị thứ ba  $Q_3$  của mẫu số liệu ghép nhóm.

**BÀI 2.** Điểm thi môn Toán (thang điểm 100, điểm được làm tròn đến 1) của 60 thí sinh được cho trong bảng sau:

Điểm	0 – 9	10 – 19	20 – 29	30 – 39	40 – 49
Số thí sinh	1	2	4	6	15
Điểm	50 – 59	60 – 69	70 – 79	80 – 89	90 – 99
Số thí sinh	12	10	6	3	1

- a) Hiệu chỉnh để thu được mẫu số liệu ghép nhóm dạng Bảng 3.2.  
b) Tìm các tứ phân vị và giải thích ý nghĩa của chúng.

**BÀI 3.**

Phỏng vấn một số học sinh lớp 11 về thời gian (giờ) ngủ của một buổi tối, thu được bảng số liệu ở bên.

Thời gian	Số học sinh nam	Số học sinh nữ
[4; 5)	6	4
[5; 6)	10	8
[6; 7)	13	10
[7; 8)	9	11
[8; 9)	7	8

- a) So sánh thời gian ngủ trung bình của các bạn học sinh nam và nữ.  
b) Hãy cho biết 75% học sinh khối 11 ngủ ít nhất bao nhiêu giờ?

Dạng 5. Mốt

1. Ví dụ mẫu

**VÍ DỤ 1.** Kết quả kiểm tra môn Toán của lớp 11D như sau

5 6 7 5 6 9 10 8 5 5 4 5 4 5 7 4 5 8 9 10  
5 3 5 6 5 7 5 8 4 9 5 6 5 6 8 8 7 9 7 9

- a) Lập bảng tần số ghép nhóm của mẫu số liệu trên có bốn nhóm ứng với bốn nửa khoảng [3; 5), [5; 7), [7; 9), [9; 11].  
b) Mốt của bảng số liệu ghép nhóm trên là bao nhiêu (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?

QUICK NOTE

2. Bài tập rèn luyện

**BÀI 1.** Mẫu số liệu dưới đây ghi lại tốc độ của 40 ô tô khi đi qua một trạm đo tốc độ (đơn vị: km/h):

48,5 43 50 55 45 60 53 55,5 44 65  
51 62,5 41 44,5 57 57 68 49 46,5 53,5  
61 49,5 54 62 59 56 47 50 60 61  
49,5 52,5 57 47 60 55 45 47,5 48 61,5

a) Lập bảng tần số ghép nhóm cho mẫu số liệu trên có sáu nhóm ứng với sáu nửa khoảng:

[40; 45), [45; 50), [50; 55), [55; 60), [60; 65), [65; 70).

b) Một của mẫu số liệu ghép nhóm trên là bao nhiêu?

**BÀI 2.** Mẫu số liệu sau ghi lại cân nặng của 30 bạn học sinh (đơn vị: kilôgam):

17 40 39 40,5 42 51 41,5 39 41 30  
40 42 40,5 39,5 41 40,5 37 39,5 40 41  
38,5 39,5 40 41 39 40,5 40 38,5 39,5 41,5

a) Lập bảng tần số ghép nhóm cho mẫu số liệu trên có tám nhóm ứng với tám nửa khoảng:

[15; 20), [20; 25), [25; 30), [30; 35), [35; 40), [40; 45), [45; 50), [50; 55).

b) Một của mẫu số liệu ghép nhóm trên là bao nhiêu?

**BÀI 3.**

Bảng bên cho ta bảng tần số ghép nhóm số liệu thống kê chiều cao của 40 mẫu cây ở một vườn thực vật (đơn vị: centimét). Một của mẫu số liệu ghép nhóm trên là bao nhiêu?

Nhóm	Tần số	Tần số tích lũy
[30; 40)	4	4
[40; 50)	10	14
[50; 60)	14	28
[60; 70)	6	34
[70; 80)	4	38
[80; 90)	2	40
	$n = 40$	

C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

**CÂU 1.** Một cuộc khảo sát đã tiến hành xác định tuổi (theo năm) của 120 chiếc ô-tô. Kết quả điều tra được cho trong bảng sau

Nhóm	[0; 4)	[4; 8)	[8; 12)	[12; 16)	[16; 20)	
Tần số	23	25	27	26	19	$n = 120$

Số ô-tô có độ tuổi dưới 12 là

- A** 75. **B** 27. **C** 48. **D** 26.

**CÂU 2.** Khảo sát thời gian tập thể dục trong ngày của một số học sinh khối 11 thu được mẫu số liệu ghép nhóm sau

Thời gian (phút)	[0; 20)	[20; 40)	[40; 60)	[60; 80)	[80; 100)
Số học sinh	5	9	12	10	6

Giá trị đại diện của nhóm [20; 40) là

- A** 10. **B** 30. **C** 20. **D** 40.

**CÂU 3.** Doanh thu bán hàng trong 20 ngày được lựa chọn ngẫu nhiên của một cửa hàng được ghi lại ở bảng sau (đơn vị: triệu đồng):

Doanh thu	[5; 7)	[7; 9)	[9; 11)	[11; 13)	[13; 15)
Số ngày	2	7	7	3	1

Doanh thu bán hàng của cửa hàng trong ngày A là 7 triệu đồng thì được xếp vào nhóm nào?

- A** [5; 7). **B** [7; 9). **C** [9; 11). **D** [13; 15).



**CÂU 4.** Doanh thu bán hàng trong 20 ngày được lựa chọn ngẫu nhiên của một cửa hàng được ghi lại ở bảng sau (đơn vị: triệu đồng):

Doanh thu	[5; 7)	[7; 9)	[9; 11)	[11; 13)	[13; 15)
Số ngày	2	7	7	3	1

Các nhóm có độ dài bằng

- (A) 2. (B) 3. (C) 4. (D) 5.

**CÂU 5.** Cho bảng số liệu về khối lượng của 30 củ khoai tây thu hoạch từ một thửa ruộng như hình bên dưới. Tần suất của lớp [100; 110) là bao nhiêu?

Lớp khối lượng (gam)	[70; 80)	[80; 90)	[90; 100)	[100; 110)	[110; 120]
Tần số	3	6	12	6	3

- (A) 20%. (B) 10%. (C) 40%. (D) 90%.

**CÂU 6.** Cân nặng của 28 học sinh nam lớp 11 được cho ở bảng sau

Cân nặng	[45; 49)	[49; 53)	[53; 57)	[57; 61)	[61; 65)
Số học sinh	4	5	7	7	5

Tần số tích lũy của nhóm [49; 53) là bao nhiêu?

- (A) 5. (B) 4. (C) 9. (D) 20.

**CÂU 7.** Điểm môn Toán của lớp 10A được cho như bảng sau

Điểm	[0; 2)	[2; 4)	[4; 6)	[6; 8)	[8; 10)
Tần số	3	5	12	12	8

Điểm trung bình của các học sinh lớp 10A là bao nhiêu?

- (A) 5. (B) 5,85. (C) 5,65. (D) 5,45.

**CÂU 8.** Cho bảng phân bố tần số ghép lớp

Lớp các giá trị $x$	[8; 10)	[10; 12)	[12; 14]	Cộng
Tần số $n_i$	15	30	55	100

Số trung bình của các giá trị trong bảng trên là

- (A) 9. (B) 13. (C) 11. (D) 11,8.

**CÂU 9.** Kết quả khảo sát cân nặng của 25 quả cam ở lô hàng A được cho như sau

Cân nặng (g)	[150; 155)	[155; 160)	[160; 165)	[165; 170)	[170; 175)
Số quả cam	2	6	12	4	1

Tính cân nặng trung bình của mỗi quả cam ở lô hàng A.

- (A) 161,7 (g). (B) 161,7 (kg). (C) 155 (g). (D) 160 (kg).

**CÂU 10.** Sau một kì thi học sinh giỏi Toán, người ta thống kê kết quả (thang điểm 20) và thu được bảng tần số sau

Lớp điểm	[6; 10]	[11; 15]	[16; 20]	Cộng
Tần số	22	12	6	40

Nếu những học sinh chỉ cần đạt điểm trung bình của bảng điểm trên đều được nhận Giấy Khen của ban tổ chức, thì số học sinh được nhận Giấy Khen là bao nhiêu?

- (A) 11. (B) 18. (C) 12. (D) 6.

**CÂU 11.** Cho bảng tần số về cân nặng của 180 người dân trong một xã như sau: (đơn vị: kg)

Nhóm	Tần số	Tần số tích lũy
[0; 10)	6	6
[10; 20)	15	21
[20; 30)	37	58
[30; 40)	48	106
[40; 50)	22	128
[50; 60)	29	157
[60; 70)	23	180
	$n = 180$	

## QUICK NOTE

## QUICK NOTE

Tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu trên là

- (A) 56,486 kg. (B) 26,486 kg. (C) 25,496 kg. (D) 36,486 kg.

**CÂU 12.** Cho bảng tần số chiều cao của 46 học sinh nam của khối lớp 11 như sau

Nhóm	Tần số
[155; 160)	3
[160; 165)	18
[165; 170)	10
[170; 175)	15
	$n = 46$

Xác định tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu trên

- (A) 161,36. (B) 161,63. (C) 162,36. (D) 162,63.

**CÂU 13.** Cho bảng tần số chiều cao của 46 học sinh nam của khối lớp 11 như sau

Nhóm	Tần số
[155; 160)	3
[160; 165)	18
[165; 170)	10
[170; 175)	15
	$n = 46$

Xác định tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu trên

- (A) 162,36. (B) 166,5. (C) 166. (D) 171,16.

**CÂU 14.**

Cho bảng tần số ghép nhóm số liệu thống kê chiều cao của 40 mẫu cây ở một vườn thực vật (đơn vị: centimét).

Xác định tứ phân vị thứ hai của số liệu ghép nhóm trên

- (A) 56,43. (B) 56,34.  
(C) 46,43. (D) 36,43.

Nhóm	Tần số	Tần số tích lũy
[30; 40)	4	4
[40; 50)	10	14
[50; 60)	14	28
[60; 70)	6	34
[70; 80)	4	38
[80; 90)	2	40
	$n = 40$	

**CÂU 15.** Một bảng xếp hạng đã tính điểm chuẩn hoá cho chỉ số nghiên cứu của một số trường đại học ở Việt Nam và thu được kết quả sau

Điểm	Dưới 20	[20; 30)	[30; 40)	[40; 60)	[60; 80)	[80; 100)
Số điểm	4	19	6	2	3	1

Xác định điểm ngưỡng đề đưa ra danh sách 25% trường đại học có chỉ số nghiên cứu tốt nhất Việt Nam.

- (A) 25,26. (B) 35,42. (C) 45,35. (D) 45,42.

**CÂU 16.** Phỏng vấn một số học sinh khối 11 về thời gian (giờ) ngủ của một buổi tối, thu được bảng số liệu như sau.

Thời gian (giờ)	[4; 5)	[5; 6)	[6; 7)	[7; 8)	[8; 9)
Số học sinh	6	10	13	9	7

Hãy cho biết 75% học sinh khối 11 ngủ ít nhất bao nhiêu giờ?

- (A) 7,675. (B) 7,53. (C) 8. (D) 7,9.

**CÂU 17.** Một hãng xe ô tô thống kê lại số lần gặp sự cố về động cơ về động cơ của 100 chiếc xe cùng loại sau 2 năm sử dụng đầu tiên ở dạng sau

Số lần gặp sự cố	[0; 5; 2, 5)	[2, 5; 4, 5)	[4, 5; 6, 5)	[6, 5; 8, 5)	[8, 5; 10, 5)
Số xe	17	33	25	20	5

Tìm tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu.

- (A)  $Q_1 \approx 4$ . (B)  $Q_1 \approx 2,98$ . (C)  $Q_1 \approx 2,5$ . (D)  $Q_1 \approx 3,5$ .

**CÂU 18.** Một hãng xe ô tô thống kê lại số lần gặp sự cố về động cơ về động cơ của 100 chiếc xe cùng loại sau 2 năm sử dụng đầu tiên ở dạng sau

Số lần gặp sự cố	[0, 5; 2, 5)	[2, 5; 4, 5)	[4, 5; 6, 5)	[6, 5; 8, 5)	[8, 5; 10, 5)
Số xe	17	33	25	20	5

Tìm tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu.

- ☐ A  $Q_3 = 6, 3.$ 
☐ B  $Q_3 = 6, 8.$ 
☐ C  $Q_3 = 7, 2.$ 
☐ D  $Q_3 = 6, 5.$

**CÂU 19.** Số điểm một cầu thủ bóng rổ ghi được trong 20 trận đấu được cho ở bảng sau

Điểm số	[5, 5; 10, 5)	[10, 5; 15, 5)	[15, 5; 20, 5)	[20, 5; 25, 5)
Số trận	3	9	2	6

Tìm tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu.

- ☐ A  $Q_1 \approx 11, 6.$ 
☐ B  $Q_1 \approx 14, 4.$ 
☐ C  $Q_1 \approx 15, 6.$ 
☐ D  $Q_1 \approx 21, 3.$

**CÂU 20.** Số cuộc gọi điện thoại một người thực hiện mỗi ngày trong 30 ngày được lựa chọn ngẫu nhiên được thống kê trong bảng sau:

Số cuộc gọi	[3; 5]	[6; 8]	[9; 11]	[12; 14]	[15; 17]
Số ngày	5	13	7	3	2

Tìm mốt của mẫu số liệu ghép nhóm trên. Hãy dự đoán xem khả năng người đó thực hiện bao nhiêu cuộc gọi mỗi ngày là cao nhất.

- ☐ A 4.
 ☐ B 6.
 ☐ C 5.
 ☐ D 7.

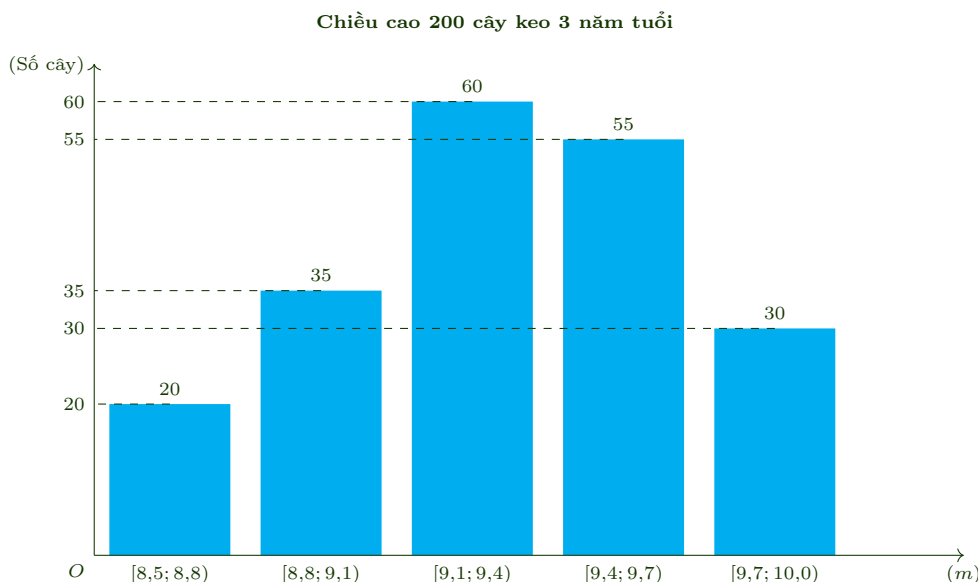
**CÂU 21.** Một thư viện thống kê số lượng sách được mượn mỗi ngày trong ba tháng ở bảng sau:

Số sách	[16; 20]	[21; 25]	[26; 30]	[31; 35]	[36; 40]	[41; 45]	[46; 50]
Số ngày	3	6	15	27	22	14	5

Hãy ước lượng mốt của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

- ☐ A 34,33.
 ☐ B 34,03.
 ☐ C 35,63.
 ☐ D 34,13.

**CÂU 22.** Kết quả đo chiều cao của 200 cây keo 3 năm tuổi ở một nông trường được biểu diễn ở biểu đồ dưới đây.



Mốt của mẫu số liệu ghép nhóm trên là

- ☐ A 9,35.
 ☐ B 10,53.
 ☐ C 10,35.
 ☐ D 9,53.

**CÂU 23.** Bảng số liệu ghép nhóm sau cho biết chiều cao (cm) của 50 học sinh lớp 11A.

Khoảng chiều cao (cm)	[145; 150)	[150; 155)	[155; 160)	[160; 165)	[165; 170)
Số học sinh	7	14	10	10	9

Mốt của mẫu số liệu ghép nhóm là

- ☐ A 154,20.
 ☐ B 153,18.
 ☐ C 155,12.
 ☐ D 158,36.

QUICK NOTE

## QUICK NOTE

**CÂU 24.** Chọn khẳng định sai.

- A** Một của mẫu số liệu không ghép nhóm là giá trị có khả năng xuất hiện cao nhất khi lấy mẫu.
- B** Mốt của mẫu số liệu sau khi ghép nhóm xấp xỉ với mốt của mẫu số liệu không ghép nhóm.
- C** Một mẫu số liệu ghép nhóm chỉ có một mốt.
- D** Một mẫu số liệu ghép nhóm có thể có nhiều nhóm chứa một và nhiều mốt.

# LỜI GIẢI CHI TIẾT

## Một số yếu tố thống kê và xác suất

### D. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

#### 1. Mẫu số liệu ghép nhóm

- a) **Mẫu số liệu ghép nhóm** là mẫu số liệu cho dưới dạng bảng tần số ghép nhóm.
- b) Mỗi số liệu gồm một số giá trị của mẫu số liệu được ghép nhóm theo một tiêu chí xác định có dạng  $[a; b)$ , trong đó  $a$  là *đầu mút trái*,  $b$  là *đầu mút phải*. Độ dài nhóm là  $b - a$ .
- c) **Tần số tích lũy** của một nhóm là số số liệu trong mẫu số liệu có giá trị nhỏ hơn giá trị đầu mút phải của nhóm đó. Tần số tích lũy của nhóm 1, nhóm 2, ..., nhóm  $m$  kí hiệu lần lượt là  $cf_1, cf_2, \dots, cf_m$ .

#### 2. Số trung bình cộng (số trung bình)

- a) Trung điểm  $x_i$  của nửa khoảng (tính bằng trung bình cộng của hai đầu mút) ứng với nhóm  $i$  là *giá trị đại diện* của nhóm đó.
- b) **Số trung bình cộng** của mẫu số liệu ghép nhóm, kí hiệu  $\bar{x}$ , được tính theo công thức

$$\bar{x} = \frac{n_1x_1 + n_2x_2 + \dots + n_mx_m}{n}.$$

#### 3. Trung vị

Để tính trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm, ta làm như sau:

🟢 **Bước 1:** Xác định nhóm chứa trung vị. Giả sử đó là nhóm thứ  $p : [a_p; a_{p+1})$ .

🟢 **Bước 2:** Trung vị là

$$M_e = a_p + \frac{\frac{n}{2} - (m_1 + \dots + m_{p-1})}{m_p} \cdot (a_{p+1} - a_p)$$

trong đó  $n$  là cỡ mẫu,  $m_p$  là tần số nhóm  $p$ . Với  $p = 1$  ta quy ước  $m_1 + \dots + m_{p-1} = 0$ .

⚠ **Nhóm chứa trung vị** là nhóm đầu tiên có tần số tích lũy  $cf_p = m_1 + \dots + m_{p-1}$  lớn hơn hoặc bằng  $\frac{n}{2}$

#### 4. Tứ phân vị

Để tính tứ phân vị thứ nhất  $Q_1$  của mẫu số liệu ghép nhóm, trước hết ta xác định nhóm chứa  $Q_1$ , giả sử đó là nhóm thứ  $p : [a_p; a_{p+1})$ . Khi đó

$$Q_1 = a_p + \frac{\frac{n}{4} - (m_1 + \dots + m_{p-1})}{m_p} \cdot (a_{p+1} - a_p).$$

trong đó,  $n$  là cỡ mẫu,  $m_p$  là tần số nhóm  $p$ . Với  $p = 1$ , ta quy ước  $m_1 + \dots + m_{p-1} = 0$ .

Để tính tứ phân vị thứ ba  $Q_3$  của mẫu số liệu ghép nhóm, trước hết ta xác định nhóm chứa  $Q_3$ , giả sử đó là nhóm thứ  $p : [a_p; a_{p+1})$ . Khi đó

$$Q_3 = a_p + \frac{\frac{3n}{4} - (m_1 + \dots + m_{p-1})}{m_p} \cdot (a_{p+1} - a_p).$$

Trong đó  $n$  là cỡ mẫu,  $m_p$  là tần số nhóm  $p$ . Với  $p = 1$ , ta quy ước  $m_1 + \dots + m_{p-1} = 0$ .

Tứ phân vị thứ hai  $Q_2$  chính là trung vị  $M_e$ .

#### 5. Mốt của mẫu số liệu ghép nhóm

Để tìm mốt của mẫu số liệu ghép nhóm, ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1. Xác định nhóm có tần số lớn nhất (gọi là nhóm chứa mốt), giả sử là nhóm  $j : [a_j; a_{j+1})$ .

Bước 2. Mốt được xác định là  $M_o = a_j + \frac{m_j - m_{j-1}}{(m_j - m_{j-1}) + (m_j - m_{j+1})} \cdot h$ .

trong đó,  $m_j$  là tần số nhóm  $j$  (quy ước  $m_0 = m_{k+1} = 0$ ) và  $h$  là độ dài của nhóm.

### E. CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

## Dạng 6. Mẫu số liệu ghép nhóm

## 1. Ví dụ mẫu

## VÍ DỤ 1.

Bảng bên biểu diễn mẫu số liệu ghép nhóm được cho dưới dạng bảng tần số ghép nhóm. Hãy cho biết

- Mẫu số liệu có bao nhiêu số liệu; bao nhiêu nhóm?
- Tần số của mỗi nhóm.

Nhóm	Tần số
$[0; 5)$	11
$[5; 10)$	31
$[10; 15)$	45
$[15; 20)$	21
$[20; 26)$	12
	$n = 120$

## Lời giải.

- Mẫu số liệu gồm 120 số liệu và 5 nhóm.
- Tần số lần lượt của các nhóm 1, 2, 3, 4, 5 lần lượt là 11, 31, 45, 21, 12.

**VÍ DỤ 2.** Một cửa hàng đã thống kê số ba lô bán được mỗi ngày trong tháng 9 với kết quả cho như sau:

12	29	12	19	15	21	19	29	28	12	15	25	16	20	29
21	12	24	14	10	12	10	23	27	28	18	16	10	20	21

Hãy chia mẫu số liệu trên thành 5 nhóm, lập bảng tần số ghép nhóm, hiệu chỉnh bảng tần số ghép nhóm và xác định giá trị đại diện cho mỗi nhóm.

## Lời giải.

Khoảng biến thiên của mẫu số liệu trên là  $R = 29 - 10 = 19$ .

Độ dài mỗi nhóm  $L > \frac{R}{k} = \frac{19}{5} = 3,8$ .

Ta chọn  $L = 4$  và chia dữ liệu thành các nhóm  $[10; 14)$ ,  $[14; 18)$ ,  $[18; 22)$ ,  $[22; 26)$ ,  $[26; 30)$ .

Khi đó ta có bảng tần số ghép nhóm sau

Cân nặng	$[10; 14)$	$[14; 18)$	$[18; 22)$	$[22; 26)$	$[26; 30)$
Giá trị đại diện	12	16	20	24	28
Số ba lô bán được	8	5	8	3	6

**VÍ DỤ 3.** Bảng thống kê sau cho biết thời gian chạy (phút) của 30 vận động viên (VĐV) trong một giải chạy Marathon.

Thời gian	129	130	133	134	135	136	138	141	142	143	144	145
Số VĐV	1	2	1	1	1	2	3	3	4	5	2	5

Hãy chuyển mẫu số liệu trên sang mẫu số liệu ghép nhóm gồm sáu nhóm có độ dài bằng nhau và bằng 3.

## Lời giải.

Giá trị nhỏ nhất là 129, giá trị lớn nhất là 145 nên khoảng biến thiên là  $145 - 129 = 16$ . Tổng độ dài của sáu nhóm là 18. Để cho đối xứng, ta chọn đầu mút trái của nhóm đầu tiên là 127,5 và đầu mút phải của nhóm cuối cùng là 145,5 ta được các nhóm là  $[127,5; 130,5)$ ,  $[130,5; 133,5)$ ,  $\dots$ ,  $[142,5; 145,5]$ . Đếm số giá trị thuộc mỗi nhóm, ta có mẫu số liệu ghép nhóm như sau

Thời gian	$[127,5; 130,5)$	$[130,5; 133,5)$	$[133,5; 136,5)$	$[136,5; 139,5)$	$[139,5; 142,5)$	$[142,5; 145,5]$
Số VĐV	3	1	4	3	7	12

**VÍ DỤ 4.** Một trường trung học phổ thông chọn 36 học sinh nam của khối 11, đo chiều cao của các bạn học sinh đó và thu được mẫu số liệu sau (đơn vị: centimét):

160	161	161	162	162	162	163	163	163	164	164	164
164	165	165	165	165	165	166	166	166	166	167	167
168	168	168	168	169	169	170	171	171	172	172	174

Lập bảng tần số ghép nhóm bao gồm cả tần số tích lũy cho mẫu số liệu trên có 5 nhóm ứng với 5 nửa khoảng:

$$[160; 163), [163; 169), [166; 169), [169; 172), [172; 175).$$

## Lời giải.

Bảng tần số ghép nhóm bao gồm cả tần số tích lũy như sau:

Nhóm	Tần số	Tần số tích lũy
[169; 163)	6	6
[163; 166)	12	18
[166; 169)	10	28
[169; 172)	5	33
[172; 175)	3	36
	$n = 36$	

2. Bài tập rèn luyện

**BÀI 1.** Trong các mẫu số liệu sau, mẫu nào là mẫu số liệu ghép nhóm? Đọc và giải thích mẫu số liệu ghép nhóm đó.

a) Số tiền mà sinh viên chi cho thanh toán cước điện thoại trong tháng.

Số tiền (nghìn đồng)	[0; 50)	[50; 100)	[100; 150)	[150; 200)	[200; 250)
Số sinh viên	5	12	23	17	3

b) Thống kê nhiệt độ tại một điểm trong 40 ngày, ta có bảng số liệu sau

Nhiệt độ (° C)	[19; 22)	[22; 25)	[25; 28)	[28; 31)
Số ngày	7	15	12	6

Lời giải.

Cả hai mẫu số liệu trên đều là mẫu số lớp ghép nhóm.

a) Có năm nhóm là

- ✓ Dưới 50 nghìn đồng có 5 sinh viên.
- ✓ Từ 50 đến dưới 100 nghìn đồng có 12 sinh viên.
- ✓ Từ 100 đến dưới 150 nghìn đồng có 23 sinh viên.
- ✓ Từ 150 đến dưới 200 nghìn đồng có 17 sinh viên.
- ✓ Từ 200 đến dưới 250 nghìn đồng có 3 sinh viên.

b) Có bốn nhóm là

- ✓ Từ 19° C đến dưới 22° C có 7 ngày.
- ✓ Từ 22° C đến dưới 25° C có 15 ngày.
- ✓ Từ 25° C đến dưới 28° C có 12 ngày.
- ✓ Từ 28° C đến dưới 31° C có 6 ngày.

**BÀI 2.** Số sản phẩm một công nhân làm được trong một ngày được cho như sau:

18	25	39	12	54	27	46	25	19	8	36	22	
20	19	17	44	5	18	23	28	25	34	46	27	16

Hãy chuyển mẫu số liệu sang dạng ghép nhóm với sáu nhóm có độ dài bằng nhau.

Lời giải.

Khoảng biến thiên là  $54 - 5 = 49$ .

Ta chia thành các nhóm sau [4,5; 13); [13; 21,5); [21,5; 30); ...; [47; 55,5).

Đếm số giá trị của mỗi nhóm, ta có bảng ghép nhóm sau:

Số sản phẩm	[4,5; 13)	[13; 21,5)	[21,5; 30)	[30; 38,5)	[38,5; 47)	[47; 55,5)
Số công nhân	3	7	8	2	4	1

**BÀI 3.** Thời gian ra sân (giờ) của một số cựu cầu thủ ở giải ngoại hạng Anh qua các thời kì được cho như sau:

653	632	609	572	565	535	516	514
508	505	504	504	503	499	496	492

Hãy chuyển mẫu số liệu trên sang dạng ghép nhóm với bảy nhóm có độ dài bằng nhau.

### Lời giải.

Khoảng biến thiên là  $653 - 492 = 161$ .

Ta chia thành các nhóm sau  $[492; 515); [515; 538); [538; 561); \dots; [630; 653]$ .

Đếm số giá trị của mỗi nhóm, ta có bảng ghép nhóm sau:

Thời gian	[492; 515)	[515; 538)	[538; 561)	[561; 584)	[584; 607)	[607; 630)	[630; 653]
Số cầu thủ	9	2	0	2	0	1	2

□

## Dạng 7. Số trung bình cộng (số trung bình)

### 1. Ví dụ mẫu

#### VÍ DỤ 1.

Một nhà thực vật học đo chiều dài của 74 lá cây (đơn vị: milimét) và thu được bảng tần số như bảng bên. Tính chiều dài trung bình của 74 lá cây trên theo đơn vị milimét (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

Nhóm	Giá trị đại diện	Tần số
[5,45; 5,85)	5,65	5
[5,85; 6,25)	6,05	9
[6,25; 6,65)	6,45	15
[6,65; 7,05)	6,85	19
[7,05; 7,45)	7,25	16
[7,45; 7,85)	7,65	8
[7,85; 8,25)	8,05	2
		$n = 74$

### Lời giải.

Chiều dài trung bình của 74 lá cây mà nhà thực vật học đo xấp xỉ là

$$\bar{x} = \frac{5 \cdot 5,65 + 9 \cdot 6,05 + 15 \cdot 6,45 + 19 \cdot 6,85 + 16 \cdot 7,25 + 8 \cdot 7,65 + 2 \cdot 8,05}{74} \approx 6,80 \text{ (mm)}.$$

□

**VÍ DỤ 2.** Kết quả khảo sát cân nặng của 25 quả cam ở mỗi lô hàng  $A$  và  $B$  được cho ở bảng sau:

Cân nặng (g)	[150; 155)	[155; 160)	[160; 165)	[165; 170)	[170; 175)
Số quả cam ở lô hàng $A$	2	6	12	4	1
Số quả cam ở lô hàng $B$	1	3	7	10	4

a) Hãy ước lượng cân nặng trung bình của mỗi quả cam ở lô hàng  $A$  và lô hàng  $B$ .

b) Nếu so sánh theo số trung bình thì cam ở lô hàng nào nặng hơn?

### Lời giải.

Ta có bảng thống kê số lượng cam theo giá trị đại diện:

Cân nặng (g)	152,5	157,5	162,5	167,5	172,5
Số quả cam ở lô hàng $A$	2	6	12	4	1
Số quả cam ở lô hàng $B$	1	3	7	10	4

a) Cân nặng trung bình của mỗi quả cam ở lô hàng  $A$  xấp xỉ bằng

$$(2 \cdot 152,5 + 6 \cdot 157,5 + 12 \cdot 162,5 + 4 \cdot 167,5 + 1 \cdot 172,5) : 25 = 161,7 \text{ (g)}.$$

Cân nặng trung bình của mỗi quả cam ở lô hàng  $B$  xấp xỉ bằng

$$(1 \cdot 152,5 + 3 \cdot 157,5 + 7 \cdot 162,5 + 10 \cdot 167,5 + 4 \cdot 172,5) : 25 = 165,1 \text{ (g)}.$$

b) Nếu so sánh theo số trung bình thì cam ở lô hàng  $B$  nặng hơn cam ở lô hàng  $A$ .

□

**VÍ DỤ 3.** Tìm cân nặng trung bình của học sinh lớp 11D cho trong Bảng 3.5.

Cân nặng	[40,5; 45,5)	[45,5; 50,5)	[50,5; 55,5)	[55,5; 60,5)	[60,5; 65,5)	[65,5; 70,5)
Số học sinh	10	7	16	4	2	3

Bảng 3.5. Cân nặng của học sinh lớp 11D.



Lời giải.

Trong mỗi khoảng cân nặng, giá trị đại diện là trung bình cộng của hai giá trị đầu mút nên ta có bảng sau

Cân nặng (kg)	43	48	53	58	63	68
Số học sinh	10	7	16	4	2	3

Tổng số học sinh là  $n = 42$ . Cân nặng trung bình của học sinh lớp 11D là

$$\bar{x} = \frac{10 \cdot 43 + 7 \cdot 48 + 16 \cdot 53 + 4 \cdot 58 + 2 \cdot 63 + 3 \cdot 68}{42} \approx 51,81 \text{ (kg)}.$$

2. Bài tập rèn luyện

**BÀI 1.** Mẫu số liệu dưới đây ghi lại tốc độ của 40 ô tô khi đi qua một trạm đo tốc độ (đơn vị: km/h)

48,5	43	50	55	45	60	53	55,5	44	65
51	62,5	41	44,5	57	57	68	49	46,5	53,5
61	49,5	54	62	59	56	47	50	60	61
49,5	52,5	57	47	60	55	45	47,5	48	61,5

a) Lập bảng tần số ghép nhóm cho mẫu số liệu trên có sáu nhóm ứng với sáu nửa khoảng:

$[40; 45), [45; 50), [50; 55), [55; 60), [60; 65), [65; 70).$

b) Xác định số trung bình cộng của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

Lời giải.

a) Ta có bảng tần số ghép nhóm của mẫu số liệu trên như sau:

Nhóm	Giá trị đại diện	Tần số	Tần số tích lũy
[40; 45)	42,5	4	4
[45; 50)	47,5	11	15
[50; 55)	52,5	7	22
[55; 60)	57,5	8	30
[60; 65)	62,5	8	38
[65; 70)	67,5	2	40
		$n = 40$	

b) Trung bình cộng của mẫu số liệu trên là

$$\bar{x} = \frac{42,5 \cdot 4 + 47,5 \cdot 11 + 52,5 \cdot 7 + 57,5 \cdot 8 + 62,5 \cdot 8 + 67,5 \cdot 2}{40} = 53,875 \text{ (km/h)}.$$

c) Ta thấy: Nhóm 2 ứng với nửa khoảng  $[45; 50)$  là nhóm có tần số lớn nhất với  $u = 45, g = 5, n_2 = 11$ . Nhóm 1 có tần số  $n_1 = 4$ , nhóm 3 có tần số  $n_3 = 7$ .

**BÀI 2.** Tuổi thọ (năm) của 50 bình ắc quy ô tô được cho như sau:

Tuổi thọ (năm)	[2; 2,5)	[2,5; 3)	[3; 3,5)	[3,5; 4)	[4; 4,5)	[4,5; 5)
Tần số	4	9	14	11	7	5

Tính tuổi thọ trung bình của 50 bình ắc quy ô tô này.

Lời giải.

Ta có bảng sau

Tuổi thọ (năm)	2,25	2,75	3,25	3,75	4,25	4,75
Tần số	4	9	14	11	7	5

Tuổi thọ trung bình của 50 bình ắc quy ô tô này là

$$\bar{x} = \frac{2,25 \cdot 4 + 2,75 \cdot 9 + 3,25 \cdot 14 + 3,75 \cdot 11 + 4,25 \cdot 7 + 4,75 \cdot 5}{50} = 3,48 \text{ (năm)}.$$

**BÀI 3.**

Phỏng vấn một số học sinh lớp 11 về thời gian (giờ) ngủ của một buổi tối, thu được bảng số liệu ở bên. So sánh thời gian ngủ trung bình của các bạn học sinh nam và nữ.

Thời gian	Số học sinh nam	Số học sinh nữ
[4; 5)	6	4
[5; 6)	10	8
[6; 7)	13	10
[7; 8)	9	11
[8; 9)	7	8

**Lời giải.**

Trong mỗi khoảng thời gian, giá trị đại diện là trung bình cộng của giá trị hai đầu mút nên ta có bảng sau:

Thời gian	Số học sinh nam	Số học sinh nữ
4,5	6	4
5,5	10	8
6,5	13	10
7,5	9	11
8,5	7	8

Tổng số học sinh nam là  $n_1 = 6 + 10 + 13 + 9 + 7 = 45$ .

Thời gian ngủ trung bình của học sinh nam là:

$$\bar{x}_1 = \frac{4,5 \cdot 6 + 5,5 \cdot 10 + 6,5 \cdot 13 + 7,5 \cdot 9 + 8,5 \cdot 7}{45} = \frac{587}{90} \approx 6,52 \text{ (giờ)}.$$

Tổng số học sinh nữ là  $n_2 = 4 + 8 + 10 + 11 + 8 = 41$ . Thời gian ngủ trung bình của học sinh nữ là:

$$\bar{x}_2 = \frac{4,5 \cdot 4 + 5,5 \cdot 8 + 6,5 \cdot 10 + 7,5 \cdot 11 + 8,5 \cdot 8}{41} = \frac{555}{82} \approx 6,77 \text{ (giờ)}.$$

Vì  $\bar{x}_2 > \bar{x}_1$  nên thời gian ngủ trung bình của các bạn học sinh nữ lớn hơn thời gian ngủ trung bình của các bạn nam. □

**BÀI 4.** Quãng đường (km) từ nhà đến nơi làm việc của 40 công nhân một nhà máy được ghi lại như sau:

5	3	10	20	25	11	13	7	12	31
19	10	12	17	18	11	32	17	16	2
7	9	7	8	3	5	12	15	18	3
12	14	2	9	6	15	15	7	6	12

- Ghép nhóm dãy số liệu trên thành các khoảng có độ rộng bằng nhau, khoảng đầu tiên là  $[0; 5)$ . Tìm giá trị đại diện cho mỗi nhóm.
- Tính số trung bình của mẫu số liệu không ghép nhóm và mẫu số liệu ghép nhóm. Giá trị nào chính xác hơn?

**Lời giải.**

- Giá trị nhỏ nhất của mẫu số liệu là 2, giá trị lớn nhất là 32, khoảng đầu tiên của mẫu số liệu ghép nhóm là  $[0; 5)$  nên ta ghép nhóm mẫu số liệu như sau

Quãng đường	[0; 5)	[5; 10)	[10; 15)	[15; 20)	[20; 25)	[25; 30)	[30; 35)
Số công nhân	5	11	11	9	1	1	2

Trong mỗi khoảng, giá trị đại diện là trung bình cộng của hai giá trị đầu mút nên ta có bảng sau

Quãng đường	2,5	7,5	12,5	17,5	22,5	27,5	32,5
Số công nhân	5	11	11	9	1	1	2

- Số trung bình của mẫu số liệu không ghép nhóm là

$$\bar{x} = \frac{5 + 3 + 10 + \dots + 12}{40} = 11,9.$$

Số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$\bar{x} = \frac{5 \cdot 2,5 + 11 \cdot 7,5 + 11 \cdot 12,5 + 9 \cdot 17,5 + 1 \cdot 22,5 + 1 \cdot 27,5 + 2 \cdot 32,5}{40} = 12,625.$$

Số trung bình của mẫu số liệu không ghép nhóm sẽ chính xác hơn số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm vì số trung bình của dữ liệu không ghép nhóm sử dụng chính xác các số liệu, còn số trung bình của dữ liệu ghép nhóm sử dụng giá trị đại diện của mỗi khoảng ghép nhóm.

**BÀI 5.** Anh Văn ghi lại cự li 30 lần ném lao của mình ở bảng sau (đơn vị: mét):

72,1	72,9	70,2	70,9	72,2	71,5	72,5	69,3	72,3	69,7
72,3	71,5	71,2	69,8	72,3	71,1	69,5	72,2	71,9	73,1
71,6	71,3	72,2	71,8	70,8	72,2	72,2	72,9	72,7	70,7

- a) Tính cự li trung bình của mỗi lần ném.  
b) Tổng hợp lại kết quả ném của anh Văn vào bảng tần số ghép nhóm theo mẫu sau:

Cự li (m)	[69,2; 70)	[70; 70,8)	[70,8; 71,6)	[71,6; 72,4)	[72,4; 73,2)
Số lần	?	?	?	?	?

- c) Hãy ước lượng cự li trung bình mỗi lần ném từ bảng tần số ghép nhóm trên.  
d) Khả năng anh Văn ném được khoảng bao nhiêu mét là cao nhất?

**Lời giải.**

- a) Điểm tổng của mỗi đợt gồm 10 lần ném

Điểm	Điểm	Điểm	Điểm	Điểm	Điểm	Điểm	Điểm	Điểm	Điểm	Tổng
72,1	72,9	70,2	70,9	72,2	71,5	72,5	69,3	72,3	69,7	713,6
72,3	71,5	71,2	69,8	72,3	71,1	69,5	72,2	71,9	73,1	714,9
71,6	71,3	72,2	71,8	70,8	72,2	72,2	72,9	72,7	70,7	718,4

Cự li trung bình của mỗi lần ném của anh Văn

$$\bar{x} = \frac{713,6 + 714,9 + 718,4}{30} \approx 71,56 \text{ (m)}.$$

- b) Bảng tần số ghép nhóm kết quả ném của anh Văn:

Cự li (m)	[69,2; 70)	[70; 70,8)	[70,8; 71,6)	[71,6; 72,4)	[72,4; 73,2)
Số lần	4	2	7	12	5

- c) Bảng tần số ghép nhóm kết quả ném của anh Văn (theo giá trị đại diện):

Cự li (m)	[69,2; 70)	[70; 70,8)	[70,8; 71,6)	[71,6; 72,4)	[72,4; 73,2)
Giá trị đại diện	69,6	70,4	71,2	72,0	72,8
Số lần	4	2	7	12	5

Cự li trung bình mỗi lần ném của anh Văn qua bảng tần số ghép nhóm

$$(69,6 \cdot 4 + 70,4 \cdot 2 + 71,2 \cdot 7 + 72 \cdot 12 + 72,8 \cdot 5) : 30 = 71,52 \text{ (m)}.$$

- d) Nhóm chứa một của mẫu số liệu trên là nhóm [71,6; 72,4).

Do đó  $u_m = 71,6$ ;  $n_{m-1} = 7$ ;  $n_m = 12$ ;  $n_{m+1} = 5$ ;  $u_{m+1} - u_m = 72,4 - 71,6 = 0,8$ .

Một của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$M_0 = 71,6 + \frac{12 - 7}{(12 - 7) + (12 - 5)} \cdot 0,8 = \frac{101}{14} \approx 71,93.$$

Dựa vào kết quả trên thì khả năng anh Văn ném được cao nhất là khoảng 71,93 mét.

**BÀI 6.** Người ta đếm số xe ô tô đi qua một trạm thu phí mỗi phút trong khoảng thời gian từ 9 giờ đến 9 giờ 30 phút sáng. Kết quả được ghi lại ở bảng sau:

15	16	13	21	17	23	15	21	6	11	12	23	19	25	11
25	7	29	10	28	29	24	6	11	23	11	21	9	27	15

- a) Tính số xe trung bình đi qua trạm thu phí trong mỗi phút.  
b) Tổng hợp lại số liệu trên vào bảng tần số ghép nhóm theo mẫu sau:

Số xe	[6; 10]	[11; 15]	[16; 20]	[21; 25]	[26; 30]
Số lần	?	?	?	?	?

c) Hãy ước lượng trung bình số xe đi qua trạm thu phí trong mỗi phút từ bảng tần số ghép nhóm trên.

### Lời giải.

a) Số xe trung bình đi qua trạm thu phí trong mỗi phút là

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{6 \cdot 2 + 7 \cdot 9 + 10 + 11 \cdot 4 + 12 + 13 + 15 \cdot 3}{30} \\ &\quad + \frac{16 + 17 + 19 + 21 \cdot 3 + 23 \cdot 3 + 24 + 25 \cdot 2 + 27 + 28 + 29 \cdot 2}{30} \\ &\approx 17,43 \text{ (xe)}.\end{aligned}$$

b) Bảng tần số ghép nhóm

Số xe	[6; 10]	[11; 15]	[16; 20]	[21; 25]	[26; 30]
Số lần	5	9	3	9	4

c) Bảng tần số ghép nhóm (theo giá trị đại diện) được hiệu chỉnh lại như sau

Số xe	[5,5; 10,5)	[10,5; 15,5)	[15,5; 20,5)	[20,5; 25,5)	[25,5; 30,5)
Giá trị đại diện	8	13	18	23	28
Số lần	5	9	3	9	4

Số xe trung bình đi qua trạm qua bảng tần số ghép nhóm là

$$\bar{x} = \frac{8 \cdot 5 + 13 \cdot 9 + 18 \cdot 3 + 23 \cdot 9 + 28 \cdot 4}{30} \approx 17,67 \text{ (xe)}.$$

**BÀI 7.** Một thư viện thống kê số lượng sách được mượn mỗi ngày trong ba tháng ở bảng sau:

Số sách	[16; 20]	[21; 25]	[26; 30]	[31; 35]	[36; 40]	[41; 45]	[46; 50]
Số ngày	3	6	15	27	22	14	5

Hãy ước lượng số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

### Lời giải.

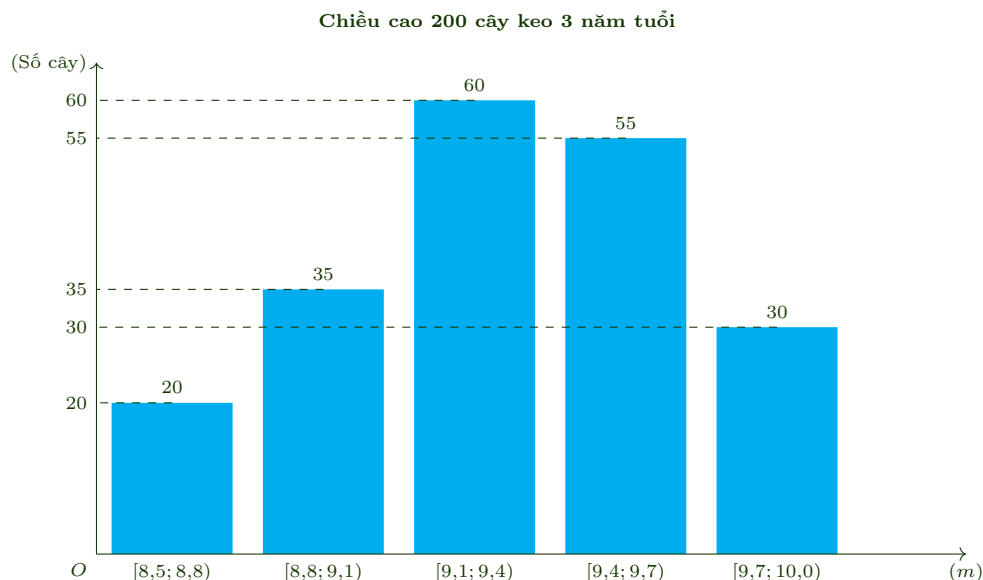
Vì số lượng sách được mượn là số nguyên nên ta hiệu chỉnh bảng tần số ghép nhóm (theo giá trị đại diện) như sau

Số sách	[15,5; 20,5)	[20,5; 25,5)	[25,5; 30,5)	[30,5; 35,5)	[35,5; 40,5)	[40,5; 45,5)	[45,5; 50,5)
Giá trị đại diện	18	23	28	33	38	43	48
Số ngày	3	6	15	27	22	14	5

Trung bình số lượng sách được mượn mỗi ngày trong 3 tháng của thư viện là

$$\bar{x} = \frac{18 \cdot 3 + 23 \cdot 6 + 28 \cdot 15 + 33 \cdot 27 + 38 \cdot 22 + 43 \cdot 14 + 48 \cdot 5}{92} \approx 34,58.$$

**BÀI 8.** Kết quả đo chiều cao của 200 cây keo 3 năm tuổi ở một nông trường được biểu diễn ở biểu đồ dưới đây.



Hãy ước lượng số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

**Lời giải.**

Bảng tần số ghép nhóm (theo giá trị đại diện)

Chiều cao	[8,5; 8,8)	[8,8; 9,1)	[9,1; 9,4)	[9,4; 9,7)	[9,7; 10,0)
Giá trị đại diện	8,65	8,95	9,25	9,55	9,85
Số cây	20	35	60	55	30

Chiều cao trung bình của 200 cây keo 3 năm tuổi là

$$\bar{x} = \frac{8,65 \cdot 20 + 8,95 \cdot 35 + 9,25 \cdot 60 + 9,55 \cdot 55 + 9,85 \cdot 30}{200} \approx 9,31.$$

**BÀI 9.** Kiểm tra điện lượng của một số viên pin tiểu do một hãng sản xuất thu được kết quả như sau:

Điện lượng (nghìn mAh)	[0,9; 0,95)	[0,95; 1,0)	[1,0; 1,05)	[1,05; 1,1)	[1,1; 1,15)
Số viên pin	10	20	35	15	5

Hãy ước lượng số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

**Lời giải.**

Tìm số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm.

Ta có bảng thống kê điện lượng của pin theo giá trị đại diện là:

Điện lượng (nghìn mAh)	[0,9; 0,95)	[0,95; 1,0)	[1,0; 1,05)	[1,05; 1,1)	[1,1; 1,15)
Giá trị đại diện	0,925	0,975	1,025	1,075	1,125
Số viên pin	10	20	35	15	5

Số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm theo dõi điện lượng của một số viên pin xấp xỉ bằng

$$\frac{0,925 \cdot 10 + 0,975 \cdot 20 + 1,025 \cdot 35 + 1,075 \cdot 15 + 1,125 \cdot 5}{10 + 20 + 35 + 15 + 5} \approx 1,016.$$

**Dạng 8. Trung vị**

1. Ví dụ mẫu

**VÍ DỤ 1.**

Sau khi kiểm tra về số học sinh trong 100 lớp học, người ta chia mẫu số liệu đó thành năm nhóm căn cứ vào số lượng học sinh của mỗi lớp (đơn vị: học sinh) và lập bảng tần số ghép nhóm bao gồm tần số tích lũy như bảng bên. Tìm trung vị của mẫu số liệu đó.

Nhóm	Tần số	Tần số tích lũy
[36; 38)	9	9
[38; 40)	15	24
[40; 42)	25	49
[42; 44)	30	79
[44; 46)	21	100
	$n = 100$	

**Lời giải.**

Số phần tử của mẫu là  $n = 100$ . Ta có  $\frac{n}{2} = \frac{100}{2} = 50$ .

Do  $cf_3 = 49 < 50 < cf_4 = 79$  nên nhóm 4 là nhóm đầu tiên có tần số tích lũy lớn hơn hoặc bằng 50.

Xét nhóm 4 là nhóm [42; 44) có  $r = 42$ ;  $d = 2$  và  $n_4 = 30$  và nhóm 3 là nhóm [40; 42) có  $cf_3 = 49$ .

Khi đó trung vị của mẫu số liệu là

$$M_e = 42 + \frac{50 - 49}{30} \cdot 2 \approx 42 \text{ (học sinh)}.$$

**VÍ DỤ 2.** Thời gian (phút) truy cập internet mỗi buổi tối của một số học sinh được cho trong bảng sau:

Thời gian (phút)	[9,5; 12,5)	[12,5; 15,5)	[15,5; 18,5)	[18,5; 21,5)	[21,5; 24,5)
Số học sinh	3	12	15	24	2

Tính trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm này.

### Lời giải.

Cỡ mẫu là  $n = 3 + 12 + 15 + 24 + 2 = 56$ .

Gọi  $x_1, \dots, x_{56}$  là thời gian vào internet của 56 học sinh và giả sử dãy này đã được sắp xếp theo thứ tự tăng dần. Khi đó, trung vị là  $\frac{x_{28} + x_{29}}{2}$ . Do 2 giá trị  $x_{28}, x_{29}$  thuộc nhóm  $[15,5; 18,5)$  nên nhóm này chứa trung vị. Do đó,  $p = 3$ ;  $a_3 = 15,5$ ;  $m_3 = 15$ ;  $m_1 + m_2 = 3 + 12 = 15$ ;  $a_4 - a_3 = 3$  và ta có

$$M_e = 15,5 + \frac{\frac{56}{2} - 15}{15} \cdot 3 = 18,1.$$

□

**VÍ DỤ 3.** Kết quả khảo sát cân nặng của 25 quả bơ ở một lô hàng cho trong bảng sau:

Cân nặng (g)	[150; 155)	[155; 160)	[160; 165)	[165; 170)	[170; 175)
Số quả bơ	1	7	12	3	2

Hãy tìm trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

### Lời giải.

Gọi  $x_1; x_2; \dots; x_{25}$  là cân nặng của 25 quả bơ xếp theo thứ tự không giảm.

Do  $x_1 \in [150; 155)$ ;  $x_2, \dots, x_8 \in [155; 160)$ ;  $x_9, \dots, x_{20} \in [160; 165)$  nên trung vị của mẫu số liệu  $x_1; x_2; \dots; x_{25}$  là  $x_{13} \in [160; 165)$ .

Ta xác định được  $n = 25$ ,  $n_m = 12$ ,  $C = 1 + 7 = 8$ ,  $u_m = 160$ ,  $u_{m+1} = 165$ .

Vậy trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$M_e = 160 + \frac{\frac{25}{2} - 8}{12} \cdot (165 - 160) = 161,875.$$

□

**VÍ DỤ 4.** Trong tuần lễ bảo vệ môi trường, các học sinh khối 11 tiến hành thu nhặt vỏ chai nhựa để tái chế. Nhà trường thống kê kết quả thu nhặt vỏ chai của học sinh khối 11 ở bảng sau

Số vỏ chai nhựa	[11; 15]	[16; 29]	[21; 25]	[26; 30]	[31; 35]
Số học sinh	53	82	48	39	18

Hãy tìm trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

### Lời giải.

Do số vỏ chai là số nguyên nên ta hiệu chỉnh lại như sau:

Số vỏ chai nhựa	[10,5; 15,5)	[15,5; 20,5)	[20,5; 25,5)	[25,5; 30,5)	[30,5; 35,5)
Số học sinh	53	82	48	39	18

Số học sinh tham gia thu nhặt vỏ chai nhựa là

$$n = 53 + 82 + 48 + 39 + 18 = 240.$$

Gọi  $x_1; x_2; \dots; x_{240}$  lần lượt là số vỏ chai 240 học sinh khối 11 thu nhặt được xếp theo thứ tự không giảm.

Do  $x_1, \dots, x_{53} \in [10,5; 15,5)$ ;  $x_{54}, \dots, x_{135} \in [15,5; 20,5)$  nên trung vị của mẫu số liệu  $x_1; x_2; \dots; x_{240}$  là

$$\frac{1}{2} (x_{120} + x_{121}) \in [15,5; 20,5).$$

Ta xác định được  $n = 240$ ;  $n_m = 82$ ;  $C = 53$ ;  $u_m = 15,5$ ;  $u_{m+1} = 20,5$ .

Trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$M_e = 15,5 + \frac{\frac{240}{2} - 53}{82} \cdot (20,5 - 15,5) = \frac{803}{41} \approx 19,59.$$

□

**VÍ DỤ 5.** Trong một hội thao, thời gian chạy 200m của một nhóm các vận động viên được ghi lại ở bảng sau

Thời gian (giây)	[21; 21,5)	[21,5; 22)	[22; 22,5)	[22,5; 23)	[23; 23,5)
Số vận động viên	5	12	32	45	30

Dựa vào bảng số liệu trên, ban tổ chức muốn chọn ra khoảng 50% số vận động viên chạy nhanh nhất để tiếp tục thi vòng 2. Ban tổ chức nên chọn các vận động viên có thời gian chạy không quá bao nhiêu giây?

Lời giải.

Số vận động viên tham gia là

$$n = 5 + 12 + 32 + 45 + 30 = 124.$$

Gọi  $x_1; x_2; \dots; x_{124}$  lần lượt là thời gian chạy 200 m của 124 vận động viên được xếp theo thứ tự không giảm.

Do  $x_1, \dots, x_5 \in [21; 21,5)$ ,  $x_6, \dots, x_{17} \in [21,5; 22)$ ,  $x_{18}, \dots, x_{49} \in [22; 22,5)$ ,  $x_{50}, \dots, x_{94} \in [22,5; 23)$  nên trung vị của mẫu số liệu  $x_1; x_2; \dots; x_{124}$  là

$$\frac{1}{2} \cdot (x_{62} + x_{63}) \in [22,5; 23).$$

Ta xác định được  $n = 124$ ;  $n_m = 45$ ;  $C = 5 + 12 + 32 = 49$ ;  $u_m = 22,5$ ;  $u_{m+1} = 23$ .

Trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$M_e = 22,5 + \frac{\frac{124}{2} - 49}{45} \cdot (23 - 22,5) = \frac{1019}{45} \approx 22,64.$$

Vậy ban tổ chức nên chọn các vận động viên có thời gian chạy không quá 22,64 (giây) được tiếp tục thi vòng hai.

2. Bài tập rèn luyện

BÀI 1.

Bảng bên cho ta bảng tần số ghép nhóm số liệu thống kê chiều cao của 40 mẫu cây ở một vườn thực vật (đơn vị: centimét). Xác định trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

Nhóm	Tần số	Tần số tích lũy
[30; 40)	4	4
[40; 50)	10	14
[50; 60)	14	28
[60; 70)	6	34
[70; 80)	4	38
[80; 90)	2	40
	$n = 40$	

Lời giải.

Ta có  $\frac{n}{2} = 20$ , mà  $14 < 20 < 28$  nên nhóm 3 là nhóm đầu tiên có tần số tích lũy lớn hơn hoặc bằng 20.

Xét nhóm 3 là nhóm [50; 60) có  $r = 50$ ,  $d = 10$ ,  $n_3 = 14$  và nhóm 2 có  $cf_2 = 14$ .

Khi đó, tứ phân vị thứ hai (cũng là trung vị) là

$$M_e = 50 + \frac{20 - 14}{14} \cdot 10 = 54,3 \text{ (cm)}.$$

BÀI 2. Mẫu số liệu sau ghi lại cân nặng của 30 bạn học sinh (đơn vị: kilôgam)

17	40	39	40,5	42	51	41,5	39	41	30
40	42	40,5	39,5	41	40,5	37	39,5	40	41
38,5	39,5	40	41	39	40,5	40	38,5	39,5	41,5

a) Lập bảng tần số ghép nhóm cho mẫu số liệu trên có tám nhóm ứng với tám nửa khoảng:

$$[15; 20), [20; 25), [25; 30), [30; 35), [35; 40), [40; 45), [45; 50), [50; 55).$$

b) Xác định trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

Lời giải.

a) Ta có bảng tần số ghép nhóm của mẫu số liệu trên như sau:

Nhóm	Giá trị đại diện	Tần số	Tần số tích lũy
[15; 20)	17,5	1	1
[20; 25)	22,5	0	1
[25; 30)	27,5	0	1
[30; 35)	32,5	1	2
[35; 40)	37,5	10	12
[40; 45)	42,5	17	29
[45; 50)	47,5	0	29
[50; 55)	52,5	1	30
		$n = 30$	

b) Ta có  $\frac{n}{2} = 15$ , mà  $12 < 15 < 29$  nên nhóm 6 là nhóm đầu tiên có tần số tích lũy lớn hơn hoặc bằng 15.

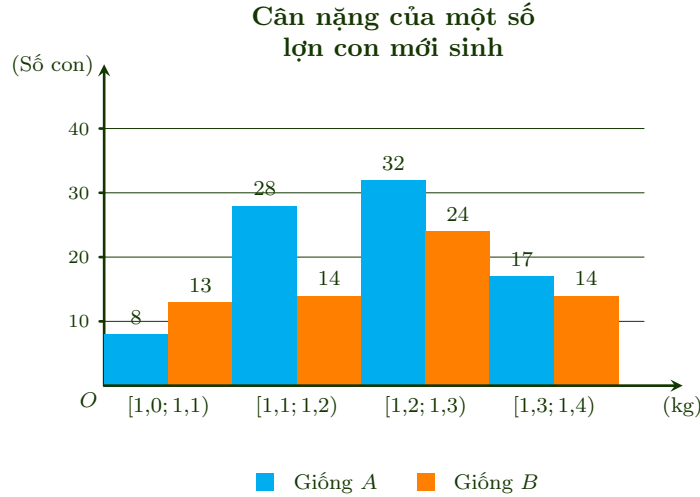
Xét nhóm 6 là nhóm  $[40; 45)$  có  $r = 40$ ,  $d = 5$ ,  $n_6 = 17$  và nhóm 5 có  $cf_5 = 12$ .

Khi đó, trung vị là

$$M_e = 40 + \frac{15 - 12}{17} \cdot 5 = 40,9 \text{ (kg)}.$$

□

**BÀI 3.** Cân nặng của một số lợn con mới sinh thuộc hai giống  $A$  và  $B$  được cho ở biểu đồ dưới đây (đơn vị: kg).



Hãy so sánh cân nặng của lợn con mới sinh giống  $A$  và giống  $B$  theo số trung bình và trung vị.

**Lời giải.**

Bảng tần số ghép nhóm thống kê cân nặng của lợn con mới sinh giống  $A$  và giống  $B$  như sau:

Cân nặng (kg)	[1,0; 1,1)	[1,1; 1,2)	[1,2; 1,3)	[1,3; 1,4)
Giá trị đại diện (kg)	1,05	1,15	1,25	1,35
Giống A (đơn vị: con)	8	28	32	17
Giống B (đơn vị: con)	13	14	24	14

Cân nặng trung bình của lợn con mới sinh giống  $A$  là

$$\frac{1,05 \cdot 8 + 1,15 \cdot 28 + 1,25 \cdot 32 + 1,35 \cdot 17}{8 + 28 + 32 + 17} = \frac{2071}{1700} \approx 1,218.$$

Cân nặng trung bình của lợn con mới sinh giống  $B$  là

$$\frac{1,05 \cdot 13 + 1,15 \cdot 14 + 1,25 \cdot 24 + 1,35 \cdot 14}{13 + 14 + 24 + 14} = \frac{121}{100} \approx 1,21.$$

Suy ra cân nặng trung bình của lợn con mới sinh giống  $A$  lớn hơn cân nặng trung bình của lợn con mới sinh giống  $B$ .  
Trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm cân nặng của lợn con giống  $A$  là

$$M_e = 1,2 + \frac{\frac{85}{2} - (8 + 28)}{32} \cdot (1,3 - 1,2) = \frac{781}{640} \approx 1,22.$$

Trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm cân nặng của lợn con giống  $B$  là

$$M_e = 1,2 + \frac{\frac{65}{2} - (13 + 14)}{24} \cdot (1,3 - 1,2) = \frac{587}{480} \approx 1,22.$$

Suy ra trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm cân nặng của của lợn con giống  $A$  bằng trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm cân nặng của của lợn con giống  $B$ .

□



## 1. Ví dụ mẫu

### VÍ DỤ 1.

Bảng bên cho biết tần số ghép nhóm số liệu thống kê cân nặng của 40 học sinh lớp 11A trong một trường trung học phổ thông (đơn vị: kilôgam). Xác định tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm.

Nhóm	Tần số	Tần số tích lũy
[30; 40)	2	2
[40; 50)	10	12
[50; 60)	16	28
[60; 70)	8	36
[70; 80)	2	38
[80; 90)	2	40
	$n = 40$	

### Lời giải.

Số phần tử của mẫu là  $n = 40$ .

- ☑ Ta có  $\frac{n}{4} = 10$ , mà  $2 < 10 < 12$  nên nhóm 2 là nhóm đầu tiên có tần số tích lũy lớn hơn hoặc bằng 10.

Xét nhóm 2 là nhóm [40; 50) có  $s = 40$ ,  $h = 10$ ,  $n_2 = 10$  và nhóm 1 có  $cf_1 = 2$ .

Khi đó, tứ phân vị thứ nhất là

$$Q_1 = 40 + \frac{10 - 2}{10} \cdot 10 = 48 \text{ (kg)}.$$

- ☑ Ta có  $\frac{n}{2} = 20$ , mà  $12 < 20 < 28$  nên nhóm 3 là nhóm đầu tiên có tần số tích lũy lớn hơn hoặc bằng 20.

Xét nhóm 3 là nhóm [50; 60) có  $r = 50$ ,  $d = 10$ ,  $n_3 = 16$  và nhóm 2 có  $cf_2 = 12$ .

Khi đó, tứ phân vị thứ hai là

$$Q_2 = 50 + \frac{20 - 12}{16} \cdot 10 = 55 \text{ (kg)}.$$

- ☑ Ta có  $\frac{3n}{4} = 30$ , mà  $28 < 30 < 36$  nên nhóm 4 là nhóm đầu tiên có tần số tích lũy lớn hơn hoặc bằng 30.

Xét nhóm 4 là nhóm [60; 70) có  $t = 50$ ,  $l = 10$ ,  $n_4 = 8$  và nhóm 3 có  $cf_3 = 28$ .

Khi đó, tứ phân vị thứ ba là

$$Q_3 = 60 + \frac{30 - 28}{8} \cdot 10 = 62,5 \text{ (kg)}.$$

Vậy tứ phân vị của mẫu số liệu trên là 48, 55 và 62,5. □

## 2. Bài tập rèn luyện

**BÀI 1.** Thời gian (phút) truy cập internet mỗi buổi tối của một số học sinh được cho trong bảng sau:

Thời gian (phút)	[9,5; 12,5)	[12,5; 15,5)	[15,5; 18,5)	[18,5; 21,5)	[21,5; 24,5)
Số học sinh	3	12	15	24	2

Tìm tứ phân vị thứ nhất  $Q_1$  và tứ phân vị thứ ba  $Q_3$  của mẫu số liệu ghép nhóm.

### Lời giải.

Cỡ mẫu là  $n = 3 + 12 + 15 + 24 + 2 = 56$ .

Tứ phân vị thứ nhất  $Q_1$  là  $\frac{x_{14} + x_{15}}{2}$ . Do 2 giá trị  $x_{28}$ ,  $x_{29}$  thuộc nhóm [12,5; 15,5) nên nhóm này chứa  $Q_1$ . Do đó,  $p = 2$ ;

$a_2 = 12,5$ ;  $m_2 = 12$ ;  $m_1 = 3$ ;  $a_3 - a_2 = 3$  và ta có

$$Q_1 = 12,5 + \frac{\frac{56}{4} - 3}{12} \cdot 3 = 15,25.$$

Với tứ phân vị thứ ba  $Q_3$  là  $\frac{x_{42} + x_{43}}{2}$ . Do 2 giá trị  $x_{42}$ ,  $x_{43}$  thuộc nhóm [18,5; 21,5) nên nhóm này chứa  $Q_3$ . Do đó,  $p = 4$ ;

$a_4 = 18,5$ ;  $m_4 = 24$ ;  $m_1 + m_2 + m_3 = 3 + 12 + 15 = 30$ ;  $a_5 - a_4 = 3$  và ta có

$$Q_3 = 18,5 + \frac{\frac{3 \cdot 56}{4} - 30}{24} \cdot 3 = 20. \quad \square$$

**BÀI 2.** Điểm thi môn Toán (thang điểm 100, điểm được làm tròn đến 1) của 60 thí sinh được cho trong bảng sau:

Điểm	0 – 9	10 – 19	20 – 29	30 – 39	40 – 49
Số thí sinh	1	2	4	6	15
Điểm	50 – 59	60 – 69	70 – 79	80 – 89	90 – 99
Số thí sinh	12	10	6	3	1

a) Hiệu chỉnh để thu được mẫu số liệu ghép nhóm dạng Bảng 3.2.

b) Tìm các tứ phân vị và giải thích ý nghĩa của chúng.

### Lời giải.

a) Bảng số liệu ghép nhóm về điểm thi môn Toán của 60 thí sinh

Điểm	[0; 20)	[20; 40)	[40; 60)	[60; 80)	[80; 100)
Số thí sinh	3	10	27	16	4

b) Cỡ mẫu  $n = 60$ . Gọi  $x_1, x_2, \dots, x_{60}$  là điểm thi môn Toán của 60 học sinh và giả sử dãy này đã được sắp xếp theo thứ tự tăng dần. Khi đó, trung vị là  $\frac{x_{30} + x_{31}}{2}$ .

Do hai giá trị  $x_{30}, x_{31}$  thuộc nhóm  $[40; 60)$  nên nhóm này chứa trung vị. Do đó,  $p = 3; a_3 = 40; m_3 = 27; m_1 + m_2 = 13; a_4 - a_3 = 20$  và ta có

$$Q_2 = M_e = 40 + \frac{\frac{60}{2} - 13}{27} \cdot 20 \approx 52,6.$$

Tứ phân vị thứ nhất  $Q_1 = \frac{x_{15} + x_{16}}{2}$ . Do hai giá trị  $x_{15}, x_{16}$  thuộc nhóm  $[40; 60)$  nên nhóm này chứa  $Q_1$ . Do đó,  $p = 3; a_3 = 40; m_3 = 27; m_1 + m_2 = 13; a_4 - a_3 = 20$  và ta có

$$Q_1 = 40 + \frac{\frac{60}{4} - 13}{27} \cdot 20 \approx 41,5.$$

Tứ phân vị thứ ba  $Q_3 = \frac{x_{45} + x_{46}}{2}$ . Do hai giá trị  $x_{45}, x_{46}$  thuộc nhóm  $[60; 80)$  nên nhóm này chứa  $Q_3$ . Do đó,  $p = 4; a_4 = 60; m_4 = 16; m_1 + m_2 + m_3 = 40; a_5 - a_4 = 20$  và ta có

$$Q_3 = 60 + \frac{\frac{3 \cdot 60}{4} - 40}{16} \cdot 20 \approx 66,3.$$

Khoảng cách từ  $Q_1$  đến  $Q_2$  là 11,1 còn khoảng cách từ  $Q_2$  và  $Q_3$  là 13,7. Điều này cho thấy mẫu số liệu tập trung với mật độ cao hơn ở bên trái  $Q_2$  và mật độ thấp hơn ở bên phải  $Q_2$ .

□

### BÀI 3.

Phỏng vấn một số học sinh lớp 11 về thời gian (giờ) ngủ của một buổi tối, thu được bảng số liệu ở bên.

a) So sánh thời gian ngủ trung bình của các bạn học sinh nam và nữ.

b) Hãy cho biết 75% học sinh khối 11 ngủ ít nhất bao nhiêu giờ?

Thời gian	Số học sinh nam	Số học sinh nữ
[4; 5)	6	4
[5; 6)	10	8
[6; 7)	13	10
[7; 8)	9	11
[8; 9)	7	8

### Lời giải.

a) Trong mỗi khoảng thời gian, giá trị đại diện là trung bình cộng của giá trị hai đầu mút nên ta có bảng sau:

Thời gian	Số học sinh nam	Số học sinh nữ
4,5	6	4
5,5	10	8
6,5	13	10
7,5	9	11
8,5	7	8

Tổng số học sinh nam là  $n_1 = 6 + 10 + 13 + 9 + 7 = 45$ .

Thời gian ngủ trung bình của học sinh nam là:

$$\bar{x}_1 = \frac{4,5 \cdot 6 + 5,5 \cdot 10 + 6,5 \cdot 13 + 7,5 \cdot 9 + 8,5 \cdot 7}{45} = \frac{587}{90} \approx 6,52 \text{ (giờ)}.$$

Tổng số học sinh nữ là  $n_2 = 4 + 8 + 10 + 11 + 8 = 41$ . Thời gian ngủ trung bình của học sinh nữ là:

$$\bar{x}_2 = \frac{4,5 \cdot 4 + 5,5 \cdot 8 + 6,5 \cdot 10 + 7,5 \cdot 11 + 8,5 \cdot 8}{41} = \frac{555}{82} \approx 6,77 \text{ (giờ)}.$$

Vì  $\bar{x}_2 > \bar{x}_1$  nên thời gian ngủ trung bình của các bạn học sinh nữ lớn hơn thời gian ngủ trung bình của các bạn nam.

- b) Tổng số học sinh được điều tra là  $n = n_1 + n_2 = 45 + 41 = 86$ .  
Giả sử  $x_1; x_2; x_3; \dots; x_{86}$  là dãy giá trị được sắp xếp theo thứ tự không giảm.  
Ta có bảng sau:

Thời gian	Số học sinh
[4; 5)	10
[5; 6)	18
[6; 7)	23
[7; 8)	20
[8; 9)	15

Tứ phân vị thứ nhất  $Q_1$  là  $x_{22}$ . Do  $x_{22}$  thuộc nhóm [5; 6) nên nhóm này chứa  $Q_1$ .  
Do đó,  $p = 2$ ;  $a_2 = 5$ ;  $m_2 = 18$ ;  $m_1 = 10$ ;  $a_3 - a_2 = 1$  và ta có

$$Q_1 = 5 + \frac{\frac{86}{4} - 10}{18} \cdot 1 = \frac{203}{36} \approx 5,64(\text{giờ}).$$

Nghĩa là có 25% học sinh khối 11 ngủ ít hơn 5,64 giờ.  
Vậy 75% học sinh khối 11 ngủ ít nhất 5,64 giờ.

□

## Dạng 10. Mốt

### 1. Ví dụ mẫu

**VÍ DỤ 1.** Kết quả kiểm tra môn Toán của lớp 11D như sau

5 6 7 5 6 9 10 8 5 5 4 5 4 5 7 4 5 8 9 10  
5 3 5 6 5 7 5 8 4 9 5 6 5 6 8 8 7 9 7 9

- a) Lập bảng tần số ghép nhóm của mẫu số liệu trên có bốn nhóm ứng với bốn nửa khoảng [3; 5), [5; 7), [7; 9), [9; 11).  
b) Mốt của bảng số liệu ghép nhóm trên là bao nhiêu (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?

**Lời giải.**

- a) Bảng bên là bảng tần số ghép nhóm cho kết quả kiểm tra môn Toán của lớp 11D.  
b) Ta thấy: Nhóm 2 ứng với nửa khoảng [5; 7) là nhóm có tần số lớn nhất với  $u = 5$ ,  $g = 2$ ,  $n_2 = 18$ . Nhóm 1 có tần số  $n_1 = 5$ , nhóm 3 có tần số  $n_3 = 10$ .  
Khi đó, mốt của mẫu số liệu là

$$M_o = 5 + \left( \frac{18 - 5}{2 \cdot 18 - 5 - 10} \right) \cdot 2 \approx 6,2.$$

Nhóm	Tần số
[3; 5)	5
[5; 7)	18
[7; 9)	10
[9; 11)	7
	$n = 40$

□

### 2. Bài tập rèn luyện

**BÀI 1.** Mẫu số liệu dưới đây ghi lại tốc độ của 40 ô tô khi đi qua một trạm đo tốc độ (đơn vị: km/h):

48,5 43 50 55 45 60 53 55,5 44 65  
51 62,5 41 44,5 57 57 68 49 46,5 53,5  
61 49,5 54 62 59 56 47 50 60 61  
49,5 52,5 57 47 60 55 45 47,5 48 61,5

- a) Lập bảng tần số ghép nhóm cho mẫu số liệu trên có sáu nhóm ứng với sáu nửa khoảng:

[40; 45), [45; 50), [50; 55), [55; 60), [60; 65), [65; 70).

- b) Mốt của mẫu số liệu ghép nhóm trên là bao nhiêu?

**Lời giải.**

- a) Ta có bảng tần số ghép nhóm của mẫu số liệu trên như sau:

Nhóm	Giá trị đại diện	Tần số	Tần số tích lũy
[40; 45)	42,5	4	4
[45; 50)	47,5	11	15
[50; 55)	52,5	7	22
[55; 60)	57,5	8	30
[60; 65)	62,5	8	38
[65; 70)	67,5	2	40
		$n = 40$	

- b) Ta thấy: Nhóm 2 ứng với nửa khoảng [45; 50) là nhóm có tần số lớn nhất với  $u = 45$ ,  $g = 5$ ,  $n_2 = 11$ . Nhóm 1 có tần số  $n_1 = 4$ , nhóm 3 có tần số  $n_3 = 7$ .

Khi đó, một của mẫu số liệu là

$$M_o = 45 + \left( \frac{11 - 4}{2 \cdot 11 - 4 - 7} \right) \cdot 5 \approx 48,2 \text{ (km/h)}.$$

□

**BÀI 2.** Mẫu số liệu sau ghi lại cân nặng của 30 bạn học sinh (đơn vị: kilôgam):

17    40    39    40,5    42    51    41,5    39    41    30  
 40    42    40,5    39,5    41    40,5    37    39,5    40    41  
 38,5    39,5    40    41    39    40,5    40    38,5    39,5    41,5

- a) Lập bảng tần số ghép nhóm cho mẫu số liệu trên có tám nhóm ứng với tám nửa khoảng:

[15; 20), [20; 25), [25; 30), [30; 35), [35; 40), [40; 45), [45; 50), [50; 55).

- b) Một của mẫu số liệu ghép nhóm trên là bao nhiêu?

**Lời giải.**

- a) Ta có bảng tần số ghép nhóm của mẫu số liệu trên như sau:

Nhóm	Giá trị đại diện	Tần số	Tần số tích lũy
[15; 20)	17,5	1	1
[20; 25)	22,5	0	1
[25; 30)	27,5	0	1
[30; 35)	32,5	1	2
[35; 40)	37,5	10	12
[40; 45)	42,5	17	29
[45; 50)	47,5	0	29
[50; 55)	52,5	1	30
		$n = 30$	

- b) Ta thấy: Nhóm 6 ứng với nửa khoảng [40; 45) là nhóm có tần số lớn nhất với  $u = 40$ ,  $g = 5$ ,  $n_6 = 17$ . Nhóm 5 có tần số  $n_5 = 10$ , nhóm 7 có tần số  $n_7 = 0$ .

Khi đó, một của mẫu số liệu là

$$M_o = 40 + \left( \frac{17 - 10}{2 \cdot 17 - 10 - 0} \right) \cdot 5 \approx 41,5 \text{ (kg)}.$$

□

### BÀI 3.

Bảng bên cho ta bảng tần số ghép nhóm số liệu thống kê chiều cao của 40 mẫu cây ở một vườn thực vật (đơn vị: centimét).

Một của mẫu số liệu ghép nhóm trên là bao nhiêu?

Nhóm	Tần số	Tần số tích lũy
[30; 40)	4	4
[40; 50)	10	14
[50; 60)	14	28
[60; 70)	6	34
[70; 80)	4	38
[80; 90)	2	40
	$n = 40$	

**Lời giải.**

Ta thấy: Nhóm 3 ứng với nửa khoảng [50; 60) là nhóm có tần số lớn nhất với  $u = 50$ ,  $g = 10$ ,  $n_3 = 14$ . Nhóm 2 có tần số  $n_2 = 10$ , nhóm 4 có tần số  $n_4 = 6$ .

Khi đó, một của mẫu số liệu là

$$M_o = 50 + \left( \frac{14 - 10}{2 \cdot 14 - 10 - 6} \right) \cdot 10 \approx 53,3 \text{ (cm)}.$$

□

## F. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

**CÂU 1.** Một cuộc khảo sát đã tiến hành xác định tuổi (theo năm) của 120 chiếc ô-tô. Kết quả điều tra được cho trong bảng sau

Nhóm	[0; 4)	[4; 8)	[8; 12)	[12; 16)	[16; 20)	
Tần số	23	25	27	26	19	$n = 120$

Số ô-tô có độ tuổi dưới 12 là

- (A) 75. (B) 27. (C) 48. (D) 26.

**Lời giải.**

Từ bảng, ta thấy số ô-tô có độ tuổi dưới 12 là  $23 + 25 + 27 = 75$ .

Chọn đáp án (A)

**CÂU 2.** Khảo sát thời gian tập thể dục trong ngày của một số học sinh khối 11 thu được mẫu số liệu ghép nhóm sau

Thời gian (phút)	[0; 20)	[20; 40)	[40; 60)	[60; 80)	[80; 100)
Số học sinh	5	9	12	10	6

Giá trị đại diện của nhóm [20; 40) là

- (A) 10. (B) 30. (C) 20. (D) 40.

**Lời giải.**

Giá trị đại diện của nhóm [20; 40) là  $\frac{20 + 40}{2} = 30$ .

Chọn đáp án (B)

**CÂU 3.** Doanh thu bán hàng trong 20 ngày được lựa chọn ngẫu nhiên của một cửa hàng được ghi lại ở bảng sau (đơn vị: triệu đồng):

Doanh thu	[5; 7)	[7; 9)	[9; 11)	[11; 13)	[13; 15)
Số ngày	2	7	7	3	1

Doanh thu bán hàng của cửa hàng trong ngày A là 7 triệu đồng thì được xếp vào nhóm nào?

- (A) [5; 7). (B) [7; 9). (C) [9; 11). (D) [13; 15).

**Lời giải.**

Doanh thu bán hàng là 7 triệu đồng thì được xếp vào nhóm [7; 9).

Chọn đáp án (B)

**CÂU 4.** Doanh thu bán hàng trong 20 ngày được lựa chọn ngẫu nhiên của một cửa hàng được ghi lại ở bảng sau (đơn vị: triệu đồng):

Doanh thu	[5; 7)	[7; 9)	[9; 11)	[11; 13)	[13; 15)
Số ngày	2	7	7	3	1

Các nhóm có độ dài bằng

- (A) 2. (B) 3. (C) 4. (D) 5.

**Lời giải.**

Các nhóm có độ dài bằng nhau, và bằng 2.

Chọn đáp án (A)

**CÂU 5.** Cho bảng số liệu về khối lượng của 30 củ khoai tây thu hoạch từ một thửa ruộng như hình bên dưới. Tần suất của lớp [100; 110) là bao nhiêu?

Lớp khối lượng (gam)	[70; 80)	[80; 90)	[90; 100)	[100; 110)	[110; 120]
Tần số	3	6	12	6	3

- (A) 20%. (B) 10%. (C) 40%. (D) 90%.

**Lời giải.**

Tần suất ghép lớp [100; 110) là  $\frac{6}{30} \cdot 100\% = 20\%$ .

Chọn đáp án (A)

**CÂU 6.** Cân nặng của 28 học sinh nam lớp 11 được cho ở bảng sau

Cân nặng	[45; 49)	[49; 53)	[53; 57)	[57; 61)	[61; 65)
Số học sinh	4	5	7	7	5

Tần số tích lũy của nhóm  $[49; 53)$  là bao nhiêu?

**(A)** 5.

**(B)** 4.

**(C)** 9.

**(D)** 20.

**Lời giải.**

Tần số tích lũy của nhóm  $[49; 53)$  là  $4 + 5 = 9$ .

Chọn đáp án **(C)**

**CÂU 7.** Điểm môn Toán của lớp 10A được cho như bảng sau

Điểm	$[0; 2)$	$[2; 4)$	$[4; 6)$	$[6; 8)$	$[8; 10)$
Tần số	3	5	12	12	8

Điểm trung bình của các học sinh lớp 10A là bao nhiêu?

**(A)** 5.

**(B)** 5,85.

**(C)** 5,65.

**(D)** 5,45.

**Lời giải.**

Điểm trung bình  $\bar{x} = \frac{1 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + 5 \cdot 12 + 7 \cdot 12 + 9 \cdot 8}{40} = 5,85$ .

Chọn đáp án **(B)**

**CÂU 8.** Cho bảng phân bố tần số ghép lớp

Lớp các giá trị $x$	$[8; 10)$	$[10; 12)$	$[12; 14]$	Cộng
Tần số $n_i$	15	30	55	100

Số trung bình của các giá trị trong bảng trên là

**(A)** 9.

**(B)** 13.

**(C)** 11.

**(D)** 11,8.

**Lời giải.**

Giá trị đại diện của lớp  $[8; 10)$ :  $c_1 = \frac{8 + 10}{2} = 9$ .

Giá trị đại diện của lớp  $[10; 12)$ :  $c_2 = \frac{10 + 12}{2} = 11$ .

Giá trị đại diện của lớp  $[12; 14]$ :  $c_3 = \frac{12 + 14}{2} = 13$ .

Vậy số trung bình cộng  $\bar{x} = \frac{9 \cdot 15 + 11 \cdot 30 + 13 \cdot 55}{15 + 30 + 55} = \frac{59}{5}$ .

Chọn đáp án **(D)**

**CÂU 9.** Kết quả khảo sát cân nặng của 25 quả cam ở lô hàng A được cho như sau

Cân nặng (g)	$[150; 155)$	$[155; 160)$	$[160; 165)$	$[165; 170)$	$[170; 175)$
Số quả cam	2	6	12	4	1

Tính cân nặng trung bình của mỗi quả cam ở lô hàng A.

**(A)** 161,7 (g).

**(B)** 161,7 (kg).

**(C)** 155 (g).

**(D)** 160 (kg).

**Lời giải.**

Ta có giá trị đại diện của các nhóm lần lượt là 152,5; 157,5; 162,5; 167,5; 172,5.

Vậy cân nặng trung bình của mỗi quả cam là

$$\bar{x} = \frac{152,5 \cdot 2 + 157,5 \cdot 6 + 162,5 \cdot 12 + 167,5 \cdot 4 + 172,5 \cdot 1}{25} = 161,7(\text{g}).$$

Chọn đáp án **(A)**

**CÂU 10.** Sau một kì thi học sinh giỏi Toán, người ta thống kê kết quả (thang điểm 20) và thu được bảng tần số sau

Lớp điểm	$[6; 10]$	$[11; 15]$	$[16; 20]$	Cộng
Tần số	22	12	6	40

Nếu những học sinh chỉ cần đạt điểm trung bình của bảng điểm trên đều được nhận Giấy Khen của ban tổ chức, thì số học sinh được nhận Giấy Khen là bao nhiêu?

**(A)** 11.

**(B)** 18.

**(C)** 12.

**(D)** 6.

**Lời giải.**

Ta lập lại bảng với thêm dòng giá trị đại diện

Lớp điểm	$[6; 10]$	$[11; 15]$	$[16; 20]$	Cộng
Giá trị đại diện	8	13	18	
Tần số	22	12	6	40

Điểm trung bình là  $\bar{x} = \frac{22 \cdot 8 + 12 \cdot 13 + 6 \cdot 18}{40} = 11$ .

Vậy số học sinh được nhận thưởng là  $12 + 6 = 18$  (học sinh).

Chọn đáp án (B)

**CÂU 11.** Cho bảng tần số về cân nặng của 180 người dân trong một xã như sau: (đơn vị: kg)

Nhóm	Tần số	Tần số tích lũy
[0; 10)	6	6
[10; 20)	15	21
[20; 30)	37	58
[30; 40)	48	106
[40; 50)	22	128
[50; 60)	29	157
[60; 70)	23	180
	$n = 180$	

Tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu trên là

(A) 56,486 kg.

(B) 26,486 kg.

(C) 25,496 kg.

(D) 36,486 kg.

**Lời giải.**

Số phần tử của mẫu là  $n = 180$  và  $\frac{n}{4} = \frac{180}{4} = 45$ .

Ta có  $21 < 135 < 58$  nên nhóm 3 là nhóm đầu tiên có tần số tích lũy lớn hơn hoặc bằng 45.

Xét nhóm 3 là nhóm  $[20; 30)$  có  $s = 20$ ,  $h = 10$ ,  $n_3 = 37$ , nhóm 2 là nhóm có  $cf_2 = 21$ .

Vậy  $Q_1 = 20 + \frac{45 - 21}{37} \cdot 10 \approx 26,49$  (kg).

Chọn đáp án (B)

**CÂU 12.** Cho bảng tần số chiều cao của 46 học sinh nam của khối lớp 11 như sau

Nhóm	Tần số
[155; 160)	3
[160; 165)	18
[165; 170)	10
[170; 175)	15
	$n = 46$

Xác định tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu trên

(A) 161,36.

(B) 161,63.

(C) 162,36.

(D) 162,63.

**Lời giải.**

Số phần tử của mẫu là  $n = 46$ ;  $\frac{n}{4} = 11,5$ .

Ta có  $cf_1 = 3$ ,  $cf_2 = 3 + 18 = 21$  và  $6 < 11,5 < 21$  nên nhóm 2 là nhóm đầu tiên có tần số tích lũy lớn hơn hoặc bằng 11,5.

Xét nhóm 2 là nhóm  $[160; 165)$ , ta có  $s = 160$ ,  $h = 5$ ,  $n_2 = 21$ ; nhóm 1 có tần số tích lũy bằng 6.

Vậy  $Q_1 = 160 + \frac{11,5 - 3}{18} \cdot 5 = 162,36$ .

Chọn đáp án (C)

**CÂU 13.** Cho bảng tần số chiều cao của 46 học sinh nam của khối lớp 11 như sau

Nhóm	Tần số
[155; 160)	3
[160; 165)	18
[165; 170)	10
[170; 175)	15
	$n = 46$

Xác định tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu trên

(A) 162,36.

(B) 166,5.

(C) 166.

(D) 171,16.

**Lời giải.**

Số phần tử của mẫu là  $n = 46$ ;  $\frac{3n}{4} = 34,5$ .

Ta có  $cf_3 = 3 + 18 + 10 = 31$ ,  $cf_4 = 31 + 15 = 46$  và  $31 < 34,5 < 46$  nên nhóm 4 là nhóm đầu tiên có tần số tích lũy lớn hơn hoặc bằng 34,5.

Xét nhóm 4 là nhóm  $[170; 175)$ , ta có  $t = 170$ ,  $l = 5$ ,  $n_4 = 15$ ; nhóm 3 có tần số tích lũy bằng 31.

Vậy  $Q_3 = 170 + \frac{34,5 - 31}{15} \cdot 5 = 171,16$ .

Chọn đáp án (D)

**CÂU 14.**

Cho bảng tần số ghép nhóm số liệu thống kê chiều cao của 40 mẫu cây ở một vườn thực vật (đơn vị: centimét).

Xác định tứ phân vị thứ hai của số liệu ghép nhóm trên

- (A) 56,43. (B) 56,34. (C) 46,43. (D) 36,43.

Nhóm	Tần số	Tần số tích lũy
[30; 40)	4	4
[40; 50)	10	14
[50; 60)	14	28
[60; 70)	6	34
[70; 80)	4	38
[80; 90)	2	40
	$n = 40$	

**Lời giải.**

Số phần tử của mẫu là  $n = 40$ ;  $\frac{n}{2} = 20$ .

Ta có  $cf_2 = 14 < 20 < cf_3 = 28$  nên nhóm 3 là nhóm đầu tiên có tần số tích lũy lớn hơn hoặc bằng 20.

Xét nhóm 3 là nhóm [50; 60) có  $r = 50$ ,  $d = 10$ ,  $n_3 = 14$  và nhóm 2 là nhóm [40; 50) có  $cf_2 = 14$ .

Do đó  $Q_2 = 50 + \frac{20 - 14}{14} \cdot 10 = 56,43$ .

Chọn đáp án (A) □

**CÂU 15.** Một bảng xếp hạng đã tính điểm chuẩn hoá cho chỉ số nghiên cứu của một số trường đại học ở Việt Nam và thu được kết quả sau

Điểm	Dưới 20	[20; 30)	[30; 40)	[40; 60)	[60; 80)	[80; 100)
Số điểm	4	19	6	2	3	1

Xác định điểm ngưỡng để đưa ra danh sách 25% trường đại học có chỉ số nghiên cứu tốt nhất Việt Nam.

- (A) 25,26. (B) 35,42. (C) 45,35. (D) 45,42.

**Lời giải.**

Điểm ngưỡng để đưa ra danh sách 25% trường đại học có chỉ số nghiên cứu tốt nhất Việt Nam là tứ phân vị thứ ba.

Ta có  $n = 35$  và  $\frac{3n}{4} = 26,25$ .

Do  $cf_2 = 4 + 19 = 23 < 26,25 < cf_3 = 23 + 6 = 29$  nên nhóm [30; 40) là nhóm đầu tiên có tần số tích lũy lớn hơn hoặc bằng 26,25.

Nhóm [30; 40) có  $r = 30$ ,  $d = 10$ ,  $n_3 = 6$ ; nhóm 2 có  $cf_2 = 23$ . Do đó

$$Q_3 = 30 + \frac{26,25 - 23}{6} \cdot 10 \approx 35,42.$$

Vậy để đưa ra danh sách 25% trường đại học có chỉ số nghiên cứu tốt nhất Việt Nam ta lấy các trường có điểm chuẩn hóa trên 35,42.

Chọn đáp án (B) □

**CÂU 16.** Phỏng vấn một số học sinh khối 11 về thời gian (giờ) ngủ của một buổi tối, thu được bảng số liệu như sau.

Thời gian (giờ)	[4; 5)	[5; 6)	[6; 7)	[7; 8)	[8; 9)
Số học sinh	6	10	13	9	7

Hãy cho biết 75% học sinh khối 11 ngủ ít nhất bao nhiêu giờ?

- (A) 7,675. (B) 7,53. (C) 8. (D) 7,9.

**Lời giải.**

Cỡ mẫu là  $n = 45$ .

Gọi  $x_1, \dots, x_{45}$  là mẫu số liệu được sắp xếp theo thứ tự không giảm. Khi đó, trung vị là  $x_{23}$ . Do đó, tứ phân vị thứ ba  $Q_3$  là  $x_{34}$ . Do  $x_{34}$  đều thuộc nhóm [7; 8) nên nhóm này chứa  $Q_3$ . Do đó,  $p = 4$ ;  $a_4 = 7$ ;  $m_4 = 9$ ;  $m_1 + m_2 + m_3 = 29$ ;  $a_5 - a_4 = 1$  và ta có

$$Q_3 = 7 + \frac{\frac{3 \cdot 45}{4} - 29}{9} \cdot 1 \approx 7,53.$$

Vậy 75% học sinh khối 11 ngủ ít nhất 7,53 giờ.

Chọn đáp án (B) □

**CÂU 17.** Một hãng xe ô tô thống kê lại số lần gặp sự cố về động cơ về động cơ của 100 chiếc xe cùng loại sau 2 năm sử dụng đầu tiên ở dạng sau

Số lần gặp sự cố	[0; 5; 2; 5)	[2; 5; 4; 5)	[4; 5; 6; 5)	[6; 5; 8; 5)	[8; 5; 10; 5)
Số xe	17	33	25	20	5



Tìm tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu.

(A)  $Q_1 \approx 4$ .

(B)  $Q_1 \approx 2, 98$ .

(C)  $Q_1 \approx 2, 5$ .

(D)  $Q_1 \approx 3, 5$ .

**Lời giải.**

Cỡ mẫu là  $n = 100$ .

Gọi  $x_1, \dots, x_{100}$  là mẫu số liệu được sắp xếp theo thứ tự không giảm. Khi đó, trung vị là  $\frac{x_{50} + x_{51}}{2}$ . Do đó, tứ phân vị thứ nhất  $Q_1$  là  $\frac{x_{25} + x_{26}}{2}$ . Do  $x_{25}, x_{26}$  đều thuộc nhóm  $[2, 5; 4, 5)$  nên nhóm này chứa  $Q_1$ .

Do đó,  $p = 2$ ;  $a_2 = 2, 5$ ;  $m_2 = 33$ ;  $m_1 = 17$ ,  $a_3 - a_2 = 2$  và ta có

$$Q_1 = 2, 5 + \frac{\frac{100}{4} - 17}{33} \cdot 2 \approx 2, 98.$$

Chọn đáp án (A)

**CÂU 18.** Một hãng xe ô tô thống kê lại số lần gặp sự cố về động cơ về động cơ của 100 chiếc xe cùng loại sau 2 năm sử dụng đầu tiên ở dạng sau

Số lần gặp sự cố	$[0, 5; 2, 5)$	$[2, 5; 4, 5)$	$[4, 5; 6, 5)$	$[6, 5; 8, 5)$	$[8, 5; 10, 5)$
Số xe	17	33	25	20	5

Tìm tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu.

(A)  $Q_3 = 6, 3$ .

(B)  $Q_3 = 6, 8$ .

(C)  $Q_3 = 7, 2$ .

(D)  $Q_3 = 6, 5$ .

**Lời giải.**

Cỡ mẫu là  $n = 100$ .

Với tứ phân vị thứ ba  $Q_3$  là  $\frac{x_{75} + x_{76}}{2}$ . Do  $x_{75} \in [4, 5; 6, 5)$ ,  $x_{76} \in [6, 5; 8, 5)$  nên tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu ghép nhóm là  $Q_3 = 6, 5$ .

Chọn đáp án (D)

**CÂU 19.** Số điểm một cầu thủ bóng rổ ghi được trong 20 trận đấu được cho ở bảng sau

Điểm số	$[5, 5; 10, 5)$	$[10, 5; 15, 5)$	$[15, 5; 20, 5)$	$[20, 5; 25, 5)$
Số trận	3	9	2	6

Tìm tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu.

(A)  $Q_1 \approx 11, 6$ .

(B)  $Q_1 \approx 14, 4$ .

(C)  $Q_1 \approx 15, 6$ .

(D)  $Q_1 \approx 21, 3$ .

**Lời giải.**

Cỡ mẫu là  $n = 20$ .

Gọi  $x_1, \dots, x_{20}$  là mẫu số liệu được sắp xếp theo thứ tự không giảm. Khi đó, trung vị là  $\frac{x_{10} + x_{11}}{2}$ . Do đó, tứ phân vị thứ nhất  $Q_2$  là  $\frac{x_{10} + x_{11}}{2}$ . Do  $x_{10}, x_{11}$  đều thuộc nhóm  $[10, 5; 15, 5)$  nên nhóm này chứa  $Q_2$ .

Do đó,  $p = 2$ ;  $a_2 = 10, 5$ ;  $m_2 = 9$ ;  $m_1 = 3$ ,  $a_3 - a_2 = 5$  và ta có

$$Q_1 = 10, 5 + \frac{\frac{20}{2} - 3}{9} \cdot 5 \approx 14, 4.$$

Chọn đáp án (A)

**CÂU 20.** Số cuộc gọi điện thoại một người thực hiện mỗi ngày trong 30 ngày được lựa chọn ngẫu nhiên được thống kê trong bảng sau:

Số cuộc gọi	$[3; 5]$	$[6; 8]$	$[9; 11]$	$[12; 14]$	$[15; 17]$
Số ngày	5	13	7	3	2

Tìm một của mẫu số liệu ghép nhóm trên. Hãy dự đoán xem khả năng người đó thực hiện bao nhiêu cuộc gọi mỗi ngày là cao nhất.

(A) 4.

(B) 6.

(C) 5.

(D) 7.

**Lời giải.**

Do số cuộc gọi là số nguyên nên ta hiệu chỉnh lại như sau:

Số cuộc gọi	$[2, 5; 5, 5)$	$[5, 5; 8, 5)$	$[8, 5; 11, 5)$	$[11, 5; 14, 5)$	$[14, 5; 17, 5)$
Số ngày	5	13	7	3	2

Nhóm chứa một của mẫu số liệu trên là nhóm  $[5,5; 8,5)$ .

Do đó  $u_m = 5,5$ ;  $n_{m-1} = 5$ ;  $n_m = 13$ ;  $n_{m+1} = 7$ ;  $u_{m+1} - u_m = 8,5 - 5,5 = 3$ .

Mốt của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$M_0 = 5,5 + \frac{13 - 5}{(13 - 5) + (13 - 7)} \cdot 3 = \frac{101}{14} \approx 7,2.$$

Dựa vào kết quả trên ta có thể dự đoán rằng khả năng người đó thực hiện 7 cuộc gọi mỗi ngày là cao nhất.

Chọn đáp án (D)

**CÂU 21.** Một thư viện thống kê số lượng sách được mượn mỗi ngày trong ba tháng ở bảng sau:

Số sách	[16; 20]	[21; 25]	[26; 30]	[31; 35]	[36; 40]	[41; 45]	[46; 50]
Số ngày	3	6	15	27	22	14	5

Hãy ước lượng một của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

(A) 34,33.

(B) 34,03.

(C) 35,63.

(D) 34,13.

**Lời giải.**

Vì số lượng sách được mượn là số nguyên nên ta hiệu chỉnh bảng tần số ghép nhóm (theo giá trị đại diện) như sau

Số sách	[15,5; 20,5)	[20,5; 25,5)	[25,5; 30,5)	[30,5; 35,5)	[35,5; 40,5)	[40,5; 45,5)	[45,5; 50,5)
Giá trị đại diện	18	23	28	33	38	43	48
Số ngày	3	6	15	27	22	14	5

Trung bình số lượng sách được mượn mỗi ngày trong 3 tháng của thư viện là

$$\bar{x} = \frac{18 \cdot 3 + 23 \cdot 6 + 28 \cdot 15 + 33 \cdot 27 + 38 \cdot 22 + 43 \cdot 14 + 48 \cdot 5}{92} \approx 34,58.$$

Nhóm chứa một của mẫu số liệu trên là nhóm  $[30,5; 35,5)$ .

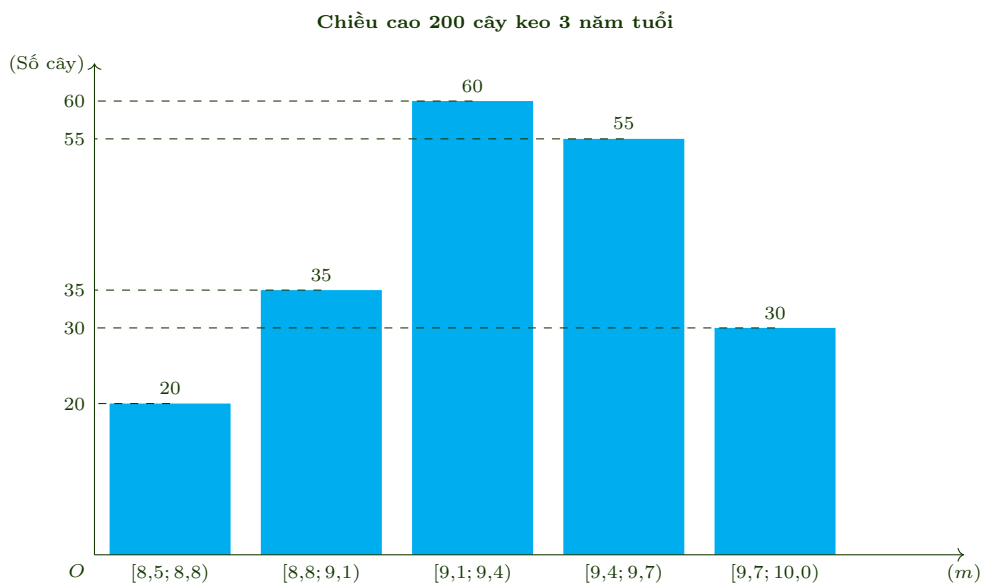
Do đó  $u_m = 30,5$ ;  $n_{m-1} = 15$ ;  $n_m = 27$ ;  $n_{m+1} = 22$ ;  $u_{m+1} - u_m = 35,5 - 30,5 = 5$ .

Mốt của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$M_0 = 30,5 + \frac{27 - 15}{(27 - 15) + (27 - 22)} \cdot 5 \approx 34,03.$$

Chọn đáp án (B)

**CÂU 22.** Kết quả đo chiều cao của 200 cây keo 3 năm tuổi ở một nông trường được biểu diễn ở biểu đồ dưới đây.



Mốt của mẫu số liệu ghép nhóm trên là

(A) 9,35.

(B) 10,53.

(C) 10,35.

(D) 9,53.

**Lời giải.**

Bảng tần số ghép nhóm (theo giá trị đại diện)

Chiều cao	[8,5; 8,8)	[8,8; 9,1)	[9,1; 9,4)	[9,4; 9,7)	[9,7; 10,0)
Giá trị đại diện	8,65	8,95	9,25	9,55	9,85
Số cây	20	35	60	55	30

Chiều cao trung bình của 200 cây keo 3 năm tuổi là

$$\bar{x} = \frac{8,65 \cdot 20 + 8,95 \cdot 35 + 9,25 \cdot 60 + 9,55 \cdot 55 + 9,85 \cdot 30}{200} \approx 9,31.$$

Nhóm chứa một của mẫu số liệu trên là nhóm [9,1; 9,4).

Do đó  $u_m = 9,1$ ;  $n_{m-1} = 35$ ;  $n_m = 60$ ;  $n_{m+1} = 55$ ;  $u_{m+1} - u_m = 9,4 - 9,1 = 0,3$ .

Một của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$M_0 = 9,1 + \frac{60 - 35}{(60 - 35) + (60 - 55)} \cdot 0,3 = 9,35.$$

**CÂU 23.** Bảng số liệu ghép nhóm sau cho biết chiều cao (cm) của 50 học sinh lớp 11A.

Khoảng chiều cao (cm)	[145; 150)	[150; 155)	[155; 160)	[160; 165)	[165; 170)
Số học sinh	7	14	10	10	9

Một của mẫu số liệu ghép nhóm là

**(A)** 154,20.

**(B)** 153,18.

**(C)** 155,12.

**(D)** 158,36.

**Lời giải.**

Tần số lớn nhất là 14 nên nhóm chứa một là nhóm [150; 155). Ta có  $j = 2$ ,  $a_2 = 150$ ,  $m_2 = 14$ ,  $m_1 = 7$ ,  $m_3 = 10$ ,  $h = 5$ . Do đó

$$M_o = 150 + \frac{14 - 7}{(14 - 7) + (14 - 10) \cdot 5} \approx 153,18.$$

Số học sinh có chiều cao khoảng 153,18 là nhiều nhất.

Chọn đáp án **(B)**

**CÂU 24.** Chọn khẳng định **sai**.

**(A)** Một của mẫu số liệu không ghép nhóm là giá trị có khả năng xuất hiện cao nhất khi lấy mẫu.

**(B)** Một của mẫu số liệu sau khi ghép nhóm xấp xỉ với một của mẫu số liệu không ghép nhóm.

**(C)** Một mẫu số liệu ghép nhóm chỉ có một một.

**(D)** Một mẫu số liệu ghép nhóm có thể có nhiều nhóm chứa một và nhiều một.

**Lời giải.**

Một của mẫu số liệu không ghép nhóm là giá trị có khả năng xuất hiện cao nhất khi lấy mẫu.

Một của mẫu số liệu sau khi ghép nhóm xấp xỉ với một của mẫu số liệu không ghép nhóm.

Một mẫu số liệu ghép nhóm có thể có nhiều nhóm chứa một và nhiều một.

Do đó khẳng định sai là: Một mẫu số liệu ghép nhóm chỉ có một một.

Chọn đáp án **(C)**

