

### Bài 3. CÁC KHÁI NIỆM MỞ ĐẦU

## A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

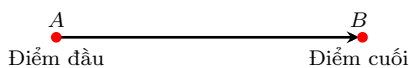
## 1. Khái niệm vectơ

**⚡ ĐỊNH NGHĨA 3.1.** Vectơ là một đoạn thẳng có hướng.

Vectơ có điểm đầu là  $A$ , điểm cuối là  $B$  được kí hiệu là  $\overrightarrow{AB}$ , đọc là “vectơ  $AB$ ”.

Để vẽ vectơ  $\overrightarrow{AB}$  ta vẽ đoạn thẳng  $AB$  và đánh dấu mũi tên ở đầu mút  $B$  (Hình 1).

Đối với vectơ  $AB$ , ta gọi



Hình 1

- ☑ Đường thẳng  $d$  đi qua hai điểm  $A$  và  $B$  là giá của vectơ  $AB$  (Hình 2).

- ☛ Độ dài đoạn thẳng  $AB$  là độ dài của vectơ  $\overrightarrow{AB}$ , kí hiệu là  $|\overrightarrow{AB}|$ .

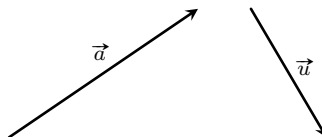


Hình 2

## 2. Hai vectơ cùng phương, cùng hướng, bằng nhau

**⚡ ĐỊNH NGHĨA 3.2.** Hai vectơ  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$  bằng nhau nếu chúng cùng hướng và cùng độ dài, kí hiệu:  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ .

Khi không cần chỉ rõ điểm đầu và điểm cuối của vectơ, vectơ còn được kí hiệu là  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$ , ... (Hình 5). Độ dài của vectơ  $\vec{a}$  được kí hiệu là  $|\vec{a}|$ .



Hình 5

## Nhân xét

- ☑ Hai vectơ  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  bằng nhau nếu chúng cùng hướng và cùng độ dài, kí hiệu là  $\vec{a} = \vec{b}$ .
- ☑ Khi cho trước vectơ  $\vec{a}$  và điểm  $O$ , thì ta luôn tìm được một điểm  $A$  duy nhất sao cho  $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ .

### 3. Vectơ không

**ĐỊNH NGHĨA 3.3.** vectơ không là vectơ có điểm đầu và điểm cuối trùng nhau, kí hiệu là  $\vec{0}$ .

Với các điểm bất kì  $A, B, C$  ta có  $\vec{0} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{CC}$ .

vectơ  $\vec{AA}$  nằm trên mọi đường thẳng đi qua  $A$ . Ta quy ước  $\vec{0}$  (vectơ không) cùng phương và cùng hướng với mọi vectơ; hơn nữa  $|\vec{0}| = 0$ .

**Nhân xét:** Hai điểm  $A, B$  trùng nhau khi và chỉ khi  $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$ .

## B. CÁC DẠNG TOÁN

### Dạng 1. Xác định một vectơ, độ dài vectơ

- ✔ vectơ là một đoạn thẳng có hướng, nghĩa là, trong hai điểm mút của đoạn thẳng, đã chỉ rõ điểm đầu, điểm cuối.
- ✔ Độ dài của vectơ là khoảng cách giữa điểm đầu và điểm cuối của vectơ đó.

## 1. Ví dụ minh họa

**VÍ DỤ 1.** Cho tứ giác  $ABCD$ . Hãy chỉ ra các vectơ khác vectơ không có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của tứ giác.

**VÍ DỤ 2.** Cho hình vuông  $ABCD$  với cạnh có độ dài bằng 1. Tính độ dài các vectơ  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{BD}$ ,  $\overrightarrow{DB}$ .

**VÍ DỤ 3.** Cho tam giác đều  $ABC$  có cạnh bằng  $a$ . Gọi  $M$  là trung điểm của  $BC$  tính độ dài vectơ  $\overrightarrow{AM}$ .

ĐIỂM: \_\_\_\_\_

“It’s not how much time you have, it’s how you use it.”

## QUICK NOTE

## QUICK NOTE

## 2. Bài tập tự luận

**BÀI 1.** Cho lục giác đều  $ABCDEF$  có cạnh bằng  $a$ .

- Có bao nhiêu vectơ khác vectơ không có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của ngũ giác?
- Tính độ dài các vectơ  $\overrightarrow{AD}$

**BÀI 2.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  có  $BC = 2a$ . Gọi  $M$  là trung điểm của  $BC$  tính độ dài vectơ  $\overrightarrow{AM}$ .

### Dạng 2. Hai vectơ cùng phương, cùng hướng và bằng nhau

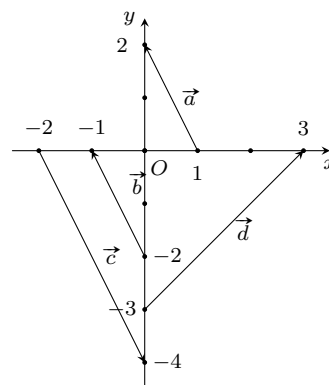
Sử dụng các định nghĩa

- ☑ Hai vectơ cùng phương nếu chúng có giá song song hoặc trùng nhau.
- ☑ Hai vectơ cùng phương thì cùng hướng hoặc ngược hướng.
- ☑ Hai vectơ bằng nhau nếu chúng cùng độ dài và cùng hướng.

## 1. Ví dụ minh họa

### VÍ DỤ 1.

Cho hình vẽ, hãy chỉ ra các vectơ cùng phương, các cặp vectơ ngược hướng và các cặp vectơ bằng nhau



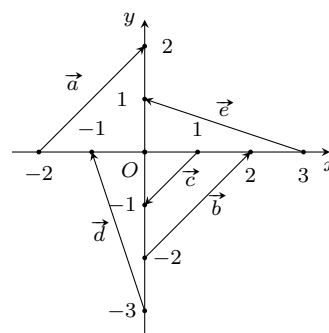
**VÍ DỤ 2.** Cho hình bình hành  $ABCD$  có tâm là  $O$ . Hãy tìm các cặp vectơ khác  $\vec{0}$ , bằng nhau và

- có điểm đầu và điểm cuối trong các điểm  $A, B, C$  và  $D$ .
- có điểm đầu là  $O$  hoặc điểm cuối là  $O$ .

## 2. Bài tập tự luận

### BÀI 1.

Cho hình vẽ, hãy chỉ ra các vectơ cùng phương, các cặp vectơ ngược hướng và các cặp vectơ bằng nhau



**BÀI 2.** Cho tam giác đều  $ABC$ , hãy chỉ ra mối quan hệ về độ dài, phương và hướng giữa cặp vectơ  $\overrightarrow{BA}$  và  $\overrightarrow{CA}$ . Hai vectơ có bằng nhau không?

### BÀI 3.

## QUICK NOTE

- 

### C. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

**(A)** Có duy nhất một vectơ cùng phương với mọi vectơ.  
**(B)** Có ít nhất hai vectơ cùng phương với mọi vectơ.  
**(C)** Có vô số vectơ cùng phương với mọi vectơ.

QUICK NOTE

(D) Không có vectơ nào cùng phương với mọi vectơ.

**CÂU 10.** Khẳng định nào sau đây đúng?

- (A) Hai vectơ cùng phương với một vectơ thứ ba thì cùng phương.  
 (B) Hai vectơ cùng phương với một vectơ thứ ba khác  $\vec{0}$  thì cùng phương.  
 (C) vectơ không là vectơ không có giá.  
 (D) Điều kiện đủ để hai vectơ bằng nhau là chúng có độ dài bằng nhau.

**CÂU 11.** Cho lục giác đều  $ABCDEF$  tâm  $O$ . Số các vectơ khác  $\vec{0}$  cùng phương với  $\vec{OC}$  có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của lục giác bằng

- (A) 6. (B) 7. (C) 8. (D) 4.

**CÂU 12.** Cho ba điểm  $A, B, C$  phân biệt. Khi đó

- (A) Điều kiện cần và đủ để  $A, B, C$  thẳng hàng là  $\vec{AC}$  cùng phương với  $\vec{AB}$ .  
 (B) Điều kiện đủ để  $A, B, C$  thẳng hàng là  $\vec{CA}$  cùng phương với  $\vec{AB}$ .  
 (C) Điều kiện cần để  $A, B, C$  thẳng hàng là  $\vec{CA}$  cùng phương với  $\vec{AB}$ .  
 (D) Điều kiện cần và đủ để  $A, B, C$  thẳng hàng là  $\vec{AB} = \vec{AC}$ .

**CÂU 13.** Cho vectơ  $\vec{MN} \neq \vec{0}$ . Số vectơ cùng hướng với vectơ  $\vec{MN}$  là

- (A) vô số. (B) 1. (C) 3. (D) 2.

**CÂU 14.** Gọi  $C$  là trung điểm của đoạn  $AB$ . Hãy chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau.

- (A)  $\vec{CA} = \vec{CB}$ . (B)  $\vec{AB}$  và  $\vec{AC}$  cùng hướng.  
 (C)  $\vec{AB}$  và  $\vec{CB}$  ngược hướng. (D)  $|\vec{AB}| = |\vec{CB}|$ .

**CÂU 15.** Cho ba điểm  $M, N, P$  thẳng hàng, trong đó điểm  $N$  nằm giữa hai điểm  $M$  và  $P$ . Khi đó các cặp vectơ nào cùng hướng?

- (A)  $\vec{MP}$  và  $\vec{PN}$ . (B)  $\vec{MN}$  và  $\vec{PN}$ . (C)  $\vec{NM}$  và  $\vec{NP}$ . (D)  $\vec{MN}$  và  $\vec{MP}$ .

**CÂU 16.** Phát biểu nào sau đây đúng?

- (A) Hai vectơ không bằng nhau thì độ dài của chúng không bằng nhau.  
 (B) Hai vectơ không bằng nhau thì độ dài của chúng không cùng phương.  
 (C) Hai vectơ bằng nhau thì có giá trùng nhau hoặc song song nhau.  
 (D) Hai vectơ có độ dài không bằng nhau thì không cùng hướng.

**CÂU 17.** Cho vectơ  $\vec{a} \neq \vec{0}$ . Mệnh đề nào sau đây đúng?

- (A) Có vô số vectơ  $\vec{u}$  mà  $\vec{u} = \vec{a}$ . (B) Có duy nhất một  $\vec{u}$  mà  $\vec{u} = \vec{a}$ .  
 (C) Có duy nhất một  $\vec{u}$  mà  $\vec{u} = -\vec{a}$ . (D) Không có vectơ  $\vec{u}$  nào mà  $\vec{u} = \vec{a}$ .

**CÂU 18.** Cho hình bình hành  $ABCD$ . Đẳng thức nào sau đây sai?

- (A)  $|\vec{AD}| = |\vec{BC}|$ . (B)  $|\vec{BC}| = |\vec{DA}|$ . (C)  $|\vec{AB}| = |\vec{CD}|$ . (D)  $|\vec{AC}| = |\vec{BD}|$ .

**CÂU 19.** Cho lục giác đều  $ABCDEF$  tâm  $O$ . Ba vectơ bằng vectơ  $\vec{BA}$  là

- (A)  $\vec{OF}, \vec{DE}, \vec{OC}$ . (B)  $\vec{CA}, \vec{OF}, \vec{DE}$ . (C)  $\vec{OF}, \vec{DE}, \vec{CO}$ . (D)  $\vec{OF}, \vec{ED}, \vec{OC}$ .

**CÂU 20.** Cho đoạn thẳng  $AB$ ,  $I$  là trung điểm của  $AB$ . Khi đó

- (A)  $\vec{BI} = \vec{AI}$ . (B)  $\vec{BI}$  cùng hướng  $\vec{AB}$ .  
 (C)  $|\vec{BI}| = 2|\vec{AI}|$ . (D)  $|\vec{BI}| = |\vec{AI}|$ .

**CÂU 21.** Cho hình thoi  $ABCD$  cạnh  $a$  và  $\widehat{BAD} = 60^\circ$ . Đẳng thức nào sau đây đúng?

- (A)  $\vec{BC} = \vec{DA}$ . (B)  $\vec{AB} = \vec{AD}$ . (C)  $\vec{BD} = \vec{AC}$ . (D)  $|\vec{BD}| = a$ .

**CÂU 22.** Cho hình chữ nhật  $ABCD$ . Trong các đẳng thức dưới đây, đẳng thức nào đúng?

- (A)  $\vec{AB} = \vec{CD}$ . (B)  $\vec{AD} = \vec{BC}$ . (C)  $\vec{AC} = \vec{BD}$ . (D)  $\vec{BC} = \vec{DA}$ .

**CÂU 23.** Cho tam giác  $ABC$  với trung tuyến  $AM$  và trọng tâm  $G$ . Khi đó  $|\vec{GA}|$  bằng

- (A)  $\frac{1}{2}|\vec{AM}|$ . (B)  $\frac{2}{3}|\vec{GM}|$ . (C)  $2|\vec{GM}|$ . (D)  $-\frac{2}{3}|\vec{MA}|$ .

## Bài 4. TỔNG VÀ HIỆU CỦA HAI VEC-TƠ

### A. CÁC DẠNG TOÁN

#### 📁 Dạng 1. Tính tổng, hiệu hai vec-tơ

- ☑ Ghép các vec-tơ lại thích hợp.
- ☑ Dùng các quy tắc cộng vec-tơ để tính.

**BÀI 1.** Tính tổng  $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{RN} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{QR}$ .

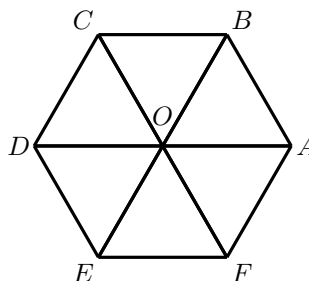
**BÀI 2.** Cho tam giác  $ABC$  với  $M, N, P$  lần lượt là trung điểm của  $BC, CA, AB$ . Tính tổng  $\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CN}$ .

**BÀI 3.** Cho hai hình bình hành  $ABCD$  và  $AB'C'D'$  có chung đỉnh  $A$ . Tính  $\vec{u} = \overrightarrow{B'B} + \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{D'D}$ .

**BÀI 4.** Cho tam giác  $ABC$ , gọi  $D, E, F, G, H, I$  theo thứ tự là trung điểm các cạnh  $AB, BC, CA, DF, DE, EF$ . Tính vec-tơ  $\vec{u} = \overrightarrow{BE} - \overrightarrow{GH} - \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{FE}$ ?

**BÀI 5.**

Cho lục giác đều  $ABCDEF$  tâm  $O$ . Rút gọn vec-tơ  $\vec{v} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DE}$ ?



**BÀI 6.** Gọi  $O$  là tâm của tam giác đều  $ABC$ . Tính  $\vec{u} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ .

**BÀI 7.** Cho hình bình hành  $ABCD$ . Trên các đoạn thẳng  $DC, AB$  theo thứ tự lấy các điểm  $M, N$  sao cho  $DM = BN$ . Gọi  $P$  là giao điểm của  $AM, DB$  và  $Q$  là giao điểm của  $CN, DB$ . Tính  $\vec{u} = \overrightarrow{DP} - \overrightarrow{QB}$ .

#### 📁 Dạng 2. Xác định vị trí của một điểm từ đẳng thức vec-tơ

### 1. Ví dụ minh họa

**VÍ DỤ 1.** Cho tam giác  $ABC$ . Điểm  $M$  thỏa mãn điều kiện  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$ . Mệnh đề nào sau đây đúng?

- (A)  $M$  là điểm sao cho tứ giác  $BAMC$  là hình bình hành.
- (B)  $M$  là điểm sao cho tứ giác  $ABMC$  là hình bình hành.
- (C)  $M$  là trọng tâm tam giác  $ABC$ .
- (D)  $M$  thuộc đường trung trực của  $AB$ .

### 2. Bài tập tự luận

**BÀI 1.** Cho tam giác  $ABC$ . Xác định điểm  $M$  thỏa mãn điều kiện  $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$ .

**BÀI 2.** Cho hình bình hành  $ABCD$ . Xác định điểm  $M$  thỏa mãn điều kiện  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AM}$ .

**BÀI 3.** Cho hình bình hành  $ABCD$ . Xác định điểm  $M$  thỏa mãn điều kiện  $|\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{CD}| = |\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{DA}|$ .

#### 📁 Dạng 3. Tính độ dài vec-tơ

#### QUICK NOTE

QUICK NOTE

## 1. Ví dụ minh họa

**VÍ DỤ 1.** Cho tam giác đều  $ABC$  có cạnh  $AB = a$ , xác định và tính độ dài của véc-tơ

a)  $\vec{x} = \vec{AB} + \vec{BC}$ .

b)  $\vec{y} = \vec{AB} + \vec{AC}$ .

**VÍ DỤ 2.** Cho hình vuông  $ABCD$  tâm  $O$  có cạnh  $AB = 2$ , xác định và tính độ dài của véc-tơ  $\vec{v} = \vec{OA} - \vec{CD}$ .

## 2. Bài tập tự luận

**BÀI 1.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  có  $AB = 2$ ,  $AC = 4$ , xác định và tính độ dài của véc-tơ  $\vec{u} = \vec{AB} + \vec{AC}$ .

**BÀI 2.** Cho hình chữ nhật  $ABCD$  có  $AC = 5$ ,  $AB = 3$ , xác định và tính độ dài của véc-tơ

a)  $\vec{a} = \vec{AD} - \vec{AC}$ .

b)  $\vec{b} = \vec{AB} + \vec{AC}$ .

**BÀI 3.** Cho hình thang  $ABCD$  có  $\hat{A} = \hat{D} = 90^\circ$ ,  $AB = AD = 3$ ,  $CD = 5$ , xác định và tính độ dài của véc-tơ

a)  $\vec{x} = \vec{AB} - \vec{AC}$ .

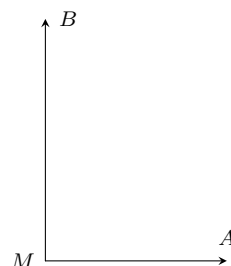
b)  $\vec{y} = \vec{DB} + \vec{DC}$ .

## Dạng 4. Ứng dụng của véc-tơ trong vật lý

### BÀI 1.

Cho hai lực  $\vec{F}_1 = \vec{MA}$ ,  $\vec{F}_2 = \vec{MB}$  cùng tác động vào một vật tại điểm  $M$  cường độ hai lực  $\vec{F}_1$ ,  $\vec{F}_2$  lần lượt là 300 (N) và 400 (N) và  $\widehat{AMB} = 90^\circ$ . Tìm cường độ của lực tổng hợp tác động vào vật.

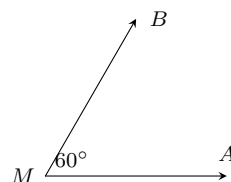
- (A) 0 (N). (B) 700 (N). (C) 100 (N). (D) 500 (N).



### BÀI 2.

Cho hai lực  $\vec{F}_1 = \vec{MA}$ ,  $\vec{F}_2 = \vec{MB}$  cùng tác động vào một vật tại điểm  $M$  cường độ hai lực  $\vec{F}_1$ ,  $\vec{F}_2$  đều bằng 300 (N) và  $\widehat{AMB} = 60^\circ$ . Tìm cường độ của lực tổng hợp tác động vào vật.

- (A) 0 (N). (B) 300 (N).  
(C)  $300\sqrt{3}$  (N). (D) 500 (N).



## B. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

**CÂU 1.** Cho ba điểm phân biệt  $A, B, C$ . Đẳng thức nào sau đây đúng?

- (A)  $\vec{CA} - \vec{BA} = \vec{CB}$ . (B)  $\vec{AB} + \vec{AC} = \vec{CB}$ . (C)  $\vec{AB} + \vec{CA} = \vec{BC}$ . (D)  $\vec{AB} - \vec{AC} = \vec{BC}$ .

**CÂU 2.** Rút gọn biểu thức véc-tơ  $\vec{AM} + \vec{MB} - \vec{AC}$  ta được kết quả đúng là

- (A)  $\vec{MB}$ . (B)  $\vec{BC}$ . (C)  $\vec{CB}$ . (D)  $\vec{AB}$ .

**CÂU 3.** Gọi  $O$  là tâm hình vuông  $ABCD$ . Tính  $\vec{OB} - \vec{OC}$ .

- (A)  $\vec{OB} - \vec{OC} = \vec{BC}$ . (B)  $\vec{OB} - \vec{OC} = \vec{DA}$ .  
(C)  $\vec{OB} - \vec{OC} = \vec{OD} - \vec{OA}$ . (D)  $\vec{OB} - \vec{OC} = \vec{AB}$ .

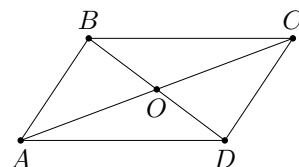
**CÂU 4.** Cho bốn điểm  $A, B, C, D$  phân biệt và  $\vec{u} = \vec{AD} + \vec{CD} - \vec{CB} - \vec{BD}$ . Khẳng định nào sau đây đúng?

- (A)  $\vec{u} = \vec{0}$ . (B)  $\vec{u} = \vec{AD}$ . (C)  $\vec{u} = \vec{CD}$ . (D)  $\vec{u} = \vec{AC}$ .

### CÂU 5.

Cho hình bình hành  $ABCD$  tâm  $O$ . Hỏi véc-tơ  $\vec{AO} - \vec{DO}$  bằng véc-tơ nào trong các véc-tơ sau?

- (A)  $\vec{BA}$ . (B)  $\vec{BC}$ .  
(C)  $\vec{DC}$ . (D)  $\vec{AC}$ .



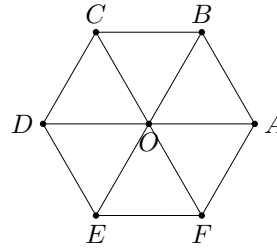
**CÂU 6.** Cho tam giác  $ABC$ . Gọi  $M, N, P$  lần lượt là trung điểm các cạnh  $AB, AC, BC$ . Tổng  $\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{NP}$  bằng vec-tơ nào?

- (A)  $\overrightarrow{PA}$ . (B)  $\overrightarrow{AM}$ . (C)  $\overrightarrow{PB}$ . (D)  $\overrightarrow{AP}$ .

**CÂU 7.**

Cho lục giác đều  $ABCDEF$  có tâm  $O$ . Đẳng thức nào sau đây sai?

- (A)  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OE} = \vec{0}$ .  
 (B)  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{EB}$ .  
 (C)  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EF} = \vec{0}$ .  
 (D)  $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AD}$ .



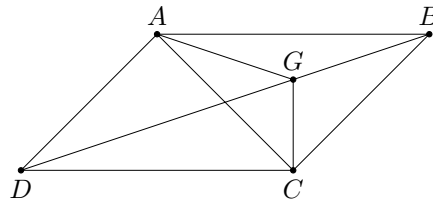
**CÂU 8.** Cho hình bình hành  $ABCD$ . Vec-tơ  $\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB}$  bằng vec-tơ nào dưới đây?

- (A)  $\overrightarrow{DB}$ . (B)  $\overrightarrow{BD}$ . (C)  $\overrightarrow{AC}$ . (D)  $\overrightarrow{CA}$ .

**CÂU 9.**

Cho hình bình hành  $ABCD$ . Gọi  $G$  là trọng tâm của tam giác  $ABC$ . Mệnh đề nào sau đây đúng?

- (A)  $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \overrightarrow{BD}$ .  
 (B)  $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \overrightarrow{CD}$ .  
 (C)  $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$ .  
 (D)  $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GD} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{CD}$ .



**CÂU 10.** Chọn mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau.

- (A) Nếu  $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$  thì  $|\vec{a}| + |\vec{b}| = |\vec{c}|$ .  
 (B)  $\overrightarrow{FY} - \overrightarrow{BY} = \overrightarrow{FB}$  với  $B, F, Y$  bất kì.  
 (C) Nếu  $ABCD$  là hình bình hành thì  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$ .  
 (D)  $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MH} = \overrightarrow{AH}$  với  $A, M, H$  bất kì.

**CÂU 11.** Trong mặt phẳng cho bốn điểm bất kì  $A, B, C, O$ . Đẳng thức nào sau đây là đúng?

- (A)  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA}$ . (B)  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}$ . (C)  $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CO}$ . (D)  $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{BA}$ .

**CÂU 12.** Cho ba điểm  $A, B, C$  phân biệt. Đẳng thức nào sau đây là **sai**?

- (A)  $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB}$ . (B)  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ . (C)  $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$ . (D)  $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB}$ .

**CÂU 13.** Tổng  $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{RN} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{QR}$  bằng

- (A)  $\overrightarrow{MR}$ . (B)  $\overrightarrow{MN}$ . (C)  $\overrightarrow{MP}$ . (D)  $\overrightarrow{MQ}$ .

**CÂU 14.** Cho 4 điểm bất kì  $A, B, C, D$ . Đẳng thức nào sau đây sai?

- (A)  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}$ . (B)  $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{CD}$ .  
 (C)  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DA}$ . (D)  $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DC}$ .

**CÂU 15.** Cho bốn điểm  $A, B, C$ . Tính  $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$ .

- (A)  $\overrightarrow{CA}$ . (B)  $2 \cdot \overrightarrow{AC}$ . (C)  $\vec{0}$ . (D)  $\overrightarrow{AC}$ .

**CÂU 16.** Cho tam giác  $ABC$  và điểm  $M$  bất kỳ, chọn đẳng thức **đúng**.

- (A)  $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}$ . (B)  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB}$ .  
 (C)  $\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{CB}$ . (D)  $\overrightarrow{AA} - \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{AB}$ .

**CÂU 17.** Cho hình bình hành  $ABCD$ . Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm  $BC$  và  $AD$ . Tổng của  $\overrightarrow{NC}$  và  $\overrightarrow{MC}$  là

- (A)  $\vec{0}$ . (B)  $\overrightarrow{MN}$ . (C)  $\overrightarrow{NM}$ . (D)  $\overrightarrow{AC}$ .

**CÂU 18.** Cho hình bình hành  $ABCD$ . Gọi  $I, J$  lần lượt là trung điểm  $BC$  và  $AD$ . Tính  $\overrightarrow{JC} - \overrightarrow{IC}$  không bằng

- (A)  $\overrightarrow{DC}$ . (B)  $\overrightarrow{JI}$ . (C)  $\overrightarrow{AB}$ . (D)  $\overrightarrow{AC}$ .

**CÂU 19.** Cho hình bình hành  $ABCD$ . Điểm  $M$  thỏa mãn điều kiện  $\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{DO}$ . Khẳng định nào sau đây đúng?

- (A)  $M$  trùng với  $A$ . (B)  $M$  trùng với  $B$ . (C)  $M$  trùng với  $O$ . (D)  $M$  trùng với  $C$ .

QUICK NOTE

QUICK NOTE

**CÂU 20.** Cho hình bình hành  $ABCD$  có tâm  $O$ . Điểm  $M$  thỏa mãn điều kiện  $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{DC}$ . Khẳng định nào sau đây đúng?

- (A)  $M$  trùng với  $B$ . (B)  $M$  trùng với  $D$ .  
(C)  $M$  trùng với  $A$ . (D)  $M$  trùng với điểm  $O$ .

**CÂU 21.** Cho bốn điểm phân biệt  $A, B, C, D$ . Biết điểm  $M$  thỏa mãn điều kiện  $\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$ . Khẳng định nào sau đây đúng?

- (A)  $M$  là trung điểm  $CD$ . (B)  $M$  là trung điểm  $AB$ .  
(C)  $M$  là trung điểm  $AD$ . (D)  $M$  là trung điểm  $BC$ .

**CÂU 22.** Cho các điểm phân biệt  $A, B, C, D, E, F$ . Biết điểm  $M$  thỏa mãn điều kiện  $\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{DF}$ . Khẳng định nào sau đây đúng?

- (A)  $M$  là trọng tâm tam giác  $ABC$ . (B)  $M$  là trọng tâm tam giác  $BCD$ .  
(C)  $M$  là trọng tâm tam giác  $ABD$ . (D)  $M$  là trọng tâm tam giác  $ACD$ .

**CÂU 23.** Cho hình bình hành  $ABCD$  có  $E$  là trung điểm  $AB$ . Điểm  $M$  thỏa mãn điều kiện  $\overrightarrow{EB} = \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{BC}$ . Khẳng định nào sau đây đúng?

- (A)  $M$  là trung điểm  $AD$ . (B)  $M$  là trung điểm  $CD$ .  
(C)  $M$  là trung điểm  $AB$ . (D)  $M$  là trung điểm  $BC$ .

**CÂU 24.** Cho tam giác  $ABC$  đều có cạnh bằng  $a$ . Tìm tập hợp điểm  $M$  thỏa mãn điều kiện  $|\overrightarrow{MC}| = |\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}|$ .

- (A)  $M$  thuộc đường tròn tâm  $A$  bán kính  $a\sqrt{3}$ .  
(B)  $M$  thuộc đường tròn tâm  $C$  bán kính  $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ .  
(C)  $M$  thuộc đường tròn tâm  $B$  bán kính  $a\sqrt{3}$ .  
(D)  $M$  thuộc đường tròn tâm  $C$  bán kính  $a\sqrt{3}$ .

**CÂU 25.** Cho hình thang  $ABCD$  có  $AB$  song song với  $CD$ . Cho  $AB = 2a, CD = a$ .  $O$  là trung điểm của  $AD$ . Khi đó,

- (A)  $|\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}| = \frac{3a}{2}$ . (B)  $|\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}| = a$ .  
(C)  $|\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}| = 2a$ . (D)  $|\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}| = 3a$ .

**CÂU 26.** Cho tam giác  $ABC$  vuông cân tại  $A$  có  $BC = a\sqrt{2}$ ,  $M$  là trung điểm của  $BC$ . Khẳng định nào sau đây đúng?

- (A)  $|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BM}| = a$ . (B)  $|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BM}| = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ .  
(C)  $|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BM}| = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ . (D)  $|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BM}| = \frac{a\sqrt{6}}{2}$ .

**CÂU 27.** Cho hình vuông  $ABCD$  cạnh  $a$  tâm  $O$ . Tính theo  $a$  độ dài của véc-tơ  $\vec{u} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{BC}$ .

- (A)  $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ . (B)  $\frac{3a\sqrt{2}}{2}$ . (C)  $a\sqrt{2}$ . (D)  $a$ .

**CÂU 28.** Cho hình vuông  $ABCD$  có cạnh bằng  $a$ . Khi đó  $|\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}|$  bằng

- (A)  $2a$ . (B)  $a\sqrt{2}$ . (C)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ . (D)  $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ .

**CÂU 29.** Cho tam giác  $ABC$  vuông cân tại  $C$ ,  $AB = \sqrt{2}$ . Tính độ dài của  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

- (A)  $\sqrt{5}$ . (B)  $2\sqrt{5}$ . (C)  $\sqrt{3}$ . (D)  $2\sqrt{3}$ .

**CÂU 30.** Cho hình bình hành  $ABCD$  có  $DA = 2\text{cm}$ ,  $AB = 4\text{cm}$  và đường chéo  $BD = 5\text{cm}$ . Tính  $|\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{DA}|$ .

- (A)  $2\text{cm}$ . (B)  $4\text{cm}$ . (C)  $5\text{cm}$ . (D)  $6\text{cm}$ .

**CÂU 31.** Cho hình thang  $ABCD$  có hai đáy  $AB = a, CD = 2a$ . Gọi  $M, N$  là trung điểm của  $AD, BC$ . Khi đó  $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MN}|$  bằng

- (A)  $\frac{a}{2}$ . (B)  $3a$ . (C)  $a$ . (D)  $2a$ .

**CÂU 32.** Cho hình vuông  $ABCD$  cạnh  $a$ ,  $d$  là đường thẳng qua  $A$ , song song với  $BD$ . Gọi  $M$  là điểm thuộc đường thẳng  $d$  sao cho  $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MD}|$  nhỏ nhất. Tính theo  $a$  độ dài véc-tơ  $\overrightarrow{MD}$ .



QUICK NOTE

(A)  $a\sqrt{2}$ .

(B)  $\frac{a\sqrt{10}}{2}$ .

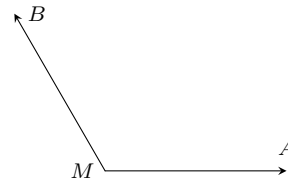
(C)  $a$ .

(D)  $\frac{a\sqrt{5}}{2}$ .

**CÂU 33.**

Cho hai lực  $\vec{F}_1 = \vec{MA}$ ,  $\vec{F}_2 = \vec{MB}$  cùng tác động vào một vật tại điểm  $M$  cường độ hai lực  $\vec{F}_1$ ,  $\vec{F}_2$  đều bằng 300 (N) và  $\widehat{AMB} = 120^\circ$ . Tìm cường độ của lực tổng hợp tác động vào vật.

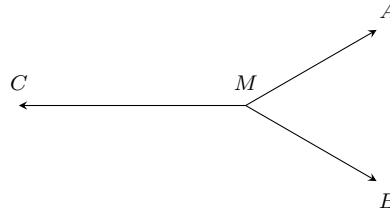
- (A) 300 (N). (B) 700 (N). (C) 100 (N). (D) 500 (N).



**CÂU 34.**

Cho ba lực  $\vec{F}_1 = \vec{MA}$ ,  $\vec{F}_2 = \vec{MB}$ ,  $\vec{F}_3 = \vec{MC}$  cùng tác động vào một vật tại điểm  $M$  và vật đứng yên. Cho biết cường độ của  $\vec{F}_1$ ,  $\vec{F}_2$  đều bằng 25 (N) và góc  $\widehat{AMB} = 60^\circ$ . Khi đó cường độ lực của  $\vec{F}_3$  là

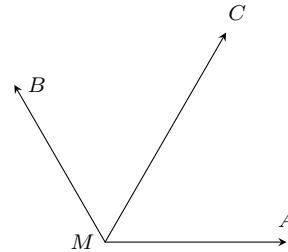
- (A)  $25\sqrt{3}$  (N). (B)  $50\sqrt{3}$  (N). (C)  $50\sqrt{2}$  (N). (D)  $100\sqrt{3}$  (N).



**CÂU 35.**

Cho ba lực  $\vec{F}_1 = \vec{MA}$ ,  $\vec{F}_2 = \vec{MB}$ ,  $\vec{F}_3 = \vec{MC}$  cùng tác động vào một vật tại điểm  $M$  cường độ hai lực  $\vec{F}_1$ ,  $\vec{F}_2$  đều bằng 300 (N) và  $\vec{F}_3 = 400$  (N). Lại có  $\widehat{AMB} = 120^\circ$  và  $\widehat{AMC} = 60^\circ$ . Tìm cường độ của lực tổng hợp tác động vào vật.

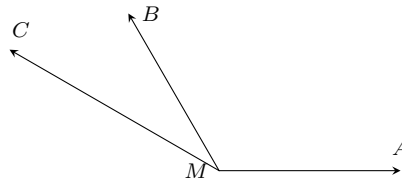
- (A) 300 (N). (B) 700 (N). (C) 100 (N). (D) 500 (N).



**CÂU 36.**

Cho ba lực  $\vec{F}_1 = \vec{MA}$ ,  $\vec{F}_2 = \vec{MB}$ ,  $\vec{F}_3 = \vec{MC}$  cùng tác động vào một vật tại điểm  $M$  cường độ hai lực  $\vec{F}_1$ ,  $\vec{F}_2$  đều bằng 300 (N) và  $\vec{F}_3 = 400$  (N). Lại có  $\widehat{AMB} = 120^\circ$  và  $\widehat{AMC} = 150^\circ$ . Tìm cường độ của lực tổng hợp tác động vào vật.

- (A) 300 (N). (B) 700 (N).  
(C) 100 (N). (D) 500 (N).



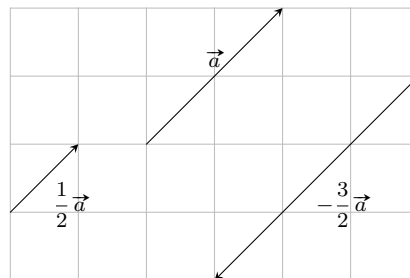
## Bài 5. TÍCH CỦA MỘT VECTO VỚI MỘT SỐ

### A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

#### 1. Tích của một vectơ với một số

⚡ ĐỊNH NGHĨA 5.1.

- ☑ Tích của một vectơ  $\vec{a} \neq \vec{0}$  với một số  $k > 0$  là một vectơ, kí hiệu là  $k\vec{a}$ , cùng hướng với vectơ  $\vec{a}$  và có độ dài bằng  $k|\vec{a}|$ .
- ☑ Tích của một vectơ  $\vec{a} \neq \vec{0}$  với một số  $k < 0$  là một vectơ, kí hiệu là  $k\vec{a}$ , ngược hướng với vectơ  $\vec{a}$  và có độ dài bằng  $(-k)|\vec{a}|$ .



⚠ Ta quy ước  $k\vec{a} = \vec{0}$  nếu  $\vec{a} = \vec{0}$  hoặc  $k = 0$ .

#### 2. Các tính chất của phép nhân vectơ với một số

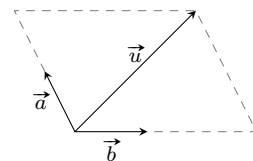
Với hai vectơ  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  và hai số thực  $k$ ,  $t$ , ta luôn có

- $k(t\vec{a}) = (kt)\vec{a}$ ;
- $(k+t)\vec{a} = k\vec{a} + t\vec{a}$ ;
- $k(\vec{a} \pm \vec{b}) = k\vec{a} \pm k\vec{b}$ ;
- $1\vec{a} = \vec{a}$ ;  $(-1)\vec{a} = -\vec{a}$ .

QUICK NOTE

- A** ☒ Điểm  $I$  là trung điểm của đoạn thẳng  $AB$  khi và chỉ khi  $\vec{IA} + \vec{IB} = \vec{0}$ .
- ☒ Cho tam giác  $ABC$ , điểm  $G$  là trọng tâm của tam giác  $ABC$  khi và chỉ khi  $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$ .

**A** Cho hai vectơ không cùng phương  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$ . Khi đó, mọi vectơ  $\vec{u}$  đều biểu thị (phân tích) được một cách duy nhất theo hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$ , nghĩa là có duy nhất cặp số  $(x, y)$  sao cho  $\vec{u} = x\vec{a} + y\vec{b}$ .



## B. CÁC DẠNG TOÁN

### Dạng 1. Xác định vectơ tích, tính độ dài vectơ

vectơ  $k\vec{a}$  có độ dài bằng  $|k||\vec{a}|$  và

- cùng hướng với  $\vec{a}$  nếu  $k \geq 0$ ;
- ngược hướng với  $\vec{a}$  nếu  $\begin{cases} \vec{a} \neq \vec{0} \\ k < 0. \end{cases}$

### 1. Ví dụ minh họa

**VÍ DỤ 1.** Cho đoạn thẳng  $AB$  và  $M$  là một điểm nằm trên đoạn  $AB$  sao cho  $AM = \frac{1}{5}AB$ . Tìm  $k$  trong các đẳng thức sau

- a)  $\vec{AM} = k\vec{AB}$ .                      b)  $\vec{MA} = k\vec{MB}$ .                      c)  $\vec{MA} = k\vec{AB}$ .

**VÍ DỤ 2.** Cho tam giác  $ABC$  đều cạnh bằng 1, trọng tâm  $G$ . Tính độ dài vectơ  $\vec{AG}$ .

**VÍ DỤ 3.** Cho hình vuông  $ABCD$  có cạnh bằng  $a$ ,  $I$  là trung điểm của cạnh  $BC$ . Tính độ dài vectơ  $\vec{AB} + \vec{AC}$ .

### 2. Bài tập áp dụng

**BÀI 1.** Trên đoạn thẳng  $AB$ , gọi  $C$  là trung điểm  $AB$  và  $D$  là điểm đối xứng của  $C$  qua  $A$ . Tìm  $k$  trong các đẳng thức sau

- a)  $\vec{AC} = k\vec{AB}$ .                      b)  $\vec{AD} = k\vec{AB}$ .

**BÀI 2.** Cho tam giác  $ABC$  vuông cân tại  $A$ , cạnh  $BC = 2$ . Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của cạnh  $AB$  và  $BC$ . Tính độ dài  $\vec{MN}$ .

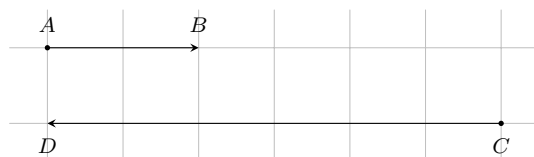
**BÀI 3.** Cho hình thoi  $ABCD$  có  $AC = 2a, BD = a$ . Tính độ dài vectơ  $\vec{AC} + \vec{BD}$ .

### 3. Bài tập trắc nghiệm

#### CÂU 1.

Cho hai vectơ  $\vec{AB}$  và  $\vec{CD}$  trong hình bên. Khẳng định nào sau đây đúng?

- ☒ A  $\vec{CD} = 3\vec{AB}$ .                      ☒ B  $\vec{CD} = \vec{AB}$ .  
☒ C  $\vec{AB} = 2\vec{CD}$ .                      ☒ D  $\vec{CD} = -3\vec{AB}$ .



**CÂU 2.** Cho vectơ  $\vec{a}$  (khác  $\vec{0}$ ) và vectơ  $\vec{b} = k\vec{a}$ , ( $k \neq 0$ ). Khẳng định nào sau đây là đúng?

- ☒ A  $\vec{a}$  cùng phương  $\vec{b}$  nếu  $k > 0$ .                      ☒ B  $\vec{a}$  ngược hướng  $\vec{b}$  nếu  $k > 0$ .  
☒ C  $\vec{a}$  cùng hướng  $\vec{b}$  nếu  $k < 0$ .                      ☒ D  $\vec{a}$  cùng hướng  $\vec{b}$  nếu  $k > 0$ .

**CÂU 3.** Cho hai vectơ  $\vec{a}, \vec{b}$  bất kì và số thực  $k$ . Ta có  $k(\vec{a} + \vec{b})$  bằng

- ☒ A  $\vec{a} + k\vec{b}$ .                      ☒ B  $k\vec{a} + k\vec{b}$ .                      ☒ C  $k\vec{a} - k\vec{b}$ .                      ☒ D  $k\vec{a} + \vec{b}$ .

**CÂU 4.** Cho hai vectơ  $\vec{a}, \vec{b}$  khác  $\vec{0}$  thỏa mãn  $\vec{a} = -\frac{1}{2}\vec{b}$ . Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- ☒ A  $|\vec{a}| = -\frac{1}{2}|\vec{b}|$ .                      ☒ B  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  là hai vectơ đối nhau.  
☒ C  $\vec{a}$  cùng hướng với  $\vec{b}$ .                      ☒ D  $\vec{a}$  ngược hướng với  $\vec{b}$ .

**CÂU 5.** Cho vectơ  $\vec{u}$  có độ dài bằng 2 và vectơ  $\vec{v} = -3\vec{u}$ . Khẳng định nào sau đây là đúng?

- (A) vectơ  $\vec{v}$  có độ dài bằng  $-6$  và cùng hướng với  $\vec{u}$ .  
 (B) vectơ  $\vec{v}$  có độ dài bằng  $-6$  và ngược hướng với  $\vec{u}$ .  
 (C) vectơ  $\vec{v}$  có độ dài bằng 6 và cùng hướng với  $\vec{u}$ .  
 (D) vectơ  $\vec{v}$  có độ dài bằng 6 và ngược hướng với  $\vec{u}$ .

**CÂU 6.** Cho  $\vec{a} = -2\vec{b}$ . Khẳng định nào sau đây đúng?

- (A)  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  là hai vectơ bằng nhau. (B)  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  là hai vectơ đối nhau.  
 (C)  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  ngược hướng. (D)  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  cùng hướng.

**CÂU 7.** Cho vectơ  $\vec{q}$  có độ dài bằng 27. Hỏi độ dài của vectơ  $\vec{x} = -\frac{1}{9}\vec{q}$  là bao nhiêu?

- (A) 243. (B) 3. (C) 9. (D)  $-3$ .

**CÂU 8.**

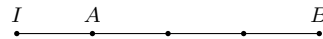
Cho đoạn thẳng  $AB$  và điểm  $I$  thuộc đoạn thẳng  $AB$  như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây đúng?



- (A)  $\vec{AI} = \frac{1}{4}\vec{AB}$ . (B)  $\vec{AI} = \frac{1}{4}\vec{IB}$ .  
 (C)  $\vec{AI} = \frac{1}{5}\vec{BA}$ . (D)  $\vec{AI} = -\frac{1}{4}\vec{IB}$ .

**CÂU 9.** Dạng thức nào mô tả đúng hình vẽ bên?

- (A)  $3\vec{AI} + \vec{AB} = \vec{0}$ . (B)  $3\vec{IA} + \vec{IB} = \vec{0}$ .  
 (C)  $\vec{BI} + 3\vec{BA} = \vec{0}$ . (D)  $\vec{AI} + 3\vec{AB} = \vec{0}$ .



**CÂU 10.** Cho  $M$  là một điểm trên đoạn  $AB$  sao cho  $AM = \frac{1}{3}AB$ . Khẳng định nào sau đây sai?

- (A)  $\vec{MB} = -\frac{2}{3}\vec{AB}$ . (B)  $\vec{AM} = \frac{1}{3}\vec{AB}$ . (C)  $\vec{MA} = -\frac{1}{2}\vec{MB}$ . (D)  $\vec{MB} = 2\vec{AM}$ .

**CÂU 11.** Cho đoạn thẳng  $AB$  và  $M$  là một điểm trên đoạn  $AB$  sao cho  $AB = 5AM$ . Mệnh đề nào sau đây sai?

- (A)  $\vec{MA} = -\frac{1}{4}\vec{MB}$ . (B)  $\vec{MB} = \frac{4}{5}\vec{AB}$ . (C)  $\vec{MB} = -\frac{4}{5}\vec{AB}$ . (D)  $\vec{AM} = \frac{1}{5}\vec{AB}$ .

**CÂU 12.** Cho đoạn thẳng  $AB$ ,  $M$  là một điểm trên đoạn thẳng  $AB$  sao cho  $AM = \frac{1}{4}AB$ .

Khẳng định nào sau đây sai?

- (A)  $\vec{MA} = \frac{1}{3}\vec{MB}$ . (B)  $\vec{BM} = \frac{3}{4}\vec{BA}$ . (C)  $\vec{AM} = \frac{1}{4}\vec{AB}$ . (D)  $\vec{MB} = -3\vec{MA}$ .

**CÂU 13.** Cho hình bình hành  $ABCD$  có tâm  $O$ . Mệnh đề nào sau đây sai?

- (A)  $\vec{OD} = \frac{1}{2}\vec{BD}$ . (B)  $\vec{AC} = 2\vec{OC}$ . (C)  $\vec{AC} = 2\vec{OA}$ . (D)  $\vec{AB} = \vec{DC}$ .

**CÂU 14.** Cho tam giác  $ABC$  với trung tuyến  $AM$  và trọng tâm  $G$ . Khi đó, vectơ  $\vec{GA}$  bằng với vectơ nào sau đây?

- (A)  $2\vec{GM}$ . (B)  $-\frac{2}{3}\vec{AM}$ . (C)  $\frac{2}{3}\vec{GM}$ . (D)  $\frac{1}{2}\vec{AM}$ .

**CÂU 15.** Cho tam giác  $ABC$  có  $G$  là trọng tâm,  $M$  là trung điểm của  $BC$ . Dạng thức nào sau đây đúng?

- (A)  $\vec{GB} + \vec{GC} = 2\vec{GM}$ . (B)  $\vec{AB} + \vec{AC} = 2\vec{AG}$ .  
 (C)  $\vec{GA} = 2\vec{GM}$ . (D)  $\vec{MG} = -\frac{1}{3}\vec{MA}$ .

**CÂU 16.** Cho tam giác  $ABC$ . Gọi  $M$ ,  $N$  lần lượt là trung điểm của  $AB$  và  $AC$ . Khẳng định nào sau đây là sai?

- (A)  $\vec{MN} = \frac{1}{2}\vec{BC}$ . (B)  $\vec{MN} = -\frac{1}{2}\vec{BC}$ . (C)  $\vec{BC} = -2\vec{NM}$ . (D)  $\vec{BC} = 2\vec{MN}$ .

**CÂU 17.** Cho tam giác  $ABC$  có trọng tâm  $G$  và trung tuyến  $BM$ . Khẳng định nào sau đây là sai?

- (A)  $\vec{AM} = -\frac{1}{2}\vec{CA}$ .  
 (B)  $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$ .

QUICK NOTE

QUICK NOTE

(C)  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OG}$ , với mọi điểm  $O$ .

(D)  $\overrightarrow{GB} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BM}$ .

**CÂU 18.** Cho tam giác đều  $ABC$  với đường cao  $AH$ . Mệnh đề nào sau đây đúng?

(A)  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$ .

(B)  $|\overrightarrow{AH}| = \frac{\sqrt{3}}{2} |\overrightarrow{HC}|$ .

(C)  $\overrightarrow{HB} = \overrightarrow{HC}$ .

(D)  $|\overrightarrow{AC}| = 2 |\overrightarrow{HC}|$ .

**CÂU 19.** Cho hình vuông  $ABCD$  cạnh  $a$ . Giá trị của  $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}|$  bằng

(A)  $A\sqrt{2}$ .

(B)  $2a$ .

(C)  $2a\sqrt{2}$ .

(D)  $3a$ .

**CÂU 20.** Cho tam giác  $ABC$  đều cạnh  $a$ . Khi đó, giá trị  $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}|$  bằng

(A)  $a\sqrt{3}$ .

(B)  $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ .

(C)  $2a$ .

(D)  $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ .

**CÂU 21.** Cho tam giác đều  $ABC$  cạnh bằng 4. Độ dài  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$  là

(A)  $2\sqrt{3}$ .

(B)  $\sqrt{5}$ .

(C)  $\sqrt{6}$ .

(D)  $4\sqrt{3}$ .

**CÂU 22.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  và  $AB = 2$ ,  $AC = 3$ . Độ dài của vectơ  $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AC}$  bằng

(A) 5.

(B) 40.

(C)  $\sqrt{13}$ .

(D)  $2\sqrt{10}$ .

**CÂU 23.** Cho hình vuông  $ABCD$  có cạnh bằng  $a$ . Tính  $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DB}|$  theo  $a$ .

(A)  $\frac{a\sqrt{5}}{2}$ .

(B)  $a$ .

(C)  $a\sqrt{5}$ .

(D)  $a\sqrt{3}$ .

**CÂU 24.**

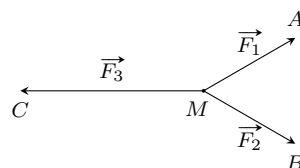
Cho ba lực  $\overrightarrow{F_1} = \overrightarrow{MA}$ ,  $\overrightarrow{F_2} = \overrightarrow{MB}$ ,  $\overrightarrow{F_3} = \overrightarrow{MC}$  cùng tác động vào một vật tại điểm  $M$  và vật đứng yên. Cho biết cường độ của  $\overrightarrow{F_1}$ ,  $\overrightarrow{F_2}$  đều bằng 100N và  $\widehat{AMB} = 60^\circ$ . Khi đó, cường độ lực của  $\overrightarrow{F_3}$  bằng

(A)  $50\sqrt{2}$ N.

(B)  $50\sqrt{3}$ N.

(C)  $25\sqrt{3}$ N.

(D)  $100\sqrt{3}$ N.



**CÂU 25.** Cho tam giác  $ABC$  là tam giác đều cạnh  $2a$  với  $G$  là trọng tâm. Tính  $|\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}|$ .

(A)  $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$ .

(B)  $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ .

(C)  $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ .

(D)  $a\sqrt{3}$ .

**CÂU 26.** Gọi  $G$  là trọng tâm tam giác vuông  $ABC$  với cạnh huyền  $BC = 12$ . vectơ  $\overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GC}$  có độ dài bằng bao nhiêu?

(A) 4.

(B)  $2\sqrt{3}$ .

(C) 8.

(D) 2.

**CÂU 27.** Tam giác  $ABC$  có  $AB = AC = a$ ,  $\widehat{ABC} = 120^\circ$ . Độ dài vectơ tổng  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$  bằng

(A)  $2a$ .

(B)  $a\sqrt{3}$ .

(C)  $a$ .

(D)  $3a$ .

**CÂU 28.** Cho hình thoi  $ABCD$  cạnh  $a$ , tâm  $O$  và  $\widehat{BAD} = 60^\circ$ . Độ dài vectơ  $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{CD}$  bằng

(A)  $\frac{a\sqrt{7}}{2}$ .

(B)  $\frac{a\sqrt{5}}{2}$ .

(C)  $2a$ .

(D)  $a\sqrt{3}$ .

**CÂU 29.** Cho tam giác  $ABC$  đều cạnh  $a$ ,  $H$  là trung điểm của  $BC$ . Tính  $|\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{HC}|$  bằng

(A)  $\frac{2\sqrt{3}a}{3}$ .

(B)  $\frac{a\sqrt{7}}{2}$ .

(C)  $\frac{a}{2}$ .

(D)  $\frac{3a}{2}$ .

**CÂU 30.** Cho tam giác  $OAB$  vuông cân tại  $O$  với  $OA = OB = a$ . Tính độ dài vectơ  $\vec{u} = 8\overrightarrow{OA} - 6\overrightarrow{OB}$ .

(A)  $2a$ .

(B)  $14a$ .

(C)  $16a$ .

(D)  $10a$ .

**CÂU 31.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  có  $AB = 3$ ,  $AC = 4$ . Tính độ dài vec-tơ  $\vec{u} = 2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}$ .

(A)  $|\vec{u}| = 18$ .

(B)  $|\vec{u}| = 6\sqrt{5}$ .

(C)  $|\vec{u}| = 9$ .

(D)  $|\vec{u}| = 5\sqrt{6}$ .

**CÂU 32.** Gọi  $G$  là trọng tâm của tam giác  $ABC$ . Tập hợp điểm  $M$  trong mặt phẳng chứa tam giác  $ABC$  sao cho  $|\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}| = 6$  là

- (A) đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC$ . (B) đường tròn tâm  $G$  bán kính bằng 1.  
(C) đường tròn tâm  $G$  bán kính bằng 2. (D) đường tròn tâm  $G$  bán kính bằng 6.

**CÂU 33.** Cho tam giác đều  $ABC$  có cạnh bằng  $2a$  và  $G$  là trọng tâm của tam giác. Khi đó, giá trị  $|\vec{AB} - \vec{GC}|$  là

- (A)  $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ . (B)  $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$ . (C)  $\frac{4a\sqrt{3}}{3}$ . (D)  $\frac{2a}{3}$ .

**CÂU 34.** Cho ba lực  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$  có cùng điểm đặt tại  $O$ . Trong đó, có hai lực  $\vec{F}_1, \vec{F}_2$  có phương hợp với nhau một góc  $90^\circ$  và lực  $\vec{F}_3$  ngược hướng với lực  $\vec{F}_1$ . Ba lực  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$  có cường độ lần lượt là 100 N, 200 N và 300 N. Cường độ lực tổng hợp của ba lực  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$  là

- (A) 400 N. (B)  $100\sqrt{2}$  N. (C) 600 N. (D)  $200\sqrt{2}$  N.

**CÂU 35.** Cho hình vuông  $ABCD$  có cạnh bằng 1. Độ dài của vectơ  $\vec{u} = 12\vec{AC} - 7\vec{AB}$  bằng

- (A)  $|\vec{u}| = 17$ . (B)  $|\vec{u}| = 5$ . (C)  $|\vec{u}| = 13$ . (D)  $|\vec{u}| = 12\sqrt{2} - 7$ .

**CÂU 36.** Cho hình vuông  $ABCD$  có cạnh bằng 1. Độ dài của vectơ  $\vec{u} = 3\vec{AC} - 7\vec{AB}$  là

- (A)  $|\vec{u}| = 5$ . (B)  $|\vec{u}| = 12\sqrt{2} - 7$ . (C)  $|\vec{u}| = 17$ . (D)  $|\vec{u}| = 13$ .

## 📁 Dạng 2. Chứng minh đẳng thức vector, thu gọn biểu thức

### Phương pháp giải

- ☑ HƯỚNG 1. Biến đổi một vế thành vế còn lại. Khi đó
  - a) Nếu xuất phát từ vế phức tạp ta cần thực hiện việc đơn giản biểu thức.
  - b) Nếu xuất phát từ vế đơn giản ta cần thực hiện việc phân tích vector.
- ☑ HƯỚNG 2. Biến đổi cả hai vế thành một vectơ hoặc biểu thức vectơ.
- ☑ HƯỚNG 3. Biến đổi đẳng thức cần chứng minh tương đương với một đẳng thức vectơ đã biết đúng.
- ☑ HƯỚNG 4. Xuất phát từ một đẳng thức vectơ đã biết đúng biến đổi thành đẳng thức vectơ cần chứng minh.

### Khi thực hiện các phép biến đổi cần lưu ý

- a) Quy tắc ba điểm: Với ba điểm  $A, B, C$  bất kì ta luôn có  $\vec{AB} = \vec{AC} + \vec{CB}$ .
- b) Quy tắc hình bình hành: Với hình bình hành  $ABCD$  ta luôn có  $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{AD}$ .
- c) Quy tắc hiệu vectơ: Với ba điểm  $A, B, O$  bất kì ta luôn có  $\vec{OB} - \vec{OA} = \vec{AB}$ .
- d) Tính chất trung điểm của đoạn thẳng: Cho đoạn thẳng  $AB$  ta có

$$\begin{aligned} I \text{ là trung điểm của } AB &\Leftrightarrow \vec{IA} + \vec{IB} = \vec{0} \\ &\Leftrightarrow \vec{MA} + \vec{MB} = 2\vec{MI}, M \text{ là điểm bất kì.} \end{aligned}$$

- e) Tính chất trọng tâm tam giác: Cho tam giác  $ABC$  ta có

$$\begin{aligned} G \text{ là trọng tâm tam giác } ABC &\Leftrightarrow \vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}. \\ &\Leftrightarrow \vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = 3\vec{MG}, M \text{ là điểm bất kì.} \end{aligned}$$

- f) Các tính chất của phép cộng, trừ vectơ và phép nhân một số với một vectơ.

## QUICK NOTE

## 1. Ví dụ minh họa

**VÍ DỤ 1.** Cho tam giác  $ABC$  với trọng tâm  $G$ . Chứng minh rằng  $\vec{CA} + \vec{CB} = 3\vec{CG}$ .

## QUICK NOTE

**VÍ DỤ 2.** Cho hình bình hành  $ABCD$ . Gọi  $G$  là trọng tâm tam giác  $ABD$ . Chứng minh rằng

$$\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 9\overrightarrow{AG}.$$

**VÍ DỤ 3.** Cho tứ giác  $ABCD$ . Gọi  $M$  và  $N$  lần lượt là trung điểm các đoạn thẳng  $AB$  và  $CD$ . Chứng minh rằng  $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{MN}$ .

**VÍ DỤ 4.** Cho tam giác  $ABC$ . Lần lượt lấy các điểm  $M, N, P$  trên các đoạn thẳng  $AB, BC$  và  $CA$  sao cho  $AM = \frac{1}{3}AB, BN = \frac{1}{3}BC, CP = \frac{1}{3}CA$ . Chứng minh rằng

$$\overrightarrow{AN} + \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{CM} = \vec{0}.$$

**VÍ DỤ 5.** Cho hình bình hành  $ABCD$  có tâm  $O$ . Gọi  $M$  là một điểm bất kì. Chứng minh rằng

$$a) \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}.$$

$$b) \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MO}.$$

**VÍ DỤ 6.** Cho hình bình hành  $ABCD$ . Gọi  $M$  là trung điểm  $CD$ . Lấy  $N$  trên đoạn  $BM$  sao cho  $BN = 2MN$ . Chứng minh rằng

$$a) 3\overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CM} + \overrightarrow{ND} + \overrightarrow{MN},$$

$$b) 4\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BD} = 3\overrightarrow{AN}.$$

## 2. Bài tập áp dụng

**BÀI 1.** Cho hình bình hành  $ABCD$  có tâm  $O$ . Chứng minh rằng

$$\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD} = 4\overrightarrow{OD}.$$

**BÀI 2.** Gọi  $G$  và  $G'$  lần lượt là trọng tâm của tam giác  $ABC$  và  $A'B'C'$ . Chứng minh rằng

$$\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = 3\overrightarrow{GG'}.$$

**BÀI 3.** Cho tứ giác  $ABCD$ . Gọi  $M, N, I$  lần lượt là trung điểm của  $AC, BD$  và  $MN$ . Chứng minh rằng

$$a) \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = \vec{0},$$

$$b) \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 4\overrightarrow{OI} \text{ (với } O \text{ là điểm bất kì)}.$$

**BÀI 4.** Cho tam giác  $ABC$  không vuông. Gọi  $G, H, O$  lần lượt là trọng tâm, trực tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC$ . Gọi  $D$  là điểm đối xứng của  $A$  qua  $O$  và  $M$  là trung điểm của cạnh  $BC$ . Chứng minh

$$a) \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{HD}.$$

$$d) \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OH}.$$

$$b) \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = 2\overrightarrow{HO}.$$

$$e) \overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}.$$

$$c) \overrightarrow{HA} - \overrightarrow{HB} - \overrightarrow{HC} = 2\overrightarrow{OA}.$$

$$f) \overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{OM}.$$

**BÀI 5.** Dựng bên ngoài tứ giác  $ABCD$  các hình bình hành  $ABEF, BCGH, CDIJ, DAKL$ .

$$a) \text{ Chứng minh rằng } \overrightarrow{KF} + \overrightarrow{EH} + \overrightarrow{GJ} + \overrightarrow{IL} = \vec{0}.$$

$$b) \text{ Chứng minh rằng } \overrightarrow{EL} - \overrightarrow{HI} = \overrightarrow{FK} - \overrightarrow{GJ}.$$

**BÀI 6.** Cho đường tròn  $(I)$  nội tiếp tam giác  $ABC$  có  $AB = c, AC = b, BC = a$ . Chứng minh rằng

$$a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC} = \vec{0}.$$

**BÀI 7.** Cho tam giác  $ABC$  và một điểm  $M$  bất kì nằm trong tam giác  $ABC$ . Đặt  $S_{MBC} = S_a, S_{MCA} = S_b, S_{MAB} = S_c$ . Chứng minh rằng

$$S_a\overrightarrow{MA} + S_b\overrightarrow{MB} + S_c\overrightarrow{MC} = \vec{0}.$$

- A** a) Cho  $M$  trùng với trọng tâm  $G$  của tam giác  $ABC$ , ta được  $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$ .  
 b) Cho  $M$  trùng với tâm đường tròn nội tiếp  $I$  của tam giác  $ABC$ , ta được kết quả

$$a\vec{IA} + b\vec{IB} + c\vec{IC} = \vec{0}.$$

- c) Nếu tam giác  $ABC$  đều thì với điểm  $M$  bất kì trong tam giác, Ta có

$$x\vec{MA} + y\vec{MB} + z\vec{MC} = \vec{0},$$

trong đó  $x, y, z$  lần lượt là khoảng cách từ  $M$  đến các cạnh  $BC, CA$  và  $AB$ .

- d) Khi  $M$  nằm ngoài tam giác  $ABC$ , ta có các kết quả như sau

- (a) Nếu  $M$  thuộc góc  $\widehat{BAC}$  và góc đối đỉnh của nó thì

$$-S_a\vec{MA} + S_b\vec{MB} + S_c\vec{MC} = \vec{0}.$$

- (b) Nếu  $M$  thuộc góc  $\widehat{ABC}$  và góc đối đỉnh của nó thì

$$S_a\vec{MA} - S_b\vec{MB} + S_c\vec{MC} = \vec{0}.$$

- (c) Nếu  $M$  thuộc góc  $\widehat{ACB}$  và góc đối đỉnh của nó thì

$$S_a\vec{MA} + S_b\vec{MB} - S_c\vec{MC} = \vec{0}.$$

### 3. Bài tập điền khuyết

**CÂU 1.** Cho tam giác  $ABC$ . Gọi  $M$  là điểm trên cạnh  $BC$  sao cho  $MB = 2MC$ . Biết rằng  $\vec{AB} + 2\vec{AC} = x\vec{AM}$ . Tìm  $x$ .

Đáp án:

**CÂU 2.** Cho tứ giác  $ABCD$ . Gọi  $M, N$  lần lượt thuộc các đoạn thẳng  $AB, CD$  sao cho  $MB = 2MA$  và  $NC = 2ND$ . Biết rằng  $2\vec{AD} + \vec{BC} = x\vec{MN}$ . Tìm  $x$ .

Đáp án:

**CÂU 3.** Cho tam giác đều  $ABC$  tâm  $O$ . Lấy  $M$  là một điểm bất kì trong tam giác. Gọi  $D, E, F$  lần lượt là hình chiếu của  $M$  trên  $BC, CA, AB$ . Biết rằng  $\vec{MD} + \vec{ME} + \vec{MF} = x\vec{MO}$ , tìm  $x$ .

Đáp án:

**CÂU 4.** Cho hình bình hành  $ABCD$  có tâm  $O$  và  $E$  là trung điểm  $AD$ . Tìm các số thực  $x$  và  $y$  biết rằng

a)  $\vec{EA} + \vec{EB} + 2\vec{EC} = x\vec{AB}$ .      Đáp án:

b)  $\vec{EB} + 2\vec{EA} + 4\vec{ED} = y\vec{EC}$ .      Đáp án:

**CÂU 5.** Cho tam giác  $ABC$ . Dựng bên ngoài tam giác các hình bình hành  $ABIF, BCPQ, CARS$ . Biết rằng  $\vec{RF} + \vec{IQ} + \vec{PS} = x(\vec{AB} + \vec{AC})$ . Tìm  $x$ .

Đáp án:

### 4. Bài tập trắc nghiệm

**CÂU 6.** Cho tam giác  $ABC$  có trọng tâm  $G$ . Gọi  $M$  là trung điểm  $AB$ . Chọn mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau:

- ☐ A  $\vec{CM} = -3\vec{MG}$ .  
☐ B  $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{AC}$ .  
☐ C  $\vec{AB} + \vec{AC} = 3\vec{AG}$ .  
☐ D  $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = 3\vec{OG}$ ,  $O$  là điểm bất kì.

**CÂU 7.** Cho hình bình hành  $ABCD$  tâm  $O$ . Khẳng định nào sau đây là **đúng**?

- ☐ A  $\vec{AB} + \vec{AD} = 2\vec{AC}$ .      ☐ B  $\vec{AB} + \vec{AD} = 2\vec{AO}$ .  
☐ C  $\vec{AB} + \vec{AD} = \vec{CA}$ .      ☐ D  $\vec{AB} + \vec{AD} = \vec{BD}$ .

#### QUICK NOTE

QUICK NOTE

**CÂU 8.** Cho  $I$  là trung điểm của đoạn thẳng  $AB$ . Với điểm  $M$  bất kỳ, ta luôn có

- ☐  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MI}$ .      ☐  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$ .  
☐  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 3\overrightarrow{MI}$ .      ☐  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{MI}$ .

**CÂU 9.** Cho  $G$  là trọng tâm của tam giác  $ABC$ . Với mọi điểm  $M$ , ta luôn có:

- ☐  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MG}$ .      ☐  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MG}$ .  
☐  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$ .      ☐  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 4\overrightarrow{MG}$ .

**CÂU 10.** Cho  $\triangle ABC$  có  $G$  là trọng tâm,  $I$  là trung điểm  $BC$ . Đẳng thức nào đúng?

- ☐  $\overrightarrow{GA} = 2\overrightarrow{GI}$ .      ☐  $\overrightarrow{IG} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{IA}$ .  
☐  $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 2\overrightarrow{GI}$ .      ☐  $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GA}$ .

**CÂU 11.** Khẳng định nào sau đây **không phải** là điều kiện cần và đủ để  $G$  là trọng tâm  $\triangle ABC$ , với  $M$  là trung điểm của  $BC$  và  $O$  là điểm bất kỳ?

- ☐  $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$ .      ☐  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + 3\overrightarrow{OG} = \vec{0}$ .  
☐  $\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{CG} = \vec{0}$ .      ☐  $\overrightarrow{GM} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GA}$ .

**CÂU 12.** Cho  $I$  là trung điểm của đoạn thẳng  $AB$ . Với  $M$  là một điểm bất kỳ, tìm đẳng thức đúng.

- ☐  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$ .      ☐  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{MI}$ .  
☐  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MI}$ .      ☐  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{IM}$ .

**CÂU 13.** Cho tam giác  $ABC$  có trọng tâm  $G$  và  $M$  là trung điểm của  $AB$ . Mệnh đề nào sau đây **sai**?

- ☐  $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ .      ☐  $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = 2\overrightarrow{GM}$ .  
☐  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$ .      ☐  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$ .

**CÂU 14.** Cho  $\triangle ABC$  có  $M, Q, N$  lần lượt là trung điểm của  $AB, BC, CA$ . Khi đó vectơ  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{NA} + \overrightarrow{BQ}$  là vectơ nào sau đây?

- ☐  $\vec{0}$ .      ☐  $\overrightarrow{BC}$ .      ☐  $\overrightarrow{AQ}$ .      ☐  $\overrightarrow{CB}$ .

**CÂU 15.** Cho  $\triangle ABC$  và điểm  $I$  thỏa mãn  $\overrightarrow{IA} = 3\overrightarrow{IB}$ . Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

- ☐  $\overrightarrow{CI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} - \frac{3}{2}\overrightarrow{CB}$ .      ☐  $\overrightarrow{CI} = \overrightarrow{CA} - 3\overrightarrow{CB}$ .  
☐  $\overrightarrow{CI} = \frac{3}{2}\overrightarrow{CB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$ .      ☐  $\overrightarrow{CI} = 3\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}$ .

**CÂU 16.** Cho tam giác  $ABC$  có  $G$  là trọng tâm. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

- ☐  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$  với mọi điểm  $M$ .  
☐  $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ .  
☐  $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 2\overrightarrow{GA}$ .  
☐  $3\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ .

**CÂU 17.** Khẳng định nào sau đây **sai**?

- ☐ Nếu  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$  thì  $ABCD$  là hình bình hành.  
☐ Nếu  $O$  là trung điểm của  $AB$  thì với mọi  $M$  ta có  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MO}$ .  
☐ Nếu  $G$  là trọng tâm của tam giác  $ABC$  thì  $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{AG}$ .  
☐ Với 3 điểm bất kỳ  $I, J, K$  ta có  $\overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{JK} = \overrightarrow{IK}$ .

**CÂU 18.** Cho hình bình hành  $ABCD$ . Đẳng thức nào sau đây **đúng**?

- ☐  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB}$ .      ☐  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AC}$ .  
☐  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AD}$ .      ☐  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{BD}$ .

**CÂU 19.** Cho tam giác  $ABC$  biết  $I$  là trung điểm của đoạn thẳng  $AB$ ,  $G$  là trọng tâm tam giác,  $M$  là điểm bất kỳ. Hãy chọn khẳng định **đúng**.

- ☐  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MG}$ .      ☐  $\overrightarrow{BI} + \overrightarrow{IC} = \vec{0}$ .  
☐  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 3\overrightarrow{MI}$ .      ☐  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$ .

**CÂU 20.** Cho  $I$  là trung điểm của đoạn thẳng  $AB$ . Hỏi đẳng thức nào **đúng**?

- ☐  $2\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AB} = \vec{0}$ .      ☐  $\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IB} = \vec{0}$ .      ☐  $\overrightarrow{AI} - 2\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{IB}$ .      ☐  $\overrightarrow{AI} - \overrightarrow{IB} = \vec{0}$ .



QUICK NOTE

**CÂU 21.** Cho hình bình hành  $ABCD$ . Đẳng thức nào sau đây **đúng**?

- ☐ **A**  $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD} = \vec{0}$ .      ☐ **B**  $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB}$ .  
☐ **C**  $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CD}$ .      ☐ **D**  $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{BC}$ .

**CÂU 22.** Cho  $G$  là trọng tâm tam giác  $ABC$  và  $I$  là trung điểm cạnh  $BC$ . Mệnh đề nào sau đây **sai**?

- ☐ **A**  $\overrightarrow{GA} = -2\overrightarrow{GI}$ .      ☐ **B**  $\overrightarrow{IG} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AI}$ .  
☐ **C**  $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 2\overrightarrow{GI}$ .      ☐ **D**  $\overrightarrow{GA} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AI}$ .

**CÂU 23.** Cho tam giác  $ABC$  có trọng tâm  $G$  và  $M$  là trung điểm cạnh  $AC$ . Khẳng định nào sau đây **sai**?

- ☐ **A**  $BG = \frac{2}{3}BM$ .      ☐ **B**  $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{BG}$ .      ☐ **C**  $\overrightarrow{MG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BM}$ .      ☐ **D**  $GM = \frac{1}{2}GB$ .

**CÂU 24.** Cho tam giác  $ABC$ . Gọi  $M$  là trung điểm của  $BC$  và  $G$  là trọng tâm của tam giác  $ABC$ . Đẳng thức nào sau đây **đúng**?

- ☐ **A**  $\overrightarrow{GA} = 2\overrightarrow{GM}$ .      ☐ **B**  $\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GM} = \vec{0}$ .      ☐ **C**  $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AG}$ .      ☐ **D**  $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GA}$ .

**CÂU 25.** Cho  $G$  là trọng tâm tam giác  $ABC$ , gọi  $I$  là trung điểm của  $BC$ . Đẳng thức nào sau đây **đúng**?

- ☐ **A**  $\overrightarrow{GA} = 2\overrightarrow{GI}$ .      ☐ **B**  $\overrightarrow{IG} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{IA}$ .  
☐ **C**  $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 2\overrightarrow{GI}$ .      ☐ **D**  $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GA}$ .

**CÂU 26.** Cho tam giác  $ABC$  và một điểm  $M$  tùy ý. Hãy chọn hệ thức đúng.

- ☐ **A**  $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{BC}$ .      ☐ **B**  $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}$ .  
☐ **C**  $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}$ .      ☐ **D**  $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}$ .

**CÂU 27.** Cho tam giác  $ABC$ . Gọi  $M$  là trung điểm của  $BC$  và  $G$  là trọng tâm của tam giác  $ABC$ . Đẳng thức nào sau đây **đúng**?

- ☐ **A**  $\overrightarrow{GA} = 2\overrightarrow{GM}$ .      ☐ **B**  $\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GM} = \vec{0}$ .      ☐ **C**  $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AG}$ .      ☐ **D**  $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GA}$ .

**CÂU 28.** Ba trung tuyến  $AM, BN, CP$  của tam giác  $ABC$  đồng quy tại  $G$ . Hỏi vectơ  $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CP}$  bằng vectơ nào?

- ☐ **A**  $\frac{3}{2}(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC})$ .      ☐ **B**  $3(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{NG} + \overrightarrow{GP})$ .  
☐ **C**  $\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AC})$ .      ☐ **D**  $\vec{0}$ .

**CÂU 29.** Cho hình chữ nhật  $ABCD$ ,  $I$  và  $K$  lần lượt là trung điểm của  $BC, CD$ . Hệ thức nào sau đây **đúng**?

- ☐ **A**  $\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AK} = 2\overrightarrow{AC}$ .      ☐ **B**  $\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ .  
☐ **C**  $\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AK} = \overrightarrow{IK}$ .      ☐ **D**  $\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AK} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$ .

**CÂU 30.** Cho tam giác  $ABC$  có  $M$  là trung điểm của cạnh  $BC$ . Các điểm  $D, E$  thỏa mãn các đẳng thức:  $\overrightarrow{BD} = 4\overrightarrow{BA}$ ,  $\overrightarrow{AE} = 3\overrightarrow{AC}$ . Khẳng định nào sau đây **đúng**?

- ☐ **A**  $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DE}$ .      ☐ **B**  $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{6}\overrightarrow{DE}$ .      ☐ **C**  $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DE}$ .      ☐ **D**  $\overrightarrow{AM} = \frac{3}{4}\overrightarrow{DE}$ .

**CÂU 31.** Cho tứ giác  $ABCD$ . Gọi  $M, N$  là trung điểm  $AB$  và  $DC$ . Lấy các điểm  $P, Q$  lần lượt thuộc các đường thẳng  $AD$  và  $BC$  sao cho  $\overrightarrow{PA} = -2\overrightarrow{PD}$ ,  $\overrightarrow{QB} = -2\overrightarrow{QC}$ . Khẳng định nào sau đây **đúng**?

- ☐ **A**  $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC})$ .      ☐ **B**  $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{MQ}$ .  
☐ **C**  $\overrightarrow{MN} = -\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC})$ .      ☐ **D**  $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NA})$ .

**CÂU 32.** Cho hình bình hành  $ABCD$ . Đẳng thức nào **đúng**?

- ☐ **A**  $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{BC}$ .      ☐ **B**  $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB}$ .  
☐ **C**  $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{CD}$ .      ☐ **D**  $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CD}$ .

**CÂU 33.** Cho  $G$  là trọng tâm của tam giác  $ABC$ . Trong các mệnh đề sau, tìm mệnh đề **đúng**?

- ☐ **A**  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AG}$ .      ☐ **B**  $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = 3\overrightarrow{BG}$ .  
☐ **C**  $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CG}$ .      ☐ **D**  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} = \vec{0}$ .

QUICK NOTE

**CÂU 34.** Cho hình vuông  $ABCD$  có tâm là  $O$ . Trong các mệnh đề sau, tìm mệnh đề sai?

(A)  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AO}$ .

(B)  $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DO} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$ .

(C)  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$ .

(D)  $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB} = 4\overrightarrow{AB}$ .

**CÂU 35.** Cho tứ giác  $ABCD$ . Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $AB$  và  $CD$ . Khi đó  $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$  bằng

(A)  $\overrightarrow{MN}$ .

(B)  $2\overrightarrow{MN}$ .

(C)  $3\overrightarrow{MN}$ .

(D)  $-2\overrightarrow{MN}$ .

**CÂU 36.** Cho hình bình hành  $ABCD$  tâm  $O$  và điểm  $M$  bất kì. Khẳng định nào sau đây đúng?

(A)  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MO}$ .

(B)  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 2\overrightarrow{MO}$ .

(C)  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 3\overrightarrow{MO}$ .

(D)  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MO}$ .

**CÂU 37.** Cho năm điểm  $A, B, C, D, E$ . Khẳng định nào đúng?

(A)  $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{EC} = 2(\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{CB})$ .

(B)  $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{EC} = 3(\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{CB})$ .

(C)  $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{EC} = \frac{\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{CB}}{4}$ .

(D)  $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{EC} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{CB}$ .

**CÂU 38.** Cho tứ giác  $ABCD$ . Gọi  $G$  là trọng tâm của tam giác  $ABD$ ,  $I$  là điểm trên  $GC$  sao cho  $IC = 3IG$ . Với mọi điểm  $M$  ta luôn có  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}$  bằng

(A)  $2\overrightarrow{MI}$ .

(B)  $3\overrightarrow{MI}$ .

(C)  $4\overrightarrow{MI}$ .

(D)  $5\overrightarrow{MI}$ .

**CÂU 39.** Cho tam giác  $ABC$ . Gọi  $M$  là điểm trên cạnh  $AB$  sao cho  $MA = 2MB$  và  $N$  là trung điểm của  $AC$ . Gọi  $P$  là trung điểm của  $MN$ . Khi đó

(A)  $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ .

(B)  $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$ .

(C)  $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ .

(D)  $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$ .

**CÂU 40.** Cho tam giác  $ABC$  nội tiếp trong đường tròn tâm  $O$ . Gọi  $H, G$  lần lượt là trực tâm, trọng tâm của tam giác. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

(A)  $\overrightarrow{OH} = 4\overrightarrow{OG}$ .

(B)  $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$ .

(C)  $\overrightarrow{OH} = 2\overrightarrow{OG}$ .

(D)  $3\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OG}$ .

**CÂU 41.** Cho  $\triangle ABC$ . Trên các cạnh  $AB, BC$  và  $CA$  lấy các điểm  $D, E, F$  sao cho  $DA = 2DB, EB = 2EC, FC = 2FA$ . Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau đây.

(A)  $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ .

(B)  $\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ .

(C)  $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ .

(D)  $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$ .

**CÂU 42.** Cho tứ giác  $ABCD$  và điểm  $G$  thỏa mãn  $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + 2\overrightarrow{GC} + k\overrightarrow{GD} = \vec{0}$ . Gọi  $I, J$  lần lượt là trọng tâm tam giác các  $ACD, BCD$ . Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm các cạnh  $CD, AB$ . Tìm  $k$  sao cho  $G$  là trung điểm của  $IJ$ .

(A)  $k = 1$ .

(B)  $k = 2$ .

(C)  $k = 3$ .

(D)  $k = 4$ .

**CÂU 43.** Cho ngũ giác  $ABCDE$  có  $M, N, P, Q$  lần lượt là trung điểm các cạnh  $AB, BC, CD, DE$ . Gọi  $I, J$  lần lượt là trung điểm của  $MP, NQ$ . Biết  $\overrightarrow{IJ} = k\overrightarrow{EA}$ , tìm  $k$ .

(A)  $k = -\frac{1}{2}$ .

(B)  $k = \frac{1}{2}$ .

(C)  $k = -\frac{1}{4}$ .

(D)  $k = \frac{1}{4}$ .

Dạng 3. Xác định điểm thỏa mãn đẳng thức vectơ

Phương pháp giải

Bài toán: Xác định điểm  $M$  thỏa đẳng thức vectơ cho trước

- ☑ Bước 1. Ta biến đổi đẳng thức đã cho (bằng chèn điểm, quy tắc ba điểm, qui tắc hình bình hành, tính chất trung điểm, trọng tâm,...) về dạng:  $\overrightarrow{OM} = \vec{v}$ . Trong đó điểm  $O$  và vectơ  $\vec{v}$  cho trước.
- ☑ Bước 2. Nếu muốn dựng điểm  $M$ , ta lấy điểm  $O$  làm gốc, dựng một vectơ bằng vectơ  $\vec{v}$ , khi đó điểm ngọn của vectơ này chính là điểm  $M$ .

QUICK NOTE



⊙ Lưu ý 1. Thông thường, biểu thức  $\overrightarrow{OM} = \vec{v}$  là những biểu thức đặc biệt (trung điểm, trọng tâm, điểm chia đoạn thẳng theo tỉ lệ  $\vec{a} = k\vec{b}$ , hình bình hành,... Ta dựa vào biểu thức này để dựng.

⊙ Lưu ý 2. Một số cách chứng minh thường dùng.

— Để chứng minh  $I$  là trung điểm của đoạn thẳng  $AB$ , ta cần chứng minh một trong các hệ thức sau

$$\begin{aligned} &+ \overrightarrow{IA} = \overrightarrow{IB}. \\ &+ \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}. \\ &+ 2\overrightarrow{IA} = \overrightarrow{AB}. \\ &+ 2\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} \text{ (O bất kì)}. \end{aligned}$$

— Để chứng minh điểm  $G$  là trọng tâm của  $\triangle ABC$ , ta cần chứng minh một trong các hệ thức sau

$$\begin{aligned} &+ \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}. \\ &+ \text{Với } I \text{ là trung điểm của cạnh } BC \text{ thì } \overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AI}. \\ &+ \text{Với } O \text{ là điểm bất kì trong mặt phẳng thì: } 3\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}. \end{aligned}$$

— Tứ giác  $ABCD$  là hình bình hành  $\Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \\ \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \end{cases}$ .

— Để chứng minh hai điểm  $A_1$  và  $A_2$  trùng nhau ta có thể chứng minh một trong các hệ thức sau

$$\begin{aligned} &+ \overrightarrow{A_1A_2} = \vec{0}. \\ &+ \overrightarrow{OA_1} = \overrightarrow{OA_2} \text{ với } O \text{ là điểm bất kì}. \end{aligned}$$

— Điều kiện cần và đủ để  $\triangle ABC$  và  $\triangle A'B'C'$  có cùng trọng tâm là

$$\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \vec{0}.$$

— Nếu  $\overrightarrow{MB} = k \cdot \overrightarrow{MC}$  ( $k \neq 1$ ) thì  $\overrightarrow{AM} = \frac{\overrightarrow{AB} - k \cdot \overrightarrow{AC}}{1 - k}$  (hay điểm  $M$  chia đoạn  $AB$  theo tỉ số  $k \neq 1$ ).

## 1. Ví dụ minh họa

**VÍ DỤ 1.** Cho hai điểm  $A$  và  $B$ . Xác định điểm  $M$  thỏa mãn  $2\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} = \vec{0}$ .

**VÍ DỤ 2.** Cho tam giác  $ABC$ . Gọi  $M$  là trung điểm của  $AB$  và  $N$  thuộc cạnh  $AC$ , sao cho  $NC = 2NA$ . Hãy xác định  $K$  và  $D$  khi

$$\text{a) } 3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} - 12\overrightarrow{AK} = \vec{0}. \quad \text{b) } 3\overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{AC} - 12\overrightarrow{KD} = \vec{0}.$$

**VÍ DỤ 3.** Cho hình bình hành  $ABCD$ .

a) Hãy dựng các điểm  $M, N$  thỏa mãn  $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AD}$  và  $\overrightarrow{NC} + \overrightarrow{ND} - \overrightarrow{NA} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}$ .

b) Chứng minh rằng  $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{BA}$ .

**VÍ DỤ 4.** Cho trước hai điểm  $A, B$  và hai số thực  $\alpha, \beta$  thỏa mãn  $\alpha + \beta \neq 0$

a) Chứng minh rằng tồn tại duy nhất điểm  $I$  thỏa mãn  $\alpha \cdot \overrightarrow{IA} + \beta \cdot \overrightarrow{IB} = \vec{0}$ .

b) Từ đó suy ra với điểm  $M$  bất kỳ, ta luôn có:  $\alpha \cdot \overrightarrow{MA} + \beta \cdot \overrightarrow{MB} = (\alpha + \beta) \cdot \overrightarrow{MI}$ .

### ⚠ Lời bình 3

⊙ Nếu  $\alpha = \beta = 1$  thì điểm  $I$  chính là trung điểm của  $AB$ .

⊙ Bài toán trên được mở rộng cho ba điểm  $A, B, C$  và bộ 3 số thực  $\alpha, \beta, \gamma$  cho trước thỏa mãn  $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$ , nghĩa là:

— Tồn tại điểm  $I$  duy nhất thỏa mãn  $\alpha \cdot \overrightarrow{IA} + \beta \cdot \overrightarrow{IB} + \gamma \cdot \overrightarrow{IC} = \vec{0}$

QUICK NOTE

— Từ đó suy ra với điểm  $M$  bất kỳ, ta luôn có  $\alpha \cdot \overrightarrow{IA} + \beta \cdot \overrightarrow{IB} + \gamma \cdot \overrightarrow{IC} = (\alpha + \beta + \gamma) \cdot \overrightarrow{MI}$ . Khi  $\alpha = \beta = \gamma = 1$  thì  $I$  là trọng tâm của  $\triangle ABC$ .

☑ Bài toán trên vẫn đúng với  $n$  điểm  $A_i$  ( $i = \overline{1, n}$ ) và bộ số thực  $\alpha_i$  ( $i = \overline{1, n}$ ) thỏa mãn  $\sum_{i=1}^n \alpha_i \neq 0$

☑ Kết quả trên dùng giải bài toán “Cho  $n$  điểm  $A_i$ ,  $i = \overline{1, n}$  và bộ số thực  $\alpha_i$ ,  $i = \overline{1, n}$  thỏa mãn  $\sum_{i=1}^n \alpha_i \neq 0$ . Tìm số thực  $k$  và điểm cố định  $I$  sao cho đẳng thức vectơ  $\sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{MA_i} = k \cdot \overrightarrow{MI}$  thỏa mãn với mọi điểm  $M$ ”.

## 2. Bài tập áp dụng

**BÀI 1.** Cho hai hình bình hành  $ABCD$  và  $ACEF$ .

- Dựng các điểm  $M, N$  sao cho  $\overrightarrow{EM} = \overrightarrow{BD}$ ,  $\overrightarrow{FN} = \overrightarrow{BD}$ .
- Chứng minh  $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{MN}$ .

**BÀI 2.** Cho tam giác  $ABC$ .

- Chứng minh với mọi điểm  $M$ , ta luôn có  $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{CB}$ .
- Hãy dựng điểm  $D$  sao cho  $\overrightarrow{DA} + 2\overrightarrow{DB} - 3\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{CB}$ .

**BÀI 3.** Cho tứ giác  $ABCD$ ,  $M$  là điểm tùy ý. Trong mỗi trường hợp hãy tìm số  $k$  và điểm cố định  $I, J, K$  sao cho đẳng thức vectơ sau thỏa mãn với mọi điểm  $M$ .

- $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = k \cdot \overrightarrow{MI}$ .
- $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2 \cdot \overrightarrow{MC} = k \cdot \overrightarrow{MJ}$ .
- $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + 3 \cdot \overrightarrow{MD} = k \cdot \overrightarrow{MK}$

**BÀI 4.** Cho tứ giác lồi  $ABCD$ . Gọi  $M, N, P, Q$  lần lượt là trung điểm của  $AB, BC, CD, DA$ . Chứng minh  $\triangle ANP$  và  $\triangle CMQ$  có cùng trọng tâm.

## 3. Bài tập trắc nghiệm

**CÂU 1.** Cho điểm  $A$  và vectơ  $\vec{u}$ . Có bao nhiêu điểm  $M$  thỏa mãn  $\overrightarrow{AM} = \vec{u}$ ?

- (A) Duy nhất một. (B) Hai. (C) Không có. (D) Vô số.

**CÂU 2.** Cho hình bình hành  $ABCD$ , điểm  $M$  thỏa mãn  $4\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$ . Khi đó  $M$  là

- (A) trung điểm  $AC$ . (B) điểm  $C$ . (C) trung điểm  $AB$ . (D) trung điểm  $AD$ .

**CÂU 3.** Cho hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  khác  $\vec{0}$  và không cùng phương. Biết hai vectơ  $\vec{u} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$  và  $\vec{v} = \vec{a} + (x - 1)\vec{b}$  cùng phương. Khi đó giá trị của  $x$  là

- (A)  $\frac{1}{2}$ . (B)  $-\frac{3}{2}$ . (C)  $-\frac{1}{2}$ . (D)  $\frac{3}{2}$ .

**CÂU 4.** Cho hai điểm phân biệt  $A, B$  và hai số thực  $\alpha, \beta$  khác 0 thỏa mãn  $\alpha + \beta = 0$ . Có bao nhiêu điểm  $M$  thỏa mãn  $\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} = \vec{0}$ ?

- (A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

**CÂU 5.** Cho ba điểm không thẳng hàng  $A, B, C$  và  $M$  là điểm thỏa mãn  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CM}$ . Chọn khẳng định đúng.

- (A)  $ABMC$  là hình bình hành. (B)  $ABCM$  là hình bình hành.  
(C)  $M$  là trọng tâm của tam giác  $ABC$ . (D)  $CM$  là trung tuyến của tam giác  $ABC$ .

**CÂU 6.** Cho hai điểm phân biệt  $A, B$  và hai số thực  $\alpha, \beta$  thỏa mãn  $\alpha + \beta \neq 0$ . Có bao nhiêu điểm  $M$  thỏa mãn  $\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} = \vec{0}$ ?

- (A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

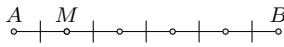
**CÂU 7.** Cho hai điểm phân biệt  $A$  và  $B$ . Điều kiện cần và đủ để  $I$  là trung điểm của đoạn thẳng  $AB$  là

- (A)  $IA = IB$ . (B)  $\overrightarrow{IA} = -\overrightarrow{IB}$ . (C)  $\overrightarrow{IA} = \overrightarrow{IB}$ . (D)  $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{BI}$ .

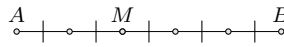
**CÂU 8.** Cho tam giác  $ABC$ , điểm  $I$  là trung điểm  $BC$ . Điểm  $G$  có tính chất nào sau đây thì  $G$  là trọng tâm tam giác  $ABC$ ?

- (A)  $\vec{GI} = -\frac{1}{3}\vec{AI}$ . (B)  $GA = 2GI$ .  
(C)  $\vec{AG} + \vec{BG} + \vec{CG} = \vec{0}$ . (D)  $\vec{GB} + \vec{GC} = 2\vec{GI}$ .

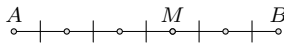
**CÂU 9.** Cho đoạn thẳng  $AB$ , hình nào sau đây biểu diễn đúng điểm  $M$  thỏa mãn  $\vec{MA} + 4\vec{MB} = \vec{0}$ .



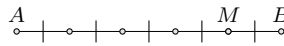
Hình 1



Hình 2



Hình 3



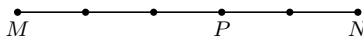
Hình 4

- (A) Hình 1. (B) Hình 2. (C) Hình 3. (D) Hình 4.

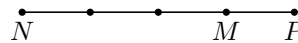
**CÂU 10.** Cho đoạn thẳng  $AB$  có trung điểm  $I$ . Tìm điểm  $M$  thỏa mãn  $3\vec{MA} + \vec{MB} = \vec{0}$ .

- (A)  $M$  trùng với  $I$ . (B)  $M$  là trung điểm của  $BI$ .  
(C)  $M$  là trung điểm của  $AI$ . (D)  $M$  trùng với  $A$  hoặc  $M$  trùng với  $B$ .

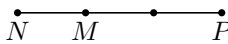
**CÂU 11.** Trên đường thẳng  $MN$  lấy điểm  $P$  sao cho  $\vec{MN} = -3\vec{MP}$ . Điểm  $P$  được xác định trong hình vẽ nào sau đây?



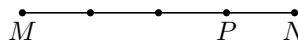
Hình 1



Hình 3



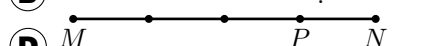
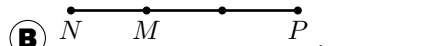
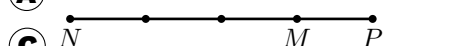
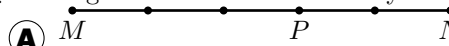
Hình 2



Hình 4

- (A) Hình 1. (B) Hình 2. (C) Hình 3. (D) Hình 4.

**CÂU 12.** Trên đường thẳng  $MN$  lấy điểm  $P$  sao cho  $\vec{MN} = -3\vec{MP}$ . Điểm  $P$  được xác định đúng theo hình vẽ nào sau đây.



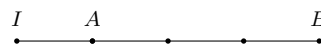
**CÂU 13.** Cho tam giác  $ABC$  với  $I$  là trung điểm của  $AB$ . Tìm điểm  $M$  thỏa mãn hệ thức  $\vec{MA} + \vec{MB} + 2\vec{MC} = \vec{0}$ .

- (A)  $M$  là trung điểm của  $IC$ .  
(B)  $M$  là trung điểm của  $IA$ .  
(C)  $M$  là điểm trên cạnh  $IC$  sao cho  $IM = 2MC$ .  
(D)  $M$  là trung điểm của  $BC$ .

**CÂU 14.**

Đẳng thức nào sau đây mô tả đúng hình vẽ bên?

- (A)  $3\vec{AI} + \vec{AB} = \vec{0}$ . (B)  $3\vec{IA} + \vec{IB} = \vec{0}$ .  
(C)  $\vec{BI} + 3\vec{BA} = \vec{0}$ . (D)  $\vec{AI} + 3\vec{AB} = \vec{0}$ .



**CÂU 15.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , tam giác  $ABC$  có trọng tâm  $G$  là điểm  $M$  thỏa mãn  $\vec{AB} + \vec{AC} + 6\vec{AG} = 6\vec{AM}$ . Vị trí của điểm  $M$  là

- (A)  $M$  là trung điểm của  $AC$ .  
(B)  $M$  là trung điểm của  $BC$ .  
(C)  $M$  là điểm thứ tư của hình bình hành  $ABCM$ .  
(D)  $M$  là trung điểm của  $AB$ .

**CÂU 16.** Cho tam giác  $ABC$ . Để điểm  $M$  thỏa mãn điều kiện  $\vec{MA} + \vec{BM} + \vec{MC} = \vec{0}$  thì  $M$  phải thỏa mãn

- (A)  $M$  là trọng tâm tam giác  $ABC$ .  
(B)  $M$  là điểm sao cho tứ giác  $ABMC$  là hình bình hành.  
(C)  $M$  thuộc trung trực của  $AB$ .  
(D)  $M$  là điểm sao cho tứ giác  $BAMC$  là hình bình hành.

QUICK NOTE

QUICK NOTE

**CÂU 17.** Cho tứ giác  $ABCD$  và  $M$  là điểm thoả  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = \vec{0}$ . Chọn khẳng định đúng.

- (A)  $M$  là giao điểm hai đường chéo của tứ giác  $ABCD$ .  
 (B)  $M$  là giao điểm của các đoạn thẳng nối hai trung điểm hai cạnh đối diện của tứ giác  $ABCD$ .  
 (C)  $M$  là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác  $ABCD$ .  
 (D)  $M$  là tâm đường tròn nội tiếp tứ giác  $ABCD$ .

**CÂU 18.** Cho tam giác  $ABC$ , gọi  $M$  là điểm thoả mãn  $\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = \vec{0}$ . Khi đó,

- (A)  $ABCM$  là hình bình hành.  
 (B)  $ABMC$  là hình bình hành.  
 (C)  $ABCM$  là hình bình thang có đáy lớn  $AM$ .  
 (D)  $ABCM$  là hình bình thang có đáy lớn  $BC$ .

**CÂU 19.** Gọi  $G$  và  $G'$  lần lượt là trọng tâm của hai tam giác  $ABC$  và  $A'B'C'$ . Tìm điều kiện cần và đủ để  $G \equiv G'$ .

- (A)  $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} + 3\overrightarrow{GG'} = \vec{0}$ .  
 (B)  $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = 3\overrightarrow{GG'}$ .  
 (C)  $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} - 3\overrightarrow{G'G} = \vec{0}$ .  
 (D)  $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = 3\overrightarrow{G'G}$ .

**CÂU 20.** Cho tam giác  $ABC$  có  $I$  là trung điểm  $BC$ . Gọi  $M$  là điểm thoả mãn  $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$ . Xác định vị trí của điểm  $M$ .

- (A)  $M$  là trọng tâm tam giác  $ABC$ .  
 (B)  $M$  là trung điểm  $AI$ .  
 (C)  $M$  là điểm thuộc đoạn thẳng  $AI$  thoả  $MA = 2MI$ .  
 (D)  $M$  là điểm thuộc đoạn thẳng  $AI$  thoả  $MI = 2MA$ .

**CÂU 21.** Cho hình bình hành  $ABCD$ , điểm  $M$  thoả  $4\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$ . Khi đó điểm  $M$  là

- (A) trung điểm  $AC$ . (B) điểm  $C$ . (C) trung điểm  $AB$ . (D) trung điểm  $AD$ .

**CÂU 22.** Cho tam giác  $ABC$ . Gọi  $D, E$  là các điểm xác định bởi  $\overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{AE} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$ .

Gọi  $K$  là trung điểm của  $DE$  và  $M$  xác định bởi  $\overrightarrow{BM} = x\overrightarrow{BC}$ . Tìm giá trị thực của  $x$  sao cho  $A, K, M$  thẳng hàng.

- (A)  $\frac{3}{8}$ . (B)  $-\frac{4}{3}$ . (C)  $\frac{8}{3}$ . (D)  $-\frac{3}{4}$ .

**CÂU 23.** Cho tam giác  $ABC$ . Gọi  $D$  là trung điểm cạnh  $AC$  và  $I$  là điểm thoả mãn  $\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} + 3\overrightarrow{IC} = \vec{0}$ . Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- (A)  $I$  là trực tâm tam giác  $BCD$ .  
 (B)  $I$  là trọng tâm tam giác  $ABC$ .  
 (C)  $I$  là trọng tâm tam giác  $CDB$ .  
 (D)  $I$  là tâm đường tròn nội tiếp tam giác  $ABC$ .

**CÂU 24.** Cho đoạn thẳng  $AB$  và  $M$  là một điểm nằm trên đường thẳng  $AB$  sao cho  $\overrightarrow{MA} = -\frac{1}{5}\overrightarrow{AB}$ . Khẳng định nào sau đây là sai?

- (A)  $\overrightarrow{MB} = -4\overrightarrow{MA}$ . (B)  $\overrightarrow{MB} = -\frac{4}{5}\overrightarrow{AB}$ . (C)  $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AB}$ . (D)  $\overrightarrow{MA} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{MB}$ .

**CÂU 25.** Cho tam giác  $ABC$ . Hãy xác định vị trí điểm  $M$  thoả mãn  $2\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} = \vec{0}$ .

- (A)  $M$  thuộc cạnh  $AB$  và  $AM = 2MB$ . (B)  $M$  trên  $AB$  và ngoài đoạn  $AB$ .  
 (C)  $M$  là trung điểm  $AB$ . (D)  $M$  không thuộc đoạn  $AB$ .

**CÂU 26.** Cho tam giác  $ABC$ ,  $N$  là trung điểm  $AB$ ,  $M$  là điểm thoả mãn đẳng thức  $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ . Kết luận nào dưới đây đúng?

- (A)  $M$  đối xứng với  $C$  qua  $A$ . (B)  $A$  đối xứng với  $M$  qua  $C$ .  
 (C)  $C$  đối xứng với  $A$  qua  $M$ . (D)  $M$  là điểm tùy ý.

**CÂU 27.** Cho tam giác  $ABC$  và điểm  $M$  thoả mãn  $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AB}$ . Tìm vị trí điểm  $M$ .

- (A)  $M$  là điểm thứ tư của hình bình hành  $ABCM$ .

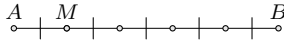
QUICK NOTE

- (B)  $M$  là trung điểm của  $AB$ .  
 (C)  $M$  là trung điểm của  $BC$ .  
 (D)  $M$  là trung điểm của  $AC$ .

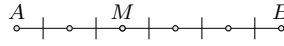
**CÂU 28.** Cho tam giác  $ABC$ ,  $I$  là trung điểm  $AC$ . Vị trí điểm  $N$  thỏa mãn  $\overrightarrow{NA} + 2\overrightarrow{NB} = \overrightarrow{CB}$  xác định bởi hệ thức

- (A)  $\overrightarrow{BN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BI}$ . (B)  $\overrightarrow{BN} = 2\overrightarrow{BI}$ . (C)  $\overrightarrow{BN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BI}$ . (D)  $\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BI}$ .

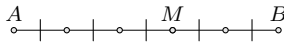
**CÂU 29.** Cho đoạn thẳng  $AB$ , hình nào sau đây biểu diễn đúng điểm  $M$  thỏa mãn  $\overrightarrow{MA} + 4\overrightarrow{MB} = \vec{0}$ .



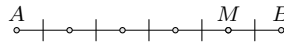
Hình 1



Hình 2



Hình 3



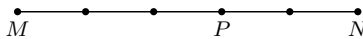
Hình 4

- (A) Hình 1. (B) Hình 2. (C) Hình 3. (D) Hình 4.

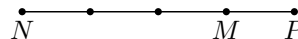
**CÂU 30.** Cho đoạn thẳng  $AB$  có trung điểm  $I$ . Tìm điểm  $M$  thỏa mãn  $3\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$ .

- (A)  $M$  trùng với  $I$ . (B)  $M$  là trung điểm của  $BI$ .  
 (C)  $M$  là trung điểm của  $AI$ . (D)  $M$  trùng với  $A$  hoặc  $M$  trùng với  $B$ .

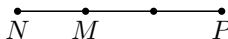
**CÂU 31.** Trên đường thẳng  $MN$  lấy điểm  $P$  sao cho  $\overrightarrow{MN} = -3\overrightarrow{MP}$ . Điểm  $P$  được xác định trong hình vẽ nào sau đây?



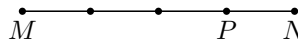
Hình 1



Hình 3



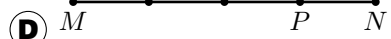
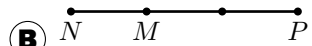
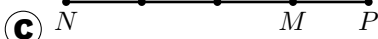
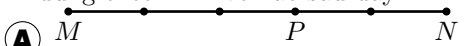
Hình 2



Hình 4

- (A) Hình 1. (B) Hình 2. (C) Hình 3. (D) Hình 4.

**CÂU 32.** Trên đường thẳng  $MN$  lấy điểm  $P$  sao cho  $\overrightarrow{MN} = -3\overrightarrow{MP}$ . Điểm  $P$  được xác định đúng theo hình vẽ nào sau đây.



**CÂU 33.**

Đẳng thức nào sau đây mô tả đúng hình vẽ bên?

- (A)  $3\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AB} = \vec{0}$ . (B)  $3\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$ .  
 (C)  $\overrightarrow{BI} + 3\overrightarrow{BA} = \vec{0}$ . (D)  $\overrightarrow{AI} + 3\overrightarrow{AB} = \vec{0}$ .



**CÂU 34.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , tam giác  $ABC$  có trọng tâm  $G$  là điểm  $M$  thỏa mãn  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + 6\overrightarrow{AG} = 6\overrightarrow{AM}$ . Vị trí của điểm  $M$  là

- (A)  $M$  là trung điểm của  $AC$ .  
 (B)  $M$  là trung điểm của  $BC$ .  
 (C)  $M$  là điểm thứ tư của hình bình hành  $ABCM$ .  
 (D)  $M$  là trung điểm của  $AB$ .

**Dạng 4. Biểu diễn vector theo hai vector không cùng phương**

**Đặt vấn đề :** Trong dạng toán này, chúng ta giải quyết bài toán dựa vào kiến thức:

“Cho trước hai vectơ  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  khác  $\vec{0}$  và không cùng phương. Với mọi vectơ  $\vec{c}$  ta luôn tìm được một cặp số thực  $(\alpha, \beta)$  duy nhất sao cho  $\vec{c} = \alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{b}$ ”.

**Phương pháp giải :** Ta có thể chọn 1 trong 2 hướng giải sau

- ☞ **Hướng 1:** Từ giả thiết xác định được tính chất hình học, rồi từ đó khai triển vectơ cần biểu diễn bằng quy tắc ba điểm, quy tắc hình bình hành, tính chất

## QUICK NOTE

trung điểm, trọng tâm, ...

- ☛ **Hướng 2:** Từ giả thiết, ta lập được mối quan hệ vectơ giữa các đối tượng, rồi từ đó khai triển biểu thức bằng quy tắc ba điểm, quy tắc hình bình hành, tính chất trung điểm, trọng tâm, ...

## 1. Ví dụ minh họa

**VÍ DỤ 1.** Cho  $\triangle ABC$ , gọi  $G$  là trọng tâm của tam giác và  $B_1$  là điểm đối xứng của  $B$  qua  $G$ . Gọi  $M$  là trung điểm của  $BC$ . Hãy biểu diễn các vectơ

- a)  $\overrightarrow{CB_1}$  và  $\overrightarrow{AB_1}$  theo  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ .      b)  $\overrightarrow{MB_1}$  theo  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ .

**VÍ DỤ 2.** Cho  $\triangle ABC$ . Gọi  $I$  là điểm trên cạnh  $BC$  sao cho  $2CI = 3BI$  và  $J$  là điểm trên  $BC$  kéo dài sao cho  $5JB = 2JC$ . Gọi  $G$  là trọng tâm  $\triangle ABC$ .

- a) Tính  $\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AJ}$  theo  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ .      b) Tính  $\overrightarrow{AG}$  theo  $\overrightarrow{AI}$  và  $\overrightarrow{AJ}$ .

**VÍ DỤ 3.** Cho  $\triangle ABC$  và hai điểm  $D, E$  thỏa mãn  $\overrightarrow{DB} = k \cdot \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{EB} = \frac{1}{k} \overrightarrow{EC}$  (với  $k \neq 1$ ).

- a) Biểu diễn các vectơ  $\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}, \overrightarrow{DE}$  theo các vectơ  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ .  
b) Điểm  $F, I$  thỏa mãn  $\overrightarrow{FA} = k \cdot \overrightarrow{FB}, \overrightarrow{IC} = k \cdot \overrightarrow{IA}$ . Chứng minh  $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BI} + \overrightarrow{CF} = \vec{0}$ .

## 2. Bài tập áp dụng

**BÀI 1.** Cho  $\triangle ABC$  có  $M, D$  lần lượt là trung điểm của  $AB, BC$  và  $N$  là điểm trên cạnh  $AC$  sao cho  $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{NC}$ . Gọi  $K$  là trung điểm của  $MN$ . Hãy tính các vectơ  $\overrightarrow{AK}, \overrightarrow{KD}$  theo  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ .

**BÀI 2.** Cho  $\triangle ABC$ . Trên hai cạnh  $AB$  và  $AC$  lấy hai điểm  $D$  và  $E$  sao cho  $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{CE} = 3\overrightarrow{EA}$ . Gọi  $M, I$  lần lượt là trung điểm của  $DE$  và  $BC$ . Hãy tính vectơ  $\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{MI}$  theo  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ .

**BÀI 3.** Cho  $\triangle ABC$ , lấy điểm  $M, N, P$  sao cho  $\overrightarrow{MB} = 3\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{NA} + 3\overrightarrow{NC} = \vec{0}, \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} = \vec{0}$ . Phân tích  $\overrightarrow{PM}, \overrightarrow{PN}$  theo  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ .

**BÀI 4.** Cho hình bình hành  $ABCD$  có tâm là  $O$ . Hãy tính các vectơ sau theo vectơ  $\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{AD}$ .

- a)  $\overrightarrow{AI}$  với  $I$  là trung điểm của  $\overrightarrow{BO}$ .  
b)  $\overrightarrow{BG}$  với  $G$  là trọng tâm  $\triangle OCD$ .

**BÀI 5.** Cho  $\triangle ABC$  có hai đường trung tuyến  $BN, CP$ . Hãy biểu thị các vectơ  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}$  theo các vectơ  $\overrightarrow{BN}, \overrightarrow{CP}$ .

**BÀI 6.** Cho  $\triangle ABC$  có trọng tâm  $G$ . Gọi  $I, J$  nằm trên cạnh  $BC$  và  $BC$  kéo dài sao cho  $2CI = 3BI, 5JB = 2JC$ .

- a) Tính  $\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AJ}$  theo  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ .      b) Tính  $\overrightarrow{AG}$  theo  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ .

**BÀI 7.** Cho  $\triangle ABC$  có  $G$  là trọng tâm tam giác và  $I$  là điểm đối xứng của  $B$  qua  $G$ .  $M$  là trung điểm của  $BC$ . Hãy tính  $\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{CI}, \overrightarrow{MI}$  theo  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ .

**BÀI 8.** Cho  $\triangle ABC$  có trọng tâm là  $G$  và các đường trung tuyến  $AM, BP$ . Gọi  $G'$  là điểm đối xứng với điểm  $G$  qua  $P$ .

- a) Hãy biểu diễn các vectơ  $\overrightarrow{AG'}, \overrightarrow{CG'}$  theo  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ .  
b) Chứng minh hệ thức:  $5\overrightarrow{AC} - 6\overrightarrow{AB} = 6\overrightarrow{MG'}$ .

**BÀI 9.** Cho hình bình hành  $ABCD$ . Gọi  $M, N$  theo thứ tự là trung điểm của các cạnh  $BC, CD$ . Hãy biểu diễn các vectơ  $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD}$  theo các vectơ  $\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AN}$ .

**BÀI 10.** Cho tứ giác  $ABCD$  có  $M, N$  theo thứ tự là trung điểm của các cạnh  $AD, BC$ . Hãy biểu diễn vectơ  $\overrightarrow{MN}$  theo  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}$  và theo  $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{DB}$ .



**BÀI 11.** Cho  $\triangle ABC$ . Gọi  $I$  là điểm đối xứng của trọng tâm  $G$  qua  $B$ .

- a) Chứng minh  $\overrightarrow{IA} - 5\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \vec{0}$ .  
b) Đặt  $\overrightarrow{AG} = \vec{a}$ ,  $\overrightarrow{AI} = \vec{b}$ . Tính  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{AC}$  theo  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ .

**BÀI 12.** Cho  $\triangle ABC$ . Gọi  $M$ ,  $N$ ,  $P$  lần lượt là trung điểm của  $BC$ ,  $CA$ ,  $AB$ . Tính các vectơ  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{BC}$ ,  $\overrightarrow{CA}$  theo các vectơ  $\overrightarrow{BN}$ ,  $\overrightarrow{CP}$ .

**BÀI 13.** Cho  $\triangle ABC$ . Gọi  $I$  là điểm trên cạnh  $BC$  kéo dài sao cho  $IB = 3IC$ .

- a) Tính  $\overrightarrow{AI}$  theo  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{AC}$ .  
b) Gọi  $J$  và  $K$  lần lượt là các điểm thuộc cạnh  $AC$ ,  $AB$  sao cho  $JA = 2JC$  và  $KB = 3KA$ . Tính  $\overrightarrow{JK}$  theo  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{AC}$ .  
c) Tính  $\overrightarrow{BC}$  theo  $\overrightarrow{AI}$  và  $\overrightarrow{JK}$ .

### 3. Bài tập trắc nghiệm

**CÂU 1.** Cho tam giác  $ABC$  có  $M$  là trung điểm của đoạn  $BC$ . Tìm mệnh đề đúng.

- (A)  $\overrightarrow{AM} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ . (B)  $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ .  
(C)  $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ . (D)  $\overrightarrow{AM} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ .

**CÂU 2.** Cho hình bình hành  $ABCD$ , gọi  $I$  là trung điểm của  $CD$ , đặt  $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ ,  $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$ . Biểu diễn vectơ  $\overrightarrow{BI}$  theo các vectơ  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ .

- (A)  $\overrightarrow{BI} = -\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$ . (B)  $\overrightarrow{BI} = \vec{a} + \vec{b}$ .  
(C)  $\overrightarrow{BI} = -\frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b}$ . (D)  $\overrightarrow{BI} = \frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b}$ .

**CÂU 3.** Cho tam giác  $ABC$  và một điểm  $M$  thỏa mãn  $\overrightarrow{BM} = k\overrightarrow{BC}$ . Biểu diễn vectơ  $\overrightarrow{AM}$  theo các vectơ  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{AC}$ .

- (A)  $\overrightarrow{AM} = (1-k)\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{AC}$ . (B)  $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{AC}$ .  
(C)  $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB} + (1-k)\overrightarrow{AC}$ . (D)  $\overrightarrow{AM} = (1-k)\overrightarrow{AB} + (1-k)\overrightarrow{AC}$ .

**CÂU 4.** Cho hình bình hành  $ABCD$ . Gọi  $I$  là điểm trên cạnh  $BC$  được xác định bởi  $\overrightarrow{BI} = k\overrightarrow{BC}$  ( $k \neq 1$ ). Tìm hệ thức liên hệ giữa  $\overrightarrow{DI}$ ,  $\overrightarrow{DB}$ ,  $\overrightarrow{DC}$ .

- (A)  $\overrightarrow{DI} = (k-1)\overrightarrow{DB} - k\overrightarrow{DC}$ . (B)  $\overrightarrow{DI} = (1-k)\overrightarrow{DB} + k\overrightarrow{DC}$ .  
(C)  $\overrightarrow{DI} = (1+k)\overrightarrow{DB} - k\overrightarrow{DC}$ . (D)  $\overrightarrow{DI} = (1+k)\overrightarrow{DB} + k\overrightarrow{DC}$ .

**CÂU 5.** Cho tam giác  $ABC$  có  $M$  là trung điểm của  $BC$ . Tính  $\overrightarrow{AB}$  theo  $\overrightarrow{AM}$  và  $\overrightarrow{BC}$ .

- (A)  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ . (B)  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AM}$ .  
(C)  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ . (D)  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AM}$ .

**CÂU 6.** Cho tam giác  $ABC$  có  $M$  là trung điểm của  $BC$ ,  $I$  là trung điểm của  $AM$ . Khẳng định nào sau đây đúng?

- (A)  $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$ . (B)  $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC})$ .  
(C)  $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ . (D)  $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ .

**CÂU 7.** Cho tam giác  $ABC$ . Hai điểm  $M$ ,  $N$  chia cạnh  $BC$  theo ba phần bằng nhau  $BM = MN = NC$ . Tính  $\overrightarrow{AM}$  theo  $\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{AC}$ .

- (A)  $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ . (B)  $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ .  
(C)  $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ . (D)  $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ .

**CÂU 8.** Cho tam giác  $ABC$  có  $G$  là trọng tâm tam giác. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

- (A)  $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{CG} = \vec{0}$ . (B)  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AG}$ .  
(C)  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AG}$ . (D)  $2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{AG}$ .

**CÂU 9.** Cho  $\triangle ABC$  có  $M$  là trung điểm của  $BC$ . Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

- (A)  $2\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ . (B)  $2\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ .  
(C)  $2\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC}$ . (D)  $2\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}$ .

### QUICK NOTE

QUICK NOTE

**CÂU 10.** Cho  $\triangle ABC$  và  $I$  thỏa mãn  $\vec{IA} = 3\vec{IB}$ . Phân tích  $\vec{CI}$  theo  $\vec{CA}$  và  $\vec{CB}$ .

(A)  $\vec{CI} = \frac{1}{2}(\vec{CA} - 3\vec{CB})$ .

(B)  $\vec{CI} = \vec{CA} - 3\vec{CB}$ .

(C)  $\vec{CI} = \frac{1}{2}(3\vec{CB} - \vec{CA})$ .

(D)  $\vec{CI} = 3\vec{CB} - \vec{CA}$ .

**CÂU 11.** Cho hình bình hành  $ABCD$  có  $N$  là trung điểm  $AB$  và  $G$  là trọng tâm  $\triangle ABC$ . Phân tích  $\vec{GA}$  theo  $\vec{BD}$  và  $\vec{NC}$ .

(A)  $\vec{GA} = -\frac{1}{3}\vec{BD} + \frac{2}{3}\vec{NC}$ .

(B)  $\vec{GA} = \frac{1}{3}\vec{BD} - \frac{4}{3}\vec{NC}$ .

(C)  $\vec{GA} = \frac{1}{3}\vec{BD} + \frac{2}{3}\vec{NC}$ .

(D)  $\vec{GA} = \frac{1}{3}\vec{BD} - \frac{2}{3}\vec{NC}$ .

**CÂU 12.** Cho  $\triangle ABC$  có  $AK, BM$  là hai trung tuyến. Đặt  $\vec{AK} = \vec{a}, \vec{BM} = \vec{b}$ . Hãy biểu diễn  $\vec{BC}$  theo  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  là

(A)  $\vec{BC} = \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{4}{3}\vec{b}$ .

(B)  $\vec{BC} = \frac{2}{3}\vec{a} - \frac{4}{3}\vec{b}$ .

(C)  $\vec{BC} = -\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{4}{3}\vec{b}$ .

(D)  $\vec{BC} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{4}{3}\vec{b}$ .

**CÂU 13.** Cho  $\triangle ABC$  với trọng tâm  $G$ . Đặt  $\vec{CA} = \vec{a}, \vec{CB} = \vec{b}$ . Biểu thị vectơ  $\vec{AG}$  theo hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  ta được

(A)  $\vec{AG} = \frac{2\vec{a} - \vec{b}}{3}$ .

(B)  $\vec{AG} = \frac{-2\vec{a} + \vec{b}}{3}$ .

(C)  $\vec{AG} = \frac{2\vec{a} + \vec{b}}{3}$ .

(D)  $\vec{AG} = \frac{\vec{a} - 2\vec{b}}{3}$ .

**CÂU 14.** Cho tam giác  $ABC$ . Gọi  $M$  trên cạnh  $BC$  sao cho  $MB = 3MC$ . Khi đó, biểu diễn vectơ  $\vec{AM}$  theo vectơ  $\vec{AB}$  và vectơ  $\vec{AC}$  là

(A)  $\vec{AM} = \frac{1}{4}\vec{AB} + 3\vec{AC}$ .

(B)  $\vec{AM} = \frac{1}{4}\vec{AB} + \frac{3}{4}\vec{AC}$ .

(C)  $\vec{AM} = \frac{1}{4}\vec{AB} + \frac{1}{6}\vec{AC}$ .

(D)  $\vec{AM} = \frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{1}{6}\vec{AC}$ .

**CÂU 15.** Cho tam giác  $ABC$  có trọng tâm  $G$ . Đặt  $\vec{CA} = \vec{u}, \vec{CB} = \vec{v}$ . Khi đó  $\vec{AG}$  bằng

(A)  $\frac{2\vec{u} - \vec{v}}{3}$ .

(B)  $\frac{2\vec{u} + \vec{v}}{3}$ .

(C)  $\frac{\vec{u} - 2\vec{v}}{3}$ .

(D)  $\frac{-2\vec{u} + \vec{v}}{3}$ .

**CÂU 16.** Cho tam giác  $ABC$  có  $G$  là trọng tâm tam giác. Điểm  $N$  trên  $BC$  sao cho  $\vec{CN} = \frac{1}{2}\vec{BC}$ . Biểu diễn vectơ  $\vec{AC}$  theo các vectơ  $\vec{AG}$  và  $\vec{AN}$ .

(A)  $\vec{AC} = \frac{2}{3}\vec{AG} + \frac{1}{2}\vec{AN}$ .

(B)  $\vec{AC} = \frac{3}{4}\vec{AG} + \frac{1}{2}\vec{AN}$ .

(C)  $\vec{AC} = \frac{4}{3}\vec{AG} + \frac{1}{2}\vec{AN}$ .

(D)  $\vec{AC} = \frac{3}{4}\vec{AG} - \frac{1}{2}\vec{AN}$ .

**CÂU 17.** Cho  $\triangle ABC$  với  $G$  là trọng tâm. Đặt  $\vec{CA} = \vec{a}, \vec{CB} = \vec{b}$ . Khi đó  $\vec{AG}$  được biểu diễn theo hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  là

(A)  $\vec{AG} = \frac{1}{3}\vec{a} - \frac{2}{3}\vec{b}$ .

(B)  $\vec{AG} = \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$ .

(C)  $\vec{AG} = \frac{2}{3}\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b}$ .

(D)  $\vec{AG} = -\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$ .

**CÂU 18.** Gọi  $G$  là trọng tâm tam giác  $ABC$ . Đặt  $\vec{GA} = \vec{a}, \vec{GB} = \vec{b}$ . Tìm các giá trị thực của  $m, n$  để  $\vec{BC} = m\vec{a} + n\vec{b}$ .

(A)  $m = 1; n = 2$ .

(B)  $m = -1; n = -2$ .

(C)  $m = -2; n = -1$ .

(D)  $m = 2; n = 1$ .

**CÂU 19.** Cho tứ giác  $ABCD$ . Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $AD$  và  $BC$ . Hãy tìm  $m$  và  $n$  sao cho  $\vec{MN} = m\vec{AB} + n\vec{DC}$ .

(A)  $m = \frac{1}{2}, n = \frac{1}{2}$ .

(B)  $m = -\frac{1}{2}, n = \frac{1}{2}$ .

(C)  $m = \frac{1}{2}, n = -\frac{1}{2}$ .

(D)  $m = -\frac{1}{2}, n = -\frac{1}{2}$ .

**CÂU 20.** Gọi  $G$  là trọng tâm của  $\triangle ABC$ . Đặt  $\vec{GA} = \vec{a}, \vec{GB} = \vec{b}$ . Hãy tìm  $m, n$  để có  $\vec{BC} = m\vec{a} + n\vec{b}$ .

(A)  $m = 1, n = 2$ .

(B)  $m = -1, n = -2$ .

(C)  $m = 2, n = 1$ .

(D)  $m = -2, n = -1$ .

**CÂU 21.** Cho tứ giác  $ABCD$  (với  $AB, CD$  không song song). Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $AD$  và  $BC$ . Tìm  $m, n$  để  $\vec{MN} = m\vec{AB} + n\vec{DC}$ .

(A)  $m = \frac{1}{2}, n = \frac{1}{2}$ .

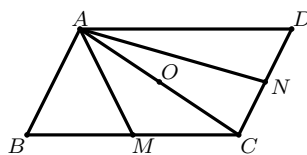
(B)  $m = -\frac{1}{2}, n = \frac{1}{2}$ .

(C)  $m = \frac{1}{2}, n = -\frac{1}{2}$ .

(D)  $m = -\frac{1}{2}, n = -\frac{1}{2}$ .

**CÂU 22.**

Cho hình bình hành  $ABCD$  tâm  $O$ . Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $BC$  và  $CD$ . Đặt  $\vec{a} = \vec{AM}$ ,  $\vec{b} = \vec{AN}$ . Hãy biểu diễn  $\vec{AO}$  theo  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$ .



- ☐ A  $\vec{AO} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$ .      ☐ B  $\vec{AO} = \frac{1}{6}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$ .  
☐ C  $\vec{AO} = \frac{1}{3}\vec{a} + 2\vec{b}$ .      ☐ D  $\vec{AO} = \vec{a} + 3\vec{b}$ .

**CÂU 23.** Cho tam giác  $ABC$ . Gọi  $M$  là trung điểm của  $AB$  và  $N$  là một điểm trên cạnh  $AC$  sao cho  $NC = 2NA$ . Gọi  $K$  là điểm trên cạnh  $MN$  sao cho  $KN = 3KM$ . Kết quả nào dưới đây đúng?

- ☐ A  $\vec{AK} = -\frac{3}{8}\vec{AB} + \frac{1}{12}\vec{AC}$ .      ☐ B  $\vec{AK} = -\frac{3}{8}\vec{AB} - \frac{1}{12}\vec{AC}$ .  
☐ C  $\vec{AK} = \frac{3}{8}\vec{AB} + \frac{1}{12}\vec{AC}$ .      ☐ D  $\vec{AK} = \frac{3}{8}\vec{AB} - \frac{1}{12}\vec{AC}$ .

**CÂU 24.** Cho tứ giác  $ABCD$ . Trên cạnh  $AB, CD$  lần lượt lấy các điểm  $M, N$  sao cho  $3\vec{AM} = 2\vec{AB}$  và  $3\vec{DN} = 2\vec{DC}$ . Tính vectơ  $\vec{MN}$  theo hai vectơ  $\vec{AD}, \vec{BC}$ .

- ☐ A  $\vec{MN} = \frac{1}{3}\vec{AD} + \frac{1}{3}\vec{BC}$ .      ☐ B  $\vec{MN} = \frac{1}{3}\vec{AD} - \frac{2}{3}\vec{BC}$ .  
☐ C  $\vec{MN} = \frac{1}{3}\vec{AD} + \frac{2}{3}\vec{BC}$ .      ☐ D  $\vec{MN} = \frac{2}{3}\vec{AD} + \frac{1}{3}\vec{BC}$ .

**CÂU 25.** Cho tam giác đều  $ABC$  và điểm  $I$  thỏa mãn  $\vec{IA} = 2\vec{IB}$ . Mệnh đề nào sau đây đúng?

- ☐ A  $\vec{CI} = \frac{\vec{CA} - 2\vec{CB}}{3}$ .      ☐ B  $\vec{CI} = \frac{\vec{CA} + 2\vec{CB}}{3}$ .  
☐ C  $\vec{CI} = -\vec{CA} + 2\vec{CB}$ .      ☐ D  $\vec{CI} = \frac{\vec{CA} + 2\vec{CB}}{-3}$ .

**CÂU 26.** Cho tam giác  $ABC$  có  $G$  là trọng tâm tam giác. Lấy các điểm  $P, Q$  sao cho  $\vec{PA} = 2\vec{PB}$ ,  $3\vec{QA} + 2\vec{QC} = \vec{0}$ . Biểu diễn vectơ  $\vec{AG}$  theo các vectơ  $\vec{AP}, \vec{AQ}$ .

- ☐ A  $\vec{AG} = \frac{1}{3}\vec{AP} + \frac{5}{6}\vec{AQ}$ .      ☐ B  $\vec{AG} = \frac{5}{6}\vec{AP} + \frac{1}{6}\vec{AQ}$ .  
☐ C  $\vec{AG} = \frac{1}{6}\vec{AP} + \frac{5}{6}\vec{AQ}$ .      ☐ D  $\vec{AG} = \frac{1}{2}\vec{AP} + \frac{1}{3}\vec{AQ}$ .

**CÂU 27.** Cho tam giác  $ABC$ . Gọi  $I$  là điểm trên cạnh  $BC$  sao cho  $2CI = 3BI$  và  $J$  thuộc  $BC$  kéo dài sao cho  $5JB = 2JC$ . Gọi  $G$  là trọng tâm tam giác  $ABC$ . Biểu diễn vectơ  $\vec{AG}$  theo các vectơ  $\vec{AI}, \vec{AJ}$ .

- ☐ A  $\vec{AG} = \frac{35}{48}\vec{AI} - \frac{1}{16}\vec{AJ}$ .      ☐ B  $\vec{AG} = \frac{35}{48}\vec{AI} + \frac{1}{16}\vec{AJ}$ .  
☐ C  $\vec{AG} = \frac{25}{16}\vec{AI} - \frac{3}{16}\vec{AJ}$ .      ☐ D  $\vec{AG} = \frac{25}{16}\vec{AI} + \frac{3}{16}\vec{AJ}$ .

**CÂU 28.** Cho tam giác  $ABC$ . Gọi  $G$  là trọng tâm tam giác và  $H$  là điểm đối xứng của  $B$  qua  $G$ . Gọi  $M$  là trung điểm  $BC$ . Biểu diễn vectơ  $\vec{MH}$  theo các vectơ  $\vec{AB}, \vec{AC}$ .

- ☐ A  $\vec{MH} = \frac{5}{6}\vec{AB} + \frac{1}{6}\vec{AC}$ .      ☐ B  $\vec{MH} = -\frac{1}{6}\vec{AB} + \frac{5}{6}\vec{AC}$ .  
☐ C  $\vec{MH} = -\frac{5}{6}\vec{AB} + \frac{1}{6}\vec{AC}$ .      ☐ D  $\vec{MH} = \frac{1}{6}\vec{AB} + \frac{5}{6}\vec{AC}$ .

**CÂU 29.** Cho góc  $\widehat{xOy} = 60^\circ$ . Các điểm  $A, B$  nằm trên tia  $Ox$ , các điểm  $C, D$  nằm trên tia  $Oy$  sao cho  $AB = CD = 2$ . Gọi  $I, J$  lần lượt là trung điểm các đoạn  $AC, BD$ . Biết  $A$  nằm giữa  $O$  và  $B$ ,  $C$  nằm giữa  $O$  và  $D$ , tính  $IJ$ .

- ☐ A  $IJ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ .      ☐ B  $IJ = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ .      ☐ C  $IJ = \sqrt{3}$ .      ☐ D  $IJ = 2\sqrt{3}$ .

**CÂU 30.** Cho tam giác  $ABC$ ,  $N$  là điểm xác định bởi  $\vec{CN} = \frac{1}{2}\vec{BC}$ . Gọi  $G$  là trọng tâm tam giác  $ABC$ . Hệ thức tính  $\vec{AC}$  theo  $\vec{AG}$  và  $\vec{AN}$  là

- ☐ A  $\vec{AC} = \frac{2}{3}\vec{AG} + \frac{1}{3}\vec{AN}$ .      ☐ B  $\vec{AC} = \frac{4}{3}\vec{AG} - \frac{1}{3}\vec{AN}$ .  
☐ C  $\vec{AC} = \frac{3}{4}\vec{AG} + \frac{1}{2}\vec{AN}$ .      ☐ D  $\vec{AC} = \frac{3}{4}\vec{AG} - \frac{1}{2}\vec{AN}$ .

**QUICK NOTE**

## QUICK NOTE

### Dạng 5. Chứng minh ba điểm thẳng hàng, hai đường thẳng song song, hai điểm trùng nhau

- ☑ Để chứng minh 3 điểm  $A, B, C$  thẳng hàng, ta chứng minh:  $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$  (1).  
Để nhận được (1), ta lựa chọn một trong hai hướng sau:

- Sử dụng các quy tắc biến đổi vectơ.
- Xác định (tính) vectơ  $\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{AC}$  thông qua một tổ hợp trung gian.

**Chú ý:**

- Cho ba điểm  $A, B, C$ . Điều kiện cần và đủ để  $A, B, C$  thẳng hàng là:  $\overrightarrow{MC} = \alpha\overrightarrow{MA} + (1 - \alpha)\overrightarrow{MB}$  với điểm  $M$  tùy ý và số thực  $\alpha$  bất kỳ. Đặc biệt khi  $0 \leq \alpha \leq 1$  thì  $C \in AB$ . Kết quả trên còn được sử dụng để tìm điều kiện của tham số  $k$  (hoặc  $m$ ) cho ba điểm  $A, B, C$  thẳng hàng.
- Nếu không dễ nhận thấy  $k$  trong biểu thức  $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$ , ta nên quy đồng biểu thức phân tích vectơ  $\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{AC}$  để tìm ra số  $k$ .

- ☑ Để chứng minh  $AB \parallel CD$  ta cần chứng minh  $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{DC}$ .

## 1. Ví dụ minh họa

**VÍ DỤ 1.** Cho hình bình hành  $ABCD$ , tâm  $O$ . Gọi  $M, N$  theo thứ tự là trung điểm của  $AB, CD$  và  $P$  là điểm thỏa mãn hệ thức  $\overrightarrow{OP} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}$ . Chứng minh 3 điểm  $B, P, N$  thẳng hàng.

**VÍ DỤ 2.** Cho bốn điểm phân biệt  $A, B, C, D$  thỏa:  $2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC} = 5\overrightarrow{AD}$ . Chứng minh  $B, C, D$  thẳng hàng.

**VÍ DỤ 3.** Cho  $\triangle ABC$ , lấy điểm  $M, N, P$  sao cho  $\overrightarrow{MB} = 3\overrightarrow{MC}$ ,  $\overrightarrow{NA} + 3\overrightarrow{NC} = \vec{0}$ ,  $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} = \vec{0}$ .

- Tính  $\overrightarrow{PM}, \overrightarrow{PN}$  theo  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ .
- Chứng minh ba điểm:  $M, N, P$  thẳng hàng.

**VÍ DỤ 4.** Cho  $\triangle ABC$  có  $I$  là trung điểm của trung tuyến  $AM$  và  $D$  là điểm thỏa hệ thức  $3\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$ . Biểu diễn vectơ  $\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BI}$  theo  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$  và chứng minh ba điểm  $B, I, D$  thẳng hàng.

## 2. Bài tập áp dụng

**BÀI 1.** Cho  $\triangle ABC$ .

- Dựng các điểm  $K, L$  sao cho  $\overrightarrow{KA} + 2\overrightarrow{KB} + 3\overrightarrow{KC} = \vec{0}$ ,  $2\overrightarrow{LB} + 3\overrightarrow{LC} = \vec{0}$
- Chứng minh ba điểm  $A, K, L$  thẳng hàng.

**BÀI 2.** Cho hình bình hành  $ABCD$ . Gọi  $I$  là trung điểm của  $AB$  và  $E$  là điểm thỏa hệ thức  $3\overrightarrow{IE} = \overrightarrow{ID}$ . Chứng minh ba điểm  $A, C, E$  thẳng hàng.

**BÀI 3.** Cho  $\triangle ABC$ .

- Dựng các điểm  $K, L$  sao cho  $\overrightarrow{KA} + 2\overrightarrow{KB} + 3\overrightarrow{KC} = \vec{0}$  và  $2\overrightarrow{LB} + 3\overrightarrow{LC} = \vec{0}$
- Chứng minh ba điểm  $A, K, L$  thẳng hàng.

**BÀI 4.** Cho  $\triangle ABC$ . Gọi  $M$  là trung điểm của cạnh  $AB$ ,  $N$  và  $P$  là hai điểm thỏa mãn hệ thức  $\overrightarrow{NA} + 2\overrightarrow{NC} = \vec{0}$ ,  $\overrightarrow{PB} - 2\overrightarrow{PC} = \vec{0}$ . Chứng minh ba điểm  $M, N, P$  thẳng hàng.

**BÀI 5.** Cho  $\triangle ABC$ . Hai điểm  $M, N$  được xác định bởi  $3\overrightarrow{MA} + 4\overrightarrow{MB} = \vec{0}$ ,  $\overrightarrow{NB} - 3\overrightarrow{NC} = \vec{0}$ . Chứng minh  $MN$  đi qua trọng tâm  $\triangle ABC$ .

**BÀI 6.** Cho  $\triangle ABC$ .

- Dựng các điểm  $D, E$  thỏa các hệ thức  $\overrightarrow{AD} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{DE} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BC}$ .
- Chứng minh ba điểm  $A, C, E$  thẳng hàng.

**BÀI 7.** Cho hình bình hành  $ABCD$ . Gọi  $I$  là trung điểm của cạnh  $BC$  và  $E$  là điểm xác định bởi  $\overrightarrow{AE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ . Chứng minh ba điểm  $D, E, I$  thẳng hàng.

**BÀI 8.** Cho  $\triangle ABC$  có trung tuyến  $AD$  và  $M$  là trung điểm  $AD$ . Điểm  $N$  được lấy trên  $AC$  sao cho  $3\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AC}$ . Chứng minh ba điểm  $B, M, N$  thẳng hàng.

**BÀI 9.** Cho  $\triangle ABC$  có  $M$  là trung điểm  $BC$  và  $O$  là trung điểm của  $AM$ . Trên  $AB$  lấy điểm  $I$ ,  $AC$  lấy điểm  $J$  sao cho  $\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{AJ} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$ . Chứng minh ba điểm  $I, J, O$  thẳng hàng.

**BÀI 10.** Cho tứ giác  $ABCD$ . Gọi  $M, N, P, Q$  lần lượt là trung điểm của  $AB, BC, CD, DA$ . Gọi  $O$  là giao điểm của  $MP$  và  $NQ$ ,  $G$  là trọng tâm của tam giác  $BCD$ . Chứng minh rằng ba điểm  $A, O, G$  thẳng hàng.

**BÀI 11.** Cho tứ giác  $ABCD$ . Gọi  $M, N$  là hai điểm di động trên  $AB, CD$  sao cho  $\frac{MA}{MB} = \frac{ND}{NC}$  và hai điểm  $I, J$  lần lượt là trung điểm của  $AD, BC$ .

- Tính  $\overrightarrow{IJ}$  theo  $\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{DC}$ .
- Chứng minh trung điểm  $P$  của  $MN$  nằm trên  $IJ$ .

**BÀI 12.** Cho  $\triangle ABC$ . Gọi  $P, Q, R$  là các điểm thỏa các đẳng thức :

$$3\overrightarrow{PB} + 4\overrightarrow{PC} = \vec{0}, \quad \overrightarrow{AQ} = 2\overrightarrow{QC}, \quad k\overrightarrow{RA} = \overrightarrow{RB}, \quad k \neq 1.$$

- Chứng minh rằng:  $21\overrightarrow{PQ} = 2\overrightarrow{BC} + 7\overrightarrow{BA}$ .
- Chứng minh rằng:  $\overrightarrow{RP} = \frac{k}{1-k}\overrightarrow{BA} + \frac{4}{7}\overrightarrow{BC}$ .
- Tìm  $k$  sao cho  $P, Q, R$  thẳng hàng.

**BÀI 13.** Cho hình bình hành  $ABCD$ .

- Gọi  $I, F, K$  là các điểm thỏa mãn  $\overrightarrow{AI} = \alpha\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{AF} = \beta\overrightarrow{AC}$ ,  $\overrightarrow{AK} = \gamma\overrightarrow{AD}$ . Chứng minh điều kiện cần và đủ để  $I, F, K$  thẳng hàng là

$$\frac{1}{\beta} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\gamma} \quad (\alpha, \beta, \gamma \neq 0).$$

- Gọi  $M, N$  là hai điểm lần lượt trên đoạn  $AB, CD$  sao cho  $\frac{AM}{AB} = \frac{1}{3}$ ,  $\frac{CN}{CD} = \frac{1}{2}$ . Gọi  $G$  là trọng tâm  $\triangle MNB$ . Tính  $\overrightarrow{AN}, \overrightarrow{AG}$  theo  $\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{AC}$ . Gọi  $H$  là điểm xác định bởi  $\overrightarrow{BH} = k \cdot \overrightarrow{BC}$ . Tính  $\overrightarrow{AH}$  theo  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$  và  $k$ . Tìm  $k$  để đường thẳng  $AH$  đi qua điểm  $G$ .

### 3. Bài tập trắc nghiệm

**CÂU 1.** Cho ba điểm  $A, B, C$  phân biệt. Điều kiện cần và đủ để ba điểm thẳng hàng là

- $AB = AC$ .
- $\exists k \in \mathbb{R}^*: \overrightarrow{AB} = k \cdot \overrightarrow{AC}$ .
- $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$ .
- $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 3\overrightarrow{MC}, \forall$  điểm  $M$ .

**CÂU 2.** Khẳng định nào sau đây sai?

- Ba điểm phân biệt  $A, B, C$  thẳng hàng khi và chỉ khi  $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{BC}, k \neq 0$ .
- Ba điểm phân biệt  $A, B, C$  thẳng hàng khi và chỉ khi  $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{BC}, k \neq 0$ .
- Ba điểm phân biệt  $A, B, C$  thẳng hàng khi và chỉ khi  $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}, k \neq 0$ .
- Ba điểm phân biệt  $A, B, C$  thẳng hàng khi và chỉ khi  $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$ .

**CÂU 3.** Phát biểu nào là sai?

- Nếu  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$  thì  $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}|$ .
- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$  thì  $A, B, C, D$  thẳng hàng.
- Nếu  $3\overrightarrow{AB} + 7\overrightarrow{AC} = \vec{0}$  thì  $A, B, C$  thẳng hàng.
- $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{BA}$ .

#### QUICK NOTE

QUICK NOTE

**CÂU 4.** Cho hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  không cùng phương. Hai vectơ nào sau đây là cùng phương?

- (A)  $\vec{u} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$  và  $\vec{v} = \frac{1}{2}\vec{a} - 3\vec{b}$ . (B)  $\vec{u} = \frac{3}{5}\vec{a} + 3\vec{b}$  và  $\vec{v} = 2\vec{a} - \frac{3}{5}\vec{b}$ .  
(C)  $\vec{u} = \frac{2}{3}\vec{a} + 3\vec{b}$  và  $\vec{v} = 2\vec{a} - 9\vec{b}$ . (D)  $\vec{u} = 2\vec{a} - \frac{3}{2}\vec{b}$  và  $\vec{v} = -\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b}$ .

**CÂU 5.** Biết rằng hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  không cùng phương nhưng hai vectơ  $2\vec{a} - 3\vec{b}$  và  $\vec{a} + (x-1)\vec{b}$  cùng phương. Khi đó giá trị của  $x$  là

- (A)  $\frac{1}{2}$ . (B)  $-\frac{3}{2}$ . (C)  $-\frac{1}{2}$ . (D)  $\frac{3}{2}$ .

**CÂU 6.** Cho  $\vec{a}, \vec{b}$  không cùng phương,  $\vec{x} = -2\vec{a} + \vec{b}$ . vectơ cùng hướng với  $\vec{x}$  là

- (A)  $2\vec{a} - \vec{b}$ . (B)  $-\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$ . (C)  $4\vec{a} + 2\vec{b}$ . (D)  $-\vec{a} + \vec{b}$ .

**CÂU 7.** Biết rằng hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  không cùng phương nhưng hai vectơ  $3\vec{a} - 2\vec{b}$  và  $(x+1)\vec{a} + 4\vec{b}$  cùng phương. Khi đó giá trị của  $x$  là

- (A)  $-7$ . (B)  $7$ . (C)  $5$ . (D)  $6$ .

**CÂU 8.** Biết rằng hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  không cùng phương nhưng hai vectơ  $2\vec{a} - 3\vec{b}$  và  $\vec{a} + (x-1)\vec{b}$  cùng phương. Khi đó giá trị của  $x$  là

- (A)  $\frac{1}{2}$ . (B)  $-\frac{3}{2}$ . (C)  $-\frac{1}{2}$ . (D)  $\frac{3}{2}$ .

**CÂU 9.** Nếu  $I$  là trung điểm đoạn thẳng  $AB$  và  $\vec{IA} = k\vec{AB}$  thì giá trị của  $k$  bằng

- (A)  $1$ . (B)  $\frac{1}{2}$ . (C)  $-\frac{1}{2}$ . (D)  $-2$ .

**CÂU 10.** Cho tam giác  $ABC$  và một điểm  $M$  tùy ý. Chứng minh rằng vectơ  $\vec{v} = \vec{MA} + \vec{MB} - 2\vec{MC}$ . Hãy xác định vị trí của điểm  $D$  sao cho  $\vec{CD} = \vec{v}$ .

- (A)  $D$  là điểm thứ tư của hình bình hành  $ABCD$ .  
(B)  $D$  là điểm thứ tư của hình bình hành  $ACBD$ .  
(C)  $D$  là trọng tâm của tam giác  $ABC$ .  
(D)  $D$  là trực tâm của tam giác  $ABC$ .

**CÂU 11.** Cho tam giác  $ABC$ . Hai điểm  $M, N$  được xác định bởi các hệ thức  $\vec{BC} + \vec{MA} = \vec{0}$ ,  $\vec{AB} - \vec{NA} - 3\vec{AC} = \vec{0}$ . Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

- (A)  $MN \perp AC$ .  
(B)  $MN // AC$ .  
(C)  $M$  nằm trên đường thẳng  $AC$ .  
(D) Hai đường thẳng  $MN$  và  $AC$  trùng nhau.

**CÂU 12.** Cho tam giác  $ABC$  có trọng tâm  $G$ . Các điểm  $M, N$  thỏa mãn  $7\vec{MG} = 3\vec{GC} - \vec{GB}$ ;  $\vec{GN} = \frac{1}{2}(3\vec{GC} - \vec{GB})$ . Khẳng định nào dưới đây là đúng?

- (A) Đường thẳng  $MN$  đi qua  $G$ . (B) Đường thẳng  $MN$  đi qua  $A$ .  
(C) Đường thẳng  $MN$  đi qua  $B$ . (D) Đường thẳng  $MN$  đi qua  $C$ .

**CÂU 13.** Cho hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  không cùng phương. Các điểm  $A, B, C$  sao cho  $\vec{AB} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$ ;  $\vec{AC} = m\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$ . Khi  $A, B, C$  thẳng hàng thì khẳng định nào sau đây đúng?

- (A)  $m \in (2; 3)$ . (B)  $m \in (1; 2)$ . (C)  $m \in (-1; 0)$ . (D)  $m \in (0; 1)$ .

**CÂU 14.** Cho tam giác  $ABC$ . Các điểm  $M, N$  thỏa mãn  $\vec{MN} = \vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}$ . Khi đó, đường thẳng  $MN$  luôn đi qua một điểm cố định  $I$ . Khẳng định nào sau đây đúng?

- (A)  $I$  là trọng tâm của tam giác  $ABC$ .  
(B)  $I$  là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC$ .  
(C)  $I$  là trực tâm của tam giác  $ABC$ .  
(D) Tứ giác  $ABCI$  là hình bình hành.

**CÂU 15.** Cho tam giác  $ABC$ . Các điểm  $M, N$  thỏa mãn  $\vec{MN} = \vec{MA} - \vec{MB} + 2\vec{MC}$ . Khi đó, đường thẳng  $MN$  luôn đi qua một điểm cố định  $I$ . Khẳng định nào sau đây đúng?

- (A)  $\vec{IC} = \frac{1}{2}\vec{AB}$ . (B)  $\vec{IC} = \frac{1}{2}\vec{BA}$ . (C)  $\vec{IB} = \frac{1}{2}\vec{AC}$ . (D)  $\vec{IB} = \frac{1}{2}\vec{CA}$ .

**CÂU 16.** Cho hình bình hành  $ABCD$  có  $O$  là giao điểm của hai đường chéo. Các điểm  $M, N$  thỏa mãn  $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}$ . Khi đó, đường thẳng  $MN$  luôn đi qua một điểm cố định  $I$ . Khẳng định nào sau đây đúng?

- (A)  $I$  là trọng tâm của tam giác  $OBC$ .  
 (B)  $I$  là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC$ .  
 (C)  $I$  là trung điểm của cạnh  $DC$ .  
 (D) Tứ giác  $ABCI$  là hình bình hành.

**CÂU 17.** Cho tam giác  $ABC$  có trọng tâm  $G$ . Gọi  $P, Q$  là các điểm sao cho  $\overrightarrow{PA} = 2\overrightarrow{PB}$ ,  $\overrightarrow{AQ} + k\overrightarrow{AC} = \vec{0}$  với  $k \in \mathbb{R}$ . Tìm  $k$  để  $P, Q, G$  thẳng hàng.

- (A)  $k = \frac{2}{5}$ . (B)  $k = \frac{2}{3}$ . (C)  $k = -\frac{2}{5}$ . (D)  $k = -\frac{2}{3}$ .

**CÂU 18.** Cho tam giác  $ABC$ . Gọi  $M, N$  là các điểm thỏa mãn  $\overrightarrow{BM} = 3\overrightarrow{BC} - 2\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{CN} = k\overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{BC}$ . Tìm  $k$  để  $A, M, N$  thẳng hàng.

- (A)  $k = -\frac{3}{2}$ . (B)  $k = -\frac{1}{2}$ . (C)  $k = \frac{1}{2}$ . (D)  $k = \frac{3}{2}$ .

**CÂU 19.** Cho tam giác  $ABC$  có  $I$  là trung điểm của  $BC$ . Gọi  $M, N, P$  lần lượt là các điểm xác định bởi  $\overrightarrow{AM} = m\overrightarrow{AB}$ ;  $\overrightarrow{AN} = n\overrightarrow{AI}$ ;  $\overrightarrow{AP} = p\overrightarrow{AC}$ , với  $mnp \neq 0$ . Tìm điều kiện của  $m, n, p$  để  $M, N, P$  thẳng hàng.

- (A)  $mp = mn + np$ . (B)  $2mn = mp + np$ . (C)  $2np = mn + mp$ . (D)  $2mp = mn + np$ .

**CÂU 20.** Cho tam giác  $ABC$ . Gọi  $D, E$  lần lượt là các điểm thỏa mãn  $\overrightarrow{BD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$ ;  $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$ . Điểm  $K$  trên  $AD$  thỏa mãn  $\overrightarrow{AK} = \frac{a}{b}\overrightarrow{AD}$  (với  $\frac{a}{b}$  là phân số tối giản) sao cho 3 điểm  $B, K, E$  thẳng hàng. Tính  $P = a^2 + b^2$ .

- (A)  $P = 5$ . (B)  $P = 13$ . (C)  $P = 29$ . (D)  $P = 10$ .

## Bài 6. TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VÉC-TƠ

### A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

#### 1. Góc giữa hai véc-tơ

Cho  $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$ . Từ một điểm  $O$  bất kì vẽ  $\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}$ . Khi đó số đo của góc  $\widehat{AOB}$  được gọi là số đo góc giữa hai véc-tơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  hay đơn giản là góc giữa hai véc-tơ  $\vec{a}, \vec{b}$ . Kí hiệu  $(\vec{a}, \vec{b}) = \widehat{AOB}$ .



- ☞ Quy ước rằng góc giữa hai véc-tơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  có thể nhận một giá trị tùy ý từ  $0^\circ$  đến  $180^\circ$ .
- ☞  $(\vec{a}, \vec{b}) = 0^\circ \Leftrightarrow \vec{a}, \vec{b}$  cùng hướng.
- ☞  $(\vec{a}, \vec{b}) = 180^\circ \Leftrightarrow \vec{a}, \vec{b}$  ngược hướng.
- ☞ Nếu  $(\vec{a}, \vec{b}) = 90^\circ$  thì ta nói rằng  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  vuông góc với nhau, kí hiệu  $\vec{a} \perp \vec{b}$  hoặc  $\vec{b} \perp \vec{a}$ .  
 Đặc biệt  $\vec{0}$  được coi là vuông góc với mọi véc-tơ.

#### 2. Tích vô hướng của hai véc-tơ

⚡ **ĐỊNH NGHĨA 6.1.** Tích vô hướng của hai véc-tơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  là một số, kí hiệu  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ , được xác định bởi công thức sau

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}).$$



- ☞ Ta có  $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ .
- ☞  $\vec{a} \cdot \vec{a}$  còn được viết là  $\vec{a}^2$  được gọi là bình phương vô hướng của véc-tơ  $\vec{a}$ . Ta có  $\vec{a}^2 = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos 0^\circ = |\vec{a}|^2$ .

### QUICK NOTE

QUICK NOTE

## B. CÁC DẠNG TOÁN

### Dạng 1. Tích tích vô hướng của hai véc-tơ và xác định góc

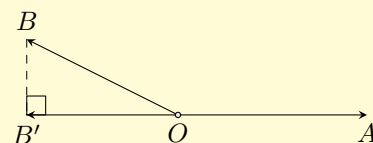
Để tính tích vô hướng của hai véc-tơ ta có thể lựa chọn một trong các hướng sau đây:

- ☑ Đưa hai véc-tơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  về chung gốc để xác định chính xác góc giữa hai véc-tơ rồi áp dụng định nghĩa  $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b})$ .
- ☑ Sử dụng các tính chất và các hằng đẳng thức của tích vô hướng của hai véc-tơ.
- ☑ Sử dụng dạng tọa độ nếu  $\vec{a} = (a_1; a_2)$ ,  $\vec{b} = (b_1; b_2)$  thì

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2.$$

- ☑ Sử dụng công thức hình chiếu

Cho hai véc-tơ  $\vec{OA}$ ,  $\vec{OB}$ . Gọi  $B'$  là hình chiếu của  $B$  trên đường thẳng  $OA$ . Khi đó  $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = \vec{OA} \cdot \vec{OB'}$ .



Chứng minh: Thật vậy, ta có  $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = \vec{OA} \cdot (\vec{OB'} + \vec{B'B}) = \vec{OA} \cdot \vec{OB'}$ .

Để xác định góc giữa hai véc-tơ ta có thể lựa chọn một trong các hướng sau đây:

- ☑ Đưa hai véc-tơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  về chung gốc rồi xác định góc theo định nghĩa.
- ☑ Sử dụng các tính chất và các hằng đẳng thức để tính tích vô hướng của hai véc-tơ rồi sau đó áp dụng công thức  $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$

Cần lưu ý một số kết quả đặc biệt sau:

- ☑  $(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{a})$ .
- ☑ Nếu  $(\vec{a}, \vec{b}) = \alpha$  thì  $(\vec{a}, -\vec{b}) = 180^\circ - \alpha$ .
- ☑ Nếu  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  cùng hướng thì  $(\vec{a}, \vec{b}) = 0^\circ$ .
- ☑ Nếu  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  ngược hướng thì  $(\vec{a}, \vec{b}) = 180^\circ$ .

### 1. Ví dụ minh họa

**VÍ DỤ 1.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  và có  $\widehat{B} = 50^\circ$ . Hãy tính các góc  $(\vec{BA}, \vec{BC})$ ;  $(\vec{AB}, \vec{BC})$ ;  $(\vec{CA}, \vec{CB})$ ;  $(\vec{AC}, \vec{BC})$ ;  $(\vec{AC}, \vec{CB})$ ;  $(\vec{AC}, \vec{BA})$ .

**VÍ DỤ 2.** Cho tam giác đều  $ABC$  có cạnh  $a$  và trọng tâm  $G$ . Tính các tích vô hướng  $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$ ;  $\vec{AC} \cdot \vec{CB}$ ;  $\vec{AG} \cdot \vec{AB}$ ;  $\vec{GB} \cdot \vec{GC}$ ;  $\vec{BG} \cdot \vec{GA}$ ;  $\vec{GA} \cdot \vec{BC}$ .

**VÍ DỤ 3.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  có  $AB = a$ ,  $BC = 2a$  và  $G$  là trọng tâm. Tính giá trị của các biểu thức sau:

- a)  $\vec{AB} \cdot \vec{BC} + \vec{BC} \cdot \vec{CA} + \vec{CA} \cdot \vec{AB}$ .
- b)  $\vec{GA} \cdot \vec{GB} + \vec{GB} \cdot \vec{GC} + \vec{GC} \cdot \vec{GA}$ .

**VÍ DỤ 4.** Cho hình vuông  $ABCD$  cạnh  $a$ .  $M$  là trung điểm của  $AB$ ,  $G$  là trọng tâm tam giác  $ADM$ . Tính giá trị của các biểu thức sau:

- a)  $(\vec{AB} + \vec{AD})(\vec{BD} + \vec{BC})$ .
- b)  $\vec{CG}(\vec{CA} + \vec{DM})$ .

**VÍ DỤ 5.** Cho hai véc-tơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  có  $|\vec{a}| = 7$ ,  $|\vec{b}| = 12$  và  $|\vec{a} + \vec{b}| = 13$ . Tính cosin của góc giữa hai véc-tơ  $\vec{a}$  và  $\vec{a} + \vec{b}$ .



## 2. Bài tập tự luận

**BÀI 1.** Cho tam giác  $ABC$  vuông cân có  $AB = AC = a$  và  $AH$  là đường cao. Tính các tích vô hướng sau

- a)  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ ;                      b)  $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC}$ ;                      c)  $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB}$  và  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$ .

**BÀI 2.** Cho tam giác  $ABC$  đều cạnh  $a$  và  $AM$  là trung tuyến của tam giác. Tính các tích vô hướng sau

- a)  $\overrightarrow{AC} (2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC})$ ;                      c)  $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB}$ ;  
b)  $\overrightarrow{AC} (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})$ ;                      d)  $(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BC}) (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB})$ .

**BÀI 3.** Cho hình chữ nhật  $ABCD$  có  $AB = a\sqrt{2}$ ,  $AD = 2a$ . Gọi  $K$  là trung điểm của cạnh  $AD$ .

- a) Phân tích  $\overrightarrow{BK}$ ,  $\overrightarrow{AC}$  theo  $\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{AD}$ .  
b) Tính tích vô hướng  $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AC}$ .

**BÀI 4.** Cho tam giác  $ABC$  có  $AB = 5$ ,  $AC = 8$ ,  $BC = 7$ . Tính tích vô hướng  $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}$ .

**BÀI 5.** Cho hai véc-tơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  có độ dài bằng 1 và thỏa mãn điều kiện  $|2\vec{a} - 3\vec{b}| = \sqrt{7}$ . Tính  $\cos(\vec{a}, \vec{b})$ .

**BÀI 6.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  có  $BC = a\sqrt{3}$ ,  $M$  là trung điểm của  $BC$ . Biết rằng  $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{a^2}{2}$ . Hãy tính  $AB$ ,  $AC$ .

**BÀI 7.** Cho hai véc-tơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  có độ dài bằng 1 và góc tạo bởi hai véc-tơ đó bằng  $60^\circ$ . Xác định cosin góc giữa hai véc-tơ  $\vec{u}$  và  $\vec{v}$  với  $\vec{u} = \vec{a} + 2\vec{b}$ ,  $\vec{v} = \vec{a} - \vec{b}$ .

**BÀI 8.** Cho hai véc-tơ  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  thỏa mãn  $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$  và véc-tơ  $\vec{x} = \vec{a} + 2\vec{b}$  vuông góc với véc-tơ  $\vec{y} = 5\vec{a} - 4\vec{b}$ . Tính góc giữa hai véc-tơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$ .

**BÀI 9.** Cho các véc-tơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  thỏa mãn  $|\vec{a}| = 2$ ,  $|\vec{b}| = 1$  và  $(\vec{a}, \vec{b}) = 60^\circ$ . Tính góc giữa véc-tơ  $\vec{a}$  và véc-tơ  $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$ .

**BÀI 10.** Cho hình chữ nhật  $ABCD$  có  $AB = 2$ ,  $M$  là điểm được xác định bởi  $\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{MB}$ ;  $G$  là trọng tâm tam giác  $ADM$ . Tính  $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{GC}$ .

**BÀI 11.** Cho hình chữ nhật  $ABCD$  có cạnh  $AB = a$ ,  $AD = b$ . Tính theo  $a, b$  các tích vô hướng sau:

- a)  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ ;  $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AC}$ ;  $(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})$ ;  
b)  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD}$  với điểm  $M$  thuộc đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật  $ABCD$ .

### 📁 Dạng 2. Chứng minh đẳng thức tích vô hướng hay độ dài

- ☑ Với các biểu thức về tích vô hướng ta sử dụng định nghĩa hoặc tính chất của tích vô hướng. Cần đặc biệt lưu ý phép phân tích véc-tơ để biến đổi (quy tắc ba điểm, quy tắc trung điểm, quy tắc hình bình hành,...).
- ☑ Với các công thức về độ dài ta thường sử dụng  $AB^2 = \overrightarrow{AB}^2 = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB}$ . Cần nắm vững tính chất của các hình cơ bản.

## 1. Ví dụ minh họa

**VÍ DỤ 1.** Cho đoạn thẳng  $AB$  và  $I$  là trung điểm của  $AB$ . Chứng minh rằng với mỗi điểm  $O$  ta có

- a)  $\overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{IB} = 0$ .  
b)  $\overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{OB}^2 - \overrightarrow{OA}^2)$

**VÍ DỤ 2.** Cho điểm  $M$  thay đổi trên đường tròn tâm  $O$  bán kính  $R$  ngoại tiếp tam giác đều  $ABC$  cho trước. Chứng minh  $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 6R^2$ .

## QUICK NOTE

## QUICK NOTE

**VÍ DỤ 3.** Cho hình chữ nhật  $ABCD$  có tâm  $O$ ,  $M$  là điểm bất kì. Chứng minh

a)  $MA^2 + MC^2 = MB^2 + MD^2$  (1);

b)  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD}$  (2).

## 2. Bài tập tự luận

**BÀI 1.** Cho  $\triangle ABC$ , chứng minh  $AB^2 + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CA} = 0$ .

**BÀI 2.** Cho  $\triangle ABC$  nhọn, đường cao  $AH$ , Chứng minh rằng

a)  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AH}$ ;

b)  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{BC}$ .

**BÀI 3.** Chứng minh rằng với mọi tam giác  $ABC$  ta có  $S_{ABC} = \frac{1}{2} \sqrt{AB^2 \cdot AC^2 - (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})^2}$ .

**BÀI 4.** Cho  $\triangle ABC$  có trọng tâm  $G$ . Chứng minh rằng với mỗi điểm  $M$  ta có

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2.$$

**BÀI 5.** Cho hình chữ nhật  $ABCD$  có tâm  $O$ ,  $M$  là điểm bất kì. Chứng minh

$$MA^2 + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD} = 2\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MO}.$$

**BÀI 6.** Cho hình chữ nhật  $ABCD$  nội tiếp trong đường tròn tâm  $O$ , bán kính  $R$ . Chứng minh rằng với mọi  $M$  thuộc đường tròn  $(O)$  ta có

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} + (\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD})(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}) = 8R^2.$$

**BÀI 7.** Chứng minh rằng với mọi điểm  $A, B, C, M$  ta luôn có

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0. \text{ (hệ thức Euler).}$$

**BÀI 8.** Cho  $\triangle ABC$  các đường trung tuyến  $AD, BE, CF$ . Chứng minh rằng

$$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CF} \cdot \overrightarrow{AB} = 0.$$

**BÀI 9.** Cho  $\triangle ABC$  đường cao  $AH$ , trung tuyến  $AI$ . Chứng minh rằng  $|AB^2 - AC^2| = 2BC \cdot HI$ .

### Dạng 3. Điều kiện vuông góc

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0.$$

## 1. Ví dụ minh họa

**VÍ DỤ 1.** Cho hai véc-tơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  vuông góc với nhau và  $|\vec{a}| = 1, |\vec{b}| = \sqrt{2}$ . Chứng minh hai véc-tơ  $(2\vec{a} - \vec{b})$  và  $(\vec{a} + \vec{b})$  vuông góc với nhau.

**BÀI 1.** Cho  $\triangle ABC$  vuông tại  $A$  có  $AB = c, AC = b$ . Tính  $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$  theo  $b$  và  $c$ .

**BÀI 2.** Cho hai véc-tơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  thỏa mãn  $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$  và hai véc-tơ  $\vec{u} = \frac{2}{5}\vec{a} - 3\vec{b}$  và  $\vec{v} = \vec{a} + \vec{b}$  vuông góc với nhau. Xác định góc giữa hai véc-tơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$ .

### Dạng 4. Tập hợp điểm và chứng minh bất đẳng thức

Ta sử dụng các kết quả cơ bản sau:

a) Cho  $A, B$  là các điểm cố định,  $M$  là điểm di động

☑ Nếu  $|\overrightarrow{AM}| = k$  với  $k$  là số thực dương cho trước thì tập hợp các điểm  $M$  là đường tròn tâm  $A$ , bán kính  $R = k$ .

☑ Nếu  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$  thì tập hợp các điểm  $M$  là đường tròn đường kính  $AB$ .

QUICK NOTE

☉ Nếu  $\overrightarrow{MA} \cdot \vec{a} = 0$  với  $\vec{a} \neq \vec{0}$  cho trước thì tập hợp các điểm  $M$  là đường thẳng đi qua  $A$  và vuông góc với giá của vectơ  $\vec{a}$ .

b) Các bất đẳng thức vectơ

☉  $\vec{a}^2 \geq 0 \forall \vec{a}$ . Dấu "=" xảy ra khi  $\vec{a} = \vec{0}$ .

☉  $\vec{a} \cdot \vec{b} \leq |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$ . Dấu "=" xảy ra khi  $\vec{a} = k\vec{b}$ ,  $k > 0$ .

**VÍ DỤ 1.** Cho hai điểm  $A, B$  cố định có độ dài bằng  $a$ , vectơ  $\vec{a}$  khác  $\vec{0}$ . Tìm tập hợp điểm  $M$  sao cho

a)  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \frac{3a^2}{4}$

b)  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MA^2$

**VÍ DỤ 2.** Cho tam giác  $ABC$ . Tìm tập hợp điểm  $M$  sao cho

$$(\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}) \cdot \overrightarrow{BC} = 0.$$

**VÍ DỤ 3.** Cho tam giác  $ABC$ . Chứng minh rằng

a)  $\cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2}$ .

b)  $\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C \geq -\frac{3}{2}$ .

## 1. Bài tập tự luận

**BÀI 1.** Cho đoạn thẳng  $AB$  và số thực  $k$ . Tìm tập hợp điểm  $M$  trong mỗi trường hợp sau

a)  $2MA^2 = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$ .

b)  $MA^2 + 2MB^2 = k$ ,  $k > 0$ .

c)  $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{a} = k$ .

**BÀI 2.** Cho tứ giác  $ABCD$ ,  $I, J$  lần lượt là trung điểm của  $AB$  và  $CD$ . Tìm tập hợp điểm  $M$  sao cho  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MD} = \frac{1}{2}IJ^2$ .

**BÀI 3.** Cho tam giác  $ABC$ , góc  $A$  nhọn, trung tuyến  $AI$ . Tìm tập hợp những điểm  $M$  di động trong góc  $BAC$  sao cho  $AB \cdot AH + AC \cdot AK = AI^2$ , trong đó  $H$  và  $K$  theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của  $M$  lên  $AB$  và  $AC$ .

**BÀI 4.** Cho tam giác  $ABC$  và  $k$  là số thực cho trước. Tìm tập hợp những điểm  $M$  sao cho

$$MA^2 - MB^2 = k.$$

**BÀI 5.** Cho hình vuông  $ABCD$  cạnh  $a$  và số thực  $k$  cho trước. Tìm tập hợp điểm  $M$  sao cho

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD} = k.$$

**BÀI 6.** Cho tam giác  $ABC$  và các số thực  $x, y, z$ . Chứng minh rằng

$$xy \cos A + yz \cos B + zx \cos C \leq \frac{x^2 + y^2 + z^2}{2}.$$

## 2. Câu hỏi trắc nghiệm

**CÂU 1.** Cho  $\vec{a}, \vec{b}$  khác  $\vec{0}$ . Kí hiệu  $(\vec{a}, \vec{b})$  là góc giữa hai véc-tơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$ . Khẳng định nào sau đây là đúng?

**A**  $(\vec{a}, \vec{b}) = -(\vec{b}, \vec{a})$ .

**B** Nếu  $(\vec{a}, \vec{b}) = 0^\circ$  thì  $\vec{a}, \vec{b}$  có giá trùng nhau.

**C**  $(\vec{a}, -\vec{b}) = -(\vec{a}, \vec{b})$ .

**D**  $(k\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{a}, \vec{b})$  với mọi  $k \in \mathbb{R}^+$ .

**CÂU 2.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  và có  $\widehat{B} = 60^\circ$ . Góc giữa  $\overrightarrow{CA}$  và  $\overrightarrow{CB}$  bằng

**A**  $60^\circ$ .

**B**  $30^\circ$ .

**C**  $90^\circ$ .

**D**  $45^\circ$ .

**CÂU 3.** Cho tam giác  $ABC$  vuông cân tại  $A$ , góc giữa  $\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{BC}$  là

**A**  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = 45^\circ$ .

**B**  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = 60^\circ$ .

**C**  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = 120^\circ$ .

**D**  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = 135^\circ$ .

QUICK NOTE

**CÂU 4.** Cho  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  là hai véc-tơ cùng hướng và đều khác  $\vec{0}$ . Mệnh đề nào sau đây đúng?

- (A)  $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$ . (B)  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ .  
(C)  $\vec{a} \cdot \vec{b} = -1$ . (D)  $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$ .

**CÂU 5.** Cho tam giác đều  $ABC$  cạnh bằng  $a$  và  $H$  là trung điểm  $BC$ . Tính  $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{CA}$ .

- (A)  $\frac{3a^2}{4}$ . (B)  $-\frac{3a^2}{4}$ . (C)  $\frac{3a^2}{2}$ . (D)  $-\frac{3a^2}{2}$ .

**CÂU 6.** Cho tam giác  $ABC$  cân tại  $A$ ,  $\hat{A} = 120^\circ$  và  $AB = a$ . Tính  $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CA}$ .

- (A)  $\frac{a^2}{2}$ . (B)  $-\frac{a^2}{2}$ . (C)  $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$ . (D)  $-\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$ .

**CÂU 7.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  có  $\hat{B} = 60^\circ$ ,  $AB = a$ . Tính  $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB}$ .

- (A)  $3a^2$ . (B)  $-3a^2$ . (C)  $3a$ . (D)  $0$ .

**CÂU 8.** Cho hình vuông  $ABCD$  cạnh  $a$ . Tính tích vô hướng của hai véc-tơ  $\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{AC}$ .

- (A)  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = a\sqrt{2}$ . (B)  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 2a$ . (C)  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = a^2$ . (D)  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 2a^2$ .

**CÂU 9.** Cho hai véc-tơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  khác  $\vec{0}$ . Xác định góc  $\alpha$  giữa hai véc-tơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  khi  $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$ .

- (A)  $\alpha = 180^\circ$ . (B)  $\alpha = 0^\circ$ . (C)  $\alpha = 90^\circ$ . (D)  $\alpha = 45^\circ$ .

**CÂU 10.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  và có góc  $\hat{B} = 50^\circ$ . Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề đúng?

- (A) Góc giữa hai véc-tơ  $\overrightarrow{AC}$ ,  $\overrightarrow{CB}$  bằng  $140^\circ$ .  
(B) Góc giữa hai véc-tơ  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{BC}$  bằng  $50^\circ$ .  
(C) Góc giữa hai véc-tơ  $\overrightarrow{BC}$ ,  $\overrightarrow{AC}$  bằng  $90^\circ$ .  
(D) Góc giữa hai véc-tơ  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{CB}$  bằng  $130^\circ$ .

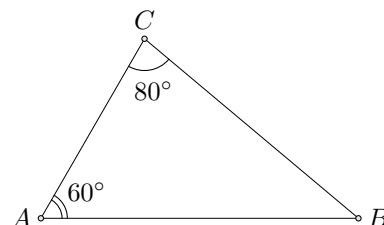
**CÂU 11.** Tam giác  $ABC$  vuông ở  $A$  và có  $BC = 2AC$ . Tính  $\cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB})$ .

- (A)  $\cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}) = \frac{1}{2}$ . (B)  $\cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}) = -\frac{1}{2}$ .  
(C)  $\cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ . (D)  $\cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ .

**CÂU 12.**

Cho tam giác  $ABC$  như hình vẽ. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- (A)  $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AB}) = 40^\circ$ . (B)  $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) = 140^\circ$ .  
(C)  $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}) = 80^\circ$ . (D)  $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BA}) = 120^\circ$ .



**CÂU 13.** Cho hình vuông  $ABCD$ , tính  $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CA})$ .

- (A)  $\frac{1}{2}$ . (B)  $-\frac{1}{2}$ . (C)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ . (D)  $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ .

**CÂU 14.** Cho tam giác đều  $ABC$ . Tính  $P = \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) + \cos(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}) + \cos(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AB})$ .

- (A)  $P = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ . (B)  $P = \frac{3}{2}$ . (C)  $P = -\frac{3}{2}$ . (D)  $P = -\frac{3\sqrt{3}}{2}$ .

**CÂU 15.** Cho hình vuông  $ABCD$  cạnh  $a$ . Tính  $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD})$ .

- (A)  $-2a^2$ . (B)  $a^2$ . (C)  $2a^2$ . (D)  $-\frac{a^2}{\sqrt{2}}$ .

**CÂU 16.** Cho  $\triangle ABC$  đều cạnh bằng 3. Trên các cạnh  $AB$ ,  $AC$  lần lượt lấy các điểm  $M$ ,  $N$  sao cho  $2AM = MB$ ,  $NA = 2NC$ . Giá trị của tích vô hướng  $\overrightarrow{BN} \cdot \overrightarrow{CM}$  là

- (A)  $\frac{7}{2}$ . (B)  $-\frac{7}{2}$ . (C)  $\frac{11}{2}$ . (D)  $-\frac{11}{2}$ .

**CÂU 17.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  có  $AB = a$ ,  $BC = 2a$ . Tính  $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC}$  theo  $a$ .

- (A)  $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} = -a\sqrt{3}$ . (B)  $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} = -3a^2$ .  
(C)  $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} = a\sqrt{3}$ . (D)  $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} = 3a^2$ .

**CÂU 18.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ , có số đo góc  $B$  là  $60^\circ$  và  $AB = a$ . Kết quả nào sau đây là sai?

- (A)  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ . (B)  $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 3a^2$ .  
(C)  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -a^2$ . (D)  $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} = -3\sqrt{2}a^2$ .

**CÂU 19.** Cho  $M$  là trung điểm  $AB$ , tìm mệnh đề sai.

- (A)  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{AB} = -MA \cdot AB$ . (B)  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = -MA \cdot MB$ .  
(C)  $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = AM \cdot AB$ . (D)  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MA \cdot MB$ .

**CÂU 20.** Cho 2 véc-tơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  thỏa  $|\vec{a} + \vec{b}| = 2$  và có độ lớn bằng 1. Hãy tính  $(3\vec{a} - 4\vec{b}) \cdot (2\vec{a} + 5\vec{b})$ .

- (A) 7. (B) 5. (C) -7. (D) -5.

**CÂU 21.** Cho hình thang vuông  $ABCD$  có đường cao  $AD = 3a$ . Tính  $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{BC}$ .

- (A)  $-9a^2$ . (B)  $15a^2$ . (C) 0. (D)  $9a^2$ .

**CÂU 22.** Cho tam giác  $ABC$  có  $BC = a$ ,  $CA = b$ ,  $AB = c$ . Gọi  $M$  là trung điểm cạnh  $BC$ . Tính  $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC}$ .

- (A)  $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{b^2 - c^2}{2}$ . (B)  $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{c^2 + b^2}{2}$ .  
(C)  $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{c^2 + b^2 + a^2}{3}$ . (D)  $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2}$ .

**CÂU 23.** Cho hình vuông  $ABCD$  cạnh  $a$ . Tính  $P = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BA})$ .

- (A)  $P = 2\sqrt{2}a$ . (B)  $P = 2a^2$ . (C)  $P = a^2$ . (D)  $P = -2a^2$ .

**CÂU 24.** Cho hình vuông  $ABCD$  cạnh  $a$ . Gọi  $E$  là điểm đối xứng của  $D$  qua  $C$ . Tính  $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB}$ .

- (A)  $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB} = 2a^2$ . (B)  $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB} = \sqrt{3}a^2$ .  
(C)  $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB} = \sqrt{5}a^2$ . (D)  $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB} = 5a^2$ .

**CÂU 25.** Biết  $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$  và  $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$ . Khẳng định nào sau đây đúng?

- (A)  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  cùng hướng.  
(B)  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  nằm trên hai đường thẳng hợp với nhau một góc  $80^\circ$ .  
(C)  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  ngược hướng.  
(D)  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  nằm trên hai đường thẳng hợp với nhau một góc  $60^\circ$ .

**CÂU 26.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ ,  $AB = a$ ,  $AC = a\sqrt{3}$ . Gọi  $M$  là trung điểm của  $BC$ . Tính cosin góc giữa hai véc-tơ  $\overrightarrow{MA}$  và  $\overrightarrow{BC}$ .

- (A)  $\cos(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{BC}) = \frac{1}{2}$ . (B)  $\cos(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{BC}) = -\frac{1}{2}$ .  
(C)  $\cos(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{BC}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ . (D)  $\cos(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{BC}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ .

**CÂU 27.** Cho tam giác  $ABC$ . Tính tổng  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}) + (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AB})$ .

- (A)  $180^\circ$ . (B)  $360^\circ$ . (C)  $270^\circ$ . (D)  $120^\circ$ .

**CÂU 28.** Tam giác  $ABC$  có góc  $A$  bằng  $100^\circ$  và có trục tâm  $H$ . Tính tổng  $(\overrightarrow{HA}, \overrightarrow{HB}) + (\overrightarrow{HB}, \overrightarrow{HC}) + (\overrightarrow{HC}, \overrightarrow{HA})$ .

- (A)  $360^\circ$ . (B)  $180^\circ$ . (C)  $80^\circ$ . (D)  $160^\circ$ .

**CÂU 29.** Cho hình vuông  $ABCD$  tâm  $O$ . Tính tổng  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}) + (\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{CB}) + (\overrightarrow{CO}, \overrightarrow{DO})$ .

- (A)  $45^\circ$ . (B)  $405^\circ$ . (C)  $315^\circ$ . (D)  $225^\circ$ .

**CÂU 30.** Cho tam giác  $ABC$  cân tại  $A$ , góc  $\hat{A} = 20^\circ$ . Gọi  $BM$  là đường phân giác trong của góc  $\hat{ABC}$ . Tính  $\cos(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{MC})$ .

- (A)  $\frac{1}{2}$ . (B)  $\frac{-\sqrt{2}}{2}$ . (C)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ . (D)  $\frac{-1}{2}$ .

**CÂU 31.** Cho hình thang vuông  $ABCD$ , vuông tại  $A$  và  $D$ , biết  $AB = AD = a$ ,  $CD = 2a$ . Tính  $\cos(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{CB})$ .

- (A)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ . (B)  $\frac{-1}{2}$ . (C) 0. (D)  $\frac{-\sqrt{2}}{2}$ .

QUICK NOTE

QUICK NOTE

**CÂU 32.** Cho hình thoi  $ABCD$  cạnh  $a$ , góc  $\widehat{ABC} = 120^\circ$ . Gọi  $G$  là trọng tâm của tam giác  $BCD$  và  $\alpha$  là góc giữa hai đường thẳng  $DA$  và  $BG$ . Tính  $\sin \alpha$ .

- (A)  $\sin \alpha = \frac{1}{2}$ . (B)  $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ . (C)  $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ . (D)  $\sin \alpha = 1$ .

**CÂU 33.** Cho tam giác  $ABC$  có các cạnh bằng  $a, b, c$ . Tính tích vô hướng  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$  theo  $a, b, c$ .

- (A)  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 - c^2)$ . (B)  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(a^2 + c^2 - b^2)$ .  
(C)  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(b^2 + c^2 + a^2)$ . (D)  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(b^2 + c^2 - a^2)$ .

**CÂU 34.** Cho nửa đường tròn tâm  $O$ , có đường kính  $AB = 2R$ . Gọi  $M, N$  là hai điểm thuộc nửa đường tròn sao cho hai dây cung  $AM$  và  $BN$  cắt nhau tại  $I$ . Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

- (A)  $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AB}$ . (B)  $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{AB}$ .  
(C)  $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AN}$ . (D)  $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{BA}$ .

**CÂU 35.** Cho hai điểm  $M, N$  nằm trên đường tròn đường kính  $AB = 2r$ . Gọi  $I$  là giao điểm của hai đường thẳng  $AM$  và  $BN$ . Tính theo  $r$  giá trị biểu thức  $P = \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BN} \cdot \overrightarrow{BI}$ .

- (A)  $P = 4r^2$ . (B)  $P = 2r^2$ . (C)  $P = r^2$ . (D)  $P = \frac{r^2}{4}$ .

**CÂU 36.** Cho hình vuông  $ABCD$  có cạnh là  $a$ . Giá trị của biểu thức  $(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BA})(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})$  là

- (A) 0. (B)  $2a^2$ . (C)  $-2a^2$ . (D)  $-2\sqrt{2}a^2$ .

**CÂU 37.** Cho hình vuông  $ABCD$  cạnh bằng 2. Điểm  $M$  nằm trên đoạn thẳng  $AC$  sao cho  $AM = \frac{AC}{4}$ . Gọi  $N$  là trung điểm của đoạn thẳng  $DC$ . Tính  $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MN}$ .

- (A)  $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MN} = -4$ . (B)  $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MN} = 0$ . (C)  $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MN} = 4$ . (D)  $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MN} = 16$ .

**CÂU 38.** Cho hình thoi  $ABCD$  có  $AC = 8$ . Tính  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ .

- (A)  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 24$ . (B)  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 26$ . (C)  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 28$ . (D)  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 32$ .

**CÂU 39.** Cho hình chữ nhật  $ABCD$  có  $AB = a$  và  $AD = a\sqrt{2}$ . Gọi  $K$  là trung điểm của cạnh  $AD$ . Tính  $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AC}$ .

- (A)  $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ . (B)  $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AC} = -a^2\sqrt{2}$ .  
(C)  $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AC} = a^2\sqrt{2}$ . (D)  $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AC} = 2a^2$ .

**CÂU 40.** Cho tứ giác  $ABCD$  có hai đường chéo vuông góc với nhau tại  $M$  và  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD}$ . Gọi  $P$  là trung điểm của  $AD$ . Góc giữa hai đường thẳng  $MP$  và  $BC$  là

- (A)  $90^\circ$ . (B)  $60^\circ$ . (C)  $45^\circ$ . (D)  $30^\circ$ .

**CÂU 41.** Cho hình vuông  $ABCD$  cạnh  $a$ . Gọi  $M$  và  $N$  lần lượt là trung điểm của  $BC$  và  $CD$ . Tính  $\cos(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AN})$ .

- (A)  $\frac{4}{5}$ . (B)  $-\frac{4}{5}$ . (C)  $\frac{3}{5}$ . (D)  $-\frac{3}{5}$ .

**CÂU 42.** Cho hình vuông  $ABCD$ . Gọi  $M$  là trung điểm của cạnh  $BC$ . Tính góc giữa hai véc-tơ  $\overrightarrow{AM}$  và  $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB}$ .

- (A)  $45^\circ$ . (B)  $30^\circ$ . (C)  $135^\circ$ . (D)  $90^\circ$ .

**CÂU 43.** Cho hình vuông  $ABCD$ . Trên cạnh  $AD, AB$  lần lượt lấy hai điểm  $E, F$  sao cho  $AE = AF$ . Gọi  $H$  là hình chiếu vuông góc của  $A$  lên đường thẳng  $BE$ . Tính  $\cos(\overrightarrow{FH}, \overrightarrow{CH})$ .

- (A) 0. (B)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ . (C)  $-\frac{1}{2}$ . (D)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ .

**CÂU 44.** Cho hai điểm  $A$  và  $B$ ,  $O$  là trung điểm của  $AB$  và  $M$  là điểm tùy ý, biết rằng  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = OM^2 + kOA^2$ . Khẳng định nào sau đây đúng?

- (A)  $k = 1$ . (B)  $k = -1$ . (C)  $k = 2$ . (D)  $k = -2$ .

**CÂU 45.** Cho  $I$  là trung điểm  $AB$ ,  $M$  là điểm tùy ý. Biết rằng  $\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{AB} = k(MB^2 - MA^2)$ . Khẳng định nào sau đây là đúng?

- (A)  $k = 2$ . (B)  $k = \frac{1}{2}$ . (C)  $k = -1$ . (D)  $k = -\frac{1}{2}$ .

**CÂU 46.** Cho  $I$  là trung điểm  $AB$ ,  $M$  là điểm tùy ý. Biết rằng  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 + kAB^2$ . Khẳng định nào sau đây là đúng?

- (A)  $k = 2$ . (B)  $k = \frac{1}{2}$ . (C)  $k = -1$ . (D)  $k = -\frac{1}{4}$ .

**CÂU 47.** Khẳng định nào sau đây là đúng?

- (A)  $(\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c} = \vec{a} (\vec{b} \cdot \vec{c})$ . (B)  $(\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = \vec{a}^2 \cdot \vec{b}^2$ .  
(C)  $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin(\vec{a}, \vec{b})$ . (D)  $\vec{a} \cdot (\vec{b} - \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{a} \cdot \vec{c}$ .

**CÂU 48.** Cho hai véc-tơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$ . Đẳng thức nào sau đây sai?

- (A)  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{4} (|\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2)$ . (B)  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2} (|\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2)$ .  
(C)  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2} (|\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2)$ . (D)  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2} (|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2)$ .

**CÂU 49.** Cho hình thoi  $ABCD$  có cạnh bằng  $a$  và  $\hat{A} = 60^\circ$ , điểm  $M$  tùy ý. Biết rằng  $MA^2 - MB^2 + MC^2 - MD^2 = ka^2$ . Khẳng định nào sau đây đúng?

- (A)  $k = 1$ . (B)  $k = 2$ . (C)  $k = 4$ . (D)  $k = 6$ .

**CÂU 50.** Cho hình chữ nhật  $ABCD$  có  $O$  là giao điểm của hai đường chéo  $AC$  và  $BD$ ,  $M$  là điểm tùy ý. Biết rằng  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = MO^2 + kBD^2$ . Khẳng định nào sau đây đúng?

- (A)  $k = -\frac{1}{2}$ . (B)  $k = 2$ . (C)  $k = -\frac{1}{4}$ . (D)  $k = 4$ .

**CÂU 51.** Cho tam giác  $ABC$ , gọi  $H$  là trực tâm của tam giác và  $M$  là trung điểm của cạnh  $BC$ . Đẳng thức nào sau đây đúng?

- (A)  $\overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{MA} = \frac{1}{2} BC^2$ . (B)  $\overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{MA} = -\frac{1}{4} BC^2$ .  
(C)  $\overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{MA} = \frac{1}{4} BC^2$ . (D)  $\overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{MA} = \frac{1}{5} BC^2$ .

**CÂU 52.** Cho điểm  $M$  thay đổi trên đường tròn tâm  $O$  bán kính  $R$  ngoại tiếp tam giác đều  $ABC$  cho trước. Biết rằng  $MA^2 + 2\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} = kR^2$ . Khẳng định nào sau đây đúng?

- (A)  $k = 2$ . (B)  $k = 3$ . (C)  $k = 4$ . (D)  $k = 6$ .

**CÂU 53.** Cho  $\vec{a}, \vec{b}$  có  $(\vec{a} + 2\vec{b})$  vuông góc với véc-tơ  $(5\vec{a} - 4\vec{b})$  và  $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ . Khi đó

- (A)  $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ . (B)  $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = 90^\circ$ .  
(C)  $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ . (D)  $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{1}{2}$ .

**CÂU 54.** Cho tam giác  $ABC$ . Tập hợp điểm  $M$  thỏa mãn  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$  là

- (A) Đường trung trực đoạn  $BC$ .  
(B) Đường tròn có tâm  $A$ .  
(C) Đường thẳng đi qua  $A$  và vuông góc với  $BC$ .  
(D) Đường thẳng đi qua  $A$  song song với  $BC$ .

**CÂU 55.** Cho đoạn thẳng  $AB$ . Tập hợp điểm  $M$  thỏa mãn  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$  là

- (A) Đường trung trực đoạn  $AB$ .  
(B) Đường tròn.  
(C) Đường thẳng đi qua  $A$  và vuông góc với  $AB$ .  
(D) Đường thẳng đi qua  $B$  và vuông góc với  $AB$ .

**CÂU 56.** Cho tam giác  $ABC$ . Tập hợp các điểm  $M$  thỏa  $(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB})(2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}) = 0$  là

- (A) Đường thẳng vuông góc với  $AB$ . (B) Đường thẳng vuông góc với  $AC$ .  
(C) Đường thẳng vuông góc với  $BC$ . (D) Đường tròn.

**CÂU 57.** Cho tam giác  $ABC$ . Tập hợp các điểm  $M$  thỏa  $(\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB})(\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}) = 0$  là

- (A) Đường thẳng vuông góc với  $AB$ . (B) Đoạn thẳng.  
(C) Đường thẳng song song với  $AB$ . (D) Đường tròn.

**CÂU 58.** Cho tam giác  $ABC$ . Tập hợp các điểm  $M$  thỏa  $2MA^2 + \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC}$  là

QUICK NOTE

QUICK NOTE

- ☐ A Đường thẳng.  
☐ B Đường tròn đường kính  $BC$ .  
☐ C Đường tròn đi qua  $A$ .  
☐ D Đường tròn đi qua  $B$ .

**CÂU 59.** Cho hình vuông  $ABCD$  cạnh  $a$ . Tìm tập hợp các điểm  $M$  thỏa mãn

$$(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC})(\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MB}) = 3a^2$$

- ☐ A Đường thẳng vuông góc với  $BC$ .  
☐ B Đường thẳng song song với  $BC$ .  
☐ C Đường tròn đường kính  $AB$ .  
☐ D Đường tròn đường kính  $AC$ .

**CÂU 60.** Cho tam giác  $ABC$ . Giá trị lớn nhất của biểu thức  $P = 2 \cos A + 6 \cos B + 3 \cos C$  bằng

- ☐ A 11.  
☐ B 10.  
☐ C 7.  
☐ D 6.



# MỤC LỤC

<b>Bài 3. Các khái niệm mở đầu</b>	<b>1</b>
Ⓐ Tóm tắt lí thuyết.....	1
Ⓑ Các dạng toán.....	1
📁 Dạng 1.Xác định một vectơ, độ dài vectơ.....	1
📁 Dạng 2.Hai vectơ cùng phương, cùng hướng và bằng nhau.....	2
Ⓒ Câu hỏi trắc nghiệm.....	3
<b>Bài 4. Tổng và hiệu của hai véc-tơ</b>	<b>5</b>
Ⓐ Các dạng toán.....	5
📁 Dạng 1.Tính tổng, hiệu hai véc-tơ.....	5
📁 Dạng 2.Xác định vị trí của một điểm từ đẳng thức véc-tơ.....	5
📁 Dạng 3.Tính độ dài véc-tơ.....	5
📁 Dạng 4.Ứng dụng của véc-tơ trong vật lý.....	6
Ⓑ Câu hỏi trắc nghiệm.....	6
<b>Bài 5. Tích của một vectơ với một số</b>	<b>9</b>
Ⓐ Tóm tắt lí thuyết.....	9
Ⓑ Các dạng toán.....	10
📁 Dạng 1.Xác định vectơ tích, tính độ dài vectơ.....	10
📁 Dạng 2.Chứng minh đẳng thức vectơ, thu gọn biểu thức.....	13
📁 Dạng 3.Xác định điểm thỏa mãn đẳng thức vectơ.....	18
📁 Dạng 4.Biểu diễn vectơ theo hai vectơ không cùng phương.....	23
📁 Dạng 5.Chứng minh ba điểm thẳng hàng, hai đường thẳng song song, hai điểm trùng nhau.....	28
<b>Bài 6. Tích vô hướng của hai véc-tơ</b>	<b>31</b>
Ⓐ Tóm tắt lí thuyết.....	31
Ⓑ Các dạng toán.....	32
📁 Dạng 1.Tính tích vô hướng của hai véc-tơ và xác định góc.....	32
📁 Dạng 2.Chứng minh đẳng thức tích vô hướng hay độ dài.....	33
📁 Dạng 3.Điều kiện vuông góc.....	34
📁 Dạng 4.Tập hợp điểm và chứng minh bất đẳng thức.....	34

