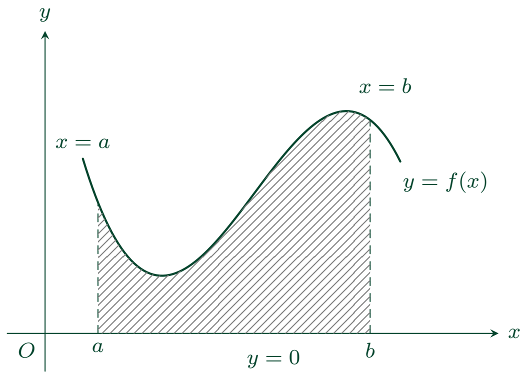
Bài 1. ỨNG DỤNG HÌNH HỌC CỦA TÍCH PHÂN

A. DIỆN TÍCH HÌNH THANG CONG

1. Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$ và $x = b$



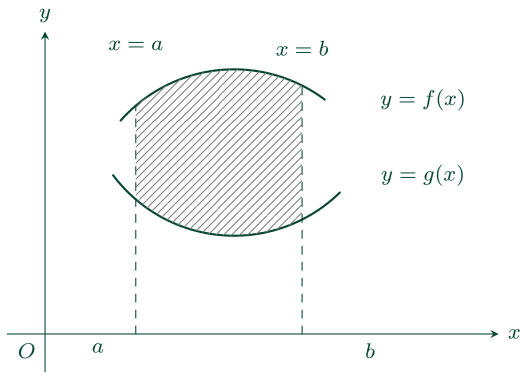
Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[a; b]$. Khi đó, diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành Ox $(y = 0)$ và hai đường thẳng $x = a$ và $x = b$ được tính bởi công thức

$$S = \int_a^b |f(x)| \, \mathrm{d}x$$

Chú ý: Giả sử hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[a; b]$. Nếu $f(x)$ không đổi dấu trên $[a; b]$ thì

$$\int_a^b |f(x)| \, \mathrm{d}x = \left| \int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x \right|.$$

2. Hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số và hai đường thẳng $x = a$ và $x = b$



Cho 2 hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ liên tục trên $[a; b]$. Khi đó diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ và hai đường thẳng $x = a$ và $x = b$ được tính bởi công thức

$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)| \, \mathrm{d}x$$

B. THỂ TÍCH HÌNH KHỐI

MATH TEACHER

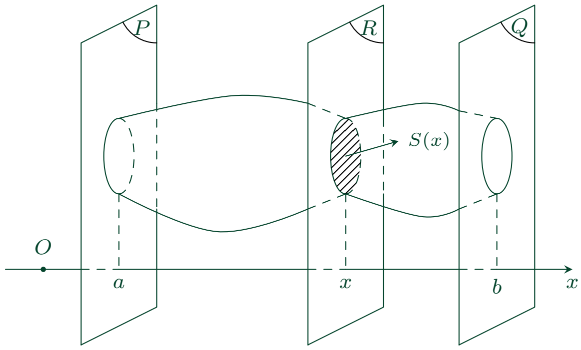
ĐIỂM:

"It's not how much time you have, it's how you use it."

QUICK NOTE

QUICK NOTE

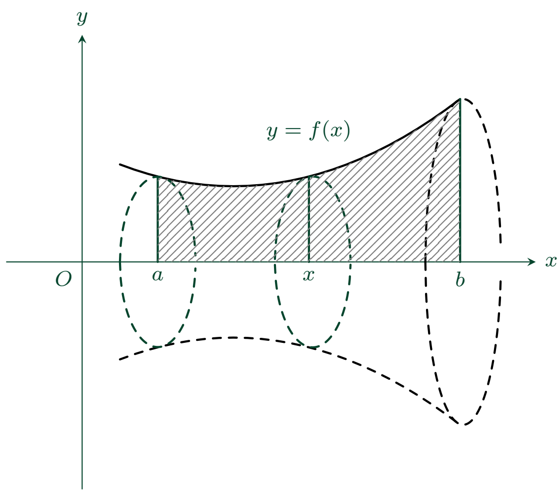
1. Thể tích của vật thể



Trong không gian, cho một vật thể nằm trong khoảng không gian giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) cùng vuông góc với trục Ox tại các điểm a và b. Mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm $x(a \leq x \leq b)$ cắt vật thể theo mặt cắt có diện tích $S(x)$. Khi đó, nếu $S(x)$ là hàm số liên tục trên $[a;b]$ thì thể tích của vật thể được tính bởi công thức

$$V = \int_a^b S(x)\,\mathrm{d}x$$

2. Thể tích khối tròn xoay



Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục, không âm trên $[a;b]$. Hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành Ox và hai đường thẳng $x = a$ và $x = b$ quay quanh trục Ox tạo thành một khối tròn xoay có thể tích bằng

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2\,\mathrm{d}x$$

Dạng 1. TÍNH DIỆN TÍCH HÌNH GIỚI HẠN BỞI CÁC ĐƯỜNG CONG

CÂU 1. Cho hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ liên tục trên $[a;b]$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của các hàm số $y = f(x), y = g(x)$ và các đường thẳng $x = a, x = b$ bằng

A $\left|\int_a^b [f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x\right|$.

B $\int_a^b |f(x) + g(x)|\,\mathrm{d}x$.

C $\int_a^b |f(x) - g(x)|\,\mathrm{d}x$.

D $\int_a^b [f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x$.

CÂU 2. Gọi S là diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = 3^x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

QUICK NOTE

Ⓐ $\int\limits_0^2 3^x\,\mathrm{d}x$. Ⓑ $S=\pi\int\limits_0^2 3^{2x}\,\mathrm{d}x$. Ⓒ $S=\pi\int\limits_0^2 3^x\,\mathrm{d}x$. Ⓓ $S=\int\limits_0^2 3^{2x}\,\mathrm{d}x$.

CÂU 3. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=(x-2)^2-1$, trục hoành và hai đường thẳng $x=1, x=2$ bằng

Ⓐ $\frac{2}{3}$. Ⓑ $\frac{3}{2}$. Ⓒ $\frac{1}{3}$. Ⓓ $\frac{7}{3}$.

CÂU 4. Tính diện tích S hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=x^2+1$, $x=-1$, $x=2$ và trục hoành.

Ⓐ $S=6$. Ⓑ $S=16$. Ⓒ $S=\frac{13}{6}$. Ⓓ $S=13$.

CÂU 5. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=x^2+5, y=6x, x=0, x=1$. Tính S.

Ⓐ $\frac{4}{3}$. Ⓑ $\frac{7}{3}$. Ⓒ $\frac{8}{3}$. Ⓓ $\frac{5}{3}$.

CÂU 6. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y=\ln x, y=1$ và hai đường thẳng $x=1, x=e$ bằng

Ⓐ e^2. Ⓑ $e+2$. Ⓒ $2e$. Ⓓ $e-2$.

CÂU 7. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y=4x-x^2, y=2x$ và hai đường thẳng $x=1, x=e$ bằng

Ⓐ 4. Ⓑ $\frac{20}{3}$. Ⓒ $\frac{4}{3}$. Ⓓ $\frac{16}{3}$.

CÂU 8. Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=x^2-2x$, $y=0$, $x=-10$, $x=10$.

Ⓐ $S=\frac{2000}{3}$. Ⓑ $S=2008$. Ⓒ $S=2000$. Ⓓ $S=\frac{2008}{3}$.

CÂU 9. Gọi S là diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=2^x$, $y=0$, $x=0$, $x=2$. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

Mệnh đề	Đ	S
a) $S=\int\limits_0^2 2^x\mathrm{d}x$.		
b) $S=\frac{3}{\ln 2}$.		
c) $S=\pi\int\limits_0^2 2^x\mathrm{d}x$.		
d) $S=\frac{3\pi}{\ln 2}$.		

CÂU 10. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\mathrm{e}^x, y=0, x=0, x=2$. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

Mệnh đề	Đ	S
a) $S=\int\limits_0^2 \mathrm{e}^x\mathrm{d}x$.		
b) $S=e^2$.		
c) $S=\pi\int\limits_0^2 \mathrm{e}^x\mathrm{d}x$.		
d) $S=\left(e^2-1\right)\pi$.		

CÂU 11. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai

Mệnh đề	Đ	S
a) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^2$, $y=2x$, $x=0$, $x=1$ là $\frac{4}{3}$.		
b) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=-x^2+2x+1$, $y=2x^2-4x+1$, $x=0$, $x=2$ là 4.		
c) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\frac{x-1}{x+1}$, trục hoành, $x=0$, $x=1$ là $2\ln 2-1$.		
d) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=-x^3+12x$, $y=-x^2$, $x=-3$, $x=4$ là $\frac{937}{12}$.		

QUICK NOTE

CÂU 12. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^2 + x - 1$, $y = x^4 + x - 1$, $x = -1$, $x = 1$.

KQ: | | | | |

CÂU 13. Kí hiệu $S(t)$ là diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = 2x + 1$, $y = 0$, $x = 1$, $x = t\,(t > 1)$. Tìm t để $S(t) = 10$.

KQ: | | | | |

CÂU 14. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $my = x^2$, $mx = y^2 (m > 0)$. Tìm giá trị của m để $S = 3$.

KQ: | | | | |

CÂU 15. Giá trị dương của tham số m sao cho diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y = 2x + 3$ và các đường thẳng $y = 0$, $x = 0$, $x = m$ bằng 10 là?

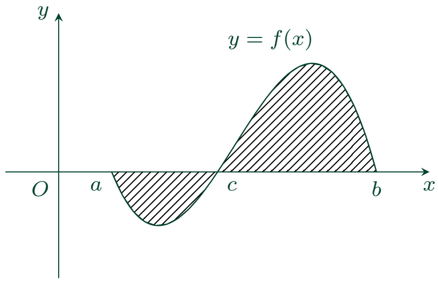
KQ: | | | | |

CÂU 16. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 7 - 4x^3 \text{ khi } 0 \le x \le 1 \\ 4 - x^2 \text{ khi } x > 1 \end{cases}$. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $f(x)$ và các đường thẳng $x = 0$, $x = 3$, $y = 0$.

KQ: | | | | |

CÂU 17.

Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành, đường thẳng $x = a$, $x = b$ (như hình vẽ bên). Hỏi cách tính S nào dưới đây đúng?



A $S = \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

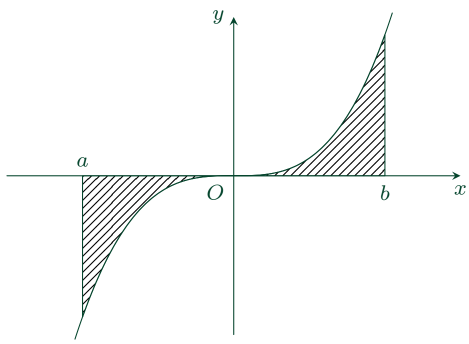
B $S = \left| \int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_c^b f(x)\,\mathrm{d}x \right|$.

C $S = -\int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

D $S = \int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

CÂU 18.

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$. Gọi D là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $(C): y = f(x)$, trục hoành, hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ (như hình vẽ). Giả sử S_D là diện tích hình phẳng D. Chọn phương án đúng trong các phương án **A**, **B**, **C**, **D** cho dưới đây?



A $S_D = \int\limits_a^0 f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_0^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

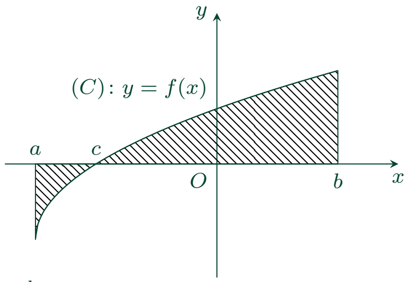
B $S_D = -\int\limits_a^0 f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_0^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

C $S_D = \int\limits_a^0 f(x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_0^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

D $S_D = -\int\limits_a^0 f(x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_0^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

CÂU 19.

Diện tích của hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ $(a < b)$ (phần tô đậm trong hình vẽ) tính theo công thức nào dưới đây?



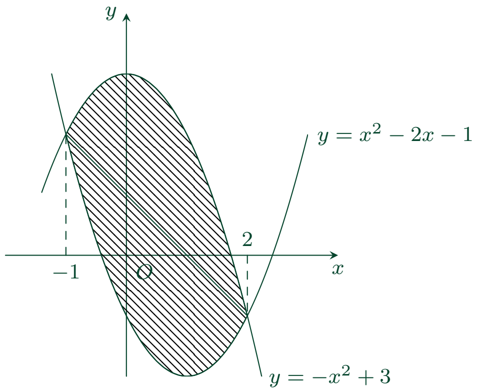
Ⓐ $S = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$.

Ⓑ $S = \int_a^b f(x)\,dx$.

Ⓒ $S = -\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$.

Ⓓ $S = \left|\int_a^b f(x)\,dx\right|$.

CÂU 20. Diện tích phần hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ bên dưới được tính theo công thức nào dưới đây?



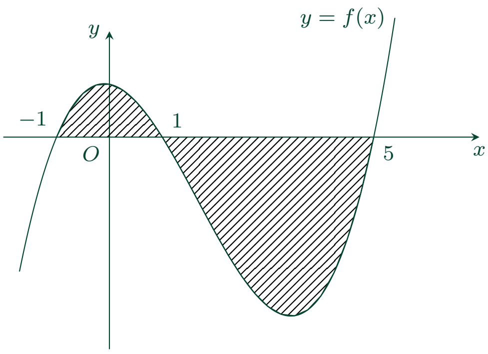
Ⓐ $\int_{-1}^{2} (-2x + 2)\,dx$.

Ⓑ $\int_{-1}^{2} (2x - 2)\,dx$.

Ⓒ $\int_{-1}^{2} (-2x^2 + 2x + 4)\,dx$.

Ⓓ $\int_{-1}^{2} (2x^2 - 2x - 4)\,dx$.

CÂU 21. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, $y = 0$, $x = -1$, $x = 5$ (như hình vẽ bên dưới).



Mệnh đề nào sau đây đúng?

Ⓐ $S = -\int_{-1}^{1} f(x)\,dx - \int_{1}^{5} f(x)\,dx$.

Ⓑ $S = \int_{-1}^{1} f(x)\,dx + \int_{1}^{5} f(x)\,dx$.

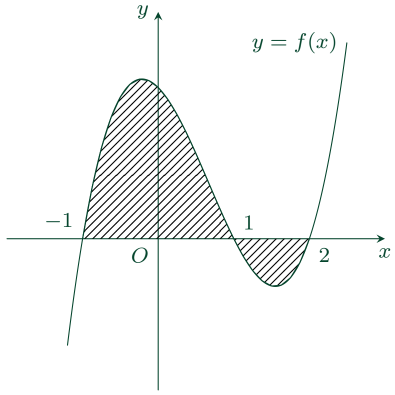
Ⓒ $S = \int_{-1}^{1} f(x)\,dx - \int_{1}^{5} f(x)\,dx$.

Ⓓ $S = -\int_{-1}^{1} f(x)\,dx + \int_{1}^{5} f(x)\,dx$.

CÂU 22. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, $y = 0$, $x = -1$, $x = 2$ (như hình vẽ bên dưới).

QUICK NOTE

QUICK NOTE



Mệnh đề nào sau đây đúng?

A $S = \int\limits_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x.$

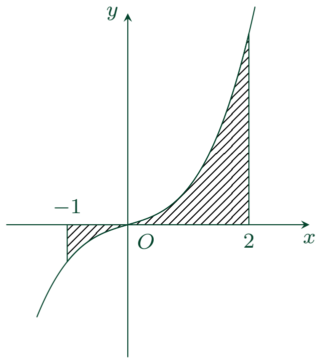
B $S = -\int\limits_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_{1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x.$

C $S = -\int\limits_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x.$

D $S = \int\limits_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_{1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x.$

CÂU 23.

Gọi S là diện tích hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = -1$, $x = 2$. Đặt $a = \int\limits_{-1}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x$, $b = \int\limits_{0}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x$ (như hình vẽ bên). Mệnh đề nào sau đây đúng?



A $S = b - a.$

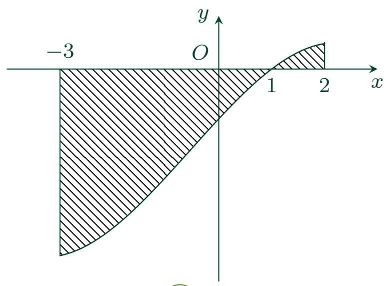
B $S = b + a.$

C $S = -b + a.$

D $S = -b - a.$

CÂU 24.

Gọi S là diện tích hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = -3$, $x = 2$. Đặt $a = \int\limits_{-3}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$, $b = \int\limits_{1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x$ (như hình vẽ bên). Mệnh đề nào sau đây đúng?



A $S = a + b.$

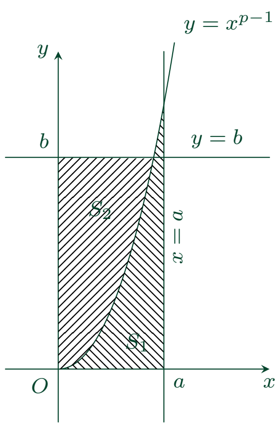
B $S = a - b.$

C $S = -a - b.$

D $S = b - a.$

CÂU 25.

Cho các số p, q thỏa mãn các điều kiện $p > 0$, $q > 1$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ và các số dương a, b. Xét hàm số $y = x^{p-1}$ $(x > 0)$ có đồ thị (C). Gọi S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C), trục hoành, đường thẳng $x = a$. Gọi S_2 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C), trục tung, đường thẳng $y = b$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi trục hoành, trục tung và hai đường thẳng $x = a$, $y = b$ (như hình vẽ bên). Khi so sánh $S_1 + S_2$ và S ta nhận được bất đẳng thức nào trong các bất đẳng thức dưới đây?

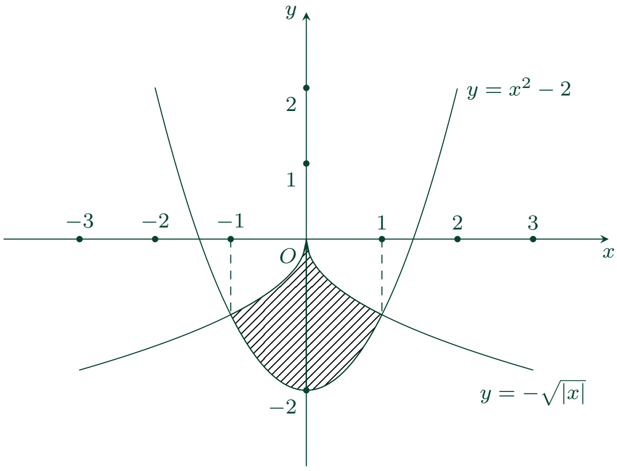


A $\dfrac{a^p}{p} + \dfrac{b^q}{q} \le ab.$

B $\dfrac{a^{p-1}}{p-1} + \dfrac{b^{q-1}}{q-1} \le ab.$

C $\dfrac{a^{p+1}}{p+1}+\dfrac{b^{q+1}}{q+1}\le ab.$　　**D** $\dfrac{a^p}{p}+\dfrac{b^q}{q}\ge ab.$

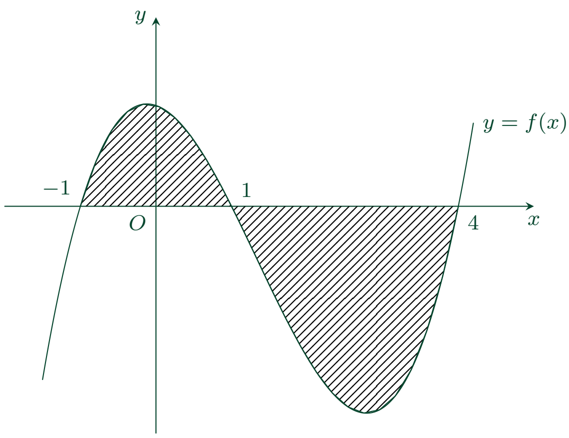
CÂU 26. Diện tích phần hình phẳng được gạch sọc trong hình vẽ sau được tính theo công thức nào dưới đây?



A $\displaystyle\int_{-1}^{1}\left(x^2-2+\sqrt{|x|}\right)\mathrm{d}x.$　　**B** $\displaystyle\int_{-1}^{1}\left(x^2-2-\sqrt{|x|}\right)\mathrm{d}x.$

C $\displaystyle\int_{-1}^{1}\left(-x^2+2+\sqrt{|x|}\right)\mathrm{d}x.$　　**D** $\displaystyle\int_{-1}^{1}\left(-x^2+2-\sqrt{|x|}\right)\mathrm{d}x.$

CÂU 27. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f(x)$, $y=0$, $x=-1$, $x=4$ (như hình vẽ). Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

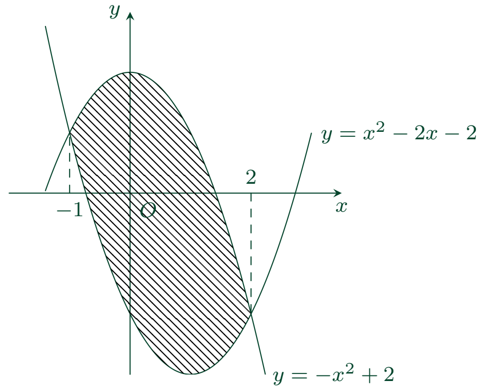


Mệnh đề	Đ	S
a) $S=\displaystyle\int_{-1}^{1}f(x)\,\mathrm{d}x-\int_{1}^{4}f(x)\,\mathrm{d}x.$		
b) $S=\displaystyle\int_{-1}^{1}\lvert f(x)\rvert\,\mathrm{d}x+\int_{1}^{4}\lvert f(x)\rvert\,\mathrm{d}x.$		
c) $S=\left\lvert\displaystyle\int_{-1}^{4}f(x)\,\mathrm{d}x\right\rvert.$		
d) $S=\displaystyle\int_{-1}^{1}f(x)\,\mathrm{d}x+\int_{1}^{4}f(x)\,\mathrm{d}x.$		

CÂU 28. Cho hình phẳng được gạch chéo trong hình bên dưới.

QUICK NOTE

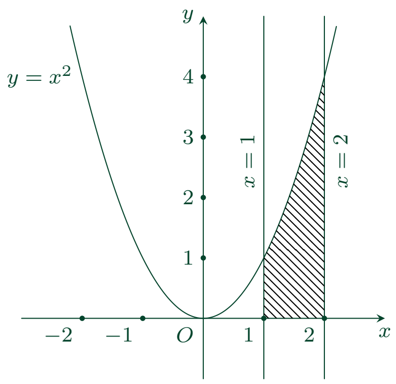
QUICK NOTE



Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

Mệnh đề	Đ	S
a) Hình phẳng được gạch chéo trong hình trên được giới hạn các đồ thị $y = x^2 - 2x - 2$, $y = -x^2 + 2$ và hai đường thẳng $x = -1$, $x = 2$.		
b) Diện tích hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ là $S = \int\limits_{-1}^{2} \left\|x^2 - 2x - 2\right\| \mathrm{d}x + \int\limits_{-1}^{2} \left\|-x^2 + 2\right\| \mathrm{d}x$.		
c) Hình phẳng được gạch chéo trong hình trên được giới hạn các đồ thị $y = x^2 - 2x - 2$ và $y = -x^2 + 2$.		
d) Diện tích hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ là $S = 9$.		

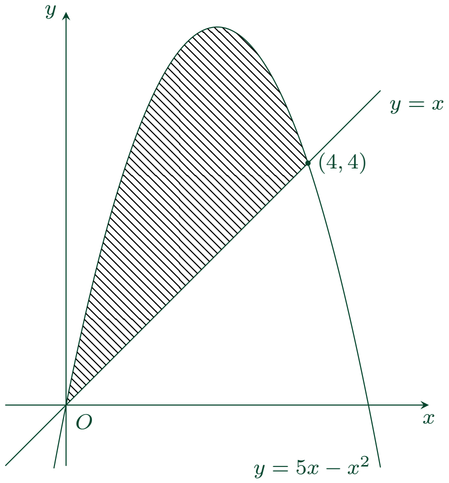
CÂU 29. Cho hình phẳng được gạch chéo trong hình bên dưới.



Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

Mệnh đề	Đ	S
a) Hình phẳng được gạch chéo trong hình trên được giới hạn các đồ thị $y = x^2$, $y = 0$ và hai đường thẳng $x = 1$, $x = 2$.		
b) Diện tích hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ là $S = \int\limits_{1}^{2} x^2 \,\mathrm{d}x$.		
c) Diện tích hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ là $S = \dfrac{4}{3}$.		
d) Hình phẳng được gạch chéo trong hình trên được giới hạn đồ thị $y = x^2$ và hai đường thẳng $x = 1$, $x = 2$.		

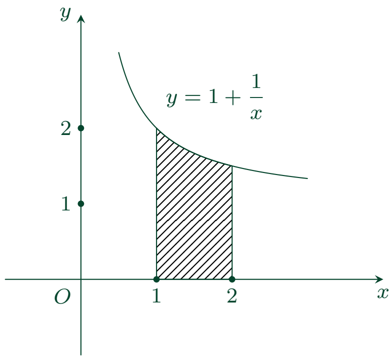
CÂU 30. Cho hình phẳng được gạch chéo trong hình bên dưới.



Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

Mệnh đề	Đ	S
a) Hình phẳng được gạch chéo trong hình trên được giới hạn các đồ thị $y = 5x - x^2$, $y = x$ và các đường thẳng $x = 0$, $x = 4$.		
b) Diện tích hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ là $S = \displaystyle\int_0^4 \left(x^2 - 4x\right)\,\mathrm{d}x$.		
c) Diện tích hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ là $S = \displaystyle\int_0^4 \left|x^2 - 4x\right|\,\mathrm{d}x$.		
d) Diện tích hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ $S = \dfrac{56}{3}$.		

CÂU 31. Cho hình phẳng được gạch chéo trong hình bên dưới.



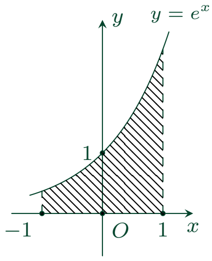
Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

Mệnh đề	Đ	S
a) Hình phẳng được gạch chéo trong hình trên được giới hạn đồ thị $y = 1 + \dfrac{1}{x}$ và các đường thẳng $x = 1$, $x = 2$.		
b) Diện tích hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ là $S = \displaystyle\int_1^2 \left(1 + \frac{1}{x}\right)\,\mathrm{d}x$.		
c) Diện tích hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ là $S = 2$.		
d) Diện tích hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ là $S = 1 + \displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$.		

CÂU 32. Cho hình phẳng được tô màu trong hình bên dưới

QUICK NOTE

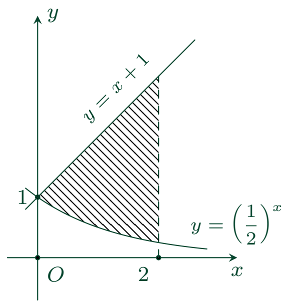
QUICK NOTE



Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

Mệnh đề	Đ	S
a) Hình phẳng được tô màu trong hình vẽ trên được giới hạn bởi các đồ thị $y=\mathrm{e}^x$; $y=0$; $x=0$; $x=1$.		
b) Diện tích hình phẳng tô màu trong hình vẽ là $\displaystyle\int\limits_{-1}^{1} \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$.		
c) Diện tích hình phẳng tô màu trong hình vẽ là $\displaystyle\int\limits_{0}^{1} \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$.		
d) Hình phẳng được tô màu trong hình vẽ trên được giới hạn bởi các đồ thị $y=\mathrm{e}^x$; $y=0$; $x=-1$; $x=1$.		

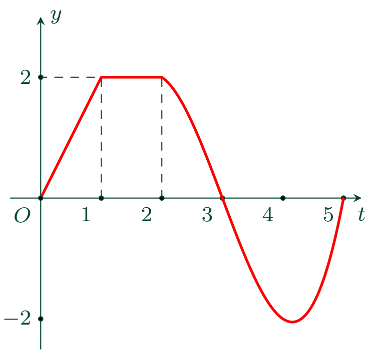
CÂU 33. Cho hình phẳng được tô màu trong hình bên dưới.



Các mệnh đề sau đúng hay sai?

Mệnh đề	Đ	S
a) Hình phẳng được tô màu trong hình vẽ trên được giới hạn bởi các đồ thị $y=x+1$; $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$; $x=0$; $x=2$.		
b) Diện tích hình phẳng tô màu trong hình vẽ là $\displaystyle\int\limits_{0}^{2}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^x-x-1\right]\mathrm{d}x$.		
c) Diện tích hình phẳng tô màu trong hình vẽ bằng $S=4-\dfrac{3}{4\ln 2}$.		
d) Hình phẳng được tô màu trong hình vẽ trên được giới hạn bởi các đồ thị $y=x+1$; $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$; $x=1$; $x=2$.		

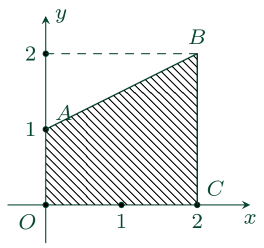
CÂU 34. Cho đồ thị hàm số $y=f(t)$ như hình vẽ.



Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

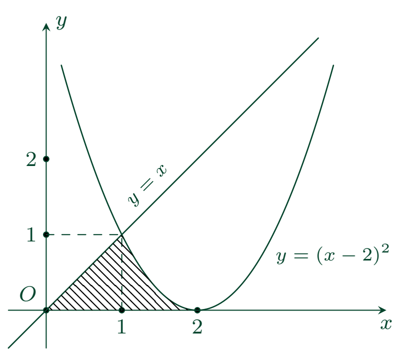
Mệnh đề	Đ	S
a) Diện tích hình phẳng được giới hạn các đồ thị hàm số $y = f(t)$, trục Ot và hai đường thẳng $t = 0$; $t = 1$ là $S = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1 t\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{4}$.		
b) Diện tích hình phẳng được giới hạn các đồ thị hàm số $y = f(t)$, trục Ot và hai đường thẳng $t = 1$; $t = 2$ là $S = \displaystyle\int_1^2 2\,\mathrm{d}t = 2$.		
c) Tích phân $\displaystyle\int_2^3 f(x)\,\mathrm{d}x$ biểu thị cho phần diện tích của hình phẳng giới hạn các đồ thị hàm số $y = f(t)$, trục Ot và hai đường thẳng $t = 2$; $t = 3$.		
d) Tích phân $\displaystyle\int_3^5 f(x)\,\mathrm{d}x$ biểu thị cho phần diện tích của hình phẳng giới hạn các đồ thị hàm số $y = f(t)$, trục Ot và hai đường thẳng $t = 3$; $t = 5$.		

CÂU 35. Tính diện tích hình phẳng được tô màu trong hình bên dưới.



KQ: | | | | |

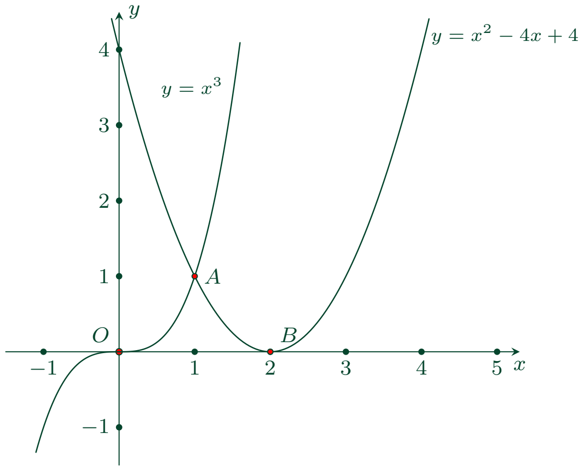
CÂU 36. Biết diện tích phần hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ bên có diện tích là $\dfrac{a}{b}$ với $a, b \in \mathbb{Z}$ và phân số $\dfrac{a}{b}$ tối giản. Tính tổng $a + b$.



KQ: | | | | |

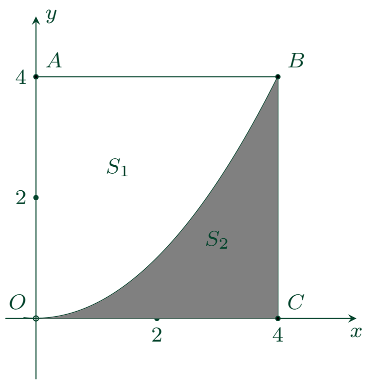
CÂU 37. Biết diện tích phần tam giác cong OAB trong hình vẽ bên có diện tích là $\dfrac{a}{b}$ với $a, b \in \mathbb{Z}$ và phân số $\dfrac{a}{b}$ tối giản. Tính hiệu $b - a$.

QUICK NOTE



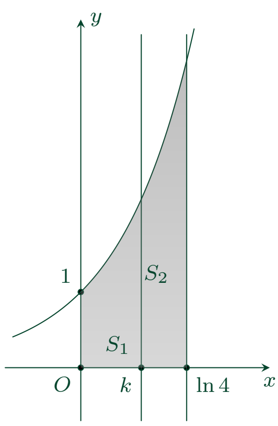
KQ:

CÂU 38. Hình vuông $OABC$ có cạnh bằng 4 được chia thành hai phần bởi đường cong (C) có phương trình $y = \dfrac{1}{4}x^2$. Gọi S_2, S_2 lần lượt là diện tích của phần không tô màu và phần tô màu như hình vẽ bên dưới. Tỉ số $\dfrac{S_1}{S_2}$ bằng bao nhiêu?



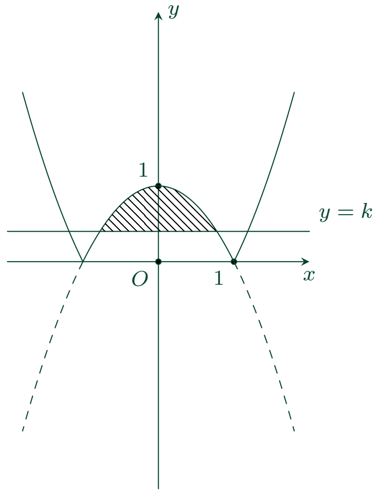
KQ:

CÂU 39. Cho hình thang cong (H) giới hạn bởi các đường $y = \mathrm{e}^x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = \ln 4$. Đường thẳng $x = k$, $(0 < k < \ln 4)$ chia (H) thành hai phần có diện tích là S_1 và S_2 như hình vẽ bên. Tìm k để $S_1 = 2S_2$ (làm tròn kết quả đến hàng phần chục).



KQ:

CÂU 40. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = \left|x^2 - 1\right|$ và $y = k$, với $0 < k < 1$. Tìm k để diện tích hình phẳng (H) gấp hai lần diện tích hình phẳng được kẻ sọc ở hình vẽ bên (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).



KQ: | | | |

QUICK NOTE

Dạng 2. THỂ TÍCH KHỐI TRÒN XOAY

CÂU 1. Viết công thức tính thể tích V của khối tròn xoay được tạo ra khi quay hình thang cong, giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục Ox và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$, $(a < b)$ xung quanh trục Ox.

(A) $V = \int\limits_a^b |f(x)|\, \mathrm{d}x$.
(B) $V = \pi \int\limits_a^b f^2(x)\, \mathrm{d}x$.
(C) $V = \int\limits_a^b f^2(x)\, \mathrm{d}x$.
(D) $V = \pi \int\limits_a^b f(x)\, \mathrm{d}x$.

CÂU 2. Cắt một vật thể bởi hai mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại $x = 1$ và $x = 2$. Một mặt phẳng tùy ý vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x, $(1 \le x \le 2)$ cắt vật thể đó có diện tích $S(x) = 2024x$. Tính thể tích của phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng trên.

(A) $V = 3036$. (B) $V = 3036\pi$. (C) $V = 1518$. (D) $V = 1518\pi$.

CÂU 3. Cắt một vật thể bởi hai mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại $x = 1$ và $x = 3$. Một mặt phẳng tùy ý vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x, $(1 \le x \le 3)$ cắt vật thể đó theo thiết diện là một hình chữ nhật có độ dài hai cạnh là $3x$ và $3x^2 - 2$. Tính thể tích của phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng trên.

(A) $V = 156$. (B) $V = 156\pi$. (C) $V = 312$. (D) $V = 312\pi$.

CÂU 4. Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \mathrm{e}^{3x}$, $y = 0$, $x = 0$ và $x = 1$. Thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục Ox bằng

(A) $\pi \int\limits_0^1 \mathrm{e}^{3x}\, \mathrm{d}x$. (B) $\int\limits_0^1 \mathrm{e}^{6x}\, \mathrm{d}x$. (C) $\pi \int\limits_0^1 \mathrm{e}^{6x}\, \mathrm{d}x$. (D) $\int\limits_0^1 \mathrm{e}^{3x}\, \mathrm{d}x$.

CÂU 5. Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \mathrm{e}^{4x}$, $y = 0$, $x = 0$ và $x = 1$. Thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục Ox bằng

(A) $\int\limits_0^1 \mathrm{e}^{4x}\, \mathrm{d}x$. (B) $\pi \int\limits_0^1 \mathrm{e}^{8x}\, \mathrm{d}x$. (C) $\pi \int\limits_0^1 \mathrm{e}^{4x}\, \mathrm{d}x$. (D) $\int\limits_0^1 \mathrm{e}^{8x}\, \mathrm{d}x$.

CÂU 6. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = x^2 + 3$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$. Gọi V là thể tích của khối tròn xoay được tạo thành khi quay (H) xung quanh trục Ox. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

(A) $V = \int\limits_0^2 \left(x^2 + 3\right)\, \mathrm{d}x$.
(B) $V = \pi \int\limits_0^2 \left(x^2 + 3\right)\, \mathrm{d}x$.
(C) $V = \int\limits_0^2 \left(x^2 + 3\right)^2\, \mathrm{d}x$.
(D) $V = \pi \int\limits_0^2 \left(x^2 + 3\right)^2\, \mathrm{d}x$.

QUICK NOTE

CÂU 7. Cho hình phẳng D giới hạn bởi đường cong $y=\mathrm{e}^x$, trục hoành và các đường thẳng $x=0$, $x=1$. Khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành có thể tích V bằng bao nhiêu?

(A) $V=\dfrac{\pi\left(\mathrm{e}^2+1\right)}{2}$. (B) $V=\dfrac{\mathrm{e}^2-1}{2}$. (C) $V=\dfrac{\pi \mathrm{e}^2}{3}$. (D) $V=\dfrac{\pi\left(\mathrm{e}^2-1\right)}{2}$.

CÂU 8. Cho hình phẳng D giới hạn bởi đường cong $y=\sqrt{x^2+1}$, trục hoành và các đường thẳng $x=0$, $x=1$. Khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành có thể tích V bằng bao nhiêu?

(A) $V=2$. (B) $V=\dfrac{4\pi}{3}$. (C) $V=2\pi$. (D) $V=\dfrac{4}{3}$.

CÂU 9. Cho hình phẳng D giới hạn bởi đường cong $y=\sqrt{2+\cos x}$, trục hoành và các đường thẳng $x=0, x=\dfrac{\pi}{2}$. Khối tròn xoay tạo thành khi D quay quanh trục hoành có thể tích V bằng bao nhiêu?

(A) $V=(\pi+1)\pi$. (B) $V=\pi-1$. (C) $V=\pi+1$. (D) $V=(\pi-1)\pi$.

CÂU 10. Cho hình phẳng D giới hạn bởi đường cong $y=\sqrt{2+\sin x}$, trục hoành và các đường thẳng $x=0$, $x=\pi$. Khối tròn xoay tạo thành khi quay D quay quanh trục hoành có thể tích V bằng bao nhiêu?

(A) $V=2\pi(\pi+1)$. (B) $V=2\pi$. (C) $V=2(\pi+1)$. (D) $V=2\pi^2$.

CÂU 11. Tìm công thức tính thể tích của khối tròn xoay khi cho hình phẳng giới hạn bởi parabol $(P)\colon y=x^2$, đường thẳng $d\colon y=2x$ và đường thẳng $x=0$, $x=2$ quay xung quanh trục Ox.

(A) $\pi\displaystyle\int\limits_0^2\left(x^2-2x\right)^2\,\mathrm{d}x$.

(B) $\pi\displaystyle\int\limits_0^2 4x^2\,\mathrm{d}x-\pi\int_0^2 x^4\,\mathrm{d}x$.

(C) $\pi\displaystyle\int\limits_0^2 4x^2\,\mathrm{d}x+\pi\int_0^2 x^4\,\mathrm{d}x$.

(D) $\pi\displaystyle\int\limits_0^2\left(2x-x^2\right)\,\mathrm{d}x$.

CÂU 12. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y=x^2+3$, $y=0$, $x=0$, $x=2$. Gọi V là thể tích khối tròn xoay được tạo hành khi quay (H) xung quanh trục Ox. Mệnh đề nào sau đây đúng?

(A) $V=\pi\displaystyle\int\limits_0^2\left(x^2+3\right)^2\,\mathrm{d}x$.

(B) $V=\displaystyle\int\limits_0^2\left(x^2+3\right)\,\mathrm{d}x$.

(C) $V=\displaystyle\int\limits_0^2\left(x^2+3\right)^2\,\mathrm{d}x$.

(D) $V=\pi\displaystyle\int\limits_0^2\left(x^2+3\right)\,\mathrm{d}x$.

CÂU 13. Gọi V là thể tích của khối tròn xoay thu được khi quay hình thang cong, giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\sin x$, trục Ox, trục Oy và đường thẳng $x=\dfrac{\pi}{2}$, xung quanh trục Ox. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

(A) $V=\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\,\mathrm{d}x$.

(B) $V=\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,\mathrm{d}x$.

(C) $V=\pi\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\,\mathrm{d}x$.

(D) $V=\pi\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,\mathrm{d}x$.

CÂU 14. Thể tích khối tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y=x^2-2x$, trục hoành, đường thẳng $x=0$ và $x=1$ quanh trục hoành bằng

(A) $\dfrac{16\pi}{15}$. (B) $\dfrac{2\pi}{3}$. (C) $\dfrac{4\pi}{3}$. (D) $\dfrac{8\pi}{15}$.

CÂU 15. Cho miền phẳng (D) giới hạn bởi $y=\sqrt{x}$, hai đường thẳng $x=1$, $x=2$ và trục hoành. Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay (D) quanh trục hoành.

(A) 3π. (B) $\dfrac{3\pi}{2}$. (C) $\dfrac{2\pi}{3}$. (D) $\dfrac{3}{2}$.

CÂU 16. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y=2x-x^2$, $y=0$. Quay (H) quanh trục hoành tạo thành khối tròn xoay có thể tích là

A $\displaystyle\int\limits_0^2 \left(2x-x^2\right)\,\mathrm{d}x$.

B $\pi\displaystyle\int\limits_0^2 \left(2x-x^2\right)^2\,\mathrm{d}x$.

C $\displaystyle\int\limits_0^2 \left(2x-x^2\right)^2\,\mathrm{d}x$.

D $\pi\displaystyle\int\limits_0^2 \left(2x-x^2\right)\,\mathrm{d}x$.

CÂU 17. Cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\sqrt{x}-2$, $y=0$ và $x=4$, $x=9$ quay xung quanh trục Ox. Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành.

A $V=\dfrac{7}{6}$. **B** $V=\dfrac{5\pi}{6}$. **C** $V=\dfrac{7\pi}{11}$. **D** $V=\dfrac{11\pi}{6}$.

CÂU 18. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường thẳng $y=x^2+2$, $y=0$, $x=1$, $x=2$. Gọi V là thể tích của khối tròn xoay được tạo thành khi quay (H) xung quanh trục Ox. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A $V=\displaystyle\int\limits_1^2 \left(x^2+2\right)\,\mathrm{d}x$.

B $V=\pi\displaystyle\int\limits_1^2 \left(x^2+2\right)^2\,\mathrm{d}x$.

C $V=\displaystyle\int\limits_1^2 \left(x^2+2\right)^2\,\mathrm{d}x$.

D $V=\pi\displaystyle\int\limits_1^2 \left(x^2+2\right)\,\mathrm{d}x$.

CÂU 19. Cắt một vật thể (T) bởi hai mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại $x=0$ và $x=2$. Một mặt phẳng tùy ý vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x $(0\le x\le 2)$ cắt vật thể đó có theo một thiết diện là một hình vuông có cạnh bằng $\sqrt{x^3}$. Thể tích vật thể (T) là số hữu tỉ có dạng phân số tối giản $\dfrac{a}{b}$. Tính $a+b$.

KQ: | | | | |

CÂU 20. Cắt một vật thể bởi hai mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại $x=1$; $x=3$. Khi cắt một vật thể bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x $(1\le x\le 3)$, mặt cắt là tam giác vuông có một góc 45° và độ dài một cạnh góc vuông là $\sqrt{4-\dfrac{1}{2}x^2}$. Thể tích vật thể trên là một số hữu tỉ có dạng phân số tối giản $\dfrac{a}{b}$. Tính $a\cdot b$.

KQ: | | | | |

CÂU 21. Tính thể tích khối tròn xoay khi quay hình phẳng (H) xác định bởi các đường $y=\dfrac{1}{3}x^3-x^2$, $y=0$, $x=0$ và $x=3$ quanh trục Ox (kết quả viết dưới dạng số thập phân và làm tròn đến hàng phần trăm).

KQ: | | | | |

CÂU 22. Tính thể tích của vật thể tạo nên khi quay quanh trục Ox hình phẳng D giới hạn bởi đồ thị (P): $y=2x-x^2$, trục Ox và hai đường thẳng $x=0$, $x=2$ (Kết quả viết dưới dạng số thập phân và làm tròn đến hàng phần trăm).

KQ: | | | | |

CÂU 23. Cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\tan x$, $y=0$, $x=0$, $x=\dfrac{\pi}{4}$ quay xung quanh trục Ox. Tính thể tích vật thể tròn xoay được sinh ra (kết quả viết dưới dạng số thập phân và làm tròn một chữ số thập phân sau dấu phẩy).

KQ: | | | | |

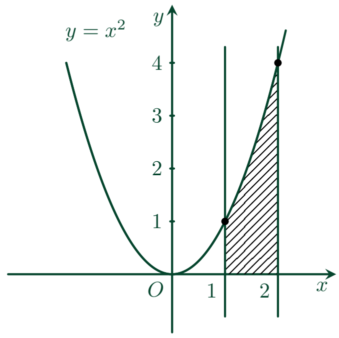
CÂU 24. Gọi V là thể tích khối tròn xoay tạo thành do quay xung quanh trục hoành một elip có phương trình $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$. Tính V (Kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).

KQ: | | | | |

QUICK NOTE

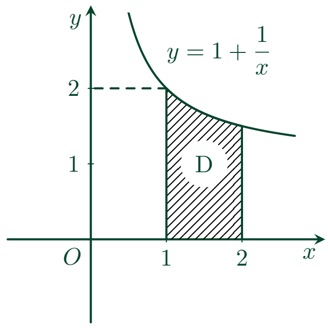
QUICK NOTE

CÂU 25. Cho hình phẳng (H) được gạch chéo trong hình bên. Tính thể hình tròn xoay sinh ra bởi (H) khi quay (H) quanh trục Ox (Kết quả viết dưới dạng số thập phân và làm tròn đến hàng phần chục).



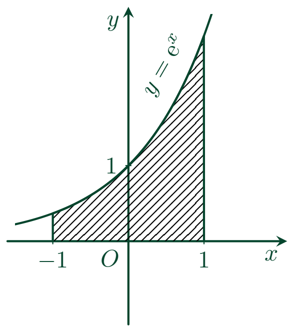
KQ:

CÂU 26. Cho hình phẳng (D) được tô màu trong hình bên. Tính thể hình tròn xoay sinh ra bởi (D) khi quay (D) quanh trục Ox (Kết quả viết dưới dạng số thập phân và làm tròn đến hàng phần trăm).



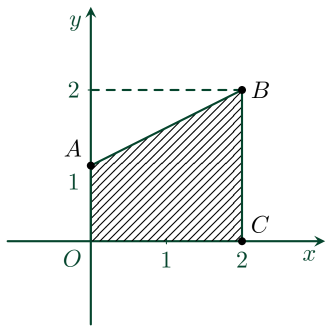
KQ:

CÂU 27. Cho hình phẳng (H) được tô màu trong hình bên. Tính thể hình tròn xoay sinh ra bởi (H) khi quay (H) quanh trục Ox (Kết quả viết dưới dạng số thập phân và làm tròn đến hàng phần chục)



KQ:

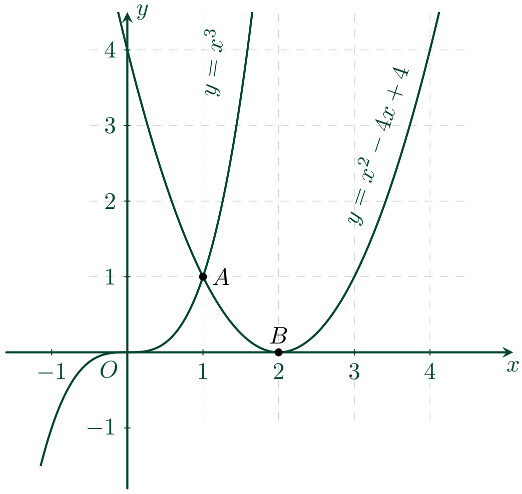
CÂU 28. Cho hình phẳng (H) được tô màu trong hình bên. Tính thể hình tròn xoay sinh ra bởi (H) khi quay (H) quanh trục Ox (Kết quả viết dưới dạng số thập phân và làm tròn đến hàng phần chục).



KQ:

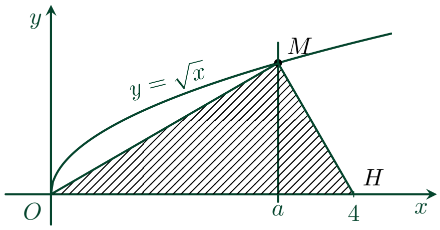
QUICK NOTE

CÂU 29. Cho hình phẳng (H) là tam giác cong OAB trong hình vẽ bên. Tính thể hình tròn xoay sinh ra bởi (H) khi quay (H) quanh trục Ox (Kết quả viết dưới dạng số thập phân và làm tròn đến hàng phần trăm).



KQ: | | | |

CÂU 30. Gọi V là thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\sqrt{x}$, $y=0$ và $x=4$ quanh trục Ox. Đường thẳng $x=a$, $(0<a<4)$ cắt đồ thị hàm số $y=\sqrt{x}$ tại M (hình vẽ). Gọi V_1 là thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay tam giác OMH quanh trục Ox. Biết rằng $V=2V_1$. Tìm a.



KQ: | | | |

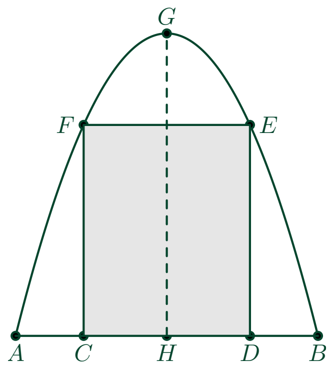
Dạng 3. Ứng dụng diện tích hình phẳng và thể tích khối tròn xoay trong bt thực tiễn

CÂU 1. Trường Nguyễn Văn Trỗi muốn làm một cái cửa nhà hình parabol có chiều cao từ mặt đất đến đỉnh là 2,25 mét, chiều rộng tiếp giáp với mặt đất là 3 mét. Giá thuê mỗi mét vuông là 1 500 000 đồng. Vậy số tiền nhà trường phải trả là

A 33 750 000 đồng. **B** 3 750 000 đồng. **C** 12 750 000 đồng. **D** 6 750 000 đồng.

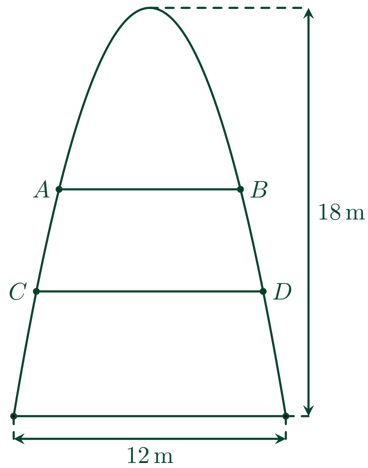
CÂU 2. Chị Minh Hiền muốn làm một cái cổng hình Parabol như hình vẽ bên. Chiều cao $GH=4\,\text{m}$, chiều rộng $AB=4\,\text{m}$, $AC=BD=0{,}9\,\text{m}$. Chị Minh Hiền làm hai cánh cổng khi đóng lại là hình chữ nhật $CDEF$ tô đậm có giá là 1 200 000 đồng/m^2, còn các phần để trắng làm xiên hoa có giá là 900 000 đồng/m^2. Hỏi tổng số tiền để làm hai phần nói trên gần nhất với số tiền nào dưới đây?

A 11 445 000 đồng. **B** 4 077 000 đồng.
C 7 368 000 đồng. **D** 11 370 000 đồng.



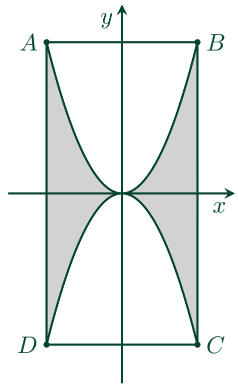
QUICK NOTE

CÂU 3. Một cổng chào có dạng hình Parabol chiều cao 18 m, chiều rộng chân đế 12 m. Người ta căng hai sợi dây trang trí AB, CD nằm ngang đồng thời chia hình giới hạn bởi Parabol và mặt đất thành ba phần có diện tích bằng nhau (xem hình vẽ bên). Tỉ số $\dfrac{AB}{CD}$ bằng



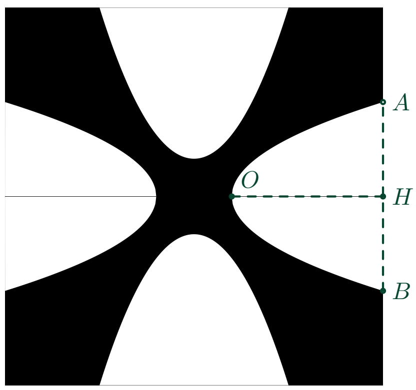
Ⓐ $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Ⓑ $\dfrac{4}{5}$. Ⓒ $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$. Ⓓ $\dfrac{3}{1+2\sqrt{2}}$.

CÂU 4. Một họa tiết hình cánh bướm như hình vẽ bên. Phần tô đậm được đính đá với giá thành $500\,000/\,\text{m}^2$. Phần còn lại được tô màu với giá thành $250\,000/\,\text{m}^2$. Cho $AB = 4\,\text{dm}$; $BC = 8\,\text{dm}$. Hỏi để trang trí $1\,000$ họa tiết như vậy cần số tiền gần nhất với số nào sau đây.



Ⓐ 105 660 667. Ⓑ 106 666 667. Ⓒ 107 665 667. Ⓓ 108 665 667.

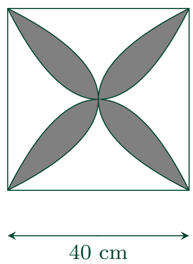
CÂU 5. Một hoa văn trang trí được tạo ra từ một miếng bìa mỏng hình vuông cạnh bằng 10 cm bằng cách khoét đi bốn phần bằng nhau có hình dạng parabol như hình bên. Biết $AB = 5$ cm, $OH = 4$ cm. Biết giá trang trí hoa văn 1 cm^2 là 50000 đồng, tính số tiền cần bỏ ra để trang trí hoa văn đó.



Ⓐ 2 553 333 đồng. Ⓑ 2 333 333 đồng. Ⓒ 2 780 333 đồng. Ⓓ 2 123 333 đồng.

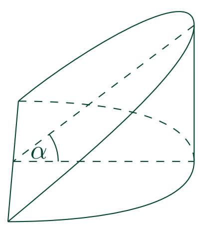
CÂU 6.

Một viên gạch hoa hình vuông cạnh 40 cm. Người thiết kế đã sử dụng bốn đường parabol có chung đỉnh tại tâm viên gạch để tạo ra bốn cánh hoa (được tô đen như hình vẽ dưới). Diện tích mỗi cánh hoa của viên gạch bằng



Ⓐ 800 cm^2. Ⓑ $\dfrac{800}{3}$ cm^2. Ⓒ $\dfrac{400}{3}$ cm^2. Ⓓ 250 cm^2.

CÂU 7. Khi cắt một vật thể hình chiếc niêm bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x $(-2 \le x \le 2)$, mặt cắt là tam giác vuông có một góc 45° và độ dài một cạnh góc vuông là $\sqrt{14-3x^2}$ (như hình vẽ). Tính thể tích vật thể hình chiếc niêm trên.

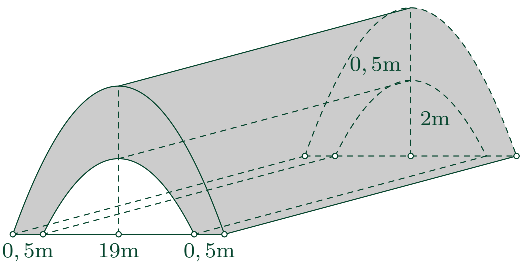


Ⓐ $V = 20$. Ⓑ $V = 20\pi$. Ⓒ $V = 10$. Ⓓ $V = 10\pi$.

CÂU 8.

QUICK NOTE

Trong chương trình nông thôn mới của tỉnh Phú Yên, tại xã Hòa Mỹ Tây có xây một cây cầu bằng bê tông như hình vẽ (đường cong trong hình vẽ là các đường Parabol). Biết 1 m^3 khối bê tông để đổ cây cầu có giá 5 triệu đồng. Tính số tiền mà tỉnh Phú Yên cần bỏ ra để xây cây cầu trên.



(A) 110 triệu đồng. (B) 250 triệu đồng. (C) 180 triệu đồng. (D) 200 triệu đồng.

CÂU 9. Để kỷ niệm ngày 26-3. Chi đoàn 12A dự định dựng một lều trại có dạng parabol, với kích thước: nền trại là một hình chữ nhật có chiều rộng là 3 mét, chiều sâu là 6 mét, đỉnh của parabol cách mặt đất là 3 mét. Hãy tính thể tích phần không gian phía bên trong trại để lớp 12A cử số lượng người tham dự trại cho phù hợp.

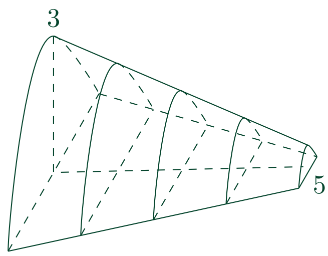
(A) $30\ \text{m}^3$. (B) $36\ \text{m}^3$. (C) $40\ \text{m}^3$. (D) $41\ \text{m}^3$.

CÂU 10. Cho một vật thể bằng gỗ có dạng hình trụ với chiều cao và bán kính đáy cùng bằng R. Cắt khối gỗ đó bởi một mặt phẳng đi qua đường kính của một mặt đáy của khối gỗ và tạo với mặt phẳng đáy của khối gỗ một góc 30° ta thu được hai khối gỗ có thể tích là V_1 và V_2, với $V_1 < V_2$. Thể tích V_1 bằng

(A) $V_1 = \dfrac{2\sqrt{3}R^3}{9}$. (B) $V_1 = \dfrac{\sqrt{3}\pi R^3}{27}$. (C) $V_1 = \dfrac{\sqrt{3}\pi R^3}{18}$. (D) $V_1 = \dfrac{\sqrt{3}R^3}{27}$.

CÂU 11.

Cho một mô hình $3-D$ mô phỏng một đường hầm như hình vẽ bên. Biết rằng đường hầm mô hình có chiều dài 5 cm; khi cắt hình này bởi mặt phẳng vuông góc với đáy của nó, ta được thiết diện là một hình parabol có độ dài đáy gấp đôi chiều cao parabol. Chiều cao của mỗi thiết diện parabol cho bởi công thức $y = 3 - \dfrac{2}{5}x$ cm, với x cm là khoảng cách tính từ lối vào lớn hơn của đường hầm mô hình. Tính thể tích (theo đơn vị cm^3) không gian bên trong đường hầm mô hình (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).



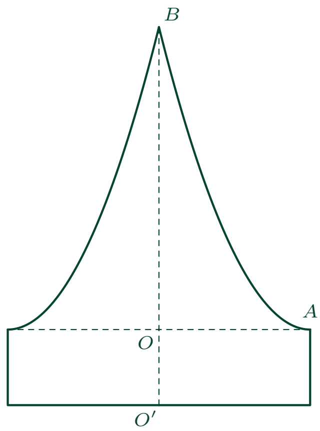
(A) 29. (B) 27. (C) 31. (D) 33.

CÂU 12.

Chuẩn bị cho đêm hội diễn văn nghệ chào đón năm mới, bạn Minh Hiền đã làm một chiếc mũ "cách điệu" cho ông già Noel có dáng một khối tròn xoay. Mặt cắt qua trục của chiếc mũ như hình vẽ bên dưới. Biết rằng $OO' = 5$ cm, $OA = 10$ cm, $OB = 20$ cm, đường cong AB là một phần của parabol có đỉnh là điểm A. Thể tích của chiếc mũ bằng

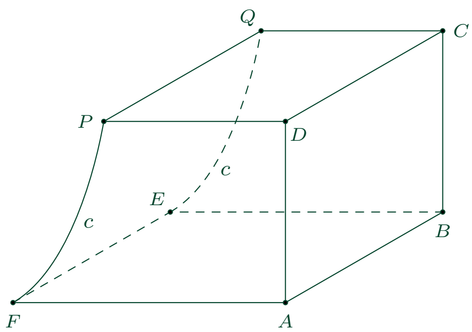
(A) $\dfrac{2750\pi}{3}\ \text{cm}^3$. (B) $\dfrac{2500\pi}{3}\ \text{cm}^3$.

(C) $\dfrac{2050\pi}{3}\ \text{cm}^3$. (D) $\dfrac{2250\pi}{3}\ \text{cm}^3$.



CÂU 13.

Một chi tiết máy được thiết kế như hình vẽ bên. Các tứ giác $ABCD$, $CDPQ$ là các hình vuông cạnh 2,5 (cm). Tứ giác $ABEF$ là hình chữ nhật có $BE = 3{,}5$ (cm). Mặt bên $PQEF$ được mài nhẵn theo đường parabol (P) có đỉnh parabol nằm trên cạnh EF. Thể tích của chi tiết máy bằng



QUICK NOTE

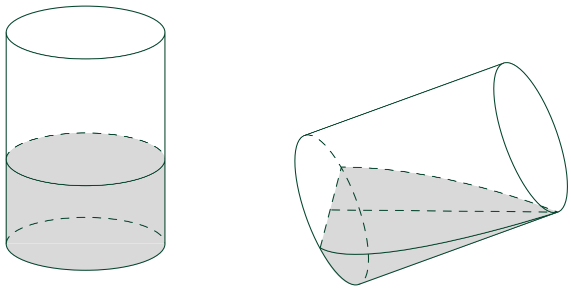
(A) $\dfrac{395}{24}$ cm^3. (B) $\dfrac{50}{3}$ cm^3. (C) $\dfrac{125}{8}$ cm^3. (D) $\dfrac{425}{24}$ cm^3.

CÂU 14. Bổ dọc một quả dưa hấu ta được thiết diện là hình elip có trục lớn 28 cm, trục nhỏ 25 cm. Biết cứ 1000 m^3 dưa hấu sẽ làm được cốc sinh tố giá 20000 đồng. Hỏi từ quả dưa hấu trên có thể thu được bao nhiêu tiền từ việc bán nước sinh tố? Biết rằng bề dày vỏ dưa không đáng kể.

(A) 183000 đồng. (B) 180000 đồng. (C) 185000 đồng. (D) 190000 đồng.

CÂU 15.

Có một cốc nước thủy tinh hình trụ, bán kính trong lòng đáy cốc là 6 cm, chiều cao lòng cốc là 10 cm đang đựng một lượng nước. Tính thể tích lượng nước trong cốc, biết khi nghiêng cốc nước vừa lúc khi nước chạm miệng cốc thì đáy mực nước trùng với đường kính đáy.



(A) 240 cm^3. (B) 240π cm^3.

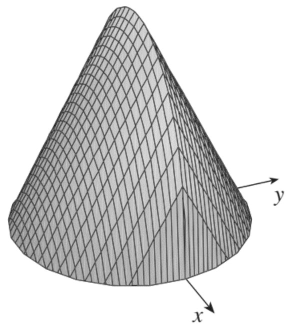
(C) 120 cm^3. (D) 120π cm^3.

CÂU 16.

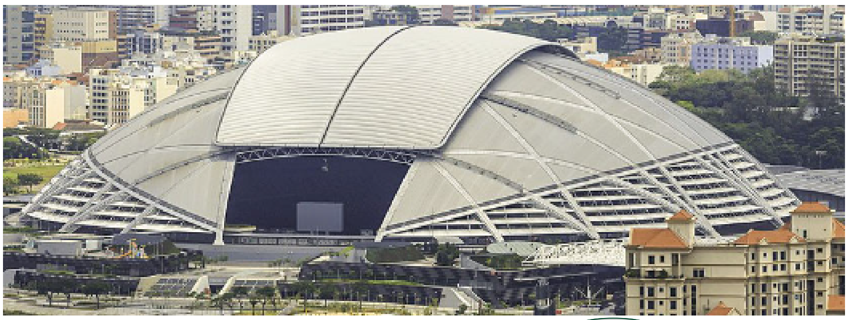
Cho vật thể đáy là hình tròn có bán kính bằng 1 (tham khảo hình vẽ). Khi cắt vật thể bằng mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x $(-1 \le x \le 1)$ thì được thiết diện là một tam giác đều. Thể tích V của vật thể đó là

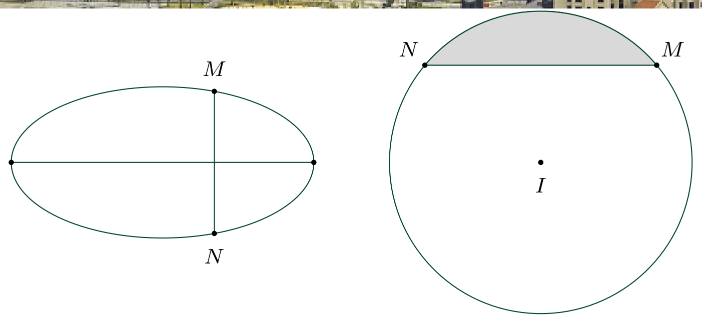
(A) $V = \sqrt{3}$. (B) $V = 3\sqrt{3}$.

(C) $V = \dfrac{4\sqrt{3}}{3}$. (D) $V = \pi$.



CÂU 17. Sân vận động Sport Hub (Singapore) là sân có mái vòm kỳ vĩ nhất thế giới. Đây là nơi diễn ra lễ khai mạc Đại hội thể thao Đông Nam Á được tổ chức tại Singapore năm 2015. Nền sân là một elip (E) có trục lớn dài $150m$, trục bé dài $90m$ (hình vẽ). Nếu cắt sân vận động theo một mặt phẳng vuông góc với trục lớn của (E)và cắt elip ở M, N (hình vẽ) thì ta được thiết diện luôn là một phần của hình tròn có tâm I (phần tô đậm trong hình 4) với MN là một dây cung và góc $\widehat{MIN} = 90°$. Để lắp máy điều hòa không khí thì các kỹ sư cần tính thể tích phần không gian bên dưới mái che và bên trên mặt sân, coi như mặt sân là một mặt phẳng và thể tích vật liệu là mái không đáng kể. Hỏi thể tích xấp xỉ bao nhiêu?



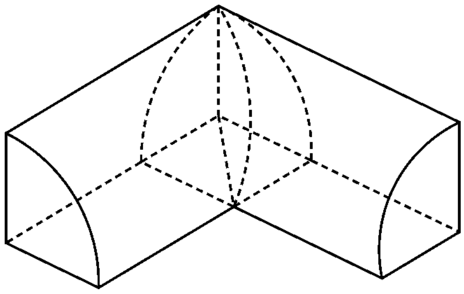


(A) 57793 m^3. (B) 115586 m^3. (C) 32162 m^3. (D) 101793 m^3.

CÂU 18.

Gọi (H) là phần giao của hai khối $\frac{1}{4}$ hình trụ có bán kính a, hai trục hình trụ vuông góc với nhau như hình vẽ sau. Tính thể tích của khối (H).

Ⓐ $V_{(H)} = \frac{a^3}{2}$. Ⓑ $V_{(H)} = \frac{3a^3}{4}$.
Ⓒ $V_{(H)} = \frac{2a^3}{3}$. Ⓓ $V_{(H)} = \frac{\pi a^3}{4}$.



CÂU 19. Một bác thợ xây bơm nước vào bể chứa nước. Gọi $h(t)$ là thể tích nước bơm được sau t giây. Cho $h'(t) = 6at^2 + 2bt$ và ban đầu bể không có nước. Sau 3 giây thì thể tích nước trong bể là $90m^3$, sau 6 giây thì thể tích nước trong bể là $504m^3$. Tính thể tích nước trong bể sau khi bơm được 9 giây.

Ⓐ $1458m^3$. Ⓑ $600m^3$. Ⓒ $2200m^3$. Ⓓ $4200m^3$.

CÂU 20. Người ta thay nước mới cho một bể bơi có dạng hình hộp chữ nhật có độ sâu là 280cm. Giả sử $h(t)$là chiều cao (tính bằng cm) của mực nước bơm được tại thời điểm t giây, biết rằng tốc độ tăng của chiều cao mực nước tại giây thứ t là $h'(t) = \frac{1}{500}\sqrt[3]{t}$ và lúc đầu hồ bơi không có nước. Hỏi sau bao lâu thì bơm được số nước bằng $\frac{3}{4}$độ sâu của hồ bơi (làm tròn đến giây)?

Ⓐ 2 giờ 36 giây. Ⓑ 2 giờ 48 giây. Ⓒ 2 giờ 38 giây. Ⓓ 2 giờ 46 giây.

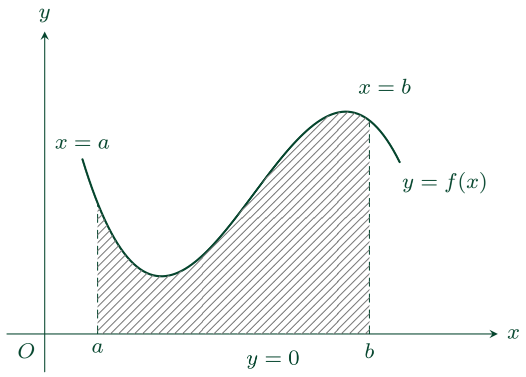
QUICK NOTE

LỜI GIẢI CHI TIẾT

Bài 1. ỨNG DỤNG HÌNH HỌC CỦA TÍCH PHÂN

A. DIỆN TÍCH HÌNH THANG CONG

1. Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$ và $x = b$



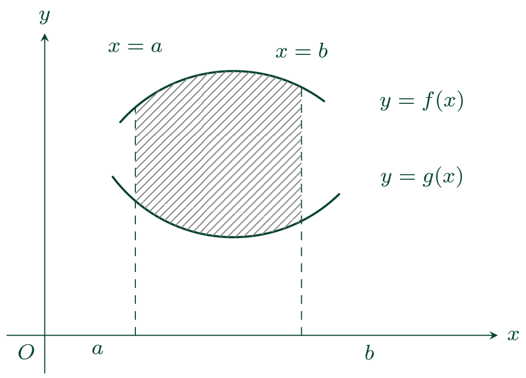
Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[a; b]$. Khi đó, diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành Ox $(y = 0)$ và hai đường thẳng $x = a$ và $x = b$ được tính bởi công thức

$$S = \int\limits_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$$

Chú ý: Giả sử hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[a; b]$. Nếu $f(x)$ không đổi dấu trên $[a; b]$ thì

$$\int\limits_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x = \left|\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right|.$$

2. Hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số và hai đường thẳng $x = a$ và $x = b$

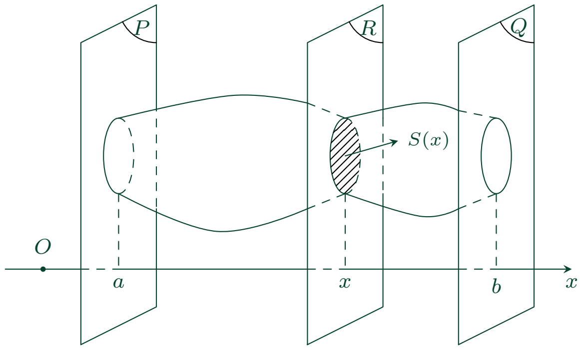


Cho 2 hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ liên tục trên $[a; b]$. Khi đó diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ và hai đường thẳng $x = a$ và $x = b$ được tính bởi công thức

$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)|\,\mathrm{d}x$$

B. THỂ TÍCH HÌNH KHỐI

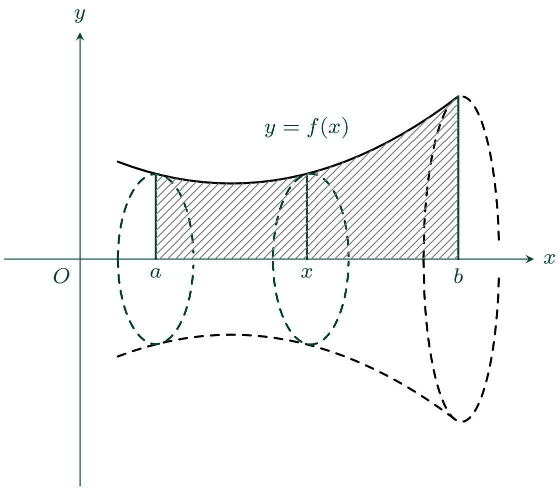
1. Thể tích của vật thể



Trong không gian, cho một vật thể nằm trong khoảng không gian giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) cùng vuông góc với trục Ox tại các điểm a và b. Mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm $x(a \leq x \leq b)$ cắt vật thể theo mặt cắt có diện tích $S(x)$. Khi đó, nếu $S(x)$ là hàm số liên tục trên $[a;b]$ thì thể tích của vật thể được tính bởi công thức

$$V = \int\limits_a^b S(x)\,\mathrm{d}x$$

2. Thể tích khối tròn xoay



Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục, không âm trên $[a;b]$. Hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành Ox và hai đường thẳng $x = a$ và $x = b$ quay quanh trục Ox tạo thành một khối tròn xoay có thể tích bằng

$$V = \pi \int\limits_a^b [f(x)]^2\,\mathrm{d}x$$

Dạng 1. TÍNH DIỆN TÍCH HÌNH GIỚI HẠN BỞI CÁC ĐƯỜNG CONG

CÂU 1. Cho hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ liên tục trên $[a;b]$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của các hàm số $y = f(x), y = g(x)$ và các đường thẳng $x = a, x = b$ bằng

A $\left|\int\limits_a^b [f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x\right|$. **B** $\int\limits_a^b |f(x) + g(x)|\,\mathrm{d}x$. **C** $\int\limits_a^b |f(x) - g(x)|\,\mathrm{d}x$. **D** $\int\limits_a^b [f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Theo lý thuyết thì diện tích hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị của các đường $y = f(x), y = g(x),\ x = a, x = b$

Được tính theo công thức $S = \int\limits_a^b |f(x) - g(x)|\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án C .... □

CÂU 2. Gọi S là diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = 3^x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A $\int\limits_0^2 3^x \, dx$. **B** $S = \pi \int\limits_0^2 3^{2x} \, dx$. **C** $S = \pi \int\limits_0^2 3^x \, dx$. **D** $S = \int\limits_0^2 3^{2x} \, dx$.

Lời giải.

Diện tích hình phẳng đã cho được tính bởi công thức $S = \int\limits_0^2 3^x \, dx$.

Chọn đáp án A .... □

CÂU 3. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = (x-2)^2 - 1$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 1, x = 2$ bằng

A $\dfrac{2}{3}$. **B** $\dfrac{3}{2}$. **C** $\dfrac{1}{3}$. **D** $\dfrac{7}{3}$.

Lời giải.

Ta có $S = \int\limits_1^2 \left|(x-2)^2 - 1\right| \, dx = \int\limits_1^2 \left|x^2 - 4x + 3\right| dx = \left|\int\limits_1^2 \left(x^2 - 4x + 3\right) dx\right| = \dfrac{2}{3}$.

Chọn đáp án A .... □

CÂU 4. Tính diện tích S hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^2 + 1$, $x = -1$, $x = 2$ và trục hoành.

A $S = 6$. **B** $S = 16$. **C** $S = \dfrac{13}{6}$. **D** $S = 13$.

Lời giải.

Ta có $S = \int\limits_{-1}^2 \left|x^2 + 1\right| dx = \int\limits_{-1}^2 \left(x^2 + 1\right) dx = 6$.

Chọn đáp án A .... □

CÂU 5. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^2 + 5, y = 6x, x = 0, x = 1$. Tính S.

A $\dfrac{4}{3}$. **B** $\dfrac{7}{3}$. **C** $\dfrac{8}{3}$. **D** $\dfrac{5}{3}$.

Lời giải.

Diện tích hình phẳng cần tìm $S = \int\limits_0^1 \left|x^2 - 6x + 5\right| dx = \dfrac{7}{3}$.

Chọn đáp án B .... □

CÂU 6. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y = \ln x, y = 1$ và hai đường thẳng $x = 1, x = e$ bằng

A e^2. **B** $e + 2$. **C** $2e$. **D** $e - 2$.

Lời giải.

$$\begin{aligned}
S &= \int\limits_1^e |\ln x - 1| dx \\
&= \left|\int\limits_1^e (\ln x - 1) dx\right| \\
&= \left|x(\ln x - 1)\Big|_1^e - \int\limits_1^e dx\right| \\
&= \left|1 - x\Big|_1^e\right| \\
&= |1 - (e-1)| = |2 - e| \\
&= e - 2.
\end{aligned}$$

Chọn đáp án D .... □

CÂU 7. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y = 4x - x^2, y = 2x$ và hai đường thẳng $x = 1, x = e$ bằng

A 4. **B** $\dfrac{20}{3}$. **C** $\dfrac{4}{3}$. **D** $\dfrac{16}{3}$.

Lời giải.

Diện tích hình phẳng cần tìm là

$$S=\int_0^2\left|x^2-2x\right|\mathrm{d}x=\int_0^2\left(2x-x^2\right)\mathrm{d}x=\left(x^2-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^2=\frac{4}{3}.$$

Chọn đáp án (C) .... □

CÂU 8. Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=x^2-2x$, $y=0$, $x=-10$, $x=10$.

(A) $S=\dfrac{2000}{3}$. (B) $S=2008$. (C) $S=2000$. (D) $S=\dfrac{2008}{3}$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của hai đường $(C)\colon y=x^2-2x$ và $(d)\colon y=0$ là

$$x^2-2x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right..$$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
VT		$+$		$-$		$+$	

Diện tích cần tìm

$$\begin{aligned}S&=\int_{-10}^{10}\left|x^2-2x\right|\mathrm{d}x\\&=\int_{-10}^{0}\left(x^2-2x\right)\mathrm{d}x-\int_0^2\left(x^2-2x\right)\mathrm{d}x+\int_2^{10}\left(x^2-2x\right)\mathrm{d}x\\&=\left(\frac{x^3}{3}-x^2\right)\Bigg|_{-10}^{0}-\left(\frac{x^3}{3}-x^2\right)\Bigg|_0^2+\left(\frac{x^3}{3}-x^2\right)\Bigg|_2^{10}\\&=\frac{1300}{3}+\frac{4}{3}+\frac{704}{3}\\&=\frac{2008}{3}.\end{aligned}$$

Chọn đáp án (D) .... □

CÂU 9. Gọi S là diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=2^x$, $y=0$, $x=0$, $x=2$. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

Mệnh đề	Đ	S
a) $S=\int_0^2 2^x\mathrm{d}x$.	X	
b) $S=\dfrac{3}{\ln 2}$.	X	
c) $S=\pi\int_0^2 2^x\mathrm{d}x$.		X
d) $S=\dfrac{3\pi}{\ln 2}$.		X

Lời giải.

$$S=\int_0^2\left|2^x\right|\mathrm{d}x=\int_0^2 2^x\mathrm{d}x=\frac{2^2}{\ln 2}-\frac{2^0}{\ln 2}=\frac{3}{\ln 2}\left(\text{do }2^x>0,\forall x\in[0;2]\right).$$

Chọn đáp án | a đúng | b đúng | c sai | d sai | .... □

CÂU 10. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\mathrm{e}^x, y=0, x=0, x=2$. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

Mệnh đề	Đ	S
a) $S=\int\limits_0^2 \mathrm{e}^x \mathrm{d}x$.	X	
b) $S=e^2$.		X

Mệnh đề	Đ	S
c) $S=\pi\int\limits_0^2 \mathrm{e}^x \mathrm{d}x$.		X
d) $S=\left(e^2-1\right)\pi$.		X

Lời giải.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\mathrm{e}^x, y=0, x=0, x=2$ là

$$S=\int\limits_0^2 e^x \mathrm{d}x=e^2-1.$$

Chọn đáp án | a đúng | b sai | c sai | d sai | .... □

CÂU 11. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai

Mệnh đề	Đ	S
a) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^2$, $y=2x$, $x=0$, $x=1$ là $\frac{4}{3}$.	X	
b) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=-x^2+2x+1$, $y=2x^2-4x+1$, $x=0$, $x=2$ là 4.	X	
c) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\frac{x-1}{x+1}$, trục hoành, $x=0$, $x=1$ là $2\ln 2-1$.	X	
d) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=-x^3+12x$, $y=-x^2$, $x=-3$, $x=4$ là $\frac{937}{12}$.	X	

Lời giải.

a) Đúng.
Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^2$, $y=2x$, $x=0$, $x=1$ là

$$\begin{aligned} S &= \int\limits_0^1 \left|x^2-x\right| \mathrm{d}x \\ &= \left|\int\limits_0^1 \left(x^2-x\right) \mathrm{d}x\right| \\ &= \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

b) Đúng.
Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=-x^2+2x+1$, $y=2x^2-4x+1$, $x=0$, $x=2$ là

$$\begin{aligned} & \int\limits_0^2 \left|2x^2-4x+1-\left(-x^2+2x+1\right)\right| \mathrm{d}x \\ =& \int\limits_0^2 \left|3x^2-6x\right| \mathrm{d}x \\ =& \int\limits_0^2 \left(6x-3x^2\right) \mathrm{d}x \\ =& \left(3x^2-x^3\right)\Big|_0^2=4. \end{aligned}$$

c) Đúng.
Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\frac{x-1}{x+1}$, trục hoành, $x=0$, $x=1$ là

$$\begin{aligned} S &= \int\limits_0^1 \left|\frac{x-1}{x+1}\right| \mathrm{d}x \\ &= \left|\int\limits_0^1 \left(\frac{x-1}{x+1}\right) \mathrm{d}x\right| \\ &= \left|\int\limits_0^1 \left(1-\frac{2}{x+1}\right) \mathrm{d}x\right| \\ &= \left|(x-2\ln|x+1|)\Big|_0^1\right| \\ &= 2\ln 2 - 1. \end{aligned}$$

d) Đúng.
Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=-x^3+12$, $y=-x^2$, $x=-3$ là

$$\begin{aligned} S &= \int\limits_{-3}^4 \left|x^3-x^2-12x\right| \mathrm{d}x \\ &= \int\limits_{-3}^0 \left|x^3-x^2-12x\right| \mathrm{d}x + \int\limits_0^4 \left|x^3-x^2-12x\right| \mathrm{d}x \\ &= \left|\int\limits_{-3}^0 \left(x^3-x^2-12x\right) \mathrm{d}x\right| + \left|\int\limits_0^4 \left(x^3-x^2-12x\right) \mathrm{d}x\right| \\ &= \left|\left(\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}-6x^2\right)\Big|_{-3}^0\right| + \left|\left(\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}-6x^2\right)\Big|_0^4\right| \\ &= \left|\frac{-99}{4}\right| + \left|\frac{-160}{3}\right| = \frac{937}{12}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án | a đúng | b đúng | c đúng | d đúng | .... □

CÂU 12. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^2+x-1$, $y=x^4+x-1$, $x=-1$, $x=1$.

Đáp án: $0,27$

Lời giải.
Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^2+x-1, y=x^4+x-1, x=-1, x=1$ là

$$\begin{aligned} S &= \int\limits_{-1}^1 \left|x^2-x^4\right| \mathrm{d}x \\ &= \int\limits_{-1}^0 \left|x^2-x^4\right| \mathrm{d}x + \int\limits_0^1 \left|x^2-x^4\right| \mathrm{d}x \\ &= \left|\int\limits_{-1}^0 \left(x^2-x^4\right) \mathrm{d}x\right| + \left|\int\limits_0^1 \left(x^2-x^4\right) \mathrm{d}x\right| \\ &= \left|\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{5}\right)\right| 0| + |\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{5}\right) |0| \\ &= \frac{2}{15}+\frac{2}{15}=\frac{4}{15} \approx 0,27. \end{aligned}$$

CÂU 13. Kí hiệu $S(t)$ là diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=2x+1$, $y=0$, $x=1$, $x=t\,(t>1)$. Tìm t để $S(t)=10$.

Đáp án: 3

Lời giải.

Cách 1. Ta có $S(t)=\int\limits_1^t|2x+1|\mathrm{d}x=\int\limits_1^t(2x+1)\mathrm{d}x$.

Suy ra $S(t)=\left.\left(x^2+x\right)\right|_1^t=t^2+t-2$.

Do đó $S(t)=10\Leftrightarrow t^2+t-2=10\Leftrightarrow t^2+t-12=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=3\\t=-4\text{ (L)}\end{array}\right.$.

Vậy $t=3$.

Cách 2. Hình phẳng đã cho là hình thang có đáy nhỏ bằng $y(1)=3$, đáy lớn bằng $y(t)=2t+1$ và chiều cao bằng $t-1$. Ta có

$$\frac{(3+2t+1)(t-1)}{2}=10\Leftrightarrow 2t^2+2t-24=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=3\\t=-4\end{array}\right..$$

Vì $t>1$ nên $t=3$.

CÂU 14. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $my=x^2$, $mx=y^2(m>0)$. Tìm giá trị của m để $S=3$.

Đáp án: 3

Lời giải.

Tọa độ giao điểm của hai đồ thị hàm số là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases}my=x^2 & (1)\\mx=y^2 & (2)\end{cases}$ Thế (1) vào (2) ta được $mx=\left(\dfrac{x^2}{m}\right)^2\Leftrightarrow m^3x-x^4=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=m>0.\end{array}\right.$

Vì $y=\dfrac{x^2}{m}>0$ nên $mx=y^2$ (với $y>0$) $\Leftrightarrow y=\sqrt{mx}$

Khi đó diện tích hình phẳng cần tìm là

$$\begin{aligned}S&=\int\limits_0^m\left|\sqrt{mx}-\frac{x^2}{m}\right|\mathrm{d}x=\left|\int\limits_0^m\left(\sqrt{mx}-\frac{x^2}{m}\right)\mathrm{d}x\right|\\&=\left|\left.\left(\frac{2\sqrt{m}}{3}\cdot x^{\frac{3}{2}}-\frac{x^3}{3m}\right)\right|_0^m\right|\\&=\left|\frac{1}{3}m^2\right|=\frac{1}{3}m^2\end{aligned}$$

Yêu cầu bài toán $S=3\Leftrightarrow\dfrac{1}{3}m^2=3\Leftrightarrow m^2=9\Leftrightarrow m=3$.

CÂU 15. Giá trị dương của tham số m sao cho diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y=2x+3$ và các đường thẳng $y=0$, $x=0$, $x=m$ bằng 10 là?

Đáp án: 2

Lời giải.

Vì $m>0$ nên $2x+3>0,\forall x\in[0;m]$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=2x+3$ và các đường thẳng $y=0$, $x=0$, $x=m$ là

$$S=\int\limits_0^m(2x+3)\cdot\mathrm{d}x=\left.\left(x^2+3x\right)\right|_0^m=m^2+3m.$$

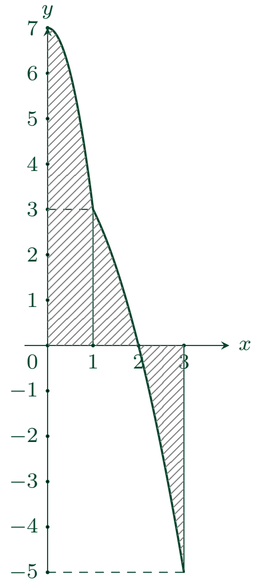
Theo giả thiết ta có

$$S=10\Leftrightarrow m^2+3m=10\Leftrightarrow m^2+3m-10=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=2\\m=-5\end{array}\right.\Leftrightarrow m=2\text{ do }m>0.$$

CÂU 16. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}7-4x^3\text{ khi }0\le x\le 1\\4-x^2\text{ khi }x>1\end{cases}$. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $f(x)$ và các đường thẳng $x=0$, $x=3$, $y=0$.

Đáp án: | 1 | 0 | | |

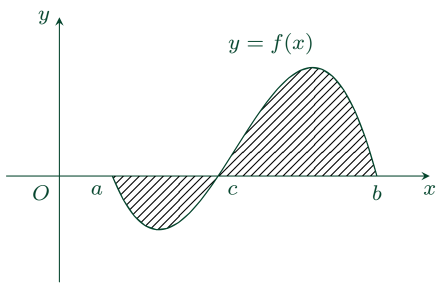
Lời giải.



$$\begin{aligned} S &= \int\limits_0^1 \left(7-4x^3\right) \mathrm{d}x + \int\limits_1^2 \left(4-x^2\right) \mathrm{d}x + \int\limits_2^3 \left(x^2-4\right) \mathrm{d}x \\ &= \left(7x-x^4\right)\Big|_0^1 + \left(4x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_1^2 + \left(\frac{x^3}{3}-4x\right)\Bigg|_2^3 \\ &= 6+4-\frac{7}{3}-3-\frac{8}{3}+8=10. \end{aligned}$$

CÂU 17.

Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục hoành, đường thẳng $x=a$, $x=b$ (như hình vẽ bên). Hỏi cách tính S nào dưới đây đúng?



(A) $S=\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

(B) $S=\left|\int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x+\int\limits_c^b f(x)\,\mathrm{d}x\right|$.

(C) $S=-\int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x+\int\limits_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

(D) $S=\int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x+\int\limits_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Ta có $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$.

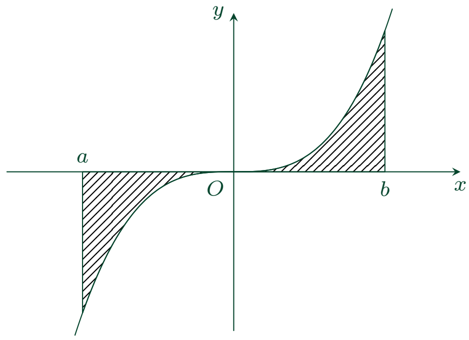
Dựa vào đồ thị ta có $|f(x)|=\begin{cases} -f(x), & a\le x\le c \\ f(x), & c<x\le b. \end{cases}$

Suy ra $S=\int\limits_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x=\int\limits_a^c |f(x)|\,\mathrm{d}x+\int\limits_c^b |f(x)|\,\mathrm{d}x=-\int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x+\int\limits_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án (C) .... □

CÂU 18.

Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Gọi D là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $(C): y=f(x)$, trục hoành, hai đường thẳng $x=a$, $x=b$ (như hình vẽ). Giả sử S_D là diện tích hình phẳng D. Chọn phương án đúng trong các phương án **A**, **B**, **C**, **D** cho dưới đây?



A $S_D=\int\limits_a^0 f(x)\,\mathrm{d}x+\int\limits_0^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

B $S_D=-\int\limits_a^0 f(x)\,\mathrm{d}x+\int\limits_0^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

C $S_D=\int\limits_a^0 f(x)\,\mathrm{d}x-\int\limits_0^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

D $S_D=-\int\limits_a^0 f(x)\,\mathrm{d}x-\int\limits_0^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Ta có $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$.

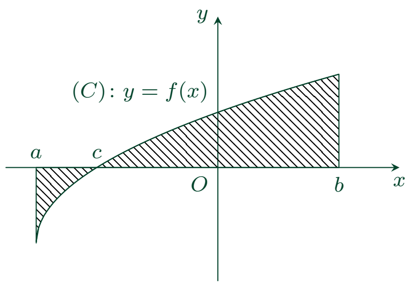
Dựa vào đồ thị ta có $|f(x)|=\begin{cases}-f(x), & a\le x\le 0\\ f(x), & 0<x\le b.\end{cases}$

Suy ra $S_D=\int\limits_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x=\int\limits_a^0 |f(x)|\,\mathrm{d}x+\int\limits_0^b |f(x)|\,\mathrm{d}x=-\int\limits_a^0 f(x)\,\mathrm{d}x+\int\limits_0^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án B .... □

CÂU 19.

Diện tích của hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=a$, $x=b$ $(a<b)$ (phần tô đậm trong hình vẽ) tính theo công thức nào dưới đây?



A $S=\int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x+\int\limits_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

B $S=\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

C $S=-\int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x+\int\limits_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

D $S=\left|\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right|$.

Lời giải.

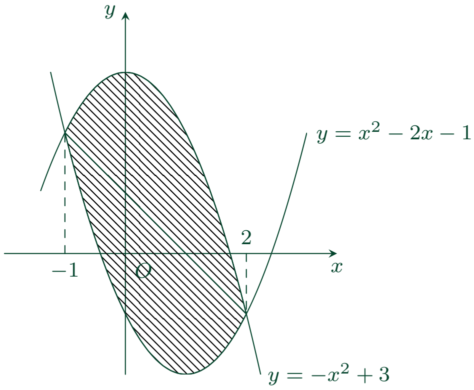
Ta có $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$.

Dựa vào đồ thị ta có $|f(x)|=\begin{cases}-f(x), & a\le x\le c\\ f(x), & c<x\le b.\end{cases}$

Suy ra $S=\int\limits_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x=\int\limits_a^c |f(x)|\,\mathrm{d}x+\int\limits_c^b |f(x)|\,\mathrm{d}x=-\int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x+\int\limits_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án C .... □

CÂU 20. Diện tích phần hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ bên dưới được tính theo công thức nào dưới đây?



A $\displaystyle\int_{-1}^{2}(-2x+2)\,\mathrm{d}x$. **B** $\displaystyle\int_{-1}^{2}(2x-2)\,\mathrm{d}x$. **C** $\displaystyle\int_{-1}^{2}(-2x^2+2x+4)\,\mathrm{d}x$. **D** $\displaystyle\int_{-1}^{2}(2x^2-2x-4)\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

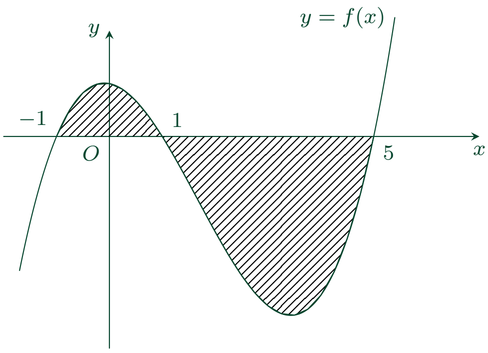
Ta có $S=\displaystyle\int_{-1}^{2}\left|(-x^2+3)-(x^2-2x-1)\right|\,\mathrm{d}x=\int_{-1}^{2}\left|-2x^2+2x+4\right|\,\mathrm{d}x$.

Vì $-2x^2+2x+4>0,\forall x\in(-1;2)$ nên ta có

$S=\displaystyle\int_{-1}^{2}\left|-2x^2+2x+4\right|\,\mathrm{d}x=\int_{-1}^{2}(-2x^2+2x+4)\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án C .... □

CÂU 21. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f(x)$, $y=0$, $x=-1$, $x=5$ (như hình vẽ bên dưới).



Mệnh đề nào sau đây đúng?

A $S=-\displaystyle\int_{-1}^{1}f(x)\,\mathrm{d}x-\int_{1}^{5}f(x)\,\mathrm{d}x$.

B $S=\displaystyle\int_{-1}^{1}f(x)\,\mathrm{d}x+\int_{1}^{5}f(x)\,\mathrm{d}x$.

C $S=\displaystyle\int_{-1}^{1}f(x)\,\mathrm{d}x-\int_{1}^{5}f(x)\,\mathrm{d}x$.

D $S=-\displaystyle\int_{-1}^{1}f(x)\,\mathrm{d}x+\int_{1}^{5}f(x)\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

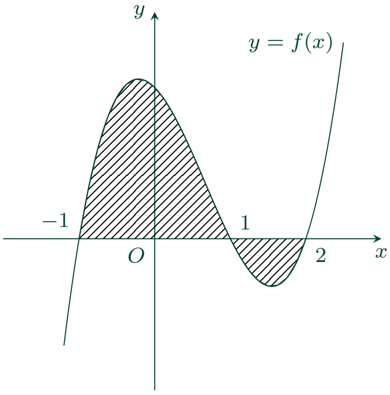
Ta có $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1;5]$.

Dựa vào đồ thị ta có $|f(x)|=\begin{cases}f(x), & -1\le x\le 1\\ -f(x), & 1<x\le 5.\end{cases}$

Suy ra $S=\displaystyle\int_{1}^{5}|f(x)|\,\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}|f(x)|\,\mathrm{d}x+\int_{1}^{5}|f(x)|\,\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}f(x)\,\mathrm{d}x-\int_{1}^{5}f(x)\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án C .... □

CÂU 22. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f(x)$, $y=0$, $x=-1$, $x=2$ (như hình vẽ bên dưới).



Mệnh đề nào sau đây đúng?

A $S=\int\limits_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x+\int\limits_{1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x$.

B $S=-\int\limits_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x-\int\limits_{1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x$.

C $S=-\int\limits_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x+\int\limits_{1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x$.

D $S=\int\limits_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x-\int\limits_{1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Ta có $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1;2]$.

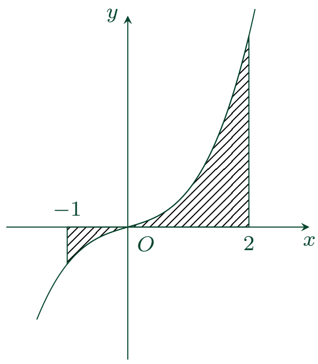
Dựa vào đồ thị ta có $|f(x)|=\begin{cases} f(x), & -1\le x\le 1\\ -f(x), & 1<x\le 2.\end{cases}$

Suy ra $S=\int\limits_{1}^{2}|f(x)|\,\mathrm{d}x=\int\limits_{-1}^{1}|f(x)|\,\mathrm{d}x+\int\limits_{1}^{2}|f(x)|\,\mathrm{d}x=\int\limits_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x-\int\limits_{1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án D .... □

CÂU 23.

Gọi S là diện tích hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y=f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=-1$, $x=2$. Đặt $a=\int\limits_{-1}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x$, $b=\int\limits_{0}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x$ (như hình vẽ bên). Mệnh đề nào sau đây đúng?



A $S=b-a$. **B** $S=b+a$. **C** $S=-b+a$. **D** $S=-b-a$.

Lời giải.

Ta có $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1;2]$.

Dựa vào đồ thị ta có $|f(x)|=\begin{cases} -f(x), & -1\le x\le 0\\ f(x), & 0<x\le 2.\end{cases}$

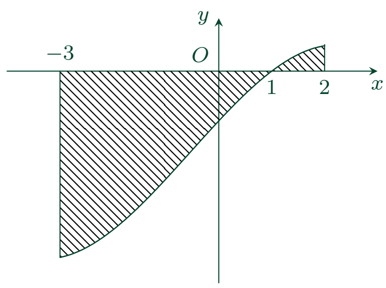
Suy ra $S=\int\limits_{-1}^{2}|f(x)|\,\mathrm{d}x=\int\limits_{-1}^{0}|f(x)|\,\mathrm{d}x+\int\limits_{0}^{2}|f(x)|\,\mathrm{d}x=-\int\limits_{-1}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x+\int\limits_{0}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Hay $S=-a+b=b-a$.

Chọn đáp án A .... □

CÂU 24.

Gọi S là diện tích hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y=f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=-3$, $x=2$. Đặt $a=\int\limits_{-3}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$, $b=\int\limits_{1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x$ (như hình vẽ bên). Mệnh đề nào sau đây đúng?



A $S = a + b$. **B** $S = a - b$. **C** $S = -a - b$. **D** $S = b - a$.

Lời giải.

Ta có $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-3; 2]$.

Dựa vào đồ thị ta có $|f(x)| = \begin{cases} -f(x), & -3 \le x \le 1 \\ f(x), & 1 < x \le 2. \end{cases}$

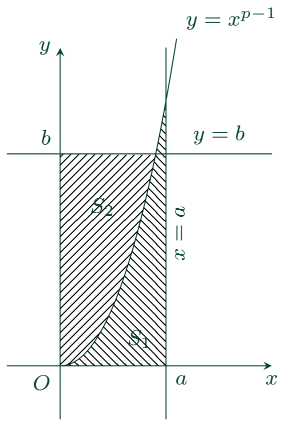
Suy ra $S = \displaystyle\int_{-3}^{2} |f(x)|\,\mathrm{d}x = \int_{-3}^{1} |f(x)|\,\mathrm{d}x + \int_{1}^{2} |f(x)|\,\mathrm{d}x = -\int_{-3}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Hay $S = -a + b = b - a$.

Chọn đáp án D .... □

CÂU 25.

Cho các số p, q thỏa mãn các điều kiện $p > 0$, $q > 1$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ và các số dương a, b. Xét hàm số $y = x^{p-1}$ $(x > 0)$ có đồ thị (C). Gọi S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C), trục hoành, đường thẳng $x = a$. Gọi S_2 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C), trục tung, đường thẳng $y = b$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi trục hoành, trục tung và hai đường thẳng $x = a$, $y = b$ (như hình vẽ bên). Khi so sánh $S_1 + S_2$ và S ta nhận được bất đẳng thức nào trong các bất đẳng thức dưới đây?



A $\dfrac{a^p}{p} + \dfrac{b^q}{q} \le ab$. **B** $\dfrac{a^{p-1}}{p-1} + \dfrac{b^{q-1}}{q-1} \le ab$. **C** $\dfrac{a^{p+1}}{p+1} + \dfrac{b^{q+1}}{q+1} \le ab$. **D** $\dfrac{a^p}{p} + \dfrac{b^q}{q} \ge ab$.

Lời giải.

- Diện tích hình phẳng giới hạn bởi trục hoành, trục tung và hai đường thẳng $x = a$, $y = b$ là $S = ab$.

- $S_1 = \displaystyle\int_0^a x^{p-1}\,\mathrm{d}x = \left.\frac{x^p}{p}\right|_0^a = \frac{a^p}{p}$.

- Ta có $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{q} = 1 - \dfrac{1}{p} = \dfrac{p-1}{p} \Leftrightarrow q = \dfrac{p}{p-1}$. Tương tự $p = \dfrac{q}{q-1}$.

  Phương trình hoành độ giao điểm $x^{p-1} = b \Leftrightarrow x = b^{\frac{1}{p-1}} \in (0; 2)$. Suy ra

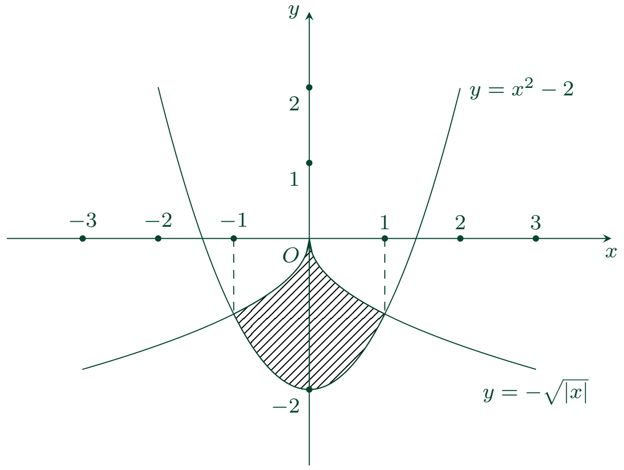
  $S_2 = \displaystyle\int_0^{b^{\frac{1}{p-1}}} \left(b - x^{p-1}\right)\mathrm{d}x = \left.\left(bx - \frac{x^p}{p}\right)\right|_0^{b^{\frac{1}{p-1}}}$

  $= b \cdot b^{\frac{1}{p-1}} - \dfrac{\left(b^{\frac{1}{p-1}}\right)^p}{p} = b^{\frac{p}{p-1}} - \dfrac{b^{\frac{p}{p-1}}}{\dfrac{q}{q-1}} = b^q - \dfrac{b^q(q-1)}{q} = \dfrac{b^q}{q}$.

- Dựa và hình vẽ đồ thị ta có $S_1 + S_2 \ge S$. Vậy $\dfrac{a^p}{p} + \dfrac{b^q}{q} \ge ab$.

Chọn đáp án D .... □

CÂU 26. Diện tích phần hình phẳng được gạch sọc trong hình vẽ sau được tính theo công thức nào dưới đây?



Ⓐ $\displaystyle\int_{-1}^{1}\left(x^2-2+\sqrt{|x|}\right)\,\mathrm{d}x$. Ⓑ $\displaystyle\int_{-1}^{1}\left(x^2-2-\sqrt{|x|}\right)\,\mathrm{d}x$. Ⓒ $\displaystyle\int_{-1}^{1}\left(-x^2+2+\sqrt{|x|}\right)\,\mathrm{d}x$. Ⓓ $\displaystyle\int_{-1}^{1}\left(-x^2+2-\sqrt{|x|}\right)\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Ta có $-\sqrt{|x|} \geq x^2-2$, $\forall x \in [-1;1]$.

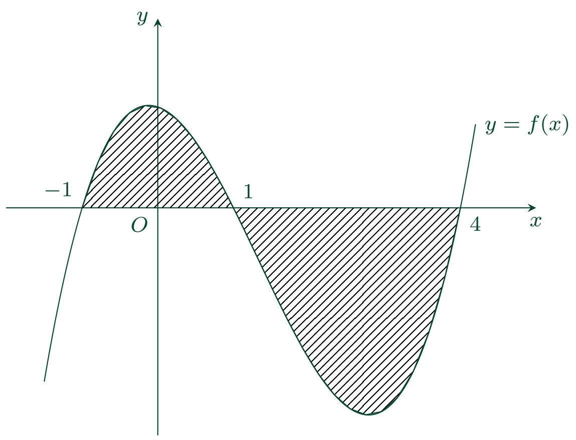
Do đó $-\sqrt{|x|}-(x^2-2) = -x^2+2-\sqrt{|x|} \geq 0, \forall x \in [-1;1]$.

Diện tích phần hình phẳng được gạch sọc trong hình vẽ là

$$\int_{-1}^{1}\left|-\sqrt{|x|}-(x^2-2)\right|\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1}\left(-x^2+2-\sqrt{|x|}\right)\,\mathrm{d}x$$

Chọn đáp án D ....□

CÂU 27. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, $y = 0$, $x = -1$, $x = 4$ (như hình vẽ). Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?



Mệnh đề	Đ	S
a) $S = \displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_{1}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x$.	X	
b) $S = \displaystyle\int_{-1}^{1} |f(x)|\,\mathrm{d}x + \int_{1}^{4} |f(x)|\,\mathrm{d}x$.	X	
c) $S = \left|\displaystyle\int_{-1}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x\right|$.		X
d) $S = \displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{1}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x$.		X

Lời giải.

Ta có $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1;4]$.

Dựa vào đồ thị ta có $|f(x)| = \begin{cases} f(x), & -1 \leq x \leq 1 \\ -f(x), & 1 < x \leq 4. \end{cases}$

Suy ra $S = \displaystyle\int_{-1}^{4} |f(x)|\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} |f(x)|\,\mathrm{d}x + \int_{1}^{4} |f(x)|\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_{1}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Do đó suy ra

a) **Đúng.** Vì $S=\int\limits_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x-\int\limits_{1}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x$ đúng.

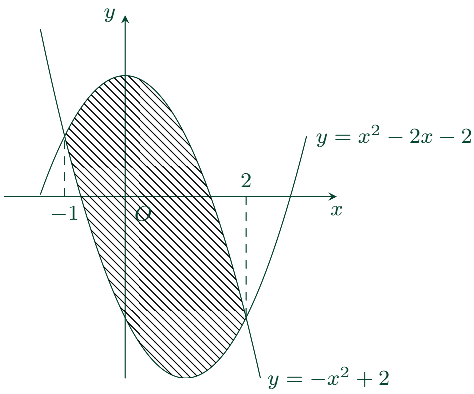
b) **Đúng.** Vì $S=\int\limits_{-1}^{1} |f(x)|\,\mathrm{d}x+\int\limits_{1}^{4} |f(x)|\,\mathrm{d}x$ đúng.

c) **Sai.** Vì $|f(x)|=\begin{cases} f(x), & -1\le x\le 1\\ -f(x), & 1<x\le 4.\end{cases}$ nên $\left|\int\limits_{-1}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x\right| \ne \int\limits_{-1}^{4} |f(x)|\,\mathrm{d}x$.

d) **Sai.** Vì $S=\int\limits_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x-\int\limits_{1}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x$ sai.

Chọn đáp án | a đúng | b đúng | c sai | d sai | .... □

CÂU 28. Cho hình phẳng được gạch chéo trong hình bên dưới.



Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

Mệnh đề	Đ	S
a) Hình phẳng được gạch chéo trong hình trên được giới hạn các đồ thị $y=x^2-2x-2$, $y=-x^2+2$ và hai đường thẳng $x=-1$, $x=2$.	X	
b) Diện tích hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ là $S=\int\limits_{-1}^{2}\left|x^2-2x-2\right|\mathrm{d}x+\int\limits_{-1}^{2}\left|-x^2+2\right|\mathrm{d}x$.		X
c) Hình phẳng được gạch chéo trong hình trên được giới hạn các đồ thị $y=x^2-2x-2$ và $y=-x^2+2$.	X	
d) Diện tích hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ là $S=9$.	X	

Lời giải.

a) **Đúng.** Hình phẳng được gạch chéo trong hình trên được giới hạn các đồ thị $y=x^2-2x-2$, $y=-x^2+2$ và hai đường thẳng $x=-1$, $x=2$.

b) **Sai.**

Vì $\int\limits_{-1}^{2}\left|x^2-2x-2\right|\mathrm{d}x+\int\limits_{-1}^{2}\left|-x^2+2\right|\mathrm{d}x\ge\int\limits_{-1}^{2}\left|(x^2-2x-2)-(-x^2+2)\right|\mathrm{d}x=S$

c) **Đúng.** Phương trình hoành độ giao điểm
$x^2-2x-2=-x^2+2\Leftrightarrow 2x^2-2x-4=0\Leftrightarrow x=-1$ hoặc $x=2$.

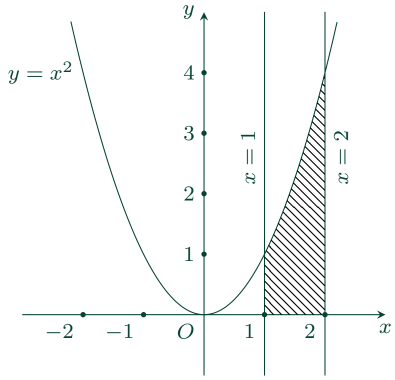
Suy ra $S=\int\limits_{-1}^{2}\left|2x^2-2x-4\right|\mathrm{d}x$.

d) **Đúng.** Vì $2x^2-2x-4<0,\forall x\in(-1;2)$.

$S=\int\limits_{-1}^{2}\left|2x^2-2x-4\right|\mathrm{d}x=\int\limits_{-1}^{2}(-2x^2+2x+4)\,\mathrm{d}x=\left(\dfrac{2x^3}{3}+x^2+4x\right)\Bigg|_{-1}^{2}=9.$

Chọn đáp án | a đúng | b sai | c đúng | d đúng | ……………………………… ☐

CÂU 29. Cho hình phẳng được gạch chéo trong hình bên dưới.



Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

Mệnh đề	Đ	S
a) Hình phẳng được gạch chéo trong hình trên được giới hạn các đồ thị $y = x^2$, $y = 0$ và hai đường thẳng $x = 1$, $x = 2$.	X	
b) Diện tích hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ là $S = \int\limits_1^2 x^2 \,\mathrm{d}x$.	X	
c) Diện tích hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ là $S = \dfrac{4}{3}$.		X
d) Hình phẳng được gạch chéo trong hình trên được giới hạn đồ thị $y = x^2$ và hai đường thẳng $x = 1$, $x = 2$.		X

Lời giải.

a) **Đúng**. Hình phẳng được gạch chéo trong hình trên được giới hạn các đồ thị $y = x^2$, $y = 0$ và hai đường thẳng $x = 1$, $x = 2$.

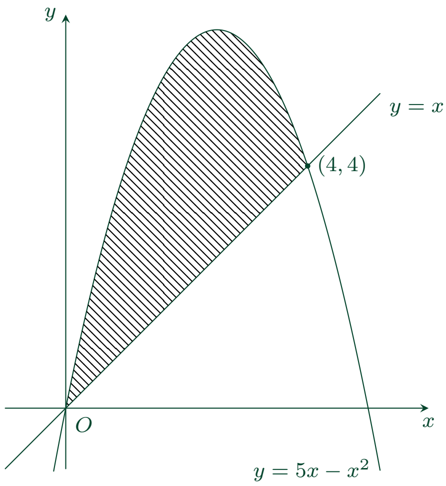
b) **Đúng**. Vì $S = \int\limits_1^2 \left|x^2\right| \mathrm{d}x = \int\limits_1^2 x^2 \,\mathrm{d}x$.

c) **Sai**. Vì $S = \int\limits_1^2 x^2 \,\mathrm{d}x = \left.\dfrac{x^3}{3}\right|_1^2 = \dfrac{8}{3} - \dfrac{1}{3} = \dfrac{7}{3}$.

d) **Sai**. Vì hình phẳng được giới hạn đồ thị $y = x^2$ và hai đường thẳng $x = 1$, $x = 2$ không xác định được diện tích.

Chọn đáp án | a đúng | b đúng | c sai | d sai | ……………………………… ☐

CÂU 30. Cho hình phẳng được gạch chéo trong hình bên dưới.



Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

Mệnh đề	Đ	S
a) Hình phẳng được gạch chéo trong hình trên được giới hạn các đồ thị $y = 5x - x^2$, $y = x$ và các đường thẳng $x = 0$, $x = 4$.	X	
b) Diện tích hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ là $S = \int\limits_0^4 \left(x^2 - 4x\right)\, dx$.		X
c) Diện tích hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ là $S = \int\limits_0^4 \left\|x^2 - 4x\right\|\, dx$.	X	
d) Diện tích hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ $S = \dfrac{56}{3}$.		X

Lời giải.

a) **Đúng.** Hình phẳng được gạch chéo trong hình trên được giới hạn các đồ thị $y = 5x - x^2$, $y = x$ và các đường thẳng $x = 0$, $x = 4$.

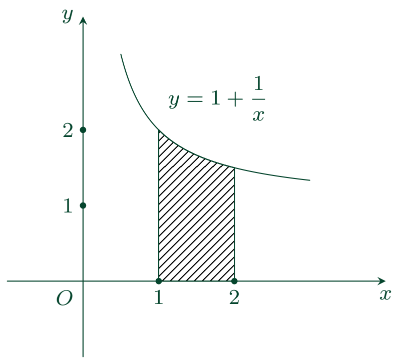
b) **Sai** Phương trình hoành độ giao điểm
$x = 5x - x^2 \Leftrightarrow x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = 4$.
Vì $x^2 - 4x < 0, \forall x \in (0; 4)$. Do đó $S = \int\limits_0^4 \left|x^2 - 4x\right|\, dx = \int\limits_0^4 \left(-x^2 + 4x\right)\, dx$.

c) **Đúng**. Vì $S = \int\limits_0^4 \left|x^2 - 4x\right|\, dx$.

d) **Sai**. Vì $S = \int\limits_0^4 \left|x^2 - 4x\right|\, dx = \int\limits_0^4 \left(-x^2 + 4x\right)\, dx = \left(-\dfrac{x^3}{3} + 2x^2\right)\Bigg|_0^4 = \dfrac{32}{3}$.

Chọn đáp án | a đúng | b sai | c đúng | d sai | ☐

CÂU 31. Cho hình phẳng được gạch chéo trong hình bên dưới.



Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

Mệnh đề	Đ	S
a) Hình phẳng được gạch chéo trong hình trên được giới hạn đồ thị $y = 1 + \dfrac{1}{x}$ và các đường thẳng $x = 1$, $x = 2$.		X
b) Diện tích hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ là $S = \int\limits_1^2 \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)\, dx$.	X	
c) Diện tích hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ là $S = 2$.		X
d) Diện tích hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ là $S = 1 + \int\limits_1^2 \dfrac{1}{x}\, dx$.	X	

Lời giải.

a) **Sai.** Hình phẳng giới hạn đồ thị $y = 1 + \dfrac{1}{x}$ và các đường thẳng $x = 1$, $x = 2$ không xác định được diện tích.

b) **Đúng.** Vì $1 + \dfrac{1}{x} > 0, \forall x \in (1;2)$ nên $\left|1 + \dfrac{1}{x}\right| = 1 + \dfrac{1}{x}, \forall x \in (1;2)$.

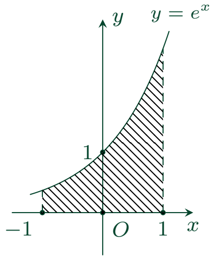
Do đó $S = \displaystyle\int_1^2 \left|1 + \dfrac{1}{x}\right| \mathrm{d}x = \int_1^2 \left(1 + \dfrac{1}{x}\right) \mathrm{d}x$.

c) **Sai.** Vì $S = \displaystyle\int_1^2 \left(1 + \dfrac{1}{x}\right) \mathrm{d}x = (x + \ln|x|)\Big|_1^2 = 1 + \ln 2$.

d) **Đúng.** Vì $S = \displaystyle\int_1^2 \left(1 + \dfrac{1}{x}\right) \mathrm{d}x = 1 + \int_1^2 \dfrac{1}{x} \mathrm{d}x = 1 + \ln 2$.

Chọn đáp án | a sai | b đúng | c sai | d đúng | ....□

CÂU 32. Cho hình phẳng được tô màu trong hình bên dưới



Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

Mệnh đề	Đ	S
a) Hình phẳng được tô màu trong hình vẽ trên được giới hạn bởi các đồ thị $y = \mathrm{e}^x$; $y = 0$; $x = 0$; $x = 1$.		X
b) Diện tích hình phẳng tô màu trong hình vẽ là $\displaystyle\int_{-1}^{1} \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x$.	X	
c) Diện tích hình phẳng tô màu trong hình vẽ là $\displaystyle\int_{0}^{1} \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x$.		X
d) Hình phẳng được tô màu trong hình vẽ trên được giới hạn bởi các đồ thị $y = \mathrm{e}^x$; $y = 0$; $x = -1$; $x = 1$.	X	

Lời giải.

a) Sai. Vì hình phẳng được tô màu trong hình vẽ trên được giới hạn bởi các đồ thị $y = \mathrm{e}^x$; $y = 0$; $x = -1$; $x = 1$.

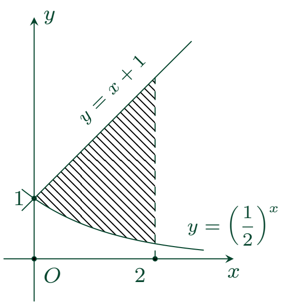
b) Đúng. Ta có $S = \displaystyle\int_{-1}^{1} \mathrm{e}^x \mathrm{d}x$.

c) Sai.

d) Đúng.

Chọn đáp án | a sai | b đúng | c sai | d đúng | ....□

CÂU 33. Cho hình phẳng được tô màu trong hình bên dưới.



Các mệnh đề sau đúng hay sai?

Mệnh đề	Đ	S
a) Hình phẳng được tô màu trong hình vẽ trên được giới hạn bởi các đồ thị $y = x+1$; $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$; $x = 0$; $x = 2$.	X	
b) Diện tích hình phẳng tô màu trong hình vẽ là $\int\limits_0^2 \left[\left(\frac{1}{2}\right)^x - x - 1\right] \mathrm{d}x$.		X
c) Diện tích hình phẳng tô màu trong hình vẽ bằng $S = 4 - \frac{3}{4\ln 2}$.	X	
d) Hình phẳng được tô màu trong hình vẽ trên được giới hạn bởi các đồ thị $y = x+1$; $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$; $x = 1$; $x = 2$.		X

Lời giải.

a) Đúng. Vì hình phẳng được tô màu trong hình vẽ trên được giới hạn bởi các đồ thị $y = x+1$; $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$; $x = 0$; $x = 2$.

b) Sai. Trên đoạn $[0;2]$, đồ thị hàm số $y = x+1$ nằm trên đồ thị hàm số $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ nên với mọi $x \in [0;2]$ ta có $x + 1 \geq \left(\frac{1}{2}\right)^x \Rightarrow \left|\left(\frac{1}{2}\right)^x - (x+1)\right| = x + 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

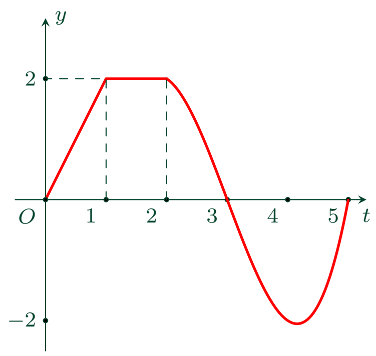
Vậy diện tích hình phẳng tô màu là $\int\limits_0^2 \left[x + 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^x\right] \mathrm{d}x$.

c) Đúng. Ta có $S = \int\limits_0^2 \left[x + 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^x\right] \mathrm{d}x = \left(\frac{x^2}{2} + x + \frac{2^{-x}}{\ln 2}\right)\Bigg|_0^2 = 4 + \frac{1}{4\ln 2} - \frac{1}{\ln 2} = 4 - \frac{3}{4\ln 2}$.

d) Sai.

Chọn đáp án | a đúng | b sai | c đúng | d sai | .... □

CÂU 34. Cho đồ thị hàm số $y = f(t)$ như hình vẽ.



Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

Mệnh đề	Đ	S
a) Diện tích hình phẳng được giới hạn các đồ thị hàm số $y = f(t)$, trục Ot và hai đường thẳng $t = 0$; $t = 1$ là $S = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4}$.	X	
b) Diện tích hình phẳng được giới hạn các đồ thị hàm số $y = f(t)$, trục Ot và hai đường thẳng $t = 1$; $t = 2$ là $S = \int\limits_1^2 2\,\mathrm{d}t = 2$.	X	

Mệnh đề	Đ	S
c) Tích phân $\int\limits_2^3 f(x)\,\mathrm{d}x$ biểu thị cho phần diện tích của hình phẳng giới hạn các đồ thị hàm số $y=f(t)$, trục Ot và hai đường thẳng $t=2$; $t=3$.	X	
d) Tích phân $\int\limits_3^5 f(x)\,\mathrm{d}x$ biểu thị cho phần diện tích của hình phẳng giới hạn các đồ thị hàm số $y=f(t)$, trục Ot và hai đường thẳng $t=3$; $t=5$.		X

Lời giải.

a) Đúng. Vì đồ thị hàm số $y=f(t)$ trên đoạn $[0;1]$ là $y=\dfrac{1}{2}t$. Do đó diện tích hình phẳng được giới hạn các đồ thị hàm số $y=f(t)$, trục Ot và hai đường thẳng $t=0$; $t=1$ là $S=\dfrac{1}{2}\int\limits_0^1 t\,\mathrm{d}t=\dfrac{1}{4}$.

b) Đúng. Vì trên đoạn $[1;2]$ đồ thị hàm số $y=f(t)=2$ nên hình phẳng được giới hạn bởi các đồ thị hàm số $y=f(t)$, trục Ot và hai đường thẳng $t=1$; $t=2$ có diện tích là $S=\int\limits_1^2 2\,\mathrm{d}t=2$.

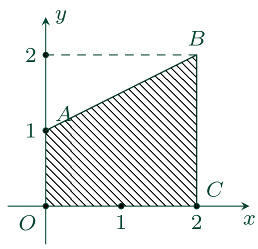
c) Đúng. Tích phân $\int\limits_2^3 f(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_2^3 f(t)\,\mathrm{d}t$ nên giá trị của tích phân $\int\limits_2^3 f(t)\,\mathrm{d}t$ là diện tích của hình phẳng giới hạn các đồ thị hàm số $y=f(t)$, trục Ot và hai đường thẳng $t=2$; $t=3$.

d) Sai. Tích phân $\int\limits_3^5 f(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_3^5 f(t)\,\mathrm{d}t$.

Diện tích hình phẳng được giới hạn các đồ thị hàm số $y=f(t)$, trục Ot và hai đường thẳng $t=3$; $t=5$ là $S=\int\limits_3^5 |f(t)|\,\mathrm{d}t$.

Chọn đáp án | a đúng | b đúng | c đúng | d sai | .... □

CÂU 35. Tính diện tích hình phẳng được tô màu trong hình bên dưới.



Đáp án: 3

Lời giải.

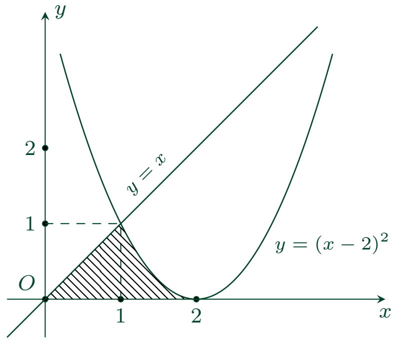
Cách 1: Hình phẳng đã cho là hình thang vuông $AOCB$, vuông tại A, O. Ta có

$$S=\frac{(AO+BC)\cdot OC}{2}=3.$$

Cách 2: Đường thẳng AB đi qua hai điểm $A\,(0;1)$ và $B\,(2;2)$ nên đường thẳng AB có phương trình là $y=\dfrac{1}{2}x+1$.

Hình phẳng đã cho giới hạn bởi đường thẳng $y=\dfrac{1}{2}x+1$, $y=0$, $x=0$, $x=2$ nên diện tích của hình phẳng là $S=\int\limits_0^2\left|\dfrac{1}{2}x+1\right|\,\mathrm{d}x=3$.

CÂU 36. Biết diện tích phần hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ bên có diện tích là $\dfrac{a}{b}$ với $a, b\in\mathbb{Z}$ và phân số $\dfrac{a}{b}$ tối giản. Tính tổng $a+b$.



Đáp án: 11

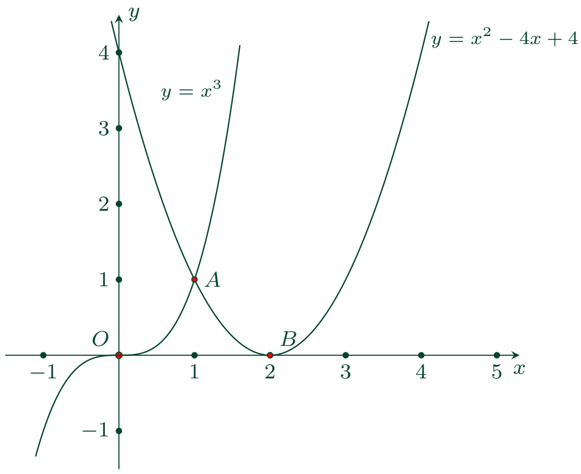
Lời giải.

Dựa vào đồ thị, diện tích hình phẳng cần tìm là

$$S = \int_0^1 x\,\mathrm{d}x + \int_1^2 (x-2)^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}.$$

Vậy $a = 5$; $b = 6$ và $a + b = 11$.

CÂU 37. Biết diện tích phần tam giác cong OAB trong hình vẽ bên có diện tích là $\dfrac{a}{b}$ với $a, b \in \mathbb{Z}$ và phân số $\dfrac{a}{b}$ tối giản. Tính hiệu $b - a$.



Đáp án: 5

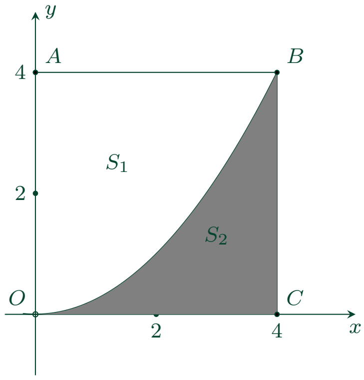
Lời giải.

Dựa vào hình vẽ ta thấy hình phẳng cần tính diện tích gồm 2 phần.
Phần 1: Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^3$, trục Ox, $x = 0$, $x = 1$.
Phần 2: Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^2 - 4x + 4$, trục Ox, $x = 1$, $x = 2$.
Do đó diện tích cần tính là

$$S = \int_0^1 \left|x^3\right|\,\mathrm{d}x + \int_1^2 \left|x^2 - 4x + 4\right|\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x^3\,\mathrm{d}x + \int_1^2 \left(x^2 - 4x + 4\right)\,\mathrm{d}x = \frac{7}{12}.$$

Vậy $a = 7$, $b = 12$ và $b - a = 5$.

CÂU 38. Hình vuông $OABC$ có cạnh bằng 4 được chia thành hai phần bởi đường cong (C) có phương trình $y = \dfrac{1}{4}x^2$. Gọi S_2, S_2 lần lượt là diện tích của phần không tô màu và phần tô màu như hình vẽ bên dưới. Tỉ số $\dfrac{S_1}{S_2}$ bằng bao nhiêu?



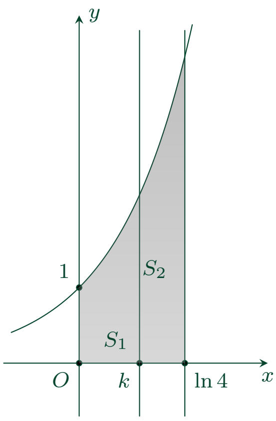
Đáp án: 2

Lời giải.

Ta có diện tích hình vuông $OABC$ là 16 và bằng $S_1 + S_2$.

Ta có $S_2 = \int\limits_0^4 \frac{1}{4}x^2\,\mathrm{d}x = \left.\frac{x^3}{12}\right|_0^4 = \frac{16}{3} \Rightarrow \frac{S_1}{S_2} = \frac{16 - S_2}{S_2} = \frac{16 - \frac{16}{3}}{\frac{16}{3}} = 2.$

CÂU 39. Cho hình thang cong (H) giới hạn bởi các đường $y = \mathrm{e}^x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = \ln 4$. Đường thẳng $x = k$, $(0 < k < \ln 4)$ chia (H) thành hai phần có diện tích là S_1 và S_2 như hình vẽ bên. Tìm k để $S_1 = 2S_2$ (làm tròn kết quả đến hàng phần chục).



Đáp án: 1,1

Lời giải.

Diện tích hình thang cong (H) giới hạn bởi các đường $y = \mathrm{e}^x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = \ln 4$ là

$$S = \int\limits_0^{\ln 4} \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \left.\mathrm{e}^x\right|_0^{\ln 4} = \mathrm{e}^{\ln 4} - \mathrm{e}^0 = 4 - 1 = 3.$$

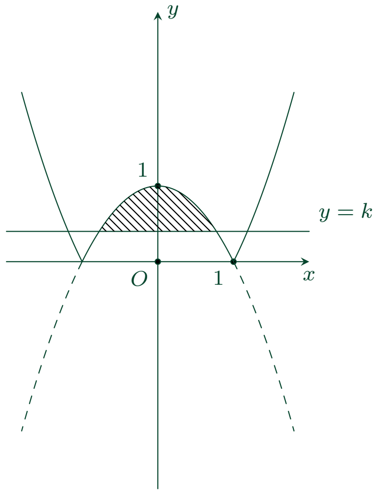
Ta có $S = S_1 + S_2 = S_1 + \frac{1}{2}S_1 = \frac{3}{2}S_1$. Suy ra $S_1 = \frac{2S}{3} = \frac{2 \cdot 3}{3} = 2$.

Vì S_1 là phần diện tích được giới hạn bởi các đường $y = \mathrm{e}^x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = k$ nên

$2 = S_1 = \int\limits_0^k \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \left.\mathrm{e}^x\right|_0^k = \mathrm{e}^k - \mathrm{e}^0 = \mathrm{e}^k - 1.$

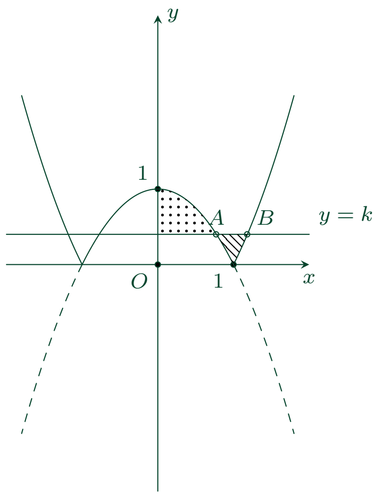
Do đó $\mathrm{e}^k = 3 \Leftrightarrow k = \ln 3 \approx 1{,}1$.

CÂU 40. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = \left|x^2 - 1\right|$ và $y = k$, với $0 < k < 1$. Tìm k để diện tích hình phẳng (H) gấp hai lần diện tích hình phẳng được kẻ sọc ở hình vẽ bên (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).



Đáp án: 0,59

Lời giải.



Gọi S là diện tích hình phẳng (H). Lúc đó $S = 2S_1 + 2S_2$, trong đó S_1 là diện tích phần chấm bi và S_2 là diện tích phần gạch sọc trong hình vẽ bên.
Gọi A, B là các giao điểm có hoành độ dương của đường thẳng $y = k$ và đồ thị hàm số $y = \left|x^2 - 1\right|$, trong đó $A(\sqrt{1-k}; k)$ và $B(\sqrt{1+k}; k)$.
Theo yêu cầu bài toán

$$\begin{aligned}
& S = 2 \cdot 2S_1 \\
\Leftrightarrow\ & S_1 = S_2 \\
\Leftrightarrow\ & \int\limits_0^{\sqrt{1-k}} \left(1 - x^2 - k\right)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{\sqrt{1-k}}^{1} \left(k - 1 + x^2\right)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{1}^{\sqrt{1+k}} \left(k - x^2 + 1\right)\,\mathrm{d}x \\
\Leftrightarrow\ & (1-k)\sqrt{1-k} - \frac{1}{3}(1-k)\sqrt{1-k} = \frac{1}{3} - (1-k) - \frac{1}{3}(1-k)\sqrt{1-k} + (1-k)\sqrt{1-k} + (1+k)\sqrt{1+k} - \frac{1}{3}(1+k)\sqrt{1+k} - (\\
\Leftrightarrow\ & \frac{2}{3}(1+k)\sqrt{1+k} = \frac{4}{3} \\
\Leftrightarrow\ & (\sqrt{1+k})^3 = 2 \\
\Leftrightarrow\ & k = \sqrt[3]{4} - 1 \approx 0{,}59.
\end{aligned}$$

Dạng 2. THỂ TÍCH KHỐI TRÒN XOAY

CÂU 1. Viết công thức tính thể tích V của khối tròn xoay được tạo ra khi quay hình thang cong, giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục Ox và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$, $(a < b)$ xung quanh trục Ox.

A $V = \displaystyle\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$. **B** $V = \pi\displaystyle\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x$. **C** $V = \displaystyle\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x$. **D** $V = \pi\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Theo lí thuyết.

Chọn đáp án (B) .... □

CÂU 2. Cắt một vật thể bởi hai mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại $x = 1$ và $x = 2$. Một mặt phẳng tùy ý vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x, $(1 \le x \le 2)$ cắt vật thể đó có diện tích $S(x) = 2024x$. Tính thể tích của phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng trên.

(A) $V = 3036$. (B) $V = 3036\pi$. (C) $V = 1518$. (D) $V = 1518\pi$.

Lời giải.

Thể tích vật thể là $V = \int\limits_1^2 2024x\,\mathrm{d}x = 3036$.

Chọn đáp án (A) .... □

CÂU 3. Cắt một vật thể bởi hai mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại $x = 1$ và $x = 3$. Một mặt phẳng tùy ý vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x, $(1 \le x \le 3)$ cắt vật thể đó theo thiết diện là một hình chữ nhật có độ dài hai cạnh là $3x$ và $3x^2 - 2$. Tính thể tích của phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng trên.

(A) $V = 156$. (B) $V = 156\pi$. (C) $V = 312$. (D) $V = 312\pi$.

Lời giải.

Diện tích thiết diện là $S(x) = 3x \cdot \left(3x^2 - 2\right) = 9x^3 - 6x$.

Thể tích vật thể là $V = \int\limits_1^3 \left(9x^3 - 6x\right)\,\mathrm{d}x = 156$.

Chọn đáp án (A) .... □

CÂU 4. Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \mathrm{e}^{3x}$, $y = 0$, $x = 0$ và $x = 1$. Thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục Ox bằng

(A) $\pi \int\limits_0^1 \mathrm{e}^{3x}\,\mathrm{d}x$. (B) $\int\limits_0^1 \mathrm{e}^{6x}\,\mathrm{d}x$. (C) $\pi \int\limits_0^1 \mathrm{e}^{6x}\,\mathrm{d}x$. (D) $\int\limits_0^1 \mathrm{e}^{3x}\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục Ox là

$$\pi \int\limits_0^1 \left(\mathrm{e}^{3x}\right)^2\,\mathrm{d}x = \pi \int\limits_0^1 \mathrm{e}^{6x}\,\mathrm{d}x.$$

Chọn đáp án (C) .... □

CÂU 5. Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \mathrm{e}^{4x}$, $y = 0$, $x = 0$ và $x = 1$. Thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục Ox bằng

(A) $\int\limits_0^1 \mathrm{e}^{4x}\,\mathrm{d}x$. (B) $\pi \int\limits_0^1 \mathrm{e}^{8x}\,\mathrm{d}x$. (C) $\pi \int\limits_0^1 \mathrm{e}^{4x}\,\mathrm{d}x$. (D) $\int\limits_0^1 \mathrm{e}^{8x}\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục Ox là

$$V = \pi \int\limits_0^1 \left(\mathrm{e}^{4x}\right)^2\,\mathrm{d}x = \pi \int\limits_0^1 \mathrm{e}^{8x}\,\mathrm{d}x.$$

Chọn đáp án (B) .... □

CÂU 6. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = x^2 + 3$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$. Gọi V là thể tích của khối tròn xoay được tạo thành khi quay (H) xung quanh trục Ox. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

(A) $V = \int\limits_0^2 \left(x^2 + 3\right)\,\mathrm{d}x$. (B) $V = \pi \int\limits_0^2 \left(x^2 + 3\right)\,\mathrm{d}x$. (C) $V = \int\limits_0^2 \left(x^2 + 3\right)^2\,\mathrm{d}x$. (D) $V = \pi \int\limits_0^2 \left(x^2 + 3\right)^2\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Thể tích của khối tròn xoay được tạo thành khi quay (H) xung quanh trục Ox là

$V = \pi \int\limits_0^2 \left(x^2 + 3\right)^2\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án (D) .... □

CÂU 7. Cho hình phẳng D giới hạn bởi đường cong $y=\mathrm{e}^x$, trục hoành và các đường thẳng $x=0$, $x=1$. Khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành có thể tích V bằng bao nhiêu?

Ⓐ $V=\dfrac{\pi\left(\mathrm{e}^2+1\right)}{2}$. Ⓑ $V=\dfrac{\mathrm{e}^2-1}{2}$. Ⓒ $V=\dfrac{\pi\mathrm{e}^2}{3}$. Ⓓ $V=\dfrac{\pi\left(\mathrm{e}^2-1\right)}{2}$.

Lời giải.

$V=\pi\displaystyle\int\limits_0^1\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x=\pi\frac{\mathrm{e}^{2x}}{2}\Big|_0^1=\frac{\pi\left(e^2-1\right)}{2}$.

Chọn đáp án (D) .... □

CÂU 8. Cho hình phẳng D giới hạn bởi đường cong $y=\sqrt{x^2+1}$, trục hoành và các đường thẳng $x=0$, $x=1$. Khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành có thể tích V bằng bao nhiêu?

Ⓐ $V=2$. Ⓑ $V=\dfrac{4\pi}{3}$. Ⓒ $V=2\pi$. Ⓓ $V=\dfrac{4}{3}$.

Lời giải.

Thể tích khối tròn xoay được tính theo công thức

$$V=\pi\int\limits_0^1\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2\,\mathrm{d}x=\pi\int\limits_0^1\left(x^2+1\right)\,\mathrm{d}x=\pi\left(\frac{x^3}{3}+x\right)\Big|_0^1=\frac{4\pi}{3}.$$

Chọn đáp án (B) .... □

CÂU 9. Cho hình phẳng D giới hạn bởi đường cong $y=\sqrt{2+\cos x}$, trục hoành và các đường thẳng $x=0, x=\dfrac{\pi}{2}$. Khối tròn xoay tạo thành khi D quay quanh trục hoành có thể tích V bằng bao nhiêu?

Ⓐ $V=(\pi+1)\pi$. Ⓑ $V=\pi-1$. Ⓒ $V=\pi+1$. Ⓓ $V=(\pi-1)\pi$.

Lời giải.

Ta có

$$V=\pi\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(\sqrt{2+\cos x})^2\,\mathrm{d}x=\pi(2x+\sin x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\pi(\pi+1).$$

Chọn đáp án (A) .... □

CÂU 10. Cho hình phẳng D giới hạn bởi đường cong $y=\sqrt{2+\sin x}$, trục hoành và các đường thẳng $x=0$, $x=\pi$. Khối tròn xoay tạo thành khi quay D quay quanh trục hoành có thể tích V bằng bao nhiêu?

Ⓐ $V=2\pi(\pi+1)$. Ⓑ $V=2\pi$. Ⓒ $V=2(\pi+1)$. Ⓓ $V=2\pi^2$.

Lời giải.

Ta có $V=\pi\displaystyle\int\limits_0^{\pi}\left(\sqrt{2+\sin x}\right)^2\,\mathrm{d}x=\pi\int\limits_0^{\pi}(2+\sin x)\,\mathrm{d}x=\pi(2x-\cos x)\Big|_0^{\pi}=2\pi\,(\pi+1)$.

Chọn đáp án (A) .... □

CÂU 11. Tìm công thức tính thể tích của khối tròn xoay khi cho hình phẳng giới hạn bởi parabol $(P)\colon y=x^2$, đường thẳng $d\colon y=2x$ và đường thẳng $x=0$, $x=2$ quay xung quanh trục Ox.

Ⓐ $\pi\displaystyle\int\limits_0^2\left(x^2-2x\right)^2\,\mathrm{d}x$. Ⓑ $\pi\displaystyle\int\limits_0^2 4x^2\,\mathrm{d}x-\pi\int_0^2 x^4\,\mathrm{d}x$.

Ⓒ $\pi\displaystyle\int\limits_0^2 4x^2\,\mathrm{d}x+\pi\int_0^2 x^4\,\mathrm{d}x$. Ⓓ $\pi\displaystyle\int\limits_0^2\left(2x-x^2\right)\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Với mọi $x\in[0;2]$ ta có $2x\ge0$, $x^2\ge0$ và $2x\ge x^2$ nên $V=\pi\displaystyle\int\limits_0^2 4x^2\,\mathrm{d}x-\pi\int\limits_0^2 x^4\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án (B) .... □

CÂU 12. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y=x^2+3$, $y=0$, $x=0$, $x=2$. Gọi V là thể tích khối tròn xoay được tạo hành khi quay (H) xung quanh trục Ox. Mệnh đề nào sau đây đúng?

Ⓐ $V=\pi\displaystyle\int\limits_0^2\left(x^2+3\right)^2\,\mathrm{d}x$. Ⓑ $V=\displaystyle\int\limits_0^2\left(x^2+3\right)\,\mathrm{d}x$. Ⓒ $V=\displaystyle\int\limits_0^2\left(x^2+3\right)^2\,\mathrm{d}x$. Ⓓ $V=\pi\displaystyle\int\limits_0^2\left(x^2+3\right)\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Thể tích của vật tròn xoay là $V=\pi\int\limits_0^2\left(x^2+3\right)^2\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án (A) .... □

CÂU 13. Gọi V là thể tích của khối tròn xoay thu được khi quay hình thang cong, giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\sin x$, trục Ox, trục Oy và đường thẳng $x=\frac{\pi}{2}$, xung quanh trục Ox. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

(A) $V=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\,\mathrm{d}x$. (B) $V=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,\mathrm{d}x$. (C) $V=\pi\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\,\mathrm{d}x$. (D) $V=\pi\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Công thức tính $V=\pi\int\limits_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án (C) .... □

CÂU 14. Thể tích khối tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y=x^2-2x$, trục hoành, đường thẳng $x=0$ và $x=1$ quanh trục hoành bằng

(A) $\frac{16\pi}{15}$. (B) $\frac{2\pi}{3}$. (C) $\frac{4\pi}{3}$. (D) $\frac{8\pi}{15}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}V&=\pi\int\limits_0^1\left(x^2-2x\right)^2\,\mathrm{d}x\\&=\pi\int\limits_0^1\left(x^4-4x^3+4x^2\right)\,\mathrm{d}x\\&=\pi\cdot\left(\frac{x^5}{5}-x^4+\frac{4x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1\\&=\pi\cdot\left(\frac{1}{5}-1+\frac{4}{3}\right)=\frac{8\pi}{15}.\end{aligned}$$

Chọn đáp án (D) .... □

CÂU 15. Cho miền phẳng (D) giới hạn bởi $y=\sqrt{x}$, hai đường thẳng $x=1$, $x=2$ và trục hoành. Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay (D) quanh trục hoành.

(A) 3π. (B) $\frac{3\pi}{2}$. (C) $\frac{2\pi}{3}$. (D) $\frac{3}{2}$.

Lời giải.

$V=\pi\int\limits_1^2 x\,\mathrm{d}x=\frac{\pi x^2}{2}\Bigg|_1^2=\frac{3\pi}{2}$.

Chọn đáp án (B) .... □

CÂU 16. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y=2x-x^2$, $y=0$. Quay (H) quanh trục hoành tạo thành khối tròn xoay có thể tích là

(A) $\int\limits_0^2\left(2x-x^2\right)\,\mathrm{d}x$. (B) $\pi\int\limits_0^2\left(2x-x^2\right)^2\,\mathrm{d}x$. (C) $\int\limits_0^2\left(2x-x^2\right)^2\,\mathrm{d}x$. (D) $\pi\int\limits_0^2\left(2x-x^2\right)\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Theo công thức ta chọn $V=\pi\int\limits_0^2\left(2x-x^2\right)^2\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án (B) .... □

CÂU 17. Cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\sqrt{x}-2$, $y=0$ và $x=4$, $x=9$ quay xung quanh trục Ox. Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành.

(A) $V=\frac{7}{6}$. (B) $V=\frac{5\pi}{6}$. (C) $V=\frac{7\pi}{11}$. (D) $V=\frac{11\pi}{6}$.

Lời giải.

Thể tích của khối tròn xoay tạo thành là

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_4^9 \left(\sqrt{x}-2\right)^2 \mathrm{d}x \\ &= \pi \int_4^9 \left(x-4\sqrt{x}+4\right) \mathrm{d}x \\ &= \pi \cdot \left(\frac{x^2}{2}-\frac{8x\sqrt{x}}{3}+4x\right)\Bigg|_4^9 \\ &= \pi\left(\frac{81}{2}-72+36\right)-\pi\left(\frac{16}{2}-\frac{64}{3}+16\right)=\frac{11\pi}{6}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án D ☐

CÂU 18. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường thẳng $y=x^2+2$, $y=0$, $x=1$, $x=2$. Gọi V là thể tích của khối tròn xoay được tạo thành khi quay (H) xung quanh trục Ox. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A $V=\int_1^2 \left(x^2+2\right) \mathrm{d}x$. **B** $V=\pi\int_1^2 \left(x^2+2\right)^2 \mathrm{d}x$. **C** $V=\int_1^2 \left(x^2+2\right)^2 \mathrm{d}x$. **D** $V=\pi\int_1^2 \left(x^2+2\right) \mathrm{d}x$.

Lời giải.

Ta có $V=\pi\int_1^2 \left(x^2+2\right)^2 \mathrm{d}x$.

Chọn đáp án B ☐

CÂU 19. Cắt một vật thể (T) bởi hai mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại $x=0$ và $x=2$. Một mặt phẳng tùy ý vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x $(0\le x\le 2)$ cắt vật thể đó có theo một thiết diện là một hình vuông có cạnh bằng $\sqrt{x^3}$. Thể tích vật thể (T) là số hữu tỉ có dạng phân số tối giản $\frac{a}{b}$. Tính $a+b$.

Đáp án: 135

Lời giải.

Diện tích thiết diện là $S(x)=\sqrt{x^3}\cdot\sqrt{x^3}=x^6$.

Thể tích của vật thể (T) là $V=\int_0^2 S(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^2 x^6\,\mathrm{d}x=\frac{128}{7}$.

Suy ra $a=128$ và $b=7$. Khi đó, $a+b=135$.

CÂU 20. Cắt một vật thể bởi hai mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại $x=1$; $x=3$. Khi cắt một vật thể bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x $(1\le x\le 3)$, mặt cắt là tam giác vuông có một góc 45° và độ dài một cạnh góc vuông là $\sqrt{4-\frac{1}{2}x^2}$. Thể tích vật thể trên là một số hữu tỉ có dạng phân số tối giản $\frac{a}{b}$. Tính $a\cdot b$.

Đáp án: 66

Lời giải.

Diện tích tam giác vuông cân là $S(x)=\frac{1}{2}\sqrt{4-\frac{1}{2}x^2}\cdot\sqrt{4-\frac{1}{2}x^2}=\frac{1}{2}\left(4-\frac{1}{2}x^2\right)$.

Vậy thể tích vật thể là

$$V=\int_1^3 \frac{1}{2}\left(4-\frac{1}{2}x^2\right)\mathrm{d}x=\frac{11}{6}.$$

Suy ra $a=11$; $b=6$. Khi đó $a\cdot b=66$.

CÂU 21. Tính thể tích khối tròn xoay khi quay hình phẳng (H) xác định bởi các đường $y=\frac{1}{3}x^3-x^2$, $y=0$, $x=0$ và $x=3$ quanh trục Ox (kết quả viết dưới dạng số thập phân và làm tròn đến hàng phần trăm).

Đáp án: 7,27

Lời giải.

Thể tích khối tròn xoay sinh ra khi quay hình phẳng (H) quanh trục Ox là

$$V=\pi\int_0^3\left(\frac{1}{3}x^3-x^2\right)^2\mathrm{d}x=\pi\int_0^3\left(\frac{1}{9}x^6-\frac{2}{3}x^5+x^4\right)\mathrm{d}x=\frac{81\pi}{35}\approx 7{,}27.$$

CÂU 22. Tính thể tích của vật thể tạo nên khi quay quanh trục Ox hình phẳng D giới hạn bởi đồ thị $(P)\colon y=2x-x^2$, trục Ox và hai đường thẳng $x=0$, $x=2$ (Kết quả viết dưới dạng số thập phân và làm tròn đến hàng phần trăm).

Đáp án: 3,35

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} V &= \pi\int\limits_0^2 \left(2x-x^2\right)^2 \mathrm{d}x \\ &= \pi\int\limits_0^2 \left(4x^2-4x^3+x^4\right) \mathrm{d}x \\ &= \pi\left(\frac{4}{3}x^3-x^4+\frac{1}{5}x^5\right)\Big|_0^2 \\ &= \frac{16}{15}\pi \approx 3{,}35. \end{aligned}$$

CÂU 23. Cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\tan x$, $y=0$, $x=0$, $x=\dfrac{\pi}{4}$ quay xung quanh trục Ox. Tính thể tích vật thể tròn xoay được sinh ra (kết quả viết dưới dạng số thập phân và làm tròn một chữ số thập phân sau dấu phẩy).

Đáp án: 0,8

Lời giải.

Thể tích vật thể tròn xoay được sinh ra là

$$V=\pi\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^2 x\,\mathrm{d}x=\pi\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{\cos^2 x-1}\right)\mathrm{d}x=\pi\left(\tan x-x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{4\pi-\pi^2}{4}\approx 0{,}8.$$

CÂU 24. Gọi V là thể tích khối tròn xoay tạo thành do quay xung quanh trục hoành một elip có phương trình $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$. Tính V (Kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).

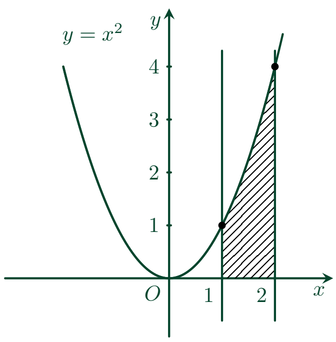
Đáp án: 335

Lời giải.

Quay elip đã cho xung quanh trục hoành chính là quay hình phẳng H giới hạn bởi $y=4\sqrt{1-\dfrac{x^2}{25}}$, $y=0$, $x=-5$, $x=5$.
Vậy thể tích khối tròn xoay sinh ra bởi H khi quay xung quanh trục hoành là

$$V=\pi\int_{-5}^{5}\left(16-\frac{16x^2}{25}\right)\mathrm{d}x=\pi\left(16x-\frac{16x^3}{75}\right)\Big|_{-5}^{5}=\frac{320\pi}{3}\approx 335.$$

CÂU 25. Cho hình phẳng (H) được gạch chéo trong hình bên. Tính thể hình tròn xoay sinh ra bởi (H) khi quay (H) quanh trục Ox (Kết quả viết dưới dạng số thập phân và làm tròn đến hàng phần chục).

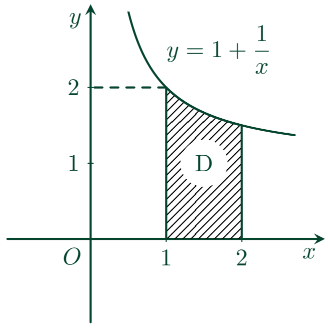


Đáp án: 19,5

Lời giải.

Ta có $V=\pi\displaystyle\int_1^2\left(x^2\right)^2\mathrm{d}x=\pi\frac{x^5}{5}\Big|_1^2=\frac{31\pi}{5}\approx 19{,}5.$

CÂU 26. Cho hình phẳng (D) được tô màu trong hình bên. Tính thể hình tròn xoay sinh ra bởi (D) khi quay (D) quanh trục Ox (Kết quả viết dưới dạng số thập phân và làm tròn đến hàng phần trăm).

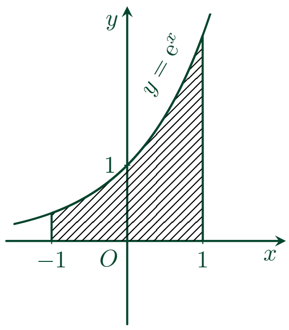


Đáp án: 9,08

Lời giải.

Ta có $V = \pi \int_1^2 \left(1 + \frac{1}{x}\right)^2 \,\mathrm{d}x = \pi \int_1^2 \left(1 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}\right) \mathrm{d}x = \pi \left(x + \ln x - \frac{1}{x}\right)\Big|_1^2 \approx 9{,}08.$

CÂU 27. Cho hình phẳng (H) được tô màu trong hình bên. Tính thể hình tròn xoay sinh ra bởi (H) khi quay (H) quanh trục Ox (Kết quả viết dưới dạng số thập phân và làm tròn đến hàng phần chục)

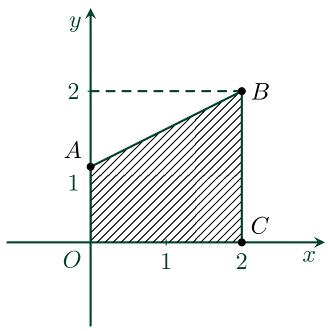


Đáp án: 11,4

Lời giải.

Ta có $V = \pi \int_{-1}^{1} (\mathrm{e}^x)^2 \,\mathrm{d}x = \pi \int_{-1}^{1} \left(\mathrm{e}^{2x}\right) \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\mathrm{e}^{2x}\Big|_{-1}^{1} \approx 11{,}4.$

CÂU 28. Cho hình phẳng (H) được tô màu trong hình bên. Tính thể hình tròn xoay sinh ra bởi (H) khi quay (H) quanh trục Ox (Kết quả viết dưới dạng số thập phân và làm tròn đến hàng phần chục).



Đáp án: 14,7

Lời giải.

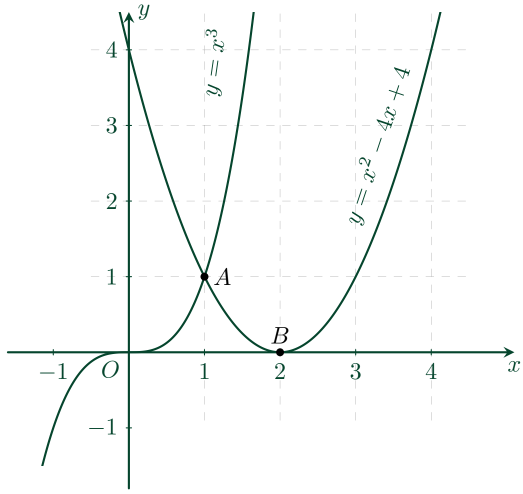
Gọi đường thẳng d đi qua A và B có phương trình dạng $y = ax + b$.

Ta có hệ phương trình $\begin{cases} b = 1 \\ 2a + b = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = 1. \end{cases}$

Suy ra $d\colon y = \frac{1}{2}x + 1$.

Khi đó $V = \pi \int_0^1 \left(\frac{1}{2}x + 1\right)^2 \mathrm{d}x \approx 14{,}7.$

CÂU 29. Cho hình phẳng (H) là tam giác cong OAB trong hình vẽ bên. Tính thể hình tròn xoay sinh ra bởi (H) khi quay (H) quanh trục Ox (Kết quả viết dưới dạng số thập phân và làm tròn đến hàng phần trăm).

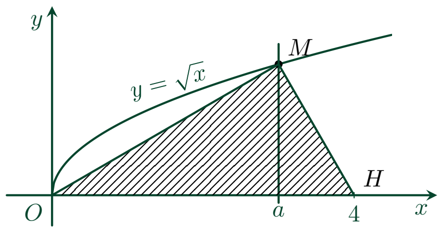


Đáp án: 1,08

Lời giải.

Ta có $V = \pi \int_0^1 \left(x^3\right)^2 \,\mathrm{d}x + \pi \int_1^2 \left(x^2 - 4x + 4\right)^2 \,\mathrm{d}x \approx 1{,}08$.

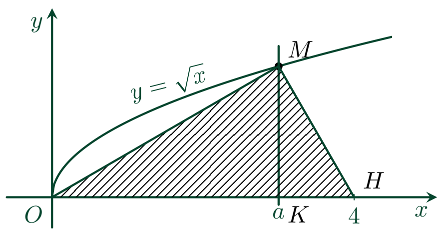
CÂU 30. Gọi V là thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{x}$, $y = 0$ và $x = 4$ quanh trục Ox. Đường thẳng $x = a$, $(0 < a < 4)$ cắt đồ thị hàm số $y = \sqrt{x}$ tại M (hình vẽ). Gọi V_1 là thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay tam giác OMH quanh trục Ox. Biết rằng $V = 2V_1$. Tìm a.



Đáp án: 3

Lời giải.

Ta có $V = \pi \int\limits_0^4 x \,\mathrm{d}x = \pi \left.\dfrac{x^2}{2}\right|_0^4 = 8\pi$.
Mà $V = 2V_1 \Rightarrow V_1 = 4\pi$.
Gọi K là hình chiếu của M trên Ox.
Suy ra $OK = a$, $KH = 4 - a$, $MK = \sqrt{a}$.
Khi xoay tam giác OMH quanh Ox ta được khối



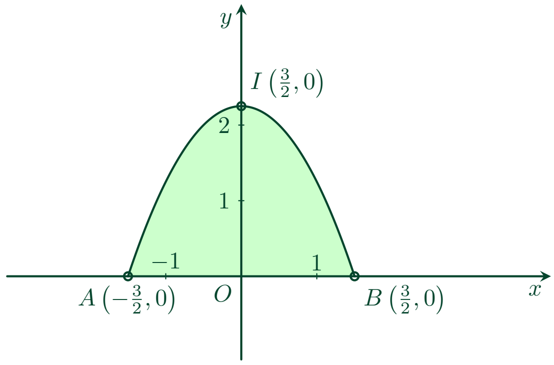
tròn xoay là sự lắp ghép của hai khối nón sinh bởi các tam giác OMK, MHK, hai khối nón đó có cùng mặt đáy và có tổng chiều cao là $OH = 4$ nên thể tích của khối tròn xoay đó là $V_1 = \dfrac{1}{3} \cdot \pi \cdot 4 \cdot \left(\sqrt{a}\right)^2 = \dfrac{4\pi a}{3}$, từ đó suy ra $a = 3$.

Dạng 3. Ứng dụng diện tích hình phẳng và thể tích khối tròn xoay trong bt thực tiễn

CÂU 1. Trường Nguyễn Văn Trỗi muốn làm một cái cửa nhà hình parabol có chiều cao từ mặt đất đến đỉnh là 2,25 mét, chiều rộng tiếp giáp với mặt đất là 3 mét. Giá thuê mỗi mét vuông là 1 500 000 đồng. Vậy số tiền nhà trường phải trả là

(A) 33 750 000 đồng. (B) 3 750 000 đồng. (C) 12 750 000 đồng. (D) 6 750 000 đồng.

Lời giải.



Gọi phương trình parabol

$$(P)\colon y = ax^2 + bx + c.$$

Do tính đối xứng của parabol nên ta có thể chọn hệ trục tọa độ Oxy sao cho (P) có đỉnh $I \in Oy$ (như hình vẽ).
Ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} \dfrac{9}{4} = c, \left(I \in (P)\right) \\ \dfrac{9}{4}a - \dfrac{3}{2}b + c = 0\left(A \in (P)\right) \\ \dfrac{9}{4}a + \dfrac{3}{2}b + c = 0\left(B \in (P)\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = \dfrac{9}{4} \\ a = -1 \\ b = 0. \end{cases}$$

Vậy $(P)\colon y = -x^2 + \dfrac{9}{4}$.
Dựa vào đồ thị, diện tích của parabol là

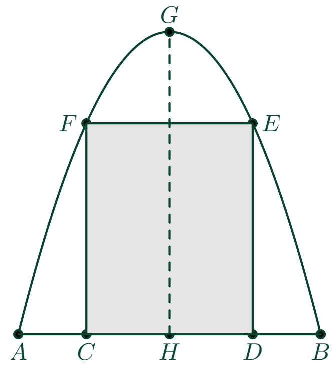
$$S = \int\limits_{-\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}} \left(-x^2 + \frac{9}{4}\right) \mathrm{d}x = 2\int\limits_{0}^{\frac{3}{2}} \left(-x^2 + \frac{9}{4}\right) \mathrm{d}x = 2\left(\frac{-x^3}{3} + \frac{9}{4}x\right)\Bigg|_0^{\frac{9}{4}} = \frac{9}{2}\,(\mathrm{m}^2).$$

Số tiền phải trả là $\dfrac{9}{2} \cdot 1\,500\,000 = 6\,750\,000$ (đồng).

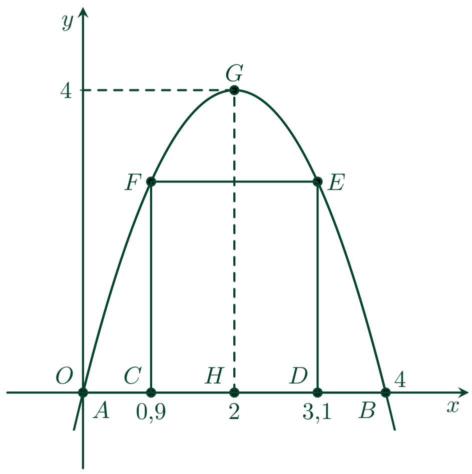
Chọn đáp án D .... □

CÂU 2. Chị Minh Hiền muốn làm một cái cổng hình Parabol như hình vẽ bên. Chiều cao $GH = 4\,\mathrm{m}$, chiều rộng $AB = 4\,\mathrm{m}$, $AC = BD = 0{,}9\,\mathrm{m}$. Chị Minh Hiền làm hai cánh cổng khi đóng lại là hình chữ nhật $CDEF$ tô đậm có giá là $1\,200\,000$ đồng/m^2, còn các phần để trắng làm xiên hoa có giá là $900\,000$ đồng/m^2. Hỏi tổng số tiền để làm hai phần nói trên gần nhất với số tiền nào dưới đây?

A $11\,445\,000$ đồng. **B** $4\,077\,000$ đồng. **C** $7\,368\,000$ đồng. **D** $11\,370\,000$ đồng.



Lời giải.



Gắn hệ trục tọa độ Oxy sao cho AB trùng Ox, A trùng O khi đó parabol có đỉnh $G(2;4)$ và đi qua gốc tọa độ.
Giả sử phương trình của parabol có dạng $y = ax^2 + bx + c$, $(a \neq 0)$.
Vì parabol có đỉnh là $G(2;4)$ và đi qua điểm $O(0;0)$ nên ta có

$$\begin{cases} c = 0 \\ -\dfrac{b}{2a} = 2 \\ a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 4 \\ c = 0. \end{cases}$$

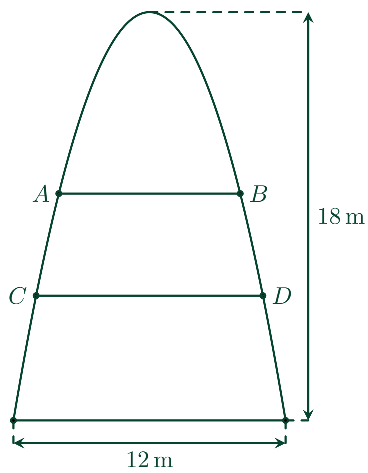
Suy ra phương trình parabol là $y = f(x) = -x^2 + 4x$.

Diện tích của cả cổng là $S = \displaystyle\int\limits_0^4 \left(-x^2 + 4x\right) \mathrm{d}x = \left(-\frac{x^3}{3} + 2x^2\right)\Bigg|_0^4 = \frac{32}{3}\,(\mathrm{m}^2)$.

Mặt khác chiều cao $CF = DE = f(0{,}9) = 2{,}79\,(\mathrm{m})$; $CD = 4 - 2 \cdot 0{,}9 = 2{,}2\,(\mathrm{m})$.
Diện tích hai cánh cổng là $S_{CDEF} = CD \cdot CF = 6{,}138\,(\mathrm{m}^2)$.
Diện tích phần xiên hoa là $S_{xh} = S - S_{CDEF} = \dfrac{32}{3} - 6{,}14 = \dfrac{6793}{1500}\,(\mathrm{m}^2)$.
Vậy tổng số tiền để làm cổng là $6{,}138 \cdot 1\,200\,000 + \dfrac{6793}{1500} \cdot 900\,000 = 11\,441\,400$ (đồng).

Chọn đáp án A .... □

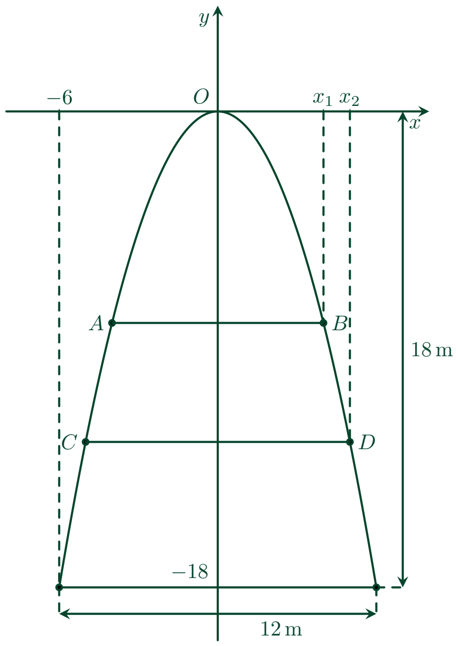
CÂU 3. Một cổng chào có dạng hình Parabol chiều cao 18 m, chiều rộng chân đế 12 m. Người ta căng hai sợi dây trang trí AB, CD nằm ngang đồng thời chia hình giới hạn bởi Parabol và mặt đất thành ba phần có diện tích bằng nhau (xem hình vẽ bên). Tỉ số $\dfrac{AB}{CD}$ bằng



Ⓐ $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Ⓑ $\dfrac{4}{5}$. Ⓒ $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$. Ⓓ $\dfrac{3}{1+2\sqrt{2}}$.

Lời giải.

Chọn hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ. Phương trình Parabol (P) có dạng $y = ax^2$.
(P) đi qua điểm có tọa độ $(-6; -18)$.



Suy ra $-18 = a \cdot (-6)^2 \Leftrightarrow a = -\dfrac{1}{2}$.

$\Rightarrow (P)\colon y = -\dfrac{1}{2}x^2$.

Từ hình vẽ ta có $\dfrac{AB}{CD} = \dfrac{x_1}{x_2}$.

Diện tích hình phẳng giới bạn bởi Parabol và đường thẳng $AB\colon y = -\dfrac{1}{2}x_1^2$ là

$$\begin{aligned} S_1 &= 2\int\limits_0^{x_1} \left[-\frac{1}{2}x^2 - \left(-\frac{1}{2}x_1^2\right)\right] \mathrm{d}x \\ &= 2\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}x_1^2 x\right)\Bigg|_0^{x_1} = \frac{2}{3}x_1^3. \end{aligned}$$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi Parabol và đường thẳng $CD\colon y = -\dfrac{1}{2}x_2^2$ là

$$S_2 = 2\int\limits_0^{x_2} \left[-\frac{1}{2}x^2 - \left(-\frac{1}{2}x_2^2\right)\right] \mathrm{d}x = 2\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}x_2^2 x\right)\Bigg|_0^{x_2} = \frac{2}{3}x_2^3.$$

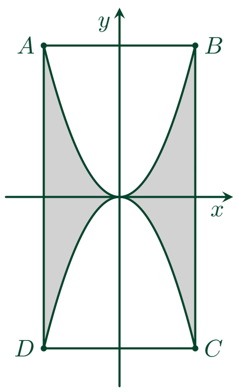
Từ giả thiết suy ra $S_2 = 2S_1 \Leftrightarrow x_2^3 = 2x_1^3 \Leftrightarrow \dfrac{x_1}{x_2} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

Vậy $\dfrac{AB}{CD} = \dfrac{x_1}{x_2} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

Chọn đáp án C .... □

CÂU 4. Một họa tiết hình cánh bướm như hình vẽ bên. Phần tô đậm được đính đá với giá thành $500\,000/\,\mathrm{m}^2$. Phần còn lại được tô màu với giá thành $250\,000/\,\mathrm{m}^2$. Cho $AB = 4\,\mathrm{dm}$; $BC = 8\,\mathrm{dm}$. Hỏi để trang trí 1 000 họa tiết như vậy cần số tiền gần nhất với số nào sau đây.

Ⓐ 105 660 667. Ⓑ 106 666 667. Ⓒ 107 665 667. Ⓓ 108 665 667.



Lời giải.

Vì $AB = 4\,\text{dm}$; $BC = 8\,\text{dm} \Rightarrow A(-2;4)$, $B(2;4)$, $C(2;-4)$, $D(-2;-4)$.
parabol là $y = x^2$ hoặc $y = -x^2$.

Diện tích phần tô đậm là $S_1 = 4\displaystyle\int\limits_0^2 x^2\,\mathrm{d}x = \frac{32}{3}\,(\text{dm}^2)$.

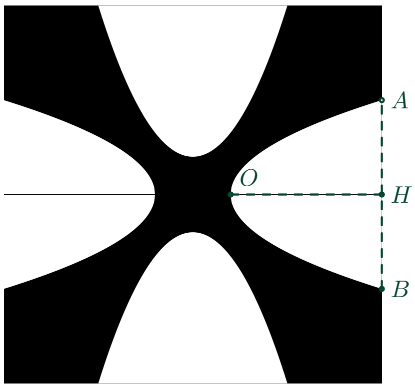
Diện tích hình chữ nhật là $S = 4 \cdot 8 = 32\,(\text{dm}^2)$.

Diện tích phần trắng là $S_2 = S - S_1 = 32 - \dfrac{32}{3} = \dfrac{64}{3}\,(\text{dm}^2)$.

Tổng chi phí trang chí là $T = \left(\dfrac{32}{3} \cdot 5\,000 + \dfrac{64}{3} \cdot 2\,500\right) \cdot 1\,000 \approx 106\,666\,667$.

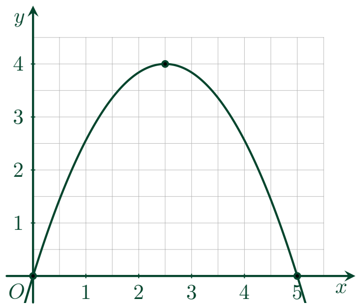
Chọn đáp án B .... □

CÂU 5. Một hoa văn trang trí được tạo ra từ một miếng bìa mỏng hình vuông cạnh bằng 10 cm bằng cách khoét đi bốn phần bằng nhau có hình dạng parabol như hình bên. Biết $AB = 5$ cm, $OH = 4$ cm. Biết giá trang trí hoa văn 1 cm^2 là 50000 đồng, tính số tiền cần bỏ ra để trang trí hoa văn đó.



A $2\,553\,333$ đồng. **B** $2\,333\,333$ đồng. **C** $2\,780\,333$ đồng. **D** $2\,123\,333$ đồng.

Lời giải.



Đưa parabol vào hệ trục Oxy ta tìm được phương trình là $(P)\colon y = -\dfrac{16}{25}x^2 + \dfrac{16}{5}x$.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi $(P)\colon y = -\dfrac{16}{25}x^2 + \dfrac{16}{5}x$, trục hoành và các đường thẳng $x = 0$, $x = 5$ là

$$S = \int\limits_0^5 \left(-\frac{16}{25}x^2 + \frac{16}{5}x\right)\mathrm{d}x = \frac{40}{3}.$$

Tổng diện tích phần bị khoét đi $S_1 = 4S = \dfrac{160}{3}$ cm^2.

Diện tích của hình vuông là $S_{hv} = 100$ cm^2.

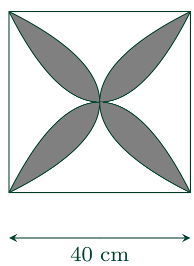
diện tích bề mặt hoa văn là $S_2 = S_{hv} - S_1 = 100 - \dfrac{160}{3} = \dfrac{140}{3}\,(\text{cm}^2)$.

Vậy số tiền cần bỏ ra để trang trí hoa văn đó là $\dfrac{140}{3} \cdot 50\,000 \approx 2\,333\,333$ (đồng).

Chọn đáp án B .... □

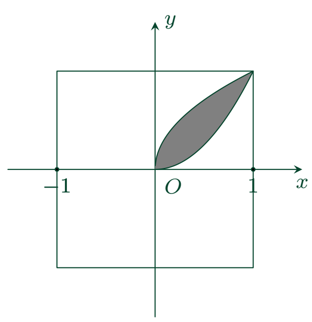
CÂU 6.

Một viên gạch hoa hình vuông cạnh 40 cm. Người thiết kế đã sử dụng bốn đường parabol có chung đỉnh tại tâm viên gạch để tạo ra bốn cánh hoa (được tô đen như hình vẽ dưới). Diện tích mỗi cánh hoa của viên gạch bằng



A $800\ \text{cm}^2$. **B** $\dfrac{800}{3}\ \text{cm}^2$. **C** $\dfrac{400}{3}\ \text{cm}^2$. **D** $250\ \text{cm}^2$.

Lời giải.



Chọn hệ tọa độ như hình vẽ (1 đơn vị trên trục bằng 10 cm= 1 dm), các cánh hoa tạo bởi các đường parabol có phương trình $y = \dfrac{x^2}{2}$, $y = -\dfrac{x^2}{2}$, $x = -\dfrac{y^2}{2}$, $x = \dfrac{y^2}{2}$.

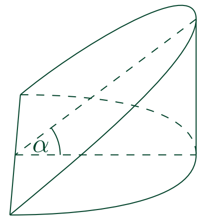
Diện tích một cánh hoa (nằm trong góc phần tư thứ nhất) bằng diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số $y = \dfrac{x^2}{2}$, $y = \sqrt{2x}$ và hai đường thẳng $x = 0$; $x = 2$.

Do đó diện tích một cánh hoa bằng

$$\int_0^2 \left(\sqrt{2x} - \frac{x^2}{2}\right) \mathrm{d}x = \left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\sqrt{(2x)^3} - \frac{x^3}{6}\right)\Big|_0^2 = \frac{4}{3}\ \mathrm{dm}^2 = \frac{400}{3}\ \mathrm{cm}^2.$$

Chọn đáp án (C) .... □

CÂU 7. Khi cắt một vật thể hình chiếc niêm bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x $(-2 \le x \le 2)$, mặt cắt là tam giác vuông có một góc $45°$ và độ dài một cạnh góc vuông là $\sqrt{14-3x^2}$ (như hình vẽ). Tính thể tích vật thể hình chiếc niêm trên.



(A) $V = 20$. (B) $V = 20\pi$. (C) $V = 10$. (D) $V = 10\pi$.

Lời giải.

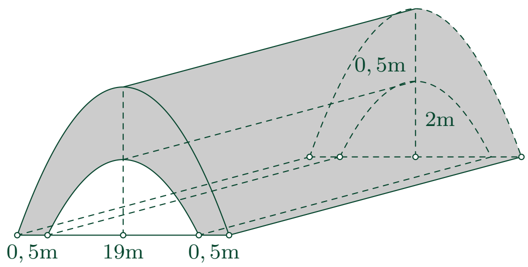
Diện tích tam giác vuông cân là $S(x) = \frac{1}{2}\sqrt{14-3x^2} \cdot \sqrt{14-3x^2} = \frac{1}{2}(14-3x^2)$.

Vậy thể tích vật thể là $\displaystyle\int_{-2}^{2} \frac{1}{2}(14-3x^2)\,\mathrm{d}x = 20$.

Chọn đáp án (A) .... □

CÂU 8.

Trong chương trình nông thôn mới của tỉnh Phú Yên, tại xã Hòa Mỹ Tây có xây một cây cầu bằng bê tông như hình vẽ (đường cong trong hình vẽ là các đường Parabol). Biết 1 m^3 khối bê tông để đổ cây cầu có giá 5 triệu đồng. Tính số tiền mà tỉnh Phú Yên cần bỏ ra để xây cây cầu trên.

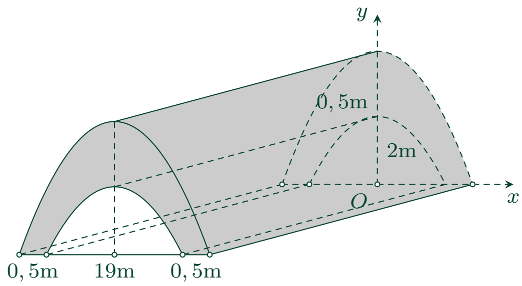


(A) 110 triệu đồng. (B) 250 triệu đồng. (C) 180 triệu đồng. (D) 200 triệu đồng.

Lời giải.

Chọn hệ trục Oxy như hình vẽ.

Gọi $(P_1)\colon y = a_1x^2 + b_1$ là Parabol đi qua hai điểm $A\left(\frac{19}{2}; 0\right)$, $B(0;2)$.



Nên ta có hệ phương trình sau

$$\begin{cases} 0 = a \cdot \left(\frac{19}{2}\right)^2 + 2 \\ 2 = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = -\frac{8}{361} \\ b_1 = 2 \end{cases} \Rightarrow (P_1)\colon y = -\frac{8}{361}x^2 + 2.$$

Gọi $(P_2)\colon y = a_2x^2 + b_2$ là Parabol đi qua hai điểm $C(10;0)$, $D\left(0; \frac{5}{2}\right)$.

Nên ta có hệ phương trình sau

$$\begin{cases} 0 = a_2 \cdot 10^2 + \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} = b_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_2 = -\frac{1}{40} \\ b_2 = \frac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow (P_2)\colon y = -\frac{1}{40}x^2 + \frac{5}{2}.$$

Ta có thể tích của bê tông là

$$V = 5 \cdot 2\left[\int_0^{10}\left(-\frac{1}{40}x^2 + \frac{5}{2}\right)\mathrm{d}x - \int_0^{\frac{19}{2}}\left(-\frac{8}{361}x^2 + 2\right)\mathrm{d}x\right] = 40\ \mathrm{m}^3.$$

Số tiền mà tỉnh Phú Yên cần bỏ ra để xây cây cầu là $5 \cdot 40 = 200$ triệu đồng.
Chọn đáp án (D) . . . . □

CÂU 9. Để kỷ niệm ngày 26-3. Chi đoàn 12A dự định dựng một lều trại có dạng parabol, với kích thước: nền trại là một hình chữ nhật có chiều rộng là 3 mét, chiều sâu là 6 mét, đỉnh của parabol cách mặt đất là 3 mét. Hãy tính thể tích phần không gian phía bên trong trại để lớp 12A cử số lượng người tham dự trại cho phù hợp.

(A) $30\ \text{m}^3$. (B) $36\ \text{m}^3$. (C) $40\ \text{m}^3$. (D) $41\ \text{m}^3$.

Lời giải.

Giả sử nền trại là hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 3$ m, $BC = 6$ m, đỉnh của parabol là I.
Chọn hệ trục tọa độ Oxy sao cho O là trung điểm của cạnh AB, A, B và I, phương trình của parabol có dạng $y = ax^2 + b$, $a \neq 0$.
Do I, A, B thuộc nên ta có $y = -\frac{4}{3}x^2 + 3$.
Vậy thể tích phần không gian phía trong trại là

$$V = 6 \cdot 2 \int\limits_0^{\frac{3}{2}} \left(-\frac{4}{3}x^2 + 3\right) \mathrm{d}x = 36.$$

Chọn đáp án (B) . . . . □

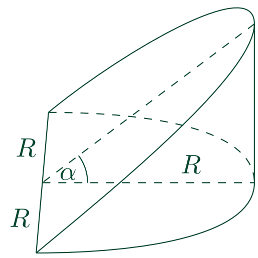
CÂU 10. Cho một vật thể bằng gỗ có dạng hình trụ với chiều cao và bán kính đáy cùng bằng R. Cắt khối gỗ đó bởi một mặt phẳng đi qua đường kính của một mặt đáy của khối gỗ và tạo với mặt phẳng đáy của khối gỗ một góc 30° ta thu được hai khối gỗ có thể tích là V_1 và V_2, với $V_1 < V_2$. Thể tích V_1 bằng

(A) $V_1 = \frac{2\sqrt{3}R^3}{9}$. (B) $V_1 = \frac{\sqrt{3}\pi R^3}{27}$. (C) $V_1 = \frac{\sqrt{3}\pi R^3}{18}$. (D) $V_1 = \frac{\sqrt{3}R^3}{27}$.

Lời giải.

Khi cắt khối gỗ hình trụ ta được một hình nêm có thể tích V_1 như hình vẽ.
Chọn hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ.
Nửa đường tròn đường kính AB có phương trình là

$$y = \sqrt{R^2 - x^2}, x \in [-R; R].$$



Một mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm M có hoành độ x, cắt hình nêm theo thiết diện là $\triangle MNP$ vuông tại N và có $\widehat{PMN} = 30^\circ$.
Ta có $NM = y = \sqrt{R^2 - x^2} \Rightarrow NP = MN \cdot \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{R^2 - x^2}}{\sqrt{3}}$.
Do $\triangle MNP$ có diện tích $S(x) = \frac{1}{2}NM \cdot NP = \frac{1}{2} \cdot \frac{R^2 - x^2}{\sqrt{3}}$.
Thể tích hình nêm là

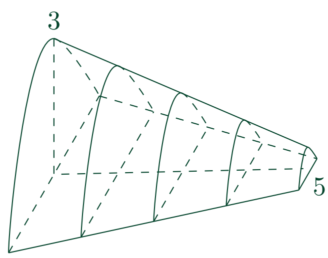
$$V_1 = \int\limits_{-R}^{R} S(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int\limits_{-R}^{R} \frac{R^2 - x^2}{\sqrt{3}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\sqrt{3}}\left(R^2x - \frac{1}{3}x^3\right)\Big|_{-R}^{R} = \frac{2\sqrt{3}R^3}{9}.$$

Chú ý: Có thể ghi nhớ công thức tính thể tích hình nêm $V_1 = \frac{2}{3}R^2h = \frac{2}{3}R^3\tan\alpha$, trong đó $R = \frac{AB}{2}$, $\alpha = \widehat{PMN}$.

Chọn đáp án (A) . . . . □

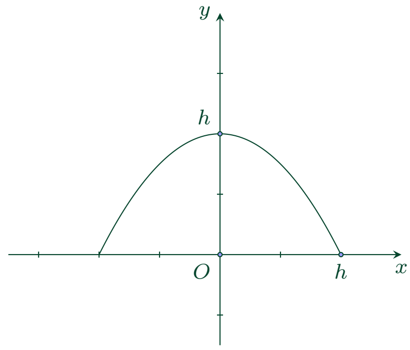
CÂU 11.

Cho một mô hình $3 - D$ mô phỏng một đường hầm như hình vẽ bên. Biết rằng đường hầm mô hình có chiều dài 5 cm; khi cắt hình này bởi mặt phẳng vuông góc với đáy của nó, ta được thiết diện là một hình parabol có độ dài đáy gấp đôi chiều cao parabol. Chiều cao của mỗi thiết diện parobol cho bởi công thức $y = 3 - \frac{2}{5}x$ cm, với x cm là khoảng cách tính từ lối vào lớn hơn của đường hầm mô hình. Tính thể tích (theo đơn vị cm^3) không gian bên trong đường hầm mô hình (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).



(A) 29. (B) 27. (C) 31. (D) 33.

Lời giải.



Xét một thiết diện Parabol có chiều cao là h và độ dài đáy $2h$ và chọn hệ trục Oxy như hình vẽ trên.
Parabol (P) có phương trình $(P)\colon y = ax^2 + h$, $(a < 0)$.
Có $B(h;0) \in (P) \Leftrightarrow 0 = ah^2 + h \Leftrightarrow a = -\dfrac{1}{h}$ (do $h > 0$).
Diện tích S của thiết diện là

$$S = \int\limits_{-h}^{h} \left(-\frac{1}{h}x^2 + h\right) \mathrm{d}x = \frac{4h^2}{3}, h = 3 - \frac{2}{5}x \Rightarrow S(x) = \frac{4}{3}\left(3 - \frac{2}{5}x\right)^2.$$

Suy ra thể tích không gian bên trong của đường hầm mô hình là

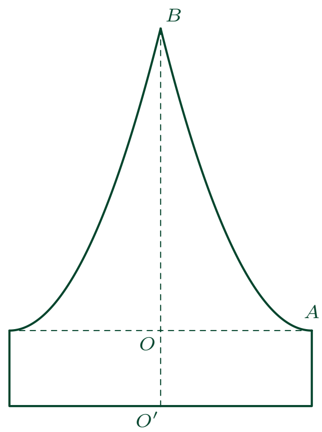
$$V = \int\limits_0^5 S(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^5 \frac{4}{3}\left(3 - \frac{2}{5}x\right)^2 \mathrm{d}x \approx 28{,}888 \Rightarrow V \approx 29 \ \text{cm}^3.$$

Chọn đáp án (A) .... □

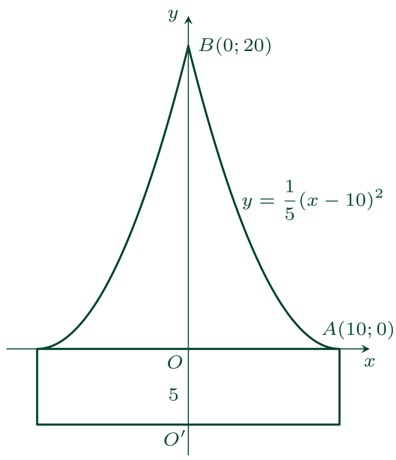
CÂU 12.

Chuẩn bị cho đêm hội diễn văn nghệ chào đón năm mới, bạn Minh Hiền đã làm một chiếc mũ "cách điệu" cho ông già Noel có dáng một khối tròn xoay. Mặt cắt qua trục của chiếc mũ như hình vẽ bên dưới. Biết rằng $OO' = 5$ cm, $OA = 10$ cm, $OB = 20$ cm, đường cong AB là một phần của parabol có đỉnh là điểm A. Thể tích của chiếc mũ bằng

(A) $\dfrac{2750\pi}{3}$ cm^3. (B) $\dfrac{2500\pi}{3}$ cm^3. (C) $\dfrac{2050\pi}{3}$ cm^3. (D) $\dfrac{2250\pi}{3}$ cm^3.



Lời giải.



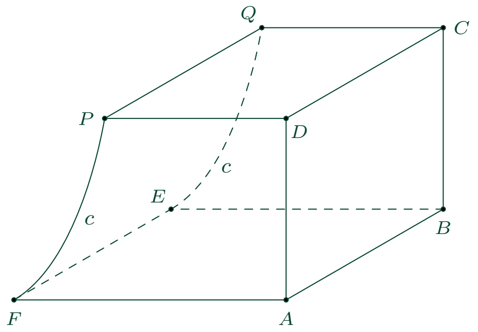
Ta gọi thể tích của chiếc mũ là V.
Thể tích của khối trụ có bán kính đáy bằng $OA = 10$ cm và đường cao $OO' = 5$ cm là V_1.
Thể tích của vật thể tròn xoay khi quay hình phẳng giới hạn bởi đường cong AB và hai trục tọa độ quanh trục Oy là V_2.
Ta có $V = V_1 + V_2$; $V_1 = 5 \cdot 10^2\pi = 500\pi$ cm^3.
Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ.
Do parabol có đỉnh A nên nó có phương trình dạng $(P)\colon y = a(x-10)^2$.

Vì (P) qua điểm $B(0;20)$ nên $a = \dfrac{1}{5}$.
Do đó, $(P)\colon y = \dfrac{1}{5}(x-10)^2$. Từ đó suy ra $x = 10 - \sqrt{5y}$ (do $x < 10$).
Suy ra $V_2 = \pi \displaystyle\int\limits_0^{20} \left(10 - \sqrt{5y}\right)^2 \mathrm{d}y = \pi\left(3000 - \frac{8000}{3}\right) = \frac{1000}{3}\pi$ cm^3.
Do đó $V = V_1 + V_2 = \dfrac{1000}{3}\pi + 500\pi = \dfrac{2500}{3}\pi$ cm^3.

Chọn đáp án (B) .... □

CÂU 13.

Một chi tiết máy được thiết kế như hình vẽ bên. Các tứ giác $ABCD$, $CDPQ$ là các hình vuông cạnh 2,5 (cm). Tứ giác $ABEF$ là hình chữ nhật có $BE = 3{,}5$ (cm). Mặt bên $PQEF$ được mài nhẵn theo đường parabol (P) có đỉnh parabol nằm trên cạnh EF. Thể tích của chi tiết máy bằng



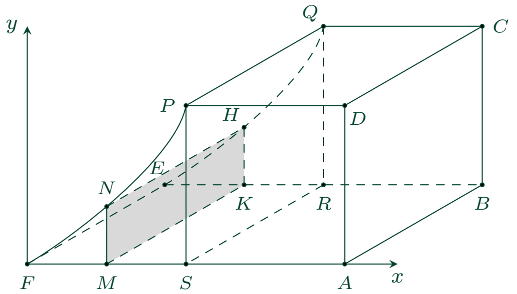
A $\dfrac{395}{24}$ cm^3. **B** $\dfrac{50}{3}$ cm^3. **C** $\dfrac{125}{8}$ cm^3. **D** $\dfrac{425}{24}$ cm^3.

Lời giải.

Gọi hình chiếu của P, Q trên AF và BE là S và R.

Vật thể được chia thành hình lập phương $ABCD.PQRS$ có cạnh 2,5 (cm), thể tích $V_1 = \dfrac{125}{8}$ cm^3 và phần còn lại có thể tích V_2.

Khi đó thể tích vật thể $V = V_1 + V_2 = \dfrac{125}{8} + V_2$.



Đặt hệ trục $Oxyz$ sao cho O trùng với F, Ox trùng với FA, Oy trùng với tia Fy song song với AD. Khi đó Parabol (P) có phương trình dạng $y = ax^2$, đi qua điểm $P\left(1; \dfrac{5}{2}\right)$ do đó $a = \dfrac{5}{2} \Rightarrow y = \dfrac{5}{2}x^2$.

Cắt vật thể bởi mặt phẳng vuông góc với Ox và đi qua điểm $M(x;0;0)$, $0 \le x \le 1$ ta được thiết diện là hình chữ nhật $MNHK$ có cạnh là $MN = \dfrac{5}{2}x^2$ và $MK = \dfrac{5}{2}$ do đó diện tích $S(x) = \dfrac{25}{4}x^2$.

Áp dụng công thức thể tích vật thể ta có $V_2 = \displaystyle\int_0^1 \dfrac{25}{4}x^2\,\mathrm{d}x = \dfrac{25}{12}$.

Từ đó $V = \dfrac{125}{8} + \dfrac{25}{12} = \dfrac{425}{24} \approx 17{,}7$ cm^3.

Chọn đáp án D .... □

CÂU 14. Bổ dọc một quả dưa hấu ta được thiết diện là hình elip có trục lớn 28 cm, trục nhỏ 25 cm. Biết cứ 1000 m^3 dưa hấu sẽ làm được cốc sinh tố giá 20000 đồng. Hỏi từ quả dưa hấu trên có thể thu được bao nhiêu tiền từ việc bán nước sinh tố? Biết rằng bề dày vỏ dưa không đáng kể.

A 183000 đồng. **B** 180000 đồng. **C** 185000 đồng. **D** 190000 đồng.

Lời giải.

Đường elip có trục lớn 28 cm, trục nhỏ 25 cm có phương trình

$$\frac{y^2}{\left(\frac{25}{2}\right)^2} = 1 \Leftrightarrow y^2 = \left(\frac{25}{2}\right)^2\left(1 - \frac{x^2}{14^2}\right) \Leftrightarrow y = \pm\frac{25}{2}\sqrt{1 - \frac{x^2}{14^2}}.$$

Do đó thể tích quả dưa là

$$\begin{aligned} V &= \pi\int_{-14}^{14}\left(\frac{25}{2}\sqrt{1-\frac{x^2}{14^2}}\right)^2\mathrm{d}x \\ &= \pi\left(\frac{25}{2}\right)^2\int_{-14}^{14}\left(1-\frac{x^2}{14^2}\right)^2\mathrm{d}x \\ &= \pi\left(\frac{25}{2}\right)^2\cdot\left(x - \frac{x^3}{3\cdot 14^2}\right)\Big|_{-14}^{14} \\ &= \pi\left(\frac{25}{2}\right)^2\cdot\frac{56}{3} \\ &= \frac{8750\pi}{3}\ \text{cm}^3. \end{aligned}$$

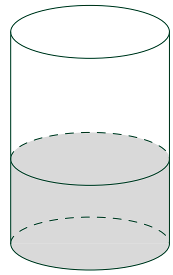
Do đó tiền bán nước thu được là $\dfrac{8750\pi \cdot 20000}{3 \cdot 1000} \approx 183259$ đồng.

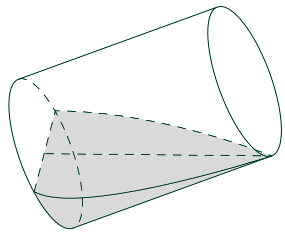
Chọn đáp án (A) .... □

CÂU 15.

Có một cốc nước thủy tinh hình trụ, bán kính trong lòng đáy cốc là 6 cm, chiều cao lòng cốc là 10 cm đang đựng một lượng nước. Tính thể tích lượng nước trong cốc, biết khi nghiêng cốc nước vừa lúc khi nước chạm miệng cốc thì đáy mực nước trùng với đường kính đáy.

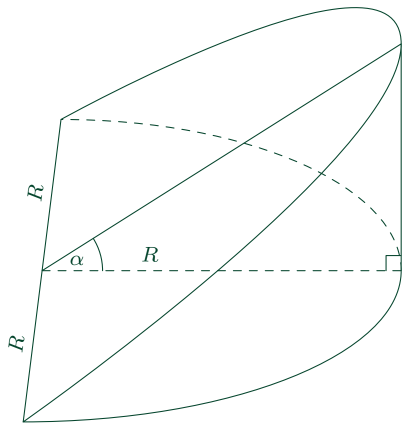
(A) $240\,\text{cm}^3$. (B) $240\pi\ \text{cm}^3$. (C) $120\,\text{cm}^3$. (D) $120\pi\ \text{cm}^3$.





Lời giải.

Cách 1.



Xét thiết diện cắt cốc thủy tinh vuông góc với đường kính tại vị trí bất kỳ có

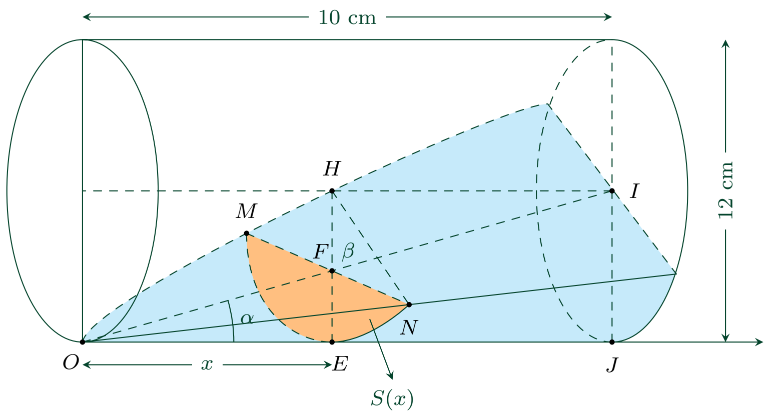
$$S(x) = \frac{1}{2}\sqrt{R^2 - x^2} \cdot \sqrt{R^2 - x^2} \cdot \tan\alpha = \frac{1}{2}\left(R^2 - x^2\right)\tan\alpha.$$

Thể tích hình cái nêm là: $V = \dfrac{1}{2}\tan\alpha \displaystyle\int_{-R}^{R}\left(R^2 - x^2\right)\mathrm{d}x = \dfrac{2}{3}R^3\tan\alpha.$

Thể tích khối nước tạo thành khi nguyên cốc có hình dạng cái nêm nên $V_{kn} = \dfrac{2}{3}R^3\tan\alpha.$

$\Rightarrow V_{kn} = \dfrac{2}{3}R^3 \cdot \dfrac{h}{R} = 240\,cm^3.$

Cách 2.



Dựng hệ trục tọa độ $Oxyz$.

Gọi $S(x)$ là diện tích thiết diện do mặt phẳng có phương vuông góc với trục Ox với khối nước, mặt phẳng này cắt trục Ox tại điểm có hoành độ $h \geq x \geq 0$.

Gọi $\widehat{IOJ} = \alpha$, $\widehat{FHN} = \beta$, $OE = x$

$\tan\alpha = \dfrac{IJ}{OJ} = \dfrac{6}{10} = \dfrac{EF}{OE} \Rightarrow EF = \dfrac{6x}{10} \Rightarrow HF = 6 - \dfrac{6x}{10}$.

$\cos\beta = \dfrac{HF}{HN} = \dfrac{6 - \dfrac{6x}{10}}{6} = 1 - \dfrac{x}{10} \Rightarrow \beta = \arccos\left(1 - \dfrac{x}{10}\right)$

$S(x) = S_{\text{hình quạt}} - S_{HMN} = \dfrac{1}{2}HN^2 \cdot 2\beta - \dfrac{1}{2}HM \cdot HN \cdot \sin 2\beta$

$\Rightarrow S(x) = 6^2 \arccos\left(1 - \dfrac{x}{10}\right) - \dfrac{1}{2}\cdot 6 \cdot 6 \cdot 2\left(1 - \dfrac{x}{10}\right)\sqrt{1 - \left(1 - \dfrac{x}{10}\right)^2}$

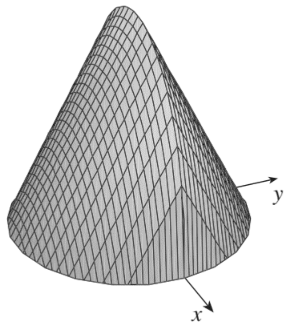
$\Rightarrow V = \displaystyle\int_0^{10} S(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{10} \left(36\arccos\left(1 - \dfrac{x}{10}\right) - 36\left(1 - \dfrac{x}{10}\right)\sqrt{1 - \left(1 - \dfrac{x}{10}\right)^2}\right)\mathrm{d}x = 240.$

Chọn đáp án (A) .... □

CÂU 16.

Cho vật thể đáy là hình tròn có bán kính bằng 1 (tham khảo hình vẽ). Khi cắt vật thể bằng mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x $(-1 \le x \le 1)$ thì được thiết diện là một tam giác đều. Thể tích V của vật thể đó là

(A) $V = \sqrt{3}$. (B) $V = 3\sqrt{3}$. (C) $V = \dfrac{4\sqrt{3}}{3}$. (D) $V = \pi$.



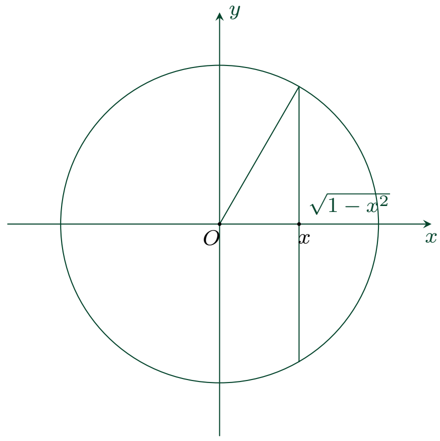
Lời giải.

Do vật thể có đáy là đường tròn và khi cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox được thiết diện là tam giác đều do đó vật thể đối xứng qua mặt phẳng vuông góc với trục Oy tại điểm O.

Cạnh của tam giác đều thiết diện là $a = 2\sqrt{1 - x^2}$.

Diện tích tam giác thiết diện là

$$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \left(1 - x^2\right)\sqrt{3}.$$

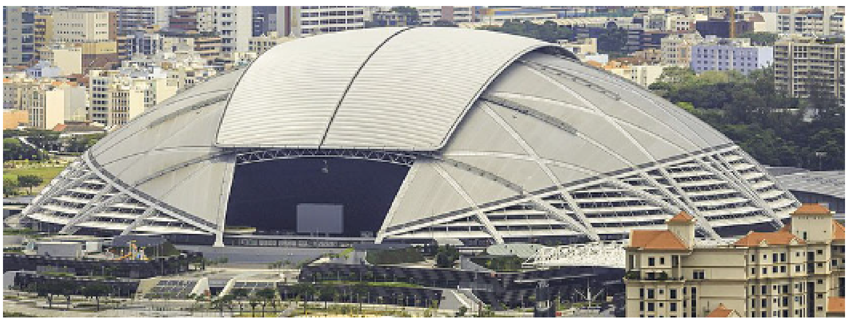


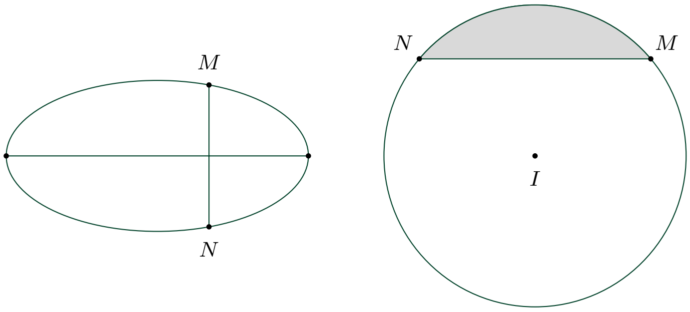
Thể tích khối cần tìm là

$$V = 2\int_0^1 S dx = 2\int_0^1 \sqrt{3}\left(1 - x^2\right) = 2\sqrt{3}\left(x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{4\sqrt{3}}{3}.$$

Chọn đáp án (C) .... □

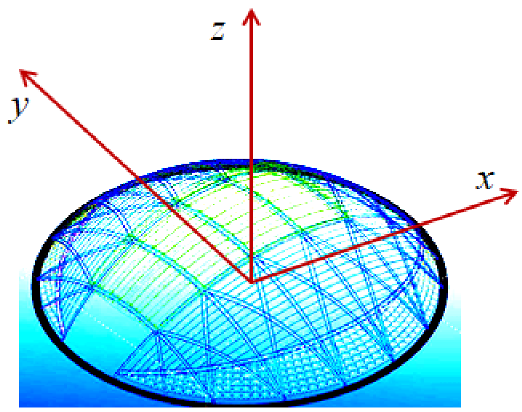
CÂU 17. Sân vận động Sport Hub (Singapore) là sân có mái vòm kỳ vĩ nhất thế giới. Đây là nơi diễn ra lễ khai mạc Đại hội thể thao Đông Nam Á được tổ chức tại Singapore năm 2015. Nền sân là một elip (E) có trục lớn dài $150m$, trục bé dài $90m$ (hình vẽ). Nếu cắt sân vận động theo một mặt phẳng vuông góc với trục lớn của (E)và cắt elip ở M, N (hình vẽ) thì ta được thiết diện luôn là một phần của hình tròn có tâm I (phần tô đậm trong hình 4) với MN là một dây cung và góc $\widehat{MIN} = 90°$. Để lắp máy điều hòa không khí thì các kỹ sư cần tính thể tích phần không gian bên dưới mái che và bên trên mặt sân, coi như mặt sân là một mặt phẳng và thể tích vật liệu là mái không đáng kể. Hỏi thể tích xấp xỉ bao nhiêu?





(A) $57793\ \text{m}^3$. (B) $115586\ \text{m}^3$. (C) $32162\ \text{m}^3$. (D) $101793\ \text{m}^3$.

Lời giải.



Chọn hệ trục như hình vẽ

Ta cần tìm diện tích của $S(x)$thiết diện.

Gọi $d(O, MN) = x$

$(E): \dfrac{x^2}{75^2} + \dfrac{y^2}{45^2} = 1$.

Lúc đó $MN = 2y = 2\sqrt{45^2\left(1 - \dfrac{x^2}{75^2}\right)} = 90\sqrt{1 - \dfrac{x^2}{75^2}}$

$\Rightarrow R = \dfrac{MN}{\sqrt{2}} = \dfrac{90}{\sqrt{2}}.\sqrt{1 - \dfrac{x^2}{75^2}} \Rightarrow R^2 = \dfrac{90^2}{2}\cdot\left(1 - \dfrac{x^2}{75^2}\right)$.

$S(x) = \dfrac{1}{4}\pi R^2 - \dfrac{1}{2}R^2 = \left(\dfrac{1}{4}\pi - \dfrac{1}{2}\right)R^2 = (\pi - 2)\dfrac{2025}{2}.\left(1 - \dfrac{x^2}{75^2}\right)$.

Thể tích khoảng không cần tìm là

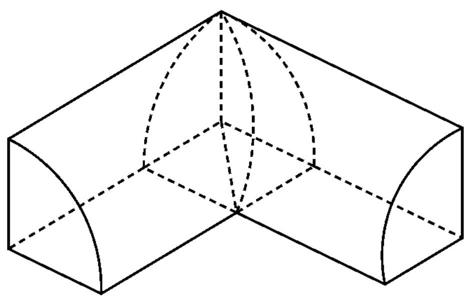
$$V = \int\limits_{-75}^{75} (\pi - 2)\frac{2025}{2}.\left(1 - \frac{x^2}{75^2}\right) \approx 115586\,\text{m}^3.$$

Chọn đáp án (B) .... □

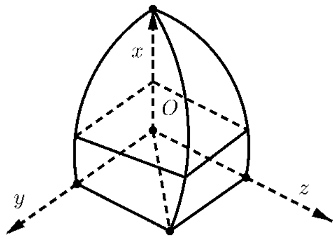
CÂU 18.

Gọi (H) là phần giao của hai khối $\dfrac{1}{4}$ hình trụ có bán kính a, hai trục hình trụ vuông góc với nhau như hình vẽ sau. Tính thể tích của khối (H).

(A) $V_{(H)} = \dfrac{a^3}{2}$. (B) $V_{(H)} = \dfrac{3a^3}{4}$. (C) $V_{(H)} = \dfrac{2a^3}{3}$. (D) $V_{(H)} = \dfrac{\pi a^3}{4}$.



Lời giải.



+ Đặt hệ toạ độ $Oxyz$ như hình vẽ, xét mặt cắt song song với mp (Oyz) cắt trục Ox tại x: thiết diện mặt cắt luôn là hình vuông có cạnh $\sqrt{a^2-x^2}$ $(0 \leq x \leq a)$.
+ Do đó thiết diện mặt cắt có diện tích: $S(x) = a^2 - x^2$.
+ Vậy $V_{(H)} = \int\limits_0^a S(x)\ \mathrm{d}x = \int\limits_0^a \left(a^2 - x^2\right)\ \mathrm{d}x = \left(a^2x - \dfrac{x^3}{3}\right)\Big|_0^a$
$= \dfrac{2a^3}{3}$

Chọn đáp án C ....

CÂU 19. Một bác thợ xây bơm nước vào bể chứa nước. Gọi $h(t)$ là thể tích nước bơm được sau t giây. Cho $h'(t) = 6at^2 + 2bt$ và ban đầu bể không có nước. Sau 3 giây thì thể tích nước trong bể là $90m^3$, sau 6 giây thì thể tích nước trong bể là $504m^3$. Tính thể tích nước trong bể sau khi bơm được 9 giây.

A $1458m^3$. **B** $600m^3$. **C** $2200m^3$. **D** $4200m^3$.

Lời giải.

$$\int\limits_0^3 \left(6at^2 + 2bt\right)\ \mathrm{d}t = 90 \Leftrightarrow \left(2at^3 + bt^2\right)\Big|_0^3 = 90 \Leftrightarrow 54a + 9b = 90 \quad (1)$$

$$\int\limits_0^6 \left(6at^2 + 2bt\right)\ \mathrm{d}t = 504 \Leftrightarrow \left(2at^3 + bt^2\right)\Big|_0^6 = 504 \Leftrightarrow 432a + 36b = 504 \quad (2)$$

Từ (1), (2) $\Rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{2}{3} \\ b = 6. \end{cases}$

Sau khi bơm 9 giây thì thể tích nước trong bể là

$$V = \int\limits_0^9 \left(4t^2 + 12t\right)\ \mathrm{d}t = \left(\frac{4}{3}t^3 + 6t^2\right)\Big|_0^9 = 1458\ \left(m^3\right).$$

Chọn đáp án A ....

CÂU 20. Người ta thay nước mới cho một bể bơi có dạng hình hộp chữ nhật có độ sâu là 280cm. Giả sử $h(t)$là chiều cao (tính bằng cm) của mực nước bơm được tại thời điểm t giây, biết rằng tốc độ tăng của chiều cao mực nước tại giây thứ t là $h'(t) = \dfrac{1}{500}\sqrt[3]{t}$ và lúc đầu hồ bơi không có nước. Hỏi sau bao lâu thì bơm được số nước bằng $\dfrac{3}{4}$độ sâu của hồ bơi (làm tròn đến giây)?

A 2 giờ 36 giây. **B** 2 giờ 48 giây. **C** 2 giờ 38 giây. **D** 2 giờ 46 giây.

Lời giải.

Gọi x là thời điểm bơm được số nước bằng $\dfrac{3}{4}$ độ sâu của bể (x tính bằng giây). Ta có

$$\int\limits_0^x \frac{1}{500}\sqrt[3]{t}\mathrm{d}t = \frac{3}{4}\cdot 280 \Rightarrow \frac{3}{4}t^{\frac{4}{3}}\Big|_0^x = 105000$$
$$\Rightarrow\quad x\sqrt[3]{x} = 140000 \Rightarrow \sqrt[3]{x^4} = 140000$$
$$\Rightarrow\quad x = \sqrt[4]{140000^3} \Rightarrow x \approx 7237{,}6242.$$

Suy ra $x = 2$ giờ 38 giây.

Chọn đáp án C ....

MỤC LỤC

Bài 1. ỨNG DỤNG HÌNH HỌC CỦA TÍCH PHÂN 1
A Diện tích hình thang cong 1
B Thể tích hình khối 1
Dạng 1.TÍNH DIỆN TÍCH HÌNH GIỚI HẠN BỞI CÁC ĐƯỜNG CONG 2
Dạng 2. THỂ TÍCH KHỐI TRÒN XOAY 13
Dạng 3.Ứng dụng diện tích hình phẳng và thể tích khối tròn xoay trong bt thực tiễn 17
LỜI GIẢI CHI TIẾT 22
Bài 1. ỨNG DỤNG HÌNH HỌC CỦA TÍCH PHÂN 22
A Diện tích hình thang cong 22
B Thể tích hình khối 22
Dạng 1.TÍNH DIỆN TÍCH HÌNH GIỚI HẠN BỞI CÁC ĐƯỜNG CONG 23
Dạng 2. THỂ TÍCH KHỐI TRÒN XOAY 43
Dạng 3.Ứng dụng diện tích hình phẳng và thể tích khối tròn xoay trong bt thực tiễn 50