Giới hạn. Hàm số liên tục

Bài 1. GIỚI HẠN DÃY SỐ

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Dãy số có giới hạn 0

ĐỊNH NGHĨA 1.1. Ta nói dãy số (u_n) có giới hạn là 0 khi n dần tới dương vô cực, nếu $|u_n|$ có thể nhỏ hơn một số dương bé tuỳ ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi, kí hiệu $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ hay $u_n \to 0$ khi $n \to +\infty$.

Từ định nghĩa dãy số có giới hạn 0, ta có các kết quả sau:

- $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^k} = 0$ với k là một số nguyên dương;
- $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$ nếu $|q| < 1$;
- Nếu $|u_n| \le v_n$ với mọi $n \ge 1$ và $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ thì $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

2. Dãy số có giới hạn hữu hạn

ĐỊNH NGHĨA 1.2. Ta nói dãy số (u_n) có giới hạn là số thực a khi n dần tới dương vô cực nếu

$$\lim_{n\to+\infty} (u_n - a) = 0,$$

kí hiệu $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$ hay $u_n \to a$ khi $n \to +\infty$.

- Nếu $u_n = c$ (c là hằng số) thì $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = c$.
- $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$ khi và chỉ khi $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n - a) = 0$.

3. Các quy tắc tính giới hạn

TÍNH CHẤT 1.1. *a) Nếu $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$ và $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = b$ thì*

-) $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + v_n) = a + b$.

-) $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n - v_n) = a - b$.

-) $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n \cdot v_n) = a \cdot b$.

-) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = \dfrac{a}{b}$ (nếu $b \ne 0$).

b) Nếu $u_n \ge 0$ với mọi n và $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$ thì $a \ge 0$ và $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{u_n} = \sqrt{a}$.

B. CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

1 Phương pháp đặt thừa số chung (lim hữu hạn)

1. Ví dụ mẫu

VÍ DỤ 1. Tìm giới hạn sau $\lim \dfrac{2n^3 - 2n + 3}{1 - 4n^3}$.

VÍ DỤ 2. Tìm giới hạn sau $\lim \dfrac{\sqrt{n^4 + 2n + 2}}{n^2 + 1}$.

VÍ DỤ 3. Tìm giới hạn sau $\lim \dfrac{3^{n+1} - 4^n}{4^{n-1} + 3}$.

VÍ DỤ 4. Tìm giới hạn sau $\lim \dfrac{1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^n}{1 + 3 + 3^2 + \cdots + 3^n}$.

ĐIỂM:

"It's not how much time you have, it's how you use it."

QUICK NOTE

QUICK NOTE

2. Câu hỏi trắc nghiệm

CÂU 1. Tính giới hạn $I = \lim \dfrac{2n+2023}{3n+2024}$.

(A) $I = \dfrac{2}{3}$. (B) $I = \dfrac{3}{2}$. (C) $I = \dfrac{2023}{2024}$. (D) $I = 1$.

CÂU 2. Phát biểu nào sau đây là **sai**?

(A) $\lim u_n = c$ ($u_n = c$ là hằng số). (B) $\lim q^n = 0$ ($|q| > 1$).
(C) $\lim \dfrac{1}{n} = 0$. (D) $\lim \dfrac{1}{n^k} = 0$ ($k > 1$).

CÂU 3. Giá trị của $\lim \dfrac{2-n}{n+1}$ bằng

(A) 1. (B) 2. (C) -1. (D) 0.

CÂU 4. Tính giới hạn $\lim \dfrac{4n+2024}{2n+1}$.

(A) $\dfrac{1}{2}$. (B) 4. (C) 2. (D) 2024.

CÂU 5. $\lim \dfrac{2n^2-3}{n^6+5n^5}$ bằng

(A) 2. (B) 0. (C) $\dfrac{-3}{5}$. (D) -3.

CÂU 6. Tính $\lim \dfrac{2n+1}{1+n}$ được kết quả là

(A) 2. (B) 0. (C) $\dfrac{1}{2}$. (D) 1.

CÂU 7. Dãy số nào sau đây có giới hạn khác 0?

(A) $\dfrac{1}{n}$. (B) $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$. (C) $\dfrac{n+1}{n}$. (D) $\dfrac{\sin n}{\sqrt{n}}$.

CÂU 8. Giới hạn $\lim \dfrac{\sqrt{n}}{2n^2+3}$ có kết quả là

(A) 2. (B) 0. (C) $+\infty$. (D) 4.

CÂU 9. Dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{1}{2n}$, chọn $M = \dfrac{1}{100}$, để $\dfrac{1}{2n} < \dfrac{1}{100}$ thì n phải lấy từ số hạng thứ bao nhiêu trở đi?

(A) 51. (B) 49. (C) 48. (D) 50.

CÂU 10. Giới hạn $\lim \dfrac{3^n+2^n}{4^n}$ có kết quả là

(A) 0. (B) $\dfrac{5}{4}$. (C) $\dfrac{3}{4}$. (D) $+\infty$.

CÂU 11. Tính giới hạn $\lim \left[\dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{2\cdot 3} + \dfrac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \dfrac{1}{n(n+1)}\right]$.

(A) 0. (B) 2. (C) 1. (D) $\dfrac{3}{2}$.

CÂU 12. Tính $\lim \sqrt{\dfrac{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}{2n(n+7)(6n+5)}}$.

(A) $\dfrac{1}{6}$. (B) $\dfrac{1}{2\sqrt{6}}$. (C) $\dfrac{1}{2}$. (D) $+\infty$.

CÂU 13. Giới hạn $\lim \dfrac{(2n-1)(3-n)^2}{(4n-5)^3}$ có kết quả bằng

(A) 0. (B) $\dfrac{1}{32}$. (C) $\dfrac{3}{2}$. (D) $\dfrac{1}{2}$.

CÂU 14. Tìm $L = \lim \left(\dfrac{1}{1} + \dfrac{1}{1+2} + \cdots + \dfrac{1}{1+2+\cdots+n}\right)$.

(A) $L = \dfrac{5}{2}$. (B) $L = +\infty$. (C) $L = 2$. (D) $L = \dfrac{3}{2}$.

CÂU 15. Đặt $f(n) = \left(n^2+n+1\right)^2 + 1$. Xét dãy số (u_n) sao cho $u_n = \dfrac{f(1)\cdot f(3)\cdot f(5)\cdots f(2n-1)}{f(2)\cdot f(4)\cdot f(6)\cdots f(2n)}$. Tính $\lim n\sqrt{u_n}$.

(A) $\lim n\sqrt{u_n} = \sqrt{2}$. (B) $\lim n\sqrt{u_n} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$. (C) $\lim n\sqrt{u_n} = \sqrt{3}$. (D) $\lim n\sqrt{u_n} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

CÂU 16. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số a thuộc khoảng $(0;2024)$ để có

$$\lim\sqrt{\frac{9^n+3^{n+1}}{5^n+9^{n+a}}}\leq\frac{1}{2187}\ ?$$

(A) 2017. (B) 2016. (C) 2023. (D) 2024.

2 Phương pháp lượng liên hợp (lim hữu hạn)

Nếu giới hạn của dãy số ở dạng vô định thì ta sử dụng các phép biến đổi để đưa về dạng cơ bản.
Một số phép biến đổi liên hợp:

$$f(n)-g(n)=\frac{(f(n))^2-(g(n))^2}{f(n)+g(n)}$$
$$\sqrt{f(n)}-\sqrt{g(n)}=\frac{f(n)-g(n)}{\sqrt{f(n)}+\sqrt{g(n)}}$$
$$\sqrt{f(n)}-g(n)=\frac{f(n)-(g(n))^2}{\sqrt{f(n)}+g(n)}$$
$$\sqrt[3]{f(n)}-\sqrt[3]{g(n)}=\frac{f(n)-g(n)}{\sqrt[3]{(f(n))^2}+\sqrt[3]{f(n)g(n)}+\sqrt[3]{(g(n))^2}}$$

1. Ví dụ mẫu

VÍ DỤ 1. Tính giới hạn $I=\lim\left(\sqrt{n^2-2n+3}-n\right)$.

VÍ DỤ 2. Tính giới hạn $I=\lim\left(\sqrt{n^2+7}-\sqrt{n^2+5}\right)$.

VÍ DỤ 3. Tính giới hạn $I=\lim\left(\sqrt{n^2+2n}-\sqrt{n^2-2n}\right)$.

VÍ DỤ 4. Tính giới hạn $I=\lim\left(\sqrt{2n^2-n+1}-\sqrt{2n^2-3n+2}\right)$.

VÍ DỤ 5. Tính giới hạn $I=\lim\left(n-\sqrt[3]{n^3+3n^2+1}\right)$.

2. Câu hỏi trắc nghiệm

CÂU 1. Tính giới hạn $I=\lim\left(\sqrt{n^2+2n+3}-n\right)$

(A) 1. (B) 0. (C) 2. (D) 3.

CÂU 2. Tính giới hạn $I=\lim\left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-2}\right)$

(A) 3. (B) 0. (C) $\sqrt{3}$. (D) $\frac{3}{2}$.

CÂU 3. Tính giới hạn $I=\lim\left(n-\sqrt{n^2+2n-3}\right)$

(A) 0. (B) -2. (C) -1. (D) 2.

CÂU 4. Tính giới hạn $I=\lim\left(\sqrt{n^2-n+1}-n\right)$

(A) $\frac{1}{2}$. (B) 1. (C) $-\frac{1}{2}$. (D) 0.

CÂU 5. Tính giới hạn $I=\lim\left(\sqrt[3]{n^3-n^2}-n\right)$

(A) $-\frac{1}{3}$. (B) $\frac{1}{3}$. (C) 1. (D) 0.

CÂU 6. Tính giới hạn $I=\lim\left(\sqrt{2n^2+2n-1}-\sqrt{2n^2+n}\right)$

(A) 0. (B) $\frac{1}{4}$. (C) $\frac{1}{2}$. (D) $\frac{1}{2\sqrt{2}}$.

CÂU 7. Tính giới hạn $I=\lim\left(\sqrt[3]{n^3+2}-\sqrt[3]{n^3+1}\right)$

(A) 0. (B) $-\frac{1}{3}$. (C) 1. (D) $\frac{1}{3}$.

CÂU 8. Tính giới hạn $I=\lim n\left(\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2+n-8}\right)$

(A) 0. (B) ∞. (C) 2. (D) $\frac{9}{2}$.

QUICK NOTE

QUICK NOTE

3 Giới hạn vô cực

Ta nói dãy $\{u_n\}$ có giới hạn là $+\infty$ khi $n \to +\infty$, nếu u_n có thể lớn hơn một số dương bất kì, kể từ một số hạng nào đó trở đi.
Kí hiệu: $\lim u_n = +\infty$ hay $u_n \to +\infty$ khi $n \to +\infty$.
Dãy số $\{u_n\}$ có giới hạn là $-\infty$ khi $n \to +\infty$, nếu $\lim -u_n = +\infty$.
Kí hiệu: $\lim u_n = -\infty$ hay $u_n \to -\infty$ khi $n \to +\infty$.
Một số giới hạn đặc biệt và định lí về giới hạn dãy số
Giới hạn đặc biệt:
$\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} n^k = +\infty$ với k là số nguyên dương.
$\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$ nếu $q > 1$
Định lý:
Nếu $\lim u_n = a > 0$ và $\lim v_n = 0$ với $v_n > 0$ thì $\lim \dfrac{u_n}{v_n} = +\infty$.
Nếu $\lim u_n = +\infty$ và $\lim v_n = a > 0$ thì $\lim u_n v_n = +\infty$.

1. Ví dụ mẫu

VÍ DỤ 1. Tìm giới hạn

a) $\lim(n^3 + n^2 + n + 1)$.

b) $\lim\left(n^2 - n\sqrt{n} + 1\right)$.

VÍ DỤ 2. Tìm giới hạn

a) $\lim \dfrac{n^5 + n^4 - n - 2}{4n^3 + 6n^2 + 9}$.

b) $\lim \dfrac{\sqrt[3]{n^6 - 7n^3 - 5n + 8}}{n + 12}$.

c) $\lim\left(n + \sqrt{n^2 - n + 1}\right)$.

VÍ DỤ 3. Tìm giới hạn

a) $\lim \dfrac{1^3 + 2^3 + \ldots + n^3}{n^2 + 3n\sqrt{n} + 2}$.

b) $\lim\left(n + \sqrt[3]{n^3 - 2n + 1}\right)$.

c) $\lim \dfrac{n^3 - 3n}{2n + 15}$.

4 Tính tổng của dãy cấp số nhân lùi vô hạn

ĐỊNH NGHĨA 1.3. Cấp số nhân vô hạn $u_1, u_1q, \ldots, u_1q^{n-1}, \ldots$ có công bội q thỏa mãn $|q| < 1$ được gọi là cấp số nhân lùi vô hạn. Tổng của cấp số nhân lùi vô hạn đã cho là

$$S = u_1 + u_1q + u_1q^2 + \ldots = \frac{u_1}{1-q}.$$

1. Ví dụ mẫu

VÍ DỤ 1. Cho cấp số nhân (u_n), với $u_1 = 1$ và công bội $q = \dfrac{1}{2}$.

a) So sánh $|q|$ với 1.

b) Tính $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$ từ đó hãy tính $\lim S_n$.

VÍ DỤ 2. Tính tổng $T = 1 + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3^2} + \ldots + \dfrac{1}{3^n} + \ldots$

VÍ DỤ 3. Tính tổng $S = 1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{8} + \ldots + \left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1} + \ldots$.

VÍ DỤ 4. Biểu diễn số thập phân vô hạn tuần hoàn 2,222... dưới dạng phân số.

VÍ DỤ 5. Biểu diễn số thập phân vô hạn tuần hoàn $0,(3)$ dưới dạng phân số.

2. Câu hỏi trắc nghiệm

CÂU 1. Cho cấp số nhân $u_1, u_2, \ldots$ với công bội q thỏa điều kiện $|q| < 1$. Lúc đó, ta nói cấp số nhân đã cho là lùi vô hạn. Tổng của cấp số nhân đã cho là $S = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots$ bằng

(A) $\dfrac{u_1}{q-1}$.

(B) $\dfrac{u_1(q^n - 1)}{q-1}$.

(C) $\dfrac{u_1}{1+q}$.

(D) $\dfrac{u_1}{1-q}$.

CÂU 2. Gọi $S=\frac{1}{3}-\frac{1}{9}+\cdots+\frac{(-1)^{n+1}}{3^n}$. Khi đó, $\lim S$ bằng

(A) $\frac{3}{4}$. (B) $\frac{1}{4}$. (C) $\frac{1}{2}$. (D) 1.

CÂU 3. Tổng $S=\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{3^n}+\cdots$ có giá trị là

(A) $\frac{1}{3}$. (B) $\frac{1}{2}$. (C) $\frac{1}{9}$. (D) $\frac{1}{4}$.

CÂU 4. Tính $S=9+3+1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{3^{n-3}}+\cdots$. Kết quả là

(A) $\frac{27}{2}$. (B) 14. (C) 16. (D) 15.

CÂU 5. Tổng các cấp số nhân vô hạn: $1,-\frac{1}{2},\frac{1}{4},-\frac{1}{8},\ldots,\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n-1}},\ldots$ là

(A) $\frac{3}{2}$. (B) $\frac{2}{3}$. (C) $-\frac{2}{3}$. (D) 2.

CÂU 6. Gọi $S=1+\frac{2}{3}+\frac{4}{9}+\cdots+\frac{2^n}{3^n}+\cdots$. Giá trị của S bằng

(A) 3. (B) 5. (C) 6. (D) 4.

CÂU 7. Số thập phân vô hạn tuần hoàn $0{,}233333\ldots$ biểu diễn dưới dạng số là

(A) $\frac{1}{23}$. (B) $\frac{2333}{10000}$. (C) $\frac{23333}{10^5}$. (D) $\frac{7}{30}$.

CÂU 8. Số thập phân vô hạn tuần hoàn $0{,}212121\ldots$ biểu diễn dưới dạng phân số là

(A) $\frac{2121}{10^4}$. (B) $\frac{1}{21}$. (C) $\frac{7}{33}$. (D) $\frac{212121}{10^6}$.

CÂU 9. Số thập phân vô hạn tuần hoàn $0{,}271414\ldots$ được biểu diễn bằng phân số:

(A) $\frac{2714}{9900}$. (B) $\frac{2617}{9900}$. (C) $\frac{2786}{9900}$. (D) $\frac{2687}{9900}$.

CÂU 10. Tổng của cấp số nhân lùi vô hạn: $-\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\ldots,\frac{(-1)^n}{2^n},\ldots$ là

(A) $-\frac{1}{3}$. (B) $-\frac{1}{4}$. (C) -1. (D) $\frac{1}{2}$.

CÂU 11. Số thập phân vô hạn tuần hoàn $0{,}511111\cdots$ được biểu diễn bởi phân số

(A) $\frac{47}{90}$. (B) $\frac{46}{90}$. (C) $\frac{6}{11}$. (D) $\frac{43}{90}$.

CÂU 12. Tổng của cấp số nhân vô hạn $\frac{1}{2},-\frac{1}{4},\frac{1}{8},\ldots\frac{(-1)^{n+1}}{2^n},\ldots$ là

(A) $-\frac{2}{3}$. (B) 1. (C) $-\frac{1}{3}$. (D) $\frac{1}{3}$.

CÂU 13. Tổng của cấp số nhân lùi vô hạn $\frac{1}{2},-\frac{1}{6},\frac{1}{18},\ldots,\frac{(-1)^{n+1}}{2\cdot 3^{n-1}},\ldots$ là

(A) $\frac{3}{4}$. (B) $\frac{8}{3}$. (C) $\frac{2}{3}$. (D) $\frac{3}{8}$.

CÂU 14. Tổng của cấp số nhân lùi vô hạn $\frac{1}{3},-\frac{1}{9},\frac{1}{27},\ldots,\frac{(-1)^{n+1}}{3^n},\ldots$ là

(A) 4. (B) $\frac{1}{2}$. (C) $\frac{3}{4}$. (D) $\frac{1}{4}$.

CÂU 15. Số thập phân vô hạn tuần hoàn $0{,}17232323\ldots$ được biểu diễn bởi phân số?

(A) $\frac{1706}{9900}$. (B) $\frac{153}{990}$. (C) $\frac{164}{990}$. (D) $\frac{853}{4950}$.

5 Toán thực tế, liên môn liên quan đến giới hạn dãy số

$$S=u_1+u_1q+u_1q^2+\ldots=\frac{u_1}{1-q}.$$

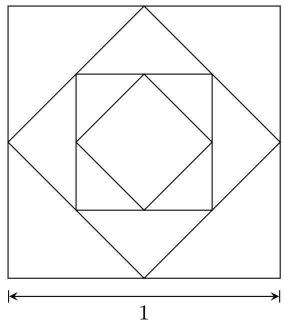
1. Ví dụ mẫu

VÍ DỤ 1.

QUICK NOTE

QUICK NOTE

Từ hình vuông có độ dài cạnh bằng 1, người ta nối các trung điểm của cạnh hình vuông để tạo ra hình vuông mới như hình bên. Tiếp tục quá trình này đến vô hạn.



a) Tính diện tích S_n của hình vuông được tạo thành từ bước thứ n.

b) Tính tổng diện tích của tất cả các hình vuông được tạo thành.

VÍ DỤ 2. Có 1 kg chất phóng xạ độc hại. Biết rằng, cứ sau một khoảng thời gian $T = 24000$ năm thì một nửa số chất phóng xạ này bị phân rã thành chất khác không độc hại đối với sức khỏe của con người (T được gọi là *chu kì bán rã*).

(*Nguồn: Đại số và giải tích 11, NXB GD Việt Nam, 2021*)

Gọi u_n là khối lượng chất phóng xạ còn lại sau chu kì thứ n.

a) Tìm số hạng tổng quát u_n của dãy số (u_n).

b) Chứng minh rằng (u_n) có giới hạn là 0.

c) Từ kết quả câu 2, chứng tỏ rằng sau một số năm nào đó khối lượng phóng xạ đã cho ban đầu không còn độc hại với con người, biết rằng chất phóng xạ này sẽ không độc hại nữa nếu khối lượng chất phóng xạ còn lại bé hơn 10^{-6} g.

VÍ DỤ 3. Gọi C là nữa đường tròn đường kính $AB = 2R$.

C_1 là đường gồm hai nửa đường tròn đường kính $\dfrac{AB}{2}$,

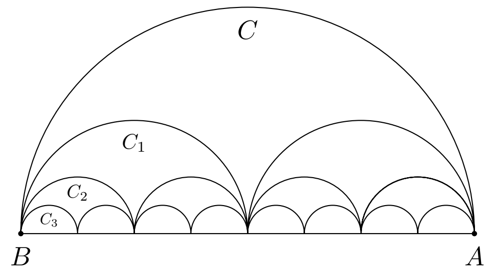
C_2 là đường gồm bốn nửa đường tròn đường kính $\dfrac{AB}{4}, \cdots$

C_n là đường gồm 2^n nửa đường tròn đường kính $\dfrac{AB}{2^n}, \cdots$

Gọi p_n là độ dài của C_n, S_n là diện tích hình phẳng giới hạn bởi C_n và đoạn thẳng AB.

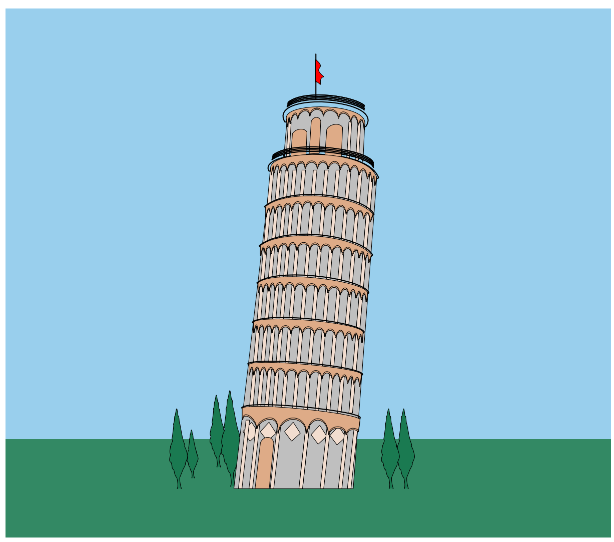
a) Tính p_n, S_n.

b) Tính giới hạn của các dãy số (p_n) và (S_n).



VÍ DỤ 4.

Từ độ cao 55,8 m của tháp nghiêng Pisa nước Ý, người ta thả một quả bóng cao su chạm xuống đất hình bên dưới. Giả sử mỗi lần chạm đất quả bóng lại nảy lên độ cao bằng $\dfrac{1}{10}$ độ cao mà quả bóng đạt được trước đó. Gọi S_n là tổng độ dài quãng đường di chuyển của quả bóng tính từ lúc thả ban đầu cho đến khi quả bóng đó chạm đất n lần. Tính $\lim S_n$.



VÍ DỤ 5. Cho một tam giác đều ABC cạnh a. Tam giác $A_1B_1C_1$ có các đỉnh là trung điểm các cạnh của tam giác ABC, tam giác $A_2B_2C_2$ có các đỉnh là trung điểm các cạnh của tam giác $A_1B_1C_1, \ldots$, tam giác $A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}$ có các đỉnh là trung điểm các cạnh của tam giác $A_nB_nC_n, \ldots$ Gọi $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$ và $S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$ theo thứ tự là chu vi và diện tích của các tam giác $A_1B_1C_1, A_2B_2C_2, \ldots, A_nB_nC_n, \ldots$.

a) Tìm giới hạn của các dãy số (p_n) và (S_n).

b) Tìm các tổng $p_1 + p_2 + \ldots + p_n + \ldots$ và $S_1 + S_2 + \ldots + S_n + \ldots$.

2. Câu hỏi trắc nghiệm

CÂU 1. Có 1 kg chất phóng xạ độc hại. Biết rằng, cứ sau một khoảng thời gian $T = 24000$ năm thì một nửa số chất phóng xạ này bị phân rã thành chất khác không độc hại đối với sức khỏe của con người (T được gọi là *chu kì bán rã*). Gọi u_n là khối lượng chất phóng xạ còn lại sau chu kì thứ n. Sau ít nhất bao nhiêu chu kì bán rã thì khối lượng phóng xạ đã cho ban đầu không còn độc hại với con người, biết rằng chất phóng xạ này sẽ không độc hại nữa nếu khối lượng chất phóng xạ còn lại bé hơn 10^{-6} g.

(A) 24. (B) 30. (C) 100. (D) 15.

CÂU 2. Có 1 kg chất phóng xạ độc hại. Biết rằng, cứ sau một khoảng thời gian $T = 24000$ năm thì một nửa số chất phóng xạ này bị phân rã thành chất khác không độc hại đối với sức khỏe của con người (T được gọi là *chu kì bán rã*). Gọi u_n là khối lượng chất phóng xạ còn lại sau chu kì thứ n. Sau ít nhất bao nhiêu năm thì khối lượng phóng xạ đã cho ban đầu không còn độc hại với con người, biết rằng chất phóng xạ này sẽ không độc hại nữa nếu khối lượng chất phóng xạ còn lại bé hơn 10^{-6} g.

(A) 30. (B) 2400. (C) 720000. (D) 10000.

CÂU 3. Từ hình vuông có độ dài cạnh bằng 1, người ta nối các trung điểm của cạnh hình vuông để tạo ra hình vuông mới như hình bên. Tiếp tục quá trình này đến vô hạn. Tính tổng diện tích của tất cả các hình vuông được tạo thành.

(A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4.

CÂU 4. Từ hình vuông đầu tiên có cạnh bằng 1 (đơn vị độ dài), nối các trung điểm của bốn cạnh để có hình vuông thứ hai. Tiếp tục nối các trung điểm của bốn cạnh của hình vuông thứ hai để được hình vuông thứ ba. Cứ tiếp tục làm như thế, nhận được một dãy hình vuông. Tính tổng chu vi của dãy các hình vuông trên.

(A) $8 + \sqrt{2}$. (B) $2 + \sqrt{2}$. (C) $8 + 4\sqrt{2}$. (D) $4 + 4\sqrt{2}$.

CÂU 5. Từ độ cao $55,8$ m của tháp nghiêng Pisa nước Ý, người ta thả một quả bóng cao su chạm xuống đất hình bên dưới. Giả sử mỗi lần chạm đất quả bóng lại nảy lên độ cao bằng $\dfrac{1}{10}$ độ cao mà quả bóng đạt được trước đó. Gọi S_n là tổng độ dài quãng đường di chuyển của quả bóng tính từ lúc thả ban đầu cho đến khi quả bóng đó chạm đất n lần. Tính $\lim S_n$.

(A) 58,8. (B) 67,2. (C) 68. (D) 68,2.

6 Nguyên lý kẹp

Để tìm giới hạn của dãy số theo nguyên lý kẹp ta cần nhớ:

- Cho hai dãy số (u_n) và (v_n). Nếu $|u_n| \le v_n$ với mọi n và $\lim v_n = 0$ thì $\lim u_n = 0$.
- Cho ba dãy số (u_n), (v_n) và (w_n). Nếu $u_n \le v_n \le w_n$ với mọi n và $\lim u_n = \lim w_n = L$ thì $\lim v_n = L$.

1. Ví dụ mẫu

VÍ DỤ 1. Chứng minh rằng các dãy số với số hạng tổng quát sau đây có giới hạn 0.

a) $u_n = \dfrac{(-1)^n}{3n+2}$.

b) $u_n = \dfrac{n \sin 2n}{n^3+2}$.

c) $u_n = \dfrac{(-1)^n \cos n}{\sqrt{n}}$.

d) $u_n = \dfrac{3\sin n - 4\cos n}{2n^2+1}$.

VÍ DỤ 2. Chứng minh rằng các dãy số với số hạng tổng quát sau đây có giới hạn 0.

a) $u_n = \sqrt{n^3+2} - \sqrt{n^3+1}$.

b) $u_n = \dfrac{3^n \sin 2n + 4^n}{2^n + 4 \cdot 5^n}$.

c) $u_n = \dfrac{n + \sin 2n}{n^2+n}$.

d) $\dfrac{n + \cos \dfrac{n\pi}{5}}{n\sqrt{n} + \sqrt{n}}$.

QUICK NOTE

QUICK NOTE

VÍ DỤ 3. Cho dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{n}{3^n}$.

a) Chứng minh rằng $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \dfrac{2}{3}$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

b) Bằng phương pháp quy nạp chứng minh rằng $0 < u_n < \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

c) Dãy (u_n) có giới hạn 0.

VÍ DỤ 4. Chứng minh rằng

a) $\lim \left(\dfrac{-n^3}{n^3+1}\right) = -1$.

b) $\lim \left(\dfrac{n^2+3n+2}{2n^2+n}\right) = \dfrac{1}{2}$.

VÍ DỤ 5. Chứng minh rằng

a) $\lim \left(\dfrac{3 \cdot 3^n - \sin 3n}{3^n}\right) = 3$.

b) $\lim \left(\sqrt{n^2+n} - n\right) = \dfrac{1}{2}$.

VÍ DỤ 6. Tìm các giới hạn sau

a) $\lim \left(\dfrac{1}{\sqrt{4n^2+1}} + \dfrac{1}{\sqrt{4n^2+2}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{4n^2+n}}\right)$.

b) $\lim \dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)}$.

Bài 2. GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Giới hạn hữu hạn của hàm số tại một điểm

ĐỊNH NGHĨA 2.1. Cho điểm x_0 thuộc khoảng K và hàm số $y = f(x)$ xác định trên K hoặc $K \setminus \{x_0\}$.
Ta nói hàm số $y = f(x)$ ***có giới hạn hữu hạn*** là số L khi x dần tới x_0 nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_n \in K \setminus \{x_0\}$ và $x_n \to x_0$ thì $f(x_n) \to L$, kí hiệu $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ hay $f(x) \to L$ khi $x \to x_0$.

$\lim\limits_{x \to x_0} x = x_0$; $\lim\limits_{x \to x_0} c = c$ (c là hằng số).

2. Các phép toán về giới hạn hữu hạn của hàm số

a) Cho $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ và $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = M$. Khi đó:

- $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) + g(x)] = L + M$;
- $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) - g(x)] = L - M$;
- $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) \cdot g(x)] = L \cdot M$;
- $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L}{M}$ (với $M \neq 0$).

b) Nếu $f(x) \geq 0$ và $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ thì $L \geq 0$ và $\lim\limits_{x \to x_0} \sqrt{f(x)} = \sqrt{L}$.
(Dấu của $f(x)$ được xét trên khoảng tìm giới hạn, $x \neq x_0$).

a) $\lim\limits_{x \to x_0} x^k = x_0^k$, k là số nguyên dương;

b) $\lim\limits_{x \to x_0} [cf(x)] = c \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ ($c \in \mathbb{R}$, nếu tồn tại $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \in \mathbb{R}$).

3. Giới hạn một phía

ĐỊNH NGHĨA 2.2.

- Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên khoảng $(x_0;b)$.
Ta nói hàm số $y=f(x)$ ***có giới hạn bên phải*** là số L khi x dần tới x_0 nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_0<x_n<b$ và $x_n\to x_0$ thì $f(x_n)\to L$, kí hiệu $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=L$.

- Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên khoảng $(a;x_0)$.
Ta nói hàm số $y=f(x)$ ***có giới hạn bên trái*** là số L khi x dần tới x_0 nếu với dãy số (x_n) bất kì, $a<x_n<x_0$ và $x_n\to x_0$ thì $f(x_n)\to L$, kí hiệu $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=L$.

a) Ta thừa nhận các kết quả sau:

- $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=L$ *và* $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=L$ *khi và chỉ khi* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L$;
- *Nếu* $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)\neq \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ *thì không tồn tại* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.

b) Các phép toán về giới hạn hữu hạn của hàm số ở Mục 2 vẫn đúng khi ta thay $x\to x_0$ bằng $x\to x_0^+$ hoặc $x\to x_0^-$.

4. Giới hạn hữu hạn của hàm số tại vô cực

ĐỊNH NGHĨA 2.3.

- Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên khoảng $(a;+\infty)$.
Ta nói hàm số $y=f(x)$ ***có giới hạn hữu hạn*** là số L khi $x\to+\infty$ nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_n>a$ và $x_n\to+\infty$ thì $f(x_n)\to L$, kí hiệu $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=L$ hay $f(x)\to L$ khi $x\to+\infty$.

- Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên khoảng $(-\infty;a)$.
Ta nói hàm số $y=f(x)$ ***có giới hạn hữu hạn*** là số L khi $x\to-\infty$ nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_n<a$ và $x_n\to-\infty$ thì $f(x_n)\to L$, kí hiệu $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=L$ hay $f(x)\to L$ khi $x\to-\infty$.

a) Với c là hằng số và k là số nguyên dương, ta luôn có:

$$\lim_{x\to\pm\infty} c=c \quad \text{và} \quad \lim_{x\to\pm\infty}\frac{c}{x^k}=0.$$

b) Các phép toán trên giới hạn hàm số ở Mục 2 vẫn đúng khi thay $x\to x_0$ bằng $x\to+\infty$ hoặc $x\to-\infty$.

5. Giới hạn vô cực của hàm số tại một điểm

ĐỊNH NGHĨA 2.4. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên khoảng $(x_0;b)$.

- Ta nói hàm số $y=f(x)$ ***có giới hạn bên phải*** là $+\infty$ khi x dần tới x_0 về bên phải nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_0<x_n<b$ và $x_n\to x_0$ thì $f(x_n)\to+\infty$, kí hiệu $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=+\infty$ hay $f(x)\to+\infty$ khi $x\to x_0^+$.

- Ta nói hàm số $y=f(x)$ ***có giới hạn bên phải*** là $-\infty$ khi x dần tới x_0 về bên phải nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_0<x_n<b$ và $x_n\to x_0$ thì $f(x_n)\to-\infty$, kí hiệu $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=-\infty$ hay $f(x)\to-\infty$ khi $x\to x_0^+$.

a) Các giới hạn $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ *được định nghĩa như trên.*

b) Ta có các giới hạn thường dùng như sau:

- $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{1}{x-a}=+\infty$ *và* $\lim\limits_{x\to a^-}\dfrac{1}{x-a}=-\infty$ $(a\in\mathbb{R})$;
- $\lim\limits_{x\to+\infty} x^k=+\infty$ *với k nguyên dương;*

QUICK NOTE

QUICK NOTE

- $\lim\limits_{x\to-\infty} x^k = +\infty$ *với k là số chẵn;*
- $\lim\limits_{x\to-\infty} x^k = -\infty$ *với k là số lẻ.*

c) *Các phép toán trên giới hạn hàm số của Mục 2 chỉ áp dụng được khi tất cả các hàm số được xét có giới hạn hữu hạn. Với giới hạn vô cực, ta có một số quy tắc sau đây.*
Nếu $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = L \neq 0$ *và* $\lim\limits_{x\to x_0^+} g(x) = +\infty$ *(hoặc* $\lim\limits_{x\to x_0^+} g(x) = -\infty$*) thì* $\lim\limits_{x\to x_0^+} [f(x)\cdot g(x)]$ *được tính theo quy tắc cho bởi bảng sau:*

$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$	$\lim\limits_{x\to x_0^+} g(x)$	$\lim\limits_{x\to x_0^+} [f(x)\cdot g(x)]$
$L>0$	$+\infty$	$+\infty$
$L>0$	$-\infty$	$-\infty$
$L<0$	$+\infty$	$-\infty$
$L<0$	$-\infty$	$+\infty$

Các quy tắc trên vẫn đúng khi thay x_0^+ *thành* x_0^- *(hoặc* $+\infty, -\infty$*).*

B. CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

1 Thay số trực tiếp

1. Ví dụ mẫu

VÍ DỤ 1. Tính các giới hạn sau

a) $\lim\limits_{x\to 1}(x^2-4x+2)$;

b) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x-2}{2x+1}$.

VÍ DỤ 2. Tìm các giới hạn sau

a) $\lim\limits_{x\to 3}\sqrt{\dfrac{x^2}{x^3-x-6}}$.

b) $\lim\limits_{x\to -2}\sqrt[3]{\dfrac{2x^4+3x+2}{x^2-x+2}}$.

VÍ DỤ 3. Cho $f(x)$ là một đa thức thỏa mãn $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-16}{x-1}=24$. Tính giới hạn sau

$$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-16}{(x-1)\left(\sqrt{2f(x)+4}+6\right)}.$$

2. Câu hỏi trắc nghiệm

CÂU 1. Biết $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=m$, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=n$. Tính $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)+g(x)]$.

Ⓐ $m+n$. Ⓑ $m-n$. Ⓒ mn. Ⓓ $\dfrac{m}{n}$.

CÂU 2. Khẳng định nào sau đây là đúng?

Ⓐ $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt[3]{f(x)+g(x)}=\sqrt[3]{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}+\sqrt[3]{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$.

Ⓑ $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt[3]{f(x)+g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt[3]{f(x)}+\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt[3]{g(x)}$.

Ⓒ $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt[3]{f(x)+g(x)}=\sqrt[3]{\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]}$.

Ⓓ $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt[3]{f(x)+g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\left[\sqrt[3]{f(x)}+\sqrt[3]{g(x)}\right]$.

CÂU 3. Cho các giới hạn $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=2$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=3$. Tính $M=\lim\limits_{x\to x_0}[3f(x)-4g(x)]$.

Ⓐ $M=5$. Ⓑ $M=2$. Ⓒ $M=-6$. Ⓓ $M=3$.

CÂU 4. Biết $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=m$, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=n$. Tính $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-g(x)]$.

Ⓐ $m+n$. Ⓑ $m-n$. Ⓒ mn. Ⓓ $\dfrac{m}{n}$.

CÂU 5. Cho $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$, kết quả của $\lim\limits_{x\to a}[-3\cdot f(x)]$ bằng

Ⓐ $+\infty$. Ⓑ 0. Ⓒ 3. Ⓓ $-\infty$.

CÂU 6. Cho $k \in \mathbb{Z}$, kết quả của $\lim\limits_{x\to-\infty} x^{2k+1}$ bằng

Ⓐ 0. Ⓑ $-\infty$. Ⓒ $+\infty$. Ⓓ 5.

CÂU 7. Cho $\lim\limits_{x\to3} f(x) = -2$. Giá trị $\lim\limits_{x\to3} [f(x) + 4x - 1]$ bằng

Ⓐ 5. Ⓑ 6. Ⓒ -11. Ⓓ 9.

CÂU 8. Cho $\lim\limits_{x\to2} f(x) = 3$. Giá trị của $\lim\limits_{x\to2} [f(x) + x]$ bằng

Ⓐ 5. Ⓑ 6. Ⓒ 1. Ⓓ 4.

CÂU 9. Với k là số nguyên dương. Kết quả của giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{2k}$ là

Ⓐ $+\infty$. Ⓑ 0. Ⓒ $-\infty$. Ⓓ 1.

CÂU 10. Cho c là hằng số, k là số nguyên dương. Khẳng định nào sau đây **sai**?

Ⓐ $\lim\limits_{x\to+\infty} c = +\infty$. Ⓑ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{c}{x^k} = 0$. Ⓒ $\lim\limits_{x\to x_0} c = c$. Ⓓ $\lim\limits_{x\to x_0} x = x_0$.

CÂU 11. Cho $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = a$, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = b$. Hỏi mệnh đề nào sau đây là mệnh đề **sai**?

Ⓐ $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) \cdot g(x)] = ab$. Ⓑ $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - g(x)] = a - b$.

Ⓒ $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) + g(x)] = a + b$. Ⓓ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{a}{b}$.

CÂU 12. Với k là số nguyên dương thì $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x^k}$ bằng

Ⓐ $+\infty$. Ⓑ $-\infty$. Ⓒ x. Ⓓ 0.

CÂU 13. Tính $I = \lim\limits_{x\to2} \left(x^2 + x - 6\right)$.

Ⓐ 0. Ⓑ 1. Ⓒ 2. Ⓓ 3.

CÂU 14. Tính $I = \lim\limits_{x\to1} \dfrac{x^2 + 2x + 3}{2x - 1}$.

Ⓐ 4. Ⓑ 5. Ⓒ 6. Ⓓ 7.

CÂU 15. Tính $I = \lim\limits_{x\to0} \dfrac{|x|}{x}$.

Ⓐ 1. Ⓑ -1. Ⓒ Không tồn tại . Ⓓ 0.

2 Phương pháp đặt thừa số chung - kết quả hữu hạn

- Nếu tam thức bậc hai $ax^2 + bx + c$ có hai nghiệm x_1, x_2 thì $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.
- $a^n - b^n = (a - b)\left(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}\right)$.
- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} c = c$; $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{c}{x^k} = 0$ với c là hằng số và $k \in \mathbb{N}$.
- $a\sqrt{b} = \begin{cases} \sqrt{a^2b} & a \geq 0 \\ -\sqrt{a^2b} & a < 0. \end{cases}$

1. Ví dụ mẫu

VÍ DỤ 1 (NB). Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to3} \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$.

VÍ DỤ 2 (TH). Tính giới hạn $I = \lim\limits_{x\to2} \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x - 2}$.

VÍ DỤ 3 (TH). Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^4 + 7}{x^4 + 1}$.

VÍ DỤ 4 (TH). Tìm giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{\dfrac{x^2 + 1}{2x^4 + x^2 - 3}}$.

VÍ DỤ 5 (TH). Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to1} \left(\dfrac{1}{1 - x} - \dfrac{3}{1 - x^3}\right)$.

QUICK NOTE

QUICK NOTE

VÍ DỤ 6 (VDT). Cho m, n là các số thực khác 0. Nếu giới hạn $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{x^2+mx+n}{x+5}=3$, hãy tìm mn.

VÍ DỤ 7 (VDT). Tìm số thực a thỏa mãn $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{a\sqrt{2x^2+3}+2024}{2x+2023}=\dfrac{1}{2}$.

2. Câu hỏi trắc nghiệm

CÂU 1. Tìm $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{9-x^2}{x^2-4x+3}$. Kết quả là

(A) -3. (B) 4. (C) -4. (D) 3.

CÂU 2. Tìm $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-16}{x-4}$. Kết quả là

(A) 7. (B) 8. (C) 5. (D) 6.

CÂU 3. Tính giới hạn $A=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x-1}$.

(A) $A=-\infty$. (B) $A=0$. (C) $A=3$. (D) $A=+\infty$.

CÂU 4. Chọn kết quả đúng trong các kết quả sau của $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+2x+1}{2x+2}$ là

(A) $-\infty$. (B) 0. (C) $\dfrac{1}{2}$. (D) $+\infty$.

CÂU 5. Giới hạn $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2+2x-15}{x-3}$ bằng

(A) $\dfrac{1}{8}$. (B) 9. (C) $+\infty$. (D) 8.

CÂU 6. Tính giới hạn $I=\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{3x-2}{2x+1}$.

(A) $I=-2$. (B) $I=-\dfrac{3}{2}$. (C) $I=2$. (D) $I=\dfrac{3}{2}$.

CÂU 7. $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x-2}{x+3}$ bằng

(A) $-\dfrac{2}{3}$. (B) 1. (C) 2. (D) -3.

CÂU 8. Giới hạn $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+2}{x^3-x^2+x-1}$ bằng

(A) -2. (B) -1. (C) $-\dfrac{1}{2}$. (D) $\dfrac{1}{2}$.

CÂU 9. Giới hạn $T=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4-3x+2}{x^3+2x-3}$ bằng

(A) $\dfrac{2}{9}$. (B) $\dfrac{2}{5}$. (C) $\dfrac{1}{5}$. (D) $+\infty$.

CÂU 10. Giới hạn $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^3-x^2-x-2}$ bằng

(A) 0. (B) $-\dfrac{1}{7}$. (C) -7. (D) $+\infty$.

CÂU 11. Tìm $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4-3x^2+2}{x^3+2x-3}$.

(A) $-\dfrac{5}{2}$. (B) $-\dfrac{2}{5}$. (C) $\dfrac{1}{5}$. (D) $+\infty$.

CÂU 12. Tính $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{x^2-3x+2}+\dfrac{1}{x^2-5x+6}\right)$.

(A) 2. (B) $+\infty$. (C) -2. (D) 0.

CÂU 13. Giới hạn $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+2}-2}{x-2}$ bằng

(A) $-\infty$. (B) 1. (C) $+\infty$. (D) -1.

CÂU 14. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{(4x+1)^3(2x+1)^4}{(3+2x)^7}$. Tính $\lim\limits_{x\to -\infty}f(x)$.

(A) 2. (B) 8. (C) 4. (D) 0.

CÂU 15. Biết $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+bx+c}{x-3}=8$, $(b,c\in\mathbb{R})$. Tính $P=b+c$.

(A) $P=-13$. (B) $P=-11$. (C) $P=5$. (D) $P=-12$.

QUICK NOTE

CÂU 16. Cho a, b là số nguyên và $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{ax^2+bx-5}{x-1}=7$. Tính a^2+b^2+a+b.

(A) 18. (B) 1. (C) 15. (D) 5.

CÂU 17. Biết rằng $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x-2}+ax-b\right)=-5$. Tính tổng $a+b$.

(A) 6. (B) 7. (C) 8. (D) 5.

CÂU 18. Cho hai số thực a và b thỏa mãn $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{4x^2-3x+1}{x+2}-ax-b\right)=0$. Khi đó $a+b$ bằng

(A) -4. (B) 4. (C) 7. (D) -7.

CÂU 19. Cho $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)+1}{x-1}=-1$. Tính $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\left(x^2+x\right)f(x)+2}{x-1}$.

(A) $I=5$. (B) $I=-4$. (C) $I=4$. (D) $I=-5$.

CÂU 20. Gọi A là giới hạn của hàm số $f(x)=\dfrac{x+x^2+x^3+\cdots+x^{50}-50}{x-1}$ khi x tiến đến 1. Tính giá trị của A.

(A) A không tồn tại. (B) $A=1725$. (C) $A=1527$. (D) $A=1275$.

3 Phương pháp đặt thừa số chung - kết quả vô cực

Để tìm giới hạn của hàm số ta cần nhớ

- $\lim\limits_{x\to+\infty}x^k=+\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty}x^k=\begin{cases}+\infty, k=2n\\-\infty, k=2n+1.\end{cases}$
- $\lim\limits_{x\to\pm\infty}c=c$; $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{c}{x^k}=0$; $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x}=\infty$.

1. Ví dụ mẫu

VÍ DỤ 1 (NB). Tính $\lim\limits_{x\to+\infty}x^3$.

VÍ DỤ 2 (TH). Tính $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^3+3x+1\right)$.

VÍ DỤ 3 (TH). Tính $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-4x^5-3x^3+x+1\right)$.

VÍ DỤ 4 (TH). Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{x+2}{(x+3)^2}$.

VÍ DỤ 5 (VDT). Tìm tất cả các giá trị nguyên của tham số m để $I=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[(m^2-1)x^3+2x\right]=-\infty$.

2. Câu hỏi trắc nghiệm

CÂU 1. Giá trị của $\lim\limits_{x\to-\infty}(-x^3)$ bằng

(A) $+\infty$. (B) $-\infty$. (C) 1. (D) -1.

CÂU 2. Giới hạn $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(3x^3+5x^2-9\sqrt{3}x-2022\right)$ bằng

(A) $-\infty$. (B) 3. (C) -3. (D) $+\infty$.

CÂU 3. Tính $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^3+3x-3)$.

(A) 2. (B) 1. (C) $-\infty$. (D) $+\infty$.

CÂU 4. Với k là số nguyên dương chẵn. Kết quả của $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-3x^k\right)$ là

(A) 0. (B) $-\infty$. (C) $-3x_0^k$. (D) $+\infty$.

CÂU 5. Cho hai hàm số $f(x)$, $g(x)$ thỏa mãn $\lim\limits_{x\to1}f(x)=2$ và $\lim\limits_{x\to1}g(x)=+\infty$. Giá trị của $\lim\limits_{x\to1}[f(x)\cdot g(x)]$ bằng

(A) $+\infty$. (B) $-\infty$. (C) 2. (D) -2.

CÂU 6. Giới hạn $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x+1}{(x+2)^2}$ bằng

QUICK NOTE

(A) $-\infty$. (B) $\dfrac{3}{16}$. (C) 0. (D) $+\infty$.

CÂU 7. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-3x^3+2x\right)$ bằng

(A) $-\infty$. (B) $+\infty$. (C) 1. (D) -1.

CÂU 8. Tìm $L=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{2x^2+x-3}{(x+1)^2}$.

(A) $L=+\infty$. (B) $L=2$.

(C) Không tồn tại $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{2x^2+x-3}{(x+1)^2}$. (D) $L=-\infty$.

CÂU 9. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-2x^3-2x\right)$ bằng

(A) $-\infty$. (B) $+\infty$. (C) 2. (D) -2.

CÂU 10. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2+1}{x-2}$.

(A) 1. (B) $-\dfrac{1}{2}$. (C) $+\infty$. (D) $-\infty$.

CÂU 11. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

(A) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^4-x}}{1-2x}=+\infty$. (B) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^4-x}}{1-2x}=1$.

(C) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^4-x}}{1-2x}=-\infty$. (D) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^4-x}}{1-2x}=0$.

CÂU 12. Biết $\lim\limits_{x\to-2}f(x)=-1$. Khi đó $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{f(x)}{(x+2)^4}$ bằng

(A) -1. (B) $+\infty$. (C) $-\infty$. (D) 0.

CÂU 13. Biết $\lim\limits_{x\to1}f(x)=-2$. Khi đó $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)}{(x-1)^2}$ bằng

(A) $-\infty$. (B) 0. (C) $+\infty$. (D) -2.

CÂU 14. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc $[-5;5]$ để $L=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x-2(m^2-4)x^3\right]=-\infty$?

(A) 5. (B) 10. (C) 3. (D) 6.

CÂU 15. Có bao nhiêu giá trị m nguyên thuộc đoạn $[-20;20]$ để $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2-3x+2}+mx-1\right)=-\infty$?

(A) 21. (B) 22. (C) 18. (D) 41.

4 Phương pháp lượng liên hợp kết quả hữu hạn

Nội dung và phương pháp giải

1. Ví dụ mẫu

VÍ DỤ 1. Cho $P=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}$. Tính P.

(A) $P=\dfrac{1}{4}$. (B) $P=\dfrac{1}{2}$. (C) $P=1$. (D) $P=0$.

VÍ DỤ 2. Cho m là hằng số. Tính $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x^2+mx-x-m}$.

(A) $\dfrac{1}{m}$. (B) 1. (C) $\dfrac{1}{4}$. (D) $\dfrac{1}{4(m+1)}$.

VÍ DỤ 3. Biết $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+1}+x+1\right)=a$. Tính $2a+1$.

(A) -1. (B) -3. (C) 0. (D) 3.

VÍ DỤ 4. Biết $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2-3x+1}-(ax+b)\right)=0$. Tính giá trị biểu thức $T=a-4b$.

(A) $T=-2$. (B) $T=5$. (C) $T=-1$. (D) $T=3$.

VÍ DỤ 5. Cho $f(x)$ là hàm đa thức thỏa $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{f(x)+1}{x-2}=a$ và tồn tại $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{f(x)+2x+1}-x}{x^2-4}=T$. Chọn đẳng thức đúng

A $T=\dfrac{a+2}{16}$. **B** $T=\dfrac{a+2}{8}$. **C** $T=\dfrac{a-2}{8}$. **D** $T=\dfrac{a-2}{16}$.

2. Câu hỏi trắc nghiệm

CÂU 1. Biết $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+ax-1}-x\right)=5$. Khi đó giá trị của tham số a là

A 10. **B** -6. **C** 6. **D** -10.

CÂU 2. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+m^2x}-x)=\dfrac{1}{2}$?

A 0. **B** 1. **C** 2. **D** 4.

CÂU 3. Tính $L=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-7x+1}-\sqrt{x^2-3x+2}\right)$.

A $L=+\infty$. **B** $L=-\infty$. **C** $L=2$. **D** $L=-2$.

CÂU 4. Giá trị của $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+2}}{x-1}$ là

A $-\dfrac{\sqrt{3}}{5}$. **B** $-\dfrac{\sqrt{3}}{6}$. **C** $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$. **D** $\dfrac{\sqrt{3}}{5}$.

CÂU 5. Cho $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\sqrt[3]{1-x}}{x}=\dfrac{m}{n}$, trong đó m,n là các số nguyên và $\dfrac{m}{n}$ tối giản. Tính $A=2m-n$.

A $A=1$. **B** $A=-1$. **C** $A=0$. **D** $A=-2$.

CÂU 6. Giới hạn $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x+1-\sqrt{5x+1}}{x-\sqrt{4x-3}}=\dfrac{a}{b}$, với $a,b\in\mathbb{Z},b>0$ và $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản. Giá trị của $a-b$ là

A $\dfrac{1}{9}$. **B** -1. **C** $\dfrac{9}{8}$. **D** 1.

CÂU 7. Cho $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\sqrt{3x+4}-4}{x-4}=\dfrac{a}{b}$, với $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $2a+b^2$.

A 22. **B** 66. **C** 14. **D** 70.

CÂU 8. Tính $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3x+2}-x\right)$.

A $-\dfrac{3}{2}$. **B** $\dfrac{3}{2}$. **C** $\dfrac{7}{2}$. **D** $-\dfrac{7}{2}$.

CÂU 9. Tìm giới hạn $M=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-4x}-\sqrt{x^2-x}\right)$.

A $M=-\dfrac{1}{2}$. **B** $M=\dfrac{3}{2}$. **C** $M=-\dfrac{3}{2}$. **D** $M=\dfrac{1}{2}$.

CÂU 10. Biết rằng $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{2x^2-3x+1}+x\sqrt{2}\right)=\dfrac{a}{b}\sqrt{2}$, $(a,b\in\mathbb{Z},b>0,\dfrac{a}{b}$ tối giản). Tổng $a+b$ có giá trị là

A 5. **B** 4. **C** 7. **D** 1.

CÂU 11. Tìm giới hạn $I=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+1-\sqrt{x^2-x+2}\right)$.

A $I=\dfrac{1}{2}$. **B** $I=\dfrac{46}{31}$. **C** $I=\dfrac{17}{11}$. **D** $I=\dfrac{3}{2}$.

CÂU 12. Cho $f(x)$ là một đa thức thỏa mãn $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{f(x)-15}{x-2}=3$. Tính

$$\lim_{x\to2}\frac{f(x)-15}{(x^2-4)\left(\sqrt{2f(x)+6}+3\right)}.$$

A $\dfrac{1}{10}$. **B** $\dfrac{1}{6}$. **C** $\dfrac{1}{12}$. **D** $\dfrac{1}{8}$.

CÂU 13. Biết rằng $b>0$, $a+b=5$ và $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[3]{ax+1}-\sqrt{1-bx}}{x}=2$. Khẳng định nào dưới đây là **sai**?

A $a^2+b^2>10$. **B** $a^2-b^2>6$. **C** $a-b\geq0$. **D** $1\leq a\leq3$.

5 Toán thực tế, liên môn về hàm số liên tục

QUICK NOTE

QUICK NOTE

1. Ví dụ mẫu

VÍ DỤ 1. Tính $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3x\sqrt{x}}-x+1\right)$.

(A) $+\infty$. (B) 4. (C) $-\infty$. (D) $\frac{1}{2}$.

VÍ DỤ 2. Giới hạn hàm số $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-x\sqrt{|x|}+3}+x\right)$ bằng

(A) 0. (B) $\frac{1}{2}$. (C) $+\infty$. (D) $-\infty$.

VÍ DỤ 3. Tìm giới hạn $I=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^4+4x^3+1}-x^2\right)$

(A) $I=-4$. (B) $I=1$. (C) $I=-2$. (D) $I=-1$.

VÍ DỤ 4. Tính $L=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-7x\sqrt{|x|}+1}-\sqrt{x^2-3x\sqrt{|x|}+2}\right)$.

(A) $L=+\infty$. (B) $L=-\infty$. (C) $L=2$. (D) $L=-2$.

VÍ DỤ 5. Tìm tham số m để $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^3+mx^2}-x\sqrt{x})=-\infty$.

(A) $m=0$. (B) $m>0$. (C) $m<0$. (D) $m=2$.

2. Câu hỏi trắc nghiệm

CÂU 1. Tính $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3x\sqrt{x}}-x\right)$.

(A) $+\infty$. (B) 4. (C) $-\infty$. (D) $\frac{1}{2}$.

CÂU 2. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2+3x+1}+mx\right)=+\infty$ nếu

(A) $m<2$. (B) $m>2$. (C) $m\ge 2$. (D) $m\le 2$.

CÂU 3. Biết $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(2-a)x-3}{x-\sqrt{x^2+1}}=+\infty$ (với a là tham số). Giá trị nhỏ nhất của $P=a^2-2a+4$ là

(A) 3. (B) 4. (C) 5. (D) 1.

CÂU 4. Tìm số các số nguyên m thỏa mãn $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3\sqrt{mx^2+2x+1}-mx\right)=+\infty$.

(A) 4. (B) 10. (C) 3. (D) 9.

CÂU 5. Giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-3x+1}+x\right)$ bằng

(A) $+\infty$. (B) $-\infty$. (C) 0. (D) 2.

CÂU 6. Biết $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+ax\sqrt{|x|}-1}-x\right)=-\infty$. Khi đó giá trị của tham số a là

(A) $a<0$. (B) $a>0$. (C) $a=6$. (D) $a=10$.

CÂU 7. Tính $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{7x^2+2x\sqrt{|x|}}+x\sqrt{7}\right)$.

(A) 0. (B) $-\frac{5\sqrt{7}}{14}$. (C) $-\infty$. (D) $+\infty$.

CÂU 8. Cho số thực a thỏa mãn $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^4+5ax^3-1}-x^2\right)=-\infty$. Tìm số thực a.

(A) $(a<0$. (B) $a\in(-10;-5)$. (C) $a>0$. (D) $a\in(-3;-1)$.

CÂU 9. Tính $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3x^2+1-\sqrt{9x^4-6x^3+1}\right)$.

(A) $\frac{1}{4}$. (B) $\frac{1}{2}$. (C) $+\infty$. (D) $-\infty$.

CÂU 10. Tính $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x-\sqrt{x^2-x+1}\right)$.

(A) $+\infty$. (B) $-\infty$. (C) $\frac{1}{2}$. (D) $-\frac{1}{2}$.

CÂU 11. Tìm giới hạn $M=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-4x\sqrt{|x|}}-\sqrt{x^2-x\sqrt{|x|}}\right)$.

(A) $M=-\infty$. (B) $M=+\infty$. (C) $M=-\frac{3}{2}$. (D) $M=\frac{1}{2}$.

CÂU 12. Giá trị của $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+5}-x\right)$ là

(A) $+\infty$. (B) $-\infty$. (C) 1. (D) 0.

CÂU 13. Giá trị của $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+5x\sqrt{x}}-x\right)$ là

A $+\infty$. **B** $-\infty$. **C** 1. **D** 0.

6 Giới hạn một bên

QUICK NOTE

1. Ví dụ

VÍ DỤ 1. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x^2-3x+2}{\sqrt{2-x}}$.

VÍ DỤ 2. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to(-1)^+}\dfrac{x^3+1}{x^3+2x^2+x}$.

VÍ DỤ 3. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\sqrt{9-x^2} & \text{khi } -3\le x<3\\ 1 & \text{khi } x=3\\ \sqrt{x^2-9} & \text{khi } x>3.\end{cases}$
Hàm số $f(x)$ có giới hạn khi $x\to 3$ hay không?

VÍ DỤ 4. Ta gọi phần nguyên của số thực x là số nguyên lớn nhất không lớn hơn x và kí hiệu nó là $[x]$. Ví dụ $[5]=5$; $[3,12]=3$; $[-2{,}725]=-3$.
Tìm $\lim\limits_{x\to1^-}[x]$ và $\lim\limits_{x\to1^+}[x]$. Giới hạn $\lim\limits_{x\to1}[x]$ có tồn tại hay không?

VÍ DỤ 5. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-\sqrt{2x}}{4-x^2} & \text{khi } x<2\\ x^2-x+m & \text{khi } x\ge 2\end{cases}$ (m là tham số).
Tìm m để hàm số $f(x)$ có giới hạn khi $x\to 2$.

2. Câu hỏi trắc nghiệm

CÂU 1. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to(-2)^-}\dfrac{3+2x}{x+2}$.

A $-\infty$. **B** 2. **C** $+\infty$. **D** $\dfrac{3}{2}$.

CÂU 2. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}2x^2-2 & \text{khi } x\ge 6\\ x-2 & \text{khi } x<6\end{cases}$. Tính $\lim\limits_{x\to6^-}f(x)$ bằng

A 2. **B** 5. **C** 1. **D** 4.

CÂU 3. $\lim\limits_{x\to5^+}\dfrac{|10-2x|}{x^2-6x+5}$ là

A $\dfrac{1}{2}$. **B** 0. **C** $+\infty$. **D** $-\dfrac{1}{2}$.

CÂU 4. Tính $\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{|2-x|}{x^2-x-2}$.

A $+\infty$. **B** 0. **C** $-\dfrac{1}{3}$. **D** $\dfrac{1}{3}$.

CÂU 5. Trong các giới hạn sau, giới hạn nào không tồn tại?

A $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+1}{x^2+1}$. **B** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{\sqrt{x}+1}$. **C** $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x}{(x+1)^2}$. **D** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x}$.

CÂU 6. Gọi a là số thực để hàm số $f(x)=\begin{cases}x^2+ax+2 & \text{khi } x>2\\ 2x^2-x+1 & \text{khi } x\leqslant 2\end{cases}$ có giới hạn khi $x\to 2$.
Hãy chọn hệ thức đúng.

A $2a^2+3a+1=0$. **B** $a^2-3a+2=0$. **C** $4a^2-1=0$. **D** $a^2-4=0$.

CÂU 7. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-3x^2+2}{x-1} & \text{nếu } x>1\\ ax+3 & \text{nếu } x\le 1\end{cases}$. Tìm a để $\lim\limits_{x\to1}f(x)$ tồn tại.

A $a=6$. **B** $a=1$. **C** $a=0$. **D** $a=-6$.

QUICK NOTE

CÂU 8. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x-1|}{x-1} & \text{khi } x<1\\ x+2+a & \text{khi } 1\le x\le 3\\ \dfrac{x^2-81}{\sqrt{x}-3} & \text{khi } x>3\end{cases}$. Tìm tất cả giá trị của tham số a để hàm số có giới hạn tại $x=3$.

(A) $a=12\left(3+\sqrt{3}\right)$.

(B) $a=12\left(3-\sqrt{3}\right)$.

(C) $a=12\left(3+\sqrt{3}\right)-5$.

(D) $a=12\left(3-\sqrt{3}\right)+5$.

7 Toán thực tế, liên môn về giới hạn hàm số

1. Ví dụ

VÍ DỤ 1. Chiều dài một loài động vật nhỏ được tính theo công công thức $h(t)=\dfrac{300}{1+9\cdot(0{,}8)^t}$ mm, trong đó t số ngày sau khi sinh của loài động vật đó. Tính chiều dài cuối cùng của nó (chiều dài khi $t\to+\infty$).

VÍ DỤ 2. Theo thuyết tương đối, khối lượng m của một hạt phụ thuộc vào vận tốc v của nó, theo công thức

$$m=\frac{m_0}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}$$

trong đó m_0 là khối lượng khi hạt đứng yên và c là tốc độ ánh sáng. Tìm giới hạn của khối lượng khi v tiến đến c^-.

VÍ DỤ 3. Một chất điểm chuyển động thẳng với phương trình $s(t)$. Khi đó vận tốc tức thời tại thời điểm t_0 được định nghĩa là $\lim\limits_{\Delta t}\dfrac{s(t_0+\Delta t)-s(t_0)}{\Delta t}$. Tính vận tốc tức thời của chất điểm với phương trình chuyển động $s(t)=3t^2-2t+3$ ($s(t)$ có đơn vị là m, t đơn vị là giây), tại thời điểm $t=4$ giây.

VÍ DỤ 4. Số lượng đơn vị hàng tồn kho trong một công ty được cho bởi

$$N(t)=200\left(3\left[\frac{t+3}{3}\right]-t\right)$$

trong đó t là thời gian tính bằng ngày, $[x]$ là số nguyên lớn nhất không vượt quá x (ví dụ $[-1{,}5]=-2$, $[8{,}8]=8$).

a) Tính $\lim\limits_{t\to 55^+}N(t)$.

b) Tính $\lim\limits_{t\to 201^-}N(t)$.

VÍ DỤ 5. Một chất điểm chuyển động thẳng với vận tốc $v(t)$. Khi đó gia tốc tức thời tại thời điểm t_0 được định nghĩa là $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{v(t_0+\Delta t)-v(t_0)}{\Delta t}$. Một chất điểm chuyển động với vận tốc $v(t)=0{,}1t^2-0{,}4t+1$ (m/s), tính gia tốc tức thời tại thời điểm $t=8$ giây.

VÍ DỤ 6. Một người lái xe từ thành phố A đến thành phố B với vận tốc trung bình là x km/h. Trên chuyến trở về, vận tốc trung bình là y km/h. Vận tốc trung bình của cả đi và về là 60 km/h. (Giả sử người lái xe đi trên cùng một con đường trên cả chuyến đi và về).

a) Chứng minh rằng $y=\dfrac{30x}{x-30}$.

b) Tìm giới hạn của y khi $x\to 30^+$.

VÍ DỤ 7. Một hình elip với bán trục lớn a và bán trục nhỏ b thì diện tích được tính theo công thức $S=\pi ab$. Tính giới hạn diện tích của elip khi tiêu cự gần tới 0.

VÍ DỤ 8. Các nhà vật lý thấy rằng thuyết tương đối hẹp của Einstein quy về cơ học Newton khi $c \to +\infty$, trong đó c là tốc độ ánh sáng. Điều này được minh họa bởi ví dụ: Một hòn đá được ném thẳng đứng từ mặt đất để nó quay trở lại trái đất một giây sau đó. Sử dụng các định luật Newton, chúng ta thấy rằng chiều cao tối đa của hòn đá là $h = \frac{g}{8}$ mét ($g = 9{,}8\text{m/s}^2$). Theo thuyết tương đối hẹp, khối lượng của hòn đá phụ thuộc vào vận tốc của nó chia cho c, và có chiều cao cực đại là

$$h(c) = c\sqrt{\frac{c^2}{g^2} + \frac{1}{4}} - \frac{c^2}{g}.$$

Tính $\lim\limits_{c \to +\infty} h(c)$.

2. Bài tập rèn luyện

BÀI 1. Thế Lennard-Jones có dạng

$$U(r) = \frac{B}{r^{12}} - \frac{A}{r^6}$$

trong đó A, B là các hằng số và r là khoảng cách giữa các hạt. Tính $\lim\limits_{r \to +\infty} U(r)$.

BÀI 2. Trong thuyết tương đối, chiều dài của một vật thể đối với người quan sát phụ thuộc vào tốc độ mà vật thể đang chuyển động đối với người quan sát. Nếu người quan sát đo chiều dài của vật thể là L_0 khi đứng yên, thì ở tốc độ v chiều dài là

$$L = L_0\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

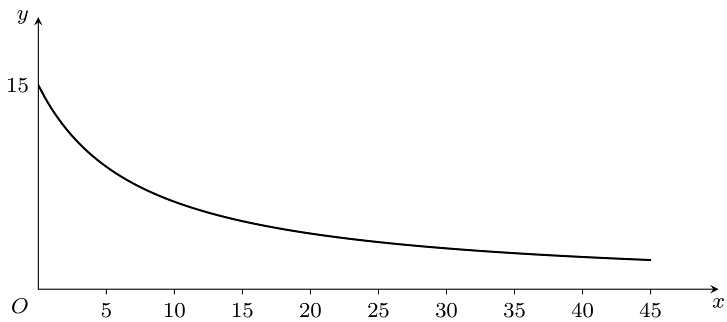
trong đó c là tốc độ ánh sáng trong chân không. Tìm $\lim\limits_{v \to c^-} L$.

BÀI 3. Trong kỹ thuật ứng dụng, chúng ta thường xuyên ghi nhận được các hàm số mà giá trị của nó thay đổi đột ngột tại một thời điểm t xác định. Ví dụ: Sự thay đổi điện áp của một mạch điện tại thời điểm t khi đóng hoặc ngắt mạch. Thông thường, giá trị t = 0 luôn được chọn là thời điểm bắt đầu cho việc đóng hoặc ngắt điện áp. Quá trình đóng, ngắt mạch trên có thể mô tả bằng mô hình toán học bởi hàm Heaviside

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } t < 0 \\ 1 & \text{nếu } t \geq 0. \end{cases}$$

Có tồn tại giới hạn $\lim\limits_{t \to 0} u(t)$ hay không?

BÀI 4. Trong một cuộc thi các môn thể thao trên tuyết, người ta muốn thiết kế một đường trượt bằng băng cho nội dung đổ dốc tốc độ đường dài.



Vận động viên sẽ xuất phát từ vị trí $(0; 15)$ cao 15 m so với mặt đất (trục Ox). Đường trượt phải thoả mãn yêu cầu là càng ra xa thì càng gần mặt đất để tiết kiệm lượng tuyết nhân tạo. Một nhà thiết kế đề nghị sử dụng đường cong là đồ thị hàm số $y = f(x) = \frac{150}{x+10}$, với $x \geq 0$. Hãy kiểm tra xem hàm số $y = f(x)$ có thoả mãn các điều kiện dưới đây hay không:

a) Có đồ thị qua điểm $(0; 15)$;

b) Giảm trên $[0; +\infty)$;

c) Càng ra xa (x càng lớn), đồ thị của hàm số càng gần trục Ox với khoảng cách nhỏ tuỳ ý.

QUICK NOTE

QUICK NOTE

BÀI 5. Chiều dài một loài động vật nhỏ được tính theo công công thức $h(t) = \dfrac{100}{2 + 3 \cdot (0{,}4)^t}$ mm, trong đó t số ngày sau khi sinh của loài động vật đó. Tính chiều dài cuối cùng của nó (chiều dài khi $t \to +\infty$).

BÀI 6. Một chất điểm chuyển động thẳng với phương trình $s(t)$. Khi đó vận tốc tức thời tại thời điểm t_0 được định nghĩa là $\lim\limits_{\Delta t} \dfrac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}$. Tính vận tốc tức thời của chất điểm với phương trình chuyển động $s(t) = 4t^2 - 3t + 1$ ($s(t)$ có đơn vị là m, t đơn vị là giây), tại thời điểm $t = 8$ giây.

BÀI 7. Bỏ qua lực cản của không khí, độ cao tối đa mà tên lửa đạt được khi phóng với vận tốc ban đầu v_0 là $h = \dfrac{v_0^2 R}{19{,}6R - v_0^2}$, trong đó R là bán kính của trái đất. Tính $\lim\limits_{R \to +\infty} h$.

BÀI 8. Một hình elip với bán trục lớn a và bán trục nhỏ b thì diện tích được tính theo công thức $S = \pi ab$. Cho elip có bán trục nhỏ bằng 30 cm, tính giới hạn diện tích của elip khi tiêu cự gần tới 0.

BÀI 9. Số lượng đơn vị hàng tồn kho trong một công ty nhỏ được cho bởi

$$N(t) = 25\left(2\left[\frac{t+2}{2}\right] - t\right)$$

trong đó t là thời gian tính bằng tháng, $[x]$ là số nguyên lớn nhất không vượt quá x (ví dụ $[2{,}4] = 2$, $[-2{,}7] = -3$).

a) Tính $\lim\limits_{t \to 8^+} N(t)$.

b) Tính $\lim\limits_{t \to 16^-} N(t)$.

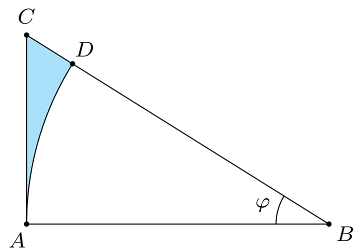
BÀI 10. Định luật Boyle được phát biểu: "Đối với một lượng khí ở nhiệt độ không đổi, áp suất P tỷ lệ nghịch với thể tích V". Tìm giới hạn của P là $V \to 0^+$.

BÀI 11. Một vật khối lượng m (không đổi) bắt đầu chuyển động với vận tốc $v_0 = 0$, được gia tốc bởi một lực F không đổi trong t giây. Theo định luật Newton về chuyển động, vật tốc của vật là $v_N = \dfrac{Ft}{m}$. Theo thuyết tương đối Einstein, vật có vận tốc $v_E = \dfrac{Fct}{\sqrt{m^2c^2 + F^2t^2}}$, với c là vận tốc ánh sáng. Tính $\lim\limits_{t \to +\infty} v_N$ và $\lim\limits_{t \to +\infty} v_E$.

BÀI 12.
Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường tròn bán kính 10 và tam giác vuông (hình vẽ bên).

a) Đặt $S = f(\varphi)$, với $f(\varphi)$ là hàm số của φ (Đơn vị rad). Tìm công thức của $f(\varphi)$ với $0 < \varphi < \dfrac{\pi}{2}$.

b) Tính giới hạn của $f(\varphi)$ khi $\varphi \to \dfrac{\pi}{2}^-$.



BÀI 13. Trên một chuyến đi dài d km đến một thành phố khác, vận tốc trung bình của một tài xế xe tải là x km/h. Trên chuyến trở về, vận tốc trung bình là y km/h. Vận tốc trung bình của cả đi và về là 50 km/h.

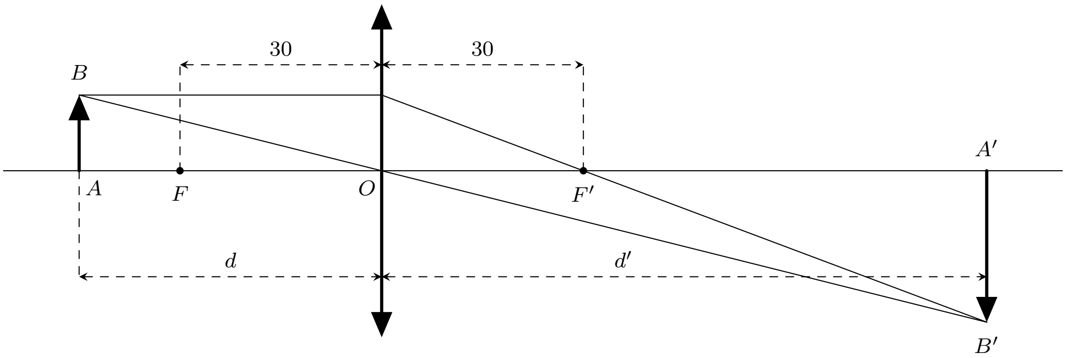
a) Chứng minh rằng $y = \dfrac{25x}{x - 25}$.

b) Tìm giới hạn của y khi $x \to 25^+$ và giải thích ý nghĩa của nó.

BÀI 14. Một chất điểm chuyển động thẳng với vận tốc $v(t)$. Khi đó gia tốc tức thời tại thời điểm t_0 được định nghĩa là $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{v(t_0 + \Delta t) - v(t_0)}{\Delta t}$. Một chất điểm chuyển động với vận tốc $v(t) = 5\sin(4\pi t)$ (m/s), tính gia tốc tức thời tại thời điểm $t = 5$ giây. (Biết $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$).

BÀI 15. Một bể chứa 5000 lít nước tinh khiết. Nước muối chứa 30 g muối trên một lít nước được bơm vào bể với tốc độ 25 lít/phút. Gọi nồng độ của muối sau t phút (tính bằng gam trên lít) là $C(t)$. Tính $\lim\limits_{t\to+\infty} C(t)$. Giải thích ý nghĩa của giới hạn này.

BÀI 16. Một thấu kính hội tụ có tiêu cự $f = 30$ cm. Trong Vật lí, ta biết rằng nếu đặt vật thật AB cách quang tâm của thấu kính một khoảng $d > 30$ (cm) thì được ảnh thật $A'B'$ cách quang tâm của thấu kính một khoảng d' (cm) (Hình vẽ dưới). Ngược lại, nếu $0 < d < 30$, ta có ảnh ảo. Công thức của thấu kính là $\dfrac{1}{d} + \dfrac{1}{d'} = \dfrac{1}{30}$.



a) Từ công thức của thấu kính, hãy tìm biểu thức xác định hàm số $d' = h(d)$.

b) Tìm các giới hạn $\lim\limits_{d\to30^+} h(d)$; $\lim\limits_{d\to30^-} h(d)$ và $\lim\limits_{d\to+\infty} h(d)$. Sử dụng các kết quả này để giải thích ý nghĩa đã biết trong Vật lí.

Bài 3. HÀM SỐ LIÊN TỤC

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Hàm số liên tục tại một điểm

- Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a;b)$ chứa điểm x_0. Hàm số $f(x)$ được gọi là liên tục tại điểm x_0 nếu $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

- Hàm số $f(x)$ không liên tục tại x_0 được gọi là gián đoạn tại điểm đó.

  ⚠ *Hàm số $y = f(x)$ liên tục tại x_0 khi và chỉ khi $\lim\limits_{x\to {x_0}^+} f(x) = \lim\limits_{x\to {x_0}^-} f(x) = f(x_0)$.*

2. Hàm số liên tục trên một khoảng

- Hàm số $y = f(x)$ được gọi là liên tục trên khoảng $(a;b)$ nếu nó liên tục tại mọi điểm thuộc khoảng này.

- Hàm số $y = f(x)$ được gọi là liên tục trên đoạn $[a;b]$ nếu nó liên tục trên khoảng $(a;b)$ và $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = f(a)$, $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = f(b)$.

- Các khái niệm hàm số liên tục trên nửa khoảng như $(a;b]$, $[a;+\infty)\ldots$ được định nghĩa theo cách tương tự.

- Đồ thị của hàm số liên tục trên một khoảng là một đường liền nét trên khoảng đó.

3. Tính chất 1

- Hàm số đa thức và các hàm số $y = \sin x$, $y = \cos x$ liên tục trên R.

- Các hàm số $y = \tan x$, $y = \cot x$, $y = \sqrt{x}$ và các hàm phân thức hữu tỉ (thương của hai đa thức) liên tục trên mỗi khoảng xác định của chúng.

QUICK NOTE

QUICK NOTE

4. Tính chất 2

Giả sử hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ liên tục tại điểm x_0. Khi đó:

- Các hàm số $y = f(x) + g(x)$, $y = f(x) - g(x)$ và $y = f(x) \cdot g(x)$ liên tục tại x_0.
- Hàm số $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ liên tục tại x_0 nếu $g(x_0) \neq 0$.

B. CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

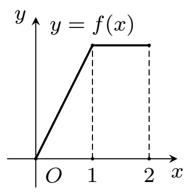
1 Dựa vào đồ thị xét tính liên tục của hàm số tại một điểm, một khoảng.

Để xét tính liên tục của hàm số khi biết đồ thị, ta cần nhớ:

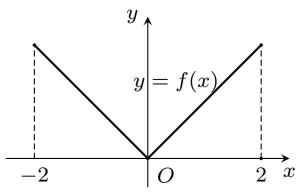
- Đồ thị của hàm số liên tục trên một khoảng là một đường liền nét trên khoảng đó.
- Hàm số $y = f(x)$ liên tục tại x_0 khi và chỉ khi $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$.

1. Ví dụ mẫu

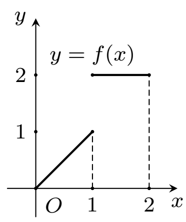
VÍ DỤ 1.
Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.
Xét tính liên tục của hàm số $y = f(x)$ trên khoảng $(0; 2)$.



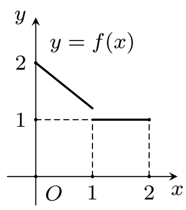
VÍ DỤ 2.
Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.
Xét tính liên tục của hàm số $y = f(x)$ trên khoảng $(-2; 2)$.



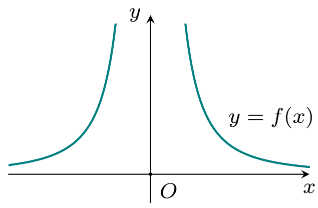
VÍ DỤ 3.
Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.
Xét tính liên tục của hàm số $y = f(x)$ trên khoảng $(0; 2)$.



VÍ DỤ 4.
Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.
Xét tính liên tục của hàm số $y = f(x)$ trên khoảng $(0; 2)$.

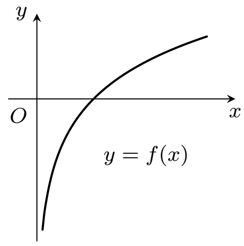


VÍ DỤ 5.
Cho hàm số $y = f(x)$ có tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ và có đồ thị như hình bên. Xét tính liên tục của hàm số $y = f(x)$ trên $\mathscr{D}$.



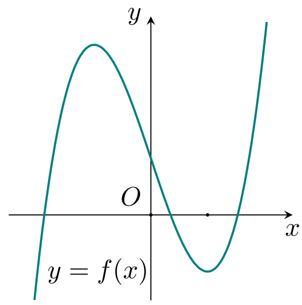
2. Câu hỏi trắc nghiệm

CÂU 1.
Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:



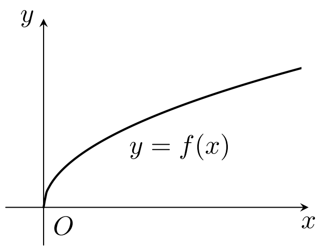
- **A** Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.
- **B** Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên khoảng $(0, +\infty)$.
- **C** Hàm số $y = f(x)$ liên tục tại điểm $x_0 = 0$.
- **D** $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$.

CÂU 2.
Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Chọn mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau:



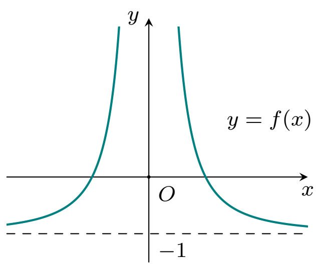
- **A** $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.
- **B** Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.
- **C** $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.
- **D** $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

CÂU 3.
Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:



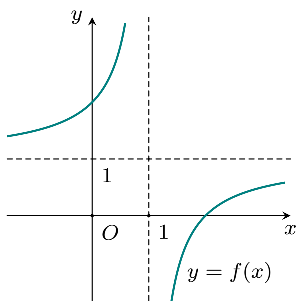
- **A** $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.
- **B** Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên khoảng $(0; +\infty)$.
- **C** Hàm số $y = f(x)$ liên tục tại điểm $x_0 = 0$.
- **D** Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

CÂU 4.
Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Chọn mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau:



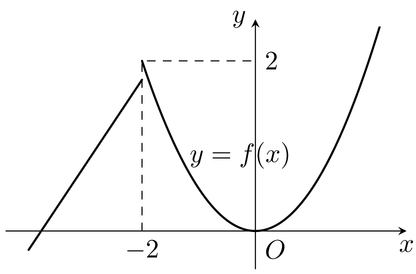
- **A** Hàm số gián đoạn tại điểm $x_0 = 0$.
- **B** Hàm số liên tục trên khoảng $(-\infty; 0)$.
- **C** Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.
- **D** Hàm số liên tục trên khoảng $(0; +\infty)$.

CÂU 5.
Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Chọn mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau:



- **A** Hàm số gián đoạn tại điểm $x_0 = 1$.
- **B** Hàm số liên tục trên khoảng $(-\infty; 1)$.
- **C** Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.
- **D** Hàm số liên tục trên khoảng $(1; +\infty)$.

CÂU 6.
Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:



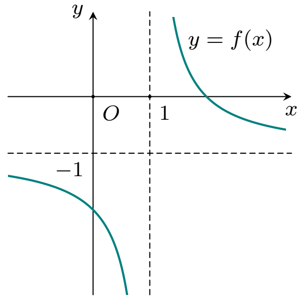
- **A** Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.
- **B** $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.
- **C** Hàm số liên tục tại điểm $x_0 = -2$.
- **D** Hàm số gián đoạn tại điểm $x_0 = -2$.

QUICK NOTE

QUICK NOTE

CÂU 7.

Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:



A $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$.

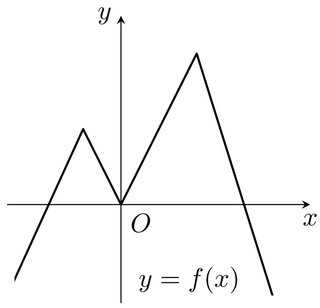
B Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

C $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = -\infty$.

D $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = +\infty$.

CÂU 8.

Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:



A Hàm số $y = f(x)$ gián đoạn tại $x_0 = 0$.

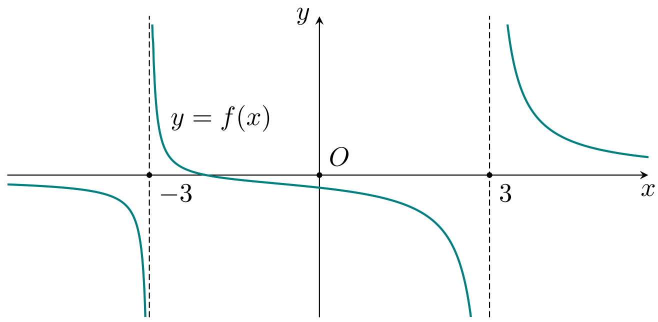
B $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -1$.

C $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -1$.

D Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

CÂU 9.

Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:



A Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

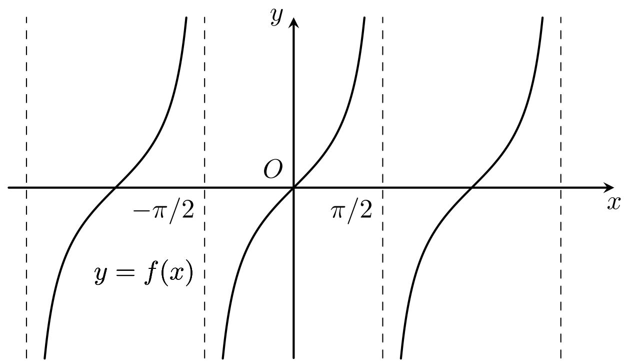
B Hàm số $y = f(x)$ liên tục tại $x_0 = -3$.

C $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

D Hàm số $y = f(x)$ gián đoạn tại $x_0 = 3$.

CÂU 10.

Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:



A Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

B Hàm số $y = f(x)$ liên tục tại điểm $x_0 = \dfrac{\pi}{2}$.

C Hàm số $y = f(x)$ liên tục tại điểm $x_0 = -\dfrac{\pi}{2}$.

D Hàm số $y = f(x)$ gián đoạn tại điểm $x_0 = \dfrac{\pi}{2}$.

2 Hàm số liên tục tại một điểm

Để kiểm tra tính liên tục của hàm số $y = f(x)$ tại điểm $x = x_0$ ta cần làm như sau:

- Bước 1: Tính $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.
- Bước 2: Tính $f(x_0)$. Nếu $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ thì kết luận hàm số $f(x)$ liên tục tại

$x = x_0$. Nếu $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$ thì kết luận hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = x_0$.

QUICK NOTE

1. Ví dụ mẫu

VÍ DỤ 1. Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-3x+2}{x-2} & \text{khi } x \neq 2 \\ 4x-7 & \text{khi } x = 2 \end{cases}$ tại điểm $x_0 = 2$.

VÍ DỤ 2. Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\sqrt{2x-3}}{2-x} & \text{nếu } x \neq 2 \\ 1 & \text{nếu } x = 2 \end{cases}$ tại điểm $x_0 = 2$.

VÍ DỤ 3. Biết rằng $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$. Hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\tan x}{x} & \text{khi } x \neq 0 \\ 0 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$. Xét tính liên tục của $y = f(x)$ tại $x = 0$?

VÍ DỤ 4. Hàm số $f(x) = \begin{cases} 3 & \text{khi } x = -1 \\ \dfrac{x^4+x}{x^2+x} & \text{khi } x \neq -1,\ x \neq 0 \\ 1 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$. Xét tính liên tục của hàm số tại $x = -1, x = 0$.

VÍ DỤ 5. Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2+1 & \text{nếu } x > 0 \\ x & \text{nếu } x \leq 0 \end{cases}$ tại điểm $x_0 = 0$.

VÍ DỤ 6. Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} 1-\cos x & \text{khi } x \leq 0 \\ \sqrt{x+1} & \text{khi } x > 0 \end{cases}$ tại $x = 0$?

2. Bài tập rèn luyện

BÀI 1. Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-6x+5}{x^2-1} & \text{nếu } x \neq 1 \\ -2 & \text{nếu } x = 1 \end{cases}$ tại điểm $x_0 = 1$.

BÀI 2. Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x+5}-3} & \text{nếu } x \neq 4 \\ -\dfrac{3}{2} & \text{nếu } x = 4 \end{cases}$ tại điểm $x_0 = 4$.

BÀI 3. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{x} \text{ khi } x < 1, x \neq 0 \\ 0 \text{ khi } x = 0 \\ \sqrt{x} \text{ khi } x \geq 1 \end{cases}$. Xét tính liên tục của hàm số $f(x)$ tại $x = 0, x = 1$?

BÀI 4. Cho hàm số $y = \begin{cases} \dfrac{1-x^3}{1-x}, \text{khi } x < 1 \\ 1\ , \text{khi } x \geq 1 \end{cases}$. Xét tính liên tục phải của hàm số tại $x = 1$?

BÀI 5. Cho hàm số $y = \begin{cases} \dfrac{x^2-7x+12}{x-3} & \text{khi } x \neq 3 \\ -1 & \text{khi } x = 3 \end{cases}$. Xét tính liên tục của hàm số tại $x = 3$.

BÀI 6. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-2}{\sqrt{x+2}-2} & \text{khi } x \neq 2 \\ 4 & \text{khi } x = 2 \end{cases}$. Xét tính liên tục của hàm số tại $x = 2$?

BÀI 7. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos x}{x^2} & \text{khi } x \neq 0 \\ 1 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$. Xét tính liên tục của hàm số tại $x = 0$?

BÀI 8. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} -x\cos x & \text{khi } x < 0 \\ \dfrac{x^2}{1+x} & \text{khi } 0 \leq x < 1 \\ x^3 & \text{khi } x \geq 1 \end{cases}$. Xét tính liên tục của hàm số tại $x = 0$?

QUICK NOTE

3. Câu hỏi trắc nghiệm

CÂU 1. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng K và $x_0 \in K$. Hàm số $y = f(x)$ liên tục tại x_0 nếu

(A) $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$.
(B) $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$.
(C) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.
(D) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$.

CÂU 2. Cho hàm số $f(x) = \dfrac{x^2+3x-4}{x+4}$ với $x \neq -4$. Để hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = -4$ thì ta cần bổ sung giá trị $f(-4)$ bằng bao nhiêu?

(A) 5.
(B) -5.
(C) 3.
(D) 0.

CÂU 3. Cho hàm số $f(x) = \dfrac{2x-1}{x^3-x}$. Kết luận nào sau đây đúng?

(A) Hàm số liên tục tại $x = -1$.
(B) Hàm số liên tục tại $x = 0$.
(C) Hàm số liên tục tại $x = 1$.
(D) Hàm số liên tục tại $x = \dfrac{1}{2}$.

CÂU 4. Hàm số nào sau đây liên tục tại $x = 1$:

(A) $f(x) = \dfrac{x^2+x+1}{x-1}$.
(B) $f(x) = \dfrac{x^2-x-2}{x^2-1}$.
(C) $f(x) = \dfrac{x^2+x+1}{x}$.
(D) $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$.

CÂU 5. Hàm số nào dưới đây gián đoạn tại điểm $x_0 = -1$.

(A) $y = (x+1)\left(x^2+2\right)$.
(B) $y = \dfrac{2x-1}{x+1}$.
(C) $y = \dfrac{x}{x-1}$.
(D) $y = \dfrac{x+1}{x^2+1}$.

CÂU 6. Hàm số nào sau đây gián đoạn tại $x = 2$?

(A) $y = \dfrac{3x-4}{x-2}$.
(B) $y = \sin x$.
(C) $y = x^4 - 2x^2 + 1$.
(D) $y = \tan x$.

CÂU 7. Hàm số $y = \dfrac{x}{x+1}$ gián đoạn tại điểm x_0 bằng?

(A) $x_0 = 2018$.
(B) $x_0 = 1$.
(C) $x_0 = 0$.
(D) $x_0 = -1$.

CÂU 8. Hàm số nào dưới đây gián đoạn tại điểm $x = 1$?

(A) $y = \dfrac{x-1}{x^2+x+1}$.
(B) $y = \dfrac{x^2-x+1}{x+1}$.
(C) $y = (x-1)(x^2+x+1)$.
(D) $y = \dfrac{x^2+2}{x-1}$.

CÂU 9. Cho hàm số $y = \dfrac{x-3}{x^2-1}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

(A) Hàm số không liên tục tại các điểm $x = \pm 1$.
(B) Hàm số liên tục tại mọi $x \in \mathbb{R}$.
(C) Hàm số liên tục tại các điểm $x = -1$.
(D) Hàm số liên tục tại các điểm $x = 1$.

CÂU 10. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos x}{x^2} & \text{khi } x \neq 0 \\ 1 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$. Khẳng định nào đúng trong các khẳng định sau?

(A) Hàm số gián đoạn tại $x = \sqrt{2}$.
(B) $f(\sqrt{2}) < 0$.
(C) $f(x)$ liên tục tại $x = 0$.
(D) $f(x)$ gián đoạn tại $x = 0$.

3 Hàm số liên tục trên khoảng, đoạn

- Hàm số $y = f(x)$ được gọi là liên tục trên một khoảng nếu nó liên tục tại mọi điểm của khoảng đó.
- Hàm số $y = f(x)$ được gọi là liên tục trên đoạn $[a, b]$ nếu nó liên tục trên khoảng (a, b) và
$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a), \quad \lim_{x \to b^-} f(x) = f(b).$$
- Đồ thị của hàm số liên tục trên một khoảng là một đường liền nét trên khoảng

đó.

1. Ví dụ mẫu

VÍ DỤ 1. Xét tính liên tục của hàm số sau trên tập xác định của chúng.

a) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-x-2}{x+1} & \text{khi } x\neq -1\\ -3 & \text{khi } x=-1\end{cases}$.

b) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x+1}{(x-1)^2} & \text{khi } x\neq 1\\ 3 & \text{khi } x=1\end{cases}$.

VÍ DỤ 2. Xét tính liên tục của hàm số sau trên tập xác định của chúng.

a) $f(x)=\begin{cases}x^2+3x & \text{khi } x\geq 2\\ 6x+1 & \text{khi } x<2.\end{cases}$

b) $f(x)=\begin{cases}x^2-3x+5 & \text{khi } x>1\\ 3 & \text{khi } x=1\\ 2x+1 & \text{khi } x<1.\end{cases}$

2. Bài tập rèn luyện

BÀI 1. Xét tính liên tục của hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-2}{x^2-4} & \text{khi } x\neq 2\\ 1 & \text{khi } x=2\end{cases}$ trên tập xác định.

BÀI 2. Xét tính liên tục của hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-1}{x-1} & \text{khi } x\neq 1\\ 3 & \text{khi } x=1\end{cases}$ trên tập xác định.

BÀI 3. Xét tính liên tục của hàm số $f(x)=\begin{cases}x^2 & \text{khi } x\geq -2\\ 2-x & \text{khi } x<-2\end{cases}$ trên tập xác định.

BÀI 4. Xét tính liên tục của hàm số $f(x)=\begin{cases}3x-2 & \text{khi } x>-1\\ 1 & \text{khi } x=-1\\ x^2-6 & \text{khi } x<-1\end{cases}$ trên tập xác định.

BÀI 5. Cho hàm số $y=f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-x}{\sqrt{2-x}-1} & \text{khi } x<1\\ 2x & \text{khi } x\geq 1\end{cases}$. Xét sự liên tục của hàm số trên tập xác định.

BÀI 6. Tìm số điểm gián đoạn của hàm số $f(x)=\begin{cases}0,5 & \text{khi } x=-1\\ \dfrac{x(x+1)}{x^2-1} & \text{khi } x\neq -1,\ x\neq 1\\ 1 & \text{khi } x=1\end{cases}$?

BÀI 7. Tìm điểm gián đoạn của hàm số $h(x)=\begin{cases}2x & \text{khi } x<0\\ x^2+1 & \text{khi } 0\leq x\leq 2\\ 3x-1 & \text{khi } x>2\end{cases}$?

BÀI 8. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}-x\cos x & \text{khi } x<0\\ \dfrac{x^2}{1+x} & \text{khi } 0\leq x<1\\ x^3 & \text{khi } x\geq 1\end{cases}$. Hàm số $f(x)$ gián đoạn tại điểm nào?

3. Câu hỏi trắc nghiệm

CÂU 1. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $(a;b)$. Điều kiện cần và đủ để hàm số liên tục trên $[a;b]$ là

(A) $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=f(a)$ và $\lim\limits_{x\to b^+} f(x)=f(b)$.

QUICK NOTE

QUICK NOTE

B $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = f(a)$ và $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = f(b)$.

C $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = f(a)$ và $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = f(b)$.

D $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = f(a)$ và $\lim\limits_{x\to b^+} f(x) = f(b)$.

CÂU 2. Cho hàm số $y = \begin{cases} \dfrac{1-x^3}{1-x} & \text{khi } x < 1 \\ 1 & \text{khi } x \geq 1 \end{cases}$. Hãy chọn kết luận đúng

A y liên tục phải tại $x = 1$.

B y liên tục tại $x = 1$.

C y liên tục trái tại $x = 1$.

D y liên tục trên $\mathbb{R}$.

CÂU 3. Trong các hàm số sau, hàm số nào liên tục trên $\mathbb{R}$?

A $y = x^3 - x$.

B $y = \cot x$.

C $y = \dfrac{2x-1}{x-1}$.

D $y = \sqrt{x^2-1}$.

CÂU 4. Trong các hàm số sau, hàm số nào liên tục trên $\mathbb{R}$?

A $f(x) = \tan x + 5$.

B $f(x) = \dfrac{x^2+3}{5-x}$.

C $f(x) = \sqrt{x-6}$.

D $f(x) = \dfrac{x+5}{x^2+4}$.

CÂU 5. Cho hàm số $y = \begin{cases} -x^2 + x + 3 & \text{khi } x \geq 2 \\ 5x + 2 & \text{khi } x < 2 \end{cases}$. Chọn mệnh đề sai trong các mệnh đề sau:

A Hàm số liên tục tại $x_0 = 1$.

B Hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

C Hàm số liên tục trên các khoảng $(-\infty; 2)$, $(2; +\infty)$.

D Hàm số gián đoạn tại $x_0 = 2$.

CÂU 6. Hàm số nào sau đây liên tục trên $\mathbb{R}$?

A $f(x) = \sqrt{x}$.

B $f(x) = x^4 - 4x^2$.

C $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^4-4x^2}{x+1}}$.

D $f(x) = \dfrac{x^4-4x^2}{x+1}$.

CÂU 7. Cho bốn hàm số $f_1(x) = \sqrt{x-1}$; $f_2(x) = x$; $f_3(x) = \tan x$; $f_4(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1} & \text{khi } x \neq 1 \\ 2 & \text{khi } x = 1 \end{cases}$.

Hỏi trong bốn hàm số trên có bao nhiêu hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$?

A 1.

B 2.

C 3.

D 4.

CÂU 8. Hàm số nào dưới đây liên tục trên $\mathbb{R}$?

A $y = x^3 + 3x - 2$.

B $y = \sqrt{x^2-1}$.

C $y = \dfrac{x+1}{x-1}$.

D $y = x + \tan x$.

CÂU 9. Hàm số $f(x) = \begin{cases} 3 & \text{khi } x = -1 \\ \dfrac{x^4+x}{x^2+x} & \text{khi } x \neq -1, x \neq 0 \\ 1 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$ liên tục tại

A mọi điểm trừ $x = 0, x = -1$.

B mọi điểm $x \in \mathbb{R}$.

C mọi điểm trừ $x = -1$.

D mọi điểm trừ $x = 0$.

CÂU 10. Số điểm gián đoạn của hàm số $f(x) = \begin{cases} 0,5 & \text{khi } x = -1 \\ \dfrac{x(x+1)}{x^2-1} & \text{khi } x \neq \pm 1 \\ 1 & \text{khi } x = 1 \end{cases}$ là

A 0.

B 1.

C 2.

D 3.

CÂU 11. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^5+x^2}{x^3+x^2} & \text{khi } x \neq 0; x \neq -1 \\ 3 & \text{khi } x = -1 \\ 1 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$. Khi đó

A Hàm số liên tục tại mỗi điểm $x \in \mathbb{R}$.

B Hàm số liên tục tại mỗi điểm trừ $x = 0$.

C Hàm số liên tục tại mỗi điểm trừ $x = -1$.

D Hàm số liên tục tại mỗi điểm trừ $x = -1; x = 0$.

4 Bài toán chứa tham số

QUICK NOTE

1. Ví dụ mẫu

VÍ DỤ 1. Tìm m để hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{x^2-16}{x-4} \text{ khi } x>4\\ mx+1 \text{ khi } x\leq 4\end{cases}$ liên tục tại điểm $x=4$.

VÍ DỤ 2. Tìm m để hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-x-2}{x+1} \text{ khi } x>-1\\ mx-2m^2 \text{ khi } x\leq -1\end{cases}$ liên tục tại $x=-1$.

VÍ DỤ 3. Tìm giá trị của tham số m để hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{x^2+3x+2}{x^2-1} & \text{khi} \quad x<-1\\ mx+2 & \text{khi} \quad x\geq -1\end{cases}$ liên tục tại $x=-1$?

VÍ DỤ 4. Cho hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{x^2-3x+2}{\sqrt{x+2}-2} & khi\ x>2\\ m^2x-4m+6 & khi\ x\leq 2\end{cases}$, m là tham số. Với giá trị nào của m thì hàm số đã cho liên tục tại $x=2$?

VÍ DỤ 5. Tìm giá trị của m để hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{x} & \text{khi} \quad x<0\\ m+\dfrac{1-x}{1+x} & \text{khi} \quad x\geq 0\end{cases}$ liên tục tại $x=0$?

2. Bài tập rèn luyện

BÀI 1. Cho hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x-1} & \text{khi } x<3,\ x\neq 1\\ 4 & \text{khi } x=1\\ \sqrt{x+1} & \text{khi } x\geq 3\end{cases}$. Xét tính liên tục của hàm số $f\left(x\right)$?

BÀI 2. Cho hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1} & \text{khi } \ (x>1)\\ m^2+m+\dfrac{1}{4} & \text{khi } \ (x\leq 1)\end{cases}$. Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để hàm số $f\left(x\right)$ liên tục tại $x=1$?

BÀI 3. Tìm a để hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}2x+a & \text{khi} \quad x\leq 1\\ \dfrac{x^3-x^2+2x-2}{x-1} & \text{khi} \quad x>1\end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$?

BÀI 4. Tìm m để hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+4x+3}{x+1} \text{ khi } x>-1\\ mx+2 \text{ khi } x\leq -1\end{cases}$ liên tục tại điểm $x=-1$.

BÀI 5. Cho hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}\sin \pi x & \text{khi} \quad |x|\leq 1\\ x+1 & \text{khi} \quad |x|>1\end{cases}$. Tìm các khoảng liên tục của hàm số?

BÀI 6. Cho hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}\sin x & \text{nếu } \cos x\geq 0\\ 1+\cos x & \text{nếu } \cos x<0\end{cases}$. Hỏi hàm số f có tất cả bao nhiêu điểm gián đoạn trên khoảng $(0;2018)$?

BÀI 7. Tìm m để hàm số $y=f\left(x\right)=\begin{cases}x^2+2\sqrt{x-2} \text{ khi } x\geq 2\\ 5x-5m+m^2 \text{ khi } x<2\end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$?

BÀI 8. Cho hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}3x+a-1 \text{ khi } x\leq 0\\ \dfrac{\sqrt{1+2x}-1}{x} \text{ khi } x>0\end{cases}$. Tìm tất cả giá trị thực của a để hàm số đã cho liên tục trên $\mathbb{R}$.

BÀI 9. Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m để hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}m^2x^2 & \text{khi } x\leq 2\\ \left(1-m\right)x & \text{khi } x>2\end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$?

QUICK NOTE

BÀI 10. Tìm P để hàm số $y=\begin{cases}\dfrac{x^2-4x+3}{x-1} \text{ khi } x>1\\ 6Px-3 \text{ khi } x\leq 1\end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

BÀI 11. Hàm số $f(x)=\begin{cases}ax+b+1 \text{ khi } x>0\\ a\cos x+b\sin x \text{ khi } x\leq 0\end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi

BÀI 12. Cho hàm số $y=\begin{cases}3x+1 \text{ khi } x\geq -1\\ x+m \text{ khi } x<-1\end{cases}$, m là tham số. Tìm m để hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

5 Chứng minh phương trình có nghiệm

Để chứng minh minh một phương trình có nghiệm, ta thường tiến hành

- Đặt $f(x)$ là vế trái của phương trình (ứng với vế phải bằng 0).
- Lập luận hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ hoặc trên một đoạn con của $\mathbb{R}$ liên quan tới bài toán.
- Chỉ ra tồn tại các số a, b $(a<b)$ với a, b thuộc đoạn con đang xét mà $f(a)\cdot f(b)<0$. Dựa vào tính chất của hàm số liên tục ta suy ra phương trình $f(x)=0$ có nghiệm thuộc khoảng $(a;b)$.

Nếu bài toán yêu cầu chứng minh phương trình có k nghiệm thì cần lập luận k đoạn con như trên.
Nhiều trường hợp việc chỉ ra các số a, b gặp khó khăn, ta có thể khai thác $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ *hoặc* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ *để có cơ sở lập luận.*

1. Ví dụ mẫu

VÍ DỤ 1. Chứng minh rằng phương trình $x^5+4x^3-x^2-1=0$ có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(0;1)$.

VÍ DỤ 2. Chứng minh rằng phương trình $x^5-5x^3+4x-1=0$ có đúng 5 nghiệm phân biệt.

VÍ DỤ 3. Chứng minh rằng phương trình $x^3-2mx^2-x+m=0$ luôn có nghiệm với mọi m (m là tham số).

VÍ DỤ 4. Chứng minh rằng phương trình $\left(1-m^2\right)(x+1)^3+x^2-x-3$ luôn có nghiệm với mọi giá trị của tham số m.

VÍ DỤ 5. Chứng minh rằng phương trình $m(x-8)^3(x-9)^4+2x-17=0$ luôn có nghiệm với mọi giá trị của m.

VÍ DỤ 6. Chứng minh rằng phương trình $m(x+1)^2(x-2)^3+(x+2)(x-3)=0$ luôn có nghiệm với mọi tham số m.

VÍ DỤ 7. Với mọi giá trị thực của tham số m, chứng minh phương trình $\left(m^2+1\right)x^3-2m^2x^2-4x+m^2+1=0$ luôn có ba nghiệm thực.

VÍ DỤ 8. Chứng minh rằng phương trình sau luôn có nghiệm với mọi giá trị của tham số $m\geq -1$

$$(m-1)x^6+\left(m^2-\sqrt{4m+4}\right)x^3+6x-3=0.$$

VÍ DỤ 9. Với mọi giá trị thực của tham số m, chứng minh phương trình $x^5+x^2-\left(m^2+2\right)x-1=0$ luôn có ít nhất ba nghiệm thực.

VÍ DỤ 10. Cho a, b là hai số thực thỏa mãn $9a+24b>128$. Chứng minh phương trình $ax^2+bx-2=0$ có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(0;1)$.

VÍ DỤ 11. Cho phương trình $ax^2+bx+c=0$ với $5a+3b+3c=0$. Chứng minh rằng phương trình luôn có nghiệm.

2. Bài tập rèn luyện

BÀI 1. Chứng minh rằng phương trình $x^5+4x^3-x^2-1=0$ có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(0;1)$.

BÀI 2. Chứng minh rằng phương trình $2x^4-3x^3-5=0$ có ít nhất một nghiệm.

QUICK NOTE

BÀI 3. Chứng minh rằng phương trình $-3x^5+8x^2-1=0$ có ít nhất một nghiệm.

BÀI 4. Chứng minh phương trình $\left(m^2-2m+3\right)x^4-2x-4=0$ luôn có nghiệm âm với mọi giá trị thực của tham số m.

BÀI 5. Chứng minh phương trình $x^4+x^3+mx^2+x\left(2m-1\right)+m\sin\left(\pi x\right)=1$ có nghiệm với mọi m.

BÀI 6. Chứng minh phương trình $x^4+mx^2+(3m-1)x-5+2m=0$ luôn có ít nhất một nghiệm với mọi số thực m.

BÀI 7. Chứng minh rằng phương trình $m(x-8)^3(x-9)^4+2x-17=0$ luôn có nghiệm với mọi giá trị của m.

BÀI 8. Chứng minh phương trình $\left(m^2-2m+3\right)x^4-2x-4=0$ luôn có nghiệm âm với mọi giá trị thực của tham số m.

BÀI 9. Chứng minh rằng phương trình $m\cdot\sin 2x+x^2\cdot\cos x+\left(m^2+1\right)\cdot\cos 2x=0$ luôn có nghiệm thuộc khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$ với mọi tham số m.

BÀI 10. Chứng minh phương trình $x^3+mx^2-4mx=19-3m$ có nghiệm với mọi m.

BÀI 11. Cho $f(x)$ là hàm số liên tục trên đoạn $[a;b]$ sao cho với mọi $x\in[a;b]$ thì $a\le f(x)\le b$. Chứng minh rằng phương trình $f(x)=x$ có ít nhất một nghiệm thuộc đoạn $[a;b]$.

BÀI 12. Cho hai số a và b dương, $c\neq 0$ và m, n là hai số thực tùy ý. Chứng minh phương trình $\dfrac{a}{x-m}+\dfrac{b}{x-n}=c$ luôn có nghiệm thực.

BÀI 13. Cho a, b, c là ba số thực tùy ý. Chứng minh rằng phương trình

$$ab(x-a)(x-b)+bc(x-b)(x-c)+ca(x-c)(x-a)=0$$

luôn có nghiệm.

BÀI 14. Cho phương trình $x^3-3x^2+(2m-2)x+m-3=0$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình có ba nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3 thỏa mãn $x_1<-1<x_2<x_3$.

BÀI 15. Cho $2a+6b+19c=0$. Chứng minh rằng phương trình $ax^2+bx+c=0$ có nghiệm $x_0\in\left[0;\dfrac{1}{3}\right]$.

BÀI 16. Cho phương trình $a\cos 2x+b\cos x+c=0$, với a, b, c là các số thực thỏa mãn $3b+7c=3a$. Chứng minh phương trình đã cho luôn có nghiệm.

BÀI 17. Giả sử hai hàm số $y=f(x)$ và $y=f(x+1)$ đều liên tục trên đoạn $[0;2]$ và $f(0)=f(2)$. Chứng minh phương trình $f(x)-f(x+1)=0$ luôn có nghiệm thuộc đoạn $[0;1]$.

MỤC LỤC