

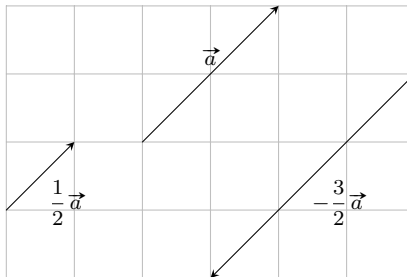
Bài 5. TÍCH CỦA MỘT VECTO VỚI MỘT SỐ

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Tích của một vectơ với một số

Định nghĩa: Cho vectơ $\vec{a} \neq \vec{0}$ và số thực $k \neq 0$. Tích của vectơ \vec{a} với số k là một vectơ, kí hiệu là $k\vec{a}$, được xác định như sau:

- ☑ Nếu $k > 0$ thì $k\vec{a}$ là vectơ **cùng hướng** với \vec{a} . Nếu $k < 0$ thì $k\vec{a}$ là vectơ **ngược hướng** với \vec{a} .
- ☑ Độ dài của vectơ $k\vec{a}$ bằng $|k|$ lần độ dài của vectơ \vec{a} , tức là $|k\vec{a}| = |k| \cdot |\vec{a}|$.



A Ta quy ước $k\vec{a} = \vec{0}$ nếu $\vec{a} = \vec{0}$ hoặc $k = 0$.

2. Các tính chất của phép nhân vectơ với một số

Với hai vectơ \vec{a}, \vec{b} và hai số thực k, t , ta luôn có

- $k(t\vec{a}) = (kt)\vec{a}$;
- $(k+t)\vec{a} = k\vec{a} + t\vec{a}$;
- $k(\vec{a} \pm \vec{b}) = k\vec{a} \pm k\vec{b}$;
- $1\vec{a} = \vec{a}; (-1)\vec{a} = -\vec{a}$.

☑ Điểm I là trung điểm của đoạn thẳng AB khi và chỉ khi $\vec{IA} + \vec{IB} = \vec{0}$.

☑ Cho điểm G là trọng tâm của tam giác ABC khi và chỉ khi $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$.

3. Điều kiện để hai vectơ cùng phương

- Điều kiện cần và đủ để \vec{a} và $\vec{b} \neq \vec{0}$ cùng phương là có một số thực k để $\vec{a} = k\vec{b}$.
- Ba điểm phân biệt A, B, C thẳng hàng khi có số thực k để $\vec{AB} = k\vec{AC}$.

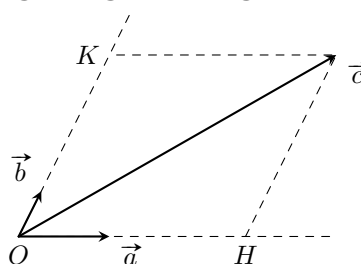
4. Phân tích một vectơ theo hai vectơ không cùng phương

Cho hai vectơ \vec{a} và \vec{b} không cùng phương. Khi đó mọi vectơ \vec{c} đều phân tích được một cách duy nhất theo hai vectơ \vec{a} và \vec{b} , nghĩa là có duy nhất cặp số h, k sao cho $\vec{c} = h\vec{a} + k\vec{b}$

- Theo quy tắc hình bình hành, ta có

$$\vec{c} = \vec{OH} + \vec{OK}$$

- Giả sử $\vec{OH} = h\vec{a}$ và $\vec{OK} = k\vec{b}$ thì $\vec{c} = h\vec{a} + k\vec{b}$.



B. CÁC DẠNG TOÁN

1

Xác định vectơ tích, tính độ dài vectơ

1. Ví dụ minh họa

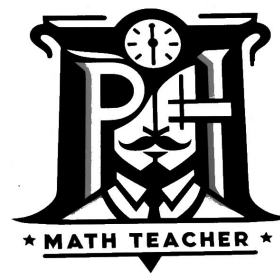
VÍ DỤ 1. Cho đoạn thẳng AB và M là một điểm nằm trên đoạn AB sao cho $AM = \frac{1}{5}AB$.

Tìm k trong các đẳng thức sau

- a) $\vec{AM} = k\vec{AB}$. b) $\vec{MA} = k\vec{MB}$. c) $\vec{MA} = k\vec{AB}$.

VÍ DỤ 2. Cho tam giác ABC đều cạnh bằng 1, trọng tâm G . Tính độ dài vectơ \vec{AG} .

VÍ DỤ 3. Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng a , I là trung điểm của cạnh BC . Tính độ dài vectơ $\vec{AB} + \vec{AC}$.



ĐIỂM:

“Failure is not the opposite of success. It is a part of success.”

– Arianna Huffington –

QUICK NOTE

QUICK NOTE

2. Bài tập áp dụng

BÀI 1. Trên đoạn thẳng AB , gọi C là trung điểm AB và D là điểm đối xứng của C qua A . Tìm k trong các đẳng thức sau

a) $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$.

b) $\overrightarrow{AD} = k\overrightarrow{AB}$.

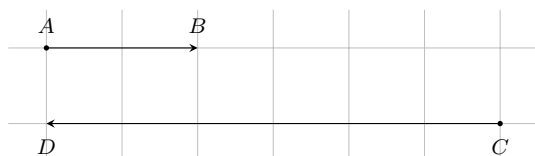
BÀI 2. Cho tam giác ABC vuông cân tại A , cạnh $BC = 2$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của cạnh AB và BC . Tính độ dài \overrightarrow{MN} .

BÀI 3. Cho hình thoi $ABCD$ có $AC = 2a, BD = a$. Tính độ dài vectơ $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$.

3. Bài tập trắc nghiệm

CÂU 1. Cho hai vectơ \overrightarrow{AB} và \overrightarrow{CD} trong hình bên. Khẳng định nào sau đây đúng?

- (A) $\overrightarrow{CD} = 3\overrightarrow{AB}$. (B) $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$.
(C) $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{CD}$. (D) $\overrightarrow{CD} = -3\overrightarrow{AB}$.



CÂU 2. Cho vectơ \vec{a} (khác $\vec{0}$) và vectơ $\vec{b} = k\vec{a}$, ($k \neq 0$). Khẳng định nào sau đây là đúng?

- (A) \vec{a} cùng phương \vec{b} nếu $k > 0$. (B) \vec{a} ngược hướng \vec{b} nếu $k > 0$.
(C) \vec{a} cùng hướng \vec{b} nếu $k < 0$. (D) \vec{a} cùng hướng \vec{b} nếu $k > 0$.

CÂU 3. Cho hai vectơ \vec{a}, \vec{b} bất kì và số thực k . Ta có $k(\vec{a} + \vec{b})$ bằng

- (A) $\vec{a} + k\vec{b}$. (B) $k\vec{a} + k\vec{b}$. (C) $k\vec{a} - k\vec{b}$. (D) $k\vec{a} + \vec{b}$.

CÂU 4. Cho hai vectơ \vec{a}, \vec{b} khác $\vec{0}$ thỏa mãn $\vec{a} = -\frac{1}{2}\vec{b}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- (A) $|\vec{a}| = -\frac{1}{2}|\vec{b}|$. (B) \vec{a} và \vec{b} là hai vectơ đối nhau.
(C) \vec{a} cùng hướng với \vec{b} . (D) \vec{a} ngược hướng với \vec{b} .

CÂU 5. Cho vectơ \vec{u} có độ dài bằng 2 và vectơ $\vec{v} = -3\vec{u}$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- (A) vectơ \vec{v} có độ dài bằng -6 và cùng hướng với \vec{u} .
(B) vectơ \vec{v} có độ dài bằng -6 và ngược hướng với \vec{u} .
(C) vectơ \vec{v} có độ dài bằng 6 và cùng hướng với \vec{u} .
(D) vectơ \vec{v} có độ dài bằng 6 và ngược hướng với \vec{u} .

CÂU 6. Cho $\vec{a} = -2\vec{b}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- (A) \vec{a} và \vec{b} là hai vectơ bằng nhau. (B) \vec{a} và \vec{b} là hai vectơ đối nhau.
(C) \vec{a} và \vec{b} ngược hướng. (D) \vec{a} và \vec{b} cùng hướng.

CÂU 7. Cho vectơ \vec{q} có độ dài bằng 27. Hỏi độ dài của vectơ $\vec{x} = -\frac{1}{9}\vec{q}$ là bao nhiêu?

- (A) 243. (B) 3. (C) 9. (D) -3 .

CÂU 8. Cho đoạn thẳng AB và điểm I thuộc đoạn thẳng AB như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây đúng?



- (A) $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$. (B) $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{4}\overrightarrow{IB}$.
(C) $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{5}\overrightarrow{BA}$. (D) $\overrightarrow{AI} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{IB}$.

CÂU 9. Đẳng thức nào mô tả đúng hình vẽ bên?



- (A) $3\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AB} = \vec{0}$. (B) $3\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$.
(C) $\overrightarrow{BI} + 3\overrightarrow{BA} = \vec{0}$. (D) $\overrightarrow{AI} + 3\overrightarrow{AB} = \vec{0}$.

CÂU 10. Cho M là một điểm trên đoạn AB sao cho $AM = \frac{1}{3}AB$. Khẳng định nào sau đây sai?

- (A) $\overrightarrow{MB} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$. (B) $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$. (C) $\overrightarrow{MA} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{MB}$. (D) $\overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{AM}$.

CÂU 11. Cho đoạn thẳng AB và M là một điểm trên đoạn AB sao cho $AB = 5AM$. Mệnh đề nào sau đây sai?

QUICK NOTE

Ⓐ $\overrightarrow{MA} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{MB}$. Ⓑ $\overrightarrow{MB} = \frac{4}{5}\overrightarrow{AB}$. Ⓒ $\overrightarrow{MB} = -\frac{4}{5}\overrightarrow{AB}$. Ⓓ $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AB}$.

CÂU 12. Cho đoạn thẳng AB , M là một điểm trên đoạn thẳng AB sao cho $AM = \frac{1}{4}AB$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

Ⓐ $\overrightarrow{MA} = \frac{1}{3}\overrightarrow{MB}$. Ⓑ $\overrightarrow{BM} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BA}$. Ⓒ $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$. Ⓓ $\overrightarrow{MB} = -3\overrightarrow{MA}$.

CÂU 13. Cho hình bình hành $ABCD$ có tâm O . Mệnh đề nào sau đây **sai**?

Ⓐ $\overrightarrow{OD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$. Ⓑ $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{OC}$. Ⓒ $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{OA}$. Ⓓ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

CÂU 14. Cho tam giác ABC với trung tuyến AM và trọng tâm G . Khi đó, vectơ \overrightarrow{GA} bằng với vectơ nào sau đây?

Ⓐ $2\overrightarrow{GM}$. Ⓑ $-\frac{2}{3}\overrightarrow{AM}$. Ⓒ $\frac{2}{3}\overrightarrow{GM}$. Ⓓ $\frac{1}{2}\overrightarrow{AM}$.

CÂU 15. Cho tam giác ABC có G là trọng tâm, M là trung điểm của BC . Đẳng thức nào sau đây đúng?

Ⓐ $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 2\overrightarrow{GM}$. Ⓑ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AG}$.
Ⓒ $\overrightarrow{GA} = 2\overrightarrow{GM}$. Ⓓ $\overrightarrow{MG} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{MA}$.

CÂU 16. Cho tam giác ABC . Gọi M , N lần lượt là trung điểm của AB và AC . Khẳng định nào sau đây là **sai**?

Ⓐ $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$. Ⓑ $\overrightarrow{MN} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$. Ⓒ $\overrightarrow{BC} = -2\overrightarrow{NM}$. Ⓓ $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{MN}$.

CÂU 17. Cho tam giác ABC có trọng tâm G và trung tuyến BM . Khẳng định nào sau đây là **sai**?

Ⓐ $\overrightarrow{AM} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$.
Ⓑ $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.
Ⓒ $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OG}$, với mọi điểm O .
Ⓓ $\overrightarrow{GB} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BM}$.

CÂU 18. Cho tam giác đều ABC với đường cao AH . Mệnh đề nào sau đây đúng?

Ⓐ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$. Ⓑ $|\overrightarrow{AH}| = \frac{\sqrt{3}}{2}|\overrightarrow{HC}|$.
Ⓒ $\overrightarrow{HB} = \overrightarrow{HC}$. Ⓓ $|\overrightarrow{AC}| = 2|\overrightarrow{HC}|$.

CÂU 19. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . Giá trị của $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}|$ bằng

Ⓐ $A\sqrt{2}$. Ⓑ $2a$. Ⓒ $2a\sqrt{2}$. Ⓓ $3a$.

CÂU 20. Cho tam giác ABC đều cạnh a . Khi đó, giá trị $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}|$ bằng

Ⓐ $a\sqrt{3}$. Ⓑ $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Ⓒ $2a$. Ⓓ $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

CÂU 21. Cho tam giác đều ABC cạnh bằng 4. Độ dài $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ là

Ⓐ $2\sqrt{3}$. Ⓑ $\sqrt{5}$. Ⓒ $\sqrt{6}$. Ⓓ $4\sqrt{3}$.

CÂU 22. Cho tam giác ABC vuông tại A và $AB = 2$, $AC = 3$. Độ dài của vectơ $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AC}$ bằng

Ⓐ 5. Ⓑ 40. Ⓒ $\sqrt{13}$. Ⓓ $2\sqrt{10}$.

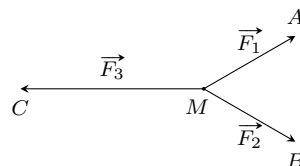
CÂU 23. Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng a . Tính $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DB}|$ theo a .

Ⓐ $\frac{a\sqrt{5}}{2}$. Ⓑ a . Ⓒ $a\sqrt{5}$. Ⓓ $a\sqrt{3}$.

CÂU 24.

Cho ba lực $\vec{F}_1 = \overrightarrow{MA}$, $\vec{F}_2 = \overrightarrow{MB}$, $\vec{F}_3 = \overrightarrow{MC}$ cùng tác động vào một vật tại điểm M và vật đứng yên. Cho biết cường độ của \vec{F}_1 , \vec{F}_2 đều bằng 100N và $\widehat{AMB} = 60^\circ$. Khi đó, cường độ lực của \vec{F}_3 bằng

Ⓐ $50\sqrt{2}$ N. Ⓑ $50\sqrt{3}$ N. Ⓒ $25\sqrt{3}$ N. Ⓓ $100\sqrt{3}$ N.



QUICK NOTE

CÂU 25. Cho tam giác ABC là tam giác đều cạnh $2a$ với G là trọng tâm. Tính $|\vec{GB} + \vec{GC}|$.

- (A) $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$. (B) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. (C) $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. (D) $a\sqrt{3}$.

CÂU 26. Gọi G là trọng tâm tam giác vuông ABC với cạnh huyền $BC = 12$. vectơ $\vec{GB} - \vec{GC}$ có độ dài bằng bao nhiêu?

- (A) 4. (B) $2\sqrt{3}$. (C) 8. (D) 2.

CÂU 27. Tam giác ABC có $AB = AC = a$, $\widehat{ABC} = 120^\circ$. Độ dài vectơ tổng $\vec{AB} + \vec{AC}$ bằng

- (A) $2a$. (B) $a\sqrt{3}$. (C) a . (D) $3a$.

CÂU 28. Cho hình thoi $ABCD$ cạnh a , tâm O và $\widehat{BAD} = 60^\circ$. Độ dài vectơ $\vec{OB} - \vec{CD}$ bằng

- (A) $\frac{a\sqrt{7}}{2}$. (B) $\frac{a\sqrt{5}}{2}$. (C) $2a$. (D) $a\sqrt{3}$.

CÂU 29. Cho tam giác ABC đều cạnh a , H là trung điểm của BC . Tính $|\vec{CA} - \vec{HC}|$ bằng

- (A) $\frac{2\sqrt{3}a}{3}$. (B) $\frac{a\sqrt{7}}{2}$. (C) $\frac{a}{2}$. (D) $\frac{3a}{2}$.

CÂU 30. Cho tam giác OAB vuông cân tại O với $OA = OB = a$. Tính độ dài vectơ $\vec{u} = 8\vec{OA} - 6\vec{OB}$.

- (A) $2a$. (B) $14a$. (C) $16a$. (D) $10a$.

CÂU 31. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 3$, $AC = 4$. Tính độ dài vectơ $\vec{u} = 2\vec{AB} + 3\vec{AC}$.

- (A) $|\vec{u}| = 18$. (B) $|\vec{u}| = 6\sqrt{5}$. (C) $|\vec{u}| = 9$. (D) $|\vec{u}| = 5\sqrt{6}$.

CÂU 32. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC . Tập hợp điểm M trong mặt phẳng chứa tam giác ABC sao cho $|\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}| = 6$ là

- (A) đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . (B) đường tròn tâm G bán kính bằng 1.
(C) đường tròn tâm G bán kính bằng 2. (D) đường tròn tâm G bán kính bằng 6.

CÂU 33. Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng $2a$ và G là trọng tâm của tam giác. Khi đó, giá trị $|\vec{AB} - \vec{GC}|$ là

- (A) $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. (B) $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$. (C) $\frac{4a\sqrt{3}}{3}$. (D) $\frac{2a}{3}$.

CÂU 34. Cho ba lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ có cùng điểm đặt tại O . Trong đó, có hai lực \vec{F}_1, \vec{F}_2 có phương hợp với nhau một góc 90° và lực \vec{F}_3 ngược hướng với lực \vec{F}_1 . Ba lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ có cường độ lần lượt là 100 N, 200 N và 300 N. Cường độ lực tổng hợp của ba lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ là

- (A) 400 N. (B) $100\sqrt{2}$ N. (C) 600 N. (D) $200\sqrt{2}$ N.

CÂU 35. Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng 1. Độ dài của vectơ $\vec{u} = 12\vec{AC} - 7\vec{AB}$ bằng

- (A) $|\vec{u}| = 17$. (B) $|\vec{u}| = 5$. (C) $|\vec{u}| = 13$. (D) $|\vec{u}| = 12\sqrt{2} - 7$.

CÂU 36. Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng 1. Độ dài của vectơ $\vec{u} = 3\vec{AC} - 7\vec{AB}$ là

- (A) $|\vec{u}| = 5$. (B) $|\vec{u}| = 12\sqrt{2} - 7$. (C) $|\vec{u}| = 17$. (D) $|\vec{u}| = 13$.

2

Chứng minh đẳng thức vectơ, thu gọn biểu thức

Phương pháp giải

- ☑ Cách 1: Biến đổi thẳng VT về VP hoặc ngược lại.
- ☑ Cách 2: Biến đổi VT và VP về cùng bằng một biểu thức trung gian.
- ☑ Cách 3: Chứng minh VT-VT= $\vec{0}$.

Khi thực hiện các phép biến đổi cần lưu ý

- a) Quy tắc ba điểm: Với ba điểm A, B, C bất kì ta luôn có $\vec{AB} = \vec{AC} + \vec{CB}$.
- b) Quy tắc hình bình hành: Với hình bình hành $ABCD$ ta luôn có $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{AD}$.

QUICK NOTE

c) Quy tắc hiệu vectơ: Với ba điểm A, B, O bất kì ta luôn có $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AB}$.

d) Tính chất trung điểm của đoạn thẳng: Cho đoạn thẳng AB ta có

$$\begin{aligned} I \text{ là trung điểm của } AB &\Leftrightarrow \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0} \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}, M \text{ là điểm bất kì.} \end{aligned}$$

e) Tính chất trọng tâm tam giác: Cho tam giác ABC ta có

$$\begin{aligned} G \text{ là trọng tâm tam giác } ABC &\Leftrightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}. \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}, M \text{ là điểm bất kì.} \end{aligned}$$

f) Các tính chất của phép cộng, trừ vectơ và phép nhân một số với một vectơ.

1. Ví dụ minh họa

VÍ DỤ 1. Cho tam giác ABC với trọng tâm G . Chứng minh rằng $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} = 3\overrightarrow{CG}$.

VÍ DỤ 2. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi G là trọng tâm tam giác ABD . Chứng minh rằng

$$\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 9\overrightarrow{AG}.$$

VÍ DỤ 3. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm các đoạn thẳng AB và CD . Chứng minh rằng $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{MN}$.

VÍ DỤ 4. Cho tam giác ABC . Lần lượt lấy các điểm M, N, P trên các đoạn thẳng AB, BC và CA sao cho $AM = \frac{1}{3}AB, BN = \frac{1}{3}BC, CP = \frac{1}{3}CA$. Chứng minh rằng

$$\overrightarrow{AN} + \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{CM} = \vec{0}.$$

VÍ DỤ 5. Cho hình bình hành $ABCD$ có tâm O . Gọi M là một điểm bất kì. Chứng minh rằng

$$\begin{aligned} \text{a) } \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} &= \vec{0}. \\ \text{b) } \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} &= 4\overrightarrow{MO}. \end{aligned}$$

VÍ DỤ 6. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi M là trung điểm CD . Lấy N trên đoạn BM sao cho $BN = 2MN$. Chứng minh rằng

$$\begin{aligned} \text{a) } 3\overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{CD} &= \overrightarrow{CM} + \overrightarrow{ND} + \overrightarrow{MN}, \\ \text{b) } 4\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BD} &= 3\overrightarrow{AN}. \end{aligned}$$

2. Bài tập áp dụng

BÀI 1. Cho hình bình hành $ABCD$ có tâm O . Chứng minh rằng

$$\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD} = 4\overrightarrow{OD}.$$

BÀI 2. Gọi G và G' lần lượt là trọng tâm của tam giác ABC và $A'B'C'$. Chứng minh rằng

$$\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = 3\overrightarrow{GG'}.$$

BÀI 3. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M, N, I lần lượt là trung điểm của AC, BD và MN . Chứng minh rằng

$$\begin{aligned} \text{a) } \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} &= \vec{0}, \\ \text{b) } \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} &= 4\overrightarrow{OI} \text{ (với } O \text{ là điểm bất kì).} \end{aligned}$$

BÀI 4. Cho tam giác ABC không vuông. Gọi G, H, O lần lượt là trọng tâm, trực tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Gọi D là điểm đối xứng của A qua O và M là trung điểm của cạnh BC . Chứng minh

QUICK NOTE

a) $\overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{HD}$.

d) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OH}$.

b) $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = 3\overrightarrow{HO}$.

e) $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$.

c) $\overrightarrow{HA} - \overrightarrow{HB} - \overrightarrow{HC} = 2\overrightarrow{OA}$.

f) $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{OM}$.

BÀI 5. Cho tam giác ABC . Gọi M là điểm trên cạnh BC sao cho $MB = 2MC$. Biết rằng $\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} = x\overrightarrow{AM}$. Tìm x .

BÀI 6. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M, N lần lượt thuộc các đoạn thẳng AB, CD sao cho $MB = 2MA$ và $NC = 2ND$. Biết rằng $2\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} = x\overrightarrow{MN}$. Tìm x .

BÀI 7. Cho tam giác đều ABC tâm O . Lấy M là một điểm bất kì trong tam giác. Gọi D, E, F lần lượt là hình chiếu của M trên BC, CA, AB . Biết rằng $\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF} = x\overrightarrow{MO}$, tìm x .

BÀI 8. Cho hình bình hành $ABCD$ có tâm O và E là trung điểm AD . Tìm các số thực x và y biết rằng

a) $\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EB} + 2\overrightarrow{EC} = x\overrightarrow{AB}$.

b) $\overrightarrow{EB} + 2\overrightarrow{EA} + 4\overrightarrow{ED} = y\overrightarrow{EC}$.

BÀI 9. Cho tam giác ABC . Dựng bên ngoài tam giác các hình bình hành $ABIF, BCPQ, CARS$. Biết rằng $\overrightarrow{RF} + \overrightarrow{IQ} + \overrightarrow{PS} = x(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$. Tìm x .

BÀI 10. Dựng bên ngoài tứ giác $ABCD$ các hình bình hành $ABEF, BCGH, CDIJ, DAKL$.

a) Chứng minh rằng $\overrightarrow{KF} + \overrightarrow{EH} + \overrightarrow{GJ} + \overrightarrow{IL} = \vec{0}$.

b) Chứng minh rằng $\overrightarrow{EL} - \overrightarrow{HI} = \overrightarrow{FK} - \overrightarrow{GJ}$.

BÀI 11. Cho đường tròn (I) nội tiếp tam giác ABC có $AB = c, AC = b, BC = a$. Chứng minh rằng

$$a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC} = \vec{0}.$$

BÀI 12. Cho tam giác ABC và một điểm M bất kì nằm trong tam giác ABC . Đặt $S_{MBC} = S_a, S_{MCA} = S_b, S_{MAB} = S_c$. Chứng minh rằng

$$S_a\overrightarrow{MA} + S_b\overrightarrow{MB} + S_c\overrightarrow{MC} = \vec{0}.$$



a) Cho M trùng với trọng tâm G của tam giác ABC , ta được $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

b) Cho M trùng với tâm đường tròn nội tiếp I của tam giác ABC , ta được kết quả

$$a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC} = \vec{0}.$$

c) Nếu tam giác ABC đều thì với điểm M bất kì trong tam giác, Ta có

$$x\overrightarrow{MA} + y\overrightarrow{MB} + z\overrightarrow{MC} = \vec{0},$$

trong đó x, y, z lần lượt là khoảng cách từ M đến các cạnh BC, CA và AB .

d) Khi M nằm ngoài tam giác ABC , ta có các kết quả như sau

(a) Nếu M thuộc góc \widehat{BAC} và góc đối đỉnh của nó thì

$$-S_a\overrightarrow{MA} + S_b\overrightarrow{MB} + S_c\overrightarrow{MC} = \vec{0}.$$

(b) Nếu M thuộc góc \widehat{ABC} và góc đối đỉnh của nó thì

$$S_a\overrightarrow{MA} - S_b\overrightarrow{MB} + S_c\overrightarrow{MC} = \vec{0}.$$

(c) Nếu M thuộc góc \widehat{ACB} và góc đối đỉnh của nó thì

$$S_a\overrightarrow{MA} + S_b\overrightarrow{MB} - S_c\overrightarrow{MC} = \vec{0}.$$

3. Bài tập trắc nghiệm

CÂU 1. Cho tam giác ABC có trọng tâm G . Gọi M là trung điểm AB . Chọn mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau:

- Ⓐ $\overrightarrow{CM} = -3\overrightarrow{MG}$.
 Ⓑ $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{AC}$.
 Ⓒ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AG}$.
 Ⓓ $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OG}$, O là điểm bất kì.

CÂU 2. Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O . Khẳng định nào sau đây là **đúng**?

- Ⓐ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AC}$.
 Ⓑ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AO}$.
 Ⓒ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CA}$.
 Ⓓ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BD}$.

CÂU 3. Cho I là trung điểm của đoạn thẳng AB . Với điểm M bất kỳ, ta luôn có

- Ⓐ $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MI}$.
 Ⓑ $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$.
 Ⓒ $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 3\overrightarrow{MI}$.
 Ⓓ $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{MI}$.

CÂU 4. Cho G là trọng tâm của tam giác ABC . Với mọi điểm M , ta luôn có:

- Ⓐ $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MG}$.
 Ⓑ $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MG}$.
 Ⓒ $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$.
 Ⓓ $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 4\overrightarrow{MG}$.

CÂU 5. Cho $\triangle ABC$ có G là trọng tâm, I là trung điểm BC . Đẳng thức nào đúng?

- Ⓐ $\overrightarrow{GA} = 2\overrightarrow{GI}$.
 Ⓑ $\overrightarrow{IG} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{IA}$.
 Ⓒ $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 2\overrightarrow{GI}$.
 Ⓓ $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GA}$.

CÂU 6. Khẳng định nào sau đây **không phải** là điều kiện cần và đủ để G là trọng tâm $\triangle ABC$, với M là trung điểm của BC và O là điểm bất kì?

- Ⓐ $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$.
 Ⓑ $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + 3\overrightarrow{OG} = \vec{0}$.
 Ⓒ $\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{CG} = \vec{0}$.
 Ⓓ $\overrightarrow{GM} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GA}$.

CÂU 7. Cho I là trung điểm của đoạn thẳng AB . Với M là một điểm bất kỳ, tìm đẳng thức đúng.

- Ⓐ $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$.
 Ⓑ $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{MI}$.
 Ⓒ $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MI}$.
 Ⓓ $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{IM}$.

CÂU 8. Cho tam giác ABC có trọng tâm G và M là trung điểm của AB . Mệnh đề nào sau đây **sai**?

- Ⓐ $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.
 Ⓑ $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = 2\overrightarrow{GM}$.
 Ⓒ $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$.
 Ⓓ $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$.

CÂU 9. Cho $\triangle ABC$ có M, Q, N lần lượt là trung điểm của AB, BC, CA . Khi đó vectơ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{NA} + \overrightarrow{BQ}$ là vectơ nào sau đây?

- Ⓐ $\vec{0}$.
 Ⓑ \overrightarrow{BC} .
 Ⓒ \overrightarrow{AQ} .
 Ⓓ \overrightarrow{CB} .

CÂU 10. Cho $\triangle ABC$ và điểm I thỏa mãn $\overrightarrow{IA} = 3\overrightarrow{IB}$. Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

- Ⓐ $\overrightarrow{CI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} - \frac{3}{2}\overrightarrow{CB}$.
 Ⓑ $\overrightarrow{CI} = \overrightarrow{CA} - 3\overrightarrow{CB}$.
 Ⓒ $\overrightarrow{CI} = \frac{3}{2}\overrightarrow{CB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$.
 Ⓓ $\overrightarrow{CI} = 3\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}$.

CÂU 11. Cho tam giác ABC có G là trọng tâm. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

- Ⓐ $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$ với mọi điểm M .
 Ⓑ $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.
 Ⓒ $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 2\overrightarrow{GA}$.
 Ⓓ $3\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

CÂU 12. Khẳng định nào sau đây **sai**?

- Ⓐ Nếu $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$ thì $ABCD$ là hình bình hành.

QUICK NOTE

QUICK NOTE

(B) Nếu O là trung điểm của AB thì với mọi M ta có $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MO}$.

(C) Nếu G là trọng tâm của tam giác ABC thì $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{AG}$.

(D) Với 3 điểm bất kì I, J, K ta có $\overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{JK} = \overrightarrow{IK}$.

CÂU 13. Cho hình bình hành $ABCD$. Đẳng thức nào sau đây **đúng**?

(A) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB}$.

(B) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AC}$.

(C) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AD}$.

(D) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{BD}$.

CÂU 14. Cho tam giác ABC biết I là trung điểm của đoạn thẳng AB , G là trọng tâm tam giác, M là điểm bất kỳ. Hãy chọn khẳng định **đúng**.

(A) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MG}$.

(B) $\overrightarrow{BI} + \overrightarrow{IC} = \vec{0}$.

(C) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 3\overrightarrow{MI}$.

(D) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$.

CÂU 15. Cho I là trung điểm của đoạn thẳng AB . Hỏi đẳng thức nào **đúng**?

(A) $2\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AB} = \vec{0}$.

(B) $\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IB} = \vec{0}$.

(C) $\overrightarrow{AI} - 2\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{IB}$.

(D) $\overrightarrow{AI} - \overrightarrow{IB} = \vec{0}$.

CÂU 16. Cho hình bình hành $ABCD$. Đẳng thức nào sau đây **đúng**?

(A) $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD} = \vec{0}$.

(B) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB}$.

(C) $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CD}$.

(D) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{BC}$.

CÂU 17. Cho G là trọng tâm tam giác ABC và I là trung điểm cạnh BC . Mệnh đề nào sau đây **sai**?

(A) $\overrightarrow{GA} = -2\overrightarrow{GI}$.

(B) $\overrightarrow{IG} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AI}$.

(C) $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 2\overrightarrow{GI}$.

(D) $\overrightarrow{GA} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AI}$.

CÂU 18. Cho tam giác ABC có trọng tâm G và M là trung điểm cạnh AC . Khẳng định nào sau đây **sai**?

(A) $BG = \frac{2}{3}BM$.

(B) $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{BG}$.

(C) $\overrightarrow{MG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BM}$.

(D) $GM = \frac{1}{2}GB$.

CÂU 19. Cho tam giác ABC . Gọi M là trung điểm của BC và G là trọng tâm của tam giác ABC . Đẳng thức nào sau đây **đúng**?

(A) $\overrightarrow{GA} = 2\overrightarrow{GM}$.

(B) $\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GM} = \vec{0}$.

(C) $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AG}$.

(D) $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GA}$.

CÂU 20. Cho G là trọng tâm tam giác ABC , gọi I là trung điểm của BC . Đẳng thức nào sau đây **đúng**?

(A) $\overrightarrow{GA} = 2\overrightarrow{GI}$.

(B) $\overrightarrow{IG} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{IA}$.

(C) $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 2\overrightarrow{GI}$.

(D) $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GA}$.

CÂU 21. Cho tam giác ABC và một điểm M tùy ý. Hãy chọn hệ thức đúng.

(A) $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{BC}$.

(B) $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}$.

(C) $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}$.

(D) $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}$.

CÂU 22. Cho tam giác ABC . Gọi M là trung điểm của BC và G là trọng tâm của tam giác ABC . Đẳng thức nào sau đây đúng?

(A) $\overrightarrow{GA} = 2\overrightarrow{GM}$.

(B) $\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GM} = \vec{0}$.

(C) $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AG}$.

(D) $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GA}$.

CÂU 23. Ba trung tuyến AM, BN, CP của tam giác ABC đồng quy tại G . Hỏi vectơ $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CP}$ bằng vectơ nào?

(A) $\frac{3}{2}(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC})$.

(B) $3(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{NG} + \overrightarrow{PG})$.

(C) $\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AC})$.

(D) $\vec{0}$.

CÂU 24. Cho hình chữ nhật $ABCD$, I và K lần lượt là trung điểm của BC, CD . Hệ thức nào sau đây đúng?

(A) $\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AK} = 2\overrightarrow{AC}$.

(B) $\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.

(C) $\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AK} = \overrightarrow{IK}$.

(D) $\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AK} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$.

CÂU 25. Cho tam giác ABC có M là trung điểm của cạnh BC . Các điểm D, E thỏa mãn các đẳng thức: $\overrightarrow{BD} = 4\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{AE} = 3\overrightarrow{AC}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

QUICK NOTE

Ⓐ $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DE}$. Ⓑ $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{6}\overrightarrow{DE}$. Ⓒ $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DE}$. Ⓓ $\overrightarrow{AM} = \frac{3}{4}\overrightarrow{DE}$.

CÂU 26. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M, N là trung điểm AB và DC . Lấy các điểm P, Q lần lượt thuộc các đường thẳng AD và BC sao cho $\overrightarrow{PA} = -2\overrightarrow{PD}$, $\overrightarrow{QB} = -2\overrightarrow{QC}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

Ⓐ $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC})$. Ⓑ $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{MQ}$.
Ⓒ $\overrightarrow{MN} = -\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC})$. Ⓓ $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NA})$.

CÂU 27. Cho hình bình hành $ABCD$. Đẳng thức nào đúng?

Ⓐ $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{BC}$. Ⓑ $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB}$.
Ⓒ $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{CD}$. Ⓓ $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CD}$.

CÂU 28. Cho G là trọng tâm của tam giác ABC . Trong các mệnh đề sau, tìm mệnh đề đúng?

Ⓐ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AG}$. Ⓑ $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = 3\overrightarrow{BG}$.
Ⓒ $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CG}$. Ⓓ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} = \vec{0}$.

CÂU 29. Cho hình vuông $ABCD$ có tâm là O . Trong các mệnh đề sau, tìm mệnh đề sai?

Ⓐ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AO}$. Ⓑ $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DO} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$.
Ⓒ $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$. Ⓓ $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB} = 4\overrightarrow{AB}$.

CÂU 30. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD . Khi đó $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$ bằng

Ⓐ \overrightarrow{MN} . Ⓑ $2\overrightarrow{MN}$. Ⓒ $3\overrightarrow{MN}$. Ⓓ $-2\overrightarrow{MN}$.

CÂU 31. Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O và điểm M bất kì. Khẳng định nào sau đây đúng?

Ⓐ $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MO}$. Ⓑ $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 2\overrightarrow{MO}$.
Ⓒ $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 3\overrightarrow{MO}$. Ⓓ $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MO}$.

CÂU 32. Cho năm điểm A, B, C, D, E . Khẳng định nào đúng?

Ⓐ $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{EC} = 2(\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{CB})$.
Ⓑ $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{EC} = 3(\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{CB})$.
Ⓒ $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{EC} = \frac{\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{CB}}{4}$.
Ⓓ $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{EC} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{CB}$.

CÂU 33. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABD , I là điểm trên GC sao cho $IC = 3IG$. Với mọi điểm M ta luôn có $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}$ bằng

Ⓐ $2\overrightarrow{MI}$. Ⓑ $3\overrightarrow{MI}$. Ⓒ $4\overrightarrow{MI}$. Ⓓ $5\overrightarrow{MI}$.

CÂU 34. Cho tam giác ABC . Gọi M là điểm trên cạnh AB sao cho $MA = 2MB$ và N là trung điểm của AC . Gọi P là trung điểm của MN . Khi đó

Ⓐ $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$. Ⓑ $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$.
Ⓒ $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$. Ⓓ $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$.

CÂU 35. Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn tâm O . Gọi H, G lần lượt là trực tâm, trọng tâm của tam giác. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

Ⓐ $\overrightarrow{OH} = 4\overrightarrow{OG}$. Ⓑ $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$. Ⓒ $\overrightarrow{OH} = 2\overrightarrow{OG}$. Ⓓ $3\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OG}$.

CÂU 36. Cho $\triangle ABC$. Trên các cạnh AB, BC và CA lấy các điểm D, E, F sao cho $DA = 2DB, EB = 2EC, FC = 2FA$. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau đây.

Ⓐ $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$. Ⓑ $\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.
Ⓒ $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$. Ⓓ $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$.

CÂU 37. Cho tứ giác $ABCD$ và điểm G thỏa mãn $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + 2\overrightarrow{GC} + k\overrightarrow{GD} = \vec{0}$. Gọi I, J lần lượt là trọng tâm tam giác các ACD, BCD . Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh CD, AB . Tìm k sao cho G là trung điểm của IJ .

QUICK NOTE

- (A) $k = 1$. (B) $k = 2$. (C) $k = 3$. (D) $k = 4$.

CÂU 38. Cho ngũ giác $ABCDE$ có M, N, P, Q lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC, CD, DE . Gọi I, J lần lượt là trung điểm của MP, NQ . Biết $\overrightarrow{IJ} = k\overrightarrow{EA}$, tìm k .

- (A) $k = -\frac{1}{2}$. (B) $k = \frac{1}{2}$. (C) $k = -\frac{1}{4}$. (D) $k = \frac{1}{4}$.

3

Xác định điểm thỏa mãn đẳng thức vectơ

Phương pháp giải

Bài toán: Xác định điểm M thỏa đẳng thức vectơ cho trước

☞ Bước 1. Ta biến đổi đẳng thức đã cho (bằng chèn điểm, quy tắc ba điểm, qui tắc hình bình hành, tính chất trung điểm, trọng tâm,...) về dạng: $\overrightarrow{OM} = \vec{v}$. Trong đó điểm O và vectơ \vec{v} cho trước.

☞ Bước 2. Nếu muốn dựng điểm M , ta lấy điểm O làm gốc, dựng một vectơ bằng vectơ \vec{v} , khi đó điểm ngọn của vectơ này chính là điểm M .



☞ Lưu ý 1. Thông thường, biểu thức $\overrightarrow{OM} = \vec{v}$ là những biểu thức đặc biệt (trung điểm, trọng tâm, điểm chia đoạn thẳng theo tỉ lệ $\vec{a} = k\vec{b}$, hình bình hành,... Ta dựa vào biểu thức này để dựng.

☞ Lưu ý 2. Một số cách chứng minh thường dùng.

— Để chứng minh I là trung điểm của đoạn thẳng AB , ta cần chứng minh một trong các hệ thức sau

$$\begin{aligned} &+ \overrightarrow{IA} = \overrightarrow{IB}. \\ &+ \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}. \\ &+ 2\overrightarrow{IA} = \overrightarrow{AB}. \\ &+ 2\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} \text{ (O bất kì)}. \end{aligned}$$

— Để chứng minh điểm G là trọng tâm của $\triangle ABC$, ta cần chứng minh một trong các hệ thức sau

$$\begin{aligned} &+ \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}. \\ &+ \text{Với } I \text{ là trung điểm của cạnh } BC \text{ thì } \overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AI}. \\ &+ \text{Với } O \text{ là điểm bất kì trong mặt phẳng thì: } 3\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}. \end{aligned}$$

— Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành $\Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \\ \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \end{cases}$.

— Để chứng minh hai điểm A_1 và A_2 trùng nhau ta có thể chứng minh một trong các hệ thức sau

$$\begin{aligned} &+ \overrightarrow{A_1A_2} = \vec{0}. \\ &+ \overrightarrow{OA_1} = \overrightarrow{OA_2} \text{ với } O \text{ là điểm bất kỳ}. \end{aligned}$$

— Điều kiện cần và đủ để $\triangle ABC$ và $\triangle A'B'C'$ có cùng trọng tâm là

$$\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \vec{0}.$$

— Nếu $\overrightarrow{MB} = k \cdot \overrightarrow{MC}$ ($k \neq 1$) thì $\overrightarrow{AM} = \frac{\overrightarrow{AB} - k \cdot \overrightarrow{AC}}{1 - k}$ (hay điểm M chia đoạn AB theo tỉ số $k \neq 1$).

1. Ví dụ minh họa

VÍ DỤ 1. Cho hai điểm A và B . Xác định điểm M thỏa mãn $2\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} = \vec{0}$.

VÍ DỤ 2. Cho tam giác ABC . Gọi M là trung điểm của AB và N thuộc cạnh AC , sao cho $NC = 2NA$. Hãy xác định K và D khi

a) $3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} - 12\overrightarrow{AK} = \vec{0}$. b) $3\overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{AC} - 12\overrightarrow{KD} = \vec{0}$.

VÍ DỤ 3. Cho hình bình hành $ABCD$.

QUICK NOTE

- a) Hãy dựng các điểm M, N thỏa mãn $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{NC} + \overrightarrow{ND} - \overrightarrow{NA} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}$.
- b) Chứng minh rằng $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{BA}$.

VÍ DỤ 4. Cho trước hai điểm A, B và hai số thực α, β thỏa mãn $\alpha + \beta \neq 0$

- a) Chứng minh rằng tồn tại duy nhất điểm I thỏa mãn $\alpha \cdot \overrightarrow{IA} + \beta \cdot \overrightarrow{IB} = \vec{0}$.
- b) Từ đó suy ra với điểm M bất kỳ, ta luôn có: $\alpha \cdot \overrightarrow{MA} + \beta \cdot \overrightarrow{MB} = (\alpha + \beta) \cdot \overrightarrow{MI}$.

A Lời bình 3

- ☞ Nếu $\alpha = \beta = 1$ thì điểm I chính là trung điểm của AB .
- ☞ Bài toán trên được mở rộng cho ba điểm A, B, C và bộ 3 số thực α, β, γ cho trước thỏa mãn $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$, nghĩa là:
- Tồn tại điểm I duy nhất thỏa mãn $\alpha \cdot \overrightarrow{IA} + \beta \cdot \overrightarrow{IB} + \gamma \cdot \overrightarrow{IC} = \vec{0}$
 - Từ đó suy ra với điểm M bất kỳ, ta luôn có $\alpha \cdot \overrightarrow{MA} + \beta \cdot \overrightarrow{MB} + \gamma \cdot \overrightarrow{MC} = (\alpha + \beta + \gamma) \cdot \overrightarrow{MI}$. Khi $\alpha = \beta = \gamma = 1$ thì I là trọng tâm của $\triangle ABC$.
- ☞ Bài toán trên vẫn đúng với n điểm A_i ($i = \overline{1, n}$) và bộ số thực α_i ($i = \overline{1, n}$) thỏa mãn $\sum_{i=1}^n \alpha_i \neq 0$
- ☞ Kết quả trên dùng giải bài toán “Cho n điểm $A_i, i = \overline{1, n}$ và bộ số thực $\alpha_i, i = \overline{1, n}$ thỏa mãn $\sum_{i=1}^n \alpha_i \neq 0$. Tìm số thực k và điểm cố định I sao cho đẳng thức vectơ $\sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{MA_i} = k \cdot \overrightarrow{MI}$ thỏa mãn với mọi điểm M ”.

2. Bài tập áp dụng

BÀI 1. Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $ACEF$.

- a) Dựng các điểm M, N sao cho $\overrightarrow{EM} = \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{FN} = \overrightarrow{BD}$.
- b) Chứng minh $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{MN}$.

BÀI 2. Cho tam giác ABC .

- a) Chứng minh với mọi điểm M , ta luôn có $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{CB}$.
- b) Hãy dựng điểm D sao cho $\overrightarrow{DA} + 2\overrightarrow{DB} - 3\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{CB}$.

BÀI 3. Cho tứ giác $ABCD$, M là điểm tùy ý. Trong mỗi trường hợp hãy tìm số k và điểm cố định I, J, K sao cho đẳng thức vectơ sau thỏa mãn với mọi điểm M .

- a) $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = k \cdot \overrightarrow{MI}$.
- b) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2 \cdot \overrightarrow{MC} = k \cdot \overrightarrow{MJ}$.
- c) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + 3 \cdot \overrightarrow{MD} = k \cdot \overrightarrow{MK}$

BÀI 4. Cho tứ giác lồi $ABCD$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA . Chứng minh $\triangle ANP$ và $\triangle CMQ$ có cùng trọng tâm.

3. Bài tập trắc nghiệm

CÂU 1. Cho điểm A và vectơ \vec{u} . Có bao nhiêu điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{AM} = \vec{u}$?

- (A) Duy nhất một. (B) Hai. (C) Không có. (D) Vô số.

CÂU 2. Cho hình bình hành $ABCD$, điểm M thỏa mãn $4\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$. Khi đó M là

- (A) trung điểm AC . (B) điểm C . (C) trung điểm AB . (D) trung điểm AD .

CÂU 3. Cho hai vectơ \vec{a} và \vec{b} khác $\vec{0}$ và không cùng phương. Biết hai vectơ $\vec{u} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$ và $\vec{v} = \vec{a} + (x - 1)\vec{b}$ cùng phương. Khi đó giá trị của x là

- (A) $\frac{1}{2}$. (B) $-\frac{3}{2}$. (C) $-\frac{1}{2}$. (D) $\frac{3}{2}$.

QUICK NOTE

CÂU 4. Cho hai điểm phân biệt A, B và hai số thực α, β khác 0 thỏa mãn $\alpha + \beta = 0$. Có bao nhiêu điểm M thỏa mãn $\alpha \overrightarrow{MA} + \beta \overrightarrow{MB} = \vec{0}$?

- (A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

CÂU 5. Cho ba điểm không thẳng hàng A, B, C và M là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CM}$. Chọn khẳng định đúng.

- (A) $ABMC$ là hình bình hành. (B) $ABCM$ là hình bình hành.
(C) M là trọng tâm của tam giác ABC . (D) CM là trung tuyến của tam giác ABC .

CÂU 6. Cho hai điểm phân biệt A, B và hai số thực α, β thỏa mãn $\alpha + \beta \neq 0$. Có bao nhiêu điểm M thỏa mãn $\alpha \overrightarrow{MA} + \beta \overrightarrow{MB} = \vec{0}$?

- (A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

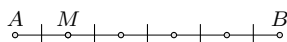
CÂU 7. Cho hai điểm phân biệt A và B . Điều kiện cần và đủ để I là trung điểm của đoạn thẳng AB là

- (A) $IA = IB$. (B) $\overrightarrow{IA} = -\overrightarrow{IB}$. (C) $\overrightarrow{IA} = \overrightarrow{IB}$. (D) $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{BI}$.

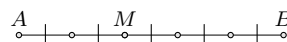
CÂU 8. Cho tam giác ABC , điểm I là trung điểm BC . Điểm G có tính chất nào sau đây thì G là trọng tâm tam giác ABC ?

- (A) $\overrightarrow{GI} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AI}$. (B) $GA = 2GI$.
(C) $\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{CG} = \vec{0}$. (D) $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 2\overrightarrow{GI}$.

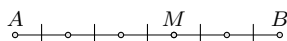
CÂU 9. Cho đoạn thẳng AB , hình nào sau đây biểu diễn đúng điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MA} + 4\overrightarrow{MB} = \vec{0}$.



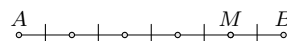
Hình 1



Hình 2



Hình 3



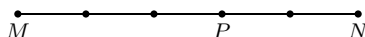
Hình 4

- (A) Hình 1. (B) Hình 2. (C) Hình 3. (D) Hình 4.

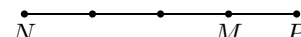
CÂU 10. Cho đoạn thẳng AB có trung điểm I . Tìm điểm M thỏa mãn $3\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$.

- (A) M trùng với I . (B) M là trung điểm của BI .
(C) M là trung điểm của AI . (D) M trùng với A hoặc M trùng với B .

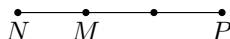
CÂU 11. Trên đường thẳng MN lấy điểm P sao cho $\overrightarrow{MN} = -3\overrightarrow{MP}$. Điểm P được xác định trong hình vẽ nào sau đây?



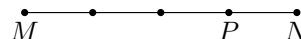
Hình 1



Hình 3



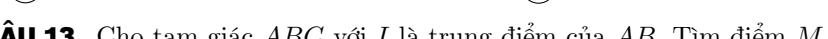
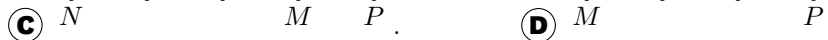
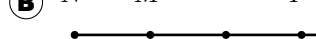
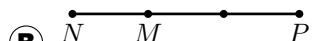
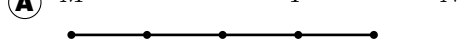
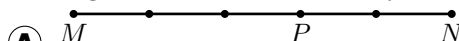
Hình 2



Hình 4

- (A) Hình 1. (B) Hình 2. (C) Hình 3. (D) Hình 4.

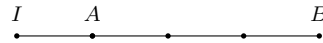
CÂU 12. Trên đường thẳng MN lấy điểm P sao cho $\overrightarrow{MN} = -3\overrightarrow{MP}$. Điểm P được xác định đúng theo hình vẽ nào sau đây.



CÂU 13. Cho tam giác ABC với I là trung điểm của AB . Tìm điểm M thỏa mãn hệ thức $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = \vec{0}$.

- (A) M là trung điểm của IC .
(B) M là trung điểm của IA .
(C) M là điểm trên cạnh IC sao cho $IM = 2MC$.
(D) M là trung điểm của BC .

CÂU 14. Đẳng thức nào sau đây mô tả đúng hình vẽ bên?



QUICK NOTE

- ☐ A $3\vec{AI} + \vec{AB} = \vec{0}$. ☐ B $3\vec{IA} + \vec{IB} = \vec{0}$.
☐ C $\vec{BI} + 3\vec{BA} = \vec{0}$. ☐ D $\vec{AI} + 3\vec{AB} = \vec{0}$.

CÂU 15. Trong mặt phẳng Oxy , tam giác ABC có trọng tâm G là điểm M thỏa mãn $\vec{AB} + \vec{AC} + 6\vec{AG} = 6\vec{AM}$. Vị trí của điểm M là

- ☐ A M là trung điểm của AC .
☐ B M là trung điểm của BC .
☐ C M là điểm thứ tư của hình bình hành $ABCM$.
☐ D M là trung điểm của AB .

CÂU 16. Cho tam giác ABC . Để điểm M thỏa mãn điều kiện $\vec{MA} + \vec{BM} + \vec{MC} = \vec{0}$ thì M phải thỏa mãn

- ☐ A M là trọng tâm tam giác ABC .
☐ B M là điểm sao cho tứ giác $ABMC$ là hình bình hành.
☐ C M thuộc trung trực của AB .
☐ D M là điểm sao cho tứ giác $BAMC$ là hình bình hành.

CÂU 17. Cho tứ giác $ABCD$ và M là điểm thỏa $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} + \vec{MD} = \vec{0}$. Chọn khẳng định đúng.

- ☐ A M là giao điểm hai đường chéo của tứ giác $ABCD$.
☐ B M là giao điểm của các đoạn thẳng nối hai trung điểm hai cạnh đối diện của tứ giác $ABCD$.
☐ C M là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $ABCD$.
☐ D M là tâm đường tròn nội tiếp tứ giác $ABCD$.

CÂU 18. Cho tam giác ABC , gọi M là điểm thỏa mãn $\vec{MA} - 2\vec{MB} + 2\vec{MC} = \vec{0}$. Khi đó,

- ☐ A $ABCM$ là hình bình hành.
☐ B $ABMC$ là hình bình hành.
☐ C $ABCM$ là hình bình thang có đáy lớn AM .
☐ D $ABCM$ là hình bình thang có đáy lớn BC .

CÂU 19. Gọi G và G' lần lượt là trọng tâm của hai tam giác ABC và $A'B'C'$. Tìm điều kiện cần và đủ để $G \equiv G'$.

- ☐ A $\vec{AA'} + \vec{BB'} + \vec{CC'} + 3\vec{GG'} = \vec{0}$. ☐ B $\vec{AA'} + \vec{BB'} + \vec{CC'} = 3\vec{GG'}$.
☐ C $\vec{AA'} + \vec{BB'} + \vec{CC'} - 3\vec{G'G} = \vec{0}$. ☐ D $\vec{AA'} + \vec{BB'} + \vec{CC'} = 3\vec{G'G}$.

CÂU 20. Cho tam giác ABC có I là trung điểm BC . Gọi M là điểm thỏa mãn $2\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = \vec{0}$. Xác định vị trí của điểm M .

- ☐ A M là trọng tâm tam giác ABC .
☐ B M là trung điểm AI .
☐ C M là điểm thuộc đoạn thẳng AI thỏa $MA = 2MI$.
☐ D M là điểm thuộc đoạn thẳng AI thỏa $MI = 2MA$.

CÂU 21. Cho hình bình hành $ABCD$, điểm M thỏa $4\vec{AM} = \vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AD}$. Khi đó điểm M là

- ☐ A trung điểm AC . ☐ B điểm C . ☐ C trung điểm AB . ☐ D trung điểm AD .

CÂU 22. Cho tam giác ABC . Gọi D, E là các điểm xác định bởi $\vec{AD} = \frac{2}{3}\vec{AB}$, $\vec{AE} = \frac{2}{5}\vec{AC}$.

Gọi K là trung điểm của DE và M xác định bởi $\vec{BM} = x\vec{BC}$. Tìm giá trị thực của x sao cho A, K, M thẳng hàng.

- ☐ A $\frac{3}{8}$. ☐ B $-\frac{4}{3}$. ☐ C $\frac{8}{3}$. ☐ D $-\frac{3}{4}$.

CÂU 23. Cho tam giác ABC . Gọi D là trung điểm cạnh AC và I là điểm thỏa mãn $\vec{IA} + 2\vec{IB} + 3\vec{IC} = \vec{0}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- ☐ A I là trọng tâm tam giác BCD .
☐ B I là trọng tâm tam giác ABC .

QUICK NOTE

(C) I là trọng tâm tam giác CDB .

(D) I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC .

CÂU 24. Cho đoạn thẳng AB và M là một điểm nằm trên đường thẳng AB sao cho $\overrightarrow{MA} = -\frac{1}{5}\overrightarrow{AB}$. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

- (A) $\overrightarrow{MB} = -4\overrightarrow{MA}$. (B) $\overrightarrow{MB} = -\frac{4}{5}\overrightarrow{AB}$. (C) $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AB}$. (D) $\overrightarrow{MA} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{MB}$.

CÂU 25. Cho tam giác ABC . Hãy xác định vị trí điểm M thỏa mãn $2\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} = \vec{0}$.

- (A) M thuộc cạnh AB và $AM = 2MB$. (B) M trên AB và ngoài đoạn AB .
(C) M là trung điểm AB . (D) M không thuộc đoạn AB .

CÂU 26. Cho tam giác ABC , N là trung điểm AB , M là điểm thỏa mãn đẳng thức $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$. Kết luận nào dưới đây đúng?

- (A) M đối xứng với C qua A . (B) A đối xứng với M qua C .
(C) C đối xứng với A qua M . (D) M là điểm tùy ý.

CÂU 27. Cho tam giác ABC và điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AB}$. Tìm vị trí điểm M .

- (A) M là điểm thứ tư của hình bình hành $ABCM$.
(B) M là trung điểm của AB .
(C) M là trung điểm của BC .
(D) M là trung điểm của AC .

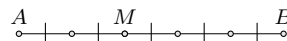
CÂU 28. Cho tam giác ABC , I là trung điểm AC . Vị trí điểm N thỏa mãn $\overrightarrow{NA} + 2\overrightarrow{NB} = \overrightarrow{CB}$ xác định bởi hệ thức

- (A) $\overrightarrow{BN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BI}$. (B) $\overrightarrow{BN} = 2\overrightarrow{BI}$. (C) $\overrightarrow{BN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BI}$. (D) $\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BI}$.

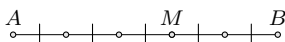
CÂU 29. Cho đoạn thẳng AB , hình nào sau đây biểu diễn đúng điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MA} + 4\overrightarrow{MB} = \vec{0}$.



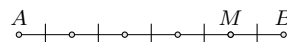
Hình 1



Hình 2



Hình 3



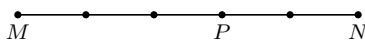
Hình 4

- (A) Hình 1. (B) Hình 2. (C) Hình 3. (D) Hình 4.

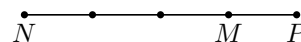
CÂU 30. Cho đoạn thẳng AB có trung điểm I . Tìm điểm M thỏa mãn $3\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$.

- (A) M trùng với I . (B) M là trung điểm của BI .
(C) M là trung điểm của AI . (D) M trùng với A hoặc M trùng với B .

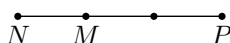
CÂU 31. Trên đường thẳng MN lấy điểm P sao cho $\overrightarrow{MN} = -3\overrightarrow{MP}$. Điểm P được xác định trong hình vẽ nào sau đây?



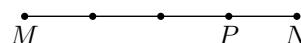
Hình 1



Hình 3



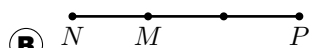
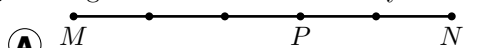
Hình 2



Hình 4

- (A) Hình 1. (B) Hình 2. (C) Hình 3. (D) Hình 4.

CÂU 32. Trên đường thẳng MN lấy điểm P sao cho $\overrightarrow{MN} = -3\overrightarrow{MP}$. Điểm P được xác định đúng theo hình vẽ nào sau đây.



CÂU 33. Đẳng thức nào sau đây mô tả đúng hình vẽ bên?



- Ⓐ $3\vec{AI} + \vec{AB} = \vec{0}$. Ⓑ $3\vec{IA} + \vec{IB} = \vec{0}$.
 Ⓒ $\vec{BI} + 3\vec{BA} = \vec{0}$. Ⓓ $\vec{AI} + 3\vec{AB} = \vec{0}$.

CÂU 34. Trong mặt phẳng Oxy , tam giác ABC có trọng tâm G là điểm M thỏa mãn $\vec{AB} + \vec{AC} + 6\vec{AG} = 6\vec{AM}$. Vị trí của điểm M là

- Ⓐ M là trung điểm của AC .
 Ⓑ M là trung điểm của BC .
 Ⓒ M là điểm thứ tư của hình bình hành $ABCM$.
 Ⓓ M là trung điểm của AB .

QUICK NOTE

4

Biểu diễn vectơ theo hai vectơ không cùng phương

Đặt vấn đề : Trong dạng toán này, chúng ta giải quyết bài toán dựa vào kiến thức:

“Cho trước hai vectơ \vec{a} , \vec{b} khác $\vec{0}$ và không cùng phương. Với mọi vectơ \vec{c} ta luôn tìm được một cặp số thực (α, β) duy nhất sao cho $\vec{c} = \alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{b}$ ”.

Phương pháp giải : Ta có thể chọn 1 trong 2 hướng giải sau

- ☑ **Hướng 1:** Từ giả thiết xác định được tính chất hình học, rồi từ đó khai triển vectơ cần biểu diễn bằng quy tắc ba điểm, quy tắc hình bình hành, tính chất trung điểm, trọng tâm, ...
 ☑ **Hướng 2:** Từ giả thiết, ta lập được mối quan hệ vectơ giữa các đối tượng, rồi từ đó khai triển biểu thức bằng quy tắc ba điểm, quy tắc hình bình hành, tính chất trung điểm, trọng tâm, ...

1. Ví dụ minh họa

VÍ DỤ 1. Cho $\triangle ABC$, gọi G là trọng tâm của tam giác và B_1 là điểm đối xứng của B qua G . Gọi M là trung điểm của BC . Hãy biểu diễn các vectơ

- a) $\vec{CB_1}$ và $\vec{AB_1}$ theo \vec{AB} , \vec{AC} . b) $\vec{MB_1}$ theo \vec{AB} , \vec{AC} .

VÍ DỤ 2. Cho $\triangle ABC$. Gọi I là điểm trên cạnh BC sao cho $2CI = 3BI$ và J là điểm trên BC kéo dài sao cho $5JB = 2JC$. Gọi G là trọng tâm $\triangle ABC$.

- a) Tính \vec{AI} , \vec{AJ} theo \vec{AB} , \vec{AC} . b) Tính \vec{AG} theo \vec{AI} và \vec{AJ} .

VÍ DỤ 3. Cho $\triangle ABC$ và hai điểm D , E thỏa mãn $\vec{DB} = k \cdot \vec{DC}$, $\vec{EB} = \frac{1}{k} \vec{EC}$ (với $k \neq 1$).

- a) Biểu diễn các vectơ \vec{AD} , \vec{AE} , \vec{DE} theo các vectơ \vec{AB} , \vec{AC} .
 b) Điểm F , I thỏa mãn $\vec{FA} = k \cdot \vec{FB}$, $\vec{IC} = k \cdot \vec{IA}$. Chứng minh $\vec{AD} + \vec{BI} + \vec{CF} = \vec{0}$.

2. Bài tập áp dụng

BÀI 1. Cho $\triangle ABC$ có M , D lần lượt là trung điểm của AB , BC và N là điểm trên cạnh AC sao cho $\vec{AN} = \frac{1}{2} \cdot \vec{NC}$. Gọi K là trung điểm của MN . Hãy tính các vectơ \vec{AK} , \vec{KD} theo \vec{AB} , \vec{AC} .

BÀI 2. Cho $\triangle ABC$. Trên hai cạnh AB và AC lấy hai điểm D và E sao cho $\vec{AD} = 2\vec{DB}$, $\vec{CE} = 3\vec{EA}$. Gọi M , I lần lượt là trung điểm của DE và BC . Hãy tính vectơ \vec{AM} , \vec{MI} theo \vec{AB} , \vec{AC} .

BÀI 3. Cho $\triangle ABC$, lấy điểm M , N , P sao cho $\vec{MB} = 3\vec{MC}$, $\vec{NA} + 3\vec{NC} = \vec{0}$, $\vec{PA} + \vec{PB} = \vec{0}$. Phân tích \vec{PM} , \vec{PN} theo \vec{AB} , \vec{AC} .

BÀI 4. Cho hình bình hành $ABCD$ có tâm là O . Hãy tính các vectơ sau theo vectơ \vec{AB} và \vec{AD} .

- a) \vec{AI} với I là trung điểm của \vec{BO} .
 b) \vec{BG} với G là trọng tâm $\triangle OCD$.

BÀI 5. Cho $\triangle ABC$ có hai đường trung tuyến BN , CP . Hãy biểu thị các vectơ \vec{AB} , \vec{BC} , \vec{CA} theo các vectơ \vec{BN} , \vec{CP} .

QUICK NOTE

BÀI 6. Cho $\triangle ABC$ có trọng tâm G . Gọi I, J nằm trên cạnh BC và BC kéo dài sao cho $2CI = 3BI, 5JB = 2JC$.

- a) Tính $\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AJ}$ theo $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$. b) Tính \overrightarrow{AG} theo $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$.

BÀI 7. Cho $\triangle ABC$ có G là trọng tâm tam giác và I là điểm đối xứng của B qua G . M là trung điểm của BC . Hãy tính $\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{CI}, \overrightarrow{MI}$ theo $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$.

BÀI 8. Cho $\triangle ABC$ có trọng tâm là G và các đường trung tuyến AM, BP . Gọi G' là điểm đối xứng với điểm G qua P .

- a) Hãy biểu diễn các vectơ $\overrightarrow{AG'}, \overrightarrow{CG'}$ theo $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$.
b) Chứng minh hệ thức: $5\overrightarrow{AC} - 6\overrightarrow{AB} = 6\overrightarrow{MG'}$.

BÀI 9. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm của các cạnh BC, CD . Hãy biểu diễn các vectơ $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD}$ theo các vectơ $\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AN}$.

BÀI 10. Cho tứ giác $ABCD$ có M, N theo thứ tự là trung điểm của các cạnh AD, BC . Hãy biểu diễn vectơ \overrightarrow{MN} theo $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}$ và theo $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{DB}$.

BÀI 11. Cho $\triangle ABC$. Gọi I là điểm đối xứng của trọng tâm G qua B .

- a) Chứng minh $\overrightarrow{IA} - 5\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \vec{0}$.
b) Đặt $\overrightarrow{AG} = \vec{a}, \overrightarrow{AI} = \vec{b}$. Tính $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ theo \vec{a}, \vec{b} .

BÀI 12. Cho $\triangle ABC$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB . Tính các vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}$ theo các vectơ $\overrightarrow{BN}, \overrightarrow{CP}$.

BÀI 13. Cho $\triangle ABC$. Gọi I là điểm trên cạnh BC kéo dài sao cho $IB = 3IC$.

- a) Tính \overrightarrow{AI} theo $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$.
b) Gọi J và K lần lượt là các điểm thuộc cạnh AC, AB sao cho $JA = 2JC$ và $KB = 3KA$. Tính \overrightarrow{JK} theo $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$.
c) Tính \overrightarrow{BC} theo \overrightarrow{AI} và \overrightarrow{JK} .

3. Bài tập trắc nghiệm

CÂU 1. Cho tam giác ABC có M là trung điểm của đoạn BC . Tìm mệnh đề đúng.

- ☐ A $\overrightarrow{AM} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$. ☐ B $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.
☐ C $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$. ☐ D $\overrightarrow{AM} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

CÂU 2. Cho hình bình hành $ABCD$, gọi I là trung điểm của CD , đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{AD} = \vec{b}$. Biểu diễn vectơ \overrightarrow{BI} theo các vectơ \vec{a}, \vec{b} .

- ☐ A $\overrightarrow{BI} = -\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$. ☐ B $\overrightarrow{BI} = \vec{a} + \vec{b}$.
☐ C $\overrightarrow{BI} = -\frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b}$. ☐ D $\overrightarrow{BI} = \frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b}$.

CÂU 3. Cho tam giác ABC và một điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{BM} = k\overrightarrow{BC}$. Biểu diễn vectơ \overrightarrow{AM} theo các vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$.

- ☐ A $\overrightarrow{AM} = (1-k)\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{AC}$. ☐ B $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{AC}$.
☐ C $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB} + (1-k)\overrightarrow{AC}$. ☐ D $\overrightarrow{AM} = (1-k)\overrightarrow{AB} + (1-k)\overrightarrow{AC}$.

CÂU 4. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi I là điểm trên cạnh BC được xác định bởi $\overrightarrow{BI} = k\overrightarrow{BC}$ ($k \neq 1$). Tìm hệ thức liên hệ giữa $\overrightarrow{DI}, \overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DC}$.

- ☐ A $\overrightarrow{DI} = (k-1)\overrightarrow{DB} - k\overrightarrow{DC}$. ☐ B $\overrightarrow{DI} = (1-k)\overrightarrow{DB} + k\overrightarrow{DC}$.
☐ C $\overrightarrow{DI} = (1+k)\overrightarrow{DB} - k\overrightarrow{DC}$. ☐ D $\overrightarrow{DI} = (1+k)\overrightarrow{DB} + k\overrightarrow{DC}$.

CÂU 5. Cho tam giác ABC có M là trung điểm của BC . Tính \overrightarrow{AB} theo \overrightarrow{AM} và \overrightarrow{BC} .

- ☐ A $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$. ☐ B $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AM}$.
☐ C $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$. ☐ D $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AM}$.

CÂU 6. Cho tam giác ABC có M là trung điểm của BC , I là trung điểm của AM . Khẳng định nào sau đây **đúng**?

- (A)** $\vec{AI} = \frac{1}{4}(\vec{AB} + \vec{AC})$. **(B)** $\vec{AI} = \frac{1}{4}(\vec{AB} - \vec{AC})$.
(C) $\vec{AI} = \frac{1}{4}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AC}$. **(D)** $\vec{AI} = \frac{1}{4}\vec{AB} - \frac{1}{2}\vec{AC}$.

CÂU 7. Cho tam giác ABC . Hai điểm M, N chia cạnh BC theo ba phần bằng nhau $BM = MN = NC$. Tính \vec{AM} theo \vec{AB} và \vec{AC} .

- (A)** $\vec{AM} = \frac{2}{3}\vec{AB} + \frac{1}{3}\vec{AC}$. **(B)** $\vec{AM} = \frac{1}{3}\vec{AB} + \frac{2}{3}\vec{AC}$.
(C) $\vec{AM} = \frac{2}{3}\vec{AB} - \frac{1}{3}\vec{AC}$. **(D)** $\vec{AM} = \frac{1}{3}\vec{AB} - \frac{2}{3}\vec{AC}$.

CÂU 8. Cho tam giác ABC có G là trọng tâm tam giác. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

- (A)** $\vec{GA} + \vec{BG} + \vec{CG} = \vec{0}$. **(B)** $\vec{AB} + \vec{AC} = 3\vec{AG}$.
(C) $\vec{AB} + \vec{AC} = 2\vec{AG}$. **(D)** $2\vec{AB} + \vec{BC} = 2\vec{AG}$.

CÂU 9. Cho $\triangle ABC$ có M là trung điểm của BC . Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

- (A)** $2\vec{AM} = \vec{AB} + \vec{AC}$. **(B)** $2\vec{AM} = 2\vec{AB} + \vec{BC}$.
(C) $2\vec{AM} = 2\vec{AC} - \vec{BC}$. **(D)** $2\vec{AM} = 2\vec{AC} + \vec{BC}$.

CÂU 10. Cho $\triangle ABC$ và I thỏa mãn $\vec{IA} = 3\vec{IB}$. Phân tích \vec{CI} theo \vec{CA} và \vec{CB} .

- (A)** $\vec{CI} = \frac{1}{2}(\vec{CA} - 3\vec{CB})$. **(B)** $\vec{CI} = \vec{CA} - 3\vec{CB}$.
(C) $\vec{CI} = \frac{1}{2}(3\vec{CB} - \vec{CA})$. **(D)** $\vec{CI} = 3\vec{CB} - \vec{CA}$.

CÂU 11. Cho hình bình hành $ABCD$ có N là trung điểm AB và G là trọng tâm $\triangle ABC$. Phân tích \vec{GA} theo \vec{BD} và \vec{NC} .

- (A)** $\vec{GA} = -\frac{1}{3}\vec{BD} + \frac{2}{3}\vec{NC}$. **(B)** $\vec{GA} = \frac{1}{3}\vec{BD} - \frac{4}{3}\vec{NC}$.
(C) $\vec{GA} = \frac{1}{3}\vec{BD} + \frac{2}{3}\vec{NC}$. **(D)** $\vec{GA} = \frac{1}{3}\vec{BD} - \frac{2}{3}\vec{NC}$.

CÂU 12. Cho $\triangle ABC$ có AK, BM là hai trung tuyến. Đặt $\vec{AK} = \vec{a}, \vec{BM} = \vec{b}$. Hãy biểu diễn \vec{BC} theo \vec{a} và \vec{b} là

- (A)** $\vec{BC} = \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{4}{3}\vec{b}$. **(B)** $\vec{BC} = \frac{2}{3}\vec{a} - \frac{4}{3}\vec{b}$.
(C) $\vec{BC} = -\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{4}{3}\vec{b}$. **(D)** $\vec{BC} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{4}{3}\vec{b}$.

CÂU 13. Cho $\triangle ABC$ với trọng tâm G . Đặt $\vec{CA} = \vec{a}, \vec{CB} = \vec{b}$. Biểu thị vectơ \vec{AG} theo hai vectơ \vec{a} và \vec{b} ta được

- (A)** $\vec{AG} = \frac{2\vec{a} - \vec{b}}{3}$. **(B)** $\vec{AG} = \frac{-2\vec{a} + \vec{b}}{3}$. **(C)** $\vec{AG} = \frac{2\vec{a} + \vec{b}}{3}$. **(D)** $\vec{AG} = \frac{\vec{a} - 2\vec{b}}{3}$.

CÂU 14. Cho tam giác ABC . Gọi M trên cạnh BC sao cho $MB = 3MC$. Khi đó, biểu diễn vectơ \vec{AM} theo vectơ \vec{AB} và vectơ \vec{AC} là

- (A)** $\vec{AM} = \frac{1}{4}\vec{AB} + 3\vec{AC}$. **(B)** $\vec{AM} = \frac{1}{4}\vec{AB} + \frac{3}{4}\vec{AC}$.
(C) $\vec{AM} = \frac{1}{4}\vec{AB} + \frac{1}{6}\vec{AC}$. **(D)** $\vec{AM} = \frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{1}{6}\vec{AC}$.

CÂU 15. Cho tam giác ABC có trọng tâm G . Đặt $\vec{CA} = \vec{u}, \vec{CB} = \vec{v}$. Khi đó \vec{AG} bằng

- (A)** $\frac{2\vec{u} - \vec{v}}{3}$. **(B)** $\frac{2\vec{u} + \vec{v}}{3}$. **(C)** $\frac{\vec{u} - 2\vec{v}}{3}$. **(D)** $\frac{-2\vec{u} + \vec{v}}{3}$.

CÂU 16. Cho tam giác ABC có G là trọng tâm tam giác. Điểm N trên BC sao cho $\vec{CN} = \frac{1}{2}\vec{BC}$. Biểu diễn vectơ \vec{AC} theo các vectơ \vec{AG} và \vec{AN} .

- (A)** $\vec{AC} = \frac{2}{3}\vec{AG} + \frac{1}{2}\vec{AN}$. **(B)** $\vec{AC} = \frac{3}{4}\vec{AG} + \frac{1}{2}\vec{AN}$.
(C) $\vec{AC} = \frac{4}{3}\vec{AG} + \frac{1}{2}\vec{AN}$. **(D)** $\vec{AC} = \frac{3}{4}\vec{AG} - \frac{1}{2}\vec{AN}$.

QUICK NOTE

QUICK NOTE

CÂU 17. Cho $\triangle ABC$ với G là trọng tâm. Đặt $\overrightarrow{CA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CB} = \vec{b}$. Khi đó \overrightarrow{AG} được biểu diễn theo hai vectơ \vec{a} và \vec{b} là

(A) $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\vec{a} - \frac{2}{3}\vec{b}$.

(B) $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$.

(C) $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b}$.

(D) $\overrightarrow{AG} = -\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$.

CÂU 18. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC . Đặt $\overrightarrow{GA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{GB} = \vec{b}$. Tìm các giá trị thực của m, n để $\overrightarrow{BC} = m\vec{a} + n\vec{b}$.

(A) $m = 1; n = 2$.

(B) $m = -1; n = -2$.

(C) $m = -2; n = -1$.

(D) $m = 2; n = 1$.

CÂU 19. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD và BC . Hãy tìm m và n sao cho $\overrightarrow{MN} = m\overrightarrow{AB} + n\overrightarrow{DC}$.

(A) $m = \frac{1}{2}, n = \frac{1}{2}$.

(B) $m = -\frac{1}{2}, n = \frac{1}{2}$.

(C) $m = \frac{1}{2}, n = -\frac{1}{2}$.

(D) $m = -\frac{1}{2}, n = -\frac{1}{2}$.

CÂU 20. Gọi G là trọng tâm của $\triangle ABC$. Đặt $\overrightarrow{GA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{GB} = \vec{b}$. Hãy tìm m, n để có $\overrightarrow{BC} = m\vec{a} + n\vec{b}$.

(A) $m = 1, n = 2$.

(B) $m = -1, n = -2$.

(C) $m = 2, n = 1$.

(D) $m = -2, n = -1$.

CÂU 21. Cho tứ giác $ABCD$ (với AB, CD không song song). Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD và BC . Tìm m, n để $\overrightarrow{MN} = m\overrightarrow{AB} + n\overrightarrow{DC}$.

(A) $m = \frac{1}{2}, n = \frac{1}{2}$.

(B) $m = -\frac{1}{2}, n = \frac{1}{2}$.

(C) $m = \frac{1}{2}, n = -\frac{1}{2}$.

(D) $m = -\frac{1}{2}, n = -\frac{1}{2}$.

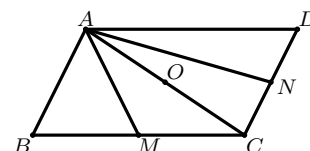
CÂU 22. Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC và CD . Đặt $\vec{a} = \overrightarrow{AM}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AN}$. Hãy biểu diễn \overrightarrow{AO} theo \vec{a} và \vec{b} .

(A) $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$.

(B) $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{6}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$.

(C) $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{3}\vec{a} + 2\vec{b}$.

(D) $\overrightarrow{AO} = \vec{a} + 3\vec{b}$.



CÂU 23. Cho tam giác ABC . Gọi M là trung điểm của AB và N là một điểm trên cạnh AC sao cho $NC = 2NA$. Gọi K là điểm trên cạnh MN sao cho $KN = 3KM$. Kết quả nào dưới đây đúng?

(A) $\overrightarrow{AK} = -\frac{3}{8}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{12}\overrightarrow{AC}$.

(B) $\overrightarrow{AK} = -\frac{3}{8}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{12}\overrightarrow{AC}$.

(C) $\overrightarrow{AK} = \frac{3}{8}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{12}\overrightarrow{AC}$.

(D) $\overrightarrow{AK} = \frac{3}{8}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{12}\overrightarrow{AC}$.

CÂU 24. Cho tứ giác $ABCD$. Trên cạnh AB, CD lần lượt lấy các điểm M, N sao cho $3\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB}$ và $3\overrightarrow{DN} = 2\overrightarrow{DC}$. Tính vectơ \overrightarrow{MN} theo hai vectơ $\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BC}$.

(A) $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.

(B) $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} - \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$.

(C) $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$.

(D) $\overrightarrow{MN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.

CÂU 25. Cho tam giác đều ABC và điểm I thỏa mãn $\overrightarrow{IA} = 2\overrightarrow{IB}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

(A) $\overrightarrow{CI} = \frac{\overrightarrow{CA} - 2\overrightarrow{CB}}{3}$.

(B) $\overrightarrow{CI} = \frac{\overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{CB}}{3}$.

(C) $\overrightarrow{CI} = -\overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{CB}$.

(D) $\overrightarrow{CI} = \frac{\overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{CB}}{-3}$.

CÂU 26. Cho tam giác ABC có G là trọng tâm tam giác. Lấy các điểm P, Q sao cho $\overrightarrow{PA} = 2\overrightarrow{PB}$, $3\overrightarrow{QA} + 2\overrightarrow{QC} = \vec{0}$. Biểu diễn vectơ \overrightarrow{AG} theo các vectơ $\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AQ}$.

(A) $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AP} + \frac{5}{6}\overrightarrow{AQ}$.

(B) $\overrightarrow{AG} = \frac{5}{6}\overrightarrow{AP} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AQ}$.

(C) $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AP} + \frac{5}{6}\overrightarrow{AQ}$.

(D) $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AP} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AQ}$.

CÂU 27. Cho tam giác ABC . Gọi I là điểm trên cạnh BC sao cho $2CI = 3BI$ và J thuộc BC kéo dài sao cho $5JB = 2JC$. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC . Biểu diễn vectơ \overrightarrow{AG} theo các vectơ $\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AJ}$.

QUICK NOTE

Ⓐ $\overrightarrow{AG} = \frac{35}{48}\overrightarrow{AI} - \frac{1}{16}\overrightarrow{AJ}$.

Ⓑ $\overrightarrow{AG} = \frac{35}{48}\overrightarrow{AI} + \frac{1}{16}\overrightarrow{AJ}$.

Ⓒ $\overrightarrow{AG} = \frac{25}{16}\overrightarrow{AI} - \frac{3}{16}\overrightarrow{AJ}$.

Ⓓ $\overrightarrow{AG} = \frac{25}{16}\overrightarrow{AI} + \frac{3}{16}\overrightarrow{AJ}$.

CÂU 28. Cho tam giác ABC . Gọi G là trọng tâm tam giác và H là điểm đối xứng của B qua G . Gọi M là trung điểm BC . Biểu diễn vectơ \overrightarrow{MH} theo các vectơ \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AC} .

Ⓐ $\overrightarrow{MH} = \frac{5}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$.

Ⓑ $\overrightarrow{MH} = -\frac{1}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{5}{6}\overrightarrow{AC}$.

Ⓒ $\overrightarrow{MH} = -\frac{5}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$.

Ⓓ $\overrightarrow{MH} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{5}{6}\overrightarrow{AC}$.

CÂU 29. Cho góc $\widehat{xOy} = 60^\circ$. Các điểm A, B nằm trên tia Ox , các điểm C, D nằm trên tia Oy sao cho $AB = CD = 2$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm các đoạn AC, BD . Biết A nằm giữa O và B , C nằm giữa O và D , tính IJ .

Ⓐ $IJ = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Ⓑ $IJ = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Ⓒ $IJ = \sqrt{3}$.

Ⓓ $IJ = 2\sqrt{3}$.

CÂU 30. Cho tam giác ABC , N là điểm xác định bởi $\overrightarrow{CN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC . Hệ thức tính \overrightarrow{AC} theo \overrightarrow{AG} và \overrightarrow{AN} là

Ⓐ $\overrightarrow{AC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AG} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AN}$.

Ⓑ $\overrightarrow{AC} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AG} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AN}$.

Ⓒ $\overrightarrow{AC} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AG} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AN}$.

Ⓓ $\overrightarrow{AC} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AG} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AN}$.

5

Chứng minh ba điểm thẳng hàng, hai đường thẳng song song, hai điểm trùng nhau

☑ Để chứng minh 3 điểm A, B, C thẳng hàng, ta chứng minh: $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$ (1).
Để nhận được (1), ta lựa chọn một trong hai hướng sau:

- Sử dụng các quy tắc biến đổi vectơ.
- Xác định (tính) vectơ \overrightarrow{AB} và \overrightarrow{AC} thông qua một tổ hợp trung gian.

Chú ý:

- Cho ba điểm A, B, C . Điều kiện cần và đủ để A, B, C thẳng hàng là: $\overrightarrow{MC} = \alpha\overrightarrow{MA} + (1 - \alpha)\overrightarrow{MB}$ với điểm M tùy ý và số thực α bất kỳ.
Đặc biệt khi $0 \leq \alpha \leq 1$ thì $C \in AB$. Kết quả trên còn được sử dụng để tìm điều kiện của tham số k (hoặc m) cho ba điểm A, B, C thẳng hàng.
- Nếu không dễ nhận thấy k trong biểu thức $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$, ta nên quy đồng biểu thức phân tích vectơ \overrightarrow{AB} và \overrightarrow{AC} để tìm ra số k .

☑ Để chứng minh $AB \parallel CD$ ta cần chứng minh $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{DC}$.

1. Ví dụ minh họa

VÍ DỤ 1. Cho hình bình hành $ABCD$, tâm O . Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm của AB, CD và P là điểm thỏa mãn hệ thức $\overrightarrow{OP} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}$. Chứng minh 3 điểm B, P, N thẳng hàng.

VÍ DỤ 2. Cho bốn điểm phân biệt A, B, C, D thỏa: $2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC} = 5\overrightarrow{AD}$. Chứng minh B, C, D thẳng hàng.

VÍ DỤ 3. Cho $\triangle ABC$, lấy điểm M, N, P sao cho $\overrightarrow{MB} = 3\overrightarrow{MC}$, $\overrightarrow{NA} + 3\overrightarrow{NC} = \vec{0}$, $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} = \vec{0}$.

a) Tính $\overrightarrow{PM}, \overrightarrow{PN}$ theo $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$.

b) Chứng minh ba điểm: M, N, P thẳng hàng.

VÍ DỤ 4. Cho $\triangle ABC$ có I là trung điểm của trung tuyến AM và D là điểm thỏa hệ thức $3\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$. Biểu diễn vectơ $\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BI}$ theo $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ và chứng minh ba điểm B, I, D thẳng hàng.

QUICK NOTE

2. Bài tập áp dụng

BÀI 1. Cho $\triangle ABC$.

- Dựng các điểm K, L sao cho $\overrightarrow{KA} + 2\overrightarrow{KB} + 3\overrightarrow{KC} = \vec{0}$, $2\overrightarrow{LB} + 3\overrightarrow{LC} = \vec{0}$
- Chứng minh ba điểm A, K, L thẳng hàng.

BÀI 2. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi I là trung điểm của AB và E là điểm thỏa hệ thức $3\overrightarrow{IE} = \overrightarrow{ID}$. Chứng minh ba điểm A, C, E thẳng hàng.

BÀI 3. Cho $\triangle ABC$.

- Dựng các điểm K, L sao cho $\overrightarrow{KA} + 2\overrightarrow{KB} + 3\overrightarrow{KC} = \vec{0}$ và $2\overrightarrow{LB} + 3\overrightarrow{LC} = \vec{0}$
- Chứng minh ba điểm A, K, L thẳng hàng.

BÀI 4. Cho $\triangle ABC$. Gọi M là trung điểm của cạnh AB , N và P là hai điểm thỏa mãn hệ thức $\overrightarrow{NA} + 2\overrightarrow{NC} = \vec{0}$, $\overrightarrow{PB} - 2\overrightarrow{PC} = \vec{0}$. Chứng minh ba điểm M, N, P thẳng hàng.

BÀI 5. Cho $\triangle ABC$. Hai điểm M, N được xác định bởi $3\overrightarrow{MA} + 4\overrightarrow{MB} = \vec{0}$, $\overrightarrow{NB} - 3\overrightarrow{NC} = \vec{0}$. Chứng minh MN đi qua trọng tâm $\triangle ABC$.

BÀI 6. Cho $\triangle ABC$.

- Dựng các điểm D, E thỏa các hệ thức $\overrightarrow{AD} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DE} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BC}$.
- Chứng minh ba điểm A, C, E thẳng hàng.

BÀI 7. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi I là trung điểm của cạnh BC và E là điểm xác định bởi $\overrightarrow{AE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$. Chứng minh ba điểm D, E, I thẳng hàng.

BÀI 8. Cho $\triangle ABC$ có trung tuyến AD và M là trung điểm AD . Điểm N được lấy trên AC sao cho $3\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AC}$. Chứng minh ba điểm B, M, N thẳng hàng.

BÀI 9. Cho $\triangle ABC$ có M là trung điểm BC và O là trung điểm của AM . Trên AB lấy điểm I , AC lấy điểm J sao cho $\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AJ} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$. Chứng minh ba điểm I, J, O thẳng hàng.

BÀI 10. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA . Gọi O là giao điểm của MP và NQ , G là trọng tâm của tam giác BCD . Chứng minh rằng ba điểm A, O, G thẳng hàng.

BÀI 11. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M, N là hai điểm di động trên AB, CD sao cho $\frac{MA}{MB} = \frac{ND}{NC}$ và hai điểm I, J lần lượt là trung điểm của AD, BC .

- Tính \overrightarrow{IJ} theo \overrightarrow{AB} và \overrightarrow{DC} .
- Chứng minh trung điểm P của MN nằm trên IJ .

BÀI 12. Cho $\triangle ABC$. Gọi P, Q, R là các điểm thỏa các đẳng thức :

$$3\overrightarrow{PB} + 4\overrightarrow{PC} = \vec{0}, \quad \overrightarrow{AQ} = 2\overrightarrow{QC}, \quad k\overrightarrow{RA} = \overrightarrow{RB}, \quad k \neq 1.$$

- Chứng minh rằng: $21\overrightarrow{PQ} = 2\overrightarrow{BC} + 7\overrightarrow{BA}$.
- Chứng minh rằng: $\overrightarrow{RP} = \frac{k}{1-k}\overrightarrow{BA} + \frac{4}{7}\overrightarrow{BC}$.
- Tìm k sao cho P, Q, R thẳng hàng.

BÀI 13. Cho hình bình hành $ABCD$.

- Gọi I, F, K là các điểm thỏa mãn $\overrightarrow{AI} = \alpha\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AF} = \beta\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AK} = \gamma\overrightarrow{AD}$. Chứng minh điều kiện cần và đủ để I, F, K thẳng hàng là

$$\frac{1}{\beta} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\gamma} \quad (\alpha, \beta, \gamma \neq 0).$$

- Gọi M, N là hai điểm lần lượt trên đoạn AB, CD sao cho $\frac{AM}{AB} = \frac{1}{3}$, $\frac{CN}{CD} = \frac{1}{2}$. Gọi G là trọng tâm $\triangle MNB$. Tính $\overrightarrow{AN}, \overrightarrow{AG}$ theo \overrightarrow{AB} và \overrightarrow{AC} . Gọi H là điểm xác định bởi $\overrightarrow{BH} = k \cdot \overrightarrow{BC}$. Tính \overrightarrow{AH} theo $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ và k . Tìm k để đường thẳng AH đi qua điểm G .

3. Bài tập trắc nghiệm

CÂU 1. Cho ba điểm A, B, C phân biệt. Điều kiện cần và đủ để ba điểm thẳng hàng là

- (A) $AB = AC$. (B) $\exists k \in \mathbb{R}^*: \overrightarrow{AB} = k \cdot \overrightarrow{AC}$.
(C) $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$. (D) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 3\overrightarrow{MC}, \forall$ điểm M .

CÂU 2. Khẳng định nào sau đây sai?

- (A) Ba điểm phân biệt A, B, C thẳng hàng khi và chỉ khi $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{BC}, k \neq 0$.
(B) Ba điểm phân biệt A, B, C thẳng hàng khi và chỉ khi $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{BC}, k \neq 0$.
(C) Ba điểm phân biệt A, B, C thẳng hàng khi và chỉ khi $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}, k \neq 0$.
(D) Ba điểm phân biệt A, B, C thẳng hàng khi và chỉ khi $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$.

CÂU 3. Phát biểu nào là sai?

- (A) Nếu $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$ thì $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}|$.
(B) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ thì A, B, C, D thẳng hàng.
(C) Nếu $3\overrightarrow{AB} + 7\overrightarrow{AC} = \vec{0}$ thì A, B, C thẳng hàng.
(D) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{BA}$.

CÂU 4. Cho hai vectơ \vec{a} và \vec{b} không cùng phương. Hai vectơ nào sau đây là cùng phương?

- (A) $\vec{u} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$ và $\vec{v} = \frac{1}{2}\vec{a} - 3\vec{b}$. (B) $\vec{u} = \frac{3}{5}\vec{a} + 3\vec{b}$ và $\vec{v} = 2\vec{a} - \frac{3}{5}\vec{b}$.
(C) $\vec{u} = \frac{2}{3}\vec{a} + 3\vec{b}$ và $\vec{v} = 2\vec{a} - 9\vec{b}$. (D) $\vec{u} = 2\vec{a} - \frac{3}{2}\vec{b}$ và $\vec{v} = -\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b}$.

CÂU 5. Biết rằng hai vectơ \vec{a} và \vec{b} không cùng phương nhưng hai vectơ $2\vec{a} - 3\vec{b}$ và $\vec{a} + (x-1)\vec{b}$ cùng phương. Khi đó giá trị của x là

- (A) $\frac{1}{2}$. (B) $-\frac{3}{2}$. (C) $-\frac{1}{2}$. (D) $\frac{3}{2}$.

CÂU 6. Cho \vec{a}, \vec{b} không cùng phương, $\vec{x} = -2\vec{a} + \vec{b}$. vectơ cùng hướng với \vec{x} là

- (A) $2\vec{a} - \vec{b}$. (B) $-\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$. (C) $4\vec{a} + 2\vec{b}$. (D) $-\vec{a} + \vec{b}$.

CÂU 7. Biết rằng hai vectơ \vec{a} và \vec{b} không cùng phương nhưng hai vectơ $3\vec{a} - 2\vec{b}$ và $(x+1)\vec{a} + 4\vec{b}$ cùng phương. Khi đó giá trị của x là

- (A) -7 . (B) 7 . (C) 5 . (D) 6 .

CÂU 8. Biết rằng hai vectơ \vec{a} và \vec{b} không cùng phương nhưng hai vectơ $2\vec{a} - 3\vec{b}$ và $\vec{a} + (x-1)\vec{b}$ cùng phương. Khi đó giá trị của x là

- (A) $\frac{1}{2}$. (B) $-\frac{3}{2}$. (C) $-\frac{1}{2}$. (D) $\frac{3}{2}$.

CÂU 9. Nếu I là trung điểm đoạn thẳng AB và $\overrightarrow{IA} = k\overrightarrow{AB}$ thì giá trị của k bằng

- (A) 1 . (B) $\frac{1}{2}$. (C) $-\frac{1}{2}$. (D) -2 .

CÂU 10. Cho tam giác ABC và một điểm M tùy ý. Chứng minh rằng vectơ $\vec{v} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}$. Hãy xác định vị trí của điểm D sao cho $\overrightarrow{CD} = \vec{v}$.

- (A) D là điểm thứ tư của hình bình hành $ABCD$.
(B) D là điểm thứ tư của hình bình hành $ACBD$.
(C) D là trọng tâm của tam giác ABC .
(D) D là trực tâm của tam giác ABC .

CÂU 11. Cho tam giác ABC . Hai điểm M, N được xác định bởi các hệ thức $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MA} = \vec{0}$, $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{NA} - 3\overrightarrow{AC} = \vec{0}$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

- (A) $MN \perp AC$.
(B) $MN // AC$.
(C) M nằm trên đường thẳng AC .
(D) Hai đường thẳng MN và AC trùng nhau.

CÂU 12. Cho tam giác ABC có trọng tâm G . Các điểm M, N thỏa mãn $7\overrightarrow{MG} = 3\overrightarrow{GC} - \overrightarrow{GB}$; $\overrightarrow{GN} = \frac{1}{2}(3\overrightarrow{GC} - \overrightarrow{GB})$. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

QUICK NOTE

QUICK NOTE

- (A) Đường thẳng MN đi qua G . (B) Đường thẳng MN đi qua A .
(C) Đường thẳng MN đi qua B . (D) Đường thẳng MN đi qua C .

CÂU 13. Cho hai vectơ \vec{a} và \vec{b} không cùng phương. Các điểm A, B, C sao cho $\vec{AB} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$; $\vec{AC} = m\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$. Khi A, B, C thẳng hàng thì khẳng định nào sau đây đúng?

- (A) $m \in (2; 3)$. (B) $m \in (1; 2)$. (C) $m \in (-1; 0)$. (D) $m \in (0; 1)$.

CÂU 14. Cho tam giác ABC . Các điểm M, N thỏa mãn $\vec{MN} = \vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}$. Khi đó, đường thẳng MN luôn đi qua một điểm cố định I . Khẳng định nào sau đây đúng?

- (A) I là trọng tâm của tam giác ABC .
(B) I là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .
(C) I là trực tâm của tam giác ABC .
(D) Tứ giác $ABCI$ là hình bình hành.

CÂU 15. Cho tam giác ABC . Các điểm M, N thỏa mãn $\vec{MN} = \vec{MA} - \vec{MB} + 2\vec{MC}$. Khi đó, đường thẳng MN luôn đi qua một điểm cố định I . Khẳng định nào sau đây đúng?

- (A) $\vec{IC} = \frac{1}{2}\vec{AB}$. (B) $\vec{IC} = \frac{1}{2}\vec{BA}$. (C) $\vec{IB} = \frac{1}{2}\vec{AC}$. (D) $\vec{IB} = \frac{1}{2}\vec{CA}$.

CÂU 16. Cho hình bình hành $ABCD$ có O là giao điểm của hai đường chéo. Các điểm M, N thỏa mãn $\vec{MN} = \vec{MA} + 2\vec{MB} + 3\vec{MC}$. Khi đó, đường thẳng MN luôn đi qua một điểm cố định I . Khẳng định nào sau đây đúng?

- (A) I là trọng tâm của tam giác OBC .
(B) I là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .
(C) I là trung điểm của cạnh DC .
(D) Tứ giác $ABCI$ là hình bình hành.

CÂU 17. Cho tam giác ABC có trọng tâm G . Gọi P, Q là các điểm sao cho $\vec{PA} = 2\vec{PB}$, $\vec{AQ} + k\vec{AC} = \vec{0}$ với $k \in \mathbb{R}$. Tìm k để P, Q, G thẳng hàng.

- (A) $k = \frac{2}{5}$. (B) $k = \frac{2}{3}$. (C) $k = -\frac{2}{5}$. (D) $k = -\frac{2}{3}$.

CÂU 18. Cho tam giác ABC . Gọi M, N là các điểm thỏa mãn $\vec{BM} = 3\vec{BC} - 2\vec{AB}$, $\vec{CN} = k\vec{AC} + 2\vec{BC}$. Tìm k để A, M, N thẳng hàng.

- (A) $k = -\frac{3}{2}$. (B) $k = -\frac{1}{2}$. (C) $k = \frac{1}{2}$. (D) $k = \frac{3}{2}$.

CÂU 19. Cho tam giác ABC có I là trung điểm của BC . Gọi M, N, P lần lượt là các điểm xác định bởi $\vec{AM} = m\vec{AB}$; $\vec{AN} = n\vec{AI}$; $\vec{AP} = p\vec{AC}$, với $mnp \neq 0$. Tìm điều kiện của m, n, p để M, N, P thẳng hàng.

- (A) $mp = mn + np$. (B) $2mn = mp + np$. (C) $2np = mn + mp$. (D) $2mp = mn + np$.

CÂU 20. Cho tam giác ABC . Gọi D, E lần lượt là các điểm thỏa mãn $\vec{BD} = \frac{2}{3}\vec{BC}$; $\vec{AE} = \frac{1}{4}\vec{AC}$. Điểm K trên AD thỏa mãn $\vec{AK} = \frac{a}{b}\vec{AD}$ (với $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản) sao cho 3 điểm B, K, E thẳng hàng. Tính $P = a^2 + b^2$.

- (A) $P = 5$. (B) $P = 13$. (C) $P = 29$. (D) $P = 10$.

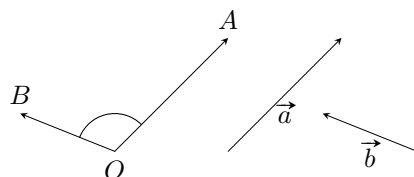
Bài 6. TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Góc giữa hai vectơ

Cho $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$. Từ một điểm O bất kì vẽ $\vec{OA} = \vec{a}, \vec{OB} = \vec{b}$.

Khi đó số đo của góc \widehat{AOB} được gọi là số đo góc giữa hai vectơ \vec{a} và \vec{b} hay đơn giản là góc giữa hai vectơ \vec{a}, \vec{b} . Kí hiệu $(\vec{a}, \vec{b}) = \widehat{AOB}$.



QUICK NOTE

- ☑ Quy ước rằng góc giữa hai vectơ \vec{a} và \vec{b} có thể nhận một giá trị tùy ý từ 0° đến 180° .
- ☑ $(\vec{a}, \vec{b}) = 0^\circ \Leftrightarrow \vec{a}, \vec{b}$ cùng hướng.
- ☑ $(\vec{a}, \vec{b}) = 180^\circ \Leftrightarrow \vec{a}, \vec{b}$ ngược hướng.
- ☑ Nếu $(\vec{a}, \vec{b}) = 90^\circ$ thì ta nói rằng \vec{a} và \vec{b} vuông góc với nhau, kí hiệu $\vec{a} \perp \vec{b}$ hoặc $\vec{b} \perp \vec{a}$.

2. Tích vô hướng của hai vectơ

Định nghĩa: Tích vô hướng của hai vectơ \vec{a} và \vec{b} là một số, kí hiệu $\vec{a} \cdot \vec{b}$, được xác định bởi công thức sau

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}).$$



- ☑ Ta có $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.
- ☑ $\vec{a} \cdot \vec{a}$ còn được viết là \vec{a}^2 được gọi là bình phương vô hướng của vectơ \vec{a} . Ta có $\vec{a}^2 = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos 0^\circ = |\vec{a}|^2$.

B. CÁC DẠNG TOÁN

1

Tính tích vô hướng của hai vectơ và xác định góc

1. Ví dụ minh họa

VÍ DỤ 1. Cho tam giác ABC vuông tại A và có $\widehat{B} = 50^\circ$. Hãy tính các góc (\vec{BA}, \vec{BC}) ; (\vec{AB}, \vec{BC}) ; (\vec{CA}, \vec{CB}) ; (\vec{AC}, \vec{BC}) ; (\vec{AC}, \vec{CB}) ; (\vec{AC}, \vec{BA}) .

VÍ DỤ 2. Cho tam giác đều ABC có cạnh a và trọng tâm G . Tính các tích vô hướng $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$; $\vec{AC} \cdot \vec{CB}$; $\vec{AG} \cdot \vec{AB}$; $\vec{GB} \cdot \vec{GC}$; $\vec{BG} \cdot \vec{GA}$; $\vec{GA} \cdot \vec{BC}$.

VÍ DỤ 3. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = a$, $BC = 2a$ và G là trọng tâm. Tính giá trị của các biểu thức sau:

- a) $\vec{AB} \cdot \vec{BC} + \vec{BC} \cdot \vec{CA} + \vec{CA} \cdot \vec{AB}$.
- b) $\vec{GA} \cdot \vec{GB} + \vec{GB} \cdot \vec{GC} + \vec{GC} \cdot \vec{GA}$.

VÍ DỤ 4. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . M là trung điểm của AB , G là trọng tâm tam giác ADM . Tính giá trị của các biểu thức sau:

- a) $(\vec{AB} + \vec{AD})(\vec{BD} + \vec{BC})$.
- b) $\vec{CG}(\vec{CA} + \vec{DM})$.

VÍ DỤ 5. Cho hai vectơ \vec{a} và \vec{b} có $|\vec{a}| = 7$, $|\vec{b}| = 12$ và $|\vec{a} + \vec{b}| = 13$. Tính cosin của góc giữa hai vectơ \vec{a} và $\vec{a} + \vec{b}$.

2. Bài tập tự luận

BÀI 1. Cho tam giác ABC vuông cân có $AB = AC = a$ và AH là đường cao. Tính các tích vô hướng sau

- a) $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$;
- b) $\vec{AH} \cdot \vec{BC}$;
- c) $\vec{AC} \cdot \vec{CB}$ và $\vec{AB} \cdot \vec{BC}$.

BÀI 2. Cho tam giác ABC đều cạnh a và AM là trung tuyến của tam giác. Tính các tích vô hướng sau

- a) $\vec{AC}(2\vec{AB} - 3\vec{AC})$;
- c) $\vec{AM} \cdot \vec{AB}$;
- b) $\vec{AC}(\vec{AC} - \vec{AB})$;
- d) $(\vec{CA} + \vec{BC})(\vec{CA} + \vec{CB})$.

BÀI 3. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = a\sqrt{2}$, $AD = 2a$. Gọi K là trung điểm của cạnh AD .

QUICK NOTE

a) Phân tích $\overrightarrow{BK}, \overrightarrow{AC}$ theo \overrightarrow{AB} và \overrightarrow{AD} .

b) Tính tích vô hướng $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AC}$.

BÀI 4. Cho tam giác ABC có $AB = 5, AC = 8, BC = 7$. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}$.

BÀI 5. Cho hai vectơ \vec{a} và \vec{b} có độ dài bằng 1 và thỏa mãn điều kiện $|2\vec{a} - 3\vec{b}| = \sqrt{7}$. Tính $\cos(\vec{a}, \vec{b})$.

BÀI 6. Cho tam giác ABC vuông tại A có $BC = a\sqrt{3}$, M là trung điểm của BC . Biết rằng $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{a^2}{2}$. Hãy tính AB, AC .

BÀI 7. Cho hai vectơ \vec{a} và \vec{b} có độ dài bằng 1 và góc tạo bởi hai vectơ đó bằng 60° . Xác định cosin góc giữa hai vectơ \vec{u} và \vec{v} với $\vec{u} = \vec{a} + 2\vec{b}, \vec{v} = \vec{a} - \vec{b}$.

BÀI 8. Cho hai vectơ \vec{a}, \vec{b} thỏa mãn $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$ và vectơ $\vec{x} = \vec{a} + 2\vec{b}$ vuông góc với vectơ $\vec{y} = 5\vec{a} - 4\vec{b}$. Tính góc giữa hai vectơ \vec{a} và \vec{b} .

BÀI 9. Cho các vectơ \vec{a} và \vec{b} thỏa mãn $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 1$ và $(\vec{a}, \vec{b}) = 60^\circ$. Tính góc giữa vectơ \vec{a} và vectơ $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$.

BÀI 10. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 2$, M là điểm được xác định bởi $\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{MB}$; G là trọng tâm tam giác ADM . Tính $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{GC}$.

BÀI 11. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có cạnh $AB = a, AD = b$. Tính theo a, b các tích vô hướng sau:

a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}; \overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AC}; (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD});$

b) $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD}$ với điểm M thuộc đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật $ABCD$.

2

Chứng minh đẳng thức tích vô hướng hay độ dài

- ☑ Với các biểu thức về tích vô hướng ta sử dụng định nghĩa hoặc tính chất của tích vô hướng. Cần đặc biệt lưu ý phép phân tích vectơ để biến đổi (quy tắc ba điểm, quy tắc trung điểm, quy tắc hình bình hành, ...).
- ☑ Với các công thức về độ dài ta thường sử dụng $AB^2 = \overrightarrow{AB}^2 = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB}$. Cần nắm vững tính chất của các hình cơ bản.

1. Ví dụ minh họa

VÍ DỤ 1. Cho đoạn thẳng AB và I là trung điểm của AB . Chứng minh rằng với mỗi điểm O ta có

a) $\overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{IB} = 0$.

b) $\overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}^2 - \overrightarrow{OA}^2)$

VÍ DỤ 2. Cho điểm M thay đổi trên đường tròn tâm O bán kính R ngoại tiếp tam giác đều ABC cho trước. Chứng minh $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 6R^2$.

VÍ DỤ 3. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có tâm O , M là điểm bất kì. Chứng minh

a) $MA^2 + MC^2 = MB^2 + MD^2$ (1);

b) $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD}$ (2).

2. Bài tập tự luận

BÀI 1. Cho $\triangle ABC$, chứng minh $AB^2 + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CA} = 0$.

BÀI 2. Cho $\triangle ABC$ nhọn, đường cao AH , Chứng minh rằng

a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AH}$;

b) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{BC}$.

BÀI 3. Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC ta có $S_{ABC} = \frac{1}{2} \sqrt{\overrightarrow{AB}^2 \cdot \overrightarrow{AC}^2 - (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})^2}$.

BÀI 4. Cho $\triangle ABC$ có trọng tâm G . Chứng minh rằng với mỗi điểm M ta có

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2.$$

BÀI 5. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có tâm O , M là điểm bất kì. Chứng minh

$$MA^2 + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD} = 2\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MO}.$$

BÀI 6. Cho hình chữ nhật $ABCD$ nội tiếp trong đường tròn tâm O , bán kính R . Chứng minh rằng với mọi M thuộc đường tròn (O) ta có

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} + (\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD}) (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}) = 8R^2.$$

BÀI 7. Chứng minh rằng với mọi điểm A, B, C, M ta luôn có

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0. \text{ (hệ thức Euler).}$$

BÀI 8. Cho $\triangle ABC$ các đường trung tuyến AD, BE, CF . Chứng minh rằng

$$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CF} \cdot \overrightarrow{AB} = 0.$$

BÀI 9. Cho $\triangle ABC$ đường cao AH , trung tuyến AI . Chứng minh rằng $|AB^2 - AC^2| = 2BC \cdot HI$.

3

Điều kiện vuông góc

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0.$$

1. Ví dụ minh họa

VÍ DỤ 1. Cho hai vectơ \vec{a} và \vec{b} vuông góc với nhau và $|\vec{a}| = 1, |\vec{b}| = \sqrt{2}$. Chứng minh hai vectơ $(2\vec{a} - \vec{b})$ và $(\vec{a} + \vec{b})$ vuông góc với nhau.

BÀI 1. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A có $AB = c, AC = b$. Tính $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$ theo b và c .

BÀI 2. Cho hai vectơ \vec{a} và \vec{b} thỏa mãn $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$ và hai vectơ $\vec{u} = \frac{2}{5}\vec{a} - 3\vec{b}$ và $\vec{v} = \vec{a} + \vec{b}$ vuông góc với nhau. Xác định góc giữa hai vectơ \vec{a} và \vec{b} .

4

Tập hợp điểm và chứng minh bất đẳng thức

Ta sử dụng các kết quả cơ bản sau:

a) Cho A, B là các điểm cố định, M là điểm di động

- ☉ Nếu $|\overrightarrow{AM}| = k$ với k là số thực dương cho trước thì tập hợp các điểm M là đường tròn tâm A , bán kính $R = k$.
- ☉ Nếu $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ thì tập hợp các điểm M là đường tròn đường kính AB .
- ☉ Nếu $\overrightarrow{MA} \cdot \vec{a} = 0$ với $\vec{a} \neq \vec{0}$ cho trước thì tập hợp các điểm M là đường thẳng đi qua A và vuông góc với giá của vectơ \vec{a} .

b) Các bất đẳng thức vectơ

- ☉ $\vec{a}^2 \geq 0 \forall \vec{a}$. Dấu "=" xảy ra khi $\vec{a} = \vec{0}$.
- ☉ $\vec{a} \cdot \vec{b} \leq |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$. Dấu "=" xảy ra khi $\vec{a} = k\vec{b}, k > 0$.

VÍ DỤ 1. Cho hai điểm A, B cố định có độ dài bằng a , vectơ \vec{a} khác $\vec{0}$. Tìm tập hợp điểm M sao cho

a) $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \frac{3a^2}{4}$

b) $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MA^2$

VÍ DỤ 2. Cho tam giác ABC . Tìm tập hợp điểm M sao cho

$$(\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}) \cdot \overrightarrow{BC} = 0.$$

VÍ DỤ 3. Cho tam giác ABC . Chứng minh rằng

a) $\cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2}$.

b) $\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C \geq -\frac{3}{2}$.

QUICK NOTE

QUICK NOTE

1. Bài tập tự luận

BÀI 1. Cho đoạn thẳng AB và số thực k . Tìm tập hợp điểm M trong mỗi trường hợp sau

a) $2MA^2 = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$. b) $MA^2 + 2MB^2 = k, k > 0$. c) $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{a} = k$.

BÀI 2. Cho tứ giác $ABCD$, I, J lần lượt là trung điểm của AB và CD . Tìm tập hợp điểm M sao cho $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MD} = \frac{1}{2}IJ^2$.

BÀI 3. Cho tam giác ABC , góc A nhọn, trung tuyến AI . Tìm tập hợp những điểm M di động trong góc BAC sao cho $AB \cdot AH + AC \cdot AK = AI^2$, trong đó H và K theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của M lên AB và AC .

BÀI 4. Cho tam giác ABC và k là số thực cho trước. Tìm tập hợp những điểm M sao cho

$$MA^2 - MB^2 = k.$$

BÀI 5. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a và số thực k cho trước. Tìm tập hợp điểm M sao cho

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD} = k.$$

BÀI 6. Cho tam giác ABC và các số thực x, y, z . Chứng minh rằng

$$xy \cos A + yz \cos B + zx \cos C \leq \frac{x^2 + y^2 + z^2}{2}.$$

2. Câu hỏi trắc nghiệm

CÂU 1. Cho \vec{a}, \vec{b} khác $\vec{0}$. Kí hiệu (\vec{a}, \vec{b}) là góc giữa hai vectơ \vec{a} và \vec{b} . Khẳng định nào sau đây là đúng?

- (A) $(\vec{a}, \vec{b}) = -(\vec{b}, \vec{a})$.
 (B) Nếu $(\vec{a}, \vec{b}) = 0^\circ$ thì \vec{a}, \vec{b} có giá trùng nhau.
 (C) $(\vec{a}, -\vec{b}) = -(\vec{a}, \vec{b})$.
 (D) $(k\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{a}, \vec{b})$ với mọi $k \in \mathbb{R}^+$.

CÂU 2. Cho tam giác ABC vuông tại A và có $\widehat{B} = 60^\circ$. Góc giữa \overrightarrow{CA} và \overrightarrow{CB} bằng

- (A) 60° . (B) 30° . (C) 90° . (D) 45° .

CÂU 3. Cho tam giác ABC vuông cân tại A , góc giữa \overrightarrow{AB} và \overrightarrow{BC} là

- (A) $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = 45^\circ$. (B) $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = 60^\circ$.
 (C) $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = 120^\circ$. (D) $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = 135^\circ$.

CÂU 4. Cho \vec{a} và \vec{b} là hai vectơ cùng hướng và đều khác $\vec{0}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- (A) $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$. (B) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.
 (C) $\vec{a} \cdot \vec{b} = -1$. (D) $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$.

CÂU 5. Cho tam giác đều ABC cạnh bằng a và H là trung điểm BC . Tính $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{CA}$.

- (A) $\frac{3a^2}{4}$. (B) $-\frac{3a^2}{4}$. (C) $\frac{3a^2}{2}$. (D) $-\frac{3a^2}{2}$.

CÂU 6. Cho tam giác ABC cân tại A , $\widehat{A} = 120^\circ$ và $AB = a$. Tính $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CA}$.

- (A) $\frac{a^2}{2}$. (B) $-\frac{a^2}{2}$. (C) $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$. (D) $-\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

CÂU 7. Cho tam giác ABC vuông tại A có $\widehat{B} = 60^\circ$, $AB = a$. Tính $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB}$.

- (A) $3a^2$. (B) $-3a^2$. (C) $3a$. (D) 0 .

CÂU 8. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . Tính tích vô hướng của hai vectơ \overrightarrow{AB} và \overrightarrow{AC} .

- (A) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = a\sqrt{2}$. (B) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 2a$. (C) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = a^2$. (D) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 2a^2$.

CÂU 9. Cho hai vectơ \vec{a} và \vec{b} khác $\vec{0}$. Xác định góc α giữa hai vectơ \vec{a} và \vec{b} khi $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$.

- (A) $\alpha = 180^\circ$. (B) $\alpha = 0^\circ$. (C) $\alpha = 90^\circ$. (D) $\alpha = 45^\circ$.

CÂU 10. Cho tam giác ABC vuông tại A và có góc $\widehat{B} = 50^\circ$. Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề đúng?

- (A) Góc giữa hai vectơ \overrightarrow{AC} , \overrightarrow{CB} bằng 140° . (B) Góc giữa hai vectơ \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{BC} bằng 50° .
(C) Góc giữa hai vectơ \overrightarrow{BC} , \overrightarrow{AC} bằng 90° . (D) Góc giữa hai vectơ \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{CB} bằng 130° .

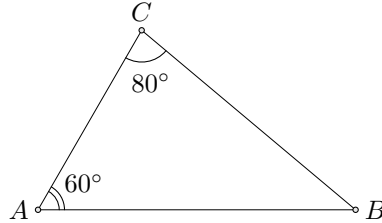
CÂU 11. Tam giác ABC vuông ở A và có $BC = 2AC$. Tính $\cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB})$.

- (A) $\cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}) = \frac{1}{2}$. (B) $\cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}) = -\frac{1}{2}$.
(C) $\cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$. (D) $\cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

CÂU 12.

Cho tam giác ABC như hình vẽ. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- (A) $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AB}) = 40^\circ$. (B) $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) = 140^\circ$.
(C) $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}) = 80^\circ$. (D) $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BA}) = 120^\circ$.



CÂU 13. Cho hình vuông $ABCD$, tính $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CA})$.

- (A) $\frac{1}{2}$. (B) $-\frac{1}{2}$. (C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$. (D) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

CÂU 14. Cho tam giác đều ABC . Tính $P = \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) + \cos(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}) + \cos(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AB})$.

- (A) $P = \frac{3\sqrt{3}}{2}$. (B) $P = \frac{3}{2}$. (C) $P = -\frac{3}{2}$. (D) $P = -\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

CÂU 15. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . Tính $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD})$.

- (A) $-2a^2$. (B) a^2 . (C) $2a^2$. (D) $-\frac{a^2}{\sqrt{2}}$.

CÂU 16. Cho $\triangle ABC$ đều cạnh bằng 3. Trên các cạnh AB , AC lần lượt lấy các điểm M , N sao cho $2AM = MB$, $NA = 2NC$. Giá trị của tích vô hướng $\overrightarrow{BN} \cdot \overrightarrow{CM}$ là

- (A) $\frac{7}{2}$. (B) $-\frac{7}{2}$. (C) $\frac{11}{2}$. (D) $-\frac{11}{2}$.

CÂU 17. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = a$, $BC = 2a$. Tính $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC}$ theo a .

- (A) $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} = -a\sqrt{3}$. (B) $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} = -3a^2$.
(C) $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} = a\sqrt{3}$. (D) $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} = 3a^2$.

CÂU 18. Cho tam giác ABC vuông tại A , có số đo góc B là 60° và $AB = a$. Kết quả nào sau đây là sai?

- (A) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$. (B) $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 3a^2$.
(C) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -a^2$. (D) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} = -3\sqrt{2}a^2$.

CÂU 19. Cho M là trung điểm AB , tìm mệnh đề sai.

- (A) $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{AB} = -MA \cdot AB$. (B) $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = -MA \cdot MB$.
(C) $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = AM \cdot AB$. (D) $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MA \cdot MB$.

CÂU 20. Cho 2 vectơ \vec{a} và \vec{b} thỏa $|\vec{a} + \vec{b}| = 2$ và có độ lớn bằng 1. Hãy tính $(3\vec{a} - 4\vec{b})(2\vec{a} + 5\vec{b})$.

- (A) 7. (B) 5. (C) -7. (D) -5.

CÂU 21. Cho hình thang vuông $ABCD$ có đường cao $AD = 3a$. Tính $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{BC}$.

- (A) $-9a^2$. (B) $15a^2$. (C) 0. (D) $9a^2$.

CÂU 22. Cho tam giác ABC có $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$. Gọi M là trung điểm cạnh BC . Tính $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC}$.

- (A) $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{b^2 - c^2}{2}$. (B) $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{c^2 + b^2}{2}$.
(C) $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{c^2 + b^2 + a^2}{3}$. (D) $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2}$.

QUICK NOTE

QUICK NOTE

CÂU 23. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . Tính $P = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BA})$.

- (A) $P = 2\sqrt{2}a$. (B) $P = 2a^2$. (C) $P = a^2$. (D) $P = -2a^2$.

CÂU 24. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . Gọi E là điểm đối xứng của D qua C . Tính $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB}$.

- (A) $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB} = 2a^2$. (B) $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB} = \sqrt{3}a^2$.
(C) $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB} = \sqrt{5}a^2$. (D) $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB} = 5a^2$.

CÂU 25. Biết $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$ và $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- (A) \vec{a} và \vec{b} cùng hướng.
(B) \vec{a} và \vec{b} nằm trên hai đường thẳng hợp với nhau một góc 80° .
(C) \vec{a} và \vec{b} ngược hướng.
(D) \vec{a} và \vec{b} nằm trên hai đường thẳng hợp với nhau một góc 60° .

CÂU 26. Cho tam giác ABC vuông tại A , $AB = a$, $AC = a\sqrt{3}$. Gọi M là trung điểm của BC . Tính cosin góc giữa hai vectơ \overrightarrow{MA} và \overrightarrow{BC} .

- (A) $\cos(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{BC}) = \frac{1}{2}$. (B) $\cos(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{BC}) = -\frac{1}{2}$.
(C) $\cos(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{BC}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$. (D) $\cos(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{BC}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

CÂU 27. Cho tam giác ABC . Tính tổng $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}) + (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AB})$.

- (A) 180° . (B) 360° . (C) 270° . (D) 120° .

CÂU 28. Tam giác ABC có góc A bằng 100° và có trực tâm H . Tính tổng $(\overrightarrow{HA}, \overrightarrow{HB}) + (\overrightarrow{HB}, \overrightarrow{HC}) + (\overrightarrow{HC}, \overrightarrow{HA})$.

- (A) 360° . (B) 180° . (C) 80° . (D) 160° .

CÂU 29. Cho hình vuông $ABCD$ tâm O . Tính tổng $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}) + (\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{CB}) + (\overrightarrow{CO}, \overrightarrow{DO})$.

- (A) 45° . (B) 405° . (C) 315° . (D) 225° .

CÂU 30. Cho tam giác ABC cân tại A , góc $\hat{A} = 20^\circ$. Gọi BM là đường phân giác trong của góc \widehat{ABC} . Tính $\cos(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{MC})$.

- (A) $\frac{1}{2}$. (B) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$. (C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$. (D) $-\frac{1}{2}$.

CÂU 31. Cho hình thang vuông $ABCD$, vuông tại A và D , biết $AB = AD = a$, $CD = 2a$. Tính $\cos(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{CB})$.

- (A) $\frac{\sqrt{2}}{2}$. (B) $-\frac{1}{2}$. (C) 0 . (D) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

CÂU 32. Cho hình thoi $ABCD$ cạnh a , góc $\widehat{ABC} = 120^\circ$. Gọi G là trọng tâm của tam giác BCD và α là góc giữa hai đường thẳng DA và BG . Tính $\sin \alpha$.

- (A) $\sin \alpha = \frac{1}{2}$. (B) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$. (C) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$. (D) $\sin \alpha = 1$.

CÂU 33. Cho tam giác ABC có các cạnh bằng a, b, c . Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ theo a, b, c .

- (A) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 - c^2)$. (B) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(a^2 + c^2 - b^2)$.
(C) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(b^2 + c^2 + a^2)$. (D) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(b^2 + c^2 - a^2)$.

CÂU 34. Cho nửa đường tròn tâm O , có đường kính $AB = 2R$. Gọi M, N là hai điểm thuộc nửa đường tròn sao cho hai dây cung AM và BN cắt nhau tại I . Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

- (A) $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AB}$. (B) $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{AB}$.
(C) $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AN}$. (D) $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{BA}$.

CÂU 35. Cho hai điểm M, N nằm trên đường tròn đường kính $AB = 2r$. Gọi I là giao điểm của hai đường thẳng AM và BN . Tính theo r giá trị biểu thức $P = \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BN} \cdot \overrightarrow{BI}$.

- (A) $P = 4r^2$. (B) $P = 2r^2$. (C) $P = r^2$. (D) $P = \frac{r^2}{4}$.

QUICK NOTE

CÂU 36. Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh là a . Giá trị của biểu thức $(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BA}) \cdot (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD})$ là

- (A) 0. (B) $2a^2$. (C) $-2a^2$. (D) $-2\sqrt{2}a^2$.

CÂU 37. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh bằng 2. Điểm M nằm trên đoạn thẳng AC sao cho $AM = \frac{AC}{4}$. Gọi N là trung điểm của đoạn thẳng DC . Tính $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MN}$.

- (A) $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MN} = -4$. (B) $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MN} = 0$. (C) $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MN} = 4$. (D) $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MN} = 16$.

CÂU 38. Cho hình thoi $ABCD$ có $AC = 8$. Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

- (A) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 24$. (B) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 26$. (C) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 28$. (D) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 32$.

CÂU 39. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = a$ và $AD = a\sqrt{2}$. Gọi K là trung điểm của cạnh AD . Tính $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AC}$.

- (A) $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$. (B) $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AC} = -a^2\sqrt{2}$.
(C) $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AC} = a^2\sqrt{2}$. (D) $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AC} = 2a^2$.

CÂU 40. Cho tứ giác $ABCD$ có hai đường chéo vuông góc với nhau tại M và $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD}$. Gọi P là trung điểm của AD . Góc giữa hai đường thẳng MP và BC là

- (A) 90° . (B) 60° . (C) 45° . (D) 30° .

CÂU 41. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . Gọi M và N lần lượt là trung điểm của BC và CD . Tính $\cos(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{NA})$.

- (A) $\frac{4}{5}$. (B) $-\frac{4}{5}$. (C) $\frac{3}{5}$. (D) $-\frac{3}{5}$.

CÂU 42. Cho hình vuông $ABCD$. Gọi M là trung điểm của cạnh BC . Tính góc giữa hai vectơ \overrightarrow{AM} và $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB}$.

- (A) 45° . (B) 30° . (C) 135° . (D) 90° .

CÂU 43. Cho hình vuông $ABCD$. Trên cạnh AD, AB lần lượt lấy hai điểm E, F sao cho $AE = AF$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên đường thẳng BE . Tính $\cos(\overrightarrow{FH}, \overrightarrow{CH})$.

- (A) 0. (B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$. (C) $-\frac{1}{2}$. (D) $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

CÂU 44. Cho hai điểm A và B , O là trung điểm của AB và M là điểm tùy ý, biết rằng $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = OM^2 + kOA^2$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- (A) $k = 1$. (B) $k = -1$. (C) $k = 2$. (D) $k = -2$.

CÂU 45. Cho I là trung điểm AB , M là điểm tùy ý. Biết rằng $\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{AB} = k(MB^2 - MA^2)$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- (A) $k = 2$. (B) $k = \frac{1}{2}$. (C) $k = -1$. (D) $k = -\frac{1}{2}$.

CÂU 46. Cho I là trung điểm AB , M là điểm tùy ý. Biết rằng $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 + kAB^2$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- (A) $k = 2$. (B) $k = \frac{1}{2}$. (C) $k = -1$. (D) $k = -\frac{1}{4}$.

CÂU 47. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- (A) $(\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c} = \vec{a} (\vec{b} \cdot \vec{c})$. (B) $(\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = \vec{a}^2 \cdot \vec{b}^2$.
(C) $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin(\vec{a}, \vec{b})$. (D) $\vec{a} \cdot (\vec{b} - \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{a} \cdot \vec{c}$.

CÂU 48. Cho hai vectơ \vec{a} và \vec{b} . Đẳng thức nào sau đây sai?

- (A) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{4}(|\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2)$. (B) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}(|\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2)$.
(C) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}(|\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2)$. (D) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2)$.

CÂU 49. Cho hình thoi $ABCD$ có cạnh bằng a và $\hat{A} = 60^\circ$, điểm M tùy ý. Biết rằng $MA^2 - MB^2 + MC^2 - MD^2 = ka^2$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- (A) $k = 1$. (B) $k = 2$. (C) $k = 4$. (D) $k = 6$.

CÂU 50. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD , M là điểm tùy ý. Biết rằng $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = MO^2 + kBD^2$. Khẳng định nào sau đây đúng?

QUICK NOTE

- ☐ $k = -\frac{1}{2}$.
 ☐ $k = 2$.
 ☐ $k = -\frac{1}{4}$.
 ☐ $k = 4$.

CÂU 51. Cho tam giác ABC , gọi H là trực tâm của tam giác và M là trung điểm của cạnh BC . Đẳng thức nào sau đây đúng?

- ☐ $\overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{MA} = \frac{1}{2}BC^2$.
 ☐ $\overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{MA} = -\frac{1}{4}BC^2$.
☐ $\overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{MA} = \frac{1}{4}BC^2$.
 ☐ $\overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{MA} = \frac{1}{5}BC^2$.

CÂU 52. Cho điểm M thay đổi trên đường tròn tâm O bán kính R ngoại tiếp tam giác đều ABC cho trước. Biết rằng $MA^2 + 2\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} = kR^2$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- ☐ $k = 2$.
 ☐ $k = 3$.
 ☐ $k = 4$.
 ☐ $k = 6$.

CÂU 53. Cho \vec{a}, \vec{b} có $(\vec{a} + 2\vec{b})$ vuông góc với vectơ $(5\vec{a} - 4\vec{b})$ và $|\vec{a}| = |\vec{b}|$. Khi đó

- ☐ $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
 ☐ $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = 90^\circ$.
☐ $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
 ☐ $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{1}{2}$.

CÂU 54. Cho tam giác ABC . Tập hợp điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ là

- ☐ Đường trung trực đoạn BC .
☐ Đường tròn có tâm A .
☐ Đường thẳng đi qua A và vuông góc với BC .
☐ Đường thẳng đi qua A song song với BC .

CÂU 55. Cho đoạn thẳng AB . Tập hợp điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ là

- ☐ Đường trung trực đoạn AB .
☐ Đường tròn.
☐ Đường thẳng đi qua A và vuông góc với AB .
☐ Đường thẳng đi qua B và vuông góc với AB .

CÂU 56. Cho tam giác ABC . Tập hợp các điểm M thỏa $(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB})(\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}) = 0$ là

- ☐ Đường thẳng vuông góc với AB .
 ☐ Đường thẳng vuông góc với AC .
☐ Đường thẳng vuông góc với BC .
 ☐ Đường tròn.

CÂU 57. Cho tam giác ABC . Tập hợp các điểm M thỏa $(\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB})(\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}) = 0$ là

- ☐ Đường thẳng vuông góc với AB .
 ☐ Đoạn thẳng.
☐ Đường thẳng song song với AB .
 ☐ Đường tròn.

CÂU 58. Cho tam giác ABC . Tập hợp các điểm M thỏa $2MA^2 + \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC}$ là

- ☐ Đường thẳng.
 ☐ Đường tròn đường kính BC .
☐ Đường tròn đi qua A .
 ☐ Đường tròn đi qua B .

CÂU 59. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . Tìm tập hợp các điểm M thỏa mãn

$$(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC})(\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MB}) = 3a^2$$

- ☐ Đường thẳng vuông góc với BC .
 ☐ Đường thẳng song song với BC .
☐ Đường tròn đường kính AB .
 ☐ Đường tròn đường kính AC .

CÂU 60. Cho tam giác ABC . Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = 2\cos A + 6\cos B + 3\cos C$ bằng

- ☐ 11.
 ☐ 10.
 ☐ 7.
 ☐ 6.

MỤC LỤC

Bài 5. Tích của một vectơ với một số	1
Ⓐ Tóm tắt lý thuyết.....	1
Ⓑ Các dạng toán.....	1
📁 Dạng 1. Xác định vectơ tích, tính độ dài vectơ.....	1
📁 Dạng 2. Chứng minh đẳng thức vectơ, thu gọn biểu thức.....	4
📁 Dạng 3. Xác định điểm thỏa mãn đẳng thức vectơ.....	10
📁 Dạng 4. Biểu diễn vectơ theo hai vectơ không cùng phương.....	15
📁 Dạng 5. Chứng minh ba điểm thẳng hàng, hai đường thẳng song song, hai điểm trùng nhau..	19
Bài 6. Tích vô hướng của hai vectơ	22
Ⓐ Tóm tắt lý thuyết.....	22
Ⓑ Các dạng toán.....	23
📁 Dạng 1. Tính tích vô hướng của hai vectơ và xác định góc.....	23
📁 Dạng 2. Chứng minh đẳng thức tích vô hướng hay độ dài.....	24
📁 Dạng 3. Điều kiện vuông góc.....	25
📁 Dạng 4. Tập hợp điểm và chứng minh bất đẳng thức.....	25

