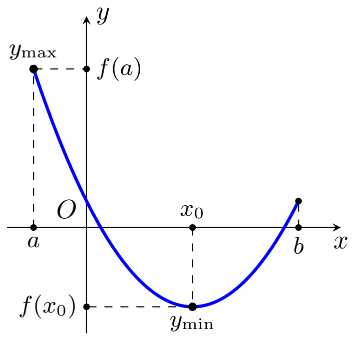
# Bài 2. GIÁ TRỊ LỚN NHẤT - NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ

## A. LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập $\mathscr{D}$. Ta có

① $M$ là giá trị lớn nhất của hàm số nếu $\begin{cases} f(x) \leq M, \forall x \in \mathscr{D} \\ \exists x_0 \in \mathscr{D} : f(x_0) = M. \end{cases}$

Kí hiệu $\boxed{\max\limits_{x \in \mathscr{D}} f(x) = M}$




② $n$ là giá trị nhỏ nhất của hàm số nếu $\begin{cases} f(x) \geq n, \forall x \in \mathscr{D} \\ \exists x_0 \in \mathscr{D} : f(x_0) = n. \end{cases}$

Kí hiệu $\boxed{\min\limits_{x \in \mathscr{D}} f(x) = n}$

① *Khi yêu cầu tìm max min của hàm số mà không nói rõ xét trên tập nào, thì ta hiểu là tìm max min trên miền xác định của hàm số đó.*

② *Để tìm max min của hàm số $y = f(x)$ trên miền $\mathscr{D}$, ta thường lập bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ trên $\mathscr{D}$. Từ bảng biến thiên, ta kết luận:*

- *Điểm ở vị trí cao nhất $\longrightarrow$ Kết luận max;*
- *Điểm ở vị trí thấp nhất $\longrightarrow$ Kết luận min.*

③ *Để tìm max min của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[a; b]$ ($f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ và có đạo hàm trên $(a; b)$ (có thể trừ một số hữu hạn các điểm) và $f'(x) = 0$ chỉ tại một số hữu hạn các điểm trong $(a; b)$), thì ta có thể giải như sau:*

- *Giải $f'(x) = 0$ tìm các nghiệm $x_0 \in (a; b)$;*
- *Tìm các điểm $x_i \in (a; b)$ mà tại đó đạo hàm không xác định (nếu có).*
- *Tính toán $f(a)$, $f(x_0)$, $f(x_i)$, $f(b)$ $\quad (\star)$*
- *Gọi $M$, $n$ lần lượt là số lớn nhất và số nhỏ nhất của các kết quả tính toán ở bước $(\star)$ thì*
$$M = \max_{[a;b]} f(x); \quad n = \min_{[a;b]} f(x)$$

④ *Ta có thể dùng các bất đẳng thức có sẵn để đánh giá biểu thức cần tìm max, min.*

## B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

### Dạng 1. Bài toán tìm max, min của hàm số $y = f(x)$ trên miền $\mathscr{D}$

**Phương pháp giải:**

① Tính $y'$. Giải phương trình $y' = 0$ tìm các nghiệm $x_i \in \mathscr{D}$ và tìm các điểm $x_j \in \mathscr{D}$ mà tại đó $y'$ không xác định.

② Lập bảng biến thiên của hàm số trên $\mathscr{D}$.

③ Từ bảng biến thiên, kết luận:

- Điểm ở vị trí cao nhất $\longrightarrow$ Kết luận max;
- Điểm ở vị trí thấp nhất $\longrightarrow$ Kết luận min.

**Lưu ý:** Nếu $\mathscr{D}$ là đoạn $[a; b]$ và hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ thì ta có thể làm như sau:

① Giải $f'(x) = 0$ tìm các nghiệm $x_0 \in (a; b)$;

② Tìm các điểm $x_i \in (a; b)$ mà tại đó đạo hàm không xác định (nếu có).

③ Tính toán $f(a)$, $f(x_0)$, $f(x_i)$, $f(b)$ $\quad (\star)$

MATH TEACHER

**ĐIỂM:**

"It's not how much time you have, it's how you use it."

**QUICK NOTE**

**QUICK NOTE**

④ Gọi $M$, $n$ lần lượt là số lớn nhất và số nhỏ nhất của các kết quả tính toán ở bước $(\star)$ thì

$$M = \max_{[a;b]} f(x); \quad n = \min_{[a;b]} f(x)$$

- *Nếu hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên đoạn $[a;b]$ thì $\min\limits_{[a;b]} f(x) = f(a)$ và $\max\limits_{[a;b]} f(x) = f(b)$.*
- *Nếu hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên đoạn $[a;b]$ thì $\min\limits_{[a;b]} f(x) = f(b)$ và $\max\limits_{[a;b]} f(x) = f(a)$.*

## BÀI TẬP TỰ LUẬN

**VÍ DỤ 1.** Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất (nếu có) của hàm số sau trên đoạn đã chỉ ra.

a) $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 10$ trên đoạn $[-3;1]$.

b) $f(x) = \dfrac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 1$ trên đoạn $[-3;2]$.

c) $f(x) = -2x^4 + 4x^2 + 3$ trên đoạn $[0;2]$

d) $f(x) = \dfrac{2x+3}{x+1}$ trên đoạn $[0;4]$.

e) $f(x) = x + \dfrac{4}{x}$ trên khoảng $(0;+\infty)$;

f) $f(x) = 3x + \dfrac{4}{x^2}$ trên $(0;+\infty)$.

g) $f(x) = \dfrac{2x^2+4x+5}{x^2+1}$ trên $\mathbb{R}$.

h) $f(x) = \sqrt{-x^2+2x}$ trên miền xác định.

**VÍ DỤ 2.** Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số sau trên miền đã chỉ ra.

a) $y = x - \sin 2x$ trên đoạn $\left[-\dfrac{\pi}{2};\pi\right]$

b) $y = \mathrm{e}^{x^3-3x+3}$ trên đoạn $[0;2]$

c) $y = \mathrm{e}^x(x^2-3)$ trên đoạn $[-2;2]$

d) $y = \dfrac{\ln^2 x}{x}$ trên đoạn $\left[1;\mathrm{e}^5\right]$

**VÍ DỤ 3.** Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất (nếu có) của hàm số sau trên miền đã chỉ ra.

a) $f(x) = \dfrac{5\sin x + 1}{\sin x + 2}$ trên đoạn $\left[0;\dfrac{\pi}{6}\right]$.

b) $y = \cos^3 x + 2\sin^2 x + \cos x$ trên miền xác định.

## BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

### PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.

**CÂU 1.** Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1;3]$ và có bảng biến thiên như sau.

| $x$ | $-1$ | | $0$ | | $2$ | | $3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $y$ | $0$ | $\nearrow$ | $5$ | $\searrow$ | $1$ | $\nearrow$ | $4$ |

Gọi $M$ là giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-1;3]$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

Ⓐ $M = f(0)$.

Ⓑ $M = f(-1)$.

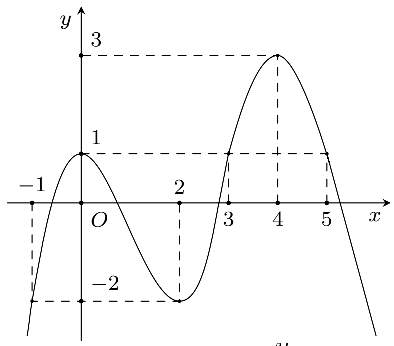
Ⓒ $M = f(3)$.

Ⓓ $M = f(2)$.

QUICK NOTE

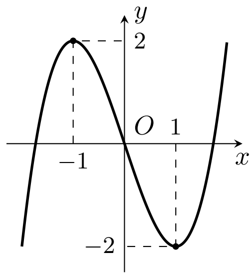
**CÂU 2.** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1;5]$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Gọi $M$ và $m$ lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số đã cho trên $[-1;5]$. Giá trị của $M+m$ bằng

(A) 5. (B) 6. (C) 3. (D) 1.




**CÂU 3.** Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong ở hình bên. Tìm giá trị nhỏ nhất $m$ của hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $[-1;1]$.

(A) $m=2$. (B) $m=-2$.
(C) $m=1$. (D) $m=-1$.




**CÂU 4.** Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên trên đoạn $[-2;3]$ như hình bên dưới.

| $x$ | $-\infty$ | $-2$ | | $-1$ | | $1$ | | $3$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | | $+$ | $0$ | $-$ | $\|$ | $+$ | | |
| $f(x)$ | | $0$ | $\nearrow$ | $1$ | $\searrow$ | $-2$ | $\nearrow$ | $5$ | |

Gọi $M$ và $m$ lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-1;3]$. Giá trị của biểu thức $M-m$ là

(A) 5. (B) 7. (C) $-1$. (D) 3.

**CÂU 5.** Giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y=x^3-12x+1$ trên đoạn $[-2;3]$ lần lượt là

(A) $17,\ -15$. (B) $10,\ -26$. (C) $-15,\ 17$. (D) $6,\ -26$.

**CÂU 6.** Gọi $M,m$ lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x^3+3x^2-9x+1$ trên $[-4;4]$. Tính tổng $M+m$.

(A) 12. (B) 98. (C) 17. (D) 73.

**CÂU 7.** Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=-x^4+12x^2+1$ trên đoạn $[-1;2]$ bằng

(A) 33. (B) 37. (C) 12. (D) 1.

**CÂU 8.** Giá trị lớn nhất của hàm số $y=x^4-3x^2+2$ trên đoạn $[0;3]$ bằng

(A) 57. (B) 56. (C) 54. (D) 55.

**CÂU 9.** Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{x-1}{x+1}$ trên đoạn $[0;3]$ là

(A) $\min\limits_{[0;3]} y=\dfrac{1}{2}$. (B) $\min\limits_{[0;3]} y=-3$. (C) $\min\limits_{[0;3]} y=1$. (D) $\min\limits_{[0;3]} y=-1$.

**CÂU 10.** Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{2x+3}{x+1}$ trên đoạn $[0;4]$ là

(A) 2. (B) $\dfrac{7}{5}$. (C) 3. (D) $\dfrac{11}{5}$.

**CÂU 11.** Giá trị lớn nhất của hàm số $y=\dfrac{x^2-3x+3}{x-1}$ trên đoạn $\left[-2;\dfrac{1}{2}\right]$ bằng

(A) 4. (B) $-3$. (C) $-\dfrac{7}{2}$. (D) $-\dfrac{13}{3}$.

**CÂU 12.** Giá trị lớn nhất của hàm số $y=\sqrt{4-x^2}$ là

(A) $M=-2$. (B) $M=2$ . (C) $M=4$. (D) $M=0$.

QUICK NOTE

**CÂU 13.** Tìm giá trị lớn nhất $M$ của hàm số $y = \sqrt{7 + 6x - x^2}$.

**A** $M = 4$. **B** $M = \sqrt{7}$. **C** $M = 7$. **D** $M = 3$.

**CÂU 14.** Tính giá trị lớn nhất của hàm số $y = x - \ln x$ trên $\left[\frac{1}{2}; \mathrm{e}\right]$.

**A** $\max\limits_{x \in \left[\frac{1}{2}; \mathrm{e}\right]} y = 1$. **B** $\max\limits_{x \in \left[\frac{1}{2}; \mathrm{e}\right]} y = \mathrm{e} - 1$.

**C** $\max\limits_{x \in \left[\frac{1}{2}; \mathrm{e}\right]} y = \mathrm{e}$. **D** $\max\limits_{x \in \left[\frac{1}{2}; \mathrm{e}\right]} y = \frac{1}{2} + \ln 2$.

**CÂU 15.** Gọi $M, N$ lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y = x^2 - 4\ln(1 - x)$ trên đoạn $[-2; 0]$. Tính $M - N$.

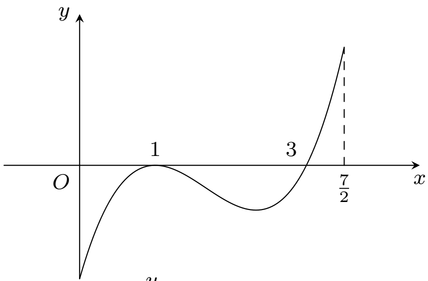
**A** $M - N = 4\ln 2$. **B** $M - N = -1$.

**C** $M - N = 4\ln 2 - 1$. **D** $M - N = 4\ln 3 - 4$.

**CÂU 16.** Cho hàm số $f(x)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x) = \mathrm{e}^{3x^2 - 2x^3} - f(x)$ trên đoạn $[0; 1]$ bằng

**A** $\mathrm{e} - f(1)$. **B** $f(1)$. **C** $f(0)$. **D** $1 - f(0)$.

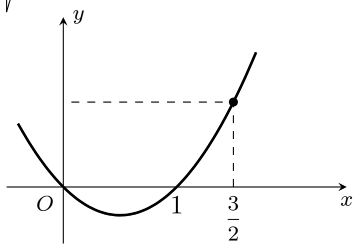
**CÂU 17.** Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $\left[0; \frac{7}{2}\right]$, có đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ. Hỏi hàm số $y = f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $\left[0; \frac{7}{2}\right]$ tại điểm $x_0$ nào dưới đây?




**A** $x_0 = 3$. **B** $x_0 = 2$.

**C** $x_0 = 1$. **D** $x_0 = 0$.

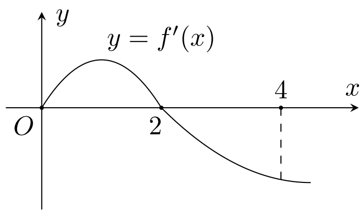
**CÂU 18.** Cho hàm số $y = f(x)$, biết hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Hàm số $y = f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $\left[\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right]$ tại điểm nào sau đây?




**A** $x = \frac{3}{2}$. **B** $x = \frac{1}{2}$.

**C** $x = 1$. **D** $x = 0$.

**CÂU 19.** Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ. Biết $f(0) + f(1) - 2f(2) = f(4) - f(3)$. Giá trị nhỏ nhất $m$, giá trị lớn nhất $M$ của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[0; 4]$ là




**A** $m = f(4)$, $M = f(1)$. **B** $m = f(4)$, $M = f(2)$.

**C** $m = f(1)$, $M = f(2)$. **D** $m = f(0)$, $M = f(2)$.

**CÂU 20.** Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sin^3 x - 3\sin^2 x + 2$ lần lượt là $M$, $m$. Tổng $M + m$ bằng

**A** 0. **B** 4. **C** 1. **D** 3.

**CÂU 21.** Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = (x+1)(x+2)(x+3)(x+4) + 2019$ là

**A** 2017. **B** 2020. **C** 2018. **D** 2019.

## PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.

**CÂU 22.** Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây.

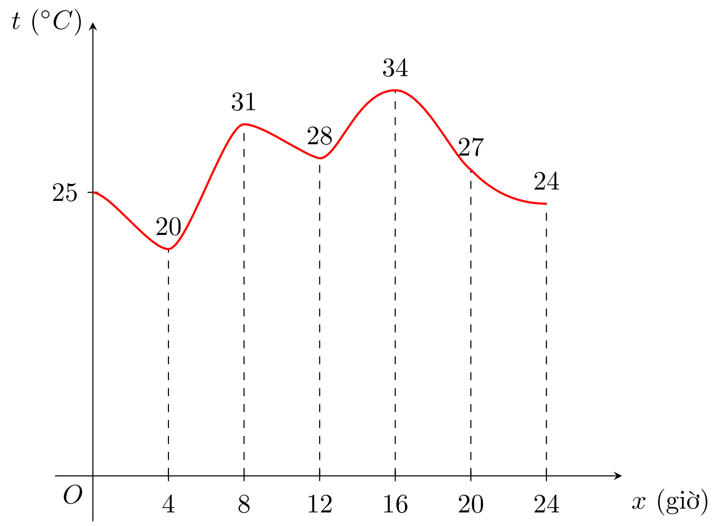
| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $4$ | $\searrow$ | $3$ | $\nearrow$ | $4$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

QUICK NOTE

Xét tính đúng, sai của các khẳng định sau:

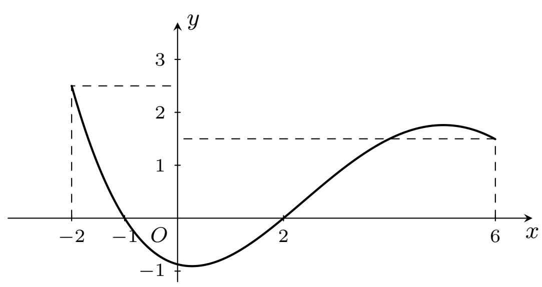
| Mệnh đề | Đ | S |
|---|---|---|
| **a)** Cực đại của hàm số là 4. | | |
| **b)** Cực tiểu của hàm số là 3. | | |
| **c)** $\max\limits_{\mathbb{R}} y = 4$. | | |
| **d)** $\min\limits_{\mathbb{R}} y = 3$. | | |

**CÂU 23.** Hình bên cho biết sự thay đổi của nhiệt độ ở một thành phố trong một ngày. Xét tính đúng, sai của các khẳng định sau:




| Mệnh đề | Đ | S |
|---|---|---|
| **a)** Nhiệt độ cao nhất trong ngày là 28°C. | | |
| **b)** Nhiệt độ thấp nhất trong ngày là 20°C. | | |
| **c)** Thời điểm có nhiệt độ cao nhất trong ngày là lúc 16 giờ. | | |
| **d)** Thời điểm có nhiệt độ thấp nhất trong ngày là lúc 4 giờ. | | |

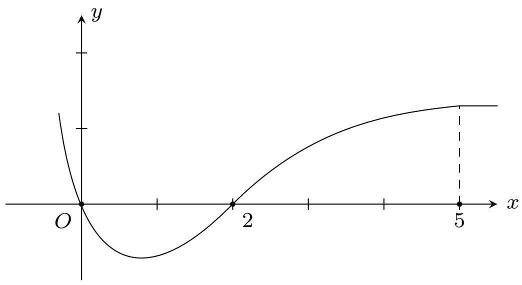
**CÂU 24.** Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $y = f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và đồ thị của hàm số $f'(x)$ trên đoạn $[-2; 6]$ như hình vẽ bên. Xét tính đúng, sai của các khẳng định sau:




| Mệnh đề | Đ | S |
|---|---|---|
| **a)** $\max\limits_{[-2;6]} f(x) = f(-1)$. | | |
| **b)** $\max\limits_{[-2;6]} f(x) = f(6)$. | | |
| **c)** $\max\limits_{[-2;6]} f(x) = f(-2)$. | | |
| **d)** $\max\limits_{[-2;6]} f(x) = \max\{f(-1), f(6)\}$. | | |

QUICK NOTE

**CÂU 25.** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)$. Đồ thị $y = f'(x)$ được cho như hình vẽ. Biết rằng $f(0) + f(3) = f(2) + f(5)$. Xét tính đúng, sai của các khẳng định sau:




| Mệnh đề | Đ | S |
|---|---|---|
| **a)** Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$. | | |
| **b)** Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$. | | |
| **c)** $\min\limits_{[0;5]} f(x) = f(0)$ và $\max\limits_{[0;5]} f(x) = f(5)$. | | |
| **d)** $\min\limits_{[0;5]} f(x) = f(2)$ và $\max\limits_{[0;5]} f(x) = f(5)$. | | |

## Dạng 2. Bài toán max, min có chứa tham số $m$

### BÀI TẬP TỰ LUẬN

**VÍ DỤ 1.** Tìm tất cả giá trị của tham số $m$ để

a) giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = -x^3 - 3x^2 + m$ trên $[-1; 1]$ bằng 0.

b) giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \dfrac{x + 5m}{x - 3}$ trên $[1; 2]$ bằng 4.

### BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

**CÂU 1.** Cho hàm số $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + m$ thoả mãn $\min\limits_{[0;5]} f(x) = 5$. Khi đó giá trị của $m$ bằng

(A) 10. (B) 5. (C) 6. (D) 7.

**CÂU 2.** Tìm $m$ để giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = 3x^3 - 4x^2 + 2(m - 10)$ trên đoạn $[1; 3]$ bằng $-5$.

(A) $m = \dfrac{15}{2}$. (B) $m = -15$. (C) $m = 8$. (D) $m = -8$.

**CÂU 3.** Tìm $m$ để giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \dfrac{x - m^2 + m}{x + 1}$ trên đoạn $[0; 1]$ bằng $-2$.

(A) $\left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = -2 \end{array}\right.$. (B) $\left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = 2 \end{array}\right.$. (C) $m = \dfrac{1 \pm \sqrt{21}}{2}$. (D) $\left[\begin{array}{l} m = -1 \\ m = 2 \end{array}\right.$.

**CÂU 4.** Hàm số $y = \dfrac{x - m}{x + 2}$ thỏa mãn $\min\limits_{x \in [0;3]} y + \max\limits_{x \in [0;3]} y = \dfrac{7}{6}$. Hỏi giá trị $m$ thuộc khoảng nào trong các khoảng dưới đây?

(A) $(2; +\infty)$. (B) $(0; 2)$. (C) $(-\infty; -1)$. (D) $(-1; 0)$.

**CÂU 5.** Cho hàm số $y = \dfrac{x + m}{x + 1}$ ($m$ là tham số thực) thỏa mãn $\min\limits_{[1;2]} y + \max\limits_{[1;2]} y = \dfrac{16}{3}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

(A) $m > 4$. (B) $m \leq 0$. (C) $0 < m \leq 2$. (D) $2 < m \leq 4$.

**CÂU 6.** Cho hàm số $f(x)=\dfrac{x+m}{x-1}$ ($m$ là tham số thực) thỏa mãn $\min\limits_{[2;4]} f(x)=3$. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

(A) $1\le m<3$. (B) $m<-1$. (C) $3<m\le 4$. (D) $m>4$.

**CÂU 7.** Gọi $S$ là tổng giá trị của $m$ để hàm số $f(x)=\dfrac{x-m^2-m}{x+1}$ có giá trị nhỏ nhất trên $[0;1]$ bằng $-2$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

(A) $S=-1$. (B) $S=1$. (C) $S=-2$. (D) $S=-3$.

**CÂU 8.** Cho hàm số $f(x)=x^3+mx^2-m^2x+2$ với tham số $m>0$. Biết $\min\limits_{[-m;m]} f(x)=\dfrac{14}{27}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng

(A) $m\in(-\infty;-3)$. (B) $m\in(3;+\infty)$. (C) $m\in(1;3)$. (D) $m\in(-3;-1)$.

**CÂU 9.** Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m$ để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x^3+\left(m^2-m+1\right)x+m^3-4m^2+m+2025$ trên đoạn $[0;2]$ bằng 2019?

(A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

**CÂU 10.** Gọi $S$ là tập tất cả các giá trị của $m$ sao cho giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\left(x^3-3x+m\right)^2$ trên đoạn $[-1;1]$ bằng 4. Tính tổng các phần tử của $S$.

(A) 0. (B) 6. (C) $-5$. (D) 3.

## Dạng 3. Bài toán vận dụng, thực tiễn có liên quan đến max min

### Bài toán chuyển động:

- Gọi $s(t)$ là hàm quãng đường; $v(t)$ là hàm vận tốc; $a(t)$ là hàm giá tốc;
- Khi đó $s'(t)=v(t)$; $v'(t)=a(t)$.

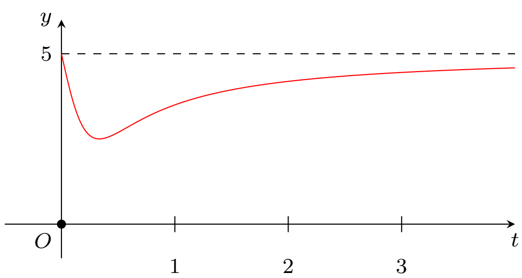
### Bài toán thực tế – tối ưu:

- Biểu diễn dữ kiện cần đạt max – min qua một hàm $f(t)$.
- Khảo sát hàm $f(t)$ trên miền điều kiện của hàm và suy ra kết quả.

**BÀI TẬP TỰ LUẬN**

**VÍ DỤ 1.** Một chất điểm chuyển động có vận tốc tức thời $v(t)$ phụ thuộc vào thời gian $t$ theo hàm số $v(t)=-t^4+24t^2+500$ (m/s). Trong khoảng thời gian từ $t=0$ (s) đến $t=5$ (s) chất điểm đạt vận tốc lớn nhất tại thời điểm nào?

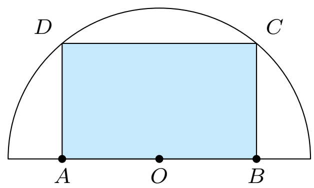
**VÍ DỤ 2.**
Sự phân huỷ của rác thải hữu cơ có trong nước sẽ làm tiêu hao oxygen hoà tan trong nước. Nồng độ oxygen (mg/l) trong một hồ nước sau $t$ giờ ($t\ge 0$) khi một lượng rác thải hữu cơ bị xả vào hồ được xấp xỉ bởi hàm số (có đồ thị như đường màu đỏ ở hình bên)




$$y(t)=5-\frac{15t}{9t^2+1}.$$

Vào các thời điểm nào nồng độ oxygen trong nước cao nhất và thấp nhất?

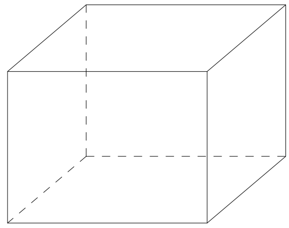
**VÍ DỤ 3.**
Tính diện tích lớn nhất $S_{\max}$ của một hình chữ nhật nội tiếp trong nửa đường tròn bán kính $R=6$ cm nếu một cạnh của hình chữ nhật nằm dọc theo đường kính của hình tròn mà hình chữ nhật đó nội tiếp.




**VÍ DỤ 4.**

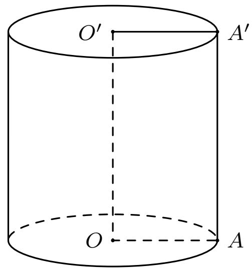
QUICK NOTE

Một người muốn xây một cái bể chứa nước, dạng một khối hộp chữ nhật không nắp có thể tích bằng 288 $\text{dm}^3$. Đáy bể là hình chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng, giá thuê nhân công để xây bể là 500000 đồng/ $\text{m}^2$. Nếu người đó biết xác định các kích thước của bể hợp lí thì chi phí thuê nhân công sẽ thấp nhất. Hỏi người đó trả chi phí thấp nhất để thuê nhân công xây dựng bể đó là bao nhiêu?



**VÍ DỤ 5.**

Một nhà sản xuất cần làm ra những chiếc bình có dạng hình trụ với dung tích 1000 $\text{cm}^3$. Mặt trên và mặt dưới của bình được làm bằng vật liệu có giá 1,2 nghìn đồng/$\text{cm}^2$, trong khi mặt bên của bình được làm bằng vật liệu có giá 0,75 nghìn đồng/$\text{cm}^2$. Tìm các kích thước của bình để chi phí vật liệu sản xuất mỗi chiếc bình là nhỏ nhất.




**BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM**

## PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.

**CÂU 1.** Một chất điểm chuyển động với quãng đường $s(t)$ cho bởi công thức $s(t) = 6t^2 - t^3$, $t$ (giây) là thời gian. Hỏi trong khoảng thời gian từ 0 đến 4 giây, vận tốc tức thời của chất điểm đạt giá trị lớn nhất tại thời điểm $t$ (giây) bằng bao nhiêu?

**A** $t = 3$ s. **B** $t = 4$ s. **C** $t = 2$ s. **D** $t = 6$ s.

**CÂU 2.** Trong 3 giây đầu tiên, một chất điểm chuyển động theo phương trình $s(t) = -t^3 + 6t^2 + t + 5$, trong đó $t$ tính bằng giây và $s$ tính bằng mét. Chất điểm có vận tốc tức thời lớn nhất bằng bao nhiêu trong 3 giây đầu tiên đó?

**A** 13 m/s. **B** 10 m/s. **C** 9 m/s. **D** 12 m/s.

**CÂU 3.** Độ giảm huyết áp của một bệnh nhân được cho bởi công thức $G(x) = 0{,}025x^2(30 - x)$, trong đó $x$ là liều lượng thuốc được tiêm cho bệnh nhân ($x$ được tính bằng miligam). Liều lượng thuốc cần tiêm cho bệnh nhân là bao nhiêu để huyết áp được giảm nhanh nhất?

**A** 24 mg. **B** 20 mg. **C** 15 mg. **D** 10 mg.

**CÂU 4.** Trong thí nghiệm y học, người ta cấy 1 000 vi khuẩn vào môi trường dinh dưỡng. Bằng thực nghiệm, người ta xác định số lượng vi khuẩn thay đổi theo thời gian bởi công thức

$$N(t) = 1\,000 + \frac{100t}{100 + t^2}\,(con).$$

trong đó $t$ là thời gian tính bằng giây. Tính số lượng vi khuẩn lớn nhất kể từ khi thực hiện cấy vi khuẩn vào môi trường dinh dưỡng.

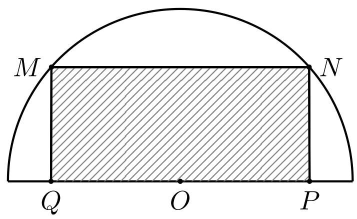
**A** 1 008 con. **B** 1 012 con. **C** 1 005 con. **D** 1 020 con.

**CÂU 5.** Tam giác vuông có cạnh huyền bằng 5 cm có thể có diện tích lớn nhất bằng bao nhiêu?

**A** 25 $\text{cm}^2$. **B** $\frac{125}{4}$ $\text{cm}^2$. **C** $\frac{625}{4}$ $\text{cm}^2$. **D** 125$\text{cm}^2$.

**CÂU 6.** Từ một tấm tôn có hình dạng là nửa hình tròn bán kính $R = 3$, người ta muốn cắt ra một hình chữ nhật (hình vẽ bên). Diện tích lớn nhất có thể của tấm tôn hình chữ nhật là

**A** $\frac{9}{2}$. **B** $6\sqrt{2}$. **C** 9. **D** $9\sqrt{2}$.




**CÂU 7.** Cho một tấm tôn hình chữ nhật có kích thước 10 cm × 16 cm. Người ta cắt bỏ 4 góc của tấm tôn 4 miếng hình vuông bằng nhau rồi gò lại thành một hình hộp chữ nhật không có nắp. Để thể tích của hình hộp đó lớn nhất thì độ dài cạnh hình vuông của các miếng tôn bị cắt bỏ bằng

QUICK NOTE

(A) 3 m. (B) 4 m. (C) 5 m. (D) 2 m.

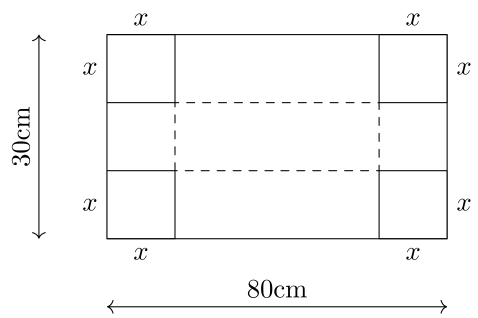
**CÂU 8.** Ông Bình dự định sử dụng hết $5,5\,\mathrm{m}^2$ kính để làm một bể cá bằng kính có dạng hình hộp chữ nhật không nắp, chiều dài gấp đôi chiều rộng (các mối ghép có kích thước không đáng kể). Bể cá có dung tích lớn nhất bằng bao nhiêu (làm tròn đến hàng phần trăm)?

(A) $1{,}01\,\mathrm{m}^3$. (B) $1{,}17\,\mathrm{m}^3$. (C) $1{,}51\,\mathrm{m}^3$. (D) $1{,}40\,\mathrm{m}^3$.

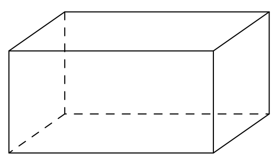
**CÂU 9.** Người ta muốn xây một chiếc bể nước có hình dạng là một khối hộp chữ nhật không nắp có thể tích bằng $\dfrac{500}{3}$ m$^3$. Biết đáy bể là một hình chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng và giá thuê thợ xây là 700.000 đồng/m$^2$. Để chi phí thuê nhân công ít nhất thì chi phí thuê nhân công là

(A) 120 triệu đồng. (B) 105 triệu đồng. (C) 115 triệu đồng. (D) 110 triệu đồng.

**CÂU 10.** Từ một tấm bìa hình chữ nhật có chiều rộng 30 cm và chiều dài 80 cm (Hình a), người ta cắt ở bốn góc bốn hình vuông có cạnh $x$( cm) với $5 \leq x \leq 10$ và gấp lại để tạo thành chiếc hộp có dạng hình hộp chữ nhật không nắp như Hình b. Tìm $x$ để thể tích chiếc hộp là lớn nhất (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

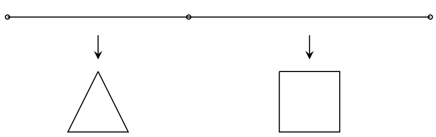


a)


b)

(A) $x = \dfrac{20}{3}$ cm. (B) $x = \dfrac{20}{7}$ cm. (C) $x = \dfrac{25}{3}$ cm. (D) $x = \dfrac{25}{7}$ cm.

**CÂU 11.** Một sợi dây có chiều dài là 6 m, được chia thành 2 phần. Phần thứ nhất được uốn thành hình tam giác đều, phần thứ hai uốn thành hình vuông. Hỏi độ dài của cạnh hình tam giác đều bằng bao nhiêu để tổng diện tích 2 hình thu được là nhỏ nhất?



(A) $\dfrac{12}{4+\sqrt{3}}$ m. (B) $\dfrac{18\sqrt{3}}{4+\sqrt{3}}$ m. (C) $\dfrac{36\sqrt{3}}{4+\sqrt{3}}$ m. (D) $\dfrac{18}{9+4\sqrt{3}}$ m.

**CÂU 12.** Một doanh nghiệp tư nhân $A$ chuyên kinh doanh xe gắn máy các loại. Hiện nay doanh nghiệp đang tập trung vào chiến lược kinh doanh xe $X$ với chi phí mua vào một chiếc là 27 triệu đồng và bán ra với giá 31 triệu đồng. Với giá bán này, số lượng xe mà khách hàng đã mua trong một năm là 600 chiếc. Nhằm mục tiêu đẩy mạnh hơn nữa lượng tiêu thụ dòng xe đang bán chạy này, doanh nghiệp dự định giảm giá bán. Bộ phận nghiên cứu thị trường ước tính rằng nếu giảm 1 triệu đồng mỗi chiếc xe thì số lượng xe bán ra trong một năm sẽ tăng thêm 200 chiếc. Hỏi theo đó, giá bán mới là bao nhiêu thì lợi nhuận thu được cao nhất?

(A) 30 triệu đồng. (B) $30,5$ triệu đồng. (C) $29,5$ triệu đồng. (D) 32 triệu đồng.

## PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.

**CÂU 13.** Người ta bơm xăng vào bình xăng của một xe ô tô. Biết rằng thể tích $V$ (lít) của lượng xăng trong bình xăng tính theo thời gian bơm xăng $t$ (phút) được cho bởi công thức

$$V(t) = 300(t^2 - t^3) + 4 \text{ với } 0 \leq t \leq 0{,}5.$$

Gọi $V'(t)$ là tốc độ tăng thể tích tại thời điểm $t$ với $0 \leq t \leq 0{,}5$.

QUICK NOTE

| Mệnh đề | Đ | S |
|---|---|---|
| **a)** Lượng xăng trong bình ban đầu là 1 lít. | | |
| **b)** Lượng xăng lớn nhất bơm vào bình xăng là 41,5 lít. | | |
| **c)** $V'(t) = 300(2t - 3t^2) + 4$, với $0 \leq t \leq 0{,}5$. | | |
| **d)** Xăng chảy vào bình xăng vào thời điểm ở giây thứ 30 có tốc độ tăng thể tích là lớn nhất. | | |

**CÂU 14.** Tại một xí nghiệp chuyên sản xuất vật liệu xây dựng, nếu trong một ngày xí nghiệp sản xuất $x$ ($\mathrm{m}^3$) sản phẩm thì phải bỏ ra các khoản chi phí bao gồm: 4 triệu đồng chi phí cố định; 0,2 triệu đồng chi phí cho mỗi mét khối sản phẩm và $0{,}001x^2$ triệu đồng chi phí bảo dưỡng máy móc. Biết rằng, mỗi ngày xí nghiệp sản xuất được tối đa 100 $\mathrm{m}^3$ sản phẩm. Goi $C(x)$ là tổng chi phí để xí nghiệp sản xuất $x$ ($\mathrm{m}^3$) sản phẩm trong một ngày và $\overline{C}$ là chi phí trung bình trên mỗi mét khối sản phẩm.

| Mệnh đề | Đ | S |
|---|---|---|
| **a)** $C = 0{,}2x + 0{,}001x^2 \quad$ với $0 \leq x \leq 100$. | | |
| **b)** Tổng chi phí khi sản xuất 100 $\mathrm{m}^3$ sản phẩm là 34 triệu đồng. | | |
| **c)** $\overline{C} = 0{,}001x + \dfrac{4}{x} + 0{,}2 \quad$ với $0 < x \leq 100$. | | |
| **d)** $\overline{C}$ có giá trị thấp nhất bằng 0,326 triệu đồng (*kết quả làm tròn 3 chữ số thập phân*). | | |

**CÂU 15.** Nhà máy $A$ chuyên sản xuất một loại sản phẩm cung cấp cho nhà máy $B$. Hai nhà máy thoả thuận rằng, hằng tháng $A$ cung cấp cho $B$ số lượng sản phẩm theo đơn đặt hàng của $B$ (tối đa 100 tấn sản phẩm). Nếu số lượng đặt hàng là $x$ tấn sản phẩm thì giá bán cho mỗi tấn sản phẩm là $P(x) = 45 - 0{,}001x^2$ (triệu đồng). Chi phí để $A$ sản xuất $x$ tấn sản phẩm trong một tháng là $C(x) = 100 + 30x$ (triệu đồng) (gồm 100 triệu đồng chi phí cố định và 30 triệu đồng cho mỗi tấn sản phẩm).

| Mệnh đề | Đ | S |
|---|---|---|
| **a)** Chi phí để A sản xuất 10 tấn sảm phẩm trong một tháng là 400 triệu đồng. | | |
| **b)** Số tiền A thu được khi bán 10 tấn sản phẩm cho B là 600 triệu đồng. | | |
| **c)** Lợi nhuận mà A thu được khi bán $x$ tấn sản phẩm ($0 \leq x \leq 100$) cho B là $-0{,}001x^3 + 15x - 100$. | | |
| **d)** A bán cho $B$ khoảng 70,7 tấn sản phẩm mỗi tháng thì thu được lợi nhuận lớn nhất. | | |

# MỤC LỤC