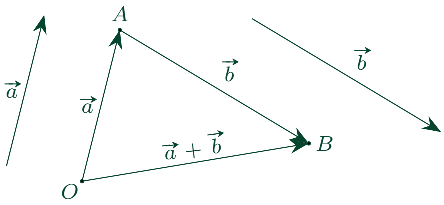
Bài 1. VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN

A. LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1. Tổng của hai véc tơ

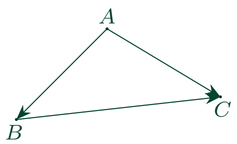
Định nghĩa:

Trong không gian, cho hai véctơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Lấy ba điểm O, A, B sao cho $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$. Ta gọi $\overrightarrow{OB}$ là **tổng của hai véctơ** $\vec{a}$ và $\vec{b}$, ký hiệu $\vec{a} + \vec{b}$.
Phép lấy tổng của hai véctơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ được gọi là **phép cộng véctơ**.

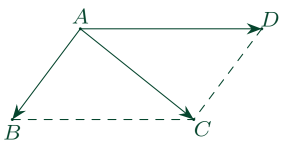


Các quy tắc cần nhớ:

① Quy tắc ba điểm: Với ba điểm A, B, C, ta có $\boxed{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}}$

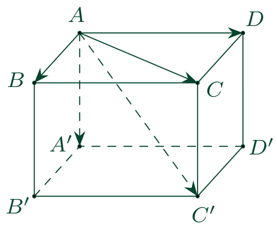


② Quy tắc hình bình hành: Cho $ABCD$ là hình bình hành, ta có $\boxed{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}}$



③ Quy tắc hình hộp: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$.
Ta có $\boxed{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC'}}$

Hệ thức tương tự: $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{BD'}$.



Tính chất:

① Tính chất giao hoán: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$;

② Tính chất kết hợp: $\left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \vec{c} = \vec{a} + \left(\vec{b} + \vec{c}\right)$;

③ Với mọi véctơ $\vec{a}$, ta luôn có: $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$.

④ Tổng của ba véctơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$: $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \vec{c}$.

2. Hiệu của hai véc tơ

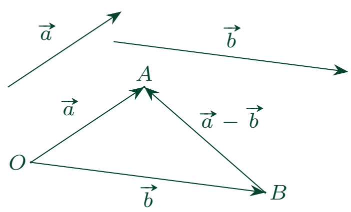
Véctơ đối:

① Vectơ đối của $\vec{a}$ kí hiệu là $-\vec{a}$.

② Vectơ đối của $\overrightarrow{AB}$ là $\overrightarrow{BA}$: $-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$.

③ Vectơ $\vec{0}$ được coi là vectơ đối của chính nó.

Định nghĩa hiệu của hai véctơ: Trong không gian, cho hai véctơ $\vec{a}$, $\vec{b}$. Ta gọi $\vec{a} + \left(-\vec{b}\right)$ là **hiệu của hai véctơ** $\vec{a}$ và $\vec{b}$, ký hiệu $\vec{a} - \vec{b}$.
Phép lấy hiệu của hai véctơ được gọi là **phép trừ véctơ**.



Các quy tắc cần nhớ:

① Với ba điểm A, B, C ta có $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$.

② Hai véc tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đối nhau thì $\vec{a} + \vec{b} = \vec{0}$.

MATH TEACHER

ĐIỂM:

"It's not how much time you have, it's how you use it."

QUICK NOTE

QUICK NOTE

3. Tích của một số với một véc-tơ

Định nghĩa: Cho số thực $k \neq 0$ và vectơ $\vec{a} \neq \vec{0}$. Tích của một số k với vectơ $\vec{a}$ là một vectơ, kí hiệu là $k\vec{a}$, được xác định như sau:

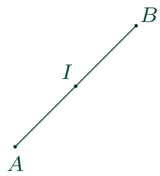
- Cùng hướng với vectơ $\vec{a}$ nếu $k > 0$, ngược hướng với vectơ $\vec{a}$ nếu $k < 0$.
- Có độ dài bằng $|k| \cdot |\vec{a}|$.

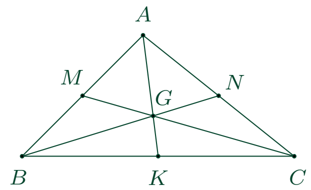
$0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$ và $k \cdot \vec{0} = \vec{0}$.

Hệ thức trung điểm, trọng tâm:

① I là trung điểm của đoạn thẳng AB thì

- $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$;
- $\overrightarrow{IA} = -\overrightarrow{IB}$; $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$;...





② G là trọng tâm của tam giác ABC thì

- $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$;
- $\overrightarrow{GA} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AK}$; $\overrightarrow{GA} = -2\overrightarrow{GK}$;...

Nhận xét:

① Với hai véctơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bất kỳ, với mọi số h và k, ta luôn có

- $k\left(\vec{a} + \vec{b}\right) = k\vec{a} + k\vec{b}$;
- $(h+k)\,\vec{a} = h\vec{a} + k\vec{a}$;
- $h\,(k\vec{a}) = (hk)\,\vec{a}$;
- $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$;
- $(-1) \cdot \vec{a} = -\vec{a}$;
- $k\vec{a} = \vec{0} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\vec{a} = \vec{0}\\ k = 0\end{array}\right.$.

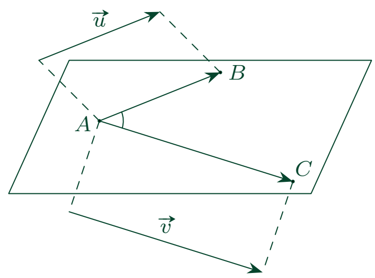
② Hai véctơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ ($\vec{b}$ khác $\vec{0}$) cùng phương khi và chỉ khi có số k sao cho $\vec{a} = k\vec{b}$.

③ Ba điểm phân biệt A, B, C thẳng hàng khi và chỉ khi có số $k \neq 0$ để $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$.

4. Tích vô hướng của hai véc-tơ

Góc giữa hai véctơ:

Trong không gian, cho $\vec{u}$ và $\vec{v}$ là hai véctơ khác $\vec{0}$. Lấy một điểm A bất kỳ, gọi B và C là hai điểm sao cho $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$. Khi đó, ta gọi $\widehat{BAC}$ là góc giữa hai véctơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$, ký hiệu $(\vec{u}, \vec{v})$.



$0^\circ \leq (\vec{u}, \vec{v}) \leq 180^\circ$.

- *Nếu $\vec{u}$ cùng hướng với $\vec{v}$ thì $(\vec{u}, \vec{v}) = 0^\circ$;*
- *Nếu $\vec{u}$ ngược hướng với $\vec{v}$ thì $(\vec{u}, \vec{v}) = 180^\circ$;*
- *Nếu $\vec{u}$ vuông góc với $\vec{v}$ thì $(\vec{u}, \vec{v}) = 90^\circ$.*

Định nghĩa tích vô hướng của hai véc tơ: Trong không gian, cho hai véctơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ khác $\vec{0}$.
Tích vô hướng của hai véctơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ là một số, kí hiệu $\vec{u} \cdot \vec{v}$, được xác định bởi công thức $\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\vec{u}, \vec{v})}$

① *Trong trường hợp $\vec{u} = 0$ hoặc $\vec{v} = 0$, ta quy ước $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.*

② $\vec{u} \cdot \vec{u} = \vec{u}^2 = |\vec{u}|^2$; $\vec{u}^2 \geqslant 0$. $\vec{u}^2 = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$.

③ *Với hai véctơ $\vec{u}$, $\vec{v}$ khác $\vec{0}$, ta có* $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$

④ *Với hai véctơ $\vec{u}$, $\vec{v}$ khác $\vec{0}$, ta có $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{0}$.*

Tính chất: Với ba véctơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ và số thực k, ta có:

- $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$;
- $\vec{a} \cdot \left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$;
- $(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = k(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot (k\vec{b})$.

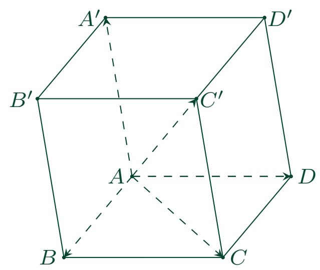
B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Dạng 1. Xác định véc-tơ, chứng minh đẳng thức véc tơ,độ dài véc tơ

BÀI TẬP TỰ LUẬN

VÍ DỤ 1.
Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Hãy xác định các véc-tơ (khác $\vec{0}$) có điểm đầu, điểm cuối là các đỉnh của hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ thỏa

a) cùng phương với $\overrightarrow{AB}$;
b) cùng phương $\overrightarrow{AA'}$;
c) bằng với $\overrightarrow{AD}$;
d) bằng với $\overrightarrow{A'B}$;
e) đối với $\overrightarrow{CD'}$;
f) đối với $\overrightarrow{B'C}$.



VÍ DỤ 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N, O lần lượt là trung điểm của AB, CD và AC. Chứng minh rằng

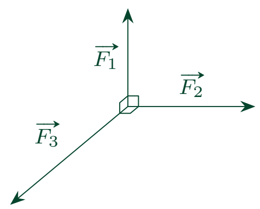
a) $\overrightarrow{BN}$ và $\overrightarrow{DM}$ đối nhau;
b) $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{SD} = 4\overrightarrow{SO}$;
c) $\overrightarrow{SD} - \overrightarrow{BN} - \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{SC}$.

VÍ DỤ 3. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh bằng a. Gọi G là trọng tâm tam giác $AB'D'$.

a) Tìm vectơ: $\overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{BA}$; $\overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{D'A'}$.
b) Chứng minh: $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC'}$.
c) Chứng minh: $\overrightarrow{B'B} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{B'D}$.
d) Chứng minh: $\overrightarrow{BB'} - \overrightarrow{C'B'} - \overrightarrow{D'C'} = \overrightarrow{BD'}$.
e) Chứng minh: $\overrightarrow{A'C} = 3\overrightarrow{A'G}$.
f) Tính độ dài véc tơ $\vec{u} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A'D'} + \overrightarrow{AA'}$.

VÍ DỤ 4.
Ba lực $\vec{F_1}$, $\vec{F_2}$, $\vec{F_3}$ cùng tác động vào một vật có phương đôi một vuông góc nhau và có độ lớn lần lượt là $2\,\text{N}$, $3\,\text{N}$, $4\,\text{N}$.

a) Tính độ lớn hợp lực của $\vec{F_2}$, $\vec{F_3}$.
b) Tính độ lớn hợp lực của ba lực đã cho.

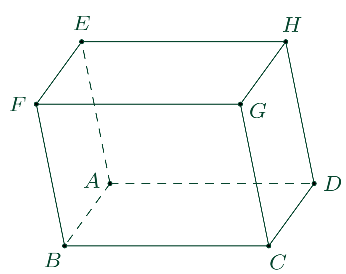


BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. *Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.*

CÂU 1.
Cho hình hộp $ABCD.EFGH$. Các véc-tơ có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của hình hộp và bằng véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ là các véc-tơ nào sau đây?

(A) $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{HG}$, $\overrightarrow{EF}$.
(B) $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{HG}$, $\overrightarrow{EF}$.
(C) $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{HG}$, $\overrightarrow{FE}$.
(D) $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{GH}$, $\overrightarrow{EF}$.

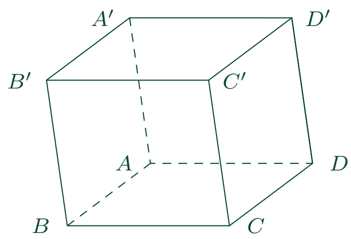


QUICK NOTE

QUICK NOTE

CÂU 2.

Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

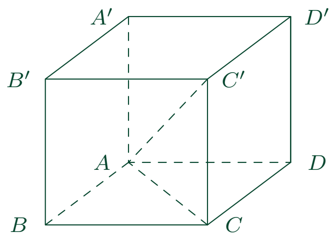


Ⓐ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B'D'}=\overrightarrow{AD}$. Ⓑ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\vec{0}$.

Ⓒ $\overrightarrow{AC'}+\overrightarrow{A'C}=2\overrightarrow{AC}$. Ⓓ $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{D'D}=\vec{0}$.

CÂU 3.

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Khẳng định nào sau đây là khẳng định **sai**?



Ⓐ $|\overrightarrow{AC}|=a\sqrt{2}$.

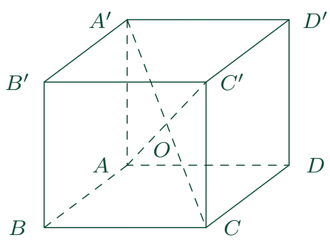
Ⓑ $|\overrightarrow{AC'}|=a\sqrt{3}$.

Ⓒ $\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{D'B'}=\vec{0}$.

Ⓓ $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BB'}=\overrightarrow{BC'}$.

CÂU 4.

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi O là tâm của hình lập phương. Khẳng định nào dưới đây là đúng?



Ⓐ $\overrightarrow{AO}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}\right)$.

Ⓑ $\overrightarrow{AO}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}\right)$.

Ⓒ $\overrightarrow{AO}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}\right)$.

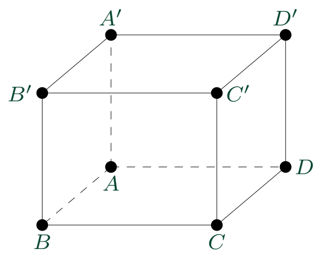
Ⓓ $\overrightarrow{AO}=\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}\right)$.

CÂU 5. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Tính độ dài vectơ $\vec{x}=\overrightarrow{AB'}+\overrightarrow{AD'}$ theo a.

Ⓐ $|\vec{x}|=a\sqrt{2}$. Ⓑ $|\vec{x}|=2a\sqrt{2}$. Ⓒ $|\vec{x}|=2a\sqrt{6}$. Ⓓ $|\vec{x}|=a\sqrt{6}$.

CÂU 6.

Hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Tính độ dài véctơ $\vec{x}=\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{AC'}$ theo a.

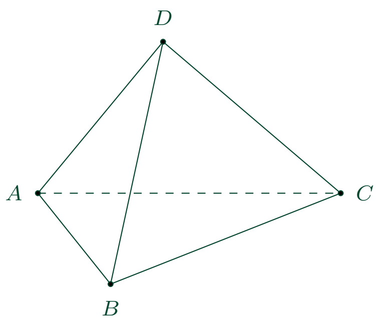


Ⓐ $a\sqrt{2}$. Ⓑ $\left(1+\sqrt{3}\right)a$.

Ⓒ $a\sqrt{6}$. Ⓓ $\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

CÂU 7.

Cho tứ diện $ABCD$. Mệnh đề nào dưới đây là mệnh đề đúng?



Ⓐ $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}$.

Ⓑ $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{BC}$.

Ⓒ $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{DC}$.

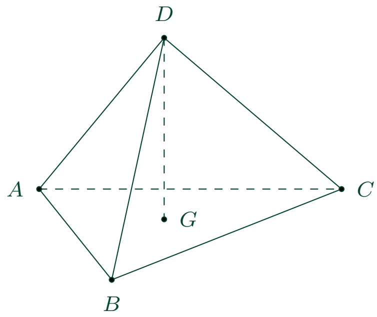
Ⓓ $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{DC}$.

CÂU 8.

Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. Tìm k thỏa đẳng thức vectơ $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}=k\cdot\overrightarrow{DG}$.

A $k=1$. **B** $k=3$.

C $k=2$. **D** $k=3$.

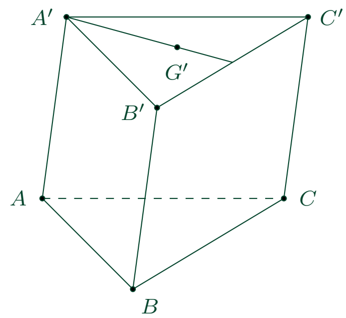


CÂU 9.

Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Gọi G' là trọng tâm của tam giác $A'B'C'$. Đặt $\vec{a}=\overrightarrow{AA'}$, $\vec{b}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{c}=\overrightarrow{AC}$. Véc-tơ $\overrightarrow{AG'}$ bằng

A $\frac{1}{3}\left(\vec{a}+3\vec{b}+\vec{c}\right)$. **B** $\frac{1}{3}\left(3\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)$.

C $\frac{1}{3}\left(\vec{a}+\vec{b}+3\vec{c}\right)$. **D** $\frac{1}{3}\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)$.



CÂU 10.

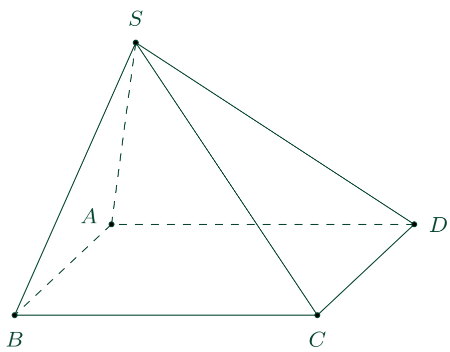
Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Đặt $\overrightarrow{SA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{SB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{SC}=\vec{c}$, $\overrightarrow{SD}=\vec{d}$. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A $\vec{a}+\vec{c}=\vec{b}+\vec{d}$.

B $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}=\vec{0}$.

C $\vec{a}+\vec{d}=\vec{b}+\vec{c}$.

D $\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}+\vec{d}$.

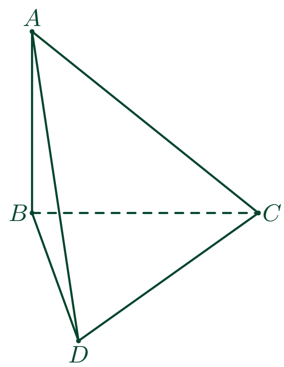


CÂU 11.

Cho tứ diện $ABCD$. Các vectơ có điểm đầu là A và điểm cuối là các đỉnh còn lại của hình tứ diện là

A $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CA},\overrightarrow{AD}$. **B** $\overrightarrow{BA},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}$.

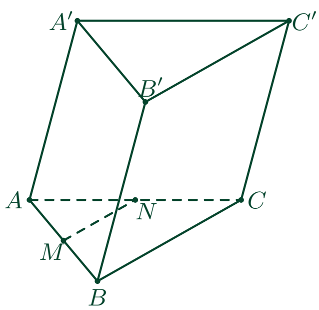
C $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{DA}$. **D** $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}$.



CÂU 12.

Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$.Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, AC. Trong 4 vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{B'C'}$, $\overrightarrow{A'C'}$ vectơ nào cùng hướng với vectơ $\overrightarrow{MN}$

A $\overrightarrow{AB}$. **B** $\overrightarrow{CB}$. **C** $\overrightarrow{B'C'}$. **D** $\overrightarrow{A'C'}$.



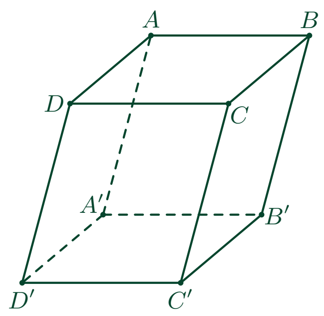
CÂU 13.

QUICK NOTE

QUICK NOTE

Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$.Số các vectơ có điểm đầu, điểm cuối là các đỉnh của hình hộp và bằng vectơ $\overrightarrow{AB}$ là

A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.



CÂU 14. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Trong các khẳng định dưới đây, đâu là khẳng định đúng?

A. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC'}$.
B. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC'}$.
C. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$.
D. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{AD}=\vec{0}$.

CÂU 15. Trong không gian cho tam giác ABC có G là trọng tâm và điểm M nằm ngoài mặt phẳng (ABC). Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}$.
B. $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=0$.
C. $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MG}$.
D. $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}$.

CÂU 16. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ tất cả các cạnh bằng $2\sqrt{3}$. Tính độ dài vectơ $\vec{u}=\overrightarrow{SA}-\overrightarrow{SC}$.

A. $\sqrt{3}$. B. $\sqrt{2}$. C. $2\sqrt{6}$. D. $2\sqrt{2}$.

CÂU 17. Cho tứ diện $ABCD$. Mệnh đề nào dưới đây là mệnh đề đúng?

A. $\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{DC}$.
B. $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{BC}$.
C. $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{DC}$.
D. $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CB}$.

CÂU 18. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$, M là trung điểm của BB'. Đặt $\overrightarrow{CA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{CB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AA'}=\vec{c}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

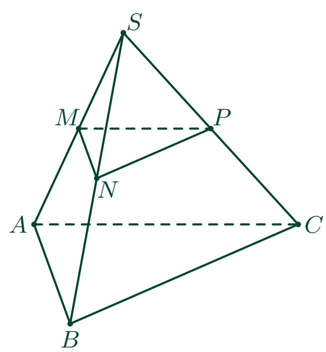
A. $\overrightarrow{AM}=\vec{b}+\vec{c}-\frac{1}{2}\vec{a}$.
B. $\overrightarrow{AM}=\vec{a}-\vec{c}+\frac{1}{2}\vec{b}$.
C. $\overrightarrow{AM}=\vec{a}+\vec{c}-\frac{1}{2}\vec{b}$.
D. $\overrightarrow{AM}=\vec{b}-\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{c}$.

CÂU 19. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Tính độ dài véctơ $\vec{x}=\overrightarrow{A'C'}-\overrightarrow{A'A}$ theo a?

A. $a\sqrt{2}$. B. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. C. $a\sqrt{6}$. D. $a\sqrt{3}$.

CÂU 20.

Cho tứ diện $S.ABC$ có M, N, P là trung điểm của SA, SB, SC. Tìm khẳng định đúng?

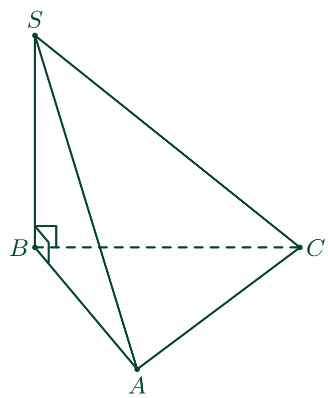


A. $\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{PN}-\overrightarrow{PM}\right)$.
B. $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{PN}-\overrightarrow{PM}$.
C. $\overrightarrow{AB}=2\left(\overrightarrow{PM}-\overrightarrow{PN}\right)$.
D. $\overrightarrow{AB}=2\left(\overrightarrow{PN}-\overrightarrow{PM}\right)$.

CÂU 21.

QUICK NOTE

Cho tứ diện $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a, SB vuông góc với đáy và $SB = \sqrt{3}a$. Góc giữa hai vectơ $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AS})$ là



(A) $60°$. (B) $30°$. (C) $45°$. (D) $90°$.

CÂU 22. Cho hình chóp $S.ABC$ có $AB = 4$, $\widehat{BAC} = 60°$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 6$. Khi đó độ dài $\overrightarrow{AC}$ là

(A) 3. (B) 6. (C) 4. (D) 12.

CÂU 23. Trong không gian cho vectơ $\overrightarrow{AB}$. Khi đó:

(A) Giá của vectơ $\overrightarrow{AB}$ là $\overrightarrow{AB}$.
(B) Giá của vectơ $\overrightarrow{AB}$ là $\left|\overrightarrow{AB}\right|$.
(C) Giá của vectơ $\overrightarrow{AB}$ là đường thẳng AB.
(D) Giá của vectơ $\overrightarrow{AB}$ là đoạn thẳng AB.

CÂU 24. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$. Trong các vectơ dưới đây, vectơ nào cùng phương với vectơ $\overrightarrow{AB}$?

(A) Vectơ $\overrightarrow{AD}$. (B) Vectơ $\overrightarrow{CC'}$. (C) Vectơ $\overrightarrow{BD}$. (D) Vectơ $\overrightarrow{CD}$.

CÂU 25. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Vectơ $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{A'D'}$ bằng vectơ nào dưới đây?

(A) $\overrightarrow{A'C}$. (B) $\overrightarrow{CA'}$. (C) $\overrightarrow{AC'}$. (D) $\overrightarrow{C'A}$.

CÂU 26. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Đặt $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{c}$, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{d}$. Trong các biểu thức vec tơ sau đây, biểu thức nào là đúng?

(A) $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}$.
(B) $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c} + \overrightarrow{d} = \overrightarrow{0}$.
(C) $\overrightarrow{b} - \overrightarrow{c} + \overrightarrow{d} = \overrightarrow{0}$.
(D) $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c} = \overrightarrow{d}$.

CÂU 27. Cho lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có độ dài mỗi cạnh bằng 1. Tính độ dài của vectơ $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{C'D'}$.

(A) $\sqrt{3}$. (B) $\sqrt{2}$. (C) 1. (D) $2\sqrt{2}$.

CÂU 28. Cho O là tâm hình bình hành $ABCD$. Hỏi vectơ $\left(\overrightarrow{AO} - \overrightarrow{DO}\right)$ bằng vectơ nào?

(A) $\overrightarrow{BA}$. (B) $\overrightarrow{AD}$. (C) $\overrightarrow{DC}$. (D) $\overrightarrow{AC}$.

CÂU 29. Cho ba điểm phân biệt A, B, C. Nếu $\overrightarrow{AB} = -3\overrightarrow{AC}$ thì đẳng thức nào dưới đây đúng?

(A) $\overrightarrow{BC} = -4\overrightarrow{AC}$. (B) $\overrightarrow{BC} = -2\overrightarrow{AC}$. (C) $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{AC}$. (D) $\overrightarrow{BC} = 4\overrightarrow{AC}$.

CÂU 30. Cho tam giác ABC có điểm O thỏa mãn: $\left|\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} - 2\overrightarrow{OC}\right| = \left|\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}\right|$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

(A) Tam giác ABC đều.
(B) Tam giác ABC cân tại C.
(C) Tam giác ABC vuông tại C.
(D) Tam giác ABC cân tại B.

CÂU 31. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Đẳng thức nào dưới đây là đúng?

(A) $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC}$.
(B) $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC}$.
(C) $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{AD}$.
(D) $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA'}$.

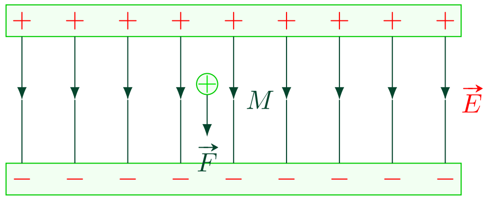
CÂU 32. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có độ dài cạnh bằng a. Tính độ dài của vectơ $\overrightarrow{AD'} + \overrightarrow{BA'}$.

(A) $\sqrt{3}a$. (B) $\sqrt{2}a$. (C) $\sqrt{6}a$. (D) $2\sqrt{3}a$.

CÂU 33.

QUICK NOTE

Trong điện trường đều, lực tĩnh điện $\vec{F}$ (đơn vị: N) tác dụng lên điện tích điểm có điện tích q (đơn vị: C) được tính theo công thức $\vec{F} = q \cdot \vec{E}$, trong đó $\vec{E}$ là cường độ điện trường (đơn vị: N/C). Tính độ lớn của lực tĩnh điện tác dụng lên điện tích điểm khi $q = 10^{-9}$ C và độ lớn điện trường $E = 10^5$ N/C.

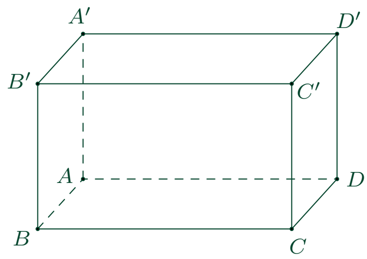


A 10^{-3} N. **B** 10^4 N.
C 10^{-14} N. **D** 10^{-4} N.

PHẦN II. *Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.*

CÂU 34.

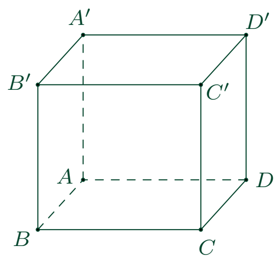
Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh $AB = a$; $AD = a\sqrt{3}$; $AA' = 2a$. Xét tính đúng, sai của các khẳng định sau:



Mệnh đề	Đ	S
a) $\overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{CD'} = \vec{0}$.		
b) $\overrightarrow{A'D} + \overrightarrow{CB'} = \vec{0}$.		
c) $\left\lvert\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right\rvert = a\sqrt{5}$.		
d) $\left\lvert\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A'D'} + \overrightarrow{CC'}\right\rvert = 2\sqrt{2}a$.		

CÂU 35.

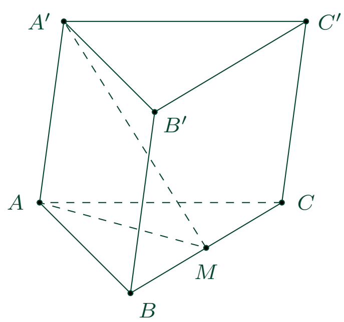
Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Xét tính đúng, sai của các khẳng định sau:



Mệnh đề	Đ	S
a) $\overrightarrow{B'B} - \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{B'D}$.		
b) $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{BD}$.		
c) $\left\lvert\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BB'}\right\rvert = a\sqrt{2}$.		
d) $\left\lvert\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{C'A}\right\rvert = a$.		

CÂU 36.

Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$ và $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$. Gọi M là trung điểm của BC. Xét tính đúng, sai của các khẳng định sau:

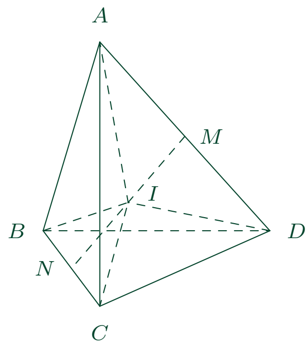


Mệnh đề	Đ	S
a) $\overrightarrow{B'C} = -\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$.		
b) $\overrightarrow{BC'} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$.		
c) $\overrightarrow{AM} = \vec{b} + \vec{c}$.		
d) $\overrightarrow{A'M} = -\vec{a} + \dfrac{1}{2}\vec{b} + \dfrac{1}{2}\vec{c}$.		

CÂU 37.

QUICK NOTE

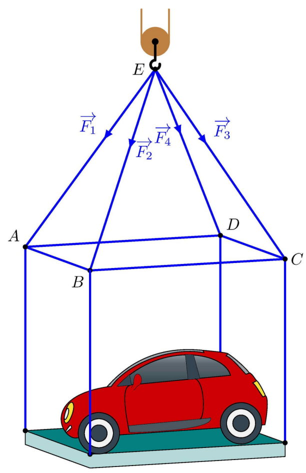
Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AD và BC, I là trung điểm MN. Xét tính đúng, sai của các khẳng định sau:



Mệnh đề	Đ	S
a) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BD}$.		
b) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}$.		
c) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}=2\overrightarrow{MN}$.		
d) $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}=\vec{0}$.		

CÂU 38.

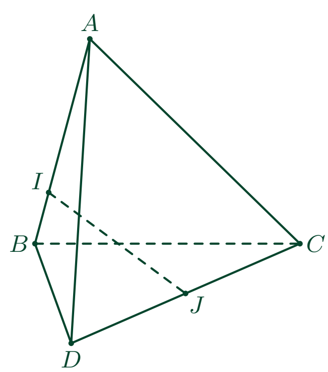
Một chiếc ô tô được đặt trên mặt đáy dưới của một khung sắt có dạng hình hộp chữ nhật với đáy trên là hình chữ nhật $ABCD$, mặt phẳng $(ABCD)$ song song với mặt phẳng nằm ngang. Khung sắt đó được buộc vào móc E của chiếc cần cẩu sao cho các đoạn dây cáp EA, EB, EC, ED có độ dài bằng nhau và cùng tạo với mặt phẳng $(ABCD)$ một góc bằng $60°$. Chiếc cần cẩu kéo khung sắt lên theo phương thẳng đứng. Biết rằng các lực căng $\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_2}$, $\overrightarrow{F_3}$, $\overrightarrow{F_4}$ đều có cường độ là 4700 N và trọng lượng của khung sắt là 3000 N.



Mệnh đề	Đ	S
a) $\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}=\overrightarrow{F_3}+\overrightarrow{F_4}$.		
b) $\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_3}=\overrightarrow{F_2}+\overrightarrow{F_4}$.		
c) $\left\lvert\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_3}\right\rvert=8141$ N (*làm tròn đến hàng đơn vị*).		
d) Trọng lượng của chiếc xe ô tô là 16282 N (*làm tròn đến hàng đơn vị*).		

CÂU 39.

Cho tứ diện $ABCD$ có $AB=AC=AD=a$ và $\widehat{BAC}=\widehat{BAD}=60°, \widehat{CAD}=90°$. Gọi I là điểm trên cạnh AB sao cho $AI=3IB$ và J là trung điểm của CD. Gọi α là góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{IJ}$.

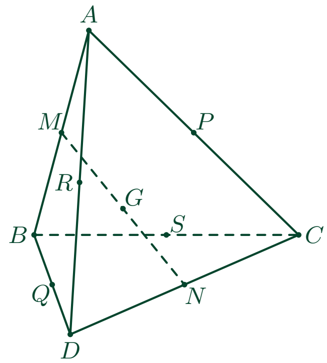


Mệnh đề	Đ	S
a) Tam giác BCD vuông cân.		
b) $\overrightarrow{IJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$.		
c) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}=\frac{a^2}{2}$.		
d) $\cos\alpha=-\frac{\sqrt{5}}{5}$.		

CÂU 40.

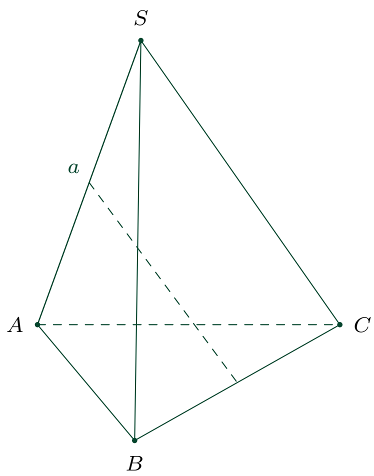
QUICK NOTE

Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N, P, Q, R, S, G lần lượt là trung điểm các đoạn thẳng AB, CD, AC, BD, AD, BC, MN.



Mệnh đề	Đ	S
a) $\overrightarrow{MR} = \overrightarrow{SN}$.		
b) $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$.		
c) $2\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$.		
d) $\lvert\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID}\rvert$ nhỏ nhất khi và chỉ khi điểm I trùng với điểm G.		

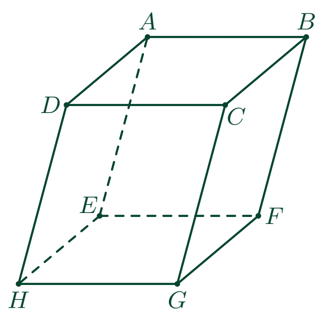
CÂU 41. Cho tứ diện đều $SABC$ có cạnh a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm SA, BC. Các mệnh đề sau đúng hay sai?



Mệnh đề	Đ	S
a) Độ dài của vectơ $\overrightarrow{SA}$ bằng a..		
b) $\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SB} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$.		
c) $\overrightarrow{SB} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{AC} = 4\overrightarrow{MN}$.		
d) Gọi I là trọng tâm của tứ diện. Khoảng cách từ I đến (ABC) bằng $\dfrac{3a\sqrt{6}}{4}$.		

CÂU 42.

Cho hình hộp chữ nhật $ABCD \cdot EFGH$ có $AB = AE = 2$, $AD = 3$ và đặt $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$, $\vec{c} = \overrightarrow{AE}$. Lấy điểm M thỏa $\overrightarrow{AM} = \dfrac{1}{5}\overrightarrow{AD}$ và điểm N thỏa $\overrightarrow{EN} = \dfrac{2}{5}\overrightarrow{EC}$. (tham khảo hình vẽ).

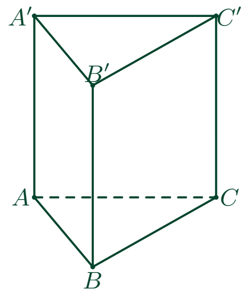


Mệnh đề	Đ	S
a) $\overrightarrow{MA} = -\dfrac{1}{5}\vec{b}$.		
b) $\overrightarrow{EN} = \dfrac{2}{5}\left(\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}\right)$.		
c) $\left(m \cdot \vec{a} + n \cdot \vec{b} + n \cdot \vec{c}\right)^2 = m^2 \cdot \vec{a}^2 + n^2 \cdot \vec{b}^2 + p^2 \cdot \vec{c}^2$ với m, n, p là các số thực.		
d) $MN = \dfrac{\sqrt{61}}{5}$.		

CÂU 43.

QUICK NOTE

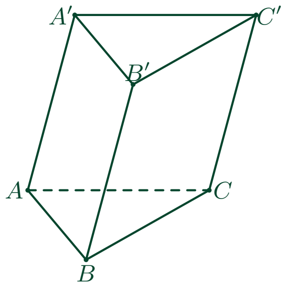
Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng x và chiều cao bằng y. (tham khảo hình vẽ)



Mệnh đề	Đ	S
a) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}x^2$.		
b) $\overrightarrow{AC'}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AA'}$.		
c) $\overrightarrow{CB'}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AA'}$.		
d) Góc $(AC',CB')>60^\circ$ khi $\frac{y}{x}<\sqrt{2}$.		

PHẦN III. *Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.*

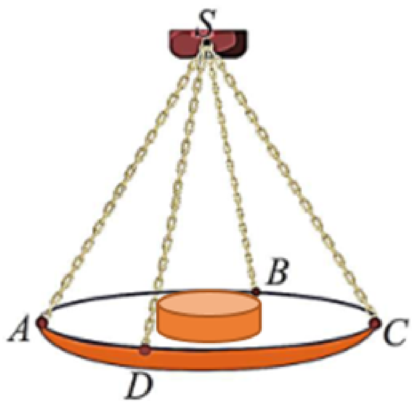
CÂU 44.
Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Đặt $\overrightarrow{AB}=\vec{a},\overrightarrow{AA'}=\vec{b},\overrightarrow{AC}=\vec{c}$. Ta biểu diễn $\overrightarrow{B'C}=m\vec{a}+n\vec{b}+p\vec{c}$, khi đó $m+n+p$ bằng bao nhiêu?



CÂU 45. Cho tứ diện $ABCD$, gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB và CD. Biết $\overrightarrow{IJ}=\frac{a}{b}\overrightarrow{AC}+\frac{c}{d}\overrightarrow{BD}$. Giá trị biểu thức $P=ab+cd$ bằng

CÂU 46. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng 15. Biết độ dài của $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}$ bằng $a\sqrt{6}$, khi đó giá trị của a là?

CÂU 47. Một chiếc cân đòn tay đang cân một vật có khối lượng $m=3\,\text{kg}$ được thiết kế với đĩa cân được giữ bởi bốn đoạn xích SA, SB, SC, SD sao cho $S.ABCD$ là hình chóp tứ giác đều có $\widehat{ASC}=90^\circ$. Biết độ lớn của lực căng cho mỗi sợi xích có dạng $\frac{a\sqrt{2}}{4}$. Lấy $g=10\text{m/s}^2$, khi đó giá trị của a bằng bao nhiêu?



CÂU 48. Cho tứ diện $ABCD$. Trên các cạnh AD và BC lần lượt lấy M, N sao cho $AM=3MD$, $BN=3NC$. Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của AD và BC. Phân tích vectơ $\overrightarrow{MN}$ theo hai vectơ $\overrightarrow{PQ}$ và $\overrightarrow{DC}$ ta được $\overrightarrow{MN}=a\overrightarrow{PQ}+b\overrightarrow{DC}$. Tính $a+2b$.

CÂU 49. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Một mặt phẳng (α) cắt các cạnh SA, SB, SC, SD lần lượt tại A',B',C',D'. Giá trị của biểu thức $P=\frac{SA}{SA'}+\frac{SC}{SC'}-\frac{SB}{SB'}-\frac{SD}{SD'}$.

CÂU 50. Cho hình lập phương $B'C$ có đường chéo $A'C=\frac{3}{16}$. Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$ và điểm 20 thỏa mãn: $\overrightarrow{OS}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OA'}+\overrightarrow{OB'}+\overrightarrow{OC'}+\overrightarrow{OD'}$. Khi đó độ dài của đoạn OS bằng $\frac{a\sqrt{3}}{b}$ với $a,b\in\mathbb{N}$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính giá trị của biểu thức $P=a^2+b^2$.

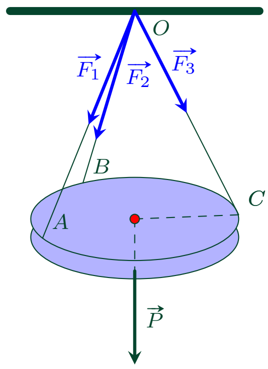
QUICK NOTE

CÂU 51. Khi chuyển động trong không gian, máy bay luôn chịu tác động của 4 lực chính: lực đẩy của động cơ, lực cản của không khí, trọng lực và lực nâng khí động học (hình ảnh 2.20).

Hình 2.20

Lực cản của không khí ngược hướng với lực đẩy của động cơ và có độ lớn tỉ lệ thuận với bình phương vận tốc máy bay. Một chiếc máy bay tăng vận tốc từ 900(km/h) lên 920(km/h), trong quá trình tăng tốc máy bay giữ nguyên hướng bay. Lực cản của không khí khi máy bay đạt vận tốc 900(km/h) và 920(km/h) lần lượt biểu diễn bởi hai véc tơ $\overrightarrow{F_1}$ và $\overrightarrow{F_2}$ với $\overrightarrow{F_1} = k\overrightarrow{F_2} (k \in \mathbb{R}; k > 0)$. Tính giá trị của k (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai).

CÂU 52.
Một chiếc đèn tròn được treo song song với mặt phẳng nằm ngang bởi ba sợi dây không dãn xuất phát từ điểm O trên trần nhà và lần lượt buộc vào ba điểm A, B, C trên đèn tròn sao cho các lực căng $\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_2}$, $\overrightarrow{F_3}$ lần lượt trên mỗi dây OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau và $\left|\overrightarrow{F_1}\right| = \left|\overrightarrow{F_2}\right| = \left|\overrightarrow{F_3}\right| = 15$ (N). Tính trọng lượng của chiếc đèn tròn đó (làm tròn đến hàng phần chục).



CÂU 53. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Xét các điểm M, N lần lượt thuộc các đường thẳng $A'C$, $C'D$ sao cho đường thẳng MN song song với đường thẳng BD'. Khi đó tỉ số $\dfrac{MN}{BD'}$ bằng

Dạng 2. Xác định góc và tính tích vô hướng của hai véctơ

BÀI TẬP TỰ LUẬN

VÍ DỤ 1. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng 5.

a) Tìm góc giữa các cặp véc-tơ sau: $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{B'D'}$; $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{CD}$; $\overrightarrow{AD'}$ và $\overrightarrow{BD}$.

b) Tính các tích vô hướng $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{B'D'}$; $\overrightarrow{AD'} \cdot \overrightarrow{BD}$;

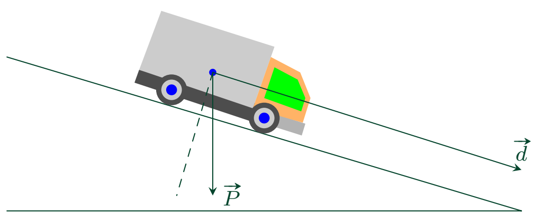
c) Chứng minh $\overrightarrow{AC'}$ vuông góc với $\overrightarrow{BD}$.

VÍ DỤ 2. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a và M là trung điểm của CD.

a) Tính các tích vô hướng $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM}$.

b) Tính góc $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$.

VÍ DỤ 3.
Cho biết công A (đơn vị: J) sinh bởi lực $\overrightarrow{F}$ tác dụng lên một vật được tính bằng công thức $A = \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{d}$, trong đó $\overrightarrow{d}$ là vectơ biểu thị độ dịch chuyển của vật (đơn vị của $\left|\overrightarrow{d}\right|$ là m) khi chịu tác dụng của lực $\overrightarrow{F}$.

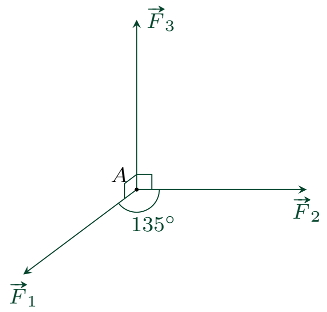


Một chiếc xe có khối lượng 1,5 tấn đang đi xuống trên một đoạn đường dốc có góc nghiêng 5° so với phương ngang. Tính công sinh bởi trọng lực $\overrightarrow{P}$ khi xe đi hết đoạn đường dốc dài

30 m (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị), biết rằng trọng lực $\overrightarrow{P}$ được xác định bởi công thức $\overrightarrow{P} = m\overrightarrow{g}$, với m (đơn vị: kg) là khối lượng của vật và $\overrightarrow{g}$ là gia tốc rơi tự do có độ lớn $g = 9{,}8\ \text{m/s}^2$.

VÍ DỤ 4.

Một chất điểm A nằm trên mặt phẳng nằm ngang (α), chịu tác động bởi ba lực $\overrightarrow{F}_1$, $\overrightarrow{F}_2$, $\overrightarrow{F}_3$. Các lực $\overrightarrow{F}_1$, $\overrightarrow{F}_2$ có giá nằm trong (α) và $\left(\overrightarrow{F}_1, \overrightarrow{F}_2\right) = 135^\circ$, còn lực $\overrightarrow{F}_3$ có giá vuông góc với (α) và hướng lên trên. Xác định cường độ hợp lực của các lực $\overrightarrow{F}_1$, $\overrightarrow{F}_2$, $\overrightarrow{F}_3$ biết rằng độ lớn của ba lực đó lần lượt là 20 N, 15 N và 10 N.



BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

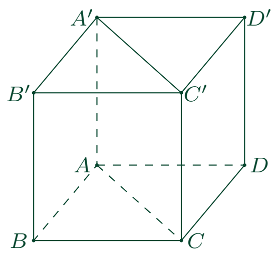
PHẦN I. *Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.*

CÂU 1.

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định **sai**?

Ⓐ $\left(\overrightarrow{A'C'}, \overrightarrow{AD}\right) = 45^\circ$. Ⓑ $\left(\overrightarrow{A'C'}, \overrightarrow{B'B}\right) = 90^\circ$.

Ⓒ $\left(\overrightarrow{A'A}, \overrightarrow{CB'}\right) = 45^\circ$. Ⓓ $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right) = 180^\circ$.

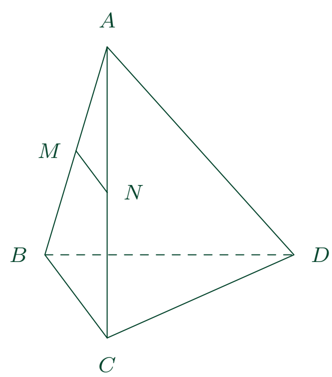


CÂU 2.

Cho tứ diện đều $ABCD$, Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AB, AC. Hãy tính góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{BD}$.

Ⓐ $\left(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{BD}\right) = 150^\circ$. Ⓑ $\left(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{BD}\right) = 120^\circ$.

Ⓒ $\left(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{BD}\right) = 30^\circ$. Ⓓ $\left(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{BD}\right) = 60^\circ$.

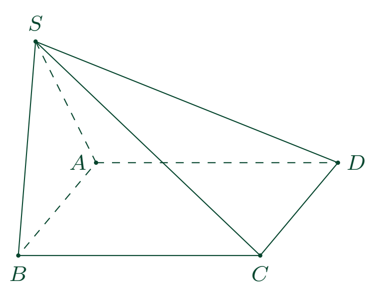


CÂU 3.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành và mặt bên SAB là tam giác đều. Tính góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{DC}$ và $\overrightarrow{BS}$.

Ⓐ $\left(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{BS}\right) = 120^\circ$. Ⓑ $\left(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{BS}\right) = 60^\circ$.

Ⓒ $\left(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{BS}\right) = 90^\circ$. Ⓓ $\left(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{BS}\right) = 150^\circ$.

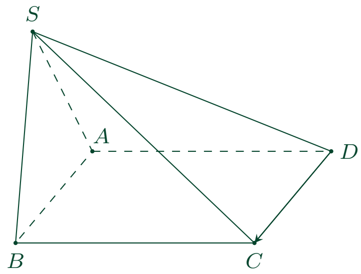


CÂU 4.

QUICK NOTE

QUICK NOTE

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Mặt bên ASB là tam giác vuông cân tại S và có cạnh $AB = a$. Tính $\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{AS}$.

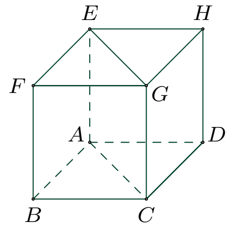


A $\dfrac{a^2}{4}$. **B** $-\dfrac{a^2}{4}$.

C $-\dfrac{a^2}{2}$. **D** $\dfrac{a^2}{2}$.

CÂU 5.

Cho hình lập phương $ABCD.EFGH$ có các cạnh bằng a. Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{EG}$.

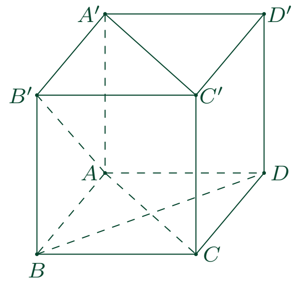


A $a^2\sqrt{2}$. **B** a^2.

C $\dfrac{a^2\sqrt{2}}{2}$. **D** $a^2\sqrt{3}$.

CÂU 6.

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Tính $\overrightarrow{AB'} \cdot \overrightarrow{A'C'}$.

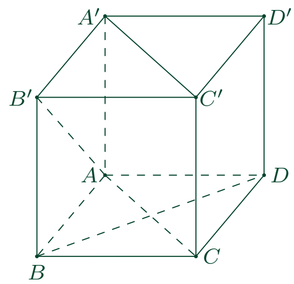


A $\dfrac{a^2}{2}$. **B** $-a^2$.

C a^2. **D** $-\dfrac{a^2}{2}$.

CÂU 7.

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Tính $\overrightarrow{AB'} \cdot \overrightarrow{BD}$.

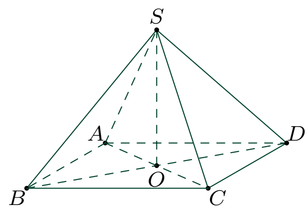


A $\dfrac{a^2}{2}$. **B** $-a^2$.

C a^2. **D** $-\dfrac{a^2}{2}$.

CÂU 8.

Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có độ dài tất cả các cạnh bằng a. Tính $\overrightarrow{AS} \cdot \overrightarrow{BC}$.

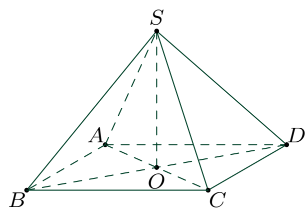


A $-\dfrac{a^2}{4}$. **B** $\dfrac{a^2}{2}$.

C $-\dfrac{a^2}{2}$. **D** $\dfrac{a^2}{4}$.

CÂU 9.

Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có độ dài tất cả các cạnh bằng a. Tính $\overrightarrow{AS} \cdot \overrightarrow{AC}$.



A $-a^2$. **B** $\dfrac{a^2}{2}$.

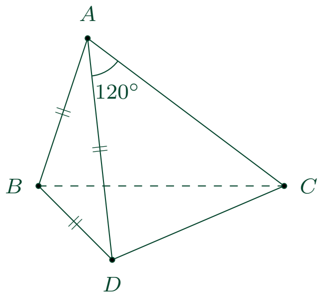
C $-\dfrac{a^2}{2}$. **D** a^2.

CÂU 10.

Cho tứ diện $ABCD$ biết $AB = AD = BD = a$, $AC = 2a$ và $\widehat{CAD} = 120°$. Tính $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD}$.

A $-\dfrac{3}{2}a^2$. **B** $\dfrac{3}{2}a^2$.

C $\dfrac{1}{2}a^2$. **D** $-\dfrac{1}{2}a^2$.

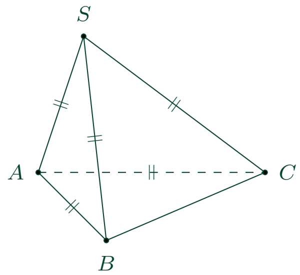


CÂU 11.

Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC = AB = AC = a$ và $BC = a\sqrt{2}$. Tính góc giữa các vectơ $\overrightarrow{SC}$ và $\overrightarrow{AB}$.

A $60°$. **B** $90°$.

C $120°$. **D** $150°$.

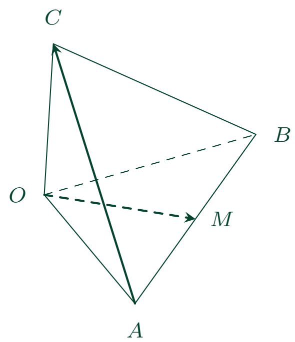


CÂU 12.

Cho tứ diện $OABC$ có các cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc và $OA = OB = OC = 1$. Gọi M là trung điểm của cạnh AB. Tính góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{OM}$ và $\overrightarrow{AC}$.

A $90°$. **B** $120°$.

C $60°$. **D** $30°$.



CÂU 13. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh bằng a. Tích vô hướng của hai vectơ $\overrightarrow{DD'}$ và $\overrightarrow{A'C'}$ bằng

A $\sqrt{2}a^2$. **B** a^2. **C** $-\sqrt{2}a^2$. **D** 0.

PHẦN II. *Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.*

CÂU 14. Trong không gian, cho hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng có độ dài bằng 1. Biết rằng góc giữa hai véc-tơ đó là $45°$.

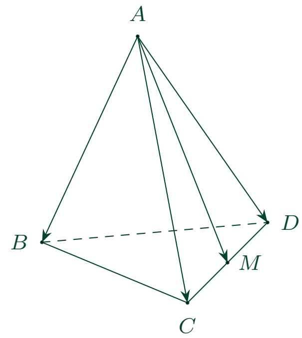
Mệnh đề	Đ	S
a) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.		
b) $\left(\vec{a} + 3\vec{b}\right) \cdot \left(\vec{a} - 2\vec{b}\right) = -5 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.		
c) $\left\vert\vec{a} + \vec{b}\right\vert = 2 + \sqrt{2}$.		
d) $\left\vert\vec{a} - \sqrt{2}\vec{b}\right\vert = 0$.		

CÂU 15.

QUICK NOTE

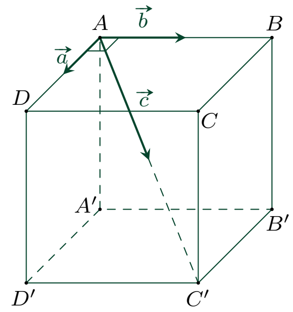
QUICK NOTE

Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a và M là trung điểm của CD.



Mệnh đề	Đ	S
a) $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$.		
b) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \dfrac{a^2}{2}$.		
c) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$.		
d) $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = -\dfrac{a^2}{2}$.		

CÂU 16. Một chất điểm ở vị trí đỉnh A của hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Chất điểm chịu tác động bởi ba lực $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ lần lượt cùng hướng với $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC'}$ như hình vẽ. Độ lớn của các lực $\vec{a}$, $\vec{b}$ và $\vec{c}$ tương ứng là 10 N, 10 N và 20 N.



Mệnh đề	Đ	S
a) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$.		
b) $\left\|\vec{a} + \vec{b}\right\| = 20$ (N).		
c) $\left\|\vec{a} + \vec{c}\right\| = \left\|\vec{b} + \vec{c}\right\|$.		
d) $\left\|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\right\| = 32{,}59$ (N) (*làm tròn kết quả đến hàng phần mười*).		

CÂU 17. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. Biết rằng cạnh $AB = a$, $AD = 2a$, cạnh bên $SA = 2a$ và vuông góc với mặt đáy. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh SB, SD. Các mệnh đề sau đúng hay sai ?

Mệnh đề	Đ	S
a) Hai vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ là hai vectơ cùng phương, cùng hướng.		
b) Góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{SC}$ và $\overrightarrow{AC}$ bằng 60°.		
c) Tích vô hướng $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = \dfrac{a^2}{2}$.		
d) Độ dài của vectơ $\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AN}$ là $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.		

CÂU 18. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Trên các cạnh AA', CC' lần lượt lấy các điểm M, N sao cho $AM = \dfrac{2}{3}AA'$, $CN = NC'$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

Mệnh đề	Đ	S
a) Góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{AN}$ và $\overrightarrow{AC}$ bằng 60°.		
b) Độ dài của vectơ $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{AM}$ là $\dfrac{3a}{2}$.		
c) Tích vô hướng $\overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{AC} = a^2$.		
d) Tích vô hướng $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{A'C'} = 2a^2$.		

CÂU 19. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ đáy là tam giác đều cạnh $2a$, $AA' = a\sqrt{3}$. H, K lần lượt là trung điểm BC, $B'C'$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

Mệnh đề	Đ	S
a) Hai vectơ $\overrightarrow{AH}$, $\overrightarrow{KA'}$ là hai vectơ cùng phương, cùng hướng.		
b) Góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{A'H}$ và $\overrightarrow{AH}$ bằng 60°.		

c) Tích vô hướng $\overrightarrow{AK}\cdot\overrightarrow{AB'}=\dfrac{5a^2}{2}$.		
d) Độ dài của vectơ $\overrightarrow{AK}+\overrightarrow{AH}$ là $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.		

CÂU 20. Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh a. E là điểm trên đoạn CD sao cho $ED=2CE$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

Mệnh đề	Đ	S
a) Có 6 vectơ (khác vectơ $\overrightarrow{0}$) có điểm đầu và điểm cuối được tạo thành từ các đỉnh của tứ diện.		
b) Góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BC}$ bằng 60°.		
c) Nếu $\overrightarrow{BE}=m\overrightarrow{BA}+n\overrightarrow{BC}+p\overrightarrow{BD}$ thì $m+n+p=\dfrac{2}{3}$.		
d) Tích vô hướng $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BE}=\dfrac{a^2}{6}$.		

CÂU 21. Cho tứ diện $ABCD$ có cạnh a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

Mệnh đề	Đ	S
a) $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ cùng hướng.		
b) $\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{ED}=\overrightarrow{0}$ với E là trung điểm MN.		
c) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{0}$.		
d) Điểm I xác định bởi $P=3\overrightarrow{IA}^2+\overrightarrow{IB}^2+\overrightarrow{IC}^2+\overrightarrow{ID}^2$ có giá trị nhỏ nhất. Khi đó giá trị nhỏ nhất của P là $2a^2$.		

PHẦN III. *Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.*

CÂU 22. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng 4. Giá trị tích vô hướng $\overrightarrow{AB}\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CA}\right)$ bằng

CÂU 23. Trong không gian, cho hai vectơ $\overrightarrow{a}$ và $\overrightarrow{b}$ có cùng độ dài bằng 6. Biết độ dài của vectơ $\overrightarrow{a}+2\overrightarrow{b}$ bằng $6\sqrt{3}$. Biết số đo góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{a}$ và $\overrightarrow{b}$ là x độ. Giá trị của x là bao nhiêu?

CÂU 24. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng 2. Tính $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A'C'}$.

CÂU 25. Cho tứ diện $ABCD$, gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC và AD, biết $AB=a$, $CD=a$, $MN=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Tìm số đo (đơn vị độ) góc giữa hai đường thẳng AB và CD.

CÂU 26. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{A'B}$ và $\overrightarrow{AC'}$ bằng

CÂU 27. Cho hình chóp $S.ABC$ có SA, SB, SC đôi một vuông góc nhau và $SA=SB=SC=a$. Gọi M là trung điểm của AB. Góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{SM}$ và $\overrightarrow{BC}$ bằng

QUICK NOTE

LỜI GIẢI CHI TIẾT

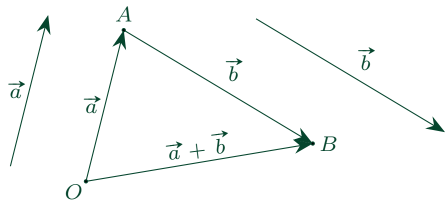
Bài 1. VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN

A. LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1. Tổng của hai véc tơ

Định nghĩa:

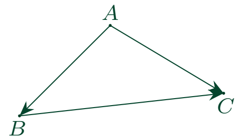
Trong không gian, cho hai véctơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Lấy ba điểm O, A, B sao cho $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$. Ta gọi $\overrightarrow{OB}$ là **tổng của hai véctơ** $\vec{a}$ và $\vec{b}$, ký hiệu $\vec{a} + \vec{b}$.
Phép lấy tổng của hai véctơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ được gọi là **phép cộng véctơ**.

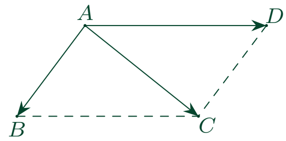


Các quy tắc cần nhớ:

① Quy tắc ba điểm: Với ba điểm A, B, C, ta có $\boxed{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}}$

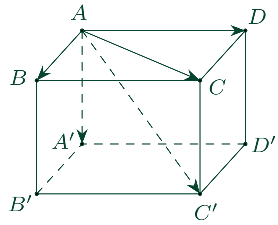
② Quy tắc hình bình hành: Cho $ABCD$ là hình bình hành, ta có $\boxed{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}}$





③ Quy tắc hình hộp: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Ta có $\boxed{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC'}}$

Hệ thức tương tự: $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{BD'}$.



Tính chất:

① Tính chất giao hoán: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$;

② Tính chất kết hợp: $\left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \vec{c} = \vec{a} + \left(\vec{b} + \vec{c}\right)$;

③ Với mọi véctơ $\vec{a}$, ta luôn có: $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$.

④ Tổng của ba véctơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$: $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \vec{c}$.

2. Hiệu của hai véc tơ

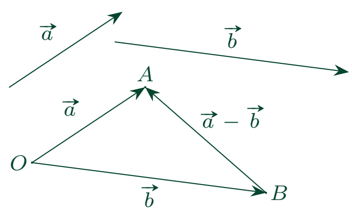
Véctơ đối:

① Vectơ đối của $\vec{a}$ kí hiệu là $-\vec{a}$.

② Vectơ đối của $\overrightarrow{AB}$ là $\overrightarrow{BA}$: $-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$.

③ Vectơ $\vec{0}$ được coi là vectơ đối của chính nó.

Định nghĩa hiệu của hai véctơ: Trong không gian, cho hai véctơ $\vec{a}$, $\vec{b}$. Ta gọi $\vec{a} + \left(-\vec{b}\right)$ là **hiệu của hai véctơ** $\vec{a}$ và $\vec{b}$, ký hiệu $\vec{a} - \vec{b}$.
Phép lấy hiệu của hai véctơ được gọi là **phép trừ véctơ**.



Các quy tắc cần nhớ:

① Với ba điểm A, B, C ta có $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$.

② Hai véc tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đối nhau thì $\vec{a} + \vec{b} = \vec{0}$.

3. Tích của một số với một véc-tơ

Định nghĩa: Cho số thực $k \neq 0$ và vectơ $\vec{a} \neq \vec{0}$. Tích của một số k với vectơ $\vec{a}$ là một vectơ, kí hiệu là $k\vec{a}$, được xác định như sau:

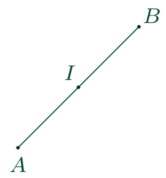
- Cùng hướng với vectơ $\vec{a}$ nếu $k > 0$, ngược hướng với vectơ $\vec{a}$ nếu $k < 0$.
- Có độ dài bằng $|k| \cdot |\vec{a}|$.

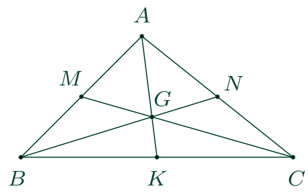
⚠ $0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$ *và* $k \cdot \vec{0} = \vec{0}$.

Hệ thức trung điểm, trọng tâm:

① I là trung điểm của đoạn thẳng AB thì

- $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$;
- $\overrightarrow{IA} = -\overrightarrow{IB}$; $\overrightarrow{AI} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$;...





② G là trọng tâm của tam giác ABC thì

- $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$;
- $\overrightarrow{GA} = -\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AK}$; $\overrightarrow{GA} = -2\overrightarrow{GK}$;...

Nhận xét:

① Với hai véctơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bất kỳ, với mọi số h và k, ta luôn có

- $k\left(\vec{a} + \vec{b}\right) = k\vec{a} + k\vec{b}$;
- $(h+k)\,\vec{a} = h\vec{a} + k\vec{a}$;
- $h\,(k\vec{a}) = (hk)\,\vec{a}$;
- $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$;
- $(-1) \cdot \vec{a} = -\vec{a}$;
- $k\vec{a} = \vec{0} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \vec{a} = \vec{0} \\ k = 0 \end{array}\right.$.

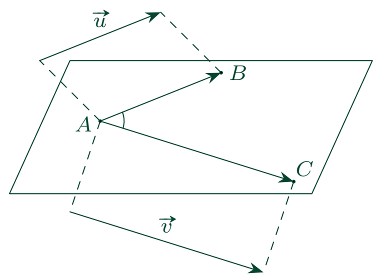
② Hai véctơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ ($\vec{b}$ khác $\vec{0}$) cùng phương khi và chỉ khi có số k sao cho $\vec{a} = k\vec{b}$.

③ Ba điểm phân biệt A, B, C thẳng hàng khi và chỉ khi có số $k \neq 0$ để $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$.

4. Tích vô hướng của hai véc-tơ

Góc giữa hai véctơ:

Trong không gian, cho $\vec{u}$ và $\vec{v}$ là hai véctơ khác $\vec{0}$. Lấy một điểm A bất kỳ, gọi B và C là hai điểm sao cho $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$. Khi đó, ta gọi $\widehat{BAC}$ là góc giữa hai véctơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$, ký hiệu $(\vec{u}, \vec{v})$.



⚠ $0° \leq (\vec{u}, \vec{v}) \leq 180°$.

⚠
- *Nếu* $\vec{u}$ *cùng hướng với* $\vec{v}$ *thì* $(\vec{u}, \vec{v}) = 0°$;
- *Nếu* $\vec{u}$ *ngược hướng với* $\vec{v}$ *thì* $(\vec{u}, \vec{v}) = 180°$;
- *Nếu* $\vec{u}$ *vuông góc với* $\vec{v}$ *thì* $(\vec{u}, \vec{v}) = 90°$.

Định nghĩa tích vô hướng của hai véc tơ: Trong không gian, cho hai véctơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ khác $\vec{0}$. Tích vô hướng của hai véctơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ là một số, kí hiệu $\vec{u} \cdot \vec{v}$, được xác định bởi công thức $\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\vec{u}, \vec{v})}$

⚠

① *Trong trường hợp* $\vec{u} = 0$ *hoặc* $\vec{v} = 0$, *ta quy ước* $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

② $\vec{u} \cdot \vec{u} = \vec{u}^2 = |\vec{u}|^2$; $\quad \vec{u}^2 \geqslant 0$. $\vec{u}^2 = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$.

③ *Với hai véctơ* $\vec{u}$, $\vec{v}$ *khác* $\vec{0}$, *ta có* $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$

④ *Với hai véctơ* $\vec{u}$, $\vec{v}$ *khác* $\vec{0}$, *ta có* $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{0}$.

TÍnh chất: Với ba véctơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ và số thực k, ta có:

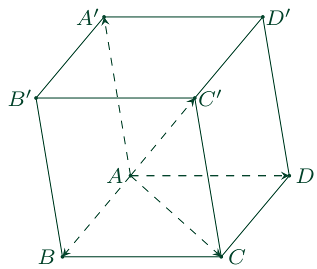
- $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$;
- $\vec{a} \cdot \left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$;
- $(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = k(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot (k\vec{b})$.

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Dạng 1. Xác định véc-tơ, chứng minh đẳng thức véc tơ,độ dài véc tơ

BÀI TẬP TỰ LUẬN

VÍ DỤ 1.
Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Hãy xác định các véc-tơ (khác $\vec{0}$) có điểm đầu, điểm cuối là các đỉnh của hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ thỏa

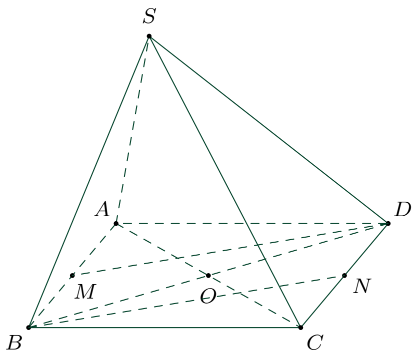


a) cùng phương với $\overrightarrow{AB}$;
b) cùng phương $\overrightarrow{AA'}$;
c) bằng với $\overrightarrow{AD}$;
d) bằng với $\overrightarrow{A'B}$;
e) đối với $\overrightarrow{CD'}$;
f) đối với $\overrightarrow{B'C}$.

VÍ DỤ 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N, O lần lượt là trung điểm của AB, CD và AC. Chứng minh rằng

a) $\overrightarrow{BN}$ và $\overrightarrow{DM}$ đối nhau;
b) $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}+\overrightarrow{SD}=4\overrightarrow{SO}$;
c) $\overrightarrow{SD}-\overrightarrow{BN}-\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{SC}$.

Lời giải.



a) Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành nên $AB = CD$ và $AB \parallel CD$, suy ra $BM = DN$ và $BM \parallel DN$.
Do đó $BMDN$ là hình bình hành.
Hai véc-tơ $\overrightarrow{BN}$ và $\overrightarrow{DN}$ có cùng độ dài và ngược hướng nên chúng là hai véc-tơ đối nhau.

b) Ta có $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SC}=2\overrightarrow{SO}$; $\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SD}=2\overrightarrow{SO}$. Suy ra

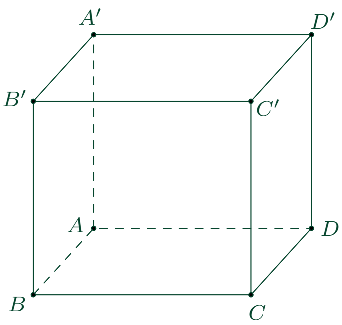
$$\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}+\overrightarrow{SD}=4\overrightarrow{SO}.$$

c) Từ câu a, ta có $\overrightarrow{BN}=-\overrightarrow{DM}$.
Suy ra $\overrightarrow{SD}-\overrightarrow{BN}-\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{SD}+\overrightarrow{DM}-\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{SM}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{SC}$.

VÍ DỤ 3. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh bằng a. Gọi G là trọng tâm tam giác $AB'D'$.

a) Tìm vectơ: $\overrightarrow{CC'}+\overrightarrow{BA}$; $\overrightarrow{CC'}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{D'A'}$.
b) Chứng minh: $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AC'}$.
c) Chứng minh: $\overrightarrow{B'B}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{B'D}$.
d) Chứng minh: $\overrightarrow{BB'}-\overrightarrow{C'B'}-\overrightarrow{D'C'}=\overrightarrow{BD'}$.
e) Chứng minh: $\overrightarrow{A'C}=3\overrightarrow{A'G}$.
f) Tính độ dài véc tơ $\vec{u}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A'D'}+\overrightarrow{AA'}$.

Lời giải.



a) Vì $ABCD.A'B'C'D'$ là hình hộp nên $\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CD}$ và $\overrightarrow{D'A'}=\overrightarrow{CB}$.
Suy ra $\overrightarrow{CC'}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{D'A'}=\overrightarrow{CC'}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CA'}$.

b) Vì tứ giác $ABCD$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}$. Áp dụng quy tắc hình hộp suy ra

$$\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AC'}$$

c) Ta có $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{B'C'}$, $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{B'A'}$. Do đó

$$\overrightarrow{B'B}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{B'B}+\overrightarrow{B'C'}+\overrightarrow{B'A'}=\overrightarrow{B'D}.$$

d) Ta có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BB'}-\overrightarrow{C'B'}-\overrightarrow{D'C'} &= \overrightarrow{BB'}-\left(\overrightarrow{D'C'}+\overrightarrow{C'B'}\right)=\overrightarrow{BB'}-\overrightarrow{D'B'}\\ &= \overrightarrow{BB'}+\left(-\overrightarrow{D'B'}\right)=\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{B'D'}=\overrightarrow{BD'}.\end{aligned}$$

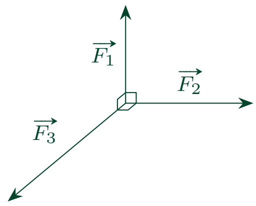
e) Do G là trọng tâm tam giác $AB'D'$ nên $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB'}+\overrightarrow{GD'}=\vec{0}$. Khi đó, theo quy tắc hình hộp ta có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{A'C} &= \overrightarrow{A'A}+\overrightarrow{A'B'}+\overrightarrow{A'D'}\\ &= \overrightarrow{A'G}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{A'G}+\overrightarrow{GB'}+\overrightarrow{A'G}+\overrightarrow{GD'}\\ &= 3\overrightarrow{A'G}.\end{aligned}$$

f) Ta có $\vec{u} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A'D'} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC'}$. Suy ra $\left|\vec{u}\right| = AC' = a\sqrt{3}$.

VÍ DỤ 4.

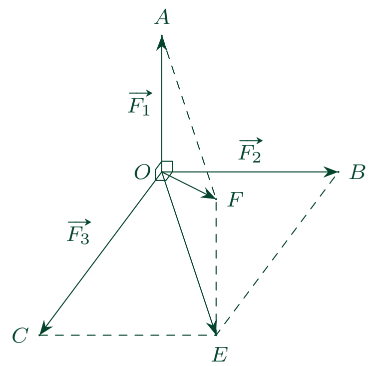
Ba lực $\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_2}$, $\overrightarrow{F_3}$ cùng tác động vào một vật có phương đôi một vuông góc nhau và có độ lớn lần lượt là $2\,\text{N}$, $3\,\text{N}$, $4\,\text{N}$.



a) Tính độ lớn hợp lực của $\overrightarrow{F_2}$, $\overrightarrow{F_3}$.

b) Tính độ lớn hợp lực của ba lực đã cho.

Lời giải.



a) Gọi O là vị trí trên vật mà ba lực cùng tác động vào. Gọi A, B, C là các điểm sao cho $\overrightarrow{F_1} = \overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{F_2} = \overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{F_3} = \overrightarrow{OC}$. Khi đó

$$\left|\overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{F_3}\right| = OE = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5\text{N}.$$

b) Dựng các hình chữ nhật $OBEC$ và $OEFA$ thì ta có

$$\begin{cases} \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OE} \\ \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OF}. \end{cases}$$

Do đó $\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{F_3} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OF}$.
Vậy độ lớn hợp lực của F_1, $\overrightarrow{F_2}$ và $\overrightarrow{F_3}$ là

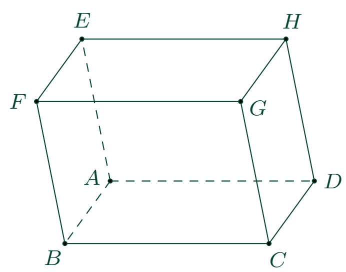
$$\begin{aligned} \left|\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{F_3}\right| &= OF = \sqrt{OA^2 + OE^2} \\ &= \sqrt{OA^2 + OB^2 + OC^2} \\ &= \sqrt{2^2 + 3^2 + 4^2} = \sqrt{29}\,\text{N}. \end{aligned}$$

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. *Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.*

CÂU 1.

Cho hình hộp $ABCD.EFGH$. Các véc-tơ có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của hình hộp và bằng véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ là các véc-tơ nào sau đây?



A $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{HG}$, $\overrightarrow{EF}$. **B** $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{HG}$, $\overrightarrow{EF}$. **C** $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{HG}$, $\overrightarrow{FE}$. **D** $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{GH}$, $\overrightarrow{EF}$.

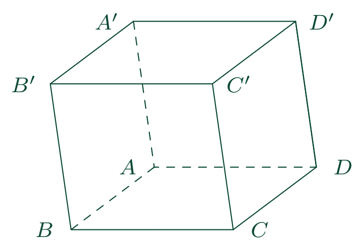
Lời giải.

Các véc-tơ bằng với véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ là $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{HG}$, $\overrightarrow{EF}$

Chọn đáp án B .... □

CÂU 2.

Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

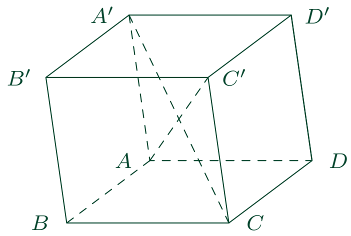


A $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B'D'} = \overrightarrow{AD}$. **B** $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \vec{0}$.

C $\overrightarrow{AC'} + \overrightarrow{A'C} = 2\overrightarrow{AC}$. **D** $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{D'D} = \vec{0}$.

Lời giải.

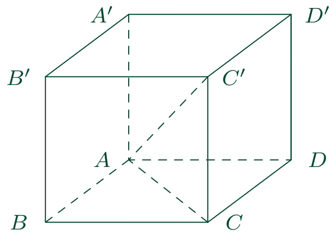
- $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B'D'}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}$'
- $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ đối nhau nên $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\vec{0}$.
- Theo quy tắc hình bình hành ta có
$\overrightarrow{AC'}+\overrightarrow{A'C}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{A'A}+\overrightarrow{A'C'}=2\cdot\overrightarrow{AC}$.
- $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{D'D}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{AC'}$



Chọn đáp án (D) .... □

CÂU 3.
Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Khẳng định nào sau đây là khẳng định **sai**?

(A) $|\overrightarrow{AC}|=a\sqrt{2}$.
(B) $|\overrightarrow{AC'}|=a\sqrt{3}$.
(C) $\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{D'B'}=\vec{0}$.
(D) $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BB'}=\overrightarrow{BC'}$.

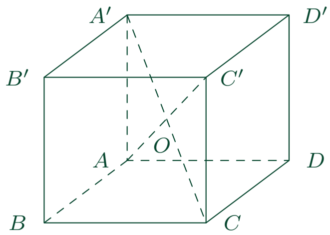


Lời giải.

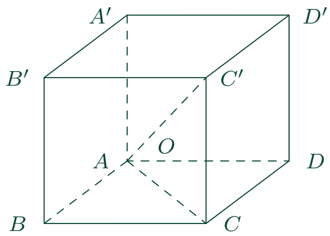
Chọn đáp án (D) .... □

CÂU 4.
Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi O là tâm của hình lập phương. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

(A) $\overrightarrow{AO}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}\right)$.
(B) $\overrightarrow{AO}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}\right)$.
(C) $\overrightarrow{AO}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}\right)$.
(D) $\overrightarrow{AO}=\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}\right)$.



Lời giải.
Theo quy tắc hình hộp, ta có $\overrightarrow{AC'}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}$.
Mà O là trung điểm của AC'
nên $\overrightarrow{AO}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC'}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}\right)$.

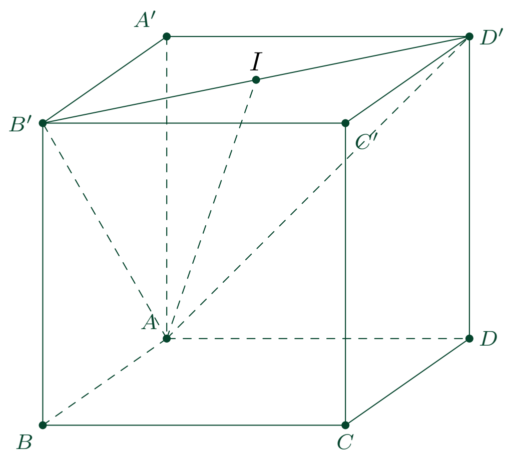


Chọn đáp án (B) .... □

CÂU 5. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Tính độ dài vectơ $\vec{x}=\overrightarrow{AB'}+\overrightarrow{AD'}$ theo a.

(A) $|\vec{x}|=a\sqrt{2}$.
(B) $|\vec{x}|=2a\sqrt{2}$.
(C) $|\vec{x}|=2a\sqrt{6}$.
(D) $|\vec{x}|=a\sqrt{6}$.

Lời giải.
Ta có $\vec{x}=\overrightarrow{AB'}+\overrightarrow{AD'}=2\overrightarrow{AI}$, với I là trung điểm của $B'D'$. Khi đó $|\vec{x}|=2AI$.
Do tam giác $AB'D'$ đều cạnh $a\sqrt{2}$ nên $AI=\frac{a\sqrt{6}}{2}$.
Vậy $|\vec{x}|=a\sqrt{6}$.



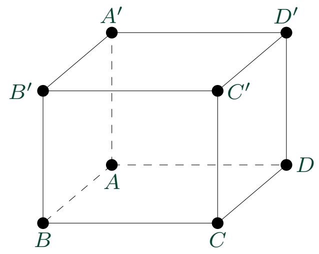
Chọn đáp án (D) .... □

CÂU 6.

Hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Tính độ dài véctơ $\vec{x} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AC'}$ theo a.

A $a\sqrt{2}$. **B** $\left(1+\sqrt{3}\right)a$.

C $a\sqrt{6}$. **D** $\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.



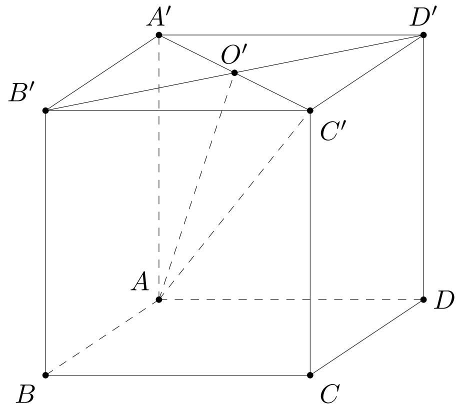
Lời giải.

Gọi O' là tâm $A'B'C'D' \Rightarrow A'O' = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Ta có $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AC'} = 2\overrightarrow{AO'} \Rightarrow |\vec{x}| = 2\left|\overrightarrow{AO'}\right| = 2AO'$.

$\triangle AA'O'$ vuông tại $A' \Rightarrow AO' = \sqrt{AA'^2 + A'O'^2} = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

Vậy $|\vec{x}| = 2AO' = a\sqrt{6}$.



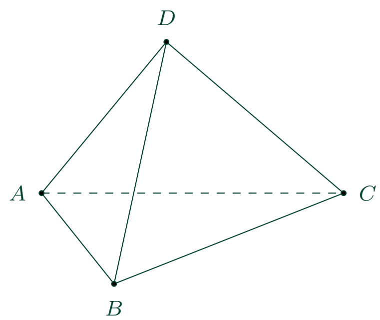
Chọn đáp án C ....

CÂU 7.

Cho tứ diện $ABCD$. Mệnh đề nào dưới đây là mệnh đề đúng?

A $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC}$. **B** $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BC}$.

C $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DC}$. **D** $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DC}$.



Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DC}$.

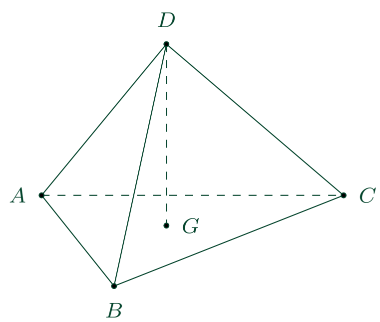
Chọn đáp án D ....

CÂU 8.

Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. Tìm k thỏa đẳng thức vectơ $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = k \cdot \overrightarrow{DG}$.

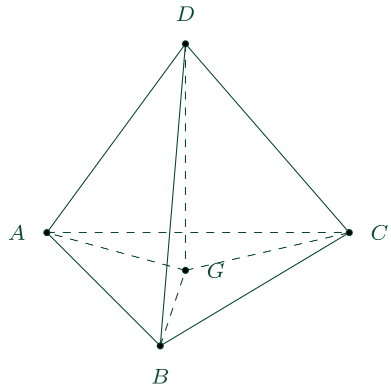
A $k = 1$. **B** $k = 3$.

C $k = 2$. **D** $k = 3$.



Lời giải.

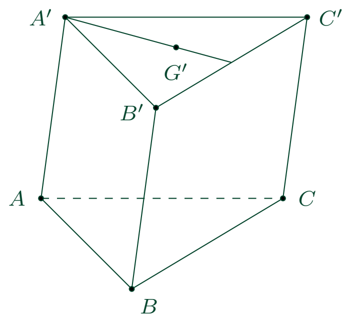
$\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DG}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{DG}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{DG}+\overrightarrow{GC}=3\overrightarrow{DG}$.



Chọn đáp án D .... □

CÂU 9.

Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Gọi G' là trọng tâm của tam giác $A'B'C'$. Đặt $\vec{a}=\overrightarrow{AA'}$, $\vec{b}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{c}=\overrightarrow{AC}$. Véc-tơ $\overrightarrow{AG'}$ bằng



A $\frac{1}{3}\left(\vec{a}+3\vec{b}+\vec{c}\right)$.
B $\frac{1}{3}\left(3\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)$.
C $\frac{1}{3}\left(\vec{a}+\vec{b}+3\vec{c}\right)$.
D $\frac{1}{3}\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)$.

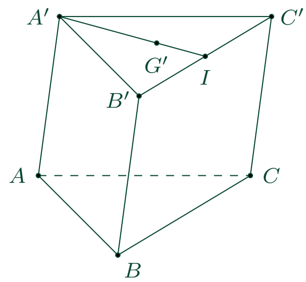
Lời giải.

Gọi I là trung điểm của $B'C'$.

Vì G' là trọng tâm của tam giác $A'B'C' \Rightarrow \overrightarrow{A'G'}=\frac{2}{3}\overrightarrow{A'I}$.

Ta có $\overrightarrow{AG'}=\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{A'G'}=\overrightarrow{AA'}+\frac{2}{3}\overrightarrow{A'I}$

$$=\overrightarrow{AA'}+\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{A'B'}+\overrightarrow{A'C'}\right)$$
$$=\overrightarrow{AA'}+\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$$
$$=\frac{1}{3}\left(3\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)=\frac{1}{3}\left(3\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right).$$

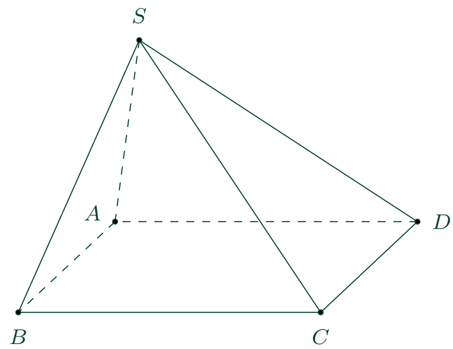


Chọn đáp án B .... □

CÂU 10.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Đặt $\overrightarrow{SA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{SB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{SC}=\vec{c}$, $\overrightarrow{SD}=\vec{d}$. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A $\vec{a}+\vec{c}=\vec{b}+\vec{d}$.
B $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}=\vec{0}$.
C $\vec{a}+\vec{d}=\vec{b}+\vec{c}$.
D $\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}+\vec{d}$.



Lời giải.

Gọi O là tâm hình bình hành $ABCD$.

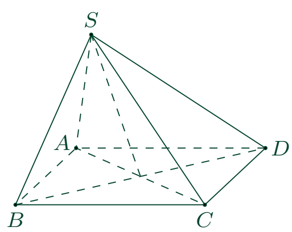
Vì O là trung điểm của AC

nên $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SC}=2\overrightarrow{SO} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{SO}=\vec{a}+\vec{c}$. (1)

Và O là trung điểm của BD

nên $\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SD}=2\overrightarrow{SO} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{SO}=\vec{b}+\vec{d}$. (2)

Từ (1) và (2), suy ra $\vec{a}+\vec{c}=\vec{b}+\vec{d}$.

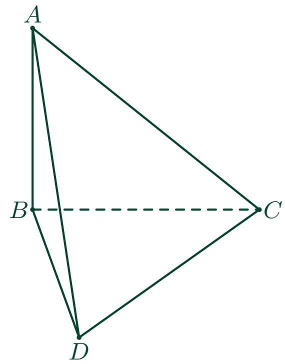


Chọn đáp án A .... □

CÂU 11.

Cho tứ diện $ABCD$. Các vectơ có điểm đầu là A và điểm cuối là các đỉnh còn lại của hình tứ diện là

(A) $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AD}$. (B) $\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$. (C) $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{DA}$. (D) $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$.

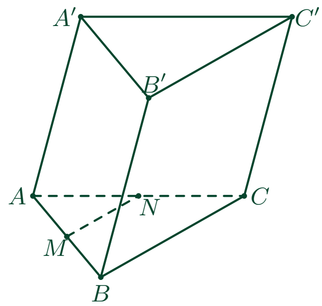


Lời giải.

Chọn đáp án (D)

CÂU 12.
Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$.Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, AC. Trong 4 vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{B'C'}$, $\overrightarrow{A'C'}$ vectơ nào cùng hướng với vectơ $\overrightarrow{MN}$

(A) $\overrightarrow{AB}$. (B) $\overrightarrow{CB}$. (C) $\overrightarrow{B'C'}$. (D) $\overrightarrow{A'C'}$.



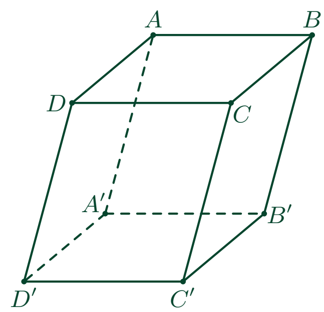
Lời giải.

Vì MN là đường trung bình của tam giác ABC nên MN song song với BC. Mà tứ giác $BCC'B'$ là hình bình hành. Do đó MN song song với $B'C'$. Vậy hai vectơ $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{B'C'}$ cùng hướng.

Chọn đáp án (C)

CÂU 13.
Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$.Số các vectơ có điểm đầu, điểm cuối là các đỉnh của hình hộp và bằng vectơ $\overrightarrow{AB}$ là

(A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4.



Lời giải.

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{D'C'} = \overrightarrow{A'B'}$

Chọn đáp án (C)

CÂU 14. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Trong các khẳng định dưới đây, đâu là khẳng định đúng?

(A) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC'}$. (B) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC'}$. (C) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$. (D) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AD} = \vec{0}$.

Lời giải.

Xét hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ ta có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC'}$

Chọn đáp án (B)

CÂU 15. Trong không gian cho tam giác ABC có G là trọng tâm và điểm M nằm ngoài mặt phẳng (ABC). Khẳng định nào sau đây là đúng?

(A) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$. (B) $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 0$.

(C) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MG}$. (D) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$.

Lời giải.

Vì G là trọng tâm tam giác ABC nên $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$

Chọn đáp án (D)

CÂU 16. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ tất cả các cạnh bằng $2\sqrt{3}$. Tính độ dài vectơ $\vec{u} = \overrightarrow{SA} - \overrightarrow{SC}$.

(A) $\sqrt{3}$. (B) $\sqrt{2}$. (C) $2\sqrt{6}$. (D) $2\sqrt{2}$.

Lời giải.

Ta có: $|\vec{u}| = |\overrightarrow{SA} - \overrightarrow{SC}| = |\overrightarrow{CA}| = AB\sqrt{2} = 2\sqrt{6}$.

Chọn đáp án C .... □

CÂU 17. Cho tứ diện $ABCD$. Mệnh đề nào dưới đây là mệnh đề đúng?

A $\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DC}$. **B** $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BC}$. **C** $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DC}$. **D** $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CB}$.

Lời giải.

Ta có: $\begin{cases} \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB} \\ \overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{CB} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DC}$.

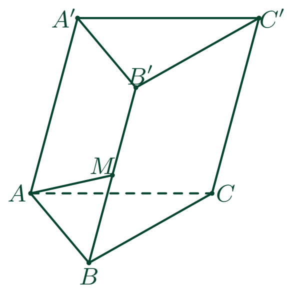
Chọn đáp án C .... □

CÂU 18. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$, M là trung điểm của BB'. Đặt $\overrightarrow{CA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AA'} = \vec{c}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A $\overrightarrow{AM} = \vec{b} + \vec{c} - \frac{1}{2}\vec{a}$. **B** $\overrightarrow{AM} = \vec{a} - \vec{c} + \frac{1}{2}\vec{b}$. **C** $\overrightarrow{AM} = \vec{a} + \vec{c} - \frac{1}{2}\vec{b}$. **D** $\overrightarrow{AM} = \vec{b} - \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{c}$.

Lời giải.

Ta có: $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AA'} = \vec{b} - \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{c}$



Chọn đáp án D .... □

CÂU 19. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Tính độ dài véctơ $\vec{x} = \overrightarrow{A'C'} - \overrightarrow{A'A}$ theo a?

A $a\sqrt{2}$. **B** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **C** $a\sqrt{6}$. **D** $a\sqrt{3}$.

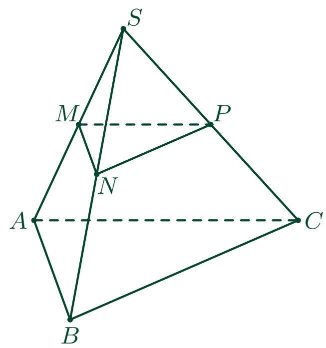
Lời giải.

Ta có $\vec{x} = \overrightarrow{A'C'} - \overrightarrow{A'A} = \overrightarrow{AC'} = a\sqrt{3}$.

Chọn đáp án D .... □

CÂU 20.

Cho tứ diện $S.ABC$ có M, N, P là trung điểm của SA, SB, SC. Tìm khẳng định đúng?



A $\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{PN} - \overrightarrow{PM}\right)$. **B** $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{PN} - \overrightarrow{PM}$. **C** $\overrightarrow{AB} = 2\left(\overrightarrow{PM} - \overrightarrow{PN}\right)$. **D** $\overrightarrow{AB} = 2\left(\overrightarrow{PN} - \overrightarrow{PM}\right)$.

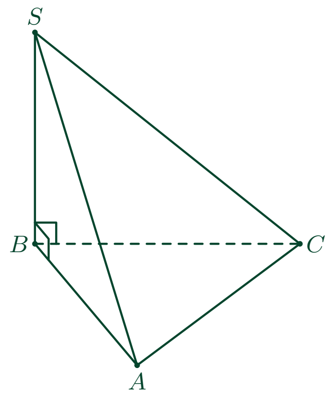
Lời giải.

Ta có: $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{MN} = 2\left(\overrightarrow{PN} - \overrightarrow{PM}\right)$.

Chọn đáp án D .... □

CÂU 21.

Cho tứ diện $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a, SB vuông góc với đáy và $SB = \sqrt{3}a$. Góc giữa hai vectơ $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AS})$ là



(A) 60°. (B) 30°. (C) 45°. (D) 90°.

Lời giải.

Ta có: $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AS}\right) = \widehat{SAB}$.

Xét $\triangle SBA$ vuông tại B ta có: $\tan\left(\widehat{SAB}\right) = \dfrac{SB}{AB} = \sqrt{3}$. Suy ra: $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AS}\right) = 60^\circ$

Chọn đáp án (A) .... □

CÂU 22. Cho hình chóp $S.ABC$ có $AB = 4$, $\widehat{BAC} = 60^\circ$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 6$. Khi đó độ dài $\overrightarrow{AC}$ là

(A) 3. (B) 6. (C) 4. (D) 12.

Lời giải.

Ta có: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \cdot AC \cdot \cos\widehat{BAC} \Leftrightarrow 6 = 4 \cdot AC \cdot \cos 60^\circ \Leftrightarrow AC = 3$.

Chọn đáp án (A) .... □

CÂU 23. Trong không gian cho vectơ $\overrightarrow{AB}$. Khi đó:

(A) Giá của vectơ $\overrightarrow{AB}$ là $\overrightarrow{AB}$.

(B) Giá của vectơ $\overrightarrow{AB}$ là $\left|\overrightarrow{AB}\right|$.

(C) Giá của vectơ $\overrightarrow{AB}$ là đường thẳng AB.

(D) Giá của vectơ $\overrightarrow{AB}$ là đoạn thẳng AB.

Lời giải.

Giá của vectơ $\overrightarrow{AB}$ là đường thẳng AB.

Chọn đáp án (C) .... □

CÂU 24. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$. Trong các vectơ dưới đây, vectơ nào cùng phương với vectơ $\overrightarrow{AB}$?

(A) Vectơ$\overrightarrow{AD}$. (B) Vectơ$\overrightarrow{CC'}$. (C) Vectơ$\overrightarrow{BD}$. (D) Vectơ$\overrightarrow{CD}$.

Lời giải.

$AB \parallel CD$ nên $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ cùng phương.

Chọn đáp án (D) .... □

CÂU 25. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Vectơ $\vec{u} = \overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{A'D'}$ bằng vectơ nào dưới đây?

(A) $\overrightarrow{A'C}$. (B) $\overrightarrow{CA'}$. (C) $\overrightarrow{AC'}$. (D) $\overrightarrow{C'A}$.

Lời giải.

Do $A'B'BA$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{A'B}$. Lại có, $A'BCD'$ cũng là hình bình hành nên $\overrightarrow{A'B} + \overrightarrow{A'D'} = \overrightarrow{A'C}$. Vậy $\overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{A'D'} = \overrightarrow{A'C}$

Chọn đáp án (A) .... □

CÂU 26. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Đặt $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{d}$. Trong các biểu thức vec tơ sau đây, biểu thức nào là đúng?

(A) $\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$. (B) $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = \vec{0}$. (C) $\vec{b} - \vec{c} + \vec{d} = \vec{0}$. (D) $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{d}$.

Lời giải.

Ta có: $\vec{b} - \vec{c} + \vec{d} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BC} = \vec{0}$.

Chọn đáp án (C) .... □

CÂU 27. Cho lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có độ dài mỗi cạnh bằng 1. Tính độ dài của vectơ $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{C'D'}$.

(A) $\sqrt{3}$. (B) $\sqrt{2}$. (C) 1. (D) $2\sqrt{2}$.

Lời giải.

Ta có: $A'C'CA$ là hình chữ nhật nên $\overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{AC}$.

Khi đó, $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{C'D'} = \overrightarrow{A'C'} + \overrightarrow{C'D'} = \overrightarrow{A'D'}$. Vậy $\left|\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{C'D'}\right| = \left|\overrightarrow{A'D'}\right| = A'D' = 1$

Chọn đáp án (C) .... □

CÂU 28. Cho O là tâm hình bình hành $ABCD$. Hỏi vectơ $\left(\overrightarrow{AO}-\overrightarrow{DO}\right)$ bằng vectơ nào?

Ⓐ $\overrightarrow{BA}$. Ⓑ $\overrightarrow{AD}$. Ⓒ $\overrightarrow{DC}$. Ⓓ $\overrightarrow{AC}$.

Lời giải.

Ta có: $\overrightarrow{AO}-\overrightarrow{DO}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{AD}$.

Chọn đáp án (B) .... □

CÂU 29. Cho ba điểm phân biệt A, B, C. Nếu $\overrightarrow{AB}=-3\overrightarrow{AC}$ thì đẳng thức nào dưới đây đúng?

Ⓐ $\overrightarrow{BC}=-4\overrightarrow{AC}$. Ⓑ $\overrightarrow{BC}=-2\overrightarrow{AC}$. Ⓒ $\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{AC}$. Ⓓ $\overrightarrow{BC}=4\overrightarrow{AC}$.

Lời giải.

Ta có: $\overrightarrow{AB}=-3\overrightarrow{AC}\Leftrightarrow\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA}=-3\overrightarrow{AC}\Leftrightarrow\overrightarrow{AC}+3\overrightarrow{AC}=-\overrightarrow{CB}\Leftrightarrow\overrightarrow{BC}=4\overrightarrow{AC}$.

Chọn đáp án (D) .... □

CÂU 30. Cho tam giác ABC có điểm O thỏa mãn: $\left|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}-2\overrightarrow{OC}\right|=\left|\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}\right|$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

Ⓐ Tam giác ABC đều. Ⓑ Tam giác ABC cân tại C.
Ⓒ Tam giác ABC vuông tại C. Ⓓ Tam giác ABC cân tại B.

Lời giải.

Gọi M là trung điểm AB, ta có $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=2\overrightarrow{OM}$.

Do đó, $\left|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}-2\overrightarrow{OC}\right|=\left|\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}\right|\Leftrightarrow\left|2\overrightarrow{OM}-2\overrightarrow{OC}\right|=\left|\overrightarrow{BA}\right|\Leftrightarrow 2\left|\overrightarrow{CM}\right|=BA\Leftrightarrow CM=\frac{1}{2}BA$ (1)

Vì M là trung điểm AB nên CM là đường trung tuyến của $\triangle ABC$, Từ (1) suy ra, tam giác $\triangle ABC$ vuông tại C.

Chọn đáp án (C) .... □

CÂU 31. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Đẳng thức nào dưới đây là đúng?

Ⓐ $\overrightarrow{AC'}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AC}$. Ⓑ $\overrightarrow{AC'}=\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AC}$. Ⓒ $\overrightarrow{AC'}=\overrightarrow{AB'}+\overrightarrow{AD}$. Ⓓ $\overrightarrow{AC'}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AA'}$.

Lời giải.

Do $AB'C'D$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{AC'}=\overrightarrow{A'B'}+\overrightarrow{AD}$.

Chọn đáp án (C) .... □

CÂU 32. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có độ dài cạnh bằng a. Tính độ dài của vectơ $\overrightarrow{AD'}+\overrightarrow{BA'}$.

Ⓐ $\sqrt{3}a$. Ⓑ $\sqrt{2}a$. Ⓒ $\sqrt{6}a$. Ⓓ $2\sqrt{3}a$.

Lời giải.

Gọi O' là tâm của hình vuông $A'B'C'D'$.

Ta có $ABC'D'$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{AD'}=\overrightarrow{BC'}$, do đó $\overrightarrow{BA'}+\overrightarrow{AD'}=\overrightarrow{BA'}+\overrightarrow{BC'}=2\overrightarrow{BO'}$.

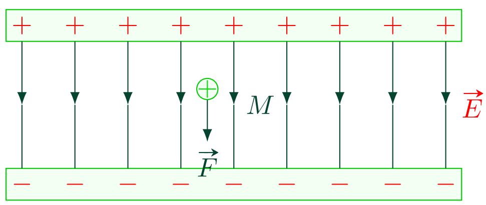
Tam giác $BA'C'$ là tam giác đều cạnh $a\sqrt{2}$ nên $BO'=\frac{\sqrt{3}}{2}a\sqrt{2}=\frac{\sqrt{6}}{2}a$.

Từ đó độ dài của vectơ $\overrightarrow{AD'}+\overrightarrow{BA'}$ bằng $\sqrt{6}a$.

Chọn đáp án (C) .... □

CÂU 33.

Trong điện trường đều, lực tĩnh điện $\vec{F}$ (đơn vị: N) tác dụng lên điện tích điểm có điện tích q (đơn vị: C) được tính theo công thức $\vec{F}=q\cdot\vec{E}$, trong đó $\vec{E}$ là cường độ điện trường (đơn vị: N/C). Tính độ lớn của lực tĩnh điện tác dụng lên điện tích điểm khi $q=10^{-9}$ C và độ lớn điện trường $E=10^5$ N/C.



Ⓐ 10^{-3} N. Ⓑ 10^4 N. Ⓒ 10^{-14} N. Ⓓ 10^{-4} N.

Lời giải.

Từ công thức $\vec{F}=q\cdot\vec{E}$ suy ra $|\vec{F}|=q|\vec{E}|$

$$=10^{-9}\cdot10^5$$
$$=10^{-4}\text{N}.$$

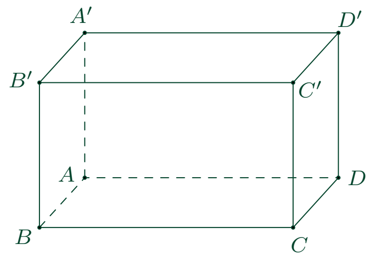
Vậy độ lớn của lực tĩnh điện tác dụng lên điện tích điểm là 10^{-4} N.

Chọn đáp án (D) .... □

PHẦN II. *Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.*

CÂU 34.

Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh $AB = a$; $AD = a\sqrt{3}$; $AA' = 2a$. Xét tính đúng, sai của các khẳng định sau:



Mệnh đề	Đ	S
a) $\overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{CD'} = \vec{0}$.		X
b) $\overrightarrow{A'D} + \overrightarrow{CB'} = \vec{0}$.	X	
c) $\left\|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right\| = a\sqrt{5}$.		X
d) $\left\|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A'D'} + \overrightarrow{CC'}\right\| = 2\sqrt{2}a$.	X	

Lời giải.

a) $\overrightarrow{AB'}$ và $\overrightarrow{CD'}$ không đối nhau nên $\overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{CD'} \neq \vec{0}$

b) $\overrightarrow{A'D}$ và $\overrightarrow{CB'}$ đối nhau nên $\overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{CD'} = \vec{0}$

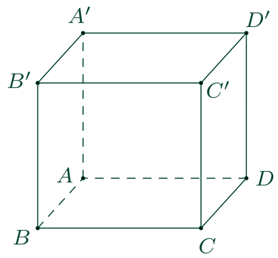
c) $\left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right| = \left|\overrightarrow{AC}\right| = AC = \sqrt{AB^2 + AD^2} = 2a$

d) $\left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A'D'} + \overrightarrow{CC'}\right| = \left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}\right| = AC' = \sqrt{AB^2 + AD^2 + AA^2} = 2\sqrt{2}a$

Chọn đáp án | a sai | b đúng | c sai | d đúng | ....□

CÂU 35.

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Xét tính đúng, sai của các khẳng định sau:

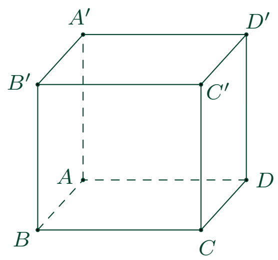


Mệnh đề	Đ	S
a) $\overrightarrow{B'B} - \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{B'D}$.	X	
b) $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{BD}$.		X

Mệnh đề	Đ	S
c) $\left\|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BB'}\right\| = a\sqrt{2}$.		X
d) $\left\|\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{C'A}\right\| = a$.	X	

Lời giải.

a) Ta có



$$\begin{aligned} \overrightarrow{B'B} - \overrightarrow{DB} &= \overrightarrow{B'B} + \left(-\overrightarrow{DB}\right) \\ &= \overrightarrow{B'B} + \overrightarrow{BD} \\ &= \overrightarrow{B'D}. \end{aligned}$$

b) Áp dụng quy tắc hình hộp ta có $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{BD'}$.

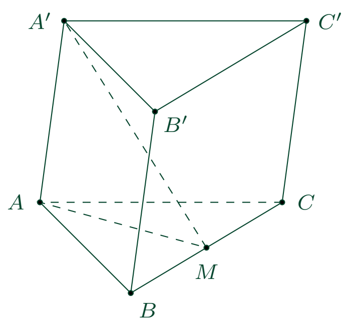
c) $\left|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BB'}\right| = \left|\overrightarrow{BD'}\right| = BD' = a\sqrt{3}$

d) Ta có $\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{C'A} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{C'A} = \overrightarrow{C'C}$.
Do đó $\left|\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{C'A}\right| = C'C = a$

Chọn đáp án | a đúng | b sai | c sai | d đúng | ....□

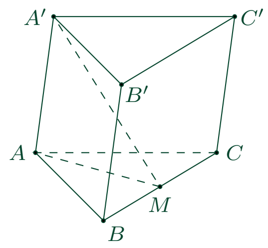
CÂU 36.

Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$ và $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$. Gọi M là trung điểm của BC. Xét tính đúng, sai của các khẳng định sau:



Mệnh đề	Đ	S
a) $\overrightarrow{B'C} = -\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$.	X	
b) $\overrightarrow{BC'} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$.	X	
c) $\overrightarrow{AM} = \vec{b} + \vec{c}$.		X
d) $\overrightarrow{A'M} = -\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$.	X	

Lời giải.



a) $\overrightarrow{B'C} = \overrightarrow{B'A'} + \overrightarrow{A'C'} + \overrightarrow{C'C} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AA'}$ hay $\overrightarrow{B'C} = -\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$;

b) $\overrightarrow{BC'} = \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{B'A'} + \overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{AA'} - \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ hay $\overrightarrow{BC'} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$;

c) Ta có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AM}$, suy ra $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$

d) $\overrightarrow{A'M} = \overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{A'A} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = -\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$

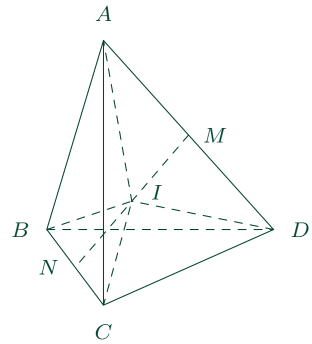
Chọn đáp án | a đúng | b đúng | c sai | d đúng | .... □

CÂU 37.

Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AD và BC, I là trung điểm MN. Xét tính đúng, sai của các khẳng định sau:

Mệnh đề	Đ	S
a) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD}$.		X
b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$.	X	

Mệnh đề	Đ	S
c) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{MN}$.	X	
d) $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = \vec{0}$.	X	



Lời giải.

a) Sử dụng quy tắc ba điểm và quy tắc hiệu, ta có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} &= \left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}\right) - \overrightarrow{CD} \\ &= \overrightarrow{AC} + \left(\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CD}\right) \\ &= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB} \\ &= \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD}.\end{aligned}$$

b) Theo quy tắc ba điểm, ta có $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB}$. Do đó

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} &= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{CD} \\ &= \overrightarrow{AD} + \left(\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DB}\right) \\ &= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}.\end{aligned}$$

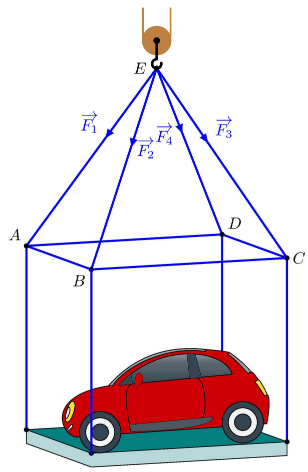
c) Ta có

d)

Chọn đáp án | a sai | b đúng | c đúng | d đúng | .... □

CÂU 38.

Một chiếc ô tô được đặt trên mặt đáy dưới của một khung sắt có dạng hình hộp chữ nhật với đáy trên là hình chữ nhật $ABCD$, mặt phẳng $(ABCD)$ song song với mặt phẳng nằm ngang. Khung sắt đó được buộc vào móc E của chiếc cần cẩu sao cho các đoạn dây cáp EA, EB, EC, ED có độ dài bằng nhau và cùng tạo với mặt phẳng $(ABCD)$ một góc bằng 60°. Chiếc cần cẩu kéo khung sắt lên theo phương thẳng đứng. Biết rằng các lực căng $\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_2}$, $\overrightarrow{F_3}$, $\overrightarrow{F_4}$ đều có cường độ là 4700 N và trọng lượng của khung sắt là 3000 N.



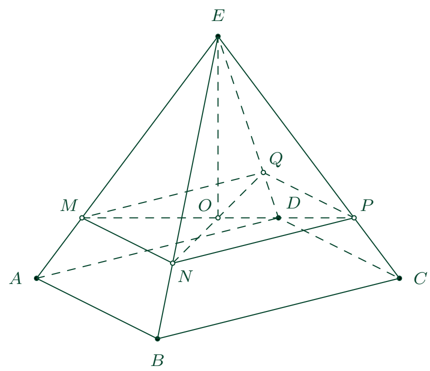
Mệnh đề	Đ	S
a) $\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} = \overrightarrow{F_3} + \overrightarrow{F_4}$.		X
b) $\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_3} = \overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{F_4}$.	X	
c) $\left\lvert\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_3}\right\rvert = 8141$ N (*làm tròn đến hàng đơn vị*).	X	
d) Trọng lượng của chiếc xe ô tô là 16282 N (*làm tròn đến hàng đơn vị*).		X

Lời giải.

Lấy các điểm M, N, P, Q lần lượt trên các tia EA, EB, EC, ED sao cho

$$\overrightarrow{EM}=\overrightarrow{F_1},\ \overrightarrow{EN}=\overrightarrow{F_2},\ \overrightarrow{EP}=\overrightarrow{F_3},\ \overrightarrow{EQ}=\overrightarrow{F_4}.$$

Do các lực căng $\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_2}$, $\overrightarrow{F_3}$, $\overrightarrow{F_4}$ đều có cường độ là 4700 N nên $EM=EN=EP=EQ=4700$.



a) Ta có

- $\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}=\overrightarrow{EM}+\overrightarrow{EN}=2\overrightarrow{EH}$, với H là trung điểm của MN.
- $\overrightarrow{F_3}+\overrightarrow{F_4}=\overrightarrow{EP}+\overrightarrow{EQ}=2\overrightarrow{EK}$, với K là trung điểm của PQ.

Suy ra $\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}\neq\overrightarrow{F_3}+\overrightarrow{F_4}$

b) Ta có

- $\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_3}=\overrightarrow{EM}+\overrightarrow{EP}=2\overrightarrow{EO}$, với O là trung điểm của MP.
- $\overrightarrow{F_2}+\overrightarrow{F_4}=\overrightarrow{EN}+\overrightarrow{EQ}=2\overrightarrow{EO}$, với O là trung điểm của MP.

Suy ra $\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_3}=\overrightarrow{F_2}+\overrightarrow{F_4}$.

c) $\left|\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_3}\right|=\left|2\overrightarrow{EO}\right|=2EO$.
Theo giả thiết, góc giữa EA với $(ABCD)$ bằng 60°, suy ra góc giữa EM với $(MNPQ)$ cũng bằng 60° hay $\widehat{SMO}=60^\circ$.
Xét $\triangle EMO$ có $EM=4700$, $\widehat{SMO}=60^\circ$. Suy ra $EO=EM\sin 60^\circ=2350\sqrt{3}$.
Từ đây, ta tính được $\left|\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_3}\right|=2EO=8141$ N.

d) Gọi $\vec{P}$ là trọng lực tác dụng lên cả hệ, do O là trung điểm MP, NQ nên ta có:

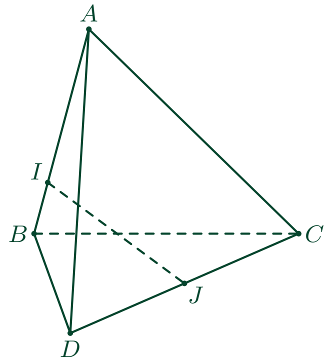
$$\begin{aligned}\vec{P}&=\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}+\overrightarrow{F_3}+\overrightarrow{F_4}\\&=\overrightarrow{EM}+\overrightarrow{EN}+\overrightarrow{EP}+\overrightarrow{EQ}\\&=\overrightarrow{EO}+\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{EO}+\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{EO}+\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{EO}+\overrightarrow{OQ}\\&=4\overrightarrow{EO}+\left(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{OP}\right)+\left(\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OQ}\right)\\&=4\overrightarrow{EO}.\end{aligned}$$

Suy ra trọng lượng của toàn bộ hệ là $\left|\vec{P}\right|=4\left|\overrightarrow{EO}\right|=4EO=9400\sqrt{3}$ N.
Do trọng trượng khung sắt là 3000 N nên trọng lượng của xe ô tô là $9400\sqrt{3}-3000\approx 13281$ N.

Chọn đáp án | a sai | b đúng | c đúng | d sai | .... □

CÂU 39.

Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = AC = AD = a$ và $\widehat{BAC} = \widehat{BAD} = 60^\circ, \widehat{CAD} = 90^\circ$. Gọi I là điểm trên cạnh AB sao cho $AI = 3IB$ và J là trung điểm của CD. Gọi α là góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{IJ}$.



Mệnh đề	Đ	S
a) Tam giác BCD vuông cân.	X	
b) $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$.		X
c) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{a^2}{2}$.		X
d) $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{5}$.	X	

Lời giải.

a) Tam giác ABC, ABD đều cạnh bằng a, tam giác ACD vuông cân đỉnh $A \Rightarrow CD = a\sqrt{2}$. Vậy tam giác BCD có $BC = BD = a, CD = a\sqrt{2}$ nên tam giác BCD vuông cân.

b) $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AJ} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}\right) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} - \frac{3}{4 >}\overrightarrow{AB}$.

c) Ta có: $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = AB \cdot AD \cdot \cos 60^\circ = \frac{a^2}{2}$, $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{a^2}{2}$. Suy ra $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} = a^2$.

d) $IJ^2 = \overrightarrow{IJ}^2 = \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} - \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(\frac{17}{4}a^2 + 2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} - 3\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}\right) = \frac{5a^2}{16} \Rightarrow IJ = \frac{a\sqrt{5}}{4}$.

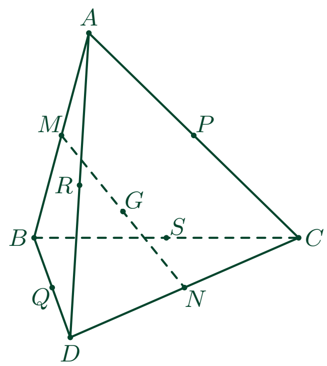
$\overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} - \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}\right) \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} - \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}^2\right) = -\frac{a^2}{4}$.

$\cos\left(\overrightarrow{IJ}, \overrightarrow{AB}\right) = \frac{\overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{AB}}{IJ \cdot AB} = \frac{-\frac{a^2}{4}}{\frac{a\sqrt{5}}{4} \cdot a} = -\frac{\sqrt{5}}{5}$.

Chọn đáp án | a đúng | b sai | c sai | d đúng | □

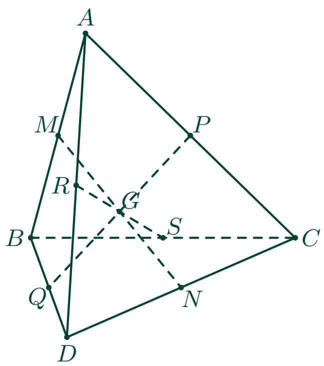
CÂU 40.

Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N, P, Q, R, S, G lần lượt là trung điểm các đoạn thẳng AB, CD, AC, BD, AD, BC, MN.



Mệnh đề	Đ	S
a) $\overrightarrow{MR} = \overrightarrow{SN}$.	X	
b) $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$.	X	
c) $2\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$.		X
d) $\lvert\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID}\rvert$ nhỏ nhất khi và chỉ khi điểm I trùng với điểm G.	X	

Lời giải.



a) $\overrightarrow{MR} = \overrightarrow{SN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$.

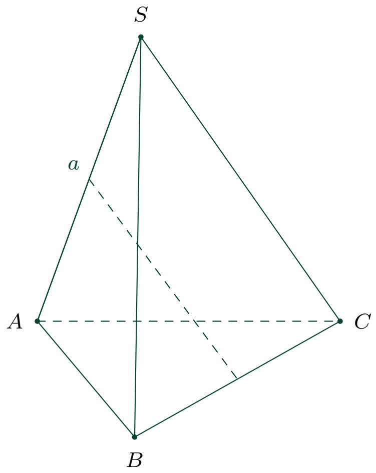
b) Vì M là trung điểm của AB nên $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}=2\overrightarrow{GM}$
Vì N là trung điểm của CD nên $\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=2\overrightarrow{GN}$
Vì G là trung điểm của MN nên $\overrightarrow{GM}+\overrightarrow{GN}=\vec{0}$
Do đó: $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=2\left(\overrightarrow{GM}+\overrightarrow{GN}\right)=2\cdot\vec{0}=\vec{0}$.

c) $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{AQ}-\overrightarrow{AP}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\Leftrightarrow 2\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}$

d) $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}=4\overrightarrow{IG}+\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}\right)=4\overrightarrow{IG}$.
$\Rightarrow|\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}|=|4\overrightarrow{IG}|=4IG$
Do đó: $|\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}|$ nhỏ nhất khi $IG=0\Leftrightarrow I\equiv G$

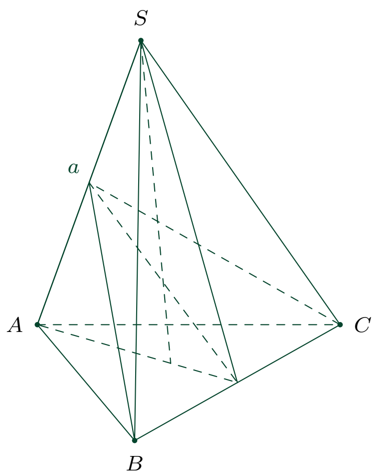
Chọn đáp án | a đúng | b đúng | c sai | d đúng | ....□

CÂU 41. Cho tứ diện đều $SABC$ có cạnh a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm SA, BC. Các mệnh đề sau đúng hay sai?



Mệnh đề	Đ	S
a) Độ dài của vectơ $\overrightarrow{SA}$ bằng a..	X	
b) $\overrightarrow{SA}\cdot\overrightarrow{SB}=\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.	X	
c) $\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{SC}+\overrightarrow{AC}=4\overrightarrow{MN}$.		X
d) Gọi I là trọng tâm của tứ diện. Khoảng cách từ I đến (ABC) bằng $\frac{3a\sqrt{6}}{4}$.		X

Lời giải.



a) $|\overrightarrow{SA}|=SA=a$.

b) $\overrightarrow{SA}\cdot\overrightarrow{SB}=\left|\overrightarrow{SA}\right|\cdot\left|\overrightarrow{SB}\right|\cdot\sin\widehat{ASB}=a\cdot a\cdot\sin 60^\circ=\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

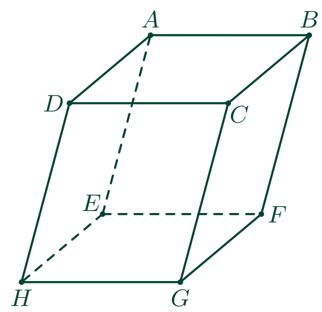
c) Do N là trung điểm của BC nên $\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}=2\overrightarrow{SN}$ và $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{MB}$.
Suy ra $\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\left(\overrightarrow{SN}+\overrightarrow{AN}\right)$
Do M là trung điểm của SA nên $\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{NS}=2\overrightarrow{NM} \Leftrightarrow \overrightarrow{AN}+\overrightarrow{SN}=2\overrightarrow{MN}$.
Do đó $\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\cdot 2\cdot \overrightarrow{MN}=4\overrightarrow{MN}$.

d) Gọi G là trọng tâm tam giác ABC.
Do tứ diện $SABC$ là tứ diện đều và I là trọng tâm tứ diện nên $d\left(I,(ABC)\right)=IG$
Tam giác ABC đều cạnh a, N là trung điểm của BC, suy ra $AN=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.
Do G là trọng tâm tam giácABC nên $AG=\dfrac{2}{3}AN=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.
Do tứ diện $SABC$ là tứ diện đều nên $SG\perp(ABC)\Rightarrow SG\perp AG$.
Tam giác SAG vuông tại G nên $SG=\sqrt{SA^2-AG^2}=\sqrt{a^2-\dfrac{a^2}{3}}=\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.
Do I là trọng tâm tứ diện$SABC$ nên $IG=\dfrac{1}{4}SG=\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{a\sqrt{6}}{3}=\dfrac{a\sqrt{6}}{12}$.
Vậy $d\left(I,(ABC)\right)=\dfrac{a\sqrt{6}}{12}$.

Chọn đáp án | a đúng | b đúng | c sai | d sai | .... □

CÂU 42.

Cho hình hộp chữ nhật $ABCD\cdot EFGH$ có $AB=AE=2$, $AD=3$ và đặt $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{b}=\overrightarrow{AD}$, $\vec{c}=\overrightarrow{AE}$. Lấy điểm M thỏa $\overrightarrow{AM}=\dfrac{1}{5}\overrightarrow{AD}$ và điểm N thỏa $\overrightarrow{EN}=\dfrac{2}{5}\overrightarrow{EC}$. (tham khảo hình vẽ).



Mệnh đề	Đ	S
a) $\overrightarrow{MA}=-\dfrac{1}{5}\vec{b}$.	X	
b) $\overrightarrow{EN}=\dfrac{2}{5}\left(\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}\right)$.	X	
c) $\left(m\cdot\vec{a}+n\cdot\vec{b}+n\cdot\vec{c}\right)^2=m^2\cdot\vec{a}^2+n^2\cdot\vec{b}^2+p^2\cdot\vec{c}^2$ với m,n,p là các số thực.		X
d) $MN=\dfrac{\sqrt{61}}{5}$.	X	

Lời giải.

a) $\overrightarrow{MA}=-\overrightarrow{AM}=-\dfrac{1}{5}\overrightarrow{AD}=-\dfrac{1}{5}\vec{b}$.

b) $\overrightarrow{EN}=\dfrac{2}{5}\overrightarrow{EC}=\dfrac{2}{5}\left(\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{EH}+\overrightarrow{EA}\right)=\dfrac{2}{5}\left(\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}\right)$.

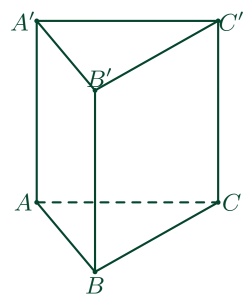
c) $\left(m\cdot\vec{a}+n\cdot\vec{b}+p\cdot\vec{c}\right)^2=m^2\cdot\vec{a}^2+n^2\cdot\vec{b}^2+p^2\cdot\vec{c}^2+2mn\cdot\vec{a}\cdot\vec{b}+2np\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}+2mp\cdot\vec{a}\cdot\vec{c}$
$=m^2\cdot\vec{a}^2+n^2\cdot\vec{b}^2+p^2\cdot\vec{c}^2$. (vì $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ đôi một vuông góc nên $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}=0$).

d) $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EN}=-\dfrac{1}{5}\vec{b}+\vec{c}+\dfrac{2}{5}\left(\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}\right)=\dfrac{2}{5}\vec{a}+\dfrac{1}{5}\vec{b}+\dfrac{3}{5}\vec{c}$.
$MN^2=\overrightarrow{MN}^2=\left(\dfrac{2}{5}\vec{a}+\dfrac{1}{5}\vec{b}+\dfrac{3}{5}\vec{c}\right)^2=\dfrac{4}{25}\vec{a}^2+\dfrac{1}{25}\vec{b}^2+\dfrac{9}{25}\vec{c}^2=\dfrac{4}{25}\cdot 4+\dfrac{1}{25}\cdot 9+\dfrac{9}{25}\cdot 4=\dfrac{61}{25}$.
Suy ra $MN=\dfrac{\sqrt{61}}{5}$.

Chọn đáp án | a đúng | b đúng | c sai | d đúng | .... □

CÂU 43.

Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng x và chiều cao bằng y. (tham khảo hình vẽ)



Mệnh đề	Đ	S
a) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}x^2$.	X	
b) $\overrightarrow{AC'}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AA'}$.	X	
c) $\overrightarrow{CB'}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AA'}$.		X
d) Góc $(AC',CB')>60^\circ$ khi $\frac{y}{x}<\sqrt{2}$.		X

Lời giải.

a) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=AB\cdot AC\cdot\cos 60^\circ=\frac{1}{2}x^2$.

b) $\overrightarrow{AC'}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AA'}$ (vì $ACC'A'$ là hình chữ nhật).

c) $\overrightarrow{CB'}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AA'}$.

d) Ta có $\overrightarrow{AC'}\cdot\overrightarrow{CB'}=\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AA'}\right)\cdot\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AA'}\right)=y^2-\frac{1}{2}x^2$ và $AC'=CB'=\sqrt{x^2+y^2}$.

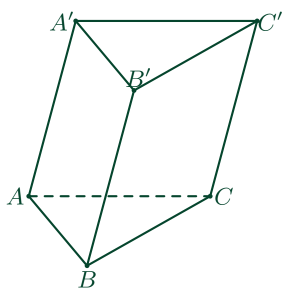
Khi đó $\cos\left(AC',CB'\right)=\left|\cos\left(\overrightarrow{AC'},\overrightarrow{CB'}\right)\right|=\frac{\left|\overrightarrow{AC'}\cdot\overrightarrow{CB'}\right|}{AC'\cdot CB'}=\frac{\left|y^2-\frac{1}{2}x^2\right|}{x^2+y^2}$.

Theo đề $(AC',CB')>60^\circ$, suy ra $\frac{\left|y^2-\frac{1}{2}x^2\right|}{x^2+y^2}<\frac{1}{2}\Leftrightarrow 3y^4-6x^2y^2<0\Leftrightarrow\frac{y}{x}<\sqrt{2}$.

Chọn đáp án | a đúng | b đúng | c sai | d sai | .... □

PHẦN III. *Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.*

CÂU 44.
Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Đặt $\overrightarrow{AB}=\vec{a},\overrightarrow{AA'}=\vec{b},\overrightarrow{AC}=\vec{c}$. Ta biểu diễn $\overrightarrow{B'C}=m\vec{a}+n\vec{b}+p\vec{c}$, khi đó $m+n+p$ bằng bao nhiêu?



Lời giải.

Đáp án: -1

$\overrightarrow{B'C}=\overrightarrow{B'B}+\overrightarrow{BC}=-\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}=-\overrightarrow{BB'}-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=-\vec{b}-\vec{a}+\vec{c}$
$\Rightarrow\overrightarrow{B'C}=-\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$.
Suy ra $m=-1$, $n=-1$, $p=1$. Do đó $m+n+p=-1$.

CÂU 45. Cho tứ diện $ABCD$, gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB và CD. Biết $\overrightarrow{IJ}=\frac{a}{b}\overrightarrow{AC}+\frac{c}{d}\overrightarrow{BD}$. Giá trị biểu thức $P=ab+cd$ bằng

Lời giải.

Đáp án: 4

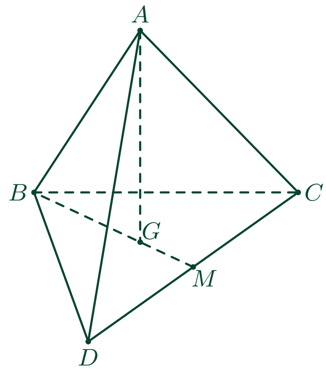
$\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IJ}+\overrightarrow{JC}+\overrightarrow{BI}+\overrightarrow{IJ}+\overrightarrow{JD}=2\overrightarrow{IJ}\Rightarrow\overrightarrow{IJ}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}\right)$.

CÂU 46. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng 15. Biết độ dài của $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}$ bằng $a\sqrt{6}$, khi đó giá trị của a là?

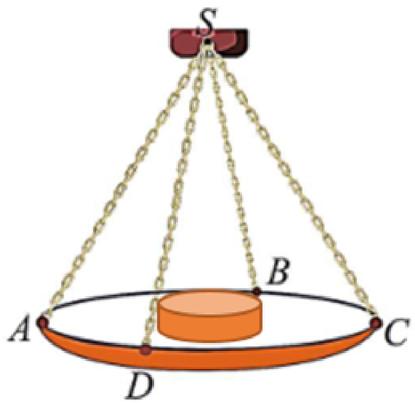
Lời giải.

Đáp án: 15

Gọi G là trọng tâm tâm giác BCD, M là trung điểm CD.
Ta có $\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0} \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AB}\right)+\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AC}\right)+\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AD}\right)=\vec{0} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{GA}+\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right)=\vec{0}$
$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=-3\overrightarrow{GA}=3\overrightarrow{AG} \Rightarrow |\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}|=|3\overrightarrow{AG}|=3AG$.
Xét tam giác đều BCD có $BM=BC\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{15\sqrt{3}}{2}\Rightarrow BG=\dfrac{2}{3}BM=5\sqrt{3}$.
Vì tứ diện $ABCD$ đều nên $AG\perp(BCD)\Rightarrow \widehat{AGB}=90^\circ$.
Xét tam giác ABG có $AG=\sqrt{AB^2-BG^2}=\sqrt{15^2-\left(5\sqrt{3}\right)^2}=5\sqrt{6}$.
Do đó $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}|=3AG=15\sqrt{6}\Rightarrow a=15$.
Vậy giá trị của $a=15$.



CÂU 47. Một chiếc cân đòn tay đang cân một vật có khối lượng $m=3\,\text{kg}$ được thiết kế với đĩa cân được giữ bởi bốn đoạn xích SA, SB, SC, SD sao cho $S.ABCD$ là hình chóp tứ giác đều có $\widehat{ASC}=90^\circ$. Biết độ lớn của lực căng cho mỗi sợi xích có dạng $\dfrac{a\sqrt{2}}{4}$. Lấy $g=10\text{m/s}^2$, khi đó giá trị của a bằng bao nhiêu?



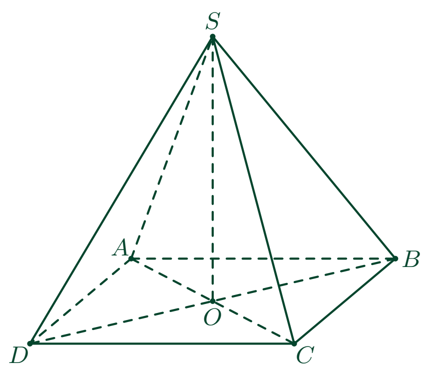
Lời giải.

Đáp án: 30

Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$.
Ta có $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}\Leftrightarrow \overrightarrow{OS}+\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{OS}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{OS}+\overrightarrow{SC}+\overrightarrow{OS}+\overrightarrow{SD}=\vec{0}$
$\Leftrightarrow \overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}+\overrightarrow{SD}=-4\overrightarrow{OS}=4\overrightarrow{SO}\Rightarrow |\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}+\overrightarrow{SD}|=|4\overrightarrow{SO}|=4SO$.
Trọng lượng của vật nặng là $P=mg=3\cdot10=30$ (N). Suy ra $4|\overrightarrow{SO}|=P=30$ (N)
$\Rightarrow SO=\dfrac{15}{2}$.
Lại có tam giác ASC vuông cân tại S nên

$$SO=SA\cdot\sin\widehat{SAC}\Rightarrow SA=\frac{SO}{\sin\widehat{SAC}}=\frac{\frac{15}{2}}{\sin45^\circ}=\frac{15\sqrt{2}}{2}=\frac{30\sqrt{2}}{4}\Rightarrow a=30.$$

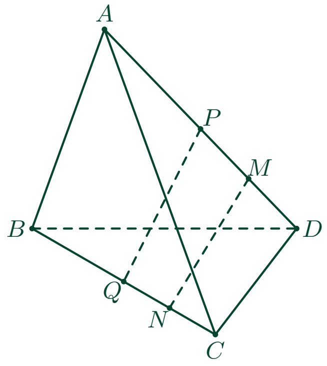
Vậy $a=30$.



CÂU 48. Cho tứ diện $ABCD$. Trên các cạnh AD và BC lần lượt lấy M, N sao cho $AM=3MD$, $BN=3NC$. Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của AD và BC. Phân tích vectơ $\overrightarrow{MN}$ theo hai vectơ $\overrightarrow{PQ}$ và $\overrightarrow{DC}$ ta được $\overrightarrow{MN}=a\overrightarrow{PQ}+b\overrightarrow{DC}$. Tính $a+2b$.

Lời giải.

Đáp án: 1,5



Do $AM = 3MD$, $BN = 3NC$ và P, Q lần lượt là trung điểm của AD và BC nên M, N lần lượt là trung điểm của PD và QC.

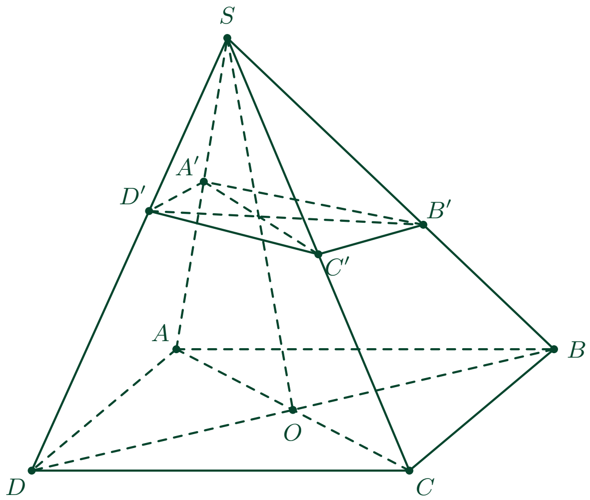
Ta có $\begin{cases} \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QN} \\ \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CN} \end{cases} \Rightarrow 2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{DC} \Rightarrow \overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{DC}\right)$

$\Rightarrow a = \frac{1}{2};\ b = \frac{1}{2} \Rightarrow a + 2b = \frac{3}{2} = 1,5.$

CÂU 49. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Một mặt phẳng (α) cắt các cạnh SA, SB, SC, SD lần lượt tại A', B', C', D'. Giá trị của biểu thức $P = \frac{SA}{SA'} + \frac{SC}{SC'} - \frac{SB}{SB'} - \frac{SD}{SD'}$.

Lời giải.

Đáp án: 0



Gọi O là tâm của hình bình hành $ABCD$ thì $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC} = \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD} = 2\overrightarrow{SO}$

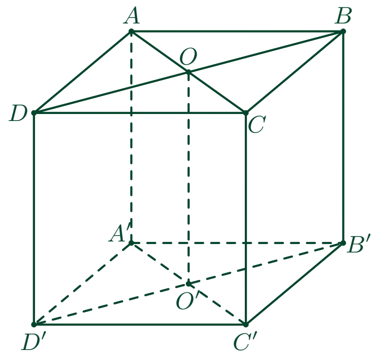
$\Leftrightarrow \frac{SA}{SA'}\overrightarrow{SA'} + \frac{SC}{SC'}\overrightarrow{SC'} = \frac{SB}{SB'}\overrightarrow{SB'} + \frac{SD}{SD'}\overrightarrow{SD'}$

Do A', B', C', D' đồng phẳng nên $\Rightarrow \frac{SA}{SA'} + \frac{SC}{SC'} = \frac{SB}{SB'} + \frac{SD}{SD'} \Rightarrow P = \frac{SA}{SA'} + \frac{SC}{SC'} - \frac{SB}{SB'} - \frac{SD}{SD'} = 0.$

CÂU 50. Cho hình lập phương $B'C$ có đường chéo $A'C = \frac{3}{16}$. Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$ và điểm 20 thỏa mãn: $\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OC'} + \overrightarrow{OD'}$. Khi đó độ dài của đoạn OS bằng $\frac{a\sqrt{3}}{b}$ với $a, b \in \mathbb{N}$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính giá trị của biểu thức $P = a^2 + b^2$.

Lời giải.

Đáp án: 17



Ta có: $A'C^2 = A'A^2 + AC^2 = 3A'A^2 \Rightarrow A'A = \dfrac{A'C}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{16}$.
Gọi O' là tâm của hình vuông $A'B'C'D'$.
Lại có : $\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OC'} + \overrightarrow{OD'}$

$$= \left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}\right) + \left(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}\right) + \left(\overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OC'}\right) + \left(\overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OD'}\right)$$
$$= 2\overrightarrow{OO'} + 2\overrightarrow{OO'} = 4\overrightarrow{OO'}$$

Suy ra $OS = \left|\overrightarrow{OS}\right| = \left|4\overrightarrow{OO'}\right| = 4OO' = 4 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{16} = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$.
Khi đó $a = 1, b = 4 \Rightarrow P = a^2 + b^2 = 17$.

CÂU 51. Khi chuyển động trong không gian, máy bay luôn chịu tác động của 4 lực chính: lực đẩy của động cơ, lực cản của không khí, trọng lực và lực nâng khí động học (hình ảnh 2.20).

Hình 2.20

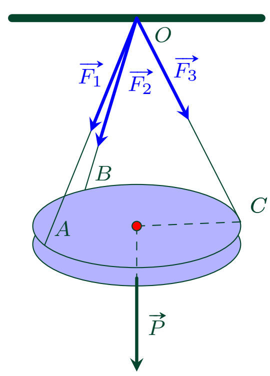
Lực cản của không khí ngược hướng với lực đẩy của động cơ và có độ lớn tỉ lệ thuận với bình phương vận tốc máy bay. Một chiếc máy bay tăng vận tốc từ 900(km/h) lên 920(km/h), trong quá trình tăng tốc máy bay giữ nguyên hướng bay. Lực cản của không khí khi máy bay đạt vận tốc 900(km/h) và 920(km/h) lần lượt biểu diễn bởi hai véc tơ $\overrightarrow{F_1}$ và $\overrightarrow{F_2}$ với $\overrightarrow{F_1} = k\overrightarrow{F_2} (k \in \mathbb{R}; k > 0)$. Tính giá trị của k (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai).

Lời giải.

Đáp án: 0,96

Vì trong quá trình máy bay tăng vận tốc từ 900(km/h) lên 900(km/h), máy bay giữ nguyên hướng bay nên hai véc tơ $\overrightarrow{F_1}$ và $\overrightarrow{F_2}$ có cùng hướng và $\overrightarrow{F_1} = k\overrightarrow{F_2} (k > 0)$.
Gọi v_1, v_2 lần lượt là vận tốc của chiếc máy bay khi đạt 900(km/h) và 920(km/h).
Suy ra $v_1 = 900$(km/h), $v_2 = 920$(km/h).
Vì lực cản của không khí ngược hướng với lực đẩy của động cơ và có độ lớn tỉ lệ thuận với bình phương vận tốc máy bay nên $\left|\dfrac{\overrightarrow{F_1}}{\overrightarrow{F_2}}\right| = \dfrac{v_1^2}{v_2^2} = \dfrac{900^2}{920^2} = \dfrac{2025}{2116} \Rightarrow \left|\overrightarrow{F_1}\right| = \dfrac{2025}{2116}\left|\overrightarrow{F_2}\right| \Rightarrow \overrightarrow{F_1} = \dfrac{2025}{2116}\overrightarrow{F_2}$.
Từ đó suy ra: $k = \dfrac{2025}{2116} \approx 0{,}96$.

CÂU 52.
Một chiếc đèn tròn được treo song song với mặt phẳng nằm ngang bởi ba sợi dây không dãn xuất phát từ điểm O trên trần nhà và lần lượt buộc vào ba điểm A, B, C trên đèn tròn sao cho các lực căng $\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_2}$, $\overrightarrow{F_3}$ lần lượt trên mỗi dây OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau và $\left|\overrightarrow{F_1}\right| = \left|\overrightarrow{F_2}\right| = \left|\overrightarrow{F_3}\right| = 15$ (N). Tính trọng lượng của chiếc đèn tròn đó (làm tròn đến hàng phần chục).



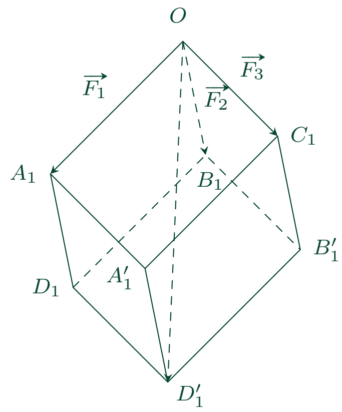
Lời giải.

Đáp án: 26,0

Gọi A_1, B_1, C_1 lần lượt là các điểm sao cho $\overrightarrow{OA_1}=\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{OB_1}=\overrightarrow{F_2}$, $\overrightarrow{OC_1}=\overrightarrow{F_3}$. Lấy các điểm D_1, A_1', B_1', D_1' sao cho $OA_1D_1B_1.C_1A_1'D_1'B_1'$ là hình hộp (như hình bên). Khi đó, áp dụng quy tắc hình hộp ta có

$$\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OB_1}+\overrightarrow{OC_1}=\overrightarrow{OD_1'}.$$

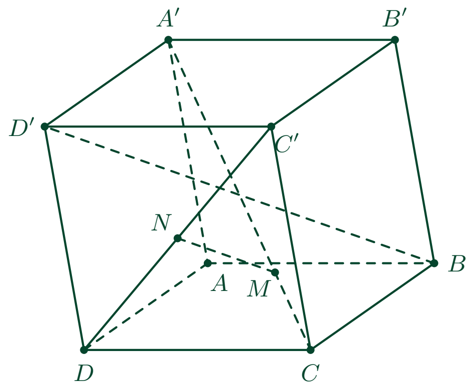
Mặt khác, do các lực căng $\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_2}$, $\overrightarrow{F_3}$ đôi một vuông góc và $\left|\overrightarrow{F_1}\right|=\left|\overrightarrow{F_2}\right|=\left|\overrightarrow{F_3}\right|=15$ (N) nên hình hộp $OA_1D_1B_1.C_1A_1'D_1'B_1'$ có ba cạnh OA_1, OB_1, OC_1 đôi một vuông góc và bằng nhau. Vì thế hình hộp đó là hình lập phương có độ dài cạnh bằng 15. Suy ra độ dài đường chéo OD_1' của hình lập phương đó bằng $15\sqrt{3}$.
Do chiếc đèn ở vị trí cân bằng nên $\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}+\overrightarrow{F_3}=\overrightarrow{P}$, ở đó $\overrightarrow{P}$ là trọng lực tác dụng lên chiếc đèn. Suy ra trọng lượng của chiếc đèn là $\left|\overrightarrow{P}\right|=\left|\overrightarrow{OD_1'}\right|=15\sqrt{3}$ (N).



CÂU 53. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Xét các điểm M, N lần lượt thuộc các đường thẳng $A'C$, $C'D$ sao cho đường thẳng MN song song với đường thẳng BD'. Khi đó tỉ số $\dfrac{MN}{BD'}$ bằng

Lời giải.

Đáp án: 0,25



Đặt $\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{x}$, $\overrightarrow{BB'}=\overrightarrow{y}$, $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{z}$.
Do $\overrightarrow{CM}$, $\overrightarrow{CA'}$ là hai vectơ cùng phương $\Rightarrow \exists k\in\mathbb{R}$: $\overrightarrow{CM}=k\cdot\overrightarrow{CA'}$.
Và $\overrightarrow{C'N}$, $\overrightarrow{C'D}$ là hai vectơ cùng phương $\Rightarrow \exists h\in\mathbb{R}$: $\overrightarrow{C'N}=h\cdot\overrightarrow{C'D}$.
Ta có: $\overrightarrow{BD'}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BB'}=\overrightarrow{x}+\overrightarrow{y}+\overrightarrow{z}$, (1)
$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{CN}-\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{CC'}+\overrightarrow{C'N}-\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{CC'}+h\cdot\overrightarrow{C'D}-k\cdot\overrightarrow{CA'}$ (2)

$$=\overrightarrow{y}+h\cdot(-\overrightarrow{y}+\overrightarrow{x})-k\cdot(\overrightarrow{y}-\overrightarrow{z}+\overrightarrow{x})=(h-k)\cdot\overrightarrow{x}+(1-h-k)\cdot\overrightarrow{y}+k\cdot\overrightarrow{z}$$

Do $MN \parallel B'D$ nên tồn tại $t\in\mathbb{R}$: $\overrightarrow{MN}=t\cdot\overrightarrow{BD'}$.

Từ (1) và (2) ta có $\begin{cases}h-k=t\\1-h-k=t\\k=t\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}k=t\\h=2t\\1-3t=t\end{cases}\Rightarrow t=\dfrac{1}{4}\Rightarrow\overrightarrow{MN}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{BD'}$.

Vậy $\dfrac{MN}{BD'}=\dfrac{1}{4}=0,25$.

Dạng 2. Xác định góc và tính tích vô hướng của hai véctơ

BÀI TẬP TỰ LUẬN

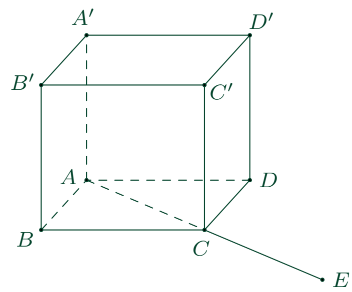
VÍ DỤ 1. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng 5.

a) Tìm góc giữa các cặp véc-tơ sau: $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{B'D'}$; $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{CD}$; $\overrightarrow{AD'}$ và $\overrightarrow{BD}$.

b) Tính các tích vô hướng $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{B'D'}$; $\overrightarrow{AD'}\cdot\overrightarrow{BD}$;

c) Chứng minh $\overrightarrow{AC'}$ vuông góc với $\overrightarrow{BD}$.

Lời giải.



a) Ta có :

- $\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}\right) = \widehat{CAB} = 45^\circ$
- $\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{B'D'}\right) = \left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}\right) = 90^\circ$.
- $\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CD}\right) = \left(\overrightarrow{CE}, \overrightarrow{CD}\right) = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$ (E là điểm đối xứng của A qua C).
- $\overrightarrow{AD'} = \overrightarrow{BC'} \Rightarrow \left(\overrightarrow{AD'}, \overrightarrow{BD}\right) = \left(\overrightarrow{BC'}, \overrightarrow{BD}\right) = \widehat{C'BD}$. Lại có, tam giác $C'BD$ là tam giác đều nên $\widehat{C'BD} = 60^\circ \Rightarrow \left(\overrightarrow{AD'}, \overrightarrow{BD}\right) = 60^\circ$.

b) Ta có $AC = BD = B'D' = 5\sqrt{2}$. Suy ra

- $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = AC.AB.\cos 45^\circ = 25$.
- Do AC vuông góc $B'D'$ nên $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{B'D'} = 0$.
- $\overrightarrow{AD'} \cdot \overrightarrow{BD} = AD'.BD.\cos 60^\circ = 5\sqrt{2}.5\sqrt{2}.\dfrac{1}{2} = 25$.

c) Ta cần chứng minh $\overrightarrow{AC'} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$.
Ta có: $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}$ và $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}$ nên

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC'} \cdot \overrightarrow{BD} &= \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}\right) \cdot \left(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}\right) \\ &= \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AD}^2 - \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{AB} = 5^2 - 5^2 = 0\end{aligned}$$

Suy ra $\overrightarrow{AC'}$ vuông góc với $\overrightarrow{BD}$.

VÍ DỤ 2. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a và M là trung điểm của CD.

a) Tính các tích vô hướng $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM}$.

b) Tính góc $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$.

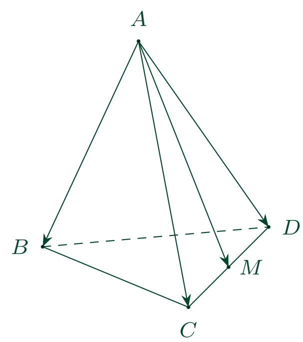
Lời giải.

a) Ta có
$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC} &= |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \\ &= AB \cdot AC \cdot \cos \widehat{BAC} \\ &= a \cdot a \cdot \cos 60^0 \\ &= \frac{a^2}{2}.\end{aligned}$$

Tương tự ta cũng có $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = \dfrac{a^2}{2}$.

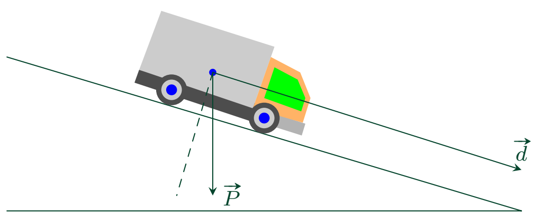
Ta lại có $\overrightarrow{AM} = \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})$, suy ra

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} \cdot \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}) = \frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2}\right) = \frac{a^2}{2}.$$



b) Ta có $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = (\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}) \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{CD}$.
Mà AM, BM là trung tuyến của các tam giác đều ACD, BCD nên $\overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{MB} \perp \overrightarrow{CD}$.
Suy ra $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$.
Từ các kết quả trên ta có $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$. Suy ra $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = 90^\circ$.

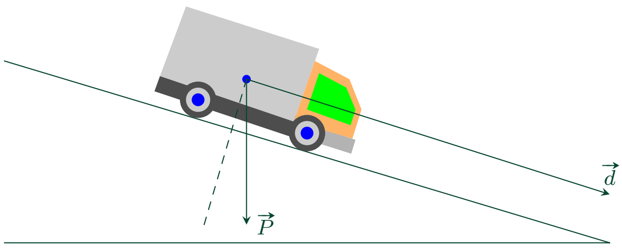
VÍ DỤ 3.
Cho biết công A (đơn vị: J) sinh bởi lực $\vec{F}$ tác dụng lên một vật được tính bằng công thức $A = \vec{F} \cdot \vec{d}$, trong đó $\vec{d}$ là vectơ biểu thị độ dịch chuyển của vật (đơn vị của $\left|\vec{d}\right|$ là m) khi chịu tác dụng của lực $\vec{F}$.



Một chiếc xe có khối lượng 1,5 tấn đang đi xuống trên một đoạn đường dốc có góc nghiêng 5° so với phương ngang. Tính công sinh bởi trọng lực $\vec{P}$ khi xe đi hết đoạn đường dốc dài 30 m (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị), biết rằng trọng lực $\vec{P}$

được xác định bởi công thức $\vec{P} = m\vec{g}$, với m (đơn vị: kg) là khối lượng của vật và $\vec{g}$ là gia tốc rơi tự do có độ lớn $g = 9{,}8$ m/s^2.

Lời giải.



Ta có 1,5 tấn = 1 500 kg.

Độ lớn của trọng lực tác dụng lên chiếc xe là $\left|\vec{P}\right| = m\left|\vec{g}\right| = 1\,500 \cdot 9{,}8 = 14\,700$ (N).

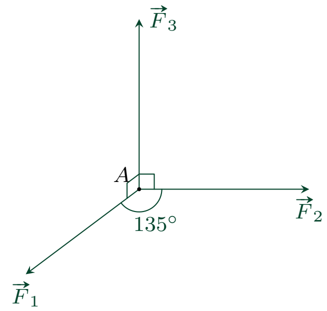
Vectơ d biểu thị độ dịch chuyển của xe có độ dài là $\left|\vec{d}\right| = 30$ (m) và $\left(\vec{P}, \vec{d}\right) = 90^\circ - 5^\circ = 85^\circ$.

Công sinh ra bởi trọng lực $\vec{P}$ khi xe đi hết đoạn đường dốc dài 30 m là

$$A = \vec{P} \cdot \vec{d} = \left|\vec{P}\right| \cdot \left|\vec{d}\right| \cdot \cos\left(\vec{P}, \vec{d}\right) = 14\,700 \cdot 30 \cdot \cos 85^\circ \approx 38\,436\ (J).$$

VÍ DỤ 4.

Một chất điểm A nằm trên mặt phẳng nằm ngang (α), chịu tác động bởi ba lực $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$. Các lực $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ có giá nằm trong (α) và $\left(\vec{F}_1, \vec{F}_2\right) = 135^\circ$, còn lực $\vec{F}_3$ có giá vuông góc với (α) và hướng lên trên. Xác định cường độ hợp lực của các lực $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$ biết rằng độ lớn của ba lực đó lần lượt là 20 N, 15 N và 10 N.



Lời giải.

Gọi $\vec{F}$ là hợp lực của các lực $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$, tức là $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$, ta có

$$\begin{aligned}\left|\vec{F}\right|^2 &= \left(\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3\right)^2\\ &= \vec{F}_1^2 + \vec{F}_2^2 + \vec{F}_3^2 + 2\vec{F}_1 \cdot \vec{F}_2 + 2\vec{F}_2 \cdot \vec{F}_3 + 2\vec{F}_3 \cdot \vec{F}_1\\ &= 20^2 + 15^2 + 10^2 + 2 \cdot 20 \cdot 15 \cdot \cos 135^\circ\\ &= 725 - 300\sqrt{2}.\end{aligned}$$

Vậy $\left|\vec{F}\right| = \sqrt{725 - 300\sqrt{2}} \approx 17{,}34$ (N).

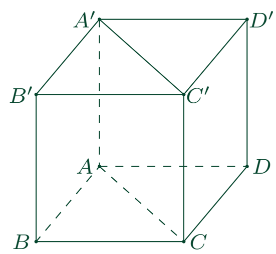
BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. *Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.*

CÂU 1.

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định **sai**?

A $\left(\overrightarrow{A'C'}, \overrightarrow{AD}\right) = 45^\circ$.
B $\left(\overrightarrow{A'C'}, \overrightarrow{B'B}\right) = 90^\circ$.
C $\left(\overrightarrow{A'A}, \overrightarrow{CB'}\right) = 45^\circ$.
D $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right) = 180^\circ$.



Lời giải.

- Ta có $\left(\overrightarrow{A'C'}, \overrightarrow{AD}\right) = \left(\overrightarrow{A'C'}, \overrightarrow{A'D'}\right) = \widehat{C'A'D'} = 45^\circ$.
- $\left(\overrightarrow{A'C'}, \overrightarrow{B'B}\right) = \left(\overrightarrow{A'C'}, \overrightarrow{A'A}\right) = \widehat{AA'C'} = 90^\circ$.

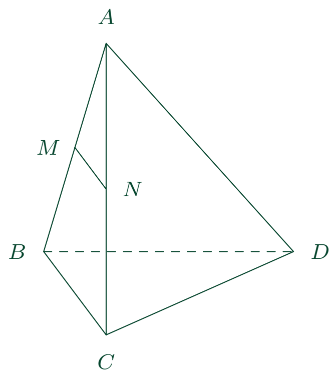
- Ta có $\overrightarrow{B'B} = \overrightarrow{A'A}$, suy ra
$\left(\overrightarrow{A'A}, \overrightarrow{CB'}\right) = \left(\overrightarrow{B'B}, \overrightarrow{CB'}\right) = 180^\circ - \widehat{BB'C} = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$

- $\overrightarrow{AB}$ ngược hướng với $\overrightarrow{CD}$ nên $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right) = 180^\circ$.

Chọn đáp án (C) .... □

CÂU 2.

Cho tứ diện đều $ABCD$, Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AB, AC. Hãy tính góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{BD}$.



(A) $\left(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{BD}\right) = 150^\circ$.
(B) $\left(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{BD}\right) = 120^\circ$.
(C) $\left(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{BD}\right) = 30^\circ$.
(D) $\left(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{BD}\right) = 60^\circ$.

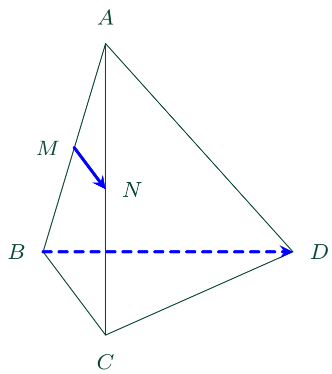
Lời giải.

Xét tam giác ABC có M, N là trung điểm của AB, AC nên MN là đường trung bình của tam giác ABC. Do đó $MN \parallel BC$.

Ta có $\left(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{BD}\right) = \left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}\right) = \widehat{CBD}$.

Vì $ABCD$ là tứ diện đều nên $BC = CD = DB$. Do đó tam giác BCD đều suy ra $\widehat{CBD} = 60^\circ$.

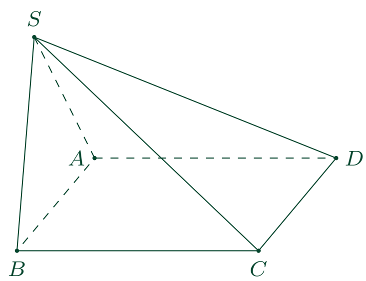
Vậy $\left(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{BD}\right) = 60^\circ$.



Chọn đáp án (D) .... □

CÂU 3.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành và mặt bên SAB là tam giác đều. Tính góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{DC}$ và $\overrightarrow{BS}$.



(A) $\left(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{BS}\right) = 120^\circ$.
(B) $\left(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{BS}\right) = 60^\circ$.
(C) $\left(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{BS}\right) = 90^\circ$.
(D) $\left(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{BS}\right) = 150^\circ$.

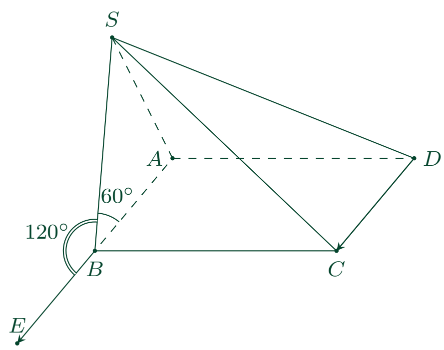
Lời giải.

Vì $ABCD$ là hình bình hành nên $AB \parallel DC$.

Trên tia AB lấy điểm E sao cho $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{DC}$ (Hình 2.20). Ta có

$$\left(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{BS}\right) = \left(\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{BS}\right) = \widehat{EBS} = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ.$$

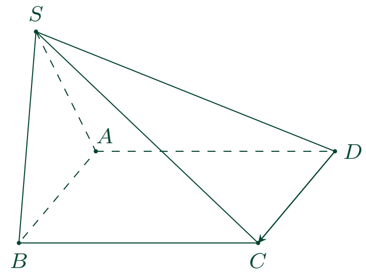
Vậy $\left(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{BS}\right) = 120^\circ$.



Chọn đáp án (A) .... □

CÂU 4.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Mặt bên ASB là tam giác vuông cân tại S và có cạnh $AB = a$. Tính $\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{AS}$.



A $\dfrac{a^2}{4}$.

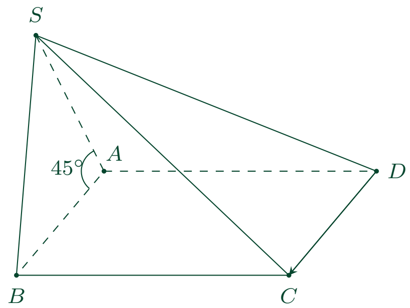
B $-\dfrac{a^2}{4}$.

C $-\dfrac{a^2}{2}$.

D $\dfrac{a^2}{2}$.

Lời giải.

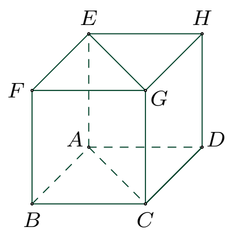
$\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{AS} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AS} = \left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AS}\right| \cdot \cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AS}\right) = a \cdot \dfrac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \cos 45^\circ = \dfrac{a^2}{2}$.



Chọn đáp án D .... □

CÂU 5.

Cho hình lập phương $ABCD.EFGH$ có các cạnh bằng a. Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{EG}$.



A $a^2\sqrt{2}$.

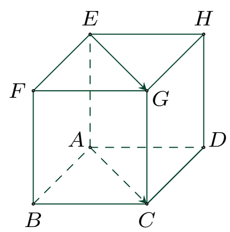
B a^2.

C $\dfrac{a^2\sqrt{2}}{2}$.

D $a^2\sqrt{3}$.

Lời giải.

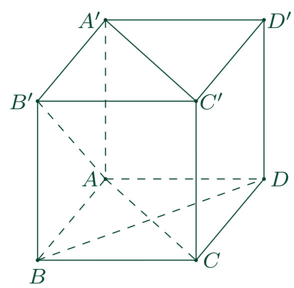
Ta có $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{EG} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \cdot AC \cdot \cos 45^\circ = a \cdot a\sqrt{2} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} = a^2$.



Chọn đáp án B .... □

CÂU 6.

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Tính $\overrightarrow{AB'} \cdot \overrightarrow{A'C'}$.



A $\dfrac{a^2}{2}$.

B $-a^2$.

C a^2.

D $-\dfrac{a^2}{2}$.

Lời giải.

Ta có $A'C' = AC$.

Vì $AB' = AC = B'C = a\sqrt{2}$ nên tam giác $AB'C$ đều. Suy ra $\widehat{B'AC} = 60^\circ$.

$$\begin{aligned}
\text{Ta có } \overrightarrow{AB'} \cdot \overrightarrow{A'C'} &= \left|\overrightarrow{AB'}\right| \cdot \left|\overrightarrow{A'C'}\right| \cdot \cos\left(\overrightarrow{AB'}, \overrightarrow{A'C'}\right) \\
&= AB' \cdot A'C' \cdot \cos\left(\overrightarrow{AB'}, \overrightarrow{AC}\right) \\
&= AB' \cdot A'C' \cdot \cos\widehat{B'AC} \\
&= a\sqrt{2} \cdot a\sqrt{2} \cdot \cos 60^\circ = a^2.
\end{aligned}$$

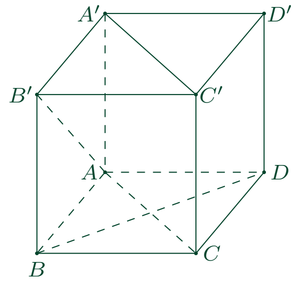
Chọn đáp án C .... □

CÂU 7.

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Tính $\overrightarrow{AB'} \cdot \overrightarrow{BD}$.

Ⓐ $\dfrac{a^2}{2}$. Ⓑ $-a^2$.

Ⓒ a^2. Ⓓ $-\dfrac{a^2}{2}$.



Lời giải.

Ta có $ABCD.A'B'C'D$ là hình lập phương nên $\begin{cases} AA' \perp AB \\ AB \perp BC \\ \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \\ \overrightarrow{AB'} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}. \end{cases}$

Khi đó $\begin{aligned} \overrightarrow{AB'} \cdot \overrightarrow{BD} &= \left(\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AB}\right) \cdot \left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}\right) \\ &= \overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}. \\ &= 0 + 0 - AB^2 + 0 = -a^2. \end{aligned}$

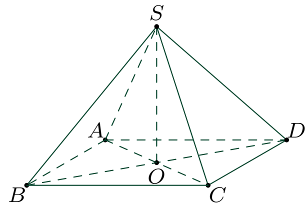
Chọn đáp án C .... □

CÂU 8.

Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có độ dài tất cả các cạnh bằng a. Tính $\overrightarrow{AS} \cdot \overrightarrow{BC}$.

Ⓐ $-\dfrac{a^2}{4}$. Ⓑ $\dfrac{a^2}{2}$.

Ⓒ $-\dfrac{a^2}{2}$. Ⓓ $\dfrac{a^2}{4}$.



Lời giải.

Tam giác SAD có ba cạnh bằng nhau nên là tam giác đều, suy ra $\widehat{SAD} = 60^\circ$.
Tứ giác $ABCD$ là hình vuông nên $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$, suy ra $(\overrightarrow{AS}, \overrightarrow{BC}) = (\overrightarrow{AS}, \overrightarrow{AD}) = \widehat{SAD} = 60^\circ$.
Do đó $\overrightarrow{AS} \cdot \overrightarrow{BC} = |\overrightarrow{AS}| \cdot |\overrightarrow{BC}| \cdot \cos 60^\circ = a \cdot a \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{a^2}{2}$.

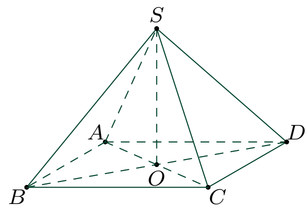
Chọn đáp án B .... □

CÂU 9.

Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có độ dài tất cả các cạnh bằng a. Tính $\overrightarrow{AS} \cdot \overrightarrow{AC}$.

Ⓐ $-a^2$. Ⓑ $\dfrac{a^2}{2}$.

Ⓒ $-\dfrac{a^2}{2}$. Ⓓ a^2.



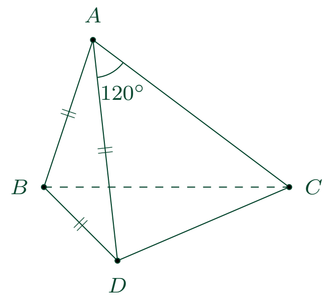
Lời giải.

Tứ giác $ABCD$ là hình vuông có độ dài mỗi cạnh là a nên độ dài đường chéo AC là $\sqrt{2}a$.
Tam giác SAC có $SA = SC = a$ và $AC = \sqrt{2}a$ nên tam giác SAC vuông cân tại S, suy ra $\widehat{SAC} = 45^\circ$.
Do đó $\overrightarrow{AS} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AS}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cdot \cos \widehat{SAC} = a \cdot \sqrt{2}a \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} = a^2$.

Chọn đáp án D .... □

CÂU 10.

Cho tứ diện $ABCD$ biết $AB = AD = BD = a$, $AC = 2a$ và $\widehat{CAD} = 120^\circ$. Tính $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD}$.



(A) $-\dfrac{3}{2}a^2$. (B) $\dfrac{3}{2}a^2$.

(C) $\dfrac{1}{2}a^2$. (D) $-\dfrac{1}{2}a^2$.

Lời giải.

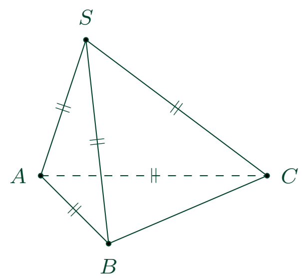
Theo giả thiết tam giác ABD là tam giác đều. Ta có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD} &= \left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right) \cdot \overrightarrow{AD} \\ &= \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} \\ &= AC \cdot AD \cdot \cos 120^\circ - AB \cdot AD \cdot \cos 60^\circ \\ &= \frac{-3}{2}a^2.\end{aligned}$$

Chọn đáp án (A) .... □

CÂU 11.

Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC = AB = AC = a$ và $BC = a\sqrt{2}$. Tính góc giữa các vectơ $\overrightarrow{SC}$ và $\overrightarrow{AB}$.

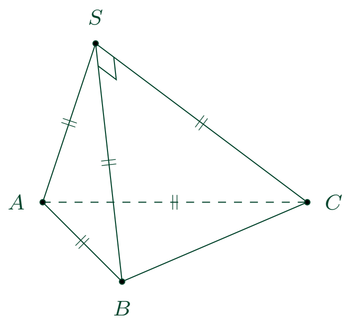


(A) 60°. (B) 90°.

(C) 120°. (D) 150°.

Lời giải.

Ta có



$$\begin{aligned}\cos\left(\overrightarrow{SC}, \overrightarrow{AB}\right) &= \frac{\overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{SC}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AB}\right|} = \frac{\left(\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{AC}\right) \cdot \overrightarrow{AB}}{a^2} \\ &= \frac{\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}}{a^2}.\end{aligned}$$

Từ giả thiết suy ra SAB là tam giác đều và ABC là tam giác vuông cân tại A. Từ đó ta tính được $\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{AB} = a \cdot a \cdot \cos 120^\circ = -\dfrac{a^2}{2}$ và $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$.

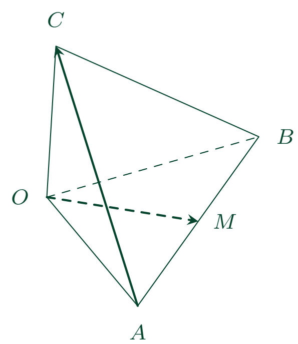
Suy ra $\cos\left(\overrightarrow{SC}, \overrightarrow{AB}\right) = -\dfrac{1}{2}$.

Vậy $\cos\left(\overrightarrow{SC}, \overrightarrow{AB}\right) = 120^\circ$.

Chọn đáp án (C) .... □

CÂU 12.

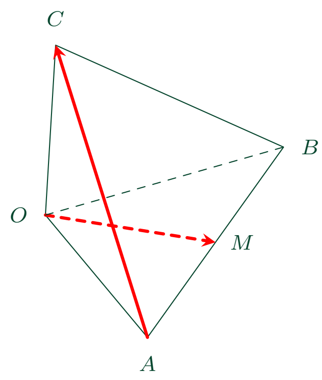
Cho tứ diện $OABC$ có các cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc và $OA = OB = OC = 1$. Gọi M là trung điểm của cạnh AB. Tính góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{OM}$ và $\overrightarrow{AC}$.



(A) 90°. (B) 120°.

(C) 60°. (D) 30°.

Lời giải.



Đặt $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$.

Khi đó, $|\vec{a}|=\left|\vec{b}\right|=|\vec{c}|=1$ và $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{b}\cdot\vec{c}=0$.

Ta có $\cos\left(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{AC}\right)=\dfrac{\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{OM}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|}$.

Mặt khác do $\overrightarrow{OM}=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right)=\dfrac{1}{2}\left(\vec{a}+\vec{b}\right)$

và $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=\vec{c}-\vec{a}$

nên $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{AC}=\dfrac{1}{2}\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot(\vec{c}-\vec{a})$

$=\dfrac{1}{2}\left(\vec{a}\cdot\vec{c}-\vec{a}^2+\vec{b}\cdot\vec{c}-\vec{b}\cdot\vec{a}\right)=-\dfrac{1}{2}$.

Ta lại có $\left|\overrightarrow{OM}\right|=OM=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\left|\overrightarrow{AC}\right|=AC=\sqrt{2}$.

Do đó $\cos\left(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{AC}\right)=\dfrac{\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{OM}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|}=\dfrac{\frac{-1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sqrt{2}}=\dfrac{-1}{2}$.

Vậy $\left(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{AC}\right)=120^\circ$.

Chọn đáp án B .... □

CÂU 13. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh bằng a. Tích vô hướng của hai vectơ $\overrightarrow{DD'}$ và $\overrightarrow{A'C'}$ bằng

A $\sqrt{2}a^2$. **B** a^2. **C** $-\sqrt{2}a^2$. **D** 0.

Lời giải.

Ta có: $\overrightarrow{A'C'}=\overrightarrow{A'D'}+\overrightarrow{D'C'}$, mà tứ giác $ADD'A'$ và $DCC'D'$ là hình vuông nên $\overrightarrow{DD'}\cdot\overrightarrow{A'D'}=\overrightarrow{DD'}\cdot\overrightarrow{D'C'}=0$. Do đó $\overrightarrow{DD'}\cdot\left(\overrightarrow{A'D'}+\overrightarrow{D'C'}\right)=0$.

Chọn đáp án D .... □

PHẦN II. *Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.*

CÂU 14. Trong không gian, cho hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng có độ dài bằng 1. Biết rằng góc giữa hai véc-tơ đó là 45°.

Mệnh đề	Đ	S
a) $\vec{a}\cdot\vec{b}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.	X	
b) $\left(\vec{a}+3\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}-2\vec{b}\right)=-5+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.	X	
c) $\left\lvert\vec{a}+\vec{b}\right\rvert=2+\sqrt{2}$.		X
d) $\left\lvert\vec{a}-\sqrt{2}\vec{b}\right\rvert=0$.		X

Lời giải.

a) $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

b) $\left(\vec{a}+3\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}-2\vec{b}\right)=|\vec{a}|^2+\cdot\vec{a}\cdot\vec{b}-6\left|\vec{b}\right|^2=1+\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}-6=-5+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

c) $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)^2=\vec{a}^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2=1+2\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}+1=2+\sqrt{2}$. Suy ra $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\sqrt{2+\sqrt{2}}$.

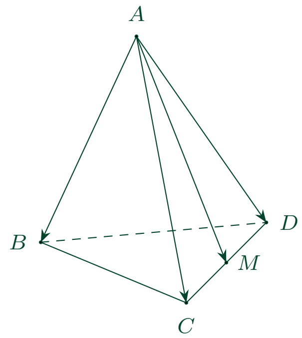
d) $\left(\vec{a}-\sqrt{2}\vec{b}\right)^2=\vec{a}^2+2\sqrt{2}\vec{a}\cdot\vec{b}+2\vec{b}^2=1+2\sqrt{2}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}+2=2$. Suy ra $\left|\vec{a}-\sqrt{2}\vec{b}\right|=\sqrt{2}$.

Chọn đáp án | a đúng | b đúng | c sai | d sai | .... □

CÂU 15.

Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a và M là trung điểm của CD.

Mệnh đề	Đ	S
a) $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{CD}=0$.	X	
b) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\dfrac{a^2}{2}$.	X	
c) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=0$.	X	
d) $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AB}=-\dfrac{a^2}{2}$.		X



Lời giải.

a) Tam giác ACD đều, suy ra AM vuông góc với CD nên $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{CD}=0$.

b) Ta có
$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}&=|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|\cdot\cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})\\&=AB\cdot AC\cdot\cos\widehat{BAC}\\&=a\cdot a\cdot\cos 60^0\\&=\frac{a^2}{2}.\end{aligned}$$

c) Ta có $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB})\cdot\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{CD}$.
Mà AM, BM là trung tuyến của các tam giác đều ACD, BCD nên $\overrightarrow{AM}\perp\overrightarrow{CD},\overrightarrow{MB}\perp\overrightarrow{CD}$.
Suy ra $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{CD}=0$.
Từ các kết quả trên ta có $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{CD}=0$. Suy ra $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD})=90°$.

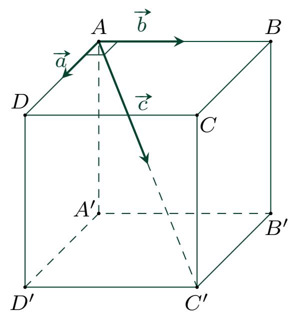
d) Ta có $\overrightarrow{AM}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD})$, suy ra

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}\cdot\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD})=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD})=\frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{2}+\frac{a^2}{2}\right)=\frac{a^2}{2}.$$

Chọn đáp án | a đúng | b đúng | c đúng | d sai | ....□

CÂU 16.

Một chất điểm ở vị trí đỉnh A của hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Chất điểm chịu tác động bởi ba lực $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ lần lượt cùng hướng với $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC'}$ như hình vẽ. Độ lớn của các lực $\vec{a}$, $\vec{b}$ và $\vec{c}$ tương ứng là 10 N, 10 N và 20 N.



Mệnh đề	Đ	S
a) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}$.		X
b) $\left\|\vec{a}+\vec{b}\right\|=20$ (N).		X
c) $\left\|\vec{a}+\vec{c}\right\|=\left\|\vec{b}+\vec{c}\right\|$.	X	
d) $\left\|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right\|=32{,}59$ (N) (*làm tròn kết quả đến hàng phần mười*).	X	

Lời giải.

Từ giả thiết, ta có $\vec{a}\perp\vec{b};\cos(\vec{a},\vec{c})=\cos\widehat{DAC'}=\dfrac{1}{\sqrt{3}};\cos\left(\vec{b},\vec{c}\right)=\cos\widehat{BAC'}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

a) Giả sử $\vec{a}+\vec{b}=\vec{d}$. Theo quy tắc hình bình hành thì $\vec{d}$ cùng hướng với $\overrightarrow{AC}$. Suy ra $\vec{a}+\vec{b}\neq\vec{c}$

b) $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=10\sqrt{2}$ (đường chéo hình vuông cạnh bằng 10).

c) Ta có

- $(\vec{a}+\vec{c})^2=|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{c}+|\vec{c}|^2=10^2+2.10.20.\dfrac{1}{\sqrt{3}}+20^2=500+\dfrac{400\sqrt{3}}{3}$.

  Suy ra $|\vec{a}+\vec{c}|=\sqrt{500+\dfrac{400\sqrt{3}}{3}}$.

- $\left(\vec{b}+\vec{c}\right)^2=|\vec{b}|^2+2\vec{b}\cdot\vec{c}+|\vec{c}|^2=10^2+2.10.20.\dfrac{1}{\sqrt{3}}+20^2=500+\dfrac{400\sqrt{3}}{3}$.

  Suy ra $|\vec{b}+\vec{c}|=\sqrt{500+\dfrac{400\sqrt{3}}{3}}$.

Vậy $|\vec{a}+\vec{c}|=|\vec{b}+\vec{c}|$.

d) Giả sử lực tổng hợp là $\vec{m}$, tức là $\vec{m}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$.
Do đó

$$\begin{aligned}\vec{m}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c} &\Leftrightarrow |\vec{m}|^2=\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)^2\\ &\Leftrightarrow |\vec{m}|^2=\vec{a}^2+\vec{b}^2+\vec{c}^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+2\vec{b}\cdot\vec{c}+2\vec{c}\cdot\vec{a}\\ &\Leftrightarrow |\vec{m}|^2=10^2+10^2+20^2+0+2\cdot10\cdot20\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}+2\cdot10\cdot20\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\\ &\Leftrightarrow |\vec{m}|^2=10^2+10^2+20^2+0+2\cdot10\cdot20\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}+2\cdot10\cdot20\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\\ &\Leftrightarrow |\vec{m}|\approx 32{,}59.\end{aligned}$$

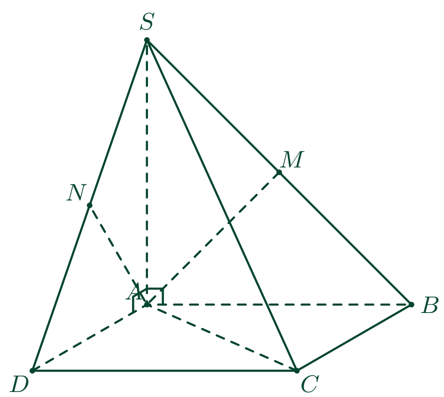
Vậy cường độ hợp lực của $\vec{a}$, $\vec{b}$ và $\vec{c}$ là $\approx 32{,}59$ (N).

Chọn đáp án | a sai | b sai | c đúng | d đúng | .... □

CÂU 17. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. Biết rằng cạnh $AB=a$, $AD=2a$, cạnh bên $SA=2a$ và vuông góc với mặt đáy. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh SB, SD. Các mệnh đề sau đúng hay sai ?

Mệnh đề	Đ	S
a) Hai vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ là hai vectơ cùng phương, cùng hướng.		X
b) Góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{SC}$ và $\overrightarrow{AC}$ bằng 60°.		X
c) Tích vô hướng $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AB}=\dfrac{a^2}{2}$.	X	
d) Độ dài của vectơ $\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AN}$ là $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.		X

Lời giải.



a) $\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{CD}$. Suy ra hai vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ là hai vectơ ngược hướng.

b) Ta có: $ABCD$ là hình chữ nhật nên: $AC=\sqrt{AB^2+AD^2}=a\sqrt{5}$.
Hình chóp $S.ABCD$ có SA vuông góc với mặt đáy nên tam giác SAC là tam giác vuông tại A. Suy ra: $\tan\widehat{SCA}=\dfrac{SA}{AC}=\dfrac{2a}{a\sqrt{5}}\Rightarrow\widehat{SCA}\approx 41^\circ48'$.
Ta có: $\left(\overrightarrow{SC},\overrightarrow{AC}\right)=\left(\overrightarrow{CS},\overrightarrow{CA}\right)=\widehat{SCA}\approx 41^\circ48'$.

c) Hình chóp $S.ABCD$ có SA vuông góc với mặt đáy nên tam giác SAB là tam giác vuông tại A.
Suy ra: $SB=\sqrt{SA^2+AB^2}=a\sqrt{5}$.
Trong tam giác SAB vuông tại A có AM là đường trung tuyến nên:
$AM=\dfrac{1}{2}SB=\dfrac{a\sqrt{5}}{2}$.
Lại có: M là trung điểm của SB nên $MB=\dfrac{1}{2}SB=\dfrac{a\sqrt{5}}{2}$.

Ta tính được: $\cos\widehat{MAB} = \dfrac{MA^2 + AB^2 - MB^2}{2MA \cdot AB} = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

Mà: $\left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}\right) = \widehat{MAB}$, suy ra:

$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = \left|\overrightarrow{AM}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \cos\left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}\right) = \dfrac{a\sqrt{5}}{2} \cdot a \cdot \dfrac{\sqrt{5}}{5} = \dfrac{a^2}{2}$.

d) Ta có: M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh SB, SD nên MN là đường trung bình của tam giác SBD. Do đó: $MN = \dfrac{1}{2}BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$.

Suy ra: $\left|\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AN}\right| = \left|\overrightarrow{MN}\right| = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$.

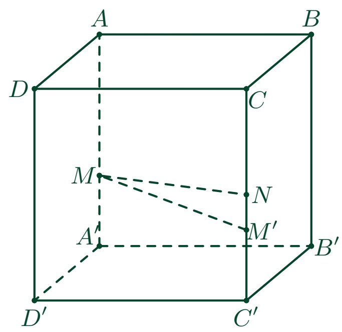
Chọn đáp án | a sai | b sai | c đúng | d sai | .... □

CÂU 18. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Trên các cạnh AA', CC' lần lượt lấy các điểm M, N sao cho $AM = \dfrac{2}{3}AA'$, $CN = NC'$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

Mệnh đề	Đ	S
a) Góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{AN}$ và $\overrightarrow{AC}$ bằng $60°$.		X
b) Độ dài của vectơ $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{AM}$ là $\dfrac{3a}{2}$.	X	

Mệnh đề	Đ	S
c) Tích vô hướng $\overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{AC} = a^2$.		X
d) Tích vô hướng $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{A'C'} = 2a^2$.	X	

Lời giải.



a) Ta có: $AC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = a\sqrt{2}$.

Lại có: $CN = NC'$ nên $CN = NC' = \dfrac{a}{2}$.

$ABCD.A'B'C'D'$ là hình lập phương nên tam giác NAC là tam giác vuông tại C.

Suy ra: $\tan NAC = \dfrac{CN}{AC} = \dfrac{\sqrt{2}}{4} \Rightarrow \widehat{NAC} \approx 19°28'$

Ta có: $\left(\overrightarrow{AN}, \overrightarrow{AC}\right) = \widehat{NAC} \approx 19°28'$.

b) Trong tam giác NAC vuông tại C có: $AN = \sqrt{AC^2 + CN^2} = \dfrac{3a}{2}$.

Ta có: $\left|\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{AM}\right| = \left|\overrightarrow{AN}\right| = \dfrac{3a}{2}$.

c) Ta có: $\tan\widehat{NAC} = \dfrac{\sqrt{2}}{4} \Rightarrow \cos\widehat{NAC} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ (Do $\widehat{NAC} < 90°$).

Do đó: $\overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{AC} = \left|\overrightarrow{AN}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AC}\right| \cdot \cos\left(\overrightarrow{AN}, \overrightarrow{AC}\right) = \dfrac{3a}{2} \cdot a\sqrt{2} \cdot \dfrac{2\sqrt{2}}{3} = 2a^2$.

d) Trên cạnh CC' lấy điểm M' sao cho: $\dfrac{CM'}{CC'} = \dfrac{2}{3}$.

Suy ra: $\begin{cases} NM' = NC' - M'C' = \dfrac{a}{6} \\ MM' \parallel AC \\ MM' = AC = a\sqrt{2} \end{cases}$.

Ta có: $\cos\widehat{NMM'} = \dfrac{NM^2 + M'M^2 - M'N^2}{2 \cdot NM \cdot M'M} = \dfrac{6\sqrt{146}}{73}$.

Mặt khác: $\left(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{A'C'}\right) = \left(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MM'}\right) = \widehat{NMM'}$.

Tam giác MNM' vuông tại M' có: $MN = \sqrt{M'N^2 + M'M^2} = \dfrac{a\sqrt{73}}{6}$.

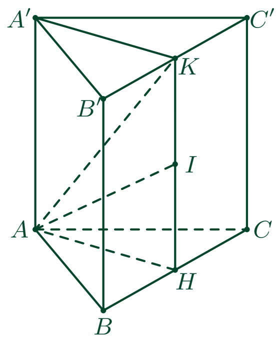
Do đó: $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{A'C'} = \left|\overrightarrow{MN}\right| \cdot \left|\overrightarrow{A'C'}\right| \cdot \cos\left(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{A'C'}\right) = 2a^2$.

Chọn đáp án | a sai | b đúng | c sai | d đúng | .... □

CÂU 19. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ đáy là tam giác đều cạnh $2a$, $AA' = a\sqrt{3}$. H, K lần lượt là trung điểm BC, $B'C'$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

Mệnh đề	Đ	S
a) Hai vectơ $\overrightarrow{AH}$, $\overrightarrow{KA'}$ là hai vectơ cùng phương, cùng hướng.		X
b) Góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{A'H}$ và $\overrightarrow{AH}$ bằng 60°.		X
c) Tích vô hướng $\overrightarrow{AK} \cdot \overrightarrow{AB'} = \dfrac{5a^2}{2}$.		X
d) Độ dài của vectơ $\overrightarrow{AK} + \overrightarrow{AH}$ là $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.	X	

Lời giải.



a) Ta có tam giác $\triangle ABC, \triangle A'B'C'$ đều cạnh $2a$ suy ra $A'K = AH = a\sqrt{3}$
Xét tứ giác $AA'KH$ có $AA' = KH = AH = A'K = a\sqrt{3}$, $AA' \perp AH$ suy ra tứ giác $AA'KH$ là hình vuông , từ đó dễ thấy hai vectơ $\overrightarrow{AH}$, $\overrightarrow{KA'}$ là hai vecto cùng phương ngược hướng.

b) Ta có: $AA'KH$ là hình vuông suy ra $\widehat{A'HA} = 45^\circ$
Có $A'A \perp AH \Rightarrow \triangle A'AH$ vuông tại $A \Rightarrow \left(\overrightarrow{A'H}, \overrightarrow{AH}\right) = \widehat{A'HA} = 45^\circ$.

c) Ta có $\triangle AB'C'$ cân tại A, suy ra $AK \perp B'C'$, $AK = a\sqrt{6}, B'K = a$
$AB' = \sqrt{AB^2 + BB'^2} = \sqrt{4a^2 + 3a^2} = a\sqrt{7}$
Xét $\triangle AKB'$ có $\cos\widehat{KAB'} = \dfrac{AK}{AB'} = \dfrac{a\sqrt{6}}{a\sqrt{7}} = \sqrt{\dfrac{6}{7}}$.
$\overrightarrow{AK} \cdot \overrightarrow{AB'} = AK \cdot AB' \cdot \cos\widehat{KAB'} = a\sqrt{6} \cdot a\sqrt{7} \cdot \sqrt{\dfrac{6}{7}} = 6a^2$.

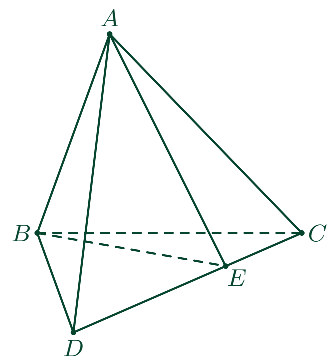
d) Gọi I là trung điểm $HK \Rightarrow IH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, $AI = \sqrt{IH^2 + AH^2} = \sqrt{\dfrac{3a^2}{4} + 3a^2} = \dfrac{a\sqrt{15}}{2}$.
Ta có $\left|\overrightarrow{AK} + \overrightarrow{AH}\right| = \left|2 \cdot \overrightarrow{AI}\right| = 2AI = a\sqrt{15}$.

Chọn đáp án | a sai | b sai | c sai | d đúng | .... □

CÂU 20. Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh a. E là điểm trên đoạn CD sao cho $ED = 2CE$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

Mệnh đề	Đ	S
a) Có 6 vectơ (khác vectơ $\vec{0}$) có điểm đầu và điểm cuối được tạo thành từ các đỉnh của tứ diện.		X
b) Góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BC}$ bằng 60°.		X
c) Nếu $\overrightarrow{BE} = m\overrightarrow{BA} + n\overrightarrow{BC} + p\overrightarrow{BD}$ thì $m + n + p = \dfrac{2}{3}$.		X
d) Tích vô hướng $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BE} = \dfrac{a^2}{6}$.	X	

Lời giải.



a) Số vectơ (khác $\vec{0}$) có điểm đầu và điểm cuối được tạo thành từ các đỉnh của tứ diện là $A_4^2 = 12$.

b) $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = 180^\circ - (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = 180^\circ - \widehat{ABC} = 120^\circ$.

c) $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{BC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BC} + \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BC}\right) = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BD}$.
Do đó $m = 0, n = \frac{2}{3}, p = \frac{1}{3}$. Suy ra $m + n + p = 1$.

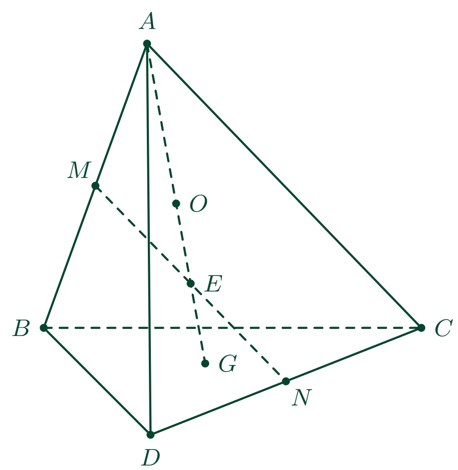
d) Ta có: $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AB} = \left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CE}\right) - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{AB}$
$= \overrightarrow{AC} + \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}\right) - \overrightarrow{AB} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}$
Suy ra: $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AD} \cdot \left(\frac{2}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}\right) = \frac{2}{3} \cdot \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC} + \frac{1}{3} \cdot \overrightarrow{AD}^2 - \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB}$
$= \frac{2}{3} \cdot a \cdot a \cdot \cos 60^\circ + \frac{1}{3}a^2 - a \cdot a \cdot \cos 60^\circ = \frac{a^2}{6}$.

Chọn đáp án | a sai | b sai | c sai | d đúng | .... □

CÂU 21. Cho tứ diện $ABCD$ có cạnh a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

Mệnh đề	Đ	S
a) $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ cùng hướng.		X
b) $\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{ED} = \vec{0}$ với E là trung điểm MN.	X	
c) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = \vec{0}$.	X	
d) Điểm I xác định bởi $P = 3\overrightarrow{IA}^2 + \overrightarrow{IB}^2 + \overrightarrow{IC}^2 + \overrightarrow{ID}^2$ có giá trị nhỏ nhất. Khi đó giá trị nhỏ nhất của P là $2a^2$.	X	

Lời giải.



a) $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ ngược hướng.

b) Vì M là trung điểm AB nên $\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EB} = 2\overrightarrow{EM}$, N là trung điểm CD nên $\overrightarrow{EC} + \overrightarrow{ED} = 2\overrightarrow{EN}$.
Ta có $\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{ED} = 2\left(\overrightarrow{EM} + \overrightarrow{EN}\right) = \vec{0}$.

c) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}=\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}\right)\cdot\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}$

$=\overrightarrow{AC}\cdot\left(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DB}\right)+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CD}$

$=\overrightarrow{CB}\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}\right)+\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CD}=\vec{0}$

d) Gọi O là điểm thoả mãn hệ thức $3\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$ suy ra O cố định vì A, B, C, D cố định. Ta có

$$\begin{aligned}P&=3\overrightarrow{IA}^2+\overrightarrow{IB}^2+\overrightarrow{IC}^2+\overrightarrow{ID}^2\\&=3\left(\overrightarrow{IO}+\overrightarrow{OA}\right)^2+\left(\overrightarrow{IO}+\overrightarrow{OB}\right)^2+\left(\overrightarrow{IO}+\overrightarrow{OC}\right)^2+\left(\overrightarrow{IO}+\overrightarrow{OD}\right)^2\\&=6IO^2+3OA^2+OB^2+OC^2+OD^2+2\overrightarrow{IO}\left(3\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\right)\\&=6IO^2+3OA^2+OB^2+OC^2+OD^2.\end{aligned}$$

Do đó để P nhỏ nhất thì I trùng với O. Gọi G là trọng tâm tam giác BCD.
Vì $3\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=3\overrightarrow{OA}+\left(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\right)=3\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OG}$ nên $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OG}=\vec{0}$.
Suy ra O là trung điểm của AG.
Ta có $BG=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{a\sqrt{3}}{2}=\dfrac{a}{\sqrt{3}}\Rightarrow AG=\sqrt{AB^2-BG^2}=\sqrt{a^2-\left(\dfrac{a}{\sqrt{3}}\right)^2}=\dfrac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$
$\Rightarrow OA=\dfrac{1}{2}AG=\dfrac{a}{\sqrt{6}}\Rightarrow OA^2=\dfrac{a^2}{6}$.
Lại có $OD^2=OC^2=OB^2=OG^2+BG^2=\dfrac{a^2}{6}+\dfrac{a^2}{3}=\dfrac{a^2}{2}$.
Vậy giá trị nhỏ nhất là $P=3\cdot\dfrac{a^2}{6}+3\cdot\dfrac{a^2}{2}=2a^2$ khi I trùng với O.

Chọn đáp án | a sai | b đúng | c đúng | d đúng | .... □

PHẦN III. *Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.*

CÂU 22. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng 4. Giá trị tích vô hướng $\overrightarrow{AB}\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CA}\right)$ bằng

Lời giải.

Đáp án: 24

$$\overrightarrow{AB}\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CA}\right)=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}^2+|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|\cdot\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$$
$$=AB^2+AB\cdot AC\cdot\cos\left(\widehat{BAC}\right)=4^2+4\cdot4\cdot\cos60^\circ=4^2+\frac{4^2}{2}=\frac{3\cdot4^2}{2}=24.$$

CÂU 23. Trong không gian, cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ có cùng độ dài bằng 6. Biết độ dài của vectơ $\vec{a}+2\vec{b}$ bằng $6\sqrt{3}$. Biết số đo góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là x độ. Giá trị của x là bao nhiêu?

Lời giải.

Đáp án: 120

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{1}{4}\left[\left(\vec{a}+2\vec{b}\right)^2-\vec{a}^2-4\vec{b}^2\right]=\frac{1}{4}\left[\left|\vec{a}+2\vec{b}\right|^2-|\vec{a}|^2-4|\vec{b}|^2\right]=\frac{1}{4}\left[\left(6\sqrt{3}\right)^2-6^2-4\cdot6^2\right]=-18.$$

Lại có $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)\Leftrightarrow\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\dfrac{-18}{6\cdot6}=\dfrac{-1}{2}\Leftrightarrow\left(\vec{a},\vec{b}\right)=120^\circ$.

Khi đó góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là 120°.

CÂU 24. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng 2. Tính $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A'C'}$.

Lời giải.

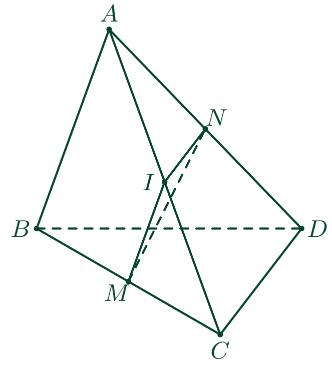
Đáp án: 4

Ta có: $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A'C'}\right)=\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=45^\circ$.
Khi đó: $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A'C'}=AB\cdot A'C'\cdot\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A'C'}\right)=2\cdot2\sqrt{2}\cdot\cos45^\circ=4$.

CÂU 25. Cho tứ diện $ABCD$, gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC và AD, biết $AB=a$, $CD=a$, $MN=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Tìm số đo (đơn vị độ) góc giữa hai đường thẳng AB và CD.

Lời giải.

Đáp án: 60



Gọi I là trung điểm của AC.

Ta có $\begin{cases} IM \parallel AB \\ IN \parallel CD \end{cases} \Rightarrow \widehat{(AB, CD)} = \widehat{(IM, IN)}$.

Đặt $\widehat{MIN} = \alpha$. Xét tam giác IMN, có: $IM = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{a}{2}$, $IN = \dfrac{CD}{2} = \dfrac{a}{2}$, $MN = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Theo định lý cosin, có $\cos\alpha = \dfrac{IM^2 + IN^2 - MN^2}{2 \cdot IM \cdot IN} = -\dfrac{1}{2} < 0$.

$\Rightarrow \widehat{MIN} = 120^\circ \Rightarrow \widehat{(AB, CD)} = 60^\circ$.

CÂU 26. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{A'B}$ và $\overrightarrow{AC'}$ bằng

Lời giải.

Đáp án: 90

$\overrightarrow{A'B} = \overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AA'}$.

$\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}$.

$\Rightarrow \overrightarrow{A'B} \cdot \overrightarrow{AC'} = \left(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AA'}\right) \cdot \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}\right) = \overrightarrow{AB}^2 - \overrightarrow{AA'}^2 = 0$.

$\Rightarrow$ Góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{A'B}$ và $\overrightarrow{AC'}$ bằng 90°.

CÂU 27. Cho hình chóp $S.ABC$ có SA, SB, SC đôi một vuông góc nhau và $SA = SB = SC = a$. Gọi M là trung điểm của AB. Góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{SM}$ và $\overrightarrow{BC}$ bằng

Lời giải.

Đáp án: 120

Ta có $\cos\left(\overrightarrow{SM}, \overrightarrow{BC}\right) = \dfrac{\overrightarrow{SM} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{SM}| \cdot |\overrightarrow{BC}|} = \dfrac{\overrightarrow{SM} \cdot \overrightarrow{BC}}{SM \cdot BC}$.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{SM} \cdot \overrightarrow{BC} &= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB}\right) \cdot \left(\overrightarrow{SC} - \overrightarrow{SB}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SC} - \overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SB} \cdot \overrightarrow{SC} - \overrightarrow{SB} \cdot \overrightarrow{SB}\right) \\
&= -\frac{1}{2}\overrightarrow{SB} \cdot \overrightarrow{SB} = -\frac{1}{2}SB^2 = -\frac{a^2}{2}.
\end{aligned}$$

Tam giác SAB và SBC vuông cân tại S nên $AB = BC = a\sqrt{2}$.

$\Rightarrow SM = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Do đó $\cos\left(\overrightarrow{SM}, \overrightarrow{BC}\right) = \dfrac{-\dfrac{a^2}{2}}{\dfrac{a\sqrt{2}}{2} \cdot a\sqrt{2}} = -\dfrac{1}{2}$. Suy ra $\left(\overrightarrow{SM}, \overrightarrow{BC}\right) = 120^\circ$.

MỤC LỤC