

BÀI 2. TÍCH PHẦN

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa

$$\int_a^b f(x) dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a).$$

⚡ NHẬN XÉT. Tích phân của hàm số f từ a đến b được kí hiệu là $\int_a^b f(x) dx$ hay $\int_a^b f(t) dt$.

Tích phân đó chỉ phụ thuộc vào f và các cận a, b mà không phụ thuộc vào cách ghi biến số.

2. Tính chất của tích phân

Cho hàm số $f(x)$ và $g(x)$ liên tục trên K , a, b, c là ba số thuộc K . Khi đó ta có:

a) $\int_a^a f(x) dx = 0.$

b) $\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx.$

c) $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$

d) $\int_a^b [f(x) \pm g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx.$

e) $\int_a^b k \cdot f(x) dx = k \cdot \int_a^b f(x) dx.$

f) Nếu $f(x) \geq 0, \forall x \in [a; b]$ thì $\int_a^b f(x) dx \geq 0, \forall x \in [a; b].$

g) $\forall x \in [a; b] : f(x) \leq g(x) \Rightarrow \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx.$

h) $\forall x \in [a; b],$ nếu $M \geq f(x) \geq N \Rightarrow M(b-a) \geq \int_a^b f(x) dx \geq N(b-a).$

B. CÁC DẠNG TOÁN CƠ BẢN VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Dạng 1. Tích phân cơ bản và tính chất tích phân

Dùng định nghĩa tích phân và các tính chất để giải bài toán.

BÀI 1. a) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0; 10]$ thỏa mãn $\int_0^{10} f(x) dx = 7$ và

$$\int_2^6 f(x) dx = 3. \text{ Tính } \int_0^2 f(x) dx + \int_6^{10} f(x) dx.$$

QUICK NOTE

b) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} thỏa mãn $\int_a^b f(x) dx = 2$ và $\int_c^b f(x) dx = 3$ với

$$a < b < c. \text{ Tính } \int_a^c f(x) dx$$

c) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} thỏa mãn $\int_1^3 f(x) dx = 2017$ và $\int_4^3 f(x) dx = 2018$.

$$\text{Tính } \int_1^4 f(x) dx.$$

BÀI 2.

a) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} thỏa mãn $\int_2^5 f(x) dx = 3$ và $\int_5^7 f(x) dx = 9$.

$$\text{Tính } \int_2^7 f(x) dx.$$

b) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} thỏa mãn $\int_0^6 f(x) dx = 4$ và $\int_2^6 f(t) dt = -3$.

$$\text{Tính } \int_0^2 [f(v) - 3] dv.$$

BÀI 3.

a) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên đoạn $[1; 2]$, $f'(1) = 1$ và $f(2) = 2$. Tính $\int_1^2 f'(x) dx$.

b) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên đoạn $[1; 4]$, $f(1) = 1$ và $\int_1^4 f'(x) dx = 2$. Tính $f(4)$.

c) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên đoạn $[1; 3]$, $f(3) = 5$ và $\int_1^3 f'(x) dx = 6$. Tính $f(1)$.

BÀI 4. Tính các tích phân sau

a) Tính $\int_{-2}^3 (4x^3 - 3x^2 + 10) dx$

b) Tính $\int_1^4 (x^2 + 3\sqrt{x}) dx$

c) Tính $\int_0^2 x(x+1)^2 dx$

d) Tính $\int_2^4 \left(x + \frac{1}{x}\right) dx$

e) Tính $\int_1^3 \left(\frac{3}{x} - \frac{1}{x^2}\right) dx$

f) Tính $\int_0^1 e^{3x} dx$

QUICK NOTE

g) Tính $\int_0^{2018} 7^x dx$

h) Tính $\int_0^6 \frac{dx}{x+6}$

i) Tính $\int_1^3 \frac{dx}{1-3x}$

j) Tính $\int_1^2 \frac{dx}{(4x-1)^2}$

k) Tính $\int_1^4 \frac{4}{(1-2x)^2} dx$

BÀI 5. Tính các tích phân sau

a) $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx.$

b) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\cos^2 x}.$

BÀI 6. Tính các tích phân

a) $\int_{-2}^{-5} \frac{dx}{\sqrt{1-3x}}.$

b) $\int_2^7 \frac{4 dx}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}.$

BÀI 7. Tìm số thực m thỏa mãn

a) $\int_{-1}^m e^{x+1} dx = e^2 - 1.$

b) $\int_0^m (2x+5) dx = 6.$

BÀI 8. a) Biết $\int_1^2 \sqrt{2x-1} dx = \frac{\sqrt{a}-1}{b}$ với a, b là số nguyên dương. Tính $a-b^3$.

b) Biết $\int_1^2 \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}+x\sqrt{x+1}} = \sqrt{a}-\sqrt{b}-c$ với a, b, c là các số nguyên dương. Tính $P = a+b+c$.

Dạng 2. Tích phân hàm số phân thức hữu tỉ

Chú ý nguyên hàm của một số hàm phân thức hữu tỉ thường gặp.

a) $\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \ln |ax+b| + C, \text{ với } a \neq 0.$

QUICK NOTE

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad & \int \frac{1}{(ax+b)^n} dx = \frac{1}{a} \cdot \frac{-1}{(n-1)(ax+b)^{n-1}} + C, \text{ với } a \neq 0, n \in \mathbb{N}, n \geq 2. \\ \text{c)} \quad & \int \frac{1}{(x-a)(x-b)} dx = \frac{1}{a-b} \ln \left| \frac{x-a}{x-b} \right| + C, \text{ với } a \neq b. \end{aligned}$$

BÀI 9. Tính các tích phân sau

a) Tính $\int_0^1 \frac{x}{(x+1)^2} dx$.

b) $\int_0^1 \frac{x}{(x+2)^3} dx$.

c) Biết $\int_{-1}^0 \frac{3x^2+5x-1}{x-2} dx = a \ln \frac{2}{3} + b$ với $a, b \in \mathbb{Q}$. Tính giá trị của $S = a + 4b$.

d) Tính $\int_0^1 \frac{x-3}{2x+1} dx$.

BÀI 10. Tính các tích phân sau

a) Biết $\int_1^2 \frac{dx}{3x-1} = \frac{1}{a} \ln b$ với $b > 0$. Tính $S = a^2 + b$.

b) Biết $\int_0^2 \frac{x^2}{x+1} dx = a + \ln b$ với $a, b \in \mathbb{Q}$. Tính $S = 2a + b + 2^b$.

BÀI 11. Tính các tích phân sau

a) Biết $\int_0^1 \frac{2x+3}{2-x} dx = a \ln 2 + b$ với $a, b \in \mathbb{Q}$. Tính $P = a + 2b + 2^a - 2^b$.

b) Biết $\int_0^1 \frac{2x-1}{x+1} dx = a + b \ln 2$ với $a, b \in \mathbb{Q}$. Tính $P = ab - a + b$.

BÀI 12. Tính các tích phân sau

a) Tính $\int_0^1 \frac{3x-1}{x^2+6x+9} dx = 3 \ln \frac{a}{b} - \frac{5}{6}$ với $a, b \in \mathbb{Z}^+$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính giá trị của biểu thức $P = 2^a + 2^b - ab$.

b) Biết $\int_0^1 \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} \right) dx = a \ln 2 + b \ln 3$ với $a, b \in \mathbb{Z}$. Tính $S = a + b - ab^2$.

Dạng 3. Tích phân hàm số chứa dấu giá trị tuyệt đối $\int_a^b |f(x)| dx$

Phương pháp giải
Sử dụng tính chất của tích phân

$$\int_a^b |f(x)| dx = \int_a^c |f(x)| dx + \int_c^b |f(x)| dx$$

đến đây ta có 2 cách để phá dấu giá trị tuyệt đối

- Cách 1. Xét dấu biểu thức $f(x)$ để khử dấu giá trị tuyệt đối.
- Cách 2. Giải phương trình $f(x) = 0$ trên $(a; b)$. Giả sử trên khoảng $(a; b)$ phương trình có nghiệm $a < x_1 < x_2 < \dots < x_n < b$. Do hàm số $f(x)$ không đổi dấu trên mỗi khoảng $(x_i; x_{i+1})$ nên ta có

$$\begin{aligned} \int_a^b |f(x)| dx &= \int_a^{x_1} |f(x)| dx + \int_{x_1}^{x_2} |f(x)| dx + \dots + \int_{x_n}^b |f(x)| dx \\ &= \left| \int_a^{x_1} f(x) dx \right| + \left| \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx \right| + \dots + \left| \int_{x_n}^b f(x) dx \right| \end{aligned}$$

BÀI 13. Tính tích phân $I = \int_0^2 |1 - x| dx$.

BÀI 14. Tính tích phân $I = \int_0^2 |x^2 - x| dx$.

Dạng 4. Phương pháp đổi biến số

1. Phương pháp đổi biến số dạng 1

Định lý

Nếu

- Hàm $x = u(t)$ có đạo hàm liên tục trên $[\alpha; \beta]$.
- Hàm hợp $f(u(t))$ được xác định trên $[\alpha; \beta]$.
- $u(\alpha) = a, u(\beta) = b$.

Khi đó $\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(u(t))u'(t) dt$.

Phương pháp chung

- ☑ **Bước 1:** Biến đổi để chọn phép đặt $x = u(t) \Rightarrow dx = u'(t)dt$.
- ☑ **Bước 2:** Đổi cận $\begin{cases} x = b \Rightarrow t = \beta \\ x = a \Rightarrow t = \alpha \end{cases}$.
- ☑ **Bước 3:** Đưa về dạng $I = \int_{\alpha}^{\beta} g(t) dt$ đơn giản hơn và dễ tính toán.

Vậy $I = \int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(u[t])u'(t) dt = \int_{\alpha}^{\beta} g(t) dt = G(t)|_{\alpha}^{\beta} = G(\beta) - G(\alpha)$.

2. Phương pháp đổi biến số dạng 2

Định lý

Nếu hàm số $u = u(x)$ đơn điệu và có đạo hàm liên tục trên đoạn $[a; b]$ sao cho $f(x) dx =$

$g(u(x))u'(x) dx = g(u) du$ thì $I = \int_{u(a)}^{u(b)} g(u) du$.

QUICK NOTE

QUICK NOTE

Phương pháp chung

$$\int_a^b [f(x)] u'(x) dx = F[u(x)] \Big|_a^b = F[u(b)] - F[u(a)].$$

🔵 **Bước 1:** Biến đổi để chọn phép đặt $t = u(x) \Rightarrow dt = u'(x)dx$.

🔵 **Bước 2:** Đổi cận $\begin{cases} x = b \Rightarrow t = u(b) \\ x = a \Rightarrow t = u(a) \end{cases}$.

🔵 **Bước 3:** Đưa về dạng $I = \int_{u(a)}^{u(b)} g(t) dt$ đơn giản hơn và dễ tính toán.

$$\text{Vậy } I = \int_a^b f(x) dx = \int_a^b g[u(x)] \cdot u'(x) dx = \int_{u(b)}^{u(a)} g(t) dt.$$

BÀI 15. Tính các tích phân sau:

a) $I = \int_1^2 x(1-x)^{50} dx$

b) $I = \int_0^1 x(1+x^2)^4 dx$

c) $I = \int_0^1 \frac{x^5}{x^2+1} dx$

d) $I = \int_0^1 \frac{x^3}{(1+x^2)^3} dx$

e) $I = \int_{-1}^1 \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}} dx$

f) $I = \int_0^1 x\sqrt{1-x} dx$

g) $I = \int_0^1 x^3\sqrt{1+x^2} dx$

h) $I = \int_{\sqrt{7}}^4 \frac{1}{x\sqrt{x^2+9}} dx$

i) $I = \int_1^e \frac{1+\ln^2 x}{x} dx$

j) Tính $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x dx$.

k) $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^5 x dx$.

QUICK NOTE

$$l) I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos x}{6 - 5 \sin x + \sin^2 x} dx.$$

$$m) \text{ Tính } I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin x \cos^4 x dx.$$

$$n) I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} dx.$$

$$o) I = \int_0^{\ln 2} e^x \sqrt{5 - e^x} dx$$

$$p) I = \int_1^{e\sqrt{e}} \frac{3 - 2 \ln x}{x\sqrt{1 + 2 \ln x}} dx$$

BÀI 16. Tính các tích phân

$$a) I = \int_0^1 \sqrt{1 - x^2} dx.$$

$$b) I = \int_{-\frac{1}{2}}^1 \sqrt{1 - x^2} dx.$$

$$c) I = \int_0^2 x^2 \sqrt{4 - x^2} dx$$

$$d) I = \int_0^1 \frac{1}{1 + x^2} dx$$

$$e) I = \int_2^4 \frac{1}{x^2 - 2x + 4} dx$$

$$f) I = \int_0^3 \frac{x + 1}{9 + x^2} dx$$

Dạng 5. Phương pháp tích phân từng phần

1. Định lý Nếu $u(x)$ và $v(x)$ là các hàm số có đạo hàm liên tục trên $[a; b]$ thì

$$\int_a^b u(x)v'(x) dx = (u(x)v(x)) \Big|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x) dx,$$

hay

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du.$$

2. Phương pháp chung

☑ **Nhận dạng** Tích hai hàm khác loại nhân nhau, chẳng hạn: mũ nhân lượng giác, ...

QUICK NOTE

🔗 Đặt: $\begin{cases} u = \dots\dots\dots \xrightarrow{VP} du = \dots\dots\dots dx \\ dv = \dots\dots\dots \xrightarrow{NH} v = \dots\dots\dots \end{cases}$

🔗 Suy ra $I = \int_a^b u dv = uv|_a^b - \int_a^b v du$.

Cách đặt u và dv trong phương pháp tích phân từng phần

Đặt u theo thứ tự ưu tiên Log - đa - lũy-mũ - lượng	$\int_a^b P(x)e^x dx$	$\int_a^b P(x) \ln(x) dx$	$\int_a^b P(x) \cos x dx$	$\int_a^b e^x \cos x dx$
u	$P(x)$	$\ln x$	$P(x)$	e^x
dv	$e^x dx$	$P(x) dx$	$\cos x dx$	$\cos x dx$

Chú ý: Thứ tự ưu tiên chọn u : *loga - đa -lũy- lượng - mũ* và $dv =$ *phần còn lại*. Nghĩa là nếu có $\ln x$ hay $\log_a x$ thì chọn $u = \ln x$ hay $u = \log_a x = \frac{1}{\ln a} \cdot \ln x$ và $dv =$ còn lại. Nếu không có \ln , \log thì chọn $u =$ đa thức và $dv =$ còn lại. Nếu không có \log , đa thức, ta chọn $u =$ lượng giác, ...

- Lưu ý rằng bậc của đa thức và bậc của \ln tương ứng với số lần lấy nguyên hàm.
- Dạng *mũ nhân lượng giác* là dạng nguyên hàm từng phần luân hồi.

1. Ví dụ - Bài tập áp dụng

VÍ DỤ 1. Tính $I = \int_0^1 (x-3)e^x dx$.

VÍ DỤ 2. Tính $I = \int_0^1 (x^2 + 2x)e^x dx$.

VÍ DỤ 3. Tính $I = \int_0^\pi e^x \cos x dx$.

Bài tập áp dụng

BÀI 17. Tính các tích phân sau:

a) $I = \int_0^1 xe^x dx$.

b) $I = \int_0^2 (2x-1)e^x dx$.

c) $I = \int_0^1 (2x+1)e^x dx$.

d) $I = \int_0^1 (4x-1)e^{2x} dx$.

e) $I = \int_0^1 (x-1)e^{2x} dx$.

f) $I = \int_1^3 xe^{-x} dx$.

g) $I = \int_0^2 (1 - 2x)e^{-x} dx.$

h) $I = \int_1^3 x^2 e^{-x} dx.$

i) $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 5e^x \sin 2x dx.$

j) $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x} \cos x dx.$

k) $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{3x} \sin 4x dx.$

l) $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos 2x dx.$

m) $I = \int_0^1 \frac{3x + 1}{e^{2x}} dx.$

2. Ví dụ - Bài tập áp dụng

VÍ DỤ 4. Tính $I = \int_1^3 \ln x dx.$

VÍ DỤ 5. Tính $I = \int_1^e x^2 \ln x dx.$

VÍ DỤ 6. Tính $I = \int_1^e x \ln^2 x dx.$

VÍ DỤ 7. Tính $I = \int_0^1 (2x - 1) \ln(x + 1) dx.$

VÍ DỤ 8. Tính $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\ln(\sin x + 2 \cos x)}{\cos^2 x} dx.$

Bài tập áp dụng

BÀI 18. Tính các tích phân sau:

a) $I = \int_1^2 x \ln x dx.$

b) $I = \int_1^2 (2x - 1) \ln x dx.$

c) $I = \int_1^e (1 + x) \ln x dx.$

QUICK NOTE

$$\text{d) } I = \int_1^e (x+2) \ln x \, dx.$$

$$\text{e) } I = \int_1^e x(\ln x + 1) \, dx.$$

$$\text{f) } I = \int_1^2 \frac{x^3 - 2 \ln x}{x^2} \, dx.$$

$$\text{g) } I = \int_1^2 \frac{\ln(xe^x)}{(x+2)^2} \, dx.$$

$$\text{h) } I = \int_1^e 2x(1 - \ln x) \, dx.$$

$$\text{i) } I = \int_e^{e^2} (1 + \ln x)x \, dx.$$

$$\text{j) } I = \int_1^3 \frac{1 + \ln(x+1)}{x^2} \, dx.$$

$$\text{k) } I = \int_2^3 2x \ln(x-1) \, dx.$$

$$\text{l) } I = \int_{-1}^1 (4x-5) \ln(2x+3) \, dx.$$

$$\text{m) } I = \int_0^1 x \ln(2+x^2) \, dx.$$

$$\text{n) } I = \int_0^1 (x-5) \ln(2x+1) \, dx.$$

$$\text{o) } I = \int_0^{\ln 2} e^x \ln(e^x + 1) \, dx.$$

$$\text{p) } I = \int_0^1 \frac{\ln(x+1)}{(x+2)^2} \, dx.$$

$$\text{q) } I = \int_2^3 \ln[2 + x(x^2 - 3)] \, dx.$$

$$\text{r) } I = \int_0^1 \frac{\ln(4x^2 + 8x + 3)}{(x+1)^3} \, dx.$$

$$\text{s) } I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\log(3 \sin x + \cos x)}{\sin^2 x} \, dx.$$

3. Ví dụ - Bài tập áp dụng

VÍ DỤ 9. Tính $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x - 1) \cos 2x \, dx$.

VÍ DỤ 10. Tính $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} (1 + xe^{-2x} \cos x) \, dx$.

VÍ DỤ 11. Tính $I = \int_1^2 (2x^3 + \ln x) x \, dx$.

VÍ DỤ 12. Tính $I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\log_2 (3 \sin x + \cos x)}{\sin^2 x} \, dx$.

Bài tập áp dụng

BÀI 19. Tính các tích phân sau:

a) $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x \, dx$.

b) $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 2x \cos x \, dx$.

c) $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (x + 1) \sin 2x \, dx$.

d) $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x - 2) \cos x \, dx$.

e) $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x + 1) \cos x \, dx$.

f) $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x - 1) \sin x \, dx$.

g) $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x + 1) \sin x \, dx$.

h) $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos 2x \, dx$.

BÀI 20. Tính các tích phân sau:

a) $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (3 - 2x) \sin 2x \, dx$.

b) $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3x \cos x \, dx$.

QUICK NOTE

QUICK NOTE

$$c) I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin^2 x \, dx.$$

$$d) I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos^2 x \, dx.$$

$$e) I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} (x + 2 \cos^2 x) x \, dx.$$

$$f) I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\ln(\cos x)}{\cos^2 x} \, dx.$$

$$g) I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x^2 + 1) \sin x \, dx.$$

$$h) I = \int_0^{\pi} x (x - \sin x) \, dx.$$

$$i) I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x + \cos 3x) x \, dx.$$

$$j) I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x (1 + \sin 2x) \, dx.$$

$$k) I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x (x - 2 \sin x) \, dx.$$

$$l) I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x - \sin x)^2 \, dx.$$

$$m) I = \int_0^{\frac{\pi^2}{4}} \cos \sqrt{x} \, dx.$$

$$n) I = \int_0^{\pi^2} \sin \sqrt{x} \, dx.$$

$$o) I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x \ln(1 + \cos x) \, dx.$$

$$p) I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x \ln(1 + \cos^2 x) \, dx.$$

BÀI 21. Tính các tích phân sau:

$$a) I = \int_0^1 (1 - x) (2 + e^{2x}) \, dx.$$

QUICK NOTE

$$\text{b) } I = \int_0^{\pi} x(x - \sin x) \, dx.$$

$$\text{c) } I = \int_1^2 \frac{x^3 - 2 \ln x}{x^2} \, dx.$$

$$\text{d) } I = \int_1^2 \frac{1 + x^2 e^x}{x} \, dx.$$

$$\text{e) } I = \int_0^1 \frac{e^x + x}{e^x} \, dx.$$

$$\text{f) } I = \int_1^3 \frac{1 + \ln(x+1)}{x^2} \, dx.$$

$$\text{g) } I = \int_0^1 x \left(e^x + \frac{2}{x+1} \right) \, dx.$$

$$\text{h) } I = \int_0^1 (e^x + \sqrt{3x^2 + 1}) x \, dx.$$

$$\text{i) } I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x + \cos^2 x) \sin x \, dx.$$

$$\text{j) } I = \int_1^e \left(x + \frac{1}{x} \right) \ln x \, dx.$$

$$\text{k) } I = \int_0^1 x^3 e^{x^2} \, dx.$$

$$\text{l) } I = \int_0^1 x^5 e^{x^3} \, dx.$$

$$\text{m) } I = \int_0^1 (8x^3 - 2x) e^{x^2} \, dx.$$

$$\text{n) } I = \int_0^1 \sqrt{x} e^{\sqrt{x}} \, dx.$$

$$\text{o) } I = \int_0^{\frac{\pi^3}{27}} \sin \sqrt[3]{x} \, dx.$$

$$\text{p) } I = \int_{1 - \frac{\pi^2}{4}}^1 \cos \sqrt{1-x} \, dx.$$

$$\text{q) } I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x \ln(\sin x)}{\sin^2 x} \, dx.$$

QUICK NOTE

$$r) I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\ln(\tan x)}{\cos^2 x} dx.$$

C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

CÂU 1. Biết $\int_0^1 f(x) dx = -2$ và $\int_0^1 g(x) dx = 3$, khi đó $\int_0^1 [f(x) - g(x)] dx$ bằng

- (A) -5. (B) 5. (C) -1. (D) 1.

CÂU 2. Biết $\int_0^1 f(x) dx = 3$ và $\int_0^1 g(x) dx = -4$, khi đó $\int_0^1 [f(x) + g(x)] dx$ bằng

- (A) -7. (B) 7. (C) -1. (D) 1.

CÂU 3. Cho $f(x)$ và $g(x)$ là các hàm số liên tục trên đoạn $[a; b]$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- (A) $\int_a^b |f(x) + g(x)| dx = \int_a^b |f(x)| dx + \int_a^b |g(x)| dx.$
 (B) $\int_a^b (f(x) \cdot g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx \cdot \int_a^b g(x) dx.$
 (C) $\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx.$
 (D) $\int_a^b |f(x) + g(x)| dx = \left| \int_a^b [f(x) + g(x)] dx \right|.$

CÂU 4. Cho $f(x)$ và $g(x)$ là các hàm số liên tục trên đoạn $[a; b]$ và h, k là các hằng số. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- (A) $\int_a^b [hf(x) - kg(x)] dx = h \int_a^b f(x) dx - k \int_a^b g(x) dx.$
 (B) $\int_a^b [f(x) - g(x)] dx = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx.$
 (C) $\int_a^b [h + kf(x)] dx = h + k \int_a^b f(x) dx.$
 (D) $\int_a^b [f(x) \cdot g(x)] dx = f(x) \int_a^b g(x) dx.$

CÂU 5. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên đoạn $[1; 2]$, $f(1) = 1$ và $f(2) = 2$.

Tính $I = \int_1^2 f'(x) dx$

- (A) $I = 1.$ (B) $I = -1.$ (C) $I = 3.$ (D) $I = \frac{7}{2}.$

CÂU 6. Tích phân $\int_0^2 \frac{dx}{x+3}$ bằng

- (A) $\frac{16}{225}.$ (B) $\log \frac{5}{3}.$ (C) $\ln \frac{5}{3}.$ (D) $\frac{2}{15}.$

CÂU 7. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0; 10]$ thỏa mãn $\int_0^{10} f(x) dx = 7$, $\int_2^6 f(x) dx = 3$.

Tính $\int_0^2 f(x) dx + \int_6^{10} f(x) dx.$

QUICK NOTE

- (A) 4. (B) -4. (C) 5. (D) 7.

CÂU 8. Cho $\int_0^1 f(x)dx = 2$ và $\int_0^1 g(x)dx = 5$, khi đó $\int_0^1 [f(x) - 2g(x)] dx$ bằng

- (A) -3. (B) 12. (C) -8. (D) 1.

CÂU 9. Cho $\int_{-1}^2 f(x)dx = 2$ và $\int_{-1}^2 g(x)dx = -1$. Tính $I = \int_{-1}^2 [x + 2f(x) + 3g(x)] dx$.

- (A) $I = \frac{11}{2}$. (B) $I = \frac{7}{2}$. (C) $I = \frac{17}{2}$. (D) $I = \frac{5}{2}$.

CÂU 10. Giả sử $\int_0^9 f(x)dx = 37$ và $\int_9^0 g(x)dx = 16$. Khi đó $I = \int_0^9 [2f(x) + 3g(x)] dx$ bằng

- (A) $I = 26$. (B) $I = 58$. (C) $I = 143$. (D) $I = 122$.

CÂU 11. $\int_1^2 e^{3x-1} dx$ bằng

- (A) $\frac{1}{3}(e^5 - e^2)$. (B) $\frac{1}{3}e^5 - e^2$. (C) $e^5 - e^2$. (D) $\frac{1}{3}(e^5 + e^2)$.

CÂU 12. Cho $\int_1^3 f(x)dx = -5$, $\int_1^3 [f(x) - 2g(x)] dx = 9$. Tính $I = \int_1^3 g(x)dx$.

- (A) $I = 14$. (B) $I = -14$. (C) $I = 7$. (D) $I = -7$.

CÂU 13. Nếu $\int_1^2 f(x)dx = 2$ thì $I = \int_1^2 [3f(x) - 2] dx$ bằng bao nhiêu?

- (A) $I = 2$. (B) $I = 3$. (C) $I = 4$. (D) $I = 1$.

CÂU 14. Cho $\int_0^1 \frac{x dx}{(x+2)^2} = a + b \cdot \ln 2 + c \cdot \ln 3$ với a, b, c là các số hữu tỷ.

Giá trị của $3a + b + c$ bằng

- (A) -2. (B) -1. (C) 2. (D) 1.

CÂU 15. Biết $I = \int_2^3 \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - x + 1} dx = a \cdot \ln 7 + b \cdot \ln 3 + c$ với $a, b, c \in \mathbb{Z}$.

Tính $T = a + 2b^2 + 3c^3$.

- (A) $T = 6$. (B) $T = 4$. (C) $T = 5$. (D) $T = 3$.

CÂU 16. Biết $\int_0^2 \frac{x^3 + 3x^2 + 2x + 1}{x^2 + 3x + 2} dx = a + \ln \frac{b}{c}$ với b, c là các số nguyên dương; $\frac{b}{c}$ là

phân số tối giản. Tính $T = a + b + c$.

- (A) $T = 7$. (B) $T = 9$. (C) $T = 5$. (D) $T = 11$.

CÂU 17. Biết $\int_0^1 \frac{3x-1}{x^2+6x+9} dx = 3 \ln \frac{a}{b} - \frac{5}{6}$, trong đó a, b nguyên dương và $\frac{a}{b}$ là phân số

tối giản. Hãy tính $a \cdot b$.

- (A) $a \cdot b = -5$. (B) $a \cdot b = 12$. (C) $a \cdot b = \frac{5}{4}$. (D) $a \cdot b = 6$.

CÂU 18. Biết $I = \int_3^4 \frac{dx}{x^2+x} = a \ln 2 + b \ln 3 + c \ln 5$, với a, b, c là các số nguyên. Tính $S =$

$a + b + c$.

- (A) $S = 6$. (B) $S = 2$. (C) $S = -2$. (D) $S = 0$.

CÂU 19. Cho $\int_1^2 f(x^2+1)x dx = 2$. Tính $I = \int_2^5 f(x) dx$.

QUICK NOTE

(A) $I = 2$.

(B) $I = 1$.

(C) $I = -1$.

(D) $I = 4$.

CÂU 20. Cho $\int_0^6 f(x) dx = 12$. Tính $I = \int_0^2 f(3x) dx$.

(A) $I = 6$.

(B) $I = 36$.

(C) $I = 2$.

(D) $I = 4$.

CÂU 21. Tính tích phân $I = \int_0^\pi \cos^3 x \cdot \sin x dx$.

(A) $I = -\frac{1}{4}\pi^4$.

(B) $I = -\pi^4$.

(C) $I = 0$.

(D) $I = -\frac{1}{4}$.

CÂU 22. Cho $\int_0^{\ln 2} \frac{dx}{2e^x + 3} = a + \frac{b \cdot \ln 7 + c \cdot \ln 10}{3}$ với $a, b, c \in \mathbb{Z}$.

Tính giá trị $K = 2a + 3b + 4c$.

(A) $K = 3$.

(B) $K = 7$.

(C) $K = 11$.

(D) $K = -1$.

CÂU 23. Tính tích phân $I = \int_1^2 2x\sqrt{x^2 - 1} dx$ bằng cách đặt $u = x^2 - 1$, mệnh đề nào dưới đây đúng?

(A) $I = 2 \int_0^3 \sqrt{u} du$.

(B) $I = \int_1^2 \sqrt{u} du$.

(C) $I = \int_0^3 \sqrt{u} du$.

(D) $I = \frac{1}{2} \int_1^2 \sqrt{u} du$.

CÂU 24. Biết rằng $\int_1^m x^2 \ln x dx = \frac{1}{9}$, với m là số thực. Khẳng định nào dưới đây đúng?

(A) $m \in (0; 1)$.

(B) $m \in (1; 2)$.

(C) $m \in (2; 3)$.

(D) $m \in (-1; 0)$.

CÂU 25. Tính tích phân $I = \int_1^e x \ln x dx$

(A) $I = \frac{1}{2}$.

(B) $I = \frac{e^2 - 2}{2}$.

(C) $I = \frac{e^2 + 1}{4}$.

(D) $I = \frac{e^2 - 1}{4}$.

CÂU 26. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\int_0^1 (x+1)f'(x) dx = 10$ và $2f(1) - f(0) = 2$. Tính

$$\int_0^1 f(x) dx.$$

(A) $I = -12$.

(B) $I = 8$.

(C) $m = 1$.

(D) $I = -8$.

CÂU 27. Cho hàm số $f(x)$. Biết $f(0) = 4$ và $f'(x) = 2\cos^2 x + 1, \forall x \in \mathbb{R}$, khi đó $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx$ bằng

(A) $\frac{\pi^2 + 4}{16}$.

(B) $\frac{\pi^2 + 14\pi}{16}$.

(C) $\frac{\pi^2 + 16\pi + 4}{16}$.

(D) $\frac{\pi^2 + 16\pi + 16}{16}$.

CÂU 28. Biết $I = \int_1^2 \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x} + x\sqrt{x+1}} = \sqrt{a} - \sqrt{b} - c$ với a, b, c là các số nguyên dương. Tính $P = a + b + c$.

(A) $P = 24$.

(B) $P = 12$.

(C) $P = 18$.

(D) $P = 46$.

CÂU 29. Cho $\int_0^1 \frac{1}{e^x + 1} dx = a + b \ln \frac{1+e}{2}$, với a, b là các số hữu tỉ. Tính $S = a^3 + b^3$.

(A) $S = 2$.

(B) $S = -2$.

(C) $S = 0$.

(D) $S = 1$.

CÂU 30. Cho $\int_{16}^{55} \frac{dx}{x\sqrt{x+9}} = a \ln 2 + b \ln 5 + c \ln 11$ với a, b, c là các số hữu tỉ. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

(A) $a - b = -c$.

(B) $a + b = c$.

(C) $a + b = 3c$.

(D) $a - b = -3c$.

CÂU 31. Biết $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos^2 x + \sin x \cos x + 1}{\cos^2 x + \sin x \cos x} dx = a \frac{\pi}{12} + b \ln 2 + c \ln(1 + \sqrt{3})$, với a, b, c là các

số hữu tỉ. Giá trị của abc bằng

- (A) -1 . (B) 1 . (C) -2 . (D) 2 .

CÂU 32. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} và thỏa mãn $f(x) + f(-x) = \sqrt{2 + 2 \cos 2x}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Tính $I = \int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x) dx$.

- (A) $I = -6$. (B) $I = 0$. (C) $I = -2$. (D) $I = 6$.

CÂU 33. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên \mathbb{R} và thỏa mãn $f(0) = 5$ và $f(x) +$

$f(3-x) = x^2 - 3x + 2$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Tích phân $\int_0^3 x f'(x) dx$ bằng

- (A) $-\frac{39}{4}$. (B) $\frac{3}{4}$. (C) $\frac{3}{2}$. (D) $-\frac{15}{4}$.

CÂU 34. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên \mathbb{R} và thỏa mãn $f(0) = 1$ và $f(x) +$

$f(a-x) = x^2 - ax + 2$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu số nguyên dương a để tích phân $\int_0^a x f'(x) dx$

không vượt quá $\frac{16}{3}$?

- (A) 3 . (B) 5 . (C) 4 . (D) 6 .

CÂU 35. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên \mathbb{R} . Biết $f(4) = 1$ và $\int_0^1 x f(4x) dx = 1$.

Khi đó $\int_0^4 x^2 f'(x) dx$ bằng

- (A) $\frac{31}{2}$. (B) -16 . (C) 8 . (D) 14 .

QUICK NOTE