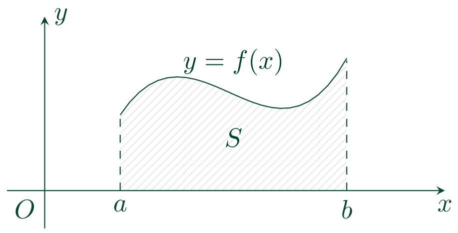
Bài 2. TÍCH PHÂN

A. LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1. Diện tích hình thang cong



Nếu hàm số $f(x)$ liên tục và không âm trên đoạn $[a;b]$ thì diện tích S của hình thang cong giới hạn bởi đồ thị $y=f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=a$, $x=b$ được tính bởi: $S=F(b)-F(a)$ trong đó $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên đoạn $[a;b]$.

2. Khái niệm tích phân

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Nếu $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a;b]$ thì hiệu số $F(b)-F(a)$ được gọi là tích phân từ a đến b của hàm số $f(x)$, kí hiệu $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

Chú ý:

- *Hiệu số $F(b)-F(a)$ còn được kí hiệu là $F(x)\Big|_a^b$.*

  Vậy $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a)$.

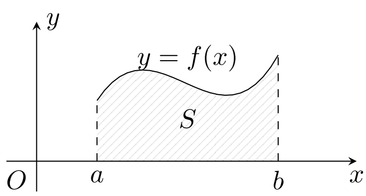
- *Ta gọi $\int\limits_a^b$ là dấu tích phân, a là cận dưới, b là cận trên, $f(x)\mathrm{d}x$ là biểu thức dưới dấu tích phân và $f(x)$ là hàm số dưới dấu tích phân.*

- *Quy ước: $\int\limits_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0$; $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\int\limits_b^a f(x)\mathrm{d}x$.*

- *Tích phân của hàm số f từ a đến b chỉ phụ thuộc vào f và các cận a, b mà không phụ thuộc vào biến x hay t, nghĩa là $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_a^b f(t)\mathrm{d}t$.*

- *Ý nghĩa hình học của tích phân.*

  Nếu hàm số $f(x)$ liên tục và không âm trên đoạn $[a;b]$ thì $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$ là diện tích S của hình thang cong giới hạn bởi đồ thị $y=f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=a$, $x=b$.



$$S=\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

NHẬN XÉT. Nếu hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ và $f'(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ thì

MATH TEACHER

ĐIỂM:

"It's not how much time you have, it's how you use it."

QUICK NOTE

QUICK NOTE

$$f(b)-f(a)=\int\limits_a^b f'(x)\mathrm{d}x.$$

- Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Khi đó $\dfrac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$ được gọi là giá trị trung bình của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a;b]$.
- Đạo hàm của quãng đường di chuyển của vật theo thời gian bằng tốc độ của chuyển động tại mọi thời điểm $v(t)=s'(t)$. Do đó, nếu biết tốc độ $v(t)$ tại mọi thời điểm $t\in[a;b]$ thì tính được quãng đường di chuyển trong khoảng thời gian từ a đến b theo công thức: $s=s(b)-s(a)=\int\limits_a^b v(t)\mathrm{d}t$.

3. Tính chất của tích phân

Cho hai hàm số $f(x)$, $g(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Khi đó:

a) $\int\limits_a^b kf(x)\mathrm{d}x=k\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$, với k là hằng số.

b) $\int\limits_a^b [f(x)\pm g(x)]\,\mathrm{d}x=\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\pm\int\limits_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

c) $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x+\int\limits_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$ với $c\in(a;b)$.

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1. Tính chất của tích phân

Phần I. Mỗi câu hỏi học sinh chọn một trong bốn phương án A, B, C, D.

CÂU 1. Nếu $\int\limits_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x=6$ thì $\int\limits_0^3\left[\frac{1}{3}f(x)+2\right]\mathrm{d}x$ bằng

(A) 8. (B) 5. (C) 9. (D) 6.

CÂU 2. Nếu $\int_1^4 f(x)\,\mathrm{d}x=3$ và $\int_1^4 g(x)\,\mathrm{d}x=-2$ thì $\int_1^4 (f(x)-g(x))\,\mathrm{d}x$ bằng

(A) -1. (B) -5. (C) 5. (D) 1.

CÂU 3. Nếu $\int\limits_1^4 f(x)\,\mathrm{d}x=5$ và $\int\limits_1^4 g(x)\,\mathrm{d}x=-4$ thì $\int\limits_1^4[f(x)-g(x)]\,\mathrm{d}x$ bằng

(A) -1. (B) -9. (C) 1. (D) 9.

CÂU 4. Biết $\int\limits_1^{2024} f(x)\,\mathrm{d}x=-3$ và $\int\limits_{2024}^1 g(x)\,\mathrm{d}x=2$. Khi đó $\int\limits_1^{2024}[f(x)-g(x)]\,\mathrm{d}x$ bằng

(A) 6. (B) -5. (C) 5. (D) -1.

CÂU 5. Nếu $\int\limits_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x=3$ thì $\int\limits_0^3 4f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

(A) 3. (B) 12. (C) 36. (D) 4.

CÂU 6. Cho $\int\limits_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2024}$. Tính $I=\int\limits_0^2 2024f(x)\,\mathrm{d}x$.

(A) $I=5$. (B) $I=\dfrac{1}{2024}$. (C) $I=1$. (D) $I=2024$.

CÂU 7. Nếu $\int\limits_0^5 f(x)\,\mathrm{d}x = 5$ thì $\int\limits_5^0 5f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

(A) 1. (B) -1. (C) 25. (D) -25.

CÂU 8. Nếu $\int\limits_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 5$ thì $\int\limits_0^2 [2f(x)-1]\,\mathrm{d}x$ bằng

(A) 8. (B) 9. (C) 10. (D) 12.

CÂU 9. Nếu $\int_0^2 f(x)dx = 3$ thì $\int_0^2 [2f(x)-1]\,\mathrm{d}x$ bằng

(A) 6. (B) 4. (C) 8. (D) 5.

CÂU 10. Cho $\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 2$ và $\int\limits_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x = 5$, khi $\int\limits_0^1 [f(x)-2g(x)]\,\mathrm{d}x$ bằng

(A) -8. (B) 1. (C) -3. (D) 12.

CÂU 11. Cho $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x = 5$. Tính $I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} [f(x) + 2\sin x]\,\mathrm{d}x$.

(A) $I = 7$. (B) $I = 5 + \dfrac{\pi}{2}$. (C) $I = 3$. (D) $I = 5 + \pi$.

CÂU 12. Cho $\int\limits_1^2 [4f(x) - 2x]\,\mathrm{d}x = 1$. Khi đó $\int\limits_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

(A) 1. (B) -3. (C) 3. (D) -1.

Phần II. Trong mỗi ý a), b), c) và d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.

CÂU 13. Cho hai hàm f, g liên tục trên K và a, b là các số bất kỳ thuộc K.

Mệnh đề	Đ	S
a) $\int\limits_a^b [f(x) + 2g(x)]\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + 2\int\limits_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.		
b) $\int\limits_a^b \dfrac{f(x)}{g(x)}\,\mathrm{d}x = \dfrac{\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}{\int\limits_a^b g(x)\,\mathrm{d}x}$.		
c) $\int\limits_a^b [f(x)\cdot g(x)]\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \int\limits_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.		
d) $\int\limits_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x = \left[\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right]^2$.		

CÂU 14. Cho hàm số $f(x), g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Mệnh đề	Đ	S
a) Nếu $\int\limits_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 4$ thì $\int\limits_0^2 \left[\frac{1}{2}f(x) + 2\right]\,\mathrm{d}x = 6$.		
b) Nếu $\int\limits_2^5 f(x)\,\mathrm{d}x = 3$ và $\int\limits_2^5 g(x)\,\mathrm{d}x = -2$ thì $\int\limits_2^5 [f(x) + g(x)]\,\mathrm{d}x = 1$.		
c) Nếu $\int\limits_1^4 f(x)\,\mathrm{d}x = 6$ và $\int\limits_1^4 g(x)\,\mathrm{d}x = -5$ thì $\int\limits_1^4 [f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x = 1$.		

QUICK NOTE

QUICK NOTE

Mệnh đề	Đ	S
d) Nếu $\int\limits_2^3 f(x)\,\mathrm{d}x = 4$ và $\int\limits_2^3 g(x)\,\mathrm{d}x = 1$ thì $\int\limits_2^3 [f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x = 3$.		

CÂU 15. Cho hàm số $f(x), g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Mệnh đề	Đ	S
a) Biết $\int\limits_2^3 f(x)\,\mathrm{d}x = 3$ và $\int\limits_3^2 g(x)\,\mathrm{d}x = 1$. Khi đó $\int\limits_2^3 [f(x) + g(x)]\,\mathrm{d}x = 4$.		
b) Biết $\int\limits_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x = 2022$ và $\int\limits_3^1 g(x)\,\mathrm{d}x = 1$. Khi đó $\int\limits_1^3 [f(x) + g(x)]\,\mathrm{d}x = 2021$.		
c) Biết $\int\limits_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 3$ và $\int\limits_1^2 g(x)\,\mathrm{d}x = 2$. Khi đó $\int\limits_1^2 [f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x = 1$.		
d) Biết $\int\limits_2^5 f(x)\,\mathrm{d}x = 2$. Khi đó $\int\limits_2^5 3f(x)\,\mathrm{d}x = 2$.		

CÂU 16. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Mệnh đề	Đ	S
a) Nếu $\int\limits_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x = 3$ thì $\int\limits_0^3 2f(x)\,\mathrm{d}x = 6$.		
b) Nếu $\int\limits_1^4 f(x)\,\mathrm{d}x = 2024$ thì $\int\limits_4^1 f(x)\,\mathrm{d}x = -2024$.		
c) Nếu $\int\limits_6^0 f(x)\,\mathrm{d}x = 12$ thì $\int\limits_0^6 2022f(x)\,\mathrm{d}x = 24264$.		
d) Nếu $\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 4$ thì $\int\limits_0^1 2f(x)\,\mathrm{d}x = 8$.		

Phần III. Học sinh điền kết quả vào ô trống.

CÂU 17. Cho $\int\limits_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x = 4$. Tính $I = \int\limits_0^3 3f(x)\,\mathrm{d}x$.

KQ:

CÂU 18. Cho $\int\limits_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x = 2$. Tính $I = \int\limits_1^3 [f(x) + 2x]\,\mathrm{d}x$.

KQ:

CÂU 19. Cho $\int\limits_{-1}^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 2$ và $\int\limits_{-1}^2 g(x)\,\mathrm{d}x = -1$. Tính $I = \int\limits_{-1}^2 [x + 2f(x) + 3g(x)]\,\mathrm{d}x$.

KQ:

CÂU 20. Cho $\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 1$. Tính tích phân $I = \int\limits_0^1 \left[2f(x) - 3x^2\right]\,\mathrm{d}x$.

KQ:

CÂU 21. Biết $\int\limits_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x = 3$. Tính giá trị của $I = \int\limits_3^1 2f(x)\,\mathrm{d}x$.

KQ: | | | | |

QUICK NOTE

Dạng 2. Tích phân hàm số sơ cấp

Phần I. Mỗi câu hỏi học sinh chọn một trong bốn phương án A, B, C, D.

CÂU 1. Tích phân $I = \int\limits_0^2 (2x+1)\,\mathrm{d}x$ bằng

(A) $I = 5$. (B) $I = 6$. (C) $I = 2$. (D) $I = 4$.

CÂU 2. Tích phân $\int\limits_0^1 (3x+1)(x+3)\,\mathrm{d}x$ bằng

(A) 12. (B) 9. (C) 5. (D) 6.

CÂU 3. Tính tích phân $I = \int\limits_1^{\mathrm{e}} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x$

(A) $I = \frac{1}{\mathrm{e}}$. (B) $I = \frac{1}{\mathrm{e}} + 1$. (C) $I = 1$. (D) $I = \mathrm{e}$.

CÂU 4. Biết $\int\limits_1^3 \frac{x+2}{x}\,\mathrm{d}x = a + b\ln c$, với a, b, $c \in \mathbb{Z}$, $c < 9$. Tính tổng $S = a + b + c$.

(A) $S = 7$. (B) $S = 5$. (C) $S = 8$. (D) $S = 6$.

CÂU 5. Tích phân $\int\limits_0^1 \mathrm{e}^{3x+1}\,\mathrm{d}x$ bằng

(A) $\frac{1}{3}\left(\mathrm{e}^4 + \mathrm{e}\right)$. (B) $\mathrm{e}^3 - \mathrm{e}$. (C) $\frac{1}{3}\left(\mathrm{e}^4 - \mathrm{e}\right)$. (D) $\mathrm{e}^4 - \mathrm{e}$.

CÂU 6. Biết $\int\limits_0^1 \frac{\mathrm{e}^x}{2^x}\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}-1}{a - \ln b}$, $(a, b \in \mathbb{Z})$. Khi đó giá trị của $P = a + b$ là

(A) $P = -3$. (B) $P = 6$. (C) $P = -1$. (D) $P = 3$.

CÂU 7. Giá trị của $I = \int\limits_0^1 \frac{\mathrm{e}^{2x} - 4}{\mathrm{e}^x + 2}\,\mathrm{d}x$ bằng

(A) $I = 2(\mathrm{e} + 3)$. (B) $I = \frac{1}{2}(\mathrm{e} + 3)$. (C) $I = \mathrm{e} - 3$. (D) $I = 2(\mathrm{e} - 3)$.

CÂU 8. Biết $\int\limits_1^2 \mathrm{e}^x\left(1 - \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}\right)\mathrm{d}x = \mathrm{e}^2 + a\cdot\mathrm{e} + b\ln 2$, $(a, b \in \mathbb{Z})$. Khi đó giá trị của $P = \frac{a+b}{a\cdot b}$ là

(A) $P = -3$. (B) $P = 1$. (C) $P = -1$. (D) $P = -2$.

CÂU 9. Biết $I = \int\limits_0^1 \frac{\mathrm{e}^{2x-1} - \mathrm{e}^{-3x} + 1}{\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a} + b$, $(a, b \in \mathbb{R})$. Khi đó giá trị của $P = \frac{a+b}{a\cdot b}$ là

(A) $P = \mathrm{e}^4 - 1$. (B) $P = \frac{\mathrm{e}^4 - 1}{\mathrm{e}^2}$. (C) $P = \frac{\mathrm{e}^4 - 1}{\mathrm{e}^4}$. (D) $P = \frac{1 - \mathrm{e}^4}{\mathrm{e}^4}$.

CÂU 10. Giá trị của $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,\mathrm{d}x$ bằng

(A) 0. (B) 1. (C) -1. (D) $\frac{\pi}{2}$.

QUICK NOTE

CÂU 11. Biết $\displaystyle\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} (2\sin x + 3\cos x + x)\,\mathrm{d}x = \frac{a+b\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi^2}{c}$, $(a, b, c \in \mathbb{Z})$. Khi đó giá trị của $P = a + 2b + 3c$ là

(A) $P = 45$. (B) $P = 60$. (C) $P = 65$. (D) $P = 70$.

CÂU 12. Biết $\displaystyle\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} 3\tan^2 x\,\mathrm{d}x = a\sqrt{3} + b + \frac{\pi}{c}$, $(a, b, c \in \mathbb{Z})$. Khi đó giá trị của $P = a + b + c$ là

(A) $P = 6$. (B) $P = -4$. (C) $P = 4$. (D) $P = -6$.

CÂU 13. Biết $\displaystyle\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \left(2\cot^2 x + 5\right)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{a} + b\sqrt{3} + c$, $(a, b, c \in \mathbb{Z})$. Khi đó giá trị của $P = a + b + c$ là

(A) $P = 6$. (B) $P = -4$. (C) $P = 4$. (D) $P = -6$.

CÂU 14. Biết $\displaystyle\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\frac{x}{4}\cos^2\frac{x}{4}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{c} + \frac{a}{b}$ với $a, b \in \mathbb{Z}$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Khi đó giá trị của $P = a + b + c$ là

(A) $P = 17$. (B) $P = 16$. (C) $P = 32$. (D) $P = 49$.

Phần II. Trong mỗi ý a), b), c) và d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.

CÂU 15. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[a; b]$. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

Mệnh đề	Đ	S
a) $\displaystyle\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$.		
b) $\displaystyle\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int\limits_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$.		
c) $\displaystyle\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}(2x)$.		
d) $\displaystyle\int\limits_a^a 2024 f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.		

CÂU 16. Cho hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$ liên tục trên $[a; b]$. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

Mệnh đề	Đ	S
a) $\displaystyle\int\limits_a^b [f(x) + g(x)]\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.		
b) $\displaystyle\int\limits_a^b f(x)\cdot g(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \cdot \int\limits_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.		
c) $\displaystyle\int\limits_a^b k f(x)\,\mathrm{d}x = k\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.		

Mệnh đề	Đ	S
d) $\displaystyle\int\limits_a^b \frac{f(x)}{g(x)}\,\mathrm{d}x = \frac{\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}{\int\limits_a^b g(x)\,\mathrm{d}x}$.		

CÂU 17. Cho hàm $f(x)$ là hàm liên tục trên đoạn $[a;b]$ với $a<b$ và $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm $f(x)$ trên $[a;b]$. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

Mệnh đề	Đ	S
a) $\displaystyle\int\limits_a^b kf(x)\,\mathrm{d}x = k\left[F(b)-F(a)\right]$.		
b) $\displaystyle\int\limits_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = F(b)-F(a)$.		
c) Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đường thẳng $x=a$; $x=b$; đồ thị của hàm số $y=f(x)$ và trục hoành được tính theo công thức $S=F(b)-F(a)$.		
d) $\displaystyle\int\limits_a^b f\left(2x+3\right)\,\mathrm{d}x = F\left(2x+3\right)\Big|_a^b$.		

CÂU 18. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai.

Mệnh đề	Đ	S
a) $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{\mathrm{e}^{2x}-4}{\mathrm{e}^x+2}\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}-3$.		
b) $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{\mathrm{e}^x}{2^x}\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}}{2}+1$.		
c) $\displaystyle\int\limits_1^2 \mathrm{e}^x\left(1-\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}\right)\mathrm{d}x = \mathrm{e}^2-\mathrm{e}-\ln 2$.		
d) $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{\mathrm{e}^{2x-1}-\mathrm{e}^{-3x}+1}{\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^4-1$.		

Phần III. Học sinh điền kết quả vào ô trống.

CÂU 19. Với a, b là các tham số thực. Tích phân

$$I=\int\limits_0^b \left(3x^2-2ax-1\right)\,\mathrm{d}x = b^t-b^ya+zb.$$

Tính $t+y+z$.

KQ: | | | | |

CÂU 20. Cho $\displaystyle\int\limits_0^m \left(3x^2-2x+1\right)\mathrm{d}x=6$. Tính giá trị của tham số m.

KQ: | | | | |

CÂU 21. Tính tích phân $I=\displaystyle\int\limits_1^2 \frac{x-1}{x}\mathrm{d}x$ (*làm tròn đến hàng phần trăm*).

KQ: | | | | |

QUICK NOTE

QUICK NOTE

CÂU 22. Tính $I=\displaystyle\int_1^2\left(\frac{x-\sqrt[4]{x^3}}{x}\right)^2\mathrm{d}x$ (*làm tròn đến hàng phần trăm*).

KQ: | | | | |

CÂU 23. Tính $I=\displaystyle\int_1^2\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt[3]{x}-1\right)\mathrm{d}x$ (*làm tròn đến hàng phần trăm*).

KQ: | | | | |

CÂU 24. Tính $I=\displaystyle\int_1^2\frac{(x^2+1)^3}{x^2}\mathrm{d}x$ (*làm tròn đến hàng phần chục*).

KQ: | | | | |

CÂU 25. Tính $I=\displaystyle\int_0^1 5^{x+1}\cdot 7^{2x-1}\mathrm{d}x$ (*làm tròn đến hàng đơn vị*).

KQ: | | | | |

CÂU 26. Tính $I=\displaystyle\int_0^1\left(x+\mathrm{e}^{-x-2}\right)\mathrm{d}x$ (*làm tròn đến hàng phần trăm*).

KQ: | | | | |

CÂU 27. Tính $I=\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} x^2\left(1-\frac{\sin x}{x^2}\right)\mathrm{d}x$ (*làm tròn đến hàng phần trăm*).

KQ: | | | | |

CÂU 28. Tính $I=\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin x-\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)\mathrm{d}x$ (*làm tròn đến hàng phần trăm*).

KQ: | | | | |

CÂU 29. Biết $\displaystyle\int_0^1\frac{\left(e^{-x}+2\right)^2}{e^{x-1}}\mathrm{d}x=ae+b+\frac{c}{e}+\frac{1}{e^2}$ $(a,b,c\in\mathbb{Z})$. Tính giá trị của $P=a+b+c$.

KQ: | | | | |

CÂU 30. Biết $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}\mathrm{d}x=a\sqrt{3}+\frac{\pi}{b}$ $(a,b\in\mathbb{Z})$. Tính $a+b$.

KQ: | | | | |

CÂU 31. Tính $I=\displaystyle\int_0^1\frac{\left(2024^x+1\right)^2}{e^{-3x}}\mathrm{d}x$ (*làm tròn đến hàng phần trăm*).

KQ: | | | | |

CÂU 32. Tính $I=\displaystyle\frac{1}{1000}\int_0^1\frac{\left(e^{-x}+2\right)^2}{e^{x-1}}\mathrm{d}x$ (*làm tròn đến hàng đơn vị*).

KQ: | | | | |

CÂU 33. Tính $I=\displaystyle\frac{1}{100}\int_1^2 e^{2x}\left(2023+\frac{2024e^{-2x}}{x^3}\right)\mathrm{d}x$ (*làm tròn đến hàng phần chục*).

QUICK NOTE

KQ:

CÂU 34. Tính $I=\int\limits_1^2\left(4x^3-2\cdot 3^{x+1}+\dfrac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x$ (*làm tròn đến hàng phần chục*).

KQ:

Dạng 3. TÍCH PHÂN HÀM TRỊ TUYỆT ĐỐI

Tính tích phân $I=\int\limits_a^b|f(x)|\,\mathrm{d}x$?

Phương pháp

- **Bước 1.** Xét dấu $f(x)$ trên đoạn $[a;b]$.
- **Bước 2.** Dựa vào bảng xét dấu trên đoạn $[a;b]$ để khử $|f(x)|$. Sau đó sử dụng các phương pháp tính tích phân đã học để tính $I=\int\limits_a^b|f(x)|\cdot\mathrm{d}x$.

Phần I. Mỗi câu hỏi học sinh chọn một trong bốn phương án A, B, C, D.

CÂU 1. Giá trị của $I=\int\limits_0^{2\pi}\sqrt{1-\cos 2x}\,\mathrm{d}x$ bằng

(A) $\sqrt{3}$. (B) $4\sqrt{2}$. (C) $2\sqrt{3}$. (D) $\dfrac{\pi}{2}$.

CÂU 2. Tính tích phân $I=\int\limits_0^2|x-2|\,\mathrm{d}x$.

(A) $I=-2$. (B) $I=4$. (C) $I=2$. (D) $I=0$.

CÂU 3. Tính tích phân $I=\int\limits_0^2\left|x^3-x\right|\,\mathrm{d}x$.

(A) $I=-\dfrac{1}{2}$. (B) $I=5$. (C) $I=\dfrac{1}{2}$. (D) $I=\dfrac{5}{2}$.

CÂU 4. Tính tích phân $I=\int\limits_0^2\left|x^2+2x-3\right|\,\mathrm{d}x$.

(A) $I=-2$. (B) $I=4$. (C) $I=5$. (D) $I=-4$.

CÂU 5. Cho tích phân $I=\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\int\limits_{-3}^3\left|x^2-1\right|\,\mathrm{d}x=\dfrac{20}{3}+\dfrac{4}{3}+\dfrac{16}{3}=a\sqrt{3}+b\sqrt{2}$ với $a,b\in\mathbb{Q}$. Tính $P=a+b$.

(A) $P=\dfrac{40}{3}$. (B) $P=\dfrac{80}{3}$. (C) $P=\dfrac{17}{3}$. (D) $P=\dfrac{98}{3}$.

CÂU 6. Tính tích phân $I=\int\limits_{-2}^5(|x+2|-|x-2|)\,\mathrm{d}x$.

(A) $I=38$. (B) $I=44$. (C) $I=48$. (D) $I=40$.

CÂU 7. Cho tích phân $I=\int\limits_0^3|2^x-4|\,\mathrm{d}x=a+\dfrac{b}{c\ln 2}$ với $a,b,c\in\mathbb{Z}$ và $\dfrac{b}{c}$ là phân số tối giản. Tính $P=a^2+b^2+c^2$.

(A) $P=15$. (B) $P=10$. (C) $P=5$. (D) $P=18$.

CÂU 8. Tính tích phân $I=\int\limits_{-1}^1\left|2^x-2^{-x}\right|\,\mathrm{d}x$.

QUICK NOTE

Ⓐ $\dfrac{1}{\ln 2}$. Ⓑ $\ln 2$. Ⓒ $2\ln 2$. Ⓓ $\dfrac{2}{\ln 2}$.

CÂU 9. Tính tích phân $I=\int\limits_{-1}^{2}(|x|-|x-1|)\,\mathrm{d}x$.

Ⓐ $I=0$. Ⓑ $I=2$. Ⓒ $I=-2$. Ⓓ $I=-3$.

CÂU 10. Cho a là số thực dương, tính tích phân $I=\int\limits_{-1}^{a}|x|\,\mathrm{d}x$ theo a.

Ⓐ $I=\dfrac{a^2+1}{2}$. Ⓑ $I=\dfrac{a^2+2}{2}$. Ⓒ $I=\dfrac{-2a^2+1}{2}$. Ⓓ $I=\dfrac{\left|3a^2-1\right|}{2}$.

CÂU 11. Cho số thực $m>1$ thỏa mãn $\int\limits_{1}^{m}|2mx-1|\,\mathrm{d}x=1$. Khẳng định nào sau đây đúng?

Ⓐ $m\in(4;6)$. Ⓑ $m\in(2;4)$. Ⓒ $m\in(3;5)$. Ⓓ $m\in(1;3)$.

CÂU 12. Khẳng định nào sau đây là đúng?

Ⓐ $\int\limits_{-1}^{1}|x|^3\,\mathrm{d}x=\left|\int\limits_{-1}^{1}x^3\mathrm{d}x\right|$.

Ⓑ $\int\limits_{-1}^{2024}\left|x^4-x^2+1\right|\mathrm{d}x=\int\limits_{-1}^{2024}\left(x^4-x^2+1\right)\mathrm{d}x$.

Ⓒ $\int\limits_{-2}^{3}\left|e^x(x+1)\,\mathrm{d}x\right|=\int\limits_{-2}^{3}e^x(x+1)\,\mathrm{d}x$.

Ⓓ $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\cos^2x}\mathrm{d}x=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin x\mathrm{d}x$.

CÂU 13. Tính tích phân $I=\int\limits_{1}^{4}\sqrt{x^2-6x+9}\,\mathrm{d}x$.

Ⓐ $I=\dfrac{5}{2}$. Ⓑ $I=-\dfrac{1}{2}$. Ⓒ $I=-2$. Ⓓ $I=\dfrac{1}{2}$.

Phần III. Học sinh điền kết quả vào ô trống.

CÂU 14. Tính tích phân $I=\int\limits_{-3}^{3}\left|x^2-1\right|\mathrm{d}x$ (tính gần đúng đến hàng phần chục).

KQ: | | | | |

CÂU 15. Tính tích phân $I=\int\limits_{-1}^{2}\left|-x^2-2x+3\right|\mathrm{d}x$ (tính gần đúng đến hàng phần trăm).

KQ: | | | | |

CÂU 16. Tính tích phân $I=\int\limits_{1}^{2}\left|\dfrac{x+1}{x}\right|\mathrm{d}x$ (tính gần đúng đến hàng phần trăm).

KQ: | | | | |

CÂU 17. Tính tích phân $I=\int\limits_{2}^{6}\sqrt{x^2-8x+16}\,\mathrm{d}x$.

KQ: | | | | |

CÂU 18. Tính tích phân $I=\int\limits_{-2}^{1}\sqrt{4x^2+6x+9}\,\mathrm{d}x$ (*làm tròn đến hàng phần trăm*).

QUICK NOTE

KQ: | | | |

CÂU 19. Tính tích phân $I = \int\limits_0^1 \sqrt{9x^2 - 6x + 1}\,\mathrm{d}x$ (*làm tròn đến hàng phần trăm*).

KQ: | | | |

CÂU 20. Tính tích phân $I = \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{1 + \cos 2x}\,\mathrm{d}x$ (*làm tròn đến hàng phần trăm*).

KQ: | | | |

CÂU 21. Tính tích phân $I = \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos 2x}\,\mathrm{d}x$ (*làm tròn đến hàng phần trăm*).

KQ: | | | |

CÂU 22. Tính tích phân $I = \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{1 - \sin 2x}\,\mathrm{d}x$, (*làm tròn đến hàng phần trăm*).

KQ: | | | |

CÂU 23. Tính tích phân $I = \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{1 + \sin 2x}\,\mathrm{d}x$ (*làm tròn đến hàng phần trăm*).

KQ: | | | |

Dạng 4. Tích phân có điều kiện

Phần I. Mỗi câu hỏi học sinh chọn một trong bốn phương án A, B, C, D.

CÂU 1. Nếu $F'(x) = \dfrac{1}{2x}$ và $F(1) = 1$ thì giá trị của $F(4)$ bằng

Ⓐ $\ln 2$. Ⓑ $1 + \ln 2$. Ⓒ $1 + \dfrac{1}{2}\ln 2$. Ⓓ $\dfrac{1}{2}\ln 2$.

CÂU 2. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x) = \dfrac{2}{x}$. Biết $F(-1) = 0$. Tính $F(2)$ kết quả là

Ⓐ $2\ln 2 + 1$. Ⓑ $\ln 2$. Ⓒ $2\ln 3 + 2$. Ⓓ $2\ln 2$.

CÂU 3. Cho hàm số $f(x)$ liên tục, có đạo hàm trên $[-1; 2]$, $f(-1) = 8$, $f(2) = -1$. Tích phân $\int\limits_{-1}^{2} f'(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

Ⓐ 1. Ⓑ 7. Ⓒ -9. Ⓓ 9.

CÂU 4. Biết $F(x) = x^2$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$. Giá trị của $\int\limits_1^3 [1 + f(x)]\,\mathrm{d}x$ bằng

Ⓐ 10. Ⓑ 8. Ⓒ $\dfrac{26}{3}$. Ⓓ $\dfrac{32}{3}$.

CÂU 5. Biết $F(x) = x^3$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$. Giá trị của $\int\limits_1^3 [1 + f(x)]\,\mathrm{d}x$ bằng

Ⓐ 20. Ⓑ 22. Ⓒ 26. Ⓓ 28.

CÂU 6. Biết $F(x) = x^2$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$. Giá trị của $\int\limits_1^2 [2 + f(x)]\,\mathrm{d}x$ bằng

QUICK NOTE

(A) 5. (B) 3. (C) $\frac{13}{3}$. (D) $\frac{7}{3}$.

CÂU 7. Biết $F(x)=x^3$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$. Giá trị của $\int\limits_1^2 [2+f(x)]\,\mathrm{d}x$ bằng

(A) $\frac{23}{4}$. (B) 7. (C) 9. (D) $\frac{15}{4}$.

CÂU 8. Cho hàm số $f(x)$. Biết $f(0)=4$ và $f'(x)=2\sin^2\frac{x}{2}+1, \forall x\in\mathbb{R}$, khi đó $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\mathrm{d}x$ bằng

(A) $\frac{\pi^2+16\pi+8\sqrt{2}-16}{16}$. (B) $\frac{\pi^2+16\pi+2\sqrt{2}-4}{16}$.

(C) $\frac{\pi^2+16\pi+8\sqrt{2}}{16}$. (D) $\frac{\pi^2+16\pi-16}{16}$.

CÂU 9. Cho hàm số $f(x)$. Biết $f(0)=4$ và $f'(x)=2\cos^2\frac{x}{2}+3, \forall x\in\mathbb{R}$, khi đó $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\mathrm{d}x$ bằng?

(A) $\frac{\pi^2+8\pi-8-\sqrt{2}}{8}$. (B) $\frac{\pi^2+8\pi-8-4\sqrt{2}}{8}$.

(C) $\frac{\pi^2+6\pi+8}{8}$. (D) $\frac{\pi^2+8\pi-4\sqrt{2}}{8}$.

CÂU 10. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} e^{2x} \text{ khi } x\geq 0\\ x^2+x+2 \text{ khi } x<0\end{cases}$. Biết tích phân $\int\limits_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x=\frac{a}{b}+\frac{e^2}{c}$ ($\frac{a}{b}$ là phân số tối giản). Giá trị $a+b+c$ bằng

(A) 7. (B) 8. (C) 9. (D) 10.

CÂU 11. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} x^2-1 \text{ khi } x\geq 2\\ x^2-2x+3 \text{ khi } x<2\end{cases}$. Tích phân $I=\frac{1}{2}\int\limits_1^3 f(x)\mathrm{d}x$ bằng:

(A) $\frac{23}{3}$. (B) $\frac{23}{6}$. (C) $\frac{17}{6}$. (D) $\frac{17}{3}$.

CÂU 12. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} \frac{x(1+x^2)}{x-4} \text{ khi } x\geq 3\\ \frac{1}{x-4} \text{ khi } x<3\end{cases}$. Tích phân $I=\int\limits_2^4 f(t)\mathrm{d}t$ bằng:

(A) $\frac{40}{3}-\ln 2$. (B) $\frac{95}{6}+\ln 2$. (C) $\frac{189}{4}+\ln 2$. (D) $\frac{189}{4}-\ln 2$.

CÂU 13. Cho số thực a và hàm số $f(x)=\begin{cases} 2x \text{ khi } x\leq 0\\ a(x-x^2) \text{ khi } x>0\end{cases}$. Tính tích phân $\int\limits_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x$ bằng:

(A) $\frac{a}{6}-1$. (B) $\frac{2a}{3}+1$. (C) $\frac{a}{6}+1$. (D) $\frac{2a}{3}-1$.

Phần II. Trong mỗi ý a), b), c) và d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.

CÂU 14. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} 2x^2+3 \text{ khi } x\geq 1\\ 2-x^3 \text{ khi } x<1\end{cases}$.

Mệnh đề	Đ	S
a) $\int\limits_1^{2024} f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_1^{2024}(2x^2+3)\mathrm{d}x$.		
b) $\int\limits_{-2024}^{1} f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_{-2024}^{1}(2-x^3)\mathrm{d}x$.		

Mệnh đề	Đ	S
c) $\int\limits_{-2024}^{2024} f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_{1}^{2024} (2x^2+3)\mathrm{d}x + \int\limits_{-2024}^{1} (2-x^3)\mathrm{d}x.$		
d) $\int_{-2024}^{2024} f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_{1}^{2024} (2x^2+3)\mathrm{d}x + \int\limits_{-2024}^{1} (2-x^3)\mathrm{d}x.$		

CÂU 15. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 3 \text{ khi } x \geq 2 \\ x + 1 \text{ khi } x < 2 \end{cases}$.

Mệnh đề	Đ	S
a) $\int\limits_{1}^{2} f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_{1}^{2} (x+1)\mathrm{d}x.$		
b) $\int\limits_{2}^{3} f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_{2}^{3} (x^2-2x+3)\mathrm{d}x.$		
c) $\int\limits_{1}^{3} \frac{1}{2} f(x)\mathrm{d}x = \frac{41}{12}.$		
d) $\int\limits_{1}^{2} f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_{1}^{2} (x^2-2x+3)\mathrm{d}x.$		

Phần III. Học sinh điền kết quả vào ô trống.

CÂU 16. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} \text{ khi } x \geq 1 \\ x + 1 \text{ khi } x < 1 \end{cases}$. Tích phân $I = \int\limits_{2}^{0} -3t^2 f(t)\mathrm{d}t$. *(làm tròn đến hàng phần trăm)*

KQ: | | | | |

CÂU 17. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 1 \text{ khi } x < 0 \\ x - 1 \text{ khi } 0 \leq x \leq 2 \\ 5 - 2x \text{ khi } x > 2 \end{cases}$. Tính tích phân $I = \int\limits_{-5}^{9} \frac{1}{7} f(t)\mathrm{d}t$. *(làm tròn đến hàng phần trăm)*

KQ: | | | | |

CÂU 18. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 - x \text{ khi } x \geq 0 \\ x \text{ khi } x < 0 \end{cases}$. Khi đó $I = \int\limits_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x + \int\limits_{-1}^{3} f(x)\mathrm{d}x$ bằng bao nhiêu? *(làm tròn đến hàng phần trăm)*

KQ: | | | | |

CÂU 19. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 4x \text{ khi } x > 2 \\ -2x + 12 \text{ khi } x \leq 2 \end{cases}$. Tính tích phân $I = \int\limits_{1}^{2} f(t)\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int\limits_{5}^{10} f(t)\mathrm{d}t$.

KQ: | | | | |

CÂU 20. Biết rằng hàm số $f(x) = mx + n$ thỏa mãn $\int\limits_{0}^{1} f(x)\mathrm{d}x = 3$, $\int\limits_{0}^{2} f(x)\mathrm{d}x = 8$. Tính $m + n$.

KQ: | | | | |

QUICK NOTE

QUICK NOTE

CÂU 21. Biết rằng hàm số $f(x) = ax^2 + bx + c$ thỏa mãn $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x = -\frac{7}{2}$, $\int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x = -2$ và $\int\limits_0^3 f(x)\mathrm{d}x = \frac{13}{2}$. Tính $P = a + b + c$. (*làm tròn đến hàng phần trăm*).

KQ: | | | | |

CÂU 22. Cho $\int\limits_0^m (3x^2 - 2x + 1)\mathrm{d}x = 6$. Tính giá trị của tham số m.

KQ: | | | | |

CÂU 23. Cho $I = \int\limits_0^1 (4x - 2m^2)\mathrm{d}x$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để $I + 6 > 0$?

KQ: | | | | |

CÂU 24. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của a để $\int\limits_0^a (2x - 3)\mathrm{d}x \leq 4$?

KQ: | | | | |

CÂU 25. Có bao nhiêu số thực b thuộc khoảng $(\pi; 3\pi)$ sao cho $\int\limits_\pi^b 4\cos 2x\mathrm{d}x = 1$?

KQ: | | | | |

Dạng 5. Ứng dụng tích phân trong thực tiễn

- Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$. Khi đó $\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)\,dx$ được gọi là giá trị trung bình của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a; b]$.
- Đạo hàm của quãng đường di chuyển của vật theo thời gian bằng tốc độ của chuyển động tại mọi thời điểm $v(t) = s'(t)$. Do đó, nếu biết tốc độ $v(t)$ tại mọi thời điểm $t \in [a; b]$ thì tính được quãng đường di chuyển trong khoảng thời gian từ a đến b theo công thức

$$s = s(b) - s(a) = \int\limits_a^b v(t)\,\mathrm{d}t.$$

- Giả sử là vận tốc của vật tại thời điểm và là quãng đường vật đi được sau khoảng thời gian tính từ lúc bắt đầu chuyển động. Ta có mối liên hệ giữa vận tốc và quãng đường như sau

  — Đạo hàm của quãng đường là vận tốc $s'(t) = v(t)$.

  — Nguyên hàm của vận tốc là quãng đường $s(t) = \int v(t)\,\mathrm{d}t$.

  $\Rightarrow$ Từ đây ta cũng có quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian từ a đến b là

$$\int\limits_a^b v(t)\,\mathrm{d}t = s(b) - s(a).$$

  Nếu gọi $a(t)$ là gia tốc của vật thì ta có mối liên hệ giữa gia tốc và vận tốc như sau

  — Đạo hàm của vận tốc là gia tốc $v'(t) = a(t)$.

  — Nguyên hàm của gia tốc là vận tốc $v(t) = \int a(t)\,\mathrm{d}t$.

Phần I. Mỗi câu hỏi học sinh chọn một trong bốn phương án A, B, C, D.

CÂU 1. Một ô tô đang chạy với vận tốc $10\,m/s$ thì gặp chướng ngại vật, người lái xe đạp phanh. Từ thời điểm đó, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v\,(t) = -2t + 10\ (m/s)$, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Tính quãng đường ô tô di chuyển được trong 8 giây cuối cùng.

A. $55\,m$. B. $25\,m$. C. $50\,m$. D. $16\,m$.

CÂU 2. Một ô tô đang chạy với tốc độ $20\ (m/s)$ thì gặp chướng ngại vật, người lái đạp phanh, từ thời điểm đó ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v\,(t) = -5t + 20\ (m/s)$, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ô tô còn di chuyển bao nhiêu mét (m)?

A. $20\,m$. B. $30\,m$. C. $10\,m$. D. $40\,m$.

CÂU 3. Một chất điểm A xuất phát từ O, chuyển động thẳng với vận tốc biến thiên theo thời gian bởi quy luật $v\,(t) = \dfrac{1}{120}t^2 + \dfrac{58}{45}t\ (m/s)$, trong đó t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc A bắt đầu chuyển động. Từ trạng thái nghỉ, một chất điểm B cũng xuất phát từ O, chuyển động thẳng cùng hướng với A nhưng chậm hơn 3 giây so với A và có gia tốc bằng $a\ \left(m/s^2\right)$ (a là hằng số). Sau khi B xuất phát được 15 giây thì đuổi kịp A. Vận tốc của B tại thời điểm đuổi kịp A bằng

A. $21\ (m/s)$. B. $25\ (m/s)$. C. $36\ (m/s)$. D. $30\ (m/s)$.

CÂU 4. Một chất điểm A xuất phát từ O, chuyển động thẳng với vận tốc biến thiên theo thời gian bởi quy luật $v\,(t) = \dfrac{1}{150}t^2 + \dfrac{59}{75}t\ (m/s)$, trong đó t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc a bắt đầu chuyển động. Từ trạng thái nghỉ, một chất điểm B cũng xuất phát từ O, chuyển động thẳng cùng hướng với A nhưng chậm hơn 3 giây so với A và có gia tốc bằng $a\ \left(m/s^2\right)$ (a là hằng số). Sau khi B xuất phát được 12 giây thì đuổi kịp A. Vận tốc của B tại thời điểm đuổi kịp A bằng

A. $15\ (m/s)$. B. $20\ (m/s)$. C. $16\ (m/s)$. D. $13\ (m/s)$.

CÂU 5. Một ô tô bắt đầu chuyển động thẳng đều với vận tốc v_0, sau 6 giây chuyển động thì gặp chướng ngại vật nên bắt đầu giảm tốc độ với vận tốc chuyển động $v(t) = -\dfrac{5}{2}t + a\,(m/s)$ với $t \geq 6$ cho đến khi dừng hẳn. Biết rằng kể từ lúc chuyển động đến lúc dừng hẳn thì ô tô đi được quãng đường là $80\,m$. Tìm v_0.

A. $v_0 = 35\,m/s$. B. $v_0 = 25\,m/s$. C. $v_0 = 10\,m/s$. D. $v_0 = 20\,m/s$.

CÂU 6. Để đảm bảo an toàn khi lưu thông trên đường, các xe ô tô khi dừng đèn đỏ phải cách nhau tối thiểu $1\,m$. Một ô tô A đang chạy với vận tốc $16\,m/s$ bỗng gặp ô tô B đang dừng đèn đỏ nên ô tô A hãm phanh và chuyển động chậm dần đều với vận tốc được biểu thị bởi công thức $v_A\,(t) = 16 - 4t$ (đơn vị tính bằng m/s), thời gian tính bằng giây. Hỏi rằng để hai ô tô A và B đạt khoảng cách an toàn khi dừng lại thì ô tô A phải hãm phanh khi cách ô tô B một khoảng ít nhất là bao nhiêu?

A. 33. B. 12. C. 31. D. 32.

CÂU 7. Do các xe phải cách nhau tối thiểu $1\,m$ để đảm bảo an toàn nên khi dừng lại ô tô A phải hãm phanh khi cách ô tô B một khoảng ít nhất là $33\,m$. Một chất điểm đang chuyển động với vận tốc $v_0 = 15\,m/s$ thì tăng tốc với gia tốc $a\,(t) = t^2 + 4t\ \left(m/s^2\right)$. Tính quãng đường chất điểm đó đi được trong khoảng thời gian 3 giây kể từ lúc bắt đầu tăng vận tốc.

A. $70{,}25\,m$. B. $68{,}25\,m$. C. $67{,}25\,m$. D. $69{,}75\,m$.

CÂU 8. Một vật chuyển động với vận tốc $10\,m/s$ thì tăng tốc với gia tốc được tính theo thời gian là $a\,(t) = t^2 + 3t$. Tính quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian 6 giây kể từ khi vật bắt đầu tăng tốc.

A. $136\,m$. B. $126\,m$. C. $276\,m$. D. $216\,m$.

CÂU 9. Một chiếc máy bay chuyển động trên đường băng với vận tốc $v\,(t) = t^2 + 10t\ (m/s)$ với t là thời gian được tính theo đơn vị giây kể từ khi máy bay bắt đầu chuyển động. Biết khi máy bay đạt vận tốc $200\ (m/s)$ thì rời đường băng. Quãng đường máy bay đã di chuyển trên đường băng là

A. $\dfrac{2500}{3}\ (m)$. B. $2000\ (m)$. C. $500\ (m)$. D. $\dfrac{4000}{3}\ (m)$.

CÂU 10. Một ô tô bắt đầu chuyển động nhanh dần đều với vận tốc $v_1\,(t) = 7t\ (m/s)$. Đi được $5\,s$, người lái xe phát hiện chướng ngại vật và phanh gấp, ô tô tiếp tục chuyển động

QUICK NOTE

QUICK NOTE

chậm dần đều với gia tốc $a = -70\ \left(m/s^2\right)$. Tính quãng đường S đi được của ô tô từ lúc bắt đầu chuyển bánh cho đến khi dừng hẳn.

(A) $S = 96{,}25\ (m)$. (B) $S = 87{,}5\ (m)$. (C) $S = 94\ (m)$. (D) $S = 95{,}7\ (m)$.

CÂU 11. Một ô tô bắt đầu chuyển động nhanh dần đều với vận tốc $v_1(t) = 2t\ (m/s)$. Đi được 12 giây, người lái xe gặp chướng ngại vật và phanh gấp, ô tô tiếp tục chuyển động chậm dần đều với gia tốc $a = -12\ \left(m/s^2\right)$. Tính quãng đường $s\,(m)$ đi được của ôtô từ lúc bắt đầu chuyển động đến khi dừng hẳn.

(A) $s = 168\ (m)$. (B) $s = 166\ (m)$. (C) $s = 144\ (m)$. (D) $s = 152\ (m)$.

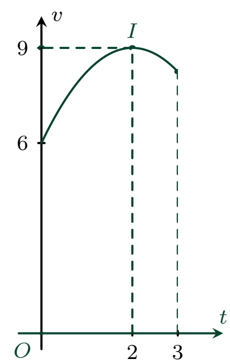
CÂU 12. Một ô tô đang dừng và bắt đầu chuyển động theo một đường thẳng với gia tốc $a(t) = 6 - 2t\ (\mathrm{m/s^2})$, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây kể từ lúc ô tô bắt đầu chuyển động. Hỏi quảng đường ô tô đi được từ lúc bắt đầu chuyển động đến khi vận tốc của ô tô đạt giá trị lớn nhất là bao nhiêu mét?

(A) 18 m. (B) 36 m. (C) 22,5 m. (D) 6,75 m.

CÂU 13. Một chất điểm A xuất phát từ O, chuyển động thẳng với vận tốc biến thiên theo thời gian bởi quy luật $v(t) = \dfrac{1}{180}t^2 + \dfrac{11}{18}t$ (m/s), trong đó t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc A bắt đầu chuyển động. Từ trạng thái nghỉ, một chất điểm B cũng xuất phát từ O, chuyển động thẳng cùng hướng với A nhưng chậm hơn 5 giây so với A và có gia tốc bằng a $(\mathrm{m/s^2})$ (a là hằng số). Sau khi B xuất phát được 10 giây thì đuổi kịp A. Vận tốc của B tại thời điểm đuổi kịp A bằng

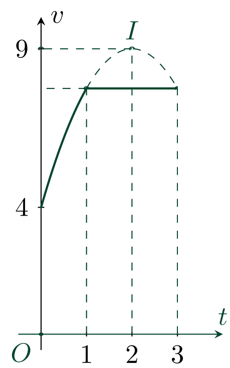
(A) 15 (m/s). (B) 10 (m/s). (C) 7 (m/s). (D) 22(m/s).

CÂU 14. Một vật chuyển động trong 3 giờ với vận tốc v (km/h) phụ thuộc thời gian t (h) có đồ thị là một phần của đường parabol có đỉnh $I(2;9)$ và trục đối xứng song song với trục tung như hình bên. Tính quãng đường s mà vật di chuyển được trong 3 giờ đó.



(A) $s = 25{,}25$ (km). (B) $s = 24{,}25$ (km). (C) $s = 24{,}75$ (km). (D) $s = 26{,}75$ (km).

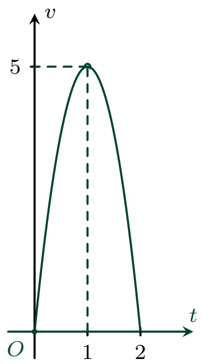
CÂU 15. Một vật chuyển động trong 3 giờ với vận tốc v (km/h) phụ thuộc vào thời gian t (h) có đồ thị vận tốc như hình bên. Trong thời gian 1 giờ kể từ khi bắt đầu chuyển động, đồ thị đó là một phần của đường parabol có đỉnh $I(2;9)$ và trục đối xứng song song với trục tung, khoảng thời gian còn lại đồ thị là một đoạn thẳng song song với trục hoành. Tính quãng đường s mà vật chuyển động được trong 3 giờ đó (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).



(A) $s = 21{,}58$ (km). (B) $s = 23{,}25$ (km). (C) $s = 13{,}83$ (km). (D) $s = 15{,}50$ (km).

QUICK NOTE

CÂU 16. Một người chạy trong 2 giờ, vận tốc v (km/h) phụ thuộc vào thời gian t (h) có đồ thị là 1 phần của đường Parabol với đỉnh $I(1;5)$ và trục đối xứng song song với trục tung Ov như hình vẽ. Tính quảng đường S người đó chạy được trong 1 giờ 30 phút kể từ lúc bắt đầu chạy (kết quả làm tròn đến 2 chữ số thập phân).



Ⓐ 2,11 km. Ⓑ 6,67 km. Ⓒ 5,63 km. Ⓓ 6,63 km.

Phần III. Học sinh điền kết quả vào ô trống.

CÂU 17. Một ô tô đang chạy với vận tốc là 12 (m/s) thì người lái đạp phanh; từ thời điểm đó ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -6t + 12$ (m/s), trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây kể từ lúc đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến lúc ô tô dừng hẳn, ô tô còn di chuyển được bao nhiêu mét?

KQ:

CÂU 18. Một ô tô đang chạy với vận tốc 10 m/s thì người lái đạp phanh; từ thời điểm đó, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -5t + 10$ (m/s), trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ô tô còn di chuyển bao nhiêu mét?

KQ:

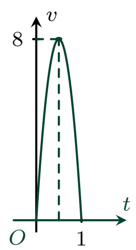
CÂU 19. Một chất điểm A xuất phát từ O, chuyển động thẳng với vận tốc biến thiên theo thời gian bởi quy luật $v(t) = \dfrac{1}{100}t^2 + \dfrac{13}{30}t$ (m/s), trong đó t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc A bắt đầu chuyển động. Từ trạng thái nghỉ, một chất điểm B cũng xuất phát từ O, chuyển động thẳng cùng hướng với A nhưng chậm hơn 10 giây so với A và có gia tốc bằng a $(\mathrm{m/s^2})$ (a là hằng số). Sau khi B xuất phát được 15 giây thì đuổi kịp A. Vận tốc của B tại thời điểm đuổi kịp A bằng bao nhiêu m/s?

KQ:

CÂU 20. Một ô tô chuyển động nhanh dần đều với vận tốc $v(t) = 7t$ (m/s). Đi được 5 (s) người lái xe phát hiện chướng ngại vật và phanh gấp, ô tô tiếp tục chuyển động chậm dần đều với gia tốc $a = -35$ $(\mathrm{m/s^2})$. Tính quãng đường của ô tô đi được từ lúc bắt đầu chuyển bánh cho đến khi dừng hẳn (đơn vị tính bằng mét)?

KQ:

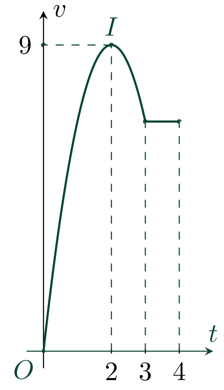
CÂU 21.
Một người chạy trong thời gian 1 giờ, vận tốc v (km/h) phụ thuộc vào thời gian $t\,(h)$ có đồ thị là một phần parabol với đỉnh $I\left(\dfrac{1}{2};8\right)$ và trục đối xứng song song với trục tung như hình bên. Tính quảng đường s người đó chạy được trong khoảng thời gian 45 phút, kể từ khi chạy (đơn vị tính bằng km)?



KQ:

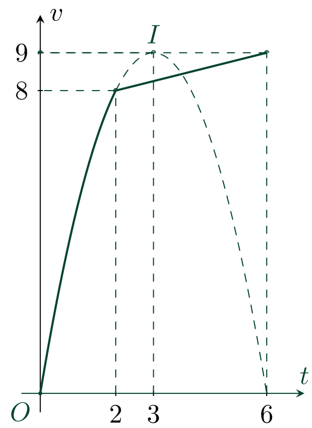
CÂU 22. Một vật chuyển động trong 4 giờ với vận tốc v (km/h) phụ thuộc thời gian t (h) có đồ thị của vận tốc như hình bên. Trong khoảng thời gian 3 giờ kể từ khi bắt đầu chuyển động, đồ thị đó là một phần của đường parabol có đỉnh $I(2;9)$ với trục đối xứng song song với trục tung, khoảng thời gian còn lại đồ thị là một đoạn thẳng song song với trục hoành. Tính quãng đường s mà vật di chuyển được trong 4 giờ đó (đơn vị tính bằng km).

QUICK NOTE



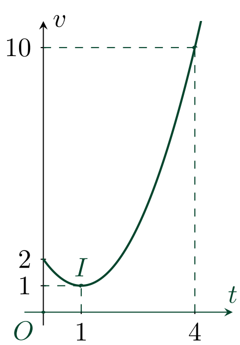
KQ:

CÂU 23. Một vật chuyển động trong 6 giờ với vận tốc v (km/h) phụ thuộc vào thời gian t (h) có đồ thị như hình bên dưới. Trong khoảng thời gian 2 giờ từ khi bắt đầu chuyển động, đồ thị là một phần đường Parabol có đỉnh $I\,(3;9)$ và có trục đối xứng song song với trục tung. Khoảng thời gian còn lại, đồ thị vận tốc là một đường thẳng có hệ số góc bằng $\dfrac{1}{4}$. Tính quảng đường s mà vật di chuyển được trong 6 giờ? (đơn vị tính bằng km, làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất).



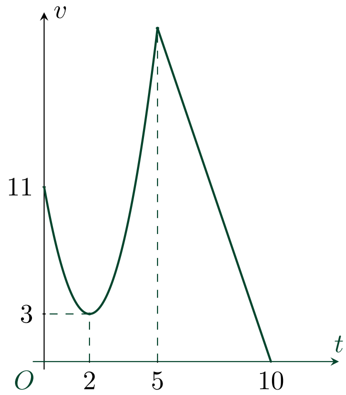
KQ:

CÂU 24. Một vật chuyển động trong 4 giờ với vận tốc v (km/h) phụ thuộc thời gian t (h) có đồ thị là một phần của đường parabol có đỉnh $I\,(1;1)$ và trục đối xứng song song với trục tung như hình bên. Tính quãng đường s mà vật di chuyển được trong 4 giờ kể từ lúc xuất phát (làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất).



KQ:

CÂU 25. Chất điểm chuyển động theo quy luật vận tốc $v\,(t)$ (m/s) có dạng đường Parapol khi $0 \le t \le 5$ (s) và $v\,(t)$ có dạng đường thẳng khi $5 \le t \le 10$ (s). Cho đỉnh Parapol là $I\,(2;3)$. Hỏi quãng đường đi được chất điểm trong thời gian $0 \le t \le 10$ (s) là bao nhiêu mét? (làm tròn đến hàng đơn vị)



KQ: | | | |

QUICK NOTE

C. TÍCH PHÂN HÀM ẨN BIẾN ĐỔI PHỨC TẠP

Phần I. Mỗi câu hỏi học sinh chọn một trong bốn phương án A, B, C, D.

CÂU 1. Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị không âm và có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f'(x) = (2x+1)[f(x)]^2, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = -1$. Giá trị của tích phân $\int\limits_0^1 \left(x^3 - 1\right) f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

(A) 1. (B) $\frac{2}{3}$. (C) $\frac{1}{2}$. (D) $\frac{3}{2}$.

CÂU 2. Cho hàm số $f(x) \neq 0$, liên tục trên đoạn $[1;2]$ và thỏa mãn $f(1) = \frac{1}{3}$; $x^2 \cdot f'(x) = f^2(x)$ với $\forall x \in [1;2]$. Tính tích phân $I = \int\limits_1^2 (2x+1)^2 f(x)\,\mathrm{d}x$.

(A) $I = \frac{7}{6}$. (B) $I = \frac{5}{6}$. (C) $I = \frac{37}{6}$. (D) $I = \frac{1}{6}$.

CÂU 3. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $3f'(x) \cdot \mathrm{e}^{f^3(x)} - \frac{2x}{f^2(x)} = 0$ với $\forall x \in \mathbb{R}$. Biết $f(1) = 0$, tính tích phân $I = \int\limits_0^{2024} \frac{1}{\sqrt[3]{2\ln x}} \cdot f(x)\,\mathrm{d}x$.

(A) 1. (B) $\frac{1}{2024}$. (C) 2024. (D) 0.

CÂU 4. Cho hàm số $f(x)$ đồng biến, có đạo hàm trên đoạn $[1;4]$ và thoả mãn $x + 2x \cdot f(x) = [f'(x)]^2$ với $\forall x \in [1;4]$. Biết $f(1) = \frac{3}{2}$, tính $I = \int\limits_1^4 f(x)\,\mathrm{d}x$.

(A) $I = \frac{1186}{45}$. (B) $I = \frac{1186}{9}$. (C) $I = \frac{1186}{5}$. (D) $I = \frac{1186}{41}$.

CÂU 5. Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị dương và thỏa mãn $f(0) = 1$, $[f'(x)]^3 = \mathrm{e}^x\,[f(x)]^2, \forall x \in \mathbb{R}$. Tính $I = \int\limits_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x$.

(A) $I = \mathrm{e}^2 + 1$. (B) $I = \mathrm{e} - 1$. (C) $I = \mathrm{e}^2 - e$. (D) $I = \mathrm{e}$.

CÂU 6. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn điều kiện $x^6[f'(x)]^3 + 27[f(x)-1]^4 = 0, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(1) = 0$. Tính $I = \int\limits_2^3 f(x)\,\mathrm{d}x$.

(A) $I = \frac{31}{2}$. (B) $I = -\frac{31}{2}$. (C) $I = \frac{61}{4}$. (D) $I = -\frac{61}{4}$.

CÂU 7. Cho hàm số $f(x) > 0$ và thỏa mãn $[f'(x)]^2 + f(x) \cdot f''(x) = \mathrm{e}^x$, $\forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = f'(0) = 1$. Tính $I = \int\limits_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x$.

QUICK NOTE

A $I = 2\sqrt{e}$. **B** $I = e - \sqrt{e}$. **C** $I = 2e - 2\sqrt{e}$. **D** $I = 2e + 2\sqrt{e}$.

CÂU 8. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $[f'(x)]^2 + f(x)\cdot f''(x) = 2x$, và $f(0) = f'(0) = 2$. Tính $I = \displaystyle\int_1^2 f^2(x)\,dx$.

A $I = \dfrac{15}{2}$. **B** $I = \dfrac{1}{2}$. **C** $I = \dfrac{19}{2}$. **D** $I = 15$.

CÂU 9. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn: $[f'(x)]^2 + f(x)\cdot f''(x) = 15x^4 + 12x$, $\forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = f'(0) = 1$. Giá trị của $f^2(1)$ bằng

A $\dfrac{5}{2}$. **B** 8. **C** 10. **D** 4.

CÂU 10. Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn $[f'(x)]^2 + f(x)\cdot f''(x) = x^3 - 2x$, $\forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = f'(0) = 2$. Tính giá trị của $T = f^2(2)$.

A $\dfrac{160}{15}$. **B** $\dfrac{268}{15}$. **C** $\dfrac{4}{15}$. **D** $\dfrac{268}{30}$.

CÂU 11. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(x) + f'(x) = e^{-x}$, $\forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = 2$. Tính $I = \displaystyle\int_1^2 \frac{f(x)e^x}{x}\,dx$.

A $I = 2\ln 2$. **B** $I = \ln 2$. **C** $I = 1 + \ln 2$. **D** $I = 1 + 2\ln 2$.

CÂU 12. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $(x+2)\,f(x) + (x+1)\,f'(x) = e^x$ và $f(0) = \dfrac{1}{2}$. Tính $I = \displaystyle\int_1^2 (2x+2)\,f(x)\,dx$.

A $I = e^2$. **B** $I = 1 + e$. **C** $I = 1 + e^2$. **D** $I = e^2 - e$.

CÂU 13. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục, có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện $f(x) + x\,[f'(x) - 2\sin x] = x^2\cos x$, $x \in \mathbb{R}$ và $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{\pi}{2}$. Tính $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(x)}{x}\,dx$.

A $I = 1$. **B** $I = \dfrac{\pi}{2}$. **C** $I = -1$. **D** $I = -\pi$.

CÂU 14. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $(0; +\infty)$ thỏa mãn $2xf'(x) + f(x) = 2x$, $\forall x \in (0; +\infty)$, $f(1) = 1$. Giá trị của biểu thức $f(4)$ là

A $\dfrac{25}{6}$. **B** $\dfrac{25}{3}$. **C** $\dfrac{17}{6}$. **D** $\dfrac{17}{3}$.

CÂU 15. Cho hàm số $f(x)$ không âm, có đạo hàm trên đoạn $[0; 1]$ và thỏa mãn $f(1) = 1$, $\left[2f(x) + 1 - x^2\right] f'(x) = 2x\,[1 + f(x)]$, $\forall x \in [0; 1]$. Tích phân $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$ bằng

A 1. **B** 2. **C** $\dfrac{1}{3}$. **D** $\dfrac{3}{2}$.

CÂU 16. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0; 1]$, thỏa mãn $[f'(x)]^2 + 4f(x) = 8x^2 + 4$, $\forall x \in [0; 1]$ và $f(1) = 2$. Tính $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$.

A $\dfrac{1}{3}$. **B** 2. **C** $\dfrac{4}{3}$. **D** $\dfrac{21}{4}$.

CÂU 17. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0; 1]$ thỏa mãn $3f(x) + xf'(x) \geq x^{2018}$, $\forall x \in [0; 1]$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$.

A $\dfrac{1}{2018\cdot 2020}$. **B** $\dfrac{1}{2019\cdot 2020}$. **C** $\dfrac{1}{2020\cdot 2021}$. **D** $\dfrac{1}{2019\cdot 2021}$.

CÂU 18. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn

$$\begin{cases} f(0) = f'(0) = 1 \\ f(x+y) = f(x) + f(y) + 3xy(x+y) - 1 \end{cases} \text{ với } x, y \in \mathbb{R}$$

Tính $\int\limits_0^1 f(x-1)\,\mathrm{d}x$.

(A) $\frac{1}{2}$. (B) $-\frac{1}{4}$. (C) $\frac{1}{4}$. (D) $\frac{7}{4}$.

CÂU 19. Cho hai hàm $f(x)$ và $g(x)$ có đạo hàm trên $[1;4]$, thỏa mãn $\begin{cases} f(1)+g(1)=4 \\ g(x)=-xf'(x) \\ f(x)=-xg'(x) \end{cases}$, với mọi $x\in[1;4]$. Tính tích phân $I=\int\limits_1^4 [f(x)+g(x)]\,\mathrm{d}x$.

(A) $3\ln 2$. (B) $4\ln 2$. (C) $6\ln 2$. (D) $8\ln 2$.

CÂU 20. Cho hai hàm $f(x)$ và $g(x)$ có đạo hàm trên $[1;2]$ thỏa mãn $f(1)=g(1)=0$ và $\begin{cases} \dfrac{x}{(x+1)^2}g(x)+2023x=(x+1)f'(x) \\ \dfrac{x^3}{x+1}g'(x)+f(x)=2024x^2 \end{cases}, \forall x\in[1;2]$.

Tính tích phân $I=\int\limits_1^2 \left[\frac{x}{x+1}g(x)-\frac{x+1}{x}f(x)\right]\mathrm{d}x$.

(A) $I=\frac{1}{2}$. (B) $I=1$. (C) $I=\frac{3}{2}$. (D) $I=2$.

CÂU 21. Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ thỏa mãn $x^2f^2(x)+(2x-1)f(x)=xf'(x)-1$, với mọi $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ đồng thời thỏa mãn $f(1)=-2$. Tính $\int\limits_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x$.

(A) $-\frac{\ln 2}{2}-1$. (B) $-\ln 2-\frac{1}{2}$. (C) $-\ln 2-\frac{3}{2}$. (D) $-\frac{\ln 2}{2}-\frac{3}{2}$.

CÂU 22. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $x\cdot f(x)\cdot f'(x)=f^2(x)-x$, $\forall x\in\mathbb{R}$ và có $f(2)=1$. Tích phân $\int\limits_0^2 f^2(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

(A) $\frac{3}{2}$. (B) $\frac{4}{3}$. (C) 2. (D) 4.

CÂU 23. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, $f(0)=0$, $f'(0)\neq 0$ và thỏa mãn hệ thức $f(x)\cdot f'(x)+18x^2=\left(3x^2+x\right)f'(x)+(6x+1)f(x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Biết $\int\limits_0^1 (x+1)\,\mathrm{e}^{f(x)}\,\mathrm{d}x=a\mathrm{e}^2+b$, $(a,b\in\mathbb{Q})$. Giá trị của $a-b$ bằng

(A) 1. (B) 2. (C) 0. (D) $\frac{2}{3}$.

CÂU 24. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $[1;3]$; $f(x)\neq 0$, $\forall x\in[1;3]$; $f'(x)[1+f(x)]^2=(x-1)^2[f(x)]^4$ và $f(1)=-1$. Biết rằng $\int\limits_{\mathrm{e}}^3 f(x)\,\mathrm{d}x=a\ln 3+b$ $(a,b\in\mathbb{Z})$. Giá trị của $a+b^2$ bằng

(A) 4. (B) 0. (C) 2. (D) -1.

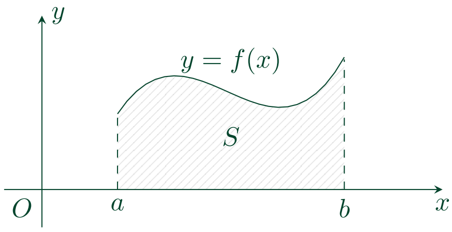
QUICK NOTE

LỜI GIẢI CHI TIẾT

Bài 2. TÍCH PHÂN

A. LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1. Diện tích hình thang cong



Nếu hàm số $f(x)$ liên tục và không âm trên đoạn $[a;b]$ thì diện tích S của hình thang cong giới hạn bởi đồ thị $y=f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=a$, $x=b$ được tính bởi: $S=F(b)-F(a)$ trong đó $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên đoạn $[a;b]$.

2. Khái niệm tích phân

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Nếu $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a;b]$ thì hiệu số $F(b)-F(a)$ được gọi là tích phân từ a đến b của hàm số $f(x)$, kí hiệu $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

Chú ý:

- *Hiệu số $F(b)-F(a)$ còn được kí hiệu là $F(x)\big|_a^b$.*

  Vậy $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(x)\big|_a^b = F(b)-F(a)$.

- *Ta gọi $\int\limits_a^b$ là dấu tích phân, a là cận dưới, b là cận trên, $f(x)\mathrm{d}x$ là biểu thức dưới dấu tích phân và $f(x)$ là hàm số dưới dấu tích phân.*

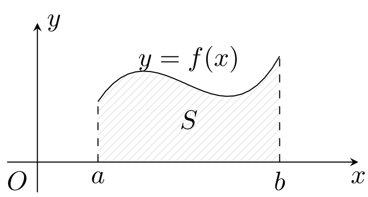
- *Quy ước: $\int\limits_a^a f(x)\mathrm{d}x=0$; $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x=-\int\limits_b^a f(x)\mathrm{d}x$.*

- *Tích phân của hàm số f từ a đến b chỉ phụ thuộc vào f và các cận a, b mà không phụ thuộc vào biến x hay t, nghĩa là $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_a^b f(t)\mathrm{d}t$.*

- *Ý nghĩa hình học của tích phân.*

  Nếu hàm số $f(x)$ liên tục và không âm trên đoạn $[a;b]$ thì $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$ là diện tích S của hình thang cong giới hạn bởi đồ thị $y=f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=a$, $x=b$.

  $$S=\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$



NHẬN XÉT. Nếu hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ và $f'(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ thì

$$f(b)-f(a)=\int\limits_a^b f'(x)\mathrm{d}x.$$

- Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Khi đó $\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$ được gọi là giá trị trung bình của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a;b]$.
- Đạo hàm của quãng đường di chuyển của vật theo thời gian bằng tốc độ của chuyển động tại mọi thời điểm $v(t)=s'(t)$. Do đó, nếu biết tốc độ $v(t)$ tại mọi thời điểm $t\in[a;b]$ thì tính được quãng đường di chuyển trong khoảng thời gian từ a đến b theo công thức: $s=s(b)-s(a)=\displaystyle\int\limits_a^b v(t)\mathrm{d}t$.

3. Tính chất của tích phân

Cho hai hàm số $f(x)$, $g(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Khi đó:

a) $\displaystyle\int\limits_a^b kf(x)\mathrm{d}x = k\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$, với k là hằng số.

b) $\displaystyle\int\limits_a^b [f(x)\pm g(x)]\,\mathrm{d}x=\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\pm\int\limits_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

c) $\displaystyle\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x+\int\limits_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$ với $c\in(a;b)$.

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1. Tính chất của tích phân

Phần I. Mỗi câu hỏi học sinh chọn một trong bốn phương án A, B, C, D.

CÂU 1. Nếu $\displaystyle\int\limits_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x=6$ thì $\displaystyle\int\limits_0^3\left[\frac{1}{3}f(x)+2\right]\mathrm{d}x$ bằng

(A) 8. (B) 5. (C) 9. (D) 6.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int\limits_0^3\left[\frac{1}{3}f(x)+2\right]\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\int\limits_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x+\int\limits_0^3 2\,\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\cdot 6+6=8$.

Chọn đáp án (A) .... □

CÂU 2. Nếu $\int_1^4 f(x)\,\mathrm{d}x=3$ và $\int_1^4 g(x)\,\mathrm{d}x=-2$ thì $\int_1^4 (f(x)-g(x))\,\mathrm{d}x$ bằng

(A) -1. (B) -5. (C) 5. (D) 1.

Lời giải.

Ta có $\int_1^4 [f(x)-g(x)]\,\mathrm{d}x=\int_1^4 f(x)\,\mathrm{d}x-\int_1^4 g(x)\,\mathrm{d}x=3-(-2)=5$.

Chọn đáp án (C) .... □

CÂU 3. Nếu $\displaystyle\int\limits_1^4 f(x)\,\mathrm{d}x=5$ và $\displaystyle\int\limits_1^4 g(x)\,\mathrm{d}x=-4$ thì $\displaystyle\int\limits_1^4 [f(x)-g(x)]\,\mathrm{d}x$ bằng

(A) -1. (B) -9. (C) 1. (D) 9.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int\limits_1^4 [f(x)-g(x)]\,\mathrm{d}x=\int\limits_1^4 f(x)\,\mathrm{d}x-\int\limits_1^4 g(x)\,\mathrm{d}x=5-(-4)=9$.

Chọn đáp án (D) .... □

CÂU 4. Biết $\displaystyle\int\limits_1^{2024} f(x)\,\mathrm{d}x=-3$ và $\displaystyle\int\limits_{2024}^1 g(x)\,\mathrm{d}x=2$. Khi đó $\displaystyle\int\limits_1^{2024}[f(x)-g(x)]\,\mathrm{d}x$ bằng

Ⓐ 6. Ⓑ -5. Ⓒ 5. Ⓓ -1.

Lời giải.

Ta có $\int\limits_{2024}^{1} g(x)\,\mathrm{d}x = 2 \Leftrightarrow \int\limits_{1}^{2024} g(x)\,\mathrm{d}x = -2$.

Do đó $\int\limits_{1}^{2024} [f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x = \int\limits_{1}^{2024} f(x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_{1}^{2024} g(x)\,\mathrm{d}x = -3 - (-2) = -1$.

Chọn đáp án D ☐

CÂU 5. Nếu $\int\limits_{0}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x = 3$ thì $\int\limits_{0}^{3} 4f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

Ⓐ 3. Ⓑ 12. Ⓒ 36. Ⓓ 4.

Lời giải.

Ta có $\int\limits_{0}^{3} 4f(x)\,\mathrm{d}x = 4\int\limits_{0}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x = 4 \cdot 3 = 12$.

Chọn đáp án B ☐

CÂU 6. Cho $\int\limits_{0}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2024}$. Tính $I = \int\limits_{0}^{2} 2024f(x)\,\mathrm{d}x$.

Ⓐ $I = 5$. Ⓑ $I = \dfrac{1}{2024}$. Ⓒ $I = 1$. Ⓓ $I = 2024$.

Lời giải.

Ta có $I = \int\limits_{0}^{2} 2024f(x)\,\mathrm{d}x = 2024\int\limits_{0}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x = 2024 \cdot \dfrac{1}{2024} = 1$.

Chọn đáp án C ☐

CÂU 7. Nếu $\int\limits_{0}^{5} f(x)\,\mathrm{d}x = 5$ thì $\int\limits_{5}^{0} 5f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

Ⓐ 1. Ⓑ -1. Ⓒ 25. Ⓓ -25.

Lời giải.

Ta có $\int\limits_{5}^{0} 5f(x)\,\mathrm{d}x = 5\int\limits_{5}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x = -5 \cdot \int\limits_{0}^{5} f(x)\,\mathrm{d}x = (-5) \cdot 5 = -25$.

Chọn đáp án D ☐

CÂU 8. Nếu $\int\limits_{0}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x = 5$ thì $\int\limits_{0}^{2} [2f(x) - 1]\,\mathrm{d}x$ bằng

Ⓐ 8. Ⓑ 9. Ⓒ 10. Ⓓ 12.

Lời giải.

Ta có $\int_0^2 [2f(x) - 1]\,\mathrm{d}x = 2\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^2 1\,\mathrm{d}x = 2 \cdot 5 - 2 = 8$.

Chọn đáp án A ☐

CÂU 9. Nếu $\int_0^2 f(x)dx = 3$ thì $\int_0^2 [2f(x) - 1]\,\mathrm{d}x$ bằng

Ⓐ 6. Ⓑ 4. Ⓒ 8. Ⓓ 5.

Lời giải.

Ta có $\int_0^2 [2f(x) - 1]\,\mathrm{d}x = 2\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^2 \mathrm{d}x = 2 \cdot 3 - 2 = 4$.

Chọn đáp án B ☐

CÂU 10. Cho $\int\limits_{0}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = 2$ và $\int\limits_{0}^{1} g(x)\,\mathrm{d}x = 5$, khi $\int\limits_{0}^{1} [f(x) - 2g(x)]\,\mathrm{d}x$ bằng

Ⓐ -8. Ⓑ 1. Ⓒ -3. Ⓓ 12.

Lời giải.

Ta có $\int\limits_0^1 [f(x) - 2g(x)]\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x - 2\int\limits_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x = 2 - 2\cdot 5 = -8.$

Chọn đáp án (A) ☐

CÂU 11. Cho $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x = 5$. Tính $I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} [f(x) + 2\sin x]\,\mathrm{d}x$.

(A) $I = 7$. (B) $I = 5 + \dfrac{\pi}{2}$. (C) $I = 3$. (D) $I = 5 + \pi$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} I &= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} [f(x) + 2\sin x]\,\mathrm{d}x \\ &= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x + 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,\mathrm{d}x \\ &= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x - 2\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= 5 - 2(0-1) = 7. \end{aligned}$$

Chọn đáp án (A) ☐

CÂU 12. Cho $\int\limits_1^2 [4f(x) - 2x]\,\mathrm{d}x = 1$. Khi đó $\int\limits_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

(A) 1. (B) -3. (C) 3. (D) -1.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} & \int\limits_1^2 [4f(x) - 2x]\,\mathrm{d}x = 1 \\ \Leftrightarrow\ & 4\int\limits_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x - 2\int\limits_1^2 x\,\mathrm{d}x = 1 \\ \Leftrightarrow\ & 4\int\limits_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x - 2\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_1^2 = 1 \\ \Leftrightarrow\ & 4\int\limits_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 4 \\ \Leftrightarrow\ & \int\limits_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 1. \end{aligned}$$

Chọn đáp án (A) ☐

Phần II. Trong mỗi ý a), b), c) và d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.

CÂU 13. Cho hai hàm f, g liên tục trên K và a, b là các số bất kỳ thuộc K.

Mệnh đề	Đ	S
a) $\int\limits_a^b [f(x) + 2g(x)]\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + 2\int\limits_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.	X	

Mệnh đề	Đ	S
b) $\displaystyle\int\limits_a^b \frac{f(x)}{g(x)}\,\mathrm{d}x = \frac{\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}{\int\limits_a^b g(x)\,\mathrm{d}x}$.		X
c) $\displaystyle\int\limits_a^b [f(x)\cdot g(x)]\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \int\limits_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.		X
d) $\displaystyle\int\limits_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x = \left[\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right]^2$.		X

Lời giải.

a) Đúng. Theo tính chất tích phân ta có $\displaystyle\int\limits_a^b [f(x)+g(x)]\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$; $\displaystyle\int\limits_a^b kf(x)\,\mathrm{d}x = k\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, với $k \in \mathbb{R}$.

b) Sai. Cho $a=1, b=2$ và $f(x)=x+1, g(x)=x$. Khi đó

$$VT = \int\limits_1^2 \frac{x+1}{x}\,\mathrm{d}x == \int\limits_1^2 \left(1+\frac{1}{x}\right)\,\mathrm{d}x = (x+\ln x)\Big|_1^2 = 1+\ln 2.$$

và

$$VP = \frac{\int\limits_1^2 (x+1)\,\mathrm{d}x}{\int\limits_1^2 x\,\mathrm{d}x} = \frac{\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\Big|_1^2}{\frac{x^2}{2}\Big|_1^2} = \frac{1}{3}.$$

Do đó $VT \neq VP$.

c) Sai. Cho $a=1, b=2$ và $f(x)=x, g(x)=\frac{1}{x}$. Khi đó

$$VT = \int\limits_1^2 \left[x\cdot\frac{1}{x}\right]\,\mathrm{d}x = x\Big|_1^2 = 1.$$

và

$$VP = \int\limits_1^2 x\,\mathrm{d}x \cdot \int\limits_1^2 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \left(\frac{x^2}{2}\right)\Big|_1^2 \cdot \ln x\Big|_1^2 = \frac{3}{2}\ln 2.$$

Do đó $VT \neq VP$.

d) Sai. Cho $a=1, b=2$ và $f(x)=x$. Khi đó

$$VT = \int\limits_1^2 x^2\,\mathrm{d}x = \left(\frac{x^3}{3}\right)\Big|_1^2 = \frac{7}{3}.$$

và

$$VP = \left(\int\limits_1^2 x\,\mathrm{d}x\right)^2 = \left(\frac{x^2}{2}\Big|_1^2\right)^2 = \frac{9}{4}.$$

Do đó $VT \neq VP$.

Chọn đáp án | a đúng | b sai | c sai | d sai | .... □

CÂU 14. Cho hàm số $f(x), g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Mệnh đề	Đ	S
a) Nếu $\int\limits_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 4$ thì $\int\limits_0^2 \left[\frac{1}{2}f(x)+2\right]\mathrm{d}x = 6$.	X	
b) Nếu $\int\limits_2^5 f(x)\,\mathrm{d}x = 3$ và $\int\limits_2^5 g(x)\,\mathrm{d}x = -2$ thì $\int\limits_2^5 [f(x)+g(x)]\,\mathrm{d}x = 1$.	X	
c) Nếu $\int\limits_1^4 f(x)\,\mathrm{d}x = 6$ và $\int\limits_1^4 g(x)\,\mathrm{d}x = -5$ thì $\int\limits_1^4 [f(x)-g(x)]\,\mathrm{d}x = 1$.		X
d) Nếu $\int\limits_2^3 f(x)\,\mathrm{d}x = 4$ và $\int\limits_2^3 g(x)\,\mathrm{d}x = 1$ thì $\int\limits_2^3 [f(x)-g(x)]\,\mathrm{d}x = 3$.	X	

Lời giải.

a) Đúng. Ta có $\int\limits_0^2 \left[\frac{1}{2}f(x)+2\right]\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int\limits_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_0^2 2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\cdot 4 + 4 = 6$.

b) Đúng. Ta có $\int\limits_2^5 [f(x)+g(x)]\,\mathrm{d}x = \int\limits_2^5 f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_2^5 g(x)\,\mathrm{d}x = 3+(-2) = 1$.

c) Sai. Ta có $\int\limits_1^4 [f(x)-g(x)]\,\mathrm{d}x = \int\limits_1^4 f(x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_1^4 g(x)\,\mathrm{d}x = 6-(-5) = 11$.

d) Đúng. Ta có $\int\limits_2^3 [f(x)-g(x)]\,\mathrm{d}x = \int\limits_2^3 f(x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_2^3 g(x)\,\mathrm{d}x = 4-1 = 3$.

Chọn đáp án | a đúng | b đúng | c sai | d đúng | .... □

CÂU 15. Cho hàm số $f(x), g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Mệnh đề	Đ	S
a) Biết $\int\limits_2^3 f(x)\,\mathrm{d}x = 3$ và $\int\limits_3^2 g(x)\,\mathrm{d}x = 1$. Khi đó $\int\limits_2^3 [f(x)+g(x)]\,\mathrm{d}x = 4$.		X
b) Biết $\int\limits_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x = 2022$ và $\int\limits_3^1 g(x)\,\mathrm{d}x = 1$. Khi đó $\int\limits_1^3 [f(x)+g(x)]\,\mathrm{d}x = 2021$.	X	
c) Biết $\int\limits_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 3$ và $\int\limits_1^2 g(x)\,\mathrm{d}x = 2$. Khi đó $\int\limits_1^2 [f(x)-g(x)]\,\mathrm{d}x = 1$.	X	
d) Biết $\int\limits_2^5 f(x)\,\mathrm{d}x = 2$. Khi đó $\int\limits_2^5 3f(x)\,\mathrm{d}x = 2$.		X

Lời giải.

a) Sai. Ta có $\int\limits_2^3 [f(x)+g(x)]\,\mathrm{d}x = \int\limits_2^3 f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_2^3 g(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_2^3 f(x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_3^2 g(x)\,\mathrm{d}x = 2$.

b) Đúng. Ta có $\int\limits_3^1 g(x)\,\mathrm{d}x = 1 \Leftrightarrow \int\limits_1^3 g(x)\,\mathrm{d}x = -1$. Do đó

$$\int\limits_1^3 [f(x)+g(x)]\,\mathrm{d}x = \int\limits_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_1^3 g(x)\,\mathrm{d}x = 2022+(-1) = 2021.$$

c) Đúng. Ta có $\int\limits_1^2 [f(x)-g(x)]\,dx = \int\limits_1^2 f(x)\,dx - \int\limits_1^2 g(x)\,dx = 3-2=1$.

d) Sai. Ta có $\int\limits_2^5 3f(x)\,dx = 3\int\limits_2^5 f(x)\,dx = 3\cdot 2 = 6$.

Chọn đáp án | a sai | b đúng | c đúng | d sai | ☐

CÂU 16. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Mệnh đề	Đ	S
a) Nếu $\int\limits_0^3 f(x)\,dx = 3$ thì $\int\limits_0^3 2f(x)\,dx = 6$.	X	
b) Nếu $\int\limits_1^4 f(x)\,dx = 2024$ thì $\int\limits_4^1 f(x)\,dx = -2024$.	X	
c) Nếu $\int\limits_6^0 f(x)\,dx = 12$ thì $\int\limits_0^6 2022f(x)\,dx = 24264$.		X
d) Nếu $\int\limits_0^1 f(x)\,dx = 4$ thì $\int\limits_0^1 2f(x)\,dx = 8$.	X	

Lời giải.

a) Đúng. Ta có $\int\limits_0^3 2f(x)\,dx = 2\int\limits_0^3 f(x)\,dx = 2\cdot 3 = 6$.

b) Đúng. Ta có $\int\limits_4^1 f(x)\,dx = -\int\limits_1^4 f(x)\,dx = -2024$.

c) Sai. Ta có $\int\limits_0^6 2022f(x)\,dx = 2022\int\limits_0^6 f(x)\,dx = 2022\cdot(-12) = -24264$.

d) Đúng. Ta có $\int\limits_0^1 2f(x)\,dx = 2\int\limits_0^1 f(x)\,dx = 2\cdot 4 = 8$.

Chọn đáp án | a đúng | b đúng | c sai | d đúng | ☐

Phần III. Học sinh điền kết quả vào ô trống.

CÂU 17. Cho $\int\limits_0^3 f(x)\,dx = 4$. Tính $I = \int\limits_0^3 3f(x)\,dx$.

Đáp án: 12

Lời giải.

Ta có $\int\limits_0^3 3f(x)dx = 3\int\limits_0^3 f(x)dx = 12$.

CÂU 18. Cho $\int\limits_1^3 f(x)\,dx = 2$. Tính $I = \int\limits_1^3 [f(x)+2x]\,dx$.

Đáp án: 10

Lời giải.

Ta có: $\int\limits_1^3 [f(x)+2x]\,dx = \int\limits_1^3 f(x)\,dx + \int\limits_1^3 2x\,dx = 2 + x^2\Big|_1^3 = 2+3^2-1^2 = 10$.

CÂU 19. Cho $\int\limits_{-1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x = 2$ và $\int\limits_{-1}^{2} g(x)\,\mathrm{d}x = -1$. Tính $I = \int\limits_{-1}^{2} [x + 2f(x) + 3g(x)]\,\mathrm{d}x$.

Đáp án: 2,5

Lời giải.

Ta có $\int\limits_{-1}^{2} [x + 2f(x) + 3g(x)]\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-1}^{2} x\,\mathrm{d}x + 2\int\limits_{-1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x + 3\int\limits_{-1}^{2} g(x)\,\mathrm{d}x = \frac{3}{2} + 4 - 3 = \frac{5}{2} = 2.5$.

CÂU 20. Cho $\int\limits_{0}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$. Tính tích phân $I = \int\limits_{0}^{1} \left[2f(x) - 3x^2\right]\,\mathrm{d}x$.

Đáp án: 1

Lời giải.

$\int\limits_{0}^{1} \left[2f(x) - 3x^2\right]\,\mathrm{d}x = 2\int\limits_{0}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x - 3\int\limits_{0}^{1} x^2\,\mathrm{d}x = 2 - 1 = 1$.

CÂU 21. Biết $\int\limits_{1}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x = 3$. Tính giá trị của $I = \int\limits_{3}^{1} 2f(x)\,\mathrm{d}x$.

Đáp án: -6

Lời giải.

Ta có $\int\limits_{3}^{1} 2f(x)\,\mathrm{d}x = -\int\limits_{1}^{3} 2f(x)\,\mathrm{d}x = -2\int\limits_{1}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x = -2\cdot 3 = -6$.

Dạng 2. Tích phân hàm số sơ cấp

Phần I. Mỗi câu hỏi học sinh chọn một trong bốn phương án A, B, C, D.

CÂU 1. Tích phân $I = \int\limits_{0}^{2} (2x+1)\,\mathrm{d}x$ bằng

(A) $I = 5$. (B) $I = 6$. (C) $I = 2$. (D) $I = 4$.

Lời giải.

Ta có $I = \int\limits_{0}^{2} (2x+1)\,\mathrm{d}x = \left(x^2 + x\right)\Big|_0^2 = 4 + 2 = 6$.

Chọn đáp án (B) ....

CÂU 2. Tích phân $\int\limits_{0}^{1} (3x+1)(x+3)\,\mathrm{d}x$ bằng

(A) 12. (B) 9. (C) 5. (D) 6.

Lời giải.

Ta có $\int\limits_{0}^{1} (3x+1)(x+3)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{0}^{1} \left(3x^2 + 10x + 3\right)\,\mathrm{d}x = \left(x^3 + 5x^2 + 3x\right)\Big|_0^1 = 9$.

Vậy $\int\limits_{0}^{1} (3x+1)(x+3)\,\mathrm{d}x = 9$.

Chọn đáp án (B) ....

CÂU 3. Tính tích phân $I = \int\limits_{1}^{\mathrm{e}} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x$

(A) $I = \frac{1}{\mathrm{e}}$. (B) $I = \frac{1}{\mathrm{e}} + 1$. (C) $I = 1$. (D) $I = \mathrm{e}$.

Lời giải.

$I=\int\limits_1^{e}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x=\left(\ln|x|+\frac{1}{x}\right)\Big|_1^{e}=\frac{1}{e}.$

Chọn đáp án (A) .... □

CÂU 4. Biết $\int\limits_1^3 \frac{x+2}{x}\,\mathrm{d}x=a+b\ln c$, với $a,\ b,\ c\in\mathbb{Z}$, $c<9$. Tính tổng $S=a+b+c$.

(A) $S=7$. (B) $S=5$. (C) $S=8$. (D) $S=6$.

Lời giải.

Ta có $\int\limits_1^3 \frac{x+2}{x}\,\mathrm{d}x=\int\limits_1^3\left(1+\frac{2}{x}\right)\mathrm{d}x=\int\limits_1^3\mathrm{d}x+\int\limits_1^3\frac{2}{x}\mathrm{d}x=2+2\ln|x|\,\Big|_1^3=2+2\ln 3.$

Do đó $a=2,\ b=2,\ c=3\Rightarrow S=7$.

Chọn đáp án (A) .... □

CÂU 5. Tích phân $\int\limits_0^1 e^{3x+1}\,\mathrm{d}x$ bằng

(A) $\frac{1}{3}\left(e^4+e\right)$. (B) e^3-e. (C) $\frac{1}{3}\left(e^4-e\right)$. (D) e^4-e.

Lời giải.

$\int\limits_0^1 e^{3x+1}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\int\limits_0^1 e^{3x+1}\,\mathrm{d}\left(3x+1\right)=\frac{1}{3}e^{3x+1}\Big|_0^1=\frac{1}{3}\left(e^4-e\right).$

Chọn đáp án (C) .... □

CÂU 6. Biết $\int\limits_0^1 \frac{e^x}{2^x}\,\mathrm{d}x=\frac{e-1}{a-\ln b}$, $(a,b\in\mathbb{Z})$. Khi đó giá trị của $P=a+b$ là

(A) $P=-3$. (B) $P=6$. (C) $P=-1$. (D) $P=3$.

Lời giải.

$I=\int\limits_0^1\frac{e^x}{2^x}\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^1\left(\frac{e}{2}\right)^x\mathrm{d}x=\left[\left(\frac{e}{2}\right)^x\cdot\frac{1}{1-\ln 2}\right]\Big|_0^1=\frac{e-1}{2-\ln 4}.$

Chọn đáp án (B) .... □

CÂU 7. Giá trị của $I=\int\limits_0^1\frac{e^{2x}-4}{e^x+2}\,\mathrm{d}x$ bằng

(A) $I=2\left(e+3\right)$. (B) $I=\frac{1}{2}\left(e+3\right)$. (C) $I=e-3$. (D) $I=2\left(e-3\right)$.

Lời giải.

$I=\int\limits_0^1\frac{e^{2x}-4}{e^x+2}\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^1\frac{\left(e^x-2\right)\left(e^x+2\right)}{e^x+2}\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^1\left(e^x-2\right)\mathrm{d}x=\left(e^x-2x\right)\Big|_0^1=e-3.$

Chọn đáp án (C) .... □

CÂU 8. Biết $\int\limits_1^2 e^x\left(1-\frac{e^{-x}}{x}\right)\mathrm{d}x=e^2+a\cdot e+b\ln 2$, $(a,b\in\mathbb{Z})$. Khi đó giá trị của $P=\frac{a+b}{a\cdot b}$ là

(A) $P=-3$. (B) $P=1$. (C) $P=-1$. (D) $P=-2$.

Lời giải.

$I=\int\limits_1^2 e^x\left(1-\frac{e^{-x}}{x}\right)\mathrm{d}x=\int\limits_1^2\left(e^x-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x=\left(e^x-\ln|x|\right)\Big|_1^2=e^2-e-\ln 2.$

Chọn đáp án (D) .... □

CÂU 9. Biết $I=\int\limits_0^1\frac{e^{2x-1}-e^{-3x}+1}{e^x}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{a}+b$, $(a,b\in\mathbb{R})$. Khi đó giá trị của $P=\frac{a+b}{a\cdot b}$ là

(A) $P=e^4-1$. (B) $P=\frac{e^4-1}{e^2}$. (C) $P=\frac{e^4-1}{e^4}$. (D) $P=\frac{1-e^4}{e^4}$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \frac{e^{2x-1} - e^{-3x} + 1}{e^x}\,dx = \int_0^1 \left(e^{x-1} - e^{-4x} + e^{-x}\right)\,dx \\ &= \left(e^{x-1} - \frac{e^{-4x}}{-4} + \frac{e^{-x}}{-1}\right)\Big|_0^1 = \frac{1-e^4}{e^4} = \frac{1}{e^4} - 1 \end{aligned}$$

$\Rightarrow P = \dfrac{a+b}{a\cdot b} = \dfrac{1-e^4}{e^4}$.

Chọn đáp án D ☐

CÂU 10. Giá trị của $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx$ bằng

A 0. **B** 1. **C** -1. **D** $\dfrac{\pi}{2}$.

Lời giải.

Tính được $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx = -\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$.

Chọn đáp án B ☐

CÂU 11. Biết $\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} (2\sin x + 3\cos x + x)\,dx = \dfrac{a+b\sqrt{3}}{2} + \dfrac{\pi^2}{c}$, $(a,b,c\in\mathbb{Z})$. Khi đó giá trị của $P = a + 2b + 3c$ là

A $P = 45$. **B** $P = 60$. **C** $P = 65$. **D** $P = 70$.

Lời giải.

$$\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} (2\sin x + 3\cos x + x)\,dx = \left(-2\cos x + 3\sin x + \frac{1}{2}x^2\right)\Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{12-3\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi^2}{18}$$

$\Rightarrow P = a + 2b + 3c = 60$.

Chọn đáp án B ☐

CÂU 12. Biết $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} 3\tan^2 x\,dx = a\sqrt{3} + b + \dfrac{\pi}{c}$, $(a,b,c\in\mathbb{Z})$. Khi đó giá trị của $P = a+b+c$ là

A $P = 6$. **B** $P = -4$. **C** $P = 4$. **D** $P = -6$.

Lời giải.

$$\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} 3\tan^2 x\,dx = 3\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right)dx = 3(\tan x - x)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = 3\sqrt{3} - 3 - \frac{\pi}{4}$$

$\Rightarrow P = a+b+c = 3-3-4 = -4$.

Chọn đáp án B ☐

CÂU 13. Biết $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \left(2\cot^2 x + 5\right)dx = \dfrac{\pi}{a} + b\sqrt{3} + c$, $(a,b,c\in\mathbb{Z})$. Khi đó giá trị của $P = a+b+c$ là

A $P = 6$. **B** $P = -4$. **C** $P = 4$. **D** $P = -6$.

Lời giải.

$$\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \left(2\cot^2 x + 5\right)dx = \int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \left(2\left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1\right) + 5\right)dx$$

$$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \left(3 - \frac{-2}{\sin^2 x}\right) \mathrm{d}x = (3x - \cot x)\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4} + \sqrt{3} - 1.$$

Chọn đáp án C ....

CÂU 14. Biết $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \frac{x}{4} \cos^2 \frac{x}{4} \mathrm{d}x = \frac{\pi}{c} + \frac{a}{b}$ với $a, b \in \mathbb{Z}$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Khi đó giá trị của $P = a + b + c$ là

A $P = 17$. **B** $P = 16$. **C** $P = 32$. **D** $P = 49$.

Lời giải.

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \frac{x}{4} \cos^2 \frac{x}{4} \mathrm{d}x &= \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \frac{x}{2} \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1-\cos x}{2}\right) \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{8}\left(x - \frac{1}{4}\sin x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{16} + \frac{1}{32}.\end{aligned}$$

$\Rightarrow P = a + b + c = 1 + 32 + 16 = 49.$

Chọn đáp án D ....

Phần II. Trong mỗi ý a), b), c) và d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.

CÂU 15. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[a; b]$. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

Mệnh đề	Đ	S
a) $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$.		X
b) $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$.	X	

Mệnh đề	Đ	S
c) $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}(2x)$.		X
d) $\int_a^a 2024 f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.	X	

Lời giải.

a) Sai. Vì $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$.

b) Đúng. Vì $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$.

c) Sai. Vì $2\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}(2x) = 4\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}(x)$.

d) Đúng. $\int_a^a 2024 f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

Chọn đáp án | a sai | b đúng | c sai | d đúng | ....

CÂU 16. Cho hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$ liên tục trên $[a; b]$. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

Mệnh đề	Đ	S

Mệnh đề	Đ	S
a) $\int\limits_a^b [f(x)+g(x)]\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.	X	
b) $\int\limits_a^b f(x)\cdot g(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \cdot \int\limits_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.		X
c) $\int\limits_a^b kf(x)\,\mathrm{d}x = k\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.	X	
d) $\int\limits_a^b \dfrac{f(x)}{g(x)}\,\mathrm{d}x = \dfrac{\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}{\int\limits_a^b g(x)\,\mathrm{d}x}$.		X

Lời giải.

a) Đúng. $\int\limits_a^b [f(x)+g(x)]\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

b) Sai. Vì không có tính chất.

c) Đúng. $\int\limits_a^b kf(x)\,\mathrm{d}x = k\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

d) Sai.

Chọn đáp án | a đúng | b sai | c đúng | d sai | .... □

CÂU 17. Cho hàm $f(x)$ là hàm liên tục trên đoạn $[a;b]$ với $a<b$ và $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm $f(x)$ trên $[a;b]$. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

Mệnh đề	Đ	S
a) $\int\limits_a^b kf(x)\,\mathrm{d}x = k\,[F(b)-F(a)]$.	X	
b) $\int\limits_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = F(b)-F(a)$.		X
c) Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đường thẳng $x=a$; $x=b$; đồ thị của hàm số $y=f(x)$ và trục hoành được tính theo công thức $S=F(b)-F(a)$.		X
d) $\int\limits_a^b f(2x+3)\,\mathrm{d}x = F(2x+3)\big\vert_a^b$.		X

Lời giải.

a) Đúng.

b) Sai. $\int\limits_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = F(a)-F(b)$.

c) Sai. Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đường thẳng $x=a$; $x=b$; đồ thị của hàm số $y=f(x)$ và trục hoành được tính theo công thức $S=|F(b)-F(a)|$.

d) Sai. $\int\limits_a^b f(2x+3)\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}F(2x+3)\big\vert_a^b$

Chọn đáp án | a đúng | b sai | c sai | d sai | .... □

CÂU 18. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai.

Mệnh đề	Đ	S
a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{2x}-4}{e^x+2}\,dx = e-3.$	X	
b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{2^x}\,dx = \frac{e}{2}+1.$		X
c) $\displaystyle\int_1^2 e^x\left(1-\frac{e^{-x}}{x}\right)dx = e^2-e-\ln 2.$	X	
d) $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{2x-1}-e^{-3x}+1}{e^x}\,dx = e^4-1.$		X

Lời giải.

a) Đúng.

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{e^{2x}-4}{e^x+2}\,dx &= \int_0^1 \frac{(e^x-2)(e^x+2)}{e^x+2}\,dx\\ &= \int_0^1 (e^x-2)\,dx = (e^x-2x)\Big|_0^1 = e-3.\end{aligned}$$

b) Sai. $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{2^x}\,dx = \int_0^1 \left(\frac{e}{2}\right)^x dx = \left[\left(\frac{e}{2}\right)^x\right]\Big|_0^1 = \frac{e}{2}-1.$

c) Đúng. $\displaystyle\int_1^2 e^x\left(1-\frac{e^{-x}}{x}\right)dx = \int_1^2 \left(e^x-\frac{1}{x}\right)dx = (e^x-\ln|x|)\Big|_1^2 = e^2-e-\ln 2.$

d) Sai.

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{e^{2x-1}-e^{-3x}+1}{e^x}\,dx &= \int_0^1 \left(e^{x-1}-e^{-4x}+e^{-x}\right)dx\\ &= \left(e^{x-1}-e^{-4x}+e^{-x}\right)\Big|_0^1 = \frac{1-e^4}{e^4} = e^{-4}-1.\end{aligned}$$

Chọn đáp án | a đúng | b sai | c đúng | d sai | ....□

Phần III. Học sinh điền kết quả vào ô trống.

CÂU 19. Với a, b là các tham số thực. Tích phân

$$I = \int_0^b \left(3x^2-2ax-1\right)dx = b^t - b^y a + zb.$$

Tính $t+y+z$.

Đáp án: 4

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int_0^b \left(3x^2-2ax-1\right)dx = \left(x^3-ax^2-x\right)\Big|_0^b = b^3-ab^2-b.$

Suy ra $t=3$, $y=2$, $z=-1$ nên $t+y+z=4$.

CÂU 20. Cho $\displaystyle\int_0^m \left(3x^2-2x+1\right)dx = 6$. Tính giá trị của tham số m.

Đáp án: 2

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int_0^m \left(3x^2-2x+1\right)dx = 6 \Leftrightarrow \left(x^3-x^2+x\right)\Big|_0^m = 6 \Leftrightarrow m^3-m^2+m-6=0 \Leftrightarrow m=2.$

CÂU 21. Tính tích phân $I=\displaystyle\int_1^2 \frac{x-1}{x}\mathrm{d}x$ (*làm tròn đến hàng phần trăm*).

Đáp án: 0,31

Lời giải.

$$\begin{aligned} I &= \int_1^2 \frac{x-1}{x}\mathrm{d}x \\ &= \int_1^2 \left(1-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x \\ &= \left.(x-\ln|x|)\right|_1^2 \\ &= (2-\ln 2)-(1-\ln 1)=1-\ln 2. \end{aligned}$$

CÂU 22. Tính $I=\displaystyle\int_1^2 \left(\frac{x-\sqrt[4]{x^3}}{x}\right)^2\mathrm{d}x$ (*làm tròn đến hàng phần trăm*).

Đáp án: 0,01

Lời giải.

$$\begin{aligned} I &= \int_1^2 \left(\frac{x-\sqrt[4]{x^3}}{x}\right)^2\mathrm{d}x \\ &= \int_1^2 \left(1-x^{-\frac{1}{4}}\right)^2\mathrm{d}x \\ &= \int_1^2 \left(1-2x^{-\frac{1}{4}}+x^{-\frac{1}{8}}\right)\mathrm{d}x \\ &= \left.\left(x-\frac{8}{3}x^{\frac{3}{4}}+\frac{8}{7}x^{\frac{7}{8}}\right)\right|_1^2 \\ &\approx 0{,}01. \end{aligned}$$

CÂU 23. Tính $I=\displaystyle\int_1^2 \left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt[3]{x}-1\right)\mathrm{d}x$ (*làm tròn đến hàng phần trăm*).

Đáp án: 0,32

Lời giải.

$$\begin{aligned} I &= \int_1^2 \left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt[3]{x}-1\right)\mathrm{d}x \\ &= \int_1^2 \left(x^{\frac{5}{6}}-x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{3}}-1\right)\mathrm{d}x \\ &= \left.\left(\frac{6}{11}x^{\frac{11}{6}}-\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}-x\right)\right|_1^2 \\ &\approx 0{,}32. \end{aligned}$$

CÂU 24. Tính $I=\displaystyle\int_1^2 \frac{(x^2+1)^3}{x^2}\mathrm{d}x$ (*làm tròn đến hàng phần chục*).

Đáp án: 16,7

Lời giải.

$$\begin{aligned} I &= \int\limits_1^2 \frac{(x^2+1)^3}{x^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \int\limits_1^2 \left(x^4+3x^2+3+\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x \\ &= \left(\frac{x^5}{5}+x^3+3x-\frac{1}{x}\right)\Big|_1^2 \\ &= 16{,}7. \end{aligned}$$

CÂU 25. Tính $I=\int\limits_0^1 5^{x+1}\cdot 7^{2x-1}\,\mathrm{d}x$ (*làm tròn đến hàng đơn vị*).

Đáp án: 959

Lời giải.

$$\begin{aligned} I &= \int\limits_0^1 5^{x+1}\cdot 7^{2x-1}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{5}{7}\int\limits_0^1 5^x\cdot 49^x\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{5}{7}\int\limits_0^1 245^x\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{5}{7}\left(245^x\ln 245\right)\Big|_0^1 \\ &= \frac{5}{7}(245\ln 245-\ln 245)\approx 959. \end{aligned}$$

CÂU 26. Tính $I=\int\limits_0^1 \left(x+\mathrm{e}^{-x-2}\right)\mathrm{d}x$ (*làm tròn đến hàng phần trăm*).

Đáp án: 0,59

Lời giải.

$$\begin{aligned} I &= \int\limits_0^1 \left(x+\mathrm{e}^{-x-2}\right)\mathrm{d}x \\ &= \left(\frac{x^2}{2}-\mathrm{e}^{-x-2}\right)\Big|_0^1 \\ &= \left(\frac{1}{2}+\mathrm{e}^{-2}-\mathrm{e}^{-3}\right)\approx 0{,}59. \end{aligned}$$

CÂU 27. Tính $I=\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} x^2\left(1-\frac{\sin x}{x^2}\right)\mathrm{d}x$ (*làm tròn đến hàng phần trăm*).

Đáp án: $-0{,}03$

Lời giải.

$$\begin{aligned} I &= \int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} x^2\left(1-\frac{\sin x}{x^2}\right)\mathrm{d}x \\ &= \int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \left(x^2-\sin x\right)\mathrm{d}x \\ &= \left(\frac{x^3}{3}+\cos x\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \approx -0{,}03. \end{aligned}$$

CÂU 28. Tính $I=\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin x-\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)\mathrm{d}x$ *(làm tròn đến hàng phần trăm).*

Đáp án: 0,38

Lời giải.

$$\begin{aligned} I &= \int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin x-\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)\mathrm{d}x \\ &= \left(-\cos x-3\sqrt[3]{x}\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \approx 0{,}38. \end{aligned}$$

CÂU 29. Biết $\int\limits_0^1 \frac{\left(e^{-x}+2\right)^2}{e^{x-1}}\mathrm{d}x = ae+b+\frac{c}{e}+\frac{1}{e^2}$ $(a,b,c\in\mathbb{Z})$. Tính giá trị của $P=a+b+c$.

Đáp án: -1

Lời giải.

$$\begin{aligned} I &= \int\limits_0^1 \frac{\left(e^{-x}+2\right)^2}{e^{x-1}}\mathrm{d}x \\ &= \int\limits_0^1 \frac{e^{-2x}+4e^{-x}+4}{e^{x-1}}\mathrm{d}x \\ &= \int\limits_0^1 \left(e^{-3x+1}+4e^{-2x+1}+4e^{-x+1}\right)\mathrm{d}x \\ &= \left(\frac{e^{-3x+1}}{-3}+\frac{4e^{-2x+1}}{-2}+\frac{4e^{-x+1}}{-1}\right)\Bigg|_0^1 \\ &= \frac{-9e^3+4e^2+4e+1}{e^2} = -9e+4+\frac{4}{e}+\frac{1}{e^2}. \end{aligned}$$

Vậy $P=a+b+c=-1$.

CÂU 30. Biết $\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}\mathrm{d}x = a\sqrt{3}+\frac{\pi}{b}$ $(a,b\in\mathbb{Z})$. Tính $a+b$.

Đáp án: 0

Lời giải.

$$\begin{aligned} I &= \int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}\,\mathrm{d}x \\ &= \int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{2\sin^2 x}{2\cos^2 x}\,\mathrm{d}x \\ &= \int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)\mathrm{d}x \\ &= (\tan x - x)\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = \sqrt{3}-\frac{\pi}{3}. \end{aligned}$$

Vậy $\begin{cases} a=1 \\ b=-1 \end{cases} \Rightarrow a+b=0.$

CÂU 31. Tính $I=\int\limits_0^1 \frac{(2024^x+1)^2}{e^{-3x}}\,\mathrm{d}x$ (*làm tròn đến hàng phần trăm*).

Đáp án: 0

Lời giải.

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \frac{(2024^x+1)^2}{e^{-3x}} dx \\ &= \int_0^1 \frac{2024^{2x}+2\cdot 2024^x+1}{e^{-3x}} dx \\ &= \left[\left(\frac{2024^2}{e^{-3}}\right)^x + 2\cdot\left(\frac{2024}{e^{-3}}\right)^x + e^{3x}\right]\Bigg|_0^1 \\ &= \frac{\left(\frac{2024^2}{e^{-3}}\right)^x}{\ln\frac{2024^2}{e^{-3}}} + \frac{2\cdot\left(\frac{2024}{e^{-3}}\right)^x}{\ln\frac{2024}{e^{-3}}} + \frac{1}{3}e^{3x} \\ &= \frac{2024^{2x}e^{3x}}{2\ln 2024-3} + \frac{2.2024^{2x}e^{3x}}{\ln 2024-3} + \frac{1}{3}e^{3x} \\ &= \left(\frac{2024^{2x}}{2\ln 2024-3} + \frac{2\cdot 2024^{2x}}{\ln 2024-3} + \frac{1}{3}\right)e^{3x}. \end{aligned}$$

CÂU 32. Tính $I=\frac{1}{1000}\int\limits_0^1 \frac{(e^{-x}+2)^2}{e^{x-1}}\,\mathrm{d}x$ (*làm tròn đến hàng đơn vị*).

Đáp án: 4522

Lời giải.

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{1000}\int\limits_0^1 \frac{(e^{-x}+2)^2}{e^{x-1}}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{1000}\int\limits_0^1 \frac{e^{-2x}+4e^{-x}+4}{e^{x-1}}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{1000}\int\limits_0^1 \left(e^{-3x+1}+4e^{-2x+1}+4e^{-x+1}\right)\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{1000}\left(e^{-3x+1}+4e^{-2x+1}+4e^{-x+1}\right)\Big|_0^1 \\ &= \frac{1}{1000}\,\frac{-9e^3+4e^2+4e+1}{e^2} \approx 4522. \end{aligned}$$

CÂU 33. Tính $I=\dfrac{1}{100}\displaystyle\int\limits_1^2 e^{2x}\left(2023+\dfrac{2024e^{-2x}}{x^3}\right)\mathrm{d}x$ (*làm tròn đến hàng phần chục*).

Đáp án: 48,5

Lời giải.

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{100}\int\limits_1^2 e^{2x}\left(2023+\frac{2024e^{-2x}}{x^3}\right)\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{100}\int\limits_1^2 \left(2023e^{2x}+\frac{2024}{x^3}\right)\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{100}\left(2023\frac{e^{2x}}{2}-\frac{1012}{x}\right)\Bigg|_1^2\\ &\approx 48{,}5. \end{aligned}$$

CÂU 34. Tính $I=\displaystyle\int\limits_1^2\left(4x^3-2\cdot 3^{x+1}+\dfrac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x$ (*làm tròn đến hàng phần chục*).

Đáp án: $-17{,}3$

Lời giải.

$$\begin{aligned} I &= \int\limits_1^2\left(4x^3-2\cdot 3^{x+1}+\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x\\ &= \left(x^4-\frac{2\cdot 3^{x+1}}{\ln 3}-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_1^2\\ &\approx -17{,}3. \end{aligned}$$

Dạng 3. TÍCH PHÂN HÀM TRỊ TUYỆT ĐỐI

Tính tích phân $I=\displaystyle\int\limits_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$?

Phương pháp

- **Bước 1.** Xét dấu $f(x)$ trên đoạn $[a;b]$.
- **Bước 2.** Dựa vào bảng xét dấu trên đoạn $[a;b]$ để khử $|f(x)|$. Sau đó sử dụng các phương pháp tính tích phân đã học để tính $I=\displaystyle\int\limits_a^b |f(x)|\cdot\mathrm{d}x$.

Phần I. Mỗi câu hỏi học sinh chọn một trong bốn phương án A, B, C, D.

CÂU 1. Giá trị của $I=\displaystyle\int\limits_0^{2\pi}\sqrt{1-\cos 2x}\,\mathrm{d}x$ bằng

A $\sqrt{3}$. **B** $4\sqrt{2}$. **C** $2\sqrt{3}$. **D** $\dfrac{\pi}{2}$.

Lời giải.

Ta có $I=\displaystyle\int\limits_0^{2\pi}\sqrt{1-\cos 2x}\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^{2\pi}\sqrt{2\sin^2 x}\,\mathrm{d}x=\sqrt{2}\int\limits_0^{2\pi}|\sin x|\,\mathrm{d}x$.

Vì $x\in[0;\pi]\to\sin x>0\Rightarrow|\sin x|=\sin x$;
$x\in[\pi;2\pi]\to\sin x<0\Rightarrow|\sin x|=-\sin x$.

Vậy $I=\sqrt{2}\left(\displaystyle\int\limits_0^{\pi}\sin x\,\mathrm{d}x+\int\limits_{\pi}^{2\pi}-\sin x\,\mathrm{d}x\right)=\sqrt{2}\left(-\cos x\Big|_0^{\pi}+\cos x\Big|_{\pi}^{2\pi}\right)=4\sqrt{2}$.

Chọn đáp án B ....

CÂU 2. Tính tích phân $I=\int\limits_0^2 |x-2|\,\mathrm{d}x$.

(A) $I=-2$. (B) $I=4$. (C) $I=2$. (D) $I=0$.

Lời giải.

Ta có $I=\int\limits_0^2 |x-2|\,\mathrm{d}x$.

Do $x\in[0;2]\Rightarrow x-2<0\Leftrightarrow |x-2|=2-x$.

Vậy $I=\int\limits_0^2 (2-x)\,\mathrm{d}x=\left(2x-\frac{1}{2}x^2\right)\Big|_0^2=4-2=2$.

Chọn đáp án (C) □

CÂU 3. Tính tích phân $I=\int\limits_0^2 |x^3-x|\,\mathrm{d}x$.

(A) $I=-\frac{1}{2}$. (B) $I=5$. (C) $I=\frac{1}{2}$. (D) $I=\frac{5}{2}$.

Lời giải.

Ta có $I=\int\limits_0^2 |x^3-x|\,\mathrm{d}x$.

Ta có $f(x)=x^3-x=x\left(x^2-1\right)=0\leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=-1\\x=1.\end{array}\right.$

$$\Rightarrow f(x)>0\forall x\in[1;2];\quad f(x)<0\forall x\in[0;1].$$

Vậy $I=\int\limits_0^1 \left(x-x^3\right)\,\mathrm{d}x+\int\limits_1^2 \left(x^3-x\right)\,\mathrm{d}x=\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{4}x^4\right)\Big|_0^1+\left(\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}^2\right)\Big|_1^2=\frac{5}{2}$.

Chọn đáp án (D) □

CÂU 4. Tính tích phân $I=\int\limits_0^2 |x^2+2x-3|\,\mathrm{d}x$.

(A) $I=-2$. (B) $I=4$. (C) $I=5$. (D) $I=-4$.

Lời giải.

Ta có $I=\int\limits_0^2 |x^2+2x-3|\,\mathrm{d}x$.

Ta có $f(x)=x^2+2x-3=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-3\end{array}\right.\Rightarrow f(x)>0,\ \forall x\in[1;2];\ f(x)<0,\ \forall x\in[0;1]$.

$$\begin{aligned}I&=\int\limits_0^1 -f(x)\,\mathrm{d}x+\int\limits_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x\\&=\int\limits_0^1 \left(3-2x-x^2\right)\,\mathrm{d}x+\int\limits_1^2 \left(x^2+2x-3\right)\,\mathrm{d}x\\&=\left(3x-x^2-\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_0^1+\left(\frac{1}{3}x^3+x^2-3x\right)\Big|_1^2\\&=\left(3-1-\frac{1}{3}\right)+\left[\left(\frac{8}{3}+4-6\right)-\left(\frac{1}{3}+1-3\right)\right]=5.\end{aligned}$$

Chọn đáp án (C) □

CÂU 5. Cho tích phân $I=\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\int\limits_{-3}^3 |x^2-1|\,\mathrm{d}x=\frac{20}{3}+\frac{4}{3}+\frac{16}{3}=a\sqrt{3}+b\sqrt{2}$ với $a,b\in\mathbb{Q}$. Tính $P=a+b$.

A $P=\dfrac{40}{3}$. **B** $P=\dfrac{80}{3}$. **C** $P=\dfrac{17}{3}$. **D** $P=\dfrac{98}{3}$.

Lời giải.

Ta có $I=\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\int\limits_{-3}^{3}\left|x^2-1\right|\,\mathrm{d}x$.

Tính $J=\int\limits_{-3}^{3}\left|x^2-1\right|\,\mathrm{d}x$.

Ta có $f(x)=x^2-1=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-1.\end{array}\right.$

$\Rightarrow f(x)>0,\ \forall x\in[-3;-1]\cup[1;3]$; và $f(x)<0,\ \forall x\in[-1;1]$.

Vậy

$$\begin{aligned}I&=\int\limits_{-3}^{-1}\left(x^2-1\right)\,\mathrm{d}x+\int\limits_{-1}^{1}\left(1-x^2\right)\,\mathrm{d}x+\int\limits_{1}^{3}\left(x^2-1\right)\,\mathrm{d}x\\&=\left(\frac{1}{3}x^3-x\right)\Big|_{-3}^{-1}+\left(x-\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_{-1}^{1}+\left(\frac{1}{3}x^3-x\right)\Big|_{1}^{3}\\&=\frac{20}{3}+\frac{4}{3}+\frac{16}{3}=\frac{40}{3}.\end{aligned}$$

$$\Rightarrow I=\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\int\limits_{-3}^{3}\left|x^2-1\right|\,\mathrm{d}x=\frac{40}{3}\sqrt{3}+\frac{40}{3}\sqrt{2}.$$

Khi đó $a=\dfrac{40}{3}$, $b=\dfrac{40}{3}$. Suy ra $P=a+b=\dfrac{80}{3}$.

Chọn đáp án B .... □

CÂU 6. Tính tích phân $I=\int\limits_{-2}^{5}\left(|x+2|-|x-2|\right)\,\mathrm{d}x$.

A $I=38$. **B** $I=44$. **C** $I=48$. **D** $I=40$.

Lời giải.

Ta có $I=\int\limits_{-2}^{5}\left(|x+2|-|x-2|\right)\,\mathrm{d}x$.

Gọi $f(x)=|x+2|-|x-2|$ trên $x\in[-2;5]$. Khi đó

- Với $x\in[-2;2]$ thì $f(x)=4$.
- Với $x\in[2;5]$ thì $f(x)=2x$.

Vậy $\int\limits_{-2}^{5}f(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_{-2}^{2}4\,\mathrm{d}x+\leftarrow\int\limits_{2}^{5}2x\,\mathrm{d}x=4x\Big|_{-2}^{2}+x^2\Big|_{2}^{5}=16+32-4=44$.

Chọn đáp án B .... □

CÂU 7. Cho tích phân $I=\int\limits_{0}^{3}\left|2^x-4\right|\,\mathrm{d}x=a+\dfrac{b}{c\ln 2}$ với $a,b,c\in\mathbb{Z}$ và $\dfrac{b}{c}$ là phân số tối giản. Tính $P=a^2+b^2+c^2$.

A $P=15$. **B** $P=10$. **C** $P=5$. **D** $P=18$.

Lời giải.

Ta có $I=\int\limits_{0}^{3}\left|2^x-4\right|\,\mathrm{d}x$. Ta có $2^x-4>0\Leftrightarrow x>2\Rightarrow f(x)>0,\ \forall x\in[2;3]$; và $f(x)<0,\ \forall x\in[0;2]$.

Vậy

$$\begin{aligned} I &= \int\limits_0^2 (4-2^x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_2^3 (2^x-4)\,\mathrm{d}x \\ &= \left(4x - \frac{1}{\ln 2}2^x\right)\Bigg|_0^2 + \left(\frac{1}{\ln 2}2^x - 4x\right)\Bigg|_2^3 \\ &= \left(8 - \frac{3}{\ln 2}\right) + \left(\frac{4}{\ln 2} - 4\right) = 4 + \frac{1}{\ln 2}. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow P = a^2 + b^2 + c^2 = 4^2 + 1^2 + 1^2 = 18.$$

Chọn đáp án (D) .... □

CÂU 8. Tính tích phân $I = \int\limits_{-1}^{1} \left|2^x - 2^{-x}\right|\,\mathrm{d}x$.

(A) $\dfrac{1}{\ln 2}$. (B) $\ln 2$. (C) $2\ln 2$. (D) $\dfrac{2}{\ln 2}$.

Lời giải.

$I = \int\limits_{-1}^{1} \left|2^x - 2^{-x}\right|\,\mathrm{d}x$.

Ta có $2^x - 2^{-x} = 0 \Rightarrow x = 0$.

$$\begin{aligned} I &= \int\limits_{-1}^{1} \left|2^x - 2^{-x}\right|\,\mathrm{d}x \\ &= \int\limits_{-1}^{0} \left|2^x - 2^{-x}\right|\,\mathrm{d}x + \int\limits_{0}^{1} \left|2^x - 2^{-x}\right|\,\mathrm{d}x \\ &= \left|\int\limits_{-1}^{0} \left(2^x - 2^{-x}\right)\,\mathrm{d}x\right| + \left|\int\limits_{0}^{1} \left(2^x - 2^{-x}\right)\,\mathrm{d}x\right| \\ &= \left|\left(\frac{2^x + 2^{-x}}{\ln 2}\right)\Bigg|_{-1}^{0}\right| + \left|\left(\frac{2^x + 2^{-x}}{\ln 2}\right)\Bigg|_{0}^{1}\right| = \frac{1}{\ln 2}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án (A) .... □

CÂU 9. Tính tích phân $I = \int\limits_{-1}^{2} (|x| - |x-1|)\,\mathrm{d}x$.

(A) $I = 0$. (B) $I = 2$. (C) $I = -2$. (D) $I = -3$.

Lời giải.

Ta có $I = \int\limits_{-1}^{2} (|x| - |x-1|)\,\mathrm{d}x$.

$$\begin{aligned} I &= \int\limits_{-1}^{2} (|x| - |x-1|)\,\mathrm{d}x \\ &= \int\limits_{-1}^{2} |x|\,\mathrm{d}x - \int\limits_{-1}^{2} |x-1|\,\mathrm{d}x \\ &= -\int\limits_{-1}^{0} x\,\mathrm{d}x + \int\limits_{0}^{2} x\,\mathrm{d}x + \int\limits_{-1}^{1} (x-1)\,\mathrm{d}x - \int\limits_{1}^{2} (x-1)\,\mathrm{d}x \\ &= -\frac{x^2}{2}\Bigg|_{-1}^{0} + \frac{x^2}{2}\Bigg|_{0}^{2} + \left(\frac{x^2}{2} - x\right)\Bigg|_{-1}^{1} - \left(\frac{x^2}{2} - x\right)\Bigg|_{1}^{2} = 0. \end{aligned}$$

Chọn đáp án (A) ....

CÂU 10. Cho a là số thực dương, tính tích phân $I = \int\limits_{-1}^{a} |x|\,\mathrm{d}x$ theo a.

(A) $I = \dfrac{a^2+1}{2}$. (B) $I = \dfrac{a^2+2}{2}$. (C) $I = \dfrac{-2a^2+1}{2}$. (D) $I = \dfrac{|3a^2-1|}{2}$.

Lời giải.

Vì $a > 0$ nên $I = -\int\limits_{-1}^{0} x\,\mathrm{d}x + \int\limits_{0}^{a} x\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2} + \dfrac{a^2}{2} = \dfrac{1+a^2}{2}$.

Chọn đáp án (A) ....

CÂU 11. Cho số thực $m > 1$ thỏa mãn $\int\limits_{1}^{m} |2mx - 1|\,\mathrm{d}x = 1$. Khẳng định nào sau đây đúng?

(A) $m \in (4;6)$. (B) $m \in (2;4)$. (C) $m \in (3;5)$. (D) $m \in (1;3)$.

Lời giải.

Do $m > 1 \Rightarrow 2m > 2 \Rightarrow \dfrac{1}{2m} < 1$. Do đó với $m > 1, x \in [1;m] \Rightarrow 2mx - 1 > 0$.

Vậy

$$\begin{aligned}\int\limits_{1}^{m} |2mx-1|\,\mathrm{d}x &= \int\limits_{1}^{m} (2mx-1)\,\mathrm{d}x \\ &= \left(mx^2 - x\right)\Big|_{1}^{m} \\ &= m^3 - m - m + 1 = m^3 - 2m + 1.\end{aligned}$$

Từ đó theo bài ra ta có $m^3 - 2m + 1 = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = \pm\sqrt{2}. \end{array}\right.$

Do $m > 1$ vậy $m = \sqrt{2}$.

Chọn đáp án (D) ....

CÂU 12. Khẳng định nào sau đây là đúng?

(A) $\int\limits_{-1}^{1} |x|^3\,\mathrm{d}x = \left|\int\limits_{-1}^{1} x^3\mathrm{d}x\right|$.

(B) $\int\limits_{-1}^{2024} \left|x^4 - x^2 + 1\right|\mathrm{d}x = \int\limits_{-1}^{2024} \left(x^4 - x^2 + 1\right)\mathrm{d}x$.

(C) $\int\limits_{-2}^{3} |e^x(x+1)\,\mathrm{d}x| = \int\limits_{-2}^{3} e^x(x+1)\,\mathrm{d}x$.

(D) $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\cos^2 x}\mathrm{d}x = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Ta có: $x^4 - x^2 + 1 = x^4 - 2\cdot x^2\cdot\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{4} = \left(x^2 - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Do đó $\int\limits_{-1}^{2024} \left|x^4 - x^2 + 1\right|\mathrm{d}x = \int\limits_{-1}^{2024} \left(x^4 - x^2 + 1\right)\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án (B) ....

CÂU 13. Tính tích phân $I = \int\limits_{1}^{4} \sqrt{x^2 - 6x + 9}\,\mathrm{d}x$.

(A) $I = \dfrac{5}{2}$. (B) $I = -\dfrac{1}{2}$. (C) $I = -2$. (D) $I = \dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Ta có $I = \int\limits_{1}^{4} \sqrt{x^2 - 6x + 9}\,\mathrm{d}x = \int\limits_{1}^{4} |x-3|\,\mathrm{d}x$.

Ta có $x - 3 > 0,\ \forall x \in [3;4]$; $x - 3 < 0,\ \forall x \in [1;3]$.

Vậy

$$\begin{aligned} I &= \int_1^3 (3-x)\,\mathrm{d}x + \int_3^4 (x-3)\,\mathrm{d}x \\ &= \left(3x - \frac{1}{2}x^2\right)\Bigg|_1^3 + \left(\frac{1}{2}x^2 - 3x\right)\Bigg|_3^4 \\ &= 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án (A) ....

Phần III. Học sinh điền kết quả vào ô trống.

CÂU 14. Tính tích phân $I = \int\limits_{-3}^{3} \left|x^2 - 1\right| \mathrm{d}x$ (tính gần đúng đến hàng phần chục).

Đáp án: 13,3

Lời giải.

$$I = \int_{-3}^{3} \left|x^2 - 1\right| \mathrm{d}x.$$

Vì $f(x) = x^2 - 1 = 0 \to \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 1 \end{array}\right. \Rightarrow f(x) > 0,\ \forall x \in [-3;-1] \cup [1;3];\ f(x) < 0,\ \forall x \in [-1;1]$.

Vậy

$$\begin{aligned} I &= \int_{-3}^{-1} \left(x^2 - 1\right) \mathrm{d}x + \int_{-1}^{1} \left(1 - x^2\right) \mathrm{d}x + \int_1^3 \left(x^2 - 1\right) \mathrm{d}x \\ &= \left(\frac{1}{3}x^3 - x\right)\Bigg|_{-3}^{-1} + \left(x - \frac{1}{3}x^3\right)\Bigg|_{-1}^{1} + \left(\frac{1}{3}x^3 - x\right)\Bigg|_1^3 \\ &= \frac{20}{3} + \frac{4}{3} + \frac{16}{3} = \frac{40}{3} \approx 13{,}3. \end{aligned}$$

CÂU 15. Tính tích phân $I = \int\limits_{-1}^{2} \left|-x^2 - 2x + 3\right| \mathrm{d}x$ (tính gần đúng đến hàng phần trăm).

Đáp án: 7,67

Lời giải.

Vì $f(x) = -x^2 - 2x + 3 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -3 \end{array}\right. \Rightarrow f(x) > 0,\ \forall x \in [-1;-1];\ f(x) < 0,\ \forall x \in [1;2]$

Vậy

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^{1} \left(-x^2 - 2x + 3\right) \mathrm{d}x + \int_1^2 \left(x^2 + 2x - 3\right) \mathrm{d}x \\ &= \left(-\frac{1}{3}x^3 - x^2 + 3x\right)\Bigg|_{-1}^{1} + \left(\frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x\right)\Bigg|_1^2 \\ &= -\frac{1}{3} - 1 + 3 - \frac{1}{3} + 1 + 3 + \frac{8}{3} + 4 - 6 - \frac{1}{3} - 1 + 3 \approx 7{,}67. \end{aligned}$$

CÂU 16. Tính tích phân $I = \int\limits_1^2 \left|\dfrac{x+1}{x}\right| \mathrm{d}x$ (tính gần đúng đến hàng phần trăm).

Đáp án: 1,69

Lời giải.

Vì $\frac{x+1}{x} > 0$, $\forall x \in [1;2]$ nên

$$I = \int_1^2 \left(\frac{x+1}{x}\right) \mathrm{d}x = \int_1^2 \left(1 + \frac{1}{x}\right) \mathrm{d}x = (x + \ln x)\Big|1^2 = 2 + \ln 2 - 1 = 1 + \ln 2 \approx 1{,}69.$$

CÂU 17. Tính tích phân $I=\displaystyle\int\limits_2^6 \sqrt{x^2-8x+16}\,\mathrm{d}x$.

Đáp án: 4

Lời giải.

Ta có $I=\displaystyle\int\limits_2^6 |x-4|\,\mathrm{d}x$.

Ta có $x-4\le 0$, $\forall x\in[2;4]$ và $x-4\ge 0$, $\forall x\in[4;6]$. Khi đó

$$I=\int\limits_2^4 (4-x)\,\mathrm{d}x+\int\limits_4^6 (x-4)\,\mathrm{d}x=\left(4x-\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_2^4+\left(-4x+\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_4^6=4.$$

CÂU 18. Tính tích phân $I=\displaystyle\int\limits_{-2}^1 \sqrt{4x^2+6x+9}\,\mathrm{d}x$ (*làm tròn đến hàng phần trăm*).

Đáp án: 9,38

Lời giải.

Ta có $I=\displaystyle\int\limits_{-2}^1 \sqrt{4x^2+6x+9}\,\mathrm{d}x=\int\limits_{-2}^1 |2x+3|\,\mathrm{d}x$.

Ta có $2x+3\le 0$, $\forall x\in\left[-2;-\dfrac{3}{2}\right]$ và $2x+3\ge 0$, $\forall x\in\left[-\dfrac{3}{2};1\right]$. Khi đó

$$\begin{aligned}I&=\int\limits_{-2}^{-\frac{3}{2}}(-2x-3)\,\mathrm{d}x+\int\limits_{-\frac{3}{2}}^{1}(2x+3)\,\mathrm{d}x\\&=\left(-x^2-3x\right)\Bigg|_{-2}^{-\frac{3}{2}}+\left(x^2+3x\right)\Bigg|_{-\frac{3}{2}}^{1}\\&\approx 9{,}38.\end{aligned}$$

CÂU 19. Tính tích phân $I=\displaystyle\int\limits_{0}^1 \sqrt{9x^2-6x+1}\,\mathrm{d}x$ (*làm tròn đến hàng phần trăm*).

Đáp án: 0,83

Lời giải.

Ta có $I=\displaystyle\int\limits_{0}^1 \sqrt{9x^2-6x+1}\,\mathrm{d}x=\int\limits_{0}^1 |3x-1|\,\mathrm{d}x$.

Ta có $3x+1\le 0$, $\forall x\in\left[1;\dfrac{1}{3}\right]$ và $3x+1\ge 0$, $\forall x\in\left[\dfrac{1}{3};1\right]$. Khi đó

$$\begin{aligned}I&=\int\limits_{0}^{\frac{1}{3}}(-3x-1)\,\mathrm{d}x+\int\limits_{\frac{1}{3}}^{1}(3x+1)\,\mathrm{d}x\\&=\left(-\frac{3x^2}{2}-x\right)\Bigg|_{0}^{\frac{1}{3}}+\left(\frac{3x^2}{2}+x\right)\Bigg|_{\frac{1}{3}}^{1}\\&\approx 0{,}83.\end{aligned}$$

CÂU 20. Tính tích phân $I=\displaystyle\int\limits_{0}^{2\pi} \sqrt{1+\cos 2x}\,\mathrm{d}x$ (*làm tròn đến hàng phần trăm*).

Đáp án: 5,66

Lời giải.

Ta có $I=\int\limits_0^{2\pi}\sqrt{1+\cos 2x}\,\mathrm{d}x=\sqrt{2}\int\limits_0^{2\pi}|\cos x|\,\mathrm{d}x$.

Ta có $\cos x\geq 0, \forall x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]\cup\left[\frac{3\pi}{2};2\pi\right]$ và $\cos x\leq 0, \forall x\in\left[\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$. Khi đó

$$\begin{aligned} I &= \sqrt{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,\mathrm{d}x-\sqrt{2}\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\cos x\,\mathrm{d}x+\sqrt{2}\int\limits_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}\cos x\,\mathrm{d}x\\ &= \sqrt{2}\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\sqrt{2}\sin x\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}+\sqrt{2}\sin x\Big|_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}\\ &= 4\sqrt{2}\approx 5{,}66. \end{aligned}$$

CÂU 21. Tính tích phân $I=\int\limits_0^{2\pi}\sqrt{1-\cos 2x}\,\mathrm{d}x$ (*làm tròn đến hàng phần trăm*).

Đáp án: 5,66

Lời giải.

Ta có $I=\int\limits_0^{2\pi}\sqrt{1-\cos 2x}\,\mathrm{d}x=2\int\limits_0^{2\pi}|\sin x|\,\mathrm{d}x$.

Ta có $\sin x\geq 0, \forall x\in[0;\pi]$ và $\sin x\leq 0, \forall x\in[\pi;2\pi]$. Khi đó

$$\begin{aligned} I &= \sqrt{2}\int\limits_0^{\pi}\sin x\,\mathrm{d}x-\sqrt{2}\int\limits_{\pi}^{2\pi}\sin x\,\mathrm{d}x\\ &= -\sqrt{2}\cos x\Big|_0^{\pi}+\sqrt{2}\cos x\Big|_{\pi}^{2\pi}\\ &= 4\sqrt{2}\approx 5{,}66. \end{aligned}$$

CÂU 22. Tính tích phân $I=\int\limits_0^{2\pi}\sqrt{1-\sin 2x}\,\mathrm{d}x$, (*làm tròn đến hàng phần trăm*).

Đáp án: 0,31

Lời giải.

Ta có $I=\int\limits_0^{2\pi}\sqrt{1-\sin 2x}\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^{2\pi}|\sin x-\cos x|\,\mathrm{d}x$.

Ta có $\sin x-\cos x\leq 0, \forall x\in\left[0;\frac{\pi}{4}\right]\cup\left[\frac{5\pi}{4};2\pi\right]$ và $\sin x-\cos x\geq 0, \forall x\in\left[\frac{\pi}{4};\frac{5\pi}{4}\right]$. Khi đó

$$\begin{aligned} I &= \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos x-\sin x)\,\mathrm{d}x+\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}(\sin x-\cos x)\,\mathrm{d}x+\int\limits_{\frac{5\pi}{4}}^{2\pi}(\cos x-\sin x)\,\mathrm{d}x\\ &= (\sin x+\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}+(-\cos x-\sin x)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}+(\sin x+\cos x)\Big|_{\frac{5\pi}{4}}^{2\pi}\\ &= 4\sqrt{2}\approx 5{,}66. \end{aligned}$$

CÂU 23. Tính tích phân $I=\int\limits_0^{2\pi}\sqrt{1+\sin 2x}\,\mathrm{d}x$ (*làm tròn đến hàng phần trăm*).

Đáp án: 5,66

Lời giải.

Ta có $I=\int\limits_0^{2\pi}\sqrt{1+\sin 2x}\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^{2\pi}|\sin x+\cos x|\,\mathrm{d}x$.

Ta có $\sin x+\cos x\geq 0,\forall x\in\left[0;\dfrac{3\pi}{4}\right]\cup\left[\dfrac{7\pi}{4};2\pi\right]$ và $\sin x+\cos x\leq 0,\forall x\in\left[\dfrac{3\pi}{4};\dfrac{7\pi}{4}\right]$.

Khi đó:

$$\begin{aligned}I&=\int\limits_0^{\frac{3\pi}{4}}(\cos x+\sin x)\,\mathrm{d}x-\int\limits_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}}(\sin x+\cos x)\,\mathrm{d}x+\int\limits_{\frac{7\pi}{4}}^{2\pi}(\cos x+\sin x)\,\mathrm{d}x\\&=(\sin x-\cos x)\Big|_0^{\frac{3\pi}{4}}-(\sin x-\cos x)\Big|_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}}+(\sin x-\cos x)\Big|_{\frac{7\pi}{4}}^{2\pi}\\&=4\sqrt{2}\approx 5{,}66.\end{aligned}$$

Dạng 4. Tích phân có điều kiện

Phần I. Mỗi câu hỏi học sinh chọn một trong bốn phương án A, B, C, D.

CÂU 1. Nếu $F'(x)=\dfrac{1}{2x}$ và $F(1)=1$ thì giá trị của $F(4)$ bằng

A. $\ln 2$. B. $1+\ln 2$. C. $1+\dfrac{1}{2}\ln 2$. D. $\dfrac{1}{2}\ln 2$.

Lời giải.

Ta có

$$\int\limits_1^4 F'(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_1^4\frac{1}{2x}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\ln|x|\Big|_1^4=\ln 2.$$

Lại có

$$\int\limits_1^4 F'(x)\,dx=F(x)\Big|_1^4=F(4)-F(1).$$

Suy ra $F(4)-F(1)=\ln 2$. Do đó $F(4)=F(1)+\ln 2=1+\ln 2$.

Chọn đáp án B .... □

CÂU 2. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)=\dfrac{2}{x}$. Biết $F(-1)=0$. Tính $F(2)$ kết quả là

A. $2\ln 2+1$. B. $\ln 2$. C. $2\ln 3+2$. D. $2\ln 2$.

Lời giải.

Ta có

$$\int\limits_{-1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x=F(x)\Big|_{-1}^{2}=F(2)-F(-1)$$

$$\int\limits_{-1}^{2}\frac{2}{x}\,dx=2\ln|x|\Big|_{-1}^{2}=2\ln 2-2\ln 1=2\ln 2$$

$$\begin{aligned}&\Rightarrow\quad F(2)-F(-1)=2\ln 2\\&\Leftrightarrow\quad F(2)=2\ln 2\,(\text{do } F(-1)=0).\end{aligned}$$

Chọn đáp án D .... □

CÂU 3. Cho hàm số $f(x)$ liên tục, có đạo hàm trên $[-1;2]$, $f(-1)=8$, $f(2)=-1$. Tích phân $\int\limits_{-1}^{2}f'(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

A. 1. B. 7. C. -9. D. 9.

Lời giải.

Ta có

$$\int\limits_{-1}^{2}f'(x)\,\mathrm{d}x=f(x)\Big|_{-1}^{2}=f(2)-f(-1)=-1-8=-9.$$

Chọn đáp án (C) ....

CÂU 4. Biết $F(x)=x^2$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$. Giá trị của $\int\limits_1^3 [1+f(x)]\,\mathrm{d}x$ bằng

A 10. **B** 8. **C** $\dfrac{26}{3}$. **D** $\dfrac{32}{3}$.

Lời giải.

Ta có

$$\int\limits_1^3 [1+f(x)]\,\mathrm{d}x=(x+F(x))\Big|_1^3=(x+x^2)\Big|_1^3=12-2=10.$$

Chọn đáp án (A) ....

CÂU 5. Biết $F(x)=x^3$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$. Giá trị của $\int\limits_1^3 [1+f(x)]\,\mathrm{d}x$ bằng

A 20. **B** 22. **C** 26. **D** 28.

Lời giải.

Ta có

$$\int\limits_1^3 [1+f(x)]\,\mathrm{d}x=[x+F(x)]\Big|_1^3=\left[x+x^3\right]\Big|_1^3=30-2=28.$$

Chọn đáp án (D) ....

CÂU 6. Biết $F(x)=x^2$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$. Giá trị của $\int\limits_1^2 [2+f(x)]\,\mathrm{d}x$ bằng

A 5. **B** 3. **C** $\dfrac{13}{3}$. **D** $\dfrac{7}{3}$.

Lời giải.

Ta có

$$\int\limits_1^2 [2+f(x)]\,\mathrm{d}x=(2x+x^2)\Big|_1^2=8-3=5.$$

Chọn đáp án (A) ....

CÂU 7. Biết $F(x)=x^3$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$. Giá trị của $\int\limits_1^2 [2+f(x)]\,\mathrm{d}x$ bằng

A $\dfrac{23}{4}$. **B** 7. **C** 9. **D** $\dfrac{15}{4}$.

Lời giải.

Ta có

$$\int\limits_1^2 [2+f(x)]\,\mathrm{d}x=\int\limits_1^2 2\,\mathrm{d}x+\int\limits_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x=2x\Big|_1^2+F(x)\Big|_1^2=2x\Big|_1^2+x^3\Big|_1^2=9.$$

Chọn đáp án (C) ....

CÂU 8. Cho hàm số $f(x)$. Biết $f(0)=4$ và $f'(x)=2\sin^2\dfrac{x}{2}+1$, $\forall x\in\mathbb{R}$, khi đó $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A $\dfrac{\pi^2+16\pi+8\sqrt{2}-16}{16}$. **B** $\dfrac{\pi^2+16\pi+2\sqrt{2}-4}{16}$. **C** $\dfrac{\pi^2+16\pi+8\sqrt{2}}{16}$. **D** $\dfrac{\pi^2+16\pi-16}{16}$.

Lời giải.

Ta có

$$f(x)=\int\left(2\sin^2\frac{x}{2}+1\right)\mathrm{d}x=\int(2-\cos x)\mathrm{d}x=2x-\sin x+C.$$

Vì $f(0)=4\Rightarrow C=4\Rightarrow f(x)=2x-\sin x+4$.

Suy ra

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}(2x-\sin x+4)\mathrm{d}x$$

$$= \left(x^2+\cos x+4x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi^2}{16}+\frac{\sqrt{2}}{2}+\pi-1 = \frac{\pi^2+16\pi+8\sqrt{2}-16}{16}.$$

Chọn đáp án (A) .... □

CÂU 9. Cho hàm số $f(x)$. Biết $f(0)=4$ và $f'(x)=2\cos^2\dfrac{x}{2}+3$, $\forall x\in\mathbb{R}$, khi đó $\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\mathrm{d}x$ bằng?

(A) $\dfrac{\pi^2+8\pi-8-\sqrt{2}}{8}$. (B) $\dfrac{\pi^2+8\pi-8-4\sqrt{2}}{8}$. (C) $\dfrac{\pi^2+6\pi+8}{8}$. (D) $\dfrac{\pi^2+8\pi-4\sqrt{2}}{8}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} f(x) &= \int f'(x)\mathrm{d}x = \int \left(2\cos^2\frac{x}{2}+3\right)\mathrm{d}x \\ &= \int\left(2\cdot\frac{1+\cos x}{2}+3\right)\mathrm{d}x = \int(\cos x+4)\mathrm{d}x \\ &\Rightarrow\ f(x)=\sin x+4x+C. \end{aligned}$$

Do $f(0)=4\Rightarrow C=4\Rightarrow f(x)=\sin x+4x+4$. Vậy

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}(\sin x+4x+4)\mathrm{d}x = \left(-\cos x+2x^2+4x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi^2+8\pi-8-4\sqrt{2}}{8}.$$

Chọn đáp án (B) .... □

CÂU 10. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} e^{2x} \text{ khi } x\ge 0\\ x^2+x+2 \text{ khi } x<0\end{cases}$. Biết tích phân $\displaystyle\int\limits_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x=\frac{a}{b}+\frac{e^2}{c}$ ($\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản). Giá trị $a+b+c$ bằng

(A) 7. (B) 8. (C) 9. (D) 10.

Lời giải.

Ta có

$$I=\int\limits_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_{-1}^{0}(x^2+x+2)\mathrm{d}x + \int\limits_0^1 e^{2x}\mathrm{d}x = \frac{4}{3}+\frac{e^2}{2}.$$

Vậy $a+b+c=9$.

Chọn đáp án (C) .... □

CÂU 11. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} x^2-1 \text{ khi } x\ge 2\\ x^2-2x+3 \text{ khi } x<2\end{cases}$. Tích phân $I=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int\limits_1^3 f(x)\mathrm{d}x$ bằng:

(A) $\dfrac{23}{3}$. (B) $\dfrac{23}{6}$. (C) $\dfrac{17}{6}$. (D) $\dfrac{17}{3}$.

Lời giải.

Ta có

$$I=\frac{1}{2}\int\limits_1^3 f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[\int\limits_1^2(x^2-2x+3)\mathrm{d}x+\int\limits_2^3(x^2-1)\mathrm{d}x\right] = \frac{23}{6}.$$

Chọn đáp án (B) .... □

CÂU 12. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x(1+x^2)}{x-4} \text{ khi } x\ge 3\\ \dfrac{1}{x-4} \text{ khi } x<3\end{cases}$. Tích phân $I=\displaystyle\int\limits_2^4 f(t)\mathrm{d}t$ bằng:

(A) $\dfrac{40}{3}-\ln 2$. (B) $\dfrac{95}{6}+\ln 2$. (C) $\dfrac{189}{4}+\ln 2$. (D) $\dfrac{189}{4}-\ln 2$.

Lời giải.

Ta có

$$I=\int\limits_2^4 f(t)\mathrm{d}t = \int\limits_2^3\frac{1}{x-4}\mathrm{d}x+\int\limits_3^4\frac{x(1+x^2)}{x-4}\mathrm{d}x = \frac{189}{4}-\ln 2.$$

Chọn đáp án (D) .... □

CÂU 13. Cho số thực a và hàm số $f(x)=\begin{cases}2x \text{ khi } x\le 0\\ a(x-x^2) \text{ khi } x>0\end{cases}$. Tính tích phân $\int\limits_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x$ bằng:

(A) $\frac{a}{6}-1$. (B) $\frac{2a}{3}+1$. (C) $\frac{a}{6}+1$. (D) $\frac{2a}{3}-1$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}\int\limits_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x &= \int\limits_{-1}^{0} f(x)\mathrm{d}x+\int\limits_{0}^{1} f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_{-1}^{0} 2x\mathrm{d}x+\int\limits_{0}^{1} a(x-x^2)\mathrm{d}x\\ &= \left.(x^2)\right|_{-1}^{0}+a\left.\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\right|_{0}^{1}=-1+a\left(\frac{1}{6}\right)=\frac{a}{6}-1.\end{aligned}$$

Chọn đáp án (A) .... □

Phần II. Trong mỗi ý a), b), c) và d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.

CÂU 14. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}2x^2+3 \text{ khi } x\ge 1\\ 2-x^3 \text{ khi } x<1\end{cases}$.

Mệnh đề	Đ	S
a) $\int\limits_{1}^{2024} f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_{1}^{2024}(2x^2+3)\mathrm{d}x$.	X	
b) $\int\limits_{-2024}^{1} f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_{-2024}^{1}(2-x^3)\mathrm{d}x$.	X	
c) $\int\limits_{-2024}^{2024} f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_{1}^{2024}(2x^2+3)\mathrm{d}x+\int\limits_{-2024}^{1}(2-x^3)\mathrm{d}x$.		X
d) $\int_{-2024}^{2024} f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_{1}^{2024}(2x^2+3)\mathrm{d}x+\int\limits_{-2024}^{1}(2-x^3)\mathrm{d}x$.	X	

Lời giải.

Do $f(x)=\begin{cases}2x^2+3 \text{ khi } x\ge 1\\ 2-x^3 \text{ khi } x<1\end{cases}$ nên

- $\int\limits_{1}^{2024} f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_{1}^{2024}(2x^2+3)\mathrm{d}x$.
- $\int\limits_{-2024}^{1} f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_{-2024}^{1}(2-x^3)\mathrm{d}x$.
- $\int\limits_{-2024}^{2024} f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_{1}^{2024}(2x^2+3)\mathrm{d}x+\int\limits_{-2024}^{1}(2-x^3)\mathrm{d}x$.
- $\int\limits_{-2024}^{2024} f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_{1}^{2024}(2x^2+3)\mathrm{d}x+\int\limits_{-2024}^{1}(2-x^3)\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án | a đúng | b đúng | c sai | d đúng | .... □

CÂU 15. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}x^2-2x+3 \text{ khi } x\ge 2\\ x+1 \text{ khi } x<2\end{cases}$.

Mệnh đề	Đ	S
a) $\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x = \int_1^2 (x+1)\mathrm{d}x$.	X	
b) $\int_2^3 f(x)\mathrm{d}x = \int_2^3 (x^2-2x+3)\mathrm{d}x$.	X	

Mệnh đề	Đ	S
c) $\int_1^3 \frac{1}{2}f(x)\mathrm{d}x = \frac{41}{12}$.	X	
d) $\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x = \int_1^2 (x^2-2x+3)\mathrm{d}x$.		X

Lời giải.

Do $f(x) = \begin{cases} x^2-2x+3 \text{ khi } x \geq 2 \\ x+1 \text{ khi } x < 2 \end{cases}$ nên

- $\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x = \int_1^2 (x+1)\mathrm{d}x$.
- $\int_2^3 f(x)\mathrm{d}x = \int_2^3 (x^2-2x+3)\mathrm{d}x$.
- $\int_1^3 \frac{1}{2}f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(\int_1^2 (x+1)\mathrm{d}x + \int_2^3 (x^2-2x+3)\mathrm{d}x\right) = \frac{41}{12}$.

Chọn đáp án | a đúng | b đúng | c đúng | d sai | .... □

Phần III. Học sinh điền kết quả vào ô trống.

CÂU 16. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} \text{ khi } x \geq 1 \\ x+1 \text{ khi } x < 1 \end{cases}$. Tích phân $I = \int_2^0 -3t^2 f(t)\mathrm{d}t$. *(làm tròn đến hàng phần trăm)*

Đáp án: 2,08

Lời giải.

Ta có

$$I = -3\int_2^0 t^2 f(t)\mathrm{d}t = 3\int_0^2 t^2 f(t)\mathrm{d}t = 3\left[\int_0^1 x^2(x+1)\mathrm{d}x + \int_1^2 x^2\cdot\frac{1}{x}\mathrm{d}x\right] = \frac{25}{12} \approx 2{,}08.$$

CÂU 17. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x^2-1 \text{ khi } x < 0 \\ x-1 \text{ khi } 0 \leq x \leq 2 \\ 5-2x \text{ khi } x > 2 \end{cases}$. Tính tích phân $I = \int_{-5}^9 \frac{1}{7}f(t)\mathrm{d}t$. *(làm tròn đến hàng phần trăm)*

Đáp án: 5,19

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{7}\int_{-5}^9 f(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{7}\int_{-5}^9 f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{7}\left(\int_{-5}^0 f(x)\mathrm{d}x + \int_0^2 f(x)\mathrm{d}x + \int_2^9 f(x)\mathrm{d}x\right) \\ &= \frac{1}{7}\int_{-5}^0 (2x^2-1)\mathrm{d}x + \frac{1}{7}\int_0^2 (x-1)\mathrm{d}x + \frac{1}{7}\int_2^9 (5-2x)\mathrm{d}x = \frac{109}{21} \approx 5{,}19. \end{aligned}$$

CÂU 18. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2-x \text{ khi } x \geq 0 \\ x \text{ khi } x < 0 \end{cases}$. Khi đó $I = \int_{-1}^1 f(x)\mathrm{d}x + \int_{-1}^3 f(x)\mathrm{d}x$ bằng bao nhiêu? *(làm tròn đến hàng phần trăm)*

Đáp án: 3,33

Lời giải.

Đặt $I_1 = \int_{-1}^1 f(x)\mathrm{d}x$ và $I_2 = \int_{-1}^3 f(x)\mathrm{d}x$.

Vì $f(x) = \begin{cases} x^2-x \text{ khi } x \geq 0 \\ x \text{ khi } x < 0 \end{cases}$ nên

$$I_1=\int\limits_{-1}^{0}x\mathrm{d}x+\int\limits_{0}^{1}(x^2-x)\mathrm{d}x=-\frac{2}{3}.$$

Và

$$I_2=\int\limits_{-1}^{0}x\mathrm{d}x+\int_{0}^{3}(x^2-x)\mathrm{d}x=4.$$

Vậy $I=I_1+I_2=\dfrac{10}{3}\approx 3{,}33$.

CÂU 19. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}4x \text{ khi } x>2\\ -2x+12 \text{ khi } x\le 2\end{cases}$. Tính tích phân $I=\int\limits_{1}^{2}f(t)\mathrm{d}t+\dfrac{1}{2}\int\limits_{5}^{10}f(t)\mathrm{d}t$.

Đáp án: 84

Lời giải.

Đặt $I_1=\int\limits_{1}^{2}f(t)\mathrm{d}t=\int\limits_{1}^{2}f(x)\mathrm{d}x$ và $I_2=\dfrac{1}{2}\int\limits_{5}^{10}f(t)\mathrm{d}t=\dfrac{1}{2}\int\limits_{5}^{10}f(x)\mathrm{d}x$.

Vì $f(x)=\begin{cases}4x \text{ khi } x>2\\ -2x+12 \text{ khi } x\le 2\end{cases}$ nên

$$I_1=\int\limits_{1}^{2}(-2x+12)\mathrm{d}x=9.$$

Và

$$I_2=\frac{1}{2}\int\limits_{5}^{10}4x\mathrm{d}x=75.$$

Vậy $I=I_1+I_2=84$.

CÂU 20. Biết rằng hàm số $f(x)=mx+n$ thỏa mãn $\int\limits_{0}^{1}f(x)\mathrm{d}x=3$, $\int\limits_{0}^{2}f(x)\mathrm{d}x=8$. Tính $m+n$.

Đáp án: 4

Lời giải.

Ta có $\int f(x)\mathrm{d}x=\int(mx+n)\mathrm{d}x=\dfrac{m}{2}x^2+nx+C$.

Lại có $\int\limits_{0}^{1}f(x)\mathrm{d}x=3\Rightarrow\left(\dfrac{m}{2}x^2+nx\right)\Big|_0^1=3\Rightarrow\dfrac{1}{2}m+n=3\quad(1)$.

$\int\limits_{0}^{2}f(x)\mathrm{d}x=8\Rightarrow\left(\dfrac{m}{2}x^2+nx\right)\Big|_0^2=8\Rightarrow 2m+2n=8\quad(2)$.

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình

$$\begin{cases}\dfrac{1}{2}m+n=3\\ 2m+2n=8\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m=2\\ n=2.\end{cases}$$

Vậy $m+n=4$.

CÂU 21. Biết rằng hàm số $f(x)=ax^2+bx+c$ thỏa mãn $\int\limits_{0}^{1}f(x)\mathrm{d}x=-\dfrac{7}{2}$, $\int\limits_{0}^{2}f(x)\mathrm{d}x=-2$ và $\int\limits_{0}^{3}f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{13}{2}$. Tính $P=a+b+c$. (*làm tròn đến hàng phần trăm*).

Đáp án: $-1{,}33$

Lời giải.

Ta có $\int f(x)\mathrm{d}x=\int(ax^2+bx+c)\mathrm{d}x=\dfrac{a}{3}x^3+\dfrac{b}{2}x^2+cx+C$.

Lại có $\int\limits_{0}^{1}f(x)\mathrm{d}x=-\dfrac{7}{2}\Rightarrow\left(\dfrac{a}{3}x^3+\dfrac{b}{2}x^2+cx\right)\Big|_0^1=-\dfrac{7}{2}\Rightarrow\dfrac{1}{3}a+\dfrac{1}{2}b+c=-\dfrac{7}{2}\quad(1)$. $\int\limits_{0}^{2}f(x)\mathrm{d}x=-2\Rightarrow\left(\dfrac{a}{3}x^3+\dfrac{b}{2}x^2+cx\right)\Big|_0^2=$

$-2 \Rightarrow \dfrac{8}{3}a + 2b + 2c = -2 \quad (2).$

$\displaystyle\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x = \frac{13}{2} \Rightarrow \left(\frac{a}{3}x^3 + \frac{b}{2}x^2 + cx\right)\Bigg|_0^3 = \frac{13}{2} \Rightarrow 9a + \frac{9}{2}b + 3c = \frac{13}{2} \quad (3).$

Từ (1), (2) và (3) ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{3}a + \dfrac{1}{2}b + c = -\dfrac{7}{2} \\ \dfrac{8}{3}a + 2b + 2c = -2 \\ 9a + \dfrac{9}{2}b + 3c = \dfrac{13}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 3 \\ c = -\dfrac{16}{3}. \end{cases}$$

Vậy $P = a + b + c = 1 + 3 + \left(-\dfrac{16}{3}\right) = -\dfrac{4}{3} \approx -1{,}33.$

CÂU 22. Cho $\displaystyle\int_0^m (3x^2 - 2x + 1)\mathrm{d}x = 6$. Tính giá trị của tham số m.

Đáp án: 2

Lời giải.

Ta có

$\displaystyle\int_0^m (3x^2 - 2x + 1)\mathrm{d}x = \left(x^3 - x^2 + x\right)\Big|_0^m = m^3 - m^2 + m.$

$\displaystyle\int_0^m (3x^2 - 2x + 1)\mathrm{d}x = 6 \Leftrightarrow m^3 - m^2 + m - 6 = 0 \Leftrightarrow m = 2.$

CÂU 23. Cho $I = \displaystyle\int_0^1 (4x - 2m^2)\mathrm{d}x$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để $I + 6 > 0$?

Đáp án: 3

Lời giải.

Theo định nghĩa tích phân ta có: $I = \displaystyle\int_0^1 (4x - 2m^2)\mathrm{d}x = \left(2x^2 - 2m^2x\right)\Big|_0^1 = -2m^2 + 2.$

Khi đó $I + 6 > 0 \Leftrightarrow -2m^2 + 2 + 6 > 0 \Leftrightarrow -2m^2 + 8 > 0 \Leftrightarrow -2 < m < 2.$

Mà m là số nguyên nên $m \in \{-1; 0; 1\}$.

Vậy có 3 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu.

CÂU 24. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của a để $\displaystyle\int_0^a (2x - 3)\mathrm{d}x \leq 4$?

Đáp án: 4

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int_0^a (2x - 3)\mathrm{d}x = \left(x^2 - 3x\right)\Big|_0^a = a^2 - 3a.$

Khi đó $\displaystyle\int_0^a (2x - 3)\mathrm{d}x \leq 4 \Leftrightarrow a^2 - 3a \leq 4 \Leftrightarrow -1 \leq a \leq 4.$

Mà $a \in \mathbb{N}^*$ nên $a \in \{1; 2; 3; 4\}$.

Vậy có 4 giá trị của a thỏa đề bài.

CÂU 25. Có bao nhiêu số thực b thuộc khoảng $(\pi; 3\pi)$ sao cho $\displaystyle\int_\pi^b 4\cos 2x\mathrm{d}x = 1$?

Đáp án: 4

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int_\pi^b 4\cos 2x\mathrm{d}x = 1 \Leftrightarrow 2\sin 2x\Big|_\pi^b = 1 \Leftrightarrow \sin 2b - \sin 2\pi = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin 2b = \frac{1}{2}.$

$\Rightarrow 2b = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \quad$ hoặc $\quad 2b = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi$

$\Rightarrow b = \dfrac{\pi}{12} + k\pi \quad$ hoặc $\quad b = \dfrac{5\pi}{12} + k\pi \qquad (k \in \mathbb{Z})$.

Khi $b = \dfrac{\pi}{12} + k\pi$, ta xét

$$\begin{aligned} & \pi < \frac{\pi}{12} + k\pi < 3\pi \\ \Leftrightarrow\ & \frac{11}{12} < k < \frac{35}{12} \\ \Leftrightarrow\ & k \in \{1;2\}. \end{aligned}$$

Khi $b = \dfrac{5\pi}{12} + k\pi$, ta xét

$$\begin{aligned} & \pi < \frac{5\pi}{12} + k\pi < 3\pi \\ \Leftrightarrow\ & \frac{7}{12} < k < \frac{31}{12} \\ \Leftrightarrow\ & k \in \{1;2\}. \end{aligned}$$

Vậy có 4 số thực b thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Dạng 5. Ứng dụng tích phân trong thực tiễn

- Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Khi đó $\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ được gọi là giá trị trung bình của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a;b]$.
- Đạo hàm của quãng đường di chuyển của vật theo thời gian bằng tốc độ của chuyển động tại mọi thời điểm $v(t) = s'(t)$. Do đó, nếu biết tốc độ $v(t)$ tại mọi thời điểm $t \in [a;b]$ thì tính được quãng đường di chuyển trong khoảng thời gian từ a đến b theo công thức
$$s = s(b) - s(a) = \int_a^b v(t)\,\mathrm{d}t.$$
- Giả sử là vận tốc của vật tại thời điểm và là quãng đường vật đi được sau khoảng thời gian tính từ lúc bắt đầu chuyển động. Ta có mối liên hệ giữa vận tốc và quãng đường như sau
  - Đạo hàm của quãng đường là vận tốc $s'(t) = v(t)$.
  - Nguyên hàm của vận tốc là quãng đường $s(t) = \displaystyle\int v(t)\,\mathrm{d}t$.

  $\Rightarrow$ Từ đây ta cũng có quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian từ a đến b là
  $$\int_a^b v(t)\,\mathrm{d}t = s(b) - s(a).$$
  Nếu gọi $a(t)$ là gia tốc của vật thì ta có mối liên hệ giữa gia tốc và vận tốc như sau
  - Đạo hàm của vận tốc là gia tốc $v'(t) = a(t)$.
  - Nguyên hàm của gia tốc là vận tốc $v(t) = \displaystyle\int a(t)\,\mathrm{d}t$.

Phần I. Mỗi câu hỏi học sinh chọn một trong bốn phương án A, B, C, D.

CÂU 1. Một ô tô đang chạy với vận tốc $10\,m/s$ thì gặp chướng ngại vật, người lái xe đạp phanh. Từ thời điểm đó, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -2t + 10\ (m/s)$, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Tính quãng đường ô tô di chuyển được trong 8 giây cuối cùng.

Ⓐ $55\,m$. Ⓑ $25\,m$. Ⓒ $50\,m$. Ⓓ $16\,m$.

Lời giải.

Ta có $-2t + 10 = 0 \Leftrightarrow t = 5 \Rightarrow$ thời gian tính từ lúc bắt đầu đạp phanh đến khi dừng hẳn là 5 giây.
Vậy trong 8 giây cuối cùng thì có 3 giây ô tô chuyển động với vận tốc $10\,m/s$ và 5 giây chuyển động chậm dần đều với vận

tốc $v(t) = -2t + 10\ (m/s)$.
Khi đó quãng đường ô tô di chuyển là

$$S = 3 \cdot 10 + \int\limits_0^5 (-2t + 10)\,\mathrm{d}t = 30 + 25 = 55\,m.$$

Chọn đáp án (A) ....

CÂU 2. Một ô tô đang chạy với tốc độ 20 (m/s) thì gặp chướng ngại vật, người lái đạp phanh, từ thời điểm đó ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -5t + 20\ (m/s)$, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ô tô còn di chuyển bao nhiêu mét (m)?

A $20\,m$. **B** $30\,m$. **C** $10\,m$. **D** $40\,m$.

Lời giải.

Khi ô tô dừng hẳn thì $v(t) = 0 \Leftrightarrow -5t + 20 = 0 \Leftrightarrow t = 4\ (s)$.
Vậy từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ô tô di chuyển được

$$s = \int\limits_0^4 (-5t + 20)\,\mathrm{d}t = 40\ (m).$$

Chọn đáp án (D) ....

CÂU 3. Một chất điểm A xuất phát từ O, chuyển động thẳng với vận tốc biến thiên theo thời gian bởi quy luật $v(t) = \dfrac{1}{120}t^2 + \dfrac{58}{45}t\ (m/s)$, trong đó t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc A bắt đầu chuyển động. Từ trạng thái nghỉ, một chất điểm B cũng xuất phát từ O, chuyển động thẳng cùng hướng với A nhưng chậm hơn 3 giây so với A và có gia tốc bằng $a\ (m/s^2)$ (a là hằng số). Sau khi B xuất phát được 15 giây thì đuổi kịp A. Vận tốc của B tại thời điểm đuổi kịp A bằng

A $21\ (m/s)$. **B** $25\ (m/s)$. **C** $36\ (m/s)$. **D** $30\ (m/s)$.

Lời giải.

Thời điểm chất điểm B đuổi kịp chất điểm A thì chất điểm B đi được 15 giây, chất điểm A đi được 18 giây.
Biểu thức vận tốc của chất điểm B có dạng $v_B(t) = \displaystyle\int a\,\mathrm{d}t = at + C$ mà $v_B(0) = 0$ nên $v_B(t) = at$.
Do từ lúc chất điểm A bắt đầu chuyển động cho đến khi chất điểm B đuổi kịp thì quãng đường hai chất điểm đi được bằng nhau.
Do đó $\displaystyle\int\limits_0^{18}\left(\frac{1}{120}t^2 + \frac{58}{45}\right)\mathrm{d}t = \int\limits_0^{15} at\,\mathrm{d}t \Leftrightarrow 225 = a \cdot \frac{225}{2} \Leftrightarrow a = 2$.
Vậy vận tốc của chất điểm B tại thời điểm đuổi kịp A bằng

$$v_B(t) = 2 \cdot 15 = 30\ (m/s).$$

Chọn đáp án (D) ....

CÂU 4. Một chất điểm A xuất phát từ O, chuyển động thẳng với vận tốc biến thiên theo thời gian bởi quy luật $v(t) = \dfrac{1}{150}t^2 + \dfrac{59}{75}t\ (m/s)$, trong đó t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc a bắt đầu chuyển động. Từ trạng thái nghỉ, một chất điểm B cũng xuất phát từ O, chuyển động thẳng cùng hướng với A nhưng chậm hơn 3 giây so với A và có gia tốc bằng $a\ (m/s^2)$ (a là hằng số). Sau khi B xuất phát được 12 giây thì đuổi kịp A. Vận tốc của B tại thời điểm đuổi kịp A bằng

A $15\ (m/s)$. **B** $20\ (m/s)$. **C** $16\ (m/s)$. **D** $13\ (m/s)$.

Lời giải.

Quãng đường chất điểm A đi từ đầu đến khi B đuổi kịp là

$$S = \int\limits_0^{15}\left(\frac{1}{150}t^2 + \frac{59}{75}t\right)\mathrm{d}t = 96\ (m).$$

Vận tốc của chất điểm B là

$$v_B(t) = \int a\,\mathrm{d}t = at + C.$$

Tại thời điểm $t = 3$ vật B bắt đầu từ trạng thái nghỉ nên $v_B(3) = 0 \Leftrightarrow C = -3a$.
Lại có quãng đường chất điểm B đi được đến khi gặp A là

$$S_2 = \int\limits_3^{15}(at - 3a)\,\mathrm{d}t = \left(\frac{at^2}{2} - 3at\right)\Bigg|_3^{15} = 72a\ (m).$$

Vậy $72a = 96 \Leftrightarrow a = \dfrac{4}{3}\ \left(m/s^2\right)$.
Tại thời điểm đuổi kịp A thì vận tốc của B là $v_B\,(15) = 16\ (m/s)$.
Chọn đáp án C .... □

CÂU 5. Một ô tô bắt đầu chuyển động thẳng đều với vận tốc v_0, sau 6 giây chuyển động thì gặp chướng ngại vật nên bắt đầu giảm tốc độ với vận tốc chuyển động $v(t) = -\dfrac{5}{2}t + a\,(m/s)$ với $t \geq 6$ cho đến khi dừng hẳn. Biết rằng kể từ lúc chuyển động đến lúc dừng hẳn thì ô tô đi được quãng đường là $80\,m$. Tìm v_0.

A $v_0 = 35\,m/s$. **B** $v_0 = 25\,m/s$. **C** $v_0 = 10\,m/s$. **D** $v_0 = 20\,m/s$.

Lời giải.

Tại thời điểm $t = 6$ vật đang chuyển động với vận tốc v_0 nên có

$$v(6) = v_0 \Leftrightarrow -\frac{5}{2}\cdot 6 + a = v_0 \Leftrightarrow a = v_0 + 15 \Rightarrow v(t) = -\frac{5}{2}t + v_0 + 15.$$

Gọi k là thời điểm vật dừng hẳn, ta có

$$v(k) = 0 \Leftrightarrow k = \frac{2}{5}\cdot(v_0 + 15) \Leftrightarrow k = \frac{2v_0}{5} + 6.$$

Tổng quãng đường vật đi được là

$$\begin{aligned}
& 80 = 6\cdot v_0 + \int\limits_6^k \left(-\frac{5}{2}t + v_0 + 15\right)\,\mathrm{d}t \\
\Leftrightarrow\quad & 80 = 6\cdot v_0 + \left(-\frac{5}{4}t^2 + v_0\cdot t + 15t\right)\Big|_6^k \\
\Leftrightarrow\quad & 80 = 6\cdot v_0 - \frac{5}{4}\left(k^2 - 6^2\right) + v_0\cdot(k-6) + 15(k-6) \\
\Leftrightarrow\quad & 80 = 6\cdot v_0 - \frac{5}{4}\left(\frac{4\,(v_0)^2}{25} + \frac{24v_0}{5}\right) + v_0\cdot\frac{2v_0}{5} + 15\cdot\frac{2v_0}{5} \\
\Leftrightarrow\quad & (v_0)^2 + 36\cdot v_0 - 400 = 0 \\
\Leftrightarrow\quad & v_0 = 10.
\end{aligned}$$

Chọn đáp án C .... □

CÂU 6. Để đảm bảo an toàn khi lưu thông trên đường, các xe ô tô khi dừng đèn đỏ phải cách nhau tối thiểu $1\,m$. Một ô tô A đang chạy với vận tốc $16\,m/s$ bỗng gặp ô tô B đang dừng đèn đỏ nên ô tô A hãm phanh và chuyển động chậm dần đều với vận tốc được biểu thị bởi công thức $v_A\,(t) = 16 - 4t$ (đơn vị tính bằng m/s), thời gian tính bằng giây. Hỏi rằng để hai ô tô A và B đạt khoảng cách an toàn khi dừng lại thì ô tô A phải hãm phanh khi cách ô tô B một khoảng ít nhất là bao nhiêu?

A 33. **B** 12. **C** 31. **D** 32.

Lời giải.

Ta có $v_A\,(0) = 16\,m/s$.
Khi xe A dừng hẳn $v_A\,(t) = 0 \Leftrightarrow t = 4\,s$.
Quãng đường từ lúc xe A hãm phanh đến lúc dừng hẳn là

$$s = \int\limits_0^4 (16 - 4t)\,\mathrm{d}t = 32\,m.$$

Chọn đáp án D .... □

CÂU 7. Do các xe phải cách nhau tối thiểu $1\,m$ để đảm bảo an toàn nên khi dừng lại ô tô A phải hãm phanh khi cách ô tô B một khoảng ít nhất là $33\,m$. Một chất điểm đang chuyển động với vận tốc $v_0 = 15\,m/s$ thì tăng tốc với gia tốc $a\,(t) = t^2 + 4t\ \left(m/s^2\right)$. Tính quãng đường chất điểm đó đi được trong khoảng thời gian 3 giây kể từ lúc bắt đầu tăng vận tốc.

A $70{,}25\,m$. **B** $68{,}25\,m$. **C** $67{,}25\,m$. **D** $69{,}75\,m$.

Lời giải.

Ta có

$$a\,(t) = t^2 + 4t \Rightarrow v\,(t) = \int a\,(t)\,\mathrm{d}t = \frac{t^3}{3} + 2t^2 + C,\ (C \in \mathbb{R}).$$

Mà $v(0) = C = 15 \Rightarrow v(t) = \dfrac{t^3}{3} + 2t^2 + 15$.

Vậy $S = \displaystyle\int_0^3 \left(\dfrac{t^3}{3} + 2t^2 + 15\right) \mathrm{d}t = 69{,}75\, m$.

Chọn đáp án D .... □

CÂU 8. Một vật chuyển động với vận tốc $10\, m/s$ thì tăng tốc với gia tốc được tính theo thời gian là $a(t) = t^2 + 3t$. Tính quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian 6 giây kể từ khi vật bắt đầu tăng tốc.

A $136\, m$. **B** $126\, m$. **C** $276\, m$. **D** $216\, m$.

Lời giải.

Ta có $v(0) = 10\, m/s$ và

$$v(t) = \int_0^t a(t)\, \mathrm{d}t = \int_0^t \left(t^2 + 3t\right) \mathrm{d}t = \left.\left(\frac{t^3}{3} + \frac{3t^2}{2}\right)\right|_0^t = \frac{1}{3}t^3 + \frac{3}{2}t^2.$$

Quãng đường vật đi được là

$$S = \int_0^6 v(t)\, \mathrm{d}t = \int_0^6 \left(\frac{1}{3}t^3 + \frac{3}{2}t^2\right) \mathrm{d}t = \left.\left(\frac{1}{12}t^4 + \frac{1}{2}t^3\right)\right|_0^6 = 216\, m.$$

Chọn đáp án D .... □

CÂU 9. Một chiếc máy bay chuyển động trên đường băng với vận tốc $v(t) = t^2 + 10t\ (m/s)$ với t là thời gian được tính theo đơn vị giây kể từ khi máy bay bắt đầu chuyển động. Biết khi máy bay đạt vận tốc $200\ (m/s)$ thì rời đường băng. Quãng đường máy bay đã di chuyển trên đường băng là

A $\dfrac{2500}{3}\ (m)$. **B** $2000\ (m)$. **C** $500\ (m)$. **D** $\dfrac{4000}{3}\ (m)$.

Lời giải.

Thời điểm máy bay đạt vận tốc $200\ (m/s)$ là

$$v(t) = 200 \Leftrightarrow t^2 + 10t = 200 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 10 \\ t = -20 \end{array}\right. \Leftrightarrow t = 10.$$

Quãng đường máy bay đã di chuyển trên đường băng là

$$s = \int_0^{10} \left(t^2 + 10t\right) \mathrm{d}t = \left.\left(\frac{t^3}{3} + 5t\right)\right|_0^{10} = \frac{2500}{3}\ (m).$$

Chọn đáp án A .... □

CÂU 10. Một ô tô bắt đầu chuyển động nhạnh dần đều với vận tốc $v_1(t) = 7t\ (m/s)$. Đi được $5\, s$, người lái xe phát hiện chướng ngại vật và phanh gấp, ô tô tiếp tục chuyển động chậm dần đều với gia tốc $a = -70\ \left(m/s^2\right)$. Tính quãng đường S đi được của ô tô từ lúc bắt đầu chuyển bánh cho đến khi dừng hẳn.

A $S = 96{,}25\ (m)$. **B** $S = 87{,}5\ (m)$. **C** $S = 94\ (m)$. **D** $S = 95{,}7\ (m)$.

Lời giải.

Chọn gốc thời gian là lúc ô tô bắt đầu đi.

Sau $5\, s$ ô tô đạt vận tốc là $v(5) = 35\ (m/s)$.

Sau khi phanh vận tốc ô tô là $v(t) = 35 - 70(t - 5)$.

Ô tô dừng tại thời điểm $t = 5{,}5\, s$.

Quãng đường ô tô đi được là

$$S = \int_0^5 7t\, \mathrm{d}t + \int_5^{5{,}5} [35 - 70(t - 5)]\, \mathrm{d}t = 96{,}25\ (m).$$

Chọn đáp án A .... □

CÂU 11. Một ô tô bắt đầu chuyển động nhanh dần đều với vận tốc $v_1(t) = 2t\ (m/s)$. Đi được 12 giây, người lái xe gặp chướng ngại vật và phanh gấp, ô tô tiếp tục chuyển động chậm dần đều với gia tốc $a = -12\ \left(m/s^2\right)$. Tính quãng đường $s\,(m)$ đi được của ôtô từ lúc bắt đầu chuyển động đến khi dừng hẳn.

A $s = 168\ (m)$. **B** $s = 166\ (m)$. **C** $s = 144\ (m)$. **D** $s = 152\ (m)$.

Lời giải.

Giải đoạn 1: Xe bắt đầu chuyển động đến khi gặp chướng ngại vật.
Quãng đường xe đi được là

$$S_1 = \int_0^{12} v_1(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{12} 2t\,\mathrm{d}t = t^2\Big|_0^{12} = 144\ (m).$$

Giải đoạn 2: Xe gặp chướng ngại vật đến khi dừng hẳn.
Ôtô chuyển động chậm dần đều với vận tốc

$$v_2(t) = \int a\,\mathrm{d}t = -12t + c.$$

Vận tốc của xe khi gặp chướng ngại vật là

$$v_2(0) = v_1(12) = 2\cdot 12 = 24\ (m/s).$$

Suy ra $-12\cdot 0 + c = 24 \Rightarrow c = 24 \Rightarrow v_2(t) = -12t + 24$.
Thời gian khi xe gặp chướng ngại vật đến khi xe dừng hẳn là nghiệm phương trình

$$-12t + 24 = 0 \Leftrightarrow t = 2.$$

Khi đó, quãng đường xe đi được là

$$S_2 = \int_0^{2} v_2(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{2} (-12t+24)\,\mathrm{d}t = \left(-6t^2+24t\right)\Big|_0^{2} = 24\ (m).$$

Vậy tổng quãng đường xe đi được là $S = S_1 + S_2 = 168\ (m)$.
Chọn đáp án A ....

CÂU 12. Một ô tô đang dừng và bắt đầu chuyển động theo một đường thẳng với gia tốc $a(t) = 6 - 2t\ (\mathrm{m/s^2})$, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây kể từ lúc ô tô bắt đầu chuyển động. Hỏi quảng đường ô tô đi được từ lúc bắt đầu chuyển động đến khi vận tốc của ô tô đạt giá trị lớn nhất là bao nhiêu mét?

A 18 m. B 36 m. C 22,5 m. D 6,75 m.

Lời giải.

$a(t) = 6 - 2t\ (\mathrm{m/s^2}) \Rightarrow v(t) = \int (6-2t)\,\mathrm{d}t = 6t - t^2 + C$.
Xe dừng và bắt đầu chuyển động nên khi $t = 0$ thì $v = 0 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow v(t) = 6t - t^2$.
$v(t) = 6t - t^2$ là hàm số bậc 2 nên đạt giá trị lớn nhất khi $t = -\dfrac{b}{2a} = 3$ (s).
Quãng đường xe đi trong 3 giây đầu là: $S = \displaystyle\int_0^3 \left(6t - t^2\right)\,\mathrm{d}t = 18$ (m).

Chọn đáp án A ....

CÂU 13. Một chất điểm A xuất phát từ O, chuyển động thẳng với vận tốc biến thiên theo thời gian bởi quy luật $v(t) = \dfrac{1}{180}t^2 + \dfrac{11}{18}t$ (m/s), trong đó t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc A bắt đầu chuyển động. Từ trạng thái nghỉ, một chất điểm B cũng xuất phát từ O, chuyển động thẳng cùng hướng với A nhưng chậm hơn 5 giây so với A và có gia tốc bằng a ($\mathrm{m/s^2}$) (a là hằng số). Sau khi B xuất phát được 10 giây thì đuổi kịp A. Vận tốc của B tại thời điểm đuổi kịp A bằng

A 15 (m/s). B 10 (m/s). C 7 (m/s). D 22(m/s).

Lời giải.

Thời gian tính từ khi A xuất phát đến khi bị B đuổi kịp là 15 giây, suy ra quãng đường đi được tới lúc đó là:

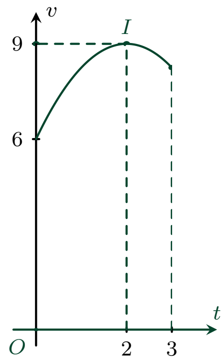
$$\int_0^{15} v(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{15} \left(\frac{1}{180}t^2 + \frac{11}{18}t\right)\mathrm{d}t = \left(\frac{1}{540}t^3 + \frac{11}{36}t^2\right)\Big|_0^{15} = 75\,(\mathrm{m}).$$

Vận tốc của chất điểm B là $y(t) = \int a\,\mathrm{d}t = a\cdot t + C$ (C là hằng số); do B xuất phát từ trạng thái nghỉ nên có $y(0) = 0 \Leftrightarrow C = 0$.
Quãng đường của B từ khi xuất phát đến khi đuổi kịp A là

$$\int_0^{10} y(t)\,\mathrm{d}t = 75 \Leftrightarrow \int_0^{10} a\cdot t\,\mathrm{d}t = 75 \Leftrightarrow \frac{a\cdot t^2}{2}\Big|_0^{10} = 75 \Leftrightarrow 50a = 75 \Leftrightarrow a = \frac{3}{2}.$$

Vậy có $y(t) = \dfrac{3t}{2}$; suy ra vận tốc của B tại thời điểm đuổi kịp A bằng $y(10) = 15$ (m/s).
Chọn đáp án A ....

CÂU 14. Một vật chuyển động trong 3 giờ với vận tốc v (km/h) phụ thuộc thời gian t (h) có đồ thị là một phần của đường parabol có đỉnh $I\,(2;9)$ và trục đối xứng song song với trục tung như hình bên. Tính quãng đường s mà vật di chuyển được trong 3 giờ đó.



A $s = 25{,}25$ (km). **B** $s = 24{,}25$ (km). **C** $s = 24{,}75$ (km). **D** $s = 26{,}75$ (km).

Lời giải.

Gọi $v\,(t) = at^2 + bt + c$.

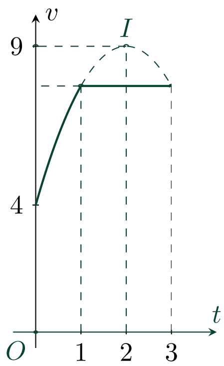
Đồ thị $v\,(t)$ là một phần parabol có đỉnh $I\,(2;9)$ và đi qua điểm $A\,(0;6)$ nên

$$\begin{cases} \dfrac{-b}{2a} = 2 \\ a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c = 9 \\ a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{3}{4} \\ b = 3 \\ c = 6 \end{cases}. \text{ Tìm được } v\,(t) = -\frac{3}{4}t^2 + 3t + 6.$$

Vậy $S = \displaystyle\int_0^3 \left(-\frac{3}{4}t^2 + 3t + 6\right)\,\mathrm{d}t = 24{,}75$ (km).

Chọn đáp án C .... □

CÂU 15. Một vật chuyển động trong 3 giờ với vận tốc v (km/h) phụ thuộc vào thời gian t (h) có đồ thị vận tốc như hình bên. Trong thời gian 1 giờ kể từ khi bắt đầu chuyển động, đồ thị đó là một phần của đường parabol có đỉnh $I\,(2;9)$ và trục đối xứng song song với trục tung, khoảng thời gian còn lại đồ thị là một đoạn thẳng song song với trục hoành. Tính quãng đường s mà vật chuyển động được trong 3 giờ đó (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).



A $s = 21{,}58$ (km). **B** $s = 23{,}25$ (km). **C** $s = 13{,}83$ (km). **D** $s = 15{,}50$ (km).

Lời giải.

Gọi phương trình parabol $v = at^2 + bt + c$ ta có hệ như sau

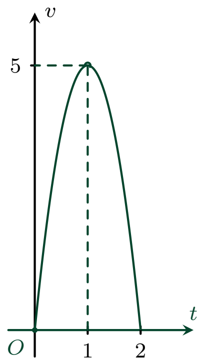
$$\begin{cases} c = 4 \\ 4a + 2b + c = 9 \\ -\dfrac{b}{2a} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 5 \\ c = 4 \\ a = -\dfrac{5}{4}. \end{cases}$$

Với $t = 1$ ta có $v = \dfrac{31}{4}$. Vậy quãng đường vật chuyển động được là

$$s = \int_0^1 \left(-\frac{5}{4}t^2 + 5t + 4\right)\,\mathrm{d}t + \int_1^3 \frac{31}{4}\,\mathrm{d}t = \frac{259}{12} \approx 21{,}58.$$

Chọn đáp án A .... □

CÂU 16. Một người chạy trong 2 giờ, vận tốc v (km/h) phụ thuộc vào thời gian t (h) có đồ thị là 1 phần của đường Parabol với đỉnh $I(1;5)$ và trục đối xứng song song với trục tung Ov như hình vẽ. Tính quảng đường S người đó chạy được trong 1 giờ 30 phút kể từ lúc bắt đầu chạy (kết quả làm tròn đến 2 chữ số thập phân).



(A) 2,11 km. (B) 6,67 km. (C) 5,63 km. (D) 6,63 km.

Lời giải.

Ta có 1 giờ 30 phút $= 1,5$ giờ $\Rightarrow S = \int\limits_0^{1,5} v(t)\,\mathrm{d}t$.

Đồ thị $v = v(t)$ đi qua gốc tọa độ nên $v(t)$ có dạng $v(t) = at^2 + bt$.

Đồ thị $v(t)$ có đỉnh là $I(1;5)$ nên $\begin{cases} -\dfrac{b}{2a} = 1 \\ a + b = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -2a \\ a + b = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -5 \\ b = 10. \end{cases}$

Suy ra $v(t) = -5t^2 + 10$. Do đó

$$S = \int\limits_0^{1,5} \left(-5t^2 + 10\right)\mathrm{d}t = \frac{45}{8} \approx 5{,}63.$$

Chọn đáp án (C)

Phần III. Học sinh điền kết quả vào ô trống.

CÂU 17. Một ô tô đang chạy với vận tốc là 12 (m/s) thì người lái đạp phanh; từ thời điểm đó ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -6t + 12$ (m/s), trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây kể từ lúc đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến lúc ô tô dừng hẳn, ô tô còn di chuyển được bao nhiêu mét?

Đáp án: 12

Lời giải.

Lấy mốc thời gian $(t = 0)$ là lúc đạp phanh.
Khi ô tô dừng hẳn thì vận tốc $v(t) = 0$, tức là $v(t) = -6t + 12 = 0 \Leftrightarrow t = 2$.
Vậy từ lúc đạp phanh đến lúc ô tô dừng hẳn, ô tô còn di chuyển được quãng đường là:

$$\int\limits_0^2 (-6t + 12)\,\mathrm{d}t = \left(-3t^2 + 12t\right)\Big|_0^2 = 12\,(\mathrm{m}).$$

CÂU 18. Một ô tô đang chạy với vận tốc 10 m/s thì người lái đạp phanh; từ thời điểm đó, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -5t + 10$ (m/s), trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ô tô còn di chuyển bao nhiêu mét?

Đáp án: 10

Lời giải.

Xét phương trình $-5t + 10 = 0 \Leftrightarrow t = 2$. Do vậy, kể từ lúc người lái đạp phanh thì sau $2s$ ô tô dừng hẳn.
Quãng đường ô tô đi được kể từ lúc người lái đạp phanh đến khi ô tô dừng hẳn là:

$$s = \int\limits_0^2 (-5t + 10)\,\mathrm{d}t = \left(-\frac{5}{2}t^2 + 10t\right)\Big|_0^2 = 10(\mathrm{m}).$$

CÂU 19. Một chất điểm A xuất phát từ O, chuyển động thẳng với vận tốc biến thiên theo thời gian bởi quy luật $v(t) = \dfrac{1}{100}t^2 + \dfrac{13}{30}t$ (m/s), trong đó t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc A bắt đầu chuyển động. Từ trạng thái nghỉ, một chất điểm B cũng xuất phát từ O, chuyển động thẳng cùng hướng với A nhưng chậm hơn 10 giây so với A và có gia tốc bằng a

(m/s^2) (a là hằng số). Sau khi B xuất phát được 15 giây thì đuổi kịp A. Vận tốc của B tại thời điểm đuổi kịp A bằng bao nhiêu m/s?

Đáp án: 25

Lời giải.

Ta có $v_B(t) = \int a \cdot \mathrm{d}t = at + C$, $v_B(0) = 0 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow v_B(t) = at$.
Quãng đường chất điểm A đi được trong 25 giây là

$$S_A = \int\limits_0^{25} \left(\frac{1}{100}t^2 + \frac{13}{30}t\right) \mathrm{d}t = \left(\frac{1}{300}t^3 + \frac{13}{60}t^2\right)\Big|_0^{25} = \frac{375}{2}.$$

Quãng đường chất điểm B đi được trong 15 giây là

$$S_B = \int\limits_0^{15} at \cdot \mathrm{d}t = \frac{at^2}{2}\Big|_0^{15} = \frac{225a}{2}.$$

Ta có $\dfrac{375}{2} = \dfrac{225a}{2} \Leftrightarrow a = \dfrac{5}{3}$.
Vận tốc của B tại thời điểm đuổi kịp A là $v_B(15) = \dfrac{5}{3} \cdot 15 = 25$ (m/s).

CÂU 20. Một ô tô chuyển động nhanh dần đều với vận tốc $v(t) = 7t$ (m/s). Đi được 5 (s) người lái xe phát hiện chướng ngại vật và phanh gấp, ô tô tiếp tục chuyển động chậm dần đều với gia tốc $a = -35$ (m/s^2). Tính quãng đường của ô tô đi được từ lúc bắt đầu chuyển bánh cho đến khi dừng hẳn (đơn vị tính bằng mét)?

Đáp án: 105

Lời giải.

Quãng đường ô tô đi được trong 5 (s) đầu là $s_1 = \int\limits_0^5 7t\,\mathrm{d}t = 7\dfrac{t^2}{2}\Big|_0^5 = 87{,}5$ (mét).

Phương trình vận tốc của ô tô khi người lái xe phát hiện chướng ngại vật là $v_2(t) = 35 - 35t$ (m/s). Khi xe dừng lại hẳn thì $v_2(t) = 0 \Leftrightarrow 35 - 35t = 0 \Leftrightarrow t = 1$.
Quãng đường ô tô đi được từ khi phanh gấp đến khi dừng lại hẳn là

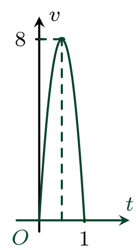
$$s_2 = \int\limits_0^1 (35 - 35t)\,\mathrm{d}t = (35 - 35t)\Big|_0^1 = 17,5\,(\text{mét}).$$

Vậy quãng đường của ô tô đi được từ lúc bắt đầu chuyển bánh cho đến khi dừng hẳn là

$$s = s_1 + s_2 = 87,5 + 17,5 = 105\,(\text{mét}).$$

CÂU 21.

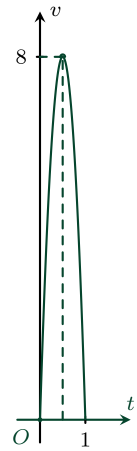
Một người chạy trong thời gian 1 giờ, vận tốc v (km/h) phụ thuộc vào thời gian $t\,(h)$ có đồ thị là một phần parabol với đỉnh $I\left(\dfrac{1}{2}; 8\right)$ và trục đối xứng song song với trục tung như hình bên. Tính quảng đường s người đó chạy được trong khoảng thời gian 45 phút, kể từ khi chạy (đơn vị tính bằng km)?



Đáp án: 4,5

Lời giải.

Gọi parabol là $(P): y = ax^2 + bx + c$. Từ hình vẽ ta có (P) đi qua $O(0;0)$, $A(1;0)$ và điểm $I\left(\frac{1}{2};8\right)$.

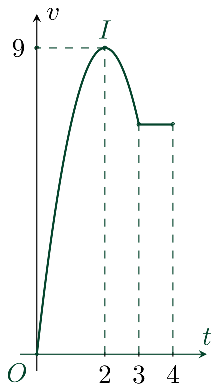


Ta có hệ: $\begin{cases} c = 0 \\ a + b + c = 0 \\ \frac{a}{4} + \frac{b}{2} + c = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -32 \\ b = 32 \\ c = 0. \end{cases}$

Suy ra $(P): y = -32x^2 + 32x$.

Vậy quãng đường người đó đi được là $s = \int\limits_0^{\frac{3}{4}} \left(-32x^2 + 32x\right)\,\mathrm{d}x = 4{,}5$ (km).

CÂU 22. Một vật chuyển động trong 4 giờ với vận tốc v (km/h) phụ thuộc thời gian t (h) có đồ thị của vận tốc như hình bên. Trong khoảng thời gian 3 giờ kể từ khi bắt đầu chuyển động, đồ thị đó là một phần của đường parabol có đỉnh $I(2;9)$ với trục đối xứng song song với trục tung, khoảng thời gian còn lại đồ thị là một đoạn thẳng song song với trục hoành. Tính quãng đường s mà vật di chuyển được trong 4 giờ đó (đơn vị tính bằng km).



Đáp án: 27

Lời giải.

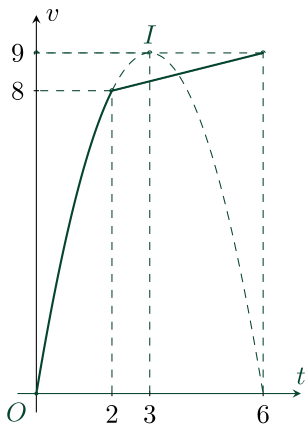
Gọi $(P): y = ax^2 + bx + c$.

Vì (P) qua $O(0;0)$ và có đỉnh $I(2;9)$ nên dễ tìm được phương trình là $y = \frac{-9}{4}x^2 + 9x$.

Ngoài ra tại $x = 3$ ta có $y = \frac{27}{4}$.

Vậy quãng đường cần tìm là: $S = \int\limits_0^3 \left(\frac{-9}{4}x^2 + 9x\right)\,\mathrm{d}x + \int\limits_3^4 \frac{27}{4}\,\mathrm{d}x = 27$ (km).

CÂU 23. Một vật chuyển động trong 6 giờ với vận tốc v (km/h) phụ thuộc vào thời gian t (h) có đồ thị như hình bên dưới. Trong khoảng thời gian 2 giờ từ khi bắt đầu chuyển động, đồ thị là một phần đường Parabol có đỉnh $I(3;9)$ và có trục đối xứng song song với trục tung. Khoảng thời gian còn lại, đồ thị vận tốc là một đường thẳng có hệ số góc bằng $\frac{1}{4}$. Tính quảng đường s mà vật di chuyển được trong 6 giờ? (đơn vị tính bằng km, làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất).



Đáp án: 43,3

Lời giải.

Vì Parabol đi qua $O(0;0)$ và có tọa độ đỉnh $I(3;9)$ nên thiết lập được phương trình Parabol là $(P): y = v(t) = -t^2 + 6t$; $\forall t \in [0;2]$.

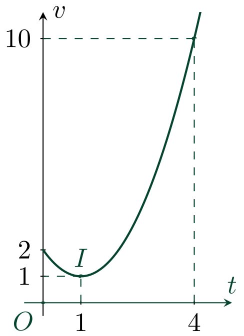
Sau 2 giờ đầu thì hàm vận tốc có dạng là hàm bậc nhất $y = \dfrac{1}{4}t + m$, dựa trên đồ thị ta thấy đi qua điểm có tọa độ $(6;9)$ nên thế vào hàm số và tìm được $m = \dfrac{15}{2}$.

Nên hàm vận tốc từ giờ thứ 2 đến giờ thứ 6 là: $y = \dfrac{1}{4}t + \dfrac{15}{2}, \forall t \in [2;6]$.

Quảng đường vật đi được bằng tổng đoạn đường 2 giờ đầu và đoạn đường 4 giờ sau.

$$S = S_1 + S_2 = \int\limits_0^2 \left(-t^2 + 6t\right)\,\mathrm{d}t + \int\limits_2^6 \left(\frac{1}{4}t + \frac{15}{2}\right)\,\mathrm{d}t = \frac{130}{3} \approx 43{,}3\,(\mathrm{km})\,.$$

CÂU 24. Một vật chuyển động trong 4 giờ với vận tốc v (km/h) phụ thuộc thời gian t (h) có đồ thị là một phần của đường parabol có đỉnh $I(1;1)$ và trục đối xứng song song với trục tung như hình bên. Tính quãng đường s mà vật di chuyển được trong 4 giờ kể từ lúc xuất phát (làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất).



Đáp án: 13,3

Lời giải.

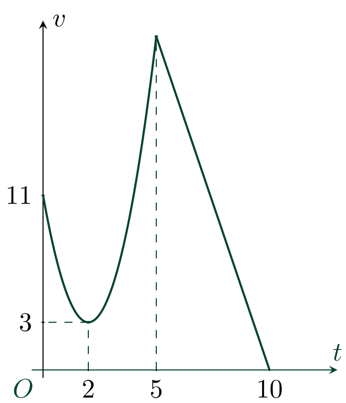
Hàm biểu diễn vận tốc có dạng $v(t) = at^2 + bt + c$. Dựa vào đồ thị ta có

$$\begin{cases} c = 2 \\ -\dfrac{b}{2a} = 1 \\ a + b + c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c = 2 \end{cases} \Leftrightarrow v(t) = t^2 - 2t + 2.$$

Với $t = 4 \Rightarrow v(4) = 10$ (thõa mãn).

Từ đó $s = \displaystyle\int\limits_0^4 \left(t^2 - 2t + 2\right)\,\mathrm{d}t = \dfrac{40}{3} \approx 13{,}3$ (km).

CÂU 25. Chất điểm chuyển động theo quy luật vận tốc $v(t)$ (m/s) có dạng đường Parapol khi $0 \le t \le 5$ (s) và $v(t)$ có dạng đường thẳng khi $5 \le t \le 10$ (s). Cho đỉnh Parapol là $I(2;3)$. Hỏi quãng đường đi được chất điểm trong thời gian $0 \le t \le 10$ (s) là bao nhiêu mét? (làm tròn đến hàng đơn vị)



Đáp án: 91

Lời giải.

Gọi Parapol $(P): y = ax^2 + bx + c$ khi $0 \le t \le 5\,(s)$.
Do $(P): y = ax^2 + bx + c$ đi qua $I\,(3;2)$; $A\,(0;11)$ nên

$$\begin{cases} 4a + 2b + c = 3 \\ c = 11 \\ 4a + b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -8 \\ c = 11. \end{cases}$$

Khi đó quãng đường vật di chuyển trong khoảng thời gian từ $0 \le t \le 5$ (s) là

$$S_1 = \int\limits_0^5 \left(2x^2 - 8x + 11\right) \mathrm{d}x = \frac{115}{3}\,(\mathrm{m}).$$

Ta có $f\,(5) = 21$.
Gọi d: $y = ax + b$ khi $5 \le t \le 10$ (s), do d đi qua điểm $B\,(5;21)$ và $C\,(10;0)$ nên

$$\begin{cases} 5a + b = 11 \\ 10a + b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{21}{5} \\ b = 42. \end{cases}$$

Khi đó quãng đường vật di chuyển trong khoảng thời gian từ $5 \le t \le 10$ (s) là:

$$S_2 = \int\limits_5^{10} \left(-\frac{21}{5}x + 42\right) \mathrm{d}x = \frac{105}{2}\,(\mathrm{m}).$$

Quãng đường đi được chất điểm trong thời gian $0 \le t \le 10$ (s) là:

$$S = \frac{115}{3} + \frac{105}{2} = \frac{545}{6} \approx 91\,(\mathrm{m}).$$

C. TÍCH PHÂN HÀM ẨN BIẾN ĐỔI PHỨC TẠP

Phần I. Mỗi câu hỏi học sinh chọn một trong bốn phương án A, B, C, D.

CÂU 1. Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị không âm và có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f'(x) = (2x+1)[f(x)]^2, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = -1$. Giá trị của tích phân $\int\limits_0^1 \left(x^3 - 1\right) f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

A 1. **B** $\dfrac{2}{3}$. **C** $\dfrac{1}{2}$. **D** $\dfrac{3}{2}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} & f'(x) = (2x+1)[f(x)]^2, \forall x \in \mathbb{R} \\ \Rightarrow\ & \frac{-f'(x)}{[f(x)]^2} = -(2x+1), \forall x \in \mathbb{R} \\ \Rightarrow\ & \left[\frac{1}{f(x)}\right]' = -(2x+1), \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Suy ra $\dfrac{1}{f(x)} = -\int (2x+1)\,\mathrm{d}x = -x^2 - x + C \Rightarrow f(x) = \dfrac{1}{-x^2 - x + C}$.
Vì $f(0) = -1 \Rightarrow C = -1$.
Suy ra $f(x) = -\dfrac{1}{x^2 + x + 1}$.

$\int\limits_0^1 \left(x^3 - 1\right) f(x)\,\mathrm{d}x = -\int\limits_0^1 \left(x^3 - 1\right)\left(\dfrac{1}{x^2 + x + 1}\right) \mathrm{d}x = \int\limits_0^1 (1 - x)\,\mathrm{d}x$

$= \left(x - \dfrac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1 = \dfrac{1}{2}$.

Chọn đáp án C .... □

CÂU 2. Cho hàm số $f(x) \neq 0$, liên tục trên đoạn $[1;2]$ và thỏa mãn $f(1) = \dfrac{1}{3}$; $x^2 \cdot f'(x) = f^2(x)$ với $\forall x \in [1;2]$. Tính tích phân $I = \int\limits_1^2 (2x+1)^2 f(x)\,\mathrm{d}x$.

(A) $I=\frac{7}{6}$. (B) $I=\frac{5}{6}$. (C) $I=\frac{37}{6}$. (D) $I=\frac{1}{6}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}
&x^2\cdot f'(x)=f^2(x)\\
\Rightarrow&\frac{f'(x)}{f^2(x)}=\frac{1}{x^2}\\
\Rightarrow&\left[-\frac{1}{f(x)}\right]'=\frac{1}{x^2}\\
\Rightarrow&-\frac{1}{f(x)}=\int\frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x\\
\Rightarrow&\frac{1}{f(x)}=-\int\frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x\\
\Rightarrow&\frac{1}{f(x)}=\frac{1}{x}+C.
\end{aligned}$$

Mà $f(1)=\frac{1}{3}\Rightarrow 3=1+C\Rightarrow C=2$.

Do đó $\frac{1}{f(x)}=\frac{1}{x}+2\Rightarrow f(x)=\frac{x}{2x+1}$.

Vậy $I=\int\limits_1^2(2x+1)^2f(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_1^2(2x+1)^2\frac{x}{2x+1}\,\mathrm{d}x=\int\limits_1^2\left(2x^2+x\right)\,\mathrm{d}x=\frac{37}{6}$.

Chọn đáp án (C) .... □

CÂU 3. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $3f'(x)\cdot\mathrm{e}^{f^3(x)}-\frac{2x}{f^2(x)}=0$ với $\forall x\in\mathbb{R}$. Biết $f(1)=0$, tính tích phân $I=\int\limits_0^{2024}\frac{1}{\sqrt[3]{2\ln x}}\cdot f(x)\,\mathrm{d}x$.

(A) 1. (B) $\frac{1}{2024}$. (C) 2024. (D) 0.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}
&3f'(x)\cdot\mathrm{e}^{f^3(x)}-\frac{2x}{f^2(x)}=0\\
\Rightarrow&3f^2(x)\cdot f'(x)\cdot\mathrm{e}^{f^3(x)}=2x\\
\Rightarrow&\left[\mathrm{e}^{f^3(x)}\right]'=2x\\
\Rightarrow&\mathrm{e}^{f^3(x)}=\int2x\,\mathrm{d}x\\
\Rightarrow&\mathrm{e}^{f^3(x)}=x^2+C.
\end{aligned}$$

Mặt khác $f(1)=0\Rightarrow\mathrm{e}^{f^3(1)}=1+C\Rightarrow C=0$.

Suy ra $\mathrm{e}^{f^3(x)}=x^2\Rightarrow f^3(x)=\ln x^2\Rightarrow f(x)=\sqrt[3]{2\ln x}$.

Vậy $I=\int\limits_0^{2024}\frac{1}{\sqrt[3]{2\ln x}}\cdot f(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^{2024}\frac{1}{\sqrt[3]{2\ln x}}\cdot\sqrt[3]{2\ln x}\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^{2024}\mathrm{d}x=2024$

Chọn đáp án (C) .... □

CÂU 4. Cho hàm số $f(x)$ đồng biến, có đạo hàm trên đoạn $[1;4]$ và thoả mãn $x+2x\cdot f(x)=[f'(x)]^2$ với $\forall x\in[1;4]$. Biết $f(1)=\frac{3}{2}$, tính $I=\int\limits_1^4f(x)\,\mathrm{d}x$.

(A) $I=\frac{1186}{45}$. (B) $I=\frac{1186}{9}$. (C) $I=\frac{1186}{5}$. (D) $I=\frac{1186}{41}$.

Lời giải.

Do $f(x)$ đồng biến trên đoạn $[1;4]\Rightarrow f'(x)\geq0,\forall x\in[1;4]$.

Ta có $x+2x\cdot f(x)=[f'(x)]^2\Leftrightarrow x\,(1+2\cdot f(x))=[f'(x)]^2$, Do $x \in [1;4]$ và $f'(x) \geq 0, \forall x \in [1;4] \Rightarrow f(x) > \dfrac{-1}{2}$ và

$$\begin{aligned}
& f'(x) = \sqrt{x} \cdot \sqrt{1+2f(x)} \\
\Leftrightarrow & \frac{f'(x)}{\sqrt{1+2f(x)}} = \sqrt{x} \\
\Leftrightarrow & \left(\sqrt{1+2f(x)}\right)' = \sqrt{x} \\
\Leftrightarrow & \sqrt{1+2f(x)} = \int \sqrt{x}\,\mathrm{d}x \\
\Leftrightarrow & \sqrt{1+2f(x)} = \frac{2}{3}x\sqrt{x} + C.
\end{aligned}$$

Vì $f(1) = \dfrac{3}{2} \Rightarrow \sqrt{1+2\cdot\dfrac{3}{2}} = \dfrac{2}{3} + C \Leftrightarrow C = \dfrac{4}{3}$.

Suy ra

$$\begin{aligned}
& \sqrt{1+2f(x)} = \frac{2}{3}x\sqrt{x} + \frac{4}{3} \\
\Leftrightarrow & 1+2f(x) = \left(\frac{2}{3}x\sqrt{x} + \frac{4}{3}\right)^2 \\
\Leftrightarrow & f(x) = \frac{2}{9}x^3 + \frac{8}{9}x^{\frac{3}{2}} + \frac{7}{18}.
\end{aligned}$$

Khi đó

$I = \displaystyle\int_1^4 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_1^4 \left(\frac{2}{9}x^3 + \frac{8}{9}x^{\frac{3}{2}} + \frac{7}{18}\right)\mathrm{d}x = \left(\frac{1}{18}x^4 + \frac{16}{45}x^{\frac{5}{2}} + \frac{7}{18}x\right)\Bigg|_1^4 = \frac{1186}{45}$.

Chọn đáp án A .... □

CÂU 5. Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị dương và thỏa mãn $f(0) = 1$, $[f'(x)]^3 = \mathrm{e}^x [f(x)]^2, \forall x \in \mathbb{R}$. Tính $I = \displaystyle\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x$.

A $I = \mathrm{e}^2 + 1$. **B** $I = \mathrm{e} - 1$. **C** $I = \mathrm{e}^2 - e$. **D** $I = \mathrm{e}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}
& [f'(x)]^3 = \mathrm{e}^x [f(x)]^2 \\
\Leftrightarrow & f'(x) = \sqrt[3]{\mathrm{e}^x} \cdot \sqrt[3]{[f(x)]^2} \\
\Leftrightarrow & \frac{f'(x)}{\sqrt[3]{[f(x)]^2}} = \sqrt[3]{\mathrm{e}^x} \\
\Leftrightarrow & \frac{f'(x)}{\sqrt[3]{[f(x)]^2}} = \sqrt[3]{\mathrm{e}^x} \\
\Leftrightarrow & f'(x) \cdot [f(x)]^{-\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{\mathrm{e}^x} \\
\Leftrightarrow & 3\left[(f(x))^{\frac{1}{3}}\right]' = \sqrt[3]{\mathrm{e}^x} \\
\Leftrightarrow & \left[(f(x))^{\frac{1}{3}}\right]' = \frac{1}{3}\sqrt[3]{\mathrm{e}^x} \\
\Leftrightarrow & [f(x)]^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}\int \sqrt[3]{\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x \\
\Leftrightarrow & [f(x)]^{\frac{1}{3}} = \mathrm{e}^{\frac{x}{3}} + C.
\end{aligned}$$

Mà $f(0) = 1 \Rightarrow 1 = 1 + C \Rightarrow C = 0$.

Do đó $[f(x)]^{\frac{1}{3}} = \mathrm{e}^{\frac{x}{3}} \Rightarrow f(x) = \mathrm{e}^x$.

Vậy $I = \displaystyle\int_1^2 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^2 - \mathrm{e}$.

Chọn đáp án C .... □

CÂU 6. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn điều kiện $x^6[f'(x)]^3+27[f(x)-1]^4=0$, $\forall x\in\mathbb{R}$ và $f(1)=0$. Tính $I=\int\limits_2^3 f(x)\,\mathrm{d}x$.

A $I=\dfrac{31}{2}$. **B** $I=-\dfrac{31}{2}$. **C** $I=\dfrac{61}{4}$. **D** $I=-\dfrac{61}{4}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}
&x^6\left[f'(x)\right]^3+27\left[f(x)-1\right]^4=0\\
\Leftrightarrow\, & x^6[f'(x)]^3=-27\left[f(x)-1\right]^4\\
\Leftrightarrow\, & \frac{[f'(x)]^3}{[f(x)-1]^4}=-\frac{27}{x^6}\\
\Leftrightarrow\, & \frac{[f'(x)]^3}{[f(x)-1]^3\left[f(x)-1\right]}=-\frac{27}{x^6}\\
\Leftrightarrow\, & \frac{f'(x)}{[f(x)-1]\sqrt[3]{f(x)-1}}=-\frac{3}{x^2}\\
\Leftrightarrow\, & \frac{f'(x)}{-3\left[f(x)-1\right]\sqrt[3]{f(x)-1}}=\frac{1}{x^2}\\
\Leftrightarrow\, & \left[\frac{1}{\sqrt[3]{f(x)-1}}\right]'=\frac{1}{x^2}.
\end{aligned}$$

Do đó $\displaystyle\int\left[\frac{1}{\sqrt[3]{f(x)-1}}\right]'\mathrm{d}x=\int\frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{x}+C$.

Suy ra $\dfrac{1}{\sqrt[3]{f(x)-1}}=-\dfrac{1}{x}+C$.

Mà $f(1)=0\Rightarrow C=0$.

Nên $f(x)=1-x^3$.

Khi đó $I=\displaystyle\int\limits_2^3 f(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_2^3(1-x^3)\,\mathrm{d}x=-\frac{61}{4}$.

Chọn đáp án D .... □

CÂU 7. Cho hàm số $f(x)>0$ và thỏa mãn $[f'(x)]^2+f(x)\cdot f''(x)=\mathrm{e}^x$, $\forall x\in\mathbb{R}$ và $f(0)=f'(0)=1$. Tính $I=\int\limits_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x$.

A $I=2\sqrt{\mathrm{e}}$. **B** $I=\mathrm{e}-\sqrt{\mathrm{e}}$. **C** $I=2\mathrm{e}-2\sqrt{\mathrm{e}}$. **D** $I=2\mathrm{e}+2\sqrt{\mathrm{e}}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}
&[f'(x)]^2+f(x)\cdot f''(x)=\mathrm{e}^x\\
\Leftrightarrow\quad & [f(x)\cdot f'(x)]'=\mathrm{e}^x\\
\Rightarrow\quad & f(x)\cdot f'(x)=\int\limits_{\mathrm{e}}^{x}\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x\\
\Rightarrow\quad & f(x)\cdot f'(x)=\mathrm{e}^x+C.
\end{aligned}$$

Từ $f(0)=f'(0)=1$ ta suy ra $C=0$.

Vậy $f(x)\cdot f'(x)=\mathrm{e}^x$

Tiếp đến có

$$\begin{aligned}
&2f(x)\cdot f'(x)=\mathrm{e}^x\\
\Leftrightarrow\quad & \left[f^2(x)\right]'=\mathrm{e}^x\\
\Rightarrow\quad & f^2(x)=\int\limits_{\mathrm{e}}^{x}\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x\\
\Rightarrow\quad & f^2(x)=\mathrm{e}^x+C
\end{aligned}$$

Từ $f(0)=1$ ta suy ra $C=0$.

Vậy $f^2(x)=\mathrm{e}^x\Rightarrow f(x)=\sqrt{\mathrm{e}^x}$ (do $f(x)>0$).

Khi đó $I = \int\limits_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_1^2 \sqrt{\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x = \int\limits_1^2 \mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}x = 2\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\Big|_1^2 = 2\mathrm{e} - 2\sqrt{\mathrm{e}}$.

Chọn đáp án (C) .... □

CÂU 8. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $[f'(x)]^2 + f(x) \cdot f''(x) = 2x$, và $f(0) = f'(0) = 2$. Tính $I = \int\limits_1^2 f^2(x)\,\mathrm{d}x$.

A $I = \frac{15}{2}$. **B** $I = \frac{1}{2}$. **C** $I = \frac{19}{2}$. **D** $I = 15$.

Lời giải.

Ta có $[f(x)f'(x)]' = [f'(x)]^2 + f(x)f''(x)$.
Do đó theo giả thiết ta được $[f(x)f'(x)]' = 2x$.
Suy ra $f(x)f'(x) = x^2 + C$.
Hơn nữa $f(0) = f'(0) = 2$ suy ra $C = 1$.
$\Rightarrow f(x)f'(x) = x^2 + 1$.
Tương tự vì $\left[f^2(x)\right]' = 2f(x)f'(x)$ nên $\left[f^2(x)\right]' = 2\left(x^2+1\right)$.
Suy ra $f^2(x) = \int 2\left(x^2+1\right)\,\mathrm{d}x \Rightarrow f^2(x) = \frac{2}{3}x^3 + 2x + C$.
Mặt khác $f(0) = 2$ nên suy ra $C = 2$.
$\Rightarrow f^2(x) = \frac{2}{3}x^3 + 2x + 2$.
Vậy $I = \int\limits_1^2 f^2(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_1^2 \left(\frac{2}{3}x^3 + 2x + 2\right)\,\mathrm{d}x = \frac{15}{2}$.

Chọn đáp án (A) .... □

CÂU 9. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn: $[f'(x)]^2 + f(x) \cdot f''(x) = 15x^4 + 12x$, $\forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = f'(0) = 1$. Giá trị của $f^2(1)$ bằng

A $\frac{5}{2}$. **B** 8. **C** 10. **D** 4.

Lời giải.

Theo giả thiết

$$\begin{aligned}
&\forall x \in \mathbb{R}\colon\ [f'(x)]^2 + f(x) \cdot f''(x) = 15x^4 + 12x\\
\Leftrightarrow\ & f'(x) \cdot f'(x) + f(x) \cdot f''(x) = 15x^4 + 12x\\
\Leftrightarrow\ & [f(x) \cdot f'(x)]' = 15x^4 + 12x\\
\Leftrightarrow\ & f(x) \cdot f'(x) = \int \left(15x^4 + 12x\right)\,\mathrm{d}x = 3x^5 + 6x^2 + C. \quad (1)
\end{aligned}$$

Thay $x = 0$ vào (1), ta được $f(0) \cdot f'(0) = C \Leftrightarrow C = 1$.
Khi đó (1) trở thành $f(x) \cdot f'(x) = 3x^5 + 6x^2 + 1$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \int\limits_0^1 f(x) \cdot f'(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \left(3x^5 + 6x^2 + 1\right)\,\mathrm{d}x\\
&\Leftrightarrow \left[\frac{1}{2}f^2(x)\right]\Bigg|_0^1 = \left(\frac{1}{2}x^6 + 2x^3 + x\right)\Bigg|_0^1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\left[f^2(1) - f^2(0)\right] = \frac{7}{2}\\
&\Leftrightarrow f^2(1) - 1 = 7 \Leftrightarrow f^2(1) = 8.
\end{aligned}$$

Vậy $f^2(1) = 8$.

Chọn đáp án (B) .... □

CÂU 10. Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn $[f'(x)]^2 + f(x) \cdot f''(x) = x^3 - 2x$, $\forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = f'(0) = 2$. Tính giá trị của $T = f^2(2)$.

A $\frac{160}{15}$. **B** $\frac{268}{15}$. **C** $\frac{4}{15}$. **D** $\frac{268}{30}$.

Lời giải.

Ta có $[f'(x)]^2 + f(x) \cdot f''(x) = x^3 - 2x$, $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow [f'(x) \cdot f(x)]' = x^3 - 2x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
Lấy nguyên hàm hai vế ta có

$$\begin{aligned}
&\int [f'(x) \cdot f(x)]'\,\mathrm{d}x = \int \left(x^3 - 2x\right)\,\mathrm{d}x\\
\Leftrightarrow\ & f'(x) \cdot f(x) = \frac{x^4}{4} - x^2 + C.
\end{aligned}$$

Theo đề ra ta có $f(0)\cdot f(0) = C = 4$.

Suy ra $\int\limits_0^2 f'(x)\cdot f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^2 \left(\frac{x^4}{4} - x^2 + 4\right)\mathrm{d}x \Leftrightarrow \left.\frac{f^2(x)}{2}\right|_0^2 = \frac{104}{15} \Leftrightarrow f^2(2) = \frac{268}{15}$.

Chọn đáp án B

CÂU 11. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(x) + f'(x) = \mathrm{e}^{-x}$, $\forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = 2$. Tính $I = \int\limits_1^2 \frac{f(x)\mathrm{e}^x}{x}\,\mathrm{d}x$.

A) $I = 2\ln 2$. B) $I = \ln 2$. C) $I = 1 + \ln 2$. D) $I = 1 + 2\ln 2$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}
& f(x) + f'(x) = \mathrm{e}^{-x}\\
\Leftrightarrow\ & f(x)\mathrm{e}^x + f'(x)\mathrm{e}^x = 1\\
\Leftrightarrow\ & [f(x)\mathrm{e}^x]' = 1\\
\Rightarrow\ & f(x)\mathrm{e}^x = \int x\,\mathrm{d}x\\
\Leftrightarrow\ & f(x)\mathrm{e}^x = x + C.
\end{aligned}$$

Vì $f(0) = 2$ nên $C = 2$.

$\Rightarrow f(x)\mathrm{e}^x = x + 2$.

Vậy $I = \int\limits_1^2 \frac{f(x)\mathrm{e}^x}{x}\,\mathrm{d}x = \int\limits_1^2 \frac{x+2}{x}\,\mathrm{d}x = \int\limits_1^2 \left(1 + \frac{2}{x}\right)\mathrm{d}x = \left.(x + 2\ln|x|)\right|_1^2 = 1 + 2\ln 2$.

Chọn đáp án D

CÂU 12. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $(x+2)\,f(x) + (x+1)\,f'(x) = \mathrm{e}^x$ và $f(0) = \frac{1}{2}$. Tính $I = \int\limits_1^2 (2x+2)\,f(x)\,\mathrm{d}x$.

A) $I = \mathrm{e}^2$. B) $I = 1 + \mathrm{e}$. C) $I = 1 + \mathrm{e}^2$. D) $I = \mathrm{e}^2 - \mathrm{e}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}
& (x+2)\,f(x) + (x+1)\,f'(x) = \mathrm{e}^x\\
\Leftrightarrow\ & (x+1)\,f(x) + f(x) + (x+1)\,f'(x) = \mathrm{e}^x\\
\Leftrightarrow\ & [(x+1)\,f(x)] + [(x+1)\,f(x)]' = \mathrm{e}^x\\
\Leftrightarrow\ & \mathrm{e}^x\,[(x+1)\,f(x)] + \mathrm{e}^x\,[(x+1)\,f(x)]' = \mathrm{e}^{2x}\\
\Leftrightarrow\ & [\mathrm{e}^x\,(x+1)\,f(x)]' = \mathrm{e}^{2x}\\
\Rightarrow\ & \int [\mathrm{e}^x\,(x+1)\,f(x)]'\,\mathrm{d}x = \int \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x\\
\Leftrightarrow\ & \mathrm{e}^x\,(x+1)\,f(x) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x} + C.
\end{aligned}$$

Mà $f(0) = \frac{1}{2} \Rightarrow C = 0$.

Vậy $f(x) = \frac{1}{2}\cdot\frac{\mathrm{e}^x}{x+1}$.

Do đó $I = \int\limits_1^2 (2x+2)\,\frac{1}{2}\cdot\frac{\mathrm{e}^x}{x+1}\,\mathrm{d}x = \int\limits_1^2 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^2 - \mathrm{e}$.

Chọn đáp án D

CÂU 13. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục, có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện $f(x) + x\,[f'(x) - 2\sin x] = x^2\cos x$, $x \in \mathbb{R}$ và $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$. Tính $I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x$.

A) $I = 1$. B) $I = \frac{\pi}{2}$. C) $I = -1$. D) $I = -\pi$.

Lời giải.

Từ giả thiết $f(x)+x\left(f'(x)-2\sin x\right)=x^2\cos x$

$$\Leftrightarrow f(x)+xf'(x)=x^2\cos x+2x\sin x$$
$$\Leftrightarrow (xf(x))'=\left(x^2\sin x\right)'$$
$$\Leftrightarrow xf(x)=x^2\sin x+C.$$

Mặt khác $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow C=0\Rightarrow f(x)=x\sin x$.

Vậy $I=\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{x\sin x}{x}\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,\mathrm{d}x=1$.

Chọn đáp án A .... □

CÂU 14. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $(0;+\infty)$ thỏa mãn $2xf'(x)+f(x)=2x$, $\forall x\in(0;+\infty)$, $f(1)=1$. Giá trị của biểu thức $f(4)$ là

A $\dfrac{25}{6}$.   B $\dfrac{25}{3}$.   C $\dfrac{17}{6}$.   D $\dfrac{17}{3}$.

Lời giải.

Xét phương trình $2xf'(x)+f(x)=2x$ (1) trên $(0;+\infty)$ ta có

$$(1)\Leftrightarrow f'(x)+\frac{1}{2x}\cdot f(x)=1.\quad (2)$$

Đặt $g(x)=\dfrac{1}{2x}$, ta tìm một nguyên hàm $G(x)$ của $g(x)$.

Ta có $\displaystyle\int g(x)\,\mathrm{d}x=\int\frac{1}{2x}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\ln x+C=\ln\sqrt{x}+C$. Ta chọn $G(x)=\ln\sqrt{x}$.

Nhân cả 2 vế của (2) cho $\mathrm{e}^{G(x)}=\sqrt{x}$, ta được

$$\sqrt{x}\cdot f'(x)+\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot f(x)=\sqrt{x}\Leftrightarrow\left[\sqrt{x}\cdot f(x)\right]'=\sqrt{x}.\quad (3)$$

Lấy tích phân 2 vế của (3) từ 1 đến 4, ta được

$$\int\limits_1^4\left[\sqrt{x}\cdot f(x)\right]'\mathrm{d}x=\int\limits_1^4\sqrt{x}\,\mathrm{d}x\Rightarrow\left[\sqrt{x}\cdot f(x)\right]\Big|_1^4=\left(\frac{2}{3}\sqrt{x^3}\right)\Big|_1^4\Rightarrow 2f(4)-f(1)=\frac{14}{3}$$

$\Rightarrow f(4)=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{14}{3}+1\right)=\dfrac{17}{6}$ (vì $f(1)=1$).

Vậy $f(4)=\dfrac{17}{6}$.

Chọn đáp án C .... □

CÂU 15. Cho hàm số $f(x)$ không âm, có đạo hàm trên đoạn $[0;1]$ và thỏa mãn $f(1)=1$, $\left[2f(x)+1-x^2\right]f'(x)=2x\left[1+f(x)\right]$, $\forall x\in[0;1]$. Tích phân $\displaystyle\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

A 1.   B 2.   C $\dfrac{1}{3}$.   D $\dfrac{3}{2}$.

Lời giải.

Xét trên đoạn $[0;1]$, theo đề bài ta có

$$\begin{aligned}
&\left[2f(x)+1-x^2\right]f'(x)=2x\left[1+f(x)\right]\\
\Leftrightarrow\ &2f(x)\cdot f'(x)=2x+\left(x^2-1\right)\cdot f'(x)+2x\cdot f(x)\\
\Leftrightarrow\ &\left[f^2(x)\right]'=\left[x^2+\left(x^2-1\right)\cdot f(x)\right]'\\
\Leftrightarrow\ &f^2(x)=x^2+\left(x^2-1\right)\cdot f(x)+C.\quad (1)
\end{aligned}$$

Thay $x=1$ vào (1) ta được $f^2(1)=1+C\Leftrightarrow C=0$ (vì $f(1)=1$).

Do đó, (1) trở thành

$$\begin{aligned}
&f^2(x)=x^2+\left(x^2-1\right)\cdot f(x)\\
\Leftrightarrow\ &f^2(x)-1=x^2-1+\left(x^2-1\right)\cdot f(x)\\
\Leftrightarrow\ &[f(x)-1]\cdot[f(x)+1]=\left(x^2-1\right)\cdot[f(x)+1]\\
\Leftrightarrow\ &f(x)-1=x^2-1\ (\text{vì } f(x)\geq 0\Rightarrow f(x)+1>0,\ \forall x\in[0;1])\\
\Leftrightarrow\ &f(x)=x^2.
\end{aligned}$$

Vậy $\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 x^2\,\mathrm{d}x = \left.\dfrac{x^3}{3}\right|_0^1 = \dfrac{1}{3}$.

Chọn đáp án (C) ....

CÂU 16. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$, thỏa mãn $[f'(x)]^2 + 4f(x) = 8x^2 + 4$, $\forall x \in [0;1]$ và $f(1) = 2$. Tính $\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

(A) $\dfrac{1}{3}$. (B) 2. (C) $\dfrac{4}{3}$. (D) $\dfrac{21}{4}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} & [f'(x)]^2 + 4f(x) = 8x^2 + 4 \\ \Rightarrow\ & \int\limits_0^1 [f'(x)]^2\,\mathrm{d}x + 4\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \left(8x^2+4\right)\mathrm{d}x = \frac{20}{3}. \quad (1) \end{aligned}$$

Và

$$\begin{aligned} & \int\limits_0^1 xf'(x)\,\mathrm{d}x = \left.xf(x)\right|_0^1 - \int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 2 - \int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \\ \Rightarrow\ & -4\int\limits_0^1 xf'(x)\,\mathrm{d}x = -8 + 4\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x. \quad (2) \end{aligned}$$

Lại có

$$\int\limits_0^1 (2x)^2\,\mathrm{d}x = \frac{4}{3}. \quad (3)$$

Cộng vế với vế của (1), (2), (3) ta được

$$\int\limits_0^1 \left(f'(x) - 2x\right)^2\mathrm{d}x = 0 \Rightarrow f'(x) = 2x \Rightarrow f(x) = x^2 + C.$$

Mặt khác $f(1) = C + 1 = 2 \Rightarrow C = 1 \Rightarrow f(x) = x^2 + 1$.

Do đó $\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \left(x^2+1\right)\mathrm{d}x = \dfrac{4}{3}$.

Chọn đáp án (C) ....

CÂU 17. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn $3f(x) + xf'(x) \geq x^{2018}$, $\forall x \in [0;1]$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

(A) $\dfrac{1}{2018 \cdot 2020}$. (B) $\dfrac{1}{2019 \cdot 2020}$. (C) $\dfrac{1}{2020 \cdot 2021}$. (D) $\dfrac{1}{2019 \cdot 2021}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} & 3f(x) + xf'(x) \geq x^{2018},\ \forall x \in [0;1] \\ \Leftrightarrow\ & 3x^2 f(x) + x^3 \cdot f'(x) \geq x^{2020},\ \forall x \in [0;1] \\ \Leftrightarrow\ & \left[x^3 f(x)\right]' \geq x^{2020},\ \forall x \in [0;1] \\ \Rightarrow\ & x^3 f(x) \geq \int x^{2020}\,\mathrm{d}x,\ \forall x \in [0;1] \\ \Rightarrow\ & x^3 f(x) \geq \frac{x^{2021}}{2021} + C,\ \forall x \in [0;1]. \end{aligned}$$

Cho $x = 0 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow x^3 f(x) \geq \dfrac{x^{2021}}{2021}$, $\forall x \in [0;1] \Rightarrow f(x) \geq \dfrac{x^{2018}}{2021}$, $\forall x \in [0;1]$.

$\Rightarrow \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \geq \int_0^1 \dfrac{x^{2018}}{2021}\,\mathrm{d}x = \left.\left(\dfrac{x^{2019}}{2019 \cdot 2021}\right)\right|_0^1 = \dfrac{1}{2019 \cdot 2021}$.

Chọn đáp án (D) ....

CÂU 18. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn

$$\begin{cases} f(0)=f'(0)=1 \\ f(x+y)=f(x)+f(y)+3xy(x+y)-1 \end{cases} \text{ với } x,y\in\mathbb{R}$$

Tính $\int\limits_0^1 f(x-1)\,\mathrm{d}x$.

A $\frac{1}{2}$. **B** $-\frac{1}{4}$. **C** $\frac{1}{4}$. **D** $\frac{7}{4}$.

Lời giải.

Lấy đạo hàm theo hàm số y ta được $f'(x+y)=f'(y)+3x^2+6xy$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

Cho $y=0\Rightarrow f'(x)=f'(0)+3x^2\Rightarrow f'(x)=1+3x^2$

$\Rightarrow f(x)=\int f'(x)\,\mathrm{d}x=x^3+x+C$ mà $f(0)=1\Rightarrow C=1$.

Do đó $f(x)=x^3+x+1\Rightarrow f(x-1)=(x-1)^3+x-1+1=x^3-3x^2+4x-1$.

Vậy $\int\limits_0^1 f(x-1)\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^1\left(x^3-3x^2+4x-1\right)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\int\limits_{-1}^0 f(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_{-1}^0\left(x^3+x+1\right)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{4}$.

Chọn đáp án C .... □

CÂU 19. Cho hai hàm $f(x)$ và $g(x)$ có đạo hàm trên $[1;4]$, thỏa mãn $\begin{cases} f(1)+g(1)=4 \\ g(x)=-xf'(x) \\ f(x)=-xg'(x)\end{cases}$, với mọi $x\in[1;4]$. Tính tích phân $I=\int\limits_1^4[f(x)+g(x)]\,\mathrm{d}x$.

A $3\ln 2$. **B** $4\ln 2$. **C** $6\ln 2$. **D** $8\ln 2$.

Lời giải.

Từ giả thiết ta có

$$\begin{aligned} & f(x)+g(x)=-x\cdot f'(x)-x\cdot g'(x) \\ \Leftrightarrow\ & [f(x)+x\cdot f'(x)]+[g(x)+x\cdot g'(x)]=0 \\ \Leftrightarrow\ & [x\cdot f(x)]'+[x\cdot g(x)]'=0 \\ \Rightarrow\ & x\cdot f(x)+x\cdot g(x)=C \\ \Rightarrow\ & f(x)+g(x)=\frac{C}{x} \end{aligned}$$

Mà $f(1)+g(1)=4\Rightarrow C=4\Rightarrow f(x)+g(x)=\frac{4}{x}$.

Vậy $I=\int\limits_1^4[f(x)+g(x)]\,\mathrm{d}x=\int\limits_1^4\frac{4}{x}\,\mathrm{d}x=8\ln 2$.

Chọn đáp án D .... □

CÂU 20. Cho hai hàm $f(x)$ và $g(x)$ có đạo hàm trên $[1;2]$ thỏa mãn $f(1)=g(1)=0$ và $\begin{cases}\frac{x}{(x+1)^2}g(x)+2023x=(x+1)f'(x) \\ \frac{x^3}{x+1}g'(x)+f(x)=2024x^2\end{cases}$, $\forall x\in[1;2]$.

Tính tích phân $I=\int\limits_1^2\left[\frac{x}{x+1}g(x)-\frac{x+1}{x}f(x)\right]\,\mathrm{d}x$.

A $I=\frac{1}{2}$. **B** $I=1$. **C** $I=\frac{3}{2}$. **D** $I=2$.

Lời giải.

Từ giả thiết ta có $\begin{cases}\frac{1}{(x+1)^2}g(x)-\frac{x+1}{x}f'(x)=-2023 \\ \frac{x}{x+1}g'(x)+\frac{1}{x^2}f(x)=2024\end{cases}$, $\forall x\in[1;2]$.

Suy ra

$$\left[\frac{1}{(x+1)^2}g(x)+\frac{x}{x+1}g'(x)\right]-\left[\frac{x+1}{x}f'(x)-\frac{1}{x^2}f(x)\right]=1$$

$$\Leftrightarrow \left[\frac{x}{x+1}g(x)\right]' - \left[\frac{x+1}{x}f(x)\right]' = 1$$
$$\Rightarrow \frac{x}{x+1}g(x) - \frac{x+1}{x}f(x) = x + C.$$

Mà $f(1) = g(1) = 0 \Rightarrow C = -1 \Rightarrow \frac{x}{x+1}g(x) - \frac{x+1}{x}f(x) = x - 1$.

Vậy $I = \int\limits_1^2 \left[\frac{x}{x+1}g(x) - \frac{x+1}{x}f(x)\right] \mathrm{d}x = \int\limits_1^2 (x-1)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$.

Chọn đáp án A ....□

CÂU 21. Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ thỏa mãn $x^2f^2(x) + (2x-1)f(x) = xf'(x) - 1$, với mọi $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ đồng thời thỏa mãn $f(1) = -2$. Tính $\int\limits_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x$.

A $-\frac{\ln 2}{2} - 1$. **B** $-\ln 2 - \frac{1}{2}$. **C** $-\ln 2 - \frac{3}{2}$. **D** $-\frac{\ln 2}{2} - \frac{3}{2}$.

Lời giải.

Ta có

$$x^2f^2(x) + 2xf(x) + 1 = xf'(x) + f(x)$$
$$\Leftrightarrow (xf(x)+1)^2 = (xf(x)+1)'.$$

Do đó

$$\frac{(xf(x)+1)'}{(xf(x)+1)^2} = 1$$
$$\Rightarrow \int \frac{(xf(x)+1)'}{(xf(x)+1)^2}\,\mathrm{d}x = \int 1\,\mathrm{d}x$$
$$\Rightarrow -\frac{1}{xf(x)+1} = x + C$$
$$\Rightarrow xf(x) + 1 = -\frac{1}{x+C}.$$

Mặt khác $f(1) = -2$ nên $-2 + 1 = -\frac{1}{1+C} \Rightarrow C = 0$.

Nên suy ra $xf(x) + 1 = -\frac{1}{x} \Rightarrow f(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}$.

Vậy $\int\limits_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_1^2 \left(-\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}\right) \mathrm{d}x = \left(-\ln x + \frac{1}{x}\right)\Big|_1^2 = -\ln 2 - \frac{1}{2}$.

Chọn đáp án B ....□

CÂU 22. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $x\cdot f(x)\cdot f'(x) = f^2(x) - x$, $\forall x \in \mathbb{R}$ và có $f(2) = 1$. Tích phân $\int\limits_0^2 f^2(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

A $\frac{3}{2}$. **B** $\frac{4}{3}$. **C** 2. **D** 4.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}
x\cdot f(x)\cdot f'(x) = f^2(x) - x &\Leftrightarrow 2x\cdot f(x)\cdot f'(x) = 2f^2(x) - 2x\\
&\Leftrightarrow 2x\cdot f(x)\cdot f'(x) + f^2(x) = 3f^2(x) - 2x\\
&\Leftrightarrow \int\limits_0^2 \left(x\cdot f^2(x)\right)'\,\mathrm{d}x = 3\int\limits_0^2 f^2(x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_0^2 2x\,\mathrm{d}x\\
&\Leftrightarrow \left(x\cdot f^2(x)\right)\Big|_0^2 = 3I - 4\\
&\Leftrightarrow 2 = 3I - 4\\
&\Leftrightarrow I = 2.
\end{aligned}$$

Chọn đáp án C ....□

CÂU 23. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, $f(0) = 0$, $f'(0) \neq 0$ và thỏa mãn hệ thức $f(x) \cdot f'(x) + 18x^2 = \left(3x^2 + x\right) f'(x) + (6x+1) f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Biết $\int\limits_0^1 (x+1)\,\mathrm{e}^{f(x)}\,\mathrm{d}x = a\mathrm{e}^2 + b$, $(a, b \in \mathbb{Q})$. Giá trị của $a - b$ bằng

A 1. **B** 2. **C** 0. **D** $\frac{2}{3}$.

Lời giải.

Ta có $f(x) \cdot f'(x) + 18x^2 = \left(3x^2 + x\right) f'(x) + (6x+1) f(x)$.
Lấy nguyên hàm hai vế ta được

$$\frac{f^2(x)}{2} + 6x^3 = \left(3x^2 + x\right) f(x) \Rightarrow f^2(x) - 2\left(3x^2 + x\right) f(x) + 12x^3 = 0$$
$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = 6x^2 \\ f(x) = 2x. \end{array}\right.$$

TH1: $f(x) = 6x^2$ không thoả mãn kết quả $\int\limits_0^1 (x+1)\,\mathrm{e}^{f(x)}\,\mathrm{d}x = a\mathrm{e}^2 + b$, $(a, b \in \mathbb{Q})$.

TH2: $f(x) = 2x \Rightarrow \int\limits_0^1 (x+1)\,\mathrm{e}^{f(x)}\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 (x+1)\,\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{4}\mathrm{e}^2 - \frac{1}{4}$.

Suy ra $a = \frac{3}{4}; b = -\frac{1}{4}$.

Vậy $a - b = 1$.
Chọn đáp án A ....□

CÂU 24. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $[1;3]$; $f(x) \neq 0$, $\forall x \in [1;3]$; $f'(x)\left[1 + f(x)\right]^2 = (x-1)^2 \left[f(x)\right]^4$ và $f(1) = -1$. Biết rằng $\int\limits_{\mathrm{e}}^3 f(x)\,\mathrm{d}x = a\ln 3 + b$ $(a, b \in \mathbb{Z})$. Giá trị của $a + b^2$ bằng

A 4. **B** 0. **C** 2. **D** -1.

Lời giải.

Ta có

$$f'(x)\left[1 + f(x)\right]^2 = (x-1)^2\left[f(x)\right]^4 \Rightarrow \frac{f'(x)}{f^4(x)} + \frac{2f'(x)}{f^3(x)} + \frac{f'(x)}{f^2(x)} = (x-1)^2$$
$$\Rightarrow \int\left(\frac{f'(x)}{f^4(x)} + \frac{2f'(x)}{f^3(x)} + \frac{f'(x)}{f^2(x)}\right)\mathrm{d}x = \int (x-1)^2\,\mathrm{d}x$$
$$\Rightarrow -\left(\frac{1}{3f^3(x)} + \frac{1}{f^2(x)} + \frac{1}{f(x)}\right) = \frac{1}{3}(x-1)^3 + C. \quad (*)$$

Do $f(1) = -1$ nên $C = \frac{1}{3}$.

Thay vào $(*)$ ta được $\left(\frac{1}{f(x)} + 1\right)^3 = -(x-1)^3 \Rightarrow f(x) = \frac{-1}{x}$.

Khi đó $\int\limits_{\mathrm{e}}^3 \frac{-1}{x}\,\mathrm{d}x = -\ln|x|\Big|_{\mathrm{e}}^3 = -\ln 3 + 1 \Rightarrow a = -1, b = 1$.

Vậy $a + b^2 = 0$.

Chọn đáp án B ....□

MỤC LỤC