Bài 12. ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG SONG SONG

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

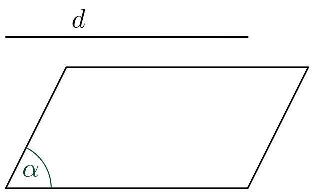
1. Đường thẳng song song với mặt phẳng

ϟ ĐỊNH NGHĨA 12.1. Cho đường thẳng d và mặt phẳng (α). Nếu d và mặt phẳng α không có điểm chung thì ta nói d song song với (α) hay (α) // d. Kí hiệu là $d \parallel (\alpha)$ hay $(\alpha) \parallel d$.

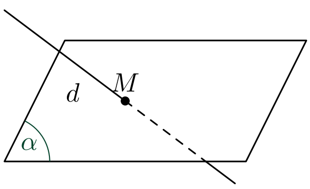
Ngoài ra

a) Nếu d và (α) có một điểm chung duy nhất M thì ta nói d và (α) cắt nhau tại điểm M và kí hiệu $d \cap (\alpha) = \{M\}$ hay $d \cap (\alpha) = M$.

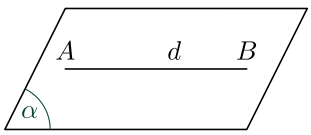
b) Nếu d và (α) có nhiều hơn một điểm chung thì ta nói d nằm trong (α) hay (α) chứa d và kí hiệu $d \subset (\alpha)$ hay $(\alpha) \supset d$.



$d \parallel (\alpha)$



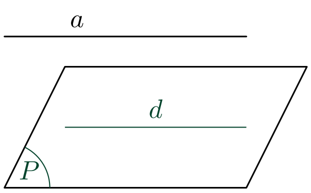
$d \cap (\alpha) = M$



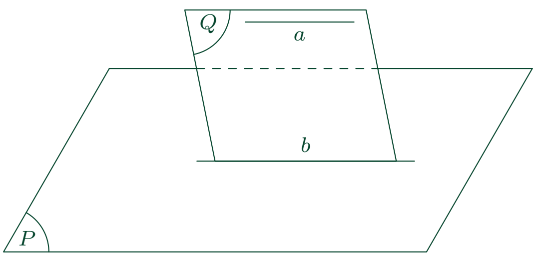
$d \subset (\alpha)$

2. Điều kiện và tính chất của đường thẳng song song với mặt phẳng

ϟ TÍNH CHẤT 12.1. *Nếu đường thẳng a không nằm trong mặt phẳng (P) và song song với một đường thẳng d nằm trong mặt phẳng (P) thì a song song với (P). Kí hiệu:* $\begin{cases} a \parallel d \\ d \subset (P) \end{cases} \Rightarrow a \parallel (P)$.



ϟ TÍNH CHẤT 12.2. *Cho đường thẳng a song song với mặt phẳng (P). Nếu mặt phẳng (Q) chứa a và cắt (P) theo giao tuyến b thì b song song với a. Kí hiệu:* $\begin{cases} a \parallel (P) \\ a \subset (Q) \\ (P) \cap (Q) = b \end{cases} \Rightarrow a \parallel b$.



⚠ *Nếu hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với một đường thẳng thì giao tuyến của chúng cũng song song với đường thẳng đó. Kí hiệu:* $\begin{cases} d \parallel (\alpha) \\ d \parallel (\beta) \\ (\alpha) \cap (\beta) = d' \end{cases} \Rightarrow d \parallel d'$.

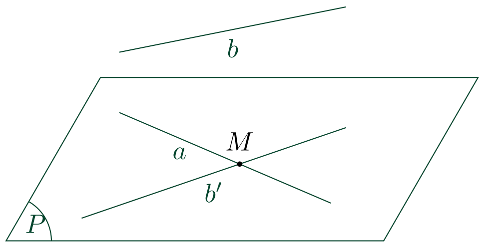
⚠ *Cho hai đường thẳng chéo nhau. Có duy nhất một mặt phẳng chứa đường thẳng này và song song với đường thẳng kia.*

ĐIỂM:

"It's not how much time you have, it's how you use it."

QUICK NOTE

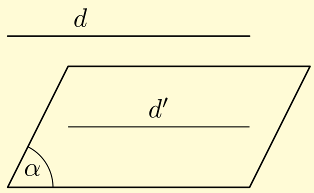
QUICK NOTE



B. HỆ THỐNG BÀI TẬP TỰ LUẬN

Dạng 1. Xác định, chứng minh đường thẳng song song mặt phẳng.

Cho đường thẳng d và mặt phẳng (α), khi đó $\begin{cases} d \parallel d' \\ d' \subset (\alpha) \end{cases} \Rightarrow d \parallel (\alpha)$.



1. Bài tập tự luận

BÀI 1. Cho tứ diện $ABCD$. G là trọng tâm của $\triangle BCD$. M là điểm trên cạnh BC sao cho $MB = 2MC$. Chứng minh $MG \parallel (ACD)$.

BÀI 2. Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$ không cùng nằm trong một mặt phẳng. Gọi O, O' lần lượt là tâm của $ABCD$ và $ABEF$. Chứng minh OO' song song với các mặt phẳng (ADF) và (BCE).

BÀI 3. Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$ không cùng nằm trong một mặt phẳng. Gọi M, N lần lượt là hai điểm trên các cạnh AE, BD sao cho $AM = \dfrac{1}{3}AE, BN = \dfrac{1}{3}BD$. Chứng minh MN song song với $(CDEF)$.

2. Bài tập trắc nghiệm

CÂU 1. Cho tứ diện $ABCD$. M, N lần lượt là trọng tâm của tam giác ABC, ABD. Những khẳng định nào sau đây là đúng?

a) $MN \parallel (BCD)$ b) $MN \parallel (ACD)$ c) $MN \parallel (ABD)$

Ⓐ Chỉ có (1) đúng. Ⓑ (2) và (3).
Ⓒ (1) và (2). Ⓓ (1) và (3).

CÂU 2. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của SA và SC. Khẳng định nào sau đây đúng?

Ⓐ $MN \parallel (ABCD)\cdot$. Ⓑ $MN \parallel (SAB)\cdot$.
Ⓒ $MN \parallel (SCD)\cdot$. Ⓓ $MN \parallel (SBC)\cdot$.

CÂU 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, M và N là hai điểm trên SA, SB sao cho $\dfrac{SM}{SA} = \dfrac{SN}{SB} = \dfrac{1}{3}\cdot$ Vị trí tương đối giữa MN và $(ABCD)$ là:

Ⓐ MN nằm trên $(ABCD)$. Ⓑ MN cắt $(ABCD)$.
Ⓒ $MN \parallel (ABCD)$. Ⓓ MN và $(ABCD)$ chéo nhau.

CÂU 4. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của SA và SC. Khẳng định nào sau đây đúng?

Ⓐ $MN \parallel (ABCD)$. Ⓑ $MN \parallel (SAB)$.
Ⓒ $MN \parallel (SCD)$. Ⓓ $MN \parallel (SBC)$.

CÂU 5. Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$ không cùng nằm trong một mặt phẳng. Gọi OO' lần lượt là tâm của $ABCD$, $ABEF$. M là trung điểm của CD. Khẳng định nào sau đây sai?

A. $OO' \parallel (BEC)$.
B. $OO' \parallel (AFD)$.
C. $OO' \parallel (EFM)$.
D. MO' cắt (BEC).

CÂU 6. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N, P, Q, R, S theo thứ tự là trung điểm của các cạnh AB, CD, AD, BC, AC, BD. Bốn điểm nào sau đây **không** đồng phẳng?

A. P, Q, R, S.
B. P, M, N, Q.
C. M, N, P, R.
D. M, R, S, N.

CÂU 7. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G là trọng tâm tam giác ABD, M là điểm thuộc cạnh BC sao cho $MB = 2MC$. Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

A. $MG \parallel (BCD)$.
B. $MG \parallel (ACD)$.
C. $MG \parallel (ABD)$.
D. $MG \parallel (ABC)$.

CÂU 8. Cho hình bình hành $ABCD$. Vẽ các tia Ax, By, Cz, Dt song song, cùng hướng nhau và không nằm trong $(ABCD)$. Mặt phẳng (α) song song với AB, và cắt Ax, By, Cz, Dt lần lượt tạiA', B', C', D'. Biết O là tâm hình bình hành $ABCD$, O' là giao điểm của $A'C'$ và$B'D'$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $A'B'C'D'$ là hình bình hành.
B. $(AA'B'B) \parallel C'D'$.
C. $AA' = CC'$ và $BB' = DD'$.
D. $OO' \parallel AA'$.

Dạng 2. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng

Cách 1: $\begin{cases} (\alpha) \parallel d \\ d \subset (\beta) \\ M \in (\alpha) \cap (\beta) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (\beta) = d'$, với $\begin{cases} d' \parallel d \\ M \in d' \end{cases}$

Cách 2: $\begin{cases} (P) \parallel a \\ (Q) \parallel a \\ (P) \cap (Q) = d \end{cases} \Rightarrow d \parallel a$

1. Bài tập tự luận

BÀI 1. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N tương ứng là trung điểm của AB, AC. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (DBC) và (DMN).

BÀI 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là tứ giác lồi. Điểm I là giao điểm của hai đường chéo AC và BD. Xác định thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi mặt phẳng (P) đi qua I và song song với AB, SC.

BÀI 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm O. Gọi M là trung điểm của SB, N là điểm trên cạnh BC sao cho $BN = 2CN$.

a) Chứng minh rằng $OM \parallel (SCD)$.
b) Xác định giao tuyến của (SCD) và (AMN).

2. Bài tập trắc nghiệm

CÂU 1. Cho đường thẳng a song song mặt phẳng (α). Mặt phẳng (β) chứa a và cắt mặt phẳng (α) theo giao tuyến d. Kết luận nào sau đây đúng?

A. a và d cắt nhau.
B. a và d trùng nhau.
C. a và d chéo nhau.
D. a và d song song.

CÂU 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang, $AD \parallel BC$. Giao tuyến của (SAD) và (SBC) là.

A. Đường thẳng đi qua S và song song với CD.
B. Đường thẳng đi qua S và song song với AC.
C. Đường thẳng đi qua S và song song với AD.
D. Đường thẳng đi qua S và song song với AB.

CÂU 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SDC).

A. Là đường thẳng đi qua đỉnh S và tâm O đáy.
B. Là đường thẳng đi qua đỉnh S và song song với đường thẳng AC.
C. Là đường thẳng đi qua đỉnh S và song song với đường thẳng AD.
D. Là đường thẳng đi qua đỉnh S và song song với đường thẳng AB.

QUICK NOTE

QUICK NOTE

CÂU 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có mặt đáy $(ABCD)$ là hình bình hành. Gọi đường thẳng d là giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC). Mệnh đề nào sau đây đúng?

(A) Đường thẳng d đi qua S và song song với AB.

(B) Đường thẳng d đi qua S và song song với DC.

(C) Đường thẳng d đi qua S và song song với BC.

(D) Đường thẳng d đi qua S và song song với BD.

CÂU 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang $(AB \parallel CD)$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AD và BC, G là trọng tâm ΔSAB. Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (IJG) là

(A) đường thẳng qua S và song song với AB.

(B) đường thẳng qua G và song song với DC.

(C) SC.

(D) đường thẳng qua G và cắt BC.

CÂU 6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi d là giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC). Khẳng định nào sau đây đúng?

(A) d qua S và song song với BC.

(B) d qua S và song song với DC.

(C) d qua S và song song với AB.

(D) d qua S và song song với BD.

CÂU 7. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I, J theo thứ tự là trung điểm của AD, AC, G là trọng tâm tam giác BCD. Giao tuyến của hai mặt phẳng (GIJ) và (BCD) là đường thẳng.

(A) qua I và song song với AB.

(B) qua J và song song với BD.

(C) qua G và song song với CD.

(D) qua G và song song với BC.

CÂU 8. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang với các cạnh đáy là AB và CD. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AD và BC và G là trọng tâm tam giác (SAB). Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (IJG) là

(A) SC.

(B) đường thẳng qua S và song song với AB.

(C) đường thẳng qua G và song song với CD.

(D) đường thẳng qua G và cắt BC.

CÂU 9. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm AD và AC. Gọi G là trọng tâm tam giác BCD. Giao tuyến của hai mặt phẳng (GMN) và (BCD) là đường thẳng

(A) qua M và song song với AB.

(B) qua N và song song với BD.

(C) qua G và song song với CD.

(D) qua G và song song với BC.

Dạng 3. Thiết diện

Tìm đoạn giao tuyến tạo bởi mặt phẳng (α) và các mặt của chóp, lăng trụ
Đa giác tạo bởi tất cả các đoạn giao tuyến này chính là thiết diện cần tìm. Có 2 dạng:

- Mặt phẳng (α) đi qua một điểm song song với hai đường thẳng chéo nhau;
- Mặt phẳng (α) chứa một đường thẳng và song song với một đường thẳn

1. Bài tập tự luận

BÀI 1. Cho tứ diện $ABCD$, điểm M thuộc AC. Mặt phẳng (α) đi qua M song song với AB và AD. Thiết diện của (α) với tứ diện $ABCD$ là hình gì?

BÀI 2. Cho tứ diện $ABCD$. Giả sử M thuộc đoạn thẳng BC. Một mặt phẳng (α) qua M song song với AB và CD. Thiết diện của (α) và hình tứ diện $ABCD$ là hình gì?

2. Bài tập trắc nghiệm

CÂU 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O, I là trung điểm cạnh SC. Khẳng định nào sau đây **sai**?

(A) $OI \parallel (SAD)$.

(B) Mặt phẳng (IBD) cắt hình chóp $S.ABCD$ theo thiết diện là một tứ giác.

(C) $OI \parallel (SAB)$.

QUICK NOTE

(D) Giao tuyến của hai mặt phẳng (IBD) và (SAC) là IO.

CÂU 2. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi H là một điểm nằm trong tam giác $ABC, (\alpha)$ là mặt phẳng đi qua H song song với AB và CD. Mệnh đề nào sau đây đúng về thiết diện của (α) của tứ diện?

(A) Thiết diện là hình vuông. (B) Thiết diện là hình thang cân.
(C) Thiết diện là hình bình hành. (D) Thiết diện là hình chữ nhật.

CÂU 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. M là một điểm lấy trên cạnh SA (M không trùng với S và A). $Mp\,(\alpha)$ qua ba điểm M, B, C cắt hình chóp $S.ABCD$ theo thiết diện là:

(A) Tam giác. (B) Hình thang. (C) Hình bình hành. (D) Hình chữ nhật.

CÂU 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình thang cân đáy lớn AD. M, N lần lượt là hai trung điểm của AB và CD. (P) là mặt phẳng qua MN và cắt mặt bên (SBC) theo một giao tuyến. Thiết diện của (P) và hình chóp là

(A) Hình bình hành. (B) Hình thang. (C) Hình chữ nhật. (D) Hình vuông.

CÂU 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Gọi M là điểm thuộc cạnh SA. (P) là mặt phẳng qua OM và song song với AD. Thiết diện của (P) và hình chóp là

(A) Hình bình hành. (B) Hình thang. (C) Hình chữ nhật. (D) Hình tam giác.

CÂU 6. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I, J lần lượt thuộc cạnh AD, BC sao cho $IA = 2ID$ và $JB = 2JC$. Gọi (P) là mặt phẳng qua IJ và song song với AB. Thiết diện của (P) và tứ diện $ABCD$ là

(A) Hình thang. (B) Hình bình hành. (C) Hình tam giác. (D) Tam giác đều.

CÂU 7. Cho tứ diện $ABCD$. M là điểm nằm trong tam giác ABC, mp (α) qua M và song song với AB và CD. Thiết diện của $ABCD$ cắt bởi mp (α) là

(A) Tam giác. (B) Hình chữ nhật. (C) Hình vuông. (D) Hình bình hành.

CÂU 8. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang ($AB \parallel CD$). Gọi I, J lần lượt là trung điểm của các cạnh AD, BC và G là trọng tâm tam giác SAB. Biết thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (IJG) là hình bình hành. Hỏi khẳng định nào sao đây đúng?

(A) $AB = \frac{1}{3}CD$. (B) $AB = \frac{3}{2}CD$. (C) $AB = 3CD$. (D) $AB = \frac{2}{3}CD$.

CÂU 9. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MA} = 3\overrightarrow{MB}$. Mặt phẳng (P) qua M và song song với SC, BD. Mệnh đề nào sau đây đúng?

(A) (P) cắt hình chóp theo thiết diện là một ngũ giác.
(B) (P) cắt hình chóp theo thiết diện là một tam giác.
(C) (P) cắt hình chóp theo thiết diện là một tứ giác.
(D) (P) không cắt hình chóp.

CÂU 10. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông. Gọi O là giao điểm của AC và BD, M là trung điểm của DO, (α) là mặt phẳng đi qua M và song song với AC và SD. Thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (α) là hình gì.

(A) Ngũ giác. (B) Tứ giác. (C) Lục giác. (D) Tam giác.

CÂU 11. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng 10. M là điểm trên SA sao cho $\frac{SM}{SA} = \frac{2}{3}$. Một mặt phẳng (α) đi qua M song song với AB và AD, cắt hình chóp theo một tứ giác có diện tích là

(A) $\frac{400}{9}$. (B) $\frac{20}{3}$. (C) $\frac{4}{9}$. (D) $\frac{16}{9}$.

CÂU 12. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = 6$, $CD = 8$. Cắt tứ diện bởi một mặt phẳng song song với AB, CD để thiết diện thu được là một hình thoi. Cạnh của hình thoi đó bằng

(A) $\frac{31}{7}$. (B) $\frac{18}{7}$. (C) $\frac{24}{7}$. (D) $\frac{15}{7}$.

Dạng 4. Câu hỏi lý thuyết

QUICK NOTE

CÂU 1. Cho đường thẳng a và mặt phẳng (P) trong không gian. Có bao nhiêu vị trí tương đối của a và (P)?

(A) 2. (B) 3. (C) 1. (D) 4.

CÂU 2. Cho hai đường thẳng phân biệt a, b và mặt phẳng (α). Giả sử $a \parallel b$, $b \parallel (\alpha)$. Khi đó

(A) $a \parallel (\alpha)$.
(B) $a \subset (\alpha)$.
(C) a cắt (α).
(D) $a \parallel (\alpha)$ hoặc $a \subset (\alpha)$.

CÂU 3. Cho $d \parallel (\alpha)$, mặt phẳng (β) qua d cắt (α) theo giao tuyến d'. Khẳng định nào sau đây đúng?

(A) $d \parallel d'$.
(B) d cắt d'.
(C) d và d' chéo nhau.
(D) $d \equiv d'$.

CÂU 4. Có bao nhiêu mặt phẳng song song với cả hai đường thẳng chéo nhau?

(A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) vô số.

CÂU 5. Cho hai đường thẳng phân biệt a, b và mặt phẳng (α). Giả sử $a \parallel (\alpha)$, $b \subset (\alpha)$. Khi đó:

(A) $a \parallel b$.
(B) a, b chéo nhau.
(C) $a \parallel b$ hoặc a, b chéo nhau.
(D) a, b cắt nhau.

CÂU 6. Cho đường thẳng a nằm trong mặt phẳng (α). Giả sử $b \not\subset (\alpha)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

(A) Nếu $b \parallel (\alpha)$ thì $b \parallel a$.
(B) Nếu b cắt (α) thì b cắt a.
(C) Nếu $b \parallel a$ thì $b \parallel (\alpha)$.
(D) Nếu b cắt (α) và (β) chứa b thì giao tuyến của (α) và (β) là đường thẳng cắt cả a và b.

CÂU 7. Cho hai đường thẳng phân biệt a, b và mặt phẳng (α). Giả sử $a \parallel (\alpha)$ và $b \parallel (\alpha)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

(A) a và b không có điểm chung.
(B) a và b hoặc song song hoặc chéo nhau.
(C) a và b hoặc song song hoặc chéo nhau hoặc cắt nhau.
(D) a và b chéo nhau.

CÂU 8. Cho mặt phẳng (P) và hai đường thẳng song song a và b. Khẳng định nào sau đây đúng?

(A) Nếu (P) song song với a thì (P) cũng song song với b.
(B) Nếu (P) cắt a thì (P) cũng cắt b.
(C) Nếu (P) chứa a thì (P) cũng chứa b.
(D) Các khẳng định A, B, C đều sai.

CÂU 9. Cho hai đường thẳng chéo nhau a và b. Khẳng định nào sau đây **sai**?

(A) Có duy nhất một mặt phẳng song song với a và b.
(B) Có duy nhất một mặt phẳng qua a và song song với b.
(C) Có duy nhất một mặt phẳng qua điểm M, song song với a và b.
(D) Có vô số đường thẳng song song với a và cắt b.

CÂU 10. Cho ba đường thẳng đôi một chéo nhau a, b, c. Gọi (P) là mặt phẳng qua a, (Q) là mặt phẳng qua b sao cho giao tuyến của (P) và (Q) song song với c. Có nhiều nhất bao nhiêu mặt phẳng (P) và (Q) thỏa mãn yêu cầu trên?

(A) Một mặt phẳng (P), một mặt phẳng (Q).
(B) Một mặt phẳng (P), vô số mặt phẳng (Q).
(C) Một mặt phẳng (Q), vô số mặt phẳng (P).
(D) Vô số mặt phẳng (P) và (Q).

QUICK NOTE

C. HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Dạng 5. Câu hỏi lý thuyết

CÂU 1. Cho đường thẳng a nằm trong mặt phẳng (α). Giả sử $b \not\subset (\alpha)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

(A) Nếu $b \parallel (\alpha)$ thì $b \parallel a$.
(B) Nếu b cắt (α) thì b cắt a.
(C) Nếu $b \parallel a$ thì $b \parallel (\alpha)$.
(D) Nếu $b \parallel (\alpha)$ và (β) chứa b thì (β) sẽ cắt (α) theo giao tuyến là đường thẳng song song với b.

CÂU 2. Cho các mệnh đề sau

1. Nếu đường thẳng a song song với mặt phẳng (P) thì a song song với mọi đường thẳng nằm trong (P).
2. Giữa hai đường thẳng chéo nhau có duy nhất một mặt phẳng chứa đường thẳng này và song song với đường thẳng kia.
3. Hai đường thẳng phân biệt cùng song song với một mặt phẳng thì chúng song song với nhau.
4. Nếu đường thẳng Δ song song với mặt phẳng (P) và (P) cắt đường thẳng a thì Δ cắt a.
5. Đường thẳng song song với mặt phẳng nếu nó song song với một đường thẳng nằm trong mặt phẳng đó.

Trong các mệnh đề trên, số các mệnh đề **sai** là

(A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4.

CÂU 3. Mệnh đề nào **sai** trong các mệnh đề sau?

(A) Qua một điểm nằm ngoài một mặt phẳng cho trước có một và chỉ một đường thẳng song song với mặt phẳng đã cho.
(B) Nếu mặt phẳng (α) chứa hai đường thẳng cắt nhau a, b và a, b cùng song song với mặt phẳng (β) thì (α) song song với (β).
(C) Hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với mặt phẳng thứ ba thì song song với nhau.
(D) Hai mặt phẳng song song chắn trên hai cát tuyến song song những đoạn thẳng bằng nhau.

CÂU 4. Cho hai đường thẳng phân biệt a, b và mặt phẳng (α). Giả sử $a \parallel (\alpha)$ và $b \parallel (\alpha)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

(A) a và b không có điểm chung.
(B) a và b hoặc song song hoặc chéo nhau.
(C) a và b chéo nhau.
(D) a và b hoặc song song hoặc chéo nhau hoặc cắt nhau.

CÂU 5. Cho đường thẳng a song song với mặt phẳng (P) và b là đường thẳng nằm trong (P). Khi đó trường hợp nào sau đây **không** thể xảy ra?

(A) a song song b. (B) a cắt b.
(C) a và b chéo nhau. (D) a và b không có điểm chung.

CÂU 6. Hai đường thẳng cùng song song với đường thẳng thứ ba thì chúng

(A) hoặc song song hoặc trùng nhau. (B) chéo nhau.
(C) trùng nhau. (D) song song.

CÂU 7. Trong không gian, cho các mệnh đề sau

I. Hai đường thẳng phân biệt cùng song song với một mặt phẳng thì song song với nhau.

II. Hai mặt phẳng phân biệt chứa hai đường thẳng song song cắt nhau theo giao tuyến song song với hai đường thẳng đó.

QUICK NOTE

III. Nếu đường thẳng a song song với đường thẳng b, đường thẳng b nằm trên mặt phẳng (P) thì a song song với (P).

IV. Qua điểm A không thuộc mặt phẳng (α), kẻ được đúng một đường thẳng song song với (α).

Số mệnh đề đúng là

(A) 2. (B) 0. (C) 1. (D) 3.

CÂU 8. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau.

(A) Hai đường thẳng phân biệt cùng song song với một mặt phẳng thì song song với nhau.

(B) Nếu $a \parallel (P)$ thì tồn tại trong (P) đường thẳng b để $b \parallel a$.

(C) Nếu $\begin{cases} a \parallel (P) \\ b \subset (P) \end{cases}$ thì $a \parallel b$.

(D) Nếu $a \parallel (P)$ và đường thẳng b cắt mặt phẳng (P) thì hai đường thẳng a và b cắt nhau.

CÂU 9. Cho mặt phẳng (α) và đường thẳng $d \not\subset (\alpha)$. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

(A) Nếu $d \parallel (\alpha)$ thì trong (α) tồn tại đường thẳng Δ sao cho $\Delta \parallel d$.

(B) Nếu $d \parallel (\alpha)$ và $b \subset (\alpha)$ thì $b \parallel d$.

(C) Nếu $d \cap (\alpha) = A$ và $d' \subset (\alpha)$ thì d và d' hoặc cắt nhau hoặc chéo nhau.

(D) Nếu $d \parallel c$, $c \subset (\alpha)$ thì $d \parallel (\alpha)$.

CÂU 10. Cho các mệnh đề sau

1. Nếu $a \parallel (P)$ thì a song song với mọi đường thẳng nằm trong (P).

2. Nếu $a \parallel (P)$ thì a song song với một đường thẳng nào đó nằm trong (P).

3. Nếu $a \parallel (P)$ thì có vô số đường thẳng nằm trong (P) song song với a.

4. Nếu $a \parallel (P)$ thì có một đường thẳng d nào đó nằm trong (P) sao cho a và d đồng phẳng.

Số mệnh đề đúng là

(A) 2. (B) 3. (C) 4. (D) 1.

CÂU 11. Trong các khẳng định sau khẳng định nào **sai**?

(A) Nếu một đường thẳng song song với một trong hai mặt phẳng song song thì nó song song với mặt phẳng còn lại.

(B) Nếu một đường thẳng cắt một trong hai mặt phẳng song song thì nó cắt mặt phẳng còn lại.

(C) Nếu hai đường thẳng song song thì chúng cùng nằm trên một mặt phẳng.

(D) Nếu hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với một mặt phẳng thì chúng song song với nhau.

CÂU 12. Tìm khẳng định **sai** trong các khẳng định sau đây

(A) Nếu hai mặt phẳng song song cùng cắt mặt phẳng thứ ba thì hai giao tuyến tạo thành song song với nhau.

(B) Ba mặt phẳng đôi một song song chắn trên hai đường thẳng chéo nhau những đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ.

(C) Nếu mặt phẳng (P) song song với mặt phẳng (Q) thì mọi đường thẳng nằm trên mặt phẳng (P) đều song song với mặt phẳng (Q).

(D) Nếu mặt phẳng (P) có chứa hai đường thẳng phân biệt và hai đường thẳng đó cùng song song song với mặt phẳng (Q) thì mặt phẳng (P) song song với mặt phẳng (Q).

CÂU 13. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

(A) Hai đường thẳng cùng song song với một mặt phẳng thì song song với nhau.

(B) Hai đường thẳng cùng song song với một mặt phẳng thì trùng nhau.

(C) Hai đường thẳng cùng song song với một mặt phẳng thì chéo nhau.

(D) Hai đường thẳng cùng song song với một mặt phẳng có thể chéo nhau, song song, cắt nhau hoặc trùng nhau.

QUICK NOTE

CÂU 14. Cho các giả thiết sau đây. Giả thiết nào kết luận đường thẳng a song song với mặt phẳng (α)?

A. $a \parallel b$ và $b \subset (\alpha)$.
B. $a \parallel (\beta)$ và $(\beta) \parallel (\alpha)$.
C. $a \parallel b$ và $b \parallel (\alpha)$.
D. $a \cap (\alpha) = \varnothing$.

CÂU 15. Cho hai mặt phẳng (P), (Q) cắt nhau theo giao tuyến là đường thẳng d. Đường thẳng a song song với cả hai mặt phẳng (P), (Q). Khẳng định nào sau đây đúng?

A. a, d trùng nhau.
B. a, d chéo nhau.
C. a song song d.
D. a, d cắt nhau.

CÂU 16. Cho ba đường thẳng đôi một chéo nhau a, b, c. Gọi (P) là mặt phẳng qua a, (Q) là mặt phẳng qua b sao cho giao tuyến của (P) và (Q) song song với c. Có nhiều nhất bao nhiêu mặt phẳng (P) và (Q) thỏa mãn yêu cầu trên?

A. Vô số mặt phẳng (P) và (Q).
B. Một mặt phẳng (P), vô số mặt phẳng (Q).
C. Một mặt phẳng (Q), vô số mặt phẳng (P).
D. Một mặt phẳng (P), một mặt phẳng (Q).

Dạng 6. Đường thẳng song song với mặt phẳng

CÂU 1. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA và SC. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $MN \parallel (SAB)$.
B. $MN \parallel (SBC)$.
C. $MN \parallel (SBD)$.
D. $MN \parallel (ABCD)$.

CÂU 2. Cho hình chóp $S.ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trọng tâm tam giác SAB và tam giác SCD. Khi đó MN song song với mặt phẳng

A. (SAC).
B. (SBD).
C. (SAB).
D. $(ABCD)$.

CÂU 3. Cho hình chóp $S.ABC$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh SB, SC. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

A. $MN \parallel (ABC)$.
B. $MN \parallel (SAB)$.
C. $MN \parallel (SAC)$.
D. $MN \parallel (SBC)$.

CÂU 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi I và J lần lượt là trung điểm của SC và BC. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau

A. $IJ \parallel (SAC)$.
B. $JI \parallel (SAB)$.
C. $JI \parallel (SBC)$.
D. $JI \parallel (SAD)$.

CÂU 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi. Gọi H, I, K lần lượt là trung điểm của SA, AB, CD. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $HK \parallel (SBC)$.
B. $HK \parallel (SBD)$.
C. $HK \parallel (SAC)$.
D. $HK \parallel (SAD)$.

CÂU 6. Cho tứ diện $ABCD$, G là trọng tâm $\triangle ABD$ và M là điểm trên cạnh BC sao cho $BM = 2MC$. Đường thẳng MG song song với mặt phẳng nào sau đây?

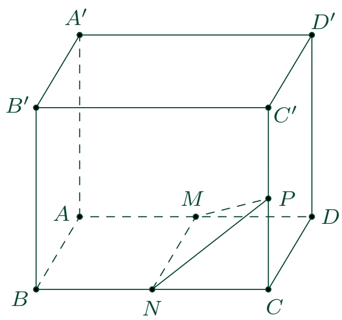
A. (ACD).
B. (ABC).
C. (ABD).
D. (BCD).

CÂU 7. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABD, Q thuộc cạnh AB sao cho $AQ = 2QB$ và P là trung điểm của AB. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $GQ \parallel (ACD)$.
B. $GQ \parallel (BCD)$.
C. GQ cắt (BCD).
D. Q thuộc mặt phẳng (CDP).

CÂU 8.

Cho hình lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có hai đáy là các hình bình hành. Các điểm M, N, P lần lượt là trung điểm của cạnh AD, BC, CC'. Trong các mệnh đề sau có bao nhiêu mệnh đề **sai**?



i) $A'B' \parallel (MNP)$.

ii) $(MNP) \parallel (BC'D')$.

iii) $(MNP) \parallel (B'C'D')$.

iv) DD' cắt mp (MNP).

Trong các mệnh đề trên có bao nhiêu mệnh đề **sai**?

QUICK NOTE

Ⓐ 4. Ⓑ 2. Ⓒ 3. Ⓓ 1.

CÂU 9. Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$ nằm trong hai mặt phẳng khác nhau lần lượt có tâm O và O'. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

Ⓐ $OO' \parallel (ADF)$. Ⓑ $OO' \parallel (BCE)$.
Ⓒ $OO' \parallel (ACE)$. Ⓓ $OO' \parallel (DCEF)$.

CÂU 10. Cho hình chóp $S.ABCD$, có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Gọi H, K lần lượt là trung điểm của BC, CD. Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

Ⓐ $HK \parallel (SBD)$. Ⓑ $OK \parallel (SAD)$. Ⓒ $OH \parallel (SAB)$. Ⓓ $HK \parallel (SAB)$.

CÂU 11. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm AA' và $B'C'$. Khi đó đường thẳng AB' song song với mặt phẳng

Ⓐ $(A'MN)$. Ⓑ $(C'MN)$. Ⓒ $(A'CN)$. Ⓓ (CMN).

CÂU 12. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M là một điểm trên cạnh SA, mặt phẳng (α) qua M song song với SB và AC. Mặt phẳng (α) cắt AB, BC, SC, SD, BD lần lượt tại N, E, F, I, J. Khẳng định nào sau đây là đúng?

Ⓐ $MN \parallel (SCD)$. Ⓑ $EF \parallel (SAD)$. Ⓒ $NF \parallel (SAD)$. Ⓓ $IJ \parallel (SAB)$.

CÂU 13. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O. Gọi I là trung điểm của BC, K thuộc cạnh SD sao cho $SK = \frac{1}{2}KD$, M là giao điểm của của BD và AI. Khẳng định nào sau đây là đúng?

Ⓐ $MK \parallel (SCD)$. Ⓑ $MK \parallel (SBD)$.
Ⓒ $MK \parallel (ABCD)$. Ⓓ $MK \parallel (SAB)$.

CÂU 14. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang, đáy lớn AB. Gọi P, Q lần lượt là hai điểm nằm trên cạnh SA và SB sao cho $\frac{SP}{SA} = \frac{SQ}{SB} = \frac{1}{3}$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

Ⓐ PQ cắt $(ABCD)$. Ⓑ $PQ \subset (ABCD)$.
Ⓒ $PQ \parallel (ABCD)$. Ⓓ PQ và CD chéo nhau.

CÂU 15. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G_1 và G_2 lần lượt là trọng tâm các tam giác BCD và ACD. Khẳng định nào sau đây **sai**?

Ⓐ $G_1G_2 \parallel (ABD)$. Ⓑ $G_1G_2 \parallel (ABC)$.
Ⓒ BG_1, AG_2 và CD đồng quy. Ⓓ $G_1G_2 = \frac{2}{3}AB$.

CÂU 16. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. M, N, K lần lượt là trung điểm của DC, BC, SA. Gọi H là giao điểm của AC và MN. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

Ⓐ MN chéo SC. Ⓑ $MN \parallel (SBD)$.
Ⓒ $MN \parallel (ABCD)$. Ⓓ $MN \cap (SAC) = H$.

CÂU 17. Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$ không cùng nằm trong một mặt phẳng. Gọi O_1, O_2 lần lượt là tâm của $ABCD$, $ABEF$. M là trung điểm của CD. Chọn khẳng định **sai** trong các khẳng định sau

Ⓐ MO_2 cắt (BEC). Ⓑ O_1O_2 song song với (BEC).
Ⓒ O_1O_2 song song với (EFM). Ⓓ O_1O_2 song song với (AFD).

CÂU 18. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. Gọi M, N theo thứ tự là trọng tâm $\triangle SAB$, $\triangle SCD$. Khi đó MN song song với mặt phẳng

Ⓐ (SAC). Ⓑ (SBD). Ⓒ (SAB). Ⓓ $(ABCD)$.

CÂU 19. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Các điểm I, J lần lượt là trọng tâm các tam giác SAB, SAD. M là trung điểm CD. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau

Ⓐ $IJ \parallel (SCD)$. Ⓑ $IJ \parallel (SBM)$. Ⓒ $IJ \parallel (SBC)$. Ⓓ $IJ \parallel (SBD)$.

CÂU 20. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O, M là trung điểm SA. Khẳng định nào sau đây là đúng?

Ⓐ $OM \parallel (SCD)$. Ⓑ $OM \parallel (SBD)$. Ⓒ $OM \parallel (SAB)$. Ⓓ $OM \parallel (SAD)$.

QUICK NOTE

CÂU 21. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang, $AB \parallel CD$ và $AB = 2CD$. Lấy E thuộc cạnh SA, F thuộc cạnh SC sao cho $\frac{SE}{SA} = \frac{SF}{SC} = \frac{2}{3}$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

(A) Đường thẳng EF song song với mặt phẳng (SAC).
(B) Đường thẳng EF cắt đường thẳng AC.
(C) Đường thẳng AC song song với mặt phẳng (BEF).
(D) Đường thẳng CD song song với mặt phẳng (BEF).

CÂU 22. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G là trọng tâm tam giác ABD. M là điểm trên cạnh BC sao cho $MB = 2MC$. Khi đó đường thẳng MG song song với mặt phẳng nào dưới đây?

(A) (ACD). (B) (BCD). (C) (ABD). (D) (ABC).

CÂU 23. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SC và SD. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

(A) $MN \parallel (SBD)$. (B) $MN \parallel (SAB)$. (C) $MN \parallel (SAC)$. (D) $MN \parallel (SCD)$.

CÂU 24. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của $A'B'$ và CC'. Khi đó CB' song song với

(A) $(AC'M)$. (B) $(BC'M)$. (C) $A'N$. (D) AM.

CÂU 25. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang với đáy lớn AD, $AD = 2BC$. Gọi M là điểm thuộc cạnh SD sao cho $MD = 2MS$. Gọi O là giao điểm của AC và BD. Khi đó, OM song song với mặt phẳng

(A) (SAD). (B) (SBD). (C) (SBC). (D) (SAB).

CÂU 26. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các mặt là hình vuông cạnh a. Các điểm M, N lần lượt nằm trên AD', DB sao cho $AM = DN = x$ $\left(0 < x < a\sqrt{2}\right)$. Khi x thay đổi, đường thẳng MN luôn song song với mặt phẳng cố định nào sau đây?

(A) $(CB'D')$. (B) $(A'BC)$. (C) $(AD'C)$. (D) $(BA'C')$.

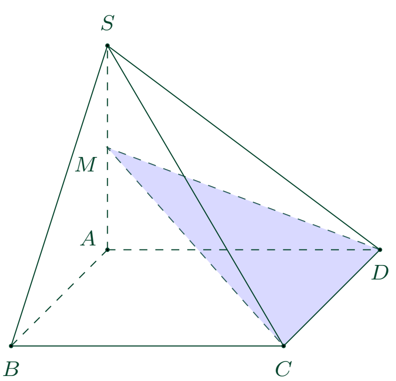
CÂU 27. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Trên các cạnh AA', BB', CC' lần lượt lấy ba điểm M, N, P sao cho $\frac{A'M}{AA'} = \frac{1}{3}$; $\frac{B'N}{BB'} = \frac{2}{3}$; $\frac{C'P}{CC'} = \frac{1}{2}$. Biết mặt phẳng (MNP) cắt cạnh DD' tại Q. Tính tỉ số $\frac{D'Q}{DD'}$.

(A) $\frac{1}{6}$. (B) $\frac{1}{3}$. (C) $\frac{5}{6}$. (D) $\frac{2}{3}$.

Dạng 7. Giao điểm, giao tuyến liên quan đến đường thẳng song song với mặt phẳng

CÂU 1.
Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi M là trung điểm của SA. Giao điểm của đường thẳng SB và mặt phẳng (CMD) là

(A) Không có giao điểm.
(B) Giao điểm của đường thẳng SB và MC.
(C) Giao điểm của đường thẳng SB và MD.
(D) Trung điểm của đoạn thẳng SB.



CÂU 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Gọi M là trung điểm AO. Mặt phẳng (α) qua M và song song với BD; SA và mặt phẳng (α) cắt SC tại N. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

(A) $SN = \frac{1}{4}NC$. (B) $SN = NC$. (C) $SN = \frac{1}{3}NC$. (D) $SN = \frac{1}{2}NC$.

QUICK NOTE

CÂU 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi (α) là mặt phẳng đi qua AC và song song với SB. Mặt phẳng (α) cắt SD tại E. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau

(A) $SE = \dfrac{1}{3}ED$. (B) $SE = \dfrac{1}{2}SD$. (C) $SE = \dfrac{1}{3}SD$. (D) $SE = 2SD$.

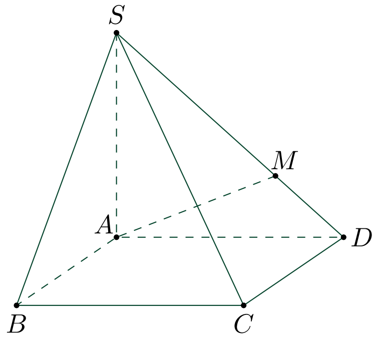
CÂU 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm O, M là một điểm thuộc đoạn SA sao cho $2MA = SM$, điểm N là điểm thuộc tia đối của tia OS sao cho $3ON = SO$, G là trọng tâm tam giác SCD. Gọi $K = SD \cap (GMN)$. Biết rằng và $(a, b) = 1$. Tính $S = a + b$.

(A) 3. (B) 2. (C) 4. (D) 5.

CÂU 5.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M là điểm thuộc cạnh SD sao cho $SM = \dfrac{2}{3}SD$. Mặt phẳng chứa AM và song song với BD cắt cạnh SC tại K. Tỷ số $\dfrac{SK}{SC}$ bằng

(A) $\dfrac{1}{3}$. (B) $\dfrac{2}{3}$. (C) $\dfrac{1}{2}$. (D) $\dfrac{3}{4}$.



CÂU 6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M là trung điểm SC, F là giao điểm của đường thẳng SD với mặt phẳng (ABM). Tính tỉ số $\dfrac{SF}{SD}$.

(A) 1. (B) $\dfrac{1}{3}$. (C) $\dfrac{2}{3}$. (D) $\dfrac{1}{2}$.

CÂU 7. Cho hình chóp $S.ABC$ có G, K lần lượt là trọng tâm của các tam giác ABC và SBC, gọi E là trung điểm của AC. Mặt phẳng (GEK) cắt SC tại M. Tỉ số $\dfrac{MS}{MC}$ bằng

(A) 1. (B) 2. (C) $\dfrac{2}{3}$. (D) $\dfrac{1}{2}$.

CÂU 8. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi M là trung điểm của SD, G là trọng tâm tam giác SAB, K là giao điểm của GM với mặt phẳng $ABCD$. Tỉ số $\dfrac{KB}{KC}$ bằng

(A) $\dfrac{2}{3}$. (B) 2. (C) $\dfrac{1}{2}$. (D) $\dfrac{3}{2}$.

Dạng 8. Xác định thiết diện và một số bài toán liên quan

CÂU 1. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và AC, E là điểm trên cạnh CD sao cho $ED = 3EC$. Thiết diện tạo bởi mặt phẳng (MNE) và tứ diện $ABCD$ là hình

(A) Tam giác. (B) Hình vuông. (C) Hình thang. (D) Hình chữ nhật.

CÂU 2. Cho tứ diện $ABCD$, M và N lần lượt là trung điểm của AB và AC. Mặt phẳng (α) qua MN cắt tứ diện $ABCD$ theo thiết diện là đa giác T. Khẳng định nào sau đây đúng?

(A) T là hình thang.

(B) T là tam giác hoặc hình thang hoặc hình bình hành.

(C) T là hình chữ nhật.

(D) T là tam giác.

CÂU 3. Cho tứ diện $ABCD$ có $AD = 9\ cm$, $CB = 6\,cm$. Điểm M bất kì trên cạnh CD. Mặt phẳng (α) qua M và song song với AD, BC. Nếu thiết diện của tứ diện cắt bởi mặt phẳng (α) là hình thoi thì cạnh của hình thoi đó bằng

(A) $3\ (cm)$. (B) $\dfrac{7}{2}\ (cm)$. (C) $\dfrac{31}{8}\ (cm)$. (D) $\dfrac{18}{5}\ (cm)$.

QUICK NOTE

CÂU 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang với đáy lớn AD, M là trung điểm cạnh SA, N là điểm trên cạnh SC sao cho $SN = 3NC$. Mặt phẳng (α) chứa MN và song song với SB cắt hình chóp theo thiết diện là

(A) Tam giác MNK với K thuộc SD.

(B) Tam giác MNP với P là trung điểm của AB.

(C) Hình thang.

(D) Ngũ giác.

CÂU 5. Trong không gian, cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, M, N lần lượt là trung điểm đoạn SC, BC. Thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mặt phẳng (α) qua MN song song với BD là hình gì?

(A) Tam giác. (B) Ngũ giác. (C) Lục giác. (D) Tứ giác.

CÂU 6. Cho tứ diện $ABCD$ có G là trọng tâm của tam giác BCD. Gọi (P) là mặt phẳng qua G, song song với AB và CD. Thiết diện của tứ diện $ABCD$ cắt bởi (P) là

(A) Hình thang. (B) Hình bình hành. (C) Hình tam giác. (D) Tam giác đều.

CÂU 7. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = 6, CD = 8$, cắt tứ diện bởi một mặt phẳng song song với AB, CD để thiết diện thu được là một hình thoi. Cạnh của hình thoi đó bằng

(A) $\dfrac{31}{7}$. (B) $\dfrac{18}{7}$. (C) $\dfrac{24}{7}$. (D) $\dfrac{15}{7}$.

CÂU 8. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang với đáy lớn là AB, điểm M là trung điểm CD. Mặt phẳng (α) qua M và song song với cả SA, BC cắt hình chóp theo một thiết diện là

(A) hình tam giác. (B) hình bình hành. (C) hình thoi. (D) hình thang.

CÂU 9. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O, I là trung điểm cạnh SC. Khẳng định nào sau đây **sai**?

(A) Đường thẳng IO song song với mặt phẳng (SAD).

(B) Mặt phẳng (IBD) cắt hình chóp $S.ABCD$ theo thiết diện là một tứ giác.

(C) Đường thẳng IO song song với mặt phẳng (SAB).

(D) Giao tuyến của hai mặt phẳng (IBD) và (SAC) là IO.

CÂU 10. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MA} = 3\overrightarrow{MB}$. Mặt phẳng (P) qua M và song song với SC, BD. Mệnh đề nào sau đây đúng?

(A) (P) cắt hình chóp theo thiết diện là một ngũ giác.

(B) (P) cắt hình chóp theo thiết diện là một tam giác.

(C) (P) cắt hình chóp theo thiết diện là một tứ giác.

(D) (P) không cắt hình chóp.

CÂU 11. Cho tứ diện $ABCD$. Điểm M thuộc đoạn AC (M khác A, M khác C). Mặt phẳng (α) đi qua M song song với AB và AD. Thiết diện của (α) với tứ diện $ABCD$ là hình gì?

(A) Hình vuông. (B) Hình chữ nhật. (C) Hình tam giác. (D) Hình bình hành.

CÂU 12. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O, gọi I là trung điểm cạnh SC. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

(A) Đường thẳng IO song song với mặt phẳng (SAD).

(B) Đường thẳng IO song song với mặt phẳng (SAB).

(C) Mặt phẳng (IBD) cắt mặt phẳng (SAC) theo giao tuyến OI.

(D) Mặt phẳng (IBD) cắt hình chóp $S.ABCD$ theo một thiết diện là tứ giác.

CÂU 13. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O, I là trung điểm cạnh SC. Khẳng định nào sau đây **sai**?

(A) $IO \parallel (SAB)$.

(B) $IO \parallel (SAD)$.

(C) Mặt phẳng (IBD) cắt hình chóp $S.ABCD$ theo thiết diện là một tứ giác.

(D) $(IBD) \cap (SAC) = OI$.

QUICK NOTE

CÂU 14. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$, có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N, I lần lượt là trung điểm của các cạnh SA, SB và BC. Thiết diện tạo bởi mặt phẳng và hình chóp S.ABCD là

- **A** Tứ giác $MNIK$ với K là điểm bất kỳ trên cạnh AD.
- **B** Tam giác MNI.
- **C** Hình bình hành $MNIK$ với K là điểm trên cạnh AD mà $IK \parallel AB$.
- **D** Hình Thang $MNIK$ với K là một điểm trên cạnh AD mà $IK \parallel AB$.

CÂU 15. Gọi (P) là mặt phẳng qua H, song song với CD và SB. Thiết diện tạo bởi (P) và hình chóp $S.ABCD$ là hình gì?

- **A** Ngũ giác.
- **B** Hình bình hành.
- **C** Tứ giác không có cặp cạnh đối nào song song.
- **D** Hình thang.

CÂU 16. Cho tứ diện $ABCD$. Điểm M thuộc đoạn AC. Mặt phẳng (α) qua M song song với AB và AD. Thiết diện của (α) với tứ diện $ABCD$ là hình gì?

A Hình tam giác. **B** Hình bình hành. **C** Hình thang. **D** Hình ngũ giác.

CÂU 17. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. M là một điểm thuộc đoạn SB. Mặt phẳng (ADM) cắt hình chóp $S.ABCD$ theo thiết diện là

A Hình thang. **B** Hình chữ nhật. **C** Hình bình hành. **D** Tam giác.

CÂU 18. Cho hình chóp $S.ABCD$ có SA vuông góc với mặt đáy, $ABCD$ là hình vuông cạnh $a\sqrt{2}$, $SA = 2a$. Gọi M là trung điểm cạnh SC, (α) là mặt phẳng đi qua A, M và song song với đường thẳng BD. Tính diện tích thiết diện của hình chóp bị cắt bởi mặt phẳng (α).

A $a^2\sqrt{2}$. **B** $\dfrac{4a^2}{3}$. **C** $\dfrac{4a^2\sqrt{2}}{3}$. **D** $\dfrac{2a^2\sqrt{2}}{3}$.

CÂU 19. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = a$, $CD = b$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm AB và CD, giả sử $AB \perp CD$. Mặt phẳng (α) qua M nằm trên đoạn IJvà song song với AB và CD. Tính diện tích thiết diện của tứ diện $ABCD$ với mặt phẳng (α), biết $IM = \dfrac{1}{3}IJ$.

A ab. **B** $\dfrac{ab}{9}$. **C** $2ab$. **D** $\dfrac{2ab}{9}$.

CÂU 20. Cho tứ diện $ABCD$ có AB vuông góc với CD, $AB = CD = 6$. Gọi M là điểm thuộc cạnh BC sao cho $MC = x \cdot BC\ (0 < x < 1)$. Mặt phẳng (P) song song với AB và CD lần lượt cắt BC, DB, AD, AC tại M, N, P, Q. Diện tích lớn nhất của tứ giác bằng bao nhiêu?

A 8. **B** 9. **C** 11. **D** H.

CÂU 21. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$, gọi M là trung điểm CD, (P) là mặt phẳng đi qua M và song song với $B'D$ và CD'. Thiết diện của hình hộp cắt bởi mặt phẳng (P) là hình gì?

A Ngũ giác. **B** Tứ giác. **C** Tam giác. **D** Lục giác.

CÂU 22. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = 6$, $CD = 8$. Cắt tứ diện bởi một mặt phẳng song song với AB, CD để thiết diện thu được là một hình thoi. Cạnh của hình thoi đó bằng

A $\dfrac{31}{7}$. **B** $\dfrac{18}{7}$. **C** $\dfrac{24}{7}$. **D** $\dfrac{15}{7}$.

CÂU 23. Cho tứ diện $ABCD$. Trên các cạnh AD, BC theo thứ tự lấy các điểm M, N sao cho $\dfrac{MA}{AD} = \dfrac{NC}{CB} = \dfrac{1}{3}$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa đường thẳng MN và song song với CD. Khi đó thiết diện của tứ diện $ABCD$ cắt bởi mặt phẳng (P) là

- **A** một tam giác.
- **B** một hình bình hành.
- **C** một hình thang với đáy lớn gấp 2 lần đáy nhỏ.
- **D** một hình thang với đáy lớn gấp 3 lần đáy nhỏ.

CÂU 24. Cho tứ diện $ABCD$. Điểm G là trọng tâm tam giác BCD. Mặt phẳng (α) qua G, (α) song song với AB và CD. (α) cắt trung tuyến AM của tam giác ACD tại K. Chọn khẳng định đúng?

(A) (α) cắt tứ diện $ABCD$ theo thiết diện là một hình tam giác.

(B) $AK = \frac{2}{3}AM$.

(C) $AK = \frac{1}{3}AM$.

(D) Giao tuyến của (α) và cắt CD.

CÂU 25. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Mặt phẳng (P) qua BD và song song với SA. Khi đó mặt phẳng (P) cắt hình chóp $S.ABCD$ theo thiết diện là một hình

(A) Hình thang. (B) Hình chữ nhật. (C) Hình bình hành. (D) Tam giác.

CÂU 26. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi I là trung điểm AB. Mặt phẳng $(IB'D')$ cắt hình hộp theo thiết diện là hình gì?

(A) Hình bình hành. (B) Hình thang. (C) Hình chữ nhật. (D) Tam giác.

CÂU 27. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. M là một điểm thuộc đoạn SB (M khác S và B). Mặt phẳng (ADM) cắt hình chóp $S.ABCD$ theo thiết diện là

(A) Hình bình hành. (B) Tam giác. (C) Hình chữ nhật. (D) Hình thang.

CÂU 28. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MA} = 3\overrightarrow{MB}$. Mặt phẳng (P) qua M và song song với hai đường thẳng SC, BD. Mệnh đề nào sau đây đúng?

(A) (P) không cắt hình chóp.

(B) (P) cắt hình chóp theo thiết diện là một tứ giác.

(C) (P) cắt hình chóp theo thiết diện là một tam giác.

(D) (P) cắt hình chóp theo thiết diện là một ngũ giác.

CÂU 29. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O, M là trung điểm SA. Gọi (α) là mặt phẳng đi qua M, song song với SC và AD. Thiết diện của (α) với hình chóp $S.ABCD$ là hình gì?

(A) Hình thang. (B) Hình thang cân. (C) Hình chữ nhật. (D) Hình bình hành.

CÂU 30. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang ($AB \parallel CD$). Gọi I, J lần lượt là trung điểm của các cạnh AD, BC và G là trọng tâm tam giác SAB. Biết thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (IJG) là hình bình hành. Hỏi khẳng định nào sao đây đúng?

(A) $AB = 3CD$. (B) $AB = \frac{1}{3}CD$. (C) $AB = \frac{3}{2}CD$. (D) $AB = \frac{2}{3}CD$.

CÂU 31. Cho hình tứ diện $ABCD$ có tất cả các cạnh bằng $6a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của CA, CB; P là điểm trên cạnh BD sao cho $BP = 2PD$. Diện tích S thiết diện của tứ diện $ABCD$ bị cắt bởi (MNP) là

(A) $\frac{5a^2\sqrt{457}}{2}$. (B) $\frac{5a^2\sqrt{457}}{12}$. (C) $\frac{5a^2\sqrt{51}}{2}$. (D) $\frac{5a^2\sqrt{51}}{4}$.

CÂU 32. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang ($AB \parallel CD$), cạnh $AB = 3a$, $AD = CD = a$. Tam giác SAB cân tại S, $SA = 2a$. Mặt phẳng (P) song song với SA, AB cắt các cạnh AD, BC, SC, SD theo thứ tự tại M, N, P, Q. Đặt $AM = x$ $(0 < x < a)$. Gọi x là giá trị để tứ giác $MNPQ$ ngoại tiếp được đường tròn, bán kính đường tròn đó là

(A) $\frac{a\sqrt{7}}{4}$. (B) $\frac{a\sqrt{7}}{6}$. (C) $\frac{3a}{4}$. (D) a.

CÂU 33. Cho tứ diện $ABCD$ có tất cả các cạnh bằng a, I là trung điểm của AC, J là một điểm trên cạnh AD sao cho $AJ = 2JD$. (P) là mặt phẳng chứa IJ và song song với AB. Tính diện tích thiết diện khi cắt tứ diện bởi mặt phẳng (P).

(A) $\frac{3a^2\sqrt{51}}{144}$. (B) $\frac{3a^2\sqrt{31}}{144}$. (C) $\frac{a^2\sqrt{31}}{144}$. (D) $\frac{5a^2\sqrt{51}}{144}$.

QUICK NOTE

QUICK NOTE

Bài 13. HAI MẶT PHẲNG SONG SONG

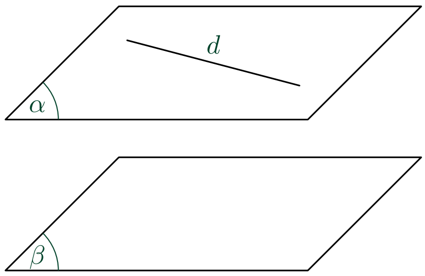
A. LÝ THUYẾT

1. Hai mặt phẳng song song

Hai mặt phẳng được gọi là song song nếu chúng không có điểm chung. Kí hiệu: $(\alpha) \,/\!\!/\, (\beta)$ hay $(\beta) \,/\!\!/\, (\alpha)$

Khi đó: $(\alpha) \,/\!\!/\, (\beta) \Leftrightarrow (\alpha) \cap (\beta) = \varnothing$

Chú ý: Nếu $(\alpha) \,/\!\!/\, (\beta)$ thì mọi đường thẳng $a \subset (\alpha)$ đều song song với (β).



2. Điều kiện và tính chất của hai mặt phẳng song song

Tính chất 13.1. *Nếu mặt phẳng (α) chứa hai đường thẳng cắt nhau và hai đường thẳng này cùng song song với mặt phẳng (β) thì (α) song song với (β).*

Tính chất 13.2. *Qua một điểm nằm ngoài mặt phẳng có một và chỉ một mặt phẳng song song với mặt phẳng đã cho.*

Tính chất 13.3. *Nếu đường thẳng d song song với mặt phẳng(P)thì có duy nhất một mặt phẳng (Q)chứa d và song song với (P).*

Tính chất 13.4. *Hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với mặt phẳng thứ ba thì song song với nhau.*

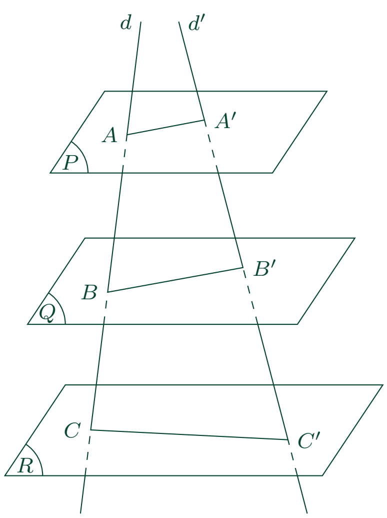
Tính chất 13.5. *Cho điểm $A \notin (P)$. khi đó mọi đthẳng đi qua A và song song với (P)đều nằm trong một mặt phẳng (Q) đi qua A và song song với (P).*

Tính chất 13.6. *Nếu một mặt phẳng cắt một trong hai mặt phẳng song song thì cũng cắt mặt phẳng kia và các giao tuyến của chúng song song với nhau.*

Hệ quả 13.1. *Hai mặt phẳng song song chắn trên hai cát tuyến song song những đoạn thẳng bằng nhau.*

3. Định lý Thalès

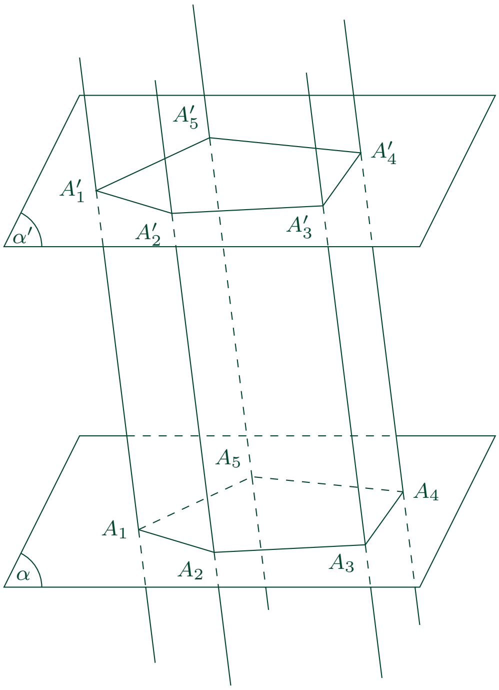
Định lí 13.1. *Ba mặt phẳng đôi một song song chắn trên hai cát tuyến bất kì những đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ.*



QUICK NOTE

4. Hình lăng trụ

Định nghĩa 13.1. Trên mặt phẳng (α) cho đa giác $A_1A_2...A_n$, từ các đỉnh của đa giác dựng các đường thẳng song song cắt mặt phẳng (α') song song với (α) tại các điểm $A_1{}', A_2{}', .., A_n{}'$. Hình hợp bởi hai miền đa giác $A_1A_2...A_n$ và $A_1{}'A_2{}'...A_n{}'$với các hình chữ nhật $A_1A_2A_2{}'A_1{}'$, $A_2A_3A_3{}'A_2{}'$,. được gọi là hình lăng trụ.

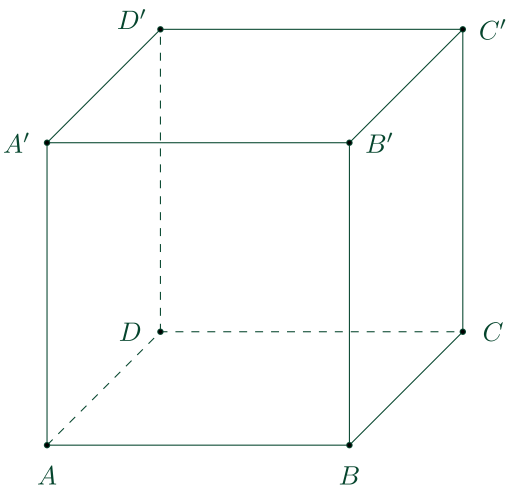


Tính chất 13.7.

- *Các hình bình hành được gọi là các mặt bên, hai miền đa giác gọi là hai mặt đáy của lăng trụ.*
- *Hai đáy của lăng trụ là hai đa giác bằng nhau và nằm trên hai mặt phẳng song song với nhau.*
- *Các đoạn thẳng $A_1A_1{}', A_2A_2{}', \ldots$ được gọi là các cạnh bên. Các cạnh bên của lăng trụ song song và bằng nhau.*
- *Ta gọi lăng trụ theo tên của đa giác đáy, tức là nếu đáy là tam giác thì gọi là lăng trụ tam giác, nếu đáy là tứ giác thì gọi là lăng trụ tứ giác.*

5. Hình hộp

Định nghĩa 13.2. Hình lăng trụ tứ giác có đáy là hình bình hành được gọi là hình hộp.



Tính chất 13.8.

- *Hình hộp có sáu mặt đều là những hình bình hành.*

QUICK NOTE

- *Hai mặt song song với nhau gọi là hai mặt đối diện, hình hộp có ba cặp mặt đối diện.*
- *Hai đỉnh của hình hộp được gọi là hai đỉnh đối diện nếu chúng không cùng nằm trên một mặt nào.*
- *Các đoạn thẳng nối hai đỉnh đối diện được gọi là các đường chéo. Bốn đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường, điểm đó gọi là tâm của hình hộp.*
- *Hai cạnh gọi là đối nhau nếu chúng song song nhưng không cùng nằm trên một mặt của hình chóp.*
- *Mặt chéo của hình hộp là hình bình hành có hai cạnh là hai cạnh đối diện của hình hộp.*
- *Tổng bình phương các đường chéo của một hình hộp bằng tổng các bình phương của tất cả các cạnh của hình hộp đó.*

B. HỆ THỐNG BÀI TẬP TỰ LUẬN

Dạng 9. Chứng minh 2 mặt phẳng song song

Phương pháp:

a) $\begin{cases} (\alpha) \supset a, b \\ a \cap b = I \\ a \mathbin{/\!/} (\beta), b \mathbin{/\!/} (\beta) \end{cases} . \Rightarrow (\alpha) \mathbin{/\!/} (\beta)$

b) $\begin{cases} (\alpha) \mathbin{/\!/} (\gamma) \\ (\beta) \mathbin{/\!/} (\gamma) \\ (\alpha) \neq (\beta) \end{cases} . \Rightarrow (\alpha) \mathbin{/\!/} (\beta)$

1. Bài tập tự luận

BÀI 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O, gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA, SD. Chứng minh $(OMN) \mathbin{/\!/} (SBC)$.

BÀI 2. Cho hai hình vuông $ABCD$ và $ABEF$ ở trong hai mặt phẳng phân biệt. Trên các đường chéo AC và BF lần lượt lấy các điểm M, N sao cho $AM = BN$. Các đường thẳng song song với AB vẽ từ M, N lần lượt cắt AD và AF tại M' và N'. Chứng minh:

a) $(ADF) \mathbin{/\!/} (BCE)$.

b) $(DEF) \mathbin{/\!/} (MM'N'N)$.

BÀI 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Gọi M,N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, CD, SA. Chứng minh rằng mặt phẳng (DMP) song song với mặt phẳng (SBN).

BÀI 4. Trong không gian cho hai hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$ nằm trong hai mặt phẳng phân biệt. Chứng minh rằng mặt phẳng $(AFD) \mathbin{/\!/} (BCE)$.

BÀI 5. Cho hình tứ diện $ABCD$, lấy M là điểm tùy ý trên cạnh $AD\,(M \neq A, D)$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua M song song với mặt phẳng (ABC) lần lượt cắt DB, DC tại N, P Chứng minh rằng: $NP \mathbin{/\!/} BC$.

BÀI 6. Cho hình chóp $S.ABCD$, gọi G_1, G_2, G_3 lần lượt là trọng tâm của tam giác SAB, ABC, SAC. Chứng minh rằng $(G_1G_2G_3) \mathbin{/\!/} (SBC)$.

BÀI 7. Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$ có tâm lần lượt là O, O' và không cùng nằm trong một mặt phẳng. Gọi M là trung điểm của AB. Chứng minh rằng:

a) $(ADF) \mathbin{/\!/} (BCE)$

b) $(MOO') \mathbin{/\!/} (ADF)$.

c) $(MOO') \mathbin{/\!/} (BCE)$.

QUICK NOTE

Dạng 10. Chứng minh đường thẳng song song với mặt phẳng

Phương pháp:

a) $\begin{cases} (\alpha) \parallel (\beta) \\ a \subset (\alpha) \end{cases} \Rightarrow a \parallel (\beta)$

b) $\begin{cases} AB \parallel (\alpha) \\ AC \parallel (\alpha) \\ AB \cap AC = A \end{cases} \Rightarrow BC \parallel (\alpha)$

và các định lý, hệ quả của bài trước.

1. Bài tập tự luận

BÀI 1. Cho hình thang $ABCD$ có $AB \parallel CD$ và $S \notin (ABCD)$. Trên SA, BD lấy hai điểm M, N sao cho $\dfrac{SM}{SA} = \dfrac{DN}{DB} = \dfrac{2}{3}$. Kẻ $NI \parallel AB$ $(I \in AD)$. Chứng minh $MN \parallel (SCD)$.

Dạng 11. Chứng minh hai đường thẳng song song

Phương pháp: Dựa vào định lý ở bài hai mặt phẳng song song $\begin{cases} (\alpha)\,(\beta) \\ (\gamma) \parallel (\alpha) = a \\ (\gamma) \parallel (\beta) = b \end{cases} \Rightarrow a \parallel b$

và các định lý, hệ quả ở các bài trước.

Dạng 12. Bài toán liên quan đến tỷ lệ độ dài

Phương pháp:

a) $\begin{cases} (\alpha) // (\beta) \\ d \cap (\alpha) = A,\ d \cap (\beta) = B \\ d' \cap (\alpha) = A',\ d' \cap (\beta) = B' \\ d // d' \end{cases} \Rightarrow AB = A'B'$

b) $\begin{cases} (\alpha) // (\beta) // (\gamma) \\ d \cap (\alpha) = A,\ d \cap (\beta) = B,\ d \cap (\gamma) = C \\ d' \cap (\alpha) = A',\ d' \cap (\beta) = B',\ d' \cap (\gamma) = C' \end{cases} \Rightarrow \dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{AC}{A'C'} = \dfrac{BC}{B'C'}$

và định lý Talet thuận và đảo trong mặt phẳng.

1. Bài tập tự luận

BÀI 1. Cho tứ diện $ABCD$ và M, N là các điểm thay trên các cạnh AB, CD sao cho $\dfrac{AM}{MB} = \dfrac{CN}{ND}$.

a) Chứng minh MN luôn luôn song song với một mặt phẳng cố định.

b) Tính theo k tỉ số diện tích tam giác MNP và diện tích thiết diện.

A $\dfrac{k}{k+1}$. **B** $\dfrac{2k}{k+1}$. **C** $\dfrac{1}{k}$. **D** $\dfrac{1}{k+1}$.

BÀI 2. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các mặt đều là hình vuông cạnh a. Các điểm M, N lần lượt trên AD', BD sao cho $AM = DN = x$ $\left(0 < x < a\sqrt{2}\right)$.

a) Chứng minh khi x biến thiên, đường thẳng MN luôn song song với một mặt phẳng cố định.

b) Chứng minh khi $x = \dfrac{a\sqrt{2}}{3}$ thì $MN \parallel A'C$.

QUICK NOTE

Dạng 13. Xác định thiết diện

Phương pháp:

Dựa vào định lý $\begin{cases} (\alpha) \parallel (\beta) \\ (\gamma) \cap (\alpha) = a \\ (\gamma) \cap (\beta) = b \end{cases} \Rightarrow a \parallel b$ và các kết quả có trước.

1. Bài tập tự luận

BÀI 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành và M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD. Xác định thiết diện của hình chóp cắt bởi (α) đi qua MN và song song với mặt phẳng (SAD). Thiết diện là hình gì?

BÀI 2. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Trên ba cạnh AB, DD', CB' lần lượt lấy ba điểm M, N, P không trùng với các đỉnh sao cho $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{D'N}{D'D} = \dfrac{B'P}{B'C'}$. Tìm thiết diện của hình hộp khi cắt bởi mặt phẳng (MNP).

BÀI 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ với $ABCD$ là hình thoi cạnh a, SAD là tam giác đều. Gọi M là một điểm thuộc cạnh AB, $AM = x$, (P) là mặt phẳng qua M song song với (SAD). Tính diện tích thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (P).

BÀI 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a, tam giác SAB đều, $SC = SD = a\sqrt{3}$. Gọi H, K lần lượt là trung điểm của SA, SB. M là một điểm trên cạnh AD, mặt phẳng (HKM) cắt BC tại N. Đặt $AM = x$ $(0 \le x \le a)$. Tìm x để diện tích thiết diện $HKMN$ đạt giá trị nhỏ nhất.

C. HỆ THỐNG BÀI TẬP TỰ LUYỆN

BÀI 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành và M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh AB, CD, SA.

a) Chứng minh $(SBN) \parallel (DPM)$.

b) Q là một điểm thuộc đoạn SP (Q khác S, P). Xác định thiết diện của hình chóp cắt bởi (α) đi qua Q và song song với (SBN).

c) Xác định thiết diện của hình chóp cắt bởi (β) đi qua MN song song với (SAD).

BÀI 6. Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy là hình bình hành tâm O. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA và CD.

a) Chứng minh $(OMN) \parallel (SBC)$.

b) Gọi I là trung điểm của SD, J là một điểm trên $(ABCD)$ cách đều AB và CD. Chứng minh $IJ \parallel (SAB)$.

BÀI 7. Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình bình hành, các tam giác SAD và ABC đều cân tại A. Gọi AE, AF là các đường phân giác trong của các tam giác ACD và SAB. Chứng minh $EF \parallel (SAD)$.

BÀI 8. Hai hình vuông $ABCD$ và $ABEF$ ở trong hai mặt phẳng khác nhau. Trên các đường chéo AC và BF lần lượt lấy các điểm M, N sao cho $AM = BN$. Các đường thẳng song song với AB vẽ từ M, N lần lượt cắt AD, AF tại M', N'.

a) Chứng minh $(BCE) \parallel (ADF)$.

b) Chứng minh $(DEF) \parallel (MNN'M')$.

c) Gọi I là trung điểm của MN. Tìm tập hợp điểm I khi M, N thay đổi trên AC và BF.

BÀI 9. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang, $AB = 3a$, $AD = CD = a$. Mặt bên SAB là tam giác cân đỉnh S và $SA = 2a$, mặt phẳng (α) song song với (SAB) cắt các cạnh AD, BC, SC, SD theo thứ tự tại M, N, P, Q.

a) Chứng minh $MNPQ$ là hình thang cân.

b) Đặt $x = AM$ $(0 < x < a)$. Tính x để $MNPQ$ là tứ giác ngoại tiếp được một đường tròn. Tính bán kính đường tròn đó.

QUICK NOTE

c) Gọi $I = MQ \cap NP$. Tìm tập hợp điểm I khi M di động trên AD.

d) Gọi $J = MP \cap NQ$. Chứng minh IJ có phương không đổi và điểm J luôn thuộc một mặt phẳng cố định.

BÀI 10. Cho hình chóp $S.ABC$, một mặt phẳng (α) di động luôn song song với (ABC), cắt SA, SB, SC lần lượt tại A', B', C'. Tìm tập hợp điểm chung của ba mặt phẳng $(A'BC)$, $(B'AC)$, $(C'AB)$.

BÀI 11. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$.

a) Chứng minh $(BDA') \parallel (B'D'C)$.

b) Chứng minh đường chéo AC' đi qua trọng tâm G_1, G_2 của các tam giác BDA', $B'D'C$ đồng thời chia đường chéo AC' thành ba phần bằng nhau.

c) Xác định thiết diện của hình hộp cắt $(A'B'G_2)$. Thiết diện là hình gì?

BÀI 12. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các mặt đều là hình vuông cạnh a. Trên các cạnh AB, CC', $C'D'$ và AA' lấy các điểm M, N, P, Q sao cho $AM = C'N = C'P = AQ = x$, $(0 \leq x \leq a)$.

a) Chứng minh bốn điểm M, N, P, Q đồng phẳng và MP, NQ cắt nhau tại một điểm cố định.

b) Chứng minh $(MNPQ)$ đi qua một đường thẳng cố định.

c) Dựng thiết diện của hình hộp khi cắt bởi $(MNPQ)$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của chu vi thiết diện.

BÀI 13. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật và $\triangle SAD$ vuông tại A. Qua điểm M trên cạnh AB dựng mặt phẳng (α) song song với (SAD) cắt CD, SC, SB tại N, P, Q.

a) Chứng minh $MNPQ$ là hình thang vuông.

b) Gọi $I = NP \cap MQ$. Tìm tập hợp điểm I khi M di động trên cạnh AB.

BÀI 14. Cho hình chóp cụt $ABC.A'B'C'$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh $A'B'$, BB', BC.

a) Xác định thiết diện của hình chóp cụt với (MNP).

b) Gọi I là trung điểm của AB. Tìm giao điểm của IC' với (MNP).

BÀI 15. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các mặt đều là hình vuông cạnh a. Các điểm M, N nằm trên AD', BD sao cho $AM = DN = x$, $(0 < x < a\sqrt{2})$.

a) Chứng minh khi x biến thiên thì MN luôn song song với một mặt phẳng cố định.

b) Khi $x = \dfrac{a\sqrt{2}}{3}$, chứng minh $MN \parallel A'C$.

BÀI 16. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

a) Gọi I, K, G lần lượt là trọng tâm các tam giác ABC, $A'B'C'$ và ACC'. Chứng minh $(IGK) \parallel (BB'C'C)$ và $(A'KG) \parallel (AIB)$.

b) Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của BB' và CC'. Hãy dựng đường thẳng đi qua trọng tâm của tam giác ABC cắt AB' và PQ.

BÀI 17. Cho mặt phẳng (α) và hai đường thẳng chéo nhau d_1, d_2 cắt (α) tại A, B. Đường thẳng Δ thay đổi luôn song song với (α) cắt d_1, d_2 lần lượt tại M và N. Đường thẳng qua N song song với d_1 cắt (α) tại N'.

a) Tứ giác $AMNN'$ là hình gì? Tìm tập hợp điểm N'.

b) Xác định vị rí của Δ để độ dài MN nhỏ nhất.

c) Gọi O là trung điểm của AB, I là trung điểm của MN. Chứng minh OI là đường thẳng nằm trong mặt phẳng cố định khi M di động.

QUICK NOTE

BÀI 18. Cho tứ diện đều cạnh a. Gọi I, J lần lượt là trọng tâm các tam giác ABC và DBC. Mặt phẳng (α) qua IJ cắt các cạnh AB, AC, DC, DB lần lượt tại M, N, P, Q.

a) Chứng minh MN, PQ, BC đồng quy hoặc song song và $MNPQ$ là hình thang cân.

b) Đặt $AM = x$, $AN = y$. Chứng minh $a(x+y) = 3xy$. Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của $AM + AN$.

c) Tính diện tích tứ giác $MNPQ$ theo a và $s = x + y$.

BÀI 19. Cho lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình thang, $AD = CD = BC = a$, $AB = 2a$. Mặt phẳng (α) đi qua A cắt các cạnh BB', CC', DD' lần lượt tại M, N, P.

a) Tứ giác $AMNP$ là hình gì?

b) So sánh AM và NP.

Bài 14. PHÉP CHIẾU SONG SONG

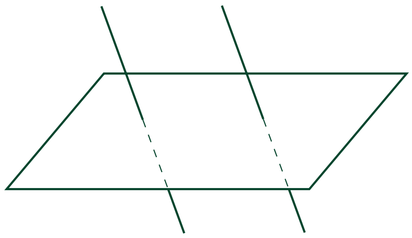
QUICK NOTE

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. Phép chiếu song song

Cho mặt phẳng (α) và đường thẳng Δ cắt (α). Với mỗi điểm M trong không gian, ta xác định điểm M' như sau:

- Nếu điểm $M \in \Delta$ thì M' là giao điểm của (α) với Δ.
- Nếu điểm $M \notin \Delta$ thì M' là giao điểm của (α) với đường thẳng đi qua M và song song Δ.



— Điểm M' được gọi là hình chiếu song của điểm M trên mặt phẳng (α) theo phương Δ.

— Mặt phẳng (α) gọi là mặt phẳng chiếu. Phương Δ gọi là phương chiếu.

- Phép đặt tương ứng mỗi điểm M trong không gian với hình chiếu M' của nó trên mặt phẳng (α) được gọi là phép chiếu song song lên (α) theo phương Δ.
- Nếu $\mathscr{H}$ là một hình nào đó thì tập hợp $\mathscr{H}'$ các hình chiếu M' của tất cả những điểm M thuộc $\mathscr{H}$ được gọi là hình chiếu của $\mathscr{H}$ qua phép chiếu song song nói trên.

Nếu một đường thẳng có phương trùng với phương chiếu thì hình chiếu của đường thẳng đó là một điểm.

2. Tính chất của phép chiếu song song

- Phép chiếu song song biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và không làm thay đổi thứ tự ba điểm đó.
- Phép chiếu song song biến đường thẳng thành đường thẳng, biến tia thành tia, biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng.
- Phép chiếu song song biến hai đường thẳng song song thành hai đường thẳng song song hoặc trùng nhau.
- Phép chiếu song song không làm thay đổi tỉ số độ dài của hai đoạn thẳng nằm trên hai đường thẳng song song hoặc cùng nằm trên một đường thẳng.

3. Hình biểu diễn của một hình không gian trên mặt phẳng

Hình biểu diễn của một hình **H** trong không gian là hình chiếu song song của hình **H** trên một mặt phẳng theo một phương chiếu nào đó hoặc hình đồng dạng với hình chiếu đó. Hình biểu diễn của các hình thường gặp:

- **Tam giác**. Một tam giác bất kì bao giờ cũng có thể coi là hình biểu diễn của một tam giác có dạng tùy ý cho trước
- **Hình bình hành.** Một hình bình hành bất kì bao giờ cũng có thể coi là hình biểu diễn của một hình bình hành có dạng tùy ý cho trước
- **Hình thang**. Một hình thang bất kì bao giờ cũng có thể coi là hình biểu diễn của một hình thang tùy ý cho trước, miễn là tỉ số độ dài hai đáy của hình biểu diễn phải bằng tỉ số độ dài hai đáy của hình thang ban đầu.
- **Hình tròn**. Người ta thường dùng hình elip để biểu diễn cho hình tròn.

QUICK NOTE

B. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

CÂU 1. Hình chiếu của hình chữ nhật không thể là hình nào trong các hình sau?

(A) Hình chữ nhật. (B) Hình thang. (C) Hình bình hành. (D) Hình thoi.

CÂU 2. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$, gọi I, I' lần lượt là trung điểm của AB, $A'B'$. Qua phép chiếu song song đường thẳng AI', mặt phẳng chiếu $(A'B'C')$ biến I thành

(A) A'. (B) C'. (C) B'. (D) I'.

CÂU 3. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M là trung điểm của AD. Hình chiếu song song của điểm M theo phương AC lên mặt phẳng (BCD) là điểm nào sau đây?

(A) D.

(B) Trung điểm của CD.

(C) Trung điểm của BD.

(D) Trọng tâm tam giác BCD.

CÂU 4. Qua phép chiếu song song, tính chất nào không được bảo toàn?

(A) Chéo nhau. (B) Đồng qui. (C) Song song. (D) Thẳng hàng.

CÂU 5. Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào **sai**?

(A) Phép chiếu song song biến đường thẳng thành đường thẳng, biến tia thành tia, biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng.

(B) Phép chiếu song song biến hai đường thẳng song song thành hai đường thẳng song song.

(C) Phép chiếu song song biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và không thay đổi thứ tự của ba điểm đó.

(D) Phép chiếu song song không làm thay đổi tỉ số độ dài của hai đoạn thẳng nằm trên hai đường thẳng song song hoặc cùng nằm trên một đường thẳng.

CÂU 6. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$, qua phép chiếu song song đường thẳng CC', mặt phẳng chiếu $(A'B'C')$ biến M thành M'. Trong đó M là trung điểm của BC. Chọn mệnh đề đúng?

(A) M' là trung điểm của $A'B'$.

(B) M' là trung điểm của $B'C'$.

(C) M' là trung điểm của $A'C'$.

(D) Cả ba đáp án trên đều sai.

CÂU 7. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$, gọi I, I' lần lượt là trung điểm của AB, $A'B'$. Qua phép chiếu song song đường thẳng AI', mặt phẳng chiếu $(A'B'C')$ biến I thành

(A) A'. (B) B'. (C) C'. (D) I'.

CÂU 8. Cho tam giác ABC ở trong mặt phẳng (α) và phương ℓ. Biết hình chiếu của tam giác ABC lên mặt phẳng (P) là một đoạn thẳng. Khẳng định nào sau đây đúng?

(A) $(\alpha) \parallel (P)$.

(B) $(\alpha) \equiv (P)$.

(C) $(\alpha) \parallel \ell$ hoặc $(\alpha) \supset \ell$.

(D) A, B, C đều sai.

CÂU 9. Khẳng định nào sau đây đúng?

(A) Hình chiếu song song của một hình chóp cụt có thể là một hình tam giác.

(B) Hình chiếu song song của một hình chóp cụt có thể là một đoạn thẳng.

(C) Hình chiếu song song của một hình chóp cụt có thể là một hình chóp cụt.

(D) Hình chiếu song song của một hình chóp cụt có thể là một điểm.

CÂU 10. Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào **sai**?

(A) Hình chiếu song song của hai đường thẳng chéo nhau có thể song song với nhau.

(B) Một đường thẳng có thể trùng với hình chiếu của nó.

(C) Hình chiếu song song của hai đường thẳng chéo nhau có thể trùng nhau.

(D) Một tam giác bất kỳ đều có thể xem là hình biểu diễn của một tam giác cân.

CÂU 11. Qua phép chiếu song song biến ba đường thẳng song song thành.

(A) Ba đường thẳng đôi một song song với nhau.

(B) Một đường thẳng.

(C) Thành hai đường thẳng song song.

(D) Cả ba trường hợp trên.

CÂU 12. Khẳng định nào sau đây đúng?

(A) Hình chiếu song song của hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ theo phương AA' lên mặt phẳng $(ABCD)$ là hình bình hành.
(B) Hình chiếu song song của hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ theo phương AA' lên mặt phẳng $(ABCD)$ là hình vuông.
(C) Hình chiếu song song của hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ theo phương AA' lên mặt phẳng $(ABCD)$ là hình thoi.
(D) Hình chiếu song song của hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ theo phương AA' lên mặt phẳng $(ABCD)$ là một tam giác.

CÂU 13. Hình chiếu của hình vuông không thể là hình nào trong các hình sau?
(A) Hình vuông. (B) Hình bình hành. (C) Hình thang. (D) Hình thoi.

CÂU 14. Trong các mện đề sau mệnh đề nào **sai**?
(A) Một đường thẳng luôn cắt hình chiếu của nó.
(B) Một tam giác bất kỳ đề có thể xem là hình biểu diễn của một tam giác cân.
(C) Một đường thẳng có thể song song với hình chiếu của nó.
(D) Hình chiếu song song của hai đường thẳng chéo nhau có thể song song với nhau.

CÂU 15. Nếu đường thẳng a cắt mặt phẳng chiếu (P) tại điểm A thì hình chiếu của a sẽ là:
(A) Điểm A.
(B) Trùng với phương chiếu.
(C) Đường thẳng đi qua A.
(D) Đường thẳng đi qua A hoặc chính A.

CÂU 16. Giả sử tam giác ABC là hình biểu diễn của một tam giác đều. Hình biểu diễn của tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác đều là
(A) Giao điểm của hai đường trung tuyến của tam giác ABC.
(B) Giao điểm của hai đường trung trực của tam giác ABC.
(C) Giao điểm của hai đường đường cao của tam giác ABC.
(D) Giao điểm của hai đường phân giác của tam giác ABC.

CÂU 17. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. M là trung điểm của SC. Hình chiếu song song của điểm M theo phương AB lên mặt phẳng (SAD) là điểm nào sau đây?
(A) S.
(B) Trung điểm của SD.
(C) A.
(D) D.

CÂU 18. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Hình chiếu song song của điểm A theo phương AB lên mặt phẳng (SBC) là điểm nào sau đây?
(A) S.
(B) Trung điểm của BC.
(C) B.
(D) C.

CÂU 19. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Gọi M là trung điểm của AC. Khi đó hình chiếu song song của điểm M lên $(AA'B')$ theo phương chiếu CB là
(A) Trung điểm BC.
(B) Trung điểm AB.
(C) Điểm A.
(D) Điểm B.

CÂU 20. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi $O = AC \cap BD$ và $O' = A'C' \cap B'D'$. Điểm M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD Qua phép chiếu song song theo phương AO' lên mặt phẳng $(ABCD)$ thì hình chiếu của tam giác $C'MN$ là
(A) Đoạn thẳng MN.
(B) Điểm O.
(C) Tam giác CMN.
(D) Đoạn thẳng BD.

CÂU 21. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Xác định các điểm M, N tương ứng trên các đoạn $AC', B'D'$ sao cho MN song song với BA' và tính tỉ số $\dfrac{MA}{MC'}$.
(A) 2. (B) 3. (C) 4. (D) 1.

CÂU 22. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của CD và CC'.

a) Xác định đường thẳng Δ đi qua M đồng thời cắt AN và $A'B$.

b) Gọi I, J lần lượt là giao điểm của Δ với AN và $A'B$. Hãy tính tỉ số $\dfrac{IM}{IJ}$.

QUICK NOTE

QUICK NOTE

(A) 2. (B) 3. (C) 4. (D) 1.

CÂU 23. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$, gọi M, N, P lần lượt là tâm của các mặt bên $(ABB'A')$, $(BCC'B')$ và $(ACC'A')$. Qua phép chiếu song song đường thẳng BC' và mặt phẳng chiếu $(AB'C)$ khi đó hình chiếu của điểm P?

(A) Trung điểm của AN.
(B) Trung điểm của AM.
(C) Trung điểm của $B'N$.
(D) Trung điểm của $B'M$.

Bài 12. ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG SONG SONG

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

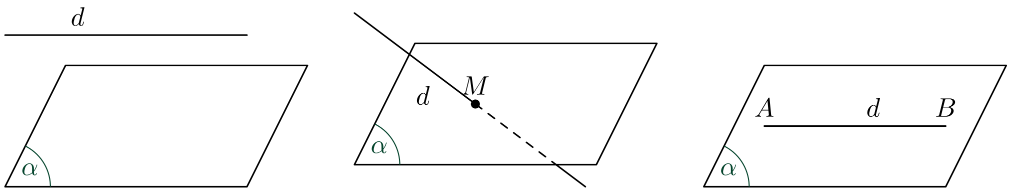
1. Đường thẳng song song với mặt phẳng

Định nghĩa 12.1. Cho đường thẳng d và mặt phẳng (α). Nếu d và mặt phẳng α không có điểm chung thì ta nói d song song với (α) hay $(\alpha) \parallel d$. Kí hiệu là $d \parallel (\alpha)$ hay $(\alpha) \parallel d$.

Ngoài ra

a) Nếu d và (α) có một điểm chung duy nhất M thì ta nói d và (α) cắt nhau tại điểm M và kí hiệu $d \cap (\alpha) = \{M\}$ hay $d \cap (\alpha) = M$.

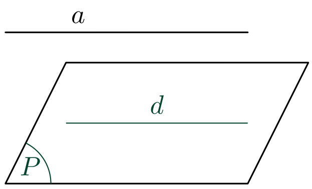
b) Nếu d và (α) có nhiều hơn một điểm chung thì ta nói d nằm trong (α) hay (α) chứa d và kí hiệu $d \subset (\alpha)$ hay $(\alpha) \supset d$.



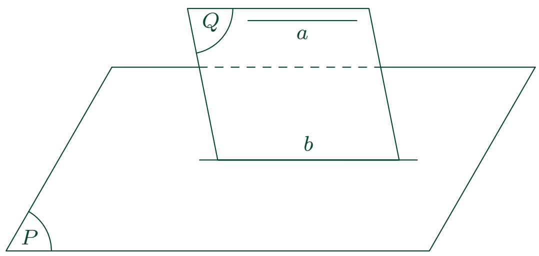
$d \parallel (\alpha)$ $\quad$ $d \cap (\alpha) = M$ $\quad$ $d \subset (\alpha)$

2. Điều kiện và tính chất của đường thẳng song song với mặt phẳng

Tính chất 12.1. *Nếu đường thẳng a không nằm trong mặt phẳng (P) và song song với một đường thẳng d nằm trong mặt phẳng (P) thì a song song với (P). Kí hiệu:* $\begin{cases} a \parallel d \\ d \subset (P) \end{cases} \Rightarrow a \parallel (P)$.

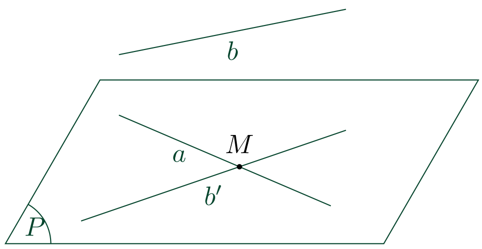


Tính chất 12.2. *Cho đường thẳng a song song với mặt phẳng (P). Nếu mặt phẳng (Q) chứa a và cắt (P) theo giao tuyến b thì b song song với a. Kí hiệu:* $\begin{cases} a \parallel (P) \\ a \subset (Q) \\ (P) \cap (Q) = b \end{cases} \Rightarrow a \parallel b$.



Nếu hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với một đường thẳng thì giao tuyến của chúng cũng song song với đường thẳng đó. Kí hiệu: $\begin{cases} d \parallel (\alpha) \\ d \parallel (\beta) \\ (\alpha) \cap (\beta) = d' \end{cases} \Rightarrow d \parallel d'$.

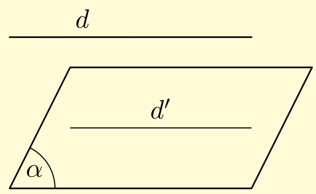
Cho hai đường thẳng chéo nhau. Có duy nhất một mặt phẳng chứa đường thẳng này và song song với đường thẳng kia.



B. HỆ THỐNG BÀI TẬP TỰ LUẬN

Dạng 14. Xác định, chứng minh đường thẳng song song mặt phẳng.

Cho đường thẳng d và mặt phẳng (α), khi đó $\begin{cases} d \parallel d' \\ d' \subset (\alpha) \end{cases} \Rightarrow d \parallel (\alpha)$.



1. Bài tập tự luận

BÀI 1. Cho tứ diện $ABCD$. G là trọng tâm của $\triangle BCD$. M là điểm trên cạnh BC sao cho $MB = 2MC$. Chứng minh $MG \parallel (ACD)$.

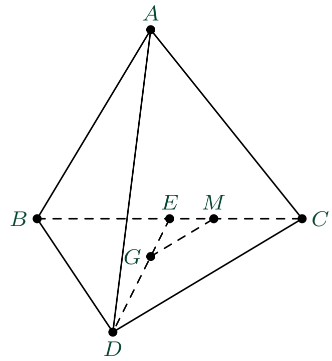
Lời giải.

Gọi E là trung điểm cạnh BC.

Do G là trọng tâm tam giác BCD, nên ta có $GD = \dfrac{2}{3}ED$ (1).

Mặt khác $3MC = BC \Rightarrow 3MC = 2EC \Rightarrow \dfrac{MC}{EC} = \dfrac{2}{3}$ (2).

Từ (1) và (2), suy ra $MG \parallel CD$, mà $CD \subset (ACD)$ nên $MG \parallel (ACD)$.



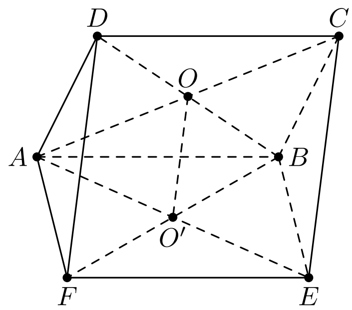
□

BÀI 2. Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$ không cùng nằm trong một mặt phẳng. Gọi O, O' lần lượt là tâm của $ABCD$ và $ABEF$. Chứng minh OO' song song với các mặt phẳng (ADF) và (BCE).

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} BO = \dfrac{1}{2}BD \\ BO' = \dfrac{1}{2}BF \end{cases} \Rightarrow OO' \parallel DF$. Mà $DF \subset (ADF) \Rightarrow OO' \parallel (ADF)$.

Ta có $\begin{cases} AO = \dfrac{1}{2}AC \\ AO' = \dfrac{1}{2}AE \end{cases} \Rightarrow OO' \parallel CE$. Mà $CE \subset (BCE) \Rightarrow OO' \parallel (BCE)$.



□

BÀI 3. Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$ không cùng nằm trong một mặt phẳng. Gọi M, N lần lượt là hai điểm trên các cạnh AE, BD sao cho $AM = \dfrac{1}{3}AE, BN = \dfrac{1}{3}BD$. Chứng minh MN song song với $(CDEF)$.

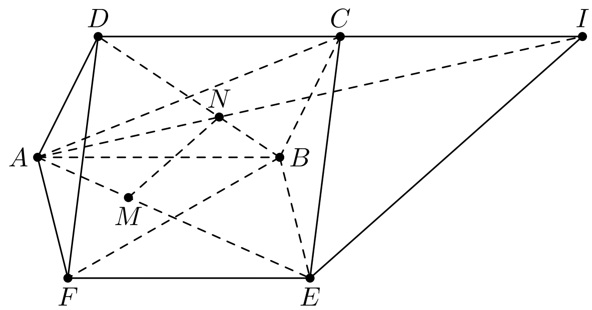
Lời giải.

Trong $(ABCD)$, gọi $I = AN \cap CD$

Do $AB \parallel CD$ nên $\dfrac{AN}{AI} = \dfrac{BN}{BD} \Rightarrow \dfrac{AN}{AI} = \dfrac{1}{3}$.

Lại có $\dfrac{AM}{AE} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow \dfrac{AN}{AI} = \dfrac{AM}{AE} \Rightarrow MN \parallel IE$.

Mà $I \in CD \Rightarrow IE \subset (CDEF) \Rightarrow MN \parallel (CDEF)$.



□

2. Bài tập trắc nghiệm

CÂU 1. Cho tứ diện $ABCD$. M, N lần lượt là trọng tâm của tam giác ABC, ABD. Những khẳng định nào sau đây là đúng?

a) $MN \parallel (BCD)$ b) $MN \parallel (ACD)$ c) $MN \parallel (ABD)$

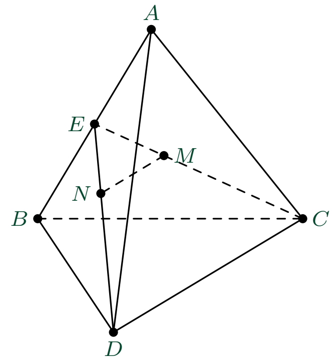
Ⓐ Chỉ có (1) đúng. Ⓑ (2) và (3). Ⓒ (1) và (2). Ⓓ (1) và (3).

Lời giải.

Gọi E là trung điểm của AB, M, N lần lượt là trọng tâm của tam giác ABC, ABD.

Suy ra $\dfrac{EM}{EC} = \dfrac{EN}{ED} = \dfrac{1}{3}$, theo định lí Ta-lét ta có $MN \parallel CD$.

Vậy $MN \parallel (BCD), MN \parallel (ACD)$.



Chọn đáp án Ⓒ □

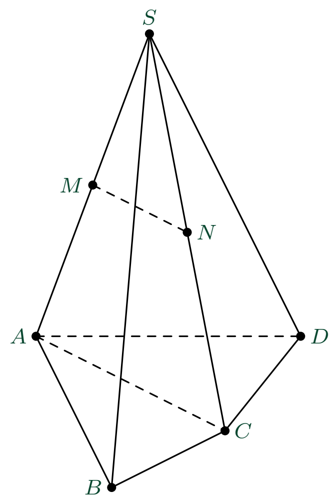
CÂU 2. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của SA và SC. Khẳng định nào sau đây đúng?

Ⓐ $MN \parallel (ABCD)$·. Ⓑ $MN \parallel (SAB)$·. Ⓒ $MN \parallel (SCD)$·. Ⓓ $MN \parallel (SBC)$·.

Lời giải.

Xét tam giác SAC có M, N lần lượt là trung điểm của SA, SC.

Suy ra $MN \parallel AC$ mà $AC \subset (ABCD) \Rightarrow MN \parallel (ABCD)$.



Chọn đáp án Ⓐ □

CÂU 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, M và N là hai điểm trên SA, SB sao cho $\dfrac{SM}{SA} = \dfrac{SN}{SB} = \dfrac{1}{3}$·

Vị trí tương đối giữa MN và $(ABCD)$ là:

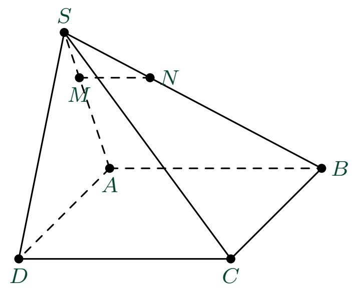
Ⓐ MN nằm trên $(ABCD)$. Ⓑ MN cắt $(ABCD)$.

Ⓒ $MN \parallel (ABCD)$. Ⓓ MN và $(ABCD)$ chéo nhau.

Lời giải.

Theo định lí Talet, ta có $\dfrac{SM}{SA} = \dfrac{SN}{SB}$ suy ra MN song song với AB.

Mà AB nằm trong mặt phẳng $(ABCD)$ suy ra $MN \parallel (ABCD)$.



Chọn đáp án Ⓒ □

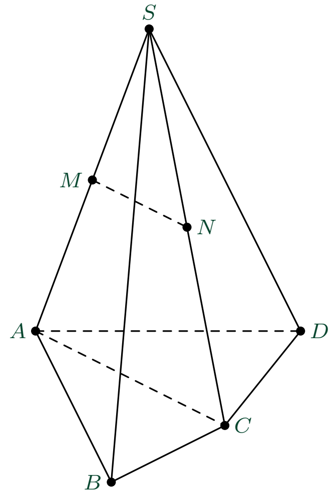
CÂU 4. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của SA và SC. Khẳng định nào sau đây đúng?

A $MN \parallel (ABCD)$. **B** $MN \parallel (SAB)$. **C** $MN \parallel (SCD)$. **D** $MN \parallel (SBC)$.

Lời giải.

MN là đường trung bình của $\triangle SAC$ nên $MN \parallel AC$.

Ta có $\begin{cases} MN // AC \\ AC \subset (ABCD) \\ MN \not\subset (ABCD) \end{cases} \Rightarrow MN \parallel (ABCD)$.



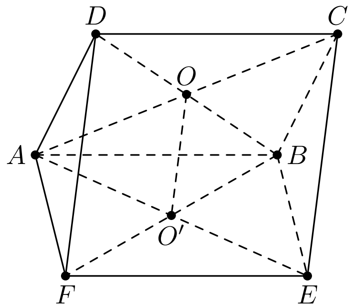
Chọn đáp án (A) □

CÂU 5. Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$ không cùng nằm trong một mặt phẳng. Gọi OO' lần lượt là tâm của $ABCD$, $ABEF$. M là trung điểm của CD. Khẳng định nào sau đây sai?

A $OO' \parallel (BEC)$. **B** $OO' \parallel (AFD)$. **C** $OO' \parallel (EFM)$. **D** MO' cắt (BEC).

Lời giải.

Xét tam giác ACE có OO' lần lượt là trung điểm của AC, AE.
Suy ra OO' là đường trung bình trong tam giác $ACE \Rightarrow OO' \parallel EC$.
Tương tự, OO' là đường trung bình của tam giác BFD nên $OO' \parallel FD$.
Vậy $OO' \parallel (BEC)$, $OO' \parallel (AFD)$ và $OO' \parallel (EFC)$. Chú ý rằng: $(EFC) = (EFM)$.



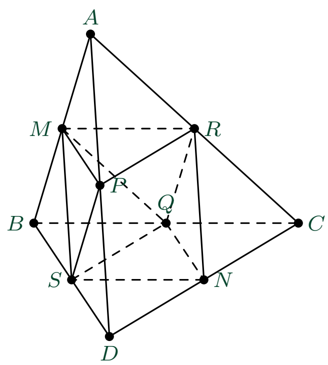
Chọn đáp án (D) □

CÂU 6. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N, P, Q, R, S theo thứ tự là trung điểm của các cạnh AB, CD, AD, BC, AC, BD. Bốn điểm nào sau đây **không** đồng phẳng?

A P, Q, R, S. **B** P, M, N, Q. **C** M, N, P, R. **D** M, R, S, N.

Lời giải.

Theo tính chất của đường trung bình của tam giác ta có
$PS \parallel AB \parallel QR$ suy ra P, Q, R, S đồng phẳng.
Tương tự, ta được $PM \parallel BD \parallel NQ$ suy ra P, M, N, Q đồng phẳng.
Và $NR \parallel AD \parallel SN$ suy ra M, R, S, N đồng phẳng.



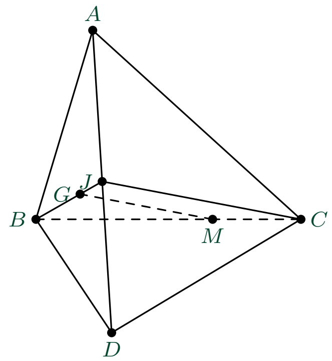
Chọn đáp án (C) □

CÂU 7. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G là trọng tâm tam giác ABD, M là điểm thuộc cạnh BC sao cho $MB = 2MC$. Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

A $MG \parallel (BCD)$. **B** $MG \parallel (ACD)$. **C** $MG \parallel (ABD)$. **D** $MG \parallel (ABC)$.

Lời giải.

Lấy điểm J là trung điểm cạnh AD, do G trọng tâm tam giác ABD nên $BG = 2GJ$.
Mà $MB = 2MC \Rightarrow MG \parallel JC \Rightarrow MG \parallel (ACD)$.
Nhận xét: Có thể loại các đáp án **sai** bằng cách nhận xét đường thẳng GM cắt các mặt phẳng.

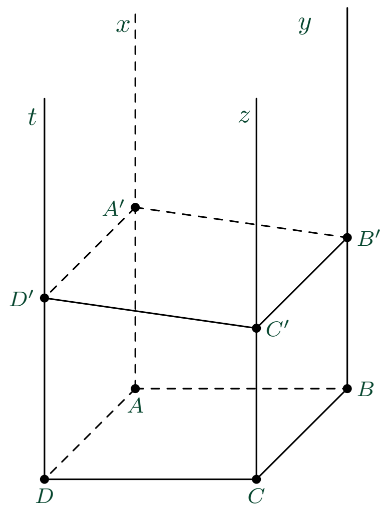


Chọn đáp án (B)

CÂU 8. Cho hình bình hành $ABCD$. Vẽ các tia Ax, By, Cz, Dt song song, cùng hướng nhau và không nằm trong $(ABCD)$. Mặt phẳng (α) song song với AB, và cắt Ax, By, Cz, Dt lần lượt tại A', B', C', D'. Biết O là tâm hình bình hành $ABCD$, O' là giao điểm của $A'C'$ và $B'D'$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

(A) $A'B'C'D'$ là hình bình hành.
(B) $(AA'B'B) \parallel C'D'$.
(C) $AA' = CC'$ và $BB' = DD'$.
(D) $OO' \parallel AA'$.

Lời giải.



- Ta có $\begin{cases} \alpha \parallel AB \\ \alpha \cap (ABB'A') = A'B' \end{cases} \Rightarrow A'B' \parallel AB \parallel CD$.
  $\Rightarrow \begin{cases} A'B' \parallel CD \\ \alpha \cap (DD'C'C) = C'D' \end{cases} \Rightarrow C'D' \parallel A'B' \Rightarrow C'D' \parallel (AA'B'B)$.
- Dễ thấy $C'D' \parallel A'B' \parallel AB \parallel CD$ theo câu A. Mà $AA' \parallel BB' \parallel CC' \parallel DD'$
  $\Rightarrow AA'B'B, CC'D'D, ABCD$ là các hình bình hành.
  $\Rightarrow A'B' \parallel C'D', A'B' = C'D'$. Suy ra, $A'B'C'D'$ là hình bình hành.
- O, O' lần lượt là trung điểm của $AC, A'C'$ nên OO' là đường trung bình trong hình thang $AA'C'C$. Do đó $OO' \parallel AA'$.

Chọn đáp án (C)

Dạng 15. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng

Cách 1: $\begin{cases} (\alpha) \parallel d \\ d \subset (\beta) \\ M \in (\alpha) \cap (\beta) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (\beta) = d'$, với $\begin{cases} d' \parallel d \\ M \in d' \end{cases}$

Cách 2: $\begin{cases} (P) \parallel a \\ (Q) \parallel a \\ (P) \cap (Q) = d \end{cases} \Rightarrow d \parallel a$

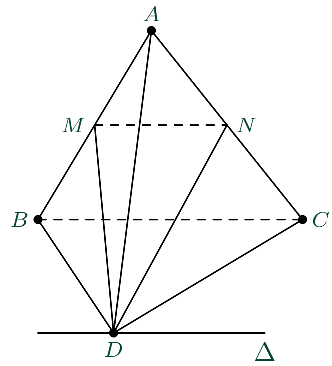
1. Bài tập tự luận

BÀI 1. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N tương ứng là trung điểm của AB, AC. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (DBC) và (DMN).

Lời giải.

MN là đường trung bình của tam giác ABC nên $MN \parallel BC$.

Ta có $\begin{cases} MN \parallel BC \\ MN \subset (DMN) \\ BC \subset (BCD) \end{cases} \Rightarrow (DMN) \cap (BCD) = \Delta$, với Δ đi qua $D, \Delta \parallel BC$.

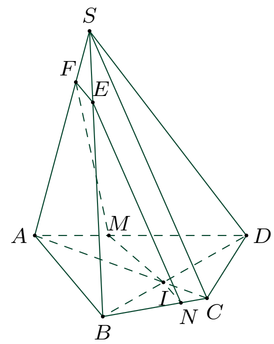


□

BÀI 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là tứ giác lồi. Điểm I là giao điểm của hai đường chéo AC và BD. Xác định thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi mặt phẳng (P) đi qua I và song song với AB, SC.

Lời giải.

$AB \parallel (P)$ khi đó $(P) \cap (ABCD) = d_1$ với d_1 đi qua I và $d_1 \parallel AB$.
Gọi $M = d_1 \cap BC, N = d_1 \cap AD$.
$SC \parallel (P)$ khi đó $(P) \cap (SBC) = d_2$, với d_2 đi qua N và $d_2 \parallel SC$.
Gọi $E = d_2 \cap SB$.
$AB \parallel (P)$ khi đó $(P) \cap (SAB) = d_3$, với d_3 đi qua E và $d_3 \parallel AB$.
Gọi $F = d_3 \cap SA$.
Thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi (P) là tứ giác $AMEF$.



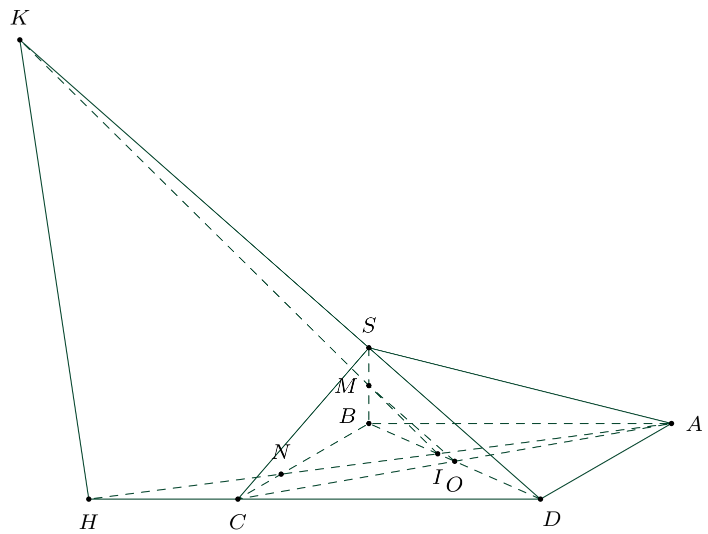
□

BÀI 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm O. Gọi M là trung điểm của SB, N là điểm trên cạnh BC sao cho $BN = 2CN$.

a) Chứng minh rằng $OM \parallel (SCD)$.

b) Xác định giao tuyến của (SCD) và (AMN).

Lời giải.



a) Chứng minh $OM \parallel (SCD)$.

Ta có $\begin{cases} BM = \dfrac{1}{2}BS \\ BO = \dfrac{1}{2}BD \end{cases} \Rightarrow OM \parallel SD$.Mà $SD \subset (SCD)$, suy ra $OM \parallel (SCD)$.

b) Gọi $H = AN \cap CD$.
Suy ra H là điểm chung thứ nhất của (AMN) và (SCD).
Ta có $I = AN \cap BD$, suy ra $IM \cap SD = K$; nên K là điểm chung thứ hai của (AMN) và (SCD).
Do đó HK là giao tuyến của hai mặt phẳng (AMN) và (SCD).

□

2. Bài tập trắc nghiệm

CÂU 1. Cho đường thẳng a song song mặt phẳng (α). Mặt phẳng (β) chứa a và cắt mặt phẳng (α) theo giao tuyến d. Kết luận nào sau đây đúng?

Ⓐ a và d cắt nhau. Ⓑ a và d trùng nhau. Ⓒ a và d chéo nhau. Ⓓ a và d song song.

Lời giải.

Chọn đáp án Ⓓ □

CÂU 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang, $AD \parallel BC$. Giao tuyến của (SAD) và (SBC) là.

Ⓐ Đường thẳng đi qua S và song song với CD.
Ⓑ Đường thẳng đi qua S và song song với AC.
Ⓒ Đường thẳng đi qua S và song song với AD.
Ⓓ Đường thẳng đi qua S và song song với AB.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} S \in (SAD) \cap (SBC) \\ AD \subset (SAD) \\ BC \subset (SBC) \\ AD \parallel BC \end{cases} \Rightarrow (SAD) \cap (SBC)$ là đường thẳng đi qua S và song song với AD.

Chọn đáp án Ⓒ □

CÂU 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SDC).

Ⓐ Là đường thẳng đi qua đỉnh S và tâm O đáy.
Ⓑ Là đường thẳng đi qua đỉnh S và song song với đường thẳng AC.
Ⓒ Là đường thẳng đi qua đỉnh S và song song với đường thẳng AD.
Ⓓ Là đường thẳng đi qua đỉnh S và song song với đường thẳng AB.

Lời giải.

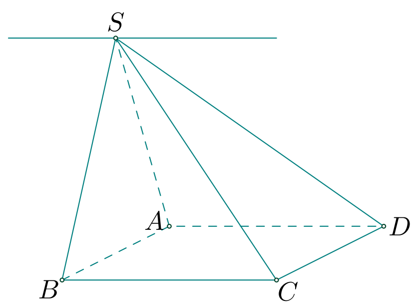
Xét hai mặt phẳng (SAB) và (SDC) có S chung và $AB \parallel CD$.
Nên giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SDC) là đường thẳng đi qua đỉnh S và song song với đường thẳng AB.
Chọn đáp án Ⓓ □

CÂU 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có mặt đáy $(ABCD)$ là hình bình hành. Gọi đường thẳng d là giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC). Mệnh đề nào sau đây đúng?

Ⓐ Đường thẳng d đi qua S và song song với AB.
Ⓑ Đường thẳng d đi qua S và song song với DC.
Ⓒ Đường thẳng d đi qua S và song song với BC.
Ⓓ Đường thẳng d đi qua S và song song với BD.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} S \subset (SAD) \cap (SBC) \\ AD \subset (SAD) \\ BC \subset (SBC) \\ AD \parallel BC \end{cases}$, do đó giao tuyến của giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) là đường thẳng d đi qua S và song song với BC, AD.



Chọn đáp án Ⓒ □

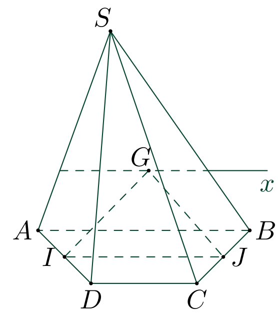
CÂU 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang $(AB \parallel CD)$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AD và BC, G là trọng tâm ΔSAB. Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (IJG) là

Ⓐ đường thẳng qua S và song song với AB.
Ⓑ đường thẳng qua G và song song với DC.
Ⓒ SC.
Ⓓ đường thẳng qua G và cắt BC.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} IJ \parallel AB & (1) \\ G \in (GIJ) \cap (SAB) & (2) \\ IJ \subset (GIJ), AB \subset (SAB). & (3) \end{cases}$

Từ (1), (2), (3) $\Rightarrow Gx = (GIJ) \cap (SAB)$, $Gx \parallel AB$, $Gx \parallel CD$.



Chọn đáp án (B) □

CÂU 6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi d là giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC). Khẳng định nào sau đây đúng?

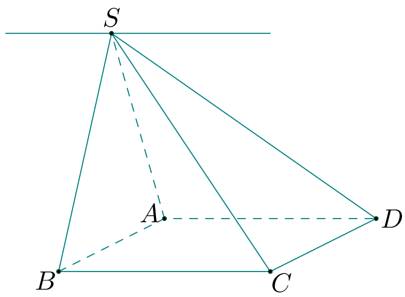
(A) d qua S và song song với BC.
(B) d qua S và song song với DC.
(C) d qua S và song song với AB.
(D) d qua S và song song với BD.

Lời giải.

Ta có S là một điểm chung của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC).

Mặt khác $\begin{cases} AD \parallel BC \\ AD \subset (SAD) \text{ và } (SBC). \\ BC \subset (SBC) \end{cases}$

Suy ra d qua S và song song với BC.



Chọn đáp án (A) □

CÂU 7. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I, J theo thứ tự là trung điểm của AD, AC, G là trọng tâm tam giác BCD. Giao tuyến của hai mặt phẳng (GIJ) và (BCD) là đường thẳng.

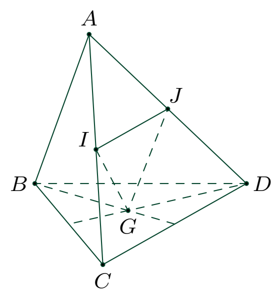
(A) qua I và song song với AB.
(B) qua J và song song với BD.
(C) qua G và song song với CD.
(D) qua G và song song với BC.

Lời giải.

Ta có G là một điểm chung của hai mặt phẳng (GIJ) và (BCD).

Mặt khác $\begin{cases} IJ \parallel CD \\ IJ \subset (IJG) \\ CD \subset (ACD) \end{cases}$.

Suy ra giao tuyến của hai mặt phẳng (GIJ) và (BCD) là đường thẳng m qua G và song song với CD.



Chọn đáp án (D) □

CÂU 8. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang với các cạnh đáy là AB và CD. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AD và BC và G là trọng tâm tam giác (SAB). Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (IJG) là

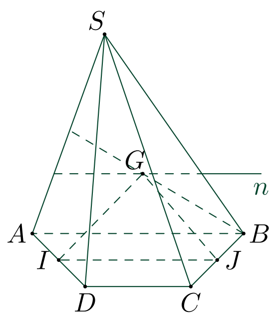
(A) SC.
(B) đường thẳng qua S và song song với AB.
(C) đường thẳng qua G và song song với CD.
(D) đường thẳng qua G và cắt BC.

Lời giải.

Ta có G là một điểm chung của hai mặt phẳng (GIJ) và (SAB).

Mặt khác $\begin{cases} IJ \parallel AB \\ IJ \subset (IJG) \\ AB \subset (SAB) \end{cases}$.

Suy ra giao tuyến của hai mặt phẳng (GIJ) và (SAB) là đường thẳng n qua G và song song với CD.



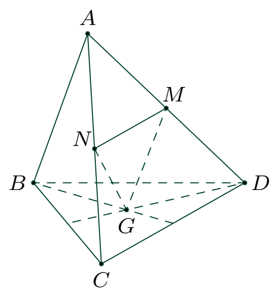
Chọn đáp án (C) □

CÂU 9. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm AD và AC. Gọi G là trọng tâm tam giác BCD. Giao tuyến của hai mặt phẳng (GMN) và (BCD) là đường thẳng

(A) qua M và song song với AB.
(B) qua N và song song với BD.
(C) qua G và song song với CD.
(D) qua G và song song với BC.

Lời giải.

Ta có MN là đường trung bình tam giác ACD nên $MN \parallel CD$.
Ta có $G \in (GMN) \cap (BCD)$, hai mặt phẳng (ACD) và (BCD) lần lượt chứa DC và MN nên giao tuyến của hai mặt phẳng (GMN) và (BCD) là đường thẳng đi qua G và song song với CD.



Chọn đáp án (C) □

Dạng 16. Thiết diện

Tìm đoạn giao tuyến tạo bởi mặt phẳng (α) và các mặt của chóp, lăng trụ
Đa giác tạo bởi tất cả các đoạn giao tuyến này chính là thiết diện cần tìm. Có 2 dạng:

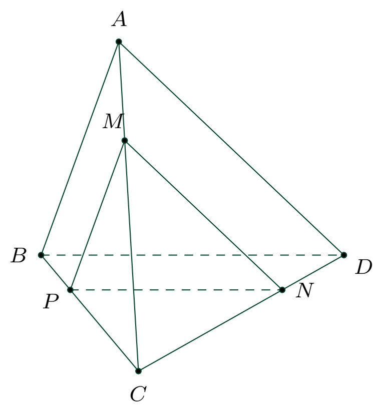
- Mặt phẳng (α) đi qua một điểm song song với hai đường thẳng chéo nhau;
- Mặt phẳng (α) chứa một đường thẳng và song song với một đường thẳn

1. Bài tập tự luận

BÀI 1. Cho tứ diện $ABCD$, điểm M thuộc AC. Mặt phẳng (α) đi qua M song song với AB và AD. Thiết diện của (α) với tứ diện $ABCD$ là hình gì?

Lời giải.

$(\alpha) \parallel AB$ nên giao tuyến của (α) với (ABC) là đường thẳng qua M, song song với AB, cắt BC tại P.
$(\alpha) \parallel AD$ nên giao tuyến của (α) với (ADC) là đường thẳng qua M, song song với AD cắt DC tại N.
Vậy thiết diện là tam giác MNP.

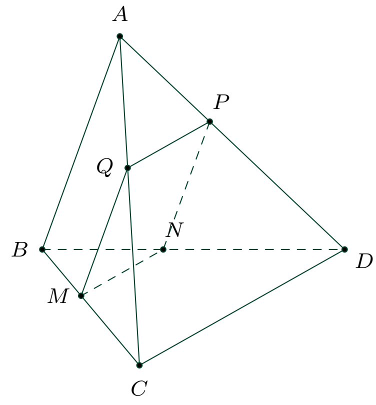


□

BÀI 2. Cho tứ diện $ABCD$. Giả sử M thuộc đoạn thẳng BC. Một mặt phẳng (α) qua M song song với AB và CD. Thiết diện của (α) và hình tứ diện $ABCD$ là hình gì?

Lời giải.

$(\alpha) \parallel AB$ nên giao tuyến của (α) với (ABC) là đường thẳng đi qua M và song song với AB và cắt AC tại Q.
$(\alpha) \parallel CD$ nên giao tuyến của (α) với (BCD) là đường thẳng đi qua M và song song với CD và cắt BD tại N.
$(\alpha) \parallel AB$ nên giao tuyến của (α) với (ABD) là đường thẳng đi qua N và song song với AB và cắt AD tại P.
Ta có $MN \parallel PQ \parallel CD, MQ \parallel PN \parallel AB$. Vậy thiết diện là hình bình hành $MNPQ$.



□

2. Bài tập trắc nghiệm

CÂU 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O, I là trung điểm cạnh SC. Khẳng định nào sau đây **sai**?

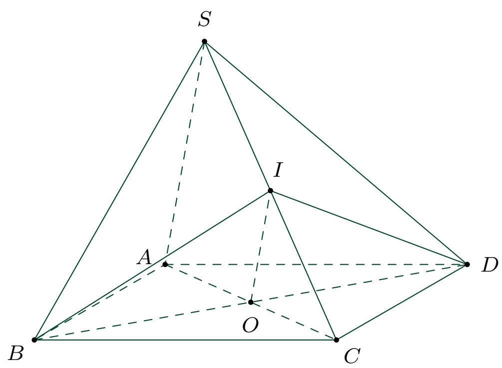
(A) $OI \parallel (SAD)$.

(B) Mặt phẳng (IBD) cắt hình chóp $S.ABCD$ theo thiết diện là một tứ giác.

(C) $OI \parallel (SAB)$.

(D) Giao tuyến của hai mặt phẳng (IBD) và (SAC) là IO.

Lời giải.



A đúng vì $IO \parallel SA \Rightarrow IO \parallel (SAD)$.
C đúng vì $IO \parallel SA \Rightarrow IO \parallel (SAB)$.
D đúng vì $(IBD) \cap (SAC) = IO$.
B sai vì mặt phẳng (IBD) cắt hình chóp $S.ABCD$ theo thiết diện là tam giác IBD.
Chọn đáp án (B) □

CÂU 2. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi H là một điểm nằm trong tam giác ABC, (α) là mặt phẳng đi qua H song song với AB và CD. Mệnh đề nào sau đây đúng về thiết diện của (α) của tứ diện?

(A) Thiết diện là hình vuông.

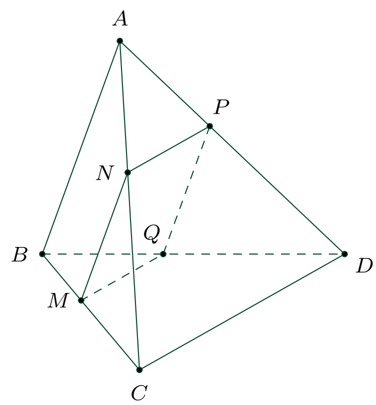
(B) Thiết diện là hình thang cân.

(C) Thiết diện là hình bình hành.

(D) Thiết diện là hình chữ nhật.

Lời giải.

Qua H kẻ đường thẳng (d) song song AB và cắt BC, AC lần lượt tại M, N.
Từ N kẻ NP song song vớ $CD\,(P \in CD)$. Từ P kẻ PQ song song với $AB\,(Q \in BD)$.
Ta có $MN \parallel PQ \parallel AB$ suy ra M, N, P, Q đồng phẳng và $AB \parallel (MNPQ)$.
Suy ra $MNPQ$ là thiết diện của (α) và tứ diện.
Vậy tứ diện là hình bình hành.



Chọn đáp án (C) □

CÂU 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. M là một điểm lấy trên cạnh SA (M không trùng với S và A). $Mp\,(\alpha)$ qua ba điểm M, B, C cắt hình chóp $S.ABCD$ theo thiết diện là:

(A) Tam giác. (B) Hình thang. (C) Hình bình hành. (D) Hình chữ nhật.

Lời giải.

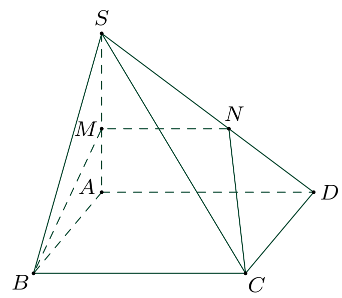
Ta có $\left.\begin{array}{l} AD \parallel BC \subset (MBC) \\ AD \not\subset (MBC) \end{array}\right\} \Rightarrow AD \parallel (MBC)$.

Ta có $(MBC) \parallel AD$ nên (MBC) và (SAD) có giao tuyến song song AD.

Trong (SAD), vẽ $MN \parallel AD\,(N \in SD) \Rightarrow MN = (MBC) \cap (SAD)$.

Thiết diện của $S.ABCD$ cắt bởi (MBC) là tứ giác $BCNM$.

$MN \parallel BC$ nên $BCNM$ là hình thang.



Chọn đáp án (B) □

CÂU 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình thang cân đáy lớn AD. M, N lần lượt là hai trung điểm của AB và CD. (P) là mặt phẳng qua MN và cắt mặt bên (SBC) theo một giao tuyến. Thiết diện của (P) và hình chóp là

(A) Hình bình hành. (B) Hình thang. (C) Hình chữ nhật. (D) Hình vuông.

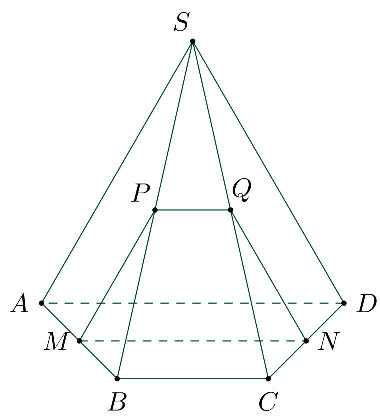
Lời giải.

Xét hình thang $ABCD$, có M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD.

Suy ra MN là đường trung bình của hình thang $ABCD \Rightarrow MN \parallel BC$.

Lấy điểm $P \in SB$, qua P kẻ đường thẳng song song với BC và cắt BC tại Q.

Suy ra $(P) \cap (SBC) = PQ$ nên thiết diện (P) và hình chóp là tứ giác $MNQP$ có $MN \parallel PQ \parallel BC$. Vậy thiết diện là hình thang $MNQP$.

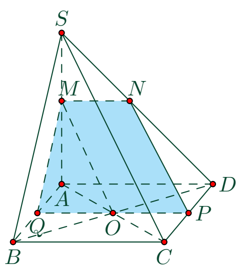


Chọn đáp án (B) □

CÂU 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Gọi M là điểm thuộc cạnh SA. (P) là mặt phẳng qua OM và song song với AD. Thiết diện của (P) và hình chóp là

(A) Hình bình hành. (B) Hình thang. (C) Hình chữ nhật. (D) Hình tam giác.

Lời giải.



Qua M kẻ đường thẳng $MN \parallel AD$ và cắt SD tại $N \Rightarrow MN \parallel AD$.

Qua O kẻ đường thẳng $PQ \parallel AD$ và cắt AB, CD lần lượt tại $Q, P \Rightarrow PQ \parallel AD$.

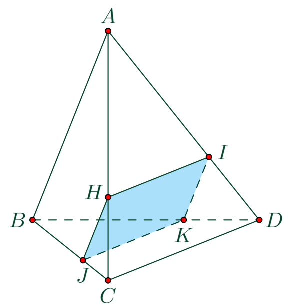
Suy ra $MN \parallel PQ \parallel AD \longrightarrow M, N, P, Q$ đồng phẳng $\Rightarrow (P)$ cắt hình chóp $S.ABCD$ theo thiết diện là hình thang $MNPQ$.

Chọn đáp án (B) □

CÂU 6. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I, J lần lượt thuộc cạnh AD, BC sao cho $IA = 2ID$ và $JB = 2JC$. Gọi (P) là mặt phẳng qua IJ và song song với AB. Thiết diện của (P) và tứ diện $ABCD$ là

(A) Hình thang. (B) Hình bình hành. (C) Hình tam giác. (D) Tam giác đều.

Lời giải.

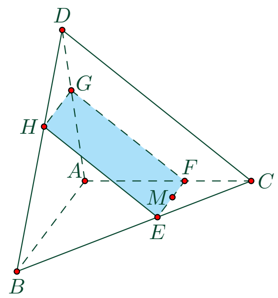


Giả sử (P) cắt các mặt của tứ diện (ABC) và (ABD) theo hai giao tuyến JH và IK.
Ta có $(P) \cap (ABC) = JH$, $(P) \cap (ABD) = IK$.
$(ABC) \cap (ABD) = AB$, $(P) \parallel AB \longrightarrow JH \parallel IK \parallel AB$.
Theo định lí Thalet, ta có $\dfrac{JB}{JC} = \dfrac{HA}{HC} = 2$ suy ra $\dfrac{HA}{HC} = \dfrac{IA}{ID} \Rightarrow IH \parallel CD$.
Mà $IH \in (P)$ suy ra IH song song với mặt phẳng (P).
Vậy (P) cắt các mặt phẳng (ABC), (ABD) theo các giao tuyến IH, JK với $IH \parallel JK$.
Do đó, thiết diện của (P) và tứ diện $ABCD$ là hình bình hành.
Chọn đáp án (B) □

CÂU 7. Cho tứ diện $ABCD$. M là điểm nằm trong tam giác ABC, mp (α) qua M và song song với AB và CD. Thiết diện của $ABCD$ cắt bởi mp (α) là

A Tam giác. **B** Hình chữ nhật. **C** Hình vuông. **D** Hình bình hành.

Lời giải.



$(\alpha) \parallel AB$ nên giao tuyến của (α) và (ABC) là đường thẳng song song với AB.
Trong (ABC), qua M vẽ $EF \parallel AB$ (1) $(E \in BC,\ F \in AC)$. Ta có $(\alpha) \cap (ABC) = MN$.
Tương tự trong mp (BCD), qua E vẽ $EH \parallel DC$ (2) $(H \in BD)$, suy ra $(\alpha) \cap (BCD) = HE$.
Trong mp (ABD), qua H vẽ $HG \parallel AB$ (3) $(G \in AD)$, suy ra $(\alpha) \cap (ABD) = GH$.
Thiết diện của $ABCD$ cắt bởi (α) là tứ giác $EFGH$.

Ta có $\begin{cases} (\alpha) \cap (ADC) = FG \\ (\alpha) \parallel DC \end{cases} \Rightarrow FG \parallel DC$ (4)

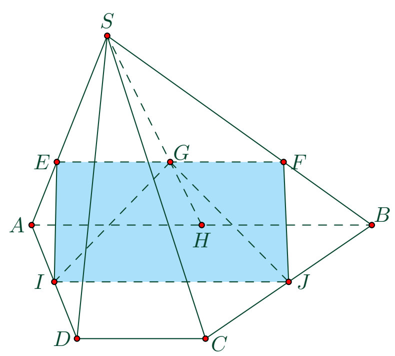
Từ (1), (2), (3), (4) suy ra $\begin{cases} EF \parallel GH \\ EH \parallel GF \end{cases}$, suy ra tứ giác $EFGH$ là hình bình hành.

Chọn đáp án (D) □

CÂU 8. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang $(AB \parallel CD)$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của các cạnh AD, BC và G là trọng tâm tam giác SAB. Biết thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (IJG) là hình bình hành. Hỏi khẳng định nào sao đây đúng?

A $AB = \dfrac{1}{3}CD$. **B** $AB = \dfrac{3}{2}CD$. **C** $AB = 3CD$. **D** $AB = \dfrac{2}{3}CD$.

Lời giải.



Vì IJ là đường trung bình của hình thang $ABCD$ nên $IJ \parallel AB \parallel CD$.

Ta có $\begin{cases} IJ \subset (IJG), AB \subset (SAB) \\ IJ \parallel AB \\ G \in (IJG) \cap (SAB) \end{cases} \Rightarrow (IJG) \cap (SAB) = EF$, với EF đi qua G và $EF \parallel AB \parallel IJ$.

Ta có $(IJG) \cap (SAD) = EI$; $(IJG) \cap (ABCD) = IJ$; $(IJG) \cap (SBC) = JF$, $(IJG) \cap (SAB) = FE$.
Suy ra thiết diện của (IJG) và hình chóp là hình thang $IJFE$.
Vì $IJFE$ là hình bình hành nên ta có

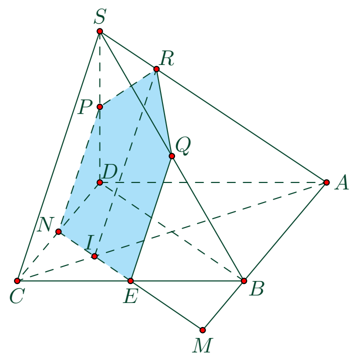
$$\begin{aligned} EF = IJ &\Leftrightarrow \frac{2}{3}AB = \frac{AB+CD}{2} \\ &\Leftrightarrow 4AB = 3AB + 3CD \Leftrightarrow AB = 3CD. \end{aligned}$$

Chọn đáp án (C) □

CÂU 9. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MA} = 3\overrightarrow{MB}$. Mặt phẳng (P) qua M và song song với SC, BD. Mệnh đề nào sau đây đúng?

(A) (P) cắt hình chóp theo thiết diện là một ngũ giác.
(B) (P) cắt hình chóp theo thiết diện là một tam giác.
(C) (P) cắt hình chóp theo thiết diện là một tứ giác.
(D) (P) không cắt hình chóp.

Lời giải.

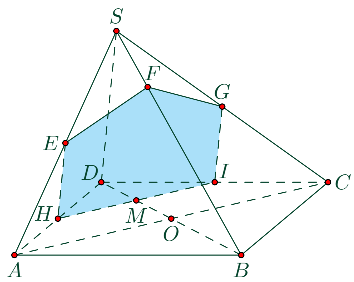


Trong $(ABCD)$, kẻ đường thẳng qua M và song song với BD cắt BC, CD, CA tại K, N, I. Trong (SCD), kẻ đường thẳng qua N và song song với SC cắt SD tại P.
Trong (SCB), kẻ đường thẳng qua K và song song với SC cắt SB tại Q.
Trong (SAC), kẻ đường thẳng qua I và song song với SC cắt SA tại R.
Thiết diện là ngũ giác $KNPRQ$.
Chọn đáp án (A) □

CÂU 10. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông. Gọi O là giao điểm của AC và BD, M là trung điểm của DO, (α) là mặt phẳng đi qua M và song song với AC và SD. Thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (α) là hình gì.

(A) Ngũ giác. **(B)** Tứ giác. **(C)** Lục giác. **(D)** Tam giác.

Lời giải.

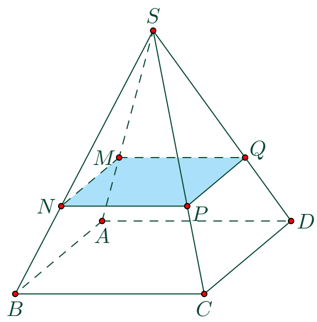


Dựng d qua M song song với AC và lần lượt cắt AD, DC tại H và I.
Dựng các đường thẳng d_1, d_2, d_3 song song với SD và lần lượt đi qua H, M, I. Các đường thẳng này cắt SA, SB, SC lần lượt tại E, F, G.
Mặt phẳng (α) cắt hình chóp tạo nên thiết diện là ngũ giác $EHIGF$.
Chọn đáp án (A) □

CÂU 11. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng 10. M là điểm trên SA sao cho $\dfrac{SM}{SA} = \dfrac{2}{3}$. Một mặt phẳng (α) đi qua M song song với AB và AD, cắt hình chóp theo một tứ giác có diện tích là

(A) $\dfrac{400}{9}$. **(B)** $\dfrac{20}{3}$. **(C)** $\dfrac{4}{9}$. **(D)** $\dfrac{16}{9}$.

Lời giải.



Ta có $\begin{cases}(\alpha) \parallel AB \\ (\alpha) \parallel AD\end{cases} \Rightarrow (\alpha) \parallel (ABCD)$.

Giả sử (α) cắt các cạnh bên SB, SC, SD lần lượt tại các điểm N, P, Q.

Rõ ràng $MNPQ$ và $ABCD$ là hai hình vuông đồng dạng, suy ra $\dfrac{S_{MNPQ}}{S_{ABCD}} = \left(\dfrac{MN}{AB}\right)^2 = \left(\dfrac{SM}{SA}\right)^2 = \dfrac{4}{9}$.

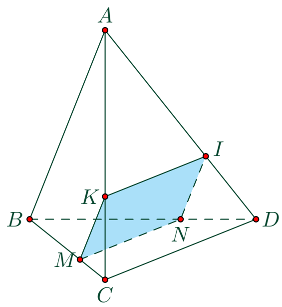
Vậy $S_{MNPQ} = \dfrac{4}{9}S_{ABCD} = \dfrac{4}{9}\cdot 10^2 = \dfrac{400}{9}$.

Chọn đáp án (A) □

CÂU 12. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = 6$, $CD = 8$. Cắt tứ diện bởi một mặt phẳng song song với AB, CD để thiết diện thu được là một hình thoi. Cạnh của hình thoi đó bằng

A $\dfrac{31}{7}$. **B** $\dfrac{18}{7}$. **C** $\dfrac{24}{7}$. **D** $\dfrac{15}{7}$.

Lời giải.



Gọi (α) là một mặt phẳng song song với AB và CD.
Giả sử (α) cắt BC tại M.
Từ M dựng $MN \parallel CD$ $(N \in BD)$, $MK \parallel AB$ $(K \in AB)$.
Từ (N) dựng $NI \parallel AB$ $(I \in AD)$.
Khi đó thiết diện tạo bởi (α) và tứ diện đã cho là hình bình hành $MNIK$.
Đặt $\dfrac{BM}{BC} = x$ $(0 < x < 1)$.

- Vì $MK \parallel AB \Rightarrow \dfrac{MK}{AB} = \dfrac{CM}{CB} = 1 - x$. Suy ra $MK = (1-x)\cdot AB = 6(1-x)$.
- Vì $MN \parallel CD \Rightarrow \dfrac{MN}{CD} = \dfrac{BM}{BC} = x$. Suy ra $MN = xCD = 8x$.

Hình bình hành $MNIK$ là hình thoi $\Leftrightarrow MK = MN \Leftrightarrow 6(1-x) = 8x \Leftrightarrow 6 - 6x = 8x \Leftrightarrow x = \dfrac{3}{7}$.

Từ đó ta có cạnh của hình thoi là $MN = 8x = 8\cdot\dfrac{3}{7} = \dfrac{24}{7}$.

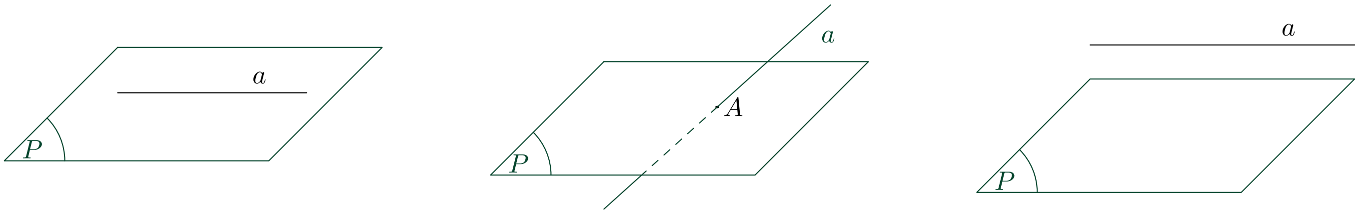
Chọn đáp án (C) □

Dạng 17. Câu hỏi lý thuyết

CÂU 1. Cho đường thẳng a và mặt phẳng (P) trong không gian. Có bao nhiêu vị trí tương đối của a và (P)?

A 2. **B** 3. **C** 1. **D** 4.

Lời giải.



Có 3 vị trí tương đối của a và (P), đó là: a nằm trong (P), a cắt (P) và a song song với (P).
Chọn đáp án (B) □

CÂU 2. Cho hai đường thẳng phân biệt a, b và mặt phẳng (α). Giả sử $a \parallel b$, $b \parallel (\alpha)$. Khi đó

(A) $a \parallel (\alpha)$. (B) $a \subset (\alpha)$. (C) a cắt (α). (D) $a \parallel (\alpha)$ hoặc $a \subset (\alpha)$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} a \parallel b \\ b \subset (\alpha) \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a \parallel (\alpha) \\ a \subset (\alpha). \end{array}\right.$

Chọn đáp án (D) □

CÂU 3. Cho $d \parallel (\alpha)$, mặt phẳng (β) qua d cắt (α) theo giao tuyến d'. Khẳng định nào sau đây đúng?

(A) $d \parallel d'$. (B) d cắt d'. (C) d và d' chéo nhau. (D) $d \equiv d'$.

Lời giải.

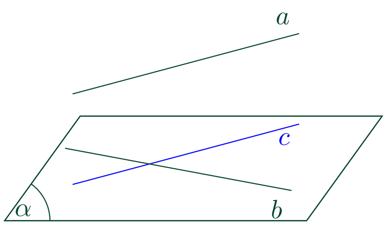
Ta có $(\alpha) \parallel d \subset (\beta)$ suy ra $(\alpha) \cap (\beta) = d' \parallel d$.

Chọn đáp án (A) □

CÂU 4. Có bao nhiêu mặt phẳng song song với cả hai đường thẳng chéo nhau?

(A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) vô số.

Lời giải.



Gọi a và b là 2 đường thẳng chéo nhau, c là đường thẳng song song với a và cắt b.

Gọi $(\alpha) \equiv (b, c)$. Do $\begin{cases} a \parallel c \\ c \subset (\alpha) \end{cases} \Rightarrow a \parallel (\alpha)$.

Gọi (β) là một mặt phẳng song song với (α) và (β) không chứa đường thẳng a.

Ta có $\begin{cases} (\beta) \parallel (\alpha) \\ b, c \subset (\alpha) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (\beta) \parallel b \\ (\beta) \parallel c \end{cases}$.

$\begin{cases} (\beta) \parallel (\alpha) \\ a \parallel (\alpha) \\ a \not\subset (\beta) \end{cases} \Rightarrow (\beta) \parallel a.$

Như vậy (β) song song với cả hai đường thẳng chéo nhau a và b. Mặt khác, có vô số mặt phẳng (β) song song với (α) và không chứa đường thẳng a, suy ra có vô số mặt phẳng song song với 2 đường thẳng chéo nhau.

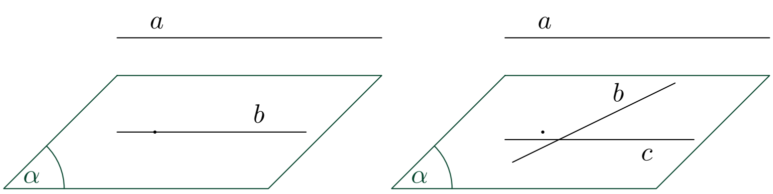
Chọn đáp án (D) □

CÂU 5. Cho hai đường thẳng phân biệt a, b và mặt phẳng (α). Giả sử $a \parallel (\alpha)$, $b \subset (\alpha)$. Khi đó:

(A) $a \parallel b$. (B) a, b chéo nhau.

(C) $a \parallel b$ hoặc a, b chéo nhau. (D) a, b cắt nhau.

Lời giải.



Vì $a \parallel (\alpha)$ nên tồn tại đường thẳng $c \subset (\alpha)$ thỏa mãn $c \parallel a$. Suy ra b, c đồng phẳng và xảy ra các trường hợp sau:

- Nếu b song song hoặc trùng với c thì $a \parallel b$.

- Nếu b cắt c thì b cắt $(\beta) \equiv (a, c)$ nên a, b không đồng phẳng. Do đó a, b chéo nhau.

Chọn đáp án (C) □

CÂU 6. Cho đường thẳng a nằm trong mặt phẳng (α). Giả sử $b \not\subset (\alpha)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

(A) Nếu $b \parallel (\alpha)$ thì $b \parallel a$.
(B) Nếu b cắt (α) thì b cắt a.
(C) Nếu $b \parallel a$ thì $b \parallel (\alpha)$.
(D) Nếu b cắt (α) và (β) chứa b thì giao tuyến của (α) và (β) là đường thẳng cắt cả a và b.

Lời giải.

- A sai. Nếu $b \parallel (\alpha)$ thì $b \parallel a$ hoặc a, b chéo nhau.
- B sai. Nếu b cắt (α) thì b cắt a hoặc a, b chéo nhau.
- D sai. Nếu b cắt (α) và (β) chứa b thì giao tuyến của (α) và (β) là đường thẳng cắt a hoặc song song với a.

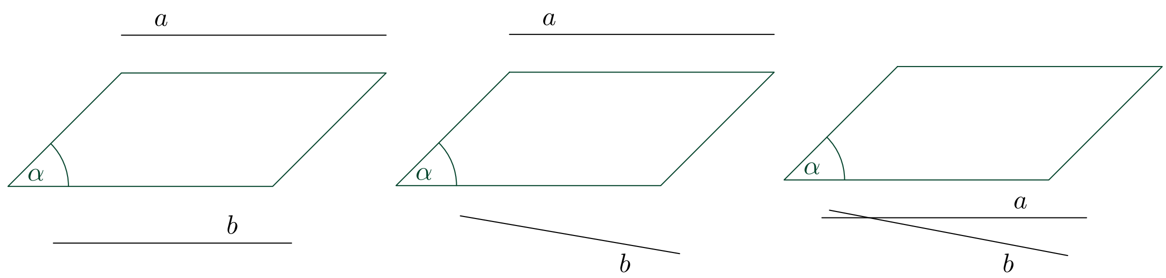
Chọn đáp án (C) □

CÂU 7. Cho hai đường thẳng phân biệt a, b và mặt phẳng (α). Giả sử $a \parallel (\alpha)$ và $b \parallel (\alpha)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

(A) a và b không có điểm chung.
(B) a và b hoặc song song hoặc chéo nhau.
(C) a và b hoặc song song hoặc chéo nhau hoặc cắt nhau.
(D) a và b chéo nhau.

Lời giải.

a và b hoặc song song hoặc chéo nhau hoặc cắt nhau (xem hình minh họa).



Chọn đáp án (C) □

CÂU 8. Cho mặt phẳng (P) và hai đường thẳng song song a và b. Khẳng định nào sau đây đúng?

(A) Nếu (P) song song với a thì (P) cũng song song với b.
(B) Nếu (P) cắt a thì (P) cũng cắt b.
(C) Nếu (P) chứa a thì (P) cũng chứa b.
(D) Các khẳng định A, B, C đều sai.

Lời giải.

Gọi $(Q) \equiv (a, b)$.

- A sai. Khi $b = (P) \cap (Q) \Rightarrow b \subset (P)$.
- C sai. Khi $(P) \neq (Q) \Rightarrow b \parallel (P)$.
- Xét khẳng định B, giả sử (P) không cắt b khi đó $b \subset (P)$ hoặc $b \parallel (P)$. Khi đó, vì $b \parallel a$ nên $a \subset (P)$ hoặc a cắt (P).

Vậy khẳng định **B** là đúng.

Chọn đáp án (B) □

CÂU 9. Cho hai đường thẳng chéo nhau a và b. Khẳng định nào sau đây **sai**?

(A) Có duy nhất một mặt phẳng song song với a và b.
(B) Có duy nhất một mặt phẳng qua a và song song với b.
(C) Có duy nhất một mặt phẳng qua điểm M, song song với a và b.
(D) Có vô số đường thẳng song song với a và cắt b.

Lời giải.

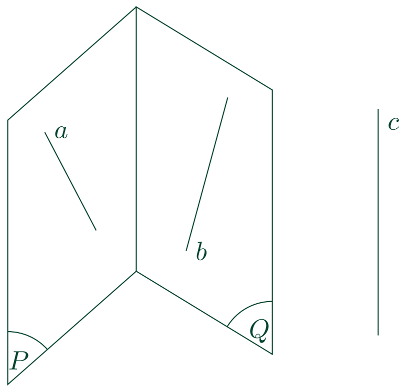
Có có vô số mặt phẳng song song với 2 đường thẳng chéo nhau. Do đó A sai.

Chọn đáp án (A) □

CÂU 10. Cho ba đường thẳng đôi một chéo nhau a, b, c. Gọi (P) là mặt phẳng qua a, (Q) là mặt phẳng qua b sao cho giao tuyến của (P) và (Q) song song với c. Có nhiều nhất bao nhiêu mặt phẳng (P) và (Q) thỏa mãn yêu cầu trên?

(A) Một mặt phẳng (P), một mặt phẳng (Q).
(B) Một mặt phẳng (P), vô số mặt phẳng (Q).
(C) Một mặt phẳng (Q), vô số mặt phẳng (P).
(D) Vô số mặt phẳng (P) và (Q).

Lời giải.



Vì c song song với giao tuyến của (P) và (Q) nên $c \parallel (P)$ và $c \parallel (Q)$.
Khi đó, (P) là mặt phẳng chứa a và song song với c, mà a và c chéo nhau nên chỉ có một mặt phẳng như vậy.
Tương tự cũng chỉ có một mặt phẳng (Q) chứa b và song song với c.
Vậy có nhiều nhất một mặt phẳng (P) và một mặt phẳng (Q) thỏa yêu cầu bài toán.
Chọn đáp án A □

C. HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Dạng 18. Câu hỏi lý thuyết

CÂU 1. Cho đường thẳng a nằm trong mặt phẳng (α). Giả sử $b \not\subset (\alpha)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- **A** Nếu $b \parallel (\alpha)$ thì $b \parallel a$.
- **B** Nếu b cắt (α) thì b cắt a.
- **C** Nếu $b \parallel a$ thì $b \parallel (\alpha)$.
- **D** Nếu $b \parallel (\alpha)$ và (β) chứa b thì (β) sẽ cắt (α) theo giao tuyến là đường thẳng song song với b.

Lời giải.

Theo lý thuyết $\begin{cases} b \not\subset (\alpha) \\ b \parallel a \\ a \subset (\alpha) \end{cases} \Rightarrow b \parallel (\alpha)$.

Chọn đáp án C □

CÂU 2. Cho các mệnh đề sau

1. Nếu đường thẳng a song song với mặt phẳng (P) thì a song song với mọi đường thẳng nằm trong (P).
2. Giữa hai đường thẳng chéo nhau có duy nhất một mặt phẳng chứa đường thẳng này và song song với đường thẳng kia.
3. Hai đường thẳng phân biệt cùng song song với một mặt phẳng thì chúng song song với nhau.
4. Nếu đường thẳng Δ song song với mặt phẳng (P) và (P) cắt đường thẳng a thì Δ cắt a.
5. Đường thẳng song song với mặt phẳng nếu nó song song với một đường thẳng nằm trong mặt phẳng đó.

Trong các mệnh đề trên, số các mệnh đề **sai** là

A 1. **B** 2. **C** 3. **D** 4.

Lời giải.

Các mệnh đề **sai** là: 1, 3, 4, 5.
Chọn đáp án D □

CÂU 3. Mệnh đề nào **sai** trong các mệnh đề sau?

- **A** Qua một điểm nằm ngoài một mặt phẳng cho trước có một và chỉ một đường thẳng song song với mặt phẳng đã cho.
- **B** Nếu mặt phẳng (α) chứa hai đường thẳng cắt nhau a, b và a, b cùng song song với mặt phẳng (β) thì (α) song song với (β).
- **C** Hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với mặt phẳng thứ ba thì song song với nhau.
- **D** Hai mặt phẳng song song chắn trên hai cát tuyến song song những đoạn thẳng bằng nhau.

Lời giải.

Qua một điểm nằm ngoài một mặt phẳng cho trước có vô số đường đường thẳng song song với mặt phẳng đã cho, các đường thẳng đó cùng nằm trên một mặt phẳng.
Chọn đáp án A □

CÂU 4. Cho hai đường thẳng phân biệt a, b và mặt phẳng (α). Giả sử $a \parallel (\alpha)$ và $b \parallel (\alpha)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

Ⓐ a và b không có điểm chung.
Ⓑ a và b hoặc song song hoặc chéo nhau.
Ⓒ a và b chéo nhau.
Ⓓ a và b hoặc song song hoặc chéo nhau hoặc cắt nhau.

Lời giải.

a và b hoặc song song hoặc chéo nhau hoặc cắt nhau.

Chọn đáp án Ⓓ □

CÂU 5. Cho đường thẳng a song song với mặt phẳng (P) và b là đường thẳng nằm trong (P). Khi đó trường hợp nào sau đây **không** thể xảy ra?

Ⓐ a song song b.
Ⓑ a cắt b.
Ⓒ a và b chéo nhau.
Ⓓ a và b không có điểm chung.

Lời giải.

Vì $a \parallel (P)$ nên a không điểm chung với mặt phẳng (P).
Mà $b \subset (P)$ nên a không điểm chung với b tức a không thể cắt b.

Chọn đáp án Ⓑ □

CÂU 6. Hai đường thẳng cùng song song với đường thẳng thứ ba thì chúng

Ⓐ hoặc song song hoặc trùng nhau.
Ⓑ chéo nhau.
Ⓒ trùng nhau.
Ⓓ song song.

Lời giải.

Hai đường thẳng cùng song song với đường thẳng thứ ba thì hai đường thẳng đó song song hoặc trùng nhau.

Chọn đáp án Ⓐ □

CÂU 7. Trong không gian, cho các mệnh đề sau

I. Hai đường thẳng phân biệt cùng song song với một mặt phẳng thì song song với nhau.

II. Hai mặt phẳng phân biệt chứa hai đường thẳng song song cắt nhau theo giao tuyến song song với hai đường thẳng đó.

III. Nếu đường thẳng a song song với đường thẳng b, đường thẳng b nằm trên mặt phẳng (P) thì a song song với (P).

IV. Qua điểm A không thuộc mặt phẳng (α), kẻ được đúng một đường thẳng song song với (α).

Số mệnh đề đúng là

Ⓐ 2. Ⓑ 0. Ⓒ 1. Ⓓ 3.

Lời giải.

I. Hai đường thẳng phân biệt cùng song song với một mặt phẳng thì song song với nhau.
Đây là một mệnh đề **sai** vì hai đường thẳng này có thể chéo nhau hoặc cắt nhau.

II. Hai mặt phẳng phân biệt chứa hai đường thẳng song song cắt nhau theo giao tuyến song song với hai đường thẳng đó.
Đây là một mệnh đề **sai** vì giao tuyến có thể hoặc song song với hai đường thẳng đó, hoặc trùng với một trong hai đường thẳng đó.

III. Nếu đường thẳng a song song với đường thẳng b, đường thẳng b nằm trên mặt phẳng (P) thì a song song với (P).
Đây là một mệnh đề **sai** vì a còn có thể thuộc (P).

IV. Qua điểm A không thuộc mặt phẳng (α), kẻ được đúng một đường thẳng song song với (α).
Đây là một mệnh đề sai, vì qua A ta sẽ kẻ được vô số đường song song với (α), các đường này đều nằm trên (β) đi qua A và song song với (α).

Chọn đáp án Ⓑ □

CÂU 8. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau.

Ⓐ Hai đường thẳng phân biệt cùng song song với một mặt phẳng thì song song với nhau.
Ⓑ Nếu $a \parallel (P)$ thì tồn tại trong (P) đường thẳng b để $b \parallel a$.
Ⓒ Nếu $\begin{cases} a \parallel (P) \\ b \subset (P) \end{cases}$ thì $a \parallel b$.
Ⓓ Nếu $a \parallel (P)$ và đường thẳng b cắt mặt phẳng (P) thì hai đường thẳng a và b cắt nhau.

Lời giải.

Nếu $a \parallel (P)$ thì tồn tại trong (P) đường thẳng b để $b \parallel a$ là mệnh đề đúng.

Chọn đáp án Ⓑ □

CÂU 9. Cho mặt phẳng (α) và đường thẳng $d \not\subset (\alpha)$. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

Ⓐ Nếu $d \parallel (\alpha)$ thì trong (α) tồn tại đường thẳng Δ sao cho $\Delta \parallel d$.

Ⓑ Nếu $d \parallel (\alpha)$ và $b \subset (\alpha)$ thì $b \parallel d$.

Ⓒ Nếu $d \cap (\alpha) = A$ và $d' \subset (\alpha)$ thì d và d' hoặc cắt nhau hoặc chéo nhau.

Ⓓ Nếu $d \parallel c$, $c \subset (\alpha)$ thì $d \parallel (\alpha)$.

Lời giải.

Nếu $d \parallel (\alpha)$ và $b \subset (\alpha)$ thì $b \parallel d$ là mệnh đề sai vì b và d có thể chéo nhau.

Chọn đáp án Ⓑ □

CÂU 10. Cho các mệnh đề sau

1. Nếu $a \parallel (P)$ thì a song song với mọi đường thẳng nằm trong (P).
2. Nếu $a \parallel (P)$ thì a song song với một đường thẳng nào đó nằm trong (P).
3. Nếu $a \parallel (P)$ thì có vô số đường thẳng nằm trong (P) song song với a.
4. Nếu $a \parallel (P)$ thì có một đường thẳng d nào đó nằm trong (P) sao cho a và d đồng phẳng.

Số mệnh đề đúng là

Ⓐ 2. Ⓑ 3. Ⓒ 4. Ⓓ 1.

Lời giải.

1. Nếu $a \parallel (P)$ thì a song song với mọi đường thẳng nằm trong (P) là mệnh đề sai.
2. Nếu $a \parallel (P)$ thì a song song với một đường thẳng nào đó nằm trong (P) là mệnh đề đúng.
3. Nếu $a \parallel (P)$ thì có vô số đường thẳng nằm trong (P) song song với a là mệnh đề đúng.
4. Nếu $a \parallel (P)$ thì có một đường thẳng d nào đó nằm trong (P) sao cho a và d đồng phẳng là mệnh đề đúng.

Vậy có 3 mệnh đề đúng.

Chọn đáp án Ⓑ □

CÂU 11. Trong các khẳng định sau khẳng định nào **sai**?

Ⓐ Nếu một đường thẳng song song với một trong hai mặt phẳng song song thì nó song song với mặt phẳng còn lại.

Ⓑ Nếu một đường thẳng cắt một trong hai mặt phẳng song song thì nó cắt mặt phẳng còn lại.

Ⓒ Nếu hai đường thẳng song song thì chúng cùng nằm trên một mặt phẳng.

Ⓓ Nếu hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với một mặt phẳng thì chúng song song với nhau.

Lời giải.

Giả sử (α) song song với (β). Một đường thẳng a song song với (β) có thể nằm trên (α).

Chọn đáp án Ⓐ □

CÂU 12. Tìm khẳng định **sai** trong các khẳng định sau đây

Ⓐ Nếu hai mặt phẳng song song cùng cắt mặt phẳng thứ ba thì hai giao tuyến tạo thành song song với nhau.

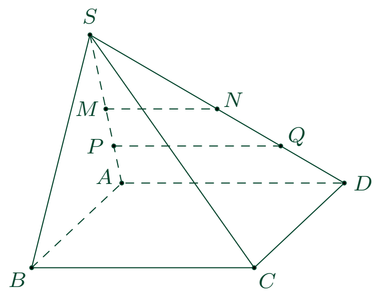
Ⓑ Ba mặt phẳng đôi một song song chắn trên hai đường thẳng chéo nhau những đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ.

Ⓒ Nếu mặt phẳng (P) song song với mặt phẳng (Q) thì mọi đường thẳng nằm trên mặt phẳng (P) đều song song với mặt phẳng (Q).

Ⓓ Nếu mặt phẳng (P) có chứa hai đường thẳng phân biệt và hai đường thẳng đó cùng song song song với mặt phẳng (Q) thì mặt phẳng (P) song song với mặt phẳng (Q).

Lời giải.

Ví dụ (SAD) chứa MN và PQ cùng song song với $(ABCD)$ nhưng (SAD) cắt $(ABCD)$.



Chọn đáp án Ⓓ □

CÂU 13. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

Ⓐ Hai đường thẳng cùng song song với một mặt phẳng thì song song với nhau.

(B) Hai đường thẳng cùng song song với một mặt phẳng thì trùng nhau.
(C) Hai đường thẳng cùng song song với một mặt phẳng thì chéo nhau.
(D) Hai đường thẳng cùng song song với một mặt phẳng có thể chéo nhau, song song, cắt nhau hoặc trùng nhau.

Lời giải.

Hai đường thẳng cùng song song với một mặt phẳng có thể chéo nhau, song song, cắt nhau hoặc trùng nhau.
Chọn đáp án (D) □

CÂU 14. Cho các giả thiết sau đây. Giả thiết nào kết luận đường thẳng a song song với mặt phẳng (α)?

(A) $a \parallel b$ và $b \subset (\alpha)$. (B) $a \parallel (\beta)$ và $(\beta) \parallel (\alpha)$. (C) $a \parallel b$ và $b \parallel (\alpha)$. (D) $a \cap (\alpha) = \varnothing$.

Lời giải.

Chọn $a \cap (\alpha) = \varnothing$.

Chọn đáp án (D) □

CÂU 15. Cho hai mặt phẳng (P), (Q) cắt nhau theo giao tuyến là đường thẳng d. Đường thẳng a song song với cả hai mặt phẳng (P), (Q). Khẳng định nào sau đây đúng?

(A) a, d trùng nhau. (B) a, d chéo nhau. (C) a song song d. (D) a, d cắt nhau.

Lời giải.

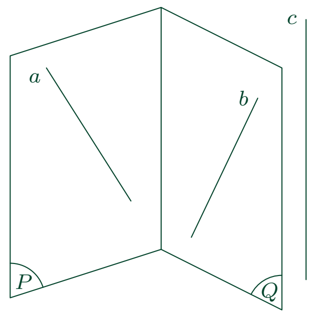
Sử dụng hệ quả: Nếu hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với một đường thẳng thì giao tuyến của chúng cũng song song với đường thẳng đó.
Chọn đáp án (C) □

CÂU 16. Cho ba đường thẳng đôi một chéo nhau a, b, c. Gọi (P) là mặt phẳng qua a, (Q) là mặt phẳng qua b sao cho giao tuyến của (P) và (Q) song song với c. Có nhiều nhất bao nhiêu mặt phẳng (P) và (Q) thỏa mãn yêu cầu trên?

(A) Vô số mặt phẳng (P) và (Q). (B) Một mặt phẳng (P), vô số mặt phẳng (Q).
(C) Một mặt phẳng (Q), vô số mặt phẳng (P). (D) Một mặt phẳng (P), một mặt phẳng (Q).

Lời giải.

Vì c song song với giao tuyến của (P) và (Q) nên $c \parallel (P)$ và $c \parallel (Q)$.
Khi đó, (P) là mặt phẳng chứa a và song song với c, mà a và c chéo nhau nên chỉ có một mặt phẳng như vậy.
Tương tự cũng chỉ có một mặt phẳng (Q) chứa b và song song với c.
Vậy có nhiều nhất một mặt phẳng (P) và một mặt phẳng (Q) thỏa yêu cầu bài toán.



Chọn đáp án (D) □

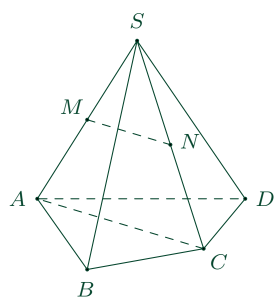
Dạng 19. Đường thẳng song song với mặt phẳng

CÂU 1. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA và SC. Mệnh đề nào sau đây đúng?

(A) $MN \parallel (SAB)$. (B) $MN \parallel (SBC)$. (C) $MN \parallel (SBD)$. (D) $MN \parallel (ABCD)$.

Lời giải.

Vì MN là đường trung bình của tam giác $SAC \Rightarrow MN \parallel AC$.
Mặt khác $AC \subset (ABCD) \Rightarrow MN \parallel (ABCD)$.



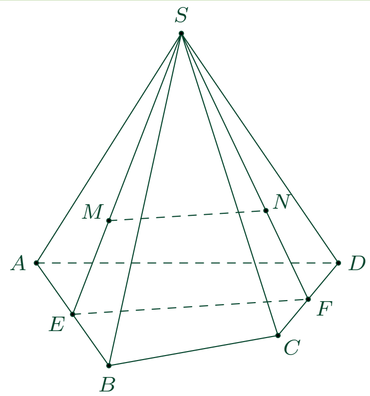
Chọn đáp án (D) □

CÂU 2. Cho hình chóp $S.ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trọng tâm tam giác SAB và tam giác SCD. Khi đó MN song song với mặt phẳng

(A) (SAC). (B) (SBD). (C) (SAB). (D) $(ABCD)$.

Lời giải.

Gọi E và F lần lượt là trung điểm của AB và CD.
Do M, N là trọng tâm $\triangle SAB$, $\triangle SCD$ nên S, M, E thẳng hàng; S, N, F thẳng hàng.
Xét $\triangle SEF$ có $\dfrac{SM}{SE} = \dfrac{2}{3} = \dfrac{SN}{SF}$ nên theo định lý Ta lét ta có $MN \parallel EF$.
Mà $EF \subset (ABCD)$ nên $MN \parallel (ABCD)$.



Chọn đáp án (D) □

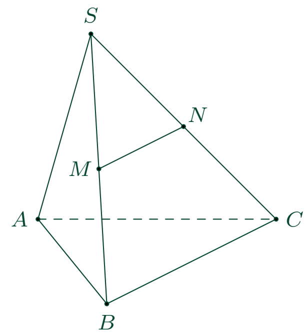
CÂU 3. Cho hình chóp $S.ABC$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh SB, SC. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

(A) $MN \parallel (ABC)$. (B) $MN \parallel (SAB)$. (C) $MN \parallel (SAC)$. (D) $MN \parallel (SBC)$.

Lời giải.

Theo giả thiết thì M, N lần lượt là trung điểm của SB, SC nên MN là đường trung bình của $\triangle SBC$, do đó $MN \parallel BC$.

Vì $\begin{cases} MN \not\subset (ABC) \\ BC \subset (ABC) \\ MN \parallel BC \end{cases}$ nên $MN \parallel (ABC)$.



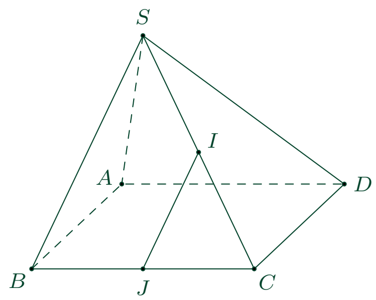
Chọn đáp án (A) □

CÂU 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi I và J lần lượt là trung điểm của SC và BC. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau

(A) $IJ \parallel (SAC)$. (B) $JI \parallel (SAB)$. (C) $JI \parallel (SBC)$. (D) $JI \parallel (SAD)$.

Lời giải.

Ta có $JI \parallel SB$, $SB \subset (SAB)$.
Vậy $JI \parallel (SAB)$.



Chọn đáp án (B) □

CÂU 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi. Gọi H, I, K lần lượt là trung điểm của SA, AB, CD. Khẳng định nào sau đây đúng?

(A) $HK \parallel (SBC)$. (B) $HK \parallel (SBD)$. (C) $HK \parallel (SAC)$. (D) $HK \parallel (SAD)$.

Lời giải.

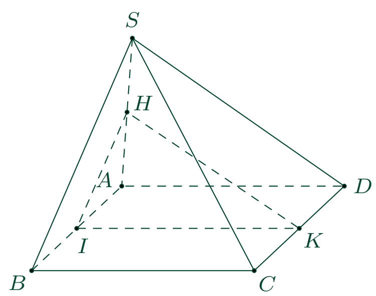
Ta có HI là đường trung bình của tam giác SAB nên

$$HI \parallel SB \subset (SBC) \Rightarrow HI \parallel (SBC).$$

Lại có I, K lần lượt là trung điểm AB, CD nên

$$IK \parallel BC \subset (SBC) \Rightarrow IK \parallel (SBC).$$

Từ đó, ta có $(HIK) \parallel (SBC)$.
Mà $HK \subset (HIK)$ nên $HK \parallel (SBC)$.

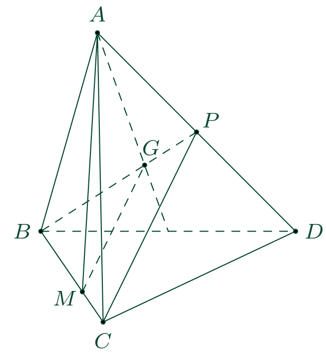


Chọn đáp án (A) □

CÂU 6. Cho tứ diện $ABCD$, G là trọng tâm $\triangle ABD$ và M là điểm trên cạnh BC sao cho $BM = 2MC$. Đường thẳng MG song song với mặt phẳng nào sau đây?

(A) (ACD). (B) (ABC). (C) (ABD). (D) (BCD).

Lời giải.



Gọi P là trung điểm của AD.

Ta có $\dfrac{BM}{BC}=\dfrac{BG}{BP}=\dfrac{2}{3}\Rightarrow MG\parallel CP$.

Mà $\begin{cases}CP\subset(ACD)\\MG\not\subset(ACD)\end{cases}$ nên $MG\parallel(ACD)$.

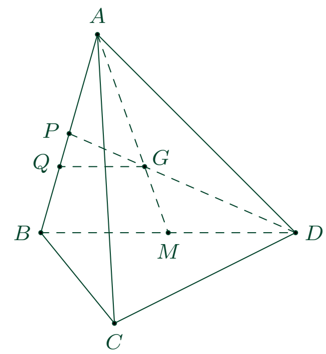
Chọn đáp án (A) □

CÂU 7. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABD, Q thuộc cạnh AB sao cho $AQ=2QB$ và P là trung điểm của AB. Khẳng định nào sau đây đúng?

A $GQ\parallel(ACD)$. **B** $GQ\parallel(BCD)$.

C GQ cắt (BCD). **D** Q thuộc mặt phẳng (CDP).

Lời giải.



Gọi M là trung điểm của BD.

Vì G là trọng tâm tam giác ABD nên $\dfrac{AG}{AM}=\dfrac{2}{3}$.

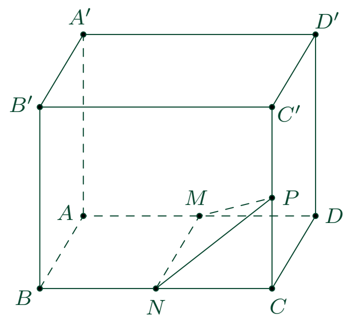
Điểm $Q\in AB$ sao cho $AQ=2QB\Leftrightarrow\dfrac{AQ}{AB}=\dfrac{2}{3}$.

Suy ra $\dfrac{AG}{AM}=\dfrac{AQ}{AB}\Rightarrow GQ\parallel BD$.

Mặt khác BD nằm trong mặt phẳng (BCD) suy ra $GQ\parallel(BCD)$.

Chọn đáp án (B) □

CÂU 8.



Cho hình lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có hai đáy là các hình bình hành. Các điểm M, N, P lần lượt là trung điểm của cạnh AD, BC, CC'. Trong các mệnh đề sau có bao nhiêu mệnh đề **sai**?

i) $A'B'\parallel(MNP)$.

ii) $(MNP)\parallel(BC'D')$.

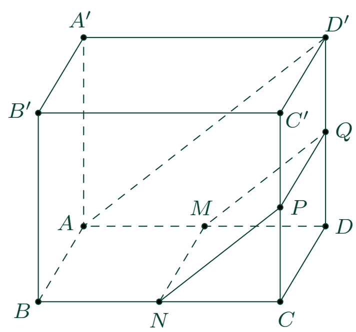
iii) $(MNP)\parallel(B'C'D')$.

iv) DD' cắt mp (MNP).

Trong các mệnh đề trên có bao nhiêu mệnh đề **sai**?

A 4. **B** 2. **C** 3. **D** 1.

Lời giải.



Ta có $\begin{cases}A'B'\parallel AB\\AB\parallel MN\end{cases}\Rightarrow A'B'\parallel MN\Rightarrow A'B'\parallel(MNP)$.

Ta có $\begin{cases}MN\parallel C'D'\\NP\parallel BC'\end{cases}\Rightarrow(MNP)\parallel(BC'D')$.

Ta có $\begin{cases}(MNP)\cap(ABCD)=MN\\(B'C'D')\parallel(ABCD)\end{cases}\Rightarrow(MNP)$ cắt $(B'C'D')$.

Ta có $\begin{cases}(MNP)\parallel(BC'D')\\DD'\cap(BC'D')=D'\end{cases}\Rightarrow DD'\cap(MNP)=Q$.

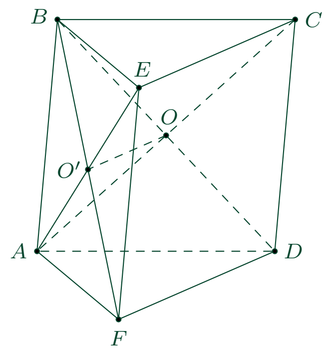
Vậy chỉ có mệnh đề iii) sai.

Chọn đáp án (D) □

CÂU 9. Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$ nằm trong hai mặt phẳng khác nhau lần lượt có tâm O và O'. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A $OO'\parallel(ADF)$. **B** $OO'\parallel(BCE)$. **C** $OO'\parallel(ACE)$. **D** $OO'\parallel(DCEF)$.

Lời giải.



$OO' \parallel (ADF)$ đúng vì $\begin{cases} OO' \parallel DF, DF \subset (ADF) \\ OO' \not\subset (ADF) \end{cases} \Rightarrow OO' \parallel (ADF)$.

$OO' \parallel (BCE)$ đúng vì $\begin{cases} OO' \parallel EC, EC \subset (BCE) \\ OO' \not\subset (BCE) \end{cases} \Rightarrow OO' \parallel (BCE)$.

$OO' \parallel (ACE)$ sai vì $OO' \subset (ACE)$.

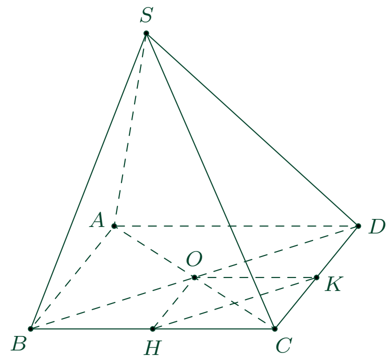
$OO' \parallel (DCEF)$ đúng vì $\begin{cases} OO' \parallel EC, EC \subset (DCEF) \\ OO' \not\subset (DCEF) \end{cases} \Rightarrow OO' \parallel (DCEF)$.

Chọn đáp án (C) □

CÂU 10. Cho hình chóp $S.ABCD$, có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Gọi H, K lần lượt là trung điểm của BC, CD. Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

A $HK \parallel (SBD)$. **B** $OK \parallel (SAD)$. **C** $OH \parallel (SAB)$. **D** $HK \parallel (SAB)$.

Lời giải.



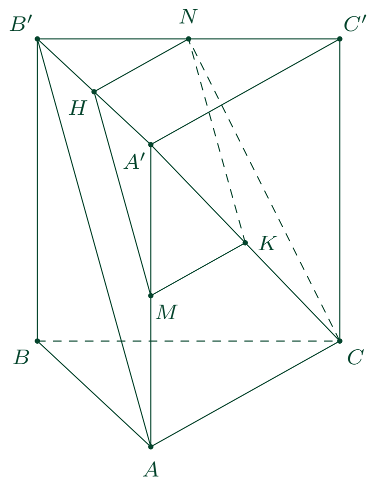
Ta có $HK \not\subset (SBD)$.
Ta thấy HK là đường trung bình của tam giác BCD nên $HK \parallel BD$.
Mà $BD \subset (SBD)$ nên $HK \parallel (SBD)$.
Ta có $OK \not\subset (SAD)$.
Ta thấy OK là đường trung bình của tam giác ACD nên $OK \parallel AD$.
Mà $AD \subset (SAD)$ do đó $OK \parallel (SAD)$.
Ta có $OH \not\subset (SAB)$.
Ta thấy OH là đường trung bình của tam giác ABC nên $OH \parallel AB$.
Mà $AB \subset (SAB)$ do đó $OH \parallel (SAB)$.
Trong $(ABCD)$ ta thấy $AB \cap HK$ mà $AB \subset (SAB)$ nên $HK \nparallel (SAB)$.

Chọn đáp án (D) □

CÂU 11. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm AA' và $B'C'$. Khi đó đường thẳng AB' song song với mặt phẳng

A $(A'MN)$. **B** $(C'MN)$. **C** $(A'CN)$. **D** (CMN).

Lời giải.



Gọi H, K lần lượt là trung điểm của $A'B'$, $A'C$.
Ta có: HM là đường trung bình $\triangle A'B'A \Rightarrow HM \parallel AB'$. (1)
Hơn nữa, ta có HN, MK lần lượt là đường trung bình $\triangle A'B'C'$, $\triangle A'AC$.

$$\Rightarrow \begin{cases} HN \parallel A'C',\ HN = \dfrac{1}{2}A'C' \\ MK \parallel AC,\ MK = \dfrac{1}{2}AC \end{cases} \text{ mà } \begin{cases} A'C' \parallel AC \\ A'C' = AC \end{cases} \text{ nên } \begin{cases} HN \parallel MK \\ HN = MK \end{cases}$$

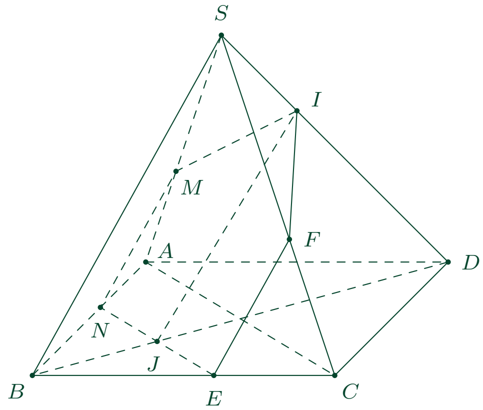
$\Rightarrow HNKM$ là hình bình hành.
$\Rightarrow HM \parallel NK$. (2)
Từ (1) và (2) suy ra: $AB' \parallel NK \Rightarrow AB' \parallel (A'NC)$.

Chọn đáp án (C) □

CÂU 12. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M là một điểm trên cạnh SA, mặt phẳng (α) qua M song song với SB và AC. Mặt phẳng (α) cắt AB, BC, SC, SD, BD lần lượt tại N, E, F, I, J. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A $MN \parallel (SCD)$. **B** $EF \parallel (SAD)$. **C** $NF \parallel (SAD)$. **D** $IJ \parallel (SAB)$.

Lời giải.



Ta có: $\begin{cases} IJ = (\alpha) \cap (SBD) \\ (\alpha) \parallel SB \subset (SBD) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (SBD) = IJ \parallel SB.$

Mà $SB \subset (SAB) \Rightarrow IJ \parallel (SAB)$.

Chọn đáp án (D) □

CÂU 13. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O. Gọi I là trung điểm của BC, K thuộc cạnh SD sao cho $SK = \frac{1}{2}KD$, M là giao điểm của của BD và AI. Khẳng định nào sau đây là đúng?

(A) $MK \parallel (SCD)$. (B) $MK \parallel (SBD)$. (C) $MK \parallel (ABCD)$. (D) $MK \parallel (SAB)$.

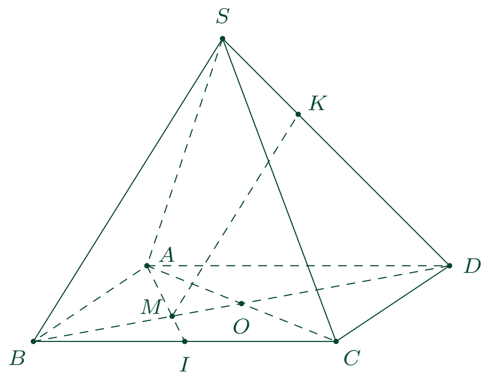
Lời giải.

Ta có

- $MK \cap (SCD) = K$ nên $MK \parallel (SCD)$ sai.
- $MK \subset (SBD)$ nên $MK \parallel (SBD)$ sai.
- $MK \cap (ABCD) = M$ nên $MK \parallel (ABCD)$ sai.
- M là trọng tâm tam giác ABC, do đó $BM = \frac{2}{3}BO = \frac{1}{3}BD$

  Suy ra $\frac{DK}{DS} = \frac{DM}{DB} = \frac{2}{3} \Rightarrow MK \parallel SB$ mà $SB \subset (SAB)$.

  Vậy $MK \parallel (SAB)$.



Chọn đáp án (D) □

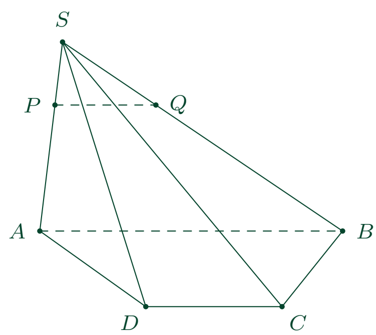
CÂU 14. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang, đáy lớn AB. Gọi P, Q lần lượt là hai điểm nằm trên cạnh SA và SB sao cho $\frac{SP}{SA} = \frac{SQ}{SB} = \frac{1}{3}$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

(A) PQ cắt $(ABCD)$. (B) $PQ \subset (ABCD)$. (C) $PQ \parallel (ABCD)$. (D) PQ và CD chéo nhau.

Lời giải.

Vì $\frac{SP}{SA} = \frac{SQ}{SB} = \frac{1}{3}$ nên $PQ \parallel AB$.

Ta có $\begin{cases} PQ \parallel AB \\ AB \subset (ABCD) \\ PQ \not\subset (ABCD) \end{cases} \Rightarrow PQ \parallel (ABCD).$



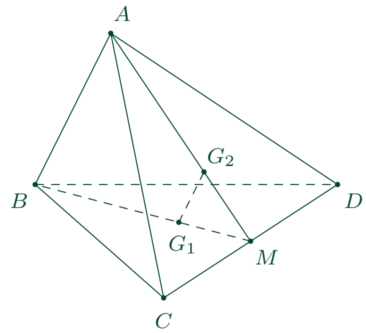
Chọn đáp án (C) □

CÂU 15. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G_1 và G_2 lần lượt là trọng tâm các tam giác BCD và ACD. Khẳng định nào sau đây **sai**?

(A) $G_1G_2 \parallel (ABD)$. (B) $G_1G_2 \parallel (ABC)$.

(C) BG_1, AG_2 và CD đồng quy. (D) $G_1G_2 = \frac{2}{3}AB$.

Lời giải.



Gọi M là trung điểm CD.
Vì G_1 và G_2 lần lượt là trọng tâm các tam giác BCD và ACD nên

$$\begin{cases} G_1 \in BM; \dfrac{MG_1}{MB} = \dfrac{1}{3} \\ G_2 \in AM; \dfrac{MG_2}{MA} = \dfrac{1}{3}. \end{cases}$$

Xét tam giác ABM, ta có $\dfrac{MG_1}{MB} = \dfrac{MG_2}{MA} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow G_1G_2 \parallel AB$.
Suy ra $\dfrac{G_1G_2}{AB} = \dfrac{MG_1}{MB} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow G_1G_2 = \dfrac{1}{3}AB$.
Vậy $G_1G_2 = \dfrac{2}{3}AB$ sai.
Hơn nữa, ta có

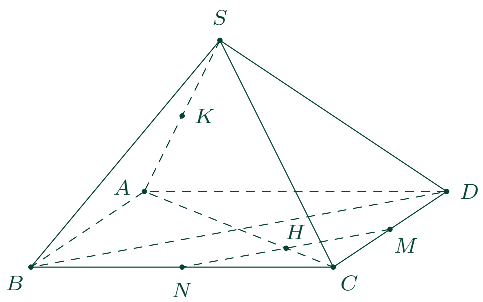
- Vì $G_1G_2 \parallel AB \Rightarrow G_1G_2 \parallel (ABD)$.
- Vì $G_1G_2 \parallel AB \Rightarrow G_1G_2 \parallel (ABC)$.
- Ba đường BG_1, AG_2 và CD đồng quy tại M.

Chọn đáp án D □

CÂU 16. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. M, N, K lần lượt là trung điểm của DC, BC, SA. Gọi H là giao điểm của AC và MN. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

A MN chéo SC. **B** $MN \parallel (SBD)$. **C** $MN \parallel (ABCD)$. **D** $MN \cap (SAC) = H$.

Lời giải.

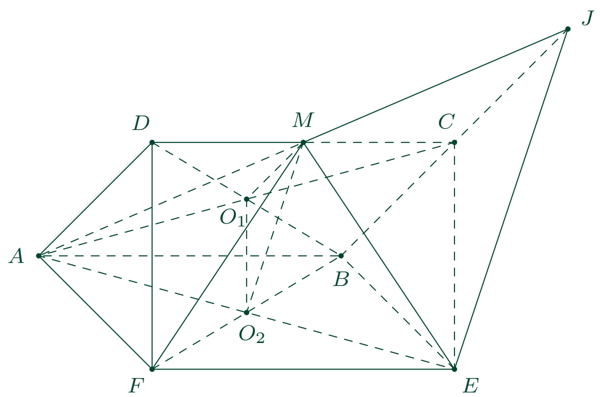


Vì $MN \subset (ABCD)$ nên MN không song song với mặt phẳng $(ABCD)$ do đó $MN \parallel (ABCD)$ sai.
Chọn đáp án C □

CÂU 17. Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$ không cùng nằm trong một mặt phẳng. Gọi O_1, O_2 lần lượt là tâm của $ABCD$, $ABEF$. M là trung điểm của CD. Chọn khẳng định **sai** trong các khẳng định sau

A MO_2 cắt (BEC). **B** O_1O_2 song song với (BEC).
C O_1O_2 song song với (EFM). **D** O_1O_2 song song với (AFD).

Lời giải.



Gọi J là giao điểm của AM và BC.
Ta có $MO_1 \parallel AD \parallel BC \Rightarrow MO_1 \parallel CJ$.
Mà O_1 là trung điểm của AC nên M là trung điểm của AJ.
Suy ra MO_2 là đường trung bình của tam giác AJE.
Do đó $MO_2 \parallel EJ$ mà $EJ \subset (BEC)$.

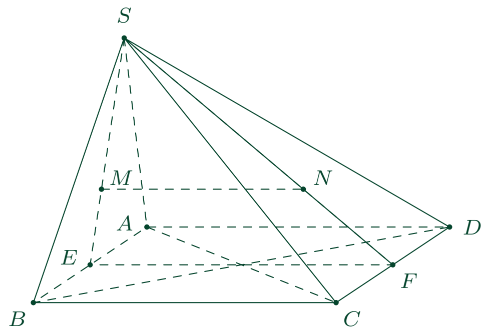
Từ đó suy ra $MO_2 \parallel (BEC)$.
Vậy MO_2 không cắt (BEC).
Chọn đáp án (A) □

CÂU 18. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. Gọi M, N theo thứ tự là trọng tâm $\triangle SAB$, $\triangle SCD$. Khi đó MN song song với mặt phẳng

A (SAC). **B** (SBD). **C** (SAB). **D** $(ABCD)$.

Lời giải.

Gọi E và F lần lượt là trung điểm của AB và CD.
Do M, N là trọng tâm tam giác SAB, SCD nên S, M, E thẳng hàng và S, N, F thẳng hàng.
Xét $\triangle SEF$, ta có $\dfrac{SM}{SE} = \dfrac{SN}{SF} = \dfrac{2}{3}$ nên $MN \parallel EF$.
Mà $EF \subset (ABCD)$ nên $MN \parallel (ABCD)$.



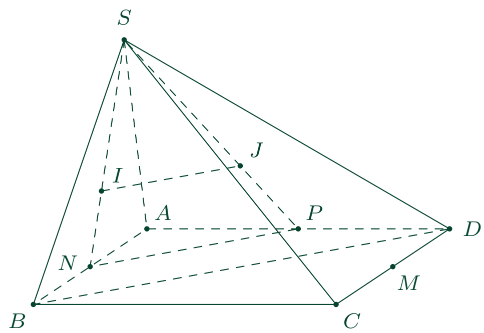
Chọn đáp án (D) □

CÂU 19. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Các điểm I, J lần lượt là trọng tâm các tam giác SAB, SAD. M là trung điểm CD. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau

A $IJ \parallel (SCD)$. **B** $IJ \parallel (SBM)$. **C** $IJ \parallel (SBC)$. **D** $IJ \parallel (SBD)$.

Lời giải.

Gọi N, P lần lượt là trung điểm của cạnh AB, AD.
Xét $\triangle SNP$ có $\dfrac{SI}{SN} = \dfrac{SJ}{SP} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow IJ \parallel NP$.
Xét $\triangle ABD$ có NP là đường trung bình trong tam giác $\Rightarrow NP \parallel BD$.
Suy ra $IJ \parallel BD$.
Ta có $\begin{cases} IJ \not\subset (SBD) \\ IJ \parallel BD \\ BD \subset (SBD) \end{cases} \Rightarrow IJ \parallel (SBD)$.



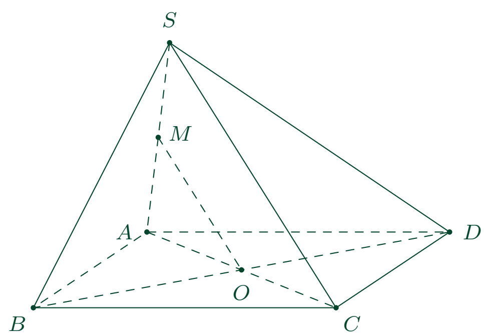
Chọn đáp án (D) □

CÂU 20. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O, M là trung điểm SA. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A $OM \parallel (SCD)$. **B** $OM \parallel (SBD)$. **C** $OM \parallel (SAB)$. **D** $OM \parallel (SAD)$.

Lời giải.

Ta có M là trung điểm SA và O là trung điểm $AC \Rightarrow OM$ là đường trung bình $\triangle SAC \Rightarrow OM \parallel SC$.
Như vậy $\begin{cases} OM \not\subset (SCD) \\ OM \parallel SC \\ SC \subset (SCD) \end{cases} \Rightarrow MO \parallel (SCD)$.

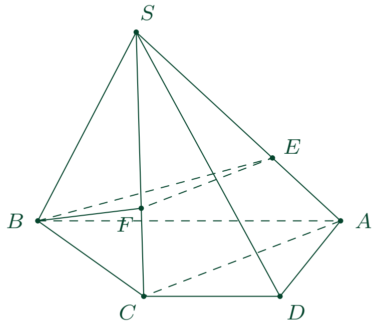


Chọn đáp án (A) □

CÂU 21. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang, $AB \parallel CD$ và $AB = 2CD$. Lấy E thuộc cạnh SA, F thuộc cạnh SC sao cho $\dfrac{SE}{SA} = \dfrac{SF}{SC} = \dfrac{2}{3}$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A Đường thẳng EF song song với mặt phẳng (SAC).
B Đường thẳng EF cắt đường thẳng AC.
C Đường thẳng AC song song với mặt phẳng (BEF).
D Đường thẳng CD song song với mặt phẳng (BEF).

Lời giải.



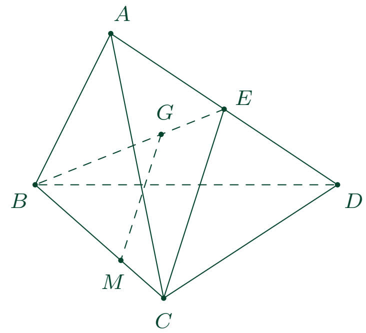
Vì $\dfrac{SE}{SA} = \dfrac{SF}{SC} = \dfrac{2}{3}$ nên $EF \parallel AC$.
Mà $EF \subset (BEF)$, $AC \not\subset (BEF)$ nên AC song song với mặt phẳng (BEF).
Chọn đáp án C □

CÂU 22. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G là trọng tâm tam giác ABD. M là điểm trên cạnh BC sao cho $MB = 2MC$. Khi đó đường thẳng MG song song với mặt phẳng nào dưới đây?

A (ACD). **B** (BCD). **C** (ABD). **D** (ABC).

Lời giải.

Ta có $MB = 2MC \Rightarrow \dfrac{BM}{BC} = \dfrac{2}{3}$.
Gọi E là trung điểm AD.
Khi đó, vì G là trọng tâm tam giác ABD nên $\dfrac{BG}{BE} = \dfrac{2}{3}$.
Xét tam giác BEC, ta có $\dfrac{BM}{BC} = \dfrac{BG}{BE} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow GM \parallel EC$.
Hơn nữa, ta có $EC \subset (ACD)$ nên $GM \parallel (ACD)$.

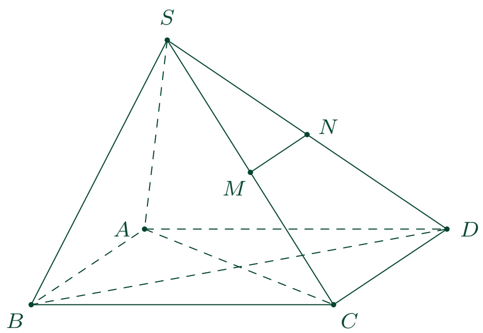


Chọn đáp án A □

CÂU 23. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SC và SD. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A $MN \parallel (SBD)$. **B** $MN \parallel (SAB)$. **C** $MN \parallel (SAC)$. **D** $MN \parallel (SCD)$.

Lời giải.



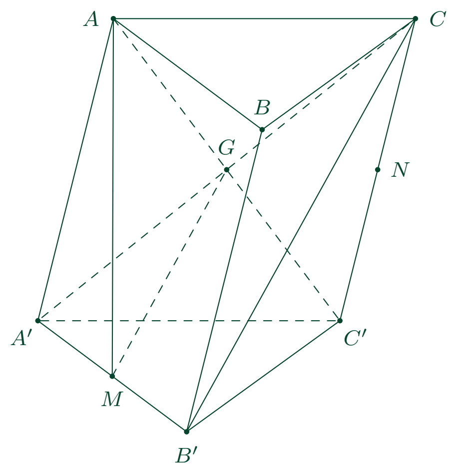
Ta có M, N lần lượt là trung điểm của SC và SD nên MN là đường trung bình trong $\triangle SCD \Rightarrow MN \parallel CD$.
Vì $ABCD$ là hình bình hành nên $CD \parallel AB$.
Do đó $MN \parallel AB$.
Mà $AB \subset (SAB)$ nên $MN \parallel (SAB)$.
Chọn đáp án B □

CÂU 24. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của $A'B'$ và CC'. Khi đó CB' song song với

A $(AC'M)$. **B** $(BC'M)$. **C** $A'N$. **D** AM.

Lời giải.

Gọi G là giao điểm của AC' và $A'C \Rightarrow G$ là trung điểm của $A'C$.
Hơn nữa, ta có M là trung điểm của AB' nên MG là đường trung bình của tam giác $A'CB'$.
Do đó $CB' \parallel MG$ mà $MG \subset (AC'M) \Rightarrow CB' \parallel (AC'M)$.



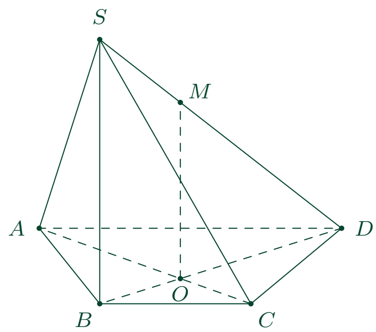
Chọn đáp án (A) □

CÂU 25. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang với đáy lớn AD, $AD = 2BC$. Gọi M là điểm thuộc cạnh SD sao cho $MD = 2MS$. Gọi O là giao điểm của AC và BD. Khi đó, OM song song với mặt phẳng

A (SAD). **B** (SBD). **C** (SBC). **D** (SAB).

Lời giải.

Ta có $ABCD$ là hình thang với đáy lớn AD, $AD = 2BC$ nên
$AD \parallel BC$, $AC \cap BD = O \Rightarrow \dfrac{OC}{OA} = \dfrac{OB}{OD} = \dfrac{BC}{AD} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \dfrac{DO}{DB} = \dfrac{2}{3}$.
Mặt khác, vì $MD = 2MS$ nên $\dfrac{DM}{DS} = \dfrac{2}{3}$.
$\Rightarrow \dfrac{DO}{DB} = \dfrac{DM}{DS} \Rightarrow OM \parallel SB$.
Mà $SB \subset (SBC)$, $OM \not\subset (SBC)$.
Nên $OM \parallel (SBC)$.

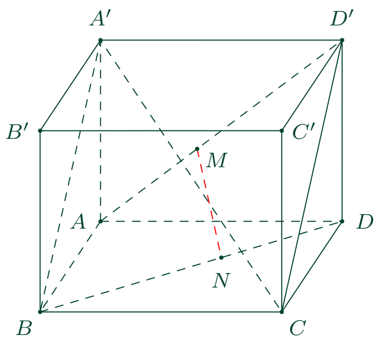


Chọn đáp án (C) □

CÂU 26. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các mặt là hình vuông cạnh a. Các điểm M, N lần lượt nằm trên AD', DB sao cho $AM = DN = x$ $\left(0 < x < a\sqrt{2}\right)$. Khi x thay đổi, đường thẳng MN luôn song song với mặt phẳng cố định nào sau đây?

A $(CB'D')$. **B** $(A'BC)$. **C** $(AD'C)$. **D** $(BA'C')$.

Lời giải.



Cách 1: Sử dụng định lí Ta-lét thuận

Vì $AD \parallel A'D'$ nên tồn tại (P) là mặt phẳng qua AD và song song với mp $(A'D'CB)$.
(Q) là mặt phẳng qua M và song song với mp $(A'D'CB)$.
Giả sử (Q) cắt DB tại N'.
Theo định lí Ta-lét ta có $\dfrac{AM}{AD'} = \dfrac{DN'}{DB}$. $(*)$.
Mà các mặt của hình hộp là hình vuông cạnh a nên $AD' = DB = a\sqrt{2}$.
Từ $(*)$ ta có $AM = DN' \Rightarrow DN' = DN \Rightarrow N' \equiv N \Rightarrow MN \subset (Q)$.
$(Q) \parallel (A'D'CB)$ suy ra MN luôn song song với mặt phẳng cố định $(A'D'CB)$ hay $(A'BC)$.

Cách 2: Sử dụng định lí Ta-lét đảo

Từ giả thiết ta có $\dfrac{AM}{DN} = \dfrac{MD'}{NB} = \dfrac{AD'}{DB}$.

Suy ra AD, MN và $D'B$ luôn song song với một mặt phẳng.
Vậy MN luôn song song với một mặt phẳng (P), mà (P) song song với AD và $D'B$.
Mặt phẳng này chính là mp $(A'D'CB)$ hay $(A'BC)$.

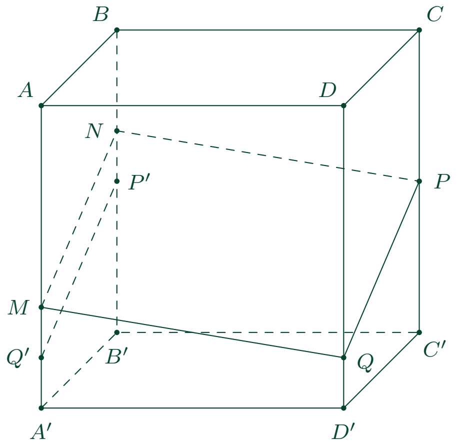
Chọn đáp án (B) □

CÂU 27. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Trên các cạnh AA', BB', CC' lần lượt lấy ba điểm M, N, P sao cho $\dfrac{A'M}{AA'} = \dfrac{1}{3}$; $\dfrac{B'N}{BB'} = \dfrac{2}{3}$; $\dfrac{C'P}{CC'} = \dfrac{1}{2}$. Biết mặt phẳng (MNP) cắt cạnh DD' tại Q. Tính tỉ số $\dfrac{D'Q}{DD'}$.

A $\dfrac{1}{6}$. **B** $\dfrac{1}{3}$. **C** $\dfrac{5}{6}$. **D** $\dfrac{2}{3}$.

Lời giải.

Gọi độ dài cạnh bên của hình hộp là a.
Giao tuyến của mặt phẳng (MNP) với $(CDD'C')$ là đường thẳng đi qua P và song song với MN
Gọi P' là trung điểm BB' và $Q' \in AA'$, $MN \parallel P'Q'$.
Khi đó tứ giác $MNP'Q'$ là hình bình hành và $NP' = \dfrac{2}{3}a - \dfrac{1}{2}a = \dfrac{1}{6}a$.
Do đó $MQ' = \dfrac{1}{6}a$.
Suy ra $Q'A' = MA' - MQ' = \dfrac{1}{6}a$.
Vậy $\dfrac{A'Q'}{AA'} = \dfrac{D'Q}{DD'} = \dfrac{1}{6}$.

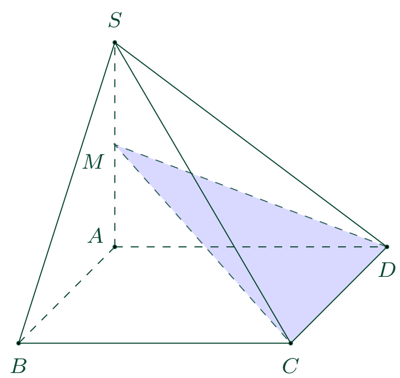


Chọn đáp án (A) □

Dạng 20. Giao điểm, giao tuyến liên quan đến đường thẳng song song với mặt phẳng

CÂU 1.
Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi M là trung điểm của SA. Giao điểm của đường thẳng SB và mặt phẳng (CMD) là

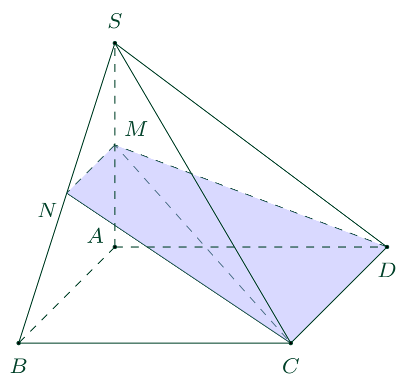
A Không có giao điểm.
B Giao điểm của đường thẳng SB và MC.
C Giao điểm của đường thẳng SB và MD.
D Trung điểm của đoạn thẳng SB.



Lời giải.

Ta có $\begin{cases} AB \parallel CD \\ M \in (CMD) \cap (SAB) \\ CD \subset (CMD),\ AB \subset (SAB) \end{cases}$

Suy ra giao tuyến của hai mặt phẳng (CMD) và (SAB) là đường thẳng $MN \parallel AB \parallel CD$ với $N \in SB$.
Suy ra N là giao điểm của đường thẳng SB và mặt phẳng (CMD).
Xét tam giác $\triangle SAB$ có M là trung điểm SA và $MN \parallel AB \Rightarrow N$ là trung điểm SB.



Chọn đáp án (D) □

CÂU 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Gọi M là trung điểm AO. Mặt phẳng (α) qua M và song song với BD; SA và mặt phẳng (α) cắt SC tại N. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

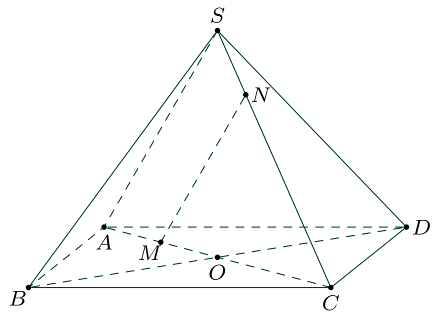
(A) $SN=\dfrac{1}{4}NC$. (B) $SN=NC$. (C) $SN=\dfrac{1}{3}NC$. (D) $SN=\dfrac{1}{2}NC$.

Lời giải.

Vì $\begin{cases}SA \parallel (\alpha)\\(SAC)\cap(\alpha)=MN\end{cases} \Rightarrow MN \parallel SA$.

Xét tam giác SAC có $\dfrac{SN}{NC}=\dfrac{AM}{MC}$.

Mặt khác $ABCD$ là hình bình hành tâm O, kết hợp M là trung điểm AO dẫn đến $CO=AO=2AM=2MO$ suy ra $MC=3AM$ hay $\dfrac{MC}{AM}=\dfrac{SN}{NC}=\dfrac{1}{3}$.



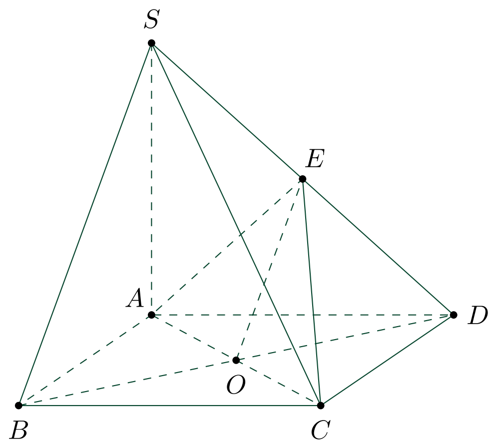
Chọn đáp án (C) □

CÂU 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi (α) là mặt phẳng đi qua AC và song song với SB. Mặt phẳng (α) cắt SD tại E. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau

(A) $SE=\dfrac{1}{3}ED$. (B) $SE=\dfrac{1}{2}SD$. (C) $SE=\dfrac{1}{3}SD$. (D) $SE=2SD$.

Lời giải.

Gọi $O=AC\cap BD$ suy ra $O\in AC\subset(\alpha)$ và $O\in(SBD)$.
Vậy $(SBD)\cap(\alpha)$.
Ta có $SB \parallel (\alpha)$, $SB\subset(SBD)$.
Giả sử $d=(SBD)\cap(\alpha)$, thì d đi qua O và $d \parallel SB$.
Trong mặt phẳng (SBD), kẻ d đi qua O và $d \parallel SB$ cắt (SD) tại E, suy ra $E=SD\cap(\alpha)$.
Ta có OE là đường trung bình của $\triangle SBD$.
Vậy E là trung điểm của SD, suy ra $SE=\dfrac{1}{2}SD$.



Chọn đáp án (B) □

CÂU 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm O, M là một điểm thuộc đoạn SA sao cho $2MA=SM$, điểm N là điểm thuộc tia đối của tia OS sao cho $3ON=SO$, G là trọng tâm tam giác SCD. Gọi $K=SD\cap(GMN)$. Biết rằng và $(a,b)=1$. Tính $S=a+b$.

(A) 3. (B) 2. (C) 4. (D) 5.

Lời giải.

Trong (SAC), từ O dựng đường thẳng d song song với SA, cắt MN tại E. Ta có

$OE \parallel SM \Rightarrow \dfrac{OE}{SM}=\dfrac{ON}{SN}=\dfrac{1}{4}$

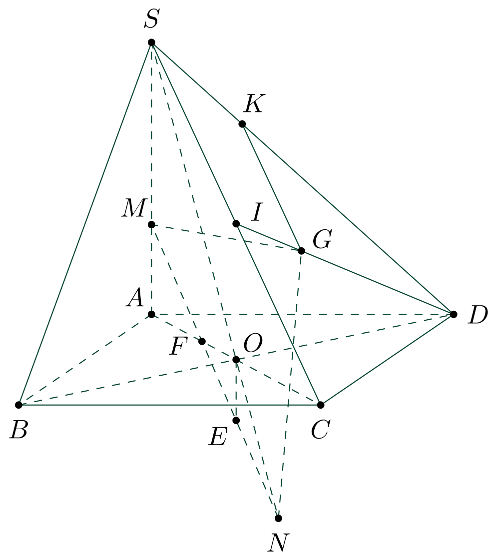
$\Rightarrow \dfrac{OE}{2MA}=\dfrac{1}{4}\Rightarrow\dfrac{OE}{MA}=\dfrac{1}{2}$.

Trong (SAC), gọi $F=MN\cap AC$ ta có

$OE \parallel MA \Rightarrow \dfrac{OE}{MA}=\dfrac{OF}{AF}=\dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow \dfrac{AF}{AO}=\dfrac{2}{3}\Rightarrow\dfrac{AF}{AC}=\dfrac{1}{3}$.

Ta có $\dfrac{AM}{SA}=\dfrac{AF}{AC}=\dfrac{1}{3}\Rightarrow MN \parallel SC$.



Ta có $\begin{cases}G\in(GMN)\cap(SCD)\\MN \parallel SC\\MN\subset(GMN),\ SC\subset(SCD)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}xGx'=(GMN)\cap(SCD)\\xGx' \parallel SC \parallel MN\end{cases}$

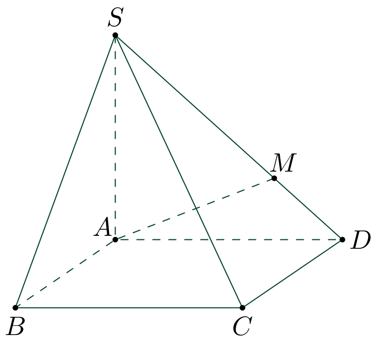
Gọi $K = xGx' \cap SD \Rightarrow \begin{cases} K \in xGx', xGx' \subset (GMN) \\ K \in SD \end{cases} \Rightarrow K = SD \cap (GMN)$.

Ta có $GK \parallel SC \Rightarrow \dfrac{DK}{SD} = \dfrac{DG}{DI} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow \dfrac{SK}{KD} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow a = 1, b = 2 \Rightarrow a + b = 3$.

Chọn đáp án (A) □

CÂU 5.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M là điểm thuộc cạnh SD sao cho $SM = \dfrac{2}{3}SD$. Mặt phẳng chứa AM và song song với BD cắt cạnh SC tại K. Tỷ số $\dfrac{SK}{SC}$ bằng



A $\dfrac{1}{3}$. **B** $\dfrac{2}{3}$. **C** $\dfrac{1}{2}$. **D** $\dfrac{3}{4}$.

Lời giải.

Trong mặt phẳng (SBD) qua M vẽ đường thẳng song song với BD cắt SB tại N.
Trong mặt phẳng $(ABCD)$ gọi $O = AC \cap BD$.
Trong mặt phẳng (SBD) gọi $I = SO \cap MN$.
Trong mặt phẳng (SAC) gọi $K = AI \cap SC$.
Suy ra

$$\begin{cases} K \in AI \subset (AMN) \\ K \in SC \end{cases}$$

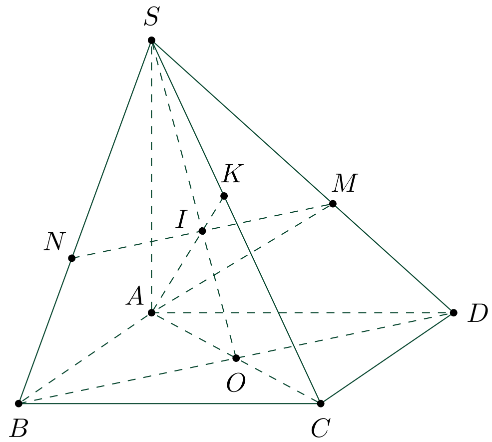
$\Rightarrow K = SC \cap (AMN)$.

$\triangle SOD$ có $MI \parallel DO \Rightarrow \dfrac{SI}{SO} = \dfrac{SM}{SD} = \dfrac{2}{3}$.

$\triangle SAC$ có SO là trung tuyến và $\dfrac{SI}{SO} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow I$ là trọng tâm tam giác $\triangle SAC$.

Nên AK là đường trung tuyến của $\triangle SAC$.

Do đó K là trung điểm của $SC \Rightarrow \dfrac{SK}{SC} = \dfrac{1}{2}$.



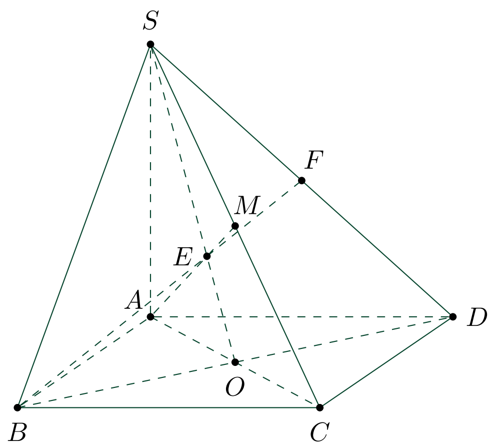
Chọn đáp án (C) □

CÂU 6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M là trung điểm SC, F là giao điểm của đường thẳng SD với mặt phẳng (ABM). Tính tỉ số $\dfrac{SF}{SD}$.

A 1. **B** $\dfrac{1}{3}$. **C** $\dfrac{2}{3}$. **D** $\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Chọn mặt phẳng (SBD) chứa SD.
Tìm giao tuyến của mặt phẳng (SBD) và mặt phẳng (ABM)
Ta có $B \in (SBD) \cap (ABM)$.
Gọi $O = AC \cap BD$.
Trong mặt phẳng (SAC) gọi $E = AM \cap SO$ thì
$\begin{cases} E \in AM,\ AM \subset (ABM) \\ E \in SO,\ SO \subset (SBD) \end{cases}$
$\Rightarrow E \in (SBD) \cap (ABM)$.
$\Rightarrow BE = (SBD) \cap (ABM)$.
Trong mặt phẳng (SBD) gọi $F = SD \cap BE$ thì
$\begin{cases} F \in SD \\ F \in BE,\ BE \subset (ABM) \end{cases} \Rightarrow F = SD \cap (ABM)$.



Vì O là trung điểm AC, M là trung điểm SC nên E là trọng tâm tam giác SAC

Suy ra $\dfrac{SE}{SO} = \dfrac{2}{3}$.

Trong tam giác SBD có SO là trung tuyến và $\dfrac{SE}{SO} = \dfrac{2}{3}$ nên E là trọng tâm tam giác SBD.

Suy ra BF là trung tuyến của tam giác SBD.

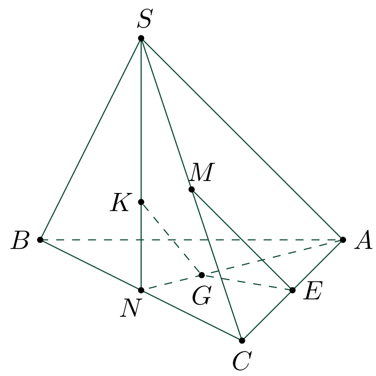
Do đó F là trung điểm SD, suy ra $\dfrac{SF}{SD} = \dfrac{1}{2}$.

Chọn đáp án (D) □

CÂU 7. Cho hình chóp $S.ABC$ có G, K lần lượt là trọng tâm của các tam giác ABC và SBC, gọi E là trung điểm của AC. Mặt phẳng (GEK) cắt SC tại M. Tỉ số $\dfrac{MS}{MC}$ bằng

A 1. **B** 2. **C** $\dfrac{2}{3}$. **D** $\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.



Gọi N là trung điểm của BC, theo đầu bài ta có G, K lần lượt là trọng tâm của các tam giác ABC và SBC nên ta có

$$\frac{NK}{NS} = \frac{NG}{NA} = \frac{1}{3} \Rightarrow GK \parallel SA \Rightarrow (GEK) \parallel SA.$$

Từ trên mặt phẳng (SAC), ta dựng đường thẳng đi qua E và song song với SA cắt SC tại M. Ta có

$$\begin{cases} EM \parallel SA \\ GK \parallel SA \end{cases} \Rightarrow EM \parallel GK$$

$\Rightarrow M \in (EGK)$ vậy $(EGK) \cap SC = M$.

Do E là trung điểm của AC, $EM \parallel SC \Rightarrow EM$ là đường trung bình của tam giác SAC.

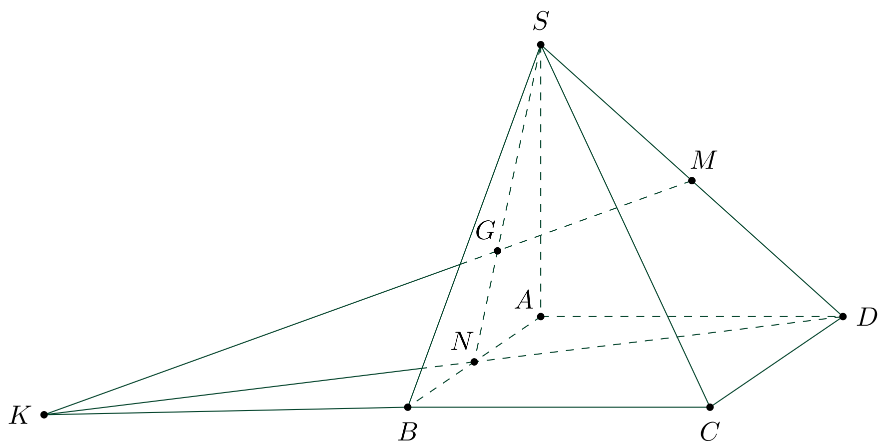
Vậy tỉ số $\dfrac{MS}{MC} = 1$.

Chọn đáp án (A) □

CÂU 8. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi M là trung điểm của SD, G là trọng tâm tam giác SAB, K là giao điểm của GM với mặt phẳng $ABCD$. Tỉ số $\dfrac{KB}{KC}$ bằng

A $\dfrac{2}{3}$. **B** 2. **C** $\dfrac{1}{2}$. **D** $\dfrac{3}{2}$.

Lời giải.



Gọi N là trung điểm của AB.

Trong mặt phẳng (SDN), $GM \cap DN = \{K\}$.

Ta có $\begin{cases} K \in GM \\ K \in DN \subset (ABCD) \end{cases} \Rightarrow GM \cap (ABCD) = K$.

Áp dụng định lý Menelaus cho tam giác SND với ba điểm M, G, K thẳng hàng ta có

$$\frac{NK}{KD} \cdot \frac{DM}{MS} \cdot \frac{SG}{GN} = 1 \Leftrightarrow \frac{NK}{KD} \cdot 1 \cdot 2 = 1 \Leftrightarrow \frac{NK}{KD} = \frac{1}{2}$$

Suy ra N là trung điểm của KD.

Mà N cũng là trung điểm của AB nên tứ giác $ADBK$ là hình bình hành.

Suy ra $KB = AD = BC \Rightarrow \dfrac{KB}{KC} = \dfrac{1}{2}$.

Chọn đáp án (C) □

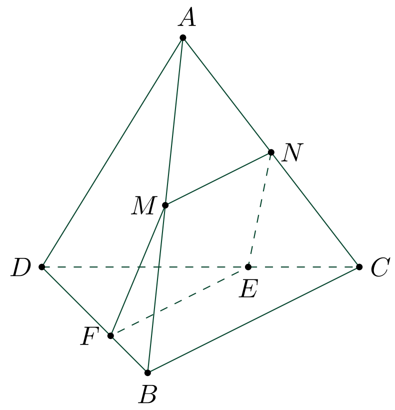
Dạng 21. Xác định thiết diện và một số bài toán liên quan

CÂU 1. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và AC, E là điểm trên cạnh CD sao cho $ED = 3EC$. Thiết diện tạo bởi mặt phẳng (MNE) và tứ diện $ABCD$ là hình

A Tam giác. **B** Hình vuông. **C** Hình thang. **D** Hình chữ nhật.

Lời giải.

Tam giác ABC có M, N lần lượt là trung điểm của AB và AC.
Suy ra MN là đường trung bình của tam giác ABC
$\Rightarrow MN \parallel BC$.
Từ E kẻ đường thẳng song song với BC và cắt BD tại $F \Rightarrow EF \parallel BC$.
Do đó $MN \parallel EF$ suy ra bốn điểm M, N, E, F đồng phẳng và $MNEF$ là hình thang.
Vậy hình thang $MNEF$ là thiết diện cần tìm.



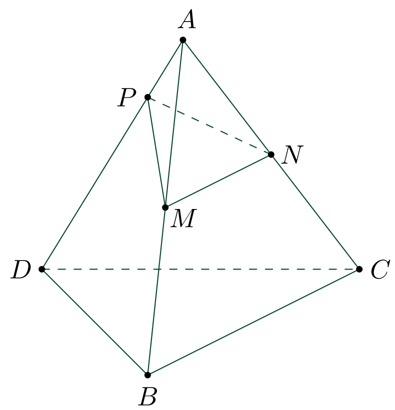
Chọn đáp án (C) □

CÂU 2. Cho tứ diện $ABCD$, M và N lần lượt là trung điểm của AB và AC. Mặt phẳng (α) qua MN cắt tứ diện $ABCD$ theo thiết diện là đa giác T. Khẳng định nào sau đây đúng?

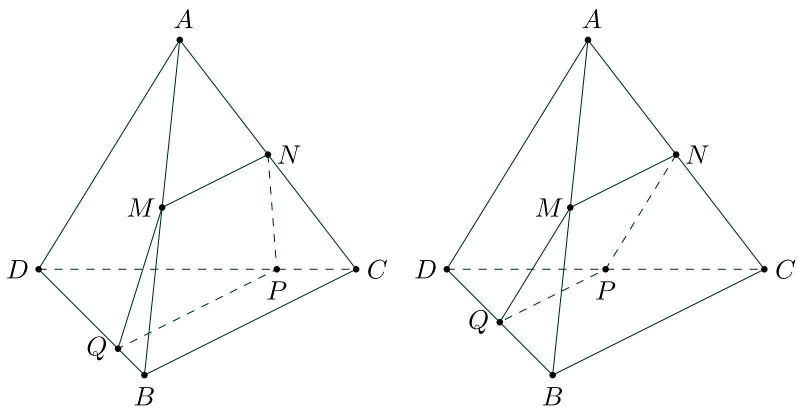
A T là hình thang. **B** T là tam giác hoặc hình thang hoặc hình bình hành.
C T là hình chữ nhật. **D** T là tam giác.

Lời giải.

Trường hợp 1: Mặt phẳng (α) qua MN và cắt đoạn AD tại điểm P. Khi đó thiết diện là tam giác MNP.



Trường hợp 2: Mặt phẳng (α) qua MN và cắt mặt phẳng (BCD) theo giao tuyến là PQ. Thiết diện là hình thang $MNPQ$ hoặc hình bình hành $MNPQ$.



Chọn đáp án (B) □

CÂU 3. Cho tứ diện $ABCD$ có $AD = 9\ cm$, $CB = 6\,cm$. Điểm M bất kì trên cạnh CD. Mặt phẳng (α) qua M và song song với AD, BC. Nếu thiết diện của tứ diện cắt bởi mặt phẳng (α) là hình thoi thì cạnh của hình thoi đó bằng

A $3\ (cm)$. **B** $\frac{7}{2}\ (cm)$. **C** $\frac{31}{8}\ (cm)$. **D** $\frac{18}{5}\ (cm)$.

Lời giải.

Thiết diện là hình bình hành $MNPQ$.

Ta có

$$\frac{MN}{BC} = \frac{DN}{BD} \Leftrightarrow \frac{MN}{6} = \frac{DN}{BD}$$

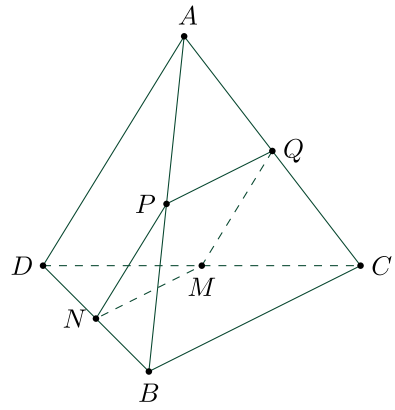
và

$$\frac{PN}{AD} = \frac{BN}{BD} \Leftrightarrow \frac{PN}{9} = \frac{BN}{BD}$$

Suy ra $\frac{MN}{6} + \frac{PN}{9} = 1$.

Khi thiết diện là hình thoi thì $MN = PN$ nên

$$\frac{MN}{9} + \frac{MN}{6} = 1 \Leftrightarrow MN = \frac{18}{5}.$$



Chọn đáp án (D) □

CÂU 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang với đáy lớn AD, M là trung điểm cạnh SA, N là điểm trên cạnh SC sao cho $SN = 3NC$. Mặt phẳng (α) chứa MN và song song với SB cắt hình chóp theo thiết diện là

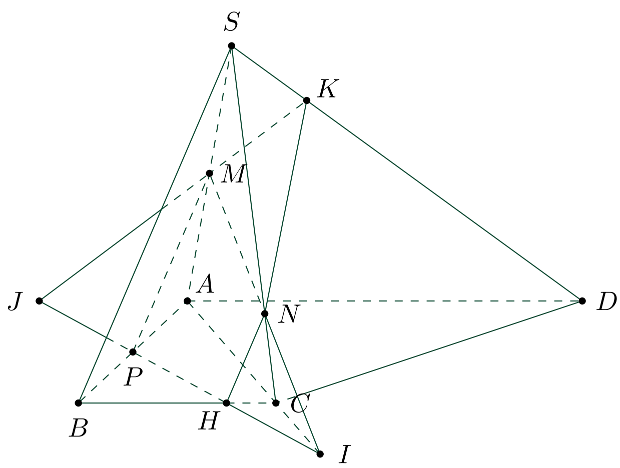
(A) Tam giác MNK với K thuộc SD.

(B) Tam giác MNP với P là trung điểm của AB.

(C) Hình thang.

(D) Ngũ giác.

Lời giải.



Trong mặt phẳng (SAC) vì MN không song song với AC nên gọi $I = MN \cap AC$.

Mặt phẳng $(\alpha) \parallel AB$ nên $(\alpha) \cap (SAB) = MP$ với $MP \parallel SB$ và $P \in AB$.

Suy ra P là trung điểm của AB.

Trong $(ABCD)$ đường thẳng IP cắt AD và BC lần lượt tại J và H.

Trong mặt phẳng (SAD), JM cắt SD tại K.

Ta có

$$\begin{cases} MP = (\alpha) \cap (SAB) \\ PH = (\alpha) \cap (ABCD) \\ HN = (\alpha) \cap (SBC) \\ NK = (\alpha) \cap (SCD) \\ KM = (\alpha) \cap (SDA). \end{cases}$$

Vậy thiết diện cần tìm là ngũ giác $MPHNK$.

Chọn đáp án (D) □

CÂU 5. Trong không gian, cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, M, N lần lượt là trung điểm đoạn SC, BC. Thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mặt phẳng (α) qua MN song song với BD là hình gì?

(A) Tam giác.

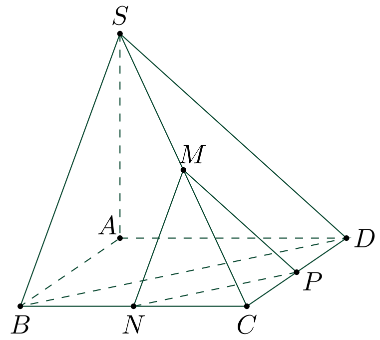
(B) Ngũ giác.

(C) Lục giác.

(D) Tứ giác.

Lời giải.

Gọi $(\alpha) \cap CD = P \Rightarrow NP \parallel BD$.
Vậy $(\alpha) \cap (SCD) = PM; (\alpha) \cap (SBC) = MN$.
Suy ra, ta được thiết diện cần tìm là tam giác MNP.



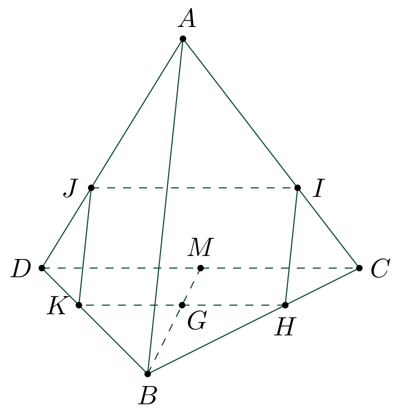
Chọn đáp án (A) □

CÂU 6. Cho tứ diện $ABCD$ có G là trọng tâm của tam giác BCD. Gọi (P) là mặt phẳng qua G, song song với AB và CD. Thiết diện của tứ diện $ABCD$ cắt bởi (P) là

(A) Hình thang. (B) Hình bình hành. (C) Hình tam giác. (D) Tam giác đều.

Lời giải.

Gọi Δ là giao tuyến của (P) và (BCD). Khi đó Δ đi qua G và song song với CD.
Gọi H, K lần lượt là giao điểm của Δ với BC và BD.
Giả sử (P) cắt (ABC) và (ABD) theo các giao tuyến là HI và KJ.
Ta có $(P) \cap (ABC) = HJ$, $(P) \cap (ABD) = KJ$ mà $AB \parallel (P)$ nên $HI \parallel AB \parallel KJ$.



Theo định lí Thalet, ta có $\dfrac{BH}{HC} = \dfrac{BK}{KD} = 2$ suy ra $\begin{cases} \dfrac{HI}{AB} = \dfrac{CH}{CB} = \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{KJ}{AB} = \dfrac{DK}{DB} = \dfrac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow HI = KJ$.

Vậy thiết diện của (P) và tứ diện $ABCD$ là hình bình hành $HIJK$.

Chọn đáp án (B) □

CÂU 7. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = 6, CD = 8$, cắt tứ diện bởi một mặt phẳng song song với AB, CD để thiết diện thu được là một hình thoi. Cạnh của hình thoi đó bằng

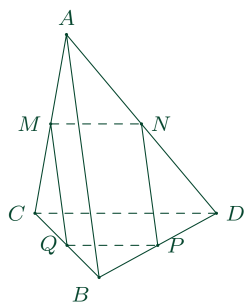
(A) $\dfrac{31}{7}$. (B) $\dfrac{18}{7}$. (C) $\dfrac{24}{7}$. (D) $\dfrac{15}{7}$.

Lời giải.

Giả sử một mặt phẳng song song với AB, CD cắt tứ diện $ABCD$ theo một thiết diện là hình thoi $MNPQ$ như hình vẽ bên.

Khi đó ta có $\begin{cases} MQ \parallel NP \parallel AB \\ MN \parallel CD \parallel PQ \\ MQ = PQ. \end{cases}$

Theo định lí Ta-lét ta có



$$\frac{CQ}{CB} = \frac{CM}{CA} = \frac{MQ}{AB} = k_1 \Rightarrow MQ = k_1 AB = 6k_1 \cdot \frac{BQ}{BC} = \frac{BP}{BD} = \frac{PQ}{CD} = k_2 \Rightarrow PQ = k_2 CD = 8k_2.$$

Ta có $k_1 + k_2 = \dfrac{CQ}{CB} + \dfrac{BQ}{BC} = 1\ (*)$.
Ta lại có $MP = PQ \Rightarrow 6k_1 = 8k_2\ (**)$.
Từ $(*)$ và $(**)$ suy ra $k_1 = \dfrac{4}{7}$, $k_2 = \dfrac{3}{7} \Rightarrow MQ = 6 \cdot \dfrac{4}{7} = \dfrac{24}{7}$.

Chọn đáp án (C) □

CÂU 8. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang với đáy lớn là AB, điểm M là trung điểm CD. Mặt phẳng (α) qua M và song song với cả SA, BC cắt hình chóp theo một thiết diện là

(A) hình tam giác. (B) hình bình hành. (C) hình thoi. (D) hình thang.

Lời giải.

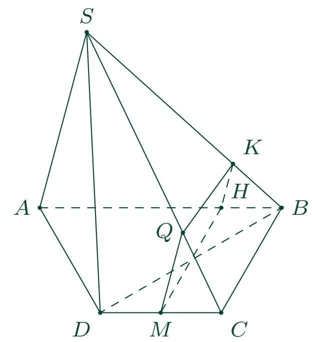
• Ta có $\begin{cases} M \in (\alpha) \cap (ABCD) \\ BC \parallel (\alpha) \\ BC \subset (ABCD) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (ABCD) = MH\,(MH \parallel BC, H \in AB)$.

• Ta có $\begin{cases} H \in (\alpha) \cap (SAB) \\ SA \parallel (\alpha) \\ SA \subset (SAB) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (SAB) = HK\,(HK \parallel SA, K \in SB)$.

• Ta có $\begin{cases} K \in (\alpha) \cap (SBC) \\ BC \parallel (\alpha) \\ BC \subset (SBC) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (SBC) = KQ\,(KQ \parallel BC, Q \in SC)$.

• Ta có $\begin{cases} Q \in (\alpha) \cap (SCD) \\ M \in (\alpha) \cap (SCD) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (SCD) = QM$.

Thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (α) hình thang $HKQM$.



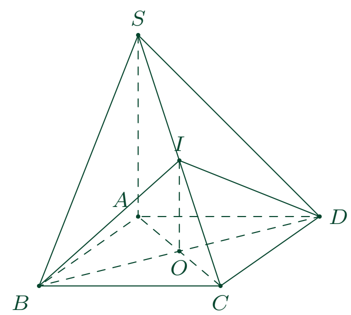
Chọn đáp án (D) □

CÂU 9. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O, I là trung điểm cạnh SC. Khẳng định nào sau đây **sai**?

(A) Đường thẳng IO song song với mặt phẳng (SAD).
(B) Mặt phẳng (IBD) cắt hình chóp $S.ABCD$ theo thiết diện là một tứ giác.
(C) Đường thẳng IO song song với mặt phẳng (SAB).
(D) Giao tuyến của hai mặt phẳng (IBD) và (SAC) là IO.

Lời giải.

• Xét: Đường thẳng IO song song với mặt phẳng (SAD).
đúng vì $IO \parallel SA \Rightarrow IO \parallel (SAD)$.
• Xét: Mặt phẳng (IBD) cắt hình chóp $S.ABCD$ theo thiết diện là một tứ giác.
sai vì mặt phẳng (IBD) cắt hình chóp $S.ABCD$ theo thiết diện là tam giác IBD.
• Xét: Đường thẳng IO song song với mặt phẳng (SAB).
đúng vì $IO \parallel SA \Rightarrow IO \parallel (SAB)$.
• Xét: Giao tuyến của hai mặt phẳng (IBD) và (SAC) là IO.
đúng vì $(IBD) \cap (SAC) = IO$.



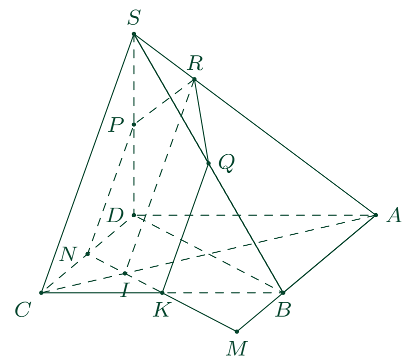
Chọn đáp án (B) □

CÂU 10. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MA} = 3\overrightarrow{MB}$. Mặt phẳng (P) qua M và song song với SC, BD. Mệnh đề nào sau đây đúng?

(A) (P) cắt hình chóp theo thiết diện là một ngũ giác.
(B) (P) cắt hình chóp theo thiết diện là một tam giác.
(C) (P) cắt hình chóp theo thiết diện là một tứ giác.
(D) (P) không cắt hình chóp.

Lời giải.

• Trong $(ABCD)$, kẻ đường thẳng qua M và song song với BD cắt BC, CD, CA tại K, N, I.
• Trong (SCD), kẻ đường thẳng qua N và song song với SC cắt SD tại P.
• Trong (SCB), kẻ đường thẳng qua K và song song với SC cắt SB tại Q.
• Trong (SAC), kẻ đường thẳng qua I và song song với SC cắt SA tại R.
Thiết diện là ngũ giác $KNPRQ$.



Chọn đáp án (A) □

CÂU 11. Cho tứ diện $ABCD$. Điểm M thuộc đoạn AC (M khác A, M khác C). Mặt phẳng (α) đi qua M song song với AB và AD. Thiết diện của (α) với tứ diện $ABCD$ là hình gì?

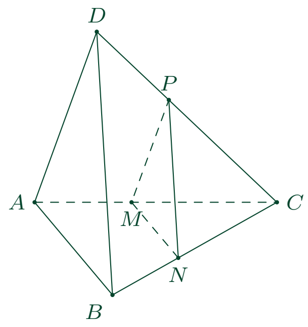
(A) Hình vuông. (B) Hình chữ nhật. (C) Hình tam giác. (D) Hình bình hành.

Lời giải.

Ta có $\left.\begin{matrix}(\alpha) \parallel AB \\ AB \subset (ABC)\end{matrix}\right\} \Rightarrow (\alpha) \cap (ABC) = MN$ với $MN \parallel AB$ và $N \in BC$.

Ta có $\left.\begin{matrix}(\alpha) \parallel AD \\ AD \subset (ADC) \\ (\alpha) \cap (BCD) = NP\end{matrix}\right\} \Rightarrow (\alpha) \cap (ADC) = MP$, với $MP \parallel AD$ và $P \in CD$.

Do đó thiết diện của (α) với tứ diện $ABCD$ là hình tam giác MNP.



Chọn đáp án (C)

CÂU 12. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O, gọi I là trung điểm cạnh SC. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

(A) Đường thẳng IO song song với mặt phẳng (SAD).

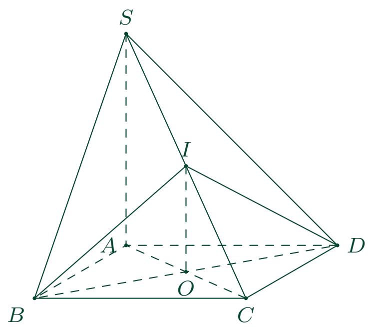
(B) Đường thẳng IO song song với mặt phẳng (SAB).

(C) Mặt phẳng (IBD) cắt mặt phẳng (SAC) theo giao tuyến OI.

(D) Mặt phẳng (IBD) cắt hình chóp $S.ABCD$ theo một thiết diện là tứ giác.

Lời giải.

Trong tam giác SAC có O là trung điểm AC, I là trung điểm SC nên $IO \parallel SA$
$\Rightarrow IO$ song song với hai mặt phẳng (SAB) và (SAD).
Mặt phẳng (IBD) cắt (SAC) theo giao tuyến IO.
Mặt phẳng (IBD) cắt (SBC) theo giao tuyến BI, cắt (SCD) theo giao tuyến ID, cắt $(ABCD)$ theo giao tuyến BD
$\Rightarrow$ thiết diện tạo bởi mặt phẳng (IBD) và hình chóp $S.ABCD$ là tam giác IBD.



Chọn đáp án (D)

CÂU 13. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O, I là trung điểm cạnh SC. Khẳng định nào sau đây **sai**?

(A) $IO \parallel (SAB)$.

(B) $IO \parallel (SAD)$.

(C) Mặt phẳng (IBD) cắt hình chóp $S.ABCD$ theo thiết diện là một tứ giác.

(D) $(IBD) \cap (SAC) = OI$.

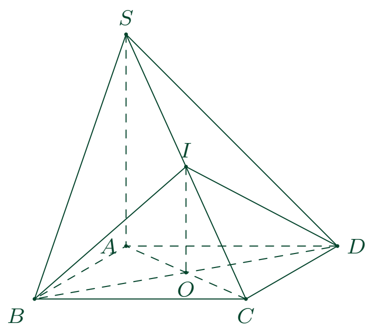
Lời giải.

Trong mặt phẳng (SAC) có I, O lần lượt là trung điểm của SC, SA nên $IO \parallel SA$.

Suy ra $\left\{\begin{matrix}IO \parallel (SAB) \\ IO \parallel (SAD)\end{matrix}\right.$.

Hai mặt phẳng (SAC) và (IBD) có hai điểm chung là O, I nên giao tuyến của hai mặt phẳng là IO.

Thiết diện của mặt phẳng (IBD) cắt hình chóp $(S.ABCD)$ chính là tam giác IBD.



Chọn đáp án (C)

CÂU 14. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$, có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N, I lần lượt là trung điểm của các cạnh SA, SB và BC. Thiết diện tạo bởi mặt phẳng và hình chóp S.ABCD là

(A) Tứ giác $MNIK$ với K là điểm bất kỳ trên cạnh AD.

(B) Tam giác MNI.

(C) Hình bình hành $MNIK$ với K là điểm trên cạnh AD mà $IK \parallel AB$.

(D) Hình Thang $MNIK$ với K là một điểm trên cạnh AD mà $IK \parallel AB$.

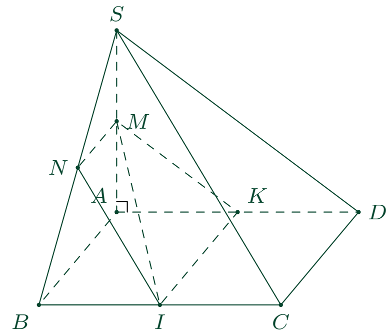
Lời giải.

Ta xét ba mặt phẳng, đôi một cắt nhau theo 3 giao tuyến song song.

$$\left.\begin{array}{l}(MNI)\cap(SAB)=MN\\(SAB)\cap(ABCD)=AB\\MN \mathbin{/\!/}= \dfrac{1}{2}AB\end{array}\right\}\Rightarrow (MNI)\cap(ABCD)=d \mathbin{/\!/} AB,\ d \text{ đi qua } I,\ d\cap AD=\{K\}$$

sao cho $IK \mathbin{/\!/}= AB$.

Vậy thiết diện cần tìm là Hình thang $MNIK$ với K là điểm trên cạnh AD mà $IK \mathbin{/\!/} AB$.



Chọn đáp án (D) □

CÂU 15. Gọi (P) là mặt phẳng qua H, song song với CD và SB. Thiết diện tạo bởi (P) và hình chóp $S.ABCD$ là hình gì?

(A) Ngũ giác. (B) Hình bình hành.
(C) Tứ giác không có cặp cạnh đối nào song song. (D) Hình thang.

Lời giải.

(P) là mặt phẳng qua H, song song với CD và SB nên (P) cắt $(ABCD)$ theo giao tuyến qua H song song CD cắt BC, AD lần lượt tại F, E; (P) cắt (SBC) theo giao tuyến $FI \mathbin{/\!/} SB$ $(I\in SC)$; (P) cắt (SCD) theo giao tuyến $JI \mathbin{/\!/} CD$ $(J\in SD)$. Khi đó thiết diện tạo bởi (P) và hình chóp $S.ABCD$ là hình thang vì $JI \mathbin{/\!/} FE$, $FI \mathbin{/\!/} SB$, $JE \mathbin{/\!/} SA$ nên FI không song song với JE

Chọn đáp án (D) □

CÂU 16. Cho tứ diện $ABCD$. Điểm M thuộc đoạn AC. Mặt phẳng (α) qua M song song với AB và AD. Thiết diện của (α) với tứ diện $ABCD$ là hình gì?

(A) Hình tam giác. (B) Hình bình hành. (C) Hình thang. (D) Hình ngũ giác.

Lời giải.

(α) và (ABC) có M chung, (α) song song với AB, $AB\subset(ABC)$.

$\Rightarrow (\alpha)\cap(ABC)=Mx, Mx \mathbin{/\!/} AB$ và $Mx\cap BC=N$.

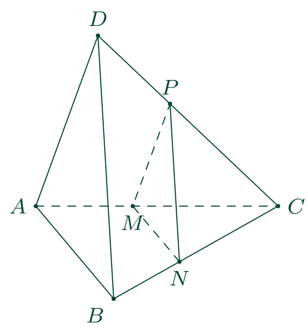
(α) và (ACD) có M chung, (α) song song với AD, $AD\subset(ACD)\Rightarrow(\alpha)\cap(ACD)=My, My \mathbin{/\!/} AD$ và $My\cap CD=P$.

Ta có $(\alpha)\cap(ABC)=MN$.

$(\alpha)\cap(ACD)=MP$.

$(\alpha)\cap(BCD)=NP$.

Thiết diện của (α) với tứ diện $ABCD$ là tam giác MNP.



Chọn đáp án (A) □

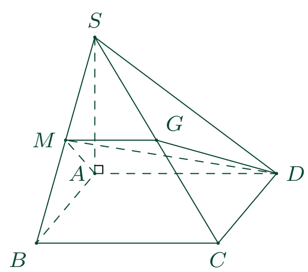
CÂU 17. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. M là một điểm thuộc đoạn SB. Mặt phẳng (ADM) cắt hình chóp $S.ABCD$ theo thiết diện là

(A) Hình thang. (B) Hình chữ nhật. (C) Hình bình hành. (D) Tam giác.

Lời giải.

Do $BC \mathbin{/\!/} AD$ nên mặt phẳng (ADM) và (SBC) có giao tuyến là đường thẳng MG song song với BC.

Thiết diện là hình thang $AMGD$.

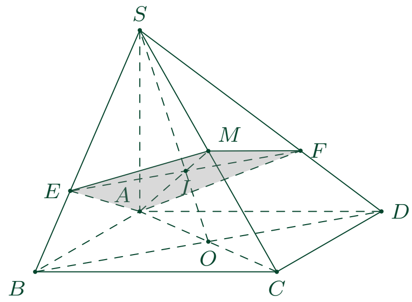


Chọn đáp án (A) □

CÂU 18. Cho hình chóp $S.ABCD$ có SA vuông góc với mặt đáy, $ABCD$ là hình vuông cạnh $a\sqrt{2}$, $SA=2a$. Gọi M là trung điểm cạnh SC, (α) là mặt phẳng đi qua A, M và song song với đường thẳng BD. Tính diện tích thiết diện của hình chóp bị cắt bởi mặt phẳng (α).

(A) $a^2\sqrt{2}$. (B) $\dfrac{4a^2}{3}$. (C) $\dfrac{4a^2\sqrt{2}}{3}$. (D) $\dfrac{2a^2\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải.



Gọi $O = AC \cap BD$, $I = SO \cap AM$. Trong mặt phẳng (SBD) qua I kẻ $EF \parallel BD$, khi đó ta có $(AEMF) \equiv (\alpha)$ là mặt phẳng chứa AM và song song với BD. Do đó thiết diện của hình chóp bị cắt bởi mặt phẳng (α) là tứ giác $AEMF$.

Ta có $\begin{cases} FE \parallel BD \\ BD \perp (SAC) \end{cases} \Rightarrow FE \perp (SAC) \Rightarrow FE \perp AM.$

Mặt khác ta có:

- $AC = 2a = SA$ nên tam giác SAC vuông cân tại A, suy ra $AM = a\sqrt{2}$.
- I là trọng tâm tam giác SAC, mà $EF \parallel BD$ nên tính được $EF = \dfrac{2}{3}BD = \dfrac{4a}{3}$.

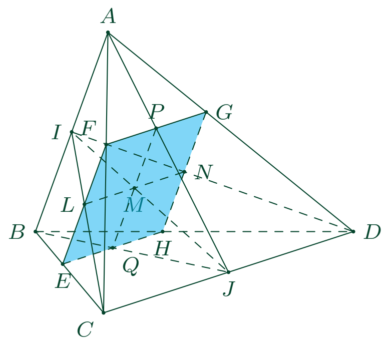
Tứ giác $AEMF$ có hai đường chéo $FE \perp AM$ nên $S_{AEMF} = \dfrac{1}{2}FE \cdot AM = \dfrac{2a^2\sqrt{2}}{3}$.

Chọn đáp án (D) □

CÂU 19. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = a$, $CD = b$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm AB và CD, giả sử $AB \perp CD$. Mặt phẳng (α) qua M nằm trên đoạn IJvà song song với AB và CD. Tính diện tích thiết diện của tứ diện $ABCD$ với mặt phẳng (α), biết $IM = \dfrac{1}{3}IJ$.

(A) ab. (B) $\dfrac{ab}{9}$. (C) $2ab$. (D) $\dfrac{2ab}{9}$.

Lời giải.



Ta có

- $\begin{cases} (\alpha) \parallel CD \\ CD \subset (ICD) \\ M \in (\alpha) \cap (ICD) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (ICD) = d \parallel CD$, d qua M, $d \cap IC = \{L\}$, $d \cap ID = \{N\}$.
- $\begin{cases} (\alpha) \parallel AB \\ AB \subset (JAB) \\ M \in (\alpha) \cap (JAB) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (JAB) = \Delta \parallel AB$, Δ qua M, $\Delta \cap JA = \{P\}$, $\Delta \cap JB = \{Q\}$.

Ta có $\begin{cases} (\alpha) \parallel AB \\ AB \subset (ABC) \\ L \in (\alpha) \cap (ABC) \end{cases} \Rightarrow EF \parallel AB \quad (1).$

Tương tự $\begin{cases} (\alpha) \parallel AB \\ AB \subset (ABD) \\ N \in (\alpha) \cap (ABD) \end{cases} \Rightarrow HG \parallel AB \quad (2).$

Từ (1), (2) $\Rightarrow EF \parallel HG \parallel AB \quad (*)$.

Ta có $\begin{cases} (\alpha) \parallel CD \\ CD \subset (ACD) \\ P \in (\alpha) \cap (ACD) \end{cases} \Rightarrow FG \parallel CD \quad (3).$

Tương tự $\begin{cases} (\alpha) \parallel CD \\ CD \subset (BCD) \\ Q \in (\alpha) \cap (BCD) \end{cases} \Rightarrow EH \parallel CD \quad (4).$

Từ (3) và (4) $\Rightarrow FG \parallel EH \parallel CD \quad (**)$.

Từ (*) và (**), suy ra $EFGH$ là hình bình hành.

Mà $AB \perp CD$ nên $EFGH$ là hình chữ nhật.

Xét tam giác ICD có: $LN \parallel CD \Rightarrow \dfrac{LN}{CD} = \dfrac{IN}{ID}$.

Xét tam giác ICD có: $MN \parallel JD \Rightarrow \dfrac{IN}{ID} = \dfrac{IM}{IJ}$.

Do đó $\dfrac{LN}{CD} = \dfrac{IM}{IJ} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow LN = \dfrac{1}{3}CD = \dfrac{b}{3}$.

Tương tự $\dfrac{PQ}{AB} = \dfrac{JM}{JI} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow PQ = \dfrac{2}{3}AB = \dfrac{2a}{3}$.

Vậy $S_{EFGH} = PQ \cdot LN = \dfrac{2ab}{9}$.

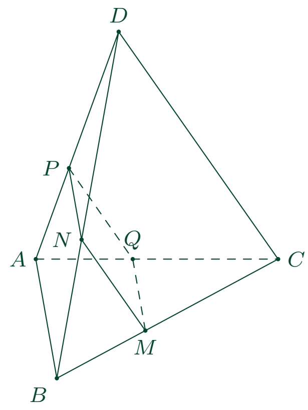
Chọn đáp án (D) □

CÂU 20. Cho tứ diện $ABCD$ có AB vuông góc với CD, $AB = CD = 6$. Gọi M là điểm thuộc cạnh BC sao cho $MC = x \cdot BC$ $(0 < x < 1)$. Mặt phẳng (P) song song với AB và CD lần lượt cắt BC, DB, AD, AC tại M, N, P, Q. Diện tích lớn nhất của tứ giác bằng bao nhiêu?

(A) 8. (B) 9. (C) 11. (D) H.

Lời giải.

Xét tứ giác $MNPQ$ có $\begin{cases} MQ \parallel NP \parallel AB \\ MN \parallel PQ \parallel CD \end{cases} \Rightarrow MNPQ$ là hình bình hành.
Mặt khác, $AB \perp CD \Rightarrow MQ \perp MN$.
Do đó $MNPQ$ là hình chữ nhật.
Vì $MQ \parallel AB$ nên $\dfrac{MQ}{AB} = \dfrac{CM}{CB} = x \Rightarrow MQ = x \cdot AB = 6x$.
Theo giả thiết $MC = x \cdot BC \Rightarrow BM = (1-x)\,BC$.
Vì $MN \parallel CD$ nên $\dfrac{MN}{CD} = \dfrac{BM}{BC} = 1 - x \Rightarrow MN = (1-x) \cdot CD = 6\,(1-x)$.
Diện tích hình chữ nhật $MNPQ$ là



$$S_{MNPQ} = MN \cdot MQ = 6(1-x)6x = 36x(1-x) \leq 36\left(\frac{x+1-x}{2}\right)^2 = 9.$$

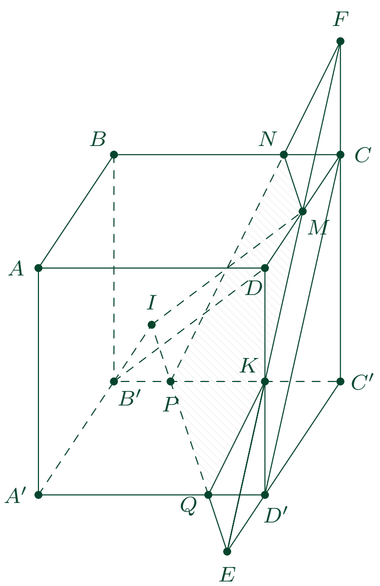
Ta có $S_{MNPQ} = 9$ khi $x = 1 - x \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2}$.
Vậy diện tích tứ giác $MNPQ$ lớn nhất bằng 9 khi M là trung điểm của BC.

Chọn đáp án B □

CÂU 21. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$, gọi M là trung điểm CD, (P) là mặt phẳng đi qua M và song song với $B'D$ và CD'. Thiết diện của hình hộp cắt bởi mặt phẳng (P) là hình gì?

A Ngũ giác. **B** Tứ giác. **C** Tam giác. **D** Lục giác.

Lời giải.



Gọi I là điểm thuộc $A'B'$ sao cho $\overrightarrow{A'I} = \dfrac{3}{2}\overrightarrow{A'B'}$, gọi K là trung điểm của DD'. Ta có

$$\begin{cases} MI \parallel DB' \\ MK \parallel CD' \end{cases} \Rightarrow (P) \equiv (MIK).$$

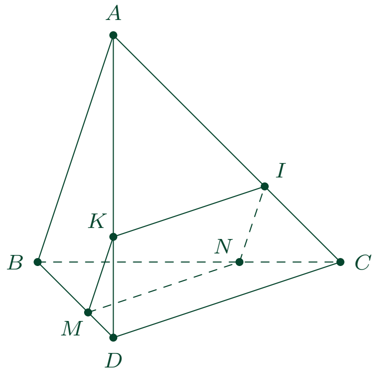
Gọi $E = MK \cap C'D'$, $F = MK \cap CC'$.
Gọi $P = IE \cap B'C'$, $Q = IE \cap A'D'$, $N = PF \cap BC$.
Thiết diện của hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ cắt bởi mặt phẳng (P) là ngũ giác $MNPQK$.

Chọn đáp án A □

CÂU 22. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = 6$, $CD = 8$. Cắt tứ diện bởi một mặt phẳng song song với AB, CD để thiết diện thu được là một hình thoi. Cạnh của hình thoi đó bằng

A $\dfrac{31}{7}$. **B** $\dfrac{18}{7}$. **C** $\dfrac{24}{7}$. **D** $\dfrac{15}{7}$.

Lời giải.



Giả sử một mặt phẳng song song với AB và CD cắt tứ diện $ABCD$ theo một thiết diện là hình thoi $MNIK$ như hình vẽ trên.

Khi đó ta có $\begin{cases} MK \parallel AB \parallel IN \\ MN \parallel CD \parallel IK \\ MK = KI. \end{cases}$

Cách 1:

Theo định lí Tha – lét ta có $\begin{cases} \dfrac{MK}{AB} = \dfrac{CK}{AC} \\ \dfrac{KI}{CD} = \dfrac{AK}{AC}. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{MK}{6} = \dfrac{AC - AK}{AC} \\ \dfrac{KI}{8} = \dfrac{AK}{AC} \end{cases}$

$$\Rightarrow \frac{MK}{6} = 1 - \frac{AK}{AC} \Rightarrow \frac{MK}{6} = 1 - \frac{KI}{8} \Rightarrow \frac{MK}{6} = 1 - \frac{MK}{8} \Leftrightarrow \frac{7}{24}MK = 1 \Leftrightarrow MK = \frac{24}{7}.$$

Vậy hình thoi có cạnh bằng $\dfrac{24}{7}$.

Cách 2:

Theo định lí Ta - lét ta có $\begin{cases} \dfrac{MK}{AB} = \dfrac{CK}{AC} \\ \dfrac{KI}{CD} = \dfrac{AK}{AC} \end{cases} \Rightarrow \dfrac{MK}{AB} + \dfrac{MK}{CD} = \dfrac{CK}{AC} + \dfrac{AK}{AC}.$

$$\Rightarrow \frac{MK}{6} + \frac{MK}{8} = \frac{AK + KC}{AC} \Rightarrow \frac{7MK}{24} = \frac{AC}{AC} = 1 \Rightarrow MK = \frac{24}{7}.$$

Chọn đáp án C □

CÂU 23. Cho tứ diện $ABCD$. Trên các cạnh AD, BC theo thứ tự lấy các điểm M, N sao cho $\dfrac{MA}{AD} = \dfrac{NC}{CB} = \dfrac{1}{3}$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa đường thẳng MN và song song với CD. Khi đó thiết diện của tứ diện $ABCD$ cắt bởi mặt phẳng (P) là

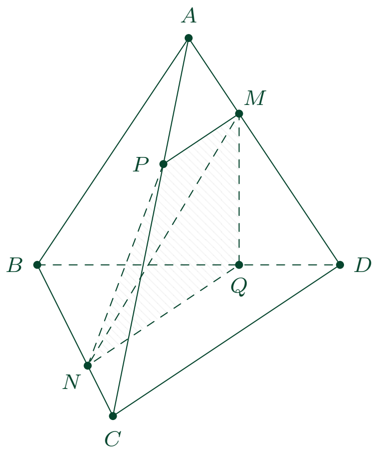
A một tam giác.

B một hình bình hành.

C một hình thang với đáy lớn gấp 2 lần đáy nhỏ.

D một hình thang với đáy lớn gấp 3 lần đáy nhỏ.

Lời giải.



Trong mặt phẳng (ACD), từ M kẻ $MP \parallel CD$ $(P \in AC)$.
Trong mặt phẳng (BCD), từ M kẻ $NQ \parallel CD$ $(Q \in BD)$.
Khi đó ta có $MPNQ$ là thiết diện của mặt phẳng (P) và tứ diện $ABCD$.

Ta có $\begin{cases} MP \parallel CD \\ MP = \dfrac{1}{3}CD \end{cases}$; $\begin{cases} NQ \parallel CD \\ NQ = \dfrac{2}{3}CD. \end{cases}$

Từ và ta có $\begin{cases} NQ \parallel MP \\ MP = \dfrac{1}{2}NQ. \end{cases}$

Vậy $MPNQ$ là hình thang có đáy lớn bằng hai lần đáy nhỏ.

Chọn đáp án (C)

CÂU 24. Cho tứ diện $ABCD$. Điểm G là trọng tâm tam giác BCD. Mặt phẳng (α) qua G, (α) song song với AB và CD. (α) cắt trung tuyến AM của tam giác ACD tại K. Chọn khẳng định đúng?

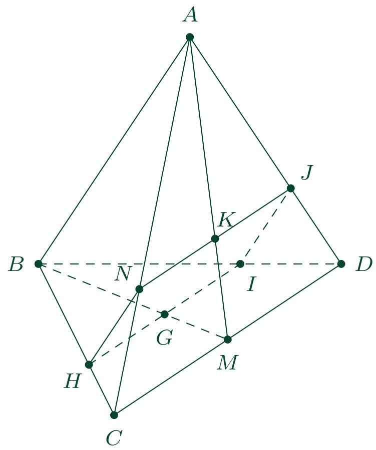
(A) (α) cắt tứ diện $ABCD$ theo thiết diện là một hình tam giác.

(B) $AK = \dfrac{2}{3}AM$.

(C) $AK = \dfrac{1}{3}AM$.

(D) Giao tuyến của (α) và cắt CD.

Lời giải.



Xác định thiết diện:

(α) qua G, song song với $CD \Rightarrow (\alpha) \cap (BCD) = HI$.

Tương tự ta được $(\alpha) \cap (ABD) = IJ$ ($JI \parallel AB$).

$(\alpha) \cap (ACD) = JN$ ($JN \parallel CD$).

$(\alpha) \cap (ABC) = HN$.

Vậy (α) là mặt phẳng $(NHIJ)$.

Vì G là trọng tâm tam giác BCD mà $IG \parallel CD$ nên $\dfrac{BG}{BM} = \dfrac{BI}{BC} = \dfrac{2}{3}$

Mặt khác IJ song song AB nên $\dfrac{BI}{BC} = \dfrac{AJ}{AD} = \dfrac{2}{3}$

Lại có JK song song DM nên $\dfrac{AK}{AM} = \dfrac{AJ}{AD} = \dfrac{2}{3}$.

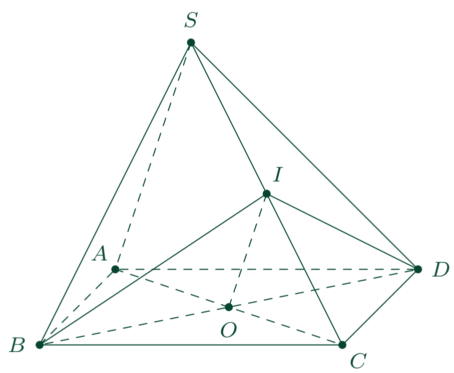
Vậy $AK = \dfrac{2}{3}AM$.

Chọn đáp án (B)

CÂU 25. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Mặt phẳng (P) qua BD và song song với SA. Khi đó mặt phẳng (P) cắt hình chóp $S.ABCD$ theo thiết diện là một hình

(A) Hình thang. (B) Hình chữ nhật. (C) Hình bình hành. (D) Tam giác.

Lời giải.



Gọi O là giao điểm của hai đường chéo AC và $BD \Rightarrow O$ là trung điểm của AC và BD.

$\begin{cases}(P) \parallel SA \\ BD \subset (P)\end{cases} \Rightarrow (P) \cap (SAC) = OI$.

Khi đó $OI \parallel SA$ và I là trung điểm của SC.

$(P) \cap (SBC) = BI$ và $(P) \cap (SCD) = ID$.

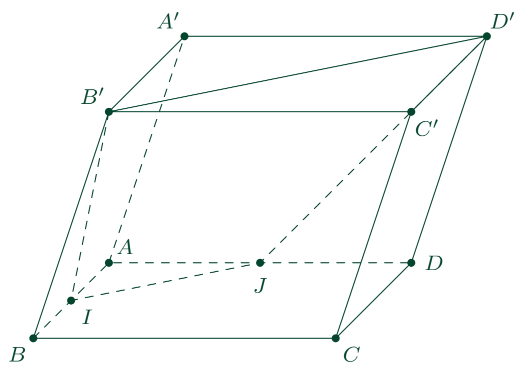
Vậy thiết diện là tam giác BDI.

Chọn đáp án D □

CÂU 26. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi I là trung điểm AB. Mặt phẳng $(IB'D')$ cắt hình hộp theo thiết diện là hình gì?

A Hình bình hành. B Hình thang. C Hình chữ nhật. D Tam giác.

Lời giải.



Ta có $(IB'D')$ và $(ABCD)$ có I là một điểm chung.

$\begin{cases}B'D' \subset (IBD) \\ BD \subset (ABCD) \\ B'D' \parallel BD\end{cases} \Rightarrow (IBD) \cap (ABCD) = IJ \parallel BD\,(J \in AD)$.

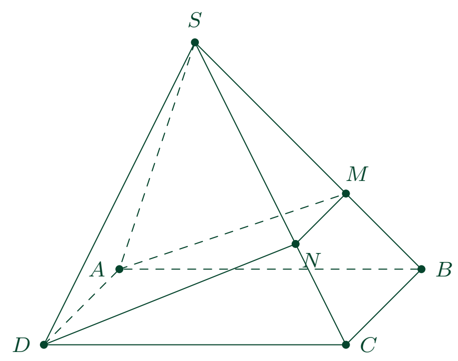
Thiết diện là hình thang $IJD'B'$.

Chọn đáp án B □

CÂU 27. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. M là một điểm thuộc đoạn SB (M khác S và B). Mặt phẳng (ADM) cắt hình chóp $S.ABCD$ theo thiết diện là

A Hình bình hành. B Tam giác. C Hình chữ nhật. D Hình thang.

Lời giải.



Ta có M là một điểm thuộc đoạn SB với M khác S và B.

Suy ra $\begin{cases}M \in (ADM) \cap (SBC) \\ AD \subset (ADM) \\ BC \subset (SBC) \\ AD \parallel BC\end{cases} \Rightarrow (ADM) \cap (SBC) = Mx \parallel BC \parallel AD$.

Gọi $N = Mx \cap SC$ thì (ADM) cắt hình chóp $S.ABCD$ theo thiết diện là tứ giác $AMND$. Vì $MN \parallel AD$ và MN với AD không bằng nhau nên tứ giác $AMND$ là hình thang.

Chọn đáp án D □

CÂU 28. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MA} = 3\overrightarrow{MB}$. Mặt phẳng (P) qua M và song song với hai đường thẳng SC, BD. Mệnh đề nào sau đây đúng?

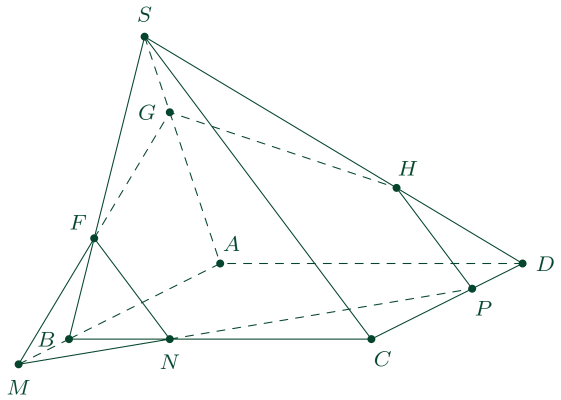
A (P) không cắt hình chóp.

B (P) cắt hình chóp theo thiết diện là một tứ giác.

C (P) cắt hình chóp theo thiết diện là một tam giác.

D (P) cắt hình chóp theo thiết diện là một ngũ giác.

Lời giải.

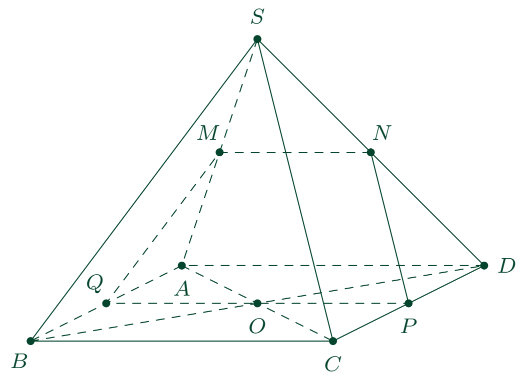


Mặt phẳng (P) qua M và song song với hai đường thẳng SC, BD.
$(P) \cap (ABCD) = Mx \parallel BD$, $Mx \cap BC = N$, $Mx \cap CD = P$.
$(P) \cap (SBC) = Ny \parallel SC$, $Ny \cap SB = F$.
$(P) \cap (SCD) = Pt \parallel SC$, $Pt \cap SD = H$.
Trong $(SAB) : MF \cap SA = G$.
$(P) \cap (ABCD) = NP$.
$(P) \cap (SCD) = PH$.
$(P) \cap (SAD) = HG$.
$(P) \cap (SAB) = GF$.
$(P) \cap (SBC) = FN$.
Vậy (P) cắt hình chóp theo thiết diện là ngũ giác $NPHGF$.
Chọn đáp án D □

CÂU 29. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O, M là trung điểm SA. Gọi (α) là mặt phẳng đi qua M, song song với SC và AD. Thiết diện của (α) với hình chóp $S.ABCD$ là hình gì?

A Hình thang. **B** Hình thang cân. **C** Hình chữ nhật. **D** Hình bình hành.

Lời giải.

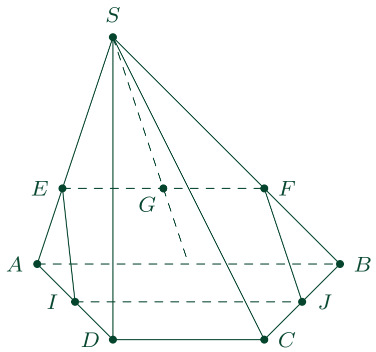


$$\begin{cases} M \in (\alpha) \cap (SAD) \\ (\alpha) \parallel AD; AD \subset (SAD) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (SAD) = MN \parallel AD\,(N \in SD). \qquad (1)$$
$$\begin{cases} N \in (\alpha) \cap (SCD) \\ (\alpha) \parallel SC; SC \subset (SCD) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (SCD) = NP \parallel SC\,(P \in CD).$$
$$\begin{cases} P \in (\alpha) \cap (ABCD) \\ (\alpha) \parallel AD; AD \subset (ABCD) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (ABCD) = PQ \parallel AD\,(Q \in AB). \qquad (2)$$
$(\alpha) \cap (SAB) = MQ$.
Từ (1), (2) suy ra $MN \parallel PQ \parallel AD \Rightarrow$ thiết diện $MNPQ$ là hình thang.
Chọn đáp án A □

CÂU 30. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang $(AB \parallel CD)$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của các cạnh AD, BC và G là trọng tâm tam giác SAB. Biết thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (IJG) là hình bình hành. Hỏi khẳng định nào sao đây đúng?

A $AB = 3CD$. **B** $AB = \dfrac{1}{3}CD$. **C** $AB = \dfrac{3}{2}CD$. **D** $AB = \dfrac{2}{3}CD$.

Lời giải.



Từ giả thiết suy ra $IJ \parallel AB \parallel CD$, $IJ = \dfrac{AB+CD}{2}$.

Xét hai mặt phẳng $(IJG), (SAB)$ có G là điểm chung suy ra giao tuyến của chúng là đường thẳng EF đi qua G, $EF \parallel AB \parallel CD \parallel IJ$ với $E \in SA$, $F \in SB$.

Nối các đoạn thẳng EI, FJ ta được thiết diện là tứ giác $EFJI$, là hình thang vì $EF \parallel IJ$.

Vì G là trọng tâm của tam giác SAB và $EF \parallel AB$ nên theo định lí Ta – lét ta có $EF = \dfrac{2}{3}AB$

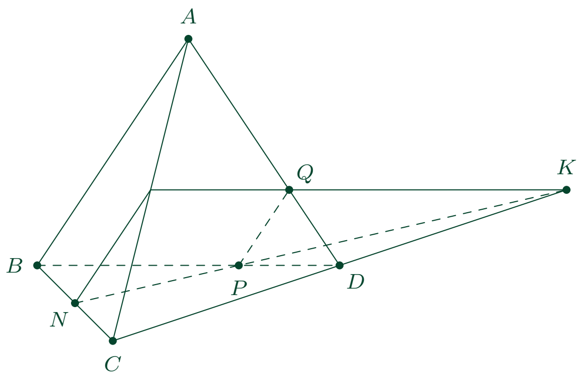
Nên để thiết diện là hình bình hành ta cần $EF = IJ \Leftrightarrow \dfrac{AB+CD}{2} = \dfrac{2AB}{3} \Leftrightarrow AB = 3CD$.

Chọn đáp án A □

CÂU 31. Cho hình tứ diện $ABCD$ có tất cả các cạnh bằng $6a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của CA, CB; P là điểm trên cạnh BD sao cho $BP = 2PD$. Diện tích S thiết diện của tứ diện $ABCD$ bị cắt bởi (MNP) là

Ⓐ $\dfrac{5a^2\sqrt{457}}{2}$. Ⓑ $\dfrac{5a^2\sqrt{457}}{12}$. Ⓒ $\dfrac{5a^2\sqrt{51}}{2}$. Ⓓ $\dfrac{5a^2\sqrt{51}}{4}$.

Lời giải.



Ta có $AB \parallel MN$, $AB \not\subset (MNP)$, $MN \subset (MNP) \Rightarrow AB \parallel (MNP)$.

Lại có $AB \subset (ABD)$, do đó $(MNP) \cap (ABD) = PQ\,(Q \in AD)$ sao cho $PQ \parallel AB \parallel MN$.

$(MNP) \cap (ABC) = MN$, $(MNP) \cap (BCD) = NP$, $(MNP) \cap (ACD) = MQ$.

Vậy thiết diện của tứ diện $ABCD$ bị cắt bởi (MNP) là hình thang $MNPQ$.

Mặt khác các tam giác ACD, BCD đều và bằng nhau nên $MQ = NP \Rightarrow MNPQ$ là hình thang cân.

$MN = \dfrac{1}{2}AB = 3a$; $PQ = \dfrac{1}{3}AB = 2a$.

Ta có $\dfrac{PQ}{MN} = \dfrac{2}{3}$, $PQ \parallel MN \Rightarrow \dfrac{KP}{KN} = \dfrac{2}{3}$ mà N là trung điểm của $CB \Rightarrow P$ là trọng tâm tam giác $BCK \Rightarrow D$ là trung điểm của $CK \Rightarrow CK = 12a$.

$$NP = \frac{1}{3}\sqrt{CK^2 + CN^2 - 2CK \cdot CN \cdot \cos 60^\circ} = \frac{a\sqrt{117}}{3}.$$

Chiều cao của hình thang $MNPQ$ là $h = \sqrt{NP^2 - \left(\dfrac{MN-PQ}{2}\right)^2} = \dfrac{a\sqrt{457}}{6}$.

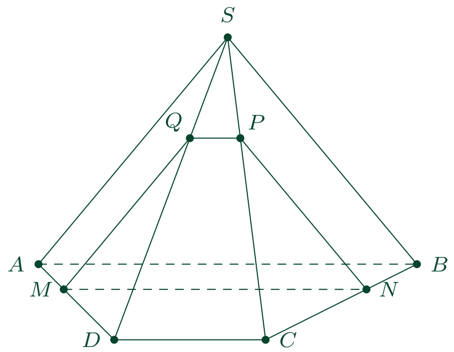
$$S_{TD} = \frac{MN+PQ}{2} \cdot h = \frac{5a^2\sqrt{457}}{12}.$$

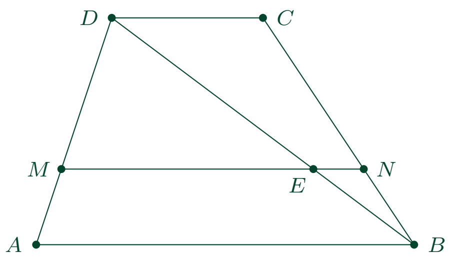
Chọn đáp án B □

CÂU 32. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang ($AB \parallel CD$), cạnh $AB = 3a$, $AD = CD = a$. Tam giác SAB cân tại S, $SA = 2a$. Mặt phẳng (P) song song với SA, AB cắt các cạnh AD, BC, SC, SD theo thứ tự tại M, N, P, Q. Đặt $AM = x$ $(0 < x < a)$. Gọi x là giá trị để tứ giác $MNPQ$ ngoại tiếp được đường tròn, bán kính đường tròn đó là

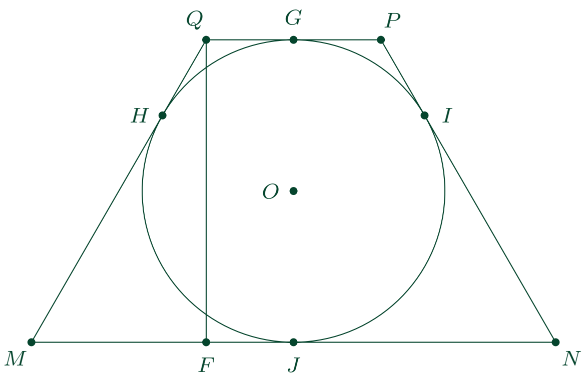
A $\dfrac{a\sqrt{7}}{4}$. **B** $\dfrac{a\sqrt{7}}{6}$. **C** $\dfrac{3a}{4}$. **D** a.

Lời giải.





$(P) \parallel SA \Rightarrow MQ \parallel SA$; $(P) \parallel AB \Rightarrow MN \parallel AB$;
$(P) \parallel AB \Rightarrow (P) \parallel CD \Rightarrow PQ \parallel CD \Rightarrow PQ \parallel MN$
Tứ giác $MNPQ$ là hình thang.
$(P) \parallel SA$; $(P) \parallel AB \Rightarrow (P) \parallel (SAB) \Rightarrow PN \parallel SB \Rightarrow \dfrac{PN}{SB} = \dfrac{CN}{CB}$.
$MQ \parallel SA \Rightarrow \dfrac{MQ}{SA} = \dfrac{DM}{DA}$.
$MN \parallel AB \Rightarrow \dfrac{DM}{DA} = \dfrac{CN}{CB}$.
$\Rightarrow \dfrac{PN}{SB} = \dfrac{QM}{SA} \Rightarrow PN = QM \Rightarrow MNPQ$ là hình thang cân.
$MQ \parallel SA \Rightarrow \dfrac{MQ}{SA} = \dfrac{DM}{DA} = \dfrac{a-x}{a} \Rightarrow MQ = 2(a-x)$.
$PQ \parallel CD \Rightarrow \dfrac{PQ}{CD} = \dfrac{SQ}{SD} = \dfrac{AM}{AD} = \dfrac{x}{a} \Rightarrow PQ = x$.
Gọi $E = MN \cap BD \Rightarrow \dfrac{ME}{AB} = \dfrac{DM}{DA} = \dfrac{a-x}{a} \Rightarrow ME = 3(a-x)$; $\dfrac{EN}{CD} = \dfrac{BN}{BC} = \dfrac{AM}{AB} = \dfrac{x}{a} \Rightarrow EN = x \Rightarrow MN = ME + EN = 3a - 2x$.



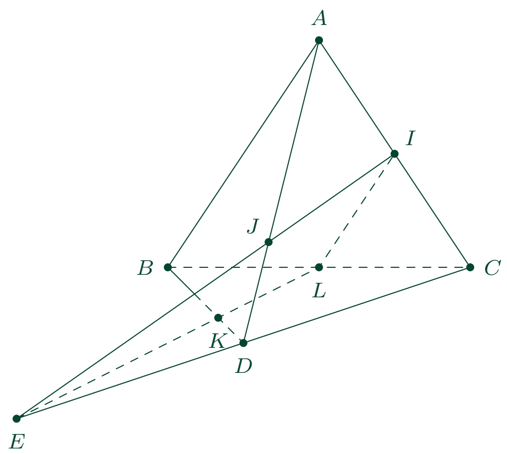
Hình thang cân $MNPQ$ có đường tròn nội tiếp $\Rightarrow MN + PQ = MQ + NP \Rightarrow 3a - 2x + x = 4(a-x) \Rightarrow x = \dfrac{a}{3}$.
$MN = \dfrac{7a}{3}$; $PQ = \dfrac{a}{3}$; $QM = \dfrac{4a}{3} \Rightarrow MF = \dfrac{1}{2}MN - \dfrac{1}{2}PQ = a \Rightarrow QF = \sqrt{MQ^2 - MF^2} = \sqrt{\dfrac{16a^2}{9} - a^2} = \dfrac{a\sqrt{7}}{3}$.
Vậy bán kính đường tròn nội tiếp hình thang $MNPQ$ là $R = \dfrac{1}{2}QF = \dfrac{a\sqrt{7}}{6}$.

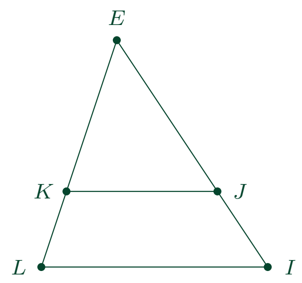
Chọn đáp án B □

CÂU 33. Cho tứ diện $ABCD$ có tất cả các cạnh bằng a, I là trung điểm của AC, J là một điểm trên cạnh AD sao cho $AJ = 2JD$. (P) là mặt phẳng chứa IJ và song song với AB. Tính diện tích thiết diện khi cắt tứ diện bởi mặt phẳng (P).

A $\dfrac{3a^2\sqrt{51}}{144}$. **B** $\dfrac{3a^2\sqrt{31}}{144}$. **C** $\dfrac{a^2\sqrt{31}}{144}$. **D** $\dfrac{5a^2\sqrt{51}}{144}$.

Lời giải.





Gọi $K = (P) \cap BD$, $L = (P) \cap BC$, $E = (P) \cap CD$.
Vì $(P) \parallel AB$ nên $IL \parallel AB$, $JK \parallel AB$. Do đó thiết diện là hình thang $IJKL$ và L là trung điểm cạnh BC, nên ta có $\dfrac{KD}{KB} = \dfrac{JD}{JA} = \dfrac{1}{2}$.
Xét tam giác ACD có I, J, E thẳng hàng. Áp dụng định lí Mê - nê - la - uýt ta có
$\dfrac{ED}{EC} \cdot \dfrac{IC}{IA} \cdot \dfrac{JA}{JD} = 1 \Rightarrow \dfrac{ED}{EC} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow D$ là trung điểm EC.
Dễ thấy hai tam giác ECI và ECL bằng nhau theo trường hợp c - g - c.
Áp dụng định lí cosin cho tam giác ICE ta có

$$EI^2 = EC^2 + IC^2 - 2EC \cdot IC \cdot \cos 60^\circ = \frac{13a^2}{4} \Rightarrow EL = EI = \frac{a\sqrt{13}}{2}.$$

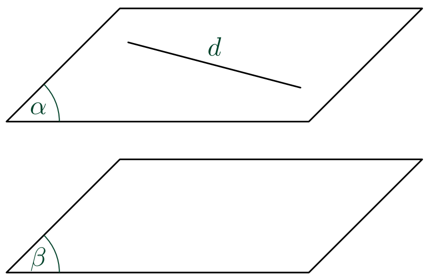
Áp dụng công thức Hê - rông cho tam giác ELI ta có $S_{ELI} = \sqrt{p(p-x)^2(p-y)} = \dfrac{\sqrt{51}}{16}a^2$.
Với $p = \dfrac{EI + EL + IL}{2} = \dfrac{2\sqrt{13}+1}{4}a$, $x = EI = EL = \dfrac{\sqrt{13}}{2}a$, $y = IL = \dfrac{a}{2}$.
Hai tam giác ELI và tam giác EKJ đồng dạng với nhau theo tỉ số $k = \dfrac{2}{3}$.
Do đó: $S_{IJKL} = S_{ELI} - S_{EKJ} = S_{ELI} - \left(\dfrac{2}{3}\right)^2 S_{ELI} = \dfrac{5\sqrt{51}}{144}a^2$.
Chọn đáp án D □

Bài 13. HAI MẶT PHẲNG SONG SONG

A. LÝ THUYẾT

1. Hai mặt phẳng song song

Hai mặt phẳng được gọi là song song nếu chúng không có điểm chung. Kí hiệu: $(\alpha) \mathbin{/\!/} (\beta)$ *hay* $(\beta) \mathbin{/\!/} (\alpha)$
Khi đó: $(\alpha) \mathbin{/\!/} (\beta) \Leftrightarrow (\alpha) \cap (\beta) = \varnothing$
Chú ý: Nếu $(\alpha) \mathbin{/\!/} (\beta)$ thì mọi đường thẳng $a \subset (\alpha)$ đều song song với (β).



2. Điều kiện và tính chất của hai mặt phẳng song song

TÍNH CHẤT 13.1. *Nếu mặt phẳng (α) chứa hai đường thẳng cắt nhau và hai đường thẳng này cùng song song với mặt phẳng (β) thì (α) song song với (β).*

TÍNH CHẤT 13.2. *Qua một điểm nằm ngoài mặt phẳng có một và chỉ một mặt phẳng song song với mặt phẳng đã cho.*

TÍNH CHẤT 13.3. *Nếu đường thẳng d song song với mặt phẳng(P)thì có duy nhất một mặt phẳng (Q)chứa d và song song với (P).*

TÍNH CHẤT 13.4. *Hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với mặt phẳng thứ ba thì song song với nhau.*

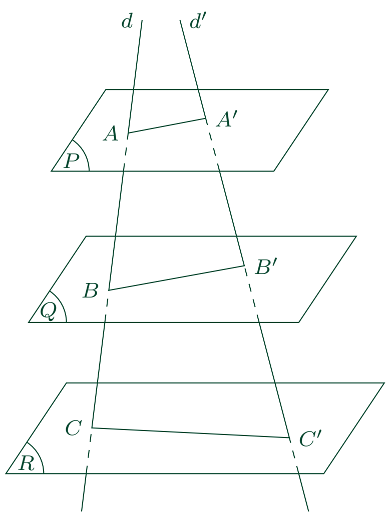
TÍNH CHẤT 13.5. *Cho điểm $A \notin (P)$. khi đó mọi đthẳng đi qua A và song song với (P)đều nằm trong một mặt phẳng (Q) đi qua A và song song với (P).*

TÍNH CHẤT 13.6. *Nếu một mặt phẳng cắt một trong hai mặt phẳng song song thì cũng cắt mặt phẳng kia và các giao tuyến của chúng song song với nhau.*

HỆ QUẢ 13.1. *Hai mặt phẳng song song chắn trên hai cát tuyến song song những đoạn thẳng bằng nhau.*

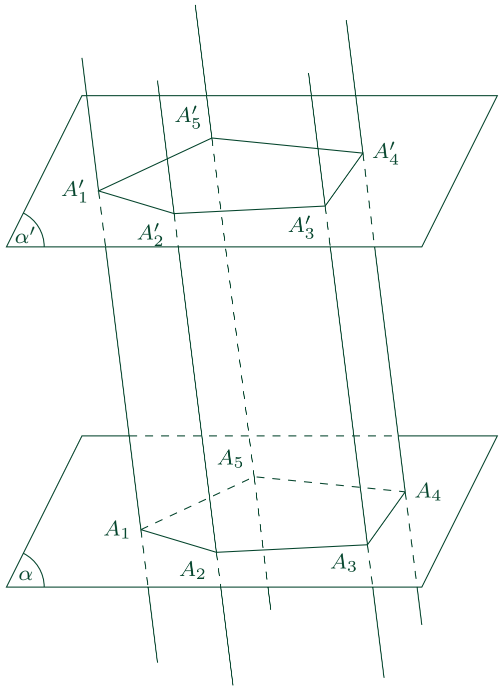
3. Định lý Thalès

ĐỊNH LÍ 13.1. *Ba mặt phẳng đôi một song song chắn trên hai cát tuyến bất kì những đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ.*



4. Hình lăng trụ

ĐỊNH NGHĨA 13.1. Trên mặt phẳng (α) cho đa giác $A_1A_2...A_n$, từ các đỉnh của đa giác dựng các đường thẳng song song cắt mặt phẳng (α') song song với (α) tại các điểm $A_1{}'$, $A_2{}'$, .., $A_n{}'$. Hình hợp bởi hai miền đa giác $A_1A_2...A_n$ và $A_1{}'A_2{}'...A_n{}'$với các hình chữ nhật $A_1A_2A_2{}'A_1{}'$, $A_2A_3A_3{}'A_2{}'$,. được gọi là hình lăng trụ.

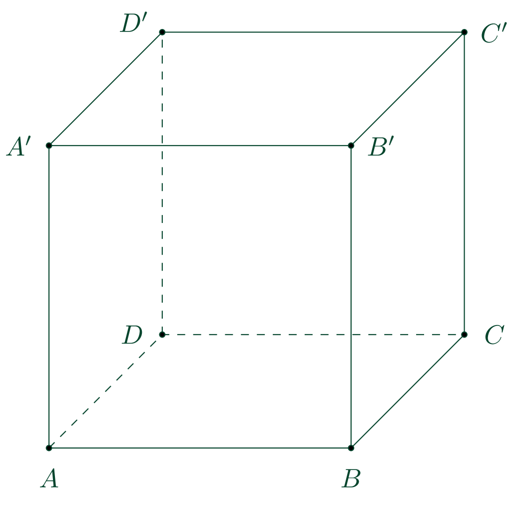


Tính chất 13.7.

- *Các hình bình hành được gọi là các mặt bên, hai miền đa giác gọi là hai mặt đáy của lăng trụ.*
- *Hai đáy của lăng trụ là hai đa giác bằng nhau và nằm trên hai mặt phẳng song song với nhau.*
- *Các đoạn thẳng $A_1A_1{}'$, $A_2A_2{}'$, ... được gọi là các cạnh bên. Các cạnh bên của lăng trụ song song và bằng nhau.*
- *Ta gọi lăng trụ theo tên của đa giác đáy, tức là nếu đáy là tam giác thì gọi là lăng trụ tam giác, nếu đáy là tứ giác thì gọi là lăng trụ tứ giác.*

5. Hình hộp

Định nghĩa 13.2. Hình lăng trụ tứ giác có đáy là hình bình hành được gọi là hình hộp.



Tính chất 13.8.

- *Hình hộp có sáu mặt đều là những hình bình hành.*
- *Hai mặt song song với nhau gọi là hai mặt đối diện, hình hộp có ba cặp mặt đối diện.*
- *Hai đỉnh của hình hộp được gọi là hai đỉnh đối diện nếu chúng không cùng nằm trên một mặt nào.*
- *Các đoạn thẳng nối hai đỉnh đối diện được gọi là các đường chéo. Bốn đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường, điểm đó gọi là tâm của hình hộp.*
- *Hai cạnh gọi là đối nhau nếu chúng song song nhưng không cùng nằm trên một mặt của hình chóp.*
- *Mặt chéo của hình hộp là hình bình hành có hai cạnh là hai cạnh đối diện của hình hộp.*
- *Tổng bình phương các đường chéo của một hình hộp bằng tổng các bình phương của tất cả các cạnh của hình hộp đó.*

B. HỆ THỐNG BÀI TẬP TỰ LUẬN

Dạng 22. Chứng minh 2 mặt phẳng song song

Phương pháp:

a) $\begin{cases} (\alpha) \supset a, b \\ a \cap b = I \\ a \parallel (\beta), b \parallel (\beta) \end{cases} . \Rightarrow (\alpha) \parallel (\beta)$

b) $\begin{cases} (\alpha) \parallel (\gamma) \\ (\beta) \parallel (\gamma) \\ (\alpha) \neq (\beta) \end{cases} . \Rightarrow (\alpha) \parallel (\beta)$

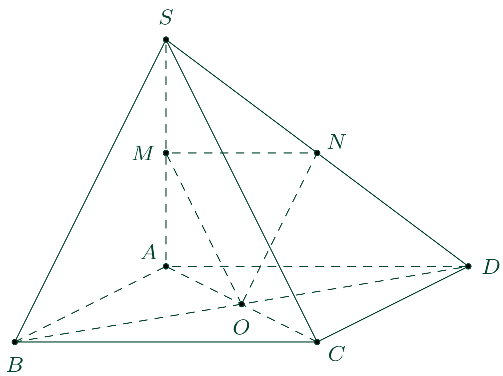
1. Bài tập tự luận

BÀI 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O, gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA, SD. Chứng minh $(OMN) \parallel (SBC)$.

Lời giải.

Ta có M, O lần lượt là trung điểm của SA, AC nên OM là đường trung bình của tam giác SAC ứng với cạnh SC do đó $OM \parallel SC$.

Vậy $\begin{cases} OM \parallel SC \\ SC \subset (SBC) \end{cases} . \Rightarrow OM \parallel (SBC)\,(1).$



Tương tự, Ta có N, O lần lượt là trung điểm của SD, BD nên ON là đường trung bình của tam giác SBD ứng với cạnh SB do đó $OM \parallel SB$.

Vậy $\begin{cases} ON \parallel SB \\ SB \subset (SBC) \end{cases} \Rightarrow OM \parallel (SBC)\quad (2).$

Từ (1) và (2) ta có $\begin{cases} OM \parallel (SBC) \\ ON \parallel (SBC) \\ OM \cap ON = O \end{cases} \Rightarrow (OMN) \parallel (SBC).$ □

BÀI 2. Cho hai hình vuông $ABCD$ và $ABEF$ ở trong hai mặt phẳng phân biệt. Trên các đường chéo AC và BF lần lượt lấy các điểm M, N sao cho $AM = BN$. Các đường thẳng song song với AB vẽ từ M, N lần lượt cắt AD và AF tại M' và N'. Chứng minh:

a) $(ADF) \parallel (BCE)$.

b) $(DEF) \parallel (MM'N'N)$.

Lời giải.

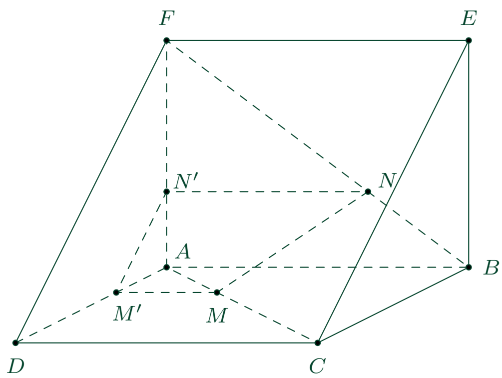
a) Ta có $\begin{cases} AD \parallel BC \\ BC \subset (BCE) \end{cases} \Rightarrow AD \parallel (BCE).$

Tương tự $\begin{cases} AF \parallel BE \\ BE \subset (BCE) \end{cases} \Rightarrow AF \parallel (BCE).$

Mà $\begin{cases} AD \subset (ADF) \\ AF \subset (ADF) \end{cases} \Rightarrow (ADF) \parallel (BCE).$

b) Vì $ABCD$ và $(ABEF)$ là các hình vuông nên $AC = BF$ (1).

Ta có $MM' \parallel CD \Rightarrow \dfrac{AM'}{AD} = \dfrac{AM}{AC}$ (2)



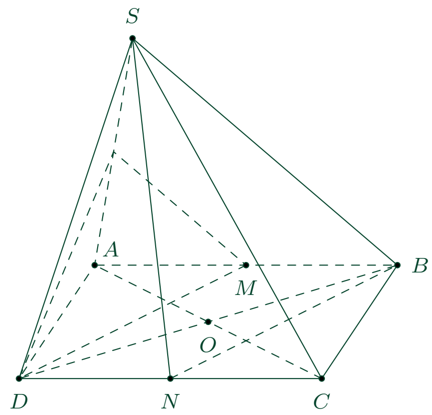
$NN' \parallel AB \Rightarrow \dfrac{AN'}{AF} = \dfrac{BN}{BF}$ (3).

Từ (1),(2) và (3)ta được $\dfrac{AM'}{AD} = \dfrac{AN'}{AF} \Rightarrow M'N' \parallel DF \Rightarrow DF \parallel (MM'N'N)$.
Lại có $NN' \parallel AB \Rightarrow NN' \parallel EF \Rightarrow EF \parallel (MM'N'N)$.
Vậy $\begin{cases} DF \parallel (MM'N'N) \\ EF \parallel (MM'N'N) \end{cases} \Rightarrow (DEF) \parallel (MM'N'N)$. □

BÀI 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Gọi M,N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, CD, SA. Chứng minh rằng mặt phẳng (DMP) song song với mặt phẳng (SBN).

Lời giải.

Vì M,P lần lượt là trung điểm của các cạnh AB,SA nên $MP \parallel SB \Rightarrow MP \parallel (SBN)$.
Vì M,Nlần lượt là trung điểm của các cạnh AB, CD và$ABCD$ là hình bình hành nên $DM \parallel NB \Rightarrow DM \parallel (SBN)$.
Từ và suy ra $(DMP) \parallel (SBN)$.

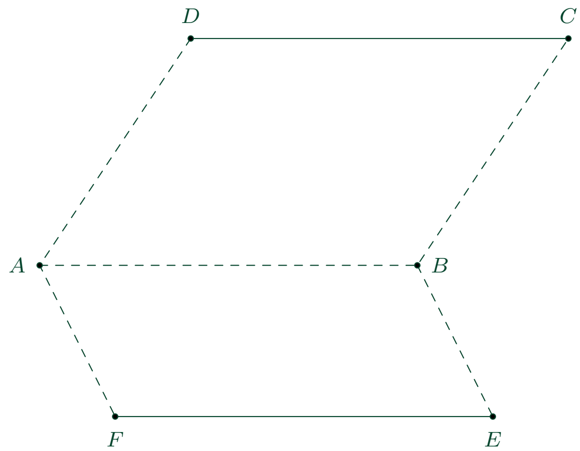


□

BÀI 4. Trong không gian cho hai hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$ nằm trong hai mặt phẳng phân biệt. Chứng minh rằng mặt phẳng $(AFD) \parallel (BCE)$.

Lời giải.

Ta có: $\begin{cases} AF \parallel BE \subset (BEC) \\ AD \parallel BC \subset (BEC) \\ AF \subset (ADE)\,; AD \subset (ADE) \end{cases} \Rightarrow (ADE) \parallel (BEC)$.

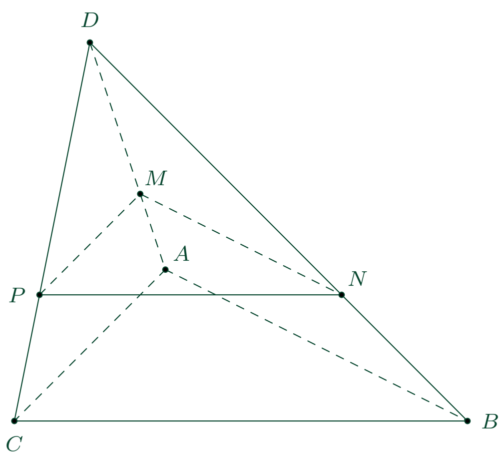


□

BÀI 5. Cho hình tứ diện $ABCD$, lấy M là điểm tùy ý trên cạnh $AD\,(M \neq A, D)$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua M song song với mặt phẳng (ABC) lần lượt cắt DB, DC tại N, P Chứng minh rằng: $NP \parallel BC$.

Lời giải.

Vì $(P) \cap (DBC) = NP$, $(ABC) \cap (DBC) = BC$, $(P) \parallel (ABC) \Rightarrow NP \parallel BC$

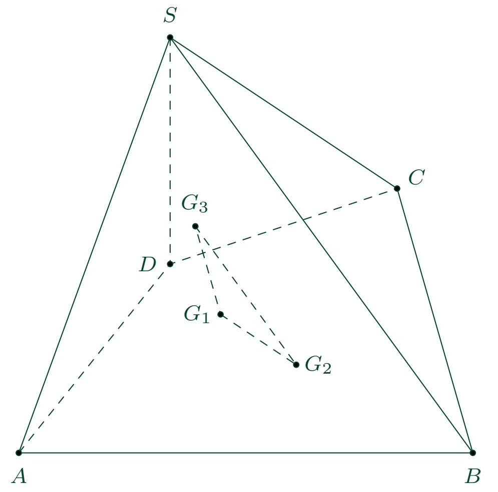


□

BÀI 6. Cho hình chóp $S.ABCD$, gọi G_1, G_2, G_3 lần lượt là trọng tâm của tam giác SAB, ABC, SAC. Chứng minh rằng $(G_1G_2G_3) \parallel (SBC)$.

Lời giải.

Vì $G_1G_2 \parallel SC, G_2G_3 \parallel SB \Rightarrow (G_1G_2G_3) \parallel (SBC)$



□

BÀI 7. Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$ có tâm lần lượt là O, O' và không cùng nằm trong một mặt phẳng. Gọi M là trung điểm của AB. Chứng minh rằng:

a) $(ADF) \parallel (BCE)$

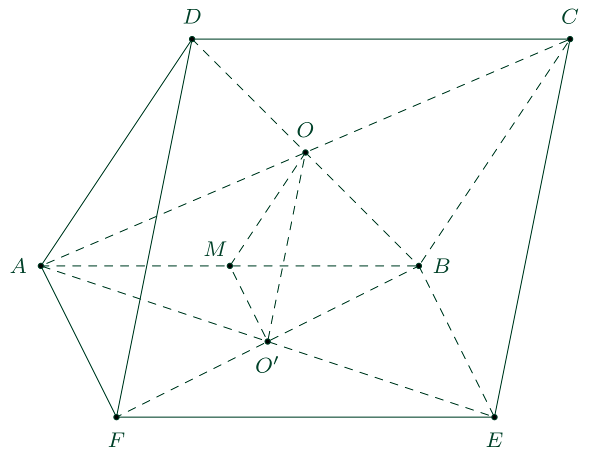
b) $(MOO') \parallel (ADF)$.

c) $(MOO') \parallel (BCE)$.

Lời giải.

Có $\begin{cases} AD \cap AF\{I\} \\ AD,\ AF \subset (ADF) \\ BC, BE \subset (BCE) \\ AD \parallel BC, AF \parallel BE \end{cases} \Rightarrow (ADF) \parallel (BCE)$.

Do O, O' lần lượt là tâm các hình bình hành nên O, O' lần lượt là trung điểm các đường chéo AC, BD và AE, BF.



Theo tính chất đường trung bình trong tam giác có:$OO' \parallel DF, OO' \parallel CE.OM \parallel AD, OM \parallel BC$.

Khi đó $\begin{cases} OO' \cap OM \subset (MOO') \\ DF, AD \subset (DAF) \\ OO' \parallel DF, OM \parallel AD \end{cases} \Rightarrow (MOO') \parallel (ADF)$.

Tương tự có: $\begin{cases} OO' \cap OM \subset (MOO') \\ CE, BC \subset (BCE) \\ OO' \parallel DF, OM \parallel AD \end{cases} \Rightarrow (MOO') \parallel (BCE)$. □

Dạng 23. Chứng minh đường thẳng song song với mặt phẳng

Phương pháp:

a) $\begin{cases} (\alpha) \parallel (\beta) \\ a \subset (\alpha) \end{cases} \Rightarrow a \parallel (\beta)$

b) $\begin{cases} AB \parallel (\alpha) \\ AC \parallel (\alpha) \\ AB \cap AC = A \end{cases} \Rightarrow BC \parallel (\alpha)$

và các định lý, hệ quả của bài trước.

1. Bài tập tự luận

BÀI 1. Cho hình thang $ABCD$ có $AB \parallel CD$ và $S \notin (ABCD)$. Trên SA, BD lấy hai điểm M, N sao cho $\dfrac{SM}{SA} = \dfrac{DN}{DB} = \dfrac{2}{3}$. Kẻ $NI \parallel AB$ $(I \in AD)$. Chứng minh $MN \parallel (SCD)$.

Lời giải.

Ta có $\dfrac{AM}{AS} = \dfrac{1}{3}$. Do $NI \parallel AB$ nên $\dfrac{AI}{AD} = \dfrac{BN}{BD} = \dfrac{1}{3}$. Suy ra $\dfrac{AM}{AS} = \dfrac{AI}{AD} \Rightarrow MI \parallel SD \Rightarrow MI \parallel (SCD)$.
Do $NI \parallel SD$ ta suy ra $NI \parallel CD$.
Vậy $(MNI) \parallel (SCD) \Rightarrow MN \parallel (SCD)$. □

Dạng 24. Chứng minh hai đường thẳng song song

Phương pháp: Dựa vào định lý ở bài hai mặt phẳng song song $\begin{cases} (\alpha)\,(\beta) \\ (\gamma) \parallel (\alpha) = a \\ (\gamma) \parallel (\beta) = b \end{cases} \Rightarrow a \parallel b$ và các định lý, hệ quả ở các bài trước.

Dạng 25. Bài toán liên quan đến tỷ lệ độ dài

Phương pháp:

a) $\begin{cases} (\alpha) // (\beta) \\ d \cap (\alpha) = A,\ d \cap (\beta) = B \\ d' \cap (\alpha) = A',\ d' \cap (\beta) = B' \\ d // d' \end{cases} \Rightarrow AB = A'B'$

b) $\begin{cases} (\alpha) // (\beta) // (\gamma) \\ d \cap (\alpha) = A,\ d \cap (\beta) = B,\ d \cap (\gamma) = C \\ d' \cap (\alpha) = A',\ d' \cap (\beta) = B',\ d' \cap (\gamma) = C' \end{cases} \Rightarrow \dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{AC}{A'C'} = \dfrac{BC}{B'C'}$

và định lý Talet thuận và đảo trong mặt phẳng.

1. Bài tập tự luận

BÀI 1. Cho tứ diện $ABCD$ và M, N là các điểm thay trên các cạnh AB, CD sao cho $\dfrac{AM}{MB} = \dfrac{CN}{ND}$.

a) Chứng minh MN luôn luôn song song với một mặt phẳng cố định.

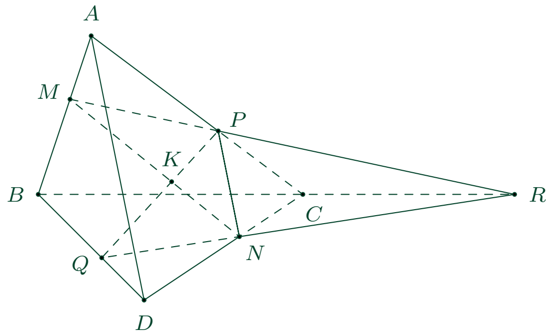
b) Tính theo k tỉ số diện tích tam giác MNP và diện tích thiết diện.

Ⓐ $\dfrac{k}{k+1}$. Ⓑ $\dfrac{2k}{k+1}$. Ⓒ $\dfrac{1}{k}$. Ⓓ $\dfrac{1}{k+1}$.

Lời giải.

a)

Do $\dfrac{AM}{MB}=\dfrac{CN}{ND}$ nên theo định lí Thales thì các đường thẳng MN, AC, BD cùng song song với một mặt phẳng (β).
Gọi (α) là mặt phẳng đi qua AC và song song với BDthì (α) cố định và $(\alpha)\parallel(\beta)$suy ra MN luôn song song với (α) cố định.



b) Xét trường hợp $\dfrac{AP}{PC}=k$, lúc này $MP\parallel BC$ nên $BC\parallel(MNP)$.

Ta có: $\begin{cases} N\in(MNP)\cap(BCD)\\ BC\parallel(MNP)\\ BC\subset(BCD)\end{cases} \Rightarrow (BCD)\cap(MNP)=NQ\parallel BC, Q\in BD$

Thiết diện là tứ giác $MPNQ$.
Xét trường hợp $\dfrac{AP}{PC}\neq k$.
Trong (ABC) gọi $R=BC\cap MP$. Trong (BCD) gọi $Q=NR\cap BD$ thì thiết diện là tứ giác $MPNQ$.
Gọi $K=MN\cap PQ$. Ta có $\dfrac{S_{MNP}}{S_{MPNQ}}=\dfrac{PK}{PQ}$.
Do $\dfrac{AM}{NB}=\dfrac{CN}{ND}$ nên theo định lí Thales đảo thì AC, NM, BD lần lượt thuộc ba mặt phẳng song song với nhau và đường thẳng PQ cắt ba mặt phẳng này tương ứng tại P, K, Q nên áp dụng định lí Thales ta được

$$\frac{PK}{KQ}=\frac{AM}{MB}=\frac{CN}{ND}=k\Rightarrow\frac{PK}{PQ}=\frac{PK}{PK+KQ}=\frac{\dfrac{PK}{KQ}}{\dfrac{PK}{KQ}+1}=\frac{k}{k+1}$$

.

Chọn đáp án (A) □

BÀI 2. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các mặt đều là hình vuông cạnh a. Các điểm M, N lần lượt trên AD', BD sao cho $AM=DN=x\ \left(0<x<a\sqrt{2}\right)$.

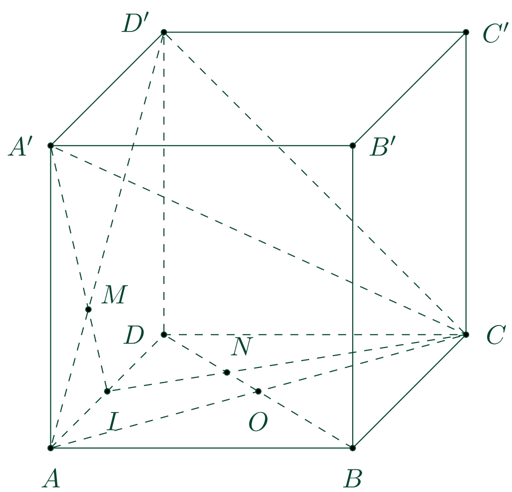
a) Chứng minh khi x biến thiên, đường thẳng MN luôn song song với một mặt phẳng cố định.

b) Chứng minh khi $x=\dfrac{a\sqrt{2}}{3}$ thì $MN\parallel A'C$.

Lời giải.

a)

Gọi (P) là mặt phẳng qua AD và song song với $(A'D'CB)$.
Gọi (Q) là mặt phẳng qua M và song song với $(A'D'CB)$.
Giả sử (Q) cắt BD tại điểm N'.
Theo định lí Thales ta có $\dfrac{AM}{AD'}=\dfrac{DN'}{DB}$ (1)



Vì các mặt của hình hộp là hình vuuong cạnh a nên $AD'=DB=a\sqrt{2}$.
Từ (1) ta có $AM=DN'$, mà $DN=AM\Rightarrow DN'=DN\Rightarrow N'\equiv N\Rightarrow MN\subset(Q)$.
Mà $\begin{cases}(Q)\parallel(A'D'CB)\\ MN\subset(Q)\end{cases}\Rightarrow MN\parallel(A'D'CB)$.
Vậy MN luôn song song với mặt phẳng cố định $(A'D'CB)$.

b) Gọi $O = AC \cap BD$. Ta có $DN = x = \dfrac{a\sqrt{2}}{3}, DO = \dfrac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow DN = \dfrac{2}{3}DO$ suy ra N là trọng tâm của tam giác ACD.
Tương tự M là trọng tâm của tam giác $A'AD$.
Gọi I là trung điểm của AD ta có $\dfrac{IN}{IC} = \dfrac{1}{3}, \dfrac{IM}{IA'} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow \dfrac{IN}{IC} = \dfrac{IM}{IA'} \Rightarrow MN \parallel A'C$.

□

Dạng 26. Xác định thiết diện

Phương pháp:

Dựa vào định lý $\begin{cases}(\alpha) \parallel (\beta)\\ (\gamma)\cap(\alpha) = a\\ (\gamma)\cap(\beta) = b\end{cases} \Rightarrow a \parallel b$ và các kết quả có trước.

1. Bài tập tự luận

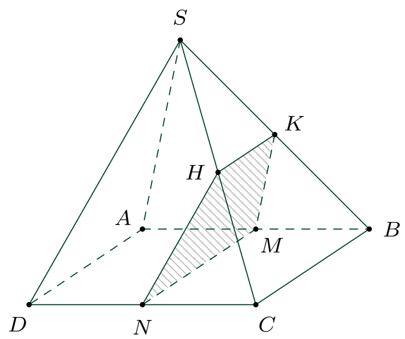
BÀI 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành và M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD. Xác định thiết diện của hình chóp cắt bởi (α) đi qua MN và song song với mặt phẳng (SAD). Thiết diện là hình gì?

Lời giải.

Ta có $\begin{cases}M \in (SAB)\cap(\alpha)\\ (SAB)\cap(SAD) = SA\end{cases} \Rightarrow (SAB)\cap(\alpha) = MK \parallel SA, K \in SB$.

Tương tự $\begin{cases}N \in (SCD)\cap(\alpha)\\ (\alpha) \parallel (SAD)\\ (SCD)\cap(SAD) = SD\end{cases} \Rightarrow (SCD)\cap(\alpha) = NH \parallel SD, H \in SC$.

Dễ thấy $HK = (\alpha)\cap(SBC)$. Thiết diện là tứ giác $MNHK$.
Ba mặt phẳng $(ABCD)$, (SBC) và (α) đôi một cắt nhau theo các giao tuyến là MN, HK, BC mà $MN \parallel BC \Rightarrow MN \parallel HK$. Vậy thiết diện là một hình thang.

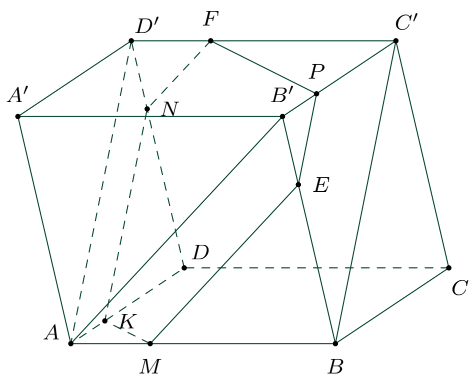


□

BÀI 2. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Trên ba cạnh AB, DD', CB' lần lượt lấy ba điểm M, N, P không trùng với các đỉnh sao cho $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{D'N}{D'D} = \dfrac{B'P}{B'C'}$. Tìm thiết diện của hình hộp khi cắt bởi mặt phẳng (MNP).

Lời giải.

Ta chứng minh được $(MNP) \parallel (AB'D')$.
Ta có
$$\frac{AM}{AB} = \frac{D'N}{DD'} = \frac{B'P}{B'C'} \Rightarrow \frac{AM}{D'N} = \frac{MB}{ND} = \frac{BA}{DD'}$$
và $\dfrac{AM}{B'P} = \dfrac{MB}{PC'} = \dfrac{BA}{C'B'}$.
Theo định lí Ta-lét đảo thì MN song song với (α) với (α) song song với AD, BD và MP song song với (β) với (β) song song với AB', BC.
Vì $BD \parallel B'D'$, $BC' \parallel AD'$ nên hai (α) và (β) đều song song với $(AB'D')$ do đó MN và MP đều song song với $(AB'D')$.
Vậy $(MNP) \parallel (AB'D')$.



Từ M vẽ ME song song với AB', Từ P vẽ PF song song với $B'D'$. Từ N vẽ $NK \parallel AD'$ cắt AD tại K.
Thiết diện là lục giác $MEPFNK$. □

BÀI 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ với $ABCD$ là hình thoi cạnh a, SAD là tam giác đều. Gọi M là một điểm thuộc cạnh AB, $AM = x$, (P) là mặt phẳng qua M song song với (SAD). Tính diện tích thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (P).

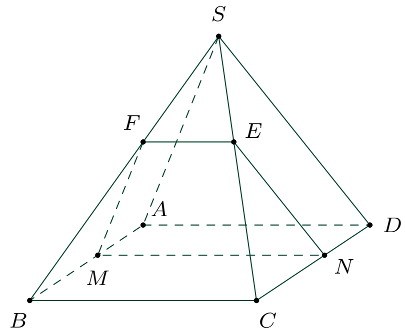
Lời giải.

Do mặt phẳng (P) đi qua M và song song với (SAD) nên cắt các mặt của hình chóp bằng các giao tuyến đi qua M và song song với (SAD). Vì $ABCD$ là hình thoi và tam giác SAD đều nên thiết diện thu được là hình thang cân $MNEFE$ ($MN \parallel EF$, $MF = EN$). Khi đó Ta có

$$MN = a, \frac{EF}{BC} = \frac{SF}{SB} = \frac{MA}{AB} = \frac{x}{a} \Rightarrow EF = x; MF = a - x.$$

Đương cao FH của hình thang cân bằng $FH = \sqrt{MF^2 - \left(\frac{MN - EF}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}(a - x)$.

Khi đó diện tích hình thang cân là $S_{MNEF} = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(a^2 - x^2\right)$.



□

BÀI 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a, tam giác SAB đều, $SC = SD = a\sqrt{3}$. Gọi H, K lần lượt là trung điểm của SA, SB. M là một điểm trên cạnh AD, mặt phẳng (HKM) cắt BC tại N. Đặt $AM = x$ $(0 \leq x \leq a)$. Tìm x để diện tích thiết diện $HKMN$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải.

Mặt phẳng (HKM) và $(ABCD)$ chứa hai đường thẳng song song HK và AB nên giao tuyến củAChúng là MN cũng song song với HK và AB. Xét hai tam giác HAM và KBN có:

$$BN = AM; BK = AH; \widehat{KBN} = \widehat{MAH} \text{ nên } \triangle HAM = \triangle KBN.$$

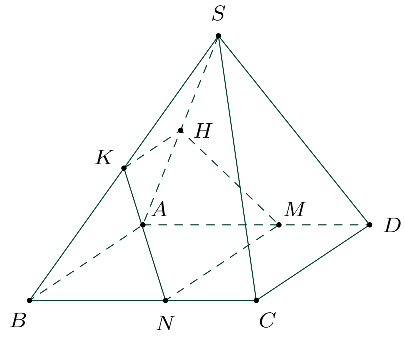
Từ đó suy ra $MH = KN$ và $MHKN$ là hình thang cân có hai đáy $MN = a; HK = \frac{a}{2}$.

Sử dụng định lý hàm số cô-sin cho tam giác SAD ta tính được $\cos\widehat{HAD} = -\frac{1}{2}$ và

$$HM^2 = HA^2 + AM^2 - 2HA \cdot AM \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{a^2 + 4x^2 + 2ax}{4}.$$

Đường cao của hình thang cân được tính bằng công thức

$$\sqrt{HM^2 - \left(\frac{MN - HK}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{16x^2 + 8ax + 3a^2}.$$



Do hai đáy có độ dài không đổi nên diện tích thiết diện bé nhất khi đường cao bé nhất đạt khi $x = 0$. □

C. HỆ THỐNG BÀI TẬP TỰ LUYỆN

BÀI 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành và M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh AB, CD, SA.

a) Chứng minh $(SBN) \parallel (DPM)$.

b) Q là một điểm thuộc đoạn SP (Q khác S, P). Xác định thiết diện của hình chóp cắt bởi (α) đi qua Q và song song với (SBN).

c) Xác định thiết diện của hình chóp cắt bởi (β) đi qua MN song song với (SAD).

Lời giải.

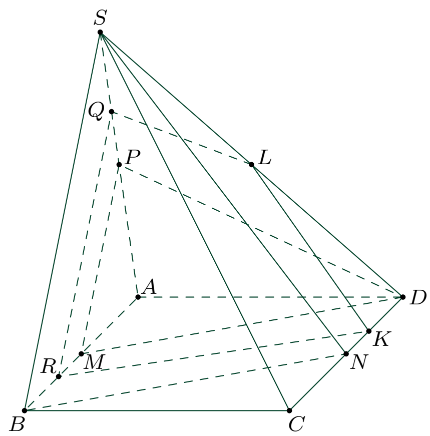
a) Ta có $\begin{cases} BN \parallel DM \\ DM \subset (DPM) \end{cases} \Rightarrow BN \parallel (DPM)$. (1)

Tương tự $\begin{cases} BS \parallel MP \\ MP \subset (DPM) \end{cases} \Rightarrow BS \parallel (DPM)$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $(SBN) \parallel (DPM)$.

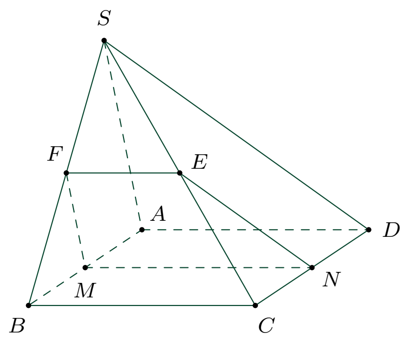
b) Ta có $\begin{cases} SB \subset (SBN) \\ (\alpha) \parallel (SBN) \end{cases} \Rightarrow SB \parallel (\alpha)$.

Vậy $\begin{cases} Q \in (SAB) \cap (\alpha) \\ SB \subset (SAB) \\ SB \parallel (\alpha) \end{cases} \Rightarrow (SAB) \cap (\alpha) = QR \parallel SB, R \in AB$.



Tương tự $(\alpha)\cap(ABCD) = RK \parallel BN, K \in CD$ và $(\alpha)\cap(SCD) = KL \parallel SB, L \in SD$.
Vậy thiết diện là tứ giác $QRKL$.

c) Ta có $\begin{cases} M \in (\beta)\cap(SAB) \\ SA \parallel (\beta) \\ SA \subset (SAB) \end{cases} \Rightarrow (\beta)\cap(SAB) = MF \parallel SA, F \in SB.$
Tương tự $(\beta)\cap(SCD) = NE \parallel SD, E \in SC$. Thiết diện là hình thang $MNEF$.



□

BÀI 6. Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy là hình bình hành tâm O. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA và CD.

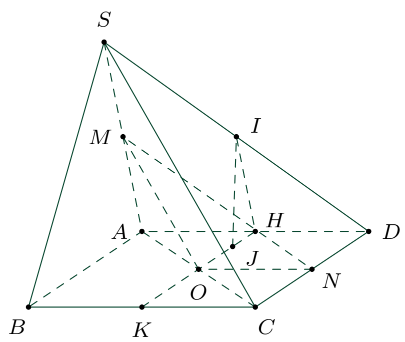
a) Chứng minh $(OMN) \parallel (SBC)$.

b) Gọi I là trung điểm của SD, J là một điểm trên $(ABCD)$ cách đều AB và CD. Chứng minh $IJ \parallel (SAB)$.

Lời giải.

a) Do O, M lần lượt là trung điểm của AC, SA nên OM là đường trung bình của tam giác SAC ứng với cạnh $SC \Rightarrow OM \parallel SC$.
Mà $SC \subset (SBC) \Rightarrow OM \parallel (SBC)$. (1)
Tương tự $ON \parallel BC \subset (SBC) \Rightarrow ON \parallel (SBC)$. (2)
Từ (1) và (2) suy ra $(OMN) \parallel (SBC)$.

b) Gọi H, K lần lượt là trung điểm của AD và BC.
Do $J \in (ABCD)$ và $\mathrm{d}(J, AB) = \mathrm{d}(J, CD)$ nên $J \in HK \Rightarrow IJ \subset (IHK)$.



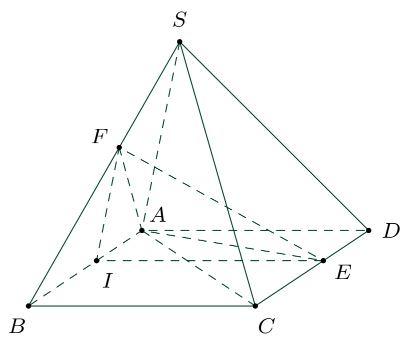
Ta dễ dàng chứng minh được $(IHK) \parallel (SAB)$.
Vậy $\begin{cases} IJ \subset (IHK) \\ (IHK) \parallel (SAB) \end{cases} \Rightarrow IJ \parallel (SAB).$

□

BÀI 7. Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình bình hành, các tam giác SAD và ABC đều cân tại A. Gọi AE, AF là các đường phân giác trong của các tam giác ACD và SAB. Chứng minh $EF \parallel (SAD)$.

Lời giải.

Kẻ $FI \parallel SA, I \in AB \Rightarrow IF \parallel (SAD)$.
Ta có $\dfrac{FS}{FB} = \dfrac{IA}{IB}$. (1)
Theo tính chất đường phân giác ta có $\dfrac{FS}{FB} = \dfrac{SA}{AB} = \dfrac{AD}{AC}$. (2)
Mặt khác $\dfrac{ED}{EC} = \dfrac{AD}{AC}$. (3)
Từ (1), (2) và (3) suy ra $\dfrac{IA}{IB} = \dfrac{ED}{EC} \Rightarrow IE \parallel AD$.
Mà $AD \subset (SAD) \Rightarrow IE \parallel (SAD)$.
Ta có $\begin{cases} IE \parallel (SAD) \\ IF \parallel (SAD) \end{cases} \Rightarrow (IEF) \parallel (SAD).$
Mà $EF \subset (IEF) \Rightarrow EF \parallel (SAD)$.



□

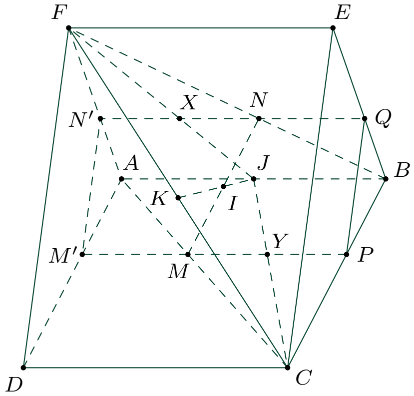
BÀI 8. Hai hình vuông $ABCD$ và $ABEF$ ở trong hai mặt phẳng khác nhau. Trên các đường chéo AC và BF lần lượt lấy các điểm M, N sao cho $AM = BN$. Các đường thẳng song song với AB vẽ từ M, N lần lượt cắt AD, AF tại M', N'.

a) Chứng minh $(BCE) \parallel (ADF)$.

b) Chứng minh $(DEF) \parallel (MNN'M')$.

c) Gọi I là trung điểm của MN. Tìm tập hợp điểm I khi M, N thay đổi trên AC và BF.

Lời giải.



a) Ta có $\begin{cases} BE \parallel AF \\ AF \subset (ADF) \end{cases} \Rightarrow EB \parallel (ADF)$.
Tương tự $BC \parallel (ADF)$.
Từ đó ta có $(BCE) \parallel (ADF)$.

b) Vì $MM' \parallel AB \Rightarrow MM' \parallel CD$ nên theo định lí Thales ta có $\dfrac{AM}{AC} = \dfrac{AM'}{AD}$. (1)
Tương tự $NN' \parallel AB \Rightarrow \dfrac{BN}{BF} = \dfrac{AN'}{AF}$. (2)
Từ (1) và (2) suy ra $\dfrac{AM'}{AD} = \dfrac{AN'}{AF} \Rightarrow M'N' \parallel DF \subset (DEF) \Rightarrow M'N' \parallel (DEF)$.

Lại có $MM' \parallel CD \parallel EF \Rightarrow MM' \parallel (DEF) \Rightarrow (DEF) \parallel (MNN'M')$.

c) Gọi $P = MM' \cap BC$, $Q = NN' \cap BE$ và J, K lần lượt là trung điểm các đoạn AB và CF.
Gọi $X = N'Q \cap FJ, Y = M'P \cap CJ$ thì $XY = (MPQN') \cap (FCJ)$.
Ta có $\dfrac{YM}{AJ} = \dfrac{CM}{CA}$ (3) và $\dfrac{XN}{BJ} = \dfrac{FN}{FB}$ (4) mà $AJ = BJ$, $AC = BF$ nên từ (3), (4) suy ra $YM = XN \Rightarrow XMYN$ là hình bình hành nên I là trung điểm của XY.
Do $\begin{cases} (M'PQN') \parallel (CEFE) \\ (CFJ) \cap (M'PQN') = XY \\ (CFJ) \cap (CEFE) = CF \end{cases} \Rightarrow XY \parallel CF$.
Mà $IX = IY$ nên I thuộc đường trung trung tuyến JK của tam giác JCF.
Giới hạn:
Khi $N \to B \Rightarrow M \to A \Rightarrow I \to J$.
Khi $N \to F \Rightarrow M \to C \Rightarrow I \to K$.
Phần đảo:
Vậy tập hợp điểm I là đường trung tuyến JK của tam giác JCF.

□

BÀI 9. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang, $AB = 3a$, $AD = CD = a$. Mặt bên SAB là tam giác cân đỉnh S và $SA = 2a$, mặt phẳng (α) song song với (SAB) cắt các cạnh AD, BC, SC, SD theo thứ tự tại M, N, P, Q.

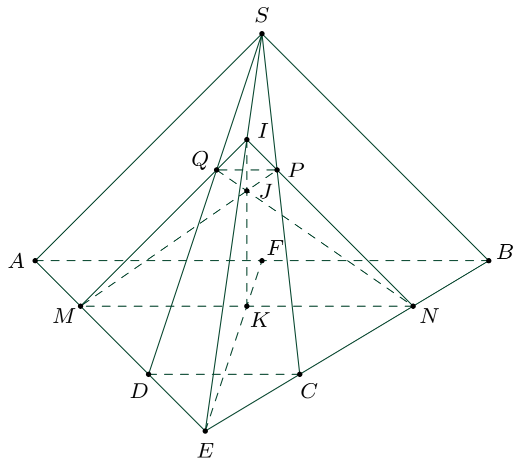
a) Chứng minh $MNPQ$ là hình thang cân.

b) Đặt $x = AM$ $(0 < x < a)$. Tính x để $MNPQ$ là tứ giác ngoại tiếp được một đường tròn. Tính bán kính đường tròn đó.

c) Gọi $I = MQ \cap NP$. Tìm tập hợp điểm I khi M di động trên AD.

d) Gọi $J = MP \cap NQ$. Chứng minh IJ có phương không đổi và điểm J luôn thuộc một mặt phẳng cố định.

Lời giải.



a) Do $\begin{cases} (\alpha) \parallel (SAB) \\ (ABCD) \cap (SAB) = AB \\ (ABCD) \cap (\alpha) = MN \end{cases} \Rightarrow MN \parallel AB$. (1)
Tương tự $\begin{cases} (\alpha) \parallel (SAB) \\ (SCD) \cap (ABCD) = CD \\ (SCD) \cap (\alpha) = PQ \end{cases} \Rightarrow PQ \parallel CD$. (2)
Lại có $AB \parallel CD$. (3)
Từ (1), (2) và (3) ta có $MN \parallel AB \parallel CD \parallel PQ$ nên $MNPQ$ là hình thang.
Dễ thấy rằng $MQ \parallel SA, NP \parallel SB$ do đó $\dfrac{MQ}{SA} = \dfrac{DM}{DA}$; $\dfrac{NP}{SB} = \dfrac{CN}{CB}$
mà $\dfrac{DM}{DA} = \dfrac{CN}{CB}$ nên $\dfrac{MQ}{SA} = \dfrac{NP}{SB}$.
Mặt khác $\triangle SAB$ cân tại S nên $SA = SB \Rightarrow MQ = NP$.
Suy ra $MNPQ$ là hình thang cân.

b) Tứ giác $MNPQ$ ngoại tiếp được một đường tròn khi và chỉ khi $MQ + NP = MN + PQ$.
Ta có $\dfrac{MQ}{SA} = \dfrac{DM}{DA} = \dfrac{a - x}{a} \Rightarrow MQ = 2(a - x) \Rightarrow NP = 2(a - x)$.

Lại có $\dfrac{PQ}{CD} = \dfrac{SQ}{SD} = \dfrac{AM}{AD} = \dfrac{x}{a} \Rightarrow PQ = x$.
Không khó khăn ta tính được $MN = 3a - 2x$.
Do đó $MQ + NP = MN + PQ \Leftrightarrow 4(a-x) = 3a - 2x + x \Leftrightarrow x = \dfrac{a}{3}$.
Khi đó tính được $r = \dfrac{a\sqrt{7}}{6}$.

c) Gọi $E = AD \cap BC \Rightarrow SE = (SAD) \cap (SBC)$ và

$$I = MP \cap NQ \Rightarrow \begin{cases} I \in MP \subset (SAD) \\ I \in NQ \subset (SBC) \end{cases} \Rightarrow I \in SE.$$

Giới hạn:
Gọi I_0 là giao điểm của SE với mặt phẳng (β) đi qua D và song song với (SAB).
Khi $M \to D \Rightarrow N \to B \Rightarrow I \to I_0$.
Khi $M \to A \Rightarrow N \to B \Rightarrow I \to S$.

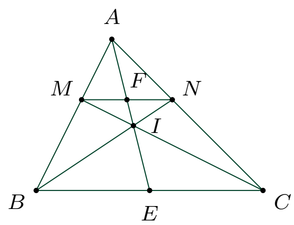
d) Gọi $K = IJ \cap MN$, vì $MNPQ$ là hình thang cân nên K là trung điểm của MN.
Gọi $F = EK \cap AB$ thì F là trung điểm của AB nên F cố định.
Dễ thấy $IJ \parallel SF$ suy ra IJ có phương không đổi và điểm J thuộc mặt phẳng cố định (SEF).

□

BÀI 10. Cho hình chóp $S.ABC$, một mặt phẳng (α) di động luôn song song với (ABC), cắt SA, SB, SC lần lượt tại A', B', C'. Tìm tập hợp điểm chung của ba mặt phẳng $(A'BC)$, $(B'AC)$, $(C'AB)$.

Lời giải.

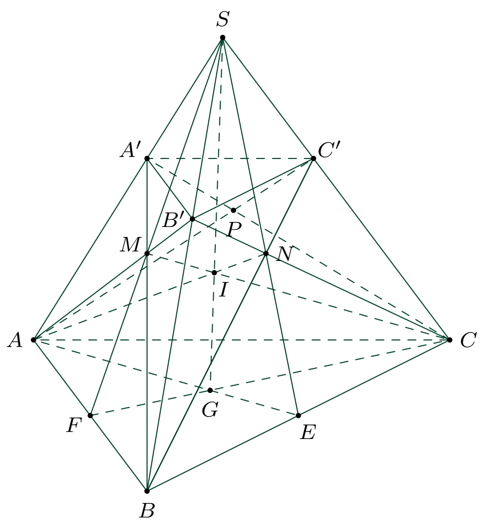
Bổ đề. Cho tam giác ABC và các điểm M, N thuộc các cạnh AB, AC sao cho $MN \parallel BC$.
Gọi E, F lần lượt là trung điểm của BC, MN và $I = MB \cap CN$ thì A, F, I, E thẳng hàng.
Chứng minh. Ta có



$$\begin{aligned} 2\overrightarrow{AE} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \frac{AB}{AM} \cdot \overrightarrow{AM} + \frac{AC}{AN} \cdot \overrightarrow{AN} \\ &= k\left(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN}\right) = 2k\overrightarrow{AF} \end{aligned}$$

với $k = \dfrac{AB}{AM} = \dfrac{AC}{AN}$. Hay A, E, F thẳng hàng.
Mặt khác $2\overrightarrow{IE} = \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = -\dfrac{IB}{IN} \cdot \overrightarrow{IN} - \dfrac{IC}{IM} \cdot \overrightarrow{IM} = \ell\left(\overrightarrow{IN} + \overrightarrow{IM}\right) = 2\ell\overrightarrow{IF}$ với $\ell = -\dfrac{IB}{IN} = -\dfrac{IC}{IM}$.
Suy ra I, E, F thẳng hàng.
Vậy A, F, I, E thẳng hàng.

Trở lại bài toán.
Gọi $M = AB' \cap BA'$, $P = AC' \cap CA'$, $N = BC' \cap CB'$ và $I = CM \cap AN$.
Khi đó $\begin{cases} I \in AN \subset (ABC') \\ I \in CM \subset (BCA') \end{cases} \Rightarrow I \in BP = (ABC') \cap (BCA')$.
Vậy I chính là điểm đồng quy của ba mặt phẳng $(A'BC)$, $(B'AC)$, $(C'AB)$.
Gọi E, F lần lượt là trung điểm của BC, BA.
Theo bổ đề trên ta có S, N, E thẳng hàng và $I \in AN$ nên $I \in (SAE)$.
Tương tự $I \in (SCF)$.
Gọi G là trọng tâm của $\triangle ABC$ thì $SG = (SAE) \cap (SCF)$ nên $I \in SG$.
Từ đó dễ dàng lập luận được quỹ tích điểm I là đoạn thẳng SG trừ S và G.



□

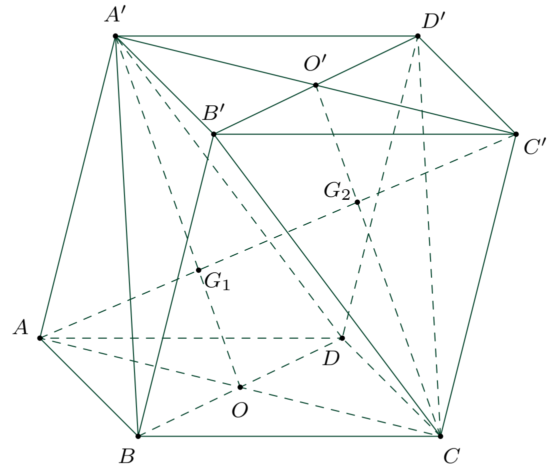
BÀI 11. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$.

a) Chứng minh $(BDA') \parallel (B'D'C)$.

b) Chứng minh đường chéo AC' đi qua trọng tâm G_1, G_2 của các tam giác BDA', $B'D'C$ đồng thời chia đường chéo AC' thành ba phần bằng nhau.

c) Xác định thiết diện của hình hộp cắt $(A'B'G_2)$. Thiết diện là hình gì?

Lời giải.



a) Gọi O, O' lần lượt là trọng tâm các mặt $ABCD$ và $A'B'C'D'$.
Dễ thấy $DBB'D'$ là hình bình hành nên

$$B'D' \parallel BD \subset (BDA') \Rightarrow B'D' \parallel (BDA'). \quad (1)$$

Tương tự $OCO'A'$ là hình bình hành nên

$$O'C \parallel OA' \subset (A'BD) \Rightarrow CO' \parallel (A'BD). \quad (2)$$

Từ (1), (2) suy ra $(A'BD) \parallel (CB'D')$.

b) Gọi G_1, G_2 lần lượt là giao điểm của AC' với $A'O$ và CO'.
Ta có $A'O$ là trung tuyến của tam giác $A'BD$ và $\dfrac{G_1O}{G_1A'} = \dfrac{OA}{A'C'} = \dfrac{1}{2}$ nên G_1 là trọng tâm của tam giác $A'BD$.
Tương tự G_2 cũng là trọng tâm của tam giác $CB'D'$. Dễ thấy OG_1 và $O'G_2$ là đường trung bình của các tam giác ACG_2 và $A'C'G_1$ nên

$$AG_1 = G_1G_2 = G_1C' = \frac{1}{3}AC'.$$

c) Gọi I là trung điểm của CD'. Do G_2 là trọng tâm tam giác $CB'D'$ nên $I \in B'G_2 \subset (A'B'G_2)$.

Vậy $\begin{cases} I \in (A'B'G_2) \cap (CDD'C') \\ A'B' \parallel C'D' \\ A'B' \subset (A'B'G_2) \\ C'D' \subset (CDD'C') \end{cases} \Rightarrow (A'B'G_2) \cap (CDD'C') = EF \parallel C'D'$, trong đó $E \in CC'$, $F \in DD'$.

Thiết diện là hình bình hành $A'B'EF$.

□

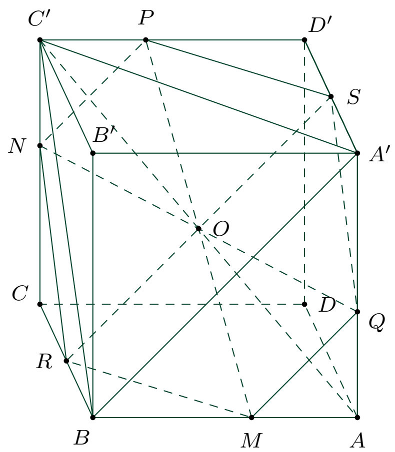
BÀI 12. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các mặt đều là hình vuông cạnh a. Trên các cạnh AB, CC', $C'D'$ và AA' lấy các điểm M, N, P, Q sao cho $AM = C'N = C'P = AQ = x$, $(0 \leq x \leq a)$.

a) Chứng minh bốn điểm M, N, P, Q đồng phẳng và MP, NQ cắt nhau tại một điểm cố định.

b) Chứng minh $(MNPQ)$ đi qua một đường thẳng cố định.

c) Dựng thiết diện của hình hộp khi cắt bởi $(MNPQ)$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của chu vi thiết diện.

Lời giải.



a) Dễ thấy $PN \parallel CD'$ và $QM \parallel A'B$ mà $A'B \parallel C'D$ nên $PN \parallel QM$ hay M, N, P, Q đồng phẳng.
Do $PC'MA$ là hình bình hành nên MP đi qua trung điểm O của AC'.
Tương tự, $AQC'N$ là hình bình hành nên NQ đi qua trung điểm O của AC'.
Vậy MP và NQ cắt nhau tại trung điểm O của AC'.

b) Ta có $O \in (MNPQ)$.
Mặt khác $A'B \parallel MQ \subset (MNPQ) \Rightarrow A'B \parallel (MNPQ)$.
Gọi Δ là đường thẳng qua O và song song với $A'B$ thì Δ cố định và $\Delta \subset (MNPQ)$.
Hay $(MNPQ)$ luôn chứa đường thẳng cố định Δ.
Ta có $(MNPQ) \parallel (A'BC') \Rightarrow BC' \parallel (MNPQ) \Rightarrow BC' \parallel NR$.
Do đó $\dfrac{BR}{BC} = \dfrac{C'N}{CC'} \Rightarrow x = \dfrac{a}{2}$.
Đảo lại $x = \dfrac{a}{2}$, dễ dàng chứng minh được $(MNPQ) \parallel (A'BC')$.

c) Dễ thấy Δ cắt BC, $A'D'$ tại các trung điểm R và S của chúng.
Thiết diện là lục giác $MRNPSQ$.
Dễ thấy lục giác có tâm đối xứng là O nên $MQ = NP$, $MR = NS$, $RN = SQ$ do đó chu vi thiết diện là

$$2p = 2(RM + MQ + QS).$$

Ta có $MR = QS = \sqrt{\dfrac{a^2}{4} + (a-x)^2}$, $QM = x\sqrt{2}$.

Vậy $2p = 2\left(x\sqrt{2} + 2\sqrt{\dfrac{a^2}{4} + (a-x)^2}\right)$.

Đặt $f(x) = x\sqrt{2} + \sqrt{a^2 + 4(a-x)^2}; x \in [0; a]$.

Theo CauChy -Schwarz $\sqrt{(a^2+4(a-x)^2)(1^2+1^2)} \geq a + 2(a-x) \Rightarrow \sqrt{a^2+4(a-x)^2} \geq \dfrac{1}{\sqrt{2}}(3a-2x)$.

Nên $f(x) \geq x\sqrt{2} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}(3a-2x) = \dfrac{3a}{\sqrt{2}}$. Đẳng thức xảy ra khi $x = \dfrac{a}{2}$.

Vậy $\min(2p) = 3\sqrt{2}a$. Mặt khác bằng biến đổi tương đương ta có

$$x\sqrt{2} + \sqrt{a^2+4(a-x)^2} \leq \sqrt{2}a + a \Leftrightarrow (a-x)^2\left[(a-x)^2 - a^2\right] \leq 0 \text{ đúng } \forall x \in [0; a].$$

Đẳng thức xảy ra khi $x = a$.

Vậy $\max(2p) = 2a(\sqrt{2}+1)$.

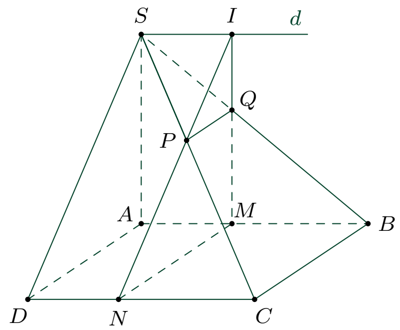
□

BÀI 13. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật và $\triangle SAD$ vuông tại A. Qua điểm M trên cạnh AB dựng mặt phẳng (α) song song với (SAD) cắt CD, SC, SB tại N, P, Q.

a) Chứng minh $MNPQ$ là hình thang vuông.

b) Gọi $I = NP \cap MQ$. Tìm tập hợp điểm I khi M di động trên cạnh AB.

Lời giải.



a) Ta có $\begin{cases} (\alpha) \parallel (SAB) \\ (ABCD) \cap (\alpha) = MN \\ (ABCD) \cap (SAB) = AB \end{cases} \Rightarrow MN \parallel AB$.

Tương tự $(\alpha) \cap (SAB) = MQ \parallel SA$,

$(\alpha) \cap (SCD) = NP \parallel SD$.

Thiết diện là tứ giác $MNPQ$.

Do $\begin{cases} MN \parallel BC \\ MN \subset (\alpha) \\ BC \subset (SBC) \\ (SBC) \cap (\alpha) = PQ \end{cases} \Rightarrow PQ \parallel MN$. (1)

Ta có $MN \parallel AD$, $MQ \parallel SA$ mà $AD \perp SA$ nên $MN \perp MQ$. (2)

Từ (1), (2) suy ra $MNPQ$ là hình thang vuông.

b) Gọi $d = (SAB) \cap (SCD)$, khi đó $I = NP \cap MQ \Rightarrow \begin{cases} I \in NP \subset (SCD) \\ I \in MQ \subset (SAB) \end{cases} \Rightarrow I \in d$.

Từ đây dễ dàng tìm được quĩ tích của điểm I.

□

BÀI 14. Cho hình chóp cụt $ABC.A'B'C'$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh $A'B'$, BB', BC.

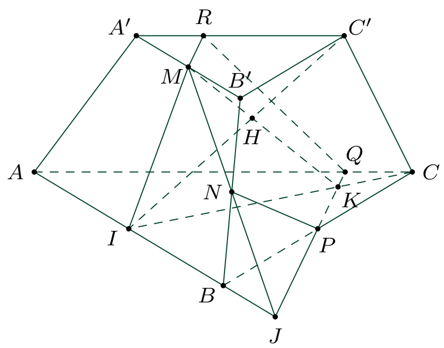
a) Xác định thiết diện của hình chóp cụt với (MNP).

b) Gọi I là trung điểm của AB. Tìm giao điểm của IC' với (MNP).

Lời giải.

a) Trong $(ABB'A')$ gọi $J = MN \cap AB$, trong (ABC) gọi $Q = JP \cap AC$.
Ta có $(ABC) \parallel (A'B'C')$ nên $(MNP) \cap (A'B'C') = MR \parallel PQ$.
Thiết diện là ngũ giác $MNPQR$.

b) Trong (ABC) gọi $K = PQ \cap IC$ thì $K \in (MNP) \Rightarrow MK \subset (MNP)$.
Do $CI \parallel C'M$ nên trong $(MICC')$ gọi $H = IC' \cap MK \Rightarrow H = IC' \cap (MNP)$.



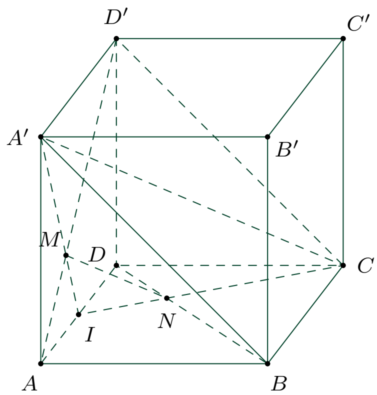
□

BÀI 15. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các mặt đều là hình vuông cạnh a. Các điểm M, N nằm trên AD', BD sao cho $AM = DN = x$, $(0 < x < a\sqrt{2})$.

a) Chứng minh khi x biến thiên thì MN luôn song song với một mặt phẳng cố định.

b) Khi $x = \dfrac{a\sqrt{2}}{3}$, chứng minh $MN \parallel A'C$.

Lời giải.



a) Gọi (α) là mặt phẳng đi qua M và song song với $(A'D'CB)$ và $N' = (\alpha) \cap BD$.
Ta có $\dfrac{AM}{AD'} = \dfrac{DN'}{DB}$ và $AD' = BD = a\sqrt{2}$ nên $AM = DN'$.
Mà $AM = DN \Rightarrow DN = DN' \Rightarrow N \equiv N'$.
Vậy $MN \subset (\alpha) \parallel (A'D'CB)$ do đó MN song song với mặt phẳng cố định $(A'D'CB)$.

b) Khi $x = \dfrac{a\sqrt{2}}{3}$ thì dễ thấy M, N lần lượt là trọng tâm các tam giác $A'AD$ và CAD nên $A'M$ và CN cắt nhau tại trung điểm I của AD.
Khi đó $\dfrac{IM}{IA'} = \dfrac{IN}{IC} \Rightarrow MN \parallel A'C$.

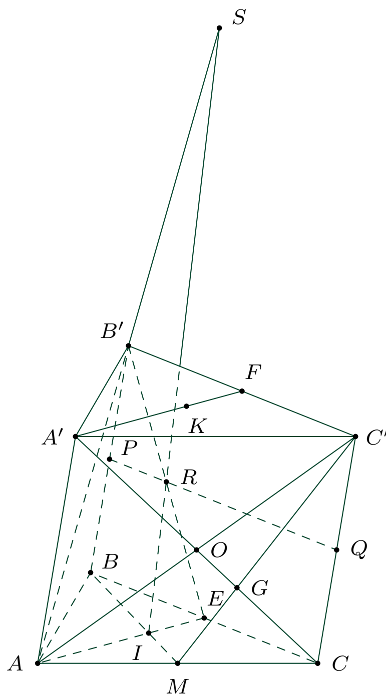
□

BÀI 16. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

a) Gọi I, K, G lần lượt là trọng tâm các tam giác ABC, $A'B'C'$ và ACC'. Chứng minh $(IGK) \parallel (BB'C'C)$ và $(A'KG) \parallel (AIB)$.

b) Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của BB' và CC'. Hãy dựng đường thẳng đi qua trọng tâm của tam giác ABC cắt AB' và PQ.

Lời giải.



a) Gọi O, M, E, F lần lượt là trung điểm của AC', AC, BC, $B'C'$.
Ta có $\dfrac{MI}{MB} = \dfrac{MG}{MC'} \Rightarrow IG \parallel BC' \subset (BCC'B') \Rightarrow IG \parallel (BCC'B')$. (1)
Tương tự $\dfrac{A'G}{A'C} = \dfrac{OA' + \frac{1}{3}OA'}{A'C} = \dfrac{\frac{4}{3}OA'}{A'C} = \dfrac{2}{3}$.
Lại có $\dfrac{A'K}{A'F} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow \dfrac{A'G}{A'C} = \dfrac{A'K}{A'F} \Rightarrow GK \parallel CF \subset (BCC'B') \Rightarrow GK \parallel (BCC'B')$. (2)
Từ (1), (2) suy ra $(IGK) \parallel (BCC'B')$.
Chứng minh $(A'KG) \parallel (AIB')$.
Dễ thấy $AA'FE$ là hình bình hành nên $A'F \parallel AE$ hay $A'F \parallel (AIB')$. (3)
Cũng dễ thấy $CF \parallel EB' \subset (AIB') \Rightarrow CF \parallel (AIB')$. (4)
Từ (3), (4) suy ra $(A'CF) \parallel (AIB')$ mà $(A'CF)$ chính là $(A'KG)$ nên $(A'KG) \parallel (AIB')$.

b) Trong $(BCC'B')$ gọi $R = PQ \cap B'E$.
Khi đó $\begin{cases} R \in PQ \\ R \in B'E \subset (AB'E). \end{cases}$
Trong $(AB'E)$ gọi $S = IR \cap AB'$ thì đường thẳng IR chính là đường thẳng cần dựng.

□

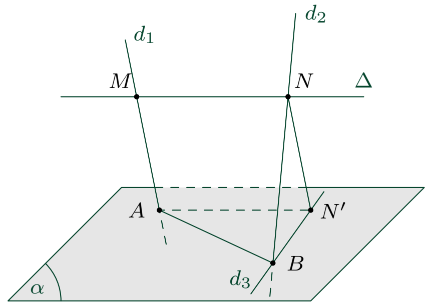
BÀI 17. Cho mặt phẳng (α) và hai đường thẳng chéo nhau d_1, d_2 cắt (α) tại A, B. Đường thẳng Δ thay đổi luôn song song với (α) cắt d_1, d_2 lần lượt tại M và N. Đường thẳng qua N song song với d_1 cắt (α) tại N'.

a) Tứ giác $AMNN'$ là hình gì? Tìm tập hợp điểm N'.

b) Xác định vị rí của Δ để độ dài MN nhỏ nhất.

c) Gọi O là trung điểm của AB, I là trung điểm của MN. Chứng minh OI là đường thẳng nằm trong mặt phẳng cố định khi M di động.

Lời giải.



a) Ta có $MA \parallel NN'$. (1)
Do $\begin{cases} MN \parallel (\alpha) \\ (AMNN') \cap (\alpha) = AN' \end{cases} \Rightarrow AN' \parallel MN$. (2)
Từ (1), (2) suy ra $AMNN'$ là hình bình hành.
Gọi (β) là mặt phẳng chứa d_2 và song song với d_1 thì $NN' \subset (\beta) \Rightarrow N' \in (\beta)$.
Từ đó ta có N' thuộc giao tuyến d_3 của (α) và (β).

b) Ta có $MN = AN'$ nên MN nhỏ nhất khi AN' nhỏ nhất. Tức là $AN' \perp d_3$.
Từ đó ta xác định Δ như sau

- Dựng (β) chứa d_2 và $(\beta) \parallel d_1$.
- Dựng giao tuyến $d_3 = (\alpha) \cap (\beta)$.
- Gọi N' là hình chiếu của A trên d_3.
- Từ N' dựng đường thẳng song song với d_1 cắt d_2 tại N.
- Từ N dựng đường thẳng Δ song song với $N'A$ thì Δ là đường thẳng thỏa yêu cầu bài toán.

c) Gọi J là trung điểm của AN' thì $(OIJ) \parallel (\beta)$ mà O cố định và (β) cố định nên (OIJ) cố định.
Vậy OI thuộc mặt phẳng cố định đi qua O và song song với (β).

□

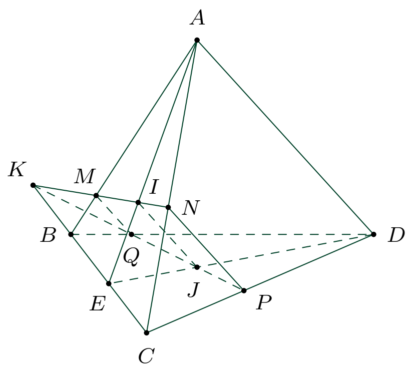
BÀI 18. Cho tứ diện đều cạnh a. Gọi I, J lần lượt là trọng tâm các tam giác ABC và DBC. Mặt phẳng (α) qua IJ cắt các cạnh AB, AC, DC, DB lần lượt tại M, N, P, Q.

a) Chứng minh MN, PQ, BC đồng quy hoặc song song và $MNPQ$ là hình thang cân.

b) Đặt $AM = x$, $AN = y$. Chứng minh $a(x+y) = 3xy$. Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của $AM + AN$.

c) Tính diện tích tứ giác $MNPQ$ theo a và $s = x + y$.

Lời giải.

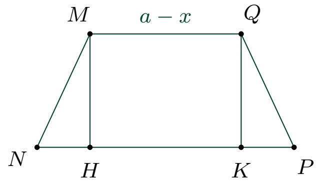


a) Ta có (ABC), (DBC), (α) đôi một cắt nhau theo các giao tuyến là BC, MN, PQ nên theo định lí về giao tuyến thì BC, MN, PQ hoặc đồng quy hoặc đôi một song song.
Ta chứng minh $MNPQ$ là hình thang cân trong trường hợp BC, MN, PQ đồng quy.
Gọi E là trung điểm của BC thì $\dfrac{EI}{EA} = \dfrac{EJ}{ED} \Rightarrow IJ \parallel AD$.
Từ đó ta có $\begin{cases} IJ \subset (\alpha) \\ AD \subset (ACD) \\ IJ \parallel AD \\ (\alpha) \cap (ACD) = NP \end{cases} \Rightarrow NP \parallel IJ$.
Tương tự $MQ \parallel IJ$ nên $MNPQ$ là hình thang.
Dễ thấy $DQ = AM = x$, $DP = AN = y$.
Theo định lí cô-sin ta có $MN^2 = AM^2 + AN^2 - 2AM \cdot AN \cdot \cos 60^\circ = x^2 + y^2 - xy$.
Tương tự $PQ^2 = DP^2 + DQ^2 - 2DP \cdot DQ \cos 60^\circ = x^2 + y^2 - xy \Rightarrow MN = PQ$.
Vậy $MNPQ$ là hình thang cân.
Trường hợp BC, MN, PQ song song không có gì khó khăn bạn đọc tự kiểm tra.

b) Ta có $AM + AN = x + y$.
Theo BĐT Cauchy ta có $a(x+y) = 3xy \le 3\left(\dfrac{x+y}{2}\right)^2 \Leftrightarrow 3(x+y)^2 - 4a(x+y) \Leftrightarrow x + y \ge \dfrac{4a}{3} \Rightarrow AM + AN \ge \dfrac{4a}{3}$.
Đẳng thức xảy ra khi $x = y = \dfrac{2a}{3}$.
Khi đó (α) đi qua IJ và song song với BC.
Không giảm tổng quát ta có thể giả sử $x \ge y$ khi đó $x \in \left[\dfrac{2a}{3}; a\right]$ và $x + y = x + \dfrac{ax}{3x - a} = \dfrac{3x^2}{3x - a}$.

Suy ra $x+y-\dfrac{3a}{2}=\dfrac{3a^2}{3x-a}-\dfrac{3a}{2}=\dfrac{(a-x)(2a-x)}{3x-a}\le 0 \Rightarrow x+y\le\dfrac{3a}{2}$.
Đẳng thức xảy ra khi $x=a\Rightarrow y=\dfrac{a}{2}$. Khi đó (α) đi qua B.
Vậy $\min(AM+AN)=\dfrac{4a}{3}$, $\max(AM+AN)=\dfrac{3a}{2}$.

c) Dễ thấy $MNPQ$ là hình thang cân có $MQ=a-x$, $NP=a-y$.
Giả sử $x\ge y\Rightarrow a-x\le a-y$.
Ta có



- $HN=\dfrac{(a-y)-(a-x)}{2}=\dfrac{x-y}{2}$,
- $MH^2=MN^2-NH^2=x^2+y^2-xy-\left(\dfrac{x-y}{2}\right)^2=\dfrac{3\left(x^2+y^2\right)-6xy}{4}=\dfrac{3s^2-8as}{4}$,
- $MH=\sqrt{3xy}=\sqrt{a(x+y)}=\dfrac{\sqrt{3s^2-8as}}{2}$.

Diện tích hình thang là $S_{MNPQ}=\dfrac{1}{2}(MQ+NP)MH=\dfrac{1}{2}(2a-(x+y))\sqrt{3s^2-8as}=\dfrac{1}{4}(2a-s)\sqrt{3s^2-8as}$.

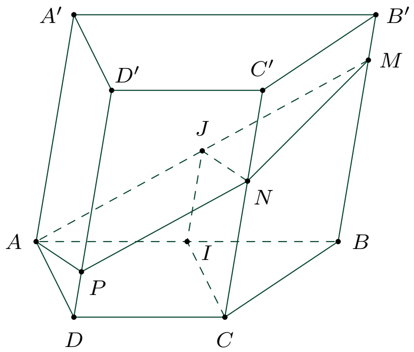
□

BÀI 19. Cho lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình thang, $AD=CD=BC=a$, $AB=2a$. Mặt phẳng (α) đi qua A cắt các cạnh BB', CC', DD' lần lượt tại M, N, P.

a) Tứ giác $AMNP$ là hình gì?

b) So sánh AM và NP.

Lời giải.



a) Ta có $(ABB'A')\parallel(CDD'C')$, $(\alpha)\cap(ABB'A')=AM$, $(\alpha)\cap(CDD'C')=NP$.
Suy ra $AM\parallel NP$. (1)
Do đó $AMNP$ là hình thang.

b) Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB, AM thì $IC\parallel AD\Rightarrow IC\parallel(ADD'A')$.
Lại có $IJ\parallel BB'\parallel AA'\Rightarrow IJ\parallel AA'\subset(ADD'A')\Rightarrow(CIJN)\parallel(ADD'A')$.
Mặt khác $(\alpha)\cap(ADD'A')=AP$ và $(\alpha)\cap(CIJN)=JN$ nên $JN\parallel AP$. (2)
Từ (1), (2) suy ra $APNJ$ là hình bình hành, do đó $PN=AJ=\dfrac{1}{2}AM$.

□

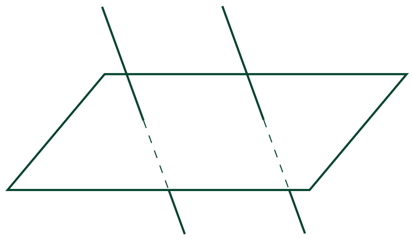
Bài 14. PHÉP CHIẾU SONG SONG

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. Phép chiếu song song

Cho mặt phẳng (α) và đường thẳng Δ cắt (α). Với mỗi điểm M trong không gian, ta xác định điểm M' như sau:

- Nếu điểm $M \in \Delta$ thì M' là giao điểm của (α) với Δ.
- Nếu điểm $M \notin \Delta$ thì M' là giao điểm của (α) với đường thẳng đi qua M và song song Δ.



— Điểm M' được gọi là hình chiếu song của điểm M trên mặt phẳng (α) theo phương Δ.
— Mặt phẳng (α) gọi là mặt phẳng chiếu. Phương Δ gọi là phương chiếu.

- Phép đặt tương ứng mỗi điểm M trong không gian với hình chiếu M' của nó trên mặt phẳng (α) được gọi là phép chiếu song song lên (α) theo phương Δ.
- Nếu $\mathscr{H}$ là một hình nào đó thì tập hợp $\mathscr{H}'$ các hình chiếu M' của tất cả những điểm M thuộc $\mathscr{H}$ được gọi là hình chiếu của $\mathscr{H}$ qua phép chiếu song song nói trên.

Nếu một đường thẳng có phương trùng với phương chiếu thì hình chiếu của đường thẳng đó là một điểm.

2. Tính chất của phép chiếu song song

- Phép chiếu song song biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và không làm thay đổi thứ tự ba điểm đó.
- Phép chiếu song song biến đường thẳng thành đường thẳng, biến tia thành tia, biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng.
- Phép chiếu song song biến hai đường thẳng song song thành hai đường thẳng song song hoặc trùng nhau.
- Phép chiếu song song không làm thay đổi tỉ số độ dài của hai đoạn thẳng nằm trên hai đường thẳng song song hoặc cùng nằm trên một đường thẳng.

3. Hình biểu diễn của một hình không gian trên mặt phẳng

Hình biểu diễn của một hình **H** trong không gian là hình chiếu song song của hình **H** trên một mặt phẳng theo một phương chiếu nào đó hoặc hình đồng dạng với hình chiếu đó. Hình biểu diễn của các hình thường gặp:

- **Tam giác**. Một tam giác bất kì bao giờ cũng có thể coi là hình biểu diễn của một tam giác có dạng tùy ý cho trước
- **Hình bình hành.** Một hình bình hành bất kì bao giờ cũng có thể coi là hình biểu diễn của một hình bình hành có dạng tùy ý cho trước
- **Hình thang**. Một hình thang bất kì bao giờ cũng có thể coi là hình biểu diễn của một hình thang tùy ý cho trước, miễn là tỉ số độ dài hai đáy của hình biểu diễn phải bằng tỉ số độ dài hai đáy của hình thang ban đầu.
- **Hình tròn**. Người ta thường dùng hình elip để biểu diễn cho hình tròn.

B. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

CÂU 1. Hình chiếu của hình chữ nhật không thể là hình nào trong các hình sau?

(A) Hình chữ nhật. (B) Hình thang. (C) Hình bình hành. (D) Hình thoi.

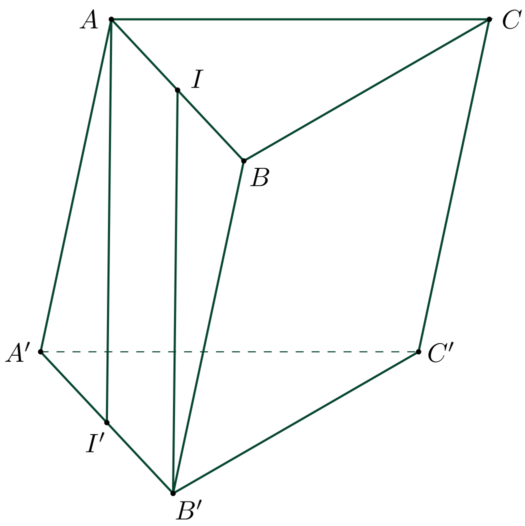
Lời giải.

Hình chiếu của hình chữ nhật không thể là hình thang.
Chọn đáp án (B) □

CÂU 2. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$, gọi I, I' lần lượt là trung điểm của AB, $A'B'$. Qua phép chiếu song song đường thẳng AI', mặt phẳng chiếu $(A'B'C')$ biến I thành

(A) A'. (B) C'. (C) B'. (D) I'.

Lời giải.

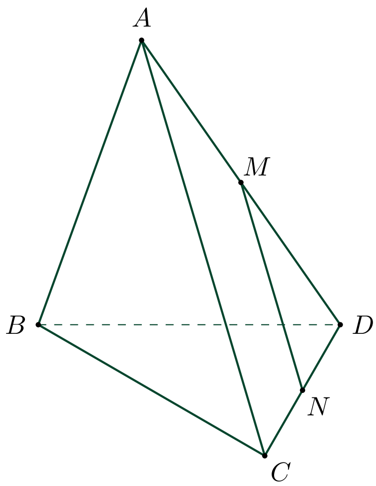


Ta có $\begin{cases} AI \parallel B'I' \\ AI = B'I' \end{cases} \Rightarrow AIB'I'$ là hình bình hành.
Suy ra qua phép chiếu song song đường thẳng AI', mặt phẳng chiếu $(A'B'C')$ biến điểm I thành điểm B'.
Chọn đáp án C □

CÂU 3. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M là trung điểm của AD. Hình chiếu song song của điểm M theo phương AC lên mặt phẳng (BCD) là điểm nào sau đây?

A D.
B Trung điểm của CD.
C Trung điểm của BD.
D Trọng tâm tam giác BCD.

Lời giải.



Gọi N là trung điểm của cạnh CD.
Khi đó MN là đường trung bình của $\triangle ADC$ nên $MN \parallel AC$.
Do đó, hình chiếu song song của M theo phương AC lên mặt phẳng (BCD) là điểm N.
Chọn đáp án B □

CÂU 4. Qua phép chiếu song song, tính chất nào không được bảo toàn?

A Chéo nhau.
B Đồng qui.
C Song song.
D Thẳng hàng.

Lời giải.
Do hai đường thẳng qua phép chiếu song song ảnh của chúng sẽ cùng thuộc một mặt phẳng.
Suy ra tính chất chéo nhau không được bảo toàn.
Chọn đáp án A □

CÂU 5. Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào **sai**?

A Phép chiếu song song biến đường thẳng thành đường thẳng, biến tia thành tia, biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng.
B Phép chiếu song song biến hai đường thẳng song song thành hai đường thẳng song song.
C Phép chiếu song song biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và không thay đổi thứ tự của ba điểm đó.
D Phép chiếu song song không làm thay đổi tỉ số độ dài của hai đoạn thẳng nằm trên hai đường thẳng song song hoặc cùng nằm trên một đường thẳng.

Lời giải.

Tính chất của phép chiếu song song.
Phép chiếu song song biến hai đường thẳng song song thành hai đường thẳng song song hoặc trùng nhau.
Suy ra phương án “Phép chiếu song song biến hai đường thẳng song song thành hai đường thẳng song song”sai vì chúng có thể trùng nhau.
Chọn đáp án (B) □

CÂU 6. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$, qua phép chiếu song song đường thẳng CC', mặt phẳng chiếu $(A'B'C')$ biến M thành M'. Trong đó M là trung điểm của BC. Chọn mệnh đề đúng?

(A) M' là trung điểm của $A'B'$.
(B) M' là trung điểm của $B'C'$.
(C) M' là trung điểm của $A'C'$.
(D) Cả ba đáp án trên đều sai.

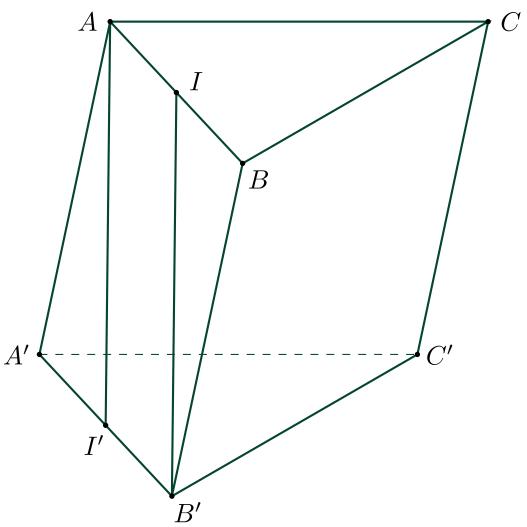
Lời giải.

Ta có phép chiếu song song đường thẳng CC', biến C thành C', biến B thành B'.
Do M là trung điểm của BC suy ra M' là trung điểm của $B'C'$.
Chọn đáp án (B) □

CÂU 7. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$, gọi I, I' lần lượt là trung điểm của AB, $A'B'$. Qua phép chiếu song song đường thẳng AI', mặt phẳng chiếu $(A'B'C')$ biến I thành

(A) A'.
(B) B'.
(C) C'.
(D) I'.

Lời giải.



Ta có $\begin{cases} AI \parallel B'I' \\ AI = B'I' \end{cases} \Rightarrow AIB'I'$ là hình bình hành.
Suy ra qua phép chiếu song song đường thẳng AI', mặt phẳng chiếu $(A'B'C')$ biến điểm I thành điểm B'.
Chọn đáp án (B) □

CÂU 8. Cho tam giác ABC ở trong mặt phẳng (α) và phương ℓ. Biết hình chiếu của tam giác ABC lên mặt phẳng (P) là một đoạn thẳng. Khẳng định nào sau đây đúng?

(A) $(\alpha) \parallel (P)$.
(B) $(\alpha) \equiv (P)$.
(C) $(\alpha) \parallel \ell$ hoặc $(\alpha) \supset \ell$.
(D) A, B, C đều sai.

Lời giải.

- Hình chiếu của tam giác ABC vẫn là một tam giác trên mặt phẳng (P).
- Hình chiếu của tam giác ABC vẫn là tam giác ABC.
- Khi phương chiếu ℓ song song hoặc được chứa trong mặt phẳng (α) thì hình chiếu của tam giác là đoạn thẳng trên mặt phẳng (P). Nếu giao tuyến của hai mặt phẳng (α) và (P) là một trong ba cạnh của tam giác ABC.

Chọn đáp án (C) □

CÂU 9. Khẳng định nào sau đây đúng?

(A) Hình chiếu song song của một hình chóp cụt có thể là một hình tam giác.
(B) Hình chiếu song song của một hình chóp cụt có thể là một đoạn thẳng.
(C) Hình chiếu song song của một hình chóp cụt có thể là một hình chóp cụt.
(D) Hình chiếu song song của một hình chóp cụt có thể là một điểm.

Lời giải.

Qua phép chiếu song song chỉ có thể biến hình chóp cụt thành một đa giác.
Chọn đáp án (A) □

CÂU 10. Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào **sai**?

(A) Hình chiếu song song của hai đường thẳng chéo nhau có thể song song với nhau.

(B) Một đường thẳng có thể trùng với hình chiếu của nó.

(C) Hình chiếu song song của hai đường thẳng chéo nhau có thể trùng nhau.

(D) Một tam giác bất kỳ đều có thể xem là hình biểu diễn của một tam giác cân.

Lời giải.

- Hình chiếu song song của hai đường thẳng chéo nhau có thể song song với nhau đúng vì khi đó hình chiếu của chúng cùng nằm trên một mặt phẳng.
- Một đường thẳng có thể trùng với hình chiếu của nó đúng vì mặt phẳng chiếu chứa đường thẳng đã cho.
- Hình chiếu song song của hai đường thẳng chéo nhau có thể trùng nhau sai vì hình chiếu của chúng chỉ có thể song song hoặc cắt nhau.
- Một tam giác bất kỳ đều có thể xem là hình biểu diễn của một tam giác cân đúng - tính chất phép chiếu song song.

Chọn đáp án (C) □

CÂU 11. Qua phép chiếu song song biến ba đường thẳng song song thành.

(A) Ba đường thẳng đôi một song song với nhau. (B) Một đường thẳng.

(C) Thành hai đường thẳng song song. (D) Cả ba trường hợp trên.

Lời giải.

Tính chất phép chiếu song song.
Chọn đáp án (D) □

CÂU 12. Khẳng định nào sau đây đúng?

(A) Hình chiếu song song của hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ theo phương AA' lên mặt phẳng $(ABCD)$ là hình bình hành.

(B) Hình chiếu song song của hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ theo phương AA' lên mặt phẳng $(ABCD)$ là hình vuông.

(C) Hình chiếu song song của hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ theo phương AA' lên mặt phẳng $(ABCD)$ là hình thoi.

(D) Hình chiếu song song của hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ theo phương AA' lên mặt phẳng $(ABCD)$ là một tam giác.

Lời giải.

Qua phép chiếu song song đường thẳng AA' lên mặt phẳng $(ABCD)$ sẽ biến A' thành A, biến B' thành B, biến C' thành C, biến D' thành D. Nên hình chiếu song song của hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ là hình vuông.
Chọn đáp án (B) □

CÂU 13. Hình chiếu của hình vuông không thể là hình nào trong các hình sau?

(A) Hình vuông. (B) Hình bình hành. (C) Hình thang. (D) Hình thoi.

Lời giải.

Tính chất của phép chiếu song song.
Chọn đáp án (C) □

CÂU 14. Trong các mện đề sau mệnh đề nào **sai**?

(A) Một đường thẳng luôn cắt hình chiếu của nó.

(B) Một tam giác bất kỳ đề có thể xem là hình biểu diễn của một tam giác cân.

(C) Một đường thẳng có thể song song với hình chiếu của nó.

(D) Hình chiếu song song của hai đường thẳng chéo nhau có thể song song với nhau.

Lời giải.

Khi mặt phẳng chiếu song song với đường thẳng đã cho thì đường thẳng đó song song với hình chiếu của nó.
Chọn đáp án (A) □

CÂU 15. Nếu đường thẳng a cắt mặt phẳng chiếu (P) tại điểm A thì hình chiếu của a sẽ là:

(A) Điểm A. (B) Trùng với phương chiếu.

(C) Đường thẳng đi qua A. (D) Đường thẳng đi qua A hoặc chính A.

Lời giải.

- Nếu phương chiếu song song hoặc trùng với đường thẳng a thì hình chiếu là điểm A.

Nếu phương chiếu không song song hoặc không trùng với đường thẳng a thì hình chiếu là đường thẳng đi qua điểm A.

Chọn đáp án (D) □

CÂU 16. Giả sử tam giác ABC là hình biểu diễn của một tam giác đều. Hình biểu diễn của tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác đều là

(A) Giao điểm của hai đường trung tuyến của tam giác ABC.
(B) Giao điểm của hai đường trung trực của tam giác ABC.
(C) Giao điểm của hai đường đường cao của tam giác ABC.
(D) Giao điểm của hai đường phân giác của tam giác ABC.

Lời giải.

Tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác là giao của ba đường trung trực.
Chọn đáp án (B) □

CÂU 17. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. M là trung điểm của SC. Hình chiếu song song của điểm M theo phương AB lên mặt phẳng (SAD) là điểm nào sau đây?

(A) S. (B) Trung điểm của SD. (C) A. (D) D.

Lời giải.

Giả sử N là ảnh của M theo phép chiếu song song đường thẳng AB lên mặt phẳng (SAD).
Suy ra $MN \parallel AB \Rightarrow MN \parallel CD$. Do M là trung điểm của $SC \Rightarrow N$ là trung điểm của SD.
Chọn đáp án (B) □

CÂU 18. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Hình chiếu song song của điểm A theo phương AB lên mặt phẳng (SBC) là điểm nào sau đây?

(A) S. (B) Trung điểm của BC. (C) B. (D) C.

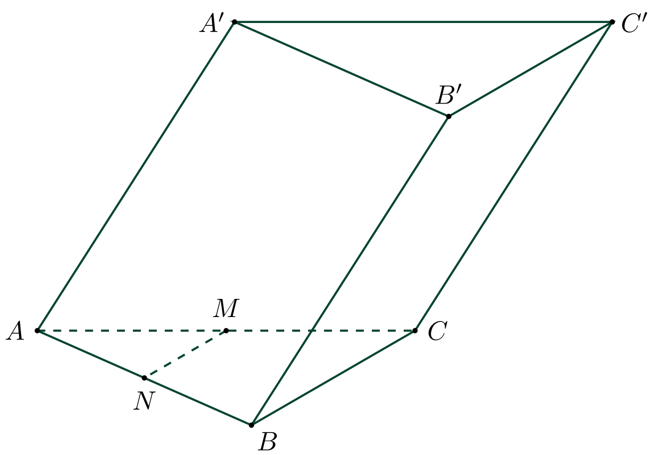
Lời giải.

Do $AB \cap (SBC) = \{A\}$ suy ra hình chiếu song song của điểm A theo phương AB lên mặt phẳng (SBC) là điểm B.
Chọn đáp án (C) □

CÂU 19. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Gọi M là trung điểm của AC. Khi đó hình chiếu song song của điểm M lên $(AA'B')$ theo phương chiếu CB là

(A) Trung điểm BC. (B) Trung điểm AB. (C) Điểm A. (D) Điểm B.

Lời giải.

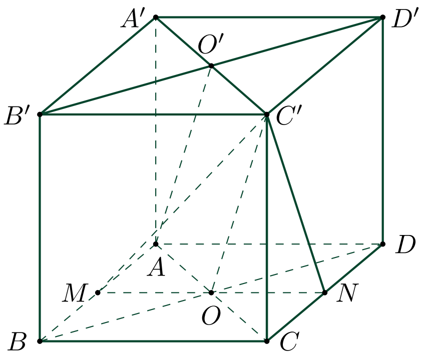


Gọi N là trung điểm của AB. Ta có: $MN \parallel CB$.
Vậy hình chiếu song song của điểm M lên $(AA'B')$ theo phương chiếu CB là điểm N.
Chọn đáp án (B) □

CÂU 20. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi $O = AC \cap BD$ và $O' = A'C' \cap B'D'$. Điểm M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD Qua phép chiếu song song theo phương AO' lên mặt phẳng $(ABCD)$ thì hình chiếu của tam giác $C'MN$ là

(A) Đoạn thẳng MN. (B) Điểm O. (C) Tam giác CMN. (D) Đoạn thẳng BD.

Lời giải.

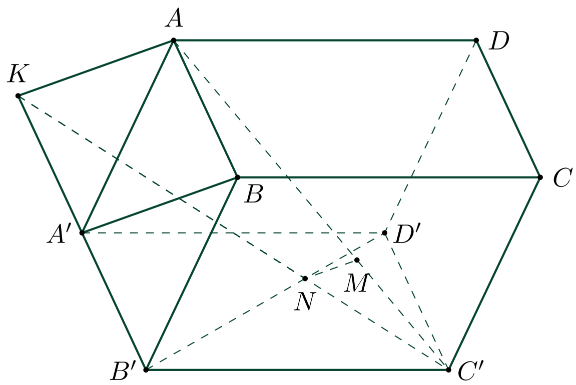


Ta có: $O'C' = AO$ và $O'C' \parallel AO$ nên tứ giác $O'C'OA$ là hình bình hành $\Rightarrow O'A \parallel C'O$.
Do đó hình chiếu của điểm O' qua phép chiếu song song theo phương $O'A$ lên mặt phẳng $(ABCD)$ là điểm O.
Mặt khác điểm M và N thuộc mặt phẳng $(ABCD)$ nên hình chiếu của M và N qua phép chiếu song song theo phương $O'A$ lên mặt phẳng $(ABCD)$ lần lượt là điểm M và N.
Vậy qua phép chiếu song song theo phương AO' lên mặt phẳng $(ABCD)$ thì hình chiếu của tam giác $C'MN$ là đoạn thẳng MN.
Chọn đáp án (A) □

CÂU 21. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Xác định các điểm M, N tương ứng trên các đoạn $AC', B'D'$ sao cho MN song song với BA' và tính tỉ số $\dfrac{MA}{MC'}$.

A 2. **B** 3. **C** 4. **D** 1.

Lời giải.



Xét phép chiếu song song lên mặt phẳng $(A'B'C'D')$ theo phương chiếu BA'.
Ta có N là ảnh của M hay M chính là giao điểm của $B'D'$ và ảnh AC' qua phép chiếu này.
Do đó ta xác định M, N như sau:

- Trên $A'B'$ kéo dài lấy điểm K sao cho $A'K = B'A'$ thì $ABA'K$ là hình bình hành nên $AK \parallel BA'$ suy ra K là ảnh của A trên AC' qua phép chiếu song song.

- Gọi $N = B'D' \cap KC'$. Đường thẳng qua N và song song với AK cắt AC' tại M. Ta có M, N là các điểm cần xác định.

Theo định lí Thales, ta có $\dfrac{MA}{MC'} = \dfrac{NK}{NC'} = \dfrac{KB'}{C'D'} = 2$.

Chọn đáp án (A) □

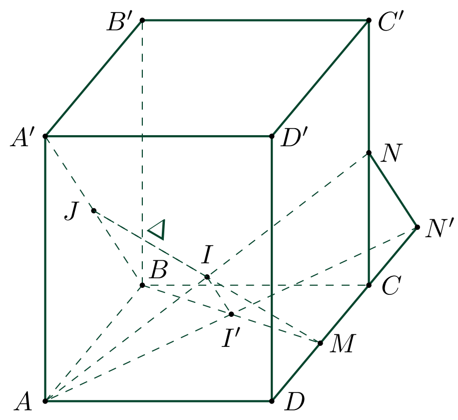
CÂU 22. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của CD và CC'.

a) Xác định đường thẳng Δ đi qua M đồng thời cắt AN và $A'B$.

b) Gọi I, J lần lượt là giao điểm của Δ với AN và $A'B$. Hãy tính tỉ số $\dfrac{IM}{IJ}$.

A 2. **B** 3. **C** 4. **D** 1.

Lời giải.



a) Giả sử đã dựng được đường thẳng Δ cắt cả AN và BA'.
Gọi I, J lần lượt là giao điểm của Δ với AN và BA'.
Xét phép chiếu song song lên $(ABCD)$ theo phương chiếu $A'B$.
Khi đó ba điểm J, I, M lần lượt có hình chiếu là B, I', M.
Do J, I, M thẳng hàng nên B, I', M cũng thẳng hàng.
Gọi N' là hình chiếu của N thì AN' là hình chiếu của AN.
Vì $I \in AN \Rightarrow I' \in AN' \Rightarrow I' = BM \cap AN'$.
Từ phân tích trên suy ra cách dựng:

- Lấy $I' = AN' \cap BM$.
- Trong (ANN') dựng $II' \parallel NN'$ cắt AN tại I.
- Vẽ đường thẳng MI, đó chính là đường thẳng cần dựng.

b) Ta có $MC = CN'$ suy ra $MN' = CD = AB$.
Do đó I' là trung điểm của BM.
Mặt khác $II' \parallel JB$ nên II' là đường trung bình của tam giác MBJ, suy ra $IM = IJ \Rightarrow \dfrac{IM}{IJ} = 1$.

Chọn đáp án (D) □

CÂU 23. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$, gọi M, N, P lần lượt là tâm của các mặt bên $(ABB'A')$, $(BCC'B')$ và $(ACC'A')$. Qua phép chiếu song song đường thẳng BC' và mặt phẳng chiếu $(AB'C)$ khi đó hình chiếu của điểm P?

(A) Trung điểm của AN. **(B)** Trung điểm của AM. **(C)** Trung điểm của $B'N$. **(D)** Trung điểm của $B'M$.

Lời giải.

Chọn đáp án (A) □

———Mục lục chính

MỤC LỤC