

NGUYỄN HÀM VÀ TÍCH PHẦN

Bài 1. NGUYỄN HÀM

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

B. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Định nghĩa nguyên hàm

Cho hàm số $f(x)$ xác định trên khoảng K . Hàm số $F(x)$ được gọi là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ nếu $F'(x) = f(x)$ với mọi $x \in K$.

Nhận xét: Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ thì $F(x) + C$, ($C \in \mathbb{R}$) cũng là nguyên hàm của $f(x)$.

Ký hiệu $\int f(x) \, dx = F(x) + C$.

2. Một số tính chất của nguyên hàm

- $\left(\int f(x) \, dx \right)' = f(x)$.
- $\int a \cdot f(x) \, dx = a \cdot \int f(x) \, dx \quad (a \in \mathbb{R}, a \neq 0)$.
- $\int [f(x) \pm g(x)] \, dx = \int f(x) \, dx \pm \int g(x) \, dx$.

3. Một số nguyên hàm cơ bản

Nguyên hàm của hàm số cơ bản	Nguyên hàm mở rộng
$\int a \cdot dx = ax + C, a \in \mathbb{R}$	
$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1$	$\int (ax+b)^\alpha dx = \frac{1}{a} \cdot \frac{(ax+b)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$
$\int \frac{dx}{x} = \ln x + C, x \neq 0$	$\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a} \cdot \ln ax+b + C$
$\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C, x > 0$	$\int \frac{dx}{\sqrt{ax+b}} = \frac{2}{a} \sqrt{ax+b} + C, x > 0$
$\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C, x \neq 0$	$\int \frac{dx}{(ax+b)^2} = -\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{ax+b} + C$
$\int \frac{dx}{x^\alpha} = -\frac{1}{(\alpha-1)x^{\alpha-1}} + C$	$\int \frac{dx}{(ax+b)^\alpha} = -\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{(\alpha-1)} \cdot (ax+b)^{\alpha-1} + C$
$\int e^x dx = e^x + C$	$\int e^{ax+b} dx = \frac{1}{a} \cdot e^{ax+b} + C$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	$\int a^{\alpha x+\beta} dx = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{a^{\alpha x+\beta}}{\ln a} + C$
$\int \cos x dx = \sin x + C$	$\int \cos(ax+b) dx = \frac{1}{a} \cdot \sin(ax+b) + C$
$\int \sin x dx = -\cos x + C$	$\int \sin(ax+b) dx = -\frac{1}{a} \cdot \cos(ax+b) + C$
$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$	$\int \frac{1}{\cos^2(ax+b)} dx = \frac{1}{a} \cdot \tan(ax+b) + C$
$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C$	$\int \frac{1}{\sin^2(ax+b)} dx = -\frac{1}{a} \cdot \cot(ax+b) + C$

Nhận xét: $[F(ax+b)]' = af(ax+b) \Rightarrow \int f(ax+b) \, dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C$.

C. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

1

Sử dụng định nghĩa nguyên hàm và bảng nguyên hàm

QUICK NOTE

1. Các ví dụ

VÍ DỤ 1. Tìm họ nguyên hàm của các hàm số sau

a) $f(x) = 4x^3 + x + 5.$

b) $f(x) = 3x^2 - 2x.$

c) $f(x) = \frac{1}{x^5} + x^2.$

d) $f(x) = \frac{1}{x^3} + x^2 - 1.$

VÍ DỤ 2. Tính

a) $I = \int (x^2 - 3x)(x + 1)dx.$ b) $I = \int (x - 1)(x^2 + 2)dx.$ c) $I = \int (2x + 1)^5 dx$

d) $I = \int (2x - 10)^{2020} dx.$ e) $I = \int \left(3x^2 + \frac{1}{x} - 2\right) dx.$ f) $I = \int \left(3x^2 - \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}\right) dx.$

g) $I = \int \frac{x^2 - 3x + 1}{x} dx.$ h) $I = \int \frac{2x^2 - 6x + 3}{x} dx.$ i) $I = \int \frac{1}{2x - 1} dx.$

j) $I = \int \frac{2}{3 - 4x} dx.$ k) $I = \int \frac{1}{(2x - 1)^2} dx.$ l) $I = \int \left[\frac{12}{(x - 1)^2} + \frac{2}{2x - 3} \right] dx.$

m) $I = \int \frac{3}{4x^2 + 4x + 1} dx.$ n) $I = \int \frac{4}{x^2 + 6x + 9} dx.$ o) (*) $I = \int \frac{2x - 1}{(x + 1)^2} dx.$

VÍ DỤ 3. Tìm họ nguyên hàm của các hàm số sau

a) $I = \int (\sin x - \cos x) dx.$ b) $I = \int (3 \cos x - 2 \sin x) dx.$ c) $I = \int (2 \sin 2x - 3 \cos 6x) dx.$

d) $I = \int \sin x \cos x dx.$ e) $I = \int \cos \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6} \right) dx.$ f) $I = \int \sin \left(\frac{\pi}{3} - \frac{x}{3} \right) dx.$

g) $I = \int (\sin x - \cos x)^2 dx.$ h) $I = \int (\cos x + \sin x)^2 dx.$

VÍ DỤ 4. Tìm họ nguyên hàm của các hàm số sau

a) $I = \int \frac{1}{\sin^2 x} dx.$ b) $I = \int \frac{6}{\cos^2 3x} dx.$ c) $I = \int (\tan x + \cot x)^2 dx.$

d) $I = \int \sin^2 x dx.$ e) $I = \int \cos^2 2x dx.$ f) $I = \int \sin 4x \cos x dx.$

VÍ DỤ 5. Tìm họ nguyên hàm của các hàm số sau

a) $I = \int e^{2x} dx.$ b) $I = \int e^{1-2x} dx.$ c) $I = \int (2x - e^{-x}) dx.$

d) $I = \int e^x (1 - 3e^{-2x}) dx.$ e) $I = \int (3 - e^x)^2 dx.$ f) $I = \int (2 + e^{3x})^2 dx.$

g) $I = \int 2^{2x+1} dx.$ h) $I = \int 4^{1-2x} dx.$ i) $I = \int 3^x \cdot 5^x dx.$

j) $I = \int 4^x \cdot 3^{x-1} dx.$ k) $I = \int \frac{dx}{e^{2-5x}}.$ l) $I = \int \frac{dx}{2^{3-2x}}.$

m) $I = \int \frac{4^{x+1} \cdot 3^{x-1}}{2^x} dx.$ n) $I = \int \frac{4^{2x-1} \cdot 6^{x-1}}{3^x} dx.$

2. Câu hỏi trắc nghiệm

CÂU 1. Cho hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K . Các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**.

- ☐ A $\int f(x) dx = F(x) + C.$
☐ B $\left(\int f(x) dx\right)' = f(x).$
☐ C $\left(\int f(x) dx\right)' = f'(x).$
☐ D $\left(\int f(x) dx\right)' = F'(x).$

CÂU 2. Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2x + 6$ là

- ☐ A $x^2 + C.$
☐ B $x^2 + 6x + C.$
☐ C $2x^2 + C.$
☐ D $2x^2 + 6x + C.$

CÂU 3. $\int x^2 dx$ bằng

- ☐ A $2x + C.$
☐ B $\frac{1}{3}x^3 + C.$
☐ C $x^3 + C.$
☐ D $3x^3 + C.$

CÂU 4. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3x^2 + 1$ là

- ☐ A $x^3 + C.$
☐ B $\frac{x^3}{3} + x + C.$
☐ C $6x + C.$
☐ D $x^3 + x + C.$

CÂU 5. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^3 + x$ là

- ☐ A $\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2 + C.$
☐ B $3x^2 + 1 + C.$
☐ C $x^3 + x + C.$
☐ D $x^4 + x^2 + C.$

CÂU 6. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^4 + x^2$ là

- ☐ A $\frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{3}x^3 + C.$
☐ B $x^4 + x^2 + C.$
☐ C $x^5 + x^3 + C.$
☐ D $4x^3 + 2x + C.$

CÂU 7. Hàm số nào trong các hàm số sau đây không là nguyên hàm của hàm số $y = x^{2022}$?

- ☐ A $\frac{x^{2023}}{2023} + 1.$
☐ B $\frac{x^{2023}}{2023}.$
☐ C $y = 2022x^{2021}.$
☐ D $\frac{x^{2023}}{2023} - 1.$

CÂU 8. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + x - 2024$ là

- ☐ A $\frac{1}{12}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{x^2}{2} + C.$
☐ B $\frac{1}{9}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{x^2}{2} - 2024x + C.$
☐ C $\frac{1}{12}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{x^2}{2} - 2024x + C.$
☐ D $\frac{1}{9}x^4 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{x^2}{2} - 2024x + C.$

CÂU 9. Tìm nguyên $F(x)$ của hàm số $f(x) = (x+1)(x+2)(x+3)$?

- ☐ A $F(x) = \frac{x^4}{4} - 6x^3 + \frac{11}{2}x^2 - 6x + C.$
☐ B $F(x) = x^4 + 6x^3 + 11x^2 + 6x + C.$
☐ C $F(x) = \frac{x^4}{4} + 2x^3 + \frac{11}{2}x^2 + 6x + C.$
☐ D $F(x) = x^3 + 6x^2 + 11x^2 + 6x + C.$

CÂU 10. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = (5x+3)^5$.

- ☐ A $(5x+3)^6 + C.$
☐ B $(5x+3)^4 + C.$
☐ C $\frac{(5x+3)^6}{30} + C.$
☐ D $\frac{(5x+3)^4}{30} + C.$

CÂU 11. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^2 + \frac{2}{x^2}$.

- ☐ A $\int f(x) dx = \frac{x^3}{3} + \frac{1}{x} + C.$
☐ B $\int f(x) dx = \frac{x^3}{3} - \frac{2}{x} + C.$
☐ C $\int f(x) dx = \frac{x^3}{3} - \frac{1}{x} + C.$
☐ D $\int f(x) dx = \frac{x^3}{3} + \frac{2}{x} + C.$

CÂU 12. Tính $\int \sqrt{x}\sqrt{x}\sqrt{x} dx$.

- ☐ A $\frac{4}{15}x\sqrt{x^7} + C.$
☐ B $\frac{8}{15}x\sqrt{x^7} + C.$
☐ C $\frac{8}{15}x\sqrt{x} + C.$
☐ D $\frac{4}{15}x\sqrt{x} + C.$

CÂU 13. Tính $\int \frac{\sqrt{x} - 2\sqrt[3]{x^2} + 1}{\sqrt[4]{x}} dx$.

- ☐ A $x\sqrt{x} - 2x\sqrt[12]{x^5} + \sqrt[4]{x^3} + C.$
☐ B $\frac{4}{5}x\sqrt[4]{x} - \frac{24}{17}x\sqrt[12]{x^5} + \frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3} + C.$
☐ C $x\sqrt{x} - \frac{24}{17}x\sqrt[12]{x^5} + \sqrt[4]{x^3} + C.$
☐ D $\frac{4}{5}x\sqrt{x} - 2x\sqrt[12]{x^5} + \frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3} + C.$

CÂU 14. Cho hàm số $f(x) = x^2 + 4$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- ☐ A $\int f(x) dx = 2x + C.$
☐ B $\int f(x) dx = x^2 + 4x + C.$

QUICK NOTE

QUICK NOTE

$$\textcircled{C} \int f(x) dx = \frac{x^3}{3} + 4x + C.$$

$$\textcircled{D} \int f(x) dx = x^3 + 4x + C.$$

CÂU 15. Trên khoảng $(0; +\infty)$, cho hàm số $f(x) = x^{\frac{3}{2}}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

$$\textcircled{A} \int f(x) dx = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} + C.$$

$$\textcircled{B} \int f(x) dx = \int \sqrt{x^3} dx.$$

$$\textcircled{C} \int f(x) dx = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + C.$$

$$\textcircled{D} \int f(x) dx = \frac{2}{3}x^{\frac{1}{2}} + C.$$

CÂU 16. Cho hàm số $f(x) = \frac{x^4 + 2}{x^2}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

$$\textcircled{A} \int f(x) dx = \frac{x^3}{3} - \frac{1}{x} + C.$$

$$\textcircled{B} \int f(x) dx = \frac{x^3}{3} + \frac{2}{x} + C.$$

$$\textcircled{C} \int f(x) dx = \int \left(x^2 + \frac{2}{x^2}\right) dx.$$

$$\textcircled{D} \int f(x) dx = \frac{x^3}{3} - \frac{2}{x} + C.$$

CÂU 17. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai

Mệnh đề	Đ	S
a) $\int (\sqrt[3]{x^2} + x - 2) dx = \frac{3}{5}\sqrt[3]{x^5} + \frac{1}{2}x^2 - 2x + C.$		
b) $\int \frac{1}{2023x^{2024}} dx = \frac{1}{2023^2x^{2023}} + C.$		
c) $\int (2x - 2024)^2 dx = x - 1012 + C.$		
d) $\int \left(\frac{1}{4}x^4 + 4x^3\right) dx = \frac{1}{20}x^5 + \frac{4}{3}x^4 + C.$		

CÂU 18. Cho các mệnh đề sau đây

Mệnh đề	Đ	S
a) $F(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{3}{2}x^2 + \ln x + C$ là nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^3 - 3x + \frac{1}{x}.$		
b) $F(x) = \frac{(5x+3)^6}{6} + C$ là nguyên hàm của hàm số $f(x) = (5x+3)^5.$		
c) $F(x) = \frac{3}{2}x\sqrt{x} + \frac{4}{3}x\sqrt[3]{x} + \frac{5}{4}x\sqrt[4]{x} + C$ là nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x}.$		
d) $F(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2024x + C$ là nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{x^3 - 2024x}{x}.$		

CÂU 19. Hệ số của x^2 trong nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x}} + 3^x + 3x - 2$ là

KQ:

CÂU 20. Hệ số của x^3 trong nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = mx^3 - 3x^2 + \frac{4m}{x^3} + \frac{5}{2x} - 7m$ (m là tham số) là

KQ:

CÂU 21. Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{2}{\sqrt[3]{x}}$. Tổng hệ số của biến x là

KQ:

CÂU 22. Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \frac{(x^2 - 1)^2}{x^2}$. Tổng hệ số của bậc 3 và bậc 1 là (làm tròn đến hàng phần chục).

KQ:

CÂU 23. Tính $\int \left(\frac{(1-x)^3}{\sqrt[3]{x}}\right) dx$. Giá trị tổng hệ số chứa biến là (làm tròn đến hàng phần trăm).

QUICK NOTE

KQ:

CÂU 24. Tính $\int (\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[4]{x^3} + \sqrt[5]{x^4}) dx$. Giá trị tổng hệ số chứa biến là (làm tròn đến hàng phần trăm).

KQ:

CÂU 25. Tính $\int (\sqrt{x} + 1)(x - \sqrt{x} + 1) dx$. Giá trị tổng hệ số chứa biến là (làm tròn đến hàng phần chục).

KQ:

CÂU 26. Tính $\int (2\sqrt{x} - \frac{3}{\sqrt[3]{x}}) dx$. Giá trị tổng hệ số chứa biến là (làm tròn đến hàng phần chục).

KQ:

CÂU 27. Tính $\int \frac{1}{\sqrt{2x} + \sqrt{3x}} dx = a(\sqrt{b} - \sqrt{c})\sqrt{x}$. Giá trị của tổng $a + b + c$ là

KQ:

CÂU 28. Tính $\int \frac{1}{\sqrt{5x} - \sqrt{3x}} dx = (\sqrt{a} + \sqrt{b})\sqrt{x} + C$. Giá trị $a + b$ bằng

KQ:

CÂU 29. Tính $\int (x^2 - 1)^3 dx$. Giá trị tổng hệ số chứa biến là (làm tròn đến hàng phần chục).

KQ:

CÂU 30. Tính $\int (2 - x^2)^4 dx$. Giá trị tổng hệ số chứa biến là (làm tròn đến hàng phần chục).

KQ:

CÂU 31. Tính $\int (x - \sqrt[3]{x})^2 dx$. Giá trị tổng hệ số chứa biến là (làm tròn đến hàng phần chục).

KQ:

CÂU 32. Tính $\int \left(\frac{x^2 + 2\sqrt[3]{x}}{x}\right)^2 dx$. Giá trị tổng hệ số chứa biến là (làm tròn đến hàng phần chục).

KQ:

CÂU 33. Tìm m để $F(x) = mx^3 + (3m + 2)x^2 - 4x + 3$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3x^2 + 10x - 4$.

KQ:

CÂU 34. Tìm a, b, c để $F(x) = (ax^2 + bx + c)\sqrt{x^2 - 4x}$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = (x - 2)\sqrt{x^2 - 4x}$. Giá trị biểu thức $a + b + c$ bằng

KQ:

CÂU 35. Tìm a, b, c để $F(x) = (ax^2 + bx + c)\sqrt{2x - 3}$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{20x^2 - 30x + 7}{\sqrt{2x - 3}}$. Giá trị biểu thức $a + b + c$ bằng

KQ:

CÂU 36. Hàm số $F(x) = \cot x$ là một nguyên hàm của hàm số nào dưới đây trên khoảng $(0; \frac{\pi}{2})$

QUICK NOTE

☐ $f_2(x) = \frac{1}{\sin^2 x}$.
 ☐ $f_1(x) = -\frac{1}{\cos^2 x}$.
 ☐ $f_4(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$.
 ☐ $f_3(x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$.

CÂU 37. Cho hàm số $f(x) = 1 + \sin x$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

☐ $\int f(x)dx = x - \cos x + C$.
 ☐ $\int f(x)dx = x + \sin x + C$.
☐ $\int f(x)dx = x + \cos x + C$.
 ☐ $\int f(x)dx = \cos x + C$.

CÂU 38. Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \cos^2 \frac{x}{2}$

☐ $F(x) = 2 \cos \frac{x}{2} + C$.
 ☐ $F(x) = \frac{1}{2} (1 + \sin x) + C$.
☐ $F(x) = 2 \sin \frac{x}{2} + C$.
 ☐ $F(x) = \frac{1}{2} (1 - \sin x) + C$.

CÂU 39. Cho hàm số $f(x) = 1 - \frac{1}{\cos^2 x}$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

☐ $\int f(x)dx = x + \tan x + C$.
 ☐ $\int f(x)dx = x + \cot x + C$.
☐ $\int f(x)dx = x - \tan x + C$.
 ☐ $\int f(x)dx = x - \cot x + C$.

CÂU 40. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos x + 6x$ là

☐ $\sin x + 3x^2 + C$.
 ☐ $-\sin x + 3x^2 + C$.
☐ $\sin x + 6x^2 + C$.
 ☐ $-\sin x + C$.

CÂU 41. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2 \sin x + 3x$.

☐ $\int (2 \sin x + 3x) dx = -2 \cos x + \frac{3}{2}x^2 + C$.
☐ $\int (2 \sin x + 3x) dx = 2 \cos x + 3x^2 + C$.
☐ $\int (2 \sin x + 3x) dx = \sin^2 x + \frac{3}{2}x + C$.
☐ $\int (2 \sin x + 3x) dx = \sin 2x + \frac{3}{2}x^2 + C$.

CÂU 42. Tính $\int (x - \sin x)dx$.

☐ $\frac{x^2}{2} + \sin x + C$.
 ☐ $\frac{x^2}{2} - \cos x + C$.
 ☐ $\frac{x^2}{2} - \sin x + C$.
 ☐ $\frac{x^2}{2} + \cos x + C$.

CÂU 43. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3x^2 + \sin x$ là

☐ $x^3 + \cos x + C$.
 ☐ $6x + \cos x + C$.
 ☐ $x^3 - \cos x + C$.
 ☐ $6x - \cos x + C$.

CÂU 44. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{x} + \sin x$ là

☐ $\ln x - \cos x + C$.
 ☐ $-\frac{1}{x^2} - \cos x + C$.
☐ $\ln |x| + \cos x + C$.
 ☐ $\ln |x| - \cos x + C$.

CÂU 45. Cho $\int f(x) dx = -\cos x + C$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

☐ $f(x) = -\sin x$.
 ☐ $f(x) = -\cos x$.
 ☐ $f(x) = \sin x$.
 ☐ $f(x) = \cos x$.

CÂU 46. Cho hàm số $f(x) = \cos \frac{x}{2} \sin \frac{x}{2}$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

☐ $\int \cos \frac{x}{2} \sin \frac{x}{2} = \frac{1}{2} \sin x + C$.
 ☐ $\int \cos \frac{x}{2} \sin \frac{x}{2} = \frac{1}{2} \cos x + C$.
☐ $\int \cos \frac{x}{2} \sin \frac{x}{2} = -\frac{1}{2} \sin x + C$.
 ☐ $\int \cos \frac{x}{2} \sin \frac{x}{2} = -\frac{1}{2} \cos x + C$.

CÂU 47. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

Mệnh đề	Đ	S
a) $\int (2 + \cot^2 x) dx = x - \cot x + C$.		
b) $\int \left(1 - \cos^2 \frac{x}{2}\right) dx = \frac{1}{2} (x + \sin x) + C$.		
c) $\int \left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2}\right)^2 dx = x + \cos x + C$.		

QUICK NOTE

Mệnh đề	Đ	S
d) $\int \left(\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2} \right)^2 dx = x - \cos x + C.$		

CÂU 48. Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = 2024 - 2 \sin^2 \frac{x}{2}$. Hệ số của biến x là

KQ:

CÂU 49. Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \frac{1}{\sin^2 \frac{x}{2} \cdot \cos^2 \frac{x}{2}} = a \cot x + C$. Giá trị a là

KQ:

CÂU 50. Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \frac{1}{3}x^2 - 2x + \frac{1}{2}\tan^2 x = \frac{x^3}{a} + bx^2 + \frac{1}{c}x + d \tan x + C$. Giá trị của $a + b + c + d$ là

KQ:

CÂU 51. Tính $\int x^2 \left(1 + \frac{1}{x} - \frac{\tan^2 x}{x^2} \right) dx = \frac{x^m}{n} + \frac{x^p}{q} + x + r \tan x + C$. Giá trị biểu thức $P = \frac{m}{n} + \frac{p}{q} + 2r$ là

KQ:

CÂU 52. Tính $T = \int x \left(2024 - \frac{1}{x^3} + \frac{\sin x}{x} \right) dx$. Hệ số của hạng tử $\cos x$ của T là

KQ:

CÂU 53. Tính $R = \int x^3 \left[\frac{\left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} \right)^2}{x^3} - 2x + \frac{1}{x^{2024}} \right] dx = ax + b \cos x + cx^5 - \frac{1}{d \cdot x^{2020}} + C$. Giá trị $a + b + c + d + 7$ là (làm tròn đến hàng đơn vị)

KQ:

CÂU 54. Tính $\int x^2 \left[\frac{1}{x^2 \sin^2 \frac{x}{2} \cdot \cos^2 \frac{x}{2}} + \frac{3}{x^3} - \frac{4}{x^4} \right] dx = a \cot x + b \ln |x| + \frac{c}{x} + C$. Giá trị $a + b + c$ là

KQ:

CÂU 55. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^{3x}$ là hàm số nào sau đây?

- ☐ A $3e^x + C.$
☐ B $\frac{1}{3}e^{3x} + C.$
☐ C $\frac{1}{3}e^x + C.$
☐ D $3e^{3x} + C.$

CÂU 56. Nguyên hàm của hàm số $y = e^{2x-1}$ là

- ☐ A $2e^{2x-1} + C.$
☐ B $e^{2x-1} + C.$
☐ C $\frac{1}{2}e^{2x-1} + C.$
☐ D $\frac{1}{2}e^x + C.$

CÂU 57. Cho hàm số $f(x) = e^x + 2$. Khẳng định nào dưới đây là **đúng**?

- ☐ A $\int f(x) dx = e^{x-2} + C.$
☐ B $\int f(x) dx = e^x + 2x + C.$
☐ C $\int f(x) dx = e^x + C.$
☐ D $\int f(x) dx = e^x - 2x + C.$

CÂU 58. Cho hàm số $f(x) = e^x + 2x$. Khẳng định nào dưới đây **đúng**?

- ☐ A $\int f(x) dx = e^x + x^2 + C.$
☐ B $\int f(x) dx = e^x + C.$
☐ C $\int f(x) dx = e^x - x^2 + C.$
☐ D $\int f(x) dx = e^x + 2x^2 + C.$

CÂU 59. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = 7^x$.

- ☐ A $\int 7^x dx = \frac{7^x}{\ln 7} + C.$
☐ B $\int 7^x dx = 7^{x+1} + C.$
☐ C $\int 7^x dx = \frac{7^{x+1}}{x+1} + C.$
☐ D $\int 7^x dx = 7^x \ln 7 + C.$

QUICK NOTE

CÂU 60. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2^x$ là

- A** $\int 2^x dx = \ln 2 \cdot 2^x + C.$
B $\int 2^x dx = 2^x + C.$
C $\int 2^x dx = \frac{2^x}{\ln 2} + C.$
D $\int 2^x dx = \frac{2^x}{x+1} \ln 7 + C.$

CÂU 61. Tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3^{-x}$ là

- A** $-\frac{3^{-x}}{\ln 3} + C.$
B $-3^{-x} + C.$
C $-3^{-x} \ln 3 + C.$
D $\frac{3^{-x}}{\ln 3} + C.$

CÂU 62. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3^x + 2x$.

- A** $\int (3^x + 2x) dx = \frac{3^x}{\ln 3} + x^2 + C.$
B $\int (3^x + 2x) dx = 3^x \ln 3 + x^2 + C.$
C $\int (3^x + 2x) dx = \frac{3^x}{\ln 3} + x + C.$
D $\int (3^x + 2x) dx = 3^x \ln 3 + x + C.$

CÂU 63. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^x - 2x$ là

- A** $e^x + x^2 + C.$
B $e^x - x^2 + C.$
C $\frac{1}{x+1} e^x - x^2 + C.$
D $e^x - 2 + C.$

CÂU 64. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^x \left(2017 - \frac{2018e^{-x}}{x^5} \right)$.

- A** $\int f(x) dx = 2017e^x - \frac{2018}{x^4} + C.$
B $\int f(x) dx = 2017e^x + \frac{2018}{x^4} + C.$
C $\int f(x) dx = 2017e^x + \frac{504,5}{x^4} + C.$
D $\int f(x) dx = 2017e^x - \frac{504,5}{x^4} + C.$

CÂU 65. Họ nguyên hàm của hàm số $y = e^x \left(2 + \frac{e^{-x}}{\cos^2 x} \right)$ là

- A** $2e^x + \tan x + C.$
B $2e^x - \tan x + C.$
C $2e^x - \frac{1}{\cos x} + C.$
D $2e^x + \frac{1}{\cos x} + C.$

CÂU 66. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $y = x^2 - 3^x + \frac{1}{x}$.

- A** $\frac{x^3}{3} - \frac{3^x}{\ln 3} - \frac{1}{x^2} + C, C \in \mathbb{R}.$
B $\frac{x^3}{3} - 3^x + \frac{1}{x^2} + C, C \in \mathbb{R}.$
C $\frac{x^3}{3} - \frac{3^x}{\ln 3} + \ln |x| + C, C \in \mathbb{R}.$
D $\frac{x^3}{3} - \frac{3^x}{\ln 3} - \ln |x| + C, C \in \mathbb{R}.$

CÂU 67. Khẳng định nào dưới đây **đúng**?

- A** $\int e^x dx = xe^x + C.$
B $\int e^x dx = e^{x+1} + C.$
C $\int e^x dx = -e^{x+1} + C.$
D $\int e^x dx = e^x + C.$

CÂU 68. Cho hàm số $f(x) = 1 + e^{2x}$. Khẳng định nào dưới đây **đúng**?

- A** $\int f(x) dx = x + \frac{1}{2}e^x + C.$
B $\int f(x) dx = x + 2e^{2x} + C.$
C $\int f(x) dx = x + \frac{1}{2}e^{2x} + C.$
D $\int f(x) dx = x + e^{2x} + C.$

CÂU 69. Các mệnh đề sau đây **đúng** hay **sai**?

Mệnh đề	Đ	S
a) $\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C.$		
b) $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C.$		

Mệnh đề	Đ	S
c) $\int \sin x dx = -\cos x + C.$		
d) $\int e^x dx = e^x + C.$		

CÂU 70. Các mệnh đề sau đây **đúng** hay **sai**?

Mệnh đề	Đ	S
a) $\int \cos x dx = \sin x + C.$		
b) $\int x^e dx = \frac{x^{e+1}}{e+1} + C.$		

Mệnh đề	Đ	S
c) $\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C.$		
d) $\int e^x dx = \frac{e^{x+1}}{x+1} + C.$		

CÂU 71. Các mệnh đề sau đây **đúng** hay **sai**?

Mệnh đề	Đ	S
a) $\int 2^x dx = 2^x \ln 2 + C.$		
b) $\int e^{2x} dx = \frac{e^{2x}}{2} + C.$		
c) $\int e^x(e^x - 1) dx = \frac{1}{2}e^{2x} + e^x + C.$		
d) $\int e^{3x} \cdot 3^x dx = \frac{(3e^3)^x}{3 + \ln 3} + C.$		

CÂU 72. Biết rằng $\int (2^x + 3^x) dx = \frac{2^x}{\ln a} + \frac{3^x}{\ln b} + C, a, b \in \mathbb{Z}$. Tính $P = a + b$.

KQ:

CÂU 73. Cho $\int e^{3x+2024} dx = \frac{a}{b}e^{cx+d} + C$ với $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính giá trị của biểu thức $P = a + b - c + d$.

KQ:

CÂU 74. Biết rằng $\int 3^{x+2} \cdot 2^{2x+1} dx = \frac{a \cdot 12^x}{b \ln 2 + c \ln 3} + C$ với $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Tính giá trị của biểu thức $P = \frac{a}{b+c}$.

KQ:

CÂU 75. Biết rằng $\int (3^x + 5^x)^2 dx = \frac{9^x}{a \ln 3} + \frac{30^x}{b \ln 5 + c \ln 2 + d \ln 3} + \frac{25^x}{e \ln 5} + C$. Tính giá trị của biểu thức $P = a + b + c + d + e$.

KQ:

CÂU 76. Cho $\int \frac{e^{3x} + 1}{e^x + 1} dx = \frac{a}{b}e^{2x} + ce^x + dx + C$ với $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính giá trị của biểu thức $P = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$.

KQ:

CÂU 77. Biết rằng $\int (e^x + e^{-x})^2 dx = \frac{1}{m}e^{2x} + \frac{1}{n}e^{-2x} + px + C$ với $m, n, p \in \mathbb{Z}$. Tính giá trị của biểu thức $P = m + n + p$.

KQ:

CÂU 78. Biết rằng $\int \frac{e^{2x} - 1}{1 - e^{-x}} dx = \frac{1}{m}e^{nx} + pe^x + C$ với $m, n, p \in \mathbb{Z}$. Tính giá trị của biểu thức $P = m + n - p$.

KQ:

CÂU 79. Biết rằng $F(x) = (ax + b) \cdot e^x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = (4x - 1) \cdot e^x$. Tính giá trị biểu thức $P = a + b$.

KQ:

CÂU 80. Biết rằng $F(x) = 8e^x + \frac{na^x}{\ln a} + p \cos x$ (với $m, n, p \in \mathbb{Z}$) là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = me^x + 2a^x - 2 \sin x$. Tính giá trị của biểu thức $P = m + n + p$.

KQ:

CÂU 81. Biết rằng $F(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-2x}$ (với $a, b, c \in \mathbb{R}$) là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = (-2x^2 + 8x - 7)e^{-2x}$. Tính giá trị biểu thức $P = a + b + c$.

KQ:

QUICK NOTE

QUICK NOTE

2

Tìm nguyên hàm khi biết giá trị nguyên hàm

Phương pháp: Tìm $F(x) = \int f(x) dx$. Sau đó dựa vào $F(x_0) = a$ để suy ra C .

CÂU 1. Hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{x}$ trên $(-\infty; 0)$ thỏa mãn $F(-2) = 0$. Khẳng định nào sau đây **đúng**?

- (A) $F(x) = \ln\left(-\frac{x}{2}\right), \forall x \in (-\infty; 0)$.
 (B) $F(x) = \ln|x| + C, \forall x \in (-\infty; 0)$ với C là một số thực bất kì.
 (C) $F(x) = \ln|x| + \ln 2, \forall x \in (-\infty; 0)$.
 (D) $F(x) = \ln(-x) + C, \forall x \in (-\infty; 0)$ với C là một số thực bất kì.

CÂU 2. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^{2x}$ và $F(0) = 0$. Giá trị của $F(\ln 3)$ bằng

- (A) 2. (B) 6. (C) 8. (D) 4.

CÂU 3. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x) = 2^x + x + 1$. Biết $F(0) = 1$. Giá trị của $F(-1)$ bằng

- (A) $F(-1) = \frac{1}{2\ln 2}$. (B) $F(-1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\ln 2}$.
 (C) $F(-1) = 1 + \frac{1}{2\ln 2}$. (D) $F(-1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\ln 2}$.

CÂU 4. Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \sin x + \cos x$ thỏa mãn $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$.

- (A) $F(x) = -\cos x + \sin x + 3$. (B) $F(x) = -\cos x + \sin x - 1$.
 (C) $F(x) = -\cos x + \sin x + 1$. (D) $F(x) = \cos x - \sin x + 3$.

CÂU 5. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^x + 2x$ thỏa mãn $F(0) = \frac{3}{2}$. Tìm $F(x)$.

- (A) $F(x) = e^x + x^2 + \frac{1}{2}$. (B) $F(x) = e^x + x^2 + \frac{5}{2}$.
 (C) $F(x) = e^x + x^2 + \frac{3}{2}$. (D) $F(x) = e^x + x^2 - \frac{1}{2}$.

CÂU 6. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{khi } x \geq 1 \\ 3x^2 - 2 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$, giả sử F là nguyên hàm của f trên \mathbb{R} thỏa mãn $F(0) = 2$. Giá trị của $F(-1) + 2F(2)$ bằng

- (A) 9. (B) 15. (C) 11. (D) 6.

CÂU 7. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x + 3 & \text{khi } x \geq 1 \\ 3x^2 + 2 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$. Giả sử F là nguyên hàm của hàm số f trên \mathbb{R} thỏa mãn $F(0) = 2$. Giá trị của $F(-1) + 2F(2)$ bằng

- (A) 23. (B) 11. (C) 10. (D) 21.

CÂU 8. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x + 2 & \text{khi } x \geq 1 \\ 3x^2 + 1 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$. Giả sử F là nguyên hàm của hàm số f trên \mathbb{R} thỏa mãn $F(0) = 2$. Giá trị của $F(-1) + 2F(2)$ bằng

- (A) 18. (B) 20. (C) 9. (D) 24.

CÂU 9. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm là $f'(x) = 12x^2 + 2, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(1) = 3$. Biết $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ thỏa mãn $F(0) = 2$, khi đó $F(1)$ bằng

- (A) -3. (B) 1. (C) 2. (D) 7.

CÂU 10. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f'(x) = 3 - 5\sin x$ và $f(0) = 10$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

- (A) $f(x) = 3x - 5\cos x + 15$. (B) $f(x) = 3x - 5\cos x + 2$.
 (C) $f(x) = 3x + 5\cos x + 5$. (D) $f(x) = 3x + 5\cos x + 2$.

CÂU 11. Hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên \mathbb{R} và $f'(x) = 2e^{2x} + 1, \forall x; f(0) = 2$. Hàm $f(x)$ là

- (A) $y = 2e^x + 2x$. (B) $y = 2e^x + 2$. (C) $y = e^{2x} + x + 2$. (D) $y = e^{2x} + x + 1$.

CÂU 12. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f'(x) = 2 - 5\sin x$ và $f(0) = 10$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

QUICK NOTE

(A) $f(x) = 2x + 5 \cos x + 3$.

(B) $f(x) = 2x - 5 \cos x + 15$.

(C) $f(x) = 2x + 5 \cos x + 5$.

(D) $f(x) = 2x - 5 \cos x + 10$.

CÂU 13. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f'(x) = ax^2 + \frac{b}{x^3}$, $f'(1) = 3$, $f(1) = 2$, $f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{12}$.

Khi đó $2a + b$ bằng

(A) $-\frac{3}{2}$.

(B) 0.

(C) 5.

(D) $\frac{3}{2}$.

CÂU 14. Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = ax + \frac{b}{x^2}$ ($x \neq 0$), biết rằng $F(-1) = 1$, $F(1) = 4$, $f(1) = 0$.

(A) $F(x) = \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{4x} - \frac{7}{4}$.

(B) $F(x) = \frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{2x} - \frac{7}{4}$.

(C) $F(x) = \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{2x} + \frac{7}{4}$.

(D) $F(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2x} - \frac{7}{2}$.

CÂU 15. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ thỏa mãn $f'(x) = \frac{x+1}{x^2}$, $f(-2) = \frac{3}{2}$ và $f(2) = 2 \ln 2 - \frac{3}{2}$. Giá trị của biểu thức $f(-1) + f(4)$ bằng

(A) $\frac{6 \ln 2 - 3}{4}$.

(B) $\frac{6 \ln 2 + 3}{4}$.

(C) $\frac{8 \ln 2 + 3}{4}$.

(D) $\frac{8 \ln 2 - 3}{4}$.

CÂU 16. Cho hàm số $f(x) = 2x + e^x$. Một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)$ thỏa mãn $F(0) = 2024$. Biết $F(x) = ax^2 + be^x + c$, giá trị của $a + b + c$ là

KQ:

CÂU 17. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin x + 1$ biết $F\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0$. Tính giá trị của $F(\pi)$. (Làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai)

KQ:

CÂU 18. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x) = (5x + 3)^5$. Biết $F(1) = 0$. Tính giá trị của $\sqrt{|F(0)|}$. (Làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất)

KQ:

CÂU 19. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x) = x^3 - 4x + 5$. Biết $F(1) = 3$. Tính $|F(0)|$.

KQ:

CÂU 20. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x) = 3 - 5 \cos x$. Biết $F(\pi) = 2$. Tính $F\left(\frac{\pi}{2}\right)$. (Làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất)

KQ:

CÂU 21. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x) = \frac{3 - 5x^2}{x}$. Biết $F(e) = 1$. Tính $F(2)$. (Làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai)

KQ:

CÂU 22. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x}$. Biết $F(1) = \frac{3}{2}$. Tính $F(-1)$.

KQ:

CÂU 23. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{x^3 - 1}{x^2}$. Biết $F(-2) = 0$. Tính giá trị của $F(2)$.

KQ:

CÂU 24. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = x\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$. Biết $F(1) = -2$. Tính $F(0)$.

KQ:

CÂU 25. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin x + 1$. Biết $F\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0$. Tính $F(-1)$. (Làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất)

QUICK NOTE

KQ:

CÂU 26. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x) = 2024 - \sin^2 \frac{x}{2}$. Biết $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2025$. Tính $\sqrt{|F(0)|}$. (Làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất)

KQ:

CÂU 27. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x) = \sin^2 \frac{x}{4} \cdot \cos^2 \frac{x}{4}$. Biết $F\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0$. Tính giá trị của $F(\pi)$. (Làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai)

KQ:

CÂU 28. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x + 5 & \text{khi } x \geq 1 \\ 3x^2 + 4 & \text{khi } x < 1. \end{cases}$ Giả sử F là nguyên hàm của f trên \mathbb{R} thỏa mãn $F(0) = 2$. Giá trị của $F(-1) + 2F(2)$.

KQ:

CÂU 29. Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2^x$, thỏa mãn $F(0) = \frac{1}{\ln 2}$. Giá trị biểu thức $T = F(0) + F(1) + \dots + F(2018) + F(2019)$ có dạng $\frac{2^{2020} + a}{\ln b}$. Giá trị của $\frac{a}{b}$ là

KQ:

CÂU 30. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$. Biết $F\left(\frac{\pi}{4} + k\pi\right) = k$ với mọi $k \in \mathbb{Z}$. Tính giá trị của biểu thức $T = F(0) + F(\pi) + F(2\pi) + \dots + F(10\pi)$.

KQ:

CÂU 31. Hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên \mathbb{R} và $f'(x) = 2024 - 2 \sin^2 \frac{x}{2}, \forall x$; $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2023\pi}{2}$. Tính giá trị của $f(0)$.

KQ:

CÂU 32. Hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên \mathbb{R} và $f'(x) = 1 + e^{2x}, \forall x$; $f(0) = 2$. Tính giá trị của $f(2)$. (Làm tròn đến số thập phân thứ nhất)

KQ:

CÂU 33. Hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên \mathbb{R} và $f'(x) = 2^x + 3^x, \forall x$; $f(0) = \frac{1}{\ln 3}$. Tính giá trị của $f(1)$. (Làm tròn đến số thập phân thứ hai)

KQ:

CÂU 34. Hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên \mathbb{R} và $f'(x) = e^{3x+2024}, \forall x$ thỏa mã $f(-675) = 1$. Giá trị của $f(-674)$ bằng

KQ:

CÂU 35. Hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên \mathbb{R} và $f'(x) = 3^{x+2} \cdot 2^{2x+1}, \forall x$ thỏa mãn $f(0) = \frac{1}{2 \ln 2}$.
Giá trị của $f(1)$ bằng

KQ:

CÂU 36. Hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên \mathbb{R} và $f'(x) = (3^x + 5^x)^2, \forall x$ thỏa mãn $f(0) = \frac{1}{\ln 5 + \ln 3 + \ln 2}$. Giá trị của $f(1)$ bằng

KQ:

3

Ứng dụng trong bài toán thực tiễn

QUICK NOTE

Giả sử $v(t)$ là vận tốc của vật M tại thời điểm t và $s(t)$ là quãng đường vật đi được sau khoảng thời gian t tính từ lúc bắt đầu chuyển động. Ta có mối liên hệ giữa $s(t)$ và $v(t)$ như sau.

- ☑ Đạo hàm của quãng đường là vận tốc $s'(t) = v(t)$.
- ☑ Nguyên hàm của vận tốc là quãng đường $s(t) = \int v(t) dt$.

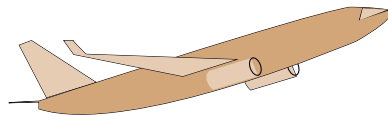
Nếu gọi $a(t)$ là gia tốc của vật M thì ta có mối liên hệ giữa $v(t)$ và $a(t)$ như sau.

- ☑ Đạo hàm của vận tốc là gia tốc $v'(t) = a(t)$.
- ☑ Nguyên hàm của gia tốc là vận tốc $v(t) = \int a(t) dt$.

CÂU 1. Một ô tô đang chạy với vận tốc 20 m/s thì người lái đạp phanh. Sau khi đạp phanh, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -40t + 20$ m/s, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Gọi $s(t)$ là quãng đường xe ô tô đi được trong thời gian t (giây) kể từ lúc đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ô tô còn đi được bao nhiêu mét?

- A** 5 cm. **B** 7,5 m. **C** $\frac{5}{2}$ m. **D** 5 m.

CÂU 2. Bạn Minh Hiền ngồi trên máy bay đi du lịch thể giới với vận tốc chuyển động của máy bay là $v(t) = 3t^2 + 5$ (m/s). Quãng đường máy bay bay từ giây thứ 4 đến giây thứ 10 là



- A** 36 m. **B** 252 m. **C** 1134 m. **D** 966 m.

CÂU 3. Một ô tô đang chạy với vận tốc 12 m/s thì người lái đạp phanh; từ thời điểm đó, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -6t + 12$ (m/s), trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây kể từ lúc đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi ô tô dừng hẳn, ô tô còn đi được bao nhiêu mét?

- A** 24 m. **B** 12 m. **C** 6 m. **D** 0,4 m.

CÂU 4. Một ô tô đang chạy với vận tốc 36 km/h thì tăng tốc chuyển động nhanh dần đều với gia tốc $a(t) = 1 + \frac{t}{3}$ (m/s²) tính quãng đường ô tô đi được sau 6 giây kể từ khi ô tô bắt đầu tăng tốc.

- A** $S = 90$ m. **B** $S = 246$ m. **C** $S = 58$ m. **D** $S = 100$ m.

CÂU 5. Một ca nô đang chạy trên hồ Tây với vận tốc 20 m/s thì hết xăng; từ thời điểm đó, ca nô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -5t + 20$ (m/s), trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc hết xăng. Hỏi từ lúc hết xăng đến lúc ca nô dừng hẳn thì ca nô đi được bao nhiêu mét?

- A** 10 m. **B** 20 m. **C** 30 m. **D** 40 m.

CÂU 6. Một vật chuyển động với vận tốc 10 m/s thì tăng tốc với gia tốc được tính theo thời gian t là $a(t) = 3t + t^2$ (m²/s). Tính quãng đường vật đi được trong 10s kể từ khi bắt đầu tăng tốc.

- A** $\frac{130}{3}$ m. **B** $\frac{310}{3}$ m. **C** $\frac{3400}{3}$ m. **D** $\frac{4300}{3}$ m.

CÂU 7. Tại một nơi không có gió, một chiếc khí cầu đang đứng yên ở độ cao 162 m so với mặt đất đã được phi công cài đặt cho nó chế độ chuyển động đi xuống. Biết rằng, khí cầu đã chuyển động theo phương thẳng đứng với vận tốc tuân theo quy luật $v(t) = 10t - t^2$, trong đó t (phút) là thời gian tính từ lúc bắt đầu chuyển động, $v(t)$ được tính theo đơn vị mét/phút (m/p). Nếu như vậy thì khi bắt đầu tiếp đất vận tốc v của khí cầu là

- A** 5 m/p. **B** 7 m/p. **C** 9 m/p. **D** 3 m/p.

QUICK NOTE

CÂU 8. Một viên đạn được bắn lên theo phương thẳng đứng với vận tốc ban đầu là 25 m/s, gia tốc trọng trường là 9,8 m/s². Quãng đường viên đạn đi được từ lúc bắn cho đến khi chạm đất gần bằng kết quả nào nhất trong các kết quả sau?

- (A) 30,78 m. (B) 31,89 m. (C) 32,43 m. (D) 33,88 m.

CÂU 9. Trong một đợt xả lũ, nhà máy thủy điện đã xả lũ trong 40 phút với tốc độ lưu lượng nước tại thời điểm t giây là $h'(t) = 10t + 500$ (m³/s). Hỏi sau thời gian xả lũ trên thì hồ thoát nước của nhà máy đã thoát đi một lượng nước là bao nhiêu?

- (A) $5 \cdot 10^4$ m³. (B) $4 \cdot 10^6$ m³. (C) $3 \cdot 10^7$ m³. (D) $6 \cdot 10^6$ m³.

CÂU 10. Một bác thợ xây bơm nước vào bể chứa nước. Gọi $h(t)$ là thể tích nước bơm được sau t giây. Cho $h'(t) = 3at^2 + bt$ (m³/s) và ban đầu bể không có nước. Sau 5 giây thì thể tích nước trong bể là 150 m³. Sau 10 giây thì thể tích nước trong bể là 1100 m³. Hỏi thể tích nước trong bể sau khi bơm được 20 giây là bao nhiêu.

- (A) 8400 m³. (B) 7400 m³. (C) 6000 m³. (D) 4200 m³.

CÂU 11. Gọi $h(t)$ (m) là mực nước ở bồn chứa sau khi bơm nước được t giây. Biết rằng $h'(t) = \frac{1}{5}\sqrt[3]{t}$ (m/s) và lúc đầu bồn không có nước. Tìm mực nước ở bồn sau khi bơm nước được 6 giây (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

- (A) 2,64 m. (B) 1,22 m. (C) 2,22 m. (D) 1,64 m.

CÂU 12. Sự sản sinh vi rút Zika ngày thứ t có số lượng là $N(t)$ con, biết $N'(t) = \frac{1000}{t}$ và lúc đầu đám vi rút có số lượng 250,000 con. Tính số lượng vi rút sau 10 ngày.

- (A) 272304 con. (B) 212302 con. (C) 242102 con. (D) 252302 con.

CÂU 13. Một chiếc ô tô đang chạy với vận tốc 15 m/s thì nhìn thấy chướng ngại vật trên đường cách đó 50 m, người lái xe hãm phanh khẩn cấp. Sau khi hãm phanh, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -3t + 15$ (m/s), trong đó t (giây). Gọi $s(t)$ là quãng đường xe ô tô đi được trong thời gian t (giây) kể từ lúc đạp phanh. Hỏi từ lúc hãm phanh đến khi dừng hẳn, ô tô di chuyển được bao nhiêu mét?

KQ:

--	--	--	--

CÂU 14. Một chiếc ô tô đang chạy với vận tốc 72 km/h thì nhìn thấy chướng ngại vật trên đường cách đó 40 m, người lái xe hãm phanh khẩn cấp. Sau khi hãm phanh, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -10t + 20$ (m/s), trong đó t tính bằng giây. Gọi $s(t)$ là quãng đường xe ô tô đi được trong thời gian t (giây) kể từ lúc đạp phanh. Hỏi từ lúc hãm phanh đến khi dừng hẳn, ô tô di chuyển được bao nhiêu mét?

KQ:

--	--	--	--

CÂU 15. Một viên đạn được bắn lên theo phương thẳng đứng từ mặt đất. Tại thời điểm t giây vận tốc của nó được cho bởi công thức $v(t) = 24,5 - 9,8t$ (m/s). Tính quãng đường viên đạn đi từ lúc bắn lên cho tới khi rơi xuống đất (làm tròn tới hàng đơn vị).

KQ:

--	--	--	--

CÂU 16. Mực nước trong hồ chứa của nhà máy điện thủy triều thay đổi trong suốt một ngày do nước chảy ra khi thủy triều xuống và nước chảy vào khi thủy triều lên (như hình vẽ). Tốc độ thay đổi của mực nước được xác định bởi hàm số $h'(t) = \frac{1}{90}(t^2 - 17t + 60)$, trong đó t tính bằng giờ ($0 \leq t \leq 24$), $h'(t)$ tính bằng mét/giờ. Tại thời điểm $t = 0$, mực nước trong hồ chứa cao 8 m. Mực nước trong hồ cao nhất là bao nhiêu?

KQ:

--	--	--	--

CÂU 17. Gọi $h(t)$ là chiều cao của cây keo (tính theo mét) sau khi trồng t năm. Biết rằng năm đầu tiên cây cao 1,5 m, trong những năm tiếp theo, cây phát triển với tốc độ $h'(t) = \frac{1}{\sqrt[4]{t}}$ (mét/năm). Sau bao nhiêu năm cây cao được 3 m (kết quả làm tròn tới hàng phần trăm).

KQ:

--	--	--	--

CÂU 18. Người ta bơm nước vào một bồn chứa, lúc đầu bồn không chứa nước, mực nước ở bồn chứa sau khi bơm phụ thuộc vào thời gian bơm nước theo một hàm số $h = h(t)$ trong đó h tính bằng cm, t tính bằng giây. Biết rằng $h'(t) = \sqrt[3]{2t}$ (cm/s). Mực nước ở bồn sau khi bơm được 13 giây là bao nhiêu? (kết quả làm tròn tới hàng đơn vị).

KQ:

--	--	--	--

CÂU 19. Khi quan sát một đám vi khuẩn trong phòng thí nghiệm người ta thấy tại ngày thứ t có số lượng là $N(t)$. Biết rằng $N'(t) = \frac{1500}{t}$ và tại ngày thứ nhất số lượng vi khuẩn là 5000 con. Tính số lượng vi khuẩn tại ngày thứ 12 (làm tròn đến hàng đơn vị).

KQ:

CÂU 20. Vi khuẩn HP (*Helicobacter pylori*) gây đau dạ dày, tại ngày thứ t với số lượng là $F(t)$. Biết $F'(t) = \frac{600}{t}$ và ban đầu bệnh nhân có 2000 con vi khuẩn. Sau 15 ngày bệnh nhân phát hiện ra bị bệnh. Hỏi khi đó có bao nhiêu con vi khuẩn trong dạ dày (lấy xấp xỉ tới hàng đơn vị)? Biết rằng nếu phát hiện sớm khi số lượng không vượt quá 4000 con thì bệnh nhân sẽ được cứu chữa.

KQ:

D. NGUYÊN HÀM HÀM ẨN

Cần nhớ các công thức đạo hàm của hàm hợp

$$\int f'(x)dx = f(x) + C$$

$$f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) = [f(x) \cdot g(x)]'$$

$$\frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)} = \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right]'$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = [\ln f(x)]'$$

$$-\frac{f'(x)}{f^2(x)} = \left[\frac{1}{f(x)} \right]'$$

$$-\frac{f'(x)}{f^n(x)} = \left[\frac{1}{(n-1)[f(x)]^{n-1}} \right]'$$

$$n \cdot f'(x) \cdot f^{n-1}(x) = [f^n(x)]'$$

$$\frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} = [2\sqrt{f(x)}]'$$

4

1. Điều kiện hàm ẩn có dạng

$$\begin{cases} f'(x) = g(x) \cdot h[f(x)] \\ f'(x) \cdot h[f(x)] = g(x). \end{cases}$$

Phương pháp giải

$$\frac{f'(x)}{h[f(x)]} = g(x) \Leftrightarrow \int \frac{f'(x)}{h[f(x)]} dx = \int g(x) dx \Leftrightarrow \int \frac{d[f(x)]}{h[f(x)]} = \int g(x) dx.$$

$$f'(x)h[f(x)] = g(x) \Leftrightarrow \int f'(x)h[f(x)]dx = \int g(x)dx \Leftrightarrow \int h[f(x)]d[f'(x)] = \int g(x)dx.$$

Chú ý: Ngoài việc nguyên hàm hai vế, ta có thể lấy tích phân hai vế (tùy câu hỏi của bài toán)

2. Điều kiện hàm ẩn có dạng

$$u(x)f'(x) + u'(x)f(x) = h(x)$$

Phương pháp giải Dễ dàng thấy rằng $u(x)f'(x) + u'(x)f(x) = [u(x)f(x)]'$.

Do đó $u(x)f'(x) + u'(x)f(x) = h(x) \Leftrightarrow [u(x)f(x)]' = h(x)$.

Suy ra $u(x)f(x) = \int h(x)dx$.

Từ đây ta dễ dàng tính được $f(x)$.

QUICK NOTE

QUICK NOTE

CÂU 1. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$ và $f'(x) \sin^2 \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2} = 1$. Tính $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

- (A) $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$. (B) $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$. (C) $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$. (D) $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4$.

CÂU 2. Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn $f'(x) \cdot f(x) = x^4 + x^2$. Biết $f(0) = 2$. Tính $f^2(2)$.

- (A) $f^2(2) = \frac{313}{15}$. (B) $f^2(2) = \frac{332}{15}$. (C) $f^2(2) = \frac{324}{15}$. (D) $f^2(2) = \frac{323}{15}$.

CÂU 3. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[-2; 1]$ thỏa mãn $f(0) = 3$ và $(f(x))^2 \cdot f'(x) = 3x^2 + 4x + 2$. Giá trị $f(1)$ là

- (A) $2\sqrt[3]{42}$. (B) $2\sqrt[3]{15}$. (C) $\sqrt[3]{42}$. (D) $\sqrt[3]{15}$.

CÂU 4. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(2) = -\frac{1}{3}$ và $f'(x) = x[f(x)]^2$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Giá trị của $f(1)$ bằng

- (A) $f(1) = -\frac{2}{3}$. (B) $f(1) = -\frac{2}{9}$. (C) $f(1) = -\frac{7}{6}$. (D) $f(1) = -\frac{11}{6}$.

CÂU 5. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(2) = -\frac{1}{25}$ và $f'(x) = 4x^3[f(x)]^2$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Giá trị của $f(1)$ bằng

- (A) $-\frac{391}{400}$. (B) $-\frac{1}{40}$. (C) $-\frac{41}{400}$. (D) $-\frac{1}{10}$.

CÂU 6. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(2) = -\frac{1}{5}$ và $f'(x) = x^3[f(x)]^2$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Giá trị của $f(1)$ bằng

- (A) $-\frac{4}{35}$. (B) $-\frac{71}{20}$. (C) $-\frac{79}{20}$. (D) $-\frac{4}{5}$.

CÂU 7. Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn $f(2) = -\frac{4}{19}$ và $f'(x) = x^3 f^2(x) \forall x \in \mathbb{R}$. Giá trị của $f(1)$ bằng

- (A) $-\frac{2}{3}$. (B) $-\frac{1}{2}$. (C) -1 . (D) $-\frac{3}{4}$.

CÂU 8. Cho hàm số $f(x) > 0$ xác định và liên tục trên \mathbb{R} đồng thời thỏa mãn $f(0) = \frac{1}{2}$, $f'(x) = -e^x f^2(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Tính giá trị của $f(\ln 2)$.

- (A) $f(\ln 2) = \frac{1}{4}$. (B) $f(\ln 2) = \frac{1}{3}$.
(C) $f(\ln 2) = \ln 2 + \frac{1}{2}$. (D) $f(\ln 2) = \ln^2 2 + \frac{1}{2}$.

CÂU 9. Cho hàm số $f(x) \neq 0$ thỏa mãn điều kiện $f'(x) = (2x + 3)f^2(x)$ và $f(0) = -\frac{1}{2}$. Biết rằng tổng $f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(2024) + f(2025) = \frac{a}{b}$ với $(a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}^*)$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- (A) $\frac{a}{b} < -1$. (B) $\frac{a}{b} > 1$. (C) $a + b = 1010$. (D) $b - a = 1519$.

CÂU 10. Cho hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$; $y = f(x)$ liên tục, nhận giá trị dương trên $(0; +\infty)$ và thỏa mãn $f(3) = \frac{4}{9}$ và $[f'(x)]^2 = xf(x)$. Tính $f(8)$.

- (A) $f(8) = \frac{43 - 24\sqrt{3}}{9}$. (B) $f(8) = \frac{43 + 24\sqrt{3}}{9}$.
(C) $f(8) = \frac{43 - \sqrt{3}}{3}$. (D) $f(8) = \frac{43 + \sqrt{3}}{3}$.

CÂU 11. Cho hàm số $f(x) > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$, $f(0) = 1$ và $f(x) = \sqrt{x} \cdot f'(x)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- (A) $f(3) < 2$. (B) $2 < f(3) < 4$. (C) $f(3) > 6$. (D) $4 < f(3) < 6$.

CÂU 12. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm cấp hai trên đoạn $[0; 1]$ đồng thời thỏa mãn các điều kiện $f'(0) = -1$, $f'(x) < 0$, $[f'(x)]^2 = f''(x)$, $\forall x \in [0; 1]$. Giá trị $f'(2)$ thuộc khoảng

- (A) $(2; 3)$. (B) $(-2; 0)$. (C) $(0; 2)$. (D) $(-3; -2)$.

CÂU 13. Cho hàm số $f(x)$ đồng biến có đạo hàm đến cấp hai trên đoạn $[0; 2]$ và thỏa mãn $[f(x)]^2 - f(x) \cdot f''(x) + [f'(x)]^2 = 0$. Biết $f(0) = 1$, $f(2) = e^6$. Khi đó $f(1)$ bằng

- (A) $e^{\frac{3}{2}}$. (B) e^3 . (C) $e^{\frac{5}{2}}$. (D) e^2 .

CÂU 14. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $(f'(x))^2 + f(x) \cdot f''(x) = x^3 - 2x$, $\forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = f'(0) = 1$. Giá trị của $T = f^2(2)$ bằng

QUICK NOTE

A $\frac{43}{30}$.

B $\frac{16}{15}$.

C $\frac{43}{15}$.

D $\frac{26}{15}$.

CÂU 15. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $[f'(x)]^2 + f(x) \cdot f''(x) = 2x^2 - x + 1, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = f'(0) = 3$. Giá trị của $[f(1)]^2$ bằng

A 28.

B 22.

C $\frac{19}{2}$.

D 10.

CÂU 16. Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn $y' = xy^2$ và $f(-1) = 1$. Tính giá trị $f(2)$. (Kết quả làm tròn đến hàng phần mười).

KQ:

CÂU 17. Cho hàm số $f(x) \neq 0$, liên tục trên đoạn $[1; 2]$ và thỏa mãn $f(1) = 3, x^2 \cdot f'(x) = f^2(x)$ với $\forall x \in [1; 2]$. Tính $f(2)$.

KQ:

CÂU 18. Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn $f(x) < 0, \forall x > 0$ và có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên khoảng $(0; +\infty)$ thỏa mãn $f'(x) = (2x + 1)f^2(x), \forall x > 0$ và $f(1) = -\frac{1}{2}$. Tính giá trị của biểu thức $T = f(1) + f(2) + \dots + f(2023) + f(2024)$. (Kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).

KQ:

CÂU 19. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(0) = 1 - \ln 2$ và $e^x f'(x) = 2^x [f(x)]^2$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Giá trị của $f(1)$ bằng bao nhiêu? (Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

KQ:

CÂU 20. Cho hàm số $y = f(x)$ đồng biến và có đạo hàm liên tục trên \mathbb{R} thỏa mãn $(f'(x))^2 = f(x) \cdot e^x, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = 2$. Tính $f(2)$. (Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

KQ:

CÂU 21. Giả sử hàm số $y = f(x)$ liên tục, nhận giá trị dương trên $(0; +\infty)$ và thỏa mãn $f(1) = 1, f(x) = f'(x) \cdot \sqrt{3x}$, với mọi $x > 0$. Tính $f(5)$ (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

KQ:

CÂU 22. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên \mathbb{R} thỏa mãn $e^{f(x)} - \frac{x}{f'(x)} = 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Biết $f(1) = 1$, tính $f(e^2)$ (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

KQ:

CÂU 23. Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị dương và thỏa mãn $f(0) = 1, (f'(x))^3 = e^x (f(x))^2, \forall x \in \mathbb{R}$. Tính $f(3)$ (kết quả làm tròn đến hàng phần mười).

KQ:

CÂU 24. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên \mathbb{R} và thỏa mãn điều kiện $x^6 (f'(x))^3 + 27[f(x) - 1]^4 = 0, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(1) = 0$. Tính giá trị của $f(2)$.

KQ:

CÂU 25. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $[xf'(x)]^2 + 1 = x^2 [1 - f(x) \cdot f''(x)]$ với mọi x dương. Biết $f(1) = f'(1) = 1$. Tính giá trị $f^2(2)$ (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

KQ:

5

1. Điều kiện hàm ẩn có dạng

$$A(x)f(x) + B(x)f'(x) = h(x) \quad (1)$$

Phương pháp giải

☑ Ta cần nhân thêm một lượng $u(x)$ vào (1) để tạo thành

QUICK NOTE

$u'(x)f(x) + u(x)f'(x) = u(x) \cdot h(x)$ và lúc này.

$$\begin{aligned} u'(x)f(x) + u(x)f'(x) &= u(x) \cdot h(x) \Leftrightarrow [u(x)f(x)]' = u(x) \cdot h(x) \\ \Rightarrow \int [u(x)f(x)] dx &= \int u(x) \cdot h(x) dx \Rightarrow u(x)f(x) = \int u(x) \cdot h(x) dx \\ \Rightarrow f(x) &= \frac{\int u(x) \cdot h(x) dx}{u(x)} \end{aligned}$$

☑ Cách tìm $u(x)$.

$$u(x) \text{ được chọn sao cho } \begin{cases} u'(x) = A(x) \\ u(x) = B(x). \end{cases}$$

Suy ra

$$\begin{aligned} \frac{u'(x)}{u(x)} &= \frac{A(x)}{B(x)} \Rightarrow \int \frac{u'(x)}{u(x)} dx = \int \frac{A(x)}{B(x)} dx \\ \Rightarrow \ln |u(x)| &= \int \frac{A(x)}{B(x)} dx \Rightarrow u(x) = e^{\int \frac{A(x)}{B(x)} dx} \end{aligned}$$

Tóm lại phương pháp giải $A(x)f(x) + B(x)f'(x) = h(x)$ (1) như sau.

☑ **Bước 1.** Tìm $u(x)$. $u(x) = e^{\int \frac{A(x)}{B(x)} dx}$.

☑ **Bước 2.** Nhân $u(x)$ vào (1) suy ra $f(x) = \frac{\int u(x) \cdot h(x) dx}{u(x)}$.

Một số dạng đặc biệt của (1).

a) Điều kiện hàm ẩn có dạng $\begin{cases} f'(x) + f(x) = h(x) \\ f'(x) - f(x) = h(x). \end{cases}$

Phương pháp giải.

☑ $f'(x) + f(x) = h(x)$.
Nhân hai vế với e^x ta được

$$e^x \cdot f'(x) + e^x \cdot f(x) = e^x \cdot h(x) \Leftrightarrow [e^x \cdot f(x)]' = e^x \cdot h(x).$$

Suy ra $e^x \cdot f(x) = \int e^x \cdot h(x) dx$.
Từ đây ta dễ dàng tính được $f(x)$.

☑ $f'(x) - f(x) = h(x)$.
Nhân hai vế với e^{-x} ta được

$$e^{-x} \cdot f'(x) - e^{-x} \cdot f(x) = e^{-x} \cdot h(x) \Leftrightarrow [e^{-x} \cdot f(x)]' = e^{-x} \cdot h(x).$$

Suy ra $e^{-x} \cdot f(x) = \int e^{-x} \cdot h(x) dx$.
Từ đây ta dễ dàng tính được $f(x)$.

b) Điều kiện hàm ẩn có dạng $f'(x) + p(x) \cdot f(x) = h(x)$.

Phương pháp giải.

Nhân hai vế với $e^{\int p(x) dx}$ ta được

$$\begin{aligned} f'(x) \cdot e^{\int p(x) dx} + p(x) \cdot e^{\int p(x) dx} \cdot f(x) &= h(x) \cdot e^{\int p(x) dx} \\ \Leftrightarrow [f(x) \cdot e^{\int p(x) dx}]' &= h(x) \cdot e^{\int p(x) dx}. \end{aligned}$$

Suy ra $f(x) \cdot e^{\int p(x) dx} = \int e^{\int p(x) dx} h(x) dx$.
Từ đây ta dễ dàng tính được $f(x)$.

CÂU 1. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(x) + f'(x) = e^{-x}$, $\forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = 2$. Tất cả các nguyên hàm của $f(x)e^x$ là

- (A)** $x^2 + x + C$. **(B)** $2x^2 + 2x + C$. **(C)** $2x^2 + x + C$. **(D)** $\frac{1}{2}x^2 + 2x + C$.

CÂU 2. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} thỏa mãn $f'(x) + 2x \cdot f(x) = e^{-x^2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$ và

$f(0) = 0$. Tính $f(1)$.

- (A) $f(1) = e^2$. (B) $f(1) = -\frac{1}{e}$. (C) $f(1) = \frac{1}{e^2}$. (D) $f(1) = \frac{1}{e}$.

CÂU 3. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{-1; 0\}$ thỏa mãn điều kiện $f(1) = -2 \ln 2$ và $x \cdot (x+1) \cdot f'(x) + f(x) = x^2 + x$. Biết $f(2) = a + b \cdot \ln 3$ ($a, b \in \mathbb{Q}$). Giá trị $2(a^2 + b^2)$ là

- (A) $\frac{27}{4}$. (B) 9. (C) $\frac{3}{4}$. (D) $\frac{9}{2}$.

CÂU 4. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{-1; 0\}$ thỏa mãn $f(1) = 2 \ln 2 + 1$, $x(x+1)f'(x) + (x+2)f(x) = x(x+1)$, $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 0\}$. Biết $f(2) = a + b \ln 3$, với a, b là hai số hữu tỉ. Tính $T = a^2 - b$.

- (A) $T = -\frac{3}{16}$. (B) $T = \frac{21}{16}$. (C) $T = \frac{3}{2}$. (D) $T = 0$.

CÂU 5. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $(0; +\infty)$ thỏa mãn $f'(x) + \frac{f(x)}{x} = 4x^2 + 3x$ và $f(1) = 2$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm có hoành độ $x = 2$ là

- (A) $y = -16x - 20$. (B) $y = 16x - 20$. (C) $y = 16x + 20$. (D) $y = -16x + 20$.

CÂU 6. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $(0; +\infty)$ thỏa mãn $2xf'(x) + f(x) = 3x^2\sqrt{x}$. Biết $f(1) = \frac{1}{2}$. Tính $f(4)$.

- (A) 24. (B) 14. (C) 4. (D) 16.

CÂU 7. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(1) = 4$ và $f(x) = xf'(x) - 2x^3 - 3x^2$ với mọi $x > 0$. Giá trị của $f(2)$ bằng

- (A) 5. (B) 10. (C) 20. (D) 15.

CÂU 8. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $(0; +\infty)$ thỏa mãn $3x \cdot f(x) - x^2 \cdot f'(x) = 2f^2(x)$, với $f(x) \neq 0$, $\forall x \in (0; +\infty)$ và $f(1) = \frac{1}{3}$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[1; 2]$. Tính $M + m$.

- (A) $\frac{9}{10}$. (B) $\frac{21}{10}$. (C) $\frac{5}{3}$. (D) $\frac{7}{3}$.

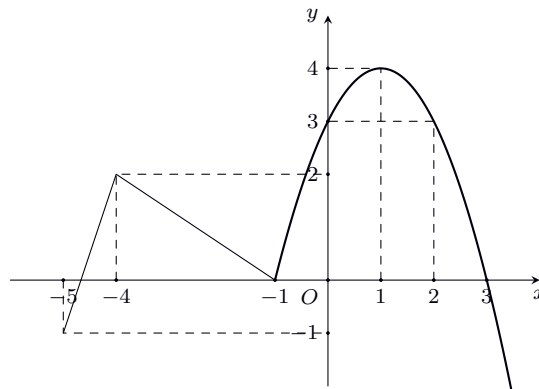
CÂU 9. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^{x^2}(x^3 - 4x)$. Hàm số $F(x^2 + x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

- (A) 6. (B) 5. (C) 3. (D) 4.

CÂU 10.

Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ trên $[-5; 3]$ như hình vẽ (phần cong của đồ thị là một phần của parabol $y = ax^2 + bx + c$). Biết $f(0) = 0$, giá trị của $2f(-5) + 3f(2)$ bằng

- (A) 33. (B) $\frac{109}{3}$. (C) $\frac{35}{3}$. (D) 11.



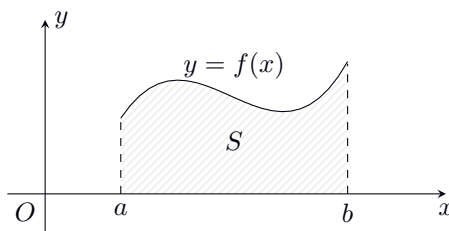
Bài 2. TÍCH PHẦN

A. LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

QUICK NOTE

QUICK NOTE

1. Diện tích hình thang cong



Nếu hàm số $f(x)$ liên tục và không âm trên đoạn $[a; b]$ thì diện tích S của hình thang cong giới hạn bởi đồ thị $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ được tính bởi: $S = F(b) - F(a)$ trong đó $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên đoạn $[a; b]$.

2. Khái niệm tích phân

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$. Nếu $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a; b]$ thì hiệu số $F(b) - F(a)$ được gọi là tích phân từ a đến b của hàm số $f(x)$, kí hiệu

$$\int_a^b f(x)dx.$$

! Chú ý:

☑ Hiệu số $F(b) - F(a)$ còn được kí hiệu là $F(x)|_a^b$.

$$\text{Vậy } \int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a).$$

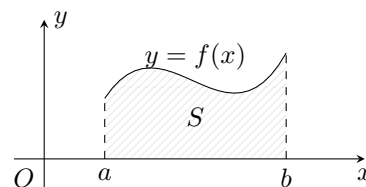
☑ Ta gọi \int_a^b là dấu tích phân, a là cận dưới, b là cận trên, $f(x)dx$ là biểu thức dưới dấu tích phân và $f(x)$ là hàm số dưới dấu tích phân.

☑ Quy ước: $\int_a^a f(x)dx = 0$; $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.

☑ Tích phân của hàm số f từ a đến b chỉ phụ thuộc vào f và các cận a , b mà không phụ thuộc vào biến x hay t , nghĩa là $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt$.

☑ Ý nghĩa hình học của tích phân.

Nếu hàm số $f(x)$ liên tục và không âm trên đoạn $[a; b]$ thì $\int_a^b f(x)dx$ là diện tích S của hình thang cong giới hạn bởi đồ thị $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$.



$$S = \int_a^b f(x)dx.$$

⚡ NHẬN XÉT. ☑ Nếu hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ và $f'(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ thì

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x)dx.$$

☑ Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$. Khi đó $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$ được gọi là giá trị trung bình của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a; b]$.

QUICK NOTE

- Đạo hàm của quãng đường di chuyển của vật theo thời gian bằng tốc độ của chuyển động tại mọi thời điểm $v(t) = s'(t)$. Do đó, nếu biết tốc độ $v(t)$ tại mọi thời điểm $t \in [a; b]$ thì tính được quãng đường di chuyển trong khoảng thời gian từ a đến b theo

$$\text{công thức: } s = s(b) - s(a) = \int_a^b v(t) dt.$$

3. Tính chất của tích phân

Cho hai hàm số $f(x), g(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$. Khi đó:

a) $\int_a^b k f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$, với k là hằng số.

b) $\int_a^b [f(x) \pm g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$.

c) $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$ với $c \in (a; b)$.

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

6

Tính chất của tích phân

Phần I. Mỗi câu hỏi học sinh chọn một trong bốn phương án A, B, C, D.

CÂU 1. Nếu $\int_0^3 f(x) dx = 6$ thì $\int_0^3 \left[\frac{1}{3} f(x) + 2 \right] dx$ bằng

- (A) 8. (B) 5. (C) 9. (D) 6.

CÂU 2. Nếu $\int_1^4 f(x) dx = 3$ và $\int_1^4 g(x) dx = -2$ thì $\int_1^4 (f(x) - g(x)) dx$ bằng

- (A) -1. (B) -5. (C) 5. (D) 1.

CÂU 3. Nếu $\int_1^4 f(x) dx = 5$ và $\int_1^4 g(x) dx = -4$ thì $\int_1^4 [f(x) - g(x)] dx$ bằng

- (A) -1. (B) -9. (C) 1. (D) 9.

CÂU 4. Biết $\int_1^{2024} f(x) dx = -3$ và $\int_1^{2024} g(x) dx = 2$. Khi đó $\int_1^{2024} [f(x) - g(x)] dx$ bằng

- (A) 6. (B) -5. (C) 5. (D) -1.

CÂU 5. Nếu $\int_0^3 f(x) dx = 3$ thì $\int_0^3 4f(x) dx$ bằng

- (A) 3. (B) 12. (C) 36. (D) 4.

CÂU 6. Cho $\int_0^2 f(x) dx = \frac{1}{2024}$. Tính $I = \int_0^2 2024 f(x) dx$.

- (A) $I = 5$. (B) $I = \frac{1}{2024}$. (C) $I = 1$. (D) $I = 2024$.

CÂU 7. Nếu $\int_0^5 f(x) dx = 5$ thì $\int_5^0 5f(x) dx$ bằng

- (A) 1. (B) -1. (C) 25. (D) -25.

CÂU 8. Nếu $\int_0^2 f(x) dx = 5$ thì $\int_0^2 [2f(x) - 1] dx$ bằng

QUICK NOTE

- (A) 8. (B) 9. (C) 10. (D) 12.

CÂU 9. Nếu $\int_0^2 f(x)dx = 3$ thì $\int_0^2 [2f(x) - 1] dx$ bằng

- (A) 6. (B) 4. (C) 8. (D) 5.

CÂU 10. Cho $\int_0^1 f(x) dx = 2$ và $\int_0^1 g(x) dx = 5$, khi $\int_0^1 [f(x) - 2g(x)] dx$ bằng

- (A) -8. (B) 1. (C) -3. (D) 12.

CÂU 11. Cho $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = 5$. Tính $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [f(x) + 2\sin x] dx$.

- (A) $I = 7$. (B) $I = 5 + \frac{\pi}{2}$. (C) $I = 3$. (D) $I = 5 + \pi$.

CÂU 12. Cho $\int_1^2 [4f(x) - 2x] dx = 1$. Khi đó $\int_1^2 f(x) dx$ bằng

- (A) 1. (B) -3. (C) 3. (D) -1.

Phần II. Trong mỗi ý a), b), c) và d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.

CÂU 13. Cho hai hàm f, g liên tục trên K và a, b là các số bất kỳ thuộc K .

Mệnh đề	Đ	S
a) $\int_a^b [f(x) + 2g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + 2 \int_a^b g(x) dx$.		
b) $\int_a^b \frac{f(x)}{g(x)} dx = \frac{\int_a^b f(x) dx}{\int_a^b g(x) dx}$.		
c) $\int_a^b [f(x) \cdot g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx \int_a^b g(x) dx$.		
d) $\int_a^b f^2(x) dx = \left[\int_a^b f(x) dx \right]^2$.		

CÂU 14. Cho hàm số $f(x), g(x)$ liên tục trên \mathbb{R} .

Mệnh đề	Đ	S
a) Nếu $\int_0^2 f(x) dx = 4$ thì $\int_0^2 \left[\frac{1}{2}f(x) + 2 \right] dx = 6$.		
b) Nếu $\int_2^5 f(x) dx = 3$ và $\int_2^5 g(x) dx = -2$ thì $\int_2^5 [f(x) + g(x)] dx = 1$.		
c) Nếu $\int_1^4 f(x) dx = 6$ và $\int_1^4 g(x) dx = -5$ thì $\int_1^4 [f(x) - g(x)] dx = 1$.		
d) Nếu $\int_2^3 f(x) dx = 4$ và $\int_2^3 g(x) dx = 1$ thì $\int_2^3 [f(x) - g(x)] dx = 3$.		

CÂU 15. Cho hàm số $f(x), g(x)$ liên tục trên \mathbb{R} .

Mệnh đề	Đ	S
---------	---	---

QUICK NOTE

Mệnh đề	Đ	S
a) Biết $\int_2^3 f(x) dx = 3$ và $\int_3^2 g(x) dx = 1$. Khi đó $\int_2^3 [f(x) + g(x)] dx = 4$.		
b) Biết $\int_1^3 f(x) dx = 2022$ và $\int_3^1 g(x) dx = 1$. Khi đó $\int_1^3 [f(x) + g(x)] dx = 2021$.		
c) Biết $\int_1^2 f(x) dx = 3$ và $\int_1^2 g(x) dx = 2$. Khi đó $\int_1^2 [f(x) - g(x)] dx = 1$.		
d) Biết $\int_2^5 f(x) dx = 2$. Khi đó $\int_2^5 3f(x) dx = 2$.		

CÂU 16. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} .

Mệnh đề	Đ	S
a) Nếu $\int_0^3 f(x) dx = 3$ thì $\int_0^3 2f(x) dx = 6$.		
b) Nếu $\int_1^4 f(x) dx = 2024$ thì $\int_4^1 f(x) dx = -2024$.		
c) Nếu $\int_6^0 f(x) dx = 12$ thì $\int_0^6 2022f(x) dx = 24264$.		
d) Nếu $\int_0^1 f(x) dx = 4$ thì $\int_0^1 2f(x) dx = 8$.		

Phần III. Học sinh điền kết quả vào ô trống.

CÂU 17. Cho $\int_0^3 f(x) dx = 4$. Tính $I = \int_0^3 3f(x) dx$.

KQ:

CÂU 18. Cho $\int_1^3 f(x) dx = 2$. Tính $I = \int_1^3 [f(x) + 2x] dx$.

KQ:

CÂU 19. Cho $\int_{-1}^2 f(x) dx = 2$ và $\int_{-1}^2 g(x) dx = -1$. Tính $I = \int_{-1}^2 [x + 2f(x) + 3g(x)] dx$.

KQ:

CÂU 20. Cho $\int_0^1 f(x) dx = 1$. Tính tích phân $I = \int_0^1 [2f(x) - 3x^2] dx$.

KQ:

CÂU 21. Biết $\int_1^3 f(x) dx = 3$. Tính giá trị của $I = \int_3^1 2f(x) dx$.

KQ:

QUICK NOTE

7

Tích phân hàm số sơ cấp

Phần I. Mỗi câu hỏi học sinh chọn một trong bốn phương án A, B, C, D.

CÂU 1. Tích phân $I = \int_0^2 (2x + 1) dx$ bằng

- (A) $I = 5$. (B) $I = 6$. (C) $I = 2$. (D) $I = 4$.

CÂU 2. Tích phân $\int_0^1 (3x + 1)(x + 3) dx$ bằng

- (A) 12. (B) 9. (C) 5. (D) 6.

CÂU 3. Tính tích phân $I = \int_1^e \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right) dx$

- (A) $I = \frac{1}{e}$. (B) $I = \frac{1}{e} + 1$. (C) $I = 1$. (D) $I = e$.

CÂU 4. Biết $\int_1^3 \frac{x+2}{x} dx = a + b \ln c$, với $a, b, c \in \mathbb{Z}$, $c < 9$. Tính tổng $S = a + b + c$.

- (A) $S = 7$. (B) $S = 5$. (C) $S = 8$. (D) $S = 6$.

CÂU 5. Tích phân $\int_0^1 e^{3x+1} dx$ bằng

- (A) $\frac{1}{3}(e^4 + e)$. (B) $e^3 - e$. (C) $\frac{1}{3}(e^4 - e)$. (D) $e^4 - e$.

CÂU 6. Biết $\int_0^1 \frac{e^x}{2^x} dx = \frac{e-1}{a - \ln b}$, ($a, b \in \mathbb{Z}$). Khi đó giá trị của $P = a + b$ là

- (A) $P = -3$. (B) $P = 6$. (C) $P = -1$. (D) $P = 3$.

CÂU 7. Giá trị của $I = \int_0^1 \frac{e^{2x} - 4}{e^x + 2} dx$ bằng

- (A) $I = 2(e + 3)$. (B) $I = \frac{1}{2}(e + 3)$. (C) $I = e - 3$. (D) $I = 2(e - 3)$.

CÂU 8. Biết $\int_1^2 e^x \left(1 - \frac{e^{-x}}{x} \right) dx = e^2 + a \cdot e + b \ln 2$, ($a, b \in \mathbb{Z}$). Khi đó giá trị của $P = \frac{a+b}{a \cdot b}$ là

- (A) $P = -3$. (B) $P = 1$. (C) $P = -1$. (D) $P = -2$.

CÂU 9. Biết $I = \int_0^1 \frac{e^{2x-1} - e^{-3x} + 1}{e^x} dx = \frac{1}{a} + b$, ($a, b \in \mathbb{R}$). Khi đó giá trị của $P = \frac{a+b}{a \cdot b}$ là

- (A) $P = e^4 - 1$. (B) $P = \frac{e^4 - 1}{e^2}$. (C) $P = \frac{e^4 - 1}{e^4}$. (D) $P = \frac{1 - e^4}{e^4}$.

CÂU 10. Giá trị của $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$ bằng

- (A) 0. (B) 1. (C) -1. (D) $\frac{\pi}{2}$.

CÂU 11. Biết $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} (2 \sin x + 3 \cos x + x) dx = \frac{a + b\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi^2}{c}$, ($a, b, c \in \mathbb{Z}$). Khi đó giá trị của $P = a + 2b + 3c$ là

- (A) $P = 45$. (B) $P = 60$. (C) $P = 65$. (D) $P = 70$.

QUICK NOTE

CÂU 12. Biết $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} 3 \tan^2 x \, dx = a\sqrt{3} + b + \frac{\pi}{c}$, ($a, b, c \in \mathbb{Z}$). Khi đó giá trị của $P = a + b + c$

là

- (A) $P = 6$. (B) $P = -4$. (C) $P = 4$. (D) $P = -6$.

CÂU 13. Biết $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} (2 \cot^2 x + 5) \, dx = \frac{\pi}{a} + b\sqrt{3} + c$, ($a, b, c \in \mathbb{Z}$). Khi đó giá trị của

$P = a + b + c$ là

- (A) $P = 6$. (B) $P = -4$. (C) $P = 4$. (D) $P = -6$.

CÂU 14. Biết $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \frac{x}{4} \cos^2 \frac{x}{4} \, dx = \frac{\pi}{c} + \frac{a}{b}$ với $a, b \in \mathbb{Z}$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Khi đó giá

trị của $P = a + b + c$ là

- (A) $P = 17$. (B) $P = 16$. (C) $P = 32$. (D) $P = 49$.

Phần II. Trong mỗi ý a), b), c) và d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.

CÂU 15. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[a; b]$. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

Mệnh đề	Đ	S
a) $\int_a^b f(x) \, dx = \int_b^a f(x) \, dx$.		
b) $\int_a^b f(x) \, dx = - \int_b^a f(x) \, dx$.		
c) $\int_a^b f(x) \, dx = 2 \int_a^b f(x) \, d(2x)$.		
d) $\int_a^a 2024 f(x) \, dx = 0$.		

CÂU 16. Cho hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$ liên tục trên $[a; b]$. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

Mệnh đề	Đ	S
a) $\int_a^b [f(x) + g(x)] \, dx = \int_a^b f(x) \, dx + \int_a^b g(x) \, dx$.		
b) $\int_a^b f(x) \cdot g(x) \, dx = \int_a^b f(x) \, dx \cdot \int_a^b g(x) \, dx$.		
c) $\int_a^b k f(x) \, dx = k \int_a^b f(x) \, dx$.		
d) $\int_a^b \frac{f(x)}{g(x)} \, dx = \frac{\int_a^b f(x) \, dx}{\int_a^b g(x) \, dx}$.		

CÂU 17. Cho hàm $f(x)$ là hàm liên tục trên đoạn $[a; b]$ với $a < b$ và $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm $f(x)$ trên $[a; b]$. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

Mệnh đề	Đ	S
---------	---	---

QUICK NOTE

Mệnh đề	Đ	S
a) $\int_a^b kf(x) \, dx = k [F(b) - F(a)].$		
b) $\int_b^a f(x) \, dx = F(b) - F(a).$		
c) Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đường thẳng $x = a$; $x = b$; đồ thị của hàm số $y = f(x)$ và trục hoành được tính theo công thức $S = F(b) - F(a).$		
d) $\int_a^b f(2x + 3) \, dx = F(2x + 3) \Big _a^b.$		

CÂU 18. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai.

Mệnh đề	Đ	S
a) $\int_0^1 \frac{e^{2x} - 4}{e^x + 2} \, dx = e - 3.$		
b) $\int_0^1 \frac{e^x}{2^x} \, dx = \frac{e}{2} + 1.$		
c) $\int_1^2 e^x \left(1 - \frac{e^{-x}}{x}\right) \, dx = e^2 - e - \ln 2.$		
d) $\int_0^1 \frac{e^{2x-1} - e^{-3x} + 1}{e^x} \, dx = e^4 - 1.$		

Phần III. Học sinh điền kết quả vào ô trống.

CÂU 19. Với a, b là các tham số thực. Tích phân

$$I = \int_0^b (3x^2 - 2ax - 1) \, dx = b^t - b^y a + z b.$$

Tính $t + y + z$.

KQ:

--	--	--	--

CÂU 20. Cho $\int_0^m (3x^2 - 2x + 1) \, dx = 6$. Tính giá trị của tham số m .

KQ:

--	--	--	--

CÂU 21. Tính tích phân $I = \int_1^2 \frac{x-1}{x} dx$ (làm tròn đến hàng phần trăm).

KQ:

--	--	--	--

CÂU 22. Tính $I = \int_1^2 \left(\frac{x - \sqrt[4]{x^3}}{x}\right)^2 dx$ (làm tròn đến hàng phần trăm).

KQ:

--	--	--	--

CÂU 23. Tính $I = \int_1^2 (\sqrt{x} + 1) (\sqrt[3]{x} - 1) \, dx$ (làm tròn đến hàng phần trăm).

KQ:

--	--	--	--

CÂU 24. Tính $I = \int_1^2 \frac{(x^2 + 1)^3}{x^2} dx$ (làm tròn đến hàng phần chục).

KQ:

CÂU 25. Tính $I = \int_0^1 5^{x+1} \cdot 7^{2x-1} dx$ (làm tròn đến hàng đơn vị).

KQ:

CÂU 26. Tính $I = \int_0^1 (x + e^{-x-2}) dx$ (làm tròn đến hàng phần trăm).

KQ:

CÂU 27. Tính $I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} x^2 \left(1 - \frac{\sin x}{x^2}\right) dx$ (làm tròn đến hàng phần trăm).

KQ:

CÂU 28. Tính $I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin x - \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right) dx$ (làm tròn đến hàng phần trăm).

KQ:

CÂU 29. Biết $\int_0^1 \frac{(e^{-x} + 2)^2}{e^{x-1}} dx = ae + b + \frac{c}{e} + \frac{1}{e^2}$ ($a, b, c \in \mathbb{Z}$). Tính giá trị của $P = a + b + c$.

KQ:

CÂU 30. Biết $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x} dx = a\sqrt{3} + \frac{\pi}{b}$ ($a, b \in \mathbb{Z}$). Tính $a + b$.

KQ:

CÂU 31. Tính $I = \int_0^1 \frac{(2024^x + 1)^2}{e^{-3x}} dx$ (làm tròn đến hàng phần trăm).

KQ:

CÂU 32. Tính $I = \frac{1}{1000} \int_0^1 \frac{(e^{-x} + 2)^2}{e^{x-1}} dx$ (làm tròn đến hàng đơn vị).

KQ:

CÂU 33. Tính $I = \frac{1}{100} \int_1^2 e^{2x} \left(2023 + \frac{2024e^{-2x}}{x^3}\right) dx$ (làm tròn đến hàng phần chục).

KQ:

CÂU 34. Tính $I = \int_1^2 \left(4x^3 - 2 \cdot 3^{x+1} + \frac{1}{x^2}\right) dx$ (làm tròn đến hàng phần chục).

KQ:

QUICK NOTE

QUICK NOTE

8

Tích phân hàm chứa trị tuyệt đối

Tính tích phân $I = \int_a^b |f(x)| dx$?

Phương pháp

- ❶ **Bước 1.** Xét dấu $f(x)$ trên đoạn $[a; b]$.
- ❷ **Bước 2.** Dựa vào bảng xét dấu trên đoạn $[a; b]$ để khử $|f(x)|$. Sau đó sử dụng các phương pháp tính tích phân đã học để tính $I = \int_a^b |f(x)| \cdot dx$.

Phần I. Mỗi câu hỏi học sinh chọn một trong bốn phương án A, B, C, D.

CÂU 1. Giá trị của $I = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos 2x} dx$ bằng

- (A) $\sqrt{3}$. (B) $4\sqrt{2}$. (C) $2\sqrt{3}$. (D) $\frac{\pi}{2}$.

CÂU 2. Tính tích phân $I = \int_0^2 |x - 2| dx$.

- (A) $I = -2$. (B) $I = 4$. (C) $I = 2$. (D) $I = 0$.

CÂU 3. Tính tích phân $I = \int_0^2 |x^3 - x| dx$.

- (A) $I = -\frac{1}{2}$. (B) $I = 5$. (C) $I = \frac{1}{2}$. (D) $I = \frac{5}{2}$.

CÂU 4. Tính tích phân $I = \int_0^2 |x^2 + 2x - 3| dx$.

- (A) $I = -2$. (B) $I = 4$. (C) $I = 5$. (D) $I = -4$.

CÂU 5. Cho tích phân $I = (\sqrt{3} + \sqrt{2}) \int_{-3}^3 |x^2 - 1| dx = a\sqrt{3} + b\sqrt{2}$ với $a, b \in \mathbb{Q}$. Tính

$P = a + b$.

- (A) $P = \frac{44}{3}$. (B) $P = \frac{88}{3}$. (C) $P = \frac{17}{3}$. (D) $P = \frac{98}{3}$.

CÂU 6. Tính tích phân $I = \int_{-2}^5 (|x + 2| - |x - 2|) dx$.

- (A) $I = 18$. (B) $I = 12$. (C) $I = 28$. (D) $I = 30$.

CÂU 7. Cho tích phân $I = \int_0^3 |2^x - 4| dx = a + \frac{b}{c \ln 2}$ với $a, b, c \in \mathbb{Z}$ và $\frac{b}{c}$ là phân số tối giản. Tính $P = a^2 + b^2 + c^2$.

- (A) $P = 15$. (B) $P = 10$. (C) $P = 5$. (D) $P = 18$.

CÂU 8. Tính tích phân $I = \int_{-1}^1 |2^x - 2^{-x}| dx$.

- (A) $\frac{1}{\ln 2}$. (B) $\ln 2$. (C) $2 \ln 2$. (D) $\frac{2}{\ln 2}$.

CÂU 9. Tính tích phân $I = \int_{-1}^2 (|x| - |x - 1|) dx$.

- (A) $I = 0$. (B) $I = 2$. (C) $I = -2$. (D) $I = -3$.

QUICK NOTE

CÂU 10. Cho a là số thực dương, tính tích phân $I = \int_{-1}^a |x| dx$ theo a .

- Ⓐ $I = \frac{a^2 + 1}{2}$. Ⓑ $I = \frac{a^2 + 2}{2}$. Ⓒ $I = \frac{-2a^2 + 1}{2}$. Ⓓ $I = \frac{|3a^2 - 1|}{2}$.

CÂU 11. Cho số thực $m > 1$ thỏa mãn $\int_1^m |2mx - 1| dx = 1$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- Ⓐ $m \in (4; 6)$. Ⓑ $m \in (2; 4)$. Ⓒ $m \in (3; 5)$. Ⓓ $m \in (1; 3)$.

CÂU 12. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- Ⓐ $\int_{-1}^1 |x|^3 dx = \left| \int_{-1}^1 x^3 dx \right|$.
 Ⓑ $\int_{-1}^{2024} |x^4 - x^2 + 1| dx = \int_{-1}^{2024} (x^4 - x^2 + 1) dx$.
 Ⓒ $\int_{-2}^3 |e^x (x + 1)| dx = \int_{-2}^3 e^x (x + 1) dx$.
 Ⓓ $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \cos^2 x} dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$.

CÂU 13. Tính tích phân $I = \int_1^4 \sqrt{x^2 - 6x + 9} dx$.

- Ⓐ $I = \frac{5}{2}$. Ⓑ $I = -\frac{1}{2}$. Ⓒ $I = -2$. Ⓓ $I = \frac{1}{2}$.

Phần III. Học sinh điền kết quả vào ô trống.

CÂU 14. Tính tích phân $I = \int_{-3}^3 |x^2 - 1| dx$ (tính gần đúng đến hàng phần chục).

KQ:

--	--	--	--

CÂU 15. Tính tích phân $I = \int_{-1}^2 |-x^2 - 2x + 3| dx$ (tính gần đúng đến hàng phần trăm).

KQ:

--	--	--	--

CÂU 16. Tính tích phân $I = \int_1^2 \left| \frac{x+1}{x} \right| dx$ (tính gần đúng đến hàng phần trăm).

KQ:

--	--	--	--

CÂU 17. Tính tích phân $I = \int_2^6 \sqrt{x^2 - 8x + 16} dx$.

KQ:

--	--	--	--

CÂU 18. Tính tích phân $I = \int_{-2}^1 \sqrt{4x^2 + 6x + 9} dx$ (làm tròn đến hàng phần trăm).

KQ:

--	--	--	--

CÂU 19. Tính tích phân $I = \int_0^1 \sqrt{9x^2 - 6x + 1} dx$ (làm tròn đến hàng phần trăm).

KQ:

--	--	--	--

QUICK NOTE

CÂU 20. Tính tích phân $I = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \cos 2x} dx$ (làm tròn đến hàng phần trăm).

KQ:

--	--	--	--

CÂU 21. Tính tích phân $I = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos 2x} dx$ (làm tròn đến hàng phần trăm).

KQ:

--	--	--	--

CÂU 22. Tính tích phân $I = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \sin 2x} dx$, (làm tròn đến hàng phần trăm).

KQ:

--	--	--	--

CÂU 23. Tính tích phân $I = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \sin 2x} dx$ (làm tròn đến hàng phần trăm).

KQ:

--	--	--	--

9

Tích phân có điều kiện

Phần I. Mỗi câu hỏi học sinh chọn một trong bốn phương án A, B, C, D.

CÂU 1. Nếu $F'(x) = \frac{1}{2x}$ và $F(1) = 1$ thì giá trị của $F(4)$ bằng

- (A) $\ln 2$. (B) $1 + \ln 2$. (C) $1 + \frac{1}{2} \ln 2$. (D) $\frac{1}{2} \ln 2$.

CÂU 2. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x) = \frac{2}{x}$. Biết $F(-1) = 0$. Tính $F(2)$ kết quả là

- (A) $2 \ln 2 + 1$. (B) $\ln 2$. (C) $2 \ln 3 + 2$. (D) $2 \ln 2$.

CÂU 3. Cho hàm số $f(x)$ liên tục, có đạo hàm trên $[-1; 2]$, $f(-1) = 8$, $f(2) = -1$. Tích phân $\int_{-1}^2 f'(x) dx$ bằng

- (A) 1. (B) 7. (C) -9. (D) 9.

CÂU 4. Biết $F(x) = x^2$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên \mathbb{R} . Giá trị của $\int_1^3 [1 + f(x)] dx$ bằng

- (A) 10. (B) 8. (C) $\frac{26}{3}$. (D) $\frac{32}{3}$.

CÂU 5. Biết $F(x) = x^3$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên \mathbb{R} . Giá trị của $\int_1^3 [1 + f(x)] dx$ bằng

- (A) 20. (B) 22. (C) 26. (D) 28.

CÂU 6. Biết $F(x) = x^2$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên \mathbb{R} . Giá trị của $\int_1^2 [2 + f(x)] dx$ bằng

- (A) 5. (B) 3. (C) $\frac{13}{3}$. (D) $\frac{7}{3}$.

CÂU 7. Biết $F(x) = x^3$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên \mathbb{R} . Giá trị của $\int_1^2 [2 + f(x)] dx$ bằng

QUICK NOTE

- ☐ A $\frac{23}{4}$.
 ☐ B 7.
 ☐ C 9.
 ☐ D $\frac{15}{4}$.

CÂU 8. Cho hàm số $f(x)$. Biết $f(0) = 4$ và $f'(x) = 2 \sin^2 \frac{x}{2} + 1, \forall x \in \mathbb{R}$, khi đó $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx$ bằng

- ☐ A $\frac{\pi^2 + 16\pi + 8\sqrt{2} - 16}{16}$.
 ☐ B $\frac{\pi^2 + 16\pi + 2\sqrt{2} - 4}{16}$.
 ☐ C $\frac{\pi^2 + 16\pi + 8\sqrt{2}}{16}$.
 ☐ D $\frac{\pi^2 + 16\pi - 16}{16}$.

CÂU 9. Cho hàm số $f(x)$. Biết $f(0) = 4$ và $f'(x) = 2 \cos^2 \frac{x}{2} + 3, \forall x \in \mathbb{R}$, khi đó $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx$ bằng?

- ☐ A $\frac{\pi^2 + 8\pi - 8 - \sqrt{2}}{8}$.
 ☐ B $\frac{\pi^2 + 8\pi - 8 - 4\sqrt{2}}{8}$.
 ☐ C $\frac{\pi^2 + 6\pi + 8}{8}$.
 ☐ D $\frac{\pi^2 + 8\pi - 4\sqrt{2}}{8}$.

CÂU 10. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} e^{2x} & \text{khi } x \geq 0 \\ x^2 + x + 2 & \text{khi } x < 0 \end{cases}$. Biết tích phân $\int_{-1}^1 f(x) dx = \frac{a}{b} + \frac{e^2}{c}$ ($\frac{a}{b}$ là phân số tối giản). Giá trị $a + b + c$ bằng

- ☐ A 7.
 ☐ B 8.
 ☐ C 9.
 ☐ D 10.

CÂU 11. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{khi } x \geq 2 \\ x^2 - 2x + 3 & \text{khi } x < 2 \end{cases}$. Tích phân $I = \frac{1}{2} \int_1^3 f(x) dx$ bằng:

- ☐ A $\frac{23}{3}$.
 ☐ B $\frac{23}{6}$.
 ☐ C $\frac{17}{6}$.
 ☐ D $\frac{17}{3}$.

CÂU 12. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x(1+x^2)}{x-4} & \text{khi } x \geq 3 \\ \frac{1}{x-4} & \text{khi } x < 3 \end{cases}$. Tích phân $I = \int_2^4 f(t) dt$ bằng:

- ☐ A $\frac{40}{3} - \ln 2$.
 ☐ B $\frac{95}{6} + \ln 2$.
 ☐ C $\frac{189}{4} + \ln 2$.
 ☐ D $\frac{189}{4} - \ln 2$.

CÂU 13. Cho số thực a và hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{khi } x \leq 0 \\ a(x - x^2) & \text{khi } x > 0 \end{cases}$. Tính tích phân $\int_{-1}^1 f(x) dx$ bằng:

- ☐ A $\frac{a}{6} - 1$.
 ☐ B $\frac{2a}{3} + 1$.
 ☐ C $\frac{a}{6} + 1$.
 ☐ D $\frac{2a}{3} - 1$.

Phần II. Trong mỗi ý a), b), c) và d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.

CÂU 14. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + 3 & \text{khi } x \geq 1 \\ 2 - x^3 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$.

Mệnh đề	Đ	S
a) $\int_1^{2024} f(x) dx = \int_1^{2024} (2x^2 + 3) dx$.		
b) $\int_{-2024}^1 f(x) dx = \int_{-2024}^1 (2 - x^3) dx$.		
c) $\int_{-2024}^{2024} f(x) dx = \int_1^{2024} (2x^2 + 3) dx + \int_{-2024}^1 (2 - x^3) dx$.		
d) $\int_{-2024}^{2024} f(x) dx = \int_1^{2024} (2x^2 + 3) dx + \int_{-2024}^1 (2 - x^3) dx$.		

QUICK NOTE

CÂU 15. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 3 & \text{khi } x \geq 2 \\ x + 1 & \text{khi } x < 2 \end{cases}$.

Mệnh đề	Đ	S
a) $\int_1^2 f(x)dx = \int_1^2 (x+1)dx.$		
b) $\int_2^3 f(x)dx = \int_2^3 (x^2 - 2x + 3)dx.$		
c) $\int_1^3 \frac{1}{2}f(x)dx = \frac{41}{12}.$		
d) $\int_1^2 f(x)dx = \int_1^2 (x^2 - 2x + 3)dx.$		

Phần III. Học sinh điền kết quả vào ô trống.

CÂU 16. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{khi } x \geq 1 \\ x + 1 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$. Tích phân $I = \int_2^0 -3t^2 f(t)dt$. (làm tròn đến hàng phần trăm)

KQ:

CÂU 17. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 1 & \text{khi } x < 0 \\ x - 1 & \text{khi } 0 \leq x \leq 2 \\ 5 - 2x & \text{khi } x > 2 \end{cases}$. Tính tích phân $I = \int_{-5}^9 \frac{1}{7}f(t)dt$. (làm tròn đến hàng phần trăm)

KQ:

CÂU 18. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 - x & \text{khi } x \geq 0 \\ x & \text{khi } x < 0 \end{cases}$. Khi đó $I = \int_{-1}^1 f(x)dx + \int_{-1}^3 f(x)dx$ bằng bao nhiêu? (làm tròn đến hàng phần trăm)

KQ:

CÂU 19. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 4x & \text{khi } x > 2 \\ -2x + 12 & \text{khi } x \leq 2 \end{cases}$. Tính tích phân $I = \int_1^2 f(t)dt + \frac{1}{2} \int_5^{10} f(t)dt$.

KQ:

CÂU 20. Biết rằng hàm số $f(x) = mx + n$ thỏa mãn $\int_0^1 f(x)dx = 3, \int_0^2 f(x)dx = 8$. Tính $m + n$.

KQ:

CÂU 21. Biết rằng hàm số $f(x) = ax^2 + bx + c$ thỏa mãn $\int_0^1 f(x)dx = -\frac{7}{2}, \int_0^2 f(x)dx = -2$ và $\int_0^3 f(x)dx = \frac{13}{2}$. Tính $P = a + b + c$. (làm tròn đến hàng phần trăm).

KQ:

CÂU 22. Cho $\int_0^m (3x^2 - 2x + 1)dx = 6$. Tính giá trị của tham số m .

KQ:

CÂU 23. Cho $I = \int_0^1 (4x - 2m^2) dx$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để $I + 6 > 0$?

KQ:

CÂU 24. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của a để $\int_0^a (2x - 3) dx \leq 4$?

KQ:

CÂU 25. Có bao nhiêu số thực b thuộc khoảng $(\pi; 3\pi)$ sao cho $\int_{\pi}^b 4 \cos 2x dx = 1$?

KQ:

10

Ứng dụng tích phân trong thực tiễn

☑ Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$. Khi đó $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$ được gọi là giá trị trung bình của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a; b]$.

☑ Đạo hàm của quãng đường di chuyển của vật theo thời gian bằng tốc độ của chuyển động tại mọi thời điểm $v(t) = s'(t)$. Do đó, nếu biết tốc độ $v(t)$ tại mọi thời điểm $t \in [a; b]$ thì tính được quãng đường di chuyển trong khoảng thời gian từ a đến b theo công thức

$$s = s(b) - s(a) = \int_a^b v(t) dt.$$

☑ Giả sử là vận tốc của vật tại thời điểm và là quãng đường vật đi được sau khoảng thời gian tính từ lúc bắt đầu chuyển động. Ta có mối liên hệ giữa vận tốc và quãng đường như sau

— Đạo hàm của quãng đường là vận tốc $s'(t) = v(t)$.

— Nguyên hàm của vận tốc là quãng đường $s(t) = \int v(t) dt$.

⇒ Từ đây ta cũng có quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian từ a đến b là

$$\int_a^b v(t) dt = s(b) - s(a).$$

Nếu gọi $a(t)$ là gia tốc của vật thì ta có mối liên hệ giữa gia tốc và vận tốc như sau

— Đạo hàm của vận tốc là gia tốc $v'(t) = a(t)$.

— Nguyên hàm của gia tốc là vận tốc $v(t) = \int a(t) dt$.

Phần I. Mỗi câu hỏi học sinh chọn một trong bốn phương án A, B, C, D.

CÂU 1. Một ô tô đang chạy với vận tốc 10 m/s thì gặp chướng ngại vật, người lái xe đạp phanh. Từ thời điểm đó, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -2t + 10 \text{ (m/s)}$, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Tính quãng đường ô tô di chuyển được trong 8 giây cuối cùng.

A 55 m.

B 25 m.

C 50 m.

D 16 m.

CÂU 2. Một ô tô đang chạy với tốc độ 20 (m/s) thì gặp chướng ngại vật, người lái đạp phanh, từ thời điểm đó ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -5t + 20 \text{ (m/s)}$,

QUICK NOTE

QUICK NOTE

trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ô tô còn di chuyển bao nhiêu mét (m)?

- (A) 20 m. (B) 30 m. (C) 10 m. (D) 40 m.

CÂU 3. Một chất điểm A xuất phát từ O , chuyển động thẳng với vận tốc biến thiên theo thời gian bởi quy luật $v(t) = \frac{1}{150}t^2 + \frac{59}{75}t$ (m/s), trong đó t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc a bắt đầu chuyển động. Từ trạng thái nghỉ, một chất điểm B cũng xuất phát từ O , chuyển động thẳng cùng hướng với A nhưng chậm hơn 3 giây so với A và có gia tốc bằng a (m/s^2) (a là hằng số). Sau khi B xuất phát được 12 giây thì đuổi kịp A . Vận tốc của B tại thời điểm đuổi kịp A bằng

- (A) 15 (m/s). (B) 20 (m/s). (C) 16 (m/s). (D) 13 (m/s).

CÂU 4. Một ô tô bắt đầu chuyển động thẳng đều với vận tốc v_0 , sau 6 giây chuyển động thì gặp chướng ngại vật nên bắt đầu giảm tốc độ với vận tốc chuyển động $v(t) = -\frac{5}{2}t + a$ (m/s) với $t \geq 6$ cho đến khi dừng hẳn. Biết rằng kể từ lúc chuyển động đến lúc dừng hẳn thì ô tô đi được quãng đường là 80 m. Tìm v_0 .

- (A) $v_0 = 35 m/s$. (B) $v_0 = 25 m/s$. (C) $v_0 = 10 m/s$. (D) $v_0 = 20 m/s$.

CÂU 5. Để đảm bảo an toàn khi lưu thông trên đường, các xe ô tô khi dừng đèn đỏ phải cách nhau tối thiểu 1 m. Một ô tô A đang chạy với vận tốc 16 m/s bỗng gặp ô tô B đang dừng đèn đỏ nên ô tô A hãm phanh và chuyển động chậm dần đều với vận tốc được biểu thị bởi công thức $v_A(t) = 16 - 4t$ (đơn vị tính bằng m/s), thời gian tính bằng giây. Hỏi rằng để hai ô tô A và B đạt khoảng cách an toàn khi dừng lại thì ô tô A phải hãm phanh khi cách ô tô B một khoảng ít nhất là bao nhiêu?

- (A) 33. (B) 12. (C) 31. (D) 32.

CÂU 6. Do các xe phải cách nhau tối thiểu 1 m để đảm bảo an toàn nên khi dừng lại ô tô A phải hãm phanh khi cách ô tô B một khoảng ít nhất là 33 m. Một chất điểm đang chuyển động với vận tốc $v_0 = 15 m/s$ thì tăng tốc với gia tốc $a(t) = t^2 + 4t$ (m/s^2). Tính quãng đường chất điểm đó đi được trong khoảng thời gian 3 giây kể từ lúc bắt đầu tăng vận tốc.

- (A) 70,25 m. (B) 68,25 m. (C) 67,25 m. (D) 69,75 m.

CÂU 7. Một vật chuyển động với vận tốc 10 m/s thì tăng tốc với gia tốc được tính theo thời gian là $a(t) = t^2 + 3t$. Tính quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian 6 giây kể từ khi vật bắt đầu tăng tốc.

- (A) 136 m. (B) 126 m. (C) 276 m. (D) 216 m.

CÂU 8. Một ô tô bắt đầu chuyển động nhanh dần đều với vận tốc $v_1(t) = 7t$ (m/s). Đi được 5 s, người lái xe phát hiện chướng ngại vật và phanh gấp, ô tô tiếp tục chuyển động chậm dần đều với gia tốc $a = -70$ (m/s^2). Tính quãng đường S đi được của ô tô từ lúc bắt đầu chuyển bánh cho đến khi dừng hẳn.

- (A) $S = 96,25$ (m). (B) $S = 87,5$ (m). (C) $S = 94$ (m). (D) $S = 95,7$ (m).

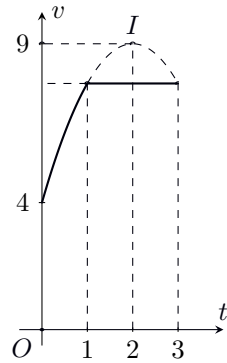
CÂU 9. Một ô tô bắt đầu chuyển động nhanh dần đều với vận tốc $v_1(t) = 2t$ (m/s). Đi được 12 giây, người lái xe gặp chướng ngại vật và phanh gấp, ô tô tiếp tục chuyển động chậm dần đều với gia tốc $a = -12$ (m/s^2). Tính quãng đường s (m) đi được của ô tô từ lúc bắt đầu chuyển động đến khi dừng hẳn.

- (A) $s = 168$ (m). (B) $s = 166$ (m). (C) $s = 144$ (m). (D) $s = 152$ (m).

CÂU 10. Một ô tô đang dừng và bắt đầu chuyển động theo một đường thẳng với gia tốc $a(t) = 6 - 2t$ (m/s^2), trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây kể từ lúc ô tô bắt đầu chuyển động. Hỏi quãng đường ô tô đi được từ lúc bắt đầu chuyển động đến khi vận tốc của ô tô đạt giá trị lớn nhất là bao nhiêu mét?

- (A) 18 m. (B) 36 m. (C) 22,5 m. (D) 6,75 m.

CÂU 11. Một vật chuyển động trong 3 giờ với vận tốc v (km/h) phụ thuộc vào thời gian t (h) có đồ thị vận tốc như hình bên. Trong thời gian 1 giờ kể từ khi bắt đầu chuyển động, đồ thị đó là một phần của đường parabol có đỉnh $I(2; 9)$ và trục đối xứng song song với trục tung, khoảng thời gian còn lại đồ thị là một đoạn thẳng song song với trục hoành. Tính quãng đường s mà vật chuyển động được trong 3 giờ đó (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).



QUICK NOTE

- A** $s = 21,58$ (km). **B** $s = 23,25$ (km). **C** $s = 13,83$ (km). **D** $s = 15,50$ (km).

Phần III. Học sinh điền kết quả vào ô trống.

CÂU 12. Một ô tô đang chạy với vận tốc là 12 (m/s) thì người lái đạp phanh; từ thời điểm đó ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -6t + 12$ (m/s), trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây kể từ lúc đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến lúc ô tô dừng hẳn, ô tô còn di chuyển được bao nhiêu mét?

KQ:

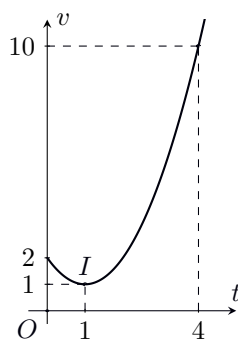
CÂU 13. Một ô tô đang chạy với vận tốc 10 m/s thì người lái đạp phanh; từ thời điểm đó, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -5t + 10$ (m/s), trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ô tô còn di chuyển được bao nhiêu mét?

KQ:

CÂU 14. Một ô tô chuyển động nhanh dần đều với vận tốc $v(t) = 7t$ (m/s). Đi được 5 (s) người lái xe phát hiện chướng ngại vật và phanh gấp, ô tô tiếp tục chuyển động chậm dần đều với gia tốc $a = -35$ (m/s²). Tính quãng đường của ô tô đi được từ lúc bắt đầu chuyển bánh cho đến khi dừng hẳn (đơn vị tính bằng mét)?

KQ:

CÂU 15. Một vật chuyển động trong 4 giờ với vận tốc v (km/h) phụ thuộc thời gian t (h) có đồ thị là một phần của đường parabol có đỉnh $I(1; 1)$ và trục đối xứng song song với trục tung như hình bên. Tính quãng đường s mà vật di chuyển được trong 4 giờ kể từ lúc xuất phát (làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất).



KQ:

C. TÍCH PHẦN HÀM ẨN BIẾN ĐỐI PHỨC TẠP

Phần I. Mỗi câu hỏi học sinh chọn một trong bốn phương án A, B, C, D.

CÂU 1. Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị không âm và có đạo hàm liên tục trên \mathbb{R} thỏa mãn

$$f'(x) = (2x + 1)[f(x)]^2, \forall x \in \mathbb{R} \text{ và } f(0) = -1. \text{ Giá trị của tích phân } \int_0^1 (x^3 - 1) f(x) dx$$

bằng

- A** 1. **B** $\frac{2}{3}$. **C** $\frac{1}{2}$. **D** $\frac{3}{2}$.

QUICK NOTE

- CÂU 2.** Cho hàm số $f(x) \neq 0$, liên tục trên đoạn $[1; 2]$ và thỏa mãn $f(1) = \frac{1}{3}$;
 $x^2 \cdot f'(x) = f^2(x)$ với $\forall x \in [1; 2]$. Tính tích phân $I = \int_1^2 (2x+1)^2 f(x) dx$.
 (A) $I = \frac{7}{6}$. (B) $I = \frac{5}{6}$. (C) $I = \frac{37}{6}$. (D) $I = \frac{1}{6}$.
- CÂU 3.** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên \mathbb{R} thỏa mãn $3f'(x) \cdot e^{f^3(x)} - \frac{2x}{f^2(x)} = 0$ với
 $\forall x \in \mathbb{R}$. Biết $f(1) = 0$, tính tích phân $I = \int_0^{2024} \frac{1}{\sqrt[3]{2 \ln x}} \cdot f(x) dx$.
 (A) 1. (B) $\frac{1}{2024}$. (C) 2024. (D) 0.
- CÂU 4.** Cho hàm số $f(x)$ đồng biến, có đạo hàm trên đoạn $[1; 4]$ và thỏa mãn $x + 2x \cdot f(x) =$
 $[f'(x)]^2$ với $\forall x \in [1; 4]$. Biết $f(1) = \frac{3}{2}$, tính $I = \int_1^4 f(x) dx$.
 (A) $I = \frac{1186}{45}$. (B) $I = \frac{1186}{9}$. (C) $I = \frac{1186}{5}$. (D) $I = \frac{1186}{41}$.
- CÂU 5.** Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị dương và thỏa mãn $f(0) = 1, [f'(x)]^3 = e^x [f(x)]^2, \forall x \in$
 \mathbb{R} . Tính $I = \int_1^2 f(x) dx$.
 (A) $I = e^2 + 1$. (B) $I = e - 1$. (C) $I = e^2 - e$. (D) $I = e$.
- CÂU 6.** Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên \mathbb{R} và thỏa mãn điều kiện $x^6 [f'(x)]^3 +$
 $27[f(x) - 1]^4 = 0, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(1) = 0$. Tính $I = \int_2^3 f(x) dx$.
 (A) $I = \frac{31}{2}$. (B) $I = -\frac{31}{2}$. (C) $I = \frac{61}{4}$. (D) $I = -\frac{61}{4}$.
- CÂU 7.** Cho hàm số $f(x) > 0$ và thỏa mãn $[f'(x)]^2 + f(x) \cdot f''(x) = e^x, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) =$
 $f'(0) = 1$. Tính $I = \int_1^2 f(x) dx$.
 (A) $I = 2\sqrt{e}$. (B) $I = e - \sqrt{e}$. (C) $I = 2e - 2\sqrt{e}$. (D) $I = 2e + 2\sqrt{e}$.
- CÂU 8.** Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $[f'(x)]^2 + f(x) \cdot f''(x) = 2x$, và $f(0) = f'(0) = 2$. Tính
 $I = \int_1^2 f^2(x) dx$.
 (A) $I = \frac{15}{2}$. (B) $I = \frac{1}{2}$. (C) $I = \frac{19}{2}$. (D) $I = 15$.
- CÂU 9.** Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn: $[f'(x)]^2 + f(x) \cdot f''(x) = 15x^4 + 12x, \forall x \in \mathbb{R}$ và
 $f(0) = f'(0) = 1$. Giá trị của $f^2(1)$ bằng
 (A) $\frac{5}{2}$. (B) 8. (C) 10. (D) 4.
- CÂU 10.** Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn $[f'(x)]^2 + f(x) \cdot f''(x) = x^3 - 2x, \forall x \in \mathbb{R}$ và
 $f(0) = f'(0) = 2$. Tính giá trị của $T = f^2(2)$.
 (A) $\frac{160}{15}$. (B) $\frac{268}{15}$. (C) $\frac{4}{15}$. (D) $\frac{268}{30}$.
- CÂU 11.** Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(x) + f'(x) = e^{-x}, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = 2$. Tính
 $I = \int_1^2 \frac{f(x)e^x}{x} dx$.
 (A) $I = 2 \ln 2$. (B) $I = \ln 2$. (C) $I = 1 + \ln 2$. (D) $I = 1 + 2 \ln 2$.
- CÂU 12.** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên \mathbb{R} thỏa mãn $(x+2)f(x) + (x+1)f'(x) = e^x$
 và $f(0) = \frac{1}{2}$. Tính $I = \int_1^2 (2x+2)f(x) dx$.

QUICK NOTE

- (A) $I = e^2$. (B) $I = 1 + e$. (C) $I = 1 + e^2$. (D) $I = e^2 - e$.

CÂU 13. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục, có đạo hàm trên \mathbb{R} thỏa mãn điều kiện

$$f(x) + x[f'(x) - 2\sin x] = x^2 \cos x, x \in \mathbb{R} \text{ và } f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}. \text{ Tính } I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(x)}{x} dx.$$

- (A) $I = 1$. (B) $I = \frac{\pi}{2}$. (C) $I = -1$. (D) $I = -\pi$.

CÂU 14. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $(0; +\infty)$ thỏa mãn $2xf'(x) + f(x) = 2x$, $\forall x \in (0; +\infty)$, $f(1) = 1$. Giá trị của biểu thức $f(4)$ là

- (A) $\frac{25}{6}$. (B) $\frac{25}{3}$. (C) $\frac{17}{6}$. (D) $\frac{17}{3}$.

CÂU 15. Cho hàm số $f(x)$ không âm, có đạo hàm trên đoạn $[0; 1]$ và thỏa mãn $f(1) = 1$,

$$[2f(x) + 1 - x^2] f'(x) = 2x[1 + f(x)], \forall x \in [0; 1]. \text{ Tích phân } \int_0^1 f(x) dx \text{ bằng}$$

- (A) 1. (B) 2. (C) $\frac{1}{3}$. (D) $\frac{3}{2}$.

CÂU 16. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0; 1]$, thỏa mãn

$$[f'(x)]^2 + 4f(x) = 8x^2 + 4, \forall x \in [0; 1] \text{ và } f(1) = 2. \text{ Tính } \int_0^1 f(x) dx.$$

- (A) $\frac{1}{3}$. (B) 2. (C) $\frac{4}{3}$. (D) $\frac{21}{4}$.

CÂU 17. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0; 1]$ thỏa mãn

$$3f(x) + xf'(x) \geq x^{2018}, \forall x \in [0; 1]. \text{ Tìm giá trị nhỏ nhất của } \int_0^1 f(x) dx.$$

- (A) $\frac{1}{2018 \cdot 2020}$. (B) $\frac{1}{2019 \cdot 2020}$. (C) $\frac{1}{2020 \cdot 2021}$. (D) $\frac{1}{2019 \cdot 2021}$.

CÂU 18. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên \mathbb{R} thỏa mãn

$$\begin{cases} f(0) = f'(0) = 1 \\ f(x+y) = f(x) + f(y) + 3xy(x+y) - 1 \end{cases} \text{ với } x, y \in \mathbb{R}$$

$$\text{Tính } \int_0^1 f(x-1) dx.$$

- (A) $\frac{1}{2}$. (B) $-\frac{1}{4}$. (C) $\frac{1}{4}$. (D) $\frac{7}{4}$.

CÂU 19. Cho hai hàm $f(x)$ và $g(x)$ có đạo hàm trên $[1; 4]$, thỏa mãn $\begin{cases} f(1) + g(1) = 4 \\ g(x) = -xf'(x), \text{ với} \\ f(x) = -xg'(x) \end{cases}$

$$\text{mọi } x \in [1; 4]. \text{ Tính tích phân } I = \int_1^4 [f(x) + g(x)] dx.$$

- (A) $3 \ln 2$. (B) $4 \ln 2$. (C) $6 \ln 2$. (D) $8 \ln 2$.

CÂU 20. Cho hai hàm $f(x)$ và $g(x)$ có đạo hàm trên $[1; 2]$ thỏa mãn $f(1) = g(1) = 0$ và

$$\begin{cases} \frac{x}{(x+1)^2} g(x) + 2023x = (x+1)f'(x) \\ \frac{x^3}{x+1} g'(x) + f(x) = 2024x^2 \end{cases}, \forall x \in [1; 2].$$

$$\text{Tính tích phân } I = \int_1^2 \left[\frac{x}{x+1} g(x) - \frac{x+1}{x} f(x) \right] dx.$$

- (A) $I = \frac{1}{2}$. (B) $I = 1$. (C) $I = \frac{3}{2}$. (D) $I = 2$.

CÂU 21. Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ thỏa mãn $x^2 f^2(x) + (2x-1)f(x) =$

$$xf'(x) - 1, \text{ với mọi } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \text{ đồng thời thỏa mãn } f(1) = -2. \text{ Tính } \int_1^2 f(x) dx.$$

QUICK NOTE

(A) $-\frac{\ln 2}{2} - 1.$

(B) $-\ln 2 - \frac{1}{2}.$

(C) $-\ln 2 - \frac{3}{2}.$

(D) $-\frac{\ln 2}{2} - \frac{3}{2}.$

CÂU 22. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên \mathbb{R} thỏa mãn $x \cdot f(x) \cdot f'(x) = f^2(x) - x, \forall x \in \mathbb{R}$ và có $f(2) = 1$. Tích phân $\int_0^2 f^2(x) dx$ bằng

(A) $\frac{3}{2}.$

(B) $\frac{4}{3}.$

(C) $2.$

(D) $4.$

CÂU 23. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}, f(0) = 0, f'(0) \neq 0$ và thỏa mãn hệ thức $f(x) \cdot f'(x) + 18x^2 = (3x^2 + x) f'(x) + (6x + 1) f(x), \forall x \in \mathbb{R}$. Biết $\int_0^1 (x+1) e^{f(x)} dx = ae^2 + b, (a, b \in \mathbb{Q})$. Giá trị của $a - b$ bằng

(A) $1.$

(B) $2.$

(C) $0.$

(D) $\frac{2}{3}.$

CÂU 24. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $[1; 3]; f(x) \neq 0, \forall x \in [1; 3]; f'(x) [1 + f(x)]^2 = (x - 1)^2 [f(x)]^4$ và $f(1) = -1$. Biết rằng $\int_e^3 f(x) dx = a \ln 3 + b (a, b \in \mathbb{Z})$. Giá trị của $a + b^2$ bằng

(A) $4.$

(B) $0.$

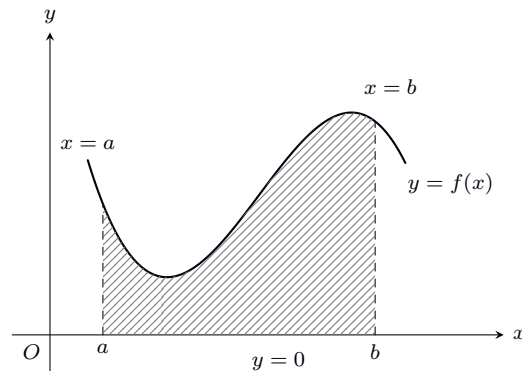
(C) $2.$

(D) $-1.$

Bài 3. ỨNG DỤNG HÌNH HỌC CỦA TÍCH PHẦN

A. DIỆN TÍCH HÌNH THANG CONG

1. Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$ và $x = b$



Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[a; b]$. Khi đó, diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành $Ox (y = 0)$ và hai đường thẳng $x = a$ và $x = b$ được tính bởi công thức

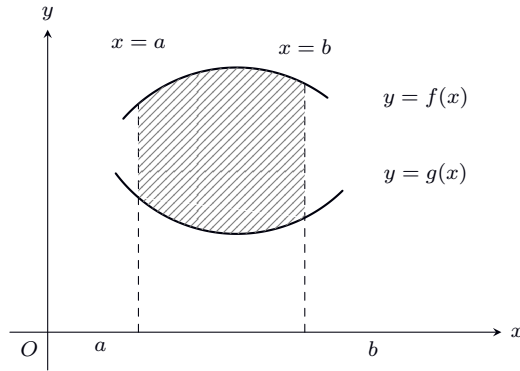
$$S = \int_a^b |f(x)| dx$$

Chú ý: Giả sử hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[a; b]$. Nếu $f(x)$ không đổi dấu trên $[a; b]$ thì

$$\int_a^b |f(x)| dx = \left| \int_a^b f(x) dx \right|.$$

2. Hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số và hai đường thẳng

$x = a$ và $x = b$

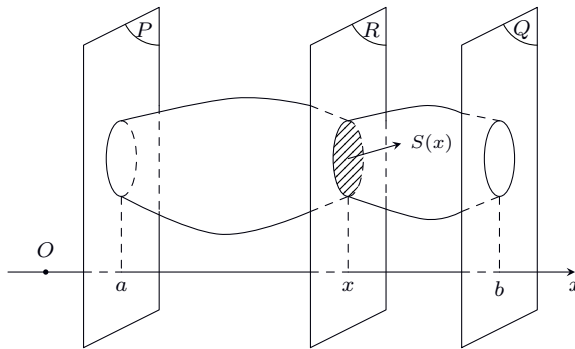


Cho 2 hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ liên tục trên $[a; b]$. Khi đó diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ và hai đường thẳng $x = a$ và $x = b$ được tính bởi công thức

$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$

B. THỂ TÍCH HÌNH KHỐI

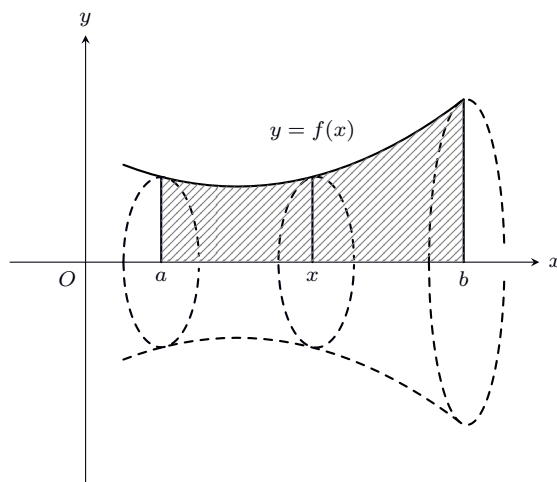
1. Thể tích của vật thể



Trong không gian, cho một vật thể nằm trong khoảng không gian giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) cùng vuông góc với trục Ox tại các điểm a và b . Mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm $x (a \leq x \leq b)$ cắt vật thể theo mặt cắt có diện tích $S(x)$. Khi đó, nếu $S(x)$ là hàm số liên tục trên $[a; b]$ thì thể tích của vật thể được tính bởi công thức

$$V = \int_a^b S(x) dx$$

2. Thể tích khối tròn xoay



QUICK NOTE

QUICK NOTE

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục, không âm trên $[a; b]$. Hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành Ox và hai đường thẳng $x = a$ và $x = b$ quay quanh trục Ox tạo thành một khối tròn xoay có thể tích bằng

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

11

TÍNH DIỆN TÍCH HÌNH GIỚI HẠN BỞI CÁC ĐƯỜNG CONG

CÂU 1. Cho hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ liên tục trên $[a; b]$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của các hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$ và các đường thẳng $x = a$, $x = b$ bằng

(A) $\left| \int_a^b [f(x) - g(x)] dx \right|.$

(B) $\int_a^b |f(x) + g(x)| dx.$

(C) $\int_a^b |f(x) - g(x)| dx.$

(D) $\int_a^b [f(x) - g(x)] dx.$

CÂU 2. Gọi S là diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = 3^x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

(A) $\int_0^2 3^x dx.$

(B) $S = \pi \int_0^2 3^{2x} dx.$

(C) $S = \pi \int_0^2 3^x dx.$

(D) $S = \int_0^2 3^{2x} dx.$

CÂU 3. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = (x - 2)^2 - 1$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 1$, $x = 2$ bằng

(A) $\frac{2}{3}.$

(B) $\frac{3}{2}.$

(C) $\frac{1}{3}.$

(D) $\frac{7}{3}.$

CÂU 4. Tính diện tích S hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^2 + 1$, $x = -1$, $x = 2$ và trục hoành.

(A) $S = 6.$

(B) $S = 16.$

(C) $S = \frac{13}{6}.$

(D) $S = 13.$

CÂU 5. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^2 + 5$, $y = 6x$, $x = 0$, $x = 1$. Tính S .

(A) $\frac{4}{3}.$

(B) $\frac{7}{3}.$

(C) $\frac{8}{3}.$

(D) $\frac{5}{3}.$

CÂU 6. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y = \ln x$, $y = 1$ và hai đường thẳng $x = 1$, $x = e$ bằng

(A) $e^2.$

(B) $e + 2.$

(C) $2e.$

(D) $e - 2.$

CÂU 7. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y = 4x - x^2$, $y = 2x$ và hai đường thẳng $x = 1$, $x = e$ bằng

(A) 4.

(B) $\frac{20}{3}.$

(C) $\frac{4}{3}.$

(D) $\frac{16}{3}.$

CÂU 8. Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^2 - 2x$, $y = 0$, $x = -10$, $x = 10$.

(A) $S = \frac{2000}{3}.$

(B) $S = 2008.$

(C) $S = 2000.$

(D) $S = \frac{2008}{3}.$

CÂU 9. Gọi S là diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = 2^x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

Mệnh đề	Đ	S
a) $S = \int_0^2 2^x dx.$		
b) $S = \frac{3}{\ln 2}.$		

Mệnh đề	Đ	S
c) $S = \pi \int_0^2 2^x dx.$		
d) $S = \frac{3\pi}{\ln 2}.$		

CÂU 10. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = e^x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

QUICK NOTE

Mệnh đề	Đ	S
a) $S = \int_0^2 e^x dx.$		
b) $S = e^2.$		

Mệnh đề	Đ	S
c) $S = \pi \int_0^2 e^x dx.$		
d) $S = (e^2 - 1) \pi.$		

CÂU 11. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai

Mệnh đề	Đ	S
a) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^2$, $y = 2x$, $x = 0$, $x = 1$ là $\frac{4}{3}$.		
b) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = -x^2 + 2x + 1$, $y = 2x^2 - 4x + 1$, $x = 0$, $x = 2$ là 4.		
c) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \frac{x-1}{x+1}$, trục hoành, $x = 0$, $x = 1$ là $2 \ln 2 - 1$.		
d) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = -x^3 + 12x$, $y = -x^2$, $x = -3$, $x = 4$ là $\frac{937}{12}$.		

CÂU 12. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^2 + x - 1$, $y = x^4 + x - 1$, $x = -1$, $x = 1$.

KQ:

CÂU 13. Kí hiệu $S(t)$ là diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = 2x + 1$, $y = 0$, $x = 1$, $x = t$ ($t > 1$). Tìm t để $S(t) = 10$.

KQ:

CÂU 14. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $my = x^2$, $mx = y^2$ ($m > 0$). Tìm giá trị của m để $S = 3$.

KQ:

CÂU 15. Giá trị dương của tham số m sao cho diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y = 2x + 3$ và các đường thẳng $y = 0$, $x = 0$, $x = m$ bằng 10 là?

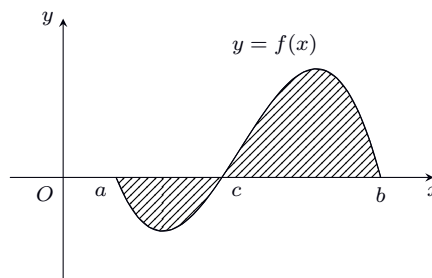
KQ:

CÂU 16. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 7 - 4x^3 & \text{khi } 0 \leq x \leq 1 \\ 4 - x^2 & \text{khi } x > 1 \end{cases}$. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $f(x)$ và các đường thẳng $x = 0$, $x = 3$, $y = 0$.

KQ:

CÂU 17.

Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành, đường thẳng $x = a$, $x = b$ (như hình vẽ bên). Hỏi cách tính S nào dưới đây đúng?



Ⓐ $S = \int_a^b f(x) dx.$

Ⓑ $S = \left| \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \right|.$

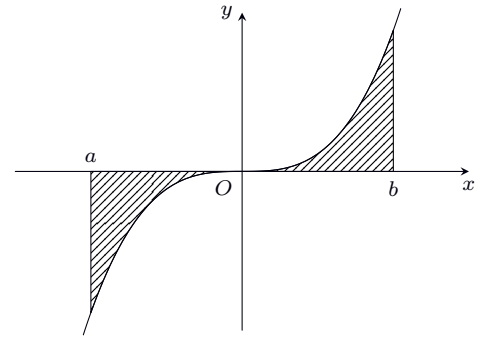
Ⓒ $S = - \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$

Ⓓ $S = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$

QUICK NOTE

CÂU 18.

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$. Gọi D là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $(C): y = f(x)$, trục hoành, hai đường thẳng $x = a, x = b$ (như hình vẽ). Giả sử S_D là diện tích hình phẳng D . Chọn phương án đúng trong các phương án **A, B, C, D** cho dưới đây?



A $S_D = \int_a^0 f(x) dx + \int_0^b f(x) dx.$

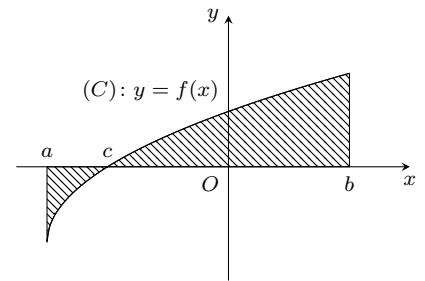
B $S_D = -\int_a^0 f(x) dx + \int_0^b f(x) dx.$

C $S_D = \int_a^0 f(x) dx - \int_0^b f(x) dx.$

D $S_D = -\int_a^0 f(x) dx - \int_0^b f(x) dx.$

CÂU 19.

Diện tích của hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a, x = b$ ($a < b$) (phần tô đậm trong hình vẽ) tính theo công thức nào dưới đây?



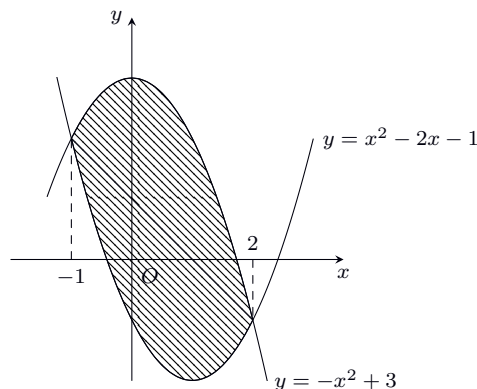
A $S = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$

B $S = \int_a^b f(x) dx.$

C $S = -\int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$

D $S = \left| \int_a^b f(x) dx \right|.$

CÂU 20. Diện tích phần hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ bên dưới được tính theo công thức nào dưới đây?



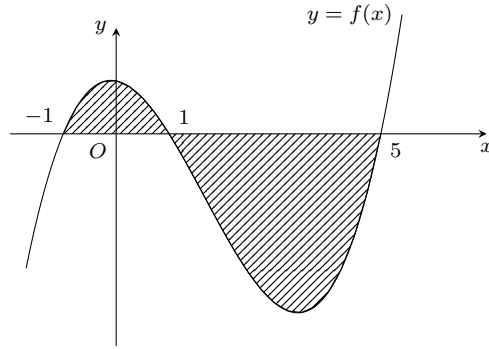
A $\int_{-1}^2 (-2x + 2) dx.$

B $\int_{-1}^2 (2x - 2) dx.$

C $\int_{-1}^2 (-2x^2 + 2x + 4) dx.$

D $\int_{-1}^2 (2x^2 - 2x - 4) dx.$

CÂU 21. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} . Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x), y = 0, x = -1, x = 5$ (như hình vẽ bên dưới).



Mệnh đề nào sau đây đúng?

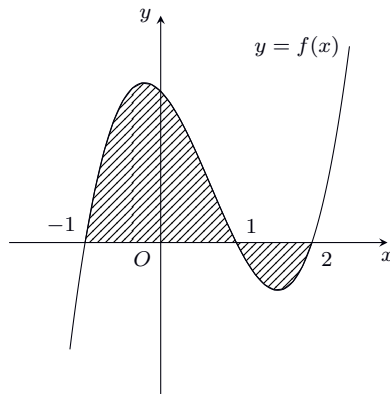
A $S = -\int_{-1}^1 f(x) dx - \int_1^5 f(x) dx.$

B $S = \int_{-1}^1 f(x) dx + \int_1^5 f(x) dx.$

C $S = \int_{-1}^1 f(x) dx - \int_1^5 f(x) dx.$

D $S = -\int_{-1}^1 f(x) dx + \int_1^5 f(x) dx.$

CÂU 22. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} . Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, $y = 0$, $x = -1$, $x = 2$ (như hình vẽ bên dưới).



Mệnh đề nào sau đây đúng?

A $S = \int_{-1}^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx.$

B $S = -\int_{-1}^1 f(x) dx - \int_1^2 f(x) dx.$

C $S = -\int_{-1}^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx.$

D $S = \int_{-1}^1 f(x) dx - \int_1^2 f(x) dx.$

CÂU 23.

Gọi S là diện tích hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = -1$, $x = 2$.

Đặt $a = \int_{-1}^0 f(x) dx$, $b = \int_0^2 f(x) dx$ (như hình vẽ bên). Mệnh

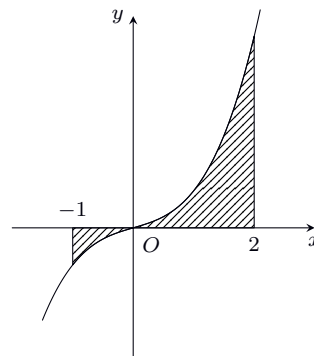
đề nào sau đây đúng?

A $S = b - a.$

B $S = b + a.$

C $S = -b + a.$

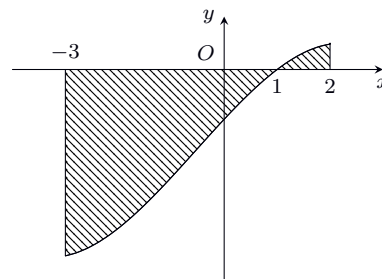
D $S = -b - a.$



CÂU 24.

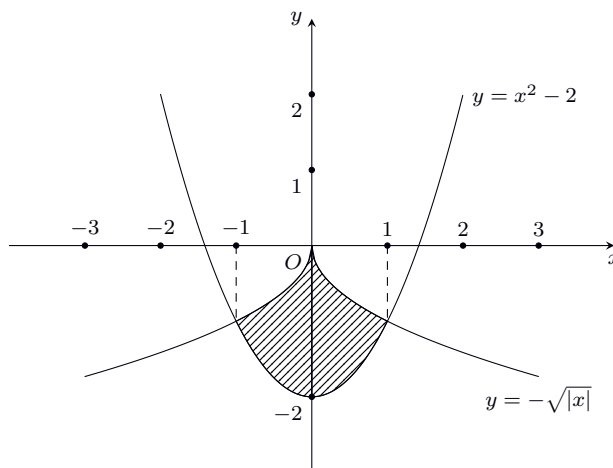
QUICK NOTE

Gọi S là diện tích hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = -3$, $x = 2$. Đặt $a = \int_{-3}^1 f(x) dx$, $b = \int_1^2 f(x) dx$ (như hình vẽ bên). Mệnh đề nào sau đây đúng?



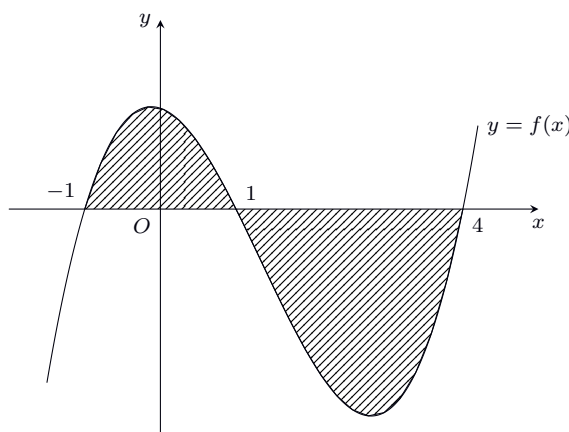
- ☐ A $S = a + b$.
 ☐ B $S = a - b$.
 ☐ C $S = -a - b$.
 ☐ D $S = b - a$.

CÂU 25. Diện tích phần hình phẳng được gạch sọc trong hình vẽ sau được tính theo công thức nào dưới đây?



- ☐ A $\int_{-1}^1 (x^2 - 2 + \sqrt{|x|}) dx$.
 ☐ B $\int_{-1}^1 (x^2 - 2 - \sqrt{|x|}) dx$.
 ☐ C $\int_{-1}^1 (-x^2 + 2 + \sqrt{|x|}) dx$.
 ☐ D $\int_{-1}^1 (-x^2 + 2 - \sqrt{|x|}) dx$.

CÂU 26. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} . Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, $y = 0$, $x = -1$, $x = 4$ (như hình vẽ). Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

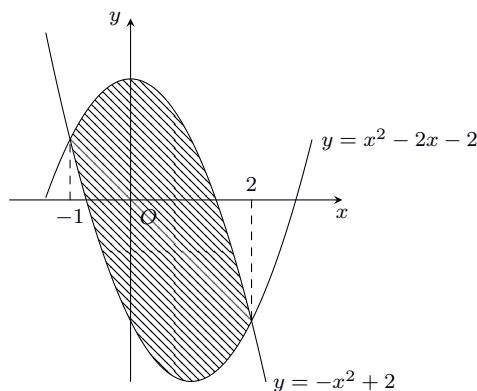


Mệnh đề	Đ	S
a) $S = \int_{-1}^1 f(x) dx - \int_1^4 f(x) dx$.		
b) $S = \int_{-1}^1 f(x) dx + \int_1^4 f(x) dx$.		

QUICK NOTE

Mệnh đề	Đ	S
c) $S = \left \int_{-1}^4 f(x) dx \right $.		
d) $S = \int_{-1}^1 f(x) dx + \int_1^4 f(x) dx$.		

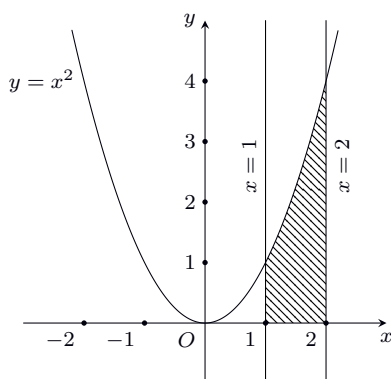
CÂU 27. Cho hình phẳng được gạch chéo trong hình bên dưới.



Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

Mệnh đề	Đ	S
a) Hình phẳng được gạch chéo trong hình trên được giới hạn các đồ thị $y = x^2 - 2x - 2$, $y = -x^2 + 2$ và hai đường thẳng $x = -1$, $x = 2$.		
b) Diện tích hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ là $S = \int_{-1}^2 x^2 - 2x - 2 dx + \int_{-1}^2 -x^2 + 2 dx$.		
c) Hình phẳng được gạch chéo trong hình trên được giới hạn các đồ thị $y = x^2 - 2x - 2$ và $y = -x^2 + 2$.		
d) Diện tích hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ là $S = 9$.		

CÂU 28. Cho hình phẳng được gạch chéo trong hình bên dưới.



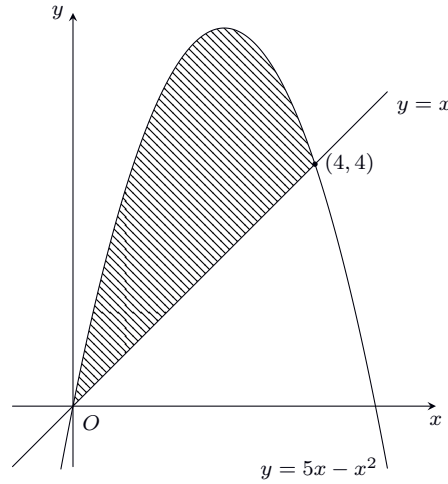
Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

Mệnh đề	Đ	S
a) Hình phẳng được gạch chéo trong hình trên được giới hạn các đồ thị $y = x^2$, $y = 0$ và hai đường thẳng $x = 1$, $x = 2$.		
b) Diện tích hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ là $S = \int_1^2 x^2 dx$.		

QUICK NOTE

Mệnh đề	Đ	S
c) Diện tích hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ là $S = \frac{4}{3}$.		
d) Hình phẳng được gạch chéo trong hình trên được giới hạn đồ thị $y = x^2$ và hai đường thẳng $x = 1, x = 2$.		

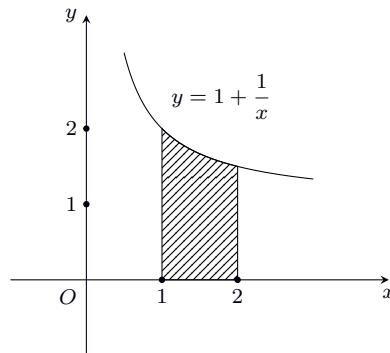
CÂU 29. Cho hình phẳng được gạch chéo trong hình bên dưới.



Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

Mệnh đề	Đ	S
a) Hình phẳng được gạch chéo trong hình trên được giới hạn các đồ thị $y = 5x - x^2, y = x$ và các đường thẳng $x = 0, x = 4$.		
b) Diện tích hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ là $S = \int_0^4 (x^2 - 4x) dx$.		
c) Diện tích hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ là $S = \int_0^4 x^2 - 4x dx$.		
d) Diện tích hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ $S = \frac{56}{3}$.		

CÂU 30. Cho hình phẳng được gạch chéo trong hình bên dưới.



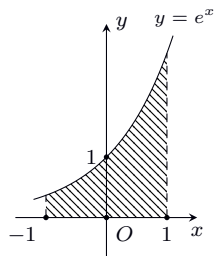
Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

Mệnh đề	Đ	S
a) Hình phẳng được gạch chéo trong hình trên được giới hạn đồ thị $y = 1 + \frac{1}{x}$ và các đường thẳng $x = 1, x = 2$.		
b) Diện tích hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ là $S = \int_1^2 \left(1 + \frac{1}{x}\right) dx$.		

QUICK NOTE

Mệnh đề	Đ	S
c) Diện tích hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ là $S = 2$.		
d) Diện tích hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ là $S = 1 + \int_1^2 \frac{1}{x} dx$.		

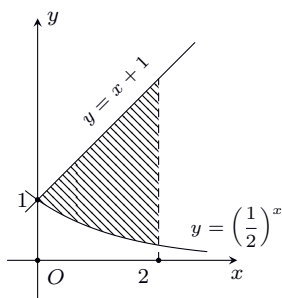
CÂU 31. Cho hình phẳng được tô màu trong hình bên dưới



Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

Mệnh đề	Đ	S
a) Hình phẳng được tô màu trong hình vẽ trên được giới hạn bởi các đồ thị $y = e^x$; $y = 0$; $x = 0$; $x = 1$.		
b) Diện tích hình phẳng tô màu trong hình vẽ là $\int_{-1}^1 e^x dx$.		
c) Diện tích hình phẳng tô màu trong hình vẽ là $\int_0^1 e^x dx$.		
d) Hình phẳng được tô màu trong hình vẽ trên được giới hạn bởi các đồ thị $y = e^x$; $y = 0$; $x = -1$; $x = 1$.		

CÂU 32. Cho hình phẳng được tô màu trong hình bên dưới.

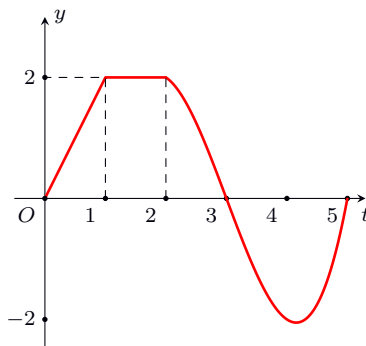


Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

Mệnh đề	Đ	S
a) Hình phẳng được tô màu trong hình vẽ trên được giới hạn bởi các đồ thị $y = x + 1$; $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$; $x = 0$; $x = 2$.		
b) Diện tích hình phẳng tô màu trong hình vẽ là $\int_0^2 \left[\left(\frac{1}{2}\right)^x - x - 1 \right] dx$.		
c) Diện tích hình phẳng tô màu trong hình vẽ bằng $S = 4 - \frac{3}{4 \ln 2}$.		
d) Hình phẳng được tô màu trong hình vẽ trên được giới hạn bởi các đồ thị $y = x + 1$; $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$; $x = 1$; $x = 2$.		

CÂU 33. Cho đồ thị hàm số $y = f(t)$ như hình vẽ.

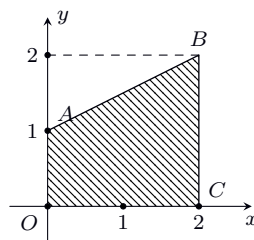
QUICK NOTE



Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

Mệnh đề	Đ	S
a) Diện tích hình phẳng được giới hạn các đồ thị hàm số $y = f(t)$, trục Ot và hai đường thẳng $t = 0$; $t = 1$ là $S = \frac{1}{2} \int_0^1 t \, dt = \frac{1}{4}$.		
b) Diện tích hình phẳng được giới hạn các đồ thị hàm số $y = f(t)$, trục Ot và hai đường thẳng $t = 1$; $t = 2$ là $S = \int_1^2 2 \, dt = 2$.		
c) Tích phân $\int_2^3 f(x) \, dx$ biểu thị cho phần diện tích của hình phẳng giới hạn các đồ thị hàm số $y = f(t)$, trục Ot và hai đường thẳng $t = 2$; $t = 3$.		
d) Tích phân $\int_3^5 f(x) \, dx$ biểu thị cho phần diện tích của hình phẳng giới hạn các đồ thị hàm số $y = f(t)$, trục Ot và hai đường thẳng $t = 3$; $t = 5$.		

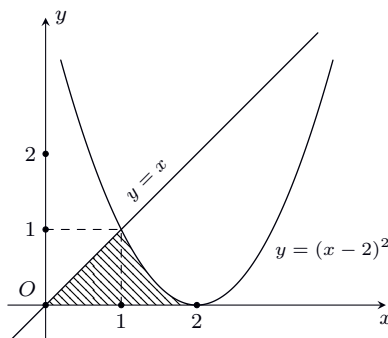
CÂU 34. Tính diện tích hình phẳng được tô màu trong hình bên dưới.



KQ:

--	--	--	--

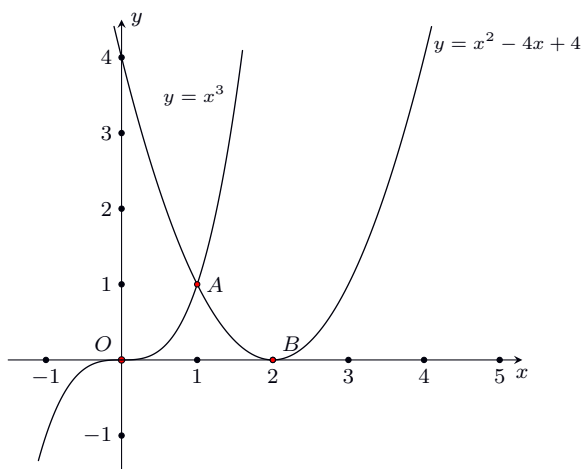
CÂU 35. Biết diện tích phần hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ bên có diện tích là $\frac{a}{b}$ với $a, b \in \mathbb{Z}$ và phân số $\frac{a}{b}$ tối giản. Tính tổng $a + b$.



KQ:

--	--	--	--

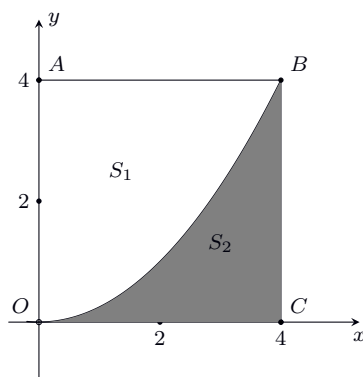
CÂU 36. Biết diện tích phần tam giác cong OAB trong hình vẽ bên có diện tích là $\frac{a}{b}$ với $a, b \in \mathbb{Z}$ và phân số $\frac{a}{b}$ tối giản. Tính hiệu $b - a$.



KQ:

--	--	--	--

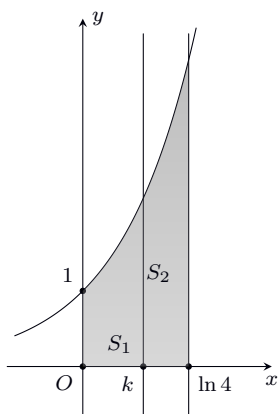
CÂU 37. Hình vuông $OABC$ có cạnh bằng 4 được chia thành hai phần bởi đường cong (C) có phương trình $y = \frac{1}{4}x^2$. Gọi S_1, S_2 lần lượt là diện tích của phần không tô màu và phần tô màu như hình vẽ bên dưới. Tỷ số $\frac{S_1}{S_2}$ bằng bao nhiêu?



KQ:

--	--	--	--

CÂU 38. Cho hình thang cong (H) giới hạn bởi các đường $y = e^x, y = 0, x = 0, x = \ln 4$. Đường thẳng $x = k, (0 < k < \ln 4)$ chia (H) thành hai phần có diện tích là S_1 và S_2 như hình vẽ bên. Tìm k để $S_1 = 2S_2$ (làm tròn kết quả đến hàng phần chục).



KQ:

--	--	--	--

QUICK NOTE

QUICK NOTE

12

THỂ TÍCH KHỐI TRÒN XOAY

CÂU 1. Viết công thức tính thể tích V của khối tròn xoay được tạo ra khi quay hình thang cong, giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục Ox và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$, ($a < b$) xung quanh trục Ox .

(A) $V = \int_a^b |f(x)| dx.$

(B) $V = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$

(C) $V = \int_a^b f^2(x) dx.$

(D) $V = \pi \int_a^b f(x) dx.$

CÂU 2. Cắt một vật thể bởi hai mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại $x = 1$ và $x = 2$. Một mặt phẳng tùy ý vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x , ($1 \leq x \leq 2$) cắt vật thể đó có diện tích $S(x) = 2024x$. Tính thể tích của phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng trên.

(A) $V = 3036.$

(B) $V = 3036\pi.$

(C) $V = 1518.$

(D) $V = 1518\pi.$

CÂU 3. Cắt một vật thể bởi hai mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại $x = 1$ và $x = 3$. Một mặt phẳng tùy ý vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x , ($1 \leq x \leq 3$) cắt vật thể đó theo thiết diện là một hình chữ nhật có độ dài hai cạnh là $3x$ và $3x^2 - 2$. Tính thể tích của phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng trên.

(A) $V = 156.$

(B) $V = 156\pi.$

(C) $V = 312.$

(D) $V = 312\pi.$

CÂU 4. Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = e^{3x}$, $y = 0$, $x = 0$ và $x = 1$. Thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục Ox bằng

(A) $\pi \int_0^1 e^{3x} dx.$

(B) $\int_0^1 e^{6x} dx.$

(C) $\pi \int_0^1 e^{6x} dx.$

(D) $\int_0^1 e^{3x} dx.$

CÂU 5. Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = e^{4x}$, $y = 0$, $x = 0$ và $x = 1$. Thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục Ox bằng

(A) $\int_0^1 e^{4x} dx.$

(B) $\pi \int_0^1 e^{8x} dx.$

(C) $\pi \int_0^1 e^{4x} dx.$

(D) $\int_0^1 e^{8x} dx.$

CÂU 6. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = x^2 + 3$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$. Gọi V là thể tích của khối tròn xoay được tạo thành khi quay (H) xung quanh trục Ox . Mệnh đề nào dưới đây đúng?

(A) $V = \int_0^2 (x^2 + 3) dx.$

(B) $V = \pi \int_0^2 (x^2 + 3) dx.$

(C) $V = \int_0^2 (x^2 + 3)^2 dx.$

(D) $V = \pi \int_0^2 (x^2 + 3)^2 dx.$

CÂU 7. Cho hình phẳng D giới hạn bởi đường cong $y = e^x$, trục hoành và các đường thẳng $x = 0$, $x = 1$. Khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành có thể tích V bằng bao nhiêu?

(A) $V = \frac{\pi(e^2 + 1)}{2}.$

(B) $V = \frac{e^2 - 1}{2}.$

(C) $V = \frac{\pi e^2}{3}.$

(D) $V = \frac{\pi(e^2 - 1)}{2}.$

CÂU 8. Cho hình phẳng D giới hạn bởi đường cong $y = \sqrt{x^2 + 1}$, trục hoành và các đường thẳng $x = 0$, $x = 1$. Khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành có thể tích V bằng bao nhiêu?

(A) $V = 2.$

(B) $V = \frac{4\pi}{3}.$

(C) $V = 2\pi.$

(D) $V = \frac{4}{3}.$

CÂU 9. Cho hình phẳng D giới hạn bởi đường cong $y = \sqrt{2 + \cos x}$, trục hoành và các đường thẳng $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$. Khối tròn xoay tạo thành khi D quay quanh trục hoành có thể tích V bằng bao nhiêu?

(A) $V = (\pi + 1)\pi.$

(B) $V = \pi - 1.$

(C) $V = \pi + 1.$

(D) $V = (\pi - 1)\pi.$

CÂU 10. Cho hình phẳng D giới hạn bởi đường cong $y = \sqrt{2 + \sin x}$, trục hoành và các đường thẳng $x = 0$, $x = \pi$. Khối tròn xoay tạo thành khi quay D quay quanh trục hoành có thể tích V bằng bao nhiêu?

QUICK NOTE

- ☐ A $V = 2\pi(\pi + 1)$.
 ☐ B $V = 2\pi$.
 ☐ C $V = 2(\pi + 1)$.
 ☐ D $V = 2\pi^2$.

CÂU 11. Tìm công thức tính thể tích của khối tròn xoay khi cho hình phẳng giới hạn bởi parabol $(P): y = x^2$, đường thẳng $d: y = 2x$ và đường thẳng $x = 0, x = 2$ quay xung quanh trục Ox .

- ☐ A $\pi \int_0^2 (x^2 - 2x)^2 dx$.
 ☐ B $\pi \int_0^2 4x^2 dx - \pi \int_0^2 x^4 dx$.
☐ C $\pi \int_0^2 4x^2 dx + \pi \int_0^2 x^4 dx$.
 ☐ D $\pi \int_0^2 (2x - x^2) dx$.

CÂU 12. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = x^2 + 3, y = 0, x = 0, x = 2$. Gọi V là thể tích khối tròn xoay được tạo thành khi quay (H) xung quanh trục Ox . Mệnh đề nào sau đây đúng?

- ☐ A $V = \pi \int_0^2 (x^2 + 3)^2 dx$.
 ☐ B $V = \int_0^2 (x^2 + 3) dx$.
☐ C $V = \int_0^2 (x^2 + 3)^2 dx$.
 ☐ D $V = \pi \int_0^2 (x^2 + 3) dx$.

CÂU 13. Gọi V là thể tích của khối tròn xoay thu được khi quay hình thang cong, giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \sin x$, trục Ox , trục Oy và đường thẳng $x = \frac{\pi}{2}$, xung quanh trục Ox . Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- ☐ A $V = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx$.
 ☐ B $V = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$.
☐ C $V = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx$.
 ☐ D $V = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$.

CÂU 14. Thể tích khối tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y = x^2 - 2x$, trục hoành, đường thẳng $x = 0$ và $x = 1$ quanh trục hoành bằng

- ☐ A $\frac{16\pi}{15}$.
 ☐ B $\frac{2\pi}{3}$.
 ☐ C $\frac{4\pi}{3}$.
 ☐ D $\frac{8\pi}{15}$.

CÂU 15. Cho miền phẳng (D) giới hạn bởi $y = \sqrt{x}$, hai đường thẳng $x = 1, x = 2$ và trục hoành. Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay (D) quanh trục hoành.

- ☐ A 3π .
 ☐ B $\frac{3\pi}{2}$.
 ☐ C $\frac{2\pi}{3}$.
 ☐ D $\frac{3}{2}$.

CÂU 16. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = 2x - x^2, y = 0$. Quay (H) quanh trục hoành tạo thành khối tròn xoay có thể tích là

- ☐ A $\int_0^2 (2x - x^2) dx$.
 ☐ B $\pi \int_0^2 (2x - x^2)^2 dx$.
☐ C $\int_0^2 (2x - x^2)^2 dx$.
 ☐ D $\pi \int_0^2 (2x - x^2) dx$.

CÂU 17. Cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{x} - 2, y = 0$ và $x = 4, x = 9$ quay xung quanh trục Ox . Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành.

- ☐ A $V = \frac{7}{6}$.
 ☐ B $V = \frac{5\pi}{6}$.
 ☐ C $V = \frac{7\pi}{11}$.
 ☐ D $V = \frac{11\pi}{6}$.

CÂU 18. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường thẳng $y = x^2 + 2, y = 0, x = 1, x = 2$. Gọi V là thể tích của khối tròn xoay được tạo thành khi quay (H) xung quanh trục Ox . Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- ☐ A $V = \int_1^2 (x^2 + 2) dx$.
 ☐ B $V = \pi \int_1^2 (x^2 + 2)^2 dx$.
☐ C $V = \int_1^2 (x^2 + 2)^2 dx$.
 ☐ D $V = \pi \int_1^2 (x^2 + 2) dx$.

QUICK NOTE

CÂU 19. Cắt một vật thể (T) bởi hai mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại $x = 0$ và $x = 2$. Một mặt phẳng tùy ý vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x ($0 \leq x \leq 2$) cắt vật thể đó có theo một thiết diện là một hình vuông có cạnh bằng $\sqrt{x^3}$. Thể tích vật thể (T) là số hữu tỉ có dạng phân số tối giản $\frac{a}{b}$. Tính $a + b$.

KQ:

--	--	--	--

CÂU 20. Cắt một vật thể bởi hai mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại $x = 1$; $x = 3$. Khi cắt một vật thể bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x ($1 \leq x \leq 3$), mặt cắt là tam giác vuông có một góc 45° và độ dài một cạnh góc vuông là $\sqrt{4 - \frac{1}{2}x^2}$. Thể tích vật thể trên là một số hữu tỉ có dạng phân số tối giản $\frac{a}{b}$. Tính $a \cdot b$.

KQ:

--	--	--	--

CÂU 21. Tính thể tích khối tròn xoay khi quay hình phẳng (H) xác định bởi các đường $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2$, $y = 0$, $x = 0$ và $x = 3$ quanh trục Ox (kết quả viết dưới dạng số thập phân và làm tròn đến hàng phần trăm).

KQ:

--	--	--	--

CÂU 22. Tính thể tích của vật thể tạo nên khi quay quanh trục Ox hình phẳng D giới hạn bởi đồ thị (P): $y = 2x - x^2$, trục Ox và hai đường thẳng $x = 0$, $x = 2$ (Kết quả viết dưới dạng số thập phân và làm tròn đến hàng phần trăm).

KQ:

--	--	--	--

CÂU 23. Cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \tan x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = \frac{\pi}{4}$ quay xung quanh trục Ox . Tính thể tích vật thể tròn xoay được sinh ra (kết quả viết dưới dạng số thập phân và làm tròn một chữ số thập phân sau dấu phẩy).

KQ:

--	--	--	--

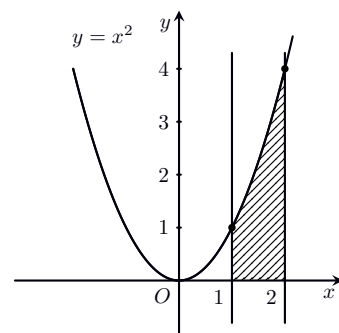
CÂU 24. Gọi V là thể tích khối tròn xoay tạo thành do quay xung quanh trục hoành một elip có phương trình $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$. Tính V (Kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).

KQ:

--	--	--	--

CÂU 25.

Cho hình phẳng (H) được gạch chéo trong hình bên. Tính thể tích tròn xoay sinh ra bởi (H) khi quay (H) quanh trục Ox (Kết quả viết dưới dạng số thập phân và làm tròn đến hàng phần chục).

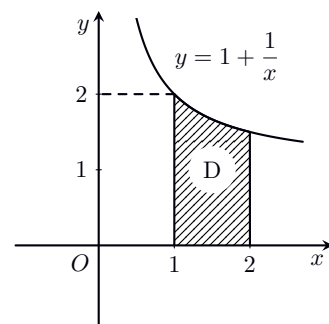


KQ:

--	--	--	--

CÂU 26.

Cho hình phẳng (D) được tô màu trong hình bên. Tính thể tích tròn xoay sinh ra bởi (D) khi quay (D) quanh trục Ox (Kết quả viết dưới dạng số thập phân và làm tròn đến hàng phần trăm).

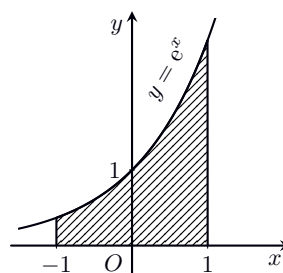


KQ:

--	--	--	--

CÂU 27.

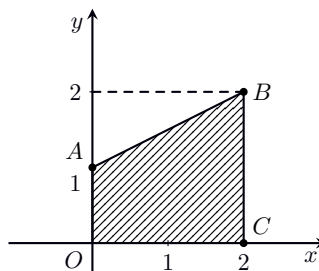
Cho hình phẳng (H) được tô màu trong hình bên. Tính thể hình tròn xoay sinh ra bởi (H) khi quay (H) quanh trục Ox (Kết quả viết dưới dạng số thập phân và làm tròn đến hàng phần chục)



KQ:

CÂU 28.

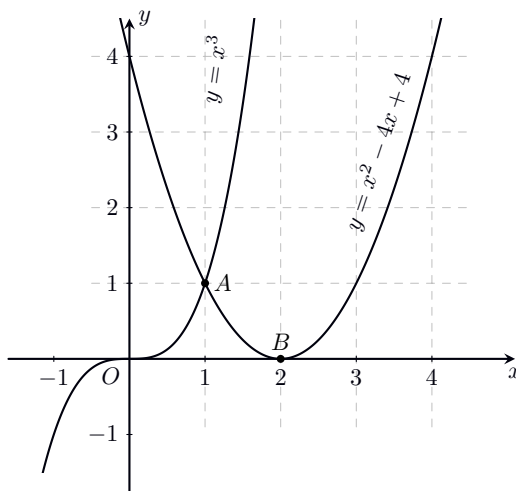
Cho hình phẳng (H) được tô màu trong hình bên. Tính thể hình tròn xoay sinh ra bởi (H) khi quay (H) quanh trục Ox (Kết quả viết dưới dạng số thập phân và làm tròn đến hàng phần chục).



KQ:

CÂU 29.

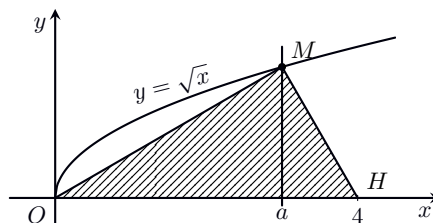
Cho hình phẳng (H) là tam giác cong OAB trong hình vẽ bên. Tính thể hình tròn xoay sinh ra bởi (H) khi quay (H) quanh trục Ox (Kết quả viết dưới dạng số thập phân và làm tròn đến hàng phần trăm).



KQ:

CÂU 30.

Gọi V là thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{x}$, $y = 0$ và $x = 4$ quanh trục Ox . Đường thẳng $x = a$, $(0 < a < 4)$ cắt đồ thị hàm số $y = \sqrt{x}$ tại M (hình vẽ). Gọi V_1 là thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay tam giác OMH quanh trục Ox . Biết rằng $V = 2V_1$. Tìm a .



KQ:

13

Ứng dụng diện tích hình phẳng và thể tích khối tròn xoay trong bt thực tiễn

QUICK NOTE

QUICK NOTE

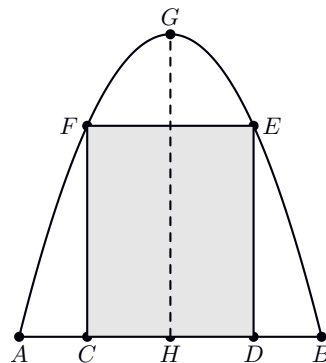
CÂU 1. Trường Nguyễn Văn Trỗi muốn làm một cái cửa nhà hình parabol có chiều cao từ mặt đất đến đỉnh là 2,25 mét, chiều rộng tiếp giáp với mặt đất là 3 mét. Giá thuê mỗi mét vuông là 1 500 000 đồng. Vậy số tiền nhà trường phải trả là

- A** 33 750 000 đồng. **B** 3 750 000 đồng. **C** 12 750 000 đồng. **D** 6 750 000 đồng.

CÂU 2.

Chị Minh Hiền muốn làm một cái cổng hình Parabol như hình vẽ bên. Chiều cao $GH = 4$ m, chiều rộng $AB = 4$ m, $AC = BD = 0,9$ m. Chị Minh Hiền làm hai cánh cổng khi đóng lại là hình chữ nhật $CDEF$ tô đậm có giá là 1 200 000 đồng/m², còn các phần để trống làm xiên hoa có giá là 900 000 đồng/m². Hỏi tổng số tiền để làm hai phần nói trên gần nhất với số tiền nào dưới đây?

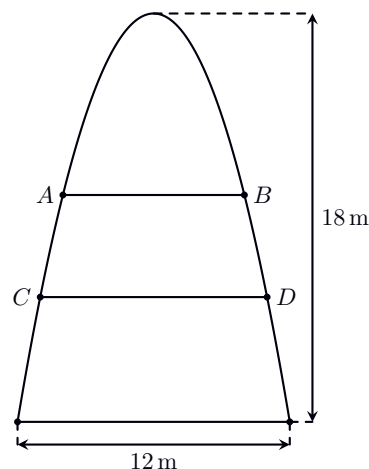
- A** 11 445 000 đồng. **B** 4 077 000 đồng.
C 7 368 000 đồng. **D** 11 370 000 đồng.



CÂU 3.

Một cổng chào có dạng hình Parabol chiều cao 18 m, chiều rộng chân đế 12 m. Người ta căng hai sợi dây trang trí AB, CD nằm ngang đồng thời chia hình giới hạn bởi Parabol và mặt đất thành ba phần có diện tích bằng nhau (xem hình vẽ bên). Tỉ số $\frac{AB}{CD}$ bằng

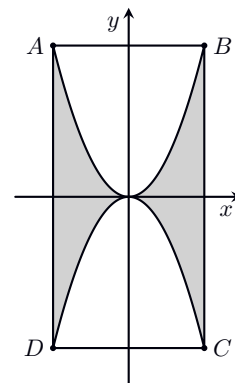
- A** $\frac{1}{\sqrt{2}}$. **B** $\frac{4}{5}$.
C $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$. **D** $\frac{3}{1 + 2\sqrt{2}}$.



CÂU 4.

Một họa tiết hình cánh bướm như hình vẽ bên. Phần tô đậm được đánh giá với giá thành 500 000/m². Phần còn lại được tô màu với giá thành 250 000/m². Cho $AB = 4$ dm; $BC = 8$ dm. Hỏi để trang trí 1 000 họa tiết như vậy cần số tiền gần nhất với số nào sau đây.

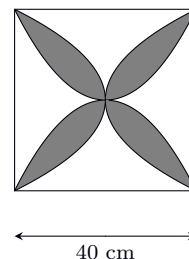
- A** 105 660 667. **B** 106 666 667.
C 107 665 667. **D** 108 665 667.



CÂU 5.

Một viên gạch hoa hình vuông cạnh 40 cm. Người thiết kế đã sử dụng bốn đường parabol có chung đỉnh tại tâm viên gạch để tạo ra bốn cánh hoa (được tô đen như hình vẽ dưới). Diện tích mỗi cánh hoa của viên gạch bằng

- A** 800 cm². **B** $\frac{800}{3}$ cm². **C** $\frac{400}{3}$ cm². **D** 250 cm².



CÂU 6. Để kỷ niệm ngày 26-3. Chi đoàn 12A dự định dựng một lều trại có dạng parabol, với kích thước: nền trại là một hình chữ nhật có chiều rộng là 3 mét, chiều sâu là 6 mét, đỉnh của parabol cách mặt đất là 3 mét. Hãy tính thể tích phần không gian phía bên trong trại để lớp 12A cử số lượng người tham dự trại cho phù hợp.

- A** 30 m³. **B** 36 m³. **C** 40 m³. **D** 41 m³.

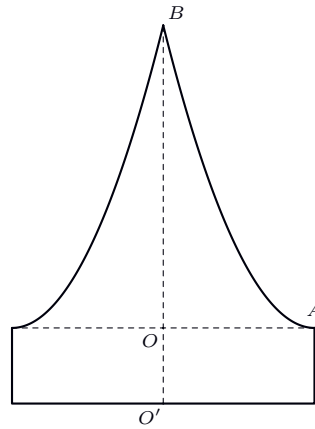
CÂU 7. Cho một vật thể bằng gỗ có dạng hình trụ với chiều cao và bán kính đáy cùng bằng R . Cắt khối gỗ đó bởi một mặt phẳng đi qua đường kính của một mặt đáy của khối gỗ và tạo với mặt phẳng đáy của khối gỗ một góc 30° ta thu được hai khối gỗ có thể tích là V_1 và V_2 , với $V_1 < V_2$. Thể tích V_1 bằng

- ☐ A $V_1 = \frac{2\sqrt{3}R^3}{9}$.
 ☐ B $V_1 = \frac{\sqrt{3}\pi R^3}{27}$.
 ☐ C $V_1 = \frac{\sqrt{3}\pi R^3}{18}$.
 ☐ D $V_1 = \frac{\sqrt{3}R^3}{27}$.

CÂU 8.

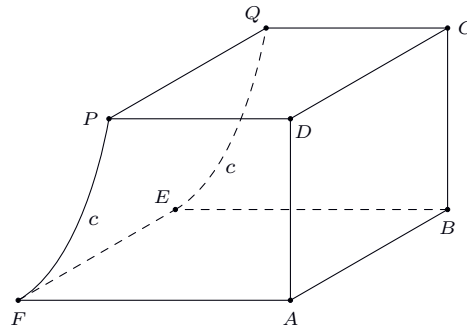
Chuẩn bị cho đêm hội diễn văn nghệ chào đón năm mới, bạn Minh Hiền đã làm một chiếc mũ “cách điệu” cho ông già Noel có dáng một khối tròn xoay. Mặt cắt qua trục của chiếc mũ như hình vẽ bên dưới. Biết rằng $OO' = 5$ cm, $OA = 10$ cm, $OB = 20$ cm, đường cong AB là một phần của parabol có đỉnh là điểm A . Thể tích của chiếc mũ bằng

- ☐ A $\frac{2750\pi}{3}$ cm³.
 ☐ B $\frac{2500\pi}{3}$ cm³.
 ☐ C $\frac{2050\pi}{3}$ cm³.
 ☐ D $\frac{2250\pi}{3}$ cm³.



CÂU 9.

Một chi tiết máy được thiết kế như hình vẽ bên. Các tứ giác $ABCD$, $CDPQ$ là các hình vuông cạnh 2,5 (cm). Tứ giác $ABEF$ là hình chữ nhật có $BE = 3,5$ (cm). Mặt bên $PQEF$ được mài nhẵn theo đường parabol (P) có đỉnh parabol nằm trên cạnh EF . Thể tích của chi tiết máy bằng



- ☐ A $\frac{395}{24}$ cm³.
 ☐ B $\frac{50}{3}$ cm³.
 ☐ C $\frac{125}{8}$ cm³.
 ☐ D $\frac{425}{24}$ cm³.

CÂU 10. Bỏ dọc một quả dưa hấu ta được thiết diện là hình elip có trục lớn 28 cm, trục nhỏ 25 cm. Biết cứ 1000 m³ dưa hấu sẽ làm được cốc sinh tố giá 20000 đồng. Hỏi từ quả dưa hấu trên có thể thu được bao nhiêu tiền từ việc bán nước sinh tố? Biết rằng bề dày vỏ dưa không đáng kể.

- ☐ A 183000 đồng.
 ☐ B 180000 đồng.
 ☐ C 185000 đồng.
 ☐ D 190000 đồng.

CÂU 11. Một bác thợ xây bơm nước vào bể chứa nước. Gọi $h(t)$ là thể tích nước bơm được sau t giây. Cho $h'(t) = 6at^2 + 2bt$ và ban đầu bể không có nước. Sau 3 giây thì thể tích nước trong bể là $90m^3$, sau 6 giây thì thể tích nước trong bể là $504m^3$. Tính thể tích nước trong bể sau khi bơm được 9 giây.

- ☐ A $1458m^3$.
 ☐ B $600m^3$.
 ☐ C $2200m^3$.
 ☐ D $4200m^3$.

CÂU 12. Người ta thay nước mới cho một bể bơi có dạng hình hộp chữ nhật có độ sâu là 280cm. Giả sử $h(t)$ là chiều cao (tính bằng cm) của mực nước bơm được tại thời điểm t giây, biết rằng tốc độ tăng của chiều cao mực nước tại giây thứ t là $h'(t) = \frac{1}{500}\sqrt[3]{t}$ và lúc đầu hồ bơi không có nước. Hỏi sau bao lâu thì bơm được số nước bằng $\frac{3}{4}$ độ sâu của hồ bơi (làm tròn đến giây)?

- ☐ A 2 giờ 36 giây.
 ☐ B 2 giờ 48 giây.
 ☐ C 2 giờ 38 giây.
 ☐ D 2 giờ 46 giây.

QUICK NOTE

LỜI GIẢI CHI TIẾT

NGUYÊN HÀM VÀ TÍCH PHÂN

Bài 1. NGUYÊN HÀM

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

B. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Định nghĩa nguyên hàm

Cho hàm số $f(x)$ xác định trên khoảng K . Hàm số $F(x)$ được gọi là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ nếu $F'(x) = f(x)$ với mọi $x \in K$.

Nhận xét: Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ thì $F(x) + C$, ($C \in \mathbb{R}$) cũng là nguyên hàm của $f(x)$.

Ký hiệu $\int f(x) \, dx = F(x) + C$.

2. Một số tính chất của nguyên hàm

- $\left(\int f(x) \, dx\right)' = f(x)$.
- $\int a \cdot f(x) \, dx = a \cdot \int f(x) \, dx \quad (a \in \mathbb{R}, a \neq 0)$.
- $\int [f(x) \pm g(x)] \, dx = \int f(x) \, dx \pm \int g(x) \, dx$.

3. Một số nguyên hàm cơ bản

Nguyên hàm của hàm số cơ bản	Nguyên hàm mở rộng
$\int a \cdot dx = ax + C, a \in \mathbb{R}$	
$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1$	$\int (ax+b)^\alpha dx = \frac{1}{a} \cdot \frac{(ax+b)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$
$\int \frac{dx}{x} = \ln x + C, x \neq 0$	$\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a} \cdot \ln ax+b + C$
$\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C, x > 0$	$\int \frac{dx}{\sqrt{ax+b}} = \frac{2}{a} \sqrt{ax+b} + C, x > 0$
$\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C, x \neq 0$	$\int \frac{dx}{(ax+b)^2} = -\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{ax+b} + C$
$\int \frac{dx}{x^\alpha} = -\frac{1}{(\alpha-1)x^{\alpha-1}} + C$	$\int \frac{dx}{(ax+b)^\alpha} = -\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{(\alpha-1)} \cdot (ax+b)^{\alpha-1} + C$
$\int e^x dx = e^x + C$	$\int e^{ax+b} dx = \frac{1}{a} \cdot e^{ax+b} + C$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	$\int a^{\alpha x+\beta} dx = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{a^{\alpha x+\beta}}{\ln a} + C$
$\int \cos x dx = \sin x + C$	$\int \cos(ax+b) dx = \frac{1}{a} \cdot \sin(ax+b) + C$
$\int \sin x dx = -\cos x + C$	$\int \sin(ax+b) dx = -\frac{1}{a} \cdot \cos(ax+b) + C$
$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$	$\int \frac{1}{\cos^2(ax+b)} dx = \frac{1}{a} \cdot \tan(ax+b) + C$
$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C$	$\int \frac{1}{\sin^2(ax+b)} dx = -\frac{1}{a} \cdot \cot(ax+b) + C$

Nhận xét: $[F(ax+b)]' = af(ax+b) \Rightarrow \int f(ax+b) \, dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C$.

C. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

1

Sử dụng định nghĩa nguyên hàm và bảng nguyên hàm

1. Các ví dụ

VÍ DỤ 1. Tìm họ nguyên hàm của các hàm số sau

a) $f(x) = 4x^3 + x + 5.$

b) $f(x) = 3x^2 - 2x.$

c) $f(x) = \frac{1}{x^5} + x^2.$

d) $f(x) = \frac{1}{x^3} + x^2 - 1.$

Lời giải.

a) Ta có $F(x) = \int f(x)dx = \int (4x^3 + x + 5) dx = x^4 + \frac{x^2}{2} + 5x + C.$

b) Ta có $F(x) = \int f(x)dx = \int (3x^2 - 2x) dx = x^3 - x^2 + C.$

c) Ta có $F(x) = \int f(x)dx = \int (x^{-5} + x^2)dx = -\frac{x^{-4}}{4} + \frac{x^3}{3} + C.$

d) Ta có $F(x) = \int f(x)dx = \int (x^{-3} + x^2 - 1) dx = -\frac{x^{-2}}{2} + \frac{x^3}{3} - x.$

VÍ DỤ 2. Tính

a) $I = \int (x^2 - 3x)(x + 1)dx.$

b) $I = \int (x - 1)(x^2 + 2)dx.$

c) $I = \int (2x + 1)^5 dx$

d) $I = \int (2x - 10)^{2020} dx.$

e) $I = \int \left(3x^2 + \frac{1}{x} - 2\right) dx.$

f) $I = \int \left(3x^2 - \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}\right) dx.$

g) $I = \int \frac{x^2 - 3x + 1}{x} dx.$

h) $I = \int \frac{2x^2 - 6x + 3}{x} dx.$

i) $I = \int \frac{1}{2x - 1} dx.$

j) $I = \int \frac{2}{3 - 4x} dx.$

k) $I = \int \frac{1}{(2x - 1)^2} dx.$

l) $I = \int \left[\frac{12}{(x - 1)^2} + \frac{2}{2x - 3} \right] dx.$

m) $I = \int \frac{3}{4x^2 + 4x + 1} dx.$

n) $I = \int \frac{4}{x^2 + 6x + 9} dx.$

o) (*) $I = \int \frac{2x - 1}{(x + 1)^2} dx.$

Lời giải.

a) Phân phối được: $I = \int (x^3 - 2x^2 - 3x)dx = \frac{x^4}{4} - \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + C.$

b) Phân phối được: $I = \int (x^3 - x^2 + 2x - 2)dx = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + x^2 - 2x + C.$

c) $I = \int (2x + 1)^5 dx = \frac{1}{2} \frac{(2x + 1)^6}{6} + C.$

d) $I = \int (2x - 10)^{2020} dx = \frac{1}{2} \frac{(2x - 10)^{2021}}{2021} + C.$

e) Ta có $I = \int \left(3x^2 + \frac{1}{x} - 2\right) dx = x^3 + \ln|x| - 2x + C.$

f) Ta có $I = \int \left(3x^2 - \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}\right) dx = x^3 - 2\ln|x| + \frac{1}{x} + C.$

g) Ta có $I = \int \frac{x^2 - 3x + 1}{x} dx = \int \left(x - 3 + \frac{1}{x}\right) dx = x^2 - 3x + \ln|x| + C.$

h) Ta có $I = \int \frac{2x^2 - 6x + 3}{x} dx = \int \left(2x - 6 + \frac{3}{x}\right) dx = x^2 - 6x + 3\ln|x| + C.$

- i) Ta có $I = \int \frac{1}{2x-1} dx = \frac{1}{2} \ln |2x-1| + C$.
- j) Ta có $I = \int \frac{2}{3-4x} dx = 2 \cdot \frac{1}{-4} \cdot \ln |3-4x| + C = -\frac{1}{2} \ln |3-4x| + C$.
- k) $I = \int \frac{1}{(2x-1)^2} dx = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2x-1} + C = \frac{-1}{4x-2} + C$.
- l) $I = \int \left[\frac{12}{(x-1)^2} + \frac{2}{2x-3} \right] dx = -\frac{12}{1} \cdot \frac{1}{x-1} + \frac{2}{2} \ln |2x-3| + C = \frac{-12}{x-1} + \ln |2x-3| + C$.
- m) $I = \int \frac{1}{4x^2+4x+1} dx = \int \frac{1}{(2x+1)^2} dx = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2x+1} + C = \frac{-1}{4x+2} + C$.
- n) $I = \int \frac{4}{x^2+6x+9} dx = \int \frac{4}{(x+3)^2} dx = -\frac{4}{1} \cdot \frac{1}{x+3} + C = \frac{-4}{x+3} + C$.
- o) $I = \int \frac{2x+2-3}{(x+1)^2} dx = \int \left[\frac{2(x+1)}{(x+1)^2} - \frac{3}{(x+1)^2} \right] dx = \int \frac{2}{x+1} dx - \int \frac{3}{(x+1)^2} dx$
 $I = 2 \ln |x+1| - \frac{-3}{x+1} + C = 2 \ln |x+1| + \frac{3}{x+1} + C$.
- p) $I = \int \frac{2x-2}{(2x+1)^2} dx = \int \left[\frac{2x+1}{(2x+1)^2} - \frac{3}{(2x+1)^2} \right] dx = \int \frac{1}{2x+1} dx - \int \frac{3}{(2x+1)^2} dx$
 $I = \frac{1}{2} \ln |2x+1| - \frac{-3}{2(2x+1)} + C \Rightarrow I = \frac{1}{2} \ln |2x+1| + \frac{3}{2(2x+1)} + C$.

VÍ DỤ 3. Tìm họ nguyên hàm của các hàm số sau

- a) $I = \int (\sin x - \cos x) dx$ b) $I = \int (3 \cos x - 2 \sin x) dx$ c) $I = \int (2 \sin 2x - 3 \cos 6x) dx$
- d) $I = \int \sin x \cos x dx$ e) $I = \int \cos \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6} \right) dx$ f) $I = \int \sin \left(\frac{\pi}{3} - \frac{x}{3} \right) dx$
- g) $I = \int (\sin x - \cos x)^2 dx$ h) $I = \int (\cos x + \sin x)^2 dx$

Lời giải.

- a) $I = \int (\sin x - \cos x) dx = -\cos x - \sin x + C$.
- b) $I = \int (3 \cos x - 2 \sin x) dx = 3 \sin x + 2 \cos x + C$.
- c) $I = \int (2 \sin 2x - 3 \cos 6x) dx = -\cos 2x - \frac{1}{2} \sin 6x + C$.
- d) $I = \frac{1}{2} \int \sin 2x dx = -\frac{1}{4} \cos 2x + C$.
- e) $I = \int \cos \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6} \right) dx = \int \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \sin \frac{x}{2} \right) dx = \sqrt{3} \sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} + C$.
- f) $I = \int \sin \left(\frac{\pi}{3} - \frac{x}{3} \right) dx = \int \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos \frac{x}{3} - \frac{1}{2} \sin \frac{x}{3} \right) dx = \frac{3\sqrt{3}}{2} \sin \frac{x}{3} + \frac{3}{2} \cos \frac{x}{3} + C$.
- g) $I = \int (\sin x - \cos x)^2 dx = \int (1 - \sin 2x) dx = x + \frac{1}{2} \cos 2x + C$.
- h) $I = \int (\cos x + \sin x)^2 dx = \int (1 + \sin 2x) dx = x - \frac{1}{2} \cos 2x + C$.
- i) $I = \int (\cos^2 x - \sin^2 x) dx = \int \cos 2x dx = \frac{1}{2} \sin 2x + C$.
- j) $I = \int (\cos^4 x - \sin^4 x) dx = \int (\cos^2 x - \sin^2 x) dx = \int \cos 2x dx = \frac{1}{2} \sin 2x + C$.

VÍ DỤ 4. Tìm họ nguyên hàm của các hàm số sau

$$a) I = \int \frac{1}{\sin^2 x} dx.$$

$$b) I = \int \frac{6}{\cos^2 3x} dx.$$

$$c) I = \int (\tan x + \cot x)^2 dx.$$

$$d) I = \int \sin^2 x dx.$$

$$e) I = \int \cos^2 2x dx.$$

$$f) I = \int \sin 4x \cos x dx.$$

Lời giải.

$$a) I = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\sin^2 x} \right) dx = \tan x + \cot x + C.$$

$$b) I = \int \frac{6}{\cos^2 3x} dx = 2 \tan 3x + C.$$

$$c) I = \int (\tan x + \cot x)^2 dx = \int (\tan^2 x + \cot^2 x + 2) dx = \int (\tan^2 x + 1 + \cot^2 x + 1) dx = \tan x - \cot x + C.$$

$$d) I = \int \sin^2 x dx = \int \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \sin 2x + C.$$

$$e) I = \int \cos^2 2x dx = \int \frac{1 + \cos 4x}{2} dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{8} \sin 4x + C.$$

VÍ DỤ 5. Tìm họ nguyên hàm của các hàm số sau

$$a) I = \int e^{2x} dx.$$

$$b) I = \int e^{1-2x} dx.$$

$$c) I = \int (2x - e^{-x}) dx.$$

$$d) I = \int e^x (1 - 3e^{-2x}) dx.$$

$$e) I = \int (3 - e^x)^2 dx.$$

$$f) I = \int (2 + e^{3x})^2 dx.$$

$$g) I = \int 2^{2x+1} dx.$$

$$h) I = \int 4^{1-2x} dx.$$

$$i) I = \int 3^x \cdot 5^x dx.$$

$$j) I = \int 4^x \cdot 3^{x-1} dx.$$

$$k) I = \int \frac{dx}{e^{2-5x}}.$$

$$l) I = \int \frac{dx}{2^{3-2x}}.$$

$$m) I = \int \frac{4^{x+1} \cdot 3^{x-1}}{2^x} dx.$$

$$n) I = \int \frac{4^{2x-1} \cdot 6^{x-1}}{3^x} dx.$$

Lời giải.

$$a) \text{ Ta có } I = \int e^{2x} dx = \frac{1}{2}e^{2x} + C.$$

$$b) \text{ Ta có } I = \int e^{1-2x} dx = -\frac{1}{2}e^{1-2x} + C.$$

$$c) I = \int (2x - e^{-x}) dx = x^2 + e^{-x} + C.$$

$$d) \text{ Ta có } I = \int e^x (1 - 3e^{-2x}) dx = \int (e^x - 3e^{-x}) dx = e^x + 3e^{-x} + C.$$

$$e) I = \int (3 - e^x)^2 dx = \int (9 - 6e^x + e^{2x}) dx = 9x - 6e^x + \frac{1}{2}e^{2x} + C.$$

$$f) \text{ Ta có } I = \int (2 + e^{3x})^2 dx = \int (4 + 4e^{3x} + e^{6x}) dx = 4x + \frac{4}{3}e^{3x} + \frac{1}{6}e^{6x} + C.$$

$$g) \text{ Ta có } I = \int 2^{2x+1} dx = \frac{2^{2x+1}}{2 \ln 2} + C.$$

$$h) \text{ Ta có } I = \int 4^{1-2x} dx = -\frac{4^{1-2x}}{2 \ln 4} + C.$$

$$i) \text{ Ta có } I = \int 15^x dx = \frac{15^x}{\ln 15} + C.$$

$$j) \text{ Ta có } I = \frac{1}{3} \int 12^x dx = \frac{12^x}{3 \ln 12} + C.$$

k) $I = \int e^{5x-2} dx = \frac{e^{5x-2}}{5} + C.$

l) Ta có $I = \int 2^{2x-3} dx = \frac{2^{2x-3}}{2 \ln 2} + C.$

m) Ta có $I = \int \frac{4^{x+1} \cdot 3^{x-1}}{2^x} dx = \frac{4}{3} \int 6^x dx = \frac{4 \cdot 6^x}{3 \cdot \ln 6} + C.$

n) Ta có $I = \int \frac{4^{2x-1} \cdot 6^{x-1}}{3^x} dx = \frac{1}{24} \int 32^x dx = \frac{32^x}{24 \ln 32} + C = \frac{2^{5x}}{120 \ln 2} + C.$

2. Câu hỏi trắc nghiệm

CÂU 1. Cho hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K . Các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai.

- ☐ A $\int f(x) dx = F(x) + C.$ ☐ B $\left(\int f(x) dx \right)' = f(x).$ ☐ C $\left(\int f(x) dx \right)' = f'(x).$ ☐ D $\left(\int f(x) dx \right)' = F'(x).$

Lời giải.

Ta có $\int f(x) dx = F(x) + C \Leftrightarrow F'(x) = f(x)$ nên phương án $\left(\int f(x) dx \right)' = f'(x)$ sai.

Chọn đáp án ☐ C

CÂU 2. Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2x + 6$ là

- ☐ A $x^2 + C.$ ☐ B $x^2 + 6x + C.$ ☐ C $2x^2 + C.$ ☐ D $2x^2 + 6x + C.$

Lời giải.

$$\int (2x + 6) dx = x^2 + 6x + C.$$

Chọn đáp án ☐ B

CÂU 3. $\int x^2 dx$ bằng

- ☐ A $2x + C.$ ☐ B $\frac{1}{3}x^3 + C.$ ☐ C $x^3 + C.$ ☐ D $3x^3 + C.$

Lời giải.

$$\int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + C.$$

Chọn đáp án ☐ B

CÂU 4. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3x^2 + 1$ là

- ☐ A $x^3 + C.$ ☐ B $\frac{x^3}{3} + x + C.$ ☐ C $6x + C.$ ☐ D $x^3 + x + C.$

Lời giải.

$$\int (3x^2 + 1) dx = x^3 + x + C.$$

Chọn đáp án ☐ D

CÂU 5. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^3 + x$ là

- ☐ A $\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2 + C.$ ☐ B $3x^2 + 1 + C.$ ☐ C $x^3 + x + C.$ ☐ D $x^4 + x^2 + C.$

Lời giải.

$$\int (x^3 + x) dx = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2 + C.$$

Chọn đáp án ☐ A

CÂU 6. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^4 + x^2$ là

- ☐ A $\frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{3}x^3 + C.$ ☐ B $x^4 + x^2 + C.$ ☐ C $x^5 + x^3 + C.$ ☐ D $4x^3 + 2x + C.$

Lời giải.

$$\int f(x) dx = \int (x^4 + x^2) dx = \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{3}x^3 + C.$$

Chọn đáp án ☐ A

CÂU 7. Hàm số nào trong các hàm số sau đây không là nguyên hàm của hàm số $y = x^{2022}$?

- ☐ A $\frac{x^{2023}}{2023} + 1.$ ☐ B $\frac{x^{2023}}{2023}.$ ☐ C $y = 2022x^{2021}.$ ☐ D $\frac{x^{2023}}{2023} - 1.$

Lời giải.

Ta có $\int x^{2022} dx = \frac{x^{2023}}{2023} + C$, C là hằng số nên $y = 2022x^{2021}$ không là nguyên hàm của hàm số $y = x^{2022}$.

Chọn đáp án (C).....

CÂU 8. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + x - 2024$ là

(A) $\frac{1}{12}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{x^2}{2} + C.$

(B) $\frac{1}{9}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{x^2}{2} - 2024x + C.$

(C) $\frac{1}{12}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{x^2}{2} - 2024x + C.$

(D) $\frac{1}{9}x^4 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{x^2}{2} - 2024x + C.$

Lời giải.

Sử dụng công thức $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ ta được

$$\begin{aligned} \int \left(\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + x - 2024 \right) dx &= \frac{1}{3} \cdot \frac{x^4}{4} - 2 \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2024x + C \\ &= \frac{1}{12}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{x^2}{2} - 2024x + C. \end{aligned}$$

Chọn đáp án (C).....

CÂU 9. Tìm nguyên $F(x)$ của hàm số $f(x) = (x+1)(x+2)(x+3)$?

(A) $F(x) = \frac{x^4}{4} - 6x^3 + \frac{11}{2}x^2 - 6x + C.$

(B) $F(x) = x^4 + 6x^3 + 11x^2 + 6x + C.$

(C) $F(x) = \frac{x^4}{4} + 2x^3 + \frac{11}{2}x^2 + 6x + C.$

(D) $F(x) = x^3 + 6x^2 + 11x^2 + 6x + C.$

Lời giải.

Ta có $f(x) = (x+1)(x+2)(x+3) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6$ nên

$$F(x) = \int (x^3 + 6x^2 + 11x + 6) dx = \frac{x^4}{4} + 2x^3 + \frac{11}{2}x^2 + 6x + C.$$

Chọn đáp án (C).....

CÂU 10. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = (5x+3)^5$.

(A) $(5x+3)^6 + C.$

(B) $(5x+3)^4 + C.$

(C) $\frac{(5x+3)^6}{30} + C.$

(D) $\frac{(5x+3)^4}{30} + C.$

Lời giải.

$$f(x) = (5x+3)^5 \Rightarrow \int f(x) dx = \int (5x+3)^5 dx = \frac{1}{5} \cdot \frac{(5x+3)^6}{6} + C = \frac{(5x+3)^6}{30} + C.$$

Chọn đáp án (C).....

CÂU 11. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^2 + \frac{2}{x^2}$.

(A) $\int f(x) dx = \frac{x^3}{3} + \frac{1}{x} + C.$

(B) $\int f(x) dx = \frac{x^3}{3} - \frac{2}{x} + C.$

(C) $\int f(x) dx = \frac{x^3}{3} - \frac{1}{x} + C.$

(D) $\int f(x) dx = \frac{x^3}{3} + \frac{2}{x} + C.$

Lời giải.

$$\text{Ta có } \int \left(x^2 + \frac{2}{x^2} \right) dx = \frac{x^3}{3} - \frac{2}{x} + C.$$

Chọn đáp án (A).....

CÂU 12. Tính $\int \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}} dx$.

(A) $\frac{4}{15}x\sqrt[8]{x^7} + C.$

(B) $\frac{8}{15}x\sqrt[8]{x^7} + C.$

(C) $\frac{8}{15}x\sqrt{x} + C.$

(D) $\frac{4}{15}x\sqrt{x} + C.$

Lời giải.

$$\begin{aligned} \int \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}} dx &= \int \sqrt{x\sqrt{x \cdot x^{\frac{1}{2}}}} dx = \int \sqrt{x \cdot x^{\frac{3}{4}}} dx = \int x^{\frac{7}{8}} dx \\ &= \frac{x^{\frac{7}{8}+1}}{\frac{7}{8}+1} + C = \frac{8}{15}x\sqrt[8]{x^7} + C. \end{aligned}$$

Chọn đáp án (B).....

CÂU 13. Tính $\int \frac{\sqrt{x} - 2\sqrt[3]{x^2} + 1}{\sqrt[4]{x}} dx$.

(A) $x\sqrt{x} - 2x\sqrt[12]{x^5} + \sqrt[4]{x^3} + C.$

(B) $\frac{4}{5}x\sqrt{x} - \frac{24}{17}x\sqrt[12]{x^5} + \frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3} + C.$

(C) $x\sqrt[5]{x} - \frac{24}{17}x\sqrt[12]{x^5} + \sqrt[4]{x^3} + C.$

(D) $\frac{4}{5}x\sqrt[5]{x} - 2x\sqrt[12]{x^5} + \frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3} + C.$

Lời giải.

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{x} - 2\sqrt[3]{x^2} + 1}{\sqrt[4]{x}} dx &= \int \frac{x^{\frac{1}{2}} - 2x^{\frac{2}{3}} + 1}{x^{\frac{1}{4}}} dx = \int \left(\frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{4}}} - 2\frac{x^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{1}{4}}} + \frac{1}{x^{\frac{1}{4}}} \right) dx \\ &= \int \left(x^{\frac{1}{4}} - 2x^{\frac{5}{12}} + x^{-\frac{1}{4}} \right) dx = \frac{4}{5}x\sqrt[5]{x} - \frac{24}{17}x\sqrt[12]{x^5} + \frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3} + C. \end{aligned}$$

Chọn đáp án **(B)** ☐

CÂU 14. Cho hàm số $f(x) = x^2 + 4$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

(A) $\int f(x) dx = 2x + C.$

(B) $\int f(x) dx = x^2 + 4x + C.$

(C) $\int f(x) dx = \frac{x^3}{3} + 4x + C.$

(D) $\int f(x) dx = x^3 + 4x + C.$

Lời giải.

Ta có $f(x) = x^2 + 4$ nên $\int f(x) dx = \frac{x^3}{3} + 4x + C.$

Chọn đáp án **(C)** ☐

CÂU 15. Trên khoảng $(0; +\infty)$, cho hàm số $f(x) = x^{\frac{3}{2}}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

(A) $\int f(x) dx = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} + C.$

(B) $\int f(x) dx = \int \sqrt{x^3} dx.$

(C) $\int f(x) dx = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + C.$

(D) $\int f(x) dx = \frac{2}{3}x^{\frac{1}{2}} + C.$

Lời giải.

Ta có $\int f(x) dx = \int x^{\frac{3}{2}} dx = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + C.$

Chọn đáp án **(C)** ☐

CÂU 16. Cho hàm số $f(x) = \frac{x^4 + 2}{x^2}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

(A) $\int f(x) dx = \frac{x^3}{3} - \frac{1}{x} + C.$

(B) $\int f(x) dx = \frac{x^3}{3} + \frac{2}{x} + C.$

(C) $\int f(x) dx = \int \left(x^2 + \frac{2}{x^2} \right) dx.$

(D) $\int f(x) dx = \frac{x^3}{3} - \frac{2}{x} + C.$

Lời giải.

Ta có $\int f(x) dx = \int \frac{x^4 + 2}{x^2} dx = \int \left(x^2 + \frac{2}{x^2} \right) dx = \frac{x^3}{3} - \frac{2}{x} + C.$

Chọn đáp án **(D)** ☐

CÂU 17. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai

Mệnh đề	Đ	S
a) $\int (\sqrt[3]{x^2} + x - 2) dx = \frac{3}{5}\sqrt[3]{x^5} + \frac{1}{2}x^2 - 2x + C.$	X	
b) $\int \frac{1}{2023x^{2024}} dx = \frac{1}{2023^2x^{2023}} + C.$	X	
c) $\int (2x - 2024)^2 dx = x - 1012 + C.$		X
d) $\int \left(\frac{1}{4}x^4 + 4x^3 \right) dx = \frac{1}{20}x^5 + \frac{4}{3}x^4 + C.$	X	

Lời giải.

$$\begin{aligned} \int (\sqrt[3]{x^2} + x - 2) dx &= \frac{3}{5}\sqrt[3]{x^5} + \frac{1}{2}x^2 - 2x + C. \\ \int \frac{1}{2023x^{2024}} dx &= \frac{1}{2023} \int x^{-2024} dx = \frac{1}{2023^2x^{2023}} + C. \\ \int (2x - 2024)^2 dx &= \frac{(2x - 2024)^3}{3} + C. \\ \int \left(\frac{1}{4}x^4 + 4x^3 \right) dx &= \frac{1}{20}x^5 + \frac{4}{3}x^4 + C. \end{aligned}$$

Chọn đáp án **a đúng b đúng c sai d đúng** ☐

CÂU 18. Cho các mệnh đề sau đây

Mệnh đề	Đ	S
a) $F(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{3}{2}x^2 + \ln x + C$ là nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^3 - 3x + \frac{1}{x}$.	X	
b) $F(x) = \frac{(5x+3)^6}{6} + C$ là nguyên hàm của hàm số $f(x) = (5x+3)^5$.		X
c) $F(x) = \frac{3}{2}x\sqrt{x} + \frac{4}{3}x\sqrt[3]{x} + \frac{5}{4}x\sqrt[4]{x} + C$ là nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x}$.		X
d) $F(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2024x + C$ là nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{x^3 - 2024x}{x}$.	X	

Lời giải.

- a) **Đúng.** Vì $f(x) = x^3 - 3x + \frac{1}{x}$
 $\Rightarrow F(x) = \int f(x)dx = \int (x^3 - 3x + \frac{1}{x})dx$
 $= \int x^3dx - 3 \int xdx + \int \frac{1}{x}dx = \frac{x^4}{4} - \frac{3}{2}x^2 + \ln|x| + C.$
- b) **Sai.** Vì $f(x) = (5x+3)^5$
 $\Rightarrow F(x) = \int f(x)dx = \int (5x+3)^5dx$
 $= \int (5x+3)^5 \frac{d(5x+3)}{5} = \frac{(5x+3)^6}{30} + C.$
- c) **Sai.** Vì $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x}$
 $\Rightarrow F(x) = \int (\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x})dx = \int (x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{1}{4}})dx$
 $= \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + \frac{4}{5}x^{\frac{5}{4}} + C = \frac{2}{3}x\sqrt{x} + \frac{3}{4}x\sqrt[3]{x} + \frac{4}{5}x\sqrt[4]{x} + C.$
- d) **Đúng.** $f(x) = \frac{x^3 - 2024x}{x} \Rightarrow F(x) = \int \frac{x^3 - 2024x}{x}dx = \int (x^2 - 2024)dx$
 $= \frac{1}{3}x^3 - 2024x + C.$

Chọn đáp án a đúng b sai c sai d đúng □

CÂU 19. Hệ số của x^2 trong nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x}} + 3^x + 3x - 2$ là

Đáp án: 1,5

Lời giải.

$$F(x) = \int \left(\frac{2}{\sqrt{x}} + 3^x + 3x - 2 \right) dx = 4\sqrt{x} + \frac{3^x}{\ln 3} + \frac{3}{2}x^2 - 2x + C.$$

CÂU 20. Hệ số của x^3 trong nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = mx^3 - 3x^2 + \frac{4m}{x^3} + \frac{5}{2x} - 7m$ (m là tham số) là

Đáp án: -1

Lời giải.

$$F(x) = \int \left(mx^3 - 3x^2 + \frac{4m}{x^3} + \frac{5}{2x} - 7m \right) dx = \frac{m}{4}x^4 - x^3 - \frac{2m}{x^2} - \frac{5}{2}\ln|x| - 7mx + C$$

CÂU 21. Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{2}{\sqrt[3]{x}}$. Tổng hệ số của biến x là

Đáp án: -1

Lời giải.

$$F(x) = \int f(x)dx = \int \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{2}{\sqrt[3]{x}} \right) dx = \int \frac{1}{\sqrt{x}}dx - \int \frac{2}{\sqrt[3]{x}}dx = \int x^{-\frac{1}{2}}dx - \int 2x^{-\frac{1}{3}}dx$$

$$= \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} - 2 \cdot \frac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} + C = 2x^{\frac{1}{2}} - 3x^{\frac{2}{3}} + C = 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x^2} + C.$$

CÂU 22. Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \frac{(x^2-1)^2}{x^2}$. Tổng hệ số của bậc 3 và bậc 1 là (làm tròn đến hàng phần chục).

Đáp án: -1,6

Lời giải.

$$\begin{aligned} \int f(x) dx &= \int \frac{(x^2 - 1)^2}{x^2} dx = \int \frac{x^4 - 2x^2 + 1}{x^2} dx = \int \left(x^2 - 2 + \frac{1}{x^2} \right) dx \\ &= \frac{x^3}{3} - 2x - \frac{1}{x} + C. \end{aligned}$$

CÂU 23. Tính $\int \left(\frac{(1-x)^3}{\sqrt[3]{x}} \right) dx$. Giá trị tổng hệ số chứa biến là (làm tròn đến hàng phần trăm).

Đáp án: 0,55

Lời giải.

$$\begin{aligned} \int \left(\frac{(1-x)^3}{\sqrt[3]{x}} \right) dx &= \int \frac{1 - 3x + 3x^2 - x^3}{x^{\frac{1}{3}}} dx = \int \left(x^{-\frac{1}{3}} - 3x^{\frac{2}{3}} + 3x^{\frac{5}{3}} - x^{\frac{8}{3}} \right) dx \\ &= \frac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} - 3 \frac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} + 3 \frac{x^{\frac{8}{3}}}{\frac{8}{3}} - \frac{x^{\frac{11}{3}}}{\frac{11}{3}} + C = \frac{3}{2} x^{\frac{2}{3}} - \frac{9}{5} x^{\frac{5}{3}} + \frac{9}{8} x^{\frac{8}{3}} - \frac{3}{11} x^{\frac{11}{3}} + C. \end{aligned}$$

CÂU 24. Tính $\int \left(\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[4]{x^3} + \sqrt[5]{x^4} \right) dx$. Giá trị tổng hệ số chứa biến là (làm tròn đến hàng phần trăm).

Đáp án: 0,58

Lời giải.

$$\begin{aligned} \int \left(\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[4]{x^3} + \sqrt[5]{x^4} \right) dx &= \int \left(x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{3}{4}} + x^{\frac{4}{5}} \right) dx = \frac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} - \frac{x^{\frac{7}{4}}}{\frac{7}{4}} + \frac{x^{\frac{9}{5}}}{\frac{9}{5}} + C \\ &= \frac{3}{5} x^{\frac{5}{3}} - \frac{4}{7} x^{\frac{7}{4}} + \frac{5}{9} x^{\frac{9}{5}} + C. \end{aligned}$$

CÂU 25. Tính $\int (\sqrt{x} + 1)(x - \sqrt{x} + 1) dx$. Giá trị tổng hệ số chứa biến là (làm tròn đến hàng phần chục).

Đáp án: 1,4

Lời giải.

$$\begin{aligned} (\sqrt{x} + 1)(x - \sqrt{x} + 1) &= (\sqrt{x} + 1)[x - (\sqrt{x} - 1)] = x(\sqrt{x} + 1) - (\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 1) \\ &= x\sqrt{x} + x - (x - 1) = x\sqrt{x} + 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Do đó } \int (\sqrt{x} + 1)(x - \sqrt{x} + 1) dx &= \int (x\sqrt{x} + 1) dx = \int \left(x^{\frac{3}{2}} + 1 \right) dx \\ &= \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} + x + C. \end{aligned}$$

CÂU 26. Tính $\int \left(2\sqrt{x} - \frac{3}{\sqrt[3]{x}} \right) dx$. Giá trị tổng hệ số chứa biến là (làm tròn đến hàng phần chục).

Đáp án: -3,1

Lời giải.

$$\int \left(2\sqrt{x} - \frac{3}{\sqrt[3]{x}} \right) dx = \int \left(2x^{\frac{1}{2}} - 3x^{-\frac{1}{3}} \right) dx = \frac{4}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{9}{2} x^{\frac{2}{3}} + C = \frac{4}{3} \sqrt[3]{x^3} - \frac{9}{2} \sqrt[3]{x^2} + C.$$

CÂU 27. Tính $\int \frac{1}{\sqrt{2x} + \sqrt{3x}} dx = a(\sqrt{b} - \sqrt{c})\sqrt{x}$. Giá trị của tổng $a + b + c$ là

Đáp án: 7

Lời giải.

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \frac{1}{\sqrt{2x} + \sqrt{3x}} &= \frac{\sqrt{3x} - \sqrt{2x}}{(\sqrt{3x} - \sqrt{2x})(\sqrt{3x} + \sqrt{2x})} = \frac{\sqrt{3x} - \sqrt{2x}}{x} = \frac{\sqrt{x}}{x} (\sqrt{3} - \sqrt{2}) \\ &= (\sqrt{3} - \sqrt{2}) x^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{2x} + \sqrt{3x}} dx = \int (\sqrt{3} - \sqrt{2}) x^{-\frac{1}{2}} dx = (\sqrt{3} - \sqrt{2}) \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = 2(\sqrt{3} - \sqrt{2})\sqrt{x}.$$

CÂU 28. Tính $\int \frac{1}{\sqrt{5x} - \sqrt{3x}} dx = (\sqrt{a} + \sqrt{b})\sqrt{x} + C$. Giá trị $a + b$ bằng

Đáp án: 8

Lời giải.

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{5x} - \sqrt{3x}} &= \frac{\sqrt{5x} + \sqrt{3x}}{(\sqrt{5x} - \sqrt{3x})(\sqrt{5x} + \sqrt{3x})} = \frac{\sqrt{5x} + \sqrt{3x}}{2x} = \frac{\sqrt{x}}{2x} (\sqrt{5} + \sqrt{3}) \\ \int \frac{1}{\sqrt{5x} - \sqrt{3x}} dx &= \int \frac{\sqrt{x}}{2x} (\sqrt{5} + \sqrt{3}) dx = \frac{(\sqrt{5} + \sqrt{3})}{2} \int x^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{(\sqrt{5} + \sqrt{3})}{2} \cdot \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$$= (\sqrt{5} + \sqrt{3})\sqrt{x} + C.$$

CÂU 29. Tính $\int (x^2 - 1)^3 dx$. Giá trị tổng hệ số chứa biến là (làm tròn đến hàng phần chục).

Đáp án: -0,5

Lời giải.

$$\int (x^2 - 1)^3 dx = \int (x^6 - 3x^4 + 3x^2 - 1) dx = \frac{x^7}{7} - 3\frac{x^5}{5} + x^3 - x + C.$$

CÂU 30. Tính $\int (2 - x^2)^4 dx$. Giá trị tổng hệ số chứa biến là (làm tròn đến hàng phần chục).

Đáp án: 9,1

Lời giải.

Sử dụng khai triển theo nhị thức Newton, ta có:

$$(2 - x^2)^4 = x^8 - 8x^6 + 24x^4 - 32x^2 + 16.$$

Do đó

$$\begin{aligned} \int (2 - x^2)^4 dx &= \int (x^8 - 8x^6 + 24x^4 - 32x^2 + 16) dx \\ &= \frac{x^9}{9} - \frac{8}{7}x^7 + \frac{24}{5}x^5 - \frac{32}{3}x^3 + 16x + C. \end{aligned}$$

CÂU 31. Tính $\int (x - \sqrt[3]{x})^2 dx$. Giá trị tổng hệ số chứa biến là (làm tròn đến hàng phần chục).

Đáp án: -1,1

Lời giải.

$$(x - \sqrt[3]{x})^2 = x^2 - 2x\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2} = x^2 - 2x^{\frac{4}{3}} + x^{\frac{2}{3}}.$$

$$\int (x - \sqrt[3]{x})^2 dx = \int (x^2 - 2x^{\frac{4}{3}} + x^{\frac{2}{3}}) dx = \frac{x^3}{3} - \frac{6}{7}x^{\frac{7}{3}} + \frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}} + C.$$

CÂU 32. Tính $\int \left(\frac{x^2 + 2\sqrt[3]{x}}{x} \right)^2 dx$. Giá trị tổng hệ số chứa biến là (làm tròn đến hàng phần chục).

Đáp án: -8,7

Lời giải.

$$\text{Ta có: } \left(\frac{x^2 + 2\sqrt[3]{x}}{x} \right)^2 = \frac{x^4 + 4x^2\sqrt[3]{x} + 4\sqrt[3]{x^2}}{x^2} = x^2 + 4x^{\frac{1}{3}} + 4x^{\frac{-4}{3}}.$$

$$\int \left(\frac{x^2 + 2\sqrt[3]{x}}{x} \right)^2 dx = \int (x^2 + 4x^{\frac{1}{3}} + 4x^{\frac{-4}{3}}) dx = \frac{x^3}{3} + 4\frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + 4\frac{x^{\frac{-1}{3}}}{\frac{-1}{3}} + C$$

$$= \frac{1}{3}x^3 + 3x^{\frac{4}{3}} - 12x^{\frac{-1}{3}} + C.$$

CÂU 33. Tìm m để $F(x) = mx^3 + (3m + 2)x^2 - 4x + 3$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3x^2 + 10x - 4$.

Đáp án: 1

Lời giải.

$$\int f(x) dx = \int (3x^2 + 10x - 4) dx = x^3 + 5x^2 - 4x + C. \text{ Suy ra } m = 1.$$

CÂU 34. Tìm a, b, c để $F(x) = (ax^2 + bx + c)\sqrt{x^2 - 4x}$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = (x - 2)\sqrt{x^2 - 4x}$. Giá trị biểu thức $a + b + c$ bằng.

Đáp án: -1

Lời giải.

$$\text{Đặt } t = \sqrt{x^2 - 4x} \Rightarrow t^2 = x^2 - 4x \Rightarrow 2t dt = (2x - 4) dx = 2(x - 2) dx.$$

$$\Rightarrow dx = \frac{2t dt}{2(x - 2)} = \frac{t dt}{x - 2}.$$

$$\int (x - 2)\sqrt{x^2 - 4x} dx = \int t \cdot t \cdot dt = \int t^2 dt = \frac{1}{3}t^3 + C = \frac{1}{3}\sqrt{(x^2 - 4x)^3} + C$$

$$= \frac{1}{3}(x^2 - 4x)\sqrt{x^2 - 4x} + C = \left(\frac{1}{3}x^2 - \frac{4}{3}x \right)\sqrt{x^2 - 4x} + C.$$

$$\text{Vậy } a = \frac{1}{3}; b = -\frac{4}{3}; c = 0.$$

CÂU 35. Tìm a, b, c để $F(x) = (ax^2 + bx + c)\sqrt{2x - 3}$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{20x^2 - 30x + 7}{\sqrt{2x - 3}}$. Giá trị biểu thức $a + b + c$ bằng

Lời giải.

Theo định nghĩa nguyên hàm thì $F'(x) = f(x)$.
Ta có

$$\begin{aligned} F'(x) &= (2ax + b)\sqrt{2x-3} + (ax^2 + bx + c)\frac{2}{2\sqrt{2x-3}} \\ &= \frac{(2ax + b)(2x-3) + ax^2 + bx + c}{\sqrt{2x-3}} \\ &= \frac{5ax^2 + (-6a + 3b)x - 3b + c}{\sqrt{2x-3}}. \end{aligned}$$

Từ đó ta có $\frac{5ax^2 + (-6a + 3b)x - 3b + c}{\sqrt{2x-3}} = \frac{20x^2 - 30x + 7}{\sqrt{2x-3}}$.

Sử dụng phương pháp đồng nhất hệ số, ta được

$$\begin{cases} 5a = 20 \\ -6a + 3b = -30 \\ -3b + c = 7. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = -2 \\ c = 1. \end{cases}$$

CÂU 36. Hàm số $F(x) = \cot x$ là một nguyên hàm của hàm số nào dưới đây trên khoảng $(0; \frac{\pi}{2})$

- ☐ A $f_2(x) = \frac{1}{\sin^2 x}$. ☐ B $f_1(x) = -\frac{1}{\cos^2 x}$. ☐ C $f_4(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$. ☐ D $f_3(x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$.

Lời giải.

Có $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C$ suy ra $F(x) = \cot x$ trên khoảng $(0; \frac{\pi}{2})$ là một nguyên hàm của hàm số $f_3(x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$.

Chọn đáp án ☒ D. □

CÂU 37. Cho hàm số $f(x) = 1 + \sin x$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

- ☐ A $\int f(x)dx = x - \cos x + C$. ☐ B $\int f(x)dx = x + \sin x + C$.
☐ C $\int f(x)dx = x + \cos x + C$. ☐ D $\int f(x)dx = \cos x + C$.

Lời giải.

Ta có $\int f(x)dx = \int (1 + \sin x) dx = \int 1dx + \int \sin x dx = x - \cos x + C$.

Chọn đáp án ☒ A. □

CÂU 38. Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \cos^2 \frac{x}{2}$

- ☐ A $F(x) = 2 \cos \frac{x}{2} + C$. ☐ B $F(x) = \frac{1}{2}(1 + \sin x) + C$. ☐ C $F(x) = 2 \sin \frac{x}{2} + C$. ☐ D $F(x) = \frac{1}{2}(1 - \sin x) + C$.

Lời giải.

Ta có: $f(x) = \cos^2 \frac{x}{2} \Rightarrow F(x) = \int \cos^2 \frac{x}{2} dx = \int \frac{1 + \cos x}{2} dx = \frac{1}{2} \int (1 + \cos x) dx$
 $= \frac{1}{2}(1 + \sin x) + C$.

Chọn đáp án ☒ B. □

CÂU 39. Cho hàm số $f(x) = 1 - \frac{1}{\cos^2 x}$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

- ☐ A $\int f(x)dx = x + \tan x + C$. ☐ B $\int f(x)dx = x + \cot x + C$.
☐ C $\int f(x)dx = x - \tan x + C$. ☐ D $\int f(x)dx = x - \cot x + C$.

Lời giải.

$\int f(x)dx = \int \left(1 - \frac{1}{\cos^2 x}\right) dx = x - \tan x + C$.

Chọn đáp án ☒ C. □

CÂU 40. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos x + 6x$ là

- ☐ A $\sin x + 3x^2 + C$. ☐ B $-\sin x + 3x^2 + C$. ☐ C $\sin x + 6x^2 + C$. ☐ D $-\sin x + C$.

Lời giải.

Ta có $\int f(x)dx = \int (\cos x + 6x) dx = \sin x + 3x^2 + C$.

Chọn đáp án ☒ A. □

CÂU 41. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2 \sin x + 3x$.

(A) $\int (2 \sin x + 3x) dx = -2 \cos x + \frac{3}{2}x^2 + C.$

(B) $\int (2 \sin x + 3x) dx = 2 \cos x + 3x^2 + C.$

(C) $\int (2 \sin x + 3x) dx = \sin^2 x + \frac{3}{2}x + C.$

(D) $\int (2 \sin x + 3x) dx = \sin 2x + \frac{3}{2}x^2 + C.$

Lời giải.

$$\int (2 \sin x + 3x) dx = -2 \cos x + \frac{3}{2}x^2 + C$$

Chọn đáp án **(A)**.....

CÂU 42. Tính $\int (x - \sin x) dx$.

(A) $\frac{x^2}{2} + \sin x + C.$

(B) $\frac{x^2}{2} - \cos x + C.$

(C) $\frac{x^2}{2} - \sin x + C.$

(D) $\frac{x^2}{2} + \cos x + C.$

Lời giải.

$$\text{Ta có } \int (x - \sin x) dx = \frac{x^2}{2} + \cos x + C.$$

Chọn đáp án **(D)**.....

CÂU 43. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3x^2 + \sin x$ là

(A) $x^3 + \cos x + C.$

(B) $6x + \cos x + C.$

(C) $x^3 - \cos x + C.$

(D) $6x - \cos x + C.$

Lời giải.

$$\text{Ta có } \int (3x^2 + \sin x) dx = x^3 - \cos x + C.$$

Chọn đáp án **(C)**.....

CÂU 44. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{x} + \sin x$ là

(A) $\ln x - \cos x + C.$

(B) $-\frac{1}{x^2} - \cos x + C.$

(C) $\ln |x| + \cos x + C.$

(D) $\ln |x| - \cos x + C.$

Lời giải.

$$\text{Ta có } \int f(x) dx = \int \left(\frac{1}{x} + \sin x \right) dx = \int \frac{1}{x} dx + \int \sin x dx = \ln |x| - \cos x + C.$$

Chọn đáp án **(D)**.....

CÂU 45. Cho $\int f(x) dx = -\cos x + C$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

(A) $f(x) = -\sin x.$

(B) $f(x) = -\cos x.$

(C) $f(x) = \sin x.$

(D) $f(x) = \cos x.$

Lời giải.

Áp dụng công thức $\int \sin x dx = -\cos x + C$. Suy ra $f(x) = \sin x$.

Chọn đáp án **(C)**.....

CÂU 46. Cho hàm số $f(x) = \int \cos \frac{x}{2} \sin \frac{x}{2}$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

(A) $\int \cos \frac{x}{2} \sin \frac{x}{2} = \frac{1}{2} \sin x + C.$

(B) $\int \cos \frac{x}{2} \sin \frac{x}{2} = \frac{1}{2} \cos x + C.$

(C) $\int \cos \frac{x}{2} \sin \frac{x}{2} = -\frac{1}{2} \sin x + C.$

(D) $\int \cos \frac{x}{2} \sin \frac{x}{2} = -\frac{1}{2} \cos x + C.$

Lời giải.

$$\int \cos \frac{x}{2} \sin \frac{x}{2} = \frac{1}{2} \int \sin x dx = -\frac{1}{2} \cos x + C.$$

Chọn đáp án **(D)**.....

CÂU 47. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

Mệnh đề	Đ	S
a) $\int (2 + \cot^2 x) dx = x - \cot x + C.$	X	
b) $\int \left(1 - \cos^2 \frac{x}{2}\right) dx = \frac{1}{2}(x + \sin x) + C.$		X

Mệnh đề	Đ	S
c) $\int \left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2}\right)^2 dx = x + \cos x + C.$		X
d) $\int \left(\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2}\right)^2 dx = x - \cos x + C.$		X

Lời giải.

a) Đúng. Vì $\int (2 + \cot^2 x) dx$
 $= \int (1 + 1 + \cot^2 x) dx = \int \left(1 + \frac{1}{\sin^2 x}\right) dx = x - \cot x + C.$

b) Sai. Vì $\int \left(1 - \cos^2 \frac{x}{2}\right) dx = \int \sin^2 \frac{x}{2} dx = \int \frac{1 - \cos x}{2} dx = \frac{1}{2}(x - \sin x) + C.$

c) Sai. Vì $\int \left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2}\right)^2 dx = \int (1 + \sin x) dx = x - \cos x + C.$

d) Sai. Vì $\int \left(\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2}\right)^2 dx = \int (1 - \sin x) dx = x + \cos x + C.$

Chọn đáp án a đúng b sai c sai d sai □

CÂU 48. Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = 2024 - 2 \sin^2 \frac{x}{2}$. Hệ số của biến x là

Đáp án: 2023

Lời giải.

$$\Rightarrow F(x) = \int \left(2024 - 2 \sin^2 \frac{x}{2}\right) dx = \int (2023 + \cos x) dx = 2023x - \sin x + C.$$

CÂU 49. Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \frac{1}{\sin^2 \frac{x}{2} \cdot \cos^2 \frac{x}{2}} = a \cot x + C$. Giá trị a là

Đáp án: -4

Lời giải.

$$\text{Ta có } \frac{1}{\sin^2 \frac{x}{2} \cdot \cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{1}{\left(\sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2}\right)^2} = \frac{1}{\left(\frac{\sin x}{2}\right)^2} = \frac{4}{\sin^2 x}.$$

$$F(x) = \int f(x) dx = \int \frac{1}{\sin^2 \frac{x}{2} \cdot \cos^2 \frac{x}{2}} dx = \int \frac{4}{\sin^2 x} = -4 \cot x + C.$$

CÂU 50. Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \frac{1}{3}x^2 - 2x + \frac{1}{2}\tan^2 x = \frac{x^3}{3} + bx^2 + \frac{1}{c}x + d \tan x + C$. Giá trị của $a + b + c + d$ là

Đáp án: 6,5

Lời giải.

$$\begin{aligned} F(x) &= \int f(x) dx \\ &= \int \left(\frac{1}{3}x^2 - 2x + \frac{1}{2}\tan^2 x\right) dx = \int \left(\frac{1}{3}x^2 - 2x + \frac{1}{2} \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\right) dx \\ &= \int \left[\frac{1}{3}x^2 - 2x + \frac{1}{2} \left(\frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x}\right)\right] dx = \int \left[\frac{1}{3}x^2 - 2x + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right)\right] dx \\ &= \frac{x^3}{9} - x^2 + \frac{1}{2}(\tan x - x) + C = \frac{x^3}{9} - x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\tan x + C. \end{aligned}$$

CÂU 51. Tính $\int x^2 \left(1 + \frac{1}{x} - \frac{\tan^2 x}{x^2}\right) dx = \frac{x^m}{n} + \frac{x^p}{q} + x + r \tan x + C$. Giá trị biểu thức $P = \frac{m}{n} + \frac{p}{q} + 2r$ là

Đáp án: 0

Lời giải.

$$\begin{aligned} \int x^2 \left(1 + \frac{1}{x} - \frac{\tan^2 x}{x^2}\right) dx &= \int (x^2 + x - \tan^2 x) dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - (\tan x - x) + C \\ &= \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x - \tan x + C. \end{aligned}$$

CÂU 52. Tính $T = \int x \left(2024 - \frac{1}{x^3} + \frac{\sin x}{x}\right) dx$. Hệ số của hạng tử $\cos x$ của T là

Đáp án: -1

Lời giải.

$$\int x \left(2024 - \frac{1}{x^3} + \frac{\sin x}{x}\right) dx = \int \left(2024x - \frac{1}{x^2} + \sin x\right) dx = 1012x^2 + \frac{1}{x} - \cos x + C.$$

CÂU 53. Tính $R = \int x^3 \left[\frac{\left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2}\right)^2}{x^3} - 2x + \frac{1}{x^{2024}}\right] dx = ax + b \cos x + cx^5 - \frac{1}{d \cdot x^{2020}} + C$. Giá trị $a + b + c + d + 7$ là (làm tròn đến hàng đơn vị)

Đáp án: 2025

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} x^3 \left[\frac{\left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2}\right)^2}{x^3} - 2x + \frac{1}{x^{2024}} \right] &= \left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2}\right)^2 - 2x^4 + x^{-2021} \\ &= \sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2} + 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} - 2x^4 + x^{-2021} \\ &= 1 + 2 \sin x - 2x^4 + x^{-2021}. \end{aligned}$$

Khi đó

$$\begin{aligned} \int x^3 \left[\frac{\left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2}\right)^2}{x^3} - 2x + \frac{1}{x^{2024}} \right] dx &= \int (1 + 2 \sin x - 2x^4 + x^{-2021}) dx \\ &= x - 2 \cos x - \frac{2}{5} x^5 - \frac{1}{2020 x^{2020}} + C. \end{aligned}$$

CÂU 54. Tính $\int x^2 \left[\frac{1}{x^2 \sin^2 \frac{x}{2} \cdot \cos^2 \frac{x}{2}} + \frac{3}{x^3} - \frac{4}{x^4} \right] dx = a \cot x + b \ln |x| + \frac{c}{x} + C$. Giá trị $a + b + c$ là

Đáp án: 3

Lời giải.

Ta có

$$\frac{1}{\sin^2 \frac{x}{2} \cdot \cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{1}{\left(\sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2}\right)^2} = \frac{1}{\left(\frac{\sin x}{2}\right)^2} = \frac{4}{\sin^2 x}.$$

$$x^2 \left[\frac{1}{x^2 \sin^2 \frac{x}{2} \cdot \cos^2 \frac{x}{2}} + \frac{3}{x^3} - \frac{4}{x^4} \right] = \frac{1}{\sin^2 \frac{x}{2} \cdot \cos^2 \frac{x}{2}} + \frac{3}{x} - \frac{4}{x^2} = \frac{4}{\sin^2 x} + \frac{3}{x} - \frac{4}{x^2}.$$

Khi đó

$$\begin{aligned} \int x^2 \left[\frac{1}{x^2 \sin^2 \frac{x}{2} \cdot \cos^2 \frac{x}{2}} + \frac{3}{x^3} - \frac{4}{x^4} \right] dx &= \int \left(\frac{4}{\sin^2 x} + \frac{3}{x} - \frac{4}{x^2} \right) dx \\ &= -4 \cot x + 3 \ln |x| + \frac{4}{x} + C. \end{aligned}$$

CÂU 55. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^{3x}$ là hàm số nào sau đây?

- (A) $3e^x + C$. (B) $\frac{1}{3}e^{3x} + C$. (C) $\frac{1}{3}e^x + C$. (D) $3e^{3x} + C$.

Lời giải.

Cách 1: $\int e^{3x} dx = \int (e^3)^x dx = \frac{(e^3)^x}{\ln e^3} + C = \frac{e^{3x}}{3} + C$.

Cách 2 (Trắc nghiệm): $\int e^{3x} dx = \frac{1}{3}e^{3x} + C$, với C là hằng số bất kì.

Chọn đáp án (B) □

CÂU 56. Nguyên hàm của hàm số $y = e^{2x-1}$ là

- (A) $2e^{2x-1} + C$. (B) $e^{2x-1} + C$. (C) $\frac{1}{2}e^{2x-1} + C$. (D) $\frac{1}{2}e^x + C$.

Lời giải.

Cách 1: $\int e^{2x-1} dx = \int e^{-1}(e^2)^x dx = e^{-1} \frac{(e^2)^x}{\ln e^2} + C = \frac{e^{2x-1}}{2} + C$.

Cách 2: $\int e^{2x-1} dx = \frac{1}{2} \int e^{2x-1} d(2x-1) = \frac{1}{2}e^{2x-1} + C$.

Chọn đáp án (C) □

CÂU 57. Cho hàm số $f(x) = e^x + 2$. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

- (A) $\int f(x) dx = e^{x-2} + C$. (B) $\int f(x) dx = e^x + 2x + C$.
(C) $\int f(x) dx = e^x + C$. (D) $\int f(x) dx = e^x - 2x + C$.

Lời giải.

Ta có $\int f(x) dx = \int (e^x + 2) dx = e^x + 2x + C$.

Chọn đáp án (B) □

CÂU 58. Cho hàm số $f(x) = e^x + 2x$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

(A) $\int f(x) dx = e^x + x^2 + C$.

(B) $\int f(x) dx = e^x + C$.

(C) $\int f(x) dx = e^x - x^2 + C$.

(D) $\int f(x) dx = e^x + 2x^2 + C$.

Lời giải.

Ta có $\int f(x) dx = \int (e^x + 2x) dx = e^x + x^2 + C$.

Chọn đáp án (A) □

CÂU 59. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = 7^x$.

(A) $\int 7^x dx = \frac{7^x}{\ln 7} + C$.

(B) $\int 7^x dx = 7^{x+1} + C$.

(C) $\int 7^x dx = \frac{7^{x+1}}{x+1} + C$.

(D) $\int 7^x dx = 7^x \ln 7 + C$.

Lời giải.

Ta có $\int 7^x dx = \frac{7^x}{\ln 7} + C$.

Chọn đáp án (A) □

CÂU 60. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2^x$ là

(A) $\int 2^x dx = \ln 2 \cdot 2^x + C$.

(B) $\int 2^x dx = 2^x + C$.

(C) $\int 2^x dx = \frac{2^x}{\ln 2} + C$.

(D) $\int 2^x dx = \frac{2^x}{x+1} \ln 7 + C$.

Lời giải.

Ta có $\int 2^x dx = \frac{2^x}{\ln 2} + C$.

Chọn đáp án (C) □

CÂU 61. Tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3^{-x}$ là

(A) $-\frac{3^{-x}}{\ln 3} + C$.

(B) $-3^{-x} + C$.

(C) $-3^{-x} \ln 3 + C$.

(D) $\frac{3^{-x}}{\ln 3} + C$.

Lời giải.

Ta có $\int 3^{-x} dx = \int (3^{-1})^x dx = -\frac{3^{-x}}{\ln 3} + C$.

Chọn đáp án (A) □

CÂU 62. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3^x + 2x$.

(A) $\int (3^x + 2x) dx = \frac{3^x}{\ln 3} + x^2 + C$.

(B) $\int (3^x + 2x) dx = 3^x \ln 3 + x^2 + C$.

(C) $\int (3^x + 2x) dx = \frac{3^x}{\ln 3} + x + C$.

(D) $\int (3^x + 2x) dx = 3^x \ln 3 + x + C$.

Lời giải.

Ta có $\int (3^x + 2x) dx = \frac{3^x}{\ln 3} + x^2 + C$.

Chọn đáp án (A) □

CÂU 63. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^x - 2x$ là

(A) $e^x + x^2 + C$.

(B) $e^x - x^2 + C$.

(C) $\frac{1}{x+1} e^x - x^2 + C$.

(D) $e^x - 2 + C$.

Lời giải.

Ta có $\int (e^x - 2x) dx = e^x - x^2 + C$.

Chọn đáp án (B) □

CÂU 64. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^x \left(2017 - \frac{2018e^{-x}}{x^5} \right)$.

(A) $\int f(x) dx = 2017e^x - \frac{2018}{x^4} + C$.

(B) $\int f(x) dx = 2017e^x + \frac{2018}{x^4} + C$.

(C) $\int f(x) dx = 2017e^x + \frac{504,5}{x^4} + C$.

(D) $\int f(x) dx = 2017e^x - \frac{504,5}{x^4} + C$.

Lời giải.

$$\begin{aligned}\int f(x) dx &= \int e^x \left(2017 - \frac{2018e^{-x}}{x^5} \right) dx \\ &= \int \left(2017e^x - \frac{2018}{x^5} \right) dx \\ &= 2017e^x + \frac{504,5}{x^4} + C\end{aligned}$$

Chọn đáp án **C**..... □

CÂU 65. Họ nguyên hàm của hàm số $y = e^x \left(2 + \frac{e^{-x}}{\cos^2 x} \right)$ là

- A** $2e^x + \tan x + C$. **B** $2e^x - \tan x + C$. **C** $2e^x - \frac{1}{\cos x} + C$. **D** $2e^x + \frac{1}{\cos x} + C$.

Lời giải.

Ta có $\int y dx = \int e^x \left(2 + \frac{e^{-x}}{\cos^2 x} \right) dx = \int \left(2e^x + \frac{1}{\cos^2 x} \right) dx = 2e^x + \tan x + C$.

Chọn đáp án **A**..... □

CÂU 66. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $y = x^2 - 3^x + \frac{1}{x}$.

- A** $\frac{x^3}{3} - \frac{3^x}{\ln 3} - \frac{1}{x^2} + C, C \in \mathbb{R}$. **B** $\frac{x^3}{3} - 3^x + \frac{1}{x^2} + C, C \in \mathbb{R}$.
C $\frac{x^3}{3} - \frac{3^x}{\ln 3} + \ln |x| + C, C \in \mathbb{R}$. **D** $\frac{x^3}{3} - \frac{3^x}{\ln 3} - \ln |x| + C, C \in \mathbb{R}$.

Lời giải.

Ta có $\int \left(x^2 - 3^x + \frac{1}{x} \right) dx = \frac{x^3}{3} - \frac{3^x}{\ln 3} + \ln |x| + C, C \in \mathbb{R}$.

Chọn đáp án **C**..... □

CÂU 67. Khẳng định nào dưới đây **đúng**?

- A** $\int e^x dx = xe^x + C$. **B** $\int e^x dx = e^{x+1} + C$. **C** $\int e^x dx = -e^{x+1} + C$. **D** $\int e^x dx = e^x + C$.

Lời giải.

Ta có $\int e^x dx = e^x + C$.

Chọn đáp án **D**..... □

CÂU 68. Cho hàm số $f(x) = 1 + e^{2x}$. Khẳng định nào dưới đây **đúng**?

- A** $\int f(x) dx = x + \frac{1}{2}e^x + C$. **B** $\int f(x) dx = x + 2e^{2x} + C$.
C $\int f(x) dx = x + \frac{1}{2}e^{2x} + C$. **D** $\int f(x) dx = x + e^{2x} + C$.

Lời giải.

Ta có $\int (1 + e^{2x}) dx = x + \frac{1}{2}e^{2x} + C$.

Chọn đáp án **C**..... □

CÂU 69. Các mệnh đề sau đây **đúng** hay **sai**?

Mệnh đề	Đ	S
a) $\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$.		X
b) $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$.	X	

Mệnh đề	Đ	S
c) $\int \sin x dx = -\cos x + C$.	X	
d) $\int e^x dx = e^x + C$.	X	

Lời giải.

- a) Ta có $\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C$.
b) Ta có $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$
c) Ta có $\int \sin x dx = -\cos x + C$.

d) Ta có $\int e^x dx = e^x + C$.

Chọn đáp án ☐ a sai ☐ b đúng ☐ c đúng ☒ d đúng

CÂU 70. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

Mệnh đề	Đ	S
a) $\int \cos x dx = \sin x + C$.	X	
b) $\int x^e dx = \frac{x^{e+1}}{e+1} + C$.	X	

Mệnh đề	Đ	S
c) $\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$.	X	
d) $\int e^x dx = \frac{e^{x+1}}{x+1} + C$.		X

Lời giải.

a) Ta có $\int \cos x dx = \sin x + C$.

b) Ta có $\int x^e dx = \frac{x^{e+1}}{e+1} + C$

c) Ta có $\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C$.

d) Ta có $\int e^x dx = e^x + C$.

Chọn đáp án ☒ a đúng ☒ b đúng ☒ c đúng ☐ d sai

CÂU 71. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

Mệnh đề	Đ	S
a) $\int 2^x dx = 2^x \ln 2 + C$.		X
b) $\int e^{2x} dx = \frac{e^{2x}}{2} + C$.	X	

Mệnh đề	Đ	S
c) $\int e^x(e^x - 1) dx = \frac{1}{2}e^{2x} + e^x + C$.		X
d) $\int e^{3x} \cdot 3^x dx = \frac{(3e^3)^x}{3 + \ln 3} + C$.	X	

Lời giải.

a) Ta có $\int 2^x dx = \frac{2^x}{\ln 2} + C$.

b) Ta có $\int e^{2x} dx = \frac{e^{2x}}{2} + C$

c) Ta có $\int e^x(e^x - 1) dx = \int (e^{2x} - e^x) dx = \frac{1}{2}e^{2x} - e^x + C$.

d) Ta có $\int e^{3x} \cdot 3^x dx = \int (3e^3)^x dx = \frac{(3e^3)^x}{\ln(3e^3)} + C = \frac{(3e^3)^x}{3 + \ln(3)} + C$.

Chọn đáp án ☐ a sai ☒ b đúng ☐ c sai ☒ d đúng

CÂU 72. Biết rằng $\int (2^x + 3^x) dx = \frac{2^x}{\ln a} + \frac{3^x}{\ln b} + C$, $a, b \in \mathbb{Z}$. Tính $P = a + b$.

Đáp án: 5

Lời giải.

Ta có $\int (2^x + 3^x) dx = \frac{2^x}{\ln 2} + \frac{3^x}{\ln 3} + C$.

Do đó $a = 2$, $b = 3 \Rightarrow P = a + b = 2 + 3 = 5$.

CÂU 73. Cho $\int e^{3x+2024} dx = \frac{a}{b} e^{cx+d} + C$ với $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính giá trị của biểu thức $P = a + b - c + d$.

Đáp án: 2025

Lời giải.

Ta có $\int e^{3x+2024} dx = \frac{1}{3} e^{3x+2024} + C$.

Do đó $a = 1$, $b = 3$, $c = 3$, $d = 2024 \Rightarrow P = a + b - c + d = 1 + 3 - 3 + 2024 = 2025$.

CÂU 74. Biết rằng $\int 3^{x+2} \cdot 2^{2x+1} dx = \frac{a \cdot 12^x}{b \ln 2 + c \ln 3} + C$ với $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Tính giá trị của biểu thức $P = \frac{a}{b+c}$.

Đáp án: 6

Lời giải.

$$\text{Ta có } \int 3^{x+2} \cdot 2^{2x+1} dx = \int 3^2 \cdot 3^x \cdot 2 \cdot 4^x dx = \int 18 \cdot 12^x dx = 18 \cdot \frac{12^x}{\ln 12} + C = \frac{18 \cdot 12^x}{2 \ln 2 + \ln 3} + C.$$

$$\text{Do đó } a = 18, b = 2, c = 1 \Rightarrow P = \frac{a}{b+c} = \frac{18}{2+1} = 6.$$

CÂU 75. Biết rằng $\int (3^x + 5^x)^2 dx = \frac{9^x}{a \ln 3} + \frac{30^x}{b \ln 5 + c \ln 2 + d \ln 3} + \frac{25^x}{e \ln 5} + C$. Tính giá trị của biểu thức $P = a + b + c + d + e$.

Đáp án: 7

Lời giải.

$$\begin{aligned} \int (3^x + 5^x) dx &= \int (9^x + 30^x + 25^x) dx \\ &= \frac{9^x}{\ln 9} + \frac{30^x}{\ln 30 + \ln 25} + C \\ &= \frac{9^x}{2 \ln 3} + \frac{30^x}{\ln 5 + \ln 2 + \ln 3} + \frac{25^x}{2 \ln 5} + C. \end{aligned}$$

$$\text{Do đó } a = 2, b = c = d = 1, e = 2 \Rightarrow P = a + b + c + d + e = 7.$$

CÂU 76. Cho $\int \frac{e^{3x} + 1}{e^x + 1} dx = \frac{a}{b} e^{2x} + ce^x + dx + C$ với $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính giá trị của biểu thức $P = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$.

Đáp án: 7

Lời giải.

$$\text{Ta có } \int \frac{e^{3x} + 1}{e^x + 1} dx = \int \frac{(e^x + 1)(e^{2x} - e^x + 1)}{e^x + 1} dx = \int (e^{2x} - e^x + 1) dx = \frac{1}{2} e^{2x} - e^x + x + C.$$

$$\text{Do đó } a = d = 1, b = 2, c = -1 \Rightarrow P = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 7.$$

CÂU 77. Biết rằng $\int (e^x + e^{-x})^2 dx = \frac{1}{m} e^{2x} + \frac{1}{n} e^{-2x} + px + C$ với $m, n, p \in \mathbb{Z}$. Tính giá trị của biểu thức $P = m + n + p$.

Đáp án: 2

Lời giải.

$$\text{Ta có } \int (e^x + e^{-x})^2 dx = \int (e^{2x} + e^{-2x} + 2) dx = \frac{1}{2} e^{2x} - \frac{1}{2} e^{-2x} + 2x + C.$$

$$\text{Do đó } m = p = 2, n = -2 \Rightarrow P = m + n + p = 2.$$

CÂU 78. Biết rằng $\int \frac{e^{2x} - 1}{1 - e^{-x}} dx = \frac{1}{m} e^{nx} + pe^x + C$ với $m, n, p \in \mathbb{Z}$. Tính giá trị của biểu thức $P = m + n - p$.

Đáp án: 5

Lời giải.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \int \frac{e^{2x} - 1}{1 - e^{-x}} dx &= \int \frac{e^x(e^x - 1)(e^x + 1)}{e^x - 1} dx = \int e^x(e^x - 1) dx \\ &= \int (e^{2x} - e^x) dx = \frac{1}{2} e^{2x} - e^x + C. \end{aligned}$$

$$\text{Do đó } m = n = 2, p = -1 \Rightarrow P = m + n - p = 5.$$

CÂU 79. Biết rằng $F(x) = (ax + b) \cdot e^x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = (4x - 1) \cdot e^x$. Tính giá trị biểu thức $P = a + b$.

Đáp án: -1

Lời giải.

$$\text{Ta có } F'(x) = a \cdot e^x + (ax + b) \cdot e^x = e^x(ax + a + b).$$

$$\text{Mà } F'(x) = f(x) \Rightarrow \begin{cases} a = 4 \\ a + b = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = -5. \end{cases}$$

$$\text{Vậy } P = a + b = -1.$$

CÂU 80. Biết rằng $F(x) = 8e^x + \frac{na^x}{\ln a} + p \cos x$ (với $m, n, p \in \mathbb{Z}$) là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = me^x + 2a^x - 2 \sin x$. Tính giá trị của biểu thức $P = m + n + p$.

Đáp án: 12

Lời giải.

Ta có $F'(x) = 8e^x + \frac{na^x}{\ln a} \cdot \ln a - p \sin x = 8e^x + na^x - p \sin x$.

Mà $F'(x) = f(x) \Rightarrow m = 8, n = 2, p = 2$.

Vậy $P = m + n + p = 12$.

CÂU 81. Biết rằng $F(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-2x}$ (với $a, b, c \in \mathbb{R}$) là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = (-2x^2 + 8x - 7)e^{-2x}$. Tính giá trị biểu thức $P = a + b + c$.

Đáp án: -7

Lời giải.

Ta có $F'(x) = (2ax + b)e^{-2x} - 2(ax^2 + bx + c)e^{-2x} = [-2ax^2 + 2(a - b)x + b - 2c]e^{-2x}$.

$$\text{Mà } F'(x) = f(x) \Rightarrow \begin{cases} -2a = -2 \\ 2(a - b) = 8 \\ b - 2c = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -3 \\ c = -5. \end{cases}$$

Vậy $P = a + b + c = 1 - 3 - 5 = -7$.

2

Tìm nguyên hàm khi biết giá trị nguyên hàm

Phương pháp: Tìm $F(x) = \int f(x) dx$. Sau đó dựa vào $F(x_0) = a$ để suy ra C .

CÂU 1. Hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{x}$ trên $(-\infty; 0)$ thỏa mãn $F(-2) = 0$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- (A) $F(x) = \ln\left(-\frac{x}{2}\right), \forall x \in (-\infty; 0)$.
 (B) $F(x) = \ln|x| + C, \forall x \in (-\infty; 0)$ với C là một số thực bất kì.
 (C) $F(x) = \ln|x| + \ln 2, \forall x \in (-\infty; 0)$.
 (D) $F(x) = \ln(-x) + C, \forall x \in (-\infty; 0)$ với C là một số thực bất kì.

Lời giải.

Ta có $F(x) = \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C = \ln(-x) + C, \forall x \in (-\infty; 0)$.

Lại có $F(-2) = 0 \Rightarrow \ln 2 + C = 0 \Rightarrow C = -\ln 2$.

Do đó $F(x) = \ln(-x) - \ln 2 = \ln\left(-\frac{x}{2}\right)$.

Chọn đáp án (A) □

CÂU 2. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^{2x}$ và $F(0) = 0$. Giá trị của $F(\ln 3)$ bằng

- (A) 2. (B) 6. (C) 8. (D) 4.

Lời giải.

Ta có $F(x) = \int e^{2x} dx = \frac{1}{2}e^{2x} + C$.

Lại có $F(0) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} + C = 0 \Rightarrow C = -\frac{1}{2}$.

Do đó $F(\ln 3) = \frac{1}{2}e^{2\ln 3} - \frac{1}{2} = 4$.

Chọn đáp án (D) □

CÂU 3. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x) = 2^x + x + 1$. Biết $F(0) = 1$. Giá trị của $F(-1)$ bằng

- (A) $F(-1) = \frac{1}{2\ln 2}$. (B) $F(-1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\ln 2}$. (C) $F(-1) = 1 + \frac{1}{2\ln 2}$. (D) $F(-1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\ln 2}$.

Lời giải.

Ta có $F(x) = \int (2^x + x + 1) dx = \frac{2^x}{\ln 2} + \frac{x^2}{2} + x + C$.

Lại có $F(0) = 1 \Rightarrow \frac{1}{\ln 2} + C = 1 \Rightarrow C = 1 - \frac{1}{\ln 2}$.

Do đó $F(-1) = \frac{1}{2\ln 2} + \frac{1}{2} - 1 + 1 - \frac{1}{\ln 2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\ln 2}$.

Chọn đáp án (B) □

CÂU 4. Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \sin x + \cos x$ thỏa mãn $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$.

- (A) $F(x) = -\cos x + \sin x + 3$. (B) $F(x) = -\cos x + \sin x - 1$.
 (C) $F(x) = -\cos x + \sin x + 1$. (D) $F(x) = \cos x - \sin x + 3$.

Lời giải.

Ta có $F(x) = \int (\sin x + \cos x) dx = -\cos x + \sin x + C$.

Lại có $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 \Rightarrow -\cos\frac{\pi}{2} + \sin\frac{\pi}{2} + C = 2 \Rightarrow C = 1$.

Do đó $F(x) = -\cos x + \sin x + 1$.

Chọn đáp án (C) □

CÂU 5. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^x + 2x$ thỏa mãn $F(0) = \frac{3}{2}$. Tìm $F(x)$.

- (A) $F(x) = e^x + x^2 + \frac{1}{2}$. (B) $F(x) = e^x + x^2 + \frac{5}{2}$. (C) $F(x) = e^x + x^2 + \frac{3}{2}$. (D) $F(x) = e^x + x^2 - \frac{1}{2}$.

☞ **Lời giải.**

Ta có $F(x) = \int (e^x + 2x) dx = e^x + x^2 + C$.

Lại có $F(0) = \frac{3}{2} \Rightarrow 1 + C = \frac{3}{2} \Rightarrow C = \frac{1}{2}$.

Do đó $F(x) = e^x + x^2 + \frac{1}{2}$.

Chọn đáp án (A) □

CÂU 6. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x-1 & \text{khi } x \geq 1 \\ 3x^2-2 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$, giả sử F là nguyên hàm của f trên \mathbb{R} thỏa mãn $F(0) = 2$. Giá trị của $F(-1) + 2F(2)$ bằng

- (A) 9. (B) 15. (C) 11. (D) 6.

☞ **Lời giải.**

Ta có $\int (2x-1) dx = x^2 - x + C_1$ và $\int (3x^2-2) dx = x^3 - 2x + C_2$.

Suy ra $F(x) = \int f(x) dx = \begin{cases} x^2 - x + C_1 & \text{khi } x \geq 1 \\ x^3 - 2x + C_2 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$. Lại có $F(0) = 2 \Rightarrow C_2 = 2$.

Mặt khác hàm số F là nguyên hàm của f trên \mathbb{R} nên $y = F(x)$ liên tục tại $x = 1$.

Suy ra $\lim_{x \rightarrow 1^+} F(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} F(x) \Rightarrow C_1 = 1$.

Khi đó ta có $F(x) = \begin{cases} x^2 - x + 1 & \text{khi } x \geq 1 \\ x^3 - 2x + 2 & \text{khi } x < 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F(-1) = 3 \\ F(2) = 3 \end{cases}$.

Vậy $F(-1) + 2F(2) = 9$.

Chọn đáp án (A) □

CÂU 7. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x+3 & \text{khi } x \geq 1 \\ 3x^2+2 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$. Giả sử F là nguyên hàm của hàm số f trên \mathbb{R} thỏa mãn $F(0) = 2$. Giá trị của $F(-1) + 2F(2)$ bằng

- (A) 23. (B) 11. (C) 10. (D) 21.

☞ **Lời giải.**

Khi $x \geq 1$ thì $F(x) = \int f(x) dx = \int (2x+3) dx = x^2 + 3x + C_1$.

Khi $x < 1$ thì $F(x) = \int f(x) dx = \int (3x^2+2) dx = x^3 + 2x + C_2$.

Theo giả thiết $F(0) = 2 \Rightarrow C_2 = 2$.

Ta có $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) = 5$ nên hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = 1$.

Suy ra hàm số $f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} .

Do đó hàm số $F(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} F(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} F(x) \Rightarrow C_1 + 4 = C_2 + 3 \Rightarrow C_1 = 1$.

Vậy $F(-1) + 2F(2) = -3 + C_2 + 2(10 + C_1) = 21$.

Chọn đáp án (D) □

CÂU 8. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x+2 & \text{khi } x \geq 1 \\ 3x^2+1 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$. Giả sử F là nguyên hàm của hàm số f trên \mathbb{R} thỏa mãn $F(0) = 2$. Giá trị của $F(-1) + 2F(2)$ bằng

- (A) 18. (B) 20. (C) 9. (D) 24.

☞ **Lời giải.**

F là nguyên hàm của f trên \mathbb{R} nên $F(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + C_1 & \text{khi } x \geq 1 \\ x^3 + x + C_2 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$.

Ta có $F(0) = 2 \Rightarrow C_2 = 2$. (1)

Do F liên tục tại $x = 1$ nên $\lim_{x \rightarrow 1^+} F(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} F(x) = F(1)$.

$\Leftrightarrow C_1 + 3 = C_2 + 2 \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} C_1 + 3 = 4 \Leftrightarrow C_1 = 1$.

Do đó $F(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + 1 & \text{khi } x \geq 1 \\ x^3 + x + 2 & \text{khi } x < 1. \end{cases}$

Suy ra $F(-1) + 2F(2) = 18$.

Chọn đáp án (A) □

CÂU 9. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm là $f'(x) = 12x^2 + 2, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(1) = 3$. Biết $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ thỏa mãn $F(0) = 2$, khi đó $F(1)$ bằng

(A) -3.

(B) 1.

(C) 2.

(D) 7.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = 12x^2 + 2, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x) = 4x^3 + 2x + C_1$.

Mà $f(1) = 3 \Rightarrow 3 = 6 + C_1 \Rightarrow C_1 = -3 \Rightarrow f(x) = 4x^3 + 2x - 3 \Rightarrow F(x) = x^4 + x^2 - 3x + C_2$.

Lại có $F(0) = 2 \Rightarrow C_2 = 2 \Rightarrow F(x) = x^4 + x^2 - 3x + 2$.

Do đó $F(1) = 1$.

Cách khác:

Ta có $F(1) = \int_0^1 f(x) dx + F(0) = \int_0^1 (4x^3 + 2x - 3) dx + 2 = -1 + 2 = 1$.

Chọn đáp án (B) □

CÂU 10. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f'(x) = 3 - 5 \sin x$ và $f(0) = 10$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

(A) $f(x) = 3x - 5 \cos x + 15$.

(B) $f(x) = 3x - 5 \cos x + 2$.

(C) $f(x) = 3x + 5 \cos x + 5$.

(D) $f(x) = 3x + 5 \cos x + 2$.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = 3 - 5 \sin x \Rightarrow f(x) = 3x + 5 \cos x + C$.

Theo giả thiết $f(0) = 10$ nên $5 + C = 10 \Rightarrow C = 5$.

Vậy $f(x) = 3x + 5 \cos x + 5$.

Chọn đáp án (C) □

CÂU 11. Hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên \mathbb{R} và $f'(x) = 2e^{2x} + 1, \forall x; f(0) = 2$. Hàm $f(x)$ là

(A) $y = 2e^x + 2x$.

(B) $y = 2e^x + 2$.

(C) $y = e^{2x} + x + 2$.

(D) $y = e^{2x} + x + 1$.

Lời giải.

Ta có $\int f'(x) dx = \int (2e^{2x} + 1) dx = e^{2x} + x + C$.

Suy ra $f(x) = e^{2x} + x + C$.

Theo bài ra ta có $f(0) = 2 \Rightarrow 1 + C = 2 \Leftrightarrow C = 1$.

Vậy $f(x) = e^{2x} + x + 1$.

Chọn đáp án (D) □

CÂU 12. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f'(x) = 2 - 5 \sin x$ và $f(0) = 10$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

(A) $f(x) = 2x + 5 \cos x + 3$.

(B) $f(x) = 2x - 5 \cos x + 15$.

(C) $f(x) = 2x + 5 \cos x + 5$.

(D) $f(x) = 2x - 5 \cos x + 10$.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = 2 - 5 \sin x \Rightarrow f(x) = 2x + 5 \cos x + C$.

Mà $f(0) = 10$ nên $5 + C = 10 \Rightarrow C = 5$.

Vậy $f(x) = 2x + 5 \cos x + 5$.

Chọn đáp án (C) □

CÂU 13. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f'(x) = ax^2 + \frac{b}{x^3}, f'(1) = 3, f(1) = 2, f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{12}$. Khi đó $2a + b$ bằng

(A) $-\frac{3}{2}$.

(B) 0.

(C) 5.

(D) $\frac{3}{2}$.

Lời giải.

Ta có $f'(1) = 3 \Rightarrow a + b = 3. \quad (1)$

Hàm số có đạo hàm liên tục trên khoảng $(0; +\infty)$, các điểm $x = 1, x = \frac{1}{2}$ đều thuộc $(0; +\infty)$ nên

$f(x) = \int f'(x) dx = \int (ax^2 + \frac{b}{x^3}) dx = \frac{ax^3}{3} - \frac{b}{2x^2} + C$.

☑ $f(1) = 2 \Rightarrow \frac{a}{3} - \frac{b}{2} + C = 2. \quad (2)$

☑ $f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{12} \Rightarrow \frac{a}{24} - 2b + C = -\frac{1}{12}. \quad (3)$

Từ (1), (2) và (3) ta được hệ phương trình
$$\begin{cases} a + b = 3 \\ \frac{a}{3} - \frac{b}{2} + C = 2 \\ \frac{a}{24} - 2b + C = -\frac{1}{12} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \\ C = \frac{11}{6} \end{cases}.$$

Vậy $2a + b = 2 \cdot 2 + 1 = 5$.

Chọn đáp án **(C)** □

CÂU 14. Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = ax + \frac{b}{x^2}$ ($x \neq 0$), biết rằng $F(-1) = 1$, $F(1) = 4$, $f(1) = 0$.

(A) $F(x) = \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{4x} - \frac{7}{4}$. **(B)** $F(x) = \frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{2x} - \frac{7}{4}$. **(C)** $F(x) = \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{2x} + \frac{7}{4}$. **(D)** $F(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2x} - \frac{1}{2}$.

Lời giải.

Ta có $F(x) = \int f(x) dx = \int \left(ax + \frac{b}{x^2}\right) dx = \frac{1}{2}ax^2 - \frac{b}{x} + C$.

Theo bài ra
$$\begin{cases} F(-1) = 1 \\ F(1) = 4 \\ f(1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}a + b + C = 1 \\ \frac{1}{2}a - b + C = 4 \\ a + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -\frac{3}{2} \\ a = \frac{3}{2} \\ C = \frac{7}{4} \end{cases}.$$

Vậy $F(x) = \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{2x} + \frac{7}{4}$.

Chọn đáp án **(C)** □

CÂU 15. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ thỏa mãn $f'(x) = \frac{x+1}{x^2}$, $f(-2) = \frac{3}{2}$ và $f(2) = 2 \ln 2 - \frac{3}{2}$. Giá trị của biểu thức $f(-1) + f(4)$ bằng

(A) $\frac{6 \ln 2 - 3}{4}$. **(B)** $\frac{6 \ln 2 + 3}{4}$. **(C)** $\frac{8 \ln 2 + 3}{4}$. **(D)** $\frac{8 \ln 2 - 3}{4}$.

Lời giải.

Có $f(x) = \int f'(x) dx = \int \frac{x+1}{x^2} dx = \ln x - \frac{1}{x} + C$.

Tìm được $f(x) = \begin{cases} \ln |x| - \frac{1}{x} + C_1 & \text{khi } x < 0 \\ \ln |x| - \frac{1}{x} + C_2 & \text{khi } x > 0. \end{cases}$

Do $f(-2) = \frac{3}{2} \Rightarrow \ln 2 + \frac{1}{2} + C_1 = \frac{3}{2} \Rightarrow C_1 = 1 - \ln 2$.

Do $f(2) = 2 \ln 2 - \frac{3}{2} \Rightarrow \ln 2 - \frac{1}{2} + C_2 = 2 \ln 2 - \frac{3}{2} \Rightarrow C_2 = \ln 2 - 1$.

Suy ra $f(x) = \begin{cases} \ln |x| - \frac{1}{x} + 1 - \ln 2 & \text{khi } x < 0 \\ \ln |x| - \frac{1}{x} + \ln 2 - 1 & \text{khi } x > 0. \end{cases}$

Vậy $f(-1) + f(4) = (2 - \ln 2) + \left(\ln 4 - \frac{1}{4} + \ln 2 - 1\right) = \frac{8 \ln 2 + 3}{4}$.

Chọn đáp án **(C)** □

CÂU 16. Cho hàm số $f(x) = 2x + e^x$. Một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)$ thỏa mãn $F(0) = 2024$. Biết $F(x) = ax^2 + be^x + c$, giá trị của $a + b + c$ là

Đáp án: 2025

Lời giải.

Ta có $\int f(x) dx = \int (2x + e^x) dx = x^2 + e^x + C$.

Có $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ và $F(0) = 2024$.

Tìm được
$$\begin{cases} F(x) = x^2 + e^x + C \\ F(0) = 2024 \end{cases} \Rightarrow 1 + C = 2024 \Leftrightarrow C = 2023.$$

Suy ra $F(x) = x^2 + e^x + 2023$.

Vậy $a + b + c = 2025$.

CÂU 17. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin x + 1$ biết $F\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0$. Tính giá trị của $F(\pi)$. (Làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai)

Đáp án: 4,48

Lời giải.

$$F(x) = \int (\sin x + 1) dx = x - \cos x + C.$$

$$\text{Do } F\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0 \Rightarrow \frac{\pi}{6} - \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + C = 0 \Leftrightarrow C = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6}.$$

$$\text{Suy ra } F(x) = x - \cos x + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6}.$$

$$\text{Vậy } F(\pi) = 4,48.$$

CÂU 18. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x) = (5x + 3)^5$. Biết $F(1) = 0$. Tính giá trị của $\sqrt{|F(0)|}$. (Làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất)

Đáp án: 93,3

Lời giải.

$$\text{Ta có } F(x) = \int f(x) dx = \int (5x + 3)^5 dx = \frac{(5x + 3)^6}{30} + C.$$

$$\text{Do } F(1) = 0 \Rightarrow 0 = \frac{(5 \cdot 1 + 3)^6}{30} + C \Rightarrow C = -\frac{131072}{15}.$$

$$\text{Suy ra } F(x) = \frac{(5x + 3)^6}{30} - \frac{131072}{15}.$$

$$\text{Do đó } F(0) = \frac{(5 \cdot 0 + 3)^6}{30} - \frac{131072}{15} = -\frac{52283}{6}.$$

$$\text{Vậy } \sqrt{|F(0)|} = 93,3.$$

CÂU 19. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x) = x^3 - 4x + 5$. Biết $F(1) = 3$. Tính $|F(0)|$.

Đáp án: 0,25

Lời giải.

$$\text{Ta có } F(x) = \int f(x) dx = \int (x^3 - 4x + 5) dx = \frac{x^4}{4} - 2x^2 + 5x + C.$$

$$\text{Do } F(1) = 3 \Rightarrow 3 = \frac{1^4}{4} - 2 \cdot 1^2 + 5 \cdot 1 + C \Rightarrow C = -\frac{1}{4}.$$

$$\text{Suy ra } F(x) = \frac{x^4}{4} - 2x^2 + 5x - \frac{1}{4}.$$

$$\text{Vậy } |F(0)| = 0,25.$$

CÂU 20. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x) = 3 - 5 \cos x$. Biết $F(\pi) = 2$. Tính $F\left(\frac{\pi}{2}\right)$. (Làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất)

Đáp án: -7,7

Lời giải.

$$\text{Ta có } F(x) = \int f(x) dx = \int (3 - 5 \cos x) dx = 3x - 5 \sin x + C.$$

$$\text{Do } F(\pi) = 2 \Rightarrow 2 = 3\pi - 5 \sin \pi + C \Rightarrow C = -3\pi + 2.$$

$$\text{Suy ra } F(x) = 3x - 5 \sin x - 3\pi + 2.$$

$$\text{Vậy } F\left(\frac{\pi}{2}\right) = -7,7.$$

CÂU 21. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x) = \frac{3 - 5x^2}{x}$. Biết $F(e) = 1$. Tính $F(2)$. (Làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai)

Đáp án: 8,55

Lời giải.

$$\text{Hàm số } f(x) = \frac{3 - 5x^2}{x} = \frac{3}{x} - 5x.$$

$$\text{Có } F(x) = \int f(x) dx = \int \left(\frac{3}{x} - 5x\right) dx = 3 \ln |x| - \frac{5}{2}x^2 + C.$$

$$\text{Do } F(e) = 1 \Rightarrow 1 = 3 \ln |e| - \frac{5}{2}e^2 + C \Rightarrow C = \frac{5}{2}e^2 - 2.$$

$$\text{Suy ra } F(x) = 3 \ln |x| - \frac{5}{2}x^2 + \frac{5}{2}e^2 - 2.$$

$$\text{Vậy } F(2) = 8,55.$$

CÂU 22. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x}$. Biết $F(1) = \frac{3}{2}$. Tính $F(-1)$.

Đáp án: 1,5

Lời giải.

$$\text{Hàm số } f(x) = \frac{x^2 + 1}{x} = x + \frac{1}{x}.$$

$$\text{Có } F(x) = \int f(x) dx = \int \left(x + \frac{1}{x}\right) dx = \frac{x^2}{2} + \ln|x| + C.$$

$$\text{Do } F(1) = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{3}{2} = \frac{1^2}{2} + \ln|1| + C \Rightarrow C = 1.$$

$$\text{Suy ra } F(x) = \frac{x^2}{2} + \ln|x| + 1.$$

$$\text{Vậy } F(-1) = \frac{(-1)^2}{2} + \ln|-1| + 1 = \frac{3}{2} = 1,5.$$

CÂU 23. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{x^3 - 1}{x^2}$. Biết $F(-2) = 0$. Tính giá trị của $F(2)$.

Đáp án: 1

Lời giải.

$$\text{Hàm số } f(x) = \frac{x^3 - 1}{x^2} = x - \frac{1}{x^2}.$$

$$\text{Có } F(x) = \int f(x) dx = \int \left(x - \frac{1}{x^2}\right) dx = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{x} + C.$$

$$\text{Do } F(-2) = 0 \Rightarrow 0 = \frac{(-2)^2}{2} + \frac{1}{(-2)} + C \Rightarrow C = -\frac{3}{2}.$$

$$\text{Suy ra } F(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{x} - \frac{3}{2}.$$

$$\text{Vậy } F(2) = 1.$$

CÂU 24. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = x\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$. Biết $F(1) = -2$. Tính $F(0)$.

Đáp án: -4,4

Lời giải.

$$\text{Hàm số } f(x) = x\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} = x^{\frac{3}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}.$$

$$\text{Có } F(x) = \int f(x) dx = \int \left(x^{\frac{3}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}\right) dx = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + 2\sqrt{x} + C.$$

$$\text{Do } F(1) = -2 \Rightarrow -2 = \frac{2}{5} \cdot 1^{\frac{5}{2}} + 2\sqrt{1} + C \Rightarrow C = -\frac{22}{5}.$$

$$\text{Suy ra } F(x) = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + 2\sqrt{x} - \frac{22}{5}.$$

$$\text{Vậy } F(0) = -4,4.$$

CÂU 25. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin x + 1$. Biết $F\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0$. Tính $F(-1)$. (Làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất)

Đáp án: -1,2

Lời giải.

$$\text{Ta có } F(x) = \int f(x) dx = \int (\sin x + 1) dx = -\cos x + x + C.$$

$$\text{Do } F\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0 \Rightarrow 0 = -\cos \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} + C \Rightarrow C = -\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Suy ra } F(x) = -\cos x + x - \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Vậy } F(-1) = -1,2.$$

CÂU 26. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x) = 2024 - \sin^2 \frac{x}{2}$. Biết $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2025$. Tính $\sqrt{|F(0)|}$. (Làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất)

Đáp án: 34

Lời giải.

$$\text{Hàm số } f(x) = 2024 - \sin^2 \frac{x}{2} = 2024 - \frac{1 - \cos x}{2} = \frac{4047 + \cos x}{2}.$$

$$\text{Có } F(x) = \int f(x) dx = \int \left(\frac{4047 + \cos x}{2}\right) dx = \frac{1}{2}(4047x + \sin x) + C.$$

$$\text{Do } F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2025 \Rightarrow 2025 = \frac{1}{2}\left(4047 \cdot \frac{\pi}{2} + \sin \frac{\pi}{2}\right) + C \Rightarrow C = -\frac{4047}{4}\pi + \frac{4049}{2}.$$

$$\text{Suy ra } F(x) = \frac{1}{2}(4047x + \sin x) - \frac{4047}{4}\pi + \frac{4049}{2}.$$

$$\text{Vậy } \sqrt{|F(0)|} = 34.$$

CÂU 27. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x) = \sin^2 \frac{x}{4} \cdot \cos^2 \frac{x}{4}$. Biết $F\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0$. Tính giá trị của $F(\pi)$. (Làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai)

Đáp án: 0,37

Lời giải.

$$\text{Hàm số } f(x) = \sin^2 \frac{x}{4} \cdot \cos^2 \frac{x}{4} = \frac{1}{8}(1 - \cos x).$$

$$\text{Có } F(x) = \int f(x) dx = \int \frac{1}{8}(1 - \cos x) dx = \frac{1}{8}(x - \sin x) + C.$$

$$\text{Do } F\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0 \Rightarrow 0 = \frac{1}{8}\left(\frac{\pi}{3} - \sin \frac{\pi}{3}\right) + C \Rightarrow C = -\frac{\pi}{24} + \frac{\sqrt{3}}{16}.$$

$$\text{Suy ra } F(x) = \frac{1}{8}(x - \sin x) - \frac{\pi}{24} + \frac{\sqrt{3}}{16}.$$

$$\text{Vậy } F(\pi) = 0,37.$$

CÂU 28. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x + 5 & \text{khi } x \geq 1 \\ 3x^2 + 4 & \text{khi } x < 1. \end{cases}$ Giả sử F là nguyên hàm của f trên \mathbb{R} thỏa mãn $F(0) = 2$. Giá trị của $F(-1) + 2F(2)$.

Đáp án: 27

Lời giải.

$$\text{Ta có } f(x) = \begin{cases} 2x + 5 & \text{khi } x \geq 1 \\ 3x^2 + 4 & \text{khi } x < 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F(x) = x^2 + 5x + C_1 & \text{khi } x \geq 1 \\ F(x) = x^3 + 4x + C_2 & \text{khi } x < 1. \end{cases}$$

Vì F là nguyên hàm của f trên \mathbb{R} thỏa mãn $F(0) = 2$ nên $C_2 = 2 \Rightarrow F(x) = x^3 + 4x + 2$.

Vì $F(x)$ liên tục trên \mathbb{R} nên $F(x)$ liên tục tại $x = 1$ nên:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} F(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} F(x) = F(1) \Rightarrow 6 + C_1 = 7 \Rightarrow C_1 = 1.$$

$$\text{Vậy ta có } \begin{cases} F(x) = x^2 + 5x + 1 & \text{khi } x \geq 1 \\ F(x) = x^3 + 4x + 2 & \text{khi } x < 1 \end{cases} \Rightarrow F(-1) + 2F(2) = 27.$$

CÂU 29. Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2^x$, thỏa mãn $F(0) = \frac{1}{\ln 2}$. Giá trị biểu thức $T = F(0) + F(1) + \dots + F(2018) + F(2019)$ có dạng $\frac{2^{2020} + a}{\ln b}$. Giá trị của $\frac{a}{b}$ là

Đáp án: -0,5

Lời giải.

$$\text{Ta có } \int f(x) dx = \int 2^x dx = \frac{2^x}{\ln 2} + C.$$

$$F(x) \text{ là một nguyên hàm của hàm số } f(x) = 2^x, \text{ ta có } F(x) = \frac{2^x}{\ln 2} + C \text{ mà } F(0) = \frac{1}{\ln 2}.$$

$$\Rightarrow C = 0 \Rightarrow F(x) = \frac{2^x}{\ln 2}.$$

$$\begin{aligned} T &= F(0) + F(1) + \dots + F(2018) + F(2019) \\ &= \frac{1}{\ln 2}(1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{2018} + 2^{2019}) \\ &= \frac{1}{\ln 2} \cdot \frac{2^{2020} - 1}{2 - 1} \\ &= \frac{2^{2020} - 1}{\ln 2}. \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } \frac{a}{b} = -\frac{1}{2} = -0,5$$

CÂU 30. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$. Biết $F\left(\frac{\pi}{4} + k\pi\right) = k$ với mọi $k \in \mathbb{Z}$. Tính giá trị của biểu thức $T = F(0) + F(\pi) + F(2\pi) + \dots + F(10\pi)$.

Đáp án: 44

Lời giải.

$$\text{Ta có } \int f(x) dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C.$$

$$\text{Suy ra } F(x) = \begin{cases} \tan x + C_0, & x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \\ \tan x + C_1, & x \in \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right) \\ \tan x + C_2, & x \in \left(\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right) \\ \dots \\ \tan x + C_9, & x \in \left(\frac{17\pi}{2}; \frac{19\pi}{2}\right) \\ \tan x + C_{10}, & x \in \left(\frac{19\pi}{2}; \frac{21\pi}{2}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F\left(\frac{\pi}{4} + 0\pi\right) = 1 + C_0 = 0 \Rightarrow C_0 = -1 \\ F\left(\frac{\pi}{4} + \pi\right) = 1 + C_1 = 1 \Rightarrow C_1 = 0 \\ F\left(\frac{\pi}{4} + 2\pi\right) = 1 + C_2 = 2 \Rightarrow C_2 = 1 \\ \dots \\ F\left(\frac{\pi}{4} + 9\pi\right) = 1 + C_9 = 9 \Rightarrow C_9 = 8 \\ F\left(\frac{\pi}{4} + 10\pi\right) = 1 + C_{10} = 0 \Rightarrow C_{10} = 9. \end{cases}$$

Vậy

$$\begin{aligned} T &= F(0) + F(\pi) + F(2\pi) + \dots + F(10\pi) \\ &= \tan 0 - 1 + \tan \pi + \tan 2\pi + 1 + \dots + \tan 10\pi + 9 \\ &= 44. \end{aligned}$$

CÂU 31. Hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên \mathbb{R} và $f'(x) = 2024 - 2\sin^2 \frac{x}{2}, \forall x$;

$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2023\pi}{2}$. Tính giá trị của $f(0)$.

Đáp án: -1

Lời giải.

$$f(x) = \int \left(2024 - 2\sin^2 \frac{x}{2}\right) dx = \int (2023 + \cos x) dx = 2023x + \sin x + C.$$

Tìm được $f(x) = 2023x + \sin x + C$.

$$\text{Do } f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2023\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{2023\pi}{2} = 2023 \cdot \frac{\pi}{2} + \sin \frac{\pi}{2} + C \Leftrightarrow C = -1.$$

Vậy $f(x) = 2023x + \sin x - 1$.

Do đó $f(0) = -1$.

CÂU 32. Hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên \mathbb{R} và $f'(x) = 1 + e^{2x}, \forall x; f(0) = 2$. Tính giá trị của $f(2)$. (Làm tròn đến số thập phân thứ nhất)

Đáp án: 30,8

Lời giải.

$$\text{Hàm số } f(x) = \int (1 + e^{2x}) dx = x + \frac{1}{2}e^{2x} + C.$$

$$\text{Do } f(0) = 2 \Leftrightarrow 2 = \frac{1}{2} + C \Leftrightarrow C = \frac{3}{2}.$$

$$\text{Suy ra } f(x) = x + \frac{1}{2}e^{2x} + \frac{3}{2}.$$

Vậy $f(2) = 30,8$.

CÂU 33. Hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên \mathbb{R} và $f'(x) = 2^x + 3^x, \forall x; f(0) = \frac{1}{\ln 3}$. Tính giá trị của $f(1)$. (Làm tròn đến số thập phân thứ hai)

Đáp án: 4,17

Lời giải.

$$\text{Hàm số } f(x) = \int (2^x + 3^x) dx = \int 2^x dx + \int 3^x dx = \frac{2^x}{\ln 2} + \frac{3^x}{\ln 3} + C.$$

$$f(x) = \frac{2^x}{\ln 2} + \frac{3^x}{\ln 3} + C.$$

$$\text{Do } f(0) = \frac{1}{\ln 3} \Leftrightarrow \frac{1}{\ln 3} = \frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln 3} + C \Leftrightarrow C = -\frac{1}{\ln 2}$$

$$\text{Suy ra } f(x) = \frac{2^x}{\ln 2} + \frac{3^x}{\ln 3} - \frac{1}{\ln 2}.$$

Vậy $f(1) = 4,17$.

CÂU 34. Hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên \mathbb{R} và $f'(x) = e^{3x+2024}, \forall x$ thỏa mã $f(-675) = 1$. Giá trị của $f(-674)$ bằng

Đáp án: 3,34

Lời giải.

Hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = e^{3x+2024}$.

$$\text{Ta có } f(x) = \int e^{3x+2024} dx = \frac{1}{3}e^{3x+2024} + C.$$

$$\text{Suy ra } f(x) = \frac{1}{3}e^{3x+2024} + C.$$

Với $f(-675) = 1 \Rightarrow 1 = \frac{1}{3}e^{3 \cdot (-675) + 2024} + C \Rightarrow C = 1 - \frac{1}{3e}$.

Vậy $f(x) = \frac{1}{3}e^{3x+2024} + 1 - \frac{1}{3e}$.

Giá trị $f(-274) = \frac{1}{3}e^2 + 1 - \frac{1}{3e} = 3,34$.

CÂU 35. Hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên \mathbb{R} và $f'(x) = 3^{x+2} \cdot 2^{2x+1}$, $\forall x$ thỏa mãn $f(0) = \frac{1}{2\ln 2}$.
Giá trị của $f(1)$ bằng

Đáp án: 80,4

Lời giải.

Hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = 3^{x+2} \cdot 2^{2x+1}$.

Ta có $f(x) = \int 3^{x+2} \cdot 2^{2x+1} dx = \int 3^2 \cdot 3^x \cdot 2 \cdot 4^x dx = 18 \int 12^x dx = 18 \cdot \frac{12^x}{\ln 12} + C$.

Suy ra $f(x) = 18 \cdot \frac{12^x}{\ln 12} + C$.

Với $f(0) = \frac{1}{2\ln 2} \Rightarrow \frac{1}{2\ln 2} = 18 \cdot \frac{1}{\ln 12} + C \Rightarrow C = \frac{1}{2\ln 2} - \frac{18}{2\ln 2 + \ln 3}$.

Vậy $f(x) = 18 \cdot \frac{12^x}{\ln 12} + \frac{1}{2\ln 2} - \frac{18}{2\ln 2 + \ln 3}$.

Giá trị $f(1) = 18 \cdot \frac{12}{\ln 12} + \frac{1}{2\ln 2} - \frac{18}{2\ln 2 + \ln 3} = \frac{216}{\ln 12} + \frac{1}{\ln 4} - \frac{18}{\ln 4 + \ln 3} = 80,4$.

CÂU 36. Hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên \mathbb{R} và $f'(x) = (3^x + 5^x)^2$, $\forall x$ thỏa mãn $f(0) = \frac{1}{\ln 5 + \ln 3 + \ln 2}$. Giá trị của $f(1)$ bằng

Đáp án: 19,9

Lời giải.

Hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (3^x + 5^x)^2$.

Ta có $f(x) = \int (3^x + 5^x)^2 dx$

$$= \int (9^x + 30^x + 25^x) dx$$

$$= \frac{9^x}{\ln 9} + \frac{30^x}{\ln 30} + \frac{25^x}{\ln 25} + C$$

$$= \frac{9^x}{2\ln 3} + \frac{30^x}{\ln 5 + \ln 3 + \ln 2} + \frac{25^x}{2\ln 5} + C.$$

Suy ra $f(x) = \frac{9^x}{2\ln 3} + \frac{30^x}{\ln 5 + \ln 3 + \ln 2} + \frac{25^x}{2\ln 5} + C$.

Với $f(0) = \frac{1}{\ln 5 + \ln 3 + \ln 2}$

$$\Rightarrow \frac{1}{\ln 5 + \ln 3 + \ln 2} = \frac{1}{2\ln 3} + \frac{1}{\ln 5 + \ln 3 + \ln 2} + \frac{1}{2\ln 5} + C$$

$$\Leftrightarrow C = -\frac{1}{2\ln 3} - \frac{1}{2\ln 5}$$

Vậy $f(x) = \frac{9^x}{2\ln 3} + \frac{30^x}{\ln 5 + \ln 3 + \ln 2} + \frac{25^x}{2\ln 5} - \frac{1}{2\ln 3} - \frac{1}{2\ln 5}$

$$= \frac{9^x}{\ln 9} + \frac{30^x}{\ln 30} + \frac{25^x}{\ln 25} - \frac{1}{\ln 9} - \frac{1}{\ln 25}$$

Giá trị của $f(1) = \frac{1}{\ln 9} + \frac{1}{\ln 30} + \frac{1}{\ln 25} - \frac{1}{\ln 9} - \frac{1}{\ln 25}$

$$= \frac{8}{\ln 9} + \frac{30}{\ln 30} + \frac{24}{\ln 25}$$

$$= 19,9.$$

3

Ứng dụng trong bài toán thực tiễn

Giả sử $v(t)$ là vận tốc của vật M tại thời điểm t và $s(t)$ là quãng đường vật đi được sau khoảng thời gian t tính từ lúc bắt đầu chuyển động. Ta có mối liên hệ giữa $s(t)$ và $v(t)$ như sau.

⊙ Đạo hàm của quãng đường là vận tốc $s'(t) = v(t)$.

⊙ Nguyên hàm của vận tốc là quãng đường $s(t) = \int v(t) dt$.

Nếu gọi $a(t)$ là gia tốc của vật M thì ta có mối liên hệ giữa $v(t)$ và $a(t)$ như sau.

- ☑ Đạo hàm của vận tốc là gia tốc $v'(t) = a(t)$.
- ☑ Nguyên hàm của gia tốc là vận tốc $v(t) = \int a(t) dt$.

CÂU 1. Một ô tô đang chạy với vận tốc 20 m/s thì người lái đạp phanh. Sau khi đạp phanh, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -40t + 20$ m/s, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Gọi $s(t)$ là quãng đường xe ô tô đi được trong thời gian t (giây) kể từ lúc đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ô tô còn di chuyển bao nhiêu mét?

- (A) 5 cm. (B) 7,5 m. (C) $\frac{5}{2}$ m. (D) 5 m.

🗨️ **Lời giải.**

Ta có $v(t) = -40t + 20$.

$$\text{Suy ra } s(t) = \int v(t) dt = \int (-40t + 20) dt = -20t^2 + 20t + C.$$

Chọn $t = 0$ suy ra $s(0) = 0 \Rightarrow C = 0$.

Khi đó $s(t) = -20t^2 + 20t$.

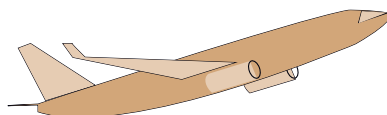
Khi xe dừng hẳn $v(t) = 0 \Leftrightarrow -40t + 20 = 0 \Leftrightarrow t = 0,5$.

Từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ô tô còn di chuyển được

$$s(0,5) = -20 \cdot (0,5)^2 + 20 \cdot 0,5 = 5 \text{ m.}$$

Chọn đáp án (D) □

CÂU 2. Bạn Minh Hiền ngồi trên máy bay đi du lịch thế giới với vận tốc chuyển động của máy bay là $v(t) = 3t^2 + 5$ (m/s). Quãng đường máy bay bay từ giây thứ 4 đến giây thứ 10 là



- (A) 36 m. (B) 252 m. (C) 1134 m. (D) 966 m.

🗨️ **Lời giải.**

Ta có $v(t) = 3t^2 + 5$.

$$\Rightarrow s(t) = \int v(t) dt = \int (3t^2 + 5) dt = t^3 + 5t + C.$$

$$\Rightarrow s(t) = t^3 + 5t + C.$$

Chọn $t = 0 \Rightarrow s(0) = 0 \Rightarrow C = 0$.

$$\Rightarrow s(t) = t^3 + 5t.$$

Quãng đường máy bay bay từ giây thứ 4 là $s(4) = 4^3 + 5 \cdot 4 = 84$ (m).

Quãng đường máy bay bay từ giây thứ 10 là $s(10) = 10^3 + 5 \cdot 10 = 1050$ (m).

Quãng đường máy bay bay từ giây thứ 4 đến giây thứ 10 là $s(10) - s(4) = 966$ (m).

Chọn đáp án (D) □

CÂU 3. Một ô tô đang chạy với vận tốc 12 m/s thì người lái đạp phanh; từ thời điểm đó, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -6t + 12$ (m/s), trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây kể từ lúc đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi ô tô dừng hẳn, ô tô còn di chuyển được bao nhiêu mét?

- (A) 24 m. (B) 12 m. (C) 6 m. (D) 0,4 m.

🗨️ **Lời giải.**

Ta có

$$\begin{aligned} v(t) &= -6t + 12 \\ \Rightarrow s(t) &= \int v(t) dt \\ \Leftrightarrow s(t) &= \int (-6t + 12) dt \\ \Leftrightarrow s(t) &= -3t^2 + 12t + C. \end{aligned}$$

Chọn $t = 0 \Rightarrow s(0) = 0 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow s(t) = -3t^2 + 12t$.

Khi xe dừng hẳn thì $v(t) = 0 \Leftrightarrow -6t + 12 = 0 \Rightarrow t = 2$.

Từ lúc đạp phanh đến khi ô tô dừng hẳn thì ô tô còn di chuyển được quãng đường là

$$S = s(2) - s(0) = s(2) = -3 \cdot 2^2 + 12 \cdot 2 = 12 \text{ (m).}$$

Chọn đáp án (B) □

CÂU 4. Một ô tô đang chạy với vận tốc 36 km/h thì tăng tốc chuyển động nhanh dần đều với gia tốc $a(t) = 1 + \frac{t}{3}$ (m/s²) tính quãng đường ô tô đi được sau 6 giây kể từ khi ô tô bắt đầu tăng tốc.

(A) $S = 90$ m.

(B) $S = 246$ m.

(C) $S = 58$ m.

(D) $S = 100$ m.

Lời giải.

Đổi $36 \text{ km/h} = 36 \cdot \frac{1000}{3600} = 10 \text{ m/s}$.

Ta có $a(t) = 1 + \frac{t}{3}$.

$\Rightarrow v(t) = \int a(t) dt = \int \left(1 + \frac{t}{3}\right) dt = t + \frac{1}{6}t^2 + C$.

Từ lúc bắt đầu tăng tốc thì vận tốc của xe là 10 m/s nên ta có

$$v(0) = 10$$

$$\Rightarrow C = 10$$

$$\Rightarrow v(t) = t + \frac{1}{6}t^2 + 10$$

$$\Rightarrow s(t) = \int v(t) dt$$

$$\Rightarrow s(t) = \int \left(t + \frac{1}{6}t^2 + 10\right) dt$$

$$\Rightarrow s(t) = \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{18} + 10t + C_1.$$

Quãng đường tính từ lúc xe bắt đầu tăng tốc nên $s(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0$.

Vậy $s(6) = \frac{6^2}{2} + \frac{6^3}{18} + 10 \cdot 6 = 90$ (m).

Chọn đáp án (A) □

CÂU 5. Một ca nô đang chạy trên hồ Tây với vận tốc 20 m/s thì hết xăng; từ thời điểm đó, ca nô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -5t + 20$ (m/s), trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc hết xăng. Hỏi từ lúc hết xăng đến lúc ca nô dừng hẳn thì ca nô đi được bao nhiêu mét?

(A) 10 m.

(B) 20 m.

(C) 30 m.

(D) 40 m.

Lời giải.

Ta có $v(t) = -5t + 20$.

$\Rightarrow s(t) = \int v(t) dt = \int (-5t + 20) dt = -\frac{5}{2}t^2 + 20t + C$.

Chọn $t = 0 \Rightarrow s(0) = 0 \Rightarrow C = 0$. Suy ra $s(t) = -\frac{5}{2}t^2 + 20t$.

Khi xe dừng hẳn thì $v(t) = 0 \Leftrightarrow -5t + 20 = 0 \Rightarrow t = 4$ (s).

Từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ô tô còn đi chuyển được $s = -\frac{5}{2} \cdot 4^2 + 20 \cdot 4 = 40$ (m).

Chọn đáp án (D) □

CÂU 6. Một vật chuyển động với vận tốc 10 m/s thì tăng tốc với gia tốc được tính theo thời gian t là $a(t) = 3t + t^2$ (m²/s). Tính quãng đường vật đi được trong 10s kể từ khi bắt đầu tăng tốc.

(A) $\frac{130}{3}$ m.

(B) $\frac{310}{3}$ m.

(C) $\frac{3400}{3}$ m.

(D) $\frac{4300}{3}$ m.

Lời giải.

Ta có $a(t) = 3t + t^2$

$\Rightarrow v(t) = \int a(t) dt = \int (3t + t^2) dt = \frac{3}{2}t^2 + \frac{1}{3}t^3 + C$.

Từ lúc bắt đầu tăng tốc thì vận tốc của xe là 10 m/s nên ta có

$v(0) = 10 \Rightarrow C = 10$.

$\Rightarrow v(t) = \frac{3}{2}t^2 + \frac{1}{3}t^3 + 10$.

$\Rightarrow s(t) = \int v(t) dt = \int \left(\frac{3}{2}t^2 + \frac{1}{3}t^3 + 10\right) dt = \frac{1}{2}t^3 + \frac{1}{12}t^4 + 10t + C_1$.

Quãng đường tính từ lúc xe bắt đầu tăng tốc nên $s(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0$.

Vậy $s(10) = \frac{1}{2} \cdot 10^3 + \frac{1}{12} \cdot 10^4 + 10 \cdot 10 = \frac{4300}{3}$ m.

Chọn đáp án (D) □

CÂU 7. Tại một nơi không có gió, một chiếc khí cầu đang đứng yên ở độ cao 162 m so với mặt đất đã được phi công cài đặt cho nó chế độ chuyển động đi xuống. Biết rằng, khí cầu đã chuyển động theo phương thẳng đứng với vận tốc tuân theo quy

luật $v(t) = 10t - t^2$, trong đó t (phút) là thời gian tính từ lúc bắt đầu chuyển động, $v(t)$ được tính theo đơn vị mét/phút (m/p). Nếu như vậy thì khi bắt đầu tiếp đất vận tốc v của khí cầu là

- Ⓐ 5 m/p. Ⓑ 7 m/p. Ⓒ 9 m/p. Ⓓ 3 m/p.

Lời giải.

Ta có $v(t) = 10t - t^2$.

$$\Rightarrow s(t) = \int v(t) dt = \int (10t - t^2) dt = 5t^2 - \frac{1}{3}t^3 + C.$$

Từ lúc bắt đầu giảm độ cao thì khinh khí cầu ở độ cao 162 m nên ta có

$$s(0) = 0 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow s(t) = 5t^2 - \frac{1}{3}t^3.$$

$$\text{mà } s(t) = 162 \Rightarrow 5t^2 - \frac{1}{3}t^3 = 162 \Leftrightarrow t = 9 \text{ (s).}$$

Suy ra vận tốc khi chạm đất của khinh khí cầu là

$$v(9) = 10 \cdot 9 - 9^2 = 9 \text{ (m/p).}$$

Chọn đáp án Ⓒ. □

CÂU 8. Một viên đạn được bắn lên theo phương thẳng đứng với vận tốc ban đầu là 25 m/s, gia tốc trọng trường là 9,8 m/s². Quãng đường viên đạn đi được từ lúc bắn cho đến khi chạm đất gần bằng kết quả nào nhất trong các kết quả sau?

- Ⓐ 30,78 m. Ⓑ 31,89 m. Ⓒ 32,43 m. Ⓓ 33,88 m.

Lời giải.

Ta có $a(t) = -9,8 \text{ (m/s}^2\text{)}$.

$$\Rightarrow v(t) = \int a(t) dt = \int (-9,8) dt = -9,8t + C.$$

Từ lúc bắt đầu bắn viên đạn thì viên đạn có vận tốc 25 m/s nên ta có

$$v(0) = 25 \Rightarrow C = 25 \Rightarrow v(t) = -9,8t + 25.$$

$$\Rightarrow s(t) = \int v(t) dt = \int (-9,8t + 25) dt = -4,9t^2 + 25t + C_1.$$

Ta có $s(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0$.

$$s(t) = -4,9t^2 + 25t.$$

Tới khi vận tốc viên đạn bằng không thì ta có $v(t) = 0 \Rightarrow -9,8t + 25 = 0 \Leftrightarrow t \approx 2,55 \text{ s}$. Suy ra quãng đường viên đạn đi được từ lúc bắn cho đến khi chạm đất là

$$S = 2 \cdot (-4,9 \cdot (2,55)^2 + 25 \cdot 2,55) \approx 31,89 \text{ m.}$$

Chọn đáp án Ⓑ. □

CÂU 9. Trong một đợt xả lũ, nhà máy thủy điện đã xả lũ trong 40 phút với tốc độ lưu lượng nước tại thời điểm t giây là $h'(t) = 10t + 500 \text{ (m}^3\text{/s)}$. Hỏi sau thời gian xả lũ trên thì hồ thoát nước của nhà máy đã thoát đi một lượng nước là bao nhiêu?

- Ⓐ $5 \cdot 10^4 \text{ m}^3$. Ⓑ $4 \cdot 10^6 \text{ m}^3$. Ⓒ $3 \cdot 10^7 \text{ m}^3$. Ⓓ $6 \cdot 10^6 \text{ m}^3$.

Lời giải.

Ta có $h'(t) = 10t + 500$.

$$\Rightarrow h(t) = \int (10t + 500) dt = 5t^2 + 500t + C.$$

$$\Rightarrow h(t) = 5t^2 + 500t + C.$$

Chọn $t = 0 \Rightarrow h(0) = 0 \Rightarrow C = 0$.

$$\Rightarrow h(t) = 5t^2 + 500t.$$

Thủy điện đã xả lũ trong 40 phút=2400 giây thì thoát đi một lượng nước là

$$h(2400) = 5 \cdot 2400^2 + 500 \cdot 2400 = 3 \cdot 10^7 \text{ (m}^3\text{)}.$$

Chọn đáp án Ⓒ. □

CÂU 10. Một bác thợ xây bơm nước vào bể chứa nước. Gọi $h(t)$ là thể tích nước bơm được sau t giây. Cho $h'(t) = 3at^2 + bt \text{ (m}^3\text{/s)}$ và ban đầu bể không có nước. Sau 5 giây thì thể tích nước trong bể là 150 m³. Sau 10 giây thì thể tích nước trong bể là 1100 m³. Hỏi thể tích nước trong bể sau khi bơm được 20 giây là bao nhiêu.

- Ⓐ 8400 m³. Ⓑ 7400 m³. Ⓒ 6000 m³. Ⓓ 4200 m³.

Lời giải.

Ta có $h'(t) = 3at^2 + bt$.

$$\Rightarrow h(t) = \int (3at^2 + bt) dt = at^3 + \frac{1}{2}bt^2 + C.$$

$$\Rightarrow h(t) = at^3 + \frac{1}{2}bt^2 + C.$$

Chọn $t = 0 \Rightarrow h(0) = 0 \Rightarrow C = 0$.

$$\Rightarrow h(t) = at^3 + \frac{1}{2}bt^2.$$

Sau 5 giây thì thể tích nước trong bể là 150 m^3 là $h(5) = 150 \Leftrightarrow 125a + \frac{25}{2}b = 150$. (1)

Sau 10 giây thì thể tích nước trong bể là 1100 m^3 là $h(10) = 1100 \Leftrightarrow 1000a + 50b = 1100$. (2)

$$\text{Từ (1) và (2) ta có hệ } \begin{cases} 125a + \frac{25}{2}b = 150 \\ 1000a + 50b = 1100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2. \end{cases}$$

$$\Rightarrow h(t) = t^3 + t^2.$$

Thể tích nước trong bể sau khi bơm được 20 giây là $h(20) = 20^3 + 20^2 = 8400 \text{ (m}^3\text{)}$.

Chọn đáp án **(A)** ☐

CÂU 11. Gọi $h(t)$ (m) là mực nước ở bồn chứa sau khi bơm nước được t giây. Biết rằng $h'(t) = \frac{1}{5}\sqrt[3]{t}$ (m/s) và lúc đầu bồn không có nước. Tìm mực nước ở bồn sau khi bơm nước được 6 giây (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

- (A)** 2,64 m. **(B)** 1,22 m. **(C)** 2,22 m. **(D)** 1,64 m.

Lời giải.

$$\text{Ta có } h'(t) = \frac{1}{5}\sqrt[3]{t}.$$

$$\Rightarrow h(t) = \int \frac{1}{5}\sqrt[3]{t} dx = \frac{1}{5} \int t^{\frac{1}{3}} dx = \frac{1}{5} \frac{t^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} + C = \frac{3}{20}t\sqrt[3]{t} + C.$$

$$\Rightarrow h(t) = \frac{3}{20}t\sqrt[3]{t} + C$$

$$\text{Chọn } t = 0 \Rightarrow h(0) = 0 \Rightarrow C = 0.$$

$$\Rightarrow h(t) = \frac{3}{20}t\sqrt[3]{t}.$$

$$\text{Mức nước ở bồn sau khi bơm nước được 6 giây } h(6) = \frac{3}{20} \cdot 6\sqrt[3]{6} \approx 1,64 \text{ (m)}.$$

Chọn đáp án **(D)** ☐

CÂU 12. Sự sản sinh vi rút Zika ngày thứ t có số lượng là $N(t)$ con, biết $N'(t) = \frac{1000}{t}$ và lúc đầu đám vi rút có số lượng 250.000 con. Tính số lượng vi rút sau 10 ngày.

- (A)** 272304 con. **(B)** 212302 con. **(C)** 242102 con. **(D)** 252302 con.

Lời giải.

$$\text{Ta có } N'(t) = \frac{1000}{t}.$$

$$\Rightarrow N(t) = \int \frac{1000}{t} dt = 1000 \ln |t| + C.$$

$$\Rightarrow N(t) = 1000 \ln |t| + C.$$

$$\text{Chọn } t = 1 \Rightarrow N(1) = 250000 \Rightarrow C = 250000.$$

$$\Rightarrow N(t) = 1000 \ln |t| + 250000.$$

$$\text{Số lượng vi rút sau 10 ngày là } N(10) = 1000 \ln 10 + 250000 \approx 252302 \text{ (con)}.$$

Chọn đáp án **(D)** ☐

CÂU 13. Một chiếc ô tô đang chạy với vận tốc 15 m/s thì nhìn thấy chướng ngại vật trên đường cách đó 50 m , người lái xe hãm phanh khẩn cấp. Sau khi hãm phanh, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -3t + 15$ (m/s), trong đó t (giây). Gọi $s(t)$ là quãng đường xe ô tô đi được trong thời gian t (giây) kể từ lúc đạp phanh. Hỏi từ lúc hãm phanh đến khi dừng hẳn, ô tô đi chuyển được bao nhiêu mét?

Đáp án: 37,5

Lời giải.

Quãng đường xe ô tô đi được trong thời gian t (giây) là một nguyên hàm của $v(t)$ nên

$$s(t) = \int v(t) dx = \int (-3t + 15) dx = -\frac{3t^2}{2} + 15t + C.$$

$$\Rightarrow s(t) = -\frac{3t^2}{2} + 15t + C.$$

$$\text{Chọn } t = 0 \Rightarrow s(0) = 0$$

$$\Rightarrow C = 0$$

$$\Rightarrow s(t) = -\frac{3t^2}{2} + 15t$$

$$\text{Khi xe dừng hẳn thì } v(t) = 0 \Leftrightarrow -3t + 15 = 0 \Rightarrow t = 5 \text{ (s)}.$$

Thời gian kể từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn là 5 giây

Sau khi đạp phanh đến khi dừng hẳn, xe đi được quãng đường

$$s(5) = -\frac{3 \cdot 5^2}{2} + 15 \cdot 5 = 37,5 \text{ (m)}.$$

CÂU 14. Một chiếc ô tô đang chạy với vận tốc 72 km/h thì nhìn thấy chướng ngại vật trên đường cách đó 40 m , người lái xe hãm phanh khẩn cấp. Sau khi hãm phanh, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -10t + 20$ (m/s), trong

đó t tính bằng giây. Gọi $s(t)$ là quãng đường xe ô tô đi được trong thời gian t (giây) kể từ lúc đạp phanh. Hỏi từ lúc hãm phanh đến khi dừng hẳn, ô tô di chuyển được bao nhiêu mét?

Đáp án: 20

Lời giải.

Quãng đường xe ô tô đi được trong thời gian t (giây) là một nguyên hàm của $v(t)$ nên

$$s(t) = \int v(t) dx = \int (-10t + 20) dx = -5t^2 + 20t + C.$$

$$\Rightarrow s(t) = -5t^2 + 20t + C.$$

$$\text{Chọn } t = 0 \Rightarrow s(0) = 0.$$

$$\Rightarrow C = 0.$$

$$\Rightarrow s(t) = -5t^2 + 20t.$$

$$\text{Khi xe dừng hẳn thì } v(t) = 0 \Leftrightarrow -10t + 20 = 0 \Rightarrow t = 2 \text{ (s)}.$$

Thời gian kể từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn là 2 giây.

Sau khi đạp phanh đến khi dừng hẳn, xe đi được quãng đường

$$s(2) = -5 \cdot 2^2 + 20 \cdot 2 = 20 \text{ (m)}.$$

CÂU 15. Một viên đạn được bắn lên theo phương thẳng đứng từ mặt đất. Tại thời điểm t giây vận tốc của nó được cho bởi công thức $v(t) = 24,5 - 9,8t$ (m/s). Tính quãng đường viên đạn đi từ lúc bắn lên cho tới khi rơi xuống đất (làm tròn tới hàng đơn vị).

Đáp án: 61

Lời giải.

Quãng đường viên đạn đi được là

$$s(t) = \int (24,5 - 9,8t) dx = 24,5t - 4,9t^2 + C.$$

$$\Rightarrow s(t) = 24,5t - 4,9t^2 + C.$$

$$\text{Chọn } t = 0 \Rightarrow s(0) = 0.$$

$$\Rightarrow C = 0.$$

$$\Rightarrow s(t) = 24,5t - 4,9t^2.$$

$$\text{Khi viên đạn đạt độ cao lớn nhất thì } v(t) = 0 \Leftrightarrow 24,5 - 9,8t = 0 \Leftrightarrow t = 2,5 \text{ (s)}.$$

Quãng đường viên đạn đi từ lúc bắn lên cho tới khi rơi xuống đất là

$$2 \cdot s(2,5) = 2(24,5 \cdot 2,5 - 4,9 \cdot 2,5^2) = 61,25 \approx 61 \text{ (m)}.$$

CÂU 16. Mức nước trong hồ chứa của nhà máy điện thủy triều thay đổi trong suốt một ngày do nước chảy ra khi thủy triều xuống và nước chảy vào khi thủy triều lên (như hình vẽ). Tốc độ thay đổi của mức nước được xác định bởi hàm số $h'(t) = \frac{1}{90}(t^2 - 17t + 60)$, trong đó t tính bằng giờ ($0 \leq t \leq 24$), $h'(t)$ tính bằng mét/giờ. Tại thời điểm $t = 0$, mức nước trong hồ chứa cao 8 m. Mức nước trong hồ cao nhất là bao nhiêu?

Đáp án: 20,8

Lời giải.

$$\text{Ta có } h'(t) = \frac{1}{90}(t^2 - 17t + 60).$$

$$\Rightarrow h(t) = \frac{1}{90} \int (t^2 - 17t + 60) dt = \frac{1}{90} \left(\frac{1}{3}t^3 - \frac{17}{2}t^2 + 60t \right) + C.$$

$$\Rightarrow h(t) = \frac{1}{90} \left(\frac{1}{3}t^3 - \frac{17}{2}t^2 + 60t \right) + C.$$

$$\text{Tại thời điểm } t = 0, \text{ mức nước trong hồ chứa cao 8 nên } h(0) = 8 \Rightarrow C = 8.$$

$$\Rightarrow h(t) = \frac{1}{90} \left(\frac{1}{3}t^3 - \frac{17}{2}t^2 + 60t \right) + 8 \quad (0 \leq t \leq 24).$$

$$\text{Ta có } h'(t) = 0 \Leftrightarrow t^2 - 17t + 60 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 5 \\ t = 12. \end{cases}$$

Lập bảng biến thiên:

x	0	5	12	24			
$h'(x)$		+	0	-	0	+	
$h(x)$			$\frac{1019}{108}$		$\frac{44}{5}$		$\frac{104}{5}$
		8					

Mức nước trong hồ cao nhất: $\frac{104}{5} = 20,8$ m

CÂU 17. Gọi $h(t)$ là chiều cao của cây keo (tính theo mét) sau khi trồng t năm. Biết rằng năm đầu tiên cây cao 1,5 m, trong những năm tiếp theo, cây phát triển với tốc độ $h'(t) = \frac{1}{\sqrt[4]{t}}$ (mét/năm). Sau bao nhiêu năm cây cao được 3 m (kết quả làm tròn tới hàng phần trăm).

Đáp án: 2,73

Lời giải.

Ta có $h'(t) = \frac{1}{\sqrt[4]{t}}$.

$$\Rightarrow h(t) = \int \frac{1}{\sqrt[4]{t}} dt = \int t^{-\frac{1}{4}} dt = \frac{t^{-\frac{1}{4}+1}}{-\frac{1}{4}+1} + C = \frac{4}{3} \sqrt[4]{t^3} + C.$$

$$\Rightarrow h(t) = \frac{4}{3} \sqrt[4]{t^3} + C.$$

Năm đầu tiên cây cao 1,5 m nên $h(1) = 1,5 \Leftrightarrow 1,5 = \frac{4}{3} \sqrt[4]{1} + C \Rightarrow C = \frac{1}{6}$.

$$\Rightarrow h(t) = \frac{4}{3} \sqrt[4]{t^3} + \frac{1}{6}.$$

Cây cao được 3 m nên $h(t) = 3 \Leftrightarrow \frac{4}{3} \sqrt[4]{t^3} + \frac{1}{6} = 3 \Leftrightarrow \sqrt[4]{t^3} = \frac{17}{8} \Rightarrow t \approx 2,73$ (m).

CÂU 18. Người ta bơm nước vào một bồn chứa, lúc đầu bồn không chứa nước, mức nước ở bồn chứa sau khi bơm phụ thuộc vào thời gian bơm nước theo một hàm số $h = h(t)$ trong đó h tính bằng cm, t tính bằng giây. Biết rằng $h'(t) = \sqrt[3]{2t}$ (cm/s). Mức nước ở bồn sau khi bơm được 13 giây là bao nhiêu? (kết quả làm tròn tới hàng đơn vị).

Đáp án: 23

Lời giải.

Ta có $h'(t) = \sqrt[3]{2t}$ (cm/s).

$$\Rightarrow h(t) = \int \sqrt[3]{2t} dt = \sqrt[3]{2} \int t^{\frac{1}{3}} dt = \sqrt[3]{2} \frac{t^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} + C = \frac{3\sqrt[3]{2}}{4} \sqrt[3]{t^4} + C.$$

$$\Rightarrow h(t) = \frac{3}{4} \sqrt[3]{t^4} + C.$$

Lúc đầu bồn không chứa nước nên $h(0) = 0 \Rightarrow C = 0$.

$$\Rightarrow h(t) = \frac{3}{4} \sqrt[3]{t^4} \text{ (cm)}.$$

Mức nước ở bồn sau khi bơm được 13 giây là $h(t) = \frac{3}{4} \sqrt[3]{13^4} \approx 23$ cm.

CÂU 19. Khi quan sát một đám vi khuẩn trong phòng thí nghiệm người ta thấy tại ngày thứ t có số lượng là $N(t)$. Biết rằng $N'(t) = \frac{1500}{t}$ và tại ngày thứ nhất số lượng vi khuẩn là 5000 con. Tính số lượng vi khuẩn tại ngày thứ 12 (làm tròn đến hàng đơn vị).

Đáp án: 8727

Lời giải.

Ta có $N'(t) = \frac{1500}{t}$.

$$\Rightarrow N(t) = \int \frac{1500}{t} dt = 1500 \cdot \ln t + C.$$

$$\Rightarrow N(t) = 1500 \ln t + C.$$

Tại ngày thứ nhất số lượng vi khuẩn là 5000 con nên

$$N(1) = 5000 \Rightarrow C = 5000 \Rightarrow N(t) = 1500 \ln t + 5000 \text{ (con)}.$$

Số lượng vi khuẩn tại ngày thứ 12 là $N(12) = 1500 \ln 12 + 5000 \approx 8727$ con.

CÂU 20. Vi khuẩn HP (*Helicobacter pylori*) gây đau dạ dày, tại ngày thứ t với số lượng là $F(t)$. Biết $F'(t) = \frac{600}{t}$ và ban đầu bệnh nhân có 2000 con vi khuẩn. Sau 15 ngày bệnh nhân phát hiện ra bị bệnh. Hỏi khi đó có bao nhiêu con vi khuẩn trong dạ dày (lấy xấp xỉ tới hàng đơn vị)? Biết rằng nếu phát hiện sớm khi số lượng không vượt quá 4000 con thì bệnh nhân sẽ được cứu chữa.

Đáp án: 3625

Lời giải.

Ta có

$$F'(t) = \frac{600}{t}$$

$$\Leftrightarrow F(t) = \int \frac{600}{t} dt$$

$$\Leftrightarrow F(t) = 600 \cdot \ln t + C.$$

Tại ngày thứ nhất số lượng vi khuẩn là 2000 con nên

$$F(1) = 2000 \Rightarrow C = 2000.$$

$$\Rightarrow F(t) = 600 \ln t + 2000$$

Số lượng vi khuẩn sau 15 ngày là $F(15) = 600 \ln 15 + 2000 \approx 3625$ (con).

D. NGUYÊN HÀM HÀM ẨN

Cần nhớ các công thức đạo hàm của hàm hợp

$$\int f'(x)dx = f(x) + C$$

$$f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) = [f(x) \cdot g(x)]'$$

$$\frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)} = \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right]'$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = [\ln f(x)]'$$

$$-\frac{f'(x)}{f^2(x)} = \left[\frac{1}{f(x)} \right]'$$

$$-\frac{f'(x)}{f^n(x)} = \left[\frac{1}{(n-1)[f(x)]^{n-1}} \right]'$$

$$n \cdot f'(x) \cdot f^{n-1}(x) = [f^n(x)]'$$

$$\frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} = [2\sqrt{f(x)}]'$$

4

1. Điều kiện hàm ẩn có dạng

$$\begin{cases} f'(x) = g(x) \cdot h[f(x)] \\ f'(x) \cdot h[f(x)] = g(x). \end{cases}$$

Phương pháp giải

$$\frac{f'(x)}{h[f(x)]} = g(x) \Leftrightarrow \int \frac{f'(x)}{h[f(x)]} dx = \int g(x) dx \Leftrightarrow \int \frac{d[f(x)]}{h[f(x)]} = \int g(x) dx.$$

$$f'(x)h[f(x)] = g(x) \Leftrightarrow \int f'(x)h[f(x)]dx = \int g(x)dx \Leftrightarrow \int h[f(x)]d[f(x)] = \int g(x)dx.$$

Chú ý: Ngoài việc nguyên hàm hai vế, ta có thể lấy tích phân hai vế (tùy câu hỏi của bài toán)

2. Điều kiện hàm ẩn có dạng

$$u(x)f'(x) + u'(x)f(x) = h(x)$$

Phương pháp giải Dễ dàng thấy rằng $u(x)f'(x) + u'(x)f(x) = [u(x)f(x)]'$.

Do đó $u(x)f'(x) + u'(x)f(x) = h(x) \Leftrightarrow [u(x)f(x)]' = h(x)$.

Suy ra $u(x)f(x) = \int h(x)dx$.

Từ đây ta dễ dàng tính được $f(x)$.

CÂU 1. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$ và $f'(x) \sin^2 \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2} = 1$. Tính $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

A $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

B $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$.

C $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$.

D $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4$.

Lời giải.

Ta có $f'(x) \sin^2 \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2} = 1$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\sin^2 \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2}}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\frac{1}{4} \sin^2 x}$$

$$\Rightarrow f(x) = 4 \int \frac{1}{\sin^2 x} dx.$$

Tìm được $f(x) = -4 \cot x + C$.

Với $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$ thì $C = 4$.

Suy ra $f(x) = -4 \cot x + 4$.

Vậy $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -4 \cot \frac{\pi}{2} + 4 = 4$.

Chọn đáp án (D) □

CÂU 2. Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn $f'(x) \cdot f(x) = x^4 + x^2$. Biết $f(0) = 2$. Tính $f^2(2)$.

(A) $f^2(2) = \frac{313}{15}$.

(B) $f^2(2) = \frac{332}{15}$.

(C) $f^2(2) = \frac{324}{15}$.

(D) $f^2(2) = \frac{323}{15}$.

Lời giải.

Ta có $f'(x) \cdot f(x) = x^4 + x^2 \Leftrightarrow f(x)df(x) = (x^4 + x^2)dx$

$$\Leftrightarrow \int f'(x) \cdot f(x)dx = \int (x^4 + x^2)dx + C$$

$$\Rightarrow \frac{f^2(x)}{2} = \frac{x^5}{5} + \frac{x^3}{3} + C.$$

Do $f(0) = 2 \Rightarrow \frac{f^2(0)}{2} = \frac{0^5}{5} + \frac{0^3}{3} + C \Rightarrow C = 2$.

Vậy $f^2(2) = 2 \left(\frac{32}{5} + \frac{8}{3} + 2 \right) = \frac{332}{15}$.

Chọn đáp án (B) □

CÂU 3. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[-2; 1]$ thỏa mãn $f(0) = 3$ và $(f(x))^2 \cdot f'(x) = 3x^2 + 4x + 2$. Giá trị $f(1)$ là

(A) $2\sqrt[3]{42}$.

(B) $2\sqrt[3]{15}$.

(C) $\sqrt[3]{42}$.

(D) $\sqrt[3]{15}$.

Lời giải.

Ta có $(f(x))^2 \cdot f'(x) = 3x^2 + 4x + 2$ (*).

Lấy nguyên hàm 2 vế của phương trình trên ta được

$$\int f(x)^2 \cdot f'(x)dx = \int (3x^2 + 4x + 2) dx \Leftrightarrow \int (f(x))^2 df(x) = x^3 + 2x^2 + 2x + C$$

$$\Leftrightarrow \frac{(f(x))^3}{3} = x^3 + 2x^2 + 2x + C$$

$$\Leftrightarrow (f(x))^3 = 3(x^3 + 2x^2 + 2x + C) \quad (1).$$

Theo đề bài $f(0) = 3 \stackrel{(1)}{\Rightarrow} (f(0))^3 = 3(0^3 + 2 \cdot 0^2 + 2 \cdot 0 + C)$

$$\Leftrightarrow 27 = 3C$$

$$\Leftrightarrow C = 9.$$

Suy ra $(f(x))^3 = 3(x^3 + 2x^2 + 2x + 9) \Rightarrow f(x) = \sqrt[3]{3(x^3 + 2x^2 + 2x + 9)}$.

Vậy $f(1) = \sqrt[3]{42}$.

Chọn đáp án (C) □

CÂU 4. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(2) = -\frac{1}{3}$ và $f'(x) = x[f(x)]^2$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Giá trị của $f(1)$ bằng

(A) $f(1) = -\frac{2}{3}$.

(B) $f(1) = -\frac{2}{9}$.

(C) $f(1) = -\frac{7}{6}$.

(D) $f(1) = -\frac{11}{6}$.

Lời giải.

Từ hệ thức đề cho: $f'(x) = x[f(x)]^2$ (1), suy ra $f'(x) \geq 0$ với mọi $x \in [1; 2]$

Do đó $f(x)$ là hàm không giảm trên đoạn $[1; 2]$, ta có $f(x) \leq f(2) < 0$ với mọi $x \in [1; 2]$

Cách 1. Lấy nguyên hàm

$$\text{Ta có } f'(x) = x[f(x)]^2 \Rightarrow \frac{f'(x)}{[f(x)]^2} = x$$

$$\Rightarrow \left(-\frac{1}{f(x)} \right)' = x$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{f(x)} \right)' = -x$$

$$\Rightarrow \frac{1}{f(x)} = \int (-x)dx$$

$$\Rightarrow \frac{1}{f(x)} = -\frac{x^2}{2} + C.$$

$$\begin{aligned} \text{Mà } f(2) = -\frac{1}{3} &\Rightarrow \frac{1}{f(2)} = -2 + C \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{-\frac{1}{3}} = -2 + C \\ &\Rightarrow C = -1. \end{aligned}$$

$$\text{Tìm được } \frac{1}{f(x)} = -\frac{x^2}{2} - 1.$$

$$\text{Cho nên } \frac{1}{f(1)} = -\frac{1}{2} - 1 \Leftrightarrow f(1) = -\frac{2}{3}.$$

Cách 2. Chia 2 vế hệ thức (1) cho $[f(x)]^2$, ta được $\frac{f'(x)}{[f(x)]^2} = x, \forall x \in [1; 2]$.

Lấy tích phân 2 vế trên đoạn $[1; 2]$ hệ thức vừa tìm được, ta được:

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{f'(x)}{[f(x)]^2} dx &= \int_1^2 x dx \Rightarrow \int_1^2 \frac{1}{[f(x)]^2} df(x) = \frac{3}{2} \\ &\Leftrightarrow \left. \frac{-1}{f(x)} \right|_1^2 = \frac{3}{2} \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{f(1)} - \frac{1}{f(2)} = \frac{3}{2} \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{f(1)} = \frac{1}{f(2)} + \frac{3}{2} \\ &\Leftrightarrow f(1) = \frac{2f(2)}{2 + 3f(2)}. \end{aligned}$$

$$\text{Với } f(2) = -\frac{1}{3} \text{ thì } f(1) = \frac{2 \cdot (-\frac{1}{3})}{2 + 3 \cdot (-\frac{1}{3})} = -\frac{2}{3}.$$

Chọn đáp án **(A)** □

CÂU 5. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(2) = -\frac{1}{25}$ và $f'(x) = 4x^3 [f(x)]^2$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Giá trị của $f(1)$ bằng

- (A)** $-\frac{391}{400}$. **(B)** $-\frac{1}{40}$. **(C)** $-\frac{41}{400}$. **(D)** $-\frac{1}{10}$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } f'(x) = 4x^3 [f(x)]^2 &\Rightarrow -\frac{f'(x)}{[f(x)]^2} = -4x^3 \\ &\Rightarrow \left[\frac{1}{f(x)} \right]' = -4x^3 \\ &\Rightarrow \frac{1}{f(x)} = -x^4 + C. \end{aligned}$$

$$\text{Với } f(2) = -\frac{1}{25} \text{ thì } \frac{1}{f(2)} = -2^4 + C \Leftrightarrow -25 = -16 + C \Leftrightarrow C = -9.$$

$$\text{Suy ra } f(x) = -\frac{1}{x^4 + 9}.$$

$$\text{Vậy } f(1) = -\frac{1}{10}.$$

Chọn đáp án **(D)** □

CÂU 6. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(2) = -\frac{1}{5}$ và $f'(x) = x^3 [f(x)]^2$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Giá trị của $f(1)$ bằng

- (A)** $-\frac{4}{35}$. **(B)** $-\frac{71}{20}$. **(C)** $-\frac{79}{20}$. **(D)** $-\frac{4}{5}$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } f'(x) &= x^3 [f(x)]^2 \Rightarrow \frac{f'(x)}{f^2(x)} = x^3 \\ &\Rightarrow \int_1^2 \frac{f'(x)}{f^2(x)} dx = \int_1^2 x^3 dx \\ &\Leftrightarrow -\frac{1}{f(x)} \Big|_1^2 = \frac{1}{4} \cdot (2^4 - 1^4) \\ &\Leftrightarrow -\frac{1}{f(2)} + \frac{1}{f(1)} = \frac{15}{4} \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{f(1)} = \frac{4 + 15f(2)}{4f(2)} \\ &\Leftrightarrow f(1) = \frac{4f(2)}{4 + 15f(2)} = \frac{4 \cdot (-\frac{1}{5})}{4 + 15 \cdot (-\frac{1}{5})} = -\frac{4}{5}. \end{aligned}$$

Vậy $f(1) = -\frac{4}{5}$.

Chọn đáp án (D) □

CÂU 7. Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn $f(2) = -\frac{4}{19}$ và $f'(x) = x^3 f^2(x) \forall x \in \mathbb{R}$. Giá trị của $f(1)$ bằng

(A) $-\frac{2}{3}$.

(B) $-\frac{1}{2}$.

(C) -1 .

(D) $-\frac{3}{4}$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } f'(x) &= x^3 f^2(x) \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f^2(x)} = x^3 \\ &\Rightarrow \int \frac{f'(x)}{f^2(x)} dx = \int x^3 dx \\ &\Leftrightarrow -\frac{1}{f(x)} = \frac{x^4}{4} + C. \end{aligned}$$

Với $f(2) = -\frac{4}{19}$ thì $\frac{19}{4} = \frac{16}{4} + C \Rightarrow C = \frac{3}{4}$.

Tìm được $f(x) = -\frac{4}{x^4 + 3}$.

Vậy $f(1) = -1$.

Chọn đáp án (C) □

CÂU 8. Cho hàm số $f(x) > 0$ xác định và liên tục trên \mathbb{R} đồng thời thỏa mãn $f(0) = \frac{1}{2}$, $f'(x) = -e^x f^2(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Tính giá trị của $f(\ln 2)$.

(A) $f(\ln 2) = \frac{1}{4}$.

(B) $f(\ln 2) = \frac{1}{3}$.

(C) $f(\ln 2) = \ln 2 + \frac{1}{2}$.

(D) $f(\ln 2) = \ln^2 2 + \frac{1}{2}$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } f'(x) &= -e^x f^2(x) \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f^2(x)} = -e^x \text{ (do } f(x) > 0) \\ &\Leftrightarrow \int \frac{f'(x)}{f^2(x)} dx = \int (-e^x) dx \\ &\Rightarrow -\frac{1}{f(x)} = -e^x + C \\ &\Rightarrow f(x) = \frac{1}{e^x - C}. \end{aligned}$$

Với $f(0) = \frac{1}{2}$ thì $\frac{1}{e^0 - C} = \frac{1}{2} \Rightarrow C = -1$.

Suy ra $f(x) = \frac{1}{e^x + 1}$.

Vậy $f(\ln 2) = \frac{1}{e^{\ln 2} + 1} = \frac{1}{3}$.

Chọn đáp án (B) □

CÂU 9. Cho hàm số $f(x) \neq 0$ thỏa mãn điều kiện $f'(x) = (2x + 3)f^2(x)$ và $f(0) = -\frac{1}{2}$. Biết rằng tổng $f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(2024) + f(2025) = \frac{a}{b}$ với $(a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}^*)$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Mệnh đề nào sau đây đúng?

(A) $\frac{a}{b} < -1$.

(B) $\frac{a}{b} > 1$.

(C) $a + b = 1010$.

(D) $b - a = 1519$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } f'(x) &= (2x+3)f^2(x) \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f^2(x)} = 2x+3 \\ &\Leftrightarrow \int \frac{f'(x)}{f^2(x)} dx = \int (2x+3) dx \\ &\Leftrightarrow -\frac{1}{f(x)} = x^2 + 3x + C. \end{aligned}$$

$$\text{Với } f(0) = -\frac{1}{2}, \text{ thì } -\frac{1}{-\frac{1}{2}} = 0^2 + 3 \cdot 0 + C \Rightarrow C = 2$$

$$\text{Suy ra } f(x) = -\frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+1}$$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} f(1) = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \\ f(2) = \frac{1}{4} - \frac{1}{3} \\ f(3) = \frac{1}{5} - \frac{1}{4} \\ \vdots \\ f(2025) = \frac{1}{2026} - \frac{1}{2025} \end{cases}$$

$$\text{Tổng } f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(2024) + f(2025) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2026} = -\frac{506}{1013}$$

$$\text{Do } a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}^* \Rightarrow a = -506, b = 1013 \Rightarrow b - a = 1519.$$

Chọn đáp án **(D)** □

CÂU 10. Cho hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$; $y = f(x)$ liên tục, nhận giá trị dương trên $(0; +\infty)$ và thỏa mãn $f(3) = \frac{4}{9}$ và $[f'(x)]^2 = xf(x)$. Tính $f(8)$.

(A) $f(8) = \frac{43 - 24\sqrt{3}}{9}$.

(B) $f(8) = \frac{43 + 24\sqrt{3}}{9}$.

(C) $f(8) = \frac{43 - \sqrt{3}}{3}$.

(D) $f(8) = \frac{43 + \sqrt{3}}{3}$.

Lời giải.

Với $\forall x \in (0; +\infty)$ thì $y = f(x) > 0$; $x + 1 > 0$

Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$ nên $f'(x) \geq 0, \forall x \in (0; +\infty)$

$$\text{Ta có } [f'(x)]^2 = xf(x) \Rightarrow f'(x) = \sqrt{xf(x)}$$

$$\Rightarrow \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} = \sqrt{x}$$

$$\Rightarrow 2 \left(\sqrt{f(x)} \right)' = \sqrt{x}$$

$$\Rightarrow \left(\sqrt{f(x)} \right)' = \frac{1}{2} \sqrt{x}$$

$$\Rightarrow \sqrt{f(x)} = \frac{1}{2} \int \sqrt{x} dx$$

$$\Rightarrow \sqrt{f(x)} = \frac{1}{3} \sqrt{x^3} + C.$$

$$\text{Với } f(3) = \frac{4}{9}, \text{ thì } \sqrt{f(3)} = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{3^3} + C \Leftrightarrow \frac{2}{3} = \sqrt{3} + C \Leftrightarrow C = \frac{2 - \sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{Tìm được } \sqrt{f(x)} = \frac{1}{3} \sqrt{x^3} + \frac{2 - 3\sqrt{3}}{3} \Rightarrow f(x) = \left(\frac{1}{3} \sqrt{x^3} + \frac{2 - 3\sqrt{3}}{3} \right)^2.$$

$$\text{Vậy } f(8) = \frac{43 - 24\sqrt{3}}{9}.$$

Chọn đáp án **(A)** □

CÂU 11. Cho hàm số $f(x) > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$, $f(0) = 1$ và $f(x) = \sqrt{x} \cdot f'(x)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

(A) $f(3) < 2$.

(B) $2 < f(3) < 4$.

(C) $f(3) > 6$.

(D) $4 < f(3) < 6$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } f(x) = \sqrt{x} \cdot f'(x) \Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$\Rightarrow \ln f(x) = \int \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$

$$\Leftrightarrow \ln f(x) = 2\sqrt{x} + C$$

$$\Leftrightarrow f(x) = e^{2\sqrt{x}+C}.$$

Với $f(0) = 1$ thì $\ln f(0) = 2\sqrt{0} + C \Leftrightarrow C = 0$.

Suy ra $f(x) = e^{2\sqrt{x}}$.

Vậy $f(3) = e^{2\sqrt{3}} > 6$.

Chọn đáp án **(C)** □

CÂU 12. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm cấp hai trên đoạn $[0; 1]$ đồng thời thỏa mãn các điều kiện $f'(0) = -1$, $f'(x) < 0$, $[f'(x)]^2 = f''(x)$, $\forall x \in [0; 1]$. Giá trị $f'(2)$ thuộc khoảng

(A) $(2; 3)$.

(B) $(-2; 0)$.

(C) $(0; 2)$.

(D) $(-3; -2)$.

Lời giải.

Ta có

$$[f'(x)]^2 = f''(x) \Leftrightarrow \frac{f''(x)}{[f'(x)]^2} = 1 \Leftrightarrow -\left(\frac{1}{f'(x)}\right)' = 1 \Rightarrow \frac{1}{f'(x)} = -\int dx \Leftrightarrow \frac{1}{f'(x)} = -x + C.$$

Mà $f'(0) = -1 \Rightarrow C = -1$ suy ra

$$\frac{1}{f'(x)} = -x - 1 \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{x+1} \Rightarrow f'(2) = -\frac{1}{3}.$$

Chọn đáp án **(B)** □

CÂU 13. Cho hàm số $f(x)$ đồng biến có đạo hàm đến cấp hai trên đoạn $[0; 2]$ và thỏa mãn $[f(x)]^2 - f(x) \cdot f''(x) + [f'(x)]^2 = 0$. Biết $f(0) = 1$, $f(2) = e^6$. Khi đó $f(1)$ bằng

(A) $e^{\frac{3}{2}}$.

(B) e^3 .

(C) $e^{\frac{5}{2}}$.

(D) e^2 .

Lời giải.

Theo đề bài, ta có

$$\begin{aligned} [f(x)]^2 - f(x) \cdot f''(x) + [f'(x)]^2 = 0 &\Rightarrow \frac{f(x) \cdot f''(x) - [f'(x)]^2}{[f(x)]^2} = 1 \\ &\Rightarrow \left[\frac{f'(x)}{f(x)}\right]' = 1 \\ &\Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = x + C \\ &\Rightarrow \ln f(x) = \frac{x^2}{2} + Cx + D. \end{aligned}$$

$$\text{Mà } \begin{cases} f(0) = 1 \\ f(2) = e^6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C = 2 \\ D = 0. \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } f(x) = e^{\frac{x^2}{2} + 2x} \Rightarrow f(1) = e^{\frac{5}{2}}.$$

Chọn đáp án **(C)** □

CÂU 14. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $(f'(x))^2 + f(x) \cdot f''(x) = x^3 - 2x$, $\forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = f'(0) = 1$. Giá trị của $T = f^2(2)$ bằng

(A) $\frac{43}{30}$.

(B) $\frac{16}{15}$.

(C) $\frac{43}{15}$.

(D) $\frac{26}{15}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} (f'(x))^2 + f(x) \cdot f''(x) = x^3 - 2x &\Leftrightarrow (f(x) \cdot f'(x))' = x^3 - 2x \\ &\Rightarrow f(x) \cdot f'(x) = \int (x^3 - 2x) dx \\ &\Rightarrow f(x) \cdot f'(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^2 + C. \end{aligned}$$

$$\text{Từ } f(0) = f'(0) = 1 \text{ suy ra } C = 1. \text{ Do đó } f(x) \cdot f'(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^2 + 1.$$

Lại có

$$\begin{aligned} 2f(x) \cdot f'(x) &= \frac{1}{2}x^4 - 2x^2 + 2 \Leftrightarrow (f^2(x))' = \frac{1}{2}x^4 - 2x^2 + 2 \\ &\Rightarrow f^2(x) = \int \left(\frac{1}{2}x^4 - 2x^2 + 2\right) dx \\ &\Rightarrow f^2(x) = \frac{1}{10}x^5 - \frac{2}{3}x^3 + 2x + C. \end{aligned}$$

Vì $f(0) = 1$ nên $C = 1$. Do đó $f^2(x) = \frac{1}{10}x^5 - \frac{2}{3}x^3 + 2x + 1$.

Vậy $T = \frac{43}{15}$.

Chọn đáp án (C) □

CÂU 15. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $[f'(x)]^2 + f(x) \cdot f''(x) = 2x^2 - x + 1, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = f'(0) = 3$. Giá trị của $[f(1)]^2$ bằng

(A) 28.

(B) 22.

(C) $\frac{19}{2}$.

(D) 10.

Lời giải.

Ta có $[f(x)f'(x)]' = [f'(x)]^2 + f(x) \cdot f''(x)$.

Do đó theo giả thiết ta được $[f(x)f'(x)]' = 2x^2 - x + 1$.

Suy ra $f(x)f'(x) = \frac{2}{3}x^3 - \frac{x^2}{2} + x + C$.

Hơn nữa $f(0) = f'(0) = 3$ suy ra $C = 9$.

Tương tự vì $[f^2(x)]' = 2f(x)f'(x)$ nên $[f^2(x)]' = 2\left(\frac{2}{3}x^3 - \frac{x^2}{2} + x + 9\right)$.

Suy ra $f^2(x) = \int 2\left(\frac{2}{3}x^3 - \frac{x^2}{2} + x + 9\right) dx = \frac{1}{3}x^4 - \frac{x^3}{3} + x^2 + 18x + C$.

Vì $f(0) = 3$ nên $C = 9$ suy ra $f^2(x) = \frac{1}{3}x^4 - \frac{x^3}{3} + x^2 + 18x + 9$.

Do đó $[f(1)]^2 = 28$.

Chọn đáp án (A) □

CÂU 16. Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn $y' = xy^2$ và $f(-1) = 1$. Tính giá trị $f(2)$. (Kết quả làm tròn đến hàng phần mười).

Đáp án: 20,1

Lời giải.

Ta có $y' = xy^2 \Rightarrow \frac{y'}{y} = x^2 \Rightarrow \int \frac{y'}{y} dx = \int x^2 dx \Leftrightarrow \ln y = \frac{x^3}{3} + C \Leftrightarrow y = e^{\frac{x^3}{3} + C}$.

Theo giả thiết $f(-1) = 1$ nên $e^{-\frac{1}{3} + C} = 1 \Leftrightarrow C = \frac{1}{3}$.

Do đó $y = f(x) = e^{\frac{x^3}{3} + \frac{1}{3}}$.

Vậy $f(2) = e^3 \approx 20,1$.

CÂU 17. Cho hàm số $f(x) \neq 0$, liên tục trên đoạn $[1; 2]$ và thỏa mãn $f(1) = 3$, $x^2 \cdot f'(x) = f^2(x)$ với $\forall x \in [1; 2]$. Tính $f(2)$.

Đáp án: -6

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} x^2 \cdot f'(x) = f^2(x) &\Rightarrow \frac{f'(x)}{f^2(x)} = \frac{1}{x^2} \Rightarrow \left(-\frac{1}{f(x)}\right)' = \frac{1}{x^2} \\ &\Rightarrow \int_1^2 \left(-\frac{1}{f(x)}\right)' dx = \int_1^2 \frac{1}{x^2} dx \\ &\Rightarrow \left(-\frac{1}{f(x)}\right)\Big|_1^2 = -\frac{1}{x}\Big|_1^2 \\ &\Rightarrow -\frac{1}{f(2)} + \frac{1}{f(1)} = -\frac{1}{2} + 1 \\ &\Rightarrow -\frac{1}{f(2)} + \frac{1}{f(1)} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Vì $f(1) = 3 \Rightarrow -\frac{1}{f(2)} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2} \Rightarrow f(2) = -6$.

CÂU 18. Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn $f(x) < 0, \forall x > 0$ và có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên khoảng $(0; +\infty)$ thỏa mãn $f'(x) = (2x+1)f^2(x), \forall x > 0$ và $f(1) = -\frac{1}{2}$. Tính giá trị của biểu thức $T = f(1) + f(2) + \dots + f(2023) + f(2024)$. (Kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).

Đáp án: -1

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} f'(x) &= (2x+1)f^2(x) \Rightarrow \frac{f'(x)}{f^2(x)} = 2x+1 \\ &\Rightarrow \int \frac{f'(x)}{f^2(x)} dx = \int (2x+1) dx \\ &\Rightarrow -\frac{1}{f(x)} = x^2 + x + C. \end{aligned}$$

Mà $f(1) = -\frac{1}{2} \Rightarrow C = 0 \Rightarrow f(x) = \frac{-1}{x^2+x} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x}$.

Ta có
$$\begin{cases} f(1) = \frac{1}{2} - 1 \\ f(2) = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \\ f(3) = \frac{1}{4} - \frac{1}{3} \\ \dots \\ f(2024) = \frac{1}{2023} - \frac{1}{2024}. \end{cases}$$

$\Rightarrow T = f(1) + f(2) + \dots + f(2024) = -1 + \frac{1}{2025} = -\frac{2024}{2025} \approx -1$.

CÂU 19. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(0) = 1 - \ln 2$ và $e^x f'(x) = 2^x [f(x)]^2$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Giá trị của $f(1)$ bằng bao nhiêu? (Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

Đáp án: 0,42

Lời giải.

Từ giả thiết ta có $f'(x) = \frac{2^x}{e^x} [f(x)]^2$ với mọi $x \in (1; 2]$.

Do đó $f(x) \geq f(1) = 1 > 0$ với mọi $x \in [1; 2]$.

Xét với mọi $x \in [1; 2]$ ta có

$$\begin{aligned} e^x f'(x) &= 2^x [f(x)]^2 \Rightarrow f'(x) = \frac{2^x}{e^x} [f(x)]^2 \\ &\Rightarrow \frac{f'(x)}{[f(x)]^2} = \left(\frac{2}{e}\right)^x \\ &\Rightarrow -\left(\frac{1}{f(x)}\right)' = \left(\frac{2}{e}\right)^x \\ &\Rightarrow \left(\frac{1}{f(x)}\right)' = -\left(\frac{2}{e}\right)^x \\ &\Rightarrow \frac{1}{f(x)} = -\int \left(\frac{2}{e}\right)^x dx \\ &\Rightarrow \frac{1}{f(x)} = -\frac{\left(\frac{2}{e}\right)^x}{\ln \frac{2}{e}} + C \\ &\Rightarrow \frac{1}{f(x)} = \frac{\left(\frac{2}{e}\right)^x}{1 - \ln 2} + C. \end{aligned}$$

Mà $f(0) = 1 - \ln 2 \Rightarrow C = 0$.

Do đó $\frac{1}{f(x)} = \frac{\left(\frac{2}{e}\right)^x}{1 - \ln 2} \Rightarrow f(x) = \frac{1 - \ln 2}{\left(\frac{2}{e}\right)^x} = \frac{(1 - \ln 2)e^x}{2^x}$.

Vậy $f(1) = \frac{e - e \ln 2}{2} \approx 0,42$.

CÂU 20. Cho hàm số $y = f(x)$ đồng biến và có đạo hàm liên tục trên \mathbb{R} thỏa mãn $(f'(x))^2 = f(x) \cdot e^x$, $\forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = 2$. Tính $f(2)$. (Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

Đáp án: 9,81

Lời giải.

Vì hàm số $y = f(x)$ đồng biến và có đạo hàm liên tục trên \mathbb{R} đồng thời $f(0) = 2$ nên $f'(x) \geq 0$ và $f(x) > 0$ với mọi $x \in [0; +\infty)$.

Từ giả thiết $(f'(x))^2 = f(x) \cdot e^x$, $\forall x \in \mathbb{R}$ suy ra $f'(x) = \sqrt{f(x)} \cdot e^{\frac{x}{2}}$, $\forall x \in [0; +\infty)$.

Do đó $\frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}} = \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}$, $\forall x \in [0; +\infty)$.

Lấy nguyên hàm hai vế, ta được $\sqrt{f(x)} = e^{\frac{x}{2}} + C$, $\forall x \in [0; +\infty)$ với C là hằng số.

Kết hợp với $f(0) = 2$, ta được $C = \sqrt{2} - 1$.

Suy ra $f(2) = (e + \sqrt{2} - 1)^2 \approx 9,81$.

CÂU 21. Giả sử hàm số $y = f(x)$ liên tục, nhận giá trị dương trên $(0; +\infty)$ và thỏa mãn $f(1) = 1$, $f(x) = f'(x) \cdot \sqrt{3x}$, với mọi $x > 0$. Tính $f(5)$ (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

Đáp án: 4,17

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} f(x) &= f'(x) \cdot \sqrt{3x} \Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{\sqrt{3x}} \\ &\Rightarrow \ln f(x) = \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{1}{\sqrt{x}} dx \\ &\Rightarrow \ln f(x) = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{x} + C \\ &\Rightarrow f(x) = e^{\frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{x} + C} \end{aligned}$$

Mà $f(1) = 1$ nên $1 = e^{\frac{2}{\sqrt{3}} + C} \Rightarrow C = -\frac{2}{\sqrt{3}} \Rightarrow f(x) = e^{\frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt{3}}}$.

Suy ra $f(5) = e^{\frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{5} - \frac{2}{\sqrt{3}}} = e^{\frac{2\sqrt{5}-2}{\sqrt{3}}} \approx 4,17$.

CÂU 22. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên \mathbb{R} thỏa mãn $e^{f(x)} - \frac{x}{f'(x)} = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Biết $f(1) = 1$, tính $f(e^2)$ (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

Đáp án: 3,38

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} e^{f(x)} - \frac{x}{f'(x)} &= 0 \Rightarrow f'(x)e^{f(x)} = x \\ &\Leftrightarrow (e^{f(x)})' = x \\ &\Leftrightarrow e^{f(x)} = \int x dx \\ &\Leftrightarrow e^{f(x)} = \frac{x^2}{2} + C \end{aligned}$$

Mà $f(1) = 1$ nên $e = \frac{1}{2} + C \Rightarrow C = e - \frac{1}{2}$.

Do đó $e^{f(x)} = \frac{x^2}{2} + e - \frac{1}{2} \Rightarrow e^{f(e^2)} = \frac{e^4}{2} + e - \frac{1}{2} \Rightarrow f(e^2) = \ln\left(\frac{e^4}{2} + e - \frac{1}{2}\right) \approx 3,38$.

CÂU 23. Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị dương và thỏa mãn $f(0) = 1$, $(f'(x))^3 = e^x(f(x))^2$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Tính $f(3)$ (kết quả làm tròn đến hàng phần mười).

Đáp án: 20,1

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}(f'(x))^3 &= e^x (f(x))^2, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow f'(x) = \sqrt[3]{e^x} \cdot \sqrt[3]{(f(x))^2} \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{\sqrt[3]{(f(x))^2}} = \sqrt[3]{e^x} \\&\Leftrightarrow \frac{f'(x)}{\sqrt[3]{(f(x))^2}} = \sqrt[3]{e^x} \Leftrightarrow f'(x) \cdot (f(x))^{-\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{e^x} \\&\Leftrightarrow 3 \left[(f(x))^{\frac{1}{3}} \right]' = \sqrt[3]{e^x} \Leftrightarrow \left[(f(x))^{\frac{1}{3}} \right]' = \frac{1}{3} \sqrt[3]{e^x} \\&\Leftrightarrow (f(x))^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \int \sqrt[3]{e^x} dx \Leftrightarrow (f(x))^{\frac{1}{3}} = e^{\frac{x}{3}} + C.\end{aligned}$$

Vì $f(0) = 1$ nên $1 = 1 + C \Rightarrow C = 0 \Rightarrow (f(x))^{\frac{1}{3}} = e^{\frac{x}{3}} \Rightarrow f(x) = e^x$.
Vậy $f(3) = e^3 \approx 20,1$.

CÂU 24. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên \mathbb{R} và thỏa mãn điều kiện $x^6 (f'(x))^3 + 27 [f(x) - 1]^4 = 0, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(1) = 0$. Tính giá trị của $f(2)$.

Đáp án: -7

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}x^6 (f'(x))^3 + 27 [f(x) - 1]^4 &= 0 \Leftrightarrow x^6 (f'(x))^3 = -27 (f(x) - 1)^4 \\&\Leftrightarrow \frac{(f'(x))^3}{(f(x) - 1)^4} = -\frac{27}{x^6} \\&\Leftrightarrow \frac{(f'(x))^3}{(f(x) - 1)^3 (f(x) - 1)} = -\frac{27}{x^6} \\&\Leftrightarrow \frac{f'(x)}{(f(x) - 1) \sqrt[3]{f(x) - 1}} = -\frac{3}{x^2} \\&\Leftrightarrow \frac{f'(x)}{-3 (f(x) - 1) \sqrt[3]{f(x) - 1}} = \frac{1}{x^2} \\&\Leftrightarrow \left[\frac{1}{\sqrt[3]{f(x) - 1}} \right]' = \frac{1}{x^2}\end{aligned}$$

$$\text{Do đó } \int \left(\frac{1}{\sqrt[3]{f(x) - 1}} \right)' dx = \int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + C.$$

$$\text{Suy ra } \frac{1}{\sqrt[3]{f(x) - 1}} = -\frac{1}{x} + C.$$

$$\text{Ta có } f(1) = 0 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow f(x) = 1 - x^3.$$

$$\text{Khi đó } f(2) = -7.$$

CÂU 25. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $[xf'(x)]^2 + 1 = x^2 [1 - f(x) \cdot f''(x)]$ với mọi x dương. Biết $f(1) = f'(1) = 1$. Tính giá trị $f^2(2)$ (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

Đáp án: 3,39

Lời giải.

Với mọi x dương, ta có

$$\begin{aligned}[xf'(x)]^2 + 1 &= x^2 [1 - f(x) \cdot f''(x)]; x > 0 \Leftrightarrow x^2 \cdot [f'(x)]^2 + 1 = x^2 [1 - f(x) \cdot f''(x)] \\&\Leftrightarrow [f'(x)]^2 + \frac{1}{x^2} = 1 - f(x) \cdot f''(x) \\&\Leftrightarrow [f'(x)]^2 + f(x) \cdot f''(x) = 1 - \frac{1}{x^2} \\&\Leftrightarrow [f(x) \cdot f'(x)]' = 1 - \frac{1}{x^2}.\end{aligned}$$

$$\text{Do đó } \int [f(x) \cdot f'(x)]' dx = \int \left(1 - \frac{1}{x^2} \right) dx \Rightarrow f(x) \cdot f'(x) = x + \frac{1}{x} + C.$$

$$\text{Vì } f(1) = f'(1) = 1 \Rightarrow 1 = 2 + C \Leftrightarrow C = -1.$$

$$\text{Nên } \int f(x) \cdot f'(x) dx = \int \left(x + \frac{1}{x} - 1 \right) dx \Leftrightarrow \int f(x) d(f(x)) = \int \left(x + \frac{1}{x} - 1 \right) dx.$$

$$\text{Suy ra } \frac{f^2(x)}{2} = \frac{x^2}{2} + \ln x - x + C.$$

$$\text{Vì } f(1) = 1 \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - 1 + C \Leftrightarrow C = 1.$$

$$\text{Vậy } \frac{f^2(x)}{2} = \frac{x^2}{2} + \ln x - x + 1 \Rightarrow f^2(2) = 2 \ln 2 + 2 \approx 3,39.$$

5

1. Điều kiện hàm ẩn có dạng

$$A(x)f(x) + B(x)f'(x) = h(x) \quad (1)$$

Phương pháp giải

- ☑ Ta cần nhân thêm một lượng $u(x)$ vào (1) để tạo thành $u'(x)f(x) + u(x)f'(x) = u(x) \cdot h(x)$ và lúc này.

$$\begin{aligned} u'(x)f(x) + u(x)f'(x) &= u(x) \cdot h(x) \Leftrightarrow [u(x)f(x)]' = u(x) \cdot h(x) \\ \Rightarrow \int [u(x)f(x)]' dx &= \int u(x) \cdot h(x) dx \Rightarrow u(x)f(x) = \int u(x) \cdot h(x) dx \\ \Rightarrow f(x) &= \frac{\int u(x) \cdot h(x) dx}{u(x)} \end{aligned}$$

- ☑ Cách tìm $u(x)$.

$$u(x) \text{ được chọn sao cho } \begin{cases} u'(x) = A(x) \\ u(x) = B(x). \end{cases}$$

Suy ra

$$\begin{aligned} \frac{u'(x)}{u(x)} &= \frac{A(x)}{B(x)} \Rightarrow \int \frac{u'(x)}{u(x)} dx = \int \frac{A(x)}{B(x)} dx \\ \Rightarrow \ln |u(x)| &= \int \frac{A(x)}{B(x)} dx \Rightarrow u(x) = e^{\int \frac{A(x)}{B(x)} dx} \end{aligned}$$

Tóm lại phương pháp giải $A(x)f(x) + B(x)f'(x) = h(x)$ (1) như sau.

- ☑ **Bước 1.** Tìm $u(x)$. $u(x) = e^{\int \frac{A(x)}{B(x)} dx}$.
- ☑ **Bước 2.** Nhân $u(x)$ vào (1) suy ra $f(x) = \frac{\int u(x) \cdot h(x) dx}{u(x)}$.

Một số dạng đặc biệt của (1).

- a) Điều kiện hàm ẩn có dạng $\begin{cases} f'(x) + f(x) = h(x) \\ f'(x) - f(x) = h(x). \end{cases}$

Phương pháp giải.

- ☑ $f'(x) + f(x) = h(x)$.

Nhân hai vế với e^x ta được

$$e^x \cdot f'(x) + e^x \cdot f(x) = e^x \cdot h(x) \Leftrightarrow [e^x \cdot f(x)]' = e^x \cdot h(x).$$

Suy ra $e^x \cdot f(x) = \int e^x \cdot h(x) dx$.

Từ đây ta dễ dàng tính được $f(x)$.

- ☑ $f'(x) - f(x) = h(x)$.

Nhân hai vế với e^{-x} ta được

$$e^{-x} \cdot f'(x) - e^{-x} \cdot f(x) = e^{-x} \cdot h(x) \Leftrightarrow [e^{-x} \cdot f(x)]' = e^{-x} \cdot h(x).$$

Suy ra $e^{-x} \cdot f(x) = \int e^{-x} \cdot h(x) dx$.

Từ đây ta dễ dàng tính được $f(x)$.

- b) Điều kiện hàm ẩn có dạng $f'(x) + p(x) \cdot f(x) = h(x)$.

Phương pháp giải.

Nhân hai vế với $e^{\int p(x) dx}$ ta được

$$\begin{aligned} f'(x) \cdot e^{\int p(x) dx} + p(x) \cdot e^{\int p(x) dx} \cdot f(x) &= h(x) \cdot e^{\int p(x) dx} \\ \Leftrightarrow [f(x) \cdot e^{\int p(x) dx}]' &= h(x) \cdot e^{\int p(x) dx}. \end{aligned}$$

Suy ra $f(x) \cdot e^{\int p(x) dx} = \int e^{\int p(x) dx} h(x) dx$.

Từ đây ta dễ dàng tính được $f(x)$.

CÂU 1. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(x) + f'(x) = e^{-x}$, $\forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = 2$. Tất cả các nguyên hàm của $f(x)e^x$ là

- (A) $x^2 + x + C$. (B) $2x^2 + 2x + C$. (C) $2x^2 + x + C$. (D) $\frac{1}{2}x^2 + 2x + C$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} f(x) + f'(x) = e^{-x} &\Leftrightarrow f(x)e^x + f'(x)e^x = 1 \\ &\Leftrightarrow (f(x)e^x)' = 1 \\ &\Rightarrow f(x)e^x = \int x \, dx \\ &\Leftrightarrow f(x)e^x = x + C. \end{aligned}$$

Vì $f(0) = 2$ nên $C = 2$.

$$\text{Suy ra } f(x)e^x = x + 2 \Rightarrow \int f(x)e^x dx = \int (x + 2) dx = \frac{1}{2}x^2 + 2x + C.$$

Chọn đáp án (D) □

CÂU 2. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} thỏa mãn $f'(x) + 2x \cdot f(x) = e^{-x^2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = 0$. Tính $f(1)$.

- (A) $f(1) = e^2$. (B) $f(1) = -\frac{1}{e}$. (C) $f(1) = \frac{1}{e^2}$. (D) $f(1) = \frac{1}{e}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} f'(x) + 2x \cdot f(x) &= e^{-x^2} \\ \Leftrightarrow e^{x^2} f'(x) + 2x \cdot e^{x^2} \cdot f(x) &= 1 \\ \Leftrightarrow (e^{x^2} \cdot f(x))' &= 1 \\ \Rightarrow \int (e^{x^2} \cdot f(x))' \, dx &= \int 1 \, dx \\ \Rightarrow e^{x^2} \cdot f(x) &= x + C \\ \Rightarrow f(x) &= \frac{x + C}{e^{x^2}}. \end{aligned}$$

Vì $f(0) = 0 \Rightarrow C = 0$.

$$\text{Do đó } f(x) = \frac{x}{e^{x^2}}.$$

$$\text{Vậy } f(1) = \frac{1}{e}.$$

Chọn đáp án (D) □

CÂU 3. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{-1; 0\}$ thỏa mãn điều kiện $f(1) = -2 \ln 2$ và $x \cdot (x+1) \cdot f'(x) + f(x) = x^2 + x$. Biết $f(2) = a + b \cdot \ln 3$ ($a, b \in \mathbb{Q}$). Giá trị $2(a^2 + b^2)$ là

- (A) $\frac{27}{4}$. (B) 9. (C) $\frac{3}{4}$. (D) $\frac{9}{2}$.

Lời giải.

Chia cả hai vế của biểu thức $x \cdot (x+1) \cdot f'(x) + f(x) = x^2 + x$ cho $(x+1)^2$ ta có

$$\frac{x}{x+1} \cdot f'(x) + \frac{1}{(x+1)^2} f(x) = \frac{x}{x+1} \Leftrightarrow \left[\frac{x}{x+1} \cdot f(x) \right]' = \frac{x}{x+1}.$$

Do đó

$$\frac{x}{x+1} \cdot f(x) = \int \left[\frac{x}{x+1} \cdot f(x) \right]' dx = \int \frac{x}{x+1} dx = \int \left(1 - \frac{1}{x+1} \right) dx = x - \ln|x+1| + C.$$

Do $f(1) = -2 \ln 2$ nên ta có $\frac{1}{2} \cdot f(1) = 1 - \ln 2 + C \Leftrightarrow -\ln 2 = 1 - \ln 2 + C \Leftrightarrow C = -1$.

Khi đó $f(x) = \frac{x+1}{2}(x - \ln|x+1| - 1)$.

$$\text{Vậy ta có } f(2) = \frac{3}{2}(2 - \ln 3 - 1) = \frac{3}{2}(1 - \ln 3) = \frac{3}{2} - \frac{3}{2} \ln 3 \Rightarrow a = \frac{3}{2}, b = -\frac{3}{2}.$$

$$\text{Suy ra } 2(a^2 + b^2) = 2 \left[\left(\frac{3}{2} \right)^2 + \left(-\frac{3}{2} \right)^2 \right] = 9.$$

Chọn đáp án (B) □

CÂU 4. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{-1; 0\}$ thỏa mãn $f(1) = 2 \ln 2 + 1$, $x(x+1)f'(x) + (x+2)f(x) = x(x+1)$, $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 0\}$. Biết $f(2) = a + b \ln 3$, với a, b là hai số hữu tỉ. Tính $T = a^2 - b$.

- (A) $T = -\frac{3}{16}$. (B) $T = \frac{21}{16}$. (C) $T = \frac{3}{2}$. (D) $T = 0$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} x(x+1)f'(x) + (x+2)f(x) &= x(x+1) \Leftrightarrow f'(x) + \frac{x+2}{x(x+1)}f(x) = 1 \\ &\Leftrightarrow \frac{x^2}{x+1}f'(x) + \frac{x(x+2)}{(x+1)^2}f(x) = \frac{x^2}{x+1} \\ &\Leftrightarrow \left[\frac{x^2}{x+1}f(x) \right]' = \frac{x^2}{x+1} \\ &\Leftrightarrow \frac{x^2}{x+1}f(x) = \int \frac{x^2}{x+1}dx \\ &\Leftrightarrow \frac{x^2}{x+1}f(x) = \frac{x^2}{2} - x + \ln|x+1| + c \\ &\Leftrightarrow f(x) = \frac{x+1}{x^2} \left(\frac{x^2}{2} - x + \ln|x+1| + c \right). \end{aligned}$$

Từ $f(1) = 2 \ln 2 + 1 \Leftrightarrow c = 1$.

Từ đó $f(x) = \frac{x+1}{x^2} \left(\frac{x^2}{2} - x + \ln|x+1| + 1 \right)$.

$\Rightarrow f(2) = \frac{3}{4} + \frac{3}{4} \ln 3$.

Nên $\begin{cases} a = \frac{3}{4} \\ b = \frac{3}{4} \end{cases}$.

Vậy $T = a^2 - b = -\frac{3}{16}$.

Chọn đáp án (A) □

CÂU 5. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $(0; +\infty)$ thỏa mãn $f'(x) + \frac{f(x)}{x} = 4x^2 + 3x$ và $f(1) = 2$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm có hoành độ $x = 2$ là

- (A) $y = -16x - 20$. (B) $y = 16x - 20$. (C) $y = 16x + 20$. (D) $y = -16x + 20$.

Lời giải.

$$f'(x) + \frac{f(x)}{x} = 4x^2 + 3x \Leftrightarrow xf'(x) + f(x) = 4x^3 + 3x^2 \Leftrightarrow (x.f(x))' = 4x^3 + 3x^2.$$

Lấy nguyên hàm hai vế ta được $xf(x) = \int (4x^3 + 3x^2) dx = x^4 + x^3 + C$.

Với $x = 1$ ta có $f(1) = 2 + C$.

Theo đề bài ta có: $f(1) = 2 \Leftrightarrow 2 + C = 2 \Leftrightarrow C = 0$.

Vậy $xf(x) = x^4 + x^3 \Leftrightarrow f(x) = x^3 + x^2$.

Ta có $f'(x) = 3x^2 + 2x$, $f'(2) = 16$, $f(2) = 12$.

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm có hoành độ $x = 2$ là

$$y = 16(x - 2) + 12 \Leftrightarrow y = 16x - 20.$$

Chọn đáp án (B) □

CÂU 6. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $(0; +\infty)$ thỏa mãn $2xf'(x) + f(x) = 3x^2\sqrt{x}$. Biết $f(1) = \frac{1}{2}$. Tính $f(4)$.

- (A) 24. (B) 14. (C) 4. (D) 16.

Lời giải.

Trên khoảng $(0; +\infty)$ ta có

$$\begin{aligned} 2xf'(x) + f(x) &= 3x^2\sqrt{x} \Leftrightarrow \sqrt{x}f'(x) + \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot f(x) = \frac{3}{2}x^2 \\ &\Rightarrow (\sqrt{x} \cdot f(x))' = \frac{3}{2}x^2 \\ &\Rightarrow \int (\sqrt{x} \cdot f(x))' dx = \int \frac{3}{2}x^2 dx \\ &\Rightarrow \sqrt{x} \cdot f(x) = \frac{1}{2}x^3 + C. \quad (*) \end{aligned}$$

Mà $f(1) = \frac{1}{2}$ nên từ $(*)$ có

$$\sqrt{1} \cdot f(1) = \frac{1}{2} \cdot 1^3 + C \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + C \Leftrightarrow C = 0 \Rightarrow f(x) = \frac{x^2\sqrt{x}}{2}.$$

Vậy $f(4) = \frac{4^2 \cdot \sqrt{4}}{2} = 16.$

Chọn đáp án **(D)** □

CÂU 7. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(1) = 4$ và $f(x) = xf'(x) - 2x^3 - 3x^2$ với mọi $x > 0$. Giá trị của $f(2)$ bằng

- (A)** 5. **(B)** 10. **(C)** 20. **(D)** 15.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} f(x) - xf'(x) &= -2x^3 - 3x^2 \Leftrightarrow \frac{1 \cdot f(x) - x \cdot f'(x)}{x^2} = \frac{-2x^3 - 3x^2}{x^2} \\ &\Leftrightarrow \left[\frac{f(x)}{x} \right]' = 2x + 3. \end{aligned}$$

Suy ra $\frac{f(x)}{x}$ là một nguyên hàm của hàm số $g(x) = 2x + 3$.

Ta có $\int (2x + 3) dx = x^2 + 3x + C, C \in \mathbb{R}.$

Do đó $\frac{f(x)}{x} = x^2 + 3x + C_1$ (1) với $C_1 \in \mathbb{R}.$

Vì $f(1) = 4$ theo giả thiết, nên thay $x = 1$ vào hai vế của (1) ta thu được $C_1 = 0$, từ đó $f(x) = x^3 + 3x^2$.

Vậy $f(2) = 20.$

Chọn đáp án **(C)** □

CÂU 8. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $(0; +\infty)$ thỏa mãn $3x \cdot f(x) - x^2 \cdot f'(x) = 2f^2(x)$, với $f(x) \neq 0, \forall x \in (0; +\infty)$ và $f(1) = \frac{1}{3}$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[1; 2]$. Tính $M + m$.

- (A)** $\frac{9}{10}$. **(B)** $\frac{21}{10}$. **(C)** $\frac{5}{3}$. **(D)** $\frac{7}{3}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} 3x \cdot f(x) - x^2 \cdot f'(x) &= 2f^2(x) \Rightarrow 3x^2 \cdot f(x) - x^3 \cdot f'(x) = 2x \cdot f^2(x) \\ &\Rightarrow \frac{3x^2 \cdot f(x) - x^3 \cdot f'(x)}{f^2(x)} = 2x, f(x) \neq 0, \forall x \in (0; +\infty) \\ &\Rightarrow \left(\frac{x^3}{f(x)} \right)' = 2x \\ &\Rightarrow \frac{x^3}{f(x)} = \int 2x dx = x^2 + C. \end{aligned}$$

Mà $f(1) = \frac{1}{3} \Rightarrow C = 2 \Rightarrow f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 2}.$

Ta có $f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 2} \Rightarrow f'(x) = \frac{x^4 + 6x^2}{(x^2 + 2)^2} > 0, \forall x \in (0; +\infty).$

Vậy, hàm số $f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 2}$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty).$

Mà $[1; 2] \subset (0; +\infty)$ nên hàm số $f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 2}$ đồng biến trên đoạn $[1; 2]$.

Suy ra $M = f(2) = \frac{4}{3}$, $m = f(1) = \frac{1}{3}$.

Vậy $M + m = \frac{5}{3}$.

Chọn đáp án **C**..... □

CÂU 9. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^{x^2} (x^3 - 4x)$. Hàm số $F(x^2 + x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A 6.

B 5.

C 3.

D 4.

Lời giải.

Ta có $F'(x) = f(x)$. Khi đó

$$\begin{aligned} F'(x^2 + x) &= f(x^2 + x) \cdot (x^2 + x)' \\ &= (2x + 1)(x^2 + x)e^{(x^2 + x)^2} [(x^2 + x)^2 - 4] \\ &= (2x + 1)x(x + 1)e^{(x^2 + x)^2} (x^2 + x - 2)(x^2 + x + 2) \\ &= (2x + 1)x(x + 1)(x + 2)(x - 1)(x^2 + x + 2)e^{(x^2 + x)^2}. \end{aligned}$$

$$F'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = -\frac{1}{2} \\ x = 1 \\ x = -1 \\ x = 0. \end{cases}$$

$F'(x^2 + x) = 0$ có 5 nghiệm đơn nên $F(x^2 + x)$ có 5 điểm cực trị.

Chọn đáp án **B**..... □

CÂU 10.

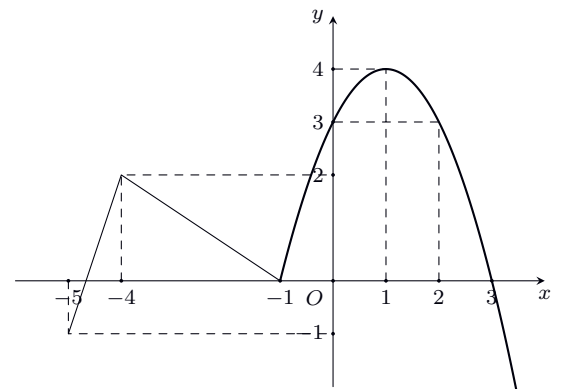
Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ trên $[-5; 3]$ như hình vẽ (phần cong của đồ thị là một phần của parabol $y = ax^2 + bx + c$). Biết $f(0) = 0$, giá trị của $2f(-5) + 3f(2)$ bằng

A 33.

B $\frac{109}{3}$.

C $\frac{35}{3}$.

D 11.



Lời giải.

Parabol $y = ax^2 + bx + c$ qua các điểm $(2; 3)$, $(1; 4)$, $(0; 3)$, $(-1; 0)$, $(3; 0)$ nên xác định được $y = -x^2 + 2x + 3$, $\forall x \geq -1$ suy ra $f(x) = -\frac{x^3}{3} + x^2 + 3x + C_1$.

Mà $f(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0$, $f(x) = -\frac{x^3}{3} + x^2 + 3x$.

Có $f(-1) = -\frac{5}{3}$, $f(2) = \frac{22}{3}$. (1)

Đồ thị $f'(x)$ trên đoạn $[-4; -1]$ qua các điểm $(-4; 2)$, $(-1; 0)$.

Nên $f'(x) = -\frac{2}{3}(x + 1) \Rightarrow f(x) = -\frac{2}{3}\left(\frac{x^2}{2} + x\right) + C_2$.

Mà $f(-1) = -\frac{5}{3} \Leftrightarrow C_2 = -\frac{5}{3} + \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right) = -2 \Rightarrow f(x) = -\frac{2}{3}\left(\frac{x^2}{2} + x\right) - 2$, hay $f(-4) = -\frac{14}{3}$.

Đồ thị $f'(x)$ trên đoạn $[-5; -4]$ qua các điểm $(-4; 2)$, $(-5; -1)$.

Nên $f'(x) = 3x + 14 \Rightarrow f(x) = \frac{3x^2}{2} + 14x + C_3$.

Mà $f(-4) = -\frac{14}{3} \Leftrightarrow \frac{3 \cdot (-4)^2}{2} + 14 \cdot (-4) + C_3 = -\frac{14}{3}$ suy ra $C_3 = \frac{82}{3}$.

Ta có $f(x) = \frac{3x^2}{2} + 14x + \frac{82}{3} \Rightarrow f(-5) = -\frac{31}{6}$. (2)

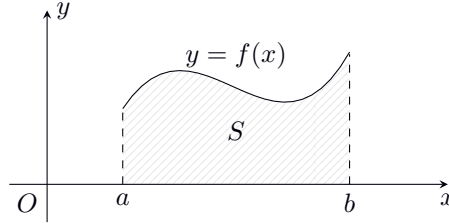
Từ (1) và (2) ta được $2f(-5) + 3f(2) = -\frac{31}{3} + 22 = \frac{35}{3}$.

Chọn đáp án **C**

Bài 2. TÍCH PHÂN

A. LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1. Diện tích hình thang cong



Nếu hàm số $f(x)$ liên tục và không âm trên đoạn $[a; b]$ thì diện tích S của hình thang cong giới hạn bởi đồ thị $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ được tính bởi: $S = F(b) - F(a)$ trong đó $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên đoạn $[a; b]$.

2. Khái niệm tích phân

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$. Nếu $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a; b]$ thì hiệu số $F(b) - F(a)$ được gọi là tích phân từ a đến b của hàm số $f(x)$, kí hiệu $\int_a^b f(x)dx$.

! Chú ý:

☑ Hiệu số $F(b) - F(a)$ còn được kí hiệu là $F(x)|_a^b$.

$$\text{Vậy } \int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a).$$

☑ Ta gọi \int_a^b là dấu tích phân, a là cận dưới, b là cận trên, $f(x)dx$ là biểu thức dưới dấu tích phân và $f(x)$ là hàm số dưới dấu tích phân.

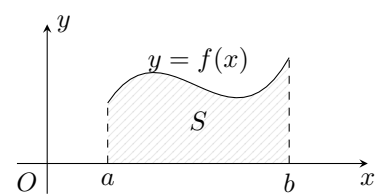
☑ Quy ước: $\int_a^a f(x)dx = 0$; $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.

☑ Tích phân của hàm số f từ a đến b chỉ phụ thuộc vào f và các cận a , b mà không phụ thuộc vào biến x hay t , nghĩa là $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt$.

☑ Ý nghĩa hình học của tích phân.

Nếu hàm số $f(x)$ liên tục và không âm trên đoạn $[a; b]$ thì $\int_a^b f(x)dx$ là diện tích S của hình thang cong giới hạn bởi đồ thị $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$.

$$S = \int_a^b f(x)dx.$$



⚡ NHẬN XÉT. ☑ Nếu hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ và $f'(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ thì

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x)dx.$$

- ☑ Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$. Khi đó $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$ được gọi là giá trị trung bình của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a; b]$.
- ☑ Đạo hàm của quãng đường di chuyển của vật theo thời gian bằng tốc độ của chuyển động tại mọi thời điểm $v(t) = s'(t)$. Do đó, nếu biết tốc độ $v(t)$ tại mọi thời điểm $t \in [a; b]$ thì tính được quãng đường di chuyển trong khoảng thời gian từ a đến b theo công thức: $s = s(b) - s(a) = \int_a^b v(t) dt$.

3. Tính chất của tích phân

Cho hai hàm số $f(x)$, $g(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$. Khi đó:

- a) $\int_a^b kf(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$, với k là hằng số.
- b) $\int_a^b [f(x) \pm g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$.
- c) $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$ với $c \in (a; b)$.

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

6

Tính chất của tích phân

Phần I. Mỗi câu hỏi học sinh chọn một trong bốn phương án A, B, C, D.

CÂU 1. Nếu $\int_0^3 f(x) dx = 6$ thì $\int_0^3 \left[\frac{1}{3}f(x) + 2 \right] dx$ bằng

- (A) 8. (B) 5. (C) 9. (D) 6.

💬 **Lời giải.**

Ta có $\int_0^3 \left[\frac{1}{3}f(x) + 2 \right] dx = \frac{1}{3} \int_0^3 f(x) dx + \int_0^3 2 dx = \frac{1}{3} \cdot 6 + 6 = 8$.

Chọn đáp án (A) □

CÂU 2. Nếu $\int_1^4 f(x) dx = 3$ và $\int_1^4 g(x) dx = -2$ thì $\int_1^4 (f(x) - g(x)) dx$ bằng

- (A) -1. (B) -5. (C) 5. (D) 1.

💬 **Lời giải.**

Ta có $\int_1^4 [f(x) - g(x)] dx = \int_1^4 f(x) dx - \int_1^4 g(x) dx = 3 - (-2) = 5$.

Chọn đáp án (C) □

CÂU 3. Nếu $\int_1^4 f(x) dx = 5$ và $\int_1^4 g(x) dx = -4$ thì $\int_1^4 [f(x) - g(x)] dx$ bằng

- (A) -1. (B) -9. (C) 1. (D) 9.

💬 **Lời giải.**

Ta có $\int_1^4 [f(x) - g(x)] dx = \int_1^4 f(x) dx - \int_1^4 g(x) dx = 5 - (-4) = 9$.

Chọn đáp án (D) □

CÂU 4. Biết $\int_1^{2024} f(x) dx = -3$ và $\int_{2024}^1 g(x) dx = 2$. Khi đó $\int_1^{2024} [f(x) - g(x)] dx$ bằng

- (A) 6. (B) -5. (C) 5. (D) -1.

Lời giải.

Ta có $\int_1^{2024} g(x) dx = 2 \Leftrightarrow \int_1^{2024} g(x) dx = -2.$

Do đó $\int_1^{2024} [f(x) - g(x)] dx = \int_1^{2024} f(x) dx - \int_1^{2024} g(x) dx = -3 - (-2) = -1.$

Chọn đáp án (D) □

CÂU 5. Nếu $\int_0^3 f(x) dx = 3$ thì $\int_0^3 4f(x) dx$ bằng

- (A) 3. (B) 12. (C) 36. (D) 4.

Lời giải.

Ta có $\int_0^3 4f(x) dx = 4 \int_0^3 f(x) dx = 4 \cdot 3 = 12.$

Chọn đáp án (B) □

CÂU 6. Cho $\int_0^2 f(x) dx = \frac{1}{2024}$. Tính $I = \int_0^2 2024f(x) dx$.

- (A) $I = 5.$ (B) $I = \frac{1}{2024}.$ (C) $I = 1.$ (D) $I = 2024.$

Lời giải.

Ta có $I = \int_0^2 2024f(x) dx = 2024 \int_0^2 f(x) dx = 2024 \cdot \frac{1}{2024} = 1.$

Chọn đáp án (C) □

CÂU 7. Nếu $\int_0^5 f(x) dx = 5$ thì $\int_5^0 5f(x) dx$ bằng

- (A) 1. (B) -1. (C) 25. (D) -25.

Lời giải.

Ta có $\int_5^0 5f(x) dx = 5 \int_5^0 f(x) dx = -5 \cdot \int_0^5 f(x) dx = (-5) \cdot 5 = -25.$

Chọn đáp án (D) □

CÂU 8. Nếu $\int_0^2 f(x) dx = 5$ thì $\int_0^2 [2f(x) - 1] dx$ bằng

- (A) 8. (B) 9. (C) 10. (D) 12.

Lời giải.

Ta có $\int_0^2 [2f(x) - 1] dx = 2 \int_0^2 f(x) dx - \int_0^2 1 dx = 2 \cdot 5 - 2 = 8.$

Chọn đáp án (A) □

CÂU 9. Nếu $\int_0^2 f(x) dx = 3$ thì $\int_0^2 [2f(x) - 1] dx$ bằng

- (A) 6. (B) 4. (C) 8. (D) 5.

Lời giải.

Ta có $\int_0^2 [2f(x) - 1] dx = 2 \int_0^2 f(x) dx - \int_0^2 1 dx = 2 \cdot 3 - 2 = 4.$


Chọn đáp án (B) □

CÂU 10. Cho $\int_0^1 f(x) dx = 2$ và $\int_0^1 g(x) dx = 5$, khi $\int_0^1 [f(x) - 2g(x)] dx$ bằng

- (A) -8. (B) 1. (C) -3. (D) 12.

Lời giải.

Ta có $\int_0^1 [f(x) - 2g(x)] dx = \int_0^1 f(x) dx - 2 \int_0^1 g(x) dx = 2 - 2 \cdot 5 = -8.$

Chọn đáp án (A) 

CÂU 11. Cho $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = 5$. Tính $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [f(x) + 2 \sin x] dx$.

(A) $I = 7$.

(B) $I = 5 + \frac{\pi}{2}$.

(C) $I = 3$.

(D) $I = 5 + \pi$.

 **Lời giải.**

Ta có

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} [f(x) + 2 \sin x] dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx + 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx - 2 \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= 5 - 2(0 - 1) = 7. \end{aligned}$$

Chọn đáp án (A) 

CÂU 12. Cho $\int_1^2 [4f(x) - 2x] dx = 1$. Khi đó $\int_1^2 f(x) dx$ bằng

(A) 1.

(B) -3.

(C) 3.

(D) -1.

 **Lời giải.**

Ta có

$$\begin{aligned} &\int_1^2 [4f(x) - 2x] dx = 1 \\ \Leftrightarrow &4 \int_1^2 f(x) dx - 2 \int_1^2 x dx = 1 \\ \Leftrightarrow &4 \int_1^2 f(x) dx - 2 \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_1^2 = 1 \\ \Leftrightarrow &4 \int_1^2 f(x) dx = 4 \\ \Leftrightarrow &\int_1^2 f(x) dx = 1. \end{aligned}$$

Chọn đáp án (A) 

Phần II. Trong mỗi ý a), b), c) và d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.

CÂU 13. Cho hai hàm f, g liên tục trên K và a, b là các số bất kỳ thuộc K .

Mệnh đề	Đ	S
a) $\int_a^b [f(x) + 2g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + 2 \int_a^b g(x) dx$.	X	

Mệnh đề	Đ	S
b) $\int_a^b \frac{f(x)}{g(x)} dx = \frac{\int_a^b f(x) dx}{\int_a^b g(x) dx}.$		X
c) $\int_a^b [f(x) \cdot g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx \int_a^b g(x) dx.$		X
d) $\int_a^b f^2(x) dx = \left[\int_a^b f(x) dx \right]^2.$		X

Lời giải.

a) Đúng. Theo tính chất tích phân ta có $\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx; \int_a^b kf(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$, với $k \in \mathbb{R}$.

b) Sai. Cho $a = 1, b = 2$ và $f(x) = x + 1, g(x) = x$. Khi đó

$$VT = \int_1^2 \frac{x+1}{x} dx = \int_1^2 \left(1 + \frac{1}{x}\right) dx = (x + \ln x) \Big|_1^2 = 1 + \ln 2.$$

và

$$VP = \frac{\int_1^2 (x+1) dx}{\int_1^2 x dx} = \frac{\left(\frac{x^2}{2} + x\right) \Big|_1^2}{\frac{x^2}{2} \Big|_1^2} = \frac{1}{3}.$$

Do đó $VT \neq VP$.

c) Sai. Cho $a = 1, b = 2$ và $f(x) = x, g(x) = \frac{1}{x}$. Khi đó

$$VT = \int_1^2 \left[x \cdot \frac{1}{x}\right] dx = x \Big|_1^2 = 1.$$

và

$$VP = \int_1^2 x dx \cdot \int_1^2 \frac{1}{x} dx = \left(\frac{x^2}{2}\right) \Big|_1^2 \cdot \ln x \Big|_1^2 = \frac{3}{2} \ln 2.$$

Do đó $VT \neq VP$.

d) Sai. Cho $a = 1, b = 2$ và $f(x) = x$. Khi đó

$$VT = \int_1^2 x^2 dx = \left(\frac{x^3}{3}\right) \Big|_1^2 = \frac{7}{3}.$$

và

$$VP = \left(\int_1^2 x dx\right)^2 = \left(\frac{x^2}{2} \Big|_1^2\right)^2 = \frac{9}{4}.$$

Do đó $VT \neq VP$.

Chọn đáp án a đúng b sai c sai d sai □

CÂU 14. Cho hàm số $f(x), g(x)$ liên tục trên \mathbb{R} .

Mệnh đề	Đ	S
a) Nếu $\int_0^2 f(x) dx = 4$ thì $\int_0^2 \left[\frac{1}{2}f(x) + 2 \right] dx = 6$.	X	
b) Nếu $\int_2^5 f(x) dx = 3$ và $\int_2^5 g(x) dx = -2$ thì $\int_2^5 [f(x) + g(x)] dx = 1$.	X	
c) Nếu $\int_1^4 f(x) dx = 6$ và $\int_1^4 g(x) dx = -5$ thì $\int_1^4 [f(x) - g(x)] dx = 1$.		X
d) Nếu $\int_2^3 f(x) dx = 4$ và $\int_2^3 g(x) dx = 1$ thì $\int_2^3 [f(x) - g(x)] dx = 3$.	X	

Lời giải.

a) Đúng. Ta có $\int_0^2 \left[\frac{1}{2}f(x) + 2 \right] dx = \frac{1}{2} \int_0^2 f(x) dx + \int_0^2 2 dx = \frac{1}{2} \cdot 4 + 4 = 6$.

b) Đúng. Ta có $\int_2^5 [f(x) + g(x)] dx = \int_2^5 f(x) dx + \int_2^5 g(x) dx = 3 + (-2) = 1$.

c) Sai. Ta có $\int_1^4 [f(x) - g(x)] dx = \int_1^4 f(x) dx - \int_1^4 g(x) dx = 6 - (-5) = 11$.

d) Đúng. Ta có $\int_2^3 [f(x) - g(x)] dx = \int_2^3 f(x) dx - \int_2^3 g(x) dx = 4 - 1 = 3$.

Chọn đáp án ☒ a đúng ☐ b đúng ☐ c sai ☐ d đúng

CÂU 15. Cho hàm số $f(x), g(x)$ liên tục trên \mathbb{R} .

Mệnh đề	Đ	S
a) Biết $\int_2^3 f(x) dx = 3$ và $\int_3^2 g(x) dx = 1$. Khi đó $\int_2^3 [f(x) + g(x)] dx = 4$.		X
b) Biết $\int_1^3 f(x) dx = 2022$ và $\int_3^1 g(x) dx = 1$. Khi đó $\int_1^3 [f(x) + g(x)] dx = 2021$.	X	
c) Biết $\int_1^2 f(x) dx = 3$ và $\int_1^2 g(x) dx = 2$. Khi đó $\int_1^2 [f(x) - g(x)] dx = 1$.	X	
d) Biết $\int_2^5 f(x) dx = 2$. Khi đó $\int_2^5 3f(x) dx = 2$.		X

Lời giải.

a) Sai. Ta có $\int_2^3 [f(x) + g(x)] dx = \int_2^3 f(x) dx + \int_2^3 g(x) dx = \int_2^3 f(x) dx - \int_3^2 g(x) dx = 2$.

b) Đúng. Ta có $\int_3^1 g(x) dx = 1 \Leftrightarrow \int_1^3 g(x) dx = -1$. Do đó

$$\int_1^3 [f(x) + g(x)] dx = \int_1^3 f(x) dx + \int_1^3 g(x) dx = 2022 + (-1) = 2021.$$

c) Đúng. Ta có $\int_1^2 [f(x) - g(x)] dx = \int_1^2 f(x) dx - \int_1^2 g(x) dx = 3 - 2 = 1.$

d) Sai. Ta có $\int_2^5 3f(x) dx = 3 \int_2^5 f(x) dx = 3 \cdot 2 = 6.$

Chọn đáp án ☐ a sai ☒ b đúng ☐ c đúng ☐ d sai ☐

CÂU 16. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} .

Mệnh đề	Đ	S
a) Nếu $\int_0^3 f(x) dx = 3$ thì $\int_0^3 2f(x) dx = 6.$	X	
b) Nếu $\int_1^4 f(x) dx = 2024$ thì $\int_4^1 f(x) dx = -2024.$	X	
c) Nếu $\int_6^0 f(x) dx = 12$ thì $\int_0^6 2022f(x) dx = 24264.$		X
d) Nếu $\int_0^1 f(x) dx = 4$ thì $\int_0^1 2f(x) dx = 8.$	X	

Lời giải.

a) Đúng. Ta có $\int_0^3 2f(x) dx = 2 \int_0^3 f(x) dx = 2 \cdot 3 = 6.$

b) Đúng. Ta có $\int_4^1 f(x) dx = - \int_1^4 f(x) dx = -2024.$

c) Sai. Ta có $\int_0^6 2022f(x) dx = 2022 \int_0^6 f(x) dx = 2022 \cdot (-12) = -24264.$

d) Đúng. Ta có $\int_0^1 2f(x) dx = 2 \int_0^1 f(x) dx = 2 \cdot 4 = 8.$

Chọn đáp án ☒ a đúng ☒ b đúng ☐ c sai ☐ d đúng ☐

Phần III. Học sinh điền kết quả vào ô trống.

CÂU 17. Cho $\int_0^3 f(x) dx = 4$. Tính $I = \int_0^3 3f(x) dx$.

Đáp án: 12

Lời giải.

Ta có $\int_0^3 3f(x) dx = 3 \int_0^3 f(x) dx = 12.$

CÂU 18. Cho $\int_1^3 f(x) dx = 2$. Tính $I = \int_1^3 [f(x) + 2x] dx$.

Đáp án: 10

Lời giải.

Ta có: $\int_1^3 [f(x) + 2x] dx = \int_1^3 f(x) dx + \int_1^3 2x dx = 2 + x^2 \Big|_1^3 = 2 + 3^2 - 1^2 = 10.$

CÂU 19. Cho $\int_{-1}^2 f(x) dx = 2$ và $\int_{-1}^2 g(x) dx = -1$. Tính $I = \int_{-1}^2 [x + 2f(x) + 3g(x)] dx$.

Đáp án: 2,5

Lời giải.

$$\text{Ta có } \int_{-1}^2 [x + 2f(x) + 3g(x)] dx = \int_{-1}^2 x dx + 2 \int_{-1}^2 f(x) dx + 3 \int_{-1}^2 g(x) dx = \frac{3}{2} + 4 - 3 = \frac{5}{2} = 2,5.$$

CÂU 20. Cho $\int_0^1 f(x) dx = 1$. Tính tích phân $I = \int_0^1 [2f(x) - 3x^2] dx$.

Đáp án: 1

Lời giải.

$$\int_0^1 [2f(x) - 3x^2] dx = 2 \int_0^1 f(x) dx - 3 \int_0^1 x^2 dx = 2 - 1 = 1.$$

CÂU 21. Biết $\int_1^3 f(x) dx = 3$. Tính giá trị của $I = \int_3^1 2f(x) dx$.

Đáp án: -6

Lời giải.

$$\text{Ta có } \int_3^1 2f(x) dx = - \int_1^3 2f(x) dx = -2 \int_1^3 f(x) dx = -2 \cdot 3 = -6.$$

7

Tích phân hàm số sơ cấp

Phần I. Mỗi câu hỏi học sinh chọn một trong bốn phương án A, B, C, D.

CÂU 1. Tích phân $I = \int_0^2 (2x + 1) dx$ bằng

(A) $I = 5$.

(B) $I = 6$.

(C) $I = 2$.

(D) $I = 4$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } I = \int_0^2 (2x + 1) dx = (x^2 + x) \Big|_0^2 = 4 + 2 = 6.$$

Chọn đáp án (B) □

CÂU 2. Tích phân $\int_0^1 (3x + 1)(x + 3) dx$ bằng

(A) 12.

(B) 9.

(C) 5.

(D) 6.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \int_0^1 (3x + 1)(x + 3) dx = \int_0^1 (3x^2 + 10x + 3) dx = (x^3 + 5x^2 + 3x) \Big|_0^1 = 9.$$

$$\text{Vậy } \int_0^1 (3x + 1)(x + 3) dx = 9.$$

Chọn đáp án (B) □

CÂU 3. Tính tích phân $I = \int_1^e \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right) dx$

(A) $I = \frac{1}{e}$.

(B) $I = \frac{1}{e} + 1$.

(C) $I = 1$.

(D) $I = e$.

Lời giải.

$$I = \int_1^e \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right) dx = \left(\ln |x| + \frac{1}{x} \right) \Big|_1^e = \frac{1}{e}.$$

Chọn đáp án **(A)** ☐

CÂU 4. Biết $\int_1^3 \frac{x+2}{x} dx = a + b \ln c$, với $a, b, c \in \mathbb{Z}$, $c < 9$. Tính tổng $S = a + b + c$.

(A) $S = 7$.

(B) $S = 5$.

(C) $S = 8$.

(D) $S = 6$.

Lời giải.

Ta có $\int_1^3 \frac{x+2}{x} dx = \int_1^3 \left(1 + \frac{2}{x} \right) dx = \int_1^3 dx + \int_1^3 \frac{2}{x} dx = 2 + 2 \ln |x| \Big|_1^3 = 2 + 2 \ln 3$.

Do đó $a = 2$, $b = 2$, $c = 3 \Rightarrow S = 7$.

Chọn đáp án **(A)** ☐

CÂU 5. Tích phân $\int_0^1 e^{3x+1} dx$ bằng

(A) $\frac{1}{3} (e^4 + e)$.

(B) $e^3 - e$.

(C) $\frac{1}{3} (e^4 - e)$.

(D) $e^4 - e$.

Lời giải.

$\int_0^1 e^{3x+1} dx = \frac{1}{3} \int_0^1 e^{3x+1} d(3x+1) = \frac{1}{3} e^{3x+1} \Big|_0^1 = \frac{1}{3} (e^4 - e)$.

Chọn đáp án **(C)** ☐

CÂU 6. Biết $\int_0^1 \frac{e^x}{2^x} dx = \frac{e-1}{a-\ln b}$, ($a, b \in \mathbb{Z}$). Khi đó giá trị của $P = a + b$ là

(A) $P = -3$.

(B) $P = 6$.

(C) $P = -1$.

(D) $P = 3$.

Lời giải.

$I = \int_0^1 \frac{e^x}{2^x} dx = \int_0^1 \left(\frac{e}{2} \right)^x dx = \left[\left(\frac{e}{2} \right)^x \cdot \frac{1}{1-\ln 2} \right] \Big|_0^1 = \frac{e-1}{2-\ln 4}$.

Chọn đáp án **(B)** ☐

CÂU 7. Giá trị của $I = \int_0^1 \frac{e^{2x}-4}{e^x+2} dx$ bằng

(A) $I = 2(e+3)$.

(B) $I = \frac{1}{2}(e+3)$.

(C) $I = e-3$.

(D) $I = 2(e-3)$.

Lời giải.

$I = \int_0^1 \frac{e^{2x}-4}{e^x+2} dx = \int_0^1 \frac{(e^x-2)(e^x+2)}{e^x+2} dx = \int_0^1 (e^x-2) dx = (e^x-2x) \Big|_0^1 = e-3$.

Chọn đáp án **(C)** ☐

CÂU 8. Biết $\int_1^2 e^x \left(1 - \frac{e^{-x}}{x} \right) dx = e^2 + a \cdot e + b \ln 2$, ($a, b \in \mathbb{Z}$). Khi đó giá trị của $P = \frac{a+b}{a \cdot b}$ là

(A) $P = -3$.

(B) $P = 1$.

(C) $P = -1$.

(D) $P = -2$.

Lời giải.

$I = \int_1^2 e^x \left(1 - \frac{e^{-x}}{x} \right) dx = \int_1^2 \left(e^x - \frac{1}{x} \right) dx = (e^x - \ln |x|) \Big|_1^2 = e^2 - e - \ln 2$.

Chọn đáp án **(D)** ☐

CÂU 9. Biết $I = \int_0^1 \frac{e^{2x-1} - e^{-3x} + 1}{e^x} dx = \frac{1}{a} + b$, ($a, b \in \mathbb{R}$). Khi đó giá trị của $P = \frac{a+b}{a \cdot b}$ là

(A) $P = e^4 - 1$.

(B) $P = \frac{e^4 - 1}{e^2}$.

(C) $P = \frac{e^4 - 1}{e^4}$.

(D) $P = \frac{1 - e^4}{e^4}$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \frac{e^{2x-1} - e^{-3x} + 1}{e^x} dx = \int_0^1 (e^{x-1} - e^{-4x} + e^{-x}) dx \\ &= \left(e^{x-1} - \frac{e^{-4x}}{-4} + \frac{e^{-x}}{-1} \right) \Big|_0^1 = \frac{1 - e^4}{e^4} = \frac{1}{e^4} - 1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow P = \frac{a+b}{a \cdot b} = \frac{1 - e^4}{e^4}.$$

Chọn đáp án (D) □

CÂU 10. Giá trị của $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$ bằng

(A) 0.

(B) 1.

(C) -1.

(D) $\frac{\pi}{2}$.

🗨️ **Lời giải.**

$$\text{Tính được } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1.$$

Chọn đáp án (B) □

CÂU 11. Biết $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} (2 \sin x + 3 \cos x + x) dx = \frac{a+b\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi^2}{c}$, $(a, b, c \in \mathbb{Z})$. Khi đó giá trị của $P = a + 2b + 3c$ là

(A) $P = 45$.

(B) $P = 60$.

(C) $P = 65$.

(D) $P = 70$.

🗨️ **Lời giải.**

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} (2 \sin x + 3 \cos x + x) dx = \left(-2 \cos x + 3 \sin x + \frac{1}{2} x^2 \right) \Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{12 - 3\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi^2}{18}$$

$$\Rightarrow P = a + 2b + 3c = 60.$$

Chọn đáp án (B) □

CÂU 12. Biết $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} 3 \tan^2 x dx = a\sqrt{3} + b + \frac{\pi}{c}$, $(a, b, c \in \mathbb{Z})$. Khi đó giá trị của $P = a + b + c$ là

(A) $P = 6$.

(B) $P = -4$.

(C) $P = 4$.

(D) $P = -6$.

🗨️ **Lời giải.**

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} 3 \tan^2 x dx = 3 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx = 3 (\tan x - x) \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = 3\sqrt{3} - 3 - \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow P = a + b + c = 3 - 3 - 4 = -4.$$

Chọn đáp án (B) □

CÂU 13. Biết $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} (2 \cot^2 x + 5) dx = \frac{\pi}{a} + b\sqrt{3} + c$, $(a, b, c \in \mathbb{Z})$. Khi đó giá trị của

$P = a + b + c$ là

(A) $P = 6$.

(B) $P = -4$.

(C) $P = 4$.

(D) $P = -6$.

🗨️ **Lời giải.**

$$\begin{aligned} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} (2 \cot^2 x + 5) dx &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \left(2 \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1 \right) + 5 \right) dx \\ &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \left(3 - \frac{2}{\sin^2 x} \right) dx = (3x - \cot x) \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4} + \sqrt{3} - 1. \end{aligned}$$

Chọn đáp án **C** ☐

CÂU 14. Biết $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \frac{x}{4} \cos^2 \frac{x}{4} dx = \frac{\pi}{c} + \frac{a}{b}$ với $a, b \in \mathbb{Z}$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Khi đó giá trị của $P = a + b + c$ là

- A** $P = 17$. **B** $P = 16$. **C** $P = 32$. **D** $P = 49$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \frac{x}{4} \cos^2 \frac{x}{4} dx &= \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \frac{x}{2} dx \\ &= \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1 - \cos x}{2} \right) dx \\ &= \frac{1}{8} \left(x - \frac{1}{4} \sin x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{16} + \frac{1}{32}. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow P = a + b + c = 1 + 32 + 16 = 49.$$

Chọn đáp án **D** ☐

Phần II. Trong mỗi ý a), b), c) và d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.

CÂU 15. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[a; b]$. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

Mệnh đề	Đ	S
a) $\int_a^b f(x) dx = \int_b^a f(x) dx$.		X
b) $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$.	X	

Mệnh đề	Đ	S
c) $\int_a^b f(x) dx = 2 \int_a^b f(x) d(2x)$.		X
d) $\int_a^a 2024f(x) dx = 0$.	X	

Lời giải.

a) Sai. Vì $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$.

b) Đúng. Vì $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$.

c) Sai. Vì $2 \int_a^b f(x) d(2x) = 4 \int_a^b f(x) d(x)$.

d) Đúng. $\int_a^a 2024f(x) dx = 0$.

Chọn đáp án **a sai | b đúng | c sai | d đúng** ☐

CÂU 16. Cho hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$ liên tục trên $[a; b]$. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

Mệnh đề	Đ	S
a) $\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$.	X	
b) $\int_a^b f(x) \cdot g(x) dx = \int_a^b f(x) dx \cdot \int_a^b g(x) dx$.		X

Mệnh đề	Đ	S
c) $\int_a^b k f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx.$	X	
d) $\int_a^b \frac{f(x)}{g(x)} dx = \frac{\int_a^b f(x) dx}{\int_a^b g(x) dx}.$		X

Lời giải.

a) Đúng. $\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx.$

b) Sai. Vì không có tính chất.

c) Đúng. $\int_a^b k f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx.$

d) Sai.

Chọn đáp án ☐ a đúng ☐ b sai ☒ c đúng ☐ d sai

CÂU 17. Cho hàm $f(x)$ là hàm liên tục trên đoạn $[a; b]$ với $a < b$ và $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm $f(x)$ trên $[a; b]$. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

Mệnh đề	Đ	S
a) $\int_a^b k f(x) dx = k [F(b) - F(a)].$	X	
b) $\int_b^a f(x) dx = F(b) - F(a).$		X
c) Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đường thẳng $x = a$; $x = b$; đồ thị của hàm số $y = f(x)$ và trục hoành được tính theo công thức $S = F(b) - F(a).$		X
d) $\int_a^b f(2x + 3) dx = F(2x + 3) \Big _a^b.$		X

Lời giải.

a) Đúng.

b) Sai. $\int_b^a f(x) dx = F(a) - F(b).$

c) Sai. Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đường thẳng $x = a$; $x = b$; đồ thị của hàm số $y = f(x)$ và trục hoành được tính theo công thức $S = |F(b) - F(a)|.$

d) Sai. $\int_a^b f(2x + 3) dx = \frac{1}{2} F(2x + 3) \Big|_a^b$

Chọn đáp án ☐ a đúng ☐ b sai ☐ c sai ☐ d sai

CÂU 18. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai.

Mệnh đề	Đ	S
a) $\int_0^1 \frac{e^{2x} - 4}{e^x + 2} dx = e - 3.$	X	
b) $\int_0^1 \frac{e^x}{2^x} dx = \frac{e}{2} + 1.$		X

Mệnh đề	Đ	S
c) $\int_1^2 e^x \left(1 - \frac{e^{-x}}{x}\right) dx = e^2 - e - \ln 2.$	X	
d) $\int_0^1 \frac{e^{2x-1} - e^{-3x} + 1}{e^x} dx = e^4 - 1.$		X

Lời giải.

a) Đúng.

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{e^{2x} - 4}{e^x + 2} dx &= \int_0^1 \frac{(e^x - 2)(e^x + 2)}{e^x + 2} dx \\ &= \int_0^1 (e^x - 2) dx = (e^x - 2x) \Big|_0^1 = e - 3. \end{aligned}$$

b) Sai. $\int_0^1 \frac{e^x}{2^x} dx = \int_0^1 \left(\frac{e}{2}\right)^x dx = \left[\left(\frac{e}{2}\right)^x\right]_0^1 = \frac{e}{2} - 1.$

c) Đúng. $\int_1^2 e^x \left(1 - \frac{e^{-x}}{x}\right) dx = \int_1^2 \left(e^x - \frac{1}{x}\right) dx = (e^x - \ln|x|) \Big|_1^2 = e^2 - e - \ln 2.$

d) Sai.

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{e^{2x-1} - e^{-3x} + 1}{e^x} dx &= \int_0^1 (e^{x-1} - e^{-4x} + e^{-x}) dx \\ &= (e^{x-1} - e^{-4x} + e^{-x}) \Big|_0^1 = \frac{1 - e^4}{e^4} = e^{-4} - 1. \end{aligned}$$

Chọn đáp án a đúng b sai c đúng d sai □

Phần III. Học sinh điền kết quả vào ô trống.

CÂU 19. Với a, b là các tham số thực. Tích phân

$$I = \int_0^b (3x^2 - 2ax - 1) dx = b^t - b^y a + zb.$$

Tính $t + y + z$.

Đáp án: 4

Lời giải.

Ta có $\int_0^b (3x^2 - 2ax - 1) dx = (x^3 - ax^2 - x) \Big|_0^b = b^3 - ab^2 - b.$

Suy ra $t = 3, y = 2, z = -1$ nên $t + y + z = 4$.

CÂU 20. Cho $\int_0^m (3x^2 - 2x + 1) dx = 6$. Tính giá trị của tham số m .

Đáp án: 2

Lời giải.

Ta có $\int_0^m (3x^2 - 2x + 1) dx = 6 \Leftrightarrow (x^3 - x^2 + x) \Big|_0^m = 6 \Leftrightarrow m^3 - m^2 + m - 6 = 0 \Leftrightarrow m = 2.$

CÂU 21. Tính tích phân $I = \int_1^2 \frac{x-1}{x} dx$ (làm tròn đến hàng phần trăm).

Đáp án: 0,31

Lời giải.

$$\begin{aligned} I &= \int_1^2 \frac{x-1}{x} dx \\ &= \int_1^2 \left(1 - \frac{1}{x}\right) dx \\ &= (x - \ln|x|) \Big|_1^2 \\ &= (2 - \ln 2) - (1 - \ln 1) = 1 - \ln 2. \end{aligned}$$

CÂU 22. Tính $I = \int_1^2 \left(\frac{x - \sqrt[4]{x^3}}{x}\right)^2 dx$ (làm tròn đến hàng phần trăm).

Đáp án: 0,01

Lời giải.

$$\begin{aligned} I &= \int_1^2 \left(\frac{x - \sqrt[4]{x^3}}{x}\right)^2 dx \\ &= \int_1^2 \left(1 - x^{-\frac{1}{4}}\right)^2 dx \\ &= \int_1^2 \left(1 - 2x^{-\frac{1}{4}} + x^{-\frac{1}{2}}\right) dx \\ &= \left(x - \frac{8}{3}x^{\frac{3}{4}} + \frac{8}{7}x^{\frac{7}{8}}\right) \Big|_1^2 \\ &\approx 0,01. \end{aligned}$$

CÂU 23. Tính $I = \int_1^2 (\sqrt{x} + 1)(\sqrt[3]{x} - 1) dx$ (làm tròn đến hàng phần trăm).

Đáp án: 0,32

Lời giải.

$$\begin{aligned} I &= \int_1^2 (\sqrt{x} + 1)(\sqrt[3]{x} - 1) dx \\ &= \int_1^2 \left(x^{\frac{5}{6}} - x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{3}} - 1\right) dx \\ &= \left(\frac{6}{11}x^{\frac{11}{6}} - \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} - x\right) \Big|_1^2 \\ &\approx 0,32. \end{aligned}$$

CÂU 24. Tính $I = \int_1^2 \frac{(x^2 + 1)^3}{x^2} dx$ (làm tròn đến hàng phần chục).

Đáp án: 16,7

🗨️ Lời giải.

$$\begin{aligned}
 I &= \int_1^2 \frac{(x^2+1)^3}{x^2} dx \\
 &= \int_1^2 \left(x^4 + 3x^2 + 3 + \frac{1}{x^2} \right) dx \\
 &= \left(\frac{x^5}{5} + x^3 + 3x - \frac{1}{x} \right) \Big|_1^2 \\
 &= 16,7.
 \end{aligned}$$

CÂU 25. Tính $I = \int_0^1 5^{x+1} \cdot 7^{2x-1} dx$ (làm tròn đến hàng đơn vị).

Đáp án: 959

🗨️ Lời giải.

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^1 5^{x+1} \cdot 7^{2x-1} dx \\
 &= \frac{5}{7} \int_0^1 5^x \cdot 49^x dx \\
 &= \frac{5}{7} \int_0^1 245^x dx \\
 &= \frac{5}{7} (245^x \ln 245) \Big|_0^1 \\
 &= \frac{5}{7} (245 \ln 245 - \ln 245) \approx 959.
 \end{aligned}$$

CÂU 26. Tính $I = \int_0^1 (x + e^{-x-2}) dx$ (làm tròn đến hàng phần trăm).

Đáp án: 0,59

🗨️ Lời giải.

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^1 (x + e^{-x-2}) dx \\
 &= \left(\frac{x^2}{2} - e^{-x-2} \right) \Big|_0^1 \\
 &= \left(\frac{1}{2} + e^{-2} - e^{-3} \right) \approx 0,59.
 \end{aligned}$$

CÂU 27. Tính $I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} x^2 \left(1 - \frac{\sin x}{x^2} \right) dx$ (làm tròn đến hàng phần trăm).

Đáp án: -0,03

Lời giải.

$$\begin{aligned} I &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} x^2 \left(1 - \frac{\sin x}{x^2} \right) dx \\ &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} (x^2 - \sin x) dx \\ &= \left(\frac{x^3}{3} + \cos x \right) \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \approx -0,03. \end{aligned}$$

CÂU 28. Tính $I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin x - \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \right) dx$ (làm tròn đến hàng phần trăm).

Đáp án: 0,38

Lời giải.

$$\begin{aligned} I &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin x - \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \right) dx \\ &= \left(-\cos x - 3\sqrt[3]{x} \right) \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \approx 0,38. \end{aligned}$$

CÂU 29. Biết $\int_0^1 \frac{(e^{-x} + 2)^2}{e^{x-1}} dx = ae + b + \frac{c}{e} + \frac{1}{e^2}$ ($a, b, c \in \mathbb{Z}$). Tính giá trị của $P = a + b + c$.

Đáp án: -1

Lời giải.

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \frac{(e^{-x} + 2)^2}{e^{x-1}} dx \\ &= \int_0^1 \frac{e^{-2x} + 4e^{-x} + 4}{e^{x-1}} dx \\ &= \int_0^1 (e^{-3x+1} + 4e^{-2x+1} + 4e^{-x+1}) dx \\ &= \left(\frac{e^{-3x+1}}{-3} + \frac{4e^{-2x+1}}{-2} + \frac{4e^{-x+1}}{-1} \right) \Big|_0^1 \\ &= \frac{-9e^3 + 4e^2 + 4e + 1}{e^2} = -9e + 4 + \frac{4}{e} + \frac{1}{e^2}. \end{aligned}$$

Vậy $P = a + b + c = -1$.

CÂU 30. Biết $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x} dx = a\sqrt{3} + \frac{\pi}{b}$ ($a, b \in \mathbb{Z}$). Tính $a + b$.

Đáp án: 0

Lời giải.

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x} dx \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{2 \sin^2 x}{2 \cos^2 x} dx \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx \\
 &= (\tan x - x) \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = \sqrt{3} - \frac{\pi}{3}.
 \end{aligned}$$

Vậy $\begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases} \Rightarrow a + b = 0.$

CÂU 31. Tính $I = \int_0^1 \frac{(2024^x + 1)^2}{e^{-3x}} dx$ (làm tròn đến hàng phần trăm).

Đáp án: 0

Lời giải.

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^1 \frac{(2024^x + 1)^2}{e^{-3x}} dx \\
 &= \int_0^1 \frac{2024^{2x} + 2 \cdot 2024^x + 1}{e^{-3x}} dx \\
 &= \left[\left(\frac{2024^2}{e^{-3}} \right)^x + 2 \cdot \left(\frac{2024}{e^{-3}} \right)^x + e^{3x} \right] \Big|_0^1 \\
 &= \frac{\left(\frac{2024^2}{e^{-3}} \right)^1}{\ln \frac{2024^2}{e^{-3}}} + \frac{2 \cdot \left(\frac{2024}{e^{-3}} \right)^1}{\ln \frac{2024}{e^{-3}}} + \frac{1}{3} e^{3x} \\
 &= \frac{2024^{2x} e^{3x}}{2 \ln 2024 - 3} + \frac{2 \cdot 2024^{2x} e^{3x}}{\ln 2024 - 3} + \frac{1}{3} e^{3x} \\
 &= \left(\frac{2024^{2x}}{2 \ln 2024 - 3} + \frac{2 \cdot 2024^{2x}}{\ln 2024 - 3} + \frac{1}{3} \right) e^{3x}.
 \end{aligned}$$

CÂU 32. Tính $I = \frac{1}{1000} \int_0^1 \frac{(e^{-x} + 2)^2}{e^{x-1}} dx$ (làm tròn đến hàng đơn vị).

Đáp án: 4522

Lời giải.

$$\begin{aligned}
 I &= \frac{1}{1000} \int_0^1 \frac{(e^{-x} + 2)^2}{e^{x-1}} dx \\
 &= \frac{1}{1000} \int_0^1 \frac{e^{-2x} + 4e^{-x} + 4}{e^{x-1}} dx \\
 &= \frac{1}{1000} \int_0^1 (e^{-3x+1} + 4e^{-2x+1} + 4e^{-x+1}) dx \\
 &= \frac{1}{1000} (e^{-3x+1} + 4e^{-2x+1} + 4e^{-x+1}) \Big|_0^1 \\
 &= \frac{1}{1000} \frac{-9e^3 + 4e^2 + 4e + 1}{e^2} \approx 4522.
 \end{aligned}$$

CÂU 33. Tính $I = \frac{1}{100} \int_1^2 e^{2x} \left(2023 + \frac{2024e^{-2x}}{x^3} \right) dx$ (làm tròn đến hàng phần chục).

Đáp án: 48,5

Lời giải.

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{100} \int_1^2 e^{2x} \left(2023 + \frac{2024e^{-2x}}{x^3} \right) dx \\ &= \frac{1}{100} \int_1^2 \left(2023e^{2x} + \frac{2024}{x^3} \right) dx \\ &= \frac{1}{100} \left(2023 \frac{e^{2x}}{2} - \frac{1012}{x} \right) \Big|_1^2 \\ &\approx 48,5. \end{aligned}$$

CÂU 34. Tính $I = \int_1^2 \left(4x^3 - 2 \cdot 3^{x+1} + \frac{1}{x^2} \right) dx$ (làm tròn đến hàng phần chục).

Đáp án: -17,3

Lời giải.

$$\begin{aligned} I &= \int_1^2 \left(4x^3 - 2 \cdot 3^{x+1} + \frac{1}{x^2} \right) dx \\ &= \left(x^4 - \frac{2 \cdot 3^{x+1}}{\ln 3} - \frac{1}{x} \right) \Big|_1^2 \\ &\approx -17,3. \end{aligned}$$

8

Tích phân hàm chứa trị tuyệt đối

Tính tích phân $I = \int_a^b |f(x)| dx$?

Phương pháp

☑ **Bước 1.** Xét dấu $f(x)$ trên đoạn $[a; b]$.

☑ **Bước 2.** Dựa vào bảng xét dấu trên đoạn $[a; b]$ để khử $|f(x)|$. Sau đó sử dụng các phương pháp tính tích phân đã học để tính $I = \int_a^b |f(x)| \cdot dx$.

Phần I. Mỗi câu hỏi học sinh chọn một trong bốn phương án A, B, C, D.

CÂU 1. Giá trị của $I = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos 2x} dx$ bằng

(A) $\sqrt{3}$.

(B) $4\sqrt{2}$.

(C) $2\sqrt{3}$.

(D) $\frac{\pi}{2}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } I = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos 2x} dx = \int_0^{2\pi} \sqrt{2 \sin^2 x} dx = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} |\sin x| dx.$$

$$\text{Vì } x \in [0; \pi] \rightarrow \sin x > 0 \Rightarrow |\sin x| = \sin x;$$

$$x \in [\pi; 2\pi] \rightarrow \sin x < 0 \Rightarrow |\sin x| = -\sin x.$$

$$\text{Vậy } I = \sqrt{2} \left(\int_0^{\pi} \sin x dx + \int_{\pi}^{2\pi} -\sin x dx \right) = \sqrt{2} \left(-\cos x \Big|_0^{\pi} + \cos x \Big|_{\pi}^{2\pi} \right) = 4\sqrt{2}.$$

Chọn đáp án (B) □

CÂU 2. Tính tích phân $I = \int_0^2 |x - 2| \, dx$.

(A) $I = -2$.

(B) $I = 4$.

(C) $I = 2$.

(D) $I = 0$.

Lời giải.

Ta có $I = \int_0^2 |x - 2| \, dx$.

Do $x \in [0; 2] \Rightarrow x - 2 < 0 \Leftrightarrow |x - 2| = 2 - x$.

$$\text{Vậy } I = \int_0^2 (2 - x) \, dx = \left(2x - \frac{1}{2}x^2 \right) \Big|_0^2 = 4 - 2 = 2.$$

Chọn đáp án (C) □

CÂU 3. Tính tích phân $I = \int_0^2 |x^3 - x| \, dx$.

(A) $I = -\frac{1}{2}$.

(B) $I = 5$.

(C) $I = \frac{1}{2}$.

(D) $I = \frac{5}{2}$.

Lời giải.

Ta có $I = \int_0^2 |x^3 - x| \, dx$.

$$\text{Ta có } f(x) = x^3 - x = x(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \\ x = 1. \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x) > 0 \forall x \in [1; 2]; \quad f(x) < 0 \forall x \in [0; 1].$$

$$\text{Vậy } I = \int_0^1 (x - x^3) \, dx + \int_1^2 (x^3 - x) \, dx = \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^4 \right) \Big|_0^1 + \left(\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2 \right) \Big|_1^2 = \frac{5}{2}.$$

Chọn đáp án (D) □

CÂU 4. Tính tích phân $I = \int_0^2 |x^2 + 2x - 3| \, dx$.

(A) $I = -2$.

(B) $I = 4$.

(C) $I = 5$.

(D) $I = -4$.

Lời giải.

Ta có $I = \int_0^2 |x^2 + 2x - 3| \, dx$.

$$\text{Ta có } f(x) = x^2 + 2x - 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -3 \end{cases} \Rightarrow f(x) > 0, \forall x \in [1; 2]; \quad f(x) < 0, \forall x \in [0; 1].$$

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 -f(x) \, dx + \int_1^2 f(x) \, dx \\ &= \int_0^1 (3 - 2x - x^2) \, dx + \int_1^2 (x^2 + 2x - 3) \, dx \\ &= \left(3x - x^2 - \frac{1}{3}x^3 \right) \Big|_0^1 + \left(\frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x \right) \Big|_1^2 \\ &= \left(3 - 1 - \frac{1}{3} \right) + \left[\left(\frac{8}{3} + 4 - 6 \right) - \left(\frac{1}{3} + 1 - 3 \right) \right] = 4. \end{aligned}$$

Chọn đáp án (B) □

CÂU 5. Cho tích phân $I = (\sqrt{3} + \sqrt{2}) \int_{-3}^3 |x^2 - 1| \, dx = a\sqrt{3} + b\sqrt{2}$ với $a, b \in \mathbb{Q}$. Tính $P = a + b$.

(A) $P = \frac{44}{3}$.

(B) $P = \frac{88}{3}$.

(C) $P = \frac{17}{3}$.

(D) $P = \frac{98}{3}$.

Lời giải.

Ta có $I = (\sqrt{3} + \sqrt{2}) \int_{-3}^3 |x^2 - 1| dx$.

Tính $J = \int_{-3}^3 |x^2 - 1| dx$.

Ta có $f(x) = x^2 - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1. \end{cases}$

$\Rightarrow f(x) > 0, \forall x \in [-3; -1] \cup [1; 3]$; và $f(x) < 0, \forall x \in [-1; 1]$.

Vậy

$$\begin{aligned} I &= \int_{-3}^{-1} (x^2 - 1) dx + \int_{-1}^1 (1 - x^2) dx + \int_1^3 (x^2 - 1) dx \\ &= \left(\frac{1}{3}x^3 - x \right) \Big|_{-3}^{-1} + \left(x - \frac{1}{3}x^3 \right) \Big|_{-1}^1 + \left(\frac{1}{3}x^3 - x \right) \Big|_1^3 \\ &= \frac{20}{3} + \frac{4}{3} + \frac{20}{3} = \frac{44}{3}. \\ \Rightarrow I &= (\sqrt{3} + \sqrt{2}) \int_{-3}^3 |x^2 - 1| dx = \frac{44}{3}\sqrt{3} + \frac{44}{3}\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Khi đó $a = \frac{44}{3}, b = \frac{44}{3}$. Suy ra $P = a + b = \frac{88}{3}$.

Chọn đáp án (B) □

CÂU 6. Tính tích phân $I = \int_{-2}^5 (|x + 2| - |x - 2|) dx$.

(A) $I = 18$.

(B) $I = 12$.

(C) $I = 28$.

(D) $I = 30$.

Lời giải.

Ta có $I = \int_{-2}^5 (|x + 2| - |x - 2|) dx$.

Gọi $f(x) = |x + 2| - |x - 2|$ trên $x \in [-2; 5]$. Khi đó

✓ Với $x \in [-2; 2]$ thì $f(x) = 2x$.

✓ Với $x \in [2; 5]$ thì $f(x) = 4$.

$$\text{Vậy } \int_{-2}^5 f(x) dx = \int_{-2}^2 2x dx + \int_2^5 4 dx = x^2 \Big|_{-2}^2 + 4x \Big|_2^5 = 0 + 12 = 12.$$

Chọn đáp án (B) □

CÂU 7. Cho tích phân $I = \int_0^3 |2^x - 4| dx = a + \frac{b}{c \ln 2}$ với $a, b, c \in \mathbb{Z}$ và $\frac{b}{c}$ là phân số tối giản. Tính $P = a^2 + b^2 + c^2$.

(A) $P = 15$.

(B) $P = 10$.

(C) $P = 5$.

(D) $P = 18$.

Lời giải.

Ta có $I = \int_0^3 |2^x - 4| dx$. Ta có $2^x - 4 > 0 \Leftrightarrow x > 2 \Rightarrow f(x) > 0, \forall x \in [2; 3]$; và $f(x) < 0, \forall x \in [0; 2]$.

Vậy

$$\begin{aligned} I &= \int_0^2 (4 - 2^x) dx + \int_2^3 (2^x - 4) dx \\ &= \left(4x - \frac{1}{\ln 2} 2^x \right) \Big|_0^2 + \left(\frac{1}{\ln 2} 2^x - 4x \right) \Big|_2^3 \\ &= \left(8 - \frac{3}{\ln 2} \right) + \left(\frac{4}{\ln 2} - 4 \right) = 4 + \frac{1}{\ln 2}. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow P = a^2 + b^2 + c^2 = 4^2 + 1^2 + 1^2 = 18.$$

Chọn đáp án (D) □

CÂU 8. Tính tích phân $I = \int_{-1}^1 |2^x - 2^{-x}| dx$.

(A) $\frac{1}{\ln 2}$.

(B) $\ln 2$.

(C) $2 \ln 2$.

(D) $\frac{2}{\ln 2}$.

Lời giải.

$$I = \int_{-1}^1 |2^x - 2^{-x}| dx.$$

Ta có $2^x - 2^{-x} = 0 \Rightarrow x = 0$.

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^1 |2^x - 2^{-x}| dx \\ &= \int_{-1}^0 |2^x - 2^{-x}| dx + \int_0^1 |2^x - 2^{-x}| dx \\ &= \left| \int_{-1}^0 (2^x - 2^{-x}) dx \right| + \left| \int_0^1 (2^x - 2^{-x}) dx \right| \\ &= \left| \left(\frac{2^x + 2^{-x}}{\ln 2} \right) \right|_{-1}^0 + \left| \left(\frac{2^x + 2^{-x}}{\ln 2} \right) \right|_0^1 = \frac{1}{\ln 2}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án (A) □

CÂU 9. Tính tích phân $I = \int_{-1}^2 (|x| - |x - 1|) dx$.

(A) $I = 0$.

(B) $I = 2$.

(C) $I = -2$.

(D) $I = -3$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } I = \int_{-1}^2 (|x| - |x - 1|) dx.$$

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^2 (|x| - |x - 1|) dx \\ &= \int_{-1}^2 |x| dx - \int_{-1}^2 |x - 1| dx \\ &= - \int_{-1}^0 x dx + \int_0^2 x dx + \int_{-1}^1 (x - 1) dx - \int_1^2 (x - 1) dx \\ &= - \frac{x^2}{2} \Big|_{-1}^0 + \frac{x^2}{2} \Big|_0^2 + \left(\frac{x^2}{2} - x \right) \Big|_{-1}^1 - \left(\frac{x^2}{2} - x \right) \Big|_1^2 = 0. \end{aligned}$$

Chọn đáp án (A) □

CÂU 10. Cho a là số thực dương, tính tích phân $I = \int_{-1}^a |x| dx$ theo a .

(A) $I = \frac{a^2 + 1}{2}$.

(B) $I = \frac{a^2 + 2}{2}$.

(C) $I = \frac{-2a^2 + 1}{2}$.

(D) $I = \frac{|3a^2 - 1|}{2}$.

Lời giải.

$$\text{Vì } a > 0 \text{ nên } I = - \int_{-1}^0 x dx + \int_0^a x dx = \frac{1}{2} + \frac{a^2}{2} = \frac{1 + a^2}{2}.$$

Chọn đáp án (A).....

CÂU 11. Cho số thực $m > 1$ thỏa mãn $\int_1^m |2mx - 1| dx = 1$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- (A) $m \in (4; 6)$. (B) $m \in (2; 4)$. (C) $m \in (3; 5)$. (D) $m \in (1; 3)$.

Lời giải.

Do $m > 1 \Rightarrow 2m > 2 \Rightarrow \frac{1}{2m} < 1$. Do đó với $m > 1, x \in [1; m] \Rightarrow 2mx - 1 > 0$.

Vậy

$$\begin{aligned} \int_1^m |2mx - 1| dx &= \int_1^m (2mx - 1) dx \\ &= (mx^2 - x) \Big|_1^m \\ &= m^3 - m - m + 1 = m^3 - 2m + 1. \end{aligned}$$

Từ đó theo bài ra ta có $m^3 - 2m + 1 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = \pm\sqrt{2}. \end{cases}$

Do $m > 1$ vậy $m = \sqrt{2}$.

Chọn đáp án (D).....

CÂU 12. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- (A) $\int_{-1}^1 |x|^3 dx = \left| \int_{-1}^1 x^3 dx \right|$. (B) $\int_{-1}^{2024} |x^4 - x^2 + 1| dx = \int_{-1}^{2024} (x^4 - x^2 + 1) dx$.
(C) $\int_{-2}^3 |e^x (x + 1)| dx = \int_{-2}^3 e^x (x + 1) dx$. (D) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \cos^2 x} dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$.

Lời giải.

Ta có: $x^4 - x^2 + 1 = x^4 - 2 \cdot x^2 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = \left(x^2 - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Do đó $\int_{-1}^{2024} |x^4 - x^2 + 1| dx = \int_{-1}^{2024} (x^4 - x^2 + 1) dx$.

Chọn đáp án (B).....

CÂU 13. Tính tích phân $I = \int_1^4 \sqrt{x^2 - 6x + 9} dx$.

- (A) $I = \frac{5}{2}$. (B) $I = -\frac{1}{2}$. (C) $I = -2$. (D) $I = \frac{1}{2}$.

Lời giải.

Ta có $I = \int_1^4 \sqrt{x^2 - 6x + 9} dx = \int_1^4 |x - 3| dx$.

Ta có $x - 3 > 0, \forall x \in [3; 4]; x - 3 < 0, \forall x \in [1; 3]$.

Vậy

$$\begin{aligned} I &= \int_1^3 (3 - x) dx + \int_3^4 (x - 3) dx \\ &= \left(3x - \frac{1}{2}x^2\right) \Big|_1^3 + \left(\frac{1}{2}x^2 - 3x\right) \Big|_3^4 \\ &= 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án (A).....

Phần III. Học sinh điền kết quả vào ô trống.

CÂU 14. Tính tích phân $I = \int_{-3}^3 |x^2 - 1| dx$ (tính gần đúng đến hàng phần chục).

Đáp án: 13,3

Lời giải.

$$I = \int_{-3}^3 |x^2 - 1| dx.$$

Vì $f(x) = x^2 - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases} \Rightarrow f(x) > 0, \forall x \in [-3; -1] \cup [1; 3]; f(x) < 0, \forall x \in [-1; 1].$

Vậy

$$\begin{aligned} I &= \int_{-3}^{-1} (x^2 - 1) dx + \int_{-1}^1 (1 - x^2) dx + \int_1^3 (x^2 - 1) dx \\ &= \left(\frac{1}{3}x^3 - x \right) \Big|_{-3}^{-1} + \left(x - \frac{1}{3}x^3 \right) \Big|_{-1}^1 + \left(\frac{1}{3}x^3 - x \right) \Big|_1^3 \\ &= \frac{20}{3} + \frac{4}{3} + \frac{16}{3} = \frac{40}{3} \approx 13,3. \end{aligned}$$

CÂU 15. Tính tích phân $I = \int_{-1}^2 |-x^2 - 2x + 3| dx$ (tính gần đúng đến hàng phần trăm).

Đáp án: 7,67

Lời giải.

Vì $f(x) = -x^2 - 2x + 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -3 \end{cases} \Rightarrow f(x) > 0, \forall x \in [-1; 1]; f(x) < 0, \forall x \in [1; 2]$

Vậy

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^1 (-x^2 - 2x + 3) dx + \int_1^2 (x^2 + 2x - 3) dx \\ &= \left(-\frac{1}{3}x^3 - x^2 + 3x \right) \Big|_{-1}^1 + \left(\frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x \right) \Big|_1^2 \\ &= -\frac{1}{3} - 1 + 3 - \frac{1}{3} + 1 + 3 + \frac{8}{3} + 4 - 6 - \frac{1}{3} - 1 + 3 \approx 7,67. \end{aligned}$$

CÂU 16. Tính tích phân $I = \int_1^2 \left| \frac{x+1}{x} \right| dx$ (tính gần đúng đến hàng phần trăm).

Đáp án: 1,69

Lời giải.

Vì $\frac{x+1}{x} > 0, \forall x \in [1; 2]$ nên

$$I = \int_1^2 \left(\frac{x+1}{x} \right) dx = \int_1^2 \left(1 + \frac{1}{x} \right) dx = (x + \ln x) \Big|_1^2 = 2 + \ln 2 - 1 = 1 + \ln 2 \approx 1,69.$$

CÂU 17. Tính tích phân $I = \int_2^6 \sqrt{x^2 - 8x + 16} dx$.

Đáp án: 4

Lời giải.

Ta có $I = \int_2^6 |x - 4| dx$.

Ta có $x - 4 \leq 0, \forall x \in [2; 4]$ và $x - 4 \geq 0, \forall x \in [4; 6]$. Khi đó

$$I = \int_2^4 (4 - x) dx + \int_4^6 (x - 4) dx = \left(4x - \frac{x^2}{2}\right) \Big|_2^4 + \left(-4x + \frac{x^2}{2}\right) \Big|_4^6 = 4.$$

CÂU 18. Tính tích phân $I = \int_{-2}^1 \sqrt{4x^2 + 6x + 9} dx$ (làm tròn đến hàng phần trăm).

Đáp án: 9,38

Lời giải.

$$\text{Ta có } I = \int_{-2}^1 \sqrt{4x^2 + 6x + 9} dx = \int_{-2}^1 |2x + 3| dx.$$

Ta có $2x + 3 \leq 0, \forall x \in \left[-2; -\frac{3}{2}\right]$ và $2x + 3 \geq 0, \forall x \in \left[-\frac{3}{2}; 1\right]$. Khi đó

$$\begin{aligned} I &= \int_{-2}^{-\frac{3}{2}} (-2x - 3) dx + \int_{-\frac{3}{2}}^1 (2x + 3) dx \\ &= \left(-x^2 - 3x\right) \Big|_{-2}^{-\frac{3}{2}} + \left(x^2 + 3x\right) \Big|_{-\frac{3}{2}}^1 \\ &\approx 9,38. \end{aligned}$$

CÂU 19. Tính tích phân $I = \int_0^1 \sqrt{9x^2 - 6x + 1} dx$ (làm tròn đến hàng phần trăm).

Đáp án: 0,83

Lời giải.

$$\text{Ta có } I = \int_0^1 \sqrt{9x^2 - 6x + 1} dx = \int_0^1 |3x - 1| dx.$$

Ta có $3x - 1 \leq 0, \forall x \in \left[0; \frac{1}{3}\right]$ và $3x - 1 \geq 0, \forall x \in \left[\frac{1}{3}; 1\right]$. Khi đó

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{1}{3}} (-3x + 1) dx + \int_{\frac{1}{3}}^1 (3x - 1) dx \\ &= \left(-\frac{3x^2}{2} + x\right) \Big|_0^{\frac{1}{3}} + \left(\frac{3x^2}{2} - x\right) \Big|_{\frac{1}{3}}^1 \\ &\approx 0,83. \end{aligned}$$

CÂU 20. Tính tích phân $I = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \cos 2x} dx$ (làm tròn đến hàng phần trăm).

Đáp án: 5,66

Lời giải.

$$\text{Ta có } I = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \cos 2x} dx = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} |\cos x| dx.$$

Ta có $\cos x \geq 0, \forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$ và $\cos x \leq 0, \forall x \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$. Khi đó

$$\begin{aligned} I &= \sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx - \sqrt{2} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos x \, dx + \sqrt{2} \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \cos x \, dx \\ &= \sqrt{2} \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \sqrt{2} \sin x \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} + \sqrt{2} \sin x \Big|_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \\ &= 4\sqrt{2} \approx 5,66. \end{aligned}$$

CÂU 21. Tính tích phân $I = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos 2x} \, dx$ (làm tròn đến hàng phần trăm).

Đáp án: 5,66

Lời giải.

$$\text{Ta có } I = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos 2x} \, dx = 2 \int_0^{2\pi} |\sin x| \, dx.$$

Ta có $\sin x \geq 0, \forall x \in [0; \pi]$ và $\sin x \leq 0, \forall x \in [\pi; 2\pi]$. Khi đó

$$\begin{aligned} I &= \sqrt{2} \int_0^{\pi} \sin x \, dx - \sqrt{2} \int_{\pi}^{2\pi} \sin x \, dx \\ &= -\sqrt{2} \cos x \Big|_0^{\pi} + \sqrt{2} \cos x \Big|_{\pi}^{2\pi} \\ &= 4\sqrt{2} \approx 5,66. \end{aligned}$$

CÂU 22. Tính tích phân $I = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \sin 2x} \, dx$ (làm tròn đến hàng phần trăm).

Đáp án: 0,31

Lời giải.

$$\text{Ta có } I = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \sin 2x} \, dx = \int_0^{2\pi} |\sin x - \cos x| \, dx.$$

Ta có $\sin x - \cos x \leq 0, \forall x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{4}; 2\pi\right]$ và $\sin x - \cos x \geq 0, \forall x \in \left[\frac{\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}\right]$. Khi đó

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - \sin x) \, dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} (\sin x - \cos x) \, dx + \int_{\frac{5\pi}{4}}^{2\pi} (\cos x - \sin x) \, dx \\ &= (\sin x + \cos x) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + (-\cos x - \sin x) \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} + (\sin x + \cos x) \Big|_{\frac{5\pi}{4}}^{2\pi} \\ &= 4\sqrt{2} \approx 5,66. \end{aligned}$$

CÂU 23. Tính tích phân $I = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \sin 2x} \, dx$ (làm tròn đến hàng phần trăm).

Đáp án: 5,66

Lời giải.

$$\text{Ta có } I = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \sin 2x} \, dx = \int_0^{2\pi} |\sin x + \cos x| \, dx.$$

Ta có $\sin x + \cos x \geq 0, \forall x \in \left[0; \frac{3\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{7\pi}{4}; 2\pi\right]$ và $\sin x + \cos x \leq 0, \forall x \in \left[\frac{3\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}\right]$.

Khi đó:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{3\pi}{4}} (\cos x + \sin x) dx - \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}} (\sin x + \cos x) dx + \int_{\frac{7\pi}{4}}^{2\pi} (\cos x + \sin x) dx \\ &= (\sin x - \cos x) \Big|_0^{\frac{3\pi}{4}} - (\sin x - \cos x) \Big|_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}} + (\sin x - \cos x) \Big|_{\frac{7\pi}{4}}^{2\pi} \\ &= 4\sqrt{2} \approx 5,66. \end{aligned}$$

9

Tích phân có điều kiện

Phần I. Mỗi câu hỏi học sinh chọn một trong bốn phương án A, B, C, D.

CÂU 1. Nếu $F'(x) = \frac{1}{2x}$ và $F(1) = 1$ thì giá trị của $F(4)$ bằng

(A) $\ln 2$.

(B) $1 + \ln 2$.

(C) $1 + \frac{1}{2} \ln 2$.

(D) $\frac{1}{2} \ln 2$.

Lời giải.

Ta có

$$\int_1^4 F'(x) dx = \int_1^4 \frac{1}{2x} dx = \frac{1}{2} \ln |x| \Big|_1^4 = \ln 2.$$

Lại có

$$\int_1^4 F'(x) dx = F(x) \Big|_1^4 = F(4) - F(1).$$

Suy ra $F(4) - F(1) = \ln 2$. Do đó $F(4) = F(1) + \ln 2 = 1 + \ln 2$.

Chọn đáp án (B)..... □

CÂU 2. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x) = \frac{2}{x}$. Biết $F(-1) = 0$. Tính $F(2)$ kết quả là

(A) $2 \ln 2 + 1$.

(B) $\ln 2$.

(C) $2 \ln 3 + 2$.

(D) $2 \ln 2$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} \int_{-1}^2 f(x) dx &= F(x) \Big|_{-1}^2 = F(2) - F(-1) \\ \int_{-1}^2 \frac{2}{x} dx &= 2 \ln |x| \Big|_{-1}^2 = 2 \ln 2 - 2 \ln 1 = 2 \ln 2 \\ \Rightarrow F(2) - F(-1) &= 2 \ln 2 \\ \Leftrightarrow F(2) &= 2 \ln 2 \text{ (do } F(-1) = 0). \end{aligned}$$

Chọn đáp án (D)..... □

CÂU 3. Cho hàm số $f(x)$ liên tục, có đạo hàm trên $[-1; 2]$, $f(-1) = 8$, $f(2) = -1$. Tích phân $\int_{-1}^2 f'(x) dx$ bằng

(A) 1.

(B) 7.

(C) -9.

(D) 9.

Lời giải.

Ta có

$$\int_{-1}^2 f'(x) dx = f(x) \Big|_{-1}^2 = f(2) - f(-1) = -1 - 8 = -9.$$

Chọn đáp án (C)..... □

- CÂU 4.** Biết $F(x) = x^2$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên \mathbb{R} . Giá trị của $\int_1^3 [1 + f(x)] dx$ bằng
- (A) 10. (B) 8. (C) $\frac{26}{3}$. (D) $\frac{32}{3}$.

Lời giải.

Ta có

$$\int_1^3 [1 + f(x)] dx = (x + F(x)) \Big|_1^3 = (x + x^2) \Big|_1^3 = 12 - 2 = 10.$$

Chọn đáp án (A) □

- CÂU 5.** Biết $F(x) = x^3$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên \mathbb{R} . Giá trị của $\int_1^3 [1 + f(x)] dx$ bằng
- (A) 20. (B) 22. (C) 26. (D) 28.

Lời giải.

Ta có

$$\int_1^3 [1 + f(x)] dx = [x + F(x)] \Big|_1^3 = [x + x^3] \Big|_1^3 = 30 - 2 = 28.$$

Chọn đáp án (D) □

- CÂU 6.** Biết $F(x) = x^2$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên \mathbb{R} . Giá trị của $\int_1^2 [2 + f(x)] dx$ bằng
- (A) 5. (B) 3. (C) $\frac{13}{3}$. (D) $\frac{7}{3}$.

Lời giải.

Ta có

$$\int_1^2 [2 + f(x)] dx = (2x + x^2) \Big|_1^2 = 8 - 3 = 5.$$

Chọn đáp án (A) □

- CÂU 7.** Biết $F(x) = x^3$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên \mathbb{R} . Giá trị của $\int_1^2 [2 + f(x)] dx$ bằng
- (A) $\frac{23}{4}$. (B) 7. (C) 9. (D) $\frac{15}{4}$.

Lời giải.

Ta có

$$\int_1^2 [2 + f(x)] dx = \int_1^2 2 dx + \int_1^2 f(x) dx = 2x \Big|_1^2 + F(x) \Big|_1^2 = 2x \Big|_1^2 + x^3 \Big|_1^2 = 9.$$

Chọn đáp án (C) □

- CÂU 8.** Cho hàm số $f(x)$. Biết $f(0) = 4$ và $f'(x) = 2 \sin^2 \frac{x}{2} + 1, \forall x \in \mathbb{R}$, khi đó $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx$ bằng
- (A) $\frac{\pi^2 + 16\pi + 8\sqrt{2} - 16}{16}$. (B) $\frac{\pi^2 + 16\pi + 2\sqrt{2} - 4}{16}$. (C) $\frac{\pi^2 + 16\pi + 8\sqrt{2}}{16}$. (D) $\frac{\pi^2 + 16\pi - 16}{16}$.

Lời giải.

Ta có

$$f(x) = \int \left(2 \sin^2 \frac{x}{2} + 1 \right) dx = \int (2 - \cos x) dx = 2x - \sin x + C.$$

Vì $f(0) = 4 \Rightarrow C = 4 \Rightarrow f(x) = 2x - \sin x + 4$.

Suy ra

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (2x - \sin x + 4) dx$$

$$= (x^2 + \cos x + 4x) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi^2}{16} + \frac{\sqrt{2}}{2} + \pi - 1 = \frac{\pi^2 + 16\pi + 8\sqrt{2} - 16}{16}.$$

Chọn đáp án (A).....

CÂU 9. Cho hàm số $f(x)$. Biết $f(0) = 4$ và $f'(x) = 2 \cos^2 \frac{x}{2} + 3, \forall x \in \mathbb{R}$, khi đó $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)dx$ bằng?

(A) $\frac{\pi^2 + 8\pi - 8 - \sqrt{2}}{8}.$

(B) $\frac{\pi^2 + 8\pi - 8 - 4\sqrt{2}}{8}.$

(C) $\frac{\pi^2 + 6\pi + 8}{8}.$

(D) $\frac{\pi^2 + 8\pi - 4\sqrt{2}}{8}.$

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} f(x) &= \int f'(x)dx = \int (2 \cos^2 \frac{x}{2} + 3)dx \\ &= \int \left(2 \cdot \frac{1 + \cos x}{2} + 3 \right) dx = \int (\cos x + 4)dx \\ &\Rightarrow f(x) = \sin x + 4x + C. \end{aligned}$$

Do $f(0) = 4 \Rightarrow C = 4 \Rightarrow f(x) = \sin x + 4x + 4$. Vậy

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sin x + 4x + 4)dx = (-\cos x + 2x^2 + 4x) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi^2 + 8\pi - 8 - 4\sqrt{2}}{8}.$$

Chọn đáp án (B).....

CÂU 10. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} e^{2x} & \text{khi } x \geq 0 \\ x^2 + x + 2 & \text{khi } x < 0 \end{cases}$. Biết tích phân $\int_{-1}^1 f(x)dx = \frac{a}{b} + \frac{e^2}{c}$ ($\frac{a}{b}$ là phân số tối giản). Giá trị

$a + b + c$ bằng

(A) 7.

(B) 8.

(C) 9.

(D) 10.

Lời giải.

Ta có

$$I = \int_{-1}^1 f(x)dx = \int_{-1}^0 (x^2 + x + 2)dx + \int_0^1 e^{2x}dx = \frac{4}{3} + \frac{e^2}{2}.$$

Vậy $a + b + c = 9$.

Chọn đáp án (C).....

CÂU 11. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{khi } x \geq 2 \\ x^2 - 2x + 3 & \text{khi } x < 2 \end{cases}$. Tích phân $I = \frac{1}{2} \int_1^3 f(x)dx$ bằng:

(A) $\frac{23}{3}.$

(B) $\frac{23}{6}.$

(C) $\frac{17}{6}.$

(D) $\frac{17}{3}.$

Lời giải.

Ta có

$$I = \frac{1}{2} \int_1^3 f(x)dx = \frac{1}{2} \left[\int_1^2 (x^2 - 2x + 3)dx + \int_2^3 (x^2 - 1)dx \right] = \frac{23}{6}.$$

Chọn đáp án (B).....

CÂU 12. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x(1+x^2)}{x-4} & \text{khi } x \geq 3 \\ \frac{1}{x-4} & \text{khi } x < 3 \end{cases}$. Tích phân $I = \int_2^4 f(t)dt$ bằng:

(A) $\frac{40}{3} - \ln 2.$

(B) $\frac{95}{6} + \ln 2.$

(C) $\frac{189}{4} + \ln 2.$

(D) $\frac{189}{4} - \ln 2.$

Lời giải.

Ta có

$$I = \int_2^4 f(t)dt = \int_2^3 \frac{1}{x-4}dx + \int_3^4 \frac{x(1+x^2)}{x-4}dx = \frac{189}{4} - \ln 2.$$

Chọn đáp án (D).....

CÂU 13. Cho số thực a và hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{khi } x \leq 0 \\ a(x - x^2) & \text{khi } x > 0 \end{cases}$. Tính tích phân $\int_{-1}^1 f(x)dx$ bằng:

A $\frac{a}{6} - 1$.

B $\frac{2a}{3} + 1$.

C $\frac{a}{6} + 1$.

D $\frac{2a}{3} - 1$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 f(x)dx &= \int_{-1}^0 f(x)dx + \int_0^1 f(x)dx = \int_{-1}^0 2x dx + \int_0^1 a(x - x^2)dx \\ &= (x^2) \Big|_{-1}^0 + a \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1 = -1 + a \left(\frac{1}{6} \right) = \frac{a}{6} - 1. \end{aligned}$$

Chọn đáp án **A** ☐

Phần II. Trong mỗi ý a), b), c) và d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.

CÂU 14. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + 3 & \text{khi } x \geq 1 \\ 2 - x^3 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$.

Mệnh đề	Đ	S
a) $\int_1^{2024} f(x)dx = \int_1^{2024} (2x^2 + 3)dx$.	X	
b) $\int_{-2024}^1 f(x)dx = \int_{-2024}^1 (2 - x^3)dx$.	X	
c) $\int_{-2024}^{2024} f(x)dx = \int_1^{2024} (2x^2 + 3)dx + \int_{-2024}^1 (2 - x^3)dx$.		X
d) $\int_{-2024}^{2024} f(x)dx = \int_1^{2024} (2x^2 + 3)dx + \int_{-2024}^1 (2 - x^3)dx$.	X	

Lời giải.

Do $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + 3 & \text{khi } x \geq 1 \\ 2 - x^3 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$ nên

☒ $\int_1^{2024} f(x)dx = \int_1^{2024} (2x^2 + 3)dx$.

☒ $\int_{-2024}^1 f(x)dx = \int_{-2024}^1 (2 - x^3)dx$.

☒ $\int_{-2024}^{2024} f(x)dx = \int_1^{2024} (2x^2 + 3)dx + \int_{-2024}^1 (2 - x^3)dx$.

☒ $\int_{-2024}^{2024} f(x)dx = \int_1^{2024} (2x^2 + 3)dx + \int_{-2024}^1 (2 - x^3)dx$.

Chọn đáp án ☐ a đúng ☐ b đúng ☐ c sai ☐ d đúng ☐

CÂU 15. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 3 & \text{khi } x \geq 2 \\ x + 1 & \text{khi } x < 2 \end{cases}$.

Mệnh đề	Đ	S
a) $\int_1^2 f(x)dx = \int_1^2 (x+1)dx.$	X	
b) $\int_2^3 f(x)dx = \int_2^3 (x^2 - 2x + 3)dx.$	X	

Mệnh đề	Đ	S
c) $\int_1^3 \frac{1}{2}f(x)dx = \frac{41}{12}.$	X	
d) $\int_1^2 f(x)dx = \int_1^2 (x^2 - 2x + 3)dx.$		X

Lời giải.

Do $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 3 & \text{khi } x \geq 2 \\ x + 1 & \text{khi } x < 2 \end{cases}$ nên

✓ $\int_1^2 f(x)dx = \int_1^2 (x+1)dx.$

✓ $\int_2^3 f(x)dx = \int_2^3 (x^2 - 2x + 3)dx.$

✓ $\int_1^3 \frac{1}{2}f(x)dx = \frac{1}{2} \left(\int_1^2 (x+1)dx + \int_2^3 (x^2 - 2x + 3)dx \right) = \frac{41}{12}.$

Chọn đáp án ☐ a đúng ☐ b đúng ☐ c đúng ☐ d sai

Phần III. Học sinh điền kết quả vào ô trống.

CÂU 16. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{khi } x \geq 1 \\ x + 1 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$. Tích phân $I = \int_2^0 -3t^2 f(t)dt$. (làm tròn đến hàng phần trăm)

Đáp án: 2,08

Lời giải.

Ta có

$$I = -3 \int_2^0 t^2 f(t)dt = 3 \int_0^2 t^2 f(t)dt = 3 \left[\int_0^1 x^2(x+1)dx + \int_1^2 x^2 \cdot \frac{1}{x}dx \right] = \frac{25}{12} \approx 2,08.$$

CÂU 17. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 1 & \text{khi } x < 0 \\ x - 1 & \text{khi } 0 \leq x \leq 2 \\ 5 - 2x & \text{khi } x > 2 \end{cases}$. Tính tích phân $I = \int_{-5}^9 \frac{1}{7}f(t)dt$. (làm tròn đến hàng phần trăm)

Đáp án: 5,19

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{7} \int_{-5}^9 f(t)dt = \frac{1}{7} \int_{-5}^9 f(x)dx = \frac{1}{7} \left(\int_{-5}^0 f(x)dx + \int_0^2 f(x)dx + \int_2^9 f(x)dx \right) \\ &= \frac{1}{7} \int_{-5}^0 (2x^2 - 1)dx + \frac{1}{7} \int_0^2 (x - 1)dx + \frac{1}{7} \int_2^9 (5 - 2x)dx = \frac{109}{21} \approx 5,19. \end{aligned}$$

CÂU 18. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 - x & \text{khi } x \geq 0 \\ x & \text{khi } x < 0 \end{cases}$. Khi đó $I = \int_{-1}^1 f(x)dx + \int_{-1}^3 f(x)dx$ bằng bao nhiêu? (làm tròn đến hàng phần trăm)

Đáp án: 3,33

Lời giải.

Đặt $I_1 = \int_{-1}^1 f(x)dx$ và $I_2 = \int_{-1}^3 f(x)dx$.

Vì $f(x) = \begin{cases} x^2 - x & \text{khi } x \geq 0 \\ x & \text{khi } x < 0 \end{cases}$ nên

$$I_1 = \int_{-1}^0 x dx + \int_0^1 (x^2 - x) dx = -\frac{2}{3}.$$

Và

$$I_2 = \int_{-1}^0 x dx + \int_0^3 (x^2 - x) dx = 4.$$

Vậy $I = I_1 + I_2 = \frac{10}{3} \approx 3,33$.

CÂU 19. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 4x & \text{khi } x > 2 \\ -2x + 12 & \text{khi } x \leq 2 \end{cases}$. Tính tích phân $I = \int_1^2 f(t) dt + \frac{1}{2} \int_5^{10} f(t) dt$.

Đáp án: 84

Lời giải.

Đặt $I_1 = \int_1^2 f(t) dt = \int_1^2 f(x) dx$ và $I_2 = \frac{1}{2} \int_5^{10} f(t) dt = \frac{1}{2} \int_5^{10} f(x) dx$.

Vì $f(x) = \begin{cases} 4x & \text{khi } x > 2 \\ -2x + 12 & \text{khi } x \leq 2 \end{cases}$ nên

$$I_1 = \int_1^2 (-2x + 12) dx = 9.$$

Và

$$I_2 = \frac{1}{2} \int_5^{10} 4x dx = 75.$$

Vậy $I = I_1 + I_2 = 84$.

CÂU 20. Biết rằng hàm số $f(x) = mx + n$ thỏa mãn $\int_0^1 f(x) dx = 3$, $\int_0^2 f(x) dx = 8$. Tính $m + n$.

Đáp án: 4

Lời giải.

Ta có $\int f(x) dx = \int (mx + n) dx = \frac{m}{2} x^2 + nx + C$.

Lại có $\int_0^1 f(x) dx = 3 \Rightarrow \left(\frac{m}{2} x^2 + nx \right) \Big|_0^1 = 3 \Rightarrow \frac{1}{2} m + n = 3 \quad (1)$.

$\int_0^2 f(x) dx = 8 \Rightarrow \left(\frac{m}{2} x^2 + nx \right) \Big|_0^2 = 8 \Rightarrow 2m + 2n = 8 \quad (2)$.

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} \frac{1}{2} m + n = 3 \\ 2m + 2n = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 2 \\ n = 2 \end{cases}$$

Vậy $m + n = 4$.

CÂU 21. Biết rằng hàm số $f(x) = ax^2 + bx + c$ thỏa mãn $\int_0^1 f(x) dx = -\frac{7}{2}$, $\int_0^2 f(x) dx = -2$ và $\int_0^3 f(x) dx = \frac{13}{2}$. Tính $P = a + b + c$. (làm tròn đến hàng phần trăm).

Đáp án: -1,33

Lời giải.

Ta có $\int f(x) dx = \int (ax^2 + bx + c) dx = \frac{a}{3} x^3 + \frac{b}{2} x^2 + cx + C$.

Lại có $\int_0^1 f(x) dx = -\frac{7}{2} \Rightarrow \left(\frac{a}{3} x^3 + \frac{b}{2} x^2 + cx \right) \Big|_0^1 = -\frac{7}{2} \Rightarrow \frac{1}{3} a + \frac{1}{2} b + c = -\frac{7}{2} \quad (1)$. $\int_0^2 f(x) dx = -2 \Rightarrow \left(\frac{a}{3} x^3 + \frac{b}{2} x^2 + cx \right) \Big|_0^2 =$

$$-2 \Rightarrow \frac{8}{3}a + 2b + 2c = -2 \quad (2).$$

$$\int_0^3 f(x)dx = \frac{13}{2} \Rightarrow \left(\frac{a}{3}x^3 + \frac{b}{2}x^2 + cx \right) \Big|_0^3 = \frac{13}{2} \Rightarrow 9a + \frac{9}{2}b + 3c = \frac{13}{2} \quad (3).$$

Từ (1), (2) và (3) ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} \frac{1}{3}a + \frac{1}{2}b + c = -\frac{7}{2} \\ \frac{8}{3}a + 2b + 2c = -2 \\ 9a + \frac{9}{2}b + 3c = \frac{13}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 3 \\ c = -\frac{16}{3} \end{cases}.$$

$$\text{Vậy } P = a + b + c = 1 + 3 + \left(-\frac{16}{3}\right) = -\frac{4}{3} \approx -1,33.$$

CÂU 22. Cho $\int_0^m (3x^2 - 2x + 1)dx = 6$. Tính giá trị của tham số m .

Đáp án: 2

Lời giải.

Ta có

$$\int_0^m (3x^2 - 2x + 1)dx = (x^3 - x^2 + x) \Big|_0^m = m^3 - m^2 + m.$$

$$\int_0^m (3x^2 - 2x + 1)dx = 6 \Leftrightarrow m^3 - m^2 + m - 6 = 0 \Leftrightarrow m = 2.$$

CÂU 23. Cho $I = \int_0^1 (4x - 2m^2)dx$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để $I + 6 > 0$?

Đáp án: 3

Lời giải.

$$\text{Theo định nghĩa tích phân ta có: } I = \int_0^1 (4x - 2m^2)dx = (2x^2 - 2m^2x) \Big|_0^1 = -2m^2 + 2.$$

$$\text{Khi đó } I + 6 > 0 \Leftrightarrow -2m^2 + 2 + 6 > 0 \Leftrightarrow -2m^2 + 8 > 0 \Leftrightarrow -2 < m < 2.$$

Mà m là số nguyên nên $m \in \{-1; 0; 1\}$.

Vậy có 3 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu.

CÂU 24. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của a để $\int_0^a (2x - 3)dx \leq 4$?

Đáp án: 4

Lời giải.

$$\text{Ta có } \int_0^a (2x - 3)dx = (x^2 - 3x) \Big|_0^a = a^2 - 3a.$$

$$\text{Khi đó } \int_0^a (2x - 3)dx \leq 4 \Leftrightarrow a^2 - 3a \leq 4 \Leftrightarrow -1 \leq a \leq 4.$$

Mà $a \in \mathbb{N}^*$ nên $a \in \{1; 2; 3; 4\}$.

Vậy có 4 giá trị của a thỏa đề bài.

CÂU 25. Có bao nhiêu số thực b thuộc khoảng $(\pi; 3\pi)$ sao cho $\int_{\pi}^b 4 \cos 2x dx = 1$?

Đáp án: 4

Lời giải.

$$\text{Ta có } \int_{\pi}^b 4 \cos 2x dx = 1 \Leftrightarrow 2 \sin 2x \Big|_{\pi}^b = 1 \Leftrightarrow \sin 2b - \sin 2\pi = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin 2b = \frac{1}{2}.$$

$$\Rightarrow 2b = \frac{\pi}{6} + k2\pi \quad \text{hoặc} \quad 2b = \frac{5\pi}{6} + k2\pi$$

$$\Rightarrow b = \frac{\pi}{12} + k\pi \quad \text{hoặc} \quad b = \frac{5\pi}{12} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Khi $b = \frac{\pi}{12} + k\pi$, ta xét

$$\begin{aligned} \pi &< \frac{\pi}{12} + k\pi < 3\pi \\ \Leftrightarrow \frac{11}{12} &< k < \frac{35}{12} \\ \Leftrightarrow k &\in \{1; 2\}. \end{aligned}$$

Khi $b = \frac{5\pi}{12} + k\pi$, ta xét

$$\begin{aligned} \pi &< \frac{5\pi}{12} + k\pi < 3\pi \\ \Leftrightarrow \frac{7}{12} &< k < \frac{31}{12} \\ \Leftrightarrow k &\in \{1; 2\}. \end{aligned}$$

Vậy có 4 số thực b thỏa mãn yêu cầu bài toán.

10 Ứng dụng tích phân trong thực tiễn

☑ Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$. Khi đó $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$ được gọi là giá trị trung bình của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a; b]$.

☑ Đạo hàm của quãng đường di chuyển của vật theo thời gian bằng tốc độ của chuyển động tại mọi thời điểm $v(t) = s'(t)$. Do đó, nếu biết tốc độ $v(t)$ tại mọi thời điểm $t \in [a; b]$ thì tính được quãng đường di chuyển trong khoảng thời gian từ a đến b theo công thức

$$s = s(b) - s(a) = \int_a^b v(t) dt.$$

☑ Giả sử là vận tốc của vật tại thời điểm và là quãng đường vật đi được sau khoảng thời gian tính từ lúc bắt đầu chuyển động. Ta có mối liên hệ giữa vận tốc và quãng đường như sau

- Đạo hàm của quãng đường là vận tốc $s'(t) = v(t)$.
- Nguyên hàm của vận tốc là quãng đường $s(t) = \int v(t) dt$.

\Rightarrow Từ đây ta cũng có quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian từ a đến b là

$$\int_a^b v(t) dt = s(b) - s(a).$$

Nếu gọi $a(t)$ là gia tốc của vật thì ta có mối liên hệ giữa gia tốc và vận tốc như sau

- Đạo hàm của vận tốc là gia tốc $v'(t) = a(t)$.
- Nguyên hàm của gia tốc là vận tốc $v(t) = \int a(t) dt$.

Phần I. Mỗi câu hỏi học sinh chọn một trong bốn phương án A, B, C, D.

CÂU 1. Một ô tô đang chạy với vận tốc 10 m/s thì gặp chướng ngại vật, người lái xe đạp phanh. Từ thời điểm đó, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -2t + 10 \text{ (m/s)}$, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Tính quãng đường ô tô di chuyển được trong 8 giây cuối cùng.

- (A) 55 m . (B) 25 m . (C) 50 m . (D) 16 m .

Lời giải.

Ta có $-2t + 10 = 0 \Leftrightarrow t = 5 \Rightarrow$ thời gian tính từ lúc bắt đầu đạp phanh đến khi dừng hẳn là 5 giây.

Vậy trong 8 giây cuối cùng thì có 3 giây ô tô chuyển động với vận tốc 10 m/s và 5 giây chuyển động chậm dần đều với vận

tốc $v(t) = -2t + 10$ (m/s).

Khi đó quãng đường ô tô di chuyển là

$$S = 3 \cdot 10 + \int_0^5 (-2t + 10) dt = 30 + 25 = 55 \text{ m}.$$

Chọn đáp án (A) □

CÂU 2. Một ô tô đang chạy với tốc độ 20 (m/s) thì gặp chướng ngại vật, người lái đạp phanh, từ thời điểm đó ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -5t + 20$ (m/s), trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ô tô còn di chuyển bao nhiêu mét (m)?

- (A) 20 m. (B) 30 m. (C) 10 m. (D) 40 m.

Lời giải.

Khi ô tô dừng hẳn thì $v(t) = 0 \Leftrightarrow -5t + 20 = 0 \Leftrightarrow t = 4$ (s).

Vậy từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ô tô di chuyển được

$$s = \int_0^4 (-5t + 20) dt = 40 \text{ (m)}.$$

Chọn đáp án (D) □

CÂU 3. Một chất điểm A xuất phát từ O, chuyển động thẳng với vận tốc biến thiên theo thời gian bởi quy luật $v(t) = \frac{1}{150}t^2 + \frac{59}{75}t$ (m/s), trong đó t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc A bắt đầu chuyển động. Từ trạng thái nghỉ, một chất điểm B cũng xuất phát từ O, chuyển động thẳng cùng hướng với A nhưng chậm hơn 3 giây so với A và có gia tốc bằng a (m/s²) (a là hằng số). Sau khi B xuất phát được 12 giây thì đuổi kịp A. Vận tốc của B tại thời điểm đuổi kịp A bằng

- (A) 15 (m/s). (B) 20 (m/s). (C) 16 (m/s). (D) 13 (m/s).

Lời giải.

Quãng đường chất điểm A đi từ đầu đến khi B đuổi kịp là

$$S = \int_0^{15} \left(\frac{1}{150}t^2 + \frac{59}{75}t \right) dt = 96 \text{ (m)}.$$

Vận tốc của chất điểm B là

$$v_B(t) = \int a dt = at + C.$$

Tại thời điểm $t = 3$ vật B bắt đầu từ trạng thái nghỉ nên $v_B(3) = 0 \Leftrightarrow C = -3a$.

Lại có quãng đường chất điểm B đi được đến khi gặp A là

$$S_2 = \int_3^{15} (at - 3a) dt = \left(\frac{at^2}{2} - 3at \right) \Big|_3^{15} = 72a \text{ (m)}.$$

Vậy $72a = 96 \Leftrightarrow a = \frac{4}{3}$ (m/s²).

Tại thời điểm đuổi kịp A thì vận tốc của B là $v_B(15) = 16$ (m/s).

Chọn đáp án (C) □

CÂU 4. Một ô tô bắt đầu chuyển động thẳng đều với vận tốc v_0 , sau 6 giây chuyển động thì gặp chướng ngại vật nên bắt đầu giảm tốc độ với vận tốc chuyển động $v(t) = -\frac{5}{2}t + a$ (m/s) với $t \geq 6$ cho đến khi dừng hẳn. Biết rằng kể từ lúc chuyển động đến lúc dừng hẳn thì ô tô đi được quãng đường là 80 m. Tìm v_0 .

- (A) $v_0 = 35$ m/s. (B) $v_0 = 25$ m/s. (C) $v_0 = 10$ m/s. (D) $v_0 = 20$ m/s.

Lời giải.

Tại thời điểm $t = 6$ vật đang chuyển động với vận tốc v_0 nên có

$$v(6) = v_0 \Leftrightarrow -\frac{5}{2} \cdot 6 + a = v_0 \Leftrightarrow a = v_0 + 15 \Rightarrow v(t) = -\frac{5}{2}t + v_0 + 15.$$

Gọi k là thời điểm vật dừng hẳn, ta có

$$v(k) = 0 \Leftrightarrow k = \frac{2}{5} \cdot (v_0 + 15) \Leftrightarrow k = \frac{2v_0}{5} + 6.$$

Tổng quãng đường vật đi được là

$$\begin{aligned} 80 &= 6 \cdot v_0 + \int_6^k \left(-\frac{5}{2}t + v_0 + 15 \right) dt \\ \Leftrightarrow 80 &= 6 \cdot v_0 + \left(-\frac{5}{4}t^2 + v_0 \cdot t + 15t \right) \Big|_6^k \\ \Leftrightarrow 80 &= 6 \cdot v_0 - \frac{5}{4}(k^2 - 6^2) + v_0 \cdot (k - 6) + 15(k - 6) \\ \Leftrightarrow 80 &= 6 \cdot v_0 - \frac{5}{4} \left(\frac{4(v_0)^2}{25} + \frac{24v_0}{5} \right) + v_0 \cdot \frac{2v_0}{5} + 15 \cdot \frac{2v_0}{5} \\ \Leftrightarrow (v_0)^2 + 36 \cdot v_0 - 400 &= 0 \\ \Leftrightarrow v_0 &= 10. \end{aligned}$$

Chọn đáp án **(C)** ☐

CÂU 5. Để đảm bảo an toàn khi lưu thông trên đường, các xe ô tô khi dừng đèn đỏ phải cách nhau tối thiểu 1 m. Một ô tô A đang chạy với vận tốc 16 m/s bỗng gặp ô tô B đang dừng đèn đỏ nên ô tô A hãm phanh và chuyển động chậm dần đều với vận tốc được biểu thị bởi công thức $v_A(t) = 16 - 4t$ (đơn vị tính bằng m/s), thời gian tính bằng giây. Hỏi rằng để hai ô tô A và B đạt khoảng cách an toàn khi dừng lại thì ô tô A phải hãm phanh khi cách ô tô B một khoảng ít nhất là bao nhiêu?

- (A)** 33. **(B)** 12. **(C)** 31. **(D)** 32.

Lời giải.

Ta có $v_A(0) = 16 \text{ m/s}$.

Khi xe A dừng hẳn $v_A(t) = 0 \Leftrightarrow t = 4 \text{ s}$.

Quãng đường từ lúc xe A hãm phanh đến lúc dừng hẳn là

$$s = \int_0^4 (16 - 4t) dt = 32 \text{ m}.$$

Chọn đáp án **(D)** ☐

CÂU 6. Do các xe phải cách nhau tối thiểu 1 m để đảm bảo an toàn nên khi dừng lại ô tô A phải hãm phanh khi cách ô tô B một khoảng ít nhất là 33 m. Một chất điểm đang chuyển động với vận tốc $v_0 = 15 \text{ m/s}$ thì tăng tốc với gia tốc $a(t) = t^2 + 4t$ (m/s²). Tính quãng đường chất điểm đó đi được trong khoảng thời gian 3 giây kể từ lúc bắt đầu tăng vận tốc.

- (A)** 70,25 m. **(B)** 68,25 m. **(C)** 67,25 m. **(D)** 69,75 m.

Lời giải.

Ta có

$$a(t) = t^2 + 4t \Rightarrow v(t) = \int a(t) dt = \frac{t^3}{3} + 2t^2 + C, (C \in \mathbb{R}).$$

$$\text{Mà } v(0) = C = 15 \Rightarrow v(t) = \frac{t^3}{3} + 2t^2 + 15.$$

$$\text{Vậy } S = \int_0^3 \left(\frac{t^3}{3} + 2t^2 + 15 \right) dt = 69,75 \text{ m}.$$

Chọn đáp án **(D)** ☐

CÂU 7. Một vật chuyển động với vận tốc 10 m/s thì tăng tốc với gia tốc được tính theo thời gian là $a(t) = t^2 + 3t$. Tính quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian 6 giây kể từ khi vật bắt đầu tăng tốc.

- (A)** 136 m. **(B)** 126 m. **(C)** 276 m. **(D)** 216 m.

Lời giải.

Ta có $v(0) = 10 \text{ m/s}$ và

$$v(t) = \int_0^t a(t) dt = \int_0^t (t^2 + 3t) dt = \left(\frac{t^3}{3} + \frac{3t^2}{2} \right) \Big|_0^t = \frac{1}{3}t^3 + \frac{3}{2}t^2.$$

Quãng đường vật đi được là

$$S = \int_0^6 v(t) dt = \int_0^6 \left(\frac{1}{3}t^3 + \frac{3}{2}t^2 \right) dt = \left(\frac{1}{12}t^4 + \frac{1}{2}t^3 \right) \Big|_0^6 = 216 \text{ m}.$$

Chọn đáp án **(D)** ☐

CÂU 8. Một ô tô bắt đầu chuyển động nhanh dần đều với vận tốc $v_1(t) = 7t$ (m/s). Đi được 5 s, người lái xe phát hiện chướng ngại vật và phanh gấp, ô tô tiếp tục chuyển động chậm dần đều với gia tốc $a = -70$ (m/s²). Tính quãng đường S đi được của ô tô từ lúc bắt đầu chuyển bánh cho đến khi dừng hẳn.

- (A) $S = 96,25$ (m). (B) $S = 87,5$ (m). (C) $S = 94$ (m). (D) $S = 95,7$ (m).

Lời giải.

Chọn gốc thời gian là lúc ô tô bắt đầu đi.

Sau 5 s ô tô đạt vận tốc là $v(5) = 35$ (m/s).

Sau khi phanh vận tốc ô tô là $v(t) = 35 - 70(t - 5)$.

Ô tô dừng tại thời điểm $t = 5,5$ s.

Quãng đường ô tô đi được là

$$S = \int_0^5 7t dt + \int_5^{5,5} [35 - 70(t - 5)] dt = 96,25 \text{ (m)}.$$

Chọn đáp án (A) □

CÂU 9. Một ô tô bắt đầu chuyển động nhanh dần đều với vận tốc $v_1(t) = 2t$ (m/s). Đi được 12 giây, người lái xe gặp chướng ngại vật và phanh gấp, ô tô tiếp tục chuyển động chậm dần đều với gia tốc $a = -12$ (m/s²). Tính quãng đường s (m) đi được của ô tô từ lúc bắt đầu chuyển động đến khi dừng hẳn.

- (A) $s = 168$ (m). (B) $s = 166$ (m). (C) $s = 144$ (m). (D) $s = 152$ (m).

Lời giải.

Giải đoạn 1: Xe bắt đầu chuyển động đến khi gặp chướng ngại vật.

Quãng đường xe đi được là

$$S_1 = \int_0^{12} v_1(t) dt = \int_0^{12} 2t dt = t^2 \Big|_0^{12} = 144 \text{ (m)}.$$

Giải đoạn 2: Xe gặp chướng ngại vật đến khi dừng hẳn.

Ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc

$$v_2(t) = \int a dt = -12t + c.$$

Vận tốc của xe khi gặp chướng ngại vật là

$$v_2(0) = v_1(12) = 2 \cdot 12 = 24 \text{ (m/s)}.$$

Suy ra $-12 \cdot 0 + c = 24 \Rightarrow c = 24 \Rightarrow v_2(t) = -12t + 24$.

Thời gian khi xe gặp chướng ngại vật đến khi xe dừng hẳn là nghiệm phương trình

$$-12t + 24 = 0 \Leftrightarrow t = 2.$$

Khi đó, quãng đường xe đi được là

$$S_2 = \int_0^2 v_2(t) dt = \int_0^2 (-12t + 24) dt = (-6t^2 + 24t) \Big|_0^2 = 24 \text{ (m)}.$$

Vậy tổng quãng đường xe đi được là $S = S_1 + S_2 = 168$ (m).

Chọn đáp án (A) □

CÂU 10. Một ô tô đang dừng và bắt đầu chuyển động theo một đường thẳng với gia tốc $a(t) = 6 - 2t$ (m/s²), trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây kể từ lúc ô tô bắt đầu chuyển động. Hỏi quãng đường ô tô đi được từ lúc bắt đầu chuyển động đến khi vận tốc của ô tô đạt giá trị lớn nhất là bao nhiêu mét?

- (A) 18 m. (B) 36 m. (C) 22,5 m. (D) 6,75 m.

Lời giải.

$$a(t) = 6 - 2t \text{ (m/s}^2\text{)} \Rightarrow v(t) = \int (6 - 2t) dt = 6t - t^2 + C.$$

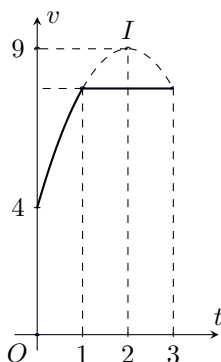
Xe dừng và bắt đầu chuyển động nên khi $t = 0$ thì $v = 0 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow v(t) = 6t - t^2$.

$v(t) = 6t - t^2$ là hàm số bậc 2 nên đạt giá trị lớn nhất khi $t = -\frac{b}{2a} = 3$ (s).

$$\text{Quãng đường xe đi trong 3 giây đầu là: } S = \int_0^3 (6t - t^2) dt = 18 \text{ (m)}.$$

Chọn đáp án (A) □

CÂU 11. Một vật chuyển động trong 3 giờ với vận tốc v (km/h) phụ thuộc vào thời gian t (h) có đồ thị vận tốc như hình bên. Trong thời gian 1 giờ kể từ khi bắt đầu chuyển động, đồ thị đó là một phần của đường parabol có đỉnh $I(2; 9)$ và trục đối xứng song song với trục tung, khoảng thời gian còn lại đồ thị là một đoạn thẳng song song với trục hoành. Tính quãng đường s mà vật chuyển động được trong 3 giờ đó (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).



- ☒ A $s = 21,58$ (km).
 ☐ B $s = 23,25$ (km).
 ☐ C $s = 13,83$ (km).
 ☐ D $s = 15,50$ (km).

Lời giải.

Gọi phương trình parabol $v = at^2 + bt + c$ ta có hệ như sau

$$\begin{cases} c = 4 \\ 4a + 2b + c = 9 \\ -\frac{b}{2a} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 5 \\ c = 4 \\ a = -\frac{5}{4} \end{cases}$$

Với $t = 1$ ta có $v = \frac{31}{4}$. Vậy quãng đường vật chuyển động được là

$$s = \int_0^1 \left(-\frac{5}{4}t^2 + 5t + 4 \right) dt + \int_1^3 \frac{31}{4} dt = \frac{259}{12} \approx 21,58.$$

Chọn đáp án ☒ A □

Phần III. Học sinh điền kết quả vào ô trống.

CÂU 12. Một ô tô đang chạy với vận tốc là 12 (m/s) thì người lái đạp phanh; từ thời điểm đó ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -6t + 12$ (m/s), trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây kể từ lúc đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến lúc ô tô dừng hẳn, ô tô còn di chuyển được bao nhiêu mét?

Đáp án: 12

Lời giải.

Lấy mốc thời gian ($t = 0$) là lúc đạp phanh.

Khi ô tô dừng hẳn thì vận tốc $v(t) = 0$, tức là $v(t) = -6t + 12 = 0 \Leftrightarrow t = 2$.

Vậy từ lúc đạp phanh đến lúc ô tô dừng hẳn, ô tô còn di chuyển được quãng đường là:

$$\int_0^2 (-6t + 12) dt = (-3t^2 + 12t) \Big|_0^2 = 12 \text{ (m)}.$$

CÂU 13. Một ô tô đang chạy với vận tốc 10 m/s thì người lái đạp phanh; từ thời điểm đó, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -5t + 10$ (m/s), trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ô tô còn di chuyển được bao nhiêu mét?

Đáp án: 10

Lời giải.

Xét phương trình $-5t + 10 = 0 \Leftrightarrow t = 2$. Do vậy, kể từ lúc người lái đạp phanh thì sau 2s ô tô dừng hẳn.

Quãng đường ô tô đi được kể từ lúc người lái đạp phanh đến khi ô tô dừng hẳn là:

$$s = \int_0^2 (-5t + 10) dt = \left(-\frac{5}{2}t^2 + 10t \right) \Big|_0^2 = 10 \text{ (m)}.$$

CÂU 14. Một ô tô chuyển động nhanh dần đều với vận tốc $v(t) = 7t$ (m/s). Đi được 5 (s) người lái xe phát hiện chướng ngại vật và phanh gấp, ô tô tiếp tục chuyển động chậm dần đều với gia tốc $a = -35$ (m/s²). Tính quãng đường của ô tô đi được từ lúc bắt đầu chuyển bánh cho đến khi dừng hẳn (đơn vị tính bằng mét)?

Đáp án: 105

Lời giải.

Quãng đường ô tô đi được trong 5 (s) đầu là $s_1 = \int_0^5 7t \, dt = 7 \frac{t^2}{2} \Big|_0^5 = 87,5$ (mét).

Phương trình vận tốc của ô tô khi người lái xe phát hiện chướng ngại vật là $v_2(t) = 35 - 35t$ (m/s). Khi xe dừng lại hẳn thì $v_2(t) = 0 \Leftrightarrow 35 - 35t = 0 \Leftrightarrow t = 1$.

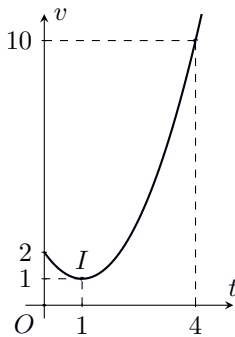
Quãng đường ô tô đi được từ khi phanh gấp đến khi dừng lại hẳn là

$$s_2 = \int_0^1 (35 - 35t) \, dt = (35 - 35t) \Big|_0^1 = 17,5 \text{ (mét)}.$$

Vậy quãng đường của ô tô đi được từ lúc bắt đầu chuyển bánh cho đến khi dừng hẳn là

$$s = s_1 + s_2 = 87,5 + 17,5 = 105 \text{ (mét)}.$$

CÂU 15. Một vật chuyển động trong 4 giờ với vận tốc v (km/h) phụ thuộc thời gian t (h) có đồ thị là một phần của đường parabol có đỉnh $I(1; 1)$ và trục đối xứng song song với trục tung như hình bên. Tính quãng đường s mà vật di chuyển được trong 4 giờ kể từ lúc xuất phát (làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất).



Đáp án: 13,3

Lời giải.

Hàm biểu diễn vận tốc có dạng $v(t) = at^2 + bt + c$. Dựa vào đồ thị ta có

$$\begin{cases} c = 2 \\ -\frac{b}{2a} = 1 \\ a + b + c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c = 2 \end{cases} \Leftrightarrow v(t) = t^2 - 2t + 2.$$

Với $t = 4 \Rightarrow v(4) = 10$ (thỏa mãn).

Từ đó $s = \int_0^4 (t^2 - 2t + 2) \, dt = \frac{40}{3} \approx 13,3$ (km).

C. TÍCH PHÂN HÀM ẨN BIẾN ĐỐI PHỨC TẠP

Phần I. Mỗi câu hỏi học sinh chọn một trong bốn phương án A, B, C, D.

CÂU 1. Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị không âm và có đạo hàm liên tục trên \mathbb{R} thỏa mãn $f'(x) = (2x + 1)[f(x)]^2, \forall x \in \mathbb{R}$ và

$f(0) = -1$. Giá trị của tích phân $\int_0^1 (x^3 - 1) f(x) \, dx$ bằng

A 1.

B $\frac{2}{3}$.

C $\frac{1}{2}$.

D $\frac{3}{2}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} f'(x) &= (2x + 1)[f(x)]^2, \forall x \in \mathbb{R} \\ \Rightarrow \frac{-f'(x)}{[f(x)]^2} &= -(2x + 1), \forall x \in \mathbb{R} \\ \Rightarrow \left[\frac{1}{f(x)} \right]' &= -(2x + 1), \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Suy ra $\frac{1}{f(x)} = - \int (2x+1) dx = -x^2 - x + C \Rightarrow f(x) = \frac{1}{-x^2 - x + C}$.

Vì $f(0) = -1 \Rightarrow C = -1$.

Suy ra $f(x) = -\frac{1}{x^2 + x + 1}$.

$$\int_0^1 (x^3 - 1) f(x) dx = - \int_0^1 (x^3 - 1) \left(\frac{1}{x^2 + x + 1} \right) dx = \int_0^1 (1 - x) dx$$

$$= \left(x - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{2}.$$

Chọn đáp án **(C)** □

CÂU 2. Cho hàm số $f(x) \neq 0$, liên tục trên đoạn $[1; 2]$ và thỏa mãn $f(1) = \frac{1}{3}$;

$x^2 \cdot f'(x) = f^2(x)$ với $\forall x \in [1; 2]$. Tính tích phân $I = \int_1^2 (2x+1)^2 f(x) dx$.

(A) $I = \frac{7}{6}$.

(B) $I = \frac{5}{6}$.

(C) $I = \frac{37}{6}$.

(D) $I = \frac{1}{6}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} x^2 \cdot f'(x) &= f^2(x) \\ \Rightarrow \frac{f'(x)}{f^2(x)} &= \frac{1}{x^2} \\ \Rightarrow \left[-\frac{1}{f(x)} \right]' &= \frac{1}{x^2} \\ \Rightarrow -\frac{1}{f(x)} &= \int \frac{1}{x^2} dx \\ \Rightarrow \frac{1}{f(x)} &= - \int \frac{1}{x^2} dx \\ \Rightarrow \frac{1}{f(x)} &= \frac{1}{x} + C. \end{aligned}$$

Mà $f(1) = \frac{1}{3} \Rightarrow 3 = 1 + C \Rightarrow C = 2$.

Do đó $\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{x} + 2 \Rightarrow f(x) = \frac{x}{2x+1}$.

Vậy $I = \int_1^2 (2x+1)^2 f(x) dx = \int_1^2 (2x+1)^2 \frac{x}{2x+1} dx = \int_1^2 (2x^2 + x) dx = \frac{37}{6}$.

Chọn đáp án **(C)** □

CÂU 3. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên \mathbb{R} thỏa mãn $3f'(x) \cdot e^{f^3(x)} - \frac{2x}{f^2(x)} = 0$ với $\forall x \in \mathbb{R}$. Biết $f(1) = 0$, tính tích phân

$$I = \int_0^{2024} \frac{1}{\sqrt[3]{2 \ln x}} \cdot f(x) dx.$$

(A) 1.

(B) $\frac{1}{2024}$.

(C) 2024.

(D) 0.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} 3f'(x) \cdot e^{f^3(x)} - \frac{2x}{f^2(x)} &= 0 \\ \Rightarrow 3f^2(x) \cdot f'(x) \cdot e^{f^3(x)} &= 2x \\ \Rightarrow [e^{f^3(x)}]' &= 2x \\ \Rightarrow e^{f^3(x)} &= \int 2x dx \\ \Rightarrow e^{f^3(x)} &= x^2 + C. \end{aligned}$$

Mặt khác $f(1) = 0 \Rightarrow e^{f^3(1)} = 1 + C \Rightarrow C = 0$.

Suy ra $e^{f^3(x)} = x^2 \Rightarrow f^3(x) = \ln x^2 \Rightarrow f(x) = \sqrt[3]{2 \ln x}$.

$$\text{Vậy } I = \int_0^{2024} \frac{1}{\sqrt[3]{2 \ln x}} \cdot f(x) dx = \int_0^{2024} \frac{1}{\sqrt[3]{2 \ln x}} \cdot \sqrt[3]{2 \ln x} dx = \int_0^{2024} dx = 2024$$

Chọn đáp án (C) □

CÂU 4. Cho hàm số $f(x)$ đồng biến, có đạo hàm trên đoạn $[1; 4]$ và thỏa mãn $x + 2x \cdot f(x) = [f'(x)]^2$ với $\forall x \in [1; 4]$. Biết $f(1) = \frac{3}{2}$, tính $I = \int_1^4 f(x) dx$.

- (A) $I = \frac{1186}{45}$. (B) $I = \frac{1186}{9}$. (C) $I = \frac{1186}{5}$. (D) $I = \frac{1186}{41}$.

Lời giải.

Do $f(x)$ đồng biến trên đoạn $[1; 4] \Rightarrow f'(x) \geq 0, \forall x \in [1; 4]$.
Ta có $x + 2x \cdot f(x) = [f'(x)]^2 \Leftrightarrow x(1 + 2 \cdot f(x)) = [f'(x)]^2$,
Do $x \in [1; 4]$ và $f'(x) \geq 0, \forall x \in [1; 4] \Rightarrow f(x) > \frac{-1}{2}$ và

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sqrt{x} \cdot \sqrt{1 + 2f(x)} \\ \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{\sqrt{1 + 2f(x)}} &= \sqrt{x} \\ \Leftrightarrow \left(\sqrt{1 + 2f(x)} \right)' &= \sqrt{x} \\ \Leftrightarrow \sqrt{1 + 2f(x)} &= \int \sqrt{x} dx \\ \Leftrightarrow \sqrt{1 + 2f(x)} &= \frac{2}{3} x \sqrt{x} + C. \end{aligned}$$

Vì $f(1) = \frac{3}{2} \Rightarrow \sqrt{1 + 2 \cdot \frac{3}{2}} = \frac{2}{3} + C \Leftrightarrow C = \frac{4}{3}$.
Suy ra

$$\begin{aligned} \sqrt{1 + 2f(x)} &= \frac{2}{3} x \sqrt{x} + \frac{4}{3} \\ \Leftrightarrow 1 + 2f(x) &= \left(\frac{2}{3} x \sqrt{x} + \frac{4}{3} \right)^2 \\ \Leftrightarrow f(x) &= \frac{2}{9} x^3 + \frac{8}{9} x^{\frac{3}{2}} + \frac{7}{18}. \end{aligned}$$

Khi đó
$$I = \int_1^4 f(x) dx = \int_1^4 \left(\frac{2}{9} x^3 + \frac{8}{9} x^{\frac{3}{2}} + \frac{7}{18} \right) dx = \left(\frac{1}{18} x^4 + \frac{16}{45} x^{\frac{5}{2}} + \frac{7}{18} x \right) \Big|_1^4 = \frac{1186}{45}.$$

Chọn đáp án (A) □

CÂU 5. Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị dương và thỏa mãn $f(0) = 1, [f'(x)]^3 = e^x [f(x)]^2, \forall x \in \mathbb{R}$. Tính $I = \int_1^2 f(x) dx$.

- (A) $I = e^2 + 1$. (B) $I = e - 1$. (C) $I = e^2 - e$. (D) $I = e$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}
 [f'(x)]^3 &= e^x [f(x)]^2 \\
 \Leftrightarrow f'(x) &= \sqrt[3]{e^x} \cdot \sqrt[3]{[f(x)]^2} \\
 \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{\sqrt[3]{[f(x)]^2}} &= \sqrt[3]{e^x} \\
 \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{\sqrt[3]{[f(x)]^2}} &= \sqrt[3]{e^x} \\
 \Leftrightarrow f'(x) \cdot [f(x)]^{-\frac{2}{3}} &= \sqrt[3]{e^x} \\
 \Leftrightarrow 3 \left[(f(x))^{\frac{1}{3}} \right]' &= \sqrt[3]{e^x} \\
 \Leftrightarrow \left[(f(x))^{\frac{1}{3}} \right]' &= \frac{1}{3} \sqrt[3]{e^x} \\
 \Leftrightarrow [f(x)]^{\frac{1}{3}} &= \frac{1}{3} \int \sqrt[3]{e^x} dx \\
 \Leftrightarrow [f(x)]^{\frac{1}{3}} &= e^{\frac{x}{3}} + C.
 \end{aligned}$$

Mà $f(0) = 1 \Rightarrow 1 = 1 + C \Rightarrow C = 0$.

Do đó $[f(x)]^{\frac{1}{3}} = e^{\frac{x}{3}} \Rightarrow f(x) = e^x$.

Vậy $I = \int_1^2 e^x dx = e^2 - e$.

Chọn đáp án **(C)** □

CÂU 6. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên \mathbb{R} và thỏa mãn điều kiện $x^6 [f'(x)]^3 + 27[f(x) - 1]^4 = 0, \forall x \in \mathbb{R}$ và

$f(1) = 0$. Tính $I = \int_2^3 f(x) dx$.

(A) $I = \frac{31}{2}$.

(B) $I = -\frac{31}{2}$.

(C) $I = \frac{61}{4}$.

(D) $I = -\frac{61}{4}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}
 x^6 [f'(x)]^3 + 27[f(x) - 1]^4 &= 0 \\
 \Leftrightarrow x^6 [f'(x)]^3 &= -27[f(x) - 1]^4 \\
 \Leftrightarrow \frac{[f'(x)]^3}{[f(x) - 1]^4} &= -\frac{27}{x^6} \\
 \Leftrightarrow \frac{[f'(x)]^3}{[f(x) - 1]^3 [f(x) - 1]} &= -\frac{27}{x^6} \\
 \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{[f(x) - 1] \sqrt[3]{f(x) - 1}} &= -\frac{3}{x^2} \\
 \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{-3[f(x) - 1] \sqrt[3]{f(x) - 1}} &= \frac{1}{x^2} \\
 \Leftrightarrow \left[\frac{1}{\sqrt[3]{f(x) - 1}} \right]' &= \frac{1}{x^2}.
 \end{aligned}$$

Do đó $\int \left[\frac{1}{\sqrt[3]{f(x) - 1}} \right]' dx = \int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + C$.

Suy ra $\frac{1}{\sqrt[3]{f(x) - 1}} = -\frac{1}{x} + C$.

Mà $f(1) = 0 \Rightarrow C = 0$.

Nên $f(x) = 1 - x^3$.

Khi đó $I = \int_2^3 f(x) dx = \int_2^3 (1 - x^3) dx = -\frac{61}{4}$.

Chọn đáp án **(D)** □

CÂU 7. Cho hàm số $f(x) > 0$ và thỏa mãn $[f'(x)]^2 + f(x) \cdot f''(x) = e^x, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = f'(0) = 1$. Tính $I = \int_1^2 f(x) dx$.

(A) $I = 2\sqrt{e}$. (B) $I = e - \sqrt{e}$. (C) $I = 2e - 2\sqrt{e}$. (D) $I = 2e + 2\sqrt{e}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} [f'(x)]^2 + f(x) \cdot f''(x) &= e^x \\ \Leftrightarrow [f(x) \cdot f'(x)]' &= e^x \\ \Rightarrow f(x) \cdot f'(x) &= \int_e^x e^x dx \\ \Rightarrow f(x) \cdot f'(x) &= e^x + C. \end{aligned}$$

Từ $f(0) = f'(0) = 1$ ta suy ra $C = 0$.

Vậy $f(x) \cdot f'(x) = e^x$

Tiếp đến có

$$\begin{aligned} 2f(x) \cdot f'(x) &= e^x \\ \Leftrightarrow [f^2(x)]' &= e^x \\ \Rightarrow f^2(x) &= \int_e^x e^x dx \\ \Rightarrow f^2(x) &= e^x + C \end{aligned}$$

Từ $f(0) = 1$ ta suy ra $C = 0$.

Vậy $f^2(x) = e^x \Rightarrow f(x) = \sqrt{e^x}$ (do $f(x) > 0$).

$$\text{Khi đó } I = \int_1^2 f(x) dx = \int_1^2 \sqrt{e^x} dx = \int_1^2 e^{\frac{x}{2}} dx = 2e^{\frac{x}{2}} \Big|_1^2 = 2e - 2\sqrt{e}.$$

Chọn đáp án (C) □

CÂU 8. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $[f'(x)]^2 + f(x) \cdot f''(x) = 2x$, và $f(0) = f'(0) = 2$. Tính $I = \int_1^2 f^2(x) dx$.

(A) $I = \frac{15}{2}$. (B) $I = \frac{1}{2}$. (C) $I = \frac{19}{2}$. (D) $I = 15$.

Lời giải.

Ta có $[f(x)f'(x)]' = [f'(x)]^2 + f(x)f''(x)$.

Do đó theo giả thiết ta được $[f(x)f'(x)]' = 2x$.

Suy ra $f(x)f'(x) = x^2 + C$.

Hơn nữa $f(0) = f'(0) = 2$ suy ra $C = 1$.

$\Rightarrow f(x)f'(x) = x^2 + 1$.

Tương tự vì $[f^2(x)]' = 2f(x)f'(x)$ nên $[f^2(x)]' = 2(x^2 + 1)$.

Suy ra $f^2(x) = \int 2(x^2 + 1) dx \Rightarrow f^2(x) = \frac{2}{3}x^3 + 2x + C$.

Mặt khác $f(0) = 2$ nên suy ra $C = 2$.

$\Rightarrow f^2(x) = \frac{2}{3}x^3 + 2x + 2$.

$$\text{Vậy } I = \int_1^2 f^2(x) dx = \int_1^2 \left(\frac{2}{3}x^3 + 2x + 2 \right) dx = \frac{15}{2}.$$

Chọn đáp án (A) □

CÂU 9. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn: $[f'(x)]^2 + f(x) \cdot f''(x) = 15x^4 + 12x, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = f'(0) = 1$. Giá trị của $f^2(1)$ bằng

(A) $\frac{5}{2}$. (B) 8. (C) 10. (D) 4.

Lời giải.

Theo giả thiết

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}: [f'(x)]^2 + f(x) \cdot f''(x) &= 15x^4 + 12x \\ \Leftrightarrow f'(x) \cdot f'(x) + f(x) \cdot f''(x) &= 15x^4 + 12x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow [f(x) \cdot f'(x)]' &= 15x^4 + 12x \\ \Leftrightarrow f(x) \cdot f'(x) &= \int (15x^4 + 12x) dx = 3x^5 + 6x^2 + C. \quad (1) \end{aligned}$$

Thay $x = 0$ vào (1), ta được $f(0) \cdot f'(0) = C \Leftrightarrow C = 1$.

Khi đó (1) trở thành $f(x) \cdot f'(x) = 3x^5 + 6x^2 + 1$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_0^1 f(x) \cdot f'(x) dx &= \int_0^1 (3x^5 + 6x^2 + 1) dx \\ \Leftrightarrow \left[\frac{1}{2} f^2(x) \right]_0^1 &= \left(\frac{1}{2} x^6 + 2x^3 + x \right) \Big|_0^1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} [f^2(1) - f^2(0)] = \frac{7}{2} \\ \Leftrightarrow f^2(1) - 1 &= 7 \Leftrightarrow f^2(1) = 8. \end{aligned}$$

Vậy $f^2(1) = 8$.

Chọn đáp án (B) □

CÂU 10. Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn $[f'(x)]^2 + f(x) \cdot f''(x) = x^3 - 2x, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = f'(0) = 2$. Tính giá trị của $T = f^2(2)$.

- (A) $\frac{160}{15}$. (B) $\frac{268}{15}$. (C) $\frac{4}{15}$. (D) $\frac{268}{30}$.

Lời giải.

Ta có $[f'(x)]^2 + f(x) \cdot f''(x) = x^3 - 2x, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow [f'(x) \cdot f(x)]' = x^3 - 2x, \forall x \in \mathbb{R}$.

Lấy nguyên hàm hai vế ta có

$$\begin{aligned} \int [f'(x) \cdot f(x)]' dx &= \int (x^3 - 2x) dx \\ \Leftrightarrow f'(x) \cdot f(x) &= \frac{x^4}{4} - x^2 + C. \end{aligned}$$

Theo đề ra ta có $f(0) \cdot f'(0) = C = 4$.

$$\text{Suy ra } \int_0^2 f'(x) \cdot f(x) dx = \int_0^2 \left(\frac{x^4}{4} - x^2 + 4 \right) dx \Leftrightarrow \frac{f^2(x)}{2} \Big|_0^2 = \frac{104}{15} \Leftrightarrow f^2(2) = \frac{268}{15}.$$

Chọn đáp án (B) □

CÂU 11. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(x) + f'(x) = e^{-x}, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = 2$. Tính $I = \int_1^2 \frac{f(x)e^x}{x} dx$.

- (A) $I = 2 \ln 2$. (B) $I = \ln 2$. (C) $I = 1 + \ln 2$. (D) $I = 1 + 2 \ln 2$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} f(x) + f'(x) &= e^{-x} \\ \Leftrightarrow f(x)e^x + f'(x)e^x &= 1 \\ \Leftrightarrow [f(x)e^x]' &= 1 \\ \Rightarrow f(x)e^x &= \int x dx \\ \Leftrightarrow f(x)e^x &= x + C. \end{aligned}$$

Vì $f(0) = 2$ nên $C = 2$.

$$\Rightarrow f(x)e^x = x + 2.$$

$$\text{Vậy } I = \int_1^2 \frac{f(x)e^x}{x} dx = \int_1^2 \frac{x+2}{x} dx = \int_1^2 \left(1 + \frac{2}{x} \right) dx = (x + 2 \ln |x|) \Big|_1^2 = 1 + 2 \ln 2.$$

Chọn đáp án (D) □

CÂU 12. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên \mathbb{R} thỏa mãn $(x+2)f(x) + (x+1)f'(x) = e^x$ và $f(0) = \frac{1}{2}$. Tính $I =$

$$\int_1^2 (2x+2)f(x) dx.$$

- (A) $I = e^2$. (B) $I = 1 + e$. (C) $I = 1 + e^2$. (D) $I = e^2 - e$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}(x+2)f(x) + (x+1)f'(x) &= e^x \\ \Leftrightarrow (x+1)f(x) + f(x) + (x+1)f'(x) &= e^x \\ \Leftrightarrow [(x+1)f(x)] + [(x+1)f(x)]' &= e^x \\ \Leftrightarrow e^x [(x+1)f(x)] + e^x [(x+1)f(x)]' &= e^{2x} \\ \Leftrightarrow [e^x (x+1)f(x)]' &= e^{2x} \\ \Rightarrow \int [e^x (x+1)f(x)]' dx &= \int e^{2x} dx \\ \Leftrightarrow e^x (x+1)f(x) &= \frac{1}{2}e^{2x} + C.\end{aligned}$$

Mà $f(0) = \frac{1}{2} \Rightarrow C = 0$.

Vậy $f(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{e^x}{x+1}$.

Do đó $I = \int_1^2 (2x+2) \frac{1}{2} \cdot \frac{e^x}{x+1} dx = \int_1^2 e^x dx = e^2 - e$.

Chọn đáp án (D) □

CÂU 13. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục, có đạo hàm trên \mathbb{R} thỏa mãn điều kiện

$f(x) + x[f'(x) - 2\sin x] = x^2 \cos x$, $x \in \mathbb{R}$ và $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$. Tính $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(x)}{x} dx$.

(A) $I = 1$.

(B) $I = \frac{\pi}{2}$.

(C) $I = -1$.

(D) $I = -\pi$.

Lời giải.

Từ giả thiết $f(x) + x(f'(x) - 2\sin x) = x^2 \cos x$

$\Leftrightarrow f(x) + xf'(x) = x^2 \cos x + 2x \sin x$

$\Leftrightarrow (xf(x))' = (x^2 \sin x)'$

$\Leftrightarrow xf(x) = x^2 \sin x + C$.

Mặt khác $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow C = 0 \Rightarrow f(x) = x \sin x$.

Vậy $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(x)}{x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x \sin x}{x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = 1$.

Chọn đáp án (A) □

CÂU 14. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $(0; +\infty)$ thỏa mãn $2xf'(x) + f(x) = 2x$, $\forall x \in (0; +\infty)$, $f(1) = 1$. Giá trị của biểu thức $f(4)$ là

(A) $\frac{25}{6}$.

(B) $\frac{25}{3}$.

(C) $\frac{17}{6}$.

(D) $\frac{17}{3}$.

Lời giải.

Xét phương trình $2xf'(x) + f(x) = 2x$ (1) trên $(0; +\infty)$ ta có

$$(1) \Leftrightarrow f'(x) + \frac{1}{2x} \cdot f(x) = 1. \quad (2)$$

Đặt $g(x) = \frac{1}{2x}$, ta tìm một nguyên hàm $G(x)$ của $g(x)$.

Ta có $\int g(x) dx = \int \frac{1}{2x} dx = \frac{1}{2} \ln x + C = \ln \sqrt{x} + C$. Ta chọn $G(x) = \ln \sqrt{x}$.

Nhân cả 2 vế của (2) cho $e^{G(x)} = \sqrt{x}$, ta được

$$\sqrt{x} \cdot f'(x) + \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot f(x) = \sqrt{x} \Leftrightarrow [\sqrt{x} \cdot f(x)]' = \sqrt{x}. \quad (3)$$

Lấy tích phân 2 vế của (3) từ 1 đến 4, ta được

$$\int_1^4 [\sqrt{x} \cdot f(x)]' dx = \int_1^4 \sqrt{x} dx \Rightarrow [\sqrt{x} \cdot f(x)] \Big|_1^4 = \left(\frac{2}{3}\sqrt{x^3}\right) \Big|_1^4 \Rightarrow 2f(4) - f(1) = \frac{14}{3}$$

$$\Rightarrow f(4) = \frac{1}{2} \left(\frac{14}{3} + 1 \right) = \frac{17}{6} \text{ (vì } f(1) = 1).$$

$$\text{Vậy } f(4) = \frac{17}{6}.$$

Chọn đáp án **C** □

CÂU 15. Cho hàm số $f(x)$ không âm, có đạo hàm trên đoạn $[0; 1]$ và thỏa mãn $f(1) = 1$, $[2f(x) + 1 - x^2] f'(x) = 2x[1 + f(x)]$, $\forall x \in [0; 1]$. Tích phân $\int_0^1 f(x) dx$ bằng

A 1.

B 2.

C $\frac{1}{3}$.

D $\frac{3}{2}$.

Lời giải.

Xét trên đoạn $[0; 1]$, theo đề bài ta có

$$\begin{aligned} [2f(x) + 1 - x^2] f'(x) &= 2x[1 + f(x)] \\ \Leftrightarrow 2f(x) \cdot f'(x) &= 2x + (x^2 - 1) \cdot f'(x) + 2x \cdot f(x) \\ \Leftrightarrow [f^2(x)]' &= [x^2 + (x^2 - 1) \cdot f(x)]' \\ \Leftrightarrow f^2(x) &= x^2 + (x^2 - 1) \cdot f(x) + C. \quad (1) \end{aligned}$$

Thay $x = 1$ vào (1) ta được $f^2(1) = 1 + C \Leftrightarrow C = 0$ (vì $f(1) = 1$).

Do đó, (1) trở thành

$$\begin{aligned} f^2(x) &= x^2 + (x^2 - 1) \cdot f(x) \\ \Leftrightarrow f^2(x) - 1 &= x^2 - 1 + (x^2 - 1) \cdot f(x) \\ \Leftrightarrow [f(x) - 1] \cdot [f(x) + 1] &= (x^2 - 1) \cdot [f(x) + 1] \\ \Leftrightarrow f(x) - 1 &= x^2 - 1 \text{ (vì } f(x) \geq 0 \Rightarrow f(x) + 1 > 0, \forall x \in [0; 1]) \\ \Leftrightarrow f(x) &= x^2. \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{1}{3}.$$

Chọn đáp án **C** □

CÂU 16. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0; 1]$, thỏa mãn

$$[f'(x)]^2 + 4f(x) = 8x^2 + 4, \forall x \in [0; 1] \text{ và } f(1) = 2. \text{ Tính } \int_0^1 f(x) dx.$$

A $\frac{1}{3}$.

B 2.

C $\frac{4}{3}$.

D $\frac{21}{4}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} [f'(x)]^2 + 4f(x) &= 8x^2 + 4 \\ \Rightarrow \int_0^1 [f'(x)]^2 dx + 4 \int_0^1 f(x) dx &= \int_0^1 (8x^2 + 4) dx = \frac{20}{3}. \quad (1) \end{aligned}$$

Và

$$\begin{aligned} \int_0^1 x f'(x) dx &= x f(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 f(x) dx = 2 - \int_0^1 f(x) dx \\ \Rightarrow -4 \int_0^1 x f'(x) dx &= -8 + 4 \int_0^1 f(x) dx. \quad (2) \end{aligned}$$

Lại có

$$\int_0^1 (2x)^2 dx = \frac{4}{3}. \quad (3)$$

Cộng về với về của (1), (2), (3) ta được

$$\int_0^1 (f'(x) - 2x)^2 dx = 0 \Rightarrow f'(x) = 2x \Rightarrow f(x) = x^2 + C.$$

Mặt khác $f(1) = C + 1 = 2 \Rightarrow C = 1 \Rightarrow f(x) = x^2 + 1$.

$$\text{Do đó } \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (x^2 + 1) dx = \frac{4}{3}.$$

Chọn đáp án (C) □

CÂU 17. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0; 1]$ thỏa mãn

$$3f(x) + xf'(x) \geq x^{2018}, \forall x \in [0; 1]. \text{ Tìm giá trị nhỏ nhất của } \int_0^1 f(x) dx.$$

(A) $\frac{1}{2018 \cdot 2020}$.

(B) $\frac{1}{2019 \cdot 2020}$.

(C) $\frac{1}{2020 \cdot 2021}$.

(D) $\frac{1}{2019 \cdot 2021}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} 3f(x) + xf'(x) &\geq x^{2018}, \forall x \in [0; 1] \\ \Leftrightarrow 3x^2 f(x) + x^3 \cdot f'(x) &\geq x^{2020}, \forall x \in [0; 1] \\ \Leftrightarrow [x^3 f(x)]' &\geq x^{2020}, \forall x \in [0; 1] \\ \Rightarrow x^3 f(x) &\geq \int x^{2020} dx, \forall x \in [0; 1] \\ \Rightarrow x^3 f(x) &\geq \frac{x^{2021}}{2021} + C, \forall x \in [0; 1]. \end{aligned}$$

$$\text{Cho } x = 0 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow x^3 f(x) \geq \frac{x^{2021}}{2021}, \forall x \in [0; 1] \Rightarrow f(x) \geq \frac{x^{2018}}{2021}, \forall x \in [0; 1].$$

$$\Rightarrow \int_0^1 f(x) dx \geq \int_0^1 \frac{x^{2018}}{2021} dx = \left(\frac{x^{2019}}{2019 \cdot 2021} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{2019 \cdot 2021}.$$

Chọn đáp án (D) □

CÂU 18. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên \mathbb{R} thỏa mãn

$$\begin{cases} f(0) = f'(0) = 1 \\ f(x+y) = f(x) + f(y) + 3xy(x+y) - 1 \end{cases} \text{ với } x, y \in \mathbb{R}$$

$$\text{Tính } \int_0^1 f(x-1) dx.$$

(A) $\frac{1}{2}$.

(B) $-\frac{1}{4}$.

(C) $\frac{1}{4}$.

(D) $\frac{7}{4}$.

Lời giải.

Lấy đạo hàm theo hàm số y ta được $f'(x+y) = f'(y) + 3x^2 + 6xy, \forall x \in \mathbb{R}$.

$$\text{Cho } y = 0 \Rightarrow f'(x) = f'(0) + 3x^2 \Rightarrow f'(x) = 1 + 3x^2$$

$$\Rightarrow f(x) = \int f'(x) dx = x^3 + x + C \text{ mà } f(0) = 1 \Rightarrow C = 1.$$

$$\text{Do đó } f(x) = x^3 + x + 1 \Rightarrow f(x-1) = (x-1)^3 + x - 1 + 1 = x^3 - 3x^2 + 4x - 1.$$

$$\text{Vậy } \int_0^1 f(x-1) dx = \int_0^1 (x^3 - 3x^2 + 4x - 1) dx = \frac{1}{4} \int_{-1}^0 f(x) dx = \int_{-1}^0 (x^3 + x + 1) dx = \frac{1}{4}.$$

Chọn đáp án (C) □

CÂU 19. Cho hai hàm $f(x)$ và $g(x)$ có đạo hàm trên $[1; 4]$, thỏa mãn $\begin{cases} f(1) + g(1) = 4 \\ g(x) = -xf'(x), \text{ với mọi } x \in [1; 4]. \end{cases}$ Tính tích phân $\begin{cases} f(x) = -xg'(x) \end{cases}$

$$I = \int_1^4 [f(x) + g(x)] dx.$$

(A) $3 \ln 2$.

(B) $4 \ln 2$.

(C) $6 \ln 2$.

(D) $8 \ln 2$.

Lời giải.

Từ giả thiết ta có

$$\begin{aligned} f(x) + g(x) &= -x \cdot f'(x) - x \cdot g'(x) \\ \Leftrightarrow [f(x) + x \cdot f'(x)] + [g(x) + x \cdot g'(x)] &= 0 \\ \Leftrightarrow [x \cdot f(x)]' + [x \cdot g(x)]' &= 0 \\ \Rightarrow x \cdot f(x) + x \cdot g(x) &= C \\ \Rightarrow f(x) + g(x) &= \frac{C}{x} \end{aligned}$$

Mà $f(1) + g(1) = 4 \Rightarrow C = 4 \Rightarrow f(x) + g(x) = \frac{4}{x}$.

Vậy $I = \int_1^4 [f(x) + g(x)] dx = \int_1^4 \frac{4}{x} dx = 8 \ln 2$.

Chọn đáp án (D) □

CÂU 20. Cho hai hàm $f(x)$ và $g(x)$ có đạo hàm trên $[1; 2]$ thỏa mãn $f(1) = g(1) = 0$ và $\begin{cases} \frac{x}{(x+1)^2}g(x) + 2023x = (x+1)f'(x) \\ \frac{x^3}{x+1}g'(x) + f(x) = 2024x^2 \end{cases}, \forall x \in [1; 2]$.

Tính tích phân $I = \int_1^2 \left[\frac{x}{x+1}g(x) - \frac{x+1}{x}f(x) \right] dx$.

- (A) $I = \frac{1}{2}$. (B) $I = 1$. (C) $I = \frac{3}{2}$. (D) $I = 2$.

Lời giải.

Từ giả thiết ta có $\begin{cases} \frac{1}{(x+1)^2}g(x) - \frac{x+1}{x}f'(x) = -2023 \\ \frac{x}{x+1}g'(x) + \frac{1}{x^2}f(x) = 2024 \end{cases}, \forall x \in [1; 2]$.

Suy ra

$$\begin{aligned} &\left[\frac{1}{(x+1)^2}g(x) + \frac{x}{x+1}g'(x) \right] - \left[\frac{x+1}{x}f'(x) - \frac{1}{x^2}f(x) \right] = 1 \\ \Leftrightarrow &\left[\frac{x}{x+1}g(x) \right]' - \left[\frac{x+1}{x}f(x) \right]' = 1 \\ \Rightarrow &\frac{x}{x+1}g(x) - \frac{x+1}{x}f(x) = x + C. \end{aligned}$$

Mà $f(1) = g(1) = 0 \Rightarrow C = -1 \Rightarrow \frac{x}{x+1}g(x) - \frac{x+1}{x}f(x) = x - 1$.

Vậy $I = \int_1^2 \left[\frac{x}{x+1}g(x) - \frac{x+1}{x}f(x) \right] dx = \int_1^2 (x - 1) dx = \frac{1}{2}$.

Chọn đáp án (A) □

CÂU 21. Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ thỏa mãn $x^2 f^2(x) + (2x - 1)f(x) = x f'(x) - 1$, với mọi $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ đồng thời thỏa mãn $f(1) = -2$. Tính $\int_1^2 f(x) dx$.

- (A) $-\frac{\ln 2}{2} - 1$. (B) $-\ln 2 - \frac{1}{2}$. (C) $-\ln 2 - \frac{3}{2}$. (D) $-\frac{\ln 2}{2} - \frac{3}{2}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} x^2 f^2(x) + 2x f(x) + 1 &= x f'(x) + f(x) \\ \Leftrightarrow (x f(x) + 1)^2 &= (x f(x) + 1)'. \end{aligned}$$

Do đó

$$\begin{aligned} \frac{(x f(x) + 1)'}{(x f(x) + 1)^2} &= 1 \\ \Rightarrow \int \frac{(x f(x) + 1)'}{(x f(x) + 1)^2} dx &= \int 1 dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow -\frac{1}{xf(x)+1} &= x+C \\ \Rightarrow xf(x)+1 &= -\frac{1}{x+C}. \end{aligned}$$

Mặt khác $f(1) = -2$ nên $-2+1 = -\frac{1}{1+C} \Rightarrow C = 0$.

Nên suy ra $xf(x)+1 = -\frac{1}{x} \Rightarrow f(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}$.

$$\text{Vậy } \int_1^2 f(x) dx = \int_1^2 \left(-\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}\right) dx = \left(-\ln x + \frac{1}{x}\right) \Big|_1^2 = -\ln 2 - \frac{1}{2}.$$

Chọn đáp án (B) □

CÂU 22. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên \mathbb{R} thỏa mãn $x \cdot f(x) \cdot f'(x) = f^2(x) - x, \forall x \in \mathbb{R}$ và có $f(2) = 1$.

Tích phân $\int_0^2 f^2(x) dx$ bằng

(A) $\frac{3}{2}$.

(B) $\frac{4}{3}$.

(C) 2.

(D) 4.

💬 **Lời giải.**

Ta có

$$\begin{aligned} x \cdot f(x) \cdot f'(x) &= f^2(x) - x \Leftrightarrow 2x \cdot f(x) \cdot f'(x) = 2f^2(x) - 2x \\ &\Leftrightarrow 2x \cdot f(x) \cdot f'(x) + f^2(x) = 3f^2(x) - 2x \\ &\Leftrightarrow \int_0^2 (x \cdot f^2(x))' dx = 3 \int_0^2 f^2(x) dx - \int_0^2 2x dx \\ &\Leftrightarrow (x \cdot f^2(x)) \Big|_0^2 = 3I - 4 \\ &\Leftrightarrow 2 = 3I - 4 \\ &\Leftrightarrow I = 2. \end{aligned}$$

Chọn đáp án (C) □

CÂU 23. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên \mathbb{R} , $f(0) = 0$, $f'(0) \neq 0$ và thỏa mãn hệ thức $f(x) \cdot f'(x) + 18x^2 =$

$(3x^2 + x) f'(x) + (6x + 1) f(x), \forall x \in \mathbb{R}$. Biết $\int_0^1 (x+1) e^{f(x)} dx = ae^2 + b, (a, b \in \mathbb{Q})$. Giá trị của $a - b$ bằng

(A) 1.

(B) 2.

(C) 0.

(D) $\frac{2}{3}$.

💬 **Lời giải.**

Ta có $f(x) \cdot f'(x) + 18x^2 = (3x^2 + x) f'(x) + (6x + 1) f(x)$.

Lấy nguyên hàm hai vế ta được

$$\begin{aligned} \frac{f^2(x)}{2} + 6x^3 &= (3x^2 + x) f(x) \Rightarrow f^2(x) - 2(3x^2 + x) f(x) + 12x^3 = 0 \\ &\Rightarrow \begin{cases} f(x) = 6x^2 \\ f(x) = 2x. \end{cases} \end{aligned}$$

TH1: $f(x) = 6x^2$ không thỏa mãn kết quả $\int_0^1 (x+1) e^{f(x)} dx = ae^2 + b, (a, b \in \mathbb{Q})$.

TH2: $f(x) = 2x \Rightarrow \int_0^1 (x+1) e^{f(x)} dx = \int_0^1 (x+1) e^{2x} dx = \frac{3}{4}e^2 - \frac{1}{4}$.

$$\text{Suy ra } a = \frac{3}{4}; b = -\frac{1}{4}.$$

Vậy $a - b = 1$.

Chọn đáp án (A) □

CÂU 24. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $[1; 3]$; $f(x) \neq 0, \forall x \in [1; 3]$; $f'(x) [1 + f(x)]^2 =$

$(x-1)^2 [f(x)]^4$ và $f(1) = -1$. Biết rằng $\int_e^3 f(x) dx = a \ln 3 + b (a, b \in \mathbb{Z})$. Giá trị của $a + b^2$ bằng

A 4.

B 0.

C 2.

D -1.

Lời giải.

Ta có

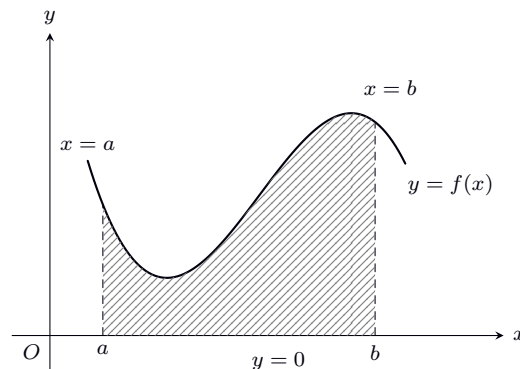
$$\begin{aligned}
 f'(x)[1+f(x)]^2 &= (x-1)^2[f(x)]^4 \Rightarrow \frac{f'(x)}{f^4(x)} + \frac{2f'(x)}{f^3(x)} + \frac{f'(x)}{f^2(x)} = (x-1)^2 \\
 &\Rightarrow \int \left(\frac{f'(x)}{f^4(x)} + \frac{2f'(x)}{f^3(x)} + \frac{f'(x)}{f^2(x)} \right) dx = \int (x-1)^2 dx \\
 &\Rightarrow -\left(\frac{1}{3f^3(x)} + \frac{1}{f^2(x)} + \frac{1}{f(x)} \right) = \frac{1}{3}(x-1)^3 + C. \quad (*)
 \end{aligned}$$

Do $f(1) = -1$ nên $C = \frac{1}{3}$.Thay vào (*) ta được $\left(\frac{1}{f(x)} + 1 \right)^3 = -(x-1)^3 \Rightarrow f(x) = \frac{-1}{x}$.Khi đó $\int_{\frac{1}{e}}^3 \frac{-1}{x} dx = -\ln|x| \Big|_{\frac{1}{e}}^3 = -\ln 3 + 1 \Rightarrow a = -1, b = 1$.Vậy $a + b^2 = 0$.Chọn đáp án B..... ☐

Bài 3. ỨNG DỤNG HÌNH HỌC CỦA TÍCH PHÂN

A. DIỆN TÍCH HÌNH THANG CONG

1. Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$ và $x = b$



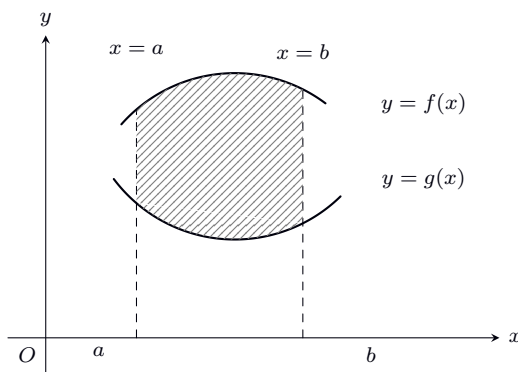
Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[a; b]$. Khi đó, diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành Ox ($y = 0$) và hai đường thẳng $x = a$ và $x = b$ được tính bởi công thức

$$S = \int_a^b |f(x)| dx$$

Chú ý: Giả sử hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[a; b]$. Nếu $f(x)$ không đổi dấu trên $[a; b]$ thì

$$\int_a^b |f(x)| dx = \left| \int_a^b f(x) dx \right|.$$

2. Hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số và hai đường thẳng $x = a$ và $x = b$

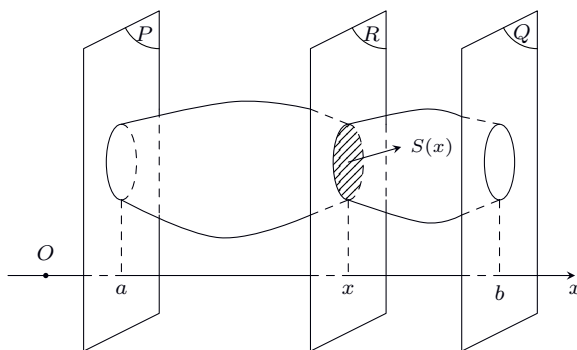


Cho 2 hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ liên tục trên $[a; b]$. Khi đó diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ và hai đường thẳng $x = a$ và $x = b$ được tính bởi công thức

$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$

B. THỂ TÍCH HÌNH KHỐI

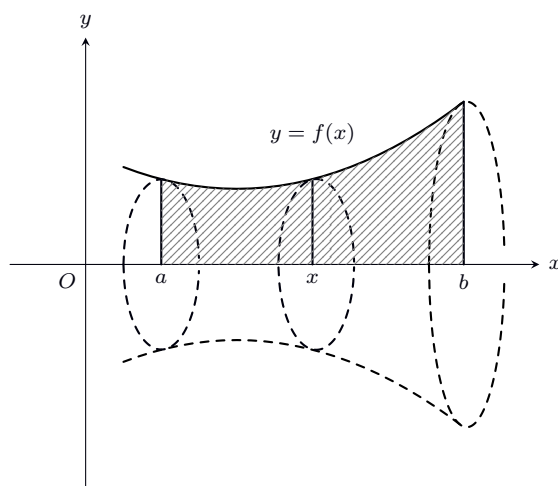
1. Thể tích của vật thể



Trong không gian, cho một vật thể nằm trong khoảng không gian giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) cùng vuông góc với trục Ox tại các điểm a và b . Mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm $x (a \leq x \leq b)$ cắt vật thể theo mặt cắt có diện tích $S(x)$. Khi đó, nếu $S(x)$ là hàm số liên tục trên $[a; b]$ thì thể tích của vật thể được tính bởi công thức

$$V = \int_a^b S(x) dx$$

2. Thể tích khối tròn xoay



Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục, không âm trên $[a; b]$. Hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành Ox và hai đường thẳng $x = a$ và $x = b$ quay quanh trục Ox tạo thành một khối tròn xoay có thể tích bằng

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

11

TÍNH DIỆN TÍCH HÌNH GIỚI HẠN BỞI CÁC ĐƯỜNG CONG

CÂU 1. Cho hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ liên tục trên $[a; b]$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của các hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$ và các đường thẳng $x = a$, $x = b$ bằng

- ☐ A $\left| \int_a^b [f(x) - g(x)] dx \right|$.
 ☐ B $\int_a^b |f(x) + g(x)| dx$.
 ☐ C $\int_a^b |f(x) - g(x)| dx$.
 ☐ D $\int_a^b [f(x) - g(x)] dx$.

Lời giải.

Theo lý thuyết thì diện tích hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị của các đường $y = f(x)$, $y = g(x)$, $x = a$, $x = b$

Được tính theo công thức $S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$.

Chọn đáp án ☒ C. □

CÂU 2. Gọi S là diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = 3^x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- ☐ A $\int_0^2 3^x dx$.
 ☐ B $S = \pi \int_0^2 3^{2x} dx$.
 ☐ C $S = \pi \int_0^2 3^x dx$.
 ☐ D $S = \int_0^2 3^{2x} dx$.

Lời giải.

Diện tích hình phẳng đã cho được tính bởi công thức $S = \int_0^2 3^x dx$.

Chọn đáp án ☒ A. □

CÂU 3. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = (x - 2)^2 - 1$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 1$, $x = 2$ bằng

- ☐ A $\frac{2}{3}$.
 ☐ B $\frac{3}{2}$.
 ☐ C $\frac{1}{3}$.
 ☐ D $\frac{7}{3}$.

Lời giải.

Ta có $S = \int_1^2 |(x - 2)^2 - 1| dx = \int_1^2 |x^2 - 4x + 3| dx = \left| \int_1^2 (x^2 - 4x + 3) dx \right| = \frac{2}{3}$.

Chọn đáp án ☒ A. □

CÂU 4. Tính diện tích S hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^2 + 1$, $x = -1$, $x = 2$ và trục hoành.

- ☐ A $S = 6$.
 ☐ B $S = 16$.
 ☐ C $S = \frac{13}{6}$.
 ☐ D $S = 13$.

Lời giải.

Ta có $S = \int_{-1}^2 |x^2 + 1| dx = \int_{-1}^2 (x^2 + 1) dx = 6$.

Chọn đáp án ☒ A. □

CÂU 5. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^2 + 5$, $y = 6x$, $x = 0$, $x = 1$. Tính S .

- ☐ A $\frac{4}{3}$.
 ☐ B $\frac{7}{3}$.
 ☐ C $\frac{8}{3}$.
 ☐ D $\frac{5}{3}$.

Lời giải.

Diện tích hình phẳng cần tìm $S = \int_0^1 |x^2 - 6x + 5| dx = \frac{7}{3}$.

Chọn đáp án ☒ B. □

CÂU 6. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y = \ln x$, $y = 1$ và hai đường thẳng $x = 1$, $x = e$ bằng

- ☐ A e^2 .
 ☐ B $e + 2$.
 ☐ C $2e$.
 ☐ D $e - 2$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} S &= \int_1^e |\ln x - 1| dx \\ &= \left| \int_1^e (\ln x - 1) dx \right| \\ &= |x(\ln x - 1)|_1^e - \int_1^e dx| \\ &= |1 - x|_1^e| \\ &= |1 - (e - 1)| = |2 - e| \\ &= e - 2. \end{aligned}$$

Chọn đáp án **(D)**.....

CÂU 7. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y = 4x - x^2$, $y = 2x$ và hai đường thẳng $x = 1$, $x = e$ bằng
(A) 4. **(B)** $\frac{20}{3}$. **(C)** $\frac{4}{3}$. **(D)** $\frac{16}{3}$.

Lời giải.

Diện tích hình phẳng cần tìm là

$$S = \int_0^2 |x^2 - 2x| dx = \int_0^2 (2x - x^2) dx = \left(x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\bigg|_0^2 = \frac{4}{3}.$$

Chọn đáp án **(C)**.....

CÂU 8. Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^2 - 2x$, $y = 0$, $x = -10$, $x = 10$.
(A) $S = \frac{2000}{3}$. **(B)** $S = 2008$. **(C)** $S = 2000$. **(D)** $S = \frac{2008}{3}$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của hai đường $(C): y = x^2 - 2x$ và $(d): y = 0$ là

$$x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}.$$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
VT		+	-	+

Diện tích cần tìm

$$\begin{aligned} S &= \int_{-10}^{10} |x^2 - 2x| dx \\ &= \int_{-10}^0 (x^2 - 2x) dx - \int_0^2 (x^2 - 2x) dx + \int_2^{10} (x^2 - 2x) dx \\ &= \left(\frac{x^3}{3} - x^2\right)\bigg|_{-10}^0 - \left(\frac{x^3}{3} - x^2\right)\bigg|_0^2 + \left(\frac{x^3}{3} - x^2\right)\bigg|_2^{10} \\ &= \frac{1300}{3} + \frac{4}{3} + \frac{704}{3} \\ &= \frac{2008}{3}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án **(D)**.....

CÂU 9. Gọi S là diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = 2^x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

Mệnh đề	Đ	S
a) $S = \int_0^2 2^x dx$.	X	
b) $S = \frac{3}{\ln 2}$.	X	

Mệnh đề	Đ	S
c) $S = \pi \int_0^2 2^x dx$.		X
d) $S = \frac{3\pi}{\ln 2}$.		X

Lời giải.

$$S = \int_0^2 |2^x| dx = \int_0^2 2^x dx = \frac{2^2}{\ln 2} - \frac{2^0}{\ln 2} = \frac{3}{\ln 2} \text{ (do } 2^x > 0, \forall x \in [0; 2]).$$

Chọn đáp án ☐ a đúng ☐ b đúng ☐ c sai ☐ d sai ☐

CÂU 10. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = e^x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

Mệnh đề	Đ	S
a) $S = \int_0^2 e^x dx$.	X	
b) $S = e^2$.		X

Mệnh đề	Đ	S
c) $S = \pi \int_0^2 e^x dx$.		X
d) $S = (e^2 - 1)\pi$.		X

Lời giải.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = e^x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$ là

$$S = \int_0^2 e^x dx = e^2 - 1.$$

Chọn đáp án ☐ a đúng ☐ b sai ☐ c sai ☐ d sai ☐

CÂU 11. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai

Mệnh đề	Đ	S
a) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^2$, $y = 2x$, $x = 0$, $x = 1$ là $\frac{4}{3}$.	X	
b) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = -x^2 + 2x + 1$, $y = 2x^2 - 4x + 1$, $x = 0$, $x = 2$ là 4.	X	
c) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \frac{x-1}{x+1}$, trục hoành, $x = 0$, $x = 1$ là $2 \ln 2 - 1$.	X	
d) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = -x^3 + 12x$, $y = -x^2$, $x = -3$, $x = 4$ là $\frac{937}{12}$.	X	

Lời giải.

a) Đúng.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^2$, $y = 2x$, $x = 0$, $x = 1$ là

$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 |x^2 - x| dx \\ &= \left| \int_0^1 (x^2 - x) dx \right| \\ &= \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

b) Đúng.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = -x^2 + 2x + 1$, $y = 2x^2 - 4x + 1$, $x = 0$, $x = 2$ là

$$\begin{aligned} & \int_0^2 |2x^2 - 4x + 1 - (-x^2 + 2x + 1)| dx \\ &= \int_0^2 |3x^2 - 6x| dx \\ &= \int_0^2 (6x - 3x^2) dx \\ &= (3x^2 - x^3) \Big|_0^2 = 4. \end{aligned}$$

c) Đúng.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \frac{x-1}{x+1}$, trục hoành, $x = 0$, $x = 1$ là

$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 \left| \frac{x-1}{x+1} \right| dx \\ &= \left| \int_0^1 \left(\frac{x-1}{x+1} \right) dx \right| \\ &= \left| \int_0^1 \left(1 - \frac{2}{x+1} \right) dx \right| \\ &= |(x - 2 \ln |x+1|) \Big|_0^1| \\ &= 2 \ln 2 - 1. \end{aligned}$$

d) Đúng.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = -x^3 + 12$, $y = -x^2$, $x = -3$ là

$$\begin{aligned} S &= \int_{-3}^4 |x^3 - x^2 - 12x| dx \\ &= \int_{-3}^0 |x^3 - x^2 - 12x| dx + \int_0^4 |x^3 - x^2 - 12x| dx \\ &= \left| \int_{-3}^0 (x^3 - x^2 - 12x) dx \right| + \left| \int_0^4 (x^3 - x^2 - 12x) dx \right| \\ &= \left| \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - 6x^2 \right) \Big|_{-3}^0 \right| + \left| \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - 6x^2 \right) \Big|_0^4 \right| \\ &= \left| \frac{-99}{4} \right| + \left| \frac{-160}{3} \right| = \frac{937}{12}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án a đúng b đúng c đúng d đúng □

CÂU 12. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^2 + x - 1$, $y = x^4 + x - 1$, $x = -1$, $x = 1$.

Đáp án: 0, 27

Lời giải.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^2 + x - 1$, $y = x^4 + x - 1$, $x = -1$, $x = 1$ là

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^1 |x^2 - x^4| dx \\ &= \int_{-1}^0 |x^2 - x^4| dx + \int_0^1 |x^2 - x^4| dx \\ &= \left| \int_{-1}^0 (x^2 - x^4) dx \right| + \left| \int_0^1 (x^2 - x^4) dx \right| \\ &= \left| \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \right) \Big|_{-1}^0 \right| + \left| \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \right) \Big|_0^1 \right| \\ &= \frac{2}{15} + \frac{2}{15} = \frac{4}{15} \approx 0,27. \end{aligned}$$

CÂU 13. Kí hiệu $S(t)$ là diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = 2x + 1$, $y = 0$, $x = 1$, $x = t$ ($t > 1$). Tìm t để $S(t) = 10$.

Đáp án: 3

Lời giải.

Cách 1. Ta có $S(t) = \int_1^t |2x + 1| dx = \int_1^t (2x + 1) dx$.

Suy ra $S(t) = (x^2 + x) \Big|_1^t = t^2 + t - 2$.

Do đó $S(t) = 10 \Leftrightarrow t^2 + t - 2 = 10 \Leftrightarrow t^2 + t - 12 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 3 \\ t = -4 \text{ (L)} \end{cases}$.

Vậy $t = 3$.

Cách 2. Hình phẳng đã cho là hình thang có đáy nhỏ bằng $y(1) = 3$, đáy lớn bằng $y(t) = 2t + 1$ và chiều cao bằng $t - 1$. Ta có

$$\frac{(3 + 2t + 1)(t - 1)}{2} = 10 \Leftrightarrow 2t^2 + 2t - 24 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 3 \\ t = -4 \end{cases}.$$

Vì $t > 1$ nên $t = 3$.

CÂU 14. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $my = x^2$, $mx = y^2$ ($m > 0$). Tìm giá trị của m để $S = 3$.

Đáp án: 3

Lời giải.

Tọa độ giao điểm của hai đồ thị hàm số là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} my = x^2 & (1) \\ mx = y^2 & (2) \end{cases}$ Thế (1) vào (2) ta được $mx =$

$$\left(\frac{x^2}{m} \right)^2 \Leftrightarrow m^3 x - x^4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = m > 0. \end{cases}$$

Vì $y = \frac{x^2}{m} > 0$ nên $mx = y^2$ (với $y > 0$) $\Leftrightarrow y = \sqrt{mx}$

Khi đó diện tích hình phẳng cần tìm là

$$\begin{aligned} S &= \int_0^m \left| \sqrt{mx} - \frac{x^2}{m} \right| dx = \left| \int_0^m \left(\sqrt{mx} - \frac{x^2}{m} \right) dx \right| \\ &= \left| \left(\frac{2\sqrt{m}}{3} \cdot \frac{x^3}{2} - \frac{x^3}{3m} \right) \Big|_0^m \right| \\ &= \left| \frac{1}{3} m^2 \right| = \frac{1}{3} m^2 \end{aligned}$$

Yêu cầu bài toán $S = 3 \Leftrightarrow \frac{1}{3} m^2 = 3 \Leftrightarrow m^2 = 9 \Leftrightarrow m = 3$.

CÂU 15. Giá trị dương của tham số m sao cho diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y = 2x + 3$ và các đường thẳng $y = 0$, $x = 0$, $x = m$ bằng 10 là?

Đáp án: 2

Lời giải.

Vì $m > 0$ nên $2x + 3 > 0, \forall x \in [0; m]$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = 2x + 3$ và các đường thẳng $y = 0, x = 0, x = m$ là

$$S = \int_0^m (2x + 3) \cdot dx = (x^2 + 3x) \Big|_0^m = m^2 + 3m.$$

Theo giả thiết ta có

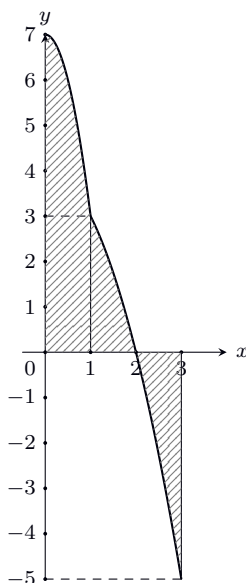
$$S = 10 \Leftrightarrow m^2 + 3m = 10 \Leftrightarrow m^2 + 3m - 10 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = -5 \end{cases} \Leftrightarrow m = 2 \text{ do } m > 0.$$

CÂU 16. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 7 - 4x^3 & \text{khi } 0 \leq x \leq 1 \\ 4 - x^2 & \text{khi } x > 1 \end{cases}$. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $f(x)$ và các đường thẳng $x = 0, x = 3, y = 0$.

Đáp án:

1	0		
---	---	--	--

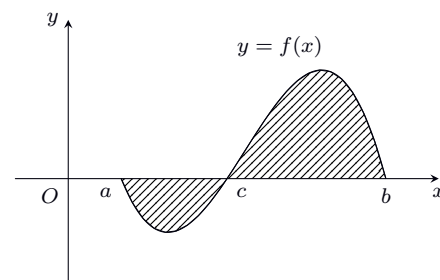
Lời giải.



$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 (7 - 4x^3) dx + \int_1^2 (4 - x^2) dx + \int_2^3 (x^2 - 4) dx \\ &= (7x - x^4) \Big|_0^1 + \left(4x - \frac{x^3}{3}\right) \Big|_1^2 + \left(\frac{x^3}{3} - 4x\right) \Big|_2^3 \\ &= 6 + 4 - \frac{7}{3} - 3 - \frac{8}{3} + 8 = 10. \end{aligned}$$

CÂU 17.

Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành, đường thẳng $x = a, x = b$ (như hình vẽ bên). Hỏi cách tính S nào dưới đây đúng?



A $S = \int_a^b f(x) dx.$

B $S = \left| \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \right|.$

C $S = - \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$

D $S = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$

Lời giải.

Ta có $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$.

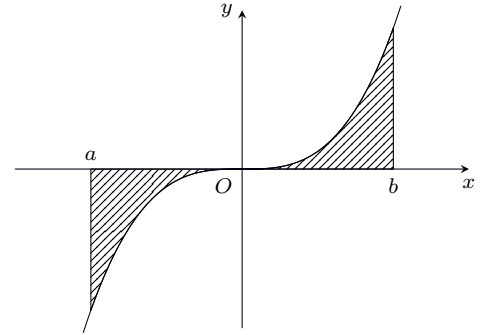
Dựa vào đồ thị ta có $|f(x)| = \begin{cases} -f(x), & a \leq x \leq c \\ f(x), & c < x \leq b. \end{cases}$

$$\text{Suy ra } S = \int_a^b |f(x)| dx = \int_a^c |f(x)| dx + \int_c^b |f(x)| dx = -\int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

Chọn đáp án **(C)** ☐

CÂU 18.

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$. Gọi D là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $(C) : y = f(x)$, trục hoành, hai đường thẳng $x = a, x = b$ (như hình vẽ). Giả sử S_D là diện tích hình phẳng D . Chọn phương án đúng trong các phương án **A, B, C, D** cho dưới đây?



(A) $S_D = \int_a^0 f(x) dx + \int_0^b f(x) dx.$

(B) $S_D = -\int_a^0 f(x) dx + \int_0^b f(x) dx.$

(C) $S_D = \int_a^0 f(x) dx - \int_0^b f(x) dx.$

(D) $S_D = -\int_a^0 f(x) dx - \int_0^b f(x) dx.$

Lời giải.

Ta có $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$.

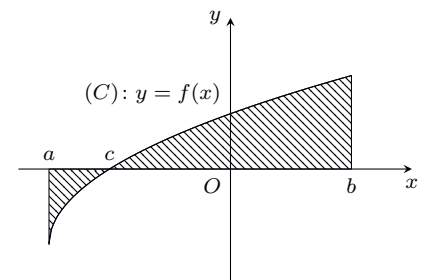
Dựa vào đồ thị ta có $|f(x)| = \begin{cases} -f(x), & a \leq x \leq 0 \\ f(x), & 0 < x \leq b. \end{cases}$

$$\text{Suy ra } S_D = \int_a^b |f(x)| dx = \int_a^0 |f(x)| dx + \int_0^b |f(x)| dx = -\int_a^0 f(x) dx + \int_0^b f(x) dx.$$

Chọn đáp án **(B)** ☐

CÂU 19.

Diện tích của hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a, x = b$ ($a < b$) (phần tô đậm trong hình vẽ) tính theo công thức nào dưới đây?



(A) $S = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$

(B) $S = \int_a^b f(x) dx.$

(C) $S = -\int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$

(D) $S = \left| \int_a^b f(x) dx \right|.$

Lời giải.

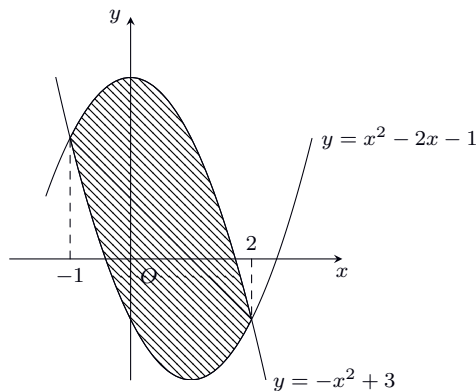
Ta có $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$.

Dựa vào đồ thị ta có $|f(x)| = \begin{cases} -f(x), & a \leq x \leq c \\ f(x), & c < x \leq b. \end{cases}$

$$\text{Suy ra } S = \int_a^b |f(x)| dx = \int_a^c |f(x)| dx + \int_c^b |f(x)| dx = -\int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

Chọn đáp án **(C)** ☐

CÂU 20. Diện tích phần hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ bên dưới được tính theo công thức nào dưới đây?



A $\int_{-1}^2 (-2x + 2) dx.$

B $\int_{-1}^2 (2x - 2) dx.$

C $\int_{-1}^2 (-2x^2 + 2x + 4) dx.$

D $\int_{-1}^2 (2x^2 - 2x - 4) dx.$

Lời giải.

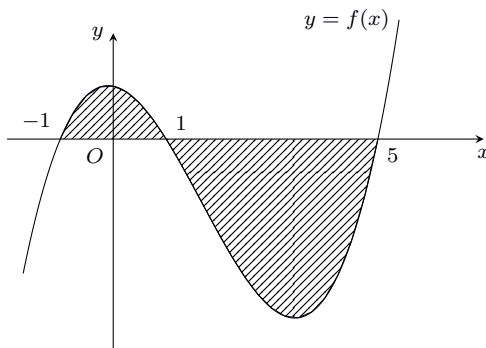
Ta có $S = \int_{-1}^2 |(-x^2 + 3) - (x^2 - 2x - 1)| dx = \int_{-1}^2 |-2x^2 + 2x + 4| dx.$

Vì $-2x^2 + 2x + 4 > 0, \forall x \in (-1; 2)$ nên ta có

$S = \int_{-1}^2 |-2x^2 + 2x + 4| dx = \int_{-1}^2 (-2x^2 + 2x + 4) dx.$

Chọn đáp án **C** □

CÂU 21. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} . Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x), y = 0, x = -1, x = 5$ (như hình vẽ bên dưới).



Mệnh đề nào sau đây đúng?

A $S = -\int_{-1}^1 f(x) dx - \int_1^5 f(x) dx.$

B $S = \int_{-1}^1 f(x) dx + \int_1^5 f(x) dx.$

C $S = \int_{-1}^1 f(x) dx - \int_1^5 f(x) dx.$

D $S = -\int_{-1}^1 f(x) dx + \int_1^5 f(x) dx.$

Lời giải.

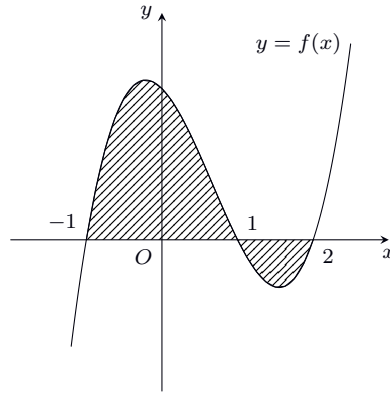
Ta có $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1; 5]$.

Dựa vào đồ thị ta có $|f(x)| = \begin{cases} f(x), & -1 \leq x \leq 1 \\ -f(x), & 1 < x \leq 5. \end{cases}$

Suy ra $S = \int_{-1}^5 |f(x)| dx = \int_{-1}^1 |f(x)| dx + \int_1^5 |f(x)| dx = \int_{-1}^1 f(x) dx - \int_1^5 f(x) dx.$

Chọn đáp án **C** □

CÂU 22. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} . Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x), y = 0, x = -1, x = 2$ (như hình vẽ bên dưới).



Mệnh đề nào sau đây đúng?

A $S = \int_{-1}^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx.$

B $S = -\int_{-1}^1 f(x) dx - \int_1^2 f(x) dx.$

C $S = -\int_{-1}^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx.$

D $S = \int_{-1}^1 f(x) dx - \int_1^2 f(x) dx.$

Lời giải.

Ta có $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1; 2]$.

Dựa vào đồ thị ta có $|f(x)| = \begin{cases} f(x), & -1 \leq x \leq 1 \\ -f(x), & 1 < x \leq 2. \end{cases}$

Suy ra $S = \int_{-1}^2 |f(x)| dx = \int_{-1}^1 |f(x)| dx + \int_1^2 |f(x)| dx = \int_{-1}^1 f(x) dx - \int_1^2 f(x) dx.$

Chọn đáp án **D**..... □

CÂU 23.

Gọi S là diện tích hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = -1, x = 2$. Đặt $a = \int_{-1}^0 f(x) dx, b = \int_0^2 f(x) dx$ (như hình vẽ bên). Mệnh đề nào

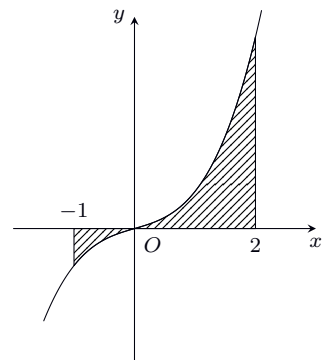
sau đây đúng?

A $S = b - a.$

B $S = b + a.$

C $S = -b + a.$

D $S = -b - a.$



Lời giải.

Ta có $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1; 2]$.

Dựa vào đồ thị ta có $|f(x)| = \begin{cases} -f(x), & -1 \leq x \leq 0 \\ f(x), & 0 < x \leq 2. \end{cases}$

Suy ra $S = \int_{-1}^2 |f(x)| dx = \int_{-1}^0 |f(x)| dx + \int_0^2 |f(x)| dx = -\int_{-1}^0 f(x) dx + \int_0^2 f(x) dx.$

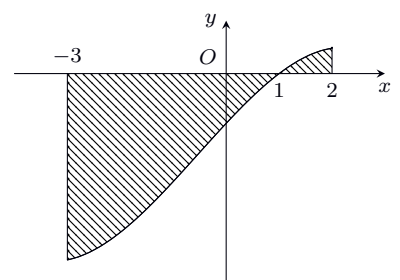
Hay $S = -a + b = b - a.$

Chọn đáp án **A**..... □

CÂU 24.

Gọi S là diện tích hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = -3, x = 2$. Đặt $a = \int_{-3}^1 f(x) dx, b = \int_1^2 f(x) dx$ (như hình vẽ bên).

Mệnh đề nào sau đây đúng?



(A) $S = a + b$.

(B) $S = a - b$.

(C) $S = -a - b$.

(D) $S = b - a$.

Lời giải.

Ta có $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-3; 2]$.

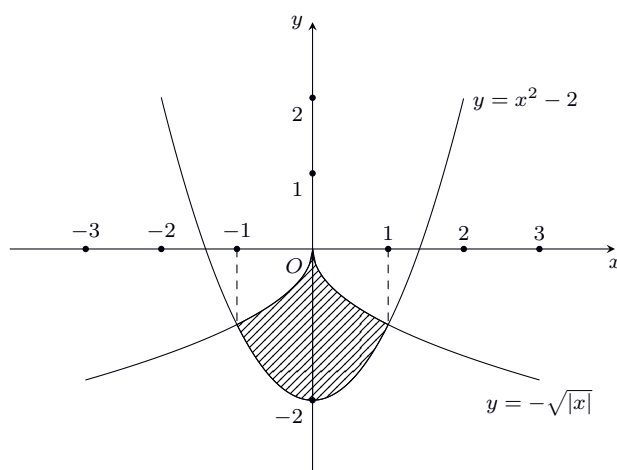
Dựa vào đồ thị ta có $|f(x)| = \begin{cases} -f(x), & -3 \leq x \leq 1 \\ f(x), & 1 < x \leq 2. \end{cases}$

Suy ra $S = \int_{-3}^2 |f(x)| dx = \int_{-3}^1 |f(x)| dx + \int_1^2 |f(x)| dx = -\int_{-3}^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx$.

Hay $S = -a + b = b - a$.

Chọn đáp án (D) □

CÂU 25. Diện tích phần hình phẳng được gạch sọc trong hình vẽ sau được tính theo công thức nào dưới đây?



(A) $\int_{-1}^1 (x^2 - 2 + \sqrt{|x|}) dx$.

(B) $\int_{-1}^1 (x^2 - 2 - \sqrt{|x|}) dx$.

(C) $\int_{-1}^1 (-x^2 + 2 + \sqrt{|x|}) dx$.

(D) $\int_{-1}^1 (-x^2 + 2 - \sqrt{|x|}) dx$.

Lời giải.

Ta có $-\sqrt{|x|} \geq x^2 - 2, \forall x \in [-1; 1]$.

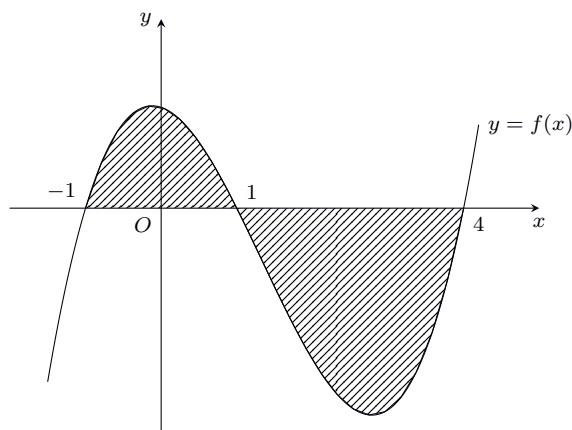
Do đó $-\sqrt{|x|} - (x^2 - 2) = -x^2 + 2 - \sqrt{|x|} \geq 0, \forall x \in [-1; 1]$.

Diện tích phần hình phẳng được gạch sọc trong hình vẽ là

$\int_{-1}^1 |-\sqrt{|x|} - (x^2 - 2)| dx = \int_{-1}^1 (-x^2 + 2 - \sqrt{|x|}) dx$

Chọn đáp án (D) □

CÂU 26. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} . Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x), y = 0, x = -1, x = 4$ (như hình vẽ). Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?



Mệnh đề	Đ	S
a) $S = \int_{-1}^1 f(x) dx - \int_1^4 f(x) dx.$	X	
b) $S = \int_{-1}^1 f(x) dx + \int_1^4 f(x) dx.$	X	

Mệnh đề	Đ	S
c) $S = \left \int_{-1}^4 f(x) dx \right .$		X
d) $S = \int_{-1}^1 f(x) dx + \int_1^4 f(x) dx.$		X

Lời giải.

Ta có $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1; 4]$.

Dựa vào đồ thị ta có $|f(x)| = \begin{cases} f(x), & -1 \leq x \leq 1 \\ -f(x), & 1 < x \leq 4. \end{cases}$

$$\text{Suy ra } S = \int_{-1}^4 |f(x)| dx = \int_{-1}^1 |f(x)| dx + \int_1^4 |f(x)| dx = \int_{-1}^1 f(x) dx - \int_1^4 f(x) dx.$$

Do đó suy ra

a) **Đúng.** Vì $S = \int_{-1}^1 f(x) dx - \int_1^4 f(x) dx$ đúng.

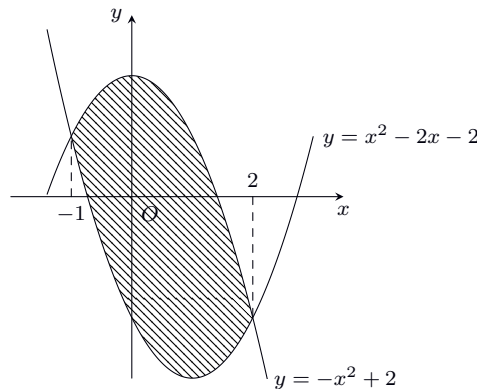
b) **Đúng.** Vì $S = \int_{-1}^1 |f(x)| dx + \int_1^4 |f(x)| dx$ đúng.

c) **Sai.** Vì $|f(x)| = \begin{cases} f(x), & -1 \leq x \leq 1 \\ -f(x), & 1 < x \leq 4. \end{cases}$ nên $\left| \int_{-1}^4 f(x) dx \right| \neq \int_{-1}^4 |f(x)| dx.$

d) **Sai.** Vì $S = \int_{-1}^1 f(x) dx - \int_1^4 f(x) dx$ sai.

Chọn đáp án **a đúng** **b đúng** **c sai** **d sai** ☐

CÂU 27. Cho hình phẳng được gạch chéo trong hình bên dưới.



Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

Mệnh đề	Đ	S
a) Hình phẳng được gạch chéo trong hình trên được giới hạn các đồ thị $y = x^2 - 2x - 2$, $y = -x^2 + 2$ và hai đường thẳng $x = -1$, $x = 2$.	X	
b) Diện tích hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ là $S = \int_{-1}^2 x^2 - 2x - 2 dx + \int_{-1}^2 -x^2 + 2 dx.$		X
c) Hình phẳng được gạch chéo trong hình trên được giới hạn các đồ thị $y = x^2 - 2x - 2$ và $y = -x^2 + 2$.	X	

Mệnh đề	Đ	S
d) Diện tích hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ là $S = 9$.	X	

Lời giải.

a) **Đúng.** Hình phẳng được gạch chéo trong hình trên được giới hạn các đồ thị $y = x^2 - 2x - 2$, $y = -x^2 + 2$ và hai đường thẳng $x = -1$, $x = 2$.

b) **Sai.**

$$\text{Vì } \int_{-1}^2 |x^2 - 2x - 2| dx + \int_{-1}^2 |-x^2 + 2| dx \geq \int_{-1}^2 |(x^2 - 2x - 2) - (-x^2 + 2)| dx = S$$

c) **Đúng.** Phương trình hoành độ giao điểm

$$x^2 - 2x - 2 = -x^2 + 2 \Leftrightarrow 2x^2 - 2x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \text{ hoặc } x = 2.$$

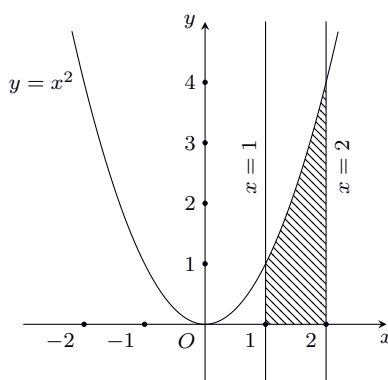
$$\text{Suy ra } S = \int_{-1}^2 |2x^2 - 2x - 4| dx.$$

d) **Đúng.** Vì $2x^2 - 2x - 4 < 0, \forall x \in (-1; 2)$.

$$S = \int_{-1}^2 |2x^2 - 2x - 4| dx = \int_{-1}^2 (-2x^2 + 2x + 4) dx = \left(\frac{2x^3}{3} + x^2 + 4x \right) \Big|_{-1}^2 = 9.$$

Chọn đáp án ☐ a đúng ☐ b sai ☐ c đúng ☐ d đúng

CÂU 28. Cho hình phẳng được gạch chéo trong hình bên dưới.



Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

Mệnh đề	Đ	S
a) Hình phẳng được gạch chéo trong hình trên được giới hạn các đồ thị $y = x^2$, $y = 0$ và hai đường thẳng $x = 1$, $x = 2$.	X	
b) Diện tích hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ là $S = \int_1^2 x^2 dx$.	X	
c) Diện tích hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ là $S = \frac{4}{3}$.		X
d) Hình phẳng được gạch chéo trong hình trên được giới hạn đồ thị $y = x^2$ và hai đường thẳng $x = 1$, $x = 2$.		X

Lời giải.

a) **Đúng.** Hình phẳng được gạch chéo trong hình trên được giới hạn các đồ thị $y = x^2$, $y = 0$ và hai đường thẳng $x = 1$, $x = 2$.

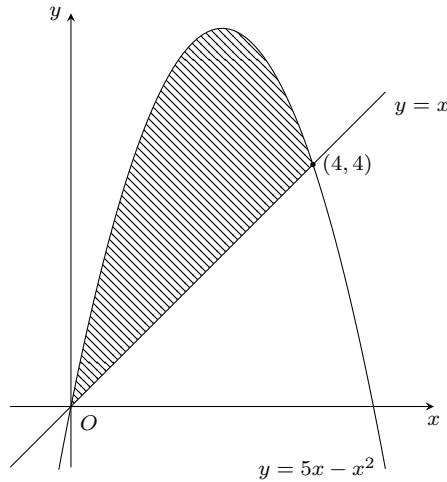
b) **Đúng.** Vì $S = \int_1^2 |x^2| dx = \int_1^2 x^2 dx$.

c) **Sai.** Vì $S = \int_1^2 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_1^2 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$.

d) **Sai**. Vì hình phẳng được giới hạn đồ thị $y = x^2$ và hai đường thẳng $x = 1, x = 2$ không xác định được diện tích.

Chọn đáp án a đúng b đúng c sai d sai □

CÂU 29. Cho hình phẳng được gạch chéo trong hình bên dưới.



Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

Mệnh đề	Đ	S
a) Hình phẳng được gạch chéo trong hình trên được giới hạn các đồ thị $y = 5x - x^2, y = x$ và các đường thẳng $x = 0, x = 4$.	X	
b) Diện tích hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ là $S = \int_0^4 (x^2 - 4x) dx$.		X
c) Diện tích hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ là $S = \int_0^4 x^2 - 4x dx$.	X	
d) Diện tích hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ $S = \frac{56}{3}$.		X

Lời giải.

a) **Đúng**. Hình phẳng được gạch chéo trong hình trên được giới hạn các đồ thị $y = 5x - x^2, y = x$ và các đường thẳng $x = 0, x = 4$.

b) **Sai** Phương trình hoành độ giao điểm
 $x = 5x - x^2 \Leftrightarrow x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = 4$.

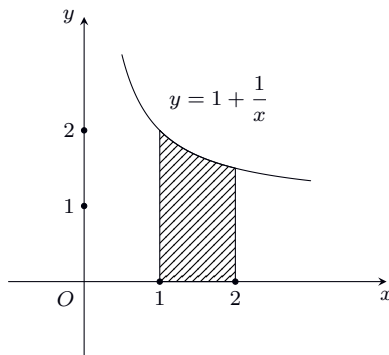
$$\text{Vì } x^2 - 4x < 0, \forall x \in (0; 4). \text{ Do đó } S = \int_0^4 |x^2 - 4x| dx = \int_0^4 (-x^2 + 4x) dx.$$

c) **Đúng**. Vì $S = \int_0^4 |x^2 - 4x| dx$.

d) **Sai**. Vì $S = \int_0^4 |x^2 - 4x| dx = \int_0^4 (-x^2 + 4x) dx = \left(-\frac{x^3}{3} + 2x^2 \right) \Big|_0^4 = \frac{32}{3}$.

Chọn đáp án a đúng b sai c đúng d sai □

CÂU 30. Cho hình phẳng được gạch chéo trong hình bên dưới.



Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

Mệnh đề	Đ	S
a) Hình phẳng được gạch chéo trong hình trên được giới hạn đồ thị $y = 1 + \frac{1}{x}$ và các đường thẳng $x = 1$, $x = 2$.		X
b) Diện tích hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ là $S = \int_1^2 \left(1 + \frac{1}{x}\right) dx$.	X	
c) Diện tích hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ là $S = 2$.		X
d) Diện tích hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ là $S = 1 + \int_1^2 \frac{1}{x} dx$.	X	

Lời giải.

a) **Sai.** Hình phẳng giới hạn đồ thị $y = 1 + \frac{1}{x}$ và các đường thẳng $x = 1$, $x = 2$ không xác định được diện tích.

b) **Đúng.** Vì $1 + \frac{1}{x} > 0, \forall x \in (1; 2)$ nên $\left|1 + \frac{1}{x}\right| = 1 + \frac{1}{x}, \forall x \in (1; 2)$.

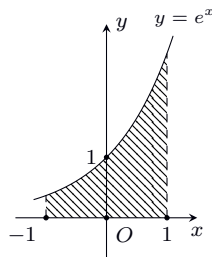
$$\text{Do đó } S = \int_1^2 \left|1 + \frac{1}{x}\right| dx = \int_1^2 \left(1 + \frac{1}{x}\right) dx.$$

c) **Sai.** Vì $S = \int_1^2 \left(1 + \frac{1}{x}\right) dx = (x + \ln|x|) \Big|_1^2 = 1 + \ln 2$.

d) **Đúng.** Vì $S = \int_1^2 \left(1 + \frac{1}{x}\right) dx = 1 + \int_1^2 \frac{1}{x} dx = 1 + \ln 2$.

Chọn đáp án a sai b đúng c sai d đúng ☐

CÂU 31. Cho hình phẳng được tô màu trong hình bên dưới



Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

Mệnh đề	Đ	S
a) Hình phẳng được tô màu trong hình vẽ trên được giới hạn bởi các đồ thị $y = e^x$; $y = 0$; $x = 0$; $x = 1$.		X

Mệnh đề	Đ	S
b) Diện tích hình phẳng tô màu trong hình vẽ là $\int_{-1}^1 e^x dx$.	X	
c) Diện tích hình phẳng tô màu trong hình vẽ là $\int_0^1 e^x dx$.		X
d) Hình phẳng được tô màu trong hình vẽ trên được giới hạn bởi các đồ thị $y = e^x$; $y = 0$; $x = -1$; $x = 1$.	X	

Lời giải.

a) Sai. Vì hình phẳng được tô màu trong hình vẽ trên được giới hạn bởi các đồ thị $y = e^x$; $y = 0$; $x = -1$; $x = 1$.

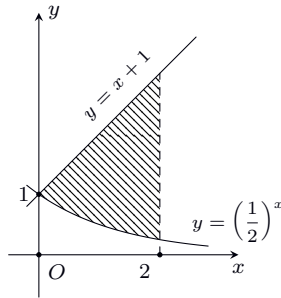
b) Đúng. Ta có $S = \int_{-1}^1 e^x dx$.

c) Sai.

d) Đúng.

Chọn đáp án a sai b đúng c sai d đúng ☐

CÂU 32. Cho hình phẳng được tô màu trong hình bên dưới.



Các mệnh đề sau đúng hay sai?

Mệnh đề	Đ	S
a) Hình phẳng được tô màu trong hình vẽ trên được giới hạn bởi các đồ thị $y = x + 1$; $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$; $x = 0$; $x = 2$.	X	
b) Diện tích hình phẳng tô màu trong hình vẽ là $\int_0^2 \left[\left(\frac{1}{2}\right)^x - x - 1 \right] dx$.		X
c) Diện tích hình phẳng tô màu trong hình vẽ bằng $S = 4 - \frac{3}{4 \ln 2}$.	X	
d) Hình phẳng được tô màu trong hình vẽ trên được giới hạn bởi các đồ thị $y = x + 1$; $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$; $x = 1$; $x = 2$.		X

Lời giải.

a) Đúng. Vì hình phẳng được tô màu trong hình vẽ trên được giới hạn bởi các đồ thị $y = x + 1$; $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$; $x = 0$; $x = 2$.

b) Sai. Trên đoạn $[0; 2]$, đồ thị hàm số $y = x + 1$ nằm trên đồ thị hàm số $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ nên với mọi $x \in [0; 2]$ ta có $x + 1 \geq \left(\frac{1}{2}\right)^x \Rightarrow \left| \left(\frac{1}{2}\right)^x - (x + 1) \right| = x + 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

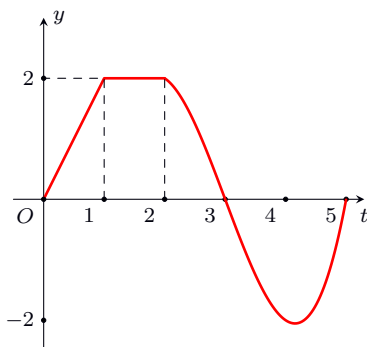
Vậy diện tích hình phẳng tô màu là $\int_0^2 \left[x + 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^x \right] dx$.

c) Đúng. Ta có $S = \int_0^2 \left[x + 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^x \right] dx = \left(\frac{x^2}{2} + x + \frac{2^{-x}}{\ln 2} \right) \Big|_0^2 = 4 + \frac{1}{4 \ln 2} - \frac{1}{\ln 2} = 4 - \frac{3}{4 \ln 2}$.

d) Sai.

Chọn đáp án ☐ a đúng ☐ b sai ☐ c đúng ☐ d sai

CÂU 33. Cho đồ thị hàm số $y = f(t)$ như hình vẽ.



Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

Mệnh đề	Đ	S
a) Diện tích hình phẳng được giới hạn các đồ thị hàm số $y = f(t)$, trục Ot và hai đường thẳng $t = 0$; $t = 1$ là $S = \frac{1}{2} \int_0^1 t dt = \frac{1}{4}$.	X	
b) Diện tích hình phẳng được giới hạn các đồ thị hàm số $y = f(t)$, trục Ot và hai đường thẳng $t = 1$; $t = 2$ là $S = \int_1^2 2 dt = 2$.	X	
c) Tích phân $\int_2^3 f(x) dx$ biểu thị cho phần diện tích của hình phẳng giới hạn các đồ thị hàm số $y = f(t)$, trục Ot và hai đường thẳng $t = 2$; $t = 3$.	X	
d) Tích phân $\int_3^5 f(x) dx$ biểu thị cho phần diện tích của hình phẳng giới hạn các đồ thị hàm số $y = f(t)$, trục Ot và hai đường thẳng $t = 3$; $t = 5$.		X

Lời giải.

a) Đúng. Vì đồ thị hàm số $y = f(t)$ trên đoạn $[0; 1]$ là $y = \frac{1}{2}t$. Do đó diện tích hình phẳng được giới hạn các đồ thị hàm

$$\text{số } y = f(t), \text{ trục } Ot \text{ và hai đường thẳng } t = 0; t = 1 \text{ là } S = \frac{1}{2} \int_0^1 t dt = \frac{1}{4}.$$

b) Đúng. Vì trên đoạn $[1; 2]$ đồ thị hàm số $y = f(t) = 2$ nên hình phẳng được giới hạn bởi các đồ thị hàm số $y = f(t)$,

$$\text{trục } Ot \text{ và hai đường thẳng } t = 1; t = 2 \text{ có diện tích là } S = \int_1^2 2 dt = 2.$$

c) Đúng. Tích phân $\int_2^3 f(x) dx = \int_2^3 f(t) dt$ nên giá trị của tích phân $\int_2^3 f(t) dt$ là diện tích của hình phẳng giới hạn các đồ thị hàm số $y = f(t)$, trục Ot và hai đường thẳng $t = 2$; $t = 3$.

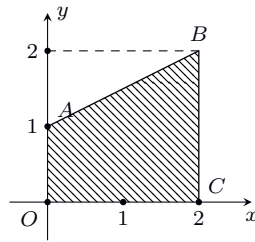
d) Sai. Tích phân $\int_3^5 f(x) dx = \int_3^5 f(t) dt$.

Diện tích hình phẳng được giới hạn các đồ thị hàm số $y = f(t)$, trục Ot và hai đường thẳng $t = 3$; $t = 5$ là

$$S = \int_3^5 |f(t)| dt.$$

Chọn đáp án a đúng b đúng c đúng d sai □

CÂU 34. Tính diện tích hình phẳng được tô màu trong hình bên dưới.



Đáp án: 3

Lời giải.

Cách 1: Hình phẳng đã cho là hình thang vuông $AOCB$, vuông tại A, O . Ta có

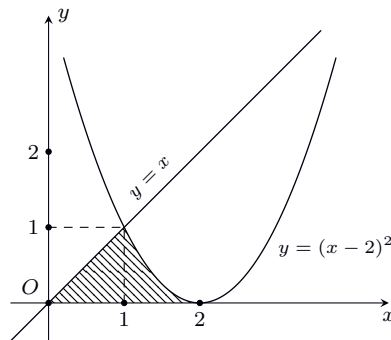
$$S = \frac{(AO + BC) \cdot OC}{2} = 3.$$

Cách 2: Đường thẳng AB đi qua hai điểm $A(0; 1)$ và $B(2; 2)$ nên đường thẳng AB có phương trình là $y = \frac{1}{2}x + 1$.

Hình phẳng đã cho giới hạn bởi đường thẳng $y = \frac{1}{2}x + 1$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$ nên diện tích của hình phẳng là $S =$

$$\int_0^2 \left| \frac{1}{2}x + 1 \right| dx = 3.$$

CÂU 35. Biết diện tích phần hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ bên có diện tích là $\frac{a}{b}$ với $a, b \in \mathbb{Z}$ và phân số $\frac{a}{b}$ tối giản. Tính tổng $a + b$.



Đáp án: 11

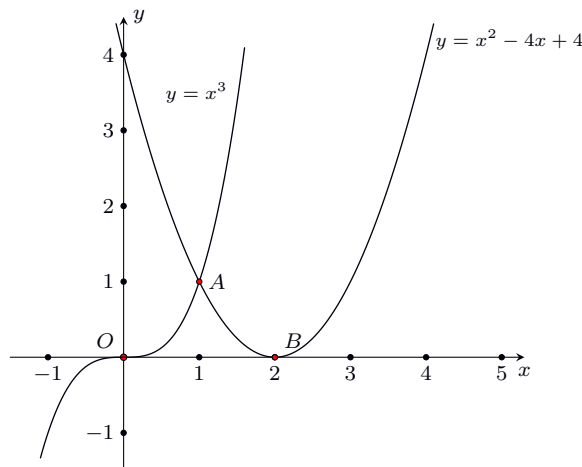
Lời giải.

Dựa vào đồ thị, diện tích hình phẳng cần tìm là

$$S = \int_0^1 x dx + \int_1^2 (x - 2)^2 dx = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}.$$

Vậy $a = 5$; $b = 6$ và $a + b = 11$.

CÂU 36. Biết diện tích phần tam giác cong OAB trong hình vẽ bên có diện tích là $\frac{a}{b}$ với $a, b \in \mathbb{Z}$ và phân số $\frac{a}{b}$ tối giản. Tính hiệu $b - a$.



Đáp án: 5

Lời giải.

Dựa vào hình vẽ ta thấy hình phẳng cần tính diện tích gồm 2 phần.

Phần 1: Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^3$, trục Ox , $x = 0$, $x = 1$.

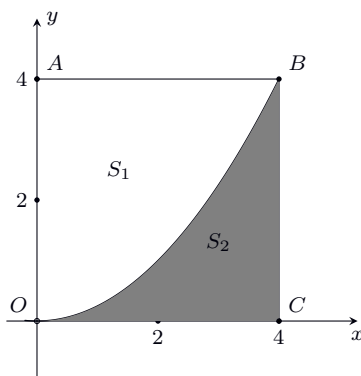
Phần 2: Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^2 - 4x + 4$, trục Ox , $x = 1$, $x = 2$.

Do đó diện tích cần tính là

$$S = \int_0^1 |x^3| dx + \int_1^2 |x^2 - 4x + 4| dx = \int_0^1 x^3 dx + \int_1^2 (x^2 - 4x + 4) dx = \frac{7}{12}.$$

Vậy $a = 7$, $b = 12$ và $b - a = 5$.

CÂU 37. Hình vuông $OABC$ có cạnh bằng 4 được chia thành hai phần bởi đường cong (C) có phương trình $y = \frac{1}{4}x^2$. Gọi S_1, S_2 lần lượt là diện tích của phần không tô màu và phần tô màu như hình vẽ bên dưới. Tỉ số $\frac{S_1}{S_2}$ bằng bao nhiêu?



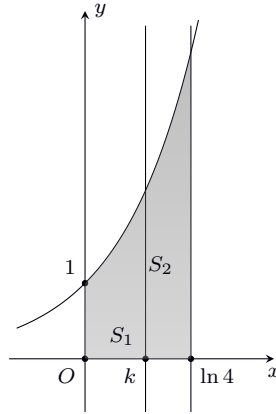
Đáp án: 2

Lời giải.

Ta có diện tích hình vuông $OABC$ là 16 và bằng $S_1 + S_2$.

$$\text{Ta có } S_2 = \int_0^4 \frac{1}{4}x^2 dx = \frac{x^3}{12} \Big|_0^4 = \frac{16}{3} \Rightarrow \frac{S_1}{S_2} = \frac{16 - S_2}{S_2} = \frac{16 - \frac{16}{3}}{\frac{16}{3}} = 2.$$

CÂU 38. Cho hình thang cong (H) giới hạn bởi các đường $y = e^x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = \ln 4$. Đường thẳng $x = k$, $(0 < k < \ln 4)$ chia (H) thành hai phần có diện tích là S_1 và S_2 như hình vẽ bên. Tìm k để $S_1 = 2S_2$ (làm tròn kết quả đến hàng phần chục).



Đáp án: 1, 1

Lời giải.

Diện tích hình thang cong (H) giới hạn bởi các đường $y = e^x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = \ln 4$ là

$$S = \int_0^{\ln 4} e^x dx = e^x \Big|_0^{\ln 4} = e^{\ln 4} - e^0 = 4 - 1 = 3.$$

Ta có $S = S_1 + S_2 = S_1 + \frac{1}{2}S_1 = \frac{3}{2}S_1$. Suy ra $S_1 = \frac{2S}{3} = \frac{2 \cdot 3}{3} = 2$.

Vì S_1 là phần diện tích được giới hạn bởi các đường $y = e^x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = k$ nên

$$2 = S_1 = \int_0^k e^x dx = e^x \Big|_0^k = e^k - e^0 = e^k - 1.$$

Do đó $e^k = 3 \Leftrightarrow k = \ln 3 \approx 1,1$.

12

THỂ TÍCH KHỐI TRÒN XOAY

CÂU 1. Viết công thức tính thể tích V của khối tròn xoay được tạo ra khi quay hình thang cong, giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục Ox và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$, ($a < b$) xung quanh trục Ox .

- (A) $V = \int_a^b |f(x)| dx$. (B) $V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$. (C) $V = \int_a^b f^2(x) dx$. (D) $V = \pi \int_a^b f(x) dx$.

Lời giải.

Theo lý thuyết.

Chọn đáp án (B) □

CÂU 2. Cắt một vật thể bởi hai mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại $x = 1$ và $x = 2$. Một mặt phẳng tùy ý vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x , ($1 \leq x \leq 2$) cắt vật thể đó có diện tích $S(x) = 2024x$. Tính thể tích của phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng trên.

- (A) $V = 3036$. (B) $V = 3036\pi$. (C) $V = 1518$. (D) $V = 1518\pi$.

Lời giải.

Thể tích vật thể là $V = \int_1^2 2024x dx = 3036$.

Chọn đáp án (A) □

CÂU 3. Cắt một vật thể bởi hai mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại $x = 1$ và $x = 3$. Một mặt phẳng tùy ý vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x , ($1 \leq x \leq 3$) cắt vật thể đó theo thiết diện là một hình chữ nhật có độ dài hai cạnh là $3x$ và $3x^2 - 2$. Tính thể tích của phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng trên.

- (A) $V = 156$. (B) $V = 156\pi$. (C) $V = 312$. (D) $V = 312\pi$.

Lời giải.

Diện tích thiết diện là $S(x) = 3x \cdot (3x^2 - 2) = 9x^3 - 6x$.

Thể tích vật thể là $V = \int_1^3 (9x^3 - 6x) dx = 156$.

Chọn đáp án (A) □

CÂU 4. Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = e^{3x}$, $y = 0$, $x = 0$ và $x = 1$. Thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục Ox bằng

- (A) $\pi \int_0^1 e^{3x} dx$. (B) $\int_0^1 e^{6x} dx$. (C) $\pi \int_0^1 e^{6x} dx$. (D) $\int_0^1 e^{3x} dx$.

Lời giải.

Thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục Ox là

$$\pi \int_0^1 (e^{3x})^2 dx = \pi \int_0^1 e^{6x} dx.$$

Chọn đáp án (C).

CÂU 5. Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = e^{4x}$, $y = 0$, $x = 0$ và $x = 1$. Thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục Ox bằng

- (A) $\int_0^1 e^{4x} dx$. (B) $\pi \int_0^1 e^{8x} dx$. (C) $\pi \int_0^1 e^{4x} dx$. (D) $\int_0^1 e^{8x} dx$.

Lời giải.

Thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục Ox là

$$V = \pi \int_0^1 (e^{4x})^2 dx = \pi \int_0^1 e^{8x} dx.$$

Chọn đáp án (B).

CÂU 6. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = x^2 + 3$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$. Gọi V là thể tích của khối tròn xoay được tạo thành khi quay (H) xung quanh trục Ox . Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- (A) $V = \int_0^2 (x^2 + 3) dx$. (B) $V = \pi \int_0^2 (x^2 + 3) dx$. (C) $V = \int_0^2 (x^2 + 3)^2 dx$. (D) $V = \pi \int_0^2 (x^2 + 3)^2 dx$.

Lời giải.

Thể tích của khối tròn xoay được tạo thành khi quay (H) xung quanh trục Ox là

$$V = \pi \int_0^2 (x^2 + 3)^2 dx.$$

Chọn đáp án (D).

CÂU 7. Cho hình phẳng D giới hạn bởi đường cong $y = e^x$, trục hoành và các đường thẳng $x = 0$, $x = 1$. Khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành có thể tích V bằng bao nhiêu?

- (A) $V = \frac{\pi(e^2 + 1)}{2}$. (B) $V = \frac{e^2 - 1}{2}$. (C) $V = \frac{\pi e^2}{3}$. (D) $V = \frac{\pi(e^2 - 1)}{2}$.

Lời giải.

$$V = \pi \int_0^1 e^{2x} dx = \pi \frac{e^{2x}}{2} \Big|_0^1 = \frac{\pi(e^2 - 1)}{2}.$$

Chọn đáp án (D).

CÂU 8. Cho hình phẳng D giới hạn bởi đường cong $y = \sqrt{x^2 + 1}$, trục hoành và các đường thẳng $x = 0$, $x = 1$. Khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành có thể tích V bằng bao nhiêu?

- (A) $V = 2$. (B) $V = \frac{4\pi}{3}$. (C) $V = 2\pi$. (D) $V = \frac{4}{3}$.

Lời giải.

Thể tích khối tròn xoay được tính theo công thức

$$V = \pi \int_0^1 (\sqrt{x^2 + 1})^2 dx = \pi \int_0^1 (x^2 + 1) dx = \pi \left(\frac{x^3}{3} + x \right) \Big|_0^1 = \frac{4\pi}{3}.$$

Chọn đáp án (B).

CÂU 9. Cho hình phẳng D giới hạn bởi đường cong $y = \sqrt{2 + \cos x}$, trục hoành và các đường thẳng $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$. Khối tròn xoay tạo thành khi D quay quanh trục hoành có thể tích V bằng bao nhiêu?

- ☒ A $V = (\pi + 1)\pi$.
 ☐ B $V = \pi - 1$.
 ☐ C $V = \pi + 1$.
 ☐ D $V = (\pi - 1)\pi$.

Lời giải.

Ta có

$$V = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sqrt{2 + \cos x})^2 dx = \pi (2x + \sin x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi(\pi + 1).$$

Chọn đáp án ☒ A. □

CÂU 10. Cho hình phẳng D giới hạn bởi đường cong $y = \sqrt{2 + \sin x}$, trục hoành và các đường thẳng $x = 0$, $x = \pi$. Khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành có thể tích V bằng bao nhiêu?

- ☒ A $V = 2\pi(\pi + 1)$.
 ☐ B $V = 2\pi$.
 ☐ C $V = 2(\pi + 1)$.
 ☐ D $V = 2\pi^2$.

Lời giải.

$$Ta\ có\ V = \pi \int_0^{\pi} (\sqrt{2 + \sin x})^2 dx = \pi \int_0^{\pi} (2 + \sin x) dx = \pi (2x - \cos x) \Big|_0^{\pi} = 2\pi(\pi + 1).$$

Chọn đáp án ☒ A. □

CÂU 11. Tìm công thức tính thể tích của khối tròn xoay khi cho hình phẳng giới hạn bởi parabol $(P): y = x^2$, đường thẳng $d: y = 2x$ và đường thẳng $x = 0$, $x = 2$ quay xung quanh trục Ox .

- ☒ A $\pi \int_0^2 (x^2 - 2x)^2 dx$.
 ☐ B $\pi \int_0^2 4x^2 dx - \pi \int_0^2 x^4 dx$.
 ☐ C $\pi \int_0^2 4x^2 dx + \pi \int_0^2 x^4 dx$.
 ☐ D $\pi \int_0^2 (2x - x^2) dx$.

Lời giải.

$$Với\ mọi\ x \in [0; 2] ta\ có\ 2x \geq 0, x^2 \geq 0\ và\ 2x \geq x^2\ nên\ V = \pi \int_0^2 4x^2 dx - \pi \int_0^2 x^4 dx.$$

Chọn đáp án ☒ B. □

CÂU 12. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = x^2 + 3$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$. Gọi V là thể tích khối tròn xoay được tạo thành khi quay (H) xung quanh trục Ox . Mệnh đề nào sau đây đúng?

- ☒ A $V = \pi \int_0^2 (x^2 + 3)^2 dx$.
 ☐ B $V = \int_0^2 (x^2 + 3) dx$.
 ☐ C $V = \int_0^2 (x^2 + 3)^2 dx$.
 ☐ D $V = \pi \int_0^2 (x^2 + 3) dx$.

Lời giải.

$$Thể\ tích\ của\ vật\ tròn\ xoay\ là\ V = \pi \int_0^2 (x^2 + 3)^2 dx.$$

Chọn đáp án ☒ A. □

CÂU 13. Gọi V là thể tích của khối tròn xoay thu được khi quay hình thang cong, giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \sin x$, trục Ox , trục Oy và đường thẳng $x = \frac{\pi}{2}$, xung quanh trục Ox . Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- ☒ A $V = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx$.
 ☐ B $V = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$.
 ☐ C $V = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx$.
 ☐ D $V = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$.

Lời giải.

$$Công\ thức\ tính\ V = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$

Chọn đáp án ☒ C. □

CÂU 14. Thể tích khối tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y = x^2 - 2x$, trục hoành, đường thẳng $x = 0$ và $x = 1$ quanh trục hoành bằng

- ☒ A $\frac{16\pi}{15}$.
 ☐ B $\frac{2\pi}{3}$.
 ☐ C $\frac{4\pi}{3}$.
 ☐ D $\frac{8\pi}{15}$.

Lời giải.

Ta có

$$V = \pi \int_0^1 (x^2 - 2x)^2 dx$$

$$\begin{aligned}
 &= \pi \int_0^1 (x^4 - 4x^3 + 4x^2) dx \\
 &= \pi \cdot \left(\frac{x^5}{5} - x^4 + \frac{4x^3}{3} \right) \Big|_0^1 \\
 &= \pi \cdot \left(\frac{1}{5} - 1 + \frac{4}{3} \right) = \frac{8\pi}{15}.
 \end{aligned}$$

Chọn đáp án (D) □

CÂU 15. Cho miền phẳng (D) giới hạn bởi $y = \sqrt{x}$, hai đường thẳng $x = 1$, $x = 2$ và trục hoành. Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay (D) quanh trục hoành.

(A) 3π .

(B) $\frac{3\pi}{2}$.

(C) $\frac{2\pi}{3}$.

(D) $\frac{3}{2}$.

Lời giải.

$$V = \pi \int_1^2 x dx = \frac{\pi x^2}{2} \Big|_1^2 = \frac{3\pi}{2}.$$

Chọn đáp án (B) □

CÂU 16. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = 2x - x^2$, $y = 0$. Quay (H) quanh trục hoành tạo thành khối tròn xoay có thể tích là

(A) $\int_0^2 (2x - x^2) dx$.

(B) $\pi \int_0^2 (2x - x^2)^2 dx$.

(C) $\int_0^2 (2x - x^2)^2 dx$.

(D) $\pi \int_0^2 (2x - x^2) dx$.

Lời giải.

Theo công thức ta chọn $V = \pi \int_0^2 (2x - x^2)^2 dx$.

Chọn đáp án (B) □

CÂU 17. Cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{x} - 2$, $y = 0$ và $x = 4$, $x = 9$ quay xung quanh trục Ox . Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành.

(A) $V = \frac{7}{6}$.

(B) $V = \frac{5\pi}{6}$.

(C) $V = \frac{7\pi}{11}$.

(D) $V = \frac{11\pi}{6}$.

Lời giải.

Thể tích của khối tròn xoay tạo thành là

$$\begin{aligned}
 V &= \pi \int_4^9 (\sqrt{x} - 2)^2 dx \\
 &= \pi \int_4^9 (x - 4\sqrt{x} + 4) dx \\
 &= \pi \cdot \left(\frac{x^2}{2} - \frac{8x\sqrt{x}}{3} + 4x \right) \Big|_4^9 \\
 &= \pi \left(\frac{81}{2} - 72 + 36 \right) - \pi \left(\frac{16}{2} - \frac{64}{3} + 16 \right) = \frac{11\pi}{6}.
 \end{aligned}$$

Chọn đáp án (D) □

CÂU 18. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường thẳng $y = x^2 + 2$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 2$. Gọi V là thể tích của khối tròn xoay được tạo thành khi quay (H) xung quanh trục Ox . Mệnh đề nào dưới đây đúng?

(A) $V = \int_1^2 (x^2 + 2) dx$.

(B) $V = \pi \int_1^2 (x^2 + 2)^2 dx$.

(C) $V = \int_1^2 (x^2 + 2)^2 dx$.

(D) $V = \pi \int_1^2 (x^2 + 2) dx$.

Lời giải.

Ta có $V = \pi \int_1^2 (x^2 + 2)^2 dx$.

Chọn đáp án (B) □

CÂU 19. Cắt một vật thể (T) bởi hai mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại $x = 0$ và $x = 2$. Một mặt phẳng tùy ý vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x ($0 \leq x \leq 2$) cắt vật thể đó có theo một thiết diện là một hình vuông có cạnh bằng $\sqrt{x^3}$. Thể tích vật thể (T) là số hữu tỉ có dạng phân số tối giản $\frac{a}{b}$. Tính $a + b$.

Đáp án: 135

Lời giải.

Diện tích thiết diện là $S(x) = \sqrt{x^3} \cdot \sqrt{x^3} = x^6$.

Thể tích của vật thể (T) là $V = \int_0^2 S(x) dx = \int_0^2 x^6 dx = \frac{128}{7}$.

Suy ra $a = 128$ và $b = 7$. Khi đó, $a + b = 135$.

CÂU 20. Cắt một vật thể bởi hai mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại $x = 1$; $x = 3$. Khi cắt một vật thể bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x ($1 \leq x \leq 3$), mặt cắt là tam giác vuông có một góc 45° và độ dài một cạnh góc vuông là $\sqrt{4 - \frac{1}{2}x^2}$. Thể tích vật thể trên là một số hữu tỉ có dạng phân số tối giản $\frac{a}{b}$. Tính $a \cdot b$.

Đáp án: 66

Lời giải.

Diện tích tam giác vuông cân là $S(x) = \frac{1}{2} \sqrt{4 - \frac{1}{2}x^2} \cdot \sqrt{4 - \frac{1}{2}x^2} = \frac{1}{2} \left(4 - \frac{1}{2}x^2\right)$.

Vậy thể tích vật thể là

$$V = \int_1^3 \frac{1}{2} \left(4 - \frac{1}{2}x^2\right) dx = \frac{11}{6}.$$

Suy ra $a = 11$; $b = 6$. Khi đó $a \cdot b = 66$.

CÂU 21. Tính thể tích khối tròn xoay khi quay hình phẳng (H) xác định bởi các đường $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2$, $y = 0$, $x = 0$ và $x = 3$ quanh trục Ox (kết quả viết dưới dạng số thập phân và làm tròn đến hàng phần trăm).

Đáp án: 7,27

Lời giải.

Thể tích khối tròn xoay sinh ra khi quay hình phẳng (H) quanh trục Ox là

$$V = \pi \int_0^3 \left(\frac{1}{3}x^3 - x^2\right)^2 dx = \pi \int_0^3 \left(\frac{1}{9}x^6 - \frac{2}{3}x^5 + x^4\right) dx = \frac{81\pi}{35} \approx 7,27.$$

CÂU 22. Tính thể tích của vật thể tạo nên khi quay quanh trục Ox hình phẳng D giới hạn bởi đồ thị (P): $y = 2x - x^2$, trục Ox và hai đường thẳng $x = 0$, $x = 2$ (Kết quả viết dưới dạng số thập phân và làm tròn đến hàng phần trăm).

Đáp án: 3,35

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^2 (2x - x^2)^2 dx \\ &= \pi \int_0^2 (4x^2 - 4x^3 + x^4) dx \\ &= \pi \left(\frac{4}{3}x^3 - x^4 + \frac{1}{5}x^5 \right) \Bigg|_0^2 \\ &= \frac{16}{15}\pi \approx 3,35. \end{aligned}$$

CÂU 23. Cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \tan x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = \frac{\pi}{4}$ quay xung quanh trục Ox . Tính thể tích vật thể tròn xoay được sinh ra (kết quả viết dưới dạng số thập phân và làm tròn một chữ số thập phân sau dấu phẩy).

Đáp án: 0,8

Lời giải.

Thể tích vật thể tròn xoay được sinh ra là

$$V = \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x \, dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx = \pi (\tan x - x) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{4\pi - \pi^2}{4} \approx 0,8.$$

CÂU 24. Gọi V là thể tích khối tròn xoay tạo thành do quay xung quanh trục hoành một elip có phương trình $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$. Tính V (Kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).

Đáp án: 335

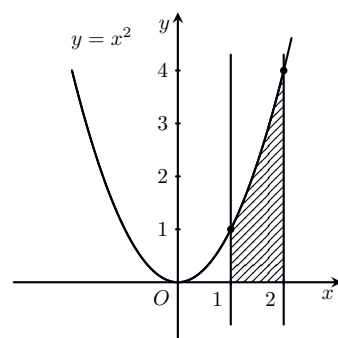
Lời giải.

Quay elip đã cho xung quanh trục hoành chính là quay hình phẳng H giới hạn bởi $y = 4\sqrt{1 - \frac{x^2}{25}}$, $y = 0$, $x = -5$, $x = 5$. Vậy thể tích khối tròn xoay sinh ra bởi H khi quay xung quanh trục hoành là

$$V = \pi \int_{-5}^5 \left(16 - \frac{16x^2}{25} \right) dx = \pi \left(16x - \frac{16x^3}{75} \right) \Big|_{-5}^5 = \frac{320\pi}{3} \approx 335.$$

CÂU 25.

Cho hình phẳng (H) được gạch chéo trong hình bên. Tính thể hình tròn xoay sinh ra bởi (H) khi quay (H) quanh trục Ox (Kết quả viết dưới dạng số thập phân và làm tròn đến hàng phần chục).



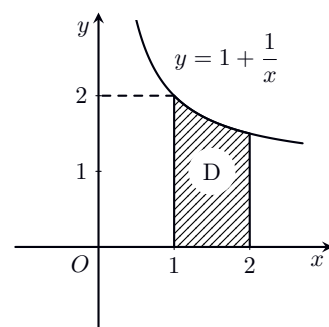
Đáp án: 19,5

Lời giải.

$$\text{Ta có } V = \pi \int_1^2 (x^2)^2 dx = \pi \frac{x^5}{5} \Big|_1^2 = \frac{31\pi}{5} \approx 19,5.$$

CÂU 26.

Cho hình phẳng (D) được tô màu trong hình bên. Tính thể hình tròn xoay sinh ra bởi (D) khi quay (D) quanh trục Ox (Kết quả viết dưới dạng số thập phân và làm tròn đến hàng phần trăm).



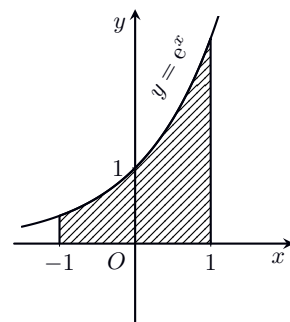
Đáp án: 9,08

Lời giải.

$$\text{Ta có } V = \pi \int_1^2 \left(1 + \frac{1}{x} \right)^2 dx = \pi \int_1^2 \left(1 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} \right) dx = \pi \left(x + 2 \ln x - \frac{1}{x} \right) \Big|_1^2 \approx 9,08.$$

CÂU 27.

Cho hình phẳng (H) được tô màu trong hình bên. Tính thể hình tròn xoay sinh ra bởi (H) khi quay (H) quanh trục Ox (Kết quả viết dưới dạng số thập phân và làm tròn đến hàng phần chục).



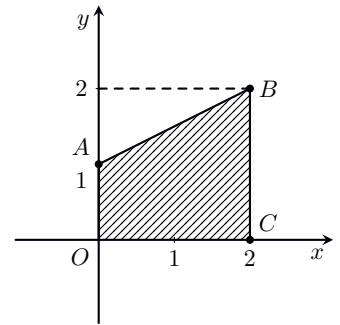
Đáp án: 11,4

Lời giải.

$$\text{Ta có } V = \pi \int_{-1}^1 (e^x)^2 dx = \pi \int_{-1}^1 (e^{2x}) dx = \frac{\pi e^{2x}}{2} \Big|_{-1}^1 \approx 11,4.$$

CÂU 28.

Cho hình phẳng (H) được tô màu trong hình bên. Tính thể hình tròn xoay sinh ra bởi (H) khi quay (H) quanh trục Ox (Kết quả viết dưới dạng số thập phân và làm tròn đến hàng phần chục).



Đáp án: 14,7

Lời giải.

Gọi đường thẳng d đi qua A và B có phương trình dạng $y = ax + b$.

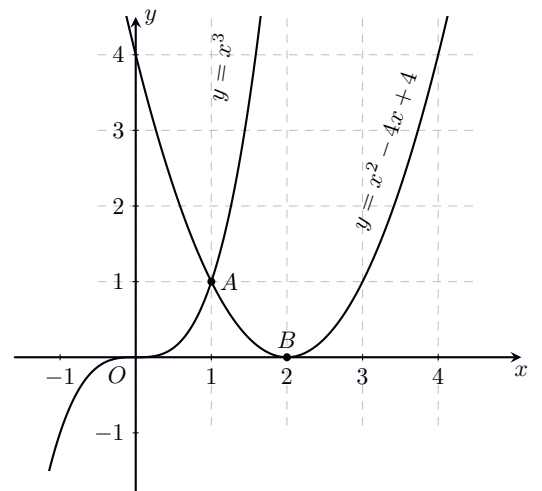
$$\text{Ta có hệ phương trình } \begin{cases} b = 1 \\ 2a + b = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = 1. \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } d: y = \frac{1}{2}x + 1.$$

$$\text{Khi đó } V = \pi \int_0^1 \left(\frac{1}{2}x + 1 \right)^2 dx \approx 14,7.$$

CÂU 29.

Cho hình phẳng (H) là tam giác cong OAB trong hình vẽ bên. Tính thể hình tròn xoay sinh ra bởi (H) khi quay (H) quanh trục Ox (Kết quả viết dưới dạng số thập phân và làm tròn đến hàng phần trăm).



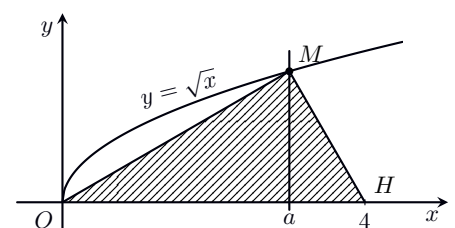
Đáp án: 1,08

Lời giải.

$$\text{Ta có } V = \pi \int_0^1 (x^3)^2 dx + \pi \int_1^2 (x^2 - 4x + 4)^2 dx \approx 1,08.$$

CÂU 30.

Gọi V là thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{x}$, $y = 0$ và $x = 4$ quanh trục Ox . Đường thẳng $x = a$, $(0 < a < 4)$ cắt đồ thị hàm số $y = \sqrt{x}$ tại M (hình vẽ). Gọi V_1 là thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay tam giác OMH quanh trục Ox . Biết rằng $V = 2V_1$. Tìm a .



Đáp án: 3

Lời giải.

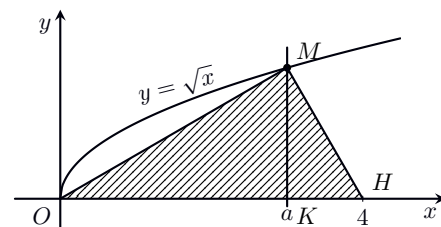
$$\text{Ta có } V = \pi \int_0^4 x \, dx = \pi \frac{x^2}{2} \Big|_0^4 = 8\pi.$$

$$\text{Mà } V = 2V_1 \Rightarrow V_1 = 4\pi.$$

Gọi K là hình chiếu của M trên Ox .

$$\text{Suy ra } OK = a, KH = 4 - a, MK = \sqrt{a}.$$

Khi xoay tam giác OMH quanh Ox ta được khối



tròn xoay là sự lắp ghép của hai khối nón sinh bởi các tam giác OMK , MHK , hai khối nón đó có cùng mặt đáy và có tổng chiều cao là $OH = 4$ nên thể tích của khối tròn xoay đó là $V_1 = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 4 \cdot (\sqrt{a})^2 = \frac{4\pi a}{3}$, từ đó suy ra $a = 3$.

13

Ứng dụng diện tích hình phẳng và thể tích khối tròn xoay trong bt thực tiễn

CÂU 1. Trường Nguyễn Văn Trỗi muốn làm một cái cửa nhà hình parabol có chiều cao từ mặt đất đến đỉnh là 2,25 mét, chiều rộng tiếp giáp với mặt đất là 3 mét. Giá thuê mỗi mét vuông là 1 500 000 đồng. Vậy số tiền nhà trường phải trả là

A 33 750 000 đồng.

B 3 750 000 đồng.

C 12 750 000 đồng.

D 6 750 000 đồng.

Lời giải.

Gọi phương trình parabol

$$(P): y = ax^2 + bx + c.$$

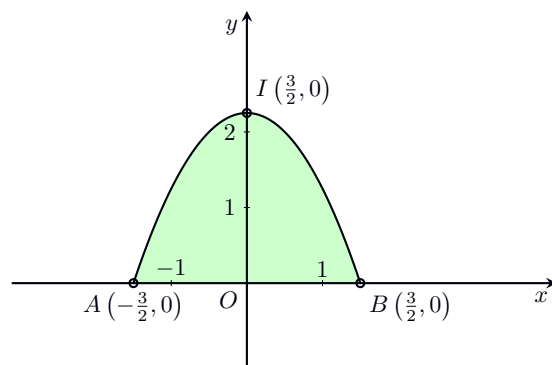
Do tính đối xứng của parabol nên ta có thể chọn hệ trục tọa độ Oxy sao cho (P) có đỉnh $I \in Oy$ (như hình vẽ).

Ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} \frac{9}{4} = c, (I \in (P)) \\ \frac{9}{4}a - \frac{3}{2}b + c = 0 (A \in (P)) \\ \frac{9}{4}a + \frac{3}{2}b + c = 0 (B \in (P)) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = \frac{9}{4} \\ a = -1 \\ b = 0. \end{cases}$$

$$\text{Vậy } (P): y = -x^2 + \frac{9}{4}.$$

Dựa vào đồ thị, diện tích của parabol là



$$S = \int_{-\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}} \left(-x^2 + \frac{9}{4}\right) dx = 2 \int_0^{\frac{3}{2}} \left(-x^2 + \frac{9}{4}\right) dx = 2 \left(\frac{-x^3}{3} + \frac{9}{4}x \right) \Big|_0^{\frac{3}{2}} = \frac{9}{2} \text{ (m}^2\text{)}.$$

Số tiền phải trả là $\frac{9}{2} \cdot 1\,500\,000 = 6\,750\,000$ (đồng).

Chọn đáp án **D**.....

CÂU 2.

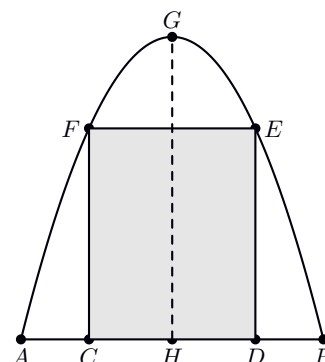
Chị Minh Hiền muốn làm một cái cổng hình Parabol như hình vẽ bên. Chiều cao $GH = 4$ m, chiều rộng $AB = 4$ m, $AC = BD = 0,9$ m. Chị Minh Hiền làm hai cánh cổng khi đóng lại là hình chữ nhật $CDEF$ tô đậm có giá là 1 200 000 đồng/m², còn các phần để trống làm xiên hoa có giá là 900 000 đồng/m². Hỏi tổng số tiền để làm hai phần nói trên gần nhất với số tiền nào dưới đây?

A 11 445 000 đồng.

B 4 077 000 đồng.

C 7 368 000 đồng.

D 11 370 000 đồng.



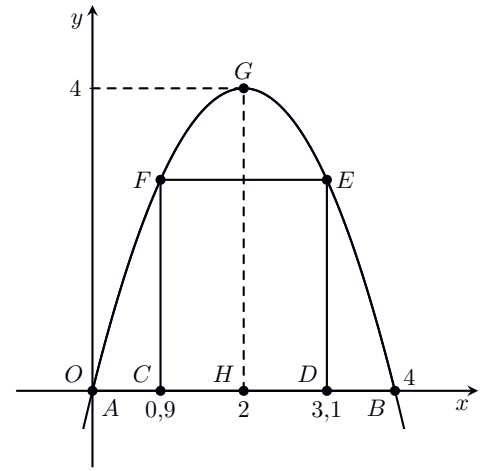
Lời giải.

Gắn hệ trục tọa độ Oxy sao cho AB trùng Ox , A trùng O khi đó parabol có đỉnh $G(2; 4)$ và đi qua gốc tọa độ.

Giả sử phương trình của parabol có dạng $y = ax^2 + bx + c$, ($a \neq 0$).

Vì parabol có đỉnh là $G(2; 4)$ và đi qua điểm $O(0; 0)$ nên ta có

$$\begin{cases} c = 0 \\ -\frac{b}{2a} = 2 \\ a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 4 \\ c = 0. \end{cases}$$



Suy ra phương trình parabol là $y = f(x) = -x^2 + 4x$.

$$\text{Diện tích của cả cổng là } S = \int_0^4 (-x^2 + 4x) dx = \left(-\frac{x^3}{3} + 2x^2 \right) \Big|_0^4 = \frac{32}{3} \text{ (m}^2\text{)}.$$

Mặt khác chiều cao $CF = DE = f(0,9) = 2,79 \text{ (m)}$; $CD = 4 - 2 \cdot 0,9 = 2,2 \text{ (m)}$.

Diện tích hai cánh cổng là $S_{CDEF} = CD \cdot CF = 6,138 \text{ (m}^2\text{)}$.

$$\text{Diện tích phần xiên hoa là } S_{xh} = S - S_{CDEF} = \frac{32}{3} - 6,14 = \frac{6793}{1500} \text{ (m}^2\text{)}.$$

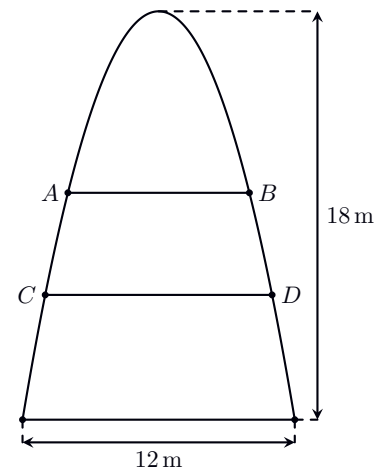
Vậy tổng số tiền để làm cổng là $6,138 \cdot 1\,200\,000 + \frac{6793}{1500} \cdot 900\,000 = 11\,441\,400 \text{ (đồng)}$.

Chọn đáp án **(A)** □

CÂU 3.

Một cổng chào có dạng hình Parabol chiều cao 18 m, chiều rộng chân đế 12 m. Người ta căng hai sợi dây trang trí AB, CD nằm ngang đồng thời chia hình giới hạn bởi Parabol và mặt đất thành ba phần có diện tích bằng nhau (xem hình vẽ bên). Tỷ số $\frac{AB}{CD}$ bằng

- (A)** $\frac{1}{\sqrt{2}}$. **(B)** $\frac{4}{5}$. **(C)** $\frac{1}{\sqrt{2}}$. **(D)** $\frac{1}{1 + 2\sqrt{2}}$.



Lời giải.

Chọn hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ. Phương trình Parabol (P) có dạng $y = ax^2$. (P) đi qua điểm có tọa độ $(-6; -18)$.

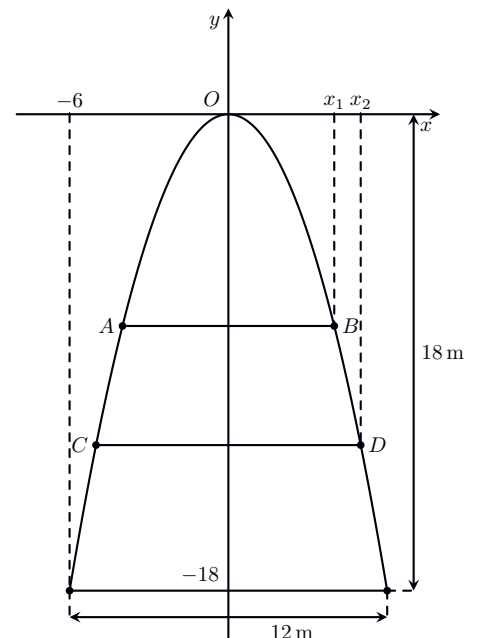
$$\text{Suy ra } -18 = a \cdot (-6)^2 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{2}.$$

$$\Rightarrow (P): y = -\frac{1}{2}x^2.$$

$$\text{Từ hình vẽ ta có } \frac{AB}{CD} = \frac{x_1}{x_2}.$$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi Parabol và đường thẳng $AB: y = -\frac{1}{2}x_1^2$ là

$$\begin{aligned} S_1 &= 2 \int_0^{x_1} \left[-\frac{1}{2}x^2 - \left(-\frac{1}{2}x_1^2 \right) \right] dx \\ &= 2 \left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}x_1^2 x \right) \Big|_0^{x_1} = \frac{2}{3}x_1^3. \end{aligned}$$



Diện tích hình phẳng giới hạn bởi Parabol và đường thẳng $CD: y = -\frac{1}{2}x_2^2$ là

$$S_2 = 2 \int_0^{x_2} \left[-\frac{1}{2}x^2 - \left(-\frac{1}{2}x_2^2 \right) \right] dx = 2 \left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}x_2^2 x \right) \Big|_0^{x_2} = \frac{2}{3}x_2^3.$$

Từ giả thiết suy ra $S_2 = 2S_1 \Leftrightarrow x_2^3 = 2x_1^3 \Leftrightarrow \frac{x_1}{x_2} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

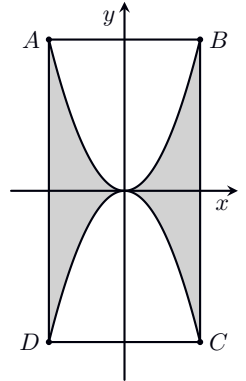
Vậy $\frac{AB}{CD} = \frac{x_1}{x_2} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}.$

Chọn đáp án (C)

CÂU 4.

Một họa tiết hình cánh bướm như hình vẽ bên. Phần tô đậm được đính đá với giá thành 500 000/m². Phần còn lại được tô màu với giá thành 250 000/m². Cho $AB = 4$ dm; $BC = 8$ dm. Hỏi để trang trí 1 000 họa tiết như vậy cần số tiền gần nhất với số nào sau đây.

- (A) 105 660 667. (B) 106 666 667. (C) 107 665 667. (D) 108 665 667.



Lời giải.

Vì $AB = 4$ dm; $BC = 8$ dm $\Rightarrow A(-2; 4), B(2; 4), C(2; -4), D(-2; -4)$.
parabol là $y = x^2$ hoặc $y = -x^2$.

Diện tích phần tô đậm là $S_1 = 4 \int_0^2 x^2 dx = \frac{32}{3} (\text{dm}^2)$.

Diện tích hình chữ nhật là $S = 4 \cdot 8 = 32 (\text{dm}^2)$.

Diện tích phần trắng là $S_2 = S - S_1 = 32 - \frac{32}{3} = \frac{64}{3} (\text{dm}^2)$.

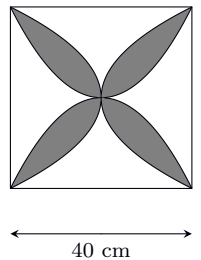
Tổng chi phí trang trí là $T = \left(\frac{32}{3} \cdot 5000 + \frac{64}{3} \cdot 2500 \right) \cdot 1000 \approx 106\,666\,667$.

Chọn đáp án (B)

CÂU 5.

Một viên gạch hoa hình vuông cạnh 40 cm. Người thiết kế đã sử dụng bốn đường parabol có chung đỉnh tại tâm viên gạch để tạo ra bốn cánh hoa (được tô đen như hình vẽ dưới). Diện tích mỗi cánh hoa của viên gạch bằng

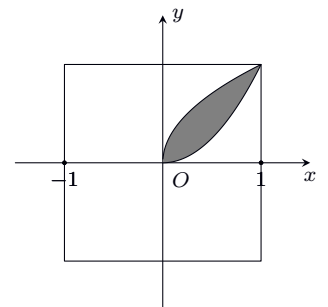
- (A) 800 cm². (B) $\frac{800}{3}$ cm². (C) $\frac{400}{3}$ cm². (D) 250 cm².



Lời giải.

Chọn hệ tọa độ như hình vẽ (1 đơn vị trên trục bằng 10 cm = 1 dm), các cánh hoa tạo bởi các đường parabol có phương trình $y = \frac{x^2}{2}, y = -\frac{x^2}{2}, x = -\frac{y^2}{2}, x = \frac{y^2}{2}$.

Diện tích một cánh hoa (nằm trong góc phần tư thứ nhất) bằng diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số $y = \frac{x^2}{2}, y = \sqrt{2x}$ và hai đường thẳng $x = 0; x = 2$.



Do đó diện tích một cánh hoa bằng

$$\int_0^2 \left(\sqrt{2x} - \frac{x^2}{2} \right) dx = \left(\frac{2\sqrt{2}}{3} \sqrt{(2x)^3} - \frac{x^3}{6} \right) \Big|_0^2 = \frac{4}{3} \text{ dm}^2 = \frac{400}{3} \text{ cm}^2.$$

Chọn đáp án (C)

CÂU 6. Để kỷ niệm ngày 26-3. Chi đoàn 12A dự định dựng một lều trại có dạng parabol, với kích thước: nền trại là một hình chữ nhật có chiều rộng là 3 mét, chiều sâu là 6 mét, đỉnh của parabol cách mặt đất là 3 mét. Hãy tính thể tích phần không gian phía bên trong trại để lớp 12A cử số lượng người tham dự trại cho phù hợp.

- (A) 30 m^3 . (B) 36 m^3 . (C) 40 m^3 . (D) 41 m^3 .

Lời giải.

Giả sử nền trại là hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 3 \text{ m}$, $BC = 6 \text{ m}$, đỉnh của parabol là I .

Chọn hệ trục tọa độ Oxy sao cho O là trung điểm của cạnh AB , A , B và I , phương trình của parabol có dạng $y = ax^2 + b$, $a \neq 0$.

Do I , A , B thuộc nên ta có $y = -\frac{4}{3}x^2 + 3$.

Vậy thể tích phần không gian phía trong trại là

$$V = 6 \cdot 2 \int_0^{\frac{3}{2}} \left(-\frac{4}{3}x^2 + 3 \right) dx = 36.$$

Chọn đáp án (B) □

CÂU 7. Cho một vật thể bằng gỗ có dạng hình trụ với chiều cao và bán kính đáy cùng bằng R . Cắt khối gỗ đó bởi một mặt phẳng đi qua đường kính của một mặt đáy của khối gỗ và tạo với mặt phẳng đáy của khối gỗ một góc 30° ta thu được hai khối gỗ có thể tích là V_1 và V_2 , với $V_1 < V_2$. Thể tích V_1 bằng

- (A) $V_1 = \frac{2\sqrt{3}R^3}{9}$. (B) $V_1 = \frac{\sqrt{3}\pi R^3}{27}$. (C) $V_1 = \frac{\sqrt{3}\pi R^3}{18}$. (D) $V_1 = \frac{\sqrt{3}R^3}{27}$.

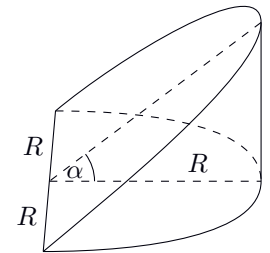
Lời giải.

Khi cắt khối gỗ hình trụ ta được một hình nêm có thể tích V_1 như hình vẽ.

Chọn hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ.

Nửa đường tròn đường kính AB có phương trình là

$$y = \sqrt{R^2 - x^2}, x \in [-R; R].$$



Một mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm M có hoành độ x , cắt hình nêm theo thiết diện là $\triangle MNP$ vuông tại N và có $\widehat{PMN} = 30^\circ$.

Ta có $NM = y = \sqrt{R^2 - x^2} \Rightarrow NP = NM \cdot \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{R^2 - x^2}}{\sqrt{3}}$.

Do $\triangle MNP$ có diện tích $S(x) = \frac{1}{2}NM \cdot NP = \frac{1}{2} \cdot \frac{R^2 - x^2}{\sqrt{3}}$.

Thể tích hình nêm là

$$V_1 = \int_{-R}^R S(x) dx = \frac{1}{2} \int_{-R}^R \frac{R^2 - x^2}{\sqrt{3}} dx = \frac{1}{2\sqrt{3}} \left(R^2x - \frac{1}{3}x^3 \right) \Big|_{-R}^R = \frac{2\sqrt{3}R^3}{9}.$$

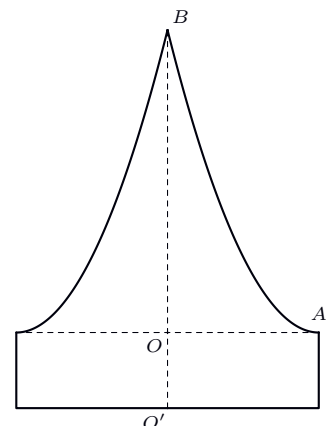
Chú ý: Có thể ghi nhớ công thức tính thể tích hình nêm $V_1 = \frac{2}{3}R^2h = \frac{2}{3}R^3 \tan \alpha$, trong đó $R = \frac{AB}{2}$, $\alpha = \widehat{PMN}$.

Chọn đáp án (A) □

CÂU 8.

Chuẩn bị cho đêm hội diễn văn nghệ chào đón năm mới, bạn Minh Hiền đã làm một chiếc mũ “cách điệu” cho ông già Noel có dáng một khối tròn xoay. Mặt cắt qua trục của chiếc mũ như hình vẽ bên dưới. Biết rằng $OO' = 5 \text{ cm}$, $OA = 10 \text{ cm}$, $OB = 20 \text{ cm}$, đường cong AB là một phần của parabol có đỉnh là điểm A . Thể tích của chiếc mũ bằng

- (A) $\frac{2750\pi}{3} \text{ cm}^3$. (B) $\frac{2500\pi}{3} \text{ cm}^3$. (C) $\frac{2050\pi}{3} \text{ cm}^3$. (D) $\frac{2250\pi}{3} \text{ cm}^3$.



Lời giải.

Ta gọi thể tích của chiếc mũ là V .

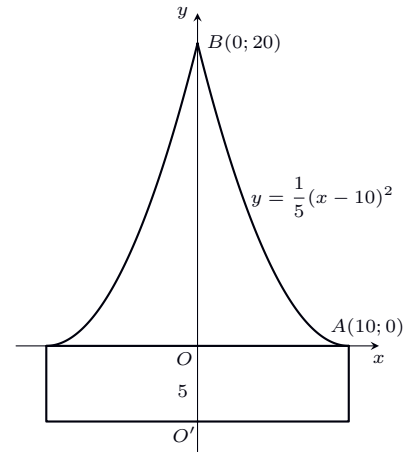
Thể tích của khối trụ có bán kính đáy bằng $OA = 10$ cm và đường cao $OO' = 5$ cm là V_1 .

Thể tích của vật thể tròn xoay khi quay hình phẳng giới hạn bởi đường cong AB và hai trục tọa độ quanh trục Oy là V_2 .

Ta có $V = V_1 + V_2$; $V_1 = 5 \cdot 10^2 \pi = 500\pi \text{ cm}^3$.

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ.

Do parabol có đỉnh A nên nó có phương trình dạng $(P): y = a(x - 10)^2$.



Vì (P) qua điểm $B(0; 20)$ nên $a = \frac{1}{5}$.

Do đó, $(P): y = \frac{1}{5}(x - 10)^2$. Từ đó suy ra $x = 10 - \sqrt{5y}$ (do $x < 10$).

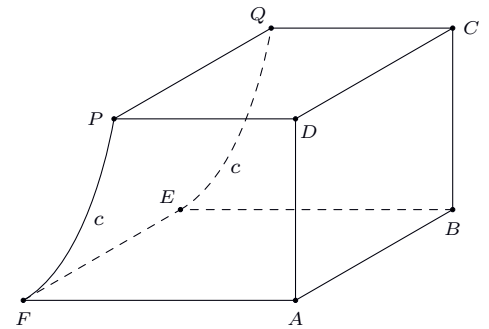
Suy ra $V_2 = \pi \int_0^{20} (10 - \sqrt{5y})^2 dy = \pi(3000 - \frac{8000}{3}) = \frac{1000}{3}\pi \text{ cm}^3$.

Do đó $V = V_1 + V_2 = \frac{1000}{3}\pi + 500\pi = \frac{2500}{3}\pi \text{ cm}^3$.

Chọn đáp án (B)

CÂU 9.

Một chi tiết máy được thiết kế như hình vẽ bên. Các tứ giác $ABCD$, $CDPQ$ là các hình vuông cạnh 2,5 (cm). Tứ giác $ABEF$ là hình chữ nhật có $BE = 3,5$ (cm). Mặt bên $PQEF$ được mài nhẵn theo đường parabol (P) có đỉnh parabol nằm trên cạnh EF . Thể tích của chi tiết máy bằng



(A) $\frac{395}{24} \text{ cm}^3$.

(B) $\frac{50}{3} \text{ cm}^3$.

(C) $\frac{125}{8} \text{ cm}^3$.

(D) $\frac{425}{24} \text{ cm}^3$.

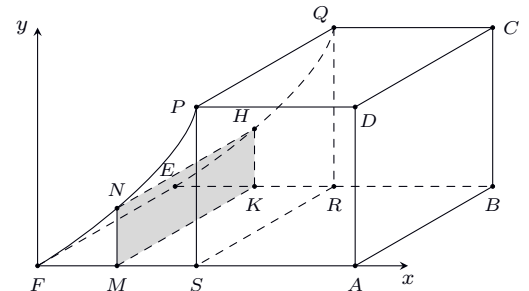
Lời giải.

Gọi hình chiếu của P , Q trên AF và BE là S và R .

Vật thể được chia thành hình lập phương $ABCD.PQRS$ có cạnh 2,5 (cm),

thể tích $V_1 = \frac{125}{8} \text{ cm}^3$ và phần còn lại có thể tích V_2 .

Khi đó thể tích vật thể $V = V_1 + V_2 = \frac{125}{8} + V_2$.



Đặt hệ trục $Oxyz$ sao cho O trùng với F , Ox trùng với FA , Oy trùng với tia Fy song song với AD . Khi đó Parabol (P) có phương trình dạng $y = ax^2$, đi qua điểm $P(1; \frac{5}{2})$ do đó $a = \frac{5}{2} \Rightarrow y = \frac{5}{2}x^2$.

Cắt vật thể bởi mặt phẳng vuông góc với Ox và đi qua điểm $M(x; 0; 0)$, $0 \leq x \leq 1$ ta được thiết diện là hình chữ nhật $MNKH$ có cạnh là $MN = \frac{5}{2}x^2$ và $MK = \frac{5}{2}$ do đó diện tích $S(x) = \frac{25}{4}x^2$.

Áp dụng công thức thể tích vật thể ta có $V_2 = \int_0^1 \frac{25}{4}x^2 dx = \frac{25}{12}$.

Từ đó $V = \frac{125}{8} + \frac{25}{12} = \frac{425}{24} \approx 17,7 \text{ cm}^3$.

Chọn đáp án (D)

CÂU 10. Bỏ dọc một quả dưa hấu ta được thiết diện là hình elip có trục lớn 28 cm, trục nhỏ 25 cm. Biết cứ 1000 m³ dưa hấu sẽ làm được cốc sinh tố giá 20000 đồng. Hỏi từ quả dưa hấu trên có thể thu được bao nhiêu tiền từ việc bán nước sinh tố? Biết rằng bề dày vỏ dưa không đáng kể.

- (A) 183000 đồng. (B) 180000 đồng. (C) 185000 đồng. (D) 190000 đồng.

Lời giải.

Đường elip có trục lớn 28 cm, trục nhỏ 25 cm có phương trình

$$\frac{y^2}{\left(\frac{25}{2}\right)^2} = 1 \Leftrightarrow y^2 = \left(\frac{25}{2}\right)^2 \left(1 - \frac{x^2}{14^2}\right) \Leftrightarrow y = \pm \frac{25}{2} \sqrt{1 - \frac{x^2}{14^2}}.$$

Do đó thể tích quả dưa là

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-14}^{14} \left(\frac{25}{2} \sqrt{1 - \frac{x^2}{14^2}}\right)^2 dx \\ &= \pi \left(\frac{25}{2}\right)^2 \int_{-14}^{14} \left(1 - \frac{x^2}{14^2}\right) dx \\ &= \pi \left(\frac{25}{2}\right)^2 \cdot \left(x - \frac{x^3}{3 \cdot 14^2}\right) \Big|_{-14}^{14} \\ &= \pi \left(\frac{25}{2}\right)^2 \cdot \frac{56}{3} \\ &= \frac{8750\pi}{3} \text{ cm}^3. \end{aligned}$$

Do đó tiền bán nước thu được là $\frac{8750\pi \cdot 20000}{3 \cdot 1000} \approx 183259$ đồng.

Chọn đáp án (A) □

CÂU 11. Một bác thợ xây bơm nước vào bể chứa nước. Gọi $h(t)$ là thể tích nước bơm được sau t giây. Cho $h'(t) = 6at^2 + 2bt$ và ban đầu bể không có nước. Sau 3 giây thì thể tích nước trong bể là 90m³, sau 6 giây thì thể tích nước trong bể là 504m³. Tính thể tích nước trong bể sau khi bơm được 9 giây.

- (A) 1458m³. (B) 600m³. (C) 2200m³. (D) 4200m³.

Lời giải.

$$\int_0^3 (6at^2 + 2bt) dt = 90 \Leftrightarrow (2at^3 + bt^2) \Big|_0^3 = 90 \Leftrightarrow 54a + 9b = 90 \quad (1)$$

$$\int_0^6 (6at^2 + 2bt) dt = 504 \Leftrightarrow (2at^3 + bt^2) \Big|_0^6 = 504 \Leftrightarrow 432a + 36b = 504 \quad (2)$$

$$\text{Từ (1), (2)} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{2}{3} \\ b = 6. \end{cases}$$

Sau khi bơm 9 giây thì thể tích nước trong bể là

$$V = \int_0^9 (4t^2 + 12t) dt = \left(\frac{4}{3}t^3 + 6t^2\right) \Big|_0^9 = 1458 \text{ (m}^3\text{)}.$$

Chọn đáp án (A) □

CÂU 12. Người ta thay nước mới cho một bể bơi có dạng hình hộp chữ nhật có độ sâu là 280cm. Giả sử $h(t)$ là chiều cao (tính bằng cm) của mực nước bơm được tại thời điểm t giây, biết rằng tốc độ tăng của chiều cao mực nước tại giây thứ t là $h'(t) = \frac{1}{500} \sqrt[3]{t}$ và lúc đầu hồ bơi không có nước. Hỏi sau bao lâu thì bơm được số nước bằng $\frac{3}{4}$ độ sâu của hồ bơi (làm tròn đến giây)?



- (A) 2 giờ 36 giây. (B) 2 giờ 48 giây. (C) 2 giờ 38 giây. (D) 2 giờ 46 giây.

Lời giải.

Gọi x là thời điểm bơm được số nước bằng $\frac{3}{4}$ độ sâu của bể (x tính bằng giây). Ta có

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{1}{500} \sqrt[3]{t} dt &= \frac{3}{4} \cdot 280 \Rightarrow \frac{3}{4} t^{\frac{4}{3}} \Big|_0^x = 105000 \\ \Rightarrow x \sqrt[3]{x} &= 140000 \Rightarrow \sqrt[3]{x^4} = 140000 \\ \Rightarrow x &= \sqrt[4]{140000^3} \Rightarrow x \approx 7237,6242. \end{aligned}$$

Suy ra $x = 2$ giờ 38 giây.

Chọn đáp án  

MỤC LỤC

NGUYỄN HÀM VÀ TÍCH PHÂN 1

Bài 1. NGUYỄN HÀM 1

 (A) Tóm tắt lý thuyết 1

 (B) Kiến thức cần nắm 1

 (C) Phân loại và phương pháp giải bài tập 1

 Dạng 1. Sử dụng định nghĩa nguyên hàm và bảng nguyên hàm 1

 Dạng 2. Tìm nguyên hàm khi biết giá trị nguyên hàm 10

 Dạng 3. Ứng dụng trong bài toán thực tiễn 13

 (D) NGUYỄN HÀM HÀM ẨN 15

 Dạng 4. 15

 Dạng 5. 17

Bài 2. Tích Phân 19

 (A) Lý thuyết cần nhớ 19

 (B) Phân loại và phương pháp giải bài tập 21

 Dạng 6. Tính chất của tích phân 21

 Dạng 7. Tích phân hàm số sơ cấp 24

 Dạng 8. Tích phân hàm chứa trị tuyệt đối 28

 Dạng 9. Tích phân có điều kiện 30

 Dạng 10. Ứng dụng tích phân trong thực tiễn 33

 (C) Tích phân hàm ẩn biến đổi phức tạp 35

Bài 3. ỨNG DỤNG HÌNH HỌC CỦA TÍCH PHÂN 38

 (A) Diện tích hình thang cong 38

 (B) Thể tích hình khối 39

 Dạng 11. TÍNH DIỆN TÍCH HÌNH GIỚI HẠN BỞI CÁC ĐƯỜNG CONG 40

 Dạng 12. THỂ TÍCH KHỐI TRÒN XOAY 50

 Dạng 13. Ứng dụng diện tích hình phẳng và thể tích khối tròn xoay trong bt thực tiễn 53

LỜI GIẢI CHI TIẾT 56

NGUYỄN HÀM VÀ TÍCH PHÂN 56

Bài 1. NGUYỄN HÀM 56

 (A) Tóm tắt lý thuyết 56

 (B) Kiến thức cần nắm 56

 (C) Phân loại và phương pháp giải bài tập 57

 Dạng 1. Sử dụng định nghĩa nguyên hàm và bảng nguyên hàm 57

 Dạng 2. Tìm nguyên hàm khi biết giá trị nguyên hàm 74

 Dạng 3. Ứng dụng trong bài toán thực tiễn 82

 (D) NGUYỄN HÀM HÀM ẨN 89

 Dạng 4. 89

 Dạng 5. 99

Bài 2. Tích Phân	104
(A) Lý thuyết cần nhớ	104
(B) Phân loại và phương pháp giải bài tập	105
Dạng 6. Tính chất của tích phân	105
Dạng 7. Tích phân hàm số sơ cấp	111
Dạng 8. Tích phân hàm chứa trị tuyệt đối	121
Dạng 9. Tích phân có điều kiện	129
Dạng 10. Ứng dụng tích phân trong thực tiễn	136
(C) Tích phân hàm ẩn biến đổi phức tạp	141
Bài 3. ỨNG DỤNG HÌNH HỌC CỦA TÍCH PHÂN	152
(A) Diện tích hình thang cong	152
(B) Thể tích hình khối	153
Dạng 11. TÍNH DIỆN TÍCH HÌNH GIỚI HẠN BỞI CÁC ĐƯỜNG CONG	154
Dạng 12. THỂ TÍCH KHỐI TRÒN XOAY	172
Dạng 13. Ứng dụng diện tích hình phẳng và thể tích khối tròn xoay trong bt thực tiễn	179

