Bài 4. KHẢO SÁT SỰ BIẾN THIÊN VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ

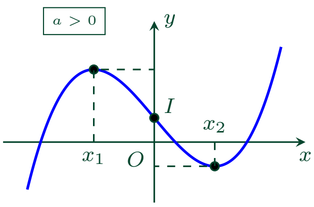
A. LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

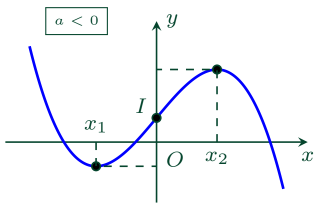
1. Khảo sát hàm số y= f(x)

- **Bước 1.** Tìm tập xác định của hàm số.
- **Bước 2.** Khảo sát sự biến thiên của hàm số
  - Tính đạo hàm y'. Tìm các điểm mà tại đó y' bằng 0 hoặc đạo hàm không tồn tại.
  - Tìm các giới hạn tại vô cực, giới hạn vô cực và tìm tiệm cận của đồ thị hàm số.
  - Lập bảng biến thiên; xác định chiều biến thiên và cực trị của hàm số.
- **Bước 3.** Cho thêm điểm và vẽ đồ thị của hàm số dựa vào bảng biến thiên.

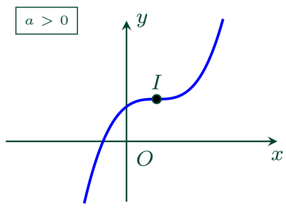
2. Hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$

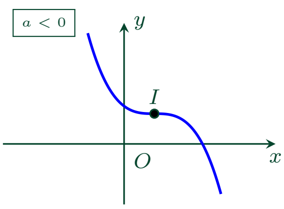
- **TH1.** $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1 và x_2. Khi đó, hàm số có hai điểm cực trị $x = x_1$ và $x = x_2$.



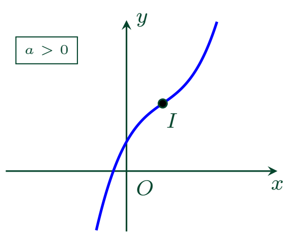


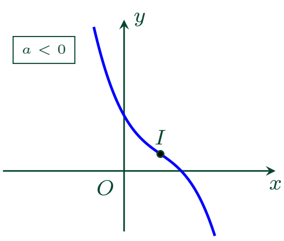
- **TH2.** $y' = 0$ có nghiệm kép x_0. Khi đó, hàm số không có cực trị.





- **TH3.** $y' = 0$ vô nghiệm. Khi đó, hàm số không có cực trị.





GHI NHỚ

① Liên hệ tổng tích hai nghiệm của y' $\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{2b}{3a} \\ x_1x_2 = \dfrac{c}{3a} \end{cases}$

② Tâm đối xứng của đồ thị là trung điểm của đoạn nối 2 điểm cực trị. Hoành độ tâm đối xứng là nghiệm phương trình $y'' = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{b}{3a}$.

ĐIỂM:

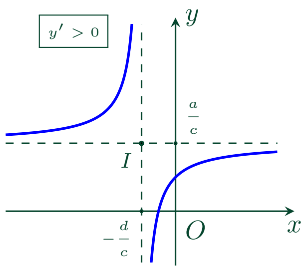
"It's not how much time you have, it's how you use it."

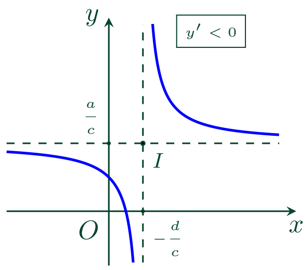
QUICK NOTE

QUICK NOTE

3. Hàm số $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(c \neq 0, ad - bc \neq 0)$

- Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \backslash \left\{-\dfrac{d}{c}\right\}$; Đạo hàm $y' = \dfrac{ad-cb}{(cx+d)^2}$.
- Đồ thị nhận giao điểm của hai đường tiệm cận làm tâm đối xứng.
- Hình dạng đồ thị:





GHI NHỚ

① Tiệm cận đứng $x = -\dfrac{d}{c}$.

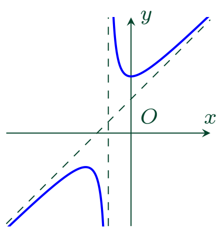
② Tiệm cận ngang $y = \dfrac{a}{c}$.

③ Giao với Ox: $y = 0 \Rightarrow x = -\dfrac{b}{a}$.

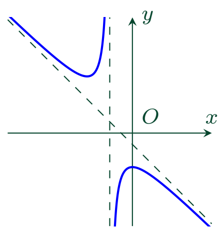
④ Giao với Oy: $x = 0 \Rightarrow y = \dfrac{b}{d}$.

4. Hàm số $y = \dfrac{ax^2+bx+c}{dx+e}$ $(a \neq 0, e \neq 0)$ (đa thức tử không chia hết cho đa thức mẫu)

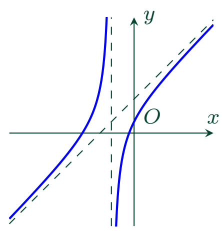
- Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \backslash \left\{-\dfrac{e}{d}\right\}$; Đạo hàm $y' = \dfrac{adx^2 + 2aex + be - cd}{(dx+e)^2}$.
- Hàm số 2 điểm cực trị khi $y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt; Hàm số không có cực trị khi $y' = 0$ vô nghiệm.
- Đồ thị nhận giao điểm của tiệm cận đứng và tiệm cận xiên làm tâm đối xứng.
- Hình dạng đồ thị:



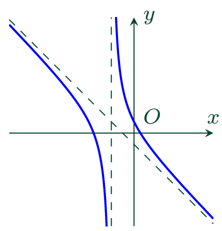
$a > 0$, $y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt



$a < 0$, $y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt



$a > 0$, $y' = 0$ vô nghiệm



$a < 0$, $y' = 0$ vô nghiệm

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Dạng 1. Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số bậc ba

Ta khảo sát theo sơ đồ đã nhắc đến ở phần lý thuyết.

BÀI TẬP TỰ LUẬN

VÍ DỤ 1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị các hàm số sau:

a) $y = x^3 - 3x^2 + 1$;

b) $y = -2x^3 - 3x^2 + 1$;

c) $y = x^3 + 3x^2 + 3x + 2$;

d) $y = x^3 - 3x^2 + 4x - 2$.

QUICK NOTE

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.

CÂU 1.

Bảng biến thiên ở hình bên là của một trong bốn hàm số sau đây. Hỏi đó là hàm số nào?

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	5	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

(A) $y = -x^3 - 2x^2 + 5$.
(B) $y = x^3 - 3x^2 + 5$.
(C) $y = -x^3 - 3x + 5$.
(D) $y = x^3 + 3x^2 + 5$.

CÂU 2.

Bảng biến thiên ở hình bên là của một trong bốn hàm số sau đây. Hỏi đó là hàm số nào?

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	5	$\searrow$	$-\infty$

(A) $y = -x^3 + 3x^2$.
(B) $y = x^3 - 3x^2 - 1$.
(C) $y = x^4 + 2x^2 + 1$.
(D) $y = -x^3 + 3x^2 + 1$.

CÂU 3.

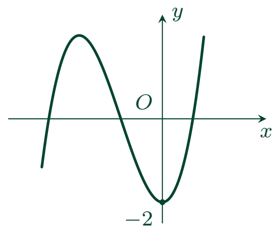
Bảng biến thiên ở hình bên là của một trong bốn hàm số sau đây. Hỏi đó là hàm số nào?

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

(A) $y = x^3 - 3x^2 + x + 3$.
(B) $y = x^3 - 3x + 4$.
(C) $y = x^3 - 3x^2 + 3x + 1$.
(D) $y = x^3 + 3x^2 + 5$.

CÂU 4.

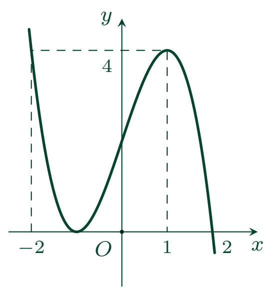
Đường cong bên là đồ thị của một trong bốn hàm số đã cho sau đây. Hỏi đó là hàm số nào?



(A) $y = -x^3 + x^2 - 2$.
(B) $y = x^3 + 3x^2 - 2$.
(C) $y = x^3 - 3x + 2$.
(D) $y = x^2 - 3x - 2$.

CÂU 5.

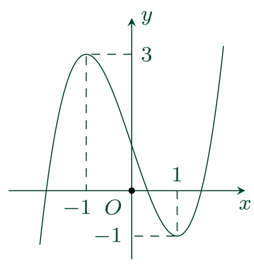
Đường cong bên là đồ thị của một trong bốn hàm số đã cho sau đây. Hỏi đó là hàm số nào?



(A) $y = x^3 + 3x - 2$.
(B) $y = x^3 - 3x + 2$.
(C) $y = -x^3 + 3x + 2$.
(D) $y = -x^3 - 3x - 2$.

CÂU 6.

Đường cong bên là đồ thị của một trong bốn hàm số đã cho sau đây. Hỏi đó là hàm số nào?

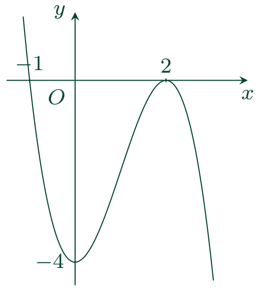


(A) $y = -x^3 + 3x^2 + 1$.
(B) $y = -x^2 - 3x - 1$.
(C) $y = x^4 + 2x^2 - 1$.
(D) $y = x^3 - 3x + 1$.

QUICK NOTE

CÂU 7.

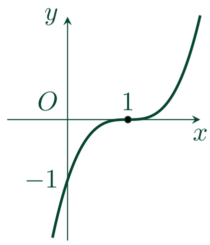
Đường cong bên là đồ thị của một trong bốn hàm số đã cho sau đây. Hỏi đó là hàm số nào?



(A) $y = x^3 - 3x^2 - 4$.
(B) $y = -x^3 - 4$.
(C) $y = -x^3 + 3x^2 - 2$.
(D) $y = -x^3 + 3x^2 - 4$.

CÂU 8.

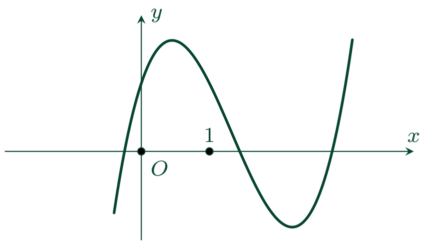
Đường cong bên là đồ thị của một trong bốn hàm số đã cho sau đây. Hỏi đó là hàm số nào?



(A) $y = x^3 - 1$.
(B) $y = (x+1)^3$.
(C) $y = (x-1)^3$.
(D) $y = x^3 + 1$.

CÂU 9.

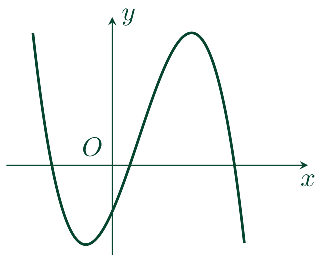
Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây là đúng?



(A) $a > 0, b > 0, c > 0, d > 0$.
(B) $a < 0, b < 0, c > 0, d > 0$.
(C) $a > 0, b < 0, c < 0, d > 0$.
(D) $a > 0, b < 0, c > 0, d > 0$.

CÂU 10.

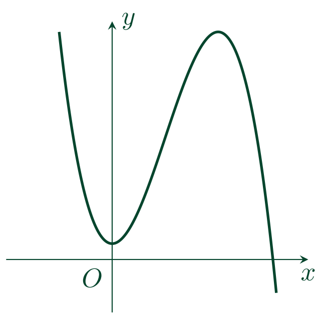
Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây đúng?



(A) $a < 0, b < 0, c < 0, d > 0$.
(B) $a < 0, b > 0, c < 0, d > 0$.
(C) $a < 0, b > 0, c > 0, d < 0$.
(D) $a < 0, b < 0, c > 0, d < 0$.

CÂU 11.

Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



(A) $a < 0, b > 0, c > 0, d > 0$.
(B) $a < 0, b < 0, c = 0, d > 0$.
(C) $a < 0, b > 0, c = 0, d > 0$.
(D) $a > 0, b < 0, c > 0, d > 0$.

CÂU 12.

Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có bảng biến thiên như hình bên. Trong các hệ số a, b, c và d có bao nhiêu số âm?

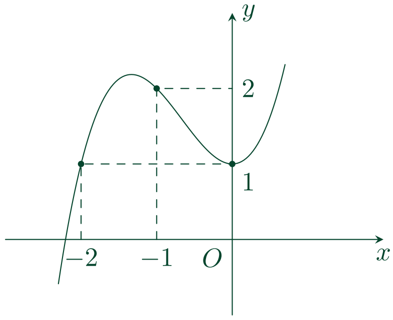
x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$		$\searrow$	

(A) 2. (B) 1. (C) 4. (D) 3.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.

CÂU 13.

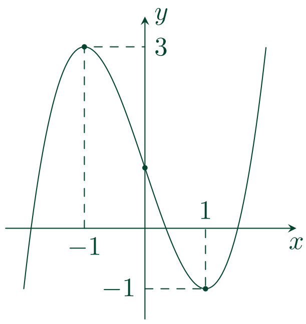
Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ.



Mệnh đề	Đ	S
a) Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 1$.		
b) Đồ thị hàm số cắt trục Oy tại điểm $(0; 1)$.		
c) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -1)$.		
d) $2a + 3b + c = 9$.		

CÂU 14.

Cho hàm số bậc ba $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ.
Tính tổng $T =$.



Mệnh đề	Đ	S
a) Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm $(0; 1)$.		
b) Đường thẳng đi qua điểm $(0; 1)$ luôn cắt đồ thị tại ba điểm phân biệt có hoành độ lập thành 1 cấp số cộng.		
c) $a - b + c + d = -1$.		
d) Đồ thị hàm số đi qua điểm $(3; 18)$.		

CÂU 15.

Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có bảng biến thiên như hình bên.

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	4	$\searrow$	$-\infty$

Mệnh đề	Đ	S
a) Hàm số đạt giá trị lớn nhất là 4.		
b) Đường thẳng $y = 2$ cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại 3 điểm phân biệt.		
c) Trong bốn hệ số a, b, c, d có đúng hai số âm.		
d) Đồ thị hàm số đi qua điểm $(-4; 20)$.		

Dạng 2. Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số phân thức hữu tỉ bậc I/I

Ta khảo sát theo sơ đồ

- **Bước 1.** Tìm tập xác định $D = \mathbb{R} \backslash \left\{-\dfrac{d}{c}\right\}$.
- **Bước 2.** Khảo sát sự biến thiên của hàm số
  - Tính đạo hàm $y' = \dfrac{ad - cb}{(cx + d)^2}$.
  - Tìm các giới hạn tại vô cực, giới hạn vô cực và tìm tiệm cận của đồ thị hàm số.

QUICK NOTE

QUICK NOTE

— Lập bảng biến thiên; xác định chiều biến thiên và cực trị của hàm số.

Bước 3. Cho thêm điểm và vẽ đồ thị của hàm số dựa vào bảng biến thiên.

BÀI TẬP TỰ LUẬN

VÍ DỤ 1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị các hàm số sau:

a) $y=\dfrac{x-1}{x+1}$; b) $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$; c) $y=\dfrac{5+x}{2-x}$.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.

CÂU 1. Hàm số nào trong bốn hàm số dưới đây có bảng biến thiên như hình bên?

x	$-\infty$		2		$+\infty$
y'		$-$	||	$-$	
y	1	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	1

A $y=\dfrac{2x-1}{x+3}$. **B** $y=\dfrac{4x-6}{x-2}$.

C $y=\dfrac{3-x}{2-x}$. **D** $y=\dfrac{x+5}{x-2}$.

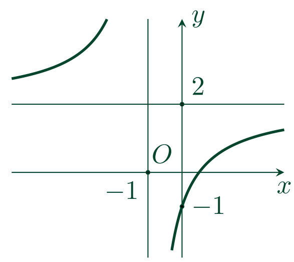
CÂU 2. Hàm số nào trong bốn hàm số dưới đây có bảng biến thiên như hình bên?

x	$-\infty$		3		$+\infty$
y'		$+$	||	$+$	
y	-1	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	-1

A $y=\dfrac{x-1}{x-3}$. **B** $y=\dfrac{x-1}{-x-3}$.

C $y=\dfrac{x+5}{-x+3}$. **D** $y=\dfrac{1}{x-3}$.

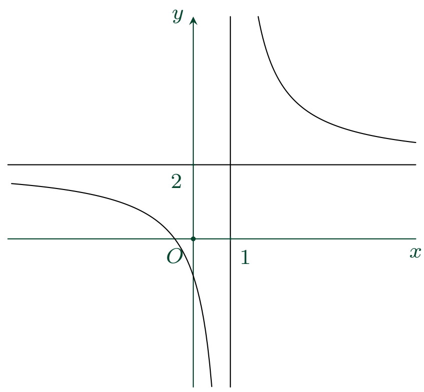
CÂU 3. Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của một trong bốn hàm số sau. Hỏi đó là hàm số nào?



A $y=\dfrac{2x-1}{x+1}$. **B** $y=\dfrac{1-2x}{x+1}$.

C $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$. **D** $y=\dfrac{2x+1}{x+1}$.

CÂU 4. Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của một trong bốn hàm số sau. Hỏi đó là hàm số nào?



A $y=\dfrac{x-1}{x-2}$. **B** $y=x+2$.

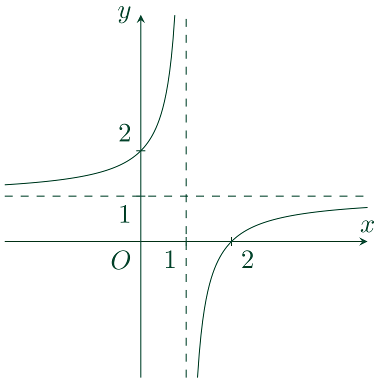
C $y=x^4-3x^2+1$. **D** $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$.

CÂU 5.

Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của một trong bốn hàm số sau. Hỏi đó là đồ thị của hàm số nào?

Ⓐ $y = \dfrac{x-2}{x+1}$. Ⓑ $y = \dfrac{x+2}{x-2}$.

Ⓒ $y = \dfrac{x-2}{x-1}$. Ⓓ $y = \dfrac{x+2}{x-1}$.

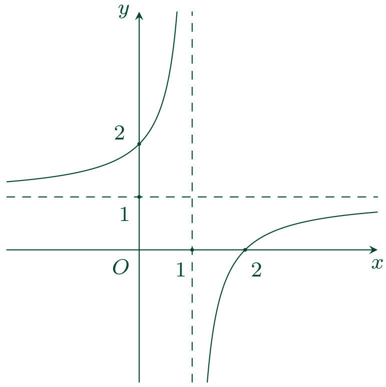


CÂU 6.

Cho hàm số $y = \dfrac{ax-b}{x+c}$ $(a, b, c \in \mathbb{R})$ có đồ thị như hình vẽ bên. Giá trị của biểu thức $2a + b - 3c$ bằng

Ⓐ -3. Ⓑ 4.

Ⓒ 7. Ⓓ -5.

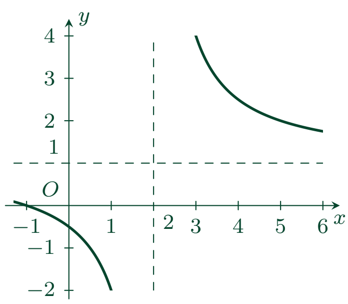


CÂU 7.

Cho hàm số $y = \dfrac{ax+1}{bx-2}$ có đồ thị như hình vẽ. Tính $T = a + b$

Ⓐ $T = 2$. Ⓑ $T = 0$.

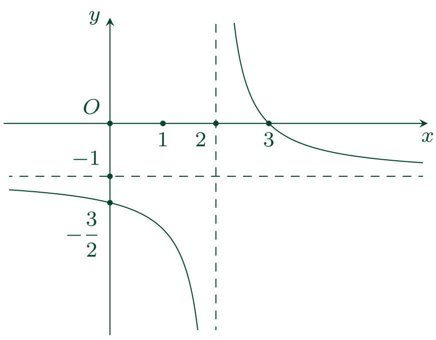
Ⓒ $T = -1$. Ⓓ $T = 3$.



CÂU 8.

Cho hàm số $y = \dfrac{ax-b}{cx+2}$ $(a,\ b,\ c \in \mathbb{R};\ c \neq 0)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Giá trị của biểu thức $a+b+c$ bằng

Ⓐ -3. Ⓑ 5. Ⓒ -4. Ⓓ 3.

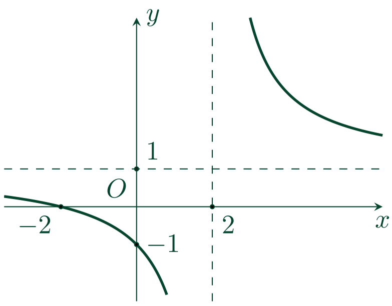


CÂU 9.

Hãy xác định a, b để hàm số $y = \dfrac{2-ax}{x+b}$ có đồ thị như hình vẽ?

Ⓐ $a = 1;\ b = -2$. Ⓑ $a = b = 2$.

Ⓒ $a = -1;\ b = -2$. Ⓓ $a = b = -2$.

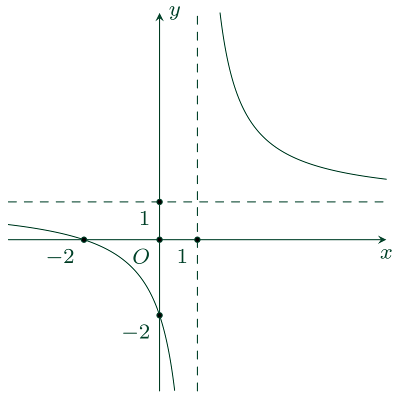


CÂU 10.

QUICK NOTE

Cho đồ thị hàm số $y = \dfrac{ax - b}{x - 1}$ như hình vẽ. Tìm khẳng định đúng?

(A) $a < 0,\ b < 0$. (B) $0 < b < a$.
(C) $b < 0 < a$. (D) $a < b < 0$.



CÂU 11.

Cho hàm số $y = \dfrac{ax + 4}{bx + c}$ $(a,\ b,\ c \in \mathbb{R})$ có bảng biến thiên như sau. Trong các số $a,\ b,\ c$ có bao nhiêu số dương?

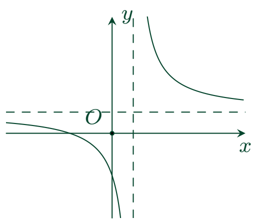
(A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	||	$+$	
$f(x)$	3 $\nearrow$		$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	3

CÂU 12.

Cho hàm số $y = \dfrac{ax + b}{cx + d}$ với $a > 0$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây đúng?

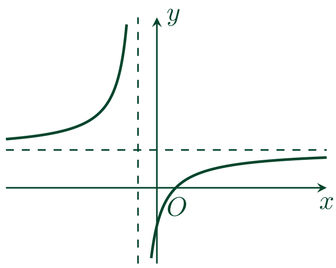
(A) $b < 0,\ c < 0,\ d < 0$. (B) $b > 0,\ c < 0,\ d < 0$.
(C) $b < 0,\ c > 0,\ d < 0$. (D) $b > 0,\ c > 0,\ d < 0$.



CÂU 13.

Hình vẽ bên là đồ thị của hàm số $y = \dfrac{ax + b}{cx + d}$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

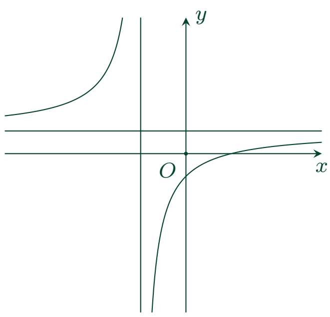
(A) $ab > 0, bd < 0$. (B) $ab < 0, ad > 0$.
(C) $ab < 0, ad < 0$. (D) $bd > 0, ad > 0$.



CÂU 14.

Hình vẽ dưới đây là đồ thị hàm số $y = \dfrac{ax + b}{cx + d}$ $ac \neq 0$, $ad - cb \neq 0$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

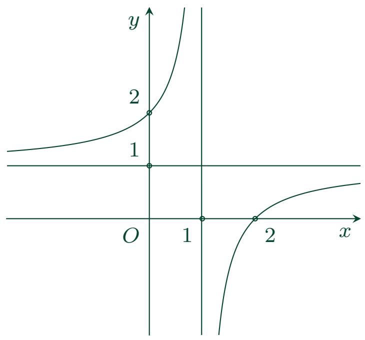
(A) $ad > 0$ và $ab < 0$. (B) $bd < 0$ và $ab > 0$.
(C) $ad < 0$ và $ab < 0$. (D) $ad > 0$ và $bd > 0$.



PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.

CÂU 15.

Cho hàm số $y = \dfrac{x+a}{bx+c}$, $(a, b, c \in \mathbb{Z})$.



Mệnh đề	Đ	S
a) Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = 1$.		
b) Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y = 0$.		
c) Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.		
d) $a - 3b - 2c = -3$.		

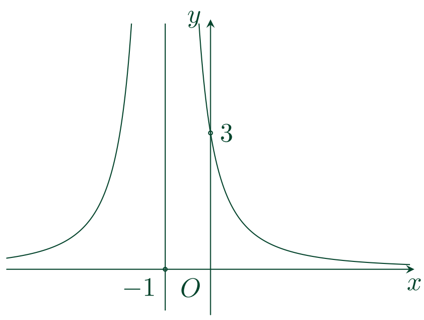
CÂU 16. Cho hàm số $f(x) = \dfrac{ax-1}{bx+c}$ $(a, b, c \in \mathbb{R})$ có bảng biến thiên như sau.

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	||	$-$	
$f(x)$	$\frac{1}{2}$ ↘	$-\infty$	||	$+\infty$ ↘	$\frac{1}{2}$

Mệnh đề	Đ	S
a) Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty, \dfrac{1}{2}\right)$.		
b) Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = \dfrac{1}{2}$.		
c) Đồ thị giao với trục hoành tại điểm có hoành độ nhỏ hơn 3.		
d) $\left[\begin{array}{l} b > \dfrac{2}{3} \\ b < 0 \end{array}\right.$.		

CÂU 17.

Cho hàm số $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ với a, b, c, $d \in \mathbb{R}$ có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ nhận $x = -1$ làm tiệm cận đứng như hình vẽ bên. Biết rằng giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-3; -2]$ bằng 8.



Mệnh đề	Đ	S
a) $f'(0) = 3$.		
b) Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-1; +\infty)$.		
c) Giá trị của $f(-3)$ bằng 8.		
d) Giá trị của $f(2)$ bằng 4.		

Dạng 3. Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số phân thức hữu tỉ bậc II/I

Bước 1. Tập xác định $D = \mathbb{R} \backslash \left\{-\dfrac{n}{m}\right\}$.

Bước 2. Khảo sát sự biến thiên của hàm số

— Tính đạo hàm $y' = \dfrac{am \cdot x^2 + 2an \cdot x + b.n - m.c}{(mx+n)^2}$. Giải $y' = 0 \Leftrightarrow am \cdot x^2 + 2an \cdot x + b.n - m.c = 0$, tìm nghiệm.

QUICK NOTE

QUICK NOTE

— Tìm các giới hạn tại vô cực, giới hạn vô cực và tìm tiệm cận của đồ thị hàm số.

— Lập bảng biến thiên; xác định chiều biến thiên và cực trị của hàm số.

Bước 3. Cho thêm điểm và vẽ đồ thị của hàm số dựa vào bảng biến thiên.

BÀI TẬP TỰ LUẬN

VÍ DỤ 1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị các hàm số sau:

a) $y = \dfrac{x^2 + 2x - 2}{x - 1}$; b) $y = -x + 2 - \dfrac{1}{x+1}$; c) $y = \dfrac{-x^2 - 3x + 4}{x + 2}$.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.

CÂU 1.

Bảng biến thiên sau là của một trong bốn hàm số sau. Hỏi đó là hàm số nào?

x	$-\infty$		-10		-4		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	24	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

A $y = \dfrac{x^2 - 3x + 4}{-x - 4}$.

B $y = \dfrac{x^2 - 4x + 4}{-x - 4}$.

C $y = \dfrac{x^2 - 5x + 4}{x + 4}$.

D $y = \dfrac{x^2 - 4x + 4}{x + 4}$.

CÂU 2.

Bảng biến thiên sau là của một trong bốn hàm số sau. Hỏi đó là hàm số nào?

x	$-\infty$		1		3		5		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	-9	$\searrow$	$-\infty$

A $y = \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x - 3}$.

B $y = \dfrac{-x^2 - x + 2}{x - 3}$.

C $y = \dfrac{-x^2 + x + 2}{x - 3}$.

D $y = \dfrac{x^2 - 4x + 4}{-x + 3}$.

CÂU 3.

Bảng biến thiên sau là của một trong bốn hàm số sau. Hỏi đó là hàm số nào?

x	$-\infty$		-9		-4		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	-20	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

A $y = \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x + 4}$.

B $y = \dfrac{x^2 - 4x + 2}{x + 4}$.

C $y = \dfrac{x^2 - x + 2}{-x - 4}$.

D $y = \dfrac{x^2 - 3x + 4}{-x - 4}$.

CÂU 4.

Bảng biến thiên sau là của một trong bốn hàm số sau. Hỏi đó là hàm số nào?

x	$-\infty$	2	$+\infty$
y'	$+$	‖	$+$
y	$-\infty \nearrow +\infty$	‖	$-\infty \nearrow +\infty$

Ⓐ $y = \dfrac{x^2 - 3}{x - 2}$.

Ⓑ $y = \dfrac{x^2 - 4x + 2}{x - 2}$.

Ⓒ $y = \dfrac{x^2 - x}{x - 2}$.

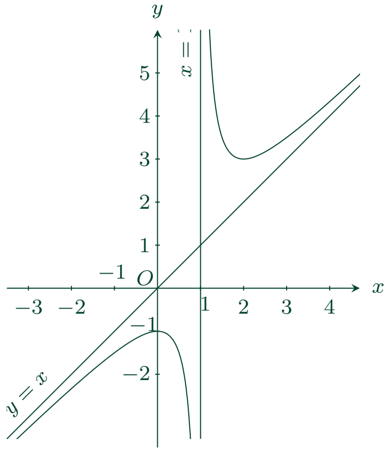
Ⓓ $y = \dfrac{x^2 - 4x + 5}{x - 2}$.

CÂU 5.

Đồ thị hình bên là của một trong bốn hàm số sau. Hỏi đó là hàm số nào?

Ⓐ $y = \dfrac{x^2 + x - 1}{x - 1}$. Ⓑ $y = \dfrac{x^2 - x + 1}{x - 1}$.

Ⓒ $y = \dfrac{x^2 - 4x - 1}{-x + 1}$. Ⓓ $y = \dfrac{x^2 - 3x - 1}{-x + 1}$.

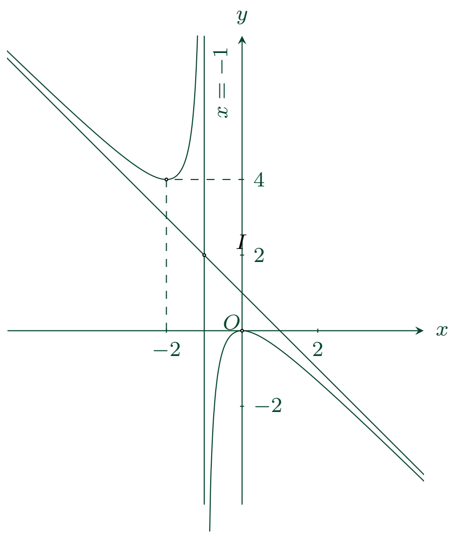


CÂU 6.

Đồ thị hình bên là của một trong bốn hàm số sau. Hỏi đó là hàm số nào?

Ⓐ $y = \dfrac{x^2 - x}{x + 1}$. Ⓑ $y = \dfrac{x^2 - 3x}{x + 1}$.

Ⓒ $y = \dfrac{x^2 + 1x + 2}{x + 1}$. Ⓓ $y = \dfrac{-x^2}{x + 1}$.

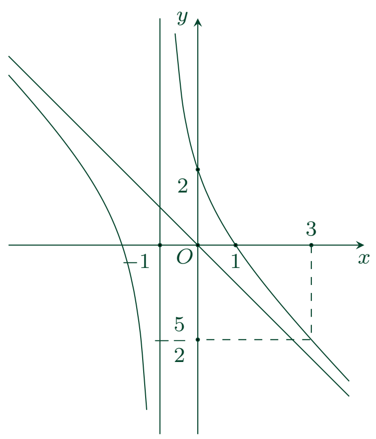


CÂU 7.

Đồ thị hình bên là của một trong bốn hàm số sau. Hỏi đó là hàm số nào?

Ⓐ $y = \dfrac{x^2 - x + 4}{x + 1}$. Ⓑ $y = \dfrac{x^2 - 2x + 3}{x + 1}$.

Ⓒ $y = \dfrac{-x^2 - x + 2}{x + 1}$. Ⓓ $y = \dfrac{x^2 + x - 1}{x + 1}$.



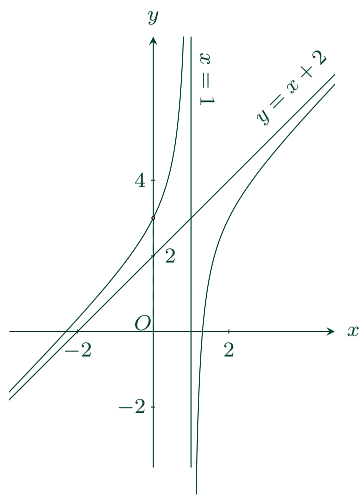
CÂU 8.

QUICK NOTE

QUICK NOTE

Đồ thị hình bên là của một trong bốn hàm số sau. Hỏi đó là hàm số nào?

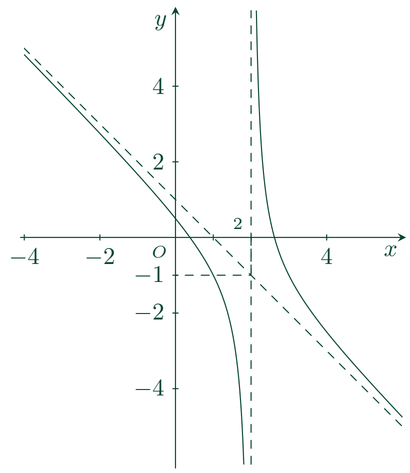
Ⓐ $y = \dfrac{x^2+3}{x-1}$.
Ⓑ $y = \dfrac{x^2+x-3}{x-1}$.
Ⓒ $y = \dfrac{x^2-2x+3}{-x+1}$.
Ⓓ $y = \dfrac{x^2+3}{-x+1}$.



PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.

CÂU 9.

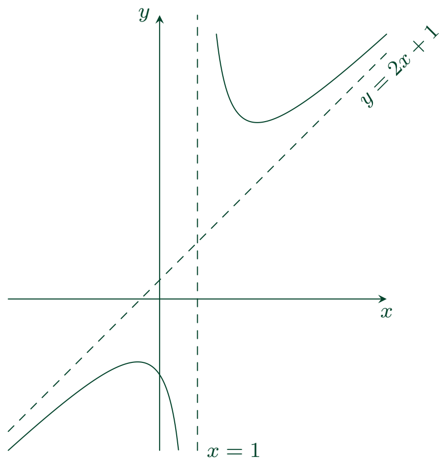
Cho hàm số $y = \dfrac{ax^2+bx+c}{mx+n}$ có đồ thị như hình bên.



Mệnh đề	Đ	S
a) Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}\backslash\{1\}$.		
b) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;2)$ và $(2;+\infty)$.		
c) Điểm $I(2;1)$ là tâm đối xứng của đồ thị.		
d) Hệ số a và m trái dấu.		

CÂU 10.

Cho hàm số $y = \dfrac{ax^2+bx+c}{x+n}$ có đồ thị như hình bên.



Mệnh đề	Đ	S
a) Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}\backslash\{1\}$.		
b) Điểm $I(1;2)$ là tâm đối xứng của đồ thị.		
c) $a+2b=4$.		
d) Đồ thị qua điểm $(2;10)$ khi $c=4$.		

Dạng 4. Sự tương giao của hai đồ thị

Xác định tọa độ giao điểm của hai đồ thị $y=f(x)$ và $y=g(x)$:

① Giải phương trình hoành độ giao điểm $f(x)=g(x)$, tìm các nghiệm $x_0 \in \mathscr{D}_f \cap \mathscr{D}_g$.

② Với x_0 vừa tìm, thay vào một trong hai hàm số ban đầu để tìm y_0.

③ Kết luận giao điểm $(x_0;y_0)$.

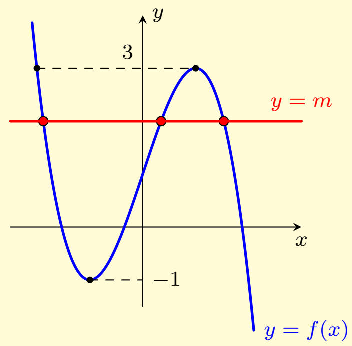
QUICK NOTE

Ứng dụng đồ thị để biện luận nghiệm phương trình:

(a) Xét phương trình $f(x)=m$, với m là tham số. Nghiệm của phương trình này có thể coi là hoành độ giao điểm của đồ thị $y=f(x)$ (cố định) với đường thẳng $y=m$ (nằm ngang).

(b) Từ đó, để biện luận nghiệm phương trình $f(x)=m$, ta có thể thực hiện các bước như sau:

- Lập bảng biến thiên của hàm số $y=f(x)$ trên miền xác định mà đề bài yêu cầu.
- Tịnh tiến đường thẳng $y=m$ theo hướng "*lên, xuống*". Quan sát số giao điểm để quy ra số nghiệm tương ứng.



BÀI TẬP TỰ LUẬN

VÍ DỤ 1. Xác định tọa độ giao điểm của hai đồ thị hàm số sau:

a) $y=x^3-2x^2+x-1$ và $y=1-2x$; b) $y=\dfrac{x+8}{x-2}$ và $y=x+2$.

VÍ DỤ 2. Tìm tập hợp các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=(x-2)(x^2+mx+m^2-3)$ cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt.

VÍ DỤ 3. Tìm tham số m để phương trình $x^3-3x+2-m=0$ có ba nghiệm phân biệt.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

CÂU 1. Đường thẳng $y=x-1$ cắt đồ thị hàm số $y=x^3-x^2+x-1$ tại hai điểm. Tìm tổng tung độ các giao điểm đó.

Ⓐ -3. Ⓑ 2. Ⓒ 0. Ⓓ -1.

CÂU 2. Số giao điểm của đồ thị hàm số $y=(x-1)(x^2-3x+2)$ và trục hoành là

Ⓐ 0. Ⓑ 1. Ⓒ 2. Ⓓ 3.

CÂU 3. Đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2+2x-1$ cắt đồ thị hàm số $y=x^2-3x+1$ tại hai điểm phân biệt A, B. Tính độ dài AB.

Ⓐ $AB=3$. Ⓑ $AB=2\sqrt{2}$. Ⓒ $AB=2$. Ⓓ $AB=1$.

CÂU 4. Đồ thị của hàm số $y=\dfrac{x-1}{x+1}$ cắt hai trục Ox và Oy tại A và B. Khi đó diện tích của tam giác OAB (với O là gốc tọa độ) bằng

Ⓐ 1. Ⓑ $\dfrac{1}{4}$. Ⓒ 2. Ⓓ $\dfrac{1}{2}$.

CÂU 5. Biết đường thẳng $y=x-2$ cắt đồ thị hàm số $y=\dfrac{x}{x-1}$ tại 2 điểm phân biệt A, B. Tìm hoành độ trọng tâm tam giác OAB với O là gốc tọa độ.

Ⓐ $\dfrac{2}{3}$. Ⓑ 2. Ⓒ $\dfrac{4}{3}$. Ⓓ 4.

CÂU 6. Gọi M, N là giao điểm của đường thẳng $y=x+1$ và đường cong $y=\dfrac{2x+4}{x-1}$. Tìm hoành độ trung điểm của đoạn thẳng MN.

Ⓐ $x=-1$. Ⓑ $x=1$. Ⓒ $x=-2$. Ⓓ $x=2$.

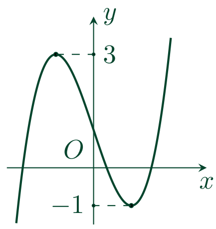
CÂU 7. Cho hàm số $y=\dfrac{2x}{x+1}$ có đồ thị (C). Gọi A, B là giao điểm của đường thẳng $d: y=x$ với đồ thị (C). Tính độ dài đoạn AB.

Ⓐ $AB=\sqrt{2}$. Ⓑ $AB=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Ⓒ $AB=1$. Ⓓ $AB=2$.

QUICK NOTE

CÂU 8.

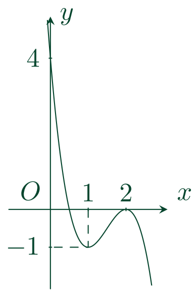
Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Số nghiệm của phương trình $2f(x) - 3 = 0$ là



Ⓐ 2. Ⓑ 1.
Ⓒ 0. Ⓓ 3.

CÂU 9.

Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $(d \neq 0)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Số nghiệm của phương trình $3f(x) - 1 = 0$ bằng



Ⓐ 0. Ⓑ 1.
Ⓒ 2. Ⓓ 3.

CÂU 10.

Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau. Số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ với trục hoành là

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

Ⓐ 1. Ⓑ 0.
Ⓒ 2. Ⓓ 3.

CÂU 11.

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $(-\infty; +\infty)$ và có bảng biến thiên như hình bên. Số nghiệm thực của phương trình $2\left|f(x)\right| = 7$ bằng

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	5	$\searrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$

Ⓐ 3. Ⓑ 2. Ⓒ 4. Ⓓ 2.

CÂU 12.

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ và có bảng biến thiên như hình bên. Hỏi phương trình $3|f(x)| - 10 = 0$ có bao nhiêu nghiệm?

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	2	$\searrow$	$-\infty \;\|\|\; +\infty$	$\searrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$

Ⓐ 2 nghiệm. Ⓑ 4 nghiệm.
Ⓒ 3 nghiệm. Ⓓ 1 nghiệm.

CÂU 13.

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$, có bảng biến thiên như sau. Số nghiệm của phương trình $2[f(x)]^2 - 3f(x) + 1 = 0$ là

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	1	$\nearrow$	3	$\searrow$	$\frac{1}{3}$	$\nearrow$	1

Ⓐ 2. Ⓑ 3.
Ⓒ 6. Ⓓ 0.

CÂU 14.

Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như hình bên. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(x) = m + 1$ có ba nghiệm thực phân biệt.

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Ⓐ $-3 \leq m \leq 3$.
Ⓑ $-2 \leq m \leq 4$.
Ⓒ $-2 < m < 4$.
Ⓓ $-3 < m < 3$.

CÂU 15.
Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình bên. Phương trình $f(4x - x^2) - 2 = 0$ có bao nhiêu nghiệm thực?

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

A 2. **B** 6.
C 0. **D** 4.

Bài 5. ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM VÀ KHẢO SÁT HÀM SỐ ĐỂ GIẢI QUYẾT MỘT SỐ BÀI TOÁN THỰC TIỄN

A. LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1. Tốc độ thay đổi của một đại lượng

Ta có đạo hàm $f'(a)$ là tốc độ thay đổi tức thời của đại lượng $y = f(x)$ đối với x tại điểm $x = a$. Dưới đây, chúng ta xem xét một số ứng dụng của ý tưởng này đối với vật lí, hoá học, sinh học và kinh tế:

- Nếu $s = s(t)$ là hàm vị trí của một vật chuyển động trên một đường thẳng thì $v = s'(t)$ biểu thị vận tốc tức thời của vật (tốc độ thay đổi của độ dịch chuyển theo thời gian). Tốc độ thay đổi tức thời của vận tốc theo thời gian là gia tốc tức thời của vật:
$$a(t) = v'(t) = s''(t).$$
- Nếu $C = C(t)$ là nồng độ của một chất tham gia phản ứng hoá học tại thời điểm t, thì $C'(t)$ là tốc độ phản ứng tức thời (tức là độ thay đổi nồng độ) của chất đó tại thời điểm t.
- Nếu $P = P(t)$ là số lượng cá thể trong một quần thể động vật hoặc thực vật tại thời điểm t, thì $P'(t)$ biểu thị tốc độ tăng trưởng tức thời của quần thể tại thời điểm t.
- Nếu $C = C(x)$ là hàm chi phí, tức là tổng chi phí khi sản xuất x đơn vị hàng hoá, thì tốc độ thay đổi tức thời $C'(x)$ của chi phí đối với số lượng đơn vị hàng được sản xuất được gọi là chi phí biên.
- Về ý nghĩa kinh tế, chi phí biên $C'(x)$ xấp xỉ với chi phí để sản xuất thêm một đơn vị hàng hoá tiếp theo, tức là đơn vị hàng hoá thứ $x + 1$ (xem SGK Toán 11 tập hai, trang 87, bộ sách Kết nối tri thức với cuộc sống).

2. Bài toán tối ưu hóa

Một trong những ứng dụng phổ biến nhất của đạo hàm là cung cấp một phương pháp tổng quát, hiệu quả để giải những bài toán tối ưu hoá. Trong mục này, chúng ta sẽ giải quyết những vấn đề thường gặp như tối đa hoá diện tích, khối lượng, lợi nhuận, cũng như tối thiểu hoá khoảng cách, thời gian, chi phí.
Khi giải những bài toán như vậy, khó khăn lớn nhất thường là việc chuyển đổi bài toán thực tế cho bằng lời thành bài toán tối ưu hoá toán học bằng cách thiết lập một hàm số phù hợp mà ta cần tìm giá trị lớn nhất hoặc giá trị nhỏ nhất của nó, trên miền biến thiên phù hợp của biến số.
Quy trình giải một số bài toán tối ưu hoá đơn giản:

- **Bước 1.** Xác định đại lượng Q mà ta cần làm cho giá trị của đại lượng ấy lớn nhất hoặc nhỏ nhất và biểu diễn nó qua các đại lượng khác trong bài toán.
- **Bước 2.** Chọn một đại lượng thích hợp nào đó, kí hiệu là x, và biểu diễn các đại lượng khác ở **Bước 1** theo x. Khi đó, đại lượng Q sẽ là hàm số của một biến x. Tìm tập xác định của hàm số $Q = Q(x)$.
- **Bước 3.** Tìm giá trị lớn nhất hoặc giá trị nhỏ nhất của hàm số $Q = Q(x)$ bằng các phương pháp đã biết và kết luận.

QUICK NOTE

QUICK NOTE

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Dạng 5. Bài toán về tốc độ thay đổi của một đại lượng

VÍ DỤ 1. Khi bỏ qua sức cản của không khí, độ cao (mét) của một vật được phóng thẳng đứng lên trên từ điểm cách mặt đất 2 m với vận tốc ban đầu 24,5 m/s là $h(t) = 2 + 24{,}5t - 4{,}9t^2$ (theo Vật lí đại cương, NXB Giáo dục Việt Nam, 2016).

a) Tìm vận tốc của vật sau 2 giây.

b) Khi nào vật đạt độ cao lớn nhất và độ cao lớn nhất đó là bao nhiêu?

c) Khi nào thì vật chạm đất và vận tốc của vật lúc chạm đất là bao nhiêu?

VÍ DỤ 2. Xét phản ứng hóa học tạo ra chất C từ hai chất A và B: $A + B \longrightarrow C$. Giả sử nồng độ của hai chất A và B bằng nhau $[A] = [B] = a$ (mol/l). Khi đó, nồng độ của chất C theo thời gian t $(t > 0)$ được cho bởi công thức: $[C] = \dfrac{a^2Kt}{aKt+1}$ (mol/l), trong đó K là hằng số dương.

a) Tìm tốc độ phản ứng ở thời điểm $t > 0$.

b) Chứng minh nếu $x = [C]$ thì $x'(t) = K(a - x)^2$.

c) Nêu hiện tượng xảy ra với nồng độ các chất khi $t \longrightarrow +\infty$.

d) Nêu hiện tượng xảy ra với tốc độ phản ứng khi $t \longrightarrow +\infty$.

VÍ DỤ 3. Giả sử số lượng của một quần thể nấm men tại môi trường nuôi cấy trong phòng thí nghiệm được mô hình hoá bằng hàm số $P(t) = \dfrac{a}{b + \mathrm{e}^{-0{,}75t}}$, trong đó thời gian t được tính bằng giờ. Tại thời điểm ban đầu $t = 0$, quần thể có 20 tế bào và tăng với tốc độ 12 tế bào/giờ. Tìm các giá trị của a và b. Theo mô hình này, điều gì xảy ra với quần thể nấm men về lâu dài?

VÍ DỤ 4. Giả sử chi phí $C(x)$ (nghìn đồng) để sản xuất x đơn vị của một loại hàng hoá nào đó được cho bởi hàm số $C(x) = 30\,000 + 300x - 2{,}5x^2 + 0{,}125x^3$.

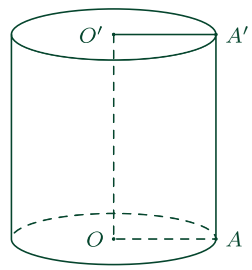
a) Tìm hàm chi phí biên.

b) Tìm $C'(200)$ và giải thích ý nghĩa.

c) So sánh $C'(200)$ với chi phí sản xuất đơn vị hàng hoá thứ 201.

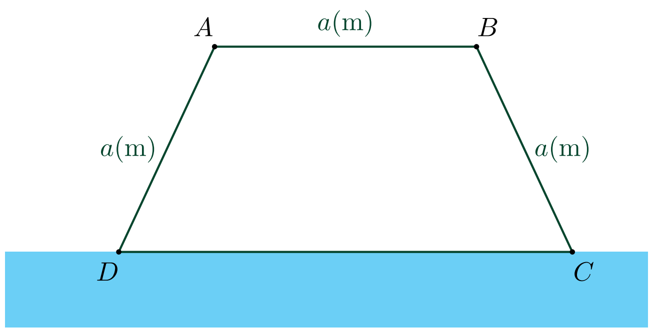
Dạng 6. Bài toán tối ưu hoá đơn giản

VÍ DỤ 1.
Một nhà sản xuất cần làm những hộp đựng hình trụ có thể tích 1 lít. Tìm các kích thước của hộp đựng để chi phí vật liệu dùng để sản xuất là nhỏ nhất (kết quả được tính theo centimét và làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai).



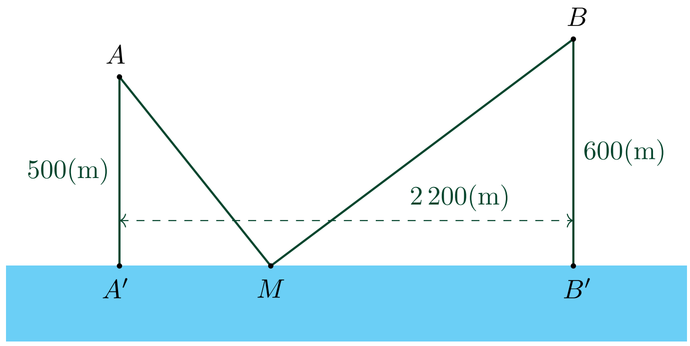
VÍ DỤ 2. Một bác nông dân có ba tấm lưới B40, mỗi tấm dài a (m) và muốn rào một mảnh vườn dọc bờ sông có dạng hình thang cân $ABCD$ như *Hình 36* (bờ sông là đường thẳng CD không phải rào). Hỏi bác đó có thể rào được mảnh vườn có diện tích lớn nhất là bao nhiêu mét vuông?

QUICK NOTE



Hình 36

VÍ DỤ 3. Có hai xã A, B cùng ở một bên bờ sông Lam, khoảng cách từ hai xã đó đến bờ sông lần lượt là $AA' = 500$ m, $BB' = 600$ m và người ta đo được $A'B' = 2\,200$ m *Hình 37*. Các kĩ sư muốn xây một trạm cung cấp nước sạch nằm bên bờ sông Lam cho dân hai xã. Để tiết kiệm chi phí, các kĩ sư cần phải chọn vị trí M của trạm cung cấp nước sạch đó trên đoạn $A'B'$ sao cho tổng khoảng cách từ hai xã đến vị trí M là nhỏ nhất. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của tổng khoảng cách đó.



Hình 37

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

BÀI 1. Một tàu đổ bộ tiếp cận Mặt Trăng theo cách tiếp cận thẳng đứng và đốt cháy các tên lửa hãm ở độ cao 250 km so với bề mặt của Mặt Trăng.
Trong khoảng 50 giây đầu tiên kể từ khi đốt cháy các tên lửa hãm, độ cao h của con tàu so với bề mặt của Mặt Trăng được tính (gần đúng) bởi hàm $h(t) = -0{,}01t^3 + 1{,}1t^2 - 30t + 250$, trong đó t là thời gian tính bằng giây và h là độ cao tính bằng kilômét.
(Nguồn: A. Bigalke et al., Mathematik, Grundkurs ma-1, Cornelsen 2016).

a) Vẽ đồ thị của hàm số $y = h(t)$ với $0 \le t \le 50$ (đơn vị trên trục hoành là 10 giây, đơn vị trên trục tung là 10 km).

b) Gọi $v(t)$ là vận tốc tức thời của con tàu ở thời điểm t (giây) kể từ khi đốt cháy các tên lửa hãm với $(0 \le t \le 50)$. Xác định hàm số $v(t)$.

c) Vận tốc tức thời của con tàu lúc bắt đầu hãm phanh là bao nhiêu? Tại thời điểm $t = 25$ (giây) là bao nhiêu?

d) Tại thời điểm $t = 25$ (giây), vận tốc tức thời của con tàu vẫn giảm hay đang tăng trở lại?

e) Tìm thời điểm t $(0 \le t \le 50)$ sao cho con tàu đạt khoảng cách nhỏ nhất so với bề mặt của Mặt Trăng. Khoảng cách nhỏ nhất này là bao nhiêu?

BÀI 2. Để loại bỏ $x\%$ chất gây ô nhiễm không khí từ khí thải của một nhà máy, người ta ước tính chi phí cần bỏ ra là

$$C(x) = \frac{300x}{100 - x} \text{ (triệu đồng)}, \ 0 \le x < 100.$$

Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = C(x)$. Từ đó, hãy cho biết:

a) Chi phí cần bỏ ra sẽ thay đổi như thế nào khi x tăng?

QUICK NOTE

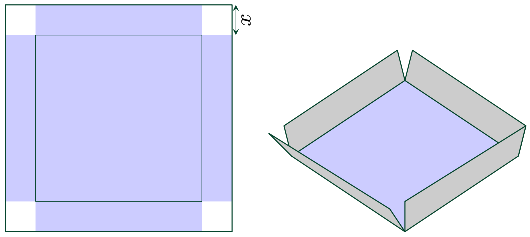
b) Có thể loại bỏ được 100% chất gây ô nhiễm không khí không? Vì sao?

BÀI 3. Khi máu di chuyển từ tim qua các động mạch chính rồi đến các mao mạch và quay trở lại qua các tĩnh mạch, huyết áp tâm thu (tức là áp lực của máu lên động mạch khi tim co bóp) liên tục giảm xuống. Giả sử một người có huyết áp tâm thu P (tính bằng mmHg) được cho bởi hàm số

$$P(t) = \frac{25t^2 + 125}{t^2 + 1}, 0 \leq t \leq 10,$$

trong đó thời gian t được tính bằng giây. Tính tốc độ thay đổi của huyết áp sau 5 giây kể từ khi máu rời tim.

BÀI 4. Bạn Việt muốn dùng tấm bìa hình vuông cạnh 6 dm làm một chiếc hộp không nắp, có đáy là hình vuông bằng cách cắt bỏ đi 4 hình vuông nhỏ ở bốn góc của tấm bìa (Hình bên dưới).



Bạn Việt muốn tìm độ dài cạnh hình vuông cần cắt bỏ để chiếc hộp đạt thể tích lớn nhất.

a) Hãy thiết lập hàm số biểu thị thể tích hộp theo x với x là độ dài cạnh hình vuông cần cắt đi.

b) Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số tìm được.
Từ đó, hãy tư vấn cho bạn Việt cách giải quyết vấn đề và giải thích vì sao cần chọn giá trị này. (Làm tròn kết quả đến hàng phần mười.)

LỜI GIẢI CHI TIẾT

Bài 4. KHẢO SÁT SỰ BIẾN THIÊN VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ

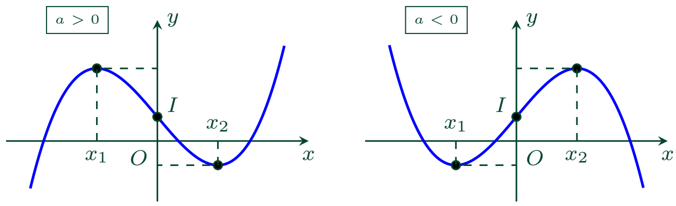
A. LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1. Khảo sát hàm số y= f(x)

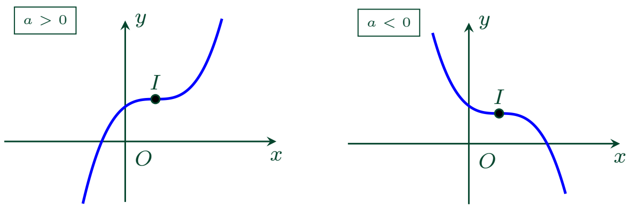
- **Bước 1.** Tìm tập xác định của hàm số.
- **Bước 2.** Khảo sát sự biến thiên của hàm số
  - Tính đạo hàm y'. Tìm các điểm mà tại đó y' bằng 0 hoặc đạo hàm không tồn tại.
  - Tìm các giới hạn tại vô cực, giới hạn vô cực và tìm tiệm cận của đồ thị hàm số.
  - Lập bảng biến thiên; xác định chiều biến thiên và cực trị của hàm số.
- **Bước 3.** Cho thêm điểm và vẽ đồ thị của hàm số dựa vào bảng biến thiên.

2. Hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$

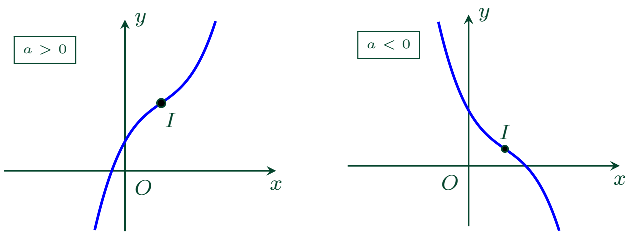
- **TH1.** $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1 và x_2. Khi đó, hàm số có hai điểm cực trị $x = x_1$ và $x = x_2$.



- **TH2.** $y' = 0$ có nghiệm kép x_0. Khi đó, hàm số không có cực trị.



- **TH3.** $y' = 0$ vô nghiệm. Khi đó, hàm số không có cực trị.



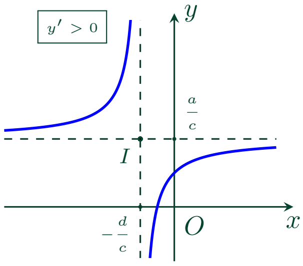
GHI NHỚ

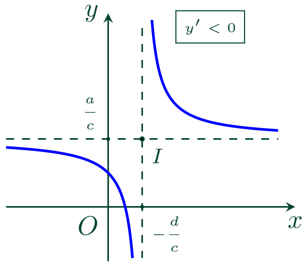
① Liên hệ tổng tích hai nghiệm của y' $\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{2b}{3a} \\ x_1x_2 = \dfrac{c}{3a} \end{cases}$

② Tâm đối xứng của đồ thị là trung điểm của đoạn nối 2 điểm cực trị. Hoành độ tâm đối xứng là nghiệm phương trình $y'' = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{b}{3a}$.

3. Hàm số $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(c \neq 0, ad - bc \neq 0)$

- Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{d}{c}\right\}$; Đạo hàm $y' = \dfrac{ad-cb}{(cx+d)^2}$.
- Đồ thị nhận giao điểm của hai đường tiệm cận làm tâm đối xứng.
- Hình dạng đồ thị:





GHI NHỚ

① Tiệm cận đứng $x = -\dfrac{d}{c}$.

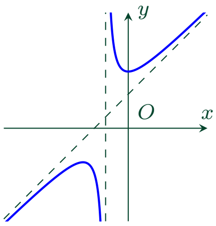
② Tiệm cận ngang $y = \dfrac{a}{c}$.

③ Giao với Ox: $y = 0 \Rightarrow x = -\dfrac{b}{a}$.

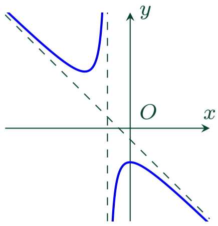
④ Giao với Oy: $x = 0 \Rightarrow y = \dfrac{b}{d}$.

4. Hàm số $y = \dfrac{ax^2+bx+c}{dx+e}$ $(a \neq 0, e \neq 0)$ (đa thức tử không chia hết cho đa thức mẫu)

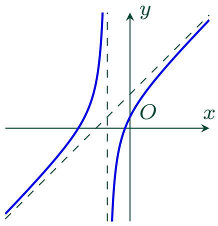
- Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{e}{d}\right\}$; Đạo hàm $y' = \dfrac{adx^2+2aex+be-cd}{(dx+e)^2}$.
- Hàm số 2 điểm cực trị khi $y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt; Hàm số không có cực trị khi $y' = 0$ vô nghiệm.
- Đồ thị nhận giao điểm của tiệm cận đứng và tiệm cận xiên làm tâm đối xứng.
- Hình dạng đồ thị:



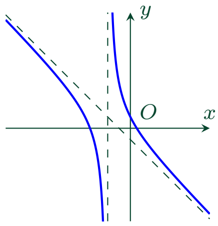
$a > 0$, $y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt



$a < 0$, $y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt



$a > 0$, $y' = 0$ vô nghiệm



$a < 0$, $y' = 0$ vô nghiệm

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Dạng 1. Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số bậc ba

Ta khảo sát theo sơ đồ đã nhắc đến ở phần lý thuyết.

BÀI TẬP TỰ LUẬN

VÍ DỤ 1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị các hàm số sau:

a) $y = x^3 - 3x^2 + 1$;

b) $y = -2x^3 - 3x^2 + 1$;

c) $y = x^3 + 3x^2 + 3x + 2$;

d) $y = x^3 - 3x^2 + 4x - 2$.

Lời giải.

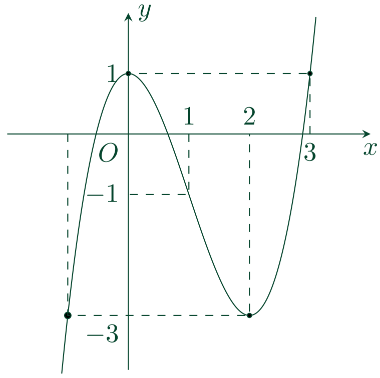
a) Tập xác định $\mathbb{R}$.
Sự biến thiên:

- $y' = 3x^2 - 6x$; $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2. \end{array}\right.$.
- Giới hạn: $\lim\limits_{x \to -\infty} y = -\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} y = +\infty$.
- Bảng biến thiên như hình bên:
Suy ra hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; 0)$ và $(2; +\infty)$; nghịch biến trên $(0; 2)$.
Hàm số đạt cực đại tại $x = 0; y_{\text{CĐ}} = 1$; hàm số đạt cực tiểu tại $x = 2; y_{\text{CT}} = -3$.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

Đồ thị:

- Đồ thị đi qua các điểm $(2; -3)$, $(-1; -3)$, $(3; 1)$
- Đồ thị nhận điểm $I(1; -1)$ làm tâm đối xứng.



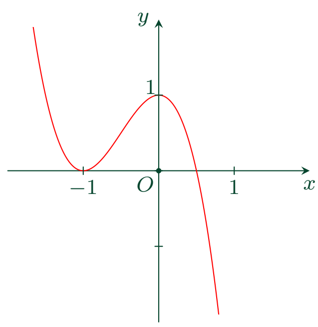
b) Tập xác định: $\mathbb{R}$.
Sự biến thiên:

- $y' = -6x^2 - 6x$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = -1$.
- Giới hạn: $\lim\limits_{x \to -\infty} y = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} y = -\infty$.
- Bảng biến thiên như hình bên:
Suy ra hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(0; +\infty)$; đồng biến trên $(-1; 0)$.
Hàm số đạt cực đại tại $x = 0; y_{\text{CĐ}} = 1$; hàm số đạt cực tiểu tại $x = -1; y_{\text{CT}} = 0$.

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

Đồ thị:

- Đồ thị qua các điểm $(1; -4)$, $(-2; 5)$.
- Đồ thị của hàm số có tâm đối xứng là điểm $I\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$



c) Tập xác định $\mathbb{R}$.
Sự biến thiên:

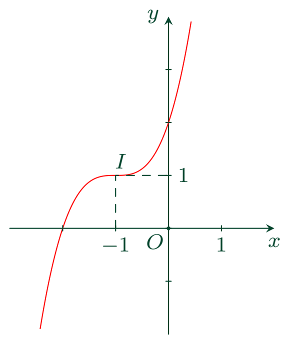
- $y' = 3x^2 + 6x + 3$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = -1$.
- Giới hạn: $\lim\limits_{x \to -\infty} y = -\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} y = +\infty$.

- Bảng biến thiên như hình bên:
  Suy ra hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.
  Hàm số không có cực trị.

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y'		$+$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Đồ thị:

Đồ thị của hàm số có tâm đối xứng là điểm $I\,(-1;1)$



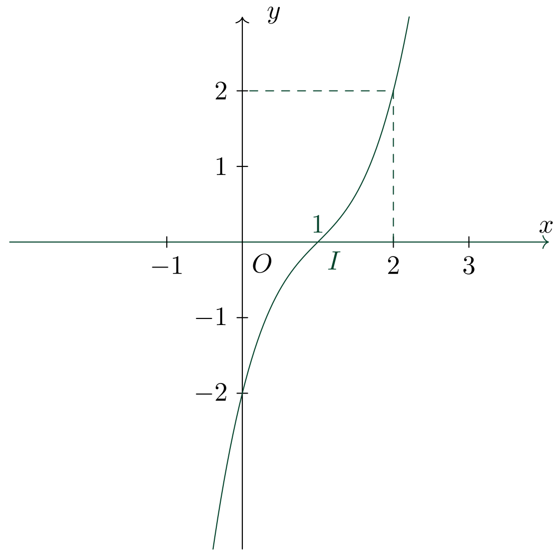
d) Tập xác định: $\mathbb{R}$.
Sự biến thiên

- $y' = 3x^2 - 6x + 4 > 0$ với $\forall x \in \mathbb{R}$.
- Giới hạn: $\lim\limits_{x\to-\infty} y = -\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} y = +\infty$
- Bảng biến thiên như hình bên:
  Suy ra hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.
  Hàm số không có cực trị.

x	$-\infty$		$+\infty$
y'		$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

Đồ thị

- Đồ thị đi qua $(2;2)$, $(0;-2)$, $(1;0)$.
- Đồ thị nhận $I(1;0)$ làm tâm đối xứng.



BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.

CÂU 1.
Bảng biến thiên ở hình bên là của một trong bốn hàm số sau đây. Hỏi đó là hàm số nào?

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	5	↘	1	↗	$+\infty$

(A) $y = -x^3 - 2x^2 + 5$.
(B) $y = x^3 - 3x^2 + 5$.
(C) $y = -x^3 - 3x + 5$.
(D) $y = x^3 + 3x^2 + 5$.

CÂU 2.
Bảng biến thiên ở hình bên là của một trong bốn hàm số sau đây. Hỏi đó là hàm số nào?

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	↘	1	↗	5	↘	$-\infty$

(A) $y = -x^3 + 3x^2$.
(B) $y = x^3 - 3x^2 - 1$.
(C) $y = x^4 + 2x^2 + 1$.
(D) $y = -x^3 + 3x^2 + 1$.

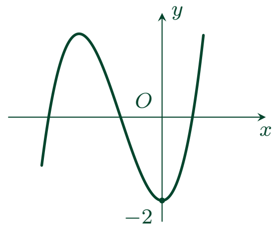
Lời giải.
Ta thấy đây là hàm số bậc ba và $\lim\limits_{x \to -\infty} = -\infty$ nên $a < 0$.
Ta có $f(0) = 1$ nên hàm số cần tìm là $y = -x^3 + 3x^2 + 1$.
Chọn đáp án (D) .... □

CÂU 3.
Bảng biến thiên ở hình bên là của một trong bốn hàm số sau đây. Hỏi đó là hàm số nào?

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	2	↗	$+\infty$

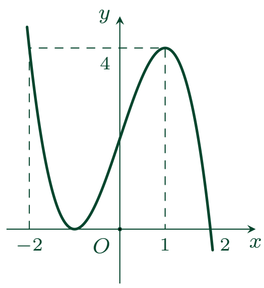
(A) $y = x^3 - 3x^2 + x + 3$.
(B) $y = x^3 - 3x + 4$.
(C) $y = x^3 - 3x^2 + 3x + 1$.
(D) $y = x^3 + 3x^2 + 5$.

CÂU 4.
Đường cong bên là đồ thị của một trong bốn hàm số đã cho sau đây. Hỏi đó là hàm số nào?
(A) $y = -x^3 + x^2 - 2$. (B) $y = x^3 + 3x^2 - 2$. (C) $y = x^3 - 3x + 2$. (D) $y = x^2 - 3x - 2$.



Lời giải.
Dựa vào hình dáng đồ thị, ta thấy đây là đồ thị của hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ với $a > 0$ nên loại các hàm $y = x^4 + x^2 - 2$, $y = -x^2 - 3x - 2$. Mặt khác, đồ thị đi qua điểm $(0; -2)$ nên loại hàm $y = x^3 - 3x + 2$.
(Ngoài ra, ta có thể đánh giá dấu của các hệ số a, b, c thông qua hoành độ 2 điểm cực trị và hoành độ trung điểm của hai điểm cực trị. Trong đồ thị này ta còn thấy hàm số có điểm cực tiểu $x = 0$ nên $c = 0$)
Chọn đáp án (B) .... □

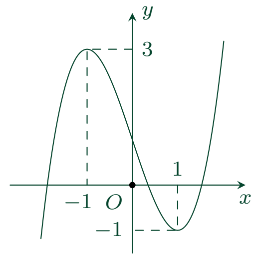
CÂU 5.
Đường cong bên là đồ thị của một trong bốn hàm số đã cho sau đây. Hỏi đó là hàm số nào?
(A) $y = x^3 + 3x - 2$.
(B) $y = x^3 - 3x + 2$.
(C) $y = -x^3 + 3x + 2$.
(D) $y = -x^3 - 3x - 2$.



Lời giải.
Quan sát đồ thị, ta thấy nhánh cuối của đồ thị hướng xuống dưới nên $\lim\limits_{x \to +\infty} y = -\infty$, suy ra hệ số $a < 0$. Như vậy hai hàm số $y = x^3 + 3x - 2; y = x^3 - 3x + 2$ không thỏa mãn.
Mặt khác hàm số có hai điểm cực trị nên hàm số $y = -x^3 - 3x - 2$ có $y' = -3x^2 - 3 < 0\ \forall x \in \mathbb{R}$ không thỏa mãn.
Chọn đáp án (C) .... □

CÂU 6.

Đường cong bên là đồ thị của một trong bốn hàm số đã cho sau đây. Hỏi đó là hàm số nào?



A $y = -x^3 + 3x^2 + 1$. **B** $y = -x^2 - 3x - 1$.

C $y = x^4 + 2x^2 - 1$. **D** $y = x^3 - 3x + 1$.

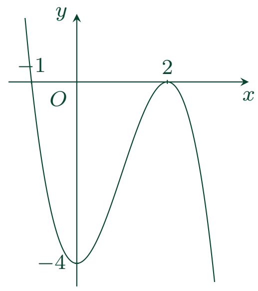
Lời giải.

Đường cong trong hình là đồ thị của hàm số bậc ba có hệ số $a < 0$. Trong các hàm số đã cho, chỉ có duy nhất hàm số $y = x^3 - 3x + 1$ thỏa mãn.

Chọn đáp án D .... □

CÂU 7.

Đường cong bên là đồ thị của một trong bốn hàm số đã cho sau đây. Hỏi đó là hàm số nào?



A $y = x^3 - 3x^2 - 4$. **B** $y = -x^3 - 4$.

C $y = -x^3 + 3x^2 - 2$. **D** $y = -x^3 + 3x^2 - 4$.

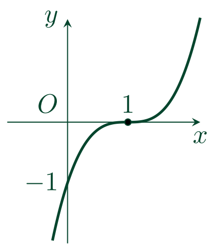
Lời giải.

- Đồ thị hàm số có dạng chữ N ngược nên đây là đồ thị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ với $a < 0$. Loại phương án $y = x^3 - 3x^2 - 4$.
- Đồ thị hàm số giao Oy tại điểm có tung độ bằng -4 nên $d = -4$, loại phương án $y = -x^3 + 3x^2 - 2$.
- Hàm số có hai điểm cực trị $x = 0, x = 2$ nên loại phương án $y = -x^3 - 4$ (vì phương án này có $y' = -3x^2$, hàm số không có điểm cực trị).

Chọn đáp án D .... □

CÂU 8.

Đường cong bên là đồ thị của một trong bốn hàm số đã cho sau đây. Hỏi đó là hàm số nào?



A $y = x^3 - 1$. **B** $y = (x+1)^3$.

C $y = (x-1)^3$. **D** $y = x^3 + 1$.

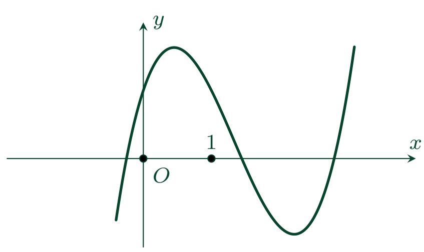
Lời giải.

(C) tiếp xúc với Ox tại điểm uốn, suy ra $f(x)$ có nghiệm bội ba $x = 1$ nên hàm số có dạng $y = a(x-1)^3$. Mà $(0; -1) \in (C)$ nên $a = 1$.

Chọn đáp án C .... □

CÂU 9.

Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây là đúng?



A $a > 0,\ b > 0,\ c > 0,\ d > 0$. **B** $a < 0,\ b < 0,\ c > 0,\ d > 0$.

C $a > 0,\ b < 0,\ c < 0,\ d > 0$. **D** $a > 0,\ b < 0,\ c > 0,\ d > 0$.

Lời giải.

Nhìn vào đồ thị, ta thấy đồ thị hàm số đi từ $-\infty$ lên $+\infty$ nên $a > 0$.

Giao điểm với trục tung nằm trên trục hoành, do đó $d > 0$.

Hàm số có hai điểm cực trị, và hai điểm cực trị đều dương. Suy ra tổng hai điểm cực trị và tích hai điểm cực trị đều dương.

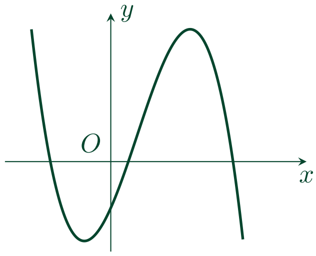
Ta có $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ nên tổng hai điểm cực trị là $\dfrac{-2b}{3a}$. Suy ra $\dfrac{-2b}{3a} > 0$, hay $b < 0$.

Còn tích hai điểm cực trị là $\dfrac{c}{3a}$. Suy ra $\dfrac{c}{3a} > 0$ hay $c > 0$.

Chọn đáp án D .... □

CÂU 10.

Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây đúng?



A $a < 0,\ b < 0,\ c < 0,\ d > 0$. **B** $a < 0,\ b > 0,\ c < 0,\ d > 0$.

C $a < 0,\ b > 0,\ c > 0,\ d < 0$. **D** $a < 0,\ b < 0,\ c > 0,\ d < 0$.

Lời giải.

Dựa vào hình dáng đồ thị suy ra $a < 0$.

Dựa vào vị trí điểm cực đại và điểm cực tiểu, suy ra $x_{\text{CT}} + x_{\text{CĐ}} > 0 \Rightarrow -\dfrac{b}{a} > 0 \Rightarrow b > 0$.

Hai điểm cực trị có hoành độ trái dấu nên $x_{\text{CT}} \cdot x_{\text{CĐ}} < 0 \Rightarrow \dfrac{c}{a} < 0 \Rightarrow c > 0$.

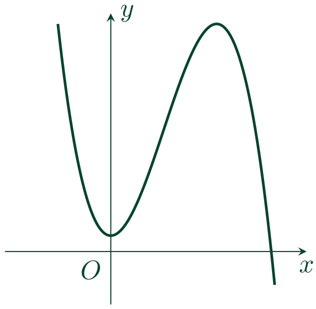
Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ dương nên $d > 0$.

Vậy $a < 0,\ b > 0,\ c > 0$ và $d > 0$.

Chọn đáp án C .... □

CÂU 11.

Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A $a < 0,\ b > 0,\ c > 0,\ d > 0$. **B** $a < 0,\ b < 0,\ c = 0,\ d > 0$.

C $a < 0,\ b > 0,\ c = 0,\ d > 0$. **D** $a > 0,\ b < 0,\ c > 0,\ d > 0$.

Lời giải.

Dựa vào đồ thị ta có thể thấy $a < 0$, đồ thị cắt trục tung tại điểm có tung độ dương nên $d > 0$.

Hàm số có hai cực trị thỏa $\begin{cases} S > 0 \\ P = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{b}{a} > 0 \\ \dfrac{c}{a} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b > 0 \\ c = 0. \end{cases}$

Chọn đáp án C .... □

CÂU 12.

Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có bảng biến thiên như hình bên. Trong các hệ số a, b, c và d có bao nhiêu số âm?

A 2. **B** 1. **C** 4. **D** 3.

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$		$\searrow$	

Lời giải.

Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số có 2 điểm cực trị nên bậc của đa thức phải lớn hơn $2 \Rightarrow a \neq 0$. Mà $\lim\limits_{x \to +\infty} y = -\infty \Rightarrow a < 0$.

Từ bảng biến thiên ta có $d = y(0) > y(-1) = 0$.

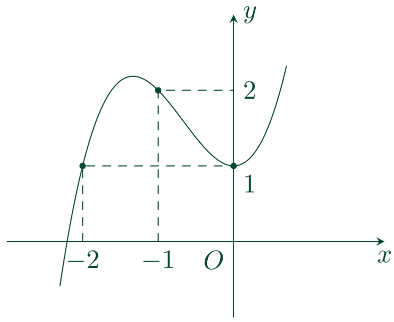
Ta có $y' = 3ax^2 + 2bx + c$ có hai nghiệm là -1 và 2 nên $\begin{cases} -\dfrac{2b}{3a} = -1 + 2 = 1 > 0 \\ \dfrac{c}{3a} = (-1) \cdot 2 = -2 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b > 0 \\ c > 0. \end{cases}$

Chọn đáp án B .... □

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.

CÂU 13.

Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ.



Mệnh đề	Đ	S
a) Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 1$.		X
b) Đồ thị hàm số cắt trục Oy tại điểm $(0; 1)$.	X	
c) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -1)$.		X
d) $2a + 3b + c = 9$.		X

Lời giải.

Theo hình vẽ thì:

a) Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$, giá trị cực tiểu $y = 1$;

b) Đồ thị hàm số cắt trục Oy tại điểm $(0; 1)$;

c) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; x_0)$, với $-2 < x_0 < -1$;

d) Đồ thị qua 3 điểm $(-2; 1)$, $(-1; 2)$, $(0; 1)$ và đạt cực trị tại $x = 1$ nên ta được hệ

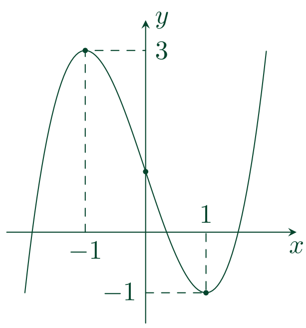
$$\begin{cases} -8a + 4b - 2c + d = 1 \\ -a + b - c + d = 2 \\ d = 1 \\ c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = 1;\ b = 2,\ c = 0,\ d = 1$$

nên $2a + 3b + c = 8$.

Chọn đáp án | a sai | b đúng | c sai | d sai | .... □

CÂU 14.

Cho hàm số bậc ba $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ.
Tính tổng $T =$.



Mệnh đề	Đ	S
a) Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm $(0; 1)$.	X	
b) Đường thẳng đi qua điểm $(0; 1)$ luôn cắt đồ thị tại ba điểm phân biệt có hoành độ lập thành 1 cấp số cộng.	X	
c) $a - b + c + d = -1$.	X	
d) Đồ thị hàm số đi qua điểm $(3; 18)$.		X

Lời giải.

a) Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị $(-1; 3)$ và $(1; -1)$. Suy ra tọa độ tâm đối xứng là $(0; 1)$. Suy ra đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm $(0; 1)$

b) Do $I(0; 1)$ là tâm đối xứng của đồ thị, nên đường thẳng qua nó sẽ cắt đồ thị tại ba điểm phân biệt I, A, B với I là trung điểm của AB. Suy ra $x_A + x_B = 2x_I$. Vậy ba điểm này có hoành độ lập thành 1 cấp số cộng.

c) Ta có $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$. Từ hình vẽ, ta có

$$\begin{cases} f(-1) = 3 \\ f(1) = -1 \\ f'(-1) = 0 \\ f'(1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a + b - c + d = 3 \\ a + b + c + d = -1 \\ 3a - 2b + c = 0 \\ 3a + 2b + c = 0 \end{cases}$$

Giải hệ, ta được $a = 1$, $b = 0$, $c = -3$,$d = 1$. Vậy $T = a - b + c + d = -1$.

d) Ta có $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$. Từ hình vẽ, ta có

$$\begin{cases} f(-1) = 3 \\ f(1) = -1 \\ f'(-1) = 0 \\ f'(1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a + b - c + d = 3 \\ a + b + c + d = -1 \\ 3a - 2b + c = 0 \\ 3a + 2b + c = 0 \end{cases}$$

Giải hệ, ta được $a = 1$, $b = 0$, $c = -3$,$d = 1$. Suy ra $y = x^2 - 3x + 1$.
Thay tọa độ $(3; 18)$ vào phương trình, không thỏa mãn. Vậy đồ thị hàm số không đi qua điểm $(3; 18)$.

Chọn đáp án | a đúng | b đúng | c đúng | d sai | .... □

CÂU 15.
Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có bảng biến thiên như hình bên.

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$	4	$\searrow$	
			0				$-\infty$

Mệnh đề	Đ	S
a) Hàm số đạt giá trị lớn nhất là 4.		X
b) Đường thẳng $y = 2$ cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại 3 điểm phân biệt.	X	
c) Trong bốn hệ số a, b, c, d có đúng hai số âm.	X	
d) Đồ thị hàm số đi qua điểm $(-4; 20)$.	X	

Lời giải.
Dựa vào bảng biến thiên ta thấy:

a) Hàm số $y = f(x)$ không có giá trị lớn nhất trên $\mathbb{R}$.

b) Vẽ đường thẳng $y = 2$ qua điểm $(0; 2)$ và song song với Ox, rõ ràng đường thẳng này cắt đồ thị tại ba điểm phân biệt.

c) Từ các thông số trên hình, ta có thể giải ra chính xác giá trị a, b, c, d bởi hệ

$$\begin{cases} f(-2) = 0 \\ f(0) = 4 \\ f'(-2) = 0 \\ f'(0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = -1,\ b = -3,\ c = 0,\ d = 4.$$

Vậy trong 4 hệ số, có đúng 2 số âm.

d) Từ các thông số trên hình, ta có thể giải ra chính xác giá trị a, b, c, d bởi hệ

$$\begin{cases} f(-2) = 0 \\ f(0) = 4 \\ f'(-2) = 0 \\ f'(0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = -1,\ b = -3,\ c = 0,\ d = 4.$$

Suy ra $y = -x^3 - 3x^2 + 4$. Thay tọa độ $(-4; 20)$ vào phương trình, thỏa mãn. Suy ra Đồ thị hàm số đi qua điểm $(-4; 20)$.

Chọn đáp án | a sai | b đúng | c đúng | d đúng | .... □

Dạng 2. Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số phân thức hữu tỉ bậc I/I

Ta khảo sát theo sơ đồ

- **Bước 1.** Tìm tập xác định $D = \mathbb{R} \backslash \left\{ -\dfrac{d}{c} \right\}$.
- **Bước 2.** Khảo sát sự biến thiên của hàm số
  - Tính đạo hàm $y' = \dfrac{ad - cb}{(cx + d)^2}$.
  - Tìm các giới hạn tại vô cực, giới hạn vô cực và tìm tiệm cận của đồ thị hàm số.
  - Lập bảng biến thiên; xác định chiều biến thiên và cực trị của hàm số.
- **Bước 3.** Cho thêm điểm và vẽ đồ thị của hàm số dựa vào bảng biến thiên.

BÀI TẬP TỰ LUẬN

VÍ DỤ 1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị các hàm số sau:

a) $y = \dfrac{x-1}{x+1}$; b) $y = \dfrac{2x+1}{x-1}$; c) $y = \dfrac{5+x}{2-x}$.

Lời giải.

a) Tập xác định: $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$.
Sự biến thiên:

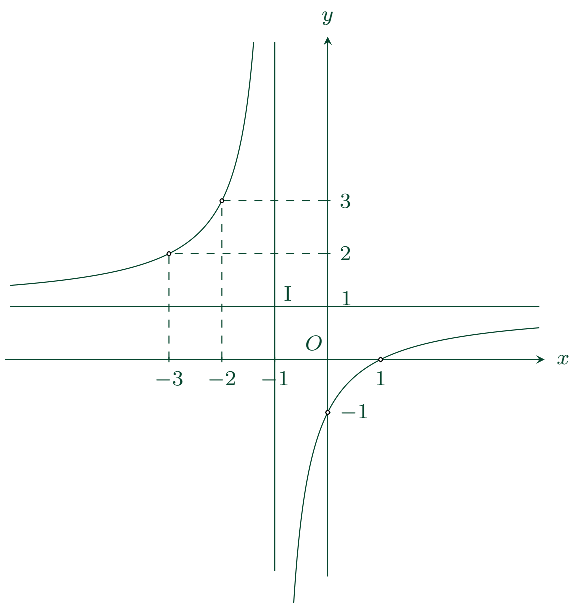
- Đạo hàm $y' = \dfrac{2}{(x+1)^2} > 0$ với mọi $x \neq -1$.
- Giới hạn và tiệm cận:
$\lim\limits_{x\to -1^-} y = +\infty$, $\lim\limits_{x\to -1^+} y = -\infty$. Do đó, đường thẳng $x = -1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.
$\lim\limits_{x\to -\infty} y = 1$, $\lim\limits_{x\to +\infty} y = 1$. Do đó, đường thẳng $y = 1$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.
- Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y'		$+$	‖	$-$	
y	1	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	1

Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty; -1)$ và $(-1; +\infty)$.
Hàm số không có cực trị.

Đồ thị:

- Giao điểm của đồ thị với trục tung: $(0; -1)$.
- Giao điểm của đồ thị với trục hoành: $(1; 0)$.
- Đồ thị hàm số đi qua các điểm $(0; -1)$, $(1; 0)$, $(-3; 2)$, $(-2; 3)$.



b) Tập xác định $\mathbb{R}\backslash\{1\}$.
Sự biến thiên:

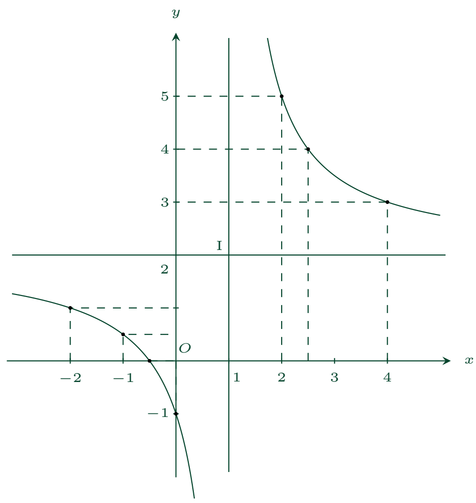
- Đạo hàm: $y' = \dfrac{-3}{(x-1)^2} < 0$ với mọi $x \neq 1$.
- Giới hạn và các đường tiệm cận:
$\lim\limits_{x\to 1^-} y = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 1^+} y = +\infty$. Do đó, đường thẳng $x = 1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.
$\lim\limits_{x\to +\infty} y = 2$, $\lim\limits_{x\to -\infty} y = 2$. Do đó, đường thẳng $y = 2$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.
- Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		$-$	||	$-$	
y	2	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	2

Hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$.
Hàm số không có cực trị.

Đồ thị:

- Giao điểm của đồ thị với trục tung: $(0; -1)$.
- Giao điểm của đồ thị với trục hoành: $\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$.
- Đồ thị hàm số đi qua các điểm $(0; -1)$, $\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$, $(-2; 1)$, $(2; 5)$, $\left(\frac{5}{2}; 4\right)$ và $(4; 3)$.



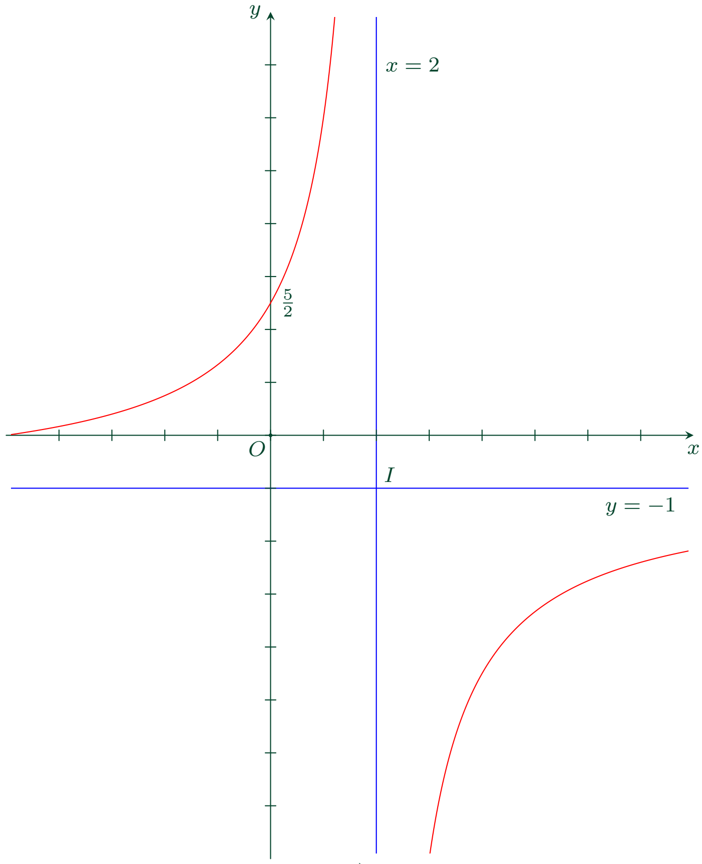
c) Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.
Sự biến thiên:

- Đạo hàm $y' = \dfrac{7}{(-x+2)^2} > 0$, với mọi $x \neq 2$
- Giới hạn và tiệm cận:
$\lim\limits_{x \to 2^-} y = +\infty$, $\lim\limits_{x \to 2^+} y = -\infty$. Do đó, đường thẳng $x = 2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.
$\lim\limits_{x \to +\infty} y = -1$, $\lim\limits_{x \to -\infty} y = -1$. Do đó, đường thẳng $y = -1$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.
- Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		2		$+\infty$
y'		$+$	||	$+$	
y	-1	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	-1

Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 2)$ và $(2; +\infty)$.
Hàm số không có cực trị.

Đồ thị:



c)

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.

CÂU 1.
Hàm số nào trong bốn hàm số dưới đây có bảng biến thiên như hình bên?

x	$-\infty$		2		$+\infty$
y'		$-$	||	$-$	
y	1	↘ $-\infty$	||	$+\infty$ ↘	1

A $y=\dfrac{2x-1}{x+3}$. **B** $y=\dfrac{4x-6}{x-2}$. **C** $y=\dfrac{3-x}{2-x}$. **D** $y=\dfrac{x+5}{x-2}$.

Lời giải.
Xét hàm số $y=\dfrac{x+5}{x-2}$ có

$$\begin{cases} y'=\dfrac{-7}{(x-2)^2}<0, \forall x\in\mathbb{R}\setminus\{2\} \\ \lim\limits_{x\to\pm\infty} y=1. \end{cases}$$

Chọn đáp án D .... □

CÂU 2.
Hàm số nào trong bốn hàm số dưới đây có bảng biến thiên như hình bên?

x	$-\infty$		3		$+\infty$
y'		$+$	||	$+$	
y	-1	↗ $+\infty$	||	$-\infty$ ↗	-1

A $y=\dfrac{x-1}{x-3}$. **B** $y=\dfrac{x-1}{-x-3}$.
C $y=\dfrac{x+5}{-x+3}$. **D** $y=\dfrac{1}{x-3}$.

Lời giải.
Dựa vào bảng biến thiên, ta suy ra

- Hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định.

- Đồ thị hàm số nhận đường thẳng $x = 2$ và đường thẳng $y = 1$ làm tiệm cận đứng và tiệm cận ngang.

Vậy ta nhận hàm số $y = \dfrac{x+5}{x-2}$.

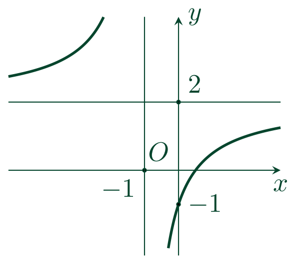
Chọn đáp án (C) ☐

CÂU 3.

Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của một trong bốn hàm số sau. Hỏi đó là hàm số nào?

(A) $y = \dfrac{2x-1}{x+1}$. (B) $y = \dfrac{1-2x}{x+1}$.

(C) $y = \dfrac{2x+1}{x-1}$. (D) $y = \dfrac{2x+1}{x+1}$.



Lời giải.

Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x = -1$ nên loại đáp án $y = \dfrac{2x+1}{x-1}$.

Đồ thị hàm số đi qua điểm $A(0; -1)$ nên loại đáp án $y = \dfrac{1-2x}{x+1}$ và $y = \dfrac{2x+1}{x+1}$.

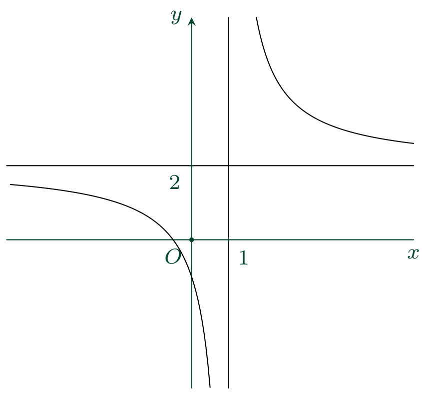
Chọn đáp án (A) ☐

CÂU 4.

Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của một trong bốn hàm số sau. Hỏi đó là hàm số nào?

(A) $y = \dfrac{x-1}{x-2}$. (B) $y = x + 2$.

(C) $y = x^4 - 3x^2 + 1$. (D) $y = \dfrac{2x+1}{x-1}$.



Lời giải.

Đồ thị hàm số như hình vẽ nhận đường thẳng $x = 1$ là tiệm cận đứng.

Do đó, hàm số cần tìm là $y = \dfrac{2x+1}{x-1}$.

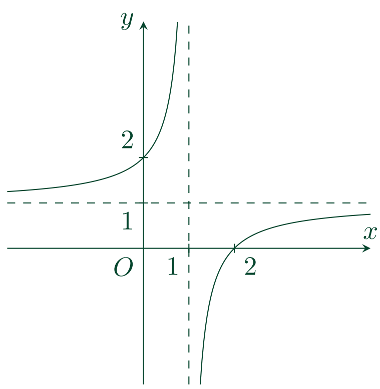
Chọn đáp án (D) ☐

CÂU 5.

Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của một trong bốn hàm số sau. Hỏi đó là đồ thị của hàm số nào?

(A) $y = \dfrac{x-2}{x+1}$. (B) $y = \dfrac{x+2}{x-2}$.

(C) $y = \dfrac{x-2}{x-1}$. (D) $y = \dfrac{x+2}{x-1}$.



Lời giải.

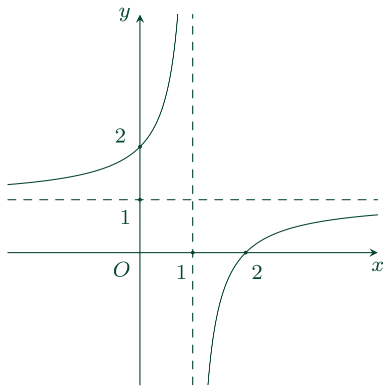
Từ đồ thị ta thấy

- Tiệm cận ngang là $y = 1$, tiệm cận đứng là $x = 1$ nên các hàm số $y = \dfrac{x+2}{x-2}$, $y = \dfrac{x-2}{x+1}$ không thỏa mãn.
- Giao điểm của đồ thị với trục tung là $(0; 2)$ nên hàm số $y = \dfrac{x+2}{x-1}$ không thỏa mãn, hàm số $y = \dfrac{x-2}{x-1}$ thỏa mãn.

Chọn đáp án (C) ☐

CÂU 6.

Cho hàm số $y = \dfrac{ax-b}{x+c}$ $(a, b, c \in \mathbb{R})$ có đồ thị như hình vẽ bên. Giá trị của biểu thức $2a+b-3c$ bằng



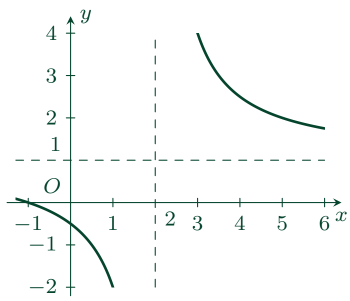
(A) -3.
(B) 4.
(C) 7.
(D) -5.

Lời giải.

Từ đồ thị hàm số ta có:
Đường tiệm cận đứng là $x=1$ nên $-c=1 \Leftrightarrow c=-1$.
Đường tiệm cận ngang là $y=1$ nên $a=1$.
Đồ thị hàm số đi qua điểm $(0;2)$ nên $\dfrac{-b}{c}=2 \Leftrightarrow b=2$.
Vậy $2a+b-3c=2+2+3=7$.
Chọn đáp án (C)

CÂU 7.

Cho hàm số $y=\dfrac{ax+1}{bx-2}$ có đồ thị như hình vẽ. Tính $T=a+b$



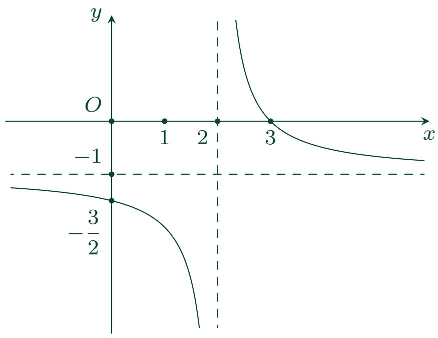
(A) $T=2$.
(B) $T=0$.
(C) $T=-1$.
(D) $T=3$.

Lời giải.

Từ biểu thức của hàm số, suy ra tiệm cận đứng là $x=\dfrac{2}{b}$, tiệm cận ngang là $y=\dfrac{a}{b}$.
Dựa vào hình vẽ, suy ra tiệm cận đứng $x=2$, tiệm cận ngang $y=1$.
Từ hai điều trên suy ra $a=1$, $b=1$. Vậy $T=1+1=2$.
Chọn đáp án (A)

CÂU 8.

Cho hàm số $y=\dfrac{ax-b}{cx+2}$ $(a,\ b,\ c \in \mathbb{R};\ c \neq 0)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Giá trị của biểu thức $a+b+c$ bằng



(A) -3.
(B) 5.
(C) -4.
(D) 3.

Lời giải.

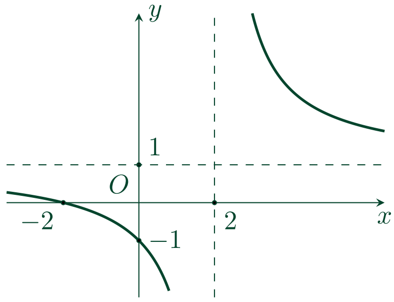
Từ hình vẽ, ta thấy đồ thị hàm số có

- Đường tiệm cận đứng $x=2$, suy ra $-\dfrac{2}{c}=2 \Leftrightarrow c=-1$.
- Đường tiệm cận ngang $y=-1$, suy ra $\dfrac{a}{c}=-1 \Leftrightarrow a=-c=1$.
- Giao điểm với trục Oy tại điểm $\left(0;-\dfrac{3}{2}\right)$, suy ra $-\dfrac{b}{2}=-\dfrac{3}{2} \Leftrightarrow b=3$.

Vậy $a+b+c=1+3-1=3$.
Chọn đáp án (D)

CÂU 9.

Hãy xác định a, b để hàm số $y = \dfrac{2-ax}{x+b}$ có đồ thị như hình vẽ?



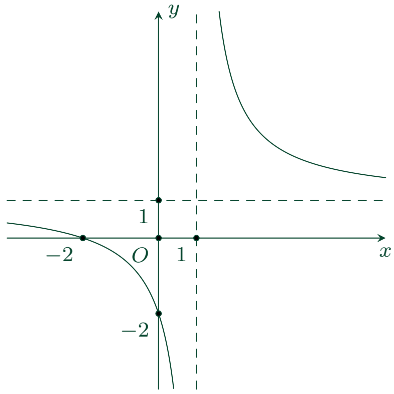
A $a = 1;\ b = -2$.
B $a = b = 2$.
C $a = -1;\ b = -2$.
D $a = b = -2$.

Lời giải.

Đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng là $x = 2$ nên $b + 2 = 0 \Leftrightarrow b = -2$.
Đồ thị hàm số cắt trục hoành tại điểm $(-2; 0)$ nên $2 + 2a = 0 \Rightarrow a = -1$.
Chọn đáp án C .... □

CÂU 10.

Cho đồ thị hàm số $y = \dfrac{ax-b}{x-1}$ như hình vẽ. Tìm khẳng định đúng?



A $a < 0,\ b < 0$.
B $0 < b < a$.
C $b < 0 < a$.
D $a < b < 0$.

Lời giải.

Hàm số có dạng $y = \dfrac{ax-b}{x-1}$.

- Tiệm cận ngang $y = 1 \Rightarrow a = 1$.
- Đồ thị đi qua $(-2; 0) \Rightarrow -2a - b = 0$

Suy ra $b < 0 < a$.
Chọn đáp án C .... □

CÂU 11.

Cho hàm số $y = \dfrac{ax+4}{bx+c}$ $(a,\ b,\ c \in \mathbb{R})$ có bảng biến thiên như sau. Trong các số $a,\ b,\ c$ có bao nhiêu số dương?

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	
$f(x)$	3	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	3

A 0.
B 1.
C 2.
D 3.

Lời giải.

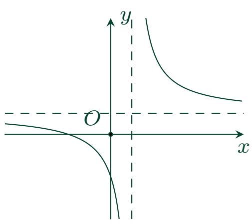
Dựa vào bảng biến thiên, ta có $y(0) > 3 \Rightarrow \dfrac{4}{c} > 0 \Rightarrow c > 0$.

Đồ thị có tiệm cận đứng $x = 1$ và tiệm cận ngang $y = 3$ nên $\begin{cases} -\dfrac{c}{b} > 0 \\ \dfrac{a}{b} > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b < 0 \\ a < 0. \end{cases}$

Vậy $c > 0$, $a < 0$, $b < 0$.
Chọn đáp án B .... □

CÂU 12.

Cho hàm số $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ với $a > 0$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây đúng?



A $b < 0,\ c < 0,\ d < 0$.
B $b > 0,\ c < 0,\ d < 0$.
C $b < 0,\ c > 0,\ d < 0$.
D $b > 0,\ c > 0,\ d < 0$.

Lời giải.

Đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang $y = \frac{a}{c}$ nằm trên trục Ox nên $\frac{a}{c} > 0 \overset{a>0}{\Rightarrow} c > 0$.

Đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng $x = -\frac{d}{c}$ nằm bên phải trục Oy nên $-\frac{d}{c} > 0 \overset{c>0}{\Rightarrow} d < 0$.

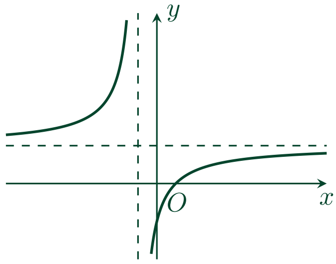
Vậy mệnh đề đúng là "$b > 0$, $c > 0$, $d < 0$".

Chọn đáp án D .... □

CÂU 13.

Hình vẽ bên là đồ thị của hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A $ab > 0, bd < 0$. **B** $ab < 0, ad > 0$. **C** $ab < 0, ad < 0$. **D** $bd > 0, ad > 0$.



Lời giải.

Ta có

- Đường tiệm cận đứng $x = -\frac{d}{c}$. Theo hình vẽ thì $-\frac{d}{c} < 0 \Rightarrow cd > 0$ (1).
- Đường tiệm cận ngang $y = \frac{a}{c}$. Theo hình vẽ thì $\frac{a}{c} < 0 \Rightarrow ac < 0$ (2).
- Giao điểm với trục tung tại điểm có tung độ $y = \frac{b}{d}$. Theo hình vẽ thì $\frac{b}{d} > 0 \Rightarrow bd > 0$ (3).
- Giao điểm với trục hoành tại điểm có hoành độ $x = -\frac{b}{a}$. Theo hình vẽ thì $-\frac{b}{a} > 0 \Rightarrow ab < 0$ (4).

Lấy (3) nhân với (4), ta được $ad \cdot b^2 < 0$. Suy ra $ad < 0$.

Mặt khác theo (4) thì $ab < 0$.

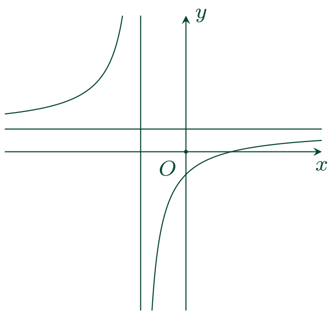
Chọn đáp án C .... □

CÂU 14.

Hình vẽ dưới đây là đồ thị hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ $ac \neq 0$, $ad - cb \neq 0$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A $ad > 0$ và $ab < 0$. **B** $bd < 0$ và $ab > 0$.

C $ad < 0$ và $ab < 0$. **D** $ad > 0$ và $bd > 0$.



Lời giải.

- Đồ thị hàm số cắt trục Oy tại điểm có tung độ âm $\Rightarrow \frac{b}{d} < 0 \Rightarrow bd < 0$.
- Đồ thị hàm số cắt trục Ox tại điểm có hoành độ dương $\Rightarrow -\frac{b}{a} > 0 \Rightarrow ab < 0$.
- Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y = \frac{a}{c} > 0 \Rightarrow ac > 0$. (1)
- Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = -\frac{d}{c} < 0 \Rightarrow cd > 0$. (2)

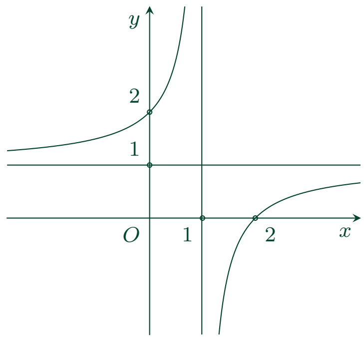
Từ (1) và (2) $\Rightarrow ad > 0$.

Chọn đáp án A .... □

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.

CÂU 15.

Cho hàm số $y=\dfrac{x+a}{bx+c}$, $(a,b,c\in\mathbb{Z})$.



Mệnh đề	Đ	S
a) Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x=1$.	X	
b) Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y=0$.		X
c) Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.		X
d) $a-3b-2c=-3$.	X	

Lời giải.

Căn cứ vào đồ thị, ta có

a) Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x=1$.

b) Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y=1$

c) Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty,1)$ và $(1;+\infty)$

d) Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y=1$ nên $\dfrac{1}{b}=1\Rightarrow b=1$.
Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x=1$ nên $-\dfrac{c}{b}=1$ mà $b=1\Rightarrow c=-1$.
Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm $(0;2)$ nên $\dfrac{a}{c}=2$ mà $c=-1$ nên $a=-2$.
Vậy $T=a-3b-2c=-2-3\cdot 1-2\cdot(-1)=-3$.

Chọn đáp án | a đúng | b sai | c sai | d đúng | .... □

CÂU 16.

Cho hàm số $f(x)=\dfrac{ax-1}{bx+c}$ $(a,b,c\in\mathbb{R})$ có bảng biến thiên như sau.

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	||	$-$	
$f(x)$	$\frac{1}{2}$ $\searrow$	$-\infty$	||	$+\infty$ $\searrow$	$\frac{1}{2}$

Mệnh đề	Đ	S
a) Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty,\dfrac{1}{2}\right)$.	X	
b) Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x=\dfrac{1}{2}$.		X
c) Đồ thị giao với trục hoành tại điểm có hoành độ nhỏ hơn 3.	X	
d) $\left[\begin{array}{l} b>\dfrac{2}{3} \\ b<0 \end{array}\right.$.	X	

Lời giải.

a) Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty,3)$ nên nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty,\dfrac{1}{2}\right)$.

b) Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x=3$.

c) Đồ thị giao với trục hoành tại điểm thuộc nhánh trái của đồ thị, suy ra hoành độ giao điểm này nhỏ hơn 3.

d) Từ bảng biến thiên suy ra

$$\begin{cases} \dfrac{a}{b}=\dfrac{1}{2} \\ -\dfrac{c}{b}=3. \end{cases} \qquad (1)$$

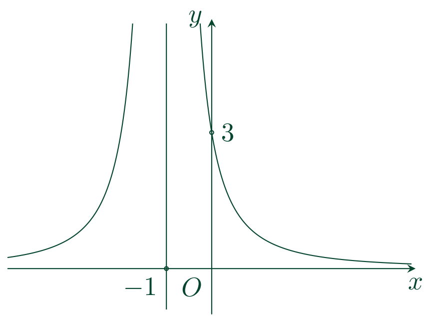
Ta có $y' = \dfrac{ac+b}{(bx+c)^2} < 0, \forall x \neq -\dfrac{c}{b} \Leftrightarrow ac+b<0.$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\dfrac{b}{2}\cdot(-3b)+b<0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b>\dfrac{2}{3} \\ b<0. \end{array}\right.$

Chọn đáp án | a đúng | b sai | c đúng | d đúng | □

CÂU 17.

Cho hàm số $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ với $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ nhận $x=-1$ làm tiệm cận đứng như hình vẽ bên. Biết rằng giá trị lớn nhất của hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $[-3;-2]$ bằng 8.



Mệnh đề	Đ	S
a) $f'(0)=3$.	X	
b) Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-1;+\infty)$.		X
c) Giá trị của $f(-3)$ bằng 8.		X
d) Giá trị của $f(2)$ bằng 4.	X	

Lời giải.

a) Theo hình vẽ, đồ thị $f'(x)$ qua điểm $(0;3)$ nên $f'(0)=3$.

b) Do $f'(x)>0, \forall x\neq -1$ nên hàm số $f(x)$ đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(-1;+\infty)$.

c) Vì $f'(x)>0, \forall x\neq -1 \Rightarrow \max\limits_{[-3;-2]} f(x) = f(-2)=8$. Suy ra $f(-3)\neq 8$.

d) Ta có $f'(x) = \dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}$.

Đồ thị hàm số đi qua điểm $(0;3)$ nên $f'(0)=3 \Leftrightarrow \dfrac{ad-bc}{d^2}=3$.

Mặt khác, đồ thị hàm số $y=f'(x)$ có tiệm cận đứng $x=-1$ nên $-c+d=0$.

Vì $f'(x)>0, \forall x\neq -1 \Rightarrow \max\limits_{[-3;-2]} f(x) = f(-2)=8 \Leftrightarrow \dfrac{-2a+b}{-2c+d}=8$.

Vậy ta có hệ phương trình $\begin{cases} ad-bc=3d^2 \\ -c+d=0 \\ b-2a=8(d-2c) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=d \\ a-b=3d \\ b-2a=-8d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=5d \\ b=2d \\ c=d. \end{cases}$

Từ đó suy ra $f(x) = \dfrac{5\,\mathrm{d}x+2d}{\mathrm{d}x+d} = \dfrac{5x+2}{x+1} \Rightarrow f(2)=4$.

Chọn đáp án | a đúng | b sai | c sai | d đúng | □

Dạng 3. Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số phân thức hữu tỉ bậc II/I

Bước 1. Tập xác định $D=\mathbb{R}\backslash\left\{-\dfrac{n}{m}\right\}$.

Bước 2. Khảo sát sự biến thiên của hàm số

— Tính đạo hàm $y' = \dfrac{am\cdot x^2+2an\cdot x+b.n-m.c}{(mx+n)^2}$. Giải $y'=0 \Leftrightarrow am\cdot x^2+2an\cdot x+b.n-m.c=0$, tìm nghiệm.

— Tìm các giới hạn tại vô cực, giới hạn vô cực và tìm tiệm cận của đồ thị hàm số.

— Lập bảng biến thiên; xác định chiều biến thiên và cực trị của hàm số.

Bước 3. Cho thêm điểm và vẽ đồ thị của hàm số dựa vào bảng biến thiên.

BÀI TẬP TỰ LUẬN

VÍ DỤ 1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị các hàm số sau:

a) $y=\dfrac{x^2+2x-2}{x-1}$; b) $y=-x+2-\dfrac{1}{x+1}$; c) $y=\dfrac{-x^2-3x+4}{x+2}$.

Lời giải.

a) Ta viết lại hàm số $y = \dfrac{x^2+2x-2}{x-1} = x+3+\dfrac{1}{x-1}$.
Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.
Sự biến thiên:

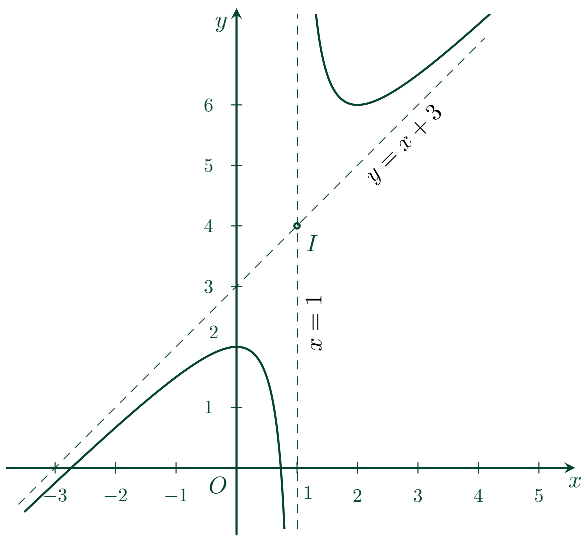
- Đạo hàm $y' = \dfrac{x^2-2x}{(x-1)^2}$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = 2$.
- Giới hạn và tiệm cận:
  $\lim\limits_{x\to-\infty} y = -\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} y = +\infty$.
  $\lim\limits_{x\to1^-} y = -\infty$, $\lim\limits_{x\to1^+} y = +\infty$. Suy ra $x = 1$ là tiệm cận đứng.
  $\lim\limits_{x\to-\infty} (y-(x+3)) = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} (y-(x+3)) = 0$. Suy ra $y = x+3$ là tiệm cận xiên.
- Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	||	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	6	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0)$ và $(2; +\infty)$; nghịch biến trên khoảng $(0; 1)$ và $(1; 2)$.
Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 2$ và $y_{CT} = 6$.
Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$ và $y_{CĐ} = 2$.

Đồ thị:

- Đồ thị hàm số giao với trục Ox tại điểm $(-1+\sqrt{3}; 0)$ và điểm $(-1-\sqrt{3}; 0)$.
- Đồ thị nhận $I(1; 4)$ làm tâm đối xứng.



Hình 5

b) Tập xác định: $\mathscr{D} = \mathbb{R}\setminus\{-1\}$.
Sự biến thiên:

- Đạo hàm $y' = -1 + \dfrac{1}{(x+1)^2}$, $y' = 0 \Leftrightarrow x = -2$ hoặc $x = 0$.
- Giới hạn và tiệm cận:

  — $\lim\limits_{x\to+\infty} y = -\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} y = +\infty$.
  — $\lim\limits_{x\to(-1)^-} y = +\infty$, $\lim\limits_{x\to(-1)^+} y = -\infty$.

  Do đó, đường thẳng $x = -1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

  — $\lim\limits_{x\to+\infty} [y-(-x+2)] = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-1}{x+1} = 0$,

— $\lim\limits_{x\to-\infty}[y-(-x+2)]=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-1}{x+1}=0$.

Do đó, đường thẳng $y=-x+2$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số.

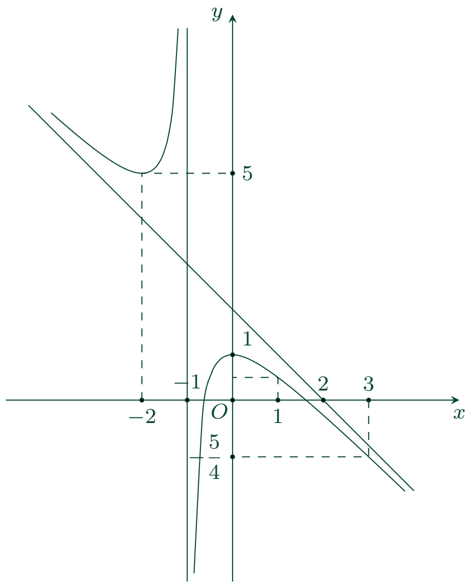
- Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	||	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	5	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-2;-1)$, $(-1;0)$ và nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-2)$, $(0;+\infty)$.
Hàm số đạt cực tiểu tại $x=-2$, $y_{\text{CT}}=5$; đạt cực đại tại $x=0$, $y_{\text{CĐ}}=1$.

Đồ thị:

- Đồ thị hàm số qua các điểm $\left(-3;-\dfrac{11}{2}\right)$, $\left(3;-\dfrac{5}{4}\right)$.
- Đồ thị nhận $I(-1;3)$ làm tâm đối xứng.



c) Ta viết lại hàm số $y=\dfrac{x^2+2x-2}{x-1}=x+3+\dfrac{1}{x-1}$.
Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{-2\}$.
Sự biến thiên:

- Đạo hàm Đạo hàm $y'=\dfrac{-x^2-4x-10}{(x+2)^2}<0$, với mọi $x\neq-2$.
- Giới hạn và tiệm cận:

$$\lim_{x\to-\infty}y=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x^2-3x+4}{x+2}=+\infty;\ \lim_{x\to+\infty}y=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x^2-3x+4}{x+2}=-\infty.$$

Ta có

— $a=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-x^2-3x+4}{x^2+2x}=-1$.

— $b=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{-x^2-3x+4}{x+2}-(-1)x\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{-x+4}{x+2}\right)=-1$.

Suy ra đường thẳng $y=-x-1$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số.

Ta có $\lim\limits_{x\to-2^-}y=\lim\limits_{x\to-2^-}\dfrac{-x^2-3x+4}{x+2}=-\infty$; $\lim\limits_{x\to-2^+}y=\lim\limits_{x\to-2^+}\dfrac{-x^2-3x+4}{x+2}=+\infty$. Suy ra đường thẳng $x=-2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

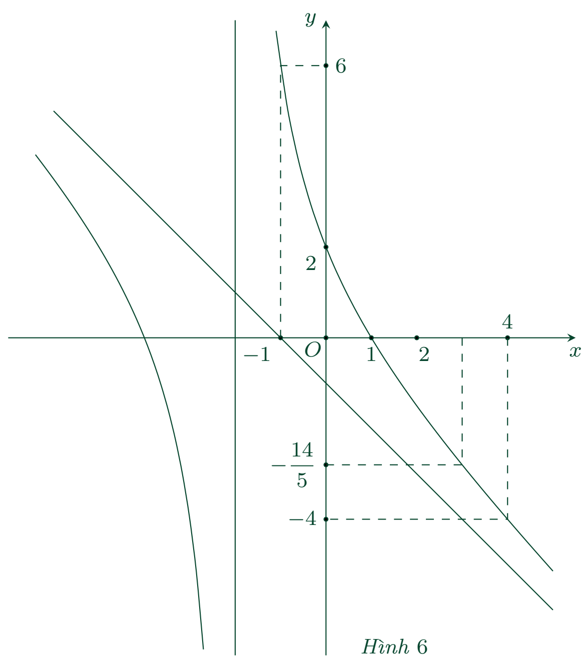
- Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
y'		$-$	||	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	$-\infty$

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-2)$ và $(-2;+\infty)$.
Hàm số không có cực trị.

Đồ thị:

- Đồ thị hàm số giao với trục Ox tại điểm $(-4;0)$ và điểm $(1;0)$.
- Đồ thị nhận $I(-2;1)$ làm tâm đối xứng.



Hình 6

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.

CÂU 1.

Bảng biến thiên sau là của một trong bốn hàm số sau. Hỏi đó là hàm số nào?

x	$-\infty$		-10		-4		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	||	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	24	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

A $y=\dfrac{x^2-3x+4}{-x-4}$.
B $y=\dfrac{x^2-4x+4}{-x-4}$.
C $y=\dfrac{x^2-5x+4}{x+4}$.
D $y=\dfrac{x^2-4x+4}{x+4}$.

Lời giải.

Chọn đáp án B .... □

CÂU 2.

Bảng biến thiên sau là của một trong bốn hàm số sau. Hỏi đó là hàm số nào?

x	$-\infty$		1		3		5		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	||	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	-9	$\searrow$	$-\infty$

A $y=\dfrac{x^2-4x+3}{x-3}$.
B $y=\dfrac{-x^2-x+2}{x-3}$.
C $y=\dfrac{-x^2+x+2}{x-3}$.
D $y=\dfrac{x^2-4x+4}{-x+3}$.

Lời giải.

Chọn đáp án C .... □

CÂU 3.

Bảng biến thiên sau là của một trong bốn hàm số sau. Hỏi đó là hàm số nào?

x	$-\infty$		-9		-4		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	-20	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

Ⓐ $y=\dfrac{x^2-2x+1}{x+4}$. Ⓑ $y=\dfrac{x^2-4x+2}{x+4}$.

Ⓒ $y=\dfrac{x^2-x+2}{-x-4}$. Ⓓ $y=\dfrac{x^2-3x+4}{-x-4}$.

Lời giải.

Chọn đáp án A .... □

CÂU 4.

Bảng biến thiên sau là của một trong bốn hàm số sau. Hỏi đó là hàm số nào?

x	$-\infty$		2		$+\infty$
y'		$+$	‖	$+$	
y	$-\infty$	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

Ⓐ $y=\dfrac{x^2-3}{x-2}$. Ⓑ $y=\dfrac{x^2-4x+2}{x-2}$.

Ⓒ $y=\dfrac{x^2-x}{x-2}$. Ⓓ $y=\dfrac{x^2-4x+5}{x-2}$.

Lời giải.

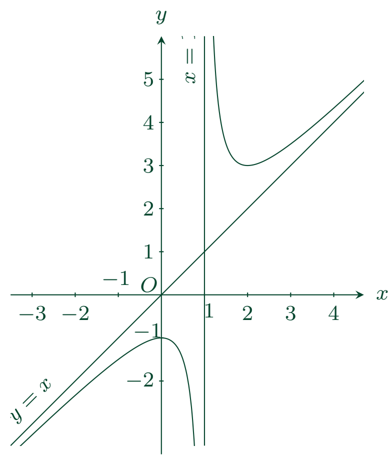
Chọn đáp án B .... □

CÂU 5.

Đồ thị hình bên là của một trong bốn hàm số sau. Hỏi đó là hàm số nào?

Ⓐ $y=\dfrac{x^2+x-1}{x-1}$. Ⓑ $y=\dfrac{x^2-x+1}{x-1}$.

Ⓒ $y=\dfrac{x^2-4x-1}{-x+1}$. Ⓓ $y=\dfrac{x^2-3x-1}{-x+1}$.



Lời giải.

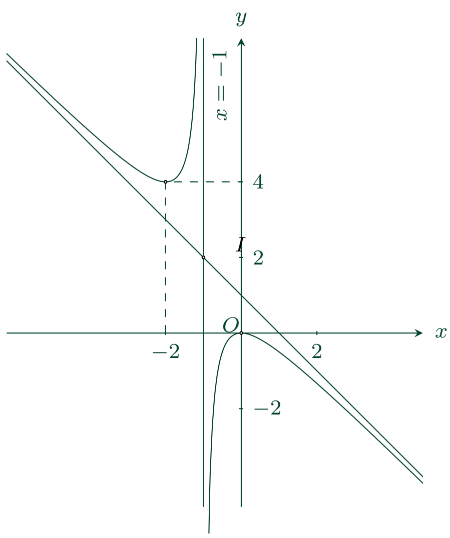
Chọn đáp án B .... □

CÂU 6.

Đồ thị hình bên là của một trong bốn hàm số sau. Hỏi đó là hàm số nào?

Ⓐ $y=\dfrac{x^2-x}{x+1}$. Ⓑ $y=\dfrac{x^2-3x}{x+1}$.

Ⓒ $y=\dfrac{x^2+1x+2}{x+1}$. Ⓓ $y=\dfrac{-x^2}{x+1}$.



Lời giải.

Chọn đáp án D .... □

CÂU 7.

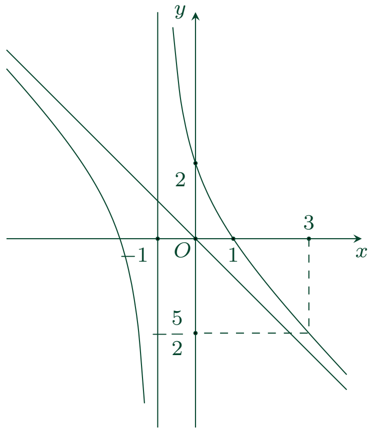
Đồ thị hình bên là của một trong bốn hàm số sau. Hỏi đó là hàm số nào?

Ⓐ $y=\dfrac{x^2-x+4}{x+1}$.

Ⓑ $y=\dfrac{x^2-2x+3}{x+1}$.

Ⓒ $y=\dfrac{-x^2-x+2}{x+1}$.

Ⓓ $y=\dfrac{x^2+x-1}{x+1}$.



Lời giải.

Chọn đáp án C .... □

CÂU 8.

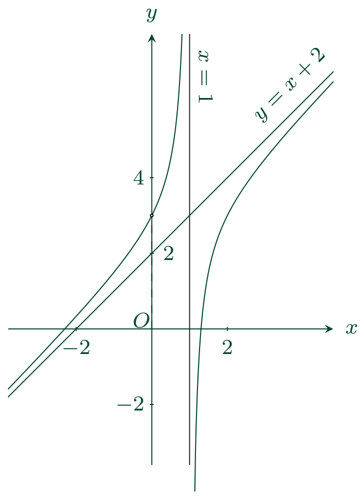
Đồ thị hình bên là của một trong bốn hàm số sau. Hỏi đó là hàm số nào?

Ⓐ $y=\dfrac{x^2+3}{x-1}$.

Ⓑ $y=\dfrac{x^2+x-3}{x-1}$.

Ⓒ $y=\dfrac{x^2-2x+3}{-x+1}$.

Ⓓ $y=\dfrac{x^2+3}{-x+1}$.



Lời giải.

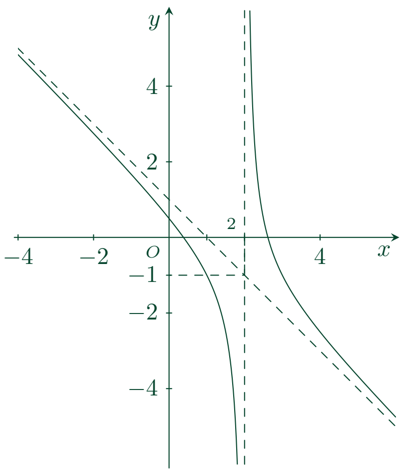
Chọn đáp án B .... □

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.

CÂU 9.

Cho hàm số $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{mx+n}$ có đồ thị như hình bên.

Mệnh đề	Đ	S
a) Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}\backslash\{1\}$.		X
b) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;2)$ và $(2;+\infty)$.	X	
c) Điểm $I(2;1)$ là tâm đối xứng của đồ thị.	X	
d) Hệ số a và m trái dấu.	X	



Lời giải.

a)

b)

c)

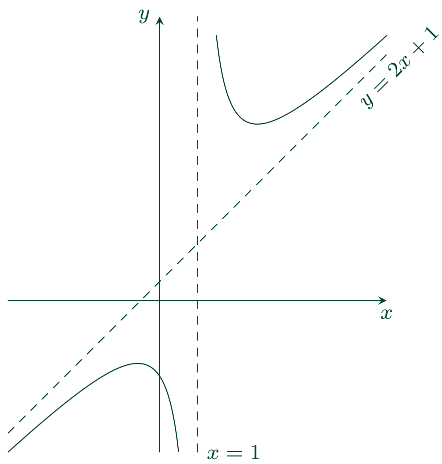
d)

Chọn đáp án | a sai | b đúng | c đúng | d đúng | ....

CÂU 10.

Cho hàm số $y = \dfrac{ax^2 + bx + c}{x + n}$ có đồ thị như hình bên.

Mệnh đề	Đ	S
a) Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}\backslash\{1\}$.	X	
b) Điểm $I(1;2)$ là tâm đối xứng của đồ thị.		X
c) $a + 2b = 4$.		X
d) Đồ thị qua điểm $(2;10)$ khi $c = 4$.	X	



Lời giải.

a)

b)

c)

d)

Chọn đáp án | a đúng | b sai | c sai | d đúng | ....

Dạng 4. Sự tương giao của hai đồ thị

Xác định tọa độ giao điểm của hai đồ thị $y = f(x)$ và $y = g(x)$:

① Giải phương trình hoành độ giao điểm $f(x) = g(x)$, tìm các nghiệm $x_0 \in \mathscr{D}_f \cap \mathscr{D}_g$.

② Với x_0 vừa tìm, thay vào một trong hai hàm số ban đầu để tìm y_0.

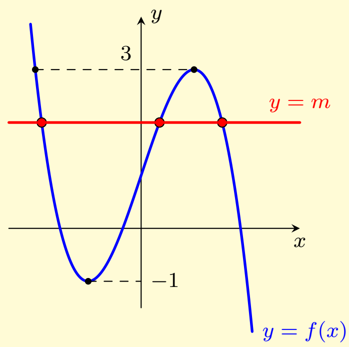
③ Kết luận giao điểm $(x_0; y_0)$.

Ứng dụng đồ thị để biện luận nghiệm phương trình:

(a) Xét phương trình $f(x) = m$, với m là tham số. Nghiệm của phương trình này có thể coi là hoành độ giao điểm của đồ thị $y = f(x)$ (cố định) với đường thẳng $y = m$ (nằm ngang).

(b) Từ đó, để biện luận nghiệm phương trình $f(x) = m$, ta có thể thực hiện các bước như sau:

- Lập bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ trên miền xác định mà đề bài yêu cầu.
- Tịnh tiến đường thẳng $y = m$ theo hướng "*lên, xuống*". Quan sát số giao điểm để quy ra số nghiệm tương ứng.



BÀI TẬP TỰ LUẬN

VÍ DỤ 1. Xác định tọa độ giao điểm của hai đồ thị hàm số sau:

a) $y = x^3 - 2x^2 + x - 1$ và $y = 1 - 2x$;

b) $y = \dfrac{x+8}{x-2}$ và $y = x + 2$.

Lời giải.

a) Xét phương trình hoành độ giao điểm

$$x^3 - 2x^2 + x - 1 = 1 - 2x \Leftrightarrow x^3 - 2x^2 + 3x - 2 = 0 \Leftrightarrow (x-1)\left(x^2 - x + 2\right) = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Do đó 2 đồ thị hàm số có giao điểm là $(1; -1)$.

b) Với điều kiện $x \neq 2$ ta có

Phương trình hoành độ giao điểm $x+2=\dfrac{x+8}{x-2} \Leftrightarrow x^2-4=x+8 \Leftrightarrow x^2-x-12=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=3\\ x=-4.\end{array}\right.$

Từ đó được $A(3;5)$ và $B(-4;-2)$.

VÍ DỤ 2. Tìm tập hợp các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=(x-2)(x^2+mx+m^2-3)$ cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt.

Lời giải.

Đồ thị hàm số đã cho cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt khi phương trình

$$(x-2)(x^2+mx+m^2-3)=0$$

có 3 nghiệm phân biệt hay phương trình $x^2+mx+m^2-3=0$ có 2 nghiệm phân biệt khác 2

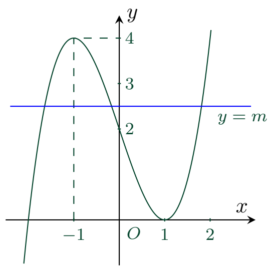
$$\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta=-3m^2+12>0\\ m^2+2m+1\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-2<m<2\\ m\neq -1\end{cases}.$$

VÍ DỤ 3. Tìm tham số m để phương trình $x^3-3x+2-m=0$ có ba nghiệm phân biệt.

Lời giải.

Phương trình tương đương với $x^3-3x+2=m$.

- Số nghiệm của phương trình bằng số giao điểm của đồ thị $y=x^3-3x+2$ với đường thẳng $y=m$ (nằm ngang).
- Đồ thị hàm số $y=x^3-3x+2$ như hình bên. Để đường thẳng $y=m$ cắt đồ thị tại 3 điểm phân biệt khi và chỉ khi $0<m<4$.



Vậy $0<m<4$.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

CÂU 1. Đường thẳng $y=x-1$ cắt đồ thị hàm số $y=x^3-x^2+x-1$ tại hai điểm. Tìm tổng tung độ các giao điểm đó.

(A) -3. (B) 2. (C) 0. (D) -1.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm

$$x^3-x^2+x-1=x-1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\Rightarrow y=0\\ x=0\Rightarrow y=-1.\end{array}\right.$$

Tổng tung độ các giao điểm là $0+(-1)=-1$.

Chọn đáp án (D) .... □

CÂU 2. Số giao điểm của đồ thị hàm số $y=(x-1)(x^2-3x+2)$ và trục hoành là

(A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

Lời giải.

Phương trình $y=0$ có hai nghiệm là $x=1$ và $x=2$.

Chọn đáp án (C) .... □

CÂU 3. Đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2+2x-1$ cắt đồ thị hàm số $y=x^2-3x+1$ tại hai điểm phân biệt A, B. Tính độ dài AB.

(A) $AB=3$. (B) $AB=2\sqrt{2}$. (C) $AB=2$. (D) $AB=1$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm

$$x^3-3x^2+2x-1=x^2-3x+1 \Leftrightarrow x^3-4x^2+5x-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\ x=2\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}y=-1\\ y=-1\end{array}\right..$$

Không mất tính tổng quát, ta giả sử $A(1;-1), B(2;-1)$. Suy ra $\overrightarrow{AB}=(1;0)\Rightarrow AB=1$.

Chọn đáp án (D) .... □

CÂU 4. Đồ thị của hàm số $y=\dfrac{x-1}{x+1}$ cắt hai trục Ox và Oy tại A và B. Khi đó diện tích của tam giác OAB (với O là gốc tọa độ) bằng

(A) 1. (B) $\frac{1}{4}$. (C) 2. (D) $\frac{1}{2}$.

Lời giải.

Ta có $A(1;0), B(0;-1)$. Diện tích $S_{\triangle OAB} = \dfrac{OA \cdot OB}{2} = \dfrac{1}{2}$.

Chọn đáp án (D) .... □

CÂU 5. Biết đường thẳng $y = x - 2$ cắt đồ thị hàm số $y = \dfrac{x}{x-1}$ tại 2 điểm phân biệt A, B. Tìm hoành độ trọng tâm tam giác OAB với O là gốc tọa độ.

(A) $\frac{2}{3}$. (B) 2. (C) $\frac{4}{3}$. (D) 4.

Lời giải.

Xét phương trình hoành độ giao điểm $x - 2 = \dfrac{x}{x-1}$ (Điều kiện $x \neq 1$).

$\Rightarrow (x-2)(x-1) = x \Leftrightarrow x^2 - 4x + 2 = 0\,(1)$.

Khi đó $A(x_1; x_1 - 2)$, $B(x_2; x_2 - 2)$ với x_1, x_2 là 2 nghiệm của phương trình (1) thỏa mãn $\begin{cases} x_1 + x_2 = 4 \\ x_1.x_2 = 2 \end{cases}$. Gọi $G\left(x_G; y_G\right)$ là trọng tâm tam giác OAB.

$\Rightarrow x_G = \dfrac{0 + x_1 + x_2}{3} = \dfrac{4}{3}$.

Chọn đáp án (C) .... □

CÂU 6. Gọi M, N là giao điểm của đường thẳng $y = x + 1$ và đường cong $y = \dfrac{2x+4}{x-1}$. Tìm hoành độ trung điểm của đoạn thẳng MN.

(A) $x = -1$. (B) $x = 1$. (C) $x = -2$. (D) $x = 2$.

Lời giải.

Xét phương trình hoành độ giao điểm $x + 1 = \dfrac{2x+4}{x-1} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x^2 - 2x - 5 = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow x_M + x_N = 2 \Rightarrow x_I = \dfrac{x_M + x_N}{2} = 1$.

Chọn đáp án (B) .... □

CÂU 7. Cho hàm số $y = \dfrac{2x}{x+1}$ có đồ thị (C). Gọi A, B là giao điểm của đường thẳng $d: y = x$ với đồ thị (C). Tính độ dài đoạn AB.

(A) $AB = \sqrt{2}$. (B) $AB = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. (C) $AB = 1$. (D) $AB = 2$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm

$\dfrac{2x}{x+1} = x, (x \neq -1) \Rightarrow x^2 - x = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow A\left(0;0\right) \\ x = 1 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow B\left(1;1\right) \end{array}\right.$

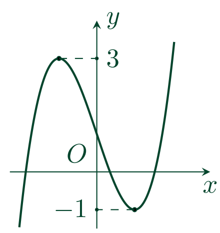
Vậy $AB = \sqrt{2}$.

Chọn đáp án (A) .... □

CÂU 8.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Số nghiệm của phương trình $2f(x) - 3 = 0$ là

(A) 2. (B) 1.
(C) 0. (D) 3.



Lời giải.

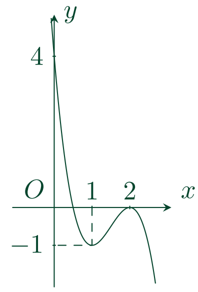
Ta có $2f(x) - 3 = 0 \Leftrightarrow f(x) = \dfrac{3}{2}$.

Từ đồ thị suy ra phương trình có 3 nghiệm phân biệt.

Chọn đáp án (D) .... □

CÂU 9.

Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $(d \neq 0)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Số nghiệm của phương trình $3f(x) - 1 = 0$ bằng



Ⓐ 0. Ⓑ 1.
Ⓒ 2. Ⓓ 3.

Lời giải.

Ta có $3f(x) - 1 = 0 \Leftrightarrow f(x) = \dfrac{1}{3}$.

Khi đó số giao điểm của đồ thị $y = f(x)$ và đường thẳng $y = \dfrac{1}{3}$ chính là số nghiệm của phương trình $3f(x) - 1 = 0$. Dựa vào đồ thị ta có số nghiệm của phương trình là 1.

Chọn đáp án B .... □

CÂU 10.

Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau. Số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ với trục hoành là

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	↘	-1	↗	3	↘	$-\infty$

Ⓐ 1. Ⓑ 0.
Ⓒ 2. Ⓓ 3.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên thì đồ thị hàm số $y = f(x)$ và trục hoành có 3 điểm chung.

Chọn đáp án D .... □

CÂU 11.

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $(-\infty; +\infty)$ và có bảng biến thiên như hình bên. Số nghiệm thực của phương trình $2\left|f(x)\right| = 7$ bằng

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	5	↘	4	↗	$+\infty$

Ⓐ 3. Ⓑ 2. Ⓒ 4. Ⓓ 2.

Lời giải.

Chọn đáp án B .... □

CÂU 12.

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ và có bảng biến thiên như hình bên. Hỏi phương trình $3|f(x)| - 10 = 0$ có bao nhiêu nghiệm?

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	2	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	3	↗	$+\infty$

Ⓐ 2 nghiệm. Ⓑ 4 nghiệm. Ⓒ 3 nghiệm. Ⓓ 1 nghiệm.

Lời giải.

Từ bảng biến thiên đề bài, ta có bảng biến thiên của hàm số $y = |f(x)|$ như sau

x	$-\infty$				0			1		$+\infty$
$f'(x)$			$-$		‖		$-$	0	$+$	
$\|f(x)\|$	2	↘	0	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$		↘	3	↗	$+\infty$

Ta có $3|f(x)| - 10 = 0 \Leftrightarrow |f(x)| = \dfrac{10}{3}$. (1)

Số nghiệm của phương trình (1) bằng số giao điểm của đồ thị $y = |f(x)|$ và đường thẳng $y = 3$.

Dựa vào bảng biến thiên trên, suy ra phương trình (1) có 3 nghiệm.

Chọn đáp án C .... □

CÂU 13.
Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$, có bảng biến thiên như sau. Số nghiệm của phương trình $2[f(x)]^2 - 3f(x) + 1 = 0$ là

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	1	$\nearrow$	3	$\searrow$	$\frac{1}{3}$	$\nearrow$	1

A 2. **B** 3.
C 6. **D** 0.

Lời giải.
Ta có $2[f(x)]^2 - 3f(x) + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = 1 \\ f(x) = \dfrac{1}{2}. \end{array}\right.$
Phương trình $f(x) = 1$ có duy nhất nghiệm x_0.
Phương trình $f(x) = \dfrac{1}{2}$ có 2 nghiệm phân biệt khác x_0. Vậy phương trình có ba nghiệm.
Chọn đáp án B .... □

CÂU 14.
Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như hình bên. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(x) = m + 1$ có ba nghiệm thực phân biệt.

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

A $-3 \le m \le 3$. **B** $-2 \le m \le 4$.
C $-2 < m < 4$. **D** $-3 < m < 3$.

Lời giải.
Dựa vào bảng biến thiên phương trình $f(x) = m + 1$ có ba nghiệm thực phân biệt khi

$$-2 < m + 1 < 4 \Leftrightarrow -3 < m < 3.$$

Chọn đáp án D .... □

CÂU 15.
Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình bên. Phương trình $f(4x - x^2) - 2 = 0$ có bao nhiêu nghiệm thực?

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

A 2. **B** 6. **C** 0. **D** 4.

Lời giải.
Đặt $t = 4x - x^2$. Khi đó $t = -(x-2)^2 + 4 \le 4$.
Từ mỗi giá trị $t < 4$ ta tìm được hai giá trị x. Với $t = 4$ ta tìm được $x = 2$.
Từ bảng biến thiên, ta thấy phương trình $f(t) = 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \alpha \in (-\infty; 0) \\ t = \beta \in (0; 4) \\ t = \gamma \in (4; +\infty) \end{array}\right.$
Vậy phương trình $f(4x - x^2) - 2 = 0$ có 4 nghiệm.
Chọn đáp án D .... □

Bài 5. ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM VÀ KHẢO SÁT HÀM SỐ ĐỂ GIẢI QUYẾT MỘT SỐ BÀI TOÁN THỰC TIỄN

A. LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1. Tốc độ thay đổi của một đại lượng

Ta có đạo hàm $f'(a)$ là tốc độ thay đổi tức thời của đại lượng $y = f(x)$ đối với x tại điểm $x = a$. Dưới đây, chúng ta xem xét một số ứng dụng của ý tưởng này đối với vật lí, hoá học, sinh học và kinh tế:

- Nếu $s = s(t)$ là hàm vị trí của một vật chuyển động trên một đường thẳng thì $v = s'(t)$ biểu thị vận tốc tức thời của vật (tốc độ thay đổi của độ dịch chuyển theo thời gian). Tốc độ thay đổi tức thời của vận tốc theo thời gian là gia tốc tức thời của vật:

$$a(t) = v'(t) = s''(t).$$

- Nếu $C = C(t)$ là nồng độ của một chất tham gia phản ứng hoá học tại thời điểm t, thì $C'(t)$ là tốc độ phản ứng tức thời (tức là độ thay đổi nồng độ) của chất đó tại thời điểm t.
- Nếu $P = P(t)$ là số lượng cá thể trong một quần thể động vật hoặc thực vật tại thời điểm t, thì $P'(t)$ biểu thị tốc độ tăng trưởng tức thời của quần thể tại thời điểm t.
- Nếu $C = C(x)$ là hàm chi phí, tức là tổng chi phí khi sản xuất x đơn vị hàng hoá, thì tốc độ thay đổi tức thời $C'(x)$ của chi phí đối với số lượng đơn vị hàng được sản xuất được gọi là chi phí biên.
- Về ý nghĩa kinh tế, chi phí biên $C'(x)$ xấp xỉ với chi phí để sản xuất thêm một đơn vị hàng hoá tiếp theo, tức là đơn vị hàng hoá thứ $x + 1$ (xem SGK Toán 11 tập hai, trang 87, bộ sách Kết nối tri thức với cuộc sống).

2. Bài toán tối ưu hóa

Một trong những ứng dụng phổ biến nhất của đạo hàm là cung cấp một phương pháp tổng quát, hiệu quả để giải những bài toán tối ưu hoá. Trong mục này, chúng ta sẽ giải quyết những vấn đề thường gặp như tối đa hoá diện tích, khối lượng, lợi nhuận, cũng như tối thiểu hoá khoảng cách, thời gian, chi phí.
Khi giải những bài toán như vậy, khó khăn lớn nhất thường là việc chuyển đổi bài toán thực tế cho bằng lời thành bài toán tối ưu hoá toán học bằng cách thiết lập một hàm số phù hợp mà ta cần tìm giá trị lớn nhất hoặc giá trị nhỏ nhất của nó, trên miền biến thiên phù hợp của biến số.
Quy trình giải một số bài toán tối ưu hoá đơn giản:

- **Bước 1.** Xác định đại lượng Q mà ta cần làm cho giá trị của đại lượng ấy lớn nhất hoặc nhỏ nhất và biểu diễn nó qua các đại lượng khác trong bài toán.
- **Bước 2.** Chọn một đại lượng thích hợp nào đó, kí hiệu là x, và biểu diễn các đại lượng khác ở **Bước 1** theo x. Khi đó, đại lượng Q sẽ là hàm số của một biến x. Tìm tập xác định của hàm số $Q = Q(x)$.
- **Bước 3.** Tìm giá trị lớn nhất hoặc giá trị nhỏ nhất của hàm số $Q = Q(x)$ bằng các phương pháp đã biết và kết luận.

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Dạng 5. Bài toán về tốc độ thay đổi của một đại lượng

VÍ DỤ 1. Khi bỏ qua sức cản của không khí, độ cao (mét) của một vật được phóng thẳng đứng lên trên từ điểm cách mặt đất 2 m với vận tốc ban đầu 24,5 m/s là $h(t) = 2 + 24{,}5t - 4{,}9t^2$ (theo Vật lí đại cương, NXB Giáo dục Việt Nam, 2016).

a) Tìm vận tốc của vật sau 2 giây.

b) Khi nào vật đạt độ cao lớn nhất và độ cao lớn nhất đó là bao nhiêu?

c) Khi nào thì vật chạm đất và vận tốc của vật lúc chạm đất là bao nhiêu?

Lời giải.

a) Theo ý nghĩa cơ học của đạo hàm, vận tốc của vật là $v = h'(t) = 24{,}5 - 9{,}8t$ m/s.
Do đó, vận tốc của vật sau 2 giây là $v(2) = 24{,}5 - 9{,}8 \cdot 2 = 4{,}9$ m/s.

b) Vì $h(t)$ là hàm số bậc hai có hệ số $a = -4{,}9 < 0$ nên $h(t)$ đạt giá trị lớn nhất tại $t = -\dfrac{b}{2a} = \dfrac{24{,}5}{2 \cdot 4{,}9} = 2{,}5$ (giây). Khi đó, độ cao lớn nhất của vật là $h(2{,}5) = 32{,}625$ m.

c) Vật chạm đất khi độ cao bằng 0, tức là $h = 2 + 24{,}5t - 4{,}9t^2 = 0$, hay $t \approx 5{,}08$ (giây).
Vận tốc của vật lúc chạm đất là $v(5{,}08) = 24{,}5 - 9{,}8 \cdot 5{,}08 = -25{,}284$ m/s.
Vận tốc âm chứng tỏ chiều chuyển động của vật là ngược chiều dương (hướng lên trên) của trục đã chọn (khi lập phương trình chuyển động của vật).

VÍ DỤ 2. Xét phản ứng hóa học tạo ra chất C từ hai chất A và B: $A + B \longrightarrow C$. Giả sử nồng độ của hai chất A và B bằng nhau $[A] = [B] = a$ (mol/l). Khi đó, nồng độ của chất C theo thời gian t ($t > 0$) được cho bởi công thức: $[C] = \dfrac{a^2Kt}{aKt + 1}$ (mol/l), trong đó K là hằng số dương.

a) Tìm tốc độ phản ứng ở thời điểm $t > 0$.

b) Chứng minh nếu $x = [C]$ thì $x'(t) = K(a - x)^2$.

c) Nêu hiện tượng xảy ra với nồng độ các chất khi $t \longrightarrow +\infty$.

d) Nêu hiện tượng xảy ra với tốc độ phản ứng khi $t \longrightarrow +\infty$.

Lời giải.

a) Tìm tốc độ phản ứng ở thời điểm $t > 0$.

Tốc độ của phản ứng là đạo hàm của $[C] = \dfrac{a^2Kt}{aKt+1}$ theo biến t. Do đó

$$[C]' = \left(\dfrac{a^2Kt}{aKt+1}\right)' = \dfrac{a^2K(aKt+1) - a^2Kt \cdot aK}{(aKt+1)^2} = \dfrac{a^2K}{(aKt+1)^2}.$$

b) Chứng minh nếu $x = [C]$ thì $x'(t) = K(a-x)^2$.

Theo câu trên, nếu nếu $x = [C]$ thì $x'(t) = \dfrac{a^2K}{(aKt+1)^2}$.

Ta lại có

$$K(a-x)^2 = K\left(a - \dfrac{a^2Kt}{aKt+1}\right)^2 = \dfrac{a^2K}{(aKt+1)^2}.$$

Vậy $x'(t) = K(a-x)^2$.

c) Nêu hiện tượng xảy ra với nồng độ các chất khi $t \longrightarrow +\infty$.

Ta có $\lim\limits_{t\to+\infty}[C] = \lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{a^2Kt}{aKt+1} = a\ (mol/l)$.

Vậy nồng độ của chất C dần đến $a\ (mol/l)$.

d) Nêu hiện tượng xảy ra với tốc độ phản ứng khi $t \longrightarrow +\infty$.

Ta có $\lim\limits_{t\to+\infty}x'(t) = \lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{a^2K}{(aKt+1)^2} = 0$.

Vậy tốc độ của phản ứng dần đến 0.

VÍ DỤ 3. Giả sử số lượng của một quần thể nấm men tại môi trường nuôi cấy trong phòng thí nghiệm được mô hình hoá bằng hàm số $P(t) = \dfrac{a}{b + \mathrm{e}^{-0,75t}}$, trong đó thời gian t được tính bằng giờ. Tại thời điểm ban đầu $t = 0$, quần thể có 20 tế bào và tăng với tốc độ 12 tế bào/giờ. Tìm các giá trị của a và b. Theo mô hình này, điều gì xảy ra với quần thể nấm men về lâu dài?

Lời giải.

Ta có $P'(t) = \dfrac{0,75a\mathrm{e}^{-0,75t}}{(b+\mathrm{e}^{-0,75t})^2}, t \geq 0$.

Theo đề bài, ta có $P(0) = 20$ và $P'(0) = 12$. Do đó, ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} \dfrac{a}{b+1} = 20 \\ \dfrac{0,75a}{(b+1)^2 = 12} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 20(b+1) \\ \dfrac{15}{b+1} = 12 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình này, ta được $a = 25$ và $b = \dfrac{1}{4}$.

Khi đó, $P'(t) = \dfrac{18,75\mathrm{e}^{-0,75t}}{\left(\dfrac{1}{4} + \mathrm{e}^{-0,75t}\right)^2} > 0, \forall t \geq 0$, tức là số lượng quần thể nấm men luôn tăng.

Tuy nhiên, do $\lim\limits_{t\to+\infty}P(t) = \lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{25}{\dfrac{1}{4} + \mathrm{e}^{-0,75t}} = 100$ nên số lượng quần thể nấm men tăng nhưng không vượt quá 100 tế bào.

VÍ DỤ 4. Giả sử chi phí $C(x)$ (nghìn đồng) để sản xuất x đơn vị của một loại hàng hoá nào đó được cho bởi hàm số $C(x) = 30\,000 + 300x - 2,5x^2 + 0,125x^3$.

a) Tìm hàm chi phí biên.

b) Tìm $C'(200)$ và giải thích ý nghĩa.

c) So sánh $C'(200)$ với chi phí sản xuất đơn vị hàng hoá thứ 201.

Lời giải.

a) Hàm chi phí biên là $C'(x) = 300 - 5x + 0,375x^2$.

b) Ta có $C'(200) = 300 - 5 \cdot 200 + 0,375 \cdot 200^2 = 14300$.
Chi phí biên tại $x = 200$ là 14 300 nghìn đồng, nghĩa là chi phí để sản xuất thêm một đơn vị hàng hoá tiếp theo (đơn vị hàng hoá thứ 201) là khoảng 14 300 nghìn đồng.

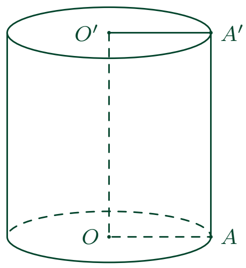
c) Chi phí sản xuất đơn vị hàng hoá thứ 201 là

$$C(201) - C(200) = 1\,004\,372{,}625 - 990\,000 = 14\,372{,}625 \text{ (nghìn đồng)}.$$

Giá trị này xấp xỉ với chi phí biên $C'(200)$ đã tính ở câu b.

Dạng 6. Bài toán tối ưu hoá đơn giản

VÍ DỤ 1.
Một nhà sản xuất cần làm những hộp đựng hình trụ có thể tích 1 lít. Tìm các kích thước của hộp đựng để chi phi vật liệu dùng để sản xuất là nhỏ nhất (kết quả được tính theo centimét và làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai).



Lời giải.
Đổi 1 lít $= 1000 \text{ cm}^3$.
Gọi $r(cm)$ là bán kính đáy của hình trụ, $h(cm)$ là chiều cao của hình trụ.
Diện tích toàn phần của hinh trụ là $S = 2\pi r^2 + 2\pi rh$.
Do thể tích của hình trụ là 1000 cm^3 nên ta có: $1000 = V = \pi r^2 h$, hay $h = \dfrac{1000}{\pi r^2}$.
Do đó, diện tích toàn phần của hình trụ là $S = 2\pi r^2 + \dfrac{2000}{r}$, $r > 0$.
Ta cần tìm r sao cho S đạt giá trị nhỏ nhất. Ta có

$$S' = 4\pi r - \frac{2000}{r^2} = \frac{4\pi r^3 - 2000}{r^2};$$
$$S' = 0 \Leftrightarrow \pi r^3 = 500 \Leftrightarrow r = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}$$

Bảng biến thiên

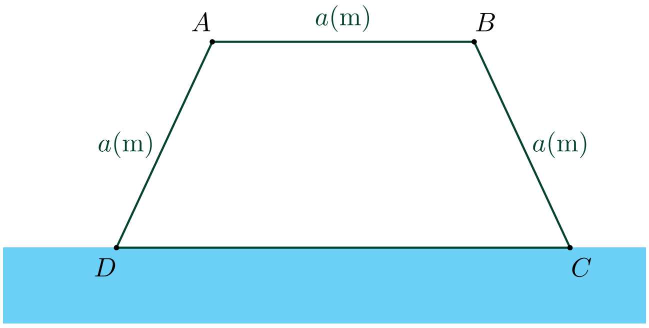
r	0		$\sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}$		$+\infty$
$S'(r)$		$-$	0	$+$	
$S(r)$	$+\infty$	$\searrow$	$S\left(\sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}\right)$	$\nearrow$	$+\infty$

Khi đó

$$h = \frac{1000}{\pi r^2} = \frac{1000}{\pi \sqrt[3]{\frac{250000}{\pi^2}}} = \frac{100}{\sqrt[3]{250\pi}}.$$

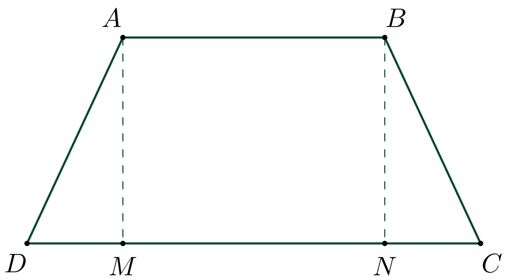
Vậy cần sản xuất các hộp đựng hình trụ có bán kinh đáy $r = \sqrt[3]{\dfrac{500}{\pi}} \approx 5,42$ (cm) và chiều cao $h = \dfrac{100}{\sqrt[3]{250\pi}} \approx 10,84$ (cm).

VÍ DỤ 2. Một bác nông dân có ba tấm lưới B40, mỗi tấm dài a (m) và muốn rào một mảnh vườn dọc bờ sông có dạng hình thang cân $ABCD$ như *Hình 36* (bờ sông là đường thẳng CD không phải rào). Hỏi bác đó có thể rào được mảnh vườn có diện tích lớn nhất là bao nhiêu mét vuông?



Hình 36

Lời giải.



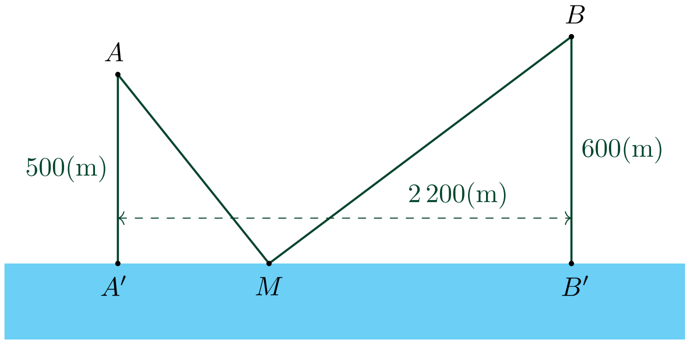
Gọi M, N lần lượt là hình chiếu vuông góc của A, B trên CD.
Đặt $x = MD$, $(0 < x < a)$. Suy ra $AM = \sqrt{AD^2 - MD^2} = \sqrt{a^2 - x^2}$.
Diện tích của mảnh vườn hình thang cân là $S(x) = \dfrac{(AB + CD)AM}{2} = (a + x)\sqrt{a^2 - x^2}$.
Xét hàm số $f(x) = (a + x)\sqrt{a^2 - x^2}$ trên khoảng $(0 < x < a)$.
$f'(x) = \dfrac{-2x^2 - ax + a^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{-2x^2 - ax + a^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -a \notin (0 < x < a) \\ x = \dfrac{a}{2} \in (0 < x < a) \end{array}\right.$.
Bảng biến thiên hàm số $f(x)$ trên khoảng $(0; a)$.

x	0		$\frac{a}{2}$		a
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	a^2	$\nearrow$	$\dfrac{3\sqrt{3}a^2}{4}$	$\searrow$	0

Từ bảng biến thiên suy ra $\max\limits_{(0;a)} f(x) = f\left(\dfrac{a}{2}\right) = \dfrac{3\sqrt{3}a^2}{4}$.

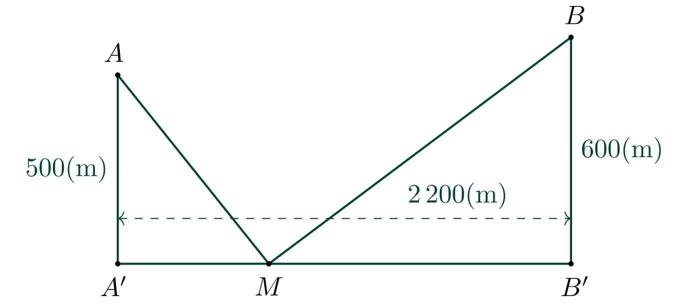
Vậy bác nông dân có thể rào được mảnh vườn có diện tích lớn nhất $\dfrac{3\sqrt{3}a^2}{4}$ m^2.

VÍ DỤ 3. Có hai xã A, B cùng ở một bên bờ sông Lam, khoảng cách từ hai xã đó đến bờ sông lần lượt là $AA' = 500$ m, $BB' = 600$ m và người ta đo được $A'B' = 2\,200$ m *Hình 37*. Các kĩ sư muốn xây một trạm cung cấp nước sạch nằm bên bờ sông Lam cho dân hai xã. Để tiết kiệm chi phí, các kĩ sư cần phải chọn vị trí M của trạm cung cấp nước sạch đó trên đoạn $A'B'$ sao cho tổng khoảng cách từ hai xã đến vị trí M là nhỏ nhất. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của tổng khoảng cách đó.



Hình 37

Lời giải.



Hình 37

Đặt $A'M = x$, $(0 < x < 2200)$, $B'M = 2200 - x$.
Ta có: $AM = \sqrt{x^2 + 500^2}$, $BM = \sqrt{(2200-x)^2 + 600^2}$.
Khi đó tổng khoảng cách từ hai xã đến vị trí M là $AM + BM = \sqrt{x^2+500^2} + \sqrt{(2200-x)^2+600^2}$.
Xét hàm số $f(x) = \sqrt{x^2+500^2} + \sqrt{(2200-x)^2+600^2}$ trên khoảng $(0 < x < 2200)$.

$f'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+500^2}} - \dfrac{2200-x}{\sqrt{(2200-x)^2+600^2}}$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{x}{\sqrt{x^2+500^2}} = \dfrac{2200-x}{\sqrt{(2200-x)^2+600^2}}$

$\Leftrightarrow \dfrac{x^2}{x^2+500^2} = \dfrac{(2200-x)^2}{(2200-x)^2+600^2}$

$\Leftrightarrow \dfrac{x^2+500^2}{x^2} = \dfrac{(2200-x)^2+600^2}{(2200-x)^2}$

$\Leftrightarrow 1 + \dfrac{500^2}{x^2} = 1 + \dfrac{600^2}{(2200-x)^2}$

$\Leftrightarrow \dfrac{25}{x^2} = \dfrac{36}{(2200-x)^2}$

$\Leftrightarrow \dfrac{5}{x} = \dfrac{6}{2200-x} \Leftrightarrow x = 1000$, vì $x > 0$.

Bảng biến thiên hàm số $f(x)$ trên khoảng $(0; 2200)$.

x	0		1000		2200
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	2780	$\searrow$	2460	$\nearrow$	2856

Vậy giá trị nhỏ nhất của tổng khoảng cách từ hai xã đó đến bờ sông là khoảng 2460 m, tại vị trí M cách điểm A' là 1000 m.

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

BÀI 1. Một tàu đổ bộ tiếp cận Mặt Trăng theo cách tiếp cận thẳng đứng và đốt cháy các tên lửa hãm ở độ cao 250 km so với bề mặt của Mặt Trăng.

Trong khoảng 50 giây đầu tiên kể từ khi đốt cháy các tên lửa hãm, độ cao h của con tàu so với bề mặt của Mặt Trăng được tính (gần đúng) bởi hàm $h(t) = -0{,}01t^3 + 1{,}1t^2 - 30t + 250$, trong đó t là thời gian tính bằng giây và h là độ cao tính bằng kilômét.
(Nguồn: A. Bigalke et al., Mathematik, Grundkurs ma-1, Cornelsen 2016).

a) Vẽ đồ thị của hàm số $y = h(t)$ với $0 \le t \le 50$ (đơn vị trên trục hoành là 10 giây, đơn vị trên trục tung là 10 km).

b) Gọi $v(t)$ là vận tốc tức thời của con tàu ở thời điểm t (giây) kể từ khi đốt cháy các tên lửa hãm với $(0 \le t \le 50)$. Xác định hàm số $v(t)$.

c) Vận tốc tức thời của con tàu lúc bắt đầu hãm phanh là bao nhiêu? Tại thời điểm $t = 25$ (giây) là bao nhiêu?

d) Tại thời điểm $t = 25$ (giây), vận tốc tức thời của con tàu vẫn giảm hay đang tăng trở lại?

e) Tìm thời điểm t $(0 \le t \le 50)$ sao cho con tàu đạt khoảng cách nhỏ nhất so với bề mặt của Mặt Trăng. Khoảng cách nhỏ nhất này là bao nhiêu?

Lời giải.

a) Vẽ đồ thị của hàm số $h(t) = -0{,}01t^3 + 1{,}1t^2 - 30t + 250$.

- Miền khảo sát: $[0; 50]$.
- Đạo hàm: $h'(t) = -0{,}03t^2 + 2{,}2t - 30$.

$$h'(t) = 0 \Leftrightarrow -0{,}03t^2 + 2{,}2t - 30 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t \approx 18 \\ t \approx 55. \end{array}\right.$$

- Bảng biến thiên:

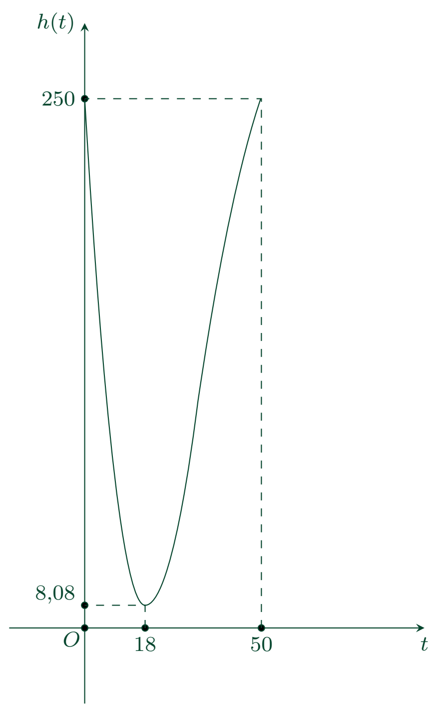
t	0		18		50
$h'(t)$		$-$	0	$+$	
$h(t)$	250	$\searrow$	8,08	$\nearrow$	250

— Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(0; 18)$ và đồng biến trên khoảng $(18; 50)$.
— Hàm số đạt cực tiểu tại $t = 18$, $y_{\text{CT}} = h(18) = 8{,}08$.

- Bảng giá trị:

x	0	18	50
y	250	8.08	250

- Đồ thị:



b) Xác định $v(t)$.
Ta có $v(t) = h'(t) = -0{,}03t^2 + 2{,}2t - 30$.

c) Tính vận tốc tức thời lúc bắt đầu hãm phanh và lúc $t = 25$ (giây).

- Vận tốc tức thời lúc bắt đầu hãm phanh là: $v(0) = -30$ (km/s).
- Vận tốc tức thời lúc $t = 25$ (giây) là: $v(25) = 6{,}25$ (km/s).

d) Tại thời điểm $t = 25$ (giây), vận tốc tức thời của con tàu vẫn giảm hay tăng trở lại?

- Ta có phương trình gia tốc: $a(t) = v'(t) = -0{,}06t + 2{,}2t$.
- Vì $a(25) = 53{,}5 > 0$ nên tại thời điểm $t = 25$ (giây), vận tốc tức thời của con tàu đang tăng trở lại.

e) Tìm thời điểm mà khoảng cách giữa con tàu và Mặt Trăng nhỏ nhất.
Dựa vào đồ thị ta thấy tại thời điểm $t = 18$ (giây) thì khoảng cách giữa con tàu và Mặt Trăng nhỏ nhất, khoảng cách này bằng 8,08 km.

BÀI 2. Để loại bỏ $x\%$ chất gây ô nhiễm không khí từ khí thải của một nhà máy, người ta ước tính chi phí cần bỏ ra là

$$C(x) = \frac{300x}{100 - x} \text{ (triệu đồng)}, \ 0 \leq x < 100.$$

Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = C(x)$. Từ đó, hãy cho biết:

a) Chi phí cần bỏ ra sẽ thay đổi như thế nào khi x tăng?

b) Có thể loại bỏ được 100% chất gây ô nhiễm không khí không? Vì sao?

Lời giải.

Xét hàm số $y = C(x) = \dfrac{300x}{100 - x}, 0 \leq x < 100$.
Ta có

- $y' = \dfrac{30\,000}{(100 - x)^2} > 0$, với mọi $x \in [0; 100)$.
Do đó hàm số luôn đồng biến trên nửa khoảng $[0; 100)$.

- $\lim\limits_{x \to 100^-} C(x) = \lim\limits_{x \to 100^-} \dfrac{300x}{100 - x} = +\infty$, nên đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x = 100$.

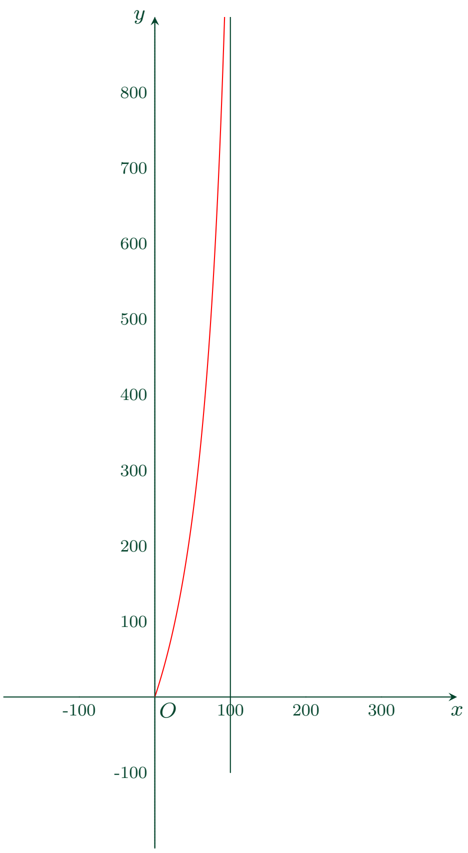
Bảng biến thiên:

x	0	$+\infty$
$C'(x)$	$+$	
$C(x)$	0	∞

Đồ thị hàm số như Hình 1.34.

a) Chi phí cần bỏ ra $C(x)$ sẽ luôn tăng khi x tăng.

b) Vì $\lim\limits_{x \to 100^-} C(x) = +\infty$ (hàm số $C(x)$ không xác định khi $x = 100$) nên nhà máy không thể loại bỏ 100% chất gây ô nhiễm không khí (dù bỏ ra chi phí là bao nhiêu đi chăng nữa).



BÀI 3. Khi máu di chuyển từ tim qua các động mạch chính rồi đến các mao mạch và quay trở lại qua các tĩnh mạch, huyết áp tâm thu (tức là áp lực của máu lên động mạch khi tim co bóp) liên tục giảm xuống. Giả sử một người có huyết áp tâm thu P (tính bằng mmHg) được cho bởi hàm số

$$P(t) = \frac{25t^2 + 125}{t^2 + 1}, 0 \leq t \leq 10,$$

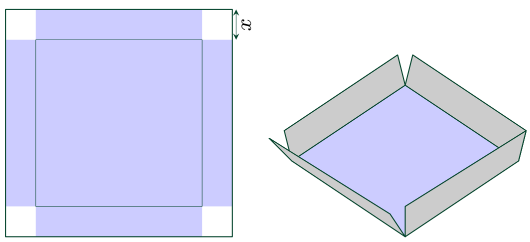
trong đó thời gian t được tính bằng giây. Tính tốc độ thay đổi của huyết áp sau 5 giây kể từ khi máu rời tim.

Lời giải.

Ta có tốc độ thay đổi của huyết áp là $P'(t) = \dfrac{-100t}{(t^2+1)^2}$.

Do đó tốc độ thay đổi huyết áp sau 5 s là $P'(5) = -\dfrac{125}{169}$.

BÀI 4. Bạn Việt muốn dùng tấm bìa hình vuông cạnh 6 dm làm một chiếc hộp không nắp, có đáy là hình vuông bằng cách cắt bỏ đi 4 hình vuông nhỏ ở bốn góc của tấm bìa (Hình bên dưới).



Bạn Việt muốn tìm độ dài cạnh hình vuông cần cắt bỏ để chiếc hộp đạt thể tích lớn nhất.

a) Hãy thiết lập hàm số biểu thị thể tích hộp theo x với x là độ dài cạnh hình vuông cần cắt đi.

b) Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số tìm được.
Từ đó, hãy tư vấn cho bạn Việt cách giải quyết vấn đề và giải thích vì sao cần chọn giá trị này. (Làm tròn kết quả đến hàng phần mười.)

Lời giải.

a) Hãy thiết lập hàm số biểu thị thể tích hộp theo x với x là độ dài cạnh hình vuông cần cắt đi. Mặt đáy của hộp là hình vuông có cạnh bằng $6 - 2x$ (cm), với $0 < x < 3$. Vậy diện tích của đáy hộp là $S = (6-2x)^2$.
Khối hộp có chiều cao $h = x$ (cm).
Vậy thể tích hộp là $V = S \cdot h = (6-2x)^2 \cdot x = 4x^3 - 24x^2 + 36x$ (cm^3).

b) Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số tìm được.
Xét hàm $f(x) = 4x^3 - 24x^2 + 36x,\ 0 < x < 3$.

(a) Tập xác định: $\mathscr{D} = (0; 3)$.

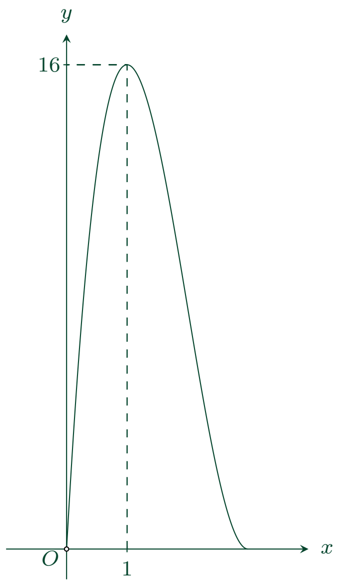
(b) Sự biến thiên.

- Giới hạn tại vô cực: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.
- Ta có $f'(x) = 12x^2 - 48x + 36 \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 3. \end{array}\right.$

  Ta có bảng biến thiên:

x	0		1		3
y'		$+$	0	$-$	0
y	0	$\nearrow$	16	$\searrow$	0

  Hàm số đồng biến trên $(0; 1)$ và nghịch biến trên khoảng $(1; 3)$.
  Hàm số không có cực trị.
- Đồ thị hàm số đi qua các điểm $(0; 0), (1; 16), (3; 0)$.



Vậy hình vuông mà bạn Việt cần cắt bỏ phải có độ dài cạnh $x = 1$ dm thì chiếc hộp đạt thể tích lớn nhất.

MỤC LỤC