

QUICK NOTE

2. Bài tập rèn luyện

BÀI 1. Tính giá trị các biểu thức

$$\text{a) } \left(\frac{3}{4}\right)^{-2} \cdot 3^2 \cdot 12^0; \quad \text{b) } (2^{-2} \cdot 5^2)^{-2} : (5 \cdot 5^{-5}).$$

BÀI 2. Tính giá trị các biểu thức

$$\text{a) } \left(\frac{1}{256}\right)^{-0,75} + \left(\frac{1}{27}\right)^{-\frac{4}{3}}; \quad \text{b) } \left(\frac{1}{49}\right)^{-1,5} - \left(\frac{1}{125}\right)^{-\frac{2}{3}}; \quad \text{c) } (4^{3+\sqrt{3}} - 4^{\sqrt{3}-1}) \cdot 2^{-2\sqrt{3}}.$$

BÀI 3. Thực hiện các phép tính

$$\text{a) } 27^{\frac{2}{3}} + 81^{-0,75} - 25^{0,5};$$

$$\text{b) } 4^{2-3\sqrt{7}} \cdot 8^{2\sqrt{7}}.$$

BÀI 4. Biết $4^a = \frac{1}{5}$. Tính giá trị các biểu thức

$$\text{a) } 16^a + 16^{-a}; \quad \text{b) } (2^a + 2^{-a})^2.$$

BÀI 5. Định luật thứ ba của Kepler về quỹ đạo chuyển động cho biết cách ước tính khoảng thời gian P (tính theo năm Trái Đất) mà một hành tinh cần để hoàn thành một quỹ đạo quay quanh Mặt Trời. Khoảng thời gian đó được xác định bởi một hàm số $P = d^{\frac{3}{2}}$, trong đó d là khoảng cách từ hành tinh đó đến Mặt Trời tính theo đơn vị thiên văn AU (1 AU là khoảng cách từ Trái Đất đến Mặt Trời, tức là 1 AU khoảng 93 000 000 dặm) (Nguồn: *R.I. Charles et al., Algebra 2, Pearson*). Hới Sao Hỏa quay quanh Mặt Trời thì mất bao nhiêu năm Trái Đất (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)? Biết khoảng cách từ Sao Hỏa đến Mặt Trời là 1,52 AU.

BÀI 6. Nếu một khoản tiền gốc P được gửi ngân hàng với lãi suất hằng năm r (r được biểu thị dưới dạng số thập phân), được tính lãi n lần trong một năm, thì tổng số tiền A nhận được (cả vốn lẫn lãi) sau N kì gửi cho bởi công thức sau:

$$A = P \left(1 + \frac{r}{n}\right)^N.$$

Hỏi nếu bác An gửi tiết kiệm số tiền 120 triệu đồng theo kì hạn 6 tháng với lãi suất không đổi là 5% một năm, thì số tiền thu được (cả vốn lẫn lãi) của bác An sau 2 năm là bao nhiêu?

BÀI 7. Năm 2021, dân số của một quốc gia ở châu Á là 19 triệu người. Người ta ước tính rằng dân số của quốc gia này sẽ tăng gấp đôi sau 30 năm nữa. Khi đó dân số A (triệu người) của quốc gia đó sau t năm kể từ năm 2021 được ước tính bằng công thức $A = 19 \cdot 2^{\frac{t}{30}}$. Hỏi với tốc độ tăng dân số như vậy thì sau 20 năm nữa dân số của quốc gia này sẽ là bao nhiêu? (Làm tròn kết quả đến chữ số hàng triệu).

BÀI 8. Với một chỉ vàng, giả sử người thợ lành nghề có thể dát mỏng thành lá vàng rộng 1 m^2 và dày khoảng $1,94 \cdot 10^{-7} \text{ m}$. Đồng xu 5 000 đồng dày $2,2 \cdot 10^{-3} \text{ m}$. Cần chồng bao nhiêu lá vàng như trên để có độ dày bằng đồng xu loại 5 000 đồng? Làm tròn kết quả đến chữ số hàng trăm.

3. Bài tập trắc nghiệm

CÂU 1. Cho số dương a và $m, n \in \mathbb{R}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- (A) $a^m \cdot a^n = (a^m)^n$. (B) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.
(C) $a^m \cdot a^n = a^{mn}$. (D) $a^m \cdot a^n = a^{m-n}$.

CÂU 2. Cho $0 < a \neq 1$ và các số thực α, β . Khẳng định nào sau đây là khẳng định sai?

- (A) $\frac{a^\alpha}{a^\beta} = a^{\alpha-\beta}$. (B) $(a^\alpha)^\beta = a^{\alpha\beta}$. (C) $a^\alpha \cdot a^\beta = a^{\alpha\beta}$. (D) $a^\alpha \cdot a^\beta = a^{\alpha+\beta}$.

CÂU 3. Cho a là số thực tùy ý, $(a^3)^2$ bằng

- (A) a^5 . (B) a . (C) a^9 . (D) a^6 .

CÂU 4. Cho các số nguyên dương m, n và số thực dương a . Mệnh đề nào sau đây sai?

- (A) $\sqrt[n]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{a}$. (B) $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{a^{m+n}}$.
(C) $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{a^m}$. (D) $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$.

QUICK NOTE

CÂU 5. Tính giá trị của biểu thức $A = \frac{6^{3+\sqrt{5}}}{2^{2+\sqrt{5}} \cdot 3^{1+\sqrt{5}}}$.

- (A) $6^{-\sqrt{5}}$. (B) 9. (C) 18. (D) 1.

CÂU 6. Tính giá trị của biểu thức $P = 4^4 \cdot 8^{11} \cdot 2^{2017}$.

- (A) $P = 2^{2407}$. (B) $P = 2^{2054}$. (C) $P = 2^{2058}$. (D) $P = 2^{2032}$.

CÂU 7. Tính giá trị của biểu thức $P = 3^{10} \cdot 27^{-3} + 0,2^{-4} \cdot 25^{-2} + 128^{-1} \cdot 2^9 + 0,1^{-5} \cdot 0,2^5$.

- (A) $P = 32$. (B) $P = 40$. (C) $P = 30$. (D) $P = 38$.

CÂU 8. Cho số thực $a > 1$. Nếu $a^{3x} = 2$ thì $2a^{9x}$ bằng

- (A) 6. (B) 12. (C) 16. (D) 8.

CÂU 9. Giá trị của biểu thức $A = (2 + \sqrt{3})^{2019} (2 - \sqrt{3})^{2020}$ bằng

- (A) $A = 1$. (B) $A = 2 - \sqrt{3}$.
(C) $A = (2 - \sqrt{3})^{2019}$. (D) $A = 2 + \sqrt{3}$.

CÂU 10. Tính giá trị của biểu thức $P = (7 + 4\sqrt{3})^{2020} (4\sqrt{3} - 7)^{2019}$.

- (A) $P = 7 + 4\sqrt{3}$. (B) $P = 7 - 4\sqrt{3}$. (C) $P = 1$. (D) $P = -7 - 4\sqrt{3}$.

CÂU 11. Cho $P = (5 - 2\sqrt{6})^{2018} (5 + 2\sqrt{6})^{2019}$. Ta có

- (A) $P \in (9; 11)$. (B) $P \in (3; 7)$. (C) $P \in (7; 9)$. (D) $P \in (7; 9)$.

CÂU 12. Cho x, y là hai số nguyên thỏa mãn $3^x \cdot 6^y = \frac{2^{15} \cdot 6^{40}}{9^{59} \cdot 12^{25}}$. Tính giá trị xy .

- (A) -445. (B) -755. (C) -540. (D) -425.

CÂU 13. Cho hàm số $f(x) = \frac{4^x}{2 + 4^x}$ ($x \in \mathbb{R}$). Biết $a + b = 5$ với a, b là hai số thực, hãy tính $K = f(a) + f(b - 4)$.

- (A) $K = 1$. (B) $K = \frac{3}{4}$. (C) $K = \frac{128}{129}$. (D) $K = \frac{512}{513}$.

Dạng 2. Rút gọn biểu thức chứa lũy thừa

Sử dụng các tính chất của lũy thừa để chuyển về cùng một cơ số, rồi bằng cách đặt nhân tử chung hằng đẳng thức...để rút gọn biểu thức.

1. Ví dụ mẫu

VÍ DỤ 1. Rút gọn biểu thức $A = \frac{6^{2+\sqrt{5}} \cdot 2^{1-\sqrt{5}}}{3^{3+\sqrt{5}}}$.

VÍ DỤ 2. Rút gọn các biểu thức

a) $\frac{a^{\frac{7}{3}} - a^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{4}{3}} - a^{\frac{1}{3}}} - \frac{a^{\frac{5}{3}} - a^{-\frac{1}{3}}}{a^{\frac{2}{3}} - a^{-\frac{1}{3}}}$, ($a > 0, a \neq 1$);

b) $\frac{(\sqrt[4]{a^3 b^2})^4}{\sqrt[3]{a^{12} b^6}}$, ($a > 0, b > 0$).

VÍ DỤ 3. Rút gọn biểu thức $A = \frac{(a^{\sqrt{2}-1})^{1+\sqrt{2}}}{a^{\sqrt{5}-1} \cdot a^{3-\sqrt{5}}}$.

2. Bài tập rèn luyện

BÀI 1. Rút gọn các biểu thức

a) $a^{\frac{1}{3}} \cdot a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{7}{6}}$; b) $a^{\frac{2}{3}} \cdot a^{\frac{1}{4}} : a^{\frac{1}{5}}$; c) $\left(\frac{3}{2}a^{-\frac{3}{2}}b^{-\frac{1}{2}}\right)\left(-\frac{1}{3}a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{2}}\right)$.

BÀI 2. Rút gọn các biểu thức sau

a) $A = \frac{x^5 y^{-2}}{x^3 y}$, với $x, y \neq 0$; b) $B = \frac{x^{\frac{1}{3}} \sqrt{y} + y^{\frac{1}{3}} \sqrt{x}}{\sqrt[6]{x} + \sqrt[6]{y}}$, với x, y dương.

QUICK NOTE

BÀI 3. Cho số thực dương a . Rút gọn các biểu thức

$$a) \frac{a^{\frac{4}{3}} \left(a^{-\frac{1}{3}} + a^{\frac{2}{3}} \right)}{a^{\frac{1}{4}} \left(a^{\frac{3}{4}} + a^{-\frac{1}{4}} \right)};$$

$$b) \frac{a^{\frac{1}{5}} \left(\sqrt[5]{a^4} - \sqrt[5]{a^{-1}} \right)}{a^{\frac{2}{3}} \left(\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{a^{-2}} \right)}.$$

BÀI 4. Tại một xí nghiệp, công thức $P(t) = 500 \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{t}{3}}$ được dùng để tính giá trị còn lại (tính theo triệu đồng) của một chiếc máy sau thời gian t (tính theo năm) kể từ khi đưa vào sử dụng.

a) Tính giá trị còn lại của máy sau 2 năm; sau 2 năm 3 tháng.

b) Sau 1 năm đưa vào sử dụng, giá trị còn lại của máy bằng bao nhiêu phần trăm so với ban đầu?

3. Bài tập trắc nghiệm

CÂU 1. Với a là số thực dương, rút gọn $P = a \sqrt[3]{\sqrt{a}}$ ta được

- (A) $P = a^{\frac{5}{6}}$. (B) $P = a^{\frac{11}{6}}$. (C) $P = a^{\frac{7}{6}}$. (D) $P = a^{\frac{6}{7}}$.

CÂU 2. Rút gọn biểu thức $P = b^{\frac{1}{3}} \cdot b^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[6]{b}$ với $b > 0$.

- (A) $P = b$. (B) $P = b^{\frac{3}{11}}$. (C) $P = b^{\frac{1}{36}}$. (D) $P = b^{\frac{2}{3}}$.

CÂU 3. Rút gọn biểu thức $P = x^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[6]{x}$ với $x > 0$.

- (A) $P = x^{\frac{1}{8}}$. (B) $P = x^2$. (C) $P = x^{\frac{2}{9}}$. (D) $P = \sqrt{x}$.

CÂU 4. Rút gọn biểu thức $\sqrt{81a^4b^2}$ ta được

- (A) $9a^2|b|$. (B) $-9a^2b$. (C) $9a^2b$. (D) Kết quả khác.

CÂU 5. Cho biểu thức $\sqrt[5]{8\sqrt{2\sqrt[3]{2}}} = 2^{\frac{m}{n}}$, trong đó $\frac{m}{n}$ có dạng phân số tối giản. Gọi $P = m^2 + n^2$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- (A) $P \in (330; 340)$. (B) $P \in (350; 360)$. (C) $P \in (340; 350)$. (D) $P \in (360; 370)$.

CÂU 6. Rút gọn biểu thức $Q = b^{\frac{5}{3}} : \sqrt[3]{b}$ với $b > 0$.

- (A) $Q = b^{\frac{4}{3}}$. (B) $Q = b^{\frac{5}{9}}$. (C) $Q = b^2$. (D) $Q = b^{-\frac{4}{3}}$.

CÂU 7. Cho a là số thực dương tùy ý và a khác 1, đặt $A = \frac{a^{\sqrt{7}} \cdot a^{\sqrt{7}}}{(a^2)^{\sqrt{7}}}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- (A) $A = 1$. (B) $A = \frac{2}{a^{\sqrt{7}}}$. (C) $A = \sqrt{7}$. (D) $A = a$.

CÂU 8. Cho x, y là các số thực thỏa mãn $x \neq 0$ và $(3^{x^2})^{3y} = 27^x$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

- (A) $x^2y = 1$. (B) $x^2 + 3y = 3x$. (C) $xy = 1$. (D) $3xy = 1$.

CÂU 9. Rút gọn biểu thức $P = \frac{\sqrt[6]{x} \sqrt[3]{x^4} \sqrt[4]{x}}{\sqrt{x^3}}$ với x là số thực dương.

- (A) $x^{\frac{13}{15}}$. (B) $x^{\frac{1}{4}}$. (C) $x^{\frac{1}{6}}$. (D) $x^{\frac{13}{18}}$.

CÂU 10. Rút gọn biểu thức $P = \frac{a^{\sqrt{7}+1} \cdot a^{2-\sqrt{7}}}{(a^{\sqrt{2}-2})^{\sqrt{2}+2}}$ với $a > 0$.

- (A) $P = a^4$. (B) $P = a^2$. (C) $P = a^5$. (D) $P = a^3$.

CÂU 11. Cho a là một số thực dương. Rút gọn biểu thức: $P = \frac{(a^{\sqrt{7}-3})^{\sqrt{7}+3}}{a^{\sqrt{11}-4} \cdot a^{5-\sqrt{11}}}$?

- (A) $P = a^3$. (B) $P = a^{2\sqrt{7}-1}$. (C) $P = \frac{1}{a^3}$. (D) $P = a^2$.

CÂU 12. Rút gọn biểu thức $A = \frac{\sqrt[3]{a^7} \cdot a^{\frac{11}{3}}}{a^4 \cdot \sqrt[7]{a^{-5}}}$ với $a > 0$ ta được kết quả $A = a^{\frac{m}{n}}$ trong đó $m, n \in \mathbb{N}^*$ và $\frac{m}{n}$ là phân số tối giản. Khẳng định nào sau đây đúng?

- (A) $m^2 - n^2 = 312$. (B) $m^2 + n^2 = 543$.
(C) $m^2 - n^2 = -312$. (D) $m^2 + n^2 = 409$.

CÂU 13. Cho các số dương a, b . Rút gọn biểu thức $Q = \frac{a^{\frac{4}{3}}b + ab^{\frac{4}{3}}}{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}}$.

- (A) $Q = \sqrt[3]{ab}$. (B) $Q = 2ab$. (C) $Q = \sqrt{ab}$. (D) $Q = ab$.

CÂU 14. Cho $5^x + 5^{-x} = a$. Rút gọn biểu thức $M = \frac{25^x + 25^{-x} + 1}{5^x + 5^{-x} + 1}$ bằng

- (A) $a + 1$. (B) $a - 1$. (C) $a^2 + 1$. (D) $a^2 - 1$.

CÂU 15. Cho $f(x) = e^{\sqrt{1+\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x+1)^2}}}$. Biết rằng $f(1) \cdot f(2) \cdot f(3) \cdots f(2019) = e^{\frac{m}{n}}$, với m, n là các số tự nhiên và $\frac{m}{n}$ tối giản. Tính $m - n^2$.

- (A) $m - n^2 = 2018$. (B) $m - n^2 = 1$.
(C) $m - n^2 = -2018$. (D) $m - n^2 = -1$.

Dạng 3. So sánh biểu thức lũy thừa

Biến đổi các biểu thức về cùng cơ số hoặc cùng số mũ, từ đó, dựa vào tính chất lũy thừa để so sánh.

1. Ví dụ mẫu

VÍ DỤ 1. Không sử dụng máy tính, hãy so sánh $3^{\sqrt{8}}$ và 3^3 .

VÍ DỤ 2. Không sử dụng máy tính, hãy so sánh các số $8^{\sqrt{3}}$ và $4^{2\sqrt{3}}$.

2. Bài tập rèn luyện

BÀI 1. Không sử dụng máy tính cầm tay, hãy so sánh các số sau

- a) $\sqrt{42}$ và $\sqrt[3]{51}$; b) $16^{\sqrt{3}}$ và $4^{3\sqrt{2}}$; c) $(0,2)^{\sqrt{16}}$ và $(0,2)^{\sqrt[3]{60}}$.

BÀI 2. Không sử dụng máy tính cầm tay, hãy so sánh

- a) $5^{6\sqrt{3}}$ và $5^{3\sqrt{6}}$;
b) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{-4}{3}}$ và $\sqrt{2} \cdot 2^{\frac{2}{3}}$.

3. Bài tập trắc nghiệm

CÂU 1. Cho $\pi^\alpha > \pi^\beta$ với $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- (A) $\alpha < \beta$. (B) $\alpha > \beta$. (C) $\alpha \leq \beta$. (D) $\alpha = \beta$.

CÂU 2. Cho a và b thuộc khoảng $(0; 1)$ và α, β là những số thực tùy ý. Khẳng định nào sau đây là khẳng định **sai**?

- (A) $(a^\alpha)^\beta = (a^\beta)^\alpha$. (B) $a^\alpha > a^\beta \Leftrightarrow \alpha > \beta$.
(C) $a^\alpha a^\beta = a^{\alpha+\beta}$. (D) $a^\alpha b^\alpha = (ab)^\alpha$.

CÂU 3. Sắp xếp các số $a = \sqrt{2^3}$, $b = 4$, $c = \sqrt[3]{2}$ theo thứ tự từ nhỏ đến lớn ta được

- (A) $a < b < c$. (B) $c < a < b$. (C) $c < b < a$. (D) $b < a < c$.

CÂU 4. Cho biết $(x-2)^{-\frac{1}{3}} > (x-2)^{-\frac{1}{6}}$, khẳng định nào sau đây đúng?

- (A) $x > 1$. (B) $2 < x < 3$. (C) $x > 2$. (D) $0 < x < 1$.

CÂU 5. Cho $a > 0, b > 0$ thỏa $a^{\frac{1}{2}} > a^{\frac{1}{3}}$ và $b^{\frac{2}{3}} > b^{\frac{3}{4}}$. Khi đó

- (A) $a > 1, 0 < b < 1$. (B) $a > 1, b > 1$.
(C) $0 < a < 1, 0 < b < 1$. (D) $0 < a < 1, b > 1$.

Bài 19. PHÉP TÍNH LOGARIT

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

QUICK NOTE

QUICK NOTE

1. Định nghĩa

⚡ **ĐỊNH NGHĨA 19.1.** Cho hai số thực dương a, b với a khác 1. Số thực c để $a^c = b$ được gọi là lôgarit cơ số a của b và kí hiệu là $\log_a b$, nghĩa là

$$c = \log_a b \Leftrightarrow a^c = b.$$

⚠ $\log_a b$ xác định khi và chỉ khi $a > 0, a \neq 1$ và $b > 0$.

2. Tính chất

⚡ **TÍNH CHẤT 19.1.** Với số thực dương a khác 1, số thực dương b , ta có:

$$\log_a 1 = 0; \quad \log_a a = 1; \quad \log_a a^c = c; \quad a^{\log_a b} = b.$$

⚡ **TÍNH CHẤT 19.2.** Với ba số thực dương a, m, n và $a \neq 1$, ta có:

$$\odot \log_a(mn) = \log_a m + \log_a n;$$

$$\odot \log_a \left(\frac{m}{n} \right) = \log_a m - \log_a n.$$

⚠ Ta có:

$$\log_a \left(\frac{1}{b} \right) = -\log_a b \quad (a > 0, a \neq 1, b > 0).$$

⚡ **TÍNH CHẤT 19.3.** Cho $a > 0, a \neq 1, b > 0$. Với mọi số thực α , ta có:

$$\log_a b^\alpha = \alpha \log_a b.$$

⚠ Cho $a > 0, a \neq 1, b > 0$. Với mọi số nguyên dương $n \geq 2$, ta có: $\log_a \sqrt[n]{b} = \frac{1}{n} \log_a b$.

⚡ **TÍNH CHẤT 19.4.** Với a, c là hai số thực dương khác 1 và b là số thực dương, ta có:

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}.$$

⚡ **NHẬN XÉT.** Với $a > 0$ và $a \neq 1, b > 0$ và $b \neq 1, c > 0, \alpha \neq 0$, ta có những công thức sau:

$$\odot \log_a b \cdot \log_b c = \log_a c;$$

$$\odot \log_a b = \frac{1}{\log_b a};$$

$$\odot \log_{a^\alpha} b = \frac{1}{\alpha} \log_a b.$$

3. Lôgarit thập phân. Lôgarit tự nhiên

⊙ Lôgarit cơ số 10 của số thực dương b được gọi là lôgarit thập phân của b và kí hiệu là $\log b$ hay $\lg b$.

⊙ Lôgarit cơ số e của số thực dương b được gọi là lôgarit tự nhiên của b và kí hiệu là $\ln b$.

4. Tính lôgarit bằng máy tính cầm tay

B. CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

Dạng 4. Tính giá trị biểu thức chứa lôgarit

1. Ví dụ mẫu

VÍ DỤ 1. Cho $\log a = 4$. Tính giá trị của biểu thức $P = \log(100a^2)$.

VÍ DỤ 2. Cho $\log_a b = 2$. Tính $\log_a(a^2b)$.

VÍ DỤ 3. Cho a và b là hai số thực dương thỏa mãn $a^3b^2 = 32$. Tính giá trị của biểu thức $P = 3\log_2 a + 2\log_2 b$.

VÍ DỤ 4. Cho $\log_a b = 2, \log_a c = 3$. Tính $Q = \log_a(b^2c)$.

QUICK NOTE

VÍ DỤ 5. Cho a là số thực dương khác 5. Tính $I = \log_{\frac{a}{5}} \left(\frac{a^3}{125} \right)$.

VÍ DỤ 6. Cho a, b là hai số thực dương thỏa mãn $ab^3 = 8$. Tính giá trị của $\log_2 a + 3 \log_2 b$.

VÍ DỤ 7. Cho $a > 0$ và đặt $\log_2 a = x$. Tính $\log_8(4a^3)$ theo x .

VÍ DỤ 8. Cho số $a > 1$. Tính giá trị biểu thức $P = a^{2 \log_a 3}$.

VÍ DỤ 9. Đặt $\log_2 3 = a, \log_2 5 = b$. Tính $\log_5 3$ theo a, b .

VÍ DỤ 10. Tính giá trị biểu thức $Q = \log \frac{10}{11} + \log \frac{11}{12} + \log \frac{12}{13} + \dots + \log \frac{999}{1000}$.

VÍ DỤ 11. Cho a, b, c là các số thực dương, $a \neq 1$ và $\log_a b = 5, \log_a c = 7$. Tính giá trị của biểu thức $P = \log_{\sqrt{a}} \left(\frac{b}{c} \right)$.

VÍ DỤ 12. Cho a, b, c là các số thực khác 0 thỏa mãn $4^a = 25^b = 10^c$. Tính $T = \frac{c}{a} + \frac{c}{b}$.

VÍ DỤ 13. Cho a và b lần lượt là số hạng thứ nhất và thứ chín của một cấp số cộng có công sai $d \neq 0$. Tính giá trị của $\log_2 \left(\frac{b-a}{d} \right)$.

VÍ DỤ 14. Ba số $a + \log_2 3; a + \log_4 3; a + \log_8 3$ theo thứ tự lập thành cấp số nhân. Tìm công bội của cấp số nhân này.

2. Bài tập rèn luyện

BÀI 1. Tính giá trị biểu thức $A = 2^{\log_4 9 + \log_2 5}$.

BÀI 2. Cho hai số thực dương a, b thỏa mãn $a^2 b^3 = 64$. Tính giá trị của biểu thức $P = 2 \log_2 a + 3 \log_2 b$.

BÀI 3. Cho $0 < a \neq 1$. Tính giá trị của biểu thức $T = \log_a(a^3)$.

BÀI 4. Cho a là một số thực dương tùy ý và $a \neq 2$. Tính $P = \log_{\frac{a}{2}} \frac{a^3}{8}$.

BÀI 5. Cho a là số thực dương khác 1. Tính giá trị của biểu thức $I = \log_a a^{\frac{1}{2}}$.

BÀI 6. Tính giá trị của biểu thức $M = \log_2 \sqrt{2\sqrt{32}}$.

BÀI 7. Cho a là số thực dương tùy ý khác 1, tính giá trị $P = \log_{\sqrt[3]{a}} a^3$.

BÀI 8. Tính giá trị biểu thức $10^{\log 5} + 5^0$.

BÀI 9. Biết $\log_3 5 = a$. Tính $\log_3 45$ theo a .

BÀI 10. Cho a và b là hai số thực dương khác 1 thỏa mãn $\sqrt{a} = \sqrt[3]{b}$. Tính giá trị $\log_a b$.

BÀI 11. Với a, b là hai số thực dương thỏa mãn $\log a = 11, \log b = 13$. Tính giá trị biểu thức $\log(ab^2)$.

BÀI 12. Cho a, b là các số thực dương lớn hơn 1 thỏa mãn $\log_a b = 3$. Tính giá trị biểu thức

$$P = \log_{a^2 b} a^3 - 3 \log_{a^2} 2 \cdot \log_4 \left(\frac{a}{b} \right).$$

BÀI 13. Cho hai số dương a, b với $a \neq 1$, thỏa mãn $\log_{a^2} b + \log_a b^2 = 2$. Tính $\log_a b$.

BÀI 14. Biết rằng $a = \log_2 3, b = \log_2 5$. Hãy biểu diễn $\log_{45} 4$ theo a và b .

BÀI 15. Cho biểu thức $f(x) = \log_2 \left(x - \frac{1}{2} + \sqrt{x^2 - x + \frac{17}{4}} \right), (0 < x < 1)$. Tính giá trị của biểu thức

$$T = f\left(\frac{1}{1000}\right) + f\left(\frac{2}{1000}\right) + \dots + f\left(\frac{999}{1000}\right).$$

3. Bài tập trắc nghiệm

CÂU 1. Với a là số thực dương khác 1 tùy ý, giá trị $\log_{a^2} a^3$ bằng

- (A) 8. (B) 6. (C) $\frac{2}{3}$. (D) $\frac{3}{2}$.

QUICK NOTE

CÂU 2. Cho $a \neq 1$ là số thực dương và $P = \log_{\sqrt[3]{a}} a^3$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- (A) $P = 3$. (B) $P = 1$. (C) $P = \frac{1}{3}$. (D) $P = 9$.

CÂU 3. Cho $a > 0$, $a \neq 1$. Biểu thức $a^{\log_a a^2}$ bằng

- (A) 2. (B) a^2 . (C) $2a$. (D) 2^a .

CÂU 4. Giá trị của $\log_{\frac{1}{a}} \sqrt[3]{a^7}$ (với $a > 0$, $a \neq 1$) bằng

- (A) $-\frac{7}{3}$. (B) $\frac{2}{3}$. (C) $\frac{5}{3}$. (D) 4.

CÂU 5. Với a là số thực dương tùy ý, $\ln(ea^\pi)$ bằng

- (A) $1 + a \ln \pi$. (B) $1 + \ln \pi + \ln a$. (C) $1 - \pi \ln a$. (D) $1 + \pi \ln a$.

CÂU 6. Với a là số thực dương khác 1 tùy ý, $\log_{a^5} a^4$ bằng

- (A) $\frac{1}{5}$. (B) $\frac{4}{5}$. (C) 20. (D) $\frac{5}{4}$.

CÂU 7. Với a là thực dương tùy ý, $\ln(5a) - \ln(3a)$ bằng

- (A) $\frac{\ln 5}{\ln 3}$. (B) $\frac{\ln(5a)}{\ln(3a)}$. (C) $\ln(2a)$. (D) $\ln \frac{5}{3}$.

CÂU 8. Cho $\log_a b = 2$ với $a, b > 0$, a khác 1. Khẳng định nào sau đây sai?

- (A) $\log_a(ab) = 3$. (B) $\log_a(ab^2) = 3$. (C) $\log_a b^2 = 4$. (D) $\log_a(a^2b) = 4$.

CÂU 9. Với a là số thực dương tùy ý, $\log_{\sqrt{3}} a^{1010}$ bằng

- (A) $2020 \log_3 a$. (B) $1010 + 2 \log_3 a$. (C) $1010 + \frac{1}{2} \log_3 a$. (D) $505 \log_3 a$.

CÂU 10. Giá trị của $\log_a \frac{1}{a^3}$ với $a > 0$ và $a \neq 1$ bằng

- (A) -3. (B) 3. (C) $-\frac{1}{3}$. (D) $\frac{1}{3}$.

CÂU 11. Với mọi số thực a dương, $\log_2^2 a^2$ bằng

- (A) $2 \log_2^2 a$. (B) $-4 \log_2^2 a$. (C) $2 \log_2 a^2$. (D) $4 \log_2 a$.

CÂU 12. Với các số thực dương a, b bất kì. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

- (A) $\log(ab) = \log a + \log b$. (B) $\log(ab) = \log(a + b)$.
(C) $\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log_b a$. (D) $\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log(a - b)$.

CÂU 13. Giá trị của $\log_2 16$ bằng

- (A) 3. (B) 4. (C) -3. (D) -4.

CÂU 14. Cho a, b là các số thực dương thỏa mãn $a \neq 1$ và $\log_a b = 3$. Tính $\log_a(a^2b)$.

- (A) 4. (B) 3. (C) 5. (D) 6.

CÂU 15. Tính giá trị của $A = \log_2 \left(\frac{8 \cdot 2^5}{\sqrt[3]{2} \cdot 4^{-3}} \right)$.

- (A) $\frac{25}{3}$. (B) $\frac{164}{6}$. (C) $\frac{82}{3}$. (D) $\frac{716}{3}$.

CÂU 16. Cho a, b là các số thực dương khác 1 thỏa mãn $\log_2 a = 2$ và $\log_4 b = 3$. Giá trị biểu thức $P = \log_a(a^2b)$ bằng

- (A) $P = 10$. (B) $P = 5$. (C) $P = 2$. (D) $P = 1$.

CÂU 17. Cho các số thực dương a, b, c với $a \neq 1$, thỏa mãn $\log_a b = 3$, $\log_a c = -2$. Khi đó $\log_a(a^3b^2\sqrt{c})$ bằng

- (A) 5. (B) 8. (C) 13. (D) 10.

CÂU 18. Biết $\log(xy^3) = \log(x^2y) = 1$. Giá trị của $\log(xy)$ bằng

- (A) $\frac{1}{2}$. (B) $\frac{3}{5}$. (C) 1. (D) $\frac{5}{3}$.

CÂU 19. Cho a là số dương khác 1. Khi đó giá trị của $P = a^{\log_a \cdot \sqrt[3]{a}^{16}}$ là

- (A) 48. (B) 8. (C) 3^{16} . (D) 16.

CÂU 20. Cho các số a, b, c thỏa mãn $\log_a 3 = 2$, $\log_b 3 = \frac{1}{4}$ và $\log_{abc} 3 = \frac{2}{15}$. Giá trị của $\log_c 3$ bằng

- (A) $\frac{1}{3}$. (B) 3. (C) 2. (D) $\frac{1}{2}$.

CÂU 21. Giá trị của biểu thức $M = \log_2 2 + \log_2 4 + \log_2 8 + \dots + \log_2 256$ bằng

- (A) 56. (B) $8 \log_2 256$. (C) 36. (D) 48.

CÂU 22. Giá trị của biểu thức $P = (e^3)^{\log_e 5}$ bằng

- (A) 16. (B) 125. (C) 32. (D) 5.

CÂU 23. Tìm giá trị của biểu thức $A = \log_2 \left(2 \sin \frac{\pi}{12} \right) + \log_2 \cos \frac{\pi}{12}$.

- (A) 3. (B) -2. (C) -1. (D) 2.

CÂU 24. Cho a, b, c , là các số thực dương, khác 1 và thỏa mãn $\log_a b^2 = x, \log_{b^2} \sqrt{c} = y$. Giá trị của $\log_c a$ bằng

- (A) $\frac{xy}{2}$. (B) $2xy$. (C) $\frac{1}{2xy}$. (D) $\frac{2}{xy}$.

CÂU 25. Cho $\log_a x = 2, \log_b x = 5$ với a, b là các số thực lớn hơn 1. Giá trị của $\log_{\frac{a}{b}} x$ bằng

- (A) $\frac{6}{5}$. (B) $\frac{5}{6}$. (C) $\frac{5}{4}$. (D) $\frac{4}{5}$.

CÂU 26. Cho a và b là hai số thực dương thỏa mãn $a^4 b = 16$. Giá trị của $4 \log_2 a + \log_2 b$ bằng

- (A) 4. (B) 2. (C) 16. (D) 8.

CÂU 27. Cho các số thực dương a và b thỏa mãn $a^2 - 16b = 0$. Tính giá trị của biểu thức

$$P = \log_{\sqrt{2}} a - \log_2 b.$$

- (A) $P = 2$. (B) $P = 4$. (C) $P = 16$. (D) $P = \sqrt{2}$.

CÂU 28. Cho các số thực a, b, c thuộc khoảng $(1; +\infty)$ và $\log_{\sqrt{a}} b + \log_b c \cdot \log_b \left(\frac{c^2}{b} \right) + 9 \log_a c = 4 \log_a b$. Giá trị của biểu thức $\log_a b + \log_b c^2$ bằng

- (A) 2. (B) $\frac{1}{2}$. (C) 3. (D) 1.

CÂU 29. Cho cấp số cộng (u_n) có tất cả số hạng đều dương và $9(u_1 + u_2 + \dots + u_{2050}) = 4(u_1 + u_2 + \dots + u_{3075})$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \log_3^2 u_{14} + \log_3^2 u_{41} - \log_3^2 u_{122}$.

- (A) -4. (B) -2. (C) 1. (D) 3.

CÂU 30. Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $a^{\log_3 7} = 27, b^{\log_7 11} = 49, c^{\log_{11} 25} = \sqrt{11}$. Giá trị của biểu thức $A = a^{(\log_3 7)^2} + b^{(\log_7 11)^2} + c^{(\log_{11} 25)^2}$ là

- (A) 129. (B) 519. (C) 469. (D) 729.

Dạng 5. Biến đổi, rút gọn, biểu diễn biểu thức chứa lôgarit

1. Ví dụ mẫu

VÍ DỤ 1. Với a, x, y là các số thực dương tùy ý và khác 1. Rút gọn biểu thức $P = \frac{x^{\log_a y}}{y^{\log_a x}}$.

VÍ DỤ 2. Biết $\log_7 2 = m$, biểu diễn biểu thức $\log_{49} 28$ theo m .

VÍ DỤ 3. Với a là số thực dương tùy ý, rút gọn biểu thức $\log_3 (a^5)$.

VÍ DỤ 4. Cho các số thực a, b . Rút gọn biểu thức $A = \log_2 2^a + \log_2 2^b$.

VÍ DỤ 5. Biết rằng $\log_2 3 = a, \log_2 5 = b$. Tính $\log_{45} 4$ theo a và b .

VÍ DỤ 6. Cho hai số dương a, b với $a \neq 1$. Đặt $M = \log_{\sqrt{a}} \sqrt[3]{b}$. Tính M theo $N = \log_a b$.

VÍ DỤ 7. Biểu diễn $\log_{120} 600$ theo $a = \log_2 3$ và $b = \log_3 5$.

VÍ DỤ 8. Cho $\log 5 = a$. Tính $\log 25000$ theo a .

VÍ DỤ 9. Cho $a = \log 2, b = \log 3$. Tính $\log \sqrt[7]{0,432}$ theo a và b .

VÍ DỤ 10. Rút gọn biểu thức $M = 2 \log_{\sqrt{2}} (4x) - 12 \log_4 \sqrt{x} + \log_{\frac{1}{2}} \frac{8}{x}$ với $x > 0$.

QUICK NOTE

QUICK NOTE

VÍ DỤ 11. Cho $\log_2 5 = m$, $\log_3 5 = n$. Khi đó $\log_6 5$ tính theo m và n là

VÍ DỤ 12. Cho $\log_2 m = a$ và $A = \log_m (8m)$ với $m > 0$, $m \neq 1$. Tìm mối liên hệ giữa A và a .

VÍ DỤ 13. Cho các số thực dương x, a, b, c thỏa mãn

$$\log x = 2 \log(2a) - 2 \log b - 4 \log \sqrt[4]{c}.$$

Biểu diễn x theo a, b, c .

VÍ DỤ 14. Cho các số nguyên a, b, c thỏa mãn $a + \frac{b + \log_2 5}{c + \log_2 3} = \log_6 45$. Tính tổng $a + b + c$.

VÍ DỤ 15. Cho $G = 10^{10^{100}}$. Đặt $x = \log_{10} G$; $y = \log_x G$, khi đó $\log_y G$ có thể biểu diễn dưới dạng $\frac{m}{n}$ trong đó m, n là các số nguyên dương và ước chung lớn nhất của chúng bằng 1. Tính tổng các chữ số của số $m + n$.

2. Bài tập rèn luyện

BÀI 1. Cho a là số thực dương tùy ý, đặt $\log_3 a = \alpha$. Biểu diễn biểu thức $P = \log_{\frac{1}{3}} a - \log_{\sqrt{3}} a$ theo α .

BÀI 2. Đặt $\log_5 3 = a$. Biểu diễn $\log_{\frac{1}{25}} 81$ theo a .

BÀI 3. Cho a là số thực dương khác 1 và x, y là các số thực dương thỏa mãn $\log_a x = -1$ và $\log_a y = 4$. Rút gọn biểu thức $P = \log_a (x^2 y^3)$.

BÀI 4. Cho các số thực $x, y, z > 1$ và $\log_{xy}(yz) = 2$. Rút gọn biểu thức $\log_{\frac{z}{y}}(x)^4 + \log_{\frac{z}{x}}(xy)$.

BÀI 5. Cho $\log_{12} 3 = a$. Tính $\log_{24} 18$ theo a .

BÀI 6. Đặt $a = \ln 2$ và $b = \ln 3$. Biểu diễn $S = \ln \frac{1}{2} + \ln \frac{2}{3} + \ln \frac{3}{4} + \dots + \ln \frac{71}{72}$ theo a và b .

BÀI 7. Rút gọn biểu thức $Q = (y^{\log_2 3})^{\log_5 2}$ (với $y > 0$).

BÀI 8. Cho $\log_2 a = x$ và $\log_2 b = y$ với $a > 0$, $b > 0$ và $a \neq b$. Tìm biểu diễn của $\log_{a-2b^3}(a^4 b)$ theo x và y .

BÀI 9. Cho $\log_2 3 = a$. Biểu diễn biểu thức $\log_9 2$ theo a .

BÀI 10. Cho $0 < x \neq 1$, $0 < y$ thỏa mãn $\log_2 x = y$ và $\log_x y = \frac{3}{y}$. Tính tổng $x + y$.

BÀI 11. Cho các số thực dương a, b thỏa mãn $\ln a = x$, $\ln b = y$. Tính $P = \ln(a^3 b^2)$.

BÀI 12. Biết $\log_{15} 20 = a + \frac{2 \log_3 2 + b}{\log_3 5 + c}$ với $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Tính $T = a + b + c$.

BÀI 13. Cho $\log_2 3 = x$ và $\log_2 5 = y$. Biết rằng $\log_{20} 15 = \frac{ax + by}{cy + 2}$ với a, b, c là các số nguyên dương. Tính $P = a + b + c$.

BÀI 14. Cho tam giác ABC vuông tại A và AD là đường cao. Biết $AB = \log y$, $AC = \log 3$, $AD = \log x$, $BC = \log 9$. Tính $\frac{y}{x}$.

3. Bài tập trắc nghiệm

CÂU 1. Với mọi số thực a dương, $\log_2 \frac{4}{a}$ bằng

- (A) $\log_2 a - 2$. (B) $4 - \log_2 a$. (C) $2 - \log_2 a$. (D) $2 + \log_2 a$.

CÂU 2. Với a là số thực dương tùy ý, $\log(10a^2)$ bằng

- (A) $20 \log a$. (B) $1 + 2 \log a$. (C) $1 + (\log a)^2$. (D) $10 \log a$.

CÂU 3. Với a là số thực dương tùy ý, $\log \frac{5a}{2} + \log \frac{4}{a}$ bằng

- (A) 1. (B) 10. (C) $\log \frac{5a}{2} \cdot \log \frac{4}{a}$. (D) $\ln 10$.

QUICK NOTE

CÂU 20. Cho a, b, c là các số lớn hơn 1, đặt $\log_a b = m, \log_a c = n$. Khi đó $\log_a (ab^2c^5)$ bằng

- (A) $1 + 2m + 5n$. (B) $1 + \frac{1}{2}m + \frac{1}{5}n$. (C) $1 + \frac{1}{5}m + \frac{1}{2}n$. (D) $1 + 5m + 2n$.

CÂU 21. Cho tam giác ABC có $BC = a, CA = b, AB = c$. Nếu a, b, c theo thứ tự lập thành một cấp số nhân thì

- (A) $\ln \sin A \cdot \ln \sin C = 2 \ln \sin B$. (B) $\ln \sin A + \ln \sin C = 2 \ln \sin B$.
(C) $\ln \sin A \cdot \ln \sin C = (\ln \sin B)^2$. (D) $\ln \sin A + \ln \sin C = \ln(2 \sin B)$.

CÂU 22. Xét các số thực dương a và b thỏa mãn $\log_5 (5^a \cdot 25^b) = 5^{\log_5 a + \log_5 b + 1}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- (A) $a + 2b = ab$. (B) $a + 2b = 5ab$. (C) $2ab - 1 = a + b$. (D) $a + 2b = 2ab$.

CÂU 23. Cho ba số thực dương a, b, c khác 1 thỏa $\log_a b + \log_c b = \log_a 2016 \cdot \log_c b$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- (A) $bc = 2016$. (B) $ab = 2016$. (C) $ac = 2016$. (D) $abc = 2016$.

CÂU 24. Cho $\log_2 5 = a, \log_5 3 = b$, biết $\log_{24} 15 = \frac{ma + ab}{n + ab}$, với $m, n \in \mathbb{Z}$. Tính $S = m^2 + n^2$.

- (A) $S = 2$. (B) $S = 10$. (C) $S = 5$. (D) $S = 13$.

CÂU 25. Cho các số thực a, b với $ab > 0$. Mệnh đề nào dưới đây sai?

- (A) $\ln \left(\frac{a}{b} \right) = \ln |a| + \ln |b|^{-1}$. (B) $\log(ab) = \log |a| + \log |b|$.
(C) $\log a^4 = 4 \log |a|$. (D) $\log(ab) = \log a + \log b$.

CÂU 26. Đặt $\log_2 5 = a$, tính giá trị của $\log_4 1250$ theo a .

- (A) $2(1 + 4a)$. (B) $\frac{1 + 4a}{2}$. (C) $2(1 - 4a)$. (D) $\frac{1 - 4a}{2}$.

CÂU 27. Cho $\log_2 3 = a, \log_2 5 = b$, khi đó $\log_5 675$ được biểu diễn theo a, b là đáp án nào sau đây?

- (A) $\frac{3a + 2b}{b}$. (B) $\frac{ab + b}{2 + 3a}$. (C) $\frac{a^3 + b^2}{b}$. (D) $\frac{a + ab}{3 + 2a}$.

CÂU 28. Biết rằng $\log_2 3 = a, \log_2 5 = b$. Tính $\log_{45} 4$ theo a, b .

- (A) $\frac{2a + b}{2}$. (B) $\frac{2b + a}{2}$. (C) $\frac{2}{2a + b}$. (D) $2ab$.

CÂU 29. Biết $\log_2 3 = a, \log_3 5 = b$. Khi đó $\log_{15} 12$ bằng

- (A) $\frac{a + 2}{b + 1}$. (B) $\frac{ab + 1}{a + 2}$. (C) $\frac{a + 2}{a(b + 1)}$. (D) $\frac{a(b + 1)}{a + 2}$.

CÂU 30. Cho a, b là các số thực dương thỏa $\log_4 a + \log_4 b^2 = 5$ và $\log_4 a^2 + \log_4 b = 7$ thì tích ab nhận giá trị bằng

- (A) 16. (B) 2^8 . (C) 2^9 . (D) 2^{18} .

CÂU 31. Cho $\log_{18} 6 = \frac{a + \log_3 2}{b + \log_3 2}$, với a, b là các số nguyên. Giá trị của $a + b$ bằng

- (A) 4. (B) 5. (C) 3. (D) 2.

CÂU 32. Biết $\log a = b$ và $\ln 10 = c$. Giá trị của $\log_{10e}(10a)$ bằng

- (A) $\frac{ab + b}{1 + c}$. (B) $\frac{ab + a}{1 + c}$. (C) $\frac{bc + b}{1 + c}$. (D) $\frac{bc + c}{1 + c}$.

CÂU 33. Cho $\log 3 = a, \log 2 = b$. Khi đó giá trị của $\log_{125} 30$ được tính theo a, b là

- (A) $\frac{1 + a}{3(1 - b)}$. (B) $\frac{4(3 - a)}{3 - b}$. (C) $\frac{a}{3 + b}$. (D) $\frac{a}{3 + a}$.

CÂU 34. Cho số thực α thỏa mãn $9^\alpha + 9^{-\alpha} = 23$. Giá trị của biểu thức $\frac{5 + 3^\alpha + 3^{-\alpha}}{1 - 3^{-\alpha} - 3^\alpha}$ bằng

- (A) $\frac{1}{2}$. (B) $-\frac{5}{2}$. (C) $\frac{3}{2}$. (D) 2.

CÂU 35. Cho $a > 0, b > 0$ và a khác 1 thỏa mãn $\log_a b = \frac{b}{4}; \log_2 a = \frac{16}{b}$. Tính tổng $a + b$.

- (A) 32. (B) 16. (C) 18. (D) 10.

CÂU 36. Cho a, b là các số thực dương thỏa mãn $a^2 + b^2 = 14ab$, biểu thức $\log_2(a + b)$ bằng

- (A) $2(\log_2 a + \log_2 b)$. (B) $\frac{1}{2}(4 + \log_2 a + \log_2 b)$.
(C) $4 + \frac{1}{2}(\log_2 a + \log_2 b)$. (D) $(4 + \log_2 a + \log_2 b)$.

CÂU 37. Giả sử a, b là các số thực sao cho $x^3 + y^3 = a \cdot 10^{3z} + b \cdot 10^{2z}$ đúng với mọi số thực dương x, y, z thỏa mãn $\log(x + y) = z$ và $\log(x^2 + y^2) = z + 1$. Giá trị của $a + b$ bằng

- (A) $\frac{31}{2}$. (B) $\frac{29}{2}$. (C) $-\frac{31}{2}$. (D) $-\frac{25}{2}$.

CÂU 38. Cho các số $a, b > 0, a \neq 1$ thỏa mãn $\log_{ab} \frac{a}{b} = \frac{1}{3}$. Giá trị của $\log_{a^3}(ab^6)$ bằng

- (A) $\frac{8}{3}$. (B) $\frac{13}{4}$. (C) $\frac{8}{9}$. (D) $\frac{4}{3}$.

CÂU 39. Cho x, y và z là các số thực lớn hơn 1 và gọi w là số thực dương sao cho $\log_x w = 24$, $\log_y 40$ và $\log_{xyz} w = 12$. Tính $\log_z w$.

- (A) 52. (B) -60. (C) 60. (D) -52.

CÂU 40. Cho các số thực dương x, y thỏa mãn $\sqrt{\log x} + \sqrt{\log y} + \log \sqrt{x} + \log \sqrt{y} = 100$ và $\sqrt{\log x}, \sqrt{\log y}, \log \sqrt{x}, \log \sqrt{y}$ là các số nguyên dương. Khi đó kết quả xy bằng

- (A) 10^{200} . (B) 10^{100} . (C) 10^{164} . (D) 10^{144} .

Dạng 6. Toán thực tế, liên môn

☑ Chỉ số hay độ pH của một dung dịch được tính theo công thức: $\text{pH} = -\log[\text{H}^+]$ với $[\text{H}^+]$ là nồng độ ion hydrogen. Người ta đo được nồng độ ion hydrogen của một cốc nước cam là 10^{-4} , nước dừa là 10^{-5} (nồng độ tính bằng mol L^{-1}).

☑ Công thức lãi kép theo N kì hạn

Nếu đem gửi ngân hàng một số vốn ban đầu là P theo thể thức lãi kép với lãi suất hằng năm không đổi là r và chia mỗi năm thành m kì tính lãi thì sau t năm (tức là sau $tm = N$ kì hạn) số tiền thu được (cả vốn lẫn lãi) là

$$A_m = P \left(1 + \frac{r}{m}\right)^N.$$

☑ Công thức lãi kép liên tục

Với số vốn ban đầu là P , theo thể thức lãi kép liên tục, lãi suất hằng năm không đổi là r thì sau t năm, số tiền thu được cả vốn lẫn lãi sẽ là

$$A = Pe^{tr}.$$

1. Ví dụ mẫu

VÍ DỤ 1. Trong hóa học, độ pH của một dung dịch được tính theo công thức $\text{pH} = -\log[\text{H}^+]$, trong đó $[\text{H}^+]$ là nồng độ H^+ (ion hydro) tính bằng mol/L. Các dung dịch có pH bé hơn 7 thì có tính acid, có pH lớn hơn 7 thì có tính kiềm, có pH bằng 7 thì trung tính.

- a) Tính độ pH của dung dịch có nồng độ H^+ là 0,0001 mol/L. Dung dịch này có tính acid, hay kiềm hay trung tính?
b) Dung dịch A có nồng độ H^+ gấp đôi nồng độ H^+ của dung dịch B. Độ pH của dung dịch nào lớn hơn và lớn hơn bao nhiêu? Làm tròn kết quả đến hàng phần nghìn.

VÍ DỤ 2. Bác An gửi tiết kiệm ngân hàng 100 triệu đồng kì hạn 12 tháng, với lãi suất không đổi là 6% một năm. Khi đó sau n năm gửi thì tổng số tiền bác An thu được (cả vốn lẫn lãi) cho bởi công thức sau:

$$A = 100 \cdot (1 + 0,06)^n \text{ (triệu đồng)}.$$

Hỏi sau ít nhất bao nhiêu năm, tổng số tiền bác An thu được là không dưới 150 triệu đồng?

VÍ DỤ 3. Một vi khuẩn có khối lượng khoảng $5 \cdot 10^{-13}$ gam và cứ 20 phút vi khuẩn đó tự nhân đôi một lần (Nguồn: Câu hỏi và bài tập vi sinh học, NXB DHSP, 2008). Giả sử các vi khuẩn được nuôi trong các điều kiện sinh trưởng tối ưu và mỗi con vi khuẩn đều tồn tại

QUICK NOTE

CÂU 2. Biết rằng năm 2001, dân số Việt Nam là 78685800 người và tỉ lệ tăng dân số năm đó là 1,7%. Cho biết sự tăng dân số được ước tính theo công thức $S = A \cdot e^{Nr}$ (trong đó A là dân số của năm lấy làm mốc tính, S là dân số sau N năm, r là tỉ lệ tăng dân số hàng năm). Hỏi nếu cứ tăng dân số với tỉ lệ như vậy thì đến năm nào dân số nước ta ở mức 120 triệu người?

- (A) 2020. (B) 2022. (C) 2025. (D) 2026.

CÂU 3. Một người gửi số tiền 80 triệu đồng vào một ngân hàng với lãi suất 6,2%/năm. Cứ sau mỗi năm, số tiền lãi sẽ sinh ra được nhập vào vốn ban đầu để tính lãi cho năm tiếp theo. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu năm thì người đó sẽ lĩnh được số tiền cả vốn lẫn lãi là 100 triệu đồng? (Giả thiết lãi suất không đổi trong suốt thời gian gửi.)

- (A) 3 năm. (B) 2 năm. (C) 4 năm. (D) 5 năm.

CÂU 4. Một người gửi 50 triệu đồng vào một ngân hàng với lãi suất 6%/ năm. Biết nếu không rút tiền khỏi ngân hàng thì cứ mỗi năm số tiền lãi sẽ được cộng vào gốc để tính lãi cho năm tiếp theo. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu năm thì tổng số tiền cả gốc lẫn lãi của người đó nhiều là 100 triệu? Giả định trong suốt thời gian gửi, lãi suất không thay đổi và người đó không rút tiền ra.

- (A) 14 năm. (B) 11 năm. (C) 12 năm. (D) 13 năm.

CÂU 5. Một người gửi tiết kiệm với lãi suất 8,4%/năm và lãi hàng năm được nhập vào vốn. Sau bao nhiêu năm người đó thu được gấp đôi số tiền ban đầu?

- (A) 9. (B) 6. (C) 8. (D) 7.

CÂU 6. Cường độ một trận động đất M (richter) được cho bởi công thức $M = \log A - \log A_0$, với A là biên độ rung chấn tối đa và A_0 là một biên độ chuẩn (hằng số). Đầu thế kỷ 20, một trận động đất ở San Francisco có cường độ 8,3 độ richter. Trong cùng năm đó, trận động đất khác ở Nam Mỹ có biên độ rung chấn tối đa gấp 4 lần biên độ rung chấn tối đa của trận động đất ở San Francisco. Tính cường độ của trận động đất ở Nam Mỹ (làm tròn đến 1 chữ số thập phân).

- (A) 33,2 richter. (B) 12,3 richter. (C) 8,9 richter. (D) 2,1 richter.

CÂU 7. Một người gửi tiết kiệm 200 triệu đồng với lãi suất 5% một năm và lãi hàng năm được nhập vào vốn. Sau 9 năm nhận được số tiền cả gốc và lãi nhận được là bao nhiêu?

- (A) 210, 55 triệu. (B) 310, 27 triệu. (C) 300 triệu. (D) 352, 58 triệu.

CÂU 8. Áp suất không khí P (đo bằng milimet thủy ngân, kí hiệu là mmHg) suy giảm mũ so với độ cao x (đo bằng mét), tức là P giảm theo công thức $P = P_0 \cdot e^{xi}$, trong đó $P_0 = 760$ mmHg là áp suất của mực nước biển ($x = 0$), i là hệ số suy giảm. Biết rằng ở độ cao 1000 m thì áp suất của không khí là 672,71 mmHg. Hỏi áp suất không khí ở độ cao 3000 m gần bằng số nào dưới đây nhất?

- (A) 530,23 mmHg. (B) 527,06 mmHg. (C) 554,38 mmHg. (D) 428,2 mmHg.

CÂU 9. Một nguồn âm đẳng hướng phát ra từ điểm O . Mức cường độ âm tại điểm M cách O một khoảng R được tính bởi công thức $L_M = \log \frac{k}{R^2}$ (Ben), với $k > 0$ là hằng số. Biết điểm O thuộc đoạn thẳng AB và mức cường độ âm thanh tại A và B lần lượt là $L_A = 4,3$ (Ben) và $L_B = 5$ (Ben). Tính mức cường độ âm tại trung điểm của AB (làm tròn đến hai chữ số thập phân).

- (A) 4,65 (Ben). (B) 4,58 (Ben). (C) 5,42 (Ben). (D) 9,40 (Ben).

Bài 20. HÀM SỐ MŨ. HÀM SỐ LOGARIT

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa

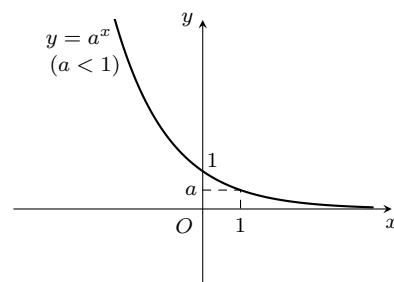
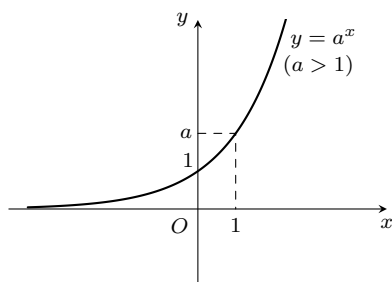
ĐỊNH NGHĨA 20.1. Cho số dương a khác 1. Hàm số cho tương ứng mỗi số thực x với số thực a^x được gọi là **hàm số mũ** cơ số a , kí hiệu $y = a^x$.

Nhận xét: Hàm số $y = a^x$ có tập xác định là \mathbb{R} .

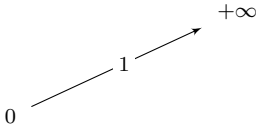
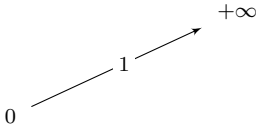
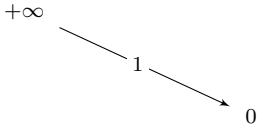
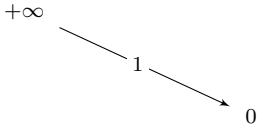
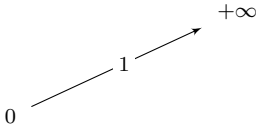
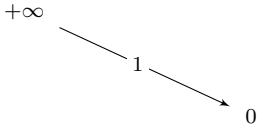
ĐỊNH NGHĨA 20.2. Đồ thị hàm số $y = a^x$ ($a > 0, a \neq 1$) là một đường cong liên nét, cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 1, nằm ở phía trên trục hoành và đi lên nếu $a > 1$, đi xuống nếu $0 < a < 1$.

QUICK NOTE

QUICK NOTE



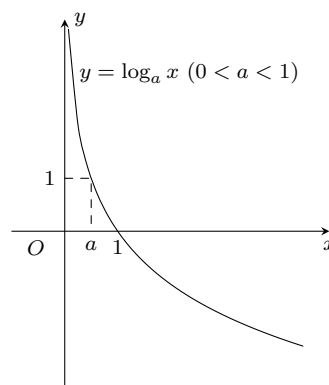
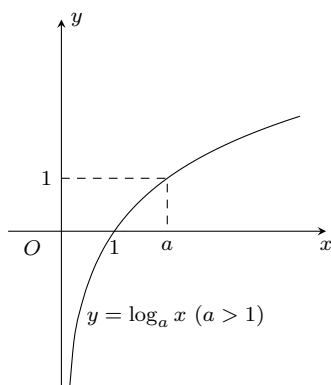
Nhận xét: Cho hàm số mũ $y = a^x$ ($a > 0, a \neq 1$).

$y = a^x$ ($a > 1$)	$y = a^x$ ($0 < a < 1$)													
$\mathcal{D} = \mathbb{R}; T = (0; +\infty)$.	$\mathcal{D} = \mathbb{R}, T = (0; +\infty)$.													
Tính liên tục: Hàm số liên tục trên \mathbb{R} .	Tính liên tục: Hàm số liên tục trên \mathbb{R} .													
Giới hạn đặc biệt $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty$.	Giới hạn đặc biệt $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0$.													
Sự biến thiên: Hàm số đồng biến trên \mathbb{R} .	Sự biến thiên: Hàm số nghịch biến trên \mathbb{R} .													
Bảng biến thiên	Bảng biến thiên													
<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>0</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$y = a^x$</td><td></td><td></td></tr></table>	x	$-\infty$	0	$+\infty$	$y = a^x$			<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>0</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$y = a^x$</td><td></td></tr></table>	x	$-\infty$	0	$+\infty$	$y = a^x$	
x	$-\infty$	0	$+\infty$											
$y = a^x$														
x	$-\infty$	0	$+\infty$											
$y = a^x$														

ĐỊNH NGHĨA 20.3. Cho số dương a khác 1. Hàm số cho tương ứng mỗi số thực dương x với số thực $\log_a x$ được gọi là **hàm số lô-ga-rít** cơ số a , kí hiệu $y = \log_a x$.

Nhận xét: Cho hàm số $y = \log_a x$ ($a > 0, a \neq 1$).

$y = a^x \ (a > 1)$	$y = a^x \ (0 < a < 1)$																
$\mathcal{D} = (0; +\infty); T = \mathbb{R}$	$\mathcal{D} = (0; +\infty); T = \mathbb{R}.$																
Tính liên tục: Hàm số liên tục trên $(0; +\infty)$.	Tính liên tục: Hàm số liên tục trên $(0; +\infty)$.																
Giới hạn đặc biệt $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = +\infty, \lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = -\infty$	Giới hạn đặc biệt $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = -\infty, \lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = +\infty.$																
Hàm số đồng biến trên $(0; +\infty)$.	Hàm số nghịch biến trên $(0; +\infty)$.																
Bảng biến thiên	Bảng biến thiên																
<table><tr><td>x</td><td>0</td><td>1</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$y = \log_a x$</td><td>$-\infty$</td><td>0</td><td>$+\infty$</td></tr></table>	x	0	1	$+\infty$	$y = \log_a x$	$-\infty$	0	$+\infty$	<table><tr><td>x</td><td>0</td><td>1</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$y = \log_a x$</td><td>$+\infty$</td><td>0</td><td>$-\infty$</td></tr></table>	x	0	1	$+\infty$	$y = \log_a x$	$+\infty$	0	$-\infty$
x	0	1	$+\infty$														
$y = \log_a x$	$-\infty$	0	$+\infty$														
x	0	1	$+\infty$														
$y = \log_a x$	$+\infty$	0	$-\infty$														



B. CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

Dạng 7. Tập xác định của hàm số

Hàm số $y = \log_a f(x)$ ($0 < a \neq 1$) xác định khi $f(x) > 0$.

1. Ví dụ mẫu

VÍ DỤ 1. Tìm tập xác định của hàm số $y = 12^x$.

VÍ DỤ 2. Tìm tập xác định của các hàm số

a) $y = \log_2(3 - 2x)$.

b) $y = \log_3(x^2 + 4x)$.

VÍ DỤ 3. Tìm tập xác định của các hàm số sau

a) $y = \log|x + 3|$;

b) $y = \ln(4 - x^2)$.

VÍ DỤ 4. Tìm tập xác định của các hàm số

a) $y = \log_5(2x - 3)$;

b) $y = \log_{\frac{1}{5}}(-x^2 + 4)$.

2. Bài tập rèn luyện

BÀI 1. Tìm tập xác định của các hàm số sau

a) $y = \log_6(x - 4)$

e) $y = \log_2(x - x^2)$

i) $y = \log_{2022}(3x - x^2)$

b) $y = \log_5(2x - 1)$

f) $y = \log_3(x - 4)$

c) $y = \log_2(3 - 2x)$

g) $y = \log_7(x + 2)^2$

j) $y = \log_2\left(\frac{x - 6}{1 + x}\right)$

d) $y = \log_{2021}(3 - x)$

h) $y = \log(2 + x - x^2)$

BÀI 2. Tìm tất cả giá trị của tham số m để hàm số sau xác định trên \mathbb{R}

a) $y = \log_2(x^2 - 2x + m)$

d) $y = \ln(3x^2 + 12mx + 6)$

b) $y = \log(x^2 - 2x - m + 1)$

c) $y = \log_7(x^2 - 2x - m^2 + 5)$

e) $y = \log(x^2 - 8x + 10m - m^2)$

3. Bài tập trắc nghiệm

CÂU 1. Tập xác định của hàm số $y = (2 - \sqrt{3})^x$ là

☐ (A) $(0; +\infty)$.

☐ (B) $(-\infty; +\infty)$.

☐ (C) $[0; +\infty)$.

☐ (D) $(-\infty; 0)$.

CÂU 2. Tập xác định của hàm số $y = 7^x$ là

☐ (A) $(0; 1)$.

☐ (B) $(-\infty; +\infty)$.

☐ (C) $(0; +\infty)$.

☐ (D) $(1; +\infty)$.

CÂU 3. Tìm tập xác định \mathcal{D} của hàm số $y = \log_2(x^2 - 2x - 3)$.

☐ (A) $\mathcal{D} = [-1; 3]$.

☐ (B) $\mathcal{D} = (-\infty; -1] \cup [3; +\infty)$.

☐ (C) $\mathcal{D} = (-1; 3)$.

☐ (D) $\mathcal{D} = (-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$.

CÂU 4. Hàm số $y = \log_3(2x - 3)$ có tập xác định là

☐ (A) \mathbb{R} .

☐ (B) $\left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$.

☐ (C) $\left(-\infty; \frac{3}{2}\right]$.

☐ (D) $\left(-\infty; \frac{3}{2}\right)$.

CÂU 5. Tập xác định của hàm số $y = \log_3(2 - x)$ là

☐ (A) $[2; +\infty)$.

☐ (B) $(-\infty; 2]$.

☐ (C) $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.

☐ (D) $(-\infty; 2)$.

CÂU 6. Gọi \mathcal{D} là tập tất cả những giá trị của x để $\log_2(2018 - x)$ có nghĩa. Tập \mathcal{D} là

☐ (A) $\mathcal{D} = [0; 2018]$.

☐ (B) $\mathcal{D} = (-\infty; 2018)$.

☐ (C) $\mathcal{D} = (-\infty; 2018]$.

☐ (D) $\mathcal{D} = (0; 2018)$.

CÂU 7. Tập xác định \mathcal{D} của hàm số $y = \log_2(x - 3) + \log_3(x + 2)$ là

☐ (A) $\mathcal{D} = (-\infty; -2) \cup (3; +\infty)$.

☐ (B) $\mathcal{D} = (-2; +\infty)$.

☐ (C) $\mathcal{D} = (3; +\infty)$.

☐ (D) $\mathcal{D} = (-2; 3)$.

QUICK NOTE

QUICK NOTE

CÂU 8. Tìm tập xác định \mathcal{D} của hàm số $y = \log_{13} \frac{x+2}{x-5}$.

- (A) $\mathcal{D} = (-\infty; 0] \cup (5; +\infty)$. (B) $\mathcal{D} = [-2; 5)$.
(C) $\mathcal{D} = (-\infty; -2] \cup [5; +\infty)$. (D) $\mathcal{D} = (-\infty; -2) \cup (5; +\infty)$.

CÂU 9. Tập xác định \mathcal{D} của hàm số $y = \log_5 \frac{x+3}{x-2}$ là

- (A) $\mathcal{D} = (-\infty; -3) \cup (2; +\infty)$. (B) $\mathcal{D} = (-\infty; -3] \cup [2; +\infty)$.
(C) $\mathcal{D} = [-3; 2)$. (D) $\mathcal{D} = (-\infty; -3] \cup (2; +\infty)$.

CÂU 10. Tìm tập xác định \mathcal{D} của hàm số $y = \log(x^2 - 5x - 6)$.

- (A) $\mathcal{D} = (-\infty; -1) \cup (6; +\infty)$. (B) $\mathcal{D} = (-\infty; -1] \cup [6; +\infty)$.
(C) $\mathcal{D} = (-\infty; 2] \cup [3; +\infty)$. (D) $\mathcal{D} = (-\infty; 2) \cup (3; +\infty)$.

CÂU 11. Tập xác định của hàm số $y = \ln(x^2 - 5x + 6)$ là

- (A) $(-\infty; 2] \cup [3; +\infty)$. (B) $(-\infty; 2) \cup (3; +\infty)$.
(C) $[2; 3]$. (D) $(2; 3)$.

CÂU 12. Tìm tập xác định \mathcal{D} của hàm số $y = \log \frac{2-x}{x^2+1}$.

- (A) $\mathcal{D} = (-\infty; -1) \cup (1; 2)$. (B) $\mathcal{D} = (2; +\infty)$.
(C) $\mathcal{D} = (-\infty; 2)$. (D) $\mathcal{D} = (-1; 1) \cup (2; +\infty)$.

CÂU 13. Tìm tập xác định \mathcal{D} của hàm số $y = \frac{2}{\log_4(4-x) - 3}$.

- (A) $\mathcal{D} = (4; +\infty)$. (B) $\mathcal{D} = (-\infty; 4)$.
(C) $\mathcal{D} = (-\infty; -60) \cup (-60; 4)$. (D) $\mathcal{D} = (-\infty; -60) \cup (-60; 4]$.

CÂU 14. Tập xác định \mathcal{D} của hàm số $y = \log_5(x^2 + 2x - 3)$ là

- (A) $\mathcal{D} = (-\infty; -3) \cup (1; +\infty)$. (B) $\mathcal{D} = [-3; 1]$.
(C) $\mathcal{D} = (-3; 1)$. (D) $\mathcal{D} = (-\infty; -3] \cup [1; +\infty)$.

CÂU 15. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \log_3(x^2 - 2mx + m + 6)$ có tập xác định là \mathbb{R} ?

- (A) 4. (B) 5. (C) 6. (D) vô số.

CÂU 16. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \ln(x^2 - 2x + m + 1)$ có tập xác định là \mathbb{R} .

- (A) $m = 0$. (B) $0 < m < 3$.
(C) $m < -1$ hoặc $m > 0$. (D) $m > 0$.

Dạng 8. Sự biến thiên và đồ thị của hàm số mũ và lôgarit

1. Ví dụ mẫu

VÍ DỤ 1. Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị hàm số $y = 3^x$.

VÍ DỤ 2. Vẽ đồ thị hàm số $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

VÍ DỤ 3. Vẽ đồ thị các hàm số sau:

- a) $y = \log x$; b) $y = \log_{\frac{1}{3}} x$.

VÍ DỤ 4. So sánh các cặp số sau:

- a) $\log_3 7$ và $3 \log_3 2$. b) $2 \log_{0,4} 5$ và $3 \log_{0,4} 3$.

VÍ DỤ 5. Sử dụng tính chất của hàm số mũ, so sánh các cặp số sau:

- a) $1,4^2$ và $1,4^{1,8}$. b) $0,9^{-1,2}$ và $0,9^{-0,8}$. c) $\sqrt[3]{2}$ và $\sqrt[5]{4}$.

2. Bài tập rèn luyện

BÀI 1. Trong các hàm số sau, hàm số nào đồng biến, hàm số nào nghịch biến trên khoảng xác định của hàm số đó? Vì sao?

a) $y = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^x$; b) $y = \left(\frac{\sqrt[3]{26}}{3}\right)^x$; c) $y = \log_{\pi} x$; d) $y = \log_{\frac{\sqrt{15}}{4}} x$.

BÀI 2. Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị hàm số $y = 4^x$;

BÀI 3. Vẽ đồ thị các hàm số sau: $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$.

BÀI 4. Vẽ đồ thị hàm số sau: $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$.

BÀI 5. Vẽ đồ thị các hàm số sau

a) $y = \log_{\frac{1}{4}} x$.

b) $y = \log_3 x$

BÀI 6. So sánh các cặp số sau:

a) $\log_{\pi} 0,8$ và $\log_{\pi} 1,2$.

b) $\log_{0,3} 2$ và $\log_{0,3} 2,1$.

BÀI 7. So sánh các cặp số sau:

a) $1,3^{0,7}$ và $1,3^{0,6}$.

b) $0,75^{-2,3}$ và $0,75^{-2,4}$.

3. Bài tập trắc nghiệm

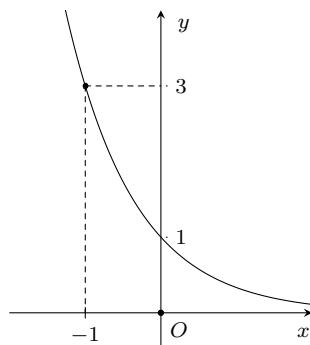
CÂU 1. Hàm số nào dưới đây đồng biến trên tập xác định của nó?

☐ A $y = (\sqrt{3})^x$. ☐ B $y = (0,6)^x$. ☐ C $y = \left(\frac{e}{5}\right)^x$. ☐ D $y = \left(\frac{3}{4}\right)^x$.

CÂU 2.

Hàm số nào sau đây có đồ thị như hình vẽ bên?

☐ A $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$. ☐ B $y = (\sqrt{3})^x$.
☐ C $y = (\sqrt{2})^x$. ☐ D $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.



CÂU 3. Hàm số nào sau đây đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$?

☐ A $y = \left(\frac{e}{4}\right)^x$. ☐ B $y = \left(\frac{2}{3}\right)^x$. ☐ C $y = \left(\frac{\pi}{3}\right)^x$. ☐ D $y = \left(\frac{3}{4}\right)^x$.

CÂU 4. Hàm số nào sau đây đồng biến trên tập xác định của nó?

☐ A $y = \left(\frac{3}{\pi}\right)^x$. ☐ B $y = (\sqrt{2020} - \sqrt{2019})^x$.
☐ C $y = \log_{\frac{1}{2}}(x+4)$. ☐ D $y = \left(\frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{e}\right)^x$.

CÂU 5. Trong các hàm số sau, hàm số nào nghịch biến trên \mathbb{R} ?

☐ A $y = \left(\frac{2}{5}\right)^{-x}$. ☐ B $y = \left(\frac{e}{4}\right)^x$. ☐ C $y = \log_3 x^2$. ☐ D $y = \log(x^3)$.

CÂU 6. Trong các hàm số dưới đây, hàm số nào nghịch biến trên khoảng \mathbb{R} ?

☐ A $y = (0,5)^x$. ☐ B $y = 2^x$. ☐ C $y = \pi^x$. ☐ D $y = e^x$.

CÂU 7. Cho hàm số $y = e^x$. Mệnh đề nào sau đây là sai?

- ☐ A Đồ thị hàm số đi qua điểm $A(1; 0)$.
☐ B Tập xác định của hàm số $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.
☐ C Hàm số có đạo hàm $y' = e^x, \forall x \in \mathbb{R}$.
☐ D Đồ thị hàm số nhận trục hoành là tiệm cận ngang.

QUICK NOTE

CÂU 8. Tìm tất cả các giá trị của a để hàm số $y = (2020 - a)^x$ nghịch biến trên \mathbb{R} .

☐ A $a < 2019$.

☐ B $2019 < a < 2020$.

☐ C $0 < a < 1$.

☐ D $a < 2020$.

CÂU 9.

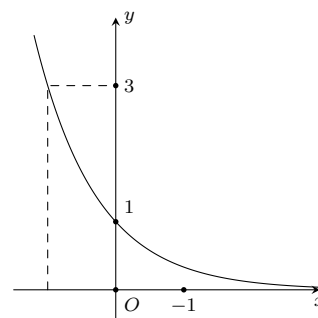
Đồ thị trong hình vẽ bên dưới là đồ thị của hàm số nào sau đây?

☐ A $y = (\sqrt{2})^x$.

☐ B $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

☐ C $\left(\frac{1}{3}\right)^x$.

☐ D $(\sqrt{3})^x$.



CÂU 10. Hàm số nào dưới đây nghịch biến trên tập xác định của nó?

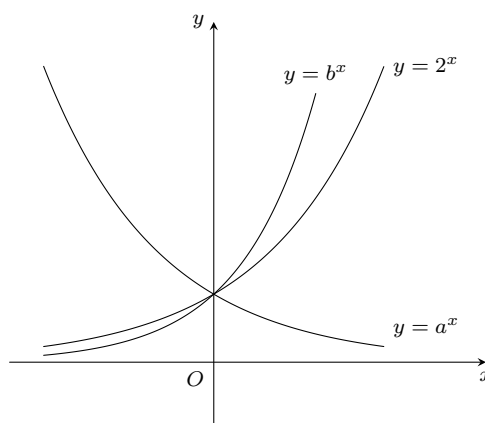
☐ A $y = (\sqrt{2})^x$.

☐ B $y = \left(\frac{3}{2}\right)^x$.

☐ C $y = \left(\frac{\pi}{e}\right)^x$.

☐ D $y = (0,5)^x$.

CÂU 11. Cho hai số thực a, b khác 1 và đồ thị của ba hàm số $y = a^x, y = b^x, y = 2^x$ trên cùng một hệ trục tọa độ có dạng như hình vẽ bên.



Mệnh đề nào sau đây đúng?

☐ A $1 < a < 2, 1 < b < 2$.

☐ B $0 < a < 1, 1 < b < 2$.

☐ C $0 < a < 1, b > 2$.

☐ D $1 < a < 2, b > 2$.

CÂU 12.

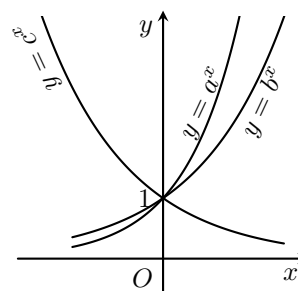
Cho đồ thị ba hàm số $y = a^x, y = b^x, y = c^x$ như hình vẽ bên. Kết luận nào sau đây đúng?

☐ A $0 < c < 1 < b < a$.

☐ B $0 < a < 1 < c < b$.

☐ C $0 < a < 1 < b < c$.

☐ D $0 < c < 1 < a < b$.



CÂU 13. Trong các hàm số sau đây, hàm số nào nghịch biến trên tập xác định của nó?

☐ A $y = \ln x$.

☐ B $y = \log x$.

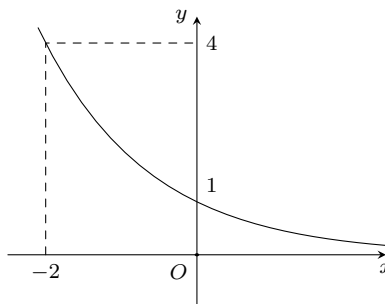
☐ C $y = \log_{\frac{2}{e}} x$.

☐ D $y = \log_{\sqrt{3}} x$.

CÂU 14.

Đường cong ở hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

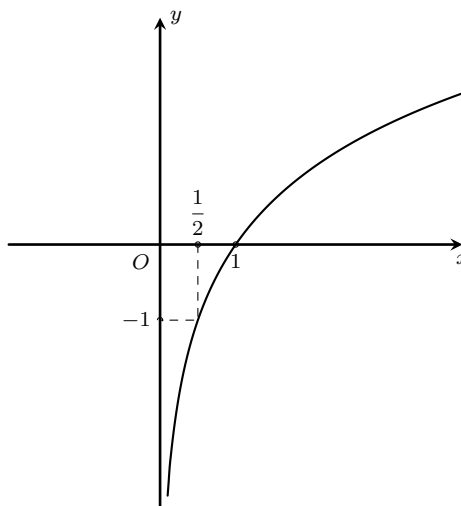
- ☐ A $y = \frac{1}{2^x}$. ☐ B $y = \log_{0,5} x$.
☐ C $y = 2^x$. ☐ D $y = -x^2 + 2x + 1$.



CÂU 15.

Đường cong trong hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

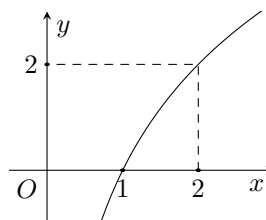
- ☐ A $y = \log_2 x$. ☐ B $y = \log_{\sqrt{2}} x$.
☐ C $y = \log_2 2x$. ☐ D $y = \log_{\frac{1}{2}} x$.



CÂU 16.

Tìm giá trị a của hàm số $y = \log_a x$ ($0 < a \neq 1$) có đồ thị như hình vẽ bên.

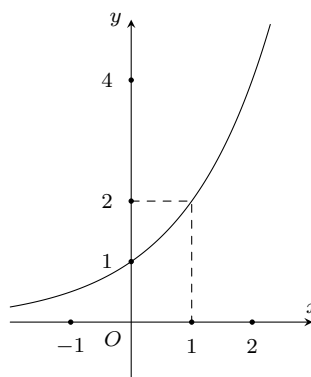
- ☐ A $a = \sqrt{2}$. ☐ B $a = 2$. ☐ C $a = \frac{1}{2}$. ☐ D $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$.



CÂU 17.

Đồ thị sau là của hàm số nào dưới đây?

- ☐ A $y = \ln x$. ☐ B $y = 2^x$.
☐ C $y = \log_2 x$. ☐ D $y = 4^x$.



CÂU 18. Cho hàm số $y = \log_{\frac{1}{\sqrt{3}}} x$. Khẳng định nào dưới đây **sai**?

- ☐ A Đồ thị hàm số đi qua điểm $(1; 0)$.
☐ B Đồ thị hàm số nằm phía trên trục hoành.
☐ C Hàm số nghịch biến trên $(0; +\infty)$.
☐ D Đồ thị hàm số nằm bên phải trục tung.

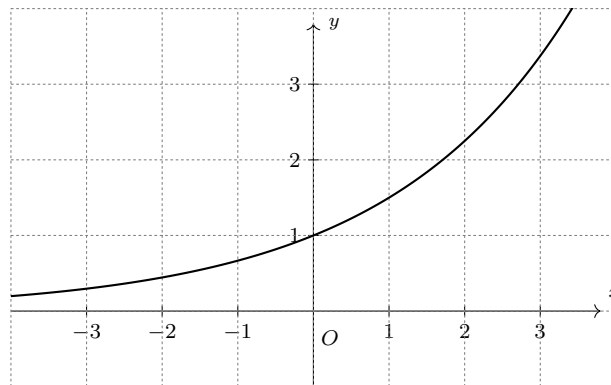
CÂU 19.

QUICK NOTE

QUICK NOTE

Đồ thị như hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào trong các hàm số sau

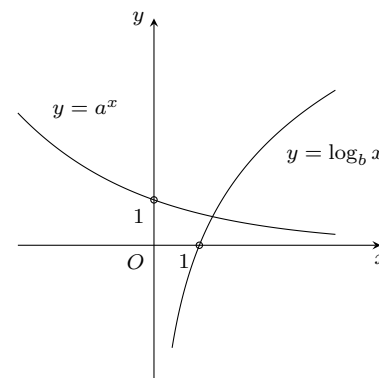
- (A) $y = \log_{\frac{3}{2}} x$. (B) $y = \left(\frac{3}{2}\right)^x$.
 (C) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$. (D) $y = \log_{\frac{1}{2}} x$.



CÂU 20.

Cho đồ thị hàm số $y = a^x, y = \log_b x$ (như hình vẽ).
Khẳng định nào sau đây đúng?

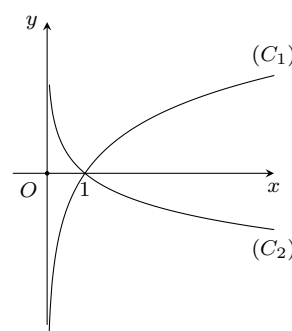
- (A) $0 < b < 1 < a$. (B) $0 < a < 1 < b$.
 (C) $a, b > 1$. (D) $0 < a, b < 1$.



CÂU 21.

Cho hai hàm số $y = \log_a x, y = \log_b x$ với a, b là hai số thực dương, khác 1 có đồ thị lần lượt là $(C_1), (C_2)$ như hình vẽ.
Khẳng định nào sau đây sai?

- (A) $0 < b < a < 1$. (B) $a > 1$.
 (C) $0 < b < 1 < a$. (D) $0 < b < 1$.



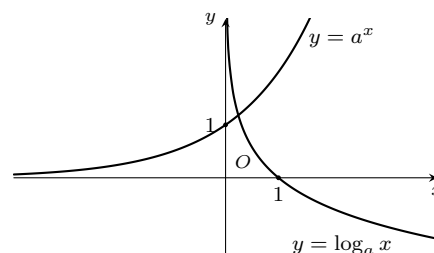
CÂU 22. Cho a là số thực dương khác 1. Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau.

- (A) Đồ thị hàm số $y = a^x$ với $0 < a < 1$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.
 (B) Hàm số $y = a^x$ với $a > 1$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.
 (C) Đồ thị hàm số $y = a^x$ luôn đi qua điểm $M(a; 1)$.
 (D) Đồ thị hàm số $y = a^x$ và đồ thị hàm số $y = \log_a x$ đối xứng nhau qua đường thẳng $y = x$.

CÂU 23.

Cho đồ thị hàm số $y = a^x, y = \log_b x$ như hình vẽ. Trong các khẳng định sau, đâu là khẳng định đúng?

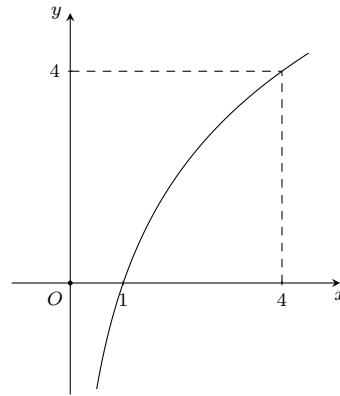
- (A) $0 < b < 1 < a$.
 (B) $a > 1, b > 1$.
 (C) $0 < a < 1 < b$.
 (D) $0 < a < 1, 0 < b < 1$.



CÂU 24.

Hàm số $y = \log_a x$ ($0 < a \neq 1$) có đồ thị là hình bên. Giá trị của cơ số a bằng

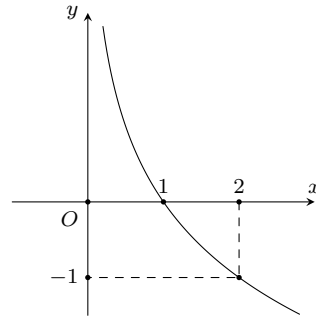
- (A) $\sqrt[4]{2}$. (B) 4. (C) $\sqrt{2}$. (D) 2.



CÂU 25.

Đường cong trong hình bên dưới là đồ thị của một trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

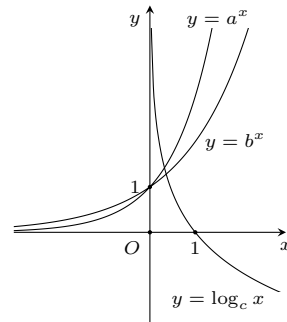
- (A) $y = \log_2 x$. (B) $y = 2^x$.
(C) $y = \log_{\frac{1}{2}} x$. (D) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.



CÂU 26.

Cho đồ thị các hàm số $y = a^x$, $y = b^x$ và $y = \log_c x$ như hình vẽ. Khẳng định nào sau đây đúng?

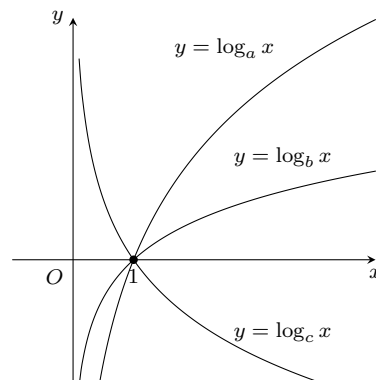
- (A) $b < a < c$. (B) $c < b < a$.
(C) $c < a < b$. (D) $a < b < c$.



CÂU 27.

Cho đồ thị của ba hàm số $y = \log_a x$, $y = \log_b x$, $y = \log_c x$ như hình vẽ. Khẳng định nào sau đây đúng?

- (A) $b > c > a$. (B) $b > a > c$.
(C) $c > a > b$. (D) $c > b > a$.



Dạng 9. Bài toán thực tế

1. Ví dụ mẫu

VÍ DỤ 1. Ta coi năm lấy làm mốc để tính dân số của một vùng (hoặc một quốc gia) là năm 0. Khi đó, dân số của quốc gia đó ở năm thứ t là hàm số theo biến t được cho bởi công thức: $S = A \cdot e^{rt}$. Trong đó A là dân số của vùng (hoặc quốc gia) đó ở năm 0 và r là tỉ lệ tăng dân số hằng năm (Nguồn: Giải tích 12, NXBGD Việt Nam, 2021). Biết rằng dân số Việt Nam năm 2021 ước tính là 98564407 người và tỉ lệ tăng dân số 0,93%/năm (Nguồn: <https://danso.org/viet-nam>). Giả sử tỉ lệ tăng dân số hằng năm là như nhau tính từ năm 2021, nêu dự đoán dân số Việt Nam năm 2030 (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

QUICK NOTE

QUICK NOTE

VÍ DỤ 2. Năm 2020, dân số thế giới là 7,795 tỉ người và tốc độ tăng dân số là 1,05%/năm (nguồn: <http://www.worldmeters.info/world-population>). Nếu tốc độ tăng này tiếp tục duy trì ở những năm tiếp theo thì dân số thế giới sau t năm kể từ năm 2020 được tính bởi công thức

$$P(t) = 7,795 \cdot (1 + 0,0105)^t \text{ (tỉ người)}. \quad (*)$$

Khi đó, hãy tính dân số thế giới vào năm 2025 và năm 2030. (Mốc thời điểm để tính dân số của mỗi năm là ngày 1 tháng 7.)

Chú ý: Với giả thiết tốc độ tăng dân số 1,05%/năm không đổi, công thức (*) được áp dụng để tính dân số thế giới tại thời điểm bất kì sau năm 2020. Chẳng hạn, dân số thế giới tại thời điểm ngày 1 tháng 1 năm 2022 (tính với $t = 1,5$) là

$$P(1,5) = 7,795 \cdot (1 + 0,0105)^{1,5} \approx 7,918 \text{ (tỉ người)}.$$

VÍ DỤ 3. Trong Vật lí, sự phân rã của các chất phóng xạ được cho bởi công thức: $m(t) = m_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$; trong đó m_0 là khối lượng chất phóng xạ ban đầu (tại thời điểm $t = 0$), $m(t)$ là khối lượng chất phóng xạ tại thời điểm t và T là chu kì bán rã (Nguồn: Giải tích 12, NXBGD Việt Nam, 2021). Hạt nhân Poloni (Po) là chất phóng xạ α có chu kì bán rã là 138 ngày (Nguồn: Vật lí 12, NXBGD Việt Nam, 2021). Giả sử lúc đầu có 100 gam Poloni. Tính khối lượng Poloni còn lại sau 100 ngày theo đơn vị gam (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

VÍ DỤ 4. Lốc xoáy là hiện tượng một luồng không khí xoáy tròn mở rộng ra từ một đám mây dông xuống tới mặt đất. Các cơn lốc xoáy thường có sức tàn phá rất lớn. Tốc độ của gió (đơn vị: dặm/giờ) gần tâm của một cơn lốc xoáy được tính bởi công thức: $S = 93 \log d + 65$, (Nguồn: Ron Larson, Intermediate Algebra, Cengage) trong đó d (đơn vị: dặm) là quãng đường cơn lốc xoáy di chuyển được. Hãy tính tốc độ của gió ở gần tâm (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị) khi cơn lốc xoáy di chuyển được quãng đường là

a) 5 dặm

b) 10 dặm

VÍ DỤ 5. Trong âm học, mức cường độ âm được tính bởi công thức $L = 10 \log \left(\frac{I}{I_0}\right)$ (dB) (dB là đơn vị mức cường độ âm, đọc là đề-xi-ben), trong đó I là cường độ âm tính theo W/m^2 và $I_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2$ là cường độ âm chuẩn (cường độ âm thấp nhất mà tai người bình thường có thể nghe được).

(Nguồn: Vật lí 12, NXB Giáo dục Việt Nam, năm 2017, trang 52,53)

a) Mức cường độ âm L thấp nhất mà tai người có thể nghe được là bao nhiêu?

b) Cuộc trò chuyện có cường độ âm 10^{-9} W/m^2 thì có mức cường độ âm bằng bao nhiêu?

c) Cường độ âm tại một khu văn phòng nằm trong miền từ 10^{-7} W/m^2 đến $5 \cdot 10^{-6} \text{ W/m}^2$ (tức là $10^{-7} \leq I \leq 5 \cdot 10^{-6}$). Mức cường độ âm tại khu văn phòng này nằm trong khoảng nào? (Làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

2. Bài tập rèn luyện

BÀI 1. Giả sử một chất phóng xạ bị phân rã theo cách sao cho khối lượng $m(t)$ của chất còn lại (tính bằng kilôgam) sau t ngày được cho bởi hàm số $m(t) = 13e^{-0,0015t}$.

a) Tìm khối lượng của chất đó tại thời điểm $t = 0$.

b) Sau 45 ngày khối lượng chất đó còn lại là bao nhiêu?

BÀI 2. Các nhà tâm lí học sử dụng mô hình hàm số mũ để mô phỏng quá trình học tập của một học sinh như sau: $f(t) = c(1 - e^{-kt})$, trong đó c là tổng số đơn vị kiến thức học sinh phải học, k (kiến thức/ngày) là tốc độ tiếp thu của học sinh, t (ngày) là thời gian học và $f(t)$ là số đơn vị kiến thức học sinh đã học được (Nguồn: R.I. Charles et al., Algebra 2, Pearson). Giả sử một em học sinh phải tiếp thu 25 đơn vị kiến thức mới. Biết rằng tốc độ tiếp thu của em học sinh là $k = 0,2$. Hỏi em học sinh sẽ nhớ được (khoảng) bao nhiêu đơn vị kiến thức mới sau 2 ngày? Sau 8 ngày?

BÀI 3. Chỉ số hay độ pH của một dung dịch được tính theo công thức: $\text{pH} = -\log [\text{H}^+]$. Phân tích nồng độ ion hydrogen $[\text{H}^+]$ trong hai mẫu nước sông, ta có kết quả sau: Mẫu 1: $[\text{H}^+] = 8 \cdot 10^{-7}$; Mẫu 2: $[\text{H}^+] = 2 \cdot 10^{-9}$. Không dùng máy tính cầm tay, hãy so sánh độ pH của hai mẫu nước trên.

BÀI 4. Cường độ ánh sáng I dưới mặt biển giảm dần theo độ sâu theo công thức $I = I_0 \cdot a^d$, trong đó I_0 là cường độ ánh sáng tại mặt nước biển, $a > 0$ là hằng số và d là độ sâu tính bằng mét tính từ mặt nước biển.

(*Nguồn:* <http://www.britannica.com/science/seawater/Optical-properties>)

- Có thể khẳng định rằng $0 < a < 1$ không? Giải thích.
- Biết rằng cường độ ánh sáng tại độ sâu 1m bằng $0,95I_0$. Tìm giá trị của a .
- Tại độ sâu 20m, cường độ ánh sáng bằng bao nhiêu phần trăm so với I_0 ? (Làm tròn kết quả đến hàng đơn vị.)

BÀI 5. Một người gửi 10 triệu đồng vào ngân hàng theo hình thức lãi kép có kì hạn là 12 tháng với lãi suất 6%/năm. Giả sử qua các năm thì lãi suất không thay đổi và người đó không gửi thêm tiền vào mỗi năm. Để biết sau y (năm) thì tổng số tiền cả vốn và lãi có được là x (đồng), người đó sử dụng công thức $y = \log_{1,06} \left(\frac{x}{10} \right)$. Hỏi sau bao nhiêu năm thì người đó có được tổng số tiền cả vốn và lãi là 15 triệu đồng? 20 triệu đồng? (Làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

BÀI 6. Trong một nghiên cứu, một nhóm học sinh được cho xem cùng một danh sách các loài động vật và được kiểm tra lại xem họ còn nhớ bao nhiêu phần trăm danh sách đó sau mỗi tháng. Giả sử sau t tháng, khả năng nhớ trung bình của nhóm học sinh đó được tính theo công thức $M(t) = 75 - 20 \ln(t + 1)$, $0 \leq t \leq 12$ (đơn vị: %). Hãy tính khả năng nhớ trung bình của nhóm học sinh đó sau 6 tháng.

BÀI 7. Cường độ ánh sáng I dưới mặt biển giảm dần theo độ sâu theo công thức $I = I_0 \cdot a^d$, trong đó I_0 là cường độ ánh sáng tại mặt nước biển, $a > 0$ là hằng số và d là độ sâu tính bằng mét tính từ mặt nước biển.

(*Nguồn:* <http://www.britannica.com/science/seawater/Optical-properties>)

- Có thể khẳng định rằng $0 < a < 1$ không? Giải thích.
- Biết rằng cường độ ánh sáng tại độ sâu 1m bằng $0,95I_0$. Tìm giá trị của a .
- Tại độ sâu 20m, cường độ ánh sáng bằng bao nhiêu phần trăm so với I_0 ? (Làm tròn kết quả đến hàng đơn vị.)

BÀI 8. Công thức $h = -19,4 \cdot \log \frac{P}{P_0}$ là mô hình đơn giản cho phép tính độ cao h so với mặt nước biển của một vị trí trong không trung (tính bằng ki-lô-mét) theo áp suất không khí P tại điểm đó và áp suất P_0 của không khí tại mặt nước biển (cùng tính bằng Pa - đơn vị áp suất, đọc là Pascal).

(*Nguồn*: <http://doi.org/10.1007/s40828-020-01111-6>)

- a) Nếu áp suất không khí ngoài máy bay bằng $\frac{1}{2}P_0$ thì máy bay đang ở độ cao nào?
- b) Áp suất không khí tại đỉnh của ngọn núi A bằng $\frac{4}{5}$ lần áp suất không khí tại đỉnh của ngọn núi B. Ngọn núi nào cao hơn và cao hơn bao nhiêu ki-lô-mét? (Làm tròn kết quả đến hàng phần mười.)

3. Bài tập trắc nghiệm

CÂU 1. Một quần thể vi khuẩn bắt đầu từ 100 cá thể và cứ sau 3 giờ thì số cá thể lại tăng gấp đôi. Bởi vậy số cá thể vi khuẩn được biểu thị theo thời gian t (đơn vị giờ) bằng công thức $N(t) = 100 \cdot 2^{\frac{t}{3}}$. Hỏi sau bao lâu thì quần thể này đạt tới 50000 cá thể (làm tròn đến hàng phần mười)?

- (A)** 36,8 giờ. **(B)** 30,2 giờ. **(C)** 26,9 giờ. **(D)** 18,6 giờ.

QUICK NOTE

QUICK NOTE

CÂU 2. Năm 2020, một doanh nghiệp X có tổng doanh thu là 150 tỉ đồng. Dự kiến trong 10 năm tiếp theo, tổng doanh thu mỗi năm sẽ tăng thêm 12% so với năm liền trước. Theo dự kiến đó thì kể từ năm nào, tổng doanh thu của doanh nghiệp X vượt quá 360 tỉ đồng?

- (A) 2026. (B) 2027. (C) 2028. (D) 2029.

CÂU 3. Một người gửi tiền vào ngân hàng với lãi suất không thay đổi là 6%/ năm. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm, số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn ban đầu (người ta gọi là lãi kép). Người đó định gửi tiền trong vòng 3 năm, sau đó rút ra 500 triệu đồng. Hỏi số tiền ít nhất người đó phải gửi trong ngân hàng (làm tròn đến hàng triệu) là bao nhiêu triệu đồng?

- (A) 420. (B) 410. (C) 400. (D) 390.

CÂU 4. Ông Hùng dự định gửi vào ngân hàng một số tiền với lãi suất 6,5% một năm. Biết rằng cứ sau mỗi năm số tiền lãi sẽ gộp vào vốn ban đầu. Số tiền x (triệu đồng, $x \in \mathbb{N}$) nhỏ nhất mà ông Hùng cần gửi vào ngân hàng để sau ba năm (mới rút lãi) thì số tiền lãi có thể mua một chiếc xe máy trị giá 60 triệu đồng là

- (A) 280. (B) 289. (C) 300. (D) 308.

CÂU 5. Ông X gửi vào ngân hàng 60 triệu đồng theo hình thức lãi kép. Lãi suất ngân hàng là 8% trên năm. Sau 5 năm ông X tiếp tục gửi thêm 60 triệu đồng nữa. Hỏi sau 10 năm kể từ lần gửi đầu tiên ông X đến rút toàn bộ tiền gốc và tiền lãi được là bao nhiêu? (Biết lãi suất không thay đổi qua các năm ông X gửi tiền).

- (A) 217,695 (triệu đồng). (B) 231,815 (triệu đồng).
(C) 190,271 (triệu đồng). (D) 197,201 (triệu đồng).

CÂU 6. Năm 2000 và năm 2020, giá xăng trung bình ở Việt Nam lần lượt là 5000 VND/ 1 lít và 15000 VND/ 1 lít. Giả sử $r\%$ là tỷ lệ tăng giá xăng trung bình hàng năm trong giai đoạn từ năm 2000 đến năm 2020 ở Việt Nam. Hỏi $r\%$ bằng bao nhiêu?

- (A) 5,46%. (B) 5%. (C) 4,56%. (D) 5,64%.

CÂU 7. Số lượng của loại vi khuẩn A trong một phòng thí nghiệm được tính theo công thức $S(t) = S(0) \cdot 2^t$, trong đó $S(0)$ là số lượng vi khuẩn A lúc ban đầu, $S(t)$ là số lượng vi khuẩn A sau t phút. Biết sau 4 phút thì số lượng vi khuẩn A trong phòng thí nghiệm là 250 nghìn con. Hỏi sau bao lâu, kể từ lúc ban đầu, số lượng vi khuẩn A trong phòng thí nghiệm là 1 triệu con?

- (A) 6 phút. (B) 64 phút. (C) 16 phút. (D) 8 phút.

CÂU 8. Một người gửi tiết kiệm vào ngân hàng với lãi suất 7,5%/năm. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm số tiền lãi được nhập vào số tiền vốn để tính lãi cho năm tiếp theo. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu năm nữa thì số tiền người đó thu được (cả số tiền gửi ban đầu và số tiền lãi) gấp đôi số tiền đã gửi ban đầu? Giả định trong khoảng thời gian này lãi suất không thay đổi và người đó không rút tiền ra.

- (A) 9 năm. (B) 10 năm. (C) 12 năm. (D) 11 năm.

Bài 21. PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ VÀ LÔGARIT

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Phương trình mũ

- ☉ Phương trình mũ là phương trình có chứa ẩn ở số mũ của lũy thừa.
- ☉ Phương trình mũ cơ bản ẩn x có dạng $a^x = b$ ($a > 0, a \neq 1$).
 - Nếu $b \leq 0$ thì phương trình vô nghiệm.
 - Nếu $b > 0$ thì phương trình có nghiệm duy nhất $x = \log_a b$.

⚡ NHẬN XÉT.

- ☉ Với $a > 0, a \neq 1, b > 0$ thì $a^{f(x)} = b \Leftrightarrow f(x) = \log_a b$.
- ☉ Với $a > 0, a \neq 1$ thì $a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$.
Cách giải phương trình mũ như trên thường được gọi là phương pháp *đưa về cùng cơ số*.

2. Phương trình lôgarit

- ☑ Phương trình lôgarit là phương trình có chứa ẩn trong biểu thức dưới dấu lôgarit.
- ☑ Phương trình lôgarit cơ bản có dạng $\log_a x = b$ ($a > 1, a \neq 1$).
Phương trình đó có một nghiệm là $x = a^b$.

⚡ NHÂN XÉT.

- ☑ Với $a > 0, a \neq 1$ thì $\log_a f(x) = b \Leftrightarrow f(x) = a^b$.
- ☑ Cho $a > 0, a \neq 1$. Ta có: $\log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ f(x) = g(x). \end{cases}$

3. Bất phương trình mũ

- ☑ Bất phương trình mũ là bất phương trình có chứa ẩn ở số mũ của lũy thừa.
- ☑ Bất phương trình mũ cơ bản là bất phương trình có một trong những dạng sau:

$$a^x > b; a^x < b; a^x \geq b; a^x \leq b \quad (a > 0, a \neq 1).$$

- ☉ Xét bất phương trình mũ: $a^x > b$ ($a > 0, a \neq 1$).
- Nếu $b \leq 0$, tập nghiệm của bất phương trình đã cho là \mathbb{R} (vì $a^x > 0 \geq b, \forall x \in \mathbb{R}$).
 - Nếu $b > 0$ thì bất phương trình tương đương với $a^x > a^{\log_a b}$.
 Với $a > 1$, nghiệm của bất phương trình là $x > \log_a b$.
 Với $0 < a < 1$, nghiệm của bất phương trình là $x < \log_a b$.

⚡ NHẬN XÉT. Các bất phương trình mũ cơ bản còn lại được giải tương tự.

4. Bất phương trình lôgarit

- ✔ Bất phương trình lôgarit là bất phương trình có chứa ẩn trong biểu thức dưới dấu lôgarit
- ✔ Bất phương trình lôgarit cơ bản là bất phương trình lôgarit có một trong các dạng sau:

$$\log_a x > b; \log_a x < b; \log_a x \geq b; \log_a x \leq b (a > 0, a \neq 1).$$

- ☑ Xét bất phương trình $\log_a x > b$ ($a > 0, a \neq 1$).
 Bất phương trình tương đương với $\log_a x > \log_a a^b$.
- Với $a > 1$, nghiệm của bất phương trình là $x > a^b$.
 - Với $0 < a < 1$, nghiệm của bất phương trình là $0 < x < a^b$.

⚡ NHẬN XÉT. Các bất phương trình lôgarit cơ bản còn lại được giải tương tự.

B. CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

Dạng 10. Phương trình mũ, lôgarit cơ bản

Sử dụng các công thức

- ☑ $a^{f(x)} = b \Leftrightarrow f(x) = \log_a b \ (a, b > 0; a \neq 1).$
- ☑ $\log_a f(x) = b \Leftrightarrow f(x) = a^b \ (a > 0; a \neq 1).$

1. Ví dụ mẫu

VÍ DỤ 1. Tìm điều kiện xác định của các phương trình sau

a) $\log_2(2x - 1) = 3$. b) $\log_3(-x^2 + 2x) = -1$.

VÍ DU 2. Giải mỗi phương trình sau:

[illegible]

VÍ DỤ 3. Giải phương trình $10^{x-1} = 2022$.

QUICK NOTE

QUICK NOTE

VÍ DỤ 4. Giải các phương trình sau

a) $2^x = \frac{1}{8}$.

b) $5 \cdot 10^x = 1$.

c) $3^{x+2} = \sqrt[3]{9}$.

d) $2 \cdot 10^{2x} = 30$.

VÍ DỤ 5. Giải mỗi phương trình sau:

a) $\log_2 x = 5$;

b) $\log_4(5x - 4) = 2$.

VÍ DỤ 6. Giải phương trình $4 + 3\log(2x) = 16$.**VÍ DỤ 7.** Giải các phương trình sau

a) $\log_3 x = -2$.

b) $\log_{\frac{1}{2}}(x - 2) = -2$.

2. Bài tập rèn luyện**BÀI 1.** Tìm điều kiện xác định của các phương trình sau

a) $\log_5(3 - 4x) = 2$.

b) $\log(x^2 - 2x - 3) = 3$.

BÀI 2. Giải các phương trình sau

a) $(0,3)^{x-3} = 1$.

b) $3^{x-1} = 27$.

c) $5^{3x-2} = 25$.

d) $3^{x+2} = 7$.

e) $3 \cdot 10^{2x+1} = 5$.

f) $10^{1-2x} = 100000$.

BÀI 3. Giải các phương trình sau

a) $\log(x + 1) = 2$.

b) $\log_6(4x + 4) = 2$.

c) $\log_{\frac{1}{2}}(x + 1) = -3$.

d) $\log_3 x + \log_3(x - 2) = 1$.

3. Bài tập trắc nghiệm**CÂU 1.** Điều kiện xác định của phương trình $\log_3(x - 2) = 1$ là

(A) $x = 2$.

(B) $x \geq 2$.

(C) $x > 2$.

(D) $x > 5$.

CÂU 2. Điều kiện xác định của phương trình $\ln \frac{1-x}{x+1} = 3$ là

(A) $x < 1$.

(B) $x \neq -1$.

(C) $x < -1$ hoặc $x > 1$.

(D) $-1 < x < 1$.

CÂU 3. Tìm nghiệm của phương trình $3^{x-1} = 27$.

(A) $x = 9$.

(B) $x = 3$.

(C) $x = 4$.

(D) $x = 10$.

CÂU 4. Tập nghiệm của phương trình $3^{2x^2-x} = 3$ là

(A) $\{0; 2\}$.

(B) $\left\{0; \frac{1}{2}\right\}$.

(C) $\left\{-1; \frac{1}{2}\right\}$.

(D) $\left\{-\frac{1}{2}; 1\right\}$.

CÂU 5. Tập nghiệm của phương trình $\log_2(x^2 - 1) = 3$ là

(A) $\{-3; 3\}$.

(B) $\{-3\}$.

(C) $\{3\}$.

(D) $\{-\sqrt{10}; \sqrt{10}\}$.

CÂU 6. Tập nghiệm của phương trình $\log(10x) = 2$ là

(A) $\left\{\frac{1}{10}\right\}$.

(B) $\{10\}$.

(C) $\{1\}$.

(D) $\{100\}$.

CÂU 7. Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $2^{x^2-3x+2} = 1$. Tính $P = x_1^2 + x_2^2$.

(A) $P = 10$.

(B) $P = 8$.

(C) $P = 5$.

(D) $P = 13$.

CÂU 8. Tìm tập nghiệm S của phương trình $\log_2(x - 1) + \log_2(x + 1) = 3$.

(A) $S = \{-3; 3\}$.

(B) $S = \{4\}$.

(C) $S = \{3\}$.

(D) $S = \{-\sqrt{10}; \sqrt{10}\}$.

CÂU 9. Phương trình $2^x + 2^{x-1} + 2^{x-2} = 3^x - 3^{x-1} + 3^{x-2}$ có nghiệm

(A) $x = 5$.

(B) $x = 2$.

(C) $x = 4$.

(D) $x = 3$.

CÂU 10. Biết rằng phương trình $\log_2 x + \log_3 x = 1 + \log_2 x \log_3 x$ có hai nghiệm x_1, x_2 .

Giá trị của $x_1^2 + x_2^2$ bằng

- (A) 5. (B) 25. (C) 2. (D) 13.

CÂU 11. Tổng tất cả các nghiệm của phương trình $2^{x^2-2x-1} \cdot 3^{x^2-2x} = 18$ bằng

- (A) 1. (B) -2. (C) 2. (D) -1.

CÂU 12. Tổng tất cả các nghiệm của phương trình $\log_2 |x^2 + 2x - 3| - \log_2 |x + 3| = 3$ bằng

- (A) 9. (B) -2. (C) -4. (D) 2.

Dạng 11. Bất phương trình mũ, lôgarit cơ bản

Xét bất phương trình mũ: $a^x > b$ ($a > 0, a \neq 1$).

- Nếu $b \leq 0$, tập nghiệm của bất phương trình đã cho là \mathbb{R} (vì $a^x > 0 \geq b, \forall x \in \mathbb{R}$).
- Nếu $b > 0$ thì bất phương trình tương đương với $a^x > a^{\log_a b}$.
Với $a > 1$, nghiệm của bất phương trình là $x > \log_a b$.
Với $0 < a < 1$, nghiệm của bất phương trình là $x < \log_a b$.

Bất phương trình tương đương với $\log_a x > \log_a a^b$.

- Với $a > 1$, nghiệm của bất phương trình là $x > a^b$.
- Với $0 < a < 1$, nghiệm của bất phương trình là $0 < x < a^b$.

1. Ví dụ mẫu

VÍ DỤ 1. Giải mỗi bất phương trình sau:

- a) $5^x > 12$; b) $(0,3)^{x+1} > 1,7$.

VÍ DỤ 2. Giải bất phương trình $16^x > \frac{1}{8}$.

VÍ DỤ 3. Giải mỗi bất phương trình sau

- a) $\log_{\frac{1}{2}} x > -2$; b) $\log_2(x+1) > 3$.

VÍ DỤ 4. Giải các bất phương trình sau

- a) $10^x < 0,001$. b) $0,4^x > 2$. c) $\left(\frac{1}{2}\right)^x \geq 2 \cdot 4^{2x}$.

VÍ DỤ 5. Giải các bất phương trình sau

- a) $\log_{\frac{1}{3}}(x+1) < 2$. b) $\log_5(x+2) \leq 1$.

2. Bài tập rèn luyện

BÀI 1. Giải mỗi bất phương trình sau

- a) $3^x > \frac{1}{243}$. b) $\log(x-1) < 0$.

BÀI 2. Giải các bất phương trình sau

- a) $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x+1} \leq 9$. b) $4^x > 2^{x-2}$.

BÀI 3. Giải các bất phương trình sau

- a) $\log_2(x-2) < 2$. b) $\log(x+1) \geq \log(2x-1)$.

QUICK NOTE

QUICK NOTE

3. Bài tập trắc nghiệm

CÂU 1. Tìm tập nghiệm của bất phương trình $\left(\frac{1}{2}\right)^x < 4$.

- (A) $(-2; +\infty)$. (B) $(0; 4)$. (C) $(-\infty; -2)$. (D) $(-\infty; 2)$.

CÂU 2. Giải bất phương trình $3^{x+2} \geq \frac{1}{9}$.

- (A) $x > 0$. (B) $x \geq -4$. (C) $x < 4$. (D) $x < 0$.

CÂU 3. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2(x-1) > 3$ là

- (A) $(4; +\infty)$. (B) $(9; +\infty)$. (C) $(10; +\infty)$. (D) $(1; +\infty)$.

CÂU 4. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_3 x \leq 1$ là

- (A) $(-\infty; 3]$. (B) $(-\infty; 1]$. (C) $(0; 3]$. (D) $(0; 1]$.

CÂU 5. Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\log_2(2x+1) \geq \log_2(x-1)$.

- (A) $S = [2; +\infty)$. (B) $S = [-2; +\infty)$. (C) $S = \mathbb{R}$. (D) $S = (1; +\infty)$.

CÂU 6. Tập nghiệm của bất phương trình $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{x}} < \frac{1}{2}$ là

- (A) $(-\infty; 1)$. (B) $(0; 1)$. (C) $(1; +\infty)$. (D) \mathbb{R} .

CÂU 7. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2(3-x) < 2$ là

- (A) $(1; 3)$. (B) $(3; +\infty)$. (C) $(-\infty; 1)$. (D) $(-1; 3)$.

CÂU 8. Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $5^{x+1} - \frac{1}{5} > 0$.

- (A) $S = (1; +\infty)$. (B) $S = (-\infty; -2)$. (C) $S = (-2; +\infty)$. (D) $S = (-1; +\infty)$.

CÂU 9. Tập nghiệm của bất phương trình $\left(\frac{3}{4}\right)^{2x^2-3x} \leq \frac{4}{3}$ là

- (A) $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$. (B) $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right] \cup [1; +\infty)$.
(C) $\left(\frac{1}{2}; 1\right)$. (D) $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right) \cup (1; +\infty)$.

CÂU 10. Bất phương trình $\log_3(x^2 - x + 7) < 2$ có tập nghiệm là khoảng $(a; b)$. Tính $b - a$.

- (A) $b - a = -1$. (B) $b - a = -3$. (C) $b - a = 3$. (D) $b - a = 1$.

CÂU 11. Nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}[\log_2(2-x^2)] > 0$ là

- (A) $(-1; 1) \cup (2; +\infty)$. (B) $(-1; 1)$.
(C) $(-1; 0) \cup (0; 1)$. (D) $(-1; 3)$.

CÂU 12. Cho hàm số $f(x) = \log_{0,9}(x^2 + 4x - 5)$. Gọi S là tổng tất cả các giá trị nguyên của x thuộc đoạn $[-15; 15]$ thỏa mãn bất phương trình $f'(x) > 0$. Tính S .

- (A) $S = -105$. (B) $S = 120$. (C) $S = -117$. (D) $S = 119$.

CÂU 13. Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $u_1 = 2$, $u_{n+1} = u_n^2$ với mọi $n \geq 1$. Số tự nhiên n nhỏ nhất để $u_n > 2^{2018}$ là

- (A) $n = 15$. (B) $n = 13$. (C) $n = 12$. (D) $n = 11$.

CÂU 14. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}\left(\log_2 \frac{3x-1}{x+1}\right) \leq 0$ là

- (A) $(-1; +\infty) \cup [3; +\infty)$. (B) $[3; +\infty)$.
(C) $(-1; +\infty)$. (D) $(-1; 3]$.

Dạng 12. Phương trình mũ, lôgarit đưa về cùng cơ số

Sử dụng các công thức

☑ $a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x) \quad (a > 0; a \neq 1)$.

☑ $\log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ f(x) = g(x) \end{cases} \quad (a > 0; a \neq 1)$.

1. Ví dụ mẫu

VÍ DỤ 1. Tìm điều kiện xác định của các phương trình sau

a) $\log_2 x + \log_2(x-1) = \log_2(3-x)$. b) $\log_3(x^2 - 3x) = \log_3(x-1)$.

VÍ DỤ 2. Giải phương trình $4^{x-2} = 2^{3x+1}$.

VÍ DỤ 3. Giải phương trình $3^{x+1} = \frac{1}{3^{1-2x}}$.

VÍ DỤ 4. Giải các phương trình sau

a) $4^{2x} = 8^{2x-1}$. b) $\left(\frac{1}{9}\right)^x = \frac{27^x}{3}$.

VÍ DỤ 5. Giải phương trình $\log_8(3x-6) = -\log_{\frac{1}{8}}(2x-2)$.

VÍ DỤ 6. Giải phương trình $\log_3(x+1) = \log_3(x^2-1)$.

VÍ DỤ 7. Giải các phương trình sau

a) $\log_2(x^2-3) = \log_2 2x$. b) $\log_2(x+6) = \log_2(x+1) + 1$.

2. Bài tập rèn luyện

BÀI 1. Tìm điều kiện xác định của các phương trình sau

a) $\log_{0,5}(4-x) = \log_2 \frac{1}{x+2}$. b) $\log(-x^2+5x+6) = \log(x-2)$.

BÀI 2. Giải các phương trình sau

a) $3^{x+1} = 9^{2x+1}$. b) $9^{x-2} = 243^{x+1}$.
c) $100^{2x-3} = 0,1^{2x-18}$. d) $5^x = 3^{2x-1}$.

BÀI 3. Giải mỗi phương trình sau:

a) $\log_5(3x-5) = \log_5(2x+1)$. b) $\log_3(x^2-3x+2) = \log_3(2x-4)$.
c) $2\log_4 x + \log_2(x-3) = 2$. d) $\ln x + \ln(x-1) = \ln 4x$.

3. Bài tập trắc nghiệm

CÂU 1. Điều kiện xác định của phương trình $\log_2(x+1) = \log_2(2-x)$ là

☐ A $x > -1$. ☐ B $x < 2$. ☐ C $-1 < x < 2$. ☐ D $x > 2$.

CÂU 2. Điều kiện xác định của phương trình $\log_3(x-1) = \log_9(x-3)^2$ là

☐ A $x > 1$. ☐ B $x > 3$. ☐ C $1 < x < 3$. ☐ D $x > 1$ và $x \neq 3$.

CÂU 3. Nghiệm của phương trình $2^{2x-3} = 2^x$ là

☐ A $x = 8$. ☐ B $x = -8$. ☐ C $x = 3$. ☐ D $x = -3$.

CÂU 4. Nghiệm của phương trình $3^{2x+1} = 3^{x-2}$ là

☐ A $x = -1$. ☐ B $x = 3$. ☐ C $x = -3$. ☐ D $x = 1$.

CÂU 5. Tập nghiệm của phương trình $\log_2 x = \log_2(2x+1)$ là

☐ A $\{1\}$. ☐ B $\{0\}$. ☐ C \emptyset . ☐ D $\{-1\}$.

CÂU 6. Nghiệm của phương trình $125^{2x} = \left(\frac{1}{25}\right)^{x+1}$ là

☐ A $x = -\frac{1}{4}$. ☐ B $x = 4$. ☐ C $x = 1$. ☐ D $x = -\frac{1}{8}$.

CÂU 7. Nghiệm của phương trình $(4,5)^{4x-5} = \left(\frac{2}{9}\right)^{-x-1}$ là

☐ A $x = -1$. ☐ B $x = 2$. ☐ C $x = \frac{5}{4}$. ☐ D $x = \frac{4}{5}$.

CÂU 8. Nghiệm của phương trình $\log_3(x+1) + 1 = \log_3(4x+1)$ là

☐ A $x = 3$. ☐ B $x = -3$. ☐ C $x = 4$. ☐ D $x = 2$.

QUICK NOTE

QUICK NOTE

CÂU 9. Số nghiệm của phương trình $\log_3(x^2 - 6) - \log_3(x - 2) = 1$ là

- (A) 0. (B) 3. (C) 1. (D) 2.

CÂU 10. Tổng các nghiệm thực của phương trình $3^{x^2-3x+8} = 9^{2x-1}$ bằng

- (A)** 5. **(B)** 6. **(C)** -7. **(D)** 7.

CÂU 11. Số nghiệm của phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(x^3 - 2x^2 - 3x + 4) + \log_2(x - 1) = 0$ là

- ☐ **A** 1.
 ☐ **B** 2.
 ☐ **C** 0.
 ☐ **D** 3.

CÂU 12. Gọi S là tập nghiệm của phương trình $2\log_2(2x - 2) + \log_2(x - 3)^2 = 2$ trên \mathbb{R} . Tổng các phần tử của S bằng

- Ⓐ $8 + \sqrt{2}$. Ⓑ $6 + \sqrt{2}$. Ⓒ $4 + \sqrt{2}$. Ⓓ 8.

Dạng 13. Bất phương trình mũ, lôgarit đưa về cùng cơ số

1. Ví dụ mẫu

VÍ DỤ 1. Giải bất phương trình $\log_{0,3}(x+1) \leq \log_{0,3}(2x-1)$.

VÍ DỤ 2. Giải các bất phương trình sau

a) $2^x > 16$. b) $0,1^x \leq 0,001$. c) $\left(\frac{1}{5}\right)^{x-2} \geq \left(\frac{1}{25}\right)^x$.

VÍ DỤ 3. Giải các bất phương trình sau

a) $\log_2(2x - 1) \leq 1$. b) $\log_{\frac{1}{2}}(1 - x) > \log_{\frac{1}{2}}(3x + 2)$.

2. Bài tập rèn luyện

BÀI 1. Giải mỗi bất phương trình sau

a) $\left(\frac{2}{3}\right)^{3x-7} \leq \frac{3}{2};$

b) $4^{x+3} \geq 32^x;$

c) $\log_{\frac{1}{3}}(2x-1) \geq \log_{\frac{1}{3}}(x+3);$

d) $\ln(x+3) \geq \ln(2x-8).$

BÀI 2. Giải các bất phương trình sau

a) $0,1^{2-x} > 0,1^{4+2x}$; c) $\log_3(x+7) \geq -1$;
b) $2 \cdot 5^{2x+1} \leq 3$; d) $\log_{0.5}(x+7) \geq \log_{0.5}(2x-1)$.

3. Bài tập trắc nghiệm

CÂU 1. Tập nghiệm bất phương trình $(0,5)^3 < \left(\frac{1}{2}\right)^{3x}$ là

- Ⓐ $(-\infty; 1)$. Ⓑ $(-\infty; -1)$. Ⓒ $(-1; +\infty)$. Ⓓ $(1; +\infty)$.

CÂU 2. Tập nghiệm của bất phương trình $4^{x+1} \leq 8^{x-2}$ là

- Ⓐ $(0; 8)$. Ⓑ \emptyset . Ⓒ $(-\infty; 8]$. Ⓓ $[8; +\infty)$.

CÂU 3. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_3 \sqrt{x} \geq \log_3 x + 1$ là

- Ⓐ $\left(-\infty; \frac{1}{9}\right]$ Ⓑ $\left[\frac{1}{9}; +\infty\right)$ Ⓒ $\left(0; \frac{1}{9}\right]$ Ⓓ $\left[0; 1\frac{1}{9}\right]$

CÂU 4. Biết rằng bất phương trình $\left(\frac{2}{3}\right)^{x^2-x} \geq \left(\frac{9}{4}\right)^{x-1}$ có tập nghiệm là đoạn $[a; b]$. Tính $b - a$.

- Ⓐ $b - a = 3$. Ⓑ $b - a = 2$. Ⓒ $b - a = 2\sqrt{5}$. Ⓓ $b - a = \sqrt{5}$.

CÂU 5. Tập nghiệm của bất phương trình $11^{\sqrt{x+6}} \geq 11^x$ là $S = [a; b]$. Tính $a + b$.

- Ⓐ 3. Ⓑ 2. Ⓒ -3. Ⓓ -2.

CÂU 6. Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\log_2(x^2 - x - 2) \leq 2\log_2(3 - x)$.

- (A) $S = \left[\frac{11}{5}; +\infty\right)$. (B) $S = (-\infty; -1) \cup \left(2; \frac{11}{5}\right]$.
(C) $S = \left[\frac{11}{5}; 3\right)$. (D) $S = \left(-\infty; \frac{11}{5}\right]$.

CÂU 7. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2(2x^2 - x) \leq \log_{\sqrt{2}} x$ là

- (A) $(0; 1)$. (B) $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$. (C) $\left[\frac{1}{2}; 1\right)$. (D) $[0; 1]$.

CÂU 8. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2\left(1 + \log_{\frac{1}{9}} x - \log_9 x\right) < 1$ có dạng $S = \left(\frac{1}{a}; b\right)$ với a, b là những số nguyên. Mối liên hệ giữa a và b là

- (A) $a = 2b$. (B) $a = -b$. (C) $a + b = 1$. (D) $a = b$.

CÂU 9. Tập nghiệm của bất phương trình $(3^x + 2)(4^{x+1} - 8^{2x+1}) \leq 0$ là

- (A) $(-\infty; 4]$. (B) $\left(-\infty; -\frac{1}{4}\right]$. (C) $\left[-\frac{1}{4}; +\infty\right)$. (D) $[4; +\infty)$.

CÂU 10. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{0,5}(x^2 + x) < \log_{0,5}(-2x + 4)$ là

- (A) $(-4; -1)$. (B) $(-\infty; -4) \cup (2; +\infty)$.
(C) $(-\infty; -4) \cup (1; +\infty)$. (D) $(-\infty; -4) \cup (1; 2)$.

CÂU 11. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\sqrt{3}} x + \log_{\sqrt[3]{3}} x + \log_{\sqrt[4]{3}} x + \dots + \log_{\sqrt[16]{3}} x < 36$ là

- (A) $(0; \sqrt[4]{3})$. (B) $(1; \sqrt{3})$. (C) $(0; \sqrt{3})$. (D) $(0; 1)$.

CÂU 12. Số nghiệm nguyên của bất phương trình $(\sqrt{10} - 3)^{\frac{3-x}{x-1}} > (\sqrt{10} + 3)^{\frac{x+1}{x+3}}$ là

- (A) 2. (B) 1. (C) 0. (D) 3.

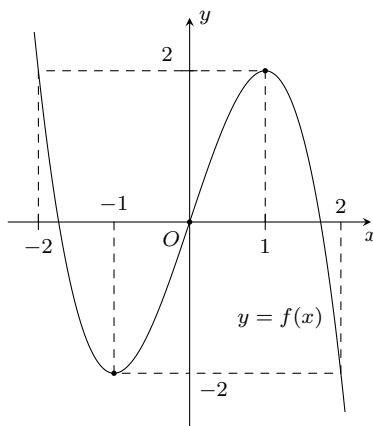
CÂU 13. Tổng tất cả các nghiệm nguyên của bất phương trình $2\log_2 \sqrt{x+1} \leq 2 - \log_2(x-2)$ bằng

- (A) 5. (B) 12. (C) 3. (D) 9.

CÂU 14.

Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[0; 9]$ sao cho bất phương trình $2^{f^2(x)+f(x)-m} - 16 \cdot 2^{f^2(x)-f(x)-m} - 4^{f(x)} + 16 < 0$ có nghiệm $x \in (-1; 1)$?

- (A) 8. (B) 5. (C) 6. (D) 7.



CÂU 15. Cho bất phương trình $(3^{x^2-x} - 9)(2^{x^2} - m) \leq 0$. Tìm số giá trị nguyên của m để bất phương trình đã cho có đúng 5 nghiệm nguyên.

- (A) 65022. (B) 65024. (C) 65021. (D) 65023.

CÂU 16. Cho bất phương trình $\log_3(x^2 - x + 2) + 1 \geq \log_3(x^2 + x + m - 3)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để bất phương trình đã cho có nghiệm đúng với mọi giá trị x thuộc đoạn $[0; 6]$?

- (A) 3. (B) 6. (C) 4. (D) 5.

CÂU 17. Tìm m để bất phương trình $1 + \log_5(x^2 + 1) \geq \log_5(mx^2 + 4x + m)$ thỏa mãn với mọi $x \in \mathbb{R}$.

- (A) $2 < m \leq 3$. (B) $2 < m < 3$. (C) $-1 < m \leq 0$. (D) $-1 < m < 0$.

CÂU 18. Cho bất phương trình $\log_3(x^2 + 2x + 2) + 1 > \log_3(x^2 + 6x + 5 + m)$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để bất phương trình trên nghiệm đúng với mọi $x \in (1; 3)$?

QUICK NOTE

QUICK NOTE

- (A) 14. (B) 16. (C) vô số. (D) 15.

CÂU 19. Tổng tất cả các nghiệm nguyên của bất phương trình $\log_9(x+6) - \log_3(5 - \sqrt[4]{19-x}) < 0$ là

- (A) -12. (B) -11. (C) 0. (D) -9.

CÂU 20. Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn $\ln x + \ln y \geq \ln(x^2 + y)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = x + y$.

- (A) $P = 2 + 3\sqrt{2}$. (B) $P = \sqrt{17} + \sqrt{3}$. (C) $P = 6$. (D) $P = 3 + 2\sqrt{2}$.

CÂU 21. Cho phương trình $(2\log_3^2 x - \log_3 x - 1)\sqrt{3^x - m} = 0$ (m là tham số thực). Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để phương trình đã cho có đúng hai nghiệm phân biệt.

- (A) 26. (B) 25. (C) Vô số. (D) 24.

CÂU 22. Cho $x \geq 0, y \geq 0, x + y > 0$ thỏa mãn $2^{x^2+y^2} + 2023^{x+y} \cdot \log_2 \frac{x^2+y^2}{x+y} \leq 4^{x+y} + 2023^{x+y}$. Tìm tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x^2 + y^2 - 8x - 2y + 10$.

- (A) 8. (B) 12. (C) $4 + 6\sqrt{2}$. (D) $14 - 6\sqrt{2}$.

Dạng 14. Bài toán thực tế, liên môn

1. Ví dụ mẫu

VÍ DỤ 1. Dân số được ước tính theo công thức $S = A \cdot e^{rt}$, trong đó A là dân số của năm lấy làm mốc tính, S là số dân sau t năm, r là tỉ lệ tăng dân số hằng năm. Giả sử $r = 1,14\%/năm$, hỏi sau bao nhiêu năm dân số sẽ gấp đôi dân số ban đầu?

VÍ DỤ 2. Chỉ số hay độ pH của một dung dịch được tính theo công thức: $pH = -\log[H^+]$ (trong đó $[H^+]$ chỉ nồng độ ion hydrogen). Do chỉ số pH của một mẫu nước sông, ta có kết quả là $pH = 6,1$. Hỏi nồng độ của ion hydrogen $[H^+]$ trong mẫu nước sông đó bằng bao nhiêu?

VÍ DỤ 3. Giả sử giá trị còn lại (tính theo triệu đồng) của một chiếc ô tô sau t năm sử dụng được mô hình hóa bằng công thức

$$V(t) = 780 \cdot (0,905)^t.$$

Hỏi nếu theo mô hình này, sau bao nhiêu năm sử dụng thì giá trị của chiếc xe đó còn lại không quá 300 triệu đồng? (Làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

VÍ DỤ 4. Nếu khối lượng carbon-14 trong cơ thể sinh vật lúc chết là M_0 (g) thì khối lượng carbon-14 còn lại (tính theo gam) sau t năm được tính theo công thức $M(t) = M_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$ (g), trong đó $T = 5730$ (năm) là chu kỳ bán rã của carbon-14. Nghiên cứu hoá thạch của một sinh vật, người ta xác định được khối lượng carbon-14 hiện có trong hoá thạch là $5 \cdot 10^{-13}$ g. Nhờ biết tỉ lệ khối lượng của carbon-14 so với carbon-12 trong cơ thể sinh vật sống, người ta xác định được khối lượng carbon-14 trong cơ thể lúc sinh vật chết là $M_0 = 1,2 \cdot 10^{-12}$ (g). Sinh vật này sống cách đây bao nhiêu năm? (Làm tròn kết quả đến hàng trăm.)

VÍ DỤ 5. Công thức tính khối lượng còn lại của một chất phóng xạ từ khối lượng ban đầu M_0 là $M(t) = M_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$, trong đó t là thời gian tính từ thời điểm ban đầu và T là chu kỳ bán rã của chất. Đồng vị plutonium-234 có chu kỳ bán rã là 9 giờ.

(Nguồn: <https://pubchem.ncbi.nlm.nih.gov/element/Plutonium#section=AtomicMass-Half-Life-and-Decay>)

Từ khối lượng ban đầu 200 g, sau bao lâu thì khối lượng plutonium-234 còn lại là

- a) 100 g? b) 50 g? c) 20 g?

VÍ DỤ 6. Nước chanh có độ pH bằng 2,4; giấm có độ pH bằng 3. Nước chanh có độ acid gấp bao nhiêu lần giấm (nghĩa là có nồng độ H^+ gấp bao nhiêu lần)? (Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

QUICK NOTE

3. Bài tập trắc nghiệm

CÂU 1. Ông A gửi 100 triệu đồng vào ngân hàng theo thể thức lãi kép kì hạn một năm với lãi suất là 12% một năm. Sau n năm ông A rút toàn bộ tiền (cả vốn lẫn lãi). Tìm n nguyên dương nhỏ nhất để số tiền lãi nhận được hơn 40 triệu đồng. (Giả sử rằng lãi suất hàng năm không thay đổi).

- (A) 5. (B) 3. (C) 2. (D) 4.

CÂU 2. Anh A vào làm ở công ty X với mức lương ban đầu là 10 triệu đồng/ tháng. Nếu hoàn thành tốt nhiệm vụ thì cứ sau 6 tháng làm việc, mức lương của anh lại được tăng thêm 20%. Hỏi bắt đầu từ tháng thứ mấy kể từ khi vào làm ở công ty X, tiền lương mỗi tháng của anh A nhiều hơn 20 triệu đồng (biết rằng trong suốt thời gian làm ở công ty X anh A luôn hoàn thành tốt nhiệm vụ)?

- (A) Tháng thứ 31. (B) Tháng thứ 19. (C) Tháng thứ 37. (D) Tháng thứ 25.

CÂU 3. Đầu năm 2018, ông An thành lập một công ty sản xuất rau sạch. Tổng số tiền ông An dùng để trả lương cho nhân viên trong năm 2018 là 1 tỷ đồng. Biết rằng cứ sau mỗi năm thì tổng số tiền dùng để trả lương cho nhân viên trong cả năm tăng thêm 15% so với năm trước. Năm đầu tiên ông An phải trả lương cho nhân viên trong cả năm vượt qua 2 tỷ đồng là năm nào?

- (A) Năm 2020. (B) Năm 2025. (C) Năm 2022. (D) Năm 2023.

CÂU 4. Một người gửi vào ngân hàng số tiền 30 triệu đồng, lãi suất 0,48% /tháng. Sau đúng 1 tháng kể từ ngày gửi người này gửi đều đặn thêm vào 1 triệu đồng, hai lần gửi liên tiếp cách nhau đúng 1 tháng. Giả định rằng lãi suất không thay đổi và người này không rút tiền ra, số tiền lãi của tháng trước được tính vào vốn và tính lãi cho tháng kế tiếp. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu tháng người này thu về tổng số tiền cả gốc và lãi ít nhất 50 triệu đồng.

- (A) 19. (B) 20. (C) 17. (D) 18.

CÂU 5. Ông A gửi vào ngân hàng 50 triệu đồng với lãi suất 0,5%/tháng. Hỏi ít nhất bao nhiêu tháng thì ông A có số tiền cả gốc lẫn lãi nhiều hơn 60 triệu đồng? Biết rằng trong suốt thời gian gửi lãi suất ngân hàng không thay đổi và ông A không rút tiền ra.

- (A) 37 tháng. (B) 38 tháng. (C) 40 tháng. (D) 36 tháng.

CÂU 6. Đầu năm 2016, ông A thành lập một công ty. Tổng số tiền ông A dùng để trả lương cho nhân viên trong năm 2016 là 1 tỷ đồng. Biết rằng cứ sau mỗi năm thì tổng số tiền để trả cho nhân viên trong cả năm đó tăng thêm 15% so với năm trước. Hỏi năm nào dưới đây là năm đầu tiên mà tổng số tiền ông A dùng để trả lương cho nhân viên trong cả năm lớn hơn 2 tỷ đồng?

- (A) Năm 2021. (B) Năm 2022. (C) Năm 2023. (D) Năm 2020.

CÂU 7. Một người gửi tiền vào ngân hàng với lãi suất không thay đổi là 8%/năm. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm, số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn ban đầu (người ta gọi là lãi suất kép). Người đó định gửi tiền trong vòng 3 năm, sau đó rút tiền ra để mua một căn hộ chung cư trị giá 500 triệu đồng. Hỏi số tiền ít nhất người đó phải gửi vào ngân hàng để có đủ tiền mua căn hộ chung cư (kết quả làm tròn đến hàng triệu) là bao nhiêu?

- (A) 395 triệu đồng. (B) 396 triệu đồng. (C) 397 triệu đồng. (D) 394 triệu đồng.

CÂU 8. Anh Nam muốn mua một ngôi nhà trị giá 500 triệu đồng sau 3 năm nữa. Biết rằng lãi suất hàng năm vẫn không đổi là 8% một năm. Vậy ngay từ bây giờ số tiền ít nhất anh Nam phải gửi tiết kiệm vào ngân hàng theo thể thức lãi kép để có đủ tiền mua nhà (kết quả làm tròn đến hàng triệu) là

- (A) 395 triệu đồng. (B) 397 triệu đồng. (C) 394 triệu đồng. (D) 396 triệu đồng.

CÂU 9. Một người gửi 300 triệu đồng vào ngân hàng theo thể thức lãi kép kì hạn một quý, với lãi suất 1,75%/một quý. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu tháng người gửi có ít nhất 500 triệu đồng (bao gồm cả vốn lẫn lãi) từ số vốn ban đầu? (Giả sử lãi suất không thay đổi).

- (A) 29 tháng. (B) 87 tháng. (C) 30 tháng. (D) 90 tháng.

CÂU 10. Để đủ tiền mua nhà, anh An vay ngân hàng 500 triệu theo phương thức trả góp với lãi suất 0,85% một tháng. Nếu sau mỗi tháng, kể từ thời điểm vay, anh An trả nợ cho ngân hàng số tiền cố định là 10 triệu đồng bao gồm cả tiền lãi vay và tiền gốc. Biết phương thức trả lãi và gốc không thay đổi trong suốt quá trình anh An trả nợ. Hỏi sau bao nhiêu tháng thì anh trả hết nợ ngân hàng? (tháng cuối có thể trả dưới 10 triệu đồng).

- (A) 66. (B) 67. (C) 65. (D) 68.

CÂU 11. Anh sinh viên A, sau khi ra trường, mong muốn rằng sau một năm sẽ có hơn 60 triệu đồng để mua xe. Hàng tháng anh A phải gửi vào ngân hàng một số tiền như nhau là m . Hỏi m nhỏ nhất là bao nhiêu? (làm tròn đến nghìn đồng). Biết rằng lãi suất ngân hàng là 0,6 %/tháng và hàng tháng số tiền lãi được nhập vào gốc.

- (A) 4 809 000 đồng. (B) 4 808 000 đồng. (C) 4 890 000 đồng. (D) 4 812 000 đồng.

CÂU 12. Giả sử vào cuối năm thì một đơn vị tiền tệ mất 10% giá trị so với đầu năm. Tìm số nguyên dương nhỏ nhất sao cho sau n năm, đơn vị tiền tệ sẽ mất đi ít nhất 90% giá trị của nó?

- (A) 20. (B) 16. (C) 18. (D) 22.

CÂU 13. Ông A bị nhiễm một loại vi-rút nên phải nhập viện và được điều trị ngay lập tức. Kể từ ngày bắt đầu nhập viện, sau mỗi ngày điều trị thì lượng vi-rút trong cơ thể ông A giảm đi 10% so với ngày trước đó. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu ngày thì ông A sẽ được xuất viện, biết ông được xuất viện khi lượng vi-rút trong cơ thể của ông không vượt quá 30%?

- (A) 14 ngày. (B) 11 ngày. (C) 12 ngày. (D) 13 ngày.

CÂU 14. Một nghiên cứu cho thấy một nhóm học sinh được cho xem cùng một danh sách các loài sinh vật và được kiểm tra lại xem họ nhớ bao nhiêu phần trăm mỗi tháng. Sau t tháng, khả năng nhớ trung bình của nhóm học sinh được cho bởi công thức $M(t) = 60 - 15 \ln(t + 1)$, $t > 0$ (đơn vị phần trăm). Hỏi sau ít nhất bao nhiêu tháng thì nhóm học sinh chỉ nhớ được không vượt quá 10% danh sách đó?

- (A) 28 tháng. (B) 27 tháng. (C) 24 tháng. (D) 25 tháng.

CÂU 15. Bộ Y tế phát đi một thông tin tuyên truyền về phòng chống dịch COVID-19. Thông tin này lan truyền đến người dân theo công thức $P(t) = \frac{1}{1 + ae^{-kt}}$, với $P(t)$ là tỉ lệ dân số nhận được thông tin vào thời điểm t và a, k là các hằng số dương. Cho $a = 3$, $k = \frac{1}{2}$ với t đo bằng giờ. Hỏi cần phải ít nhất bao lâu để hơn 90% dân số nhận được thông tin?

- (A) 5,5 giờ. (B) 8 giờ. (C) 4,5 giờ. (D) 6,6 giờ.

CÂU 16. Một nhóm các chuyên gia y tế đang nghiên cứu và thử nghiệm độ chính xác của một bộ xét nghiệm COVID-19. Giả sử cứ sau n lần thử nghiệm và điều chỉnh bộ xét nghiệm thì tỉ lệ chính xác của bộ xét nghiệm đó tuân theo công thức $S(n) = \frac{1}{1 + 2020 \cdot 10^{-0,01n}}$. Hỏi phải tiến hành ít nhất bao nhiêu lần thử nghiệm và điều chỉnh bộ xét nghiệm để đảm bảo tỉ lệ chính xác của bộ xét nghiệm đó đạt trên 90%?

- (A) 428. (B) 427. (C) 426. (D) 425.

QUICK NOTE

MỤC LỤC

Hàm số mũ. Hàm số logarit	1
Bài 18. Phép tính lũy thừa với số mũ thực	1
(A) Tóm tắt lý thuyết.....	1
(B) Các dạng toán thường gặp.....	1
Dạng 1. Tính giá trị biểu thức chứa lũy thừa.....	1
Dạng 2. Rút gọn biểu thức chứa lũy thừa.....	3
Dạng 3. So sánh biểu thức lũy thừa.....	5
Bài 19. Phép tính logarit	5
(A) Tóm tắt lý thuyết.....	5
(B) Các dạng toán thường gặp.....	6
Dạng 4. Tính giá trị biểu thức chứa lôgarit.....	6
Dạng 5. Biến đổi, rút gọn, biểu diễn biểu thức chứa lôgarit.....	9
Dạng 6. Toán thực tế, liên môn.....	13
Bài 20. HÀM SỐ MŨ. HÀM SỐ LOGARIT	15
(A) Tóm tắt lý thuyết.....	15
(B) Các dạng toán thường gặp.....	17
Dạng 7. Tập xác định của hàm số.....	17
Dạng 8. Sự biến thiên và đồ thị của hàm số mũ và lôgarit.....	18
Dạng 9. Bài toán thực tế.....	23
Bài 21. Phương trình, bất phương trình mũ và lôgarit	26
(A) Tóm tắt lý thuyết.....	26
(B) Các dạng toán thường gặp.....	27
Dạng 10. Phương trình mũ, lôgarit cơ bản.....	27
Dạng 11. Bất phương trình mũ, lôgarit cơ bản.....	29
Dạng 12. Phương trình mũ, lôgarit đưa về cùng cơ số.....	30
Dạng 13. Bất phương trình mũ, lôgarit đưa về cùng cơ số.....	32
Dạng 14. Bài toán thực tế, liên môn.....	34

