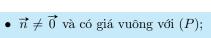
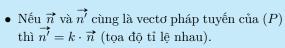
Bài 14. PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẨNG

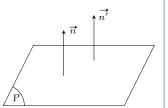
A. LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1. Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng

- \bigcirc Dinh nghĩa: Vecto pháp tuyến \overrightarrow{n} của mặt phẳng (P) là những vectơ khác $\overrightarrow{0}$ và có giá vuông góc với (P).
- Chú ý:





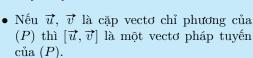


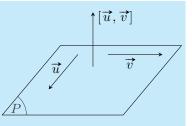
2. Cặp vectơ chỉ phương của mặt phẳng

- \bigcirc Dinh nghĩa: Trong không gian Oxyz, cho hai vecto \overrightarrow{u} , \overrightarrow{v} được gọi là cặp vecto chỉ phương của mặt phẳng (P) nếu chúng không cùng phương và có giá nằm trong hoặc song song với mặt phẳng (P).
- Chú ý:
- Cho hai vecto $\overrightarrow{u} = (a; b; c)$ và $\overrightarrow{v} =$ (a';b';c'). Khi đó

$$\overrightarrow{n} = (bc' - b'c; ca' - c'a; ab' - a'b)$$

vuông góc với cả hai vecto \vec{u} và \vec{v} , được gọi là tích có hướng của \vec{u} và \vec{v} , ký hiệu là $[\vec{u}, \vec{v}]$.





3. Phương trình tổng quát của mặt phẳng

 \bigcirc Công thức: Mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ và nhận $\overrightarrow{n} = (a; b; c)$ làm vecto pháp tuyến có phương trình là

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

Thu gọn ta được dạng

$$ax + by + cz + d = 0$$

- Chú ý:
 - ① Phương trình các mặt phẳng tọa độ:
 - (Oxy): z = 0.
- (Oxz): y = 0.

- (Oyz): x = 0.
- 2 Phương trình mặt phẳng (α) song song với mặt phẳng toa độ:
 - $(\alpha) \# (Oxy) \Rightarrow z = a \quad a \neq 0.$ $(\alpha) \# (Oxz) \Rightarrow y = b \quad b \neq 0.$
 - $(\alpha) // (Oyz) \Rightarrow x = c \quad c \neq 0.$

4. Vi tri tương đối giữa hai mặt phẳng

Cho hai mặt phẳng (P): $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ và (Q): $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$. Gọi $\overrightarrow{n_1} = (a_1; b_1; c_1), \overrightarrow{n_2} = (a_2; b_2; c_2)$ lần lượt là vecto pháp tuyến của (P) và (Q).

	Ī	Ī	Ī	Ī	Ī	Ī	Ī	Ī	Ī	Ī	Ī	Ī	Ī	Ī	Ī	Ī	Ī	Ī	ì	Ī	Ī	Ī	Ī	Ī	Ī	Ī	Ī	Ī	Ī	ì	

•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	

•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	٠	•

•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•

•	•	•	•	•	•	٠	٠	٠	٠	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	٠	٠	٠	٠	٠	•	•	•	•	•	•	•
											•	•	•	•	•												•	•		•		٠	٠

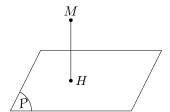
•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•

\sim 1	JICI	/ N	
	11()		
		V 11	

- ② Nếu $\begin{cases} \overrightarrow{n_1} = k \cdot \overrightarrow{n_2} \\ d_1 \neq k \cdot d_2 \end{cases}$ thì (P) song song (Q).
- 3 Nếu $\overrightarrow{n_1}$ không cùng phương với $\overrightarrow{n_2}$ thì (P) cắt (Q).
- ① Nếu $\overrightarrow{n_1} \perp \overrightarrow{n_2}$ hay $a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$ thì $(P) \perp (Q)$.

5. Khoảng cách từ một điểm đến mặt phẳng

 \bigcirc Dịnh nghĩa: Cho điểm $M(x_0;y_0;z_0)$ và mặt phẳng (P): ax + by + cz + d = 0. Goi H là hình chiếu vuông góc của điểm M lên mặt phẳng (P). Khi đó độ dài đoạn MH được gọi là khoảng cách từ điểm M đến (P). Kí hiệu d(M,(P)).



Công thức tính:

$$d(M,(P)) = \frac{\left| ax_0 + by_0 + cz_0 + d \right|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Dặc biệt:

$$\textcircled{1} \ \operatorname{d}\left(M, (Oxy)\right) = \left|z_{M}\right|. \qquad \textcircled{2} \ \operatorname{d}\left(M, (Oxz)\right) = \left|y_{M}\right|. \qquad \textcircled{3} \ \operatorname{d}\left(M, (Oyz)\right) = \left|x_{M}\right|.$$

B. PHÂN LOAI, PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Xác định vectơ pháp tuyến và điểm thuộc mặt phẳng

Cho mặt phẳng (α) .

- ① Nếu véctơ \vec{n} khác $\vec{0}$ và có giá vuông góc với (α) thì \vec{n} được gọi là véctơ pháp tuyến của (α) .
- 2 Nếu hai véctơ \vec{a} , \vec{b} không cùng phương, có giá song song hoặc nằm trong (α) thì \vec{a} , \vec{b} được gọi là cặp véctơ chỉ phương của (α) . Khi đó, nếu $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$, $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$ thì

$$\overrightarrow{n} = [\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}] = \left(\left| \begin{array}{ccc} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{array} \right| ; \left| \begin{array}{ccc} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{array} \right| ; \left| \begin{array}{ccc} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{array} \right| \right)$$

là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P).

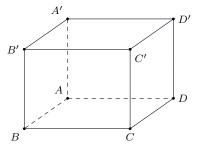
3 Nếu (α) : ax + by + cz + d = 0 thì vecto pháp tuyến của (α) là $\vec{n} = (a; b; c)$.

1. Ví du minh hoa

VÍ DU 1.

Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D'.

a) Xác định vectơ pháp tuyến của các mặt phẳng (ABCD), (ABB'A'), (ACC'A'), (ADD'A').



b) Chứng minh $\overrightarrow{AB'}$ là một vectơ pháp tuyến của (BCD'A').

VÍ DỤ 2. Cho mặt phẳng (P): 2x-3y+4z+5=0. Hãy chỉ ra một vectơ pháp tuyến của (P) và hai điểm thuộc (P).

VÍ DU 3. Cho (P) là mặt phẳng trung trực của MN với M(1;-2;3), N(1;4;1). Hãy chỉ ra một vecto pháp tuyến của (P) và một điểm thuộc (P).

VÍ DU 4. Chỉ ra một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (α) biết

- a) (α) di qua A(-1;3;5), B(3;2;-2) và C(0;3;0)
- b) (α) đi qua M(0;3;1), N(-3;2;5) và P(-2;0;0)

VÍ DỤ 5. Cho tứ diện ABCD có các đỉnh là A(5;1;3), B(1;6;2), C(5;0;4) và D(4;0;6). Gọi (α) là mặt phẳng chứa cạnh AB và song song với cạnh CD. Hãy tìm một điểm thuộc (α) và một vecto pháp tuyến của (α) .

2. Bài tấp trắc nghiệm

CÂU 1. Cho mặt phẳng (α) : 2x - y + 3z - 2 = 0. Điểm nào sau đây thuộc mặt phẳng (α) ?

- (A) A(1; -3; 1).
- **(B)** B(2;-1;-1).
- (c) C(2;-1;1).
- (**D**) D(1;2;3).

CÂU 2. Cho mặt phẳng (α) : x + y + z - 6 = 0. Điểm nào dưới đây **không** thuộc (α) ?

- (A) M(1;-1;1).
- **B** N(2;2;2).
- (c) P(1;2;3).
- **(D)** Q(3;3;0).

CÂU 3. Cho (α) vuông góc với giá của $\vec{a} = (2; -1; 3)$. Vectơ nào dưới đây là vectơ pháp tuyến của (α) ?

- (A) $\overrightarrow{n_1} = (-2; 1; 3)$. (B) $\overrightarrow{n_2} = (-2; 1; -3)$. (C) $\overrightarrow{n_3} = (4; 2; 6)$.
- $\overrightarrow{\mathbf{D}}$) $\overrightarrow{n_4} = (4; -2; -6)$.

CÂU 4. vecto nào sau đây **không** phải là vecto pháp tuyến của mặt phẳng (P): x + 3y -5z + 2 = 0.

 $\vec{n}_1 = (-1; -3; 5).$

B) $\vec{n}_2 = (-2; -6; -10).$

 $\vec{\mathbf{c}}$ $\vec{n}_3 = (-3; -9; 15).$

 $\vec{\mathbf{p}}$) $\vec{n}_4 = (2; 6; -10).$

CÂU 5. Trong không gian Oxyz, mặt phẳng tọa độ (Oxy) có một vectơ pháp tuyến là

- $\vec{n} = (0; 1; 0).$
- **B**) $\vec{n} = (0; 0; 1).$
- $\vec{\mathbf{c}}$ $\vec{n} = (1; 0; 0).$
- **(D)** $\vec{n} = (1; 1; 0).$

CÂU 6. Trong không gian Oxyz, cho điểm A(4; -3; 7) và B(2; 1; 3). Một vecto pháp tuyến của mặt phẳng trung trực của đoạn AB là

- (A) $\vec{n} = (1; -2; 2)$.
- **(B)** $\vec{n} = (2; 4; 4)$.
- $\vec{n} = (6; -2; 10).$ $\vec{n} = (-2; -4; 4).$

CÂU 7. Trong không gian Oxyz, (P) là mặt phẳng trung trực của đoạn AB, biết A(1;3;0), B(-2;1;-1). vecto nào sau đây là vecto pháp tuyến của (P)?

- (A) $\vec{n}_4 = (3; -2; -1)$. (B) $\vec{n}_2 = (-3; 2; -1)$. (C) $\vec{n}_3 = (-3; 4; 1)$. (D) $\vec{n}_1 = (3; 2; 1)$.

CÂU 8. Trong không gian Oxyz, vectơ nào sau đây là một vectơ pháp tuyến của (P). Biết $\vec{u} = (1, -2, 0), \vec{v} = (0, 2, -1)$ là cặp vecto chỉ phương của (P).

- (A) $\vec{n} = (1; 2; 0)$.
- **(B)** $\vec{n} = (2; 1; 2)$.
- (c) $\vec{n} = (2; -1; 2)$.
- $(\mathbf{D}) \ \overrightarrow{n} = (0; 1; 2).$

CÂU 9. Trong không gian Oxyz, cho (α) song song với giá của $\vec{a}=(1;-2;-3), \vec{b}=$ (-4;2;0). Vectơ nào dưới đây **không phải** là vectơ pháp tuyến của (α) ?

(A) $\vec{n_1} = (6; 12; -6)$.

(B) $\overrightarrow{n_2} = (1; 2; -1).$

 $(\mathbf{c}) \vec{n_3} = (-2; -4; 2).$

 $\overrightarrow{\mathbf{D}}$) $\overrightarrow{n_4} = (-3; -6; -3).$

CÂU 10. Trong không gian Oxyz, cho ba điểm A(2;0;0), B(0;-3;0), C(0;0;6). Toa đô một vecto pháp tuyến của mặt phẳng (ABC) là

- (A) $\vec{n} = (1; -2; 3)$.
- **(B)** $\vec{n} = (3; 2; 1).$
- (C) $\vec{n} = (3; -2; 1)$. (D) $\vec{n} = (2; -3; 6)$.

CÂU 11. Trong không gian Oxyz, cho ba điểm A(2; -1; 3), B(4; 0; 1) và C(-10; 5; 3). vector nào dưới đây là vecto pháp tuyến của mặt phẳng (ABC)?

- (A) $\vec{n} = (1; 2; 0)$.
- **(B)** $\vec{n} = (1; -2; 2).$
- (c) $\vec{n} = (1; 8; 2)$.
- **(D)** $\vec{n} = (1; 2; 2).$

CÂU 12. Trong không gian Oxyz, cho hai điểm A(2;-1;5), B(1;-2;3). Mặt phẳng (α) đi qua hai điểm A, B và song song với trực Ox có vecto pháp tuyến $\overrightarrow{n} = (0; a; b)$. Khi đó tỉ số $\frac{\dot{a}}{b}$ bằng

- (\mathbf{A}) -2.
- $(B) \frac{3}{2}$.
- $\frac{3}{2}$.
- \bigcirc 2.

Lập phương trình mặt phẳng khi biết các yếu tố liên quan

 \bigotimes Công thức: Cho (P) qua điểm $M(x_0, y_0, z_0)$ và một vecto pháp tuyến $\overrightarrow{n_P} =$

\frown	ш	C	/ 1	VI.	\frown	TE
6	u	V.	v i	w	U	ıE

(a,b,c). Khi đó, phương trình (P) là

$$(P): a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

- Một số cách xác định vectơ pháp tuyến thường gặp:
 - ① Nếu $(P) \perp AB$ thì $\overrightarrow{n_P} = \overrightarrow{AB}$;
 - $\$ Nếu (P) là mặt phẳng trung trực của đoạn AB thì (P) qua trung điểm Icủa AB và $\overrightarrow{n_P} = AB$;
 - 3 Nếu (P) có cặp vecto chỉ phương \vec{u} , \vec{v} thì $\vec{n_P} = [\vec{u}, \vec{v}]$ là một vecto pháp tuyến của (P).
 - 4 Nếu (P) qua ba điểm A, B, C phân biệt và không thẳng hàng thì $\overrightarrow{n_P} =$ |AB,AC|;
 - ⑤ Nếu (P) qua hai điểm A, B phân biệt và song song với d thì $\overrightarrow{n_P} = \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{u_d}\right]$;
 -

 Nếu (P) qua điểm A và chứa d thì $\overrightarrow{n_P} = \left \lceil \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{u_d} \right \rvert,$ với
 $M \in d.$
- **Phương trình theo đoạn chắn:** Cho (P) đi qua A(a;0;0), B(0;b;0), C(0;0;c)với $abc \neq 0$ thì $(P): \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ (phương trình theo đoạn chắn)

1. Ví du minh hoa

VÍ DỤ 1. Trong không gian Oxyz, cho ba điểm A(3; -2; -2), B(3; 2; 0), C(0; 2; 1).

- a) Lập phương trình mặt phẳng qua A và vuông góc với BC.
- b) Lập phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn AB.
- c) Lập phương trình mặt phẳng (ABC).

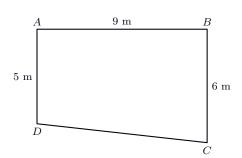
VÍ DỤ 2. Cho tứ diện ABCD có các đỉnh A(5;1;3), B(1;6;2), C(5;0;4), D(4;0;6).

- a) Hãy viết phương trình của các mặt phẳng (ACD) và (BCD);
- b) Hãy viết phương trình mặt phẳng (α) chứa cạnh AB và song song với cạnh CD;
- c) Gọi A', B', C' lần lượt là hình chiếu vuông góc của A, B, C lên các trực Ox, Oy, Oz. Hãy viết phương trình mặt phẳng (A'B'C').

VÍ DỤ 3. Viết phương trình của mặt phẳng

a) Chứa trục Ox và điểm M(-4;1;2); b) Chứa trục Oz và điểm P(3;0;-7).

VÍ DU 4. Một phần sân nhà bác An có dang hình thang ABCD vuông tại A và B với đô dài AB = 9 m, AD = 5 m và BC = 6 m như Hình bên dưới. Theo thiết kế ban đầu thì mặt sân bằng phẳng và A, B, C, D có độ cao như nhau. Sau đó bác An thay đổi thiết kế để nước có thể thoát về phía góc sân ở vị trí C bằng cách giữ nguyên độ cao ở A, giảm độ cao của sân ở vị trí B và D xuống thấp hơn độ cao ở A lần lượt là 6 cm và 3,6 cm. Để mặt sân sau khi lát gạch vẫn là bề mặt phẳng thì bác An cần phải giảm độ cao ở C xuống bao nhiêu centimét so với độ cao ở A?



2. Bài tập trắc nghiệm

CÂU 1. Phương trình mặt phẳng đi qua điểm A(1;2;3) và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=$ (-2;0;1) là

CÂU 2. Phương trình nào được cho dưới đây là phương trình mặt phẳng (Oyz)?

$$C y + z = 0.$$

$$\bigcirc x = 0$$

CÂU 3. Cho các điểm A(0;1;2), B(2;-2;1), C(-2;0;1). Phương trình mặt phẳng đi qua Avà vuông góc với BC là

(A)
$$2x - y - 1 = 0$$
. (B) $-y + 2z - 3 = 0$. (C) $2x - y + 1 = 0$. (D) $y + 2z - 5 = 0$.

CÂU 4. Cho hai điểm A(4;0;1) và B(-2;2;3). Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB?

(A)
$$3x - y - z + 1 = 0$$
.

B)
$$3x + y + z - 6 = 0$$
.

$$\bigcirc 3x - y - z = 0.$$

CÂU 5. Trong không gian Oxyz, cho hai điểm A(1;1;1) và B(1;3;5). Viết phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn AB.

(A)
$$y - 2z - 6 = 0$$
. (B) $y - 2z + 2 = 0$.

©
$$y - 3z + 4 = 0$$
. **D** $y + 2z - 8 = 0$.

CÂU 6. Trông không gian Oxyz, phương trình mặt phẳng (P) đi qua A(0;-1;4) và song song với giá của hai vecto $\overrightarrow{u}=(3;2;1), \ \overrightarrow{v}=(-3;0;1)$ là

$$(A) x - 3y + 3z - 15 = 0.$$

B)
$$x - 2y + 3z - 14 = 0$$
.

$$(c)$$
 $x - y - z + 3 = 0.$

$$(\mathbf{D}) x - 3y + 3z - 9 = 0.$$

CÂU 7. Trong không gian Oxyz, cho ba điểm A(3;-2;-2), B(3;2;0), C(0;2;1). Phương trình mặt phẳng (ABC) là

$$(A)$$
 $2x - 3y + 6z + 12 = 0.$

B)
$$2x + 3y - 6z - 12 = 0$$
.

$$(c)$$
 $2x - 3y + 6z = 0.$

CÂU 8. Trong không gian với hệ trực toạ độ Oxyz, cho ba điểm A(1,0,0), B(0,-1,-1), C(5,-1,1). Mặt phẳng (ABC) có phương trình là

$$(A)$$
 $2x + 3y + 5z - 2 = 0.$

B
$$2x - 3y - 5z - 2 = 0$$
.

$$(c)$$
 $2x - 3y - 5z + 2 = 0.$

$$(\mathbf{D}) 2x + 3y - 5z - 2 = 0.$$

CÂU 9. Mặt phẳng (α) đi qua A(-1;4;-6) và chứa trục Oy có phương trình là

B
$$6x + z = 0$$
.

(c)
$$3x - y - 6z + 1 = 0$$
.

(D)
$$6x - z = 0$$
.

CÂU 10. Trong không gian Oxyz, mặt phẳng chứa trục Ox và đi qua điểm A(1;1;-1) có phương trình là

(A)
$$y + z = 0$$
.

B)
$$z + 1 = 0$$
.

$$(c) x + z = 0.$$

$$\bigcirc x - y = 0.$$

CÂU 11. Trong không gian Oxyz, cho ba điểm A(2;1;1), B(3;0;-1), C(2;0;3). Mặt phẳng (α) đi qua hai điểm A, B và song song với đường thẳng OC có phương trình là

(A)
$$3x + y - 2z - 5 = 0$$
.

B)
$$4x + 2y + z - 11 = 0$$
.

(c)
$$x - y + z - 2 = 0$$
.

$$\mathbf{D}$$
 $3x + 7y - 2z - 11 = 0$.

CÂU 12. Mặt phẳng đi qua hai điểm A(1;2;-1), B(0;4;3) và song song với trục Oz có phương trình là

(A)
$$2x + y - 4 = 0$$
.

B)
$$4x - 4y + 3z + 7 = 0$$
.

$$(c)$$
 $x + 2y - 5 = 0.$

$$(\mathbf{D}) 2x + y + z - 3 = 0$$

CÂU 13. Cho điểm M(1;2;-3). Gọi M_1 , M_2 , M_3 lần lượt là hình chiếu vuông góc của Mlên trục Ox, Oy, Oz. Phương trình mặt phẳng đi qua ba điểm M_1 , M_2 , M_3 là

$$(A)$$
 $x + \frac{y}{2} - \frac{z}{2} = 1$

B
$$\frac{x}{2} + \frac{y}{2} + \frac{z}{1} = 1$$

$$x + \frac{y}{2} + \frac{z}{2} = 1.$$

(A)
$$x + \frac{y}{2} - \frac{z}{3} = 1$$
. (B) $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} + \frac{z}{1} = 1$. (C) $x + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 1$. (D) $x + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = -1$.

CÂU 14. Mặt phẳng nào sau đây cắt các trục Ox, Oy, Oz lần lượt tại các điểm A, B, Csao cho tam giác ABC nhận điểm G(1;2;1) là trọng tâm?

B)
$$2x + y + 2z - 6 = 0$$
.

$\overline{}$	пп	IC k	/ 6	
A			- 1	
~			—	

(C)	2x	+	2u	+	z	_	6	=	0.

CÂU 15. Cho mặt phẳng (P) đi qua điểm M(2; -4; 1) và chắn trên các trục tọa độ Ox, Oy, Oz theo ba đoạn có độ dài đại số lần lượt là a, b, c. Phương trình tổng quát của mặt phẳng (P) khi a, b, c theo thứ tự tạo thành một cấp số nhân có công bội bằng 2 là

$$(A) $4x + 2y - z - 1 = 0.$$$

B)
$$4x - 2y + z + 1 = 0$$
.

$$(c) 16x + 4y - 4z - 1 = 0.$$

$$(\mathbf{D}) 4x + 2y + z - 1 = 0.$$

Vi trí tương đối của hai mặt phẳng

Cho hai mặt phẳng (P): $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ và (Q): $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$.

② Nếu
$$\begin{cases} \overrightarrow{n_1} = k \cdot \overrightarrow{n_2} \\ d_1 \neq k \cdot d_2 \end{cases}$$
 thì (P) song song (Q) .

③ Nếu
$$\overrightarrow{n_1}$$
 không cùng phương với $\overrightarrow{n_2}$ thì (P) cắt (Q) .

① Nếu
$$\overrightarrow{n_1} \perp \overrightarrow{n_2}$$
 hay $a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$ thì $(P) \perp (Q)$.

1. Ví du minh hoa

VÍ DỤ 1. Tìm các cặp mặt phẳng song song hoặc vuông góc trong các mặt phẳng sau

$$(P): 2x + 3y - 2z + 7 = 0$$

$$(Q)$$
: $3x - 2y - 11 = 0$

$$(R)$$
: $4x + 6y - 4z - 9 = 0$

$$(T)$$
: $7x + y - z + 1 = 0$

VÍ DỤ 2. Trong không gian Oxyz, cho mặt phẳng (α) : 2x - 3y + z + 5 = 0.

a) Chứng minh rằng mặt phẳng (α') : -4x + 6y - 2z + 7 = 0 song song với (α) .

b) Viết phương trình mặt phẳng (β) đi qua điểm M(1; -2; 3) và song song với (α) .

VÍ DỤ 3. Trong không gian Oxyz, cho hai mặt phẳng (Q): x+y+3z=0, (R): 2x-y+z=0.

a) Xét vị trí tương đối của (Q) và (R);

b) Viết trình của mặt phẳng (P) đi qua điểm B(2;1;-3), đồng thời vuông góc với (Q)và(R).

VÍ DỤ 4. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai điểm A(-2;4;-1), B(1;1;3) và mặt phẳng (P) có phương trình x-3y+2z-5=0. Viết phương trình mặt phẳng (Q) đi qua hai điểm A, B và vuông góc với mặt phẳng (P).

2. Bài tấp trắc nghiệm

CÂU 1. Cho mặt phẳng (P): -x+y+3z+1=0. Mặt phẳng song song với mặt phẳng (P) có phương trình nào sau đây?

$$2x - 2y - 6z + 7 = 0.$$

$$(c)$$
 $x - y + 3z - 3 = 0.$

$$(\mathbf{D}) - x - y + 3z + 1 = 0.$$

CÂU 2. Cho hai mặt phẳng (P): 2x + 4y + 3z - 5 = 0 và (Q): mx - ny - 6z + 2 - 0. Giá trị của m, n sao cho (P) # (Q) là

(A)
$$m = 4$$
; $n = -8$. (B) $m = n = 4$.

(B)
$$m = n = 4$$
.

(C)
$$m = -4$$
; $n = 8$. (D) $m = n = -4$.

(D)
$$m = n = -4$$
.

CÂU 3. Cho hai mặt phẳng (P): x + my + (m-1)z + 1 = 0 và (Q): x + y + 2z = 0. Tập hợp tất cả các giá trị m để hai mặt phẳng này **không** song song là

$$(0.\pm\infty)$$

B)
$$\mathbb{R} \setminus \{-1; 1; 2\}.$$

$$(\mathbf{c})$$
 $(-\infty;3)$.

$$\mathbb{R}$$

CÂU 4. Cho mặt phẳng (α) : x+y+z-1=0. Trong các mặt phẳng sau, tìm mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng (α) .

$$(A)$$
 $2x - y + z + 1 = 0.$

B)
$$2x - y - z + 1 = 0$$
.

$$(c)$$
 $2x + 2y + 2z - 1 = 0.$

$$(D) x - y - z + 1 = 0.$$

CÂU 5. Cho mặt phẳng (P): 2x - y + 2z - 3 = 0 và (Q): x + my + z - 1 = 0. Tìm tham số mđể hai mặt phẳng P và Q vuông góc với nhau.

B
$$m = -\frac{1}{2}$$
.

$$m = \frac{1}{2}$$
.

$$\bigcirc m = 4.$$

CÂU 6. Cho hai mặt phẳng (P): x+2y-z-1=0, (Q): 3x-(m+2)y+(2m-1)z+3=0.Tìm m để hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau.

$$(A) m = 0.$$

$$\bigcirc$$
 $m=2.$

$$(c) m = -2.$$

$$D m = -1.$$

CÂU 7. Mặt phẳng đi qua A(1;3;-2) và song song với mặt phẳng (P): 2x-y+3z+4=0có phương trình là

(A)
$$2x - y + 3z + 7 = 0$$
.

B)
$$2x - y + 3z - 7 = 0$$
.

$$(c)$$
 $2x + y - 3z + 7 = 0.$

CÂU 8. Cho điểm A(2;-1;-3) và mặt phẳng (P):3x-2y+4z-5=0. Mặt phẳng (Q) đi qua A và song song với mặt phẳng (P) có phương trình là

$$(Q): 3x - 2y + 4z + 4 = 0.$$

B
$$(Q)$$
: $3x + 2y + 4z + 8 = 0$.

$$(\mathbf{C})(Q): 3x - 2y + 4z + 5 = 0.$$

$$(Q): 3x - 2y + 4z - 4 = 0.$$

CÂU 9. Cho mặt phẳng (P) đi qua các điểm A(-2;0;0), B(0;3;0), C(0;0;-3). Mặt phẳng (P) vuông góc với mặt phẳng nào trong các mặt phẳng sau?

$$(A)$$
 $2x + 2y - z - 1 = 0.$

B)
$$x + y + z + 1 = 0$$
.

$$(\mathbf{c})$$
 $3x - 2y + 2z + 6 = 0.$

CÂU 10. Mặt phẳng qua A(1;2;-1) và vuông góc với các mặt phẳng (P): 2x-y+3z-2=0;(Q): x + y + z - 1 = 0 có phương trình là

B)
$$4x - y + z - 1 = 0$$
.

$$(c)$$
 $x + y + 2z - 1 = 0.$

$$(\mathbf{D}) 4x - y - 3z - 5 = 0.$$

CÂU 11. Cho hai mặt phẳng (P), (Q) lần lượt có phương trình là x+y-z=0, x-2y+3z=4và cho điểm M(1; -2; 5). Tìm phương trình mặt phẳng (α) đi qua điểm M và đồng thời vuông góc với hai mặt phẳng (P), (Q).

$$(A)$$
 $5x + 2y - z + 14 = 0.$

B)
$$x - 4y - 3z + 6 = 0$$
.

$$(\mathbf{c}) x - 4y - 3z - 6 = 0.$$

$$(\mathbf{D})$$
 $5x + 2y - z + 4 = 0.$

CÂU 12. Cho điểm A(-4;1;1) và mặt phẳng (P): x-2y-z+4=0. Mặt phẳng (Q) đi qua điểm A và song song với mặt phẳng (P) có phương trình là

(A)
$$(Q)$$
: $x - 2y - z + 7 = 0$.

B)
$$(Q)$$
: $x - 2y - z - 7 = 0$.

(c)
$$(Q)$$
: $x - 2y + z + 5 = 0$.

$$(Q): x-2y+z-5=0.$$

CÂU 13. Cho hai mặt phẳng (P): x - 3y + 2z - 1 = 0, (Q): x - z + 2 = 0. Mặt phẳng (α) vuông góc với hai mặt phẳng (P), (Q) đồng thời cắt trục Ox tại điểm có hoành độ bằng 3. Phương trình của (α) là

$$(A)$$
 $-2x + z + 6 = 0.$

$$(c)$$
 $x + y + z - 3 = 0.$

D
$$x + y + z + 3 = 0$$
.

CÂU 14. Cho A(1;-1;2); B(2;1;1) và mặt phẳng (P): x+y+z+1=0. Mặt phẳng (Q)chứa A, B và vuông góc với mặt phẳng (P). Mặt phẳng (Q) có phương trình là

$$(A) $3x - 2y - z + 3 = 0.$$$

B)
$$3x - 2y - z - 3 = 0$$
.

$$(c)$$
 $-x + y = 0.$

$$(\mathbf{D}) x + y + z - 2 = 0.$$

CÂU 15. Cho hai điểm A(2;4;1), B(-1;1;3) và mặt phẳng (P): x-3y+2z-5=0.Một mặt phẳng (Q) đi qua hai điểm A, B và vuông góc với mặt phẳng (P) có dạng là ax + by + cz - 11 = 0. Tính a + b + c.

$$(A) a + b + c = -7.$$

B)
$$a + b + c = 10$$

(A)
$$a+b+c=-7$$
. (B) $a+b+c=10$. (C) $a+b+c=5$. (D) $a+b+c=3$.

D
$$a + b + c = 3$$

QUICK NOTE

۰	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠
•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•

۱	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	





•	٠	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	٠	•	•	٠	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	

	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•		•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•		•	•	

$\overline{}$	 C	•	пπ		_
_			IXI		
•		`	II VI	\smile	_

4					
		/			١
	V		1	П	
		V	4	ŧ,	ı,
		`		-	1

Khoảng cách từ một điểm đến mặt phẳng, khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song

Ç

Khoảng cách từ một điểm đến mặt phẳng: Cho điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ và mặt phẳng (P): ax + by + cz + d = 0. Khi đó

$$d(M,(P)) = \frac{\left| ax_0 + by_0 + cz_0 + d \right|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song: Cho hai mặt phẳng (P): $ax + by + cz + d_1 = 0$ và (Q): $ax + by + cz + d_2 = 0$ song song nhau. Khi đó

$$d((P),(Q)) = \frac{\left| d_1 - d_2 \right|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

1. Ví dụ minh hoạ

VÍ DỤ 1. Tính khoảng cách từ điểm A(1;2;3) đến các mặt phẳng sau

a)
$$(P): 3x + 4z + 10 = 0;$$

b)
$$(Q): 2x - 10 = 0;$$

c)
$$(R): 2x+2y+z-3=0.$$

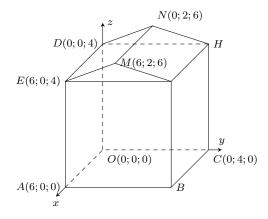
VÍ DỤ 2. Cho hai mặt phẳng (P): 2x + y + 2z + 12 = 0, (Q): 4x + 2y + 4z - 6 = 0.

- a) Chứng minh (P) # (Q).
- b) Tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng (P) và (Q).

VÍ DŲ 3.

Một kĩ sư xây dựng thiết kế khung một ngôi nhà trong không gian Oxyz như Hình 9 nhờ một phần mềm đồ họa máy tính.

- a) Viết phương trình mặt phẳng mái nhà (DEMN).
- b) Tính khoảng cách từ điểm B đến mái nhà (DEMN).



Hình 9

VÍ DỤ 4. Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D' có DA = 2, DC = 3, DD' = 2. Tính khoảng cách từ đỉnh B' đến mặt phẳng (BA'C').

2. Bài tấp trắc nghiệm

CÂU 1. Khoảng cách từ A(-2;1;-6) đến mặt phẳng (Oxy) là

$$\bigcirc \frac{7}{\sqrt{41}}$$
.

CÂU 2. Cho hai điểm A(-2;1;3), B(4;1;-1). Khoảng cách từ trung điểm I của đoạn AB đến mặt phẳng (Oyz) là

$$\bigcirc$$
 0.

CÂU 3. Cho mặt phẳng (P): 2x + 3y + 4z - 5 = 0 và điểm A(1; -3; 1). Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (P) bằng

$$lack{A} \frac{8}{\sqrt{29}}$$
.

$$\frac{3}{\sqrt{29}}$$
.

$$\bigcirc \frac{8}{29}$$
.

CÂU 4. Gọi H là hình chiếu vuông góc của điểm A(2;3;-1) trên mặt phẳng $(\alpha): 16x +$ 12y - 15z + 7 = 0. Tính độ dài đoạn thẳng AH.

$$\frac{19}{25}$$

$$\frac{12}{25}$$

$$\bigcirc$$
 $\frac{12}{625}$.

CÂU 5. Cho hai mặt phẳng (P): x + 2y - 2z + 3 = 0 và (Q): x + 2y - 2z - 1 = 0. Khoảng cách giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) là

$$\frac{4}{9}$$
.

B
$$\frac{2}{3}$$
.

$$\frac{4}{3}$$
.

$$\bigcirc$$
 $-\frac{4}{3}$.

CÂU 6. Biết rằng hai mặt phẳng 4x-4y+2z-7=0 và 2x-2y+z+4=0 chứa hai mặt của hình lập phương. Thể tích khối lập phương đó bằng

B
$$V = \frac{27}{8}$$
.

B
$$V = \frac{27}{8}$$
. **C** $V = \frac{81\sqrt{3}}{8}$. **D** $V = \frac{125}{8}$.

$$D V = \frac{125}{8}.$$

CÂU 7. Cho hai điểm A(2;2;-2) và B(3;-1;0). Đường thẳng AB cắt mặt phẳng (P): x+y-z+2=0tại điểm I. Tỉ số $\frac{\dot{I}A}{IR}$ bằng

$$\bigcirc$$
 2.

CÂU 8. Cho hai mặt phẳng (P): x+y-z+1=0 và (Q): x-y+z-5=0. Có bao nhiêu điểm M trên trục Oy thỏa mãn M cách đều hai mặt phẳng (P) và (Q)?

$$\bigcirc$$
 0.

CÂU 9. Cho điểm A(1;2;3) và mặt phẳng (P): x+y+z-2=0. Mặt phẳng (Q) song song với mặt phẳng (P) và (Q) cách điểm A một khoảng bằng $3\sqrt{3}$. Phương trình mặt phẳng

(A)
$$x + y + z + 3 = 0$$
 và $x + y + z - 3 = 0$.

B)
$$x + y + z + 3 = 0$$
 và $x + y + z + 15 = 0$.

$$(c)$$
 $x + y + z + 3 = 0$ và $x + y + z - 15 = 0$.

$$(\mathbf{D}) x + y + z + 3 = 0 \text{ và } x + y - z - 15 = 0.$$

CÂU 10. Cho mặt phẳng (P): x + 2y + z - 4 = 0 và điểm D(1;0;3). Mặt phẳng (Q) song song với (P) và cách D một khoảng bằng $\sqrt{6}$ có phương trình là

CÂU 11. Cho hình chốp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật. Biết A(0;0;0), D(2;0;0), B(0;4;0), S(0;0;4). Gọi M là trung điểm của SB. Tính khoảng cách từ B đến mặt phẳng (CDM).

$$(A) d(B, (CDM)) = \sqrt{2}.$$

$$(B)$$
 $d(B,(CDM)) = 2.$

c
$$d(B, (CDM)) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

CÂU 12. Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' có cạnh bằng 2. Khoảng cách giữa hai mặt phẳng (AB'D') và (BC'D) bằng

$$\bigcirc \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

CÂU 13. Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D' có $AB=a,\ AD=2a,\ AA'=3a.$ Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, C'D' và DD'. Tính khoảng cách từ A đến (MNP).

$$\bigcirc \frac{15}{11}a.$$

B
$$\frac{15}{22}a$$
.

$$\bigcirc \frac{9}{11}a.$$

$$\bigcirc \frac{3}{4}a$$

CÂU 14. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh $a, SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{3}$. Tính khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (SCD).

$$\bigcirc$$
 $\frac{a\sqrt{2}}{3}$.

$$\bigcirc \frac{a}{2}$$
.

CÂU 15. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh $a, SD = \frac{3a}{2}$, hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng (ABCD) là trung điểm của canh AB. Tính khoảng cách d từ A đến mặt phẳng (SBD).

$$\bigcirc$$
 $d = \frac{a}{6}$

$$c$$
 $d = \frac{3a}{2}$.

♥ VNPmath - 0962940819 ♥	
QUICK NOTE	C. BÀI
	Phần I. N
	CÂU 1. Tr
	phẳng nào
	\mathbf{A} (α) :
	c (Q):
	CÂU 2. Tr
	y - 2z - 3
	A 2.
	CÂU 3. Tr
	nào sau đâ
	CÂU 4. Tr
	là hình chi
	mặt phẳng
	$\bigcirc 4x -$
	\bigcirc $4x + \bigcirc$
	CÂU 5. Tr
	Một véc-tơ
	$\overrightarrow{\mathbf{A}} \overrightarrow{n} =$
	CÂU 6. Tr
	đây đúng?
	$(A) M \in$
	CÂU 7. Tr
	Mặt phẳng
	$\frac{1}{2}$
	$\frac{x}{2}$ +
	_
	CÂU 8. Tr
	là tham số (α) bằng 1
	(α) bang 1 (A) -6 .
	CÂU 9. Tr
	trên mặt p
	A (2; 0;
	CÂU 10. 7
	mặt phẳng góc với (P)
	$\mathbf{A}(Q)$:
	© (Q):
	_
	CÂU 11. 7 Mặt phẳng
	nào dưới đ
	$\overrightarrow{\mathbf{A}}$ $\overrightarrow{n}_3 =$
	CÂU 12. 7

TẬP TRẮC NGHIỆM TỰ LUYỆN

Mỗi câu hỏi học sinh chọn một trong bốn phương án A, B, C, D.

rong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho mặt phẳng (P): x-z+3=0. Mặt sau đây vuông góc với mặt phẳng (P)?

(A)
$$(\alpha)$$
: $2x - y + 2z = 0$.

B
$$(\beta)$$
: $2x - y - 2z = 0$.

$$(Q)$$
: $-2x - y + 2z = 0$.

$$(R)$$
: $2x + y - 2z = 0$.

rong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho điểm A(1;3;-2) và mặt phẳng (P): 2x+= 0. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (P) bằng

$$\bigcirc \frac{2}{3}$$
.

rong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho mặt phẳng (P): x-y+3=0. Véc-tơ y **không phải** là véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P)?

$$(\mathbf{A}) \ \vec{a} = (3; -3; 0).$$

B)
$$\vec{a} = (1; -1; 0).$$

B)
$$\vec{a} = (1; -1; 0)$$
. **C**) $\vec{a} = (1; -1; 3)$. **D**) $\vec{a} = (-1; 1; 0)$.

$$\vec{a} = (-1; 1; 0)$$

rong không gian với hệ tọa độ Oxyz với điểm M(-3;1;4) và gọi A, B, C lần lượt ếu của M lên các trục $Ox,\,Oy,\,Oz.$ Phương trình nào dưới đây là phương trình song song với mặt phẳng (ABC)?

$$B) $4x - 12y - 3z + 12 = 0.$$$

$$(c)$$
 $4x + 12y - 3z - 12 = 0.$

$$(\mathbf{D}) 4x - 12y - 3z - 12 = 0.$$

rong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho ba điểm A(2;0;0), B(0;-3;0), C(0;0;1). pháp tuyến của mặt phẳng (ABC) là

$$\vec{n} = (3; -2; 6).$$

B
$$\vec{n} = (2; -3; -1)$$
. **C** $\vec{n} = (2; 3; 1)$.

$$\vec{c}$$
 $\vec{n} = (2; 3; 1)$

$$\vec{n} = (2; -3; 1).$$

rong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho điểm M(2024; 0; -1). Mệnh đề nào dưới

$$lack M \in (Oxz).$$

$$lacksquare$$
 $M \in Oy$.

$$\bigcirc$$
 $M \in (Oxy).$

rong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho ba điểm A(-2;0;0), B(0;3;0) và C(0;0;4). (ABC) có phương trình là

$$\frac{x}{-2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 1.$$

$$\mathbf{c} \frac{x}{2} + \frac{y}{-3} + \frac{z}{4} = 1.$$

rong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho mặt phẳng $(\alpha): 2x + 2y - z + m = 0$ (m). Tìm giá trị của tham số m dương để khoảng cách từ gốc tọa độ đến mặt phẳng

$$\bigcirc$$
 -3

rong không gian với hệ tọa độ Oxyz, hình chiếu vuông góc của điểm M(2;3;-4) $\text{h}_{\text{ang}}^{2}\left(Oyz\right)$ có tọa độ là

$$(2;0;-4).$$

$$\bigcirc$$
 $(0;3;-4).$

$$\bigcirc$$
 $(0;3;0).$

Frong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai điểm $A(1;2;-1),\ B(-1;0;1)$ và (P): x + 2y - z + 1 = 0. Viết phương trình mặt phẳng (Q) qua A, B và vuông

$$(Q): 3x - y + z = 0.$$

B
$$(Q)$$
: $x + z = 0$.

c
$$(Q)$$
: $2x - y + 3 = 0$.

$$\bigcirc (Q): -x+y+z=0.$$

 Frong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai véc-tơ $\overrightarrow{u}=(1;2;3), \ \overrightarrow{v}=(0;-1;1).$ $g(\alpha)$ đi qua điểm A(1;2;5) và song song với giá của hai véc-to \vec{u} và \vec{v} . Véc-to ây là một véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (α) ?

$$\vec{\mathbf{A}}$$
 $\vec{n}_3 = (-1; -1; -1).$

B
$$\vec{n}_2 = (5; -1; -1).$$

$$\vec{\mathbf{c}}$$
 $\vec{n}_1 = (5; 1; -1).$

$$\overrightarrow{\mathbf{D}}$$
 $\overrightarrow{n}_4 = (-1; -1; 5).$

Frong không gian với hệ toa đô Oxyz, cho ba điểm A(1;-1;0), B(-1;0;1), -1). Phương trình mặt phẳng (ABC) là

$$3x + y + 5z + 2 = 0.$$

Phần II. Trong mỗi ý a), b), c) và d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai. **CÂU 1.** Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho hai điểm A(1;2;3), B(3;4;4) và mặt phẳng $(\alpha): 2x + y + mz - 1 = 0$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

Mệnh đề	Đ	S
a) Mặt phẳng đi qua 3 điểm là hình chiếu vuông góc của $A(1;2;3)$ lên ba trực tọa độ có phương trình là $6x+3y+2z-6=0$.		
b) Điểm A cách đều mặt phẳng $(\gamma)\colon 2x+y+mz-1=0$ và điểm B khi $m=-2.$		
c) Biết mặt phẳng (β) : $4x + (n-2)y + z - 3 = 0$ song song với mặt phẳng (α) . Khi đó, $2m + n = 5$.		
d) Khi $B \in (\alpha)$: $2x + y + mz - 1 = 0$ thì $m = -2$.		

CÂU 2. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho A(1;2;-1), B(-1;0;1) và mặt phẳng (P): x+2y-z+1=0. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

Mệnh đề	Ð	S
a) Biết điểm M nằm trên tia Ox mà khoảng cách từ M đến mặt phẳng (P) bằng $\sqrt{6}$. Khi đó, hoành độ điểm M là $x_M = 5$.		
b) Mặt phẳng (Q) qua A, B và vuông góc với (P) có phương trình là $x+z=0.$		
c) Mặt phẳng (P) có một véc-tơ pháp tuyến là $(1;2;-1)$.		
d) Khi $m = -4$ thì mặt phẳng (R) : $2x - my + 3 = 0$ vuông góc với mặt phẳng (P) .		

CÂU 3. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai điểm A(1;2;1) và B(3;-1;5). Các mệnh đề sau đúng hay sai?

Mệnh đề	Ð	S
a) Phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB là $2x-3y+4z-\frac{29}{2}=0$.		
b) Điểm $N(1;2;-1)$ đối xứng với $A(1;2;1)$ qua mặt phẳng (Oyz) .		
c) Mặt phẳng (P) vuông góc với đường thẳng AB và cắt các trục Ox , Oy và Oz lần lượt tại các điểm D , E và F . Khi thể tích của tứ diện $ODEF$ bằng $\frac{3}{2}$, phương trình mặt phẳng (P) là $2x-3y+4z\pm 6=0$.		
d) Véc-tơ \overrightarrow{AB} là một véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (α) : $2x+3y+4z-2=0$.		

CÂU 4. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai mặt phẳng (α) : 3x - 2y + 2z + 7 = 0 và (β) : 5x - 4y + 3z + 1 = 0. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

Mệnh đề	Đ	S
a) Hai mặt phẳng (α) , (β) song song với nhau.		
b) Điểm $A(1;2;-1)$ nằm trên mặt phẳng (α) : $3x-2y+2z+7=0$.		
c) Phương trình mặt phẳng qua O , đồng thời vuông góc với cả (α) và (β) có phương trình là $2x+y-2z=0$.		
d) Mặt phẳng (γ) đi qua điểm $I(1;0;-1)$ và song song với (α) : $3x - 2y + 2z + 7 = 0$ có phương trình là (γ) : $3x - 2y + 2z - 1 = 0$.		

Phần III. Học sinh điền kết quả vào ô trống.

CÂU 1. Từ mặt nước trong một bể nước, tại ba vị trí đôi một cách nhau 2 m, người ta lần lượt thả dây dọi để quả dọi chạm đáy bể. Phần dây dọi (thẳng) nằm trong nước tại ba vị trí đó lần lượt có độ dài 4 m; 4,4 m; 4,8 m. Biết đáy bể là phẳng. Hỏi đáy bể nghiêng so với mặt phẳng nằm ngang một góc bao nhiêu độ (làm tròn đến hàng phần chục)?

KQ:					
-----	--	--	--	--	--

QU	ICK	NOT	

QUICK NOTE	CÂU 2. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) : $(x-1)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 11$ và hai véc-tơ $\overrightarrow{u}_1 = (1;1;2)$, $\overrightarrow{u}_2 = (1;2;1)$. Gọi (P) là mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu (S) đồng thời song song với giá của hai véc-tơ \overrightarrow{u}_1 , \overrightarrow{u}_2 . Phương trình mặt phẳng (P) có dạng $3x + by + cz + d = 0$, với b , c , $d \in \mathbb{Z}$ và $d \neq -15$. Khi đó, $b + c + d$ bằng bao nhiêu?
	KQ:
	CÂU 3. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, có hai mặt phẳng (P) và (Q) cùng thỏa mãn các điều kiện sau: đi qua hai điểm $A(1;1;1)$ và $B(0;-2;2)$, đồng thời cắt các trục tọa độ Ox , Oy tại hai điểm cách đều O . Giả sử (P) có phương trình $x+b_1y+c_1z+d_1=0$ và (Q) có phương trình $x+b_2y+c_2z+d_2=0$. Tính giá trị biểu thức $b_1b_2+c_1c_2$.
	KQ:
	CÂU 4. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) : $(x+1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=8$ và điểm $A(1;3;2)$. Mặt phẳng (P) đi qua A và cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính nhỏ nhất. Biết phương trình của (P) có dạng $ax+by+cz+6=0$. Tính $a+b+c$.
	KQ:
	CÂU 5. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;-3;1)$, $B(-1;1;0)$ và mặt phẳng $(P): x-y+z-2=0$. Một mặt phẳng (Q) đi qua hai điểm A,B và vuông góc với (P) có dạng là $ax+by+cz+2=0$. Tính $a^2+b^2+c^2$.
	KQ:
	CÂU 6. Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;2;1)$, $B(2;-1;0)$, $C(1;1;3)$. Phương trình mặt phẳng đi qua ba điểm A , B , C có dạng $ax + by + cz - 12 = 0$. Khi đó,
	a-b-2c bằng
	KQ:
	—HÉT—

Bài 15. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẨNG

A. LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1. Vecto chỉ phương của đường thẳng

 \bigcirc Dịnh nghĩa: Vectơ chỉ phương \overrightarrow{u} của đường thẳng d là những vecto khác $\overrightarrow{0}$ và có giá song song hoặc trùng với d.



Chú ý:

• $\vec{u} \neq \vec{0}$ và có giá song song hoặc trùng với d.

• Nếu \overrightarrow{u} và $\overrightarrow{u'}$ cùng là vectơ chỉ phương của d thì $\overrightarrow{u'} = k \cdot \overrightarrow{u}$ (tọa độ tỉ lệ nhau).

2. Phương trình tham số của đường thẳng

 \bigcirc Công thức: Đường thẳng d đi qua điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ và nhận $\overrightarrow{u} = (u_1; u_2; u_3)$ làm vecto chỉ phương có phương trình là

$$\begin{cases} x = x_0 + u_1 t \\ y = y_0 + u_2 t \\ z = z_0 + u_3 t \end{cases}$$
 $(t \in \mathbb{R})$ (1)

Chú ý:

① Phương trình các trục tọa độ:

•
$$Ox$$
:
$$\begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$
 • Oy :
$$\begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = 0 \end{cases}$$
 • Oz :
$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = t \end{cases}$$

$$\bullet \quad Oy: \begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\bullet \quad Oz \colon \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = t \end{cases}$$

② Nếu u_1 , u_2 và u_3 đều khác 0 thì (1) có thể được viết dưới dạng

$$\frac{x - x_0}{u_1} = \frac{y - y_0}{u_2} = \frac{z - z_0}{u_3} \quad (2)$$

(2) được gọi là phương trình chính tắc của đường thẳng d.

3. Vị trị tương đối giữa hai đường thẳng

Cho hai đường thẳng

- Δ_1 qua điểm $M(x_0; y_0; z_0)$, vecto chỉ phương $\overrightarrow{u} = (u_1; u_2; u_3)$;
- Δ_2 qua điểm $N(x_0'; y_0'; z_0')$, vecto chỉ phương $\overrightarrow{v} = (v_1; v_2; v_3)$.

Trường hợp 1: Nếu $|\vec{u}, \vec{v}| = \vec{0}$ và

- $\left[\overrightarrow{u},\overrightarrow{MN}\right] \neq \overrightarrow{0}$ thì Δ_1 song song Δ_2 ;
- $\left| \overrightarrow{u}, \overrightarrow{MN} \right| = \overrightarrow{0} \text{ thì } \Delta_1 \text{ trùng } \Delta_2.$

Trường hợp 2: Nếu $|\vec{u}, \vec{v}| \neq \vec{0}$ và

- $|\vec{u}, \vec{v}| \cdot \overrightarrow{MN} \neq 0$ thì Δ_1 chéo Δ_2 ;
- $\bullet \ \left[\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\right] \cdot \overrightarrow{MN}=0 \text{ thì } \Delta_{1} \text{ cắt } \Delta_{2}.$

B. PHÂN LOẠI, PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

VNPmath - 0962940819	✓ MẠI CAU - MẠI PHANG
QUICK NOTE	Xác định điểm thuộc và vectơ chỉ phương của đườn
	Cho đường thẳng d .
	① Nếu $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$ và có giá song song hoặc trùng với d thì \overrightarrow{u} là vecto
	② Nếu d qua hai điểm AB thì d có một vectơ chỉ ph $(x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A).$
	3 Nếu d vuông góc với giá của hai vecto \vec{a} , \vec{b} không cùng phư vecto chỉ phương là $\vec{u} = [\vec{a}, \vec{b}]$.
	$\textcircled{4}$ Cho đường thẳng d : $\begin{cases} x = x_0 + u_1 t \\ y = y_0 + u_2 t \\ z = z_0 + u_3 t \end{cases}$ ($t \in \mathbb{R}$) thì
	 Một vectơ chỉ phương của d là \$\vec{u}\$ = (u_1; u_2; u_3) (hệ số của Muốn xác định tọa độ một điểm thuộc d, ta chỉ cần cho t
	của tham số t , thay vào hệ phương trình tính x , y và z .
	1. Ví dụ minh hoạ
	VÍ DỤ 1. Cho đường thẳng $d:$ $\begin{cases} x=1-t \\ y=2+3t & (t\in\mathbb{R}). \text{ Tìm một vect} \\ z=2+t \end{cases}$
	điểm thuộc đường thẳng d .
	VÍ DỤ 2. Trong không gian $Oxyz$, cho hình chóp $O.ABC$ có A $(2;0;0)$, A
	a) Tìm tọa độ một vectơ chỉ phương của đường thẳng AB , AC .
	b) Vecto $\vec{v} = (-1; 2; 0)$ có là vecto chỉ phương của đường thẳng AB
	VÌ DỤ 3. Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): 2x + y - z$ $2y + z - 5 = 0$. Gọi Δ là giao tuyến của (P) và (Q) . Tìm một điểm th chỉ phương của Δ .
	2. Bài tập trắc nghiệm
	CÂU 1. Cho đường thẳng d : $\begin{cases} x=1+2t\\ y=-t\\ z=4+5t \end{cases}$. Đường thẳng d có một vec
	(z = 4 + 5t) \overrightarrow{A} $\overrightarrow{u_2} = (2; -1; 5)$. \overrightarrow{B} $\overrightarrow{u_4} = (1; -1; 4)$. \overrightarrow{C} $\overrightarrow{u_3} = (1; -1; 5)$. \overrightarrow{D}
	CÂU 2. Cho đường thẳng $d : \frac{x-2}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{1}$. Đường thẳng d có n
	là
	A $\vec{u} = (-1; 2; 1)$. B $\vec{u} = (2; 1; 0)$. C $\vec{u} = (-1; 2; 0)$. D
	CÂU 3. Cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{2}$. Điểm nào trong các
	trên đường thẳng d?
	A $P(5;2;5)$. B $Q(1;0;0)$. C $M(3;2;2)$.
	$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ 0 = 1 + 2t \end{cases}$
	CÂU 4. Cho đường thẳng $d:$ $\begin{cases} x=1+2t\\ y=2+3t\\ z=5-t \end{cases}$ $(t\in\mathbb{R}).$ Đường thẳng d
	nào sau đây?
	A $M(1;2;5)$. B $N(2;3;-1)$. C $P(3;5;4)$.
	CÂU 5. Cho hai điểm $A(2;-1;4)$ và $B(-1;3;2)$. Đường thẳng AB có n là
	A $\vec{u}_1 = (1; 2; 2)$. B $\vec{u}_3 = (1; 2; 6)$. C $\vec{u}_2 = (3; -4; 2)$. D

không đi qua điểm

nột vectơ chỉ phương

A
$$\vec{u}_1 = (1; 2; 2)$$
. **B** $\vec{u}_3 = (1; 2; 6)$. **C** $\vec{u}_2 = (3; -4; 2)$. **D** $\vec{u}_4 = (1; -4; 2)$.

CÂU 6. Cho tam giác ABC với A(1;0;-2), B(2;-3;-4), C(3;0;-3). Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. vecto nào sau đây là một vecto chỉ phương của đường thẳng OG?

Q(-1; -1; 6).

- (-2;1;3).
- **B**) (3; -2; 1).
- (2;1;3).
- (-1; -3; 2).

CÂU 7. Cho đường thẳng d song song với trục Oy. Đường thẳng d có một vecto chỉ phương

- $\overrightarrow{\mathbf{A}}$ $\overrightarrow{u}_4 = (2019; 0; 2019).$
- **B**) $\vec{u}_1 = (2019; 0; 0).$

 $\vec{\mathbf{c}}$) $\vec{u}_2 = (0; 2019; 0)$.

 $\vec{u}_3 = (0; 0; 2019).$

CÂU 8. Cho đường thẳng Δ vuông góc với mặt phẳng (α) : x + 2z + 3 = 0. Một vectơ chỉ phương của Δ là

- $\overrightarrow{v} = (1; 2; 3).$
- **B**) $\vec{a} = (1; 0; 2).$
- $\vec{\mathbf{c}}$) $\vec{u} = (2; 0; -1)$. $\vec{b} = (2; -1; 0)$.

CÂU 9. vectơ chỉ phương của đường thẳng vuông góc với mặt phẳng đi qua ba điểm A(1;2;4), B(-2;3;5), C(-9;7;6) có toạ độ là

- (\mathbf{A}) (3; 4; -5).
- **B**) (3; -4; 5).
- (\mathbf{C}) (-3; 4; -5).
- (\mathbf{D}) (3; 4; 5).

CÂU 10. Cho hai mặt phẳng (P): 3x-2y+2z-5=0, (Q): 4x+5y-z+1=0. Các điểm A, B phân biệt thuộc giao tuyến của hai mặt phẳng (P) và (Q). Khi đó \overrightarrow{AB} cùng phương với vectơ nào sau đây?

 $\overrightarrow{\mathbf{A}} \ \overrightarrow{u} = (8; -11; -23).$

 $(\mathbf{B}) \vec{k} = (4:5:-1).$

 $(\mathbf{c}) \vec{w} = (3; -2; 2).$

 $\overrightarrow{\mathbf{D}}$ $\overrightarrow{v} = (-8; 11; -23).$

Viết phương trình đường thẳng d khi biết vài yếu tố liên quan

- \bigcirc Phương pháp chung: Ta cần xác định vectơ chỉ phương \overrightarrow{u} và một điểm Mthuộc đường thẳng.
- \bigcirc Một số kiểu xác định vectơ \overrightarrow{u} thường gặp:
 - ① d qua hai điểm A, B thì $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB} = (x_B x_A; y_B y_A; z_B z_A)$.
 - 2 d song song với Δ thì $\vec{u} = \vec{u}_{\Delta}$.
 - 3 d vuông góc với (P) thì $\vec{u} = \vec{n}_P$.
 - 4 d vuông góc với giá của hai vecto \overrightarrow{a} và \overrightarrow{b} (không cùng phương) thì \overrightarrow{u} = $[\vec{a}, \vec{b}].$

1. Ví du minh hoa

 \mathbf{V} Í $\mathbf{D}\mathbf{U}$ 1. Lập phương trình chính tắc của đường thẳng d trong mỗi trường hợp sau

- a) d đi qua điểm A(4; -2; 5) và có vecto chỉ phương $\vec{a} = (7; 3; -9)$.
- b) d đi qua hai điểm M(0;0;1), N(3;3;6).
- c) d có phương trình tham số là $\begin{cases} x = 8 + 5t \\ y = 7 + 4t \end{cases}$

VÍ DU 2.

Trong một khu du lịch, người ta cho du khách trải nghiệm thiên nhiên bằng cách đu theo đường trượt zipline từ vị trí A cao 15 m của tháp 1 này sang vị trí B cao 10 m của tháp 2 trong khung cảnh tuyệt đẹp xung quanh. Với hệ trucuc toạ độ Oxyz cho trước (đơn vị: mét), toạ độ của A và B lần lượt là (3; 2, 5; 15) và (21; 27, 5; 10).

- a) Viết phương trình đường thẳng chứa đường trượt zipline này.
- b) Xác định toạ độ của du khách khi ở độ cao 12 mét.

VÍ DU 3. Trong không gian Oxyz, Lập phương trình tham số và phương trình chính tắc (nếu có) của đường thẳng d trong các trường hợp sau:

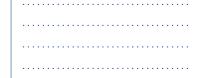
a) d đi qua điểm M và song song với đường thẳng Δ : $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{-1}$



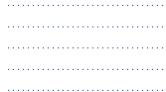
٠.	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
٠.	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
	i	i	i	i	i	i	ľ	i	i	Ì	i	i	i	i	i	i	i	i	i	i	i	i	i	i	i	Ì	i	i	i	i	i	

٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠

																																		٠
	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	



	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•





	110		TE
a di		NI	_

b) d qua điểm M(3;2;-1) và vuông góc với mặt phẳng (P): x+z-2=0.

c) d đi qua điểm M(1;2;1), đồng thời vuông góc với cả hai đường thẳng $\Delta_1:\frac{x-2}{1}=$ $\frac{y+1}{z-1} = \frac{z-1}{1}$ và Δ_2 : $\frac{x+1}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-1}{z-1}$.

VÍ DỤ 4. Trong không gian Oxyz, cho điểm A(1;-2;0), mặt phẳng (P): 2x-3y+z+5=0và đường thẳng $d : \frac{x-1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z+1}{1}$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua A, cắt dvà song song với mặt phẳng (P).

VÍ DỤ 5. Trong Không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai đường thẳng d_1 : $\frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{y-1}{1}$

 $\frac{z-2}{-1} \text{ và } d_2 \colon \begin{cases} x=t \\ y=3 \\ z=-2+t \end{cases}.$ Viết phương trình đường vuông góc chung của hai đường thẳng

2. Bài tập trắc nghiệm

CÂU 1. Cho đường thẳng Δ đi qua điểm M(2;0;-1) và có vecto chỉ phương $\vec{a}=(4;-6;2)$. Phương trình tham số của đường thẳng Δ là

CÂU 2. Cho hai điểm A(2;-1;3), B(3;2;-1). Phương trình nào sau đây là phương trình đường thẳng AB?

CÂU 3. Cho đường thẳng $\Delta: \frac{2x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{-1}$, điểm A(2;-3;4). Đường thẳng qua A

CÂU 4. Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm N(2; -3; -5) và vuông góc với mặt $ph{\rm and}(P): 2x - 3y - z + 2 = 0.$

$$\begin{array}{c} (\textbf{A}) \ \frac{x-2}{2} = \frac{y+3}{-3} = \frac{z+5}{-1}. \\ (\textbf{C}) \ \frac{x+2}{2} = \frac{y-3}{-3} = \frac{z-5}{-1}. \\ (\textbf{D}) \ \frac{x-2}{2} = \frac{y+3}{-3} = \frac{z+1}{-5}. \end{array}$$

CÂU 5. Cho tam giác ABC có A(3;2;-4), B(4;1;1) và C(2;6;-3). Viết phương trình đường thẳng d đi qua trọng tâm G của tam giác ABC và vuông góc với mặt phẳng (ABC).

A
$$d: \frac{x-3}{3} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+2}{-1}$$
.

B $d: \frac{x+12}{3} = \frac{y+7}{2} = \frac{z-3}{-1}$.

C $d: \frac{x-3}{7} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+2}{-1}$.

D $d: \frac{x+7}{3} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-2}{-1}$.

CÂU 6. Cho hai điểm
$$A(1;-1;1)$$
 và $B(-1;2;3)$ và đường thẳng $\Delta: \frac{x+1}{-2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{3}$.

Phương trình đường thẳng đi qua điểm A, đồng thời vuông góc với hai đường thẳng AB và

(a)
$$\frac{x+1}{7} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+1}{4}$$
.
(b) $\frac{x+1}{7} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{4}$.
(c) $\frac{x-7}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-4}{1}$.
(d) $\frac{x-1}{7} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{4}$.

CÂU 7. Cho điểm A(1;2;3) và đường thẳng $d:\frac{x+1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-3}{-2}$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua điểm A, vuông góc với đường thẳng d và cắt trực hoành. Tìm một vectơ chỉ phương \vec{u} của đường thẳng Δ .

$$\overrightarrow{\mathbf{A}} \ \overrightarrow{u} = (0; 2; 1).$$

B)
$$\vec{u} = (1; 0; 1).$$

$$\vec{\mathbf{c}}$$
 $\vec{u} = (1; -2; 0).$ $\vec{\mathbf{D}}$ $\vec{u} = (2; 2; 3).$

$$\overrightarrow{\mathbf{D}}$$
 $\overrightarrow{u} = (2; 2; 3)$

CÂU 8. Cho hai đường thẳng $d_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{-1}$ và $d_2: \frac{x-2}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z+3}{2}$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm A(1;0;2), cắt d_1 và vuông góc với d_2 .

$$\mathbf{c} \frac{x-5}{-2} = \frac{y-6}{-3} = \frac{z-2}{4}.$$

CÂU 9. Cho đường thẳng Δ đi qua M(1;2;2), song song với mặt phẳng (P): x-y+z+3=0

$$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 - t \\ z = 2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 - t \\ z = 2 - t. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + t \\ z = 2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 - t \\ z = 2. \end{cases}$$
 B
$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 - t \\ z = 2 - t. \end{cases}$$
 C
$$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + t \\ z = 2. \end{cases}$$
 D
$$\begin{cases} x = -1 + t \\ y = -1 + 2t \\ z = 2t. \end{cases}$$

CÂU 10. Cho đường thẳng d: x = y = z. Viết phương trình đường thẳng d' là hình chiếu vuông góc của d lên mặt phẳng tọa độ (Oyz).

$$\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 2t \end{cases}$$

$$\begin{array}{c}
\textbf{D} \\
x = 0 \\
y = t \\
z = t
\end{array}$$

CÂU 11. Cho đường thẳng $d: \frac{x+1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{1}$, mặt phẳng (P): x+y-2z+5 = 0 và điểm A(1;-1;2). Viết phương trình đường thẳng Δ cắt d và (P) lần lượt tại M và N sao cho A là trung điểm của đoạn thắng MN.

B
$$\Delta: \frac{x-1}{6} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{2}.$$

(A)
$$\Delta : \frac{2}{2} = \frac{z}{3} = \frac{z}{2}$$
.
(C) $\Delta : \frac{x+5}{6} = \frac{y+2}{1} = \frac{z}{2}$.

D
$$\Delta : \frac{x+1}{2} = \frac{y+4}{3} = \frac{z-3}{2}$$

CÂU 12. Trong không gian Oxyz, đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau d_1 : $\frac{x-2}{2} = \frac{y-3}{3} = \frac{z+4}{-5}$ và d_2 : $\frac{x+1}{3} = \frac{y-4}{-2} = \frac{z-4}{-1}$ có phương trình là

$$\mathbf{A} \frac{x-2}{2} = \frac{y+2}{2}$$

$$\bigcirc \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{1}.$$

Vi trí tương đối của hai đường thẳng

Cho d qua điểm M và có vectơ chỉ phương \vec{u} ; d' qua điểm N và có vectơ chỉ phương

- ① Nếu \vec{u} cùng phương \vec{v} ($\vec{u} = k\vec{v}$) và $M \notin d'$ thì $d \parallel d'$.
- ② Nếu \vec{u} cùng phương \vec{v} ($\vec{u} = k\vec{v}$) và $M \in d'$ thì d trùng với d'.
- 3 Nếu $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}] \cdot \overrightarrow{MN} \neq 0$ thì d và d' chéo nhau.
- 4 Nếu $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}] \cdot \overrightarrow{MN} = 0$ thì d và d' cắt nhau.
- \circ Nếu $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0$ thì d và d' vuông góc nhau.

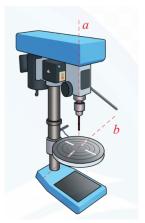
1. Ví dụ minh hoạ

VÍ DU 1.

Trên phần mềm mô phỏng 3D một máy khoan trong không gian Oxyz, cho biết phương trình trực a của mũi khoan và một đường rãnh b trên vật cần khoan (tham khảo hình vẽ bên) lần lượt là

a:
$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 3t \end{cases}$$
 và b:
$$\begin{cases} x = 1 + 4t' \\ y = 2 + 2t' \\ z = 6. \end{cases}$$

- a) Chứng minh a, b vuông góc và cắt nhau.
- b) Tìm giao điểm của a và b.



VÍ DỤ 1. Trong khôn gian Oxyz, xét vị trí tương đối giữa hai đường thẳng d và d' trong mỗi trường hợp sau. Nếu chúng cắt nhau, hãy xác định tọa độ giao điểm.

a)
$$d:$$

$$\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 3 + 2t \text{ và } d' : \\ z = 4 + 2t \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 8 + 9t' \\ y = 7 + 6t' \\ z = 8 + 6t'; \end{cases}$$

b)
$$d \colon \frac{x}{4} = \frac{y-3}{3} = \frac{z-1}{2}$$
 và $d' \colon \frac{x-5}{8} = \frac{y-5}{6} = \frac{z-3}{4}$;

c)
$$d:$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 + 2t \text{ và } d' : \frac{x - 4}{3} = \frac{y - 1}{4} = \frac{z - 5}{5}; \\ z = 1 - t \end{cases}$$

d)
$$d: \frac{x-2}{3} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-2}{3}$$
 và $d': \begin{cases} x = 5 \\ y = 7 + 2t \\ z = 5 - t. \end{cases}$

2. Bài tập trắc nghiệm

CÂU 1. Cho hai đường thẳng d: $\begin{cases} x=1+t \\ y=2t \\ z=2-t \end{cases}$ và d': $\begin{cases} x=2+2t' \\ y=3+4t' \\ z=5-2t'. \end{cases}$ Mệnh đề nào sau đây

đúng?

lack A d và d' chéo nhau.

 \bigcirc d trùng d'.

 \bigcirc d song song d'.

 \bigcirc d cắt d'.

CÂU 2. Cho hai đường thẳng
$$d_1$$
: $\frac{x-1}{1}=\frac{y+3}{-2}=\frac{z+3}{-3}$ và d_2 :
$$\begin{cases} x=3t\\ y=-1+2t. \text{ Mệnh đề}\\ z=0 \end{cases}$$

nào đưới đây đúng?

 \triangle d_1 cắt và không vuông góc với d_2 .

 $lackbox{\textbf{B}}$ d_1 cắt và vuông góc với d_2 .

 \mathbf{c} d_1 song song d_2 .

 $(\mathbf{D}) d_1$ chéo d_2 .

CÂU 3. Cho hai đường thẳng
$$d_1$$
:
$$\begin{cases} x=1-2t \\ y=1+t \quad \text{và } d_2 \colon \frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z}{1}. \text{ Chọn khẳng } z=1-t \end{cases}$$

định đúng.

 $\mathbf{A} d_1 \# d_2.$

 \bigcirc d_1, d_2 chéo nhau. \bigcirc d_1, d_2 cắt nhau.

CÂU 4. Vị trí tương đối của hai đường thẳng Δ_1 : $\frac{x-1}{3} = y = \frac{z+1}{2}$ và Δ_2 : $\frac{x}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{1}$,

A Trùng nhau .

(B) Chéo nhau.

C Song song.

D Cắt nhau.

CÂU 5. Cho hai đường thẳng $d_1: \frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{-m} = \frac{z-2}{-3}$ và $d_2: \frac{x-3}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{1}$. Tìm tất cả các giá trị thực của m để d_1 vuông góc d_2 .

 \bigcirc m=1.

(c) m = -5.

(D) m = -1.

CÂU 6. Cho hai đường thẳng $\Delta_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{4}$ và $\Delta_2: \frac{x-4}{1} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z-5}{-2}$.

Tọa độ giao điểm M của hai đường thẳng đã cho là

- (A) M(5; 1; 3).

- **B**) M(0;-1;-1). **C**) M(3;5;7). **D**) M(2;3;7).

CÂU 7. Cho hai đường thẳng d_1 : $\begin{cases} x=1+t \\ y=2-t \text{ và } d_2 \colon \frac{x-1}{2} = \frac{y-m}{1} = \frac{z+2}{-1} \text{ (với } m \text{ là } tham số). The solution of the solut$

tham số). Tìm m để hai đường thẳng d_1 , d_2 cắt nhau.

- \bigcirc m=5.
- **(B)** m = 7.

CÂU 8. Cho hai đường thẳng d: $\begin{cases} x=1+mt\\y=t\\z=-1+2t \end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$ và d': $\begin{cases} x=1-t'\\y=2+2t'\ (t'\in\mathbb{R}). \text{ Giá}\\z=3-t' \end{cases}$

trị của m để hai đường thẳng d và d' cắt nhau là

- (A) m=0.
- **B**) m = 1.

Vị trí tương đối của đường thẳng và mặt phẳng

Xét đường thẳng d: $\begin{cases} x = x_0 + u_1 t \\ y = y_0 + u_2 t \text{ và mặt phẳng } (P) \colon Ax + By + Cz + D = 0. \\ x - x_0 + u_2 t \end{cases}$

- **Phương pháp:** Xét $d \cap (P) \Rightarrow A(x_0 + u_1 t) + B(y_0 + u_2 t) + C(z_0 + u_3 t) + D = 0$ (*)
 - Nếu (*) có đúng 1 nghiệm t thì d cắt (P);
 - Nếu (*) vô nghiệm thì d song song (P);
 - Nếu (*) nghiệm đúng với mọi t thì d nằm trong (P).
- \bigcirc Đặc biệt: Với \overrightarrow{u} là vecto chỉ phương của d và \overrightarrow{n} là vecto pháp tuyến của (P)

 $d \perp (P) \Leftrightarrow \vec{u}$ cùng phương với \vec{n} hay $\vec{u} = k \cdot \vec{n}$

1. Ví du minh hoa

VÍ DU 1. Xét vị trí tương đối giữa đường thẳng và mặt phẳng được chỉ ra ở các câu sau:

a)
$$(\alpha)$$
: $y + 2z = 0$ và d :
$$\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 4 + 2t \\ z = 1 \end{cases}$$

b)
$$(P): 3x - 3y + 2z - 5 = 0$$
 và $d: \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 3 + 4t \\ z = 3t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R}).$

c)
$$(P)$$
: $3x - 3y + 2z + 1 = 0$ và d : $\frac{x+1}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z-1}{-3}$.

VÍ DU 2. Tìm điều kiện của tham số m để

a)
$$\Delta : \frac{x-10}{5} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+2}{1}$$
 vuông góc với $(P) : 10x + 2y + mz + 11 = 0$.

b)
$$d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-1}{-1}$$
 song song với $(\alpha): -x + m^2y + mz + 1 = 0$.

2. Bài tập trắc nghiệm

CÂU 1. Cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{-2} = \frac{z-1}{1}$. Tìm tọa độ giao điểm M của đường thẳng d với mặt phẳng (Oxy).

- (A) M(-1;2;0).
- **B**) M(1;0;0).
- $(\mathbf{C}) M(2;-1;0).$
- $(\mathbf{D}) M(3; -2; 0).$

QUICK NOTE

•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•

		•		•	•	•	•	•						•	•	•	•	•				
		٠																				





•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•



\sim 11	$\square \frown u$		TE
ЫU	IICK	INC	JΙΕ

CÂU 2. Cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{-1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-3}{1}$ và mặt phẳng (P): 2x+y-2z+9 = 0. Tìm toạ độ giao điểm của d và (P).

- (A) (2; 1; 1).
- **B**) (0; -1; 4).
- (c) (1; -3; 3).

CÂU 3. Cho mặt phẳng (α) : x+2y+3z-6=0 và đường thẳng Δ : $\frac{x+1}{-1}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-3}{1}$.

- Mệnh đề nào sau đây đúng? (A) Δ cắt và không vuông góc với (α) .
- $(\mathbf{B}) \Delta // (\alpha).$

 $(\mathbf{c}) \Delta \subset (\alpha).$

 $(\mathbf{D}) \Delta \perp (\alpha).$

CÂU 4. Cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-m}{-1}$ và mặt phẳng $(P): 2x + my - (m^2 + m^2)$ $1)z + m - 2m^2 = 0$. Có bao nhiêu giá trị của m để đường thẳng d nằm trên (P)?

- **(B)** 1.
- **(c)** 2.
- (D) Vô số.

CÂU 5. Cho mặt phẳng $(\alpha): x+y+z-6=0$ và đường thẳng $\Delta: \begin{cases} y=-1+nt \ z=4+2t \end{cases}$

$$\bigcirc \begin{cases} m=3\\ n=-3 \end{cases}.$$

$$\bigcirc \begin{cases} m \neq 3 \\ n \neq -3 \end{cases}.$$

CÂU 6. Cho đường thẳng $d \colon \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z+1}{1}$. Trong các mặt phẳng dưới đây mặt phẳng nào vuông góc với đường thẳng d?

- (A) 2x 2y + 2z + 4 = 0.
- **B**) 4x 2y 2z 4 = 0.
- **(c)** 4x + 2y + 2z + 4 = 0.
- **(D)**<math>4x 2y + 2z + 4 = 0.

CÂU 7. Cho đường thẳng d: $\begin{cases} x=3+2t\\ y=5-3mt \text{ và mặt phẳng } (P)\colon 4x-4y+2z-5=0. \text{ Giá}\\ z=-1+t. \end{cases}$

trị nào của m để đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (P).

(A)
$$m = -\frac{5}{6}$$
. **(B)** $m = \frac{2}{3}$. **(C)** $m = \frac{3}{2}$.

$$\bigcirc m = \frac{3}{2}.$$

CÂU 8. Cho điểm A(1;2;3) và đường thẳng $d\colon \frac{x-2}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-3}{1}$. Phương trình mặt phẳng (P) đi qua A và vuông góc với đường thẳng d là

(A) 2x - y + z - 3 = 0.

(B) x + 2y + 3z - 7 = 0.

(c) x + 2y + 3z - 1 = 0.

D 2x - y + z = 0.

CÂU 9. Cho hai đường thẳng chéo nhau $d_1: \frac{x-2}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-6}{-2}; d_2: \frac{x-4}{1} = \frac{y+2}{-2} = \frac{y+2}{1}$ $\frac{z+1}{3}$. Phương trình mặt phẳng (P) chứa d_1 và song song với d_2 là

- (A) (P): x + 8y + 5z + 16 = 0.
- **B**) (P): x + 4y + 3z 12 = 0.
- (c) (P): 2x + y 6 = 0.
- (P): x + 8y + 5z 16 = 0.

CÂU 10. Cho hai đường thẳng d_1 : $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-3}{-5}$ và d_2 : $\begin{cases} x = -1+t \\ y = 4+3t \end{cases}$. Tìm

phương trình mặt phẳng chứa đường thẳng d_1 và song song với đường thẳng d_2 .

- **(A)**<math>18x 7y + 3z + 34 = 0.
- **B**) 18x + 7y + 3z 20 = 0.
- \bigcirc 18x + 7y + 3z + 20 = 0.
- (\mathbf{D}) 18x 7y + 3z 34 = 0.

Hình chiếu, đối xứng

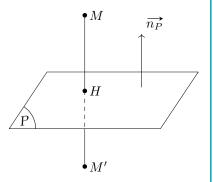
lacktriangle Bài toán 1: Tìm hình chiếu vuông góc của điểm M trên (P):

- Viết phương trình đường thẳng MH qua Mvà nhận $\overrightarrow{n_P}$ làm vecto chỉ phương;
- ullet Giải hệ giữa đường MH với mặt phẳng (P), tìm t. Từ đó, suy ra tọa độ H.



 $Goi M' \ d\hat{o}i \ x\'{u}ng \ v\'{o}i \ M \ qua \ mặt phẳng (P)$

$$\begin{cases} x'_{M} = 2x_{M} - x_{H} \\ y'_{M} = 2y_{M} - y_{H} \\ z'_{M} = 2z_{M} - z_{H} \end{cases}.$$



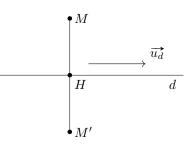
lacktriangle Bài toán 2: Tìm hình chiếu vuông góc của điểm M trên d:

- Tham số điểm $H \in d$ theo ẩn t;
- Giải $\overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{u_d} = 0$, tìm t. Từ đó, suy ra tọa độ



Gọi M' đối xứng với M qua mặt phẳng d

$$\begin{cases} x'_{M} = 2x_{M} - x_{H} \\ y'_{M} = 2y_{M} - y_{H} \\ z'_{M} = 2z_{M} - z_{H} \end{cases}.$$



1. Ví dụ minh hoạ

VÍ DỤ 1. Trong hệ tọa độ Oxyz, cho điểm M(2; -3; 1) và đường thẳng $d: \frac{x+1}{2} = \frac{y+2}{-1} =$

- a) Tìm tọa độ hình chiếu vuông góc của điểm M lên d.
- b) Tìm toa độ điểm M' đối xứng với điểm M qua d.

VÍ DỤ 2. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho điểm M(2;7;-9) và mặt phẳng (P):x+2y - 3z - 1 = 0.

- a) Tìm tọa độ hình chiếu vuông góc của M trên mặt phẳng (P).
- b) Tìm tọa độ điểm M' đối xứng với điểm M qua (P).

2. Bài tấp trắc nghiệm

CÂU 1. Hình chiếu vuông góc của điểm A(3; -4; 5) trên mặt phẳng (Oxz) là điểm

- (A) M(3;0;0).
- **B**) M(0; -4; 5).
- $(\mathbf{C}) M(0; 0; 5).$
- **(D)** M(3;0;5).

CÂU 2. Hình chiếu vuông góc của điểm A(1;2;3) trên mặt phẳng (Oxy) là điểm

- (A) M(0;0;3).
- **B**) N(1;2;0).
- (C) Q(0;2;0).
- $(\mathbf{D}) P(1;0;0).$

CÂU 3. Hình chiếu vuông góc của điểm M(2;1;-3) lên mặt phẳng (Oyz) có tọa độ là

- (A) (2; 0; 0).
- **B**) (2; 1; 0).
- (\mathbf{c}) (0;1;-3).
- (\mathbf{D}) (2; 0; -3).

CÂU 4. Hình chiếu vuông góc của điểm A(3;2;1) trên trục Ox có tọa độ là

- (A) (0; 2; 1).
- **(B)** (0; 2; 0).
- (\mathbf{C}) (3; 0; 0).
- $(\mathbf{D})(0;0;1).$

CÂU 5. Hình chiếu của điểm M(2;3;-2) trên trục Oy có tọa độ là

- (A) (2;0;0).
- **B**) (0; 3; 0).
- $(\mathbf{c})(0;0;-2).$
- (\mathbf{D}) (2;0;-2).

CÂU 6. Cho điểm M(3;2;-1), điểm M'(a;b;c) đối xứng của M qua trục Oy, khi đó a+b+cbằng

- **(A)** 6.
- **B**) 2.
- (C) 4.
- \bigcirc 0.

CÂU 7. Điểm đối xứng với điểm A(-2;7;5) qua mặt phẳng (Oxz) là điểm B có tọa độ là

- (A) B(2;7;-5).
- **B** B(-2; -7; 5).
- $(\mathbf{c}) B(-2;7;-5).$
- **(D)** B(2; -7; -5).

$\overline{}$	_	C	•		
_ 1			•	NI	 -

CÂU 8. Tọa độ hình chiếu vuông góc của điểm A(2;-1;0) lên mặt phẳng (P):3x-2y+z + 6 = 0 là

$$(5; -3; 1).$$

$$(B)$$
 $(-1; 1; -1).$

$$\bigcirc$$
 (3; -2; 1).

CÂU 9. Gọi hình chiếu vuông góc của điểm A(3;-1;-4) lên mặt phẳng (P):2x-2y-z-3=0 là điểm H(a;b;c). Khi đó khẳng định nào sau đây đúng?

$$Ba+b+c=3.$$

$$a+b+c=5$$

(A)
$$a+b+c=-1$$
. (B) $a+b+c=3$. (C) $a+b+c=5$. (D) $a+b+c=-\frac{5}{3}$.

CÂU 10. Cho mặt phẳng (P): 2x+2y-z+9=0 và điểm A(-7;-6;1). Tìm tọa độ điểm A' đối xứng với điểm A qua mặt phẳng (P).

$$A'(1;2;-3).$$

B)
$$A'(1;2;1)$$
.

$$(c)$$
 $A'(5;4;9).$

CÂU 11. Cho điểm A(4;-3;2) và đường thẳng $d:\frac{x+2}{3}=\frac{y+2}{2}=\frac{z}{-1}.$ Gọi điểm H là hình chiếu vuông góc của điểm A lên đường thẳng d. Tọa độ điểm H là

$$lack A H(5;4;-1).$$

B)
$$H(1;0;-1)$$
.

$$(-5; -4; 1)$$

$$(\mathbf{c}) H(-5; -4; 1).$$
 $(\mathbf{D}) H(-2; -2; 0).$

CÂU 12. Cho đường thẳng $d\colon \frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z}{-1},$ M(2;1;0). Gọi H(a;b;c) là điểm thuộc d sao cho MH có độ dài nhỏ nhất. Tính $T=a^2+b^2+c^2.$

B)
$$T = 12$$
.

$$T = 21.$$

$$T = 6.$$

CÂU 13. Cho điểm M (1;2;-6) và đường thẳng d : $\begin{cases} x=2+2t\\ y=1-t & (t\in\mathbb{R}). \text{ Diểm }N \text{ là điểm }z=-3+t \end{cases}$

đối xứng của M qua đường thẳng d có tọa độ là

$$(A)$$
 $N(0;2;-4).$

(B)
$$N(-1;2;-2)$$
. **(C)** $N(1;-2;2)$. **(D)** $N(-1;0;2)$.

$$(c)$$
 $N(1;-2;2).$

$$(D) N (-1; 0; 2).$$

CÂU 14. Cho đường thẳng $\Delta: \frac{x}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-1}{-1}$ và hai điểm A(1;0;1), B(-1;1;2). Biết điểm M(a;b;c) thuộc Δ sao cho $\left|\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MB}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó, tổng a+2b+4cbằng bao nhiêu?

$$\bigcirc$$
 0.

$$\bigcirc$$
 -1 .

CÂU 15. Cho ba điểm A(0; -2; -1), B(-2; -4; 3), C(1; 3; -1) và mặt phẳng (P): x + y - 12z-3=0. Gọi $M(a;b;c)\in (P)$ sao cho $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính a-b+2c.

B)
$$-1$$
.

$$\bigcirc$$
 -2 .

C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM TỬ LUYỆN

Phần I. Mỗi câu hỏi học sinh chọn một trong bốn phương án A, B, C, D.

CÂU 1. Trong không gian với hệ truc toa độ Oxyz, cho hai điểm A(0;-1;-2) và B(2;2;2). Véc-tơ \vec{a} nào dưới đây là một véc-tơ chỉ phương của đường thẳng AB?

A
$$\vec{a} = (-2; 1; 0)$$
. **B** $\vec{a} = (2; 3; 0)$.

B
$$\vec{a} = (2; 3; 0).$$

$$\vec{c}$$
 $\vec{a} = (2; 1; 0).$

$$\overrightarrow{a} = (2; 3; 4).$$

CÂU 2. Đường thẳng (Δ) : $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z}{-1}$ **không** đi qua điểm nào dưới đây?

$$\bigcirc$$
 $C(3;-1;-1).$

B
$$D(1; -2; 0)$$
.

$$\bullet$$
 $A(-1;2;0).$

$$lackbox{D} B(-1; -3; 1).$$

CÂU 3. Cho đường thẳng Δ đi qua điểm M(2;0;-1) và có một véc-tơ chỉ phương \vec{a} (4, -6, 2). Phương trình tham số của đường thẳng Δ là

$$\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -3t \\ z = -1 + t \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -2 + 4t \\ y = -6t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = -3t \\ z = 2 + t \end{cases}$$

CÂU 4. Trong không gian Oxyz, cho đường thẳng $d : \frac{x-1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z-1}{-3}$. Một véc-tơ chỉ phương của đường thẳng d là

CÂU 5. Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho mặt phẳng (P) có phương trình là 2x+y-5z+6=0. Phương trình đường thẳng d đi qua điểm M(1;-2;7) và vuông góc với (P) là

(A)
$$d: \frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+7}{-5}$$
.

B
$$d: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-7}{-5}.$$

©
$$d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-7}{-5}.$$

D
$$d: \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+5}{7}.$$

CÂU 6. Trong không gian với hệ trực tọa độ Oxyz, cho hai đường thẳng $d_1 : \frac{x-1}{2} =$

$$\frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{4} \text{ và } d_2 \colon \begin{cases} x=1+t \\ y=2+2t \text{. Mệnh đề nào sau đây đúng?} \\ z=3-2t \end{cases}$$

- (A) d_1 và d_2 vừa cắt nhau vừa vuông góc.
- (B) d_1 và d_2 không vuông góc và không cắt nhau.
- (**c**) d_1 và d_2 cắt nhau nhưng không vuông góc.
- \bigcirc d_1 và d_2 vuông góc nhưng không cắt nhau.

CÂU 7. Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, véc-tơ nào dưới đây là véc-tơ chỉ phương của trục Oz?

$$\mathbf{A} \vec{m} = (1; 1; 1).$$

$$(\mathbf{B}) \ \overrightarrow{k} = (0; 0; 1).$$

$$\vec{c}$$
 $\vec{i} = (1; 0; 0)$

B
$$\vec{k} = (0; 0; 1).$$
 C $\vec{i} = (1; 0; 0).$ **D** $\vec{j} = (0; 1; 0).$

CÂU 8. Đường thẳng (Δ) : $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z}{-1}$ đi qua điểm nào dưới đây?

$$\bigcirc$$
 $Q(-1;-2;0).$

B
$$N(-1;2;0)$$
. **C** $P(3;1;-1)$. **D** $M(1;-2;0)$.

$$P(3;1;-1)$$

$$ldot$$
 $M(1;-2;0)$

CÂU 9. Đường thẳng $d : \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z+3}{-1}$ vuông góc với đường thẳng nào dưới đây?

$$\begin{array}{c} \textbf{A} \ d_1 \colon \begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = -2t \\ z = 1 + 5t \end{cases} \\ \textbf{C} \ d_3 \colon \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 3 - t \\ z = 5t \end{cases}$$

$$\begin{array}{l}
\textbf{D} \ d_2 \colon \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 - 3t \\ z = 1 + t \end{cases}$$

CÂU 10. Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho đường thẳng d có véc-tơ chỉ phương \vec{u} và mặt phẳng (P) có véc-tơ pháp tuyến \vec{n} . Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- \triangle d song song với (P) thì \vec{u} cùng phương với \vec{n} .
- $\overrightarrow{\mathbf{B}}$ \overrightarrow{u} vuông góc với \overrightarrow{n} thì d song song với (P).
- (c) \vec{u} không vuông góc với \vec{n} thì d cắt (P).
- \bigcirc d vuông góc với (P) thì \overrightarrow{u} vuông góc với \overrightarrow{n} .

CÂU 11. Cho đường thẳng d có phương trình tham số $\begin{cases} x=1+2t\\ y=2-t\\ z=2-t \end{cases}$. Viết phương trình

chính tắc của đường thẳng d.

$$\textbf{(A)} \ d \colon \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-3}{1}.$$

B
$$d: \frac{x+1}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-3}{1}.$$

©
$$d \colon \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+3}{1}$$
.

D
$$d: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+3}{1}$$

CÂU 12. Trong không gian Oxyz, cho đường thẳng $d\colon \frac{x+3}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{-1}$ và mặt phẳng $(P)\colon x+y-3z-2=0$. Gọi d' là đường thẳng nằm trong mặt phẳng (P), cắt và vuông góc với d. Đường thẳng d' có phương trình là $\frac{x+1}{a} = \frac{y}{5} = \frac{z+1}{c}$. Tính S = a - c.

A 3	•
------------	---

$$\bigcirc$$
 -7 .

$$(c)$$
 -3.

Phần II. Trong mỗi ý a), b), c) và d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.

CÂU 1. Trong không gian Oxyz cho đường thẳng d có phương trình tham số $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 1 + t \end{cases}$ z = 3 - 2t.

QUICK NOTE	Mệnh đề	Ð	\mathbf{S}
	a) Giao điểm của đt d và mặt phẳng (P) : $x+2y-3z+2=0$ là $I(0;1;2)$.		
	b) Véc-tơ $\vec{a} = (4; 2; -3)$ là một véc-tơ chỉ phương của đường thẳng d .		
	c) Đường thẳng d đi qua điểm $A(-1;1;3)$.		
	d) Phương trình chính tắc của đường thẳng d là $\frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-3}{-2}$.		
	CÂU 2. Trong không gian $Oxyz$ cho đường thẳng $d ext{: } \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{1}$	và mặ	t phẳng
	(P): x + y + 2z - 3 = 0.		
	Mênh đề	Đ	S
	·		
	a) Đường thẳng d' đi qua điểm $A(1;0;-1)$ và vuông góc với mặt phẳng $(x=1+t)$		
	(P) . Phương trình tham số của đường thẳng d' là $\begin{cases} y=t \end{cases}$.		
	z = -1 + 2t		
	b) Đường thẳng d có một véc-tơ chỉ phương là $\vec{a} = (1; -1; 0)$.		
	c) Đường thẳng d đi qua điểm $M(2;-1;1)$.		
	d) Góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (P) bằng 30°.		
	d) Goe giua duong thang a va mat phang (P) bang 50°.		
		(r -	$2 \pm t$
	CÂU 3. Trong không gian $Oxyz$ cho đường thẳng d có phương trình tham số	\int_{u}^{x}	3-2t
		z =	3t.
		<u> </u>	
	Mệnh đề	Đ	S
	a) Đường thẳng d có một véc-tơ chỉ phương là $\overrightarrow{u}=(1;-2;3).$		
	b) Đường thẳng d đi qua điểm $M(1; -2; 3)$.		
	c) Đường thẳng d' đi qua điểm $A(1;2;-2)$ và song song với đường thẳng		
	$\begin{cases} x = 1 + t \end{cases}$		
	d . Phương trình tham số của đường thẳng d' là $\begin{cases} y=2-2t \end{cases}$.		
	d) Khoảng cách từ điểm $B(0;1;2)$ đến đường thẳng d bằng 3 .		
		,	
		$\int x =$	= 2 + 2t $= 1 - t$
	CÂU 4. Trong không gian $Oxyz$ cho đường thẳng d có phương trình tham số	$\begin{cases} y = \\ - \end{cases}$	$egin{array}{l} oldsymbol{:} oldsymbol{1} - t \\ oldsymbol{:} oldsymbol{1} oldsymbol{:} oldsy$
		(2 -	· 1 + 2t
	Mệnh đề	Ð	S
	a) Đường thẳng d có một véc-tơ chỉ phương là $\vec{a} = (2; 1; 1)$.		
	b) Điểm $B(4;0;3)$ thuộc đường thẳng d .		
	c) Khoảng cách giữa đường thẳng d và mặt phẳng (P) : $x + 2y - 3 = 0$		
	bằng 1.		
	d) Đường thẳng d và đường thẳng d' : $\frac{x}{4} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z+1}{4}$ trùng nhau.		
		<u> </u>	
	Phần III. Học sinh điền kết quả vào ô trống.		
	CÂU 1. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;-2;1)$, $B(5;0;-1)$, $C(3;-1)$	3: 1: 2)	và. mặ
	phẳng (Q) : $3x+y-z+3=0$. Gọi $M(a;b;c)$ là điểm thuộc (Q) thỏa mãn MA^2+		
	nhỏ nhất. Khi đó tổng $a+b+3c$ bằng bao nhiêu?		
	KQ:		\Box
		1	1

CÂU 2. Trong không gian Oxyz, một viên đạn được bắn ra từ điểm A(3;4;2) và trong 4 giây đầu đan đi với vân tốc không đổi, véc-tơ vân tốc (trên giây) là $\vec{v} = (4;5;1)$. Biết viên đan trúng mục tiêu tại điểm M(13; b; c), tính b + 2c.

r		
KQ:		

CÂU 3. Trong không gian với hệ trực tọa độ Oxyz, cho điểm M(3;3;-2) và hai đường thẳng $d_1 \colon \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z}{1}; \ d_2 \colon \frac{x+1}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{4}$. Đường thẳng d đi qua M cắt $d_1,\,d_2$ lần lượt tại A và B. Khi đó độ dài đoạn thẳng AB bằng bao nhiêu?



CÂU 4. Hình vẽ dưới đây là hình ảnh Cầu Cổng Vàng (The Golden Gate Bridge) ở Mỹ. Xét hệ truc toa đô Oxyz với O là bệ của chân côt tru tai mặt nước, truc Oz trùng với côt tru, mặt phẳng Oxy là mặt nước và xem như truc Oy cùng phương với cầu như hình vẽ. Dây cáp AD (xem như là một đoạn thẳng) đi qua đỉnh D thuộc trực Oz và điểm A thuộc mặt phẳng Oyz, trong đó điểm D là đỉnh cột trụ cách mặt nước 227 m, điểm A cách mặt nước 75 m và cách trục Oz khoảng 343 m.

(Nquồn: https://www.goldengate.org/assets/1/6/qqb-exhibit-chapter-statistics.pdf)



Giả sử ta dùng một đoạn dây nối điểm N trên dây cáp AD và điểm M trên thành cầu, biết M cách mặt nước 75 m và MN song song với cột trụ. Tính độ dài MN (đơn vị mét) biết điểm M cách trục Oz một khoảng bằng 230 m (kết quả làm tròn đến hàng phần mười).

KQ:			
		l	

CÂU 5. Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho hai điểm A(-2;-1;2) và B(5;-1;1). Đường thẳng d' là hình chiếu của đường thẳng AB lên mặt phẳng (P): x + 2y + z + 2 = 0có một véc-tơ chỉ phương $\vec{u} = (a; b; 2)$. Tính S = a + b.

KQ:		

CÂU 6. Trong không gian Oxyz, cho điểm A(1;0;2) và đường thẳng d: $\frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{2}$. Đường thẳng Δ đi qua A, vuông góc và cắt d đi qua điểm M(a;b;0). Tính $\frac{a}{b}$.

IÉT—	

\sim 11	ICK	NIO	
	I/ - K		

Bài 16. CÔNG THỰC TÍNH GÓC TRONG KHÔNG GIAN

A. LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1. Góc giữa hai mặt phẳng

Công thức: Gọi $\overrightarrow{n_1} = (a_1; b_1; c_1)$, $\overrightarrow{n_2} = (a_2; b_2; c_2)$ lần lượt là vectơ pháp tuyến của (P) và (Q); φ là góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q), với $0^{\circ} \le \varphi \le 90^{\circ}$. Khi đó

$$\cos \varphi = \left| \cos \left(\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2} \right) \right| = \frac{\left| a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 \right|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}$$

Chú ý:

- Nếu (P) song song hoặc trùng (Q) thì $\varphi = 0^{\circ}$.
- Nếu $(P) \perp (Q)$ thì $\varphi = 90^{\circ}$. Khi đó $\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2} = 0 \Leftrightarrow a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 = 0$.

2. Góc giữa hai đường thẳng

Công thức: Gọi $\vec{u} = (u_1; u_2; u_3), \vec{v} = (v_1; v_2; v_3)$ lần lượt là vecto chỉ phương của d_1 và d_2 ; φ là góc giữa hai đường thẳng d_1 và d_2 , với $0^{\circ} \leq \varphi \leq 90^{\circ}$. Khi đó

$$\cos \varphi = \left| \cos \left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \right) \right| = \frac{\left| u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 \right|}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} \cdot \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}}$$

Chú ý:

- Nếu d_1 song song hoặc trùng d_2 thì $\varphi = 0^{\circ}$.
- Nếu $d_1 \perp d_2$ thì $\varphi = 90^\circ$. Khi đó $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u} = 0 \Leftrightarrow u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 = 0$.

3. Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

Công thức: Gọi $\vec{u} = (u_1; u_2; u_3)$, $\vec{n} = (A; B; C)$ lần lượt là vectơ chỉ phương của d và vectơ pháp tuyến của (P); φ là góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (P), với $0^{\circ} \leq \varphi \leq 90^{\circ}$. Khi đó

$$\left| \sin \varphi = \left| \cos \left(\vec{u}, \vec{n} \right) \right| = \frac{\left| u_1 A + u_2 B + u_3 C \right|}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} \cdot \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right|$$

Chú ý:

- Nếu d song song hoặc trùng (P) thì $\varphi = 0^{\circ}$, khi đó $\vec{u} \perp \vec{n}$
- Nếu d vuông góc với (P) thì $\varphi = 90^{\circ}$, khi đó $\overrightarrow{u} = k \cdot \overrightarrow{n}$.

B. PHÂN LOẠI, PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Tính góc trong không gian Oxyz

- Xác định vecto chỉ phương (vecto pháp tuyến);
- Áp dụng đúng công thức.

1. Ví du minh hoa

VÍ DU 1. Trong không gian Oxyz, tính góc giữa hai mặt phẳng sau:

- a) (P): x + y + 4z 2 = 0 và (Q): 2x 2z + 7 = 0.
- b) (P): 2x y 2z 9 = 0 và (Q): x y 6 = 0.

VÍ DU 2. Trong không gian Oxyz, tính góc giữa hai đường thẳng sau:

a)
$$d: \begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \\ z = 0 \end{cases}$$
 và $d': \frac{x}{-2} = \frac{y}{1} = \frac{z - 1}{-2}$.

b)
$$d_1$$
:
$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 + t \text{ và } d_2 \end{cases} \begin{cases} x = 1 - t' \\ y = 2 \\ z = -2 + t' \end{cases}$$

VÍ DU 3. Trong không gian Oxyz, tính góc giữa đường thẳng và mặt phẳng sau:

- a) $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{-1}$ và (P): x-y+2z+1 = 0.
- b) $d: \frac{x-1}{4} = \frac{y-6}{2} = \frac{z+4}{1}$ và (P): 4x+3y-z+1=0

2. Bài tập trắc nghiệm

CÂU 1. Cho mặt phẳng (P): x + 2y - 2z + 3 = 0, mặt phẳng (Q): x - 3y + 5z - 2 = 0. Cosin của góc giữa hai mặt phẳng (P), (Q) là

- $\bigcirc -\frac{\sqrt{35}}{7}$.

CÂU 2. Góc giữa hai mặt phẳng (P): x+2y+z+4=0 và (Q): -x+y+2z+3=0 bằng

- (A) 45°.
- **B**) 90°.

CÂU 3. Tính góc α giữa mặt (P): x + z - 4 = 0 và mặt phẳng (Oxy).

- **A** 45°.
- **B**) 30°.

CÂU 4. Cho điểm H(2;1;2), điểm H là hình chiếu vuông góc của gốc tọa độ O xuống mặt phẳng (P), số đo góc giữa mặt phẳng (P) và mặt phẳng (Q): x+y-11=0 là

- **(A)** 45° .

CÂU 5. Cho hai đường thẳng d_1 : $\frac{x}{-1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z}{2},\,d_2$: $\begin{cases} x=2t\\ y=1\\ z=1-t \end{cases}$. Gọi φ là góc giữa hai

đường thẳng d_1 , d_2 . Tính $\cos \varphi$.

CÂU 6. Cho đường thẳng d_1 : $\frac{x}{-1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-1}{-2}$ và d_2 : $\frac{x+1}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z-3}{1}$. Góc giữa hai đường thẳng bằng

- **A** 90°.
- **B**) 30°.
- (D) 45°.

CÂU 7. Cho đường thẳng d là giao tuyến của hai mặt phẳng $(P): x-z\cdot\sin\alpha+\cos\alpha=0$ và $(Q): y-z\cdot\cos\alpha-\sin\alpha=0, \alpha\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$. Góc giữa d và trục Oz là

- **A** 90°.
- **B**) 30°.
- (D) 60°.

CÂU 8. Cho đường thẳng d: $\begin{cases} y = 2 + 2t \text{ và mặt phẳng } (P) \colon x - y + 3 = 0. \text{ Tính số đo góc} \end{cases}$

giữa đường thẳng d và mặt phẳng (P).

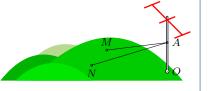
- (A) 45°.
- **B**) 120°.
- **(c)** 60°.
- (**D**) 30°.

VNPmath - 0962940819			MAI CAU - MA	I PHANG - ĐƯƠNG IHAN
QUICK NOTE	CÂU 9. Cho mặt _I	phẳng (P) : $3x + 4y +$	5z - 8 = 0 và đường t	thẳng d : $\begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = -1 - 4t. \text{ Go} \\ z = 5 - 5t \end{cases}$
	giữa đường thẳng đ	d và mặt phẳng (P) là	à	·
	A 90°.	B 45°.	© 30°.	D 60°.
		phẳng (P) : $x+y-$	$\sqrt{2}z + 5 = 0$. Tính góc (arphi giữa mặt phẳng (P) và trư
	Oy.	\bigcirc $\varphi = 45^{\circ}.$	$\bigcirc \varphi = 90^{\circ}.$	\bigcirc $\varphi=30^{\circ}.$
	CÂU 11. Cho hai m để (P) vuông gố		(1)x + y - 2z + m = 0	và (Q) : $2x - z + 3 = 0$. Tì
	, , , = =	· · ·	$\bigcirc m = 5.$	$(\mathbf{D}) m = -1$
	m=0.	$rac{\bullet}{2}$.	m = 0.	- 1.
				$(x^2-1)x + m(1-2m)y + (2m)$
	4)z + 14 = 0 với m	ı là tham số thực. Tốr	ng các giá trị của m đ	$\stackrel{\circ}{e}(P)$ và (Q) vuông góc nha
		\bigcirc 1	\sim 5	7
	$\mathbf{A} - \frac{3}{2}$.	$(\mathbf{B}) - \frac{1}{2}$.	$\mathbf{c} - \frac{5}{2}$.	$(\mathbf{D}) - \frac{1}{2}$.
	CÂU 13. Cho hai	mặt phẳng $(P): x+2i$	y - z + 2 = 0 và (Q) : x	-my + (m+1)z + m - 2 =
	với m là tham số.	Gọi S là tập hơn tất		sao cho góc giữa (P) và (Q)
	bằng 60°. Tính tốn	ng các phần tử của S .	2	1
	A 1.	B $-\frac{1}{2}$.	$\bigcirc \frac{3}{2}$.	\bigcirc $\frac{1}{2}$.
	CÂU 14 Hãy tìm	tham số thực m đổ có	óc giữa hai đường thẳ	na sau bằna 60°
	GAO 14. Hay tim	tham so thực m de go	oc giua nai duong tha	ng sau bang oo .
		$\int x = 1 + t$	$\int x = 1 + t'$	
		$d: \begin{cases} y = -\sqrt{2}t, t \in S \end{cases}$	$\mathbb{R} \text{và } d' \colon \begin{cases} x = 1 + t' \\ y = 1 + \sqrt{2} \\ z = 1 + mt \end{cases}$	t' , $t' \in \mathbb{R}$
		z = 1 + t	z = 1 + mt	,
	\mathbf{A} $\frac{1}{2}$.	B -1 .	$\mathbf{c} - \frac{1}{2}$.	D 1.
	CÂU 15. Cho các	điểm $A(-1; \sqrt{3}; 0)$. $B($	$(1:\sqrt{3}:0). C(0:0:\sqrt{3})$	và điểm M thuộc trục Oz sa
	cho hai mặt phẳng (MAB) và (OAB)	g(MAB) và (ABC) v	vuông góc với nhau.	Γính góc giữa hai mặt phẳr
	(M112) va (6112) (A) 45°.	B) 60°.	© 15°.	D 30°.
	10.	<u> </u>	<u> </u>	<u> </u>
	2 Tọa độ	ộ hóa một số bài tod	án hình không gian	
	1. Ví dụ minh	h hoạ		
	VÍ DỤ 1. Cho hình	n lăng trụ đứng OBC .	O'B'C' có đáy là tam	giác OBC vuông tại O và c
	OB = 3a, OC = a	, $OO' = 2a$. Tính góc	giữa	
	a) hai đường th	$\stackrel{\circ}{\text{ang }}BO'$ và $B'C$;		
	a) har duong the	ang bo va bo,		
	b) hai mặt phẳr	ng $(O'BC)$ và (OBC)	;	
	c) đường thẳng	B'C và mặt phẳng (C	O'BC).	
	, 5555-8 0110118		- /	
				g cạnh bằng 4. Mặt bên SA bhẳng vuông góc với đáy.
	ra amii 21ac can tái		o va nam arong mát b	mans vaons soc voi day.
	a) Tính góc α g	giữa hai đường thẳng l	SD và BC ;	

b) Tính góc β giữa hai mặt phẳng (SAD) và (SCD).

VÍ DŲ 3.

Người ta muốn dựng một cột ăng-ten trên một sườn đồi. Ång-ten được dựng thẳng đứng trong không gian Oxyzvới độ dài đơn vị trên mỗi trục bằng 1 m. Gọi O là gốc cột, A là điểm buộc dây cáp vào cột ăng-ten và M, Nlà hai điểm neo dây cáp xuống mặt sườn đồi (hình vẽ). Cho biết toạ độ các điểm nói trên lần lượt là O(0;0;0), A(0;0;6), M(3;-4;3), N(-5;-2;2).



- a) Tính độ dài các đoạn dây cáp MA và NA.
- b) Tính góc tạo bởi các sợi dây cáp MA, NA với mặt phẳng sườn đồi.

2. Bài tấp trắc nghiệm

CÂU 1. Trong hệ trục toạ độ Oxyz, với mặt phẳng (Oxy) là mặt đất, một máy bay cất cánh từ vị trí A(0;10;0) với vận tốc $\vec{v}=(150;150;40)$. Tính góc nâng của máy bay (góc giữa hướng chuyển động bay lên của máy bay với đường băng và làm tròn kết quả đến hàng đơn vi).

- (A) 10°.
- (B) 12°.
- (C) 11°.

CÂU 2. Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D'có canh bằng a. Tính số đo góc giữa hai mặt phẳng (BA'C) và (DA'C).

- **A** 30°.
- **B**) 120°.
- (c) 90°.
- (D) 60°.

CÂU 3. Cho hình lập phương MNPQ.M'N'P'Q' có E, F, G lần lượt là trung điểm của NN', PQ, M'Q' Tính góc giữa hai đường thẳng EG và P'F.

- (A) 60°.
- **B**) 90°.
- **D** 45°.

CÂU 4. Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D' có các cạnh AB = 2, AD = 3, AA' = 4. Góc giữa hai mặt phẳng (AB'D') và (A'C'D) là α . Tính giá trị gần đúng của góc α .

- **A** 45, 2°.
- **B**) 38, 1°.

CÂU 5. Cho hình chóp SABCD có ABCD là hình vuông cạnh a, SA vuông góc (ABCD), SA = a. Goi E và F lần lượt là trung điểm SB, SD. Cô-sin của góc hợp bởi hai mặt phẳng (AEF) và (ABCD) là

- \mathbf{A} $\sqrt{3}$.
- **B** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **c** $\frac{1}{2}$.
- \bigcirc $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

CÂU 6. Cho hình chóp tam giác O.ABC có OA, OB, OC đôi một vuông góc và OAOB = OC. Lấy M, N lần lượt là trung điểm của AB, OC. Gọi α là góc tạo bởi OA và MN. Tính $\cos \alpha$.

- **B** $\frac{1}{3}$. **C** $\frac{\sqrt{3}}{4}$. **D** $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

CÂU 7. Hình chóp S.ABC có đáy là tam giác vuông tại B có AB = a, AC = 2a. SA vuông góc với mặt phẳng đáy, SA = 2a. Gọi ψ là góc tạo bởi hai mặt phẳng (SAC) và (SBC). Tính $\cos \psi$.

- **B** $\frac{\sqrt{3}}{5}$. **C** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **D** $\frac{\sqrt{15}}{5}$.

CÂU 8. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật, AB = a, $BC = a\sqrt{3}$, SA = a và SA vuông góc với đáy ABCD. Tính $\sin \alpha$, với α là góc tạo bởi giữa đường thẳng BD và mặt phẳng (SBC).

- $\triangle \frac{\sqrt{2}}{4}$.
- **B** $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **C** $\frac{\sqrt{3}}{4}$. **D** $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

CÂU 9. Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có cạnh đáy bằng a, tâm O. Gọi M và N lần lượt là trung điểm SA và BC. Biết góc giữa MN và (ABCD) bằng 60° , côsin góc giữa MNvà mặt phẳng (SBD) bằng

- **B** $\frac{2\sqrt{41}}{41}$. **C** $\frac{\sqrt{5}}{5}$. **D** $\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

CÂU 10. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thang vuông tại A và B, AB = BC = a, AD = 2a, SA vuông góc với mặt đáy (ABCD), SA = a. Goi M, N lần lượt là trung điểm của SB và CD. Tính cosin của góc giữa MN và (SAC).

•	•	•	•																					•								•
•	•	•	•	Ī											Ī	Ī	Ī	Ī	Ī	Ī				•		Ī						•
•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•														٠	•	•	•	•	•	•	•	•
•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•

\sim 11		\mathbf{N}	
	IICK		ЛΕ

C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM TỰ LUYỆN

Phần I. Mỗi câu hỏi học sinh chọn một trong bốn phương án A, B, C, D.

y = 2 + t và mặt phẳng (P): 3x -**CÂU 1.** Trong không gian Oxyz, cho đường thẳng d:

2y + 1 = 0. Tính góc hợp bởi đường thẳng d và mặt phẳng (P).

CÂU 2. Trong không gian Oxyz, cho ba điểm M(2;3;-1), N(-1;1;1) và P(1;m-1;2). Tìm m để tam giác MNP vuông tại N.

$$\bigcirc M = 0.$$

$$\bigcirc$$
 $m=-4.$

$$(c) m = 2.$$

$$\bigcirc m = -6$$

CÂU 3. Trong không gian Oxyz, tính góc giữa hai đường thẳng $d_1: \frac{x}{1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-1}{2}$ và d_2 : $\frac{x+1}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z-3}{1}$.

CÂU 4. Trong không gian Oxyz, cho đường thẳng $d : \frac{x-4}{1} = \frac{y-5}{2} = \frac{z}{3}$ mặt phẳng (α) chứa đường thẳng d sao cho khoảng cách từ O đến (α) đạt giá trị lớn nhất. Khi đó góc giữa mặt phẳng (α) và trục Ox là φ thỏa mãn.

$$\mathbf{B}\sin\varphi = \frac{1}{3\sqrt{3}}.$$

$$\mathbf{c}\sin\varphi = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

CÂU 5. Trong không gian Oxyz, gọi (P) là mặt phẳng chứa trục Oy và tạo với mặt phẳng y+z+1=0 một góc 60°. Phương trình mặt phẳng (P) là

CÂU 6. Với giá trị nào của m thì đường thẳng $(D): \frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{m} = \frac{z-1}{m-2}$ vuông góc với mặt phẳng (P): x + 3y + 2z = 2.

$$\bigcirc$$
 -7

CÂU 7. Trong không gian Oxyz, cho mặt phẳng (P): mx+my-2z-1=0 và đường thẳng $\frac{x}{n+1} = \frac{y}{m} = \frac{1-z}{1} \text{ với } m \neq 0, m \neq -1. \text{ Khi } (P) \perp d \text{ thì tổng } m+n \text{ bằng bao nhiều?}$

(A)
$$m+n=2$$
. (B) $m+n=-2$. (C) $m+n=-\frac{1}{2}$. (D) $m+n=-\frac{2}{3}$

CÂU 8. Trong không gian Oxyz, cho hai đường thẳng $d_1: \frac{x}{1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-1}{2}$ và $d_2:$ $\frac{x+1}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z-3}{1}.$ Góc giữa hai đường thẳng đó bằng

CÂU 9. Trong không gian Oxyz, cho đường thẳng $\Delta\colon x=\frac{y}{2}=\frac{z-1}{3}$ và mặt phẳng (P): 4x + 2y + z - 1 = 0. Khi đó khẳng định nào sau đây là đúng?

$${\color{red} {\color{blue} {\bf A}}}$$
 Góc tạo bởi (Δ) và (P) lớn hơn $30^{\circ}.$

$$lacksquare$$
 $\Delta \# (P).$

$$\bigcirc$$
 $\Delta \perp (P)$.

CÂU 10. Trong không gian Oxyz, cho mặt phẳng (P): 3x+4y+5z-8=0 và đường thẳng $d\colon \begin{cases} y=-1-4t\,.$ Góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (P) là z=5-5t

CÂU 11. Trong không gian Oxyz, cho hai đường thẳng d_1 : $\begin{cases} x = -1 - t \\ y = 3 + 4t \text{ và } d_2 \colon \frac{x}{1} = 0 \end{cases}$

$$\frac{y+8}{-4} = \frac{z+3}{-3}$$
. Tính góc hợp bởi đường thẳng d_1 và d_2 .

$\overline{}$		
(\mathbf{A})	OO.	
	90	

600	
<i>)</i> 00	•

CÂU 12. Trong không gian Oxyz, cho mặt phẳng (P): $-\sqrt{3}x + y + 1 = 0$. Tính góc tạo bởi (P) với trục Ox?

Phần II. Trong mỗi ý a), b), c) và d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.

CÂU 1. Trong không gian
$$Oxyz$$
, cho hai đường thẳng d_1 :
$$\begin{cases} x=2+t \\ y=-1+t \text{ và } d_2 \colon \begin{cases} x=1-t \\ y=2 \end{cases} \\ z=3 \end{cases}$$

Xét tính đúng sai của các khẳng định sau

Mệnh đề	Ð	S
a) Đường thẳng d_1 có một vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{u_1} = (1;1;3)$.		
b) Góc giữa hai đường thẳng d_1 và d_2 bằng 60° .		
c) Đường thẳng d_2 có một vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{u_2} = (-1; 0; 1)$.		
d) Giá trị cosin của góc giữa hai đường thẳng d_1 và d_2 bằng $-\frac{1}{2}$.		

CÂU 2. Trong không gian Oxyz, cho mặt phẳng (P): 2x+y+2z-1=0 và hai điểm A(1;-1;2), B(0;1;-1). Xét tính đúng sai của các khẳng định sau

Mệnh đề	Đ	S
a) Giá trị cosin của góc giữa đường thẳng AB và mặt phẳng (P) bằng $\frac{2}{\sqrt{21}}.$		
b) Đường thẳng AB vuông góc với mặt phẳng (P) .		
c) Mặt phẳng (OAB) có một vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n}=(-1;1;1).$		
d) Giá trị cosin của góc giữa mặt phẳng (OAB) và mặt phẳng (P) bằng $\frac{\sqrt{3}}{9}$.		

CÂU 3. Trong không gian Oxyz, cho đường thẳng $d : \frac{x}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{1}$ và mặt phẳng (P) : 5x + 11y + 2z - 4 = 0. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau

Mệnh đề	Ð	S
a) Đường thẳng d có một vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{u}=(1;-2;1).$		
b) Mặt phẳng (P) có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (-5; -11; 2)$.		
c) Giá trị cosin của góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (P) bằng $\frac{1}{2}$.		
d) Góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng bằng 30° .		

CÂU 4. Trong không gian Oxyz, cho mặt phẳng (P): 3x+4y+5z+2=0 và đường thẳng d là giao tuyến của hai mặt phẳng $(\alpha): x-2y+1=0$ và $(\beta): x-2z-3=0$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau

Mệnh đề	Ð	S
a) Mặt phẳng (P) có một vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n}=(3;4;5)$.		
b) Góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (P) bằng 30° .		
c) Đường thẳng d có một vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{u} = (2; -1; 1)$.		
d) Đường thẳng d cắt mặt phẳng (P) tại $A\left(\frac{7}{15}; \frac{11}{15}; -\frac{19}{15}\right)$.		

Phần III. Học sinh điền kết quả vào ô trống.

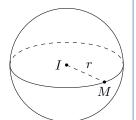
QUICK NOTE	CÂU 1. Trong hệ tọa độ $Oxyz$, một vật chuyển động theo quĩ đạo là một đường thẳng. Tại thời điểm ban đầu, vật ở vị trí điểm $A(1;5;0)$, sau 10 phút vật ở vị trí điểm $B(101;205;1250)$. Hỏi vật chuyển động theo phương hợp với mặt đất góc bao nhiêu độ (giả sử mặt đất là mặt phẳng Oxy , kết quả làm tròn đến hàng phần chục).
	KQ:
	CÂU 2. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh bên $2a$, góc tạo bởi $A'B$ và
	mặt đáy là 60°. Gọi M là trung điểm BC . Ta có $\cos(A'C,AM) = \frac{\sqrt{a}}{b}$ với $\frac{a}{b}$ là phân số tối
	giản, $a, b \in N$. Tổng $a + b$ bằng bao nhiêu?
	KQ:
	x+1 $y-1$ $z+2$
	CÂU 3. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+2}{1}$ và mặt phẳng
	(P): $3x + my - 1 = 0$ (m là tham số). Tìm m để đường thẳng d tạo với mặt phẳng (P) góc
	α thỏa mãn $\sin \alpha = \frac{2}{3}$.
	KQ:
	nq.
	CÂU 4. Trong không gian, cho mặt phẳng (P) có phương trình $ax + by + cz - 1 = 0$ với
	$c<0$ đi qua hai điểm $A(0;1;0),B(1;0;0)$ tạo với (Oyz) một góc $60^\circ.$ Khi đó $a+b-\sqrt{2}c$ bằng
	KQ:
	CÂU 5. Có hai bức tường hình vuông cạnh $5m$, vuông góc với nhau và cùng vuông góc với
	mặt đất, hai mặt tường giao nhau tại cột d . Trên cột d có một điểm A cách mặt đất $2m$.
	Có một chiếc cột cao $1m$ đặt vuông góc với mặt đất, khoảng cách từ chân cột đến mỗi bức
	tường là 1m. Người ta muốn căng một chiếc bạt phẳng hình tam giác đi qua điểm A và đầu cột, hai đầu mút M , N thuộc hai chân tường sao cho diện tích bạt bé nhất. Hỏi phải căng
	chiếc bạt hợp với mặt đất góc bao nhiêu độ (Kết quả làm tròn đến hàng phần chục).
	KQ:
	CÂU 6. Trong không gian, tìm m để số đo góc giữa hai đường thẳng d_1 , d_2 bằng 60° biết
	$\int x = 1 + t \qquad \int x = 2 + mt$
	$d_1: \begin{cases} y = 1 - t \\ z = -3 + \sqrt{2}t \end{cases}, d_2: \begin{cases} y = 3 + t \\ z = \sqrt{2}t \end{cases}$
	KQ:
	—HÉT—
	—ne1—

Bài 17. PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU

A. LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1. Định nghĩa

igodown Trong không gian, tập hợp tất cả các điểm M cách điểm I cố định một khoảng không đổi r (r>0) cho trước được gọi là mặt cầu tâm I bán kính R. Kí hiệu S(I;r) hay viết tắt là (S). Vậy $S(I;R) = \{M|IM = r\}.$



- ✓ Nhân xét:
 - Nếu IM = r thì M nằm trên mặt cầu.
 - Nếu IM < r thì M nằm trong mặt cầu.
 - Nếu IM > r thì M nằm ngoài mặt cầu.

2. Phương trình mặt cấu

 \bigcirc Trong không gian Oxyz, mặt cầu (S) tâm I(a;b;c) bán kính r có phương trình là

$$(x-a)^{2} + (y-b)^{2} + (z-c)^{2} = r^{2}.$$

ightharpoonup Dang khai triển: $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$, với $d = a^2 + b^2 + c^2 - r^2 > 0$.

B. PHÂN LOAI, PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Xác định tâm I, bán kính r của mặt cầu cho trước

- **Loai 1.** Cho (S): $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$. Khi đó
 - ① Tâm I(a;b;c) (đổi dấu số trong dấu ngoặc);
 - ② Bán kính r (Rút căn vế phải).
- **Loai 2.** Cho (S): $x^2 + y^2 + z^2 2ax 2by 2cz + d = 0$. Khi đó
 - ① Điều kiện để (*) là mặt cầu là $a^2 + b^2 + c^2 d > 0$;
 - ② Tâm I(a,b,c) (đổi dấu hệ số của x, y, z và chia đôi);
 - ③ Bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 d}$.

1. Ví du minh hoa

VÍ DU 1. Trong các phương trình sau, phương trình nào là phương trình mặt cầu? Hãy xác định tâm và bán kính (nếu là phương trình mặt cầu).

a)
$$(x-2)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 4$$
.

b)
$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 6z - 2 = 0$$
.

c)
$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 3z + 8 = 0$$
.

c)
$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 3z + 8 = 0$$
. d) $3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 6x + 12y - 9z + 1 = 0$

VÍ DỤ 2. Trong không gian Oxyz, tìm tất cả giá trị của tham số m để các phương trình sau là phương trình mặt cầu.

a)
$$x^2 + y^2 + z^2 - 2(m+2)x + 4my - 2mz + 5m^2 + 9 = 0$$
;

b)
$$x^2 + y^2 + z^2 + 2(m+2)x - 2(m-1)z + 3m^2 - 5 = 0$$
.

2. Bài tấp trắc nghiệm

CÂU 1. Cho mặt cầu (S): $(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 9$. Tìm tọa độ tâm I và tính bán kính R của (S).

$$(A)$$
 $I(1;-2;-1)$ và $R=3$.

B
$$I(1; -2; -1)$$
 và $R = 9$.

$$(\mathbf{C}) I(-1;2;1) \text{ và } R=3.$$

$$I(-1;2;1)$$
 và $R=9$.

CÂU 2. Cho mặt cầu (S): $(x-1)^2 + (y+2)^2 + z^2 = 9$. Mặt cầu (S) có thể tích bằng

$$\triangle V = 36\pi$$
.

B
$$V = 14\pi$$
.

B
$$V = 14\pi$$
. **C** $V = \frac{4}{36}\pi$.

$$\bigcirc V = 16\pi$$

•	•	•	•	•	•	•	•			•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•			•	



																													•				
•	•	•																											•			•	
٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	



٠.	•	•		•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
	Ì			Ì	Ì	Ì	Ì	Ì	Ì						Ì	Ì	Ì	Ì	Ì	Ì	Ì	Ì	Ì		Ì			Ì			Ì	
• •	٠	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•

•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•



_	ν.	_	_	_	_	_	'	_			_	_	_	_	_		_	Τ,	_	_	_		_		_	
				(S	2	ι	J		C	>	k	′		١		C)	T	E						
	۰	۲	۲	٠	٠	٠	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	٠	٠	٠	٠	٠	1	-	1	

CÂU 3. Cho mặt cầu (S): $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 6y + 8z - 7 = 0$. Tọa độ tâm và bán kính mặt cầu (S) lần lượt là

(A) I(-2; -3; 4), R = 6.

I(-2;-3;4), R=36.

(c) I(2;3;-4), R=36.

I(2;3;-4), R=6.

CÂU 4. Cho mặt cầu (S): $x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 2y + 1 = 0$. Tìm tọa độ tâm và bán kính của mặt cầu (S).

A I(4;-1;0), R=4.

B I(-4;1;0), R=4.

(c) I(-4;1;0), R=2.

I(4;-1;0), R=2.

CÂU 5. Cho mặt cầu (S): $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 12x - 4y + 4 = 0$. Mặt cầu (S) có đường kính AB. Biết điểm A(-1;-1;0) thuộc mặt cầu (S). Tọa độ điểm B là

- A B(-5;3;-2).
- **B** B(-11;5;0).
- $(\mathbf{C}) B(-11; 5; -4).$

(D) B(-5;3;0).

CÂU 6. Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt cầu?

- (A) $x^2 + y^2 z^2 + 4x 2y + 6z + 5 = 0$. (B) $x^2 + y^2 + z^2 + 4x 2y + 6z + 15 = 0$.
- $(\mathbf{c}) x^2 + y^2 + z^2 + 4x 2y + z 1 = 0.$
- \mathbf{p} $x^2 + y^2 + z^2 2x + 2xy + 6z 5 = 0.$

CÂU 7. Cho phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2mx - 2(m+2)y - 2(m+3)z + 16m + 13 = 0$. Tìm tất cả các giá tri thực của m để phương trình trên là phương trình của một mặt cầu.

(A) m < 0 hay m > 2.

B) $m \le -2$ hay $m \ge 0$.

(c) m < -2 hay m > 0.

D m < 0 hay m > 2.

CÂU 8. Có tất cả bao nhiêu giá trị của tham số m (biết $m \in \mathbb{N}$) để phương trình $x^2 + y^2 + y$ $z^2 + 2(m-2)y - 2(m+3)z + 3m^2 + 7 = 0$ là phương trình của một mặt cầu?

CÂU 9. Cho mặt cầu (S): $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 4z - m = 0$ (m là tham số). Biết mặt cầu có bán kính bằng 5. Tìm m.

- (A) m = 25.
- **B** m = 11.
- (c) m = 16.

CÂU 10. Mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 4mx + 4y + 2mz + m^2 + 4m = 0$ có bán kính nhỏ nhất khi m bằng

- $\frac{1}{2}$.
- $\bigcirc \frac{\sqrt{3}}{2}$.
- \bigcirc 0.

Lập phương trình mặt cầu và ứng dung thực tiễn

- **Phương pháp chung:** Cần xác định được tọa độ tâm I(a;b;c) và độ dài bán kính r.
- Các bài toán cơ bản:
 - ① Mặt cầu có tâm I(a;b;c) và đi qua điểm $A(x_A;y_A;z_A)$ thì bán kính

$$r = IA = \sqrt{(x_A - x_I)^2 + (y_A - y_I)^2 + (z_A - z_I)^2}.$$

- ② Mặt cầu (S) có đường kính AB thì
 - điểm ABI(a;b;c)hay $I\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}; \frac{z_A + z_B}{2}\right)$
 - Bán kính $r = \frac{AB}{2} = \frac{\sqrt{\left(x_B x_A\right)^2 + \left(y_B y_A\right)^2 + \left(z_B z_A\right)^2}}{2}.$
- 3 Mặt cầu có tâm I(a;b;c) và tiếp xúc với (α) : Ax + By + Cz + D = 0 thì bán kính

$$r = \mathrm{d}\left(I, (\alpha)\right) = \frac{\left|Aa + Bb + Cc + D\right|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

4 Mặt cầu qua bốn điểm A, B, C, D không đồng phẳng (ngoại tiếp tứ diện

Gọi (S) có dạng $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$ (*)

Thay tọa độ 4 điểm A, B, C, D vào (*), ta được hệ phương trình 4 ẩn số a,

Giải tìm a, b, c, d. Suy ra tâm I(a, b, c), bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$.

1. Ví du minh hoa

VÍ DỤ 1. Trong không gian Oxyz, viết phương trình mặt cầu (S)

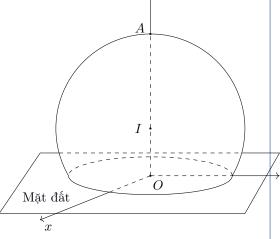
- a) Có tâm I(2; -1; 0) và đi qua điểm M(4; 1; -2);
- b) Có đường kính AB với A(0;1;3), B(4;-5;-1);
- c) Có tâm I(1; -2; 3) và tiếp xúc với trục Oy;
- d) Có tâm I(1;2;-1) và tiếp xúc với (P): x-2y-2z-8=0.

VÍ DU 2. Viết phương trình mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD, biết

- a) A(1;1;0), B(1;0;1), C(0;1;1), D(1;2;3).
- b) A(1;2;-4); B(1;-3;1), C(2;2;3), D(1;0;4).

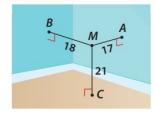
VÍ DU 3. Giả sử người ta biểu diễn mô phỏng của tòa nhà Ericsson Globe ở phần Khởi động trong hệ trục tọa độ Oxyz bởi một mặt cầu có tâm I, đường kính 110 m và OA = 85 m như hình vẽ (đơn vị trên trục là mét). Hãy viết phương trình của mặt cầu này.





VÍ DU 4. Bạn Bình đố bạn Nam tìm được đường kính của quả bóng rổ, biết rằng nếu đặt quả bóng ở một góc căn phòng hình hộp chữ nhật, sao cho quả bóng chạm (tiếp xúc) với hai bức tường và nền nhà của căn phòng đó (khi đó khoảng cách từ tâm quả bóng đến hai bức tường và nền nhà đều bằng bán kính của quả bóng) thì có một điểm M trên quả bóng với khoảng cách lần lượt đến hai bức tường và nền nhà là 17 cm, 18 cm và 21 cm (Hình bên dưới). Hãy giúp Nam xác định đường kính của quả bóng rổ đó. Biết rằng loại bóng rổ tiêu chuẩn có đường kính từ 23 cm đến 24,5 cm.





2. Bài tập trắc nghiệm

CÂU 1. Mặt cầu tâm I(3; -1; 0), bán kính R = 5 có phương trình là

$$(x+3)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 5.$$

B)
$$(x-3)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 5$$
.

$$(x-3)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 25.$$

(D)
$$(x+3)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 25.$$

CÂU 2. Phương trình mặt cầu tâm I(2; -3; -4), bán kính bằng 4 là

$$(x+2)^2 + (y-3)^2 + (z-4)^2 = 16.$$

B
$$(x-2)^2 + (y+3)^2 + (z+4)^2 = 16.$$

©
$$(x+2)^2 + (y-3)^2 + (z-4)^2 = 4$$
.

$$(x-2)^2 + (y+3)^2 + (z+4)^2 = 4.$$

OUIOV NOTE	
QUICK NOTE	• • • • • • • • • • • • • • • • • • •
	`
	^c
	3
	°
	t
	• • •
	1
	C
	C

CÂU 3. Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm I(-1;1;-2) và đi qua điểm A(2;;1;2).

(A)
$$(S)$$
: $(x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 5$.

B
$$(S)$$
: $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 25$.

(c)
$$(S)$$
: $(x+1)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 25$.

(D) (S):
$$x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2y + 4z + 1 = 0$$
.

CÂU 4. Mặt cầu tâm I(-3;0;4) và đi qua điểm A(-3;0;0) có phương trình là

$$(x-3)^2 + y^2 + (z+4)^2 = 4.$$

B)
$$(x-3)^2 + y^2 + (z+4)^2 = 16$$
.

$$(x+3)^2 + y^2 + (z-4)^2 = 16.$$

$$(x+3)^2 + y^2 + (z-4)^2 = 4.$$

CÂU 5. Phương trình mặt cầu (S) đường kính AB với A(4; -3; 5), B(2; 1; 3) là

(A)
$$x^2 + y^2 + z^2 + 6x + 2y - 8z - 26 = 0$$
. (B) $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 2y - 8z + 20 = 0$.

(c)
$$x^2 + y^2 + z^2 + 6x - 2y + 8z - 20 = 0$$
. (D) $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 2y - 8z + 26 = 0$.

CÂU 6. Cho hai điểm A(2;4;1) và B(-2;2;-3). Phương trình mặt cầu đường kính AB là

$$\mathbf{A}$$
 $x^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2 = 9.$

B)
$$x^2 + (y+3)^2 + (z-1)^2 = 9$$
.

$$(c)$$
 $x^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = 3.$

CÂU 7. Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm I(-1;4;2), biết thể tích khối cầu tương ứng

(A)
$$(x+1)^2 + (y-4)^2 + (z-2)^2 = 81$$
. (B) $(x+1)^2 + (y-4)^2 + (z-2)^2 = 9$.

B
$$(x+1)^2 + (y-4)^2 + (z-2)^2 = 9$$

$$(x-1)^2 + (y+4)^2 + (z-2)^2 = 9.$$

$$(x-1)^2 + (y+4)^2 + (z+2)^2 = 81.$$

CÂU 8. Mặt cầu (S) có tâm I(2;1;-1), tiếp xúc với mặt phẳng toa đô (Oyz). Phương trình của mặt cầu (S) là

(A)
$$(x+2)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 = 4$$
. (B) $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2 = 1$.

B
$$(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2 = 1$$

$$(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2 = 4.$$

$$(x+2)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2 = 2.$$

CÂU 9. Mặt cầu có tâm I(1;2;-3) và tiếp xúc với trục Oy có bán kính bằng

$$\bigcirc$$
 2.

$$\bigcirc$$
 $\sqrt{5}$

(c)
$$\sqrt{10}$$
.

$$\bigcirc$$
 $\sqrt{13}$.

CÂU 10. Trong không gian Oxyz, mặt cầu tâm I(-1;0;3) tiếp xúc với mặt phẳng $(\alpha): 4y-$ 8z + 19 = 0 có phương trình là

$$(x-1)^2 + y^2 + (z+3)^2 = 4.$$

B)
$$(x+1)^2 + y^2 + (z-3)^2 = 2$$
.

$$(x+1)^2 + y^2 + (z-3)^2 = 4.$$

$$(x-1)^2 + y^2 + (z+3)^2 = 2.$$

CÂU 11. Viết phương trình mặt cầu (S) đị qua A(-1;2;0), B(-2;1;1) và có tâm nằm trên ruc Oz.

B
$$x^2 + y^2 + z^2 + 5 = 0$$
.

$$\mathbf{C}$$
 $x^2 + y^2 + z^2 - x - 5 = 0.$

$$\mathbf{D}$$
 $x^2 + y^2 + z^2 - y - 5 = 0.$

CÂU 12. Cho mặt cầu (S) tâm I nằm trên mặt phẳng (Oxy) đi qua ba điểm A(1;2;-4), B(1; -3; 1), C(2; 2; 3). Tìm tọa độ điểm I.

$$A$$
 $I(2;-1;0).$

B)
$$I(0;0;1)$$
.

$$(c)$$
 $I(0;0;-2).$

$$I(-2;1;0)$$
.

CÂU 13. Cho 3 điểm A(2;3;0), B(0;-4;1), C(3;1;1). Mặt cầu đi qua ba điểm A,B,C và có tâm I thuộc mặt phẳng (Oxz), biết I(a;b;c). Tính tổng T=a+b+c.

(A)
$$T = 3$$
.

(B)
$$T = -3$$
.

$$(c) T = -1.$$

$$(\mathbf{D}) T = 2.$$

CÂU 14. Cho các điểm A(1;0;0), B(0;2;0), C(0;0;-2). Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp OABC là

$$\frac{7}{2}$$

B
$$\frac{1}{2}$$
.

$$\frac{3}{2}$$

$$\bigcirc \frac{5}{2}$$
.

CÂU 15. Cho điểm D(3;4;-2). Gọi A,B,C lần lượt là hình chiếu vuông góc của D trên các trục tọa độ Ox, Oy, Oz. Gọi (S) là mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD. Tính diện tích mặt cầu (S).

©
$$116\pi$$
.

$$\bigcirc$$
 29 π .

3

Vi trí tương đối của điểm, của mặt phẳng với mặt cầu

- **8 Bài toán 1:** Xét điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ và mặt cầu $S: (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 r^2 = 0$ (1). Thay tọa độ điểm M vào vế trái của (1), nếu
 - ① Kết quả bằng 0 thì $M \in (S)$.
 - ② Kết quả ra số âm thì M nằm trong (S).
 - $\$ 3 Kết quả ra số dương thì M nằm trong (S).
- **Bài toán 2:** Cho mặt cầu (S) có tâm I(a;b;c), bán kính r và mặt phẳng (P): Ax + By + Cz + D = 0.

② Nếu d
$$(I,(P)) = \frac{\left|Aa + Bb + Cc + D\right|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = r$$
 thì (P) tiếp xúc (S) .

3 Nếu d
$$(I,(P)) = \frac{\left|Aa + Bb + Cc + D\right|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} < r$$
 thì (P) cắt (S) .

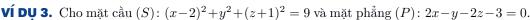
1. Ví du minh hoa

VÍ DỤ 1. Cho mặt cầu (S) có tâm I(2;-1;4) và bán kính R=5. Các điểm A(3;1;5), B(-1;11;14), C(6;2;4) nằm trong, nằm trên hay nằm ngoài mặt cầu (S)?

VÍ DU 2.

Trong không gian Oxyz (đơn vị trên mỗi trục là mét), một router phát sóng wifi có đầu thu phát được đặt tại điểm I(4;2;10).

- a) Cho biết bán kính phủ sóng wifi là 40 m. Viết phương trình mặt cầu (S) biểu diễn ranh giới của vùng phủ sóng.
- b) Một người sử dụng máy tính tại điểm M(6;12;0). Hãy cho biết điểm M nằm trong hay nằm ngoài mặt cầu (S) và người đó có thể sử dụng được sóng wifi của router nói trên hay không?
- c) Câu hỏi tương tự đối với người sử dụng máy tính ở điểm N(14;6;50).



- a) Chứng minh rằng mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S).
- b) Biết mặt cầu (S) cắt (P) theo giao tuyến là đường tròn (C). Tính bán kính r của đường tròn (C).

2. Bài tập trắc nghiệm

CÂU 1. Cho điểm M(1; -1; 3) và mặt cầu (S) có phương trình $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 + z^2 = 9$. Khẳng đinh đúng là

 \bigcirc M nằm ngoài (S).

 \bigcirc M nằm trong (S).

 \bigcirc M nằm trên(S).

 \bigcirc M trùng với tâm của (S).

CÂU 2. Cho mặt cầu (S): $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z = 0$ và ba điểm O(0;0;0), A(1;2;3), B(2;-1;-1). Trong số ba điểm trên số điểm nằm trên mặt cầu là









QUICK NOTE

QUICK NOTE	
 QUICK NOTE	
 	•
 	•

CÂU 3. Cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-4y+6z-2=0$ và mặt phẳng (P): x+y-z+4=0. Trong các mênh đề sau, mênh đề nào đúng?

(A) (P) tiếp xúc (S).

- (\mathbf{B}) (P) và (S) không có điểm chung.
- (\mathbf{C}) (P) đi qua tâm của (S).
- (\mathbf{D}) (P) cắt (S).

CÂU 4. Cho mặt phẳng (P) và mặt cầu (S) có phương trình lần lượt là (P): 2x+2y+z $m^2 + 4m - 5 = 0$; (S): $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 2z - 6 = 0$. Giá trị của m để (P) tiếp xúc (S) là

(A) m=5.

- **B**) m = -1.
- **(c)** m = -1 hoặc m = 5.

 \mathbf{D} m=1 hoặc m=-5.

CÂU 5. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho mặt phẳng (P): 2x + 2y + z - 2 = 0 và mặt cầu (S) tâm I(2;1;-1) bán kính R=2. Bán kính đường tròn giao của mặt phẳng (P)và mặt cầu (S) là

- $(\mathbf{A}) r = \sqrt{3}.$
- **B**) $r = \sqrt{5}$.
- $(\mathbf{c}) r = 1.$
- $(\mathbf{D}) r = 3.$

CÂU 6. Trong không gian Oxyz, mặt cầu có phương trình $x^2+y^2+z^2-2x+2y-6z+2=0$ cắt mặt phẳng (Oxz) theo một đường tròn có bán kính bằng

- **(A)** $3\sqrt{2}$.
- \bigcirc $2\sqrt{2}$.
- \mathbf{D} $4\sqrt{2}$.

CÂU 7. Trong không gian với hệ truc toa độ Oxyz, cho mặt cầu (S): $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (y$ $(z-2)^2=9$ và mặt phẳng (P): 2x-y-2z+1=0. Biết (P) cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính r. Tính r.

- (A) r = 3.
- **(B)** r = 2.
- **(c)** $r = 2\sqrt{2}$.

CÂU 8. Trong không gian Oxyz cho mặt cầu (S): $x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 4y - 12z = 0$ và mặt phẳng (P): 2x+y-z-2=0. Tính diện tích thiết diện của mặt cầu (S) cắt bởi mặt phẳng

- \bigcirc 50 π .
- **B** $S = 49\pi$.
- (\mathbf{C}) 25 π .
- \bigcirc 36 π .

CÂU 9. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho điểm I(2;1;1) và mặt phẳng (P):2x+y+2z-1=0. Mặt cầu (S) có tâm I, cắt (P) theo một đường tròn có bán kính r=4. Mặt $\operatorname{cầu}(S)$ có phương trình là

- (A) $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 18$. (B) $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 2\sqrt{5}$.
- $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 20.$
- $(x+2)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 20.$

CÂU 10. Trong không gian Oxyz, cho mặt cầu (S) có tâm I(1;2;1) và cắt mặt phẳng $(P)\colon 2x-y+2z+7=0$ theo một đường tròn có đường kính bằng 8. Phương trình mặt cầu (S) là

- (A) $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 25$. (B) $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 81$.
- $(\mathbf{C})(x+1)^2 + (y+2)^2 + (z+1)^2 = 9.$ $(\mathbf{D})(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 5.$

C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM TỰ LUYỆN

Phần I. Mỗi câu hỏi học sinh chọn một trong bốn phương án A, B, C, D.

CÂU 1. Trong không gian Oxyz, điểm nào sau đây nằm trong mặt cầu (S): $(x-1)^2 +$ $(y-4)^2 + (z-3)^2 = 16?$

- (A) M(0;7;-3).
- **B**) P(1;0;0).
- $(\mathbf{C}) N (0; 4; 3).$
- **(D)** Q(1;0;3).

CÂU 2. Trong không gian Oxyz, cho mặt cầu (S) có tâm A(3;-1;1) và đi qua M(2;-2;4). Phương trình mặt cầu (S) là

- (A) $(x-3)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 = 11$. (B) $(x+3)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2 = 11$.
- (c) $(x+3)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2 = \sqrt{11}$. (d) $(x-3)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 = \sqrt{11}$.

CÂU 3. Trong không gian Oxyz, cho mặt cầu $(S): (x-2)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 18$. Bán kính của (S) bằng

- **B**) 18.
- (c) $6\sqrt{2}$.

CÂU 4. Trong không gian Oxyz, cho hai điểm M(3;-2;5), N(-1;6;-3). Mặt cầu đường kính MN có phương trình là

- (A) $(x+1)^2 + (y+2)^2 + (z+1)^2 = 6$. (B) $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 6$.
- $(\mathbf{c})(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 36.$
- $(x+1)^2 + (y+2)^2 + (z+1)^2 = 36.$

QUICK NOTE

CÂU 5. Trong không gian Oxyz, cho mặt cầu (S): $(x-5)^2+(y-1)^2+(z+2)^2=9$. Đường kính của mặt cầu (S) là

- **A** 9.
- **(B)** 3.
- **(D)** 18.

CÂU 6. Trong không gian Oxyz, phương trình nào sau đây là phương trình của mặt cầu?

- **B**) $x^2 + y^2 + z^2 2x + 2y 4z + 8 = 0$.
- \mathbf{C} $x^2 + y^2 + z^2 2x + 4z 1 = 0.$

CÂU 7. Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho mặt cầu $(S): (x+2)^2+y^2+(z-3)^2=4$. Tâm của (S) có toạ độ là

- (A) $\left(-1;0;\frac{3}{2}\right)$. (B) (2;0;-3).
- $(1;0;\frac{3}{2}).$ (-2;0;3).

CÂU 8. Trong không gian Oxyz, một thiết bị phát sóng đặt tại vị trí A(2;0;0). Vùng phủ sóng của thiết bị có bán kính bằng 1. Điểm nào sau đây thuộc vùng phủ sóng của thiết bị nói trên?

- (A) P(1;0;0).
- **B** O(0;0;0).
- $(\mathbf{C}) N(0;1;1).$
- **(D)** M(1;0;3).

CÂU 9. Trong không gian Oxyz, cho mặt cầu (S): $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 2z - 3 = 0$. Bán kính R của mặt cầu (S) bằng

- $(\mathbf{A}) \sqrt{3}$.
- **(B)** 9.
- **(c)** $3\sqrt{3}$.

CÂU 10. Trong không gian Oxyz, phương trình mặt cầu tâm I(1;2;3), bán kính R=2 có dang

- $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 4.$
- **B** $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 2$.
- $(x+1)^2 + (y+2)^2 + (z+3)^2 = 2.$
- **(D)** $(x+1)^2 + (y+2)^2 + (z+3)^2 = 4$.

CÂU 11. Trong không gian Oxyz, tìm m để phương trình $x^2+y^2+z^2-2x-y+4z-m=0$ là phương trình của mặt cầu.

 \bigcirc $M \leq \frac{21}{4}$.

39

- $m \ge \frac{21}{4}$. $m < \frac{21}{4}$.

CÂU 12. Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, mặt cầu (S): $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2ax -$ 2cz + d = 0 có bán kính R bằng

 \mathbf{A} $a^2 + b^2 + c^2 + d$.

B $\sqrt{a^2+b^2+c^2+d}$

 $\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}$

 $a^2 + b^2 + c^2 - d$.

Phần II. Trong mỗi ý a), b), c) và d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.

CÂU 1. Trong không gian Oxyz, cho mặt cầu $(S): (x-2)^2+y^2+(z+1)^2=1$ và mặt phẳng (P): x + 2y - z + 1 = 0. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

Mệnh đề	Ð	S
a) Khoảng cách từ tâm I đến mặt phẳng (P) bằng $\frac{\sqrt{6}}{3}$.		
b) Mặt cầu (S) có tâm $I(2;0;-1)$ và bán kính $R=1$.		
c) Mặt phẳng (P) tiếp xúc mặt cầu (S) .		
d) Phương trình mặt cầu tâm $I(2;0;-1)$ và tiếp xúc mặt phẳng (P)		
là: (S') : $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2z + \frac{7}{3} = 0$.		

CÂU 2. Trong không gian Oxyz, cho mặt cầu (S): $(x-1)^2 + (y+3)^2 + (z-2)^2 = 49$.

Mệnh đề	Ð	S
a) Mặt cầu (S) có bán kính $R=7$.		
b) Điểm $A(1;4;2)$ nằm trên mặt cầu (S) .		
c) Mặt cầu (S) có tâm $I(1;3;2)$.		
d) Mặt cầu (S) còn có phương trình: $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 6y - 4z - 49 = 0$.		

CÂU 3. Trong không gian Oxyz, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 8y + 1 = 0$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

QUICK NOTE	Mệnh đề	Ð	\mathbf{S}
	a) Mặt cầu (S) có tâm $I(1;4;0)$.		
	b) Mặt cầu (S) còn có phương trình: $(S):(x+1)^2+(y+4)^2+z^2=16.$		
	c) Điểm $M(0;3;4)$ nằm bên ngoài mặt cầu (S) .		
	d) Mặt cầu (S) có bán kính $R=4$.		
	CÂU 4. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;2;-4),B(1;-3;1),C(2;2;1)$; 3).	
	Mệnh đề	Ð	S
	a) Bán kính của mặt cầu (S_4) đi qua ba điểm A,B,C và có tâm nằm		
	trên mặt phẳng (Oxy) là $R = \sqrt{26}$.		
	b) Mặt cầu (S_1) tâm A , bán kính $R=1$ có phương trình là: $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-4)^2=1$.		
	c) Bán kính của mặt cầu (S_2) có tâm là A và đi qua điểm C là $\sqrt{50}$.		
	d) Mặt cầu (S_3) nhận AB làm đường kính có phương trình là: $(x-1)^2+$		
	$\left(y+\frac{1}{2}\right)^2+\left(z+\frac{3}{2}\right)^2=\frac{25}{2}.$		
	$\left(y+\frac{1}{2}\right)^{2}+\left(z+\frac{1}{2}\right)^{2}=\frac{1}{2}.$		
	Phần III. Học sinh điền kết quả vào ô trống. CÂU 1. Trong không gian $Oxyz$, cho phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2my + 2$	$3m^2 -$	-2m = 0
	với m là tham số. Tính tổng tất cả các giá trị nguyên của m để phương tr		
	phương trình mặt cầu.		
	KQ:		
			2
	CÂU 2. Trong không gian $Oxyz$ (đơn vị của các trục tọa độ là ki-lô-mét), không lưu sân bay có tọa độ $(-64; 128; 64)$. Máy bay bay trong phạm vi cách		
	$500~\mathrm{km}$ thì sẽ hiển thị trên màn hình ra đa. Một máy bay N xuất hiện trên m	nàn hìr	nh ra đa
	và một máy bay M nằm trong mặt phẳng (P) : $x - 2y + 2z - 1458 = 0$ sao ch M, N thuộc đường thẳng có vecto chỉ phương là $\vec{u} = (1; 1; 1)$. Khoảng cách		
	hai máy bay M , N là bao nhiều km? (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)	шо ш	nat grua
	KQ:		
	CÂU 3. Một vỏ kem ốc quế là một loại bánh khô, hình nón (N) trong khôn		
	thường được làm bằng một chiếc bánh xốp dùng để đặt kem vào và cầm ăn bát hoặc muỗng. Người ta thả vào vỏ kem (N) một viên kem vani hình cầu có		
	socola nhỏ tại hai vị trí $A(2;1;3)$ và $B(6;5;5)$ sao cho đường kính AB có B		
	tròn đáy khối nón. Khi thể tích của khối nón (N) nhỏ nhất thì mặt phẳng q	ua đỉn	h S của
	khối nón (N) và song song với mặt phẳng chứa đường tròn đáy của (N) có $2x + by + cz + d = 0$. Tính giá trị của biểu thức $T = b + c + d$.	phươi	ng trinh
	KQ:		
	CÂU 4. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) : $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 2x - 4y - 2x - 4y - 2x - 2x - 4y - 2x - 2x - 4y - 2x - 2x - 2x - 4y - 2x - 2$	+ 6 <i>z</i> -	-13 = 0
	$\int x = -1 + t$	2	
	và đường thẳng d : $\begin{cases} x=-1+t\\ y=-2+t \text{. Gọi } M(a;b;c) \text{ với } a<0 \text{ là điểm thuộc đườn}\\ z=1+t \end{cases}$	ıg thăi	$ng \ d sao$
	z = 1 + t cho từ M kẻ được ba tiếp tuyến MA , MB , MC đến mặc cầu (S) (A, B, C) là		
	thỏa mãn $\widehat{AMB}=60^\circ;\widehat{BMC}=90^\circ;\widehat{CMA}=120^\circ.$ Tính giá trị của biểu thức		- ,
	KQ:		
	CÂU 5. Trong không gian $Oxyz$ (đơn vị của các trục tọa độ là ki–lô-mét),		
	phát sóng điện thoại di động có đầu thu đặt tại điểm $I(1;2;2)$ biết rằng sóng của tram là 3 km. Hại người sử dụng điện thoại lần lượt tại $M(4;-4;2)$		
	sóng của trạm là 3 km. Hai người sử dụng điện thoại lần lượt tại $M(4; -4; 2)$ Gọi $E(a; b; c)$ với $a < 0$ là một điểm thuộc ranh giới vùng phủ sóng của trạm		
			0

khoảng cách từ E đến vị trí M và N lớn nhất. Tính T=a+b+c.

KQ:

CÂU 6. Người ta muốn thiết kế một bồn chứa khí hoá lỏng hình cầu bằng phần mềm 3D (tham khảo hình vẽ). Cho biết phương trình bề mặt của bồn chứa là (S): $(x-2)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 1$. Phương trình mặt phẳng chứa nắp là (P): z-6=0. Tính khoảng cách từ tâm bồn chứa đến mặt phẳng chứa nắp.





KQ:

—HÉ́Т—

QUICH	(NOTE	
 	• • • • • • • • • • • • • • • • • • • •	
 	• • • • • • • • • • • • • • • • • • • •	
 	• • • • • • • • •	
 	• • • • • • • • • • • • • • • • • • • •	
 	• • • • • • • • • • • • • • • • • • • •	
 	• • • • • • • • • • • • • • • • • • • •	
 	• • • • • • • • • • • • • • • • • • • •	
 	• • • • • • • • •	
 	• • • • • • • • •	
 	• • • • • • • • • • • • • • • • • • • •	
 	• • • • • • • • • • • • • • • • • • • •	
 	• • • • • • • • •	

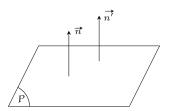
LỜI GIẢI CHI TIẾT

Bài 14. PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẨNG

A. LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1. Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng

- \bigcirc **Dịnh nghĩa:** Vectơ pháp tuyến \overrightarrow{n} của mặt phẳng (P) là những vectơ khác $\overrightarrow{0}$ và có giá vuông góc với (P).
- Chú ý:
- $\vec{n} \neq \vec{0}$ và có giá vuông với (P);
- Nếu \overrightarrow{n} và $\overrightarrow{n'}$ cùng là vectơ pháp tuyến của (P) thì $\overrightarrow{n'}=k\cdot \overrightarrow{n}$ (tọa độ tỉ lệ nhau).



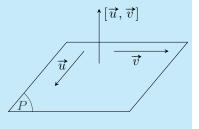
2. Cặp vectơ chỉ phương của mặt phẳng

- \bigcirc **Dịnh nghĩa:** Trong không gian Oxyz, cho hai vecto \overrightarrow{u} , \overrightarrow{v} được gọi là cặp vecto chỉ phương của mặt phẳng (P) nếu chúng không cùng phương và có giá nằm trong hoặc song song với mặt phẳng (P).
- Chú ý:
- Cho hai vecto $\overrightarrow{u}=(a;b;c)$ và $\overrightarrow{v}=(a';b';c').$ Khi đó

$$\vec{n} = (bc' - b'c; ca' - c'a; ab' - a'b)$$

vuông góc với cả hai vecto \overrightarrow{u} và \overrightarrow{v} , được gọi là tích có hướng của \overrightarrow{u} và \overrightarrow{v} , ký hiệu là $[\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}]$.

• Nếu \vec{u} , \vec{v} là cặp vectơ chỉ phương của (P) thì $[\vec{u}, \vec{v}]$ là một vectơ pháp tuyến của (P).



3. Phương trình tổng quát của mặt phẳng

Công thức: Mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ và nhận $\vec{n} = (a; b; c)$ làm vectơ pháp tuyến có phương trình là

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

Thu gọn ta được dạng

$$ax + by + cz + d = 0$$

- Chú ý:
 - ① Phương trình các mặt phẳng tọa độ:
 - (Oxy): z = 0.

 $\bullet \quad (Oxz) \colon y = 0.$

- (Oyz): x = 0.
- ② Phương trình mặt phẳng (α) song song với mặt phẳng tọa độ:
 - $(\alpha) \# (Oxy) \Rightarrow z = a \quad a \neq 0.$
- $(\alpha) // (Oxz) \Rightarrow y = b \quad b \neq 0.$

• $(\alpha) \# (Oyz) \Rightarrow x = c \quad c \neq 0.$

4. Vị trị tương đối giữa hai mặt phẳng

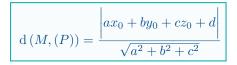
Cho hai mặt phẳng (P): $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ và (Q): $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$. Gọi $\overrightarrow{n_1} = (a_1; b_1; c_1)$, $\overrightarrow{n_2} = (a_2; b_2; c_2)$ lần lượt là vectơ pháp tuyến của (P) và (Q).

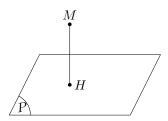
$$\begin{tabular}{ll} @ \ N\'eu & $ \overrightarrow{n_1} = k \cdot \overrightarrow{n_2} \\ d_1 \neq k \cdot d_2 \end{tabular} thì (P) song song (Q). \\ @ \ N\'eu $\overrightarrow{n_1}$ không cùng phương với $\overrightarrow{n_2}$ thì (P) cắt (Q). \\ \end{tabular}$$

- ① Nếu $\overrightarrow{n_1} \perp \overrightarrow{n_2}$ hay $a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$ thì $(P) \perp (Q)$.

5. Khoảng cách từ một điểm đến mặt phẳng

- \bigcirc **Dịnh nghĩa:** Cho điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ và mặt phẳng (P): ax + by + cz + d = 0. Gọi H là hình chiếu vuông góc của điểm M lên mặt phẳng (P). Khi đó đô dài đoan MH được gọi là khoảng cách từ điểm M đến (P). Kí hiệu d(M, (P)).
- Công thức tính:





Dăc biêt:

①
$$d(M, (Oxy)) = |z_M|$$
.

②
$$d(M, (Oxz)) = |y_M|$$
.

B. PHÂN LOAI, PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Xác định vectơ pháp tuyến và điểm thuộc mặt phẳng

Cho mặt phẳng (α) .

- ① Nếu véctơ \vec{n} khác $\vec{0}$ và có giá vuông góc với (α) thì \vec{n} được gọi là véctơ pháp tuyến của (α) .
- ② Nếu hai vécto \vec{a} , \vec{b} không cùng phương, có giá song song hoặc nằm trong (α) thì \vec{a} , \vec{b} được gọi là cặp vécto chỉ phương của (α) . Khi đó, nếu $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3), \vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$ thì

$$\overrightarrow{n} = [\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}] = \left(\left| \begin{array}{ccc} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{array} \right| ; \left| \begin{array}{ccc} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{array} \right| ; \left| \begin{array}{ccc} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{array} \right| \right)$$

là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P).

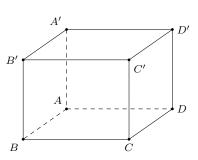
3 Nếu (α) : ax + by + cz + d = 0 thì vecto pháp tuyến của (α) là $\vec{n} = (a; b; c)$.

1. Ví du minh hoa

VÍ DU 1.

Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D'.

- a) Xác định vectơ pháp tuyến của các mặt phẳng (ABCD), (ABB'A'), (ACC'A'), (ADD'A').
- b) Chứng minh $\overrightarrow{AB'}$ là một vectơ pháp tuyến của (BCD'A').



VÍ DỤ 2. Cho mặt phẳng (P): 2x-3y+4z+5=0. Hãy chỉ ra một vectơ pháp tuyến của (P) và hai điểm thuộc (P). 🗭 Lời giải.

vecto $\vec{n} = (2; -3; 4)$ là một vecto pháp tuyến của mặt phẳng (P).

VÍ DỤ 3. Cho (P) là mặt phẳng trung trực của MN với M(1;-2;3), N(1;4;1). Hãy chỉ ra một vectơ pháp tuyến của (P)và một điểm thuộc (P).

🗭 Lời giải.

Mặt phẳng trung trực của MN đi qua trung điểm của MN và vuông góc với MN. Vậy MN = (0; 6; -2) là một vecto pháp tuyến của mặt phẳng (P).

VÍ DU 4. Chỉ ra một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (α) biết

- a) (α) đi qua A(-1;3;5), B(3;2;-2) và C(0;3;0)
- b) (α) đi qua M(0;3;1), N(-3;2;5) và P(-2;0;0)

🗭 Lời giải.

- a) Ta có $\overrightarrow{AB} = (4; -1; -7), \overrightarrow{AC} = (1; 0; -5)$ Xét vector $\overrightarrow{n} = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = \begin{pmatrix} -1 & -7 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}; \begin{vmatrix} -7 & 4 \\ -5 & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = (5; 13; 1).$ Vậy $\vec{n} = (5; 13; 1)$ là một vecto pháp tuyến của mặt phẳng (α)
- b) Ta có $\overrightarrow{MN} = (-3; -1; 4), \overrightarrow{MP} = (-2; -3; -1; 4)$ Ta co MN = (-3, -1, 4), MI = (-2, -3, -1)Xét vecto $\vec{n} = [\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MP}] = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -3 & -1 \\ \end{bmatrix}; \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ -1 & -2 \\ \end{bmatrix}; \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ -2 & -3 \\ \end{bmatrix} = (13; -11; 7).$ Vây $\vec{n} = (13; -11; 7)$ là một vecto pháp tuyến

VÍ DỤ 5. Cho tứ diện ABCD có các đỉnh là A(5;1;3), B(1;6;2), C(5;0;4) và D(4;0;6). Gọi (α) là mặt phẳng chứa cạnh AB và song song với cạnh CD. Hãy tìm một điểm thuộc (α) và một vectơ pháp tuyến của (α) .

Ta có $\overrightarrow{AB} = (-4; 5; -1), \overrightarrow{CD} = (-1; 0; 2)$ nên $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$ không cùng phương.

Mà giá của \overrightarrow{AB} nằm trong mặt phẳng (α) và giá của \overrightarrow{CD} song song với mặt phẳng (α) nên \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{CD} là một cặp vectơ chỉ phương của mặt phẳng $(\alpha).$ Vậy một vecto pháp tuyến của (α) là

$$\vec{n} = \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD} \right] = \left(\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -1 & -4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -4 & 5 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \right)$$

$$= (5 \cdot 2 - 0 \cdot (-1); (-1) \cdot (-1) - 2 \cdot (-4); (-4) \cdot 0 - 5 \cdot (-1))$$

$$= (10; 9; 5).$$

2. Bài tập trắc nghiệm

CÂU 1. Cho mặt phẳng (α) : 2x - y + 3z - 2 = 0. Điểm nào sau đây thuộc mặt phẳng (α) ?

- (A) A(1; -3; 1).
- **B**) B(2;-1;-1).
- $(\mathbf{D}) D(1;2;3).$

Lời giải.

Thay tọa độ các điểm vào phương trình (α) , tọa độ B(2;-1;-1) thỏa mãn.

Chon đáp án B....

CÂU 2. Cho mặt phẳng (α) : x + y + z - 6 = 0. Điểm nào dưới đây **không** thuộc (α) ?

- (A) M(1;-1;1).
- **B** N(2;2;2).
- (c) P(1;2;3).
- $(\mathbf{D}) Q(3;3;0).$

🗭 Lời giải.

Ta có $1-1+1-6=-5\neq 0$ nên M(1;-1;1) không thuộc (α) .

Chọn đáp án $\stackrel{\frown}{A}$

CÂU 3. Cho (α) vuông góc với giá của $\vec{a} = (2; -1; 3)$. Vectơ nào dưới đây là vectơ pháp tuyến của (α) ?

- (A) $\vec{n_1} = (-2; 1; 3)$.
- **B**) $\overrightarrow{n_2} = (-2; 1; -3)$. **C**) $\overrightarrow{n_3} = (4; 2; 6)$.
- $\overrightarrow{\mathbf{D}}$ $\overrightarrow{n_4} = (4; -2; -6).$

🗭 Lời giải.

 (α) vuông góc với giá của $\overrightarrow{a}=(2;-1;3)$ nên \overrightarrow{a} là một vectơ pháp tuyến của (α) .

Do đó $\overrightarrow{n_2} = -\overrightarrow{a}$ cũng là một vectơ pháp tuyến của (α) .

Chọn đấp án (B)....

CÂU 4. vecto nào sau đây **không** phải là vecto pháp tuyến của mặt phẳng (P): x+3y-5z+2=0.

- (A) $\vec{n}_1 = (-1; -3; 5)$. (B) $\vec{n}_2 = (-2; -6; -10)$. (C) $\vec{n}_3 = (-3; -9; 15)$. (D) $\vec{n}_4 = (2; 6; -10)$.

🗭 Lời giải.

Mặt phẳng (P) nhận vecto $\vec{a} = (1; 3; -5)$ làm vecto pháp tuyến.

Xét $\vec{n}_2 = (-2; -6; -10)$ có $\frac{-2}{1} \neq \frac{-6}{3} \neq \frac{-10}{-5}$ nên \vec{n}_2 không cùng phương với \vec{a} .

Suy ra \overrightarrow{n}_2 không là vectơ pháp tuyến của (P).

Chọn đáp án (B).....

CÂU 5. Trong không gian Oxyz, mặt phẳng tọa độ (Oxy) có một vectơ pháp tuyến là

$$\vec{\mathbf{A}}$$
 $\vec{n} = (0; 1; 0).$

B
$$\vec{n} = (0; 0; 1).$$

$$\vec{n} = (1; 0; 0).$$

$$(\mathbf{D}) \vec{n} = (1; 1; 0).$$

🗭 Lời giải.

Mặt phẳng tọa độ (Oxy): $x = 0 \Rightarrow 1$ vecto pháp tuyến là $\vec{n} = (0;0;1)$.

Chọn đáp án (B)......

CÂU 6. Trong không gian Oxyz, cho điểm A(4; -3; 7) và B(2; 1; 3). Một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng trung trực của đoạn AB là

$$\vec{\mathbf{A}}$$
 $\vec{n} = (1; -2; 2).$

B)
$$\vec{n} = (2; 4; 4).$$

$$\vec{n} = (6; -2; 10).$$

$$\vec{n} = (-2; -4; 4).$$

🗭 Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB}(-2;4;-4)$ cùng phương với $\overrightarrow{n}=(1;-2;2)$. Suy ra $\overrightarrow{n}=(1;-2;2)$ là một vecto pháp tuyến.

Chon đáp án (A).....

CÂU 7. Trong không gian Oxyz, (P) là mặt phẳng trung trực của đoạn AB, biết A(1;3;0), B(-2;1;-1), vectơ nào sau đây là vecto pháp tuyến của (P)?

$$\vec{\mathbf{A}}$$
 $\vec{n}_4 = (3; -2; -1).$

(A)
$$\vec{n}_4 = (3; -2; -1)$$
. (B) $\vec{n}_2 = (-3; 2; -1)$. (C) $\vec{n}_3 = (-3; 4; 1)$. (D) $\vec{n}_1 = (3; 2; 1)$.

$$\vec{\mathbf{c}}$$
 $\vec{n}_3 = (-3; 4; 1).$

$$\vec{\mathbf{D}}$$
 $\vec{n}_1 = (3; 2; 1).$

🗭 Lời giải.

Mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{BA} = (3; 2; 1)$.

CÂU 8. Trong không gian Oxyz, vectơ nào sau đây là một vectơ pháp tuyến của (P). Biết $\vec{u}=(1;-2;0), \vec{v}=(0;2;-1)$ là cặp vectơ chỉ phương của (P).

$$\vec{\mathbf{A}} \ \vec{n} = (1; 2; 0).$$

$$\vec{n} = (2:1:2).$$

$$\vec{c}$$
 $\vec{n} = (2; -1; 2).$

$$\vec{n} = (0; 1; 2).$$

Lời giải.

Ta có (P) có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = [\vec{u}, \vec{v}] = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = (2; 1; 2).$

Chọn đáp án (B)...

CÂU 9. Trong không gian Oxyz, cho (α) song song với giá của $\vec{a} = (1; -2; -3), \vec{b} = (-4; 2; 0)$. Vectơ nào dưới đây **không phải** là vectơ pháp tuyến của (α) ?

$$\overrightarrow{\mathbf{A}} \ \overrightarrow{n_1} = (6; 12; -6).$$

B
$$\overrightarrow{n_2} = (1; 2; -1).$$

$$\vec{c} \vec{n_3} = (-2; -4; 2)$$

$$\overrightarrow{\mathbf{c}}$$
 $\overrightarrow{n_3} = (-2; -4; 2).$ $\overrightarrow{\mathbf{p}}$ $\overrightarrow{n_4} = (-3; -6; -3).$

🗭 Lời giải.

 (α) song song với giá của $\vec{a} = (1; -2; -3), \vec{b} = (-4; 2; 0)$ nên \vec{a}, \vec{b} là cặp vectơ chỉ phương của (α) . Một vecto pháp tuyến của mặt phẳng (α) là

$$\vec{n} = [\vec{a}, \vec{b}] = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}; \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 0 & -4 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -4 & 2 \end{vmatrix}$$
$$= (6:12:-6).$$

Ta có $\overrightarrow{n_1} = \overrightarrow{n}$; $\overrightarrow{n_2} = \frac{1}{6}\overrightarrow{n}$; $\overrightarrow{n_3} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{n}$ là các vectơ pháp tuyến của (α) .

Vây $\overrightarrow{n_4} = (-3, -6, -3)$ không phải là vectơ pháp tuyến của (α) .

Chon đáp án \bigcirc D.......

CÂU 10. Trong không gian Oxyz, cho ba điểm A(2;0;0), B(0;-3;0), C(0;0;6). Tọa độ một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (ABC) là

$$\vec{n} = (1; -2; 3).$$

B
$$\vec{n} = (3; 2; 1).$$

$$\vec{c}$$
 $\vec{n} = (3; -2; 1).$

$$\mathbf{D} \vec{n} = (2; -3; 6).$$

🗭 Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (-2; -3; 0) \overrightarrow{AC} = (0; 3; 6).$

 \Rightarrow vecto pháp tuyến của mặt phẳng (ABC) là $\overrightarrow{v} = |\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}| = (-18; 12; -6).$

Ta có $\vec{v} = (-18; 12; -6)$ cùng phương với $\vec{n} = (3; -2; 1)$.

Chọn đáp án \bigcirc **CÂU 11.** Trong không gian Oxyz, cho ba điểm A(2;-1;3), B(4;0;1) và C(-10;5;3). vectơ nào dưới đây là vectơ pháp tuyến

 $\vec{n} = (1; 2; 0).$

của mặt phẳng (ABC)?

$$\vec{n} = (1; -2; 2).$$

$$\vec{c}$$
 $\vec{n} = (1; 8; 2).$

$$\vec{n} = (1; 2; 2).$$

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(2;1;-2),$ $\overrightarrow{AC}=(-12;6;0),$ $\left \lceil \overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC} \right \rceil =(12;24;24).$

 \Rightarrow (ABC) có một vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n} = \frac{1}{12} \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \right] = (1; 2; 2).$

CÂU 12. Trong không gian Oxyz, cho hai điểm A(2;-1;5), B(1;-2;3). Mặt phẳng (α) đi qua hai điểm A,B và song song với trực Ox có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n}=(0;a;b)$. Khi đó tỉ số $\frac{a}{b}$ bằng

$$\bigcirc$$
 -2 .

$$\bigcirc$$
 $-\frac{3}{2}$

$$\frac{3}{2}$$
.

🗭 Lời giải.

 $\overrightarrow{BA} = (1;1;2); \overrightarrow{i} = (1;0;0)$ là vecto đơn vị của trục Ox.

Vì (α) đi qua hai điểm A, B và song song với trực Ox nên $\left[\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{i}\right] = (0; 2; -1)$ là một vectơ pháp tuyến của (α) . Do đó $\frac{a}{b} = -2$.

Chọn đáp án iga(A).....

2

Lập phương trình mặt phẳng khi biết các yếu tố liên quan

$$(P): a(x-x_0) + b(y-y_0) + c(z-z_0) = 0$$

- Một số cách xác định vectơ pháp tuyến thường gặp:
 - ① Nếu $(P) \perp AB$ thì $\overrightarrow{n_P} = \overrightarrow{AB}$;
 - ② Nếu (P) là mặt phẳng trung trực của đoạn AB thì (P) qua trung điểm I của AB và $\overrightarrow{n_P} = \overrightarrow{AB}$;
 - 3 Nếu (P) có cặp vectơ chỉ phương \overrightarrow{u} , \overrightarrow{v} thì $\overrightarrow{n_P} = [\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}]$ là một vectơ pháp tuyến của (P).
 - 4 Nếu (P) qua ba điểm A, B, C phân biệt và không thẳng hàng thì $\overrightarrow{n_P} = \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right]$;
 - ⑤ Nếu (P) qua hai điểm A, B phân biệt và song song với d thì $\overrightarrow{n_P} = \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{u_d}\right]$;
 - ® Nếu (P) qua điểm A và chứa d thì $\overrightarrow{n_P} = \left[\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{u_d}\right]$, với $M \in d$.
- Phương trình theo đoạn chắn: Cho (P) đi qua A(a;0;0), B(0;b;0), C(0;0;c) với $abc \neq 0$ thì (P): $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ (phương trình theo đoạn chắn)

1. Ví dụ minh hoạ

VÍ DỤ 1. Trong không gian Oxyz, cho ba điểm $A(3;-2;-2),\ B(3;2;0),\ C(0;2;1).$

- a) Lập phương trình mặt phẳng qua A và vuông góc với BC.
- b) Lập phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn AB.
- c) Lập phương trình mặt phẳng (ABC).

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (0; 4; 2)$, $\overrightarrow{AC} = (-3; 4; 3)$ là cặp vectơ chỉ phương của (ABC). $\overrightarrow{n} = \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] = (4; -6; 12)$.

Chọn $\vec{n}_1 = \frac{1}{2}\vec{n} = (2; -3; 6)$ là một vectơ pháp tuyến của (ABC).

Mặt phẳng (ABC) đi qua điểm C(0;2;1) và có một vectơ pháp tuyến $\vec{n}_1 = (2;-3;6)$ nên (ABC) có phương trình là

$$2(x-0) - 3(y-2) + 6(z-1) = 0 \Leftrightarrow 2x - 3y + 6z = 0.$$

Vậy phương trình mặt phẳng cần tìm là 2x - 3y + 6z = 0.

VÍ DỤ 2. Cho tứ diện ABCD có các đỉnh A(5;1;3), B(1;6;2), C(5;0;4), D(4;0;6).

- a) Hãy viết phương trình của các mặt phẳng (ACD) và (BCD);
- b) Hãy viết phương trình mặt phẳng (α) chứa cạnh AB và song song với cạnh CD;
- c) Gọi A', B', C' lần lượt là hình chiếu vuông góc của A, B, C lên các trục Ox, Oy, Oz. Hãy viết phương trình mặt phẳng (A'B'C').

🗭 Lời giải.

- a) Ta có $\overrightarrow{AC} = (0; -1; 1), \overrightarrow{AD} = (-1; -1; 3), \overrightarrow{BC} = (4; -6; 2), \overrightarrow{BD} = (4; -6; 4).$
 - $oldsymbol{\Theta}$ Mặt phẳng (ACD) qua A(5;1;3) và có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n}=\left[\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right]=(-2;-1;-1)$ có phương trình là $-2(x-5)-(y-1)-(z-3)=0 \Leftrightarrow 2x+y+z-14=0.$
 - **②** Mặt phẳng (BCD) qua B(1;6;2) và có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n} = \left[\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}\right] = (-12; -8;0)$ có phương trình là $-12(x-1) 8(y-6) 0(z-3) = 0 \Leftrightarrow 3x + 2y 15 = 0.$
- b) Ta có $\overrightarrow{AB} = (-4; 5; -1)$, $\overrightarrow{CD} = (-1; 0; 2)$. Mặt phẳng (α) chứa cạnh AB và song song với cạnh CD qua A(5; 1; 3) và có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n} = \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right] = (10; 9; 5)$ có phương trình là

$$10(x-5) + 9(y-1) + 5(z-3) = 0 \Leftrightarrow 10x + 9y + 5z - 74 = 0.$$

c) Ta có A'(5;0;0), B'(0;6;0), C'(0;0;4). Phương trình mặt phẳng (A'B'C') là

$$\frac{x}{5} + \frac{y}{6} + \frac{z}{4} = 1.$$

VÍ DU 3. Viết phương trình của mặt phẳng

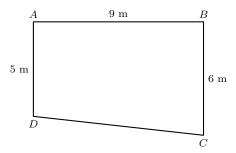
a) Chứa trục Ox và điểm M(-4;1;2);

b) Chứa trục Oz và điểm P(3;0;-7).

🗩 Lời giải.

- a) Mặt phẳng (P) chứa trục Ox và điểm M(-4;1;2) nên có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n} = \begin{bmatrix} \overrightarrow{i}, \overrightarrow{OM} \end{bmatrix} = (0;-2;1)$, phương trình của (P) là -2y + z = 0.
- b) Mặt phẳng (R) chứa trục Oz và điểm P(3;0;-7) nên có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n} = \left[\overrightarrow{k},\overrightarrow{OP}\right] = (0;3;0)$, phương trình của (R) là y=0.

VÍ DỤ 4. Một phần sân nhà bác An có dạng hình thang ABCD vuông tại A và B với độ dài AB = 9 m, AD = 5 m và BC = 6 m như Hình bên dưới. Theo thiết kế ban đầu thì mặt sân bằng phẳng và A, B, C, D có độ cao như nhau. Sau đó bác An thay đổi thiết kế để nước có thể thoát về phía góc sân ở vị trí C bằng cách giữ nguyên độ cao ở A, giảm độ cao của sân ở vị trí B và D xuống thấp hơn độ cao ở A lần lượt là 6 cm và 3,6 cm. Để mặt sân sau khi lát gạch vẫn là bề mặt phẳng thì bác An cần phải giảm độ cao ở C xuống bao nhiều centimét so với độ cao ở A?



Lời giải.

Tại vị trí ban đầu A, B, C, D có độ cao như nhau, chọn hệ trục tọa độ có gốc tọa độ là điểm A và các trục tọa độ lần lượt là AD, AB và Az, với $Az \perp (ABCD)$.

Khi đó A(0;0;0), D(5;0;0), B(0;9;0), C(6;9;0).

Sau đó bác An thay đổi thiết kế để nước có thể thoát về phía góc sân ở vị trí C bằng cách giữ nguyên độ cao ở A, giảm độ cao của sân ở vị trí B và D xuống thấp hơn độ cao ở A lần lượt là 6 cm và 3,6 cm.

Khi đó, A(0;0;0), D(5;0;-3,6), B(0;9;-6).

Ta có $\overrightarrow{AB} = (0; 9; -6)$, $\overrightarrow{AD} = (5; 0; -3, 6)$ là cặp vectơ chỉ phương của mặt phẳng (ABD) nên một vectơ pháp tuyến của (ABD) là $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}] = (-32, 4; -30; -45)$.

Vậy mặt phẳng (ABD) qua A(0;0;0) và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(-32,4;-30;-45)$ nên có phương trình là

$$-32,4(x-2)-30(y+1)-45(z-3)=0$$
 hay $-32,4x-30y-45z=0$.

Để mặt sân sau khi lát gạch vẫn là bề mặt phẳng thì bác An cần phải giảm độ cao ở C xuống k centimét so với độ cao ở A nên suy ra C(6;9;-k).

Ta có A, B, C, D đồng phẳng

$$\Leftrightarrow C \in (ABD)$$

$$\Leftrightarrow -32.4 \cdot 6 - 30 \cdot 9 - 45 \cdot (-k) = 0$$

$$\Leftrightarrow k = 10,32.$$

Vậy bác An cần phải giảm độ cao ở C xuống 10,32 centimét so với độ cao ở A.

2. Bài tập trắc nghiệm

CÂU 1. Phương trình mặt phẳng đi qua điểm A(1;2;3) và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(-2;0;1)$ là

$$\bigcirc$$
 $-2x + z + 1 = 0.$

$$\bigcirc$$
 $-2x + z - 1 = 0.$ \bigcirc $-2x + y - 1 = 0.$

$$\bigcirc -2x + y - 1 = 0$$

🗭 Lời giải.

Phương trình của mặt phẳng cần tìm là $-2(x-1) + 0(y-2) + 1(z-3) = 0 \Leftrightarrow -2x + z - 1 = 0$.

Chon đáp án C

CÂU 2. Phương trình nào được cho dưới đây là phương trình mặt phẳng (Oyz)?

B)
$$y - z = 0$$
.

$$\bigcirc$$
 $x=0.$

🗭 Lời giải.

Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, phương trình của mặt phẳng (Oyz) là x=0.

Chọn đáp án \bigcirc

CÂU 3. Cho các điểm A(0;1;2), B(2;-2;1), C(-2;0;1). Phương trình mặt phẳng đi qua A và vuông góc với BC là

$$(A)$$
 $2x - y - 1 = 0.$

(B)
$$-y + 2z - 3 = 0$$
. **(C)** $2x - y + 1 = 0$. **(D)** $y + 2z - 5 = 0$.

$$(c)$$
 $2x - y + 1 = 0$

$$(\mathbf{D}) y + 2z - 5 = 0$$

Lời aiải.

Ta có
$$\overrightarrow{n} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = (-2; 1; 0).$$

Vậy phương trình mặt phẳng đi qua A và vuông góc với BC có dạng $-2(x-0)+1(y-1)=0 \Leftrightarrow -2x+y-1=0$ $\Leftrightarrow 2x - y + 1 = 0.$

Chọn đáp án \bigcirc

CÂU 4. Cho hai điểm A(4;0;1) và B(-2;2;3). Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB?

(B)
$$3x + y + z - 6 = 0$$
. **(C)** $3x - y - z = 0$.

$$\bigcirc$$
 $6x - 2y - 2z - 1 = 0.$

🗭 Lời giải.

Gọi (α) là mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB. Khi đó (α) đi qua điểm M(1;1;2), là trung điểm của AB, và nhận AB = (-6, 2, 2) làm vecto pháp tuyến. Phương trình của mặt phẳng (α) là

$$-6(x-1) + 2(y-1) + 2(z-2) = 0 \Leftrightarrow -6x + 2y + 2z = 0 \Leftrightarrow 3x - y - z = 0.$$

CÂU 5. Trong không gian Oxyz, cho hai điểm A(1;1;1) và B(1;3;5). Viết phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn AB.

A
$$y - 2z - 6 = 0$$
.

B
$$y - 2z + 2 = 0$$
.

c
$$y - 3z + 4 = 0$$

D Lời giải.

Ta có I(1;2;3) là trung điểm của đoạn AB.

Mặt phẳng trung trưc của đoạn thẳng AB đi qua I và có vecto pháp tuyến $\overrightarrow{AB} = (0; 2; 4) = 2(0; 1; 2)$, suy ra phương trình mặt phẳng trung trực cần tìm là

$$0(x-1) + 1(y-2) + 2(z-3) = 0 \Leftrightarrow y + 2z - 8 = 0.$$

Chon đáp án (D).......

CÂU 6. Trông không gian Oxyz, phương trình mặt phẳng (P) đi qua A(0;-1;4) và song song với giá của hai vecto $\overrightarrow{u}=$ $(3;2;1), \vec{v} = (-3;0;1)$ là

B
$$x - 2y + 3z - 14 = 0$$
. **C** $x - y - z + 3 = 0$. **D** $x - 3y + 3z - 9 = 0$.

$$\bigcirc x - y - z + 3 = 0$$

🗭 Lời giải.

Mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến là $[\vec{u}; \vec{v}] = (2; -6; 6)$. Hay (P) có vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (1; -3; 3)$. Phương trình mặt phẳng (P) là

$$1 \cdot (x-0) - 3 \cdot (y+1) + 3 \cdot (z-4) = 0$$
 hav $(P): x-3y+3z-15 = 0$.

Chọn đáp án $\stackrel{\frown}{A}$

CÂU 7. Trong không gian Oxyz, cho ba điểm A(3;-2;-2), B(3;2;0), C(0;2;1). Phương trình mặt phẳng (ABC) là

$$2x - 3y + 6z + 12 = 0.$$

(A)
$$2x - 3y + 6z + 12 = 0$$
. **(B)** $2x + 3y - 6z - 12 = 0$. **(C)** $2x - 3y + 6z = 0$.

$$2x - 3y + 6z = 0$$

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (0; 4; 2)$, $\overrightarrow{AC} = (-3; 4; 3)$ là cặp vectơ chỉ phương của (ABC). $\vec{n} = \left| \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \right| = (4; -6; 12).$

Chọn $\vec{n}_1 = \frac{1}{2}\vec{n} = (2; -3; 6)$ là một vectơ pháp tuyến của (ABC).

Mặt phẳng (ABC) đi qua điểm C(0;2;1) và có một vecto pháp tuyến $\vec{n}_1 = (2;-3;6)$ nên (ABC) có phương trình là

$$2(x-0) - 3(y-2) + 6(z-1) = 0 \Leftrightarrow 2x - 3y + 6z = 0.$$

Vậy phương trình mặt phẳng cần tìm là 2x - 3y + 6z = 0.

CÂU 8. Trong không gian với hệ trục toạ độ Oxyz, cho ba điểm A(1;0;0), B(0;-1;-1), C(5;-1;1). Mặt phẳng (ABC) có phương trình là

(A)
$$2x + 3y + 5z - 2 = 0$$
. (B) $2x - 3y - 5z - 2 = 0$. (C) $2x - 3y - 5z + 2 = 0$. (D) $2x + 3y - 5z - 2 = 0$.

$$\bigcirc 2x - 3y - 5z + 2 = 0$$

$$2x + 3y - 5z - 2 = 0.$$

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (-1; -1; -1), \overrightarrow{AC} = (4; -1; 1)$ nên vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (ABC) là $\overrightarrow{n} = [\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}] = (2; 3; -5),$ mà mặt phẳng (ABC) đi qua A(1;0;0) nên có phương trình là 2x + 3y - 5z - 2 = 0.

Chọn đáp án \bigcirc D..... \square

CÂU 9. Mặt phẳng (α) đi qua A(-1;4;-6) và chứa trục Oy có phương trình là

$$\bigcirc A -2x + y + z = 0.$$

©
$$3x - y - 6z + 1 = 0$$
. **D** $6x - z = 0$.

$$\bigcirc 6x - z = 0.$$

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{OA} = (-1; 4; -6)$, $\overrightarrow{j} = (0; 1; 0)$ song song hoặc trùng với (α) . Nên \overrightarrow{OA} và \overrightarrow{j} là cặp vectơ chỉ phương của (α) .

Xét vecto $\overrightarrow{n} = [\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{j}] = \left(\left| \begin{array}{cc} 4 & -6 \\ 1 & 0 \end{array} \right|; \left| \begin{array}{cc} -6 & -1 \\ 0 & 0 \end{array} \right|; \left| \begin{array}{cc} -1 & 4 \\ 0 & 1 \end{array} \right| \right) = (6; 0; -1).$

Do đó $\vec{n} = (6; 0; -1)$ là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (α) .

Phương trình mặt phẳng (α) là 6x - z = 0.

Chon đáp án (D).....

CÂU 10. Trong không gian Oxyz, mặt phẳng chứa trục Ox và đi qua điểm A(1;1;-1) có phương trình là

B
$$z + 1 = 0$$
.

🗭 Lời giải.

Gọi \vec{n} là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) chứa trục Ox và đi qua điểm A(1;1;-1).

 $\int \vec{n} \perp O\vec{A} = (1; 1; -1)$

Chọn một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) là $\overrightarrow{n} = [\overrightarrow{i}, \overrightarrow{OA}] = (0; 1; 1)$.

Vậy phương trình mặt phẳng là y + z = 0.

Chọn đáp án (A)...... **CÂU 11.** Trong không gian Oxyz, cho ba điểm A(2;1;1), B(3;0;-1), C(2;0;3). Mặt phẳng (α) đi qua hai điểm A,B và song song với đường thẳng OC có phương trình là

$$\bigcirc x - y + z - 2 = 0$$

A
$$3x + y - 2z - 5 = 0$$
. **B** $4x + 2y + z - 11 = 0$. **C** $x - y + z - 2 = 0$. **D** $3x + 7y - 2z - 11 = 0$.

🗭 Lời giải.

Gọi \overrightarrow{n} là vtpt của mặt phẳng (α) .

 $\text{Ta c\'o} \begin{cases} AB \subset (\alpha) \\ OC \not\parallel (\alpha) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{n} \perp \overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{n} \perp \overrightarrow{OC} \end{cases} \quad \text{n\'en } \overrightarrow{n} \text{ cùng phương với } \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{OC}.$

Ta có $\overrightarrow{AB} = (1; -1; -2), \ \overrightarrow{OC} = (2; 0; 3) \Rightarrow \overrightarrow{AB} \land \overrightarrow{OC} = (-3; -7; 2) = (-1) \cdot (3; 7; -2).$ Ta chọn $\overrightarrow{n} = (3; 7; -2).$ Phương trình mặt phẳng (α) là: 3x + 7y - 2z - 11 = 0.

Chon đáp án (D)....

CÂU 12. Mặt phẳng đi qua hai điểm A(1;2;-1), B(0;4;3) và song song với trục Oz có phương trình là

B
$$4x - 4y + 3z + 7 = 0$$
. **c** $x + 2y - 5 = 0$.

$$x + 2y - 5 = 0$$

🗭 Lời giải.

 $\overrightarrow{AB} = (-1; 2; 4), \ \overrightarrow{k} = (0; 0; 1).$ vectơ pháp tuyến của mặt phẳng cần tìm là $\overrightarrow{n} = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{k}] = (2; 1; 0).$

Mặt phẳng qua A(1;2;-1), nhận $\vec{n}=(2;1;0)$ làm vectơ pháp tuyến có phương trình là

$$2(x-1) + 1(y-2) + 0(z+1) = 0 \Leftrightarrow 2x + y - 4 = 0.$$

CÂU 13. Cho điểm M(1;2;-3). Gọi $M_1,\ M_2,\ M_3$ lần lượt là hình chiếu vuông góc của M lên trực $Ox,\ Oy,\ Oz$. Phương trình mặt phẳng đi qua ba điểm $M_1,\,M_2,\,M_3$ là

$$\mathbf{A} x + \frac{y}{2} - \frac{z}{3} = 1$$

$$(c)$$
 $x + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 1$

(A)
$$x + \frac{y}{2} - \frac{z}{3} = 1$$
. (B) $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} + \frac{z}{1} = 1$. (C) $x + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 1$.

🗭 Lời giải.

Ta có $M_1(1;0;0)$, $M_2(0;2;0)$, $M_3(0;0;-3)$.

Phương trình mặt phẳng đi qua M_1 , M_2 , M_3 là $x + \frac{y}{2} - \frac{z}{3} = 1$.

Chọn đáp án (A).....

CÂU 14. Mặt phẳng nào sau đây cắt các trục Ox, Oy, Oz lần lượt tại các điểm A, B, C sao cho tam giác ABC nhận điểm G(1;2;1) là trọng tâm?

B
$$2x + y + 2z - 6 = 0$$
.

B
$$2x + y + 2z - 6 = 0$$
. **C** $2x + 2y + z - 6 = 0$.

CÂU 15. Cho mặt phẳng (P) đi qua điểm M(2; -4; 1) và chắn trên các trục tọa độ Ox, Oy, Oz theo ba đoạn có độ dài đại số lần lượt là a, b, c. Phương trình tổng quát của mặt phẳng (P) khi a, b, c theo thứ tự tạo thành một cấp số nhân có công bội bằng 2 là

$$A) 4x + 2y - z - 1 = 0$$

B)
$$4x - 2y + z + 1 = 0$$
.

(A)
$$4x + 2y - z - 1 = 0$$
. (B) $4x - 2y + z + 1 = 0$. (C) $16x + 4y - 4z - 1 = 0$. (D) $4x + 2y + z - 1 = 0$.

Lời giải.

Do giả thiết suy ra $a, b, c \neq 0$ và b = 2a, c = 2b. Giả sử A(a; 0; 0), B(0; b; 0) và C(0; 0; c) khi đó phương trình mặt phẳng $(P): \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$. Do M thuộc (P) nên

$$\frac{2}{a} - \frac{4}{b} + \frac{1}{c} = 1 \Leftrightarrow \frac{2}{a} - \frac{4}{2a} + \frac{1}{4a} = 1 \Leftrightarrow a = \frac{1}{4}.$$

Suy ra $b = \frac{1}{2}$ và c = 1 do đó phương trình mặt phẳng (P): 4x + 2y + z - 1 = 0.

3 Vi trí tương đối của hai mặt phẳng

Cho hai mặt phẳng (P): $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ và (Q): $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$.

- 3 Nếu $\overrightarrow{n_1}$ không cùng phương với $\overrightarrow{n_2}$ thì (P) cắt (Q).
- ① Nếu $\overrightarrow{n_1} \perp \overrightarrow{n_2}$ hay $a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$ thì $(P) \perp (Q)$.

1. Ví du minh hoa

VÍ DU 1. Tìm các cặp mặt phẳng song song hoặc vuông góc trong các mặt phẳng sau

$$(P): 2x + 3y - 2z + 7 = 0$$

$$(Q) \colon 3x - 2y - 11 = 0$$

$$(R)$$
: $4x + 6y - 4z - 9 = 0$

$$(T)$$
: $7x + y - z + 1 = 0$

🗭 Lời giải.

Các mặt phẳng (P), (Q), (R), (T) có các vectơ pháp tuyến lần lượt là $\vec{n}_1 = (2; 3; -2), \vec{n}_2 = (3; -2; 0), \vec{n}_3 = (4; 6; -4),$

Ta có $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 2 \cdot 3 + 3 \cdot (-2) + (-2) \cdot 0 = 0$, suy ra $(P) \perp (Q)$. Vì $\frac{4}{2} = \frac{6}{3} = \frac{-4}{-2} \neq \frac{-9}{7}$ nên $(P) \not\parallel (R)$.

Vì
$$\frac{4}{2} = \frac{6}{3} = \frac{-4}{-2} \neq \frac{-9}{7}$$
 nên $(P) \# (R)$.

Ta lại có $(P) \perp (Q)$ và (P) # (R), suy ra $(Q) \perp (R)$.

Ta có $\frac{2}{7} \neq \frac{3}{1}$ suy ra \vec{n}_2 và \vec{n}_4 không cùng phương.

Mặt khác, $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_4 = 2 \cdot 7 + 3 \cdot 1 + (-2) \cdot (-1) = 19 \neq 0$. Suy ra (P) và (T) cắt nhau nhưng không vuông góc. Tương tự, ta cũng có (Q) và (T) cắt nhau nhưng không vuông góc.

VI DU 2. Trong không gian Oxyz, cho mặt phẳng (α) : 2x - 3y + z + 5 = 0.

- a) Chứng minh rằng mặt phẳng (α') : -4x + 6y 2z + 7 = 0 song song với (α) .
- b) Viết phương trình mặt phẳng (β) đi qua điểm M(1; -2; 3) và song song với (α) .

Lời giải.

- a) Xét (α) : 2x 3y + z + 5 = 0 và (α') : -4x + 6y 2z + 7 = 0. Ta có $\frac{2}{-4} = \frac{-3}{6} = \frac{1}{-2} \neq \frac{5}{7}$ nên (α) // (α') .
- b) Mặt phẳng (α) có vecto pháp tuyến $\vec{n} = (2; -3; 1)$. Vì (β) // (α) nên (β) có vecto pháp tuyến $\vec{n} = (2; -3; 1)$. Vây mặt phẳng (β) đi qua điểm M(1;-2;3) và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(2;-3;1)$ nên có phương trình là

$$2(x-1) - 3(y+2) + (z-3) = 0$$
 hay $2x - 3y + z - 11 = 0$.

VÍ DU 3. Trong không gian Oxyz, cho hai mặt phẳng (Q): x+y+3z=0, (R): 2x-y+z=0.

- a) Xét vị trí tương đối của (Q) và (R);
- b) Viết trình của mặt phẳng (P) đi qua điểm B(2;1;-3), đồng thời vuông góc với (Q) và (R).

Lời giải.

vecto pháp tuyến (P) là $n_{\vec{P}} = |n_{\vec{Q}}, n_{\vec{R}}| = (4; 5; -3).$

Phương trình mặt phẳng (P) là $4(x-2) + 5(y-1) - 3(z+3) = 0 \Leftrightarrow 4x + 5y - 3z - 22 = 0$.

VÍ DỤ 4. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai điểm A(-2;4;-1), B(1;1;3) và mặt phẳng (P) có phương trình x-3y+2z-5=0. Viết phương trình mặt phẳng (Q) đi qua hai điểm A, B và vuông góc với mặt phẳng (P). 🗭 Lời giải.

$$\overrightarrow{AB} = (3; -3; 4)$$

 $\overrightarrow{n}_{(P)} = (1; -3; 2)$ $\Rightarrow [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{n}_{(P)}] = (6; -2; -6) = 2(3; -1; -3).$

Mặt phẳng (Q) đi qua điểm A và có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n}_{(Q)}=(3;-1;-3)$ có phương trình

$$3(x+2) - (y-4) - 3(z+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow 3x - y - 3z + 7 = 0.$$

2. Bài tập trắc nghiệm

CÂU 1. Cho mặt phẳng (P): -x+y+3z+1=0. Mặt phẳng song song với mặt phẳng (P) có phương trình nào sau đây?

🗭 Lời giải.

vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) là $\vec{n} = (-1;1;3)$ cùng phương với vectơ $\vec{n} = (2;-2;-6)$. Vì $\frac{2}{-1} \neq \frac{7}{1}$ nên phương trình mặt phẳng song song với (P) là 2x - 2y - 6z + 7 = 0.

Chọn đáp án (A).....

CÂU 2. Cho hai mặt phẳng (P): 2x + 4y + 3z - 5 = 0 và (Q): mx - ny - 6z + 2 - 0. Giá trị của m, n sao cho (P) // (Q) là

(A)
$$m = 4; n = -8.$$
 (B) $m = n = 4.$ (C) $m = -4; n = 8.$

🗭 Lời giải.

(P) có vecto chỉ phương $\overrightarrow{u}_{(P)}=(2;4;3),\,(Q)$ có vecto chỉ phương $\overrightarrow{u}_{(Q)}=(m;-m;1)$

Để hai mặt phẳng trên song song thì $\overrightarrow{u}_{(Q)} = k \overrightarrow{u}_{(P)} (k \neq 0) \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2k \\ -n = 4k \Rightarrow \\ -6 = 3k \end{cases} \begin{cases} k = -2 \\ m = -4 \\ n = 8 \end{cases}$

CÂU 3. Cho hai mặt phẳng (P): x + my + (m-1)z + 1 = 0 và (Q): x + y + 2z = 0. Tập hợp tất cả các giá trị m để hai mặt phẳng này **không** song song là

$$(0; +\infty).$$

$$\blacksquare \mathbb{R} \setminus \{-1; 1; 2\}.$$
 $\bigcirc (-\infty; 3).$

$$\bigcirc$$
 $(-\infty;3)$

$$lackbox{D} \mathbb{R}$$
.

🗭 Lời giải.

Ta có $A(0;0;0) \in (Q$

 $(P) \# (Q) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{1} = \frac{m}{1} = \frac{m-1}{2} \\ A(0;0;0) \notin (P) \end{cases}. \text{ Hệ này vô nghiệm. Do đó } (P) \text{ không song song với } (Q), \text{ với mọi giá trị của } m.$

CÂU 4. Cho mặt phẳng (α) : x + y + z - 1 = 0. Trong các mặt phẳng sau, tìm mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng (α) .

$$(A)$$
 $2x - y + z + 1 = 0.$

B
$$2x - y - z + 1 = 0$$
.

©
$$2x + 2y + 2z - 1 = 0$$
. **D** $x - y - z + 1 = 0$.

🗭 Lời giải.

Mặt phẳng (α) có $\overrightarrow{n}_{(\alpha)} = (1;1;1)$.

Mặt phẳng 2x - y - z + 1 = 0 có vectơ pháp tuyến $\vec{n}_1 = (2; -1; -1) \Rightarrow \vec{n}_{(\alpha)} \cdot \vec{n}_1 = 0$ nên mặt phẳng (α) vuông góc với mặt phẳng 2x - y - z + 1 = 0.

Chọn đáp án \fbox{B}

CÂU 5. Cho mặt phẳng (P): 2x - y + 2z - 3 = 0 và (Q): x + my + z - 1 = 0. Tìm tham số m để hai mặt phẳng P và Qvuông góc với nhau.

$$\bigcirc M = -4.$$

B
$$m = -\frac{1}{2}$$
. **C** $m = \frac{1}{2}$.

$$\bigcirc m = \frac{1}{2}.$$

$$\bigcirc m = 4.$$

D Lời giải.

Mặt phẳng (P) và (Q) có vectơ pháp tuyến lần lượt là $\vec{n}_1 = (2; -1; 2)$ và $\vec{n}_2 = (1; m; 1)$. Do đó $(P) \perp (Q) \Leftrightarrow \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0 \Leftrightarrow 2 - m + 2 = 0 \Leftrightarrow m = 4.$

Chon đáp án (D).

CÂU 6. Cho hai mặt phẳng (P): x + 2y - z - 1 = 0, (Q): 3x - (m+2)y + (2m-1)z + 3 = 0. Tìm m để hai mặt phẳng (P)va (Q) vuông góc với nhau.

$$(\mathbf{A}) m = 0.$$

$$(\mathbf{B}) m = 2.$$

$$(c) m = -2.$$

$$(D) m = -1.$$

🗩 Lời giải.

vectơ pháp tuyến của (P), (Q) lần lượt là $\overrightarrow{n}_P = (1;2;-1)$ và $\overrightarrow{n}_Q = (3;-m-2;2m-1)$. $(P)\perp (Q) \Leftrightarrow \overrightarrow{n}_P \cdot \overrightarrow{n}_Q = 0 \Leftrightarrow 3-2(m+2)-2m+1 = 0 \Leftrightarrow m=0.$

Chọn đấp án (A)....

CÂU 7. Mặt phẳng đi qua A(1;3;-2) và song song với mặt phẳng (P): 2x-y+3z+4=0 có phương trình là

$$2x - y + 3z + 7 = 0.$$

$$2x + y - 3z + 7 = 0$$

(B)
$$2x - y + 3z - 7 = 0$$
. **(C)** $2x + y - 3z + 7 = 0$. **(D)** $2x + y + 3z + 7 = 0$.

D Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{n} = \overrightarrow{n_{(P)}} = (2; -1; 3)$. Khi đó phương trình mặt phẳng qua A(1; 3; -2) và song song (P) là

$$2(x-1) - 1(y-3) + 3(z+2) = 0 \Leftrightarrow 2x - y + 3z + 7 = 0.$$

Chọn đáp án (A).......

CÂU 8. Cho điểm A(2;-1;-3) và mặt phẳng (P): 3x-2y+4z-5=0. Mặt phẳng (Q) đi qua A và song song với mặt phẳng (P) có phương trình là

(A)
$$(Q)$$
: $3x - 2y + 4z + 4 = 0$.

B) (Q):
$$3x + 2y + 4z + 8 = 0$$
.

$$(\mathbf{C})(Q): 3x - 2y + 4z + 5 = 0.$$

$$(Q): 3x - 2y + 4z - 4 = 0.$$

🗭 Lời giải.

Do mặt phẳng (Q) song song với mặt phẳng (P) nên có vecto pháp tuyến là $\vec{n} = (3; -2; 4)$. Phương trình mặt phẳng $(Q): 3(x-2) - 2(y+1) + 4(z+3) = 0 \Leftrightarrow 3x - 2y + 4z + 4 = 0.$

CÂU 9. Cho mặt phẳng (P) đi qua các điểm A(-2;0;0), B(0;3;0), C(0;0;-3). Mặt phẳng (P) vuông góc với mặt phẳng nào trong các mặt phẳng sau?

(A)
$$2x + 2y - z - 1 = 0$$
.

B)
$$x + y + z + 1 = 0$$
.

©
$$3x - 2y + 2z + 6 = 0$$
. **D** $x - 2y - z - 3 = 0$.

$$(\mathbf{D}) x - 2y - z - 3 = 0$$

🗭 Lời giải.

Mặt phẳng (P): $\frac{x}{-2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{-3} = 1$ hay (P): 3x - 2y + 2z + 6 = 0 có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (3; -2; 2)$.

Ta có $3 \cdot 2 - 2 \cdot 2 - 2 \cdot 1 = 0$ nên (P) vuông góc với mặt phẳng 2x + 2y - z - 1 = 0.

Chon đấp án (A)....

CÂU 10. Mặt phẳng qua A(1;2;-1) và vuông góc với các mặt phẳng (P): 2x-y+3z-2=0; (Q): x+y+z-1=0 có phương trình là

(A)
$$x - y + z + 2 = 0$$
.

(B)
$$4x - y + z - 1 = 0$$
. **(C)** $x + y + 2z - 1 = 0$. **(D)** $4x - y - 3z - 5 = 0$.

(c)
$$x + y + 2z - 1 = 0$$
.

D)
$$4x - y - 3z - 5 = 0$$
.

Lời giải.

vecto pháp tuyến của mặt phẳng (P) và (Q) lần lượt là $\overrightarrow{n_1} = (2; -1; 3)$ và $\overrightarrow{n_2} = (1; 1; 1)$.

Ta có $[\overrightarrow{n_1}; \overrightarrow{n_2}] = (-4; 1; 3)$. Mặt phẳng cần tìm qua A(1; 2; -1) và có vecto pháp tuyến là $\overrightarrow{n} = (-4; 1; 3)$ nên có phương trình

là

$$-4 \cdot (x-1) + 1 \cdot (y-2) + 3 \cdot (z+1) = 0 \Leftrightarrow 4x - y - 3z - 5 = 0.$$

Chon đáp án (D).....

CÂU 11. Cho hai mặt phẳng (P), (Q) lần lượt có phương trình là x+y-z=0, x-2y+3z=4 và cho điểm M(1;-2;5). Tìm phương trình mặt phẳng (α) đi qua điểm M và đồng thời vuông góc với hai mặt phẳng (P), (Q).

B
$$x - 4y - 3z + 6 = 0$$
. **C** $x - 4y - 3z - 6 = 0$. **D** $5x + 2y - z + 4 = 0$.

🗭 Lời giải.

Ta có $\vec{n}_{(P)} = (1; 1; -1)$ và $\vec{n}_{(Q)} = (1; -2; 3)$.

Suy ra $[\vec{n}_{(P)}, \vec{n}_{(Q)}] = (1; -4; -3).$

Do (α) vuông góc với (P) và (Q) nên $\begin{cases} \overrightarrow{n}_{(\alpha)} \perp \overrightarrow{n}_{(P)} \\ \overrightarrow{n}_{(\alpha)} \perp \overrightarrow{n}_{(Q)} \end{cases} .$ Chọn $\overrightarrow{n}_{(\alpha)} = \left[\overrightarrow{n}_{(P)}, \overrightarrow{n}_{(Q)}\right] = (1; -4; -3)$. Hơn nữa, (α) đi qua M(1; -2; 5) nên có phương trình là

$$(x-1) - 4(y+2) - 3(z-5) = 0 \Leftrightarrow x - 4y - 3z + 6 = 0.$$

CÂU 12. Cho điểm A(-4;1;1) và mặt phẳng (P): x-2y-z+4=0. Mặt phẳng (Q) đi qua điểm A và song song với mặt phẳng (P) có phương trình là

(A)
$$(Q)$$
: $x - 2y - z + 7 = 0$. (B) (Q) : $x - 2y - z - 7 = 0$. (C) (Q) : $x - 2y + z + 5 = 0$. (D) (Q) : $x - 2y + z - 5 = 0$.

Lời giải.

Do $(Q) \parallel (P)$ nên phương trình của (Q) có dạng x - 2y - z + c = 0 $(c \neq 4)$.

Do $A \in (Q)$ nên $-4 - 2 \cdot 1 - 1 + c = 0 \Leftrightarrow c = 7$ (thỏa).

Vậy (Q): x - 2y - z + 7 = 0.

Chọn đáp án (B).....

CÂU 13. Cho hai mặt phẳng (P): x-3y+2z-1=0, (Q): x-z+2=0. Mặt phẳng (α) vuông góc với hai mặt phẳng (P),(Q) đồng thời cắt trục Ox tại điểm có hoành độ bằng 3. Phương trình của (α) là

$$\mathbf{A}$$
 $-2x + z + 6 = 0$.

$$(B)$$
 $-2x + z - 6 = 0$.

$$(c)$$
 $x + y + z - 3 = 0$

B
$$-2x + z - 6 = 0$$
. **C** $x + y + z - 3 = 0$. **D** $x + y + z + 3 = 0$.

🗭 Lời giải.

Mặt phẳng (P) có một vecto pháp tuyến là $\vec{n}_P = (1; -3; 2)$.

Mặt phẳng (Q) có một vecto pháp tuyến là $\overrightarrow{n}_Q = (1;0;-1)$.

Vì mặt phẳng (α) vuông góc với hai mặt phẳng (P) và (Q) nên (α) có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_{\alpha} = [\vec{n}_{P}, \vec{n}_{Q}] = 3(1; 1; 1)$. Mà mặt phẳng (α) đi qua A(3;0;0), nên suy ra phương trình là $(\alpha): x+y+z-3=0$.

CÂU 14. Cho A(1;-1;2); B(2;1;1) và mặt phẳng (P): x+y+z+1=0. Mặt phẳng (Q) chứa A, B và vuông góc với mặt phẳng (P). Mặt phẳng (Q) có phương trình là

$$3x - 2y - z + 3 = 0$$

(A)
$$3x - 2y - z + 3 = 0$$
. (B) $3x - 2y - z - 3 = 0$. (C) $-x + y = 0$.

(**c**)
$$-x + y = 0$$

$$(\mathbf{D}) x + y + z - 2 = 0.$$

🗭 Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (1;2;-1)$ và vectơ pháp tuyến của (P) là $\overrightarrow{n}_P = (1;1;1)$. Gọi vectơ pháp tuyến của (Q) là \overrightarrow{n}_Q .

Vì (Q) chứa A, B nên $\overrightarrow{n_Q} \perp \overrightarrow{AB}$, mặt khác $(Q) \perp (P)$ nên $\overrightarrow{n_Q} \perp \overrightarrow{n_P}$.

Từ đó suy ra $\overrightarrow{n_Q} = \left| \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{n_P} \right| = (3; -2; -1).$

(Q) đi qua A(1;-1;2) và có vecto pháp tuyến $\overrightarrow{n_Q}=(3;-2;-1)$ nên (Q) có phương trình là

$$(Q): 3(x-1)-2(y+1)-(z-2)=0 \Leftrightarrow 3x-2y-z-3=0.$$

Chọn đáp án \bigcirc B.....

CÂU 15. Cho hai điểm A(2;4;1), B(-1;1;3) và mặt phẳng (P): x-3y+2z-5=0. Một mặt phẳng (Q) đi qua hai điểm A, B và vuông góc với mặt phẳng (P) có dạng là ax + by + cz - 11 = 0. Tính a + b + c.

$$\mathbf{A}$$
 $a + b + c = -7$.

B)
$$a + b + c = 10$$
.

$$(c)$$
 $a + b + c = 5.$

$$(\mathbf{D}) a + b + c = 3.$$

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (-3, -3, 2)$ và vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) là $\overrightarrow{n}_P = (1, -3, 2)$.

Mặt phẳng (Q) đi qua hai điểm A, B và vuông góc với mặt phẳng (P) có một vecto chỉ phương là

$$\overrightarrow{n}_Q = \left\lceil \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{n}_P \right\rceil = (0; 8; 12) = 4 \left(0; 2; 3\right).$$

Phương trình mặt phẳng (Q) là

$$0 \cdot (x-2) + 2 \cdot (y-4) + 3 \cdot (z-1) = 0.$$

Hay (Q): 2y + 3z - 11 = 0. Từ đó suy ra a = 0, b = 2, c = 3. Do đó a + b + c = 0 + 2 + 3 = 5.

Khoảng cách từ một điểm đến mặt phẳng, khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song

Khoảng cách từ một điểm đến mặt phẳng: Cho điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ và mặt phẳng (P): ax + by + cz + d = 0. Khi đó

$$d(M, (P)) = \frac{\left| ax_0 + by_0 + cz_0 + d \right|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song: Cho hai mặt phẳng (P): $ax + by + cz + d_1 = 0$ và (Q): $ax + by + cz + d_2 = 0$ song song nhau. Khi đó

$$d(P), (Q) = \frac{\left| d_1 - d_2 \right|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

1. Ví dụ minh hoạ

VÍ DỤ 1. Tính khoảng cách từ điểm A(1;2;3) đến các mặt phẳng sau

a)
$$(P): 3x + 4z + 10 = 0;$$

b)
$$(Q): 2x - 10 = 0;$$

c)
$$(R): 2x + 2y + z - 3 = 0.$$

🗭 Lời giải.

a)
$$d(A;(P)) = \frac{|3 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 4 \cdot 3 + 10|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 5.$$

b)
$$d(A;(Q)) = \frac{|2 \cdot 1 - 10|}{\sqrt{2^2}} = 2.$$

c)
$$d(A; (R)) = \frac{|2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 3 - 3|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}} = 2.$$

VÍ DỤ 2. Cho hai mặt phẳng (P): 2x + y + 2z + 12 = 0, (Q): 4x + 2y + 4z - 6 = 0.

- a) Chứng minh $(P) /\!\!/ (Q)$.
- b) Tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng (P) và (Q).

🗭 Lời giải.

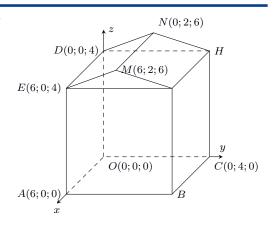
- a) Xét hai mặt phẳng (P): 2x + y + 2z + 12 = 0 và (Q): 4x + 2y + 4z 6 = 0, ta có $\frac{4}{2} = \frac{2}{1} = \frac{4}{2} \neq \frac{-6}{12}$, suy ra (P) // (Q).
- b) Trên mặt phẳng (Q), lấy điểm M(0;1;1). Ta có

$$\operatorname{d}((P),(Q)) = \operatorname{d}(M,(P)) = \frac{|2 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 12|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{15}{3} = 5.$$

VÍ DỤ 3.

Một kĩ sư xây dựng thiết kế khung một ngôi nhà trong không gian Oxyz như Hình 9 nhờ một phần mềm đồ họa máy tính.

- a) Viết phương trình mặt phẳng mái nhà (DEMN).
- b) Tính khoảng cách từ điểm B đến mái nhà (DEMN).



Hình 9

🗭 Lời giải.

a) Mặt phẳng (DEMN) có cặp vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{DE} = (6;0;0)$, $\overrightarrow{DN} = (0;2;2)$. Ta có $\left[\overrightarrow{DE},\overrightarrow{DN}\right] = (0;-12;12)$, suy ra (DEMN) có vectơ pháp tuyến là

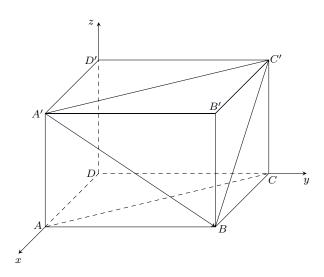
$$\overrightarrow{n} = -\frac{1}{12} \left[\overrightarrow{DE}, \overrightarrow{DN} \right] = (0; 1; -1).$$

Phương trình của mặt phẳng (DEMN) là y-z+4=0.

b)
$$B(6;4;0)$$
, suy ra $d(B,(DEMN)) = \frac{|4+4|}{\sqrt{0^2+1^2+(-1)^2}} = \frac{8}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}$.

VÍ DỤ 4. Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D' có DA = 2, DC = 3, DD' = 2. Tính khoảng cách từ đỉnh B' đến mặt phẳng (BA'C').

🗭 Lời giải.



Chọn hệ tọa độ Oxyz sao cho gốc tọa độ O trùng với điểm D. Khi đó, tọa độ các đỉnh của hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D' là D(0,0,0), A(2,0,0), C(0,3,0), B(2,3,0), D'(0,0,2), A'(2,0,2), B'(2,3,2), C'(0,3,2). Mặt phẳng (BA'C') có cặp vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{BA'} = (0;-3;2)$, $\overrightarrow{BC'} = (-2;0;2)$. Ta có $[\overrightarrow{BA'},\overrightarrow{BC'}] = (-6;-4;-6)$, suy ra (BA'C') có vectơ pháp tuyến là

$$\vec{n} = -\frac{1}{2} \left[\overrightarrow{BA'}, \overrightarrow{BC'} \right] = (3; 2; 3).$$

Phương trình của $(BA^{\prime}C^{\prime})$ là

$$3(x-2) + 2(y-3) + 3z = 0$$
 hay $3x + 2y + 3z - 12 = 0$.

Khoảng cách từ đỉnh B' đến mặt phẳng (BA'C') là

$$d(B', (BA'C')) = \frac{|3 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 - 12|}{\sqrt{3^2 + 2^2 + 3^2}} = \frac{6}{\sqrt{22}} = \frac{3\sqrt{22}}{11}.$$

2. Bài tập trắc nghiệm

CÂU 1. Khoảng cách từ A(-2;1;-6) đến mặt phẳng (Oxy) là

A 6.

B) 2.

c 1.

 $\bigcirc \frac{7}{\sqrt{41}}$

🗭 Lời giải.

Ta có (Oxy): z=0. Ta được $d(A,(Oxy))=\frac{|-6|}{1}=6$.

Chọn dap an (A).....

CÂU 2. Cho hai điểm A(-2;1;3), B(4;1;-1). Khoảng cách từ trung điểm I của đoạn AB đến mặt phẳng (Oyz) là

 \bigcirc 0.

B) 2.

(c) 4.

 \bigcirc 1

🗭 Lời giải.

Ta có trung điểm của đoạn AB là I(1;1;1) nên $\mathrm{d}(I,(Oyz))=|x_I|=1.$

Chọn đáp án $\boxed{\mathbb{D}}$ \square

CÂU 3. Cho mặt phẳng (P): 2x + 3y + 4z - 5 = 0 và điểm A(1; -3; 1). Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (P) bằng

 $\frac{8}{\sqrt{29}}$.

 $\bigcirc 8 \frac{8}{9}$.

 $\frac{3}{\sqrt{29}}$.

 $\frac{8}{20}$

🗭 Lời giải.

Ta có

$$d(A, (P)) = \frac{|2 \cdot 1 + 3 \cdot (-3) + 4 \cdot 1 - 5|}{\sqrt{2^2 + 3^2 + 4^2}} = \frac{8}{\sqrt{29}}.$$

Chọn đáp án lack A.

CÂU 4. Gọi H là hình chiếu vuông góc của điểm A(2;3;-1) trên mặt phẳng (α) : 16x+12y-15z+7=0. Tính độ dài đoạn thẳng AH.

 $\frac{19}{25}$.

 $\frac{12}{25}$.

 \bigcirc $\frac{19}{625}$.

 \bigcirc $\frac{12}{625}$.

🗭 Lời giải.

Độ dài đoạn thẳng AH bằng d $(A;(\alpha)) = \frac{|16 \cdot 2 + 12 \cdot (-3) - 15 \cdot 1 + 7|}{\sqrt{16^2 + 12^2 + (-15)^2}} = \frac{12}{25}$.

CÂUE. Cho họi mặt phẳng (D), m + 2m - 2m + 2 - 0 và (O), m + 2m - 2m - 1 - 0 Khoảng cách củữa họi mặt phẳng (D) và

CÂU 5. Cho hai mặt phẳng (P): x + 2y - 2z + 3 = 0 và (Q): x + 2y - 2z - 1 = 0. Khoảng cách giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) là

 $\bigcirc 4 \frac{4}{9}$

B $\frac{2}{3}$.

 $\frac{4}{3}$.

 $\bigcirc \hspace{-3pt} -\frac{4}{3}.$

🗭 Lời giải.

Lấy $M(-3;0;0) \in (P)$. Vì (P) # (Q) nên khoảng cách giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) bằng khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (Q).

Ta có d $(M,(Q)) = \frac{|x_M + 2y_M - 2z_M - 1|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2}} = \frac{4}{3}.$

Chọn đáp án \bigcirc

CÂU 6. Biết rằng hai mặt phẳng 4x - 4y + 2z - 7 = 0 và 2x - 2y + z + 4 = 0 chứa hai mặt của hình lập phương. Thể tích khối lập phương đó bằng

A $V = \frac{9\sqrt{3}}{2}.$

 $\bigcirc V = \frac{81\sqrt{3}}{8}.$

D $V = \frac{125}{8}.$

🗭 Lời giải.

Khoảng cách giữa hai mặt phẳng trên bằng độ dài cạnh của hình lập phương.

Gọi (P): 4x - 4y + 2z - 7 = 0 và (Q): 2x - 2y + z + 4 = 0.

Lây $M(0; 0; -4) \in (Q)$ và $d(M, (P)) = \frac{5}{2}$.

 $V_{\text{ay }}V = \frac{125}{8}.$

Chọn đáp án $\boxed{\mathbb{D}}$

CÂU 7. Cho hai điểm A(2;2;-2) và B(3;-1;0). Đường thẳng AB cắt mặt phẳng (P): x+y-z+2=0 tại điểm I. Tỉ số $\frac{IA}{IB}$ bằng

A 2.

(B) 4.

(c) 6.

D 3.

🗭 Lời giải.

Ta có
$$\frac{IA}{IB} = \frac{d(A, (P))}{d(B, (P))} = \frac{8}{\sqrt{3}} : \frac{4}{\sqrt{3}} = 2.$$

CÂU 8. Cho hai mặt phẳng (P): x+y-z+1=0 và (Q): x-y+z-5=0. Có bao nhiều điểm M trên trục Oy thỏa mãn M cách đều hai mặt phẳng (P) và (Q)?

(**A**) 0.

 (\mathbf{C}) 2.

(D) 3.

🗭 Lời giải.

Vì $M \in Oy$ nên M(0; y; 0).

Ta có $d(M; (P)) = \frac{|y+1|}{\sqrt{3}}$ và $d(M; (Q)) = \frac{|-y-5|}{\sqrt{2}}$.

Theo giả thiết $\operatorname{d}(M;(P)) = \operatorname{d}(M;(Q)) \Leftrightarrow |y+1| = |-y-5| \Leftrightarrow \begin{bmatrix} y+1=-y-5 \\ y+1=y=5 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} y=-3 \\ 0y=4 \text{ (vô nghiệm)} \end{bmatrix}$

 $\Rightarrow M(0; -3; 0).$

Vậy có 1 điểm M thỏa mãn bài. Chọn đáp án \bigcirc B).....

CÂU 9. Cho điểm A(1;2;3) và mặt phẳng (P): x+y+z-2=0. Mặt phẳng (Q) song song với mặt phẳng (P) và (Q) cách điểm A một khoảng bằng $3\sqrt{3}$. Phương trình mặt phẳng (Q) là

(A) x + y + z + 3 = 0 và x + y + z - 3 = 0.

(B) x + y + z + 3 = 0 và x + y + z + 15 = 0.

(c) x + y + z + 3 = 0 và x + y + z - 15 = 0.

 $(\mathbf{D}) x + y + z + 3 = 0 \text{ và } x + y - z - 15 = 0.$

🗭 Lời giải.

Do $(Q) \# (P) \Rightarrow (Q) \colon x + y + z + d = 0, \quad d \neq -2.$

Do $(Q) \# (P) \Rightarrow (Q) \colon x + y + z + a = 0,$ And $d(A, (Q)) = 3\sqrt{3} \Leftrightarrow |6 + d| = 9 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} d = 3 \\ d = -15. \end{bmatrix}$

Vây (Q_1) : x + y + z + 3 = 0 và (Q_2) : x + y + z - 15 = 0.

CÂU 10. Cho mặt phẳng (P): x+2y+z-4=0 và điểm D(1;0;3). Mặt phẳng (Q) song song với (P) và cách D một khoảng bằng $\sqrt{6}$ có phương trình là

B
$$x + 2y + z + 2 = 0$$
.

Lời giải.

Vì (Q) // (P) nên (Q) có phương trình dạng (Q): x+2y+z+D=0 $(D\neq -4)$.

Lại có $d(D,(Q)) = \sqrt{6} \Leftrightarrow \frac{|1+3+D|}{\sqrt{1+1+4}} = \sqrt{6} \Leftrightarrow |D+4| = 6 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} D=2\\D=-10 \end{bmatrix}$.

Vây (Q): x + 2y + z + 2 = 0 hoặc (Q): x + 2y + z - 10 = 0.

Chọn đáp án (C).....

CÂU 11. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật. Biết A(0;0;0),D(2;0;0),B(0;4;0),S(0;0;4). Gọi M là trung điểm của SB. Tính khoảng cách từ B đến mặt phẳng (CDM).

(A) $d(B, (CDM)) = \sqrt{2}$.

B d(B, (CDM)) = 2.

© $d(B, (CDM)) = \frac{1}{\sqrt{2}}$. **D** $d(B, (CDM)) = 2\sqrt{2}$.

🗭 Lời giải.

Do ABCD là hình chữ nhật nên C(2;4;0). Và M là trung điểm SB nên M(0;2;2).

Phương trình mặt phẳng (CDM) đi qua M và nhận $\vec{n} = [\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{MD}] = (-8; 0; -8)$ làm vectơ pháp tuyến là x + z - 8 = 0.

Khi đó d $(B, (MCD)) = \frac{|4-8|}{\sqrt{1^2+0^2+1^2}} = 2\sqrt{2}.$

CÂU 12. Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' có canh bằng 2. Khoảng cách giữa hai mặt phẳng (AB'D') và (BC'D)

 \bigcirc $\frac{2\sqrt{3}}{2}$.

 \bigcirc $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

 \bigcirc $\sqrt{3}$.

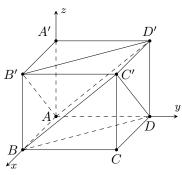
🗭 Lời giải.

Chọn hệ trục toạ độ như hình vẽ.

Ta có A(0;0;0), B(2;0;0), C(2;2;0), D(0;2;0).

A'(0;0;2), B'(2;0;2), C'(2;2;2), D'(0;2;2).

Mặt phẳng (AB'D') qua A và có một vectơ pháp tuyến là $-\frac{1}{4}\left[\overrightarrow{AB'},\overrightarrow{AD'}\right]=(1;1;-1)$ nên có phương trình x + y - z = 0.



Mặt phẳng (BC'D) qua B và có một vectơ pháp tuyến là $-\frac{1}{4}\left[\overrightarrow{BC'},\overrightarrow{BD}\right]=(1;1;-1)$ nên có phương trình x+y-z-2=0. Ta có (AB'D') // (BC'D) nên

$$\mathrm{d}((AB'D'),(BC'D))=\mathrm{d}(A,(BC'D))=\frac{|-2|}{\sqrt{1^2+1^2+t(-1)^2}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

CÂU 13. Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D' có $AB=a,\ AD=2a,\ AA'=3a.$ Gọi $M,\ N,\ P$ lần lượt là trung điểm của BC, C'D' và DD'. Tính khoảng cách từ A đến (MNP).

$$\bigcirc \frac{15}{11}a.$$

B
$$\frac{15}{22}a$$
.

$$\bigcirc \frac{9}{11}a.$$

$$\bigcirc \frac{3}{4}a.$$

🗭 Lời giải.

Gán hệ trục tọa độ như hình vẽ với độ dài đơn vị trên trục là a. Khi đó, ta tính được toa đô các điểm như sau

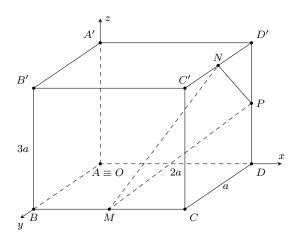
$$A(0;0;0), M(1;1;0), N\left(2;\frac{1}{2};3\right), P\left(2;0;\frac{3}{2}\right).$$

Ta có
$$\overrightarrow{MN} = \left(1; -\frac{1}{2}; 3\right)$$
 và $\overrightarrow{MP} = \left(1; -1; \frac{3}{2}\right)$.

Chọn
$$\left[\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MP}\right] = \left(\frac{9}{4}; \frac{3}{2}; -\frac{1}{2}\right)$$
 là vtpt của (MNP) .

Suy ra (MNP): 9x + 6y - 2z - 15 = 0. Do đó $d(A, (MNP)) = \frac{15}{11}$.

Vậy $d(A, (MNP)) = \frac{15a}{11}$.



Chọn đáp án (A).....



CÂU 14. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{3}$. Tính khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (SCD).



$$\bigcirc \frac{a\sqrt{2}}{3}.$$

$$\bigcirc \frac{a}{2}$$
.

D Lời giải.

Chuẩn hóa a=1. Với hệ truc đã chon như hình vẽ thì B(1;0;0), $S(0;0;\sqrt{3})$, C(1;1;0), D(0;1;0).

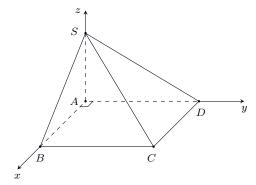
Ta có

a)
$$\overrightarrow{CD} = (-1; 0; 0), \overrightarrow{CS} = (-1; -1; \sqrt{3}),$$

b)
$$\vec{CB} = (0; -1; 0); [\vec{CD}, \vec{CS}] = (0; \sqrt{3}; 1)$$

Khoảng cách từ điểm B đến (SCD) được tính theo công thức:

$$d = \frac{\left| [\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CS}] \cdot \overrightarrow{CB} \right|}{\left| [\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CS}] \right|} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$





CÂU 15. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh $a, SD = \frac{3a}{2}$, hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng (ABCD) là trung điểm của cạnh AB. Tính khoảng cách d từ A đến mặt phẳng (SBD).

🗭 Lời giải.

Chon đáp án (D).....

C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM TỬ LUYỆN

Phần I. Mỗi câu hỏi học sinh chọn một trong bốn phương án A, B, C, D.

CÂU 1. Trong không gian với hệ toa độ Oxyz, cho mặt phẳng (P): x-z+3=0. Mặt phẳng nào sau đây vuông góc với mặt phẳng (P)?

$$(\alpha): 2x - y + 2z = 0.$$

B
$$(\beta)$$
: $2x - y - 2z = 0$

(A)
$$(\alpha)$$
: $2x - y + 2z = 0$. (B) (β) : $2x - y - 2z = 0$. (C) (Q) : $-2x - y + 2z = 0$. (D) (R) : $2x + y - 2z = 0$.

D
$$(R)$$
: $2x + y - 2z = 0$

🗭 Lời giải.

Mặt phẳng (P) có véc-tơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n}_{(P)} = (1;0;-1)$.

Mặt phẳng (α) có véc-tơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n}_{(\alpha)} = (2; -1; 2)$.

Ta có $\vec{n}_{(P)} \cdot \vec{n}_{(\alpha)} = 1 \cdot 2 + 0 \cdot (-1) + (-1) \cdot 2 = 0$. Do đó, $(P) \perp (\alpha)$.

Chọn đáp án (A).......

CÂU 2. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho điểm A(1;3;-2) và mặt phẳng (P): 2x+y-2z-3=0. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (P) bằng

(A) 2.

 $\frac{2}{3}$.

(D) 3.

D Lời giải.

$$\mathrm{Ta}\ \mathrm{có}\ \mathrm{d}\big(A,(P)\big) = \frac{|2\cdot 1 + 3 - 2\cdot (-2) - 3|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2}} = 2.$$

CÂU 3. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho mặt phẳng (P): x-y+3=0. Véc-tơ nào sau đây **không phải** là véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P)?

$$\vec{\mathbf{A}} \ \vec{a} = (3; -3; 0).$$

B
$$\vec{a} = (1; -1; 0).$$

$$\vec{a} = (1; -1; 3).$$

$$\overrightarrow{a} = (-1; 1; 0).$$

Lời giải.

Véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) là $\vec{n} = (1, -1, 0)$.

Ta có $\vec{a} = (-1;1;0) = -(1;-1;0) = -\vec{n}$. Vậy $\vec{a} = (-1;1;0)$ là một véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P).

Tương tự $\vec{a} = (3; -3; 0) = 3(1; -1; 0) = 3\vec{n}$. Vậy $\vec{a} = (3; -3; 0)$ là một véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P).

Do véc-tơ $\vec{a}=(1;-1;3)$ không cùng phương với véc-tơ $\vec{n}=(1;-1;0)$. Nên $\vec{a}=(1;-1;3)$ không là véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P).

Chọn đáp án $\overline{(C)}$

CÂU 4. Trong không gian với hệ toa độ Oxyz với điểm M(-3;1;4) và gọi A, B, C lần lượt là hình chiếu của M lên các truc Ox, Oy, Oz. Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt phẳng song song với mặt phẳng (ABC)?

$$A 4x - 12y + 3z - 12 = 0.$$

🗭 Lời giải.

Vì A, B, C lần lượt là hình chiếu của M(-3;1;4) các trực Ox, Oy, Oz nên A(-3;0;0), B(0;1;0), C(0;0;4).

Phương trình mặt phẳng (ABC): $\frac{x}{-3} + \frac{y}{1} + \frac{z}{4} = 1 \Leftrightarrow 4x - 12y - 3z + 12 = 0.$

Vậy mặt phẳng 4x - 12y - 3z - 12 = 0 song song với mặt phẳng (ABC).

Chọn đáp án $\overline{(D)}$

CÂU 5. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho ba điểm A(2;0;0), B(0;-3;0), C(0;0;1). Một véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (ABC) là

$$\vec{\mathbf{A}}$$
 $\vec{n} = (3; -2; 6).$

B)
$$\vec{n} = (2; -3; -1).$$
 C) $\vec{n} = (2; 3; 1).$

$$\vec{c}$$
 $\vec{n} = (2; 3; 1)$

$$\vec{n} = (2; -3; 1).$$

Lời giải.

Phương trình mặt phẳng (ABC): $\frac{x}{2} + \frac{y}{-3} + \frac{z}{1} = 1 \Leftrightarrow 3x - 2y + 6z - 6 = 0$.

Vậy mặt phẳng (ABC) có một véc-tơ pháp tuyến $\vec{n} = (3, -2, 6)$.

Chọn đáp án (A).....

CÂU 6. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho điểm M(2024; 0; -1). Mệnh đề nào dưới đây đúng?

$$\bigcirc$$
 $M \in (Oxz).$

$$\blacksquare$$
 $M \in Oy$.

$$\bigcirc$$
 $M \in (Oxy).$

$$\bigcirc$$
 $M \in (Oyz).$

Lời giải.

Do tung độ của điểm M(2024; 0; -1) bằng 0 nên $M \in (Oxz)$.

Chọn đáp án (A).....

CÂU 7. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho ba điểm A(-2;0;0), B(0;3;0) và C(0;0;4). Mặt phẳng (ABC) có phương

B
$$\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{-4} = 1$$

Vì ba điểm A(-2;0;0), B(0;3;0) và C(0;0;4) lần lượt nằm trên các truc toa đô Ox, Oy, Oz và không trùng với gốc toa đô O nên mặt phẳng (ABC) có phương trình là

$$\frac{x}{-2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 1.$$

Chọn đáp án (A).....

CÂU 8. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho mặt phẳng (α) : 2x + 2y - z + m = 0 (m là tham số). Tìm giá trị của tham số m dương để khoảng cách từ gốc tọa độ đến mặt phẳng (α) bằng 1.

$$\bigcirc$$
 -6

$$(B)$$
 -3.

$$\bigcirc$$
 6.

🗭 Lời giải.

Ta có $d(O,(\alpha)) = \frac{|m|}{3} = 1 \Leftrightarrow |m| = 3 \Leftrightarrow m = \pm 3.$

Do m > 0 nên m = 3.

Chọn đáp án (C).....

CÂU 9. Trong không gian với hệ toa đô Oxyz, hình chiếu vuông góc của điểm M(2;3;-4) trên mặt phẳng Oxyz, có toa đô

$$(2;0;-4).$$

$$(0;3;-4).$$

$$\bigcirc$$
 $(0;3;0).$

Lời giải.

Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, hình chiếu vuông góc của điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ trên mặt phẳng (Oyz) có tọa độ là

Do đó, hình chiếu vuông góc của điểm M(2;3;-4) trên mặt phẳng (Oyz) có tọa độ là (0;3;-4).

Chon đáp án B....

CÂU 10. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai điểm A(1;2;-1), B(-1;0;1) và mặt phẳng (P): x+2y-z+1=0. Viết phương trình mặt phẳng (Q) qua A, B và vuông góc với (P).

(A)
$$(Q)$$
: $3x - y + z = 0$. **(B)** (Q) : $x + z = 0$.

$$(Q)$$
: $2x - y + 3 = 0$

©
$$(Q)$$
: $2x - y + 3 = 0$. **D** (Q) : $-x + y + z = 0$.

🗭 Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (-2; -2; 2), \overrightarrow{n}_P = (1; 2; -1).$ $|\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{n}_P| = (-2; 0; -2).$

Mặt phẳng (Q) đi qua A, B và vuông góc với (P) nhận véc-tơ $\overrightarrow{n}_Q = \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{n}_P \right]$ là véc-tơ pháp tuyến.

Mặt phẳng (Q) có phương trình là

$$-2(x-1) + 0(x-2) - 2(z+1) = 0 \Leftrightarrow -2x - 2z = 0 \Leftrightarrow x+z = 0.$$

Chọn đáp án \fbox{B}

CÂU 11. Trong không gian với hệ toa đô Oxyz, cho hai véc-tơ $\vec{u}=(1;2;3), \vec{v}=(0;-1;1)$. Mặt phẳng (α) đi qua điểm A(1;2;5) và song song với giá của hai véc-tơ \vec{u} và \vec{v} . Véc-tơ nào dưới đây là một véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (α) ?

(A)
$$\vec{n}_3 = (-1; -1; -1)$$
. (B) $\vec{n}_2 = (5; -1; -1)$. (C) $\vec{n}_1 = (5; 1; -1)$. (D) $\vec{n}_4 = (-1; -1; 5)$.

B)
$$\vec{n}_2 = (5; -1; -1)$$
.

$$\vec{c}$$
 $\vec{n}_1 = (5; 1; -1)$

$$\overrightarrow{\mathbf{D}}$$
 $\overrightarrow{n}_4 = (-1; -1; 5)$

🗭 Lời giải.

Vì mặt phẳng (α) song song với giá của hai véc-tơ \vec{u} và \vec{v} nên có một véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}_2 = [\vec{u}, \vec{v}] = (5; -1; -1)$.

Chọn đáp án \bigcirc B. \Box

CÂU 12. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho ba điểm A(1;-1;0), B(-1;0;1), C(2;1;-1). Phương trình mặt phẳng (ABC) là

(A)
$$3x + y + 5z - 2 = 0$$
. **(B)** $x + 3y + z + 2 = 0$.

B
$$x + 3y + z + 2 = 0$$
.

🗭 Lời giải.

Mặt phẳng (ABC) đi qua A(1;-1;0) và nhận $\vec{n} = \left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right] = (-3;-1;-5) = -(3;1;5)$ làm véc-tơ pháp tuyến có phương trình: 3(x-1) + 1(y+1) + 5(z-0) = 0.

Do đó, (ABC): 3x + y + 5z - 2 = 0.

Chọn đáp án (A)......

Phần II. Trong mỗi ý a), b), c) và d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.

CÂU 1. Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho hai điểm A(1;2;3), B(3;4;4) và mặt phẳng $(\alpha): 2x+y+mz-1=0$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

Mệnh đề	Ð	S
a) Mặt phẳng đi qua 3 điểm là hình chiếu vuông góc của $A(1;2;3)$ lên ba trục tọa độ có phương trình là $6x + 3y + 2z - 6 = 0$.	X	
b) Điểm A cách đều mặt phẳng (γ) : $2x + y + mz - 1 = 0$ và điểm B khi $m = -2$.		X
c) Biết mặt phẳng (β) : $4x + (n-2)y + z - 3 = 0$ song song với mặt phẳng (α) . Khi đó, $2m + n = 5$.	X	
d) Khi $B \in (\alpha)$: $2x + y + mz - 1 = 0$ thì $m = -2$.		X

Lời giải.

a) Dúng.

Ta có hình chiếu vuông góc của A(1;2;3) lên ba trục tọa độ lần lượt M(1;0;0), N(0;2;0), P(0;0;3). Do đó, phương trình mặt phẳng cần tìm là $\frac{x}{1} + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 1 \Leftrightarrow 6x + 3y + 2z - 6 = 0$.

b) Sai.

Ta có
$$\overrightarrow{AB} = (2; 2; 1) \Rightarrow AB = \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2} = 3.$$
 (1) Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (P) là

$$d(A,(P)) = \frac{|2 \cdot 1 + 2 + m \cdot 3 - 1|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + m^2}} = \frac{|3m + 3|}{\sqrt{5 + m^2}}.$$
 (2)

Do đó, AB = d(A, (P)) khi và chỉ khi

$$3 = \frac{|3m+3|}{\sqrt{5+m^2}} \Leftrightarrow 9(5+m^2) = 9(m+1)^2 \Leftrightarrow m=2.$$

c) Dúng.

Vì
$$(\alpha)$$
 // (β) nên $\frac{2}{4} = \frac{1}{n-2} = \frac{m}{1} \neq \frac{-1}{-3} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{1}{2} \\ n = 4 \end{cases} \Rightarrow 2m + n = 5.$

d) (S) Sai.

Ta có
$$B \in (\alpha)$$
: $2x + y + mz - 1 = 0 \Leftrightarrow 2 \cdot 3 + 4 + m \cdot 4 - 1 = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{9}{4}$.

Chọn đáp án a đúng b sai c đúng d sai

CÂU 2. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho A(1;2;-1), B(-1;0;1) và mặt phẳng (P): x+2y-z+1=0. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

Mệnh đề	Ð	S
a) Biết điểm M nằm trên tia Ox mà khoảng cách từ M đến mặt phẳng (P) bằng $\sqrt{6}$. Khi đó, hoành độ điểm M là $x_M=5$.	X	
b) Mặt phẳng (Q) qua A, B và vuông góc với (P) có phương trình là $x+z=0$.	X	
c) Mặt phẳng (P) có một véc-tơ pháp tuyến là $(1;2;-1)$.	X	
d) Khi $m = -4$ thì mặt phẳng (R) : $2x - my + 3 = 0$ vuông góc với mặt phẳng (P) .		X

🗭 Lời giải.

a) (D) Đúng.

M nằm trên tia $Ox \Rightarrow M(x;0;0), x > 0.$

Khi đó, khoảng cách từ M đến mặt phẳng (P) bằng $\sqrt{6}$ khi và chỉ khi

$$\frac{|x+1|}{\sqrt{6}} = \sqrt{6} \Leftrightarrow x = 5, (x > 0).$$

b) Dúng.

Ta có
$$\overrightarrow{AB} = (-2; -2; 2), \ \overrightarrow{u} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = (1; 1; -1); \ \overrightarrow{n}_P = (1; 2; -1).$$
 Do đó, $\overrightarrow{n}_Q = \left[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{n}_{(P)}\right] = (1; 0; 1)$ là một véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (Q) . Vây $(Q) \colon 1 \cdot (x-1) + 0 \cdot (y-2) + 1 \cdot (z+1) = 0 \Leftrightarrow x+z=0.$

c) Dúng.

Mặt phẳng (P): x + 2y - z + 1 = 0 có một véc-tơ pháp tuyến là (1; 2; -1).

d) Sai.

(P) có một véc-tơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n}_P = (1;2;-1);$ (R) có một véc-tơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n}_R = (2;-m;0)$. Hai mặt phẳng (P) và (R) vuông góc với nhau khi và chỉ khi

$$\vec{n}_P \cdot \vec{n}_R = 0 \Leftrightarrow 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-m) + (-1) \cdot 0 = 0 \Leftrightarrow m = 1.$$

Chọn đáp án a đúng b đúng c đúng d sai

CÂU 3. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai điểm A(1;2;1) và B(3;-1;5). Các mệnh đề sau đúng hay sai?

Mệnh đề	Ð	S
a) Phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB là $2x - 3y + 4z - \frac{29}{2} = 0$.	X	
b) Điểm $N(1;2;-1)$ đối xứng với $A(1;2;1)$ qua mặt phẳng (Oyz) .		X
c) Mặt phẳng (P) vuông góc với đường thẳng AB và cắt các trục Ox , Oy và Oz lần lượt tại các điểm D , E và F . Khi thể tích của tứ diện $ODEF$ bằng $\frac{3}{2}$, phương trình mặt phẳng (P) là $2x - 3y + 4z \pm 6 = 0$.	X	
d) Véc-tơ \overrightarrow{AB} là một véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (α) : $2x + 3y + 4z - 2 = 0$.		X

🗩 Lời giải.

a) Dúng.

Trung điểm của đoạn thẳng AB là điểm $I\left(2;\frac{1}{2};3\right)$.

Vây mặt phẳng trung trực của AB đi qua $I\left(2;\frac{1}{2};3\right)$ và nhận $\overrightarrow{AB}=(2;-3;4)$ làm véc-tơ pháp tuyến nên có phương trình là

$$2(x-2) - 3\left(y - \frac{1}{2}\right) + 4(z-3) = 0 \Leftrightarrow 2x - 3y + 4z - \frac{29}{2} = 0.$$

b) Sai.

Điểm đối xứng với A(1;2;1) qua mặt phẳng (Oyz) có tọa độ là (-1;2;1).

c) Dúng.

Vì $AB \perp (P)$ nên mặt phẳng (P) có một véc-tơ pháp tuyến là $\overrightarrow{AB} = (2; -3; 4)$. Do đó, phương trình mặt phẳng (P) có dạng 2x - 3y + 4z + d = 0.

Từ đây tìm được $D\left(-\frac{d}{2};0;0\right)$, $E\left(0;\frac{d}{3};0\right)$, $F\left(0;0;-\frac{d}{4}\right)$ suy ra $OD=\frac{|d|}{2}$, $OE=\frac{|d|}{3}$, $OF=\frac{|d|}{4}$.

Mặt khác, tứ diện ODEF có OD, OE, OF đôi một vuông góc nên thể tích của tứ diện ODEF là $V_{ODEF}=\frac{1}{6}OD.OE.OF=\frac{(|d|)^3}{144}$.

Do đó, $V_{ODEF} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{(|d|)^3}{144} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow |d| = 6 \Leftrightarrow d = \pm 6.$

Vậy phương trình mặt phẳng (P) là $2x - 3y + 4z \pm 6 = 0$.

d) Sai.

Véc-tơ $\overrightarrow{AB}=(2;-3;4)$ không cùng phương với $\overrightarrow{n}=(2;3;4)$ là véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (α) nên \overrightarrow{AB} không là một véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (α) .

Chọn đáp án a đúng bai c đúng daai....

CÂU 4. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai mặt phẳng (α) : 3x - 2y + 2z + 7 = 0 và (β) : 5x - 4y + 3z + 1 = 0. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

Mệnh đề	Ð	S
a) Hai mặt phẳng (α) , (β) song song với nhau.		X
b) Điểm $A(1;2;-1)$ nằm trên mặt phẳng (α) : $3x-2y+2z+7=0$.		X
c) Phương trình mặt phẳng qua O , đồng thời vuông góc với cả (α) và (β) có phương trình là $2x+y-2z=0$.	X	
d) Mặt phẳng (γ) đi qua điểm $I(1;0;-1)$ và song song với (α) : $3x-2y+2z+7=0$ có phương trình là (γ) : $3x-2y+2z-1=0$.	X	

Lời giải.

a) (S) Sai.

Ta có $\frac{3}{5} \neq \frac{-2}{-4}$ nên hai mp (α) , (β) cắt nhau. Vậy chúng không song song.

Ta có $3 \cdot 1 - 2 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) + 7 \neq 0$ nên A(1;2;-1) không nằm trên mặt phẳng (α) .

c) Dúng.

Mặt phẳng (α) có một véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}_1 = (3; -2; 2)$.

Mặt phẳng (β) có một véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}_2 = (5; -4; 3)$.

Do mặt phẳng (Q) vuông góc với cả (α) và (β) nên $\vec{n} = [\vec{n}_1, \vec{n}_2] = (2; 1; -2)$ là một véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng

Mặt phẳng (Q) đi qua O(0;0;0) và có véc-tơ pháp tuyến $\overrightarrow{n}=(2;1;-2)$ có phương trình là 2x+y-2z=0.

d) Dúng.

Mặt phẳng (γ) song song với mặt phẳng (α) : 3x - 2y + 2z + 7 = 0 nên phương trình của mặt phẳng (γ) có dạng 3x - 2y + 2z + d = 0, với $d \neq 7$.

Vì $I(1;0;-1) \in (\gamma)$ nên $3 \cdot 1 - 2 \cdot 0 + 2 \cdot (-1) + d = 0 \Leftrightarrow d = -1$ (thỏa mãn điều kiện $d \neq 7$). Vậy (γ) : 3x - 2y + 2z - 1 = 0.

Chọn đáp án a sai b sai c đúng d đúng

Phần III. Học sinh điền kết quả vào ô trống.

CÂU 1. Từ mặt nước trong một bể nước, tại ba vị trí đôi một cách nhau 2 m, người ta lần lượt thả dây dọi để quả dọi chạm đáy bể. Phần dây dọi (thẳng) nằm trong nước tại ba vị trí đó lần lượt có độ dài 4 m; 4,4 m; 4,8 m. Biết đáy bể là phẳng. Hỏi đáy bể nghiêng so với mặt phẳng nằm ngang một góc bao nhiêu độ (làm tròn đến hàng phần chục)?

> Đáp án: 8

Lời giải.

Gọi ba vị trí trên mặt nước là A, B, C thì tam giác ABC là tam giác đều cạnh bằng 2 m. Gọi dây dọi lần lượt là AA', BB', CCC' có độ dài lần lượt là 4 m; 4,4 m; 4,8 m.

Chọn hệ trục toạ độ Oxyz sao cho O là trung điểm của BC, tia Ox chứa điểm A, tia Oy chứa điểm B, tia Oz đi qua trung điểm của B'C' và đơn vị trên các trục là mét.

Ta có OB = OC = 1, $OA = \sqrt{3} \Rightarrow A'(\sqrt{3}; 0; 4)$, B'(0; 1; 4, 4), C'(0; -1; 4, 8).

Khi đó, $\overrightarrow{A'B'} = (-\sqrt{3}; 1; 0, 4), \overrightarrow{A'C'} = (-\sqrt{3}; -1; 0, 8).$

Mặt phẳng (A'B'C') có một véc-tơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n} = \left[\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}\right] = 0.4\sqrt{3}\left(\sqrt{3}; 1; 5\right)$.

Mặt phẳng (ABC) có một véc-tơ pháp tuyến là $\overrightarrow{k}=(0;0;1)$. Do đó, $\cos\left((ABC),(A'B'C')\right)=\left|\cos\left(\overrightarrow{n},\overrightarrow{k}\right)\right|=\frac{5}{\sqrt{29}}$. Góc cần tìm gần bằng 21,8°.

CÂU 2. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho mặt cầu (S): $(x-1)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 11$ và hai véc-tơ $\vec{u}_1 = (1;1;2)$, $\vec{u}_2 = (1; 2; 1)$. Gọi (P) là mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu (S) đồng thời song song với giá của hai véc-to \vec{u}_1 , \vec{u}_2 . Phương trình mặt phẳng (P) có dạng 3x + by + cz + d = 0, với $b, c, d \in \mathbb{Z}$ và $d \neq -15$. Khi đó, b + c + d bằng bao nhiêu?

Đáp án: 5

🗭 Lời giải.

Mặt cầu (S) có tâm I(1;-1;0), bán kính $R=\sqrt{11}$.

Mặt phẳng (P) song song với của hai véc-tơ \vec{u}_1 , \vec{u}_2 nên (P) có véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n} = [\vec{u}_1, \vec{u}_2] = (-3; 1; 1)$.

Phương trình mặt phẳng (P) có dạng $-3x + y + z + d = 0 \Leftrightarrow 3x - y - z - d = 0$, $d \neq 15$. Mặt khác, mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu (S) nên ta có

$$\mathrm{d}\big(I,(P)\big) = R \Leftrightarrow \frac{|3+1-0-d|}{\sqrt{9+1+1}} = \sqrt{11} \Leftrightarrow |-d+4| = 11 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} d=15 & \text{(loai)} \\ d=-7. \end{bmatrix}$$

Với d=-7, ta có phương trình mặt phẳng (P) là $-3x+y+z-7=0 \Leftrightarrow 3x-y-z+7=0$.

Vậy b + c + d = -1 - 1 + 7 = 5.

CÂU 3. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, có hai mặt phẳng (P) và (Q) cùng thỏa mãn các điều kiện sau: đi qua hai điểm A(1;1;1) và B(0;-2;2), đồng thời cắt các trực tọa độ Ox, Oy tại hai điểm cách đều O. Giả sử (P) có phương trình $x+b_1y+c_1z+d_1=0$ và (Q) có phương trình $x+b_2y+c_2z+d_2=0$. Tính giá trị biểu thức $b_1b_2+c_1c_2$.

🗭 Lời giải.

Xét mặt phẳng (α) có phương trình x + by + cz + d = 0 thỏa mãn các điều kiện: đi qua hai điểm A(1;1;1) và B(0;-2;2), đồng thời cắt các trực tọa độ Ox, Oy tại hai điểm cách đều O.

Vì (α) đi qua A(1;1;1) và B(0;-2;2) nên ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} 1+b+c+d=0\\ -2b+2c+d=0. \end{cases}$$
(*)

Mặt phẳng (α) cắt các trục tọa độ Ox, Oy lần lượt tại M(-d;0;0), $N\left(0;\frac{-d}{h};0\right)$.

Vì M, N cách đều O nên OM = ON. Suy ra $|d| = \left| \frac{d}{b} \right|$.

Nếu d=0 thì chỉ tồn tại duy nhất một mặt phẳng thỏa mãn yêu cầu bài toán (mặt phẳng này sẽ đi qua điểm O).

Do đó, để tồn tại hai mặt phẳng thỏa mãn yêu cầu bài toán thì $|d| = \left| \frac{d}{b} \right| \Leftrightarrow b = \pm 1.$

Vây $b_1b_2 + c_1c_2 = 1 \cdot (-1) + 4 \cdot (-2) = -9.$

Dáp án: $\boxed{-9}$

CÂU 4. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho mặt cầu (S): $(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 8$ và điểm A(1;3;2). Mặt phẳng (P) đi qua A và cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính nhỏ nhất. Biết phương trình của (P) có dạng ax + by + cz + 6 = 0. Tính a + b + c.

Đáp án: - 4

🗭 Lời giải.

Mặt cầu (S) có tâm I(-1;2;3), bán kính $R=2\sqrt{2}$.

Ta có $\overrightarrow{IA} = (2; 1; -1); AI = \sqrt{6} < R$, suy ra điểm A nằm trong mặt cầu (S).

Gọi H là hình chiếu vuông góc của I trên mặt phẳng (P). Khi đó mặt phẳng (P) đi qua A và cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính $r = \sqrt{R^2 - IH^2}$. Do đó, r nhỏ nhất khi và chỉ khi IH lớn nhất.

Mặt khác, ta luôn có $IH \leq IA$, dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi H trùng với A, hay $(P) \perp IA$.

Mặt phẳng (P) có véc-tơ pháp tuyến $\overrightarrow{IA} = (2;1;-1)$ và qua A(1;3;2) có phương trình $2(x-1) + (y-3) - 1(z-2) = 0 \Leftrightarrow 2x + y - z - 3 = 0 \Leftrightarrow -4x - 2y + 2z + 6 = 0$.

Vav a + b + c = -4.

 $\stackrel{\sim}{\mathrm{Dáp}}$ án: $\stackrel{\sim}{-4}$

CÂU 5. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai điểm A(2; -3; 1), B(-1; 1; 0) và mặt phẳng (P): x - y + z - 2 = 0. Một mặt phẳng (Q) đi qua hai điểm A, B và vuông góc với (P) có dạng là ax + by + cz + 2 = 0. Tính $a^2 + b^2 + c^2$.

Đáp án: 5 6

🗭 Lời giải.

 $\overrightarrow{AB}=(-3;4;-1),~(P)$ có một véc-tơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n}_{(P)}=(1;-1;1).$ $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{n}_{(P)}\right]=(3;2;-1).$

(Q) đi qua B(-1;1;0) và có một véc-tơ pháp tuyến $\overrightarrow{n}_{(Q)}=(3;2;-1)$ nên có phương trình

$$3(x+1) + 2(y-1) - z = 0 \Leftrightarrow 3x + 2y - z + 1 = 0 \Leftrightarrow 6x + 4y - 2z + 2 = 0.$$

Suy ra a = 6, b = 4, c = -2 hay $a^2 + b^2 + c^2 = 56$.

Đáp án: <mark>56</mark>

CÂU 6. Trong không gian với hệ trực Oxyz, cho ba điểm A(1;2;1), B(2;-1;0), C(1;1;3). Phương trình mặt phẳng đi qua ba điểm A, B, C có dạng ax + by + cz - 12 = 0. Khi đó, a - b - 2c bằng

Đáp án: 3

🗭 Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(1;-3;-1), \overrightarrow{AC}=(0;-1;2)$ suy ra $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(-7;-2;-1)=-1(7;2;1).$

Mặt phẳng (ABC) đi qua điểm A(1;2;1) có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}=(7;2;1)$ có phương trình là 7x+2y+z-12=0. Khi đó, a-b-2c=3.

Đáp án: 3

—HÉT—

Bài 15. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẨNG

A. LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1. Vecto chỉ phương của đường thẳng

 \bigcirc Dịnh nghĩa: Vectơ chỉ phương \overrightarrow{u} của đường thẳng d là những vectơ khác $\overrightarrow{0}$ và có giá song song hoặc trùng với d.



Chú ý:

- $\bullet \ \overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$ và có giá song song hoặc trùng với d.
- Nếu \overrightarrow{u} và $\overrightarrow{u'}$ cùng là vectơ chỉ phương của d thì $\overrightarrow{u'} = k \cdot \overrightarrow{u}$ (tọa độ tỉ lệ nhau).

2. Phương trình tham số của đường thẳng

 \bigcirc Công thức: Đường thẳng d đi qua điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ và nhận $\overrightarrow{u} = (u_1; u_2; u_3)$ làm vectơ chỉ phương có phương trình

$$\begin{cases} x = x_0 + u_1 t \\ y = y_0 + u_2 t \\ z = z_0 + u_3 t \end{cases} (t \in \mathbb{R}) \quad (1)$$

- Chú ý:
- ① Phương trình các trục tọa độ:

•
$$Ox$$
:
$$\begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$
 • Oy :
$$\begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\bullet \quad Oy \colon \begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\bullet \quad Oz \colon \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = t \end{cases}$$

② Nếu u_1, u_2 và u_3 đều khác 0 thì (1) có thể được viết dưới dạng

$$\frac{x - x_0}{u_1} = \frac{y - y_0}{u_2} = \frac{z - z_0}{u_3} \quad (2)$$

(2) được gọi là phương trình chính tắc của đường thẳng d.

3. Vi tri tương đối giữa hai đường thẳng

Cho hai đường thẳng

- Δ_1 qua điểm $M(x_0; y_0; z_0)$, vecto chỉ phương $\overrightarrow{u} = (u_1; u_2; u_3)$;
- Δ_2 qua điểm $N(x_0'; y_0'; z_0')$, vecto chỉ phương $\overrightarrow{v} = (v_1; v_2; v_3)$.

Trường hợp 1: Nếu $|\vec{u}, \vec{v}| = \vec{0}$ và

- $\left[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{MN}\right] \neq \overrightarrow{0}$ thì Δ_1 song song Δ_2 ;
- $\bullet \ \left[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{MN} \right] = \overrightarrow{0} \ \text{thì} \ \Delta_1 \ \text{trùng} \ \Delta_2.$

Trường hợp 2: Nếu $\left[\vec{u}, \vec{v}\right] \neq \vec{0}$ và

- $\left[\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\right]\cdot\overrightarrow{MN}\neq0$ thì Δ_1 chéo Δ_2 ;
- $\bullet \ \left[\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\right] \cdot \overrightarrow{MN}=0 \text{ thì } \Delta_{1} \text{ cắt } \Delta_{2}.$

B. PHÂN LOẠI, PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN



Xác định điểm thuộc và vectơ chỉ phương của đường thẳng

Cho đường thẳng d.

- ① Nếu $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$ và có giá song song hoặc trùng với d thì \overrightarrow{u} là vectơ chỉ phương của d.
- ② Nếu d qua hai điểm AB thì d có một vecto chỉ phương là $\overrightarrow{AB} = (x_B x_A; y_B y_A; z_B z_A)$.
- ③ Nếu d vuông góc với giá của hai vecto \overrightarrow{a} , \overrightarrow{b} không cùng phương thì d có một vecto chỉ phương là $\overrightarrow{u} = [\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}]$.
- - Một vectơ chỉ phương của d là $\vec{u} = (u_1; u_2; u_3)$ (hệ số của t).
 - Muốn xác đinh toa đô một điểm thuộc d, ta chỉ cần cho trước giá tri cu thể của tham số t, thay vào hê phương trình tính x, y và z.

1. Ví du minh hoa

VÍ DỤ 1. Cho đường thẳng
$$d$$
:
$$\begin{cases} x=1-t \\ y=2+3t \\ z=2+t \end{cases}$$
 $(t\in\mathbb{R}).$ Tìm một vectơ chỉ phương và hai điểm thuộc đường thẳng $d.$

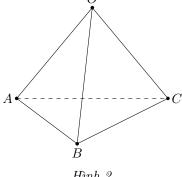
Lời giải.

VÍ DU 2. Trong không gian Oxyz, cho hình chóp O.ABC có A(2;0;0), B(0;4;0) và C(0;0;7).

- a) Tìm tọa độ một vecto chỉ phương của đường thẳng AB, AC.
- b) Vecto $\vec{v} = (-1, 2, 0)$ có là vecto chỉ phương của đường thẳng AB không?

🗭 Lời giải.

- a) Ta c
ó $A \vec{B} = (-2;4;0)$ là một vectơ chỉ phương của đường thẳng
 $AB; \overrightarrow{AC} = (-2;0;7)$ là một vecto chỉ phương của đường thẳng AC.
- b) Vì $\vec{v} = (-1; 2; 0) = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB}$ nên \vec{v} là một vectơ chỉ phương của đường thẳng AB.



Hình 2

VÍ DỤ 3. Trong không gian Oxyz, cho hai mặt phẳng (P): 2x+y-z-1=0 và (Q): x-2y+z-5=0. Gọi Δ là giao tuyến của (P) và (Q). Tìm một điểm thuộc Δ và một vecto chỉ phương của Δ .

Lời giải.

Mặt phẳng (P) và (Q) có VTPT lần lượt là $\overrightarrow{n}_P = (2;1;-1)$ và $\overrightarrow{n}_Q = (1;-2;1)$. Vậy vecto chỉ phương của đường thẳng d là giao tuyến của (P) và (Q) là $\vec{u} = [\vec{n}_P, \vec{n}_Q] = (1; 3; 5)$.

2. Bài tập trắc nghiệm

CÂU 1. Cho đường thẳng d: $\begin{cases} x=1+2t\\ y=-t\\ z=4+5t \end{cases}$. Đường thẳng d có một vecto chỉ phương là

$$\overrightarrow{\mathbf{A}} \ \overrightarrow{u_2} = (2; -1; 5).$$

$$\overrightarrow{\mathbf{B}}) \overrightarrow{u_4} = (1; -1; 4)$$

$$\mathbf{C} \ \overrightarrow{u_3} = (1; -1; 5).$$
 $\mathbf{D} \ \overrightarrow{u_1} = (1; 0; 4).$

$$\overrightarrow{\mathbf{D}}$$
 $\overrightarrow{u_1} = (1; 0; 4)$

🗭 Lời giải.

Đường thẳng d có một vecto chỉ phương là $\vec{u} = (2; -1; 5)$.

Chọn đáp án (A).....

CÂU 2. Cho đường thẳng $d : \frac{x-2}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{1}$. Đường thẳng d có một vectơ chỉ phương là

(A)
$$\vec{u} = (-1; 2; 1)$$
.

B)
$$\vec{u} = (2; 1; 0).$$

$$\vec{u} = (-1; 2; 0).$$
 $\vec{u} = (2; 1; 1).$

(D)
$$\vec{u} = (2; 1; 1).$$

🗭 Lời giải.

 $\begin{array}{l} \textbf{C\normalfont{\^{a}}n\ h\normalfont{\^{a}}: } \underline{d}: \frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c} \ \text{c\'o m\^{o}} \text{t VTCP l\^{a}} \ \overrightarrow{u} = (a;b;c) \ \text{v\'a} \ \text{d\'i qua d\'i\'em} \ M(x_0;y_0;z_0). \\ \\ \underline{D} \underline{u} \ \text{Du\'ong th\'ang} \ d: \frac{x-2}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{1} \ \text{c\'o m\^{o}} \text{t vecto ch\'i phương l\^{a}} \ \overrightarrow{u} = (-1;2;1). \\ \end{array}$

......

CÂU 3. Cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{2}$. Điểm nào trong các điểm dưới đây nằm trên đường thẳng d?

- (A) P(5;2;5).
- (c) M(3;2;2).

🗭 Lời giải.

Chọn đáp án \bigcirc

CÂU 4. Cho đường thẳng d: $\begin{cases} x=1+2t\\ y=2+3t\\ z=5-t \end{cases}$ ($t\in\mathbb{R}$). Đường thẳng d **không** đi qua điểm nào sau đây?

- (A) M(1;2;5).
- **B** N(2:3:-1).
- P(3;5;4).
- Q(-1;-1;6).

🗭 Lời giải.

Chon đáp án B....

CÂU 5. Cho hai điểm A(2;-1;4) và B(-1;3;2). Đường thẳng AB có một vectơ chỉ phương là

- (A) $\vec{u}_1 = (1; 2; 2)$. (B) $\vec{u}_3 = (1; 2; 6)$.
- $\overrightarrow{\mathbf{c}}$ $\overrightarrow{u}_2 = (3; -4; 2).$

🗭 Lời giải.

Đường thẳng AB nhận $\overrightarrow{AB}=(-3;4;-2)$ làm một vectơ chỉ phương.

Do đó $\vec{u}_2 = (3; -4; 2) = -\overrightarrow{AB}$ cũng là một vecto chỉ phương của AB.

Chọn đáp án \bigcirc

CÂU 6. Cho tam giác ABC với A(1;0;-2), B(2;-3;-4), C(3;0;-3). Goi G là trong tâm tam giác ABC, vectơ nào sau đây là một vecto chỉ phương của đường thẳng OG?

- (A) (-2; 1; 3).
- **B**) (3; -2; 1).
- (\mathbf{c}) (2; 1; 3).
- (\mathbf{D}) (-1; -3; 2).

🗭 Lời giải.

G là trong tâm tam giác $ABC \Rightarrow G(2; -1; -3) \Rightarrow \overrightarrow{OG} = (2; -1; -3)$.

Đường thẳng OG nhận $\vec{u} = -\overrightarrow{OG} = (-2; 1; 3)$ làm một vectơ chỉ phương.

Chon đáp án (A).....

CÂU 7. Cho đường thẳng d song song với trục Oy. Đường thẳng d có một vecto chỉ phương là

- **A** $\vec{u}_4 = (2019; 0; 2019).$ **B** $\vec{u}_1 = (2019; 0; 0).$
- $\vec{\mathbf{c}}$) $\vec{u}_2 = (0; 2019; 0)$. $\vec{\mathbf{D}}$) $\vec{u}_3 = (0; 0; 2019)$.

Lời giải.

Trục Oy có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{j} = (0; 1; 0)$, mà $d \parallel Oy$ nên d có một vectơ chỉ phương là

$$\vec{u}_2 = 2019 \vec{j} = (0; 2019; 0)$$

Chọn đáp án \bigcirc

CÂU 8. Cho đường thẳng Δ vuông góc với mặt phẳng (α) : x+2z+3=0. Một vectơ chỉ phương của Δ là

- $\overrightarrow{v} = (1; 2; 3).$
- **(B)** $\vec{a} = (1; 0; 2).$
- $\vec{\mathbf{c}}$) $\vec{u} = (2; 0; -1).$
- $\overrightarrow{b} = (2:-1:0).$

🗭 Lời giải.

Ta có Δ vuông góc với $(\alpha) \Rightarrow \vec{a} = (1; 0; 2)$ là một vecto chỉ phương của Δ .

Chon đáp án B....

CÂU 9. vecto chỉ phương của đường thẳng vuông góc với mặt phẳng đi qua ba điểm A(1;2;4), B(-2;3;5), C(-9;7;6) có toạ độ là

- (3; 4; -5).
- **B**) (3; -4; 5).
- (\mathbf{c}) (-3; 4; -5).
- \bigcirc (3; 4; 5).

🗭 Lời giải.

Gọi (P) là mặt phẳng đi qua ba điểm A, B, C.

Gọi \overrightarrow{a} là vectơ chỉ phương của đường thẳng d là đường thẳng vuông góc với (P).

Ta có $\overrightarrow{AB} = (-3; 1; 1), \overrightarrow{AC} = (-10; 5; 2).$

Vì d vuông góc với (P) nên d có vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{a} = \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] = (-3; -4; -5) = -1(3; 4; 5)$.

Chọn đáp án (D)......

CÂU 10. Cho hai mặt phẳng (P): 3x-2y+2z-5=0, (Q): 4x+5y-z+1=0. Các điểm A,B phân biệt thuộc giao tuyến của hai mặt phẳng (P) và (Q). Khi đó \overrightarrow{AB} cùng phương với vectơ nào sau đây?

- $\overrightarrow{\mathbf{A}} \ \overrightarrow{u} = (8; -11; -23).$
- **B** $\vec{k} = (4; 5; -1).$
- $\overrightarrow{v} = (3; -2; 2).$ $\overrightarrow{D} \overrightarrow{v} = (-8; 11; -23).$

🗭 Lời giải.

Ta có $\vec{n} = (3, -2, 2)$ và $\vec{n'} = (4, 5, -1)$ lần lượt là các vectơ pháp tuyến của các mặt phẳng (P), (Q). Do đó $[\vec{n}, \vec{n'}] =$ (-8;11;23) là một vectơ chỉ phương của giao tuyến của (P) và (Q).

Từ đó suy ra \overrightarrow{AB} cùng phương với vecto $\overrightarrow{u} = (8; -11; -23)$.

Chon đáp án (A)....

Viết phương trình đường thẳng d khi biết vài yếu tố liên quan

- **\bigcirc Phương pháp chung:** Ta cần xác định vectơ chỉ phương \overrightarrow{u} và một điểm M thuộc đường thẳng.
- \bigcirc Một số kiểu xác định vectơ \overrightarrow{u} thường gặp:
 - ① d qua hai điểm A, B thì $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB} = (x_B x_A; y_B y_A; z_B z_A)$.
 - 2 d song song với Δ thì $\vec{u} = \overrightarrow{u_{\Delta}}$.
 - 3 d vuông góc với (P) thì $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{n}_P$.
 - 4 d vuông góc với giá của hai vecto \overrightarrow{a} và \overrightarrow{b} (không cùng phương) thì $\overrightarrow{u} = [\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}]$.

1. Ví du minh hoa

VÍ DỤ 1. Lập phương trình chính tắc của đường thẳng d trong mỗi trường hợp sau

- a) d đi qua điểm A(4; -2; 5) và có vecto chỉ phương $\vec{a} = (7; 3; -9)$.
- b) d đi qua hai điểm M(0;0;1), N(3;3;6).
- c) d có phương trình tham số là $\begin{cases} x=8+5t\\ y=7+4t\\ z=11\pm\alpha t \end{cases}$

🗭 Lời giải.

- a) Đường thẳng d đi qua điểm A(4;-2;5) và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{a}=(7;3;-9)$ nên d có phương trình chính tắc là $\frac{x-4}{7}=\frac{y+2}{3}=\frac{z-5}{-9}.$
- b) Đường thẳng d đi qua hai điểm M(0;0;1), N(3;3;6) nên d có vecto chỉ phương là $\overrightarrow{MN}=(3;3;5)$. Suy ra phương trình chính tắc của đường thẳng d là $\frac{x}{3} = \frac{y}{3} = \frac{z-1}{5}$.
- c) Đường thẳng d có phương trình tham số là $\begin{cases} x = 8 + 5t \\ y = 7 + 4t \\ z = 11 + 9t \end{cases}$, suy ra d có phương trình chính tắc là $\frac{x 8}{5} = \frac{y 7}{4} = \frac{z 11}{9}$.

VÍ DU 2.

Trong một khu du lịch, người ta cho du khách trải nghiệm thiên nhiên bằng cách đu theo đường trượt zipline từ vị trí A cao 15 m của tháp 1 này sang vị trí B cao 10 m của tháp 2 trong khung cảnh tuyết đẹp xung quanh. Với hệ trucuc toa độ Oxyzcho trước (đơn vị: mét), toạ độ của A và B lần lượt là (3; 2, 5; 15) và (21; 27, 5; 10).

- a) Viết phương trình đường thẳng chứa đường trượt zipline này.
- b) Xác định toạ độ của du khách khi ở độ cao 12 mét.



VÍ DỤ 3. Trong không gian Oxyz, Lập phương trình tham số và phương trình chính tắc (nếu có) của đường thẳng d trong các trường hợp sau:

a) d đi qua điểm M và song song với đường thẳng $\Delta : \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{-1}$

- b) d qua điểm M(3;2;-1) và vuông góc với mặt phẳng (P): x+z-2=0.
- c) d đi qua điểm M(1;2;1), đồng thời vuông góc với cả hai đường thẳng $\Delta_1:\frac{x-2}{1}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-1}{1}$ và $\Delta_2:\frac{x+1}{1}=\frac{z-1}{1}$ $\frac{y-3}{2} = \frac{z-1}{-1}$.

Lời giải.

a) Đường thẳng Δ có vecto chỉ phương là $\vec{u} = (2; 1; -1)$. Đường thẳng d qua M(2;1;0) và song song với đường thẳng Δ cũng nhận $\vec{u}=(2;1;-1)$ làm vecto chỉ phương của nó. Vậy phương trình đường thẳng cần tìm là

$$\frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{-1} \Leftrightarrow \frac{x-2}{4} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{-2}.$$

b) Mặt phẳng (P): x+z-2=0 có vecto pháp tuyến là $\overrightarrow{n}_{(P)}=(1;0;1)$. Đường thẳng Δ đi qua M và vuông góc với (P) nhận $\overrightarrow{n}_{(P)}$ làm vectơ chỉ phương có phương trình là

$$\begin{cases} x = 3 + t \\ y = 2 \\ z = -1 + t. \end{cases}$$

c) Đường thẳng Δ_1 và Δ_2 có vectơ chỉ phương là $\vec{u}_1=(1;-1;1)$ và $\vec{u}_2=(1;2;-1)$. Vì d vuông góc với cả hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 nên d có vectơ chỉ phương là $\vec{u}=[\vec{u}_1,\vec{u}_2]=(-1;2;3)$.

Vậy phương trình đường thẳng d là $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + 2t \end{cases}$

VÍ DỤ 4. Trong không gian Oxyz, cho điểm A(1;-2;0), mặt phẳng (P): 2x-3y+z+5=0 và đường thẳng $d: \frac{x-1}{2}=$ $\frac{y}{-1} = \frac{z+1}{1}$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua A, cắt d và song song với mặt phẳng (P).

Mặt phẳng (P) có VTPT $\overrightarrow{n}=(2;-3$

Gọi M là giao điểm của Δ và d: $\begin{cases} x=1+2t\\ y=-t & \text{là } M(1+2t;-t;-1+t).\\ z=-1+t \end{cases}$

Đường thẳng Δ nhận $\overline{AM} = (2t; -t+2; t-1)$ làm V Đường thẳng Δ song song với mặt phẳng (P) nên

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{n} = 0 \Leftrightarrow 2t \cdot 2 + (-t+2) \cdot (-3) + (t-1) \cdot 1 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{7}{8}.$$

Suy ra $\overrightarrow{AM} = \left(\frac{7}{4}, \frac{9}{8}, -\frac{1}{8}\right) = \frac{1}{8}(14, 9, -1).$

Đường thẳng Δ qua A và nhận $\overrightarrow{AM} = (14; 9; -1)$ làm VTCP nên phương trình Δ : $\begin{cases} x = 1 + 14t \\ y = -2 + 9t \\ z = -t \end{cases}$

VÍ DỤ 5. Trong Không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai đường thẳng d_1 : $\frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-2}{-1}$ và d_2 : $\begin{cases} x = t \\ y = 3 \\ z = -2 + t \end{cases}$. Viết

phương trình đường vuông góc chung của hai đường thẳng d_1, d_2 .

Lời giải.

Gọi d là đường thẳng cần tìm. Gọi $A = d \cap d_1, B = d \cap d_2$

$$A \in d_1 \Rightarrow A(2+a;1-a;2-a)$$

$$B \in d_2 \Rightarrow B(b; 3; -2 + b)$$

$$\overrightarrow{AB} = (-a+b-2; a+2; a+b-4)$$

$$d_1$$
 có vecto chỉ phương $\vec{a}_1 = (1; -1; -1), d_2$ có vecto chỉ phương $\vec{a}_2 = (1; 0; 1)$

d đi qua điểm A(2;1;2) và có vecto chỉ phương $\overrightarrow{a}_d = \overrightarrow{AB} = (1;2;-1)$

Vậy phương trình của d là $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + 2t \\ z = 2 - t \end{cases}$

2. Bài tập trắc nghiệm

CÂU 1. Cho đường thẳng Δ đi qua điểm M(2;0;-1) và có vectơ chỉ phương $\vec{a}=(4;-6;2)$. Phương trình tham số của đường thẳng Δ là

$$\begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = -3t \\ z = 1 + t \end{cases}$$

$$\left\{
 \begin{aligned}
 x &= 4 + 2t \\
 y &= -3t \\
 z &= 2 + t
 \end{aligned}
 \right.$$

D Lời giải.

Chọn đáp án (D).....

$$x = 2 + t$$

$$y = -1 + t.$$

$$z = 3 - 4t$$

Lời giải.

Chọn đáp án (B).....

CÂU 3. Cho đường thẳng $\Delta: \frac{2x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{-1}$, điểm A(2; -3; 4). Đường thẳng qua A và song song với Δ có phương trình là

$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -3 + t \\ z = 4 - t \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = -3 - t \\ z = 4 + t \end{cases}$$

$$x = 2 + 2t$$

$$y = -3 + t$$

$$z = 4 + t$$

Chọn đáp án (B).....

CÂU 4. Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm N(2; -3; -5) và vuông góc với mặt phẳng (P): 2x - 3y - z + 2 = 0.

🗭 Lời giải.

CÂU 5. Cho tam giác ABC có A(3;2;-4), B(4;1;1) và C(2;6;-3). Viết phương trình đường thẳng d đi qua trọng tâm Gcủa tam giác ABC và vuông góc với mặt phẳng (ABC).

(A)
$$d: \frac{x-3}{3} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+2}{-1}$$
.

B
$$d: \frac{x+12}{3} = \frac{y+7}{2} = \frac{z-3}{-1}.$$

©
$$d: \frac{x-3}{7} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+2}{-1}$$

🗭 Lời giải.

Chọn đáp án (C).....

CÂU 6. Cho hai điểm A(1;-1;1) và B(-1;2;3) và đường thẳng $\Delta : \frac{x+1}{-2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{3}$. Phương trình đường thẳng đi qua điểm A, đồng thời vuông góc với hai đường thẳng AB và Δ là

Lời giải.

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (-2; 3; 2)$.

Đường thẳng Δ có vecto chỉ phương là $\overrightarrow{u}_{\Delta} = (-2;1;3) \Rightarrow \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{u}_{\Delta}\right] = (7;2;4)$.

Đường thẳng đi qua điểm A, đồng thời vuông góc với hai đường thẳng AB và Δ có vecto chỉ phương $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{u}_{\Delta}]$ có phương trình là $\frac{x-1}{7} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{4}$.

CÂU 7. Cho điểm A(1;2;3) và đường thẳng $d:\frac{x+1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-3}{-2}$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua điểm A, vuông góc với đường thẳng d và cắt trục hoành. Tìm một vectơ chỉ phương \overrightarrow{u} của đường thẳng Δ .

- $\overrightarrow{\mathbf{A}} \ \overrightarrow{u} = (0; 2; 1).$
- **B**) $\vec{u} = (1; 0; 1).$
- $(\mathbf{c}) \ \overrightarrow{u} = (1; -2; 0).$
- $(\mathbf{D}) \ \overrightarrow{u} = (2; 2; 3).$

🗭 Lời giải.

Chon đáp án (D).....

CÂU 8. Cho hai đường thẳng $d_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{-1}$ và $d_2: \frac{x-2}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z+3}{2}$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm A(1;0;2), cắt d_1 và vuông góc với

$$\frac{x-1}{-2} = \frac{y}{3} = \frac{z-2}{4}$$

B
$$\frac{x-3}{2} = \frac{y-3}{3} = \frac{z+2}{-4}$$
.

(a)
$$\frac{x-1}{-2} = \frac{y}{3} = \frac{z-2}{4}$$
. (b) $\frac{x-3}{2} = \frac{y-3}{3} = \frac{z+2}{-4}$. (c) $\frac{x-5}{-2} = \frac{y-6}{-3} = \frac{z-2}{4}$. (d) $\frac{x-1}{-2} = \frac{y}{3} = \frac{z-2}{-4}$.

D Lời giải

Gọi $B(1+t;-1+2t;-t) \in d_1$. Do đó $\overrightarrow{AB} = (t;2t-1;-t-2)$.

 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{u}_{d_2} = 0 \iff 1.t + 2(2t - 1) + 2(-t - 2) = 0 \iff t = 2.$

Ta có $\overrightarrow{AB} = (2; 3; -4)$ chính là vec-tơ chỉ phương của đường thẳng Δ .

Vậy phương trình đường thẳng Δ là $\begin{cases} x=1+2t \\ y=3t. \\ z=2-4t \end{cases}$

Với t=1 thì đường thẳng Δ đi qua điểm C(3;3;

Vậy phương trình đường thẳng Δ là $\frac{x-3}{2} = \frac{y-3}{3} = \frac{z+2}{-4}$

Chon đáp án B.....

CÂU 9. Cho đường thẳng Δ đi qua M(1;2;2), song song với mặt phẳng (P): x-y+z+3=0 đồng thời cắt đường thẳng

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 - t \\ z = 2 - t \end{cases}$$

$$x = 1 - t$$

$$y = 2 + t$$

$$z = 2.$$

Đường thẳng d có phương trình tham số là $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + t \end{cases}$

Mặt phẳng (P) có một VTPT là $\overrightarrow{n}_P = (1; -1; 1)$.

Giả sử Δ cắt d tại $A \Rightarrow A(1+t; 2+t; 3+t)$ và $\overrightarrow{MA} = (t; t; 1+t)$.

 $Vi \Delta \text{ song song } (P) \text{ nên } \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{n} = 0 \Leftrightarrow t = -1 \Rightarrow \overrightarrow{MA} = (-1; -1; 0).$

Chọn một VTCP của Δ là $\overrightarrow{u}_{\Delta} = \overrightarrow{MA} = (-1; -1; 0)$

Chọn một VICP của Δ ia $u_{\Delta} - m_{\Delta} = 0$, z_{1}, z_{2}, z_{3} . Dường thẳng Δ có phương trình tham số là $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 - t \\ z = 2. \end{cases}$

Chọn đáp án (A).....

CÂU 10. Cho đường thẳng d: x = y = z. Viết phương trình đường thẳng d' là hình chiếu vuông góc của d lên mặt phẳng tọa độ (Oyz).

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = 2t \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 2t \end{cases} \qquad \qquad \bigcirc \bigcirc \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 + t \\ z = 1 + t \end{cases} \qquad \bigcirc \bigcirc \bigcirc \begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = t \end{cases}$$

$$\left\{
 \begin{array}{l}
 x = 0 \\
 y = t \\
 z = t
 \end{array}
 \right.$$

Lời giải.

Chọn đáp án (D).....

CÂU 11. Cho đường thẳng $d: \frac{x+1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{1}$, mặt phẳng (P): x+y-2z+5 = 0 và điểm A(1;-1;2). Viết phương trình đường thẳng Δ cắt d và (P) lần lượt tại M và N sao cho A là trung điểm của đoạn thẳng MN.

(A)
$$\Delta : \frac{x-3}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-4}{2}$$
.

B
$$\Delta: \frac{x-1}{6} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{2}.$$

$$\bigcirc$$
 $\Delta : \frac{x+5}{6} = \frac{y+2}{1} = \frac{z}{2}.$

$$\triangle$$
 $\Delta : \frac{x+1}{2} = \frac{y+4}{3} = \frac{z-3}{2}$.

🗭 Lời giải.

Ta loại ngay được 1 phương án vì điểm A không thuộc đường thẳng này.

Đường thẳng
$$d$$
 có phương trình tham số d :
$$\begin{cases} x = -1 + 2 \\ y = t \\ z = 2 + t \end{cases}$$

 $M \in d \Rightarrow M(-1+2t;t;2+t), A$ là trung điểm $MN \Rightarrow N(3-2t;-2-t;2-t)$

 $N \in (P) \Rightarrow 3-2t-2-t-2(2-t)+5=0 \Leftrightarrow t=2 \Rightarrow N(-1;-4;0) \Rightarrow \overrightarrow{NA}=(2;3;2). \Rightarrow \text{Loại được hai phương án không}$ thỏa mãn điều kiện này.

Còn duy nhất 1 phương án cần chọn.

Chọn đáp án (A).....

CÂU 12. Trong không gian Oxyz, đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau d_1 : $\frac{x-2}{2} = \frac{y-3}{3} = \frac{z+4}{-5}$ và d_2 : $\frac{x+1}{3} = \frac{y-4}{-2} = \frac{z-4}{-1}$ có phương trình là

$$\mathbf{A} \frac{x-2}{2} = \frac{y+2}{2}.$$

$$x = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{1}.$$

Giả sử $M \in d_1$, $N \in d_2$ và MN là đoạn vuông góc chung.

Ta có M(2+2t;3+3t;-4-5t) N(-1+3s;4-2s;4-s), $\overrightarrow{MN}=(3s-2t-3;-2s-3t+1;-s+5t+8)$. vecto chỉ phương của d_1, d_2 lần lượt là $\overrightarrow{u}_1=(2;3;-5)$, $\overrightarrow{u}_2=(3;-2;-1)$.

Ta có MN là đoạn vuông góc chung của d_1 và d_2 khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{u}_1 = 0 \\ \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{u}_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5s - 38t - 43 = 0 \\ 14s - 5t - 19 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ s = 1. \end{cases}$$

Suy ra M(0;0;1), $\overrightarrow{MN}=(2;2;2)$. Ta có phương trình của đường vuông góc chung MN là

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{1}.$$

Chọn đáp án \bigcirc

Vi trí tương đối của hai đường thẳng

Cho d qua điểm M và có vecto chỉ phương \vec{u} ; d' qua điểm N và có vecto chỉ phương \vec{v} .

- ① Nếu \vec{u} cùng phương \vec{v} ($\vec{u} = k\vec{v}$) và $M \notin d'$ thì $d \parallel d'$.
- ② Nếu \vec{u} cùng phương \vec{v} ($\vec{u} = k\vec{v}$) và $M \in d'$ thì d trùng với d'.
- 3 Nếu $[\vec{u}, \vec{v}] \cdot \overrightarrow{MN} \neq 0$ thì d và d' chéo nhau.
- 4 Nếu $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}] \cdot \overrightarrow{MN} = 0$ thì d và d' cắt nhau.
- \bullet Nếu $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ thì d và d' vuông góc nhau.

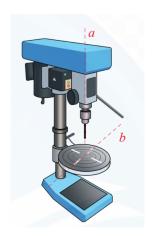
1. Ví dụ minh hoạ

VÍ DU 1.

Trên phần mềm mô phỏng 3D một máy khoan trong không gian Oxyz, cho biết phương trình trục a của mũi khoan và một đường rãnh b trên vật cần khoan (tham khảo hình vẽ bên) lần lượt là

a:
$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 3t \end{cases}$$
 và b:
$$\begin{cases} x = 1 + 4t' \\ y = 2 + 2t' \\ z = 6. \end{cases}$$

- a) Chứng minh a, b vuông góc và cắt nhau.
- b) Tìm giao điểm của a và b.



- a) a có vecto chỉ phương $\vec{m}=(0;0;3)$ và b có vecto chỉ phương $\vec{n}=(4;2;0)$. Ta có $\vec{m}\cdot\vec{n}=0\cdot 4+0\cdot 2+3\cdot 0=0$. Do đó $\vec{m}\perp\vec{n}$ hay $a\perp b$.
- b) Gọi M là giao điểm của a và b, ta có $\begin{cases} M \in a \\ M \in b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M(1;2;3t) \\ M(1+4t';2+2t';6) \end{cases}.$ Khi đó ta có

$$\begin{cases} 1 = 1 + 4t' \\ 2 = 2 + 2t' \Rightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t' = 0 \end{cases} \Rightarrow M(1; 2; 6).$$

Vậy giao điểm của a và b là M(1; 2; 6).

VÍ DỤ 1. Trong khôn gian Oxyz, xét vị trí tương đối giữa hai đường thẳng d và d' trong mỗi trường hợp sau. Nếu chúng cắt nhau, hãy xác định tọa độ giao điểm.

a)
$$d:$$

$$\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 3 + 2t \text{ và } d' : \\ z = 4 + 2t \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 8 + 9t' \\ y = 7 + 6t' \\ z = 8 + 6t'; \end{cases}$$

b)
$$d: \frac{x}{4} = \frac{y-3}{3} = \frac{z-1}{2}$$
 và $d': \frac{x-5}{8} = \frac{y-5}{6} = \frac{z-3}{4}$;

c)
$$d:$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 + 2t \text{ và } d': \frac{x-4}{3} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-5}{5}; \\ z = 1 - t \end{cases}$$

d)
$$d: \frac{x-2}{3} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-2}{3}$$
 và $d': \begin{cases} x = 5 \\ y = 7 + 2t \\ z = 5 - t. \end{cases}$

🗭 Lời giải.

- a) Đường thẳng d đi qua điểm M(2;3;4) và nhận $\overrightarrow{a}=(3;2;2)$ làm vectơ chỉ phương. Đường thẳng d' đi qua điểm M'(8;7;8) và nhận $\overrightarrow{a'}=(9;6;6)$ làm vectơ chỉ phương. Ta có $\overrightarrow{MM'}=(6;4;4),$ $\overrightarrow{a'}=3\overrightarrow{a}=\frac{3}{2}\overrightarrow{MM'},$ suy ra ba vectơ $\overrightarrow{a},$ $\overrightarrow{a'},$ $\overrightarrow{MM'}$ cùng phương. Do đó, $d\equiv d'$.
- b) Đường thẳng d đi qua điểm M(0;3;1) và nhận $\overrightarrow{a}=(4;3;2)$ làm vectơ chỉ phương. Đường thẳng d' đi qua điểm M'(5;5;3) và nhận $\overrightarrow{a'}=(8;6;4)$ làm vectơ chỉ phương. Ta có $\overrightarrow{MM'}=(5;2;2), \overrightarrow{a'}=2\overrightarrow{a},$ suy ra $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{a'}$ cùng phương. Mặt khác, $\frac{4}{5}\neq\frac{3}{2},$ suy ra $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{MM'}$ không cùng phương. Do đó d // d'.
- c) Đường thẳng d đi qua điểm M(2;3;1) và nhận $\overrightarrow{a}=(0;2;-1)$ làm vectơ chỉ phương. Đường thẳng d' đi qua điểm M'(4;1;5) và nhận $\overrightarrow{a'}=(3;4;5)$ làm vectơ chỉ phương. Ta có $\overrightarrow{MM'}=(2;-2;4),$ $\left[\overrightarrow{a},\overrightarrow{a'}\right]=(14;-3;-6)\neq\overrightarrow{0},$ $\left[\overrightarrow{a},\overrightarrow{a'}\right]\cdot\overrightarrow{MM'}=10\neq0$, suy ra d và d' chéo nhau. item Đường thẳng d đi qua điểm M(2;3;2) và nhận $\overrightarrow{a}=(3;4;3)$ làm vectơ chỉ phương. Đường thẳng d' đi qua điểm M'(5;7;5) và nhận $\overrightarrow{a'}=(0;2;-1)$ làm vectơ chỉ phương. Ta có $\overrightarrow{MM'}=(3;4;3),$ $\left[\overrightarrow{a},\overrightarrow{a'}\right]=(-10;3;6)\neq\overrightarrow{0},$ $\left[\overrightarrow{a},\overrightarrow{a'}\right]\cdot\overrightarrow{MM'}=0\neq0$, suy ra d và d' cắt nhau.

2. Bài tập trắc nghiệm

CÂU 1. Cho hai đường thẳng d: $\begin{cases} x=1+t \\ y=2t \\ z=2-t \end{cases}$ và d': $\begin{cases} x=2+2t' \\ y=3+4t' \\ z=5-2t'. \end{cases}$ Mệnh đề nào sau đây đúng?

- lack A d và d' chéo nhau.
- lacksquare d trung d'.
- \bigcirc d song song d'.
- \bigcirc d cắt d'.

₽ Lời giải.

d đi qua A=(1;0;2), có vecto chỉ phương $\overrightarrow{a}=(1;2;-1)$.

d' đi qua B=(2;3;5), có vecto chỉ phương $\overrightarrow{a'}=(2;4;-2)$.

Ta có \vec{a} cùng phương $\vec{a'}$ nên loại B. D.

 $A \notin d'$ nên d song song d'.

Chọn đáp án (C).....

CÂU 2. Cho hai đường thẳng d_1 : $\frac{x-1}{1} = \frac{y+3}{-2} = \frac{z+3}{-3}$ và d_2 : $\begin{cases} x = 3t \\ y = -1 + 2t \end{cases}$ Mệnh đề nào đưới đây đúng?

(A) d_1 cắt và không vuông góc với d_2 .

(B) d_1 cắt và vuông góc với d_2 .

(**C**) d_1 song song d_2 .

 $(\mathbf{D}) d_1$ chéo d_2 .

🗭 Lời giải.

 d_1 đi qua A = (1; -3; -3), có vecto chỉ phương $\vec{a}_1 = (1; -2; -3)$.

 d_2 đi qua B = (0; -1; 0), có vecto chỉ phương $\vec{a}_2 = (3; 2; 0)$.

Ta có \vec{a}_1 không cùng phương \vec{a}_2 .

 $\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 \neq 0$.

 $[\vec{a}_1, \vec{a}_2] \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ nên d_1 cắt và không vuông góc với d_2 .

Chọn đáp án (A).....

CÂU 3. Cho hai đường thẳng d_1 : $\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 1 + t \\ z = 1 - t \end{cases}$ và d_2 : $\frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z}{1}$. Chọn khẳng định đúng. z = 1 - t **©** d_1, d_2 chéo nhau. **D** d_1, d_2

- \bigcirc d_1, d_2 cắt nhau.

🗭 Lời giải.

Ta có d_1 , d_2 có vecto chỉ phương lần lượt là $\vec{u}_1 = (-2; 1; -1)$, $\vec{u}_2 = (2; -1; 1)$.

Và $A(1;1;1) \in d_1$, $B(-1;2;0) \in d_2 \Rightarrow AB = (-2;1;-1)$.

Khi đó \vec{u}_1 , \vec{u}_2 , \vec{AB} cùng phương nên $d_1 \equiv d_2$.

Chon đáp án (B).....

CÂU 4. Vị trí tương đối của hai đường thẳng Δ_1 : $\frac{x-1}{3} = y = \frac{z+1}{2}$ và Δ_2 : $\frac{x}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{1}$,

- (A) Trùng nhau.
- (B) Chéo nhau.
- (**D**) Cắt nhau.

🗭 Lời giải.

Đường thẳng Δ_1 đi qua điểm $M_1(1;0;-1)$ và có vecto chỉ phương $\overrightarrow{u_1}=(3;1;2)$.

Đường thẳng Δ_2 đi qua điểm $M_2(0;1;0)$ và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_2} = (2;-1;1)$.

 $\begin{cases} \overrightarrow{u_1} \wedge \overrightarrow{u_2} = (3;1;-5) \\ \overrightarrow{M_1 M_2} = (-1;1;1) \end{cases} \Rightarrow (\overrightarrow{u_1} \wedge \overrightarrow{u_2}) \cdot \overrightarrow{M_1 M_2} = -3 + 1 - 5 = -7 \neq 0.$

Do đó Δ_1 và Δ_2 chéo nhau.

Chọn đáp án (B).....

CÂU 5. Cho hai đường thẳng $d_1: \frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{-m} = \frac{z-2}{-3}$ và $d_2: \frac{x-3}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{1}$. Tìm tất cả các giá trị thực của m để d_1 vuông góc d_2 .

- (A) m = 5.
- $(\mathbf{c}) m = -5.$

🗭 Lời giải.

Chọn đáp án (D).....

CÂU 6. Cho hai đường thẳng Δ_1 : $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{4}$ và Δ_2 : $\frac{x-4}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-5}{2}$. Tọa độ giao điểm M của hai đường thẳng đã cho là

- (A) M(5;1;3).
- **B**) M(0;-1;-1).
- (c) M(3;5;7).
- **(D)** M(2;3;7).

🗭 Lời giải.

Phương trình tham số của đường thẳng Δ_1 là Δ_1 : $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + 3t, \text{ thay vào phương trình } \Delta_2 \text{ ta được} \\ z = 3 + 4t \end{cases}$

$$\frac{2t-3}{1} = \frac{3t-1}{-2} = \frac{4t-2}{-2} \Rightarrow t = 1.$$

Vậy giao điểm của Δ_1 và Δ_2 là M(3; 5; 7).

Chon đáp án (C).....

CÂU 7. Cho hai đường thẳng d_1 : $\begin{cases} x=1+t \\ y=2-t \\ z=3+2t \end{cases}$ và d_2 : $\frac{x-1}{2}=\frac{y-m}{1}=\frac{z+2}{-1}$ (với m là tham số). Tìm m để hai đường

thẳng d_1 , d_2 cắt nhau.

$$(A) m = 5.$$

B)
$$m = 7$$
.

$$(c) m = 9.$$

$$\bigcirc$$
 $m=4.$

Lời giải.

Ta có $M_1(1;2;3) \in d_1$ và vecto chỉ phương của d_1 là $\overrightarrow{u}_1 = (1;-1;2), M_2(1;m;-2) \in d_2$ và vecto chỉ phương của d_2 là $\vec{u}_2 = (2; 1; -2)$. Suy ra $\overline{M_1 M_2} = (0; m-2; -5)$ và $[\vec{u}_1, \vec{u}_2] = (0; 6; 3)$.

 $\overrightarrow{\text{Dê}} \ d_1 \ \text{cắt} \ d_2 \ \text{thì} \ [\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2] \cdot \overrightarrow{M_1 M_2} = 0 \Leftrightarrow 6(m-2) - 15 = 0 \Leftrightarrow m = 5.$

CÂU 8. Cho hai đường thẳng d: $\begin{cases} x=1+mt \\ y=t \\ z=-1+2t \end{cases}$ ($t\in\mathbb{R}$) và d': $\begin{cases} x=1-t' \\ y=2+2t' \ (t'\in\mathbb{R}). \text{ Giá trị của } m \text{ để hai đường thẳng } d \text{ và } t = 3-t' \end{cases}$

d' cắt nhau là

$$(\mathbf{B}) m = 1.$$

$$(c) m = -1.$$

$$m=2$$

🗩 Lời giải.

Đường thẳng d đi qua A(1;0;-1), có vecto chỉ phương $\overrightarrow{u_1} = (m;1;2)$.

Đường thẳng d' đi qua B(1;2;3), có vecto chỉ phương $\overrightarrow{u_2} = (-1;2;-1)$.

Ta có $[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}] = (-5; m-2; 2m+1)$ và $\overrightarrow{AB} = (0; 2; 4)$.

Hai đường thẳng d và d' cắt nhau $\Leftrightarrow [\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}] \cdot AB = 0 \Leftrightarrow m = 0.$

Chọn đáp án (A).....



Vị trí tương đối của đường thẳng và mặt phẳng

Xét đường thẳng d: $\begin{cases} x=x_0+u_1t\\ y=y_0+u_2t \text{ và mặt phẳng }(P)\colon Ax+By+Cz+D=0.\\ z=z_0+u_3t \end{cases}$

- **Phương pháp:** Xét $d \cap (P) \Rightarrow A(x_0 + u_1 t) + B(y_0 + u_2 t) + C(z_0 + u_3 t) + D = 0$ (*)
 - Nếu (*) có đúng 1 nghiệm t thì d cắt (P);

 - Nếu (*) vô nghiệm thì d song song (P);
 Nếu (*) nghiệm đúng với mọi t thì d nằm trong (P).
- \bigcirc Đặc biệt: Với \overrightarrow{u} là vectơ chỉ phương của d và \overrightarrow{n} là vectơ pháp tuyến của (P) thì

 $d \perp (P) \Leftrightarrow \vec{u}$ cùng phương với \vec{n} hay $\vec{u} = k \cdot \vec{n}$

1. Ví du minh hoa

VÍ DU 1. Xét vị trí tương đối giữa đường thẳng và mặt phẳng được chỉ ra ở các câu sau:

a)
$$(\alpha)$$
: $y + 2z = 0$ và d :
$$\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 4 + 2t \\ z = 1 \end{cases}$$

b)
$$(P): 3x - 3y + 2z - 5 = 0$$
 và $d: \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 3 + 4t \\ z = 3t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R}).$

c)
$$(P)$$
: $3x - 3y + 2z + 1 = 0$ và d : $\frac{x+1}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z-1}{-3}$.

Lời giải.

- a) Gọi $M(2-t;4+2t;1) \in d$, thay tọa độ M vào phương trình của (α) ta được $4+2t+2=0 \Leftrightarrow t=-3$. Từ đó tìm được M(5; -2; 1). Suy ra d cắt (α) .
- b) Xét phương trình $3(-1+2t) 3(3+4t) + 2 \cdot 3t 5 = 0 \Leftrightarrow 0 \cdot t 17 = 0$ (vô nghiệm). Vậy $d \parallel (P)$.

c) Viết lại đường thẳng dở dạng tham số $\begin{cases} x=-1+t\\ y=-t\\ z=1-3t \end{cases}.$

Xét phương trình $3 \cdot (-1+t) - 3 \cdot (-t) + 2 \cdot (1-3t) + 1 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$. Kết luận phương trình có vô số nghiệm $\Rightarrow d \subset (P)$.

VÍ DỤ 2. Tìm điều kiện của tham số m để

- a) $\Delta: \frac{x-10}{5} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+2}{1}$ vuông góc với (P): 10x+2y+mz+11=0.
- b) $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-1}{-1}$ song song với $(\alpha): -x + m^2y + mz + 1 = 0$.

🗭 Lời giải.

- a) Đường thẳng Δ có VTCP $\overrightarrow{u}_{\Delta} = (5;1;1)$. Mặt phẳng (P) có VTPT $\overrightarrow{n}_P = (10;2;m)$. Để $\Delta \perp (P) \Leftrightarrow \overrightarrow{u}_{\Delta} /\!\!/ \overrightarrow{n}_P \Leftrightarrow \frac{10}{5} = \frac{2}{1} = \frac{m}{1} \Leftrightarrow m = 2$.
- b) Đường thẳng d có phương trình tham số $\begin{cases} x=1+2t \\ y=-1+3t \\ z=1-t. \end{cases}$ Xét phương trình $-(1+2t)+m^2(-1+3t)+m(1-t)+1=0 \Leftrightarrow \left(3m^2-m-2\right)t-m^2+m=0. \quad (1)$ Ta có d // (α) khi và chỉ khi (1) vô nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} 3m^2-m-2=0 \\ -m^2+m\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m=-\frac{2}{3}.$

2. Bài tập trắc nghiệm

CÂU 1. Cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{-2} = \frac{z-1}{1}$. Tìm tọa độ giao điểm M của đường thẳng d với mặt phẳng (Oxy).

A M(-1;2;0).

B M(1;0;0).

 \bigcirc M(2;-1;0).

M(3;-2;0)

🗭 Lời giải.

Chọn đáp án $oxed{A}$

CÂU 2. Cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{-1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-3}{1}$ và mặt phẳng (P): 2x+y-2z+9=0. Tìm toạ độ giao điểm của d và (P).

(2;1;1).

(0;-1;4).

 \bigcirc (1; -3; 3).

 \bigcirc (2; -5; 1).

🗭 Lời giải.

Chọn đáp án B.....

CÂU 3. Cho mặt phẳng (α) : x + 2y + 3z - 6 = 0 và đường thẳng Δ : $\frac{x+1}{-1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-3}{1}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

 $lack \Delta$ cắt và không vuông góc với (α) .

lacksquare $\Delta \# (\alpha).$

 \triangle $\Delta \subset (\alpha)$.

 $lackbox{D} \Delta \perp (\alpha).$

🗭 Lời giải.

Mặt phẳng (α) có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (1; 2; 3)$.

Đường thẳng Δ đi qua M(-1; -1; 3) và có vecto chỉ phương $\vec{u} = (-1; -1; 1)$.

Ta có $\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{u} = 1 \cdot (-1) + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 1 = 0$ và $M \in (\alpha)$.

Vậy $\Delta \subset (\alpha)$.

Chọn đáp án \bigcirc

CÂU 4. Cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-m}{-1}$ và mặt phẳng $(P): 2x + my - (m^2 + 1)z + m - 2m^2 = 0$. Có bao nhiều giá trị của m để đường thẳng d nằm trên (P)?

 \bigcirc 0.

B) 1

(c) 2.

D Vô số.

🗭 Lời giải.

Chon đáp án (B)

CÂU 5. Cho mặt phẳng $(\alpha): x+y+z-6=0$ và đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x=m+t \\ y=-1+nt \end{cases}$. Tìm điều kiện của m và n để đường $\alpha = 1 + 2t$

thẳng Δ song song với mặt phẳng (α) .

$$\bigcirc \begin{cases} m=3\\ n=-3 \end{cases}.$$

🗭 Lời giải.

Chọn đáp án (A).....

CÂU 6. Cho đường thẳng d: $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z+1}{1}$. Trong các mặt phẳng dưới đây mặt phẳng nào vuông góc với đường thẳng d?

(A)
$$2x - 2y + 2z + 4 = 0$$
. (B) $4x - 2y - 2z - 4 = 0$. (C) $4x + 2y + 2z + 4 = 0$. (D) $4x - 2y + 2z + 4 = 0$.

$$(c) 4x + 2y + 2z + 4 = 0$$

$$(\mathbf{D}) 4x - 2y + 2z + 4 = 0$$

🗭 Lời giải.

Đường thẳng d có vec-tơ chỉ phương $\vec{u} = (2; -1; 1)$.

Xét mặt phẳng 4x - 2y + 2z + 4 = 0 có vec-tơ pháp tuyến $\vec{n} = (4; -2; 2) \Rightarrow \vec{n} = 2\vec{v}$.

 \Rightarrow d vuông góc với mặt phẳng có phương trình 4x - 2y + 2z + 4 = 0.

CÂU 7. Cho đường thẳng d: $\begin{cases} x-3+2t \\ y=5-3mt \text{ và mặt phẳng } (P) \colon 4x-4y+2z-5=0. \text{ Giá trị nào của } m \text{ để đường thẳng } d \\ z=-1+t. \end{cases}$

vuông góc với mặt phẳng (P).

$$\bigcirc m = \frac{3}{2}.$$

🗭 Lời giải.

- \odot Mặt phẳng (P) có vecto pháp tuyến là $\overrightarrow{n} = (4; -4; 2)$.
- Θ Đường thẳng d có vecto chỉ phương là $\vec{u} = (2; -3m; 1)$.

Đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (P) khi và chỉ khi \overrightarrow{n} cùng phương với \overrightarrow{u} $\Leftrightarrow \frac{2}{4} = \frac{-3m}{-4} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 3m = 2 \Leftrightarrow m = \frac{2}{3}.$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{4} = \frac{-3m}{-4} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 3m = 2 \Leftrightarrow m = \frac{2}{3}.$$

Chọn đáp án (B).....

CÂU 8. Cho điểm A(1;2;3) và đường thẳng $d:\frac{x-2}{2}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z-3}{1}$. Phương trình mặt phẳng (P) đi qua A và vuông góc với đường thẳng d là

(A)
$$2x - y + z - 3 = 0$$
.

B
$$x + 2y + 3z - 7 = 0$$
. **C** $x + 2y + 3z - 1 = 0$. **D** $2x - y + z = 0$.

$$x + 2y + 3z - 1 = 0.$$

Lời giải.

Đường thẳng d có một vecto chỉ phương $\vec{u}_d = (2; -1; 1)$.

Mặt phẳng (P) vuông góc với đường thẳng d nên có một vectơ pháp tuyến $\vec{n}_P = \vec{u}_d = (2; -1; 1)$.

Mặt phẳng (P) đi qua A(1;2;3) và có một vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n}_P = (2;-1;1)$ có phương trình là

$$2(x-1) - 1(y-2) + 1(z-3) = 0 \Leftrightarrow 2x - y + z - 3 = 0.$$

Chọn đáp án (A).....

CÂU 9. Cho hai đường thẳng chéo nhau $d_1: \frac{x-2}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-6}{-2}; d_2: \frac{x-4}{1} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z+1}{3}$. Phương trình mặt phẳng (P) chứa d_1 và song song với d_2 là

$$(P): x + 8y + 5z + 16 = 0.$$

B
$$(P): x + 4y + 3z - 12 = 0.$$

$$(\mathbf{c})(P): 2x + y - 6 = 0.$$

$$(P): x + 8y + 5z - 16 = 0.$$

🗭 Lời giải.

 d_1 đi qua điểm M(2; -2; 6) và có vecto chỉ phương $\vec{u}_1 = (2; 1; -2)$.

 d_2 đi qua điểm N(4;-2;-1) và có vectơ chỉ phương $\vec{u}_2=(1;-2;3)$.

Vì mặt phẳng (P) chứa d_1 và song song với d_2 nên chọn một vectơ pháp tuyến của (P) là $\vec{n}_{(P)} = [\vec{u}_1, \vec{u}_2] = (-1; -8; -5)$. Mặt phẳng (P) đi qua M(2;-2;6) và nhận $\overrightarrow{n}_{(P)}=(-1;-8;-5)$ làm vectơ pháp tuyến nên có phương trình

$$-1 \cdot (x-2) - 8 \cdot (y+2) - 5 \cdot (z-6) = 0 \Leftrightarrow x + 8y + 5z - 16 = 0.$$

Chọn đáp án (D).....

CÂU 10. Cho hai đường thẳng d_1 : $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-3}{-5}$ và d_2 : $\begin{cases} x = -1 + t \\ y = 4 + 3t \end{cases}$. Tìm phương trình mặt phẳng chứa đường z = 1 + t

thẳng d_1 và song song với đường thẳng d_2 .

A
$$18x - 7y + 3z + 34 = 0$$
. **B** $18x + 7y + 3z - 20 = 0$. **C** $18x + 7y + 3z + 20 = 0$. **D** $18x - 7y + 3z - 34 = 0$.

Lời giải.

Đường thẳng d_1 qua M(1; -1; 3) và nhận $\overrightarrow{u_1} = (2; 3; -5)$ làm vectơ chỉ phương; d_2 có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_2} = (1; 3; 1)$. Mặt phẳng (P) chứa d_1 và song song d_2 nên nhận vecto $\vec{n} = [\vec{u_1}, \vec{u_2}] = (18, -7, 3)$ làm vecto pháp tuyến. Vậy phương trình tổng quát của (P) là

$$18(x-1) - 7(y+1) + 3(z-3) = 0$$

$$\Leftrightarrow 18x - 7y + 3z - 34 = 0.$$

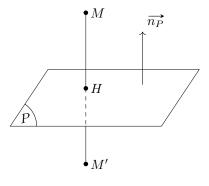
Hình chiếu, đối xứng

- lacktriangle Bài toán 1: Tìm hình chiếu vuông góc của điểm M trên (P):
 - Viết phương trình đường thẳng MH qua M và nhận $\overrightarrow{n_P}$ làm vecto chỉ phương;
 - Giải hệ giữa đường MH với mặt phẳng (P), tìm t. Từ đó, suy ra tọa độ H.



 $Goi\ M'\ d\acute{o}i\ xứng\ với\ M\ qua\ mặt\ phẳng\ (P)\ thì$

$$\begin{cases} x'_{M} = 2x_{M} - x_{H} \\ y'_{M} = 2y_{M} - y_{H} \\ z'_{M} = 2z_{M} - z_{H} \end{cases}$$

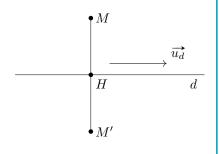


- lacktriangle Bài toán 2: Tìm hình chiếu vuông góc của điểm M trên d:
 - Tham số điểm $H \in d$ theo ẩn t;
 - Giải $\overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{u_d} = 0$, tìm t. Từ đó, suy ra tọa độ H.



Gọi M' đối xứng với M qua mặt phẳng d thì

$$\begin{cases} x'_{M} = 2x_{M} - x_{H} \\ y'_{M} = 2y_{M} - y_{H} \\ z'_{M} = 2z_{M} - z_{H} \end{cases}.$$



1. Ví dụ minh hoạ

VÍ DỤ 1. Trong hệ tọa độ Oxyz, cho điểm M(2;-3;1) và đường thẳng $d:\frac{x+1}{2}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z}{2}$.

- a) Tìm tọa độ hình chiếu vuông góc của điểm M lên d.
- b) Tìm tọa độ điểm M' đối xứng với điểm M qua d.

🗭 Lời giải.

Gọi H là điểm thuộc đường thẳng d, suy ra H(-1+2t;-2-t;2t) với $t \in \mathbb{R}$. Ta có MH = (2t-3; 1-t; 2t-1) và một vectơ chỉ phương của đường thẳng là $\vec{u} = (2; -1; 2)$. Điểm H là hình chiếu của M lên đường thẳng d khi $2(2t-3)-(1-t)+2(2t-1)=0 \Leftrightarrow 9t-9=0 \Leftrightarrow t=1$. Suy ra H(1; -3; 2), do đó tọa độ điểm M' đối xứng với M qua d là M'(0; -3; 3).

VÍ DỤ 2. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho điểm M(2;7;-9) và mặt phẳng (P): x+2y-3z-1=0.

- a) Tìm toa độ hình chiếu vuông góc của M trên mặt phẳng (P).
- b) Tìm tọa độ điểm M' đối xứng với điểm M qua (P).

	1 22	2 -
w	LOI	giai.

Đường thẳng d đi qua M vuông góc với (P) có phương trình $\begin{cases} x=2+t \\ y=7+2t & (t\in\mathbb{R}). \end{cases}$ z=-9-3t

Gọi H là hình chiếu vuông góc của điểm M trên (P) thì $H = d \cap (P)$.

Xét phương trình: $2 + t + 2(7 + 2t) - 3(-9 - 3t) - 1 = 0 \Leftrightarrow 14t + 42 = 0 \Leftrightarrow t = -3$.

Với
$$t = -3 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$
. Vậy $H(-1; 1; 0)$.

Từ đây, suy ra M'(-4; -5; 9)

2. Bài tấp trắc nghiệm

CÂU 1. Hình chiếu vuông góc của điểm A(3;-4;5) trên mặt phẳng (Oxz) là điểm

- (A) M(3;0;0).
- **B** M(0; -4; 5).
- $(\mathbf{c}) M(0; 0; 5).$
- \bigcirc M(3;0;5).

🗭 Lời giải.

Hình chiếu vuông góc của điểm A(3; -4; 5) trên mặt phẳng (Oxz) là điểm M(3; 0; 5).

CÂU 2. Hình chiếu vuông góc của điểm A(1;2;3) trên mặt phẳng (Oxy) là điểm

- (A) M(0; 0; 3).
- **B** N(1;2;0).
- Q(0;2;0).
- P(1;0;0).

🗭 Lời giải.

Hình chiếu vuông góc của điểm A(1;2;3) trên mặt phẳng (Oxy) là điểm N(1;2;0).

Chọn đáp án B.....

CÂU 3. Hình chiếu vuông góc của điểm M(2;1;-3) lên mặt phẳng (Oyz) có tọa độ là

- (2;0;0).
- **B**) (2; 1; 0).
- (0;1;-3).
- \bigcirc (2; 0; -3).

🗭 Lời giải.

Điểm thuộc (Oyz) có tọa độ (0; y; z) nên hình chiếu của M lên (Oyz) có tọa độ là (0; -1; 3).

Chọn đáp án \bigcirc

CÂU 4. Hình chiếu vuông góc của điểm A(3;2;1) trên trục Ox có tọa độ là

- (A) (0; 2; 1).
- **B**) (0; 2; 0).
- (\mathbf{c}) (3; 0; 0).
- (0;0;1).

🗭 Lời giải.

Hình chiếu vuông góc của điểm A(3;2;1) lên trục Ox là A'(3;0;0).

Chọn đáp án \bigcirc

CÂU 5. Hình chiếu của điểm M(2;3;-2) trên trục Oy có tọa độ là

- (2;0;0).
- **B**) (0;3;0).
- (\mathbf{c}) (0;0;-2).
- (2;0;-2).

🗭 Lời giải.

Hình chiếu của điểm M(2;3;-2) trên trực Oy có tọa độ là (0;3;0).

Chon đáp án B

CÂU 6. Cho điểm M(3;2;-1), điểm M'(a;b;c) đối xứng của M qua trục Oy, khi đó a+b+c bằng

(A) 6.

(B) 2.

6 4.

 (\mathbf{D}) 0.

🗭 Lời giải.

Với $M(a;b;c) \Rightarrow$ điểm đối xứng của M qua trực Oy là $M'(-a;b;-c) \Rightarrow M'(-3;2;1) \Rightarrow a+b+c=0$.

Chọn đáp án \bigcirc

CÂU 7. Điểm đối xứng với điểm A(-2;7;5) qua mặt phẳng (Oxz) là điểm B có tọa độ là

- A B(2;7;-5).
- **B**) B(-2; -7; 5).
- $(\mathbf{c}) B(-2;7;-5).$
- B(2;-7;-5).

🗭 Lời giải.

Hình chiếu vuông góc của điểm A(-2;7;5) trên mặt phẳng (Oxz) là điểm H(-2;0;5).

Điểm B(-2; -7; 5) đối xứng với điểm A qua mặt phẳng (Oxz) nên H là trung điểm của AB. Vậy điểm đối xứng với điểm A(-2; 7; 5) qua mặt phẳng (Oxz) là điểm B(-2; -7; 5).

Chọn đáp án (B)......

CÂU 8. Tọa độ hình chiếu vuông góc của điểm A(2;-1;0) lên mặt phẳng (P):3x-2y+z+6=0 là

$$(5; -3; 1).$$

$$(-1;1;-1).$$

$$\bigcirc$$
 (1; 1; 1).

$$\bigcirc$$
 (3; -2; 1).

🗭 Lời giải.

Gọi H(x; y; -6 - 3x + 2y) là hình chiếu của A lên mặt phẳng P.

Ta có AH = (x-2; y+1; -6-3x+2y).

Do $\overrightarrow{AH} \perp (P)$ nên hai vecto \overrightarrow{AH} và \overrightarrow{n}_P cùng phương.

Suy ra ta có hệ phương trình

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{-2} = \frac{-6-3x+2y}{1}.$$

Giải hệ ta thu được một nghiệm là (-1;1;-1).

Chọn đáp án (B).....

CÂU 9. Gọi hình chiếu vuông góc của điểm A(3;-1;-4) lên mặt phẳng (P):2x-2y-z-3=0 là điểm H(a;b;c). Khi đó khẳng định nào sau đây đúng?

$$(A)$$
 $a + b + c = -1$.

(B)
$$a + b + c = 3$$
.

B
$$a+b+c=3$$
. **C** $a+b+c=5$.

$$\bigcirc a + b + c = -\frac{5}{3}.$$

🗭 Lời giải.

• Đường thẳng AH qua A(3;-1;-4) và nhận $\vec{n}=(2;-2;-1)$ làm vectơ pháp tuyến nên có phương trình là

$$\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = -1 - 2t \\ z = -4 - t \end{cases}$$

• $H(3+2t;-1-2t;-4-t)=AH\cap(P)$. Phương trình để xác định t (thay vào phương trình của (P)) là

$$2(3+2t) - 2(-1-2t) - (-4-t) - 3 = 0 \Leftrightarrow t = -1.$$

Với t = -1 thì H(1; 1; -3). Suy ra a + b + c = 1 + 1 - 3 = -1.

Chon đáp án (A).....

CÂU 10. Cho mặt phẳng (P): 2x + 2y - z + 9 = 0 và điểm A(-7; -6; 1). Tìm tọa độ điểm A' đối xứng với điểm A qua mặt phẳng (P).

$$A'(1;2;-3).$$

B
$$A'(1;2;1)$$
.

$$lackbox{D} A'(9;0;9).$$

🗭 Lời giải.

Họi H là hình chiếu vuông góc của điểm A lên (P).

• Đường thẳng AH qua A(-7;-6;1) và nhận $\vec{n}=(2;2;-1)$ làm vectơ pháp tuyến nên có phương trình là

$$\begin{cases} x = -7 + 2t \\ y = -6 + 2t \\ z = 1 - t \end{cases}$$

• $H(-7+2t;-6+2t;1-t)=AH\cap(P)$. Phương trình để xác định t (thay vào phương trình của (P)) là

$$2(-7+2t) + 2(-6+2t) - (1-t) + 9 = 0 \Leftrightarrow t = 2.$$

Với t=2 thì H(-3;-2;-1) và H là trung điểm của đoan AA' nên

$$\begin{cases} x_{A'} = 2x_H - x_A = 1 \\ y_{A'} = 2y_H - y_A = 2 \\ z_{A'} = 2z_H - z_A = -3 \end{cases} \Rightarrow A'(1; 2; -3).$$

Chọn đáp án \bigcirc

CÂU 11. Cho điểm A(4; -3; 2) và đường thẳng $d: \frac{x+2}{3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z}{-1}$. Gọi điểm H là hình chiếu vuông góc của điểm Alên đường thẳng d. Toa đô điểm H là

$$(A)$$
 $H(5;4;-1).$

B
$$H(1;0;-1)$$
.

$$\bullet$$
 $H(-5;-4;1).$

$$lue{D}$$
 $H(-2; -2; 0).$

🗭 Lời giải.

d có vecto chỉ phương $\vec{u} = (3; 2; -1)$.

- Gọi $H(-2+3t; -2+2t; -t) \in d$, ta có $\overrightarrow{AH} = (3t-6; 2t+1; -t-2)$.
- \overrightarrow{AH} vuông góc \overrightarrow{u} , suy ra $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{u} = 0$ hay

$$(3t-6) \cdot 3 + (2t+1) \cdot 2 + (-t-2) \cdot (-1) = 0 \Leftrightarrow t = 1.$$

Với t = 1 thì H(1; 0; -1).

Chọn đáp án B

CÂU 12. Cho đường thẳng d: $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{-1}$, M(2;1;0). Gọi H(a;b;c) là điểm thuộc d sao cho MH có độ dài nhỏ nhất. Tính $T = a^2 + b^2 + c^2$.

$$\mathbf{A} T = \sqrt{5}.$$

B)
$$T = 12$$
.

$$T = 21.$$

$$\mathbf{D} T = 6.$$

🗭 Lời giải.

Phương trình tham số của đường thẳng d là $\begin{cases} x=1+2t\\ y=-1+t\\ z=-t. \end{cases}$

Lấy $H \in d \Rightarrow H(1+2t;-1+t;-t)$ và $\overrightarrow{MH} = (2t-1;t-2;-t)$. MH nhỏ nhất khi và chỉ khi H là hình chiếu của M xuống d, do đó

$$\overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{u}_d = 0 \Leftrightarrow 2(2t-1) + (t-2) + t = 0 \Leftrightarrow t = \frac{2}{3}.$$

$$\text{Vây } H\left(\frac{7}{3}; -\frac{1}{3}; -\frac{2}{3}\right) \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{7}{3} \\ b = -\frac{1}{3} \Rightarrow T = a^2 + b^2 + c^2 = 6. \\ c = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

Chon đáp án D

CÂU 13. Cho điểm M (1;2;-6) và đường thẳng d: $\begin{cases} x=2+2t \\ y=1-t \quad (t\in\mathbb{R}). \text{ Diểm } N \text{ là điểm đối xứng của } M \text{ qua đường thẳng } z=-3+t \end{cases}$

d có tọa độ là

$$igate N(0;2;-4).$$

$$\mathbb{B}$$
 $N(-1;2;-2).$

$$\bigcirc$$
 $N(1;-2;2).$

$$\bigcirc$$
 $N(-1;0;2).$

🗩 Lời giải.

d có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (2; -1; 1)$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của m trên d.

- Ta có $H(2+2t; 1-t; -3+t) \in d$ và $\overrightarrow{MH} = (2t+1; -t-1; t+3)$.
- \overrightarrow{MH} vuông góc \overrightarrow{u} , suy ra $\overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{u} = 0$ hay

$$(2t+1)\cdot 2 + (-t-1)\cdot (-1) + (t+3)\cdot (1) = 0 \Leftrightarrow t = -1.$$

Với t=-1 thì H(0;2;-4) và H là trung điểm của đoạn MN nên

$$\begin{cases} x_N = 2x_H - x_M = -1 \\ y_M = 2y_H - y_M = 2 \\ z_N = 2z_H - z_M = -2 \end{cases} \Rightarrow N(-1; 2; -2).$$

Chọn đáp án \fbox{B}

CÂU 14. Cho đường thẳng $\Delta: \frac{x}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-1}{-1}$ và hai điểm A(1;0;1), B(-1;1;2). Biết điểm M(a;b;c) thuộc Δ sao cho $\left|\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó, tổng a + 2b + 4c bằng bao nhiêu?

$$\bigcirc$$
 0.

B)
$$-1$$
.

🗭 Lời giải.

 \bigcirc Cách 1: Gọi I là điểm thỏa $\overrightarrow{IA} - 3\overrightarrow{IB} = \overrightarrow{0}$, suy ra $I\left(-2; \frac{3}{2}; \frac{5}{2}\right)$.

Theo kết quả của $\mbox{\bf Bài toán 5}\ \mbox{thì}\ \left|\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MB}\right|$ nhỏ nhất khi M là hình chiếu vuông góc của điểm I lên Δ .

— Gọi $M(2t; -1 + t; 1 - t) \in \Delta$ là hình chiếu vuông góc của I lên Δ . Ta có

$$\overrightarrow{IM}\cdot\overrightarrow{u}_{\Delta}=0\Leftrightarrow t=-\frac{1}{2}.$$

— Với
$$t = -\frac{1}{2}$$
 thì $M\left(-1; -\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right)$. Suy ra $a + 2b + 4c = 2$.

Cách 2: Ta tham số toa đô điểm M, sau đó dùng khảo sát hàm để xứ lý max - min. Gọi $M(2m; -1 + m; 1 - m) \in \Delta$. Ta có

$$\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} = (4 + 4m; -5 + 2m; -3 - 2m)$$

Suy ra

$$\left|\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB}\right| = \sqrt{24m^2 + 24m + 50} = \sqrt{24\left(m + \frac{1}{2}\right)^2 + 44}.$$

Nhận xét $|\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB}|$ nhỏ nhất khi $m = -\frac{1}{2}$. Từ đó suy ra $M\left(-1; -\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right)$. Vây a + 2b + 4c = 2.

Chọn đấp án \bigcirc

CÂU 15. Cho ba điểm $A(0;-2;-1),\ B(-2;-4;3),\ C(1;3;-1)$ và mặt phẳng $(P)\colon x+y-2z-3=0.$ Gọi $M(a;b;c)\in (P)$ sao cho $\left| \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2 \overrightarrow{MC} \right|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính a - b + 2c.

B)
$$-1$$
.

$$\bigcirc$$
 -2 .

🗭 Lời giải.

Gọi I là điểm sao cho $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + 2\overrightarrow{IC} = \overrightarrow{0} \Rightarrow I(0;0;0)$. Từ đó ta có

$$\begin{split} \left| \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2 \overrightarrow{MC} \right| &= \left| \left(\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IM} \right) + \left(\overrightarrow{IB} - \overrightarrow{IM} \right) + 2 \cdot \left(\overrightarrow{IC} - \overrightarrow{IM} \right) \right| \\ &= \left| \left(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + 2 \overrightarrow{IC} \right) - 4 \overrightarrow{IM} \right| \\ &= \left| \overrightarrow{0} - 4 \overrightarrow{IM} \right| = 4 IM. \end{split}$$

Bởi vậy $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}|$ đạt giá trị nhỏ nhất $\Leftrightarrow IM$ đạt giá trị nhỏ nhất $\Leftrightarrow M$ là hình chiếu vuông góc của I trên mặt phẳng $(P) \Leftrightarrow M$ là giao điểm của đường thẳng d đi qua I và vuông góc với mặt phẳng (P).

Phương trình đường thẳng d là d: $\begin{cases} y=t \\ z=-2t. \end{cases}$

Tọa độ giao điểm của d và (P) ứng với t là nghiệm phương trình

$$(t) + (t) - 2 \cdot (-2t) - 3 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}.$$

Tọa độ điểm M cần tìm là $M\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};-1\right)$. Suy ra a-b+2c=-2

Chọn đáp án \bigcirc

C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM TỬ LUYỆN

Phần I. Mỗi câu hỏi học sinh chọn một trong bốn phương án A, B, C, D.

CÂU 1. Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho hai điểm A(0;-1;-2) và B(2;2;2). Véc-tơ \vec{a} nào dưới đây là một véc-to chỉ phương của đường thẳng AB?

$$\overrightarrow{\mathbf{A}} \ \overrightarrow{a} = (-2; 1; 0).$$

B
$$\vec{a} = (2; 3; 0).$$

$$\vec{c}$$
 $\vec{a} = (2; 1; 0).$

$$\overrightarrow{a} = (2; 3; 4).$$

🗭 Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(2;3;4)$ nên đường thẳng AB có một véc-tơ chỉ phương là $\overrightarrow{a}=(2;3;4)$.

CÂU 2. Đường thẳng (Δ) : $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z}{-1}$ **không** đi qua điểm nào dưới đây?

$$A$$
 $C(3;-1;-1)$.

B
$$D(1; -2; 0)$$
.

$$\bullet$$
 $A(-1;2;0).$

$$lackbox{D} B(-1; -3; 1).$$

🗭 Lời giải.

Ta có $\frac{-1-1}{2} \neq \frac{2+2}{1} \neq \frac{0}{-1}$ nên điểm A(-1;2;0) không thuộc đường thẳng (Δ) .

CÂU 3. Cho đường thẳng Δ đi qua điểm M(2;0;-1) và có một véc-tơ chỉ phương $\vec{a}=(4;-6;2)$. Phương trình tham số của đường thẳng Δ là

$$\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -3t \\ z = -1 + t \end{cases}.$$

$$\begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = -3t \\ z = 1 + t \end{cases}.$$

🗭 Lời giải.

Véc-tơ chỉ phương $\vec{a} = (4; -6; 2) = 2(2; -3; 1)$ nên đường thẳng Δ có phương trình tham số là $\begin{cases} x = z + 2\iota \\ y = -3t \\ z = -1 + t. \end{cases}$

CÂU 4. Trong không gian Oxyz, cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z-1}{-3}$. Một véc-tơ chỉ phương của đường thẳng d là

$$\overrightarrow{\mathbf{A}}$$
 $\overrightarrow{u}_3 = (2; -1; -3).$

B
$$\vec{u}_4 = (-2; -1; 3).$$
 C $\vec{u}_1 = (2; -1; 3).$

$$\overrightarrow{\mathbf{c}}$$
 $\overrightarrow{u}_1 = (2; -1; 3)$

$$\overrightarrow{\mathbf{D}}$$
) $\overrightarrow{u}_2 = (1; 0; 1)$

🗭 Lời giải.

Một véc-tơ chỉ phương của đường thẳng d là $\vec{u}_3 = (2; -1; -3)$.

CÂU 5. Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho mặt phẳng (P) có phương trình là 2x + y - 5z + 6 = 0. Phương trình đường thẳng d đi qua điểm M(1; -2; 7) và vuông góc với (P) là

(A)
$$d: \frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+7}{-5}$$

B
$$d: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-7}{-5}.$$

©
$$d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-7}{-5}.$$

D
$$d: \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+5}{7}.$$

D Lời giải.

Ta có d vuông góc với (P) nên có véc-tơ chỉ phương là $\overrightarrow{u}=(2;1;-5)$. Kết hợp với d đi qua điểm M(1;-2;7) nên $d\colon \frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-7}{-5}$.

CÂU 6. Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho hai đường thẳng d_1 : $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{4}$ và d_2 : $\begin{cases} x = 1+t \\ y = 2+2t \\ z = 3-2t \end{cases}$

Mệnh đề nào sau đây đúng?

- $(\mathbf{A}) d_1$ và d_2 vừa cắt nhau vừa vuông góc.
- **B**) d_1 và d_2 không vuông góc và không cắt nhau.
- $(\mathbf{c}) d_1$ và d_2 cắt nhau nhưng không vuông góc.
- \bigcirc d_1 và d_2 vuông góc nhưng không cắt nhau.

🗭 Lời giải.

Chọn M(1;2;3), N(0;0;5) là hai điểm lần lượt thuộc đường thẳng d_1 và d_2 .

Ta có $\vec{u}_{d_1} = (2; 3; 4)$ và $\vec{u}_{d_2} = (1; 2; -2)$ nên $\vec{u}_{d_1} \cdot \vec{u}_{d_2} = 0$ nên $d_1 \perp d_2$.

Mặt khác, ta có $[\vec{u}_{d_1}; \vec{u}_{d_2}] \overrightarrow{MN} = 0$ nên d_1 cắt d_2 .

Vây hai đường thẳng vừa vuông góc, vừa cắt nhau.

Chọn đáp án (A).....

CÂU 7. Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, véc-tơ nào dưới đây là véc-tơ chỉ phương của trục Oz?

(B)
$$\vec{k} = (0; 0; 1).$$
 (C) $\vec{i} = (1; 0; 0).$

$$\vec{c}$$
 $\vec{i} = (1; 0; 0).$

$$\vec{j} = (0; 1; 0).$$

🗭 Lời giải.

Trục Oz có một vecto chỉ phương là $\vec{k} = (0; 0; 1)$.

Chọn đáp án \bigcirc B).....

CÂU 8. Đường thẳng (Δ) : $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z}{-1}$ đi qua điểm nào dưới đây?

$$\bigcirc$$
 $Q(-1;-2;0).$

$$\mathbb{B}$$
 $N(-1;2;0).$

$$P(3;1;-1).$$

$$\mathbf{D} M(1;-2;0).$$

🗭 Lời giải.

Ta có $\frac{1-1}{2} = \frac{2-2}{1} = \frac{0}{-1}$ nên điểm M(1;-2;0) thuộc đường thẳng (Δ) .

ÂU 9. Đường thẳng d: $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z+3}{-1}$ vuông góc với đường thẳng nào dưới đây? **A** d_1 : $\begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = -2t \\ z = 1 + 5t \end{cases}$ **B** d_4 : $\begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = 2 - t \\ z = 5 - 5t \end{cases}$ **C** d_3 : $\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 3 - t \\ z = 5t \end{cases}$ **D** d_2 : $\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 - 3t \\ z = 1 + t \end{cases}$

(A)
$$d_1$$
:
$$\begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = -2t \\ z = 1 + 5t \end{cases}$$

(B)
$$d_4$$
:
$$\begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = 2 - t \\ z = 5 - 5t \end{cases}$$

$$\begin{array}{l}
\textbf{D} d_2 \colon \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 - 3t \\ z = 1 + t \end{cases}$$

Lời giải

Đường thẳng d có véc-tơ chỉ phương $\vec{u} = (2; -1; -1)$.

Các đường thẳng d_1 , d_2 , d_3 , d_4 lần lượt có véc-tơ chỉ phương là $\vec{u}_1 = (-3; -2; 5)$, $\vec{u}_2 = (0; -3; 1)$, $\vec{u}_3 = (3; -1; 5)$ và $\vec{u}_4 = (-3; -1; -5).$

 $Vi \ \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u}_4 = 0 \ \text{nên} \ d \perp d_4.$

Chon đáp án B.....

CÂU 10. Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho đường thẳng d có véc-tơ chỉ phương \vec{u} và mặt phẳng (P) có véc-tơ pháp tuyến \vec{n} . Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- (A) d song song với (P) thì \vec{u} cùng phương với \vec{n} .
- **(B)** \vec{u} vuông góc với \vec{n} thì d song song với (P).
- (c) \vec{u} không vuông góc với \vec{n} thì d cắt (P).
- (\mathbf{D}) d vuông góc với (P) thì \overrightarrow{u} vuông góc với \overrightarrow{n} .

🗭 Lời giải.

Ta có \vec{u} không vuông góc với \vec{n} thì d cắt (P).

Chon đáp án C

(A)
$$d: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-3}{1}$$

B
$$d: \frac{x+1}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-3}{1}$$
.

c
$$d: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+3}{1}$$

D
$$d: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+3}{1}$$

🗭 Lời giải.

Từ phương trình tham số ta thấy đường thẳng d đi qua điểm tọa độ (1;2;-3) và có véc-tơ chỉ phương $\overrightarrow{u}=(2;-1;1)$. Suy ra phương trình chính tắc của d là $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+3}{1}$.

Chọn đáp án D.....

CÂU 12. Trong không gian Oxyz, cho đường thẳng d: $\frac{x+3}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{-1}$ và mặt phẳng (P): x+y-3z-2=0. Gọi d'là đường thẳng nằm trong mặt phẳng (P), cắt và vuông góc với d. Đường thẳng d' có phương trình là $\frac{x+1}{a} = \frac{y}{\pi} = \frac{z+1}{a}$. Tính S = a - c.

(A) 3.

D 4.

Lời giải.

Phương trình tham số của d: $\begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = -1 + t \\ z = -t \end{cases}$

Tọa độ giao điểm của d và (P) là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = -1 + t \\ z = -t \\ x + y - 3z - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = -1 + t \\ z = -t \\ -3 + 2t - 1 + t + 3t - 2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ x = -1 \\ y = 0 \\ z = -1 \end{cases} \Rightarrow d \cap (P) = M(-1; 0; -1).$$

Theo đề bài, đường thẳng d có véc-tơ chỉ phương $u_d = (2; 1; -1)$, mặt phẳng (P) có véc-tơ pháp tuyến $n_{(P)} = (1; 1; -3)$.

Vì d' nằm trong mặt phẳng (P), cắt và vuông góc với d nên d' đi qua M và có véc-tơ chỉ phương $\overrightarrow{u}_{d'} = \left[\overrightarrow{n}_{(P)}, \overrightarrow{u}_{d}\right] = (2; -5; -1)$ hay d' nhận véc-tơ $\overrightarrow{v} = (-2; 5; 1)$ làm véc tơ chỉ phương.

Phương trình của
$$d'$$
: $\frac{x+1}{-2} = \frac{y}{5} = \frac{z+1}{1}$.

Do đó
$$S = a - c = -2 - 1 = -3$$
.

Chọn đáp án \bigcirc

Phần II. Trong mỗi ý a), b), c) và d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.

CÂU 1. Trong không gian Oxyz cho đường thẳng d có phương trình tham số $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = 3 - 2t. \end{cases}$

Mệnh đề	Ð	S
a) Giao điểm của đ t d và mặt phẳng $(P)\colon x+2y-3z+2=0$ là $I(0;1;2).$		X
b) Véc-tơ $\vec{a} = (4; 2; -3)$ là một véc-tơ chỉ phương của đường thẳng d .		X
c) Đường thẳng d đi qua điểm $A(-1;1;3)$.	X	
d) Phương trình chính tắc của đường thẳng d là $\frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-3}{-2}$.	X	

🗩 Lời giải.

a) Sai. Vì ta có
$$-1 + 2t + 2(1+t) - 3(3-2t) + 2 = 0 \Leftrightarrow 10t - 6 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{3}{5}$$
. Giao điểm của d và (P) là $B\left(\frac{1}{5}; \frac{8}{5}; \frac{9}{5}\right)$.

- b) Sai. Vì véc-tơ chỉ phương của đường thẳng d là $\overrightarrow{u}_d=(2;1;-2)$. Xét hai véc-tơ $\overrightarrow{a}=(4;2;-3)$ và $\overrightarrow{u}_d=(2;1;-2)$. Vì $\frac{1}{2}\neq\frac{-2}{-3}$ nên $\overrightarrow{a}=(4;2;-3)$ và \overrightarrow{u}_d không cùng phương. Do đó \overrightarrow{a} không là véc-tơ chỉ phương của đường thẳng d.
- c) \bigcirc **Dúng.** Vì theo phương trình tham số của đường thẳng d thì d đi qua điểm A(-1;1;3).
- d) $\textcircled{\textbf{D}}$ $\textcircled{\textbf{D}}$ úng. Vì đường thẳng d đi qua điểm M(-1;1;3) và có một véc-tơ chỉ phương là $\overrightarrow{u}_d=(2;1;-2)$ nên có phương trình chính tắc là $\frac{x+1}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-3}{-2}$.

Chọn đáp án a sai b sai c đúng d đúng

CÂU 2. Trong không gian Oxyz cho đường thẳng $d\colon \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{1}$ và mặt phẳng $(P)\colon x+y+2z-3=0.$

Mệnh đề	Ð	S
a) Đường thẳng d' đi qua điểm $A(1;0;-1)$ và vuông góc với mặt phẳng (P) . Phương trình tham số của đường thẳng d' là $\begin{cases} x=1+t\\ y=t\\ z=-1+2t \end{cases}$	X	
b) Đường thẳng d có một véc-tơ chỉ phương là $\vec{a} = (1; -1; 0)$.		X
c) Đường thẳng d đi qua điểm $M(2;-1;1)$.		X
d) Góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (P) bằng 30° .	X	

🗭 Lời giải.

a) \bigcirc Đúng. Vì đường thẳng d' vuông góc với mặt phẳng (P) nên có một véc-tơ chỉ phương là $\overrightarrow{u}_{d'} = \overrightarrow{n}_P = (1;1;2)$. Kết hợp với d' đi qua A(1;0;-1) nên phương trình tham số của đường thẳng d' là $\begin{cases} x=1+t \\ y=t \\ z=-1+2t. \end{cases}$

b) Sai. Vì đường thẳng d có một véc-tơ chỉ phương là $\vec{u} = (2; -1; 1)$. Mà \vec{a} , \vec{u} không cùng phương nên \vec{a} không là véc-tơ chỉ phương của d.

- c) S Sai. Vì lấy $M \in d \Rightarrow M(1+2t;-1-t;t)$. Không có giá trị nào của t thỏa hệ $\begin{cases} 1+2t=2\\ -1-t=-1 \text{ nên đường thẳng } d\\ t=1 \end{cases}$ không đi qua điểm M(2;-1;1).
- d) \bigcirc Đúng. Vì gọi α là góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (P). Ta có

$$\begin{split} \sin\alpha &= \left| \cos{(\overrightarrow{u}_d,\overrightarrow{n}_P)} \right| = \frac{|\overrightarrow{u}_d \cdot \overrightarrow{n}_P|}{|\overrightarrow{u}_d| \, |\overrightarrow{n}_P|} \\ &= \left| \frac{|2 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 + 1 \cdot 2|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2} \cdot \sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 30^\circ. \end{split}$$

Chọn đáp án a đúng b sai c sai d đúng

CÂU 3. Trong không gian Oxyz cho đường thẳng d có phương trình tham số $\begin{cases} x=2+t \\ y=3-2t \\ z=3t. \end{cases}$

Mệnh đề	Ð	S
a) Đường thẳng d có một véc-tơ chỉ phương là $\overrightarrow{u}=(1;-2;3).$	X	
b) Đường thẳng d đi qua điểm $M(1; -2; 3)$.		X
c) Đường thẳng d' đi qua điểm $A(1;2;-2)$ và song song với đường thẳng d . Phương trình tham số của đường thẳng d' là $\begin{cases} x=1+t\\ y=2-2t\\ z=-2+3t \end{cases}$	X	
d) Khoảng cách từ điểm $B(0;1;2)$ đến đường thẳng d bằng 3.		X

🗭 Lời giải.

- a) $\textcircled{\textbf{D}}$ $\textcircled{\textbf{Dúng.}}$ Vì đường thẳng d có một véc-tơ chỉ phương là $\overrightarrow{u}=(1;-2;3)$.
- b) Sai. Vì lấy $M \in d \Rightarrow M(2+t; 3-2t; 3t)$. Không có giá trị nào của t thỏa hệ $\begin{cases} 2+t=1\\ 3-2t=-2 \text{ nên đường thẳng } d\\ 3t=3 \end{cases}$ không đi qua điểm M(1; -2; 3).
- c) **Đúng.** Vì $d' \not\parallel d$ nên d' có một véc-tơ chỉ phương là $\overrightarrow{u}_{d'} = \overrightarrow{u}_d = (1; -2; 3)$. Vậy đường thẳng d' có phương trình tham số là $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 2t \\ z = -2 + 3t. \end{cases}$
- **d)** (S) Sai. Vì lấy điểm $C(3;1;3) \in d$, ta có $\overrightarrow{u}_d = (1;-2;3)$, $\overrightarrow{BC} = (3;0;1)$. Khoảng cách từ điểm B đến đường thẳng d là $h = \frac{\left[\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{u}_d\right]}{\left|\overrightarrow{u}_d\right|} = \frac{\sqrt{364}}{7}$.

Chọn đáp án a đúng b sai c đúng d sai

CÂU 4. Trong không gian Oxyz cho đường thẳng d có phương trình tham số $\begin{cases} x=2+2t\\ y=1-t\\ z=1+2t. \end{cases}$

Mệnh đề	Ð	S
a) Đường thẳng d có một véc-tơ chỉ phương là $\overrightarrow{a} = (2; 1; 1)$.		X
b) Điểm $B(4;0;3)$ thuộc đường thắng d .	X	
c) Khoảng cách giữa đường thẳng d và mặt phẳng (P) : $x + 2y - 3 = 0$ bằng 1.		X
d) Đường thẳng d và đường thẳng d' : $\frac{x}{4} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z+1}{4}$ trùng nhau.	X	

a) Sai. Vì véc-tơ chỉ phương của đường thẳng d là $\vec{u}_d = (2; -1; 2)$.

Xét hai véc-tơ $\vec{a}=(2;1;1)$ và $\vec{u}_d=(2;-1;2)$. Vì $\frac{2}{2}\neq\frac{1}{-1}$ nên $\vec{a}=(2;1;1)$ và \vec{u}_d không cùng phương.

Do đó \overrightarrow{a} không là véc-tơ chỉ phương của đường thẳng d.

b) Đúng. Vì thế tọa độ điểm B(4;0;3) vào phương trình của đường thẳng d, ta có $\begin{cases} 4=2+2t \\ 0=1-t & \Leftrightarrow t=1 \text{ nên điểm } \\ 3=1+2t \end{cases}$

B(4;0;3) thuộc đường thẳng d.

c) Sai. Vì ta có $\vec{u}_d = (2; -1; 2), \ \vec{n}_{(P)} = (1; 2; 0)$ thỏa mãn $\vec{u}_d \cdot \vec{n}_{(P)} = 0$. Suy ra $\vec{u}_d \perp \vec{n}_{(P)} \Rightarrow \begin{bmatrix} d \# (P) \\ d \subset (P). \end{bmatrix}$

Mặt khác điểm $A(2;1;1) \in d$ nhưng $A \notin (P)$ nên $d \not\parallel (P)$.

Theo câu b), ta có

$$B(4;0;3) \in d \Rightarrow d(d,(P)) = d(B,(P)) = \frac{4+2\cdot 0-3}{\sqrt{1^2+2^2}} = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

d) Dúng. Vì ta có $\vec{u}_d = (2; -1; 2), \ \vec{u}'_d = (4; -2; 4)$ cùng phương. (1)Điểm $A(2;1;1) \in d$ và $A(2;1;1) \in d'$. (2)

Từ (1) và (2) chứng tỏ d, d' trùng nhau.

Chọn đáp án a sai b đúng c sai d đúng

Phần III. Học sinh điền kết quả vào ô trống.

CÂU 1. Trong không gian Oxyz, cho ba điểm A(1; -2; 1), B(5; 0; -1), C(3; 1; 2) và mặt phẳng (Q): 3x + y - z + 3 = 0. Gọi M(a;b;c) là điểm thuộc (Q) thỏa mãn $MA^2 + MB^2 + 2MC^2$ nhỏ nhất. Khi đó tổng a+b+3c bằng bao nhiêu?

Đáp án: 5

D Lời giải.

Goi E là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EB} + 2\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{0} \Rightarrow E(3;0;1)$. Ta có

$$\begin{split} S &= MA^2 + MB^2 + 2MC^2 = \overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 + 2\overrightarrow{MC}^2 \\ &= \left(\overrightarrow{ME} + \overrightarrow{EA}\right)^2 + \left(\overrightarrow{ME} + \overrightarrow{EB}\right)^2 + 2\left(\overrightarrow{ME} + \overrightarrow{EC}\right)^2 \\ &= 4ME^2 + EA^2 + EB^2 + 2EC^2. \end{split}$$

Vì $EA^2 + EB^2 + 2EC^2$ không đổi nên S nhỏ nhất khi và chỉ khi ME nhỏ nhất.

Suy ra M là hình chiếu vuông góc của E lên (Q).

Do đó $ME \perp (Q)$ nên $\overrightarrow{u}_{ME} = \overrightarrow{n}_{(Q)} = (3;1;-1)$, và E(3;0;1).

Suy ra phương trình đường thẳng ME: $\begin{cases} x = 3 + 3t \\ y = t \\ z = 1 - t. \end{cases}$ Tọa độ điểm M là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} x = 3 + 3t \\ y = t \\ z = 1 - t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \\ z = 2 \\ t = -1. \end{cases}$

Vây $M(0;-1;2) \Rightarrow a = 0, b = -1, c = 2 \Rightarrow a + b + 3c =$ Đáp án: 5

CÂU 2. Trong không gian Oxyz, một viên đạn được bắn ra từ điểm A(3;4;2) và trong 4 giây đầu đạn đi với vận tốc không đổi, véc-tơ vận tốc (trên giây) là $\vec{v} = (4;5;1)$. Biết viên đạn trúng mục tiêu tại điểm M(13;b;c), tính b+2c.

Đáp án: 2 5

Lời giải.

Phương trình đường đi của viên đạn $\begin{cases} x=3+4t\\ y=4+5t \ \text{với} \ 0 \leq t \leq 4.\\ z=2+t \end{cases}$

Viên đạn trúng mục tiêu tại điểm M(13;b;c) khi M nằm trên đường đi của viên đạn

$$\Rightarrow \begin{cases} 13 = 3 + 4t \\ b = 4 + 5t \\ c = 2 + t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{5}{2} \\ b = \frac{33}{2} \Rightarrow b + 2c = \frac{33}{2} + 9 = \frac{51}{2} = 25,5. \end{cases}$$

Dáp án: 25,5

CÂU 3. Trong không gian với hệ trực tọa độ Oxyz, cho điểm M(3;3;-2) và hai đường thẳng $d_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z}{1}$; $d_2: \frac{x+1}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{4}$. Đường thẳng d đi qua M cắt d_1 , d_2 lần lượt tại A và B. Khi đó độ dài đoạn thẳng AB bằng bao nhiêu?

Đáp án: 3

🗭 Lời giải.

Ta có

- $oldsymbol{oldsymbol{\oslash}}$ Phương trình tham số của d_1 : $\begin{cases} x=1+t_1\\ y=2+3t_1\;;\,t_1\in\mathbb{R},\\ z=t_1 \end{cases}$ Do $A\in d_1$ nên $A\left(1+t_1;2+3t_1;t_1\right).$
- $\textbf{ Phương trình tham số của } d_2\colon \begin{cases} x=-1-t_2\\ y=1+2t_2 \ ;\ t_2\in\mathbb{R}.\\ z=2+4t_2 \end{cases}$ Do $B\in d_2$ nên $B\left(-1-t_2;1+2t_2;2+4t_2\right).$

 $\overrightarrow{MA} = (t_1 - 2; 3t_1 - 1; t_1 + 2); \overrightarrow{MB} = (-4 - 4t_2; -2 + 2t_2; 4 + 4t_2).$ Vì A, B, M thẳng hàng nên

$$\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB}, k \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t_1 - 2 = -4k - kt_2 \\ 3t_1 - 1 = -2k + 2kt_2 \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 + 4k + kt_2 = 2 \\ 3t_1 + 2k - 2kt_2 = 1 \end{cases} \\ t_1 + 2 = 4k + 4kt_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = 0 \\ k = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = 0 \\ k = \frac{1}{2} \\ t_2 = 0. \end{cases} \end{cases}$$

Vậy A(1;2;0) và $B(-1;1;2) \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (-2;-1;2)$. Độ dài đoạn thẳng $AB = \left|\overrightarrow{AB}\right| = 3$.

Đáp án: 3

CÂU 4. Hình vẽ dưới đây là hình ảnh Cầu Cổng Vàng (The Golden Gate Bridge) ở Mỹ. Xét hệ trục toạ độ Oxyz với O là bệ của chân cột trụ tại mặt nước, trục Oz trùng với cột trụ, mặt phẳng Oxy là mặt nước và xem như trục Oy cùng phương với cầu như hình vẽ. Dây cáp AD (xem như là một đoạn thẳng) đi qua đỉnh D thuộc trục Oz và điểm A thuộc mặt phẳng Oyz, trong đó điểm D là đỉnh cột trụ cách mặt nước 227 m, điểm A cách mặt nước 75 m và cách trục Oz khoảng 343 m.



Giả sử ta dùng một đoan dây nối điểm N trên dây cáp AD và điểm M trên thành cầu, biết M cách mặt nước 75 m và MNsong song với cột trụ. Tính độ dài MN (đơn vị mét) biết điểm M cách trục Oz một khoảng bằng 230 m (kết quả làm tròn đến hàng phần mười).

Đáp án: 5 0

🗭 Lời giải.

Chọn một đơn vị trên các trục bằng 1 m.

Ta có D(0; 0; 227), A(0; -343; 75), M(0; -230; 75), $\overrightarrow{AD} = (0; 343; 152)$.

Phương trình đường thẳng
$$AD$$
:
$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 343t \\ z = 227 + 152t \end{cases} \Rightarrow N(0; 343t; 227 + 152t).$$

Ta có $\overrightarrow{MN} = (0; 343t + 230; 152 + 152t)$, MN song song với trực Oz, suy ra

$$343t + 230 = 0 \Rightarrow t = -\frac{230}{343} \Rightarrow MN = 152 + 152 \cdot \left(-\frac{230}{343}\right) \approx 50, 1(m).$$

CÂU 5. Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho hai điểm A(-2;-1;2) và B(5;-1;1). Đường thẳng d' là hình chiếu của đường thẳng AB lên mặt phẳng (P): x + 2y + z + 2 = 0 có một véc-tơ chỉ phương $\vec{u} = (a; b; 2)$. Tính S = a + b.

 $\overline{\text{Dáp án:}} - 4$

🗭 Lời giải.

Gọi (Q) là mặt phẳng chứa đường thẳng AB và vuông góc (P).

Khi đó, đường thẳng $d' = (P) \cap (Q)$.

Có
$$\left\{ \overrightarrow{n}_{(Q)} \perp \overrightarrow{AB} = (7;0;-1) \atop \overrightarrow{n}_{(Q)} \perp \overrightarrow{n}_{(P)} = (1;2;1) \right\}$$
. Suy ra chọn $\overrightarrow{n}_{(Q)} = \left[\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{n}_{(P)} \right] = (2;-8;14)$.

Kill do, duoing than $\vec{u} = (F) \cap (Q)$. Có $\left\{ \overrightarrow{n}_{(Q)} \perp \overrightarrow{AB} = (7;0;-1) \right\}$. Suy ra chọn $\overrightarrow{n}_{(Q)} = \left[\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{n}_{(P)} \right] = (2;-8;14)$. Mặt khác $\left\{ \overrightarrow{u}_{(d')} \perp \overrightarrow{n}_{(P)} \right\}$. Suy ra chọn $\overrightarrow{u}_{(d')} = \left[\overrightarrow{n}_{(P)}; \overrightarrow{n}_{(Q)} \right] = (36;-12;-12)$ cùng phương với $\overrightarrow{u}(-6;2;2)$. Như vậy $a = -6, b = 2 \Rightarrow a + b = -4$. Đáp án: $\boxed{-4}$

CÂU 6. Trong không gian Oxyz, cho điểm A(1;0;2) và đường thẳng $d:\frac{x-1}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z+1}{2}$. Đường thẳng Δ đi qua A, vuông góc và cắt d đi qua điểm M(a;b;0). Tính $\frac{a}{h}$.

Đáp án: 1 ,

Lời giải.

Đường thẳng d có véc-tơ chỉ phương là $\vec{u}_d = (1; 1; 2)$.

Goi giao điểm của đường thẳng Δ và d là B.

Vì $B \in d$ nên $B(1+t; t; -1+2t) \Rightarrow \overline{AB} = (t; t; -3+2t).$

Vì đường thẳng Δ vuông góc với đường thẳng d nên

$$\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{u}_d \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{u}_d = 0 \Leftrightarrow 1 \cdot t + 1 \cdot t + 2 \cdot (-3 + 2t) = 0 \Leftrightarrow t = 1.$$

Do đó $B(2;1;1), \overrightarrow{AB} = (1;1;-1).$

Đường thẳng Δ đi qua điểm A(1;0;2) và có vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{AB}=(1;1;-1)$ nên có phương trình tham số $\begin{cases} x=1+t\\ y=0+t\\ z=2-t. \end{cases}$

Đáp án: 1,5

—HẾТ—

Bài 16. CÔNG THỰC TÍNH GÓC TRONG KHÔNG GIAN

A. LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1. Góc giữa hai mặt phẳng

Công thức: Gọi $\overrightarrow{n_1} = (a_1; b_1; c_1)$, $\overrightarrow{n_2} = (a_2; b_2; c_2)$ lần lượt là vectơ pháp tuyến của (P) và (Q); φ là góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q), với $0^{\circ} \le \varphi \le 90^{\circ}$. Khi đó

$$\cos \varphi = \left| \cos \left(\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2} \right) \right| = \frac{\left| a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 \right|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}$$

Chú ý:

- Nếu (P) song song hoặc trùng (Q) thì $\varphi = 0^{\circ}$.
- Nếu $(P) \perp (Q)$ thì $\varphi = 90^{\circ}$. Khi đó $\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2} = 0 \Leftrightarrow a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 = 0$.

2. Góc giữa hai đường thẳng

Công thức: Gọi $\vec{u} = (u_1; u_2; u_3)$, $\vec{v} = (v_1; v_2; v_3)$ lần lượt là vectơ chỉ phương của d_1 và d_2 ; φ là góc giữa hai đường thẳng d_1 và d_2 , với $0^{\circ} \leq \varphi \leq 90^{\circ}$. Khi đó

$$\cos \varphi = \left| \cos \left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \right) \right| = \frac{\left| u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 \right|}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} \cdot \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}}$$

Chú ý:

- Nếu d_1 song song hoặc trùng d_2 thì $\varphi = 0^{\circ}$.
- Nếu $d_1 \perp d_2$ thì $\varphi = 90^\circ$. Khi đó $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u} = 0 \Leftrightarrow u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 = 0$.

3. Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

Công thức: Gọi $\vec{u} = (u_1; u_2; u_3)$, $\vec{n} = (A; B; C)$ lần lượt là vectơ chỉ phương của d và vectơ pháp tuyến của (P); φ là góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (P), với $0^{\circ} \le \varphi \le 90^{\circ}$. Khi đó

$$\left| \sin \varphi = \left| \cos \left(\vec{u}, \vec{n} \right) \right| = \frac{\left| u_1 A + u_2 B + u_3 C \right|}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} \cdot \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right|$$

Chú ý:

- Nếu d song song hoặc trùng (P) thì $\varphi = 0^{\circ}$, khi đó $\vec{u} \perp \vec{n}$
- Nếu d vuông góc với (P) thì $\varphi = 90^{\circ}$, khi đó $\vec{u} = k \cdot \vec{n}$.

B. PHÂN LOẠI, PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Tính góc trong không gian Oxyz

- Xác định vectơ chỉ phương (vectơ pháp tuyến);
- Áp dụng đúng công thức.

1. Ví du minh hoa

VÍ DU 1. Trong không gian Oxyz, tính góc giữa hai mặt phẳng sau:

- a) (P): x + y + 4z 2 = 0 và (Q): 2x 2z + 7 = 0.
- b) (P): 2x y 2z 9 = 0 và (Q): x y 6 = 0.

🗭 Lời giải.

- a) Ta có $\vec{n}_P = (1; 1; 4)$, $\vec{n}_Q = (2; 0; -2)$ lần lượt là vectơ pháp tuyến của (P) và (Q). Suy ra $\cos((P), (Q)) = |\cos(\vec{n}_P, \vec{n}_Q)| = \frac{|\vec{n}_P \cdot \vec{n}_Q|}{|\vec{n}_P| \cdot |\vec{n}_Q|} = \frac{|2 + 0 8|}{\sqrt{18} \cdot \sqrt{8}} = \frac{1}{2}$. Vây góc giữa (P) và (Q) bằng 60° .
- b) (P): 2x y 2z 9 = 0 có 1 vecto pháp tuyến là $\overrightarrow{n_1} = (2; -1; -2)$. (Q): x y 6 = 0 có 1 vecto pháp tuyến là $\overrightarrow{n_2} = (1; -1; 0)$. $\cos((P); (Q)) = \frac{|\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}|}{|\overrightarrow{n_1}| |\overrightarrow{n_2}|} = \frac{|2 \cdot 1 + (-1)(-1) + 0|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2} \cdot \sqrt{1^2 + 1^2 + 0}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow ((P); (Q)) = 45^{\circ}.$

VÍ DỤ 2. Trong không gian Oxyz, tính góc giữa hai đường thẳng sau:

a)
$$d: \begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \\ z = 0 \end{cases}$$
 và $d': \frac{x}{-2} = \frac{y}{1} = \frac{z - 1}{-2}$.

b)
$$d_1$$
:
$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 + t \text{ và } d_2 : \\ z = 3 \end{cases} \begin{cases} x = 1 - t' \\ y = 2 \\ z = -2 + t' \end{cases}$$

🗭 Lời giải.

a) Gọi φ là góc giữa hai đường thẳng d và d'. Ta có

$$\cos\varphi = \frac{|(-1)\cdot(-2)+1\cdot 1+0\cdot(-2)|}{\sqrt{(-1)^2+1^2+0^2}\cdot\sqrt{(-2)^2+1^2+(-2)^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \varphi = 45^\circ.$$

b) d_1 có VTCP $\overrightarrow{v}_1=(1;1;0)$ và d_2 có VTCP $\overrightarrow{v}_2=(-1;0;1),$ $|v_1|=\sqrt{2},$ $|v_2|=\sqrt{2}.$ Khi đó góc giữa hai đường thẳng d_1 và d_2 là

$$\cos(d_1, d_2) = \frac{|\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2|}{|\vec{v}_1| \cdot |\vec{v}_2|} = \frac{1}{2}.$$

Vậy góc giữa hai đường thẳng d_1 và d_2 là 60° .

VÍ DỤ 3. Trong không gian Oxyz, tính góc giữa đường thẳng và mặt phẳng sau:

a)
$$d: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{-1}$$
 và $(P): x-y+2z+1 = 0$.

b) $d: \frac{x-1}{4} = \frac{y-6}{3} = \frac{z+4}{1}$ và (P): 4x + 3y - z + 1 = 0

🗭 Lời giải.

- a) Ta có $\overrightarrow{n}_{(P)} = (1; -1; 2)$ và $\overrightarrow{u}_d = (1; 2; -1)$. $\text{Vây } \sin{(d; (P))} = \frac{\left|\overrightarrow{n}_{(P)} \cdot \overrightarrow{u}_d\right|}{\left|\overrightarrow{n}_{(P)}\right| \cdot \left|\overrightarrow{u}_d\right|} = \frac{|1 - 2 - 2|}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{6}} = \frac{1}{2} \Rightarrow (d; (P)) = 30^{\circ}$.
- b) Mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n}=(4;3;-1)$. Đường thẳng d có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u}=(4;3;1)$. Gọi α là góc giữa d và (P), ta có $\sin\alpha=\frac{|\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{u}|}{|\overrightarrow{n}|\cdot|\overrightarrow{u}|}=\frac{|16+9-1|}{\sqrt{16+9+1}\cdot\sqrt{16+9+1}}=\frac{12}{13}\Rightarrow\alpha\approx67,38^\circ.$

2. Bài tập trắc nghiệm

CÂU 1. Cho mặt phẳng (P): x+2y-2z+3=0, mặt phẳng (Q): x-3y+5z-2=0. Cosin của góc giữa hai mặt phẳng (P), (Q) là

$$\bigcirc A - \frac{\sqrt{35}}{7}.$$

$$\bigcirc \frac{5}{7}$$

$$\bigcirc \frac{\sqrt{35}}{7}.$$

$$\bigcirc -\frac{5}{7}$$

Lời giải.

Mặt phẳng (P) có ve-to pháp tuyến là $\overrightarrow{n}_1 = (1;2;-2)$

Mặt phẳng (Q) có vec-tơ pháp tuyến là $\vec{n}_2 = (1; -3; 5)$. Ta có $\cos[(P), (Q)] = |\cos(\vec{n}_1, \vec{n}_2)| = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \left|\frac{-15}{3\sqrt{35}}\right| = \frac{\sqrt{35}}{7}$.

CÂU 2. Góc giữa hai mặt phẳng (P): x + 2y + z + 4 = 0 và (Q): -x + y + 2z + 3 = 0 bằng

Lời giải.

Gọi φ là góc giữa (P) và (Q). Ta có

$$\cos\varphi = \frac{|1\cdot(-1)+2\cdot 1+1\cdot 2|}{\sqrt{1^2+2^2+1^2}\cdot \sqrt{(-1)^2+1^2+2^2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi = 60^\circ.$$

CÂU 3. Tính góc α giữa mặt (P): x + z - 4 = 0 và mặt phẳng (Oxy).

Lời giải.

Ta có $\vec{n}_{(P)} = (1; 0; 1), \ \vec{n}_{(Oxy)} = (0; 0; 1).$

Suy ra $\cos \alpha = \frac{|1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1|}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{1}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

 $V_{ay}((P);(Q)) = 45^{\circ}$

Chọn đáp án (A).....

CÂU 4. Cho điểm H(2;1;2), điểm H là hình chiếu vuông góc của gốc tọa độ O xuống mặt phẳng (P), số đo góc giữa mặt phẳng (P) và mặt phẳng (Q): x+y-11=0 là

🗭 Lời giải.

Vì điểm H là hình chiếu vuông góc của gốc tọa độ O xuống mặt phẳng (P) nên ta chọn $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{n}_{(P)} = (2;1;2)$. Phương trình mặt phẳng (P) có dạng

$$2(x-2) + (y-1) + 2(z-2) = 0 \Leftrightarrow 2x + y + 2z - 9 = 0.$$

Do đó, góc giữa 2 mặt phẳng (P), (Q) tính như sau

$$\cos\left((P),(Q)\right) = \frac{\left|\vec{n}_{(P)} \cdot \vec{n}_{(Q)}\right|}{\left|\vec{n}_{(P)}\right| \left|\vec{n}_{(Q)}\right|} = \frac{\left|2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0\right|}{\sqrt{9} \cdot \sqrt{2}} = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Do đó góc giữa mặt phẳng (P) và mặt phẳng (Q) bằng $\cos 45^{\circ} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Chọn đáp án (A).....

CÂU 5. Cho hai đường thẳng d_1 : $\frac{x}{-1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{2}$, d_2 : $\begin{cases} x = 2t \\ y = 1 \\ z = 1-t \end{cases}$. Gọi φ là góc giữa hai đường thẳng d_1 , d_2 . Tính $\cos \varphi$.

$$\bigcirc \cos \varphi = \frac{\sqrt{6}}{9}.$$

$$\bigcirc \cos \varphi = -\frac{\sqrt{6}}{9}$$

D Lời giải.

Dường thẳng
$$d_1, d_2$$
 lần lượt có vecto chỉ phương là $\overrightarrow{u}_1 = (-1; 2; 2)$ và $\overrightarrow{u}_2 = (2; 0; -1)$. Vậy $\cos \varphi = |\cos (\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2)| = \frac{|(-1) \times 2 + 2 \times 0 + 2 \times (-1)|}{\sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 2^2} \cdot \sqrt{2^2 + 0^2 + (-1)^2}} = \frac{|-4|}{3\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{15}$.

CÂU 6. Cho đường thẳng d_1 : $\frac{x}{-1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-1}{-2}$ và d_2 : $\frac{x+1}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z-3}{1}$. Góc giữa hai đường thẳng bằng

A 90°.

D 45°.

Lời giải.

Đường thẳng d_1 có VTCP là $\vec{a} = (-1; 1; -2)$, đường thẳng d_2 có VTCP là $\vec{b} = (-1; 1; 1)$. Ta có $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Rightarrow d_1 \perp d_2 \Rightarrow (d_1, d_2) = 90^{\circ}.$

Chọn đáp án (A).....

CÂU 7. Cho đường thẳng d là giao tuyến của hai mặt phẳng

 $(P): x-z\cdot\sin\alpha+\cos\alpha=0$ và $(Q): y-z\cdot\cos\alpha-\sin\alpha=0, \ \alpha\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$. Góc giữa d và trục Oz là

(A) 90°.

(**D**) 60°.

🗭 Lời giải.

$$\begin{split} \text{X\'et hệ phương trình} & \begin{cases} x-z\cdot\sin\alpha+\cos\alpha=0 \\ y-z\cdot\cos\alpha-\sin\alpha=0 \end{cases}. \\ \text{Ta c\'o} & \overrightarrow{n}_P=(1;0;-\sin\alpha) \text{ và } \overrightarrow{n}_Q=(0;1;-\cos\alpha). \end{split}$$

vecto chỉ phương của d là $\vec{u}_d = [\vec{n}_P; \vec{n}_Q] = (\sin \alpha; \cos \alpha; 1)$.

vecto chỉ phương của trục Oz là $\vec{k} = (0; 0; 1)$.

Gọi φ là góc giữa đường thẳng d và trục Oz.

Ta có $\cos \varphi = \frac{\left|\overrightarrow{u}_d \cdot \overrightarrow{k}\right|}{\left|\overrightarrow{u}_d\right| \cdot \left|\overrightarrow{k}\right|} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Suy ra $\varphi = 45^\circ$.

Chọn đáp án \bigcirc

CÂU 8. Cho đường thẳng d: $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + 2t \text{ và mặt phẳng } (P) \colon x - y + 3 = 0. \text{ Tính số đo góc giữa đường thẳng } d \text{ và mặt } \\ z = 3 + t \end{cases}$

phẳng (P).

(A) 45°.

B 120°.

(C) 60°.

D 30°.

🗭 Lời giải.

Ta có $\vec{u} = (-1; 2; 1)$ là vecto chỉ phương của đường thẳng d và $\vec{n} = (1; -1; 0)$ là vecto pháp tuyến của mặt phẳng (P). Suy ra $\sin(d;(P)) = |\cos(\vec{u};\vec{n})| = \frac{|\vec{u}\cdot\vec{n}|}{|\vec{u}|\cdot|\vec{n}|} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Vây $(d;(P)) = 60^\circ$.

CÂU 9. Cho mặt phẳng (P): 3x + 4y + 5z - 8 = 0 và đường thẳng d: $\begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = -1 - 4t \text{. Góc giữa đường thẳng } d \text{ và mặt phẳng } z = 5 - 5t \end{cases}$

(P) là

A 90°.

B) 45°.

(c) 30°.

D 60°.

Lời giải.

Mặt phẳng (P) có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (3; 4; 5)$.

Đường thẳng d có một vecto chỉ phương là $\vec{u} = (-3, -4, -5)$.

Ta có $\vec{n} = -\vec{u} \Rightarrow d \perp (P)$ nên góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (P) là 90° .

CÂU 10. Cho mặt phẳng (P): $x+y-\sqrt{2}z+5=0$. Tính góc φ giữa mặt phẳng (P) và trục Oy.

(A) $\varphi = 60^{\circ}$.

🗭 Lời giải.

Ta có vecto pháp tuyến của mặt phẳng (P) là $\vec{n}=(1;1;-\sqrt{2})$ và vecto chỉ phương của trục Oy là $\vec{u}=(0;1;0)$. Suy ra $\sin \varphi = \frac{|\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{n}|}{|\overrightarrow{u}| \cdot |\overrightarrow{n}|} = \frac{|1|}{\sqrt{4} \cdot 1} = \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi = 30^{\circ}.$

CÂU 11. Cho hai mặt phẳng (P): (m-1)x+y-2z+m=0 và (Q): 2x-z+3=0. Tìm m để (P) vuông góc với (Q).

(A) m = 0.

B $m = \frac{3}{2}$.

(**D**) m = -1.

Lời giải.

(P) vuông góc với (Q) khi và chỉ khi các vectơ pháp tuyến của chúng vuông góc với nhau, tức là

$$(m-1;1;-2)\cdot(2;0;-1)=0 \Leftrightarrow m=0.$$

Chọn đáp án $oxed{A}$

CÂU 12. Cho mặt phẳng (P): x-3y+2z+1=0 và (Q): (2m-1)x+m(1-2m)y+(2m-4)z+14=0 với m là tham số thực. Tổng các giá trị của m để (P) và (Q) vuông góc nhau bằng

$$-\frac{3}{2}$$

B
$$-\frac{1}{2}$$
.

$$-\frac{5}{2}$$

$$\bigcirc$$
 $-\frac{7}{2}$

🗩 Lời giải.

(P) có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n}_P = (1; -3; 2)$.

(Q) có vecto pháp tuyến $\vec{n}_Q = (2m-1; m(1-2m); 2m-4)$.

(P) và (Q) vuông góc với nhau khi và chỉ khi $\overrightarrow{n}_P \perp \overrightarrow{n}_Q$.

Điều này tương đương với $\overrightarrow{n}_P \cdot \overrightarrow{n}_Q = 0 \Leftrightarrow 6m^2 + 3m - 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} m = 1 \\ m = -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$. Tổng các giá trị của m để (P) và (Q) vuông góc nhau bằng $1 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}$.

Chọn đáp án B.

CÂU 13. Cho hai mặt phẳng (P): x + 2y - z + 2 = 0 và (Q): x - my + (m+1)z + m - 2 = 0, với m là tham số. Gọi S là tập hơn tất cả các giá trị của m sao cho góc giữa (P) và (Q) bằng 60° . Tính tổng các phần tử của S.

B
$$-\frac{1}{2}$$
.

$$\frac{3}{2}$$
.

$$\bigcirc \frac{1}{2}$$

🗭 Lời giải.

vectơ pháp tuyến của mặt phẳng $(P): \overrightarrow{n}_{(P)} = (1;2;-1).$ vectơ pháp tuyến của mặt phẳng $(Q): \overrightarrow{n}_{(Q)} = (1;-m;m+1).$ Góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) bằng 60° nên

$$\frac{|1 - 2m - m - 1|}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{2m^2 + 2m + 2}} = \cos 60^{\circ}$$

$$\Leftrightarrow |3m| = \frac{1}{2}\sqrt{6} \cdot \sqrt{2m^2 + 2m + 2}$$

$$\Leftrightarrow 9m^2 = 3(m^2 + m + 1)$$

$$\Leftrightarrow 2m^2 - m - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} m = 1 \\ m = -\frac{1}{2}. \end{bmatrix}$$

Do đó $S = 1 + \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}.$

Chọn đáp án \bigcirc

CÂU 14. Hãy tìm tham số thực m để góc giữa hai đường thẳng sau bằng 60° .

$$d: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -\sqrt{2}t \\ z = 1 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \text{và } d': \begin{cases} x = 1 + t' \\ y = 1 + \sqrt{2}t' \\ z = 1 + mt' \end{cases}$$

$$\mathbf{c} - \frac{1}{2}$$
.

₽ Lời giải.

 $\text{Ta có} \begin{cases} \overrightarrow{u}_d = (1; -\sqrt{2}; 1) \\ \overrightarrow{u}_{d'} = (1; \sqrt{2}; m) \end{cases} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{|-1+m|}{\sqrt{4} \cdot \sqrt{3+m^2}}$

$$\cos \alpha = \cos 60^{\circ} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{|-1+m|}{\sqrt{4} \cdot \sqrt{3+m^2}} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad |-1+m| = \sqrt{3+m^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad -2m+2=0$$

$$\Leftrightarrow \quad m=1$$

Chọn đáp án

CÂU 15. Cho các điểm $A(-1; \sqrt{3}; 0)$, $B(1; \sqrt{3}; 0)$, $C(0; 0; \sqrt{3})$ và điểm M thuộc trục Oz sao cho hai mặt phẳng (MAB) và (ABC) vuông góc với nhau. Tính góc giữa hai mặt phẳng (MAB) và (OAB).

🗭 Lời giải.

M(0;0;m) thuộc truc Oz.

Ta có
$$\overrightarrow{AM} = (1; -\sqrt{3}; m), \overrightarrow{AB} = (2; 0; 0), \overrightarrow{AC} = (1; -\sqrt{3}; \sqrt{3}).$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{n}_1 = \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] = (0; -2\sqrt{3}; -2\sqrt{3}), \ \overrightarrow{n}_2 = \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}\right] = (0; -2m; -2\sqrt{3}).$$

Mặt phẳng (ABC) có một vectơ pháp tuyến là \vec{n}_1 , mặt phẳng (MAB) có một vectơ pháp tuyến là \vec{n}_2 . Hai mặt phẳng (MAB) và (ABC) vuông góc với nhau khi và chỉ khi

$$\vec{n}_1 \perp \vec{n}_2 \Leftrightarrow 0 \cdot 0 + (-2\sqrt{3}) \cdot (-2m) + (-2\sqrt{3}) \cdot (-2\sqrt{3}) = 0 \Leftrightarrow m = -\sqrt{3}.$$

Mặt phẳng (OAB) có một vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n}_3 = \left[\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right] = (0; 0; -2\sqrt{3}).$

Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (MAB) và (OAB). Khi đó

$$\cos\varphi = |\cos{(\vec{n}_2,\vec{n}_3)}| = \frac{|\vec{n}_2 \cdot \vec{n}_3|}{|\vec{n}_2| \cdot |\vec{n}_3|} = \frac{12}{2\sqrt{6} \cdot 2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Vậy góc giữa hai mặt phẳng (MAB) và (OAB) là 45° .

Chon đáp án (A).....



Tọa độ hóa một số bài toán hình không gian

1. Ví du minh hoa

VÍ DỤ 1. Cho hình lăng trụ đứng OBC.O'B'C' có đáy là tam giác OBC vuông tại O và có OB = 3a, OC = a, OO' = 2a. Tính góc giữa

- a) hai đường thẳng BO' và B'C;
- b) hai mặt phẳng (O'BC) và (OBC);
- c) đường thẳng B'C và mặt phẳng (O'BC).

🗭 Lời giải.

Xét hệ trục tọa độ Oxyz sao cho các điểm có tọa độ như sau: O(0;0;0), O'(2a; 0; 0), B(0; 3a; 0), C(0; 0; 1a).

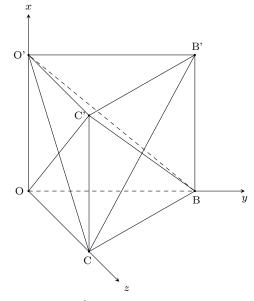
Trong không gian Oxyz vừa chọn, ta có $B'(2a;3a;0), C'(2a;0;1a), \overrightarrow{BO}' =$ $(0; -3a; 0), \overrightarrow{CB'} = (2a; 3a; -a).$

a) Hai đường thẳng BO' và B'C có vectơ chỉ phương lần lượt là $\vec{u} = (0; 3; 0)$, $\vec{v} = (2; 3; -1).$ Ta có

$$\cos(BO', B'C) = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$$
$$= \frac{|0 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 0 \cdot (-1)|}{\sqrt{3^2} \cdot \sqrt{2^2 + 3^2 + (-1)^2}} = \frac{3}{\sqrt{14}}.$$

Suy ra $(BO', B'C) \approx 36^{\circ}42'$.

b) Ta có phương trình mặt phẳng (O'BC) theo đoạn chắn là $\frac{x}{2a} + \frac{y}{3a} + \frac{z}{a} = 1$ hav 3x + 2y + 6z - 6a = 0.



Mặt phẳng (O'BC) có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (3; 2; 6)$, mặt đáy (OBC) có vectơ pháp tuyến $\vec{k} = (0; 0; 1)$. Gọi α là góc giữa mặt phẳng (O'BC) và mặt đáy.

Ta có
$$\cos \alpha = \frac{\left| \overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{k} \right|}{\left| \overrightarrow{n} \right| \cdot \left| \overrightarrow{k} \right|} = \frac{\left| 3 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 6 \cdot 1 \right|}{\sqrt{3^2 + 2^2 + 6^2} \cdot \sqrt{1^2}} = \frac{6}{7}.$$

Suy ra $((O'BC), (OBC)) \approx 31^{\circ}1^{\circ}$

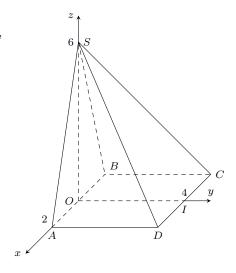
c) Gọi β là góc giữa đường thẳng B'C và mặt phẳng (O'BC). Ta có $\sin\beta = \frac{|\vec{v} \cdot \vec{n}|}{|\vec{v}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{|2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 + (-1) \cdot 6|}{\sqrt{2^2 + 3^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{3^2 + 2^2 + 6^2}} = \frac{3\sqrt{14}}{49}.$ Suy ra $(B'C, (O'BC)) \approx 13^{\circ}15'.$

VÍ DỤ 2. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh bằng 4. Mặt bên SAB là tam giác cân tại S có chiều cao bằng 6 và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy.

- a) Tính góc α giữa hai đường thẳng SD và BC;
- b) Tính góc β giữa hai mặt phẳng (SAD) và (SCD).

🗩 Lời giải.

Gọi O là trung điểm của AB suy ra $SO \perp (ABCD)$. Chọn hệ trục Oxyz như hình bên. Ta có: S(0;0;6), A(2;0;0), B(-2;0;0), C(-2;4;0), D(2;4;0).



a) Ta có $\overrightarrow{SD}=(2;4;-6), \overrightarrow{BC}=(0;4;0),$ suy ra

$$\cos \alpha = \frac{|\overrightarrow{SD} \cdot \overrightarrow{BC}|}{|\overrightarrow{SD}| \cdot |\overrightarrow{BC}|} = \frac{|2 \cdot 0 + 4 \cdot 4 - 6 \cdot 0|}{\sqrt{2^2 + 4^2 + (-6)^2} \cdot \sqrt{4^2}}$$
$$= \frac{\sqrt{14}}{7} \Rightarrow \alpha = 57.7^{\circ}.$$

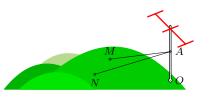
b) Mặt phẳng (SAD) có cặp vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{SD} = (2;4;-6)$, $\overrightarrow{SA} = (2;0;-6)$ nên có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n} = -\frac{1}{8}[\overrightarrow{SD},\overrightarrow{SA}] = (3;0;1)$.

Mặt phẳng (SCD) có cặp vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{SD} = (2;4;-6)$, $\overrightarrow{DC} = (-4;0;0)$ nên có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{u} = \frac{1}{8}[\overrightarrow{SD},\overrightarrow{DC}] = (0;3;2)$.

Suy ra $\cos\beta = \frac{|\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{u}|}{|\overrightarrow{n}| \cdot |\overrightarrow{u}|} = \frac{|3 \cdot 0 + 0 \cdot 3 + 1 \cdot 2|}{\sqrt{3^2 + 1^2} \cdot \sqrt{3^2 + 2^2}} = \frac{2}{\sqrt{130}} \Rightarrow \beta \approx 79.9^\circ$.

VÍ DU 3.

Người ta muốn dựng một cột ăng-ten trên một sườn đồi. Ăng-ten được dựng thẳng đứng trong không gian Oxyz với độ dài đơn vị trên mỗi trục bằng 1 m. Gọi O là gốc cột, A là điểm buộc dây cáp vào cột ăng-ten và M, N là hai điểm neo dây cáp xuống mặt sườn đồi (hình vẽ). Cho biết toạ độ các điểm nói trên lần lượt là O(0;0;0), A(0;0;6), M(3;-4;3), N(-5;-2;2).



- a) Tính độ dài các đoạn dây cáp MA và NA.
- b) Tính góc tao bởi các sợi dây cáp MA, NA với mặt phẳng sườn đồi.

🗭 Lời giải.

- a) Ta có $\overrightarrow{MA} = (-3, 4, 3), \overrightarrow{NA} = (5, 2, 4), \text{ suy ra}$
 - $\bigcirc MA = \sqrt{(-3)^2 + 4^2 + 3^2} = \sqrt{34} \approx 5.8 \text{ m}.$
 - $NA = \sqrt{5^2 + 2^2 + 4^2} = \sqrt{45} \approx 6.7 \text{ m}.$

b) Mặt phẳng (OMN) có cặp vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{OM} = (3; -4; 3), \overrightarrow{ON} = (-5; -2; 2)$ nên có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n} =$ $[\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}] = (-2; -21; -26).$ Goi α , β lần lượt là góc tạo bởi MA, NA với mặt phẳng (AMN).

Ta có

$$\sin \alpha = \frac{|\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{n}|}{|\overrightarrow{MA}| \cdot |\overrightarrow{n}|} = \frac{|-3 \cdot (-2) + 4 \cdot (-21) + 3 \cdot (-26)|}{\sqrt{(-3)^2 + 4^2 + 3^2} \cdot \sqrt{(-2)^2 + (-21)^2 + (-26)^2}}$$
$$= \frac{156}{\sqrt{38114}} \Rightarrow \alpha \approx 53^{\circ}.$$

Và

$$\sin \beta = \frac{|\overrightarrow{NA} \cdot \overrightarrow{n}|}{|\overrightarrow{NA}| \cdot |\overrightarrow{n}|} = \frac{|5 \cdot (-2) + 2 \cdot (-21) + 4 \cdot (-26)|}{\sqrt{5^2 + 2^2 + 4^2} \cdot \sqrt{(-2)^2 + (-21)^2 + (-26)^2}}$$
$$= \frac{156}{\sqrt{50445}} \Rightarrow \beta \approx 44^{\circ}.$$

2. Bài tấp trắc nghiệm

CÂU 1. Trong hệ trực toạ độ Oxyz, với mặt phẳng (Oxy) là mặt đất, một máy bay cất cánh từ vị trí A(0;10;0) với vận tốc $\vec{v}=(150;150;40)$. Tính góc nâng của máy bay (góc giữa hướng chuyển động bay lên của máy bay với đường băng và làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

A 10°.

B 12°.

(c) 11°.

(D) 9°.

🗭 Lời giải.

Gọi α là góc nâng của máy bay.

$$\sin \alpha = \frac{\left| \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{k} \right|}{\left| \overrightarrow{v} \right| \cdot \left| \overrightarrow{k} \right|} \Rightarrow \alpha \approx 10^{\circ} 40'.$$

Chon đáp án (C).....

CÂU 2. Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D'có cạnh bằng a. Tính số đo góc giữa hai mặt phẳng (BA'C) và (DA'C).

(A) 30°.

B) 120°.

(c) 90°.

(**D**) 60°.

🗭 Lời giải.

Chọn hệ tọa độ Qxyz có $A\equiv O, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AA'}$ lần lượt cùng hướng với các vecto đơn vị \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} .

Lấy a = 1, suy ra B(1;0;0), D(0;1;0), A'(0;0;1), C(1;1;0).

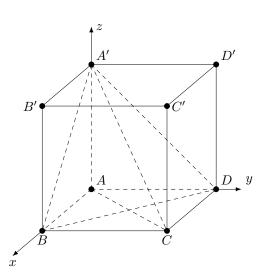
Mặt phẳng (BA'C) có vecto pháp tuyến là

 $\overrightarrow{n_1} = \overrightarrow{BA'} \wedge \overrightarrow{BC} = (-1; 0; -1).$

 $n_1 = BA' \land BC = (-1; 0; -1).$ Mặt phẳng (DA'C) có vectơ pháp tuyến là

 $\overrightarrow{n_2} = \overrightarrow{DA'} \wedge \overrightarrow{DC} = (0; 1; 1).$

Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (BA'C) và (DA'C), ta có $\cos \varphi = |\cos(\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2})| = \frac{|\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2}|}{|\overrightarrow{n_1}| \cdot |\overrightarrow{n_2}|} = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{2}.$ Suy ra $\varphi = 60^{\circ}$.



CÂU 3. Cho hình lập phương MNPQ.M'N'P'Q' có E, F, G lần lượt là trung điểm của NN', PQ, M'Q' Tính góc giữa hai đường thẳng EG và P'F.

 \bigcirc 60°.

B) 90°.

(c) 30°.

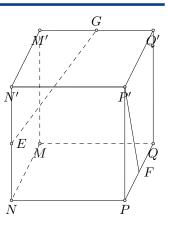
D 45°.

Lời giải.

Chọn hệ trục tọa độ Oxyz sao cho M(0;0;0), N(1;0;0), Q(0;1;0) và M'(0;0;1). Lúc đó P(1;1;0), N'(1;0;1), Q'(0;1;1) và P'(1;1;1).

 $\text{Vì } E, F, G \text{ lần lượt là trung điểm } NN', PQ \text{ và } M'Q' \text{ nên } E\left(1;0;\frac{1}{2}\right), F\left(\frac{1}{2};1;0\right) \text{ và } G\left(0;\frac{1}{2};1\right).$

Suy ra $\overrightarrow{EG} = \left(-1; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right), \overrightarrow{P'F} = \left(-\frac{1}{2}; 0; -1\right),$ do đó $\overrightarrow{EG} \cdot \overrightarrow{P'F} = 0$ hay $(EG, P'F) = 90^{\circ}$.



Chon đáp án (B).....

CÂU 4. Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D' có các cạnh AB = 2, AD = 3, AA' = 4. Góc giữa hai mặt phẳng (AB'D')và (A'C'D) là α . Tính giá trị gần đúng của góc α .

$$(A)$$
 45, 2°.

🗭 Lời giải.

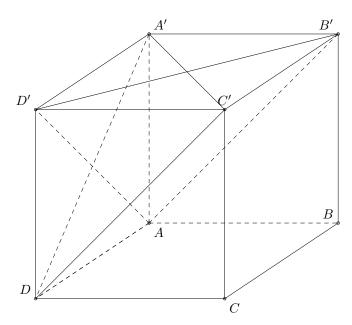
Gắn hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D' vào hệ trục tọa độ Oxyz. Khi đó A(0,0,0), B(0;2;0), C(3;2;0), D(3;0;0), A'(0;0;4), B'(0;2;4), C'(3;2;4), D'(3;0;4).

 $\overrightarrow{AB'} = (0; 2; 4), \overrightarrow{AD'} = (3; 0; 4), \overrightarrow{A'C'} = (3; 2; 0), \overrightarrow{A'D} = (3; 0; -4).$ Gọi \overrightarrow{n}_1 là vectơ pháp tuyến của (AB'D'). Ta có $\overrightarrow{n}_1 =$ $[\overrightarrow{AB'}, \overrightarrow{AD'}] = (8; 12; -6).$

Gọi \vec{n}_2 là vectơ pháp tuyến của (A'C'D). Ta có \vec{n}_2 $[\overrightarrow{A'C'}, \overrightarrow{A'D}] = (-8; 12; -6).$

 α là góc giữa hai mặt phẳng (AB'D') và (A'C'D), ta có $\cos \alpha = \left| \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|} \right| = \frac{29}{61}.$

Vậy giá trị gần đúng của góc α là 61,6°.



Chọn đáp án (C).....

CÂU 5. Cho hình chóp SABCD có ABCD là hình vuông cạnh a, SA vuông góc (ABCD), SA = a. Gọi E và F lần lượt là trung điểm SB, SD. Cô-sin của góc hợp bởi hai mặt phẳng (AEF) và (ABCD) là

$$\bigcirc$$
 $\sqrt{3}$.

$$\frac{1}{2}$$
.

$$\bigcirc \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

🗭 Lời giải.

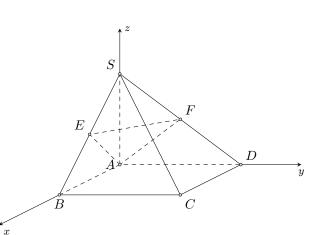
Chọn hệ trực tọa độ như hình vẽ. Ta có: $A\left(0;0;0\right),\ B\left(a;0;0\right),$ $D\left(0;a;0\right),\ S\left(0;0;a\right),\ E\left(\frac{a}{2};0;\frac{a}{2}\right),\ F\left(0;\frac{a}{2};\frac{a}{2}\right)$ và $\overrightarrow{AE}\left(\frac{a}{2};0;\frac{a}{2}\right),$

$$\overrightarrow{AF}\left(0;\frac{a}{2};\frac{a}{2}\right).$$

$$\Rightarrow \left[\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AF}\right] = \left(-\frac{a^2}{4}; -\frac{a^2}{4}; \frac{a^2}{4}\right).$$

 \Rightarrow Một VTPT của mặt phẳng (AEF) là (1;1;-1). Phương trình mặt phẳng (AEF): x + y - z = 0.

Phương trình mặt phẳng (ABCD): z = 0.



Góc hợp bởi hai mặt phẳng (AEF) và (ABCD) là α , ta có $\cos \alpha = \left| \frac{-1}{\sqrt{3} \cdot 1} \right| = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Chọn đáp án (D).....

CÂU 6. Cho hình chóp tam giác O.ABC có OA, OB, OC đôi một vuông góc và OA = OB = OC. Lấy M, N lần lượt là trung điểm của $AB,\,OC.$ Gọi α là góc tạo bởi OA và MN. Tính $\cos\alpha.$

B
$$\frac{1}{3}$$
.

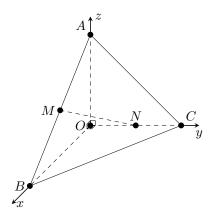
$$\bigcirc \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Lời giải.

Do OA, OB, OC đôi một vuông góc nên chon hệ truc toa đô như hình vẽ. Khi đó, ta

Suy ra
$$M\left(\frac{a}{2}; \frac{a}{2}; 0\right)$$
, $N\left(0; 0; \frac{a}{2}\right)$ nên $\overrightarrow{NM} = \left(\frac{a}{2}; \frac{a}{2}; -\frac{a}{2}\right)$.

bo
$$OA$$
, OB , OC dof một vương gọc hen chọn hệ trực toạ độ mhư họ có hệ toạ độ của các điểm $O(0;0;0)$, $A(a;0;0)$, $B(0;a;0)$, $C(0;0;a)$. Suy ra $M\left(\frac{a}{2};\frac{a}{2};0\right)$, $N\left(0;0;\frac{a}{2}\right)$ nên $\overrightarrow{NM}=\left(\frac{a}{2};\frac{a}{2};-\frac{a}{2}\right)$. Suy ra $\cos\alpha=\frac{\frac{a^2}{2}}{\sqrt{0^2+0^2+a^2}}\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(-\frac{a}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.



Chọn đáp án $\stackrel{\frown}{A}$

CÂU 7. Hình chóp S.ABC có đáy là tam giác vuông tại B có AB = a, AC = 2a. SA vuông góc với mặt phẳng đáy, SA = 2a. Gọi ψ là góc tạo bởi hai mặt phẳng (SAC) và (SBC). Tính $\cos \psi$.

$$\bigcirc$$
 $\frac{1}{2}$

$$\bigcirc \frac{\sqrt{3}}{2}$$
.

$$\bigcirc \frac{\sqrt{15}}{5}$$
.

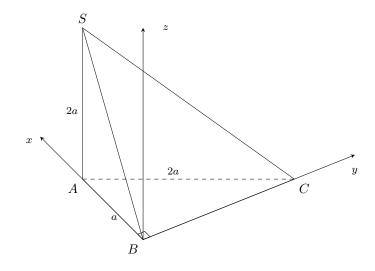
🗭 Lời giải.

Chọn hệ trục tọa độ Bxyz như hình vẽ.

Ta tính được B(0;0;0), A(a;0;0), $C(0;a\sqrt{3};0)$, S(a;0;2a), $\overrightarrow{SA} = (0; 0; -2a), \ \overrightarrow{SB} = (-a; 0; -2a), \ \overrightarrow{SC} = (-a; a\sqrt{3}; -2a),$ $\overrightarrow{n_1} = \left[\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SC}\right] = (2a^2\sqrt{3}; 2a^2; 0)$ là VTPT của (SAC), $\overrightarrow{n_2} = \left[\overrightarrow{SB}, \overrightarrow{SC}\right] = (2a^2\sqrt{3}; 0; -a^2\sqrt{3})$ là VTPT của (SBC).

Ta có

$$\cos\psi = \big|\cos\left[\overrightarrow{n_1};\overrightarrow{n_2}\right]\big| = \frac{|\overrightarrow{n_1}\overrightarrow{n_2}|}{|\overrightarrow{n_1}|\cdot|\overrightarrow{n_2}|} = \frac{\sqrt{15}}{5}.$$



CÂU 8. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật, AB = a, $BC = a\sqrt{3}$, SA = a và SA vuông góc với đáy ABCD. Tính $\sin \alpha$, với α là góc tạo bởi giữa đường thẳng BD và mặt phẳng (SBC).

$$\bigcirc \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

$$\bigcirc \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Lời giải.

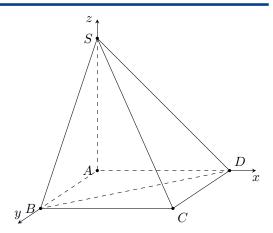
Đặt hệ trục tọa độ Oxyz như hình vẽ. Khi đó $A(0;0;0),\ B(a;0;0),$ $D(0; a\sqrt{3}; 0), S(0; 0; a).$

Ta có $\overrightarrow{BD} = (-a; a\sqrt{3}; 0) = a(-1; \sqrt{3}; 0)$ nên đường thẳng BD có vectơ chỉ phương là $\vec{u} = (-1; \sqrt{3}; 0).$

Ta có $\overrightarrow{SB}=(a;0;-a), \ \overrightarrow{BC}=(0;a\sqrt{3};0)\Rightarrow\left[\overrightarrow{SB},\overrightarrow{BC}\right]=\left(a^2\sqrt{3};0;a^2\sqrt{3}\right)=\left(a^2\sqrt$ $a^2\sqrt{3}(1;0;1)$. Nên mặt phẳng (SBC) có vecto pháp tuyến là $\vec{n}=(1;0;1)$.

$$\alpha \text{ là góc tạo bởi giữa đường thẳng } BD \text{ và mặt phẳng } (SBC) \text{ thì}$$

$$\sin \alpha = \frac{|\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{n}|}{|\overrightarrow{u}| \cdot |\overrightarrow{n}|} = \frac{|(-1) \cdot 1 + \sqrt{3} \cdot 0 + 0 \cdot 1|}{\sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2 + 0^2} \cdot \sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$



Chọn đáp án (A).....

CÂU 9. Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có cạnh đáy bằng a, tâm O. Gọi M và N lần lượt là trung điểm SA và BC. Biết góc giữa MN và (ABCD) bằng 60° , côsin góc giữa MN và mặt phẳng (SBD) bằng

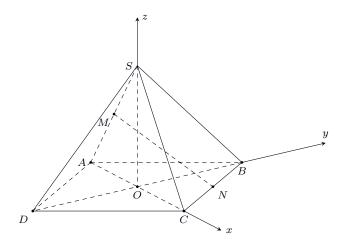
$$\bigcirc \frac{\sqrt{41}}{41}$$
.

B
$$\frac{2\sqrt{41}}{41}$$
.

$$\bigcirc \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

$$\bigcirc \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

🗭 Lời giải.



Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ, đặt $OS = k \ (k > 0)$.

Ta có
$$A\left(-\frac{a\sqrt{2}}{2};0;0\right)$$
, $B\left(0;\frac{a\sqrt{2}}{2};0\right)$, $C\left(\frac{a\sqrt{2}}{2};0;0\right)$, $D\left(0;-\frac{a\sqrt{2}}{2};0\right)$, $S\left(0;0;k\right)$,
$$M\left(-\frac{a\sqrt{2}}{4};0;\frac{k}{2}\right) \text{ và } N\left(\frac{a\sqrt{2}}{4};\frac{a\sqrt{2}}{4};0\right).$$
 Ta có $\overrightarrow{u}_{MN} = \overrightarrow{MN} = \left(\frac{a\sqrt{2}}{2};\frac{a\sqrt{2}}{4};-\frac{k}{2}\right) \text{ và } \overrightarrow{n}_{ABCD} = (0;0;1).$

Ta có

$$\sin\left(MN;(ABCD)\right) = \frac{|\overrightarrow{u}_{MN} \cdot \overrightarrow{n}_{ABCD}|}{|\overrightarrow{u}_{MN}| \cdot |\overrightarrow{n}_{ABCD}|} \quad \Leftrightarrow \quad \sin 60^\circ = \frac{\frac{k}{2}}{\sqrt{\frac{9a^2}{16} + \frac{k^2}{4}}}$$

$$\Leftrightarrow \quad k = \frac{a\sqrt{30}}{2}.$$

Ta có $\vec{n}_{SBD} = (1; 0; 0)$, do đó

$$\sin\left(MN,(SBD)\right) = \frac{|\overrightarrow{u}_{MN} \cdot \overrightarrow{n}_{SBD}|}{|\overrightarrow{u}_{MN}| \cdot |\overrightarrow{n}_{SBD}|} \quad \Leftrightarrow \quad \sin\left(MN,(SBD)\right) = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{\frac{5a^2}{2}}} = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

 $\Rightarrow \cos(MN, (SBD)) = \frac{2\sqrt{5}}{5}$. (do góc nhọn nên \cos dương)

CÂU 10. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thang vuông tại A và B, AB = BC = a, AD = 2a, SA vuông góc với mặt đáy (ABCD), SA = a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SB và CD. Tính cosin của góc giữa MN và (SAC).

B
$$\frac{1}{\sqrt{5}}$$
.

$$c \frac{3\sqrt{5}}{10}$$

🗭 Lời giải.

Chọn hệ trục Oxyz như hình vẽ, với $O \equiv A$.

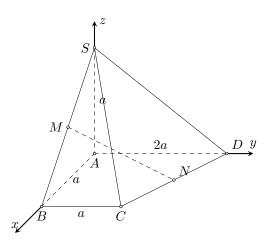
Khi đó ta có: A(0;0;0), B(a;0;0), C(a;a;0), D(0;2a;0), S(0;0;a).

Khi đó: $M\left(\frac{a}{2};0;\frac{a}{2}\right)$, $N\left(\frac{a}{2};\frac{3a}{2};0\right)$.

Ta có: $-\frac{1}{a}\overrightarrow{SA}=(0;0;1)=\overrightarrow{u};\,\frac{1}{a}\overrightarrow{SC}=(1;1;-1)=\overrightarrow{v}.$ Gọi \overrightarrow{n} là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (SAC) ta có $\overrightarrow{n}=[\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}]=(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$

Lai có: $\frac{2}{a} \overrightarrow{MN} = (0; 3; -1) = \overrightarrow{w}$.

Gọi α là góc giữa MN và (SAC) ta có: $\sin \alpha = \frac{|\vec{n}.\vec{w}|}{|\vec{n}|.|\vec{w}|} = \frac{3}{2\sqrt{5}} \Rightarrow \cos \alpha =$



Chọn đáp án (D).....

C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM TỬ LUYỆN

Phần I. Mỗi câu hỏi học sinh chọn một trong bốn phương án A, B, C, D.

CÂU 1. Trong không gian Oxyz, cho đường thẳng d: $\begin{cases} y = 2 + t & \text{và mặt phẳng } (P): 3x - 2y + 1 = 0. \text{ Tính góc hợp bởi} \\ z = 1 & \text{và mặt phẳng } (P): 3x - 2y + 1 = 0. \end{cases}$

đường thẳng d và mặt phẳng (P).

🗭 Lời giải.

10

Đường thẳng $d\colon \begin{cases} x=6+5t\\ y=2+t & \text{c\'o vecto chỉ phương } \overrightarrow{u}=(5;1;0).\\ z=1 \end{cases}$

Mặt phẳng (P): 3x-2y+1=0 có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(3;-2;0)$.

Gọi α là góc hợp bởi đường thẳng d và mặt phẳng (P).

Khi đó:
$$\sin \alpha = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{|5 \cdot 3 + 1 \cdot (-2) + 0 \cdot 0|}{\sqrt{5^2 + 1^2} \cdot \sqrt{3^2 + (-2)^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Suy ra $\alpha = 45^{\circ}$

Chọn đáp án (B).......

CÂU 2. Trong không gian Oxyz, cho ba điểm M(2;3;-1), N(-1;1;1) và P(1;m-1;2). Tìm m để tam giác MNP vuông tai N.

$$\bigcirc m = 2.$$

$$\bigcirc m = -6.$$

🗭 Lời giải.

$$\overrightarrow{NM} = (3;2;-2), \ \overrightarrow{NP} = (2;m-2;1).$$

Tam giác MNP vuông tại N khi và chỉ khi

$$\overrightarrow{NM} \cdot \overrightarrow{NP} = 0$$

$$\Leftrightarrow 3 \cdot 2 + 2 \cdot (m-2) - 2 \cdot 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow m = 0$$

Vậy giá trị cần tìm của m là m = 0.

Chọn đáp án (A).....

CÂU 3. Trong không gian Oxyz, tính góc giữa hai đường thẳng $d_1: \frac{x}{1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-1}{2}$ và $d_2: \frac{x+1}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z-3}{1}$.

A 60°.

🗭 Lời giải.

Ta có $\vec{u}_{d_1} = (1; -1; 2)$ và $\vec{u}_{d_2} = (-1; 1; 1)$ lần lượt là véc tơ chỉ phương của d_1 và d_2 .

$$\overrightarrow{u}_{d_1}\cdot \overrightarrow{u}_{d_2} = 1\cdot (-1) + (-1)\cdot 1 + 2\cdot 1 = 0 \Rightarrow d_1 \perp d_2 \Rightarrow \left(\widehat{d_1,d_2}\right) = 90^\circ.$$

Chon đáp án (D).....

CÂU 4. Trong không gian Oxyz, cho đường thẳng d: $\frac{x-4}{1} = \frac{y-5}{2} = \frac{z}{3}$ mặt phẳng (α) chứa đường thẳng d sao cho khoảng cách từ O đến (α) đạt giá trị lớn nhất. Khi đó góc giữa mặt phẳng (α) và trục Ox là φ thỏa mãn.

$$\mathbf{B}\sin\varphi = \frac{1}{3\sqrt{3}}$$

$$\mathbf{B} \sin \varphi = \frac{1}{3\sqrt{3}}. \qquad \mathbf{C} \sin \varphi = \frac{1}{2\sqrt{3}}.$$

🗭 Lời giải.

Đường thẳng d có véc tơ chỉ phương $\vec{u} = (1; 2; 3)$.

Goi H là hình chiếu của O lên d, K là hình chiếu của O lên (α) .

Ta có $d(O,(\alpha)) = OK \leq OH \Rightarrow d(O,(\alpha))$ lớn nhất bằng OH khi $K \equiv H$.

Khi đó (α) chứa d và nhận $\vec{n} = OH$ làm véc tơ pháp tuyến.

 $H \in d \Rightarrow H(4+t; 5+2t; 3t) \Rightarrow \overrightarrow{OH} = (4+t; 5+2t; 3t).$

 $\overrightarrow{Vi} OH \perp d \Rightarrow \overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{u} = 0 \Leftrightarrow 4 + t + 2(5 + 2t) + 3 \cdot 3t = 0 \Leftrightarrow 14t + 14 = 0 \Leftrightarrow t = -1.$

 $\Rightarrow H(3;3;-3), \overrightarrow{OH} = (3;3;-3).$

Trục
$$Ox$$
 có véc tơ chỉ phương $\overrightarrow{i} = (1;0;0)$.

$$\sin \varphi = \frac{\left| \overrightarrow{i} \cdot \overrightarrow{n} \right|}{\left| \overrightarrow{i} \right| \cdot \left| \overrightarrow{n} \right|} = \frac{|3|}{\sqrt{1} \cdot \sqrt{3^2 + 3^2 + (-3)^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

CÂU 5. Trong không gian Oxyz, gọi (P) là mặt phẳng chứa trục Oy và tạo với mặt phẳng y+z+1=0 một góc 60° . Phương trình mặt phẳng (P) là

$$\begin{bmatrix} x-z-1=0\\ x-z=0 \end{bmatrix}. \qquad \textbf{ B} \begin{bmatrix} x-2z=0\\ x+z=0 \end{bmatrix}. \qquad \textbf{ C} \begin{bmatrix} x-y=0\\ x+y=0 \end{bmatrix}.$$

🗭 Lời aiải.

+) Do (P) chứa trục Oy nên phương trình (P) có dạng $(P): ax + cz = 0, (a^2 + c^2 > 0).$

+) Gọi (Q): y + z + 1 = 0.

Ta có $\cos\left((P)\,,\,(Q)\right)=\cos 60^\circ \Leftrightarrow \frac{|c|}{\sqrt{a^2+c^2}\cdot\sqrt{2}}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow c=\pm a.$ Khi đó $\begin{bmatrix} (P):ax+az=0\\ (P):ax-az=0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} (P):x+z=0\\ (P):x-z=0 \end{bmatrix}.$

Khi đó
$$(P): ax + az = 0 \Leftrightarrow (P): x + z = 0$$
$$(P): ax - az = 0 \Leftrightarrow (P): x - z = 0$$

Chọn đáp án \bigcirc

CÂU 6. Với giá trị nào của m thì đường thẳng $(D): \frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{m} = \frac{z-1}{m-2}$ vuông góc với mặt phẳng (P): x+3y+2z=2.



$$\bigcirc$$
 -7.

🗭 Lời giải.

Vecto chỉ phương của (D) là $\vec{a} = (2; m; m-2)$.

Vecto pháp tuyến của (P) là $\overrightarrow{n} = (1; 3; 2)$.

$$(D) \perp (P) \Leftrightarrow \overrightarrow{a} \text{ và } \overrightarrow{n} \text{ cùng phương.}$$

$$2 = \frac{m}{3} = \frac{m-2}{2} \Leftrightarrow m = 6.$$

CÂU 7. Trong không gian Oxyz, cho mặt phẳng (P): mx + my - 2z - 1 = 0 và đường thẳng $\frac{x}{n+1} = \frac{y}{m} = \frac{1-z}{1}$ với $m \neq 0$, $m \neq -1$. Khi $(P) \perp d$ thì tổng m + n bằng bao nhiêu?

B
$$m + n = -2$$
.

©
$$m+n=-\frac{1}{2}$$
. **D** $m+n=-\frac{2}{3}$.

🗭 Lời giải.

Sử dụng tỷ lệ thức $\frac{m}{n+1} = \frac{n}{m} = \frac{-2}{-1} \Rightarrow \frac{m+n}{n+1+m} = 2 \Rightarrow m+n = -2.$

CÂU 8. Trong không gian Oxyz, cho hai đường thẳng $d_1: \frac{x}{1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-1}{2}$ và $d_2: \frac{x+1}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z-3}{1}$. Góc giữa hai

đường thẳng đó bằng

A 90°.

(B) 60°.

(C) 30°.

(**D**) 45°.

Lời giải.

Đường thẳng d_1 có vécto chỉ phương $\vec{u}_1 = (1; -1; 2)$.

Đường thẳng d_2 có vécto chỉ phương $\vec{u}_2 = (-1; 1; 1)$.

Gọi α là góc giữa hai đường thẳng trên.

Khi đó ta có $\cos\alpha = |\cos{(\overrightarrow{u}_1,\overrightarrow{u}_2)}| = \frac{|1\cdot(-1)+(-1)\cdot 1+2\cdot 1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+2^2}\cdot \sqrt{(-1)^2+1^2+1^2}} = 0.$

$$\Rightarrow \left(\widehat{d_1, d_2}\right) = 90^{\circ}.$$

Chọn đáp án (A).....

CÂU 9. Trong không gian Oxyz, cho đường thẳng $\Delta : x = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{3}$ và mặt phẳng (P) : 4x + 2y + z - 1 = 0. Khi đó khẳng định nào sau đây là đúng?

- (A) Góc tạo bởi (Δ) và (P) lớn hơn 30° .
- $(\mathbf{B}) \Delta /\!/ (P).$

 $(\mathbf{C}) \Delta \perp (P).$

 \triangle \triangle \subset (P).

Lời giải.

Ta có $\sin\left(\widehat{\Delta,(P)}\right) = \frac{11}{7\sqrt{6}} > \frac{1}{2}.$

Suy ra góc tạo bởi Δ và (P) lớn hơn 30° .

Chọn đáp án (A).....

CÂU 10. Trong không gian Oxyz, cho mặt phẳng (P): 3x + 4y + 5z - 8 = 0 và đường thẳng d: $\begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = -1 - 4t \text{. Góc giữa} \\ z = 5 - 5t \end{cases}$

đường thẳng d và mặt phẳng (P) là

A) 90°.

(B) 45°.

(c) 60°.

D 30°.

Lời giải.

Mặt phẳng (P) có một véc tơ pháp tuyến là $\vec{n} = (3; 4; 5)$.

Đường thẳng d có một véc tơ chỉ phương là $\vec{u} = (-3, -4, -5)$.

Ta có $\vec{n} = -\vec{u} \Rightarrow d \perp (P)$ nên góc 90°

Chọn đáp án (A).....

CÂU 11. Trong không gian Oxyz, cho hai đường thẳng d_1 : $\begin{cases} x = -1 - t \\ y = 3 + 4t \quad \text{và } d_2 \colon \frac{x}{1} = \frac{y+8}{-4} = \frac{z+3}{-3}. \text{ Tính góc hợp bởi } z = 3 + 3t \end{cases}$

đường thẳng d_1 và d_2 .

(A) 90°.

(C) 0°.

(D) 30°.

🗭 Lời giải.

Ta có đường thẳng d_1 : $\begin{cases} x=-1-t\\ y=3+4t & \text{có vecto chỉ phương là } \overrightarrow{u_1}=(-1;4;3),\\ z=3+3t \end{cases}$

đường thẳng d_2 : $\frac{x}{1} = \frac{y+8}{-4} = \frac{z+3}{-3}$ có vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{u_2} = (1; -4; -3)$.

Vì $\overrightarrow{u_1} = (-1;4;3)$ và $\overrightarrow{u_2} = (1;-4;-3)$ cùng phương với nhau nên góc hợp bởi đường thẳng d_1 và d_2 bằng 0° .

CÂU 12. Trong không gian Oxyz, cho mặt phẳng (P): $-\sqrt{3}x + y + 1 = 0$. Tính góc tạo bởi (P) với trục Ox?

(A) 120°.

(C) 150°.

🗭 Lời giải.

Mặt phẳng (P) có véc tơ pháp tuyến $\vec{n} = (-\sqrt{3}; 1; 0)$

Trục Ox có có véc tơ pháp tuyến $\vec{i} = (1; 0; 0)$.

Góc tạo bởi (P) với trục Ox

 $\sin((P),Ox) = \left|\cos((P),Ox)\right| = \frac{\left|\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{i}\right|}{\left|\overrightarrow{n}\right|\cdot\left|\overrightarrow{i}\right|} = \frac{\left|-\sqrt{3}\cdot1+1\cdot0+0\cdot0\right|}{\sqrt{3+1}\cdot\sqrt{1}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$

Vậy góc tạo bởi (P) với trục Ox bằng 60° .

Chọn đáp án $\overline{\mathbb{D}}$

Phần II. Trong mỗi ý a), b), c) và d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.

CÂU 1. Trong không gian Oxyz, cho hai đường thẳng d_1 : $\begin{cases} x=2+t \\ y=-1+t \text{ và } d_2 \colon \begin{cases} x=1-t \\ y=2 \end{cases} \text{. Xét tính đúng sai của các } z=3 \end{cases}$

khẳng định sau

Mệnh đề	Ð	S
a) Đường thẳng d_1 có một vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{u_1} = (1;1;3)$.		X
b) Góc giữa hai đường thẳng d_1 và d_2 bằng 60° .	X	
c) Đường thẳng d_2 có một vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{u_2} = (-1; 0; 1)$.	X	
d) Giá trị cosin của góc giữa hai đường thẳng d_1 và d_2 bằng $-\frac{1}{2}$.		X

🗭 Lời giải.

- a) (S) Sai. Đường thẳng d_1 có một vecto chỉ phương là $\overrightarrow{u_1} = (1; 1; 0)$.
- **b)** Dúng. Ta có $\cos(d_1, d_2) = \frac{|1 \cdot (-1) + 0 + 0|}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow (d_1, d_2) = 60^{\circ}.$
- c) \bigcirc Đúng. Đường thẳng d_2 có một vecto chỉ phương là $\overrightarrow{u_2} = (-1;0;1)$.
- **d)** Sai. Ta có $\cos(d_1, d_2) = \frac{|1 \cdot (-1) + 0 + 0|}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{2}$.

Chọn đáp án a sai b đúng c đúng d sai

CÂU 2. Trong không gian Oxyz, cho mặt phẳng (P): 2x + y + 2z - 1 = 0 và hai điểm A(1; -1; 2), B(0; 1; -1). Xét tính đúng sai của các khẳng định sau

Mệnh đề	Ð	S
a) Giá trị cosin của góc giữa đường thẳng AB và mặt phẳng (P) bằng $\frac{2}{\sqrt{21}}$.		X
b) Đường thẳng AB vuông góc với mặt phẳng (P) .		X
c) Mặt phẳng (OAB) có một vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n}=(-1;1;1).$	X	
d) Giá trị cosin của góc giữa mặt phẳng (OAB) và mặt phẳng (P) bằng $\frac{\sqrt{3}}{9}$.	X	

Lời giải.

- a) Si Sai. Ta có $\sin(AB, (P)) = \frac{|-1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + (-3) \cdot 2|}{\sqrt{14} \cdot 3} = \frac{\sqrt{7}}{7}.$ $\Rightarrow \cos(d, (P)) = \sqrt{1 \frac{1}{7}} = \frac{\sqrt{42}}{7}.$
- b) S Sai. Đường thẳng AB có một véctơ chỉ phương $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB} = (-1; 2; -3)$, ta thấy véctơ \overrightarrow{u} không cùng phương với vécto \overrightarrow{n} nên AB không vuông góc với mặt phẳng (P).
- c) \bigcirc Dúng. Ta có $A(1;-1;2) \Rightarrow \overrightarrow{OA} = (1;-1;2); B(0;1;-1) \Rightarrow \overrightarrow{OB} = (0;1;-1).$ Do đó, mặt phẳng (OAB) có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = [\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}] = (-1; 1;)$.
- d) \bigcirc Dúng. Mặt phẳng (OAB) có một vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n} = (-1;1;1)$ và mặt phẳng (P) có một vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_1} = (2; 1; 2).$ $\Rightarrow \cos((OAB), (P)) = \frac{|2 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1|}{3 \cdot \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{9}.$

Chọn đáp án a sai b sai c đúng d đúng.....

CÂU 3. Trong không gian Oxyz, cho đường thẳng $d \colon \frac{x}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{1}$ và mặt phẳng $(P) \colon 5x + 11y + 2z - 4 = 0$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau

Mệnh đề	Ð	S
a) Đường thẳng d có một vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{u}=(1;-2;1).$	X	
b) Mặt phẳng (P) có một vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n}=(-5;-11;2)$.		X
c) Giá trị cosin của góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (P) bằng $\frac{1}{2}$.		X
d) Góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng bằng 30° .	X	

🗭 Lời giải.

- a) \bigcirc Đúng. Đường thẳng d có một vecto chỉ phương là $\overrightarrow{u} = (1; -2; 1)$.
- b) Sai. Mặt phẳng (P) có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (5; 11; 2)$.
- $\mathbf{c)} \ \ \mathbf{S} \ \ \mathrm{Sai.} \ \ \mathrm{Ta} \ \ \mathrm{cos} \ (d,(P)) = \frac{|1 \cdot 5 + (-2) \cdot 11 + 1 \cdot 2|}{\sqrt{6} \cdot 5\sqrt{6}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos{(d,(P))} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$
- d) Dúng. Ta có $\sin(d,(P)) = \frac{|1 \cdot 5 + (-2) \cdot 11 + 1 \cdot 2|}{\sqrt{6} \cdot 5\sqrt{6}} = \frac{1}{2} \Rightarrow (d,(P)) = 30^{\circ}.$

Chọn đáp án a đúng b sai c sai d đúng

CÂU 4. Trong không gian Oxyz, cho mặt phẳng (P): 3x + 4y + 5z + 2 = 0 và đường thẳng d là giao tuyến của hai mặt phẳng $(\alpha): x - 2y + 1 = 0$ và $(\beta): x - 2z - 3 = 0$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau

Mệnh đề	Ð	S
a) Mặt phẳng (P) có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (3; 4; 5)$.	X	
b) Góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (P) bằng 30° .		X
c) Đường thẳng d có một vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{u}=(2;-1;1).$		X
d) Đường thẳng d cắt mặt phẳng (P) tại $A\left(\frac{7}{15}; \frac{11}{15}; -\frac{19}{15}\right)$.	X	

🗭 Lời giải.

- a) Dúng. Mặt phẳng (P) có một vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n}=(3;4;5)$.
- **b)** Sai. Ta có $\sin(d, (P)) = \frac{|4 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 2 \cdot 5|}{2\sqrt{6} \cdot 5\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \sin(d, (P)) = 60^{\circ}.$
- c) Sai. Mặt phẳng (α) có một vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n_1} = (1; -2; 0)$. Mặt phẳng (β) có một vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n_2} = (1; 0; -2)$. $\Rightarrow d$ có một vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{u} = [\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}] = (4; 2; 2)$.
- d) Dúng. Ta có

$$\begin{cases} x - 2y + 1 = 0 \\ x - 2z - 3 = 0 \\ 3x + 4y + 5z + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{7}{15} \\ y = \frac{11}{15} \\ z = -\frac{19}{15} \end{cases}.$$

Suy ra đường thẳng d cắt mặt phẳng (P) tại $A\left(\frac{7}{15};\frac{11}{15};-\frac{19}{15}\right)$

Chọn đáp án a đúng b sai c sai d đúng

Phần III. Học sinh điền kết quả vào ô trống.

CÂU 1. Trong hệ tọa độ Oxyz, một vật chuyển động theo quĩ đạo là một đường thẳng. Tại thời điểm ban đầu, vật ở vị trí điểm A(1;5;0), sau 10 phút vật ở vị trí điểm B(101;205;1250). Hỏi vật chuyển động theo phương hợp với mặt đất góc bao nhiêu độ (giả sử mặt đất là mặt phẳng Oxy, kết quả làm tròn đến hàng phần chục).

Đáp án: 7 9 , 9

Ta có $\overrightarrow{AB} = (100; 200; 1250)$

$$\sin{(AB,(Oxy))} = \frac{\left|\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{n}_{Oxy}\right|}{\left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{n}_{Oxy}\right|} = \frac{1250}{\sqrt{100^2 + 200^2 + 1250^2}} \text{ nên } \widehat{(AB;(Oxy))} \approx 79,9^0.$$

CÂU 2. Cho hình lăng trụ tam giác đều ABC.A'B'C' có cạnh bên 2a, góc tạo bởi A'B và mặt đáy là 60° . Gọi M là trung điểm BC. Ta có $\cos(A'C, AM) = \frac{\sqrt{a}}{b}$ với $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản, $a, b \in N$. Tổng a + b bằng bao nhiêu?

Đáp án: 7

D Lời giải.

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ. Ta có
$$AB = AC = BC = \frac{2a}{\tan 60^{\circ}} = \frac{2a}{\sqrt{3}}$$
.

$$\Rightarrow MC = \frac{BC}{2} = \frac{a}{\sqrt{3}}.$$

$$AM = \frac{AB\sqrt{3}}{2} = a.$$

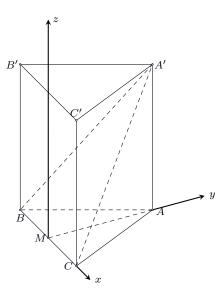
Khi đó:
$$M(0;0;0)$$
, $A(0;a;0)$, $C\left(\frac{a}{\sqrt{3}};0;0\right)$, $A'(0;a;2a)$.

Ta có
$$\overrightarrow{A'C} = \left(\frac{a}{\sqrt{3}}; -a; -2a\right) \Rightarrow A'C = \frac{4a}{\sqrt{3}}.$$

$$\overrightarrow{AM} = (0; -a; 0) \Rightarrow AM = a.$$

$$\overrightarrow{AM} = (0; -a; 0) \Rightarrow AM = a.$$
Khi đó có $\cos(A'C, AM) = \frac{\left|\overrightarrow{A'C} \cdot \overrightarrow{AM}\right|}{\left|\overrightarrow{A'C}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AM}\right|} = \frac{\sqrt{3}}{4}.$

Vav a + b = 7.



CÂU 3. Trong không gian Oxyz, cho đường thẳng d: $\frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+2}{1}$ và mặt phẳng (P): 3x + my - 1 = 0 (m là tham số). Tìm m để đường thẳng d tạo với mặt phẳng (P) góc α thỏa mãn sin $\alpha = \frac{2}{3}$.

Đáp án: 0

🗭 Lời giải.

Ta có đường thẳng d có véc tơ chỉ phương $\overrightarrow{u_d} = (2; 2; 1)$.

Mặt phẳng (P) có véc tơ pháp tuyến $\overrightarrow{n}_P = (3; m; 0)$.

Suy ra
$$\sin(d, (P)) = \frac{|6+2m|}{3 \cdot \sqrt{9+m^2}}$$
.

Theo giả thiết ta có

$$\sin(d, (P)) = \frac{2}{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{|6+2m|}{3 \cdot \sqrt{9+m^2}} = \frac{2}{3}$$

$$\Leftrightarrow 4m^2 + 24m + 36 = 4m^2 + 36$$

$$\Leftrightarrow m = 0$$

CÂU 4. Trong không gian, cho mặt phẳng (P) có phương trình ax + by + cz - 1 = 0 với c < 0 đi qua hai điểm A(0;1;0), B(1;0;0) tạo với (Oyz) một góc 60° . Khi đó $a+b-\sqrt{2}c$ bằng

Đáp án: 4

Lời giải.

Mặt phẳng
$$(P)$$
 đi qua $A,\,B$ nên $a=b=1\pmod{1}$. Ta có $\cos((P),(Oyz))=\frac{|a|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\cdot\sqrt{1}}=\frac{1}{2}$ (2).

Thay (1) vào (2) ta được:

$$\frac{1}{\sqrt{2+c^2}} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2+c^2} = 2$$

$$\Leftrightarrow c^2 = 2$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} c = \sqrt{2} & \text{(Loại)} \\ c = -\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow c = -\sqrt{2}$$

 $V_{ay} a + \underline{b} - \sqrt{2}c = 4.$

Đáp án: 4

 $\hat{\mathbf{CAU}}$ 5. Có hai bức tường hình vuông cạnh 5m, vuông góc với nhau và cùng vuông góc với mặt đất, hai mặt tường giao nhau tại cột d. Trên cột d có một điểm A cách mặt đất 2m. Có một chiếc cột cao 1m đặt vuông góc với mặt đất, khoảng cách từ chân côt đến mỗi bức tường là 1m. Người ta muốn căng một chiếc bat phẳng hình tam giác đi qua điểm A và đầu cột, hai đầu mút M, N thuộc hai chân tường sao cho diện tích bạt bé nhất. Hỏi phải căng chiếc bạt hợp với mặt đất góc bao nhiêu độ (Kết quả làm tròn đến hàng phần chục).

> Đáp án: 5 7

🗭 Lời giải.

Đặt hệ trục Oxyz như hình vẽ.

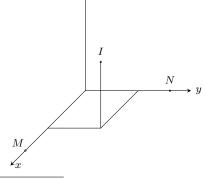
Ta có A(0;0;2), I(1;1;1). Gọi M(m;0;0); N(0;n;0) với $m>0,\,n>0$. Phương trình mặt phẳng (AMN): $\frac{x}{m}+\frac{y}{n}+\frac{z}{2}=1$.

Vì mặt phẳng (AMN) đi qua điểm I(1;1;1) nên ta có $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{2} = 1 \Rightarrow \frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{2}$.

Ta có mặt phẳng (AMN) có véc tơ pháp tuyến $\overrightarrow{n}_{(AMN)} = \left(\frac{1}{m}; \frac{1}{n}; \frac{1}{2}\right)$,

mặt phẳng (OMN) có véc tơ pháp tuyến $\overrightarrow{n}_{(OMN)} = (0;0;1)$.

$$\Rightarrow \cos((AMN), (OMN)) = \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{4}}}.$$



 $\text{Mà } S_{AMN} \cdot \cos \left(\left(AMN \right), \left(OMN \right) \right) = S_{OMN} \Rightarrow S_{AMN} = mn \sqrt{\frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{\frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{4}}}{\frac{1}{n^2} \cdot \frac{1}{n^2}}. \text{ Dặt } \frac{1}{m} = a, \frac{1}{n} = b \text{ thì } \frac{1}{m} = a, \frac{1}{n} = b \text{ thì } \frac{1}{m} = a, \frac{1}{n} = b \text{ thì } \frac{1}{m} = a, \frac{1}{n} = b \text{ thì } \frac{1}{m} = a, \frac{1}{n} = b \text{ thì } \frac{1}{m} = a, \frac{1}{n} = b \text{ thì } \frac{1}{m} = a, \frac{1}{n} = b \text{ thì } \frac{1}{m} = a, \frac{1}{n} = b \text{ thì } \frac{1}{m} = a, \frac{1}{n} = b \text{ thì } \frac{1}{m} = a, \frac{1}{n} = b \text{ thì } \frac{1}{m} = a, \frac{1}{n} = b \text{ thì } \frac{1}{m} = a, \frac{1}{n} = b \text{ thì } \frac{1}{m} = a, \frac{1}{n} = b \text{ thì } \frac{1}{m} = a, \frac{1}{n} = b \text{ thì } \frac{1}{m} = a, \frac{1}{n} = b \text{ thì } \frac{1}{m} = a, \frac{1}{n} = a, \frac{1}{n} = b \text{ thì } \frac{1}{m} = a, \frac{1}{n} = a, \frac{1}{n} = a, \frac{1}{n} = b \text{ thì } \frac{1}{m} = a, \frac{1}{n} = a,$

$$a+b=\frac{1}{2} \text{ và } S_{AMN}=\sqrt{\frac{a^2+b^2+\frac{1}{4}}{a^2b^2}}=\sqrt{\frac{2a^2+2b^2+2ab}{a^2b^2}}.$$

Theo bất đẳng thức Cosi ta có $2a^2 + 2b^2 + 2ab \ge 3\sqrt[3]{8a^3b^3} = 6ab$.

Suy ra $S_{AMN} \ge \sqrt{\frac{6}{ab}}$

Mà $a+b \ge 2\sqrt{ab} \Rightarrow \frac{1}{2} \ge 2\sqrt{ab} \Rightarrow ab \le \frac{1}{16}$ nên $S_{AMN} \ge \sqrt{96}$

Dấu bằng xảy ra khi $a = b = \frac{1}{4}$.

Thay vào (*) t
c có $\cos\left(\left(AMN\right),\left(OMN\right)\right)=\frac{1}{\sqrt{3}}$ nên $(\widehat{(AMN),\left(OMN\right)})\approx54,7^\circ$

CÂU 6. Trong không gian, tìm m để số đo góc giữa hai đường thẳng d_1, d_2 bằng 60° biết d_1 : $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - t \\ z = -3 + \sqrt{2}t \end{cases}$ t = 2 + mt t = 3 + t

Ta có $\cos \alpha = \cos 60^\circ = \frac{|1 \cdot m - 1 \cdot 1 + 2|}{\sqrt{1 + 1 + 2}\sqrt{m^2 + 1 + 2}} \Leftrightarrow |m - 1| = \sqrt{m^2 + 1} \Leftrightarrow m = 1.$

—HÉТ—

Bài 17. PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU

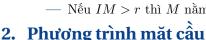
A. LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1. Định nghĩa

lacktriangle Trong không gian, tập hợp tất cả các điểm M cách điểm I cố định một khoảng không đổi r(r>0) cho trước được gọi là mặt cầu tâm I bán kính R. Kí hiệu S(I;r) hay viết tắt là (S). Vậy $S(I;R) = \{M|IM = r\}.$



- Nếu IM = r thì M nằm trên mặt cầu.
- Nếu IM < r thì M nằm trong mặt cầu.
- Nếu IM > r thì M nằm ngoài mặt cầu.



 \bigcirc Trong không gian Oxyz, mặt cầu (S) tâm I(a;b;c) bán kính r có phương trình là

$$(x-a)^{2} + (y-b)^{2} + (z-c)^{2} = r^{2}.$$

② Dạng khai triển: $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$, với $d = a^2 + b^2 + c^2 - r^2 > 0$.

B. PHÂN LOAI, PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN



- **Loai 1.** Cho (S): $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$. Khi đó
 - ① Tâm I(a;b;c) (đổi dấu số trong dấu ngoặc);
 - 2 Bán kính r (Rút căn vế phải).
- **Value 1.** Cho (S): $x^2 + y^2 + z^2 2ax 2by 2cz + d = 0$. Khi đó
 - ① Điều kiên để (*) là mặt cầu là $a^2 + b^2 + c^2 d > 0$;
 - ② Tâm I(a,b,c) (đổi dấu hệ số của x, y, z và chia đôi);
 - ③ Bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 d}$.

1. Ví du minh hoa

VÍ DU 1. Trong các phương trình sau, phương trình nào là phương trình mặt cầu? Hãy xác định tâm và bán kính (nếu là phương trình mặt cầu).

a)
$$(x-2)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 4$$
.

b)
$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 6z - 2 = 0$$
.

c)
$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 3z + 8 = 0$$
.

d)
$$3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 6x + 12y - 9z + 1 = 0$$

🗭 Lời giải.

a)

b) Mặt cầu (S) có tâm I(1;2;-3) và bán kính $R=\sqrt{1^2+2^2+(-3)^2+2}=4$

c)

d) Ta có

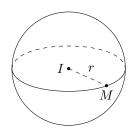
$$3x^{2} + 3y^{2} + 3z^{2} + 6x + 12y - 9z + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^{2} + y^{2} + z^{2} + 2x + 4y - 3z + \frac{1}{3} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^{2} + 2x) + (y^{2} + 2 \cdot 2 \cdot y) + \left(z^{2} - 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot z\right) = \frac{-1}{3}$$

$$\Leftrightarrow (x + 1)^{2} + (y + 2)^{2} + \left(z - \frac{3}{2}\right)^{2} = 1 + 4 + \frac{9}{4} - \frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow (x + 1)^{2} + (y + 2)^{2} + \left(z - \frac{3}{2}\right)^{2} = \frac{83}{12}.$$



Vậy đây là phương trình mặt cầu (S) tâm $I\left(-1;-2;\frac{3}{2}\right)$, bán kính $r=\sqrt{\frac{83}{12}}=\frac{\sqrt{249}}{6}$.

VÍ DỤ 2. Trong không gian Oxyz, tìm tất cả giá trị của tham số m để các phương trình sau là phương trình mặt cầu.

- a) $x^2 + y^2 + z^2 2(m+2)x + 4my 2mz + 5m^2 + 9 = 0$;
- b) $x^2 + y^2 + z^2 + 2(m+2)x 2(m-1)z + 3m^2 5 = 0$.

🗭 Lời giải.

a) Gọi phương trình đã cho có dạng $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - b$) Phương trình đã cho là phương trình của một mặt cầu 2bu - 2cz + d = 0 với a = m + 2, b = -2m, c = m, $d = 5m^2 + 9.$

Để phương trình đã cho là phương trình mặt cầu thì

khi và chỉ khi

 $(m+2)^2 + (m-1)^2 - 3m^2 + 5 > 0 \Leftrightarrow m^2 - 2m - 10 < 0 \Leftrightarrow 1 - \sqrt{11} < m$

 $a^2+b^2+c^2-d>0 \Leftrightarrow m^2+4m+4+4m^2+m^2-5m^2-9>0 \Leftrightarrow m^2\frac{\text{Do }m\in\mathbb{Z} \text{ nên fine}\{=2;-1;0;1;2;3;4\}. \text{ Vậy có 7 giá thị 4 mgu yến chiến mhỏa lyêu cầu bài toán.}$

2. Bài tập trắc nghiệm

CÂU 1. Cho mặt cầu (S): $(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 9$. Tìm tọa độ tâm I và tính bán kính R của (S).

- (A) I(1; -2; -1) và R = 3.

- **B** I(1; -2; -1) và R = 9. **C** I(-1; 2; 1) và R = 3. **D** I(-1; 2; 1) và R = 9.

Lời giải.

Ta có mặt cầu (S) có tâm I(-1;2;1) và bán kính R=3.

Chọn đáp án (C).....

CÂU 2. Cho mặt cầu (S): $(x-1)^2 + (y+2)^2 + z^2 = 9$. Mặt cầu (S) có thể tích bằng

- **(A)** $V = 36\pi$.
- **B** $V = 14\pi$.
- $\mathbf{C} V = \frac{4}{36} \pi.$
- **D** $V = 16\pi$.

🗭 Lời giải.

Mặt cầu (S): $(x-1)^2 + (y+2)^2 + z^2 = 9$ có tâm là (1; -2; 0), bán kính R = 3.

Thể tích mặt cầu $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = 36\pi$.

Chọn đáp án (A).

- **CÂU 3.** Cho mặt cầu (S): $x^2 + y^2 + z^2 4x 6y + 8z 7 = 0$. Toa đô tâm và bán kính mặt cầu (S) lần lượt là

 - (A) I(-2; -3; 4), R = 6. (B) I(-2; -3; 4), R = 36. (C) I(2; 3; -4), R = 36.
- (**D**) I(2;3;-4), R=6.

🗭 Lời giải.

Ta có

$$x^{2} + y^{2} + z^{2} - 4x - 6y + 8z - 7 = 0 \Leftrightarrow (x - 2)^{2} + (y - 3)^{2} + (z + 4)^{2} = 36.$$

Nên mặt cầu (S) có tâm I(2;3;-4) và bán kính R=6.

Chọn đáp án (D).....

- **CÂU 4.** Cho mặt cầu (S): $x^2 + y^2 + z^2 8x + 2y + 1 = 0$. Tìm toa đô tâm và bán kính của mặt cầu (S).

 - (A) I(4;-1;0), R=4. (B) I(-4;1;0), R=4.
- $(\mathbf{C}) I(-4;1;0), R=2.$

Lời giải.

Mặt cầu (S) có tâm I(4;-1;0) và bán kính $R=\sqrt{4^2+(-1)^2+0^2-1}=4$.

Chon đáp án (A).

CÂU 5. Cho mặt cầu (S): $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 12x - 4y + 4 = 0$. Mặt cầu (S) có đường kính AB. Biết điểm A(-1; -1; 0) thuộc mặt cầu (S). Tọa độ điểm B là

- (A) B(-5;3;-2).
- **(B)** B(-11;5;0).
- \mathbf{C} B(-11; 5; -4).
- **(D)** B(-5;3;0).

🗭 Lời giải.

- Viết lai phương trình (S): $x^2 + y^2 + z^2 + 6x 2y + 2 = 0$. Khi đó tâm của mặt cầu là I(-3;1;0).
- Vì AB là đường kính nên I là trung điểm của AB, suy ra B(-5;3;0).

Chọn đáp án (D).....

CÂU 6. Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt cầu?

B
$$x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y + 6z + 15 = 0.$$

$$\mathbf{c}$$
 $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y + z - 1 = 0.$

🗭 Lời giải.

Phương trình $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y + z - 1 = 0$ là phương trình mặt cầu vì có dạng là $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$ và thỏa $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$ (dễ nhận biết vì d = -1 < 0).

Chon đáp án \bigcirc

CÂU 7. Cho phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2mx - 2(m+2)y - 2(m+3)z + 16m + 13 = 0$. Tìm tất cả các giá trị thực của mđể phương trình trên là phương trình của một mặt cầu.

$$(A) m < 0 \text{ hay } m > 2.$$

B)
$$m \le -2$$
 hay $m \ge 0$.

(c)
$$m < -2$$
 hay $m > 0$. (D) $m \le 0$ hay $m \ge 2$.

Lời giải.

Phương trình đã cho là phương trình của một mặt cầu khi và chỉ khi

$$m^{2} + (m+2)^{2} + (m+3)^{2} - 16m - 13 > 0$$

$$\Leftrightarrow 3m^{3} - 6m > 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} m < 0 \\ m > 2 \end{bmatrix}$$

Chọn đáp án (A)....

CÂU 8. Có tất cả bao nhiêu giá trị của tham số m (biết $m \in \mathbb{N}$) để phương trình $x^2 + y^2 + z^2 + 2(m-2)y - 2(m+3)z + 3m^2 + 7 = 0$ là phương trình của một mặt cầu?

🗭 Lời giải.

Đồng nhất hệ số của phương trình $x^2 + y^2 + z^2 + 2(m-2)y - 2(m+3)z + 3m^2 + 7 = 0$ (*) với phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2(m-2)y - 2(m+3)z + 3m^2 + 7 = 0$ 2ax - 2by - 2cz + d = 0 ta được a = 0, b = 2 - m, c = m + 3 và $d = 3m^2 + 7$. Phương trình (*) là phương trình của một mặt cầu khi

$$a^{2} + b^{2} + c^{2} - d > 0 \Leftrightarrow (2 - m)^{2} + (m + 3)^{2} - (3m^{2} + 7) > 0$$
$$\Leftrightarrow -m^{2} + 2m + 6 > 0$$
$$\Leftrightarrow 1 - \sqrt{7} < m < 1 + \sqrt{7}.$$

Do $1 - \sqrt{7} < m < 1 + \sqrt{7}$ và $m \in \mathbb{N}$ nên $m \in \{0; 1; 2; 3\}$.

Chọn đáp án \bigcirc

CÂU 9. Cho mặt cầu (S): $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 4z - m = 0$ (m là tham số). Biết mặt cầu có bán kính bằng 5. Tìm m.

$$\bigcirc m = 25.$$

B
$$m = 11$$
.

$$\bigcirc m = 16.$$

$$D m = -16.$$

🗭 Lời giải.

- Công thức bán kính mặt cầu là $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 d} = \sqrt{1 + 4 + 4 + m}$.
- Theo giả thiết $R = 5 \Leftrightarrow \sqrt{1+4+4+m} = 5 \Leftrightarrow m = 16$.

Chon đáp án $\overline{\mathbb{C}}$

CÂU 10. Mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 4mx + 4y + 2mz + m^2 + 4m = 0$ có bán kính nhỏ nhất khi m bằng

B
$$\frac{1}{3}$$
.

🗭 Lời giải.

• Công thức bán kính mặt cầu là

$$R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$$

$$= \sqrt{4m^2 + 4 + m^2 - (m^2 + 4m)}$$

$$= \sqrt{4m^2 - 4m + 4}$$

$$= \sqrt{(2m - 1)^2 + 3} \quad (1).$$

• Biểu thức (1) đạt giá trị nhỏ nhất khi $m = \frac{1}{2}$.

Chon đáp án (A).....

Lập phương trình mặt cầu và ứng dung thực tiễn

- **Phương pháp chung:** Cần xác định được tọa độ tâm I(a;b;c) và độ dài bán kính r.
- Các bài toán cơ bản:
 - ① Mặt cầu có tâm I(a;b;c) và đi qua điểm $A(x_A;y_A;z_A)$ thì bán kính

$$r = IA = \sqrt{(x_A - x_I)^2 + (y_A - y_I)^2 + (z_A - z_I)^2}.$$

- ② Mặt cầu (S) có đường kính AB thì

 - Tâm $I\left(a;b;c\right)$ là trung điểm của AB hay $I\left(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2};\frac{z_A+z_B}{2}\right)$.
 Bán kính $r=\frac{AB}{2}=\frac{\sqrt{\left(x_B-x_A\right)^2+\left(y_B-y_A\right)^2+\left(z_B-z_A\right)^2}}{2}$.
- 3 Mặt cầu có tâm I(a;b;c) và tiếp xúc với (α) : Ax + By + Cz + D = 0 thì bán kính

$$r = \mathrm{d}\left(I, (\alpha)\right) = \frac{\left|Aa + Bb + Cc + D\right|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

4 Mặt cầu qua bốn điểm A, B, C, D không đồng phẳng (ngoại tiếp tứ diện ABCD) Gọi (S) có dạng $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$ (*) Thay tọa độ 4 điểm A, B, C, D vào (*), ta được hệ phương trình 4 ẩn số a, b, c, d; Giải tìm a, b, c, d. Suy ra tâm I(a, b, c), bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$.

1. Ví du minh hoa

VÍ DỤ 1. Trong không gian Oxyz, viết phương trình mặt cầu (S)

- a) Có tâm I(2;-1;0) và đi qua điểm M(4;1;-2);
- b) Có đường kính AB với A(0;1;3), B(4;-5;-1);
- c) Có tâm I(1; -2; 3) và tiếp xúc với trục Oy;
- d) Có tâm I(1; 2; -1) và tiếp xúc với (P): x 2y 2z 8 = 0.

🗭 Lời giải.

- a) Bán kính mặt cầu là $r = IM = \sqrt{(4-2)^2 + (1+1)^2 + (-2-0)^2} = \sqrt{12}$. Phương trình mặt cầu tâm I(2; -1; 0), bán kính $r = \sqrt{12}$ là $(x-2)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 12.$
- b) Tâm của mặt cầu (S) là trung điểm I của đoạn thẳng AB, suy ra I(2;-2;1). Bán kính mặt cầu (S) là $R=\frac{AB}{2}=\frac{AB}{2}$ $\frac{\sqrt{4^2+(-6)^2+(-4)^2}}{2}=\sqrt{17}.$ Vậy phương trình mặt cầu (S) là

$$(x-2)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 17.$$

- c) Gọi M là hình chiếu của I(1; -2; 3) lên Oy, ta có: M(0; -2; 0). $\overrightarrow{IM} = (-1;0;-3) \Rightarrow R = d\left(I,Oy\right) = IM = \sqrt{10}$ là bán kính mặt cầu cần tìm. Phương trình mặt cầu là: $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 10$.
- d) Mặt cầu có tâm I(1;2;-1) và tiếp xúc với (P): x-2y-2z-8=0 sẽ có bán kính là

$$R = d(I, (P)) = \frac{|1 - 2 \cdot 2 - 2 \cdot (-1) - 8|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + (-2)^2}} = 3.$$

Vậy phương trình mặt cầu là $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 9$.

VÍ DU 2. Viết phương trình mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD, biết

- a) A(1;1;0), B(1;0;1), C(0;1;1), D(1;2;3).
- b) A(1;2;-4); B(1;-3;1), C(2;2;3), D(1;0;4).

Lời giải.

a) Giả sử phương trình mặt cầu có dạng:
$$(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0 + Với $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$, ta có
$$A(1;1;0), B(1;0;1), C(0;1;1), D(1;2;3) \in (S): \Rightarrow \begin{cases} 1+1+0-a-2b-0+d=0\\ 1+0+1-2a-0-2c+d=0\\ 0+1+1-0-2b-2c+d=0\\ 1+2^2+3^2-2a-4b-6c+d=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2a-2b+d=-2\\ -2c-2c+d=-2\\ -2b-2c+d=-2\\ -2a-4b-6c+d=-14 \end{cases} \Leftrightarrow (S): x^2+y^2+z^2-2\cdot\frac{3}{2}x-2\cdot\frac{3}{2}y-2\cdot\frac{3}{2}z+4=0$$

$$\Rightarrow (S): x^2+y^2+z^2-3x-3y-3z+4=0.$$$$

b) Goi phương trình mặt cầu (S):

$$x^{2} + y^{2} + z^{2} - 2ax - 2by - 2cz + d = 0 (a^{2} + b^{2} + c^{2} - d > 0)$$

Do mặt cầu đi qua 4 điểm A, B, C, D nên tọa độ của 4 điểm thỏa mãn phương trình mặt cầu

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2a - 4b + 8c + d = -21 \\ -2a + 6b - 2c + d = -11 \\ -4a - 4b - 6c + d = -17 \\ -2a - 8c + d = -17 \end{cases}$$

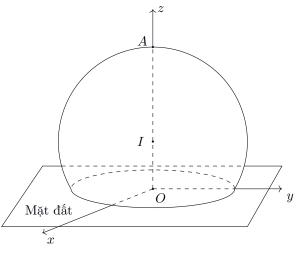
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 1 \\ c = 0 \\ d = -21 \end{cases}$$

Vậy phương trình mặt cầu cần tìm là

$$x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y - 21 = 0$$

VÍ DỤ 3. Giả sử người ta biểu diễn mô phỏng của tòa nhà Ericsson Globe ở phần Khởi động trong hệ trục tọa độ Oxyz bởi một mặt cầu có tâm I, đường kính 110 m và OA = 85 m như hình vẽ (đơn vị trên trục là mét). Hãy viết phương trình của mặt cầu này.





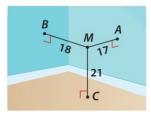
🗭 Lời giải.

- $oldsymbol{\Theta}$ Bán kính của mặt cầu tâm I là $R = IA = \frac{110}{2} = 55$ m.
- \bigodot Ta có $OA = OI + IA \Rightarrow OI = OA IA = 85 55 = 30 m.$ Vì $I \in Oz$ nên toạ độ điểm I(0;0;30).
- \odot Phương trình mặt cầu tâm I(0;0;30) có bán kính R=55 m là

$$x^{2} + y^{2} + (z - 30)^{2} = 55^{2}$$
 hay $x^{2} + y^{2} + (z - 30)^{2} = 3025$.

VÍ DỤ 4. Bạn Bình đố bạn Nam tìm được đường kính của quả bóng rổ, biết rằng nếu đặt quả bóng ở một góc căn phòng hình hộp chữ nhật, sao cho quả bóng cham (tiếp xúc) với hai bức tường và nền nhà của căn phòng đó (khi đó khoảng cách từ tâm quả bóng đến hai bức tường và nền nhà đều bằng bán kính của quả bóng) thì có một điểm M trên quả bóng với khoảng cách lần lượt đến hai bức tường và nền nhà là 17 cm, 18 cm và 21 cm (Hình bên dưới). Hãy giúp Nam xác định đường kính của quả bóng rỗ đó. Biết rằng loại bóng rỗ tiêu chuẩn có đường kính từ 23 cm đến 24,5 cm.





🗭 Lời giải.

Xét quả bóng tiếp xúc với các bức tường và chon hệ truc Oxyz như hình vẽ

Gọi I(a; a; a) là tâm của mặt cầu và r = a > 0.

Phương trình mặt cầu của quả bóng là

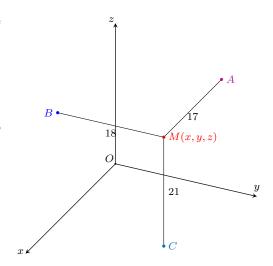
(S):
$$(x-a)^2 + (y-a)^2 + (z-a)^2 = a^2$$
.

Giả sử M(x;y;z) nằm trên mặt cầu (bề mặt của quả bóng) sao cho d(M, (Oxy)) = 21, d(M, (Oxz)) = 18, d(M, (Oyz)) = 17. Khi đó z = 21, y = 118, x = 17. Khi đó ta có phương trình

$$(17 - a)^{2} + (18 - a)^{2} + (21 - a)^{2} = a^{2}$$

$$\Leftrightarrow 2a^{2} - 112a + 1054 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} a \approx 11,97(\text{nhận}) \\ a \approx 44,03(\text{loại}) \end{bmatrix}$$



Vậy đường kính của quả bóng rổ là $2a \approx 23{,}94$ cm.

2. Bài tấp trắc nghiệm

CÂU 1. Mặt cầu tâm I(3;-1;0), bán kính R=5 có phương trình là

$$(x+3)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 5.$$

B
$$(x-3)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 5$$
.

$$(x-3)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 25.$$

$$(x+3)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 25.$$

D Lời giải.

Mặt cầu tâm I(3;-1;0), bán kính R=5 có phương trình là $(x-3)^2+(y+1)^2+z^2=25$.

CÂU 2. Phương trình mặt cầu tâm I(2; -3; -4), bán kính bằng 4 là

$$(x+2)^2 + (y-3)^2 + (z-4)^2 = 16.$$

B
$$(x-2)^2 + (y+3)^2 + (z+4)^2 = 16.$$

(c)
$$(x+2)^2 + (y-3)^2 + (z-4)^2 = 4$$
.

$$(D) (x-2)^2 + (y+3)^2 + (z+4)^2 = 4.$$

D Lời giải.

Chọn đáp án (B).....

CÂU 3. Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm I(-1;1;-2) và đi qua điểm A(2;;1;2).

(A)
$$(S)$$
: $(x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 5$.

B
$$(S)$$
: $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 25$.

©
$$(S)$$
: $(x+1)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 25$.

$$(S): x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2y + 4z + 1 = 0.$$

🗭 Lời aiải.

Bán kính mặt cầu là $R = IA = \sqrt{9 + 0 + 16} = 5$.

Vậy phương trình mặt cầu là $(x+1)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 25$.

Chon đáp án (C).....

CÂU 4. Mặt cầu tâm I(-3;0;4) và đi qua điểm A(-3;0;0) có phương trình là

$$(x-3)^2 + y^2 + (z+4)^2 = 4.$$

B
$$(x-3)^2 + y^2 + (z+4)^2 = 16.$$

$$(x+3)^2 + y^2 + (z-4)^2 = 16.$$

🗭 Lời giải.

Bán kính mặt cầu R = IA = 4.

Chọn đáp án \bigcirc

CÂU 5. Phương trình mặt cầu (S) đường kính AB với $A\left(4;-3;5\right),$ $B\left(2;1;3\right)$ là

🗭 Lời giải.

Ta có $AB = \sqrt{(2-4)^2 + (1+4)^2 + (3-5)^2} = 2\sqrt{6}$.

Gọi I, R là tâm và bán kính của mặt cầu (S) suy ra $R = \frac{AB}{2} = \sqrt{6}$ và I (3; -1; 4).

Khi đó phương trình mặt cầu (S) là

$$(x-3)^2 + (y+1)^2 + (z-4)^2 = 6 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 2y - 8z + 20 = 0$$

Chọn đáp án B

CÂU 6. Cho hai điểm A(2;4;1) và B(-2;2;-3). Phương trình mặt cầu đường kính AB là

B
$$x^2 + (y+3)^2 + (z-1)^2 = 9.$$

$$x^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = 3.$$

🗭 Lời giải.

Mặt cầu đường kính AB có tâm là trung điểm của đoạn thẳng AB.

Suy ra tọa độ tâm mặt cầu là I(0;3;-1). Bán kính mặt cầu: $R=\frac{AB}{2}=3$.

Chọn đáp án \bigcirc

CÂU 7. Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm I(-1;4;2), biết thể tích khối cầu tương ứng là $V=972\pi$.

(A)
$$(x+1)^2 + (y-4)^2 + (z-2)^2 = 81$$
.

B)
$$(x+1)^2 + (y-4)^2 + (z-2)^2 = 9$$
.

$$(x-1)^2 + (y+4)^2 + (z-2)^2 = 9.$$

$$(x-1)^2 + (y+4)^2 + (z+2)^2 = 81.$$

🗭 Lời giải.

Thể tích khối cầu $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = 972\pi \Leftrightarrow R = 9.$

Phương trình mặt cầu (S): $(x+1)^2 + (y-4)^2 + (z-2)^2 = 81$.

Chọn đáp án (A)

CÂU 8. Mặt cầu (S) có tâm I(2;1;-1), tiếp xúc với mặt phẳng tọa độ (Oyz). Phương trình của mặt cầu (S) là

(A)
$$(x+2)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 = 4$$
.

B
$$(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2 = 1$$
.

$$(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2 = 4$$

🗭 Lời giải.

Bán kính mặt cầu: $R = d[I, (Oyz)] = |x_I| = 2$.

CÂU 9. Mặt cầu có tâm I(1;2;-3) và tiếp xúc với trục Oy có bán kính bằng

$$\bigcirc$$
 $\sqrt{10}$.

🗭 Lời giải.

Bán kính mặt cầu: $R = d\left[I,Oy\right] = \sqrt{x_I^2 + z_I^2} = \sqrt{10}$.

Chọn đáp án \bigcirc

CÂU 10. Trong không gian Oxyz, mặt cầu tâm I(-1;0;3) tiếp xúc với mặt phẳng $(\alpha): 4y-3z+19=0$ có phương trình là

$$(x-1)^2 + y^2 + (z+3)^2 = 4.$$

$$(x+1)^2 + y^2 + (z-3)^2 = 2.$$

$$(x+1)^2 + y^2 + (z-3)^2 = 4.$$

$$(x-1)^2 + y^2 + (z+3)^2 = 2.$$

🗩 Lời giải.

Mặt cầu tiếp xúc với mặt phẳng $\Leftrightarrow R = \operatorname{d}\left(I,(\alpha)\right) = \frac{|-3\cdot 3 + 19|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = 2.$

Vậy phương trình mặt cầu là $(x+1)^2 + y^2 + (z-3)^2 = 4$.

CÂU 11. Viết phương trình mặt cầu (S) đi qua A(-1;2;0), B(-2;1;1) và có tâm nằm trên trục Oz.

D Lời giải.

Tâm I của mặt cầu trên trục Oz có tọa độ I(0;0;c).

Hai điểm A, B nằm trên mặt cầu nên

$$IA^{2} = IB^{2}$$

 $\Leftrightarrow 1^{2} + 2^{2} + c^{2} = 2^{2} + 1^{2} + (1 - c)^{2}$
 $\Leftrightarrow c = \frac{1}{2}$.

Từ đó, phương trình mặt cầu là $x^2+y^2+\left(z-\frac{1}{2}\right)^2=1^2+2^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2$

hay $x^2 + y^2 + z^2 - z - 5 = 0$.

Chọn đáp án (A).....

CÂU 12. Cho mặt cầu (S) tâm I nằm trên mặt phẳng (Oxy) đi qua ba điểm A(1;2;-4), B(1;-3;1), C(2;2;3). Tìm tọa độ $\tilde{\text{di}}$ $\tilde{\text{e}}$ I.

$$(A)$$
 $I(2;-1;0).$

B
$$I(0;0;1)$$
.

$$(c)$$
 $I(0;0;-2).$

$$I(-2;1;0).$$

🗭 Lời giải.

 $\overrightarrow{Vi} \ I \in (Oxy) \Rightarrow I(a;b;0)$. Ta có $\overrightarrow{AI} = (a-1;b-2;4); \overrightarrow{BI} = (a-1;b+3;-1); \overrightarrow{CI} = (a-2;b-2;-3).$ Do I là tâm cầu nên

$$\begin{cases} IA = IB \\ IA = IC \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (a-1)^2 + (b-2)^2 + 4^2 = (a-1)^2 + (b+3)^2 + 1 \\ (a-1)^2 + (b-2)^2 + 4^2 = (a-2)^2 + (b-2)^2 + 9 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -4b + 20 = 6b + 10 \\ -2a + 17 = -4a + 13 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 \\ a = -2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow I(-2; 1; 0).$$

CÂU 13. Cho 3 điểm A(2;3;0), B(0;-4;1), C(3;1;1). Mặt cầu đi qua ba điểm A,B,C và có tâm I thuộc mặt phẳng (Oxz), biết I(a;b;c). Tính tổng T=a+b+c.

A
$$T = 3$$
.

B
$$T = -3$$
.

$$T = -1.$$

🗭 Lời giải.

Gọi phương trình mặt cầu có dạng (S): $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$. Mặt cầu có tâm I(a;b;c). Vì $I\in (Oxz)$ và $A,B,C\in (S)$ nên ta có hệ

$$\begin{cases} 13 - 4a - 6b + d = 0 \\ 17 + 8b - 2c + d = 0 \\ 11 - 6a - 2b - 2c + d = 0 \\ b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 13 - 4a - 6b + d = 0 \\ 4a + 14b - 2c = -4 \\ -2a + 4b - 2c = 2 \\ b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 0 \\ c = 0 \\ d = -17. \end{cases}$$

Vây T = a + b + c = -1 + 0 + 0 = -1.

Chọn đáp án \bigcirc

CÂU 14. Cho các điểm A(1;0;0), B(0;2;0), C(0;0;-2). Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp OABC là

A
$$\frac{7}{2}$$
.

B
$$\frac{1}{2}$$
.

$$\frac{3}{2}$$
.

$$\bigcirc \frac{5}{2}$$
.

🗭 Lời giải.

lacktriangle Cách 1. Gọi I(x;y;z) là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp OABC. Khi

$$\begin{cases} OI^2 = AI^2 \\ OI^2 = BI^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = (x-1)^2 + y^2 + z^2 \\ x^2 + y^2 + z^2 = x^2 + (y-2)^2 + z^2 \Leftrightarrow \\ x^2 + y^2 + z^2 = x^2 + y^2 + (z+2)^2 \end{cases} \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = 1 \\ z = -1 \end{cases}$$

Suy ra bán kính $R = OI = \frac{3}{2}$

☑ Cách 2.

- Gọi mặt cầu (S) có dạng $x^2 + y^2 + z^2 2ax 2by 2cz + d = 0$ (1).
- Thay lần lượt tọa độ 4 điểm O, A, B, C vào (1) và giải hệ, ta tìm được a, b, c, d.
- Tính $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 d}$.

Chon đáp án (C).......

CÂU 15. Cho điểm D(3;4;-2). Gọi A,B,C lần lượt là hình chiếu vuông góc của D trên các trục tọa độ Ox,Oy,Oz. Gọi (S) là mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD. Tính diện tích mặt cầu (S).

B
$$\frac{29\sqrt{29}\pi}{6}$$
.

$$\bigcirc$$
 116 π .

$$\bigcirc$$
 29 π .

🗭 Lời giải.

Nhận xét rằng, bốn điểm A, B, C, D là 4 trong 8 đỉnh của một hình hộp chữ nhật có đường chéo là OD. Suy ra $R = \frac{OD}{2}$

Diện tích mặt cầu $S = 4\pi R^2 = 29\pi$.

Chon đáp án (D)....

Vị trí tương đối của điểm, của mặt phẳng với mặt cầu

- **Sài toán 1:** Xét điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ và mặt cầu $S: (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 r^2 = 0$ (1). Thay tọa độ điểm M vào vế trái của (1), nếu
 - ① Kết quả bằng 0 thì $M \in (S)$.
 - ② Kết quả ra số âm thì M nằm trong (S).
 - 3 Kết quả ra số dương thì M nằm trong (S).
- **Sai toán 2:** Cho mặt cầu (S) có tâm I(a;b;c), bán kính r và mặt phẳng (P):Ax+By+Cz+D=0.

① Nếu d
$$(I,(P)) = \frac{\left|Aa + Bb + Cc + D\right|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} > r$$
 thì (P) và (S) không có điểm chung.

$$\text{ Nếu d}(I, (I)) = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} > r \text{ thì } (I) \text{ và } (S) \text{ không}$$

$$\text{ Nếu d}(I, (P)) = \frac{\left|Aa + Bb + Cc + D\right|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = r \text{ thì } (P) \text{ tiếp xúc } (S).$$

1. Ví du minh hoa

VÍ DỤ 1. Cho mặt cầu (S) có tâm I(2;-1;4) và bán kính R=5. Các điểm A(3;1;5), B(-1;11;14), C(6;2;4) nằm trong, nằm trên hay nằm ngoài mặt cầu (S)?

🗭 Lời giải.

$$\bigodot$$
 $IA = \sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{6} \approx 2,45 < R = 5,$ suy ra $IA < R.$ Do đó, điểm A nằm trong mặt cầu $(S).$

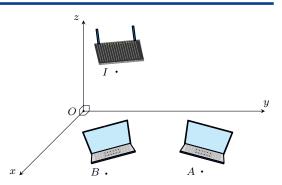
$$igotimes IB = \sqrt{(-3)^2 + 12^2 + 10^2} = \sqrt{253} \approx 15,91 > 5$$
, suy ra $IB > R$. Do đó, điểm B nằm ngoài mặt cầu (S) .

$$\bigodot$$
 $IC=\sqrt{4^2+3^2+0^2}=5=R.$ Do đó, điểm C nằm trên mặt cầu $(S).$

VÍ DU 2.

Trong không gian Oxyz (đơn vị trên mỗi trực là mét), một router phát sóng wifi có đầu thu phát được đặt tại điểm I(4;2;10).

- a) Cho biết bán kính phủ sóng wifi là 40 m. Viết phương trình mặt cầu (S) biểu diễn ranh giới của vùng phủ sóng.
- b) Một người sử dụng máy tính tại điểm M(6; 12; 0). Hãy cho biết điểm M nằm trong hay nằm ngoài mặt cầu (S) và người đó có thể sử dụng được sóng wifi của router nói trên hay không?
- c) Câu hỏi tương tự đối với người sử dụng máy tính ở điểm N(14; 6; 50).



Lời giải.

a) Mặt cầu (S) có tâm I(4;2;10), bán kính R=40 nên có phương trình là

$$(x-4)^2 + (y-2)^2 + (z-10)^2 = 1600.$$

- b) Ta có $IM = \sqrt{2^2 + 10^2 + (-10)^2} = \sqrt{204} \approx 14.3 < 40$, suy ra IM < R. Do đó, điểm M nằm trong mặt cầu (S). Vậy người đó có thể sử dụng được sóng wifi của router nói trên.
- c) Ta có $IN = \sqrt{10^2 + 4^2 + 40^2} = \sqrt{1716} \approx 41.4 > 40$, suy ra IN > R. Do đó, điểm N nằm ngoài mặt cầu (S). Vậy người đó **không** thể sử dụng được sóng wifi của router nói trên.

VÍ DỤ 3. Cho mặt cầu (S): $(x-2)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 9$ và mặt phẳng (P): 2x - y - 2z - 3 = 0.

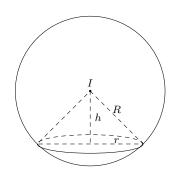
- a) Chứng minh rằng mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S).
- b) Biết mặt cầu (S) cắt (P) theo giao tuyến là đường tròn (C). Tính bán kính r của đường tròn (C).

Lời giải.

Mặt cầu (S) có tâm I(2;0;-1), bán kính R=3. Khoảng cách từ I đến mặt phẳng (P) là

$$h = d(I; (P)) = \frac{|4 - 0 + 2 - 3|}{3} = 1.$$

Ta có $h^2 + r^2 = R^2 \Leftrightarrow 1 + r^2 = 9 \Leftrightarrow r = 2\sqrt{2}$.



2. Bài tập trắc nghiệm

CÂU 1. Cho điểm M(1;-1;3) và mặt cầu (S) có phương trình $(x-1)^2+(y+2)^2+z^2=9$. Khẳng định đúng là

(A) M nằm ngoài (S).

(B) M nằm trong (S).

(c) M nằm trên(S).

 $(\mathbf{D}) M$ trùng với tâm của (S).

Lời giải.

Thay tọa độ M vào vế trái của phương trình mặt cầu, ta được $(1-1)^2 + (-1+2)^2 + (3)^2 = 10 > 9$. Suy ra M nằm ngoài (S)

CÂU 2. Cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z = 0$ và ba điểm O(0;0;0), A(1;2;3), B(2;-1;-1). Trong số ba điểm trên số điểm nằm trên mặt cầu là

(A) 2.

(C) 3.

(D) 1.

🗭 Lời giải.

Lần lượt thay tọa độ các điểm O, A, B vào phương trình mặt cầu (S) ta chỉ thấy duy nhất điểm O thuộc mặt cầu (S).

Chọn đáp án (D)......

CÂU 3. Cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-4y+6z-2=0$ và mặt phẳng (P): x+y-z+4=0. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

(A) (P) tiếp xúc (S).

 (\mathbf{B}) (P) và (S) không có điểm chung.

 (\mathbf{C}) (P) đi qua tâm của (S).

 (\mathbf{D}) (P) cắt (S).

D Lời giải.

(S) có tâm I(0;2;-3) và bán kính $R=\sqrt{15}$.

Ta có d $[I, (P)] = \frac{|2+3+4|}{\sqrt{1+1+1}} = 3\sqrt{3} > \sqrt{15} = R$ nên (P) và (S) không có điểm chung.

CÂU 4. Cho mặt phẳng (P) và mặt cầu (S) có phương trình lần lượt là (P): $2x + 2y + z - m^2 + 4m - 5 = 0$; (S): $x^2 + y^2 + 3m^2 + 2m^2 +$ $z^2 - 2x + 2y - 2z - 6 = 0$. Giá tri của m để (P) tiếp xúc (S) là

$$\bigcirc$$
 $M = 5.$

B)
$$m = -1$$
.

$$\mathbf{C}$$
 $m = -1$ hoặc $m = 5$. \mathbf{D} $m = 1$ hoặc $m = -5$.

$$\bigcirc$$
 $m=1$ hoặc $m=-5$.

🗭 Lời giải.

Mặt cầu (S): $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 2z - 6 = 0$ có tâm I(1; -1; 1) và bán kính R = 3. (P) tiếp xúc $(S) \Leftrightarrow d(I, (P)) = R$

$$\Leftrightarrow \frac{\left|2 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) + 1 - m^2 + 4m - 5\right|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}} = 3$$

$$\Leftrightarrow \left|m^2 - 4m + 4\right| = 9$$

$$\Leftrightarrow \left[m^2 - 4m + 4 = 9\right]$$

$$\Leftrightarrow \left[m^2 - 4m + 4 = -9\right] \text{ (vô nghiệm)}$$

$$\Leftrightarrow m^2 - 4m - 5 = 0 \Leftrightarrow \left[m = -1\right]$$

$$m = 5.$$

CÂU 5. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho mặt phẳng (P): 2x + 2y + z - 2 = 0 và mặt cầu (S) tâm I(2;1;-1) bán kính R=2. Bán kính đường tròn giao của mặt phẳng (P) và mặt cầu (S) là

$$\mathbf{B}) r = \sqrt{5}.$$

$$(c)$$
 $r = 1.$

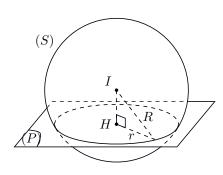
$$\bigcirc r = 3.$$

🗭 Lời giải.

Gọi bán kính đường tròn giao của mặt phẳng (P)và mặt cầu (S) là r.

Ta có
$$h = d(I, (P)) = \frac{|2 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) - 1 - 2|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}} = 1.$$

Suy ra $r = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}.$



Chọn đáp án (A)......

CÂU 6. Trong không gian Oxyz, mặt cầu có phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 6z + 2 = 0$ cắt mặt phẳng (Oxz) theo một đường tròn có bán kính bằng

(A) $3\sqrt{2}$.

B
$$2\sqrt{2}$$
.

$$\bigcirc$$
 $4\sqrt{2}$.

🗭 Lời giải.

Mặt cầu đã cho có tâm I(1;-1;3) và bán kính R=3.

Khoảng cách từ I đến mặt phẳng (Oxz) bằng 1, do đó bán kính của đường tròn bằng

$$\sqrt{3^2 - 1^2} = 2\sqrt{2}.$$

Chọn đáp án (B).....

CÂU 7. Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho mặt cầu (S): $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 = 9$ và mặt phẳng (P): 2x - y - 2z + 1 = 0. Biết (P) cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính r. Tính r.

$$ightharpoonup r = 3.$$

$$r = 2\sqrt{2}$$
.

$$(\mathbf{D}) r = \sqrt{3}.$$

🗭 Lời giải.

Ta có (S): $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 = 9 \Rightarrow \begin{cases} I(1;2;2) \\ R = 3 \end{cases}$.

 $d=\operatorname{d}\left(I,(\alpha)\right)=\frac{|2\cdot 1-2-2\cdot 2+1|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+(-2)^2}}=1.$

Vây $r = \sqrt{R^2 - d^2} = 2\sqrt{2}$

Chon đáp án (C).......

CÂU 8. Trong không gian Oxyz cho mặt cầu (S): $x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 4y - 12z = 0$ và mặt phẳng (P): 2x + y - z - 2 = 0. Tính diện tích thiết diện của mặt cầu (S) cắt bởi mặt phẳng (P).

(A) 50π .

B)
$$S = 49\pi$$
.

(c)
$$25\pi$$
.

(D)
$$36\pi$$
.

🗭 Lời giải.

Mặt cầu (S) có tâm I(3;2;6) và bán kính $R=\sqrt{3^2+2^2+6^2}=7$. Vì I thuộc (P) nên (P) cắt (S) theo thiết diện là đường tròn có bán kính bằng 7. Diên tích thiết diên bằng 49π .

CÂU 9. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho điểm I(2;1;1) và mặt phẳng (P): 2x + y + 2z - 1 = 0. Mặt cầu (S) có tâm I, cắt (P) theo một đường tròn có bán kính r=4. Mặt cầu (S) có phương trình là

$$(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 18.$$

B
$$(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 2\sqrt{5}$$
.

$$(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 20.$$

$$(x+2)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 20.$$

Ta có

$$d(I;(P)) = \frac{|2 \cdot 2 + 1 + 2 \cdot 1 - 1|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2}} = 2.$$

Vì mặt cầu (S) có tâm I, cắt (P) theo một đường tròn có bán kính r=4 nên mặt cầu (S) có bán kính

$$R = \sqrt{r^2 + d^2(I, (P))} = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}.$$

Vây phương trình mặt cầu (S) là $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 20$.

Chon đáp án (C).......

CÂU 10. Trong không gian Oxyz, cho mặt cầu (S) có tâm I(1;2;1) và cắt mặt phẳng (P): 2x - y + 2z + 7 = 0 theo một đường tròn có đường kính bằng 8. Phương trình mặt cầu (S) là

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 25.$$

B
$$(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 81.$$

$$(x+1)^2 + (y+2)^2 + (z+1)^2 = 9.$$

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 5.$$

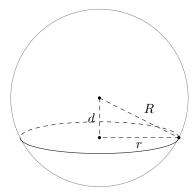
D Lời giải.

Gọi R, r, d lần lượt là bán kính của mặt cầu, bán kính của đường tròn và khoảng cách từ tâm I đến mp(P). Khi đó $R = \sqrt{r^2 + d^2}$.

Ta có
$$d = d(I, (P)) = \frac{|2 \cdot 1 - 2 + 2 \cdot 1 + 7|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} = 3 \text{ và } r = 4.$$

Suv ra $R = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$.

Vậy phương trình mặt cầu (S) là $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 25$.



Chọn đáp án (A).....

C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM TỬ LUYỆN

Phần I. Mỗi câu hỏi học sinh chọn một trong bốn phương án A, B, C, D.

CÂU 1. Trong không gian Oxyz, điểm nào sau đây nằm trong mặt cầu (S): $(x-1)^2 + (y-4)^2 + (z-3)^2 = 16$?

(A)
$$M(0;7;-3)$$
.

B
$$P(1;0;0)$$
.

$$\bigcirc$$
 $N(0;4;3).$

$$\bigcirc$$
 $Q(1;0;3).$

🗭 Lời giải.

Mặt cầu (S) có tâm I(1;4;3) và bán kính R=4.

 $IM = \sqrt{(-1)^2 + 3^2 + (-6)^2} = \sqrt{46} > R \Rightarrow M$ nằm ngoài mặt cầu.

 $IN = \sqrt{(-1)^2 + 0^2 + 0^2} = 1 < R \Rightarrow N$ nằm trong mặt cầu.

 $IP = \sqrt{0^2 + (-4)^2 + (-3)^2} = 5 > R \Rightarrow P$ nằm ngoài mặt cầu.

 $IQ = \sqrt{0^2 + (-4)^2 + 0^2} = 4 = R \Rightarrow Q \text{ thuộc mặt cầu.}$

CÂU 2. Trong không gian Oxyz, cho mặt cầu (S) có tâm A(3;-1;1) và đi qua M(2;-2;4). Phương trình mặt cầu (S) là

$$(x-3)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 = 11.$$

B
$$(x+3)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2 = 11.$$

 $(x+3)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2 = \sqrt{11}.$

$$(x-3)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 = \sqrt{11}.$$

🗭 Lời giải.

Bán kính $R = AM = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + 3^2} = \sqrt{11}$.

Phương trình mặt cầu là (S): $(x-3)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 = 11$.

Chon đáp án A.....

CÂU 3. Trong không gian Oxyz, cho mặt cầu $(S): (x-2)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=18$. Bán kính của (S) bằng

(A) 9.

$$\bigcirc 6\sqrt{2}$$
.

🗭 Lời giải.

Bán kính $R = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$.

Chọn đáp án (D).....

CÂU 4. Trong không gian Oxyz, cho hai điểm M(3; -2; 5), N(-1; 6; -3). Mặt cầu đường kính MN có phương trình là

$$(x+1)^2 + (y+2)^2 + (z+1)^2 = 6.$$

B)
$$(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 6$$
.

$$(\mathbf{c})(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 36.$$

$$(x+1)^2 + (y+2)^2 + (z+1)^2 = 36.$$

🗭 Lời giải.

Tâm I của mặt cầu là trung điểm đoạn $MN \Rightarrow I(1; 2; 1)$.

Bán kính mặt cầu $R = \frac{MN}{2} = \frac{\sqrt{(-1-3)^2 + (6+2)^2 + (-3-5)^2}}{2} = 6.$ Vậy phương trình mặt cầu là $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 36.$

Chọn đáp án \bigcirc

CÂU 5. Trong không gian Oxyz, cho mặt cầu (S): $(x-5)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 9$. Đường kính của mặt cầu (S) là

(A) 9.

🗭 Lời giải.

Bán kính $R = \sqrt{9} = 3 \Rightarrow$ đường kính bằng $2R = 2 \cdot 3 = 6$.

Chon đáp án (C).....

CÂU 6. Trong không gian Oxyz, phương trình nào sau đây là phương trình của mặt cầu?

B
$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z + 8 = 0.$$

🗭 Lời giải.

Điều kiện để phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$ là phương trình mặt cầu là

$$a^2 + b^2 + c^2 - d > 0.$$

Xét phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4z - 1 = 0$ có $1^2 + 0^2 + (-2)^2 - (-1) = 6 > 0$.

Suy ra phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4z - 1 = 0$ là phương trình của một mặt cầu.

CÂU 7. Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho mặt cầu $(S): (x+2)^2+y^2+(z-3)^2=4$. Tâm của (S) có toa đô là

 $(-1;0;\frac{3}{2}).$

B (2;0;-3).

 $(1;0;\frac{3}{2}).$

 (\mathbf{D}) (-2; 0; 3).

🗭 Lời giải.

Phương trình mặt cầu $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$ có tâm I(a; b; c).

Suy ra (S): $(x+2)^2 + y^2 + (z-3)^2 = 4$ có tâm (-2;0;3).

Chon đáp án (D)

CÂU 8. Trong không gian Oxyz, một thiết bị phát sóng đặt tại vị trí A(2;0;0). Vùng phủ sóng của thiết bị có bán kính bằng 1. Điểm nào sau đây thuộc vùng phủ sóng của thiết bị nói trên?

(A) P(1;0;0).

B O(0;0;0).

 $(\mathbf{C}) N (0; 1; 1).$

 $(\mathbf{D}) M (1; 0; 3).$

🗭 Lời giải.

Ta có $AM = \sqrt{(-1)^2 + 0^2 + 3^2} = \sqrt{10} > R$ nên M không thuộc vùng phủ sóng.

 $AN = \sqrt{0^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{2} > R$ nên N không thuộc vùng phủ sóng. $AP = \sqrt{(-1)^2 + 0^2 + 0^2} = 1 = R$ nên P thuộc vùng phủ sóng.

Chọn đáp án (A).....

 $AO = \sqrt{(-2)^2 + 0^2 + 0^2} = 2 > R$ nên O không thuộc vùng phủ sóng.

CÂU 9. Trong không gian Oxyz, cho mặt cầu (S): $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 2z - 3 = 0$. Bán kính R của mặt cầu (S) bằng

(c) $3\sqrt{3}$.

(D) 3.

🗭 Lời giải.

Mặt cầu có dạng $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$ có bán kính là $R=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}$. Suy ra $R=\sqrt{1^2+(-2)^2+1^2-(-3)}=3$.

Chon đáp án (D).....

CÂU 10. Trong không gian Oxyz, phương trình mặt cầu tâm I(1;2;3), bán kính R=2 có dạng

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 4.$$

B
$$(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 2.$$

©
$$(x+1)^2 + (y+2)^2 + (z+3)^2 = 2$$
.

$$(x+1)^2 + (y+2)^2 + (z+3)^2 = 4.$$

🗭 Lời giải.

Phương trình mặt cầu tâm I(1;2;3), bán kính R=2 có dạng

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 4.$$

Chọn đáp án (A).....

CÂU 11. Trong không gian Oxyz, tìm m để phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - y + 4z - m = 0$ là phương trình của mặt cầu.

B
$$m > \frac{21}{4}$$
.

$$\bigcirc m \geq \frac{21}{4}.$$

🗭 Lời giải.

Phương trình đã cho là phương trình mặt cầu khi và chỉ khi

$$a^{2} + b^{2} + c^{2} - d > 0 \Leftrightarrow 1^{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^{2} + (-2)^{2} + m > 0 \Leftrightarrow m > \frac{21}{4}.$$

Chon đáp án (B).....

CÂU 12. Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, mặt cầu (S): $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$ có bán kính R bằng

(A)
$$a^2 + b^2 + c^2 + d$$
.

B
$$\sqrt{a^2+b^2+c^2+d}$$

B
$$\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d}$$
. **C** $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$. **D** $a^2 + b^2 + c^2 - d$.

$$\mathbf{D}$$
 $a^2 + b^2 + c^2 - d$

Lời giải.

Mặt cầu (S): $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$ có bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$.

Chọn đáp án (C).....

Phần II. Trong mỗi ý a), b), c) và d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.

CÂU 1. Trong không gian Oxyz, cho mặt cầu $(S): (x-2)^2+y^2+(z+1)^2=1$ và mặt phẳng (P): x+2y-z+1=0. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

Mệnh đề	Ð	S
a) Khoảng cách từ tâm I đến mặt phẳng (P) bằng $\frac{\sqrt{6}}{3}$.		X
b) Mặt cầu (S) có tâm $I(2;0;-1)$ và bán kính $R=1.$	X	
c) Mặt phẳng (P) tiếp xúc mặt cầu (S) .		X
d) Phương trình mặt cầu tâm $I(2;0;-1)$ và tiếp xúc mặt phẳng (P) là: $(S'): x^2+y^2+z^2-4x+2z+\frac{7}{3}=0$.	X	

🗭 Lời giải.

a) (S) Sai.

$$d(I,(P)) = \frac{|2+1+1|}{\sqrt{1+4+1}} = \frac{2\sqrt{6}}{3}.$$

b) Dúng.

Mặt cầu (S): $(x-2)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 1$ có tâm I(2;0;-1) và bán kính R=1.

c) (S) Sai.

Vì d $(I,(P)) = \frac{2\sqrt{6}}{3} > R$ nên (P) không cắt mặt cầu (S).

d) Dúng.

Phương trình mặt cầu cần tìm có bán kính $R = d(I, (P)) = \frac{2\sqrt{6}}{3}$, tâm I(2; 0; -1) nên có phương trình

$$(x-2)^2 + y^2 + (z+1)^2 = \left(\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2z + \frac{7}{3} = 0.$$

Chọn đáp án a sai b đúng c sai d đúng

CÂU 2. Trong không gian Oxyz, cho mặt cầu (S): $(x-1)^2 + (y+3)^2 + (z-2)^2 = 49$.

Mệnh đề		S
a) Mặt cầu (S) có bán kính $R=7$.	X	
b) Điểm $A(1;4;2)$ nằm trên mặt cầu (S) .	X	
c) Mặt cầu (S) có tâm $I(1;3;2)$.		X
d) Mặt cầu (S) còn có phương trình: $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 6y - 4z - 49 = 0$.		X

🗩 Lời giải.

a) Dúng.

Mặt cầu (S): $(x-1)^2 + (y+3)^2 + (z-2)^2 = 49 = 7^2$ nên mặt cầu (S) có bán kính R=7.

b) Dúng

Thay toạ độ điểm A(1;4;2) vào vế trái của mặt cầu (S) được: $VT=7^2=49$.

c) Sai.

Mặt cầu (S) có tâm là I(1; -3; 2).

d) Sai.

Ta có

$$(S): (x-1)^2 + (y+3)^2 + (z-2)^2 = 49$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 6y - 4z + 1 + 9 + 4 = 49$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 6y - 4z - 35 = 0.$$

Chọn đáp án a đúng b đúng c sai d sai

CÂU 3. Trong không gian Oxyz, cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2+2x+8y+1=0$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

Mệnh đề		S
a) Mặt cầu (S) có tâm $I(1;4;0)$.		X
b) Mặt cầu (S) còn có phương trình: $(S): (x+1)^2 + (y+4)^2 + z^2 = 16$.	X	
c) Điểm $M\left(0;3;4\right)$ nằm bên ngoài mặt cầu (S) .	X	
d) Mặt cầu (S) có bán kính $R=4$.	X	

🗭 Lời giải.

a) Sai.

Mặt cầu (S) có tâm là I(-1, -4, 0).

b) Dúng.

Vì mặt cầu (S) có tâm I(-1; -4; 0), bán kính R = 4 nên có phương trình là

(S):
$$(x+1)^2 + (y+4)^2 + z^2 = 16$$
.

c) Dúng.

Ta có $IM = \sqrt{1^2 + 7^2 + 4^2} > R$ nên điểm M(0;3;4) nằm bên ngoài mặt cầu (S).

d) Dúng.

Mặt cầu (S) có bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d} = \sqrt{1 + 16 - 1} = 4$.

Chọn đáp án a sai | b đúng | c đúng | d đúng | ...

CÂU 4. Trong không gian Oxyz, cho ba điểm A(1;2;-4), B(1;-3;1), C(2;2;3).

	Mệnh đề	Ð	S
a)) Bán kính của mặt cầu (S_4) đi qua ba điểm A,B,C và có tâm nằm trên mặt phẳng (Oxy) là $R=\sqrt{26}$.	X	

Mệnh đề	Ð	S
b) Mặt cầu (S_1) tâm A , bán kính $R = 1$ có phương trình là: $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 4)^2 = 1$.		X
c) Bán kính của mặt cầu (S_2) có tâm là A và đi qua điểm C là $\sqrt{50}$.	X	
d) Mặt cầu (S_3) nhận AB làm đường kính có phương trình là: $(x-1)^2 + \left(y+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(z+\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{25}{2}$.	X	

🗭 Lời giải.

a) Dúng.

Gọi phương trình mặt cầu (S_4) có dạng $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$, với tâm I(a;b;c). Ta có $I(a;b;c) \in (Oxy) \Rightarrow c = 0$.

$$Vi \begin{cases} A \in (S) \\ B \in (S) \Rightarrow \begin{cases} -2a - 4b + d = -21 \\ -2a + 6b + d = -11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 1 \end{cases}$$

$$C \in (S) \begin{cases} -4a - 4b + d = -17 \\ -4a - 4b + d = -17 \end{cases}$$

b) (S) Sai.

Mặt cầu (S_1) tâm A, bán kính R=1 có phương trình là $(x-1)^2+(y-2)^2+(z+4)^2=1$.

c) Dúng.

Ta có $\overrightarrow{AC} = (1; 0; 7) \Rightarrow AC = \sqrt{50}$.

Suy ra bán kính của mặt cầu (S_2) có tâm là A và đi qua điểm C là $AC = \sqrt{50}$.

d) Dúng.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (0; -5; 5) \Rightarrow AB = 5\sqrt{2}$.

Mặt cầu (S_3) nhận AB làm đường kính nên có tâm $I\left(1;-\frac{1}{2};-\frac{3}{2}\right),\,R=\frac{AB}{2}=\frac{5\sqrt{2}}{2},$ có phương trình là

$$(x-1)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(z + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{25}{2}.$$

Chọn đáp án a đúng | b sai | c đúng | d đúng |

Phần III. Học sinh điền kết quả vào ô trống.

CÂU 1. Trong không gian Oxyz, cho phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2my + 3m^2 - 2m = 0$ với m là tham số. Tính tổng tất cả các giá trị nguyên của m để phương trình đã cho là phương trình mặt cầu.

Đáp án: 1

Lời giải.

Phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2my + 3m^2 - 2m = 0$ là phương trình mặt cầu khi và chỉ khi

$$-2m^2 + 2m + 4 > 0 \Leftrightarrow m \in (-1, 2)$$
.

Do $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{0, 1\}$. Vậy tổng tất cả các giá trị nguyên của m bằng 1.

Đáp án: 1

CÂU 2. Trong không gian Oxyz (đơn vị của các trục tọa độ là ki-lô-mét), đài kiểm soát không lưu sân bay có tọa độ (-64; 128; 64). Máy bay bay trong phạm vi cách đài kiểm soát 500 km thì sẽ hiển thị trên màn hình ra đa. Một máy bay Nxuất hiện trên màn hình ra đa và một máy bay M nằm trong mặt phẳng (P): x-2y+2z-1458=0 sao cho hai máy bay M, N thuộc đường thẳng có vectơ chỉ phương là $\vec{u} = (1; 1; 1)$. Khoảng cách nhỏ nhất giữa hai máy bay M, N là bao nhiêu km? (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)

Đáp án: 2

Lời giải.

Máy bay N xuất hiện trên màn hình ra đa nên N thuộc mặt cầu (S) có tâm I(-64; 128; 64), bán kính R = 500.

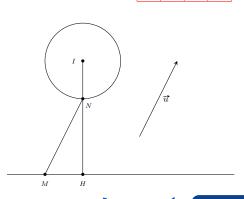
Ta có

$$d(I,(P)) = \frac{|x_I - 2y_I + 2z_I - 1458|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}} = 550 > R$$

nên (P) và (S) không giao nhau.

Goi α là góc tạo bởi MN và mặt phẳng (P).

Goi H là hình chiếu của N lên mặt phẳng (P).



Mặt khác \overrightarrow{MN} cùng phương với véc-tơ $\overrightarrow{u} = (1;1;1)$ và $\overrightarrow{n_P} = (1;-2;2)$ suy ra

$$\sin \alpha = \frac{|\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{n_P}|}{|\overrightarrow{u}| \cdot |\overrightarrow{n_P}|} = \frac{1}{3\sqrt{3}}.$$

Khi đó
$$MN = \frac{NH}{\sin \alpha} \ge \frac{NH_{\min}}{\sin \alpha} = \frac{\mathrm{d}\left(I,(P)\right) - R}{\sin \alpha} = \frac{550 - 500}{\frac{1}{3\sqrt{3}}} = 150\sqrt{3} \approx 260.$$

CÂU 3. Một vỏ kem ốc quế là một loại bánh khô, hình nón (N) trong không gian Oxyz, thường được làm bằng một chiếc bánh xốp dùng để đặt kem vào và cầm ăn mà không cần bát hoặc muỗng. Người ta thả vào vỏ kem (N) một viên kem vani hình cầu có đính hai viên socola nhỏ tai hai vi trí A(2;1;3) và B(6;5;5) sao cho đường kính AB có B là tâm đường tròn đáy khối nón. Khi thể tích của khối nón (N) nhỏ nhất thì mặt phẳng qua đỉnh S của khối nón (N) và song song với mặt phẳng chứa đường tròn đáy của (N) có phương trình 2x+by+cz+d=0. Tính giá trị của biểu thức T=b+c+d.

(1)

Đáp án: 1

🗭 Lời giải.

Gọi chiều cao khối nón SB = h(h > 0) và bán kính đường tròn đáy BC = R. Ta có $V = \frac{1}{3}\pi R^2 h$.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (4; 4; 2) \Rightarrow AB = 6$.

Xét mặt cầu có đường kính AB.

Bán kính là $r = \frac{AB}{2} = 3$ và tâm I(4; 3; 4).

Vì $\triangle SHI$ đồng dạng với $\triangle SBC$ nên

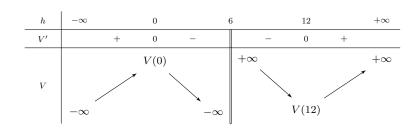
$$\frac{SI}{SC} = \frac{IH}{BC} \Leftrightarrow \frac{h-3}{\sqrt{h^2 + R^2}} = \frac{3}{R}.$$

$$\Leftrightarrow \frac{(h-3)^2}{h^2 + R^2} = \frac{9}{R^2} \Leftrightarrow R^2 \left[(h-3)^2 - 9 \right] = 9h^2 \Leftrightarrow R^2 = \frac{9h^2}{h^2 - 6h}.$$
 (2)

Thay (2) vào (1) ta có
$$V=\frac{1}{3}\pi\cdot\frac{9h^2}{h^2-6h}\cdot h=3\pi\cdot\frac{h^2}{h-6} \text{ với } h>6.$$

Xét
$$V' = 3\pi \cdot \frac{2h(h-6) - h^2}{(h-6)^2} = 3\pi \cdot \frac{h^2 - 12h}{(h-6)^2}.$$

Ta được BBT như sa



Do h>6 nên V_{\min} khi $SB=h=12\Rightarrow A$ là trung điểm của $SB\Rightarrow S(-2;-3;1).$

Khi đó (P) đi qua S, vuông góc với AB nên có một VTPT $\vec{n} = \overrightarrow{AB} = (4;4;2)$ hay $\vec{n} = (2;2;1)$.

Suy ra (P): $2(x+2) + 2(y+3) + z - 1 = 0 \Leftrightarrow (P)$: 2x + 2y + z + 9 = 0.

Vậy T = b + c + d = 2 + 1 + 9 = 12.

Đáp án: 12

CÂU 4. Trong không gian
$$Oxyz$$
, cho mặt cầu (S) : $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 6z - 13 = 0$ và đường thẳng d :
$$\begin{cases} x = -1 + t \\ y = -2 + t \end{cases}$$

Gọi M(a;b;c) với a<0 là điểm thuộc đường thẳng d sao cho từ M kẻ được ba tiếp tuyến MA, MB, MC đến mặc cầu (S)(A, B, C là các tiếp điểm) thỏa mãn $\widehat{AMB} = 60^\circ$; $\widehat{BMC} = 90^\circ$; $\widehat{CMA} = 120^\circ$. Tính giá trị của biểu thức P = a + b + c.

Đáp án: - 2

🗭 Lời giải.

Ta có mặt cầu (S) có tâm I(1;2;-3), bán kính $R=3\sqrt{3}$.

Dăt MA = MB = MC = a.

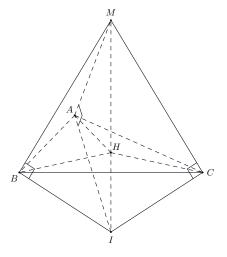
Tam giác MAB đều nên AB = a.

Tam giác MBC vuông cân tại M nên $BC = a\sqrt{2}$.

Tam giác MCA có $\widehat{CMA} = 120^{\circ}$ nên $CA = a\sqrt{3}$.

Xét tam giác ABC có $AB^2 + BC^2 = AC^2$ nên tam giác ABC vuông tại B hay tam

giác ABC nội tiếp đường tròn đường kính AC và $AH = \frac{1}{2}AC = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.



Xét tam giác vuông IAM có

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AI^2} \Rightarrow MA = a = 3 \Rightarrow IM^2 = AM^2 + AI^2 = 36.$$

Mặt khác $M \in (d) \Rightarrow M(-1+t; -2+t; 1+t)$.

Hay
$$(t-2)^2 + (t-4)^2 + (t+4)^2 = 36 \Leftrightarrow 3t^2 - 4t = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} t = 0 \\ t = \frac{4}{3} \end{bmatrix}$$
.

Suy ra M(-1;-2;1) hay $M\left(\frac{1}{3};-\frac{2}{3};\frac{7}{3}\right)$.

Vì giả thi
ết cho a<0 nên a=-1; b=-2; c=1. Khi đó P=a+b+c=-2.

Đáp án: $\boxed{-2}$ $\boxed{\square}$

CÂU 5. Trong không gian Oxyz (đơn vị của các trục tọa độ là ki-lô-mét), một trạm thu phát sóng điện thoại di động có đầu thu đặt tại điểm I(1;2;2) biết rằng bán kính phủ sóng của trạm là 3 km. Hai người sử dụng điện thoại lần lượt tại M(4;-4;2) và N(6;0;6). Gọi E(a;b;c) với a<0 là một điểm thuộc ranh giới vùng phủ sóng của trạm sao cho tổng khoảng cách từ E đến vi trí M và N lớn nhất. Tính T = a + b + c.



Lời giải.

Xét mặt cầu (S) có tâm I(1;2;2), bán kính R=3.

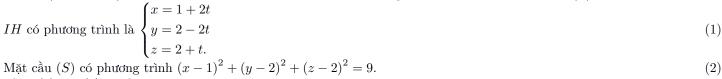
Ta có $IM = IN = 3\sqrt{3} > R$ nên cả hai điểm M, N đều nằm ngoài mặt cầu (S).

Gọi H là trung điểm của MN suy ra H(5; -2; 4) và

$$EH^2 = \frac{EM^2 + EN^2}{2} - \frac{MN^2}{4}.$$

Ta có
$$(EM+EN)^2 \leq 2\left(EM^2+EN^2\right) = 2\left(EH^2 + \frac{MN^2}{4}\right).$$

Khi đó (EM + EN) lớn nhất khi EH lớn nhất khi và chỉ khi E là giao điểm của IH và mặt cầu (S).



(2)

Thay (1) vào (2), ta được

$$(2t)^2 + (-2t)^2 + t^2 = 9 \Leftrightarrow t = \pm 1.$$

Suy ra có hai điểm E'(3;0;3) hoặc E(-1;4;1).

Vì a < 0 nên E(-1; 4; 1) hay T = a + b + c = 4.

CÂU 6. Người ta muốn thiết kế một bồn chứa khí hoá lỏng hình cầu bằng phần mềm 3D (tham khảo hình vẽ). Cho biết phương trình bề mặt của bồn chứa là (S): $(x-2)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 1$. Phương trình mặt phẳng chứa nắp là (P): z-6=0. Tính khoảng cách từ tâm bồn chứa đến mặt phẳng chứa nắp.







🗭 Lời giải.

Tâm của bồn chứa I(2;0;-1).

Khoảng cách từ tâm bồn chứa đến mặt phẳng chứa nắp là

$$d(I, (P)) = \frac{|-1-6|}{\sqrt{1^2}} = 7.$$

Bài 14.	PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẮNG	1
A	LÝ THUYẾT CẦN NHỚ	1
B	PHÂN LOẠI, PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN	2
	Dạng 1. Xác định vectơ pháp tuyến và điểm thuộc mặt phẳng	
	Dạng 2. Lập phương trình mặt phẳng khi biết các yếu tố liên quan	
	Dạng 3. Vị trí tương đối của hai mặt phẳng	
	Dạng 4. Khoảng cách từ một điểm đến mặt phẳng, khoảng cách giữa hai mặt phẳng song so	
	BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM TỰ LUYỆN	10
	PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẮNG	13
A	LÝ THUYẾT CẦN NHỚ	13
B	PHÂN LOẠI, PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN	13
	ightharpoonup Dạng 1. Xác định điểm thuộc và vectơ chỉ phương của đường thẳng	
	Dạng 2. Viết phương trình đường thẳng d khi biết vài yếu tố liên quan	
	 Dạng 3. Vị trí tương đối của hai đường thẳng Dạng 4. Vị trí tương đối của đường thẳng và mặt phẳng 	
	Dạng 5. Hình chiếu, đối xứng	
	BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM TỰ LUYỆN	
Bài 16.	CÔNG THỰC TÍNH GÓC TRONG KHÔNG GIAN	26
A	LÝ THUYẾT CẦN NHỚ	
B	PHÂN LOẠI, PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN	
	Dang 1. Tính góc trong không gian Oxyz	
	🖒 Dạng 2. Tọa độ hóa một số bài toán hình không gian	28
	BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM TỰ LUYỆN	30
Bài 17.	PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU	33
A	LÝ THUYẾT CẦN NHỚ	33
B	PHÂN LOẠI, PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN	33
	ightharpoonup Dạng 1. Xác định tâm I , bán kính r của mặt cầu cho trước	
	Dạng 2. Lập phương trình mặt cầu và ứng dụng thực tiễn	
	Dạng 3. Vị trí tương đối của điểm, của mặt phẳng với mặt cầu	
	BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM TỰ LUYỆN	38
LỜI GIẢI CHI TIẾT		42
Bài 14.	PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẨNG	42
A	LÝ THUYẾT CẦN NHỚ	42
B	PHÂN LOẠI, PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN	43
	Dạng 1. Xác định vectơ pháp tuyến và điểm thuộc mặt phẳng	
	Dạng 2. Lập phương trình mặt phẳng khi biết các yếu tố liên quan	
	Dạng 3. Vị trí tương đối của hai mặt phẳng.	
	$\begin{tabular}{ll} \begin{tabular}{ll} \beg$	song
	BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM TỰ LUYỆN	59

Bài 15	. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẨNG	66
A	LÝ THUYẾT CẦN NHỚ	66
B	PHÂN LOAI, PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN	66
	Dạng 1. Xác định điểm thuộc và vectơ chỉ phương của đường thẳng	
	Dạng 2. Viết phương trình đường thẳng d khi biết vài yếu tố liên quan	
	🗁 Dạng 3. Vị trí tương đối của hai đường thẳng	73
	Dạng 4. Vị trí tương đối của đường thẳng và mặt phẳng	76
	🗁 Dạng 5. Hình chiếu, đối xứng	79
	BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM TỰ LUYỆN	83
Bài 16	. CÔNG THỨC TÍNH GÓC TRONG KHÔNG GIAN	92
A	LÝ THUYẾT CẦN NHỚ	92
B	PHÂN LOẠI, PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN	92
	Dạng 1. Tính góc trong không gian Oxyz	92
	🗁 Dạng 2. Tọa độ hóa một số bài toán hình không gian	97
	BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM TỰ LUYỆN	103
Bài 17	. PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU	111
A	LÝ THUYẾT CẦN NHỚ	111
B	PHÂN LOẠI, PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN	111
	ightharpoonup Dạng 1. Xác định tâm I , bán kính r của mặt cầu cho trước	111
	Dạng 2. Lập phương trình mặt cầu và ứng dụng thực tiễn	
	🗁 Dạng 3. Vị trí tương đối của điểm, của mặt phẳng với mặt cầu	
	BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM TỰ LUYỆN	122

