LỜI GIẢI CHI TIẾT

Bài 5. DÃY SỐ

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa dãy số

- Mỗi hàm u xác định trên tập các số nguyên dương $\mathbb{N}^*$ được gọi là một dãy vô hạn (gọi tắt là dãy số), kí hiệu $u = u(n)$.
- Ta thường viết u_n thay cho $u(n)$ và kí hiệu dãy số $u = u(n)$ bởi (u_n), do đó dãy số (u_n) được viết dưới dạng khai triển $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n, \ldots$
  Số u_1 gọi là số hạng đầu, u_n gọi là số hạng thứ n và gọi là số hạng tổng quát của dãy số.
- Nếu $\forall n \in \mathrm{N}^*, u_n = c$ thì (u_n) được gọi là dãy số không đổi.
- Mỗi hàm u xác định trên tập $\mathrm{M} = \{1; 2; 3; \ldots; m\}, \forall m \in \mathrm{N}^*$ được gọi là một dãy số hữu hạn.
- Dạng khai triển của dãy hữu hạn là $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_m$.
  Số u_1 gọi là số hạng đầu, số u_m gọi là số hạng cuối.

2. Các cách cho một dãy số

Một dãy số có thể cho bằng:

- Liệt kê các số hạng (chỉ dùng cho các dãy hữu hạn và có ít số hạng);
- Công thức của số hạng tổng quát;
- Phương pháp mô tả;
- Phương pháp truy hồi.

3. Dãy số tăng, dãy số giảm, dãy số bị chặn

- Dãy số (u_n) được gọi là dãy số tăng nếu ta có $u_{n+1} > u_n, \forall n \in \mathrm{N}^*$.
- Dãy số (u_n) được gọi là dãy số giảm nếu ta có $u_{n+1} < u_n, \forall n \in \mathrm{N}^*$.
- Dãy số (u_n) được gọi là bị chặn trên nếu tồn tại số M sao cho $u_n \leq M, \forall n \in \mathrm{N}^*$.
- Dãy số (u_n) được gọi là bị chặn dưới nếu tồn tại số m sao cho $u_n \geq m, \forall n \in \mathrm{N}^*$.
- Dãy số (u_n) được gọi là bị chặn nếu nó vừa bị chặn trên vừa bị chặn dưới, tức là tồn tại các số m, M sao cho $m \leq u_n \leq M, \forall n \in \mathrm{N}^*$.

B. CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

1 Số hạng tổng quát, biểu diễn dãy số

Để tìm số hạng tổng quát của một dãy bất kỳ khi biết một vài số hạng đầu của dãy số ta làm như sau

- Phân tích các số hạng sau theo các số hạng đã biết theo một quy luật nào đó.
- Dự đoán số hạng tổng quát
- Kiểm tra bằng cách thay lần lượt các giá trị $n \in \mathrm{N}^*$ vào công thức tổng quát (Chứng minh bằng phương pháp quy nạp).

Để biểu diễn một dãy số khi biết công thức tổng quát ta lần lượt thay $n \in \mathrm{N}^*$ vào công thức tổng quát để tìm các số hạng thứ nhất, thứ hai, ...

1. Ví dụ minh hoạ

VÍ DỤ 1. Xác định số hạng đầu và số hạng tổng quát của dãy số (u_n) các số tự nhiên lẻ $1, 3, 5, 7, \ldots$

Lời giải.

Dãy (u_n) có số hạng đầu $u_1 = 1$ và số hạng tổng quát $u_n = 2n - 1$.

VÍ DỤ 2. Xác định số hạng đầu và số hạng tổng quát của dãy số (v_n) các số nguyên dương chia hết cho 5: $5, 10, 15, 20, \ldots$

Lời giải.

Dãy (v_n) có số hạng đầu $v_1 = 5$ và số hạng tổng quát $v_n = 5n$.

2. Bài tập tự luận

BÀI 1. Xét dãy số hữu hạn gồm các số tự nhiên lẻ nhỏ hơn 20, sắp xếp theo thứ tự từ bé đến lớn. Liệt kê tất cả các số hạng của dãy số này, tìm số hạng đầu và số hạng cuối của dãy.

Lời giải.

Các số hạng của dãy là $1, 3, 5, 7, 9, 10, 11, 13, 15, 17, 19$.
Số hạng đầu của dãy là $u_1 = 1$.
Số hạng cuối của dãy là $u_{11} = 19$.

BÀI 2. Xét dãy số gồm tất cả các số tự nhiên chia cho 5 dư 1. Xác định số hạng tổng quát của dãy số.

Lời giải.

Các số tự nhiên chia cho 5 dư 1 gồm các số sau: $6, 11, 16, 21, \ldots$
Số hạng tổng quát $u_n = 5n + 1$.

BÀI 3. Viết năm số hạng đầu của dãy số gồm các số nguyên tố theo thứ tự tăng dần.

Lời giải.

Năm số hạng đầu của dãy số trên là $2, 3, 5, 7, 11$.

3. Câu hỏi trắc nghiệm

CÂU 1. Cho dãy số có các số hạng đầu là $5, 10, 15, 20, 25, \ldots$ Số hạng tổng quát của dãy số này là

A. $u_n = 5(n-1)$. **B.** $u_n = 5n$. **C.** $u_n = 5 + n$. **D.** $u_n = 5n + 1$.

Lời giải.

Ta có $5 = 5 \cdot 1, 10 = 5 \cdot 2, 15 = 5 \cdot 3, 20 = 5 \cdot 4, 25 = 5 \cdot 5, \ldots$
Vậy dãy trên có số hạng tổng quát là $u_n = 5n$.
Chọn đáp án B .... □

CÂU 2. Cho dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{an^2}{n+1}$, a là hằng số. u_{n+1} là số hạng nào trong các số hạng sau

A. $u_{n+1} = \dfrac{a(n+1)^2}{n+2}$. **B.** $u_{n+1} = \dfrac{a(n+1)^2}{n+1}$. **C.** $u_{n+1} = \dfrac{an^2+1}{n+1}$. **D.** $u_{n+1} = \dfrac{an^2}{n+2}$.

Lời giải.

Ta có $u_{n+1} = \dfrac{a(n+1)^2}{n+1+1} = \dfrac{a(n+1)^2}{n+2}$.
Chọn đáp án A .... □

CÂU 3. Cho dãy số có các số hạng đầu là $8, 15, 22, 29, 36, \ldots$ Số hạng tổng quát của dãy số này là

A. $u_n = 7n + 7$. **B.** $u_n = 7n$.
C. $u_n = 7n + 1$. **D.** u_n không viết được dưới dạng công thức .

Lời giải.

Ta có $8 = 7 \cdot 1 + 1, 15 = 7 \cdot 2 + 1, 22 = 7 \cdot 3 + 1, 29 = 7 \cdot 4 + 1, 36 = 7 \cdot 5 + 1, \ldots$
Vậy dãy trên có số hạng tổng quát là $u_n = 7n + 1$.
Chọn đáp án C .... □

CÂU 4. Cho dãy số có các số hạng đầu là $0, \dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{4}, \dfrac{4}{5}, \ldots$ Số hạng tổng quát của dãy số này là

A. $u_n = \dfrac{n+1}{n}$. **B.** $u_n = \dfrac{n}{n+1}$. **C.** $u_n = \dfrac{n-1}{n}$. **D.** $u_n = \dfrac{n^2-n}{n+1}$.

Lời giải.

Ta có $0 = \dfrac{1-1}{1}$, $\dfrac{1}{2} = \dfrac{2-1}{2}$, $\dfrac{2}{3} = \dfrac{3-1}{2}, \ldots$
Vậy dãy trên có số hạng tổng quát là $u_n = \dfrac{n}{n+1}$.

Chọn đáp án (C)

CÂU 5. Cho dãy số (u_n) với $u_1 = 1, u_{n+1} = u_n - 1$. Số hạng tổng quát u_n của dãy số là số hạng nào dưới đây?

A $u_n = 2 - n$. **B** u_n không xác định. **C** $u_n = 1 - n$. **D** $u_n = -n$, với mọi n .

Lời giải.

Ta có $u_1 = 1, u_2 = 0, u_3 = -1, u_4 = -2, \ldots$
Dễ dàng dự đoán được số hạng tổng quát là $u_n = 2 - n$.

Chọn đáp án (A)

2 Tìm số hạng cụ thể của dãy số

Để tìm số hạng cụ thể của dãy số ta làm như sau

- Với trường hợp dãy số đã cho biết công thức tổng quát của dãy số thì ta chỉ cần thay giá trị tương ứng của số hạng đó vào công thức tổng quát.
- Với trường hợp dãy số cho bởi công thức truy hồi hoặc dưới dạng thì ta phải tìm lần lượt từ những số hạng đầu tiên cho đến số đứng trước số cần tìm trong dãy.

1. Ví dụ minh hoạ

VÍ DỤ 1. Cho dãy số (u_n), biết $u_n = (-1)^n \cdot \dfrac{2^n}{n}$. Tìm số hạng u_3.

Lời giải.

Ta có $u_3 = (-1)^3 \cdot \dfrac{2^3}{3} = -\dfrac{8}{3}$.

VÍ DỤ 2. Cho dãy số (u_n), biết $u_n = \dfrac{2n^2 - 1}{n^2 + 3}$. Tìm số hạng u_5.

Lời giải.

Ta có $u_5 = \dfrac{2 \cdot 5^2 - 1}{5^2 + 3} = \dfrac{49}{28} = \dfrac{7}{4}$.

VÍ DỤ 3. Cho dãy số u_n bao gồm các số nguyên tố. Tìm số hạng thứ 5 của dãy số.

Lời giải.

Ta có $u_1 = 2, u_2 = 3, u_3 = 5, u_4 = 7, u_5 = 11$.
Vậy số hạng thứ 5 của dãy số là 11.

VÍ DỤ 4. Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $\begin{cases} u_1 = 5 \\ u_{n+1} = u_n + n \end{cases}$. Tìm số hạng thứ 5 của dãy số.

Lời giải.

Ta có $u_2 = u_1 + 1 = 6$, $u_3 = u_2 + 2 = 8$, $u_4 = u_3 + 3 = 11$, $u_5 = u_4 + 4 = 15$.

VÍ DỤ 5. Cho dãy số xác định bằng hệ thức truy hồi

$$u_1 = 1, u_n = 3u_{n-1} + 2 \text{ với } n \geq 2$$

Viết ba số hạng đầu của dãy số này.

Lời giải.

Ta có: $u_1 = 1, u_2 = 3u_1 + 2 = 3 \cdot 1 + 2 = 5, u_3 = 3u_2 + 2 = 3 \cdot 5 + 2 = 17$.

VÍ DỤ 6. Cho dãy số (u_n) : $\begin{cases} u_1 = 5 \\ u_{n+1} = u_n + n \end{cases}$. Số 20 là số hạng thứ mấy trong dãy?

Lời giải.

Ta có $u_1 = 5, u_2 = 6, u_3 = 8, u_4 = 11, u_5 = 16, u_6 = 20$.
Vậy số 20 là số hạng thứ 6.

2. Bài tập tự luận

BÀI 1. Cho dãy số $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n} + 1}$. Tìm số hạng u_4.

Lời giải.

Ta có $u_4 = \dfrac{1}{\sqrt{4} + 1} = \dfrac{1}{3}$.

BÀI 2. Cho dãy số (u_n) có số hạng tổng quát: $u_n = 2n + \sqrt{n^2+4}$. Tìm số hạng thứ 6 của dãy số.

Lời giải.

Ta có $u_6 = 2\cdot 6 + \sqrt{6^2+4} = 12 + 2\sqrt{10}$.

BÀI 3. Cho dãy số (u_n) xác định bởi: $\begin{cases} u_1 = -1; u_2 = 3 \\ u_{n+1} = 5u_n - 6u_{n-1} \forall n \geq 2 \end{cases}$. Tìm số hạng thứ 7 của dãy.

Lời giải.

Ta có

$$u_3 = 5u_2 - 6u_1 = 21;\ u_4 = 5u_3 - 6u_2 = 87;\ u_5 = 309;\ u_6 = 1023;\ u_7 = 3261$$

Vậy số hạng thứ 7 của dãy là 3261.

BÀI 4. Viết năm số hạng đầu của dãy số Fibonacci (F_n) cho bởi hệ thức truy hồi

$$\begin{cases} F_1 = 1, F_2 = 1 \\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2}\ (n \geq 3). \end{cases}$$

Lời giải.

Ta có $F_3 = 2,\ F_4 = 3,\ F_5 = 5$.

BÀI 5. Người ta nuôi cấy 5 con vi khuẩn E-coli trong môi trường nhân tạo. Cứ 30 phút thì vi khuẩn E-coli sẽ nhân đôi 1 lần. Tính số lượng vi khuẩn thu được sau $1, 2, 3$ lần nhân đôi.

Lời giải.

Đặt $u_1 = 5$, gọi số vi khuẩn sau n lần phân chia là u_{n+1}, khi đó ta có dãy số (u_n) thỏa mãn

$$u_1 = 5,\ u_{n+1} = 2u_n$$

Ta có $u_2 = 10, u_3 = 20, u_4 = 40$.

BÀI 6. Cho dãy số (u_n) được xác định bởi $u_n = \dfrac{n^2+3n+7}{n+1}$.

a) Viết năm số hạng đầu của dãy.

b) Dãy số có bao nhiêu số hạng nhận giá trị nguyên.

Lời giải.

a) Ta có năm số hạng đầu của dãy $u_1 = \dfrac{1^2+3.1+7}{1+1} = \dfrac{11}{2}$; $u_2 = \dfrac{17}{3}$; $u_3 = \dfrac{25}{4}$; $u_4 = 7$; $u_5 = \dfrac{47}{6}$.

b) Ta có: $u_n = n + 2 + \dfrac{5}{n+1}$, do đó u_n nguyên khi và chỉ khi $\dfrac{5}{n+1}$ nguyên hay $n+1$ là ước của 5.
Điều đó xảy ra khi $n + 1 = 5 \Leftrightarrow n = 4$.
Vậy dãy số có duy nhất một số hạng nguyên là $u_4 = 7$.

BÀI 7 (*). Cho dãy số (x_n) thỏa mãn điều kiện $x_1 = 1, x_{n+1} - x_n = \dfrac{1}{n(n+1)}, n = 1, 2, 3, \ldots$. Số hạng x_{2023} bằng

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} x_{n+1} - x_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} &\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n-1}(x_{k+1} - x_k) = \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) \\ &\Leftrightarrow x_n - x_1 = 1 - \frac{1}{n} \\ &\Leftrightarrow x_n = \frac{2n-1}{n}. \end{aligned}$$

BÀI 8 (*). Cho dãy số (u_n) biết $\begin{cases} u_1 = 99 \\ u_{n+1} = u_n - 2n - 1, n \geq 1 \end{cases}$. Hỏi số -861 là số hạng thứ mấy?

Lời giải.

Ta có

$$\begin{array}{lcl} u_n & = & u_{n-1} - 2n + 1 \\ u_{n-1} & = & u_{n-2} - 2n + 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ u_3 & = & u_2 - 2n + 2n - 5 \\ u_2 & = & u_1 - 2n + 2n - 3 \end{array}$$

Suy ra

$$u_n = u_1 - 2n \cdot (n-1) + 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-5) + (2n-3)$$
$$u_n = 99 - 2n^2 + 2n + \frac{n-1}{2} \cdot [2 \cdot 1 + (n-2) \cdot 2] = 100 - n^2$$

Giả sử $u_n = -861 \Rightarrow n^2 = 961 \Rightarrow n = 31$ (vì $n \in \mathbb{N}$). Vậy số -861 là số hạng thứ 31 .

3. Câu hỏi trắc nghiệm

CÂU 1. Cho dãy số (u_n), biết $u_n = \dfrac{n}{3^n - 1}$. Ba số hạng đầu tiên của dãy số đó lần lượt là những số nào dưới đây?

(A) $\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{4}; \dfrac{1}{16}$. (B) $\dfrac{1}{2}; \dfrac{2}{3}; \dfrac{3}{4}$. (C) $\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{4}; \dfrac{3}{26}$. (D) $\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{4}; \dfrac{1}{8}$.

Lời giải.

Ta có $u_1 = \dfrac{1}{2}$; $u_2 = \dfrac{2}{3^2 - 1} = \dfrac{2}{8} = \dfrac{1}{4}$; $u_3 = \dfrac{3}{3^3 - 1} = \dfrac{3}{26}$.

Chọn đáp án (C) .... □

CÂU 2. Cho dãy số (u_n), biết $u_n = (-1)^n \cdot 2n$. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

(A) $u_3 = -6$. (B) $u_2 = 4$. (C) $u_4 = -8$. (D) $u_1 = -2$.

Lời giải.

Ta có
$u_1 = -2 \cdot 1 = -2$; $u_2 = (-1)^2 \cdot 2 \cdot 2 = 4$, $u_3 = (-1)^3 \cdot 2 \cdot 3 = -6$; $u_4 = (-1)^4 \cdot 2 \cdot 4 = 8$.
Nhận xét: Dễ thấy $u_n > 0$ khi n chẵn và ngược lại nên đáp án $u_4 = -8$ sai.

Chọn đáp án (C) .... □

CÂU 3. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{3}(u_n + 1) \end{cases}$. Tìm số hạng u_4.

(A) $u_4 = \dfrac{2}{3}$. (B) $u_4 = 1$. (C) $u_4 = \dfrac{14}{27}$. (D) $u_4 = \dfrac{5}{9}$.

Lời giải.

Ta có $u_2 = \dfrac{1}{3}(u_1 + 1) = \dfrac{1}{3}(2 + 1) = 1$; $u_3 = \dfrac{1}{3}(u_2 + 1) = \dfrac{2}{3}$; $u_4 = \dfrac{1}{3}(u_3 + 1) = \dfrac{1}{3} \cdot \left(\dfrac{2}{3} + 1\right) = \dfrac{5}{9}$.

Chọn đáp án (D) .... □

CÂU 4. Cho dãy số (u_n), biết $\begin{cases} u_1 = -1 \\ u_{n+1} = u_n + 3 \end{cases}$ với $n \geq 0$. Ba số hạng đầu tiên của dãy số đó là lần lượt là những số nào dưới đây?

(A) -1; 2; 5. (B) $-1; 3; 7$. (C) 1; 4; 7. (D) 4; 7; 10.

Lời giải.

Ta có $u_1 = -1$; $u_2 = u_1 + 3 = 2$; $u_3 = u_2 + 3 = 5$.
Nhận xét. (i) Dùng chức năng "lặp" của MTCT để tính:
Nhập vào màn hình: $X = X + 3$
Bấm CALC và cho $X = -1$ (ứng với $u_1 = -1$)
Để tính u_n cần bấm "=" ra kết quả liên tiếp $n - 1$ lần. Ví dụ để tính u_2 ta bấm "=" ra kết quả lần đầu tiên, bấm "=" ra kết quả thứ hai chính là $u_3, \ldots$
(ii) Vì $u_1 = -1$ nên loại các đáp án $u_1 = 1$, $u_1 = 4$.
Còn lại các đáp án có $u_1 = -1$; để biết đáp án nào ta chỉ cần kiểm tra u_2 (vì u_2 ở hai đáp án là khác nhau): $u_2 = u_1 + 3 = 2$.

Chọn đáp án (A) .... □

CÂU 5. Cho dãy số (u_n), biết $u_n = \dfrac{2n+5}{5n-4}$. Số $\dfrac{7}{12}$ là số hạng thứ mấy của dãy số?

(A) 9. (B) 6. (C) 10. (D) 8.

Lời giải.

Ta có

$$u_n = \frac{2n+5}{5n-4} = \frac{7}{12} \Leftrightarrow 24n + 60 = 35n - 28 \Leftrightarrow 11n = 88 \Leftrightarrow n = 8.$$

Chọn đáp án (D) .... □

CÂU 6. Cho dãy (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2} + 2 \end{cases}$. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A $u_2 = \dfrac{5}{2}$. **B** $u_4 = \dfrac{31}{8}$. **C** $u_3 = \dfrac{15}{4}$. **D** $u_5 = \dfrac{63}{16}$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} u_2 = \dfrac{u_1}{2} + 2 = \dfrac{3}{2} + 2 = \dfrac{7}{2};\ u_3 = \dfrac{u_2}{2} + 2 = \dfrac{7}{4} + 2 = \dfrac{15}{4}. \\ u_4 = \dfrac{u_3}{2} + 2 = \dfrac{15}{8} + 2 = \dfrac{31}{8};\ u_5 = \dfrac{u_4}{2} + 2 = \dfrac{31}{16} + 2 = \dfrac{63}{16}. \end{cases}$

Chọn đáp án (A) .... □

CÂU 7. Cho dãy số (u_n), với $u_n = \left(\dfrac{n-1}{n+1}\right)^{2n+3}$. Tìm số hạng u_{n+1}.

A $u_{n+1} = \left(\dfrac{n-1}{n+1}\right)^{2(n-1)+3}$.

B $u_{n+1} = \left(\dfrac{n-1}{n+1}\right)^{2(n+1)+3}$.

C $u_{n+1} = \left(\dfrac{n}{n+2}\right)^{2n+5}$.

D $u_{n+1} = \left(\dfrac{n}{n+2}\right)^{2n+3}$.

Lời giải.

$u_n = \left(\dfrac{n-1}{n+1}\right)^{2n+3} \Rightarrow u_{n+1} = \left(\dfrac{(n+1)-1}{(n+1)+1}\right)^{2(n+1)+3} = \left(\dfrac{n}{n+2}\right)^{2n+5}$.

Chọn đáp án (C) .... □

CÂU 8. Cho dãy số (a_n), được xác định $\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_{n+1} = \dfrac{1}{2}a_n,\ n \geq 1 \end{cases}$. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = \dfrac{93}{16}$.

B $a_{10} = \dfrac{3}{512}$.

C $a_n = \dfrac{3}{2^n}$.

D $a_{n+1} + a_n = \dfrac{9}{2^n}$.

Lời giải.

Ta có $a_1 = 3$; $a_2 = \dfrac{u_1}{2}$; $a_3 = \dfrac{u_2}{2} = \dfrac{u_1}{2^2}$; $a_4 = \dfrac{u_3}{2} = \dfrac{u_1}{2^3}, \ldots$

$\Rightarrow u_n = \dfrac{u_1}{2^{n-1}} = \dfrac{3}{2^{n-1}}$ nên suy ra đáp án $a_n = \dfrac{3}{2^n}$ sai.

Xét đáp án

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 3\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4}\right) = 3.\frac{1 - (\frac{1}{2})^5}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{93}{16} \Rightarrow \text{đúng.}$$

Xét đáp án $a_{10} = \dfrac{3}{2^9} = \dfrac{3}{512} \Rightarrow$ đúng.

Xét đáp án $a_{n+1} + a_n = \dfrac{3}{2^n} + \dfrac{3}{2^{n-1}} = \dfrac{3 + 3 \cdot 2}{2^n} = \dfrac{9}{2^n} \Rightarrow$ đúng.

Chọn đáp án (C) .... □

CÂU 9. Cho dãy số (u_n) biết $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_2 = 4 \\ u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n \end{cases}$ với mọi $n \geq 1$. Giá trị $u_{101} - u_{100}$ là

A $3 \cdot 2^{102}$. **B** $3 \cdot 2^{101}$. **C** $3 \cdot 2^{100}$. **D** $3 \cdot 2^{99}$.

Lời giải.

Theo bài ta có

$$\begin{aligned} & u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n \\ \Leftrightarrow\quad & u_{n+2} = u_{n+1} + 2(u_{n+1} - u_n) \\ \Leftrightarrow\quad & u_{n+2} - u_{n+1} = 2(u_{n+1} - u_n). \end{aligned}$$

Với $n = 99$ ta có

$$\begin{aligned} u_{101} - u_{100} &= 2(u_{100} - u_{99}) \\ &= 2 \cdot 2(u_{99} - u_{98}) \\ &= \ldots \\ &= 2^{99} \cdot (u_2 - u_1) = 3 \cdot 2^{99}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án D ...

CÂU 10. Cho dãy số (u_n) thoả mãn $u_1 = \sqrt{2}$ và $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$ với mọi $n \geq 1$. Tìm u_{2023}.

A. $u_{2023} = \sqrt{2}\cos\dfrac{\pi}{2^{2022}}$. B. $u_{2023} = \sqrt{2}\cos\dfrac{\pi}{2^{2024}}$. C. $u_{2023} = \sqrt{2}\cos\dfrac{\pi}{2^{2023}}$. D. $u_{2023} = 2$.

Lời giải.

Ta chứng minh bằng phương pháp quy nạp số hạng tổng quát của dãy là $u_n = 2\cos\dfrac{\pi}{2^{n+1}}$.

Dễ thấy, với $n = 1$ ta có $u_1 = \sqrt{2}$ (đúng).

Giả sử mệnh đề đúng với $n = k, \forall k \in \mathbb{N}^*$ nghĩa là $u_k = 2\cos\dfrac{\pi}{2^{k+1}}$ ta phải chứng minh mệnh đề đúng với $n = k+1$ nghĩa là $u_{k+1} = 2\cos\dfrac{\pi}{2^{k+2}}$.

Thật vậy, $u_{k+1} = \sqrt{2 + u_k} = \sqrt{2 + 2\cos\dfrac{\pi}{2^{k+1}}} = \sqrt{4\cos^2\dfrac{\pi}{2^{k+2}}} = 2\cos\dfrac{\pi}{2^{k+2}}$.

Áp dụng công thức tổng quát trên ta có $u_{2023} = \sqrt{2}\cos\dfrac{\pi}{2^{2024}}$.

Chọn đáp án B ...

3 Xét tính tăng giảm của dãy số

a) Phương pháp 1. Xét dấu của hiệu số $u_{n+1} - u_n$.

(a) Nếu $u_{n+1} - u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$ thì (u_n) là dãy số tăng.

(b) Nếu $u_{n+1} - u_n < 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$ thì (u_n) là dãy số giảm.

b) Phương pháp 2. Nếu $u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$ thì ta có thể so sánh thương $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ với 1.

(a) Nếu $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ thì (u_n) là dãy số tăng.

(b) Nếu $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ thì (u_n) là dãy số giảm.

Nếu $u_n < 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$ thì ta có thể so sánh thương $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ với 1.

(a) Nếu $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ thì (u_n) là dãy số tăng.

(b) Nếu $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ thì (u_n) là dãy số giảm.

c) Phương pháp 3. Nếu dãy số (u_n) cho bởi hệ thức truy hồi thì thường dùng phương pháp quy nạp để chứng minh $u_{n+1} > u_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$ (hoặc $u_{n+1} < u_n \forall n \in \mathbb{N}^*$).

1. Ví dụ minh hoạ

VÍ DỤ 1. Xét sự tăng giảm của dãy số (u_n) với $u_n = (-1)^n$.

Lời giải.

Ta có:
$u_1 = (-1)^1 = -1$, $u_2 = (-1)^2 = 1$, $u_3 = (-1)^3 = -1$.
Vậy (u_n) là dãy không tăng không giảm.

VÍ DỤ 2. Xét tính tăng giảm của dãy số sau (u_n) với $u_n = \dfrac{2n+1}{n+1}$.

Lời giải.

Ta có: $u_n = \dfrac{2n+1}{n+1} = 2 - \dfrac{1}{n+1}$.

$u_{n+1} - u_n = \left(2 - \dfrac{1}{n+1+1}\right) - \left(2 - \dfrac{1}{n+1}\right) = \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n+2} > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Vậy dãy số (u_n) là dãy số tăng.

VÍ DỤ 3. Xét tính tăng giảm của dãy số (u_n) với $u_n = \sqrt{n} - \sqrt{n+2}$.

Lời giải.

Ta có $u_n = \sqrt{n} - \sqrt{n+2} = \dfrac{-2}{\sqrt{n} + \sqrt{n+2}}$.

Xét hiệu

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{-2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n+3}} - \frac{-2}{\sqrt{n} + \sqrt{n+2}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{n} + \sqrt{n+2}} - \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n+3}} > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*. \end{aligned}$$

Vậy (u_n) là dãy số tăng.

VÍ DỤ 4. Xét tính tăng giảm của dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{n}{3^n}$.

Lời giải.

Ta có $u_n = \dfrac{n}{3^n} > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Xét thương $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{n+1}{3^{n+1}} : \dfrac{n}{3^n} = \dfrac{n+1}{3.n} < 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Vậy (u_n) là dãy số giảm.

2. Bài tập tự luận

BÀI 1. Xét tính tăng giảm của dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{\sqrt{2}}{3^n}$.

Lời giải.

Ta có $u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Xét thương

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\sqrt{2}}{3^{n+1}} : \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3^2}} = \frac{3^n}{3^{n+1}} = \frac{1}{3} < 1.$$

Vậy (u_n) là dãy số giảm.

BÀI 2. Xét tính tăng giảm của dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$.

Lời giải.

Ta có $u_n = \dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$. Xét hiệu:

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) - \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) \\ &= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} > 0, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{aligned}$$

Vậy (u_n) là dãy số tăng.

BÀI 3. Xét tính tăng giảm của dãy số (u_n) với $u_n = n + \cos^2 n$.

Lời giải.

Xét hiệu

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \left(n + 1 + \cos^2(n+1)\right) - \left(n + \cos^2 n\right) \\ &= 1 + \cos^2(n+1) - \cos^2 n \\ &= \cos^2(n+1) + \sin^2 n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*. \end{aligned}$$

Vậy (u_n) là dãy số tăng.

BÀI 4. Xét tính tăng giảm của dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \ldots + \dfrac{1}{2n}$.

Lời giải.

Xét hiệu

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \left(\frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \ldots + \frac{1}{2(n+1)}\right) - \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}\right) \\ &= \frac{1}{n+2} - \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} \\ &= \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{2n+1} < 0, \forall n \in \mathbb{N}^*. \end{aligned}$$

Vậy (u_n) là dãy số giảm.

BÀI 5. Xét tính tăng giảm của dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \ldots + \dfrac{1}{2n}$.

Lời giải.

Xét hiệu

$$\begin{aligned}u_{n+1} - u_n &= \left(\frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \ldots + \frac{1}{2(n+1)}\right) - \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}\right)\\ &= \frac{1}{n+2} - \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2}\\ &= \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{2n+1} < 0, \forall n \in \mathbb{N}^*\end{aligned}$$

Vậy (u_n) là dãy số giảm.

3. Bài tập trắc nghiệm

CÂU 1. Cho các dãy số sau. Dãy số nào là dãy số tăng?

(A) $1; 1; 1; 1; 1; 1; \ldots$. (B) $1; \frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}; \frac{1}{16}; \ldots$. (C) $1; -\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; -\frac{1}{8}; \frac{1}{16}; \ldots$. (D) $1; 3; 5; 7; 9; \ldots$.

Lời giải.

Xét đáp án $1; 1; 1; 1; 1; 1; \ldots$ đây là dãy hằng nên không tăng không giảm.

Xét đáp án $1; -\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; -\frac{1}{8}; \frac{1}{16}; \ldots \Rightarrow u_1 > u_2 < u_3 \Rightarrow$ loại.

Xét đáp án $1; 3; 5; 7; 9; \ldots \Rightarrow u_n < u_{n+1},\ n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow$ chọn.

Xét đáp án $1; \frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}; \frac{1}{16}; \ldots \Rightarrow u_1 > u_2 > u_3 \ldots > u_n > \ldots \Rightarrow$ loại.

Chọn đáp án (D) .... □

CÂU 2. Với giá trị nào của a thì dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{an-1}{n+2}, \forall n \geq 1$ là dãy số tăng?

(A) $a > 2$. (B) $a < -2$. (C) $a > -\frac{1}{2}$. (D) $a < -\frac{1}{2}$.

Lời giải.

Ta có $u_n = a - \dfrac{1+2a}{n+2}$.

$u_{n+1} - u_n = (1+2a)\left(\dfrac{1}{n+2} - \dfrac{1}{n+3}\right)$.

Suy ra dãy số đã cho tăng khi $a > -\dfrac{1}{2}$.

Chọn đáp án (C) .... □

CÂU 3. Trong các dãy (u_n) sau đây dãy nào là dãy số giảm ?

(A) $u_n = (-1)^n$. (B) $u_n = 2^n$. (C) $u_n = 3n+1$. (D) $u_n = \frac{1}{3^n}$.

Lời giải.

Xét dãy số (u_n) có $u_n = \dfrac{1}{3^n}$, ta thấy $u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$ và $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{\frac{1}{3^{n+1}}}{\frac{1}{3^n}} = \dfrac{1}{3} < 1$ nên dãy số (u_n) này là dãy số giảm.

Chọn đáp án (D) .... □

CÂU 4. Trong các dãy số (u_n) cho bởi số hạng tổng quát u_n sau, dãy số nào là dãy số tăng?

(A) $u_n = \frac{1}{n}$. (B) $u_n = \frac{1}{2^n}$. (C) $u_n = \frac{n+5}{3n+1}$. (D) $u_n = \frac{2n-1}{n+1}$.

Lời giải.

Vì 2^n; n là các dãy dương và tăng nên $\dfrac{1}{2^n}$; $\dfrac{1}{n}$ là các dãy giảm, do đó loại các đáp án $u_n = \dfrac{1}{2^n}$ và $u_n = \dfrac{1}{n}$.

Xét đáp án $u_n = \dfrac{n+5}{3n+1} \Rightarrow \begin{cases} u_1 = \dfrac{3}{2} \\ u_2 = \dfrac{7}{6} \end{cases} \Rightarrow u_1 > u_2 \Rightarrow$ loại.

Xét đáp án $u_n = \dfrac{2n-1}{n+1} = 2 - \dfrac{3}{n+1} \Rightarrow u_{n+1} - u_n = 3\left(\dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n+2}\right) > 0 \Rightarrow$ nhận.

Chọn đáp án (D) .... □

CÂU 5. Trong các dãy số (u_n) cho bởi số hạng tổng quát u_n sau, dãy số nào là dãy số giảm?

A $u_n = n^2$. **B** $u_n = \dfrac{3n-1}{n+1}$. **C** $u_n = \sqrt{n+2}$. **D** $u_n = \dfrac{1}{2^n}$.

Lời giải.

Vì 2^n là dãy dương và tăng nên $\dfrac{1}{2^n}$ là dãy giảm.

Xét $u_n = \dfrac{3n-1}{n+1} \Rightarrow \begin{cases} u_1 = 1 \\ u_2 = \dfrac{5}{3} \end{cases} \Rightarrow u_1 < u_2$, loại.

Hoặc $u_{n+1} - u_n = \dfrac{3n+2}{n+2} - \dfrac{3n-1}{n+1} = \dfrac{4}{(n+1)(n+2)} > 0$ nên (u_n) là dãy tăng.

Xét $u_n = n^2 \Rightarrow u_{n+1} - u_n = (n+1)^2 - n^2 = 2n+1 > 0$, loại.

Xét $u_n = \sqrt{n+2} \Rightarrow u_{n+1} - u_n = \sqrt{n+3} - \sqrt{n+2} = \dfrac{1}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n+2}} > 0$, loại.

Chọn đáp án D .... □

CÂU 6. Trong các dãy số (u_n) sau, hãy chọn dãy số tăng.

A $u_n = (-1)^{2n}(5^n+1)$, $n \in \mathbb{N}^*$. **B** $u_n = \dfrac{n}{n^2+1}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

C $u_n = (-1)^{n+1}\sin\dfrac{\pi}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$. **D** $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}+n}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Lời giải.

Xét dãy số (u_n) với $u_n = (-1)^{2n}(5^n+1)$, ta có

$$u_{n+1} - u_n = (-1)^{2n+2}(5^{n+1}+1) - (-1)^{2n}(5^n+1) = 5^{n+1} + 1 - 5^n - 1 = 4 \cdot 5^n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Vậy dãy trên là dãy số tăng.
Xét các dãy số còn lại

- Với $u_n = (-1)^{n+1}\sin\dfrac{\pi}{n}$ ta có $u_1 = 0$, $u_2 = -1$ hay $u_1 > u_2$. Vậy dãy số này không là dãy số tăng.
- Với $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}+n}$ ta có $u_1 = \sqrt{2}-1$, $u_2 = 2-\sqrt{3}$ hay $u_1 > u_2$. Vậy dãy số này không là dãy số tăng.
- Với $u_n = \dfrac{n}{n^2+1}$ ta có $u_1 = \dfrac{1}{2}$, $u_2 = \dfrac{2}{5}$ hay $u_1 > u_2$. Vậy dãy số này không là dãy số tăng.

Chọn đáp án A .... □

CÂU 7. Trong các dãy số (u_n) cho bởi số hạng tổng quát u_n sau, dãy số nào là dãy số giảm?

A $u_n = \dfrac{n^2+1}{n}$. **B** $u_n = (-1)^n \cdot (2^n+1)$. **C** $u_n = \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$. **D** $u_n = \sin n$.

Lời giải.

Xét $u_n = \sin n \Rightarrow u_{n+1} - u_n = 2\cos\left(n+\dfrac{1}{2}\right)\sin\dfrac{1}{2}$ có thể dương hoặc âm phụ thuộc n nên đáp án sai. Hoặc dễ thấy $\sin n$ có dấu thay đổi trên $\mathbb{N}^*$ nên dãy $\sin n$ không tăng, không giảm.

Xét $u_n = \dfrac{n^2+1}{n} = n + \dfrac{1}{n} \Rightarrow u_{n+1} - u_n = 1 + \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n} = \dfrac{n^2+n-1}{n(n+1)} > 0$ nên dãy đã cho tăng nên đáp án sai.

Xét $u_n = \sqrt{n} - \sqrt{n-1} = \dfrac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$, dãy $\sqrt{n}+\sqrt{n-1} > 0$ là dãy tăng nên suy ra u_n giảm.

Xét $u_n = (-1)^n(2^n+1)$ là dãy thay dấu nên không tăng không giảm, nên đáp án đúng.
Cách trắc nghiệm
Xét $u_n = \sin n$ có dấu thay đổi trên $\mathbb{N}^*$ nên dãy này không tăng không giảm.

Xét $u_n = \dfrac{n^2+1}{n}$, ta có $\begin{cases} n = 1 \to u_1 = 2 \\ n = 2 \to u_2 = \dfrac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow u_1 < u_2 \Rightarrow u_n = \dfrac{n^2+1}{n}$ không giảm.

Xét $u_n = \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$, ta có $\begin{cases} n = 1 \to u_1 = 1 \\ n = 2 \to u_2 = \sqrt{2}-1 \end{cases} \Rightarrow u_1 > u_2$ nên dự đoán dãy này giảm.

Xét $u_n = (-1)^n(2^n+1)$ là dãy thay dấu nên không tăng không giảm.
Cách CASIO.
Các dãy $\sin n$; $(-1)^n(2^n+1)$ có dấu thay đổi trên $\mathbb{N}^*$ nên các dãy này không tăng không giảm nên loại các đáp án này.

Xét hai đáp án còn lại, ta chỉ cần kiểm tra một đáp án bằng chức năng $TABLE$.
Chẳng hạn kiểm tra đáp án $u_n = \dfrac{n^2+1}{n}$, ta vào chức năng $TABLE$ nhập $F(X) = \dfrac{X^2+1}{X}$ với thiết lập Start $= 1$, End $= 10$, Step $= 1$.
Nếu thấy cột $F(X)$ các giá trị tăng thì loại $u_n = \dfrac{n^2+1}{n}$ nếu ngược lại nếu thấy cột $F(X)$ các giá trị giảm dần thì chọn $u_n = \dfrac{n^2+1}{n}$.
Chọn đáp án C □

CÂU 8. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A Dãy số $u_n = \dfrac{1}{n} - 2$ là dãy tăng.

B Dãy số $u_n = 2n + \cos\dfrac{1}{n}$ là dãy tăng.

C Dãu số $u_n = \dfrac{n-1}{n+1}$ là dãy giảm.

D Dãy số $u_n = (-1)^n(2^n+1)$ là dãy giảm.

Lời giải.

Xét đáp án $u_n = \dfrac{1}{n} - 2 \Rightarrow u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n} < 0 \Rightarrow$loại.
Xét đáp án $u_n = (-1)^n(2^n+1)$ là dãy có dấu thay đổi nên không giảm nên loại.
Xét đáp án $u_n = \dfrac{n-1}{n+1} = 1 - \dfrac{2}{n+1} \Rightarrow u_{n+1} - u_n = 2\left(\dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n+2}\right) > 0 \Rightarrow$ loại.
Xét đáp án $u_n = 2n + \cos\dfrac{1}{n} \Rightarrow u_{n+1} - u_n = \left(2 - \cos\dfrac{1}{n+1}\right) + \cos\dfrac{1}{n+2} > 0$ chọn.

Chọn đáp án B □

CÂU 9. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A Dãy số $u_n = \dfrac{1-n}{\sqrt{n}}$ là dãy giảm.

B Dãy số $u_n = n + \sin^2 n$ là dãy tăng.

C Dãy số $u_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ là dãy giảm.

D Dãy số $u_n = 2n^2 - 5$ là dãy tăng.

Lời giải.

Xét đáp án
$u_n = \dfrac{1-n}{\sqrt{n}} = \dfrac{1}{\sqrt{n}} - \sqrt{n} \Rightarrow u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}} - \dfrac{1}{\sqrt{n}} + \sqrt{n} - \sqrt{n+1} < 0$ nên dãy (u_n) là dãy giảm nên đúng.
Xét đáp án $u_n = 2n^2 - 5$ là dãy tăng vì n^2 là dãy tăng nên đúng.
Hoặc $u_{n+1} - u_n = 2(2n+1) > 0$ nên (u_n) là dãy tăng.
Xét đáp án $u_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n > 0 \Rightarrow \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{n+2}{n+1} \cdot \left(\dfrac{n+2}{n}\right)^n > 1 \Rightarrow (u_n)$ là dãy tăng nên sai.
Xét đáp án $u_n = n + \sin^2 n \Rightarrow u_{n+1} - u_n = (1 - \sin^2(n+1)) + \sin^2 n > 0$.
Chọn đáp án C □

CÂU 10. Cho dãy (u_n): $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{n}{2(n+1)}u_n + \dfrac{3(n+2)}{2(n+1)} \end{cases}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Nhận xét nào sau đây đúng

A Dãy số (u_n) là dãy số tăng.

B Dãy số (u_n) là dãy số giảm.

C Dãy số (u_n) là dãy số không tăng, không giảm.

D Tất cả các đáp án còn lại đều sai.

Lời giải.

Ta chứng minh quy nạp $u_n < 3, \forall n \in N^*$.
Giả sử mđ đúng với n = k khi đó có:

$$u_{k+1} = \frac{k}{2(k+1)}u_k + \frac{3(k+2)}{2(k+1)} < \frac{3k}{2(k+2)} + \frac{3(k+2)}{2(k+1)} = 3.$$

Vậy mệnh đề đúng với n = k + 1. Từ đó ta có

$$u_{n+1} - u_n = \frac{(3 - u_n)(n+2)}{n+1} > 0.$$

Vậy dãy (u_n) tăng
Chọn đáp án A □

4 Xét tính bị chặn của dãy số

- Để chứng minh dãy số (u_n) bị chặn trên bởi M, ta chứng minh $u_n \le M$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.
- Để chứng minh dãy số (u_n) bị chặn dưới bởi m, ta chứng minh $u_n \ge m$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.
- Để chứng minh dãy số bị chặn ta chứng minh nó bị chặn trên và bị chặn dưới.
  - Nếu dãy số (u_n) tăng thì bị chặn dưới bởi u_1.
  - Nếu dãy số (u_n) giảm thì bị chặn trên bởi u_1.

1. Ví dụ minh hoạ

VÍ DỤ 1. Chứng minh rằng dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{3n}{n^2+9}$ bị chặn trên bởi $\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Với mọi $n \ge 1$, ta có $\dfrac{3n}{n^2+9} \le \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow n^2+9 \le 6n \Leftrightarrow (n-3)^2 \le 0$ (đúng).

Vậy dãy số đã cho bị chặn trên bởi $\dfrac{1}{2}$.

VÍ DỤ 2. Chứng minh rằng dãy số (u_n) xác đinh bởi $u_n = \dfrac{8n+3}{3n+5}$ là một dãy số bị chặn.

Lời giải.

Ta có $u_n > 0$, $\forall n \ge 1$. Suy ra dãy số bị chặn dưới.

Mặt khác $u_n = \dfrac{8n+3}{3n+5} < \dfrac{8n+3}{3n} = \dfrac{8}{3} + \dfrac{1}{n} < \dfrac{8}{3} + 1 = \dfrac{11}{3}$. Do đó dãy số bị chặn trên bởi $\dfrac{11}{3}$.

Vậy dãy số đã cho bị chặn.

VÍ DỤ 3. Xét tính bị chặn của dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{3n+1}{n+3}$.

Lời giải.

Với $n \in \mathbb{N}^*$ ta có $u_n = \dfrac{3n+1}{n+3} > 0$.

Nên dãy (u_n) bị chặn dưới bởi 0.

Mặt khác $u_n = \dfrac{3n+1}{n+3} = \dfrac{3n+9-8}{n+3} = 3 - \dfrac{8}{n+3} < 3$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Nên dãy (u_n) bị chặn trên bởi 3.

Vậy dãy số (u_n) bị chặn.

VÍ DỤ 4. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1 = 1$ và $u_{n+1} = \dfrac{u_n+2}{u_n+1}$, $\forall n \ge 1$. Chứng minh rằng dãy (u_n) bị chặn trên bởi sô $\dfrac{3}{2}$ và bị chặn dưới bởi số 1.

Lời giải.

Ta chứng minh $1 \le u_n \le \dfrac{3}{2}, \forall n \ge 1$ bằng phương pháp quy nạp.

- Với $n = 1$ ta có $1 \le u_1 \le \dfrac{3}{2}$.
- Giả sử $1 \le u_n \le \dfrac{3}{2}$ với mọi $n = k \ge 1$, tức là $1 \le u_k \le \dfrac{3}{2}$. Ta cần chứng minh $1 \le u_{k+1} \le \dfrac{3}{2}$.

Thật vậy $u_{k+1} = 1 + \dfrac{1}{u_k+1}$.

Vì $u_k + 1 > 0$ nên $u_{k+1} = 1 + \dfrac{1}{u_k+1} > 1$.

Vì $u_k + 1 \ge 2$ nên $u_{k+1} = 1 + \dfrac{1}{u_k+1} \le 1 + \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2}$.

Vậy $1 \le u_n \le \dfrac{3}{2}$, $\forall n \ge 1$ hay dãy (u_n) bị chặn trên bởi số $\dfrac{3}{2}$ và bị chặn dưới bởi số 1.

VÍ DỤ 5. Xét tính bị chặn của dãy số (u_n) với $u_n = \sin n + \cos n$.

Lời giải.

Ta có $\sin n + \cos n$

$$= \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin n + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos n\right)$$
$$= \sqrt{2}\left(\sin n \cdot \cos\frac{\pi}{4} + \cos n \cdot \sin\frac{\pi}{4}\right)$$
$$= \sqrt{2}\sin\left(n + \frac{\pi}{4}\right).$$

Vì $-1 \leq \sqrt{2}\sin\left(n + \frac{\pi}{4}\right) \leq 1$

$$\Rightarrow -\sqrt{2} \leq \sqrt{2}\sin\left(n + \frac{\pi}{4}\right) \leq \sqrt{2}$$
$$\Rightarrow -\sqrt{2} \leq \sin n + \cos n \leq \sqrt{2},\ \forall n \in \mathbb{N}^*$$
$$\Rightarrow -\sqrt{2} \leq u_n \leq \sqrt{2},\ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Vậy dãy số (u_n) là dãy số bị chặn.

2. Bài tập tự luận

BÀI 1. Xét tính bị chặn của các dãy số sau

a) $u_n = \dfrac{1}{2n^2-1}$.

b) $u_n = 3 \cdot \cos\dfrac{nx}{3}$.

c) $u_n = 2n^3 + 1$.

d) $u_n = \dfrac{n^2+2n}{n^2+n+1}$.

e) $u_n = n + \dfrac{1}{n}$.

Lời giải.

a) $u_n = \dfrac{1}{2n^2-1}$.

Ta có $2n^2 - 1 \geq 1 \Rightarrow u_n = \dfrac{1}{2n^2-1} \leq 1,\ \forall n \geq 1$.

Vậy dãy số bị chặn trên bởi 1.

b) $u_n = 3 \cdot \cos\dfrac{nx}{3}$ có $-1 \leq \cos\dfrac{nx}{3} \leq 1 \Rightarrow -3 \leq 3 \cdot \cos\dfrac{nx}{3} \leq 3$.

Vậy dãy số bị chặn dưới bởi -3 và chặn trên bởi 3.

c) $u_n = 2n^3 + 1$ có $2n^3 + 1 \geq 3,\ \forall n \geq 1$.

Vậy dãy số bị chặn dưới bởi 3.

d) $u_n = \dfrac{n^2+2n}{n^2+n+1}$ có $u_n = \dfrac{n^2+2n}{n^2+n+1} = 1 + \dfrac{n-1}{n^2+n+1} \geq 1,\ \forall n \geq 1$.

Vậy dãy số bị chặn dưới bởi 1.

e) $u_n = n + \dfrac{1}{n}$ có $u_n = n + \dfrac{1}{n} \geq 2\sqrt{n \cdot \dfrac{1}{n}} = 2,\ \forall n > 0$.

Vậy dãy số bị chặn bởi 2.

BÀI 2. Xét tính bị chặn của dãy số $u_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n,\ n \in N^*$.

Lời giải.

Ta có $u_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n > 0,\ \forall n \in N^*$ nên (u_n) bị chặn dưới (1).

Lại có $u_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(\frac{1}{n}\right)^k$

$$= \sum_{k=0}^{n}\left[\frac{n!}{k! \cdot (n-k)! \cdot n^k}\right]$$
$$= \sum_{k=0}^{n}\left[\frac{1}{k!} \cdot \frac{(n-k+1)}{n} \cdot \frac{(n-k+2)}{n} \cdots \frac{(n-k+k)}{n}\right] \leq \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!},\ n \in \mathbb{N}^*$$

Mà $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} \leq 1 + 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{(n-1) \cdot n}$

$$= 2 + \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right)$$
$$= 3 - \frac{1}{n} < 3,\ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Suy ra $u_n < 3$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ nên dãy số (u_n) bị chặn trên (2).
Từ (1) và (2) suy ra dãy số (u_n) bị chặn.

BÀI 3. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1 = 0$ và $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + 4$, $\forall n \geq 1$.

a) Chứng minh dãy (u_n) bị chặn trên bởi số 8.

b) Chứng minh dãy (u_n) tăng, từ đó suy ra dãy (u_n) bị chặn.

Lời giải.

a) Ta chứng minh $u_n \leq 8$ với mọi $n \geq 1$.

- Khi $n = 1$, ta có $u_1 = 0 < 8$.
- Giả sử $u_n \leq 8$ với $n = k \geq 1$, tức là $u_k \leq 8$.
  Ta cần chứng minh $u_{k+1} \leq 8$.
  Thật vậy, $u_{k+1} = \dfrac{1}{2}u_k + 4 \leq \dfrac{1}{2} \cdot 8 + 4 \leq 8$.

Vậy $u_n \leq 8$ với mọi $n \geq 1$, hay (u_n) bị chặn trên bởi 8.

b) Với mọi $n \geq 1$, ta có $u_{n+1} - u_n = 4 - \dfrac{1}{2}u_n$. Mà $u_n \leq 8$ nên $u_{n+1} - u_n \geq 0$.
Suy ra u_n là dãy số tăng. Do đó (u_n) bị chặn dưới bởi $u_1 = 0$.
Kết hợp với câu a, ta được dãy số (u_n) bị chặn.

3. Câu hỏi trắc nghiệm

CÂU 1. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1 = 3$ và $u_{n+1} = \dfrac{u_n + 1}{2}$, $\forall n \geq 1$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A Dãy số bị chặn. **B** Dãy số bị chặn trên. **C** Dãy số bị chặn dưới. **D** Dãy số không bị chặn.

Lời giải.

Ta chứng minh $u_n > 1, \forall n \geq 1$ bằng phương pháp quy nạp.
Suy ra dãy số bị chặn dưới bởi 1.
Ta có $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1 - u_n}{2} < 0$, $\forall n \geq 1$.
Do đó dãy số này là dãy số giảm nên nó bị chặn trên bởi $u_1 = 3$.
Vậy dãy số đã cho là dãy số bị chặn.

Chọn đáp án A .... □

CÂU 2. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1 = \sqrt{2}$ và $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$, $\forall n \geq 1$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A Dãy số bị chặn trên. **B** Dãy số bị chặn dưới. **C** Dãy số bị chặn. **D** Dãy số không bị chặn.

Lời giải.

Vì $u_n \geq 0$, $\forall n \geq 1$ nên dãy số bị chặn dưới bởi 0.
Ta chứng minh $u_n \geq 2, \forall n \geq 1$. Suy ra dãy số bị chặn trên bởi 2.
Vậy dãy số đã cho là dãy số bị chặn.

Chọn đáp án C .... □

CÂU 3. Xét tính bị chặn của dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{1}{1 \cdot 2} + \dfrac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \dfrac{1}{n \cdot (n+1)}$.

A Không bị chặn. **B** Bị chặn trên. **C** Bị chặn dưới. **D** Bị chặn.

Lời giải.

Ta có $u_n = 1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3} + \ldots + \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1} = 1 - \dfrac{1}{n+1}$.
Do đó $0 \leq u_n \leq 1$, $\forall n \geq 1$.
Vậy dãy số đã cho bị chặn.

Chọn đáp án D .... □

CÂU 4. Cho dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{1}{1 \cdot 4} + \dfrac{1}{2 \cdot 5} + \ldots + \dfrac{1}{n \cdot (n+3)}$. Dãy số (u_n) bị chặn dưới và chặn trên lần lượt bởi các số m và M nào dưới đây?

A $m = 0$, $M = 1$. **B** $m = 1$, $M = \dfrac{1}{2}$. **C** $m = 1$, $M = \dfrac{10}{19}$. **D** $m = 0$, $M = \dfrac{11}{18}$.

Lời giải.

Rõ ràng $u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$ nên (u_n) bị chặn dưới.

Mặt khác $\dfrac{1}{k(k+3)} = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+3}\right)$.

Suy ra
$$u_n = \frac{1}{3}\Big[\left(1-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{7}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n-3}-\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+2}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+3}\right)\Big]$$
$$= \frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right) < \frac{11}{18}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Do đó (u_n) bị chặn trên.

Vậy $m = 0$, $M = \dfrac{11}{18}$.

Chọn đáp án D

CÂU 5. Cho dãy số (u_n) biết $u_n = \dfrac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 2n}$. Dãy số (u_n) bị chặn dưới và chặn trên lần lượt bởi các số m và M. Tính giá trị biểu thức $m+M$?

A $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. **B** $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. **C** $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$. **D** $\dfrac{1}{\sqrt{7}}$.

Lời giải.

Xét $\dfrac{2k-1}{2k} < \dfrac{2k-1}{\sqrt{4k^2-1}} = \dfrac{\sqrt{(2k-1)^2}}{\sqrt{(2k-1)(2k+1)}} = \dfrac{\sqrt{2k-1}}{\sqrt{2k+1}}, \forall k \geq 1$.

$\Rightarrow u_n < \dfrac{\sqrt{1}}{\sqrt{3}}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\cdot\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}}\cdot\ldots\cdot\dfrac{\sqrt{2n-1}}{\sqrt{2n+1}} = \dfrac{1}{\sqrt{2n+1}} \leq \dfrac{1}{\sqrt{3}}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

$\Rightarrow 0 < u_n < \dfrac{1}{\sqrt{3}}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Vậy $m + M = 0 + \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Chọn đáp án B

CÂU 6. Cho dãy số (u_n), với $u_n = \dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\ldots+\dfrac{1}{n^2}, \forall n = 2;3;4;\ldots$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A Dãy số bị chặn. **B** Dãy số bị chặn trên. **C** Dãy số bị chặn dưới. **D** Dãy số không bị chặn.

Lời giải.

Ta có $u_n > 0 \Rightarrow (u_n)$ bị chặn dưới bởi 0.

Mặt khác $\dfrac{1}{k^2} < \dfrac{1}{(k-1)k} = \dfrac{1}{k-1} - \dfrac{1}{k}$, $(k \in \mathbb{N}^*, k \geq 2)$ nên suy ra

$$\begin{aligned} u_n &< \frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)} \\ &= 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1} = 1-\frac{1}{n+1} < 1. \end{aligned}$$

Nên dãy (u_n) bị chặn trên, do đó dãy (u_n) bị chặn.

Chọn đáp án A

CÂU 7. Cho dãy số (u_n) và đặt $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ với $a_k = \dfrac{1}{4k^2-1}$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A $0 < u_n < 1$. **B** $0 \leq u_n \leq \dfrac{1}{2}$. **C** $0 < u_n < \dfrac{1}{2}$. **D** $0 \leq u_n \leq 1$.

Lời giải.

Ta có $a_k = \dfrac{1}{4k^2-1} = \dfrac{1}{(2k+1)(2k-1)} = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{(2k+1)-(2k-1)}{(2k+1)(2k-1)} = \dfrac{1}{2}\cdot\left(\dfrac{1}{2k-1}-\dfrac{1}{2k+1}\right)$.

Mặt khác $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$. Do đó

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\ldots+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2n+1}\right)\\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{2n}{2n+1}=\frac{n}{2n+1}. \end{aligned}$$

Với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ thì $u_n > 0$ nên dãy số (u_n) bị chặn dưới.
Ta lại có $u_n = \frac{1}{2}\cdot\left(1-\frac{1}{2n+1}\right) < \frac{1}{2}$.
Vậy dãy số bị chặn.

Chọn đáp án (C) .... □

CÂU 8. Cho dãy số (u_n) và đặt $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ với $a_k = \frac{1}{k(k+4)}$. Dãy số (u_n) bị chặn dưới và chặn trên lần lượt bởi các số m và M nào sau đây?

A $m=0,\ M=\frac{25}{48}$. **B** $m=0,\ M=\frac{25}{12}$. **C** $m=1,\ M=\frac{1}{4}$. **D** $m=1,\ M=\frac{1}{2}$.

Lời giải.

Ta có $a_k = \frac{1}{k(k+4)} = \frac{1}{4}\cdot\frac{4}{k(k+4)} = \frac{1}{4}\cdot\frac{k+4-k}{k(k+4)} = \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+4}\right)$.

Mặt khác $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$. Do đó

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{5}\right)+\frac{1}{4}.\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\right)+\ldots+\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+4}\right)\\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}-\frac{1}{n+4}\right)\\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{25}{12}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}-\frac{1}{n+4}\right). \end{aligned}$$

Với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ thì $u_n > 0$ nên dãy số (u_n) bị chặn dưới.
Ta lại có $u_n = \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{25}{12}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}-\frac{1}{n+4}\right) < \frac{1}{4}\cdot\frac{25}{12}=\frac{25}{48}$.
Vậy $m=0,\ M=\frac{25}{48}$.
Chọn đáp án (A) .... □

CÂU 9. Xét tính bị chặn của dãy số (u_n) và đặt $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ với $a_k = \frac{1}{k(k+1)}$.

A Bị chặn. **B** Bị chặn dưới. **C** Bị chặn trên. **D** Không bị chặn..

Lời giải.

Ta có $a_k = \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$. Do đó
$u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k = \left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) = 1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}$.
Với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ thì $u_n > 0$ nên dãy số (u_n) bị chặn dưới.
Ta lại có $u_n = 1-\frac{n}{n+1} < 1,\ \forall n \in \mathbb{N}^*$ nên dãy số (u_n) bị chặn trên.
Vậy dãy số bị chặn.
Chọn đáp án (A) .... □

CÂU 10. Cho dãy số (u_n), xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 6 \\ u_{n+1} = \sqrt{6+u_n},\ \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A $\sqrt{6} < u_n < 2\sqrt{3}$. **B** $\sqrt{6} \le u_n \le 2\sqrt{3}$. **C** $\sqrt{6} < u_n \le 2\sqrt{3}$. **D** $\sqrt{6} \ge u_n < 2\sqrt{3}$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} u_1 = 6 \\ u_{n+1} = \sqrt{6 + u_n} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1 = 6 \\ u_{n+1} \geq 0 \end{cases} \Rightarrow u_n \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} u_1 = 6 \\ u_{n+1} = \sqrt{6 + u_n} \geq \sqrt{6} \end{cases} \Rightarrow u_n \geq \sqrt{6}$.

Ta chứng minh quy nạp $\begin{cases} u_n \leq 2\sqrt{3} \\ u_1 \leq 2\sqrt{3} \\ u_k \leq 2\sqrt{3}. \end{cases}$

$\Rightarrow u_{k+1} = \sqrt{6 + u_{k+1}} \leq \sqrt{6 + 2\sqrt{3}} < \sqrt{6+6} = 2\sqrt{3}$.

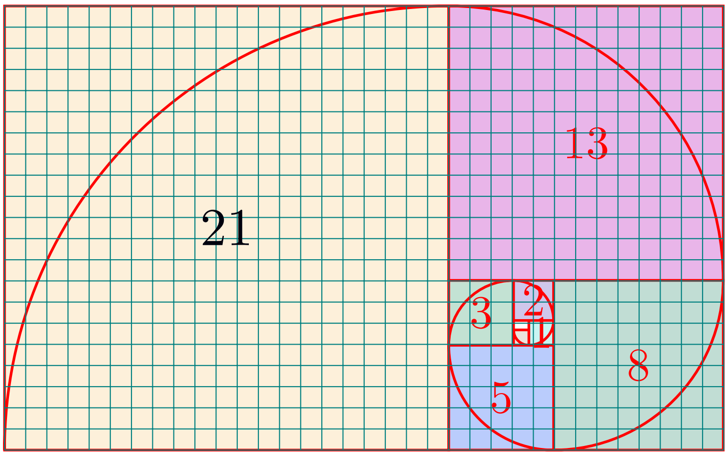
Vậy $\sqrt{6} \leq u_n \leq 2\sqrt{3}$.

Chọn đáp án (B) ....

5 Toán thực tế về dãy số

1. Ví dụ minh hoạ

VÍ DỤ 1. Trên lưới ô vuông, mỗi ô cạnh 1 đơn vị, người ta vẽ 8 hình vuông và tô màu khác nhau như hình vẽ. Tìm dãy số biểu diễn độ dài cạnh của 8 hình vuông đó từ nhỏ đến lớn. Có nhận xét gì về dãy số trên?



Lời giải.

- $u_1 = 1$.
- $u_2 = 1$.
- $u_3 = 2$.
- $u_4 = 3$.
- $u_5 = 5$.
- $u_6 = 8$.
- $u_7 = 13$.
- $u_8 = 21$.

Ta có dãy số (u_n) : $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_2 = 1 \\ u_n = u_{n-1} - u_{n-2}. \end{cases}$

VÍ DỤ 2. Chị Mai gửi tiền tiết kiệm vào ngân hàng theo thể thức lãi kép như sau. Lần đầu chị gửi 100 triệu đồng. Sau đó, cứ hết 1 tháng chị lại gửi thêm vào ngân hàng 6 triệu đồng. Biết lãi suất của ngân hàng là 0,5% một tháng. Gọi P_n (triệu đồng) là số tiền chị có trong ngân hàng sau n tháng.

a) Tính số tiền chị có trong ngân hàng sau 1 tháng.

b) Tính số tiền chị có trong ngân hàng sau 3 tháng.

c) Dự đoán công thức của P_n tính theo n.

Lời giải.

a) Số tiền chị có trong ngân hàng sau 1 tháng là $P_1 = +100 + 100 \cdot 0{,}5\% + 6 = 100{,}5 + 6$ (triệu đồng).

b) Số tiền chị có trong ngân hàng sau 2 tháng là

$$\begin{aligned} P_2 &= 100{,}5 + 6 + (100{,}5 + 6) \cdot 0{,}5\% + 6 \\ &= (100{,}5 + 6)(1 + 0{,}5\%) + 6 \\ &= 100{,}5(1 + 0{,}5\%) + 6 \cdot (1 + 0{,}5\%) + 6 \text{ (triệu đồng)}. \end{aligned}$$

Số tiền chị có trong ngân hàng sau 3 tháng là

$$\begin{aligned} P_3 &= (100{,}5+6)(1+0{,}5\%)+6+[(100{,}5+6)(1+0{,}5\%)+6]\cdot 0{,}5\%+6 \\ &= 100{,}5\cdot(1+0{,}5\%)^2+6(1+0{,}5\%)^2+6\cdot(1+0{,}5\%)+6(\text{triệu đồng}). \end{aligned}$$

c) Số tiền chị có trong ngân hàng sau 4 tháng là

$$\begin{aligned} P_4 &= (100{,}5+6)(1+0{,}5\%)^2+6\cdot(1+0{,}5\%)+6+\left[(100{,}5+6)(1+0{,}5\%)^2+6\cdot(1+0{,}5\%)+6\right]\cdot 0{,}5\%+6 \\ &= 100{,}5\cdot(1+0{,}5\%)^3+6\cdot(1+0{,}5\%)^3+6\cdot(1+0{,}5\%)^2+6\cdot(1+0{,}5\%)+6\,(\text{triệu đồng}). \end{aligned}$$

Số tiền chị có trong ngân hàng sau n tháng là

$$P_n = 100{,}5\cdot(1+0{,}5\%)^{n-1}+6\cdot(1+0{,}5\%)^{n-1}+6\cdot(1+0{,}5\%)^{n-2}+6\cdot(1+0{,}5\%)^{n-3}+\ldots+6$$

với mọi $n\in\mathbb{N}^*$.

VÍ DỤ 3. Ông An gửi tiết kiệm 100 triệu đồng kì hạn 1 tháng với lãi suất 6% một năm theo hình thức tính lãi kép. Số tiền (triệu đồng) của ông An thu được sau n tháng được cho bởi công thức

$$A_n = 100\left(1+\frac{0{,}06}{12}\right)^n.$$

a) Tìm số tiền ông An nhận được sau tháng thứ nhất, sau tháng thứ hai.

b) Tìm số tiền ông An nhận được sau 1 năm.

Lời giải.

a) Số tiền ông An nhận được sau tháng thứ nhất là

$$A_1 = 100\left(1+\frac{0{,}06}{12}\right)^1 = 100{,}5\,(\text{triệu đồng}).$$

Số tiền ông An nhận được sau tháng thứ hai là

$$A_2 = 100\left(1+\frac{0{,}06}{12}\right)^2 = 101{,}0025\,(\text{triệu đồng}).$$

b) Số tiền ông An nhận được sau 1 năm (12 tháng) là

$$A_{12} = 100\left(1+\frac{0{,}06}{12}\right)^{12} \approx 106{,}17\,(\text{triệu đồng}).$$

2. Bài tập trắc nghiệm

CÂU 1. Nếu tỉ lệ lạm phát là $3,5\%$ mỗi năm và giá trung bình của một căn hộ chung cư mới tại thời điểm hiện tại là $2,5$ tỉ đồng thì giá trung bình của một căn hộ chung cư mới sau n năm nữa được cho bởi công thức

$$A_n = 2,5\cdot(1,035)^n \ (\text{tỉ đồng}).$$

Tìm giá trung bình (tỉ đồng)của một căn hộ chung cư mới sau 5 năm nữa (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

Đáp án: | 2 | , | 9 | 7 |

Lời giải.
Giá trung bình của một căn hộ chung cư mới sau 5 năm là

$$A_5 = 2,5\cdot(1,035)^5 = 2,9692\ (\text{tỉ đồng}).$$

Đáp án: $\boxed{2,97}$ .... □

CÂU 2. Giá của một chiếc máy photocopy lúc mới mua là 50 triệu đồng. Biết rằng giá trị của nó sau mỗi năm sử dụng chỉ còn 75% giá trị trong năm liền trước đó. Tính giá trị còn lại (triệu đồng) của chiếc máy photocopy đó sau 5 năm kể từ khi mua (kết quả làm tròn đến hàng phần chục).

Đáp án: | 1 | 1 | , | 9 |

Lời giải.

Giá trị của máy photocopy sau 1 năm sử dụng là

$$T_1 = 50 \cdot 75\% = 37,5(\text{triệu đồng}).$$

Giá trị của máy photocopy sau 2 năm sử dụng là

$$T_2 = T_1 \cdot 75\% = 28,125 \text{ (triệu đồng)}.$$

Giá trị của máy photocopy sau 3 năm sử dụng là

$$T_3 = T_2 \cdot 75\% = 21,0938 \text{ (triệu đồng)}.$$

Giá trị của máy photocopy sau 4 năm sử dụng là

$$T_4 = T_3 \cdot 75\% = 15,8203 \text{ (triệu đồng)}.$$

Giá trị của máy photocopy sau 5 năm sử dụng là

$$T_5 = T_4 \cdot 75\% = 11,8652 \text{ (triệu đồng)}.$$

Chú ý: Tổng quát, giá trị của máy photocopy sau n năm sử dụng là

$$T_n = T_1 \cdot (0,75)^{n-1} \text{ (triệu đồng)}.$$

Đáp án: $\boxed{11,9}$ .... □

CÂU 3. Một vi sinh đặc biệt X có cách sinh sản vô tính kì lạ, sau một giờ thì đẻ một lần, đặc biệt sống được tới giờ thứ n (với n là số nguyên dương) thì ngay lập tức thời điểm đó nó đẻ một lần ra 2^n con X khác, tuy nhiên do chu kì của con X ngắn nên ngay sau khi đẻ xong lần thứ 2, nó lập tức chết. Hỏi rằng, nếu tại thời điểm ban đầu có đúng 1 con thì sau 5 giờ có bao nhiêu con sinh vật X đang sống?

Đáp án: | 3 | 3 | 6 | |

Lời giải.

Gọi s_n là số lượng con X được sinh ra tại thời gian thứ n, $n \in \mathbb{N}^*$ và $s_0 = 1$. Ta có

$$\begin{aligned} &s_0 = 1, && s_1 = 2s_0 = 2,\\ &s_2 = 2s_1 + 4s_0 = 8, && s_3 = 2s_2 + 4s_1 = 24,\\ &s_4 = 2s_3 + 4s_2 = 80, && s_5 = 2s_4 + 4s_3 = 256. \end{aligned}$$

Khi đó, sau 5 giờ thì số con sinh vật X đang sống bằng $s_4 + s_5 = 336$.

Đáp án: $\boxed{336}$ .... □

CÂU 4. Bác Hưng để 10 triệu đồng trong tài khoản ngân hàng. Vào cuối mỗi năm, ngân hàng trả lãi 3% vào tài khoản của bác ấy, nhưng sau đó sẽ tính phí duy tri tài khoản hằng năm là 120 nghìn đồng. Tìm số dư trong tài khoản của bác Hưng sau 4 năm (tính bằng triệu đồng và kết quả làm tròn đến hàng phần chục).

Đáp án: | 1 | 0 | , | 8 |

Lời giải.

a) Vào cuối năm thứ nhất, số tiền trong tài khoản của bác Hưng là

$$A_1 = A_0(1+3\%) - 120000 = 1,03A_0 - 120000 \text{ (đồng)}.$$

Vào cuối năm thứ hai, số tiền trong tài khoản của bác Hưng là

$$A_2 = A_1(1+3\%) - 120000 = 1,03A_1 - 120000 \text{ (đồng)}.$$

Vào cuối năm thứ ba, số tiền trong tài khoản của bác Hưng là

$$A_3 = A_2(1+3\%) - 120000 = 1,03A_2 - 120000 \text{ (đồng)}.$$

Tương tự, vào cuối năm thứ $n(n \geq 1)$, số tiền trong tài khoản của bác Hưng là

$$A_n = A_{n-1}(1+3\%) - 120000 = 1,03A_{n-1} - 120000 \text{ (đồng)}.$$

b) Ta tính lần lượt A_1, A_2, A_3, A_4 :

$$\begin{aligned} &A_1 = 10180000; \quad A_2 = 10365400;\\ &A_3 = 10556362; \quad A_4 = 10753053. \end{aligned}$$

Như vậy, số dư trong tài khoản của bác Hưng sau 4 năm là 10753053 đồng.

Đáp án: $\boxed{10,8}$ .... □

Bài 6. CẤP SỐ CỘNG

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa

Dãy số là cấp số cộng nếu mỗi một số hạng (kể từ số hạng thứ hai) đều bằng tổng của số hạng đứng ngay trước nó với một số không đổi d.
Dãy số (u_n) là cấp số cộng $\Leftrightarrow u_{n+1} = u_n + d$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.
d là số không đổi, gọi là ***công sai*** của cấp số cộng.

2. Tính chất

Nếu (u_n) là cấp số cộng thì kể từ số hạng thứ hai (trừ số hạng cuối nếu là cấp số cộng hữu hạn) đều là trung bình cộng của hai số hạng đứng kề nó trong dãy. Tức là

$$u_k = \frac{u_{k-1} + u_{k+1}}{2}, (\forall k \geq 2, k \in \mathbb{N}^*).$$

3. Số hạng tổng quát

Nếu cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu u_1 và công sai d thì số hạng tổng quát u_n được xác định bởi công thức

$$u_n = u_1 + (n-1)d \text{ với } n \geq 2.$$

4. Tổng n số hạng đầu tiên

Cho cấp số cộng (u_n). Tổng n số hạng đầu tiên của cấp số cộng kí hiệu là $S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$.
Khi đó S_n được tính theo công thức

$$S_n = \frac{n(u_1 + u_n)}{2} = \frac{n}{2}\left[2u_1 + (n-1)d\right].$$

B. CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

1 Nhận diện cấp số cộng, công sai d, số hạng tổng quát u_n

1. Ví dụ minh hoạ

VÍ DỤ 1. Dãy số hữu hạn nào là một cấp số cộng? Vì sao?

a) -2, 1, 4, 7, 10, 13, 16.

b) 1, -2, -4, -6, -8.

Lời giải.

a) Ta thấy $u_2 = u_1 + 3$ do $1 = (-2) + 3$.
Vì $u_k = u_{k-1} + d$, $\forall k \geq 2$ ($1 = (-2) + 3; 4 = 1 + 3; 7 = 4 + 3; 10 = 7 + 3; 13 = 10 + 3; 16 = 13 + 3$) nên dãy số đã cho là cấp số cộng.

b) Ta thấy $u_2 = u_1 + (-3)$ do $-2 = 1 + (-3)$.
Vì $u_3 \neq u_2 + (-3)$ bởi ($-4 \neq -2 + (-3)$) nên dãy số đã cho không là cấp số cộng.

VÍ DỤ 2. Trong các dãy số dưới đây, dãy số nào là cấp số cộng?

a) Dãy số (a_n) với $a_n = 4n - 3$;

b) Dãy số (c_n) với $c_n = 2018^n$.

Lời giải.

a) Ta có $a_{n+1} = 4(n+1) - 3 = 4n + 1$ nên $a_{n+1} - a_n = (4n+1) - (4n-3) = 4, \forall n \geq 1.$.
Do đó (a_n) là cấp số cộng.

b) Ta có $c_{n+1} = 2018^{n+1}$ nên $c_{n+1} - c_n = 2018^{n+1} - 2018^n = 2017 \cdot 2018^n$ (phụ thuộc vào giá trị của n).
Suy ra (c_n) không phải là một cấp số cộng.

VÍ DỤ 3. Cho cấp số cộng (u_n) có công thức số hạng tổng quát $u_n = 3n + 1$, $n \in \mathbb{N}^*$. Tìm số hạng đầu u_1 và công sai d?

Lời giải.

Từ công thức số hạng tổng quát, ta có $u_1 = 4$, $u_2 = 7$ suy ra $d = u_2 - u_1 = 3$.

VÍ DỤ 4. Cho cấp số cộng (u_n) với $u_1 = 3$, $u_2 = 9$. Công sai của cấp số cộng đã cho bằng bao nhiêu?

Lời giải.

Cấp số cộng (u_n) có số hạng tổng quát là $u_n = u_1 + (n-1)d$ với $n \geq 2$.
Suy ra $u_2 = u_1 + d \Leftrightarrow 9 = 3 + d \Leftrightarrow d = 6$.
Vậy công sai của cấp số cộng đã cho là 6.

VÍ DỤ 5. Tính số hạng đầu u_1 và công sai d của một cấp số cộng biết $u_4 = 10$ và $u_7 = 19$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} u_4 = 10 \\ u_7 = 19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 3d = 10 \\ u_1 + 6d = 19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 1 \\ d = 3. \end{cases}$

VÍ DỤ 6. Xác định số hạng tổng quát của cấp số cộng (u_n), biết $\begin{cases} u_7 = 8 \\ d = 2. \end{cases}$

Lời giải.

Ta có

$$\begin{cases} u_7 = 8 \\ d = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 6d = 8 \\ d = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = -4 \\ d = 2. \end{cases}$$

Vậy công thức tổng quát của cấp số cộng

$$u_n = -4 + (n-1)2 \Leftrightarrow u_n = 2n - 6 \text{ với } n \geq 2.$$

VÍ DỤ 7. Cho cấp số cộng (u_n) với $\begin{cases} u_1 = -9 \\ u_{n-1} = u_n - 5 \end{cases}$. Tìm số hạng tổng quát của cấp số cộng (u_n).

Lời giải.

Từ công thức $u_{n-1} = u_n - 5 \Leftrightarrow u_n = u_{n-1} + 5$, suy ra $d = 5$.
Vậy công thức tổng quát của cấp số cộng (u_n) là $u_n = -9 + 5(n-1) = 5n - 14$.

VÍ DỤ 8. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_{20} = -52$ và $u_{51} = -145$. Hãy tìm số hạng tổng quát của cấp số cộng đó.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{cases} u_{20} = -52 \\ u_{51} = -145 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 19d = -52 \\ u_1 + 50d = -145 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 5 \\ d = -3. \end{cases}$$

Vậy số hạng tổng quát cần tìm là $u_n = u_1 + (n-1)d = 5 + (n-1) \cdot (-3) = -3n + 8$.

VÍ DỤ 9. Tìm số hạng đầu và công sai của cấp số cộng (u_n), biết

a) $\begin{cases} u_9 = 5u_2 \\ u_{13} = 2u_6 + 5. \end{cases}$

b) $\begin{cases} u_1 - u_3 + u_5 = 10 \\ u_1 + u_6 = 7. \end{cases}$

Lời giải.

a) Ta có

$$\begin{aligned} \begin{cases} u_9 = 5u_2 \\ u_{13} = 2u_6 + 5 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 8d = 5(u_1 + d) \\ u_1 + 12d = 2(u_1 + 5d) + 5 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -4u_1 + 3d = 0 \\ -u_1 + 2d = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 3 \\ d = 4. \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy $u_1 = 3$, $d = 4$.

b) Ta có

$$\begin{aligned} \begin{cases} u_1 - u_3 + u_5 = 10 \\ u_1 + u_6 = 7 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 - (u_1 + 2d) + (u_1 + 4d) = 10 \\ u_1 + (u_1 + 5d) = 7 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 2d = 10 \\ 2u_1 + 5d = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 36 \\ d = -13. \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy $u_1 = 36$, $d = -13$.

VÍ DỤ 10. Tìm số hạng đầu và công sai của cấp số cộng (u_n), biết

a) $\begin{cases} -u_3 + u_7 = 8 \\ u_2u_7 = 75. \end{cases}$

b) $\begin{cases} u_5 = 4u_3 \\ u_2u_6 = -11. \end{cases}$

Lời giải.

a) Ta có

$$\begin{cases}-u_3+u_7=8\\ u_2u_7=75\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-(u_1+2d)+(u_1+6d)=8\\ (u_1+d)(u_1+6d)=75\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases}4d=8\\ u_1^2+7u_1d+6d^2=75\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases}d=2\\ u_1^2+14u_1-51=0\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases}u_1=3\\ d=2\end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases}u_1=-17\\ d=2.\end{cases}$$

Vậy $\begin{cases}u_1=3\\ d=2\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}u_1=-17\\ d=2.\end{cases}$

b) Ta có

$$\begin{cases}u_5=4u_3\\ u_2u_6=-11\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}u_1+4d=4(u_1+2d)\\ (u_1+d)(u_1+5d)=-11\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases}3u_1+4d=0 & (1)\\ u_1^2+6du_1+5d^2=-11 & (2)\end{cases}$$

Từ (1) suy ra $3u_1=-4d$. Thay vào (2) ta được

$$9u_1^2+54du_1+45d^2=-99 \Leftrightarrow 16d^2-72d^2+45d^2=-99$$
$$\Leftrightarrow -11d^2=-99 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}d=3\\ d=-3.\end{array}\right.$$

Với $d=3$, ta có $u_1=-4$.
Với $d=-3$, ta có $u_1=4$.
Vậy $\begin{cases}u_1=-4\\ d=3\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}u_1=4\\ d=-3.\end{cases}$

2. Bài tập tự luận

BÀI 1. Trong các dãy số sau, dãy số nào là một cấp số cộng?

a) $1, -3, -7, -11, -15, \ldots;$

b) $1, -2, -4, -6, -8, \ldots.$

c) $\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}, -1, -\frac{3}{2}, \ldots$

Lời giải.
Ta lần lượt đi kiểm tra: $u_2-u_1=u_3-u_2=u_4-u_3=\ldots?$
Xét từng dãy số thì ta thấy 1) và 3) là cấp số cộng.

BÀI 2. Trong các dãy số sau, dãy nào là cấp số cộng. Tìm số hạng đầu và công sai của cấp số cộng đó.

a) Dãy số (u_n) với $u_n=19n-5$;

b) Dãy số (u_n) với $u_n=n^2+n+1$.

Lời giải.

a) Dãy số (u_n) với $u_n=19n-5$.
Ta có $u_{n+1}-u_n=19(n+1)-5-(19n-5)=19$. Vậy (u_n) là một cấp số cộng với số hạng đầu là $u_1=19\cdot 1-5=14$ và công sai $d=19$.

b) Dãy số (u_n) với $u_n=n^2+n+1$.
Ta có $u_{n+1}-u_n=(n+1)^2+(n+1)+1-(n^2+n+1)=2n+2$ phụ thuộc vào n. Vậy (u_n) không là một cấp số cộng.

BÀI 3. Cho cấp số cộng (u_n) với $u_1=3$, $u_2=9$. Công sai của cấp số cộng đã cho bằng bao nhiêu?

Lời giải.
Cấp số cộng (u_n) có số hạng tổng quát là $u_n=u_1+(n-1)d$ với $n\ge 2$ (số hạng đầu u_1 và công sai d)
Suy ra $u_2=u_1+d \Leftrightarrow 9=3+d \Leftrightarrow d=6$.
Vậy công sai của cấp số cộng đã cho là 6.

BÀI 4. Xác định công thức tổng quát của cấp số cộng (u_n), biết $\begin{cases} u_{11} = 5 \\ d = -6. \end{cases}$

Lời giải.

Ta có

$$\begin{cases} u_{11} = 5 \\ d = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 10d = 5 \\ d = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 65 \\ d = -6. \end{cases}$$

Vậy công thức tổng quát của cấp số cộng:

$$u_n = 65 + (n-1).(-6) \Leftrightarrow u_n = -6n + 71 \text{ với } n \geq 2.$$

BÀI 5. Tìm số hạng đầu và công sai của cấp số cộng (u_n), biết $\begin{cases} u_2 + u_5 - u_3 = 10 \\ u_4 + u_6 = 26. \end{cases}$

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} \begin{cases} u_2 + u_5 - u_3 = 10 \\ u_4 + u_6 = 26 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + d + u_1 + 4d - (u_1 + 2d) = 10 \\ u_1 + 3d + u_1 + 5d = 26 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 3d = 10 \\ 2u_1 + 8d = 26 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 1 \\ d = 3. \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy $u_1 = 1$, $d = 3$.

BÀI 6. Tìm số hạng đầu và công sai của cấp số cộng, biết

a) $\begin{cases} u_7 = 27 \\ u_{15} = 59. \end{cases}$

b) $\begin{cases} u_9 = 5u_2 \\ u_{13} = 2u_6 + 5. \end{cases}$

c) $\begin{cases} u_2 + u_4 - u_6 = -7 \\ u_8 - u_7 = 2u_4. \end{cases}$

d) $\begin{cases} u_3 - u_7 = -8 \\ u_2 \cdot u_7 = 75. \end{cases}$

e) $\begin{cases} u_6 + u_7 = 60 \\ u_4^2 + u_{12}^2 = 1170. \end{cases}$

Lời giải.

a) Ta có $\begin{cases} u_7 = 27 \\ u_{15} = 59 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 6d = 27 \\ u_1 + 14d = 59 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 3 \\ d = 4. \end{cases}$

Vậy số hạng đầu của cấp số cộng là $u_1 = 3$, công sai là $d = 4$.

b) Ta có $\begin{cases} u_9 = 5u_2 \\ u_{13} = 2u_6 + 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 8d = 5u_1 + 5d \\ u_1 + 12d = 2u_1 + 10d + 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4u_1 - 3d = 0 \\ -u_1 + 2d = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 3 \\ d = 4. \end{cases}$

Vậy số hạng đầu của cấp số cộng là $u_1 = 3$, công sai là $d = 4$.

c) Ta có $\begin{cases} u_2 + u_4 - u_6 = -7 \\ u_8 - u_7 = 2u_4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + d + u_1 + 3d - u_1 - 5d = -7 \\ u_1 + 7d - u_1 - 6d = 2u_1 + 6d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 - d = -7 \\ 2u_1 + 5d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = -5 \\ d = 2. \end{cases}$

Vậy số hạng đầu của cấp số cộng là $u_1 = -5$, công sai là $d = 2$.

d) Ta có $\begin{cases} u_3 - u_7 = -8 \\ u_2 \cdot u_7 = 75 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 2d - u_1 - 6d = -8 \\ (u_1 + d)(u_1 + 6d) = 75 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 2 \\ u_1^2 + 14u_1 - 51 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 2 \\ \left[\begin{array}{l} u_1 = 3 \\ u_1 = -17. \end{array}\right. \end{cases}$

Vậy số hạng đầu của cấp số cộng là $u_1 = 3$, công sai là $d = 2$ hoặc $u_1 = -17$, $d = 2$.

e) Ta có $\begin{cases} u_6 + u_7 = 60 \\ u_4^2 + u_{12}^2 = 1170 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2u_6 + d = 60 & (1) \\ (u_6 - 2d)^2 + (u_6 + 6d)^2 = 1170. & (2) \end{cases}$

Từ (1), suy ra $d = 60 - 2u_6$, thay vào (2), ta có

$$(5u_6 - 120)^2 + (360 - 11u_6)^2 = 1170 \Leftrightarrow 146u_6^2 - 9120u_6 + 142830 = 0 \text{ (vô nghiệm)}.$$

Vậy không tồn tại cấp số cộng thỏa yêu cầu bài toán.

BÀI 7. Cho cấp số cộng (u_n) thỏa mãn $\begin{cases} u_2 + u_4 - u_6 = -7 \\ u_8 + u_7 = 2u_4 \end{cases}$. Xác định số hạng đầu u_1 và công sai d cấp số cộng.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} u_2 + u_4 - u_6 = -7 \\ u_8 + u_7 = 2u_4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + d + (u_1 + 3d) - (u_1 + 5d) = -7 \\ u_1 + 7d - (u_1 + 6d) = 2(u_1 + 3d) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 - d = -7 \\ 2u_1 + 5d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = -5 \\ d = 2. \end{cases}$

BÀI 8. Cho cấp số cộng (u_n) thỏa mãn $\begin{cases} u_2 - u_3 + u_5 = 10 \\ u_4 + u_6 = 26 \end{cases}$. Xác định số hạng đầu u_1 và công sai d cấp số cộng.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} u_2 - u_3 + u_5 = 10 \\ u_4 + u_6 = 26 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + d - (u_1 + 2d) + u_1 + 4d = 10 \\ u_1 + 3d + u_1 + 5d = 26 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 3d = 10 \\ u_1 + 4d = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 1 \\ d = 3. \end{cases}$

BÀI 9. Tính số hạng đầu u_1 và công sai d của một cấp số cộng biết $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 27 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 275 \end{cases}$

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 27 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 275 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_2 - d + u_2 + u_2 + d = 27 \\ (u_2 - d)^2 + u_2^2 + (u_2 + d)^2 = 275 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_2 = 9 \\ 3u_2^2 + 2d^2 = 275. \end{cases}$

Thay $u_2 = 9$ vào $3u_2^2 + 2d^2 = 275$ ta được $d = 4$ hay $d = -4$.

Vậy $u_1 = 5$, $d = 4$ hoặc $u_1 = 13$, $d = -4$.

3. Câu hỏi trắc nghiệm

CÂU 1. Trong các dãy số sau, dãy số nào là một cấp số cộng?

A $1; -3; -7; -11; -15; \ldots$. **B** $1; -3; -6; -9; -12; \ldots$. **C** $1; -2; -4; -6; -8; \ldots$. **D** $1; -3; -5; -7; -9; \ldots$.

Lời giải.

Ta lần lượt tính khoảng cách d các phần tử, ta thấy dãy số đáp án A có $d = -4$.

Chọn đáp án A .... □

CÂU 2. Dãy số nào sau đây **không** phải là cấp số cộng?

A $-\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}; 0; \frac{1}{3}; \frac{2}{3}; 1; \frac{4}{3}$.

B $15\sqrt{2}; 12\sqrt{2}; 9\sqrt{2}; 6\sqrt{2}$.

C $\frac{4}{5}; 1; \frac{7}{5}; \frac{9}{5}; \frac{11}{5}$.

D $\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{2\sqrt{3}}{3}; \sqrt{3}; \frac{4\sqrt{3}}{3}; \frac{5}{\sqrt{3}}$.

Lời giải.

Ta lần lượt tính khoảng cách d các phần tử, ta thấy dãy số trừ đáp án C có khoảng cách các phần tử không bằng nhau.

Chọn đáp án C .... □

CÂU 3. Cho cấp số cộng (u_n) với $u_1 = 2$ và $u_2 = 6$. Công sai của cấp số cộng đã cho là

A 4. **B** -4. **C** 8. **D** 3.

Lời giải.

Ta có $u_2 = 6 \Leftrightarrow 6 = u_1 + d \Leftrightarrow d = 4$.

Chọn đáp án A .... □

CÂU 4. Cho cấp số cộng (u_n) với $u_1 = -3$ và $u_6 = 27$. Công sai d của cấp số cộng đã cho là

A $d = 7$. **B** $d = 5$. **C** $d = 8$. **D** $d = 6$.

Lời giải.

Ta có $u_6 = 27 \Leftrightarrow 27 = u_1 + 5d \Leftrightarrow d = 6$.

Chọn đáp án D .... □

CÂU 5. Cho cấp số cộng (u_n) với $u_{17} = 33$ và $u_{33} = 65$. Công sai của cấp số cộng đã cho là

A 1. **B** 3. **C** -2. **D** 2.

Lời giải.

Gọi u_1, d lần lượt là số hạng đầu và công sai của cấp số cộng (u_n).

Khi đó, ta có $u_{17} = u_1 + 16d$, $u_{33} = u_1 + 32d$

Suy ra $u_{33} - u_{17} = 65 - 33 \Leftrightarrow 16d = 32 \Leftrightarrow d = 2$

Vậy công sai bằng 2.

Chọn đáp án D .... □

CÂU 6. Cho cấp số cộng có $u_1 = -3$ và $d = 4$. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau.

A $u_5 = 15$. **B** $u_4 = 8$. **C** $u_3 = 5$. **D** $u_2 = 2$.

Lời giải.

Ta có $u_3 = u_1 + 2d = -3 + 2 \cdot 4 = 5$.

Chọn đáp án C □

CÂU 7. Cho cấp số cộng có $u_1 = 11$ và công sai $d = 4$. Hãy tính u_{99}.

A 401. B 403. C 402. D 404.

Lời giải.

Ta có $u_{99} = u_1 + 98d = 11 + 98 \cdot 4 = 403$.

Chọn đáp án B □

CÂU 8. Một cấp số cộng (u_n) có $u_{13} = 8$ và $d = -3$. Tìm số hạng thứ ba của cấp số cộng (u_n).

A 50. B 28. C 38. D 44.

Lời giải.

Ta có $u_{13} = u_1 + 12d \Leftrightarrow 8 = u_1 + 12 \cdot (-3) \Rightarrow u_1 = 44 \Rightarrow u_3 = u_1 + 2d = 44 - 6 = 38$.

Chọn đáp án C □

CÂU 9. Cho cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu $u_1 = 2$ và công sai $d = 4$. Hãy tính giá trị u_{2019} bằng

A 8074. B 4074. C 8078. D 4078.

Lời giải.

Ta có $u_{2019} = u_1 + 2018d = 2 + 2018 \cdot 4 = 8074$.

Chọn đáp án A □

CÂU 10. Cho cấp số cộng (u_n) có số hạng tổng quát là $u_n = 3n - 2$. Tìm công sai d của cấp số cộng.

A $d = 3$. B $d = 2$. C $d = -2$. D $d = -3$.

Lời giải.

Ta có $u_{n+1} - u_n = 3(n+1) - 2 - 3n + 2 = 3$. Suy ra công sai $d = 3$.

Chọn đáp án A □

CÂU 11. Cho cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu u_1 và công sai d. Công thức tìm số hạng tổng quát u_n là

A $u_n = u_1 + (n-1)d$. B $u_n = u_1 + nd$. C $u_n = u_1 + (n+1)d$. D $u_n = nu_1 + d$.

Lời giải.

Ta có $u_n = u_1 + (n-1)d$.

Chọn đáp án A □

CÂU 12. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = -3$ và $d = \frac{1}{2}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A $u_n = -3 + \frac{1}{2}(n+1)$. B $u_n = -3 + \frac{1}{2}n - 1$. C $u_n = -3 + \frac{1}{2}(n-1)$. D $u_n = -3 + \frac{1}{4}(n-1)$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} u_1 = -3 \\ d = \frac{1}{2} \end{cases} \xrightarrow{CTTQ} u_n = u_1 + (n-1)d = -3 + \frac{1}{2}(n-1)$.

Chọn đáp án C □

CÂU 13. Cho cấp số cộng (u_n) xác định bởi $u_n = 2n + 1$. Xác định số hạng đầu u_1 và công sai d của cấp số cộng.

A $u_1 = 3,\ d = 1$. B $u_1 = 1,\ d = 1$. C $u_1 = 3,\ d = 2$. D $u_1 = 1,\ d = 2$.

Lời giải.

Ta có $u_1 = 2 \cdot 1 + 1 = 3$ và $u_2 = 2 \cdot 2 + 1 = 5$, nên $d = u_2 - u_1 = 2$.

Chọn đáp án C □

CÂU 14. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_4 = -12$, $u_{14} = 18$. Tìm số hạng đầu u_1 và công sai d của cấp số cộng (u_n).

A $u_1 = -20,\ d = -3$. B $u_1 = -22,\ d = 3$. C $u_1 = -21,\ d = 3$. D $u_1 = -21,\ d = -3$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{cases}u_4=u_1+(4-1)d\\u_{14}=u_1+(14-1)d\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-12=u_1+3d\\18=u_1+13d\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u_1=-12\\d=3.\end{cases}$$

Chọn đáp án C ……………………………………………………………… □

CÂU 15. Tìm số hạng đầu và công sai của cấp số cộng (u_n) thỏa mãn $\begin{cases}u_1+u_9=12\\u_4-3u_2=1.\end{cases}$

A $u_1=\dfrac{1}{2};\ d=\dfrac{13}{8}$. B $u_1=-1;\ d=\dfrac{13}{8}$. **C** $u_1=-\dfrac{1}{2};\ d=\dfrac{13}{8}$. D $u_1=-1;\ d=2$.

Lời giải.

Ta có: $\begin{cases}u_1+u_9=12\\u_4-3u_2=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u_1+(u_1+8d)=12\\(u_1+3d)-3(u_1+d)=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2u_1+8d=12\\-2u_1=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}d=\dfrac{13}{8}\\u_1=-\dfrac{1}{2}\end{cases}$

Chọn đáp án C ……………………………………………………………… □

CÂU 16. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_4=-12$ và $u_{14}=18$. Khi đó, số hạng đầu tiên u_1 và công sai d của cấp số cộng (u_n) lần lượt là

A $u_1=-20,\ d=-3$. B $u_1=-22,\ d=3$. **C** $u_1=-21,\ d=3$. D $u_1=-21,\ d=-3$.

Lời giải.

Ta có: $\begin{cases}u_4=-12\\u_{14}=18\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u_1+3d=-12\\u_1+13d=18\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u_1=-21\\d=3.\end{cases}$

Chọn đáp án C ……………………………………………………………… □

CÂU 17. Cho cấp số cộng (u_n) có các số hạng đầu lần lượt là $5;\ 9;\ 13;\ 17;\cdots$. Tìm số hạng tổng quát u_n của cấp số cộng.

A $u_n=5n+1$. B $u_n=5n-1$. **C** $u_n=4n+1$. D $u_n=4n-1$.

Lời giải.

Các số $5;\ 9;\ 13;\ 17;\cdots$ theo thứ tự đó lập thành cấp số cộng (u_n) nên

$\begin{cases}u_1=5\\d=u_2-u_1=4\end{cases}\xrightarrow{CTTQ}u_n=u_1+(n-1)d=5+4(n-1)=4n+1.$

Chọn đáp án C ……………………………………………………………… □

CÂU 18. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_3=15$ và $d=-2$. Tìm u_n

A $u_n=-2n+21$. B $u_n=-\dfrac{3}{2}n+12$. C $u_n=-3n-17$. D $u_n=\dfrac{3}{2}n^2-4$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases}15=u_3=u_1+2d\\d=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u_1=19\\d=-2\end{cases}\Rightarrow u_n=u_1+(n-1)d=-2n+21.$

Chọn đáp án A ……………………………………………………………… □

CÂU 19. Trong các dãy số được cho dưới đây, dãy số nào **không** phải là cấp số cộng?

A $u_n=-4n+9$. B $u_n=-2n+19$. C $u_n=-2n-21$. **D** $u_n=-2^n+15$.

Lời giải.

Dãy số $u_n=-2^n+15$ không có dạng $an+b$ nên có không phải là cấp số cộng.

Chọn đáp án D ……………………………………………………………… □

CÂU 20. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_4=-12$ và $u_{14}=18$. Tìm số hạng đầu tiên u_1 và công sai d của cấp số cộng đã cho.

A $u_1=-21;\ d=3$. B $u_1=-20;\ d=-3$. C $u_1=-22;\ d=3$. D $u_1=-21;\ d=-3$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases}u_4=-12\\u_{14}=18\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u_1+3d=-12\\u_1+13d=18\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u_1=-21\\d=3.\end{cases}$

Chọn đáp án A ……………………………………………………………… □

CÂU 21. Cho cấp số cộng (u_n) thoả mãn $\begin{cases} u_2 - u_3 + u_5 = 10 \\ u_3 + u_4 = 17 \end{cases}$. Số hạng đầu tiên và công sai của cấp số cộng đó lần lượt là

A 1 và 3. **B** -3 và 4. **C** 4 và -3. **D** -4 và -3.

Lời giải.

$\begin{cases} u_2 - u_3 + u_5 = 10 \\ u_3 + u_4 = 17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (u_1 + d) - (u_1 + 2d) + (u_1 + 4d) = 10 \\ (u_1 + 2d) + (u_1 + 3d) = 17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 3d = 10 \\ 2u_1 + 5d = 17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 1 \\ d = 3. \end{cases}$

Chọn đáp án A .... □

CÂU 22. Cho cấp số cộng (u_n) có công sai $d < 0$, $u_{31} + u_{34} = 11$ và $(u_{31})^2 + (u_{34})^2 = 101$. Số hạng tổng quát của (u_n) là

A $u_n = 86 - 3n$. **B** $u_n = 92 - 3n$. **C** $u_n = 95 - 3n$. **D** $u_n = 103 - 3n$.

Lời giải.

Gọi cấp số cộng (u_n) có công sai d.
$(u_{31})^2 + (u_{34})^2 = 101 \Leftrightarrow (u_{31} + u_{34})^2 - 2u_{31}.u_{34} = 101 \Rightarrow u_{31}.u_{34} = 10$.
Do đó, ta có $\begin{cases} u_{31} + u_{34} = 11 \\ u_{31}.u_{34} = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_{31} = 10 \\ u_{34} = 1 \end{cases}$ (vì $d < 0$)
$u_{31} + u_{34} = 11 \Rightarrow 2u_{31} + 3d = 11 \Rightarrow d = -3$ và $u_1 = 100$.
Do đó: $u_n = 103 - 3n$.
Chọn đáp án D .... □

2 Tổng của n số hạng đầu tiên của một cấp số cộng. Tính chất của cấp số cộng

Tổng của n số hạng đầu tiên: Đặt $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n$. Khi đó

- $S_n = \dfrac{n(u_1 + u_n)}{2} = \dfrac{n(u_2 + u_{n-1})}{2} = \dfrac{n(u_3 + u_{n-2})}{2} = \cdots$
- Vì $u_n = u_1 + (n-1)d$ nên công thức trên có thể viết lại là $\boxed{S_n = \dfrac{n}{2}[2u_1 + (n-1)d].}$

Tính chất của cấp số cộng:

① Nếu a; b; c theo thứ tự lập thành cấp số cộng thì $a + c = 2b$.

② Lưu ý:

- Nếu cho ba số liên tiếp của một cấp số cộng, ta có thể xem ba số đó là
$$a - d; \quad a; \quad a + d$$
- Nếu cho bốn số liên tiếp của một cấp số cộng, ta có thể xem ba số đó là
$$a - 3d; \quad a - d; \quad a + d; \quad a + 3d.$$

1. Ví dụ minh hoạ

VÍ DỤ 1. Cho một cấp số cộng (u_n) có $u_3 + u_{28} = 100$. Hãy tính tổng của 30 số hạng đầu tiên của cấp số cộng đó.

Lời giải.

Ta có $S_{30} = \dfrac{30(u_1 + u_{30})}{2} = \dfrac{30(u_1 + 2d + u_{30} - 2d)}{2} = \dfrac{30(u_3 + u_{28})}{2} = \dfrac{30 \cdot 100}{2} = 1500$.

VÍ DỤ 2. Cho một cấp số cộng (u_n) có $S_6 = 18$ và $S_{10} = 110$. Tính S_{20}.

Lời giải.

Giả sử cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu là u_1 và công sai là d.
Ta có $S_6 = 6u_1 + \dfrac{6 \cdot 5}{2}d \Leftrightarrow 6u_1 + 15d = 18$. (1)
$S_{10} = 10u_1 + \dfrac{10 \cdot 9}{2}d \Leftrightarrow 10u_1 + 45d = 110$. (2)
Từ (1) và (2), ta có hệ phương trình $\begin{cases} 6u_1 + 15d = 18 \\ 10u_1 + 45d = 110 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = -7 \\ d = 4. \end{cases}$
Khi đó $S_{20} = 20u_1 + \dfrac{20 \cdot 19}{2}d = 20 \cdot (-7) + 190 \cdot 4 = 620$.

VÍ DỤ 3. Tìm số hạng đầu và công sai của cấp số cộng, biết

a) $\begin{cases} u_1^2+u_2^2+u_3^2=155 \\ S_3=21. \end{cases}$

b) $\begin{cases} S_3=12 \\ S_5=35. \end{cases}$

Lời giải.

a) $\begin{cases} u_1^2+u_2^2+u_3^2=155 \\ S_3=21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1^2+(u_1+d)^2+(u_1+2d)^2=155 & (1) \\ 3u_1+3d=21. & (2) \end{cases}$

Từ (2), ta có $3u_1+3d=21 \Rightarrow d=7-u_1$, thay vào (1)

$$u_1^2+7^2+(14-u_1)^2=155 \Leftrightarrow 2u_1^2-28u_1+90=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u_1=9 \\ u_1=5. \end{array}\right.$$

Với $u_1=9$ thì $d=-2$. Với $u_1=5$ thì $d=2$.
Vậy số hạng đầu của cấp số cộng là $u_1=9$, công sai là $d=-2$ hoặc $u_1=5$, $d=2$.

b) $\begin{cases} S_3=12 \\ S_5=35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3u_1+3d=12 \\ 5u_1+10d=35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1=1 \\ d=3. \end{cases}$

Vậy số hạng đầu của cấp số cộng là $u_1=1$, công sai là $d=3$.

VÍ DỤ 4. Tìm số hạng tổng quát của cấp số cộng, biết $\begin{cases} S_4=20 \\ \dfrac{1}{u_1}+\dfrac{1}{u_2}+\dfrac{1}{u_3}+\dfrac{1}{u_4}=\dfrac{25}{24} \end{cases}$ và cấp số cộng có công sai là một số nguyên âm.

Lời giải.

$\begin{cases} S_4=20 & (1) \\ \dfrac{1}{u_1}+\dfrac{1}{u_2}+\dfrac{1}{u_3}+\dfrac{1}{u_4}=\dfrac{25}{24} & (2). \end{cases}$

Từ (1), suy ra $u_1+u_4=u_2+u_3=10$ và $u_1=5-\dfrac{3}{2}d$.

Từ (2), ta có

$$\begin{aligned} & \frac{u_1+u_4}{u_1\cdot u_4}+\frac{u_2+u_3}{u_2\cdot u_3}=\frac{25}{24} \Leftrightarrow \frac{10}{u_1(u_1+3d)}+\frac{10}{(u_1+d)(u_1+2d)}=\frac{25}{24} \\ \Leftrightarrow\ & \frac{10}{\left(5-\frac{3}{2}d\right)\left(5+\frac{3}{2}d\right)}+\frac{10}{\left(5-\frac{1}{2}d\right)\left(5+\frac{1}{2}d\right)}=\frac{25}{24} \Leftrightarrow \frac{10}{25-\frac{9}{4}d^2}+\frac{10}{25-\frac{1}{4}d^2}=\frac{25}{24} \\ \Leftrightarrow\ & 10\left(25-\frac{9}{4}d^2+25-\frac{1}{4}d^2\right)=\frac{25}{24}\left(25-\frac{9}{4}d^2\right)\left(25-\frac{1}{4}d^2\right) \\ \Leftrightarrow\ & \frac{75}{128}d^4-\frac{1925}{48}d^2+\frac{3625}{24}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} d^2=\frac{580}{9} \\ d^2=4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} d=\pm\frac{2\sqrt{145}}{3} \\ d=\pm 2. \end{array}\right. \end{aligned}$$

Với $d=-2$ thì $u_1=8$. Suy ra $u_n=u_1+(n-1)d=10-2n$

VÍ DỤ 5. Tính các tổng sau

a) $S=1+3+5+\cdots+(2n-1)+(2n+1)$.

b) $S=100^2-99^2+98^2-97^2+\cdots+2^2-1^2$.

Lời giải.

a) $S=1+3+5+\cdots+(2n-1)+(2n+1)$.
Xét cấp số cộng (u_k), $k\in\mathbb{N}^*$ với số hạng đầu là $u_1=1$ và công sai là $d=2$.
Ta có $u_k=u_1+(k-1)d \Leftrightarrow 2n+1=1+2(k-1) \Leftrightarrow k=n+1$.
Vậy $S=\dfrac{k(u_1+u_k)}{2}=\dfrac{(n+1)(1+2n+1)}{2}=(n+1)^2$.

b) $S=100^2-99^2+98^2-97^2+\cdots+2^2-1^2=199+195+\cdots+3$.
Xét cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu $u_1=199$ và công sai $d=u_2-u_1=195-199=-4$.
Ta có $u_n=u_1+(n-1)d \Leftrightarrow 3=199-4(n-1) \Leftrightarrow n=50$.
Khi đó $S=\dfrac{n(u_1+u_{50})}{2}=\dfrac{50(199+3)}{2}=5050$.

VÍ DỤ 6. Tìm ba số hạng liên tiếp của một cấp số cộng biết tổng của chúng bằng 27 và tổng các bình phương của chúng là 293.

Lời giải.

Gọi ba số hạng liên tiếp của cấp số cộng là $x-d$, x, $x+d$ trong đó d là công sai của cấp số cộng.
Khi đó ta có $x-d+x+x+d=27 \Leftrightarrow 3x=27 \Leftrightarrow x=9$.
Mà $(x-d)^2+x^2+(x+d)^2=293 \Leftrightarrow (9-d)^2+81+(9+d)^2=293 \Leftrightarrow 2d^2-50=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} d=5 \\ d=-5. \end{array}\right.$
Với $d=5$ thì ba số hạng của cấp số cộng là 4, 9, 14. Với $d=-5$ thì ba số hạng của cấp số cộng là 14, 9, 4.
Vậy ba số hạng liên tiếp của cấp số cộng là 4, 9, 14.

VÍ DỤ 7. Tìm bốn số hạng liên tiếp của một cấp số cộng, biết tổng của chúng bằng 10 và tổng bình phương của chúng bằng 30.

Lời giải.

Gọi bốn số hạng liên tiếp của cấp số cộng là $x-3d$, $x-d$, $x+d$, $x+3d$ với $2d$ là công sai của cấp số cộng.
Khi đó ta có $x-3d+x-d+x+d+x+3d=10 \Leftrightarrow 4x=10 \Leftrightarrow x=\dfrac{5}{2}$.
Mặt khác

$$(x-3d)^2+(x-d)^2+(x+d)^2+(x+3d)^2=30 \Leftrightarrow 4x^2+20d^2=30 \Leftrightarrow d^2=\frac{1}{4} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} d=\dfrac{1}{2} \\ d=-\dfrac{1}{2}. \end{array}\right.$$

Với $x=\dfrac{5}{2}$ thì $d=\dfrac{1}{2}$, khi đó bốn số hạng liên tiếp của cấp số cộng là 1, 2, 3, 4.
Với $x=\dfrac{5}{2}$ thì $d=-\dfrac{1}{2}$, khi đó bốn số hạng liên tiếp của cấp số cộng là 4, 3, 2, 1.
Vậy bốn số hạng liên tiếp của cấp số cộng là 1, 2, 3, 4.

VÍ DỤ 8. Ba góc của một tam giác vuông lập thành một cấp số cộng. Tìm ba góc đó.

Lời giải.

Gọi ba góc của tam giác lần lượt là A, B, C. Khi đó ta có $A+B+C=180^\circ$.
Do ba góc A, B, C của tam giác theo thứ tự lập thành một cấp số cộng nên $B-A=C-A \Leftrightarrow A+C=2B$.
Do đó $2B+B=180^\circ \Rightarrow 3B=180^\circ \Rightarrow B=60^\circ$.
Do tam giác ABC vuông nên giả sử $C=90^\circ$ khi đó công sai d của cấp số cộng là $d=C-B=30^\circ$.
Vậy góc A của tam giác là $A=30^\circ$.

VÍ DỤ 9. Xác định 4 góc của một tứ giác lồi, biết rằng 4 góc hợp thành cấp số cộng và góc lớn nhất bằng 5 lần góc nhỏ nhất.

Lời giải.

Gọi số đo bốn góc cần tìm là u_1, u_2, u_3, u_4. Ta có

$$\begin{cases} u_1+u_2+u_3+u_4=360 \\ u_5=5u_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4u_1+6d=360 \\ 4d=4u_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1=36 \\ d=36. \end{cases}$$

Vậy số đo bốn góc cần tìm là

$$36^\circ;\ 72^\circ;\ 108^\circ;\ 144^\circ.$$

2. Bài tập tự luận

BÀI 1. Giữa các số 10 và 64 hãy đặt thêm 17 số nữa để được một cấp số cộng.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{cases} u_1=10 \\ u_{19}=64 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1=10 \\ u_1+18d=64 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1=10 \\ d=3. \end{cases}$$

Vậy 17 số đặt thêm giữa các số 10 và 64 để được một cấp số cộng là

$$13;\ 16;\ 19;\ 22;\ 25;\ 28;\ 31;\ 34;\ 37;\ 40;\ 43;\ 46;\ 49;\ 52;\ 55;\ 58;\ 61.$$

BÀI 2. Tổng ba số hạng liên tiếp của một cấp số cộng bằng 2 và tổng các bình phương của ba số đó bằng $\dfrac{14}{9}$. Xác định ba số đó và tính công sai của cấp số cộng.

Lời giải.

Ta có hệ

$$\begin{cases} u_k+u_{k+1}+u_{k+2}=2\\ u_k^2+u_{k+1}^2+u_{k+2}^2=\dfrac{14}{9}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_k+u_k+d+u_k+2d=2\\ u_k^2+(u_k+d)^2+(u_k+2d)^2=\dfrac{14}{9}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3u_k+3d=2\\ 3u_k^2+6u_kd+5d^2=\dfrac{14}{9}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_k=1\\ d=-\dfrac{1}{3}\end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} u_k=\dfrac{1}{3}\\ d=\dfrac{1}{3}.\end{cases}$$

Vậy ba số hạng liên tiếp của cấp số cộng thỏa yêu cầu bài toán $1;\dfrac{2}{3};\dfrac{1}{3}$ ứng với $d=-\dfrac{1}{3}$ hoặc $\dfrac{1}{3};\dfrac{2}{3};1$ ứng với $d=\dfrac{1}{3}$.

BÀI 3. Một cấp số cộng có 7 số hạng với công sai d dương và số hạng thứ tư bằng 11. Hãy tìm các số hạng còn lại của cấp số cộng đó, biết hiệu của số hạng thứ ba và số hạng thứ năm bằng 6.

Lời giải.

Gọi số hạng đầu của cấp số cộng là u_1, công sai d. Vì số hạng thứ tư của cấp số cộng bằng 11 nên ta có $u_4=11$.
Do d dương nên $u_5>u_3$.
Vì hiệu của số hạng thứ ba và số hạng thứ năm bằng 6 nên ta có $u_5-u_3=6$.
Ta có

$$\begin{cases} u_4=11\\ u_5-u_3=6\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1+3d=11\\ (u_1+4d)-(u_1+2d)=6\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1+3\cdot 3=11\\ d=3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1=2\\ d=3.\end{cases}$$

Vậy các số hạng còn lại của cấp số cộng là $u_1=2$; $u_2=5$; $u_4=11$; $u_6=17$; $u_7=20$.

BÀI 4. Tìm bốn số hạng liên tiếp của một cấp số cộng, biết rằng:

a) Tổng của chúng bằng 10 và tổng bình phương bằng 70.

b) Tổng của chúng bằng 22 và tổng bình phương bằng 66.

c) Tổng của chúng bằng 36 và tổng bình phương bằng 504.

d) Chúng có tổng bằng 20 và tích của chúng bằng 384.

e) Tổng của chúng bằng 20, tổng nghịch đảo của chúng bằng $\dfrac{25}{24}$ và các số này là những số nguyên.

f) Nó là số đo của một tứ giác lồi và góc lớn nhất gấp 5 lần góc nhỏ nhất.

Lời giải.

a) Gọi bốn số hạng liên tiếp của cấp số cộng là $x-3d$; $x-d$; $x+d$, $x+3d$ trong đó $2d$ là công sai.
Theo đề bài ta có

$$\begin{cases} (x-3d)+(x-d)+(x+d)+(x+3d)=10\\ (x-3d)^2+(x-d)^2+(x+d)^2+(x+3d)^2=70\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x=10\\ 4x^2+20d^2=70\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{5}{2}\\ 4\cdot\left(\dfrac{5}{2}\right)^2+20d^2=70\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{5}{2}\\ d^2=\dfrac{9}{4}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{5}{2}\\ d=\pm\dfrac{3}{2}.\end{cases}$$

Vậy bốn số hạng liên tiếp của cấp số cộng là -2; 1; 4; 7.

b) Gọi bốn số hạng liên tiếp của cấp số cộng là $x-3d$; $x-d$; $x+d$; $x+3d$ trong đó $2d$ là công sai.
Theo đề bài ta có

$$\begin{cases} (x-3d)+(x-d)+(x+d)+(x+3d)=22\\ (x-3d)^2+(x-d)^2+(x+d)^2+(x+3d)^2=66\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x=22\\ 4x^2+20d^2=66\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{11}{2}\\ 4\cdot\left(\dfrac{11}{2}\right)^2+20d^2=66\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{11}{2}\\ d^2=\dfrac{-11}{4}\ \text{(loại)}.\end{cases}$$

Vậy không tồn tại bốn số hạng liên tiếp của cấp số cộng thỏa mãn yêu cầu đề bài.

c) Gọi bốn số hạng liên tiếp của cấp số cộng là $x-3d$; $x-d$; $x+d$; $x+3d$ trong đó $2d$ là công sai.
Theo đề bài ta có

$$\begin{cases}(x-3d)+(x-d)+(x+d)+(x+3d)=36\\(x-3d)^2+(x-d)^2+(x+d)^2+(x+3d)^2=504\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4x=36\\4x^2+20d^2=504\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=9\\4\cdot 9^2+20d^2=504\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=9\\d^2=9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=9\\d=\pm 3.\end{cases}$$

Vậy bốn số hạng liên tiếp của cấp số cộng là 0; 6; 12; 18.

d) Gọi bốn số hạng liên tiếp của cấp số cộng là $x-3d$; $x-d$; $x+d$; $x+3d$ trong đó $2d$ là công sai.
Theo đề bài ta có

$$\begin{cases}(x-3d)+(x-d)+(x+d)+(x+3d)=20\\(x-3d)(x-d)(x+d)(x+3d)=384\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=5\\(x^2-d^2)(x^2-9d^2)=384\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=5\\(25-d^2)(25-9d^2)=384\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=5\\9d^4-250d^2+241=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=5\\\left[\begin{array}{l}d^2=1\\d^2=\dfrac{241}{9}\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=5\\\left[\begin{array}{l}d=\pm 1\\d=\pm\dfrac{\sqrt{241}}{3}.\end{array}\right.\end{cases}$$

Vậy bốn số hạng liên tiếp của cấp số cộng là 2; 4; 6; 8 hoặc $5-\sqrt{241}$; $\dfrac{15-\sqrt{241}}{3}$; $\dfrac{15+\sqrt{241}}{3}$; $5+\sqrt{241}$.

e) Gọi bốn số hạng liên tiếp của cấp số cộng là $x-3d$; $x-d$; $x+d$; $x+3d$ trong đó $2d$ là công sai trong đó $2d\in\mathbb{Z}$.
Theo đề bài ta có

$$\begin{cases}(x-3d)+(x-d)+(x+d)+(x+3d)=20\\\dfrac{1}{x-3d}+\dfrac{1}{x-d}+\dfrac{1}{x+d}+\dfrac{1}{x+3d}=\dfrac{25}{24}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4x=20\\\dfrac{1}{5-3d}+\dfrac{1}{5-d}+\dfrac{1}{5+d}+\dfrac{1}{5+3d}=\dfrac{25}{24}\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=5\\\dfrac{10}{25-9d^2}+\dfrac{10}{25-d^2}=\dfrac{25}{24}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=5\\9d^4-250d^2+241=0\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=5\\\left[\begin{array}{l}d^2=1\\d^2=\dfrac{241}{9}\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=5\\\left[\begin{array}{l}d=\pm 1\ \text{(thỏa mãn)}\\d=\pm\dfrac{\sqrt{241}}{3}\ \text{(loại vì } 2d\in\mathbb{Z}).\end{array}\right.\end{cases}$$

Vậy bốn số hạng nguyên liên tiếp của cấp số cộng là 2; 4; 6; 8.

f) Gọi bốn số hạng liên tiếp của cấp số cộng xếp theo thứ tự tăng dần là $x-3d$; $x-d$; $x+d$; $x+3d$ trong đó $2d>0$ là công sai.
Theo đề bài ta có

$$\begin{cases}(x-3d)+(x-d)+(x+d)+(x+3d)=360^\circ\\x+3d=5(x-3d)\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}4x=360^\circ\\4x=18d\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=90^\circ\\4\cdot 90^\circ=18d\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=90^\circ\\d=20^\circ.\end{cases}$$

Vậy bốn góc của tứ giác lồi lần lượt là 30°; 70°; 110°; 150°.

3 Các bài toán thực tế

Các bài toán thực tế về cấp số cộng có thể được giải bằng cách sử dụng công thức của cấp số cộng. Công thức của cấp số cộng là: $u_n=u_1+(n-1)d$. Trong đó:

- u_n là số hạng thứ n của cấp số cộng.
- u_1 là số hạng đầu tiên của cấp số cộng.
- d là công sai của cấp số cộng.
- Một số công thức thường gặp:

- $u_n = \dfrac{u_{n-1} + u_{n+1}}{2} = u_1 + (n-1)d$.
- $S_n = \dfrac{(u_1 + u_n) \cdot n}{2} = \dfrac{2u_1 + (n-1)d}{2} \cdot n$.

1. Ví dụ minh hoạ

VÍ DỤ 1. Một người có một khoản tiền gửi ngân hàng với lãi suất 10% /năm theo hình thức lãi đơn. Nếu sau 5 năm người đó nhận được tổng số tiền là 550 triệu đồng thì số tiền gửi ban đầu của người đó là bao nhiêu?

Lời giải.

Gọi x là số tiền gửi ban đầu của người đó ($x > 0$).
Sau 5 năm, số tiền nhận được bằng số tiền gốc cộng với lãi suất:

$$x + 0{,}1x \times 5 = 1{,}5x.$$

Theo đề bài, tổng số tiền nhận được sau 5 năm là 550 triệu đồng, do đó ta có phương trình:

$$1{,}5x = 550.$$

Giải phương trình ta có:

$$x = \frac{550}{1{,}5} \approx 366{,}67.$$

Vậy số tiền gửi ban đầu của người đó là 366,67 triệu đồng.

VÍ DỤ 2. Bạn An muốn mua một món quà tặng mẹ nhân ngày mùng 8/3. Bạn quyết định tiết kiệm từ ngày 1/2/2017 đến hết ngày 6/3/2017. Ngày đầu An có 5 000 đồng, kể từ ngày thứ hai số tiền An tiết kiệm được ngày sau cao hơn ngày trước mỗi ngày 1 000 đồng. Tính số tiền An tiết kiệm được để mua quà tặng mẹ.

Lời giải.

Tính số ngày mà An tiết kiệm được từ ngày 1/2/2017 đến hết ngày 6/3/2017:
Số ngày từ ngày 1/2/2017 đến hết ngày 28/2/2017 là 28 ngày.
Số ngày từ ngày 1/3/2017 đến hết ngày 6/3/2017 là 6 ngày.
Vậy An tiết kiệm được $28 + 6 = 34$ ngày.
Gọi u_n là số tiền An tiết kiệm được vào ngày thứ n kể từ ngày 1/2/2017.
Theo đề ta có $u_1 = 5\,000$ đồng.
Vì ngày sau An tiết kiệm được nhiều hơn ngày trước mỗi ngày 1 000 đồng nên $u_n = u_{n-1} + 1\,000$, với $n \geq 2$.
Vậy (u_n) là một cấp số cộng với $u_1 = 5\,000$ và công sai $d = 1\,000$.
Tổng số tiền An tiết kiệm được trong 34 ngày là:

$$S_{34} = \frac{n}{2}(2u_1 + 33d) = \frac{34}{2}(2 \cdot 5\,000 + 33 \cdot 1\,000) = 731\,000.$$

Vậy số tiền An tiết kiệm được để mua quà tặng mẹ là 731 000 đồng.

VÍ DỤ 3. Một hội đồng quản trị quyết định tăng lương cho nhân viên hàng năm theo tỷ lệ cố định. Ví dụ, lương của một nhân viên được tăng thêm 5% so với năm trước. Hỏi nếu lương của một nhân viên là 10 triệu đồng/năm vào năm nay, thì lương của nhân viên đó sẽ là bao nhiêu vào năm thứ 5?

Lời giải.

Theo giả thiết, lương của nhân viên được tăng thêm 5 % so với năm trước đó.

- Vậy lương của nhân viên vào năm thứ 2 sẽ là $10 \cdot (1 + 0{,}05) = 10{,}5$ triệu đồng/năm.
- Tương tự, lương của nhân viên vào năm thứ 3 sẽ là $10{,}5 \cdot (1 + 0{,}05) = 11{,}025$ triệu đồng/năm.
- Lương của nhân viên vào năm thứ 4 sẽ là $11{,}025 \cdot (1 + 0{,}05) = 11{,}57625$ triệu đồng/năm.
- Cuối cùng, lương của nhân viên vào năm thứ 5 sẽ là $11{,}57625 \cdot (1 + 0{,}05) = 12{,}1550625$ triệu đồng/năm.

Vậy lương của nhân viên đó vào năm thứ 5 sẽ là 12,1550625 triệu đồng/năm.
Chú ý: Lương của nhân viên đó vào năm thứ 5 sẽ là $u_5 = u_1 + 4d = 10 + 4 \cdot 10 \cdot 0{,}05 = 12$ triệu đồng chỉ đúng trong trường hợp lương của một nhân viên được tăng thêm 5% so với năm đầu tiên.

VÍ DỤ 4. Hùng đang tiết kiệm để mua một cây guitar. Trong tuần đầu tiên, anh ta để dành 42 đô la, và trong mỗi tuần tiết theo, anh ta đã thêm 8 đô la vào tài khoản tiết kiệm của mình. Cây guitar Hùng cần mua có giá 400 đô la. Hỏi vào tuần thứ bao nhiêu thì anh ấy có đủ tiền để mua cây guitar đó?

Lời giải.

Gọi n là số tuần anh ta đã thêm 8 đô la vào tài khoản tiết kiệm của mình.
Số tiền anh ta tiết kiệm được sau n tuần đó là $S = 42 + 8n$.
Theo bài ra $S = 42 + 8n \geq 400 \Leftrightarrow n \geq 44,75 \Rightarrow n = 45$.
Vậy kể cả tuần đầu thì tuần thứ 46 anh ta có đủ tiền để mua cây guitar đó.

VÍ DỤ 5. Hàng tháng ông An gửi vào ngân hàng một số tiền như nhau là 5 000 000 đồng (vào ngày đầu mỗi tháng) với lãi suất 0,5% một tháng, biết tiền lãi của tháng trước được nhập vào tiền gốc của tháng sau. Hỏi sau 36 tháng ông An nhận được số tiền vốn và lãi là bao nhiêu? (làm tròn đến hàng đơn vị).

Lời giải.

Gọi a là số tiền ông An gửi vào hàng tháng, r là lãi suất trên một tháng và P_n là số tiền vốn và lãi ông An nhận được sau n tháng.

- Sau một tháng, ông An có số tiền là $P_1 = a + ar = a(1+r)$.
- Đầu tháng thứ hai, ông An có số tiền là $P_1 + a = a(1+r) + a$.
- Sau hai tháng, ông An có số tiền là $P_2 = a(1+r) + a + [a(1+r)+a]\,r = a\left[(1+r)^2 + (1+r)\right]$.
- Cuối tháng thứ 36, ông An có số tiền là

$$\begin{aligned} P_{36} &= a\left[(1+r)^{36} + (1+r)^{35} + \ldots + (1+r)\right] \\ &= a(1+r)\frac{(1+r)^{36}-1}{r} \\ &= 5000000 \cdot (1+0{,}005) \cdot \frac{(1+0{,}005)^{36}-1}{0{,}005} \\ &\approx 197\,663\,927 \quad \text{(đồng)}. \end{aligned}$$

VÍ DỤ 6 (VDT). Một xưởng có đăng tuyển công nhân với đãi ngộ về lương như sau: Trong quý đầu tiên thì xưởng trả là 6 triệu đồng/quý và kể từ quý thứ 2 sẽ tăng lên 0,5 triệu cho 1 quý. Hỏi với đãi ngộ trên thì sau 5 năm làm việc tại xưởng, tổng số lương của công nhân đó là bao nhiêu?

Lời giải.

Gọi u_n (triệu đồng) là số lương của công nhân trong quý thứ n.
Theo đề:
Quý đầu: $u_1 = 6$ triệu.
Các quý tiếp theo: $u_{n+1} = u_n + 0,5$ với $\forall n \geq 1$.
Mức lương của công nhân mỗi quý là 1 số hạng của dãy số u_n. Mặt khác, lương của quý sau hơn lương quý trước là $0,5$ triệu nên dãy số u_n là một cấp số cộng với công sai $d = 0{,}5$.
Ta biết 1 năm sẽ có 4 quý nên 5 năm sẽ có $5 \cdot 4 = 20$ quý. Theo yêu cầu của đề bài ta cần tính tổng của 20 số hạng đầu tiên của cấp số cộng (u_n).
Lương tháng quý 20 của công nhân: $u_{20} = 6 + (20-1) \cdot 0{,}5 = 15{,}5$ triệu đồng.
Tổng số lương của công nhân nhận được sau 5 năm làm việc tại xưởng: $S_{12} = 20 \cdot (6 + 15,5)2 = 215$ (triệu đồng).

2. Câu hỏi trắc nghiệm

CÂU 1. Một công ty đang cần tuyển dụng thêm nhân viên. Công ty quyết định tăng số lượng nhân viên hàng tháng theo cấp số cộng. Nếu công ty đã có 20 nhân viên và quyết định tăng thêm 2 nhân viên hàng tháng, hỏi sau bao nhiêu tháng công ty sẽ có 50 nhân viên?

A 19 tháng. **B** 16 tháng. **C** 36 tháng. **D** 26 tháng.

Lời giải.

Để giải bài toán này, ta có thể sử dụng công thức cấp số cộng:

$$a_n = a_1 + (n-1) \times d.$$

Trong đó a_1 là số lượng nhân viên ban đầu, d là số lượng nhân viên tăng hàng tháng và n là số tháng.
Ta cần tìm số tháng n để công ty có được 50 nhân viên. Thay các giá trị vào công thức cấp số cộng ta có:

$$50 = 20 + (n-1) \times 2.$$

Suy ra:

$$n = \frac{50-20}{2} + 1 = 16.$$

Vậy sau 16 tháng kể từ khi công ty quyết định tăng số lượng nhân viên hàng tháng theo cấp số cộng, công ty sẽ có được 50 nhân viên.

Chọn đáp án B .... □

CÂU 2. Một người đang tăng cường luyện tập thể thao hàng ngày. Anh ta quyết định tăng mức độ luyện tập theo cấp số cộng hàng tuần. Nếu anh ta bắt đầu với mức luyện tập 30 phút mỗi ngày và tăng thêm 5 phút mỗi ngày, hỏi anh ta sẽ luyện tập được bao lâu để đạt được mức luyện tập 60 phút mỗi ngày?

(A) 16 ngày. **(B)** 6 ngày. (C) 9 ngày. (D) 7 ngày.

Lời giải.

Gọi n là số ngày liên tiếp mà người đó tăng mức độ luyện tập. Theo đó, mức độ luyện tập của người đó sau n ngày là:

$$30 + 5n\,(\text{phút}).$$

Vì để đạt được mức luyện tập 60 phút mỗi ngày nên:

$$30 + 5n = 60.$$

Từ đó suy ra:

$$n = \frac{60 - 30}{5} = 6.$$

Vậy người đó cần luyện tập liên tiếp trong 6 ngày để đạt được mức luyện tập 60 phút mỗi ngày.

Chọn đáp án (B) .... □

CÂU 3. Nếu một công ty công nghệ mới thành lập có số lượng người dùng ban đầu là 10 000 và mỗi tháng tăng thêm cố định 5 000 lượng người dùng, thì sau bao lâu có số lượng người dùng là 1 triệu.

(A) 198 tháng. (B) 197 tháng. (C) 18 tháng. (D) 98 tháng.

Lời giải.

Ta cần tính số tháng n theo công thức sau:

$$10\,000 + 5\,000n = 1\,000\,000.$$

$$\Rightarrow n = \frac{1\,000\,000 - 10\,000}{5\,000} = 198.$$

Vậy sau khoảng 198 tháng (khoảng 16 năm và 6 tháng), công ty sẽ đạt được 1 triệu người dùng.

Chọn đáp án (A) .... □

CÂU 4. Một nhà đầu tư đang đầu tư vào một quỹ đầu tư với mức lợi nhuận cố định hàng năm. Nếu nhà đầu tư đầu tư vào quỹ đầu tư với số tiền ban đầu là 20 triệu đồng và mức lợi nhuận hàng năm là 10%, hỏi số tiền nhà đầu tư sẽ nhận được sau 7 năm?

(A) 34 triệu đồng. (B) 14 triệu đồng. (C) 30 triệu đồng. (D) 39 triệu đồng.

Lời giải.

Với số tiền ban đầu là 20 triệu đồng và mức lợi nhuận hàng năm là 10%, ta có thể tính được số tiền nhà đầu tư sẽ nhận được sau 1 năm, sau đó sử dụng cấp số cộng để tính số tiền nhà đầu tư sẽ nhận được sau 7 năm.

Số tiền nhà đầu tư sẽ nhận được sau 1 năm là:

20 triệu đồng $\times$ 10% $=$ 2 triệu đồng

Số tiền nhà đầu tư sẽ nhận được sau 7 năm là:

2 triệu đồng $\times$ 7 năm $+$ 20 triệu đồng $=$ 34 triệu đồng

Vậy sau 7 năm, nhà đầu tư sẽ nhận được tổng cộng 34 triệu đồng.

Chọn đáp án (A) .... □

CÂU 5. Một công ty sản xuất bánh kẹo tăng sản lượng sản phẩm của mình lên mỗi tháng. Nếu sản lượng ban đầu là 1 000 sản phẩm, một sản phẩm lợi nhuận 1 USD và tăng thêm 200 sản phẩm mỗi tháng, thì sau bao nhiêu tháng lợi nhuận công ty 1 triệu đô.

(A) 8 000 tháng. (B) 7 000 tháng. (C) 9 000 tháng. **(D)** 5 000 tháng.

Lời giải.

Để tính thời gian công ty đạt được lợi nhuận 1 triệu đô, chúng ta cần biết lợi nhuận của công ty đạt được bao nhiêu sau mỗi tháng.

Giả sử sản lượng ban đầu là 1 000 sản phẩm một sản phẩm lợi nhuận 1 USD và tăng thêm 200 sản phẩm mỗi tháng. Ta có thể tính được lợi nhuận của công ty sau mỗi tháng như sau:

- Tháng 1: $1\,000 \times 1 = 1000$ USD.
- Tháng 2: $(1\,000 + 200) \times 1 = 1200$ USD.
- Tháng 3: $(1\,000 + 2 \times 200) \times 1 = 1\,400$ USD.
- Tháng 4: $(1\,000 + 3 \times 200) \times 1 = 1\,600$ USD.

- Tháng n: $(1\,000 + (n-1) \times 200) \times 1 = (n-1) \times 200 + 1\,000$ USD.

Để tính thời gian để công ty đạt được lợi nhuận 1 triệu đô, ta giải phương trình sau:
$(n-1) \times 200 + 1\,000 = 10^6$
$\Rightarrow (n-1) \times 200 = (10^6 - 1000)$
$\Rightarrow n - 1 = \frac{10^6 - 1\,000}{200}$
$\Rightarrow n = \frac{10^6 - 1\,000}{200} + 1$
$\Rightarrow n = 5\,001$
Vậy sau 5 000 tháng, công ty sẽ đạt được lợi nhuận 1 triệu đô.
Chọn đáp án D ....□

CÂU 6. Một công ty tăng lương cho nhân viên hàng năm bằng cách thêm một số tiền cố định vào lương của họ. Ví dụ: Nếu lương ban đầu của một nhân viên là 10 triệu đồng và công ty tăng lương 2 triệu đồng mỗi năm, thì lương của nhân viên sẽ là bao nhiêu nếu làm cho công ty 19 năm?

A 16 triệu đồng. **B** 26 triệu đồng. **C** 28 triệu đồng. **D** 46 triệu đồng.

Lời giải.

Do tăng lương cho nhân viên hàng năm bằng cách thêm một số tiền cố định nên ta có thể sử dụng công thức tính số hạng thứ n của cấp số cộng $a_n = a_1 + (n-1)d$.
Ở bài toán này, ta có:
$a_1 = 10$ (triệu đồng) là lương ban đầu của nhân viên.
$d = 2$ (triệu đồng) là công sai của cấp số cộng.
$n = 19$ là số thứ tự của số hạng.
Ta thay các giá trị này vào công thức trên để tính lương của nhân viên sau 19 năm:
$a_{19} = 10 + (19-1)2 \Rightarrow a_{19} = 46$ (triệu đồng).
Vậy lương của nhân viên sau 19 năm làm việc cho công ty là 46 triệu đồng.
Chọn đáp án D ....□

CÂU 7. Tài sản thường bị khấu hao khiến chúng có tuổi thọ hữu ích giới hạn. Ví dụ, nếu một công ty mua một chiếc xe tải với giá 35 000 đô la và nó bị khấu hao với tốc độ không đổi là 700 đô la mỗi tháng, thì sau bao lâu giá trị của nó còn 5 000 đô la.

A $x = 23$ tháng. **B** $x = 43$ tháng. **C** $x = 41$ tháng. **D** $x = 40$ tháng.

Lời giải.

Cách 1: Thời gian để giá trị của chiếc xe tải trên được khấu hao xuống còn 5.000 đô la có thể được tính bằng cách sử dụng công thức sau:
Giá trị khởi đầu của chiếc xe tải là 35 000 Giá trị cuối cùng của chiếc xe tải là 5 000 Tốc độ khấu hao tương ứng 700/tháng
Để tìm ra thời gian cần thiết để giá trị của chiếc xe tải giảm xuống còn 5.000, ta cần tìm số tháng được khấu hao.
Giả sử số tháng cần khấu hao là x tháng.
Giá trị của chiếc xe tải sau x tháng khấu hao được tính bằng:
$35\,000 - 700x = 5\,000$.
Giải phương trình trên ta có: $x \approx 43$ tháng
Vì vậy, sau 43 tháng, giá trị của chiếc xe tải sẽ giảm xuống còn 5 000. Ngoài ra ta có thể giải theo cấp số cộng như sau:
Cách 2: Ta có thể sử dụng cộng thức tính số hạng thứ n của cấp số cộng $a_n = a_1 + (n-1)d$

- $u_1 = 35\,000$ (đô la) là giá trị ban đầu của xe tải.
- $d = -700$ (đô la) là công sai của cấp số cộng (âm vì giá trị xe tải giảm).
- $a_n = 5\,000$ (đô la) là giá trị cuối cùng của xe tải.

Ta thay các giá trị này vào công thức trên để tính số tháng mà xe tải bị khấu hao đến 5 000 đô la:

$$5\,000 = 35\,000 + (n-1)(-700) \Rightarrow n = 43{,}857.$$

Vậy sau khoảng 43,857 tháng, tức là khoảng 3 năm và 7 tháng, giá trị của xe tải sẽ còn khoảng 5 000 đô la.
Chọn đáp án B ....□

CÂU 8. Các thiết bị điện tử như máy tính, điện thoại, hoặc máy ảnh thường bị khấu hao nhanh chóng do sự phát triển của công nghệ mới. Ví dụ, nếu một người mua một máy tính Macbook với giá 2 000 đô la và nó bị khấu hao với tốc độ không đổi là 100 đô la mỗi tháng, thì giá trị của Macbook còn lại 1 000 đô la sau bao nhiêu tháng?

A $x = 12$ tháng. **B** $x = 43$ tháng. **C** $x = 11$ tháng. **D** $x = 10$ tháng.

Lời giải.

Để giải bài toán này, ta có thể sử dụng công thức tính số hạng thứ n của cấp số cộng $a_n = a + (n-1)d$.
Ở bài toán này, ta có:
$a = 2\,000$ (đô la) là giá trị ban đầu của máy tính Macbook.
$d = -100$ (đô la) là công sai của cấp số cộng (âm vì giá trị máy tính giảm).
$a_n = 1\,000$ (đô la) là giá trị cuối cùng của máy tính Macbook.
Ta thay các giá trị này vào công thức trên để tính số tháng mà máy tính bị khấu hao đến 1 000 đô la:

$$1\,000 = 2\,000 + (n-1)(-100) \Rightarrow n = 11.$$

Vậy sau 11 tháng, giá trị của máy tính Macbook sẽ còn 1 000 đô la.
Chọn đáp án C .... □

CÂU 9. Ban đầu có 1m^2 bèo sinh sôi trên mặt hồ biết tốc độ sinh sôi ngày sau hơn ngày trước $0{,}5\text{m}^2$. Biết diện tích mặt hồ nước là 120m^2 hỏi sau bao lâu bèo phủ đầy mặt hồ?

A $x = 120$ tháng. **B** $x = 143$ tháng. **C** $x = 238$ tháng. **D** $x = 130$ tháng.

Lời giải.

Giả sử sau x ngày, diện tích của bèo phủ đầy mặt hồ là Sm^2.
Theo đề bài, ta biết được rằng:

- Tốc độ sinh sôi của bèo là $0{,}5\text{m}^2/\text{ngày}$.
- Ban đầu, diện tích của bèo là $1\ \text{m}^2$.
- Diện tích mặt hồ là 120m^2.

Vậy ta có phương trình sau đây: $S = 1 + 0{,}5x$.
Điều kiện để bèo phủ đầy mặt hồ là $S = 120$.
$1 + 0{,}5x = 120$ hay $0{,}5x = 119 \Rightarrow x = 238$ ngày.
Vậy sau 238 ngày, bèo sẽ phủ đầy mặt hồ.
Chọn đáp án C .... □

CÂU 10. Nhà hát lớn Dạ Cỗ Vĩ Lan ở An Cư có hàng ghế đầu kí hiệu dãy A là 50 chỗ hàng ghế, sau dãy B là 48 chỗ và như thế hàng sau ít hơn hàng trước 2 ghế, biết hàng cuối cùng có 10 ghế. Tính tổng số dãy ghế và tổng số chỗ ngồi?

A 21 dãy và 630 chỗ. **B** 20 dãy và 630 chỗ. **C** 11 dãy và 630 chỗ. **D** 21 dãy và 930 chỗ.

Lời giải.

Gọi n là số dãy ghế. Theo đề bài, ta có:

$$\begin{cases} S = 50 + 48 + \cdots + 10 = \dfrac{50+10}{2}n \\ S = \dfrac{2.50 + (n-1)\cdot(-2)}{2}n \end{cases}$$

Từ phương trình đầu tiên, ta có:

$$S = 50 + 48 + \cdots + 10 = \frac{50+10}{2}n = 30n.$$

Từ phương trình thứ hai, ta có:

$$S = \frac{2\cdot 50 + (n-1)\cdot(-2)}{2}n = (50 - n + 1)n = (51-n)n.$$

Do đó, ta có:

$$30n = (51-n)n \Rightarrow n = 21.$$

Vậy $n = 21$ dãy ghế và $30 \cdot 21 = 630$ ghế.

Chọn đáp án A .... □

CÂU 11. Người ta trồng cây theo dạng một hình tam giác như sau: hàng thứ nhất trồng 1 cây, hàng thứ hai trồng 3 cây, hàng thứ ba trồng 5 cây,... cứ tiếp tục trồng như thế cho đến khi hết số cây là 6 561. Số hàng cây được trồng là bao nhiêu?

A 81 hàng. **B** 16 hàng. **C** 100 hàng. **D** 89 hàng.

Lời giải.

Để giải bài toán này, ta cần tìm số hàng cây được trồng cho đến khi tổng số cây là 2023.

- Hàng thứ nhất trồng 1 cây.
- Hàng thứ hai trồng 3 cây (1 cây +2 cây).
- Hàng thứ ba trồng 5 cây (1 cây +2 cây +2 cây).
- ...

Vậy ta thấy rằng số cây trồng trong hàng thứ n là $(n-1)\cdot 2+1$.
Số cây được trồng trong n hàng đầu tiên là:

$$1+3+5+...+(2n-1)=n^2.$$

Để tìm số hàng cây được trồng cho đến khi tổng số cây là 6561, ta giải phương trình sau:
$n^2=6\,561$. Vậy số hàng cây được trồng là 81 hàng.

Chọn đáp án A .... □

CÂU 12. Người ta thả một 1 m^2 lá bèo vào một hồ nước. Kinh nghiệm cho thấy sau x giờ, bèo sẽ sinh sôi kín cả mặt hồ 500 m^2. Biết rằng sau mỗi giờ, lượng lá bèo tăng thêm 0,5 m^2 và tốc độ tăng không đổi tìm x?

A 888 giờ. **B** 777 giờ. **C** 999 giờ. **D** 700 giờ.

Lời giải.

Bài toán này có thể giải bằng cách sử dụng công thức tăng trưởng của bèo. Giả sử lượng lá bèo ban đầu là 1 m^2, sau mỗi giờ lượng lá bèo tăng thêm 0,5 m^2. Sau x giờ, lượng lá bèo đã phủ kín mặt hồ 500 m^2. Ta có thể viết phương trình sau:

$$1+0{,}5x=500.$$

Giải phương trình ta được:

$$x=\frac{500-1}{0{,}5}\approx 999.$$

Vậy sau khoảng 999 giờ (khoảng 41 ngày), lượng lá bèo sẽ phủ kín mặt hồ 500 m^2.

Chọn đáp án C .... □

Bài 7. CẤP SỐ NHÂN

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa

Cấp số nhân là một dãy số (hữu hạn hoặc vô hạn) mà trong đó, kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng đều bằng tích một số đứng ngay trước nó với một số q không đổi, nghĩa là:

$$u_n=u_{n-1}\cdot q \text{ với } \forall n\in\mathbf{N}, n\geq 2$$

Số q được gọi là công bội của cấp số nhân

2. Số hạng tổng quát của cấp số nhân

Nếu cấp số nhân (u_n) có số hạng đầu là u_1 và công bội q thì số hạng tổng quát u_n của nó được xác định bởi công thức:

$$u_n=u_1\cdot q^{n-1}, n\geq 2$$

3. Tổng của n số hạng đầu tiên của cấp số nhân

Giả sử (u_n) là cấp số nhân có công bội $q\neq 1$. Đặt $S_n=u_1+u_2+\cdots+u_n$, khi đó

$$S_n=u_1\cdot\frac{1-q^n}{1-q}.$$

Khi $q=1$ thì $S_n=n\cdot u_1$.

- Công bội của cấp số nhân: $q=\sqrt[n-1]{\frac{u_n}{u_1}}$.
- Số hạng đầu tiên của cấp số nhân: $u_1=\frac{u_n}{q^{n-1}}$.
- a,b,c là ba số hạng liên tiếp cấp số nhân thì $a\cdot c=b^2$.

B. CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

1 Nhận diện cấp số nhân, công bội q

Để nhận diện (chứng minh) mỗi dãy số là cấp số nhân, ta làm như sau:
Chứng minh $u_{n+1} = u_n q$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ và q là một số không đổi.
Nếu $u_n \neq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ thì ta lập tỉ số $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = k$.

- Nếu k là hằng số thì (u_n) là cấp số nhân với công bội $q = k$.
- Nếu k phụ thuộc vào n thì (u_n) không phải là cấp số nhân.

Để chứng minh dãy (u_n) không phải là một cấp số nhân. Khi đó, ta chỉ cần chỉ ra ba số hạng liên tiếp không tạo thành một cấp số nhân, chẳng hạn $\dfrac{u_3}{u_2} \neq \dfrac{u_2}{u_1}$.
Để chứng minh ba số a, b, c theo thứ tự đó lập được một cấp số nhân, thì ta chứng minh $ac = b^2$ hoặc $|b| = \sqrt{ac}$.

1. Ví dụ minh hoạ

VÍ DỤ 1. Dãy số $1; 1; 1; 1; \ldots$ có phải là một cấp số nhân hay không?

Lời giải.

Dễ thấy $\dfrac{u_2}{u_1} = \dfrac{u_3}{u_2} = \ldots = 1$ là một số không đổi.
Do đó dãy số $1; 1; 1; 1; \ldots$ là một cấp số nhân.

VÍ DỤ 2. Dãy số $u_n = 3^n$ có phải là một cấp số nhân không? Nếu có, hãy tìm công bội của cấp số nhân đó.

Lời giải.

Ta có $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{3^{n+1}}{3^n} = \dfrac{3^n \cdot 3}{3^n} = 3$ là số không đổi nên (u_n) là cấp số nhân với công bội $q = 3$.

VÍ DỤ 3. Dãy số $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = \dfrac{9}{u_n} \end{cases}$ có phải là một cấp số nhân không? Nếu có, hãy tìm công bội của cấp số nhân đó.

Lời giải.

Xét dãy số $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = \dfrac{9}{u_n} \end{cases}$ có $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{9}{u_n} : \dfrac{9}{u_{n-1}} = \dfrac{u_{n-1}}{u_n} \Rightarrow u_{n+1} = u_{n-1}, \forall n \geq 2$.

Do đó ta có $\begin{cases} u_1 = u_3 = u_5 = \ldots = u_{2n+1} = \ldots \quad (1) \\ u_2 = u_4 = u_6 = \ldots = u_{2n} = \ldots \quad (2). \end{cases}$

Theo đề bài ta có $u_1 = 3 \Rightarrow u_2 = \dfrac{9}{u_1} = 3$ (3).
Từ $(1), (2)$ và (3) suy ra $u_1 = u_2 = u_3 = u_4 = \ldots = u_{2n} = u_{2n+1} = \ldots$.
Do đó (u_n) là một cấp số nhân với công bội $q = 1$.

VÍ DỤ 4. Cho (u_n) là cấp số nhân có công bội $q \neq 0, u_1 \neq 0$. Chứng minh rằng dãy số (v_n) với $v_n = u_n u_{2n}$ cũng là một cấp số nhân.

Lời giải.

Ta có $\dfrac{v_n}{v_{n-1}} = \dfrac{u_n u_{2n}}{u_{n-1} u_{2(n-1)}} = \dfrac{u_1 q^{n-1} \cdot u_1 q^{2n-1}}{u_1 q^{n-2} \cdot u_1 q^{2n-3}} = q^3$. Do đó (v_n) là một cấp số nhân với công bội là q^3.

VÍ DỤ 5 (VDT). Cho dãy số (u_n) được xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = 4u_n + 9 \end{cases}, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Chứng minh rằng dãy số (v_n) xác định bởi $v_n = u_n + 3, \forall n \in \mathbb{N}^*$ là một cấp số nhân. Hãy xác định số hạng đầu và công bội của cấp số nhân đó.

Lời giải.

Ta có $v_n = u_n + 3$ (1) và $v_{n+1} = u_{n+1} + 3$ (2).
Theo đề ta có $u_{n+1} = 4u_n + 9 \Rightarrow u_{n+1} + 3 = 4(u_n + 3)$ (3).
Thay (1) và (2) vào (3) ta được $v_{n+1} = 4v_n \Rightarrow \dfrac{v_{n+1}}{v_n} = 4, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
Suy ra (v_n) là cấp số nhân với công bội $q = 4$ và số hàng đầu $v_1 = u_1 + 3 = 2 + 3 = 5$.

2. Bài tập tự luận

BÀI 1. Dãy số $25; 5; 1; \dfrac{1}{5}; \ldots$ có phải là một cấp số nhân không? Nếu có hãy tìm công bội của cấp số nhân đó.

Lời giải.

Ta có $\dfrac{u_2}{u_1}=\dfrac{u_3}{u_2}=\ldots=\dfrac{1}{5}$ là một số không đổi.
Do đó dãy số 25; 5; 1; $\dfrac{1}{5}$; ... là một cấp số nhân với công bội $q=\dfrac{1}{5}$.

BÀI 2. Dãy số 1; n; n^2; n^3; n^4; ... (với $n>1$) có phải là một cấp số nhân không? Nếu có hãy tìm công bội của cấp số nhân đó.

Lời giải.
Ta có $\dfrac{u_2}{u_1}=\dfrac{u_3}{u_2}=\ldots=n$ (với $n>1$) là một số không đổi.
Do đó dãy số 1; n; n^2; n^3; n^4; ... (với $n>1$) là một cấp số nhân với công bội $q=n$.

BÀI 3. Cho dãy số (u_n) được xác định bởi $\begin{cases}u_1=2\\u_{n+1}=u_n^2\end{cases}$. Hỏi dãy số (u_n) có là một cấp số nhân hay không?

Lời giải.
Ta có $u_2=u_1^2=4, u_3=u_2^2=16, u_4=u_3^2=256$.
Suy ra $\dfrac{u_2}{u_1}=2$; $\dfrac{u_3}{u_2}=4$ và $\dfrac{u_4}{u_3}=16$. Vì $\dfrac{u_2}{u_1}\neq\dfrac{u_3}{u_2}\neq\dfrac{u_4}{u_3}$ nên (u_n) không là một cấp số nhân

BÀI 4. Cho dãy số (u_n), biết $u_1=2$ và $u_{n+1}=\dfrac{1}{3}u_n$. Chứng minh (u_n) là một cấp số nhân và tìm số hạng u_3.

Lời giải.
Ta có $u_{n+1}=\dfrac{1}{3}u_n\Rightarrow\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\dfrac{1}{3}$ là một số không đổi nên (u_n) là một cấp số nhân với công bội là $q=\dfrac{1}{3}$.
Do đó $u_3=u_2\cdot q=u_1\cdot q^2=2\cdot\dfrac{1}{3^2}=\dfrac{2}{9}$.

BÀI 5. Cho (u_n) là cấp số nhân có công bội $q\neq 0, u_1\neq 0$. Chứng minh rằng dãy số (v_n) với $v_n=\dfrac{u_nu_{2n+1}}{4}$ cũng là một cấp số nhân.

Lời giải.
Ta có $\dfrac{v_n}{v_{n-1}}=\dfrac{\dfrac{u_nu_{2n+1}}{4}}{\dfrac{u_{n-1}u_{2(n-1)+1}}{4}}=\dfrac{u_1q^{n-1}\cdot u_1q^{2n}}{u_1q^{n-2}\cdot u_1q^{2n-2}}=q^3$. Do đó (v_n) là một cấp số nhân với công bội là q^3.

BÀI 6. Cho dãy số (u_n) được xác định bởi $\begin{cases}u_1=3\\u_{n+1}=2u_n-2\end{cases}$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$. Chứng minh rằng dãy số (v_n) xác định bởi $v_n=2u_n-4, \forall n\in\mathbb{N}^*$ là một cấp số nhân. Hãy xác định số hạng đầu và công bội của cấp số nhân đó.

Lời giải.
Ta có $v_n=2u_n-4$ (1) và $v_{n+1}=2u_{n+1}-4$ (2).
Theo đề ta có $u_{n+1}=2u_n-2\Rightarrow 2u_{n+1}-4=2(2u_n-4)$ (3).
Thay (1) và (2) vào (3) ta được $v_{n+1}=2v_n\Rightarrow\dfrac{v_{n+1}}{v_n}=2, \forall n\in\mathbb{N}^*$.
Suy ra (v_n) là cấp số nhân với công bội $q=2$ và số hàng đầu $v_1=2u_1-4=2\cdot 3-4=2$.

3. Câu hỏi trắc nghiệm

CÂU 1. Trong các dãy số sau, dãy số nào là một cấp số nhân?

A 128; -64; 32; -16; 8; .... **B** $\sqrt{2}$; 2; 4; $4\sqrt{2}$; .... **C** 5; 6; 7; 8; .... **D** 15; 5; 1; $\dfrac{1}{5}$; ....

Lời giải.
Xét phương án 128; -64; 32; -16; 8; ....
Có $\dfrac{u_2}{u_1}=\dfrac{u_3}{u_2}=\ldots=-\dfrac{1}{2}$ là một số không đổi nên dãy số 128; -64; 32; -16; 8; ... là một cấp số nhân.
Chọn đáp án A .... □

CÂU 2. Dãy số nào sau đây **không phải** là cấp số nhân?

A 1; -1; 1; -1; .... **B** 3; 3^2; 3^3; 3^4; .... **C** a; a^3; a^5; a^7; ... $(a\neq 0)$. **D** $\dfrac{1}{\pi}$; $\dfrac{1}{\pi^2}$; $\dfrac{1}{\pi^4}$; $\dfrac{1}{\pi^6}$; ....

Lời giải.
Xét dãy $\dfrac{1}{\pi}$; $\dfrac{1}{\pi^2}$; $\dfrac{1}{\pi^4}$; $\dfrac{1}{\pi^6}$; ... có $\dfrac{u_2}{u_1}\neq\dfrac{u_3}{u_2}\left(\dfrac{1}{\pi}\neq\dfrac{1}{\pi^2}\right)$.
Do đó dãy $\dfrac{1}{\pi}$; $\dfrac{1}{\pi^2}$; $\dfrac{1}{\pi^4}$; $\dfrac{1}{\pi^6}$; ... không là một cấp số nhân.
Chọn đáp án D .... □

CÂU 3. Dãy số 1; 2; 4; 8; 16; 32; ... là một cấp số nhân với

Ⓐ Công bội là 1 và số hạng đầu tiên là 2.
B Công bội là 2 và số hạng đầu tiên là 1.
Ⓒ Công bội là 2 và số hạng đầu tiên là 2.
Ⓓ Công bội là 1 và số hạng đầu tiên là 1.

Lời giải.

Ta có $q = \dfrac{u_2}{u_1} = \dfrac{u_3}{u_2} = \ldots = 2$.

Vậy dãy số đã cho là một cấp số nhân với công bội là $q = 2$ và số hạng đầu tiên là $u_1 = 1$.

Chọn đáp án (B) .... □

CÂU 4. Cho cấp số nhân (u_n) với $u_1 = -2$ và công bội $q = -5$. Viết bốn số hạng đầu tiên của cấp số nhân.

Ⓐ -2; 10; 50; -250.
B -2; 10; -50; 250.
Ⓒ -2; -10; -50; -250.
Ⓓ -2; 10; 50; 250.

Lời giải.

Vì (u_n) là một cấp số nhân nên ta có $u_{n+1} = u_n q$.

Do đó $u_2 = u_1 q = (-2) \cdot (-5) = 10$, $u_3 = u_2 q = 10 \cdot (-5) = -50$, $u_4 = u_3 q = (-50) \cdot (-5) = 250$.

Vậy bốn số hạng đầu tiên của cấp số nhân đó là $-2; 10; -50; 250$.

Chọn đáp án (B) .... □

CÂU 5. Một cấp số nhân có hai số hạng liên tiếp là 3 và 12. Số hạng tiếp theo của cấp số nhân là

Ⓐ 15.
Ⓑ 21.
Ⓒ 36.
D 48.

Lời giải.

Một cấp số nhân có hai số hạng liên tiếp là 3 và 12, do đó ta có $q = \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{12}{3} = 4$.

Vậy số hạng tiếp theo của cấp số nhân đó là $u_{n+2} = u_{n+1} q = 12 \cdot 4 = 48$.

Chọn đáp án (D) .... □

CÂU 6. Cho cấp số nhân (u_n) có số hạng tổng quát là $u_n = \dfrac{3}{2} \cdot 5^n$. Khi đó số hạng đầu u_1 và công bội q là

Ⓐ $u_1 = \dfrac{3}{2}, q = \dfrac{1}{5}$.
Ⓑ $u_1 = \dfrac{3}{2}, q = 5$.
Ⓒ $u_1 = \dfrac{15}{2}, q = \dfrac{1}{5}$.
D $u_1 = \dfrac{15}{2}, q = 5$.

Lời giải.

Ta có $u_1 = \dfrac{3}{2} \cdot 5^1 = \dfrac{15}{2}$ và $u_2 = \dfrac{3}{2} \cdot 5^2 = \dfrac{75}{2}$.

Vì (u_n) là một cấp số nhân nên $q = \dfrac{u_2}{u_1} = \dfrac{75}{2} : \dfrac{15}{2} = 5$.

Chọn đáp án (D) .... □

CÂU 7. Trong các dãy số (u_n) cho bởi số hạng tổng quát u_n sau, dãy số nào là một cấp số nhân?

A $u_n = \dfrac{1}{3^{n-2}}$.
Ⓑ $u_n = \dfrac{n}{3^n}$.
Ⓒ $u_n = (n+2) \cdot 3^n$.
Ⓓ $u_n = n^2$.

Lời giải.

- Với $u_n = \dfrac{1}{3^{n-2}}$, ta có $q = \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{1}{3^{n-3}} : \dfrac{1}{3^{n-2}} = 3$ là một số không đổi.
  Vậy dãy số (u_n) có số hạng tổng quát $u_n = \dfrac{1}{3^{n-2}}$ là một cấp số nhân.
- Với $u_n = \dfrac{n}{3^n}$, ta có $q = \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{n+1}{3^{n+1}} : \dfrac{n}{3^n} = \dfrac{n+1}{3n}$ không phải là một số không đổi.
  Vậy dãy số (u_n) có số hạng tổng quát $u_n = \dfrac{n}{3^n}$ không là một cấp số nhân.
- Với $u_n = (n+2) \cdot 3^n$, ta có $q = \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{(n+3) \cdot 3^{n+1}}{(n+2) \cdot 3^n} = \dfrac{3(n+3)}{n+2}$ không phải là một số không đổi.
  Vậy dãy số (u_n) có số hạng tổng quát $u_n = (n+2) \cdot 3^n$ không là một cấp số nhân.
- Với $u_n = n^2$, ta có $q = \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{(n+1)^2}{n^2} = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^2$ không là một số không đổi.
  Vậy dãy số (u_n) có số hạng tổng quát $u_n = n^2$ không là một cấp số nhân.

Chọn đáp án (A) .... □

CÂU 8. Trong các dãy số (u_n) cho bởi số hạng tổng quát u_n sau, dãy số nào là một cấp số nhân?

A. $u_n = 7 - 3n$.
B. $u_n = 7 - 3^n$.
C. $u_n = \dfrac{7}{3n}$.
D. $u_n = 7 \cdot 3^n$.

Lời giải.

- Với $u_n = 7 - 3n$, ta có $q = \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{7-3(n+1)}{7-3n} = \dfrac{4-3n}{7-3n}$ không phải là một số không đổi.
  Vậy dãy số (u_n) có số hạng tổng quát $u_n = 7 - 3n$ không là một cấp số nhân.
- Với $u_n = 7 - 3^n$, ta có $q = \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{7-3^{n+1}}{7-3^n} = \dfrac{7-3\cdot 3^n}{7-3^n} = 1 - \dfrac{2\cdot 3^n}{7-3^n}$ không phải là một số không đổi.
  Vậy dãy số (u_n) có số hạng tổng quát $u_n = 7 - 3^n$ không là một cấp số nhân.
- Với $u_n = \dfrac{7}{3n}$, ta có $q = \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{7}{3(n+1)} : \dfrac{7}{3n} = \dfrac{n}{n+1}$ không phải là một số không đổi.
  Vậy dãy số (u_n) có số hạng tổng quát $u_n = \dfrac{7}{3n}$ không là một cấp số nhân.
- Với $u_n = 7 \cdot 3^n$, ta có $q = \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{7\cdot 3^{n+1}}{7\cdot 3^n} = 3$ là một số không đổi.
  Vậy dãy số (u_n) có số hạng tổng quát $u_n = 7\cdot 3^n$ là một cấp số nhân.

Chọn đáp án D .... □

CÂU 9. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. Dãy số có tất cả các số hạng bằng nhau là một cấp số nhân.
B. Dãy số có tất cả các số hạng bằng nhau là một cấp số cộng.
C. Một cấp số cộng có công sai dương là một dãy số tăng.
D. Một cấp số nhân có công bội $q > 1$ là một dãy tăng.

Lời giải.

- Dãy số có tất cả các số hạng bằng nhau là một cấp số nhân là mệnh đề đúng.
  Vì xét dãy số (u_n) là một cấp số nhân. Khi đó $u_{n+1} = u_n \cdot q$ với $u_n \neq 0, q = 1$ thì $u_{n+1} = u_n$.
- Dãy số có tất cả các số hạng bằng nhau là một cấp số cộng là mệnh đề đúng.
  Vì $u_{n+1} = u_n + d$, với $d = 0$ thì $u_{n+1} = u_n$.
- Một cấp số cộng có công sai dương là một dãy số tăng là mệnh đề đúng.
  Ta xét dãy (u_n) là một cấp số cộng có công sai $d > 0$.
  Vì $u_{n+1} = u_n + d \Rightarrow u_{n+1} - u_n = d > 0$.
  Do đó dãy (u_n) là dãy số tăng.
- Một cấp số nhân có công bội $q > 1$ là một dãy tăng là mệnh đề **sai**.
  Ta xét dãy số (u_n) là một cấp số nhân có công bội $q > 1$.
  Vì $u_{n+1} = u_n q$ với $u_n \neq 0, q > 1$. Khi đó $u_{n+1} - u_n = u_n q - u_n = u_n(q-1)$.
  Nếu $u_n < 0$ thì $u_{n+1} - u_n = u_n q - u_n = u_n(q-1) < 0$.
  Do đó dãy (u_n) là dãy số giảm.

Chọn đáp án D .... □

CÂU 10. Cho dãy số (u_n) được xác định bởi $u_1 = 2, u_n = 2u_{n-1} + 3n - 1$. Công thức số hạng tổng quát của dãy số đã cho là biểu thức có dạng $a2^n + bn + c$, với $a, b, c \in \mathbb{Z}, n \geq 2, n \in \mathbb{N}$. Khi đó tổng $a + b + c$ có giá trị bằng

A. -4.
B. 4.
C. -3.
D. 3.

Lời giải.

Ta có $u_n = 2u_{n-1} + 3n - 1 \Leftrightarrow u_n + 3n + 5 = 2\left[u_{n-1} + 3(n-1) + 5\right]$ với $n \geq 2, n \in \mathbb{N}$.
Đặt $v_n = u_n + 3n + 5$, ta có $v_n = 2v_{n-1}$ với $n \geq 2, n \in \mathbb{N}$.
Như vậy (v_n) là cấp số nhân với công bội $q = 2$ và $v_1 = 10$.
Do đó $v_n = 10 \cdot 2^{n-1} = 5 \cdot 2^n$.
Suy ra $u_n + 3n + 5 = 5 \cdot 2^n$ hay $u_n = 5\cdot 2^n - 3n - 5$ với $n \geq 2, n \in \mathbb{N}$.
Vậy $a = 5, b = -3, c = -5$, suy ra $a + b + c = -3$.
Chọn đáp án C .... □

2 Số hạng tổng quát của cấp số nhân

Dựa vào giả thuyết, ta lập một hệ phương trình chứa công bội q và số hạng đầu u_n. Giải hệ phương trình này tìm được u_1 và q.
Nếu cấp số nhân (u_n) có số hạng đầu u_1 và công bội q thì số hạng tổng quát u_n được xác định bởi công thức

$$u_n = u_1 \cdot q^{n-1} \text{ với } n \geq 2.$$

1. Ví dụ minh hoạ

VÍ DỤ 1. Tìm số hạng tổng quát của dãy số $2; 4; 8; 16; 32; \ldots$, biết dãy (u_n) là một cấp số nhân.

Lời giải.

Vì dãy số (u_n) là một cấp số nhân nên $q = \dfrac{u_2}{u_1} = \dfrac{u_3}{u_2} = \ldots = 2$ và số hạng đầu $u_1 = 2$.
Do đó dãy số $2; 4; 8; 16; 32; \ldots$ là một cấp số nhân có số hạng tổng quát là $u_n = u_1 q^{n-1} = 2 \cdot 2^{n-1}$.

VÍ DỤ 2. Tìm số hạng đầu, công bội và số hạng tổng quát của cấp số nhân, biết $\begin{cases} u_1 + u_5 = 51 \\ u_2 + u_6 = 102. \end{cases}$

Lời giải.

Vì (u_n) là một cấp số nhân nên $u_n = u_1 \cdot q^{n-1}$.

Ta có $\begin{cases} u_1 + u_5 = 51 \\ u_2 + u_6 = 102 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + u_1 q^4 = 51 \\ u_1 q + u_1 q^5 = 102 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1(1+q^4) = 51 & (1) \\ u_1 q(1+q^4) = 102 & (2). \end{cases}$

Chia từng vế của (2) cho (1) ta được $\dfrac{u_1 q(1+q^4)}{u_1(1+q^4)} = \dfrac{102}{51} \Leftrightarrow q = 2$.

Suy ra $u_1 = \dfrac{51}{1+q^4} = \dfrac{51}{17} = 3$, $u_n = u_1 \cdot q^{n-1} = 3 \cdot 2^{n-1}$.

Vậy $u_1 = 3$, $q = 2$ và $u_n = 3 \cdot 2^{n-1}$.

VÍ DỤ 3. Tìm số hạng đầu, công bội và số hạng tổng quát của cấp số nhân, biết $\begin{cases} u_1 + u_6 = 30 \\ u_2 + u_7 = 120. \end{cases}$

Lời giải.

Vì (u_n) là một cấp số nhân nên $u_n = u_1 \cdot q^{n-1}$.

Ta có $\begin{cases} u_1 + u_6 = 30 \\ u_2 + u_7 = 120 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + u_1 q^5 = 30 \\ u_1 q + u_1 q^6 = 102 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1(1+q^5) = 30 & (1) \\ u_1 q(1+q^5) = 120 & (2). \end{cases}$

Chia từng vế của (2) cho (1) ta được $\dfrac{u_1 q(1+q^5)}{u_1(1+q^5)} = \dfrac{120}{30} \Leftrightarrow q = 4$.

Suy ra $u_1 = \dfrac{30}{1+q^5} = \dfrac{30}{1+4^5} = \dfrac{6}{205}$, $u_n = u_1 \cdot q^{n-1} = \dfrac{6}{205} \cdot 4^{n-1}$.

Vậy $u_1 = \dfrac{6}{205}$, $q = 4$ và $u_n = \dfrac{6}{205} \cdot 4^{n-1}$.

VÍ DỤ 4. Tìm số hạng đầu, công bội và số hạng tổng quát của cấp số nhân, biết $\begin{cases} u_3 = 40 \\ u_6 = 160. \end{cases}$

Lời giải.

Vì (u_n) là một cấp số nhân nên $u_n = u_1 \cdot q^{n-1}$.

Ta có $\begin{cases} u_3 = 40 \\ u_6 = 1080 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 q^2 = 40 & (1) \\ u_1 q^5 = 1080 & (2). \end{cases}$

Chia từng vế của (2) cho (1) ta được $\dfrac{u_1 q^5}{u_1 q^2} = \dfrac{1080}{40} \Leftrightarrow q^3 = 27 \Leftrightarrow q = 3$.

Suy ra $u_1 = \dfrac{40}{q^2} = \dfrac{40}{3^2} = \dfrac{40}{9}$, $u_n = u_1 \cdot q^{n-1} = \dfrac{40}{9} \cdot 3^{n-1} = 40 \cdot 3^{n-3}$.

Vậy $u_1 = \dfrac{40}{9}$, $q = 3$ và $u_n = 40 \cdot 3^{n-3}$.

VÍ DỤ 5 (VDT). Tìm số hạng đầu, công bội và số hạng tổng quát của cấp số nhân có công bội $q \in \mathbb{Z}, q \neq 0$, biết $\begin{cases} u_2 + u_4 = 10 \\ u_1 + u_3 + u_5 = -21. \end{cases}$

Lời giải.

Vì (u_n) là một cấp số nhân nên $u_n = u_1 \cdot q^{n-1}$ với $q \in \mathbb{Z}, q \neq 0$.

Ta có $\begin{cases} u_2 + u_4 = 10 \\ u_1 + u_3 + u_5 = -21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 q + u_1 q^3 = 10 \\ u_1 q + u_1 q^2 + u_1 q^4 = -21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1(q+q^3) = 10 & (1) \\ u_1(1+q^2+q^4) = -21 & (2). \end{cases}$

Chia từng vế của (2) cho (1) ta được

$$\begin{aligned}\frac{u_1(1+q^2+q^4)}{u_1(q+q^3)}=\frac{-21}{10} &\Leftrightarrow 10q^4+21q^3+10q^2+21q+10=0\\ &\Leftrightarrow (q+2)(2q+1)(5q^2-2q+5)=0\\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} q=-2 \text{ (thỏa mãn)}\\ q=-\dfrac{1}{2} \text{ (loại).}\end{array}\right.\end{aligned}$$

Suy ra $u_1=\dfrac{10}{q+q^3}=-1$, $u_n=u_1\cdot q^{n-1}=(-1)\cdot(-2)^{n-1}=-(-2)^{n-1}=-\dfrac{(-2)^n}{-2}=\dfrac{(-2)^n}{2}$.

Vậy $u_1=-1$, $q=-2$ và $u_n=\dfrac{(-2)^n}{2}$.

2. Bài tập tự luận

BÀI 1. Tìm số hạng tổng quát của dãy số $3;12;48;192;\ldots$, biết dãy (u_n) là một cấp số nhân.

Lời giải.

Vì dãy số (u_n) là một cấp số nhân nên $q=\dfrac{u_2}{u_1}=\dfrac{12}{3}=4$ và số hạng đầu $u_1=3$.

Do đó dãy số $3;12;48;192;\ldots$ là một cấp số nhân có số hạng tổng quát là $u_n=u_1q^{n-1}=3\cdot 4^{n-1}$.

BÀI 2. Tìm số hạng tổng quát của cấp số nhân, biết $\begin{cases}u_1+u_3=51\\ u_2+u_4=153.\end{cases}$

Lời giải.

Vì (u_n) là một cấp số nhân nên $u_n=u_1\cdot q^{n-1}$.

Ta có $\begin{cases}u_1+u_3=51\\ u_2+u_4=153\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u_1+u_1q^2=51\\ u_1q+u_1q^3=153\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u_1(1+q^2)=51 & (1)\\ u_1q(1+q^2)=153 & (2).\end{cases}$

Chia từng vế của (2) cho (1) ta được $\dfrac{u_1q(1+q^2)}{u_1(1+q^2)}=\dfrac{153}{51}\Leftrightarrow q=3$.

Suy ra $u_1=\dfrac{51}{1+q^2}=\dfrac{51}{10}$, $u_n=u_1\cdot q^{n-1}=\dfrac{51}{10}\cdot 3^{n-1}$.

Vậy số hạng tổng quát $u_n=\dfrac{51}{10}\cdot 3^{n-1}$.

BÀI 3. Tìm số hạng đầu, công bội và số hạng tổng quát của cấp số nhân, biết $\begin{cases}u_3=15\\ u_6=120.\end{cases}$

Lời giải.

Vì (u_n) là một cấp số nhân nên $u_n=u_1\cdot q^{n-1}$.

Ta có $\begin{cases}u_3=15\\ u_6=120\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u_1q^2=15 & (1)\\ u_1q^5=120 & (2).\end{cases}$

Chia từng vế của (2) cho (1) ta được $\dfrac{u_1q^5}{u_1q^2}=\dfrac{120}{15}\Leftrightarrow q^3=8\Leftrightarrow q=2$.

Suy ra $u_1=\dfrac{15}{q^2}=\dfrac{15}{2^2}=\dfrac{15}{4}$, $u_n=u_1\cdot q^{n-1}=\dfrac{15}{4}\cdot 2^{n-1}=15\cdot 2^{n-3}$.

Vậy $u_1=\dfrac{15}{4}$, $q=2$ và $u_n=15\cdot 3^{n-3}$.

BÀI 4. Tìm số hạng tổng quát của cấp số nhân, biết $\begin{cases}u_4=35\\ u_8=560.\end{cases}$

Lời giải.

Vì (u_n) là một cấp số nhân nên $u_n=u_1\cdot q^{n-1}$.

Ta có $\begin{cases}u_4=35\\ u_8=560\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u_1q^3=35 & (1)\\ u_1q^7=560 & (2).\end{cases}$

Chia từng vế của (2) cho (1) ta được $\dfrac{u_1q^7}{u_1q^3}=\dfrac{560}{35}\Leftrightarrow q^4=16\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}q=2\\ q=-2.\end{array}\right.$

Với $q=2$. Suy ra $u_1=\dfrac{35}{q^3}=\dfrac{35}{8}$, $u_n=u_1\cdot q^{n-1}=\dfrac{35}{8}\cdot 2^{n-1}=35\cdot 2^{n-4}$.

Với $q=-2$. Suy ra $u_1=\dfrac{35}{q^3}=-\dfrac{35}{8}$, $u_n=u_1\cdot q^{n-1}=-\dfrac{35}{8}\cdot(-2)^{n-1}=35\cdot(-2)^{n-4}$.

Vậy $u_n=35\cdot 2^{n-4}$ với $q=2$ hoặc $u_n=35\cdot(-2)^{n-4}$ với $q=-2$.

3. Câu hỏi trắc nghiệm

CÂU 1. Cho cấp số nhân (u_n) có số hạng đầu là $u_1\neq 0$ và công bội $q\neq 0$. Số hạng tổng quát của cấp số nhân bằng

A $u_n = u_1 + (n-1)q$. **B** $u_n = u_1 \cdot q^{n-1}$. **C** $u_n = u_1 \cdot q^n$. **D** $u_n = u_1 \cdot q^{n+1}$.

Lời giải.

Số hạng tổng quát của cấp số nhân là $u_n = u_1 \cdot q^{n-1}$.

Chọn đáp án B .... □

CÂU 2. Cấp số nhân (u_n) có $u_n = \dfrac{3}{5} \cdot 2^n$. Số hạng đầu tiên và công bội q là

A $u_1 = \dfrac{6}{5}, q = 3$. **B** $u_1 = \dfrac{6}{5}, q = -2$. **C** $u_1 = \dfrac{6}{5}, q = 2$. **D** $u_1 = \dfrac{6}{5}, q = 5$.

Lời giải.

Ta có $u_n = \dfrac{3}{5} \cdot 2^n = \dfrac{6}{5} \cdot 2^{n-1}$, suy ra $u_1 = \dfrac{6}{5}$ và $q = 2$.

Chọn đáp án C .... □

CÂU 3. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 = -3$ và công bội $q = \dfrac{2}{3}$. Chọn mệnh đề đúng?

A $u_5 = -\dfrac{27}{16}$. **B** $u_5 = -\dfrac{16}{27}$. **C** $u_5 = \dfrac{16}{27}$. **D** $u_5 = \dfrac{27}{16}$.

Lời giải.

Số hạng tổng quát của cấp số nhân là $u_n = u_1 \cdot q^{n-1} = 3 \cdot \left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}$.

Vậy $u_5 = 3 \cdot \left(\dfrac{2}{3}\right)^{5-1} = \dfrac{16}{27}$.

Chọn đáp án C .... □

CÂU 4. Dãy số có số hạng tổng quát $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{3}}^{2n}$ là một cấp số nhân có công bội q bằng

A $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. **B** $\sqrt{3}$. **C** $\dfrac{1}{9}$. **D** $\dfrac{1}{3}$.

Lời giải.

Ta có $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{3}}^{2n} = \left[\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^2\right]^n = \left(\dfrac{1}{3}\right)^n = \dfrac{1}{3} \cdot \left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$.

Suy ra công bội của cấp số nhân $q = \dfrac{1}{3}$.

Chọn đáp án D .... □

CÂU 5. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 = 1, u_2 = -2$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A $u_{2024} = -2^{2023}$. **B** $u_{2024} = 2^{2023}$. **C** $u_{2024} = -2^{2024}$. **D** $u_{2024} = 2^{2024}$.

Lời giải.

Số hạng tổng quát của cấp số nhân là $u_n = u_1 \cdot q^{n-1} = (-2)^{n-1}$.
Vậy $u_{2024} = (-2)^{2024-1} = (-2)^{2023} = -2^{2023}$.

Chọn đáp án A .... □

CÂU 6. Cho cấp số nhân có $\begin{cases} u_4 - u_2 = 54 \\ u_5 - u_3 = 108 \end{cases}$. Số hạng đầu tiên u_1 và công bội q của cấp số nhân là

A $u_1 = 9$ và $q = 2$. **B** $u_1 = 9$ và $q = -2$. **C** $u_1 = -9$ và $q = 2$. **D** $u_1 = -9$ và $q = -2$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} u_4 - u_2 = 54 \\ u_5 - u_3 = 108 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1q^3 - u_1q = 54 \\ u_1q^4 - u_1q^2 = 108 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1q(q^2-1) - 54 \quad (1) \\ u_1q^2(q^2-1) = 108 \quad (2). \end{cases}$

Chia từng vế của (2) cho (1) ta được $\dfrac{u_1q^2(q^2-1)}{u_1q(q^2-1)} = \dfrac{108}{54} \Leftrightarrow q = 2$.

Suy ra $u_1 = \dfrac{54}{q^3 - q} = \dfrac{54}{2^3 - 2} = 9$.

Chọn đáp án A .... □

CÂU 7. Cho cấp số nhân (u_n) biết $\begin{cases} u_1+u_2+u_3=31 \\ u_1+u_3=26 \end{cases}$. Giá trị u_1 và q là

A $u_1=2; q=5$ hoặc $u_1=25; q=\dfrac{1}{5}$.

B $u_1=5; q=1$ hoặc $u_1=25; q=\dfrac{1}{5}$.

C $u_1=25; q=5$ hoặc $u_1=1; q=\dfrac{1}{5}$.

D $u_1=1; q=5$ hoặc $u_1=25; q=\dfrac{1}{5}$.

Lời giải.

Vì (u_n) là một cấp số nhân nên $u_n=u_1\cdot q^{n-1}$.

Ta có $\begin{cases} u_1+u_2+u_3=31 \\ u_1+u_3=26 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_2=5 \\ u_1+u_3=26 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1q=5 & (1) \\ u_1(1+q^2)=26 & (2). \end{cases}$

Chia từng vế của (2) cho (1) ta được $\dfrac{q^2+1}{q}=\dfrac{26}{5} \Leftrightarrow 5q^2-26q+5=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} q=5 \\ q=\dfrac{1}{5}. \end{array}\right.$

Với $q=5$. Suy ra $u_1=\dfrac{5}{q}=\dfrac{5}{5}=1$.

Với $q=\dfrac{1}{5}$. Suy ra $u_1=\dfrac{5}{q}=5:\dfrac{1}{5}=25$.

Vậy $u_1=1$ với $q=5$ hoặc $u_1=25$ với $q=\dfrac{1}{5}$.

Chọn đáp án D ....□

CÂU 8. Số hạng đầu tiên và công bội của cấp số nhân thỏa mãn $\begin{cases} u_5+u_2=36 \\ u_6-u_4=48 \end{cases}$ (với $q>0$) là

A $u_1=4, q=4$. **B** $u_1=2, q=4$. **C** $u_1=2, q=2$. **D** $u_1=4, q=2$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} u_5+u_2=36 \\ u_6-u_4=48 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1q^4+u_1q=36 \\ u_1q^5-u_1q^3=48 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1q(q^3+1)=36 & (1) \\ u_1q(q^4-q^2)=48 & (2). \end{cases}$

Chia từng vế của (2) cho (1) ta được

$$\frac{u_1q(q^4-q^2)}{u_1q(q^3+1)}=\frac{48}{36} \Leftrightarrow \frac{q^4-q^2}{q^3+1}=\frac{4}{3} \Leftrightarrow 3q^4-4q^3-3q^2-4=0 \left[\begin{array}{l} q=2 \\ q=-1. \end{array}\right.$$

Từ điều kiện $q>0$ suy ra công bội của cấp số nhân là $q=2$, do đó $u_1=\dfrac{36}{q^4+q}=2$.

Vậy $u_1=2$ và $q=2$.

Chọn đáp án C ....□

CÂU 9. Cho cấp số nhân $u_2=\dfrac{1}{4}, u_5=16$. Công bội và số hạng đầu tiên của cấp số nhân là

A $q=\dfrac{1}{2}; u_1=\dfrac{1}{2}$. **B** $q=\dfrac{-1}{2}; u_1=\dfrac{-1}{2}$. **C** $q=4; u_1=\dfrac{1}{16}$. **D** $q=-4; u_1=\dfrac{-1}{16}$.

Lời giải.

Ta có $u_2=u_1q=\dfrac{1}{4}$ (1) và $u_5=u_1q^4=16$ (2).

Lấy (2) chia cho (1) vế theo vế ta được $\dfrac{u_1q^4}{u_1q}=\dfrac{16}{\frac{1}{4}} \Leftrightarrow q^3=64 \Leftrightarrow q=4$.

Suy ra $u_1=\dfrac{1}{4}:q=\dfrac{1}{4}:4=\dfrac{1}{16}$.

Vậy $u_1=\dfrac{1}{16}, q=4$.

Chọn đáp án C ....□

CÂU 10. Người ta thiết kế một cái tháp gồm 11 tầng. Diện tích mặt trên của mỗi tầng bằng nửa diện tích mặt trên của tầng ngay bên dưới và diện tích mặt trên của tầng 1 bằng nửa diện tích của đế tháp (có diện tích là 12 288 m^2). Diện tích mặt trên cùng (của tầng thứ 11) có giá trị nào sau đây?

A 6 m^2. **B** 8 m^2. **C** 10 m^2. **D** 12 m^2.

Lời giải.

Vì diện tích của mặt trên của mỗi tầng bằng nửa diện tích mặt trên của tầng ngay bên dưới và diện tích mặt trên của tầng 1 bằng nửa diện tích của đế tháp.

Do đó diện tích của mỗi tầng tạo nên dãy số và dãy số đó là một cấp số nhân có công bội $q = \frac{1}{2}$.

Vậy số hạng tổng quát của cấp số nhân đó là $u_n = 12\,288 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

Vì từ đế tháp đến tầng thứ 11 của tháp sẽ có 12 mặt nền, do đó diện tích của mặt của tầng thứ 11 là $u_{12} = 12\,288 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{12-1} = 6$ m^2.

Chọn đáp án A ....

3 Tìm số hạng cụ thể của CSN

Ta chuyển các số hạng của CSN về số hạng đầu u_1 và công bội q. Sử dụng công thức $u_n = u_1 \cdot q^{n-1}$.
Chia hai phương trình vế theo vế ta thu được phương trình theo q.
Giải tìm q và u_1. Từ đó tìm được số hạng cần tìm thỏa ycbt.

1. Ví dụ minh hoạ

VÍ DỤ 1. Cho u_n là CSN thỏa $u_1 = 2$; $u_4 = 16$. Tìm số hạng thứ 5 của CSN.

Lời giải.

Do u_n là CSN nên ta có $u_4 = u_1 \cdot q^3 \Rightarrow q^3 = \frac{u_4}{u_1} = 8 \Rightarrow q = 2$.

Vậy $u_5 = u_1 \cdot q^4 = 2 \cdot 2^4 = 32$.

VÍ DỤ 2. Cho cấp số nhân (u_n) có $\begin{cases} u_4 + u_6 = -540 \\ u_3 + u_5 = 180 \end{cases}$. Tính số hạng đầu u_1 và công bội q của cấp Số nhân.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} u_4 + u_6 = -540 \\ u_3 + u_5 = 180 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 q^3(1+q^2) = -540 \\ u_1 q^2(1+q^2) = 180 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 2 \\ q = -3. \end{cases}$

Vậy $\begin{cases} u_1 = 2 \\ q = -3 \end{cases}$ là số hạng cần tìm.

VÍ DỤ 3. Cho cấp số nhân có $u_1 = -3$, $q = \frac{2}{3}$. Số $\frac{-96}{243}$ là số hạng thứ mấy của cấp số nhân?

Lời giải.

Giả sử số $\frac{-96}{243}$ là số hạng thứ n của cấp số nhân.

Ta có: $u_1 \cdot q^{n-1} = \frac{-96}{243} \Leftrightarrow (-3)\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = \frac{-96}{243} \Leftrightarrow n = 6$.

Vậy số $\frac{-96}{243}$ là số hạng thứ 6 của cấp số nhân.

VÍ DỤ 4. Cấp số nhân (u_n) có số hạng tổng quát là $u_n = \frac{3}{5} \cdot 2^{n-1}, n \in \mathbb{N}^*$. Số hạng đầu tiên và công bội của cấp số nhân đó là

Lời giải.

Ta có $u_1 = \frac{3}{5} \cdot 2^{1-1} = \frac{3}{5}$ và $u_2 = \frac{3}{5} \cdot 2^{2-1} = \frac{6}{5} \Rightarrow q = \frac{u_2}{u_1} = 2$.

Vậy $u_1 = \frac{3}{5}$ và $q = 2$.

2. Bài tập tự luận

BÀI 1. Cho cấp số nhân (u_n) biết $\begin{cases} u_4 - u_2 = 25 \\ u_3 - u_1 = 50. \end{cases}$

a) Tìm số hạng đầu và công bội của cấp số nhân (u_n).

b) Tìm số hạng thứ 8 của cấp số nhân (u_n).

Lời giải.

a) Ta có $\begin{cases} u_4 - u_2 = 25 \\ u_3 - u_1 = 50 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1(q^3 - q) = 25 \\ u_1(q^2 - q) = 50 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q = \frac{1}{2} \\ u_1 = -200. \end{cases}$

b) Ta có $u_8 = u_1 \cdot q^7 = -200 \cdot \frac{1}{2^7} = -\frac{25}{16}$.

BÀI 2. Tìm số hạng thứ 10 của cấp số nhân (u_n) biết $\begin{cases} u_4 - u_2 = 72 \\ u_5 - u_3 = 144. \end{cases}$

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} u_4 - u_2 = 72 \\ u_5 - u_3 = 144 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_4 - u_2 = 72 \\ q(u_4 - u_2) = 144 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q = 2 \\ u_1(q^3 - q) = 72 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = 2 \\ u_1 = 12. \end{cases}$

Khi đó $u_{10} = u_1 \cdot q^9 = 6144$.

BÀI 3. Cho một cấp số nhân có 5 số hạng biết 2 số hạng đầu là số dương, tích số hạng đầu và số hạng thứ 3 là 1, tích số hạng thứ 3 và số hạng cuối là $\frac{1}{16}$. Tìm cấp số nhân này.

Lời giải.

Gọi 5 số hạng cần tìm có dạng $\frac{x}{q^2}$; $\frac{x}{q}$; x; xq; xq^2.

Theo đề ra ta có $\begin{cases} \frac{x}{q^2} \cdot x = 1 \\ x \cdot xq^2 = \frac{1}{16} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ q = \frac{1}{2} \end{cases}$ (do hai số hạng đầu dương nên $q > 0$).

Vậy 5 số hạng cần tìm là $2; 1; \frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}$.

BÀI 4. Tìm số hạng đầu và công bội của cấp số nhân (u_n) biết $\begin{cases} u_2 + u_5 - u_4 = 10 \\ u_3 + u_6 - u_5 = 20. \end{cases}$

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} u_2 + u_5 - u_4 = 10 \\ u_3 + u_6 - u_5 = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1(q + q^4 - q^3) = 10 \\ u_1(q^2 + q^5 - q^4) = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = 2 \\ u_1 = 1. \end{cases}$

BÀI 5. Tìm 5 số lập thành một cấp số nhân có công bội bằng $\frac{1}{4}$ số thứ nhất và tổng 2 số đầu là $\frac{5}{4}$.

Lời giải.

Theo đề, ta có $\begin{cases} q = \frac{1}{4}u_1 \\ u_1 + u_2 = \frac{5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = \frac{1}{4}u_1 \\ u_1 + u_1 \cdot q = \frac{5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = \frac{1}{4}u_1 \\ u_1^2 + 4u_1 - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = \frac{1}{4} \\ u_1 = 1 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} q = -\frac{5}{4} \\ u_1 = -5. \end{cases}$

Vậy có hai CSN là $1; \frac{1}{4}; \frac{1}{16}; \frac{1}{64}; \frac{1}{128}$ và $-5; -\frac{5}{4}; -\frac{5}{16}; -\frac{5}{64}; -\frac{1}{128}$.

BÀI 6. Tìm 3 số lập thành một cấp số nhân có tổng là 63 và tích là 1728.

Lời giải.

Gọi ba số cần tìm là $\frac{x}{q}; x; xq$. Theo đề ra, ta có $x^3 = 1728 \Rightarrow x = 12$.

Mặt khác $\frac{x}{q} + x + xq = 63 \Leftrightarrow 12q + 12 + \frac{12}{q} = 63 \Leftrightarrow 12q^2 - 51q + 12 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} q = 4 \\ q = \frac{1}{4}. \end{array}\right.$

Vậy CSN cần tìm là $3; 12; 48$.

3. Câu hỏi trắc nghiệm

CÂU 1. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_{20} = 8u_{17}$. Công bội của cấp số nhân là

A $q = 2$. **B** $q = -2$. **C** $q = 4$. **D** $q = -4$.

Lời giải.

Ta có $u_{20} = 8u_{17} \Rightarrow u_1 \cdot q^{19} = 8 \cdot u_1 \cdot q^{16} \Rightarrow q = 2$.

Chọn đáp án A .... □

CÂU 2. Cho cấp số nhân (u_n) có 10 số hạng với công bội $q \neq 0$ và $u_1 \neq 0$. Đẳng thức nào sau đây là đúng?

A $u_7 = u_4 \cdot q^6$. **B** $u_7 = u_4 \cdot q^3$. **C** $u_7 = u_4 \cdot q^4$. **D** $u_7 = u_4 \cdot q^5$.

Lời giải.

Ta có $u_7 = u_1 \cdot q^6 = \left(u_1 \cdot q^3\right) \cdot q^3 = u_4 \cdot q^3$.

Chọn đáp án B .... □

CÂU 3. Cho cấp số nhân (u_n) có số hạng đầu $u_1 = 2$ và công bội $q = 3$. Giá trị u_{2019} bằng

A $3 \cdot 2^{2019}$. **B** $2 \cdot 3^{2019}$. **C** $3 \cdot 2^{2018}$. **D** $2 \cdot 3^{2018}$.

Lời giải.

Áp dụng công thức của số hạng tổng quát $u_n = u_1 \cdot q^{n-1} = 2 \cdot 3^{2018}$.

Chọn đáp án (D) ☐

CÂU 4. Cho cấp số nhân (u_n) với công bội $q < 0$ và $u_2 = 4$, $u_4 = 9$. Tìm u_1.

(A) $u_1 = 6$. **(B)** $u_1 = -\dfrac{8}{3}$. (C) $u_1 = -6$. (D) $u_1 = \dfrac{8}{3}$.

Lời giải.

Vì $q < 0$, $u_2 > 0$ nên $u_3 < 0$. Do đó $u_3 = -\sqrt{u_2 \cdot u_4} = -\sqrt{4 \cdot 9} = -6$.

Ta có $u_2^2 = u_1 \cdot u_3 \Rightarrow u_1 = \dfrac{u_2^2}{u_3} = \dfrac{4^2}{-6} = -\dfrac{8}{3}$.

Chọn đáp án (B) ☐

CÂU 5. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_2 = -6, u_3 = 3$. Công bội q của cấp số nhân đã cho bằng

(A) 2. (B) $\dfrac{1}{2}$. **(C)** $-\dfrac{1}{2}$. (D) -2.

Lời giải.

Công bội của cấp số nhân đã cho là

$$q = \frac{u_3}{u_2} = -\frac{1}{2}.$$

Chọn đáp án (C) ☐

CÂU 6. Cho cấp số nhân có $u_1 = -3$, $q = \dfrac{2}{3}$. Tính u_5?

(A) $u_5 = \dfrac{27}{16}$. **(B)** $u_5 = \dfrac{-16}{27}$. (C) $u_5 = \dfrac{-27}{16}$. (D) $u_5 = \dfrac{16}{27}$.

Lời giải.

Ta có: $u_5 = u_1 \cdot q^4 = (-3)\left(\dfrac{2}{3}\right)^4 = -\dfrac{16}{27}$.

Chọn đáp án (B) ☐

CÂU 7. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_2 = \dfrac{1}{4}$; $u_5 = -16$. Tìm q và số hạng đầu tiên của cấp số nhân?

(A) $q = \dfrac{1}{2}; u_1 = \dfrac{1}{2}$. (B) $q = -\dfrac{1}{2}, u_1 = -\dfrac{1}{2}$. **(C)** $q = -4, u_1 = \dfrac{1}{16}$. (D) $q = -4, u_1 = -\dfrac{1}{16}$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} u_2 = \dfrac{1}{4} \\ u_5 = 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1 \cdot q = \dfrac{1}{4} \\ u_1 \cdot q^4 = -16 \end{cases} \Rightarrow q^3 = -64 \Rightarrow q = -4 \Rightarrow u_1 = \dfrac{1}{16}$.

Chọn đáp án (C) ☐

CÂU 8. Cho cấp số nhân (u_n), biết: $u_n = 81, u_{n+1} = 9$. Lựa chọn đáp án đúng.

(A) $q = -\dfrac{1}{9}$. **(B)** $q = \dfrac{1}{9}$. (C) $q = 9$. (D) $q = -9$.

Lời giải.

Ta có $q = \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{9}{81} = \dfrac{1}{9}$.

Chọn đáp án (B) ☐

CÂU 9. Cho cấp số nhân (u_n) với $u_1 = 2$ và công bội $q = 3$. Số hạng u_2 bằng

(A) 8. **(B)** 6. (C) 12. (D) 18.

Lời giải.

Ta có $u_2 = u_1 \cdot q = 2 \cdot 3 = 6$.

Chọn đáp án (B) ☐

CÂU 10. Cho cấp số nhân (u_n) với $u_1 = 2$ và $u_3 = 8$. Số hạng thứ hai của cấp số nhân đã cho bằng

(A) $u_2 = 4$. (B) $u_2 = 6$. **(C)** $u_2 = \pm 4$. (D) $u_2 = -4$.

Lời giải.

Ta có $u_1 \cdot u_3 = u_2^2 \Leftrightarrow u_2^2 = 16 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u_2 = 4 \\ u_2 = -4. \end{array}\right.$

Chọn đáp án (C) ....

CÂU 11. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 = -1; q = \dfrac{-1}{10}$. Số $\dfrac{1}{10^{103}}$ là số hạng thứ bao nhiêu?

(A) số hạng thứ 103. (B) số hạng thứ 105. **(C)** số hạng thứ 104. (D) Đáp án khác.

Lời giải.

Ta có $u_n = u_1 \cdot q^{n-1} \Leftrightarrow \dfrac{1}{10^{103}} = -1 \cdot \left(\dfrac{-1}{10}\right)^{n-1} \Leftrightarrow \left(\dfrac{-1}{10}\right)^{n-1} = \left(\dfrac{-1}{10}\right)^{103} \Rightarrow n = 104.$

Chọn đáp án (C) ....

CÂU 12. Cho cấp số nhân (u_n) có các số hạng lần lượt là 3, 9, 27, 81,... Khi đó u_n bằng

(A) $3 + 3^n$. (B) 3^{n-1}. (C) 3^{n+1}. **(D)** 3^n.

Lời giải.

Cấp số nhân đã cho có $u_1 = 3$ và công bội $q = 3$ nên $u_n = u_1 \cdot q^{n-1} = 3 \cdot 3^{n-1} = 3^n$.

Chọn đáp án (D) ....

CÂU 13. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 = 3$ và $15u_1 - 4u_2 + u_3$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tìm số hạng thứ 13 của cấp số nhân đã cho.

(A) $u_{13} = 12288$. (B) $u_{13} = 3072$. (C) $u_{13} = 24567$. (D) $u_{13} = 49152$.

Lời giải.

Gọi q là công bội của cấp số nhân (u_n).
Ta có $15u_1 - 4u_2 + u_3 = 45 - 12q + 3q^2 = 3(q-2)^2 + 33 \geq 33\ \forall q \in \mathbb{R}$.
Suy ra $15u_1 - 4u_2 + u_3$ đạt giá trị nhỏ nhất khi $q = 2$.
Khi đó $u_{13} = u_1 q^{12} = 12288$.

Chọn đáp án (A) ....

CÂU 14. Cho cấp số nhân (u_n) biết $u_1 + u_5 = 51$ và $u_2 + u_6 = 102$. Hỏi số 12288 là số hạng thứ mấy của cấp số nhân (u_n)?

(A) Số hạng thứ 13. (B) Số hạng thứ 10. (C) Số hạng thứ 11. (D) Số hạng thứ 12.

Lời giải.

Gọi q là công bội của cấp số nhân đã cho. Theo đề bài, ta có

$$\begin{cases} u_1 + u_5 = 51 \\ u_2 + u_6 = 102 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1\left(1 + q^4\right) = 51 \\ u_1 q\left(1 + q^4\right) = 102 \end{cases} \Rightarrow q = 2 \Rightarrow u_1 = 3 \Rightarrow u_n = 3 \cdot 2^{n-1}.$$

Mặt khác $u_n = 12288 \Leftrightarrow 3 \cdot 2^{n-1} = 12288 \Leftrightarrow 2^{n-1} = 2^{12} \Leftrightarrow n = 13$.

Chọn đáp án (A) ....

4 Tìm điều kiện để một dãy số lập thành CSN

Dãy số a, b, c lập thành CSN khi $b^2 = a \cdot c$.

Dãy số a, b, c, d lập thành CSN khi $\begin{cases} b^2 = a \cdot c \\ c^2 = b \cdot d. \end{cases}$

1. Ví dụ minh hoạ

VÍ DỤ 1. Cho dãy $3, x, 12, y$. Tìm x, y để dãy là CSN.

Lời giải.

Dãy là CSN khi $\begin{cases} x^2 = 3 \cdot 12 \\ 12^2 = x \cdot y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = 24 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x = -6 \\ y = -24. \end{cases}$

VÍ DỤ 2. Cho dãy $x - 1, 2x, 4x + 3$. Tìm x để dãy là CSN.

Lời giải.

Dãy là CSN khi $(2x)^2 = (x-1)(4x+3) \Leftrightarrow x = -3$.

VÍ DỤ 3. Các số $x + 6y$, $5x + 2y$, $8x + y$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số cộng, đồng thời, các số $x + \dfrac{5}{3}$, $y - 1$, $2x - 3y$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân. Hãy tìm x và y.

Lời giải.

- Ba số $x+6y$, $5x+2y$, $8x+y$ lập thành cấp số cộng nên $(x+6y)+(8x+y)=2(5x+2y) \Leftrightarrow x=3y$.
- Ba số $x+\dfrac{5}{3}$, $y-1$, $2x-3y$ lập thành cấp số nhân nên $\left(x+\dfrac{5}{3}\right)(2x-3y)=(y-1)^2$.

Thay $x=3y$ vào ta được $8y^2+7y-1=0 \Leftrightarrow y=-1$ hoặc $y=\dfrac{1}{8}$.
Với $y=-1$ thì $x=-3$; với $y=\dfrac{1}{8}$ thì $x=\dfrac{3}{8}$.

VÍ DỤ 4. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình sau có ba nghiệm phân biệt lập thành một cấp số nhân $x^3-7x^2+2\left(m^2+6m\right)x-8=0$.

Lời giải.

+ Điều kiện cần:
Giả sử phương trình đã cho có ba nghiệm phân biệt x_1,x_2,x_3 lập thành một cấp số nhân.
Theo định lý Vi-ét, ta có $x_1x_2x_3=8$.
Theo tính chất của cấp số nhân, ta có $x_1x_3=x_2^2$. Suy ra $x_2^3=8 \Leftrightarrow x_2=2$.
Với nghiệm $x=2$, ta có $m^2+6m-7=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=-7. \end{array}\right.$

+ Điều kiện đủ:
Với $m=1$ hoặc $m=-7$ thì $m^2+6m=7$.
Khi đó phương trình ban đầu trở thành $x^3-7x^2+14x-8=0$.
Giải phương trình này, ta được các nghiệm là 1,2,4. Hiển nhiên ba nghiệm này lập thành một cấp số nhân với công bội $q=2$.
Vậy $m=1$ và $m=-7$ là các giá trị cần tìm.

VÍ DỤ 5. Các số $x+6y$, $5x+2y$, $8x+y$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số cộng; đồng thời các số $x-1$, $y+2$, $x-3y$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân. Tính x^2+y^2.

Lời giải.

Theo giả thiết ta có

$$\begin{cases}(x+6y)+(8x+y)=2(5x+2y) \\ (x-1)(x-3y)=(y+2)^2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=3y \\ (3y-1)(3y-3y)=(y+2)^2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=3y \\ 0=(y+2)^2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-6 \\ y=-2.\end{cases}$$

Vậy $x^2+y^2=40$.

2. Bài tập tự luận

BÀI 1. Xác định x dương để $2x-3$; x; $2x+3$ lập thành cấp số nhân.

Lời giải.

Ba số $2x-3$; x; $2x+3$ lập thành cấp số nhân khi $x^2=(2x-3)(2x+3) \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{3}$.
Do $x>0$ nên chọn $x=\sqrt{3}$.

BÀI 2. Cho cấp số nhân $x, 12, y, 192$. Tìm x và y.

Lời giải.

Bốn số $x, 12, y, 192$ lập thành CSN khi $\begin{cases}xy=12^2 \\ y^2=12\cdot 192\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=3 \\ y=48\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}x=-3 \\ y=-48.\end{cases}$

BÀI 3. Tìm x để dãy số 1, x^2, $6-x^2$ lập thành cấp số nhân.

Lời giải.

Ta có $1, x^2, 6-x^2$ lập thành cấp số nhân $\Leftrightarrow x^4=6-x^2 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{2}$.

BÀI 4. Viết 6 số xen giữa hai số -2 và 256 để được một cấp số nhân có 8 số hạng. Tìm cấp số nhân này.

Lời giải.

Theo đề ra, ta có $\begin{cases}u_1=-2 \\ u_8=256\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}u_1=-2 \\ u_1\cdot q^7=256\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}u_1=-2 \\ q=-2.\end{cases}$
Cấp số nhân cần tìm là $-2; 4; -8; 16; -32; 64; -128; 256$.

BÀI 5. Bốn góc của một tứ giác lồi lập thành một cấp số nhân, góc lớn nhất gấp 8 lần góc nhỏ nhất. Tìm 4 góc đó.

Lời giải.

Giả sử 4 góc của tứ giác là $A \le B \le C \le D$. Suy ra $A+B+C+D=360^\circ$.
Theo đề, ta có $D=8A \Leftrightarrow Aq^3=8A \Leftrightarrow q=2$. Khi đó, ta được

$$A(1+q+q^2+q^3)=360^\circ \Rightarrow A=24^\circ.$$

Vậy 4 góc của tứ giác lần lượt là $24^\circ; 48^\circ; 96^\circ; 192^\circ$.

BÀI 6. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình sau có ba nghiệm phân biệt lập thành một cấp số nhân $x^3 - 7mx^2 + 2(m^2 + 6m)x - 64 = 0$.

Lời giải.

+ Điều kiện cần:
Giả sử phương trình đã cho có ba nghiệm phân biệt $x_1; x_2; x_3$ lập thành một cấp số nhân.
Theo định lý Vi-ét, ta có $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = 64$.
Theo tính chất của cấp số nhân, ta có $x_1 \cdot x_3 = x_2^2$. Suy ra ta có $x_2^3 = 64 \Leftrightarrow x_2 = 4$.
Thay $x = 4$ vào phương trình đã cho ta được

$$4^3 - 7m \cdot 4^2 + 2(m^2 + 6m) \cdot 4 - 64 = 0 \Leftrightarrow m^2 - 8m = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = 8. \end{array}\right.$$

+ Điều kiện đủ:
Với $m = 0$ thay vào phương trình đã cho ta được: $x^3 - 64 = 0$ hay $x = 4$ (nghiệm kép-loại).
Với $m = 8$ thay vào phương trình đã cho nên ta có phương trình $x^3 - 56x^2 + 224x - 64 = 0$.
Phương trình này có 3 nghiệm phân biệt lập thành cấp số nhân.
Vậy $m = 8$ là giá trị cần tìm.

3. Câu hỏi trắc nghiệm

CÂU 1. Xác định x để 3 số $2x - 1$; x; $2x + 1$ theo thứ tự lập thành một cấp số nhân:

A. $x = \pm\sqrt{3}$.
B. $x = \pm\dfrac{1}{3}$.
C. $x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.
D. Không có giá trị nào của x.

Lời giải.

Ba số $2x - 1$; x; $2x + 1$ theo thứ tự lập thành cấp số nhân
$\Leftrightarrow (2x - 1)(2x + 1) = x^2 \Leftrightarrow 3x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Chọn đáp án C .... □

CÂU 2. Cho 4 số nguyên dương, trong đó 3 số đầu lập thành cấp số cộng, 3 số cuối lập thành cấp số nhân. Biết tổng số đầu và cuối là 37, tổng 2 số hạng giữa là 36. Hỏi số lớn nhất thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(26; 29)$.
B. $(24; 26)$.
C. $(30; 33)$.
D. $(22; 25)$.

Lời giải.

Giả sử 4 số đó là a, b, c, d $(a, b, c, d \in \mathbb{N}^*)$.
Do a, b, c lập thành cấp số cộng nên ta có $a + c = 2b$ (1).
Do b, c, d lập thành cấp số nhân nên ta có $b \cdot d = c^2$ $(*)$.

Theo giả thiết ta có $\begin{cases} a + d = 37 & (2) \\ b + c = 36. & (3) \end{cases}$

Từ (1), (2), (3) ta có $\begin{cases} a = -d + 37 \\ b = \dfrac{-d + 73}{3} \\ c = \dfrac{d + 35}{3}. \end{cases}$

Thay vào $(*)$ ta có $\dfrac{-d + 73}{3} \cdot d = \left(\dfrac{d + 35}{3}\right)^2 \Leftrightarrow 4d^2 - 149d + 1225 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} d = 25 \\ d = \dfrac{49}{4} \quad \text{(loại)}. \end{array}\right.$

Với $d = 25$, ta có $a = 12$, $b = 16$, $c = 20$.
Vậy số lớn nhất là $25 \in (24; 26)$.

Chọn đáp án B .... □

CÂU 3. Ba số x, y, z theo thứ tự lập thành một cấp số nhân với công bội q khác 1 đồng thời các số x, $2y$, $3z$ theo thứ tự lập thành một cấp số cộng với công sai khác 0. Tìm giá trị của q.

A. $q = -\dfrac{1}{3}$.
B. $q = \dfrac{1}{9}$.
C. $q = -3$.
D. $q = \dfrac{1}{3}$.

Lời giải.

Theo giả thiết ta có

$$\begin{cases} y = xq \\ z = xq^2 \\ x + 3z = 2(2y) \end{cases} \Rightarrow x + 3xq^2 = 4xq \Rightarrow x\left(3q^2 - 4q + 1\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ 3q^2 - 4q + 1 = 0. \end{array}\right.$$

Nếu $x = 0 \Rightarrow y = z = 0 \Rightarrow$ công sai của cấp số cộng x, $2y$, $3z$ bằng 0 (vô lí).

Nếu $3q^2 - 4q + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} q = 1 \\ q = \dfrac{1}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow q = \dfrac{1}{3}$ vì $(q \neq 1)$.

Chọn đáp án D .... □

CÂU 4. Trong các dãy số (u_n) cho bởi số hạng tổng quát u_n sau, dãy số nào là một cấp số nhân?

A. $u_n = \dfrac{1}{3^n} - 1$. B. $u_n = n + \dfrac{1}{3}$. C. $u_n = n^2 - \dfrac{1}{3}$. D. $u_n = \dfrac{1}{3^{n-2}}$.

Lời giải.

Từ các đáp án trên, với dãy (u_n) cho bởi $u_n = \dfrac{1}{3^{n-2}}$ là một cấp số nhân, vì

$$T = \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3^{n-2}}{3^{n-1}} = \frac{1}{3} \text{ (không đổi).}$$

Chọn đáp án D .... □

CÂU 5. Trong các mệnh đề dưới đây, mệnh đề nào là **sai**?

A. Dãy số (a_n), với $a_1 = 3$ và $a_{n+1} = \sqrt{a_n + 6}$, $\forall n \geq 1$, vừa là cấp số cộng vừa là cấp số nhân.

B. Dãy số (d_n), với $d_1 = -3$ và $d_{n+1} = 2d_n^2 - 15$, $\forall n \geq 1$, vừa là cấp số cộng vừa là cấp số nhân.

C. Dãy số (b_n), với $b_1 = 1$ và $b_{n+1}\left(2b_n^2 + 1\right) = 3$, $\forall n \geq 1$, vừa là cấp số cộng vừa là cấp số nhân.

D. Dãy số (c_n), với $c_1 = 2$ và $c_{n+1} = 3c_n^2 - 10$, $\forall n \geq 1$, vừa là cấp số cộng vừa là cấp số nhân.

Lời giải.

Kiểm tra từng phương án ta có

- Ta có $a_2 = 3$, $a_2 = 3$, ...Bằng phương pháp quy nạp toán học chúng ra chứng minh được rằng $a_n = 3$, $\forall n \geq 1$. Do đó (a_n) là dãy số không đổi. Suy ra nó vừa là cấp số cộng (công sai bằng 0) vừa là cấp số nhân (công bội bằng 1).
- Tương tự như phương án trên, chúng ta chỉ ra được $b_n = 1$, $\forall n \geq 1$. Do đó (b_n) là dãy số không đổi. Suy ra nó vừa là cấp số cộng (công sai bằng 0) vừa là cấp số nhân (công bội bằng 1).
- Tương tự như phương án trên, chúng ta chỉ ra được $c_n = 2$, $\forall n \geq 1$. Do đó (c_n) là dãy số không đổi. Suy ra nó vừa là cấp số cộng (công sai bằng 0) vừa là cấp số nhân (công bội bằng 1).
- Ta có $d_1 = -3$, $d_2 = 3$, $d_3 = 3$. Ba số hạng này không lập thành cấp số cộng cũng không lập thành cấp số nhân nên dãy số (d_n) không phải là cấp số cộng và cũng không là cấp số nhân.

Chọn đáp án B .... □

CÂU 6. Biết rằng tồn tại hai giá trị m_1 và m_2 để phương trình

$$2x^3 + 2\left(m^2 + 2m - 1\right)x^2 - 7\left(m^2 + 2m - 2\right)x - 54 = 0$$

có ba nghiệm phân biệt lập thành một cấp số nhân. Tính giá trị của biểu thức $P = m_1^3 + m_2^3$.

A. $P = 56$. B. $P = 8$. C. $P = -8$. D. $P = -56$.

Lời giải.

Theo định lý Vi-ét, ta có $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = -\dfrac{d}{a} = -\dfrac{-54}{2} = 27 \Leftrightarrow x_2^3 = 27 \Leftrightarrow x_2 = 3$.

Điều kiện cần để phương trình đã cho có ba nghiệm phân biệt lập thành một cấp số nhân là $x = 3$ phải là nghiệm của phương trình đã cho. Suy ra

$$m^2 + 2m - 8 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 2 \\ m = -4. \end{array}\right.$$

Vì giả thiết cho biết tồn tại đúng hai giá trị của tham số m nên $m = 2$ và $m = -4$ là các giá trị thỏa mãn.

Vậy $P = 2^3 + (-4)^3 = -56$.

Chọn đáp án D .... □

CÂU 7. Cho bốn số a, b, c, d biết rằng a, b, c theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân với công bội $q > 1$; còn b, c, d theo thứ tự đó lập thành cấp số cộng. Tìm q, biết rằng $a + d = 14$ và $b + c = 12$.

Ⓐ $q = \dfrac{20 + \sqrt{73}}{24}$. **B** $q = \dfrac{19 + \sqrt{73}}{24}$. Ⓒ $q = \dfrac{21 + \sqrt{73}}{24}$. Ⓓ $q = \dfrac{18 + \sqrt{73}}{24}$.

Lời giải.

Giả sử a, b, c lập thành cấp số cộng công bội q. Khi đó theo giả thiết ta có

$$\begin{cases} b = aq,\ c = aq^2 \\ b + d = 2c \\ a + d = 14 \\ b + c = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} aq + d = 2aq^2 & (1) \\ a + d = 14 & (2) \\ a\left(q + q^2\right) = 12. & (3) \end{cases}$$

- Nếu $q = 0 \Rightarrow b = c = d = 0$. (Vô lí!)
- Nếu $q = -1 \Rightarrow b = -a$; $c = a \Rightarrow b + c = 0$. (Vô lí!)

Vậy $q \neq 0$, $q \neq -1$, từ (2) và (3) ta có $d = 14 - a$ và $a = \dfrac{12}{q + q^2}$. Thay vào (1) ta được

$$\begin{aligned} \frac{12q}{q + q^2} + \frac{14q^2 + 14q - 12}{q + q^2} = \frac{24q^3}{q + q^2} &\Leftrightarrow 12q^3 - 7q^2 - 13q + 6 = 0 \\ &\Leftrightarrow (q + 1)\left(12q^2 - 19q + 6\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} q = -1 \quad \text{(loại)} \\ q = \dfrac{19 + \sqrt{73}}{24} \\ q = \dfrac{19 - \sqrt{73}}{24}. \end{array}\right. \end{aligned}$$

Vì $q > 1$ nên $q = \dfrac{19 + \sqrt{73}}{24}$.

Chọn đáp án (B) .... □

CÂU 8. Cho dãy số tăng a, b, c ($c \in \mathbb{Z}$) theo thứ tự lập thành cấp số nhân; đồng thời a, $b + 8$, c theo thứ tự lập thành cấp số cộng và a, $b + 8$, $c + 64$ theo thứ tự lập thành cấp số nhân. Tính giá trị biểu thức $P = a - b + 2c$.

Ⓐ $P = 32$. Ⓑ $P = \dfrac{92}{9}$. **C** $P = 64$. Ⓓ $P = \dfrac{184}{9}$.

Lời giải.

Theo giả thiết, ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} ac = b^2 \\ a + c = 2(b + 8) \\ a(c + 64) = (b + 8)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ac = b^2 & (1) \\ a - 2b = 16 - c & (2) \\ ac + 64a = (b + 8)^2. & (3) \end{cases}$$

Thay (1) vào (3) ta được $b^2 + 64a = b^2 + 16b + 64 \Leftrightarrow 4a - b = 4.$ (4)

Kết hợp (2) với (4) ta được

$$\begin{cases} a - 2b = 16 - c \\ 4a - b = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{c - 8}{7} \\ b = \dfrac{4c - 60}{7}. \end{cases} \quad (5)$$

Thay (5) vào (1) ta được

$$7(c - 8)c = (4c - 60)^2 \Leftrightarrow 9c^2 - 424c + 3600 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c = 36 \\ c = \dfrac{100}{9} \end{array}\right. \Leftrightarrow c = 36. \quad (\text{Vì } c \in \mathbb{Z})$$

Với $c = 36 \Rightarrow a = 4$, $b = 12 \Rightarrow P = 4 - 12 + 72 = 64$.

Chọn đáp án (C) .... □

CÂU 9. Cho 3 số a, b, c theo thứ tự lập thành cấp số nhân với công bội khác 1 . Biết cũng theo thứ tự đó chúng lần lượt là số thứ nhất, thứ tư và thứ tám của một cấp số cộng công sai là d, $(d \neq 0)$. Tính $\dfrac{a}{d}$.

(A) $\frac{4}{3}$. (B) 9. (C) $\frac{4}{9}$. (D) 3.

Lời giải.

Do a, b, c theo thứ tự lần lượt là số thứ nhất, thứ tư và thứ tám của một cấp số cộng công sai là $d, (d \neq 0)$ nên $\begin{cases} b = a + 3d \\ c = a + 7d \end{cases}$.

Hơn nữa a, b, c theo thứ tự lập thành cấp số nhân với công bội khác 1 nên $ac = b^2$.

Khi đó

$$\begin{aligned} a(a+7d) = (a+3d)^2 &\Leftrightarrow a^2 + 7ad = a^2 + 6ad + 9d^2 \\ &\Leftrightarrow 9d^2 - ad = 0 \Leftrightarrow 9d = a \Leftrightarrow \frac{a}{d} = 9. \end{aligned}$$

Vậy $\frac{a}{d} = 9$.

Chọn đáp án (B)

CÂU 10. Cho dãy số (u_n) là một cấp số nhân với $u_n \neq 0$, $n \in \mathbb{N}^*$. Dãy số nào sau đây không phải là cấp số nhân?

(A) $u_1 + 2;\ u_2 + 2;\ u_3 + 2;\ \ldots$ (B) $3u_1;\ 3u_2;\ 3u_3;\ \ldots$

(C) $\frac{1}{u_1};\ \frac{1}{u_2};\ \frac{1}{u_3};\ \ldots$ (D) $u_1;\ u_3;\ u_5;\ \ldots$

Lời giải.

Giả sử (u_n) là một cấp số nhân với công bội q.

Ta có $u_2 = u_1 q$, $u_3 = u_1 q^2$.

Dễ thấy $\frac{u_2 + 2}{u_1 + 2} = \frac{u_1 q + 2}{u_1 + 2}$ và $\frac{u_3 + 2}{u_2 + 2} = \frac{u_1 q^2 + 2}{u_1 q + 2}$.

Do $\frac{u_2 + 2}{u_1 + 2} \neq \frac{u_3 + 2}{u_2 + 2} \Rightarrow$ dãy số $u_1 + 2;\ u_2 + 2;\ u_3 + 2;\ \ldots$ không phải là cấp số nhân.

Chọn đáp án (A)

CÂU 11. Xác định x để 3 số $x - 2;\ x + 1;\ 3 - x$ theo thứ tự lập thành một cấp số nhân

(A) $x = \pm 1$. (B) Không có giá trị nào của x.

(C) $x = -3$. (D) $x = 2$.

Lời giải.

Ba số $x - 2;\ x + 1;\ 3 - x$ theo thứ tự lập thành một cấp số nhân

$\Leftrightarrow (x-2)(3-x) = (x+1)^2 \Leftrightarrow 2x^2 - 3x + 7 = 0$ (Phương trình vô nghiệm).

Chọn đáp án (B)

CÂU 12. Trong các dãy số (u_n) cho bởi số hạng tổng quát u_n sau, dãy số nào là một cấp số nhân?

(A) $u_n = 7 \cdot 3^n$. (B) $u_n = \frac{7}{3n}$. (C) $u_n = 7 - 3^n$. (D) $u_n = 7 - 3n$.

Lời giải.

Từ các đáp án trên, với dãy (u_n) cho bởi $u_n = 7 \cdot 3^n$ là một cấp số nhân, vì

$$T = \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{7 \cdot 3^{n+1}}{7 \cdot 3^n} = 3 \text{ (không đổi)}.$$

Chọn đáp án (A)

CÂU 13. Số hạng thứ hai, số hạng đầu và số hạng thứ ba của một cấp số cộng với công sai khác 0 theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân với công bội q. Tìm q.

(A) $q = -2$. (B) $q = -\frac{3}{2}$. (C) $q = \frac{3}{2}$. (D) $q = 2$.

Lời giải.

Giả sử ba số hạng $a;\ b;\ c$ lập thành cấp số cộng thỏa mãn yêu cầu, khi đó $b;\ a;\ c$ theo thứ tự đó lập thành cấp số nhân công bội $q \neq 1$. Ta có

$$\begin{cases} a + c = 2b \\ a = bq;\ c = bq^2 \end{cases} \Rightarrow bq + bq^2 = 2b \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = 0 \\ q^2 + q - 2 = 0. \end{array}\right.$$

- Nếu $b = 0 \Rightarrow a = b = c = 0$ nên $a;\ b;\ c$ là cấp số cộng công sai $d = 0$. (Vô lí!)

- Nếu $q^2+q-2=0$ thì $q=1$ hoặc $q=-2$. Dễ thấy trường hợp $q=1$ là không thỏa mãn, vì khi đó $a=b=c$. Do đó $q=-2$.

Chọn đáp án A ....

CÂU 14. Ba số x, y, z lập thành một cấp số cộng và có tổng bằng 21. Nếu lần lượt thêm các số 2, 3, 9 vào ba số đó (theo thứ tự của cấp số cộng) thì được ba số lập thành một cấp số nhân. Tính $F=x^2+y^2+z^2$.

A $F=389$ hoặc $F=395$. **B** $F=395$ hoặc $F=179$. **C** $F=441$ hoặc $F=357$. **D** $F=389$ hoặc $F=179$.

Lời giải.

Theo tính chất của cấp số cộng, ta có $x+z=2y$.
Kết hợp với giả thiết $x+y+z=21$, ta suy ra $3y=21 \Leftrightarrow y=7$.
Gọi d là công sai của cấp số cộng thì $x=y-d=7-d$ và $z=y+d=7+d$.
Sau khi thêm các số 2, 3, 9 vào ba số x, y, z ta được ba số là $x+2$, $y+3$, $z+9$ hay $9-d$, 10, $16+d$.
Theo tính chất của cấp số nhân, ta có $(9-d)(16+d)=10^2 \Leftrightarrow d^2+7d-44=0$.
Giải phương trình ta được $d=-11$ hoặc $d=4$.
Với $d=-11$, cấp số cộng 18, 7, -4. Lúc này $F=389$.
Với $d=4$, cấp số cộng 3, 7, 11. Lúc này $F=179$.

Chọn đáp án D ....

5 Tính tổng của cấp số nhân

Phương pháp

- Xác định số hạng đầu u_1, công bội q.
- Áp dụng công thức tính tổng các số hạng của cấp số nhân.

1. Ví dụ minh hoạ

VÍ DỤ 1. Tính tổng 10 số hạng đầu tiên của cấp số nhân (u_n), biết $u_1=-3$ và công bội $q=-2$.

Lời giải.

Ta có: $S_{10}=\dfrac{u_1\left(1-q^{10}\right)}{1-q}=1023$.

VÍ DỤ 2. Tính tổng 8 số hạng đầu tiên của cấp số nhân (u_n), biết $u_1=3$ và $u_2=6$.

Lời giải.

Ta có: $u_2=u_1.q \Leftrightarrow 6=3.q \Leftrightarrow q=2$

$$S_8=u_1\frac{1-q^8}{1-q}=3.\frac{1-2^8}{1-2}=765.$$

VÍ DỤ 3. Tính tổng vô hạn $S=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\ldots+\dfrac{1}{2^n}+\ldots$

Lời giải.

Đây là tổng của cấp số nhân lùi vô hạn, với $u_1=1, q=\dfrac{1}{2}$. Khi đó

$$S=\frac{u_1}{1-q}=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2.$$

VÍ DỤ 4. Tính tổng 200 số hạng đầu tiên của dãy số (u_n) biết $\begin{cases}u_1=1\\u_{n+1}=3u_n\end{cases}$.

Lời giải.

Dễ thấy dãy đã cho là một cấp số nhân với công bội $q=3; u_1=1$.

Từ đó $S_{200}=u_1\dfrac{q^{200}-1}{q-1}=\dfrac{3^{200}-1}{2}$.

VÍ DỤ 5. Một cấp số nhân có số hạng đầu $u_1=3$, công bội $q=2$. Biết $S_n=765$, tìm n.

Lời giải.

Áp dụng công thức tính tổng của cấp số nhân ta có $S_n=\dfrac{u_1(1-q^n)}{1-q}=\dfrac{3.(1-2^n)}{1-2}=765 \Leftrightarrow n=8$.

2. Bài tập tự luận

BÀI 1. Một cấp số nhân có số hạng đầu $u_1 = 3$ và công bội $q = 2$. Tính tổng 8 số hạng đầu của cấp số nhân.

Lời giải.

Ta có $S_8 = \dfrac{u_1\left(1-q^8\right)}{1-q} = \dfrac{3\left(1-2^8\right)}{1-2} = 765$.

BÀI 2. Tính tổng $S = 1 + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3^2} + \cdots + \dfrac{1}{3^n} + \cdots$.

Lời giải.

Đây là tổng của một cấp số nhân lùi vô hạn với $u_1 = 1, q = \dfrac{1}{3}$

Suy ra $S = \dfrac{u_1}{1-q} = \dfrac{1}{1-\dfrac{1}{3}} = \dfrac{3}{2}$.

BÀI 3. Cho cấp số nhân có $q = -3, S_6 = 730$. Tính u_1.

Lời giải.

$S_6 = u_1.\dfrac{1-q^6}{1-q} \Rightarrow u_1 = S_6 \cdot \dfrac{1-q}{1-q^6} = 730 \cdot \dfrac{1-(-3)}{1-(-3)^6} = 4$.

BÀI 4. Một cấp số nhân (u_n) có $u_3 = 8$, $u_5 = 32$ và công bội $q > 0$. Tính tổng của 10 số hạng đầu tiên của cấp số nhân.

Lời giải.

$\begin{cases} u_3 = 8 \\ u_5 = 32 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1.q^2 = 8 \\ u_1.q^4 = 32 \end{cases} \Rightarrow q^2 = \dfrac{32}{8} = 4 \Rightarrow q = 2, u_1 = 2$

$$\Rightarrow S_{10} = u_1.\frac{1-q^{10}}{1-q} = 2.\frac{2-2^{10}}{1-2} = 2046.$$

BÀI 5. Tính tổng $S = 2 + 6 + 18 + ... + 13122$.

Lời giải.

Xét cấp số nhân có $u_1 = 2, q = 3$. Khi đó $13122 = u_1.q^{n-1} \Leftrightarrow 13122 = 2.3^{n-1} \Leftrightarrow n = 9$

Vậy $S = S_9 = u_1\dfrac{1-q^9}{1-q} = 2.\dfrac{1-3^9}{1-3} = 19682$

BÀI 6. Tính tổng $S = 1 + 2 + 4 + 8 + \cdots + 1024$.

Lời giải.

Xét cấp số nhân có $u_1 = 1, q = 2$. Khi đó $1024 = u_1.q^{n-1} \Leftrightarrow 1024 = 1.2^{n-1} \Leftrightarrow n = 11$.

Vậy $S = S_{11} = u_1\dfrac{1-q^{11}}{1-q} = 1.\dfrac{1-2^{11}}{1-2} = 2047$.

BÀI 7. Một cấp số nhân có $u_1 = 1, q = 3$, biết $S_n = 3280$. Tìm n.

Lời giải.

$S_n = u_1\dfrac{1-q^n}{1-q} = 1.\dfrac{1-3^n}{1-3} = 3280 \Rightarrow n = 8$.

BÀI 8. Bốn số hạng liên tiếp của một cấp số nhân, trong đó số hạng thứ hai nhỏ hơn số hạng thứ nhất 35, còn số hạng thứ ba lớn hơn số hạng thứ tư 560. Tìm tổng của bốn số hạng trên, biết công bội mang giá trị dương.

Lời giải.

Theo đề ta có $\begin{cases} u_1 - u_2 = 35 \\ u_3 - u_4 = 560 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 - u_1q = 35 \\ u_1q^2 - u_1q^3 = 560 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1(1-q) = 35 & (1) \\ u_1q^2(1-q) = 560 & (2) \end{cases}$

Thay (1) vào (2) ta được $q^2 = 16 \Leftrightarrow q = \pm 4$.

Với $q = 4$ thay vào (1) ta được $u_1 = -\dfrac{35}{3}$.

$S_4 = u_1.\dfrac{1-q^4}{1-q} = -\dfrac{2975}{3}$.

BÀI 9. Tổng của một cấp số nhân lùi vô hạn bằng $\dfrac{1}{4}$, tổng ba số hạng đầu tiên của cấp số nhân đó bằng $\dfrac{7}{27}$. Tổng của số hạng đầu và công bội của cấp số nhân đó bằng

Lời giải.

Gọi u_1 và q với $(|q| < 1)$ lần lượt là số hạng đầu và cộng bội của cấp số nhân lùi vô hạn. Theo giả thiết, ta có

$$\begin{cases} \dfrac{u_1}{q-1} = \dfrac{1}{4} \\ u_1 + u_1q + u_1q^2 = \dfrac{7}{27} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{u_1}{q-1} = \dfrac{1}{4} \\ u_1(1-q^3) = \dfrac{7}{27}(1-q) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{u_1}{1-q} = \dfrac{1}{4} \\ q^3 = -\dfrac{1}{27} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = \dfrac{1}{3} \\ q = -\dfrac{1}{3}. \end{cases}$$

Vậy $u_1 + q = 0$.

BÀI 10. Một du khách vào trường đua ngựa đặt cược, lần đầu đặt 20.000 đồng, mỗi lần sau tiền đặt gấp đôi số tiền lần đặt trước. Người đó thua 10 lần liên tiếp và thắng ở lần thứ 11. Hỏi du khách trên thắng hay thua bao nhiêu tiền?

Lời giải.

Số tiền du khách đặt trong mỗi lần (kể từ lần đầu) là một cấp số nhân có $u_1 = 20.000$ và công bội $q = 2$.
Du khách thua trong 10 lần liên tiếp đầu tiên nên tổng số tiền thua là

$$S_{10} = \frac{u_1(1-q^{10})}{1-q} = \frac{20000(1-2^{10})}{1-2} = 20000(2^{10}-1)(\text{đồng}).$$

Số tiền du khách thắng trong lần thứ 11 là $u_{11} = u_1q^{10} = 20000.2^{10}$ (đồng).
Ta có $u_{11} - S_{10} = 20000 > 0$. Vậy du khách thắng 20000 đồng.

3. Câu hỏi trắc nghiệm

CÂU 1. Cho cấp số nhân $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n$ với công bội q ($q \neq 0$, $q \neq 1$). Đặt

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n.$$

Khẳng định nào sau đây là đúng?

A $S_n = \dfrac{u_1(q^n-1)}{q-1}$. **B** $S_n = \dfrac{u_1(q^n+1)}{q+1}$. **C** $S_n = \dfrac{u_1(q^{n-1}-1)}{q+1}$. **D** $S_n = \dfrac{u_1(q^{n-1}-1)}{q-1}$.

Lời giải.

Ta có $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n = u_1 \cdot \dfrac{1-q^n}{1-q} = \dfrac{u_1(q^n-1)}{q-1}$.

Chọn đáp án A .... □

CÂU 2. Cho cấp số nhân (u_n) có số hạng đầu $u_1 = 12$ và công sai $q = \dfrac{3}{2}$. Tổng 5 số hạng đầu của cấp số nhân bằng

A $\dfrac{93}{4}$. **B** $\dfrac{633}{2}$. **C** $\dfrac{633}{4}$. **D** $\dfrac{93}{2}$.

Lời giải.

Gọi S_5 là tổng 5 số hạng đầu của cấp số nhân đã cho. Khi đó ta có

$$S_5 = u_1 \cdot \frac{1-q^5}{1-q} = 12 \cdot \frac{1-\left(\frac{3}{2}\right)^5}{1-\frac{3}{2}} = \frac{633}{4}.$$

Chọn đáp án C .... □

CÂU 3. Cho cấp số nhân (u_n) có số hạng đầu $u_1 = 3$, công bội $q = -2$. Tính tổng 10 số hạng đầu tiên của cấp số nhân (u_n).

A -1023. **B** 1023. **C** 513. **D** -513.

Lời giải.

Tổng của 10 số hạng đầu bằng

$$S_{10} = u_1 \cdot \frac{q^{10}-1}{q-1} = 3 \cdot \frac{(-2)^{10}-1}{-2-1} = -1023.$$

Chọn đáp án A .... □

CÂU 4. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_2 = -2$ và $u_5 = 54$. Tính tổng 1000 số hạng đầu tiên của cấp số nhân đã cho.

A $S_{1000} = \dfrac{3^{1000}-1}{2}$. **B** $S_{1000} = \dfrac{1-3^{1000}}{6}$. **C** $S_{1000} = \dfrac{3^{1000}-1}{6}$. **D** $S_{1000} = \dfrac{1-3^{1000}}{4}$.

Lời giải.

Ta có $u_5 = u_2 \cdot q^3 \Leftrightarrow q^3 = \dfrac{u_5}{u_2} = \dfrac{54}{-2} = -27 = (-3)^3 \Rightarrow q = -3$ và $u_1 = \dfrac{u_2}{q} = \dfrac{2}{3}$.

Suy ra $S_{1000} = u_1 \cdot \dfrac{1-q^n}{1-q} = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{1-(-3)^{1000}}{1+3} = \dfrac{1-3^{1000}}{6}$.

Chọn đáp án B .... □

CÂU 5. Tính tổng tất cả các số hạng của một cấp số nhân, biết số hạng đầu bằng 18, số hạng thứ hai bằng 54 và số hạng cuối bằng 39366.

A 19674. **B** 59040. **C** 177138. **D** 6552.

Lời giải.

$u_1 = 18, u_2 = 54 \Rightarrow q = 3$.

$u_n = 39366 \Leftrightarrow u_1 \cdot q^{n-1} = 39366 \Leftrightarrow 18 \cdot 3^{n-1} = 39366 \Leftrightarrow 3^{n-1} = 3^7 \Leftrightarrow n = 8$.

Vậy $S_8 = 18 \cdot \dfrac{1-3^8}{1-3} = 59040$.

Chọn đáp án B

CÂU 6. Dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n \end{cases}$ với $n \geq 1$. Tính tổng $S = u_1 + u_2 + \cdots + u_{10}$.

A $S = \dfrac{1023}{2048}$. **B** $S = \dfrac{5}{2}$. **C** $\dfrac{1023}{512}$. **D** $S = 2$.

Lời giải.

Ta có các số hạng của dãy số (u_n) là $1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{8}, \dfrac{1}{16}, \dfrac{1}{32}, \ldots, \dfrac{1}{2^n}$. Khi đó (u_n) lập thành một cấp số nhân có $u_1 = 1$ và công bội $q = \dfrac{1}{2}$.

Suy ra $S = u_1 + u_2 + \cdots + u_{10} = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \cdots + \dfrac{1}{2^9} = \dfrac{1 \cdot \left[1 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^{10}\right]}{1 - \dfrac{1}{2}} = \dfrac{1023}{512}$.

Chọn đáp án C

CÂU 7. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 = -6$ và $q = -2$. Tổng n số hạng đầu tiên của cấp số nhân đã cho bằng 2046. Tìm n.

A $n = 9$. **B** $n = 12$. **C** $n = 11$. **D** $n = 10$.

Lời giải.

Ta có $2046 = S_n = u_1 \cdot \dfrac{1-q^n}{1-q} = -6 \cdot \dfrac{1-(-2)^n}{1-(-2)} = 2((-2)^n - 1) \Rightarrow (-2)^n = 1024 \Leftrightarrow n = 10$.

Chọn đáp án D

CÂU 8. Tổng 100 số hạng đầu của dãy số (u_n) với $u_n = 2n - 1$ là

A 199. **B** $2^{100} - 1$. **C** 10000. **D** 9999.

Lời giải.

Ta có (u_n) là cấp số cộng công sai $d = 2$ và $u_1 = 1$.

Do đó $S_n = n \cdot u_1 + \dfrac{n(n-1)}{2} \cdot d = 100 \cdot 1 + \dfrac{100 \cdot 99}{2} \cdot 2 = 10000$.

Chọn đáp án C

CÂU 9. Cho dãy số (u_n) với $u_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n + 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Tính $S_{2019} = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_{2019}$.

A $S_{2019} = 2019 + \dfrac{1}{2^{2019}}$. **B** $S_{2019} = \dfrac{4039}{2}$. **C** $S_{2019} = \dfrac{6057}{2}$. **D** $S_{2019} = 2020 - \dfrac{1}{2^{2019}}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} S_{2019} &= u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_{2019} \\ &= \left(\dfrac{1}{2} + 1\right) + \left[\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + 1\right] + \left[\left(\dfrac{1}{2}\right)^3 + 1\right] + \cdots + \left[\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2019} + 1\right] \\ &= 2019 + \dfrac{1}{2} + \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^3 + \cdots + \left(\dfrac{1}{2}\right)^{2019} \\ &= 2019 + \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^{2019}}{1 - \dfrac{1}{2}} = 2019 + 1 - \dfrac{1}{2^{2019}} \\ &= 2020 - \dfrac{1}{2^{2019}}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án D

CÂU 10. Cho $S = 11 + 101 + 1001 + \cdots + \underbrace{1000\ldots01}_{(n-1)\text{ chữ số } 0}$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $S = 10\left(\dfrac{10^n - 1}{9}\right)$.

B. $S = 10\left(\dfrac{10^n - 1}{9}\right) - n$.

C. $S = 10\left(\dfrac{10^n - 1}{9}\right) + n$.

D. $S = \left(\dfrac{10^n - 1}{9}\right) + n$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} S &= (10+1) + (10^2+1) + (10^3+1) + \cdots + (10^n+1) \\ &= \left(10 + 10^2 + 10^3 + \cdots + 10^n\right) + \underbrace{1+1+1+\cdots+1}_{n \text{ số } 1} \\ &= 10\left(\dfrac{10^n - 1}{9}\right) + n. \end{aligned}$$

Chọn đáp án C

CÂU 11. Gọi $S = 1 + 11 + 111 + \cdots + \underbrace{111\ldots1}_{(n \text{ số } 1)}$ thì S nhận giá trị nào sau đây?

A. $S = \dfrac{1}{9}\left[10\left(\dfrac{10^n - 1}{9}\right) - n\right]$.

B. $S = \dfrac{10^n - 1}{81}$.

C. $S = 10\left(\dfrac{10^n - 1}{81}\right) - n$.

D. $S = 10\left(\dfrac{10^n - 1}{81}\right)$.

Lời giải.

Ta có $S = \dfrac{1}{9}(9 + 99 + 999 + \cdots + \underbrace{99\ldots9}_{\text{n số } 9}) = \dfrac{1}{9}\cdot\left[10\cdot\dfrac{1-10^n}{1-10} - n\right]$.

Chọn đáp án A

CÂU 12. Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_n = 2u_{n-1} + 1, n \geq 2 \end{cases}$. Tổng $S = u_1 + u_2 + \cdots + u_{20}$ là

A. $2^{21} - 20$.

B. $2^{21} - 22$.

C. 2^{20}.

D. $2^{20} - 20$.

Lời giải.

Dự đoán công thức số hạng tổng quát $u_n = 2^n - 1$ (Chứng minh bằng phương pháp quy nạp TH).

$S = 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^{20} - 20 = 2\cdot\dfrac{1-2^{20}}{1-2} - 20 = 2^{21} - 22$.

Chọn đáp án B

CÂU 13. Biết rằng $S = 1 + 2\cdot 3 + 3\cdot 3^2 + \cdots + 11\cdot 3^{10} = a + \dfrac{21\cdot 3^b}{4}$. Tính $P = a + \dfrac{b}{4}$.

A. $P = 3$.

B. $P = 4$.

C. $P = 1$.

D. $P = 2$.

Lời giải.

Từ giả thiết suy ra $3S = 3 + 2\cdot 3^2 + 3\cdot 3^3 + \cdots + 11\cdot 3^{11}$.

Do đó

$$\begin{aligned} -2S &= S - 3S = 1 + 3 + 3^2 + \cdots + 3^{10} - 10\cdot 3^{11} \\ &= \dfrac{1-3^{11}}{1-3} - 11\cdot 3^{11} = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{21\cdot 3^{11}}{2} \Rightarrow S = \dfrac{1}{4} + \dfrac{21}{4}\cdot 3^{11}. \end{aligned}$$

Vì $S = \dfrac{1}{4} + \dfrac{21\cdot 3^{11}}{4} = a + \dfrac{21\cdot 3^b}{4} \Rightarrow a = \dfrac{1}{4},\ b = 11 \Rightarrow P = \dfrac{1}{4} + \dfrac{11}{4} = 3$.

Chọn đáp án A

6 Kết hợp cấp số cộng và cấp số nhân

Nhắc lại tính chất CSC, CSN

- 3 số a, b, c theo thứ tự lập thành CSC thì $a + c = 2b$.

3 số a, b, c theo thứ tự lập thành CSN thì $a.c = b^2$.

1. Ví dụ minh hoạ

VÍ DỤ 1. Ba số x, y, z theo thứ tự đó lập thành một CSN với công bội $q(q \neq 1)$, đồng thời các số $x, 2y, 3z$ theo thứ tự đó lập thành một CSC với công sai d . Hãy tìm q?

Lời giải.

Ta có $x + 3z = 2.2y \Leftrightarrow x + 3xq^2 = 2.2xq \Leftrightarrow 1 + 3q^2 = 4q \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} q = \dfrac{1}{3} \\ q = 1(L) \end{array}\right.$

VÍ DỤ 2. Biết rằng a, b, c là ba số hạng liên tiếp của một CSC và a, c, b là ba số hạng liên tiếp của một CSN, đồng thời $a + b + c = 30$. Tìm a, b, c.

Lời giải.

Theo đề ta có $\begin{cases} a + c = 2b & (1) \\ ab = c^2 & (2) \\ a + b + c = 30 & (3) \end{cases}$

Từ (1) và (3) ta được $3b = 30 \Leftrightarrow b = 10$

Thay $b = 10$ vào $(1), (2)$ ta được $\begin{cases} a + c = 20 \\ 10a = c^2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c = 10, a = 10\ (L) \\ c = -20, a = 40(N) \end{array}\right.$

Vậy $a = 40, b = 10, c = -20$

VÍ DỤ 3. Ba số x, y, z theo thứ tự đó lập thành một CSN. Ba số $x, y - 4, z$ theo thứ tự đó lập thành CSN. Đồng thời các số $x, y - 4, z - 9$ theo thứ tự đó lập thành CSC. Tìm x, y, z.

Lời giải.

Theo đề ta có $\begin{cases} xz = y^2 & (1) \\ xz = (y-4)^2 & (2) \\ x + (z - 9) = 2(y - 4) & (3) \end{cases}$

Từ (1) và (2) ta có $y^2 = (y-4)^2 \Leftrightarrow y = 2$

Thế $y = 2$ vào (1) và (3) ta được $\begin{cases} xz = 4 \\ x + z = 5 \end{cases} \Rightarrow x = 4, z = 1$ hoặc $x = 1, z = 4$

Vậy có 2 bộ (x, y, z) thỏa yêu cầu bài toán là $(1, 2, 4)$ và $(4, 2, 1)$

VÍ DỤ 4. Cho a, b, c là ba số hạng liên tiếp của một CSN và $a, b, c - 4$ là ba số hạng liên tiếp của một CSC, đồng thời $a, b - 1, c - 5$ là ba số hạng liên tiếp của một CSN. Tìm a, b, c biết a, b, c là các số nguyên.

Lời giải.

Theo đề ta có $\begin{cases} ac = b^2 & (1) \\ a + c - 4 = 2b & (2) \\ a(c-5) = (b-1)^2 & (3) \end{cases}$

Thay (1) vào (3): $b^2 - 5a = b^2 - 2b + 1 \Leftrightarrow b = \dfrac{5a+1}{2}$

Thay vào (2) ta được $a + c - 4 = 5a + 1 \Leftrightarrow c = 4a + 5$

Thế b, c theo a vào (1) ta được $9a^2 - 10a + 1 = 0 \Leftrightarrow a = 1 \vee a = \dfrac{1}{9}(L)$ Vậy $a = 1, b = 3, c = 9$

VÍ DỤ 5. Cho 4 số nguyên dương, trong đó 3 số đầu lập thành một CSC, 3 số hạng sau thành lập CSN. Biết rằng tổng của số hạng đầu và số hạng cuối là 37, tổng của hai số hạng giữa là 36. Tìm tổng 4 số đó

Lời giải.

Gọi 4 số cần tìm lần lượt là a, b, c, d

a, b, c là 3 số hạng liên tiếp của CSC. Ta có $a + c = 2b$ (1)

b, c, d là 3 số hạng liên tiếp của CSN. Ta có $bd = c^2$ (2)

Theo giả thuyết ta có $\begin{cases} a + d = 37 & (3) \\ b + c = 36 & (4) \end{cases}$

Từ (4) $\Rightarrow b = 36 - c$ thay vào (1) ta được $a = 72 - 3c$, thay a vào (3) ta được $d = -35 + 3c$

Thế b, d vào (2) ta được $(36 - c)(-35 + 3c) = c^2 \Rightarrow c = 20 \vee c = \dfrac{63}{4}(L)$

Vậy $c = 20, a = 12, b = 16, d = 95 \Rightarrow S = a + b + c + d = 143$

2. Bài tập tự luận

BÀI 1. Biết $x, y, x + 4$ theo thứ tự lập thành cấp số cộng và $x + 1, y + 1, 2y + 2$ theo thứ tự lập thành cấp số nhân với x, y là số thực dương. Tính $x + y$.

Lời giải.

Theo giả thiết ta có:

$$\begin{cases} x+(x+4)=2y \\ (x+1)(2y+2)=(y+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=x+2 \\ (x+1)(2x+6)=(x+3)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \Rightarrow y=3 \\ x=-3 \Rightarrow y=-1 \end{cases}$$

Do đó $x+y=4$.

BÀI 2. Cho 3 số a,b,c theo thứ tự tạo thành một cấp số nhân với công bội khác 1. Biết cũng theo thứ tự đó chúng lần lượt là số hạng thứ nhất, thứ tư và thứ tám của một cấp số cộng với công sai $d \neq 0$. Tính $\dfrac{a}{d}$.

Lời giải.

a,b,c lần lượt là số hạng thứ nhất, thứ tư, thứ tám của một CSC với công sai d

ta có $\begin{cases} b=a+3d \\ c=a+7d \end{cases}$.

Mặt khác a,b,c là 3 số hạng liên tiếp của CSN nên

$a.c=b^2 \Leftrightarrow a(a+7d)=(a+3d)^2 \Leftrightarrow a^2+7ad=a^2+6ad+9d^2 \Leftrightarrow 9d^2=ad \Leftrightarrow \dfrac{a}{d}=9$.

BÀI 3. Tìm tích các số dương a và b sao cho $a, a+2b, 2a+b$ lập thành một cấp số cộng và $(b+1)^2, ab+5, (a+1)^2$ lập thành một cấp số nhân.

Lời giải.

Theo tính chất CSC ta có $a+(2a+b)=2(a+2b)$ (1)

Theo tính chất CSN ta có $(b+1)^2.(a+1)^2=(ab+5)^2$ (2)

Từ (1) ta được $a=3b$, thay vào (2) ta được $(b+1)^2(3b+1)^2=(3b^2+5)^2$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (b+1)(3b+1)=(3b^2+5) \\ (b+1)(3b+1)=-(3b^2+5) \text{ (Vô nghiệm)} \end{array}\right. \Leftrightarrow b=1, a=3 \Rightarrow ab=3.$$

BÀI 4. $a,b,c\,(a\neq b\neq c)$ là ba số hạng liên tiếp của một cấp số cộng và b,c,a là ba số hạng liên tiếp của một cấp số nhân, đồng thời $a.b.c=125$. Tìm a,b,c.

Lời giải.

a,b,c là ba số hạng liên tiếp của cấp số cộng, nên có $a+c=2b$.

b,c,a là ba số hạng liên tiếp của một cấp số nhân, nên có $b.a=c^2$.

Ta có hệ $\begin{cases} a+c=2b & (1) \\ b.a=c^2 & (2) \\ a.b.c=125 & (3) \end{cases}$

Thay (2) vào (3) ta được $c^3=125 \Rightarrow c=5$

Thay $c=5$ vào (1), (2) ta được hệ $\begin{cases} a+5=2b \\ ab=25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2b-5 \\ 2b^2-5b-25=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=5 \Rightarrow a=5 \\ b=-\dfrac{5}{2} \Rightarrow a=-10 \end{array}\right.$

Vậy $a=-10, b=-\dfrac{5}{2}, c=5$.

BÀI 5. Một cấp số cộng và một cấp số nhân đều là các dãy tăng các số hạng thứ nhất của hai dãy số đều bằng 3, các số hạng thứ hai bằng nhau. Tỉ số giữa các số hạng thứ ba của CSN và CSC là $\dfrac{9}{5}$. Tìm tích ba số hạng của cấp số cộng thỏa mãn tính chất trên.

Lời giải.

Gọi u_1,u_2,u_3 là 3 số hạng liên tiếp của CSC.

Gọi a_1,a_2,a_3 là 3 số hạng liên tiếp của CSN.

Theo đề ta có hệ $\begin{cases} u_1=a_1=3 \\ u_2=a_2 \\ a_3=\dfrac{9}{5}u_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1=a_1=3 \\ 3+d=3q \\ 5(3q^2)=9(3+2d) \end{cases} \Rightarrow q=3 \vee q=\dfrac{3}{5}$

Chọn $q=3$ vì dãy tăng, khi đó $d=6$.

Vậy 3 số hạng của cấp số cộng là $3;9;15 \Rightarrow 3\cdot 9\cdot 15=405$

BÀI 6. Một CSC và CSN đều có số hạng đầu tiên là bằng 5, số hạng thứ hai của CSC lớn hơn số hạng thứ hai của CSN là 10, còn các số hạng thứ 3 của hai cấp số thì bằng nhau. Tìm tổng các số hạng của cấp số cộng biết công bội của cấp số nhân không âm.

Lời giải.

Gọi u_1,u_2,u_3 là 3 số hạng liên tiếp của CSC với công sai d.

Gọi a_1,a_2,a_3 là 3 số hạng liên tiếp của CSN với công bội q.

Theo đề bài ta có: $\begin{cases} u_1=a_1=5 \\ u_2-a_2=10 \\ u_3=a_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1=a_1=5 \\ u_1+d-a_1q=10 \\ u_1+2d=a_1q^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1=a_1=5 \\ d=5+5q \\ 5+2d=5q^2 \end{cases} \Rightarrow q=3 \vee q=-1(L)$

Với $q = 3 \Rightarrow d = 20$. Vậy CSC là $5; 25; 45 \Rightarrow S = 5 + 25 + 45 = 75$

BÀI 7. Ba số khác nhau có tổng bằng 114 có thể coi là ba số hạng liên tiếp của một CSN, hoặc coi là số hạng thứ nhất, thứ tư và thứ hai mươi lăm của một CSC. Tìm ba số đó.

Lời giải.

Gọi u_1, u_2, u_3 là 3 số hạng liên tiếp của CSN với công bội q.
Theo đề $u_1 = a_1, u_2 = a_4, u_3 = a_{25}$ với a_1, a_4, a_{25} là 3 số hạng của CSC với công sai d.

Ta có $\begin{cases} a_4 = a_1 + 3d \\ a_{25} = a_1 + 24d \end{cases} \Rightarrow 8a_4 - a_{25} = 7a_1 \Leftrightarrow 8u_2 - u_3 = 7u_1 \Leftrightarrow 8u_1q - u_1q^2 = 7u_1$

$$\Leftrightarrow q^2 - 8q + 7 = 0 \Leftrightarrow q = 1(L) \vee q = 7(N)$$

Theo đề ta cũng có $u_1 + u_2 + u_3 = 114 \Leftrightarrow u_1 + u_1q + u_1q^2 = 114 \Rightarrow u_1 = 2$
Vậy 3 số cần tìm là $2; 14; 98$.

BÀI 8. Ba số khác nhau có tổng là 217 có thể coi là các số hạng liên tiếp của một CSN hoặc là các số hạng thứ 2 thứ 9 và thứ 44 của một CSC. Tìm 3 số đó.

Lời giải.

Gọi u_1, u_2, u_3 là 3 số hạng liên tiếp của CSN với công bội q.
Theo đề $u_1 = a_2, u_2 = a_9, u_3 = a_{44}$ với a_2, a_9, a_{44} là 3 số hạng của CSC với công sai d.

Ta có $\begin{cases} a_9 = a_2 + 7d \\ a_{44} = a_2 + 42d \end{cases} \Rightarrow 6a_9 - a_{44} = 5a_2 \Leftrightarrow 6u_2 - u_3 = 5u_1 \Leftrightarrow 6u_1q - u_1q^2 = 5u_1$

$$\Leftrightarrow q^2 - 6q + 5 = 0 \Leftrightarrow q = 1(L) \vee q = 5(N)$$

Theo đề ta cũng có $u_1 + u_2 + u_3 = 217 \Leftrightarrow u_1 + u_1q + u_1q^2 = 217 \Rightarrow u_1 = 7$
Vậy 3 số cần tìm là $7; 35; 175$.

7 Bài toán thực tế

1. Ví dụ minh hoạ

VÍ DỤ 1. Trong một lọ nuôi cấy vi khuẩn, ban đầu có 5 000 con vi khuẩn và số lượng vi khuẩn tăng lên thêm 8% mỗi giờ. Hỏi sau 5 giờ thì số lượng vi khuẩn là bao nhiêu?

Lời giải.

Ta có $A = 5\,000$ là số lượng vi khuẩn ban đầu, $r = 8\% = 0{,}08$ là tỉ lệ gia tăng vi khuẩn sau một giờ.
Vì sau mỗi giờ, số lượng vi khuẩn tăng lên bằng số lượng vi khuẩn trước đó cộng cho số lượng vi khuẩn tăng lên. Nên ta có:

- Tại thời điểm sau 1 giờ: $T_1 = 5000 + 5000 \cdot 0{,}08 = 5\,000 \cdot (1{,}08)$.
- Tại thời điểm sau 2 giờ: $T_2 = T_1 + T_1 \cdot 0{,}08 = T_1 \cdot (1{,}08) = 5000 \cdot (1{,}08)^2$.

Do đó ta có thể nhận thấy rằng, số lượng vi khuẩn ở thời gian n giờ là một cấp số nhân có số hạng đầu $u_1 = 5000.1,08$ và công bội $q = 1{,}08$.
Suy ra số hạng tổng quát $u_n = 5\,000 \cdot (1{,}08)^n$.
Vậy số lượng vi khuẩn sau 5 giờ là $u_5 = 5\,000 \cdot (1{,}08)^5 \approx 7346$ (vi khuẩn).

VÍ DỤ 2. Người ta thiết kế một cái tháp gồm 10 tầng theo cách: Diện tích bề mặt trên của mỗi tầng bằng nửa diện tích bề mặt trên của tầng ngay bên dưới và diện tích bề mặt của tầng 1 bằng nửa diện tích bề mặt đế tháp. Biết diện tích bề mặt đế tháp là $12\,288\ \mathrm{m}^2$, tính diện tích bề mặt trên cùng của tháp.

Lời giải.

Gọi S là diện tích mặt đế và $T_1, T_2, \ldots, T_{10}$ là diện tích bề mặt của tầng 1, tầng 2, …, tầng 10.
Khi đó, ta có

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{1}{2} \cdot S; \\ T_2 &= \frac{1}{2} \cdot T_1 = \frac{1}{2^2} \cdot S; \\ T_3 &= \frac{1}{2} \cdot T_2 = \frac{1}{2^3} \cdot S; \\ &\vdots \\ T_{10} &= \frac{1}{2} \cdot T_9 = \frac{1}{2^{10}} \cdot S. \end{aligned}$$

Vậy diện tích bề mặt trên cùng của tháp là $T_{10} = \frac{1}{2^{10}} \cdot 12288 = 12\ \mathrm{m}^2$.

VÍ DỤ 3. Dân số trung bình của Việt Nam năm 2020 là 97,6 triệu người, tỉ lệ tăng dân số là 1,14%/năm.

(Nguồn: Niên giám thống kê của Việt Nam năm 2020, NXB Thống kê, 2021)

Giả sử tỉ lệ tăng dân số không đổi qua các năm.

a) Sau 1 năm, dân số của Việt Nam sẽ là bao nhiêu triệu người (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?

b) Viết công thức tính dân số Việt Nam sau n năm kể từ năm 2020.

Lời giải.

a) Sau 1 năm, dân số của Việt Nam sẽ là

$$\begin{aligned} u_1 &= 97{,}6 + 97{,}6 \cdot 0{,}0114 = 97{,}6 \cdot (1 + 0{,}0114) \\ &= 97{,}6 \cdot 1{,}0114 \approx 98{,}7 (\text{triệu người}). \end{aligned}$$

b) Gọi u_n là dân số của Việt Nam sau n năm.
Do tỉ lệ tăng dân số hàng năm là 1,14% nên ta có

$$\begin{aligned} u_n &= u_{n-1} + u_{n-1} \cdot 0{,}0114 = u_{n-1} \cdot (1 + 0{,}0114) \\ &= u_{n-1} \cdot 1{,}0114 \text{ với } n \geq 2. \end{aligned}$$

Do đó, (u_n) là cấp số nhân có số hạng đầu $u_1 = 97{,}6 \cdot 1{,}0114$, công bội $q = 1{,}0114$.
Vậy dân số của Việt Nam sau n năm kể từ năm 2020 là

$$u_n = 97{,}6 \cdot 1{,}0114 \cdot 1{,}0114^{n-1} = 97{,}6 \cdot 1{,}0114^n \text{ (triệu người)}.$$

VÍ DỤ 4. Bác Linh gửi vào ngân hàng 100 triệu đồng tiền tiết kiệm với hình thức lãi kép, kì hạn 1 năm với lãi suất 6%/năm. Viết công thức tính số tiền (cả gốc và lãi) mà bác Linh có được sau n năm (giả sử lãi suất không thay đổi qua các năm).

Lời giải.

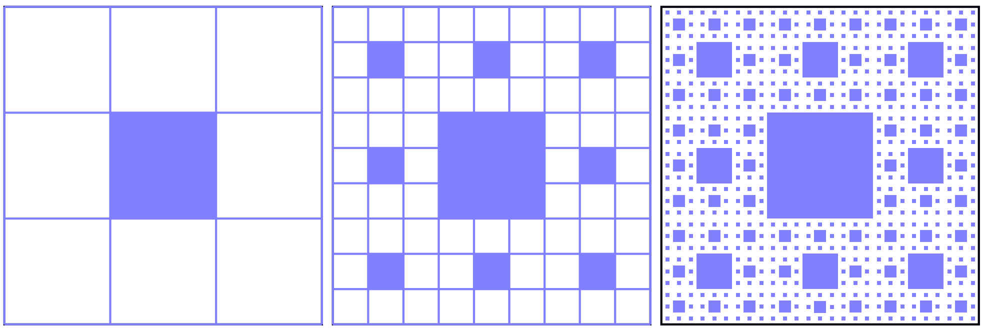
Gọi u_n là số tiền (cả gốc lẫn lãi) mà bác Linh có được sau n năm.
Do lãi suất 1 năm là 6% nên ta có

$$\begin{aligned} u_n &= u_{n-1} + u_{n-1} \cdot 0{,}06 = u_{n-1} \cdot (1 + 0{,}06) \\ &= u_{n-1} \cdot 1{,}06 \text{ với } n \geq 2. \end{aligned}$$

Do đó, (u_n) là cấp số nhân có số hạng đầu $u_1 = 100$ (triệu đồng), công bội $q = 1{,}06$.
Vậy số tiền mà bác Linh có được sau n năm là

$$u_n = 100 \cdot 1{,}06^{n-1} \text{ (triệu đồng)}.$$

VÍ DỤ 5. Một hình vuông có cạnh 1 đơn vị dài được chia thành chín hình vuông nhỏ hơn và hình vuông ở chính giữa được tô màu xanh như hình. Mỗi hình vuông nhỏ hơn lại được chia thành chín hình vuông con, và mỗi hình vuông con ở chính giữa lại được tô màu xanh. Nếu quá trình này được tiếp tục lặp lại năm lần, thì tổng diện tích các hình vuông được tô màu xanh là bao nhiêu?



Lời giải.

Lần phân chia thứ nhất, 1 hình vuông thành 9 hình vuông con, diện tích hình vuông tô màu xanh là $u_1 = \dfrac{1}{9}$.

Lần phân chia thứ hai, 8 hình vuông thành 9 hình vuông con, diện tích hình vuông tô màu xanh tăng thêm là $u_2 = \dfrac{1}{9}\left(\dfrac{8}{9}\right)$.

Lần phân chia thứ ba, 8^2 hình vuông thành 9 hình vuông con, diện tích hình vuông tô màu xanh tăng thêm là $u_3 = \dfrac{1}{9}\left(\dfrac{8}{9}\right)^2$.

Lần phân chia thứ tư, 8^3 hình vuông thành 9 hình vuông con, diện tích hình vuông tô màu xanh tăng thêm là $u_4 = \dfrac{1}{9}\left(\dfrac{8}{9}\right)^3$.

Lần phân chia thứ năm, 8^4 hình vuông thành 9 hình vuông con, diện tích hình vuông tô màu xanh tăng thêm là $u_5 = \frac{1}{9}\left(\frac{8}{9}\right)^4$.
Như vậy diện tích các hình vuông tăng thêm sau mỗi lần chia tạo thành cấp số nhân có công bội là $q = \frac{8}{9}$, số hạng đầu là $u_1 = \frac{1}{9}$.
Do đó, tổng diện tích hình vuông tô màu xanh sau 5 lần chia là

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 = \frac{1-q^5}{1-q} \cdot u_1 = \frac{1-\left(\frac{8}{9}\right)^5}{1-\frac{8}{9}} \cdot \frac{1}{9} = \frac{26281}{39366}.$$

VÍ DỤ 6. Một khay nước có nhiệt độ 23° được đặt vào ngăn đá của tủ lạnh. Biết sau mỗi giờ, nhiệt độ của nước giảm 20%. Tính nhiệt độ của khay nước đó sau 6 giờ theo đơn vị độ C.

Lời giải.

Nhiệt độ sau mỗi giờ của khay nước theo thứ tự lập thành cấp số nhân với $u_1 = 23.(1-20\%)$ và $q = (1-20\%)$.
Ta có $u_6 = u_1.q^5 = 23.(1-20\%)^6 \approx 7,5$.
Nhiệt độ của khay nước sau 6 giờ là $\approx 6,0^\circ$.

VÍ DỤ 7. Chu kì bán rã của nguyên tố phóng xạ poloni 210 là 138 ngày, nghĩa là sau 138 ngày, khối lượng của nguyên tố đó chỉ còn một nửa (theo: https://vi.wikipedia.org/wiki/Poloni-210). Tính khối lượng còn lại của 20 gam poloni 210 sau:

a) 690 ngày;

b) 7314 ngày (khoảng 20 năm).

Lời giải.

a) Ta có $\frac{690}{138} = 5$ suy ra khối lượng còn lại sau 690 này là $\frac{20}{2^5} = 0{,}625$ gam;

b) Ta có $\frac{7314}{138} = 53$ suy ra khối lượng còn lại sau 7314 này là $\frac{20}{2^{53}}$ gam.

VÍ DỤ 8. Tế bào E.Coli trong điều kiện nuôi cấy thích hợp cứ 20 phút lại phân đôi một lần. Hỏi sau 24 giờ, tế bào ban đầu sẽ phân chia thành bao nhiêu tế bào?

Lời giải.

Lần phân chia thứ nhất, 1 tế bào thành 2 tế bào, số tế bào lần 1 phân chia là $u_1 = 2$.
Lần phân chia thứ hai 2, số tế bào lần 2 phân chia là $u_2 = 2 \cdot 2 = u_1 \cdot 2$.
Lần phân chia thứ 3 có 4 tế bào phân chia, số tế bào lần 3 phân chia là $u_3 = 2 \cdot u_2$.
Như vậy một tế bào phân đôi sẽ tạo thành cấp số nhân có công bội là 2, số hạng đầu là $u_1 = 2$.
Sau n lần phân chia từ một tế bào phân được thành $u_n = 2^{n-1}u_1$.
Đổi 24 giờ $= 24 \cdot 60 = 72 \cdot 20$ (phút) $\Rightarrow$ 24 giờ gấp 72 lần 20 phút.
Do đó, sau 24 giờ số tế bào nhận được là $u_{72} = 2^{71} \cdot 2 = 2^{72}$ (tế bào).

2. Bài tập tự luận

BÀI 1. Một quốc gia có dân số năm 2011 là P triệu người. Trong 10 năm tiếp theo, mỗi năm dân số tăng $a\%$. Chứng minh rằng dân số các năm từ năm 2011 đến năm 2021 của quốc gia đó tạo thành cấp số nhân. Tìm công bội của cấp số nhân này.

Lời giải.

Coi ngày điều tra dân số năm 2011 và năm 2021 trùng nhau thì từ năm 2011 đến năm 2021 là 10 năm. Vậy dân số nước ta tính đến năm 2021 là

$$u_{10} = P \cdot (1+a\%)^{10}.$$

Ta có

$$u_1 = P \cdot (1+a\%)^1.$$

$$u_2 = P \cdot (1+a\%)^2.$$

Và công bội của cấp số nhân này là $\frac{u_2}{u_1} = q = \frac{P \cdot (1+a\%)^2}{P \cdot (1+a\%)^1} = 1 + a\%$.

BÀI 2. Vào năm 2020, dân số của một quốc gia là khoảng 97 triệu người và tốc độ tăng trưởng dân số là 0,91%. Nếu tốc độ tăng trưởng dân số này được giữ nguyên hằng năm, hãy ước tính dân số của quốc gia đó vào năm 2030.

Lời giải.

Dân số năm 2021 tăng lên so với năm 2020 là $97 \cdot 0{,}91\%$ triệu người.
Dân số năm 2021 là

$$97 + 97 \cdot 0{,}91\% = 97 \cdot (1 + 0{,}91\%) \text{ triệu người.}$$

Dân số năm 2022 tăng lên so với năm 2021 là $97 \cdot (1+0{,}91\%) \cdot 0{,}91\%$ triệu người.
Dân số năm 2022 là

$$97 \cdot (1+0{,}91\%) + 97 \cdot (1+0{,}91\%) \cdot 0{,}91\% = 97 \cdot (1+0{,}91\%)^2 \text{ triệu người.}$$

Dân số năm 2023 tăng lên so với năm 2021 là $97 \cdot (1+0{,}91\%)^2 \cdot 0{,}91\%$ triệu người.
Dân số năm 2023 là

$$97 \cdot (1+0{,}91\%)^2 + 97 \cdot (1+0{,}91\%)^2 \cdot 0{,}91\% = 97 \cdot (1+0{,}91\%)^3 \text{ triệu người.}$$

Tương tự vậy ta có dân số năm 2030 là $97 \cdot (1+0{,}91\%)^{10} = 106{,}1973784$ triệu người.

BÀI 3. Một tỉnh có 2 triệu dân vào năm 2020 với tỉ lệ tăng dân số là 1 %/năm. Gọi u_n là số dân của tỉnh đó sau n năm. Giả sử tỉ lệ tăng dân số là không đổi.

a) Viết công thức tính số dân của tỉnh đó sau n năm kể từ năm 2020.

b) Tính số dân của tỉnh đó sau 10 năm kể từ năm 2020.

Lời giải.

a) Với u_n là số dân của tỉnh đó sau n năm.
Ta có $u_1 = 2 \cdot 1,01$ (triệu dân).
$u_{n+1} = u_n + u_n \cdot 0{,}01 = 1{,}01 u_n$.
Do đó, (u_n) là cấp số nhân với số hạng đầu $u_1 = 2 \cdot 1,01$ và công bội $q = 1{,}01$.
Vậy công thức tính số dân của tỉnh đó sau n năm là $u_n = u_1 q^{n-1} \Rightarrow u_n = 2 \cdot 1{,}01^n$.

b) Số dân của tỉnh đó sau 10 năm kể từ năm 2020 là $u_{10} = 2 \cdot 1{,}01^1 0 = 2{,}209$ (triệu dân).

BÀI 4. Giả sử một thành phố có dân số năm 2022 là khoảng 2,1 triệu người và tốc độ gia tăng dân số trung bình mỗi năm là 0,75%.

a) Dự đoán dân số của thành phố đó vào năm 2032;

b) Nếu tốc độ gia tăng dân số vẫn giữ nguyên như trên thì ước tính vào năm nào dân số của thành phố đó sẽ tăng gấp đôi so với năm 2022?

Lời giải.

a) Giả sử dân số năm 2022 là $u_1 = 2{,}1 \cdot 10^6$ thì dân số năm 2023 là $u_2 = u_1 + 0{,}0075 u_1 = 1{,}0075 u_1$.
Tương tự dân số năm 2024 là $u_3 = 1{,}0075 u_2$.
Do đó dân số của thành phố qua các năm lập thành một cấp số nhân với $u_1 = 2{,}1 \cdot 10^6$; $q = 1{,}0075$.
Vậy dân số năm 2032 tương ứng với $u_{11} = u_1 \cdot q^{10} = 2,1 \cdot 10^6 \cdot 1{,}0075^{10} \approx 2262924$ (người).

b) Giả sử đến năm thứ n thì dân số gấp đôi năm 2022.
Suy ra $u_n = 2u_1 \Leftrightarrow q^{n-1} = 2 \Leftrightarrow 1{,}0075^{n-1} = 2 \Leftrightarrow n \approx 93{,}7$.
Vậy 94 năm sau tức là năm 2116 thì dân số thành phố sẽ gấp đôi năm 2022.

BÀI 5. Giả sử anh Tuấn kí hợp đồng lao động trong 10 năm với điều khoản về tiền lương như sau: Năm thứ nhất, tiền lương của anh Tuấn là 60 triệu. Kể từ năm thứ hai trở đi, mỗi năm tiền lương của anh Tuấn được tăng lên 8%. Tính tổng số tiền lương anh Tuấn lĩnh được trong 10 năm đi làm (đơn vị: triệu đồng, làm tròn đến hàng phần nghìn).
Lời giải.
Gọi u_n là số tiền lương (triệu đồng) anh Tuấn được lĩnh ở năm làm việc thứ n. Ta có: $u_1 = 60$;

$$u_n = u_{n-1} + u_{n-1} \cdot 0{,}08 = u_{n-1} \cdot (1+0{,}08) = u_{n-1} \cdot 1{,}08.$$

Do đó, (u_n) là cấp số nhân có số hạng đầu $u_1 = 60$, công bội $q = 1{,}08$. Áp dụng công thức tính tổng S_n, ta có tổng số tiền lương anh Tuấn lĩnh được trong 10 năm đi làm là

$$S_{10} = \frac{60 \cdot \left(1 - 1{,}08^{10}\right)}{1 - 1{,}08} \approx 869{,}194 \text{ (triệu người).}$$

BÀI 6. Một công ty xây dựng mua một chiếc máy ủi với giá 3 tỉ đồng. Cứ sau mỗi năm sử dụng, giá trị của chiếc máy ủi này lại giảm 20% so với giá trị của nó trong năm liền trước đó. Tìm giá trị còn lại của chiếc máy ủi đó sau 5 năm sử dụng.
Lời giải.
Gọi u_n là Giá trị của máy ủi sau n sử dụng.
Dãy số (u_n) là một cấp số nhân có $u_1 = 3.0,8$, $q = 0{,}8$.
Số hạng tổng quát của cấp số nhân này là $u_n = 3 \cdot 0{,}2^n$.
Ta có $u_5 = 3 \cdot 0{,}8^5 = 0{,}98304$.
Tương ứng giá trị của chiếc máy ủi sau 5 năm xấp xỉ 983 triệu đồng.

BÀI 7. Một gia đình mua một chiếc ô tô giá 800 triệu đồng. Trung bình sau mỗi năm sử dụng, giá trị còn lại của ô tô giảm đi 4% (so với năm trước đó).

a) Viết công thức tính giá trị của ô tô sau 1 năm, 2 năm sử dụng.

b) Viết công thức tính giá trị của ô tô sau n năm sử dụng.

c) Sau 10 năm, giá trị của ô tô ước tính còn bao nhiêu triệu đồng?

Lời giải.

Gọi u_n là giá trị còn lại của ô tô sau n năm sử dụng.

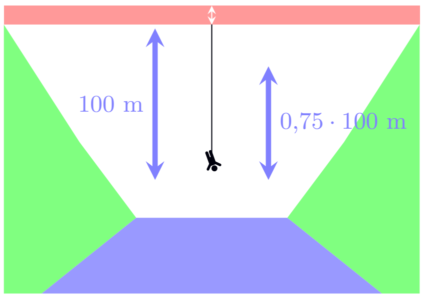
a) Giá trị của ô tô sau 1 năm sử dụng là $u_1 = 800 - 800 \cdot 0{,}04 = 800 \cdot 0{,}96 = 768$ triệu đồng.
Giá trị của ô tô sau 2 năm sử dụng là $u_2 = u_1 - u_1 \cdot 0{,}04 = u_1 \cdot 0{,}96 = 737{,}28$ triệu đồng.

b) Ta có $u_n = u_{n-1} - u_{n-1} \cdot 0{,}04 = u_{n-1} \cdot 0{,}96$.
Do đó, (u_n) là cấp số nhân với số hạng đầu $u_1 = 768$ và công bội $q = 0{,}96$.
Vậy sau n năm sử dụng, giá trị còn lại của chiếc ô tô là $u_n = u_1 q^{n-1} \Rightarrow u_n = 768 \cdot 0{,}96^{n-1}$.

c) Sau 10 năm, ước tính giá trị của ô tô còn lại là $u_{10} = 768 \cdot 0{,}96^9 \approx 531{,}87$ triệu đồng.

BÀI 8.

Một người nhảy bungee (một trò chơi mạo hiểm mà người chơi nhảy từ một nơi có địa thế cao xuống với dây đai an toàn buộc xung quanh người) từ một cây cầu và căng một sợi dây dài 100 m. Sau mỗi lần rơi xuống, nhờ sự đàn hồi của dây, người nhảy được kéo lên một quãng đường có độ dài bằng 75% so với lần rơi trước đó và lại bị rơi xuống đúng bằng quãng đường vừa được kéo lên. Tính tổng quãng đường người đó đi được sau 10 lần kéo lên và lại rơi xuống.



Lời giải.

Gọi u_n là quãng đường người đó được kéo lên ở lần thứ n được kéo lên và lại rơi xuống (đơn vị tính: mét).
Ta có $u_1 = 0{,}75 \cdot 100 = 100 \cdot 1{,}5 = 75$ m và $u_n = 0{,}75 \cdot u_{n-1}$.
Vậy (u_n) là cấp số nhân với số hạng đầu $u_1 = 75$ và công bội $q = 0{,}75$.
Tổng quãng đường người đó đi được sau 10 lần kéo lên và lại rơi xuống là

$$\begin{aligned} S &= 100 + 2u_1 + 2u_2 + \cdots + 2u_{10} \\ &= 100 + 2S_{10} = 100 + 2 \cdot \frac{75\left(1 - 0{,}75^{10}\right)}{1 - 0{,}75} \\ &\approx 666{,}2 \text{ m.} \end{aligned}$$

BÀI 9 (TH). Một cái tháp có 11 tầng. Diện tích của mặt sàn tầng 2 bằng nửa diện tích của mặt đáy tháp và diện tích của mặt sàn mỗi tầng bằng nửa diện tích của mặt sàn mỗi tầng ngay bên dưới. Biết mặt đáy tháp có diện tích là $12288m^2$. Tính diện tích của mặt sàn tầng trên cùng của tháp theo đơn vị mét vuông.

Lời giải.

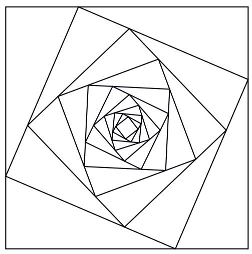
(Lưu ý: Một số nơi xem tầng 1 là tầng trệt. Nên bài toán này giống bài toán tháp 10 tầng ở phần trên) Do diện tích của mặt sàn tính từ tầng một lập thành một cấp số nhân với $u_2 = \frac{1}{2}.12288 = 6144$ và $q = \frac{1}{2}$.

Ta có $\begin{cases} u_2 = 6144 \\ q = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 12288 \\ q = \dfrac{1}{2} \end{cases}$.

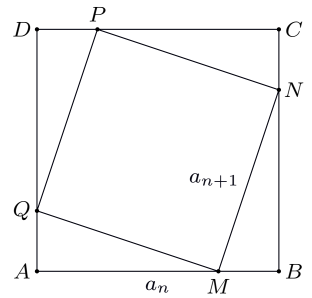
Ta có $u_{11} = u_1.q^{10} = 12288.\frac{1}{2^{10}} = 12m^2$. Vậy diện tích của mặt sàn tầng trên cùng là $12m^2$.

BÀI 10.

Cho hình vuông C_1 có cạnh bằng 4. Người ta chia mỗi cạnh hình vuông thành bốn phần bằng nhau và nối các điểm chia một cách thích hợp để có hình vuông C_2 . Từ hình vuông C_2 lại làm tiếp tục như trên để có hình vuông C_3. Cứ tiếp tục quá trình như trên, ta nhận được dãy các hình vuông $C_1, C_2, C_3, \ldots, C_n, \ldots$ Gọi a_n là độ dài cạnh hình vuông C_n. Chứng minh rằng dãy số (a_n) là cấp số nhân.



Lời giải.



Gọi cạnh một hình vuông thứ n, $n+1$ lần lượt là a_n, a_{n+1}.

Do $MN = \sqrt{MB^2 + BN^2} = \sqrt{\left(\dfrac{AB}{4}\right)^2 + \left(\dfrac{3AB}{4}\right)^2} = AB \cdot \dfrac{\sqrt{10}}{4}$.

Nên ta có cạnh hình vuông thứ $n+1$ là:

$a_{n+1} = a_n . \dfrac{\sqrt{10}}{4}$.

Vậy dãy số (a_n) là cấp số nhân.

BÀI 11. Một cây đàn organ có tần số âm thanh các phím liên tiếp tạo thành một cấp số nhân. Cho biết tần số phím La trung là 400 Hz và tần số của phím La cao cao hơn 12 phím là 800 Hz (nguồn: https://vi.wikipedia.org/wikiOrgan). Tìm công bội của cấp số nhân nói trên (làm tròn kết quả đến hàng phần nghìn).

Lời giải.

Theo đề ta có $\begin{cases} u_1 = 400 \\ u_{13} = 800 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 400 \\ u_1 q^{12} = 800 \end{cases} \Rightarrow q^{12} = 2 \Rightarrow q = \pm \sqrt[12]{2}$.

BÀI 12. Một loại thuốc được dùng mỗi ngày một lần. Lúc đầu nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân tăng nhanh, nhưng mỗi liều kế tiếp có tác dụng ít hơn liều trước đó. Lượng thuốc trong máu ở ngày thứ nhất là 50 mg, và mỗi ngày sau đó giảm chỉ còn một nửa so với ngày kề trước đó. Tính tổng lượng thuốc (tính bằng mg) trong máu của bệnh nhân sau khi dùng thuốc 10 ngày liên tiếp.

Lời giải.

Gọi u_n là giá trị của lượng thuốc trong máu của bệnh nhân trong ngày thứ n.

Dãy số này là một cấp số nhân có $u_1 = 50$, $q = \dfrac{1}{2}$.

Tổng của n số hạng đầu tiên của cấp số nhân là $S_n = u_1 \dfrac{1-q^n}{1-q}$.

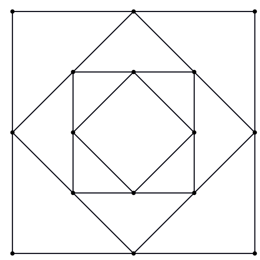
Theo bài toán, ta có $S_{10} = 50 \cdot \dfrac{1 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^{10}}{1 - \dfrac{1}{2}} \approx 99{,}902$.

Vậy tổng lượng thuốc trong máu của bệnh nhân sau khi dùng thuốc 10 ngày liên tiếp là 99,902 mg.

3. Câu hỏi trắc nghiệm

CÂU 1.

Cho hình vuông có cạnh là 1. Nối các trung điểm của hình vuông trên ta được một hình vuông có diện tích S_1, tiếp tục quá trình trên với các hình vuông với diện tích là $S_2; S_3; \ldots; S_n; \ldots$. Tính tổng vô hạn $S_1 + S_2 + S_3 + \cdots + S_n + \cdots$.



A 2. **B** $\dfrac{1}{2}$. **C** 1. **D** $\dfrac{3}{2}$.

Lời giải.

Ta có $S_1 = \dfrac{1}{2}$, $S_2 = \dfrac{1}{4}$, $S_3 = \dfrac{1}{8}, \cdots S_n = \dfrac{1}{2^n}, \ldots$ tạo thành 1 cấp số nhân với công bội $q = \dfrac{1}{2} < 1$.

Vậy $S_1 + S_2 + S_3 + \cdots + S_n + \cdots = \dfrac{\dfrac{1}{2}}{1 - \dfrac{1}{2}} = 1$.

Chọn đáp án C .... □

CÂU 2. Cho n là số nguyên dương và n tam giác $A_1B_1C_1, A_2B_2C_2, \ldots, A_nB_nC_n$, trong đó các điểm lần $A_{i+1}, B_{i+1}, C_{i+1}$ lượt nằm trên các cạnh $B_iC_i, A_iC_i, A_iB_i (i = 1, 2, \ldots, n-1)$ sao cho $A_{i+1}C_i = 3A_{i+1}B_i, B_{i+1}A_i = 3B_{i+1}C_i, C_{i+1}B_i = 3C_{i+1}A_i$. Gọi S là tổng tất cả các diện tích của tam giác $A_1B_1C_1, A_2B_2C_2, \ldots, A_nB_nC_n$ biết rằng tam giác $A_1B_1C_1$ có diện tích bằng $\dfrac{9}{16}$. Tìm số nguyên dương sao cho $S = \dfrac{16^{29} - 7^{29}}{16^{29}}$.

A $n = 28$. **B** $n = 2018$. **C** $n = 30$. **D** $n = 29$.

Lời giải.

Gọi $S_i (i = 1, 2, 3, \ldots, n)$ là diện tích của $\Delta A_iB_iC_i$. Ta có $\dfrac{S_{A_1B_2C_2}}{S_{A_1B_1C_1}} = \dfrac{A_1B_2}{A_1C_1} \cdot \dfrac{A_1C_2}{A_1B_1} = \dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{3}{4} = \dfrac{3}{16}$. Tương tự, ta có $\dfrac{S_{A_2B_1C_2}}{S_{A_1B_1C_1}} = \dfrac{S_{A_2B_2C_1}}{S_{A_1B_1C_1}} = \dfrac{3}{16}$. Do đó $\dfrac{S_{A_2B_2C_2}}{S_{A_1B_1C_1}} = 1 - 3 \cdot \dfrac{3}{16} = \dfrac{7}{16} \Rightarrow S_2 = \dfrac{7}{16} S_1$.

Tương tự, ta có $S_{i+1}=\dfrac{7}{16}S_i, i=1,2,\dots,n$. Khi đó

$$S=S_1\left[1+\frac{7}{16}+\cdots+\left(\frac{7}{16}\right)^{n-1}\right]=\frac{9}{16}\cdot\frac{1-\left(\frac{7}{16}\right)^n}{1-\frac{7}{16}}=1-\left(\frac{7}{16}\right)^n.$$

Theo giả thiết ta có $1-\left(\dfrac{7}{16}\right)^n=1-\left(\dfrac{7}{16}\right)^{29}\Leftrightarrow n=29$.

Chọn đáp án D .... □

CÂU 3. Người ta thiết kế một cái tháp gồm 11 tầng. Diện tích bề mặt trên của mỗi tầng bằng nửa diện của mặt trên tầng ngay bên dưới và diện tích tầng 1 bằng nửa diện tích của đế tháp. Biết đế tháp có diện tích là $12288\,\mathrm{m}^2$. Tính diện tích mặt trên cùng.

A. $12\,\mathrm{m}^2$. **B.** $6\,\mathrm{m}^2$. C. $10\,\mathrm{m}^2$. D. $8\,\mathrm{m}^2$.

Lời giải.

Gọi S_i là diện tích của tầng thứ i với $i=1,2,\dots,11$.
Do giả thiết suy ra $S_{i+1}=\dfrac{1}{2}S_i$ với $i=1,2,\dots,10$.
Do đó $\{S_i\}$ là một cấp số nhân với công bội $q=\dfrac{1}{2}$. Do đó $S_{11}=\dfrac{1}{2^{10}}S_1=\dfrac{1}{2^{11}}\cdot 12288=6\left(\mathrm{m}^2\right)$.

Chọn đáp án B .... □

CÂU 4. Cho tứ giác $ABCD$ có bốn góc tạo thành cấp số nhân có công bội $q=2$. Góc có số đo nhỏ nhất trong bốn góc đó là

A. 24°. B. 1°. C. 12°. D. 30°.

Lời giải.

Gọi số đo bốn góc của tứ giác $ABCD$ là x, $2x$, $4x$, $8x$.
Có $x+2x+4x+8x=360\Leftrightarrow 15x=360\Leftrightarrow x=24$.

Chọn đáp án A .... □

CÂU 5. Một du khách vào chuồng đua ngựa đặt cược, lần đầu tiên đặt 20000 đồng, mỗi lần sau tiền đặt gấp đôi lần tiền đặt cược trước. Người đó thua lần 9 liên tiếp và thắng ở lần thứ 10. Hỏi du khách đó thắng hay thua bao nhiêu tiền?

A. Thắng 20000 đồng. B. Thua 40000 đồng. C. Hòa vốn. D. Thua 20000 đồng.

Lời giải.

Số tiền đặt cược lần thứ n là $u_n=u_1\cdot 2^{n-1}$ với $u_1=20000$.
Ta có: $u_{10}-\displaystyle\sum_{n=1}^{9}u_1\cdot 2^{n-1}=20000\cdot 2^9-\sum_{n=1}^{9}20000\cdot 2^{n-1}=20000$.
Vậy du khách thắng 20000 đồng.

Chọn đáp án A .... □

CÂU 6. Cho tam giác ABC cân tại A có cạnh đáy BC, đường cao AH và cạnh bên AB theo thứ tự đó lập thành cấp số nhân công bội q. Giá trị của q là

A. $q=\dfrac{1}{2}\sqrt{\sqrt{2}+1}$. B. $q=\sqrt{2}+1$. C. $q=\sqrt{2(\sqrt{2}+1)}$. **D.** $q=\dfrac{1}{2}\sqrt{2(\sqrt{2}+1)}$.

Lời giải.

Giả sử $BC=u_1$, $AH=u_1\cdot q$ và $AB=u_1\cdot q^2$ với $u_1>0, q>0$.
Do $\triangle ABC$ cân tại A suy ra

$$\begin{aligned}AB^2=AH^2+\frac{BC^2}{4}&\Leftrightarrow u_1^2\cdot q^4=\frac{u_1^2}{4}+u_1^2\cdot q^2\\&\Leftrightarrow 4q^4-4q^2-1=0\\&\Leftrightarrow q^2=\frac{1\pm\sqrt{2}}{2}.\end{aligned}$$

Kết hợp với điều kiện bài toán ta có $q=\sqrt{\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}}=\dfrac{1}{2}\sqrt{2(\sqrt{2}+1)}$.

Chọn đáp án D .... □

CÂU 7. Giả sử một người đi làm được lĩnh lương khởi điểm là 2.000.000 đồng/tháng. Cứ 3 năm người ấy lại được tăng lương một lần với mức tăng bằng 7% của tháng trước đó. Hỏi sau 36 năm làm việc người ấy lĩnh được tất cả bao nhiêu tiền?

A 1.287.968.492 đồng. B 10.721.769.110 đồng. C $7{,}068289036 \cdot 10^8$ đồng. D 429.322.830,5 đồng.

Lời giải.

Ta có 36 năm tương ứng với 12 kỳ lương; mỗi kỳ lương có 36 tháng và kỳ sau tăng 7% so với kỳ trước. Do đó tổng số tiền mỗi kỳ lương là một cấp số nhân với $u_1 = 36 \times 2 = 72$ (triệu đồng) và công bội $q = 1{,}07$.

Vậy tổng số tiền sau 36 năm là $T = \dfrac{72 \cdot \left[(1{,}07)^{12} - 1\right]}{1{,}07 - 1} = 1287{,}968492$ (triệu đồng).

Chọn đáp án A .... □

CÂU 8. Từ độ cao 55,8 (mét) của tháp nghiên Pisa nước Italia người ta thả một quả bóng cao su chạm xuống đất. Giả sử mỗi lần chạm đất bóng lại nảy lên độ cao bằng $\dfrac{1}{10}$ độ cao mà bóng đạt trước đó. Tổng độ dài hành trình (mét) của bóng được thả từ lúc ban đầu cho đến khi nó nằm yên trên mặt đất thuộc khoảng nào trong các khoảng sau đây?

A $(69; 72)$. B $(60; 63)$. C $(67; 69)$. D $(64; 66)$.

Lời giải.

Đặt $u_1 = 55{,}8$ (mét) là quãng đường bóng rơi khi thả xuống, $u_{n+1} = \dfrac{1}{10^n} u_1, n \geq 1$ là quãng đường bóng rơi sau lần nảy lên thứ n.

Ta có (u_n) là dãy cấp số nhân với $u_1 = 55{,}8$ và công bội $q = \dfrac{1}{10}$.

Suy ra tổng quãng đường quả bóng rơi xuống là $\lim\limits_{n \to +\infty} u_1 \cdot \dfrac{1 - q^n}{1 - q} = \lim\limits_{n \to +\infty} 55{,}8 \cdot \dfrac{1 - \left(\dfrac{1}{10}\right)^n}{1 - \dfrac{1}{10}} = 62$.

Ngoài ra ta còn phải tính tổng quãng đường mà bóng nảy lên. Ta có tổng quãng đường bóng nảy lên bằng tổng quãng đường rơi của bóng trừ đi quãng đường thả rơi xuống.

Vậy tổng quãng đường hành trình của quả bóng là $62 + 62 - 55{,}8 = 68{,}2$ (mét).

Chọn đáp án C .... □

CÂU 9. Một gia đình lập kế hoạch tiết kiệm như sau: Họ lập một sổ tiết kiệm tại một ngân hàng và cứ đầu mỗi tháng họ gửi vào sổ tiết kiệm đó 15 triệu đồng. Giả sử lãi suất tiền gửi không đổi là 0,6 %/tháng và tiền gửi được tính lãi theo hình thức lãi kép. Hỏi sau 3 năm gia đình đó tiết kiệm được số tiền gần nhất với con số nào dưới đây?

A 543240000 đồng. B 589269000 đồng. C 669763000 đồng. D 604359000 đồng.

Lời giải.

Gọi S_0 triệu đồng là số tiềngia đình đó định kỳ gửi tiết kiệm vào đầu hằng tháng, r là lãi suất tiền gửi hằng tháng. Ta có $S_0 = 15$ triệu đồng, $r = 0{,}6$ %/tháng.

Gọi S_i, $i = \overline{1, n}$ là số tiền trong sổ tiết kiệm cuối tháng thứ i.

Ta có

- $S_1 = S_0 + S_0 \cdot r = S_0(1 + r)$,
- $S_2 = [S_0 + S_0(1 + r)] + [S_0 + S_0(1 + r)]\, r = S_0(1 + r) + S_0(1 + r)^2$,
- $S_3 = \left[S_0 + S_0(1 + r) + S_0(1 + r)^2\right] + \left[S_0 + S_0(1 + r) + S_0(1 + r)^2\right] r,$
  $= S_0(1 + r) + S_0(1 + r)^2 + S_0(1 + r)^3$,
- ...
- $S_n = S_0(1 + r) + S_0(1 + r)^2 + S_0(1 + r)^3 + \cdots + S_0(1 + r)^n$
  $= S_0\left[(1 + r) + (1 + r)^2 + (1 + r)^3 + \cdots + (1 + r)^n\right]$
  $= S_0(1 + r) \cdot \dfrac{(1 + r)^n - 1}{(1 + r) - 1} = S_0(1 + r) \cdot \dfrac{(1 + r)^n - 1}{r}$.

Vậy sau 3 năm, tức cuối tháng thứ 36 thì gia đình tiết kiệm được số tiền là

$$S_{36} = 15 \cdot 10^6 (1 + 0{,}6 \cdot 10^{-2}) \cdot \dfrac{(1 + 0{,}6 \cdot 10^{-2})^{36} - 1}{0{,}6 \cdot 10^{-2}} = 604358538{,}2 \text{ đồng.}$$

Chọn đáp án D .... □

MỤC LỤC