Bài 4. KHẢO SÁT SỰ BIẾN THIÊN VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ

QUICK NOTE

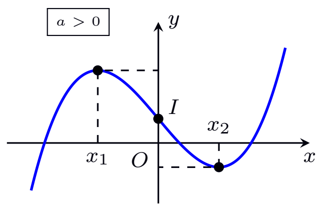
A. LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

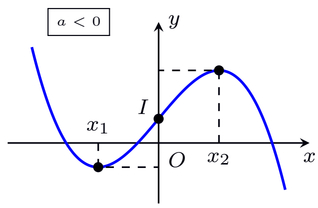
1. Khảo sát hàm số $y = f(x)$

- **Bước 1.** Tìm tập xác định của hàm số.
- **Bước 2.** Khảo sát sự biến thiên của hàm số
  - Tính đạo hàm y'. Tìm các điểm mà tại đó y' bằng 0 hoặc đạo hàm không tồn tại.
  - Tìm các giới hạn tại vô cực, giới hạn vô cực và tìm tiệm cận của đồ thị hàm số.
  - Lập bảng biến thiên; xác định chiều biến thiên và cực trị của hàm số.
- **Bước 3.** Cho thêm điểm và vẽ đồ thị của hàm số dựa vào bảng biến thiên.

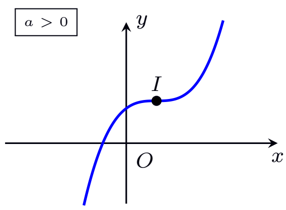
2. Hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$

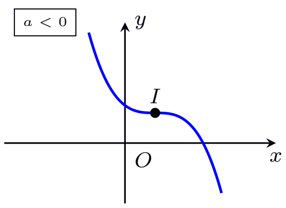
TH1. $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1 và x_2. Khi đó, hàm số có hai điểm cực trị $x = x_1$ và $x = x_2$.



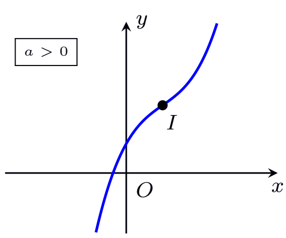


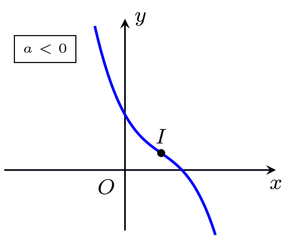
TH2. $y' = 0$ có nghiệm kép x_0. Khi đó, hàm số không có cực trị.





TH3. $y' = 0$ vô nghiệm. Khi đó, hàm số không có cực trị.





GHI NHỚ

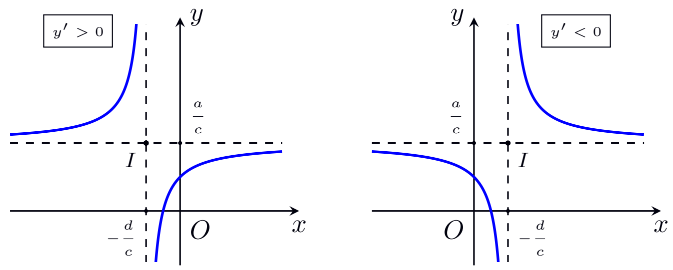
① Liên hệ tổng tích hai nghiệm của y' $\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{2b}{3a} \\ x_1x_2 = \dfrac{c}{3a} \end{cases}$

② Tâm đối xứng của đồ thị là trung điểm của đoạn nối 2 điểm cực trị. Hoành độ tâm đối xứng là nghiệm phương trình $y'' = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{b}{3a}$.

QUICK NOTE

3. Hàm số $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(c \neq 0, ad - bc \neq 0)$

- Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \backslash \left\{-\dfrac{d}{c}\right\}$; Đạo hàm $y' = \dfrac{ad - cb}{(cx+d)^2}$.
- Đồ thị nhận giao điểm của hai đường tiệm cận làm tâm đối xứng.
- Hình dạng đồ thị:



GHI NHỚ

① Tiệm cận đứng $x = -\dfrac{d}{c}$.

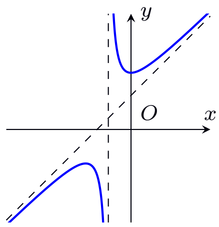
② Tiệm cận ngang $y = \dfrac{a}{c}$.

③ Giao với Ox: $y = 0 \Rightarrow x = -\dfrac{b}{a}$.

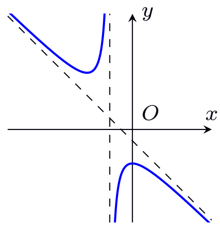
④ Giao với Oy: $x = 0 \Rightarrow y = \dfrac{b}{d}$.

4. Hàm số $y = \dfrac{ax^2+bx+c}{dx+e}$ $(a \neq 0, e \neq 0)$ (đa thức tử không chia hết cho đa thức mẫu)

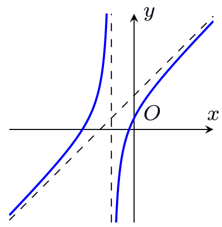
- Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \backslash \left\{-\dfrac{e}{d}\right\}$; Đạo hàm $y' = \dfrac{adx^2 + 2aex + be - cd}{(dx+e)^2}$.
- Hàm số 2 điểm cực trị khi $y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt; Hàm số không có cực trị khi $y' = 0$ vô nghiệm.
- Đồ thị nhận giao điểm của tiệm cận đứng và tiệm cận xiên làm tâm đối xứng.
- Hình dạng đồ thị:



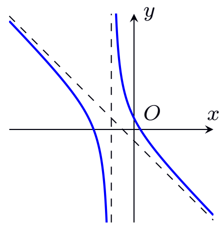
$a > 0$, $y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt



$a < 0$, $y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt



$a > 0$, $y' = 0$ vô nghiệm



$a < 0$, $y' = 0$ vô nghiệm

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

1 Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số bậc ba

Ta khảo sát theo sơ đồ đã nhắc đến ở phần lý thuyết.

BÀI TẬP TỰ LUẬN

VÍ DỤ 1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị các hàm số sau:

a) $y = x^3 - 3x^2 + 1$;

b) $y = -2x^3 - 3x^2 + 1$;

c) $y = x^3 + 3x^2 + 3x + 2$;

d) $y = x^3 - 3x^2 + 4x - 2$.

QUICK NOTE

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.

CÂU 1. Bảng biến thiên ở hình bên là của một trong bốn hàm số sau đây. Hỏi đó là hàm số nào?

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	5	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

(A) $y=-x^3-2x^2+5$.

(B) $y=x^3-3x^2+5$.

(C) $y=-x^3-3x+5$.

(D) $y=x^3+3x^2+5$.

CÂU 2. Bảng biến thiên ở hình bên là của một trong bốn hàm số sau đây. Hỏi đó là hàm số nào?

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	5	$\searrow$	$-\infty$

(A) $y=-x^3+3x^2$.

(B) $y=x^3-3x^2-1$.

(C) $y=x^4+2x^2+1$.

(D) $y=-x^3+3x^2+1$.

CÂU 3. Bảng biến thiên ở hình bên là của một trong bốn hàm số sau đây. Hỏi đó là hàm số nào?

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

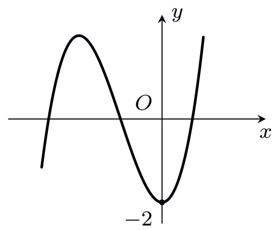
(A) $y=x^3-3x^2+x+3$.

(B) $y=x^3-3x+4$.

(C) $y=x^3-3x^2+3x+1$.

(D) $y=x^3+3x^2+5$.

CÂU 4. Đường cong bên là đồ thị của một trong bốn hàm số đã cho sau đây. Hỏi đó là hàm số nào?



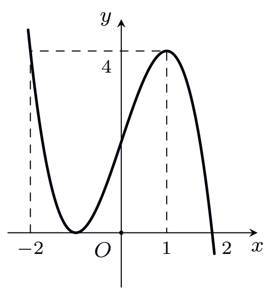
(A) $y=-x^3+x^2-2$.

(B) $y=x^3+3x^2-2$.

(C) $y=x^3-3x+2$.

(D) $y=x^2-3x-2$.

CÂU 5. Đường cong bên là đồ thị của một trong bốn hàm số đã cho sau đây. Hỏi đó là hàm số nào?



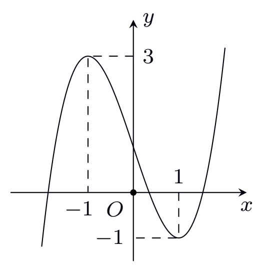
(A) $y=x^3+3x-2$.

(B) $y=x^3-3x+2$.

(C) $y=-x^3+3x+2$.

(D) $y=-x^3-3x-2$.

CÂU 6. Đường cong bên là đồ thị của một trong bốn hàm số đã cho sau đây. Hỏi đó là hàm số nào?



(A) $y=-x^3+3x^2+1$.

(B) $y=-x^2-3x-1$.

(C) $y=x^4+2x^2-1$.

(D) $y=x^3-3x+1$.

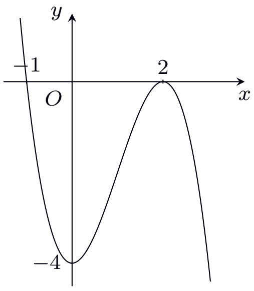
CÂU 7.

QUICK NOTE

Đường cong bên là đồ thị của một trong bốn hàm số đã cho sau đây. Hỏi đó là hàm số nào?

A $y = x^3 - 3x^2 - 4$. **B** $y = -x^3 - 4$.

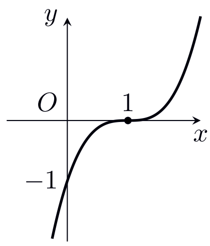
C $y = -x^3 + 3x^2 - 2$. **D** $y = -x^3 + 3x^2 - 4$.



CÂU 8.
Đường cong bên là đồ thị của một trong bốn hàm số đã cho sau đây. Hỏi đó là hàm số nào?

A $y = x^3 - 1$. **B** $y = (x+1)^3$.

C $y = (x-1)^3$. **D** $y = x^3 + 1$.



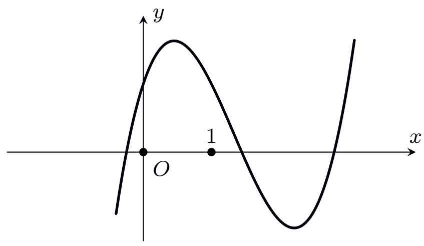
CÂU 9.
Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A $a > 0,\ b > 0,\ c > 0,\ d > 0$.

B $a < 0,\ b < 0,\ c > 0,\ d > 0$.

C $a > 0,\ b < 0,\ c < 0,\ d > 0$.

D $a > 0,\ b < 0,\ c > 0,\ d > 0$.



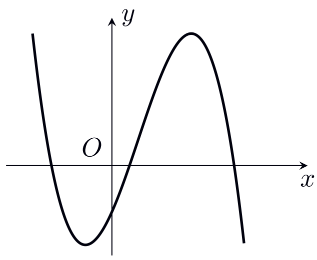
CÂU 10.
Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A $a < 0,\ b < 0,\ c < 0,\ d > 0$.

B $a < 0,\ b > 0,\ c < 0,\ d > 0$.

C $a < 0,\ b > 0,\ c > 0,\ d < 0$.

D $a < 0,\ b < 0,\ c > 0,\ d < 0$.



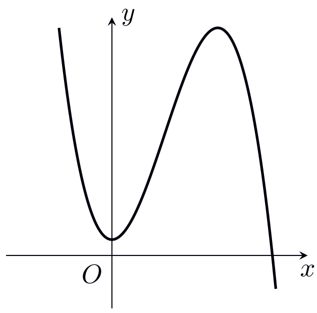
CÂU 11.
Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A $a < 0,\ b > 0,\ c > 0,\ d > 0$.

B $a < 0,\ b < 0,\ c = 0,\ d > 0$.

C $a < 0,\ b > 0,\ c = 0,\ d > 0$.

D $a > 0,\ b < 0,\ c > 0,\ d > 0$.



CÂU 12.
Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có bảng biến thiên như hình bên. Trong các hệ số a, b, c và d có bao nhiêu số âm?

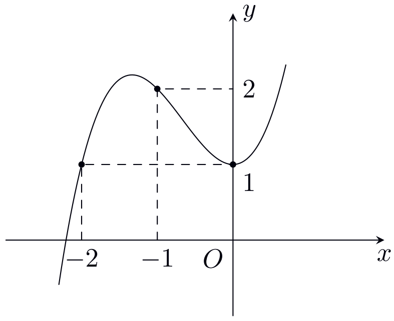
A 2. **B** 1. **C** 4. **D** 3.

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$		$\searrow$	

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.

CÂU 13.

Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ.

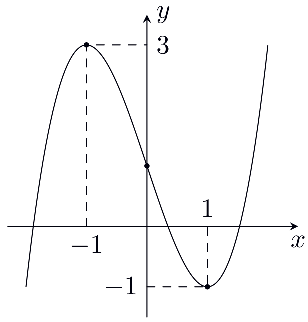


Mệnh đề	Đ	S
a) Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 1$.		
b) Đồ thị hàm số cắt trục Oy tại điểm $(0; 1)$.		
c) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -1)$.		
d) $2a + 3b + c = 9$.		

CÂU 14.

Cho hàm số bậc ba $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ.

Tính tổng $T =$.



Mệnh đề	Đ	S
a) Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm $(0; 1)$.		
b) Đường thẳng đi qua điểm $(0; 1)$ luôn cắt đồ thị tại ba điểm phân biệt có hoành độ lập thành 1 cấp số cộng.		
c) $a - b + c + d = -1$.		
d) Đồ thị hàm số đi qua điểm $(3; 18)$.		

CÂU 15.

Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có bảng biến thiên như hình bên.

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	4	$\searrow$	$-\infty$

Mệnh đề	Đ	S
a) Hàm số đạt giá trị lớn nhất là 4.		
b) Đường thẳng $y = 2$ cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại 3 điểm phân biệt.		
c) Trong bốn hệ số a, b, c, d có đúng hai số âm.		
d) Đồ thị hàm số đi qua điểm $(-4; 20)$.		

2 Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số phân thức hữu tỉ bậc I/I

Ta khảo sát theo sơ đồ

- **Bước 1.** Tìm tập xác định $D = \mathbb{R} \backslash \left\{-\dfrac{d}{c}\right\}$.
- **Bước 2.** Khảo sát sự biến thiên của hàm số
  - Tính đạo hàm $y' = \dfrac{ad - cb}{(cx + d)^2}$.
  - Tìm các giới hạn tại vô cực, giới hạn vô cực và tìm tiệm cận của đồ thị hàm số.
  - Lập bảng biến thiên; xác định chiều biến thiên và cực trị của hàm số.
- **Bước 3.** Cho thêm điểm và vẽ đồ thị của hàm số dựa vào bảng biến thiên.

QUICK NOTE

QUICK NOTE

BÀI TẬP TỰ LUẬN

VÍ DỤ 1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị các hàm số sau:

a) $y=\dfrac{x-1}{x+1}$; b) $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$; c) $y=\dfrac{5+x}{2-x}$.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.

CÂU 1.
Hàm số nào trong bốn hàm số dưới đây có bảng biến thiên như hình bên?

x	$-\infty$		2		$+\infty$
y'		$-$	‖	$-$	
y	1	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	1

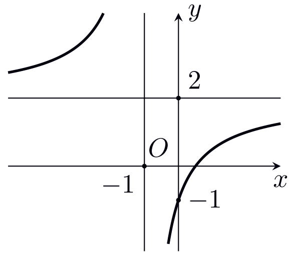
(A) $y=\dfrac{2x-1}{x+3}$. **(B)** $y=\dfrac{4x-6}{x-2}$. **(C)** $y=\dfrac{3-x}{2-x}$. **(D)** $y=\dfrac{x+5}{x-2}$.

CÂU 2.
Hàm số nào trong bốn hàm số dưới đây có bảng biến thiên như hình bên?

x	$-\infty$		3		$+\infty$
y'		$+$	‖	$+$	
y	-1	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	-1

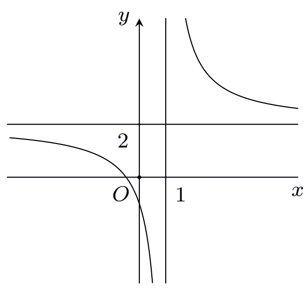
(A) $y=\dfrac{x-1}{x-3}$. **(B)** $y=\dfrac{x-1}{-x-3}$. **(C)** $y=\dfrac{x+5}{-x+3}$. **(D)** $y=\dfrac{1}{x-3}$.

CÂU 3.
Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của một trong bốn hàm số sau. Hỏi đó là hàm số nào?



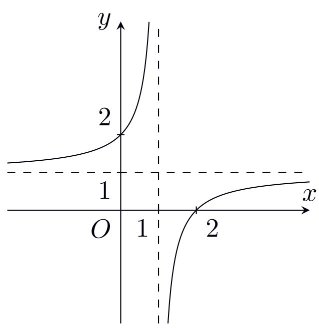
(A) $y=\dfrac{2x-1}{x+1}$. **(B)** $y=\dfrac{1-2x}{x+1}$. **(C)** $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$. **(D)** $y=\dfrac{2x+1}{x+1}$.

CÂU 4.
Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của một trong bốn hàm số sau. Hỏi đó là hàm số nào?



(A) $y=\dfrac{x-1}{x-2}$. **(B)** $y=x+2$. **(C)** $y=x^4-3x^2+1$. **(D)** $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$.

CÂU 5.
Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của một trong bốn hàm số sau. Hỏi đó là đồ thị của hàm số nào?



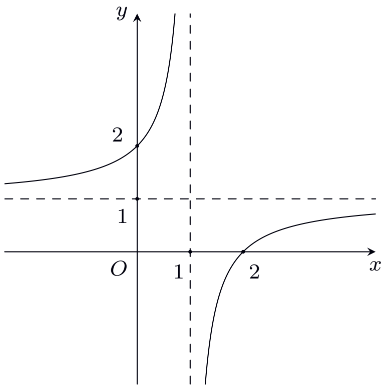
(A) $y=\dfrac{x-2}{x+1}$. **(B)** $y=\dfrac{x+2}{x-2}$. **(C)** $y=\dfrac{x-2}{x-1}$. **(D)** $y=\dfrac{x+2}{x-1}$.

CÂU 6.

Cho hàm số $y = \dfrac{ax-b}{x+c}$ $(a, b, c \in \mathbb{R})$ có đồ thị như hình vẽ bên. Giá trị của biểu thức $2a+b-3c$ bằng

Ⓐ -3. Ⓑ 4.

Ⓒ 7. Ⓓ -5.



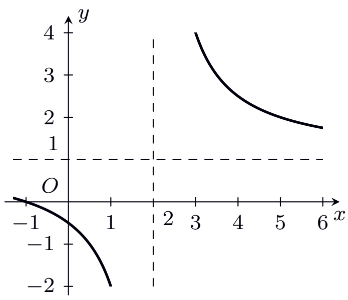
QUICK NOTE

CÂU 7.

Cho hàm số $y = \dfrac{ax+1}{bx-2}$ có đồ thị như hình vẽ. Tính $T = a+b$

Ⓐ $T = 2$. Ⓑ $T = 0$.

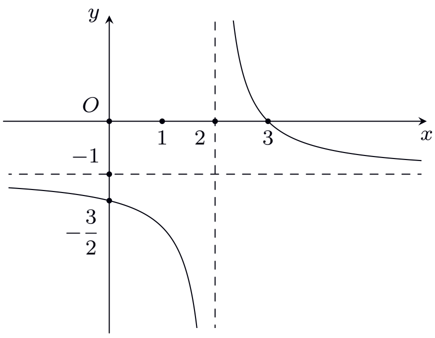
Ⓒ $T = -1$. Ⓓ $T = 3$.



CÂU 8.

Cho hàm số $y = \dfrac{ax-b}{cx+2}$ $(a,\ b,\ c \in \mathbb{R};\ c \neq 0)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Giá trị của biểu thức $a+b+c$ bằng

Ⓐ -3. Ⓑ 5. Ⓒ -4. Ⓓ 3.

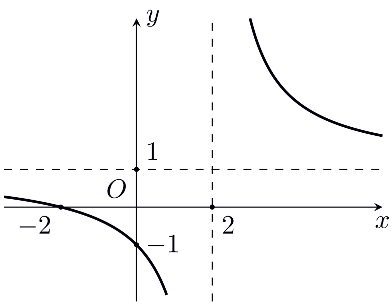


CÂU 9.

Hãy xác định a, b để hàm số $y = \dfrac{2-ax}{x+b}$ có đồ thị như hình vẽ?

Ⓐ $a = 1;\ b = -2$. Ⓑ $a = b = 2$.

Ⓒ $a = -1;\ b = -2$. Ⓓ $a = b = -2$.

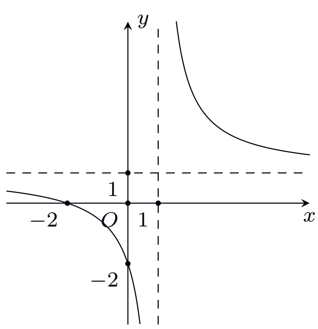


CÂU 10.

Cho đồ thị hàm số $y = \dfrac{ax-b}{x-1}$ như hình vẽ. Tìm khẳng định đúng?

Ⓐ $a < 0,\ b < 0$. Ⓑ $0 < b < a$.

Ⓒ $b < 0 < a$. Ⓓ $a < b < 0$.



CÂU 11.

Cho hàm số $y = \dfrac{ax+4}{bx+c}$ $(a,\ b,\ c \in \mathbb{R})$ có bảng biến thiên như sau. Trong các số $a,\ b,\ c$ có bao nhiêu số dương?

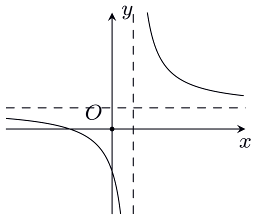
Ⓐ 0. Ⓑ 1. Ⓒ 2. Ⓓ 3.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	||	$+$
$f(x)$	$3 \nearrow +\infty$	||	$-\infty \nearrow 3$

QUICK NOTE

CÂU 12.

Cho hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ với $a>0$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây đúng?

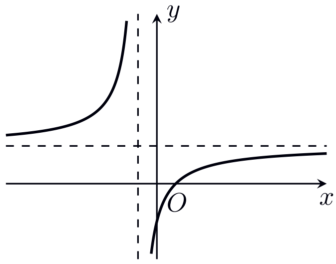


Ⓐ $b<0,\ c<0,\ d<0$. Ⓑ $b>0,\ c<0,\ d<0$.

Ⓒ $b<0,\ c>0,\ d<0$. Ⓓ $b>0,\ c>0,\ d<0$.

CÂU 13.

Hình vẽ bên là đồ thị của hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

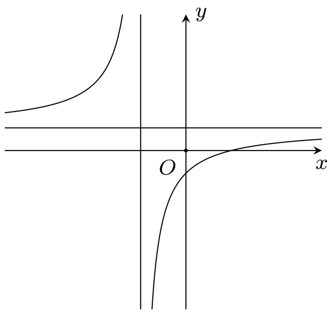


Ⓐ $ab>0, bd<0$. Ⓑ $ab<0, ad>0$.

Ⓒ $ab<0, ad<0$. Ⓓ $bd>0, ad>0$.

CÂU 14.

Hình vẽ dưới đây là đồ thị hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ $ac\neq 0, ad-cb\neq 0$. Mệnh đề nào sau đây đúng?



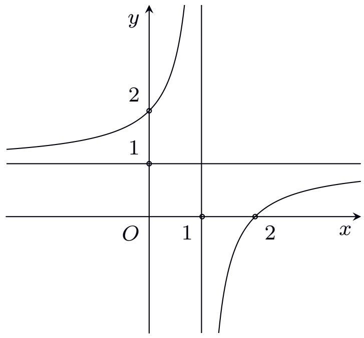
Ⓐ $ad>0$ và $ab<0$. Ⓑ $bd<0$ và $ab>0$.

Ⓒ $ad<0$ và $ab<0$. Ⓓ $ad>0$ và $bd>0$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.

CÂU 15.

Cho hàm số $y=\dfrac{x+a}{bx+c}$, $(a,b,c\in\mathbb{Z})$.



Mệnh đề	Đ	S
a) Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x=1$.		
b) Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y=0$.		
c) Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.		
d) $a-3b-2c=-3$.		

CÂU 16. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{ax-1}{bx+c}$ $(a,b,c\in\mathbb{R})$ có bảng biến thiên như sau.

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$\frac{1}{2}$

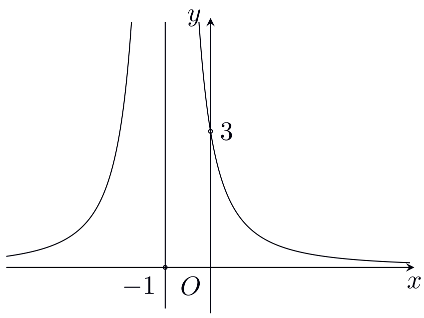
Mệnh đề	Đ	S
a) Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty,\dfrac{1}{2}\right)$.		
b) Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x=\dfrac{1}{2}$.		

Mệnh đề	Đ	S
c) Đồ thị giao với trục hoành tại điểm có hoành độ nhỏ hơn 3.		
d) $\left[\begin{array}{l} b > \dfrac{2}{3} \\ b < 0 \end{array}\right.$.		

QUICK NOTE

CÂU 17.

Cho hàm số $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ với $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ nhận $x = -1$ làm tiệm cận đứng như hình vẽ bên. Biết rằng giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-3; -2]$ bằng 8.



Mệnh đề	Đ	S
a) $f'(0) = 3$.		
b) Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-1; +\infty)$.		
c) Giá trị của $f(-3)$ bằng 8.		
d) Giá trị của $f(2)$ bằng 4.		

3 Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số phân thức hữu tỉ bậc II/I

- **Bước 1.** Tập xác định $D = \mathbb{R} \backslash \left\{-\dfrac{n}{m}\right\}$.
- **Bước 2.** Khảo sát sự biến thiên của hàm số
  - Tính đạo hàm $y' = \dfrac{am \cdot x^2 + 2an \cdot x + b.n - m.c}{(mx+n)^2}$. Giải $y' = 0 \Leftrightarrow am \cdot x^2 + 2an \cdot x + b.n - m.c = 0$, tìm nghiệm.
  - Tìm các giới hạn tại vô cực, giới hạn vô cực và tìm tiệm cận của đồ thị hàm số.
  - Lập bảng biến thiên; xác định chiều biến thiên và cực trị của hàm số.
- **Bước 3.** Cho thêm điểm và vẽ đồ thị của hàm số dựa vào bảng biến thiên.

BÀI TẬP TỰ LUẬN

VÍ DỤ 1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị các hàm số sau:

a) $y = \dfrac{x^2+2x-2}{x-1}$; b) $y = -x + 2 - \dfrac{1}{x+1}$; c) $y = \dfrac{-x^2-3x+4}{x+2}$.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.

CÂU 1.

Bảng biến thiên sau là của một trong bốn hàm số sau. Hỏi đó là hàm số nào?

x	$-\infty$		-10		-4		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	↘	24	↗ $+\infty$	‖	$-\infty$ ↗	0	↘	$-\infty$

A $y = \dfrac{x^2-3x+4}{-x-4}$.

B $y = \dfrac{x^2-4x+4}{-x-4}$.

C $y = \dfrac{x^2-5x+4}{x+4}$.

D $y = \dfrac{x^2-4x+4}{x+4}$.

QUICK NOTE

CÂU 2.
Bảng biến thiên sau là của một trong bốn hàm số sau. Hỏi đó là hàm số nào?

x	$-\infty$		1		3		5		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	$\|$	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty \,\|\, -\infty$	$\nearrow$	-9	$\searrow$	$-\infty$

A $y=\dfrac{x^2-4x+3}{x-3}$.

B $y=\dfrac{-x^2-x+2}{x-3}$.

C $y=\dfrac{-x^2+x+2}{x-3}$.

D $y=\dfrac{x^2-4x+4}{-x+3}$.

CÂU 3.
Bảng biến thiên sau là của một trong bốn hàm số sau. Hỏi đó là hàm số nào?

x	$-\infty$		-9		-4		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	$\|$	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	-20	$\searrow$	$-\infty \,\|\, +\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

A $y=\dfrac{x^2-2x+1}{x+4}$.

B $y=\dfrac{x^2-4x+2}{x+4}$.

C $y=\dfrac{x^2-x+2}{-x-4}$.

D $y=\dfrac{x^2-3x+4}{-x-4}$.

CÂU 4.
Bảng biến thiên sau là của một trong bốn hàm số sau. Hỏi đó là hàm số nào?

x	$-\infty$		2		$+\infty$
y'		$+$	$\|$	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty \,\|\, -\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

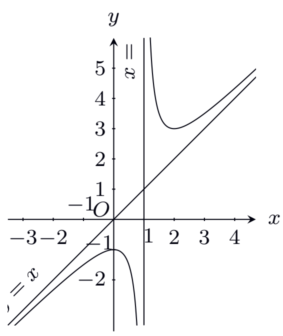
A $y=\dfrac{x^2-3}{x-2}$.

B $y=\dfrac{x^2-4x+2}{x-2}$.

C $y=\dfrac{x^2-x}{x-2}$.

D $y=\dfrac{x^2-4x+5}{x-2}$.

CÂU 5.
Đồ thị hình bên là của một trong bốn hàm số sau. Hỏi đó là hàm số nào?



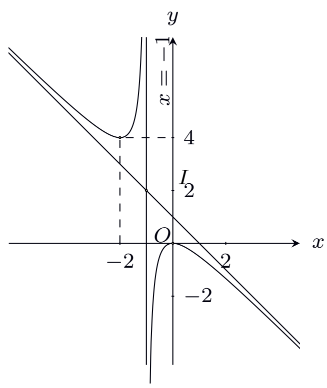
A $y=\dfrac{x^2+x-1}{x-1}$.

B $y=\dfrac{x^2-x+1}{x-1}$.

C $y=\dfrac{x^2-4x-1}{-x+1}$.

D $y=\dfrac{x^2-3x-1}{-x+1}$.

CÂU 6.
Đồ thị hình bên là của một trong bốn hàm số sau. Hỏi đó là hàm số nào?



A $y=\dfrac{x^2-x}{x+1}$.

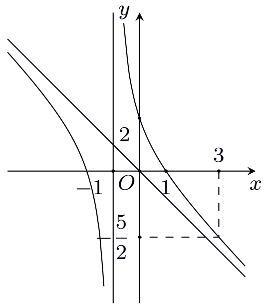
B $y=\dfrac{x^2-3x}{x+1}$.

C $y=\dfrac{x^2+1x+2}{x+1}$.

D $y=\dfrac{-x^2}{x+1}$.

QUICK NOTE

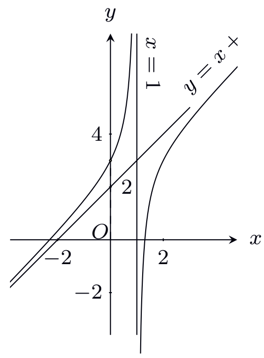
CÂU 7.
Đồ thị hình bên là của một trong bốn hàm số sau. Hỏi đó là hàm số nào?



Ⓐ $y=\dfrac{x^2-x+4}{x+1}$. Ⓑ $y=\dfrac{x^2-2x+3}{x+1}$.

Ⓒ $y=\dfrac{-x^2-x+2}{x+1}$. Ⓓ $y=\dfrac{x^2+x-1}{x+1}$.

CÂU 8.
Đồ thị hình bên là của một trong bốn hàm số sau. Hỏi đó là hàm số nào?

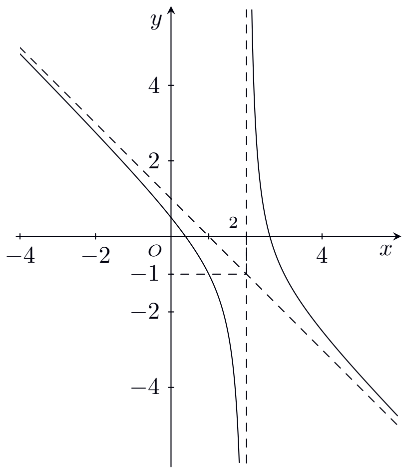


Ⓐ $y=\dfrac{x^2+3}{x-1}$. Ⓑ $y=\dfrac{x^2+x-3}{x-1}$.

Ⓒ $y=\dfrac{x^2-2x+3}{-x+1}$. Ⓓ $y=\dfrac{x^2+3}{-x+1}$.

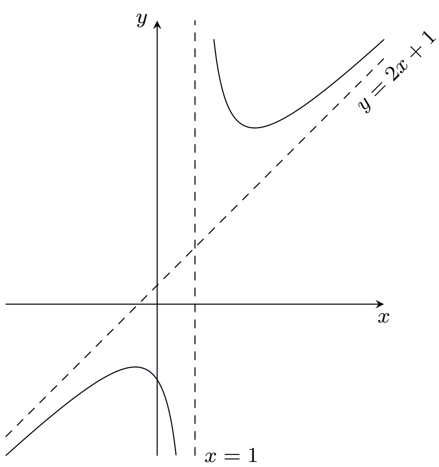
PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.

CÂU 9.
Cho hàm số $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{mx+n}$ có đồ thị như hình bên.



Mệnh đề	Đ	S
a) Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}\backslash\{1\}$.		
b) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;2)$ và $(2;+\infty)$.		
c) Điểm $I(2;1)$ là tâm đối xứng của đồ thị.		
d) Hệ số a và m trái dấu.		

CÂU 10.
Cho hàm số $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{x+n}$ có đồ thị như hình bên.



Mệnh đề	Đ	S
a) Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}\backslash\{1\}$.		
b) Điểm $I(1;2)$ là tâm đối xứng của đồ thị.		
c) $a+2b=4$.		
d) Đồ thị qua điểm $(2;10)$ khi $c=4$.		

4 Sự tương giao của hai đồ thị

Xác định tọa độ giao điểm của hai đồ thị $y=f(x)$ và $y=g(x)$:

QUICK NOTE

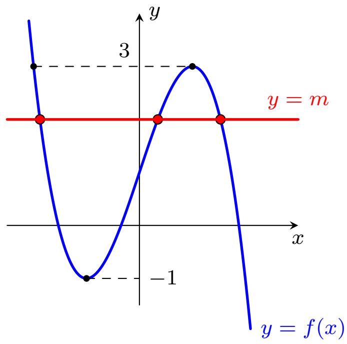
① Giải phương trình hoành độ giao điểm $f(x) = g(x)$, tìm các nghiệm $x_0 \in \mathscr{D}_f \cap \mathscr{D}_g$.

② Với x_0 vừa tìm, thay vào một trong hai hàm số ban đầu để tìm y_0.

③ Kết luận giao điểm $(x_0; y_0)$.

Ứng dụng đồ thị để biện luận nghiệm phương trình:

Xét phương trình $f(x) = m$, với m là tham số. Nghiệm của phương trình này có thể coi là hoành độ giao điểm của đồ thị $y = f(x)$ (cố định) với đường thẳng $y = m$ (nằm ngang).



Từ đó, để biện luận nghiệm phương trình $f(x) = m$, ta có thể thực hiện các bước như sau:

- Lập bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ trên miền xác định mà đề bài yêu cầu.
- Tịnh tiến đường thẳng $y = m$ theo hướng "*lên, xuống*". Quan sát số giao điểm để quy ra số nghiệm tương ứng.

BÀI TẬP TỰ LUẬN

VÍ DỤ 1. Xác định tọa độ giao điểm của hai đồ thị hàm số sau:

a) $y = x^3 - 2x^2 + x - 1$ và $y = 1 - 2x$; b) $y = \dfrac{x+8}{x-2}$ và $y = x + 2$.

VÍ DỤ 2. Tìm tập hợp các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = (x-2)(x^2 + mx + m^2 - 3)$ cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt.

VÍ DỤ 3. Tìm tham số m để phương trình $x^3 - 3x + 2 - m = 0$ có ba nghiệm phân biệt.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

CÂU 1. Đường thẳng $y = x - 1$ cắt đồ thị hàm số $y = x^3 - x^2 + x - 1$ tại hai điểm. Tìm tổng tung độ các giao điểm đó.

(A) -3. (B) 2. (C) 0. (D) -1.

CÂU 2. Số giao điểm của đồ thị hàm số $y = (x-1)(x^2 - 3x + 2)$ và trục hoành là

(A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

CÂU 3. Đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2x - 1$ cắt đồ thị hàm số $y = x^2 - 3x + 1$ tại hai điểm phân biệt A, B. Tính độ dài AB.

(A) $AB = 3$. (B) $AB = 2\sqrt{2}$. (C) $AB = 2$. (D) $AB = 1$.

CÂU 4. Đồ thị của hàm số $y = \dfrac{x-1}{x+1}$ cắt hai trục Ox và Oy tại A và B. Khi đó diện tích của tam giác OAB (với O là gốc tọa độ) bằng

(A) 1. (B) $\dfrac{1}{4}$. (C) 2. (D) $\dfrac{1}{2}$.

CÂU 5. Biết đường thẳng $y = x - 2$ cắt đồ thị hàm số $y = \dfrac{x}{x-1}$ tại 2 điểm phân biệt A, B. Tìm hoành độ trọng tâm tam giác OAB với O là gốc tọa độ.

(A) $\dfrac{2}{3}$. (B) 2. (C) $\dfrac{4}{3}$. (D) 4.

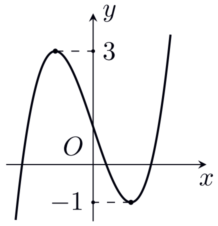
CÂU 6. Gọi M, N là giao điểm của đường thẳng $y = x + 1$ và đường cong $y = \dfrac{2x+4}{x-1}$. Tìm hoành độ trung điểm của đoạn thẳng MN.

(A) $x = -1$. (B) $x = 1$. (C) $x = -2$. (D) $x = 2$.

CÂU 7. Cho hàm số $y = \dfrac{2x}{x+1}$ có đồ thị (C). Gọi A, B là giao điểm của đường thẳng $d : y = x$ với đồ thị (C). Tính độ dài đoạn AB.

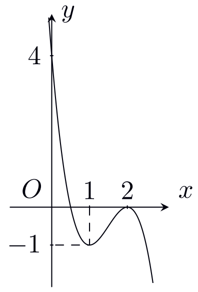
(A) $AB = \sqrt{2}$. (B) $AB = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. (C) $AB = 1$. (D) $AB = 2$.

CÂU 8.
Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Số nghiệm của phương trình $2f(x) - 3 = 0$ là



(A) 2. (B) 1.
(C) 0. (D) 3.

CÂU 9.
Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $(d \neq 0)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Số nghiệm của phương trình $3f(x) - 1 = 0$ bằng



(A) 0. (B) 1.
(C) 2. (D) 3.

CÂU 10.
Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau. Số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ với trục hoành là

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

(A) 1. (B) 0.
(C) 2. (D) 3.

CÂU 11.
Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $(-\infty; +\infty)$ và có bảng biến thiên như hình bên. Số nghiệm thực của phương trình $2\left|f(x)\right| = 7$ bằng

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	5	$\searrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$

(A) 3. (B) 2. (C) 4. (D) 2.

CÂU 12.
Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ và có bảng biến thiên như hình bên. Hỏi phương trình $3|f(x)| - 10 = 0$ có bao nhiêu nghiệm?

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	2	$\searrow$	$-\infty$ $\|\|$ $+\infty$	$\searrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$

(A) 2 nghiệm. (B) 4 nghiệm.
(C) 3 nghiệm. (D) 1 nghiệm.

CÂU 13.
Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$, có bảng biến thiên như sau. Số nghiệm của phương trình $2[f(x)]^2 - 3f(x) + 1 = 0$ là

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	1	$\nearrow$	3	$\searrow$	$\frac{1}{3}$	$\nearrow$	1

(A) 2. (B) 3.
(C) 6. (D) 0.

CÂU 14.
Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như hình bên. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(x) = m+1$ có ba nghiệm thực phân biệt.

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

(A) $-3 \leq m \leq 3$. (B) $-2 \leq m \leq 4$.
(C) $-2 < m < 4$. (D) $-3 < m < 3$.

CÂU 15.

QUICK NOTE

QUICK NOTE

Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình bên. Phương trình $f(4x-x^2)-2=0$ có bao nhiêu nghiệm thực?

(A) 2. (B) 6. (C) 0. (D) 4.

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	↘	-1	↗	3	↘	$-\infty$

Bài 5. ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM VÀ KHẢO SÁT HÀM SỐ ĐỂ GIẢI QUYẾT MỘT SỐ BÀI TOÁN THỰC TIỄN

A. LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1. Tốc độ thay đổi của một đại lượng

Ta có đạo hàm $f'(a)$ là tốc độ thay đổi tức thời của đại lượng $y = f(x)$ đối với x tại điểm $x = a$. Dưới đây, chúng ta xem xét một số ứng dụng của ý tưởng này đối với vật lí, hoá học, sinh học và kinh tế:

- Nếu $s = s(t)$ là hàm vị trí của một vật chuyển động trên một đường thẳng thì $v = s'(t)$ biểu thị vận tốc tức thời của vật (tốc độ thay đổi của độ dịch chuyển theo thời gian). Tốc độ thay đổi tức thời của vận tốc theo thời gian là gia tốc tức thời của vật:

$$a(t) = v'(t) = s''(t).$$

- Nếu $C = C(t)$ là nồng độ của một chất tham gia phản ứng hoá học tại thời điểm t, thì $C'(t)$ là tốc độ phản ứng tức thời (tức là độ thay đổi nồng độ) của chất đó tại thời điểm t.

- Nếu $P = P(t)$ là số lượng cá thể trong một quần thể động vật hoặc thực vật tại thời điểm t, thì $P'(t)$ biểu thị tốc độ tăng trưởng tức thời của quần thể tại thời điểm t.

- Nếu $C = C(x)$ là hàm chi phí, tức là tổng chi phí khi sản xuất x đơn vị hàng hoá, thì tốc độ thay đổi tức thời $C'(x)$ của chi phí đối với số lượng đơn vị hàng được sản xuất được gọi là chi phí biên.

- Về ý nghĩa kinh tế, chi phí biên $C'(x)$ xấp xỉ với chi phí để sản xuất thêm một đơn vị hàng hoá tiếp theo, tức là đơn vị hàng hoá thứ $x+1$ (xem SGK Toán 11 tập hai, trang 87, bộ sách Kết nối tri thức với cuộc sống).

2. Bài toán tối ưu hóa

Một trong những ứng dụng phổ biến nhất của đạo hàm là cung cấp một phương pháp tổng quát, hiệu quả để giải những bài toán tối ưu hoá. Trong mục này, chúng ta sẽ giải quyết những vấn đề thường gặp như tối đa hoá diện tích, khối lượng, lợi nhuận, cũng như tối thiểu hoá khoảng cách, thời gian, chi phí. Quy trình giải một số bài toán tối ưu hoá đơn giản:

- **Bước 1.** Xác định đại lượng Q mà ta cần làm cho giá trị của đại lượng ấy lớn nhất hoặc nhỏ nhất và biểu diễn nó qua các đại lượng khác trong bài toán.

- **Bước 2.** Chọn một đại lượng thích hợp nào đó, kí hiệu là x, và biểu diễn các đại lượng khác ở **Bước 1** theo x. Khi đó, đại lượng Q sẽ là hàm số của một biến x. Tìm tập xác định của hàm số $Q = Q(x)$.

- **Bước 3.** Tìm giá trị lớn nhất hoặc giá trị nhỏ nhất của hàm số $Q = Q(x)$ bằng các phương pháp đã biết và kết luận.

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

BÀI TẬP TỰ LUẬN

QUICK NOTE

5 Bài toán về quãng đường, vận tốc, gia tốc

① Nếu phương trình chuyển động của vật là $s = f(t)$ thì $v = f'(t)$ là vận tốc tức thời và $a = v'(t)$ là gia tốc tức thời của vật tại thời điểm t.

② Trong chuyển động thẳng đều thì $s = v \cdot t$.

VÍ DỤ 1. Trong 3 giây đầu tiên, một chất điểm chuyển động theo phương trình

$$s(t) = -t^3 + 6t^2 + t + 5,$$

trong đó t tính bằng giây và s tính bằng mét. Chất điểm có vận tốc tức thời lớn nhất bằng bao nhiêu trong 3 giây đầu tiên đó?

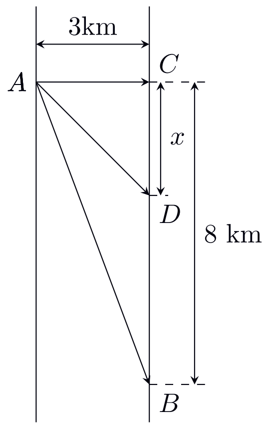
VÍ DỤ 2. Khi bỏ qua sức cản của không khí, độ cao (mét) của một vật được phóng thẳng đứng lên trên từ điểm cách mặt đất 2 m với vận tốc ban đầu 24,5 m/s là $h(t) = 2+24{,}5t-4{,}9t^2$ (theo Vật lí đại cương, NXB Giáo dục Việt Nam, 2016).

a) Tìm vận tốc của vật sau 2 giây.

b) Khi nào vật đạt độ cao lớn nhất và độ cao lớn nhất đó là bao nhiêu?

c) Khi nào thì vật chạm đất và vận tốc của vật lúc chạm đất là bao nhiêu?

VÍ DỤ 3.
Anh An chèo thuyền từ điểm A trên bờ một con sông thẳng rộng 3 km và muốn đến điểm B ở bờ đối diện cách 8 km về phía hạ lưu càng nhanh càng tốt (hình bên). Anh An chèo thuyền đến một điểm D nào đó giữa C và B rồi chạy bộ đến B. Nếu vận tốc chèo thuyền là 6 km/h và vận tốc chạy bộ là 8 km/h thì anh An phải chèo thuyền sang bờ ở điểm D cách B bao nhiêu km để đến được B càng sớm càng tốt? (*Giả sử rằng vận tốc của nước là không đáng kể so với vận tốc chèo thuyền của anh An*).



VÍ DỤ 4. Chi phí về nhiên liệu của một con tàu được chia làm hai phần. Phần chi phí thứ nhất không phụ thuộc vào tốc độ tàu và bằng 480nghn đồng mỗi giờ. Chi phí phần thứ hai trên 1 km đường tỉ lệ thuận với lập phương của tốc độ tàu, khi tốc độ bằng 20 km/h thì chi phí phần thứ hai bằng 100 nghìn đồng mỗi giờ. Giả sử con tàu đó luôn giữ nguyên tốc độ di chuyển, để tổng chi phí nhiên liệu trên 1 km đường là nhỏ nhất thì tốc độ của con tàu đó bằng bao nhiêu km/h ?

6 Bài toán tối ưu hóa trong chi phí, doanh thu, lợi nhuận

- Nếu $C(x)$ là tổng chi phí mà công ty (doanh nghiệp) phải trả để sản xuất x đơn vị hàng hóa thì $C(x)$ được gọi là **hàm chi phí**.
- Gọi $p(x)$ là giá bán mỗi đơn vị hàng hóa khi giao dịch x đơn vị hàng hóa. Khi đó $p(x)$ được gọi là **hàm cầu** (hay **hàm giá**) và hàm số này được kì vọng là hàm giảm theo biến x.
- Nếu x đơn vị hàng hóa được bán với giá mỗi đơn vị $p(x)$, thì **hàm doanh thu**, kí hiệu là $R(x)$, được tính bởi công thức $R(x) = x \cdot p(x)$.
- Nếu x đơn vị hàng hóa được bán với giá mỗi đơn vị là $p(x)$, thì **hàm lợi nhuận**, kí hiệu là $P(x)$, được tính bởi công thức

$$P(x) = R(x) - C(x) = xp(x) - C(x).$$

VÍ DỤ 1. Tại một xí nghiệp chuyên sản xuất vật liệu xây dựng, nếu trong một ngày xí nghiệp sản xuất $x\,(m^3)$ sản phẩm thì phải bỏ ra các khoản chi phí bao gồm: 5 triệu đồng chi phí cố định; 0,4 triệu đồng chi phí cho mỗi mét khối sản phẩm và $0,005x^2$ triệu đồng

QUICK NOTE

chi phí bảo dưỡng máy móc. Biết rằng, mỗi ngày xí nghiệp sản xuất được tối đa 45 m^3 sản phẩm. Tìm chi phí trung bình (triệu đồng) trên mỗi mét khối sản phẩm thấp nhất mà xí nghiệp cần bỏ ra (làm tròn đến hàng phần trăm).

VÍ DỤ 2. Giả sử một loại hàng hoá có hàm cầu được mô hình hoá bởi $p(x) = 100 - 0{,}5x$ và hàm chi phí được mô hình hoá bởi $C(x) = 40x + 37{,}5$, trong đó p (nghìn đồng) là giá của một đơn vị hàng hoá đó. Hỏi khi lợi nhuận là lớn nhất, chi phí trung bình cho mỗi đơn vị là bao nhiêu nghìn đồng ? (*kết quả làm tròn đến hàng đơn vị*).

VÍ DỤ 3. Một công ty sản xuất và bán hết x sản phẩm $(0 < x \leq 1000)$, tổng số tiền công ty thu được là $f(x) = 1000x - x^2$ (nghìn đồng), chi phí sản xuất bình quân cho một sản phẩm là $g(x) = x + \dfrac{30}{x} + 680$ (nghìn đồng). Giả sử mức thuế phụ thu trên một đơn vị sản phẩm bán được là t (nghìn đồng) $(\ 0 < t < 200\ )$. Tìm mức thuế phụ thu t (nghìn đồng) trên một sản phẩm sao cho nhà nước nhận được số tiền thuế phụ thu lớn nhất và công ty cũng thu được lợi nhuận lớn nhất theo mức thuế phụ thu đó.

7 Bài toán tối ưu hoá trong hình học

① Thể tích khối hộp chữ nhật $V =$ dài $\times$ rộng $\times$ cao;

② Thể tích khối lập phương $V = (\text{cạnh})^3$;

③ Thể tích khối chóp $V = \dfrac{1}{3} \times S_{\text{đáy}} \times$ cao;

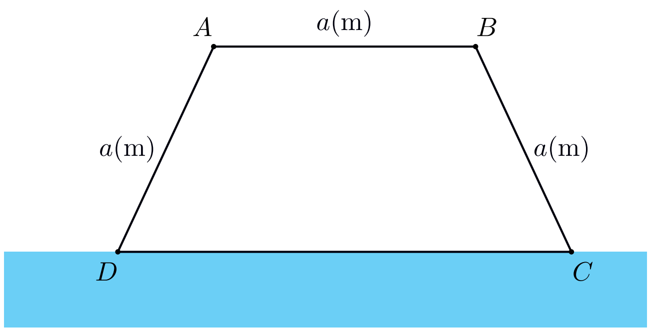
④ Khối nón:

- Diện tích xung quanh: $S_{xq} = \pi r l$.
- Thể tích: $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h$.

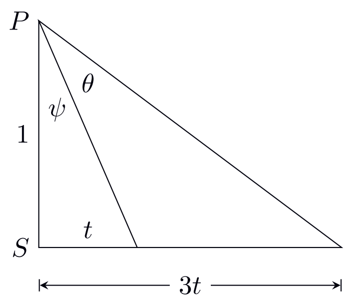
⑤ Khối trụ:

- Diện tích xung quanh: $S_{xq} = 2\pi r l$.
- Thể tích: $V = \pi r^2 h$.

VÍ DỤ 1.
Một bác nông dân có ba tấm lưới B40, mỗi tấm dài a (m) và muốn rào một mảnh vườn dọc bờ sông có dạng hình thang cân $ABCD$ như hình bên dưới (bờ sông là đường thẳng CD không phải rào). Hỏi bác đó có thể rào được mảnh vườn có diện tích lớn nhất là bao nhiêu mét vuông?

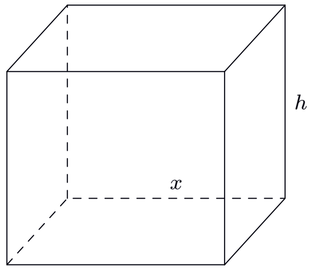


VÍ DỤ 2.
Một người quan sát đứng tại điểm P, cách xa đường đua một đơn vị độ dài. Hai vận động viên xuất phát từ điểm S và chạy dọc đường đua (như hình vẽ). Biết vận động viên thứ nhất chạy nhanh gấp ba lần vận động viên thứ hai, hãy tìm góc quan sát θ lớn nhất giữa hai vận động viên mà người quan sát đứng ở P nhìn thấy được.

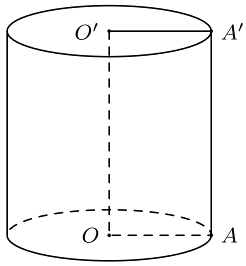


VÍ DỤ 3.

Ông Bình đặt thợ làm một bể cá, nguyên liệu bằng kính trong suốt, không có nắp đậy dạng hình hộp chữ nhật có thể tích chứa được 220500 cm^3 nước. Biết tỉ lệ giữa chiều cao và chiều rộng của bể bằng 3. Xác định diện tích đáy của bể cá (tính bằng cm^2) để tiết kiệm được nguyên vật liệu nhất.



VÍ DỤ 4.
Khi sản xuất vỏ lon sữa bò hình trụ, các nhà thiết kế luôn đặt mục tiêu sao cho chi phí nguyên liệu làm vỏ lon là ít nhất, tức là diện tích toàn phần của hình trụ là nhỏ nhất. Muốn thể tích khối trụ đó bằng 1 dm^3 và diện tích toàn phần của hình trụ nhỏ nhất thì bán kính đáy của hình trụ phải bằng bao nhiêu dm? (*kết quả làm tròn đến hàng phần trăm*).



8 Bài toán về tốc độ thay đổi của một đại lượng

VÍ DỤ 1. Khi máu di chuyển từ tim qua các động mạch chính rồi đến các mao mạch và quay trở lại qua các tĩnh mạch, huyết áp tâm thu (tức là áp lực của máu lên động mạch khi tim co bóp) liên tục giảm xuống. Giả sử một người có huyết áp tâm thu P (tính bằng mmHg) được cho bởi hàm số

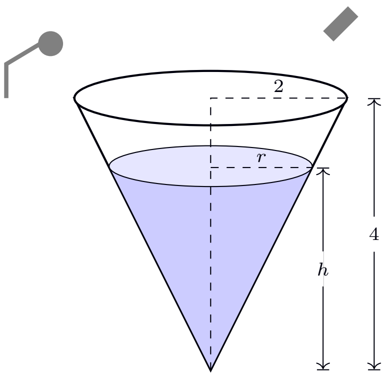
$$P(t) = \frac{25t^2+125}{t^2+1}, 0 \le t \le 10,$$

trong đó thời gian t được tính bằng giây. Tính tốc độ thay đổi của huyết áp sau 5 giây kể từ khi máu rời tim.

VÍ DỤ 2. Doanh số bán hệ thống âm thanh nối mới trong một khoảng thời gian dự kiến sẽ tuân theo đường cong logistic $R = R(x) = \dfrac{5000}{1+5e^{-x}}, x \ge 0$, trong đó thời gian x được tính bằng năm. Hỏi tốc độ bán hàng đạt tới đa vào năm nào?

VÍ DỤ 3. Giả sử số lượng của một quần thể nấm men tại môi trường nuôi cấy trong phòng thí nghiệm được mô hình hoá bằng hàm số $P(t) = \dfrac{a}{b+\mathrm{e}^{-0,75t}}$, trong đó thời gian t được tính bằng giờ. Tại thời điểm ban đầu $t=0$, quần thể có 20 tế bào và tăng với tốc độ 12 tế bào/giờ. Tìm các giá trị của a và b. Theo mô hình này, điều gì xảy ra với quần thể nấm men về lâu dài?

VÍ DỤ 4.
Một bể nước có dạng hình nón ngược với bán kính đáy bằng 2 m và chiều cao bằng 4 m (tham khảo hình vẽ dưới đây). Nước được bơm vào bể với tốc độ không đổi là 2 m^3/pht. Hỏi tốc độ dâng lên của mực nước (đơn vị m/pht) bằng bao nhiêu khi mực nước trong bể đạt độ sâu bằng 3 m (làm tròn kết quả dến hàng phần trăm)?



BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.

CÂU 1. Một vật chuyển động theo quy luật $s = -\dfrac{1}{3}t^3 + 6t^2$ với t (giây) là khoảng thời gian tính từ khi vật bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật di chuyển được trong

QUICK NOTE

QUICK NOTE

khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 7 giây, kể từ khi bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu?

(A) 144 m/s. (B) 24 m/s. (C) 180 m/s. (D) 36 m/s.

CÂU 2. Một vật chuyển động theo quy luật $s = -\frac{1}{2}t^3 + 6t^2$ với t (giây) là khoảng thời gian tính từ khi vật bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật di chuyển được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 9 giây, kể từ khi bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được là bao nhiêu?(*kết quả tính bằng m/s*)

(A) 54 m/s. (B) 36 m/s. (C) 27 m/s. (D) 45 m/s.

CÂU 3. Để tăng nhiệt độ trong phòng từ 18°C người ta sử dụng một cái máy sưởi (máy được phép hoạt động trong 9 phút). Gọi T (đơn vị °C) là nhiệt độ của phòng ở phút thứ t được cho bởi công thức $T = -0{,}009t^3 + 0{,}15t^2 + 18$ với $t \in [1; 12]$. Tìm nhiệt độ cao nhất trong phòng đạt được trong thời gian 9 phút kể từ khi máy sưởi bắt đầu hoạt động.

(A) 28. (B) 22. (C) 24. (D) 23.

CÂU 4. Số dân của một thị trấn sau t năm kể từ năm 1970 được ước tính bởi công thức $f(t) = \dfrac{26t + 10}{t + 5}$ ($f(t)$ được tính bằng nghìn người). Đạo hàm của hàm số f biểu thị tốc độ tăng trưởng dân số của thị trấn (tính bằng nghìn người/năm). Hỏi vào năm nào thì tốc độ tăng dân số là 0,048 nghìn người/ năm ?

(A) 2025. (B) 2020. (C) 2015. (D) 2018.

CÂU 5. Sau khi phát hiện dịch bệnh, các chuyên gia y tế ước tính số người nhiễm bệnh kể từ ngày đầu tiên xuất hiện bệnh nhân đầu tiên đến ngày thứ t là $f(t) = 1 + 18t^2 - \frac{1}{3}t^3$ với $t = 0, 1, 2, \ldots, 30$. Nếu f xác định trên $[0; 30]$ thì $f'(t)$ được xem là tốc độ truyền bệnh (người/ngày) tại thời điểm t. Xác định ngày mà tốc độ truyền bệnh lớn nhất.

(A) Ngày thứ 15. (B) Ngày thứ 18. (C) Ngày thứ 20. (D) Ngày thứ 30.

CÂU 6. Doanh số bán hệ thống âm thanh trong một khoảng thời gian dự kiến sẽ tuân theo đường cong logistic $R = R(x) = \dfrac{5000}{1 + 5e^{-x}}, x \geq 0$, trong đó thời gian x được tính bằng năm. Hỏi tốc độ bán hàng đạt tối đa vào năm thứ mấy kể từ khi mở bán?

(A) Năm thứ 3. (B) Năm thứ 2. (C) Năm thứ 4. (D) Năm thứ 1.

CÂU 7. Độ giảm huyết áp của một bệnh nhân được xác định bởi công thức $f(x) = 0,025x^2(30 - x)$, trong đó x là liều lượng an toàn thuốc tiêm cho bệnh nhân cao huyết áp được tính bằng mg. Liều lượng an toàn của thuốc cần tiêm cho bệnh nhân cao huyết áp để huyết áp giảm nhiều nhất là

(A) 30 mg. (B) $0,5$ mg. (C) 15 mg. (D) 20 mg.

CÂU 8. Một cuốn tạp chí bán giá 20 ngàn đồng, chi phí xuất bản cho x cuốn là

$$C(x) = 0{,}0001x^2 - 0{,}2x + 10000 \text{ (đơn vị 10000 đồng)}.$$

Chi phí phát hành mỗi cuốn là 4 ngàn đồng. Các khoản thu bao gồm tiền bán tạp chí cộng 90 triệu đồng tiền quảng cáo. Tìm số lượng cuốn tạp chí cần xuất bản để có mức lãi cao nhất. (giả thiết rằng số cuốn tạp chí in ra được bán hết)

(A) 90000 cuốn. (B) 9000 cuốn. (C) 10000 cuốn. (D) 18000 cuốn.

CÂU 9. Hiện tại, mỗi tháng một cửa hàng đồ lưu niệm bán được 100 sản phẩm A. Với mỗi sản phẩm A bán được, cửa hàng thu được 20 nghìn đồng lợi nhuận. Qua khảo sát, người ta thấy rằng với mỗi nghìn đồng giảm giá, cửa hàng bán thêm được 10 sản phẩm A. Cửa hàng nên giảm giá bao nhiêu nghìn đồng cho mỗi sản phẩm A để thu được lợi nhuận lớn nhất từ việc bán sản phẩm này?

(A) 15 nghìn đồng. (B) 8 nghìn đồng. (C) 10 nghìn đồng. (D) 12 nghìn đồng.

CÂU 10. Một công ty dự kiến chi 1 tỉ đồng sản xuất các thùng đựng sơn hình trụ với dung tích 5 lít. Giá sản xuất mặt xung quanh là 100 nghìn đồng/m^2, giá sản xuất mặt đáy là 120 nghìn đồng/m^2. Hỏi công ty có thể sản xuất được tối đa bao nhiêu thùng sơn? (Giả sử chi phí cho các mối nối không đáng kể).

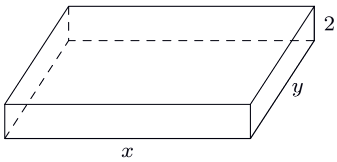
(A) 56453 thùng sơn. (B) 58136 thùng sơn. (C) 57169 thùng sơn. (D) 59025 thùng sơn.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.

CÂU 11. Một vật chuyển động thẳng không đều xác định bởi phương trình $s(t) = 7t^2 - 3t + 10$, trong đó s tính bằng mét và t tính bằng giây. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

Mệnh đề	Đ	S
a) Quãng đường vật đi được sau 9 giây kể từ khi bắt đầu chuyển động là 550 m. .		
b) Gia tốc chuyển động của vật tại thời điểm $t = 2$ là $20\ \text{m}/s^2$.		
c) Vận tốc chuyển động của vật tại thời điểm $t = 4$ là 59 m/s .		
d) Vận tốc nhỏ nhất vật đạt được trong khoảng thời gian từ $t = 3$ đến $t = 6$ là 39 m/s .		

CÂU 12. Người ta muốn xây một bể bơi có dạng hình hộp chữ nhật, thể tích $1\,800\ \text{m}^3$ và chiều sâu 2 m (hình bên). Biết rằng chi phí xây mỗi đơn vị diện tích của đáy bể gấp hai lần so với thành bể. Gọi x (m) và y (m) là hai kích thước của mặt đáy. Xét tính đúng-sai của các khẳng định sau:



Mệnh đề	Đ	S
a) Thể tích bể bơi được tính theo công thức $V = 2x^2y$.		
b) Mối liên hệ giữa x và y là $y = \dfrac{900}{x}$.		
c) Tổng diện tích mặt bên của bể tính theo x, y là $S = 4(x + y)$.		
d) Để tổng chi phí xây dựng (bao gồm mặt đáy và mặt bên) nhỏ nhất thì cần chọn chiều dài là 40 m.		

CÂU 13. Nhà máy A chuyên sản xuất một loại sản phẩm cung cấp cho nhà máy B. Hai nhà máy thoả thuận rằng, hằng tháng A cung cấp cho B số lượng sản phẩm theo đơn đặt hàng của B (tối đa 100 tấn sản phẩm). Nếu số lượng đặt hàng là x tấn sản phẩm thì giá bán cho mỗi tấn sản phẩm là $P(x) = 45 - 0{,}001x^2$ (triệu đồng). Chi phí để A sản xuất x tấn sản phẩm trong một tháng là $C(x) = 100 + 30x$ (triệu đồng) (gồm 100 triệu đồng chi phí cố định và 30 triệu đồng cho mỗi tấn sản phẩm).

Mệnh đề	Đ	S
a) Chi phí để A sản xuất 10 tấn sảm phẩm trong một tháng là 400 triệu đồng.		
b) Số tiền A thu được khi bán 10 tấn sản phẩm cho B là 600 triệu đồng.		
c) Lợi nhuận mà A thu được khi bán x tấn sản phẩm $(0 \leq x \leq 100)$ cho B là $-0{,}001x^3 + 15x - 100$.		
d) A bán cho B khoảng 70,7 tấn sản phẩm mỗi tháng thì thu được lợi nhuận lớn nhất.		

CÂU 14. Giả sử hàm cầu của một sản phẩm độc quyền được cho bởi $p = 400 - 2Q$ và hàm chi phí trung bình $\overline{C} = 0{,}2Q + 4 + \dfrac{400}{Q}$ trong đó Q là số đơn vị sản phẩm (p và $\overline{C}$ được tính bằng \$ đối với mỗi đơn vị sản phẩm). Xét tính đúng, sai của các khẳng định sau:

Mệnh đề	Đ	S
a) $Q = 90$ là lượng sản phẩm bán ra để lợi nhuận thu được tối đa.		
b) Giá bán để lợi nhuận thu được tối đa là 400\$.		
c) Lợi nhuận tối đa là 17420\$.		

QUICK NOTE

Mệnh đề	Đ	S
d) Nếu chính phủ đánh thuế 22\$/ một đơn vị sản phẩm thì giá bán 390\$ để lợi nhuận thu được tối đa.		

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.

CÂU 15. Một vật chuyển động theo quy luật $s = -\frac{1}{3}t^3 + 9t^2$, với t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc vật bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật đi được trong thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 10 giây, kể từ lúc bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu?(*kết quả tính bằng m/s*)

KQ: | | | | |

CÂU 16. Tại một xưởng sản xuất sản phẩm từ bêtông, chi phí để sản xuất $x(m^3)$ sản phẩm mỗi tháng là $C(x) = 2 + 0,5x + 0,007x^2$ (triệu đồng) với $0 \leq x \leq 27$. Chi phí trung bình là $\overline{C}(x) = \frac{C(x)}{x}$. Mỗi tháng xưởng sản xuất bao nhiêu mét khối sản phẩm thì chi phí trung bình để sản xuất là thấp nhất(làm tròn đến hàng phần mười)

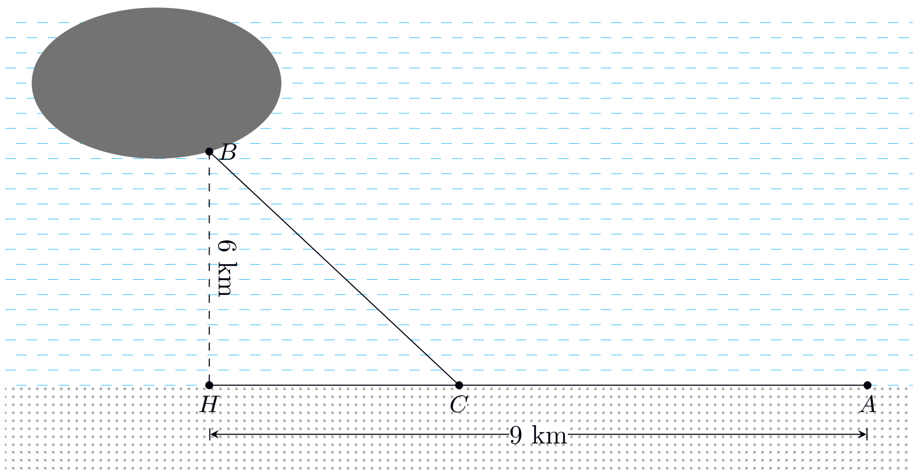
KQ: | | | | |

CÂU 17. Cơ sở A chuyên cung cấp một loại sản phẩm nông nghiệp X cho nhà phân phối B. Hai bên thoả thuận rằng, nếu đầu tháng B đặt hàng x tạ sản phẩm X thì giá bán mỗi tạ sản phẩm là $P(x) = 5 - 0{,}0005x^2$ (triệu đồng) $(x \leq 40)$. Chi phí A phải bỏ ra cho x tạ sản phẩm X trong một tháng là $C(x) = 10 + 3{,}5x$ (triệu đồng). Hỏi trong một tháng B đặt hàng bao nhiêu tạ sản phẩm X từ A thì A nhận được lợi nhuận lớn nhất? (*kết quả làm tròn đến hàng phần chục*)

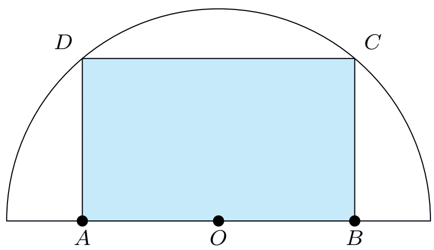
KQ: | | | | |

CÂU 18. Một công ty muốn làm một đường ống dẫn từ vị trí A trên bờ biển đến vị trí B trên hòn đảo. Khoảng cách từ điểm B đến bờ biển là $BH = 6$ km (Hình bên dưới). Giá tiền để xây dựng đường ống trên bờ là 50 000 USD mỗi kilômét và giá tiền xây dựng đường ống trên biển là 130 000 USD mỗi kilômét, biết rằng $AH = 9$ km. Xác định vị trí điểm C cách vị trí A một khoảng bao nhiêu km để khi lắp ống dẫn theo đường gấp khúc ACB thì chi phí công ty bỏ ra là thấp nhất.

KQ: | | | | |



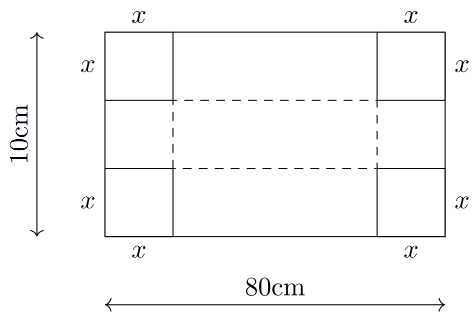
CÂU 19. Từ một tấm tôn có hình dạng là nửa hình tròn bán kính $R = 7$, người ta muốn cắt ra một hình chữ nhật (như hình vẽ). Diện tích lớn nhất có thể của tấm tôn hình chữ nhật là bao nhiêu?



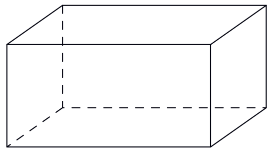
KQ: | | | | |

CÂU 20. Từ một tấm bìa hình chữ nhật có chiều rộng 10cm và chiều dài 80 cm như hình a, người ta cắt ở bốn góc bốn hình vuông có cạnh x với $1 \leq x \leq 4$ và gấp lại để tạo thành chiếc hộp có dạng hình hộp chữ nhật không nắp như hình b. Tìm x để thể tích chiếc hộp là lớn nhất (kết quả làm tròn đến hàng phần mười).

KQ:



a)



b)

QUICK NOTE

LỜI GIẢI CHI TIẾT

Bài 4. KHẢO SÁT SỰ BIẾN THIÊN VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ

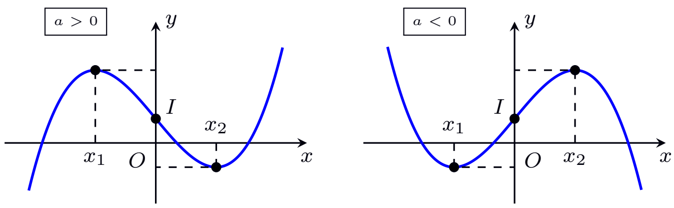
A. LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1. Khảo sát hàm số $y = f(x)$

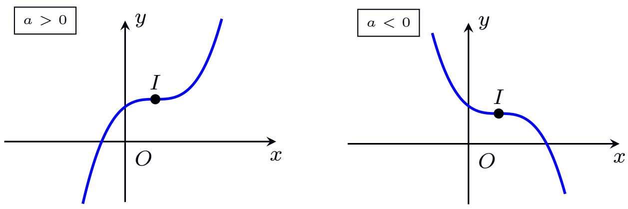
- **Bước 1.** Tìm tập xác định của hàm số.
- **Bước 2.** Khảo sát sự biến thiên của hàm số
  - Tính đạo hàm y'. Tìm các điểm mà tại đó y' bằng 0 hoặc đạo hàm không tồn tại.
  - Tìm các giới hạn tại vô cực, giới hạn vô cực và tìm tiệm cận của đồ thị hàm số.
  - Lập bảng biến thiên; xác định chiều biến thiên và cực trị của hàm số.
- **Bước 3.** Cho thêm điểm và vẽ đồ thị của hàm số dựa vào bảng biến thiên.

2. Hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$

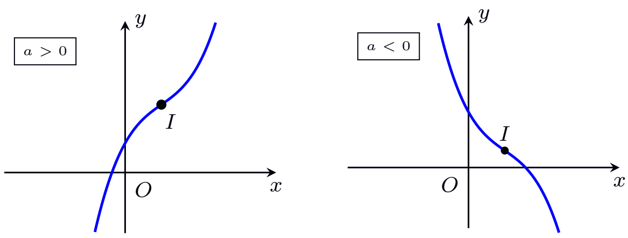
TH1. $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1 và x_2. Khi đó, hàm số có hai điểm cực trị $x = x_1$ và $x = x_2$.



TH2. $y' = 0$ có nghiệm kép x_0. Khi đó, hàm số không có cực trị.



TH3. $y' = 0$ vô nghiệm. Khi đó, hàm số không có cực trị.



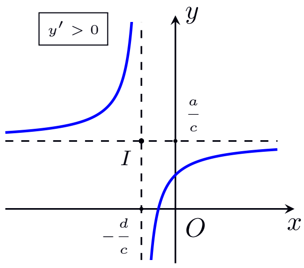
GHI NHỚ

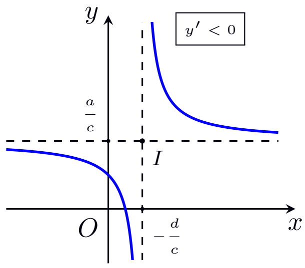
① Liên hệ tổng tích hai nghiệm của y' $\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{2b}{3a} \\ x_1x_2 = \dfrac{c}{3a} \end{cases}$

② Tâm đối xứng của đồ thị là trung điểm của đoạn nối 2 điểm cực trị. Hoành độ tâm đối xứng là nghiệm phương trình $y'' = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{b}{3a}$.

3. Hàm số $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(c \neq 0, ad - bc \neq 0)$

- Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{d}{c}\right\}$; Đạo hàm $y' = \dfrac{ad - cb}{(cx+d)^2}$.
- Đồ thị nhận giao điểm của hai đường tiệm cận làm tâm đối xứng.
- Hình dạng đồ thị:





GHI NHỚ

① Tiệm cận đứng $x = -\dfrac{d}{c}$.

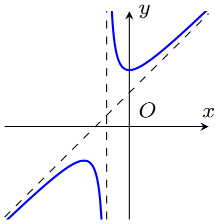
② Tiệm cận ngang $y = \dfrac{a}{c}$.

③ Giao với Ox: $y = 0 \Rightarrow x = -\dfrac{b}{a}$.

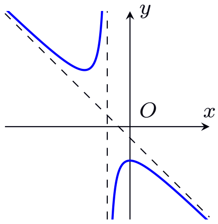
④ Giao với Oy: $x = 0 \Rightarrow y = \dfrac{b}{d}$.

4. Hàm số $y = \dfrac{ax^2+bx+c}{dx+e}$ $(a \neq 0, e \neq 0)$ (đa thức tử không chia hết cho đa thức mẫu)

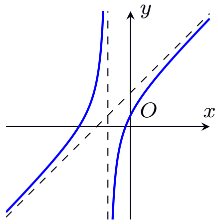
- Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{e}{d}\right\}$; Đạo hàm $y' = \dfrac{adx^2 + 2aex + be - cd}{(dx+e)^2}$.
- Hàm số 2 điểm cực trị khi $y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt; Hàm số không có cực trị khi $y' = 0$ vô nghiệm.
- Đồ thị nhận giao điểm của tiệm cận đứng và tiệm cận xiên làm tâm đối xứng.
- Hình dạng đồ thị:



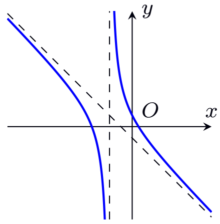
$a > 0$, $y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt



$a < 0$, $y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt



$a > 0$, $y' = 0$ vô nghiệm



$a < 0$, $y' = 0$ vô nghiệm

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

1 Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số bậc ba

Ta khảo sát theo sơ đồ đã nhắc đến ở phần lý thuyết.

BÀI TẬP TỰ LUẬN

VÍ DỤ 1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị các hàm số sau:

a) $y = x^3 - 3x^2 + 1$;

b) $y = -2x^3 - 3x^2 + 1$;

c) $y = x^3 + 3x^2 + 3x + 2$;

d) $y = x^3 - 3x^2 + 4x - 2$.

Lời giải.

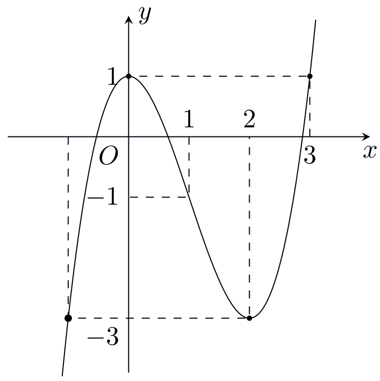
a) Tập xác định $\mathbb{R}$.
Sự biến thiên:

- $y' = 3x^2 - 6x$; $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2. \end{array}\right.$.
- Giới hạn: $\lim\limits_{x \to -\infty} y = -\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} y = +\infty$.
- Bảng biến thiên như hình bên:
  Suy ra hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; 0)$ và $(2; +\infty)$; nghịch biến trên $(0; 2)$.
  Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$; $y_{\text{CĐ}} = 1$; hàm số đạt cực tiểu tại $x = 2$; $y_{\text{CT}} = -3$.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

Đồ thị:

- Đồ thị đi qua các điểm $(2; -3)$, $(-1; -3)$, $(3; 1)$
- Đồ thị nhận điểm $I(1; -1)$ làm tâm đối xứng.



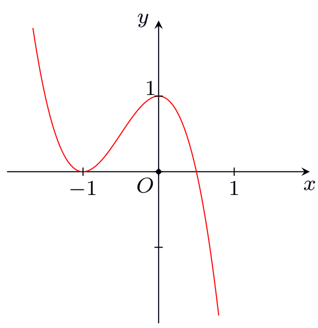
b) Tập xác định: $\mathbb{R}$.
Sự biến thiên:

- $y' = -6x^2 - 6x$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = -1$.
- Giới hạn: $\lim\limits_{x \to -\infty} y = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} y = -\infty$.
- Bảng biến thiên như hình bên:
  Suy ra hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(0; +\infty)$; đồng biến trên $(-1; 0)$.
  Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$; $y_{\text{CĐ}} = 1$; hàm số đạt cực tiểu tại $x = -1$; $y_{\text{CT}} = 0$.

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

Đồ thị:

- Đồ thị qua các điểm $(1; -4)$, $(-2; 5)$.
- Đồ thị của hàm số có tâm đối xứng là điểm $I\left(-\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{2}\right)$



c) Tập xác định $\mathbb{R}$.
Sự biến thiên:

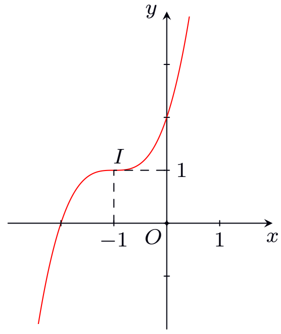
- $y' = 3x^2 + 6x + 3$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = -1$.
- Giới hạn: $\lim\limits_{x \to -\infty} y = -\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} y = +\infty$.
-

Bảng biến thiên như hình bên:
Suy ra hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.
Hàm số không có cực trị.

x	$-\infty$			-1			$+\infty$
y'		$+$		0		$+$	
y	$-\infty$	↗		1		↗	$+\infty$

Đồ thị:

Đồ thị của hàm số có tâm đối xứng là điểm $I\,(-1;1)$



d) Tập xác định: $\mathbb{R}$.
Sự biến thiên

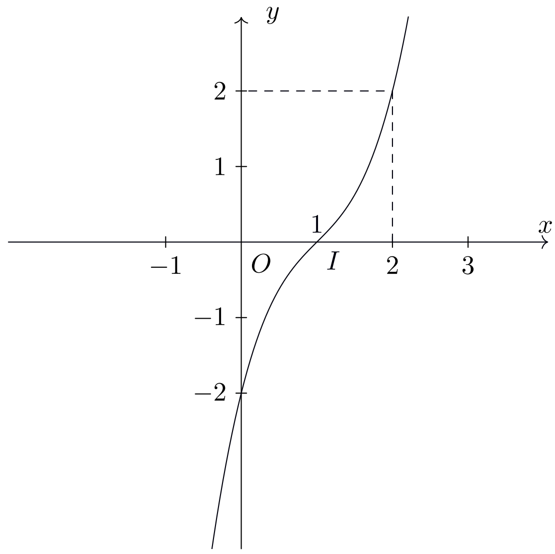
- $y' = 3x^2 - 6x + 4 > 0$ với $\forall x \in \mathbb{R}$.
- Giới hạn: $\lim\limits_{x \to -\infty} y = -\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} y = +\infty$
-

Bảng biến thiên như hình bên:
Suy ra hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.
Hàm số không có cực trị.

x	$-\infty$		$+\infty$
y'		$+$	
y	$-\infty$	↗	$+\infty$

Đồ thị

- Đồ thị đi qua $(2;2)$, $(0;-2)$, $(1;0)$.
- Đồ thị nhận $I(1;0)$ làm tâm đối xứng.



BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.

CÂU 1.
Bảng biến thiên ở hình bên là của một trong bốn hàm số sau đây. Hỏi đó là hàm số nào?

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	5	↘	1	↗	$+\infty$

Ⓐ $y = -x^3 - 2x^2 + 5$.
Ⓑ $y = x^3 - 3x^2 + 5$.
Ⓒ $y = -x^3 - 3x + 5$.
Ⓓ $y = x^3 + 3x^2 + 5$.

CÂU 2.
Bảng biến thiên ở hình bên là của một trong bốn hàm số sau đây. Hỏi đó là hàm số nào?

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	5	$\searrow$	$-\infty$

A $y=-x^3+3x^2$. **B** $y=x^3-3x^2-1$.
C $y=x^4+2x^2+1$. **D** $y=-x^3+3x^2+1$.

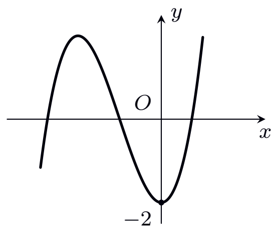
Lời giải.
Ta thấy đây là hàm số bậc ba và $\lim\limits_{x\to-\infty}=-\infty$ nên $a<0$.
Ta có $f(0)=1$ nên hàm số cần tìm là $y=-x^3+3x^2+1$.
Chọn đáp án D ....

CÂU 3.
Bảng biến thiên ở hình bên là của một trong bốn hàm số sau đây. Hỏi đó là hàm số nào?

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

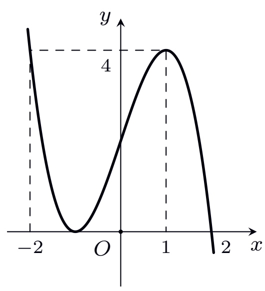
A $y=x^3-3x^2+x+3$. **B** $y=x^3-3x+4$.
C $y=x^3-3x^2+3x+1$. **D** $y=x^3+3x^2+5$.

CÂU 4.
Đường cong bên là đồ thị của một trong bốn hàm số đã cho sau đây. Hỏi đó là hàm số nào?
A $y=-x^3+x^2-2$. **B** $y=x^3+3x^2-2$. **C** $y=x^3-3x+2$. **D** $y=x^2-3x-2$.



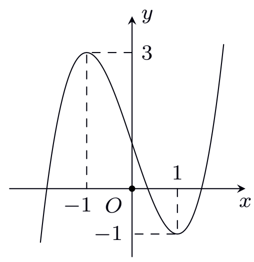
Lời giải.
Dựa vào hình dáng đồ thị, ta thấy đây là đồ thị của hàm số bậc ba $y=ax^3+bx^2+cx+d$ với $a>0$ nên loại các hàm $y=x^4+x^2-2$, $y=-x^2-3x-2$. Mặt khác, đồ thị đi qua điểm $(0;-2)$ nên loại hàm $y=x^3-3x+2$.
(Ngoài ra, ta có thể đánh giá dấu của các hệ số $a,\ b,\ c$ thông qua hoành độ 2 điểm cực trị và hoành độ trung điểm của hai điểm cực trị. Trong đồ thị này ta còn thấy hàm số có điểm cực tiểu $x=0$ nên $c=0$)
Chọn đáp án B ....

CÂU 5.
Đường cong bên là đồ thị của một trong bốn hàm số đã cho sau đây. Hỏi đó là hàm số nào?
A $y=x^3+3x-2$. **B** $y=x^3-3x+2$.
C $y=-x^3+3x+2$. **D** $y=-x^3-3x-2$.



Lời giải.
Quan sát đồ thị, ta thấy nhánh cuối của đồ thị hướng xuống dưới nên $\lim\limits_{x\to+\infty}y=-\infty$, suy ra hệ số $a<0$. Như vậy hai hàm số $y=x^3+3x-2; y=x^3-3x+2$ không thỏa mãn.
Mặt khác hàm số có hai điểm cực trị nên hàm số $y=-x^3-3x-2$ có $y'=-3x^2-3<0\ \forall x\in\mathbb{R}$ không thỏa mãn.
Chọn đáp án C ....

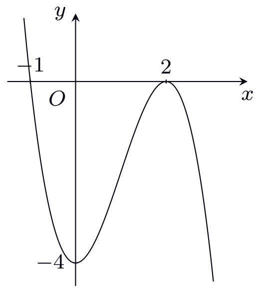
CÂU 6.
Đường cong bên là đồ thị của một trong bốn hàm số đã cho sau đây. Hỏi đó là hàm số nào?
A $y=-x^3+3x^2+1$. **B** $y=-x^2-3x-1$. **C** $y=x^4+2x^2-1$. **D** $y=x^3-3x+1$.



Lời giải.
Đường cong trong hình là đồ thị của hàm số bậc ba có hệ số $a<0$. Trong các hàm số đã cho, chỉ có duy nhất hàm số $y=x^3-3x+1$ thỏa mãn.

Chọn đáp án D ....

CÂU 7.
Đường cong bên là đồ thị của một trong bốn hàm số đã cho sau đây. Hỏi đó là hàm số nào?



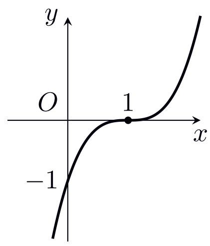
A $y = x^3 - 3x^2 - 4$. B $y = -x^3 - 4$. C $y = -x^3 + 3x^2 - 2$. D $y = -x^3 + 3x^2 - 4$.

Lời giải.

- Đồ thị hàm số có dạng chữ N ngược nên đây là đồ thị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ với $a < 0$. Loại phương án $y = x^3 - 3x^2 - 4$.
- Đồ thị hàm số giao Oy tại điểm có tung độ bằng -4 nên $d = -4$, loại phương án $y = -x^3 + 3x^2 - 2$.
- Hàm số có hai điểm cực trị $x = 0, x = 2$ nên loại phương án $y = -x^3 - 4$ (vì phương án này có $y' = -3x^2$, hàm số không có điểm cực trị).

Chọn đáp án D ....

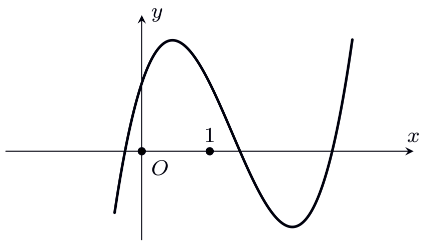
CÂU 8.
Đường cong bên là đồ thị của một trong bốn hàm số đã cho sau đây. Hỏi đó là hàm số nào?



A $y = x^3 - 1$. B $y = (x + 1)^3$.
C $y = (x - 1)^3$. D $y = x^3 + 1$.

Lời giải.
(C) tiếp xúc với Ox tại điểm uốn, suy ra $f(x)$ có nghiệm bội ba $x = 1$ nên hàm số có dạng $y = a(x - 1)^3$. Mà $(0; -1) \in (C)$ nên $a = 1$.
Chọn đáp án C ....

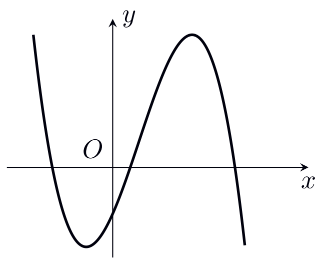
CÂU 9.
Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây là đúng?



A $a > 0,\ b > 0,\ c > 0,\ d > 0$. B $a < 0,\ b < 0,\ c > 0,\ d > 0$.
C $a > 0,\ b < 0,\ c < 0,\ d > 0$. D $a > 0,\ b < 0,\ c > 0,\ d > 0$.

Lời giải.
Nhìn vào đồ thị, ta thấy đồ thị hàm số đi từ $-\infty$ lên $+\infty$ nên $a > 0$.
Giao điểm với trục tung nằm trên trục hoành, do đó $d > 0$.
Hàm số có hai điểm cực trị, và hai điểm cực trị đều dương. Suy ra tổng hai điểm cực trị và tích hai điểm cực trị đều dương.
Ta có $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ nên tổng hai điểm cực trị là $\dfrac{-2b}{3a}$. Suy ra $\dfrac{-2b}{3a} > 0$, hay $b < 0$.
Còn tích hai điểm cực trị là $\dfrac{c}{3a}$. Suy ra $\dfrac{c}{3a} > 0$ hay $c > 0$.
Chọn đáp án D ....

CÂU 10.
Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây đúng?



A $a < 0,\ b < 0,\ c < 0,\ d > 0$. B $a < 0,\ b > 0,\ c < 0,\ d > 0$.
C $a < 0,\ b > 0,\ c > 0,\ d < 0$. D $a < 0,\ b < 0,\ c > 0,\ d < 0$.

Lời giải.

Dựa vào hình dáng đồ thị suy ra $a < 0$.

Dựa vào vị trí điểm cực đại và điểm cực tiểu, suy ra $x_{CT} + x_{CD} > 0 \Rightarrow -\dfrac{b}{a} > 0 \Rightarrow b > 0$.

Hai điểm cực trị có hoành độ trái dấu nên $x_{CT} \cdot x_{CD} < 0 \Rightarrow \dfrac{c}{a} < 0 \Rightarrow c > 0$.

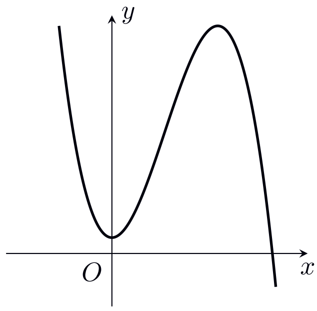
Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ dương nên $d > 0$.

Vậy $a < 0$, $b > 0$, $c > 0$ và $d > 0$.

Chọn đáp án C .... □

CÂU 11.

Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. $a < 0$, $b > 0$, $c > 0$, $d > 0$.

B. $a < 0$, $b < 0$, $c = 0$, $d > 0$.

C. $a < 0$, $b > 0$, $c = 0$, $d > 0$.

D. $a > 0$, $b < 0$, $c > 0$, $d > 0$.

Lời giải.

Dựa vào đồ thị ta có thể thấy $a < 0$, đồ thị cắt trục tung tại điểm có tung độ dương nên $d > 0$.

Hàm số có hai cực trị thỏa $\begin{cases} S > 0 \\ P = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{b}{a} > 0 \\ \dfrac{c}{a} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b > 0 \\ c = 0. \end{cases}$

Chọn đáp án C .... □

CÂU 12.

Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có bảng biến thiên như hình bên. Trong các hệ số a, b, c và d có bao nhiêu số âm?

A. 2. B. 1. C. 4. D. 3.

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	↘		0	↗		↘	

Lời giải.

Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số có 2 điểm cực trị nên bậc của đa thức phải lớn hơn $2 \Rightarrow a \neq 0$. Mà $\lim\limits_{x \to +\infty} y = -\infty \Rightarrow a < 0$.

Từ bảng biến thiên ta có $d = y(0) > y(-1) = 0$.

Ta có $y' = 3ax^2 + 2bx + c$ có hai nghiệm là -1 và 2 nên $\begin{cases} -\dfrac{2b}{3a} = -1 + 2 = 1 > 0 \\ \dfrac{c}{3a} = (-1) \cdot 2 = -2 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b > 0 \\ c > 0. \end{cases}$

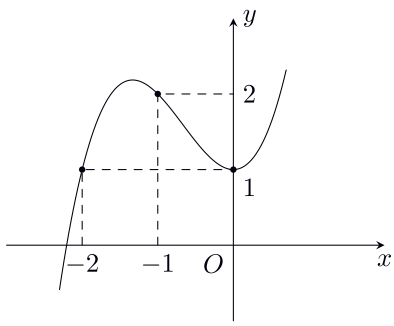
Chọn đáp án B .... □

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.

CÂU 13.

Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ.

Mệnh đề	Đ	S
a) Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 1$.		X
b) Đồ thị hàm số cắt trục Oy tại điểm $(0;1)$.	X	
c) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;-1)$.		X
d) $2a + 3b + c = 9$.		X



Lời giải.

Theo hình vẽ thì:

a) Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$, giá trị cực tiểu $y = 1$;

b) Đồ thị hàm số cắt trục Oy tại điểm $(0;1)$;

c) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;x_0)$, với $-2 < x_0 < -1$;

d) Đồ thị qua 3 điểm $(-2;1)$, $(-1;2)$, $(0;1)$ và đạt cực trị tại $x=1$ nên ta được hệ

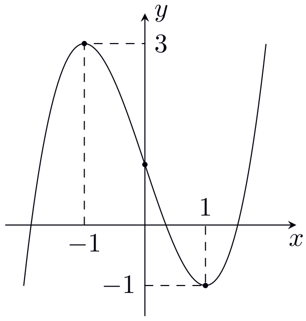
$$\begin{cases} -8a+4b-2c+d=1 \\ -a+b-c+d=2 \\ d=1 \\ c=0 \end{cases} \Leftrightarrow a=1;\ b=2,\ c=0,\ d=1$$

nên $2a+3b+c=8$.

Chọn đáp án | a sai | b đúng | c sai | d sai | .... □

CÂU 14.
Cho hàm số bậc ba $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ.
Tính tổng $T=$.

Mệnh đề	Đ	S
a) Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm $(0;1)$.	X	
b) Đường thẳng đi qua điểm $(0;1)$ luôn cắt đồ thị tại ba điểm phân biệt có hoành độ lập thành 1 cấp số cộng.	X	
c) $a-b+c+d=-1$.	X	
d) Đồ thị hàm số đi qua điểm $(3;18)$.		X



Lời giải.

a) Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị $(-1;3)$ và $(1;-1)$. Suy ra tọa độ tâm đối xứng là $(0;1)$. Suy ra đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm $(0;1)$

b) Do $I(0;1)$ là tâm đối xứng của đồ thị, nên đường thẳng qua nó sẽ cắt đồ thị tại ba điểm phân biệt I, A, B với I là trung điểm của AB. Suy ra $x_A+x_B=2x_I$. Vậy ba điểm này có hoành độ lập thành 1 cấp số cộng.

c) Ta có $f'(x)=3ax^2+2bx+c$. Từ hình vẽ, ta có

$$\begin{cases} f(-1)=3 \\ f(1)=-1 \\ f'(-1)=0 \\ f'(1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a+b-c+d=3 \\ a+b+c+d=-1 \\ 3a-2b+c=0 \\ 3a+2b+c=0 \end{cases}$$

Giải hệ, ta được $a=1$, $b=0$, $c=-3$,$d=1$. Vậy $T=a-b+c+d=-1$.

d) Ta có $f'(x)=3ax^2+2bx+c$. Từ hình vẽ, ta có

$$\begin{cases} f(-1)=3 \\ f(1)=-1 \\ f'(-1)=0 \\ f'(1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a+b-c+d=3 \\ a+b+c+d=-1 \\ 3a-2b+c=0 \\ 3a+2b+c=0 \end{cases}$$

Giải hệ, ta được $a=1$, $b=0$, $c=-3$,$d=1$. Suy ra $y=x^2-3x+1$.
Thay tọa độ $(3;18)$ vào phương trình, không thỏa mãn. Vậy đồ thị hàm số không đi qua điểm $(3;18)$.

Chọn đáp án | a đúng | b đúng | c đúng | d sai | .... □

CÂU 15.

Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có bảng biến thiên như hình bên.

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	4	$\searrow$	$-\infty$

Mệnh đề	Đ	S
a) Hàm số đạt giá trị lớn nhất là 4.		X
b) Đường thẳng $y = 2$ cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại 3 điểm phân biệt.	X	
c) Trong bốn hệ số a, b, c, d có đúng hai số âm.	X	
d) Đồ thị hàm số đi qua điểm $(-4; 20)$.	X	

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy:

a) Hàm số $y = f(x)$ không có giá trị lớn nhất trên $\mathbb{R}$.

b) Vẽ đường thẳng $y = 2$ qua điểm $(0; 2)$ và song song với Ox, rõ ràng đường thẳng này cắt đồ thị tại ba điểm phân biệt.

c) Từ các thông số trên hình, ta có thể giải ra chính xác giá trị a, b, c, d bởi hệ

$$\begin{cases} f(-2) = 0 \\ f(0) = 4 \\ f'(-2) = 0 \\ f'(0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = -1,\ b = -3,\ c = 0,\ d = 4.$$

Vậy trong 4 hệ số, có đúng 2 số âm.

d) Từ các thông số trên hình, ta có thể giải ra chính xác giá trị a, b, c, d bởi hệ

$$\begin{cases} f(-2) = 0 \\ f(0) = 4 \\ f'(-2) = 0 \\ f'(0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = -1,\ b = -3,\ c = 0,\ d = 4.$$

Suy ra $y = -x^3 - 3x^2 + 4$. Thay tọa độ $(-4; 20)$ vào phương trình, thỏa mãn. Suy ra Đồ thị hàm số đi qua điểm $(-4; 20)$.

Chọn đáp án | a sai | b đúng | c đúng | d đúng | .... □

2 Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số phân thức hữu tỉ bậc I/I

Ta khảo sát theo sơ đồ

- **Bước 1.** Tìm tập xác định $D = \mathbb{R} \backslash \left\{-\dfrac{d}{c}\right\}$.
- **Bước 2.** Khảo sát sự biến thiên của hàm số
  - Tính đạo hàm $y' = \dfrac{ad - cb}{(cx + d)^2}$.
  - Tìm các giới hạn tại vô cực, giới hạn vô cực và tìm tiệm cận của đồ thị hàm số.
  - Lập bảng biến thiên; xác định chiều biến thiên và cực trị của hàm số.
- **Bước 3.** Cho thêm điểm và vẽ đồ thị của hàm số dựa vào bảng biến thiên.

BÀI TẬP TỰ LUẬN

VÍ DỤ 1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị các hàm số sau:

a) $y = \dfrac{x - 1}{x + 1}$; b) $y = \dfrac{2x + 1}{x - 1}$; c) $y = \dfrac{5 + x}{2 - x}$.

Lời giải.

a) Tập xác định: $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$.
Sự biến thiên:

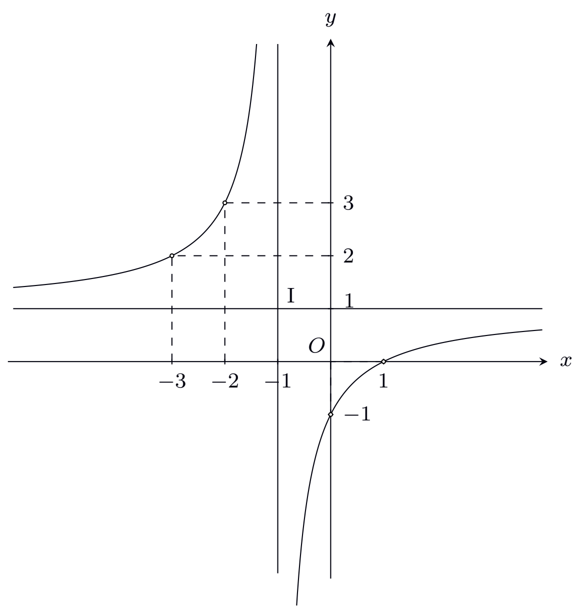
- Đạo hàm $y' = \dfrac{2}{(x+1)^2} > 0$ với mọi $x \neq -1$.
- Giới hạn và tiệm cận:
$\lim\limits_{x\to -1^-} y = +\infty$, $\lim\limits_{x\to -1^+} y = -\infty$. Do đó, đường thẳng $x = -1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.
$\lim\limits_{x\to -\infty} y = 1$, $\lim\limits_{x\to +\infty} y = 1$. Do đó, đường thẳng $y = 1$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.
- Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y'		$+$	‖	$-$	
y	1	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	1

Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty; -1)$ và $(-1; +\infty)$.
Hàm số không có cực trị.

Đồ thị:

- Giao điểm của đồ thị với trục tung: $(0; -1)$.
- Giao điểm của đồ thị với trục hoành: $(1; 0)$.
- Đồ thị hàm số đi qua các điểm $(0; -1)$, $(1; 0)$, $(-3; 2)$, $(-2; 3)$.



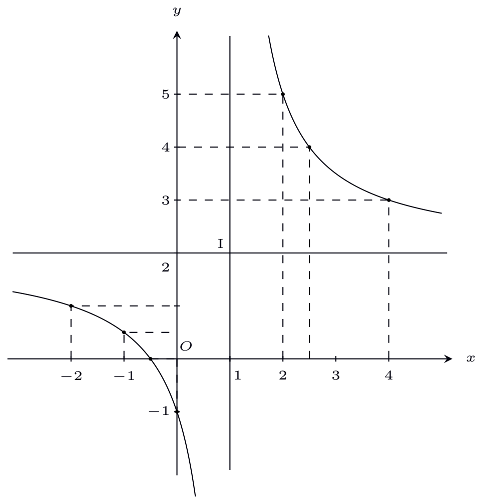
b) Tập xác định $\mathbb{R}\backslash\{1\}$.
Sự biến thiên:

- Đạo hàm: $y' = \dfrac{-3}{(x-1)^2} < 0$ với mọi $x \neq 1$.
- Giới hạn và các đường tiệm cận:
$\lim\limits_{x\to 1^-} y = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 1^+} y = +\infty$. Do đó, đường thẳng $x = 1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.
$\lim\limits_{x\to +\infty} y = 2$, $\lim\limits_{x\to -\infty} y = 2$. Do đó, đường thẳng $y = 2$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.
- Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		$-$	‖	$-$	
y	2	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	2

Hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$.
Hàm số không có cực trị.

Đồ thị:



- Giao điểm của đồ thị với trục tung: $(0;-1)$.
- Giao điểm của đồ thị với trục hoành: $\left(-\frac{1}{2};0\right)$.
- Đồ thị hàm số đi qua các điểm $(0;-1)$, $\left(-\frac{1}{2};0\right)$, $(-2;1)$, $(2;5)$, $\left(\frac{5}{2};4\right)$ và $(4;3)$.

c) Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{2\}$.
Sự biến thiên:

- Đạo hàm $y'=\dfrac{7}{(-x+2)^2}>0$, với mọi $x\neq 2$

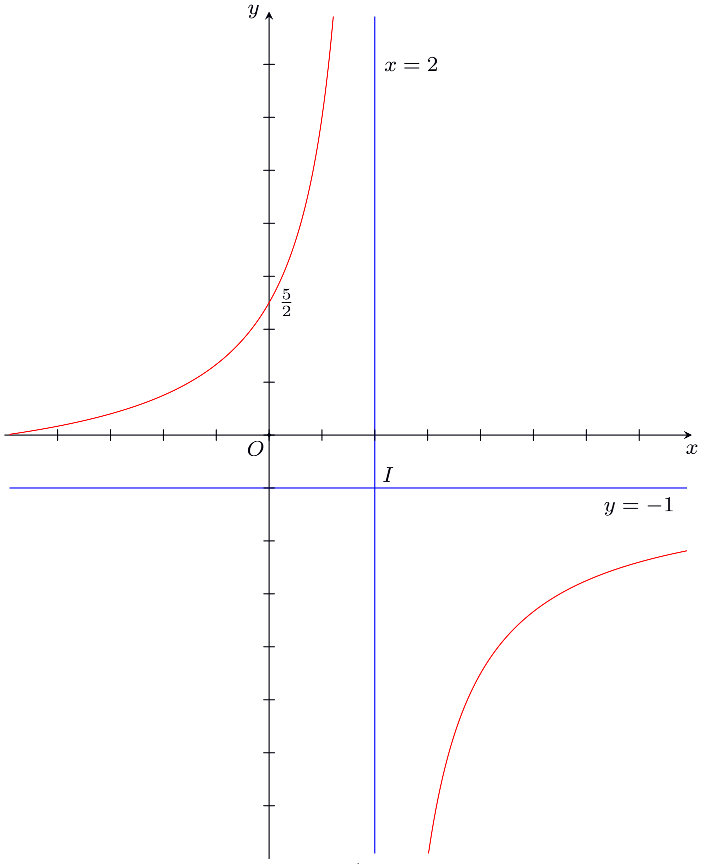
- Giới hạn và tiệm cận:
$\lim\limits_{x\to 2^-} y=+\infty$, $\lim\limits_{x\to 2^+} y=-\infty$. Do đó, đường thẳng $x=2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.
$\lim\limits_{x\to +\infty} y=-1$, $\lim\limits_{x\to -\infty} y=-1$. Do đó, đường thẳng $y=-1$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

- Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	2	$+\infty$
y'	$+$	||	$+$
y	-1 ↗ $+\infty$	||	$-\infty$ ↗ -1

Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;2)$ và $(2;+\infty)$.
Hàm số không có cực trị.

Đồ thị:



c)

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.

CÂU 1.
Hàm số nào trong bốn hàm số dưới đây có bảng biến thiên như hình bên?

x	$-\infty$		2		$+\infty$
y'		$-$	‖	$-$	
y	1	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	1

Ⓐ $y = \dfrac{2x-1}{x+3}$. Ⓑ $y = \dfrac{4x-6}{x-2}$. Ⓒ $y = \dfrac{3-x}{2-x}$. Ⓓ $y = \dfrac{x+5}{x-2}$.

Lời giải.
Xét hàm số $y = \dfrac{x+5}{x-2}$ có

$$\begin{cases} y' = \dfrac{-7}{(x-2)^2} < 0, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{2\} \\ \lim\limits_{x \to \pm\infty} y = 1. \end{cases}$$

Chọn đáp án D .... □

CÂU 2.
Hàm số nào trong bốn hàm số dưới đây có bảng biến thiên như hình bên?

x	$-\infty$		3		$+\infty$
y'		$+$	‖	$+$	
y	-1	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	-1

Ⓐ $y = \dfrac{x-1}{x-3}$. Ⓑ $y = \dfrac{x-1}{-x-3}$. Ⓒ $y = \dfrac{x+5}{-x+3}$. Ⓓ $y = \dfrac{1}{x-3}$.

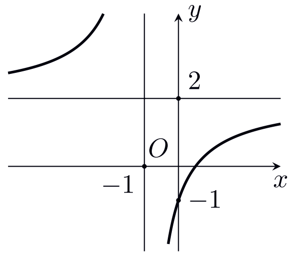
Lời giải.
Dựa vào bảng biến thiên, ta suy ra

- Hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định.
- Đồ thị hàm số nhận đường thẳng $x = 2$ và đường thẳng $y = 1$ làm tiệm cận đứng và tiệm cận ngang.

Vậy ta nhận hàm số $y = \dfrac{x+5}{x-2}$.

Chọn đáp án (C) ☐

CÂU 3.
Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của một trong bốn hàm số sau. Hỏi đó là hàm số nào?



Ⓐ $y = \dfrac{2x-1}{x+1}$.
Ⓑ $y = \dfrac{1-2x}{x+1}$.
Ⓒ $y = \dfrac{2x+1}{x-1}$.
Ⓓ $y = \dfrac{2x+1}{x+1}$.

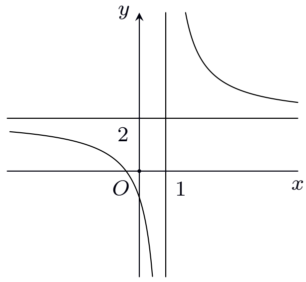
Lời giải.

Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x = -1$ nên loại đáp án $y = \dfrac{2x+1}{x-1}$.

Đồ thị hàm số đi qua điểm $A(0;-1)$ nên loại đáp án $y = \dfrac{1-2x}{x+1}$ và $y = \dfrac{2x+1}{x+1}$.

Chọn đáp án (A) ☐

CÂU 4.
Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của một trong bốn hàm số sau. Hỏi đó là hàm số nào?



Ⓐ $y = \dfrac{x-1}{x-2}$.
Ⓑ $y = x + 2$.
Ⓒ $y = x^4 - 3x^2 + 1$.
Ⓓ $y = \dfrac{2x+1}{x-1}$.

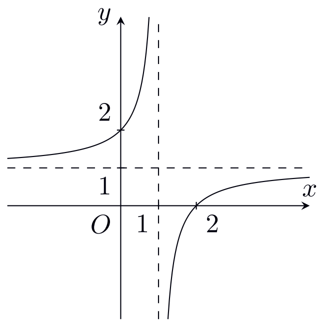
Lời giải.

Đồ thị hàm số như hình vẽ nhận đường thẳng $x = 1$ là tiệm cận đứng.

Do đó, hàm số cần tìm là $y = \dfrac{2x+1}{x-1}$.

Chọn đáp án (D) ☐

CÂU 5.
Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của một trong bốn hàm số sau. Hỏi đó là đồ thị của hàm số nào?



Ⓐ $y = \dfrac{x-2}{x+1}$.
Ⓑ $y = \dfrac{x+2}{x-2}$.
Ⓒ $y = \dfrac{x-2}{x-1}$.
Ⓓ $y = \dfrac{x+2}{x-1}$.

Lời giải.

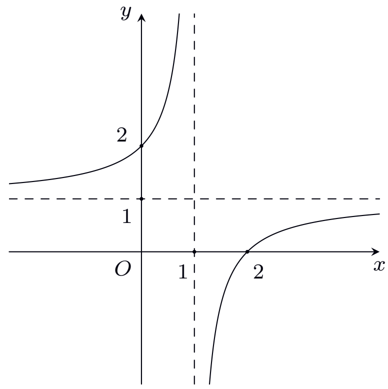
Từ đồ thị ta thấy

- Tiệm cận ngang là $y = 1$, tiệm cận đứng là $x = 1$ nên các hàm số $y = \dfrac{x+2}{x-2}$, $y = \dfrac{x-2}{x+1}$ không thỏa mãn.
- Giao điểm của đồ thị với trục tung là $(0;2)$ nên hàm số $y = \dfrac{x+2}{x-1}$ không thỏa mãn, hàm số $y = \dfrac{x-2}{x-1}$ thỏa mãn.

Chọn đáp án (C) ☐

CÂU 6.

Cho hàm số $y = \dfrac{ax - b}{x + c}$ $(a, b, c \in \mathbb{R})$ có đồ thị như hình vẽ bên. Giá trị của biểu thức $2a + b - 3c$ bằng



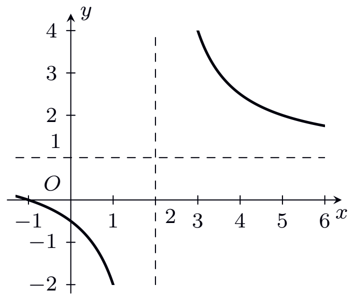
Ⓐ -3.
Ⓑ 4.
Ⓒ 7.
Ⓓ -5.

Lời giải.

Từ đồ thị hàm số ta có:
Đường tiệm cận đứng là $x = 1$ nên $-c = 1 \Leftrightarrow c = -1$.
Đường tiệm cận ngang là $y = 1$ nên $a = 1$.
Đồ thị hàm số đi qua điểm $(0; 2)$ nên $\dfrac{-b}{c} = 2 \Leftrightarrow b = 2$.
Vậy $2a + b - 3c = 2 + 2 + 3 = 7$.
Chọn đáp án C ....

CÂU 7.

Cho hàm số $y = \dfrac{ax + 1}{bx - 2}$ có đồ thị như hình vẽ. Tính $T = a + b$



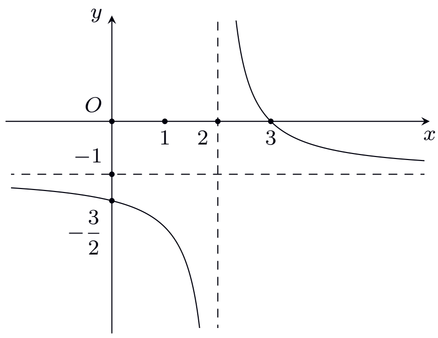
Ⓐ $T = 2$.
Ⓑ $T = 0$.
Ⓒ $T = -1$.
Ⓓ $T = 3$.

Lời giải.

Từ biểu thức của hàm số, suy ra tiệm cận đứng là $x = \dfrac{2}{b}$, tiệm cận ngang là $y = \dfrac{a}{b}$.
Dựa vào hình vẽ, suy ra tiệm cận đứng $x = 2$, tiệm cận ngang $y = 1$.
Từ hai điều trên suy ra $a = 1$, $b = 1$. Vậy $T = 1 + 1 = 2$.
Chọn đáp án A ....

CÂU 8.

Cho hàm số $y = \dfrac{ax - b}{cx + 2}$ $(a,\ b,\ c \in \mathbb{R};\ c \neq 0)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Giá trị của biểu thức $a + b + c$ bằng



Ⓐ -3.
Ⓑ 5.
Ⓒ -4.
Ⓓ 3.

Lời giải.

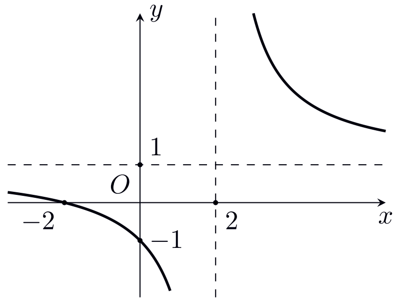
Từ hình vẽ, ta thấy đồ thị hàm số có

- Đường tiệm cận đứng $x = 2$, suy ra $-\dfrac{2}{c} = 2 \Leftrightarrow c = -1$.
- Đường tiệm cận ngang $y = -1$, suy ra $\dfrac{a}{c} = -1 \Leftrightarrow a = -c = 1$.
- Giao điểm với trục Oy tại điểm $\left(0; -\dfrac{3}{2}\right)$, suy ra $-\dfrac{b}{2} = -\dfrac{3}{2} \Leftrightarrow b = 3$.

Vậy $a + b + c = 1 + 3 - 1 = 3$.
Chọn đáp án D ....

CÂU 9.

Hãy xác định a, b để hàm số $y = \dfrac{2-ax}{x+b}$ có đồ thị như hình vẽ?



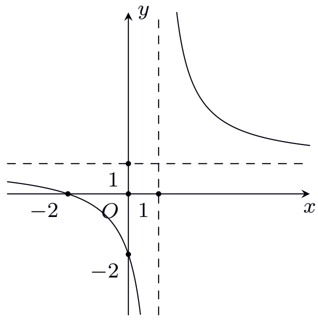
Ⓐ $a = 1$; $b = -2$. Ⓑ $a = b = 2$. Ⓒ $a = -1$; $b = -2$. Ⓓ $a = b = -2$.

Lời giải.

Đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng là $x = 2$ nên $b + 2 = 0 \Leftrightarrow b = -2$.
Đồ thị hàm số cắt trục hoành tại điểm $(-2; 0)$ nên $2 + 2a = 0 \Rightarrow a = -1$.
Chọn đáp án C .... □

CÂU 10.

Cho đồ thị hàm số $y = \dfrac{ax-b}{x-1}$ như hình vẽ. Tìm khẳng định đúng?



Ⓐ $a < 0$, $b < 0$. Ⓑ $0 < b < a$.
Ⓒ $b < 0 < a$. Ⓓ $a < b < 0$.

Lời giải.

Hàm số có dạng $y = \dfrac{ax-b}{x-1}$.

- Tiệm cận ngang $y = 1 \Rightarrow a = 1$.
- Đồ thị đi qua $(-2; 0) \Rightarrow -2a - b = 0$

Suy ra $b < 0 < a$.
Chọn đáp án C .... □

CÂU 11.

Cho hàm số $y = \dfrac{ax+4}{bx+c}$ $(a,\ b,\ c \in \mathbb{R})$ có bảng biến thiên như sau. Trong các số $a,\ b,\ c$ có bao nhiêu số dương?

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	‖	$+$
$f(x)$	$3 \nearrow +\infty$	‖	$-\infty \nearrow 3$

Ⓐ 0. Ⓑ 1. Ⓒ 2. Ⓓ 3.

Lời giải.

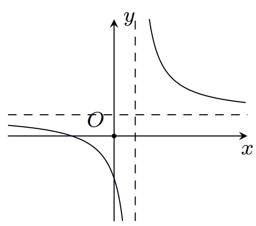
Dựa vào bảng biến thiên, ta có $y(0) > 3 \Rightarrow \dfrac{4}{c} > 0 \Rightarrow c > 0$.

Đồ thị có tiệm cận đứng $x = 1$ và tiệm cận ngang $y = 3$ nên $\begin{cases} -\dfrac{c}{b} > 0 \\ \dfrac{a}{b} > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b < 0 \\ a < 0. \end{cases}$

Vậy $c > 0$, $a < 0$, $b < 0$.
Chọn đáp án B .... □

CÂU 12.

Cho hàm số $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ với $a > 0$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây đúng?



Ⓐ $b < 0, c < 0, d < 0$. Ⓑ $b > 0, c < 0, d < 0$. Ⓒ $b < 0, c > 0, d < 0$. Ⓓ $b > 0, c > 0, d < 0$.

Lời giải.

Đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang $y = \dfrac{a}{c}$ nằm trên trục Ox nên $\dfrac{a}{c} > 0 \overset{a>0}{\Rightarrow} c > 0$.

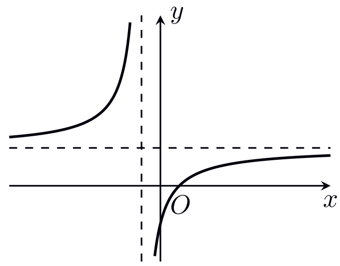
Đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng $x = -\dfrac{d}{c}$ nằm bên phải trục Oy nên $-\dfrac{d}{c} > 0 \overset{c>0}{\Rightarrow} d < 0$.

Vậy mệnh đề đúng là "$b > 0$, $c > 0$, $d < 0$".

Chọn đáp án (D) .... □

CÂU 13.
Hình vẽ bên là đồ thị của hàm số $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

(A) $ab > 0, bd < 0$. (B) $ab < 0, ad > 0$. (C) $ab < 0, ad < 0$. (D) $bd > 0, ad > 0$.



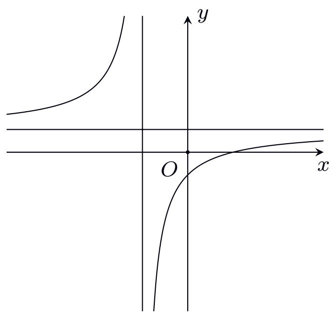
Lời giải.
Ta có

- Đường tiệm cận đứng $x = -\dfrac{d}{c}$. Theo hình vẽ thì $-\dfrac{d}{c} < 0 \Rightarrow cd > 0 \quad (1)$.
- Đường tiệm cận ngang $y = \dfrac{a}{c}$. Theo hình vẽ thì $\dfrac{a}{c} < 0 \Rightarrow ac < 0 \quad (2)$.
- Giao điểm với trục tung tại điểm có tung độ $y = \dfrac{b}{d}$. Theo hình vẽ thì $\dfrac{b}{d} > 0 \Rightarrow bd > 0 \quad (3)$.
- Giao điểm với trục hoành tại điểm có hoành độ $x = -\dfrac{b}{a}$. Theo hình vẽ thì $-\dfrac{b}{a} > 0 \Rightarrow ab < 0 \quad (4)$.

Lấy (3) nhân với (4), ta được $ad \cdot b^2 < 0$. Suy ra $ad < 0$.
Mặt khác theo (4) thì $ab < 0$.
Chọn đáp án (C) .... □

CÂU 14.
Hình vẽ dưới đây là đồ thị hàm số $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ $ac \neq 0$, $ad - cb \neq 0$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

(A) $ad > 0$ và $ab < 0$. (B) $bd < 0$ và $ab > 0$. (C) $ad < 0$ và $ab < 0$. (D) $ad > 0$ và $bd > 0$.



Lời giải.

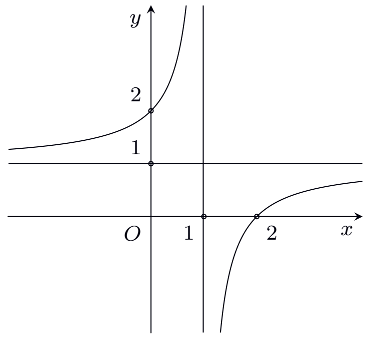
- Đồ thị hàm số cắt trục Oy tại điểm có tung độ âm $\Rightarrow \dfrac{b}{d} < 0 \Rightarrow bd < 0$.
- Đồ thị hàm số cắt trục Ox tại điểm có hoành độ dương $\Rightarrow -\dfrac{b}{a} > 0 \Rightarrow ab < 0$.
- Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y = \dfrac{a}{c} > 0 \Rightarrow ac > 0. \quad (1)$
- Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = -\dfrac{d}{c} < 0 \Rightarrow cd > 0. \quad (2)$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow ad > 0$.
Chọn đáp án (A) .... □

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.

CÂU 15.

Cho hàm số $y = \dfrac{x+a}{bx+c}$, $(a, b, c \in \mathbb{Z})$.



Mệnh đề	Đ	S
a) Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = 1$.	X	
b) Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y = 0$.		X
c) Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.		X
d) $a - 3b - 2c = -3$.	X	

Lời giải.

Căn cứ vào đồ thị, ta có

a) Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = 1$.

b) Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y = 1$

c) Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty, 1)$ và $(1; +\infty)$

d) Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y = 1$ nên $\dfrac{1}{b} = 1 \Rightarrow b = 1$.
Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = 1$ nên $-\dfrac{c}{b} = 1$ mà $b = 1 \Rightarrow c = -1$.
Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm $(0; 2)$ nên $\dfrac{a}{c} = 2$ mà $c = -1$ nên $a = -2$.
Vậy $T = a - 3b - 2c = -2 - 3 \cdot 1 - 2 \cdot (-1) = -3$.

Chọn đáp án | a đúng | b sai | c sai | d đúng | □

CÂU 16. Cho hàm số $f(x) = \dfrac{ax-1}{bx+c}$ $(a, b, c \in \mathbb{R})$ có bảng biến thiên như sau.

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	$\frac{1}{2}$

Mệnh đề	Đ	S
a) Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty, \dfrac{1}{2}\right)$.	X	
b) Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = \dfrac{1}{2}$.		X
c) Đồ thị giao với trục hoành tại điểm có hoành độ nhỏ hơn 3.	X	
d) $\left[\begin{array}{l} b > \dfrac{2}{3} \\ b < 0 \end{array}\right.$.	X	

Lời giải.

a) Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty, 3)$ nên nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty, \dfrac{1}{2}\right)$.

b) Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = 3$.

c) Đồ thị giao với trục hoành tại điểm thuộc nhánh trái của đồ thị, suy ra hoành độ giao điểm này nhỏ hơn 3.

d) Từ bảng biến thiên suy ra

$$\begin{cases} \dfrac{a}{b} = \dfrac{1}{2} \\ -\dfrac{c}{b} = 3. \end{cases} \qquad (1)$$

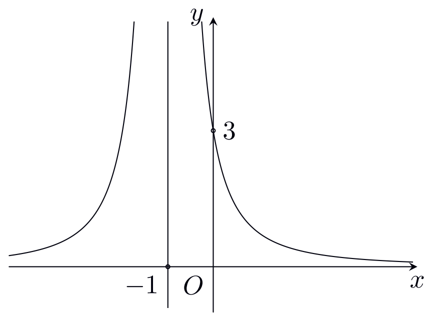
Ta có $y' = \dfrac{ac+b}{(bx+c)^2} < 0,\ \forall x \neq -\dfrac{c}{b} \Leftrightarrow ac+b<0.$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\dfrac{b}{2}\cdot(-3b)+b<0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b>\dfrac{2}{3} \\ b<0. \end{array}\right.$

Chọn đáp án | a đúng | b sai | c đúng | d đúng | .... □

CÂU 17.

Cho hàm số $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ với $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ nhận $x=-1$ làm tiệm cận đứng như hình vẽ bên. Biết rằng giá trị lớn nhất của hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $[-3;-2]$ bằng 8.



Mệnh đề	Đ	S
a) $f'(0)=3$.	X	
b) Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-1;+\infty)$.		X
c) Giá trị của $f(-3)$ bằng 8.		X
d) Giá trị của $f(2)$ bằng 4.	X	

Lời giải.

a) Theo hình vẽ, đồ thị $f'(x)$ qua điểm $(0;3)$ nên $f'(0)=3$.

b) Do $f'(x)>0,\ \forall x\neq -1$ nên hàm số $f(x)$ đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(-1;+\infty)$.

c) Vì $f'(x)>0,\ \forall x \neq -1 \Rightarrow \max\limits_{[-3;-2]} f(x) = f(-2) = 8$. Suy ra $f(-3)\neq 8$.

d) Ta có $f'(x) = \dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}$.

Đồ thị hàm số đi qua điểm $(0;3)$ nên $f'(0)=3 \Leftrightarrow \dfrac{ad-bc}{d^2}=3$.

Mặt khác, đồ thị hàm số $y=f'(x)$ có tiệm cận đứng $x=-1$ nên $-c+d=0$.

Vì $f'(x)>0,\ \forall x\neq -1 \Rightarrow \max\limits_{[-3;-2]} f(x) = f(-2) = 8 \Leftrightarrow \dfrac{-2a+b}{-2c+d}=8$.

Vậy ta có hệ phương trình $\begin{cases} ad-bc=3d^2 \\ -c+d=0 \\ b-2a=8(d-2c) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=d \\ a-b=3d \\ b-2a=-8d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=5d \\ b=2d \\ c=d. \end{cases}$

Từ đó suy ra $f(x) = \dfrac{5\,dx+2d}{dx+d} = \dfrac{5x+2}{x+1} \Rightarrow f(2)=4$.

Chọn đáp án | a đúng | b sai | c sai | d đúng | .... □

3 Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số phân thức hữu tỉ bậc II/I

- **Bước 1.** Tập xác định $D=\mathbb{R}\backslash\left\{-\dfrac{n}{m}\right\}$.
- **Bước 2.** Khảo sát sự biến thiên của hàm số
  - Tính đạo hàm $y' = \dfrac{am\cdot x^2+2an\cdot x+b.n-m.c}{(mx+n)^2}$. Giải $y'=0 \Leftrightarrow am\cdot x^2+2an\cdot x+b.n-m.c=0$, tìm nghiệm.
  - Tìm các giới hạn tại vô cực, giới hạn vô cực và tìm tiệm cận của đồ thị hàm số.
  - Lập bảng biến thiên; xác định chiều biến thiên và cực trị của hàm số.
- **Bước 3.** Cho thêm điểm và vẽ đồ thị của hàm số dựa vào bảng biến thiên.

BÀI TẬP TỰ LUẬN

VÍ DỤ 1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị các hàm số sau:

a) $y=\dfrac{x^2+2x-2}{x-1}$; b) $y=-x+2-\dfrac{1}{x+1}$; c) $y=\dfrac{-x^2-3x+4}{x+2}$.

Lời giải.

a) Ta viết lại hàm số $y = \dfrac{x^2+2x-2}{x-1} = x+3+\dfrac{1}{x-1}$.
Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.
Sự biến thiên:

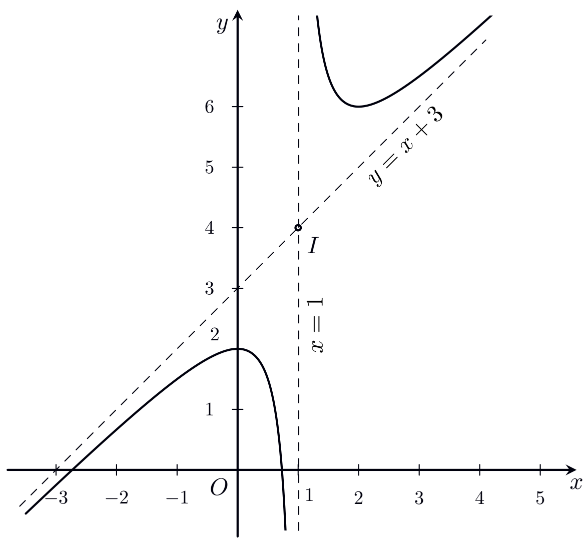
- Đạo hàm $y' = \dfrac{x^2-2x}{(x-1)^2}$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = 2$.
- Giới hạn và tiệm cận:
  $\lim\limits_{x\to-\infty} y = -\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} y = +\infty$.
  $\lim\limits_{x\to1^-} y = -\infty$, $\lim\limits_{x\to1^+} y = +\infty$. Suy ra $x = 1$ là tiệm cận đứng.
  $\lim\limits_{x\to-\infty} (y-(x+3)) = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} (y-(x+3)) = 0$. Suy ra $y = x+3$ là tiệm cận xiên.
- Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$ ↗		2	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	6	↗	$+\infty$

Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;0)$ và $(2;+\infty)$; nghịch biến trên khoảng $(0;1)$ và $(1;2)$.
Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 2$ và $y_{CT} = 6$.
Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$ và $y_{CŒ} = 2$.

Đồ thị:

- Đồ thị hàm số giao với trục Ox tại điểm $(-1+\sqrt{3};0)$ và điểm $(-1-\sqrt{3};0)$.
- Đồ thị nhận $I(1;4)$ làm tâm đối xứng.



Hình 5

b) Tập xác định: $\mathscr{D} = \mathbb{R}\setminus\{-1\}$.
Sự biến thiên:

- Đạo hàm $y' = -1 + \dfrac{1}{(x+1)^2}$, $y' = 0 \Leftrightarrow x = -2$ hoặc $x = 0$.
- Giới hạn và tiệm cận:

  — $\lim\limits_{x\to+\infty} y = -\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} y = +\infty$.
  — $\lim\limits_{x\to(-1)^-} y = +\infty$, $\lim\limits_{x\to(-1)^+} y = -\infty$.

  Do đó, đường thẳng $x = -1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

  — $\lim\limits_{x\to+\infty} [y-(-x+2)] = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-1}{x+1} = 0$,
  — $\lim\limits_{x\to-\infty} [y-(-x+2)] = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-1}{x+1} = 0$.

Do đó, đường thẳng $y = -x + 2$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số.

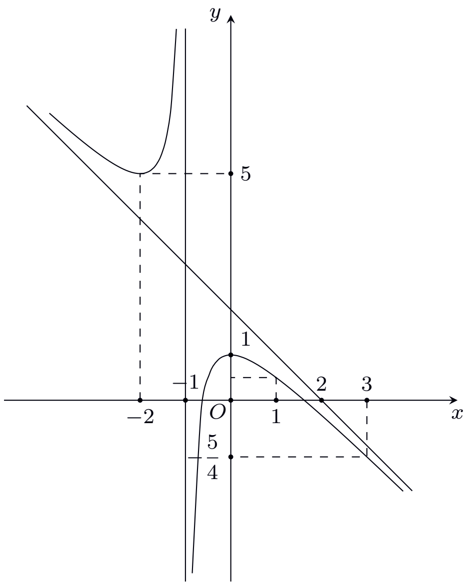
- Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$ ↘		5	↗ $+\infty$	‖	$-\infty$ ↗	1	↘	$-\infty$

Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-2;-1)$, $(-1;0)$ và nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-2)$, $(0;+\infty)$.
Hàm số đạt cực tiểu tại $x = -2$, $y_{\text{CT}} = 5$; đạt cực đại tại $x = 0$, $y_{\text{CĐ}} = 1$.

Đồ thị:

- Đồ thị hàm số qua các điểm $\left(-3;-\dfrac{11}{2}\right)$, $\left(3;-\dfrac{5}{4}\right)$.
- Đồ thị nhận $I(-1;3)$ làm tâm đối xứng.



c) Ta viết lại hàm số $y = \dfrac{x^2+2x-2}{x-1} = x + 3 + \dfrac{1}{x-1}$.
Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.
Sự biến thiên:

- Đạo hàm Đạo hàm $y' = \dfrac{-x^2-4x-10}{(x+2)^2} < 0$, với mọi $x \neq -2$.
- Giới hạn và tiệm cận:

$$\lim_{x\to-\infty} y = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x^2-3x+4}{x+2} = +\infty; \lim_{x\to+\infty} y = \lim_{x\to+\infty} \frac{-x^2-3x+4}{x+2} = -\infty.$$

Ta có

— $a = \displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{-x^2-3x+4}{x^2+2x} = -1.$

— $b = \displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left[\frac{-x^2-3x+4}{x+2} - (-1)x\right] = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{-x+4}{x+2}\right) = -1.$

Suy ra đường thẳng $y = -x - 1$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số.
Ta có $\displaystyle\lim_{x\to-2^-} y = \lim_{x\to-2^-} \frac{-x^2-3x+4}{x+2} = -\infty$; $\displaystyle\lim_{x\to-2^+} y = \lim_{x\to-2^+} \frac{-x^2-3x+4}{x+2} = +\infty$. Suy ra đường thẳng $x = -2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

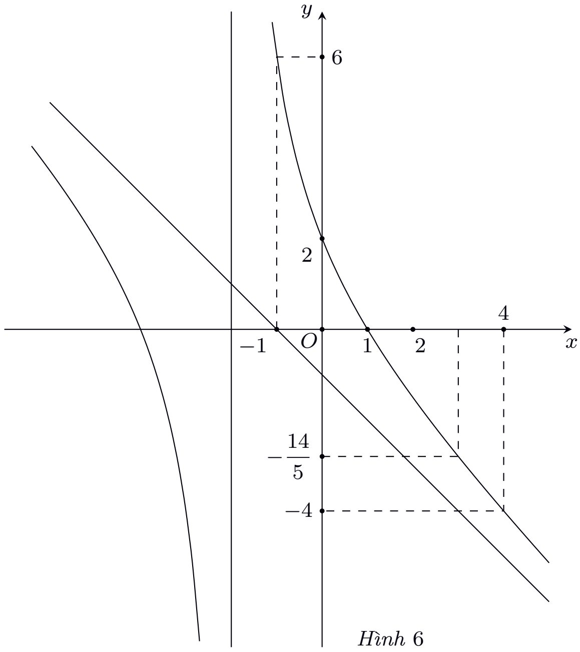
- Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
y'		$-$	||	$-$	
y	$+\infty$ ↘		$-\infty$ || $+\infty$	↘	$-\infty$

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-2)$ và $(-2;+\infty)$.
Hàm số không có cực trị.

Đồ thị:

- Đồ thị hàm số giao với trục Ox tại điểm $(-4;0)$ và điểm $(1;0)$.
- Đồ thị nhận $I(-2;1)$ làm tâm đối xứng.



Hình 6

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.

CÂU 1.
Bảng biến thiên sau là của một trong bốn hàm số sau. Hỏi đó là hàm số nào?

x	$-\infty$		-10		-4		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	||	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	↘	24	↗	$+\infty$ || $-\infty$	↗	0	↘	$-\infty$

Ⓐ $y=\dfrac{x^2-3x+4}{-x-4}$.
Ⓑ $y=\dfrac{x^2-4x+4}{-x-4}$.
Ⓒ $y=\dfrac{x^2-5x+4}{x+4}$.
Ⓓ $y=\dfrac{x^2-4x+4}{x+4}$.

Lời giải.

Chọn đáp án B .... □

CÂU 2.
Bảng biến thiên sau là của một trong bốn hàm số sau. Hỏi đó là hàm số nào?

x	$-\infty$		1		3		5		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	||	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	↘	-1	↗	$+\infty$ || $-\infty$	↗	-9	↘	$-\infty$

Ⓐ $y=\dfrac{x^2-4x+3}{x-3}$.
Ⓑ $y=\dfrac{-x^2-x+2}{x-3}$.
Ⓒ $y=\dfrac{-x^2+x+2}{x-3}$.
Ⓓ $y=\dfrac{x^2-4x+4}{-x+3}$.

Lời giải.

Chọn đáp án C .... □

CÂU 3.

Bảng biến thiên sau là của một trong bốn hàm số sau. Hỏi đó là hàm số nào?

x	$-\infty$		-9		-4		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	-20	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

A $y=\dfrac{x^2-2x+1}{x+4}$. **B** $y=\dfrac{x^2-4x+2}{x+4}$.

C $y=\dfrac{x^2-x+2}{-x-4}$. **D** $y=\dfrac{x^2-3x+4}{-x-4}$.

Lời giải.

Chọn đáp án A .... □

CÂU 4.
Bảng biến thiên sau là của một trong bốn hàm số sau. Hỏi đó là hàm số nào?

x	$-\infty$		2		$+\infty$
y'		$+$	‖	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

A $y=\dfrac{x^2-3}{x-2}$. **B** $y=\dfrac{x^2-4x+2}{x-2}$.

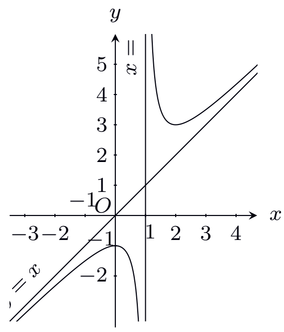
C $y=\dfrac{x^2-x}{x-2}$. **D** $y=\dfrac{x^2-4x+5}{x-2}$.

Lời giải.

Chọn đáp án B .... □

CÂU 5.
Đồ thị hình bên là của một trong bốn hàm số sau. Hỏi đó là hàm số nào?

A $y=\dfrac{x^2+x-1}{x-1}$. **B** $y=\dfrac{x^2-x+1}{x-1}$. **C** $y=\dfrac{x^2-4x-1}{-x+1}$. **D** $y=\dfrac{x^2-3x-1}{-x+1}$.

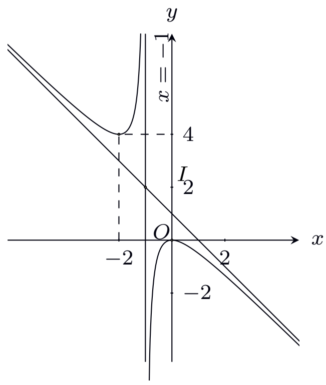


Lời giải.

Chọn đáp án B .... □

CÂU 6.
Đồ thị hình bên là của một trong bốn hàm số sau. Hỏi đó là hàm số nào?

A $y=\dfrac{x^2-x}{x+1}$. **B** $y=\dfrac{x^2-3x}{x+1}$. **C** $y=\dfrac{x^2+1x+2}{x+1}$. **D** $y=\dfrac{-x^2}{x+1}$.

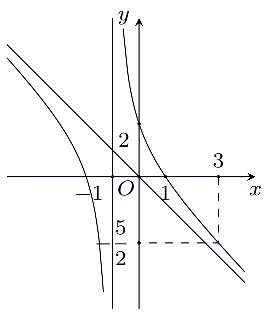


Lời giải.

Chọn đáp án D .... □

CÂU 7.
Đồ thị hình bên là của một trong bốn hàm số sau. Hỏi đó là hàm số nào?

A $y=\dfrac{x^2-x+4}{x+1}$. **B** $y=\dfrac{x^2-2x+3}{x+1}$. **C** $y=\dfrac{-x^2-x+2}{x+1}$. **D** $y=\dfrac{x^2+x-1}{x+1}$.

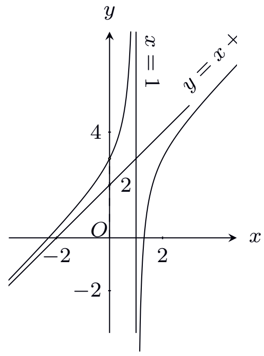


Lời giải.

Chọn đáp án (C) .... □

CÂU 8.
Đồ thị hình bên là của một trong bốn hàm số sau. Hỏi đó là hàm số nào?

(A) $y = \dfrac{x^2+3}{x-1}$. (B) $y = \dfrac{x^2+x-3}{x-1}$. (C) $y = \dfrac{x^2-2x+3}{-x+1}$. (D) $y = \dfrac{x^2+3}{-x+1}$.



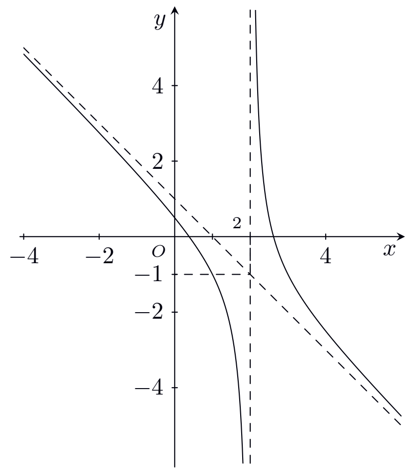
Lời giải.

Chọn đáp án (B) .... □

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.

CÂU 9.
Cho hàm số $y = \dfrac{ax^2+bx+c}{mx+n}$ có đồ thị như hình bên.

Mệnh đề	Đ	S
a) Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}\backslash\{1\}$.		X
b) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;2)$ và $(2;+\infty)$.	X	
c) Điểm $I(2;1)$ là tâm đối xứng của đồ thị.	X	
d) Hệ số a và m trái dấu.	X	



Lời giải.

a)

b)

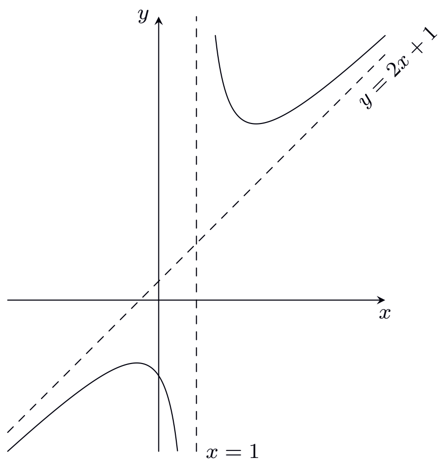
c)

d)

Chọn đáp án | a sai | b đúng | c đúng | d đúng | .... □

CÂU 10.
Cho hàm số $y = \dfrac{ax^2+bx+c}{x+n}$ có đồ thị như hình bên.

Mệnh đề	Đ	S
a) Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}\backslash\{1\}$.	X	
b) Điểm $I(1;2)$ là tâm đối xứng của đồ thị.		X
c) $a+2b=4$.		X
d) Đồ thị qua điểm $(2;10)$ khi $c=4$.	X	



Lời giải.

a)

b)

c)

d)

Chọn đáp án | a đúng | b sai | c sai | d đúng | ....□

4 Sự tương giao của hai đồ thị

Xác định tọa độ giao điểm của hai đồ thị $y = f(x)$ và $y = g(x)$:

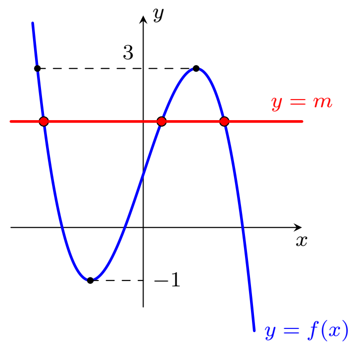
① Giải phương trình hoành độ giao điểm $f(x) = g(x)$, tìm các nghiệm $x_0 \in \mathscr{D}_f \cap \mathscr{D}_g$.
② Với x_0 vừa tìm, thay vào một trong hai hàm số ban đầu để tìm y_0.
③ Kết luận giao điểm $(x_0; y_0)$.

Ứng dụng đồ thị để biện luận nghiệm phương trình:

Xét phương trình $f(x) = m$, với m là tham số. Nghiệm của phương trình này có thể coi là hoành độ giao điểm của đồ thị $y = f(x)$ (cố định) với đường thẳng $y = m$ (nằm ngang).

Từ đó, để biện luận nghiệm phương trình $f(x) = m$, ta có thể thực hiện các bước như sau:

- Lập bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ trên miền xác định mà đề bài yêu cầu.
- Tịnh tiến đường thẳng $y = m$ theo hướng "*lên, xuống*". Quan sát số giao điểm để quy ra số nghiệm tương ứng.



BÀI TẬP TỰ LUẬN

VÍ DỤ 1. Xác định tọa độ giao điểm của hai đồ thị hàm số sau:

a) $y = x^3 - 2x^2 + x - 1$ và $y = 1 - 2x$;

b) $y = \dfrac{x+8}{x-2}$ và $y = x + 2$.

Lời giải.

a) Xét phương trình hoành độ giao điểm
$$x^3 - 2x^2 + x - 1 = 1 - 2x \Leftrightarrow x^3 - 2x^2 + 3x - 2 = 0 \Leftrightarrow (x-1)\left(x^2 - x + 2\right) = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$
Do đó 2 đồ thị hàm số có giao điểm là $(1; -1)$.

b) Với điều kiện $x \neq 2$ ta có

Phương trình hoành độ giao điểm $x + 2 = \dfrac{x+8}{x-2} \Leftrightarrow x^2 - 4 = x + 8 \Leftrightarrow x^2 - x - 12 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = -4. \end{array}\right.$

Từ đó được $A(3; 5)$ và $B(-4; -2)$.

VÍ DỤ 2. Tìm tập hợp các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = (x-2)(x^2 + mx + m^2 - 3)$ cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt.

Lời giải.

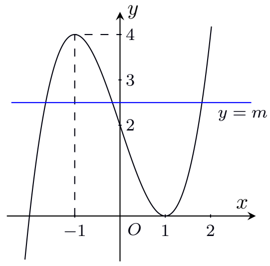
Đồ thị hàm số đã cho cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt khi phương trình
$$(x-2)(x^2 + mx + m^2 - 3) = 0$$
có 3 nghiệm phân biệt hay phương trình $x^2 + mx + m^2 - 3 = 0$ có 2 nghiệm phân biệt khác 2
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = -3m^2 + 12 > 0 \\ m^2 + 2m + 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < m < 2 \\ m \neq -1 \end{cases}.$$

VÍ DỤ 3. Tìm tham số m để phương trình $x^3 - 3x + 2 - m = 0$ có ba nghiệm phân biệt.

Lời giải.

Phương trình tương đương với $x^3 - 3x + 2 = m$.

- Số nghiệm của phương trình bằng số giao điểm của đồ thị $y = x^3 - 3x + 2$ với đường thẳng $y = m$ (nằm ngang).
- Đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x + 2$ như hình bên. Để đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị tại 3 điểm phân biệt khi và chỉ khi $0 < m < 4$.



Vậy $0 < m < 4$.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

CÂU 1. Đường thẳng $y = x - 1$ cắt đồ thị hàm số $y = x^3 - x^2 + x - 1$ tại hai điểm. Tìm tổng tung độ các giao điểm đó.

(A) -3. (B) 2. (C) 0. (D) -1.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm

$$x^3 - x^2 + x - 1 = x - 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \Rightarrow y = 0 \\ x = 0 \Rightarrow y = -1. \end{array}\right.$$

Tổng tung độ các giao điểm là $0 + (-1) = -1$.

Chọn đáp án (D) .... □

CÂU 2. Số giao điểm của đồ thị hàm số $y = (x - 1)(x^2 - 3x + 2)$ và trục hoành là

(A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

Lời giải.

Phương trình $y = 0$ có hai nghiệm là $x = 1$ và $x = 2$.

Chọn đáp án (C) .... □

CÂU 3. Đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2x - 1$ cắt đồ thị hàm số $y = x^2 - 3x + 1$ tại hai điểm phân biệt A, B. Tính độ dài AB.

(A) $AB = 3$. (B) $AB = 2\sqrt{2}$. (C) $AB = 2$. (D) $AB = 1$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm

$$x^3 - 3x^2 + 2x - 1 = x^2 - 3x + 1 \Leftrightarrow x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 2 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y = -1 \\ y = -1 \end{array}\right..$$

Không mất tính tổng quát, ta giả sử $A(1; -1), B(2; -1)$. Suy ra $\overrightarrow{AB} = (1; 0) \Rightarrow AB = 1$.

Chọn đáp án (D) .... □

CÂU 4. Đồ thị của hàm số $y = \dfrac{x-1}{x+1}$ cắt hai trục Ox và Oy tại A và B. Khi đó diện tích của tam giác OAB (với O là gốc tọa độ) bằng

(A) 1. (B) $\dfrac{1}{4}$. (C) 2. (D) $\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Ta có $A(1; 0), B(0; -1)$. Diện tích $S_{\triangle OAB} = \dfrac{OA \cdot OB}{2} = \dfrac{1}{2}$.

Chọn đáp án (D) .... □

CÂU 5. Biết đường thẳng $y = x - 2$ cắt đồ thị hàm số $y = \dfrac{x}{x-1}$ tại 2 điểm phân biệt A, B. Tìm hoành độ trọng tâm tam giác OAB với O là gốc tọa độ.

(A) $\dfrac{2}{3}$. (B) 2. (C) $\dfrac{4}{3}$. (D) 4.

Lời giải.

Xét phương trình hoành độ giao điểm $x - 2 = \dfrac{x}{x-1}$ (Điều kiện $x \neq 1$).

$\Rightarrow (x - 2)(x - 1) = x \Leftrightarrow x^2 - 4x + 2 = 0\,(1)$.

Khi đó $A(x_1; x_1 - 2)$, $B(x_2; x_2 - 2)$ với x_1, x_2 là 2 nghiệm của phương trình (1) thỏa mãn

$\begin{cases} x_1 + x_2 = 4 \\ x_1 . x_2 = 2 \end{cases}$. Gọi $G\left(x_G; y_G\right)$ là trọng tâm tam giác OAB.

$\Rightarrow x_G = \dfrac{0 + x_1 + x_2}{3} = \dfrac{4}{3}$.

Chọn đáp án C

CÂU 6. Gọi M, N là giao điểm của đường thẳng $y = x + 1$ và đường cong $y = \dfrac{2x+4}{x-1}$. Tìm hoành độ trung điểm của đoạn thẳng MN.

A $x = -1$. B $x = 1$. C $x = -2$. D $x = 2$.

Lời giải.

Xét phương trình hoành độ giao điểm $x + 1 = \dfrac{2x+4}{x-1} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x^2 - 2x - 5 = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow x_M + x_N = 2 \Rightarrow x_I = \dfrac{x_M + x_N}{2} = 1$.

Chọn đáp án B

CÂU 7. Cho hàm số $y = \dfrac{2x}{x+1}$ có đồ thị (C). Gọi A, B là giao điểm của đường thẳng $d : y = x$ với đồ thị (C). Tính độ dài đoạn AB.

A $AB = \sqrt{2}$. B $AB = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. C $AB = 1$. D $AB = 2$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm

$\dfrac{2x}{x+1} = x, (x \neq -1) \Rightarrow x^2 - x = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow A\,(0;0) \\ x = 1 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow B\,(1;1) \end{array}\right.$

Vậy $AB = \sqrt{2}$.

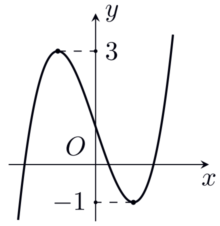
Chọn đáp án A

CÂU 8.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Số nghiệm của phương trình $2f(x) - 3 = 0$ là

A 2. B 1.

C 0. D 3.



Lời giải.

Ta có $2f(x) - 3 = 0 \Leftrightarrow f(x) = \dfrac{3}{2}$.

Từ đồ thị suy ra phương trình có 3 nghiệm phân biệt.

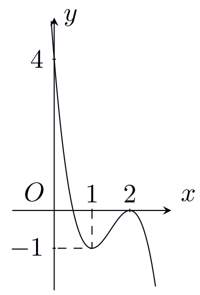
Chọn đáp án D

CÂU 9.

Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d\ (d \neq 0)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Số nghiệm của phương trình $3f(x) - 1 = 0$ bằng

A 0. B 1.

C 2. D 3.



Lời giải.

Ta có $3f(x) - 1 = 0 \Leftrightarrow f(x) = \dfrac{1}{3}$.

Khi đó số giao điểm của đồ thị $y = f(x)$ và đường thẳng $y = \dfrac{1}{3}$ chính là số nghiệm của phương trình $3f(x) - 1 = 0$. Dựa vào đồ thị ta có số nghiệm của phương trình là 1.

Chọn đáp án B

CÂU 10.

Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau. Số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ với trục hoành là

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

A 1. **B** 0.
C 2. **D** 3.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên thì đồ thị hàm số $y = f(x)$ và trục hoành có 3 điểm chung.

Chọn đáp án D .... □

CÂU 11.
Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $(-\infty; +\infty)$ và có bảng biến thiên như hình bên. Số nghiệm thực của phương trình $2\left|f(x)\right| = 7$ bằng

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	5	$\searrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$

A 3. **B** 2. **C** 4. **D** 2.

Lời giải.

Chọn đáp án B .... □

CÂU 12.
Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ và có bảng biến thiên như hình bên. Hỏi phương trình $3|f(x)| - 10 = 0$ có bao nhiêu nghiệm?

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	2	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$

A 2 nghiệm. **B** 4 nghiệm. **C** 3 nghiệm. **D** 1 nghiệm.

Lời giải.

Từ bảng biến thiên đề bài, ta có bảng biến thiên của hàm số $y = |f(x)|$ như sau

x	$-\infty$				0		1		$+\infty$
$f'(x)$			$-$		‖	$-$	0	$+$	
$\lvert f(x)\rvert$	2	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$

Ta có $3|f(x)| - 10 = 0 \Leftrightarrow |f(x)| = \dfrac{10}{3}$. (1)

Số nghiệm của phương trình (1) bằng số giao điểm của đồ thị $y = |f(x)|$ và đường thẳng $y = 3$.

Dựa vào bảng biến thiên trên, suy ra phương trình (1) có 3 nghiệm.

Chọn đáp án C .... □

CÂU 13.
Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$, có bảng biến thiên như sau. Số nghiệm của phương trình $2[f(x)]^2 - 3f(x) + 1 = 0$ là

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	1	$\nearrow$	3	$\searrow$	$\dfrac{1}{3}$	$\nearrow$	1

A 2. **B** 3.
C 6. **D** 0.

Lời giải.

Ta có $2[f(x)]^2 - 3f(x) + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = 1 \\ f(x) = \dfrac{1}{2}. \end{array}\right.$

Phương trình $f(x) = 1$ có duy nhất nghiệm x_0.

Phương trình $f(x) = \dfrac{1}{2}$ có 2 nghiệm phân biệt khác x_0. Vậy phương trình có ba nghiệm.

Chọn đáp án B .... □

CÂU 14.

Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như hình bên. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(x) = m + 1$ có ba nghiệm thực phân biệt.

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Ⓐ $-3 \le m \le 3$. Ⓑ $-2 \le m \le 4$.
Ⓒ $-2 < m < 4$. Ⓓ $-3 < m < 3$.

Lời giải.
Dựa vào bảng biến thiên phương trình $f(x) = m + 1$ có ba nghiệm thực phân biệt khi

$$-2 < m + 1 < 4 \Leftrightarrow -3 < m < 3.$$

Chọn đáp án Ⓓ ....□

CÂU 15.
Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình bên. Phương trình $f(4x - x^2) - 2 = 0$ có bao nhiêu nghiệm thực?

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

Ⓐ 2. Ⓑ 6. Ⓒ 0. Ⓓ 4.

Lời giải.
Đặt $t = 4x - x^2$. Khi đó $t = -(x-2)^2 + 4 \le 4$.
Từ mỗi giá trị $t < 4$ ta tìm được hai giá trị x. Với $t = 4$ ta tìm được $x = 2$.
Từ bảng biến thiên, ta thấy phương trình $f(t) = 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \alpha \in (-\infty; 0) \\ t = \beta \in (0; 4) \\ t = \gamma \in (4; +\infty) \end{array}\right.$
Vậy phương trình $f(4x - x^2) - 2 = 0$ có 4 nghiệm.
Chọn đáp án Ⓓ ....□

Bài 5. ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM VÀ KHẢO SÁT HÀM SỐ ĐỂ GIẢI QUYẾT MỘT SỐ BÀI TOÁN THỰC TIỄN

A. LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1. Tốc độ thay đổi của một đại lượng

Ta có đạo hàm $f'(a)$ là tốc độ thay đổi tức thời của đại lượng $y = f(x)$ đối với x tại điểm $x = a$. Dưới đây, chúng ta xem xét một số ứng dụng của ý tưởng này đối với vật lí, hoá học, sinh học và kinh tế:

- Nếu $s = s(t)$ là hàm vị trí của một vật chuyển động trên một đường thẳng thì $v = s'(t)$ biểu thị vận tốc tức thời của vật (tốc độ thay đổi của độ dịch chuyển theo thời gian). Tốc độ thay đổi tức thời của vận tốc theo thời gian là gia tốc tức thời của vật:
$$a(t) = v'(t) = s''(t).$$
- Nếu $C = C(t)$ là nồng độ của một chất tham gia phản ứng hoá học tại thời điểm t, thì $C'(t)$ là tốc độ phản ứng tức thời (tức là độ thay đổi nồng độ) của chất đó tại thời điểm t.
- Nếu $P = P(t)$ là số lượng cá thể trong một quần thể động vật hoặc thực vật tại thời điểm t, thì $P'(t)$ biểu thị tốc độ tăng trưởng tức thời của quần thể tại thời điểm t.
- Nếu $C = C(x)$ là hàm chi phí, tức là tổng chi phí khi sản xuất x đơn vị hàng hoá, thì tốc độ thay đổi tức thời $C'(x)$ của chi phí đối với số lượng đơn vị hàng được sản xuất được gọi là chi phí biên.
- Về ý nghĩa kinh tế, chi phí biên $C'(x)$ xấp xỉ với chi phí để sản xuất thêm một đơn vị hàng hoá tiếp theo, tức là đơn vị hàng hoá thứ $x + 1$ (xem SGK Toán 11 tập hai, trang 87, bộ sách Kết nối tri thức với cuộc sống).

2. Bài toán tối ưu hóa

Một trong những ứng dụng phổ biến nhất của đạo hàm là cung cấp một phương pháp tổng quát, hiệu quả để giải những bài toán tối ưu hoá. Trong mục này, chúng ta sẽ giải quyết những vấn đề thường gặp như tối đa hoá diện tích, khối lượng, lợi nhuận, cũng như tối thiểu hoá khoảng cách, thời gian, chi phí. Quy trình giải một số bài toán tối ưu hoá đơn giản:

- **Bước 1.** Xác định đại lượng Q mà ta cần làm cho giá trị của đại lượng ấy lớn nhất hoặc nhỏ nhất và biểu diễn nó qua các đại lượng khác trong bài toán.

- **Bước 2.** Chọn một đại lượng thích hợp nào đó, kí hiệu là x, và biểu diễn các đại lượng khác ở **Bước 1** theo x. Khi đó, đại lượng Q sẽ là hàm số của một biến x. Tìm tập xác định của hàm số $Q = Q(x)$.

- **Bước 3.** Tìm giá trị lớn nhất hoặc giá trị nhỏ nhất của hàm số $Q = Q(x)$ bằng các phương pháp đã biết và kết luận.

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

BÀI TẬP TỰ LUẬN

5 Bài toán về quãng đường, vận tốc, gia tốc

① Nếu phương trình chuyển động của vật là $s = f(t)$ thì $v = f'(t)$ là vận tốc tức thời và $a = v'(t)$ là gia tốc tức thời của vật tại thời điểm t.

② Trong chuyển động thẳng đều thì $s = v \cdot t$.

VÍ DỤ 1. Trong 3 giây đầu tiên, một chất điểm chuyển động theo phương trình

$$s(t) = -t^3 + 6t^2 + t + 5,$$

trong đó t tính bằng giây và s tính bằng mét. Chất điểm có vận tốc tức thời lớn nhất bằng bao nhiêu trong 3 giây đầu tiên đó?

Lời giải.

Vận tốc tức thời của chất điểm là $v(t) = s'(t) = -3t^2 + 12t + 1$. Ta có

$v'(t) = -6t + 12;$

$v'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 2.$

Bảng biến thiên của hàm số $v(t)$ trên đoạn $[0; 3]$ như sau:

t	0		2		3
$v'(t)$		+	0	−	
$v(t)$	1	↗	13	↘	10

Suy ra, vận tốc lớn nhất $v_{\max} = 13$ (m/s) khi $t = 2$ (s).

VÍ DỤ 2. Khi bỏ qua sức cản của không khí, độ cao (mét) của một vật được phóng thẳng đứng lên trên từ điểm cách mặt đất 2 m với vận tốc ban đầu 24,5 m/s là $h(t) = 2 + 24{,}5t - 4{,}9t^2$ (theo Vật lí đại cương, NXB Giáo dục Việt Nam, 2016).

a) Tìm vận tốc của vật sau 2 giây.

b) Khi nào vật đạt độ cao lớn nhất và độ cao lớn nhất đó là bao nhiêu?

c) Khi nào thì vật chạm đất và vận tốc của vật lúc chạm đất là bao nhiêu?

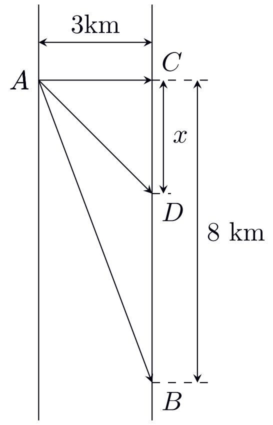
Lời giải.

a) Theo ý nghĩa cơ học của đạo hàm, vận tốc của vật là $v = h'(t) = 24{,}5 - 9{,}8t$ m/s.
Do đó, vận tốc của vật sau 2 giây là $v(2) = 24{,}5 - 9{,}8 \cdot 2 = 4{,}9$ m/s.

b) Vì $h(t)$ là hàm số bậc hai có hệ số $a = -4{,}9 < 0$ nên $h(t)$ đạt giá trị lớn nhất tại $t = -\dfrac{b}{2a} = \dfrac{24{,}5}{2 \cdot 4{,}9} = 2{,}5$ (giây). Khi đó, độ cao lớn nhất của vật là $h(2{,}5) = 32{,}625$ m.

c) Vật chạm đất khi độ cao bằng 0, tức là $h = 2 + 24{,}5t - 4{,}9t^2 = 0$, hay $t \approx 5{,}08$ (giây).
Vận tốc của vật lúc chạm đất là $v(5{,}08) = 24{,}5 - 9{,}8 \cdot 5{,}08 = -25{,}284$ m/s.
Vận tốc âm chứng tỏ chiều chuyển động của vật là ngược chiều dương (hướng lên trên) của trục đã chọn (khi lập phương trình chuyển động của vật).

VÍ DỤ 3.
Anh An chèo thuyền từ điểm A trên bờ một con sông thẳng rộng 3 km và muốn đến điểm B ở bờ đối diện cách 8 km về phía hạ lưu càng nhanh càng tốt (hình bên). Anh An chèo thuyền đến một điểm D nào đó giữa C và B rồi chạy bộ đến B. Nếu vận tốc chèo thuyền là 6 km/h và vận tốc chạy bộ là 8 km/h thì anh An phải chèo thuyền sang bờ ở điểm D cách B bao nhiêu km để đến được B càng sớm càng tốt? (*Giả sử rằng vận tốc của nước là không đáng kể so với vận tốc chèo thuyền của anh An*).



Lời giải.
Gọi độ dài đoạn CD là x (km), với $0 \leq x \leq 8$. Khi đó

- Độ dài quãng đường AD là $\sqrt{9+x^2}$ và thời gian đi hết quãng đường AD là $\dfrac{\sqrt{9+x^2}}{6}$;
- Độ dài quãng đường BD là $8-x$ và thời gian đi hết quãng đường BD là $\dfrac{8-x}{8}$.

Tổng thời gian người đó đi từ A đến B là

$$f(x)=\frac{\sqrt{9+x^2}}{6}+\frac{8-x}{8} \quad (h)$$

Ta có

- $f'(x)=\dfrac{x}{6\sqrt{9+x^2}}-\dfrac{1}{8}$;
- $f'(x)=0 \Leftrightarrow \dfrac{x}{6\sqrt{9+x^2}}-\dfrac{1}{8}=0$

$$\Leftrightarrow 8x=6\sqrt{9+x^2} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 64x^2=36\left(9+x^2\right) \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{9\sqrt{7}}{7}.$$

Bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ trên $[0;8]$ như sau:

x	0		$\frac{9\sqrt{7}}{7}$		8
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\frac{3}{2}$	$\searrow$	$1+\frac{\sqrt{7}}{8}$	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{73}}{6}$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy để đến B sớm nhất thì anh An phải chèo thuyền đến điểm D cách B một đoạn $8-x=8-\dfrac{9\sqrt{7}}{7}=$ (km).

VÍ DỤ 4. Chi phí về nhiên liệu của một con tàu được chia làm hai phần. Phần chi phí thứ nhất không phụ thuộc vào tốc độ tàu và bằng 480nghn đồng mỗi giờ. Chi phí phần thứ hai trên 1 km đường tỉ lệ thuận với lập phương của tốc độ tàu, khi tốc độ bằng 20 km/h thì chi phí phần thứ hai bằng 100 nghìn đồng mỗi giờ. Giả sử con tàu đó luôn giữ nguyên tốc độ di chuyển, để tổng chi phí nhiên liệu trên 1 km đường là nhỏ nhất thì tốc độ của con tàu đó bằng bao nhiêu km/h ?

Lời giải.
Gọi x(km/h) là tốc độ của tàu.
Thời gian tàu chạy quãng đường 1 km là $\frac{1}{x}$ (giờ).
Chi phí tiền nhiên liệu phần thứ nhất cho quãng đường 1 km là $480\frac{1}{x}$ (nghìn đồng).
Gọi y (nghìn đồng) là chi phí nhiên liệu phần thứ hai cho quãng đường 1 km ứng với tốc độ x.
Ta có y tỉ lệ thuận với lập phương tốc độ nên $y=kx^3$ với $k>0$.
Khi tốc độ $x=20$(km/h) thì thời gian tàu chạy 1 km là $\frac{1}{20}$ (giờ) nên chi phí phần thứ 2 cho quãng đường 1 km là $\frac{1}{20}\cdot 100=5$ (nghìn đồng)

Suy ra $5 = k \cdot 20^3$ nên $k = \frac{1}{1600}$, do đó $y = \frac{1}{1600}x^3$
Vậy tổng chi phí tiền nhiên liệu cho 1 km đường là: $P(x) = \frac{480}{x} + \frac{x^3}{1600}$.
Bài toán trở thành tìm x để $P(x)$ nhỏ nhất.
Ta có $P'(x) = -\frac{480}{x^2} + \frac{3x^2}{1600} = 0 \Leftrightarrow x = 4\sqrt[4]{1000}$.
Lập bảng biến thiên, suy ra để tổng chi phí trên 1 km đường nhỏ nhất thì vận tốc của tàu là $x = 4\sqrt[4]{1000} \approx 22,5(\text{ km/h})$.

6 Bài toán tối ưu hóa trong chi phí, doanh thu, lợi nhuận

- Nếu $C(x)$ là tổng chi phí mà công ty (doanh nghiệp) phải trả để sản xuất x đơn vị hàng hóa thì $C(x)$ được gọi là **hàm chi phí**.
- Gọi $p(x)$ là giá bán mỗi đơn vị hàng hóa khi giao dịch x đơn vị hàng hóa. Khi đó $p(x)$ được gọi là **hàm cầu** (hay **hàm giá**) và hàm số này được kì vọng là hàm giảm theo biến x.
- Nếu x đơn vị hàng hóa được bán với giá mỗi đơn vị $p(x)$, thì **hàm doanh thu**, kí hiệu là $R(x)$, được tính bởi công thức $R(x) = x \cdot p(x)$.
- Nếu x đơn vị hàng hóa được bán với giá mỗi đơn vị là $p(x)$, thì **hàm lợi nhuận**, kí hiệu là $P(x)$, được tính bởi công thức
$$P(x) = R(x) - C(x) = xp(x) - C(x).$$

VÍ DỤ 1. Tại một xí nghiệp chuyên sản xuất vật liệu xây dựng, nếu trong một ngày xí nghiệp sản xuất $x\,(m^3)$ sản phẩm thì phải bỏ ra các khoản chi phí bao gồm: 5 triệu đồng chi phí cố định; 0,4 triệu đồng chi phí cho mỗi mét khối sản phẩm và $0,005x^2$ triệu đồng chi phí bảo dưỡng máy móc. Biết rằng, mỗi ngày xí nghiệp sản xuất được tối đa 45 m^3 sản phẩm. Tìm chi phí trung bình (triệu đồng) trên mỗi mét khối sản phẩm thấp nhất mà xí nghiệp cần bỏ ra (làm tròn đến hàng phần trăm).

Lời giải.

Tổng chi phí (triệu đồng) để xí nghiệp sản xuất $x(m^3)$ sản phẩm trong một ngày là
$$C(x) = 5 + 0,4x + 0,005x^2,\ \text{với } 0 \le x \le 45.$$
Chi phí trung bình (triệu đồng) trên mỗi mét khối sản phẩm là
$$f(x) = \frac{C(x)}{x} = \frac{5 + 0,4x + 0,005x^2}{x} = \frac{5}{x} + 0,4 + 0,005x.$$
Ta có
$$f'(x) = -\frac{5}{x^2} + 0,005 = \frac{0,005x^2 - 5}{x^2},\quad f'(x) = 0 \Rightarrow x^2 = 1000 \Rightarrow x = \sqrt{1000}.$$
Bảng biến thiên:

x	0		$\sqrt{1000}$		$+\infty$
$f'(x)$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$	|| $+\infty$	$\searrow$	0.72	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta thấy chi phí trung bình thấp nhất là $\overline{C}(\sqrt{1000}) \approx 0,72$ đạt được khi $x = \sqrt{1000} \approx 32,0$.

VÍ DỤ 2. Giả sử một loại hàng hoá có hàm cầu được mô hình hoá bởi $p(x) = 100 - 0,5x$ và hàm chi phí được mô hình hoá bởi $C(x) = 40x + 37,5$, trong đó p (nghìn đồng) là giá của một đơn vị hàng hoá đó. Hỏi khi lợi nhuận là lớn nhất, chi phí trung bình cho mỗi đơn vị là bao nhiêu nghìn đồng ? (*kết quả làm tròn đến hàng đơn vị*).

Lời giải.

Doanh thu của cửa hàng là $R(x) = xp(x) = x(100 - 0,5x)$.
Lợi nhuận của cửa hàng là
$$P(x) = R(x) - C(x) = (100 - 0,5x)x - (40x + 37,5) = -0,5x^2 + 60x - 37,5$$
Xét hàm số $P(x) = -0,5x^2 + 60x - 37,5$, với $x > 0$. Ta có

- $P'(x) = -x + 60$;

- $P'(x) = 0 \Leftrightarrow -x + 60 = 0 \Leftrightarrow x = 60$.

Bảng biến thiên của hàm $P(x)$:

x	0		60		$+\infty$
$P'(x)$		$+$	0	$-$	
$P(x)$		$\nearrow$	70	$\searrow$	

Ta thấy, lợi nhuận lớn nhất khi $x = 70$. Khi đó, chi phí trung bình là

$$\frac{C(x)}{x} = \frac{40 \cdot 60 + 37{,}5}{60} = 40{,}625 \approx 41 \text{ (nghìn đồng)}.$$

VÍ DỤ 3. Một công ty sản xuất và bán hết x sản phẩm $(0 < x \leq 1000)$, tổng số tiền công ty thu được là $f(x) = 1000x - x^2$ (nghìn đồng), chi phí sản xuất bình quân cho một sản phẩm là $g(x) = x + \frac{30}{x} + 680$ (nghìn đồng). Giả sử mức thuế phụ thu trên một đơn vị sản phẩm bán được là t (nghìn đồng) ($0 < t < 200$). Tìm mức thuế phụ thu t (nghìn đồng) trên một sản phẩm sao cho nhà nước nhận được số tiền thuế phụ thu lớn nhất và công ty cũng thu được lợi nhuận lớn nhất theo mức thuế phụ thu đó.

7 Bài toán tối ưu hoá trong hình học

① Thể tích khối hộp chữ nhật $V =$ dài $\times$ rộng $\times$ cao;

② Thể tích khối lập phương $V = (\text{cạnh})^3$;

③ Thể tích khối chóp $V = \frac{1}{3} \times S_{\text{đáy}} \times$ cao;

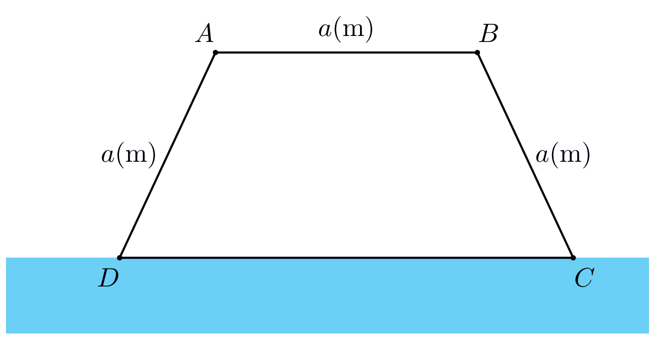
④ Khối nón:

- Diện tích xung quanh: $S_{\text{xq}} = \pi r l$.
- Thể tích: $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$.

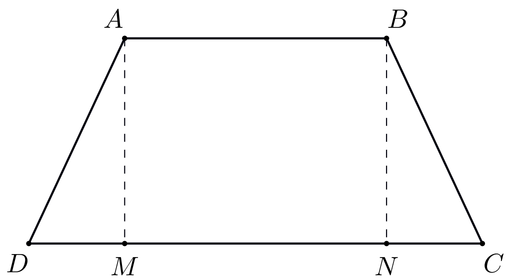
⑤ Khối trụ:

- Diện tích xung quanh: $S_{\text{xq}} = 2\pi r l$.
- Thể tích: $V = \pi r^2 h$.

VÍ DỤ 1.
Một bác nông dân có ba tấm lưới B40, mỗi tấm dài a (m) và muốn rào một mảnh vườn dọc bờ sông có dạng hình thang cân $ABCD$ như hình bên dưới (bờ sông là đường thẳng CD không phải rào). Hỏi bác đó có thể rào được mảnh vườn có diện tích lớn nhất là bao nhiêu mét vuông?



Lời giải.



Gọi M, N lần lượt là hình chiếu vuông góc của A, B trên CD.
Đặt $x = MD$, $(0 < x < a)$. Suy ra $AM = \sqrt{AD^2 - MD^2} = \sqrt{a^2 - x^2}$.

Diện tích của mảnh vườn hình thang cân là $S(x) = \dfrac{(AB + CD)AM}{2} = (a + x)\sqrt{a^2 - x^2}$.

Xét hàm số $f(x) = (a + x)\sqrt{a^2 - x^2}$ trên khoảng $(0 < x < a)$.

$$f'(x) = \frac{-2x^2 - ax + a^2}{\sqrt{a^2 - x^2}},\ f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-2x^2 - ax + a^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -a \notin (0 < x < a) \\ x = \dfrac{a}{2} \in (0 < x < a) \end{array}\right. .$$

Bảng biến thiên hàm số $f(x)$ trên khoảng $(0; a)$.

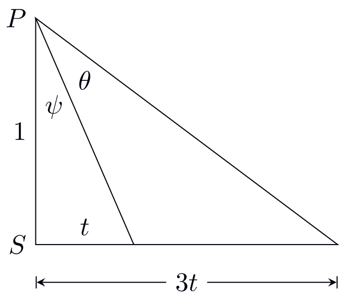
x	0		$\frac{a}{2}$		a
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	a^2	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}a^2}{4}$	$\searrow$	0

Từ bảng biến thiên suy ra $\max\limits_{(0;a)} f(x) = f\left(\dfrac{a}{2}\right) = \dfrac{3\sqrt{3}a^2}{4}$.

Vậy bác nông dân có thể rào được mảnh vườn có diện tích lớn nhất $\dfrac{3\sqrt{3}a^2}{4}$ m^2.

VÍ DỤ 2.

Một người quan sát đứng tại điểm P, cách xa đường đua một đơn vị độ dài. Hai vận động viên xuất phát từ điểm S và chạy dọc đường đua (như hình vẽ). Biết vận động viên thứ nhất chạy nhanh gấp ba lần vận động viên thứ hai, hãy tìm góc quan sát θ lớn nhất giữa hai vận động viên mà người quan sát đứng ở P nhìn thấy được.

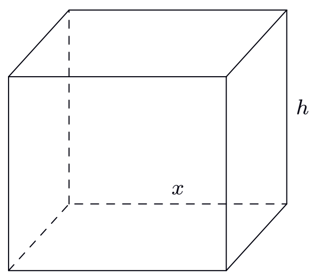


Lời giải.

Vì góc quan sát θ có tính chất $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ nên việc tìm góc θ lớn nhất tương đương với việc tìm góc θ để $\tan\theta$ lớn nhất. Vì vận động viên thứ nhất chạy nhanh gấp 3 lần vận động viên thứ hai nên khi vận động viên thứ hai cách S một khoảng bằng t thì vận động viên thứ nhất cách S một khoảng là $3t$. Giả sử ta có góc tạo bởi giữa tia PS và hướng từ mắt người quan sát đến người thứ hai là ψ (như hình vẽ), khi đó ta có
$\frac{3t}{1} = \tan(\psi + \theta) = \frac{\tan\psi + \tan\theta}{1 - \tan\psi\tan\theta} = \frac{t + \tan\theta}{1 - t\tan\theta} \Leftrightarrow \tan\theta = \frac{2t}{1 + 3t^2}$.
Đặt $f(t) = \tan\theta = \frac{2t}{1 + 3t^2}$ thì $f'(t) = \frac{2(1 + 3t^2) - 12t^2}{(1 + 3t^2)^2} = \frac{2(1 - 3t^2)}{(1 + 3t^2)}$.
Do vậy $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{\sqrt{3}}$ (do $t > 0$). Vì $f'(t)$ đổi dấu từ dương sang âm tại $t = \frac{1}{\sqrt{3}}$ nên $f(t)$ đạt giá trị lớn nhất tại $t = \frac{1}{\sqrt{3}}$.
Khi đó $\tan\theta = \frac{2 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 + 3 \cdot \frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$.
Vậy góc quan sát θ lớn nhất giữa hai vận động viên mà người quan sát đứng ở P nhìn thấy được là $\theta = \frac{\pi}{6}$.
Trong trường hợp này, từ $3t = \tan(\psi + \theta) \Rightarrow \tan\left(\psi + \frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow \psi = \frac{\pi}{6}$. Điều này có nghĩa là góc quan sát giữa điểm xuất phát và vận động viên thứ hai của người quan sát đứng ở P cũng là $\frac{\pi}{6}$.

VÍ DỤ 3.

Ông Bình đặt thợ làm một bể cá, nguyên liệu bằng kính trong suốt, không có nắp đậy dạng hình hộp chữ nhật có thể tích chứa được 220500 cm^3 nước. Biết tỉ lệ giữa chiều cao và chiều rộng của bể bằng 3. Xác định diện tích đáy của bể cá (tính bằng cm^2) để tiết kiệm được nguyên vật liệu nhất.



Lời giải.

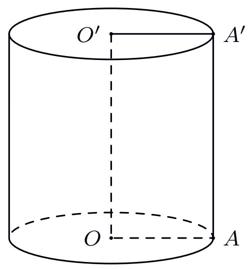
Gọi chiều rộng, chiều dài, chiều cao của bể cá lần lượt là a, b, c. Ta có $c = 3a$ và $b \geq a$.
Thể tích của bể cá là $V = abc = 3a^2b = 220500 \text{ cm}^3 \Leftrightarrow b = \dfrac{73500}{a^2}$.
Vì $a \leq b$ và $a \leq c$ nên $a^3 \leq 220500 \Rightarrow a < 61$.
Nguyên vật liệu tiết kiệm nhất khi diện tích toàn phần nhỏ nhất.
$S_{tp} = 6a^2 + \dfrac{514500}{a}$ và $S'_{tp} = 12a - \dfrac{514500}{a^2} = 0 \Leftrightarrow a = 35$.
Bảng biến thiên của S_{tp} là

a	0		35		61
S'_{tp}		$-$	0	$+$	
S_{tp}		$\searrow$		$\nearrow$	

Do đó diện tích toàn phần nhỏ nhất khi $a = 35$.
Diện tích đáy $S = ab = \dfrac{73500}{a} = 2100 \text{ cm}^2$.

VÍ DỤ 4.

Khi sản xuất vỏ lon sữa bò hình trụ, các nhà thiết kế luôn đặt mục tiêu sao cho chi phí nguyên liệu làm vỏ lon là ít nhất, tức là diện tích toàn phần của hình trụ là nhỏ nhất. Muốn thể tích khối trụ đó bằng 1 dm^3 và diện tích toàn phần của hình trụ nhỏ nhất thì bán kính đáy của hình trụ phải bằng bao nhiêu dm? (*kết quả làm tròn đến hàng phần trăm*).



Lời giải.

Đổi 1 lít $= 1000 \text{ cm}^3$.
Gọi $r(cm)$ là bán kính đáy của hình trụ, $h(cm)$ là chiều cao của hình trụ.
Diện tích toàn phần của hình trụ là $S = 2\pi r^2 + 2\pi rh$.
Do thể tích của hình trụ là 1000 cm^3 nên ta có: $1000 = V = \pi r^2 h$, hay $h = \dfrac{1000}{\pi r^2}$.
Do đó, diện tích toàn phần của hình trụ là $S = 2\pi r^2 + \dfrac{2000}{r}$, $r > 0$.
Ta cần tìm r sao cho S đạt giá trị nhỏ nhất. Ta có

$$S' = 4\pi r - \frac{2000}{r^2} = \frac{4\pi r^3 - 2000}{r^2};$$
$$S' = 0 \Leftrightarrow \pi r^3 = 500 \Leftrightarrow r = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}$$

Bảng biến thiên

r	0		$\sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}$		$+\infty$
$S'(r)$		$-$	0	$+$	
$S(r)$	$+\infty$	$\searrow$	$S\left(\sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}\right)$	$\nearrow$	$+\infty$

Khi đó

$$h = \frac{1000}{\pi r^2} = \frac{1000}{\pi\sqrt[3]{\frac{250000}{\pi^2}}} = \frac{100}{\sqrt[3]{250\pi}}.$$

Vậy cần sản xuất các hộp đựng hình trụ có bán kinh đáy $r = \sqrt[3]{\dfrac{500}{\pi}} \approx 5,42$ (cm) và chiều cao $h = \dfrac{100}{\sqrt[3]{250\pi}} \approx 10,84$ (cm).

8 Bài toán về tốc độ thay đổi của một đại lượng

VÍ DỤ 1. Khi máu di chuyển từ tim qua các động mạch chính rồi đến các mao mạch và quay trở lại qua các tĩnh mạch, huyết áp tâm thu (tức là áp lực của máu lên động mạch khi tim co bóp) liên tục giảm xuống. Giả sử một người có huyết áp tâm thu P (tính bằng mmHg) được cho bởi hàm số

$$P(t)=\frac{25t^2+125}{t^2+1}, 0\le t\le 10,$$

trong đó thời gian t được tính bằng giây. Tính tốc độ thay đổi của huyết áp sau 5 giây kể từ khi máu rời tim.

Lời giải.

Ta có tốc độ thay đổi của huyết áp là $P'(t)=\dfrac{-100t}{(t^2+1)^2}$. Do đó tốc độ thay đổi huyết áp sau 5 s là $P'(5)=-\dfrac{125}{169}$.

VÍ DỤ 2. Doanh số bán hệ thống âm thanh nối mới trong một khoảng thời gian dự kiến sẽ tuân theo đường cong logistic $R=R(x)=\dfrac{5000}{1+5e^{-x}}, x\ge 0$, trong đó thời gian x được tính bằng năm. Hỏi tốc độ bán hàng đạt tới đa vào năm nào?

Lời giải.

Hàm biểu thị tốc độ bán hàng là $f(x)=R'(x)=\frac{25000\mathrm{e}^{-x}}{(1+5\mathrm{e}^{-x})^2}$, với $x\ge 0$. Ta có:

$$\begin{aligned}f'(x)&=\frac{-25000\mathrm{e}^{-x}\left(1+5\mathrm{e}^{-x}\right)^2+25000\mathrm{e}^{-x}\cdot 2\left(1+5\mathrm{e}^{-x}\right)\cdot 5\mathrm{e}^{-x}}{\left(1+5\mathrm{e}^{-x}\right)^4}\\&=\frac{25000\mathrm{e}^{-x}\left(5\mathrm{e}^{-x}-1\right)}{\left(1+5\mathrm{e}^{-x}\right)^3};\\f'(x)&=0\Leftrightarrow x=\ln 5\approx 1,61.\end{aligned}$$

Lập bảng biến thiên:

x	0		1,61		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$		↗		↘	

Từ bảng biến thiên, ta thấy tốc độ bán hàng đạt tối đa vào thời điểm năm thứ nhất hoặc năm thứ hai.
Ta có $f(1)=1140,8$, $f(2)=1203,5$. Vậy, tốc độ bán hàng đạt tối đa vào thời điểm năm thứ hai.

VÍ DỤ 3. Giả sử số lượng của một quần thể nấm men tại môi trường nuôi cấy trong phòng thí nghiệm được mô hình hoá bằng hàm số $P(t)=\dfrac{a}{b+\mathrm{e}^{-0,75t}}$, trong đó thời gian t được tính bằng giờ. Tại thời điểm ban đầu $t=0$, quần thể có 20 tế bào và tăng với tốc độ 12 tế bào/giờ. Tìm các giá trị của a và b. Theo mô hình này, điều gì xảy ra với quần thể nấm men về lâu dài?

Lời giải.

Ta có $P'(t)=\dfrac{0,75a\mathrm{e}^{-0,75t}}{\left(b+\mathrm{e}^{-0,75t}\right)^2}, t\ge 0$.

Theo đề bài, ta có $P(0)=20$ và $P'(0)=12$. Do đó, ta có hệ phương trình:

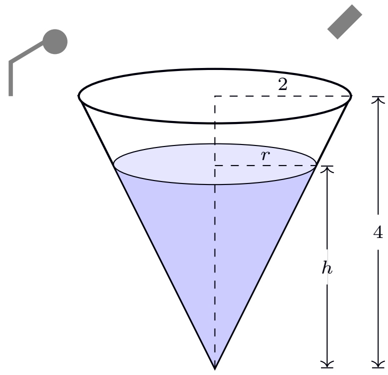
$$\begin{cases}\dfrac{a}{b+1}=20\\ \dfrac{0,75a}{(b+1)^2}=12\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=20(b+1)\\ \dfrac{15}{b+1}=12\end{cases}$$

Giải hệ phương trình này, ta được $a=25$ và $b=\dfrac{1}{4}$.

Khi đó, $P'(t)=\dfrac{18,75\mathrm{e}^{-0,75t}}{\left(\dfrac{1}{4}+\mathrm{e}^{-0,75t}\right)^2}>0, \forall t\ge 0$, tức là số lượng quần thể nấm men luôn tăng.

Tuy nhiên, do $\lim\limits_{t\to+\infty}P(t)=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{25}{\dfrac{1}{4}+\mathrm{e}^{-0,75t}}=100$ nên số lượng quần thể nấm men tăng nhưng không vượt quá 100 tế bào.

VÍ DỤ 4.
Một bể nước có dạng hình nón ngược với bán kính đáy bằng 2 m và chiều cao bằng 4 m (tham khảo hình vẽ dưới đây). Nước được bơm vào bể với tốc độ không đổi là 2 m^3/pht. Hỏi tốc độ dâng lên của mực nước (đơn vị m/pht) bằng bao nhiêu khi mực nước trong bể đạt độ sâu bằng 3 m (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)?



Lời giải.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.

CÂU 1. Một vật chuyển động theo quy luật $s=-\dfrac{1}{3}t^3+6t^2$ với t (giây) là khoảng thời gian tính từ khi vật bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật di chuyển được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 7 giây, kể từ khi bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu?

(A) 144 m/s. (B) 24 m/s. (C) 180 m/s. (D) 36 m/s.

Lời giải.

Công thức vận tốc chuyển động của vật là $v(t)=s'(t)=-t^2+12t$.
Ta tìm giá trị lớn nhất của $v(t)$ trên khoảng $(0;7]$.
Ta có $v(t)=36-(t^2-12t+36)=36-(t-6)^2\le 36$ (m/s).
Do đó $\max\limits_{(0;7]} v(t)=36 \Leftrightarrow t=6$.
Vậy vận tốc lớn nhất của vật trong khoảng thời gian 7 giây, kể từ khi bắt đầu chuyển động, là 36 m/s.

Chọn đáp án (D) .... □

CÂU 2. Một vật chuyển động theo quy luật $s=-\dfrac{1}{2}t^3+6t^2$ với t (giây) là khoảng thời gian tính từ khi vật bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật di chuyển được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 9 giây, kể từ khi bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được là bao nhiêu?(*kết quả tính bằng m/s*)

(A) 54 m/s. (B) 36 m/s. (C) 27 m/s. (D) 45 m/s.

Lời giải.

Chọn đáp án (B) .... □

CÂU 3. Để tăng nhiệt độ trong phòng từ 18°C người ta sử dụng một cái máy sưởi (máy được phép hoạt động trong 9 phút). Gọi T (đơn vị °C) là nhiệt độ của phòng ở phút thứ t được cho bởi công thức $T=-0{,}009t^3+0{,}15t^2+18$ với $t\in[1;12]$. Tìm nhiệt độ cao nhất trong phòng đạt được trong thời gian 9 phút kể từ khi máy sưởi bắt đầu hoạt động.

(A) 28. (B) 22. (C) 24. (D) 23.

Lời giải.

Đặt $T=f(t)=-0{,}009t^3+0{,}15t^2+18$ với $t\in[0;9]$ (do máy sưởi được phép hoạt động trong 9 phút).

$$f'(t)=-0{,}027t^2+0{,}3t=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\dfrac{100}{9}\ \text{(loại)}\\ t=0\ \text{(nhận)}.\end{array}\right.$$

Với $f(0)=18$; $f(9)=23{,}589\approx 24$°C.

Chọn đáp án (C) .... □

CÂU 4. Số dân của một thị trấn sau t năm kể từ năm 1970 được ước tính bởi công thức $f(t)=\dfrac{26t+10}{t+5}$ ($f(t)$ được tính bằng nghìn người). Đạo hàm của hàm số f biểu thị tốc độ tăng trưởng dân số của thị trấn (tính bằng nghìn người/năm). Hỏi vào năm nào thì tốc độ tăng dân số là 0,048 nghìn người/ năm ?

(A) 2025. (B) 2020. (C) 2015. (D) 2018.

Lời giải.

Chọn đáp án (A) .... □

CÂU 5. Sau khi phát hiện dịch bệnh, các chuyên gia y tế ước tính số người nhiễm bệnh kể từ ngày đầu tiên xuất hiện bệnh nhân đầu tiên đến ngày thứ t là $f(t) = 1 + 18t^2 - \dfrac{1}{3}t^3$ với $t = 0, 1, 2, \ldots, 30$. Nếu f xác định trên $[0; 30]$ thì $f'(t)$ được xem là tốc độ truyền bệnh (người/ngày) tại thời điểm t. Xác định ngày mà tốc độ truyền bệnh lớn nhất.

(A) Ngày thứ 15. (B) Ngày thứ 18. (C) Ngày thứ 20. (D) Ngày thứ 30.

Lời giải.

Tốc độ truyền bệnh $f'(t) = 36t - t^2$, ta có

$$f'(t) = -(t-18)^2 + 18^2 \le 18^2.$$

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi $t - 18 = 0 \Leftrightarrow t = 18$.

Chọn đáp án (B) .... □

CÂU 6. Doanh số bán hệ thống âm thanh trong một khoảng thời gian dự kiến sẽ tuân theo đường cong logistic $R = R(x) = \dfrac{5000}{1 + 5e^{-x}}, x \ge 0$, trong đó thời gian x được tính bằng năm. Hỏi tốc độ bán hàng đạt tối đa vào năm thứ mấy kể từ khi mở bán?

(A) Năm thứ 3. (B) Năm thứ 2. (C) Năm thứ 4. (D) Năm thứ 1.

Lời giải.

Hàm biểu thị tốc độ bán hàng là $f(x) = R'(x) = \frac{25000\mathrm{e}^{-x}}{(1+5\mathrm{e}^{-x})^2}$, với $x \ge 0$. Ta có:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{-25000\mathrm{e}^{-x}\left(1 + 5\mathrm{e}^{-x}\right)^2 + 25000\mathrm{e}^{-x} \cdot 2\left(1 + 5\mathrm{e}^{-x}\right) \cdot 5\mathrm{e}^{-x}}{\left(1 + 5\mathrm{e}^{-x}\right)^4} \\ &= \frac{25000\mathrm{e}^{-x}\left(5\mathrm{e}^{-x} - 1\right)}{\left(1 + 5\mathrm{e}^{-x}\right)^3}; \\ f'(x) &= 0 \Leftrightarrow x = \ln 5 \approx 1,61. \end{aligned}$$

Lập bảng biến thiên:

x	0		$1{,}61$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

Từ bảng biến thiên, ta thấy tốc độ bán hàng đạt tối đa vào thời điểm năm thứ nhất hoặc năm thứ hai.
Ta có $f(1) = 1140,8$, $f(2) = 1203,5$. Vậy, tốc độ bán hàng đạt tối đa vào thời điểm năm thứ hai.

Chọn đáp án (B) .... □

CÂU 7. Độ giảm huyết áp của một bệnh nhân được xác định bởi công thức $f(x) = 0,025x^2(30 - x)$, trong đó x là liều lượng an toàn thuốc tiệm cho bệnh nhân cao huyết áp được tính bằng mg. Liều lượng an toàn của thuốc cần tiêm cho bệnh nhân cao huyết áp để huyết áp giảm nhiều nhất là

(A) 30 mg. (B) $0,5$ mg. (C) 15 mg. (D) 20 mg.

Lời giải.

Xét $f(x) = 0{,}025x^2(30 - x)$, $(x \ge 0)$.

Ta có $f'(x) = -0{,}075x^2 + 1{,}5x$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 20 \\ x = 0. \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	0		20		$+\infty$
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	100	$\searrow$	$-\infty$

Nhìn vào bảng biến thiên ta thấy độ giảm huyết áp nhiều nhất là 100 khi $x = 20$. Vậy liều lượng an toàn của thuốc để tiêm cho bệnh nhân là 20 mg.

Chọn đáp án (D) ☐

CÂU 8. Một cuốn tạp chí bán giá 20 ngàn đồng, chi phí xuất bản cho x cuốn là

$$C(x) = 0{,}0001x^2 - 0{,}2x + 10000 \text{ (đơn vị 10000 đồng)}.$$

Chi phí phát hành mỗi cuốn là 4 ngàn đồng. Các khoản thu bao gồm tiền bán tạp chí cộng 90 triệu đồng tiền quảng cáo. Tìm số lượng cuốn tạp chí cần xuất bản để có mức lãi cao nhất. (giả thiết rằng số cuốn tạp chí in ra được bán hết)

(A) 90000 cuốn. (B) 9000 cuốn. (C) 10000 cuốn. (D) 18000 cuốn.

Lời giải.

- Lãi = tổng thu - tổng chi.
- Tổng thu $R(x) = 2x + \dfrac{90 \cdot 10^6}{10^4} = 2x + 9000$.
- Tổng chi $T(x) = C(x) + 0{,}4x = 0{,}0001x^2 + 0{,}2x + 10000$.

Suy ra lãi $I(x) = R(x) - T(x) = -0{,}0001x^2 + 1,8x - 1000 = -0{,}0001(x-9000)^2 + 7100 \le 7100$.
Dấu "$=$" xảy ra khi $x = 9000$.

Chọn đáp án (B) ☐

CÂU 9. Hiện tại, mỗi tháng một cửa hàng đồ lưu niệm bán được 100 sản phẩm A. Với mỗi sản phẩm A bán được, cửa hàng thu được 20 nghìn đồng lợi nhuận. Qua khảo sát, người ta thấy rằng với mỗi nghìn đồng giảm giá, cửa hàng bán thêm được 10 sản phẩm A. Cửa hàng nên giảm giá bao nhiêu nghìn đồng cho mỗi sản phẩm A để thu được lợi nhuận lớn nhất từ việc bán sản phẩm này?

(A) 15 nghìn đồng. (B) 8 nghìn đồng. (C) 10 nghìn đồng. (D) 12 nghìn đồng.

Lời giải.

Gọi x (nghìn đồng) là tiền giảm giá. Điều kiện $x > 0$.
Số sản phẩm A bán được sau khi áp dụng giảm giá là $10x$ (sản phẩm).
Với mỗi sản phẩm A, cửa hàng thu được ($20 - x$ nghìn đồng) lợi nhuận.
Vậy, tổng lợi nhuận của cửa hàng là $10x(20 - x) + 100 \cdot 20$ nghìn đồng.
Để tìm lợi nhuận lớn nhất, chúng ta cần tìm giá trị của x khi tổng lợi nhuận đạt cực đại.
Đặt

$$f(x) = 10x(20 - x) + 100 \cdot 20 \quad (x < 20).$$

$f'(x) = 10(20 - x) + 10x(-1) = 200 - 10x - 10x = -20x + 200$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -20x + 200 = 0 \Leftrightarrow x = 10$. Bảng biến thiên

x	0		10		20
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$	2 000	↗	3 000	↘	2 000

Tổng lợi nhuận lớn nhất là 3 000 nghìn đồng đạt được khi giảm giá 10 nghìn đồng cho mỗi sản phẩm.

Chọn đáp án (C) ☐

CÂU 10. Một công ty dự kiến chi 1 tỉ đồng sản xuất các thùng đựng sơn hình trụ với dung tích 5 lít. Giá sản xuất mặt xung quanh là 100 nghìn đồng/m^2, giá sản xuất mặt đáy là 120 nghìn đồng/m^2. Hỏi công ty có thể sản xuất được tối đa bao nhiêu thùng sơn? (Giả sử chi phí cho các mối nối không đáng kể).

(A) 56453 thùng sơn. (B) 58136 thùng sơn. (C) 57169 thùng sơn. (D) 59025 thùng sơn.

Lời giải.

Ta có 1 tỉ đồng $=$ 1000000 nghìn đồng.
Đổi 5 lít $= 0{,}005$ m^3.
Gọi r là bán kính thùng sơn, h là chiều cao thùng sơn. ($r > 0$, $h > 0$).
Ta có $V = \pi r^2 h = 0{,}005 \Rightarrow h = \dfrac{0{,}005}{\pi r^2}$.
Diện tích xung quanh hình trụ là $S_{\text{xq}} = 2\pi r h = 2\pi r \cdot \dfrac{0{,}005}{\pi r^2} = \dfrac{0{,}01}{r}$.

Diện tích hai đáy hình trụ là $S_{\text{đáy}} = 2\pi r^2$.

Chi phí sản xuất 1 thùng sơn là $f(r) = 100S_{\text{xq}} + 120S_{\text{đáy}} = \dfrac{1}{r} + 240\pi r^2$.

Ta có $f'(r) = -\dfrac{1}{r^2} + 480\pi r$, $f'(r) = 0 \Leftrightarrow r = \dfrac{1}{\sqrt[3]{480\pi}} = r_0$.

Bảng biến thiên

r	0		r_0		$+\infty$
$f'(r)$		$-$	0	$+$	
$f(r)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(r_0)$	$\nearrow$	$+\infty$

Với $f(r_0) = \sqrt[3]{480\pi} + 240\pi \left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{480\pi}}\right)^2 \approx 17{,}201$.

Số thùng sơn công ty sản xuất được tối đa là $\dfrac{1000000}{f(r_0)} \approx 58136$ thùng sơn.

Chọn đáp án (B) .... □

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.

CÂU 11. Một vật chuyển động thẳng không đều xác định bởi phương trình $s(t) = 7t^2 - 3t + 10$, trong đó s tính bằng mét và t tính bằng giây. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

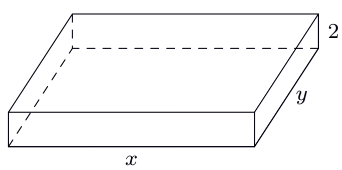
Mệnh đề	Đ	S
a) Quãng đường vật đi được sau 9 giây kể từ khi bắt đầu chuyển động là 550 m. .	X	
b) Gia tốc chuyển động của vật tại thời điểm $t = 2$ là 20 m/s^2 .		X
c) Vận tốc chuyển động của vật tại thời điểm $t = 4$ là 59 m/s .		X
d) Vận tốc nhỏ nhất vật đạt được trong khoảng thời gian từ $t = 3$ đến $t = 6$ là 39 m/s .	X	

Lời giải.

a) Khẳng định đã cho là đúng.
$s(9) = 550$ m.
b) Khẳng định đã cho là sai.
$v(t) = \left(7t^2 - 3t + 10\right)' = 14t - 3$.
$a(t) = (14t - 3)' = 14$.
$a(2) = 14$ m/s^2.
c) Khẳng định đã cho là khẳng định sai.
$v(t) = \left(7t^2 - 3t + 10\right)' = 14t - 3$.
$v(4) = 53$ m/s.
d) Khẳng định đã cho là khẳng định đúng.
$v(t) = \left(7t^2 - 3t + 10\right)' = 14t - 3$. Hàm $v(t)$ là hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.
Trong khoảng thời gian từ $t = 3$ đến $t = 6$ thì vận tốc đạt nhỏ nhất tại $t = 3$.
Vận tốc đạt được khi đó là $v(3) = 39$.

Chọn đáp án | a đúng | b sai | c sai | d đúng | .... □

CÂU 12. Người ta muốn xây một bể bơi có dạng hình hộp chữ nhật, thể tích 1 800 m^3 và chiều sâu 2 m (hình bên). Biết rằng chi phí xây mỗi đơn vị diện tích của đáy bể gấp hai lần so với thành bể. Gọi x (m) và y (m) là hai kích thước của mặt đáy. Xét tính đúng-sai của các khẳng định sau:



Mệnh đề	Đ	S
a) Thể tích bể bơi được tính theo công thức $V = 2x^2y$.		X
b) Mối liên hệ giữa x và y là $y = \dfrac{900}{x}$.	X	

Mệnh đề	Đ	S
c) Tổng diện tích mặt bên của bể tính theo x, y là $S = 4(x+y)$.		X
d) Để tổng chi phí xây dựng (bao gồm mặt đáy và mặt bên) nhỏ nhất thì cần chọn chiều dài là 40 m.	X	

Lời giải.

a) (S) Thể tích của bể là $V = B \cdot h = xy \cdot h$.

b) (Đ) Với $V = xy \cdot h \Rightarrow 1800 = xy \cdot 2 \Rightarrow xy = \dfrac{1800}{2} = 900$.

c) (S) Tổng diện tích mặt bên gồm 4 hình chữ nhật (trước, sau, trái, phải) là

$$S = 2x + 2x + 2y + 2y = 4x + 4y = 4(x+y).$$

d) (Đ) Tổng diện tích của bể là $4x + 4y + xy = 4x + 4 \cdot \dfrac{900}{x} + 900$.

Vì chi phí xây mỗi đơn vị diện tích của đáy bể gấp hai lần so với thành bể nên chi phí cần có là $4x + 4 \cdot \dfrac{900}{x} + 2 \cdot 900$.

Đặt $f(x) = 4x + 4 \cdot \dfrac{900}{x} + 1\,800$.

$f'(x) = 4 - \dfrac{3\,600}{x^2}$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 30$ (do $x > 0$).

Bảng biến thiên

x	0		30		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	$2\,040$	$\nearrow$	$+\infty$

Với $x = 30$m vaf $y = 30$ m và thì chi phí xây dựng bể là thấp nhất.

Chọn đáp án | a sai | b đúng | c sai | d đúng | ....

CÂU 13. Nhà máy A chuyên sản xuất một loại sản phẩm cung cấp cho nhà máy B. Hai nhà máy thoả thuận rằng, hằng tháng A cung cấp cho B số lượng sản phẩm theo đơn đặt hàng của B (tối đa 100 tấn sản phẩm). Nếu số lượng đặt hàng là x tấn sản phẩm thì giá bán cho mỗi tấn sản phẩm là $P(x) = 45 - 0{,}001x^2$ (triệu đồng). Chi phí để A sản xuất x tấn sản phẩm trong một tháng là $C(x) = 100 + 30x$ (triệu đồng) (gồm 100 triệu đồng chi phí cố định và 30 triệu đồng cho mỗi tấn sản phẩm).

Mệnh đề	Đ	S
a) Chi phí để A sản xuất 10 tấn sảm phẩm trong một tháng là 400 triệu đồng.	X	
b) Số tiền A thu được khi bán 10 tấn sản phẩm cho B là 600 triệu đồng.		X
c) Lợi nhuận mà A thu được khi bán x tấn sản phẩm ($0 \le x \le 100$) cho B là $-0{,}001x^3 + 15x - 100$.	X	
d) A bán cho B khoảng 70,7 tấn sản phẩm mỗi tháng thì thu được lợi nhuận lớn nhất.	X	

Lời giải.

a) Chi phí để A sản xuất 10 tấn sảm phẩm trong một tháng là $C(10) = 100 + 30 \cdot 10 = 400$ (triệu)

b) Số tiền mà A thu được (gọi là doanh thu) từ việc bán x tấn sản phẩm ($0 \le x \le 100$) cho B là

$$R(x) = x \cdot P(x) = x\left(45 - 0{,}001x^2\right) = 45x - 0{,}001x^3 \text{ (triệu đồng).}$$

Thay $x = 10$, ta được $R(10) = 449$ (triệu đồng).

c) Lợi nhuận (triệu đồng) mà A thu được là

$$P(x) = R(x) - C(x) = x\left(45 - 0{,}001x^2\right) - (100 + 30x) = -0{,}001x^3 + 15x - 100.$$

d) Xét hàm số $P(x) = -0{,}001x^3 + 15x - 100$ với $0 \le x \le 100$, ta có

$$P'(x) = -0{,}003x^2 + 15;$$
$$P'(x) = 0 \Leftrightarrow -0{,}003x^2 + 15 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 5\,000 \Leftrightarrow x = 50\sqrt{2} \in [0; 100].$$

Ta có $P(0) = -100$; $P(50\sqrt{2}) = 500\sqrt{2} - 100 \approx 607$; $P(100) = 400$.
Bảng biến thiên

x	0		$50\sqrt{2}$		100
y'		$+$	0	$-$	
y			$500\sqrt{2} - 100$		
	100				400

Từ bảng biến thiên, ta có $\max\limits_{[0;100]} P = P(50\sqrt{2}) = 500\sqrt{2} - 100 \approx 607$.
Vậy A thu được lợi nhuận lớn nhất khi bán $50\sqrt{2} \approx 70{,}7$ tấn sản phẩm cho B mỗi tháng và lợi nhuận lớn nhất thu được khoảng 607 triệu đồng.

Chọn đáp án | a đúng | b sai | c đúng | d đúng | .... □

CÂU 14. Giả sử hàm cầu của một sản phẩm độc quyền được cho bởi $p = 400 - 2Q$ và hàm chi phí trung bình $\overline{C} = 0{,}2Q + 4 + \dfrac{400}{Q}$ trong đó Q là số đơn vị sản phẩm (p và $\overline{C}$ được tính bằng \$ đối với mỗi đơn vị sản phẩm). Xét tính đúng, sai của các khẳng định sau:

Mệnh đề	Đ	S
a) $Q = 90$ là lượng sản phẩm bán ra để lợi nhuận thu được tối đa.	X	
b) Giá bán để lợi nhuận thu được tối đa là 400\$.		X
c) Lợi nhuận tối đa là 17420\$.	X	
d) Nếu chính phủ đánh thuế 22\$/ một đơn vị sản phẩm thì giá bán 390\$ để lợi nhuận thu được tối đa.		X

Lời giải.
Ta có Lợi nhuận = Tổng doanh thu − Tổng chi phí.
Tổng doanh thu là R và tổng chi phí là C được cho bởi

$$R(Q) = p \cdot Q = 400Q - 2Q^2$$
$$C(Q) = Q \cdot \overline{C} = 0{,}2Q^2 + 4Q + 400$$

nên lợi nhuận

$$P = R - C = 400Q - 2Q^2 - \left(0{,}2Q^2 + 4Q + 400\right).$$

Hay $P(Q) = 396Q - 2{,}2Q^2 - 400$.

a) Đ Để tối đa hóa lợi nhuận, ta cho $P'(Q) = 0 \Leftrightarrow 396 - 4{,}4Q = 0 \Leftrightarrow Q = 90$.
Ta có $P''(Q) = -4{,}4 < 0$. Vậy P đạt cực đại tại $Q = 90$.

b) S Thay $Q = 90$ vào hàm cầu ta được giá bán trên mỗi sản phẩm để lợi nhuận thu được tối đa $p = 400 - 2 \cdot 90 = 220$.

c) Đ Lợi nhuận tối đa $P(90) = 396 \cdot 90 - 2{,}2 \cdot 90^2 - 400 = 17\,420$.

d) S Khi chi phí đánh thuế 22\$/ một đơn vị sản phẩm, tổng chi phí tăng $22Q$. Hàm chi phí mới là

$$\overline{C_1} = 0,2Q^2 + 4Q + 400 + 22Q$$

và hàm lợi nhuận mới là

$$\begin{aligned} P_1 &= 400Q - 2Q^2 - \left(0{,}2Q^2 + 4Q + 400 + 22Q\right) \\ &= 374Q - 2{,}2Q^2 - 400. \end{aligned}$$

Ta có $P_1'(Q) = 0 \Leftrightarrow 374 - 4{,}4Q = 0 \Leftrightarrow Q = 85$.
Vì $P_1''(Q) = -4{,}4 < 0$ nên để thu được lợi nhuận tối đa, nhà độc quyền phải sản xuất 85 đơn vị sản phẩm với mức giá $P_1 = 400 - 2 \cdot 85 = 230\$$.
Do mức giá này chỉ hơn 10$ so với trước đó nên chỉ một phần thuế được tính vào người tiêu dùng, phần thuế còn lại do nhà sản xuất gánh chịu. Lợi nhuận bây giờ là 15 495.

Chọn đáp án | a đúng | b sai | c đúng | d sai | ....□

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.

CÂU 15. Một vật chuyển động theo quy luật $s = -\dfrac{1}{3}t^3 + 9t^2$, với t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc vật bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật đi được trong thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 10 giây, kể từ lúc bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu?(*kết quả tính bằng m/s*)

Đáp án: | 5 | 4 | | |

Lời giải.

Đáp án: $\boxed{54}$ ....□

CÂU 16. Tại một xưởng sản xuất sản phẩm từ bêtông, chi phí để sản xuất $x(m^3)$ sản phẩm mỗi tháng là $C(x) = 2 + 0,5x + 0,007x^2$ (triệu đồng) với $0 \leq x \leq 27$. Chi phí trung bình là $\overline{C}(x) = \dfrac{C(x)}{x}$. Mỗi tháng xưởng sản xuất bao nhiêu mét khối sản phẩm thì chi phí trung bình để sản xuất là thấp nhất(làm tròn đến hàng phần mười)

Đáp án: | 1 | 6 | , | 9 |

Lời giải.
Đáp án:16,9.
Chi phí trung bình (triệu đồng) trên mỗi mét khối sản phẩm là:
$\overline{C}(x) = \dfrac{C(x)}{x} = \dfrac{2 + 0,5x + 0,007x^2}{x} = \dfrac{2}{x} + 0,5 + 0,007x$.
$\overline{C}'(x) = -\dfrac{2}{x^2} + 0,007 = \dfrac{0,007x^2 - 2}{x^2}$.
$\overline{C}'(x) = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{2000}{7} \Rightarrow x = \sqrt{\frac{2000}{7}}$.
Bảng biến thiên:

x	0		$\sqrt{\frac{2000}{7}}$		$+\infty$
y'	||	$-$	0	$+$	
y	|| $+\infty$	$\searrow$	0.74	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta thấy chi phí trung bình thấp nhất là:
$\overline{C}(\sqrt{\frac{2000}{7}}) \approx 0,7$ đạt được khi $x = \sqrt{\frac{2000}{7}} \approx 16,9$.
Đáp án: $\boxed{16,9}$ ....□

CÂU 17. Cơ sở A chuyên cung cấp một loại sản phẩm nông nghiệp X cho nhà phân phối B. Hai bên thoả thuận rằng, nếu đầu tháng B đặt hàng x tạ sản phẩm X thì giá bán mỗi tạ sản phẩm là $P(x) = 5 - 0{,}0005x^2$ (triệu đồng) $(x \leq 40)$. Chi phí A phải bỏ ra cho x tạ sản phẩm X trong một tháng là $C(x) = 10 + 3{,}5x$ (triệu đồng). Hỏi trong một tháng B đặt hàng bao nhiêu tạ sản phẩm X từ A thì A nhận được lợi nhuận lớn nhất? (*kết quả làm tròn đến hàng phần chục*)

Đáp án: | 3 | 1 | , | 6 |

Lời giải.

a) Số tiền mà A thu được (gọi là doanh thu) từ việc bán x tạ sản phẩm $(0 \leq x \leq 40)$ cho B là

$$R(x) = x \cdot P(x) = x\left(5 - 0{,}0005x^2\right) = 5x - 0{,}0005x^3 \text{ (triệu đồng).}$$

Lợi nhuận (triệu đồng) mà A thu được là

$$P(x) = R(x) - C(x) = x\left(5 - 0{,}0005x^2\right) - (10 + 3{,}5x) = -0{,}0005x^3 + 1{,}5x - 10.$$

b) Xét hàm số $P(x) = -0{,}0005x^3 + 1{,}5x - 10$ với $0 \le x \le 40$, ta có

$$P'(x) = -0{,}0015x^2 + 1{,}5;$$
$$P'(x) = 0 \Leftrightarrow -0{,}0015x^2 + 1{,}5 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1\,000 \Leftrightarrow x = 10\sqrt{10} \in [0;40].$$

Ta có $P(0) = -10$; $P(10\sqrt{10}) \approx 21{,}6$; $P(40) = 42$.
Bảng biến thiên

x	0		$10\sqrt{10}$		40
$\overline{C}'(x)$		$-$	0	$+$	
$\overline{C}(x)$	-10	$\searrow$	$16\sqrt{10}-10$	$\nearrow$	42

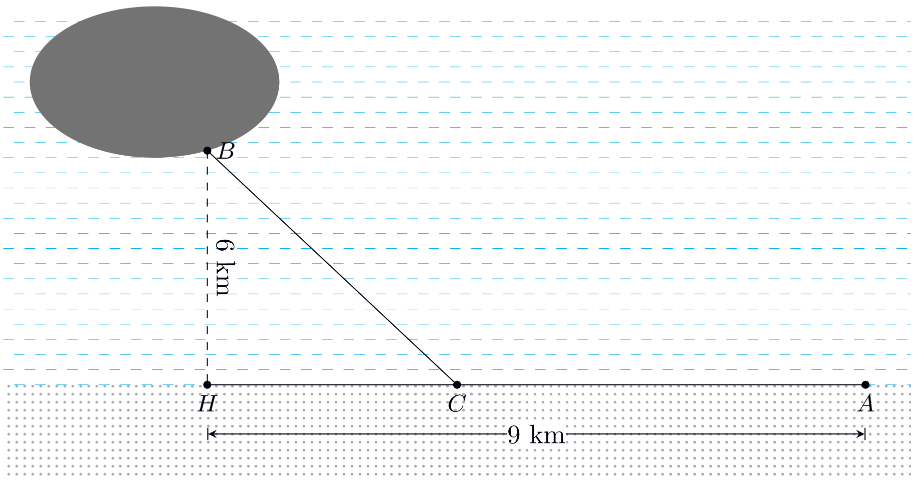
Từ bảng biến thiên, ta có $\min\limits_{[0;40]} P = P(10\sqrt{10}) \approx 21{,}6$.

Vậy A thu được lợi nhuận lớn nhất khi bán $10\sqrt{10} \approx 31{,}6$ tạ sản phẩm cho B mỗi tháng và lợi nhuận lớn nhất thu được khoảng 22 triệu đồng.

Đáp án: $\boxed{31,6}$ .... □

CÂU 18. Một công ty muốn làm một đường ống dẫn từ vị trí A trên bờ biển đến vị trí B trên hòn đảo. Khoảng cách từ điểm B đến bờ biển là $BH = 6$ km (Hình bên dưới). Giá tiền để xây dựng đường ống trên bờ là $50\,000$ USD mỗi kilômét và giá tiền xây dựng đường ống trên biển là $130\,000$ USD mỗi kilômét, biết rằng $AH = 9$ km. Xác định vị trí điểm C cách vị trí A một khoảng bao nhiêu km để khi lắp ống dẫn theo đường gấp khúc ACB thì chi phí công ty bỏ ra là thấp nhất.

Đáp án: | 6 | , | 5 | |



Lời giải.

Đặt $AC = x$, với $x \in [0,9]$. Khi đó $BC = \sqrt{BH^2 + HC^2} = \sqrt{6^2 + (9-x)^2}$.
Tổng chi phí công ty bỏ ra để lắp ống dẫn dẫn theo đường gấp khúc ACB là

$$C(x) = 50000x + 130000\sqrt{6^2 + (9-x)^2} = 10000\left(5x + 13\sqrt{6^2 + (9-x)^2}\right).$$

Do đó, chi phí công ty bỏ ra là thấp nhất khi $f(x) = 5x + 13\sqrt{6^2 + (9-x)^2}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Ta có $f'(x) = 5 + \dfrac{13(x-9)}{\sqrt{36 + (9-x)^2}}$.

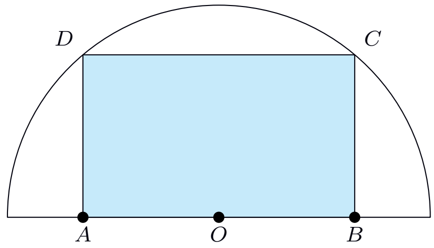
Suy ra $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 5\sqrt{36 + (9-x)^2} = 13(x-9) \Leftrightarrow x = \dfrac{13}{2}$.

Ta có $f(0) = 13\sqrt{117}$, $f\left(\dfrac{13}{2}\right) = 117$ và $f(9) = 123$.

Từ đó, chi phí công ty bỏ ra thấp nhất khi $x = \dfrac{13}{2} = 6{,}5$.

Vậy với $AC = 6{,}5$ khi lắp ống dẫn theo đường gấp khúc ACB thì chi phí công ty bỏ ra là thấp nhất.
Đáp án: $\boxed{6{,}5}$ .... □

CÂU 19. Từ một tấm tôn có hình dạng là nửa hình tròn bán kính $R = 7$, người ta muốn cắt ra một hình chữ nhật (như hình vẽ). Diện tích lớn nhất có thể của tấm tôn hình chữ nhật là bao nhiêu?



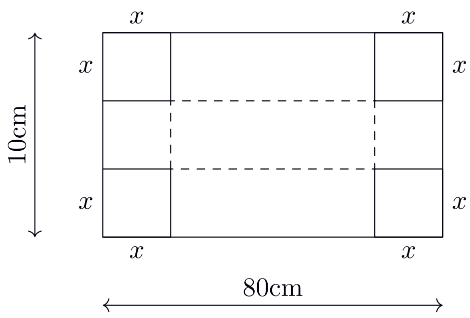
Đáp án: | 4 | 9 | | |

Lời giải.

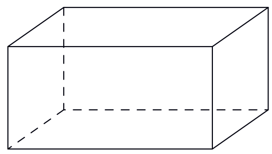
Gọi chiều dài $OA = x \Rightarrow AB = 2x$ $(0 < x < 7)$.
$\Rightarrow AD = \sqrt{OD^2 - OA^2} = \sqrt{49 - x^2}$.
Diện tích hình chữ nhật là $S = AB.AD = 2x\sqrt{49 - x^2}$.
Xét $f(x) = 2x\sqrt{49 - x^2}$ trên $(0; 7)$, ta có
$f'(x) = -\frac{2x^2}{\sqrt{49-x^2}} + 2\sqrt{49 - x^2}$.
$f'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{7\sqrt{2}}{2}$.
$f(x)$ đạt giá trị lớn nhất tại $x = \frac{7\sqrt{2}}{2}$.
Diện tích lớn nhất là $f\left(\frac{7\sqrt{2}}{2}\right) = 49$.
Đáp án: $\boxed{49}$ .... □

CÂU 20. Từ một tấm bìa hình chữ nhật có chiều rộng 10cm và chiều dài 80 cm như hình a, người ta cắt ở bốn góc bốn hình vuông có cạnh x với $1 \leq x \leq 4$ và gấp lại để tạo thành chiếc hộp có dạng hình hộp chữ nhật không nắp như hình b. Tìm x để thể tích chiếc hộp là lớn nhất (kết quả làm tròn đến hàng phần mười).

Đáp án: | 2 | , | 4 | |



a)



b)

Lời giải.

Thể tích chiếc hộp là $V(x) = x(10 - 2x)(80 - 2x) = 4x^3 - 180x^2 + 800x$ với $1 \leq x \leq 4$.
Ta có: $V' = 12x^2 - 360x + 800$.
$V' = 0 \Rightarrow x = 15 - \frac{5\sqrt{57}}{3}, x = \frac{5\sqrt{57}}{3} + 15$.
$V(1) = 624, V(15 - \frac{5\sqrt{57}}{3}) \approx 938.5, V(4) = 576$.
Thể tích hộp lớn nhất khi $x \approx 2,4$ (cm).
Đáp án: $\boxed{2,4}$ .... □

MỤC LỤC

Bài 4. KHẢO SÁT SỰ BIẾN THIÊN VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ 1

A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ 1

B PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN 2

Dạng 1. Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số bậc ba 2

Dạng 2. Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số phân thức hữu tỉ bậc I/I 5

Dạng 3. Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số phân thức hữu tỉ bậc II/I 9

Dạng 4. Sự tương giao của hai đồ thị 11

Bài 5. Ứng dụng đạo hàm và khảo sát hàm số để giải quyết một số bài toán thực tiễn 14

A Lý thuyết cần nhớ 14

B Phân loại và phương pháp giải toán 14

Dạng 5. Bài toán về quãng đường, vận tốc, gia tốc 15

Dạng 6. Bài toán tối ưu hóa trong chi phí, doanh thu, lợi nhuận 15

Dạng 7. Bài toán tối ưu hoá trong hình học 16

Dạng 8. Bài toán về tốc độ thay đổi của một đại lượng 17

LỜI GIẢI CHI TIẾT 22

Bài 4. KHẢO SÁT SỰ BIẾN THIÊN VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ 22

A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ 22

B PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN 23

Dạng 1. Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số bậc ba 23

Dạng 2. Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số phân thức hữu tỉ bậc I/I 30

Dạng 3. Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số phân thức hữu tỉ bậc II/I 39

Dạng 4. Sự tương giao của hai đồ thị 45

Bài 5. Ứng dụng đạo hàm và khảo sát hàm số để giải quyết một số bài toán thực tiễn 49

A Lý thuyết cần nhớ 49

B Phân loại và phương pháp giải toán 50

Dạng 5. Bài toán về quãng đường, vận tốc, gia tốc 50

Dạng 6. Bài toán tối ưu hóa trong chi phí, doanh thu, lợi nhuận 52

Dạng 7. Bài toán tối ưu hoá trong hình học 53

Dạng 8. Bài toán về tốc độ thay đổi của một đại lượng 56