

Bài 3. CÁC KHÁI NIỆM MỞ ĐẦU

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Khái niệm vectơ

Khái niệm: Vectơ là một đoạn thẳng có hướng. Vectơ có điểm đầu là A , điểm cuối là B được kí hiệu là \overrightarrow{AB} , đọc là “vectơ AB ”.

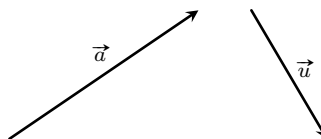
Đối với vectơ AB , ta gọi



☑ Đường thẳng d đi qua hai điểm A và B là giá của vectơ AB .

☑ Độ dài đoạn thẳng AB là độ dài của vectơ AB , kí hiệu là $|\overrightarrow{AB}|$.

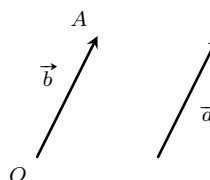
Khi không cần chỉ rõ điểm đầu và điểm cuối của vectơ, vectơ còn được kí hiệu là $\vec{a}, \vec{b}, \vec{u}, \vec{v}, \dots$. Độ dài của vectơ \vec{a} được kí hiệu là $|\vec{a}|$.



2. Hai vectơ cùng phương, cùng hướng, bằng nhau

Định nghĩa: Hai vectơ \vec{a}, \vec{b} bằng nhau nếu chúng cùng hướng và cùng độ dài, kí hiệu là $\vec{a} = \vec{b}$.

Nhận xét: Khi cho trước vectơ \vec{a} và điểm O , thì ta luôn tìm được một điểm A duy nhất sao cho $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$.



3. Vectơ không

Định nghĩa: Vectơ không (kí hiệu là $\vec{0}$) là vectơ có điểm đầu và điểm cuối trùng nhau. Với các điểm bất kì A, B, C ta có $\vec{0} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{CC}$.

Quy ước: $\vec{0}$ (vectơ không) cùng phương và cùng hướng với mọi vectơ; hơn nữa $|\vec{0}| = 0$.

Nhận xét: Hai điểm A, B trùng nhau khi và chỉ khi $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$.

B. CÁC DẠNG TOÁN

1

Xác định một vectơ, độ dài vectơ

1. Ví dụ minh họa

VÍ DỤ 1. Cho tứ giác $ABCD$. Hãy chỉ ra các vectơ khác vectơ không có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của tứ giác.

VÍ DỤ 2. Cho hình vuông $ABCD$ với cạnh có độ dài bằng 1. Tính độ dài các vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{DB}$.

VÍ DỤ 3. Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng a . Gọi M là trung điểm của BC . Tính độ dài vectơ \overrightarrow{AM} .

2. Bài tập tự luận

BÀI 1. Cho lục giác đều $ABCDEF$ có cạnh bằng a .

a) Có bao nhiêu vectơ khác vectơ không có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của ngũ giác?

b) Tính độ dài các vectơ \overrightarrow{AD}

BÀI 2. Cho tam giác ABC vuông tại A có $BC = 2a$. Gọi M là trung điểm của BC tính độ dài vectơ \overrightarrow{AM} .

QUICK NOTE

QUICK NOTE

2

Hai vectơ cùng phương, cùng hướng và bằng nhau

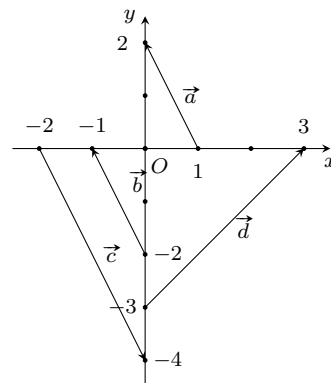
Sử dụng các định nghĩa

- ☑ Hai vectơ cùng phương nếu chúng có giá song song hoặc trùng nhau.
- ☑ Hai vectơ cùng phương thì cùng hướng hoặc ngược hướng.
- ☑ Hai vectơ bằng nhau nếu chúng cùng độ dài và cùng hướng.

1. Ví dụ minh họa

VÍ DỤ 1.

Cho hình vẽ, hãy chỉ ra các vectơ cùng phương, các cặp vectơ ngược hướng và các cặp vectơ bằng nhau



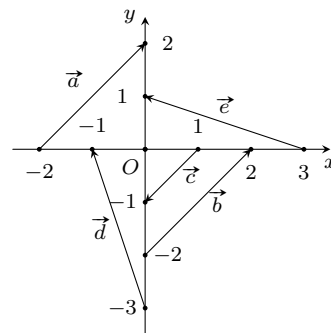
VÍ DỤ 2. Cho hình bình hành $ABCD$ có tâm là O . Hãy tìm các cặp vectơ khác $\vec{0}$, bằng nhau và

- a) có điểm đầu và điểm cuối trong các điểm A, B, C và D .
- b) có điểm đầu là O hoặc điểm cuối là O .

2. Bài tập tự luận

BÀI 1.

Cho hình vẽ, hãy chỉ ra các vectơ cùng phương, các cặp vectơ ngược hướng và các cặp vectơ bằng nhau

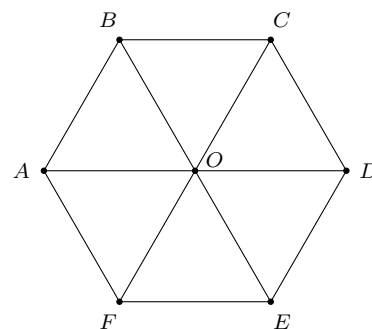


BÀI 2. Cho tam giác đều ABC , hãy chỉ ra mối quan hệ về độ dài, phương và hướng giữa cặp vectơ \vec{BA} và \vec{CA} . Hai vectơ có bằng nhau không?

BÀI 3.

Cho hình lục giác đều $ABCDEF$ có tâm O .

- a) Hãy tìm các vectơ khác $\vec{0}$ và bằng với \vec{AB} .
- b) Hãy vẽ vectơ bằng với \vec{AE} và có điểm đầu là B .
- c) Hãy vẽ vectơ bằng với \vec{AE} và có điểm đầu là C .



BÀI 4. Chứng minh ba điểm A, B, C thẳng hàng khi và chỉ khi \vec{AB}, \vec{AC} cùng phương.

C. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

CÂU 1. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau.

QUICK NOTE

- (A) vectơ là một đường thẳng có hướng.
 (B) vectơ là một đoạn thẳng.
 (C) vectơ là một đoạn thẳng có hướng.
 (D) vectơ là một đoạn thẳng không phân biệt điểm đầu và điểm cuối.

CÂU 2. Cho tam giác ABC có thể xác định được bao nhiêu vectơ (khác vectơ không) có điểm đầu và điểm cuối là đỉnh A, B, C ?

- (A) 2. (B) 3. (C) 4. (D) 6.

CÂU 3. Cho hai điểm phân biệt A, B . Số vectơ (khác $\vec{0}$) có điểm đầu và điểm cuối lấy từ các điểm A, B là

- (A) 2. (B) 6. (C) 13. (D) 12.

CÂU 4. Cho tam giác đều ABC . Mệnh đề nào sau đây sai?

- (A) $\vec{AB} = \vec{BC}$. (B) $\vec{AC} \neq \vec{BC}$.
 (C) $|\vec{AB}| = |\vec{BC}|$. (D) \vec{AC} không cùng phương \vec{BC} .

CÂU 5. Khẳng định nào dưới đây là sai?

- (A) Mỗi vectơ đều có một độ dài, đó là khoảng cách giữa điểm đầu và điểm cuối của vectơ đó.
 (B) Độ dài của vectơ \vec{a} được kí hiệu là $|\vec{a}|$.
 (C) $|\vec{PQ}| = \vec{PQ}$.
 (D) $|\vec{AB}| = AB = BA$.

CÂU 6. Cho tam giác ABC . Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AB, AC . Mệnh đề nào sau đây sai?

- (A) $\vec{BC} = 2\vec{NM}$. (B) $\vec{MN} = \frac{1}{2}\vec{BC}$. (C) $\vec{AN} = \vec{NC}$. (D) $|\vec{MA}| = |\vec{MB}|$.

CÂU 7. Cho hai vectơ không cùng phương \vec{a} và \vec{b} . Khẳng định nào sau đây đúng?

- (A) Không có vectơ nào cùng phương với cả hai vectơ \vec{a} và \vec{b} .
 (B) Có vô số vectơ cùng phương với cả hai vectơ \vec{a} và \vec{b} .
 (C) Có một vectơ cùng phương với cả hai vectơ \vec{a} và \vec{b} .
 (D) Có hai vectơ cùng phương với cả hai vectơ \vec{a} và \vec{b} .

CÂU 8. Cho 3 điểm phân biệt A, B, C . Khi đó khẳng định nào sau đây sai?

- (A) A, B, C thẳng hàng khi và chỉ khi \vec{AB} và \vec{AC} cùng phương.
 (B) A, B, C thẳng hàng khi và chỉ khi \vec{AB} và \vec{BC} cùng phương.
 (C) A, B, C thẳng hàng khi và chỉ khi \vec{AC} và \vec{BC} cùng phương.
 (D) A, B, C thẳng hàng khi và chỉ khi $AC = BC$.

CÂU 9. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- (A) Có duy nhất một vectơ cùng phương với mọi vectơ.
 (B) Có ít nhất hai vectơ cùng phương với mọi vectơ.
 (C) Có vô số vectơ cùng phương với mọi vectơ.
 (D) Không có vectơ nào cùng phương với mọi vectơ.

CÂU 10. Khẳng định nào sau đây đúng?

- (A) Hai vectơ cùng phương với một vectơ thứ ba thì cùng phương.
 (B) Hai vectơ cùng phương với một vectơ thứ ba khác $\vec{0}$ thì cùng phương.
 (C) vectơ không là vectơ không có giá.
 (D) Điều kiện đủ để hai vectơ bằng nhau là chúng có độ dài bằng nhau.

CÂU 11. Cho lục giác đều $ABCDEF$ tâm O . Số các vectơ khác $\vec{0}$ cùng phương với \vec{OC} có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của lục giác bằng

- (A) 6. (B) 7. (C) 8. (D) 4.

QUICK NOTE

CÂU 12. Cho ba điểm A, B, C phân biệt. Khi đó

- (A) Điều kiện cần và đủ để A, B, C thẳng hàng là \overrightarrow{AC} cùng phương với \overrightarrow{AB} .
 (B) Điều kiện đủ để A, B, C thẳng hàng là \overrightarrow{CA} cùng phương với \overrightarrow{AB} .
 (C) Điều kiện cần để A, B, C thẳng hàng là \overrightarrow{CA} cùng phương với \overrightarrow{AB} .
 (D) Điều kiện cần và đủ để A, B, C thẳng hàng là $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$.

CÂU 13. Cho vectơ $\overrightarrow{MN} \neq \vec{0}$. Số vectơ cùng hướng với vectơ \overrightarrow{MN} là

- (A) vô số. (B) 1. (C) 3. (D) 2.

CÂU 14. Gọi C là trung điểm của đoạn AB . Hãy chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau.

- (A) $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CB}$. (B) \overrightarrow{AB} và \overrightarrow{AC} cùng hướng.
 (C) \overrightarrow{AB} và \overrightarrow{CB} ngược hướng. (D) $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CB}|$.

CÂU 15. Cho ba điểm M, N, P thẳng hàng, trong đó điểm N nằm giữa hai điểm M và P . Khi đó các cặp vectơ nào cùng hướng?

- (A) \overrightarrow{MP} và \overrightarrow{PN} . (B) \overrightarrow{MN} và \overrightarrow{PN} . (C) \overrightarrow{NM} và \overrightarrow{NP} . (D) \overrightarrow{MN} và \overrightarrow{MP} .

CÂU 16. Phát biểu nào sau đây đúng?

- (A) Hai vectơ không bằng nhau thì độ dài của chúng không bằng nhau.
 (B) Hai vectơ không bằng nhau thì độ dài của chúng không cùng phương.
 (C) Hai vectơ bằng nhau thì có giá trùng nhau hoặc song song nhau.
 (D) Hai vectơ có độ dài không bằng nhau thì không cùng hướng.

CÂU 17. Cho vectơ $\vec{a} \neq \vec{0}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- (A) Có vô số vectơ \vec{u} mà $\vec{u} = \vec{a}$. (B) Có duy nhất một \vec{u} mà $\vec{u} = \vec{a}$.
 (C) Có duy nhất một \vec{u} mà $\vec{u} = -\vec{a}$. (D) Không có vectơ \vec{u} nào mà $\vec{u} = \vec{a}$.

CÂU 18. Cho hình bình hành $ABCD$. Đẳng thức nào sau đây sai?

- (A) $|\overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{BC}|$. (B) $|\overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{DA}|$. (C) $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|$. (D) $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BD}|$.

CÂU 19. Cho lục giác đều $ABCDEF$ tâm O . Ba vectơ bằng vectơ \overrightarrow{BA} là

- (A) $\overrightarrow{OF}, \overrightarrow{DE}, \overrightarrow{OC}$. (B) $\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{OF}, \overrightarrow{DE}$. (C) $\overrightarrow{OF}, \overrightarrow{DE}, \overrightarrow{CO}$. (D) $\overrightarrow{OF}, \overrightarrow{ED}, \overrightarrow{OC}$.

CÂU 20. Cho đoạn thẳng AB , I là trung điểm của AB . Khi đó

- (A) $\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{AI}$. (B) \overrightarrow{BI} cùng hướng \overrightarrow{AB} .
 (C) $|\overrightarrow{BI}| = 2|\overrightarrow{IA}|$. (D) $|\overrightarrow{BI}| = |\overrightarrow{IA}|$.

CÂU 21. Cho hình thoi $ABCD$ cạnh a và $\widehat{BAD} = 60^\circ$. Đẳng thức nào sau đây đúng?

- (A) $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{DA}$. (B) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD}$. (C) $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC}$. (D) $|\overrightarrow{BD}| = a$.

CÂU 22. Cho hình chữ nhật $ABCD$. Trong các đẳng thức dưới đây, đẳng thức nào đúng?

- (A) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. (B) $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$. (C) $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$. (D) $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{DA}$.

CÂU 23. Cho tam giác ABC với trung tuyến AM và trọng tâm G . Khi đó $|\overrightarrow{GA}|$ bằng

- (A) $\frac{1}{2}|\overrightarrow{AM}|$. (B) $\frac{2}{3}|\overrightarrow{GM}|$. (C) $2|\overrightarrow{GM}|$. (D) $-\frac{2}{3}|\overrightarrow{MA}|$.

Bài 4. TỔNG VÀ HIỆU CỦA HAI VECTƠ

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

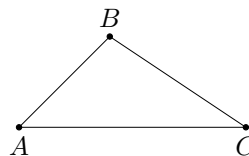
1. Phép toán cộng hai vectơ

Phép cộng hai vectơ có tính chất giao hoán. Khi thực hiện phép toán cộng hai vectơ, ta chú ý các quy tắc sau

⚙️ **Quy tắc 3 điểm:** ("nối đuôi")

CÂU 23 Với ba điểm A, B, C bất kì, ta luôn có

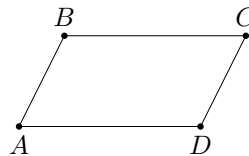
$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$



Quy tắc hình bình hành: ("chung đầu")

CÂU 23 Xét hình bình hành $ABCD$, ta luôn có

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$$



Quy tắc cộng vectơ đôi: Nếu \vec{a} và \vec{b} đối nhau thì $\vec{a} + \vec{b} = \vec{0}$.

Tính chất: Với ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ tùy ý

- ☑ Tính chất giao hoán: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.
- ☑ Tính chất kết hợp: $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$.
- ☑ Tính chất của vectơ-không: $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$.

2. Phép toán hiệu hai vectơ

Vectơ đối:

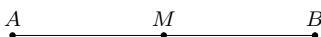
- Vectơ đối của \vec{a} kí hiệu là $-\vec{a}$.
- Vectơ đối của \overrightarrow{AB} là \overrightarrow{BA} , nghĩa là $-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$ (dùng để làm mất dấu trừ trước vectơ).
- Vectơ $\vec{0}$ được coi là vectơ đối của chính nó.

Quy tắc trừ: Với ba điểm A, B, C bất kì, ta luôn có $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$

3. Công thức trung điểm, trọng tâm

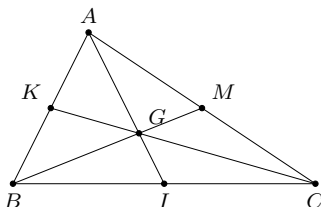
Công thức trung điểm: Nếu M là trung điểm của đoạn AB thì

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$$



Công thức trọng tâm: Nếu G là trọng tâm của tam giác ABC thì

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$$



B. CÁC DẠNG TOÁN

1. Tính tổng, hiệu hai vectơ

- ☑ Ghép các vectơ lại thích hợp.
- ☑ Dùng các quy tắc cộng vectơ để tính.

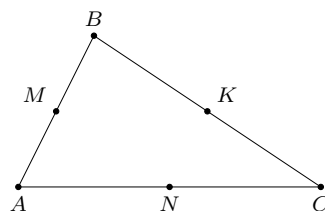
QUICK NOTE

QUICK NOTE

1. Ví dụ minh họa

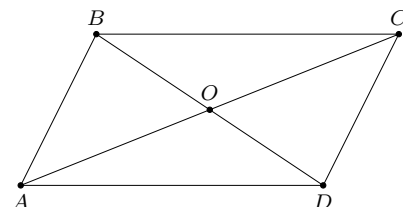
CÂU 0. Cho tam giác ABC . Các điểm M, N và K lần lượt là trung điểm của AB, AC và BC .

- Tìm các vectơ bằng với \overrightarrow{MK} .
- Tìm các vectơ đối của \overrightarrow{MN} .
- Xác định các vectơ $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MN}$; $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{NK}$; $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{KN}$; $\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AN}$; $\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{NC}$; $\overrightarrow{BK} - \overrightarrow{CK}$.



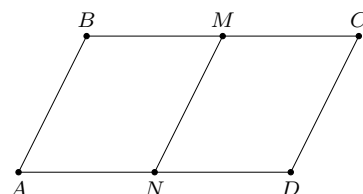
CÂU 0. Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O .

- Tìm vectơ bằng với \overrightarrow{OC} .
- Xác định các vectơ $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}$; $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}$; $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$; $\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{DC}$.



CÂU 0. Cho hình bình hành $ABCD$ Hai điểm M và N lần lượt là trung điểm của BC và AD Xác định vectơ

$$\begin{aligned} \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC}, & \quad \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN}, \\ \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{CM}, & \quad \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{NC}. \end{aligned}$$



2. Bài tập tự luận

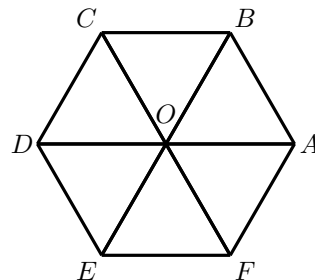
BÀI 1. Tính tổng $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{RN} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{QR}$.

BÀI 2. Cho tam giác ABC với M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB . Tính tổng $\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CN}$.

BÀI 3. Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $AB'C'D'$ có chung đỉnh A . Tính $\vec{u} = \overrightarrow{B'B} + \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{D'D}$.

BÀI 4. Cho tam giác ABC , gọi D, E, F, G, H, I theo thứ tự là trung điểm các cạnh AB, BC, CA, DF, DE, EF . Tính vectơ $\vec{u} = \overrightarrow{BE} - \overrightarrow{GH} - \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{FE}$?

CÂU 0. Cho lục giác đều $ABCDEF$ tâm O . Rút gọn vectơ $\vec{v} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DE}$?



BÀI 6. Gọi O là tâm của tam giác đều ABC . Tính $\vec{u} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.

BÀI 7. Cho hình bình hành $ABCD$. Trên các đoạn thẳng DC, AB theo thứ tự lấy các điểm M, N sao cho $DM = BN$. Gọi P là giao điểm của AM, DB và Q là giao điểm của CN, DB . Tính $\vec{u} = \overrightarrow{DP} - \overrightarrow{QB}$.

2

Xác định vị trí của một điểm từ đẳng thức vectơ

1. Ví dụ minh họa

VÍ DỤ 1. Cho tam giác ABC . Điểm M thỏa mãn điều kiện $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- M là điểm sao cho tứ giác $BAMC$ là hình bình hành.
- M là điểm sao cho tứ giác $ABMC$ là hình bình hành.
- M là trọng tâm tam giác ABC .
- M thuộc đường trung trực của AB .

2. Bài tập tự luận

BÀI 1. Cho tam giác ABC . Xác định điểm M thỏa mãn điều kiện $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$.

BÀI 2. Cho hình bình hành $ABCD$. Xác định điểm M thỏa mãn điều kiện $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AM}$.

BÀI 3. Cho hình bình hành $ABCD$. Xác định điểm M thỏa mãn điều kiện $|\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{CD}| = |\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{DA}|$.

3

Tính độ dài vectơ

1. Ví dụ minh họa

VÍ DỤ 1. Cho tam giác đều ABC có cạnh $AB = a$, xác định và tính độ dài của vectơ

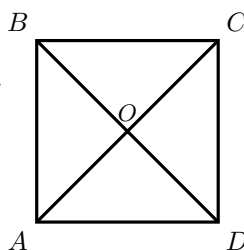
a) $\vec{x} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$.

b) $\vec{y} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

VÍ DỤ 2.

Cho hình vuông $ABCD$ tâm O cạnh bằng a . Tính

a) $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}|$. b) $|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}|$. c) $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{BC}|$.



2. Bài tập tự luận

BÀI 1. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 2$, $AC = 4$, xác định và tính độ dài của vectơ $\vec{u} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

BÀI 2. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AC = 5$, $AB = 3$, xác định và tính độ dài của vectơ

a) $\vec{a} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}$.

b) $\vec{b} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

BÀI 3. Cho hình thang $ABCD$ có $\hat{A} = \hat{D} = 90^\circ$, $AB = AD = 3$, $CD = 5$, xác định và tính độ dài của vectơ

a) $\vec{x} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$.

b) $\vec{y} = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC}$.

4

Chứng minh một đẳng thức vectơ

Ta thường dùng một trong hai cách sau:

- ① Thực hiện các phép toán, biến đổi đẳng thức cần chứng minh đi đến một kết quả hiển nhiên đúng.
- ② Biến đổi vế phức tạp thành vế đơn giản (biến vế trái thành vế phải hoặc ngược lại)

1. Ví dụ minh họa

VÍ DỤ 1. Cho bốn điểm A, B, C, D . Chứng minh các đẳng thức sau:

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \vec{0}$;

b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$;

c) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$;

d) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD}$.

VÍ DỤ 2. Cho tam giác ABC . Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA và AB ; O là một điểm bất kì. Chứng minh rằng

a) $\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CN} + \overrightarrow{AP} = \vec{0}$;

b) $\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BM} = \vec{0}$;

c) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP}$.

VÍ DỤ 3. Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O ; M là một điểm bất kì trong mặt phẳng. Chứng minh

QUICK NOTE

QUICK NOTE

- a) $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AC} = \vec{0}$; b) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$;
c) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{CO} - \overrightarrow{CD}$; d) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD}$.

2. Bài tập tự luận

BÀI 1. Cho năm điểm A, B, C, D, E . Chứng minh rằng

- a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EA} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{ED}$; b) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{EC} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{CB}$.

BÀI 2. Cho các sáu điểm A, B, C, D, E, F . Chứng minh rằng

- a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EA} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{ED}$; b) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{CD}$;
c) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DE} - \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB}$; d) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{EF} - \overrightarrow{ED} = \vec{0}$.

BÀI 3. Cho tam giác ABC . Vẽ về phía ngoài tam giác ABC các hình bình hành $ABEF, ACPQ, BCIJ$. Chứng minh $\overrightarrow{EJ} + \overrightarrow{IP} + \overrightarrow{QF} = \vec{0}$.

BÀI 4. Cho tam giác ABC có trung tuyến AM .

- a) Chứng minh $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AM} = \vec{0}$;
b) Trên cạnh AC lấy hai điểm E và F sao cho $AE = EF = FC$; BE cắt AM tại N . Chứng minh \overrightarrow{NA} và \overrightarrow{NM} là hai vec tơ đối nhau.

BÀI 5. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm AB, BC, CD, DA . Chứng minh rằng $\overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{NP}$.

BÀI 6. Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O . Gọi M, N lần lượt là trung điểm BC và AD . Chứng minh rằng

- a) $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$; b) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$;
c) $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{OA}$; d) $\overrightarrow{ND} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AM}$.

5

Ứng dụng của vectơ trong thực tiễn

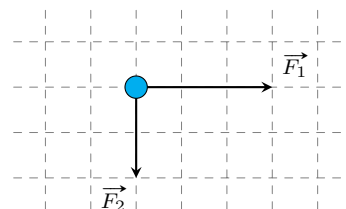
Phép cộng vectơ tương ứng với các quy tắc tổng hợp lực, tổng hợp vận tốc:

- Nếu hai lực cùng tác động vào chất điểm A và được biểu diễn bởi các vectơ \vec{u}_1, \vec{u}_2 thì hợp lực tác động vào A được biểu diễn bởi vectơ $\vec{u}_1 + \vec{u}_2$.
- Nếu một con thuyền di chuyển trên sông với vận tốc riêng (vận tốc so với dòng nước) được biểu diễn bởi vectơ \vec{v}_r và vận tốc của dòng nước (so với bờ) được biểu diễn bởi vectơ \vec{v}_n thì vận tốc thực tế của thuyền (so với bờ) được biểu diễn bởi vectơ $\vec{v}_r + \vec{v}_n$.

1. Ví dụ minh họa

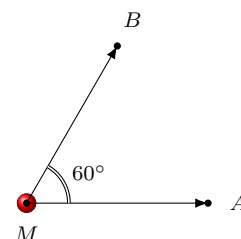
VÍ DỤ 1.

Cho hai lực đồng quy \vec{F}_1 và \vec{F}_2 như hình vẽ. Biết độ lớn của \vec{F}_1, \vec{F}_2 lần lượt là 3N và 2N. Tính độ lớn hợp lực của \vec{F}_1 và \vec{F}_2 .



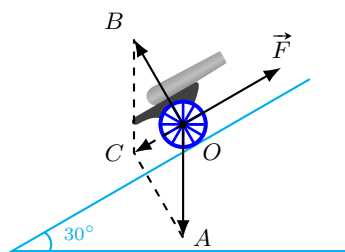
VÍ DỤ 2.

Cho hai lực $\vec{F}_1 = \overrightarrow{MA}, \vec{F}_2 = \overrightarrow{MB}$ cùng tác động vào một vật tại điểm M cường độ hai lực \vec{F}_1, \vec{F}_2 đều bằng 300 (N) và $\widehat{AMB} = 60^\circ$. Tìm cường độ của lực tổng hợp tác động vào vật.



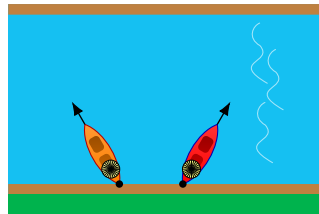
VÍ DỤ 3.

Tính lực kéo cần thiết để kéo một khẩu pháo có trọng lượng 22 148 N (xấp xỉ 2 260 kg) lên một con dốc nghiêng 30° so với phương nằm ngang (hình bên). Nếu lực kéo của mỗi người bằng 100 N thì cần tối thiểu bao nhiêu người để kéo pháo (bỏ qua ma sát trượt giữa bánh xe và mặt phẳng nghiêng)?



VÍ DỤ 4.

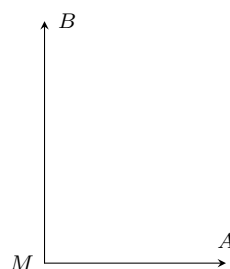
Hai con tàu xuất phát cùng lúc từ bờ bên này để sang bờ bên kia của dòng sông (hai bờ song song nhau) với vận tốc riêng không đổi và có độ lớn bằng nhau. Hai tàu luôn giữ lái sao cho chúng tạo với bờ cùng một góc nhọn nhưng một tàu hướng xuống hạ lưu, một tàu hướng lên thượng nguồn. Vận tốc dòng nước là đáng kể, các yếu tố bên ngoài khác không ảnh hưởng tới vận tốc của các tàu. Hỏi tàu nào sang bờ bên kia trước?



2. Bài tập tự luận

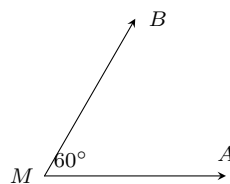
BÀI 1.

Cho hai lực $\vec{F}_1 = \vec{MA}$, $\vec{F}_2 = \vec{MB}$ cùng tác động vào một vật tại điểm M cường độ hai lực \vec{F}_1 , \vec{F}_2 lần lượt là 300 (N) và 400 (N) và $\widehat{AMB} = 90^\circ$. Tìm cường độ của lực tổng hợp tác động vào vật.



BÀI 2.

Cho hai lực $\vec{F}_1 = \vec{MA}$, $\vec{F}_2 = \vec{MB}$ cùng tác động vào một vật tại điểm M cường độ hai lực \vec{F}_1 , \vec{F}_2 đều bằng 300 (N) và $\widehat{AMB} = 60^\circ$. Tìm cường độ của lực tổng hợp tác động vào vật.



C. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

CÂU 1. Cho ba điểm phân biệt A, B, C. Đẳng thức nào sau đây đúng?

- (A) $\vec{CA} - \vec{BA} = \vec{CB}$. (B) $\vec{AB} + \vec{AC} = \vec{CB}$. (C) $\vec{AB} + \vec{CA} = \vec{BC}$. (D) $\vec{AB} - \vec{AC} = \vec{BC}$.

CÂU 2. Rút gọn biểu thức vectơ $\vec{AM} + \vec{MB} - \vec{AC}$ ta được kết quả đúng là

- (A) \vec{MB} . (B) \vec{BC} . (C) \vec{CB} . (D) \vec{AB} .

CÂU 3. Gọi O là tâm hình vuông ABCD. Tính $\vec{OB} - \vec{OC}$.

- (A) $\vec{OB} - \vec{OC} = \vec{BC}$. (B) $\vec{OB} - \vec{OC} = \vec{DA}$.
(C) $\vec{OB} - \vec{OC} = \vec{OD} - \vec{OA}$. (D) $\vec{OB} - \vec{OC} = \vec{AB}$.

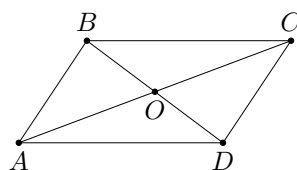
CÂU 4. Cho bốn điểm A, B, C, D phân biệt và $\vec{u} = \vec{AD} + \vec{CD} - \vec{CB} - \vec{BD}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- (A) $\vec{u} = \vec{0}$. (B) $\vec{u} = \vec{AD}$. (C) $\vec{u} = \vec{CD}$. (D) $\vec{u} = \vec{AC}$.

CÂU 5.

Cho hình bình hành ABCD tâm O. Hỏi vectơ $\vec{AO} - \vec{DO}$ bằng vectơ nào trong các vectơ sau?

- (A) \vec{BA} . (B) \vec{BC} . (C) \vec{DC} . (D) \vec{AC} .



CÂU 6. Cho tam giác ABC. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh AB, AC, BC. Tổng $\vec{MP} + \vec{NP}$ bằng vectơ nào?

- (A) \vec{PA} . (B) \vec{AM} . (C) \vec{PB} . (D) \vec{AP} .

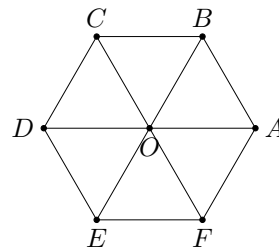
CÂU 7.

QUICK NOTE

QUICK NOTE

Cho lục giác đều $ABCDEF$ có tâm O . Đẳng thức nào sau đây sai?

- (A) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OE} = \vec{0}$. (B) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{EB}$.
(C) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EF} = \vec{0}$. (D) $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AD}$.



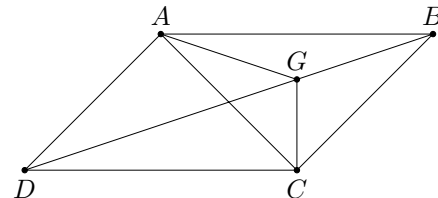
CÂU 8. Cho hình bình hành $ABCD$. vectơ $\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB}$ bằng vectơ nào dưới đây?

- (A) \overrightarrow{DB} . (B) \overrightarrow{BD} . (C) \overrightarrow{AC} . (D) \overrightarrow{CA} .

CÂU 9.

Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC . Mệnh đề nào sau đây đúng?

- (A) $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \overrightarrow{BD}$.
(B) $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \overrightarrow{CD}$.
(C) $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$.
(D) $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GD} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{CD}$.



CÂU 10. Chọn mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau.

- (A) Nếu $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$ thì $|\vec{a}| + |\vec{b}| = |\vec{c}|$.
(B) $\overrightarrow{FY} - \overrightarrow{BY} = \overrightarrow{FB}$ với B, F, Y bất kì.
(C) Nếu $ABCD$ là hình bình hành thì $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$.
(D) $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MH} = \overrightarrow{AH}$ với A, M, H bất kì.

CÂU 11. Trong mặt phẳng cho bốn điểm bất kì A, B, C, O . Đẳng thức nào sau đây là đúng?

- (A) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA}$. (B) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}$. (C) $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CO}$. (D) $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{BA}$.

CÂU 12. Cho ba điểm A, B, C phân biệt. Đẳng thức nào sau đây là **sai**?

- (A) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB}$. (B) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$. (C) $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$. (D) $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB}$.

CÂU 13. Tổng $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{RN} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{QR}$ bằng

- (A) \overrightarrow{MR} . (B) \overrightarrow{MN} . (C) \overrightarrow{MP} . (D) \overrightarrow{MQ} .

CÂU 14. Cho 4 điểm bất kì A, B, C, D . Đẳng thức nào sau đây sai?

- (A) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}$. (B) $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{CD}$.
(C) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DA}$. (D) $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DC}$.

CÂU 15. Cho bốn điểm A, B, C . Tính $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$.

- (A) \overrightarrow{CA} . (B) $2 \cdot \overrightarrow{AC}$. (C) $\vec{0}$. (D) \overrightarrow{AC} .

CÂU 16. Cho tam giác ABC và điểm M bất kỳ, chọn đẳng thức **đúng**.

- (A) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}$. (B) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB}$.
(C) $\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{CB}$. (D) $\overrightarrow{AA} - \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{AB}$.

CÂU 17. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm BC và AD . Tổng của \overrightarrow{NC} và \overrightarrow{MC} là

- (A) $\vec{0}$. (B) \overrightarrow{MN} . (C) \overrightarrow{NM} . (D) \overrightarrow{AC} .

CÂU 18. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm BC và AD . Tính $\overrightarrow{JC} - \overrightarrow{IC}$ không bằng

- (A) \overrightarrow{DC} . (B) \overrightarrow{JI} . (C) \overrightarrow{AB} . (D) \overrightarrow{AC} .

CÂU 19. Cho hình bình hành $ABCD$. Điểm M thỏa mãn điều kiện $\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{DO}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- (A) M trùng với A . (B) M trùng với B . (C) M trùng với O . (D) M trùng với C .

CÂU 20. Cho hình bình hành $ABCD$ có tâm O . Điểm M thỏa mãn điều kiện $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{DC}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- (A) M trùng với B . (B) M trùng với D .
(C) M trùng với A . (D) M trùng với điểm O .

CÂU 21. Cho bốn điểm phân biệt A, B, C, D . Biết điểm M thỏa mãn điều kiện $\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- (A) M là trung điểm CD . (B) M là trung điểm AB .
(C) M là trung điểm AD . (D) M là trung điểm BC .

CÂU 22. Cho các điểm phân biệt A, B, C, D, E, F . Biết điểm M thỏa mãn điều kiện $\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{DF}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- (A) M là trọng tâm tam giác ABC . (B) M là trọng tâm tam giác BCD .
(C) M là trọng tâm tam giác ABD . (D) M là trọng tâm tam giác ACD .

CÂU 23. Cho hình bình hành $ABCD$ có E là trung điểm AB . Điểm M thỏa mãn điều kiện $\overrightarrow{EB} = \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{BC}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- (A) M là trung điểm AD . (B) M là trung điểm CD .
(C) M là trung điểm AB . (D) M là trung điểm BC .

CÂU 24. Cho tam giác ABC đều có cạnh bằng a . Tìm tập hợp điểm M thỏa mãn điều kiện $|\overrightarrow{MC}| = |\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}|$.

- (A) M thuộc đường tròn tâm A bán kính $a\sqrt{3}$.
(B) M thuộc đường tròn tâm C bán kính $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.
(C) M thuộc đường tròn tâm B bán kính $a\sqrt{3}$.
(D) M thuộc đường tròn tâm C bán kính $a\sqrt{3}$.

CÂU 25. Cho hình thang $ABCD$ có AB song song với CD . Cho $AB = 2a, CD = a$. O là trung điểm của AD . Khi đó,

- (A) $|\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}| = \frac{3a}{2}$. (B) $|\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}| = a$.
(C) $|\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}| = 2a$. (D) $|\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}| = 3a$.

CÂU 26. Cho tam giác ABC vuông cân tại A có $BC = a\sqrt{2}$, M là trung điểm của BC . Khẳng định nào sau đây đúng?

- (A) $|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BM}| = a$. (B) $|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BM}| = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.
(C) $|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BM}| = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. (D) $|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BM}| = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.

CÂU 27. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a tâm O . Tính theo a độ dài của vectơ $\vec{u} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{BC}$.

- (A) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. (B) $\frac{3a\sqrt{2}}{2}$. (C) $a\sqrt{2}$. (D) a .

CÂU 28. Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng a . Khi đó $|\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}|$ bằng

- (A) $2a$. (B) $a\sqrt{2}$. (C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$. (D) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

CÂU 29. Cho tam giác ABC vuông cân tại C , $AB = \sqrt{2}$. Tính độ dài của $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

- (A) $\sqrt{5}$. (B) $2\sqrt{5}$. (C) $\sqrt{3}$. (D) $2\sqrt{3}$.

CÂU 30. Cho hình bình hành $ABCD$ có $DA = 2\text{cm}$, $AB = 4\text{cm}$ và đường chéo $BD = 5\text{cm}$. Tính $|\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{DA}|$.

- (A) 2cm . (B) 4cm . (C) 5cm . (D) 6cm .

CÂU 31. Cho hình thang $ABCD$ có hai đáy $AB = a, CD = 2a$. Gọi M, N là trung điểm của AD, BC . Khi đó $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MN}|$ bằng

- (A) $\frac{a}{2}$. (B) $3a$. (C) a . (D) $2a$.

CÂU 32. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a , d là đường thẳng qua A , song song với BD . Gọi M là điểm thuộc đường thẳng d sao cho $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MD}|$ nhỏ nhất. Tính theo a độ dài vectơ \overrightarrow{MD} .

- (A) $a\sqrt{2}$. (B) $\frac{a\sqrt{10}}{2}$. (C) a . (D) $\frac{a\sqrt{5}}{2}$.

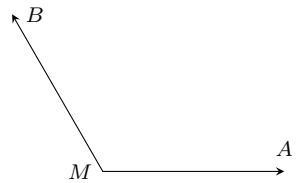
QUICK NOTE

QUICK NOTE

CÂU 33.

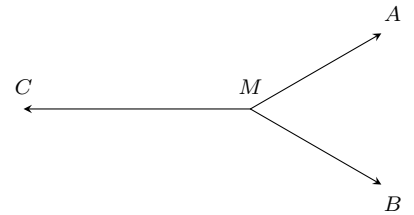
Cho hai lực $\vec{F}_1 = \vec{MA}$, $\vec{F}_2 = \vec{MB}$ cùng tác động vào một vật tại điểm M cường độ hai lực \vec{F}_1 , \vec{F}_2 đều bằng 300 (N) và $\widehat{AMB} = 120^\circ$. Tìm cường độ của lực tổng hợp tác động vào vật.

- (A) 300 (N). (B) 700 (N). (C) 100 (N). (D) 500 (N).

**CÂU 34.**

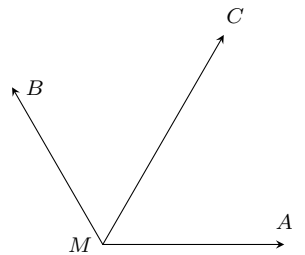
Cho ba lực $\vec{F}_1 = \vec{MA}$, $\vec{F}_2 = \vec{MB}$, $\vec{F}_3 = \vec{MC}$ cùng tác động vào một vật tại điểm M và vật đứng yên. Cho biết cường độ của \vec{F}_1 , \vec{F}_2 đều bằng 25 (N) và góc $\widehat{AMB} = 60^\circ$. Khi đó cường độ lực của \vec{F}_3 là

- (A) $25\sqrt{3}$ (N). (B) $50\sqrt{3}$ (N). (C) $50\sqrt{2}$ (N). (D) $100\sqrt{3}$ (N).

**CÂU 35.**

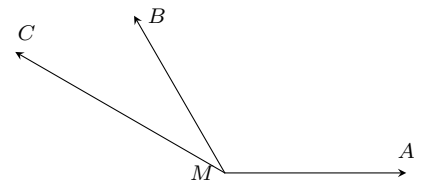
Cho ba lực $\vec{F}_1 = \vec{MA}$, $\vec{F}_2 = \vec{MB}$, $\vec{F}_3 = \vec{MC}$ cùng tác động vào một vật tại điểm M cường độ hai lực \vec{F}_1 , \vec{F}_2 đều bằng 300 (N) và $\vec{F}_3 = 400$ (N). Lại có $\widehat{AMB} = 120^\circ$ và $\widehat{AMC} = 60^\circ$. Tìm cường độ của lực tổng hợp tác động vào vật.

- (A) 300 (N). (B) 700 (N). (C) 100 (N). (D) 500 (N).

**CÂU 36.**

Cho ba lực $\vec{F}_1 = \vec{MA}$, $\vec{F}_2 = \vec{MB}$, $\vec{F}_3 = \vec{MC}$ cùng tác động vào một vật tại điểm M cường độ hai lực \vec{F}_1 , \vec{F}_2 đều bằng 300 (N) và $\vec{F}_3 = 400$ (N). Lại có $\widehat{AMB} = 120^\circ$ và $\widehat{AMC} = 150^\circ$. Tìm cường độ của lực tổng hợp tác động vào vật.

- (A) 300 (N). (B) 700 (N).
(C) 100 (N). (D) 500 (N).



LỜI GIẢI CHI TIẾT

Bài 3. CÁC KHÁI NIỆM MỞ ĐẦU

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Khái niệm vectơ

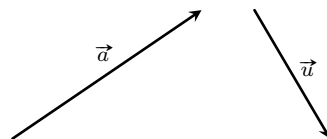
Khái niệm: Vectơ là một đoạn thẳng có hướng. Vectơ có điểm đầu là A , điểm cuối là B được kí hiệu là \overrightarrow{AB} , đọc là “vectơ AB ”.

Đối với vectơ AB , ta gọi

☑ Đường thẳng d đi qua hai điểm A và B là giá của vectơ AB .

☑ Độ dài đoạn thẳng AB là độ dài của vectơ AB , kí hiệu là $|\overrightarrow{AB}|$.

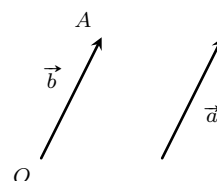
Khi không cần chỉ rõ điểm đầu và điểm cuối của vectơ, vectơ còn được kí hiệu là \vec{a} , \vec{b} , \vec{u} , \vec{v} , Độ dài của vectơ \vec{a} được kí hiệu là $|\vec{a}|$.



2. Hai vectơ cùng phương, cùng hướng, bằng nhau

Định nghĩa: Hai vectơ \vec{a} , \vec{b} bằng nhau nếu chúng cùng hướng và cùng độ dài, kí hiệu là $\vec{a} = \vec{b}$.

Nhận xét: Khi cho trước vectơ \vec{a} và điểm O , thì ta luôn tìm được một điểm A duy nhất sao cho $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$.



3. Vectơ không

Định nghĩa: Vectơ không (kí hiệu là $\vec{0}$) là vectơ có điểm đầu và điểm cuối trùng nhau. Với các điểm bất kì A, B, C ta có $\vec{0} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{CC}$.

Quy ước: $\vec{0}$ (vectơ không) cùng phương và cùng hướng với mọi vectơ; hơn nữa $|\vec{0}| = 0$.

Nhận xét: Hai điểm A, B trùng nhau khi và chỉ khi $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$.

B. CÁC DẠNG TOÁN

1

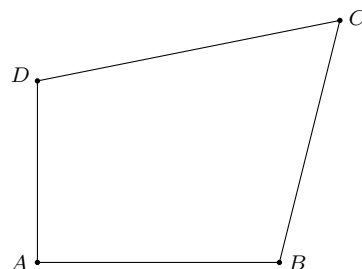
Xác định một vectơ, độ dài vectơ

1. Ví dụ minh họa

VÍ DỤ 1. Cho tứ giác $ABCD$. Hãy chỉ ra các vectơ khác vectơ không có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của tứ giác.

☞ **Lời giải.**

Từ hai điểm phân biệt của tứ giác ta xác định được hai vectơ khác vectơ không, chẳng hạn từ hai điểm A, B ta xác định được hai vectơ khác vectơ không là \overrightarrow{AB} và \overrightarrow{BA} . Suy ra tứ giác $ABCD$ có 12 vectơ khác vectơ không là $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{DB}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{DC}$.

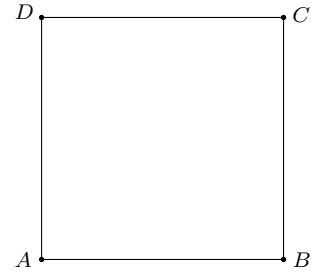


VÍ DỤ 2. Cho hình vuông $ABCD$ với cạnh có độ dài bằng 1. Tính độ dài các vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{DB}$.

☞ **Lời giải.**

Vì cạnh của hình vuông $ABCD$ có độ dài bằng 1 nên $|\overrightarrow{AB}| = 1$ và đường chéo của hình vuông có độ dài bằng $\sqrt{2}$.

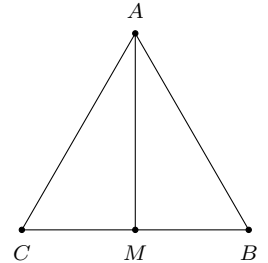
Suy ra $|\overrightarrow{BD}| = |\overrightarrow{DB}| = BD = \sqrt{2}$.



VÍ DỤ 3. Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng a . Gọi M là trung điểm của BC . Tính độ dài vectơ \overrightarrow{AM} .

Lời giải.

Vì ABC là tam giác đều nên $AM = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow |\overrightarrow{AM}| = AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.



2. Bài tập tự luận

BÀI 1. Cho lục giác đều $ABCDEF$ có cạnh bằng a .

a) Có bao nhiêu vectơ khác vectơ không có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của ngũ giác?

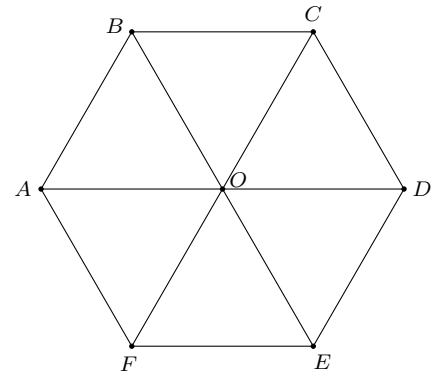
b) Tính độ dài các vectơ \overrightarrow{AD}

Lời giải.

a) Từ hai điểm phân biệt của tứ giác ta xác định được hai vectơ khác vectơ không, chẳng hạn từ hai điểm A, B ta xác định được hai vectơ khác vectơ không là \overrightarrow{AB} và \overrightarrow{BA} .

Lục giác đều $ABCDEF$ có 15 cặp điểm phân biệt do đó có 30 vectơ khác vectơ không có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của ngũ giác.

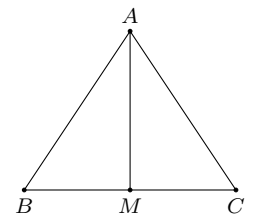
b) Ta có $|\overrightarrow{AD}| = AD = 2AB = 2a$.



BÀI 2. Cho tam giác ABC vuông tại A có $BC = 2a$. Gọi M là trung điểm của BC tính độ dài vectơ \overrightarrow{AM} .

Lời giải.

Độ dài vectơ \overrightarrow{AM} là $|\overrightarrow{AM}| = AM = \frac{BC}{2} = a$.



2

Hai vectơ cùng phương, cùng hướng và bằng nhau

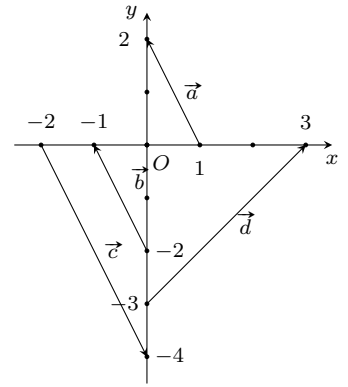
Sử dụng các định nghĩa

- ☑ Hai vectơ cùng phương nếu chúng có giá song song hoặc trùng nhau.
- ☑ Hai vectơ cùng phương thì cùng hướng hoặc ngược hướng.
- ☑ Hai vectơ bằng nhau nếu chúng cùng độ dài và cùng hướng.

1. Ví dụ minh họa

VÍ DỤ 1.

Cho hình vẽ, hãy chỉ ra các vectơ cùng phương, các cặp vectơ ngược hướng và các cặp vectơ bằng nhau



Lời giải.

Dựa vào hình vẽ ta thấy

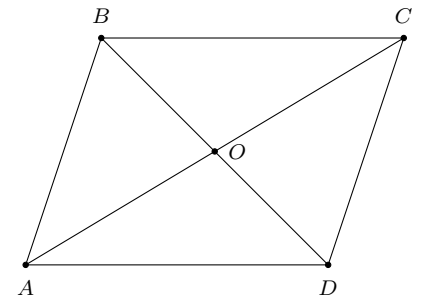
- ☑ Các vectơ cùng phương là \vec{a} , \vec{b} và \vec{c} .
- ☑ Các cặp vectơ ngược hướng là \vec{a} với \vec{c} và \vec{b} với \vec{c} .
- ☑ Các cặp vectơ bằng nhau là \vec{a} với \vec{b} .

VÍ DỤ 2. Cho hình bình hành $ABCD$ có tâm là O . Hãy tìm các cặp vectơ khác $\vec{0}$, bằng nhau và

- a) có điểm đầu và điểm cuối trong các điểm A, B, C và D .
- b) có điểm đầu là O hoặc điểm cuối là O .

Lời giải.

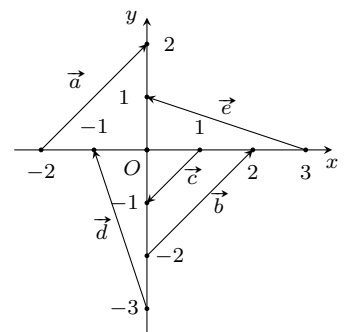
- a) Các cặp vectơ khác $\vec{0}$, bằng nhau và có điểm đầu và điểm cuối trong các điểm A, B, C và D : \vec{AB} và \vec{DC} , \vec{BA} và \vec{CD} , \vec{BC} và \vec{AD} , \vec{CB} và \vec{DA} .
- b) Các cặp vectơ khác $\vec{0}$, bằng nhau và có điểm đầu là O hoặc điểm cuối là O : \vec{OA} và \vec{CO} , \vec{AO} và \vec{OC} , \vec{OB} và \vec{DO} , \vec{BO} và \vec{OD} .



2. Bài tập tự luận

BÀI 1.

Cho hình vẽ, hãy chỉ ra các vectơ cùng phương, các cặp vectơ ngược hướng và các cặp vectơ bằng nhau



Lời giải.

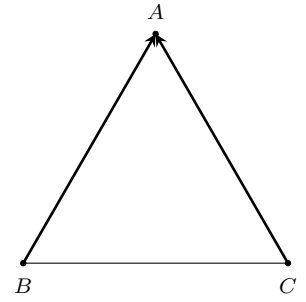
Dựa vào hình vẽ ta thấy

- ☑ Các vectơ cùng phương là \vec{a} , \vec{b} và \vec{c} .
- ☑ Các cặp vectơ ngược hướng là \vec{a} với \vec{c} và \vec{b} với \vec{c} .
- ☑ Các cặp vectơ bằng nhau là \vec{a} với \vec{b} .

BÀI 2. Cho tam giác đều ABC , hãy chỉ ra mối quan hệ về độ dài, phương và hướng giữa cặp vectơ \vec{BA} và \vec{CA} . Hai vectơ có bằng nhau không?

Lời giải.

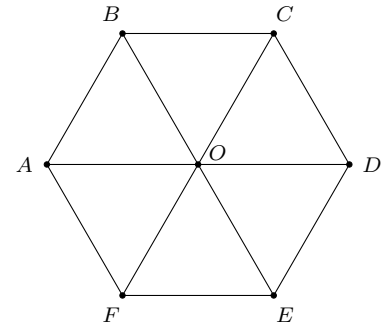
Dựa vào hình vẽ ta thấy hai vectơ \overrightarrow{BA} và \overrightarrow{CA} cùng độ dài nhưng không cùng phương nên cũng không cùng hướng. Do đó, hai vectơ \overrightarrow{BA} và \overrightarrow{CA} không bằng nhau.



BÀI 3.

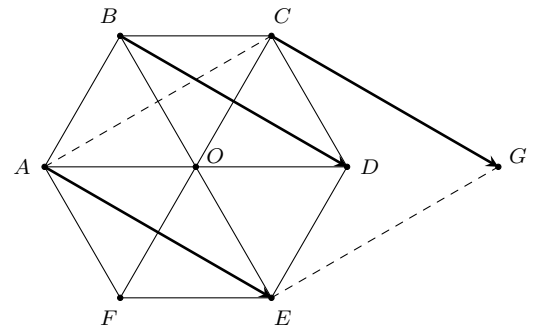
Cho hình lục giác đều $ABCDEF$ có tâm O .

- Hãy tìm các vectơ khác $\vec{0}$ và bằng với \overrightarrow{AB} .
- Hãy vẽ vectơ bằng với \overrightarrow{AE} và có điểm đầu là B .
- Hãy vẽ vectơ bằng với \overrightarrow{AE} và có điểm đầu là C .



Lời giải.

- các vectơ khác $\vec{0}$ và bằng với vectơ \overrightarrow{AB} là \overrightarrow{FO} , \overrightarrow{OC} , \overrightarrow{ED} .
- Vì $ABDE$ là tứ giác có hai đường chéo cắt nhau tại mỗi đường nên là hình bình hành. Suy ra, vectơ bằng với \overrightarrow{AE} có điểm đầu B là \overrightarrow{BD} .
- Giả sử \overrightarrow{CG} là vectơ cần dựng và vì $\overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AE}$ nên $AEGC$ là hình bình hành.



Vậy điểm G cần dựng là đỉnh còn lại của hình bình hành $AEGC$.

BÀI 4. Chứng minh ba điểm A, B, C thẳng hàng khi và chỉ khi $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ cùng phương.

Lời giải.

- ☑ Giả sử A, B, C thẳng hàng. Khi đó, chúng cùng nằm trên một đường thẳng. Suy ra, $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ có giá trùng nhau. Vậy $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ cùng phương.
- ☑ Giả sử $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ cùng phương. Khi đó, $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ có giá song song hoặc trùng nhau. Mặt khác, giá của $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ cùng đi qua điểm A nên chúng trùng nhau. Vậy A, B, C thẳng hàng.

C. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

CÂU 1. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau.

- vectơ là một đường thẳng có hướng.
- vectơ là một đoạn thẳng.
- vectơ là một đoạn thẳng có hướng.
- vectơ là một đoạn thẳng không phân biệt điểm đầu và điểm cuối.

Lời giải.

vectơ là một đoạn thẳng có hướng.

Chọn đáp án **C** □

CÂU 2. Cho tam giác ABC có thể xác định được bao nhiêu vectơ (khác vectơ không) có điểm đầu và điểm cuối là đỉnh A, B, C ?

- 2.
- 3.
- 4.
- 6.

Lời giải.

Có thể xác định được 6 vectơ (khác vectơ không) có điểm đầu và điểm cuối là đỉnh A, B, C là các vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CB}$.

Chọn đáp án **D** □

CÂU 3. Cho hai điểm phân biệt A, B . Số vectơ (khác $\vec{0}$) có điểm đầu và điểm cuối lấy từ các điểm A, B là

- (A) 2. (B) 6. (C) 13. (D) 12.

☞ **Lời giải.**

Có 2 vectơ có điểm đầu và điểm cuối lấy từ các điểm A, B là \vec{AB} và \vec{BA} .

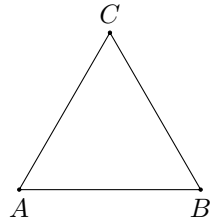
Chọn đáp án (A) □

CÂU 4. Cho tam giác đều ABC . Mệnh đề nào sau đây **sai**?

- (A) $\vec{AB} = \vec{BC}$. (B) $\vec{AC} \neq \vec{BC}$.
(C) $|\vec{AB}| = |\vec{BC}|$. (D) \vec{AC} không cùng phương \vec{BC} .

☞ **Lời giải.**

Có \vec{AB} và \vec{BC} là 2 vectơ không cùng phương nên $\vec{AC} \neq \vec{BC}$.



Chọn đáp án (A) □

CÂU 5. Khẳng định nào dưới đây là **sai**?

- (A) Mỗi vectơ đều có một độ dài, đó là khoảng cách giữa điểm đầu và điểm cuối của vectơ đó.
(B) Độ dài của vectơ \vec{a} được kí hiệu là $|\vec{a}|$.
(C) $|\vec{PQ}| = \vec{PQ}$.
(D) $|\vec{AB}| = AB = BA$.

☞ **Lời giải.**

$|\vec{PQ}|$ khác \vec{PQ} do vectơ là một đoạn thẳng định hướng còn độ dài vectơ là độ dài đoạn thẳng nối điểm đầu và điểm cuối vectơ đó.

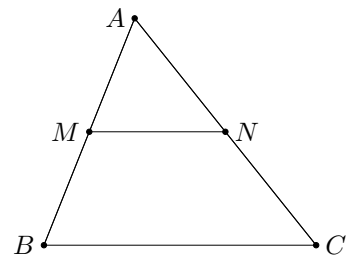
Chọn đáp án (C) □

CÂU 6. Cho tam giác ABC . Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AB, AC . Mệnh đề nào sau đây **sai**?

- (A) $\vec{BC} = 2\vec{NM}$. (B) $\vec{MN} = \frac{1}{2}\vec{BC}$. (C) $\vec{AN} = \vec{NC}$. (D) $|\vec{MA}| = |\vec{MB}|$.

☞ **Lời giải.**

- $\vec{AN} = \vec{NC}$ đúng vì \vec{AN} và \vec{NC} cùng hướng và cùng độ dài.
- $\vec{MN} = \frac{1}{2}\vec{BC}$ đúng vì MN là đường trung bình của $\triangle ABC$ nên $MN = \frac{1}{2}BC$ và \vec{MN}, \vec{BC} cùng hướng.
- $|\vec{MA}| = |\vec{MB}|$ đúng vì M là trung điểm AB nên $MA = MB$.
- $\vec{BC} = 2\vec{NM}$ sai vì mệnh đề đúng tương ứng là $\vec{BC} = 2\vec{MN}$.



Chọn đáp án (A) □

CÂU 7. Cho hai vectơ không cùng phương \vec{a} và \vec{b} . Khẳng định nào sau đây đúng?

- (A) Không có vectơ nào cùng phương với cả hai vectơ \vec{a} và \vec{b} .
(B) Có vô số vectơ cùng phương với cả hai vectơ \vec{a} và \vec{b} .
(C) Có một vectơ cùng phương với cả hai vectơ \vec{a} và \vec{b} .
(D) Có hai vectơ cùng phương với cả hai vectơ \vec{a} và \vec{b} .

☞ **Lời giải.**

Có một vectơ cùng phương với cả hai vectơ \vec{a} và \vec{b} đó là vectơ không.

Chọn đáp án (C) □

CÂU 8. Cho 3 điểm phân biệt A, B, C . Khi đó khẳng định nào sau đây **sai**?

- Ⓐ A, B, C thẳng hàng khi và chỉ khi \overrightarrow{AB} và \overrightarrow{AC} cùng phương.
 Ⓑ A, B, C thẳng hàng khi và chỉ khi \overrightarrow{AB} và \overrightarrow{BC} cùng phương.
 Ⓒ A, B, C thẳng hàng khi và chỉ khi \overrightarrow{AC} và \overrightarrow{BC} cùng phương.
 Ⓓ A, B, C thẳng hàng khi và chỉ khi $AC = BC$.

☞ **Lời giải.**

A, B, C thẳng hàng khi và chỉ khi các vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC}$ đôi một cùng phương.

Chọn đáp án Ⓓ □

CÂU 9. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- Ⓐ Có duy nhất một vectơ cùng phương với mọi vectơ. Ⓑ Có ít nhất hai vectơ cùng phương với mọi vectơ.
 Ⓒ Có vô số vectơ cùng phương với mọi vectơ. Ⓓ Không có vectơ nào cùng phương với mọi vectơ.

☞ **Lời giải.**

Có duy nhất một vectơ cùng phương với mọi vectơ đó là vectơ không.

Chọn đáp án Ⓐ □

CÂU 10. Khẳng định nào sau đây đúng?

- Ⓐ Hai vectơ cùng phương với một vectơ thứ ba thì cùng phương.
 Ⓑ Hai vectơ cùng phương với một vectơ thứ ba khác $\vec{0}$ thì cùng phương.
 Ⓒ vectơ không là vectơ không có giá.
 Ⓓ Điều kiện đủ để hai vectơ bằng nhau là chúng có độ dài bằng nhau.

☞ **Lời giải.**

Hai vectơ cùng phương với một vectơ thứ ba khác $\vec{0}$ thì cùng phương.

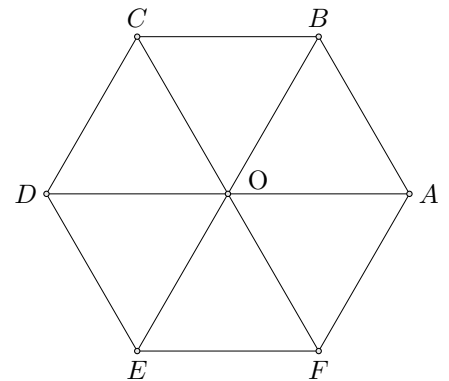
Chọn đáp án Ⓑ □

CÂU 11. Cho lục giác đều $ABCDEF$ tâm O . Số các vectơ khác $\vec{0}$ cùng phương với \overrightarrow{OC} có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của lục giác bằng

- Ⓐ 6. Ⓑ 7. Ⓒ 8. Ⓓ 4.

☞ **Lời giải.**

Số các vectơ khác $\vec{0}$ cùng phương với \overrightarrow{OC} có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của lục giác là $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{FC}, \overrightarrow{CF}, \overrightarrow{ED}, \overrightarrow{DE}$.



Chọn đáp án Ⓐ □

CÂU 12. Cho ba điểm A, B, C phân biệt. Khi đó

- Ⓐ Điều kiện cần và đủ để A, B, C thẳng hàng là \overrightarrow{AC} cùng phương với \overrightarrow{AB} .
 Ⓑ Điều kiện đủ để A, B, C thẳng hàng là \overrightarrow{CA} cùng phương với \overrightarrow{AB} .
 Ⓒ Điều kiện cần để A, B, C thẳng hàng là \overrightarrow{CA} cùng phương với \overrightarrow{AB} .
 Ⓓ Điều kiện cần và đủ để A, B, C thẳng hàng là $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$.

☞ **Lời giải.**

Điều kiện cần và đủ để A, B, C thẳng hàng là \overrightarrow{AC} cùng phương với \overrightarrow{AB} .

Chọn đáp án Ⓐ □

CÂU 13. Cho vectơ $\overrightarrow{MN} \neq \vec{0}$. Số vectơ cùng hướng với vectơ \overrightarrow{MN} là

- Ⓐ vô số. Ⓑ 1. Ⓒ 3. Ⓓ 2.

☞ **Lời giải.**

Có vô số vectơ cùng hướng với một vectơ khác vectơ-không cho trước.

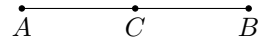
Chọn đáp án (A)

CÂU 14. Gọi C là trung điểm của đoạn AB . Hãy chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau.

- (A) $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CB}$. (B) \overrightarrow{AB} và \overrightarrow{AC} cùng hướng. (C) \overrightarrow{AB} và \overrightarrow{CB} ngược hướng. (D) $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CB}|$.

Lời giải.

Có \overrightarrow{AB} và \overrightarrow{AC} cùng hướng.



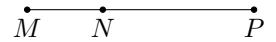
Chọn đáp án (B)

CÂU 15. Cho ba điểm M, N, P thẳng hàng, trong đó điểm N nằm giữa hai điểm M và P . Khi đó các cặp vectơ nào cùng hướng?

- (A) \overrightarrow{MP} và \overrightarrow{PN} . (B) \overrightarrow{MN} và \overrightarrow{PN} . (C) \overrightarrow{NM} và \overrightarrow{NP} . (D) \overrightarrow{MN} và \overrightarrow{MP} .

Lời giải.

Cặp vectơ \overrightarrow{MN} và \overrightarrow{MP} là cùng hướng.



Chọn đáp án (D)

CÂU 16. Phát biểu nào sau đây đúng?

- (A) Hai vectơ không bằng nhau thì độ dài của chúng không bằng nhau.
 (B) Hai vectơ không bằng nhau thì độ dài của chúng không cùng phương.
 (C) Hai vectơ bằng nhau thì có giá trị bằng nhau hoặc song song nhau.
 (D) Hai vectơ có độ dài không bằng nhau thì không cùng hướng.

Lời giải.

Hai vectơ bằng nhau thì cùng phương nên chúng có giá trị bằng nhau hoặc song song nhau.

Chọn đáp án (C)

CÂU 17. Cho vectơ $\vec{a} \neq \vec{0}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- (A) Có vô số vectơ \vec{u} mà $\vec{u} = \vec{a}$. (B) Có duy nhất một \vec{u} mà $\vec{u} = \vec{a}$.
 (C) Có duy nhất một \vec{u} mà $\vec{u} = -\vec{a}$. (D) Không có vectơ \vec{u} nào mà $\vec{u} = \vec{a}$.

Lời giải.

Có vô số vectơ \vec{u} mà $\vec{u} = \vec{a}$.

Chọn đáp án (A)

CÂU 18. Cho hình bình hành $ABCD$. Đẳng thức nào sau đây sai?

- (A) $|\overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{BC}|$. (B) $|\overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{DA}|$. (C) $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|$. (D) $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BD}|$.

Lời giải.

Theo tính chất của hình bình hành, ta có $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BD}|$ là đẳng thức sai.

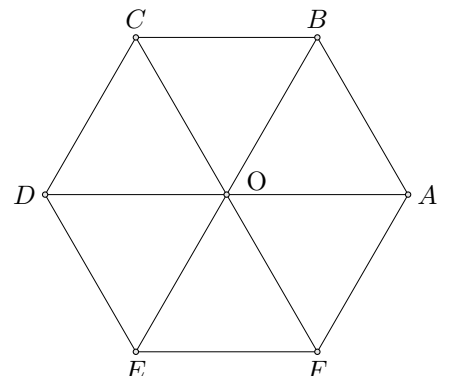
Chọn đáp án (D)

CÂU 19. Cho lục giác đều $ABCDEF$ tâm O . Ba vectơ bằng vectơ \overrightarrow{BA} là

- (A) $\overrightarrow{OF}, \overrightarrow{DE}, \overrightarrow{OC}$. (B) $\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{OF}, \overrightarrow{DE}$. (C) $\overrightarrow{OF}, \overrightarrow{DE}, \overrightarrow{CO}$. (D) $\overrightarrow{OF}, \overrightarrow{ED}, \overrightarrow{OC}$.

Lời giải.

Các vectơ bằng vectơ \overrightarrow{BA} là $\overrightarrow{DE}, \overrightarrow{OF}, \overrightarrow{CO}$.



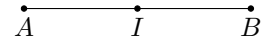
Chọn đáp án **C**.....

CÂU 20. Cho đoạn thẳng AB , I là trung điểm của AB . Khi đó

- A** $\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{AI}$. **B** \overrightarrow{BI} cùng hướng \overrightarrow{AB} . **C** $|\overrightarrow{BI}| = 2|\overrightarrow{AI}|$. **D** $|\overrightarrow{BI}| = |\overrightarrow{AI}|$.

Lời giải.

Do I là trung điểm AB nên $IA = IB$, suy ra $|\overrightarrow{BI}| = |\overrightarrow{AI}|$.



Chọn đáp án **D**.....

CÂU 21. Cho hình thoi $ABCD$ cạnh a và $\widehat{BAD} = 60^\circ$. Đẳng thức nào sau đây đúng?

- A** $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{DA}$. **B** $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD}$. **C** $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC}$. **D** $|\overrightarrow{BD}| = a$.

Lời giải.

Từ giả thiết suy ra tam giác ABD đều cạnh a nên $BD = a \Rightarrow |\overrightarrow{BD}| = a$.

Chọn đáp án **D**.....

CÂU 22. Cho hình chữ nhật $ABCD$. Trong các đẳng thức dưới đây, đẳng thức nào đúng?

- A** $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. **B** $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$. **C** $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$. **D** $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{DA}$.

Lời giải.

Vì $ABCD$ là hình chữ nhật nên ta có $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.

Chọn đáp án **B**.....

CÂU 23. Cho tam giác ABC với trung tuyến AM và trọng tâm G . Khi đó $|\overrightarrow{GA}|$ bằng

- A** $\frac{1}{2}|\overrightarrow{AM}|$. **B** $\frac{2}{3}|\overrightarrow{GM}|$. **C** $2|\overrightarrow{GM}|$. **D** $-\frac{2}{3}|\overrightarrow{MA}|$.

Lời giải.

Theo tính chất đường trung tuyến $AG = \frac{2}{3}AM$ hay $GA = 2 \cdot GM$.

Chọn đáp án **C**.....

Bài 4. TỔNG VÀ HIỆU CỦA HAI VECTO

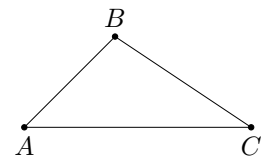
A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Phép toán cộng hai vectơ

Phép cộng hai vectơ có tính chất giao hoán. Khi thực hiện phép toán cộng hai vectơ, ta chú ý các quy tắc sau

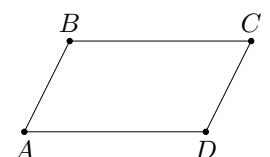
Quy tắc 3 điểm: ("nối đuôi")

CÂU 23 Với ba điểm A, B, C bất kì, ta luôn có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$



Quy tắc hình bình hành: ("chung đầu")

CÂU 23 Xét hình bình hành $ABCD$, ta luôn có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$



Quy tắc cộng vectơ đối: Nếu \vec{a} và \vec{b} đối nhau thì $\vec{a} + \vec{b} = \vec{0}$.

Tính chất: Với ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ tùy ý

- ☑ Tính chất giao hoán: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.
- ☑ Tính chất kết hợp: $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$.
- ☑ Tính chất của vectơ-không: $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$.

2. Phép toán hiệu hai vectơ

⚙ Vectơ đối:

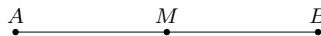
- Vectơ đối của \vec{a} kí hiệu là $-\vec{a}$.
- Vectơ đối của \overrightarrow{AB} là \overrightarrow{BA} , nghĩa là $-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$ (dùng để làm mất dấu trừ trước vectơ).
- Vectơ $\vec{0}$ được coi là vectơ đối của chính nó.

⚙ Quy tắc trừ: Với ba điểm A, B, C bất kì, ta luôn có $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$

3. Công thức trung điểm, trọng tâm

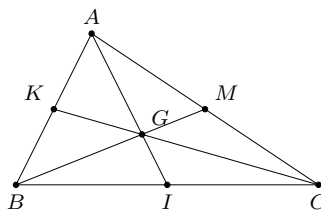
⚙ Công thức trung điểm: Nếu M là trung điểm của đoạn AB thì

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$$



⚙ Công thức trọng tâm: Nếu G là trọng tâm của tam giác ABC thì

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}.$$



B. CÁC DẠNG TOÁN

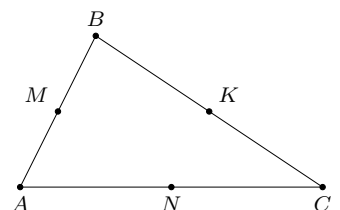
1 Tính tổng, hiệu hai vectơ

- ☑ Ghép các vectơ lại thích hợp.
- ☑ Dùng các quy tắc cộng vectơ để tính.

1. Ví dụ minh họa

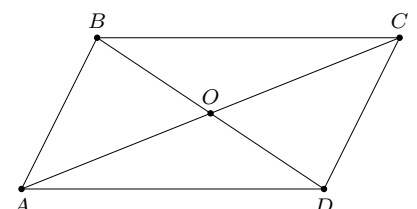
CÂU 0. Cho tam giác ABC . Các điểm M, N và K lần lượt là trung điểm của AB, AC và BC .

- a) Tìm các vectơ bằng với \overrightarrow{MK} .
- b) Tìm các vectơ đối của \overrightarrow{MN} .
- c) Xác định các vectơ $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MN}$; $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{NK}$; $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{KN}$; $\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AN}$; $\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{NC}$; $\overrightarrow{BK} - \overrightarrow{CK}$.



CÂU 0. Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O .

- a) Tìm vectơ bằng với \overrightarrow{OC} .
- b) Xác định các vectơ $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}$; $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}$; $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$; $\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{DC}$.



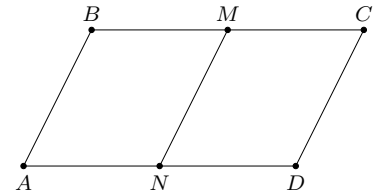
CÂU 0. Cho hình bình hành $ABCD$ Hai điểm M và N lần lượt là trung điểm của BC và AD Xác định vectơ

$$\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC},$$

$$\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN},$$

$$\overrightarrow{AN} + \overrightarrow{CM},$$

$$\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{NC}.$$



2. Bài tập tự luận

BÀI 1. Tính tổng $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{RN} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{QR}$.

Lời giải.

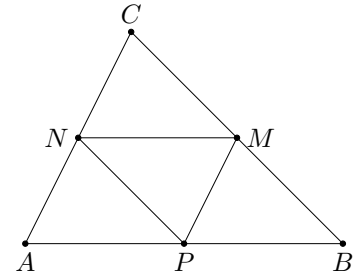
Ta có $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{RN} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} + \overrightarrow{RN} = \overrightarrow{MN}$.

BÀI 2. Cho tam giác ABC với M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB . Tính tổng $\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CN}$.

Lời giải.

CÂU 0. Dễ dàng có $BPNM$ là hình bình hành suy ra $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{PN}$ và $\overrightarrow{CN} = \overrightarrow{NA}$ vì N là trung điểm của CA . Do đó

$$\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CN} = \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PN} + \overrightarrow{NA} = \vec{0}.$$



BÀI 3. Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $AB'C'D'$ có chung đỉnh A . Tính $\vec{u} = \overrightarrow{B'B} + \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{D'D}$.

Lời giải.

Theo quy tắc trừ và quy tắc hình bình hành ta có

$$\begin{aligned} \overrightarrow{B'B} + \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{D'D} &= (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AB'}) + (\overrightarrow{AC'} - \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AD'}) \\ &= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) - \overrightarrow{AC} - (\overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{AD'}) + \overrightarrow{AC} \\ &= \vec{0} \end{aligned}$$

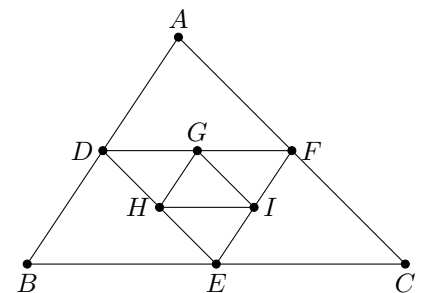
Vậy $\vec{u} = 0$.

BÀI 4. Cho tam giác ABC , gọi D, E, F, G, H, I theo thứ tự là trung điểm các cạnh AB, BC, CA, DF, DE, EF . Tính vectơ $\vec{u} = \overrightarrow{BE} - \overrightarrow{GH} - \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{FE}$?

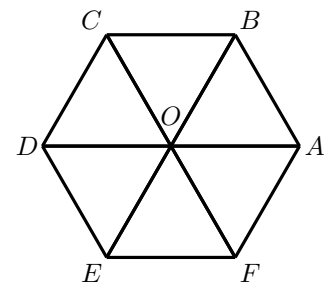
Lời giải.

CÂU 0. Ta có

$$\begin{aligned} \vec{u} &= \overrightarrow{BE} - \overrightarrow{GH} - \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{FE} \\ &= (\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{FE}) - (\overrightarrow{GH} + \overrightarrow{AI}) \\ &= (\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{FE}) - (\overrightarrow{IE} + \overrightarrow{AI}) \\ &= \overrightarrow{DE} - \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{DA}. \end{aligned}$$



CÂU 0. Cho lục giác đều $ABCDEF$ tâm O . Rút gọn vectơ $\vec{v} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DE}$?



Lời giải.

$$\vec{v} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CO} = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OE} = \overrightarrow{BE}.$$

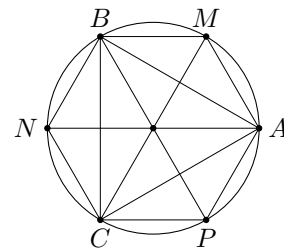
BÀI 6. Gọi O là tâm của tam giác đều ABC . Tính $\vec{u} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.

Lời giải.

CÂU 0. Vẽ lục giác đều $AMBNCP$ nội tiếp đường tròn (O) .

Vì $BOCN$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{ON}$.

Do đó $\vec{u} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{ON} = \vec{0}$.



BÀI 7. Cho hình bình hành $ABCD$. Trên các đoạn thẳng DC, AB theo thứ tự lấy các điểm M, N sao cho $DM = BN$. Gọi P là giao điểm của AM, DB và Q là giao điểm của CN, DB . Tính $\vec{u} = \overrightarrow{DP} - \overrightarrow{QB}$.

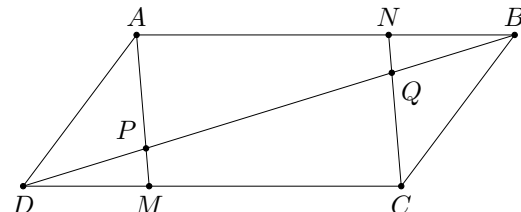
Lời giải.

Ta có $DM = BN \Rightarrow AN = MC$, mặt khác AN song song với MC do đó tứ giác $ANCM$ là

CÂU 0. hình bình hành. Suy ra $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{NC}$.

Xét tam giác $\triangle DMP$ và $\triangle BNQ$ ta có

$$\begin{cases} DM = NB \text{ (giả thiết)} \\ \widehat{PDM} = \widehat{QBN} \text{ (so le trong).} \end{cases}$$



Mặt khác $\widehat{DMP} = \widehat{APB}$ (đối đỉnh) và $\widehat{APQ} = \widehat{NQB}$ (hai góc đồng vị) suy ra $\widehat{DMP} = \widehat{BNQ}$.

Do đó $\triangle DMP = \triangle BNQ$ (c.g.c) suy ra $DP = BQ$.

Dễ thấy $\overrightarrow{DP}, \overrightarrow{QB}$ cùng hướng vì vậy $\overrightarrow{DP} = \overrightarrow{QB}$ hay $\vec{u} = \overrightarrow{DP} - \overrightarrow{QB} = \vec{0}$.

2

Xác định vị trí của một điểm từ đẳng thức vector

1. Ví dụ minh họa

VÍ DỤ 1. Cho tam giác ABC . Điểm M thỏa mãn điều kiện $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- (A) M là điểm sao cho tứ giác $BAMC$ là hình bình hành. (B) M là điểm sao cho tứ giác $ABMC$ là hình bình hành.
(C) M là trọng tâm tam giác ABC . (D) M thuộc đường trung trực của AB .

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$ nên M là trọng tâm tam giác ABC .

Chọn đáp án (C) □

2. Bài tập tự luận

BÀI 1. Cho tam giác ABC . Xác định điểm M thỏa mãn điều kiện $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = -\overrightarrow{MC} \Leftrightarrow \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CM}$.

Suy ra M là đỉnh của hình bình hành $BAMC$.

BÀI 2. Cho hình bình hành $ABCD$. Xác định điểm M thỏa mãn điều kiện $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AM}$.

Lời giải.

Vì $ABCD$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$.

Khi đó $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AM} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CM}$.

Suy ra M đối xứng với A qua C .

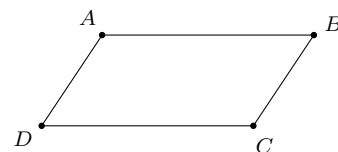
BÀI 3. Cho hình bình hành $ABCD$. Xác định điểm M thỏa mãn điều kiện $|\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{CD}| = |\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{DA}|$.

Lời giải.

CÂU 0. Vì $ABCD$ là hình bình hành nên $\begin{cases} \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD} \\ \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CB} \end{cases}$

Ta có

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{CD}| &= |\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{DA}| \\ \Leftrightarrow |\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BA}| &= |\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CB}| \\ \Leftrightarrow |\overrightarrow{MA}| &= |\overrightarrow{MB}| \Leftrightarrow MA = MB. \end{aligned}$$



Vậy M thuộc đường trung trực của cạnh AB .

3

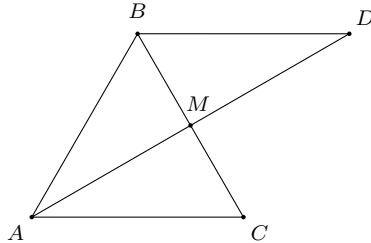
TÍNH ĐỘ DÀI VECTOR

1. Ví dụ minh họa

VÍ DỤ 1. Cho tam giác đều ABC có cạnh $AB = a$, xác định và tính độ dài của vectơ

a) $\vec{x} = \vec{AB} + \vec{BC}$.

b) $\vec{y} = \vec{AB} + \vec{AC}$.

🗨️ **Lời giải.**

a) Ta có $\vec{x} = \vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$.

Suy ra $|\vec{x}| = |\vec{AC}| = AC = a$.

b) Dùng $\vec{BD} = \vec{AC}$, ta có $\vec{y} = \vec{AB} + \vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BD} = \vec{AD}$.

Suy ra $|\vec{y}| = |\vec{AD}| = AD$.

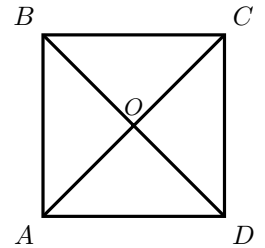
Gọi M là trung điểm của BC , ta có $AD = 2AM = 2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$. Vậy $|\vec{y}| = a\sqrt{3}$.

VÍ DỤ 2.Cho hình vuông $ABCD$ tâm O cạnh bằng a . Tính

a) $|\vec{AB} + \vec{BC}|$.

b) $|\vec{AB} - \vec{AC}|$.

c) $|\vec{AB} + \vec{OD} - \vec{BC}|$.

🗨️ **Lời giải.**

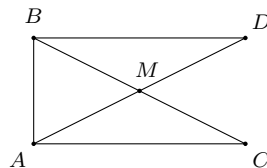
a) Ta có $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$. Suy ra $|\vec{AB} + \vec{BC}| = AC = a\sqrt{2}$.

b) Ta có $\vec{AB} - \vec{AC} = \vec{CB}$. Suy ra $|\vec{AB} - \vec{AC}| = CB = a$.

c) Ta có $\vec{u} = \vec{AB} + \vec{OD} - \vec{BC} = \vec{AB} + \vec{BO} - \vec{BC} = \vec{AB} + \vec{CO} = \vec{AB} + \vec{OA} = \vec{OB}$.

Suy ra $|\vec{u}| = |\vec{OB}| = OB = \frac{\sqrt{2}}{2}AB = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

2. Bài tập tự luận

BÀI 1. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 2$, $AC = 4$, xác định và tính độ dài của vectơ $\vec{u} = \vec{AB} + \vec{AC}$.🗨️ **Lời giải.**

Dùng $\vec{BD} = \vec{AC}$, ta có $\vec{u} = \vec{AB} + \vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BD} = \vec{AD}$.

Suy ra $|\vec{u}| = |\vec{AD}| = AD$.

Ta có $ABDC$ là hình chữ nhật nên $AD = \sqrt{AB^2 + AC^2} = 2\sqrt{5}$. Vậy $|\vec{u}| = 2\sqrt{5}$.

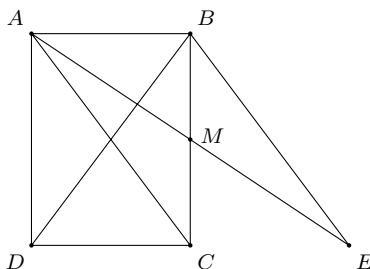
🗨️ **Lời giải.**

BÀI 2. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AC = 5$, $AB = 3$, xác định và tính độ dài của vectơ

a) $\vec{a} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}$.

b) $\vec{b} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

Lời giải.



a) Ta có $\vec{a} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CD}$.

Suy ra $|\vec{a}| = |\overrightarrow{CD}| = CD = AB = 3$.

b) Đặt $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AC}$, ta có $\vec{b} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AE}$.

Suy ra $|\vec{b}| = |\overrightarrow{AE}| = AE$. Gọi M là trung điểm của BC .

Ta có $AE = 2AM = 2\sqrt{AB^2 + BM^2} = 2\sqrt{13}$. Vậy $|\vec{b}| = 2\sqrt{13}$.

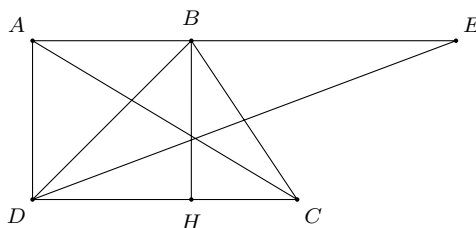
Lời giải.

BÀI 3. Cho hình thang $ABCD$ có $\hat{A} = \hat{D} = 90^\circ$, $AB = AD = 3$, $CD = 5$, xác định và tính độ dài của vectơ

a) $\vec{x} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$.

b) $\vec{y} = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC}$.

Lời giải.



a) Ta có $\vec{x} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$.

Suy ra $|\vec{x}| = |\overrightarrow{CB}| = CB$.

Gọi H là hình chiếu của B lên CD , ta có $BH = AD = 3$, $CH = CD - DH = 2$.

Tam giác BHC có $BC = \sqrt{BH^2 + CH^2} = \sqrt{13}$. Vậy $|\vec{x}| = CB = \sqrt{13}$.

b) Đặt $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{DC}$, ta có $\vec{y} = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{DE}$.

Suy ra $|\vec{y}| = |\overrightarrow{DE}| = DE$.

Ta có $AE = AB + BE = 8$, $DE = \sqrt{AD^2 + AE^2} = \sqrt{73}$. Vậy $|\vec{y}| = \sqrt{73}$.

4

Chứng minh một đẳng thức vectơ

Ta thường dùng một trong hai cách sau:

- ① Thực hiện các phép toán, biến đổi đẳng thức cần chứng minh đi đến một kết quả hiển nhiên đúng.
- ② Biến đổi vế phức tạp thành vế đơn giản (biến vế trái thành vế phải hoặc ngược lại)

1. Ví dụ minh họa

VÍ DỤ 1. Cho bốn điểm A, B, C, D . Chứng minh các đẳng thức sau:

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \vec{0}$;

b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$;

c) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$;

d) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD}$.

VÍ DỤ 2. Cho tam giác ABC . Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA và AB ; O là một điểm bất kì. Chứng minh rằng

- a) $\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CN} + \overrightarrow{AP} = \vec{0}$; b) $\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BM} = \vec{0}$;
c) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP}$.

VÍ DỤ 3. Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O ; M là một điểm bất kì trong mặt phẳng. Chứng minh

- a) $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AC} = \vec{0}$; b) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$;
c) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{CO} - \overrightarrow{CD}$; d) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD}$.

2. Bài tập tự luận

BÀI 1. Cho năm điểm A, B, C, D, E . Chứng minh rằng

- a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EA} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{ED}$; b) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{EC} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{CB}$.

BÀI 2. Cho các sáu điểm A, B, C, D, E, F . Chứng minh rằng

- a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EA} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{ED}$; b) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{CD}$;
c) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DE} - \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB}$; d) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{EF} - \overrightarrow{ED} = \vec{0}$.

BÀI 3. Cho tam giác ABC . Vẽ về phía ngoài tam giác ABC các hình bình hành $ABEF, ACPQ, BCIJ$. Chứng minh $\overrightarrow{EJ} + \overrightarrow{IP} + \overrightarrow{QF} = \vec{0}$.

BÀI 4. Cho tam giác ABC có trung tuyến AM .

- a) Chứng minh $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AM} = \vec{0}$;
b) Trên cạnh AC lấy hai điểm E và F sao cho $AE = EF = FC$; BE cắt AM tại N Chứng minh \overrightarrow{NA} và \overrightarrow{NM} là hai vectơ đối nhau.

BÀI 5. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm AB, BC, CD, DA . Chứng minh rằng $\overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{NP}$.

BÀI 6. Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O . Gọi M, N lần lượt là trung điểm BC và AD . Chứng minh rằng

- a) $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$; b) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$;
c) $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{OA}$; d) $\overrightarrow{ND} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AM}$.

5

Ứng dụng của vector trong thực tiễn

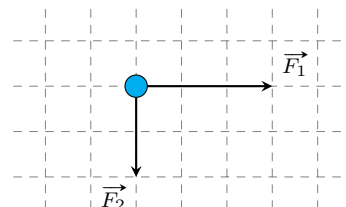
Phép cộng vectơ tương ứng với các quy tắc tổng hợp lực, tổng hợp vận tốc:

- Nếu hai lực cùng tác động vào chất điểm A và được biểu diễn bởi các vectơ \vec{u}_1, \vec{u}_2 thì hợp lực tác động vào A được biểu diễn bởi vectơ $\vec{u}_1 + \vec{u}_2$.
- Nếu một con thuyền di chuyển trên sông với vận tốc riêng (vận tốc so với dòng nước) được biểu diễn bởi vectơ \vec{v}_r và vận tốc của dòng nước (so với bờ) được biểu diễn bởi vectơ \vec{v}_n thì vận tốc thực tế của thuyền (so với bờ) được biểu diễn bởi vectơ $\vec{v}_r + \vec{v}_n$.

1. Ví dụ minh họa

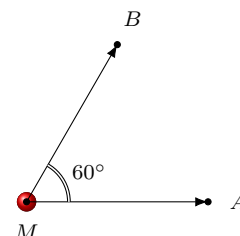
VÍ DỤ 1.

Cho hai lực đồng quy \vec{F}_1 và \vec{F}_2 như hình vẽ. Biết độ lớn của \vec{F}_1, \vec{F}_2 lần lượt là 3N và 2N. Tính độ lớn hợp lực của \vec{F}_1 và \vec{F}_2 .



VÍ DỤ 2.

Cho hai lực $\vec{F}_1 = \overrightarrow{MA}, \vec{F}_2 = \overrightarrow{MB}$ cùng tác động vào một vật tại điểm M cường độ hai lực \vec{F}_1, \vec{F}_2 đều bằng 300 (N) và $\widehat{AMB} = 60^\circ$. Tìm cường độ của lực tổng hợp tác động vào vật.

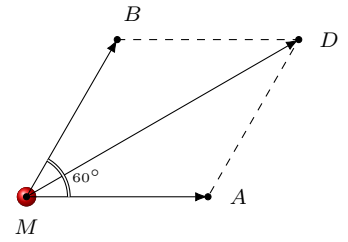


Lời giải.

Gọi D là đỉnh thứ tư của hình thoi $MBDA$, ta có

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MD}.$$

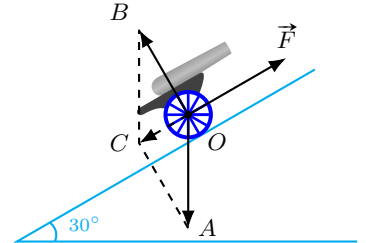
Vậy cường độ lực tổng hợp tại M là $|\overrightarrow{MD}| = MD$.



Gọi O là tâm hình thoi $MBDA$ có cạnh 300, ta có $MD = 2MO = 300\sqrt{3}$ (N).

VÍ DỤ 3.

Tính lực kéo cần thiết để kéo một khẩu pháo có trọng lượng 22 148 N (xấp xỉ 2 260 kg) lên một con dốc nghiêng 30° so với phương nằm ngang (hình bên). Nếu lực kéo của mỗi người bằng 100 N thì cần tối thiểu bao nhiêu người để kéo pháo (bỏ qua ma sát trượt giữa bánh xe và mặt phẳng nghiêng)?



Lời giải.

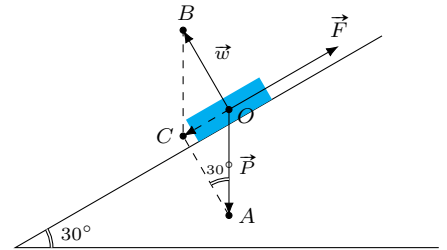
Lực tổng hợp của trọng lực \vec{P} và phản lực \vec{w} là lực $\vec{T} = \overrightarrow{OC}$. Theo hình vẽ thì

$$|\vec{T}| = OC = OA \cdot \sin 30^\circ = 11074 \text{ N}$$

Suy ra, muốn kéo được pháo lên dốc thì lực \vec{F} phải có độ lớn

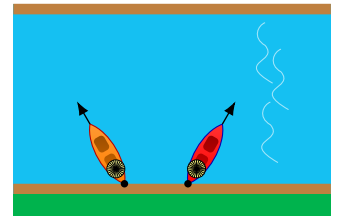
$$|\vec{F}| > |\vec{T}| = 11074 \text{ N}$$

Do $\frac{11074}{100} = 110,74$ nên nếu lực kéo mỗi người là 100 N thì ta cần tối thiểu 111 người.



VÍ DỤ 4.

Hai con tàu xuất phát cùng lúc từ bờ bên này để sang bờ bên kia của dòng sông (hai bờ song song nhau) với vận tốc riêng không đổi và có độ lớn bằng nhau. Hai tàu luôn giữ lái sao cho chúng tạo với bờ cùng một góc nhọn nhưng một tàu hướng xuống hạ lưu, một tàu hướng lên thượng nguồn. Vận tốc dòng nước là đáng kể, các yếu tố bên ngoài khác không ảnh hưởng tới vận tốc của các tàu. Hỏi tàu nào sang bờ bên kia trước?

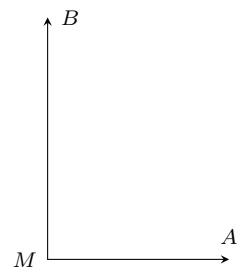


Lời giải.

2. Bài tập tự luận

BÀI 1.

Cho hai lực $\vec{F}_1 = \overrightarrow{MA}$, $\vec{F}_2 = \overrightarrow{MB}$ cùng tác động vào một vật tại điểm M cường độ hai lực \vec{F}_1 , \vec{F}_2 lần lượt là 300 (N) và 400 (N) và $\angle AMB = 90^\circ$. Tìm cường độ của lực tổng hợp tác động vào vật.

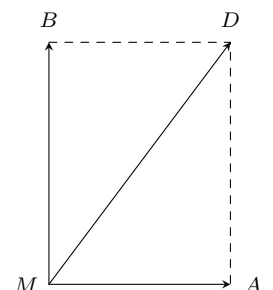


Lời giải.

Gọi D là đỉnh thứ tư của hình chữ nhật $MADB$, ta có

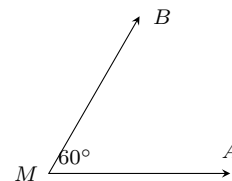
$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MD}.$$

Vậy cường độ lực tổng hợp tại M là $|\overrightarrow{MD}| = MD = \sqrt{MB^2 + MA^2} = 500$ (N).



BÀI 2.

Cho hai lực $\vec{F}_1 = \vec{MA}$, $\vec{F}_2 = \vec{MB}$ cùng tác động vào một vật tại điểm M cường độ hai lực \vec{F}_1, \vec{F}_2 đều bằng 300 (N) và $\widehat{AMB} = 60^\circ$. Tìm cường độ của lực tổng hợp tác động vào vật.



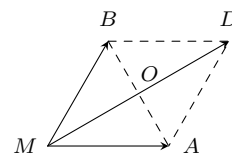
Lời giải.

Gọi D là đỉnh thứ tư của hình thoi $MBDA$, ta có

$$\vec{MA} + \vec{MB} = \vec{MD}.$$

Vậy cường độ lực tổng hợp tại M là $|\vec{MD}| = MD$.

Gọi O là tâm hình thoi $MBDA$ có cạnh 300, ta có $MD = 2MO = 300\sqrt{3}$ (N).



C. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

CÂU 1. Cho ba điểm phân biệt A, B, C . Đẳng thức nào sau đây đúng?

- (A) $\vec{CA} - \vec{BA} = \vec{CB}$. (B) $\vec{AB} + \vec{AC} = \vec{CB}$. (C) $\vec{AB} + \vec{CA} = \vec{BC}$. (D) $\vec{AB} - \vec{AC} = \vec{BC}$.

Lời giải.

Ta có $\vec{CA} - \vec{BA} = \vec{CA} + \vec{AB} = \vec{CB}$.

Mặt khác

- ☑ $\vec{AB} + \vec{AC} = \vec{AC} + \vec{CB} + \vec{AC} = 2\vec{AC} + \vec{CB} \neq \vec{CB}$.
 ☑ $\vec{AB} + \vec{CA} = \vec{CA} + \vec{AB} = \vec{CB} \neq \vec{BC}$.
 ☑ $\vec{AB} - \vec{AC} = \vec{CB} \neq \vec{BC}$.

Chọn đáp án (A) □

CÂU 2. Rút gọn biểu thức vectơ $\vec{AM} + \vec{MB} - \vec{AC}$ ta được kết quả đúng là

- (A) \vec{MB} . (B) \vec{BC} . (C) \vec{CB} . (D) \vec{AB} .

Lời giải.

Ta có $\vec{AM} + \vec{MB} - \vec{AC} = \vec{AB} - \vec{AC} = \vec{CB}$.

Chọn đáp án (C) □

CÂU 3. Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$. Tính $\vec{OB} - \vec{OC}$.

- (A) $\vec{OB} - \vec{OC} = \vec{BC}$. (B) $\vec{OB} - \vec{OC} = \vec{DA}$. (C) $\vec{OB} - \vec{OC} = \vec{OD} - \vec{OA}$. (D) $\vec{OB} - \vec{OC} = \vec{AB}$.

Lời giải.

Ta có $\vec{OB} - \vec{OC} = \vec{CB} = \vec{DA}$.

Chọn đáp án (B) □

CÂU 4. Cho bốn điểm A, B, C, D phân biệt và $\vec{u} = \vec{AD} + \vec{CD} - \vec{CB} - \vec{BD}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- (A) $\vec{u} = \vec{0}$. (B) $\vec{u} = \vec{AD}$. (C) $\vec{u} = \vec{CD}$. (D) $\vec{u} = \vec{AC}$.

Lời giải.

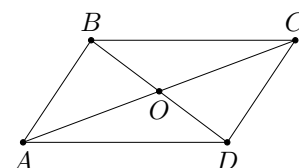
Ta có $\vec{u} = \vec{AD} + \vec{CD} - \vec{CB} - \vec{BD} = \vec{AD} + \vec{BD} - \vec{BD} = \vec{AD}$.

Chọn đáp án (B) □

CÂU 5.

Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O . Hỏi vectơ $\vec{AO} - \vec{DO}$ bằng vectơ nào trong các vectơ sau?

- (A) \vec{BA} . (B) \vec{BC} . (C) \vec{DC} . (D) \vec{AC} .



Lời giải.

Ta có $\vec{AO} - \vec{DO} = -\vec{OA} + \vec{OD} = \vec{OD} - \vec{OA} = \vec{AD} = \vec{BC}$.

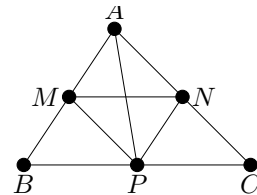
Chọn đáp án (B) □

CÂU 6. Cho tam giác ABC . Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh AB, AC, BC . Tổng $\vec{MP} + \vec{NP}$ bằng vectơ nào?

- (A) \vec{PA} . (B) \vec{AM} . (C) \vec{PB} . (D) \vec{AP} .

Lời giải.

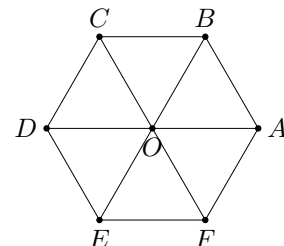
CÂU 6. Ta có tứ giác $MANP$ là hình bình hành.
Mà $\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{NP} = -(\overrightarrow{PM} + \overrightarrow{PN}) = -\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{AP}$.



CÂU 7.

Cho lục giác đều $ABCDEF$ có tâm O . Đẳng thức nào sau đây **sai**?

- Ⓐ $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OE} = \vec{0}$. Ⓑ $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{EB}$.
Ⓒ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EF} = \vec{0}$. Ⓓ $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AD}$.



☞ **Lời giải.**

Ta có

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OE} = (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}) + \overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OE} = \vec{0} \text{ đúng.}$$

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OB} = (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}) + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{EB} \text{ đúng.}$$

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EF} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BO}) + \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0} \text{ đúng.}$$

Chọn đáp án Ⓓ

CÂU 8. Cho hình bình hành $ABCD$. vectơ $\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB}$ bằng vectơ nào dưới đây?

- Ⓐ \overrightarrow{DB} . Ⓑ \overrightarrow{BD} . Ⓒ \overrightarrow{AC} . Ⓓ \overrightarrow{CA} .

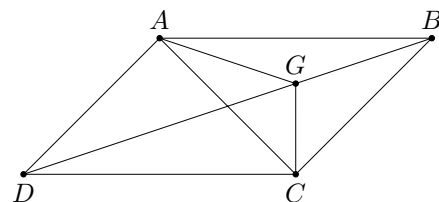
☞ **Lời giải.**

$$\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BD}.$$

CÂU 9.

Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC . Mệnh đề nào sau đây đúng?

- Ⓐ $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \overrightarrow{BD}$. Ⓑ $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \overrightarrow{CD}$.
Ⓒ $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$. Ⓓ $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GD} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{CD}$.



☞ **Lời giải.**

Vì G là trọng tâm của tam giác ABC nên $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GC} = -\overrightarrow{GB}$.

Do đó $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = -\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GD} = \overrightarrow{GD} - \overrightarrow{GB} = \overrightarrow{BD}$.

Chọn đáp án Ⓐ

CÂU 10. Chọn mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau.

- Ⓐ Nếu $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$ thì $|\vec{a}| + |\vec{b}| = |\vec{c}|$. Ⓑ $\overrightarrow{FY} - \overrightarrow{BY} = \overrightarrow{FB}$ với B, F, Y bất kì.
Ⓒ Nếu $ABCD$ là hình bình hành thì $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$. Ⓓ $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MH} = \overrightarrow{AH}$ với A, M, H bất kì.

☞ **Lời giải.**

Mệnh đề sai: Nếu $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$ thì $|\vec{a}| + |\vec{b}| = |\vec{c}|$.

Chọn đáp án Ⓐ

CÂU 11. Trong mặt phẳng cho bốn điểm bất kì A, B, C, O . Đẳng thức nào sau đây là đúng?

- Ⓐ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA}$. Ⓑ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}$. Ⓒ $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CO}$. Ⓓ $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{BA}$.

☞ **Lời giải.**

Nhắc lại lý thuyết: Với 3 điểm O, A, B bất kì:

Quy tắc 3 điểm: $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$.

Quy tắc hiệu: $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BA}$.

Chọn đáp án Ⓒ

CÂU 12. Cho ba điểm A, B, C phân biệt. Đẳng thức nào sau đây là **sai**?

- Ⓐ $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB}$. Ⓑ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$. Ⓒ $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$. Ⓓ $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB}$.

☞ **Lời giải.**

Nhắc lại lý thuyết: Với 3 điểm C, A, B bất kì:

Quy tắc 3 điểm: $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB}$.

Quy tắc hiệu: $\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{BA}$.

Chọn đáp án **(A)** ☐

CÂU 13. Tổng $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{RN} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{QR}$ bằng

(A) \overrightarrow{MR} .

(B) \overrightarrow{MN} .

(C) \overrightarrow{MP} .

(D) \overrightarrow{MQ} .

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{RN} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} + \overrightarrow{RN} = \overrightarrow{MN}$.

Chọn đáp án **(B)** ☐

CÂU 14. Cho 4 điểm bất kì A, B, C, D . Đẳng thức nào sau đây sai?

(A) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}$.

(B) $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{CD}$.

(C) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DA}$.

(D) $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DC}$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BC}$.

Chọn đáp án **(B)** ☐

CÂU 15. Cho bốn điểm A, B, C . Tính $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$.

(A) \overrightarrow{CA} .

(B) $2 \cdot \overrightarrow{AC}$.

(C) $\vec{0}$.

(D) \overrightarrow{AC} .

Lời giải.

$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$.

Chọn đáp án **(D)** ☐

CÂU 16. Cho tam giác ABC và điểm M bất kỳ, chọn đẳng thức **đúng**.

(A) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}$.

(B) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB}$.

(C) $\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{CB}$.

(D) $\overrightarrow{AA} - \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{AB}$.

Lời giải.

Áp dụng quy tắc cộng, trừ. Ta có: $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$

$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{BA}$

$\overrightarrow{AA} - \overrightarrow{BB} = \vec{0}$

Chọn đáp án **(C)** ☐

CÂU 17. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm BC và AD . Tổng của \overrightarrow{NC} và \overrightarrow{MC} là

(A) $\vec{0}$.

(B) \overrightarrow{MN} .

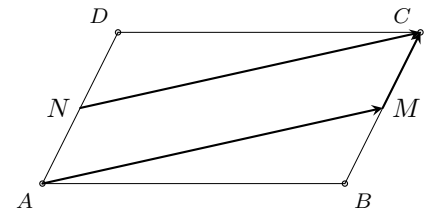
(C) \overrightarrow{NM} .

(D) \overrightarrow{AC} .

Lời giải.

$ANCM$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{NC} = \overrightarrow{AM}$.

Do đó: $\overrightarrow{NC} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AC}$.



Chọn đáp án **(D)** ☐

CÂU 18. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm BC và AD . Tính $\overrightarrow{JC} - \overrightarrow{IC}$ không bằng

(A) \overrightarrow{DC} .

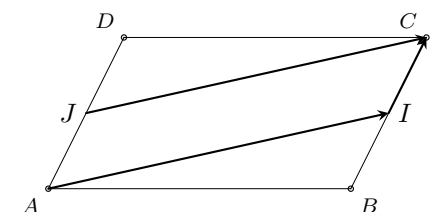
(B) \overrightarrow{JI} .

(C) \overrightarrow{AB} .

(D) \overrightarrow{AC} .

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{JC} - \overrightarrow{IC} = \overrightarrow{JC} + \overrightarrow{CI} = \overrightarrow{JC} + \overrightarrow{DJ} = \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{JI} = \overrightarrow{AB}$.



Chọn đáp án **(D)** ☐

CÂU 19. Cho hình bình hành $ABCD$. Điểm M thỏa mãn điều kiện $\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{DO}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

(A) M trùng với A .

(B) M trùng với B .

(C) M trùng với O .

(D) M trùng với C .

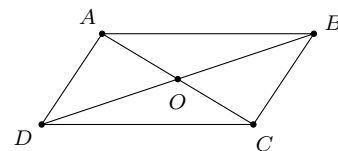
Lời giải.

CÂU 19. Vì O là tâm hình bình hành $ABCD$ nên $\overrightarrow{DO} = \overrightarrow{OB}$.

Khi đó $\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{DO} \Leftrightarrow \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{DO} - \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \overrightarrow{MO} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \overrightarrow{MO} = \overrightarrow{OC}$.

Suy ra O là trung điểm MC . Mà O là trung điểm AC .

Vậy M trùng với A .



CÂU 20. Cho hình bình hành $ABCD$ có tâm O . Điểm M thỏa mãn điều kiện $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{DC}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

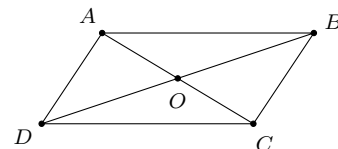
- (A) M trùng với B . (B) M trùng với D . (C) M trùng với A . (D) M trùng với điểm O .

Lời giải.

CÂU 20. Vì $ABCD$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$.

Khi đó

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM} &= \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{DC} \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} &= \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DC} \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} &= \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DC} \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} &= \vec{0}.\end{aligned}$$



Suy ra M trùng với điểm O .

CÂU 21. Cho bốn điểm phân biệt A, B, C, D . Biết điểm M thỏa mãn điều kiện $\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- (A) M là trung điểm CD . (B) M là trung điểm AB . (C) M là trung điểm AD . (D) M là trung điểm BC .

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} &= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MD} - \overrightarrow{AD} &= \vec{0} \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DA} &= \vec{0} \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MA} &= \vec{0}.\end{aligned}$$

Suy ra M là trung điểm AB .

Chọn đáp án (B) □

CÂU 22. Cho các điểm phân biệt A, B, C, D, E, F . Biết điểm M thỏa mãn điều kiện $\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{DF}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- (A) M là trọng tâm tam giác ABC . (B) M là trọng tâm tam giác BCD .
(C) M là trọng tâm tam giác ABD . (D) M là trọng tâm tam giác ACD .

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF} &= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{DF} \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{ME} - \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{MF} - \overrightarrow{DF} &= \vec{0} \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{MF} + \overrightarrow{FD} &= \vec{0} \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD} &= \vec{0}.\end{aligned}$$

Suy ra M là trọng tâm tam giác ABD .

Chọn đáp án (C) □

CÂU 23. Cho hình bình hành $ABCD$ có E là trung điểm AB . Điểm M thỏa mãn điều kiện $\overrightarrow{EB} = \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{BC}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- (A) M là trung điểm AD . (B) M là trung điểm CD . (C) M là trung điểm AB . (D) M là trung điểm BC .

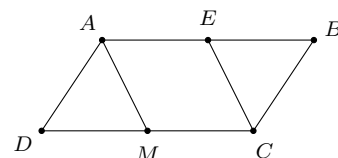
Lời giải.

CÂU 23. Ta có $\overrightarrow{EB} = \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AM} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AM}$.

Do đó $AMCE$ là hình bình hành.

Suy ra $AE = MC$ và $AE \parallel MC$.

Vậy M là trung điểm CD .



CÂU 24. Cho tam giác ABC đều có cạnh bằng a . Tìm tập hợp điểm M thỏa mãn điều kiện $|\overrightarrow{MC}| = |\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}|$.

(A) M thuộc đường tròn tâm A bán kính $a\sqrt{3}$.

(B) M thuộc đường tròn tâm C bán kính $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

(C) M thuộc đường tròn tâm B bán kính $a\sqrt{3}$.

(D) M thuộc đường tròn tâm C bán kính $a\sqrt{3}$.

Lời giải.

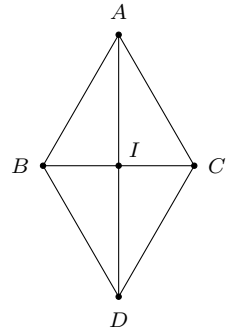
CÂU 24. Dựng hình bình hành $ABDC$. Suy ra $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$.

Khi đó $|\overrightarrow{MC}| = |\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| \Leftrightarrow |\overrightarrow{MC}| = |\overrightarrow{AD}| \Leftrightarrow MC = AD$.

Gọi I là tâm của hình bình hành $ABDC$. Ta có $AD = 2AI = 2 \cdot \frac{AB\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$.

Do đó $MC = a\sqrt{3}$.

Vậy M thuộc đường tròn tâm C bán kính $a\sqrt{3}$.



CÂU 25. Cho hình thang $ABCD$ có AB song song với CD . Cho $AB = 2a$, $CD = a$. O là trung điểm của AD . Khi đó,

(A) $|\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}| = \frac{3a}{2}$.

(B) $|\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}| = a$.

(C) $|\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}| = 2a$.

(D) $|\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}| = 3a$.

Lời giải.

Gọi M là trung điểm của BC . Ta có $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OM}$, mà OM là đường trung bình của hình thang $ABCD$ nên $2OM = AB + CD = 3a$ suy ra $|\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}| = 3a$.

Chọn đáp án (D) □

CÂU 26. Cho tam giác ABC vuông cân tại A có $BC = a\sqrt{2}$, M là trung điểm của BC . Khẳng định nào sau đây đúng?

(A) $|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BM}| = a$.

(B) $|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BM}| = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

(C) $|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BM}| = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

(D) $|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BM}| = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.

Lời giải.

CÂU 26. Dựng hình bình hành $ABMN$.

Ta có: $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BN}$ nên

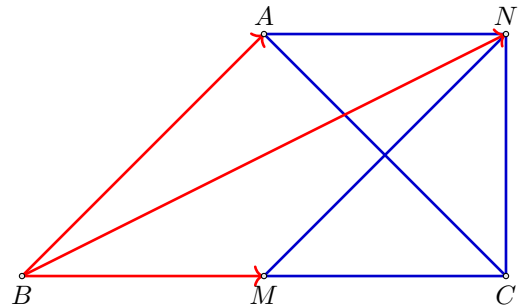
$$|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BM}| = |\overrightarrow{BN}| = BN.$$

Tam giác BCN vuông tại C có

$$NC = AM = \frac{1}{2}BC = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Suy ra

$$BN = \sqrt{BC^2 + NC^2} = \sqrt{2a^2 - \frac{2a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{6}}{2}.$$



CÂU 27. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a tâm O . Tính theo a độ dài của vectơ $\vec{u} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{BC}$.

(A) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

(B) $\frac{3a\sqrt{2}}{2}$.

(C) $a\sqrt{2}$.

(D) a .

Lời giải.

Ta có $\vec{u} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BO} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CO} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB}$.

Suy ra $|\vec{u}| = |\overrightarrow{OB}| = OB = \frac{\sqrt{2}}{2}AB = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Chọn đáp án (A) □

CÂU 28. Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng a . Khi đó $|\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}|$ bằng

(A) $2a$.

(B) $a\sqrt{2}$.

(C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(D) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải.

Ta có $|\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}| = a\sqrt{2}$.

Chọn đáp án (B) □

CÂU 29. Cho tam giác ABC vuông cân tại C , $AB = \sqrt{2}$. Tính độ dài của $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

(A) $\sqrt{5}$.

(B) $2\sqrt{5}$.

(C) $\sqrt{3}$.

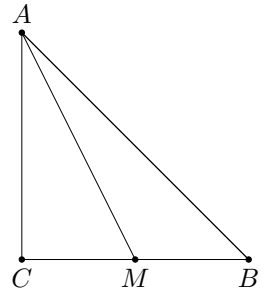
(D) $2\sqrt{3}$.

Lời giải.

CÂU 29. Ta có $AC^2 + BC^2 = AB^2 \Leftrightarrow 2AC^2 = 2 \Rightarrow AC = BC = 1$.

$$AM = \sqrt{AC^2 + CM^2} = \sqrt{1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

$$|\vec{AB} + \vec{AC}| = |2\vec{AM}| = 2AM = \sqrt{5}.$$



CÂU 30. Cho hình bình hành $ABCD$ có $DA = 2\text{cm}$, $AB = 4\text{cm}$ và đường chéo $BD = 5\text{cm}$. Tính $|\vec{BA} - \vec{DA}|$.

(A) 2cm.

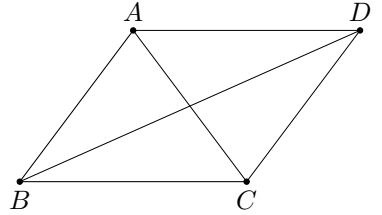
(B) 4cm.

(C) 5cm.

(D) 6cm.

Lời giải.

CÂU 30. $|\vec{BA} - \vec{DA}| = |\vec{BA} + \vec{AD}| = |\vec{BD}| = BD = 5\text{cm}.$



CÂU 31. Cho hình thang $ABCD$ có hai đáy $AB = a$, $CD = 2a$. Gọi M , N là trung điểm của AD , BC . Khi đó $|\vec{MA} + \vec{MC} - \vec{MN}|$ bằng

(A) $\frac{a}{2}.$

(B) $3a.$

(C) $a.$

(D) $2a.$

Lời giải.

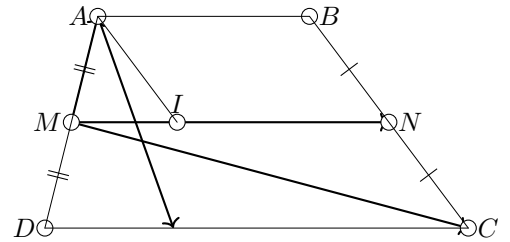
CÂU 31. Ta có $\vec{MA} + \vec{MC} - \vec{MN} = \vec{MA} + \vec{NC}.$ (1)

Qua A , dựng vectơ $\vec{AI} = \vec{NC}$. Suy ra I nằm trên đường thẳng MN và tứ giác $ABNI$ là hình bình hành.

Khi đó, từ (1) suy ra $\vec{MA} + \vec{NC} = \vec{MA} + \vec{AI} = \vec{MI}.$ (2)

Vì M , N lần lượt là trung điểm các cạnh AD và BC nên MN là đường trung bình của hình thang $ABCD$. Suy ra, $MN = \frac{3a}{2}$ và $MI = \frac{a}{2}$

Từ (1) và (2), suy ra $|\vec{MA} + \vec{MC} - \vec{MN}| = |\vec{MI}| = \frac{a}{2}.$



CÂU 32. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a , d là đường thẳng qua A , song song với BD . Gọi M là điểm thuộc đường thẳng d sao cho $|\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} - \vec{MD}|$ nhỏ nhất. Tính theo a độ dài vectơ \vec{MD} .

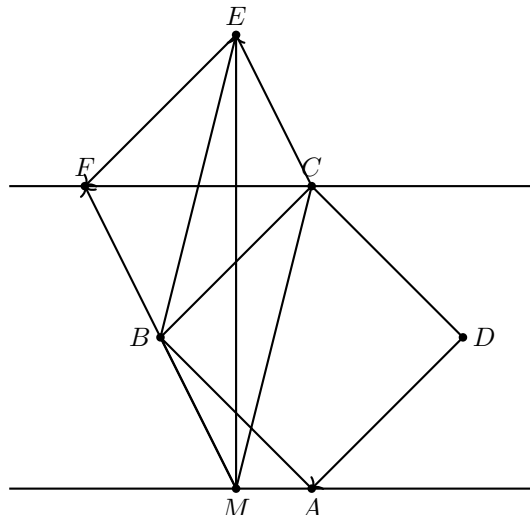
(A) $a\sqrt{2}.$

(B) $\frac{a\sqrt{10}}{2}.$

(C) $a.$

(D) $\frac{a\sqrt{5}}{2}.$

Lời giải.



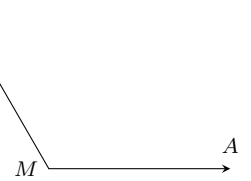
Dựng hình bình hành $MBEC$, $BCEF$, ta có $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MD}| = |\overrightarrow{ME} + \overrightarrow{DA}| = |\overrightarrow{ME} + \overrightarrow{EF}| = |\overrightarrow{MF}|$. Khi M thay đổi trên d thì F thuộc đường thẳng cố định qua C song song với d , điểm M cần tìm là hình chiếu vuông góc của B trên d . Khi đó, ta có $|\overrightarrow{MD}| = MD = \sqrt{BD^2 + BM^2} = \frac{a\sqrt{10}}{2}$.

Chọn đáp án **(B)** □

CÂU 33.

Cho hai lực $\vec{F}_1 = \overrightarrow{MA}$, $\vec{F}_2 = \overrightarrow{MB}$ cùng tác động vào một vật tại điểm M cường độ hai lực \vec{F}_1 , \vec{F}_2 đều bằng 300 (N) và $\widehat{AMB} = 120^\circ$. Tìm cường độ của lực tổng hợp tác động vào vật.

- (A)** 300 (N). **(B)** 700 (N). **(C)** 100 (N). **(D)** 500 (N).

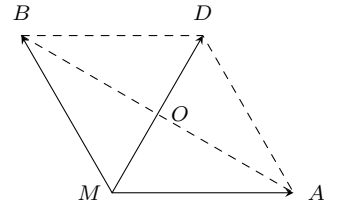


Lời giải.

Gọi D là đỉnh thứ tư của hình thoi $MBDA$, ta có

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MD}.$$

Vậy cường độ lực tổng hợp tại M là $|\overrightarrow{MD}| = MD$.



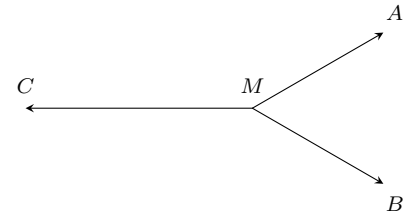
Gọi O là tâm hình thoi $MBDA$ có cạnh 300, do $\widehat{BMA} = 120^\circ \Rightarrow \widehat{MBD} = 60^\circ$. Vậy tam giác MBD đều cạnh 300 suy ra $MD = 300$ (N).

Chọn đáp án **(A)** □

CÂU 34.

Cho ba lực $\vec{F}_1 = \overrightarrow{MA}$, $\vec{F}_2 = \overrightarrow{MB}$, $\vec{F}_3 = \overrightarrow{MC}$ cùng tác động vào một vật tại điểm M và vật đứng yên. Cho biết cường độ của \vec{F}_1 , \vec{F}_2 đều bằng 25 (N) và góc $\widehat{AMB} = 60^\circ$. Khi đó cường độ lực của \vec{F}_3 là

- (A)** $25\sqrt{3}$ (N). **(B)** $50\sqrt{3}$ (N). **(C)** $50\sqrt{2}$ (N). **(D)** $100\sqrt{3}$ (N).



Lời giải.

Gọi D là đỉnh thứ tư của hình thoi $MADB$, ta có

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MD}.$$

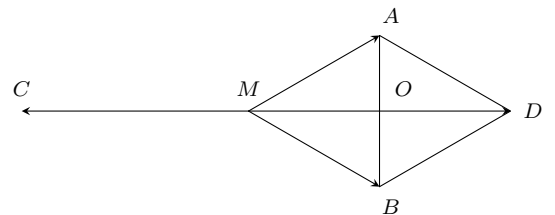
Vậy lực tổng hợp tại M là

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MC}.$$

Do vật đứng yên nên $\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MC} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{MC} = -\overrightarrow{MD}$.

Vậy cường độ lực \vec{F}_3 là

$$|\overrightarrow{MC}| = |\overrightarrow{MD}| = MD.$$



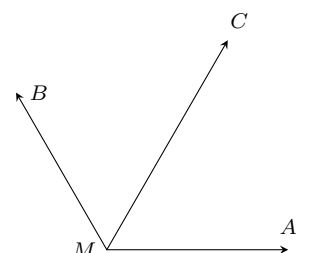
Gọi O là tâm hình thoi $MBDA$ có cạnh 25, ta có $MD = 2MO = 25\sqrt{3}$ (N).

Chọn đáp án **(A)** □

CÂU 35.

Cho ba lực $\vec{F}_1 = \overrightarrow{MA}$, $\vec{F}_2 = \overrightarrow{MB}$, $\vec{F}_3 = \overrightarrow{MC}$ cùng tác động vào một vật tại điểm M cường độ hai lực \vec{F}_1 , \vec{F}_2 đều bằng 300 (N) và $\vec{F}_3 = 400$ (N). Lại có $\widehat{AMB} = 120^\circ$ và $\widehat{AMC} = 60^\circ$. Tìm cường độ của lực tổng hợp tác động vào vật.

- (A)** 300 (N). **(B)** 700 (N). **(C)** 100 (N). **(D)** 500 (N).



Lời giải.

Gọi D là đỉnh thứ tư của hình thoi $MBDA$, ta có

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MD}.$$

Vậy cường độ lực tổng hợp tại M là

$$|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}| = |\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MC}|.$$

Lại có \overrightarrow{MD} và \overrightarrow{MC} là 2 vectơ cùng hướng nên $|\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MC}| = MD + MC$.

Gọi O là tâm hình thoi $MBDA$ có cạnh 300, do $\widehat{BMA} = 120^\circ \Rightarrow \widehat{MBD} = 60^\circ$.

Vậy tam giác MBD đều cạnh 300 suy ra $MD = 300$ (N).

Vậy cường độ lực tổng hợp tại M là $MD + MC = 300 + 400 = 700$ (N).

Chọn đáp án (B) □

CÂU 36.

Cho ba lực $\vec{F}_1 = \overrightarrow{MA}$, $\vec{F}_2 = \overrightarrow{MB}$, $\vec{F}_3 = \overrightarrow{MC}$ cùng tác động vào một vật tại điểm M cường độ hai lực \vec{F}_1 , \vec{F}_2 đều bằng 300 (N) và $\vec{F}_3 = 400$ (N). Lại có $\widehat{AMB} = 120^\circ$ và $\widehat{AMC} = 150^\circ$. Tìm cường độ của lực tổng hợp tác động vào vật.

- (A) 300 (N). (B) 700 (N). (C) 100 (N). (D) 500 (N).

Lời giải.

Gọi D là đỉnh thứ tư của hình thoi $MBDA$, ta có

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MD}.$$

Vậy cường độ lực tổng hợp tại M là

$$|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}| = |\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MC}|.$$

Gọi O là tâm hình thoi $MBDA$ có cạnh 300, do $\widehat{BMA} = 120^\circ \Rightarrow \widehat{MBD} = 60^\circ$.

Vậy tam giác MBD đều cạnh 300 suy ra $MD = 300$ (N) và $\widehat{DMA} = 60^\circ$.

Suy ra $\widehat{CMD} = 150^\circ - 60^\circ = 90^\circ$ hay tam giác CMD vuông tại M .

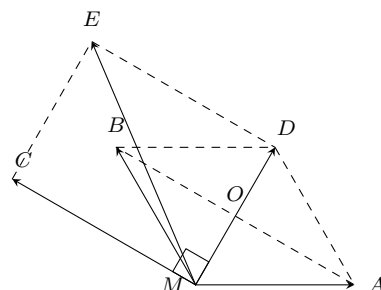
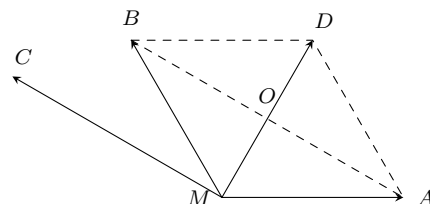
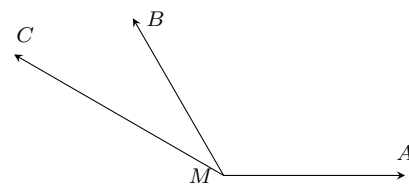
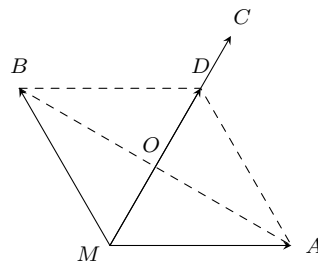
Gọi E là đỉnh thứ tư của hình chữ nhật $CMDE$, ta có

$$|\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MC}| = |\overrightarrow{ME}| = ME.$$

Do $CMDE$ là hình chữ nhật nên

$$ME = \sqrt{300^2 + 400^2} = 500 \text{ (N)}.$$

Chọn đáp án (B) □



MỤC LỤC

Bài 3. Các khái niệm mở đầu	1
Ⓐ Tóm tắt lí thuyết	1
Ⓑ Các dạng toán	1
☞ Dạng 1. Xác định một vectơ, độ dài vectơ	1
☞ Dạng 2. Hai vectơ cùng phương, cùng hướng và bằng nhau	2
Ⓒ Câu hỏi trắc nghiệm	2
Bài 4. Tổng và hiệu của hai vectơ	4
Ⓐ TÓM TẮT LÝ THUYẾT	4
Ⓑ Các dạng toán	5
☞ Dạng 1. Tính tổng, hiệu hai vectơ	5
☞ Dạng 2. Xác định vị trí của một điểm từ đẳng thức vectơ	6
☞ Dạng 3. Tính độ dài vectơ	7
☞ Dạng 4. Chứng minh một đẳng thức vectơ	7
☞ Dạng 5. Ứng dụng của vectơ trong thực tiễn	8
Ⓒ Câu hỏi trắc nghiệm	9

LỜI GIẢI CHI TIẾT 13

Bài 3. Các khái niệm mở đầu	13
Ⓐ Tóm tắt lí thuyết	13
Ⓑ Các dạng toán	13
☞ Dạng 1. Xác định một vectơ, độ dài vectơ	13
☞ Dạng 2. Hai vectơ cùng phương, cùng hướng và bằng nhau	14
Ⓒ Câu hỏi trắc nghiệm	16
Bài 4. Tổng và hiệu của hai vectơ	20
Ⓐ TÓM TẮT LÝ THUYẾT	20
Ⓑ Các dạng toán	21
☞ Dạng 1. Tính tổng, hiệu hai vectơ	21
☞ Dạng 2. Xác định vị trí của một điểm từ đẳng thức vectơ	23
☞ Dạng 3. Tính độ dài vectơ	24
☞ Dạng 4. Chứng minh một đẳng thức vectơ	25
☞ Dạng 5. Ứng dụng của vectơ trong thực tiễn	26
Ⓒ Câu hỏi trắc nghiệm	28

