Bài 1. GTLG CỦA MỘT GÓC TỪ 0° ĐẾN 180°

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. Khái niệm

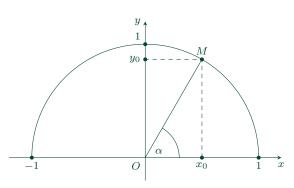
Điểm $M(x_0; y_0)$ nằm trên nửa đường tròn đơn vi sao cho $\widehat{xOM} = \alpha$. Khi đó



$$\Theta$$
 $\cos \alpha = x_0;$

$$\ensuremath{ \bigodot}$$
 $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ với ($\alpha \neq 90^\circ);$

$$\odot$$
 $\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$ với $(\alpha \neq 0^{\circ}, 180^{\circ})$.



2. Dấu của giá trị lượng giác.

Góc α	0°	90°		180°
$\sin \alpha$	+		+	
$\cos \alpha$	+		_	
$\tan \alpha$	+		_	
$\cot \alpha$	+		_	

3. Bảng giá trị lượng giác của một số góc đặc biệt cần nhớ

α	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{-1}{2}$	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	$\frac{-\sqrt{3}}{2}$	-1
$\tan \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	//	$-\sqrt{3}$	-1	$\frac{-\sqrt{3}}{3}$	0
$\cot \alpha$	//	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{-\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	//

4. Tính chất

- a) Giá trị lượng giá của hai góc phụ nhau
 - Θ $\sin(90^{\circ} \alpha) = \cos \alpha$.
 - Θ $\cos(90^{\circ} \alpha) = \sin \alpha$.
 - Θ tan(90° α) = cot α .
 - \odot $\cot(90^{\circ} \alpha) = \tan \alpha$.

- b) Giá trị lượng giác của hai góc bù nhau
 - Θ $\sin(180^{\circ} \alpha) = \sin \alpha$.
 - Θ $\cos(180^{\circ} \alpha) = -\cos \alpha$.
 - Θ tan(180° α) = tan α .

α	Пŝ	thức	ad	hån

- Θ $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$.
- \bigcirc 1 + tan² $\alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$ với $(\alpha \neq 90^\circ)$.
- $\mbox{\Large \o} \ 1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \ \mbox{v\'oi} \ (0^\circ < \alpha < 180^\circ).$
- \odot tan $\alpha \cdot \cot \alpha = 1$ với $(0^{\circ} < \alpha < 180^{\circ}, \alpha \neq 90^{\circ})$.



ĐIỂM:

"It's not how much time you have, it's how you use it."

QUICK NOTE

•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•

•	•	•	•	•	٠	٠	٠	٠	٠	•	•	•	•	•	•	•	٠	•	•	•	•	٠	٠	٠	٠	•	•	•	•	•	•	٠	

•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•

	6	٦l	JI	C)	K	N	ļ	C)	Ī	
-		-			-			1				

B. CÁC DẠNG TOÁN

🖒 Dạng 1. Tính giá trị biểu thức lượng giác

Áp dụng các công thức lượng giác

1. Ví dụ

VÍ DU 1. Không dùng máy tính, tính giá trị của các biểu thức sau

a)
$$A = \sin 45^{\circ} \cot 135^{\circ} + \cos 60^{\circ} \cdot \sin 150^{\circ} - \cos 30^{\circ} \cdot \sin 120^{\circ}$$
.

b)
$$B = \tan 135^{\circ} + \cot 60^{\circ} \cot 30^{\circ} - \tan 60^{\circ} \tan 150^{\circ}$$
.

c)
$$C = 2\sin 60^{\circ} \tan 150^{\circ} - \cos 180^{\circ} \cdot \cot 45^{\circ}$$
.

VÍ DU 2.

a) Cho
$$\cos \alpha = \frac{3}{4}$$
 với $0^{\circ} < \alpha < 90^{\circ}$. Tính $A = \frac{\tan \alpha + 3 \cot \alpha}{\tan \alpha + \cot \alpha}$.

b) Cho
$$\tan \alpha = \sqrt{2}$$
. Tính $B = \frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{\sin^3 \alpha + 3\cos^3 \alpha + 2\sin \alpha}$.

2. Bài tập tự luận

BÀI 1. Tính giá trị của các biểu thức

a)
$$A = \sin 45^{\circ} + 2\sin 60^{\circ} + \tan 120^{\circ} + \cos 135^{\circ}$$
;

b)
$$B = \tan 45^{\circ} \cdot \cot 135^{\circ} - \sin 30^{\circ} \cdot \cos 120^{\circ} - \sin 60^{\circ} \cdot \cos 150^{\circ}$$
;

c)
$$C = \cos^2 5^\circ + \cos^2 25^\circ + \cos^2 45^\circ + \cos^2 65^\circ + \cos^2 85^\circ$$
;

d)
$$D = \frac{12}{1 + \tan^2 73^\circ} - 4 \tan 75^\circ \cdot \cot 105^\circ + 12 \sin^2 107^\circ - 2 \tan 40^\circ \cdot \cos 60^\circ \cdot \tan 50^\circ;$$

e)
$$E = 4 \tan 32^{\circ} \cdot \cos 60^{\circ} \cdot \cot 148^{\circ} + \frac{5 \cot^2 108^{\circ}}{1 + \tan^2 18^{\circ}} + 5 \sin^2 72^{\circ}$$
.

BÀI 2. Chứng minh rằng

a)
$$\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha$$
;

b)
$$\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha = 1 - 3\sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha$$
:

c)
$$\sqrt{\sin^4 \alpha + 6\cos^2 \alpha + 3} + \sqrt{\cos^4 \alpha + 4\sin^2 \alpha} = 4$$
.

BÀI 3. Cho góc α với $90^{\circ} < \alpha < 180^{\circ}$ thỏa mãn $\sin \alpha = \frac{3}{4}$. Tính giá trị của biểu thức $F = \frac{\tan \alpha + 2 \cot \alpha}{\tan \alpha + \cot \alpha}.$

BÀI 4. Cho góc α thỏa mãn $0^\circ < \alpha < 180^\circ$ và $\tan \alpha = \sqrt{2}$. Tính giá trị của các biểu thức sau

$$K = \frac{\sin^3 \alpha + \sin \alpha \cdot \cos^2 \alpha + 2\sin^2 \alpha \cdot \cos \alpha - 4\cos^3 \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha}.$$

Dạng 2. Tìm các GTLG khi biết một GTLG của góc

 ${
m \acute{A}p}$ dụng tính chất về dấu của GTLG của một góc và các công thức lượng giác cơ bản.

Ví dụ minh hoạ Ví Dụ 1.

a) Cho
$$\sin\alpha = \frac{1}{3}$$
 với $90^{\circ} < \alpha < 180^{\circ}.$ Tính $\cos\alpha$ và $\tan\alpha.$

b) Cho
$$\cos \alpha = -\frac{2}{3}$$
 và $\sin \alpha > 0$. Tính $\sin \alpha$ và $\cot \alpha$.

c) Cho tan
$$\alpha = -2\sqrt{2}$$
, tính giá trị lượng giác còn lại.

2. Bài tập tự luận

BÀI 1. Cho góc α , $0^{\circ} < \alpha < 180^{\circ}$ thỏa mãn $\cos \alpha = \frac{-1}{3}$.

- a) Tính $\tan \alpha$.
- b) Tính giá trị của biểu thức $P = \tan \alpha + 2 \cot \alpha$.

BÀI 2. Cho góc α thỏa mãn $0^{\circ} < \alpha < 180^{\circ}$ và $\tan \alpha = 2$. Tính giá trị của các biểu thức

- a) $G = 2\sin\alpha + \cos\alpha$;
- b) $H = \frac{2\sin\alpha + \cos\alpha}{\sin\alpha \cos\alpha}$

C. CÂU HỔI TRẮC NGHIỆM

CÂU 1. Giá trị của $\cos 60^{\circ} + \sin 30^{\circ}$ bằng bao nhiêu?

- (**D**)1.

CÂU 2. Giá trị của $\tan 30^{\circ} + \cot 30^{\circ}$ bằng bao nhiêu?

- **B** $\frac{1+\sqrt{3}}{3}$.
- $(\mathbf{D})2.$

CÂU 3. Trong các đẳng thức sau đây, đẳng thức nào sai?

 $(\mathbf{A})\sin 0^{\circ} + \cos 0^{\circ} = 1.$

- $\mathbf{B}\sin 90^{\circ} + \cos 90^{\circ} = 1.$
- $(\mathbf{C})\sin 180^{\circ} + \cos 180^{\circ} = -1.$
- $(\mathbf{D})\sin 60^{\circ} + \cos 60^{\circ} = 1.$

CÂU 4. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sai?

 $(\mathbf{A})\cos 60^{\circ} = \sin 30^{\circ}.$

 $(\mathbf{B})\cos 60^{\circ} = \sin 120^{\circ}.$

 $(\mathbf{C})\cos 30^{\circ} = \sin 120^{\circ}.$

 $(\mathbf{D})\sin 60^{\circ} = -\cos 120^{\circ}.$

CÂU 5. Đẳng thức nào sau đây **sai**?

- $(\mathbf{A})\sin 45^{\circ} + \sin 45^{\circ} = \sqrt{2}.$
- (B) $\sin 30^{\circ} + \cos 60^{\circ} = 1$.
- $(\mathbf{C})\sin 60^{\circ} + \cos 150^{\circ} = 0.$
- $(\mathbf{D})\sin 120^{\circ} + \cos 30^{\circ} = 0.$

CÂU 6. Giá trị $\cos 45^{\circ} + \sin 45^{\circ}$ bằng bao nhiêu?

- **(B)** $\sqrt{2}$.
- $(\mathbf{C})\sqrt{3}$.
- $(\mathbf{D})_0$.

CÂU 7. Trong các đẳng thức sau, đẳng thức nào đúng?

- $(\mathbf{A})\sin\left(180^{\circ} \alpha\right) = -\cos\alpha.$
- $(\mathbf{B})\sin\left(180^{\circ} \alpha\right) = -\sin\alpha.$
- $(\mathbf{C})\sin\left(180^{\circ} \alpha\right) = \sin\alpha.$
- $(\mathbf{D})\sin(180^{\circ} \alpha) = \cos \alpha.$

CÂU 8. Trong các đẳng thức sau, đẳng thức nào **sai**?

 $(\mathbf{A})\sin 0^{\circ} + \cos 0^{\circ} = 0.$

- $\mathbf{B}\sin 90^{\circ} + \cos 90^{\circ} = 1.$
- $(\mathbf{C})\sin 180^{\circ} + \cos 180^{\circ} = -1.$
- $\bigcirc \sin 60^{\circ} + \cos 60^{\circ} = \frac{\sqrt{3+1}}{2}.$

CÂU 9. Cho α là góc tù. Điều khẳng định nào sau đây là **đúng**?

- $(\mathbf{A})\sin\alpha < 0.$
- $(\mathbf{B})\cos\alpha > 0.$
- (C) $\tan \alpha < 0$.
- $(\mathbf{D})\cot \alpha > 0.$

CÂU 10. Giá trị của $E = \sin 36^{\circ} \cos 6^{\circ} - \sin 126^{\circ} \cos 84^{\circ}$ là

CÂU 11. Giá tri của biểu thức $A = \sin^2 51^\circ + \sin^2 55^\circ + \sin^2 39^\circ + \sin^2 35^\circ$ là

CÂU 12. Giá tri của biểu thức $A = \tan 1^{\circ} \tan 2^{\circ} \tan 3^{\circ} \cdots \tan 88^{\circ} \tan 89^{\circ}$ là

CÂU 13. Tổng $\sin^2 2^\circ + \sin^2 4^\circ + \sin^2 6^\circ + \dots + \sin^2 84^\circ + \sin^2 86^\circ + \sin^2 88^\circ$ bằng

- (**A**)21.
- **(B)**23.

CÂU 14. Giá trị của $A = \tan 5^{\circ} \cdot \tan 10^{\circ} \cdot \tan 15^{\circ} \cdot \cdot \cdot \tan 80^{\circ} \cdot \tan 85^{\circ}$ là

- $(\mathbf{C})_{0}$.
- (**D**)-1.

♥ VNPmath - 0962940819 ♥	
QUICK NOTE	CÂL
	CÂI
	CÂI
	CÂI
	CÂI
	CÂI
	CÂI
	CÂI
	CÂI
	CÂI
	CÂI
	nhiê
	CÂI
	CÂI
	CAC
	CÂI
	CÂI
	CÂI

J 15. Giá trị của $B = \cos^2 73^\circ + \cos^2 87^\circ + \cos^2 3^\circ + \cos^2 17^\circ$ là **J 16.** Cho $\cos x = \frac{1}{2}$. Tính biểu thức $P = 3\sin^2 x + 4\cos^2 x$ $\bigcirc \frac{11}{4}$. **J 17.** Biết $\cos \alpha = \frac{1}{3}$. Giá trị đúng của biểu thức $P = \sin^2 \alpha + 3\cos^2 \alpha$ là $c \frac{11}{0}$. **U 18.** Cho biết $\tan \alpha = \frac{1}{2}$. Tính $\cot \alpha$. $\mathbf{B}\cot\alpha = \sqrt{2}.$ $\mathbf{C}\cot\alpha = \frac{1}{4}.$ $\mathbf{D}\cot\alpha = \frac{1}{2}.$ $\cot \alpha = 2.$ **U 19.** Cho biết $\cos \alpha = -\frac{2}{3}$ và $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Tính $\tan \alpha$? **U 20.** Cho α là góc từ và $\sin \alpha = \frac{5}{13}$. Giá trị của biểu thức $3\sin \alpha + 2\cos \alpha$ là \mathbf{C} -3. **1**)3. **J 21.** Cho biết $\sin \alpha + \cos \alpha = a$. Giá trị của $\sin \alpha \cdot \cos \alpha$ bằng bao nhiêu? $\sin \alpha \cdot \cos \alpha = a^2.$ $(\mathbf{B})\sin\alpha\cdot\cos\alpha=2a.$ $\sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{1 - a^2}{2}.$ **U 22.** Cho biết $\cos \alpha = -\frac{2}{3}$. Tính giá trị của biểu thức $E = \frac{\cot \alpha + 3 \tan \alpha}{2 \cot \alpha + \tan \alpha}$? **A** $-\frac{19}{13}$. **B** $\frac{19}{12}$. **C** $\frac{25}{13}$. **D** $-\frac{25}{13}$. **U 23.** Cho biết $\cot \alpha = 5$. Tính giá trị của $E = 2\cos^2 \alpha + 5\sin \alpha \cos \alpha + 1$?

(A) $\frac{10}{26}$.

(B) $\frac{100}{26}$.

(C) $\frac{50}{26}$.

(D) $\frac{101}{26}$. **U 24.** Cho cot $\alpha = \frac{1}{3}$. Giá trị của biểu thức $A = \frac{3 \sin \alpha + 4 \cos \alpha}{2 \sin \alpha - 5 \cos \alpha}$ là $-\frac{15}{13}$. **J 25.** Cho biết $\cos \alpha = -\frac{2}{3}$. Giá trị của biểu thức $E = \frac{\cot \alpha - 3 \tan \alpha}{2 \cot \alpha - \tan \alpha}$ bằng bao $\mathbf{B} - \frac{11}{13}$. $\mathbf{c} - \frac{11}{2}$. **J 26.** Biết $\sin a + \cos a = \sqrt{2}$. Hỏi giá trị của $\sin^4 a + \cos^4 a$ bằng bao nhiêu? **J 27.** Cho tan $\alpha + \cot \alpha = m$. Tìm m để tan $\alpha + \cot^2 \alpha = 7$. **(B)**m = 3. $(\mathbf{C})m = -3.$ **U 28.** Cho biết $3\cos\alpha - \sin\alpha = 1$, $0^{\circ} < \alpha < 90^{\circ}$ Giá trị của $\tan\alpha$ bằng $\tan\alpha = \frac{4}{3}$. **B** $\tan\alpha = \frac{3}{4}$. **C** $\tan\alpha = \frac{4}{5}$. **U 29.** Cho biết $2\cos\alpha + \sqrt{2}\sin\alpha = 2$, $0^{\circ} < \alpha < 90^{\circ}$. Tính giá trị của $\cot\alpha$. $\mathbf{A} \cot\alpha = \frac{\sqrt{5}}{4}$. $\mathbf{B} \cot\alpha = \frac{\sqrt{3}}{4}$. $\mathbf{C} \cot\alpha = \frac{\sqrt{2}}{4}$. $\mathbf{D} \cot\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

U 30. Cho biết $\cos \alpha + \sin \alpha = \frac{1}{3}$. Giá trị của $P = \sqrt{\tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha}$ bằng bao nhiêu? $P = \frac{5}{4}$. $P = \frac{5}{4}$. $P = \frac{11}{4}$.

CÂU 31. Cho biết $\sin \alpha - \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$. Giá trị của $P = \sqrt{\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha}$ bằng bao nhiêu?

B $P = \frac{\sqrt{17}}{5}$. **C** $P = \frac{\sqrt{19}}{5}$.

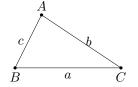
Bài 2. HỆ THỰC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Định lý Cos

Cho tam giác ABC có BC = a, AC = b và AB = c.

- $a^2 = b^2 + c^2 2bc \cdot \cos A \Rightarrow \cos A = \dots$
- $b^2 = c^2 + a^2 2ca \cdot \cos B \Rightarrow \cos B = \dots$
- $c^2 = a^2 + b^2 2ab \cdot \cos C \Rightarrow \cos A = \dots$

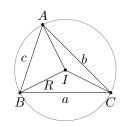


2. Đinh lý Sin

Cho tam giác ABC có $BC=a, AC=b, \ AB=c$ và R là bán kính đường tròn ngoại tiếp. Ta có

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

🛕 Ghi nhớ: Tỉ lệ "cạnh chia sin góc đối" thì bằng nhau.



3. Công thức tính diện tích tam giác

Gọi S là diện tích tam giác ABC. Ta có

$$\odot$$
 $S = \frac{abc}{4R}$, $S = p \cdot r$, (đọc thêm)

$$\odot$$
 $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

Trong đó:

- h_a , h_b , h_c là độ dài đường cao lần lượt tương ứng với các cạnh BC, CA, AB.
- \bullet R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác.
- \bullet r là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác.
- $p = \frac{a+b+c}{2}$ là nửa chu vi tam giác.

B. CÁC DANG TOÁN

Dạng 1. Áp dụng định lý cos

Nhận dạng định lý:

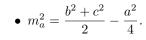
- Cho tam giác biết trước độ dài hai cạnh và số đo của một góc.
- Cho tam giác biết trước độ dài ba cạnh.

1. Ví dụ minh hoạ

VÍ DỤ 1. Cho tam giác ABC có b=5, c=7 và $\cos A=\frac{3}{5}$. Tính cạnh a và cosin các góc còn lai của tam giác đó.

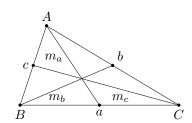
VÍ DỤ 2. Cho tam giác ABC có AC=10cm, BC=16cm và $C=120^\circ$, tính độ dài cạnh AB.

lacktriangle Cho tam giác ABC có m_a , m_b , m_c lần lượt là các trung tuyến kẻ từ A, B, C. Ta



$$\bullet \ m_b^2 = \frac{a^2 + c^2}{2} - \frac{b^2}{4}.$$

•
$$m_c^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4}$$
.

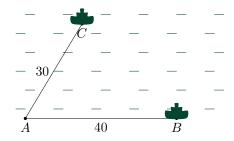


VÍ DỤ 3. Cho tam giác ABC có AB=4 cm, AC=3 cm và BC=6 cm. Tính độ dài trung tuyến kẻ từ C của tam giác ABC.

VÍ DỤ 4. Cho tam giác ABC có BC=3, CA=4 và AB=6. Tính cosin của góc có số đo lớn nhất của tam giác đã cho.

VÍ DŲ 5.

Hai chiếc tàu thủy cùng xuất phát từ một vị trí A, đi thẳng theo hai hướng tạo với nhau góc 60° . Tàu B chạy với tốc độ 20 hải lí một giờ. Tàu C chạy với tốc độ 15 hải lí một giờ. Hỏi sau hai giờ, hai tàu cách nhau bao nhiêu hải lí?



VÍ DỤ 6. Tam giác ABC có AB = c; BC = a; CA = b. Các cạnh a, b, c liên hệ với nhau bởi đẳng thức $b(b^2 - a^2) = c(a^2 - c^2)$. Tính số đo góc \widehat{BAC} .

2. Bài tập tự luận

BÀI 1. Cho tam giác ABC có $\widehat{A}=60^{\circ}, AB=6, AC=8$. Tính BC.

BÀI 2. Cho tam giác ABC có các cạnh $BC=6,\,CA=4\sqrt{2},\,AB=2.$ Tính $\cos A$ và góc $\widehat{A}.$

BÀI 3. Cho tam giác ABC có AB=6 cm; AC=5 cm và $\widehat{ACB}=60^{\circ}$. Tính BC.

BÀI 4. Tam giác ABC có b=6, c=8 và $m_a=5$. Tính a, \widehat{A} .

BÀI 5. Cho tam giác ABC, gọi l_a là độ dài đường phân giác trong kẻ từ đỉnh A của tam giác ABC. Chứng minh rằng $l_a = \frac{bc\sin A}{(b+c)\sin\frac{A}{2}}$.

BÀI 6. Hai lực $\overrightarrow{f_1}$ và $\overrightarrow{f_2}$ cho trước cùng tác dụng lên một vật và tạo thành góc nhọn $(\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}) = \alpha$. Hãy lập công thức tính cường độ của hợp lực \overrightarrow{s} .

🕒 Dạng 2. Áp dụng định lý sin

Nhận dạng định lý:

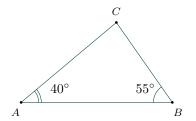
- Cho tam giác biết trước độ dài hai cạnh và số đo của một góc.
- Cho tam giác biết trước độ dài một cạnh và số đo của hai góc.
- Cho tam giác biết trước độ dài một cạnh, số đo góc đối diện và bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác.

1. Ví dụ minh hoạ

VÍ DỤ 1. Cho tam giác ABC có $\widehat{A}=120^\circ$ và BC=10 cm. Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

VÍ DU 2.

Cho tam giác ABC có $\widehat{A}=40^\circ, \ \widehat{B}=55^\circ$ và AB=100. Tính độ dài cạnh BC (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).



VÍ DỤ 3. Cho tam giác ABC có $\frac{AB}{2} = \frac{BC}{3}$ và $\widehat{A} = 45^{\circ}$. Tính các góc B, C của tam giác đó (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

VÍ DỤ 4. Cho tam giác ABC có $\widehat{A}=30^\circ$, $\widehat{B}=50^\circ$ và bán kính đường tròn ngoại tiếp bằng 10 cm. Tính độ dài các cạnh của tam giác ABC (làm tròn đến hàng phần mười).

VÍ DỤ 5. Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng $\sin^2 A = \sin B \sin C$ khi và chỉ khi $a^2 = bc$.

VÍ DỤ 6. Cho tam giác ABC. Biết AB=5 cm, BC=6 cm và $2\sin A=\sin B+\sin C$. Tính độ dài cạnh AC.

2. Bài tập tự luận

BÀI 1. Cho tam giác ABC có $\widehat{B}=70^\circ$ và AC=15 cm. Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

BÀI 2. Cho tam giác ABC có $\widehat{B}=30^\circ$, $\widehat{C}=65^\circ$ và BC=50. Tính độ dài cạnh AB (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

BÀI 3. Cho tam giác ABC có $\frac{BC}{3} = \frac{AC}{5}$ và $\widehat{A} = 30^{\circ}$. Tính các góc B, C của tam giác đó (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

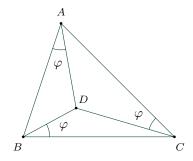
BÀI 4. Cho tam giác ABC thỏa mãn $a\sin B = c\sin A$. Chứng minh rằng tam giác ABC cân.

BÀI 5. Cho tam giác ABC thỏa mãn $\sin^2 A = \sin^2 B + \sin^2 C$. Chứng minh rằng tam giác ABC vuông.

BÀI 6.

Cho tam giác ABC. Gọi D là điểm thuộc miền trong tam giác ABC sao cho $\widehat{BAD} = \widehat{CBD} = \widehat{ACD} = \varphi$. Chứng minh rằng

$$\sin^3 \varphi = \sin(A - \varphi)\sin(B - \varphi)\sin(C - \varphi).$$



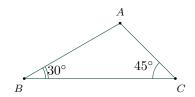
Dạng 3. Giải tam giác và ứng dụng

Giải tam giác là bài toán tìm độ dài tất cả các cạnh và độ lớn tất cả các góc của tam giác.

1. Ví dụ minh hoạ

VÍ DỤ 1.

Cho tam giác ABC có BC=40 cm, $\widehat{B}=30^{\circ}, \widehat{C}=45^{\circ}$. Tính góc \widehat{A} và độ dài các cạnh AB, AC của tam giác đó (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

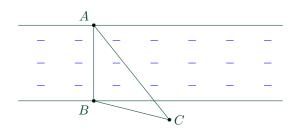


VÍ DỤ 2. Cho tam giác ABC có $AB=25,\ AC=20,\ \widehat{A}=120^{\circ}.$ Tính cạnh BC và các góc $B,\ C$ của tam giác đó.

VÍ DU 3.

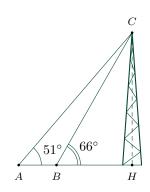
♥ VNPmath - 0962940819 ♥
QUICK NOTE

Để đo chiều rộng AB của một khúc sông, người ta chọn điểm C. Sau đó, đo khoảng cách BC, các góc B và C. Biết rằng BC=200 m, $\widehat{B}=107^\circ$, $\widehat{C}=28^\circ$. Tìm chiều rộng AB của khúc sông đó (làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất).



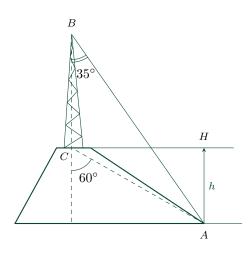
VÍ DŲ 4.

Để đo chiều cao CH của một tháp truyền hình, người ta chọn hai điểm quan sát A, B trên mặt đất (hình vẽ). Biết $\widehat{CAH} = 51^{\circ}$, $\widehat{CBH} = 66^{\circ}$ và AB = 75 m, tính chiều cao của tháp.



VÍ DŲ 5.

Trên ngọn đồi có một cái tháp cao 120 m. Đỉnh tháp B và chân tháp C nhìn điểm A ở chân đồi dưới các góc tương ứng bằng 35° và 60° so với phương thẳng đứng. Xác định chiều cao HA của ngọn đồi. (Làm tròn đến phần mười)



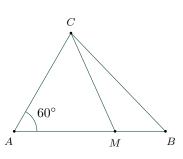
2. Bài tập tự luận

BÀI 1. Cho tam giác ABC có $AB=8,\ BC=10,\ AC=15.$ Tính $\widehat{A}+2\widehat{C}$ (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

BÀI 2. Cho tam giác ABC có AB=15 cm, AC=21 cm, $\widehat{A}=30^{\circ}$. Tính cạnh BC và các góc B, C của tam giác đó (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

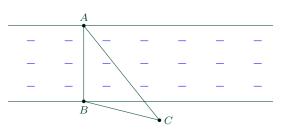
BÀI 3.

Cho tam giác ABC có $AB=15,\ AC=12,\ \widehat{A}=60^{\circ}.\ M$ là điểm thuộc cạnh AB sao cho AM=2BM. Tính cạnh CM, góc \widehat{BCM} và bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác BCM (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).



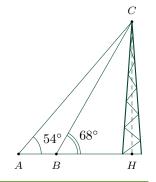
BÀI 4.

Để đo chiều rộng AB của một khúc sông, người ta chọn điểm C, đo khoảng cách BC, các góc B và C. Biết rằng BC=250 m, $\widehat{B}=104^\circ$, $\widehat{C}=31^\circ$. Tìm chiều rộng AB của khúc sông đó (làm tròn đến chữ số hàng đơn vị).



BÀI 5.

 $D^{\hat{e}}$ đo chiều cao CH của một tháp truyền hình, người ta chon hai điểm quan sát A, B trên mặt đất (hình vẽ). Biết $CAH = 54^{\circ}$, $\widehat{C}B\widehat{H}=68^{\circ}$ và AB=80 m, tính chiều cao của tháp (Làm tròn đến hàng đơn vị).



🖢 Dạng 4. Bài tập tổng hợp

1. Ví du minh hoa

VÍ DU 1. Cho tam giác ABC có $\widehat{A} = 60^{\circ}$ và AB = 8 cm, AC = 5 cm.

- a) Tính diện tích của tam giác ABC.
- b) Tính độ dài đường cao hạ từ đỉnh A của tam giác ABC.
- c) Tính bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

VÍ DU 2. Cho hình bình hành ABCD có AB = 6, BC = 8 và $\widehat{ABC} = 60^{\circ}$. Tính diện tích hình bình hành ABCD.

VÍ DU 3. Cho tam giác ABC có $\widehat{A} = 120^{\circ}$, $\widehat{B} = 30^{\circ}$, diện tích tam giác ABC bằng $9\sqrt{3}$. Tính các cạnh của tam giác ABC.

VÍ DU 4. Cho tam giác ABC có AB = 2, $AC = 2\sqrt{7}$ và BC = 4.

- a) Tính góc B và diện tích tam giác ABC.
- b) Tính độ dài đường phân giác trong của góc B của tam giác ABC.

2. Bài tấp tư luân

BÀI 1. Cho tam giác với ba cạnh a = 13, b = 14, c = 15. Tính diện tích của tam giác và độ dài đường cao h_c .

BÀI 2. Cho tam giác ABC có AB = 10, BC = 6 và góc $\widehat{B} = 120^{\circ}$.

- a) Tính AC và diện tích tam giác ABC.
- b) Tính đường cao AH và bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC.
- c) Tính độ dài đường phân giác trong BD của tam giác ABC.

BÀI 3. Cho tam giác ABC có AB=2, AC=3 và $\widehat{B}A\widehat{C}=120^\circ$. Tính độ dài BC, diện tích tam giác ABC, độ dài đường phân giác trong AD của tam giác ABC.

BÀI 4. Cho tam giác ABC có AB = c, BC = a, AC = b. Gọi h_a , h_b , h_c lần lượt là các đường cao tương ứng xuất phát từ các đỉnh A, B, C và r là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Chứng minh $\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r}$.

BÀI 5. Cho tam giác ABC không vuông ở A, chứng minh $S=\frac{1}{4}\left(b^2+c^2-a^2\right)\tan A.$

C. CÂU HỔI TRẮC NGHIÊM

CÂU 1. Tam giác ABC có AB = 5, BC = 7, CA = 8. Số đo góc \widehat{A} bằng **(B)**45°. $(\mathbf{C})60^{\circ}.$

CÂU 2. Tam giác ABC có $AB = \sqrt{2}$, $AC = \sqrt{3}$ và $\widehat{C} = 45^{\circ}$. Tính độ

 $\mathbf{B}BC = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}. \quad \mathbf{C}BC = \sqrt{6}.$

QUICK NOTE

	٠.	•	•		•	٠.		•	•	•	•		•	•	•	•	•	
dài cạnh BC .				 								 						
$\mathbf{D}BC = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}.$							 											

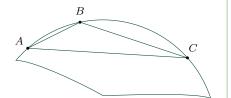
▼ VNPmath - 0962940819 ▼			R HÈ IHOC LO	ONG IRONG IAM GIAC
QUICK NOTE		BC có $AB = 2$, $AC =$	= 1 và $\widehat{A} = 60^{\circ}$. Tính đ $\bigcirc BC = 1$.	$\widehat{\mathbf{D}}$ dài cạnh BC . $\widehat{\mathbf{D}}BC=2$.
	CÂU 4. Tam giác A tam giác.	BC có $AB = 3$, $AC =$	$=6, \widehat{BAC} = 60^{\circ}.$ Tính	độ dài đường cao h_a của
	_		$\mathbf{C}h_a = \frac{3}{2}.$	
	CÂU 5. Tam giác A	$BC \text{ có } AB = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{6}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$, $BC = \sqrt{3}$, $CA = \frac{1}{2}$	$\sqrt{2}$. Gọi D là chân đường
		\widehat{A} . Khi đó góc \widehat{ADB} b		
	A 90°.	B 45°.	© 60°.	D 75°.
	CÂU 6. Tam giác A.	BC có AB = 4, BC =	$=6, AC=2\sqrt{7}$. Điểm I	M thuộc đoạn BC sao cho
	MC = 2MB. Tính để	$\hat{0}$ dài cạnh AM .		
	$(\mathbf{A})AM = 4\sqrt{2}.$			\bigcirc $AM = 3.$
	CÂU 7. Cho hình th	oi $ABCD$ cạnh bằng 1	cm và có $\widehat{BAD} = 60^{\circ}$.	Tính độ dài cạnh AC .
	AC = 2.		$\bigcirc AC = 2\sqrt{3}.$	
	CÂU 8. Khoảng các	h từ A đến B không	thể đo trực tiến được	vì phải qua một đầm lầy.
				và B dưới một góc $78^{\circ}24'$.
			ách \overrightarrow{AB} bằng bao nhiê	
	A 266 m.	B 255 m.	© 166 m.	D)298 m.
	CÂU 9. Cho tam giá	ác ABC có BC = 2	$\overline{3}, AB = \sqrt{6} - \sqrt{2}, AC$	$C = 2\sqrt{2}$. AD là tia phân
	giác của góc \widehat{BAD} . T	Tính góc \widehat{BAD} .		
	A 60°.	B 90°.	© 45°.	D 75°.
	CÂU 10.			
		địa điểm H đến địa đi		
		à một ngọn núi cao nê		
	-	từ H lên K (ô tô leo d (ô tô xuống núi). Các	/	
		n giác HKG với HK		
	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	à $\widehat{H}K\widehat{G} = 120^{\circ}$. Giả	/	
		ı thụ hết 0,3 lít xăng là 13050 đồng một lít		
		G hết bao nhiều tiền:		G
	A 137025 đồng.	B 107025 đồng.	C 12278 đồng.	D 137000 đồng.
	CÂU 11. Cho tam g	riác ABC có góc $\widehat{B} =$	45° . $AC = 28$. $BC =$	25. Tính số đo góc A của
		ết quả đến hàng phần		2 0. 111111 20 40 800 11 0440
	A 39,1°.	B 40,2°.	© 39,2°.	D 40°.
	CÂU 12. Cho tam g	giác ABC có góc $\widehat{B} =$	$30^{\circ}, \widehat{C} = 75^{\circ}, AB = 20$). Đô dài canh AC là
			\mathbf{C} $10(\sqrt{6}-1)$.	
				cm. Tính độ dài cạnh AB
	(làm tròn kết quả đến		$C = 45^{\circ} \text{ va } BC = 30^{\circ}$	cm. Tinn độ đại cạnh AB
		,	\mathbf{c} 30(2 $\sqrt{3}$ - 1) c	m. \mathbf{D} 30($\sqrt{3} - 1$) cm.
	cau 14. Cho tam g	giac ABC co $BC = 1$.	$A = 50^{\circ}$. Do dai car	nh AB lớn nhất bằng bao
	A $11\sqrt{3}$.		© 22.	D $11(\sqrt{3}+1)$.
	CÂU 15. Cho tam o	riác ABC có $\widehat{C} = 30^{\circ}$ s	và $AB = 30 \text{ cm}$ Tính l	pán kính đường tròn ngoại
	tiếp tam giác ABC .	1100 1100 00 0 - 50	11D — 00 cm. 1 mm t	war mini duong mon ngoại
	\mathbf{A} 30 $\sqrt{3}$ cm.	\bigcirc 15 $\sqrt{3}$ cm.	©30 cm.	D 15 cm.

tròn ngoại tiếp R của tam giác $MNK. \label{eq:model}$

CÂU 16. Cho tam giác MNK có $MN=a,\,MK=3a,\,\widehat{M}=120^{\circ}.$ Tính bán kính đường

CÂU 17.

Để đo bán kính của một chiếc đĩa cổ chỉ còn lai một phần, các nhà khảo cổ chọn 3 điểm trên chiếc đĩa (hình vẽ). Biết $\widehat{A} = 33^{\circ}$, BC = 15.3 cm, tính bán kính của chiếc đĩa (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).



(A) 13.8cm. (B) 12.6cm. (C) 12.9cm. (D) 13.1cm.

CÂU 18. Cho tam giác ABC có $b^2 = a^2 + c^2 + ac$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- $(\mathbf{A})\sin^2 A = \sin^2 B + \sin^2 C + \sin B \sin C. \qquad (\mathbf{B})\sin^2 B = \sin^2 A + \sin^2 C + \sin A \sin C.$
- $(\mathbf{C})\widehat{A} = 120^{\circ}.$

CÂU 19. Cho tam giác ABC. Khẳng định nào sau đây đúng?

$$(A)\cot A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2}.$$

$$(\mathbf{B})\cot A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{l}.$$

$$\cot A = \frac{R(b^2 + c^2 - a^2)}{2abc}$$

$$\cot A = \frac{R(b^2 + c^2 - a^2)}{abc}$$

CÂU 20.

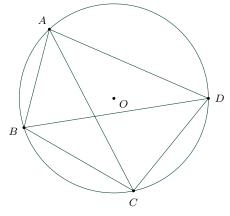
Cho tam giác ABCD nội tiếp đường tròn tâm O. Biết $\widehat{ACB} = 32^{\circ}$, $\widehat{ADC} = 75^{\circ}$ và BC = 8.8 cm. Tính bán kính đường tròn đường tròn (O). (Làm tròn kết quả đến hàng phần mười)

(A) 7,8 cm.

(B)7.5 cm.

 $(\mathbf{c})_{6,6}$ cm.

 $(\mathbf{D})6,5 \text{ cm}.$



CÂU 21. Cho tam giác ABC có AB = 12, BC = 15, AC = 18. Tính $\widehat{A} + 2\widehat{C}$ (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

(A) 129,3°.

(B) 142.7° .

(**c**)118,4°.

(D)138.6°.

CÂU 22. Cho tam giác ABC có góc $\widehat{A} = 60^{\circ}$, $\widehat{B} = 45^{\circ}$, AB = 25. Độ dài cạnh BC gần với giá trị nào nhất dưới đây?

(A) 22.

(B)22,5.

 $(\mathbf{C})24,5.$

 $(\mathbf{D})21,5.$

CÂU 23. Cho tam giác ABC có AB = 8, AC = 11, $\widehat{A} = 30^{\circ}$. Số đo góc B gần với giá trị nào nhất dưới đây?

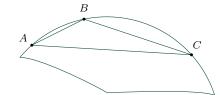
(A) $50,5^{\circ}$.

(B) 45.8° .

 $(\mathbf{C})65,3^{\circ}.$

CÂU 24.

Để đo bán kính của một chiếc đĩa cổ chỉ còn lại một phần, các nhà khảo cổ chọn ba điểm trên chiếc đĩa (hình vẽ). Biết AB = 7.1 cm, BC = 16.3 cm, AC =19,6 cm, tính bán kính của chiếc đĩa (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).



(A) 11,1cm. (B) 9,8cm. (C) 10,3cm. (D) 10,1cm.

CÂU 25.

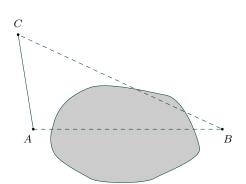
 $D\hat{e}$ đo khoảng cách từ A đến B ngang qua một đầm lầy, người ta chọn điểm C, sau đó khoảng cách từ A đến C và các góc A, C. Tính khoảng cách từ A đến B biết $AC = 115 \text{ m}, \hat{A} = 98^{\circ},$ $\widehat{C} = 52^{\circ}$.

(**A**) 188,1 m.

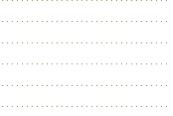
(**B**)190,7 m.

(C)181,2 m.

(D)193,6 m.



•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	٠
•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	٠
•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	٠
	•			•	•	•	•	•				•								•	•	•	•	•	•	•		•		•







•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•



٧	1	V	F	r	Υ	10	a	t	h			C) (20	5	2	9) _	10)	8	1	
					•	ŝ	2	ι	J		C	•	k	′		١	l	C)	Ī	E	=	
•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	
•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	
•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	
•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	

CÂU 26.

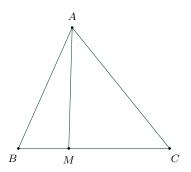
Cho tam giác ABC có AB = 8, AC = 10, $\widehat{A} = 75^{\circ}$. Mlà điểm thuộc cạnh BC sao cho CM = 2BM. Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABM gần nhất với giá tri nào dưới đây?

(A)3,8.

(B)4,1.

 $(\mathbf{C})3,6.$

 $(\mathbf{D})3,5.$



CÂU 27.

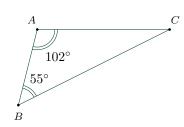
Tàu A rời cảng vào lúc 6h00 và chuyển động với vận tốc 30 km/h. Tàu B rời cảng vào lúc 6h30. Vào lúc 9h30 tàu B gặp tàu A tại điểm C (hình vẽ). Giả sử hai tàu chuyển động thẳng và có vận tốc không đổi trong suốt quá trình di chuyển, tính vận tốc tàu B (kết quả làm tròn đến hàng phần mười).



(B)44.8 km/h.

 $(\mathbf{C})41.7 \text{ km/h}.$

 $(\mathbf{D})45,4 \text{ km/h}.$



CÂU 28. Chọn công thức đúng trong các đáp án sau

$$\mathbf{B}S = \frac{1}{2}bc\sin A$$

$$\mathbf{B}S = \frac{1}{2}bc\sin A. \qquad \mathbf{C}S = \frac{1}{2}ab\sin B.$$

$$\bigcirc S = \frac{1}{2}ac\sin A$$

CÂU 29. Cho $\triangle ABC$ với các cạnh $AB=c,\ AC=b,\ BC=a.$ Gọi $R,\ r,\ S$ lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp và diện tích của tam giác ABC. Trong các phát biểu sau, phát biểu nào sai?

$$\mathbf{B} R = \frac{a}{\sin A}.$$

CÂU 30. Cho tam giác ABC có AB = 4, AC = 3, $BAC = 30^{\circ}$. Khi đó diện tích tam giác ABC bằng

(**A**) 3.

B) $4\sqrt{3}$.

(c) $6\sqrt{3}$.

CÂU 31. Tìm chu vi tam giác ABC, biết AB=6 và $2\sin A=3\sin B=4\sin C$.

(C) $5\sqrt{26}$.

(D) $10\sqrt{6}$.

CÂU 32. Cho tam giác ABC có a=13 m, b=14 m, c=15 m. Tính diện tích S của tam giác ABC.

 $(A)S = 84 \text{ m}^2.$

(B) $S = 90 \text{ m}^2$.

 $(\mathbf{C})S = 76 \text{ m}^2.$

 $DS = 80 \text{ m}^2$.

CÂU 33. Cho tam giác ABC. Biết AB = 3, AC = 4, BC > 5 và diện tích tam giác ABCbằng $3\sqrt{3}$. Số đo góc \widehat{BAC} bằng

(A) 120° .

 $(B)60^{\circ}.$

(**c**)135°.

(**D** $)45^{\circ}.$

CÂU 34. Cho tam giác ABC có AB = 2, AC = 3, BC = 4. Khi đó độ dài đường cao của tam giác ABC kẻ từ A bằng

 $\frac{3\sqrt{15}}{8}$.

(D) $3\sqrt{15}$.

CÂU 35. Cho tam giác ABC có AB = 9cm, AC = 12cm và BC = 15cm. Khi đó đường trung tuyến BM của tam giác ABC có độ dài là

(**A**) 117cm.

(**B**)18,82cm.

 $(\mathbf{C})10,82\mathrm{cm}$.

CÂU 36. Tam giác ABC có các trung tuyến $m_a = 10$, $m_b = 8$ và $m_c = 6$. Tính diện tích S của tam giác ABC.

(A)S = 32.

(B)S = 24.

 $(\mathbf{C})S = 48.$

CÂU 37. Cho tam giác ABC có chu vi bằng 26 cm và $\frac{\sin A}{2} = \frac{\sin B}{6} = \frac{\sin C}{5}$. Tính diện tích của tam giác ABC.

(A) $2\sqrt{23}$ (cm²).

(B) $6\sqrt{13}$ (cm²).

 $(\mathbf{C})3\sqrt{39} \text{ (cm}^2).$

 $(\mathbf{D})5\sqrt{21} \ (\text{cm}^2).$

CÂU 38. Cho tam giác ABC vuông tại C và BC=6, CA=8. Tính bán kính đường tròn nội tiếp của tam giác ABC.

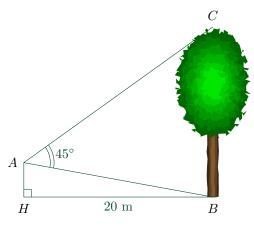
 \bigcirc 2.

B) $2\sqrt{2}$.

 \mathbf{C} $\sqrt{2}$

D)4.

CÂU 39. Từ vị trí A người ta quan sát một cây cao (Hình vẽ). Biết AH = 4 m, HB = 20 m, $\widehat{BAC} = 45^{\circ}$. Chiều cao của cây gần nhất với giá trị nào sau đây?



A 14 m.

B)15 m.

C)17 m.

D16 m.

CÂU 40. Một miếng giấy hình tam giác ABC diện tích S có I là trung điểm BC và O là trung điểm của AI. Cắt miếng giấy theo một đường thẳng qua O, đường thẳng này đi qua M, N lần lượt trên các cạnh AB, AC. Khi đó diện tích miếng giấy chứa điểm A có diện tích thuộc đoạn [mS; nS]. Tính $T = \frac{1}{m} + \frac{1}{n}$.

BT = 12.

 \mathbf{C} T=7.

 $\bigcirc T = \frac{12}{7}.$

~			-
GV.VŨ	NG	OC	PHA.

LỜI GIẢI CHI TIẾT

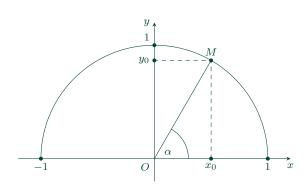
Bài 1. GTLG CỦA MỘT GÓC TỪ 0° ĐẾN 180°

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. Khái niệm

Điểm $M(x_0; y_0)$ nằm trên nửa đường tròn đơn vị sao cho $\widehat{xOM} = \alpha$. Khi đó

- Θ sin $\alpha = y_0$;
- Θ cos $\alpha = x_0$;
- Θ $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ với $(\alpha \neq 90^{\circ});$
- $\odot \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$ với $(\alpha \neq 0^{\circ}, 180^{\circ}).$



2. Dấu của giá tri lương giác.

Góc α	0°	90°	1	180°
$\sin \alpha$	+		+	
$\cos \alpha$	+		_	
$\tan \alpha$	+		_	
$\cot \alpha$	+		_	

3. Bảng giá trị lượng giác của một số góc đặc biệt cần nhớ

α	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{-1}{2}$	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	$\frac{-\sqrt{3}}{2}$	-1
$\tan \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	//	$-\sqrt{3}$	-1	$\frac{-\sqrt{3}}{3}$	0
$\cot \alpha$	//	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{-\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	//

4. Tính chất

- a) Giá trị lượng giá của hai góc phụ nhau
 - Θ $\sin(90^{\circ} \alpha) = \cos \alpha$.
 - $\odot \cos(90^{\circ} \alpha) = \sin \alpha.$
 - Θ tan(90° α) = cot α .
 - \odot $\cot(90^{\circ} \alpha) = \tan \alpha$.
- c) Hệ thức cơ bản
 - Θ $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$.
 - $\bigodot 1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$ với $(\alpha \neq 90^\circ).$
 - $\mbox{\Large \o} \ 1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \ \mbox{v\'oi} \ (0^\circ < \alpha < 180^\circ).$
 - \odot tan $\alpha \cdot \cot \alpha = 1$ với $(0^{\circ} < \alpha < 180^{\circ}, \alpha \neq 90^{\circ})$.

- b) Giá trị lượng giác của hai góc bù nhau
 - Θ $\sin(180^{\circ} \alpha) = \sin \alpha$.
 - Θ $\cos(180^{\circ} \alpha) = -\cos \alpha$.
 - \odot tan(180° α) = tan α .
 - \odot $\cot(180^{\circ} \alpha) = -\cot \alpha$.

B. CÁC DANG TOÁN

Dạng 1. Tính giá trị biểu thức lượng giác

Áp dụng các công thức lượng giác

1. Ví du

VÍ DỤ 1. Không dùng máy tính, tính giá trị của các biểu thức sau

- a) $A = \sin 45^{\circ} \cot 135^{\circ} + \cos 60^{\circ} \cdot \sin 150^{\circ} \cos 30^{\circ} \cdot \sin 120^{\circ}$.
- b) $B = \tan 135^{\circ} + \cot 60^{\circ} \cot 30^{\circ} \tan 60^{\circ} \tan 150^{\circ}$.
- c) $C = 2\sin 60^{\circ} \tan 150^{\circ} \cos 180^{\circ} \cdot \cot 45^{\circ}$.

Dòi giải.

- a) Ta có $\sin 45^\circ = -\cos 135^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos 60^\circ = \sin 150^\circ = \frac{1}{2}$ và $\cos 30^\circ = \sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Từ đó suy ra $A = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{-1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{3}{4} = -1.$
- b) Do $\tan 135^\circ = -1$, $\cot 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\cot 30^\circ = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$ và $\tan 150^\circ = \frac{-\sqrt{3}}{3}$ nên

$$B = -1 + \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \sqrt{3} - \sqrt{3} \cdot \left(\frac{-\sqrt{3}}{3}\right) = 1.$$

c) Ta có $\sin 60^{\circ} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\tan 150^{\circ} = \frac{-\sqrt{3}}{3}$, $\cos 180^{\circ} = -1$ và $\cot 45^{\circ} = 1$. Suy ra $C = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(\frac{-\sqrt{3}}{3}\right) - (-1) \cdot 1 = 0.$

Chú ý. Nếu để ý đến mối liên hệ giữa các góc có trong biểu thức, như các góc bù nhau, các góc phụ nhau, thì ta có thể giải bài toán theo cách sau

a) Do
$$135^{\circ} = 180^{\circ} - 45^{\circ}$$
, $150^{\circ} = 180^{\circ} - 30^{\circ}$, $120^{\circ} = 180^{\circ} - 60^{\circ}$ nên

$$A = \sin 45^{\circ} \cdot (-\cos 45^{\circ}) + \cos 60^{\circ} \cdot \sin 30^{\circ} - \cos 30^{\circ} \cdot \sin 60^{\circ}$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{3}{4} = -1.$$

b) Do
$$135^{\circ} = 180^{\circ} - 45^{\circ}$$
, $60^{\circ} = 90^{\circ} - 30^{\circ}$, $150^{\circ} = 180^{\circ} - 30^{\circ}$ nên

$$B = -1 + 1 - \tan 60^{\circ} \cdot (-\tan 30^{\circ}) = 1.$$

c) Do
$$150^{\circ} = 180^{\circ} - 30^{\circ}$$
 nên

$$C = 2\sin 60^{\circ} \cdot (-\tan 30^{\circ}) - \cos 180^{\circ} \cdot \cot 45^{\circ}$$
$$= 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(\frac{-\sqrt{3}}{3}\right) - (-1) \cdot 1 = 0.$$

VÍ DU 2.

- a) Cho $\cos\alpha=\frac{3}{4}$ với 0° < α < 90°. Tính $A=\frac{\tan\alpha+3\cot\alpha}{\tan\alpha+\cot\alpha}$.
- b) Cho $\tan \alpha = \sqrt{2}$. Tính $B = \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{\sin^3 \alpha + 3\cos^3 \alpha + 2\sin \alpha}$.

Lời giải.

a) Ta có
$$A = \frac{\tan \alpha + 3\frac{1}{\tan \alpha}}{\tan \alpha + \frac{1}{\tan \alpha}} = \frac{\tan^2 \alpha + 3}{\tan^2 \alpha + 1} = \frac{\frac{1}{\cos^2 \alpha} + 2}{\frac{1}{\cos^2 \alpha}} = 1 + 2\cos^2 \alpha.$$
 Suy ra $A = 1 + 2 \cdot \frac{9}{16} = \frac{17}{8}$.

b) Ta có
$$B = \frac{\frac{\sin \alpha}{\cos^3 \alpha} - \frac{\cos \alpha}{\cos^3 \alpha}}{\frac{\sin^3 \alpha}{\cos^3 \alpha} + \frac{3\cos^3 \alpha}{\cos^3 \alpha} + \frac{2\sin \alpha}{\cos^3 \alpha}} = \frac{\tan \alpha \left(\tan^2 \alpha + 1\right) - \left(\tan^2 \alpha + 1\right)}{\tan^3 \alpha + 3 + 2\tan \alpha \left(\tan^2 \alpha + 1\right)}.$$
Suy ra $B = \frac{\sqrt{2}(2+1) - (2+1)}{2\sqrt{2} + 3 + 2\sqrt{2}(2+1)} = \frac{3(\sqrt{2}-1)}{3 + 8\sqrt{2}}.$

2. Bài tấp tư luân

BÀI 1. Tính giá trị của các biểu thức

- a) $A = \sin 45^{\circ} + 2\sin 60^{\circ} + \tan 120^{\circ} + \cos 135^{\circ}$;
- b) $B = \tan 45^{\circ} \cdot \cot 135^{\circ} \sin 30^{\circ} \cdot \cos 120^{\circ} \sin 60^{\circ} \cdot \cos 150^{\circ}$;
- c) $C = \cos^2 5^\circ + \cos^2 25^\circ + \cos^2 45^\circ + \cos^2 65^\circ + \cos^2 85^\circ$;

d)
$$D = \frac{12}{1 + \tan^2 73^\circ} - 4 \tan 75^\circ \cdot \cot 105^\circ + 12 \sin^2 107^\circ - 2 \tan 40^\circ \cdot \cos 60^\circ \cdot \tan 50^\circ;$$

e)
$$E = 4 \tan 32^{\circ} \cdot \cos 60^{\circ} \cdot \cot 148^{\circ} + \frac{5 \cot^2 108^{\circ}}{1 + \tan^2 18^{\circ}} + 5 \sin^2 72^{\circ}.$$

🗩 Lời giải.

a)

$$A = \sin 45^{\circ} + 2\sin 60^{\circ} + \tan 120^{\circ} + \cos 135^{\circ}$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2} + 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3} - \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$= \sqrt{3} - \sqrt{3} = 0.$$

b)

$$B = \tan 45^{\circ} \cdot \cot 135^{\circ} - \sin 30^{\circ} \cdot \cos 120^{\circ} - \sin 60^{\circ} \cdot \cos 150^{\circ}$$
$$= 1 \cdot (-1) - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{-1}{2}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)$$
$$= -1 + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 0.$$

c) Do $5^{\circ} = 90^{\circ} - 85^{\circ}, 25^{\circ} = 90^{\circ} - 65^{\circ}$ nên

$$C = \cos^2 5^\circ + \cos^2 25^\circ + \cos^2 45^\circ + \cos^2 65^\circ + \cos^2 85^\circ$$
$$= \sin^2 85^\circ + \cos^2 85^\circ + \sin^2 25^\circ + \cos^2 25^\circ + \cos^2 45^\circ$$
$$= 1 + 1 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}.$$

d)

$$D = \frac{12}{1 + \tan^2 73^\circ} - 4 \tan 75^\circ \cdot \cot 105^\circ + 12 \sin^2 107^\circ - 2 \tan 40^\circ \cdot \cos 60^\circ \cdot \tan 50^\circ$$

$$= 12 \cos^2 73^\circ - 4 \tan 75^\circ \cdot \cot (180^\circ - 75^\circ) + 12 \sin^2 (180^\circ - 73^\circ) - 2 \tan (90^\circ - 50) \cos 60^\circ \tan 50^\circ$$

$$= 12 \cos^2 73^\circ + 4 \tan 75^\circ \cdot \cot 75^\circ + 12 \sin^2 73^\circ - \cot 50^\circ \cdot \tan 50^\circ \cdot \cos 60^\circ$$

$$= 12 + 4 - \frac{1}{2} = \frac{31}{2}.$$

e) Ta có do $148^{\circ} = 180^{\circ} - 32^{\circ}$, $108^{\circ} = 180^{\circ} - 72^{\circ}$ và $18^{\circ} = 90^{\circ} - 72^{\circ}$ nên

$$E = 4 \tan 32^{\circ} \cdot \cos 60^{\circ} \cdot \cot 148^{\circ} + \frac{5 \cot^{2} 108^{\circ}}{1 + \tan^{2} 18^{\circ}} + 5 \sin^{2} 72^{\circ}$$

$$= -4 \tan 32^{\circ} \cdot \cos 60^{\circ} \cdot \cot 32^{\circ} + 5 \cot^{2} 108^{\circ} \cdot \cos^{2} 18^{\circ} + 5 \sin^{2} 72^{\circ}$$

$$= -4 \cdot \frac{1}{2} + 5 \cot^{2} 108^{\circ} \cdot \sin^{2} 72^{\circ} + 5 \sin^{2} 72^{\circ}$$

$$= -2 + 5 \sin^{2} 72^{\circ} \cdot \left(1 + \cot^{2} 108^{\circ}\right)$$

$$= -2 + 5 \sin^{2} 72^{\circ} \cdot \frac{1}{\sin^{2} 108^{\circ}}$$

$$= -2 + 5 = 3.$$

BÀI 2. Chứng minh rằng

- a) $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = 1 2\sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha$:
- b) $\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha = 1 3\sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha$:
- c) $\sqrt{\sin^4 \alpha + 6\cos^2 \alpha + 3} + \sqrt{\cos^4 \alpha + 4\sin^2 \alpha} = 4$.

🗩 Lời giải.

a) Ta có

$$\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = (\sin^2 \alpha)^2 + (\cos^2 \alpha)^2$$

$$= (\sin^2 \alpha)^2 + (\cos^2 \alpha)^2 + 2\sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha - 2\sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha$$

$$= (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2 - 2\sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha$$

$$= 1 - 2\sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha.$$

b) Ta có

$$\sin^{6} \alpha + \cos^{6} \alpha = (\sin^{2} \alpha)^{3} + (\cos^{2} \alpha)^{3}$$

$$= (\sin^{2} \alpha + \cos^{2} \alpha) \cdot (\sin^{4} \alpha - \sin^{2} \alpha \cdot \cos^{2} \alpha + \cos^{4} \alpha)$$

$$= (\sin^{2} \alpha + \cos^{2} \alpha)^{2} - 3\sin^{2} \alpha \cdot \cos^{2} \alpha$$

$$= 1 - 3\sin^{2} \alpha \cdot \cos^{2} \alpha.$$

c)

$$\sqrt{\sin^4 \alpha + 6\cos^2 \alpha + 3} + \sqrt{\cos^4 \alpha + 4\sin^2 \alpha}$$

$$= \sqrt{\sin^4 \alpha + 6(1 - \sin^2 \alpha) + 3} + \sqrt{\cos^4 \alpha + 4(1 - \cos^2 \alpha)}$$

$$= \sqrt{\sin^4 \alpha - 6\sin^2 \alpha + 9} + \sqrt{\cos^4 \alpha - 4\cos^2 \alpha + 4}$$

$$= \sqrt{(3 - \sin^2 \alpha)^2} + \sqrt{(2 - \cos^2 \alpha)}$$

$$= 3 - \cos^2 \alpha + 2 - \cos^\alpha = 4.$$

BÀI 3. Cho góc α với $90^{\circ} < \alpha < 180^{\circ}$ thỏa mãn $\sin \alpha = \frac{3}{4}$. Tính giá trị của biểu thức $F = \frac{\tan \alpha + 2 \cot \alpha}{\tan \alpha + \cot \alpha}$. 🗩 Lời giải.

Do $\alpha \in (90^\circ; 180^\circ)$ nên $\cos \alpha < 0$.

Ta có
$$\cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -\sqrt{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{-\sqrt{7}}{4}.$$

Suy ra $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{-3\sqrt{7}}{7}$ và $\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = \frac{-\sqrt{7}}{3}$. Vây $F = \frac{\tan \alpha + 2\cot \alpha}{\tan \alpha + \cot \alpha} = \frac{23}{16}$.

Vây
$$F = \frac{\tan \alpha + 2 \cot \alpha}{\tan \alpha + \cot \alpha} = \frac{23}{16}$$
.

BÀI 4. Cho góc α thỏa mãn $0^{\circ} < \alpha < 180^{\circ}$ và $\tan \alpha = \sqrt{2}$. Tính giá trị của các biểu thức sau

$$K = \frac{\sin^3 \alpha + \sin \alpha \cdot \cos^2 \alpha + 2\sin^2 \alpha \cdot \cos \alpha - 4\cos^3 \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha}.$$

🗩 Lời giải.

Ta có

$$K = \frac{\sin^3 \alpha + \sin \alpha \cdot \cos^2 \alpha + 2\sin^2 \alpha \cdot \cos \alpha - 4\cos^3 \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha}$$

$$= \frac{\cos^{3} \alpha \left(\tan^{3} \alpha + \tan \alpha + 2 \tan^{2} \alpha - 4 \right)}{\cos^{3} \alpha \left(\tan \alpha \cdot (1 + \tan^{2} \alpha) - (1 + \tan^{2} \alpha) \right)}$$

$$= \frac{\tan^{3} \alpha + \tan \alpha + 2 \tan^{2} \alpha - 4}{(\tan \alpha - 1)(1 + \tan^{2} \alpha)}$$

$$= \frac{2\sqrt{2} + \sqrt{2} + 2 \cdot 2 - 4}{(\sqrt{2} - 1)(1 + 2)}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1} = 2 + \sqrt{2}.$$

🖒 Dạng 2. Tìm các GTLG khi biết một GTLG của góc

Áp dụng tính chất về dấu của GTLG của một góc và các công thức lượng giác cơ bản.

1. Ví dụ minh hoạ

VÍ DỤ 1.

- a) Cho $\sin \alpha = \frac{1}{3}$ với $90^{\circ} < \alpha < 180^{\circ}$. Tính $\cos \alpha$ và $\tan \alpha$.
- b) Cho $\cos \alpha = -\frac{2}{3}$ và $\sin \alpha > 0$. Tính $\sin \alpha$ và $\cot \alpha$.
- c) Cho $\tan \alpha = -2\sqrt{2}$, tính giá trị lượng giác còn lại.

Dài giải.

a) Vì 90° < α < 180° nên $\cos\alpha < 0$, mặt khác $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ suy ra

$$\cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -\sqrt{1 - \frac{1}{9}} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

Do đó
$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{1}{3}}{-\frac{2\sqrt{2}}{3}} = -\frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

b) Vì
$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$
 và $\sin \alpha > 0$, nên $\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

Ta có cot
$$\alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{-\frac{2}{3}}{\frac{\sqrt{5}}{3}} = -\frac{2}{\sqrt{5}}.$$

c) Vì
$$\tan \alpha = -2\sqrt{2} < 0 \Rightarrow \cos \alpha < 0$$
.

Ta có
$$\tan^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$
, suy ra $\cos \alpha = -\sqrt{\frac{1}{\tan^2 + 1}} = -\sqrt{\frac{1}{8+1}} = -\frac{1}{3}$.

Do đó
$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \Rightarrow \sin \alpha = \tan \alpha \cdot \cos \alpha = -2\sqrt{2} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

$$\Rightarrow \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{-\frac{1}{3}}{\frac{2\sqrt{2}}{3}} = -\frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

2. Bài tập tự luận

BÀI 1. Cho góc
$$\alpha$$
, $0^{\circ} < \alpha < 180^{\circ}$ thỏa mãn $\cos \alpha = \frac{-1}{3}$.

- a) Tính $\tan \alpha$.
- b) Tính giá trị của biểu thức $P = \tan \alpha + 2 \cot \alpha$.

Dèi giải.

a) Do
$$\cos\alpha=\frac{-1}{3}<0$$
 nên α là góc từ và $\tan\alpha=-\sqrt{\frac{1}{\cos^2\alpha}-1}=-2\sqrt{2}.$

b) Do $\tan \alpha \cot \alpha = 1$ và $\tan \alpha = -2\sqrt{2}$ nên $\cot \alpha = \frac{-\sqrt{2}}{4}$ và bởi vậy

$$P = -2\sqrt{2} + 2 \cdot \left(\frac{-\sqrt{2}}{4}\right) = \frac{-5\sqrt{2}}{4}.$$

Nhận xét. Khi tính $\tan \alpha$ từ $\cos \alpha$ nhờ đẳng thức $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$ sai lầm thường gặp của học sinh là mặc định coi $\tan \alpha = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 \alpha}} - 1$ mà quên mất $\tan \alpha < 0$ khi α là góc tù.

BÅl 2. Cho góc α thỏa mãn $0^{\circ} < \alpha < 180^{\circ}$ và tan $\alpha = 2$. Tính giá trị của các biểu thức sau

- a) $G = 2\sin\alpha + \cos\alpha$;
- b) $H = \frac{2\sin\alpha + \cos\alpha}{\sin\alpha \cos\alpha}$

Lời giải.

a) Do α thỏa mãn 0° < α < 180° và $\tan\alpha=2$ nên $\sin\alpha>0$ và $\cos\alpha>0.$

Ta có
$$\cos \alpha = \sqrt{\frac{1}{1 + \tan^2 \alpha}} = \sqrt{\frac{1}{1 + 4}} = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

Từ đó $\sin \alpha = \tan \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{\kappa}$

Vậy $G = 2\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{4\sqrt{5}}{5} + \frac{\sqrt{5}}{5} = \sqrt{5}$.

b) Ta có $H = \frac{2\sin\alpha + \cos\alpha}{\sin\alpha - \cos\alpha} = \frac{2\tan\alpha + 1}{\tan\alpha - 1} = 5.$

C. CÂU HỔI TRẮC NGHIỆM

- **CÂU 1.** Giá trị của $\cos 60^{\circ} + \sin 30^{\circ}$ bằng bao nhiêu?
- $igapha rac{\sqrt{3}}{2}.$ $m{p}$ Lời giải.

 \mathbf{c}

(**D**)1.

Ta có $\cos 60^{\circ} + \sin 30^{\circ} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$

Chọn đáp án \bigcirc D.....

- **CÂU 2.** Giá trị của $\tan 30^{\circ} + \cot 30^{\circ}$ bằng bao nhiêu?
- $igatharpoonup rac{4}{\sqrt{3}}.$ $m{\wp}$ Lời giải.
- **B** $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$.
- $\frac{2}{\sqrt{3}}$.

 $(\mathbf{D})2.$

Ta có $\tan 30^{\circ} + \cot 30^{\circ} = \frac{\sqrt{3}}{3} + \sqrt{3} = \frac{4\sqrt{3}}{3}.$

Chọn đáp án A.....

- CÂU 3. Trong các đẳng thức sau đây, đẳng thức nào sai?
 - $(\mathbf{A})\sin 0^{\circ} + \cos 0^{\circ} = 1.$
- (B) $\sin 90^{\circ} + \cos 90^{\circ} = 1$.
- $(\mathbf{C})\sin 180^{\circ} + \cos 180^{\circ} = -1.$ $(\mathbf{D})\sin 60^{\circ} + \cos 60^{\circ} = 1.$

- Dèi giải.
- Ta có $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ nên đẳng thức sai là " $\sin 60^\circ + \cos 60^\circ = 1$ ".

- CÂU 4. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sai?
 - $(\mathbf{A})\cos 60^{\circ} = \sin 30^{\circ}.$
- **(B)** $\cos 60^{\circ} = \sin 120^{\circ}$.
- $(\mathbf{C})\cos 30^{\circ} = \sin 120^{\circ}.$ $(\mathbf{D})\sin 60^{\circ} = -\cos 120^{\circ}.$

Ta có cặp góc 60° , 120° bù nhau nên khẳng định sai là " $\cos 60^{\circ} = \sin 120^{\circ}$ ".

Chọn đáp án (B).....

- CÂU 5. Đẳng thức nào sau đây sai?
 - $(\mathbf{A})\sin 45^{\circ} + \sin 45^{\circ} = \sqrt{2}.$
- $(\mathbf{B})\sin 30^{\circ} + \cos 60^{\circ} = 1.$
- $(\mathbf{C})\sin 60^{\circ} + \cos 150^{\circ} = 0.$
- $(\mathbf{D})\sin 120^{\circ} + \cos 30^{\circ} = 0.$

Dèi giải.

Ta có $\sin 120^\circ = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ nên đẳng thức sai là " $\sin 120^\circ + \cos 30^\circ = 0$ ".

CÂU 6. Giá trị $\cos 45^{\circ} + \sin 45^{\circ}$ bằng bao nhiêu	CÂU 6.	Giá tri	$\cos 45^{\circ}$	$+\sin 45^{\circ}$	bằng	bao	nhiệu?
--	--------	---------	-------------------	--------------------	------	-----	--------

(**A**) 1.

$$(\mathbf{B})\sqrt{2}$$
.

$$\mathbf{C}\sqrt{3}$$
.

$$\bigcirc 0$$
.

🗭 Lời giải.

Ta có $\cos 45^{\circ} = \sin 45^{\circ} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ nên $\cos 45^{\circ} + \sin 45^{\circ} = \sqrt{2}$.

Chọn đáp án (B)....

CÂU 7. Trong các đẳng thức sau, đẳng thức nào **đúng**?

(A) $\sin(180^{\circ} - \alpha) = -\cos \alpha$. (B) $\sin(180^{\circ} - \alpha) = -\sin \alpha$. (C) $\sin(180^{\circ} - \alpha) = \sin \alpha$.

$$\mathbf{B}\sin\left(180^\circ - \alpha\right) = -\sin\alpha$$

$$\mathbf{C}\sin\left(180^\circ - \alpha\right) = \sin\alpha$$

$$\mathbf{D}\sin\left(180^{\circ} - \alpha\right) = \cos\alpha.$$

Dèi giải.

Theo tính chất của cặp góc bù nhau thì " $\sin(180^{\circ} - \alpha) = \sin \alpha$ ".

CÂU 8. Trong các đẳng thức sau, đẳng thức nào sai?

$$\mathbf{A}\sin 0^{\circ} + \cos 0^{\circ} = 0.$$

$$\mathbf{B}\sin 90^\circ + \cos 90^\circ = 1.$$

$$(\mathbf{C})\sin 180^{\circ} + \cos 180^{\circ} = -1.$$

$$\mathbf{D}\sin 60^{\circ} + \cos 60^{\circ} = \frac{\sqrt{3} + 1}{2}.$$

Lời giải.

Ta có $\sin 0^{\circ} = 0$, $\cos 0^{\circ} = 1$ nên đẳng thức sai là " $\sin 0^{\circ} + \cos 0^{\circ} = 0$ ".

Chọn đáp án
$$iga(A)$$
.....

CÂU 9. Cho α là góc tù. Điều khẳng định nào sau đây là **đúng**?

$$(\mathbf{A})\sin\alpha < 0.$$

$$(\mathbf{B})\cos\alpha > 0.$$

$$\cot \alpha < 0.$$

$$\bigcirc$$
 $\cot \alpha > 0$.

Dòi giải.

Góc tù có điểm biểu diễn thuộc góc phần tư thứ II, suy ra $\tan \alpha < 0$.

CÂU 10. Giá tri của
$$E = \sin 36^{\circ} \cos 6^{\circ} - \sin 126^{\circ} \cos 84^{\circ}$$
 là

$$\bigcirc$$
 -1 .

🗩 Lời giải.

Ta có

$$E = \sin 36^{\circ} \cos 6^{\circ} - \sin (90^{\circ} + 36^{\circ}) \cos (90^{\circ} - 6^{\circ})$$
$$= \sin 36^{\circ} \cos 6^{\circ} - \cos 36^{\circ} \sin 6^{\circ} = \sin 30^{\circ} = \frac{1}{2}.$$

Chọn đáp án (A).....

CÂU 11. Giá trị của biểu thức
$$A = \sin^2 51^\circ + \sin^2 55^\circ + \sin^2 39^\circ + \sin^2 35^\circ$$
 là **(B)**4. **(C)**1.

$$(\mathbf{C})_{1}$$
.

$$\bigcirc$$
2.

🗩 Lời giải.

$$A = (\sin^2 51^\circ + \sin^2 39^\circ) + (\sin^2 55^\circ + \sin^2 35^\circ)$$

= $(\sin^2 51^\circ + \cos^2 51^\circ) + (\sin^2 55^\circ + \cos^2 55^\circ) = 2.$

Chọn đáp án
$$\overline{\mathbb{D}}$$
.....

CÂU 12. Giá trị của biểu thức $A = \tan 1^{\circ} \tan 2^{\circ} \tan 3^{\circ} \cdots \tan 88^{\circ} \tan 89^{\circ}$ là

(**D**)24.

🗩 Lời giải.

Ta có $A = (\tan 1^\circ \cdot \tan 89^\circ) \cdot (\tan 2^\circ \cdot \tan 88^\circ) \cdot \cdot \cdot (\tan 44^\circ \cdot \tan 46^\circ) \cdot \tan 45^\circ = 1.$

Chọn đáp án
$$\boxed{\mathbb{D}}$$
...

CÂU 13. Tổng
$$\sin^2 2^\circ + \sin^2 4^\circ + \sin^2 6^\circ + \dots + \sin^2 84^\circ + \sin^2 86^\circ + \sin^2 88^\circ$$
 bằng

🗩 Lời giải.

Ta có

$$S = \sin^2 2^\circ + \sin^2 4^\circ + \sin^2 6^\circ + \dots + \sin^2 84^\circ + \sin^2 86^\circ + \sin^2 88^\circ$$

$$= (\sin^2 2^\circ + \sin^2 88^\circ) + (\sin^2 4^\circ + \sin^2 86^\circ) + \dots + (\sin^2 44^\circ + \sin^2 46^\circ)$$

$$= (\sin^2 2^\circ + \cos^2 2^\circ) + (\sin^2 4^\circ + \cos^2 4^\circ) + \dots + (\sin^2 44^\circ + \cos^2 44^\circ) = 22.$$

CÂU 14. Giá trị của $A = \tan 5^{\circ} \cdot \tan 10^{\circ} \cdot \tan 15^{\circ} \cdot \cdot \cdot \tan 80^{\circ} \cdot \tan 85^{\circ}$ là

(A)2.

(B)1.

(**D**)-1.

Dòi giải.

Ta có

 $A = (\tan 5^{\circ} \cdot \tan 85^{\circ}) \cdot (\tan 10^{\circ} \cdot \tan 80^{\circ}) \cdots (\tan 40^{\circ} \tan 50^{\circ}) \cdot \tan 45^{\circ}$ $= (\tan 5^{\circ} \cdot \cot 5^{\circ}) \cdot (\tan 10^{\circ} \cdot \cot 10^{\circ}) \cdots (\tan 40^{\circ} \cot 40^{\circ}) \cdot \tan 45^{\circ} = 1.$

Chọn đáp án B.....

CÂU 15. Giá trị của $B = \cos^2 73^\circ + \cos^2 87^\circ + \cos^2 3^\circ + \cos^2 17^\circ$ là

 $(\mathbf{A})\sqrt{2}$.

 $(\mathbf{D})_{1.}$

🗩 Lời giải.

Ta có

$$B = (\cos^2 73^\circ + \cos^2 17^\circ) + (\cos^2 87^\circ + \cos^2 3^\circ)$$
$$= (\cos^2 73^\circ + \sin^2 73^\circ) + (\cos^2 87^\circ + \sin^2 87^\circ) = 2.$$

Chọn đáp án B.....

CÂU 16. Cho $\cos x = \frac{1}{2}$. Tính biểu thức $P = 3\sin^2 x + 4\cos^2 x$

 $\mathbf{B}\frac{7}{4}$.

 $\bigcirc \frac{15}{4}$.

🗭 Lời giải.

Ta có $P = 3\sin^2 x + 4\cos^2 x = 3\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right) + \cos^2 x = 3 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{13}{4}$

Chọn đáp án (A)....

CÂU 17. Biết $\cos \alpha = \frac{1}{3}$. Giá trị đúng của biểu thức $P = \sin^2 \alpha + 3\cos^2 \alpha$ là

 $\bigcirc \frac{4}{3}$.

Ta có: $\cos \alpha = \frac{1}{3} \Rightarrow P = \sin^2 \alpha + 3\cos^2 \alpha = \left(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha\right) + 2\cos^2 \alpha = 1 + 2\cos^2 \alpha = \frac{11}{9}$.

CÂU 18. Cho biết $\tan \alpha = \frac{1}{2}$. Tính $\cot \alpha$.

 $(\mathbf{A})\cot\alpha=2.$

 $(\mathbf{B})\cot\alpha=\sqrt{2}.$

 $\mathbf{C}\cot\alpha=\frac{1}{4}.$

 \bigcirc cot $\alpha = \frac{1}{2}$.

🗩 Lời giải.

Ta có $\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1 \Rightarrow \cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = 2.$

Chọn đáp án (A).....

CÂU 19. Cho biết $\cos \alpha = -\frac{2}{3}$ và $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Tính $\tan \alpha$?

 \mathbf{c} $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

🗩 Lời giải.

Do $0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \tan \alpha < 0$.

Ta có: $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Leftrightarrow \tan^2 \alpha = \frac{5}{4} \Rightarrow \tan \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{2}$.

Chọn đáp án (D).....

CÂU 20. Cho α là góc từ và $\sin \alpha = \frac{5}{13}$. Giá trị của biểu thức $3 \sin \alpha + 2 \cos \alpha$ là

(A)3.

 $(\mathbf{C}) - 3.$

 $\bigcirc \frac{9}{13}$.

🗩 Lời giải.

Ta có $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = \frac{144}{169} \Rightarrow \cos \alpha = \pm \frac{12}{13}$

Do α là góc tù nên $\cos\alpha<0,$ từ đó $\cos\alpha=$ –

Như vậy $3 \sin \alpha + 2 \cos \alpha = 3 \cdot \frac{5}{13} + 2 \left(-\frac{12}{13} \right) = -\frac{9}{13}$

CÂU 21. Cho biết $\sin \alpha + \cos \alpha = a$. Giá trị của $\sin \alpha \cdot \cos \alpha$ bằng bao nhiêu?

$$\mathbf{\hat{A}}\sin\alpha\cdot\cos\alpha=a^2.$$

$$\mathbf{B}\sin\alpha\cdot\cos\alpha=2a.$$

$$\mathbf{c}\sin\alpha\cdot\cos\alpha = \frac{1-a^2}{2}$$

$$\mathbf{C}\sin\alpha\cdot\cos\alpha = \frac{1-a^2}{2}.$$
 $\mathbf{D}\sin\alpha\cdot\cos\alpha = \frac{a^2-1}{2}.$

🗩 Lời giải.

 $a^2 = (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = 1 + 2\sin \alpha \cos \alpha \Rightarrow \sin \alpha \cos \alpha = \frac{a^2 - 1}{2}.$

Chon đáp án (D).....

CÂU 22. Cho biết $\cos \alpha = -\frac{2}{3}$. Tính giá trị của biểu thức $E = \frac{\cot \alpha + 3 \tan \alpha}{2 \cot \alpha + \tan \alpha}$?

(a) $-\frac{19}{19}$.

(b) $\frac{19}{19}$.

(c) $\frac{25}{19}$.

$$-\frac{19}{13}$$
.

B
$$\frac{19}{13}$$
.

$$\frac{2 \cot \alpha}{13}$$
.

$$-\frac{25}{13}$$

🗭 Lời giải.

$$\text{Ta có } E = \frac{\cot \alpha + 3 \tan \alpha}{2 \cot \alpha + \tan \alpha} = \frac{1 + 3 \tan^2 \alpha}{2 + \tan^2 \alpha} = \frac{3 \left(\tan^2 \alpha + 1\right) - 2}{1 + \left(1 + \tan^2 \alpha\right)} = \frac{\frac{3}{\cos^2 \alpha} - 2}{\frac{1}{\cos^2 \alpha} + 1} = \frac{3 - 2 \cos^2 \alpha}{1 + \cos^2 \alpha} = \frac{19}{13}.$$

CÂU 23. Cho biết $\cot \alpha = 5$. Tính giá trị của $E = 2\cos^2 \alpha + 5\sin \alpha\cos \alpha + 1$?

(A) $\frac{10}{26}$.

(B) $\frac{100}{26}$.

$$\mathbf{A} \frac{10}{26}$$
.

$$\frac{100}{26}$$
.

$$c$$
 $\frac{50}{26}$.

$$\bigcirc \frac{101}{26}$$

₽ Lời giải.

$$E = \sin^2 \alpha \left(2 \cot^2 \alpha + 5 \cot \alpha + \frac{1}{\sin^2 \alpha} \right) = \frac{1}{1 + \cot^2 \alpha} \left(3 \cot^2 \alpha + 5 \cot \alpha + 1 \right) = \frac{101}{26}.$$

$$\bigcirc -\frac{15}{13}$$
.

$$\frac{15}{13}$$
.

🗩 Lời giải.

Ta có
$$A = \frac{3\sin\alpha + 4\sin\alpha \cdot \cot\alpha}{2\sin\alpha - 5\sin\alpha \cdot \cot\alpha} = \frac{3+4\cot\alpha}{2-5\cot\alpha} = 13.$$

$$\bigcirc -\frac{25}{3}$$
.

B
$$-\frac{11}{13}$$
.

$$\mathbf{C} - \frac{11}{3}$$
.

$$\bigcirc -\frac{25}{13}$$

$$\text{Ta có } E = \frac{\cot \alpha - 3 \tan \alpha}{2 \cot \alpha - \tan \alpha} = \frac{1 - 3 \tan^2 \alpha}{2 - \tan^2 \alpha} = \frac{4 - 3 \left(\tan^2 \alpha + 1\right)}{3 - \left(1 + \tan^2 \alpha\right)} = \frac{4 - \frac{3}{\cos^2 \alpha}}{3 - \frac{1}{\cos^2 \alpha}} = \frac{4 \cos^2 \alpha - 3}{3 \cos^2 \alpha - 1} = -\frac{11}{3}.$$

Chọn đáp án (C).....

CÂU 26. Biết $\sin a + \cos a = \sqrt{2}$. Hỏi giá trị của $\sin^4 a + \cos^4 a$ bằng bao nhiêu?

$$\frac{3}{2}$$
.

$$\bigcirc \frac{1}{2}$$

$$\bigcirc$$
 -1

$$\bigcirc 0.$$

🗭 Lời giải.

Ta có:
$$\sin a + \cos a = \sqrt{2} \Rightarrow 2 = (\sin a + \cos a)^2 \Rightarrow \sin a \cdot \cos a = \frac{1}{2}$$
.

$$\sin^4 a + \cos^4 a = \left(\sin^2 a + \cos^2 a\right) - 2\sin^2 a \cos^2 a = 1 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}.$$

CÂU 27. Cho $\tan \alpha + \cot \alpha = m$. Tìm m để $\tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha = 7$.

$$\bigcirc m = 3.$$

$$\mathbf{C}m = -3$$

$$\bigcirc m = \pm 3.$$

🗭 Lời giải.

Ta có
$$7 = \tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha = (\tan \alpha + \cot \alpha)^2 - 2 \Rightarrow m^2 = 9 \Leftrightarrow m = \pm 3.$$

Chọn đáp án
$$\boxed{\mathbb{D}}$$
.....

CÂU 28. Cho biết $3\cos\alpha - \sin\alpha = 1$, $0^{\circ} < \alpha < 90^{\circ}$ Giá trị của $\tan\alpha$ bằng

$$\mathbf{C}\tan\alpha = \frac{4}{5}.$$

🗩 Lời giải.

Ta có $3\cos\alpha - \sin\alpha = 1 \Leftrightarrow 3\cos\alpha = \sin\alpha + 1 \to 9\cos^2\alpha = (\sin\alpha + 1)^2$ $\Leftrightarrow 9\cos^2\alpha = \sin^2\alpha + 2\sin\alpha + 1 \Leftrightarrow 9\left(1 - \sin^2\alpha\right) = \sin^2\alpha + 2\sin\alpha + 1$

$$\Leftrightarrow 10\sin^2\alpha + 2\sin\alpha - 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \sin\alpha = -1\\ \sin\alpha = \frac{4}{5} \end{bmatrix}.$$

 Θ sin $\alpha = -1$: không thỏa mãn vì $0^{\circ} < \alpha < 90^{\circ}$.

$$\odot$$
 $\sin \alpha = \frac{4}{5} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{3}{5} \Rightarrow \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{4}{3}$

Chon đáp án (A)...

CÂU 29. Cho biết $2\cos\alpha + \sqrt{2}\sin\alpha = 2$, $0^{\circ} < \alpha < 90^{\circ}$. Tính giá trị của $\cot\alpha$.

$$\mathbf{C}\cot\alpha = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

$$\bigcirc \cot \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

🗭 Lời giải.

Ta có $2\cos\alpha + \sqrt{2}\sin\alpha = 2 \Leftrightarrow \sqrt{2}\sin\alpha = 2 - 2\cos\alpha \to 2\sin^2\alpha = (2 - 2\cos\alpha)^2$. $\Leftrightarrow 2\sin^2\alpha = 4 - 8\cos\alpha + 4\cos^2\alpha \Leftrightarrow 2\left(1 - \cos^2\alpha\right) = 4 - 8\cos\alpha + 4\cos^2\alpha$

$$\Leftrightarrow 6\cos^2\alpha - 8\cos\alpha + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \cos\alpha = 1\\ \cos\alpha = \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

 Θ cos $\alpha = 1$: không thỏa mãn vì $0^{\circ} < \alpha < 90^{\circ}$.

$$\odot$$
 $\cos \alpha = \frac{1}{3} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3} \Rightarrow \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

CÂU 30. Cho biết $\cos \alpha + \sin \alpha = \frac{1}{3}$. Giá trị của $P = \sqrt{\tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha}$ bằng bao nhiêu?

$$P = \frac{7}{4}.$$

$$P = \frac{9}{4}$$
.

$$\bigcirc P = \frac{11}{4}.$$

P Lời giải.

Ta có $\cos \alpha + \sin \alpha = \frac{1}{3} \to (\cos \alpha + \sin \alpha)^2 = \frac{1}{9} \Leftrightarrow 1 + 2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{9} \Leftrightarrow \sin \alpha \cos \alpha = -\frac{4}{9}.$ Ta có $P = \sqrt{\tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha} = \sqrt{(\tan \alpha + \cot \alpha)^2 - 2 \tan \alpha \cot \alpha} = \sqrt{\left(\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}\right)^2 - 2.$

$$=\sqrt{\left(\frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}\right)^2 - 2} = \sqrt{\left(\frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}\right)^2 - 2} = \sqrt{\left(-\frac{9}{4}\right)^2 - 2} = \frac{7}{4}.$$

Chọn đáp án (B).....

CÂU 31. Cho biết $\sin \alpha - \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$. Giá trị của $P = \sqrt{\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha}$ bằng bao nhiêu?

$$\mathbf{B}P = \frac{\sqrt{17}}{5}.$$

$$\bigcirc P = \frac{\sqrt{19}}{5}.$$

$$\mathbf{D}P = \frac{\sqrt{21}}{5}.$$

Ta có $\sin \alpha - \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \rightarrow (\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = \frac{1}{5} \Leftrightarrow 1 - 2\sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{\epsilon} \Leftrightarrow \sin \alpha \cos \alpha = \frac{2}{\epsilon}$

$$P = \sqrt{\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha} = \sqrt{\left(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha\right)^2 - 2\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - 2\left(\sin \alpha \cos \alpha\right)^2} = \frac{\sqrt{17}}{5}.$$

Chọn đáp án (B)....

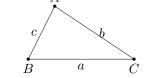
Bài 2. HỆ THỰC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Định lý Cos

Cho tam giác ABC có BC = a, AC = b và AB = c.

- $a^2 = b^2 + c^2 2bc \cdot \cos A \Rightarrow \cos A = \dots$
- $b^2 = c^2 + a^2 2ca \cdot \cos B \Rightarrow \cos B = \dots$



• $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C \Rightarrow \cos A = \dots$

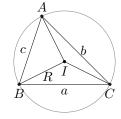
2. Định lý Sin

Cho tam giác ABC có BC=a, AC=b, AB=c và R là bán kính đường tròn ngoại tiếp. Ta có

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$



Ghi nhớ: Tỉ lệ "cạnh chia sin góc đối" thì bằng nhau.



3. Công thức tính diên tích tam giác

Gọi S là diện tích tam giác ABC. Ta có

$$\odot S = \frac{abc}{4R}, S = p \cdot r, \text{ (doc thêm)}$$

$$\odot$$
 $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

Trong đó:

- h_a , h_b , h_c là độ dài đường cao lần lượt tương ứng với các cạnh BC, CA, AB.
- R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác.
- r là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác.
- $p = \frac{a+b+c}{2}$ là nửa chu vi tam giác.

B. CÁC DANG TOÁN

Dang 1. Áp dung định lý cos

Nhận dạng định lý:

- Cho tam giác biết trước độ dài hai cạnh và số đo của một góc.
- Cho tam giác biết trước độ dài ba cạnh.

1. Ví dụ minh hoạ

VÍ DỤ 1. Cho tam giác ABC có b=5, c=7 và $\cos A=\frac{3}{5}$. Tính cạnh a và cosin các góc còn lại của tam giác đó. **P Lời giải.**

Ta có:

$$a^{2} = b^{2} + c^{2} - 2bc \cos A = 25 + 49 - 2.5.7. \frac{3}{5} = 32 \Rightarrow a = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

$$\cos B = \frac{c^{2} + a^{2} - b^{2}}{2ca} = \frac{32 + 49 - 25}{56\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos C = \frac{a^{2} + b^{2} - c^{2}}{2ab} = \frac{32 + 25 - 49}{40\sqrt{2}} = \frac{8}{40\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{10}.$$

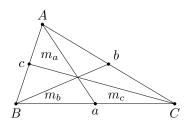
VÍ DỤ 2. Cho tam giác ABC có AC=10cm, BC=16cm và $C=120^\circ$, tính độ dài cạnh AB. \bigcirc Lời giải.

Áp dụng định lý hàm số co
sin ta có $AB^2 = CA^2 + CB^2 - 2CA.CB\cos C$ ta suy ra $AB = \sqrt{516}\,\mathrm{cm}$



Cho tam giác ABC có m_a , m_b , m_c lần lượt là các trung tuyến kể từ A, B, C. Ta có

- $m_a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} \frac{a^2}{4}$.
- $m_b^2 = \frac{a^2 + c^2}{2} \frac{b^2}{4}$.
- $m_c^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} \frac{c^2}{4}$.

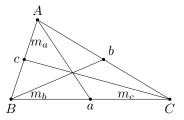


VÍ DU 3. Cho tam giác ABC có AB=4 cm, AC=3 cm và BC=6 cm. Tính độ dài trung tuyến kẻ từ C của tam giác ABC.

🗩 Lời giải.

Độ dài trung tuyến kẻ từ C của tam giác ABC là

$$m_c^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4} = \frac{6^2 + 3^2}{2} - \frac{4^2}{4} = \frac{37}{2} \Rightarrow m_c = \frac{\sqrt{74}}{2}.$$



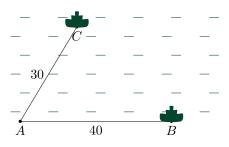
VÍ DỤ 4. Cho tam giác ABC có BC = 3, CA = 4 và AB = 6. Tính cosin của góc có số đo lớn nhất của tam giác đã cho. Lời giải.

Do AB > AC > BC nên C > B > A.

Áp dụng định lý hàm số co
sin ta có $\cos C = -\frac{11}{2^4}.$

VÍ DU 5.

Hai chiếc tàu thủy cùng xuất phát từ một vị trí A, đi thẳng theo hai hướng tạo với nhau góc 60° . Tàu B chạy với tốc độ 20 hải lí một giờ. Tàu C chạy với tốc độ 15 hải lí một giờ. Hỏi sau hai giờ, hai tàu cách nhau bao nhiêu hải lí?



🗩 Lời giải.

Sau 2 giờ tàu B đi được 40 hải lí, tàu C đi được 30 hải lí.

Vây tam giác ABC có AB = 40, AC = 30 và $A = 60^{\circ}$.

Áp dung định lí cosine vào tam giác ABC, ta có

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A = 30^2 + 40^2 - 2 \cdot 30 \cdot 40 \cdot \cos 60^\circ = 1300 \Rightarrow a \simeq 36.$$

Vậy sau 2 giờ, hai tàu cách nhau khoảng 36 hải lí.

VÌ DỤ 6. Tam giác ABC có AB=c; BC=a; CA=b. Các cạnh a,b,c liên hệ với nhau bởi đẳng thức $b(b^2-a^2)=c(a^2-c^2)$. Tính số đo góc \widehat{BAC} .

Dèi giải.

Theo định lý hàm côsin, ta có

$$\widehat{BAC} = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \cdot AB \cdot AC} = \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2bc}.$$

Μà

$$b(b^{2} - a^{2}) = c(a^{2} - c^{2})$$

$$\Leftrightarrow b^{3} - a^{2}b = a^{2}c - c^{3}$$

$$\Leftrightarrow -a^{2}(b+c) + (b+c)(b^{2} + c^{2} - bc) = 0$$

$$\Leftrightarrow b^{2} + c^{2} - a^{2} = bc.$$

Khi đó
$$\cos \widehat{BAC} = \frac{bc}{2bc} = \frac{1}{2}$$
. Vây $\widehat{BAC} = 60^{\circ}$.

2. Bài tấp tư luân

BÀI 1. Cho tam giác ABC có $\widehat{A} = 60^{\circ}$, AB = 6, AC = 8. Tính BC.

Áp dụng định lý cosine trong tam giác ABC ta có $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A = 6^2 + 8^2 - 2 \cdot 6 \cdot 8 \cos 60^\circ = 52 \Rightarrow$ $BC = 2\sqrt{13}.$

BÀl 2. Cho tam giác ABC có các canh BC = 6, $CA = 4\sqrt{2}$, AB = 2. Tính cos A và góc \widehat{A} . Dèi giải.

$$\cos A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \cdot AC} = \frac{2^2 + \left(4\sqrt{2}\right)^2 - 6^2}{2 \cdot 2 \cdot 4\sqrt{2}} = 0 \Leftrightarrow \widehat{A} = 90^\circ.$$

BÅI 3. Cho tam giác ABC có AB = 6 cm; AC = 5 cm và $ACB = 60^{\circ}$. Tính BC. Dèi giải.

Áp dụng định lý cosine trong tam giác ta có

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cdot \cos \widehat{ACB} \Rightarrow 6^2 = 5^2 + BC^2 - 2 \cdot 5 \cdot BC \cos 60^\circ$$

$$\Leftrightarrow BC^2 - 5BC - 11 = 0 \Leftrightarrow BC = \frac{5 + \sqrt{69}}{2}.$$

BÀI 4. Tam giác ABC có b=6, c=8 và $m_a=5$. Tính a, \hat{A} . Dèi aiải.

Áp dụng công thức đường trung tuyến trong tam giác ta có $m_a^2 = \frac{b^2+c^2}{2} - \frac{a^2}{4} \Leftrightarrow 5^2 = \frac{6^2+8^2}{2} - \frac{a^2}{4} \Leftrightarrow a = 10.$

BÀI 5. Cho tam giác ABC, gọi l_a là độ dài đường phân giác trong kẻ từ đỉnh A của tam giác ABC. Chứng minh rằng

Lời giải.

Gọi D là chân đường phân giác trong kẻ từ đỉnh A của tam giác ABC. Ta có $l_a=AD$. Ta có

$$S_{ABC} = S_{ABD} + S_{ACD}$$

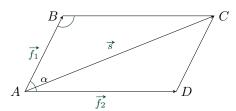
$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}AB.AC. \sin A = \frac{1}{2}AB.AD. \sin \frac{A}{2} + \frac{1}{2}AC.AD. \sin \frac{A}{2}$$

$$\Leftrightarrow cb \sin A = l_a(c+b) \sin \frac{A}{2}$$

$$\Leftrightarrow l_a = \frac{bc \sin A}{(b+c) \sin \frac{A}{2}}$$

BÀI 6. Hai lực $\vec{f_1}$ và $\vec{f_2}$ cho trước cùng tác dụng lên một vật và tạo thành góc nhọn $(\vec{f_1}, \vec{f_2}) = \alpha$. Hãy lập công thức tính cường độ của hợp lực \vec{s} .

🗩 Lời giải.



Đặt $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{f_2}$ và vệ hình bình hành ABCD. Khi đó $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{f_1} + \overrightarrow{f_2} = \overrightarrow{s}$.

Khi đó
$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{f_1} + \overrightarrow{f_2} = \overrightarrow{s}$$

$$|\overrightarrow{s}| = |\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{f_1} + \overrightarrow{f_2}|.$$

Theo định lí côsin đối với tam giác ABC, ta có:

$$AC^{2} = AB^{2} + BC^{2} - 2.AB.BC.\cos B, \text{ hay } |\overrightarrow{s}|^{2} = \left|\overrightarrow{f_{1}}\right|^{2} + \left|\overrightarrow{f_{2}}\right|^{2} - 2\left|\overrightarrow{f_{1}}\right|.\left|\overrightarrow{f_{2}}\right|.\cos(180^{\circ} - \alpha).$$

Do đó:
$$|\vec{s}| = \sqrt{\left|\vec{f_1}\right|^2 + \left|\vec{f_2}\right|^2 + 2\left|\vec{f_1}\right| \cdot \left|\vec{f_2}\right| \cdot \cos \alpha}$$
.

Dang 2. Áp dung định lý sin

Nhận dạng định lý:

- Cho tam giác biết trước độ dài hai cạnh và số đo của một góc.
- Cho tam giác biết trước độ dài một cạnh và số đo của hai góc.
- Cho tam giác biết trước độ dài một cạnh, số đo góc đối diện và bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác.

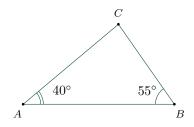
1. Ví du minh hoa

VÍ DU 1. Cho tam giác ABC có $\hat{A} = 120^{\circ}$ và BC = 10 cm. Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Lời giải.

Áp dụng định lí sin ta có $R = \frac{BC}{2\sin A} = \frac{10}{2\sin 120^{\circ}} = \frac{10\sqrt{3}}{3}$ cm.

VÍ DU 2.

Cho tam giác ABC có $\widehat{A} = 40^{\circ}$, $\widehat{B} = 55^{\circ}$ và AB = 100. Tính đô dài canh BC (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).



🗩 Lời giải.

Ta có $\widehat{C} = 180^{\circ} - \widehat{A} - \widehat{B} = 180^{\circ} - 40^{\circ} - 55^{\circ} = 85^{\circ}$.

Áp dụng định lí sin ta có

$$\frac{AB}{\sin C} = \frac{BC}{\sin A} \Rightarrow BC = \frac{AB\sin A}{\sin C} = \frac{100\sin 40^\circ}{\sin 85^\circ} \approx 64,5.$$

VÍ DỤ 3. Cho tam giác ABC có $\frac{AB}{2} = \frac{BC}{3}$ và $\hat{A} = 45^{\circ}$. Tính các góc B, C của tam giác đó (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

🗩 Lời giải.

Áp dụng định lí sin ta có

$$\frac{AB}{\sin C} = \frac{BC}{\sin A} \Rightarrow \sin C = \frac{AB\sin A}{BC} = \frac{2\sin 45^{\circ}}{3} \Rightarrow \widehat{C} \approx 28.1^{\circ}.$$

Khi đó
$$\widehat{B} = 180^{\circ} - \widehat{A} - \widehat{C} = 180^{\circ} - 45^{\circ} - 28,1^{\circ} = 106,9^{\circ}.$$

VÍ DU 4. Cho tam giác ABC có $\widehat{A}=30^\circ, \ \widehat{B}=50^\circ$ và bán kính đường tròn ngoại tiếp bằng 10 cm. Tính độ dài các cạnh của tam giác ABC (làm tròn đến hàng phần mười).

Lời giải.

Ta có
$$\widehat{C}=180^{\circ}-\widehat{A}-\widehat{B}=180^{\circ}-30^{\circ}-50^{\circ}=100^{\circ}.$$

Áp dụng định lí sin

$$AB = 2R \sin C = 2 \cdot 10 \cdot \sin 100^{\circ} \approx 19,7 \text{ cm};$$

$$BC = 2R \sin A = 2 \cdot 10 \cdot \sin 30^{\circ} = 10 \text{ cm};$$

$$AC = 2R \sin B = 2 \cdot 10 \cdot \sin 50^{\circ} \approx 15.3 \text{ cm}.$$

VÍ DU 5. Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng $\sin^2 A = \sin B \sin C$ khi và chỉ khi $a^2 = bc$. 🗩 Lời giải.

Theo định lí sin ta có $\sin A = \frac{a}{2B}$; $\sin B = \frac{b}{2B}$; $\sin C = \frac{c}{2B}$

Do đó

$$\sin^2 A = \sin B \sin C \Leftrightarrow \left(\frac{a}{2R}\right)^2 = \frac{b}{2R} \cdot \frac{c}{2R} \Leftrightarrow a^2 = bc.$$

VÍ DỤ 6. Cho tam giác ABC. Biết AB = 5 cm, BC = 6 cm và $2\sin A = \sin B + \sin C$. Tính độ dài cạnh AC. 🗩 Lời giải.

Theo định lí sin ta có $\sin A = \frac{BC}{2R}$; $\sin B = \frac{AC}{2R}$; $\sin C = \frac{AB}{2R}$.

Do đó

$$2\sin A = \sin B + \sin C \Leftrightarrow \frac{2BC}{2R} = \frac{AC}{2R} + \frac{AB}{2R} \Leftrightarrow 2BC = AC + AB.$$

Suy ra AC = 2BC - AB = 12 - 5 = 7 cm.

2. Bài tấp tư luân

BÀI 1. Cho tam giác ABC có $\widehat{B} = 70^{\circ}$ và AC = 15 cm. Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

🗩 Lời giải.

Áp dụng định lí sin ta có $R = \frac{AC}{2\sin B} = \frac{15}{2\sin 70^{\circ}} \approx 8 \text{ cm.}$

BÀI 2. Cho tam giác ABC có $\widehat{B}=30^\circ$, $\widehat{C}=65^\circ$ và BC=50. Tính độ dài cạnh AB (làm tròn kết quả đến hàng phần

Lời giải.

Ta có $\widehat{A}=180^{\circ}-\widehat{B}-\widehat{C}=180^{\circ}-30^{\circ}-65^{\circ}=75^{\circ}$

Áp dụng định lí sin ta có

$$\frac{AB}{\sin C} = \frac{BC}{\sin A} \Rightarrow AB = \frac{BC\sin C}{\sin A} = \frac{50\sin 65^{\circ}}{\sin 75^{\circ}} \approx 46.9.$$

BÀI 3. Cho tam giác ABC có $\frac{BC}{3} = \frac{AC}{5}$ và $\widehat{A} = 30^{\circ}$. Tính các góc B, C của tam giác đó (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

Lời giải.

Áp dụng định lí sin ta có

$$\frac{AC}{\sin B} = \frac{BC}{\sin A} \Rightarrow \sin B = \frac{AC\sin A}{BC} = \frac{5\sin 30^{\circ}}{3} \Rightarrow B \approx 56.4^{\circ}.$$

Khi đó
$$\widehat{C} = 180^{\circ} - \widehat{A} - \widehat{B} = 180^{\circ} - 30^{\circ} - 56.4^{\circ} = 93.6^{\circ}.$$

BÀI 4. Cho tam giác ABC thỏa mãn $a \sin B = c \sin A$. Chứng minh rằng tam giác ABC cân.

Dòi giải.

Từ giả thiết suy ra $\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin B}$. (1) Áp dụng định lí sin ta có $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$. (2) Từ (1) và (2) suy ra $\frac{c}{\sin B} = \frac{b}{\sin B} \Rightarrow b = c$.

BÀI 5. Cho tam giác ABC thỏa mãn $\sin^2 A = \sin^2 B + \sin^2 C$. Chứng minh rằng tam giác ABC vuông.

Từ định lí sin suy ra $\sin A = \frac{a}{2R}$, $\sin B = \frac{b}{2R}$, $\sin C = \frac{c}{2R}$.

Khi đó

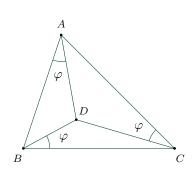
$$\sin^2 A = \sin^2 B + \sin^2 C \Leftrightarrow \left(\frac{a}{2R}\right)^2 = \left(\frac{b}{2R}\right)^2 + \left(\frac{c}{2R}\right)^2 \Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2.$$

Vây tam giác ABC vuông tai A.

BÀI 6.

Cho tam giác ABC. Gọi D là điểm thuộc miền trong tam giác ABC sao cho $\widehat{B}A\widehat{D}=$ $\widehat{C}B\widehat{D} = \widehat{A}\widehat{C}\widehat{D} = \varphi$. Chứng minh rằng

$$\sin^3 \varphi = \sin(A - \varphi)\sin(B - \varphi)\sin(C - \varphi).$$



Dòi giải.

Áp dụng định lí sin cho các tam giác ABD, BCD và ACD ta nhận được

$$\begin{cases} \frac{BD}{\sin\varphi} = \frac{AD}{\sin(B-\varphi)} \\ \frac{CD}{\sin\varphi} = \frac{BD}{\sin(C-\varphi)} \Rightarrow \frac{BD}{\sin\varphi} \cdot \frac{CD}{\sin\varphi} \cdot \frac{AD}{\sin\varphi} = \frac{AD}{\sin(B-\varphi)} \cdot \frac{BD}{\sin(C-\varphi)} \cdot \frac{CD}{\sin(A-\varphi)}. \\ \frac{AD}{\sin\varphi} = \frac{CD}{\sin(A-\varphi)} \end{cases}$$

Rút gọn, ta suy ra $\sin^3 \varphi = \sin(A - \varphi)\sin(B - \varphi)\sin(C - \varphi)$

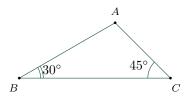
Dạng 3. Giải tam giác và ứng dụng

Giải tam giác là bài toán tìm độ dài tất cả các cạnh và độ lớn tất cả các góc của tam giác.

1. Ví dụ minh hoạ

VÍ DỤ 1.

Cho tam giác ABC có BC = 40 cm, $\widehat{B} = 30^{\circ}$, $\widehat{C} = 45^{\circ}$. Tính góc \widehat{A} và độ dài các cạnh AB, AC của tam giác đó (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).



🗩 Lời giải.

Ta có
$$\widehat{A} = 180^{\circ} - (\widehat{B} + \widehat{C}) = 180^{\circ} - (30^{\circ} + 45^{\circ}) = 105^{\circ}.$$

Áp dụng định lí sin ta có

$$\begin{split} \frac{AB}{\sin C} &= \frac{BC}{\sin A} \Rightarrow AB = \frac{BC\sin C}{\sin A} = \frac{40\sin 45^\circ}{105^\circ} \approx 29,3 \text{ (cm)};\\ \frac{AC}{\sin B} &= \frac{BC}{\sin A} \Rightarrow AC = \frac{BC\sin B}{\sin A} = \frac{40\sin 30^\circ}{105^\circ} \approx 20,7 \text{ (cm)}. \end{split}$$

VÍ DỤ 2. Cho tam giác ABC có $AB=25, AC=20, \widehat{A}=120^{\circ}.$ Tính cạnh BC và các góc B, C của tam giác đó. \bigcirc Lời giải.

Áp dụng định lí côsin ta có

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC\cos A = 25^2 + 20^2 - 2 \cdot 25 \cdot 20\cos 120^\circ = 1525 \Rightarrow BC = 5\sqrt{61} \approx 39.$$

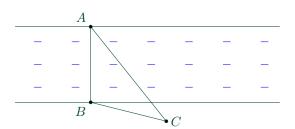
Áp dụng định lí sin ta có

$$\frac{AC}{\sin B} = \frac{BC}{\sin A} \Rightarrow \sin B = \frac{AC\sin A}{BC} = \frac{20\sin 120^\circ}{5\sqrt{61}} \Rightarrow B \approx 26.3^\circ.$$

Khi đó
$$\widehat{C} = 180^{\circ} - \widehat{A} - \widehat{B} = 180^{\circ} - 120^{\circ} - 26,3^{\circ} = 33,7^{\circ}.$$

VÍ DỤ 3.

Để đo chiều rộng AB của một khúc sông, người ta chọn điểm C. Sau đó, đo khoảng cách BC, các góc B và C. Biết rằng BC=200 m, $\widehat{B}=107^\circ$, $\widehat{C}=28^\circ$. Tìm chiều rộng AB của khúc sông đó (làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất).



🗭 Lời giải.

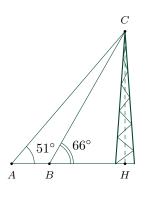
Ta có
$$\widehat{A} = 180^{\circ} - \widehat{B} - \widehat{C} = 180^{\circ} - 107^{\circ} - 28^{\circ} = 55^{\circ}.$$

Áp dụng định lí sin ta có

$$\frac{AB}{\sin C} = \frac{BC}{\sin A} \Rightarrow AB = \frac{BC\sin C}{\sin A} = \frac{200\sin 28^\circ}{\sin 55^\circ} \approx 113.6 \text{ m}.$$

VÍ DŲ 4.

Để đo chiều cao CH của một tháp truyền hình, người ta chọn hai điểm quan sát A, B trên mặt đất (hình vẽ). Biết $\widehat{CAH} = 51^{\circ}, \widehat{CBH} = 66^{\circ}$ và AB = 75 m, tính chiều cao của tháp.



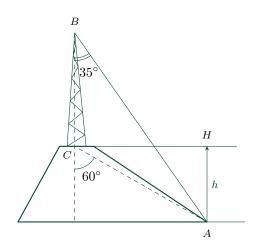
Ta có
$$\widehat{ACB} = \widehat{CBH} - \widehat{CAH} = 66^{\circ} - 51^{\circ} = 15^{\circ}$$
.

Áp dụng định lí sin ta có

Áp dụng định lí sin ta có
$$\frac{AB}{\sin \widehat{ACB}} = \frac{BC}{\sin \widehat{CAH}} \Rightarrow BC = \frac{AB \sin \widehat{CAH}}{\sin \widehat{ACB}} = \frac{75 \sin 51^{\circ}}{\sin 15^{\circ}}.$$
 Suy ra $CH = BC \sin \widehat{CBH} = \frac{75 \sin 51^{\circ} \sin 66^{\circ}}{\sin 15^{\circ}} \approx 205,7 \text{ m}.$

Suy ra
$$CH = BC \sin \widehat{CBH} = \frac{75 \sin 51^{\circ} \sin 66^{\circ}}{\sin 15^{\circ}} \approx 205,7 \text{ m}.$$

Trên ngọn đồi có một cái tháp cao 120 m. Đỉnh tháp B và chân tháp C nhìn điểm A ở chân đồi dưới các góc tương ứng bằng 35° và 60° so với phương thắng đứng. Xác định chiều cao HA của ngọn đồi. (Làm tròn đến phần mười)



🗩 Lời giải.

Ta có
$$\widehat{BAC}=60^{\circ}-35^{\circ}=25^{\circ};$$
 $\widehat{ACH}=90^{\circ}-60^{\circ}=30^{\circ}$

Áp dụng định lí sin ta có

Ap dụng định lí sin ta có
$$\frac{AC}{\sin \widehat{ABC}} = \frac{BC}{\sin \widehat{BAC}} \Rightarrow AC = \frac{BC\sin \widehat{ABC}}{\sin \widehat{BAC}} = \frac{120\sin 35^{\circ}}{\sin 25^{\circ}}.$$
 Suy ra $AH = AC\sin \widehat{ACH} = \frac{120\sin 35^{\circ}\sin 30^{\circ}}{\sin 25^{\circ}} \approx 81,4 \text{ m}.$

Suy ra
$$AH = AC \sin \widehat{ACH} = \frac{120 \sin 35^{\circ} \sin 30^{\circ}}{\sin 25^{\circ}} \approx 81,4 \text{ m}$$

2. Bài tấp tư luân

BÀI 1. Cho tam giác ABC có AB=8, BC=10, AC=15. Tính $\widehat{A}+2\widehat{C}$ (làm tròn kết quả đến hàng phần mười). Lời giải.

Áp dụng định lí côsin ta có

$$\cos A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \cdot AB \cdot AC} = \frac{8^2 + 15^2 - 10^2}{2 \cdot 8 \cdot 15} = \frac{63}{80} \Rightarrow \widehat{A} \approx 38,04^{\circ}.$$

$$\cos C = \frac{AC^2 + BC^2 - AB^2}{2 \cdot AC \cdot BC} = \frac{15^2 + 10^2 - 8^2}{2 \cdot 15 \cdot 10} = \frac{87}{100} \Rightarrow \widehat{C} \approx 29,54^{\circ}.$$

Suv ra $\widehat{A} + 2\widehat{C} \approx 97.1^{\circ}$.

BÀI 2. Cho tam giác ABC có AB = 15 cm, AC = 21 cm, $\widehat{A} = 30^{\circ}$. Tính canh BC và các góc B, C của tam giác đó (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

Dòi giải.

Áp dụng định lí côsin ta có

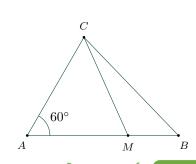
$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC\cos A = 15^2 + 21^2 - 2 \cdot 15 \cdot 21\cos 30^\circ \Rightarrow BC \approx 11 \text{ cm}.$$

Áp dụng định lí sin ta có

$$\frac{AC}{\sin B} = \frac{BC}{\sin A} \Rightarrow \sin B = \frac{AC\sin A}{BC} = \frac{21\sin 30^\circ}{11} \Rightarrow B \approx 72.7^\circ.$$

Khi đó
$$\widehat{C} = 180^{\circ} - \widehat{A} - \widehat{B} = 180^{\circ} - 30^{\circ} - 72.7^{\circ} = 77.3^{\circ}$$
.

Cho tam giác ABC có $AB=15,\,AC=12,\,\widehat{A}=60^{\circ}.\,M$ là điểm thuộc cạnh AB sao cho AM = 2BM. Tính canh CM, góc \widehat{BCM} và bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác BCM (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).



🗩 Lời giải.

Ta có $AM = 2BM \Rightarrow BM = \frac{1}{3}AB = 5$ và $AM = \frac{2}{3}AB = 10$.

Áp dụng định lí côsin ta có

$$CM^2 = AM^2 + AC^2 - 2AM \cdot AC\cos A = 10^2 + 12^2 - 2 \cdot 10 \cdot 12\cos 60^\circ = 124 \Rightarrow CM = \sqrt{124} \approx 11.1;$$

 $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC\cos A = 15^2 + 12^2 - 2 \cdot 15 \cdot 12\cos 60^\circ = 189 \Rightarrow BC = \sqrt{189}.$

Áp dụng định lí côsin ta có

$$BM^2 = CM^2 + CB^2 - 2CM \cdot CB \cos \widehat{BCM}$$

$$\Leftrightarrow \cos \widehat{BCM} = \frac{CM^2 + CB^2 - BM^2}{2CM \cdot CB}$$

$$\Leftrightarrow \cos \widehat{BCM} = \frac{124 + 189 - 5^2}{2\sqrt{124} \cdot \sqrt{189}}$$

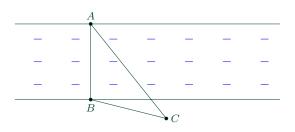
$$\Rightarrow \widehat{BCM} \approx 19.8^{\circ}.$$

Áp đụng định lí sin, ta nhận được bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác BCM là

$$R = \frac{BM}{2\sin\widehat{BCM}} \approx 7.4.$$

BÀI 4.

Để đo chiều rộng AB của một khúc sông, người ta chọn điểm C, đo khoảng cách BC, các góc B và C. Biết rằng BC=250 m, $\widehat{B}=104^{\circ}$, $\widehat{C}=31^{\circ}$. Tìm chiều rộng AB của khúc sông đó (làm tròn đến chữ số hàng đơn vị).



Lời giải.

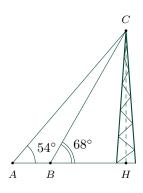
Ta có $\widehat{A}=180^{\circ}-\widehat{B}-\widehat{C}=180^{\circ}-104^{\circ}-31^{\circ}=45^{\circ}.$

Áp dụng định lí sin ta có

$$\frac{AB}{\sin C} = \frac{BC}{\sin A} \Rightarrow AB = \frac{BC\sin C}{\sin A} = \frac{250\sin 31^\circ}{\sin 45^\circ} \approx 182 \text{ m}.$$

BÀI 5.

Để đo chiều cao CH của một tháp truyền hình, người ta chọn hai điểm quan sát A,B trên mặt đất (hình vẽ). Biết $\widehat{CAH}=54^\circ, \widehat{CBH}=68^\circ$ và AB=80 m, tính chiều cao của tháp (Làm tròn đến hàng đơn vị).



D Lời giải.

Ta có $\widehat{ACB} = \widehat{CBH} - \widehat{CAH} = 68^{\circ} - 54^{\circ} = 14^{\circ}.$

Áp dụng định lí sin ta có

$$\frac{AB}{\sin \widehat{ACB}} = \frac{BC}{\sin \widehat{CAH}} \Rightarrow BC = \frac{AB \sin \widehat{CAH}}{\sin \widehat{ACB}} = \frac{80 \sin 54^\circ}{\sin 14^\circ}.$$

Suy ra $CH = BC \sin \widehat{CBH} = \frac{80 \sin 54^{\circ} \sin 68^{\circ}}{\sin 14^{\circ}} \approx 248 \text{ m}.$

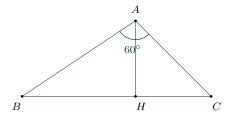
🖢 Dang 4. Bài tập tổng hợp

1. Ví du minh hoa

VÍ DU 1. Cho tam giác ABC có $\widehat{A} = 60^{\circ}$ và AB = 8 cm, AC = 5 cm.

- a) Tính diện tích của tam giác ABC.
- b) Tính đô dài đường cao ha từ đỉnh A của tam giác ABC.
- c) Tính bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

🗩 Lời giải.



a) Áp dung công thức tính diên tích tam giác ta có $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot AC \cdot \sin 60^{\circ} = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3} \text{ cm}^2.$

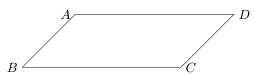
b) Áp dụng định lí cosin trong tam giác
$$ABC$$
 ta có
$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos 60^\circ = 8^2 + 5^2 - 2 \cdot 8 \cdot 5 \cdot \frac{1}{2} = 49 \Rightarrow BC = 7.$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AH \cdot BC \Rightarrow AH = \frac{2S_{\triangle ABC}}{BC} = \frac{2 \cdot 10\sqrt{3}}{7} = \frac{20\sqrt{3}}{7}.$$

c)
$$S_{\triangle ABC} = pr \Rightarrow r = \frac{S_{\triangle ABC}}{p} = \frac{2S_{\triangle ABC}}{AB+BC+AC} = \frac{2\cdot 10\sqrt{3}}{5+8+7} = \sqrt{3}.$$

VÍ DU 2. Cho hình bình hành ABCD có AB = 6, BC = 8 và $\widehat{ABC} = 60^{\circ}$. Tính diện tích hình bình hành ABCD. 🗩 Lời giải.

Ta có
$$S_{ABCD} = 2S_{\triangle ABC} = 2 \cdot \frac{1}{2}BA \cdot BC \cdot \cos \widehat{ABC}$$
$$= 6 \cdot 8 \cdot \cos 60^\circ = 24$$

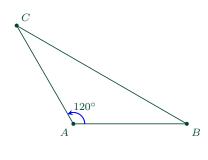


VÍ DU 3. Cho tam giác ABC có $\widehat{A}=120^{\circ}$, $\widehat{B}=30^{\circ}$, diện tích tam giác ABC bằng $9\sqrt{3}$. Tính các cạnh của tam giác ABC.

Ta có
$$\widehat{C}=180^{\circ}-(\widehat{A}+\widehat{B})=30^{\circ}.$$
Khi đó

$$\begin{cases} \frac{BC}{\sin 120^{\circ}} = \frac{AC}{\sin 30^{\circ}} = \frac{AB}{\sin 30^{\circ}} \\ S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot AC \cdot \sin 30^{\circ} = 9\sqrt{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} BC = \sqrt{3}AC \\ BC \cdot AC = 36\sqrt{3} \Leftrightarrow \begin{cases} BC = 6\sqrt{3} \\ AC = 6 \\ AB = 6. \end{cases}$$



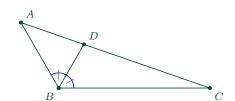
Vây $BC = 6\sqrt{3}$, AC = 6, AB = 6.

VÍ DỤ 4. Cho tam giác ABC có AB = 2, $AC = 2\sqrt{7}$ và BC = 4.

- a) Tính góc B và diện tích tam giác ABC.
- b) Tính độ dài đường phân giác trong của góc B của tam giác ABC.

Lời giải.

a) Ta có $\cos B = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2 \cdot AB \cdot BC} = \frac{4 + 16 - 28}{2 \cdot 2 \cdot 4} = \frac{-1}{2} \Rightarrow \widehat{B} = 120^{\circ}.$ Và $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot BC \cdot \sin 120^{\circ} = 2\sqrt{3}.$



b) Gọi D là chân đường phân giác trong của góc B. Ta có

$$S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABD} + S_{\triangle BCD}$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{3} = \frac{1}{2}AB \cdot BD \cdot \sin \widehat{ABD} + \frac{1}{2}CB \cdot BD \cdot \sin \widehat{CBD}$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{3} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot BD \cdot \sin 60^{\circ} + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot BD \cdot \sin 60^{\circ}$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{3} = \frac{3\sqrt{3}}{2}BD \Leftrightarrow BD = \frac{4}{3}.$$

2. Bài tập tự luận

BÀI 1. Cho tam giác với ba cạnh a=13, b=14, c=15. Tính diện tích của tam giác và độ dài đường cao h_c . \bigcirc Lời giải.

Ta có
$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = 84$$
 Lại có $S = \frac{1}{2}h_c \cdot 15 \Rightarrow h_c = 11\frac{1}{5}$.

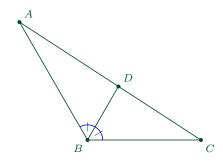
BÀI 2. Cho tam giác ABC có AB=10, BC=6 và góc $\widehat{B}=120^{\circ}.$

- a) Tính AC và diện tích tam giác ABC.
- b) Tính đường cao AH và bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC.
- c) Tính độ dài đường phân giác trong BD của tam giác ABC.

🗩 Lời giải.

a) Ta có
$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos B} = 14$$
 và $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC \cdot \sin B = 15\sqrt{3}$.

$$AH = \frac{2S_{\triangle ABC}}{BC} = \frac{2 \cdot 15\sqrt{3}}{14}$$
 và $r = \frac{S_{\triangle ABC}}{r} = \frac{15\sqrt{3}}{15} = \sqrt{3}$ với $p = \frac{6 + 10 + 14}{2} = 15$.



c) Ta có

$$S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABD} + S_{\triangle BCD}$$

$$\Leftrightarrow 15\sqrt{3} = \frac{1}{2}AB \cdot BD \cdot \sin \widehat{ABD} + \frac{1}{2}CB \cdot BD \cdot \sin \widehat{CBD}$$

$$\Leftrightarrow 15\sqrt{3} = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot BD \cdot \sin 60^{\circ} + \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot BD \cdot \sin 60^{\circ}$$

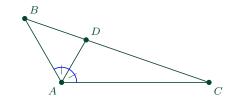
$$\Leftrightarrow 15\sqrt{3} = 4\sqrt{3} \cdot BD \Leftrightarrow BD = \frac{15}{4}.$$

BÀI 3. Cho tam giác ABC có AB=2, AC=3 và $\widehat{BAC}=120^\circ$. Tính độ dài BC, diện tích tam giác ABC, độ dài đường phân giác trong AD của tam giác ABC.

Dèi giải.

Ta có

• $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A} = \sqrt{19}$ và $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot AC \sin A = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.



• Và

$$\begin{split} S_{\triangle ABC} &= S_{\triangle BAD} + S_{\triangle DAC} \\ \Leftrightarrow & \frac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}AB \cdot AD \cdot \sin \widehat{BAD} + \frac{1}{2}AC \cdot AD \cdot \sin \widehat{DAC} \\ \Leftrightarrow & \frac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot AD \cdot \sin 60^\circ + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot AD \cdot \sin 60^\circ \\ \Leftrightarrow & \frac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{5\sqrt{3}}{4}AD \Leftrightarrow AD = \frac{6}{5}. \end{split}$$

BÀI 4. Cho tam giác ABC có AB=c, BC=a, AC=b. Gọi h_a , h_b , h_c lần lượt là các đường cao tương ứng xuất phát từ các đỉnh A, B, C và r là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Chứng minh $\frac{1}{h_c} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r}$.

Ta có
$$S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c \Rightarrow \frac{1}{h_a} = \frac{a}{2S}, \frac{1}{h_b} = \frac{b}{2S}, \frac{1}{h_c} = \frac{c}{2S} \text{ và } S = pr \Rightarrow \frac{1}{r} = \frac{p}{S}.$$

$$VT = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{a}{2S} + \frac{b}{2S} + \frac{c}{2S}$$

$$= \frac{a+b+c}{2S} = \frac{2p}{2S}$$

$$= \frac{p}{S} = \frac{1}{r}.$$

BÀI 5. Cho tam giác ABC không vuông ở A, chứng minh $S = \frac{1}{4} (b^2 + c^2 - a^2) \tan A$. 🗩 Lời giải.

Ta có

$$S = \frac{1}{2}bc \sin A$$

$$= \frac{1}{2}bc \cos A \cdot \frac{\sin A}{\cos A}$$

$$= \frac{1}{2}bc \cdot \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \cdot \tan A$$

$$= \frac{1}{4}(b^2 + c^2 - a^2) \cdot \tan A.$$

C. CÂU HỔI TRẮC NGHIỆM

CÂU 1. Tam giác ABC có AB = 5, BC = 7, CA = 8. Số đo góc \widehat{A} bằng (A) 90°.

(**D**)30°.

Lời giải.

Theo định lí hàm cosine, ta có $\cos A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB + AC} = \frac{5^2 + 8^2 - 7^2}{2 \cdot 5 \cdot 8} = \frac{1}{2}$

Do đó, $\widehat{A} = 60^{\circ}$

Chọn đáp án C

CÂU 2. Tam giác ABC có $AB=\sqrt{2},\ AC=\sqrt{3}$ và $\widehat{C}=45^{\circ}.$ Tính độ dài cạnh BC.

$$\mathbf{B}BC = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}.$$

$$\mathbf{C}BC = \sqrt{6}.$$

$$\bigcirc BC = \sqrt{6}.$$

$$\bigcirc BC = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}.$$

🗩 Lời giải.

Theo định lí hàm cosine, ta có

AB² =
$$AC^2 + BC^2 - 2 \cdot AC \cdot BC \cdot \cos \widehat{C} \Rightarrow (\sqrt{2})^2 = (\sqrt{3})^2 + BC^2 - 2 \cdot \sqrt{3} \cdot BC \cdot \cos 45^\circ$$

$$\Rightarrow BC = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}.$$

CÂU 3. Tam giác ABC có AB=2, AC=1 và $\widehat{A}=60^{\circ}$. Tính độ dài cạnh BC.

$$\mathbf{A})BC = \sqrt{2}.$$

$$\mathbf{B}BC = \sqrt{3}.$$

$$\bigcirc BC = 1.$$

$$\bigcirc BC = 2.$$

🗩 Lời giải.

Theo định lí hàm cosine, ta có

$$BC^2 = \overrightarrow{A}B^2 + AC^2 - 2\overrightarrow{A}B \cdot AC \cdot \cos A = 2^2 + 1^2 - 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \cos 60^\circ = 3$$

$$\Rightarrow BC = \sqrt{3}.$$

Chon đáp án B.....

CÂU 4. Tam giác ABC có AB = 3, AC = 6, $BAC = 60^{\circ}$. Tính độ dài đường cao h_a của tam giác.

$$\mathbf{A} h_a = 3\sqrt{3}.$$

$$\bigcirc h_a = \frac{3}{2}.$$

🗩 Lời giải.

Áp dụng định lý hàm số cosine, ta có $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cos A = 27 \Rightarrow BC = 3\sqrt{3}$.

Ta có
$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin A = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 6 \cdot \sin 60^\circ = \frac{9\sqrt{3}}{2}.$$
 Lai có $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot h_a \Rightarrow h_a = \frac{2S}{BC} = 3.$

Lại có
$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot h_a \Rightarrow h_a = \frac{2S}{BC} = 3.$$

Chọn đáp án $\overline{(D)}$

CÂU 5. Tam giác ABC có $AB = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}$, $BC = \sqrt{3}$, $CA = \sqrt{2}$. Gọi D là chân đường phân giác trong góc \widehat{A} . Khi đó góc \widehat{ADB} bằng

(A) 90°.



🗩 Lời giải.

Theo định lí hàm cosine, ta có
$$\cos \widehat{BAC} = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \cdot AB \cdot AC} = -\frac{1}{2}.$$

$$\Rightarrow \widehat{BAC} = 120^{\circ} \Rightarrow \widehat{BAD} = 60^{\circ}.$$

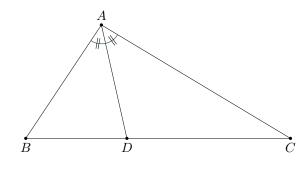
$$\cos \widehat{ABC} = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2 \cdot AB \cdot BC} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\Rightarrow \widehat{ABC} = 45^{\circ}.$$

Trong
$$\triangle ABD$$
 có $\widehat{BAD}=60^{\circ},$ $\widehat{ABD}=45^{\circ}.$

$$\Rightarrow \widehat{A}D\widehat{B} = 75^{\circ}.$$

Chọn đáp án \bigcirc



CÂU 6. Tam giác ABC có AB=4, BC=6, $AC=2\sqrt{7}$. Điểm M thuộc đoạn BC sao cho MC=2MB. Tính độ dài cạnh

$$(\mathbf{A})AM = 4\sqrt{2}.$$

$$\mathbf{B})AM = 3\sqrt{2}.$$

$$\bigcirc AM = 2\sqrt{3}.$$

$$\bigcirc$$
 $AM = 3.$

Dèi giải.

Theo định lí hàm cosine, ta có

Theo dinn it nam cosine, ta co
$$\cos B = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2 \cdot AB \cdot BC} = \frac{4^2 + 6^2 - (2\sqrt{7})^2}{2 \cdot 4 \cdot 6} = \frac{1}{2}.$$
Do $MC = 2MB \Rightarrow BM = \frac{1}{3}BC = 2.$

Do
$$MC = 2MB \Rightarrow BM = \frac{1}{3}BC = 2$$

Theo định lí hàm cosine, ta có

$$AM^2 = AB^2 + BM^2 - 2 \cdot AB \cdot BM \cdot \cos B$$

$$= 4^2 + 2^2 - 2 \cdot 4 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = 12.$$

$$\Rightarrow AM = 2\sqrt{3}.$$

CÂU 7. Cho hình thoi ABCD cạnh bằng 1 cm và có $\widehat{BAD} = 60^{\circ}$. Tính độ dài cạnh AC.

$$AC = 2.$$

$$CAC = 2\sqrt{3}.$$

$$\mathbf{D}AC = \sqrt{2}.$$

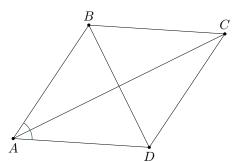
🗩 Lời giải.

Do ABCD là hình thoi, có $\widehat{BAD} = 60^{\circ} \Rightarrow \widehat{ABC} = 120^{\circ}$.

Theo đinh lí hàm cosine, ta có

$$AC^{2} = AB^{2} + BC^{2} - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos \widehat{ABC}$$
$$= 1^{2} + 1^{2} - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos 120^{\circ}$$
$$= 3.$$

$$\Rightarrow AC = \sqrt{3}$$



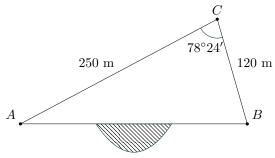
Chon đáp án (B).....

 $\hat{\mathbf{CAU}}$ 8. Khoảng cách từ A đến B không thể đo trực tiếp được vì phải qua một đầm lầy. Người ta xác định được một điểm C mà từ đó có thể nhìn được A và B dưới một góc $78^{\circ}24'$. Biết CA=250 m, CB=120 m. Khoảng cách AB bằng bao nhiêu?

 $\Rightarrow AB \approx 255 \text{ (m)}.$

🗩 Lời giải.

Áp dụng định lí cosine cho
$$\triangle ABC$$
, ta có $AB^2 = CA^2 + CB^2 - 2CA \cdot CB \cdot \cos C$
= $250^2 + 120^2 - 2 \cdot 250 \cdot 120 \cdot \cos 78^{\circ} 24'$.
≈ 64835



Chon đáp án B....

CÂU 9. Cho tam giác ABC có $BC = 2\sqrt{3}$, $AB = \sqrt{6} - \sqrt{2}$, $AC = 2\sqrt{2}$. AD là tia phân giác của góc \widehat{BAD} . Tính góc $\widehat{B}A\widehat{D}$.

🗭 Lời giải.

$$\cos A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \cdot AB \cdot AC}$$

$$= \frac{(\sqrt{6} - \sqrt{2})^2 + (2\sqrt{2})^2 - (2\sqrt{3})^2}{2 \cdot (\sqrt{6} - \sqrt{2}) \cdot (2\sqrt{2})}$$

$$= \frac{8 - 4\sqrt{3} + 8 - 12}{2 \cdot (\sqrt{6} - \sqrt{2}) \cdot (2\sqrt{2})}$$

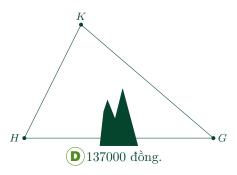
$$= \frac{4 - 4\sqrt{3}}{-8 + 8\sqrt{3}} = \frac{-1}{2}$$

Áp dụng hệ quả định lý cosine trong tam giác ABC, ta có:

Chọn đáp án (A).....

CÂU 10.

Một ô tô muốn đi từ địa điểm H đến địa điểm G, nhưng giữa H và G là một ngọn núi cao nên ô tô phải đi thành 2 đoạn từ H lên K (ô tô leo dốc lên núi) và từ K đến G (ô tô xuống núi). Các đoạn đường tạo thành tam giác HKG với HK=15km, KG = 20 km và $\widehat{HKG} = 120^{\circ}$. Giả sử cứ chay 1 km, ô tô tiêu thu hết 0,3 lít xăng. Giá thành xăng hiện nay là 13050 đồng một lít xăng. Hỏi ô tô đi từ H đến G hết bao nhiêu tiền xăng?



(A) 137025 đồng.

B) 107025 đồng.

(C)12278 đồng.

🗩 Lời giải.

Tổng quãng đường mà ô tô phải đi làS = HK + KG = 15 + 20 = 35 km.

Ô tô đi hết quãng đường tiêu thụ hết số lít xăng là $35 \cdot 0.3 = 10.5$ lít.

Ô tô đi từ H đến G hết số tiền xăng là $10.5 \cdot 13050 = 137025$ đồng.

Chọn đáp án (A).....

CÂU 11. Cho tam giác ABC có góc $\widehat{B}=45^{\circ}$, AC=28, BC=25. Tính số đo góc A của tam giác (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

(A) 39,1°.

B)40,2°.

(C)39,2°.

(**D**)40°.

🗩 Lời giải.

Áp dụng định lí sin ta có

$$\frac{AC}{\sin B} = \frac{BC}{\sin A} \Rightarrow \sin A = \frac{BC\sin B}{AC} = \frac{25\sin 45^{\circ}}{28} = \frac{25\sqrt{2}}{56} \Rightarrow \widehat{A} \approx 39.2^{\circ}.$$

CÂU 12. Cho tam giác ABC có góc $\widehat{B} = 30^{\circ}, \widehat{C} = 75^{\circ}, AB = 20$. Độ dài cạnh AC là

B $10(\sqrt{6}-\sqrt{2})$.

 $(\mathbf{D})5(\sqrt{6}+\sqrt{2}).$

P Lời giải.

Áp dụng định lí sin ta có

$$\frac{AC}{\sin B} = \frac{AB}{\sin C} \Rightarrow AC = \frac{AB \cdot \sin B}{\sin C} = \frac{20 \cdot \sin 30^{\circ}}{\sin 75^{\circ}} = 10(\sqrt{6} - \sqrt{2}).$$

CÂU 13. Cho tam giác ABC có $\widehat{B}=30^\circ$, $\widehat{C}=45^\circ$ và BC=30 cm. Tính độ dài cạnh AB (làm tròn kết quả đến hàng phần

(A) $15(\sqrt{3}+1)$ cm.

B) $15(\sqrt{3}-1)$ cm.

 $(\mathbf{C})30(2\sqrt{3}-1)$ cm.

 $(\mathbf{D})30(\sqrt{3}-1)$ cm.

P Lời giải.

Ta có $\widehat{A} = 180^{\circ} - \widehat{B} - \widehat{C} = 180^{\circ} - 30^{\circ} - 45^{\circ} = 105^{\circ}.$

Áp dụng định lí sin ta có

$$\frac{AB}{\sin C} = \frac{BC}{\sin A} \Rightarrow AB = \frac{BC\sin C}{\sin A} = \frac{30\sin 45^\circ}{\sin 105^\circ} = 30\sqrt{3} - 30 \text{ cm}.$$

CÂU 14. Cho tam giác ABC có $BC=11,\,\widehat{A}=30^{\circ}.$ Độ dài cạnh AB lớn nhất bằng bao nhiêu?

A $11\sqrt{3}$.

(D) $11(\sqrt{3}+1)$.

🗩 Lời giải.

Áp dung định lí sin ta có

$$\frac{AB}{\sin C} = \frac{BC}{\sin A} \Rightarrow AB = \frac{BC\sin C}{\sin A} = \frac{11\sin C}{\sin 30^{\circ}} \le 22.$$

Đẳng thức xảy ra khi $\widehat{C} = 90^{\circ}$.

Vậy độ dài cạnh AB lớn nhất bằng 22.

Chọn đáp án \bigcirc

CÂU 15. Cho tam giác ABC có $\widehat{C} = 30^{\circ}$ và AB = 30 cm. Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

(A) $30\sqrt{3}$ cm.

(B) $15\sqrt{3}$ cm.

(**c**)30 cm.

🗩 Lời giải.

Áp dụng định lí sin ta c
ó $R=\frac{AB}{2\sin C}=\frac{30}{2\sin 30^{\circ}}=30$ cm.

CÂU 16. Cho tam giác MNK có MN = a, MK = 3a, $\widehat{M} = 120^{\circ}$. Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp R của tam giác MNK.

 $\mathbf{B} \frac{a\sqrt{21}}{2}$.

 $\mathbf{c} \frac{a\sqrt{33}}{2}$.

 $\bigcirc \frac{a\sqrt{42}}{2}.$

Áp dụng định lí côsin ta có

$$NK^2 = MN^2 + MK^2 - 2MN \cdot MK \cos M = a^2 + 9a^2 - 2 \cdot a \cdot 3a \cos 120^\circ = 13a^2 \Rightarrow NK = a\sqrt{13}.$$

Áp dụng định lí sin ta có $R = \frac{NK}{2\sin M} = \frac{a\sqrt{13}}{2\sin 120^{\circ}} = \frac{a\sqrt{39}}{3}$.

CÂU 17.

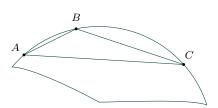
Để đo bán kính của một chiếc đĩa cổ chỉ còn lai một phần, các nhà khảo cổ chon 3 điểm trên chiếc đĩa (hình vẽ). Biết $\widehat{A}=33^{\circ},\ BC=15{,}3$ cm, tính bán kính của chiếc đĩa (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

(A) 13,8cm.

(**B**)12,6cm.

 $(\mathbf{C})12,9\mathrm{cm}.$

 $(\mathbf{D})13,1$ cm.



🗩 Lời giải.

Áp dung định lí sin suy ra bán kính của chiếc đĩa là

$$R = \frac{BC}{2\sin A} = \frac{15,3}{2\sin 33^{\circ}} \approx 13,8$$
 (cm).

Chon đáp án (A).....

CÂU 18. Cho tam giác ABC có $b^2 = a^2 + c^2 + ac$. Khẳng định nào sau đây đúng?

 $(\mathbf{A})\sin^2 A = \sin^2 B + \sin^2 C + \sin B \sin C.$

 $\mathbf{B}\sin^2 B = \sin^2 A + \sin^2 C + \sin A \sin C.$

 $(\mathbf{C})\widehat{A} = 120^{\circ}.$

 $\widehat{\mathbf{D}}\widehat{A} = 60^{\circ}$.

Dòi giải.

Ta có

$$b^2 = a^2 + c^2 + ac$$

$$\Leftrightarrow (2R\sin B)^2 = (2R\sin A)^2 + (2R\sin C)^2 + (2R\sin A) \cdot (2R\sin C)$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 B = \sin^2 A + \sin^2 C + \sin A \sin C.$$

Chọn đáp án (B).....

Dòi giải.

Ta có

$$\cot A = \frac{\cos A}{\sin A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc \cdot \frac{a}{2R}} = \frac{R(b^2 + c^2 - a^2)}{abc}.$$

Chọn đáp án (D).....

CÂU 20.

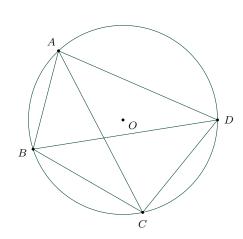
Cho tam giác ABCD nội tiếp đường tròn tâm O. Biết $\widehat{ACB} = 32^{\circ}$, $\widehat{ADC} = 75^{\circ}$ và BC = 8.8 cm. Tính bán kính đường tròn đường tròn (O). (Làm tròn kết quả đến hàng phần mười)

(A) 7,8 cm.

(B)7,5 cm.

 $(\mathbf{C})6,6 \text{ cm}.$

 $(\mathbf{D})6,5 \text{ cm}.$



Dèi giải.

Tứ giác ABCD nội tiếp suy ra $\widehat{ADB} = \widehat{ACB} = 32^{\circ} \Rightarrow \widehat{BCD} = \widehat{ADC} - \widehat{ADB} = 43^{\circ}$. Khi đó, bán kính đường tròn tâm O là

$$R = \frac{BC}{2\sin\widehat{BDC}} = \frac{8.8}{2\sin43^{\circ}} \approx 6.5 \text{ (cm)}.$$

Chọn đáp án \bigcirc D.....

(A) 129,3°.

B)142,7°.

CÂU 21. Cho tam giác ABC có AB=12, BC=15, AC=18. Tính $\widehat{A}+2\widehat{C}$ (làm tròn kết quả đến hàng phần mười). (**c**)118,4°.

 $(\mathbf{D})138,6^{\circ}.$

🗩 Lời giải.

Áp dung định lí côsin ta có

$$\cos A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \cdot AB \cdot AC} = \frac{12^2 + 18^2 - 15^2}{2 \cdot 12 \cdot 18} = \frac{9}{16} \Rightarrow \widehat{A} \approx 55,77^{\circ}.$$
$$\cos C = \frac{AC^2 + BC^2 - AB^2}{2 \cdot AC \cdot BC} = \frac{18^2 + 15^2 - 12^2}{2 \cdot 18 \cdot 15} = \frac{3}{4} \Rightarrow \widehat{C} \approx 41,4^{\circ}.$$

Suy ra $\widehat{A} + 2\widehat{C} \approx 138,6^{\circ}$.

Chon đáp án (D)....

CÂU 22. Cho tam giác ABC có góc $\widehat{A} = 60^{\circ}$, $\widehat{B} = 45^{\circ}$, AB = 25. Độ dài cạnh BC gần với giá trị nào nhất dưới đây? **A** 22. $(\mathbf{C})24.5.$

🗩 Lời giải.

Ta có $\widehat{C} = 180^{\circ} - \widehat{A} - \widehat{B} = 180^{\circ} - 60^{\circ} - 45^{\circ} = 75^{\circ}.$

Áp dụng định lí sin ta có

$$\frac{BC}{\sin A} = \frac{AB}{\sin C} \Rightarrow BC = \frac{AB \cdot \sin A}{\sin C} = \frac{25 \cdot \sin 60^{\circ}}{\sin 75^{\circ}} \approx 22,4.$$

Chọn đáp án B.....

CÂU 23. Cho tam giác ABC có AB = 8, AC = 11, $\widehat{A} = 30^{\circ}$. Số đo góc B gần với giá trị nào nhất dưới đây? (A) 50,5°. **(B)**45.8°. (C)65.3°. (D)55,2°.

🗩 Lời giải.

Áp dụng định lí côsin ta có

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cos A = 8^2 + 11^2 - 2 \cdot 8 \cdot 11 \cos 30^\circ \Rightarrow BC \approx 6.7.$$

Áp dụng định lí sin ta có

$$\frac{AC}{\sin B} = \frac{BC}{\sin A} \Rightarrow \sin B = \frac{AC\sin A}{BC} = \frac{11\sin 30^\circ}{6,7} \Rightarrow \widehat{B} \approx 55.2^\circ.$$

Chon đáp án D.....

CÂU 24.

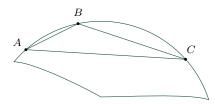
Để đo bán kính của một chiếc đĩa cổ chỉ còn lại một phần, các nhà khảo cổ chọn ba điểm trên chiếc đĩa (hình vẽ). Biết AB = 7.1 cm, BC = 16.3 cm, AC = 19.6 cm, tính bán kính của chiếc đĩa (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).



(B) 9.8cm.

(C)10.3cm.

 $(\mathbf{D})10,1$ cm.



Lời giải.

Áp dung định lí côsin ta có

$$\begin{split} BC^2 &= AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cos A \\ \Leftrightarrow \cos A &= \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \cdot AC} \\ \Leftrightarrow \cos A &= \frac{7,1^2 + 19,6^2 - 16,3^2}{2 \cdot 7,1 \cdot 19,6} \\ \Rightarrow \widehat{A} \approx 52,6427^{\circ}. \end{split}$$

Áp dụng định lí sin suy ra bán kính của chiếc đĩa là

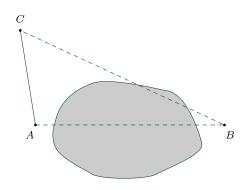
$$R = \frac{BC}{2\sin A} = \frac{16.3}{2\sin 52.6427^{\circ}} \approx 10.3 \text{ (cm)}.$$

Chon đáp án C

CÂU 25.

Để đo khoảng cách từ A đến B ngang qua một đầm lầy, người ta chọn điểm C, sau đó khoảng cách từ A đến C và các góc A, C. Tính khoảng cách từ A đến B biết AC=115 m, $\widehat{A}=98^{\circ},$ $\widehat{C}=52^{\circ}.$

- **A** 188,1 m.
- **B** 190,7 m.
- **C** 181,2 m.
- **D**193,6 m.



🗭 Lời giải.

Ta có $\widehat{B} = 180^{\circ} - \widehat{A} - \widehat{C} = 30^{\circ}$.

Áp dụng định lí sin ta có

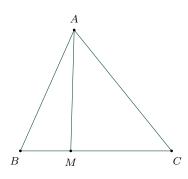
$$\frac{AB}{\sin C} = \frac{AC}{\sin B} \Rightarrow AB = \frac{AC\sin C}{\sin B} = \frac{115\sin 52^\circ}{\sin 30^\circ} \approx 181,2 \text{ (m)}.$$

Chọn đáp án \bigcirc

CÂU 26.

Cho tam giác ABC có $AB=8,\,AC=10,\,\widehat{A}=75^{\circ}.\,M$ là điểm thuộc cạnh BC sao cho CM=2BM. Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABM gần nhất với giá trị nào dưới đây?

- **A** 3,8.
- **B**)4,1.
- **(C)**3,6.
- **D**3,5.



🗩 Lời giải.

Áp dụng định lí côsin ta có

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC\cos A = 8^2 + 10^2 - 2 \cdot 8 \cdot 10\cos 75^\circ \Rightarrow BC \approx 11,072;$$

$$\cos B = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2AB \cdot BC} \approx 0,4888 \Rightarrow \widehat{B} \approx 60,4^\circ.$$

Ta có $CM = 2BM \Rightarrow BM = \frac{1}{3}BC = 3,69.$

Áp dụng định lí côsin ta có

$$AM^2 = AB^2 + BM^2 - 2AB \cdot BM \cos B = 8^2 + 3.69^2 - 2 \cdot 8 \cdot 3.69 \cdot 0.4888 \Rightarrow AM \approx 6.983.$$

Áp đụng định lí sin, suy ra bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABM là

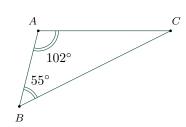
$$R = \frac{AM}{2\sin B} = \frac{6,983}{2\sin 60,4^{\circ}} \approx 4.$$

Chọn đáp án \fbox{B}

CÂU 27.

Tàu A rời cảng vào lúc 6h
00 và chuyển động với vận tốc 30 km/h. Tàu B rời cảng vào lúc 6h
30. Vào lúc 9h
30 tàu B gặp tàu A tại điểm C (hình vẽ). Giả sử hai tàu chuyển động thẳng và có vận tốc không đổi trong suốt quá trình di chuyển, tính vận tốc tàu B (kết quả làm tròn đến hàng phần mười).

- \triangle 42.5 km/h.
- **B**)44,8 km/h.
- \bigcirc 41,7 km/h.
- **D**45,4 km/h



🗩 Lời giải.

Khoảng cách từ A đến C là $30 \cdot 2.5 = 75$ km.

Áp dụng định lí sin ta có

$$\frac{AC}{\sin B} = \frac{BC}{\sin A} \Rightarrow BC = \frac{AC\sin A}{\sin B} = \frac{75\sin 102^\circ}{\sin 55^\circ}.$$

Suy ra vận tốc của tàu B là $v = \frac{BC}{2} = \frac{75 \sin 102^{\circ}}{2 \sin 55^{\circ}} \approx 44.8 \text{ km/h}.$

Chọn đáp án $\bigcirc B$

CÂU 28. Chọn công thức đúng trong các đáp án sau

$$\mathbf{B}S = \frac{1}{2}bc\sin A.$$

$$\mathbf{C}S = \frac{1}{2}ab\sin B.$$

P Lời giải.

Công thức đúng là $S = \frac{1}{2}bc\sin A$.

Chọn đáp án (B).....

CÂU 29. Cho $\triangle ABC$ với các cạnh AB = c, AC = b, BC = a. Gọi R, r, S lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp và diện tích của tam giác ABC. Trong các phát biểu sau, phát biểu nào sai?

$$\mathbf{B} R = \frac{a}{\sin A}.$$

$$\mathbf{C}S = \frac{1}{2}ab\sin C.$$

$$\mathbf{D}a^2 + b^2 - c^2 = 2ab\cos C.$$

🗩 Lời giải.

Theo định lý Sin trong tam giác, ta có $\frac{a}{\sin A} = 2R$. Nên mệnh đề sai là " $R = \frac{a}{\sin A}$ ".

CÂU 30. Cho tam giác ABC có AB = 4, AC = 3, $\widehat{BAC} = 30^{\circ}$. Khi đó diện tích tam giác ABC bằng **(A)**3. **(B)** $4\sqrt{3}$. (**c**) $6\sqrt{3}$.

🗩 Lời giải.

Ta có $S_{ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot AC \cdot \sin \widehat{BAC} = \frac{4 \cdot 3 \cdot \sin 30^{\circ}}{2} = 3.$

Chon đáp án (A)...

CÂU 31. Tìm chu vi tam giác ABC, biết AB = 6 và $2 \sin A = 3 \sin B = 4 \sin C$.

C
$$5\sqrt{26}$$
.

$$(\mathbf{D})10\sqrt{6}.$$

Lời giải.

Từ $2 \sin A = 3 \sin B = 4 \sin C$ suy ra 2BC = 3AC = 4AB.

Mà AB = 6 nên AC = 8, BC = 12. Chu vi tam giác bằng 26.

CÂU 32. Cho tam giác ABC có a=13 m, b=14 m, c=15 m. Tính diên tích S của tam giác ABC.

$$\triangle S = 84 \text{ m}^2.$$

$$\mathbf{B}S = 90 \text{ m}^2.$$

$$\bigcirc S = 76 \text{ m}^2.$$

$$\bigcirc S = 80 \text{ m}^2$$

Lời giải.

Ta có $p = \frac{a+b+c}{2} = 21$ và $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{21(21-13)(21-14)(21-15)} = 84$ m². Chọn đáp án \bigcirc

CÂU 33. Cho tam giác ABC. Biết AB = 3, AC = 4, BC > 5 và diện tích tam giác ABC bằng $3\sqrt{3}$. Số đo góc BACbằng

(A) 120°.

(**c**)135°.

(D)45°.

🗩 Lời giải.

Ta có $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin \widehat{BAC}$, suy ra

$$\sin \widehat{BAC} = \frac{2S_{\triangle ABC}}{AB \cdot AC} = \frac{2 \cdot 3\sqrt{3}}{3 \cdot 4} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \begin{bmatrix} \widehat{BAC} = 60^{\circ} \\ \widehat{BAC} = 120^{\circ} \end{bmatrix}$$

Mặt khác, ta có $\cos \widehat{BAC} = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \cdot AB \cdot AC} < \frac{9 + 16 - 25}{2 \cdot 3 \cdot A} = 0.$

 \hat{V} ây $\hat{B}\hat{A}\hat{C} = 120^{\circ}$.

Chọn đáp án (A).....

CÂU 34. Cho tam giác ABC có AB=2, AC=3, BC=4. Khi đó độ dài đường cao của tam giác ABC kẻ từ A bằng $\frac{3\sqrt{15}}{2}$. $\boxed{\textbf{C}} \frac{3\sqrt{15}}{8}$.

₽ Lời giải.

Ta có nữa chu vi $p = \frac{2+3+4}{2} = \frac{9}{2}$

Suy ra $S_{ABC} = \sqrt{p(p-AB)(p-AC)(p-BC)} = \sqrt{\frac{9}{2}\left(\frac{9}{2}-2\right)\left(\frac{9}{2}-3\right)\left(\frac{9}{2}-4\right)} = \frac{3\sqrt{15}}{4}.$

Suy ra độ dài đường cao kẻ từ A bằng $\frac{2S_{ABC}}{BC}=\frac{2\cdot\frac{3\sqrt{15}}{4}}{4}=\frac{3\sqrt{15}}{9}.$

Chon đáp án (C)...

CÂU 35. Cho tam giác ABC có $AB=9\mathrm{cm},\ AC=12\mathrm{cm}$ và $BC=15\mathrm{cm}.$ Khi đó đường trung tuyến BM của tam giác ABC có độ dài là

(**A**) 117cm.

- (**B**)18,82cm.
- (C)10,82cm.

🗩 Lời giải.

Ta có
$$m_a^2 = \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4} = \frac{2(12^2 + 9^2) - 15^2}{4} = \frac{225}{4} \Rightarrow m_a = 7.5.$$

CAU 36. Tam giác ABC có các trung tuyến $m_a = 10$, $m_b = 8$ và $m_c = 6$. Tính diện tích S của tam giác ABC.

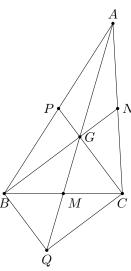
🗩 Lời giải.

Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm BC, CA, AB, G là trọng tâm tam giác ABC. Theo bài ra ta có AM = 10, BN = 8, CP = 6.

 Lấy Q đối xứng với G qua M thì BGCQ là hình bình hành và ta có BQ=CG= $\frac{2CP}{3} = 4$, $QG = 2GM = \frac{2AM}{3} = \frac{20}{3}$

Mà $BG=\frac{2BN}{3}=\frac{16}{3}$ nên $QG^2=BG^2+BQ^2$ hay $\triangle BGQ$ vuông tại B. Suy ra $S_{BGQ}=\frac{BG\cdot BQ}{2}=\frac{32}{3}.$

Mà $S_{BGQ} = S_{BGC} = \frac{1}{3} S_{ABC} \Rightarrow S_{ABC} = 32.$



CÂU 37. Cho tam giác ABC có chu vi bằng 26 cm và $\frac{\sin A}{2} = \frac{\sin B}{6} = \frac{\sin C}{5}$. Tính diện tích của tam giác ABC.

- **A** $2\sqrt{23} \text{ (cm}^2)$.
- **B**) $6\sqrt{13}$ (cm²).
- $(\mathbf{C})3\sqrt{39} \text{ (cm}^2).$
- (**D**) $5\sqrt{21}$ (cm²).

■ Lời aiải.

Ta có
$$\frac{\sin A}{2} = \frac{\sin B}{6} = \frac{\sin C}{5} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin B = 3\sin A \\ \sin C = \frac{5}{2}\sin A. \end{cases}$$

Mặt khác theo định lí sin trong tam giác ABC ta có $\frac{a}{\sin A} = \frac{B}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 3a \\ c = \frac{5}{2}a. \end{cases}$

Mà $a+b+c=26 \Leftrightarrow a+3a+\frac{5}{2}a=26 \Leftrightarrow \frac{13a}{2}=26 \Leftrightarrow a=4 \Rightarrow b=12$ và c=10.

Vậy diện tích tam giác ABC là

$$S_{\triangle ABC} = \sqrt{13(13-4)(13-12)(13-10)} = 3\sqrt{39} \text{ (cm}^2).$$

Chon đáp án (C).....

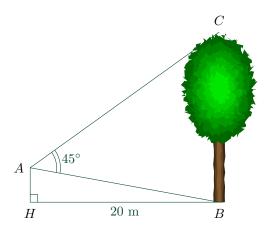
 \overrightarrow{CAU} 38. Cho tam giác ABC vuông tại C và $BC=6,\,CA=8.$ Tính bán kính đường tròn nội tiếp của tam giác ABC. (A) 2. **(B)** $2\sqrt{2}$. (**D**)4.

🗩 Lời giải.

Vì tam giác ABC vuông tại C nên $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = 10$ và $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BC = 24$.

Mặt khác $p = \frac{6+8+10}{2} = 12, S_{ABC} = p \cdot r \Rightarrow r = \frac{S_{ABC}}{p} = \frac{24}{12} = 2.$

CÂU 39. Từ vị trí A người ta quan sát một cây cao (Hình vẽ). Biết AH = 4 m, HB = 20 m, $BA\tilde{C} = 45^{\circ}$. Chiều cao của cây gần nhất với giá trị nào sau đây?



(A) 14 m.

(B)15 m.

(C)17 m.

(D)16 m.

🗩 Lời giải.

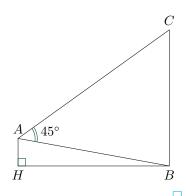
Ta có
$$AB = \sqrt{AH^2 + BH^2} = \sqrt{4^2 + 20^2} = 4\sqrt{26}$$
.
 $\tan \widehat{HAB} = \frac{HB}{HA} = \frac{20}{4} = 5 \Rightarrow \widehat{HAB} \approx 78,69^{\circ}$.

Do $AH \parallel BC$ nên $\widehat{ABC} = \widehat{HAB} \approx 78,69^{\circ}$.

 $\widehat{ACB} = 180^{\circ} - 45^{\circ} - \widehat{ABC} \approx 56{,}31^{\circ}.$

Áp dụng định lí hàm số sin trong tam giác ABC ta có

$$\frac{BC}{\sin 45^{\circ}} = \frac{AB}{\sin 56.31^{\circ}} = \frac{4\sqrt{26}}{\sin 56.31^{\circ}} \Rightarrow BC \approx 17.33.$$



CÂU 40. Một miếng giấy hình tam giác ABC diện tích S có I là trung điểm BC và O là trung điểm của AI. Cắt miếng giấy theo một đường thẳng qua O, đường thẳng này đi qua M, N lần lượt trên các cạnh AB, AC. Khi đó diện tích miếng giấy chứa điểm A có diện tích thuộc đoạn [mS; nS]. Tính $T = \frac{1}{m} + \frac{1}{n}$.

$$\mathbf{B}$$
 $T=12.$

$$\mathbf{C}$$
 $T=7$.

$$\mathbf{D}T = \frac{12}{7}.$$

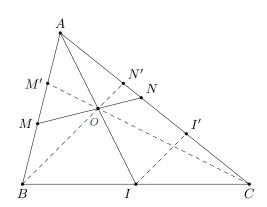
Ta có
$$\frac{S_{\triangle AMN}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{AM}{AB} \cdot \frac{AN}{AC}$$

Dễ thấy
$$S_{\triangle ABI} = S_{\triangle ACI} = \frac{1}{2} \cdot S_{\triangle ABC}$$
.

Mặt khác

$$\frac{S_{\triangle AMO}}{S_{\triangle ABI}} = \frac{AO}{AI} \cdot \frac{AM}{AB}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{AM}{AB} \Rightarrow \frac{2 \cdot S_{\triangle AMO}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{AM}{AB} \quad (1)$$



Tương tự $\frac{2 \cdot S_{\triangle ANO}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{AN}{AC}$ (2). Từ (1) và (2) suy ra

$$\frac{2 \cdot S_{\triangle AMN}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{AM}{AB} + \frac{AN}{AC}\right) \Leftrightarrow \frac{S_{\triangle AMN}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{AM}{AB} + \frac{AN}{AC}\right)$$

Theo bất đẳng thức Côsi suy ra

$$\frac{AM}{AB} + \frac{AN}{AC} \geq 2\sqrt{\frac{AM}{AB} \cdot \frac{AN}{AC}} \Leftrightarrow \left(\frac{AM}{AB} + \frac{AN}{AC}\right)^2 \geq 4 \cdot \frac{AM}{AB} \cdot \frac{AN}{AC}$$

Đặt $t = \frac{S_{\triangle AMN}}{S_{\triangle ABC}}$ điều kiện t > 0. Khi đó ta có $16t^2 \ge 4t \Leftrightarrow t \ge \frac{1}{4}$ suy ra $S_{\triangle AMN} \ge \frac{1}{4} \cdot S_{ABC}$.

Khi $M \equiv B$ suy ra $N \equiv N'$ khi đó $S_{\triangle AMN} = S_{\triangle ABN'}$.

Mà
$$S_{\triangle ABN'} = S_{\triangle ABO} + S_{\triangle AON'}.$$

Dễ thấy $S_{\triangle ABO} = \frac{1}{2} \cdot S_{\triangle ABI} = \frac{1}{4} \cdot S_{\triangle ABC}.$

Mặt khác từ I kẻ $I\overline{I'}$ // BN', khi đó AN' = N'I' = I'C nên

$$\frac{S_{\triangle AON'}}{S_{\triangle AIC}} = \frac{AO}{AI} \cdot \frac{AN'}{AC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \Rrightarrow S_{\triangle AON'} = \frac{1}{6} \cdot S_{\triangle AIC}$$

Do đó
$$S_{\triangle AON'}=\frac{1}{12}\cdot S_{\triangle ABC}$$
 nên $S_{\triangle ABN'}=\frac{1}{4}\cdot S_{\triangle ABC}+\frac{1}{12}\cdot S_{\triangle ABC}=\frac{1}{3}\cdot S_{\triangle ABC}.$ Khi $N\equiv C$ suy ra $M\equiv M'$ khi đó $S_{\triangle AMN}=S_{\triangle ACM'}.$ Chứng minh tương tự, ta có $S_{\triangle ACM'}=\frac{1}{3}\cdot S_{\triangle ABC}.$

Do đó khi MN đi thay đổi qua O suy ra

$$\frac{1}{4} \cdot S_{\triangle ABC} \leq S_{\triangle AMN} \leq \frac{1}{3} \cdot S_{\triangle ABC} \Leftrightarrow \frac{1}{4} \cdot S \leq S_{\triangle AMN} \leq \frac{1}{3} \cdot S$$

Do đó
$$m = \frac{1}{4}$$
 và $n = \frac{1}{3}$ nên $T = \frac{1}{m} + \frac{1}{n} = 4 + 3 = 7.$

Bài 1.	GTLG CỦA MỘT GÓC TỪ 0° ĐỀN 180°	1
A	Tóm tắt lí thuyết	1
B	Các dạng toán	2
	Dạng 1.Tính giá trị biểu thức lượng giác	2
	Dạng 2.Tìm các GTLG khi biết một GTLG của góc	2
	Câu hỏi trắc nghiệm	3
Bài 2.	HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC	5
A	Tóm tắt lý thuyết	5
B	Các dạng toán	5
	Dạng 1.Áp dụng định lý cos	5
	Dạng 2.Áp dụng định lý sin	6
	Dạng 3.Giải tam giác và ứng dụng	
	Dạng 4.Bài tập tổng hợp	
	Câu hỏi trắc nghiệm	9
LỜI GIẢI CHI TIẾT		14
Bài 1.	GTLG CỦA MỘT GÓC TỪ 0° ĐẾN 180°	14
A	Tóm tắt lí thuyết	14
B	Các dạng toán	
	Dạng 1.Tính giá trị biểu thức lượng giác	
	Dạng 2.Tìm các GTLG khi biết một GTLG của góc	
	Câu hỏi trắc nghiệm	19
Bài 2.	HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC	23
A	Tóm tắt lý thuyết	23
B	Các dạng toán	24
	Dạng 1.Áp dụng định lý cos	24
	Dạng 2.Áp dụng định lý sin	
	Dạng 3.Giải tam giác và ứng dụng	
_	🗁 Dạng 4.Bài tập tổng hợp	31
	Câu hỏi trắc nghiệm	34

