QUICK NOTE

Bài 15. GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. GIỚI HẠN HỮU HẠN CỦA DÃY SỐ

- **Định nghĩa 1:** Dãy số (u_n) có giới hạn là 0 khi n dần tới dương vô cực nếu $|u_n|$ có thể nhỏ hơn một số dương bé tuỳ ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi. Kí hiệu

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 0}$$

- **Định nghĩa 2:** Dãy số (u_n) có giới hạn là a nếu $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - a) = 0$. Kí hiệu

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = a}$$

- **Một vài giới hạn đặc biệt:** (*có thể xem như công thức*)

— $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$;

— $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^k} = 0$, với $k \in \mathbb{N}^*$;

— $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$;

— $\lim\limits_{n\to+\infty} C = C, \forall C \in \mathbb{R}$;

— $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{q^n} = 0$, với $|q| > 1$;

— $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$, nếu $|q| < 1$.

2. ĐỊNH LÝ VỀ GIỚI HẠN HỮU HẠN CỦA DÃY SỐ

- Nếu $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$ và $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = b$ thì ta có:

— $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n \pm v_n) = a + b$;

— $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n . v_n) = a.b$;

— $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{u_n}{v_n}\right) = \dfrac{a}{b}$, với $b \neq 0$;

— $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{u_n} = \sqrt{a}$, với $a \geq 0$;

— $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n| = |a|$;

— $\lim\limits_{n\to+\infty} (k.u_n) = k.a$ $(k \in \mathbb{R})$.

- Định lý "kẹp":

— Nếu $0 \leq |u_n| \leq v_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$ và $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ thì $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

— Nếu $w_n \leq u_n \leq v_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$ và $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = a$ thì $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$.

3. TỔNG CỦA CẤP SỐ NHÂN LÙI VÔ HẠN

- Cấp số nhân vô hạn (u_n) có công bội q thoả mãn $|q| < 1$ được gọi là *cấp số nhân lùi vô hạn*.
- Cho cấp số nhân lùi vô hạn (u_n), ta có tổng của cấp số nhân lùi vô hạn đó là

$$S = u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n + ... = \frac{u_1}{1-q}, (|q| < 1)$$

4. GIỚI HẠN VÔ CỰC CỦA DÃY SỐ

- **Định nghĩa 1:** Ta nói dãy số (u_n) có giới hạn $+\infty$ khi $n \to +\infty$, nếu u_n có thể lớn hơn một số dương bất kì, kể từ một số hạng nào đó trở đi. Kí hiệu

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty}$$

QUICK NOTE

Định nghĩa 2: Ta nói dãy số (u_n) có giới hạn $-\infty$ khi $n \to +\infty$, nếu $\lim\limits_{n \to +\infty} (-u_n) = +\infty$. Kí hiệu

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = -\infty}$$

Một số giới hạn đặc biệt:

a) $\lim\limits_{n \to +\infty} n^k = +\infty$, với $k \in \mathbb{N}^*$. b) $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$, với $q > 1$.

Một số quy tắc tính giới hạn vô cực:

① Quy tắc tìm giới hạn của tích $u_n \cdot v_n$

$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = L$	$\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \infty$	$\lim\limits_{n \to +\infty} [u_n \cdot v_n]$
$L > 0$	$+\infty$	$+\infty$
$L > 0$	$-\infty$	$-\infty$
$L < 0$	$+\infty$	$-\infty$
$L < 0$	$-\infty$	$+\infty$

② Quy tắc tìm giới hạn của thương $\dfrac{u_n}{v_n}$

$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = L$	$\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$	Dấu của v_n	$\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{u_n}{v_n}$
L	$\pm\infty$	Tùy ý	0
$L > 0$	0	$+$	$+\infty$
$L > 0$	0	$-$	$-\infty$
$L < 0$	0	$+$	$-\infty$
$L < 0$	0	$-$	$+\infty$

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

1 Khử vô định dạng $\frac{\infty}{\infty}$

Xét giới hạn: $\lim \dfrac{u_n}{v_n}$.

Phương pháp giải:

- Đặt nhân tử n^k có tính "quyết định ∞" ở tử và mẫu.
- Khử bỏ n^k, đưa giới hạn về dạng xác định được.
- Áp dụng định lý về giới hạn hữu hạn để tính kết quả.

Chú ý: Trong trường hợp hàm mũ, ta đặt đại lượng "quyết định ∞" có dạng a^n.

VÍ DỤ 1. Tính các giới hạn sau

a) $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{2n^2 + 3n - 1}{2 - 3n^2}$

b) $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{3n^3 + 2n^2 + n}{n^3 + 4}$

c) $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n^2 + 1}{2n^4 + n + 1}$

d) $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{n+1}{n^2 + 2n} - \dfrac{1}{n-1}\right)$

e) $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{2n^2 + 3n}{n+1} - \dfrac{2n^3 - 3}{n^2 - 1}\right)$

f) $\lim\limits_{n \to +\infty} n\left(1 - \dfrac{n^2 + 3}{n^2 - 1}\right)$

g) $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{(2n+3)(1-3n)}{2n^2 - n + 5}$

h) $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n^4 - 2n^2}{(n+1)(2+n)(n^2+1)}$

i) $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{(2n^4+1)(n+2)^2}{(2n+1)^2(2-n)^4}$

VÍ DỤ 2. Tính các giới hạn sau

a) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1+3^n}{4+3^n}$

b) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{4.3^n+7^{n+1}}{2.5^n+7^n}$

c) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{4^{n+1}+6^{n+2}}{5^n+8^n}$

VÍ DỤ 3. Tính các giới hạn sau

a) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2n-1}{\sqrt{4n^2+1}+3n}$

b) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sqrt{4n^2+3n-1}}{\sqrt{3n^2+1}-\sqrt{2n+1}}$

c) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sqrt{4n^4+1}}{\sqrt{n^4+4n+1}+n^2}$

d) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sqrt{n^2-4n}-\sqrt{4n^2+1}}{\sqrt{3n^2+1}+n}$

e) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sqrt[3]{8n^3+n^2-1}+n-4}{2n-3}$

f) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n^2+\sqrt[3]{1-n^6}}{\sqrt{n^4+1}+n^2}$

VÍ DỤ 4. Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1+2+\ldots+n}{n^2}$

b) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\ldots+\dfrac{1}{2^n}\right]$

c) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{2+4+8+\ldots+2^n}{3.2^n-1}\right)$

d) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{1.2}+\dfrac{1}{2.3}\ldots\dfrac{1}{n(n+1)}\right)$

VÍ DỤ 5. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1=10$ và $u_{n+1}=\dfrac{1}{5}u_n+3$, với mọi $n\geq 1$.

a) Chứng minh dãy (v_n) xác định bởi $v_n=u_n-\dfrac{15}{4}$ là một cấp số nhân.

b) Tính $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

2 Khử vô định dạng $\infty-\infty$

Xét các giới hạn dạng: $\boxed{\lim\left(\sqrt{u_n}-v_n\right)}$ hoặc $\boxed{\lim\left(\sqrt{u_n}-\sqrt{v_n}\right)}$.

Phương pháp giải:

- Nhân thêm lượng liên hợp
- Biến đổi biểu thức cần tính giới hạn về Dạng 1 (phân thức, đặt n^k)

Chú ý: Đôi khi, ta còn sử dụng liên hợp bậc ba để giải các bài toán tính giới hạn của những dãy số mà công thức tổng quát của nó có chứa ẩn trong dấu căn bậc ba.

$$\sqrt[3]{A}-B=\dfrac{\left(\sqrt[3]{A}-B\right)\left(\sqrt[3]{A}^2+\sqrt[3]{A}\cdot B+B^2\right)}{\sqrt[3]{A}^2+\sqrt[3]{A}\cdot B+B^2}=\dfrac{A-B^3}{\sqrt[3]{A}^2+\sqrt[3]{A}\cdot B+B^2}$$

VÍ DỤ 1. Tính các giới hạn sau

a) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n^2+2n}-n\right)$

b) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(2n-\sqrt{4n^2+n}\right)$

c) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2+2}\right)$

d) $\lim\limits_{n\to+\infty}n\left(\sqrt{n^2+2}-n\right)$

e) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n^2+2n}-n-1\right)$

f) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2n}-\sqrt{n^2+4}}$.

VÍ DỤ 2. Tính các giới hạn sau

a) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt[3]{n^3+2}-n\right)$

b) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt[3]{n^3+1}-\sqrt{n^2+1}\right)$

c) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt[3]{n^3+2}-\sqrt{n^2+n}\right)$

QUICK NOTE

QUICK NOTE

3 Một số quy tắc tính giới hạn vô cực

① Quy tắc tìm giới hạn của tích $u_n \cdot v_n$

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = L$	$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \infty$	$\lim\limits_{n\to+\infty} [u_n \cdot v_n]$
$L > 0$	$+\infty$	$+\infty$
$L > 0$	$-\infty$	$-\infty$
$L < 0$	$+\infty$	$-\infty$
$L < 0$	$-\infty$	$+\infty$

② Quy tắc tìm giới hạn của thương $\dfrac{u_n}{v_n}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = L$	$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	Dấu của v_n	$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n}$
L	$\pm\infty$	Tùy ý	0
$L > 0$	0	$+$	$+\infty$
$L > 0$	0	$-$	$-\infty$
$L < 0$	0	$+$	$-\infty$
$L < 0$	0	$-$	$+\infty$

VÍ DỤ 1. Tính các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(2n^3 + 2n - 1\right)$

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(n - 2n^3\right)$

c) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n^2 + 2n + 7}$

d) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\sqrt{n^2 - 3n} - \sqrt{n+2}\right)$

e) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 - \sqrt{1 + 3n^2}\right)$

f) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(3^n - 2 \cdot 5^n\right)$

VÍ DỤ 2. Tính các giới hạn sau

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2^n + 5^{n+1}}{1 + 5^n}$

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1 + 2.3^n - 7^n}{5^n - 2.6^n}$

c) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1 - 2.3^n + 7^n}{2^n(3^{n+1} - 5)}$

VÍ DỤ 3. Tính các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2n^4 + n^2 - 3}{3n^3 - 2n^2 + 1}$

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2n^3 + n + 4}{5n - n^2}$

c) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(3n-1)(n-2)}{2n-1}$

d) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2n+5}{\sqrt{n^2+1} - n}$

e) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2n+5}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}$

f) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(3n-1)^4(n-2)}{(1-2n)^2}$

4 Tổng của cấp số nhân lùi vô hạn

- Cấp số nhân vô hạn (u_n) có công bội q thoả mãn $|q| < 1$ được gọi là *cấp số nhân lùi vô hạn.*
- Cho cấp số nhân lùi vô hạn (u_n), Xét $S = u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n + ...$ Khi đó, ta có công thức tính

$$\boxed{S = \dfrac{u_1}{1-q}}$$

VÍ DỤ 1. Tính các tổng sau:

a) $S = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3^2} + ... + \dfrac{1}{3^n} + ...$

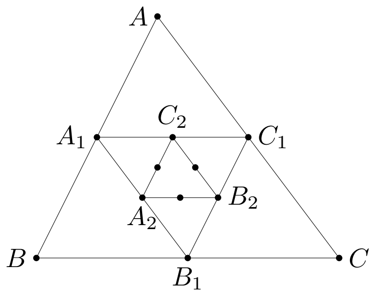
b) $S = 16 - 8 + 4 - 2 + ...$

VÍ DỤ 2. Hãy biểu diễn các số thập phân vô hạn tuần hoàn sau dưới dạng phân số.

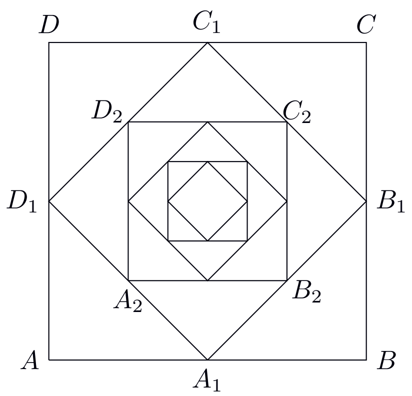
a) $A = 0,353535....$ b) $B = 5,231231....$

VÍ DỤ 3. Một bệnh nhân hàng ngày phải uống một viên thuốc 150 mg. Sau ngày đầu, trước mỗi lần uống, hàm lượng thuốc cũ trong cơ thể vẫn còn 5%. Tính lượng thuốc có trong cơ thể sau khi uống viên thuốc của ngày thứ 5 . Ước tính lượng thuốc trong cơ thể nếu bệnh nhân sử dụng thuốc trong một thời gian dài.

VÍ DỤ 4.
Tam giác mà ba đỉnh của nó là ba trung điểm ba cạnh của tam giác ABC được gọi là *tam giác trung bình* của tam giác ABC. Ta xây dựng dãy các tam giác $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$, $A_3B_3C_3$, $\ldots$ sao cho $A_1B_1C_1$ là một tam giác giác đều cạnh bằng 3 và với mỗi số nguyên dương $n \geq 2$, tam giác $A_nB_nC_n$ là tam giác trung bình của tam giác $A_{n-1}B_{n-1}C_{n-1}$. Với mỗi số nguyên dương n, kí hiệu S_n tương ứng là diện tích hình tròn ngoại tiếp tam giác $A_nB_nC_n$. Tính tổng $S = S_1 + S_2 + \cdots + S_n + \cdots$.



VÍ DỤ 5. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh bằng 2. Hình vuông $A_1B_1C_1D_1$ có các đỉnh là trung điểm của các cạnh của hình vuông $ABCD$, hình vuông $A_2B_2C_2D_2$ có các đỉnh là trung điểm của các cạnh của hình vuông $A_1B_1C_1D_1$, hình vuông $A_3B_3C_3D_3$ có các đỉnh là trung điểm của các cạnh của hình vuông $A_2B_2C_2D_2$,..., hình vuông $A_nB_nC_nD_n$ có các đỉnh là trung điểm của các cạnh của hình vuông $A_{n-1}B_{n-1}C_{n-1}D_{n-1}$,... (*quá trình chia nhỏ này được lặp lại vô hạn*)



Gọi S_1, S_2, S_3,...,S_n,... lần lượt là diện tích hình vuông $A_1B_1C_1D_1$, $A_2B_2C_2D_2$, $A_3B_3C_3D_3$,..., $A_nB_nC_nD_n$,.... Tính tổng $S_1 + S_2 + S_3 + ... + S_n + ...$

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

BÀI 1. Cho hai dãy số $(u_n), (v_n)$ với $u_n = 3 + \dfrac{1}{n}; v_n = 5 - \dfrac{2}{n^2}$. Tính các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + v_n)$, $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n - v_n)$, $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n \cdot v_n)$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n}$.

BÀI 2. Tính các giới hạn sau

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3n+2}{2n+3}$. b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{4n^2-1}{2n^2+n}$.

c) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sqrt{n^2+2n}-3}{n+2}$. d) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sqrt{n^2+2n}-n-1}{\sqrt{n^2+n}+n}$.

BÀI 3. Tính các giới hạn sau

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{7.5^n - 2.7^n}{5^n - 5.7^n}$. b) $\lim \dfrac{4^{n+1} + 6^{n+2}}{5^n + 8^n}$.

BÀI 4. Tính các giới hạn sau

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\sqrt{n^2+2n} - n\right)$. b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\sqrt{n^3+2n} - n^2\right)$.

c) $\lim(\sqrt{n^2+3n+2} - n + 1)$. d) $\lim(\sqrt{n^2+2n+3} - 1 + n)$.

QUICK NOTE

QUICK NOTE

BÀI 5. Tính các giới hạn sau

a) $\lim \dfrac{\sin 10n + \cos 10n}{n^2+1}$.

b) $\lim \dfrac{1-\sin n\pi}{n+1}$.

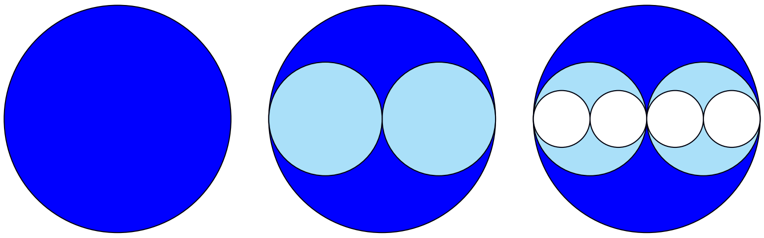
BÀI 6. Tính tổng của các cấp số nhân lùi vô hạn sau

a) $-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{8}+\cdots+\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n+\cdots$.

b) $\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{16}+\dfrac{1}{64}+\cdots+\left(\dfrac{1}{4}\right)^n+\cdots$.

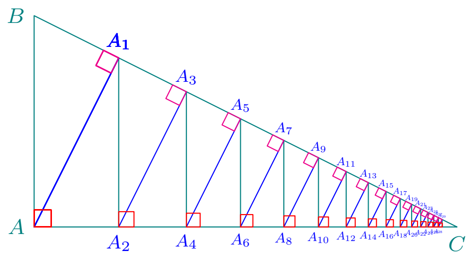
BÀI 7. Viết số thập phân vô hạn tuần hoàn 0,444... dưới dạng một phân số.

BÀI 8. Từ tờ giấy, cắt một hình tròn bán kính R (cm) như Hình a. Tiếp theo, cắt hai hình tròn bán kính $\dfrac{R}{2}$ rồi chồng lên hình tròn đầu tiên như Hình b. Tiếp theo, cắt bốn hình tròn bán kính $\dfrac{R}{4}$ rồi chồng lên các hình trước như Hình c. Cứ thế tiếp tục mãi. Tính tổng diện tích của các hình tròn.



a) b) c)

BÀI 9. Cho tam giác vuông ABC vuông tại A, có $AB = h$ và góc B bằng α (Hình vẽ bên). Từ A kẻ $AA_1 \perp BC$, từ A_1 kẻ $A_1A_2 \perp AC$, sau đó lại kẻ $A_2A_3 \perp BC$. Tiếp tục quá trình trên, ta được đường gấp khúc vô hạn $AA_1A_2A_3\ldots$ Tính độ dài đường gấp khúc này theo h và α.



D. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Phần I. Mỗi câu hỏi học sinh chọn một trong bốn phương án A, B, C, D.

CÂU 1. Trong các mệnh đề dưới đây, mệnh đề nào **sai**?

(A) Nếu $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ và $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = a > 0$ thì $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_nv_n) = +\infty$.

(B) Nếu $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \neq 0$ và $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \pm\infty$ thì $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{u_n}{v_n}\right) = 0$.

(C) Nếu $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a > 0$ và $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ thì $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{u_n}{v_n}\right) = +\infty$.

(D) Nếu $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a < 0$ và $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ và $v_n > 0$ với mọi n thì $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{u_n}{v_n}\right) = -\infty$.

CÂU 2. Cho dãy số (u_n) có $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 3$, dãy số (v_n) có $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 5$. Khi đó $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_nv_n)$ bằng

(A) 15. (B) 8. (C) 5. (D) 3.

CÂU 3. Cho $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -3$, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 2$. Khi đó $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n - v_n)$ bằng

(A) -5. (B) -1. (C) 2. (D) 0.

CÂU 4. Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n+3) = 0$. Giá trị $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ bằng

(A) 3. (B) -3. (C) 2. (D) 0.

CÂU 5. Khẳng định nào sau đây là đúng?

(A) Ta nói dãy số (u_n) có giới hạn là số a khi $n \to +\infty$, nếu $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n - a) = 0$.

(B) Ta nói dãy số (u_n) có giới hạn là 0 khi n dần tới vô cực, nếu $|u_n|$ có thể lớn hơn một số dương tùy ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi.

(C) Ta nói dãy số (u_n) có giới hạn là $+\infty$ khi $n \to +\infty$, nếu u_n có thể nhỏ hơn một số dương bất kì, kể từ một số hạng nào đó trở đi.

QUICK NOTE

D Ta nói dãy số (u_n) có giới hạn là $-\infty$ khi $n \to +\infty$, nếu u_n có thể lớn hơn một số dương bất kì, kể từ một số hạng nào đó trở đi.

CÂU 6. Cho các dãy số (u_n), (v_n) và $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$. Giá trị $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ bằng

A 1. **B** 0. **C** $-\infty$. **D** $+\infty$.

CÂU 7. Trong các khẳng định dưới đây, có bao nhiêu khẳng định đúng?

(I) $\lim\limits_{n\to+\infty} n^k = +\infty$ với k nguyên dương.

(II) $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$ nếu $|q| < 1$.

(III) $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$ nếu $q > 1$.

A 0. **B** 1. **C** 3. **D** 2.

CÂU 8. Phát biểu nào sau đây là **sai**?

A $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = c$ với $u_n = c$ là hằng số. **B** $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$ với $|q| > 1$.

C $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$. **D** $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^k} = 0$ với $k > 1$.

CÂU 9. Dãy số nào sau đây có giới hạn bằng 0?

A $\left(\dfrac{4}{e}\right)^n$. **B** $\left(\dfrac{5}{3}\right)^n$. **C** $\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$. **D** $\left(-\dfrac{5}{3}\right)^n$.

CÂU 10. Giá trị $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^2}$ bằng

A $+\infty$. **B** 1. **C** $-\infty$. **D** 0.

CÂU 11. Dãy số nào có giới hạn khác 0?

A $\left(\dfrac{4}{5}\right)^n$. **B** $2 + \left(\dfrac{3}{5}\right)^n$. **C** $\dfrac{1}{2n}$. **D** $\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

CÂU 12. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

A $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n = +\infty$. **B** $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-\dfrac{5}{n^3}\right)^n = -\infty$.

C $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$. **D** $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{4}{3}\right)^n = 0$.

Phần II. Trong mỗi ý a), b), c) và d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.

CÂU 1. Cho hai dãy số (u_n), (v_n) với $u_n = \sqrt{9n^2 + 2n} - 3n$, $v_n = -2 + 5n$.

Mệnh đề	Đ	S
a) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{v_n} = 0$.		
b) $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$.		

Mệnh đề	Đ	S
c) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n + 3n}{v_n} = \dfrac{3}{5}$.		
d) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.		

CÂU 2. Cho hai dãy số (u_n), (v_n) với $u_n = 4 \cdot 3^n - 7^{n+1}$, $v_n = 7^n$.

Mệnh đề	Đ	S
a) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{v_n} = 0$.		
b) $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.		
c) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n - v_n}{3u_n + 2v_n} = \dfrac{8}{19}$.		
d) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.		

CÂU 3. Cho hai dãy số (u_n) và (v_n) có $u_n = \dfrac{1}{n+1}$, $v_n = \dfrac{3}{n+3}$.

QUICK NOTE

Mệnh đề	Đ	S
a) Ta nói dãy số (u_n) có giới hạn là 0 khi n dần tới vô cực, vì $\lvert u_n \rvert$ có thể nhỏ hơn một số dương tùy ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi.		
b) $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n+1)=1$.		
c) $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n-v_n)=0$.		
d) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{u_n}{v_n}=\dfrac{1}{3}$.		

CÂU 4. Cho các dãy số (u_n), (v_n) có $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=-5$, $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=+\infty$.

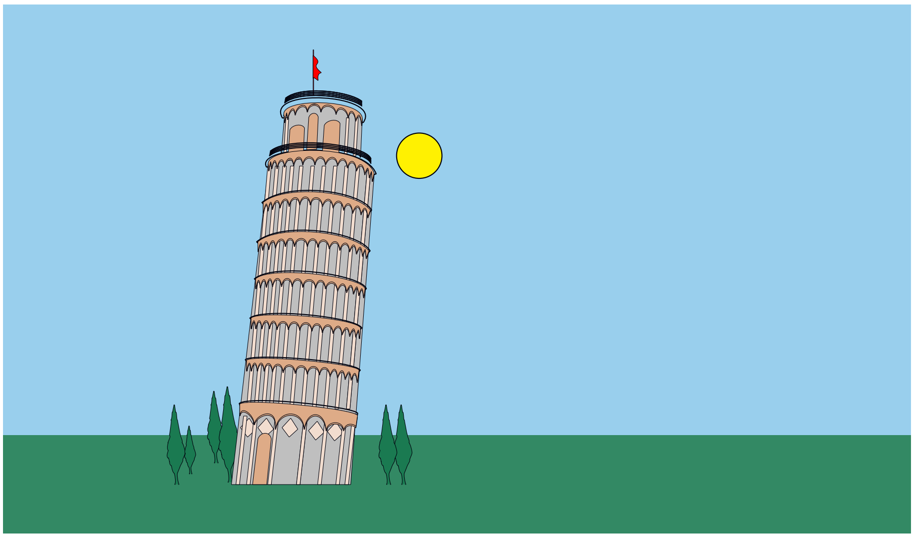
Mệnh đề	Đ	S
a) Ta nói dãy số (u_n) có giới hạn là -5 khi n dần tới vô cực, nếu $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n-5)=0$.		
b) $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n+7)=2$.		
c) $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n\cdot v_n)=+\infty$.		
d) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{u_n}{v_n}=0$.		

Phần III. Học sinh điền kết quả vào ô trống.

CÂU 1. Tính tích các giá trị nguyên của a thỏa mãn $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n^2-8n}-n+a^2\right)=0$.

KQ:

CÂU 2. Từ độ cao 55,8 m của tháp nghiêng Pisa nước Ý, người ta thả một quả bóng cao su chạm xuống đất (như hình vẽ). Giả sử mỗi lần chạm đất quả bóng lại nảy lên độ cao bằng $\dfrac{1}{10}$ độ cao mà quả bóng đạt được trước đó. Tính tổng độ dài quãng đường di chuyển của quả bóng tính từ lúc thả ban đầu cho đến khi quả bóng đó dừng hẳn trên mặt đất.



KQ:

CÂU 3. Một bệnh nhân hàng ngày phải uống một viên thuốc 150 mg. Sau ngày đầu, trước mỗi lần uống, hàm lượng thuốc cũ trong cơ thể vẫn còn 5%. Ước tính lượng thuốc trong cơ thể nếu bệnh nhân sử dụng thuốc trong một thời gian dài. (Kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).

KQ:

CÂU 4. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số a thuộc khoảng $(-10;10)$ để $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[5n-3(a^2-2)n\right.$ $-\infty$?

KQ: | | | | |

CÂU 5. Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{9}\left[u_n + 2\sqrt{4u_n+1}+2\right], \ \forall n \geq 1 \end{cases}$. Tính $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

KQ: | | | | |

CÂU 6. Một khinh khí cầu bay cao 300 m ở phút đầu tiên sau khi được thả. Mỗi phút tiếp theo, nó bay cao thêm độ cao bằng $\dfrac{2}{5}$ độ cao bay được ở phút trước đó. Hỏi khinh khí cầu có thể đạt độ cao tối đa là bao nhiêu?

KQ: | | | | |

QUICK NOTE

QUICK NOTE

Bài 16. GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. GIỚI HẠN HỮU HẠN CỦA HÀM SỐ TẠI MỘT ĐIỂM

Định nghĩa: Cho khoảng K chứa điểm x_0 và hàm số $y=f(x)$ xác định trên K hoặc trên $K\setminus\{x_0\}$. Ta nói hàm số $y=f(x)$ có giới hạn là số L khi x dần tới x_0 nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_n\in K\setminus\{x_0\}$ và $x_n\to x_0$, ta có $f(x_n)\to L$. Kí hiệu:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=L \text{ hay } f(x)\to L \text{ khi } x\to x_0$$

Nhận xét: $\lim\limits_{x\to x_0} x=x_0$; $\lim\limits_{x\to x_0} c=c$ với c là hằng số.

Định lí về giới hạn hữu hạn:

a) Giả sử $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L$ và $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=M$. Khi đó:

① $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]=L+M$; ② $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)-g(x)]=L-M$;

③ $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)]=L\cdot M$; ④ $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{L}{M}$ (nếu $M\neq 0$).

b) Nếu $f(x)\geqslant 0$ và $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L$, thì $L\geqslant 0$ và $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt{f(x)}=\sqrt{L}$.

Giới hạn một bên:

— Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $(x_0;b)$. Số L được gọi là giới hạn bên phải của hàm số $y=f(x)$ khi $x\to x_0$ nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_0<x_n<b$ và $x_n\to x_0$, ta có $f(x_n)\to L$.
Kí hiệu:

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x)=L.$$

— Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $(a;x_0)$. Số L được gọi là giới hạn bên trái của hàm số $y=f(x)$ khi $x\to x_0$ nếu với dãy số (x_n) bất kì, $a<x_n<x_0$ và $x_n\to x_0$, ta có $f(x_n)\to L$.
Kí hiệu:

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x)=L.$$

Điều kiện để tồn tại giới hạn:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=L \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0^+} f(x)=\lim_{x\to x_0^-} f(x)=L$$

2. GIỚI HẠN HỮU HẠN CỦA HÀM SỐ TẠI VÔ CỰC

Định nghĩa:

— Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $(a;+\infty)$. Ta nói hàm số $y=f(x)$ có giới hạn là số L khi $x\to+\infty$ nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_n>a$ và $x_n\to+\infty$, ta có $f(x_n)\to L$. Kí hiệu:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=L.$$

— Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $(-\infty;a)$. Ta nói hàm số $y=f(x)$ có giới hạn là số L khi $x\to-\infty$ nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_n<a$ và $x_n\to-\infty$, ta có $f(x_n)\to L$. Kí hiệu:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=L.$$

Chú ý:

QUICK NOTE

— Với c, k là hằng số và k nguyên dương, ta luôn có:

① $\lim\limits_{x\to+\infty} c = c$ ② $\lim\limits_{x\to-\infty} c = c$

③ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{c}{x^k} = 0$ ④ $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{c}{x^k} = 0$.

— Định lí về giới hạn hữu hạn của hàm số khi $x \to x_0$ vẫn còn đúng khi $x \to +\infty$ hoặc $x \to -\infty$.

3. GIỚI HẠN VÔ CỰC CỦA HÀM SỐ

Định nghĩa : Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $(a; +\infty)$. Ta nói hàm số $y = f(x)$ có giới hạn là $-\infty$ khi $x \to +\infty$ nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_n > a$ và $x_n \to +\infty$, ta có $f(x_n) \to -\infty$. Kí hiệu: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

Nhận xét: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} (-f(x)) = -\infty$.

Một vài giới hạn đặc biệt:

— $\lim\limits_{x\to+\infty} x^k = +\infty$, với k nguyên dương.

— $\lim\limits_{x\to-\infty} x^k = \begin{cases} +\infty \text{ nếu } k \text{ chẵn} \\ -\infty \text{ nếu } k \text{ lẻ.} \end{cases}$

Một vài quy tắc về giới hạn vô cực:

- Quy tắc tìm giới hạn của tích $f(x) \cdot g(x)$

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$	$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$	$\lim\limits_{x\to x_0} [f(x) \cdot g(x)]$
$L > 0$	$+\infty$	$+\infty$
$L > 0$	$-\infty$	$-\infty$
$L < 0$	$+\infty$	$-\infty$
$L < 0$	$-\infty$	$+\infty$

- Quy tắc tìm giới hạn của thương $\dfrac{f(x)}{g(x)}$

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$	$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$	Dấu của $g(x)$	$\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$
L	$\pm\infty$	Tùy ý	0
$L > 0$	0	$+$	$+\infty$
$L > 0$	0	$-$	$-\infty$
$L < 0$	0	$+$	$-\infty$
$L < 0$	0	$-$	$+\infty$

Các quy tắc trên vẫn đúng khi thay $x \to x_0$ bởi $x \to x_0^+$, $x \to x_0^-$ hoặc $x \to +\infty$, $x \to -\infty$.

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

1 Giới hạn của hàm số khi $x \to x_0$. Khử dạng vô định $\dfrac{0}{0}$

Xét giới hạn $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$.

Phương pháp giải: Thay x_0 vào $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ để kiểm tra, sẽ có một trong các trường hợp:

QUICK NOTE

① Tử số $f(x_0)=a$ và mẫu số $g(x_0)=b\neq 0$, ta suy ra luôn kết quả

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x_0)}{g(x_0)}=\frac{a}{b}.$$

② Cả tử số và mẫu số đều bằng 0 hay $f(x_0)=g(x_0)=0$, ta xem đây là dạng vô định $\frac{0}{0}$. Khử dạng vô định này bằng cách phân tích nhân tử $x-x_0$.
Phân tích $f(x)=(x-x_0)\cdot f_1(x)$ và $g(x)=(x-x_0)\cdot g_1(x)$. Khi đó

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{(x-x_0)f_1(x)}{(x-x_0)g_1(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f_1(x)}{g_1(x)}\quad(1)$$

Ta tiếp tục tính giới hạn (1).

③ Tử số $f(x_0)\neq 0$ và mẫu số $g(x_0)=0$. Ta áp dụng các định lý liên quan đến giới hạn vô cực để tìm kết quả.

Một số cách phân tích nhân tử thường dùng:

- *Nếu $f(x)=ax^2+bx+c$ có hai nghiệm x_1, x_2 thì $f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$.*
- *Nếu $f(x)$ là một đa thức bậc ba, bậc bốn,...ta có thể dùng phương pháp chia đa thức.*
- *Nếu $f(x)$ là biểu thức chứa căn, ta dùng cách nhân lượng liên hợp.*

VÍ DỤ 1. Tính các giới hạn sau

a) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+2x}{4}$.

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+4}+1}{x^2+2}$.

VÍ DỤ 2. Tính các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{x^2+2x-8}{x^2+4x}$.

b) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\dfrac{2x^2-5x+2}{1-2x}$.

c) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-5x+2}{x^2+x-6}$.

d) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^3-5x^2+2}{3x^2-5x+2}$.

e) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3+3x^2-9x-2}{x^3-x-6}$.

f) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{4x^2-3x-7}{x^3+1}$.

VÍ DỤ 3. Tính các giới hạn sau

a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{2x-2}$.

b) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{\sqrt{x+2}-2}$.

c) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2-\sqrt{5-x^2}}{x+1}$.

d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{4x+1}}{x^2+3x}$.

e) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{\sqrt{x^2+3x-1}-3}$.

f) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+1}{\sqrt{x+5}-2}$.

2 Giới hạn của hàm số khi $x\to\pm\infty$. Khử dạng vô định $\frac{\infty}{\infty};\infty-\infty;0\cdot\infty$

Phương pháp giải: Tương tự như bài toán giới hạn dãy số

VÍ DỤ 1. Tính các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{5x-2}{3x+1}$.

b) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2x^3-x+10}{x^3+3x-3}$.

c) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^4-x^3+3}{2x^6-7}$.

d) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{1}{x}\left(\dfrac{2x^2}{x+1}-1\right)$.

e) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^3-3x}{(x+1)(2x^2-3)}$.

f) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{(x+1)^2(2x+1)^2}{(2x^3+1)(x-2)^3}$.

VÍ DỤ 2. Tính các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-x+5}}{5x-1}$.

b) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+x}+2x}{2x+3}$.

c) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{2x-3}{\sqrt{4x^2+2x}+x}$.

d) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{2x^2-7x+1}}{3|x|-7}$.
e) $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt[3]{\dfrac{x^2+2x}{8x^2-x+5}}$.
f) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x+\sqrt{x^2+2}}{\sqrt[3]{8x^3+x^2+1}}$.

VÍ DỤ 3. Tính các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)$.
b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2+2x}\right)$. $\lim\limits_{x\to-\infty}x\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)$.

VÍ DỤ 4. Tính các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+x}-x\right)$.
b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+x}-\sqrt{x^2+x}\right)$.

VÍ DỤ 5. Tính giới hạn của các hàm số sau:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x^5-x^4+4x^3-3\right)$.
b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2x^5-x^4+4x^3-3\right)$.
c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-x^3-x^2+4x+2\right)$.
d) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-x^3-x^2+4x+2\right)$.
e) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}+x\right)$.
f) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2x-\sqrt{x^2+x}\right)$.

VÍ DỤ 6. Tính các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{5x^2-2x+3}{x+1}$.
b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^3-x+10}{x^2+3x-3}$.
c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x^4+5x^2+7}{x^3-15x}$.
d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+\sqrt{x+1}}{2x-7}$.
e) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+3}{\sqrt{x^2+x}-x}$.
f) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x+3}{\sqrt{x^2+x}+x}$.

3 Giới hạn một bên. Sự tồn tại giới hạn

Phương pháp tính $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$ và $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$ hoàn toàn tương tự như bài toán tính $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$.

Lưu ý: $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=L$ *khi và chỉ khi* $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=L$.

VÍ DỤ 1. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}-x^2 & \text{khi } x<1\\ x & \text{khi } x\ge 1.\end{cases}$ Tìm các giới hạn $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)$, $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)$, $\lim\limits_{x\to1}f(x)$ (nếu có).

VÍ DỤ 2. Tính giới hạn của các hàm số sau:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3}{x^2-2x+6}$;
b) $\lim\limits_{x\to3^+}\dfrac{-x^2+5}{x-3}$;
c) $\lim\limits_{x\to3^-}\dfrac{2x^2+\sqrt{3-x}}{x-3}$;
d) $\lim\limits_{x\to-2^+}\dfrac{|x^2-4|}{x+2}$.

4 Vận dụng thực tiễn

VÍ DỤ 1. Một công ty sản xuất máy tính đã xác định được rằng, tính trung bình một nhân viên có thể lắp ráp được $N(t)=\dfrac{50t}{t+4}$ $(t\ge0)$ bộ phận mỗi ngày sau t ngày đào tạo. Tính $\lim\limits_{t\to+\infty}N(t)$ và cho biết ý nghĩa của kết quả.

VÍ DỤ 2. Một cái hồ đang chứa 200 m^3 nước mặn với nồng độ muối 10 $\mathrm{kg/m}^3$. Người ta ngọt hóa nước trong hồ bằng cách bơm nước ngọt vào hồ với vận tốc 2 m^3/phút.

a) Viết biểu thức $C(t)$ biểu thị nồng độ muối trong hồ sau t phút kể từ khi bắt đầu bơm.

b) Tìm giới hạn $\lim\limits_{t\to+\infty}C(t)$ và giải thích ý nghĩa.

VÍ DỤ 3. Trong Thuyết tương đối của Einstein, khối lượng của vật chuyển động với vận tốc v cho bởi công thức

$$m=\frac{m_0}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}.$$

QUICK NOTE

QUICK NOTE

trong đó m_0 là khối lượng của vật khi nó đứng yên, c là vận tốc ánh sáng. Chuyện gì xảy ra với khối lượng của vật khi vận tốc của vật gần với vận tốc ánh sáng?

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

BÀI 1. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}0 & \text{khi } x<0\\ 1 & \text{khi } x>0.\end{cases}$

a) Tìm các giới hạn $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ và $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$.

b) Có tồn tại $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$?

BÀI 2. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}1-2x & \text{khi } x\le -1\\ x^2+2 & \text{khi } x>-1.\end{cases}$

Tìm các giới hạn $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)$ và $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)$ và $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$ (nếu có).

BÀI 3. Tính các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{4x^2-x-5}{7x^2+5x-2}$.

b) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{4-x^2}{x+2}$.

c) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+2x-15}{x-3}$.

d) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-5x+2}{x^2-4}$.

BÀI 4. Tính các giới hạn sau

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2x}-1}{2x}$.

b) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-\sqrt{3x-2}}{x^2-4}$.

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{2x^3-3x^2}$.

d) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{2x+7}-x-2}{x^3-4x+3}$.

BÀI 5. Tính các giới hạn một bên:

a) $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x-2}{x-1}$.

b) $\lim\limits_{x\to 4^-}\dfrac{x^2-x+1}{4-x}$.

BÀI 6. Cho hàm số $g(x)=\dfrac{x^2-5x+6}{|x-2|}$. Tìm $\lim\limits_{x\to 2^+} g(x)$ và $\lim\limits_{x\to 2^-} g(x)$.

BÀI 7. Tính các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{1-2x}{\sqrt{x^2+1}}$.

b) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^2+x+2}-x\right)$.

BÀI 8. Trong hồ có chứa 6000 lít nước ngọt. Người ta bơm nước biển có nồng độ muối là 30 gam/lít vào hồ với tốc độ 15 lít/phút.

a) Chứng tỏ rằng nồng độ muối của nước trong hồ sau t phút kể từ khi bắt đầu bơm là $C(t)=\dfrac{30t}{400+t}$ (gam/lít).

b) Nồng độ muối trong hồ như thế nào nếu $t\to +\infty$.

BÀI 9. Cho hàm số $H(t)=\begin{cases}0 & \text{nếu } t<0\\ 1 & \text{nếu } t\ge 0\end{cases}$ (hàm Heaviside, thường được dùng để mô tả việc chuyển trạng thái tắt/mở của dòng điện tại thời điểm $t=0$). Tính $\lim\limits_{t\to 0^+} H(t)$ và $\lim\limits_{t\to 0^-} H(t)$.

BÀI 10. Chi phí (đơn vị: nghìn đồng) để sản xuất x sản phẩm của một công ty được xác định bởi hàm số $C(x)=50000+105x$.

a) Tính chi phí trung bình $\overline{C}(x)$ để sản xuất một sản phẩm.

b) Tính $\lim\limits_{x\to +\infty}\overline{C}(x)$ và cho biết ý nghĩa của kết quả.

BÀI 11. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{ax^2+3ax-4a}{x-1} & \text{khi } x<1\\ 2bx+1 & \text{khi } x\ge 1\end{cases}$. Biết rằng a,b là các số thực thỏa mãn hàm số $f(x)$ có giới hạn tại $x=1$.

a) Tìm mối quan hệ giữa a và b.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=a^2+b^2$.

QUICK NOTE

D. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Phần I. Mỗi câu hỏi học sinh chọn một trong bốn phương án A, B, C, D.

CÂU 1. Kết quả của giới hạn $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x^k}$ (với k nguyên dương) là

Ⓐ $+\infty$. Ⓑ $-\infty$. Ⓒ x. Ⓓ 0 .

CÂU 2. Giới hạn nào dưới đây có kết quả bằng 3?

Ⓐ $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{3x}{x-2}$. Ⓑ $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{-3x}{2-x}$. Ⓒ $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{-3x}{x-2}$. Ⓓ $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{3x^2}{x-2}$.

CÂU 3. Giá trị của $I=\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{x^2-4x+7}{x+1}\right)$

Ⓐ $I=-4$. Ⓑ $I=5$. Ⓒ $I=4$. Ⓓ $I=2$.

CÂU 4. Giá trị của $\lim\limits_{x\to-4}\dfrac{x^2+3x-4}{x^2+4x}$ bằng

Ⓐ 1 . Ⓑ -1 . Ⓒ $\dfrac{5}{4}$. Ⓓ $-\dfrac{5}{4}$.

CÂU 5. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}x^2-1 & \text{khi } x\ge1\\ 2x+1 & \text{khi } x<1\end{cases}$. Mệnh đề nào sau đây là **đúng**?

Ⓐ $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=0$. Ⓑ $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=3$. Ⓒ $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=-1$. Ⓓ $\lim\limits_{x\to1}f(x)=0$.

CÂU 6. Giá trị của $\lim\limits_{x\to3^+}\dfrac{2x+7}{x-3}$ là

Ⓐ $+\infty$. Ⓑ $-\infty$. Ⓒ 0 . Ⓓ 2.

CÂU 7. Giá trị của $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-3x}{2x+3}$

Ⓐ -3 . Ⓑ $\dfrac{1}{2}$. Ⓒ $-\dfrac{3}{2}$. Ⓓ $-\infty$.

CÂU 8. Giá trị của $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{x^2+1}$ bằng

Ⓐ $-\infty$. Ⓑ 1. Ⓒ $+\infty$. Ⓓ 0 .

CÂU 9. Giá trị đúng của $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^4+7}{x^4+1}$ là

Ⓐ -1. Ⓑ 1. Ⓒ 7. Ⓓ $+\infty$.

CÂU 10. Giá trị của $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x-1}{\sqrt{x^2+1}-1}$ bằng

Ⓐ 0. Ⓑ -2. Ⓒ $-\infty$. Ⓓ 2.

CÂU 11. Giá trị của $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x^2-x+1}{x^2-1}$ bằng

Ⓐ $-\infty$. Ⓑ -1. Ⓒ 1. Ⓓ $+\infty$.

CÂU 12. Chọn kết quả đúng của $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{2}{x^3}\right)$

Ⓐ $-\infty$. Ⓑ 0. Ⓒ $+\infty$. Ⓓ Không tồn tại.

Phần II. Trong mỗi ý a), b), c) và d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.

CÂU 1. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}x-2 & \text{khi } x<-1\\ \sqrt{x^2+1} & \text{khi } x\ge-1\end{cases}$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

Mệnh đề	Đ	S
a) $\lim\limits_{x\to-2}f(x)=\sqrt{5}$.		
b) $\lim\limits_{x\to-1^-}f(x)=-3$.		
c) $\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)=\sqrt{2}$.		
d) Hàm số tồn tại giới hạn khi $x\to-1$.		

QUICK NOTE

CÂU 2. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

Mệnh đề	Đ	S
a) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^2-10x\right)=+\infty$.		
b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^2-4x+1}{2x^2+x+1}=\dfrac{3}{2}$.		
c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+x+1}-3x}{2-3x}=\dfrac{5}{4}$.		
d) Để $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{2x^2+1}+ax\right)=+\infty$ thì $a<\sqrt{2}$.		

CÂU 3. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{\sqrt{3x^2+1}}{x+1}$ và $g(x)=\dfrac{2x}{x+1}$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

Mệnh đề	Đ	S
a) $\lim\limits_{x\to1}f(x)=2$ và $\lim\limits_{x\to-2}g(x)=-2$.		
b) $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=2$; $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\sqrt{3}$.		
c) $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-g(x)]=\sqrt{3}-2$.		
d) $\lim\limits_{x\to-1}[f(x)-g(x)]=\dfrac{1}{2}$.		

CÂU 4. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}2x+1 \text{ khi } x\le1\\ \sqrt{x^2+a} \text{ khi } x>1\end{cases}$. Khẳng định nào đúng, khẳng định nào sai?

Mệnh đề	Đ	S
a) $\lim\limits_{x\in-5}f(x)=-9$.		
b) $\lim\limits_{x\in1}f(x)=1$ và $\lim\limits_{x\in1^+}f(x)=a$.		
c) $\lim\limits_{x\in1^+}\dfrac{f(x)}{1-x}=+\infty$.		
d) Để tồn tại $\lim\limits_{x\to1}f(x)$ thì $a=8$.		

Phần III. Học sinh điền kết quả vào ô trống.

CÂU 1. Cho $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2+3x+1}{x+1}+ax+b\right)=1$. Tính giá trị của biểu thức $T=2024a-4049b$.

KQ:

CÂU 2. Biết $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{3x^2+2023x+2}-n\sqrt{3}\right)=\dfrac{a\sqrt{b}}{c}$, ở đó a,c là các số nguyên dương nguyên tố cùng nhau, b là số nguyên tố. Tính $a+b+c$.

KQ:

CÂU 3. Biết $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x-2}+ax-b\right)=-5$. Tính giá trị biểu thức $P=\dfrac{1}{2}a+\dfrac{1}{4}b$.

KQ:

CÂU 4. Giá trị của $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{3x+1}-2}{2x^2-3x+1}$ là

KQ:

CÂU 5. Giá trị của $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\left(3-2x^3\right)^2\cdot(4x-1)}{\left(x^2-1\right)^2\cdot(3+2x)^3}$ là

KQ:

CÂU 6. Một cái hồ chứa 600l nước ngọt. Người ta bơm nước biển có nồng độ muối 30g/l vào hồ với tốc độ 15 l/phút. Nồng độ muối trong hồ khi t dần về dương vô cùng (đơn vị g/l) là

KQ: | | | | |

QUICK NOTE

QUICK NOTE

Bài 17. HÀM SỐ LIÊN TỤC

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. HÀM SỐ LIÊN TỤC TẠI MỘT ĐIỂM

Định nghĩa: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng K và $x_0 \in K$. Hàm số $y = f(x)$ được gọi là **liên tục** tại x_0 nếu

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)}$$

*Nếu hàm số không liên tục tại x_0 thì ta nói hàm số đó **gián đoạn** tại x_0.*

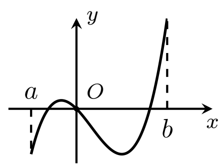
2. HÀM SỐ LIÊN TỤC TRÊN MỘT KHOẢNG

Định nghĩa: Hàm số $y = f(x)$ được gọi là **liên tục trên một khoảng** nếu nó liên tục tại mọi điểm của khoảng đó.

Chú ý:

- Hàm số $y = f(x)$ được gọi là **liên tục trên đoạn** $[a; b]$ nếu nó liên tục trên khoảng $(a; b)$ và $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$, $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = f(b)$.
- Khái niệm hàm số **liên tục trên nửa khoảng** như $[a; b)$, $[a; +\infty)$,... được định nghĩa một cách tương tự như liên tục trên đoạn.

— *Đồ thị của hàm số liên tục trên một khoảng là một "đường liền" trên khoảng đó. Hình bên là đồ thị của một hàm số liên tục tên $(a; b)$.*



— *Hàm số đa thức và các hàm số $y = \sin x$, $y = \cos x$ liên tục trên toàn bộ tập số thực $\mathbb{R}$.*

— *Hàm số phân thức hữu tỉ (thương của hai đa thức) và các hàm số $y = \tan x$, $y = \cot x$, $y = \sqrt{x}$ liên tục trên từng khoảng xác định của chúng.*

3. MỘT SỐ ĐỊNH LÝ CƠ BẢN

Định lý 1. Giả sử $y = f(x)$ và $y = g(x)$ là hai hàm số liên tục tại điểm x_0. Khi đó

— Các hàm số $y = f(x) + g(x)$, $y = f(x) - g(x)$ và $y = f(x) \cdot g(x)$ liên tục tại x_0.

— Hàm số $y = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ liên tục tại x_0 nếu $g(x_0) \neq 0$.

Định lý 2. Sự tồn tại nghiệm của phương trình trên một khoảng

— Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ và $f(a) \cdot f(b) < 0$, thì tồn tại ít nhất một điểm $c \in (a; b)$ sao cho $f(c) = 0$.

— Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ và $f(a) \cdot f(b) < 0$ thì phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm nằm trong khoảng $(a; b)$.

QUICK NOTE

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

1 Xét tính liên tục của hàm số tại một điểm

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập D. Để xét tính liên tục của hàm số $y = f(x)$ tại điểm $x_0 \in D$, ta thực hiện các bước sau:

- Bước 1. Tính $f(x_0)$.
- Bước 2. Tìm $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.
- Bước 3. So sánh và rút ra kết luận.
  - Nếu $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ thì hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm x_0.
  - Nếu $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$ thì hàm số $f(x)$ không liên tục (gián đoạn) tại điểm x_0.

VÍ DỤ 1. Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x - 2} & \text{khi } x \neq 2 \\ 4x - 7 & \text{khi } x = 2 \end{cases}$ tại điểm $x_0 = 2$.

VÍ DỤ 2. Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 6x + 5}{x^2 - 1} & \text{nếu } x \neq 1 \\ -2 & \text{nếu } x = 1 \end{cases}$ tại điểm $x_0 = 1$.

VÍ DỤ 3. Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1 - \sqrt{2x - 3}}{2 - x} & \text{nếu } x \neq 2 \\ -1 & \text{nếu } x = 2 \end{cases}$ tại điểm $x_0 = 2$.

VÍ DỤ 4. Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{nếu } x > 0 \\ x & \text{nếu } x \leq 0 \end{cases}$ tại điểm $x_0 = 0$.

VÍ DỤ 5. Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x - 5}{\sqrt{2x - 1} - 3} & \text{nếu } x > 5 \\ (x - 5)^2 + 3 & \text{nếu } x \leq 5 \end{cases}$ tại điểm $x_0 = 5$.

2 Xét tính liên tục của hàm số trên miền xác định

- Hàm đa thức liên tục trên $\mathbb{R}$.
- Hàm phân thức hữu tỉ, hàm lượng giác liên tục trên từng khoảng xác định của chúng.

VÍ DỤ 1. Xét tính liên tục của hàm số sau trên tập xác định của chúng.

a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - x - 2}{x + 1} & \text{khi } x \neq -1 \\ -3 & \text{khi } x = -1 \end{cases}$.

b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x + 1}{(x - 1)^2} & \text{khi } x \neq 1 \\ 3 & \text{khi } x = 1 \end{cases}$.

VÍ DỤ 2. Xét tính liên tục của hàm số sau trên tập xác định của chúng.

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x & \text{khi } x \geq 2 \\ 6x + 1 & \text{khi } x < 2. \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 5 & \text{khi } x > 1 \\ 3 & \text{khi } x = 1 \\ 2x + 1 & \text{khi } x < 1. \end{cases}$

VÍ DỤ 3. Tìm các giá trị của a để hàm số $f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{nếu } x \leq a \\ x^2 & \text{nếu } x > a \end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

QUICK NOTE

3 Tìm giá trị của tham số để hàm số liên tục - gián đoạn tại điểm cho trước.

VÍ DỤ 1. Tìm tham số m để hàm số $f(x)=\begin{cases}x^2+2x-m & \text{khi } x\neq 2\\ x+m & \text{khi } x=2\end{cases}$ liên tục tại $x_0=2$.

VÍ DỤ 2. Tìm tham số m để hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-2x-3}{x+1} & \text{khi } x\neq -1\\ m^2+5m & \text{khi } x=-1\end{cases}$ liên tục tại $x_0=-1$.

VÍ DỤ 3. Tìm tham số m để hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{4x+5}-3}{x^2-1} & \text{khi } x>1\\ 2m+3 & \text{khi } x\leq 1\end{cases}$ gián đoạn tại $x_0=1$.

4 Chứng minh phương trình có nghiệm

- Để chứng minh phương trình $f(x)=0$ có ít nhất một nghiệm trên D, ta chứng minh hàm số $y=f(x)$ liên tục trên D và có hai số $a,b\in D$ sao cho $f(a).f(b)<0$.
- Để chứng minh phương trình $f(x)=0$ có k nghiệm trên D, ta chứng minh hàm số $y=f(x)$ liên tục trên D và tồn tại k khoảng rời nhau $(a_i;a_{i+1})$ $(i=1,2,\ldots,k)$ nằm trong D sao cho $f(a_i).f(a_{i+1})<0$.

VÍ DỤ 1. Chứng minh rằng phương trình $2x^4-2x^3-3=0$ có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(-1;0)$.

VÍ DỤ 2. Chứng minh rằng phương trình $6x^3+3x^2-31x+10=0$ có đúng 3 nghiệm phân biệt.

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

BÀI 1. Xét tính liên tục của hàm số:

a) $f(x)=\begin{cases}x^2+1 & \text{khi } x\geq 0\\ 1-x & \text{khi } x<0\end{cases}$ tại điểm $x=0$.

b) $f(x)=\begin{cases}x^2+2 & \text{khi } x\geq 1\\ x & \text{khi } x<1\end{cases}$ tại điểm $x=1$.

BÀI 2. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-4}{x+2} & \text{khi } x\neq -2\\ a & \text{khi } x=-2.\end{cases}$ Tìm a để hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

BÀI 3. Xét tính liên tục của hàm số sau trên tập xác định của chúng.

a) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-2}{x^2-4} & \text{khi } x\neq 2\\ 1 & \text{khi } x=2\end{cases}$.

b) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-1}{x-1} & \text{khi } x\neq 1\\ 3 & \text{khi } x=1\end{cases}$.

BÀI 4. Một bãi đậu xe ô-tô đưa ra giá $C(x)$ (đồng) khi thời gian đậu xe là x (giờ) như sau:

$$C(x)=\begin{cases}60.000 & \text{khi } 0<x\leq 2\\ 100.000 & \text{khi } 2<x\leq 4\\ 200.000 & \text{khi } 4<x\leq 24.\end{cases}$$

Xét tính liên tục của hàm số $C(x)$.

BÀI 5. Lực hấp dẫn do Trái Đất tác dụng lên một đơn vị khối lượng ở khoảng cách r tính từ tâm của nó là $F(r)=\begin{cases}\dfrac{GMr}{R^3} & \text{khi } 0<r\leq R\\ \dfrac{GM}{r^2} & \text{khi } r\geq R\end{cases}$, trong đó M là khối lượng, R là bán kính của Trái Đất, G là hằng số hấp dẫn. Hàm số $F(r)$ có liên tục trên $(0;+\infty)$ không?

BÀI 6. Chứng minh rằng phương trình $x^4 - x^3 - 2x^2 - 15x - 25 = 0$ có ít nhất một nghiệm âm và ít nhất một nghiệm dương.

BÀI 7. Chứng minh rằng phương trình $x^3 + 4x^2 - 2 = 0$ có ba nghiệm trong khoảng $(-4; 1)$.

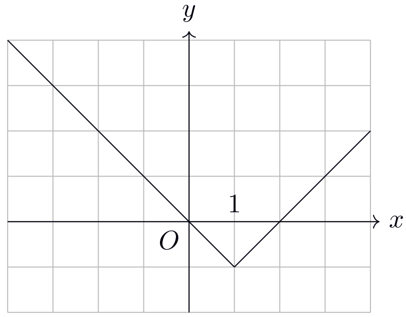
BÀI 8. Chứng minh rằng phương trình $x^5 - 5x^3 + 4x - 1 = 0$ có đúng năm nghiệm.

BÀI 9. Chứng minh rằng phương trình $x + 1 + \cos x = 0$ có nghiệm.

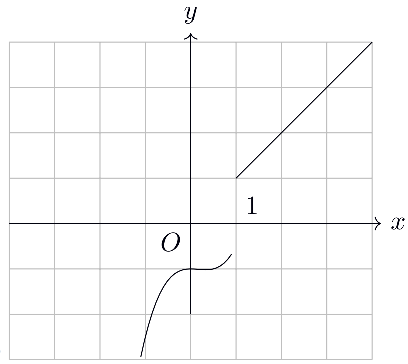
D. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Phần I. Mỗi câu hỏi học sinh chọn một trong bốn phương án A, B, C, D.

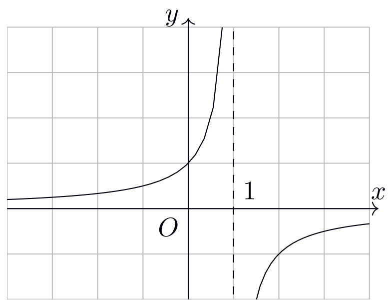
CÂU 1. Hàm số f liên tục tại $x_0 = 1$. Đồ thị của f có thể là hình nào dưới đây?

Ⓐ 

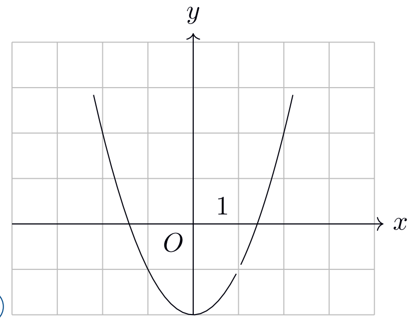
.

Ⓑ 

.

Ⓒ 

.

Ⓓ 

.

CÂU 2. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $(a; b)$. Điều kiện cần và đủ để hàm số liên tục trên $[a; b]$ là

Ⓐ $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = f(a)$ và $\lim\limits_{x\to b^+} f(x) = f(b)$. Ⓑ $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = f(a)$ và $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = f(b)$.

Ⓒ $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = f(a)$ và $\lim\limits_{x\to b^+} f(x) = f(b)$. Ⓓ $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = f(a)$ và $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = f(b)$.

CÂU 3. Hàm số $y = \dfrac{1}{x(x^2-9)}$ liên tục tại điểm nào dưới đây?

Ⓐ 0. Ⓑ 3. Ⓒ -3. Ⓓ 1.

CÂU 4. Hàm số $y = \dfrac{1}{4x-4}$ gián đoạn tại điểm nào dưới đây?

Ⓐ $x = 1$. Ⓑ $x = 0$. Ⓒ $x = 2$. Ⓓ $x = -1$.

CÂU 5. Hàm số nào sau đây **không** liên tục trên tập số thực $\mathbb{R}$?

Ⓐ $y = \dfrac{4}{x} + \dfrac{7}{9}$. Ⓑ $y = 4x + \dfrac{7}{9}$. Ⓒ $y = \sin 2x$. Ⓓ $y = 3x^2 + \sqrt{5}$.

CÂU 6. Hàm số nào sau đây **không** liên tục tại $x = 2$?

Ⓐ $y = \sin x$. Ⓑ $y = \dfrac{x^2}{x-2}$. Ⓒ $y = x^2 - 3x + 2$. Ⓓ $y = \sqrt{x+2}$.

CÂU 7. Hàm số $y = \dfrac{3}{x(x+1)(x+2)}$ liên tục tại điểm nào dưới đây?

Ⓐ $x = -1$. Ⓑ $x = -2$. Ⓒ $x = 3$. Ⓓ $x = 0$.

CÂU 8. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3+8}{4x+8} & \text{khi } x \neq -2 \\ 3 & \text{khi } x = -2 \end{cases}$. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau?

Ⓐ Hàm số $f(x)$ không liên tục trên tập $\mathbb{R}$.

QUICK NOTE

QUICK NOTE

(B) Hàm số $f(x)$ có tập xác định là $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

(C) Hàm số $f(x)$ gián đoạn tại $x = 2$.

(D) Hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = -2$.

CÂU 9. Số điểm gián đoạn của hàm số $f(x) = \dfrac{\sin x}{x^3 + 3x^2 - 2x - 2}$ là

(A) 1. (B) 3. (C) 0. (D) 2.

CÂU 10. Trong các hàm số sau, hàm số nào liên tục trên $\mathbb{R}$?

(A) $f(x) = \cot 2x$.

(B) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{10-2x}{\sqrt{x+11}-4} & \text{khi } x \neq 5 \\ -16 & \text{khi } x = 5 \end{cases}$.

(C) $f(x) = \begin{cases} 4x+3 & \text{khi } x < -2 \\ 3x^2 - 7 & \text{khi } x \geq -2 \end{cases}$.

(D) $f(x) = \sqrt{2x-1} + \sqrt{1+5x}$.

CÂU 11. Cho bốn hàm số $f_1(x) = 2x^3 - 3x + 1$, $f_2(x) = \dfrac{3x+1}{x-2}$, $f_3(x) = \cos x + 3$ và $f_4(x) = \tan x$. Hỏi có bao nhiêu hàm số liên tục trên tập $\mathbb{R}$?

(A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4.

CÂU 12. Cho $f(x), g(x)$ là các hàm số liên tục tại $x = 3$. Biết $f(3) = 4$ và $\lim\limits_{x \to 3} [3f(x) - g(x)] = 6$. Tính $g(3)$.

(A) $g(3) = 6$. (B) $g(3) = 0$. (C) $g(3) = 2$. (D) $g(3) = -6$.

Phần II. Trong mỗi ý a), b), c) và d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.

CÂU 1. Cho các hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2} & \text{khi } x \neq 2 \\ 4{,}5 & \text{khi } x = 2 \end{cases}$ và $g(x) = \dfrac{2}{x-1}$. Khi đó

Mệnh đề	Đ	S
a) Hàm số $g(x)$ liên tục tại điểm $x_0 = 2$.		
b) Giới hạn $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 4$.		
c) Hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm $x_0 = 2$.		
d) Hàm số $y = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ liên tục tại điểm $x_0 = 2$.		

CÂU 2. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1} & \text{khi } x \neq 1 \\ x+1 & \text{khi } x = 1. \end{cases}$ và $g(x) = 4x^2 - x + 1$. Khi đó

Mệnh đề	Đ	S
a) $f(1) = 2$.		
b) Hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm $x_0 = 1$.		
c) Hàm số $g(x)$ liên tục tại điểm $x_0 = 1$.		
d) Hàm số $y = f(x) - g(x)$ không liên tục tại điểm $x_0 = 1$.		

CÂU 3. Xét tính liên tục của các hàm số sau trên tập tương ứng.

Mệnh đề	Đ	S
a) $f(x) = x^3 - x^2 + 8x$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.		
b) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 3x}$ là hàm số liên tục trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.		
c) $f(x) = \dfrac{\sin x + 1}{x+1}$ là hàm số liên tục trên các khoảng $(-\infty; 0), (0; +\infty)$.		
d) $f(x) = \sqrt{x-2}$ là hàm số liên tục trên nửa khoảng $[2; +\infty)$.		

CÂU 4. Cho các hàm số sau: $f(x)=\begin{cases}-\dfrac{x}{2} & \text{khi } x\le 1\\ \dfrac{x^2-3x+2}{x^2-1} & \text{khi } x>1\end{cases}$, $g(x)=x^2-3x+1$ và $h(x)=\sin\dfrac{\pi x}{4}$.

Mệnh đề	Đ	S
a) Hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm $x_0=1$.		
b) Hàm số $g(x)$ liên tục tại điểm $x_0=1$.		
c) Hàm số $h(x)$ không liên tục tại điểm $x_0=2$.		
d) Hàm số $y=f(x)\cdot g(x)$ không liên tục tại điểm $x_0=1$.		

Phần III. Học sinh điền kết quả vào ô trống.

CÂU 1. Tìm m để hàm số $f(x)=\begin{cases}x^4+x^2-1 & \text{khi } x\le -1\\ 3m+1 & \text{khi } x>-1\end{cases}$ liên tục tại điểm $x_0=-1$.

KQ: | | | | |

CÂU 2. Tìm m để hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-x-2}{x-2} & \text{nếu } x\ne 2\\ m+1 & \text{nếu } x=2\end{cases}$ liên tục tại $x_0=2$.

KQ: | | | | |

CÂU 3. Tìm $m>0$ để hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x^2-1} & \text{nếu } x\ne 1\\ m^2x & \text{nếu } x=1\end{cases}$ liên tục tại $x=1$.

KQ: | | | | |

CÂU 4. Tìm giá trị của hàm số a để hàm số $f(x)=\begin{cases}x^2+2x+2 & \text{khi } x\ge 0\\ x^2+a & \text{khi } x<0\end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

KQ: | | | | |

CÂU 5. Tìm m để hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^4-9}{x-\sqrt{3}} & \text{khi } x\ne\sqrt{3}\\ 2m\sin\dfrac{\pi}{3} & \text{khi } x=\sqrt{3}\end{cases}$ tại điểm $x_0=\sqrt{3}$.

KQ: | | | | |

CÂU 6. Tìm giá trị của tham số a để hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1} & \text{khi } x>1\\ ax-\dfrac{1}{2} & \text{khi } x\le 1\end{cases}$ liên tục tại điểm $x=1$.

KQ: | | | | |

QUICK NOTE

LỜI GIẢI CHI TIẾT

Bài 15. GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. GIỚI HẠN HỮU HẠN CỦA DÃY SỐ

- **Định nghĩa 1:** Dãy số (u_n) có giới hạn là 0 khi n dần tới dương vô cực nếu $|u_n|$ có thể nhỏ hơn một số dương bé tuỳ ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi. Kí hiệu

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 0}$$

- **Định nghĩa 2:** Dãy số (u_n) có giới hạn là a nếu $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - a) = 0$. Kí hiệu

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = a}$$

- **Một vài giới hạn đặc biệt:** (*có thể xem như công thức*)

— $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$;

— $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^k} = 0$, với $k \in \mathbb{N}^*$;

— $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$;

— $\lim\limits_{n\to+\infty} C = C, \forall C \in \mathbb{R}$;

— $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{q^n} = 0$, với $|q| > 1$;

— $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$, nếu $|q| < 1$.

2. ĐỊNH LÝ VỀ GIỚI HẠN HỮU HẠN CỦA DÃY SỐ

- Nếu $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$ và $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = b$ thì ta có:

— $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n \pm v_n) = a + b$;

— $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n.v_n) = a.b$;

— $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{u_n}{v_n}\right) = \dfrac{a}{b}$, với $b \neq 0$;

— $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{u_n} = \sqrt{a}$, với $a \geq 0$;

— $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n| = |a|$;

— $\lim\limits_{n\to+\infty} (k.u_n) = k.a$ $(k \in \mathbb{R})$.

- Định lý "kẹp":

— Nếu $0 \leq |u_n| \leq v_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$ và $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ thì $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

— Nếu $w_n \leq u_n \leq v_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$ và $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = a$ thì $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$.

3. TỔNG CỦA CẤP SỐ NHÂN LÙI VÔ HẠN

- Cấp số nhân vô hạn (u_n) có công bội q thoả mãn $|q| < 1$ được gọi là *cấp số nhân lùi vô hạn*.

- Cho cấp số nhân lùi vô hạn (u_n), ta có tổng của cấp số nhân lùi vô hạn đó là

$$S = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots = \frac{u_1}{1-q}, (|q| < 1)$$

4. GIỚI HẠN VÔ CỰC CỦA DÃY SỐ

Định nghĩa 1: Ta nói dãy số (u_n) có giới hạn $+\infty$ khi $n \to +\infty$, nếu u_n có thể lớn hơn một số dương bất kì, kể từ một số hạng nào đó trở đi. Kí hiệu

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty}$$

Định nghĩa 2: Ta nói dãy số (u_n) có giới hạn $-\infty$ khi $n \to +\infty$, nếu $\lim\limits_{n\to+\infty}(-u_n) = +\infty$. Kí hiệu

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty}$$

Một số giới hạn đặc biệt:

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} n^k = +\infty$, với $k \in \mathbb{N}^*$.

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$, với $q > 1$.

Một số quy tắc tính giới hạn vô cực:

① Quy tắc tìm giới hạn của tích $u_n \cdot v_n$

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = L$	$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \infty$	$\lim\limits_{n\to+\infty} [u_n \cdot v_n]$
$L > 0$	$+\infty$	$+\infty$
$L > 0$	$-\infty$	$-\infty$
$L < 0$	$+\infty$	$-\infty$
$L < 0$	$-\infty$	$+\infty$

② Quy tắc tìm giới hạn của thương $\dfrac{u_n}{v_n}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = L$	$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	Dấu của v_n	$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n}$
L	$\pm\infty$	Tùy ý	0
$L > 0$	0	$+$	$+\infty$
$L > 0$	0	$-$	$-\infty$
$L < 0$	0	$+$	$-\infty$
$L < 0$	0	$-$	$+\infty$

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

1 Khử vô định dạng $\frac{\infty}{\infty}$

Xét giới hạn: $\lim \dfrac{u_n}{v_n}$.

Phương pháp giải:

- Đặt nhân tử n^k có tính "quyết định ∞" ở tử và mẫu.
- Khử bỏ n^k, đưa giới hạn về dạng xác định được.
- Áp dụng định lý về giới hạn hữu hạn để tính kết quả.

Chú ý: Trong trường hợp hàm mũ, ta đặt đại lượng "quyết định ∞" có dạng a^n.

VÍ DỤ 1. Tính các giới hạn sau

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2n^2+3n-1}{2-3n^2}$

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3n^3+2n^2+n}{n^3+4}$

c) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2+1}{2n^4+n+1}$

d) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{n+1}{n^2+2n} - \dfrac{1}{n-1}\right)$

e) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{2n^2+3n}{n+1} - \dfrac{2n^3-3}{n^2-1}\right)$

f) $\lim\limits_{n\to+\infty} n\left(1 - \dfrac{n^2+3}{n^2-1}\right)$

g) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{(2n+3)(1-3n)}{2n^2-n+5}$

h) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n^4-2n^2}{(n+1)(2+n)(n^2+1)}$

i) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\left(2n^4+1\right)(n+2)^2}{(2n+1)^2(2-n)^4}$

Lời giải.

a) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2n^2+3n-1}{2-3n^2}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2+\dfrac{3}{n}-\dfrac{1}{n^2}}{\dfrac{2}{n^2}-3}=-\dfrac{2}{3}$.

b) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{3n^3+2n^2+n}{n^3+4}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{3+\dfrac{2}{n}+\dfrac{1}{n^2}}{1+\dfrac{4}{n^3}}=3$.

c) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n^2+1}{2n^4+n+1}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{1}{n^4}}{2+\dfrac{1}{n^3}+\dfrac{1}{n^4}}=0$.

d) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{n+1}{n^2+2n}-\dfrac{1}{n-1}\right)=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}}{1+\dfrac{2}{n}}-\dfrac{\dfrac{1}{n}}{1-\dfrac{1}{n}}\right)=0-0=0$.

e) Ta có

$$\begin{aligned}\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{2n^2+3n}{n+1}-\dfrac{2n^3-3}{n^2-1}\right)&=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{(2n^2+3n)(n-1)-(2n^3-3)}{n^2-1}\\&=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n^2-3n+3}{n^2-1}\\&=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1-\dfrac{3}{n}+\dfrac{3}{n^2}}{1-\dfrac{1}{n^2}}=1.\end{aligned}$$

f) Ta có

$$\begin{aligned}\lim\limits_{n\to+\infty}n\left(1-\dfrac{n^2+3}{n^2-1}\right)&=\lim\limits_{n\to+\infty}n\left(\dfrac{n^2-1-(n^2+3)}{n^2-1}\right)\\&=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{-4n}{n^2-1}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{-\dfrac{4}{n}}{1-\dfrac{1}{n^2}}=0.\end{aligned}$$

g) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{(2n+3)(1-3n)}{2n^2-n+5}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n\left(2+\dfrac{3}{n}\right)\cdot n\left(\dfrac{1}{n}-3\right)}{n^2\left(2-\dfrac{1}{n}+\dfrac{5}{n^2}\right)}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\left(2+\dfrac{3}{n}\right)\left(\dfrac{1}{n}-3\right)}{2-\dfrac{1}{n}+\dfrac{5}{n^2}}=-3$.

h) Ta có

$$\begin{aligned}\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n^4-2n^2}{(n+1)(2+n)(n^2+1)}&=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n^4\left(1-\dfrac{2}{n^2}\right)}{n\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\cdot n\left(\dfrac{2}{n}+1\right)\cdot n^2\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)}\\&=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1-\dfrac{2}{n^2}}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\cdot\left(\dfrac{2}{n}+1\right)\cdot\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)}=1.\end{aligned}$$

i) Ta có

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\frac{\left(2n^4+1\right)(n+2)^2}{(2n+1)^2(2-n)^4} &= \lim_{n\to+\infty}\frac{n^4\left(2+\frac{1}{n^4}\right)\cdot n^2\left(1+\frac{2}{n}\right)^2}{n^2\left(2+\frac{1}{n}\right)^2\cdot n\left(\frac{2}{n}-1\right)^4}\\ &= \lim_{n\to+\infty}\frac{\left(2+\frac{1}{n^4}\right)\cdot\left(1+\frac{2}{n}\right)^2}{\left(2+\frac{1}{n}\right)^2\cdot\left(\frac{2}{n}-1\right)^4}=\frac{2\cdot1^2}{2^2\cdot(-1)^4}=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

VÍ DỤ 2. Tính các giới hạn sau

a) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1+3^n}{4+3^n}$

b) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{4.3^n+7^{n+1}}{2.5^n+7^n}$

c) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{4^{n+1}+6^{n+2}}{5^n+8^n}$

Lời giải.

a) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1+3^n}{4+3^n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{3^n}+1}{\frac{4}{3^n}+1}=1.$

b) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{4.3^n+7^{n+1}}{2.5^n+7^n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{4.3^n+7\cdot7^n}{2.5^n+7^n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{4\cdot\left(\frac{3}{7}\right)^n+7}{2\cdot\left(\frac{5}{7}\right)^n+1}=7.$

c) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{4^{n+1}+6^{n+2}}{5^n+8^n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{4\cdot4^n+36\cdot6^n}{5^n+8^n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n+36\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^n}{\left(\frac{5}{8}\right)^n+1}=0.$

VÍ DỤ 3. Tính các giới hạn sau

a) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2n-1}{\sqrt{4n^2+1}+3n}$

b) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sqrt{4n^2+3n-1}}{\sqrt{3n^2+1}-\sqrt{2n+1}}$

c) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sqrt{4n^4+1}}{\sqrt{n^4+4n+1}+n^2}$

d) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sqrt{n^2-4n}-\sqrt{4n^2+1}}{\sqrt{3n^2+1}+n}$

e) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sqrt[3]{8n^3+n^2-1}+n-4}{2n-3}$

f) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n^2+\sqrt[3]{1-n^6}}{\sqrt{n^4+1}+n^2}$

Lời giải.

a) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2n-1}{\sqrt{4n^2+1}+3n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2-\frac{1}{n}}{\sqrt{4+\frac{1}{n^2}}+3}=\dfrac{2}{5}.$

b) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sqrt{4n^2+3n-1}}{\sqrt{3n^2+1}-\sqrt{2n+1}}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sqrt{4+\frac{3}{n}-\frac{1}{n^2}}}{\sqrt{3+\frac{1}{n^2}}-\sqrt{\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}.$

c) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sqrt{4n^4+1}}{\sqrt{n^4+4n+1}+n^2}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sqrt{4+\frac{1}{n^4}}}{\sqrt{1+\frac{4}{n^3}+\frac{1}{n^4}}+1}=1.$

d) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sqrt{n^2-4n}-\sqrt{4n^2+1}}{\sqrt{3n^2+1}+n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sqrt{1-\frac{4}{n}}-\sqrt{4+\frac{1}{n^2}}}{\sqrt{3+\frac{1}{n^2}}+1}=-\dfrac{1}{\sqrt{3}+1}.$

e) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sqrt[3]{8n^3+n^2-1}+n-4}{2n-3} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sqrt[3]{8+\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n^3}}+1-\dfrac{4}{n}}{2-\dfrac{3}{n}} = \dfrac{3}{2}$.

f) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2+\sqrt[3]{1-n^6}}{\sqrt{n^4+1}+n^2} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1+\sqrt[3]{\dfrac{1}{n^6}-1}}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n^4}}+1} = 0$.

VÍ DỤ 4. Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1+2+\ldots+n}{n^2}$

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left[1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\ldots+\dfrac{1}{2^n}\right]$

c) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{2+4+8+...+2^n}{3.2^n-1}\right)$

d) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{1.2}+\dfrac{1}{2.3}\cdots\dfrac{1}{n(n+1)}\right)$

Lời giải.

a) Tử số là tổng của một cấp số cộng gồm n số hạng với $u_1=1$ và $u_n=n$.

Suy ra: $1+2+...+n = \boxed{\dfrac{n}{2}(u_1+u_n)} = \dfrac{n(1+n)}{2}$.

Khi đó: $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1+2+\ldots+n}{n^2} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n(n+1)}{2n^2} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n+1}{2n} = \dfrac{1}{2}$.

b) Đây là tổng của một cấp nhân gồm $n+1$ số hạng, với $u_1=1$ và công bội $q=\dfrac{1}{2}$.

Suy ra: $S_{n+1} = u_1\dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} = \dfrac{1-\dfrac{1}{2^{n+1}}}{1-\dfrac{1}{2}} = 2\left(1-\dfrac{1}{2^{n+1}}\right) = 2-\dfrac{1}{2^n}$.

Vậy, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left[1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\ldots+\dfrac{1}{2^n}\right] = \lim\limits_{n\to+\infty} S_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(2-\dfrac{1}{2^n}\right) = 2$.

c) Xét tổng $2+4+\cdots+2^n = u_1\dfrac{1-q^n}{1-q} = 2\dfrac{1-2^n}{1-2} = 2\cdot 2^n-2$. Ki đó

$$\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{2+4+8+...+2^n}{3.2^n-1}\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2\cdot 2^n-2}{3.2^n-1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2-\dfrac{2}{2^n}}{3-\dfrac{1}{2^n}} = \dfrac{2}{3}$$

d) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{1.2}+\dfrac{1}{2.3}+...+\dfrac{1}{n.(n+1)}\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}+...+\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(1-\dfrac{1}{n+1}\right) = 1$.

VÍ DỤ 5. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1=10$ và $u_{n+1}=\dfrac{1}{5}u_n+3$, với mọi $n\geq 1$.

a) Chứng minh dãy (v_n) xác định bởi $v_n=u_n-\dfrac{15}{4}$ là một cấp số nhân.

b) Tính $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Lời giải.

a) Ta có $v_n=u_n-\dfrac{15}{4}$, suy ra $u_n=v_n+\dfrac{15}{4}$ và $u_{n+1}=v_{n+1}+\dfrac{15}{4}$.

Khi đó
$$u_{n+1}=\frac{1}{5}u_n+3 \Rightarrow v_{n+1}+\frac{15}{4}=\frac{1}{5}\left(v_n+\frac{15}{4}\right)+3 \Rightarrow v_{n+1}=\frac{1}{5}v_n$$

Nên (v_n) là một cấp số nhân với $q=\dfrac{1}{5}$ và số hạng đầu $v_1=u_1-\dfrac{15}{4}=\dfrac{25}{4}$.

b) Công thức tổng quát của dãy (v_n) là
$$v_n=v_1q^{n-1}=\frac{25}{4}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}.$$

Suy ra công thức tổng quát của dãy (u_n) là
$$u_n=v_n+\frac{15}{4}=\frac{25}{4}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}+\frac{15}{4}.$$

Khi đó $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\dfrac{15}{4}$.

2 Khử vô định dạng $\infty - \infty$

Xét các giới hạn dạng: $\boxed{\lim\left(\sqrt{u_n} - v_n\right)}$ hoặc $\boxed{\lim\left(\sqrt{u_n} - \sqrt{v_n}\right)}$.

Phương pháp giải:

- Nhân thêm lượng liên hợp
- Biến đổi biểu thức cần tính giới hạn về Dạng 1 (phân thức, đặt n^k)

Chú ý: Đôi khi, ta còn sử dụng liên hợp bậc ba để giải các bài toán tính giới hạn của những dãy số mà công thức tổng quát của nó có chứa ẩn trong dấu căn bậc ba.

$$\sqrt[3]{A} - B = \frac{\left(\sqrt[3]{A} - B\right)\left(\sqrt[3]{A}^2 + \sqrt[3]{A}\cdot B + B^2\right)}{\sqrt[3]{A}^2 + \sqrt[3]{A}\cdot B + B^2} = \frac{A - B^3}{\sqrt[3]{A}^2 + \sqrt[3]{A}\cdot B + B^2}$$

VÍ DỤ 1. Tính các giới hạn sau

a) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n^2+2n} - n\right)$

b) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(2n - \sqrt{4n^2+n}\right)$

c) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2+2}\right)$

d) $\lim\limits_{n\to+\infty} n\left(\sqrt{n^2+2} - n\right)$

e) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n^2+2n} - n - 1\right)$

f) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2n} - \sqrt{n^2+4}}$.

Lời giải.

a) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n^2+2n} - n\right) = \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2n}{\sqrt{n^2+2n}+n} = \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2}{\sqrt{1+\dfrac{2}{n}}+1} = 1.$

b) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(2n - \sqrt{4n^2+n}\right) = \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{-n}{2n+\sqrt{4n^2+n}} = \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{-1}{2+\sqrt{4+\dfrac{1}{n}}} = -\dfrac{1}{4}.$

c) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2+2}\right) = \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n-2}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2+2}} = \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1-\dfrac{2}{n}}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}+\sqrt{1+\dfrac{2}{n^2}}} = \dfrac{1}{2}.$

d) $\lim\limits_{n\to+\infty} n\left(\sqrt{n^2+2} - n\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} n\dfrac{2}{\sqrt{n^2+2}+n} = \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2}{\sqrt{1+\dfrac{2}{n^2}}+1} = 1.$

e) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n^2+2n} - n - 1\right) = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{2n}{\sqrt{n^2+2n}+n} - 1\right) = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{2}{\sqrt{1+\dfrac{2}{n}}+1} - 1\right) = 0.$

f) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2n} - \sqrt{n^2+4}} = \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+2n}+\sqrt{n^2+4}}{2n-4} = \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sqrt{1+\dfrac{2}{n}}+\sqrt{1+\dfrac{4}{n^2}}}{2-\dfrac{4}{n}} = 1.$

VÍ DỤ 2. Tính các giới hạn sau

a) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt[3]{n^3+2} - n\right)$

b) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt[3]{n^3+1} - \sqrt{n^2+1}\right)$

c) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt[3]{n^3+2} - \sqrt{n^2+n}\right)$

Lời giải.

a) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt[3]{n^3+2} - n\right) = \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2}{\sqrt[3]{(n^3+2)^2} + n\sqrt[3]{n^3+2} + n^2} = 0.$

b) Ta có

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt[3]{n^3+1}-\sqrt{n^2+1}\right) &= \lim_{n\to+\infty}\left[(\sqrt[3]{n^3+1}-n)-(\sqrt{n^2+1}-n)\right]\\ &= \lim_{n\to+\infty}\left[\frac{1}{\sqrt[3]{(n^3+1)^2}+n\sqrt[3]{n^3+1}+n^2}-\frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n}\right]\\ &= \lim_{n\to+\infty}\left[\frac{\frac{1}{n^2}}{\sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}+\sqrt[3]{1+\frac{1}{n}}+1}-\frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1}\right]=0.\end{aligned}$$

c) Ta có

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt[3]{n^3+2}-\sqrt{n^2+n}\right) &= \lim_{n\to+\infty}\left[(\sqrt[3]{n^3+2}-n)-(\sqrt{n^2+n}-n)\right]\\ &= \lim_{n\to+\infty}\left[\frac{2}{\sqrt[3]{(n^3+2)^2}+n\sqrt[3]{n^3+2}+n^2}-\frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n}\right]\\ &= \lim_{n\to+\infty}\left[\frac{\frac{2}{n^2}}{\sqrt[3]{\left(1+\frac{2}{n}\right)^2}+\sqrt[3]{1+\frac{2}{n}}+1}-\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}\right]=-\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

3 Một số quy tắc tính giới hạn vô cực

① Quy tắc tìm giới hạn của tích $u_n \cdot v_n$

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = L$	$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \infty$	$\lim\limits_{n\to+\infty} [u_n \cdot v_n]$
$L>0$	$+\infty$	$+\infty$
$L>0$	$-\infty$	$-\infty$
$L<0$	$+\infty$	$-\infty$
$L<0$	$-\infty$	$+\infty$

② Quy tắc tìm giới hạn của thương $\dfrac{u_n}{v_n}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = L$	$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	Dấu của v_n	$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n}$
L	$\pm\infty$	Tùy ý	0
$L>0$	0	+	$+\infty$
$L>0$	0	−	$-\infty$
$L<0$	0	+	$-\infty$
$L<0$	0	−	$+\infty$

VÍ DỤ 1. Tính các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(2n^3+2n-1\right)$

b) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(n-2n^3\right)$

c) $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{n^2+2n+7}$

d) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n^2-3n}-\sqrt{n+2}\right)$

e) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\sqrt{1+3n^2}\right)$

f) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(3^n-2\cdot 5^n\right)$

Lời giải.

a) Ta có

$$\lim_{n\to+\infty}\left(2n^3+2n-1\right)=\lim_{n\to+\infty}n^3\left(2+\frac{2}{n^2}-\frac{1}{n^3}\right).$$

Do $\lim\limits_{n\to+\infty}n^3=+\infty$ và $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(2+\dfrac{2}{n^2}-\dfrac{1}{n^3}\right)=2>0$ nên $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(2n^3+2n-1\right)=+\infty$.

b) Ta có

$$\lim_{n\to+\infty}\left(n-2n^3\right)=\lim_{n\to+\infty}n^3\left(\frac{1}{n^2}-2\right).$$

Do $\lim\limits_{n\to+\infty} n^3=+\infty$ và $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}-2\right)=-2<0$ nên $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(n-2n^3\right)=-\infty$.

c) Ta có

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt{n^2+2n+7}=\lim_{n\to+\infty} n\sqrt{1+\frac{2}{n}+\frac{7}{n^2}}.$$

Do $\lim\limits_{n\to+\infty} n=+\infty$ và $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{1+\dfrac{2}{n}+\dfrac{7}{n^2}}=1>0$ nên $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{n^2+2n+7}=+\infty$.

d)

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n^2-3n}-\sqrt{n+2}\right)=\lim_{n\to+\infty} n\left[\sqrt{1-\frac{3}{n}}-\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}}\right].$$

Do $\lim\limits_{n\to+\infty} n=+\infty$ và $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\sqrt{1-\dfrac{3}{n}}-\sqrt{\dfrac{1}{n}+\dfrac{2}{n^2}}\right]=1>0$ nên $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n^2-3n}-\sqrt{n+2}\right)=+\infty$.

e) Ta có

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1-\sqrt{1+3n^2}\right)=\lim_{n\to+\infty} n\left(\frac{1}{n}-\sqrt{\frac{1}{n^2}+3}\right).$$

Do $\lim\limits_{n\to+\infty} n=+\infty$ và $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{n}-\sqrt{\dfrac{1}{n^2}+3}\right)=-\sqrt{3}<0$ nên $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\sqrt{1+3n^2}\right)=-\infty$.

f) Ta có

$$\lim_{n\to+\infty}\left(3^n-2\cdot 5^n\right)=\lim_{n\to+\infty} 5^n\left(\frac{3^n}{5^n}-2\right).$$

Do $\lim\limits_{n\to+\infty} 5^n=+\infty$ và $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{3^n}{5^n}-2\right)=-2<0$ nên $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(3^n-2\cdot 5^n\right)=-\infty$.

VÍ DỤ 2. Tính các giới hạn sau

a) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2^n+5^{n+1}}{1+5^n}$

b) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1+2.3^n-7^n}{5^n-2.6^n}$

c) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1-2.3^n+7^n}{2^n(3^{n+1}-5)}$

Lời giải.

a) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2^n+5^{n+1}}{1+5^n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{5^n\left(\frac{2^n}{5^n}+5\right)}{5^n\left(\frac{1}{5^n}+1\right)}=5$.

b) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1+2.3^n-7^n}{5^n-2.6^n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{7^n\left(\dfrac{1}{7^n}+2\dfrac{3^n}{7^n}-1\right)}{6^n\left(\dfrac{5^n}{6^n}-2\right)}=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{7}{6}\right)^n\cdot\dfrac{\dfrac{1}{7^n}+2\dfrac{3^n}{7^n}-1}{\dfrac{5^n}{6^n}-2}$.

Do $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{7}{6}\right)^n=+\infty$ và $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\dfrac{1}{7^n}+2\dfrac{3^n}{7^n}-1}{\dfrac{5^n}{6^n}-2}=\dfrac{1}{2}>0$ nên $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1+2.3^n-7^n}{5^n-2.6^n}=+\infty$.

c) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1-2.3^n+7^n}{2^n(3^{n+1}-5)}=\dfrac{1-2.3^n+7^n}{3\cdot 6^n-5\cdot 2^n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{7^n\left(\dfrac{1}{7^n}-2\dfrac{3^n}{7^n}+1\right)}{6^n\left(3-5\cdot\dfrac{2^n}{5^n}\right)}=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{7}{6}\right)^n\cdot\dfrac{\dfrac{1}{7^n}-2\dfrac{3^n}{7^n}+1}{3-5\cdot\dfrac{2^n}{5^n}}$.

Do $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{7}{6}\right)^n=+\infty$ và $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\dfrac{1}{7^n}-2\dfrac{3^n}{7^n}+1}{3-5\cdot\dfrac{2^n}{5^n}}=\dfrac{1}{3}>0$ nên $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1-2.3^n+7^n}{2^n(3^{n+1}-5)}=+\infty$.

VÍ DỤ 3. Tính các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2n^4+n^2-3}{3n^3-2n^2+1}$

b) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2n^3+n+4}{5n-n^2}$

c) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{(3n-1)(n-2)}{2n-1}$

d) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2n+5}{\sqrt{n^2+1}-n}$

e) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2n+5}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$

f) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{(3n-1)^4(n-2)}{(1-2n)^2}$

Lời giải.

a) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2n^4+n^2-3}{3n^3-2n^2+1}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n^4\left(2+\dfrac{1}{n^2}-\dfrac{3}{n^4}\right)}{n^3\left(3-\dfrac{2}{n}+\dfrac{1}{n^3}\right)}=\lim\limits_{n\to+\infty}n\cdot\dfrac{2+\dfrac{1}{n^2}-\dfrac{3}{n^4}}{3-\dfrac{2}{n}+\dfrac{1}{n^3}}$.

Do $\lim\limits_{n\to+\infty}n=+\infty$ và $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2+\dfrac{1}{n^2}-\dfrac{3}{n^4}}{3-\dfrac{2}{n}+\dfrac{1}{n^3}}=\dfrac{2}{3}>0$ nên $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2n^4+n^2-3}{3n^3-2n^2+1}=+\infty$.

b) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2n^3+n+4}{5n-n^2}=\lim\limits_{n\to+\infty}n\cdot\dfrac{2+\dfrac{1}{n}+\dfrac{4}{n^2}}{\dfrac{5}{n}-1}$.

Do $\lim\limits_{n\to+\infty}n=+\infty$ và $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2+\dfrac{1}{n}+\dfrac{4}{n^2}}{\dfrac{5}{n}-1}=-2<0$ nên $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2n^3+n+4}{5n-n^2}=-\infty$

c) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{(3n-1)(n-2)}{2n-1}=\lim\limits_{n\to+\infty}n\cdot\dfrac{\left(3-\dfrac{1}{n}\right)\left(1-\dfrac{2}{n}\right)}{2-\dfrac{1}{n}}$.

Do $\lim\limits_{n\to+\infty}n=+\infty$ và $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\left(3-\dfrac{1}{n}\right)\left(1-\dfrac{2}{n}\right)}{1-\dfrac{2}{n}}=\dfrac{3}{2}>0$ nên $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{(3n-1)(n-2)}{2n-1}=+\infty$.

d) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2n+5}{\sqrt{n^2+1}-n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2+\dfrac{5}{n}}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}}-1}$. Ta có

$$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(2+\frac{5}{n}\right)=2>0,\ \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}-1\right)=0 \text{ và } \sqrt{1+\frac{1}{n^2}}-1>0,\forall n\in\mathbf{N}^*$$

nên $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2n+5}{\sqrt{n^2+1}-n}=+\infty$.

e) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2n+5}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2+\dfrac{5}{n}}{\sqrt{\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}}-\sqrt{\dfrac{1}{n}}}$.

Do $\begin{cases}\lim\limits_{n\to+\infty}(2+\dfrac{5}{n})=2>0\\ \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt{\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}}-\sqrt{\dfrac{1}{n}}\right)=0\\ \sqrt{\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}}-\sqrt{\dfrac{1}{n}}>0,\forall n\in\mathbf{N}^*\end{cases}$ nên $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2n+5}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}=+\infty$

f) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{(3n-1)^4(n-2)}{(1-2n)^2}=\lim\limits_{n\to+\infty}n^3\dfrac{\left(3-\dfrac{1}{n}\right)^4\left(1-\dfrac{2}{n}\right)}{\left(\dfrac{1}{n}-2\right)^2}$.

Do $\lim\limits_{n\to+\infty}n^3=+\infty$ và $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\left(3-\dfrac{1}{n}\right)^4\left(1-\dfrac{2}{n}\right)}{\left(\dfrac{1}{n}-2\right)^2}=\dfrac{81}{4}>0$ nên $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{(3n-1)^4(n-2)}{(1-2n)^2}=+\infty$.

4 Tổng của cấp số nhân lùi vô hạn

- Cấp số nhân vô hạn (u_n) có công bội q thoả mãn $|q|<1$ được gọi là *cấp số nhân lùi vô hạn*.
- Cho cấp số nhân lùi vô hạn (u_n), Xét $S=u_1+u_2+u_3+...+u_n+....$ Khi đó, ta có công thức tính

$$\boxed{S = \frac{u_1}{1-q}}$$

VÍ DỤ 1. Tính các tổng sau:

a) $S = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{3^n} + ...$

b) $S = 16 - 8 + 4 - 2 + ...$

Lời giải.

a) Xét dãy số $(u_n) : \frac{1}{3}, \frac{1}{3^2}, \cdots, \frac{1}{3^n}, \cdots$ là một cấp số nhân lùi vô hạn có $u_1 = \frac{1}{3}$, $q = \frac{1}{3}$.

Do đó $S = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{3^n} + ... = \dfrac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$.

b) Xét dãy số $(u_n) : 16, -8, 4, -2, ...$ là một cấp sốn nhân lùi vô hạn có $u_1 = 16$, $q = -\frac{1}{2}$.

Do đó $S = 16 - 8 + 4 - 2 + ... = \dfrac{16}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{32}{3}$.

VÍ DỤ 2. Hãy biểu diễn các số thập phân vô hạn tuần hoàn sau dưới dạng phân số.

a) $A = 0,353535....$

b) $B = 5,231231....$

Lời giải.

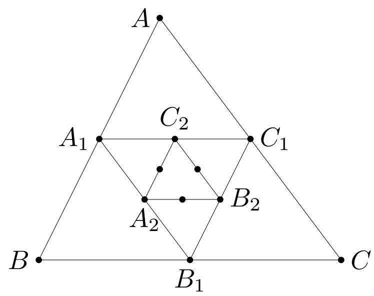
a) Ta có $A = 0,353535... = 0,35 + 0,0035 + ... = \frac{35}{10^2} + \frac{35}{10^4} + ... = \dfrac{\frac{35}{10^2}}{1 - \frac{1}{10^2}} = \frac{35}{99}$.

b) Ta có $B = 5,231231... = 5 + 0,231 + 0,000231 + ... = 5 + \frac{231}{10^3} + \frac{231}{10^6} + ... = 5 + \dfrac{\frac{231}{10^3}}{1 - \frac{1}{10^3}} = 5 + \frac{231}{999} = \frac{1742}{333}$.

VÍ DỤ 3. Một bệnh nhân hàng ngày phải uống một viên thuốc 150 mg. Sau ngày đầu, trước mỗi lần uống, hàm lượng thuốc cũ trong cơ thể vẫn còn 5%. Tính lượng thuốc có trong cơ thể sau khi uống viên thuốc của ngày thứ 5 . Ước tính lượng thuốc trong cơ thể nếu bệnh nhân sử dụng thuốc trong một thời gian dài.

Lời giải.

VÍ DỤ 4.
Tam giác mà ba đỉnh của nó là ba trung điểm ba cạnh của tam giác ABC được gọi là *tam giác trung bình* của tam giác ABC. Ta xây dựng dãy các tam giác $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$, $A_3B_3C_3$, ...sao cho $A_1B_1C_1$ là một tam giác giác đều cạnh bằng 3 và với mỗi số nguyên dương $n \geq 2$, tam giác $A_nB_nC_n$ là tam giác trung bình của tam giác $A_{n-1}B_{n-1}C_{n-1}$. Với mỗi số nguyên dương n, kí hiệu S_n tương ứng là diện tích hình tròn ngoại tiếp tam giác $A_nB_nC_n$. Tính tổng $S = S_1 + S_2 + \cdots + S_n + \cdots$.

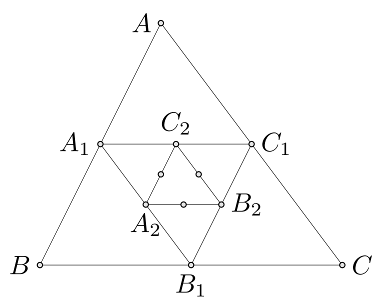


Lời giải.

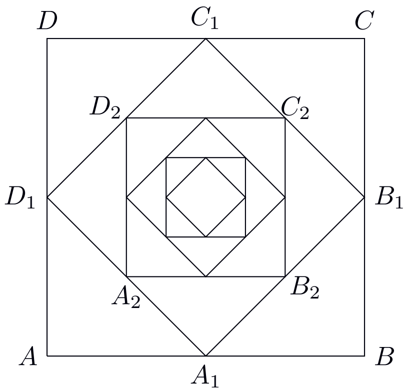
Ta có: $S_1 = \pi \cdot \left(3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 = 3\pi$; $S_2 = \pi \cdot \left(\frac{3}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{3\pi}{4} = \frac{1}{4} \cdot S_1$; $S_3 = \pi \cdot \left(\frac{3}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{3\pi}{16} = \frac{1}{4} \cdot S_2$

Ta có S_1; S_2; S_3;...;S_n; ...tạo thành cấp số nhân lùi vô hạn với số hạng đầu là $S_1 = 3\pi$ và công bội $q = \frac{1}{4}$.

Suy ra $S = S_1 + S_2 + \cdots + S_n + \cdots = \frac{S_n}{1-q} = \dfrac{3\pi}{1 - \frac{1}{4}} = 4\pi$.



VÍ DỤ 5. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh bằng 2. Hình vuông $A_1B_1C_1D_1$ có các đỉnh là trung điểm của các cạnh của hình vuông $ABCD$, hình vuông $A_2B_2C_2D_2$ có các đỉnh là trung điểm của các cạnh của hình vuông $A_1B_1C_1D_1$, hình vuông $A_3B_3C_3D_3$ có các đỉnh là trung điểm của các cạnh của hình vuông $A_2B_2C_2D_2$,..., hình vuông $A_nB_nC_nD_n$ có các đỉnh là trung điểm của các cạnh của hình vuông $A_{n-1}B_{n-1}C_{n-1}D_{n-1}$,... (*quá trình chia nhỏ này được lặp lại vô hạn*)



Gọi S_1, S_2, S_3,...,S_n,... lần lượt là diện tích hình vuông $A_1B_1C_1D_1$, $A_2B_2C_2D_2$, $A_3B_3C_3D_3$,..., $A_nB_nC_nD_n$,.... Tính tổng $S_1+S_2+S_3+...+S_n+....$

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

BÀI 1. Cho hai dãy số $(u_n),(v_n)$ với $u_n=3+\dfrac{1}{n}; v_n=5-\dfrac{2}{n^2}$. Tính các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

b) $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n+v_n)$, $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n-v_n)$, $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n\cdot v_n)$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{u_n}{v_n}$.

Lời giải.

a) Ta có

$$\lim_{n\to+\infty} u_n=\lim_{n\to+\infty}\left(3+\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to+\infty}3+\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\right)=3+0=3.$$
$$\lim_{n\to+\infty} v_n=\lim_{n\to+\infty}\left(5-\frac{2}{n^2}\right)=\lim_{n\to+\infty}5-\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{n^2}\right)=5-0=5.$$

b) Ta có

$$\lim_{n\to+\infty}(u_n+v_n)=\lim_{n\to+\infty}u_n+\lim_{n\to+\infty}v_n=3+5=8.$$
$$\lim_{n\to+\infty}(u_n-v_n)=\lim_{n\to+\infty}u_n-\lim_{n\to+\infty}v_n=3-5=-2.$$
$$\lim_{n\to+\infty}(u_n\cdot v_n)=\lim_{n\to+\infty}u_n\cdot\lim_{n\to+\infty}v_n=3\cdot5=15.$$
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{u_n}{v_n}=\frac{3}{5}.$$

BÀI 2. Tính các giới hạn sau

a) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{3n+2}{2n+3}$.

b) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{4n^2-1}{2n^2+n}$.

c) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+2n}-3}{n+2}$.

d) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+2n}-n-1}{\sqrt{n^2+n}+n}$.

Lời giải.

a) Chia cả tử và mẫu cho n có bậc lớn nhất. Ta có : $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{3n+2}{2n+3}=\lim\dfrac{3+\dfrac{2}{n}}{2+\dfrac{3}{n}}=\dfrac{3}{2}$.

b) Tương tự: $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{4n^2-1}{2n^2+n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{4-\dfrac{1}{n^2}}{2+\dfrac{1}{n}}=2$.

c) Ta có : $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sqrt{1+\dfrac{2}{n}}-\dfrac{3}{n}}{1+\dfrac{2}{n}}=1$.

d) Tương tự: $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sqrt{1+\dfrac{2}{n}}-1-\dfrac{1}{n}}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}+1}=0.$

BÀI 3. Tính các giới hạn sau

a) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{7.5^n-2.7^n}{5^n-5.7^n}$.

b) $\lim\dfrac{4^{n+1}+6^{n+2}}{5^n+8^n}$.

Lời giải.

a) Ta có : $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{7.5^n-2.7^n}{5^n-5.7^n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{7.\dfrac{5^n}{7^n}-2}{\dfrac{5^n}{7^n}-5}=\dfrac{2}{5}.$

b) $\lim\dfrac{4^{n+1}+6^{n+2}}{5^n+8^n}=\lim\dfrac{4.\left(\dfrac{1}{2}\right)^n+36\left(\dfrac{3}{4}\right)^n}{\left(\dfrac{5}{8}\right)^n+1}=0.$

BÀI 4. Tính các giới hạn sau

a) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n^2+2n}-n\right)$.

b) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n^3+2n}-n^2\right)$.

c) $\lim(\sqrt{n^2+3n+2}-n+1)$.

d) $\lim(\sqrt{n^2+2n+3}-1+n)$.

Lời giải.

a) Ta có

$$\begin{aligned}\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n^2+2n}-n\right)&=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\left(\sqrt{n^2+2n}-n\right)\left(\sqrt{n^2+2n}+n\right)}{\left(\sqrt{n^2+2n}+n\right)}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{(n^2+2n)-n^2}{\left(\sqrt{n^2+2n}+n\right)}\\&=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2n}{n\left(\sqrt{1+\dfrac{2}{n}}+1\right)}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2}{\sqrt{1+\dfrac{2}{n}}+1}\\&=\dfrac{2}{\sqrt{1-0}+1}=1\end{aligned}$$

b) Ta có

$$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n^3+2n}-n^2\right)=\lim\limits_{n\to+\infty}\left[n^2\left(\sqrt{\dfrac{1}{n}+\dfrac{2}{n^3}}-1\right)\right]$$

Mà $\lim\limits_{n\to+\infty}n^2=+\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt{\dfrac{1}{n}+\dfrac{2}{n^3}}-1\right)=(\sqrt{0+0}-1)=-1<0$ nên

$$\lim\limits_{n\to+\infty}\left[n^2\left(\sqrt{\dfrac{1}{n}+\dfrac{2}{n^3}}-1\right)\right]=-\infty$$

Vậy $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n^3+2n}-n^2\right)=-\infty$.

c) Ta có $\lim(\sqrt{n^2+3n+2}-(n-1))=\lim\dfrac{(\sqrt{n^2+3n+2}-(n-1))(\sqrt{n^2+3n+2}+n-1)}{\sqrt{n^2+3n+2}+n-1}$

$=\lim\dfrac{(\sqrt{n^2+3n+2})^2-(n-1)^2}{\sqrt{n^2+3n+2}+n-1}=\lim\dfrac{5n+1}{\sqrt{n^2+3n+2}+n-1}$

$=\lim\dfrac{5+\dfrac{1}{n}}{\sqrt{1+\dfrac{3}{n}+\dfrac{2}{n^2}}+1-\dfrac{1}{n}}=\dfrac{5}{2}.$

d)

$$\begin{aligned}\lim\left(\sqrt{n^2+2n+3}-1+n\right)=\lim\left[\sqrt{n^2+2n+3}-(1-n)\right] &= \lim_{n\to+\infty}\frac{n^2+2n+3-(1-n)^2}{\sqrt{n^2+2n+3}+n-1}\\ &= \lim_{n\to+\infty}\frac{4n+2}{\sqrt{n^2+2n+3}+n-1}\\ &= \lim_{n\to+\infty}\frac{4+\frac{2}{n}}{\sqrt{1+\frac{2}{n}+\frac{3}{n}}+1-\frac{1}{n}}=2.\end{aligned}$$

BÀI 5. Tính các giới hạn sau

a) $\lim\dfrac{\sin 10n+\cos 10n}{n^2+1}$.

b) $\lim\dfrac{1-\sin n\pi}{n+1}$.

Lời giải.

a) Vì $\left|\dfrac{\sin 10n+\cos 10n}{n^2+1}\right|<\dfrac{\sqrt{2}}{n^2}$ mà $\lim\dfrac{\sqrt{2}}{n^2}=0\Rightarrow\lim\dfrac{\sin 10n+\cos 10n}{n^2+1}=0$.

b) Vì $\left|\dfrac{1-\sin n\pi}{n+1}\right|\leq\dfrac{2}{n}$ mà $\lim\dfrac{2}{n}=0\Rightarrow\lim\dfrac{1-\sin n\pi}{n+1}=0$.

BÀI 6. Tính tổng của các cấp số nhân lùi vô hạn sau

a) $-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{8}+\cdots+\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n+\cdots$.

b) $\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{16}+\dfrac{1}{64}+\cdots+\left(\dfrac{1}{4}\right)^n+\cdots$.

Lời giải.

a) Tổng trên là tổng của cấp số nhân lùi vô hạn có số hạng đầu $u_1=-\dfrac{1}{2}$ và công bội $q=-\dfrac{1}{2}$ nên

$$-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\cdots+\left(-\frac{1}{2}\right)^n+\cdots=\frac{-\frac{1}{2}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=-\frac{1}{3}.$$

b) Tổng trên là tổng của cấp số nhân lùi vô hạn có số hạng đầu $u_1=\dfrac{1}{4}$ và công bội $q=\dfrac{1}{4}$ nên

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\cdots+\left(\frac{1}{4}\right)^n+\cdots=\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{1}{3}.$$

BÀI 7. Viết số thập phân vô hạn tuần hoàn $0{,}444\ldots$ dưới dạng một phân số.

Lời giải.

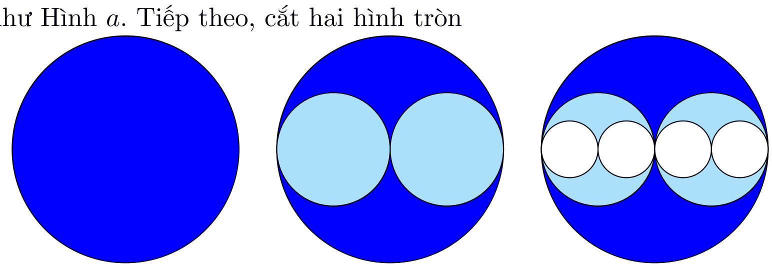
Ta có

$$0{,}444\ldots=0{,}4+0{,}04+0{,}004+\ldots=0{,}4+0{,}4\cdot\frac{1}{10}+0{,}4\cdot\frac{1}{10^2}+\ldots$$

Do đó số $0{,}444\ldots$ là tổng của cấp số nhân lùi vô hạn có số hạng đầu $u_1=0,4$ và công bội $q=\dfrac{1}{10}$ nên

$$0{,}444\ldots=\frac{0{,}4}{1-\frac{1}{10}}=\frac{4}{9}.$$

BÀI 8. Từ tờ giấy, cắt một hình tròn bán kính R (cm) như Hình a. Tiếp theo, cắt hai hình tròn bán kính $\dfrac{R}{2}$ rồi chồng lên hình tròn đầu tiên như Hình b. Tiếp theo, cắt bốn hình tròn bán kính $\dfrac{R}{4}$ rồi chồng lên các hình trước như Hình c. Cứ thế tiếp tục mãi. Tính tổng diện tích của các hình tròn.



a) b) c)

Lời giải.

Diện tích của các hình tròn trong các lần cắt là

a) Lần thứ 1: $S_1 = \pi R^2$.

b) Lần thứ 2: $S_2 = 2 \cdot \pi \left(\dfrac{R}{2}\right)^2 = \dfrac{\pi R^2}{2}$.

c) Lần thứ 3: $S_2 = 4 \cdot \pi \left(\dfrac{R}{4}\right)^2 = \dfrac{\pi R^2}{2^2}$.

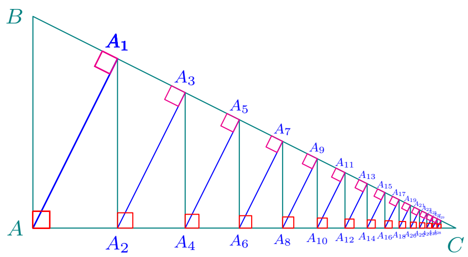
d) Lần thứ n: $S_n = \dfrac{\pi R^2}{2^{n-1}}$.

Do đó diện tích các hình tròn lập thành một cấp số nhân lùi vô hạn có số hạng đầu $S_1 = \pi R^2$ và công bội $q = \dfrac{1}{2}$ nên tổng diện tích các hình tròn là

$$S_1 + S_2 + \cdots = \frac{\pi R^2}{1 - \frac{1}{2}} = 2\pi R^2.$$

BÀI 9.

Cho tam giác vuông ABC vuông tại A, có $AB = h$ và góc B bằng α (Hình vẽ bên). Từ A kẻ $AA_1 \perp BC$, từ A_1 kẻ $A_1A_2 \perp AC$, sau đó lại kẻ $A_2A_3 \perp BC$. Tiếp tục quá trình trên, ta được đường gấp khúc vô hạn $AA_1A_2A_3\ldots$ Tính độ dài đường gấp khúc này theo h và α.



Lời giải.

- Xét tam giác vuông ABA_1 có $AA_1 = AB \cdot \sin\alpha = h\sin\alpha$.
- Xét tam giác vuông AA_2A_1 có $\widehat{BAA_1} = \widehat{AA_1A_2}$.
  Mặt khác $\widehat{BAA_1} + \widehat{ABC} = \widehat{AA_1A_2} + \widehat{A_1AA_2} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{A_1AA_2} = \widehat{ABC} = \alpha$.
  Suy ra $A_1A_2 = AA_1 \cdot \sin\alpha = h\sin^2\alpha$.
- Lập luận tương tự trên ta có $A_{n-1}A_n = h\sin^n\alpha$.

Như vậy $AA_1A_2A_3\ldots = h\sin\alpha + h\sin^2\alpha + h\sin^3\alpha + h\sin^4\alpha\ldots$ là tổng lùi vô hạn của một cấp số nhân có số hạng đầu $u_1 = h\sin\alpha$ và công bội là $\sin\alpha$. Do đó $AA_1A_2A_3\ldots = \dfrac{h\sin\alpha}{1-\sin\alpha}$.

D. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Phần I. Mỗi câu hỏi học sinh chọn một trong bốn phương án A, B, C, D.

CÂU 1. Trong các mệnh đề dưới đây, mệnh đề nào **sai**?

(A) Nếu $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ và $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = a > 0$ thì $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_nv_n) = +\infty$.

(B) Nếu $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \neq 0$ và $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \pm\infty$ thì $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right) = 0$.

(C) Nếu $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a > 0$ và $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ thì $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right) = +\infty$.

(D) Nếu $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a < 0$ và $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ và $v_n > 0$ với mọi n thì $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right) = -\infty$.

Lời giải.

Nếu $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a > 0$ và $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ thì $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right) = +\infty$ là mệnh đề **sai** vì chưa rõ dấu của v_n là dương hay âm.

Chọn đáp án (C) .... □

CÂU 2. Cho dãy số (u_n) có $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 3$, dãy số (v_n) có $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 5$. Khi đó $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_nv_n)$ bằng

(A) 15. (B) 8. (C) 5. (D) 3.

Lời giải.

Nếu $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = b$ thì $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n v_n) = ab$. Suy ra

$$\lim_{n\to+\infty} (u_n v_n) = 3\cdot 5 = 15.$$

Chọn đáp án (A) .... □

CÂU 3. Cho $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -3$, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 2$. Khi đó $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n - v_n)$ bằng

(A) -5. (B) -1. (C) 2. (D) 0.

Lời giải.

Nếu $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = b$ thì $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n - v_n) = a - b$. Suy ra

$$\lim_{n\to+\infty} (u_n - v_n) = -3 - 2 = -5.$$

Chọn đáp án (A) .... □

CÂU 4. Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + 3) = 0$. Giá trị $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ bằng

(A) 3. (B) -3. (C) 2. (D) 0.

Lời giải.

Ta có

$$\lim_{n\to+\infty} (u_n - 3) = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n = -3.$$

Chọn đáp án (B) .... □

CÂU 5. Khẳng định nào sau đây là đúng?

(A) Ta nói dãy số (u_n) có giới hạn là số a khi $n \to +\infty$, nếu $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n - a) = 0$.

(B) Ta nói dãy số (u_n) có giới hạn là 0 khi n dần tới vô cực, nếu $|u_n|$ có thể lớn hơn một số dương tùy ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi.

(C) Ta nói dãy số (u_n) có giới hạn là $+\infty$ khi $n \to +\infty$, nếu u_n có thể nhỏ hơn một số dương bất kì, kể từ một số hạng nào đó trở đi.

(D) Ta nói dãy số (u_n) có giới hạn là $-\infty$ khi $n \to +\infty$, nếu u_n có thể lớn hơn một số dương bất kì, kể từ một số hạng nào đó trở đi.

Lời giải.

Theo định lí giới hạn hữu hạn của dãy số, dãy số (u_n) có giới hạn là số a khi $n \to +\infty$, nếu $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n - a) = 0$.

Chọn đáp án (A) .... □

CÂU 6. Cho các dãy số (u_n), (v_n) và $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$. Giá trị $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ bằng

(A) 1. (B) 0. (C) $-\infty$. (D) $+\infty$.

Lời giải.

Dựa vào tính chất giới hạn dãy số, ta có nếu $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ là một số hữu hạn và $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ thì $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{u_n}{v_n}\right) = 0$.

Chọn đáp án (B) .... □

CÂU 7. Trong các khẳng định dưới đây, có bao nhiêu khẳng định đúng?

(I) $\lim\limits_{n\to+\infty} n^k = +\infty$ với k nguyên dương.

(II) $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$ nếu $|q| < 1$.

(III) $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$ nếu $q > 1$.

(A) 0. (B) 1. (C) 3. (D) 2.

Lời giải.

(I) $\lim\limits_{n\to+\infty} n^k = +\infty$ với k nguyên dương nên (I) là khẳng định đúng.

(II) $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$ nếu $|q| < 1$ nên (II) là khẳng định sai.

(III) $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$ nếu $q > 1$ nên (III) là khẳng định đúng.

Vậy số khẳng định đúng là 2.

Chọn đáp án D .... □

CÂU 8. Phát biểu nào sau đây là **sai**?

A $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = c$ với $u_n = c$ là hằng số.

B $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$ với $|q| > 1$.

C $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$.

D $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^k} = 0$ với $k > 1$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$ với $|q| < 1$.

Chọn đáp án B .... □

CÂU 9. Dãy số nào sau đây có giới hạn bằng 0?

A $\left(\dfrac{4}{e}\right)^n$.

B $\left(\dfrac{5}{3}\right)^n$.

C $\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$.

D $\left(-\dfrac{5}{3}\right)^n$.

Lời giải.

Vì $\left|\dfrac{1}{3}\right| = \dfrac{1}{3} < 1$ nên $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{3}\right)^n = 0$.

Chọn đáp án C .... □

CÂU 10. Giá trị $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^2}$ bằng

A $+\infty$.

B 1.

C $-\infty$.

D 0.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^k} = 0$ với k là số nguyên dương bất kì nên $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^2} = 0$.

Chọn đáp án D .... □

CÂU 11. Dãy số nào có giới hạn khác 0?

A $\left(\dfrac{4}{5}\right)^n$.

B $2 + \left(\dfrac{3}{5}\right)^n$.

C $\dfrac{1}{2n}$.

D $\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{n\to+\infty} \left[2 + \left(\dfrac{3}{5}\right)^n\right] = \lim\limits_{n\to+\infty} 2 + \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{3}{5}\right)^n = 2 \neq 0$.

Chọn đáp án B .... □

CÂU 12. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

A $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n = +\infty$.

B $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(-\dfrac{5}{n^3}\right)^n = -\infty$.

C $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$.

D $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{4}{3}\right)^n = 0$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{n\to+\infty} c = c$ với c là hằng số nên $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$.

Chọn đáp án C .... □

Phần II. Trong mỗi ý a), b), c) và d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.

CÂU 1. Cho hai dãy số (u_n), (v_n) với $u_n = \sqrt{9n^2 + 2n} - 3n$, $v_n = -2 + 5n$.

Mệnh đề	Đ	S
a) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{v_n} = 0$.	X	
b) $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$.		X

Mệnh đề	Đ	S
c) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n + 3n}{v_n} = \dfrac{3}{5}$.	X	
d) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.		X

Lời giải.

a) Đ $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{v_n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{-2+5n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{n}\cdot\dfrac{1}{-\dfrac{2}{n}+5}\right)=0\cdot\dfrac{1}{5}=0.$

b) S Ta có
$$\lim_{n\to+\infty}v_n=\lim_{n\to+\infty}(-2+5n)=\lim_{n\to+\infty}\left[n\left(-\frac{2}{n}+5\right)\right].$$
Mà $\lim\limits_{n\to+\infty}n=+\infty$ và $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-\dfrac{2}{n}+5\right)=5$ nên $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=+\infty$.

c) Đ $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{u_n+3n}{v_n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sqrt{9n^2+2n}}{-2+5n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n\cdot\sqrt{9+\dfrac{2}{n^2}}}{n\cdot\left(-\dfrac{2}{n}+5\right)}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sqrt{9+\dfrac{2}{n^2}}}{-\dfrac{2}{n}+5}=\dfrac{3}{5}.$

d) S Ta có
$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}u_n&=\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{9n^2+2n}-3n\right)\\&=\lim_{n\to+\infty}\frac{2n}{\sqrt{9n^2+2n}+3n}\\&=\lim_{n\to+\infty}\frac{2n}{n\cdot\left(\sqrt{9+\dfrac{2}{n^2}}+3\right)}\\&=\lim_{n\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{9+\dfrac{2}{n^2}}+3}\\&=\frac{2}{3+3}\\&=\frac{1}{3}.\end{aligned}$$

Chọn đáp án | a đúng | b sai | c đúng | d sai | ....

CÂU 2. Cho hai dãy số (u_n), (v_n) với $u_n=4\cdot3^n-7^{n+1}$, $v_n=7^n$.

Mệnh đề	Đ	S
a) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{v_n}=0.$	X	
b) $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=+\infty.$	X	

Mệnh đề	Đ	S
c) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{u_n-v_n}{3u_n+2v_n}=\dfrac{8}{19}.$	X	
d) $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=+\infty.$		X

Lời giải.

a) Đ $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{v_n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{7}\right)^n=0.$

b) Đ $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=\lim\limits_{n\to+\infty}7^n=+\infty.$

c) Đ $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{u_n-v_n}{3u_n+2v_n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{4\cdot3^n-8\cdot7^n}{12\cdot3^n-19\cdot7^n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{4\left(\dfrac{3}{7}\right)^n-8}{12\cdot\left(\dfrac{3}{7}\right)^n-19}=\dfrac{0-8}{0-19}=\dfrac{8}{19}.$

d) S Ta có
$$\lim_{n\to+\infty}u_n=\lim_{n\to+\infty}\left(4\cdot3^n-7^{n+1}\right)=\lim_{n\to+\infty}\left[7^n\left(4\cdot\left(\frac{3}{7}\right)^n-7\right)\right].$$
Mà $\lim\limits_{n\to+\infty}7^n=+\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[4\cdot\left(\dfrac{3}{7}\right)^n-7\right]=-7<0$ nên suy ra $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=-\infty$.

Chọn đáp án | a đúng | b đúng | c đúng | d sai | ....

CÂU 3. Cho hai dãy số (u_n) và (v_n) có $u_n = \dfrac{1}{n+1}$, $v_n = \dfrac{3}{n+3}$.

Mệnh đề	Đ	S
a) Ta nói dãy số (u_n) có giới hạn là 0 khi n dần tới vô cực, vì $\lvert u_n \rvert$ có thể nhỏ hơn một số dương tùy ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi.	X	
b) $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n+1) = 1$.	X	
c) $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0$.	X	
d) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{u_n}{v_n} = \dfrac{1}{3}$.	X	

Lời giải.

a) Đ Theo định nghĩa, ta có dãy số (u_n) có giới hạn là 0 khi n dần tới vô cực, vì $\lvert u_n \rvert$ có thể nhỏ hơn một số dương tùy ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi.

b) Đ $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n+1) = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{3}{n+3}+1\right) = 0+1 = 1$.

c) Đ Ta có

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}(u_n - v_n) &= \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{3}{n+3}\right)\\ &= \lim_{n\to+\infty}\frac{-2n}{(n+1)(n+3)}\\ &= \lim_{n\to+\infty}\frac{-\frac{2}{n}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{3}{n}\right)}\\ &= 0.\end{aligned}$$

d) Đ $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{u_n}{v_n} = \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{n+1}}{\frac{3}{n+3}} = \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n+3}{3(n+1)} = \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1+\frac{3}{n}}{3\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \dfrac{1}{3}$.

Chọn đáp án | a đúng | b đúng | c đúng | d đúng | ....

CÂU 4. Cho các dãy số (u_n), (v_n) có $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -5$, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

Mệnh đề	Đ	S
a) Ta nói dãy số (u_n) có giới hạn là -5 khi n dần tới vô cực, nếu $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n-5) = 0$.		X
b) $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n+7) = 2$.	X	
c) $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n \cdot v_n) = +\infty$.		X
d) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{u_n}{v_n} = 0$.	X	

Lời giải.

a) S $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -5$ nếu $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n-5) = -10$.

b) Đ $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n+7) = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n + \lim\limits_{n\to+\infty} 7 = -5+7 = 2$.

c) S Do $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -5 < 0$ và $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ nên $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n \cdot v_n) = -\infty$.

d) Đ Do $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -5$ và $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ nên $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{u_n}{v_n} = 0$.

Chọn đáp án | a sai | b đúng | c sai | d đúng | ....

Phần III. Học sinh điền kết quả vào ô trống.

CÂU 1. Tính tích các giá trị nguyên của a thỏa mãn $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n^2-8n}-n+a^2\right)=0$.

Đáp án: | − | 4 | | |

Lời giải.

Ta có

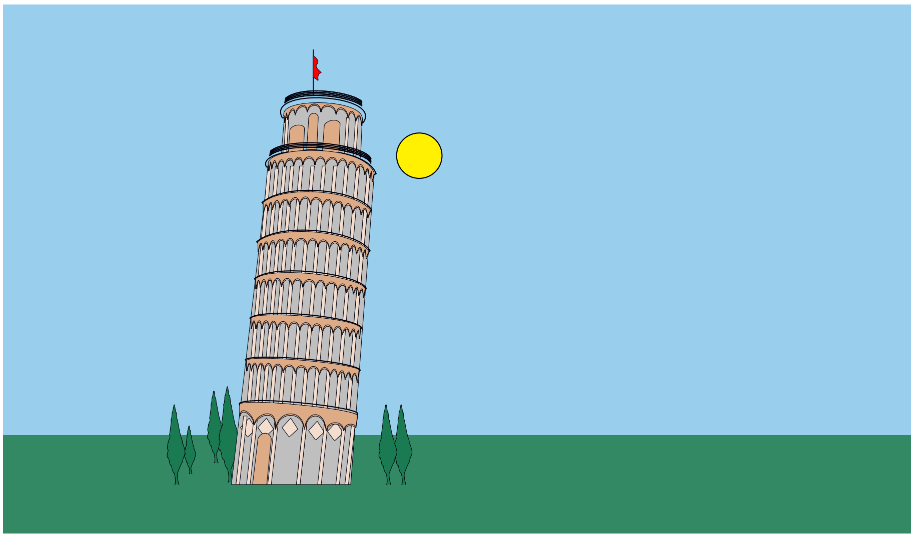
$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n^2-8n}-n+a^2\right)&=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n^2-8n-n^2}{\sqrt{n^2-8n}+n}+a^2\right)\\&=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{-8n}{n\sqrt{1-\frac{8}{n}}+n}+a^2\right)\\&=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{-8}{\sqrt{1-\frac{8}{n}}+1}+a^2\right)\\&=-4+a^2.\end{aligned}$$

Để $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n^2-8n}-n+a^2\right)=0$ thì $-4+a^2=0$ hay $a=\pm2$.

Suy ra tích các giá trị nguyên của a là -4.

Đáp án: $\boxed{-4}$ ....

CÂU 2. Từ độ cao 55,8 m của tháp nghiêng Pisa nước Ý, người ta thả một quả bóng cao su chạm xuống đất (như hình vẽ). Giả sử mỗi lần chạm đất quả bóng lại nảy lên độ cao bằng $\frac{1}{10}$ độ cao mà quả bóng đạt được trước đó. Tính tổng độ dài quãng đường di chuyển của quả bóng tính từ lúc thả ban đầu cho đến khi quả bóng đó dừng hẳn trên mặt đất.



Đáp án: | 6 | 2 | | |

Lời giải.

Gọi (u_n) là dãy số thể hiện quãng đường di chuyển của quả bóng sau mỗi lần chạm đất. Ta có

$$u_1=55{,}8\,;\ u_2=\frac{1}{10}u_1\,;\ u_3=\left(\frac{1}{10}\right)^2u_1\,;\ \ldots\,;\ u_n=\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}u_1.$$

Khi đó dãy (u_n) lập thành một cấp số nhân lùi vô hạn có số hạng đầu $u_1=55{,}8$ và công bội $q=\frac{1}{10}$ thỏa mãn $|q|<1$. Suy ra

$$S=u_1+u_2+\cdots+u_n=\frac{55{,}8}{1-\frac{1}{10}}=62\text{ m}.$$

Vậy tổng quãng đường di chuyển của quả bóng tính từ lúc thả ban đầu đến khi quả bóng dừng hẳn là 62 m.

Đáp án: $\boxed{62}$ ....

CÂU 3. Một bệnh nhân hàng ngày phải uống một viên thuốc 150 mg. Sau ngày đầu, trước mỗi lần uống, hàm lượng thuốc cũ trong cơ thể vẫn còn 5%. Ước tính lượng thuốc trong cơ thể nếu bệnh nhân sử dụng thuốc trong một thời gian dài. (Kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).

Đáp án: | 1 | 5 | 7 | |

Lời giải.

Đặt $r = 5\%$.

- Sau khi uống viên thuốc ngày thứ 1, hàm lượng thuốc trong cơ thể là $u_1 = 150$ mg.
- Hàm lượng thuốc trong cơ thể sau khi uống viên thuốc ngày thứ 2 là
$$u_2 = 5\% \cdot u_1 + 150 = 5\% \cdot 150 + 150 = 150(1 + r).$$
- Hàm lượng thuốc trong cơ thể sau khi uống viên thuốc ngày thứ 3 là
$$u_3 = 5\% \cdot u_2 + 150 = 150r(1 + r) + 150 = 150(r^2 + r + 1).$$
- Hàm lượng thuốc trong cơ thể sau khi uống viên thuốc ngày thứ 4 là
$$u_4 = 5\% \cdot u_3 + 150 = 150r(r^2 + r + 1) + 150 = 150(r^3 + r^2 + r + 1).$$
- Hàm lượng thuốc trong cơ thể nếu bệnh nhân sử dụng liên tục trong n ngày là
$$u_n = 150\left(r^{n-1} + r^{n-2} + \cdots + r + 1\right).$$

Suy ra nếu sử dụng thuốc lâu ngày thì hàm lượng thuốc trong cơ thể là
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty}\left[150\left(r^{n-1} + r^{n-2} + \cdots + r + 1\right)\right] = 150 \cdot \frac{1}{1-r} = 150 \cdot \frac{100}{95} \approx 157 \text{ mg}.$$

Đáp án: 157 .... □

CÂU 4. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số a thuộc khoảng $(-10; 10)$ để $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[5n - 3(a^2-2)n^3\right] = -\infty$?

Đáp án: | 1 | 6 | | |

Lời giải.

Ta có
$$\lim_{n\to+\infty}\left[5n - 3(a^2-2)n^3\right] = \lim_{n\to+\infty}\left[n^3\left(\frac{5}{n^2} - 3(a^2-2)\right)\right] = \lim_{n\to+\infty}\left[n^3\left(\frac{5}{n^2} + 3(2-a^2)\right)\right].$$

Do $\lim\limits_{n\to+\infty} n^3 = +\infty$ nên điều kiện để $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[5n - 3(a^2-2)n^3\right] = -\infty$ là
$$2 - a^2 < 0 \Leftrightarrow a^2 > 2.$$

Mặt khác a là số nguyên thuộc khoảng $(-10; 10)$ nên $a \in \{-9; -8; \cdots; -3; -2; 2; 3; \cdots; 8; 9\}$.
Vậy có 16 giá trị của a thỏa mãn.
Đáp án: 16 .... □

CÂU 5. Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{9}\left[u_n + 2\sqrt{4u_n+1} + 2\right], \ \forall n \geq 1 \end{cases}$. Tính $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Đáp án: | 0 | , | 7 | 5 |

Lời giải.

Nhận xét: $u_n > 0$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.
Lại có
$$\begin{aligned} u_{n+1} = \frac{1}{9}\left[u_n + 2\sqrt{4u_n+1} + 2\right] &\Leftrightarrow 9u_{n+1} = u_n + 2\sqrt{4u_n+1} + 2 \\ &\Leftrightarrow 36u_{n+1} + 9 = 4u_n + 1 + 8\sqrt{4u_n+1} + 16 \\ &\Leftrightarrow 9\left(4u_{n+1}+1\right) = \left(\sqrt{4u_n+1} + 4\right)^2 \\ &\Leftrightarrow 3\sqrt{4u_{n+1}+1} = \sqrt{4u_n+1} + 4. \end{aligned}$$

Đặt $v_n = \sqrt{4u_n+1}$. Khi đó $v_1 = 3$ và
$$3v_{n+1} = v_n + 4 \Leftrightarrow 3v_{n+1} - 6 = v_n - 2 \Leftrightarrow v_{n+1} - 2 = \frac{1}{3}\left(v_n - 2\right).$$

Đặt $x_n = v_n - 2$. Khi đó $x_1 = 1$ và $x_{n+1} = \dfrac{1}{3}x_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Dễ thấy (x_n) là cấp số nhân với số hạng đầu $x_1 = 1$ và công bội $q = \dfrac{1}{3}$. Suy ra số hạng tổng quát của (x_n) là

$$x_n = 1 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \frac{3}{3^n}.$$

Khi đó

$$v_n = x_n + 2 = \frac{3}{3^n} + 2 = \frac{3 + 2 \cdot 3^n}{3^n},$$
$$u_n = \frac{v_n^2 - 1}{4} = \frac{1}{4}\left[\left(\frac{3 + 2 \cdot 3^n}{3^n}\right)^2 - 1\right] = \frac{1}{4}\left(3 + \frac{12}{3^n} + \frac{9}{3^{2n}}\right).$$

Suy ra

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} \left[\frac{1}{4}\left(3 + \frac{12}{3^n} + \frac{9}{3^{2n}}\right)\right] = \frac{3}{4} = 0{,}75.$$

Đáp án: 0,75 .... □

CÂU 6. Một khinh khí cầu bay cao 300 m ở phút đầu tiên sau khi được thả. Mỗi phút tiếp theo, nó bay cao thêm độ cao bằng $\dfrac{2}{5}$ độ cao bay được ở phút trước đó. Hỏi khinh khí cầu có thể đạt độ cao tối đa là bao nhiêu?

Đáp án: | 5 | 0 | 0 | |

Lời giải.

Ta có

- Khinh khí cầu ở phút đầu tiên sau khi được thả bay cao 300 m.
- Khinh khí cầu ở phút thứ hai sau khi được thả bay cao $300 + 300 \cdot \dfrac{2}{5}$ m.
- Khinh khí cầu ở phút thứ ba sau khi được thả bay cao $300 + 300 \cdot \dfrac{2}{5} + 300 \cdot \left(\dfrac{2}{5}\right)^2$ m.

Suy ra khinh khí cầu có thể đạt độ cao tối đa

$$300 + 300 \cdot \frac{2}{5} + 300 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \cdots = 300 \cdot \frac{1}{1 - \frac{2}{5}} = 500 \text{ m}.$$

Đáp án: 500 .... □

Bài 16. GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. GIỚI HẠN HỮU HẠN CỦA HÀM SỐ TẠI MỘT ĐIỂM

Định nghĩa: Cho khoảng K chứa điểm x_0 và hàm số $y = f(x)$ xác định trên K hoặc trên $K \setminus \{x_0\}$. Ta nói hàm số $y = f(x)$ có giới hạn là số L khi x dần tới x_0 nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_n \in K \setminus \{x_0\}$ và $x_n \to x_0$, ta có $f(x_n) \to L$. Kí hiệu:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \text{ hay } f(x) \to L \text{ khi } x \to x_0$$

Nhận xét: $\lim\limits_{x \to x_0} x = x_0$; $\lim\limits_{x \to x_0} c = c$ với c là hằng số.

Định lí về giới hạn hữu hạn:

a) Giả sử $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ và $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = M$. Khi đó:

① $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) + g(x)] = L + M$;

② $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) - g(x)] = L - M$;

③ $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) \cdot g(x)] = L \cdot M$;

④ $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L}{M}$ (nếu $M \neq 0$).

b) Nếu $f(x) \geqslant 0$ và $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$, thì $L \geqslant 0$ và $\lim\limits_{x \to x_0} \sqrt{f(x)} = \sqrt{L}$.

Giới hạn một bên:

— Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $(x_0; b)$. Số L được gọi là giới hạn bên phải của hàm số $y = f(x)$ khi $x \to x_0$ nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_0 < x_n < b$ và $x_n \to x_0$, ta có $f(x_n) \to L$.
Kí hiệu:

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = L.$$

— Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $(a; x_0)$. Số L được gọi là giới hạn bên trái của hàm số $y = f(x)$ khi $x \to x_0$ nếu với dãy số (x_n) bất kì, $a < x_n < x_0$ và $x_n \to x_0$, ta có $f(x_n) \to L$.
Kí hiệu:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = L.$$

Điều kiện để tồn tại giới hạn:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = L$$

2. GIỚI HẠN HỮU HẠN CỦA HÀM SỐ TẠI VÔ CỰC

Định nghĩa:

— Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $(a; +\infty)$. Ta nói hàm số $y = f(x)$ có giới hạn là số L khi $x \to +\infty$ nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_n > a$ và $x_n \to +\infty$, ta có $f(x_n) \to L$. Kí hiệu:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L.$$

— Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $(-\infty; a)$. Ta nói hàm số $y = f(x)$ có giới hạn là số L khi $x \to -\infty$ nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_n < a$ và $x_n \to -\infty$, ta có $f(x_n) \to L$. Kí hiệu:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L.$$

Chú ý:

— Với c, k là hằng số và k nguyên dương, ta luôn có:

① $\lim\limits_{x \to +\infty} c = c$ ② $\lim\limits_{x \to -\infty} c = c$

③ $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{c}{x^k} = 0$ ④ $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{c}{x^k} = 0$.

— Định lí về giới hạn hữu hạn của hàm số khi $x \to x_0$ vẫn còn đúng khi $x \to +\infty$ hoặc $x \to -\infty$.

3. GIỚI HẠN VÔ CỰC CỦA HÀM SỐ

Định nghĩa : Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $(a; +\infty)$. Ta nói hàm số $y = f(x)$ có giới hạn là $-\infty$ khi $x \to +\infty$ nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_n > a$ và $x_n \to +\infty$, ta có $f(x_n) \to -\infty$. Kí hiệu: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

Nhận xét: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} (-f(x)) = -\infty$.

Một vài giới hạn đặc biệt:

— $\lim\limits_{x \to +\infty} x^k = +\infty$, với k nguyên dương.

— $\lim\limits_{x \to -\infty} x^k = \begin{cases} +\infty \text{ nếu } k \text{ chẵn} \\ -\infty \text{ nếu } k \text{ lẻ.} \end{cases}$

Một vài quy tắc về giới hạn vô cực:

- Quy tắc tìm giới hạn của tích $f(x) \cdot g(x)$

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$	$\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$	$\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) \cdot g(x)]$
$L > 0$	$+\infty$	$+\infty$
$L > 0$	$-\infty$	$-\infty$
$L < 0$	$+\infty$	$-\infty$
$L < 0$	$-\infty$	$+\infty$

- Quy tắc tìm giới hạn của thương $\dfrac{f(x)}{g(x)}$

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$	$\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$	Dấu của $g(x)$	$\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$
L	$\pm\infty$	Tùy ý	0
$L > 0$	0	+	$+\infty$
$L > 0$	0	–	$-\infty$
$L < 0$	0	+	$-\infty$
$L < 0$	0	–	$+\infty$

Các quy tắc trên vẫn đúng khi thay $x \to x_0$ bởi $x \to x_0^+$, $x \to x_0^-$ hoặc $x \to +\infty$, $x \to -\infty$.

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

1 Giới hạn của hàm số khi $x \to x_0$. Khử dạng vô định $\dfrac{0}{0}$

Xét giới hạn $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$.

Phương pháp giải: Thay x_0 vào $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ để kiểm tra, sẽ có một trong các trường hợp:

① Tử số $f(x_0) = a$ và mẫu số $g(x_0) = b \neq 0$, ta suy ra luôn kết quả

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x_0)}{g(x_0)} = \frac{a}{b}.$$

② Cả tử số và mẫu số đều bằng 0 hay $f(x_0) = g(x_0) = 0$, ta xem đây là dạng vô định $\dfrac{0}{0}$. Khử dạng vô định này bằng cách phân tích nhân tử $x - x_0$.

Phân tích $f(x) = (x - x_0) \cdot f_1(x)$ và $g(x) = (x - x_0) \cdot g_1(x)$. Khi đó

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{(x - x_0)f_1(x)}{(x - x_0)g_1(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)} \quad (1)$$

Ta tiếp tục tính giới hạn (1).

③ Tử số $f(x_0) \neq 0$ và mẫu số $g(x_0) = 0$. Ta áp dụng các định lý liên quan đến giới hạn vô cực để tìm kết quả.

Một số cách phân tích nhân tử thường dùng:

- *Nếu $f(x) = ax^2 + bx + c$ có hai nghiệm x_1, x_2 thì $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.*
- *Nếu $f(x)$ là một đa thức bậc ba, bậc bốn,...ta có thể dùng phương pháp chia đa thức.*
- *Nếu $f(x)$ là biểu thức chứa căn, ta dùng cách nhân lượng liên hợp.*

VÍ DỤ 1. Tính các giới hạn sau

a) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 + 2x}{4}$.

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x + 4} + 1}{x^2 + 2}$.

VÍ DỤ 2. Tính các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x \to -4} \dfrac{x^2 + 2x - 8}{x^2 + 4x}$.

b) $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} \dfrac{2x^2 - 5x + 2}{1 - 2x}$.

c) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{2x^2 - 5x + 2}{x^2 + x - 6}$.

d) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{3x^3 - 5x^2 + 2}{3x^2 - 5x + 2}$.

e) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3 + 3x^2 - 9x - 2}{x^3 - x - 6}$.

f) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{4x^2 - 3x - 7}{x^3 + 1}$.

VÍ DỤ 3. Tính các giới hạn sau

a) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x + 3} - 2}{2x - 2}$.

b) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x - 2}{\sqrt{x + 2} - 2}$.

c) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{2 - \sqrt{5 - x^2}}{x + 1}$.

d) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \sqrt{4x + 1}}{x^2 + 3x}$.

e) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{\sqrt{x^2 + 3x - 1} - 3}$.

f) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3 + 1}{\sqrt{x + 5} - 2}$.

2 Giới hạn của hàm số khi $x \to \pm\infty$. Khử dạng vô định $\frac{\infty}{\infty}; \infty - \infty; 0 \cdot \infty$

Phương pháp giải: Tương tự như bài toán giới hạn dãy số

VÍ DỤ 1. Tính các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{5x - 2}{3x + 1}$.

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^3 - x + 10}{x^3 + 3x - 3}$.

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^4 - x^3 + 3}{2x^6 - 7}$.

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} \left(\dfrac{2x^2}{x + 1} - 1 \right)$.

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3 - 3x}{(x + 1)(2x^2 - 3)}$.

f) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(x + 1)^2(2x + 1)^2}{(2x^3 + 1)(x - 2)^3}$.

VÍ DỤ 2. Tính các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^2 - x + 5}}{5x - 1}$.

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^2 + x} + 2x}{2x + 3}$.

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x - 3}{\sqrt{4x^2 + 2x} + x}$.

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{2x^2 - 7x + 1}}{3|x| - 7}$.

e) $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt[3]{\dfrac{x^2 + 2x}{8x^2 - x + 5}}$.

f) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x + \sqrt{x^2 + 2}}{\sqrt[3]{8x^3 + x^2 + 1}}$.

VÍ DỤ 3. Tính các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 + x} - x \right)$.

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 + 2x} \right)$.

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} x \left(\sqrt{x^2 + 1} + x \right)$.

VÍ DỤ 4. Tính các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt[3]{x^3 + x} - x \right)$.

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt[3]{x^3 + x} - \sqrt{x^2 + x} \right)$.

VÍ DỤ 5. Tính giới hạn của các hàm số sau:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x^5-x^4+4x^3-3\right)$.

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2x^5-x^4+4x^3-3\right)$.

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-x^3-x^2+4x+2\right)$.

d) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-x^3-x^2+4x+2\right)$.

e) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}+x\right)$.

f) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2x-\sqrt{x^2+x}\right)$.

VÍ DỤ 6. Tính các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{5x^2-2x+3}{x+1}$.

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^3-x+10}{x^2+3x-3}$.

c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x^4+5x^2+7}{x^3-15x}$.

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+\sqrt{x+1}}{2x-7}$.

e) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+3}{\sqrt{x^2+x}-x}$.

f) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x+3}{\sqrt{x^2+x}+x}$.

3 Giới hạn một bên. Sự tồn tại giới hạn

Phương pháp tính $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$ và $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$ hoàn toàn tương tự như bài toán tính $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$.

Lưu ý: $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=L$ *khi và chỉ khi* $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=L$.

VÍ DỤ 1. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}-x^2 & \text{khi } x<1\\ x & \text{khi } x\geq 1.\end{cases}$ Tìm các giới hạn $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)$, $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)$, $\lim\limits_{x\to1}f(x)$ (nếu có).

Lời giải.

a) $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}x=1$.

b) $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}(-x^2)=-1^2=-1$.

Vì $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=1\neq-1=\lim\limits_{x\to1^-}f(x)$ nên không tồn tại giới hạn $\lim\limits_{x\to1}f(x)$.

VÍ DỤ 2. Tính giới hạn của các hàm số sau:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3}{x^2-2x+6}$;

b) $\lim\limits_{x\to3^+}\dfrac{-x^2+5}{x-3}$;

c) $\lim\limits_{x\to3^-}\dfrac{2x^2+\sqrt{3-x}}{x-3}$;

d) $\lim\limits_{x\to-2^+}\dfrac{|x^2-4|}{x+2}$.

Lời giải.

a) $I_1=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3}{x^2-2x+6}=0$ vì $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2-2x+6)=+\infty$;

b) Ta có $\lim\limits_{x\to3^+}(-x^2+5)=-4<0$, $\lim\limits_{x\to3^+}(x-3)=0$ và $x-3>0,\forall x>3$.

Do đó $I_2=\lim\limits_{x\to3^+}\dfrac{-x^2+5}{x-3}=-\infty$.

c) $I_3=\lim\limits_{x\to3^-}\dfrac{2x^2+\sqrt{3-x}}{x-3}=-\infty$.

d) Ta có $\lim\limits_{x\to-2^+}\dfrac{|x^2-4|}{x+2}=\lim\limits_{x\to-2^+}\dfrac{4-x^2}{x+2}=\lim\limits_{x\to-2^+}(2-x)=4$.

4 Vận dụng thực tiễn

VÍ DỤ 1. Một công ty sản xuất máy tính đã xác định được rằng, tính trung bình một nhân viên có thể lắp ráp được $N(t)=\dfrac{50t}{t+4}$ $(t\geq0)$ bộ phận mỗi ngày sau t ngày đào tạo. Tính $\lim\limits_{t\to+\infty}N(t)$ và cho biết ý nghĩa của kết quả.

Lời giải.

Ta có

$$\lim_{t\to+\infty}N(t)=\lim_{t\to+\infty}\frac{50t}{t+4}=\lim_{t\to+\infty}\frac{50t}{t\left(1+\dfrac{4}{t}\right)}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{t\to+\infty} \frac{50}{1+\frac{4}{t}}\\
&= \frac{\lim\limits_{t\to+\infty} 50}{\lim\limits_{t\to+\infty} 1 + \lim\limits_{t\to+\infty} \frac{4}{t}}\\
&= \frac{50}{1+0}\\
&= 50.
\end{aligned}$$

Ý nghĩa của kết quả: năng suất lao động cao nhất trong một ngày của một nhân viên là 50.

VÍ DỤ 2. Một cái hồ đang chứa 200 m^3 nước mặn với nồng độ muối 10 $\mathrm{kg/m}^3$. Người ta ngọt hóa nước trong hồ bằng cách bơm nước ngọt vào hồ với vận tốc 2 m^3/phút.

a) Viết biểu thức $C(t)$ biểu thị nồng độ muối trong hồ sau t phút kể từ khi bắt đầu bơm.

b) Tìm giới hạn $\lim\limits_{t\to+\infty} C(t)$ và giải thích ý nghĩa.

Lời giải.

a) Sau thời gian t phút, số m^3 nước trong hồ là $200+2t$ (m^3).
Số kilôgam muối là $200\cdot 10 = 2000$ (kg).
Nồng độ muối của nước trong hồ sau t phút khi bắt đầu bơm là

$$C(t) = \frac{2000}{200+2t} = \frac{1000}{100+t}\ (\mathrm{kg/m}^3).$$

b) Khi $t\to+\infty$, ta xét giới hạn

$$\lim_{t\to+\infty} C(t) = \lim_{t\to+\infty} \frac{1000}{100+t} = 0.$$

VÍ DỤ 3. Trong Thuyết tương đối của Einstein, khối lượng của vật chuyển động với vận tốc v cho bởi công thức

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$

trong đó m_0 là khối lượng của vật khi nó đứng yên, c là vận tốc ánh sáng. Chuyện gì xảy ra với khối lượng của vật khi vận tốc của vật gần với vận tốc ánh sáng?

Lời giải.

Từ công thức khối lượng

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

ta thấy m là một hàm số của v, với tập xác định là nửa khoảng $[0;c)$. Rõ ràng khi v tiến gần tới vận tốc ánh sáng, tức là $v\to c^-$, ta có $\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \to 0$. Do đó $\lim\limits_{v\to c^-} m(v) = +\infty$, nghĩa là khối lượng m của vật trở nên vô cùng lớn khi vận tốc của vật gần với vận tốc ánh sáng.

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

BÀI 1. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{khi } x<0\\ 1 & \text{khi } x>0. \end{cases}$

a) Tìm các giới hạn $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ và $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$.

b) Có tồn tại $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$?

Lời giải.

a) Giả sử (x_n) là dãy số bất kì, $x_n>0$ và $x_n\to 0$. Khi đó $f(x_n)=1$ nên $\lim f(x_n) = \lim 1 = 1$.
Vậy $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 1$.
Giả sử (x_n) là dãy số bất kì, $x_n<0$ và $x_n\to 0$. Khi đó $f(x_n)=0$ nên $\lim f(x_n) = \lim 0 = 0$.
Vậy $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 0$.

b) Vì $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$ nên không tồn tại $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

BÀI 2. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 1-2x & \text{khi } x \leq -1 \\ x^2+2 & \text{khi } x > -1. \end{cases}$

Tìm các giới hạn $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)$ và $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)$ và $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$ (nếu có).

Lời giải.

+ Giả sử (x_n) là dãy số bất kì, $x_n < -1$ và $x_n \to -1$. Khi đó $\lim f(x_n) = \lim(1-2x_n) = 3$.
Vậy $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = 3$.
Giả sử (x_n) là dãy số bất kì, $x_n > -1$ và $x_n \to -1$. Khi đó $\lim f(x_n) = \lim(x_n^2+2) = 3$.
Vậy $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = 3$.

+ Vì $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^-} f(x)$ nên tồn tại $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$ và $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = 3$.

BÀI 3. Tính các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{4x^2-x-5}{7x^2+5x-2}$.

b) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{4-x^2}{x+2}$.

c) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2+2x-15}{x-3}$.

d) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2x^2-5x+2}{x^2-4}$.

Lời giải.

a) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{4x^2-x-5}{7x^2+5x-2} = \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{(x+1)(4x-5)}{(x+1)(7x-2)} = \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{4x-5}{7x-2} = \dfrac{4\cdot(-1)-5}{7\cdot(-1)-2} = 1$.

b) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{4-x^2}{x+2} = \lim\limits_{x\to -2} \dfrac{(2-x)(2+x)}{x+2} = \lim\limits_{x\to -2}(2-x) = 4$.

c) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2+2x-15}{x-3} = \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{(x-3)(x+5)}{x-3} = \lim\limits_{x\to 3}(x+5) = 8$.

d) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2x^2-5x+2}{x^2-4} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{(x-2)(2x-1)}{(x-2)(x+2)} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2x-1}{x+2} = \dfrac{3}{4}$.

BÀI 4. Tính các giới hạn sau

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+2x}-1}{2x}$.

b) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x-\sqrt{3x-2}}{x^2-4}$.

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{2x^3-3x^2}$.

d) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{2x+7}-x-2}{x^3-4x+3}$.

Lời giải.

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+2x}-1}{2x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x}{2x\left(\sqrt{1+2x}+1\right)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{\sqrt{1+2x}+1} = \dfrac{1}{2}$.

b) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x-\sqrt{3x-2}}{x^2-4} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-3x+2}{(x^2-4)\left(x+\sqrt{3x-2}\right)} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{(x-2)(x-1)}{(x-2)(x+2)\left(x+\sqrt{3x-2}\right)}$
$= \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x-1}{(x+2)\left(x+\sqrt{3x-2}\right)} = \dfrac{1}{16}$.

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{2x^3-3x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{(2x^3-3x^2)\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{(2x-3)\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)} = -\dfrac{1}{6}$.

d) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{2x+7}-x-2}{x^3-4x+3} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x+7-(x+2)^2}{(x^3-4x+3)\left(\sqrt{2x+7}+x+2\right)} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{-x^2-2x+3}{(x^3-4x+3)\left(\sqrt{2x+7}+x+2\right)}$
$= \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{-(x-1)(x+3)}{(x-1)(x^2+x-3)\left(\sqrt{2x+7}+x+2\right)} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{-(x+3)}{(x^2+x-3)\left(\sqrt{2x+7}+x+2\right)} = \dfrac{2}{3}$.

BÀI 5. Tính các giới hạn một bên:

a) $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x-2}{x-1}$.

b) $\lim\limits_{x\to 4^-} \dfrac{x^2-x+1}{4-x}$.

Lời giải.

a) Ta có $\lim\limits_{x\to 1^+}(x-2)=-1<0$.
Hơn nữa $\lim\limits_{x\to 1^+}(x-1)=0$, và $x-1>0$ khi $x>1$.
Áp dụng quy tắc tìm giới hạn của thương, ta được $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x-2}{x-1}=-\infty$.

b) Ta có $\lim\limits_{x\to 4^-}(x^2-x+1)=13>0$.
Hơn nữa $\lim\limits_{x\to 4^-}(4-x)=0$, và $4-x>0$ khi $x<4$.
Áp dụng quy tắc tìm giới hạn của thương, ta được $\lim\limits_{x\to 4^-}\dfrac{x^2-x+1}{4-x}=+\infty$.

BÀI 6. Cho hàm số $g(x)=\dfrac{x^2-5x+6}{|x-2|}$. Tìm $\lim\limits_{x\to 2^+}g(x)$ và $\lim\limits_{x\to 2^-}g(x)$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to 2^+}g(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{(x-2)(x-3)}{x-2}$ (do $x>2$) $=\lim\limits_{x\to 2^+}(x-3)=-1$.
Tương tự $\lim\limits_{x\to 2^-}g(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}-\dfrac{(x-2)(x-3)}{x-2}$ (do $x<2$) $=-\lim\limits_{x\to 2^-}(x-3)=1$.

BÀI 7. Tính các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-2x}{\sqrt{x^2+1}}$.

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x+2}-x\right)$.

Lời giải.

a) Ta có

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\frac{1-2x}{\sqrt{x^2+1}}&=-\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{4x^2-4x+1}{x^2+1}}\\&=-\lim_{x\to+\infty}\sqrt{4-\frac{4x}{x^2+1}+\frac{1}{x^2+1}}\\&=-\sqrt{4-\lim_{x\to+\infty}\frac{4x}{x^2+1}+\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2+1}}\\&=-\sqrt{4-\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{4}{x}}{1+\frac{1}{x^2}}+\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}}}\\&=-2.\end{aligned}$$

b) Ta có

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2+x+2}-x&=\frac{\left(\sqrt{x^2+x+2}\right)^2-x^2}{\sqrt{x^2+x+2}+x}=\frac{x+2}{\sqrt{x^2+x+2}+x}\\&=\frac{x\cdot\left(1+\frac{2}{x}\right)}{x\cdot\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}+1\right)}=\frac{1+\frac{2}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}+1}.\end{aligned}$$

Khi đó $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x+2}-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+\frac{2}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}+1}=\dfrac{1}{1+1}=\dfrac{1}{2}$.

BÀI 8. Trong hồ có chứa 6000 lít nước ngọt. Người ta bơm nước biển có nồng độ muối là 30 gam/lít vào hồ với tốc độ 15 lít/phút.

a) Chứng tỏ rằng nồng độ muối của nước trong hồ sau t phút kể từ khi bắt đầu bơm là $C(t)=\dfrac{30t}{400+t}$ (gam/lít).

b) Nồng độ muối trong hồ như thế nào nếu $t\to+\infty$.

Lời giải.

a) Sau thời gian t phút, số lít nước trong hồ là $6000+15t$ (lít).
Số gam muối trong số lít nước bơm vào là $30\cdot 15t = 450t$ (gam).
Nồng độ muối của nước trong hồ sau t phút khi bắt đầu bơm là

$$C(t)=\frac{450t}{6000+15t}=\frac{30t}{400+t}\,(\text{gam/lít}).$$

b) Khi $t\to+\infty$, ta xét giới hạn

$$\lim_{t\to+\infty}C(t)=\lim_{t\to+\infty}\frac{30t}{400+t}=\lim_{t\to+\infty}\frac{30}{\frac{400}{t}+1}=30.$$

Vậy khi bơm nước biểm vào hồ chứa, không giới hạn thời gian thì nồng độ muối trong hồ chứa chính là nồng độ muối của nước biển.

BÀI 9. Cho hàm số $H(t)=\begin{cases}0 & \text{nếu } t<0\\ 1 & \text{nếu } t\geq 0\end{cases}$ (hàm Heaviside, thường được dùng để mô tả việc chuyển trạng thái tắt/mở của dòng điện tại thời điểm $t=0$). Tính $\lim\limits_{t\to 0^+}H(t)$ và $\lim\limits_{t\to 0^-}H(t)$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{t\to 0^+}H(t)=1$ và $\lim\limits_{t\to 0^-}H(t)=0$.

BÀI 10. Chi phí (đơn vị: nghìn đồng) để sản xuất x sản phẩm của một công ty được xác định bởi hàm số $C(x)=50000+105x$.

a) Tính chi phí trung bình $\overline{C}(x)$ để sản xuất một sản phẩm.

b) Tính $\lim\limits_{x\to+\infty}\overline{C}(x)$ và cho biết ý nghĩa của kết quả.

Lời giải.

a) Chi phí trung bình để sản xuất một sản phẩm là $\overline{C}(x)=\dfrac{50000+105x}{x}$.

b) Ta có

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\overline{C}(x) &= \lim_{x\to+\infty}\frac{50000+105x}{x}\\ &= \lim_{x\to+\infty}\left(105+\frac{50000}{x}\right)\\ &= \lim_{x\to+\infty}105+\lim_{x\to+\infty}\frac{50000}{x}\\ &= 105.\end{aligned}$$

Ý nghĩa của kết quả: số lượng sản phẩm càng nhiều thì chi phí sản xuất sẽ càng giảm, chi phí thấp nhất là 105 nghìn đồng.

BÀI 11. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{ax^2+3ax-4a}{x-1} & \text{khi } x<1\\ 2bx+1 & \text{khi } x\geq 1\end{cases}$. Biết rằng a,b là các số thực thỏa mãn hàm số $f(x)$ có giới hạn tại $x=1$.

a) Tìm mối quan hệ giữa a và b.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=a^2+b^2$.

Lời giải.

a) Ta có $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}a(x-4)=-3a$, $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=2b+1$.
Hàm số $f(x)$ có giới hạn tại $x=1$ khi và chỉ khi $-3a=2b+1$.

b) Từ câu a) ta có $1=(3a+2b)^2\leq(9+4)(a^2+b^2)\Rightarrow P=a^2+b^2\geq\dfrac{1}{13}$. Đẳng thức có được khi và chỉ khi $a=-\dfrac{3}{13}$ và $b=-\dfrac{2}{13}$. Vậy $\min P=\dfrac{1}{13}$.

D. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Phần I. Mỗi câu hỏi học sinh chọn một trong bốn phương án A, B, C, D.

CÂU 1. Kết quả của giới hạn $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x^k}$ (với k nguyên dương) là

Ⓐ $+\infty$. Ⓑ $-\infty$. Ⓒ x. Ⓓ 0 .

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x^k} = 0$ (với k nguyên dương).

Chọn đáp án D ..... □

CÂU 2. Giới hạn nào dưới đây có kết quả bằng 3?

Ⓐ $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{3x}{x-2}$. Ⓑ $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{-3x}{2-x}$. Ⓒ $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{-3x}{x-2}$. Ⓓ $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{3x^2}{x-2}$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x \to 1}(-3x) = -3$ và $\lim\limits_{x \to 1}(x-2) = -1$ nên $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{-3x}{x-2} = \dfrac{\lim\limits_{x \to 1}(-3x)}{\lim\limits_{x \to 1}(x-2)} = \dfrac{-3}{-1} = 3$.

Chọn đáp án C ..... □

CÂU 3. Giá trị của $I = \lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{x^2 - 4x + 7}{x+1} \right)$

Ⓐ $I = -4$. Ⓑ $I = 5$. Ⓒ $I = 4$. Ⓓ $I = 2$.

Lời giải.

Ta có $I = \lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{x^2 - 4x + 7}{x+1} \right) = \dfrac{1^2 - 4 \cdot 1 + 7}{1+1} = \dfrac{4}{2} = 2$.

Chọn đáp án D ..... □

CÂU 4. Giá trị của $\lim\limits_{x \to -4} \dfrac{x^2 + 3x - 4}{x^2 + 4x}$ bằng

Ⓐ 1 . Ⓑ -1 . Ⓒ $\dfrac{5}{4}$. Ⓓ $-\dfrac{5}{4}$.

Lời giải.

$$\lim\limits_{x \to -4} \dfrac{x^2 + 3x - 4}{x^2 + 4x} = \lim\limits_{x \to -4} \dfrac{(x-1)(x+4)}{x(x+4)} = \lim\limits_{x \to -4} \dfrac{(x-1)}{x} = \dfrac{5}{4}.$$

Chọn đáp án C ..... □

CÂU 5. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{khi } x \geq 1 \\ 2x + 1 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$. Mệnh đề nào sau đây là **đúng**?

Ⓐ $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 0$. Ⓑ $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 3$. Ⓒ $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -1$. Ⓓ $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 0$.

Lời giải.

Do $x \to 1^-$ nên $x < 1$. Ta có: $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} (2x+1) = 2 \cdot 1 + 1 = 3$.

Suy ra phương án $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 0$ và $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -1$ sai.

Do $x \to 1^+$nên $x > 1$. Ta có: $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} \left(x^2 - 1\right) = 1^2 - 1 = 0$.

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to 1} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$ nên $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ không tồn tại.

Suy ra phương án $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 0$ sai.

Chọn đáp án B ..... □

CÂU 6. Giá trị của $\lim\limits_{x \to 3^+} \dfrac{2x+7}{x-3}$ là

Ⓐ $+\infty$. Ⓑ $-\infty$. Ⓒ 0 . Ⓓ 2.

Lời giải.

Ta có: $\lim\limits_{x \to 3^+} (2x+7) = 13 > 0$, $\lim\limits_{x \to 3^+} (x-3) = 0, x \to 3^+ \Rightarrow x - 3 > 0$.

Vậy $\lim\limits_{x \to 3^+} \dfrac{2x+7}{x-3} = +\infty$.

Chọn đáp án A ..... □

CÂU 7. Giá trị của $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-3x}{2x+3}$

(A) -3 .
(B) $\dfrac{1}{2}$.
(C) $-\dfrac{3}{2}$.
(D) $-\infty$.

Lời giải.

$$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1-3x}{2x+3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}-3}{2+\frac{3}{x}}=-\frac{3}{2}.$$

Chọn đáp án (C) .... □

CÂU 8. Giá trị của $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{x^2+1}$ bằng

(A) $-\infty$.
(B) 1.
(C) $+\infty$.
(D) 0 .

Lời giải.

Ta có: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{x^2+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x^2}}=0.$

Chọn đáp án (D) .... □

CÂU 9. Giá trị đúng của $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^4+7}{x^4+1}$ là

(A) -1.
(B) 1.
(C) 7.
(D) $+\infty$.

Lời giải.

$$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^4+7}{x^4+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{7}{x^4}}{1+\frac{1}{x^4}}=1.$$

Chọn đáp án (B) .... □

CÂU 10. Giá trị của $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x-1}{\sqrt{x^2+1}-1}$ bằng

(A) 0.
(B) -2.
(C) $-\infty$.
(D) 2.

Lời giải.

Ta có: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x-1}{\sqrt{x^2+1}-1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x-1}{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2-\frac{1}{x}}{-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-\frac{1}{x}}=-2.$

Chọn đáp án (B) .... □

CÂU 11. Giá trị của $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x^2-x+1}{x^2-1}$ bằng

(A) $-\infty$.
(B) -1.
(C) 1.
(D) $+\infty$.

Lời giải.

$\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x^2-x+1}{x^2-1}=+\infty$ vì
$\lim\limits_{x\to1^+}\left(x^2-x+1\right)=1>0$ và $\lim\limits_{x\to1^+}\left(x^2-1\right)=0; x^2-1>0,\forall x>1.$

Chọn đáp án (D) .... □

CÂU 12. Chọn kết quả đúng của $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{2}{x^3}\right)$

(A) $-\infty$.
(B) 0.
(C) $+\infty$.
(D) Không tồn tại.

Lời giải.

$\lim\limits_{x\to0^+}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{2}{x^3}\right)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x-2}{x^3}$ $\lim\limits_{x\to0^+}x^3=0, x^3>0$ với mọi $x>0$ và $\lim\limits_{x\to0^+}(x-2)=-2<0$. Do đó, $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{2}{x^3}\right)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x-2}{x^3}=-\infty.$

Chọn đáp án (A) .... □

Phần II. Trong mỗi ý a), b), c) và d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.

CÂU 1. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} x-2 & \text{khi } x<-1 \\ \sqrt{x^2+1} & \text{khi } x \geq -1 \end{cases}$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

Mệnh đề	Đ	S
a) $\lim\limits_{x\to -2} f(x)=\sqrt{5}$.		X
b) $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=-3$.	X	
c) $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=\sqrt{2}$.	X	
d) Hàm số tồn tại giới hạn khi $x\to -1$.		X

Lời giải.

a) Ta có: $\lim\limits_{x\to -2} f(x)=\lim\limits_{x\to -2}(x-2)=-2-2=-4$

b) Ta có: $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^-}(x-2)=-1-2=-3$

c) Khi đó: $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+}\sqrt{x^2+1}=\sqrt{(-1)^2+1}=\sqrt{2}$.

d) Vì $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)\neq \lim\limits_{x\to -1^+} f(x)$ (hay $-3\neq\sqrt{2}$) nên không tồn tại $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$.

Chọn đáp án | a sai | b đúng | c đúng | d sai | .... □

CÂU 2. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

Mệnh đề	Đ	S
a) $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(x^2-10x\right)=+\infty$.	X	
b) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{3x^2-4x+1}{2x^2+x+1}=\dfrac{3}{2}$.	X	
c) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+x+1}-3x}{2-3x}=\dfrac{5}{4}$.		X
d) Để $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\sqrt{2x^2+1}+ax\right)=+\infty$ thì $a<\sqrt{2}$.	X	

Lời giải.

a) Ta có: $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(x^2-10x\right)=\lim\limits_{x\to -\infty}\left[x^2\left(1-\dfrac{10}{x}\right)\right]=\lim\limits_{x\to -\infty}x^2\cdot\lim\limits_{x\to -\infty}\left(1-\dfrac{10}{x}\right)$

Do $\begin{cases} +\lim\limits_{x\to -\infty}x^2=+\infty \\ +\lim\limits_{x\to -\infty}\left(1-\dfrac{10}{x}\right)=1>0 \end{cases}\Rightarrow \lim\limits_{x\to -\infty}\left(x^2-10x\right)=+\infty$

Vậy $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(x^2-10x\right)=+\infty$ đúng.

b) $$\lim_{x\to +\infty}\frac{3x^2-4x+1}{2x^2+x+1}=\lim_{x\to +\infty}\frac{x^2\left(3-\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}=\lim_{x\to +\infty}\frac{3-\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}}{2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=\frac{3}{2}.$$

Vậy $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{3x^2-4x+1}{2x^2+x+1}=\dfrac{3}{2}$ đúng.

c) $$\lim_{x\to -\infty}\frac{\sqrt{x^2+x+1}-3x}{2-3x}=\lim_{x\to -\infty}\frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}-3x}{x\left(\frac{2}{x}-3\right)}=\lim_{x\to -\infty}\frac{-x\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-3x}{x\left(\frac{2}{x}-3\right)}$$

$$=\lim_{x\to -\infty}\frac{-\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-3}{\frac{2}{x}-3}=\frac{-\sqrt{1}-3}{-3}=\frac{4}{3}.$$

Vậy $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+x+1}-3x}{2-3x}=\dfrac{5}{4}$ sai.

d) Để $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{2x^2+1}+ax\right)=+\infty$ thì $a<\sqrt{2}$ đúng.

Chọn đáp án | a đúng | b đúng | c sai | d đúng | ...... □

CÂU 3. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{\sqrt{3x^2+1}}{x+1}$ và $g(x)=\dfrac{2x}{x+1}$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

Mệnh đề	Đ	S
a) $\lim\limits_{x\to1} f(x)=2$ và $\lim\limits_{x\to-2} g(x)=-2$.		X
b) $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=2$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\sqrt{3}$.	X	
c) $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-g(x)]=\sqrt{3}-2$.		X
d) $\lim\limits_{x\to-1}[f(x)-g(x)]=\dfrac{1}{2}$.	X	

Lời giải.

a) Ta có $\lim\limits_{x\to1} f(x)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{3x^2+1}}{x+1}=\dfrac{\sqrt{3\cdot1^2+1}}{1+1}=1$.

Và $\lim\limits_{x\to-2} g(x)=\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{2x}{x+1}=\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{2\cdot(-2)}{-2+1}=4$.

Do đó ý $\lim\limits_{x\to1} f(x)=2$ và $\lim\limits_{x\to-2} g(x)=-2$ sai.

b) Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x}{x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{1+\dfrac{1}{x}}=2$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{3x^2+1}}{x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{3+\dfrac{1}{x^2}}}{x+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{3+\dfrac{1}{x^2}}}{1+\dfrac{1}{x}}=\sqrt{3}.$$

Vậy ý $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=2$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\sqrt{3}$ đúng.

c) Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-g(x)]=\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)-\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=-\sqrt{3}-2=-\sqrt{3}-2$. Vậy ý $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-g(x)]=\sqrt{3}-2$ sai.

d) Ta có

$$\lim_{x\to-1}[f(x)+g(x)]=\lim_{x\to-1}\frac{\sqrt{3x^2+1}+2x}{x+1}=\lim_{x\to-1}\frac{\left(\sqrt{3x^2+1}+2x\right)\left(\sqrt{3x^2+1}-2x\right)}{(x+1)\left(\sqrt{3x^2+1}-2x\right)}=$$

$$=\lim_{x\to-1}\frac{1-x^2}{(x+1)\left(\sqrt{3x^2+1}-2x\right)}=\lim_{x\to-1}\frac{(1-x)(1+x)}{(x+1)\left(\sqrt{3x^2+1}-2x\right)}=\lim_{x\to-1}\frac{1-x}{\sqrt{3x^2+1}-2x}=\frac{1}{2}$$

Vậy ý $\lim\limits_{x\to-1}[f(x)-g(x)]=\dfrac{1}{2}$ đúng.

Chọn đáp án | a sai | b đúng | c sai | d đúng | ...... □

CÂU 4. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}2x+1 \text{ khi } x\le1\\ \sqrt{x^2+a} \text{ khi } x>1\end{cases}$. Khẳng định nào đúng, khẳng định nào sai?

Mệnh đề	Đ	S
a) $\lim\limits_{x\in-5} f(x)=-9$.	X	
b) $\lim\limits_{x\in1} f(x)=1$ và $\lim\limits_{x\in1^+} f(x)=a$.		X
c) $\lim\limits_{x\in1^+}\dfrac{f(x)}{1-x}=+\infty$.		X
d) Để tồn tại $\lim\limits_{x\to1} f(x)$ thì $a=8$.	X	

Lời giải.

a) $\lim\limits_{x\in-5} f(x)=-9$ đúng.

b) Ta có $\lim\limits_{x\to1} f(x)=\lim\limits_{x\to1}(2x+1)=3+\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\sqrt{x^2+a}=\sqrt{1+a}$. Vậy ý $\lim\limits_{x\in1} f(x)=1$ và $\lim\limits_{x\in1^+} f(x)=a$ sai.

c) Ta có $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{f(x)}{1-x}=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{\sqrt{x^2+a}}{1-x}$ $\lim\limits_{x\to1^+}\sqrt{x^2+a}=\sqrt{1+a}>0, a>0$.

$\lim\limits_{x\to1^+}(1-x)=0$.

$x\to1^+\Rightarrow 1-x<0$.

Suy ra $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{f(x)}{1-x}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\sqrt{x^2+a}}{1-x}=-\infty$.

Vậy $\lim\limits_{x\in 1^+}\dfrac{f(x)}{1-x}=+\infty$ sai.

d) Để tồn tại $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ thì $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=f(1)$; $f(1)=3$.

$$+\lim_{x\in 1}f(x)=\lim_{x\in 1^1}(2x+1)=3$$
$$+\lim_{x\in 1^+}f(x)=\lim_{x\in 1^+}\sqrt{x^2+a}=\sqrt{1+a}.$$

Suy ra để hàm số tồn tại $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ thì $\sqrt{1+a}=3\quad a=8$.

Vậy ý Để tồn tại $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ thì $a=8$ đúng.

Chọn đáp án | a đúng | b sai | c sai | d đúng | ....

Phần III. Học sinh điền kết quả vào ô trống.

CÂU 1. Cho $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2+3x+1}{x+1}+ax+b\right)=1$. Tính giá trị của biểu thức $T=2024a-4049b$.

Đáp án: | 2 | 0 | 2 | 5 |

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+3x+1}{x+1}+ax+b\right)=1\\
\Leftrightarrow\ &\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{(a+1)x^2+(a+b+3)x+b+1}{x+1}\right)=1\\
\Leftrightarrow\ &\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{(a+1)x+(a+b+3)+\dfrac{b+1}{x}}{1+\dfrac{1}{x}}\right)=1\\
\Leftrightarrow\ &\begin{cases}a+1=0\\a+b+3=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-1\\b=-1.\end{cases}
\end{aligned}$$

Do đó $T=2024a-4049b=2024\cdot(-1)-4049\cdot(-1)=2025$.

Đáp án: 2025 ....

CÂU 2. Biết $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{3x^2+2023x+2}-n\sqrt{3}\right)=\dfrac{a\sqrt{b}}{c}$, ở đó a,c là các số nguyên dương nguyên tố cùng nhau, b là số nguyên tố. Tính $a+b+c$.

Đáp án: | 2 | 0 | 3 | 2 |

Lời giải.

Ta có

$$\frac{a\sqrt{b}}{c}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2023x+2}{\sqrt{3x^2+2023x+2}+x\sqrt{3}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2023+\dfrac{2}{x}}{\sqrt{3+\dfrac{2023}{x}+\dfrac{2}{x^2}}+\sqrt{3}}=\frac{2023\sqrt{3}}{6}.$$

Vậy $a+b+c=2023+3+6=2032$.

Đáp án: 2032 ....

CÂU 3. Biết $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x-2}+ax-b\right)=-5$. Tính giá trị biểu thức $P=\dfrac{1}{2}a+\dfrac{1}{4}b$.

Đáp án: | 1 | , | 2 | 5 |

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x-2}+ax-b\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{(a+1)x^2-(2a+b)x+2b+1}{x-2}\right)=-5$.

Vì giới hạn là hữu hạn và bằng -5 nên

$$\begin{cases}a+1=0\\2a+b=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-1\\b=7.\end{cases}$$

Vậy $P=\dfrac{1}{2}a+\dfrac{1}{4}b=\dfrac{1}{2}\cdot(-1)+\dfrac{1}{4}\cdot 7=1{,}25$.

Đáp án: $\boxed{1{,}25}$ .... □

CÂU 4. Giá trị của $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{3x+1}-2}{2x^2-3x+1}$ là

Đáp án: | 0 | , | 7 | 5 |

Lời giải.

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{3x+1}-2}{2x^2-3x+1}\\ &=\lim_{x\to 1}\frac{3x+1-4}{(2x^2-3x+1)\left(\sqrt{3x+1}+2\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{3(x-1)}{(x-1)(2x-1)(\sqrt{3x+1}+2)}\\ &=\lim_{x\to 1}\frac{3}{(2x-1)(\sqrt{3x+1}+2)}=\frac{3}{4}=0,75.\end{aligned}$$

Đáp án: $\boxed{0{,}75}$ .... □

CÂU 5. Giá trị của $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\left(3-2x^3\right)^2\cdot(4x-1)}{\left(x^2-1\right)^2\cdot(3+2x)^3}$ là

Đáp án: | 2 | | | |

Lời giải.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(3-2x^3\right)^2\cdot(4x-1)}{\left(x^2-1\right)^2\cdot(3+2x)^3}&=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^6\left(\dfrac{3}{x^3}-2\right)^2\cdot x\left(4-\dfrac{1}{x}\right)}{x^4\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)^2\cdot x^3\left(\dfrac{3}{x}+2\right)^3}\\ =\quad\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(\dfrac{3}{x^3}-2\right)^2\cdot\left(4-\dfrac{1}{x}\right)}{\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)^2\cdot\left(\dfrac{3}{x}+2\right)^3}&=2.\end{aligned}$$

Đáp án: $\boxed{2}$ .... □

CÂU 6. Một cái hồ chứa 600l nước ngọt. Người ta bơm nước biển có nồng độ muối 30g/l vào hồ với tốc độ 15 l/phút. Nồng độ muối trong hồ khi t dần về dương vô cùng (đơn vị g/l) là

Đáp án: | 3 | 0 | | |

Lời giải.

Sau t phút bơm nước vào hồ thì lượng nước là $600+15t(l)$ và lượng muối có được là $30.15t(g)$. Nồng độ muối của nước là

$$C(t)=\frac{30.15t}{600+15t}=\frac{30t}{40+t}(\mathrm{g}/\mathrm{l}).$$

Khi t dần về dương vô cùng, ta có:

$$\lim_{t\to+\infty}C(t)=\lim_{t\to+\infty}\frac{30t}{40+t}=\lim_{t\to+\infty}\frac{30t}{t\left(\dfrac{40}{t}+1\right)}=\lim_{t\to+\infty}\frac{30}{\dfrac{40}{t}+1}=30(\mathrm{g}/\mathrm{l}).$$

Đáp án: $\boxed{30}$ .... □

Bài 17. HÀM SỐ LIÊN TỤC

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. HÀM SỐ LIÊN TỤC TẠI MỘT ĐIỂM

Định nghĩa: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng K và $x_0 \in K$. Hàm số $y = f(x)$ được gọi là **liên tục** tại x_0 nếu

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)}$$

*Nếu hàm số không liên tục tại x_0 thì ta nói hàm số đó **gián đoạn** tại x_0.*

2. HÀM SỐ LIÊN TỤC TRÊN MỘT KHOẢNG

Định nghĩa: Hàm số $y = f(x)$ được gọi là **liên tục trên một khoảng** nếu nó liên tục tại mọi điểm của khoảng đó.

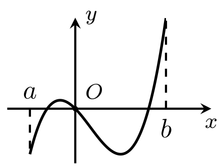
Chú ý:

- Hàm số $y = f(x)$ được gọi là **liên tục trên đoạn** $[a; b]$ nếu nó liên tục trên khoảng $(a; b)$ và $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$, $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = f(b)$.
- Khái niệm hàm số **liên tục trên nửa khoảng** như $[a; b)$, $[a; +\infty)$,... được định nghĩa một cách tương tự như liên tục trên đoạn.

— *Đồ thị của hàm số liên tục trên một khoảng là một "đường liền" trên khoảng đó. Hình bên là đồ thị của một hàm số liên tục tên $(a; b)$.*

— *Hàm số đa thức và các hàm số $y = \sin x$, $y = \cos x$ liên tục trên toàn bộ tập số thực $\mathbb{R}$.*

— *Hàm số phân thức hữu tỉ (thương của hai đa thức) và các hàm số $y = \tan x$, $y = \cot x$, $y = \sqrt{x}$ liên tục trên từng khoảng xác định của chúng.*



3. MỘT SỐ ĐỊNH LÝ CƠ BẢN

Định lý 1. Giả sử $y = f(x)$ và $y = g(x)$ là hai hàm số liên tục tại điểm x_0. Khi đó

— Các hàm số $y = f(x) + g(x)$, $y = f(x) - g(x)$ và $y = f(x) \cdot g(x)$ liên tục tại x_0.

— Hàm số $y = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ liên tục tại x_0 nếu $g(x_0) \neq 0$.

Định lý 2. Sự tồn tại nghiệm của phương trình trên một khoảng

— Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ và $f(a) \cdot f(b) < 0$, thì tồn tại ít nhất một điểm $c \in (a; b)$ sao cho $f(c) = 0$.

— Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ và $f(a) \cdot f(b) < 0$ thì phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm nằm trong khoảng $(a; b)$.

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

1 Xét tính liên tục của hàm số tại một điểm

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập D. Để xét tính liên tục của hàm số $y = f(x)$ tại điểm $x_0 \in D$, ta thực hiện các bước sau:

- Bước 1. Tính $f(x_0)$.
- Bước 2. Tìm $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.

- Bước 3. So sánh và rút ra kết luận.
  - Nếu $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ thì hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm x_0.
  - Nếu $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \neq f(x_0)$ thì hàm số $f(x)$ không liên tục (gián đoạn) tại điểm x_0.

VÍ DỤ 1. Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-3x+2}{x-2} & \text{khi } x \neq 2 \\ 4x-7 & \text{khi } x = 2 \end{cases}$ tại điểm $x_0 = 2$.

Lời giải.

Ta có $f(x_0) = f(2) = 4\cdot 2 - 7 = 1$.

$\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-3x+2}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{(x-1)(x-2)}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2}(x-1) = 1$.

Suy ra $f(2) = \lim\limits_{x\to 2} f(x)$ nên hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm $x_0 = 2$.

VÍ DỤ 2. Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-6x+5}{x^2-1} & \text{nếu } x \neq 1 \\ -2 & \text{nếu } x = 1 \end{cases}$ tại điểm $x_0 = 1$.

Lời giải.

Ta có: $f(1) = -2$.

$\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-6x+5}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x-5)(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-5}{x+1} = -2 = f(1)$.

Vậy hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = 1$.

VÍ DỤ 3. Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\sqrt{2x-3}}{2-x} & \text{nếu } x \neq 2 \\ -1 & \text{nếu } x = 2 \end{cases}$ tại điểm $x_0 = 2$.

Lời giải.

Ta có:

- $f(2) = -1$.
- $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{1-\sqrt{2x-3}}{2-x} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{1-(2x-3)}{(2-x)(1+\sqrt{2x-3})} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2(2-x)}{(2-x)(1+\sqrt{2x-3})}$
  $= \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2}{1+\sqrt{2x-3}} = 1 \neq f(2)$

Vậy hàm số $f(x)$ gián đoạn tại $x_0 = 2$.

VÍ DỤ 4. Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2+1 & \text{nếu } x > 0 \\ x & \text{nếu } x \leq 0 \end{cases}$ tại điểm $x_0 = 0$.

Lời giải.

Ta có:

- $f(0) = 0$.
- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} (x^2+1) = 1$.
- $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} x = 0$.

Ta có: $f(0) = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$. Vậy hàm số $f(x)$ gián đoạn tại điểm $x = 0$.

VÍ DỤ 5. Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-5}{\sqrt{2x-1}-3} & \text{nếu } x > 5 \\ (x-5)^2+3 & \text{nếu } x \leq 5 \end{cases}$ tại điểm $x_0 = 5$.

Lời giải.

2 Xét tính liên tục của hàm số trên miền xác định

- Hàm đa thức liên tục trên $\mathbb{R}$.
- Hàm phân thức hữu tỉ, hàm lượng giác liên tục trên từng khoảng xác định của chúng.

VÍ DỤ 1. Xét tính liên tục của hàm số sau trên tập xác định của chúng.

a) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-x-2}{x+1} & \text{khi } x\neq -1\\ -3 & \text{khi } x=-1\end{cases}.$

b) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x+1}{(x-1)^2} & \text{khi } x\neq 1\\ 3 & \text{khi } x=1\end{cases}.$

Lời giải.

a)
- Tập xác định của hàm số là $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.
- Khi $x\neq -1$, $f(x)=\dfrac{x^2-x-2}{x+1}$ là hàm phân thức hữu tỉ nên liên tục trên $(-\infty;-1)\cup(-1;+\infty)$.
- Tại điểm $x=-1$, ta có $f(-1)=-3$.
  $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-x-2}{x+1}=\lim\limits_{x\to -1}(x-2)=-3=f(-1)$.
  Do đó hàm số liên tục tại $x=-1$.
- Vậy hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

b)
- Tập xác định của hàm số là $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.
- Khi $x\neq 1$, $f(x)=\dfrac{2x+1}{(x-1)^2}$ là hàm phân thức hữu tỉ nên liên tục trên $(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$.
- Tại điểm $x=1$, ta có $f(1)=3$.
  $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x+1}{(x-1)^2}=+\infty\neq f(-1)$.
  Do đó hàm số gián đoạn tại $x=1$.
- Vậy hàm số liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

VÍ DỤ 2. Xét tính liên tục của hàm số sau trên tập xác định của chúng.

a) $f(x)=\begin{cases}x^2+3x & \text{khi } x\geq 2\\ 6x+1 & \text{khi } x<2.\end{cases}$

b) $f(x)=\begin{cases}x^2-3x+5 & \text{khi } x>1\\ 3 & \text{khi } x=1\\ 2x+1 & \text{khi } x<1.\end{cases}$

Lời giải.

a)
- Tập xác định của hàm số là $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.
- Khi $x>2$, $f(x)=x^2+3x$ là hàm đa thức nên liên tục trên $(2;+\infty)$.
- Khi $x<2$, $f(x)=6x+1$ là hàm đa thức nên liên tục trên $(-\infty;2)$.
- Tại điểm $x=2$, ta có $f(2)=10$.
  $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}(x^2+3x)=10$ và $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}(6x+1)=13$.
  Vì không tồn tại $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ nên hàm số gián đoạn tại $x=2$.
- Vậy hàm số liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{2\}$.

b)
- Tập xác định của hàm số là $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.
- Khi $x>1$, $f(x)=x^2-3x+5$ là hàm đa thức nên liên tục trên $(1;+\infty)$.
- Khi $x<1$, $f(x)=2x+1$ là hàm đa thức nên liên tục trên $(-\infty;1)$.
- Tại điểm $x=1$, ta có $f(1)=3$.
  $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(x^2-3x+5)=3$ và $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(2x+1)=3$.
  Vì $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=f(1)$ nên hàm số liên tục tại $x=1$.
- Vậy hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

VÍ DỤ 3. Tìm các giá trị của a để hàm số $f(x)=\begin{cases}x+1 & \text{nếu } x\le a\\ x^2 & \text{nếu } x>a\end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Lời giải.

Hàm số liên tục trên các khoảng $(-\infty;a)$ và $(a;+\infty)$.

Ta có

- $f(a)=a+1$.
- $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=\lim\limits_{x\to a^-}(x+1)=a+1$.
- $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\lim\limits_{x\to a^+}x^2=a^2$.

Để hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$, ta cần

$$f(a)=\lim_{x\to a^+}f(x)=\lim_{x\to a^-}f(x)\Leftrightarrow a+1=a^2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=\dfrac{1+\sqrt5}{2}\\ a=\dfrac{1-\sqrt5}{2}.\end{array}\right.$$

3 Tìm giá trị của tham số để hàm số liên tục - gián đoạn tại điểm cho trước.

VÍ DỤ 1. Tìm tham số m để hàm số $f(x)=\begin{cases}x^2+2x-m & \text{khi } x\ne 2\\ x+m & \text{khi } x=2\end{cases}$ liên tục tại $x_0=2$.

Lời giải.

Ta có: $\lim\limits_{x\to2}f(x)=\lim\limits_{x\to2}\left(x^2+2x-m\right)=8-m$

và $f(2)=2+m$.

Để hàm số liên tục tại $x_0=2\Leftrightarrow 8-m=2+m\Leftrightarrow m=3$.

VÍ DỤ 2. Tìm tham số m để hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-2x-3}{x+1} & \text{khi } x\ne -1\\ m^2+5m & \text{khi } x=-1\end{cases}$ liên tục tại $x_0=-1$.

Lời giải.

Ta có: $\lim\limits_{x\to-1}f(x)=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2-2x-3}{x+1}=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{(x+1)(x-3)}{x+1}=\lim\limits_{x\to-1}(x-3)=-4$

và $f(-1)=m^2+5m$.

Để hàm số liên tục tại $x_0=-1\Leftrightarrow m^2+5m=-4\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=-1\\ m=-4\end{array}\right.$.

VÍ DỤ 3. Tìm tham số m để hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{4x+5}-3}{x^2-1} & \text{khi } x>1\\ 2m+3 & \text{khi } x\le 1\end{cases}$ gián đoạn tại $x_0=1$.

Lời giải.

Ta có: $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\left(\dfrac{\sqrt{4x+5}-3}{x^2-1}\right)=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{4x-4}{(x-1)(x+1)\left(\sqrt{4x+5}+3\right)}$

$=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{4}{(x+1)\left(\sqrt{4x+5}+3\right)}=\dfrac{4}{2\cdot6}=\dfrac13$.

Mặt khác: $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=f(1)=2m+3$.

Để hàm số gián đoạn tại điểm $x_0=1\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to1^+}f(x)\ne f(1)\Leftrightarrow 2m+3\ne\dfrac13\Leftrightarrow m\ne-\dfrac43$.

4 Chứng minh phương trình có nghiệm

- Để chứng minh phương trình $f(x)=0$ có ít nhất một nghiệm trên D, ta chứng minh hàm số $y=f(x)$ liên tục trên D và có hai số $a,b\in D$ sao cho $f(a).f(b)<0$.
- Để chứng minh phương trình $f(x)=0$ có k nghiệm trên D, ta chứng minh hàm số $y=f(x)$ liên tục trên D và tồn tại k khoảng rời nhau $(a_i;a_{i+1})$ $(i=1,2,\ldots,k)$ nằm trong D sao cho $f(a_i).f(a_{i+1})<0$.

VÍ DỤ 1. Chứng minh rằng phương trình $2x^4-2x^3-3=0$ có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(-1;0)$.

Lời giải.

Đặt $f(x)=2x^4-2x^3-3$.

Vì $f(x)$ là hàm đa thức xác định trên $\mathbb{R}$ nên $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}\Rightarrow f(x)$ liên tục trên $[-1;0]$.

Ta có: $f(0)=-3; f(-1)=1\Rightarrow f(-1)f(0)<0$.

$\Rightarrow f(x)=0$ có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(-1;0)$ (đpcm).

VÍ DỤ 2. Chứng minh rằng phương trình $6x^3+3x^2-31x+10=0$ có đúng 3 nghiệm phân biệt.

Lời giải.

Đặt $f(x)=6x^3+3x^2-31x+10$. Hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên liên tục trên $[-3;2]$.

Ta có:

- $\begin{cases}f(-3)=-32\\ f(0)=10\end{cases}\Rightarrow f(-3)f(0)<0\Rightarrow f(x)=0$ có nghiệm thuộc $(-3;0)$.
- $\begin{cases}f(0)=10\\ f(1)=-12\end{cases}\Rightarrow f(0)f(1)<0\Rightarrow f(x)=0$ có nghiệm thuộc $(0;1)$.
- $\begin{cases}f(1)=-12\\ f(2)=8\end{cases}\Rightarrow f(1)f(2)<0\Rightarrow f(x)=0$ có nghiệm thuộc $(1;2)$.

Mặt khác vì $f(x)$ là một đa thức bậc ba nên phương trình $f(x)=0$ chỉ có tối đa ba nghiệm.

Vậy phương trình $f(x)=0$ có đúng 3 nghiệm phân biệt (đpcm).

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

BÀI 1. Xét tính liên tục của hàm số:

a) $f(x)=\begin{cases}x^2+1 & \text{khi } x\geq 0\\ 1-x & \text{khi } x<0\end{cases}$ tại điểm $x=0$.

b) $f(x)=\begin{cases}x^2+2 & \text{khi } x\geq 1\\ x & \text{khi } x<1\end{cases}$ tại điểm $x=1$.

Lời giải.

a) Ta có $f(0)=0^2+1=1$, $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(x^2+1\right)=0^2+1=1$,

$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(1-x)=1-0=1$.

Do $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=f(0)$ nên hàm số $y=f(x)$ liên tục tại điểm $x=0$.

b) Ta có $f(1)=1^2+2=3$, $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\left(x^2+2\right)=1^2+2=3$,

$\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(x)=1=1$.

Do $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)\neq\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)$ nên không tồn tại $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$.

Vậy hàm số $y=f(x)$ không liên tục tại điểm $x=1$.

BÀI 2. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-4}{x+2} & \text{khi } x\neq -2\\ a & \text{khi } x=-2.\end{cases}$ Tìm a để hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Lời giải.

Với mọi $x_0\neq -2$, ta có $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x+2}$ luôn xác định nên liên tục tại đó.

Mặt khác ta có $f(-2)=a$, $\lim\limits_{x\to -2}f(x)=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-4}{x+2}=\lim\limits_{x\to -2}(x-2)=-2-2=-4$.

Để hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thì hàm số $y=f(x)$ phải liên tục tại $x=-2$

$$\lim_{x\to -2}f(x)=f(-2)\Leftrightarrow a=-4.$$

BÀI 3. Xét tính liên tục của hàm số sau trên tập xác định của chúng.

a) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-2}{x^2-4} & \text{khi } x\neq 2\\ 1 & \text{khi } x=2\end{cases}$.

b) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-1}{x-1} & \text{khi } x\neq 1\\ 3 & \text{khi } x=1\end{cases}$.

Lời giải.

a) Tập xác định của hàm số là $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

Khi $x \neq 2$, $f(x) = \dfrac{x-2}{x^2-4}$ là hàm phân thức hữu tỉ nên liên tục trên $(-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$.

Tại điểm $x = 2$, ta có $f(2) = 1$.
$\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x-2}{x^2-4} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{1}{x+2} = \dfrac{1}{4} \neq f(2)$.
Do đó hàm số gián đoạn tại $x = 2$.

Vậy hàm số liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.

b) Tập xác định của hàm số là $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

Khi $x \neq 1$, $f(x) = \dfrac{x^3-1}{x-1}$ là hàm phân thức hữu tỉ nên liên tục trên $(-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$.

Tại điểm $x = 1$, ta có $f(1) = 3$.
$\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3-1}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1} (x^2+x+1) = 3 = f(1)$.
Do đó hàm số liên tục tại $x = 1$.

Vậy hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

BÀI 4. Một bãi đậu xe ô-tô đưa ra giá $C(x)$ (đồng) khi thời gian đậu xe là x (giờ) như sau:

$$C(x) = \begin{cases} 60.000 & \text{khi } 0 < x \leq 2 \\ 100.000 & \text{khi } 2 < x \leq 4 \\ 200.000 & \text{khi } 4 < x \leq 24. \end{cases}$$

Xét tính liên tục của hàm số $C(x)$.

Lời giải.

Hàm số $C(x)$ là hàm hằng trên từng khoảng $(0; 2)$, $(2; 4)$, $(4; 6)$ nên liên tục trên từng khoảng đó.

Ta có $\begin{cases} \lim\limits_{x \to 2^-} C(x) = 60.000 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} C(x) = 100.000 \end{cases} \Rightarrow$ không tồn tại $\lim\limits_{x \to 2} C(x)$, vậy $C(x)$ không liên tục tại $x_0 = 2$.

Ta có $\begin{cases} \lim\limits_{x \to 4^-} C(x) = 100.000 \\ \lim\limits_{x \to 4^+} C(x) = 200.000 \end{cases} \Rightarrow$ không tồn tại $\lim\limits_{x \to 4} C(x)$, vậy $C(x)$ không liên tục tại $x_0 = 4$.

Vậy hàm số $C(x)$ liên tục trên từng khoảng $(0; 2)$, $(2; 4)$, $(4; 6)$.

BÀI 5. Lực hấp dẫn do Trái Đất tác dụng lên một đơn vị khối lượng ở khoảng cách r tính từ tâm của nó là $F(r) = \begin{cases} \dfrac{GMr}{R^3} & \text{khi } 0 < r \leq R \\ \dfrac{GM}{r^2} & \text{khi } r \geq R \end{cases}$, trong đó M là khối lượng, R là bán kính của Trái Đất, G là hằng số hấp dẫn. Hàm số $F(r)$ có liên tục trên $(0; +\infty)$ không?

Lời giải.

Với mọi $r \in (0; R)$, hàm số $F(r) = \dfrac{GMr}{R^3}$ luôn xác định nên liên tục tại đó.

Với mọi $r \in (R; +\infty)$, hàm số $F(r) = \dfrac{GM}{r^2}$ luôn xác định nên liên tục tại đó.

Ta có $\begin{cases} \lim\limits_{r \to R^-} F(r) = \lim\limits_{r \to R^-} \dfrac{GMr}{R^3} = \dfrac{GM}{R^2} \\ \lim\limits_{x \to R^+} F(r) = \lim\limits_{x \to R^+} \dfrac{GM}{r^2} = \dfrac{GM}{R^2} \\ F(R) = \dfrac{GM}{R^2} \end{cases}$ nên hàm số $F(r)$ liên tục tại $r = R$.

Vậy hàm số $F(r)$ liên tục trên $(0; +\infty)$.

BÀI 6. Chứng minh rằng phương trình $x^4 - x^3 - 2x^2 - 15x - 25 = 0$ có ít nhất một nghiệm âm và ít nhất một nghiệm dương.

BÀI 7. Chứng minh rằng phương trình $x^3 + 4x^2 - 2 = 0$ có ba nghiệm trong khoảng $(-4; 1)$.

BÀI 8. Chứng minh rằng phương trình $x^5 - 5x^3 + 4x - 1 = 0$ có đúng năm nghiệm.

BÀI 9. Chứng minh rằng phương trình $x+1+\cos x=0$ có nghiệm.

Lời giải.

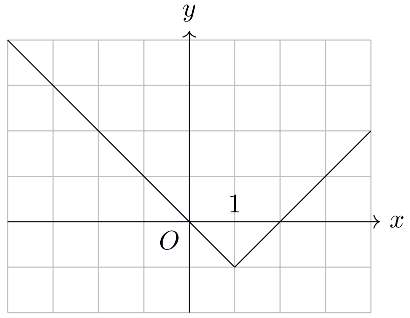
Xét hàm số $f(x)=x+1+\cos x$ liên tục trên $[-\pi;0]$ và có $\begin{cases} f(-\pi)=-\pi \\ f(0)=2 \end{cases} \Rightarrow f(-\pi).f(0)<0$. Suy ra phương trình $f(x)=0$ có nghiệm $x_0\in(-\pi;0)$.

Vậy phương trình $x+1+\cos x=0$ có nghiệm.

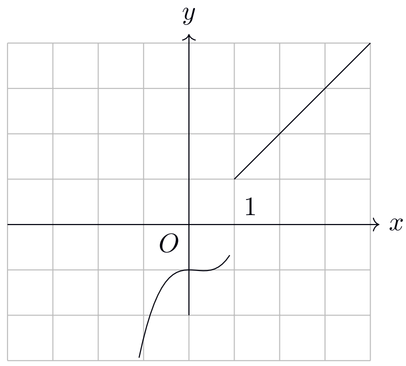
D. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Phần I. Mỗi câu hỏi học sinh chọn một trong bốn phương án A, B, C, D.

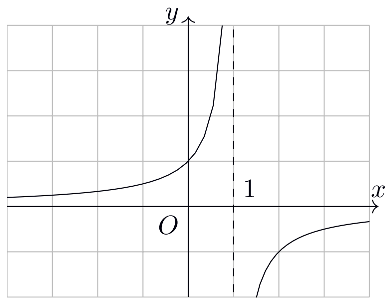
CÂU 1. Hàm số f liên tục tại $x_0=1$. Đồ thị của f có thể là hình nào dưới đây?

A 

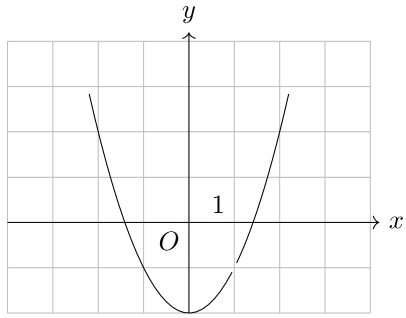
.

B 

.

C 

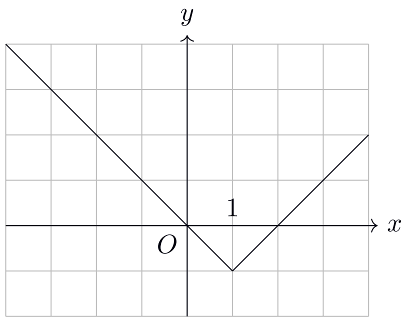
.

D 

.

Lời giải.

Hàm số có đồ thị như sau liên tục tại $x_0=1$.



Chọn đáp án A .... □

CÂU 2. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $(a;b)$. Điều kiện cần và đủ để hàm số liên tục trên $[a;b]$ là

A. $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=f(a)$ và $\lim\limits_{x\to b^+} f(x)=f(b)$.

B. $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=f(a)$ và $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=f(b)$.

C. $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=f(a)$ và $\lim\limits_{x\to b^+} f(x)=f(b)$.

D. $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=f(a)$ và $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=f(b)$.

Lời giải.

Hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $(a;b)$. Điều kiện cần và đủ để hàm số liên tục trên $[a;b]$ là $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=f(a)$ và $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=f(b)$.

Chọn đáp án B .... □

CÂU 3. Hàm số $y=\dfrac{1}{x(x^2-9)}$ liên tục tại điểm nào dưới đây?

A. 0. B. 3. C. -3. D. 1.

Lời giải.

Điều kiện xác định: $x(x^2-9)\neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 0 \\ x\neq \pm 3. \end{cases}$

Suy ra hàm số liên tục trên các khoảng $(-\infty;-3)$, $(-3;0)$, $(0;3)$, $(3;+\infty)$.

Vậy hàm số liên tục tại $x=1$.

Chọn đáp án (D) .... □

CÂU 4. Hàm số $y=\dfrac{1}{4x-4}$ gián đoạn tại điểm nào dưới đây?

(A) $x=1$. (B) $x=0$. (C) $x=2$. (D) $x=-1$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D}=\mathbb{R}\backslash\{1\}$, suy ra hàm số gián đoạn tại $x=1$.

Chọn đáp án (A) .... □

CÂU 5. Hàm số nào sau đây **không** liên tục trên tập số thực $\mathbb{R}$?

(A) $y=\dfrac{4}{x}+\dfrac{7}{9}$. (B) $y=4x+\dfrac{7}{9}$. (C) $y=\sin 2x$. (D) $y=3x^2+\sqrt{5}$.

Lời giải.

Hàm số $y=\dfrac{4}{x}+\dfrac{7}{9}$ có tập xác định là $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Chọn đáp án (A) .... □

CÂU 6. Hàm số nào sau đây **không** liên tục tại $x=2$?

(A) $y=\sin x$. (B) $y=\dfrac{x^2}{x-2}$. (C) $y=x^2-3x+2$. (D) $y=\sqrt{x+2}$.

Lời giải.

Ta thấy hàm số $y=\dfrac{x^2}{x-2}$ có tập xác định là $\mathscr{D}=\mathbb{R}\backslash\{2\}$ nên hàm số không liên tục tại $x=2$.

Chọn đáp án (B) .... □

CÂU 7. Hàm số $y=\dfrac{3}{x(x+1)(x+2)}$ liên tục tại điểm nào dưới đây?

(A) $x=-1$. (B) $x=-2$. (C) $x=3$. (D) $x=0$.

Lời giải.

Tập xác định của hàm số $y=\dfrac{3}{x(x+1)(x+2)}$ là $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{-2;-1;0\}$.

Vậy hàm số đã cho liên tục trên các khoảng xác định của nó. Suy ra hàm số liên tục tại điểm $x=3$.

Chọn đáp án (C) .... □

CÂU 8. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^3+8}{4x+8} & \text{khi } x\neq -2 \\ 3 & \text{khi } x=-2 \end{cases}$. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau?

(A) Hàm số $f(x)$ không liên tục trên tập $\mathbb{R}$.

(B) Hàm số $f(x)$ có tập xác định là $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$.

(C) Hàm số $f(x)$ gián đoạn tại $x=2$.

(D) Hàm số $f(x)$ liên tục tại $x=-2$.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.

Ta có $f(-2)=3$ và

$$\lim_{x\to -2} f(x)=\lim_{x\to -2}\frac{x^3+8}{4x+8}=\lim_{x\to -2}\frac{(x+2)(x^2-2x+4)}{4(x+2)}=\lim_{x\to -2}\frac{x^2-2x+4}{4}=3.$$

Suy ra $\lim\limits_{x\to -2} f(x)=f(-2)$ hay hàm số $f(x)$ liên tục tại $x=-2$.

Chọn đáp án (D) .... □

CÂU 9. Số điểm gián đoạn của hàm số $f(x)=\dfrac{\sin x}{x^3+3x^2-2x-2}$ là

(A) 1. (B) 3. (C) 0. (D) 2.

Lời giải.

Ta có $x^3+3x^2-2x-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-2-\sqrt{2} \\ x=-2+\sqrt{2} \end{array}\right.$

nên hàm số liên tục trên $(-\infty; -2-\sqrt{2})$, $(-2-\sqrt{2}; -2+\sqrt{2})$, $(-2+\sqrt{2}; 1)$ và $(1; +\infty)$.

x	$-\infty$		$-2-\sqrt{2}$		$-2+\sqrt{2}$		1		$+\infty$
x^3+3x^2-2x-2		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Ta có: $\lim\limits_{x\to(-2-\sqrt{2})^-} f(x) = -\infty$ vì $\begin{cases} \lim\limits_{x\to(-2-\sqrt{2})^-} \sin(x) \simeq 0,27 \\ \lim\limits_{x\to(-2-\sqrt{2})^-} (x^3+3x^2-2x-2) = 0 \text{ và } x^3+3x^2-2x-2<0. \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to(-2-\sqrt{2})^+} f(x) = +\infty$ vì $\begin{cases} \lim\limits_{x\to(-2-\sqrt{2})^+} \sin(x) \simeq 0,27 \\ \lim\limits_{x\to(-2-\sqrt{2})^+} (x^3+3x^2-2x-2) = 0 \text{ và } x^3+3x^2-2x-2>0. \end{cases}$

Suy ra: $\lim\limits_{x\to(-2-\sqrt{2})} f(x)$ không tồn tại nên hàm số bị gián đoạn tại $x_0 = -2-\sqrt{2}$.

Chọn đáp án (B) ....□

CÂU 10. Trong các hàm số sau, hàm số nào liên tục trên $\mathbb{R}$?

(A) $f(x) = \cot 2x$.

(B) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{10-2x}{\sqrt{x+11}-4} & \text{khi } x \neq 5 \\ -16 & \text{khi } x = 5 \end{cases}$.

(C) $f(x) = \begin{cases} 4x+3 & \text{khi } x < -2 \\ 3x^2-7 & \text{khi } x \geq -2 \end{cases}$.

(D) $f(x) = \sqrt{2x-1} + \sqrt{1+5x}$.

Lời giải.

Hàm số $f(x) = \cot 2x$ và $f(x) = \sqrt{2x-1} + \sqrt{1+5x}$ có tập xác định không phải là $\mathbb{R}$.

Hàm số $f(x) = \begin{cases} 4x+3 & \text{khi } x < -2 \\ 3x^2-7 & \text{khi} x \geq -2 \end{cases}$ không liên tục tại $x = -2$.

Hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{10-2x}{\sqrt{x+11}-4} & \text{khi } x \neq 5 \\ -16 & \text{khi } x = 5 \end{cases}$ có

$\lim\limits_{x\to5} \dfrac{10-2x}{\sqrt{x+11}-4} = \lim\limits_{x\to5} \dfrac{(10-2x)(\sqrt{x+11}+4)}{x+11-16} = \lim\limits_{x\to5} \left[-2(\sqrt{x+11}+4)\right] = -16.$

Chọn đáp án (B) ....□

CÂU 11. Cho bốn hàm số $f_1(x) = 2x^3-3x+1$, $f_2(x) = \dfrac{3x+1}{x-2}$, $f_3(x) = \cos x + 3$ và $f_4(x) = \tan x$. Hỏi có bao nhiêu hàm số liên tục trên tập $\mathbb{R}$?

(A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4.

Lời giải.

- Ta có hai hàm số $f_2(x) = \dfrac{3x+1}{x-2}$ và $f_4(x) = \tan x$ có tập xác định không phải là tập $\mathbb{R}$ nên không liên tục trên tập $\mathbb{R}$.
- Cả hai hàm số $f_1(x) = 2x^3-3x+1$ và $f_3(x) = \cos x + 3$ đều có tập xác định là $\mathbb{R}$ đồng thời liên tục trên $\mathbb{R}$.

Chọn đáp án (B) ....□

CÂU 12. Cho $f(x)$, $g(x)$ là các hàm số liên tục tại $x = 3$. Biết $f(3) = 4$ và $\lim\limits_{x\to3} [3f(x) - g(x)] = 6$. Tính $g(3)$.

(A) $g(3) = 6$. (B) $g(3) = 0$. (C) $g(3) = 2$. (D) $g(3) = -6$.

Lời giải.

Vì $f(x)$, $g(x)$ là các hàm số liên tục tại $x = 3$ nên

$$\begin{aligned} & \lim_{x\to3} [3f(x) - g(x)] = 6 \\ \Leftrightarrow\ & 3\lim_{x\to3} f(x) - \lim_{x\to3} g(x) = 6 \\ \Leftrightarrow\ & 3\cdot4 - \lim_{x\to3} g(x) = 6 \\ \Leftrightarrow\ & \lim_{x\to3} g(x) = 6 \end{aligned}$$

Suy ra $g(3) = 6$.

Chọn đáp án (A) ....□

Phần II. Trong mỗi ý a), b), c) và d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.

CÂU 1. Cho các hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-4}{x-2} & \text{khi } x\neq 2\\ 4{,}5 & \text{khi } x=2\end{cases}$ và $g(x)=\dfrac{2}{x-1}$. Khi đó

Mệnh đề	Đ	S
a) Hàm số $g(x)$ liên tục tại điểm $x_0=2$.	X	
b) Giới hạn $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=4$.	X	
c) Hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm $x_0=2$.		X
d) Hàm số $y=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ liên tục tại điểm $x_0=2$.		X

Lời giải.

a) Đ Ta có: $g(2)=\dfrac{2}{2-1}=2$ và $\lim\limits_{x\to 2} g(x)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2}{x-1}=2$; suy ra $\lim\limits_{x\to 2} g(x)=g(2)$.
Vậy hàm số $g(x)$ liên tục tại điểm $x_0=2$.

b) Đ Ta có: $f(2)=4{,}5$ và $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x+2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}(x+2)=4$.
Suy ra $\lim\limits_{x\to 2} f(x)\neq f(2)$.
Vậy hàm số $f(x)$ không liên tục tại điểm $x_0=2$.

Chọn đáp án | a đúng | b đúng | c sai | d sai | ☐

CÂU 2. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x-1} & \text{khi } x\neq 1\\ x+1 & \text{khi } x=1.\end{cases}$ và $g(x)=4x^2-x+1$. Khi đó

Mệnh đề	Đ	S
a) $f(1)=2$.	X	
b) Hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm $x_0=1$.	X	
c) Hàm số $g(x)$ liên tục tại điểm $x_0=1$.	X	
d) Hàm số $y=f(x)-g(x)$ không liên tục tại điểm $x_0=1$.		X

Lời giải.

a) Đ $f(x_0)=f(1)=1+1=2$.

b) Đ $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}(x+1)=2=f(x_0)$.
Vậy hàm số liên tục tại điểm $x_0=1$.

c) Đ Ta có: $g(x_0)=g(1)=4$. $\lim\limits_{x\to 1} g(x)\lim\limits_{x\to 1}(4x^2-x+1)=4=g(1)$.
Vậy hàm số liên tục tại điểm $x_0=1$.

Chọn đáp án | a đúng | b đúng | c đúng | d sai | ☐

CÂU 3. Xét tính liên tục của các hàm số sau trên tập tương ứng.

Mệnh đề	Đ	S
a) $f(x)=x^3-x^2+8x$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.	X	
b) $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2-3x}$ là hàm số liên tục trên khoảng $(-\infty;+\infty)$.		X
c) $f(x)=\dfrac{\sin x+1}{x+1}$ là hàm số liên tục trên các khoảng $(-\infty;0),(0;+\infty)$.		X
d) $f(x)=\sqrt{x-2}$ là hàm số liên tục trên nửa khoảng $[2;+\infty)$.	X	

Lời giải.

a) Đ Vì $f(x)=x^3-x^2+8x$ là hàm đa thức nên hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

b) S Vì $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 3x}$ là hàm phân thức có tập xác định $(-\infty; 0) \cup (0; 3) \cup (3; +\infty)$ nên hàm số liên tục trên các khoảng $(-\infty; 0), (0; 3), (3; +\infty)$.

c) S Tập xác định của hàm số $f(x) = \dfrac{\sin x + 1}{x + 1}$ là $(-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$. Trên các khoảng đó, hàm lượng giác $y = \sin x + 1$ (tử thức) và hàm số đa thức $y = x + 1$ (mẫu thức) đều liên tục.
Do vậy hàm $f(x)$ liên tục trên các khoảng $(-\infty; -1), (-1; +\infty)$.

d) Đ Tập xác định của hàm số $f(x) = \sqrt{x - 2}$ là $[2; +\infty)$.
Với mỗi x_0 tuỳ ý thuộc $(2; +\infty)$, ta luôn có $f(x_0) = \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \sqrt{x_0 - 2}$; vì vậy hàm số liên tục trên khoảng $(2; +\infty)$. (1)
Mặt khác: $f(2) = 0$ và $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = 0$ nên $f(2) = \lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$; suy ra hàm số liên tục tại điểm $x = 2$. (2)
Từ (1) và (2) suy ra hàm số $f(x)$ liên tục trên nửa khoảng $[2; +\infty)$.

Chọn đáp án | a đúng | b sai | c sai | d đúng | ....□

CÂU 4. Cho các hàm số sau: $f(x) = \begin{cases} -\dfrac{x}{2} & \text{khi } x \le 1 \\ \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1} & \text{khi } x > 1 \end{cases}$, $g(x) = x^2 - 3x + 1$ và $h(x) = \sin \dfrac{\pi x}{4}$.

Mệnh đề	Đ	S
a) Hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm $x_0 = 1$.	X	
b) Hàm số $g(x)$ liên tục tại điểm $x_0 = 1$.	X	
c) Hàm số $h(x)$ không liên tục tại điểm $x_0 = 2$.		X
d) Hàm số $y = f(x) \cdot g(x)$ không liên tục tại điểm $x_0 = 1$.		X

Lời giải.

a) Đ Ta có: $f(1) = -\dfrac{1}{2}$ và $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{-x}{2} = -\dfrac{1}{2}$,
$\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1} = \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x+1)} = \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{x-2}{x+1} = -\dfrac{1}{2}$.
Vậy $f(1) = \lim\limits_{x \to 1} f(x) = -\dfrac{1}{2}$ nên hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm $x_0 = 1$.

b) Đ Ta có: $g(1) = -1$ và $\lim\limits_{x \to 1} g(x) = 1^2 - 3 \cdot 1 + 1 = -1$ nên $g(1) = \lim\limits_{x \to 1} g(x)$.
Vậy hàm số $g(x)$ liên tục tại điểm $x_0 = 1$.

c) S Ta có: $h(2) = \sin \dfrac{2\pi}{4} = 1$ và $\lim\limits_{x \to 2} h(x) = \sin \dfrac{2\pi}{4} = 1$ nên $h(2) = \lim\limits_{x \to 2} h(x)$.
Vậy hàm số $h(x)$ liên tục tại điểm $x_0 = 2$.

d) S Hàm số $y = f(x)$ và $g(x)$ liên tục tại điểm $x_0 = 1$ nên hàm số $y = f(x) \cdot g(x)$ liên tục tại điểm $x_0 = 1$.

Chọn đáp án | a đúng | b đúng | c sai | d sai | ....□

Phần III. Học sinh điền kết quả vào ô trống.

CÂU 1. Tìm m để hàm số $f(x) = \begin{cases} x^4 + x^2 - 1 & \text{khi } x \le -1 \\ 3m + 1 & \text{khi } x > -1 \end{cases}$ liên tục tại điểm $x_0 = -1$.

Đáp án: | 0 | | | |

Lời giải.

Ta có: $f(-1) = (-1)^4 + (-1)^2 - 1 = 1$;
$\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^-} (x^4 + x^2 - 1) = 1$;
$\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^+} (3m + 1) = 3m + 1$.
Hàm số liên tục tại $x_0 = -1$ khi và chỉ khi $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = f(-1) \Leftrightarrow 1 = 3m + 1 \Leftrightarrow m = 0$.

Đáp án: $\boxed{0}$ ....□

CÂU 2. Tìm m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2} & \text{nếu } x \ne 2 \\ m + 1 & \text{nếu } x = 2 \end{cases}$ liên tục tại $x_0 = 2$.

Đáp án: | 2 | | | |

Lời giải.

Ta có: $f(2) = m + 1$;

$\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2} \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{(x-2)(x+1)}{x-2} = \lim\limits_{x \to 2} (x+1) = 3.$

Hàm số liên tục tại $x_0 = 2$ khi và chỉ khi $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = f(2) \Leftrightarrow m + 1 = 3 \Leftrightarrow m = 2$.

Đáp án: $\boxed{2}$ .... □

CÂU 3. Tìm $m > 0$ để hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x} - 1}{x^2 - 1} & \text{nếu } x \neq 1 \\ m^2 x & \text{nếu } x = 1 \end{cases}$ liên tục tại $x = 1$.

Đáp án: | 0 | , | 5 | |

Lời giải.

Ta có: $f(1) = m^2$;

$\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x} - 1}{x^2 - 1} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x} - 1}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)(x + 1)} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1}{(\sqrt{x} + 1)(x + 1)} = \dfrac{1}{4}.$

Hàm số liên tục tại $x_0 = 1$ khi và chỉ khi $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1) \Leftrightarrow m^2 = \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow m = \pm\dfrac{1}{2}$.

Do $m > 0$ nên $m = \dfrac{1}{2} = 0{,}5$.

Đáp án: $\boxed{0{,}5}$ .... □

CÂU 4. Tìm giá trị của hàm số a để hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + 2 & \text{khi } x \geq 0 \\ x^2 + a & \text{khi } x < 0 \end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Đáp án: | 2 | | | |

Lời giải.

Trên các khoảng $(0; +\infty)$, $(-\infty; 0)$, hàm số $f(x)$ là các hàm đa thức nên hàm số liên tục.

Vậy $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $f(x)$ liên tục tại điểm $x = 0$.

Ta có: $f(0) = 2$ và $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} (x^2 + 2x + 2) = 2$,

$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} (x^2 + a) = a$.

Ta thấy hàm số $f(x)$ liên tục tại $x_0 = 0$ khi và chỉ khi $a = 2$.

Vậy, với $a = 2$ thì hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Đáp án: $\boxed{2}$ .... □

CÂU 5. Tìm m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^4 - 9}{x - \sqrt{3}} & \text{khi } x \neq \sqrt{3} \\ 2m \sin\dfrac{\pi}{3} & \text{khi } x = \sqrt{3} \end{cases}$ tại điểm $x_0 = \sqrt{3}$.

Đáp án: | 1 | 2 | | |

Lời giải.

Ta có: $f(\sqrt{3}) = 2m \sin\dfrac{\pi}{3} = 2m \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = m\sqrt{3}$.

$\lim\limits_{x \to \sqrt{3}} f(x) = \lim\limits_{x \to \sqrt{3}} \dfrac{(x^2 - 3)(x^2 + 3)}{x - \sqrt{3}} = \lim\limits_{x \to \sqrt{3}} \left[(x + \sqrt{3})(x^2 + 3)\right] = 12\sqrt{3}$.

Hàm số liên tục tại $x_0 = \sqrt{3} \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to \sqrt{3}} f(x) = f(\sqrt{3}) \Leftrightarrow 12\sqrt{3} = m\sqrt{3} \Leftrightarrow m = 12$.

Đáp án: $\boxed{12}$ .... □

CÂU 6. Tìm giá trị của tham số a để hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} & \text{khi } x > 1 \\ ax - \dfrac{1}{2} & \text{khi } x \leq 1 \end{cases}$ liên tục tại điểm $x = 1$.

Đáp án: | 1 | | | |

Lời giải.

Ta có: $f(1) = a - \dfrac{1}{2}$ và $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} \left(ax - \dfrac{1}{2}\right) = a - \dfrac{1}{2}$;

$\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{\sqrt{x} - 1}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)} = \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{1}{\sqrt{x} + 1} = \dfrac{1}{2}$.

Hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = 1$ khi và chỉ khi $f(1) = \lim\limits_{x \to 1} f(x) \Leftrightarrow a - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow a = 1$.

Đáp án: $\boxed{1}$ .... □

MỤC LỤC