

# PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

## Bài 4. PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN

### A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

#### 1. Phương trình $\sin x = m$

☑ Với  $|m| > 1$  thì phương trình  $\sin x = m$  vô nghiệm.

☑ Với  $|m| \leq 1$ , sẽ tồn tại duy nhất  $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$  thỏa mãn  $\sin \alpha = m$ . Khi đó

$$\sin x = m \Leftrightarrow \sin x = \sin \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + k2\pi \\ x = \pi - \alpha + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

☑ Nếu số đo của góc  $\alpha$  được đo bằng đơn vị độ thì

$$\sin x = \sin \alpha^\circ \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha^\circ + k360^\circ \\ x = 180^\circ - \alpha^\circ + k360^\circ \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

☑ Tổng quát,

$$\sin f(x) = \sin g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) + k2\pi \\ f(x) = \pi - g(x) + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

☑ Một số trường hợp đặt biệt:

☑  $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

☑  $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$

☑  $\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$

#### 2. Phương trình $\cos x = m$

☑ Với  $|m| > 1$  thì phương trình  $\cos x = m$  vô nghiệm.

☑ Với  $|m| \leq 1$ , sẽ tồn tại duy nhất  $\alpha \in [0; \pi]$  thỏa mãn  $\cos \alpha = m$ . Khi đó

$$\cos x = m \Leftrightarrow \cos x = \cos \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + k2\pi \\ x = -\alpha + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

☑ Nếu số đo của góc  $\alpha$  được đo bằng đơn vị độ thì

$$\cos x = \cos \alpha^\circ \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha^\circ + k360^\circ \\ x = -\alpha^\circ + k360^\circ \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

☑ Tổng quát,

$$\cos f(x) = \cos g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) + k2\pi \\ f(x) = -g(x) + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

☑ Một số trường hợp đặc biệt:

☑  $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

☑  $\cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$

☑  $\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$



ĐIỂM: \_\_\_\_\_

Be yourself; everyone else  
is already taken.

QUICK NOTE

## QUICK NOTE

3. Phương trình  $\tan x = m$ 

☑ Với mọi  $m \in \mathbb{R}$ , tồn tại duy nhất  $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$  thỏa mãn  $\tan \alpha = m$ . Khi đó

$$\tan x = m \Leftrightarrow \tan x = \tan \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

☑ Nếu số đo của góc  $\alpha$  được đo bằng đơn vị độ thì

$$\tan x = \tan \alpha^\circ \Leftrightarrow x = \alpha^\circ + k180^\circ, k \in \mathbb{Z}$$

☑ Tổng quát,

$$\tan f(x) = \tan g(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x) + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

4. Phương trình  $\cot x = m$ 

☑ Với mọi  $m \in \mathbb{R}$ , tồn tại duy nhất  $\alpha \in (0; \pi)$  thỏa mãn  $\cot \alpha = m$ . Khi đó

$$\cot x = m \Leftrightarrow \cot x = \cot \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

☑ Nếu số đo của góc  $\alpha$  được đo bằng đơn vị độ thì

$$\cot x = \cot \alpha^\circ \Leftrightarrow x = \alpha^\circ + k180^\circ, k \in \mathbb{Z}.$$

☑ Tổng quát,

$$\cot f(x) = \cot g(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x) + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

## Dạng 1. Điều kiện có nghiệm của phương trình lượng giác cơ bản

☑  $\sin x = a$  có tập giá trị  $|a| \leq 1$ .

☑  $\cos x = b$  có tập giá trị  $|b| \leq 1$ .

## 1. Ví dụ

**VÍ DỤ 1.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  để phương trình  $\sin x = m$  có nghiệm.

**VÍ DỤ 2.** Tìm tất cả các giá trị của tham số  $m$  để phương trình  $\sin x - m = 1$  có nghiệm.

**VÍ DỤ 3.** Tìm tất cả các giá trị của tham số  $m$  để phương trình  $3\sin^2 x = 2m - 1$  có nghiệm.

**VÍ DỤ 4.** Tìm  $m$  để phương trình  $\cos x - m = 0$  vô nghiệm.

**VÍ DỤ 5.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  để phương trình  $\cos x = m + 1$  có nghiệm?

## 2. Bài tập tự luận

**BÀI 1.** Tìm tất cả các tham số  $m$  sao cho trong tập nghiệm của phương trình  $\sin 2x = 1 + 2m$  có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng  $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ .

**BÀI 2.** Tìm  $m$  để phương trình  $\sin 3x - 6 - 5m = 0$  có nghiệm.

**BÀI 3.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của  $m$  để phương trình:  $3\sin x + m - 1 = 0$  có nghiệm?

## 3. Bài tập trắc nghiệm

**CÂU 1.** Với giá trị nào của  $m$  thì phương trình  $\sin x - m = 1$  có nghiệm là

- (A)  $0 \leq m \leq 1$ . (B)  $m \leq 0$ . (C)  $m \geq 1$ . (D)  $-2 \leq m \leq 0$ .

**CÂU 2.** Phương trình  $\sin \frac{x}{2} = m$  có nghiệm khi và chỉ khi.

- (A)  $m \in [-1; 1]$ . (B)  $m \in [-2; 2]$ . (C)  $m \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$ . (D)  $m \in \mathbb{R}$ .

**CÂU 3.** Với giá trị nào của  $m$  thì phương trình  $\sin x - 2m = 1$  có nghiệm?

- (A)  $0 \leq m \leq 1$ . (B)  $m \leq 0$ . (C)  $m \geq 1$ . (D)  $-1 \leq m \leq 0$ .

**CÂU 4.** Tập hợp các giá trị của tham số  $m$  để phương trình  $\sin 2x + 2 = m$  có nghiệm là  $[a; b]$ . Khi đó  $a + b$  bằng

- (A) 3. (B) 0. (C) 2. (D) 4.

**CÂU 5.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  để phương trình  $3 \sin 2x - m^2 + 5 = 0$  có nghiệm?

- (A) 6. (B) 2. (C) 1. (D) 7.

**CÂU 6.** Cho phương trình  $4 \sin \left( x + \frac{\pi}{3} \right) \cos \left( x - \frac{\pi}{6} \right) = a^2 + \sqrt{3} \sin 2x - \cos 2x$  (1). Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $a$  để phương trình (1) có nghiệm.

- (A) 5. (B) 0. (C) 2. (D) 3.

**CÂU 7.** Tìm tất cả giá trị thực của  $m$  để phương trình  $\cos 2x - m = 0$  vô nghiệm.

- (A)  $m \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$ . (B)  $m \in (1; +\infty)$ .  
(C)  $m \in [-1; 1]$ . (D)  $m \in (-\infty; -1)$ .

**CÂU 8.** Cho phương trình  $\cos \left( 2x - \frac{\pi}{3} \right) - m = 2$ . Tìm  $m$  để phương trình có nghiệm?

- (A) Không tồn tại  $m$ . (B)  $m \in [-1; 3]$ .  
(C)  $m \in [-3; -1]$ . (D)  $m \in \mathbb{R}$ .

**CÂU 9.** Tìm tất cả giá trị của  $a$  để phương trình sau có nghiệm  $\cos^2 3x = 2a^2 - 3a + 1$ .

- (A)  $a \in [0; 1]$ . (B)  $a \in \left[ 0; \frac{1}{2} \right] \cup \left[ 1; \frac{3}{2} \right]$ .  
(C)  $a \in \left[ 0; \frac{3}{2} \right]$ . (D)  $a \in [0; 1] \cup \left[ \frac{3}{2}; +\infty \right)$ .

## Dạng 2. Phương trình lượng giác cơ bản dùng Radian

- ☑  $\sin x = \sin \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + k2\pi \\ x = \pi - \alpha + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$ .
- ☑  $\cos x = \cos \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + k2\pi \\ x = -\alpha + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$ .
- ☑  $\tan x = \tan \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi (k \in \mathbb{Z})$ .
- ☑  $\cot x = \cot \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi (k \in \mathbb{Z})$ .

## 1. Ví dụ

**VÍ DỤ 1.** Giải phương trình  $\sin x = 1$ .

**VÍ DỤ 2.** Giải phương trình  $\cos x = 1$ .

**VÍ DỤ 3.** Giải phương trình  $\sin \left( \frac{3x}{4} - \frac{\pi}{3} \right) = 1$ .

**VÍ DỤ 4.** Giải phương trình  $\tan x - 1 = 0$ .

**VÍ DỤ 5.** Giải phương trình  $\sqrt{3} \tan x - 1 = 0$ .

**VÍ DỤ 6.** Giải phương trình  $\cot 3x = \cot x$ .

## 2. Bài tập tự luận

**BÀI 1.** Giải phương trình  $\sin 2x = 1$

**BÀI 2.** Giải phương trình  $\cot (3x - 1) = -\sqrt{3}$ .

**BÀI 3.** Giải phương trình  $\cot x = \cot \left( -\frac{\pi}{7} \right)$  trên khoảng  $(0; 3\pi)$ .

**BÀI 4.** Phương trình  $\cot x = \sqrt{3}$  có bao nhiêu nghiệm thuộc  $[-2018\pi; 2018\pi]$ ?

**BÀI 5.** Tổng các nghiệm của phương trình  $\tan 5x - \tan x = 0$  trên nửa khoảng  $[0; \pi)$  bằng

## QUICK NOTE

QUICK NOTE

### 3. Bài tập trắc nghiệm

**CÂU 1.** Phương trình  $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$  có tập nghiệm là

- (A)  $S = \left\{ \frac{\pi}{6} + k2\pi; \frac{5\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ . (B)  $S = \left\{ \frac{\pi}{3} + k2\pi; -\frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ .  
(C)  $S = \left\{ \frac{\pi}{3} + k2\pi; \frac{2\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ . (D)  $S = \left\{ \frac{\pi}{3} + k2\pi; -\frac{2\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ .

**CÂU 2.** Phương trình  $2\sin x - 1 = 0$  có tập nghiệm là

- (A)  $S = \left\{ \frac{\pi}{6} + k2\pi; \frac{5\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ . (B)  $S = \left\{ \frac{\pi}{3} + k2\pi; -\frac{2\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ .  
(C)  $S = \left\{ \frac{\pi}{6} + k2\pi; -\frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ . (D)  $S = \left\{ \frac{1}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ .

**CÂU 3.** Tập nghiệm của phương trình  $\sin x = 0$  là

- (A)  $x = \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$ . (B)  $x = k\pi (k \in \mathbb{Z})$ .  
(C)  $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$ . (D)  $x = k2\pi (k \in \mathbb{Z})$ .

**CÂU 4.** Số nghiệm của phương trình  $\sin 2x = 0$  thỏa mãn  $0 < x < 2\pi$  là?

- (A) 2. (B) 1. (C) 3. (D) 0.

**CÂU 5.** Nghiệm của phương trình  $\sin \frac{x}{2} = 1$  là

- (A)  $x = \pi + k4\pi, k \in \mathbb{Z}$ . (B)  $x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ .  
(C)  $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ . (D)  $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

**CÂU 6.** Nghiệm của phương trình  $\cos x = \frac{1}{2}$  là

- (A)  $x = \pm \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ . (B)  $x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ .  
(C)  $x = \pm \frac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ . (D)  $x = \pm \frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

**CÂU 7.** Số nghiệm của phương trình  $\cos \left( x + \frac{\pi}{4} \right) = 1$  với  $\pi \leq x \leq 5\pi$  là

- (A) 0. (B) 3. (C) 1. (D) 2.

**CÂU 8.** Phương trình  $\cos x - 1 = 0$  có nghiệm là

- (A)  $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ . (B)  $x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ .  
(C)  $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ . (D)  $x = \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

**CÂU 9.** Tập nghiệm của phương trình  $\cos 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$  là

- (A)  $x = \pm \frac{\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ . (B)  $x = \pm \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .  
(C)  $x = -\frac{\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ . (D)  $x = \frac{\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

**CÂU 10.** Tập nghiệm của phương trình  $\cos 2x = \frac{1}{2}$  là

- (A)  $x = \pm \frac{\pi}{6} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$ . (B)  $x = \pm \frac{\pi}{6} + k\pi (k \in \mathbb{R})$ .  
(C)  $x = \frac{\pi}{6} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$ . (D)  $x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$ .

**CÂU 11.** Tổng nghiệm âm lớn nhất và nghiệm dương nhỏ nhất của phương trình  $2\cos x - \sqrt{3} = 0$  là

- (A)  $\frac{5\pi}{3}$ . (B) 0. (C)  $\frac{5\pi}{6}$ . (D)  $-\frac{5\pi}{3}$ .

**CÂU 12.** Số nghiệm của phương trình  $\cos x = \frac{2}{5}$  trên khoảng  $\left( -\frac{\pi}{2}; 2\pi \right)$  là

- (A) 2. (B) 1. (C) 4. (D) 3.

**CÂU 13.** Tổng các nghiệm thuộc khoảng  $(0; 2\pi)$  của phương trình  $5\cos x - 2 = 0$  là

- (A)  $S = 3\pi$ . (B)  $S = 2\pi$ . (C)  $S = 0$ . (D)  $S = 4\pi$ .

**CÂU 14.** Tính tổng  $S$  tất cả các nghiệm trên khoảng  $(0; 3\pi)$  của phương trình  $2\cos 3x = 1$

- (A)  $S = \frac{121\pi}{9}$ . (B)  $S = \frac{120\pi}{9}$ . (C)  $S = \frac{122\pi}{9}$ . (D)  $S = \frac{20\pi}{3}$ .

**CÂU 15.** Tập nghiệm  $S$  của phương trình  $\sqrt{3} \tan \frac{x}{3} + 3 = 0$ .

- (A)  $S = \left\{ -\frac{\pi}{9} + k3\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ . (B)  $S = \left\{ -\frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ .  
(C)  $S = \{ -\pi + k3\pi, k \in \mathbb{Z} \}$ . (D)  $S = \left\{ \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ .

**CÂU 16.** Nghiệm của phương trình  $\tan x = \tan \frac{\pi}{3}$  là

- (A)  $x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ . (B)  $x = \frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ .  
(C)  $x = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ . (D)  $x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

**CÂU 17.** Phương trình  $\tan x = 1$  có nghiệm là

- (A)  $x = \frac{\pi}{4} + k2\pi$ . (B)  $x = -\frac{\pi}{4} + k2\pi$ . (C)  $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$ . (D)  $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ .

**CÂU 18.** Phương trình  $\sqrt{3} \tan 2x - 3 = 0$  có nghiệm là

- (A)  $x = \frac{\pi}{3} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$ . (B)  $x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$ .  
(C)  $x = \frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$ . (D)  $x = \frac{\pi}{6} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$ .

**CÂU 19.** Cho phương trình  $\sqrt{3} \tan 2x = 3$  có nghiệm  $x_0$  khi đó  $\cos x_0$  nhận giá trị là

- (A)  $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ . (B)  $\pm \frac{\sqrt{3}}{2}; \pm \frac{1}{2}$ . (C)  $\pm \frac{\sqrt{3}}{2}$ . (D)  $\pm \frac{1}{2}$ .

**CÂU 20.** Tổng các nghiệm của phương trình  $\tan 2x = \tan x$  trên  $[-\pi; 2\pi]$  là

- (A)  $\pi$ . (B)  $\frac{\pi}{2}$ . (C)  $4\pi$ . (D)  $2\pi$ .

**CÂU 21.** Nghiệm của phương trình  $\tan 3x = \tan x$  là

- (A)  $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ . (B)  $x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ . (C)  $x = \frac{k\pi}{6}, k \in \mathbb{Z}$ . (D)  $x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

**CÂU 22.** Nghiệm của phương trình  $\tan 2x = \tan \left( \frac{\pi}{2} - x \right)$  là

- (A)  $x = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ . (B)  $x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$ .  
(C)  $x = \frac{\pi}{3} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ . (D)  $x = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$ .

**CÂU 23.** Phương trình lượng giác  $\sqrt{3} \cot x - 3 = 0$  có nghiệm là

- (A)  $x = \frac{\pi}{3} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$ . (B)  $x = \frac{\pi}{6} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z})$ .  
(C)  $x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z})$ . (D)  $x = \frac{\pi}{6} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$ .

**CÂU 24.** Phương trình  $\cot \left( \frac{\pi}{4} - 2x \right) = 1$  có nghiệm

- (A)  $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ . (B)  $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .  
(C)  $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ . (D)  $x = k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ .

### Dạng 3. Phương trình lượng giác cơ bản dùng độ

☑  $\sin x = \sin \alpha^\circ \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha^\circ + k360^\circ \\ x = 180^\circ - \alpha^\circ + k360^\circ \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$

☑  $\cos x = \cos \alpha^\circ \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha^\circ + k360^\circ \\ x = -\alpha^\circ + k360^\circ \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$

☑  $\tan x = \tan \alpha^\circ \Leftrightarrow x = \alpha^\circ + k180^\circ (k \in \mathbb{Z}).$

☑  $\cot x = \cot \alpha^\circ \Leftrightarrow x = \alpha^\circ + k180^\circ (k \in \mathbb{Z}).$

## 1. Ví dụ

**VÍ DỤ 1.** Tìm góc lượng giác  $x$  sao cho:

- a)  $\sin x = \sin 55^\circ$ ; c)  $\tan x = \tan 67^\circ$ ;  
b)  $\cos x = \cos(-87^\circ)$ ; d)  $\cot x = \cot(-83^\circ)$ .

**VÍ DỤ 2.** Giải các phương trình sau:

### QUICK NOTE

## QUICK NOTE

a)  $\sin(x + 20^\circ) = \frac{1}{2}$ ;

b)  $\sin(x + 30^\circ) = \sin(x + 60^\circ)$ .

**VÍ DỤ 3.** Giải phương trình  $\sin 2x = \sin(60^\circ - 3x)$ .**VÍ DỤ 4.** Giải phương trình  $\cos 2x = \cos(45^\circ - x)$ .**VÍ DỤ 5.** Giải phương trình:  $\sqrt{3} \tan\left(\frac{x}{2} + 15^\circ\right) = 1$ .**2. Bài tập tự luận****BÀI 1.** Giải phương trình  $\cos(x - 15^\circ) = -\frac{1}{2}$ .**BÀI 2.** Giải phương trình:  $\cos(2x - 60^\circ) = \frac{1}{3}$ .**BÀI 3.** Giải phương trình  $\tan(x + 30^\circ) + 1 = 0$  với  $-90^\circ < x < 360^\circ$ .**BÀI 4.** Giải phương trình  $3 \cot^2(5x + 40^\circ) = 1$ .**BÀI 5.** Giải phương trình:  $\tan(3x - 20^\circ) - \cot(2x + 15^\circ) = 0$ .**BÀI 6.** Giải phương trình:  $\cot(x + 30^\circ) = \cot \frac{x}{2}$ **3. Bài tập trắc nghiệm****CÂU 1.** Phương trình  $\sin x = \sin a^\circ$  tương đương với

**(A)**  $\begin{cases} x = a^\circ + k360^\circ \\ x = -a^\circ + k60^\circ \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$

**(B)**  $\begin{cases} x = a^\circ + k60^\circ \\ x = 180^\circ - a^\circ + 60^\circ \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$

**(C)**  $x = a^\circ + k180^\circ (k \in \mathbb{Z}).$

**(D)**  $x = -a^\circ + k180^\circ (k \in \mathbb{Z}).$

**CÂU 2.** Hỏi  $x = 45^\circ$  là nghiệm của phương trình nào sau đây?

**(A)**  $\sin x = 1.$

**(B)**  $\cos x = 1.$

**(C)**  $\sin x \cdot \cos x = \frac{1}{2}.$

**(D)**  $\sin 2x = 0.$

**CÂU 3.** Tìm tập nghiệm  $S$  của phương trình  $\cos 3x = \cos 45^\circ$ .

**(A)**  $S = \{15^\circ + k120^\circ; 45^\circ + k120^\circ, k \in \mathbb{Z}\}.$

**(B)**  $S = \{-15^\circ + k120^\circ; 15^\circ + k120^\circ, k \in \mathbb{Z}\}.$

**(C)**  $S = \{15^\circ + k360^\circ; 45^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}\}.$

**(D)**  $S = \{-15^\circ + k360^\circ; 15^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}\}.$

**CÂU 4.** Tìm tập nghiệm  $S$  của phương trình  $\cos(2x - 30^\circ) = -\frac{1}{2}$ .

**(A)**  $S = \{-45^\circ + k360^\circ; 75^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}\}.$

**(B)**  $S = \{-45^\circ + k180^\circ; 45^\circ + k180^\circ, k \in \mathbb{Z}\}.$

**(C)**  $S = \{-45^\circ + k180^\circ; 75^\circ + k180^\circ, k \in \mathbb{Z}\}.$

**(D)**  $S = \{-75^\circ + k180^\circ; 75^\circ + k180^\circ, k \in \mathbb{Z}\}.$

**CÂU 5.** Nghiệm của phương trình  $\tan x = \tan 25^\circ$  là

**(A)**  $x = 25^\circ + k360^\circ$  và  $x = 155^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}.$

**(B)**  $x = 25^\circ + k180^\circ$  và  $x = 155^\circ + k180^\circ, k \in \mathbb{Z}.$

**(C)**  $x = 25^\circ + k360^\circ$  và  $x = -25^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}.$

**(D)**  $x = 25^\circ + k180^\circ, k \in \mathbb{Z}.$

**CÂU 6.** Phương trình  $\tan(2x + 12^\circ) = 0$  có họ nghiệm là

**(A)**  $x = -6^\circ + k180^\circ, k \in \mathbb{Z}.$

**(B)**  $x = -6^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}.$

**(C)**  $x = -12^\circ + k90^\circ, k \in \mathbb{Z}.$

**(D)**  $x = -6^\circ + k90^\circ, k \in \mathbb{Z}.$

**CÂU 7.** Tìm số nghiệm của phương trình  $\sin 3x = 0$  thuộc khoảng  $(0; 180^\circ)$ .

**(A)** 1.

**(B)** 2.

**(C)** 3.

**(D)** 4.

**CÂU 8.** Tìm tập nghiệm  $S$  của phương trình  $\cos(x + 30^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ .

**(A)**  $S = \{120^\circ + k360^\circ; k360^\circ, k \in \mathbb{Z}\}.$

**(B)**  $S = \{120^\circ + k360^\circ; -180^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}\}.$

**(C)**  $S = \{120^\circ + k180^\circ; k180^\circ, k \in \mathbb{Z}\}.$

**(D)**  $S = \{120^\circ + k180^\circ; -180^\circ + k180^\circ, k \in \mathbb{Z}\}.$

**CÂU 9.** Tìm nghiệm của phương trình  $\sqrt{3} \cot(x + 60^\circ) - 1 = 0$ .

- (A)  $x = -30^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}$ . (B)  $x = -30^\circ + k180^\circ, k \in \mathbb{Z}$ .  
(C)  $x = k360^\circ, k \in \mathbb{Z}$ . (D)  $x = k180^\circ, k \in \mathbb{Z}$ .

**CÂU 10.** Cho phương trình  $\tan(2x - 15^\circ) = 1$  biết rằng  $-90^\circ < x < 90^\circ$ . Số nghiệm của phương trình là

- (A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4.

**CÂU 11.** Số nghiệm của phương trình  $\sin(2x - 40^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$  với  $-180^\circ \leq x \leq 180^\circ$  là

- (A) 2. (B) 4. (C) 6. (D) 7.

**CÂU 12.** Tìm tập nghiệm  $S$  của phương trình  $\sin(x + 30^\circ) \cdot \cos(x - 45^\circ) = 0$ .

- (A)  $S = \{-30^\circ + k180^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$ .  
(B)  $S = \{-30^\circ + k180^\circ; 135^\circ + k180^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$ .  
(C)  $S = \{135^\circ + k180^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$ .  
(D)  $S = \{45^\circ + k180^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$ .

#### Dạng 4. Phương trình đưa về phương trình lượng giác cơ bản

### 1. Ví dụ

**VÍ DỤ 1.** Giải phương trình:  $\sin 2x = \cos 3x$ .

**VÍ DỤ 2.** Giải phương trình:  $\sin 4x - \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 0$ .

**VÍ DỤ 3.** Giải các phương trình sau:

- a)  $\sin 2x + \cos 4x = 0$ . b)  $\cos 3x = -\cos 7x$ .

**VÍ DỤ 4.** Giải phương trình:  $\cos^2 2x = \cos^2\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ .

**VÍ DỤ 5.** Giải phương trình:  $\sin x + \sin 2x = 0$ .

### 2. Bài tập tự luận

**BÀI 1.** Giải phương trình:  $\sin 3x - \cos 5x = 0$ .

**BÀI 2.** Giải phương trình  $\sin 2x + \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 0$ .

**BÀI 3.** Giải phương trình:  $\tan(2x + 1) + \cot x = 0$ .

**BÀI 4.** Tìm  $x \in (-\pi; \pi)$  sao cho  $\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + 2 \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 0$ .

**BÀI 5.** Giải phương trình:  $2 \sin^2 x - 1 + \cos 3x = 0$ .

**BÀI 6.** Giải phương trình  $\sin 3x + \cos 2x - \sin x = 0$ .

**BÀI 7.** Giải phương trình  $\sin x \cdot \cos 2x = \sin 2x \cdot \cos 3x$ .

**BÀI 8.** Giải phương trình:  $\sin^4 \frac{x}{2} + \cos^4 \frac{x}{2} = \frac{1}{2}$ .

**BÀI 9.** Giải phương trình:  $\tan^2 4x - \tan^2\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) = 0$ .

**BÀI 10.** Giải phương trình  $\sin^6 x + \cos^6 x = \frac{7}{16}$ .

### 3. Bài tập trắc nghiệm

**CÂU 1.** Tìm số nghiệm thuộc khoảng  $(-\pi; \pi)$  của phương trình  $\sin x + \sin 2x = 0$ .

- (A) 3. (B) 1. (C) 2. (D) 4.

**CÂU 2.** Tìm số nghiệm thuộc khoảng  $(0; \pi)$  của phương trình  $\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \sin 5x = 0$ .

- (A) 4. (B) 5. (C) 6. (D) 7.

**CÂU 3.** Phương trình  $\tan 2x + \tan x = 0$  có bao nhiêu nghiệm trong đoạn  $[-4\pi; 5\pi]$ ?

- (A) 28. (B) 27. (C) 19. (D) 18.

#### QUICK NOTE

QUICK NOTE

**CÂU 4.** Giải phương trình  $\sin x + \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = 2$ .

(A)  $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

(B)  $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

(C)  $x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

(D)  $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

**CÂU 5.** Họ nghiệm của phương trình  $\tan 3x \cdot \tan x = 1$  là

(A)  $x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{8}, k \in \mathbb{Z}$ .

(B)  $x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$ .

(C)  $x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$ .

(D)  $x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ .

**CÂU 6.** Tổng các nghiệm của phương trình  $\sin x = \frac{-1}{2\sqrt{2}\cos x}$  trên đoạn  $[0; 2\pi]$  là

(A)  $\frac{9\pi}{8}$ .

(B)  $\frac{15\pi}{8}$ .

(C)  $5\pi$ .

(D)  $\frac{11\pi}{8}$ .

**CÂU 7.** Giải phương trình  $\sin^2 2x = \cos^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ .

(A)  $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, x = \frac{\pi}{2} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$ .

(B)  $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, x = -\frac{\pi}{12} + k\pi, x = \frac{7\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

(C)  $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, x = -\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$ .

(D)  $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, x = -\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$ .

**CÂU 8.** Có bao nhiêu điểm trên đường tròn lượng giác biểu diễn tất các nghiệm của phương trình  $\sin 4x \cos x = \sin 5x \cos 2x$ ?

(A) 2 điểm.

(B) 5 điểm.

(C) 9 điểm.

(D) 14 điểm.

**CÂU 9.** Có bao nhiêu điểm trên đường tròn lượng giác biểu diễn tất các nghiệm của phương trình  $\sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin 2x$ ?

(A) 2 điểm.

(B) 3 điểm.

(C) 4 điểm.

(D) 1 điểm.

**CÂU 10.** Một vật thể chuyển động với vận tốc thay đổi có phương trình  $v(t) = 2 + \sin\left(\pi t + \frac{\pi}{4}\right)$  ( $t$  tính bằng giây, vận tốc tính bằng m/s<sup>2</sup>). Trong khoảng 1 giây đầu chuyển động, thời điểm vật thể đạt vận tốc 3 m/s<sup>2</sup> là

(A) 1 giây.

(B)  $\frac{1}{4}$  giây.

(C)  $\frac{1}{2}$  giây.

(D)  $\frac{3}{4}$  giây.

**CÂU 11.** Tìm số nghiệm thuộc khoảng  $(0; 2\pi)$  của phương trình  $\sin x + 2 \sin 2x + \sin 3x = 0$ .

(A) 6.

(B) 5.

(C) 4.

(D) 3.

**CÂU 12.** Cho phương trình  $\sin x + 2 \sin 2x + \sin 3x = \cos x + 2 \cos 2x + \cos 3x$ . Tính tổng  $S$  tất cả các nghiệm trong đoạn  $(0; \pi)$  của phương trình đã cho.

(A)  $S = \frac{3\pi}{4}$ .

(B)  $S = \frac{5\pi}{8}$ .

(C)  $S = \frac{17\pi}{12}$ .

(D)  $S = \frac{13\pi}{12}$ .

**CÂU 13.** Cho phương trình  $\sin x \cos x = 2(\sin^4 x + \cos^4 x) - \frac{3}{2}$ . Tính tổng  $S$  tất cả các nghiệm thuộc  $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$  của phương trình đã cho.

(A)  $S = \frac{\pi}{2}$ .

(B)  $S = \frac{5\pi}{12}$ .

(C)  $S = \frac{\pi}{12}$ .

(D)  $S = \frac{5\pi}{4}$ .

**CÂU 14.** Phương trình  $\tan\left(\frac{\pi}{3} - x\right) \cdot \tan\left(\frac{\pi}{2} + 2x\right) = 1$  có nghiệm là

(A)  $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

(B)  $x = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

(C)  $x = -\frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

(D)  $x = \frac{5\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

**CÂU 15.** Nghiệm của phương trình  $\tan 2x - \cot\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$  có dạng  $x = \frac{\pi}{n} + \frac{k\pi}{m}, k \in \mathbb{Z}$ . Khi đó  $m \cdot n$  bằng

(A) 8.

(B) 32.

(C) 36.

(D) 12.

Dạng 5. Toán thực tế liên môn



## 1. Bài tập tự luận

**BÀI 1.** Nhiệt độ ngoài trời ở một thành phố vào các thời điểm khác nhau trong ngày có thể được mô phỏng bởi công thức

$$h(t) = 29 + 3 \sin \frac{\pi}{12} (t - 9).$$

với  $h$  tính bằng độ  $C$  và  $t$  là thời gian trong ngày tính bằng giờ.

- a) Tính nhiệt độ lúc 12 giờ trưa.      b) Tính thời gian nhiệt độ thấp nhất trong ngày.

**BÀI 2.** Số giờ có ánh sáng mặt trời của một thành phố A ở vĩ độ  $40^\circ$  Bắc trong ngày thứ  $t$  của một năm không nhuận được cho bởi hàm số

$$d(t) = 3 \sin \left[ \frac{\pi}{182} \cdot (t - 80) \right] + 12 \text{ với } t \in \mathbb{Z} \text{ và } 0 \leq t \leq 365.$$

Hỏi thành phố A có đúng 12 giờ có ánh sáng mặt trời vào ngày nào trong năm?

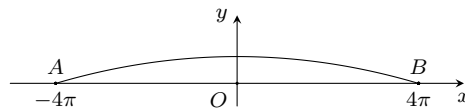
**BÀI 3.** Giả sử một vật dao động điều hòa xung quanh vị trí cân bằng theo phương trình

$$x = 2 \cos \left( 5t - \frac{\pi}{6} \right)$$

Ở đây, thời gian  $t$  tính bằng giây và quãng đường  $x$  tính bằng centimét. Hãy cho biết trong khoảng thời gian từ 0 đến 6 giây, vật đi qua vị trí cân bằng bao nhiêu lần?

### BÀI 4.

Một cây cầu có dạng cung  $AB$  của đồ thị hàm số  $y = 4,2 \cdot \cos \frac{x}{8}$  và được mô tả trong hệ trục tọa độ với đơn vị trục là mét như ở hình bên. Một sà lan chở khối hàng hoá được xếp thành hình hộp chữ nhật với độ cao 3 m so với mực nước sông sao cho sà lan có thể đi qua được gầm cầu. Chứng minh rằng chiều rộng của khối hàng hoá đó phải nhỏ hơn 12,5 m.



**BÀI 5.** Một quả đạn pháo được bắn ra khỏi nòng pháo với vận tốc ban đầu  $v_0 = 500$  m/s hợp với phương ngang một góc  $\alpha$ . Trong Vật lí, ta biết rằng, nếu bỏ qua sức cản của không khí và coi quả đạn pháo được bắn ra từ mặt đất thì quỹ đạo của quả đạn tuân theo phương trình  $y = \frac{-g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} \cdot x^2 + x \tan \alpha$ , ở đó  $g = 10$  m/s<sup>2</sup> là gia tốc trọng trường.

- a) Tính theo góc bắn  $\alpha$  tầm xa mà quả đạn đạt tới (tức là khoảng cách từ vị trí bắn đến điểm quả đạn chạm đất).  
b) Tìm góc bắn  $\alpha$  để quả đạn trúng mục tiêu cách vị trí đặt khẩu pháo 22 000 (m).

## 2. Bài tập trắc nghiệm

**CÂU 1.** Nhiệt độ ngoài trời ở một thành phố vào các thời điểm khác nhau trong ngày có thể được mô phỏng bởi công thức  $h(t) = 30 + 3 \sin \frac{\pi}{12} (t - 5)$ . Với  $h$  tính bằng độ  $C$  và  $t$  là thời gian trong ngày tính bằng giờ. Nhiệt độ lúc 7 giờ sáng là bao nhiêu?

- (A) 31,5 độ  $C$ .      (B) 32,5 độ  $C$ .      (C) 30 độ  $C$ .      (D) 37 độ  $C$ .

**CÂU 2.** Nhiệt độ ngoài trời ở một thành phố vào các thời điểm khác nhau trong ngày có thể được mô phỏng bởi công thức

$$h(t) = 29 + 3 \sin \frac{\pi}{12} (t - 9).$$

với  $h$  tính bằng độ  $C$  và  $t$  là thời gian trong ngày tính bằng giờ. Thời gian nhiệt độ cao nhất trong ngày là

- (A) 13 giờ.      (B) 15 giờ.      (C) 12 giờ.      (D) 14 giờ.

**CÂU 3.** Số giờ có ánh sáng mặt trời của một thành phố A trong ngày thứ  $t$  của một năm không nhuận được cho bởi hàm số  $d(t) = 4 \sin \left[ \frac{\pi}{18} \cdot (t - 80) \right] + 12$  với  $t \in \mathbb{Z}$  và  $0 \leq t \leq 365$ .

Số giờ nắng của ngày thứ 83 là

- (A) 12.      (B) 11.      (C) 14.      (D) 8.

## QUICK NOTE

QUICK NOTE

**CÂU 4.** Số giờ có ánh sáng mặt trời của một thành phố  $A$  trong ngày thứ  $t$  trong một năm không nhuận được cho bởi công thức

$$d(t) = 4 \sin \left[ \frac{\pi}{182} (t - 70) \right] + 16 \text{ với } t \in \mathbb{R} \text{ và } 0 < t \leq 365.$$

Vào ngày nào trong năm thì thành phố  $A$  có ít ánh sáng mặt trời nhất

- (A) 353. (B) 171. (C) 161. (D) 343.

**CÂU 5.** Hằng ngày mực nước con kênh lên xuống theo thủy triều. Độ sâu  $h$  (mét) của mực nước trong kênh được tính tại thời điểm  $t$  (giờ) trong một ngày bởi công thức  $h = 3 \cos \left( \frac{\pi t}{8} + \frac{\pi}{4} \right) + 12$ . Mực nước của kênh cao nhất khi  $t = t_0$ . Tính giá trị của  $P = t_0^2 + t_0$ .

- (A)  $t = 272$ . (B)  $t = 182$ . (C)  $t = 240$ . (D)  $t = 210$ .

**CÂU 6.** Số giờ có ánh sáng của thành phố Hà Nội trong ngày thứ  $t$  của năm 2019 được cho bởi một hàm số  $y = 4 \sin \left| \frac{\pi}{178} (t - 60) \right| + 10$ , với  $t \in \mathbb{Z}$  và  $0 < t \leq 365$ . Vào ngày nào trong năm thì thành phố có ít giờ ánh sáng mặt trời nhất?

- (A) 23 tháng 11. (B) 24 tháng 11. (C) 25 tháng 11. (D) 22 tháng 11.

**CÂU 7.** Hằng ngày mực nước con kênh lên xuống theo thủy triều. Độ sâu  $h$  (mét) của mực nước trong kênh được tính tại thời điểm  $t$  (giờ) trong một ngày bởi công thức  $h = 3 \cos \left( \frac{\pi t}{8} + \frac{\pi}{4} \right) + 12$ . Mực nước của kênh cao nhất khi  $t = t_0$ . Tính giá trị của  $P = t_0^2 + t_0$ .

- (A)  $t = 272$ . (B)  $t = 182$ . (C)  $t = 240$ . (D)  $t = 210$ .

**CÂU 8.** Hằng ngày mực nước của con kênh lên, xuống theo thủy triều. Độ sâu  $h$  (m) của mực nước trong kênh được tính tại thời điểm  $t$  (giờ),  $0 \leq t \leq 24$  trong một ngày được tính bởi công thức  $h(t) = 3 \cos \left( \frac{\pi t}{8} + \frac{\pi}{4} \right) + 3$ . Hỏi trong một ngày có mấy thời điểm mực nước của con kênh đạt độ sâu lớn nhất?

- (A) 1. (B) 3. (C) 2. (D) 4.

**CÂU 9.** Giả sử một vật dao động điều hòa xung quanh vị trí cân bằng theo phương trình  $x = 2 \sin \left( 5t - \frac{\pi}{6} \right)$ . Ở đây, thời gian  $t$  tính bằng giây và quãng đường  $x$  tính bằng centimet. Vật đi qua vị trí cân bằng bao nhiêu lần trong 3 giây đầu.

- (A) 5. (B) 3. (C) 4. (D) 8.

**CÂU 10.** Một quả đạn pháo được bắn ra khỏi nòng pháo với vận tốc ban đầu  $v_0 = 500$  m/s hợp với phương ngang một góc  $\alpha$ . Trong Vật lí, ta biết rằng, nếu bỏ qua sức cản của không khí và coi quả đạn pháo được bắn ra từ mặt đất thì quỹ đạo của quả đạn tuân theo phương trình  $y = \frac{-g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} \cdot x^2 + x \tan \alpha$ , ở đó  $g = 10$  m/s<sup>2</sup> là gia tốc trọng trường. Góc bắn  $\alpha$  để quả đạn bay xa nhất là

**Dạng 6. Phương trình bậc  $n$  theo một hàm số lượng giác**

Quan sát và dùng các công thức biến đổi để đưa phương trình về cùng một hàm lượng giác (cùng sin hoặc cùng cos hoặc cùng tan hoặc cùng cot) với cùng góc giống nhau, chẳng hạn:

Dạng	Đặt ẩn phụ	Điều kiện
$a \sin^2 x + b \sin x + c = 0$	$t = \sin x$	$-1 \leq t \leq 1$
$a \cos^2 x + b \cos x + c = 0$	$t = \cos x$	$-1 \leq t \leq 1$
$a \tan^2 x + b \tan x + c = 0$	$t = \tan x$	$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$
$a \cot^2 x + b \cot x + c = 0$	$t = \cot x$	$x \neq k\pi$

Nếu đặt  $t = \sin^2 x, \cos^2 x$  hoặc  $t = |\sin x|, |\cos x|$  thì điều kiện là  $0 \leq t \leq 1$ .

**⚡ NHẬN XÉT.** Khi gặp phương trình bậc 3; 4... ta có thể làm tương tự.

**1. Ví dụ**

**VÍ DỤ 1.** Giải các phương trình sau

- a)  $2 \cos^2 x - 3 \cos x + 1 = 0$ . b)  $\sin^2 x + 3 \sin x + 2 = 0$ .  
c)  $\tan^2 x + (\sqrt{3} - 1) \tan x - \sqrt{3} = 0$ . d)  $\cot^2 x + 4 \cot x + 3 = 0$ .

## QUICK NOTE

QUICK NOTE

**CÂU 8.** Nghiệm của phương trình  $2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0$  là

- (A)  $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$
- (B)  $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k\frac{2}{3}\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k\frac{2}{3}\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$
- (C)  $x = \frac{\pi}{2} + k\frac{5}{2}\pi, \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k\frac{1}{2}\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k\frac{1}{2}\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$
- (D)  $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$

**CÂU 9.** Cho phương trình  $3\cos 2x - 10\cos x - 4 = 0$ . Đặt  $t = \cos x$  thì phương trình đã cho trở thành phương trình nào sau đây?

- (A)  $6t^2 - 10t - 4 = 0.$  (B)  $3t^2 - 10t - 4 = 0.$
- (C)  $-6t^2 - 10t - 1 = 0.$  (D)  $6t^2 - 10t - 7 = 0.$

**CÂU 10.** Tập nghiệm của phương trình  $\sin x + \cos 2x = 0$  là

- (A)  $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, x = -\frac{\pi}{2} + \frac{k2\pi}{3}.$  (B)  $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, x = -\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}.$
- (C)  $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, x = -\frac{\pi}{6} + \frac{k2\pi}{3}.$  (D)  $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, x = -\frac{\pi}{2} + \frac{k\pi}{3}.$

**CÂU 11.** Nghiệm của phương trình lượng giác  $2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0$  thỏa điều kiện  $0 < x < \frac{\pi}{2}$  là

- (A)  $x = \frac{\pi}{2}.$  (B)  $x = \frac{\pi}{3}.$  (C)  $x = \frac{\pi}{6}.$  (D)  $\frac{5\pi}{6}.$

**CÂU 12.** Tìm nghiệm phương trình  $3\sin^2 2x - 7\sin 2x + 4 = 0$  trên đoạn  $[0; \pi]$ .

- (A)  $x = \frac{\pi}{3}.$  (B)  $x = \frac{\pi}{4}.$  (C)  $x = \frac{\pi}{2}.$  (D)  $x = \frac{\pi}{6}.$

**CÂU 13.** Tính tổng các nghiệm của phương trình  $2\cos^2 x + 5\sin x - 4 = 0$  trong  $[0; 2\pi]$ .

- (A) 0. (B)  $\frac{8\pi}{3}.$  (C)  $\pi.$  (D)  $\frac{5\pi}{6}.$

**CÂU 14.** Tổng các nghiệm của phương trình  $\tan x + \cot x = 2$  trong khoảng  $(-\pi; \pi)$  là

- (A)  $-\pi.$  (B)  $-\frac{\pi}{2}.$  (C)  $\frac{5\pi}{4}.$  (D)  $\frac{\pi}{4}.$

**CÂU 15.** Số nghiệm của phương trình  $\cos 2\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + 4\cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = \frac{5}{2}$  thuộc  $[0; 2\pi]$  là

- (A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4.

**CÂU 16.** Nghiệm của phương trình  $3\cos 4x - \sin^2 2x + \cos 2x - 2 = 0$  là

- (A)  $\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x = \pm \arccos \frac{6}{7} + k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$  (B)  $\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = \pm \arccos \frac{6}{7} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$
- (C)  $\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k\pi \\ x = \pm \arccos \frac{6}{7} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$  (D)  $\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x = \pm \frac{1}{2} \arccos \frac{6}{7} + k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$

**CÂU 17.** Giải phương trình  $4\cos x \cos 2x + 1 = 0$ .

- (A)  $\begin{cases} x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \pm \arccos \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{8} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$
- (B)  $\begin{cases} x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \pm \arccos \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{8} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$

QUICK NOTE

(C) 
$$\begin{cases} x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \pm \arccos \frac{-1 \pm \sqrt{7}}{8} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

(D) 
$$\begin{cases} x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \pm \arccos \frac{-1 \pm \sqrt{6}}{8} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

**CÂU 18.** Họ nghiệm của phương trình  $16(\sin^8 x + \cos^8 x) = 17 \cos^2 2x$  là

(A)  $x = \frac{\pi}{8} + k\frac{5\pi}{4} \quad (k \in \mathbb{Z}).$  (B)  $x = \frac{\pi}{8} + k\frac{7\pi}{4} \quad (k \in \mathbb{Z}).$

(C)  $x = \frac{\pi}{8} + k\frac{9\pi}{4} \quad (k \in \mathbb{Z}).$  (D)  $x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{4} \quad (k \in \mathbb{Z}).$

**CÂU 19.** Nghiệm của phương trình  $\cos^4 x - \cos 2x + 2 \sin^6 x = 0$ .

(A)  $x = k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$  (B)  $x = k\frac{1}{2}\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$

(C)  $x = k\frac{2}{3}\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$  (D)  $x = k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$

**CÂU 20.** Giải phương trình  $5(1 + \cos x) = 2 + \sin^4 x - \cos^4 x$ .

(A)  $x = \pm \frac{2\pi}{3} + k\pi.$  (B)  $x = \pm \frac{2\pi}{3} + k\frac{2}{3}\pi.$

(C)  $x = \pm \frac{2\pi}{3} + k\frac{3}{4}\pi.$  (D)  $x = \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi.$

**CÂU 21.** Nghiệm của phương trình  $\sin\left(2x + \frac{5\pi}{2}\right) - 3\cos\left(x - \frac{7\pi}{2}\right) = 1 + 2\sin x$  là

(A) 
$$\begin{cases} x = k2\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z}). \\ x = \frac{5\pi}{6} + k\pi \end{cases}$$

(B) 
$$\begin{cases} x = k\frac{1}{2}\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}). \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases}$$

(C) 
$$\begin{cases} x = k\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z}). \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases}$$

(D) 
$$\begin{cases} x = k2\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z}). \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases}$$

**CÂU 22.** Giải phương trình  $7 \cos x = 4 \cos^3 x + 4 \sin 2x$ .

(A) 
$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + k\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k\pi \end{cases}$$
 (B) 
$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k\frac{1}{4}\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases}$$
 (C) 
$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k\frac{1}{2}\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + k\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases}$$
 (D) 
$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases}$$

**CÂU 23.** Giải phương trình  $\cos 4x = \cos^2 3x$ .

(A) 
$$\begin{cases} x = k2\pi \\ x = \pm \frac{\pi}{12} + k2\pi \\ x = \pm \frac{5\pi}{12} + k\pi \end{cases}$$

(B) 
$$\begin{cases} x = k\pi \\ x = \pm \frac{\pi}{12} + k\frac{1}{2}\pi \\ x = \pm \frac{5\pi}{12} + k\frac{1}{2}\pi \end{cases}$$

(C) 
$$\begin{cases} x = k\pi \\ x = \pm \frac{\pi}{12} + k3\pi \\ x = \pm \frac{5\pi}{12} + k3\pi \end{cases}$$

(D) 
$$\begin{cases} x = k\pi \\ x = \pm \frac{\pi}{12} + k\pi \\ x = \pm \frac{5\pi}{12} + k\pi \end{cases}$$

**CÂU 24.** Cho phương trình:  $\cos 2x - (2m + 1) \cos x + m + 1 = 0$ . Tìm  $m$  để phương trình có nghiệm  $x \in \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$ .

(A)  $-1 \leq m < 0.$  (B)  $-1 \leq m \leq 0.$  (C)  $-1 < m < 0.$  (D)  $-1 \leq m \leq 1.$

**CÂU 25.** Cho phương trình  $3 \cos 4x - 2 \cos^2 3x = 1$ . Trên đoạn  $[0; \pi]$ , tổng các nghiệm của phương trình là

(A) 0. (B)  $\pi.$  (C)  $2\pi.$  (D)  $3\pi.$

MỤC LỤC

PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC	1
Bài 4. Phương trình lượng giác cơ bản	1
A Tóm tắt lý thuyết	1
Dạng 1.Điều kiện có nghiệm của phương trình lượng giác cơ bản	2
Dạng 2.Phương trình lượng giác cơ bản dùng Radian	3
Dạng 3.Phương trình lượng giác cơ bản dùng độ	5
Dạng 4.Phương trình đưa về phương trình lượng giác cơ bản	7
Dạng 5.Toán thực tế liên môn	8
Dạng 6.Phương trình bậc n theo một hàm số lượng giác	10

