

## Bài 4. KHẢO SÁT BIẾN THIÊN VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ

### QUICK NOTE

### A. LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

#### 1. Khảo sát hàm số $y = f(x)$

✔ **Bước 1.** Tìm tập xác định của hàm số.

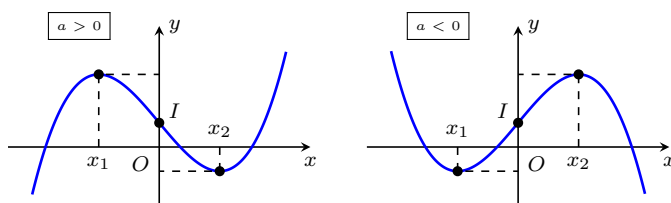
✔ **Bước 2.** Khảo sát sự biến thiên của hàm số

- Tính đạo hàm  $y'$ . Tìm các điểm mà tại đó  $y'$  bằng 0 hoặc đạo hàm không tồn tại.
- Tìm các giới hạn tại vô cực, giới hạn vô cực và tìm tiệm cận của đồ thị hàm số.
- Lập bảng biến thiên; xác định chiều biến thiên và cực trị của hàm số.

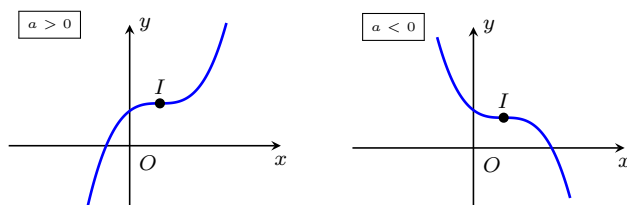
✔ **Bước 3.** Cho thêm điểm và vẽ đồ thị của hàm số dựa vào bảng biến thiên.

#### 2. Hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$

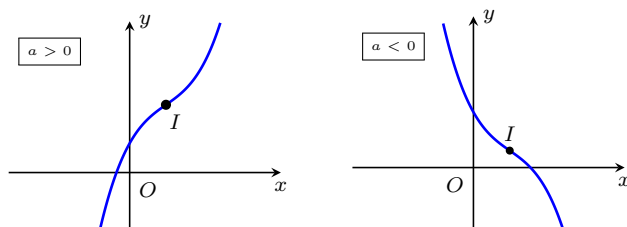
✔ **TH1.**  $y' = 0$  có hai nghiệm phân biệt  $x_1$  và  $x_2$ . Khi đó, hàm số có hai điểm cực trị  $x = x_1$  và  $x = x_2$ .



✔ **TH2.**  $y' = 0$  có nghiệm kép  $x_0$ . Khi đó, hàm số không có cực trị.



✔ **TH3.**  $y' = 0$  vô nghiệm. Khi đó, hàm số không có cực trị.



#### GHI NHỚ

- Liên hệ tổng tích hai nghiệm của  $y'$   $\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{2b}{3a} \\ x_1 x_2 = \frac{c}{3a} \end{cases}$
- Tâm đối xứng của đồ thị là trung điểm của đoạn nối 2 điểm cực trị. Hoành độ tâm đối xứng là nghiệm phương trình  $y'' = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{b}{3a}$ .

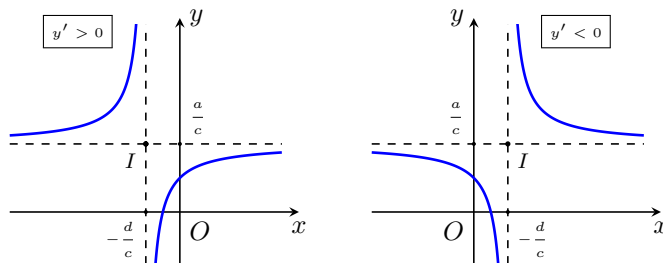
QUICK NOTE

### 3. Hàm số $y = \frac{ax + b}{cx + d}$ ( $c \neq 0, ad - bc \neq 0$ )

✔ Tập xác định  $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\}$ ; Đạo hàm  $y' = \frac{ad - bc}{(cx + d)^2}$ .

✔ Đồ thị nhận giao điểm của hai đường tiệm cận làm tâm đối xứng.

✔ Hình dạng đồ thị:



GHI NHỚ

- ① Tiệm cận đứng  $x = -\frac{d}{c}$ .
- ② Tiệm cận ngang  $y = \frac{a}{c}$ .
- ③ Giao với  $Ox$ :  $y = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{a}$ .
- ④ Giao với  $Oy$ :  $x = 0 \Rightarrow y = \frac{b}{d}$ .

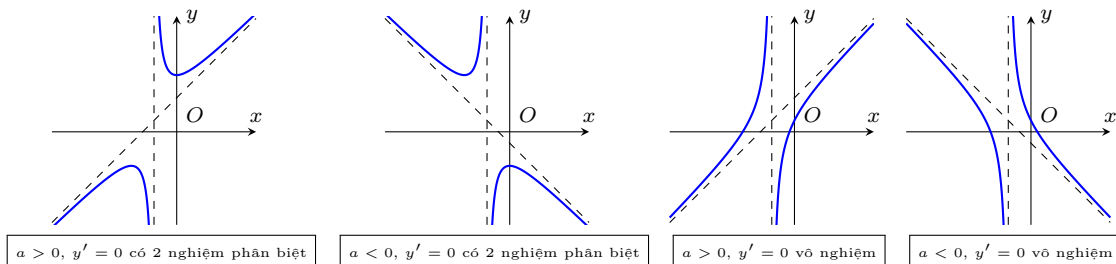
### 4. Hàm số $y = \frac{ax^2 + bx + c}{dx + e}$ ( $a \neq 0, e \neq 0$ ) (đa thức tử không chia hết cho đa thức mẫu)

✔ Tập xác định  $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{e}{d}\right\}$ ; Đạo hàm  $y' = \frac{adx^2 + 2aex + be - cd}{(dx + e)^2}$ .

✔ Hàm số 2 điểm cực trị khi  $y' = 0$  có 2 nghiệm phân biệt; Hàm số không có cực trị khi  $y' = 0$  vô nghiệm.

✔ Đồ thị nhận giao điểm của tiệm cận đứng và tiệm cận xiên làm tâm đối xứng.

✔ Hình dạng đồ thị:



## B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

1

### Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số bậc ba

Ta khảo sát theo sơ đồ đã nhắc đến ở phần lý thuyết.

BÀI TẬP TỰ LUẬN

**VÍ DỤ 1.** Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị các hàm số sau:

a)  $y = x^3 - 3x^2 + 1$ ;

b)  $y = -2x^3 - 3x^2 + 1$ ;

c)  $y = x^3 + 3x^2 + 3x + 2$ ;

d)  $y = x^3 - 3x^2 + 4x - 2$ .

**BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM**

**PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.**

**CÂU 1.**

Bảng biến thiên ở hình bên là của một trong bốn hàm số sau đây. Hỏi đó là hàm số nào?

- Ⓐ  $y = -x^3 - 2x^2 + 5$ .  
 Ⓑ  $y = x^3 - 3x^2 + 5$ .  
 Ⓒ  $y = -x^3 - 3x + 5$ .  
 Ⓓ  $y = x^3 + 3x^2 + 5$ .

$x$	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$	$-\infty$	5	1	$+\infty$

**CÂU 2.**

Bảng biến thiên ở hình bên là của một trong bốn hàm số sau đây. Hỏi đó là hàm số nào?

- Ⓐ  $y = -x^3 + 3x^2$ .  
 Ⓑ  $y = x^3 - 3x^2 - 1$ .  
 Ⓒ  $y = x^4 + 2x^2 + 1$ .  
 Ⓓ  $y = -x^3 + 3x^2 + 1$ .

$x$	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$y'$		-	0	+
$y$	$+\infty$	1	5	$-\infty$

**CÂU 3.**

Bảng biến thiên ở hình bên là của một trong bốn hàm số sau đây. Hỏi đó là hàm số nào?

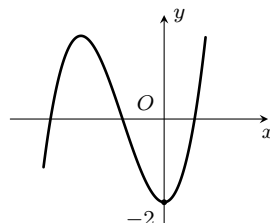
- Ⓐ  $y = x^3 - 3x^2 + x + 3$ .  
 Ⓑ  $y = x^3 - 3x + 4$ .  
 Ⓒ  $y = x^3 - 3x^2 + 3x + 1$ .  
 Ⓓ  $y = x^3 + 3x^2 + 5$ .

$x$	$-\infty$	1	$+\infty$
$y'$		+	0
$y$	$-\infty$	2	$+\infty$

**CÂU 4.**

Đường cong bên là đồ thị của một trong bốn hàm số đã cho sau đây. Hỏi đó là hàm số nào?

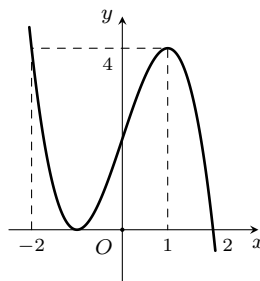
- Ⓐ  $y = -x^3 + x^2 - 2$ .  
 Ⓑ  $y = x^3 + 3x^2 - 2$ .  
 Ⓒ  $y = x^3 - 3x + 2$ .  
 Ⓓ  $y = x^2 - 3x - 2$ .



**CÂU 5.**

Đường cong bên là đồ thị của một trong bốn hàm số đã cho sau đây. Hỏi đó là hàm số nào?

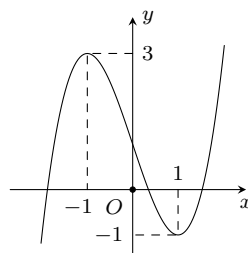
- Ⓐ  $y = x^3 + 3x - 2$ .  
 Ⓑ  $y = x^3 - 3x + 2$ .  
 Ⓒ  $y = -x^3 + 3x + 2$ .  
 Ⓓ  $y = -x^3 - 3x - 2$ .



**CÂU 6.**

Đường cong bên là đồ thị của một trong bốn hàm số đã cho sau đây. Hỏi đó là hàm số nào?

- Ⓐ  $y = -x^3 + 3x^2 + 1$ .  
 Ⓑ  $y = -x^2 - 3x - 1$ .  
 Ⓒ  $y = x^4 + 2x^2 - 1$ .  
 Ⓓ  $y = x^3 - 3x + 1$ .



**CÂU 7.**

**QUICK NOTE**

QUICK NOTE

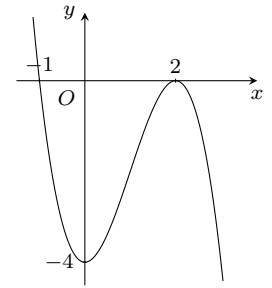
Đường cong bên là đồ thị của một trong bốn hàm số đã cho sau đây. Hỏi đó là hàm số nào?

**A**  $y = x^3 - 3x^2 - 4$ .

**B**  $y = -x^3 - 4$ .

**C**  $y = -x^3 + 3x^2 - 2$ .

**D**  $y = -x^3 + 3x^2 - 4$ .



**CÂU 8.**

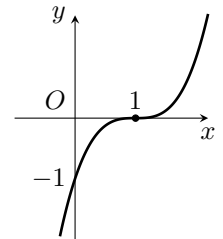
Đường cong bên là đồ thị của một trong bốn hàm số đã cho sau đây. Hỏi đó là hàm số nào?

**A**  $y = x^3 - 1$ .

**B**  $y = (x + 1)^3$ .

**C**  $y = (x - 1)^3$ .

**D**  $y = x^3 + 1$ .



**CÂU 9.**

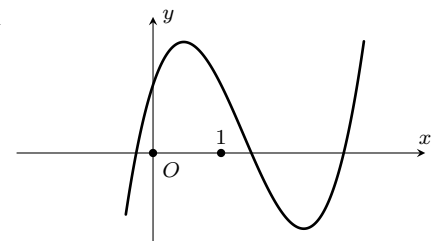
Cho hàm số  $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$  có đồ thị như hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây là đúng?

**A**  $a > 0, b > 0, c > 0, d > 0$ .

**B**  $a < 0, b < 0, c > 0, d > 0$ .

**C**  $a > 0, b < 0, c < 0, d > 0$ .

**D**  $a > 0, b < 0, c > 0, d > 0$ .



**CÂU 10.**

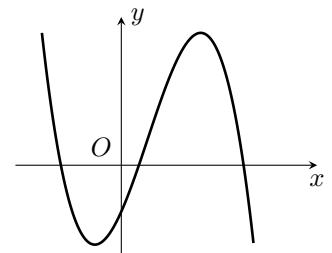
Cho hàm số  $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$  có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây đúng?

**A**  $a < 0, b < 0, c < 0, d > 0$ .

**B**  $a < 0, b > 0, c < 0, d > 0$ .

**C**  $a < 0, b > 0, c > 0, d < 0$ .

**D**  $a < 0, b < 0, c > 0, d < 0$ .



**CÂU 11.**

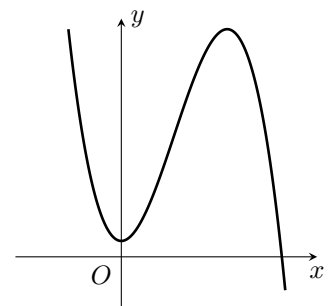
Cho hàm số  $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$  có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

**A**  $a < 0, b > 0, c > 0, d > 0$ .

**B**  $a < 0, b < 0, c = 0, d > 0$ .

**C**  $a < 0, b > 0, c = 0, d > 0$ .

**D**  $a > 0, b < 0, c > 0, d > 0$ .



**CÂU 12.**

Cho hàm số  $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$  có bảng biến thiên như hình bên. Trong các hệ số  $a, b, c$  và  $d$  có bao nhiêu số âm?

**A** 2. **B** 1. **C** 4. **D** 3.

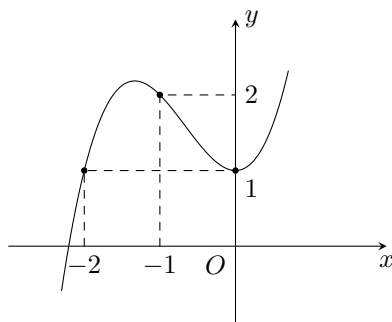
$x$	$-\infty$	$-1$	$2$	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$+$	$-$
$f(x)$		$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$

**PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.**

**CÂU 13.**

Cho hàm số  $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  có đồ thị như hình vẽ.

Mệnh đề	Đ	S
a) Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 1$ .		
b) Đồ thị hàm số cắt trục $Oy$ tại điểm $(0; 1)$ .		
c) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -1)$ .		
d) $2a + 3b + c = 9$ .		

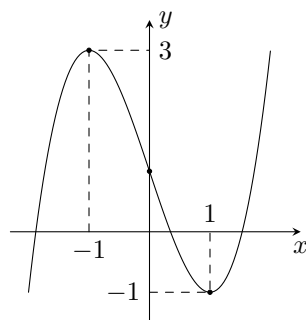


**CÂU 14.**

Cho hàm số bậc ba  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  có đồ thị như hình vẽ.

Tính tổng  $T =$ .

Mệnh đề	Đ	S
a) Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm $(0; 1)$ .		
b) Đường thẳng đi qua điểm $(0; 1)$ luôn cắt đồ thị tại ba điểm phân biệt có hoành độ lập thành 1 cấp số cộng.		
c) $a - b + c + d = -1$ .		
d) Đồ thị hàm số đi qua điểm $(3; 18)$ .		



**CÂU 15.**

Cho hàm số  $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  có bảng biến thiên như hình bên.

Mệnh đề	Đ	S
a) Hàm số đạt giá trị lớn nhất là 4.		
b) Đường thẳng $y = 2$ cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại 3 điểm phân biệt.		
c) Trong bốn hệ số $a, b, c, d$ có đúng hai số âm.		
d) Đồ thị hàm số đi qua điểm $(-4; 20)$ .		

$x$	$-\infty$	$-2$	$0$	$+\infty$
$y'$		$-$	$0$	$+$
$y$	$+\infty$		$4$	$-\infty$

**2**

**Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số phân thức hữu tỉ bậc I/I**

Ta khảo sát theo sơ đồ

☑ **Bước 1.** Tìm tập xác định  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{d}{c} \right\}$ .

☑ **Bước 2.** Khảo sát sự biến thiên của hàm số

— Tính đạo hàm  $y' = \frac{ad - cb}{(cx + d)^2}$ .

— Tìm các giới hạn tại vô cực, giới hạn vô cực và tìm tiệm cận của đồ thị hàm số.

— Lập bảng biến thiên; xác định chiều biến thiên và cực trị của hàm số.

☑ **Bước 3.** Cho thêm điểm và vẽ đồ thị của hàm số dựa vào bảng biến thiên.

**QUICK NOTE**

QUICK NOTE

BÀI TẬP TỰ LUẬN

**VÍ DỤ 1.** Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị các hàm số sau:

a)  $y = \frac{x-1}{x+1};$

b)  $y = \frac{2x+1}{x-1};$

c)  $y = \frac{5+x}{2-x}.$

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

**PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.**

**CÂU 1.**

Hàm số nào trong bốn hàm số dưới đây có bảng biến thiên như hình bên?

Ⓐ  $y = \frac{2x-1}{x+3}.$       Ⓑ  $y = \frac{4x-6}{x-2}.$   
 Ⓒ  $y = \frac{3-x}{2-x}.$       Ⓓ  $y = \frac{x+5}{x-2}.$

$x$	$-\infty$	2	$+\infty$
$y'$		-	-
$y$	1	$+\infty$	1

**CÂU 2.**

Hàm số nào trong bốn hàm số dưới đây có bảng biến thiên như hình bên?

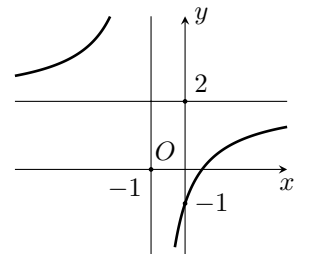
Ⓐ  $y = \frac{x-1}{x-3}.$       Ⓑ  $y = \frac{x-1}{-x-3}.$   
 Ⓒ  $y = \frac{x+5}{-x+3}.$       Ⓓ  $y = \frac{1}{x-3}.$

$x$	$-\infty$	3	$+\infty$
$y'$		+	+
$y$	-1	$+\infty$	-1

**CÂU 3.**

Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của một trong bốn hàm số sau. Hỏi đó là hàm số nào?

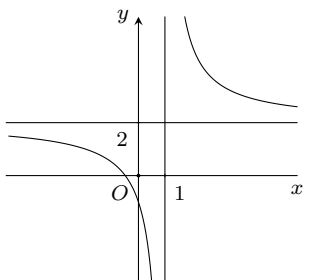
Ⓐ  $y = \frac{2x-1}{x+1}.$       Ⓑ  $y = \frac{1-2x}{x+1}.$   
 Ⓒ  $y = \frac{2x+1}{x-1}.$       Ⓓ  $y = \frac{2x+1}{x+1}.$



**CÂU 4.**

Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của một trong bốn hàm số sau. Hỏi đó là hàm số nào?

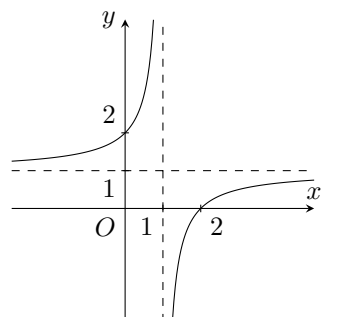
Ⓐ  $y = \frac{x-1}{x-2}.$       Ⓑ  $y = x+2.$   
 Ⓒ  $y = x^4 - 3x^2 + 1.$       Ⓓ  $y = \frac{2x+1}{x-1}.$



**CÂU 5.**

Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của một trong bốn hàm số sau. Hỏi đó là đồ thị của hàm số nào?

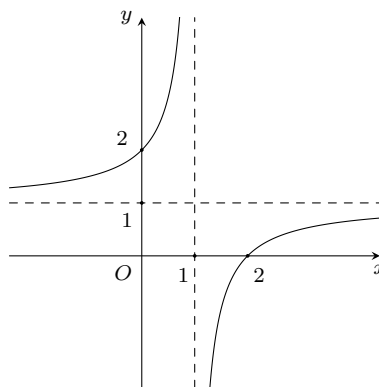
Ⓐ  $y = \frac{x-2}{x+1}.$       Ⓑ  $y = \frac{x+2}{x-2}.$   
 Ⓒ  $y = \frac{x-2}{x-1}.$       Ⓓ  $y = \frac{x+2}{x-1}.$



**CÂU 6.**

Cho hàm số  $y = \frac{ax-b}{x+c}$  ( $a, b, c \in \mathbb{R}$ ) có đồ thị như hình vẽ bên. Giá trị của biểu thức  $2a + b - 3c$  bằng

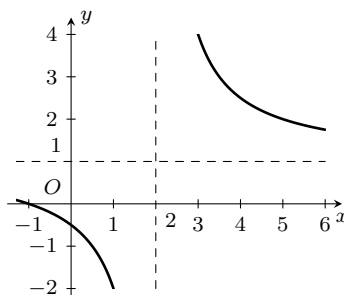
- (A) -3. (B) 4.  
(C) 7. (D) -5.



**CÂU 7.**

Cho hàm số  $y = \frac{ax+1}{bx-2}$  có đồ thị như hình vẽ. Tính  $T = a + b$

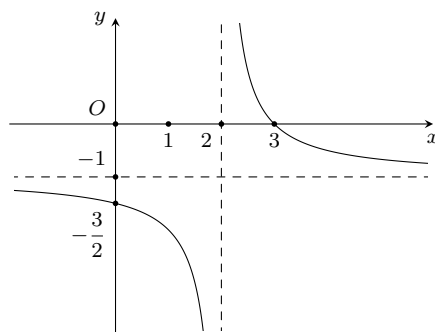
- (A)  $T = 2$ . (B)  $T = 0$ .  
(C)  $T = -1$ . (D)  $T = 3$ .



**CÂU 8.**

Cho hàm số  $y = \frac{ax-b}{cx+2}$  ( $a, b, c \in \mathbb{R}; c \neq 0$ ) có đồ thị như hình vẽ bên. Giá trị của biểu thức  $a + b + c$  bằng

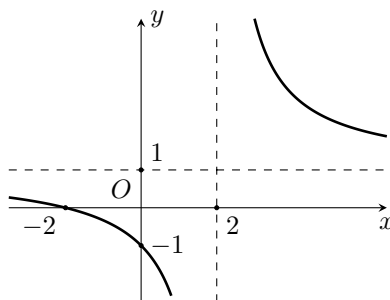
- (A) -3. (B) 5. (C) -4. (D) 3.



**CÂU 9.**

Hãy xác định  $a, b$  để hàm số  $y = \frac{2-ax}{x+b}$  có đồ thị như hình vẽ?

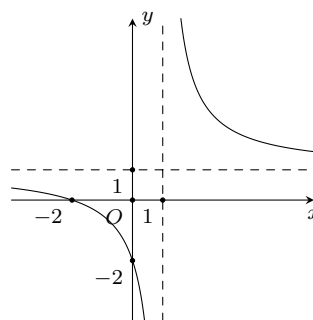
- (A)  $a = 1; b = -2$ . (B)  $a = b = 2$ .  
(C)  $a = -1; b = -2$ . (D)  $a = b = -2$ .



**CÂU 10.**

Cho đồ thị hàm số  $y = \frac{ax-b}{x-1}$  như hình vẽ. Tìm khẳng định đúng?

- (A)  $a < 0, b < 0$ . (B)  $0 < b < a$ .  
(C)  $b < 0 < a$ . (D)  $a < b < 0$ .



**CÂU 11.**

Cho hàm số  $y = \frac{ax+4}{bx+c}$  ( $a, b, c \in \mathbb{R}$ ) có bảng biến thiên như sau. Trong các số  $a, b, c$  có bao nhiêu số dương?

- (A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

$x$	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	+		+
$f(x)$	3 $\nearrow$ $+\infty$		$-\infty$ $\nearrow$ 3

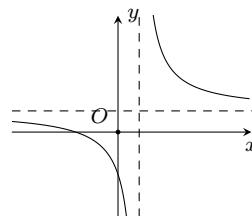
**QUICK NOTE**

**QUICK NOTE**

**CÂU 12.**

Cho hàm số  $y = \frac{ax+b}{cx+d}$  với  $a > 0$  có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây đúng?

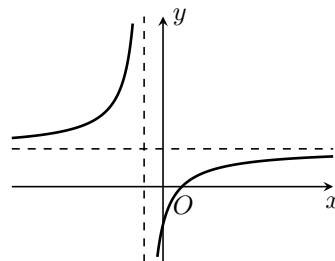
- (A)  $b < 0, c < 0, d < 0$ . (B)  $b > 0, c < 0, d < 0$ .  
(C)  $b < 0, c > 0, d < 0$ . (D)  $b > 0, c > 0, d < 0$ .



**CÂU 13.**

Hình vẽ bên là đồ thị của hàm số  $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ . Mệnh đề nào sau đây là đúng?

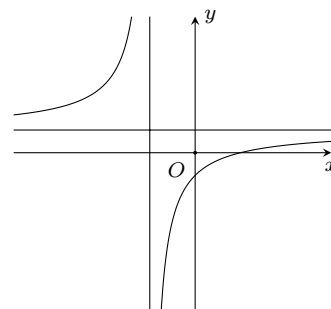
- (A)  $ab > 0, bd < 0$ . (B)  $ab < 0, ad > 0$ .  
(C)  $ab < 0, ad < 0$ . (D)  $bd > 0, ad > 0$ .



**CÂU 14.**

Hình vẽ dưới đây là đồ thị hàm số  $y = \frac{ax+b}{cx+d}$   $ac \neq 0, ad - cb \neq 0$ . Mệnh đề nào sau đây đúng?

- (A)  $ad > 0$  và  $ab < 0$ . (B)  $bd < 0$  và  $ab > 0$ .  
(C)  $ad < 0$  và  $ab < 0$ . (D)  $ad > 0$  và  $bd > 0$ .

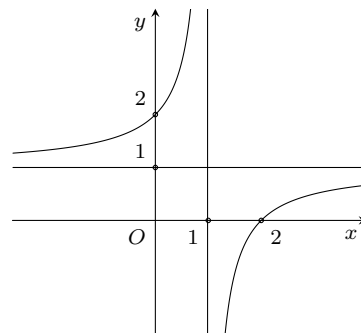


**PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.**

**CÂU 15.**

Cho hàm số  $y = \frac{x+a}{bx+c}$ ,  $(a, b, c \in \mathbb{Z})$ .

Mệnh đề	Đ	S
a) Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = 1$ .		
b) Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y = 0$ .		
c) Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ .		
d) $a - 3b - 2c = -3$ .		



**CÂU 16.** Cho hàm số  $f(x) = \frac{ax-1}{bx+c}$   $(a, b, c \in \mathbb{R})$  có bảng biến thiên như sau.

$x$	$-\infty$	3	$+\infty$
$f'(x)$	-		-
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$	$\frac{1}{2}$

Mệnh đề	Đ	S
a) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty, \frac{1}{2})$ .		
b) Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = \frac{1}{2}$ .		

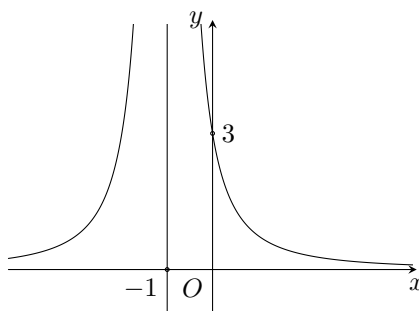


QUICK NOTE

Mệnh đề	Đ	S
c) Đồ thị giao với trục hoành tại điểm có hoành độ nhỏ hơn 3.		
d) $\begin{cases} b > \frac{2}{3} \\ b < 0 \end{cases}$		

**CÂU 17.**

Cho hàm số  $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$  với  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  có đồ thị hàm số  $y = f'(x)$  nhận  $x = -1$  làm tiệm cận đứng như hình vẽ bên. Biết rằng giá trị lớn nhất của hàm số  $y = f(x)$  trên đoạn  $[-3; -2]$  bằng 8.



Mệnh đề	Đ	S
a) $f'(0) = 3$ .		
b) Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-1; +\infty)$ .		
c) Giá trị của $f(-3)$ bằng 8.		
d) Giá trị của $f(2)$ bằng 4.		

**3**

**Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số phân thức hữu tỉ bậc II/I**

☑ **Bước 1.** Tập xác định  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{n}{m} \right\}$ .

☑ **Bước 2.** Khảo sát sự biến thiên của hàm số

- Tính đạo hàm  $y' = \frac{am \cdot x^2 + 2an \cdot x + b \cdot n - m \cdot c}{(mx + n)^2}$ . Giải  $y' = 0 \Leftrightarrow am \cdot x^2 + 2an \cdot x + b \cdot n - m \cdot c = 0$ , tìm nghiệm.
- Tìm các giới hạn tại vô cực, giới hạn vô cực và tìm tiệm cận của đồ thị hàm số.
- Lập bảng biến thiên; xác định chiều biến thiên và cực trị của hàm số.

☑ **Bước 3.** Cho thêm điểm và vẽ đồ thị của hàm số dựa vào bảng biến thiên.

**BÀI TẬP TỰ LUẬN**

**VÍ DỤ 1.** Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị các hàm số sau:

a)  $y = \frac{x^2 + 2x - 2}{x - 1}$ ;      b)  $y = -x + 2 - \frac{1}{x + 1}$ ;      c)  $y = \frac{-x^2 - 3x + 4}{x + 2}$ .

**BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM**

**PHẦN I.** Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.

**CÂU 1.**

Bảng biến thiên sau là của một trong bốn hàm số sau. Hỏi đó là hàm số nào?

- A**  $y = \frac{x^2 - 3x + 4}{-x - 4}$ .  
**B**  $y = \frac{x^2 - 4x + 4}{-x - 4}$ .  
**C**  $y = \frac{x^2 - 5x + 4}{x + 4}$ .  
**D**  $y = \frac{x^2 - 4x + 4}{x + 4}$ .

$x$	$-\infty$	$-10$	$-4$	$2$	$+\infty$
$y'$		$-$	$0$	$+$	$-$
$y$	$+\infty$		$24$	$0$	$-\infty$

QUICK NOTE

**CÂU 2.**

Bảng biến thiên sau là của một trong bốn hàm số sau. Hỏi đó là hàm số nào?

**A**  $y = \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 3}$ .

**B**  $y = \frac{-x^2 - x + 2}{x - 3}$ .

**C**  $y = \frac{-x^2 + x + 2}{x - 3}$ .

**D**  $y = \frac{x^2 - 4x + 4}{-x + 3}$ .

$x$	$-\infty$	1	3	5	$+\infty$	
$y'$	-	0	+	+	0	-
$y$	$+\infty$		$+\infty$	-9		$-\infty$
		$\searrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\searrow$	
			-1		$-\infty$	$-\infty$

**CÂU 3.**

Bảng biến thiên sau là của một trong bốn hàm số sau. Hỏi đó là hàm số nào?

**A**  $y = \frac{x^2 - 2x + 1}{x + 4}$ .

**B**  $y = \frac{x^2 - 4x + 2}{x + 4}$ .

**C**  $y = \frac{x^2 - x + 2}{-x - 4}$ .

**D**  $y = \frac{x^2 - 3x + 4}{-x - 4}$ .

$x$	$-\infty$	$-9$	$-4$	$1$	$+\infty$	
$y'$	$+$	$0$	$-$	$-$	$0$	$+$
$y$	$-\infty$	$-20$	$-\infty$	$+\infty$	$0$	$+\infty$

**CÂU 4.**

Bảng biến thiên sau là của một trong bốn hàm số sau. Hỏi đó là hàm số nào?

**A**  $y = \frac{x^2 - 3}{x - 2}$ .

**B**  $y = \frac{x^2 - 4x + 2}{x - 2}$ .

**C**  $y = \frac{x^2 - x}{x - 2}$ .

**D**  $y = \frac{x^2 - 4x + 5}{x - 2}$ .

$x$	$-\infty$	2	$+\infty$
$y'$	+	+	+
$y$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$

**CÂU 5.**

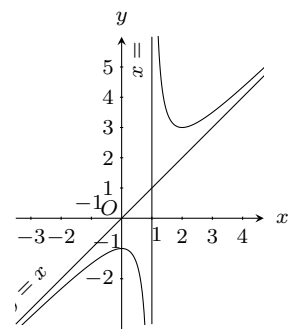
Đồ thị hình bên là của một trong bốn hàm số sau. Hỏi đó là hàm số nào?

**A**  $y = \frac{x^2 + x - 1}{x - 1}$ .

**B**  $y = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$ .

**C**  $y = \frac{x^2 - 4x - 1}{-x + 1}$ .

**D**  $y = \frac{x^2 - 3x - 1}{-x + 1}$ .



**CÂU 6.**

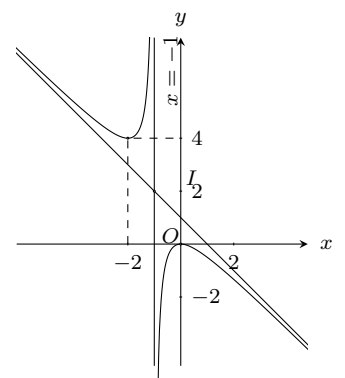
Đồ thị hình bên là của một trong bốn hàm số sau. Hỏi đó là hàm số nào?

**A**  $y = \frac{x^2 - x}{x + 1}$ .

**B**  $y = \frac{x^2 - 3x}{x + 1}$ .

**C**  $y = \frac{x^2 + 1x + 2}{x + 1}$ .

**D**  $y = \frac{-x^2}{x + 1}$ .



**CÂU 7.**

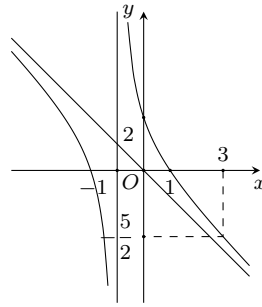
Đồ thị hình bên là của một trong bốn hàm số sau. Hỏi đó là hàm số nào?

**A**  $y = \frac{x^2 - x + 4}{x + 1}$ .

**B**  $y = \frac{x^2 - 2x + 3}{x + 1}$ .

**C**  $y = \frac{-x^2 - x + 2}{x + 1}$ .

**D**  $y = \frac{x^2 + x - 1}{x + 1}$ .



**CÂU 8.**

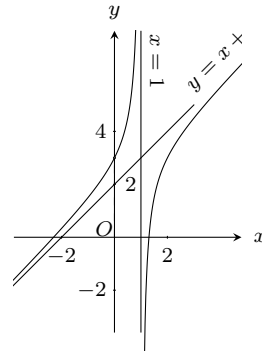
Đồ thị hình bên là của một trong bốn hàm số sau. Hỏi đó là hàm số nào?

**A**  $y = \frac{x^2 + 3}{x - 1}$ .

**B**  $y = \frac{x^2 + x - 3}{x - 1}$ .

**C**  $y = \frac{x^2 - 2x + 3}{-x + 1}$ .

**D**  $y = \frac{x^2 + 3}{-x + 1}$ .

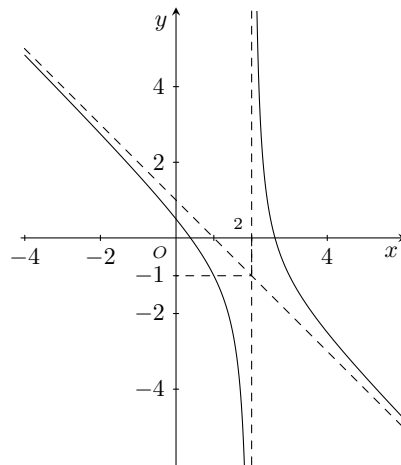


**PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.**

**CÂU 9.**

Cho hàm số  $y = \frac{ax^2 + bx + c}{mx + n}$  có đồ thị như hình bên.

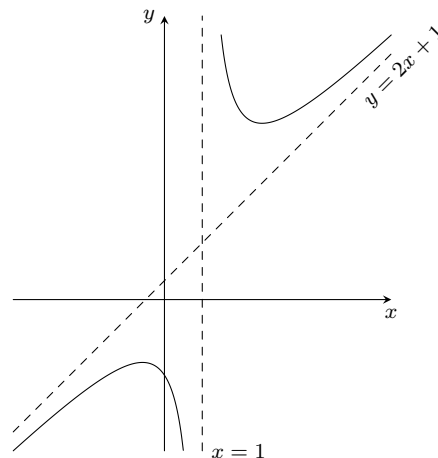
Mệnh đề	Đ	S
a) Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ .		
b) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 2)$ và $(2; +\infty)$ .		
c) Điểm $I(2; 1)$ là tâm đối xứng của đồ thị.		
d) Hệ số $a$ và $m$ trái dấu.		



**CÂU 10.**

Cho hàm số  $y = \frac{ax^2 + bx + c}{x + n}$  có đồ thị như hình bên.

Mệnh đề	Đ	S
a) Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ .		
b) Điểm $I(1; 2)$ là tâm đối xứng của đồ thị.		
c) $a + 2b = 4$ .		
d) Đồ thị qua điểm $(2; 10)$ khi $c = 4$ .		



**QUICK NOTE**

**4**

**Sự tương giao của hai đồ thị**

✔ Xác định tọa độ giao điểm của hai đồ thị  $y = f(x)$  và  $y = g(x)$ :

QUICK NOTE

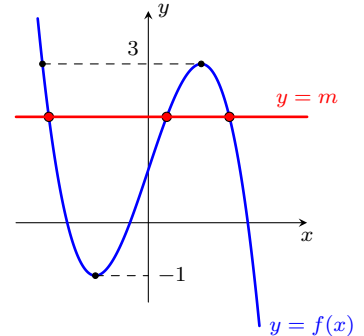
- ① Giải phương trình hoành độ giao điểm  $f(x) = g(x)$ , tìm các nghiệm  $x_0 \in \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g$ .
- ② Với  $x_0$  vừa tìm, thay vào một trong hai hàm số ban đầu để tìm  $y_0$ .
- ③ Kết luận giao điểm  $(x_0; y_0)$ .

🔍 Ứng dụng đồ thị để biện luận nghiệm phương trình:

Xét phương trình  $f(x) = m$ , với  $m$  là tham số. Nghiệm của phương trình này có thể coi là hoành độ giao điểm của đồ thị  $y = f(x)$  (cố định) với đường thẳng  $y = m$  (nằm ngang).

Từ đó, để biện luận nghiệm phương trình  $f(x) = m$ , ta có thể thực hiện các bước như sau:

- Lập bảng biến thiên của hàm số  $y = f(x)$  trên miền xác định mà đề bài yêu cầu.
- Tịnh tiến đường thẳng  $y = m$  theo hướng "lên, xuống". Quan sát số giao điểm để quy ra số nghiệm tương ứng.



BÀI TẬP TỰ LUẬN

**VÍ DỤ 1.** Xác định tọa độ giao điểm của hai đồ thị hàm số sau:

- a)  $y = x^3 - 2x^2 + x - 1$  và  $y = 1 - 2x$ ;      b)  $y = \frac{x+8}{x-2}$  và  $y = x + 2$ .

**VÍ DỤ 2.** Tìm tập hợp các giá trị thực của tham số  $m$  để đồ thị hàm số  $y = (x-2)(x^2 + mx + m^2 - 3)$  cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt.

**VÍ DỤ 3.** Tìm tham số  $m$  để phương trình  $x^3 - 3x + 2 - m = 0$  có ba nghiệm phân biệt.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

**CÂU 1.** Đường thẳng  $y = x - 1$  cắt đồ thị hàm số  $y = x^3 - x^2 + x - 1$  tại hai điểm. Tìm tổng tung độ các giao điểm đó.

- (A) -3.      (B) 2.      (C) 0.      (D) -1.

**CÂU 2.** Số giao điểm của đồ thị hàm số  $y = (x-1)(x^2 - 3x + 2)$  và trục hoành là

- (A) 0.      (B) 1.      (C) 2.      (D) 3.

**CÂU 3.** Đồ thị hàm số  $y = x^3 - 3x^2 + 2x - 1$  cắt đồ thị hàm số  $y = x^2 - 3x + 1$  tại hai điểm phân biệt  $A, B$ . Tính độ dài  $AB$ .

- (A)  $AB = 3$ .      (B)  $AB = 2\sqrt{2}$ .      (C)  $AB = 2$ .      (D)  $AB = 1$ .

**CÂU 4.** Đồ thị của hàm số  $y = \frac{x-1}{x+1}$  cắt hai trục  $Ox$  và  $Oy$  tại  $A$  và  $B$ . Khi đó diện tích của tam giác  $OAB$  (với  $O$  là gốc tọa độ) bằng

- (A) 1.      (B)  $\frac{1}{4}$ .      (C) 2.      (D)  $\frac{1}{2}$ .

**CÂU 5.** Biết đường thẳng  $y = x - 2$  cắt đồ thị hàm số  $y = \frac{x}{x-1}$  tại 2 điểm phân biệt  $A, B$ . Tìm hoành độ trọng tâm tam giác  $OAB$  với  $O$  là gốc tọa độ.

- (A)  $\frac{2}{3}$ .      (B) 2.      (C)  $\frac{4}{3}$ .      (D) 4.

**CÂU 6.** Gọi  $M, N$  là giao điểm của đường thẳng  $y = x + 1$  và đường cong  $y = \frac{2x+4}{x-1}$ . Tìm hoành độ trung điểm của đoạn thẳng  $MN$ .

- (A)  $x = -1$ .      (B)  $x = 1$ .      (C)  $x = -2$ .      (D)  $x = 2$ .

**CÂU 7.** Cho hàm số  $y = \frac{2x}{x+1}$  có đồ thị  $(C)$ . Gọi  $A, B$  là giao điểm của đường thẳng  $d: y = x$  với đồ thị  $(C)$ . Tính độ dài đoạn  $AB$ .

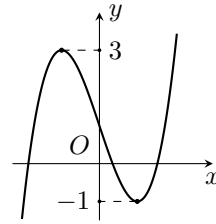
QUICK NOTE

- Ⓐ  $AB = \sqrt{2}$ .      Ⓑ  $AB = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .      Ⓒ  $AB = 1$ .      Ⓓ  $AB = 2$ .

**CÂU 8.**

Cho hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị như hình vẽ. Số nghiệm của phương trình  $2f(x) - 3 = 0$  là

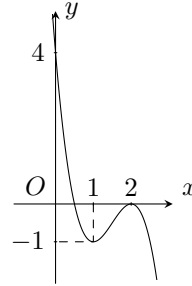
- Ⓐ 2.      Ⓑ 1.  
Ⓒ 0.      Ⓓ 3.



**CÂU 9.**

Cho hàm số  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  ( $d \neq 0$ ) có đồ thị như hình vẽ bên. Số nghiệm của phương trình  $3f(x) - 1 = 0$  bằng

- Ⓐ 0.      Ⓑ 1.  
Ⓒ 2.      Ⓓ 3.



**CÂU 10.**

Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như sau. Số giao điểm của đồ thị hàm số  $y = f(x)$  với trục hoành là

- Ⓐ 1.      Ⓑ 0.  
Ⓒ 2.      Ⓓ 3.

$x$	$-\infty$	$0$	$1$	$+\infty$			
$y'$	$-$	$0$	$+$	$0$	$-$		
$y$	$+\infty$	$\searrow$	$-1$	$\nearrow$	$3$	$\searrow$	$-\infty$

**CÂU 11.**

Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $(-\infty; +\infty)$  và có bảng biến thiên như hình bên. Số nghiệm thực của phương trình  $2|f(x)| = 7$  bằng

- Ⓐ 3.      Ⓑ 2.      Ⓒ 4.      Ⓓ 2.

$x$	$-\infty$	1	2	$+\infty$			
$y'$	+	0	-	0	+		
$y$	$-\infty$	$\nearrow$	5	$\searrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$

**CÂU 12.**

Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  và có bảng biến thiên như hình bên. Hỏi phương trình  $3|f(x)| - 10 = 0$  có bao nhiêu nghiệm?

- Ⓐ 2 nghiệm.      Ⓑ 4 nghiệm.  
Ⓒ 3 nghiệm.      Ⓓ 1 nghiệm.

$x$	$-\infty$	$0$	$1$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$		$-$ $0$ $+$	
$f(x)$	$2$ $\searrow$ $-\infty$		$+\infty$ $\searrow$ $3$ $\nearrow$ $+\infty$	

**CÂU 13.**

Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định và liên tục trên  $\mathbb{R}$ , có bảng biến thiên như sau. Số nghiệm của phương trình  $2[f(x)]^2 - 3f(x) + 1 = 0$  là

- Ⓐ 2.      Ⓑ 3.  
Ⓒ 6.      Ⓓ 0.

$x$	$-\infty$	$-1$	$1$	$+\infty$			
$y'$	$+$	$0$	$-$	$0$	$+$		
$y$	$1$	$\nearrow$	$3$	$\searrow$	$\frac{1}{3}$	$\nearrow$	$1$

**CÂU 14.**

Cho hàm số  $f(x)$  có bảng biến thiên như hình bên. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  để phương trình  $f(x) = m + 1$  có ba nghiệm thực phân biệt.

- Ⓐ  $-3 \leq m \leq 3$ .      Ⓑ  $-2 \leq m \leq 4$ .  
Ⓒ  $-2 < m < 4$ .      Ⓓ  $-3 < m < 3$ .

$x$	$-\infty$	$-1$	$3$	$+\infty$			
$y'$	$+$	$0$	$-$	$0$	$+$		
$y$	$-\infty$	$\nearrow$	$4$	$\searrow$	$-2$	$\nearrow$	$+\infty$

**CÂU 15.**

QUICK NOTE

Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như hình bên. Phương trình  $f(4x - x^2) - 2 = 0$  có bao nhiêu nghiệm thực?  
**(A) 2. (B) 6. (C) 0. (D) 4.**

$x$	$-\infty$	$0$	$4$	$+\infty$	
$y'$	$-$	$0$	$+$	$0$	$-$
$y$	$+\infty$	$-1$	$3$	$-\infty$	

Bài 5. ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM VÀ KHẢO SÁT HÀM SỐ ĐỂ GIẢI QUYẾT MỘT SỐ BÀI TOÁN THỰC TIỄN

A. LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1. Tốc độ thay đổi của một đại lượng

Ta có đạo hàm  $f'(a)$  là tốc độ thay đổi tức thời của đại lượng  $y = f(x)$  đối với  $x$  tại điểm  $x = a$ . Dưới đây, chúng ta xem xét một số ứng dụng của ý tưởng này đối với vật lí, hoá học, sinh học và kinh tế:

- ☑ Nếu  $s = s(t)$  là hàm vị trí của một vật chuyển động trên một đường thẳng thì  $v = s'(t)$  biểu thị vận tốc tức thời của vật (tốc độ thay đổi của độ dịch chuyển theo thời gian). Tốc độ thay đổi tức thời của vận tốc theo thời gian là gia tốc tức thời của vật:

$$a(t) = v'(t) = s''(t).$$

- ☑ Nếu  $C = C(t)$  là nồng độ của một chất tham gia phản ứng hoá học tại thời điểm  $t$ , thì  $C'(t)$  là tốc độ phản ứng tức thời (tức là độ thay đổi nồng độ) của chất đó tại thời điểm  $t$ .
- ☑ Nếu  $P = P(t)$  là số lượng cá thể trong một quần thể động vật hoặc thực vật tại thời điểm  $t$ , thì  $P'(t)$  biểu thị tốc độ tăng trưởng tức thời của quần thể tại thời điểm  $t$ .
- ☑ Nếu  $C = C(x)$  là hàm chi phí, tức là tổng chi phí khi sản xuất  $x$  đơn vị hàng hoá, thì tốc độ thay đổi tức thời  $C'(x)$  của chi phí đối với số lượng đơn vị hàng được sản xuất được gọi là chi phí biên.
- ☑ Về ý nghĩa kinh tế, chi phí biên  $C'(x)$  xấp xỉ với chi phí để sản xuất thêm một đơn vị hàng hoá tiếp theo, tức là đơn vị hàng hoá thứ  $x + 1$  (xem SGK Toán 11 tập hai, trang 87, bộ sách Kết nối tri thức với cuộc sống).

2. Bài toán tối ưu hóa

Một trong những ứng dụng phổ biến nhất của đạo hàm là cung cấp một phương pháp tổng quát, hiệu quả để giải những bài toán tối ưu hoá. Trong mục này, chúng ta sẽ giải quyết những vấn đề thường gặp như tối đa hoá diện tích, khối lượng, lợi nhuận, cũng như tối thiểu hoá khoảng cách, thời gian, chi phí. Quy trình giải một số bài toán tối ưu hoá đơn giản:

- ☑ **Bước 1.** Xác định đại lượng  $Q$  mà ta cần làm cho giá trị của đại lượng ấy lớn nhất hoặc nhỏ nhất và biểu diễn nó qua các đại lượng khác trong bài toán.
- ☑ **Bước 2.** Chọn một đại lượng thích hợp nào đó, kí hiệu là  $x$ , và biểu diễn các đại lượng khác ở **Bước 1** theo  $x$ . Khi đó, đại lượng  $Q$  sẽ là hàm số của một biến  $x$ . Tìm tập xác định của hàm số  $Q = Q(x)$ .
- ☑ **Bước 3.** Tìm giá trị lớn nhất hoặc giá trị nhỏ nhất của hàm số  $Q = Q(x)$  bằng các phương pháp đã biết và kết luận.

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

5 Bài toán về quãng đường, vận tốc, gia tốc

- ① Nếu phương trình chuyển động của vật là  $s = f(t)$  thì  $v = f'(t)$  là vận tốc tức thời và  $a = v'(t)$  là gia tốc tức thời của vật tại thời điểm  $t$ .
- ② Trong chuyển động thẳng đều thì  $s = v \cdot t$ .

**VÍ DỤ 1.** Trong 3 giây đầu tiên, một chất điểm chuyển động theo phương trình

$$s(t) = -t^3 + 6t^2 + t + 5,$$

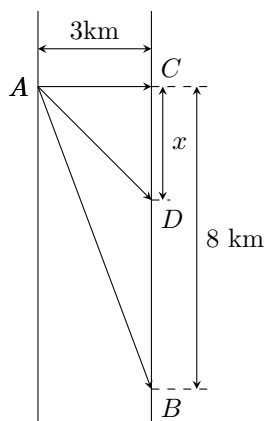
trong đó  $t$  tính bằng giây và  $s$  tính bằng mét. Chất điểm có vận tốc tức thời lớn nhất bằng bao nhiêu trong 3 giây đầu tiên đó?

**VÍ DỤ 2.** Khi bỏ qua sức cản của không khí, độ cao (mét) của một vật được phóng thẳng đứng lên trên từ điểm cách mặt đất 2 m với vận tốc ban đầu 24,5 m/s là  $h(t) = 2 + 24,5t - 4,9t^2$  (theo Vật lý đại cương, NXB Giáo dục Việt Nam, 2016).

- Tìm vận tốc của vật sau 2 giây.
- Khi nào vật đạt độ cao lớn nhất và độ cao lớn nhất đó là bao nhiêu?
- Khi nào thì vật chạm đất và vận tốc của vật lúc chạm đất là bao nhiêu?

**VÍ DỤ 3.**

Anh An chèo thuyền từ điểm  $A$  trên bờ một con sông thẳng rộng 3 km và muốn đến điểm  $B$  ở bờ đối diện cách 8 km về phía hạ lưu càng nhanh càng tốt (hình bên). Anh An chèo thuyền đến một điểm  $D$  nào đó giữa  $C$  và  $B$  rồi chạy bộ đến  $B$ . Nếu vận tốc chèo thuyền là 6 km/h và vận tốc chạy bộ là 8 km/h thì anh An phải chèo thuyền sang bờ ở điểm  $D$  cách  $B$  bao nhiêu km để đến được  $B$  càng sớm càng tốt? (Giả sử rằng vận tốc của nước là không đáng kể so với vận tốc chèo thuyền của anh An).



**VÍ DỤ 4.** Chi phí về nhiên liệu của một con tàu được chia làm hai phần. Phần chi phí thứ nhất không phụ thuộc vào tốc độ tàu và bằng 480 nghìn đồng mỗi giờ. Chi phí phần thứ hai trên 1 km đường tỉ lệ thuận với lập phương của tốc độ tàu, khi tốc độ bằng 20 km/h thì chi phí phần thứ hai bằng 100 nghìn đồng mỗi giờ. Giả sử con tàu đó luôn giữ nguyên tốc độ di chuyển, để tổng chi phí nhiên liệu trên 1 km đường là nhỏ nhất thì tốc độ của con tàu đó bằng bao nhiêu km/h ?

6

### Bài toán tối ưu hóa trong chi phí, doanh thu, lợi nhuận

- ✓ Nếu  $C(x)$  là tổng chi phí mà công ty (doanh nghiệp) phải trả để sản xuất  $x$  đơn vị hàng hóa thì  $C(x)$  được gọi là **hàm chi phí**.
- ✓ Gọi  $p(x)$  là giá bán mỗi đơn vị hàng hóa khi giao dịch  $x$  đơn vị hàng hóa. Khi đó  $p(x)$  được gọi là **hàm cầu** (hay **hàm giá**) và hàm số này được kì vọng là giảm theo biến  $x$ .
- ✓ Nếu  $x$  đơn vị hàng hóa được bán với giá mỗi đơn vị  $p(x)$ , thì **hàm doanh thu**, kí hiệu là  $R(x)$ , được tính bởi công thức  $R(x) = x \cdot p(x)$ .
- ✓ Nếu  $x$  đơn vị hàng hóa được bán với giá mỗi đơn vị là  $p(x)$ , thì **hàm lợi nhuận**, kí hiệu là  $P(x)$ , được tính bởi công thức

$$P(x) = R(x) - C(x) = xp(x) - C(x).$$

**VÍ DỤ 1.** Tại một xí nghiệp chuyên sản xuất vật liệu xây dựng, nếu trong một ngày xí nghiệp sản xuất  $x(m^3)$  sản phẩm thì phải bỏ ra các khoản chi phí bao gồm: 5 triệu đồng chi phí cố định; 0,4 triệu đồng chi phí cho mỗi mét khối sản phẩm và  $0,005x^2$  triệu đồng chi phí bảo dưỡng máy móc. Biết rằng, mỗi ngày xí nghiệp sản xuất được tối đa  $45 m^3$  sản phẩm. Tìm chi phí trung bình (triệu đồng) trên mỗi mét khối sản phẩm thấp nhất mà xí nghiệp cần bỏ ra (làm tròn đến hàng phần trăm).

**VÍ DỤ 2.** Giả sử một loại hàng hoá có hàm cầu được mô hình hoá bởi  $p(x) = 100 - 0,5x$  và hàm chi phí được mô hình hoá bởi  $C(x) = 40x + 37,5$ , trong đó  $p$  (nghìn đồng) là giá của một đơn vị hàng hoá đó. Hỏi khi lợi nhuận là lớn nhất, chi phí trung bình cho mỗi đơn vị là bao nhiêu nghìn đồng ? (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).

### QUICK NOTE

QUICK NOTE

**VÍ DỤ 3.** Một công ty sản xuất và bán hết  $x$  sản phẩm ( $0 < x \leq 1000$ ), tổng số tiền công ty thu được là  $f(x) = 1000x - x^2$  (nghìn đồng), chi phí sản xuất bình quân cho một sản phẩm là  $g(x) = x + \frac{30}{x} + 680$  (nghìn đồng). Giả sử mức thuế phụ thu trên một đơn vị sản phẩm bán được là  $t$  (nghìn đồng) ( $0 < t < 200$ ). Tìm mức thuế phụ thu  $t$  (nghìn đồng) trên một sản phẩm sao cho nhà nước nhận được số tiền thuế phụ thu lớn nhất và công ty cũng thu được lợi nhuận lớn nhất theo mức thuế phụ thu đó.

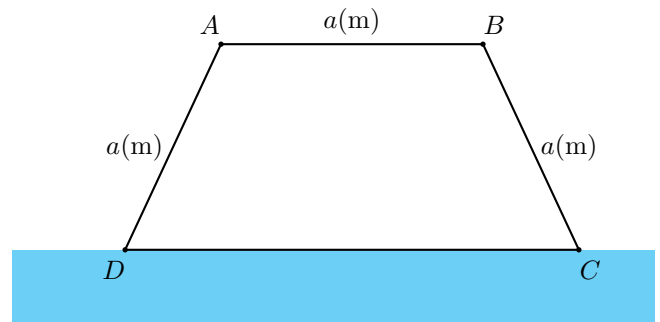
7

Bài toán tối ưu hoá trong hình học

- ① Thể tích khối hộp chữ nhật  $V = \text{dài} \times \text{rộng} \times \text{cao}$ ;
- ② Thể tích khối lập phương  $V = (\text{cạnh})^3$ ;
- ③ Thể tích khối chóp  $V = \frac{1}{3} \times S_{\text{đáy}} \times \text{cao}$ ;
- ④ Khối nón:
  - Diện tích xung quanh:  $S_{\text{xq}} = \pi r l$ .
  - Thể tích:  $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$ .
- ⑤ Khối trụ:
  - Diện tích xung quanh:  $S_{\text{xq}} = 2\pi r l$ .
  - Thể tích:  $V = \pi r^2 h$ .

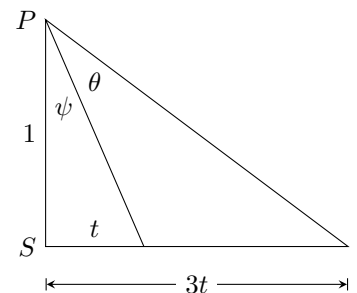
**VÍ DỤ 1.**

Một bác nông dân có ba tấm lưới B40, mỗi tấm dài  $a$  (m) và muốn rào một mảnh vườn dọc bờ sông có dạng hình thang cân  $ABCD$  như hình bên dưới (bờ sông là đường thẳng  $CD$  không phải rào). Hỏi bác đó có thể rào được mảnh vườn có diện tích lớn nhất là bao nhiêu mét vuông?



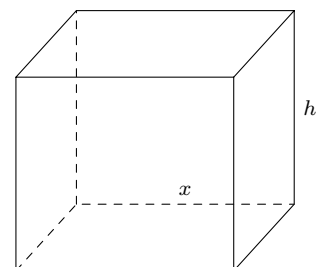
**VÍ DỤ 2.**

Một người quan sát đứng tại điểm  $P$ , cách xa đường đua một đơn vị độ dài. Hai vận động viên xuất phát từ điểm  $S$  và chạy dọc đường đua (như hình vẽ). Biết vận động viên thứ nhất chạy nhanh gấp ba lần vận động viên thứ hai, hãy tìm góc quan sát  $\theta$  lớn nhất giữa hai vận động viên mà người quan sát đứng ở  $P$  nhìn thấy được.



**VÍ DỤ 3.**

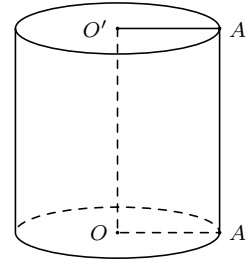
Ông Bình đặt thợ làm một bể cá, nguyên liệu bằng kính trong suốt, không có nắp đáy dạng hình hộp chữ nhật có thể tích chứa được  $220500 \text{ cm}^3$  nước. Biết tỉ lệ giữa chiều cao và chiều rộng của bể bằng 3. Xác định diện tích đáy của bể cá (tính bằng  $\text{cm}^2$ ) để tiết kiệm được nguyên vật liệu nhất.



**VÍ DỤ 4.**



Khi sản xuất vỏ lon sữa bò hình trụ, các nhà thiết kế luôn đặt mục tiêu sao cho chi phí nguyên liệu làm vỏ lon là ít nhất, tức là diện tích toàn phần của hình trụ là nhỏ nhất. Muốn thể tích khối trụ đó bằng  $1 \text{ dm}^3$  và diện tích toàn phần của hình trụ nhỏ nhất thì bán kính đáy của hình trụ phải bằng bao nhiêu dm? (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).



QUICK NOTE

8

Bài toán về tốc độ thay đổi của một đại lượng

**VÍ DỤ 1.** Khi máu di chuyển từ tim qua các động mạch chính rồi đến các mao mạch và quay trở lại qua các tĩnh mạch, huyết áp tâm thu (tức là áp lực của máu lên động mạch khi tim co bóp) liên tục giảm xuống. Giả sử một người có huyết áp tâm thu  $P$  (tính bằng mmHg) được cho bởi hàm số

$$P(t) = \frac{25t^2 + 125}{t^2 + 1}, 0 \leq t \leq 10,$$

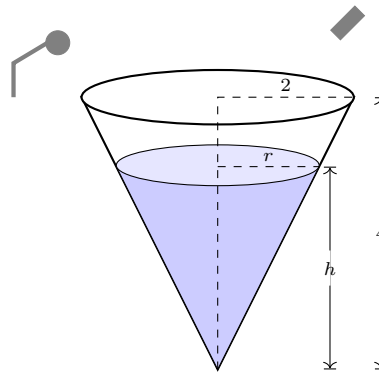
trong đó thời gian  $t$  được tính bằng giây. Tính tốc độ thay đổi của huyết áp sau 5 giây kể từ khi máu rời tim.

**VÍ DỤ 2.** Doanh số bán hệ thống âm thanh nổi mới trong một khoảng thời gian dự kiến sẽ tuân theo đường cong logistic  $R = R(x) = \frac{5000}{1 + 5e^{-x}}, x \geq 0$ , trong đó thời gian  $x$  được tính bằng năm. Hỏi tốc độ bán hàng đạt tới đa vào năm nào?

**VÍ DỤ 3.** Giả sử số lượng của một quần thể nấm men tại môi trường nuôi cấy trong phòng thí nghiệm được mô hình hoá bằng hàm số  $P(t) = \frac{a}{b + e^{-0,75t}}$ , trong đó thời gian  $t$  được tính bằng giờ. Tại thời điểm ban đầu  $t = 0$ , quần thể có 20 tế bào và tăng với tốc độ 12 tế bào/giờ. Tìm các giá trị của  $a$  và  $b$ . Theo mô hình này, điều gì xảy ra với quần thể nấm men về lâu dài?

**VÍ DỤ 4.**

Một bể nước có dạng hình nón ngược với bán kính đáy bằng 2 m và chiều cao bằng 4 m (tham khảo hình vẽ dưới đây). Nước được bơm vào bể với tốc độ không đổi là  $2 \text{ m}^3/\text{pht}$ . Hỏi tốc độ dâng lên của mực nước (đơn vị m/pht) bằng bao nhiêu khi mực nước trong bể đạt độ sâu bằng 3 m (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)?



BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

**PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.**

**CÂU 1.** Một vật chuyển động theo quy luật  $s = -\frac{1}{3}t^3 + 6t^2$  với  $t$  (giây) là khoảng thời gian tính từ khi vật bắt đầu chuyển động và  $s$  (mét) là quãng đường vật di chuyển được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 7 giây, kể từ khi bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu?

- (A) 144 m/s. (B) 24 m/s. (C) 180 m/s. (D) 36 m/s.

**CÂU 2.** Một vật chuyển động theo quy luật  $s = -\frac{1}{2}t^3 + 6t^2$  với  $t$  (giây) là khoảng thời gian tính từ khi vật bắt đầu chuyển động và  $s$  (mét) là quãng đường vật di chuyển được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 9 giây, kể từ khi bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được là bao nhiêu? (kết quả tính bằng m/s)

- (A) 54 m/s. (B) 36 m/s. (C) 27 m/s. (D) 45 m/s.

QUICK NOTE

**CÂU 3.** Để tăng nhiệt độ trong phòng từ 18°C người ta sử dụng một cái máy sưởi (máy được phép hoạt động trong 9 phút). Gọi  $T$  (đơn vị °C) là nhiệt độ của phòng ở phút thứ  $t$  được cho bởi công thức  $T = -0,009t^3 + 0,15t^2 + 18$  với  $t \in [1; 12]$ . Tìm nhiệt độ cao nhất trong phòng đạt được trong thời gian 9 phút kể từ khi máy sưởi bắt đầu hoạt động.

**(A)** 28. **(B)** 22. **(C)** 24. **(D)** 23.

**CÂU 4.** Số dân của một thị trấn sau  $t$  năm kể từ năm 1970 được ước tính bởi công thức  $f(t) = \frac{26t + 10}{t + 5}$  ( $f(t)$  được tính bằng nghìn người). Đạo hàm của hàm số  $f$  biểu thị tốc độ tăng trưởng dân số của thị trấn (tính bằng nghìn người/năm). Hỏi vào năm nào thì tốc độ tăng dân số là 0,048 nghìn người/ năm ?

**(A)** 2025. **(B)** 2020. **(C)** 2015. **(D)** 2018.

**CÂU 5.** Sau khi phát hiện dịch bệnh, các chuyên gia y tế ước tính số người nhiễm bệnh kể từ ngày đầu tiên xuất hiện bệnh nhân đầu tiên đến ngày thứ  $t$  là  $f(t) = 1 + 18t^2 - \frac{1}{3}t^3$  với  $t = 0, 1, 2, \dots, 30$ . Nếu  $f$  xác định trên  $[0; 30]$  thì  $f'(t)$  được xem là tốc độ truyền bệnh (người/ngày) tại thời điểm  $t$ . Xác định ngày mà tốc độ truyền bệnh lớn nhất.

**(A)** Ngày thứ 15. **(B)** Ngày thứ 18. **(C)** Ngày thứ 20. **(D)** Ngày thứ 30.

**CÂU 6.** Doanh số bán hệ thống âm thanh trong một khoảng thời gian dự kiến sẽ tuân theo đường cong logistic  $R = R(x) = \frac{5000}{1 + 5e^{-x}}, x \geq 0$ , trong đó thời gian  $x$  được tính bằng năm. Hỏi tốc độ bán hàng đạt tối đa vào năm thứ mấy kể từ khi mở bán?

**(A)** Năm thứ 3. **(B)** Năm thứ 2. **(C)** Năm thứ 4. **(D)** Năm thứ 1.

**CÂU 7.** Độ giảm huyết áp của một bệnh nhân được xác định bởi công thức  $f(x) = 0,025x^2(30 - x)$ , trong đó  $x$  là liều lượng an toàn thuốc tiêm cho bệnh nhân cao huyết áp được tính bằng mg. Liều lượng an toàn của thuốc cần tiêm cho bệnh nhân cao huyết áp để huyết áp giảm nhiều nhất là

**(A)** 30 mg. **(B)** 0,5 mg. **(C)** 15 mg. **(D)** 20 mg.

**CÂU 8.** Một cuốn tạp chí bán giá 20 ngàn đồng, chi phí xuất bản cho  $x$  cuốn là

$$C(x) = 0,0001x^2 - 0,2x + 10000 \text{ (đơn vị 10000 đồng).}$$

Chi phí phát hành mỗi cuốn là 4 ngàn đồng. Các khoản thu bao gồm tiền bán tạp chí cộng 90 triệu đồng tiền quảng cáo. Tìm số lượng cuốn tạp chí cần xuất bản để có mức lãi cao nhất. (giả thiết rằng số cuốn tạp chí in ra được bán hết)

**(A)** 90000 cuốn. **(B)** 9000 cuốn. **(C)** 10000 cuốn. **(D)** 18000 cuốn.

**CÂU 9.** Hiện tại, mỗi tháng một cửa hàng đồ lưu niệm bán được 100 sản phẩm  $A$ . Với mỗi sản phẩm  $A$  bán được, cửa hàng thu được 20 nghìn đồng lợi nhuận. Qua khảo sát, người ta thấy rằng với mỗi nghìn đồng giảm giá, cửa hàng bán thêm được 10 sản phẩm  $A$ . Cửa hàng nên giảm giá bao nhiêu nghìn đồng cho mỗi sản phẩm  $A$  để thu được lợi nhuận lớn nhất từ việc bán sản phẩm này?

**(A)** 15 nghìn đồng. **(B)** 8 nghìn đồng. **(C)** 10 nghìn đồng. **(D)** 12 nghìn đồng.

**CÂU 10.** Một công ty dự kiến chi 1 tỉ đồng sản xuất các thùng đựng sơn hình trụ với dung tích 5 lít. Giá sản xuất mặt xung quanh là 100 nghìn đồng/m<sup>2</sup>, giá sản xuất mặt đáy là 120 nghìn đồng/m<sup>2</sup>. Hỏi công ty có thể sản xuất được tối đa bao nhiêu thùng sơn? (Giả sử chi phí cho các mối nối không đáng kể).

**(A)** 56453 thùng sơn. **(B)** 58136 thùng sơn. **(C)** 57169 thùng sơn. **(D)** 59025 thùng sơn.

**PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.**

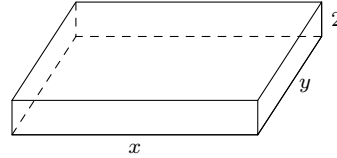
**CÂU 11.** Một vật chuyển động thẳng không đều xác định bởi phương trình  $s(t) = 7t^2 - 3t + 10$ , trong đó  $s$  tính bằng mét và  $t$  tính bằng giây. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

Mệnh đề	Đ	S
a) Quãng đường vật đi được sau 9 giây kể từ khi bắt đầu chuyển động là 550 m. .		

QUICK NOTE

Mệnh đề	Đ	S
b) Gia tốc chuyển động của vật tại thời điểm $t = 2$ là $20 \text{ m/s}^2$ .		
c) Vận tốc chuyển động của vật tại thời điểm $t = 4$ là $59 \text{ m/s}$ .		
d) Vận tốc nhỏ nhất vật đạt được trong khoảng thời gian từ $t = 3$ đến $t = 6$ là $39 \text{ m/s}$ .		

**CÂU 12.** Người ta muốn xây một bể bơi có dạng hình hộp chữ nhật, thể tích  $1800 \text{ m}^3$  và chiều sâu  $2 \text{ m}$  (hình bên). Biết rằng chi phí xây mỗi đơn vị diện tích của đáy bể gấp hai lần so với thành bể. Gọi  $x \text{ (m)}$  và  $y \text{ (m)}$  là hai kích thước của mặt đáy. Xét tính đúng-sai của các khẳng định sau:



Mệnh đề	Đ	S
a) Thể tích bể bơi được tính theo công thức $V = 2x^2y$ .		
b) Mối liên hệ giữa $x$ và $y$ là $y = \frac{900}{x}$ .		
c) Tổng diện tích mặt bên của bể tính theo $x, y$ là $S = 4(x + y)$ .		
d) Để tổng chi phí xây dựng (bao gồm mặt đáy và mặt bên) nhỏ nhất thì cần chọn chiều dài là $40 \text{ m}$ .		

**CÂU 13.** Nhà máy  $A$  chuyên sản xuất một loại sản phẩm cung cấp cho nhà máy  $B$ . Hai nhà máy thoả thuận rằng, hằng tháng  $A$  cung cấp cho  $B$  số lượng sản phẩm theo đơn đặt hàng của  $B$  (tối đa  $100$  tấn sản phẩm). Nếu số lượng đặt hàng là  $x$  tấn sản phẩm thì giá bán cho mỗi tấn sản phẩm là  $P(x) = 45 - 0,001x^2$  (triệu đồng). Chi phí để  $A$  sản xuất  $x$  tấn sản phẩm trong một tháng là  $C(x) = 100 + 30x$  (triệu đồng) (gồm  $100$  triệu đồng chi phí cố định và  $30$  triệu đồng cho mỗi tấn sản phẩm).

Mệnh đề	Đ	S
a) Chi phí để $A$ sản xuất $10$ tấn sản phẩm trong một tháng là $400$ triệu đồng.		
b) Số tiền $A$ thu được khi bán $10$ tấn sản phẩm cho $B$ là $600$ triệu đồng.		
c) Lợi nhuận mà $A$ thu được khi bán $x$ tấn sản phẩm ( $0 \leq x \leq 100$ ) cho $B$ là $-0,001x^3 + 15x - 100$ .		
d) $A$ bán cho $B$ khoảng $70,7$ tấn sản phẩm mỗi tháng thì thu được lợi nhuận lớn nhất.		

**CÂU 14.** Giả sử hàm cầu của một sản phẩm độc quyền được cho bởi  $p = 400 - 2Q$  và hàm chi phí trung bình  $\bar{C} = 0,2Q + 4 + \frac{400}{Q}$  trong đó  $Q$  là số đơn vị sản phẩm ( $p$  và  $\bar{C}$  được tính bằng \$ đối với mỗi đơn vị sản phẩm). Xét tính đúng, sai của các khẳng định sau:

Mệnh đề	Đ	S
a) $Q = 90$ là lượng sản phẩm bán ra để lợi nhuận thu được tối đa.		
b) Giá bán để lợi nhuận thu được tối đa là $400\$$ .		
c) Lợi nhuận tối đa là $17420\$$ .		
d) Nếu chính phủ đánh thuế $22\$$ / một đơn vị sản phẩm thì giá bán $390\$$ để lợi nhuận thu được tối đa.		

### PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.

**CÂU 15.** Một vật chuyển động theo quy luật  $s = -\frac{1}{3}t^3 + 9t^2$ , với  $t$  (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc vật bắt đầu chuyển động và  $s$  (mét) là quãng đường vật đi được trong thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian  $10$  giây, kể từ lúc bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu? (kết quả tính bằng  $\text{m/s}$ )

KQ:

QUICK NOTE

**CÂU 16.** Tại một xưởng sản xuất sản phẩm từ bê tông, chi phí để sản xuất  $x(m^3)$  sản phẩm mỗi tháng là  $C(x) = 2 + 0,5x + 0,007x^2$  (triệu đồng) với  $0 \leq x \leq 27$ . Chi phí trung bình là  $\overline{C}(x) = \frac{C(x)}{x}$ . Mỗi tháng xưởng sản xuất bao nhiêu mét khối sản phẩm thì chi phí trung bình để sản xuất là thấp nhất (làm tròn đến hàng phần mười)

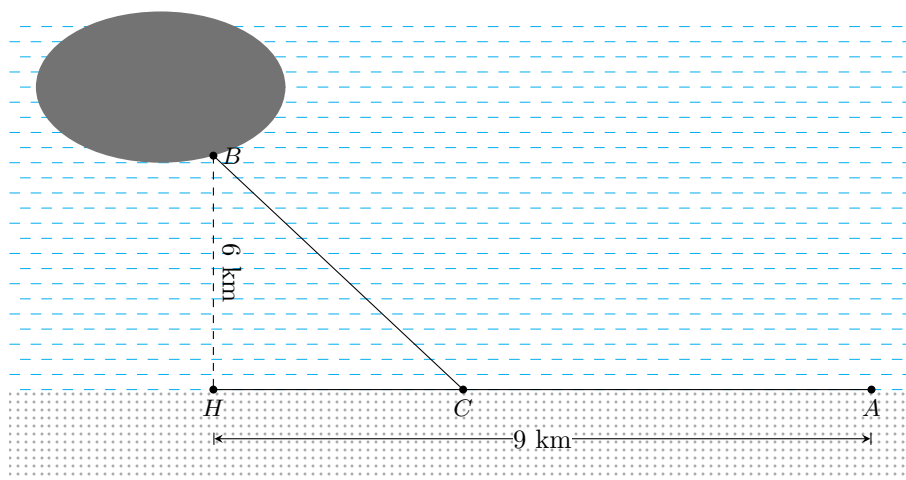
KQ:

**CÂU 17.** Cơ sở A chuyên cung cấp một loại sản phẩm nông nghiệp X cho nhà phân phối B. Hai bên thoả thuận rằng, nếu đầu tháng B đặt hàng  $x$  tạ sản phẩm X thì giá bán mỗi tạ sản phẩm là  $P(x) = 5 - 0,0005x^2$  (triệu đồng) ( $x \leq 40$ ). Chi phí A phải bỏ ra cho  $x$  tạ sản phẩm X trong một tháng là  $C(x) = 10 + 3,5x$  (triệu đồng). Hỏi trong một tháng B đặt hàng bao nhiêu tạ sản phẩm X từ A thì A nhận được lợi nhuận lớn nhất? (kết quả làm tròn đến hàng phần chục)

KQ:

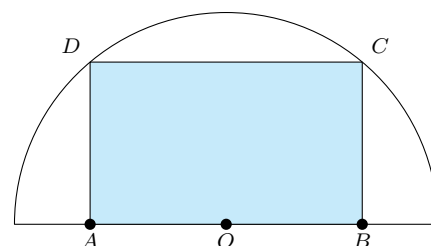
**CÂU 18.** Một công ty muốn làm một đường ống dẫn từ vị trí A trên bờ biển đến vị trí B trên hòn đảo. Khoảng cách từ điểm B đến bờ biển là  $BH = 6$  km (Hình bên dưới). Giá tiền để xây dựng đường ống trên bờ là 50 000 USD mỗi kilômét và giá tiền xây dựng đường ống trên biển là 130 000 USD mỗi kilômét, biết rằng  $AH = 9$  km. Xác định vị trí điểm C cách vị trí A một khoảng bao nhiêu km để khi lắp ống dẫn theo đường gấp khúc ACB thì chi phí công ty bỏ ra là thấp nhất.

KQ:



**CÂU 19.** Từ một tấm tôn có hình dạng là nửa hình tròn bán kính  $R = 7$ , người ta muốn cắt ra một hình chữ nhật (như hình vẽ). Diện tích lớn nhất có thể của tấm tôn hình chữ nhật là bao nhiêu?

KQ:



**CÂU 20.** Từ một tấm bìa hình chữ nhật có chiều rộng 10cm và chiều dài 80 cm như hình a, người ta cắt ở bốn góc bốn hình vuông có cạnh  $x$  với  $1 \leq x \leq 4$  và gấp lại để tạo thành chiếc hộp có dạng hình hộp chữ nhật không nắp như hình b. Tìm  $x$  để thể tích chiếc hộp là lớn nhất (kết quả làm tròn đến hàng phần mười).

KQ:



# MỤC LỤC

<b>Bài 4. KHẢO SÁT BIẾN THIÊN VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ</b>	<b>1</b>
Ⓐ LÝ THUYẾT CẦN NHỚ	1
Ⓑ PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN	2
Dạng 1. Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số bậc ba	2
Dạng 2. Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số phân thức hữu tỉ bậc I/I	5
Dạng 3. Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số phân thức hữu tỉ bậc II/I	9
Dạng 4. Sự tương giao của hai đồ thị	11
<b>Bài 5. Ứng dụng đạo hàm và khảo sát hàm số để giải quyết một số bài toán thực tiễn</b>	<b>14</b>
Ⓐ Lý thuyết cần nhớ	14
Ⓑ Phân loại và phương pháp giải toán	14
Dạng 5. Bài toán về quãng đường, vận tốc, gia tốc	14
Dạng 6. Bài toán tối ưu hóa trong chi phí, doanh thu, lợi nhuận	15
Dạng 7. Bài toán tối ưu hoá trong hình học	16
Dạng 8. Bài toán về tốc độ thay đổi của một đại lượng	17

