

Bài 15. GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. GIỚI HẠN HỮU HẠN CỦA DÃY SỐ

Định nghĩa 1: Dãy số (u_n) có giới hạn là 0 khi n dần tới dương vô cực nếu $|u_n|$ có thể nhỏ hơn một số dương bé tùy ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi. Kí hiệu

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$$

Định nghĩa 2: Dãy số (u_n) có giới hạn là a nếu $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - a) = 0$. Kí hiệu

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$$

Một vài giới hạn đặc biệt: (có thể xem như công thức)

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0;$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} C = C, \forall C \in \mathbb{R};$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^k} = 0, \text{ với } k \in \mathbb{N}^*;$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{q^n} = 0, \text{ với } |q| > 1;$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0;$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0, \text{ nếu } |q| < 1.$

2. ĐỊNH LÝ VỀ GIỚI HẠN HỮU HẠN CỦA DÃY SỐ

Nếu $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$ và $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = b$ thì ta có:

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n \pm v_n) = a + b;$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{u_n} = \sqrt{a}, \text{ với } a \geq 0;$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n \cdot v_n) = a \cdot b;$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n| = |a|;$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{u_n}{v_n} \right) = \frac{a}{b}, \text{ với } b \neq 0;$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} (k \cdot u_n) = k \cdot a (k \in \mathbb{R}).$

Dịnh lý "kẹp":

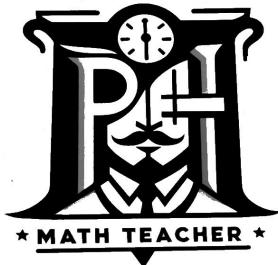
- Nếu $0 \leq |u_n| \leq v_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$ và $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$ thì $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.
- Nếu $w_n \leq u_n \leq v_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$ và $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = a$ thì $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$.

3. TỔNG CỦA CẤP SỐ NHÂN LÙI VÔ HẠN

Cấp số nhân vô hạn (u_n) có công bội q thoả mãn $|q| < 1$ được gọi là *cấp số nhân lùi vô hạn*.

Cho cấp số nhân lùi vô hạn (u_n) , ta có tổng của cấp số nhân lùi vô hạn đó là

$$S = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots = \frac{u_1}{1 - q}, (|q| < 1)$$



ĐIỂM:

"It's not how much time you have, it's how you use it."

QUICK NOTE

QUICK NOTE

4. GIỚI HẠN VÔ CỰC CỦA DÃY SỐ

Định nghĩa 1: Ta nói dãy số (u_n) có giới hạn $+\infty$ khi $n \rightarrow +\infty$, nếu u_n có thể lớn hơn một số dương bất kỳ, kể từ một số hạng nào đó trở đi. Kí hiệu

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$$

Định nghĩa 2: Ta nói dãy số (u_n) có giới hạn $-\infty$ khi $n \rightarrow +\infty$, nếu $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-u_n) = +\infty$. Kí hiệu

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$$

Một số giới hạn đặc biệt:

a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^k = +\infty$, với $k \in \mathbb{N}^*$. b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$, với $q > 1$.

Một số quy tắc tính giới hạn vô cực:

① Quy tắc tìm giới hạn của tích $u_n \cdot v_n$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = L$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \infty$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} [u_n \cdot v_n]$
$L > 0$	$+\infty$	$+\infty$
$L > 0$	$-\infty$	$-\infty$
$L < 0$	$+\infty$	$-\infty$
$L < 0$	$-\infty$	$+\infty$

② Quy tắc tìm giới hạn của thương $\frac{u_n}{v_n}$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = L$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$	Dấu của v_n	$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n}$
L	$\pm\infty$	Tùy ý	0
$L > 0$	0	+	$+\infty$
$L > 0$	0	-	$-\infty$
$L < 0$	0	+	$-\infty$
$L < 0$	0	-	$+\infty$

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

1 Khử vô định dạng $\frac{\infty}{\infty}$

Xét giới hạn: $\lim \frac{u_n}{v_n}$.

Phương pháp giải:

- Ⓐ Đặt nhân tử n^k có tính "quyết định ∞ " ở tử và mẫu.
- Ⓑ Khử bỏ n^k , đưa giới hạn về dạng xác định được.
- Ⓒ Áp dụng định lý về giới hạn hữu hạn để tính kết quả.

Chú ý: Trong trường hợp hàm mũ, ta đặt đại lượng "quyết định ∞ " có dạng a^n .

VÍ DỤ 1. Tính các giới hạn sau

a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n^2 + 3n - 1}{2 - 3n^2}$

b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n^3 + 2n^2 + n}{n^3 + 4}$

c) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 + 1}{2n^4 + n + 1}$

d) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n+1}{n^2 + 2n} - \frac{1}{n-1} \right)$

e) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2n^2 + 3n}{n+1} - \frac{2n^3 - 3}{n^2 - 1} \right)$

f) $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \left(1 - \frac{n^2 + 3}{n^2 - 1} \right)$

g) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(2n+3)(1-3n)}{2n^2-n+5}$

h) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^4-2n^2}{(n+1)(2+n)(n^2+1)}$

i) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(2n^4+1)(n+2)^2}{(2n+1)^2(2-n)^4}$

VÍ DỤ 2. Tính các giới hạn sau

a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1+3^n}{4+3^n}$

b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4 \cdot 3^n + 7^{n+1}}{2 \cdot 5^n + 7^n}$

c) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4^{n+1} + 6^{n+2}}{5^n + 8^n}$

VÍ DỤ 3. Tính các giới hạn sau

a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n-1}{\sqrt{4n^2+1}+3n}$

b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4n^2+3n-1}}{\sqrt{3n^2+1}-\sqrt{2n+1}}$

c) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4n^4+1}}{\sqrt{n^4+4n+1}+n^2}$

d) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{n^2-4n}-\sqrt{4n^2+1}}{\sqrt{3n^2+1}+n}$

e) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{8n^3+n^2-1}+n-4}{2n-3}$

f) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2+\sqrt[3]{1-n^6}}{\sqrt{n^4+1}+n^2}$

VÍ DỤ 4. Tính các giới hạn sau:

a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1+2+\dots+n}{n^2}$

b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n} \right]$

c) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2+4+8+\dots+2^n}{3 \cdot 2^n - 1} \right)$

d) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} \right)$

VÍ DỤ 5. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1 = 10$ và $u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + 3$, với mọi $n \geq 1$.a) Chứng minh dãy (v_n) xác định bởi $v_n = u_n - \frac{15}{4}$ là một cấp số nhân.b) Tính $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

2

Khử vô định dạng $\infty - \infty$ Xét các giới hạn dạng: $\lim (\sqrt{u_n} - v_n)$ hoặc $\lim (\sqrt{u_n} - \sqrt{v_n})$.**Phương pháp giải:**

↪ Nhân thêm lượng liên hợp

↪ Biến đổi biểu thức cần tính giới hạn về Dạng 1 (phân thức, đặt n^k)**Chú ý:** Đôi khi, ta còn sử dụng liên hợp bậc ba để giải các bài toán tính giới hạn của những dãy số mà công thức tổng quát của nó có chứa ẩn trong dấu căn bậc ba.

$$\sqrt[3]{A} - B = \frac{(\sqrt[3]{A} - B)(\sqrt[3]{A}^2 + \sqrt[3]{A} \cdot B + B^2)}{\sqrt[3]{A}^2 + \sqrt[3]{A} \cdot B + B^2} = \frac{A - B^3}{\sqrt[3]{A}^2 + \sqrt[3]{A} \cdot B + B^2}$$

VÍ DỤ 1. Tính các giới hạn sau

a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n^2+2n} - n)$

b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (2n - \sqrt{4n^2+n})$

c) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2+2})$

d) $\lim_{n \rightarrow +\infty} n(\sqrt{n^2+2} - n)$

e) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n^2+2n} - n - 1)$

f) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+2n} - \sqrt{n^2+4}}$

VÍ DỤ 2. Tính các giới hạn sau

a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{n^3+2} - n)$

b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{n^3+1} - \sqrt{n^2+1})$

c) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{n^3+2} - \sqrt{n^2+n})$

QUICK NOTE

QUICK NOTE

3

Một số quy tắc tính giới hạn vô cực

① Quy tắc tìm giới hạn của tích $u_n \cdot v_n$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = L$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \infty$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} [u_n \cdot v_n]$
$L > 0$	$+\infty$	$+\infty$
$L > 0$	$-\infty$	$-\infty$
$L < 0$	$+\infty$	$-\infty$
$L < 0$	$-\infty$	$+\infty$

② Quy tắc tìm giới hạn của thương $\frac{u_n}{v_n}$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = L$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$	Dấu của v_n	$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n}$
L	$\pm\infty$	Tùy ý	0
$L > 0$	0	+	$+\infty$
$L > 0$	0	-	$-\infty$
$L < 0$	0	+	$-\infty$
$L < 0$	0	-	$+\infty$

VÍ DỤ 1. Tính các giới hạn sau:

- a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (2n^3 + 2n - 1)$ b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n - 2n^3)$
 c) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n^2 + 2n + 7}$ d) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n^2 - 3n} - \sqrt{n + 2})$
 e) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 - \sqrt{1 + 3n^2})$ f) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (3^n - 2 \cdot 5^n)$

VÍ DỤ 2. Tính các giới hạn sau

- a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^n + 5^{n+1}}{1 + 5^n}$ b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + 2 \cdot 3^n - 7^n}{5^n - 2 \cdot 6^n}$
 c) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 - 2 \cdot 3^n + 7^n}{2^n(3^{n+1} - 5)}$

VÍ DỤ 3. Tính các giới hạn sau:

- a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n^4 + n^2 - 3}{3n^3 - 2n^2 + 1}$ b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n^3 + n + 4}{5n - n^2}$
 c) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(3n - 1)(n - 2)}{2n - 1}$ d) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n + 5}{\sqrt{n^2 + 1} - n}$
 e) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n + 5}{\sqrt{n + 1} - \sqrt{n}}$ f) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(3n - 1)^4(n - 2)}{(1 - 2n)^2}$

4

Tổng của cấp số nhân lùi vô hạn

✿ Cấp số nhân vô hạn (u_n) có công bội q thoả mãn $|q| < 1$ được gọi là *cấp số nhân lùi vô hạn*.

✿ Cho cấp số nhân lùi vô hạn (u_n) , Xét $S = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots$. Khi đó, ta có công thức tính

$$S = \frac{u_1}{1 - q}$$

VÍ DỤ 1. Tính các tổng sau:

- a) $S = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^n} + \dots$ b) $S = 16 - 8 + 4 - 2 + \dots$

VÍ DỤ 2. Hãy biểu diễn các số thập phân vô hạn tuần hoàn sau dưới dạng phân số.

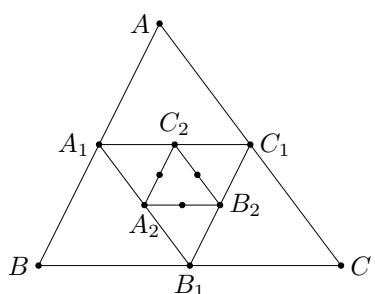
a) $A = 0,353535\dots$

b) $B = 5,231231\dots$

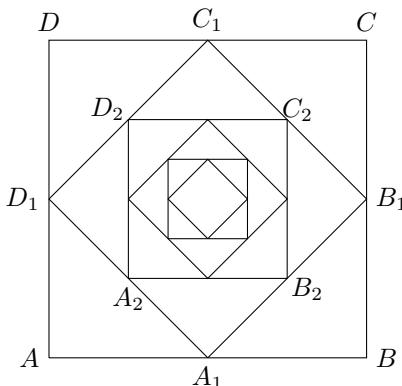
VÍ DỤ 3. Một bệnh nhân hàng ngày phải uống một viên thuốc 150 mg. Sau ngày đầu, trước mỗi lần uống, hàm lượng thuốc cũ trong cơ thể vẫn còn 5%. Tính lượng thuốc có trong cơ thể sau khi uống viên thuốc của ngày thứ 5. Ước tính lượng thuốc trong cơ thể nếu bệnh nhân sử dụng thuốc trong một thời gian dài.

VÍ DỤ 4.

Tam giác mà ba đỉnh của nó là ba trung điểm ba cạnh của tam giác ABC được gọi là *tam giác trung bình* của tam giác ABC . Ta xây dựng dãy các tam giác $A_1B_1C_1, A_2B_2C_2, A_3B_3C_3, \dots$ sao cho $A_1B_1C_1$ là một tam giác đều cạnh bằng 3 và với mỗi số nguyên dương $n \geq 2$, tam giác $A_nB_nC_n$ là tam giác trung bình của tam giác $A_{n-1}B_{n-1}C_{n-1}$. Với mỗi số nguyên dương n , kí hiệu S_n tương ứng là diện tích hình tròn ngoại tiếp tam giác $A_nB_nC_n$. Tính tổng $S = S_1 + S_2 + \dots + S_n + \dots$.



VÍ DỤ 5. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh bằng 2. Hình vuông $A_1B_1C_1D_1$ có các đỉnh là trung điểm của các cạnh của hình vuông $ABCD$, hình vuông $A_2B_2C_2D_2$ có các đỉnh là trung điểm của các cạnh của hình vuông $A_1B_1C_1D_1$, hình vuông $A_3B_3C_3D_3$ có các đỉnh là trung điểm của các cạnh của hình vuông $A_2B_2C_2D_2$, ..., hình vuông $A_nB_nC_nD_n$ có các đỉnh là trung điểm của các cạnh của hình vuông $A_{n-1}B_{n-1}C_{n-1}D_{n-1}$, ... (quá trình chia nhỏ này được lặp lại vô hạn)



Gọi $S_1, S_2, S_3, \dots, S_n, \dots$ lần lượt là diện tích hình vuông $A_1B_1C_1D_1, A_2B_2C_2D_2, A_3B_3C_3D_3, \dots, A_nB_nC_nD_n, \dots$. Tính tổng $S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_n + \dots$.

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

BÀI 1. Cho hai dãy số $(u_n), (v_n)$ với $u_n = 3 + \frac{1}{n}; v_n = 5 - \frac{2}{n^2}$. Tính các giới hạn sau:

a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n, \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n.$

b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n + v_n), \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n), \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n \cdot v_n), \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n}.$

BÀI 2. Tính các giới hạn sau

a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n+2}{2n+3}.$

b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4n^2-1}{2n^2+n}.$

c) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{n^2+2n}-3}{n+2}.$

d) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{n^2+2n}-n-1}{\sqrt{n^2+n}+n}.$

BÀI 3. Tính các giới hạn sau

a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{7.5^n - 2.7^n}{5^n - 5.7^n}.$

b) $\lim \frac{4^{n+1} + 6^{n+2}}{5^n + 8^n}.$

BÀI 4. Tính các giới hạn sau

a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n^2+2n} - n).$

b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n^3+2n} - n^2).$

c) $\lim(\sqrt{n^2+3n+2} - n + 1).$

d) $\lim(\sqrt{n^2+2n+3} - 1 + n).$

QUICK NOTE

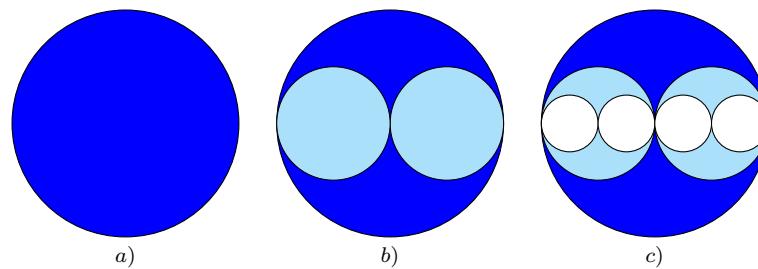
QUICK NOTE

BÀI 5. Tính các giới hạn sau

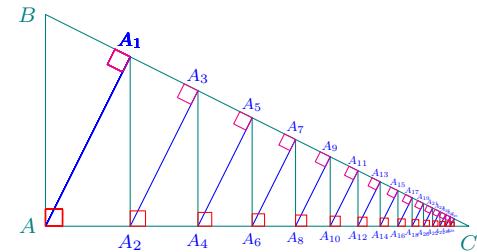
a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin 10n + \cos 10n}{n^2 + 1}$.
b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 - \sin n\pi}{n + 1}$.

BÀI 6. Tính tổng của các cấp số nhân lùi vô hạn sau

a) $-\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \dots + \left(-\frac{1}{2}\right)^n + \dots$.
b) $\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \dots + \left(\frac{1}{4}\right)^n + \dots$.

BÀI 7. Viết số thập phân vô hạn tuần hoàn $0,444\dots$ dưới dạng một phân số.**BÀI 8.** Từ tờ giấy, cắt một hình tròn bán kính R (cm) như Hình a. Tiếp theo, cắt hai hình tròn bán kính $\frac{R}{2}$ rồi chồng lên hình tròn đầu tiên như Hình b. Tiếp theo, cắt bốn hình tròn bán kính $\frac{R}{4}$ rồi chồng lên các hình trước như Hình c. Cứ thế tiếp tục mãi. Tính tổng diện tích của các hình tròn.**BÀI 9.**

Cho tam giác vuông ABC vuông tại A , có $AB = h$ và góc B bằng α (Hình vẽ bên). Từ A kẻ $AA_1 \perp BC$, từ A_1 kẻ $A_1A_2 \perp AC$, sau đó lại kẻ $A_2A_3 \perp BC$. Tiếp tục quá trình trên, ta được đường gấp khúc vô hạn $AA_1A_2A_3\dots$. Tính độ dài đường gấp khúc này theo h và α .

**D. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM****Phần I. Mỗi câu hỏi học sinh chọn một trong bốn phương án A, B, C, D.****CÂU 1.** Trong các mệnh đề dưới đây, mệnh đề nào sai?

- (A) Nếu $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ và $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = a > 0$ thì $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n v_n) = +\infty$.
- (B) Nếu $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \neq 0$ và $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \pm\infty$ thì $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{u_n}{v_n}\right) = 0$.
- (C) Nếu $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a > 0$ và $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$ thì $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{u_n}{v_n}\right) = +\infty$.
- (D) Nếu $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a < 0$ và $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$ và $v_n > 0$ với mọi n thì $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{u_n}{v_n}\right) = -\infty$.

CÂU 2. Cho dãy số (u_n) có $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 3$, dãy số (v_n) có $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 5$. Khi đó $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n v_n)$ bằng

- (A) 15. (B) 8. (C) 5. (D) 3.

CÂU 3. Cho $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -3$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 2$. Khi đó $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n)$ bằng

- (A) -5. (B) -1. (C) 2. (D) 0.

CÂU 4. Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n + 3) = 0$. Giá trị $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ bằng

- (A) 3. (B) -3. (C) 2. (D) 0.

CÂU 5. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- (A) Ta nói dãy số (u_n) có giới hạn là số a khi $n \rightarrow +\infty$, nếu $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - a) = 0$.
- (B) Ta nói dãy số (u_n) có giới hạn là 0 khi n dần tới vô cực, nếu $|u_n|$ có thể lớn hơn một số dương tùy ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi.

QUICK NOTE

C) Ta nói dãy số (u_n) có giới hạn là $+\infty$ khi $n \rightarrow +\infty$, nếu u_n có thể nhỏ hơn một số dương bất kì, kể từ một số hạng nào đó trở đi.

D) Ta nói dãy số (u_n) có giới hạn là $-\infty$ khi $n \rightarrow +\infty$, nếu u_n có thể lớn hơn một số dương bất kì, kể từ một số hạng nào đó trở đi.

CÂU 6. Cho các dãy số (u_n) , (v_n) và $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$. Giá trị $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{u_n}{v_n} \right)$ bằng

- A**) 1. **B**) 0. **C**) $-\infty$. **D**) $+\infty$.

CÂU 7. Trong các khẳng định dưới đây, có bao nhiêu khẳng định đúng?

(I) $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^k = +\infty$ với k nguyên dương.

(II) $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$ nếu $|q| < 1$.

(III) $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$ nếu $q > 1$.

- A**) 0. **B**) 1. **C**) 3. **D**) 2.

CÂU 8. Phát biểu nào sau đây là sai?

A) $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = c$ với $u_n = c$ là hằng số. **B**) $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$ với $|q| > 1$.

C) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$. **D**) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^k} = 0$ với $k > 1$.

CÂU 9. Dãy số nào sau đây có giới hạn bằng 0?

- A**) $\left(\frac{4}{e}\right)^n$. **B**) $\left(\frac{5}{3}\right)^n$. **C**) $\left(\frac{1}{3}\right)^n$. **D**) $\left(-\frac{5}{3}\right)^n$.

CÂU 10. Giá trị $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2}$ bằng

- A**) $+\infty$. **B**) 1. **C**) $-\infty$. **D**) 0.

CÂU 11. Dãy số nào có giới hạn khác 0?

- A**) $\left(\frac{4}{5}\right)^n$. **B**) $2 + \left(\frac{3}{5}\right)^n$. **C**) $\frac{1}{2n}$. **D**) $\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

CÂU 12. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

A) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n = +\infty$. **B**) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-\frac{5}{n^3}\right)^n = -\infty$.

C) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. **D**) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{4}{3}\right)^n = 0$.

Phần II. Trong mỗi ý a), b), c) và d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.

CÂU 1. Cho hai dãy số (u_n) , (v_n) với $u_n = \sqrt{9n^2 + 2n} - 3n$, $v_n = -2 + 5n$.

Mệnh đề	D	S
a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{v_n} = 0$.		
b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$.		

Mệnh đề	D	S
c) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n + 3n}{v_n} = \frac{3}{5}$.		
d) $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.		

CÂU 2. Cho hai dãy số (u_n) , (v_n) với $u_n = 4 \cdot 3^n - 7^{n+1}$, $v_n = 7^n$.

Mệnh đề	D	S
a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{v_n} = 0$.		
b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$.		
c) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n - v_n}{3u_n + 2v_n} = \frac{8}{19}$.		
d) $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.		

QUICK NOTE

CÂU 3. Cho hai dãy số (u_n) và (v_n) có $u_n = \frac{1}{n+1}$, $v_n = \frac{3}{n+3}$.

Mệnh đề	D	S
a) Ta nói dãy số (u_n) có giới hạn là 0 khi n dần tới vô cực, vì $ u_n $ có thể nhỏ hơn một số dương tùy ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi.		
b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n + 1) = 1$.		
c) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) = 0$.		
d) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = \frac{1}{3}$.		

CÂU 4. Cho các dãy số (u_n) , (v_n) có $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -5$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$.

Mệnh đề	D	S
a) Ta nói dãy số (u_n) có giới hạn là -5 khi n dần tới vô cực, nếu $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - 5) = 0$.		
b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n + 7) = 2$.		
c) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n \cdot v_n) = +\infty$.		
d) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$.		

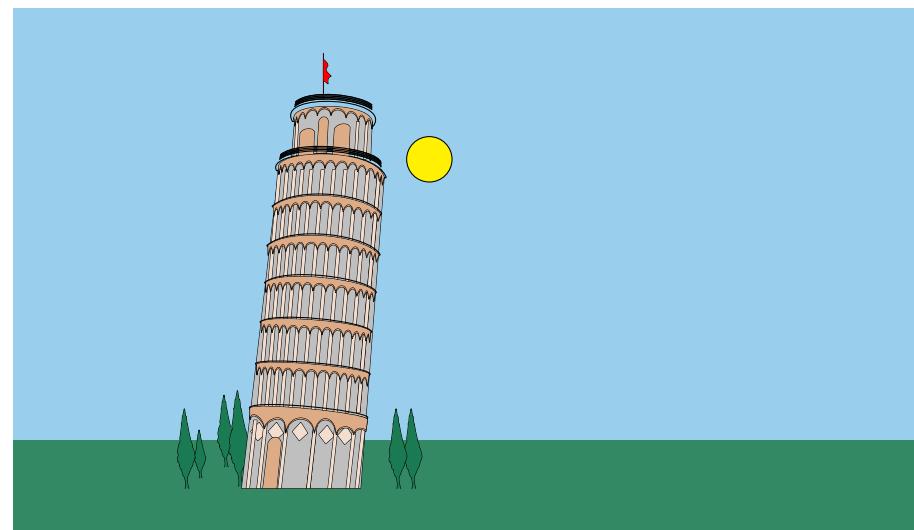
Phần III. Học sinh điền kết quả vào ô trống.

CÂU 1. Tính tích các giá trị nguyên của a thỏa mãn $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n^2 - 8n} - n + a^2) = 0$.

KQ:

--	--	--	--

CÂU 2. Từ độ cao 55,8 m của tháp nghiêng Pisa nước Ý, người ta thả một quả bóng cao su chạm xuống đất (như hình vẽ). Giả sử mỗi lần chạm đất quả bóng lại nảy lên độ cao bằng $\frac{1}{10}$ độ cao mà quả bóng đạt được trước đó. Tính tổng độ dài quãng đường di chuyển của quả bóng tính từ lúc thả ban đầu cho đến khi quả bóng đó dừng hẳn trên mặt đất.



KQ:

--	--	--	--

CÂU 3. Một bệnh nhân hàng ngày phải uống một viên thuốc 150 mg. Sau ngày đầu, trước mỗi lần uống, hàm lượng thuốc cũ trong cơ thể vẫn còn 5%. Ước tính lượng thuốc trong cơ thể nếu bệnh nhân sử dụng thuốc trong một thời gian dài. (Kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).

KQ:

--	--	--	--

CÂU 4. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số a thuộc khoảng $(-10; 10)$ để $\lim_{n \rightarrow +\infty} [5n - 3(a^2 - \infty)]$?

KQ:

CÂU 5. Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{1}{9} [u_n + 2\sqrt{4u_n + 1} + 2] \end{cases}, \forall n \geq 1$. Tính $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

KQ:

CÂU 6. Một khinh khí cầu bay cao 300 m ở phút đầu tiên sau khi được thả. Mỗi phút tiếp theo, nó bay cao thêm độ cao bằng $\frac{2}{5}$ độ cao bay được ở phút trước đó. Hỏi khinh khí cầu có thể đạt độ cao tối đa là bao nhiêu?

KQ:

QUICK NOTE

QUICK NOTE

Bài 16. GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ**A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT****1. GIỚI HẠN HỮU HẠN CỦA HÀM SỐ TẠI MỘT ĐIỂM**

Định nghĩa: Cho khoảng K chứa điểm x_0 và hàm số $y = f(x)$ xác định trên K hoặc trên $K \setminus \{x_0\}$. Ta nói hàm số $y = f(x)$ có giới hạn là số L khi x dần tới x_0 nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_n \in K \setminus \{x_0\}$ và $x_n \rightarrow x_0$, ta có $f(x_n) \rightarrow L$. Kí hiệu:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \text{ hay } f(x) \rightarrow L \text{ khi } x \rightarrow x_0$$

Nhận xét: $\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$; $\lim_{x \rightarrow x_0} c = c$ với c là hằng số.

Định lí về giới hạn hữu hạn:

a) Giả sử $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ và $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = M$. Khi đó:

$$\textcircled{1} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)] = L + M; \quad \textcircled{2} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - g(x)] = L - M;$$

$$\textcircled{3} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = L \cdot M; \quad \textcircled{4} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M} \text{ (nếu } M \neq 0).$$

b) Nếu $f(x) \geq 0$ và $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$, thì $L \geq 0$ và $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt{f(x)} = \sqrt{L}$.

Giới hạn một bên:

— Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $(x_0; b)$. Số L được gọi là giới hạn bên phải của hàm số $y = f(x)$ khi $x \rightarrow x_0$ nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_0 < x_n < b$ và $x_n \rightarrow x_0$, ta có $f(x_n) \rightarrow L$.

Kí hiệu:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L.$$

— Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $(a; x_0)$. Số L được gọi là giới hạn bên trái của hàm số $y = f(x)$ khi $x \rightarrow x_0$ nếu với dãy số (x_n) bất kì, $a < x_n < x_0$ và $x_n \rightarrow x_0$, ta có $f(x_n) \rightarrow L$.

Kí hiệu:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L.$$

A Điều kiện để tồn tại giới hạn:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L$$

2. GIỚI HẠN HỮU HẠN CỦA HÀM SỐ TẠI VÔ CỰC

Định nghĩa:

— Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $(a; +\infty)$. Ta nói hàm số $y = f(x)$ có giới hạn là số L khi $x \rightarrow +\infty$ nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_n > a$ và $x_n \rightarrow +\infty$, ta có $f(x_n) \rightarrow L$. Kí hiệu:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L.$$

— Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $(-\infty; a)$. Ta nói hàm số $y = f(x)$ có giới hạn là số L khi $x \rightarrow -\infty$ nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_n < a$ và $x_n \rightarrow -\infty$, ta có $f(x_n) \rightarrow L$. Kí hiệu:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L.$$

Chú ý:

— Với c, k là hằng số và k nguyên dương, ta luôn có:

$$\textcircled{1} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} c = c$$

$$\textcircled{2} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} c = c$$

$$\textcircled{3} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{c}{x^k} = 0$$

$$\textcircled{4} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{c}{x^k} = 0.$$

— Định lí về giới hạn hữu hạn của hàm số khi $x \rightarrow x_0$ vẫn còn đúng khi $x \rightarrow +\infty$ hoặc $x \rightarrow -\infty$.

3. GIỚI HẠN VÔ CỰC CỦA HÀM SỐ

Định nghĩa : Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $(a; +\infty)$. Ta nói hàm số $y = f(x)$ có giới hạn là $-\infty$ khi $x \rightarrow +\infty$ nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_n > a$ và $x_n \rightarrow +\infty$, ta có $f(x_n) \rightarrow -\infty$. Kí hiệu: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.

Nhận xét: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} (-f(x)) = -\infty$.

Một vài giới hạn đặc biệt:

— $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^k = +\infty$, với k nguyên dương.

— $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^k = \begin{cases} +\infty & \text{nếu } k \text{ chẵn} \\ -\infty & \text{nếu } k \text{ lẻ.} \end{cases}$

Một vài quy tắc về giới hạn vô cực:

- Quy tắc tìm giới hạn của tích $f(x) \cdot g(x)$

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$	$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$	$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)]$
$L > 0$	$+\infty$	$+\infty$
$L > 0$	$-\infty$	$-\infty$
$L < 0$	$+\infty$	$-\infty$
$L < 0$	$-\infty$	$+\infty$

- Quy tắc tìm giới hạn của thương $\frac{f(x)}{g(x)}$

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$	$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$	Dấu của $g(x)$	$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$
L	$\pm\infty$	Tùy ý	0
$L > 0$	0	+	$+\infty$
$L > 0$	0	-	$-\infty$
$L < 0$	0	+	$-\infty$
$L < 0$	0	-	$+\infty$

Các quy tắc trên vẫn đúng khi thay $x \rightarrow x_0$ bởi $x \rightarrow x_0^+$, $x \rightarrow x_0^-$ hoặc $x \rightarrow +\infty$, $x \rightarrow -\infty$.

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

1

Giới hạn của hàm số khi $x \rightarrow x_0$. Khử dạng vô định $\frac{0}{0}$

Xét giới hạn $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$.

Phương pháp giải: Thay x_0 vào $\frac{f(x)}{g(x)}$ để kiểm tra, sẽ có một trong các trường hợp:

QUICK NOTE

QUICK NOTE

① Tử số $f(x_0) = a$ và mẫu số $g(x_0) = b \neq 0$, ta suy ra luôn kết quả

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x_0)}{g(x_0)} = \frac{a}{b}.$$

② Cả tử số và mẫu số đều bằng 0 hay $f(x_0) = g(x_0) = 0$, ta xem đây là dạng vô định $\frac{0}{0}$. Khử dạng vô định này bằng cách phân tích nhân tử $x - x_0$.

Phân tích $f(x) = (x - x_0) \cdot f_1(x)$ và $g(x) = (x - x_0) \cdot g_1(x)$. Khi đó

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(x - x_0)f_1(x)}{(x - x_0)g_1(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)} \quad (1)$$

Ta tiếp tục tính giới hạn (1).

③ Tử số $f(x_0) \neq 0$ và mẫu số $g(x_0) = 0$. Ta áp dụng các định lý liên quan đến giới hạn vô cực để tìm kết quả.

A Một số cách phân tích nhân tử thường dùng:

- Nếu $f(x) = ax^2 + bx + c$ có hai nghiệm x_1, x_2 thì $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.
- Nếu $f(x)$ là một đa thức bậc ba, bậc bốn,...ta có thể dùng phương pháp chia đa thức.
- Nếu $f(x)$ là biểu thức chứa căn, ta dùng cách nhân lượng liên hợp.

VÍ DỤ 1. Tính các giới hạn sau

a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 2x}{4}$.

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4} + 1}{x^2 + 2}$.

VÍ DỤ 2. Tính các giới hạn sau:

a) $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{x^2 + 2x - 8}{x^2 + 4x}$.

b) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{2x^2 - 5x + 2}{1 - 2x}$.

c) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 5x + 2}{x^2 + x - 6}$.

d) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^3 - 5x^2 + 2}{3x^2 - 5x + 2}$.

e) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + 3x^2 - 9x - 2}{x^3 - x - 6}$.

f) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{4x^2 - 3x - 7}{x^3 + 1}$.

VÍ DỤ 3. Tính các giới hạn sau

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{2x - 2}$.

b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{\sqrt{x+2} - 2}$.

c) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2 - \sqrt{5 - x^2}}{x + 1}$.

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{4x+1}}{x^2 + 3x}$.

e) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{\sqrt{x^2 + 3x - 1} - 3}$.

f) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{\sqrt{x+5} - 2}$.

2

Giới hạn của hàm số khi $x \rightarrow \pm\infty$. Khử dạng vô định $\frac{\infty}{\infty}; \infty - \infty; 0 \cdot \infty$

Phương pháp giải: Tương tự như bài toán giới hạn dãy số

VÍ DỤ 1. Tính các giới hạn sau:

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x - 2}{3x + 1}$.

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 - x + 10}{x^3 + 3x - 3}$.

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 - x^3 + 3}{2x^6 - 7}$.

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \left(\frac{2x^2}{x+1} - 1 \right)$.

e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - 3x}{(x+1)(2x^2 - 3)}$.

f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x+1)^2(2x+1)^2}{(2x^3+1)(x-2)^3}$.

VÍ DỤ 2. Tính các giới hạn sau:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - x + 5}}{5x - 1}$.

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x} + 2x}{2x + 3}$.

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - 3}{\sqrt{4x^2 + 2x} + x}$.

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{2x^2 - 7x + 1}}{3|x| - 7}$. e) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[3]{\frac{x^2 + 2x}{8x^2 - x + 5}}$. f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + \sqrt{x^2 + 2}}{\sqrt[3]{8x^3 + x^2 + 1}}$.

VÍ DỤ 3. Tính các giới hạn sau:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x} - x)$. b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 + 2x})$. $\lim_{x \rightarrow -\infty} x (\sqrt{x^2 + 1} + x)$.

VÍ DỤ 4. Tính các giới hạn sau:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{x^3 + x} - x)$. b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{x^3 + x} - \sqrt{x^2 + x})$.

VÍ DỤ 5. Tính giới hạn của các hàm số sau:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x^5 - x^4 + 4x^3 - 3)$.	b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^5 - x^4 + 4x^3 - 3)$.
c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^3 - x^2 + 4x + 2)$.	d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^3 - x^2 + 4x + 2)$.
e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x} + x)$.	f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x - \sqrt{x^2 + x})$.

VÍ DỤ 6. Tính các giới hạn sau:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^2 - 2x + 3}{x + 1}$.	b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 - x + 10}{x^2 + 3x - 3}$.	c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^4 + 5x^2 + 7}{x^3 - 15x}$.
d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + \sqrt{x+1}}{2x - 7}$.	e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + 3}{\sqrt{x^2 + x} - x}$.	f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + 3}{\sqrt{x^2 + x} + x}$.

3 Giới hạn một bên. Sự tồn tại giới hạn

Phương pháp tính $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ và $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ hoàn toàn tương tự như bài toán tính $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$.

A Lưu ý: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ khi và chỉ khi $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L$.

VÍ DỤ 1. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{khi } x < 1 \\ x & \text{khi } x \geq 1 \end{cases}$. Tìm các giới hạn $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ (nếu có).

VÍ DỤ 2. Tính giới hạn của các hàm số sau:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x^2 - 2x + 6}$;	b) $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{-x^2 + 5}{x - 3}$;
c) $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{2x^2 + \sqrt{3-x}}{x-3}$;	d) $\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{ x^2 - 4 }{x + 2}$.

4 Vận dụng thực tiễn

VÍ DỤ 1. Một công ty sản xuất máy tính đã xác định được rằng, tính trung bình một nhân viên có thể lắp ráp được $N(t) = \frac{50t}{t+4}$ ($t \geq 0$) bộ phận mỗi ngày sau t ngày đào tạo. Tính $\lim_{t \rightarrow +\infty} N(t)$ và cho biết ý nghĩa của kết quả.

VÍ DỤ 2. Một cái hồ đang chứa 200 m^3 nước mặn với nồng độ muối 10 kg/m^3 . Người ta ngọt hóa nước trong hồ bằng cách bơm nước ngọt vào hồ với vận tốc $2 \text{ m}^3/\text{phút}$.

- Viết biểu thức $C(t)$ biểu thị nồng độ muối trong hồ sau t phút kể từ khi bắt đầu bơm.
- Tìm giới hạn $\lim_{t \rightarrow +\infty} C(t)$ và giải thích ý nghĩa.

VÍ DỤ 3. Trong Thuyết tương đối của Einstein, khối lượng của vật chuyển động với vận tốc v cho bởi công thức

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

QUICK NOTE

QUICK NOTE

trong đó m_0 là khối lượng của vật khi nó đứng yên, c là vận tốc ánh sáng. Chuyện gì xảy ra với khối lượng của vật khi vận tốc của vật gần với vận tốc ánh sáng?

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

BÀI 1. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{khi } x < 0 \\ 1 & \text{khi } x > 0. \end{cases}$

a) Tìm các giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ và $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$.

b) Có tồn tại $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$?

BÀI 2. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 1 - 2x & \text{khi } x \leq -1 \\ x^2 + 2 & \text{khi } x > -1. \end{cases}$

Tìm các giới hạn $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$ và $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)$ và $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ (nếu có).

BÀI 3. Tính các giới hạn sau:

a) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{4x^2 - x - 5}{7x^2 + 5x - 2}.$

b) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{4 - x^2}{x + 2}.$

c) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 2x - 15}{x - 3}.$

d) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 5x + 2}{x^2 - 4}.$

BÀI 4. Tính các giới hạn sau

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2x} - 1}{2x}.$

b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - \sqrt{3x - 2}}{x^2 - 4}.$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{2x^3 - 3x^2}.$

d) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2x+7} - x - 2}{x^3 - 4x + 3}.$

BÀI 5. Tính các giới hạn một bên:

a) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x - 2}{x - 1}.$

b) $\lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{x^2 - x + 1}{4 - x}.$

BÀI 6. Cho hàm số $g(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{|x - 2|}$. Tìm $\lim_{x \rightarrow 2^+} g(x)$ và $\lim_{x \rightarrow 2^-} g(x)$.

BÀI 7. Tính các giới hạn sau:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - 2x}{\sqrt{x^2 + 1}}.$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x + 2} - x).$

BÀI 8. Trong hồ có chứa 6000 lít nước ngọt. Người ta bơm nước biển có nồng độ muối là 30 gam/lít vào hồ với tốc độ 15 lít/phút.

a) Chứng tỏ rằng nồng độ muối của nước trong hồ sau t phút kể từ khi bắt đầu bơm là $C(t) = \frac{30t}{400 + t}$ (gam/lít).

b) Nồng độ muối trong hồ như thế nào nếu $t \rightarrow +\infty$.

BÀI 9. Cho hàm số $H(t) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } t < 0 \\ 1 & \text{nếu } t \geq 0 \end{cases}$ (hàm Heaviside, thường được dùng để mô tả việc chuyển trạng thái tắt/mở của dòng điện tại thời điểm $t = 0$). Tính $\lim_{t \rightarrow 0^+} H(t)$ và $\lim_{t \rightarrow 0^-} H(t)$.

BÀI 10. Chi phí (đơn vị: nghìn đồng) để sản xuất x sản phẩm của một công ty được xác định bởi hàm số $C(x) = 50000 + 105x$.

a) Tính chi phí trung bình $\bar{C}(x)$ để sản xuất một sản phẩm.

b) Tính $\lim_{x \rightarrow +\infty} \bar{C}(x)$ và cho biết ý nghĩa của kết quả.

BÀI 11. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{ax^2 + 3ax - 4a}{x - 1} & \text{khi } x < 1 \\ 2bx + 1 & \text{khi } x \geq 1 \end{cases}$. Biết rằng a, b là các số thực thỏa mãn hàm số $f(x)$ có giới hạn tại $x = 1$.

a) Tìm mối quan hệ giữa a và b .

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = a^2 + b^2$.

D. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Phần I. Mỗi câu hỏi học sinh chọn một trong bốn phương án A, B, C, D.

CÂU 1. Kết quả của giới hạn $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^k}$ (với k nguyên dương) là

- (A) $+\infty$. (B) $-\infty$. (C) x . (D) 0.

CÂU 2. Giới hạn nào dưới đây có kết quả bằng 3?

- (A) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x}{x-2}$. (B) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{-3x}{2-x}$. (C) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{-3x}{x-2}$. (D) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2}{x-2}$.

CÂU 3. Giá trị của $I = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^2 - 4x + 7}{x+1} \right)$

- (A) $I = -4$. (B) $I = 5$. (C) $I = 4$. (D) $I = 2$.

CÂU 4. Giá trị của $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{x^2 + 3x - 4}{x^2 + 4x}$ bằng

- (A) 1. (B) -1. (C) $\frac{5}{4}$. (D) $-\frac{5}{4}$.

CÂU 5. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{khi } x \geq 1 \\ 2x + 1 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$. Mệnh đề nào sau đây là **đúng**?

- (A) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 0$. (B) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 3$. (C) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -1$. (D) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$.

CÂU 6. Giá trị của $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{2x+7}{x-3}$ là

- (A) $+\infty$. (B) $-\infty$. (C) 0. (D) 2.

CÂU 7. Giá trị của $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1-3x}{2x+3}$

- (A) -3. (B) $\frac{1}{2}$. (C) $-\frac{3}{2}$. (D) $-\infty$.

CÂU 8. Giá trị của $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x^2 + 1}$ bằng

- (A) $-\infty$. (B) 1. (C) $+\infty$. (D) 0.

CÂU 9. Giá trị đúng của $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 + 7}{x^4 + 1}$ là

- (A) -1. (B) 1. (C) 7. (D) $+\infty$.

CÂU 10. Giá trị của $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x-1}{\sqrt{x^2+1}-1}$ bằng

- (A) 0. (B) -2. (C) $-\infty$. (D) 2.

CÂU 11. Giá trị của $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - x + 1}{x^2 - 1}$ bằng

- (A) $-\infty$. (B) -1. (C) 1. (D) $+\infty$.

CÂU 12. Chọn kết quả đúng của $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3} \right)$

- (A) $-\infty$. (B) 0. (C) $+\infty$. (D) Không tồn tại.

Phần II. Trong mỗi ý a), b), c) và d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.

CÂU 1. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x-2 & \text{khi } x < -1 \\ \sqrt{x^2+1} & \text{khi } x \geq -1 \end{cases}$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

Mệnh đề	D	S
a) $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \sqrt{5}$.		
b) $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -3$.		
c) $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \sqrt{2}$.		
d) Hàm số tồn tại giới hạn khi $x \rightarrow -1$.		

QUICK NOTE

QUICK NOTE

CÂU 2. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

Mệnh đề	D	S
a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - 10x) = +\infty$.		
b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - 4x + 1}{2x^2 + x + 1} = \frac{3}{2}$.		
c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x + 1} - 3x}{2 - 3x} = \frac{5}{4}$.		
d) Để $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{2x^2 + 1} + ax) = +\infty$ thì $a < \sqrt{2}$.		

CÂU 3. Cho hàm số $f(x) = \frac{\sqrt{3x^2 + 1}}{x + 1}$ và $g(x) = \frac{2x}{x + 1}$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

Mệnh đề	D	S
a) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$ và $\lim_{x \rightarrow -2} g(x) = -2$.		
b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 2$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \sqrt{3}$.		
c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - g(x)] = \sqrt{3} - 2$.		
d) $\lim_{x \rightarrow -1} [f(x) - g(x)] = \frac{1}{2}$.		

CÂU 4. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{khi } x \leq 1 \\ \sqrt{x^2 + a} & \text{khi } x > 1 \end{cases}$. Khẳng định nào đúng, khẳng định nào sai?

Mệnh đề	D	S
a) $\lim_{x \rightarrow -5} f(x) = -9$.		
b) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$ và $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = a$.		
c) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x)}{1 - x} = +\infty$.		
d) Để tồn tại $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ thì $a = 8$.		

Phần III. Học sinh điền kết quả vào ô trống.

CÂU 1. Cho $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + 3x + 1}{x + 1} + ax + b \right) = 1$. Tính giá trị của biểu thức $T = 2024a - 4049b$.KQ:

--	--	--	--

CÂU 2. Biết $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{3x^2 + 2023x + 2} - n\sqrt{3} \right) = \frac{a\sqrt{b}}{c}$, ở đó a, c là các số nguyên dương nguyên tố cùng nhau, b là số nguyên tố. Tính $a + b + c$.KQ:

--	--	--	--

CÂU 3. Biết $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x - 2} + ax - b \right) = -5$. Tính giá trị biểu thức $P = \frac{1}{2}a + \frac{1}{4}b$.KQ:

--	--	--	--

CÂU 4. Giá trị của $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3x + 1} - 2}{2x^2 - 3x + 1}$ làKQ:

--	--	--	--

CÂU 5. Giá trị của $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(3 - 2x^3)^2 \cdot (4x - 1)}{(x^2 - 1)^2 \cdot (3 + 2x)^3}$ làKQ:

--	--	--	--

CÂU 6. Một cái hồ chứa 600l nước ngọt. Người ta bơm nước biển có nồng độ muối 30g/l vào hồ với tốc độ 15 l/phút. Nồng độ muối trong hồ khi t dần về dương vô cùng (đơn vị g/l) là

KQ:

--	--	--	--

QUICK NOTE

QUICK NOTE

Bài 17. HÀM SỐ LIÊN TỤC

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. HÀM SỐ LIÊN TỤC TẠI MỘT ĐIỂM

Định nghĩa: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng K và $x_0 \in K$. Hàm số $y = f(x)$ được gọi là **liên tục** tại x_0 nếu

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

A Nếu hàm số không liên tục tại x_0 thì ta nói hàm số đó **gián đoạn** tại x_0 .

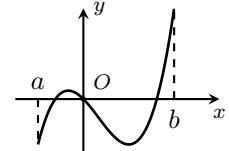
2. HÀM SỐ LIÊN TỤC TRÊN MỘT KHOẢNG

Định nghĩa: Hàm số $y = f(x)$ được gọi là **liên tục trên một khoảng** nếu nó liên tục tại mọi điểm của khoảng đó.

Chú ý:

- Hàm số $y = f(x)$ được gọi là **liên tục trên đoạn** $[a; b]$ nếu nó liên tục trên khoảng $(a; b)$ và $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$, $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$.
- Khái niệm hàm số **liên tục trên nửa khoảng** như $[a; b)$, $[a; +\infty)$, ... được định nghĩa một cách tương tự như liên tục trên đoạn.

- A**
- Đồ thị của hàm số liên tục trên một khoảng là một “đường liền” trên khoảng đó. Hình bên là đồ thị của một hàm số liên tục tên $(a; b)$.
 - Hàm số đa thức và các hàm số $y = \sin x$, $y = \cos x$ liên tục trên toàn bộ tập số thực \mathbb{R} .
 - Hàm số phân thức hữu tỉ (thương của hai đa thức) và các hàm số $y = \tan x$, $y = \cot x$, $y = \sqrt{x}$ liên tục trên từng khoảng xác định của chúng.



3. MỘT SỐ ĐỊNH LÝ CƠ BẢN

Định lý 1. Giả sử $y = f(x)$ và $y = g(x)$ là hai hàm số liên tục tại điểm x_0 . Khi đó

- Các hàm số $y = f(x) + g(x)$, $y = f(x) - g(x)$ và $y = f(x) \cdot g(x)$ liên tục tại x_0 .
- Hàm số $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ liên tục tại x_0 nếu $g(x_0) \neq 0$.

Định lý 2. Sự tồn tại nghiệm của phương trình trên một khoảng

- Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ và $f(a) \cdot f(b) < 0$, thì tồn tại ít nhất một điểm $c \in (a; b)$ sao cho $f(c) = 0$.
- Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ và $f(a) \cdot f(b) < 0$ thì phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm nằm trong khoảng $(a; b)$.

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

QUICK NOTE

1 Xét tính liên tục của hàm số tại một điểm

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập D . Để xét tính liên tục của hàm số $y = f(x)$ tại điểm $x_0 \in D$, ta thực hiện các bước sau:

- ✿ Bước 1. Tính $f(x_0)$.
- ✿ Bước 2. Tìm $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$.
- ✿ Bước 3. So sánh và rút ra kết luận.
 - Nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ thì hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm x_0 .
 - Nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$ thì hàm số $f(x)$ không liên tục (gián đoạn) tại điểm x_0 .

VÍ DỤ 1. Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2} & \text{khi } x \neq 2 \\ 4x - 7 & \text{khi } x = 2 \end{cases}$ tại điểm $x_0 = 2$.

VÍ DỤ 2. Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 6x + 5}{x^2 - 1} & \text{nếu } x \neq 1 \\ -2 & \text{nếu } x = 1 \end{cases}$ tại điểm $x_0 = 1$.

VÍ DỤ 3. Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \sqrt{2x - 3}}{2 - x} & \text{nếu } x \neq 2 \\ -1 & \text{nếu } x = 2 \end{cases}$ tại điểm $x_0 = 2$.

VÍ DỤ 4. Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{nếu } x > 0 \\ x & \text{nếu } x \leq 0 \end{cases}$ tại điểm $x_0 = 0$.

VÍ DỤ 5. Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x - 5}{\sqrt{2x - 1} - 3} & \text{nếu } x > 5 \\ (x - 5)^2 + 3 & \text{nếu } x \leq 5 \end{cases}$ tại điểm $x_0 = 5$.

2 Xét tính liên tục của hàm số trên miền xác định

- ✿ Hàm đa thức liên tục trên \mathbb{R} .
- ✿ Hàm phân thức hữu tỉ, hàm lượng giác liên tục trên từng khoảng xác định của chúng.

VÍ DỤ 1. Xét tính liên tục của hàm số sau trên tập xác định của chúng.

a) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - x - 2}{x + 1} & \text{khi } x \neq -1 \\ -3 & \text{khi } x = -1 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} \frac{2x + 1}{(x - 1)^2} & \text{khi } x \neq 1 \\ 3 & \text{khi } x = 1 \end{cases}$

VÍ DỤ 2. Xét tính liên tục của hàm số sau trên tập xác định của chúng.

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x & \text{khi } x \geq 2 \\ 6x + 1 & \text{khi } x < 2. \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 5 & \text{khi } x > 1 \\ 3 & \text{khi } x = 1 \\ 2x + 1 & \text{khi } x < 1. \end{cases}$

VÍ DỤ 3. Tìm các giá trị của a để hàm số $f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{nếu } x \leq a \\ x^2 & \text{nếu } x > a \end{cases}$ liên tục trên \mathbb{R} .

QUICK NOTE

3

Tìm giá trị của tham số để hàm số liên tục - gián đoạn tại điểm cho trước.

VÍ DỤ 1. Tìm tham số m để hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - m & \text{khi } x \neq 2 \\ x + m & \text{khi } x = 2 \end{cases}$ liên tục tại $x_0 = 2$.

VÍ DỤ 2. Tìm tham số m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 2x - 3}{x + 1} & \text{khi } x \neq -1 \\ m^2 + 5m & \text{khi } x = -1 \end{cases}$ liên tục tại $x_0 = -1$.

VÍ DỤ 3. Tìm tham số m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{4x+5} - 3}{x^2 - 1} & \text{khi } x > 1 \\ 2m + 3 & \text{khi } x \leq 1 \end{cases}$ gián đoạn tại $x_0 = 1$.

4

Chứng minh phương trình có nghiệm

☞ Để chứng minh phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm trên D , ta chứng minh hàm số $y = f(x)$ liên tục trên D và có hai số $a, b \in D$ sao cho $f(a).f(b) < 0$.

☞ Để chứng minh phương trình $f(x) = 0$ có k nghiệm trên D , ta chứng minh hàm số $y = f(x)$ liên tục trên D và tồn tại k khoảng rời nhau $(a_i; a_{i+1})$ ($i = 1, 2, \dots, k$) nằm trong D sao cho $f(a_i).f(a_{i+1}) < 0$.

VÍ DỤ 1. Chứng minh rằng phương trình $2x^4 - 2x^3 - 3 = 0$ có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(-1; 0)$.

VÍ DỤ 2. Chứng minh rằng phương trình $6x^3 + 3x^2 - 31x + 10 = 0$ có đúng 3 nghiệm phân biệt.

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

BÀI 1. Xét tính liên tục của hàm số:

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{khi } x \geq 0 \\ 1 - x & \text{khi } x < 0 \end{cases}$ tại điểm $x = 0$.

b) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & \text{khi } x \geq 1 \\ x & \text{khi } x < 1 \end{cases}$ tại điểm $x = 1$.

BÀI 2. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x + 2} & \text{khi } x \neq -2 \\ a & \text{khi } x = -2 \end{cases}$ Tìm a để hàm số $y = f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} .

BÀI 3. Xét tính liên tục của hàm số sau trên tập xác định của chúng.

a) $f(x) = \begin{cases} \frac{x - 2}{x^2 - 4} & \text{khi } x \neq 2 \\ 1 & \text{khi } x = 2 \end{cases}$.

b) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 1}{x - 1} & \text{khi } x \neq 1 \\ 3 & \text{khi } x = 1 \end{cases}$.

BÀI 4. Một bãi đậu xe ô-tô đưa ra giá $C(x)$ (đồng) khi thời gian đậu xe là x (giờ) như sau:

$$C(x) = \begin{cases} 60.000 & \text{khi } 0 < x \leq 2 \\ 100.000 & \text{khi } 2 < x \leq 4 \\ 200.000 & \text{khi } 4 < x \leq 24. \end{cases}$$

Xét tính liên tục của hàm số $C(x)$.

BÀI 5. Lực hấp dẫn do Trái Đất tác dụng lên một đơn vị khối lượng ở khoảng cách r tính

từ tâm của nó là $F(r) = \begin{cases} \frac{GMr}{R^3} & \text{khi } 0 < r \leq R \\ \frac{GM}{r^2} & \text{khi } r \geq R \end{cases}$, trong đó M là khối lượng, R là bán kính của Trái Đất, G là hằng số hấp dẫn. Hàm số $F(r)$ có liên tục trên $(0; +\infty)$ không?

BÀI 6. Chứng minh rằng phương trình $x^4 - x^3 - 2x^2 - 15x - 25 = 0$ có ít nhất một nghiệm âm và ít nhất một nghiệm dương.

BÀI 7. Chứng minh rằng phương trình $x^3 + 4x^2 - 2 = 0$ có ba nghiệm trong khoảng $(-4; 1)$.

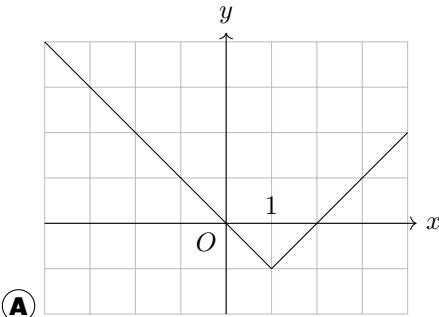
BÀI 8. Chứng minh rằng phương trình $x^5 - 5x^3 + 4x - 1 = 0$ có đúng năm nghiệm.

BÀI 9. Chứng minh rằng phương trình $x + 1 + \cos x = 0$ có nghiệm.

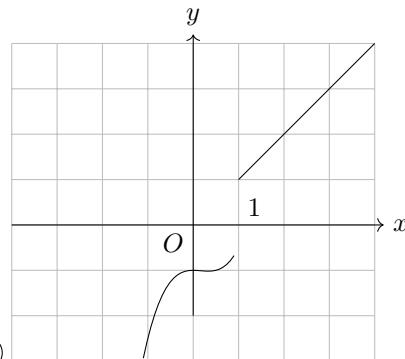
D. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Phần I. Mỗi câu hỏi học sinh chọn một trong bốn phương án A, B, C, D.

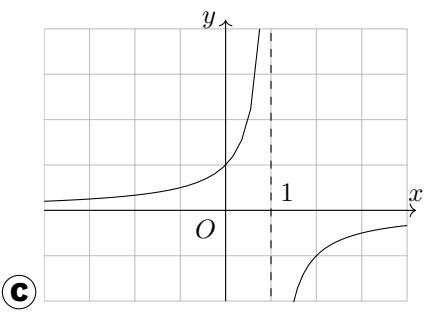
CÂU 1. Hàm số f liên tục tại $x_0 = 1$. Đồ thị của f có thể là hình nào dưới đây?



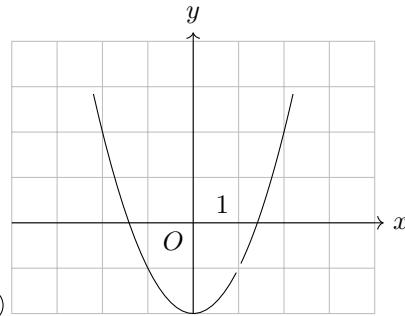
A



B



C



D

CÂU 2. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $(a; b)$. Điều kiện cần và đủ để hàm số liên tục trên $[a; b]$ là

(A) $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$ và $\lim_{x \rightarrow b^+} f(x) = f(b)$. (B) $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$ và $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$.

(C) $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$ và $\lim_{x \rightarrow b^+} f(x) = f(b)$. (D) $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$ và $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$.

CÂU 3. Hàm số $y = \frac{1}{x(x^2 - 9)}$ liên tục tại điểm nào dưới đây?

- (A) 0. (B) 3. (C) -3. (D) 1.

CÂU 4. Hàm số $y = \frac{1}{4x - 4}$ gián đoạn tại điểm nào dưới đây?

- (A) $x = 1$. (B) $x = 0$. (C) $x = 2$. (D) $x = -1$.

CÂU 5. Hàm số nào sau đây **không** liên tục trên tập số thực \mathbb{R} ?

- (A) $y = \frac{4}{x} + \frac{7}{9}$. (B) $y = 4x + \frac{7}{9}$. (C) $y = \sin 2x$. (D) $y = 3x^2 + \sqrt{5}$.

CÂU 6. Hàm số nào sau đây **không** liên tục tại $x = 2$?

- (A) $y = \sin x$. (B) $y = \frac{x^2}{x - 2}$. (C) $y = x^2 - 3x + 2$. (D) $y = \sqrt{x + 2}$.

CÂU 7. Hàm số $y = \frac{3}{x(x+1)(x+2)}$ liên tục tại điểm nào dưới đây?

- (A) $x = -1$. (B) $x = -2$. (C) $x = 3$. (D) $x = 0$.

CÂU 8. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 + 8}{4x + 8} & \text{khi } x \neq -2 \\ 3 & \text{khi } x = -2 \end{cases}$. Chọn khẳng định đúng trong các

khẳng định sau?

- (A) Hàm số $f(x)$ không liên tục trên tập \mathbb{R} .

QUICK NOTE

QUICK NOTE

(B) Hàm số $f(x)$ có tập xác định là $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

(C) Hàm số $f(x)$ gián đoạn tại $x = 2$.

(D) Hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = -2$.

CÂU 9. Số điểm gián đoạn của hàm số $f(x) = \frac{\sin x}{x^3 + 3x^2 - 2x - 2}$ là

(A) 1.

(B) 3.

(C) 0.

(D) 2.

CÂU 10. Trong các hàm số sau, hàm số nào liên tục trên \mathbb{R} ?

(A) $f(x) = \cot 2x$.

(B) $f(x) = \begin{cases} \frac{10-2x}{\sqrt{x+11}-4} & \text{khi } x \neq 5 \\ -16 & \text{khi } x = 5 \end{cases}$

(C) $f(x) = \begin{cases} 4x+3 & \text{khi } x < -2 \\ 3x^2-7 & \text{khi } x \geq -2 \end{cases}$

(D) $f(x) = \sqrt{2x-1} + \sqrt{1+5x}$.

CÂU 11. Cho bốn hàm số $f_1(x) = 2x^3 - 3x + 1$, $f_2(x) = \frac{3x+1}{x-2}$, $f_3(x) = \cos x + 3$ và $f_4(x) = \tan x$. Hỏi có bao nhiêu hàm số liên tục trên tập \mathbb{R} ?

(A) 1.

(B) 2.

(C) 3.

(D) 4.

CÂU 12. Cho $f(x)$, $g(x)$ là các hàm số liên tục tại $x = 3$. Biết $f(3) = 4$ và $\lim_{x \rightarrow 3} [3f(x) - g(x)] = 6$. Tính $g(3)$.

(A) $g(3) = 6$.

(B) $g(3) = 0$.

(C) $g(3) = 2$.

(D) $g(3) = -6$.

Phần II. Trong mỗi ý a), b), c) và d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.

CÂU 1. Cho các hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2} & \text{khi } x \neq 2 \\ 4,5 & \text{khi } x = 2 \end{cases}$ và $g(x) = \frac{2}{x-1}$. Khi đó

Mệnh đề	D	S
a) Hàm số $g(x)$ liên tục tại điểm $x_0 = 2$.		
b) Giới hạn $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4$.		
c) Hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm $x_0 = 2$.		
d) Hàm số $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ liên tục tại điểm $x_0 = 2$.		

CÂU 2. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1} & \text{khi } x \neq 1 \\ x+1 & \text{khi } x = 1 \end{cases}$ và $g(x) = 4x^2 - x + 1$. Khi đó

Mệnh đề	D	S
a) $f(1) = 2$.		
b) Hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm $x_0 = 1$.		
c) Hàm số $g(x)$ liên tục tại điểm $x_0 = 1$.		
d) Hàm số $y = f(x) - g(x)$ không liên tục tại điểm $x_0 = 1$.		

CÂU 3. Xét tính liên tục của các hàm số sau trên tập tương ứng.

Mệnh đề	D	S
a) $f(x) = x^3 - x^2 + 8x$ là hàm số liên tục trên \mathbb{R} .		
b) $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 3x}$ là hàm số liên tục trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.		
c) $f(x) = \frac{\sin x + 1}{x+1}$ là hàm số liên tục trên các khoảng $(-\infty; 0), (0; +\infty)$.		
d) $f(x) = \sqrt{x-2}$ là hàm số liên tục trên nửa khoảng $[2; +\infty)$.		

CÂU 4. Cho các hàm số sau: $f(x) = \begin{cases} -\frac{x}{2} & \text{khi } x \leq 1 \\ \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1} & \text{khi } x > 1 \end{cases}$, $g(x) = x^2 - 3x + 1$ và $h(x) = \sin \frac{\pi x}{4}$.

Mệnh đề	D	S
a) Hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm $x_0 = 1$.		
b) Hàm số $g(x)$ liên tục tại điểm $x_0 = 1$.		
c) Hàm số $h(x)$ không liên tục tại điểm $x_0 = 2$.		
d) Hàm số $y = f(x) \cdot g(x)$ không liên tục tại điểm $x_0 = 1$.		

Phần III. Học sinh điền kết quả vào ô trống.

CÂU 1. Tìm m để hàm số $f(x) = \begin{cases} x^4 + x^2 - 1 & \text{khi } x \leq -1 \\ 3m + 1 & \text{khi } x > -1 \end{cases}$ liên tục tại điểm $x_0 = -1$.

KQ:

--	--	--	--

CÂU 2. Tìm m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2} & \text{nếu } x \neq 2 \\ m + 1 & \text{nếu } x = 2 \end{cases}$ liên tục tại $x_0 = 2$.

KQ:

--	--	--	--

CÂU 3. Tìm $m > 0$ để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x} - 1}{x^2 - 1} & \text{nếu } x \neq 1 \\ m^2 x & \text{nếu } x = 1 \end{cases}$ liên tục tại $x = 1$.

KQ:

--	--	--	--

CÂU 4. Tìm giá trị của tham số a để hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + 2 & \text{khi } x \geq 0 \\ x^2 + a & \text{khi } x < 0 \end{cases}$ liên tục trên \mathbb{R} .

KQ:

--	--	--	--

CÂU 5. Tìm m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^4 - 9}{x - \sqrt{3}} & \text{khi } x \neq \sqrt{3} \\ 2m \sin \frac{\pi}{3} & \text{khi } x = \sqrt{3} \end{cases}$ tại điểm $x_0 = \sqrt{3}$.

KQ:

--	--	--	--

CÂU 6. Tìm giá trị của tham số a để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} & \text{khi } x > 1 \\ ax - \frac{1}{2} & \text{khi } x \leq 1 \end{cases}$ liên tục tại điểm $x = 1$.

KQ:

--	--	--	--

MỤC LỤC

Bài 15. GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ	1
(A) TÓM TẮT LÝ THUYẾT	1
(B) PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN	2
↳ Dạng 1. Khử vô định dạng $\frac{\infty}{\infty}$	2
↳ Dạng 2. Khử vô định dạng $\infty - \infty$	3
↳ Dạng 3. Một số quy tắc tính giới hạn vô cực	4
↳ Dạng 4. Tổng của cấp số nhân lùi vô hạn	4
(C) BÀI TẬP TỰ LUYỆN	5
(D) BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM	6
Bài 16. GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ	10
(A) TÓM TẮT LÝ THUYẾT	10
(B) PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN	11
↳ Dạng 1. Giới hạn của hàm số khi $x \rightarrow x_0$. Khử dạng vô định $\frac{0}{0}$	11
↳ Dạng 2. Giới hạn của hàm số khi $x \rightarrow \pm\infty$. Khử dạng vô định $\frac{\infty}{\infty}; \infty - \infty; 0 \cdot \infty$	12
↳ Dạng 3. Giới hạn một bên. Sự tồn tại giới hạn	13
↳ Dạng 4. Vận dụng thực tiễn	13
(C) BÀI TẬP TỰ LUYỆN	14
(D) BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM	15
Bài 17. HÀM SỐ LIÊN TỤC	18
(A) TÓM TẮT LÝ THUYẾT	18
(B) PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN	19
↳ Dạng 1. Xét tính liên tục của hàm số tại một điểm	19
↳ Dạng 2. Xét tính liên tục của hàm số trên miền xác định	19
↳ Dạng 3. Tìm giá trị của tham số để hàm số liên tục - gián đoạn tại điểm cho trước	20
↳ Dạng 4. Chứng minh phương trình có nghiệm	20
(C) BÀI TẬP TỰ LUYỆN	20
(D) BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM	21

