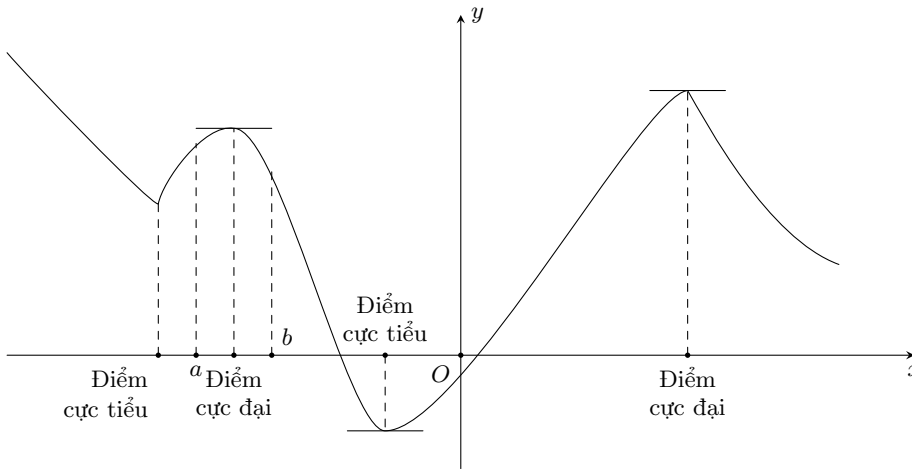


## Bài 2. CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

### A. LÝ THUYẾT CẦN NHẮM

#### 1. Khái niệm cực đại, cực tiểu



Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định, liên tục trên  $\mathcal{D}$ ,  $x_0 \in \mathcal{D}$ .

#### ⚡ ĐỊNH NGHĨA 2.1.

☑ Nếu tồn tại khoảng  $(a; b) \subset \mathcal{D}$ ,  $x_0 \in (a; b)$  sao cho  $f(x) < f(x_0)$  với mọi  $x \in (a; b)$  và  $x \neq x_0$  thì ta nói hàm số  $f(x)$  đạt cực đại tại điểm  $x_0$ .

☑ Nếu tồn tại khoảng  $(a; b) \subset \mathcal{D}$ ,  $x_0 \in (a; b)$  sao cho  $f(x) > f(x_0)$  với mọi  $x \in (a; b)$  và  $x \neq x_0$  thì ta nói hàm số  $f(x)$  đạt cực tiểu tại điểm  $x_0$ .



☑ Nếu hàm số  $y = f(x)$  đạt cực đại (cực tiểu) tại  $x_0$  thì

- $x_0$  được gọi là **điểm cực đại (điểm cực tiểu)** của hàm số,
- $f(x_0)$  được gọi là **giá trị cực đại (hoặc giá trị cực tiểu)** của hàm số, kí hiệu  $y_{CD}$ ,  $y_{CT}$ ;
- điểm  $M(x_0; f(x_0))$  gọi là **điểm cực đại (hoặc điểm cực tiểu)** của đồ thị hàm số.

☑ Các điểm cực đại và cực tiểu gọi chung là **điểm cực trị**. Giá trị cực đại (giá trị cực tiểu) còn gọi là **cực đại (cực tiểu)** và được gọi chung là **cực trị** của hàm số.

☑ Giá trị cực đại (cực tiểu)  $f(x_0)$  của hàm số  $y = f(x)$  nói chung không phải là giá trị lớn nhất (nhỏ nhất) của hàm số trên tập xác định  $\mathcal{D}$ ,  $f(x_0)$  chỉ là giá trị lớn nhất (nhỏ nhất) của hàm số  $y = f(x)$  trên một khoảng  $(a; b) \subset \mathcal{D}$  nào đó chứa (lân cận) điểm  $x_0$ . (sẽ nhắc lại kĩ hơn ở bài sau "GTLN, GTNN của hàm số")

#### 2. Các định lí.

⚡ **ĐỊNH LÝ 2.1 (ĐIỀU KIỆN CẦN).** Nếu hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm trên khoảng  $(a; b)$  và đạt cực đại (hoặc cực tiểu) tại  $x_0$  thì  $f'(x_0) = 0$ .

⚡ **ĐỊNH LÝ 2.2 (ĐIỀU KIỆN ĐỦ).**

$x$	$-\infty$	$x_0$	$+\infty$
$f'(x)$		+	-
$f(x)$		$y_{CD}$	

$x$	$-\infty$	$x_0$	$+\infty$
$f'(x)$		-	+
$f(x)$		$y_{CT}$	

#### QUICK NOTE

## QUICK NOTE

- Nếu  $f'(x)$  đổi dấu từ **dương sang âm** khi  $x$  đi qua điểm  $x_0$  (theo chiều tăng) thì hàm số  $y = f(x)$  đạt **cực đại** tại điểm  $x_0$ .
- Nếu  $f'(x)$  đổi dấu từ **âm sang dương** khi  $x$  đi qua điểm  $x_0$  (theo chiều tăng) thì hàm số  $y = f(x)$  đạt **cực tiểu** tại điểm  $x_0$ .

⚡ **ĐỊNH LÝ 2.3.** Giả sử  $y = f(x)$  có đạo hàm cấp 2 trong khoảng  $(a; b)$ . Khi đó:

- ☑ Nếu  $y'(x_0) = 0, y''(x_0) > 0$  thì  $x_0$  là điểm cực tiểu.
- ☑ Nếu  $y'(x_0) = 0, y''(x_0) < 0$  thì  $x_0$  là điểm cực đại.
- ☑ Nếu  $y'(x_0) = 0, y''(x_0) = 0$  thì chưa có kết luận về cực trị của hàm số.

⚠ Một hàm số chỉ có thể đạt cực trị tại một điểm mà tại đó đạo hàm của hàm số bằng 0, hoặc tại đó hàm số không có đạo hàm, chẳng hạn hàm số  $y = |x|$ .

## B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

### 📁 Dạng 1. Tìm cực trị của hàm số

Bài toán: Tìm các điểm cực đại, cực tiểu (nếu có) của hàm số  $y = f(x)$  Phương pháp: Sử dụng hai cách tìm cực trị sau:

**Cách 1:** (Sử dụng nội dung định lý 2) Lập bảng biến thiên. Từ bảng biến thiên, suy ra các điểm cực trị (dựa vào nội dung định lý 2).

**Cách 2.** (Sử dụng nội dung định lý 3)

**Bước 1.** Tìm tập xác định  $\mathcal{D}$  của hàm số.

**Bước 2.** Tính đạo hàm  $y' = f'(x)$ . Giải  $f'(x) = 0$  và kí hiệu  $x_i, (i = 1, 2, 3, \dots, n)$  là các nghiệm của nó.

**Bước 3.** Tính  $f''(x)$  và  $f''(x_i)$ .

**Bước 4.** Dựa vào dấu của  $f''(x_i)$  suy ra tính chất cực trị của điểm  $x_i$ :

+ Nếu  $f''(x_i) < 0$  thì hàm số đạt cực đại tại điểm  $x_i$ .

+ Nếu  $f''(x_i) > 0$  thì hàm số đạt cực tiểu tại điểm  $x_i$ .

### 1. Các ví dụ

**VÍ DỤ 1.** Tìm điểm cực trị của hàm số  $y = x^3 - 3x^2 - 24x + 7$ .

**VÍ DỤ 2.** Tìm cực trị của hàm số  $y = x^4 - 2x^2 + 3$ .

**VÍ DỤ 3.** Tìm cực trị của hàm số  $y = -x^3 + 3x^2 - 3x + 1$ .

**VÍ DỤ 4.** Tìm cực trị của hàm số  $y = \frac{2x+1}{x-3}$ .

**VÍ DỤ 5.** Tìm cực trị của hàm số  $y = \frac{2x^2+x+1}{x+1}$ .

**VÍ DỤ 6.** Tìm cực trị của hàm số  $y = \sqrt{5-4x-x^2}$ .

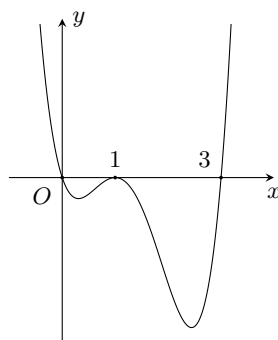
**VÍ DỤ 7.** Tìm giá trị cực tiểu  $y_{CT}$  của hàm số  $y = x^3 + 3x^2 - 3$ .

**A.**  $y_{CT} = 0$ .      **B.**  $y_{CT} = -3$ .      **C.**  $y_{CT} = 9$ .      **D.**  $y_{CT} = 1$ .

**VÍ DỤ 8.** Cho hàm số  $y = x^4 - 8x^2 + 10$  có đồ thị  $(C)$ . Gọi  $A, B, C$  là 3 điểm cực trị của đồ thị  $(C)$ . Tính diện tích  $S$  của tam giác  $ABC$ .

**VÍ DỤ 9.**

Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm  $f'(x)$  trên khoảng  $(-\infty; +\infty)$ . Đồ thị của hàm số  $y = f(x)$  như hình vẽ. Đồ thị của hàm số  $y = (f(x))^2$  có bao nhiêu điểm cực đại, cực tiểu?



## 2. Câu hỏi trắc nghiệm

**CÂU 1.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như sau:

$x$	$-\infty$	$0$	$3$	$+\infty$	
$y'$	$+$	$0$	$-$	$0$	$+$
$y$	$-\infty$	$2$	$-2$	$+\infty$	

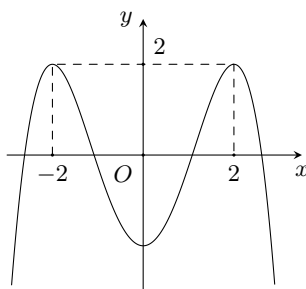
Tìm giá trị cực đại và giá trị cực tiểu của hàm số đã cho.

- A.**  $y_{CD} = 3$  và  $y_{CT} = 0$ .      **B.**  $y_{CD} = 2$  và  $y_{CT} = -2$ .  
**C.**  $y_{CD} = -2$  và  $y_{CT} = 2$ .      **D.**  $y_{CD} = 0$  và  $y_{CT} = 3$ .

### CÂU 2.

Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có đồ thị là đường cong như hình vẽ bên. Tìm điểm cực tiểu của đồ thị hàm số  $y = f(x)$ .

- A.**  $y = -2$ .      **B.**  $M(0; -2)$ .  
**C.**  $x = 0$ .      **D.**  $N(2; 2)$ .



**CÂU 3.** Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số  $y = x^3 - 3x + 5$  là điểm?

- A.**  $Q(3; 1)$ .      **B.**  $M(1; 3)$ .      **C.**  $P(7; -1)$ .      **D.**  $N(-1; 7)$ .

**CÂU 4.** Tìm điểm cực đại của đồ thị hàm số  $y = x^4 - 2x^2 + 2$ .

- A.**  $(-1; 1)$ .      **B.**  $(2; 0)$ .      **C.**  $(1; 1)$ .      **D.**  $(0; 2)$ .

**CÂU 5.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có  $f'(x) = (2x - 1)x^2(1 - x)^2$ . Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

- A.** Hàm số đã cho không có cực trị.  
**B.** Hàm số đã cho có đúng một cực trị.  
**C.** Hàm số đã cho có hai cực trị.  
**D.** Hàm số đã cho có ba cực trị.

**CÂU 6.** Hàm số  $y = \frac{2x+1}{x-1}$  có bao nhiêu điểm cực trị?

- A.** 0.      **B.** 2.      **C.** 1.      **D.** 3.

**CÂU 7.** Số điểm cực trị của hàm số  $y = x^5 + 2x^4 + 2018$  là

- A.** 3.      **B.** 0.      **C.** 4.      **D.** 2.

**CÂU 8.** Điểm cực tiểu của hàm số  $y = x\sqrt{4-x^2}$  là

- A.**  $x = -2\sqrt{3}$ .      **B.**  $x = 2$ .      **C.**  $x = -\sqrt{2}$ .      **D.**  $x = \sqrt{2}$ .

**CÂU 9.** Cho hàm số  $y = x^5 - 2x^4 + x^3 - 1$ . Số điểm cực trị của hàm số là

- A.** 2.      **B.** 0.      **C.** 1.      **D.** 4.

## QUICK NOTE

## QUICK NOTE

**CÂU 10.** Tìm số điểm cực trị của hàm số  $y = f(x)$  biết  $f'(x) = x(x^2 - 1)(x + 2)^{2018}$ .

- A. 2. B. 3. C. 4. D. 1.

**CÂU 11.** Cho hàm số  $y = x^3 - 3x^2 + 2$  có đồ thị là  $(C)$ . Gọi  $A, B$  là các điểm cực trị của  $(C)$ . Tính độ dài đoạn thẳng  $AB$ ?

- A.  $AB = 2\sqrt{5}$ . B.  $AB = 5$ . C.  $AB = 4$ . D.  $AB = 5\sqrt{2}$ .

**CÂU 12.** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có bảng xét dấu  $f'(x)$  như sau

$x$	$-\infty$	$-1$	$2$	$4$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$0$	$-$	$0$	$+$

Hàm số  $y = f(x)$  có bao nhiêu điểm cực trị?

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

**CÂU 13.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như hình dưới đây. Khẳng định nào sau đây là đúng?

$x$	$-\infty$	$-1$	$0$	$1$	$+\infty$
$y'$	$-$	$0$	$+$	$0$	$-$
$y$	$+\infty$		$-3$		$+\infty$

$\swarrow$   $\searrow$   $\swarrow$   $\searrow$   
 $-4$   $-4$

- A. Hàm số đạt cực đại tại  $x = -3$ . B. Hàm số đạt cực đại tại  $x = 0$ .  
C. Hàm số đạt cực tiểu tại  $x = -4$ . D. Hàm số đạt cực tiểu tại  $x = 0$ .

**CÂU 14.** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có bảng biến thiên như sau. Kết luận nào sau đây đúng.

$x$	$-\infty$	$-1$	$1$	$2$	$+\infty$
$y'$	$+$	$0$	$+$	$0$	$+$
$y$	$-\infty$		$2$	$\frac{19}{12}$	$+\infty$

- A. Hàm số có hai điểm cực trị. B. Hàm số đạt cực tiểu tại  $x = 1$ .  
C. Hàm số có ba điểm cực trị. D. Hàm số đạt cực đại tại  $x = 2$ .

**CÂU 15.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như hình vẽ. Hàm số có bao nhiêu điểm cực trị?

$x$	$-\infty$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$+\infty$
$y'$	$+$	$-$	$0$	$+$	$0$	$+$	
$y$	$+\infty$	$+\infty$			$y_2$		$+\infty$
	$-\infty$		$y_1$			$y_3$	

- A. 4. B. 2. C. 3. D. 5.

**CÂU 16.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như hình bên dưới. Giá trị cực tiểu của hàm số là



$x$	$-\infty$	$-2$	$0$	$2$	$+\infty$	
$y'$	$+$	$0$	$-$	$-$	$0$	$+$
$y$	$-\infty$	$-4$	$+\infty$	$4$	$+\infty$	

## QUICK NOTE

- A.** 4.      **B.**  $-4$ .      **C.**  $-2$ .      **D.** 2.

**CÂU 17.** Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định trên  $\mathbb{R}$  và có bảng biến thiên sau:

$x$	$-\infty$	$-1$	$0$	$1$	$+\infty$	
$f'(x)$	$-$	$0$	$-$	$+$	$0$	$-$
$f(x)$	$+\infty$		$-1$	$3$		$-\infty$

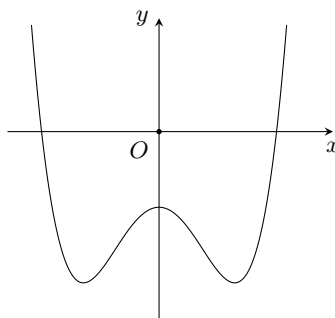
Hỏi mệnh đề nào sau đây là mệnh đề **sai**?

- A.** Hàm số nghịch biến trên khoảng  $(-\infty; 0)$ .  
**B.** Hàm số có ba điểm cực trị.  
**C.** Đồ thị hàm số  $y = f(x)$  không có tiệm cận ngang.  
**D.** Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số là  $x = 0$ .

**CÂU 18.**

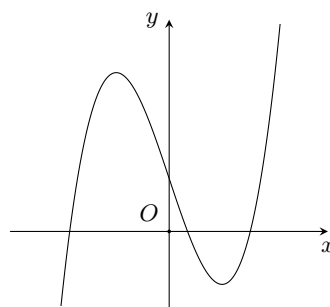
Cho hàm số  $y = ax^4 + bx^2 + c$  ( $a, b, c \in \mathbb{R}$ ) có đồ thị như hình vẽ bên. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

- A.** 2.      **B.** 3.      **C.** 0.      **D.** 1.

**CÂU 19.**

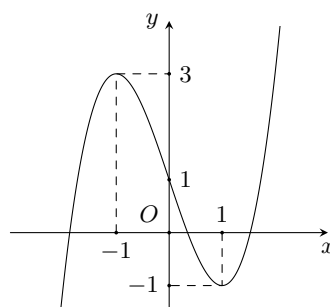
Cho hàm số  $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$  ( $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ) có đồ thị như hình vẽ bên. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

- A.** 2.      **B.** 0.      **C.** 3.      **D.** 1.

**CÂU 20.**

Hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị như hình vẽ. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A.** Đồ thị hàm số có điểm cực đại là  $(1; -1)$ .  
**B.** Đồ thị hàm số có điểm cực tiểu là  $(1; -1)$ .  
**C.** Đồ thị hàm số có điểm cực tiểu là  $(-1; 3)$ .  
**D.** Đồ thị hàm số có điểm cực tiểu là  $(1; 1)$ .

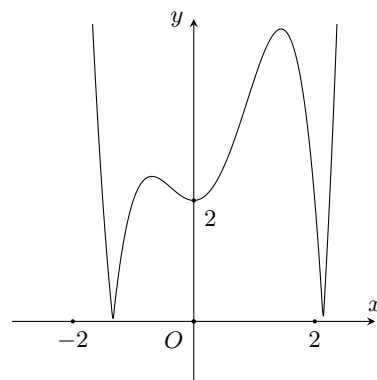


## QUICK NOTE

## CÂU 21.

Cho đồ thị hàm  $y = f(x)$  như hình vẽ. Số điểm cực trị của đồ thị hàm số là

- A. 4.      B. 3.      C. 5.      D. 2.



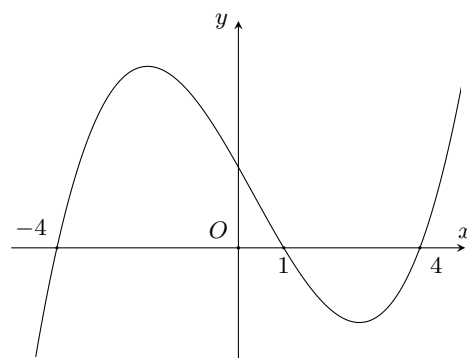
CÂU 22. Cho hàm số  $y = f(x)$  có đúng ba điểm cực trị là  $-2$ ;  $-1$ ,  $0$  và có đạo hàm liên tục trên  $\mathbb{R}$ . Khi đó hàm số  $y = f(x^2 - 2x)$  có bao nhiêu điểm cực trị?

- A. 3.      B. 8.      C. 10.      D. 7.

## CÂU 23.

Cho hàm số  $y = f(x)$ . Biết rằng hàm số  $y = f'(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có đồ thị như hình vẽ bên. Hỏi hàm số  $y = f(5 - x^2)$  có bao nhiêu điểm cực trị?

- A. 7.      B. 9.      C. 4.      D. 3.



## CÂU 24.

Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm và liên tục trên  $\mathbb{R}$ , có đồ thị hàm  $y = f'(x)$  như hình vẽ. Tìm số điểm cực trị của hàm số  $y = f(x - 2019) + 2017x - 2018$ .

- A. 1.      B. 2.      C. 3.      D. 4.

