MỤC LỤC

CHỦ ĐỀ 1

TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ

MỨC ĐỘ 1. MỨC 5,6 ĐIỂM

Dạng 1. Tìm khoảng đơn điệu của hàm số thông qua bảng biến thiên, đồ thị

Câu 1 (Mã 101 – 2020 Lần 1). Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$	4	$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$
			-1				-1		

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-\infty;-1)$. **B.** $(0;1)$. **C.** $(-1;1)$. **D.** $(-1;0)$.

Lời giải.

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-1;0)$ và $(1;+\infty)$.

Chọn đáp án **D** □

Câu 2 (Mã 103-2019). Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$	3	$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$
			0				0		

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào sau đây?

A. $(-\infty;-1)$. **B.** $(0;1)$. **C.** $(-1;0)$. **D.** $(-1;+\infty)$.

Lời giải.

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-1;0)$.

Chọn đáp án **C** □

Câu 3 (Mã 104-2017). Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	

Mệnh đề nào dưới đây đúng?

Ⓐ Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -2)$.

Ⓑ Hàm số đồng biến trên khoảng $(-2; 0)$.

Ⓒ Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0)$.

Ⓓ Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$.

Lời giải.

Theo bảng xét dấu thì $y' < 0$ khi $x \in (0; 2)$ nên hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$.

Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 4 (Kim Liên-Hà Nội-2019). Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như hình vẽ. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	

Ⓐ $(1; +\infty)$. Ⓑ $(-\infty; 1)$. Ⓒ $(-1; +\infty)$. Ⓓ $(-\infty; -1)$.

Lời giải.

Từ bảng xét dấu ta thấy hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$ và $(-1; 1)$.

Vậy hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$.

Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 5 (Mã 101-2018). Cho hàm số$y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	3	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

Ⓐ $(-1; 0)$. Ⓑ $(-\infty; 0)$. Ⓒ $(1; +\infty)$. Ⓓ $(0; 1)$.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên ta có hàm số đã cho nghịch biến trên các khoảng $(0; 1)$ và $(-\infty; -1)$.

Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 6 (Mã 102-2019). Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	3	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

Ⓐ $(0;+\infty)$. Ⓑ $(0;2)$. Ⓒ $(-2;0)$. Ⓓ $(-\infty;-2)$.

Lời giải.

Từ bảng biến thiên, suy ra trên khoảng $(-2;0)$ hàm số đồng biến.

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 7 (Mã 103-2018). Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$			-1				-1		
		↗		↘		↗		↘	
	$-\infty$				-2				$-\infty$

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

Ⓐ $(0;1)$. Ⓑ $(1;+\infty)$. Ⓒ $(-\infty;1)$. Ⓓ $(-1;0)$.

Lời giải.

Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 8 (Mã 101-2019). Cho hàm số có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$				3				$+\infty$
		↘		↗		↘		↗	
			1				1		

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

Ⓐ $(0;2)$. Ⓑ $(0;+\infty)$. Ⓒ $(-2;0)$. Ⓓ $(2;+\infty)$.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy trên khoảng $(0;2)$ thì $f'(x)<0$.

Vậy hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;2)$.

Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 9 (Mã 102-2018). Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$			3				$+\infty$
		↗		↘		↗	
	$-\infty$				-2		

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

(A) $(-1;+\infty)$. (B) $(1;+\infty)$. (C) $(-1;1)$. (D) $(-\infty;1)$.

Lời giải.

Chọn đáp án (B) □

Câu 10 (Mã 104-2018). Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	4	$\searrow$	$-\infty$

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

(A) $(-2;3)$. (B) $(3;+\infty)$. (C) $(-\infty;-2)$. (D) $(-2;+\infty)$.

Lời giải.

Chọn đáp án (A) □

Câu 11 (Đề Tham Khảo 2018). Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

Hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

(A) $(0;+\infty)$. (B) $(-\infty;-2)$. (C) $(0;2)$. (D) $(-2;0)$.

Lời giải.

Hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-2;0)$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 12 (Đề Minh Họa 2020 – Lần 1).

Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-1	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

Ⓐ $(-\infty;-1)$. Ⓑ $(0;1)$. Ⓒ $(-1;0)$. Ⓓ $(-\infty;0)$.

Lời giải.

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 13 (Đề Minh Họa 2020 – Lần 2).

Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	2	↘		↗	2	↘	
	$-\infty$				-1				$-\infty$

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

Ⓐ $(1;+\infty)$. Ⓑ $(-1;0)$. Ⓒ $(-1;1)$. Ⓓ $(0;1)$.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy: Hàm số đã cho đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(0;1)$.

Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 14 (Mã 102 – 2020 Lần 1). Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	4	↘		↗	4	↘	
	$-\infty$				1				$-\infty$

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

Ⓐ $(1;+\infty)$. Ⓑ $(-1;1)$. Ⓒ $(0;1)$. Ⓓ $(-1;0)$.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy hàm số đã cho đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(0;1)$.

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 15 (Mã 103 – 2020 Lần 1). Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	3	↘		↗	3	↘	
	$-\infty$				2				$-\infty$

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây

(A) $(-2;2)$.　(B) $(0;2)$.　(C) $(-2;0)$.　(D) $(2;+\infty)$.

Lời giải.

Chọn đáp án (B) □

Câu 16 (Mã 104 – 2020 Lần 1). Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-3		0		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

(A) $(-3;0)$.　(B) $(-3;3)$.　(C) $(0;3)$.　(D) $(-\infty;-3)$.

Lời giải.

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-3;0)$ và $(3;+\infty)$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 17. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình dưới đây. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty \Vert -\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	$-\infty$

(A) Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{1}{2};+\infty\right)$.

(B) Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty;3)$.

(C) Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(3;+\infty)$.

(D) Hàm số đã cho nghịch biến trên các khoảng $\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)$ và $(3;+\infty)$.

Lời giải.

Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(3;+\infty)$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 18. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số nghịch biến trong khoảng nào?

A $(-1;1)$. B $(0;1)$. C $(4;+\infty)$. D $(-\infty;2)$.

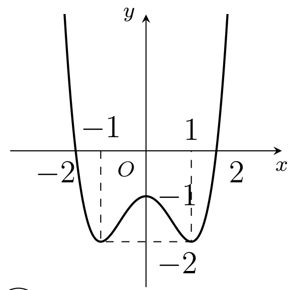
Lời giải.

Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(0;1)$.

Chọn đáp án B □

Câu 19 (Đề Tham Khảo 2019).

Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?



A $(-\infty-1)$. B $(-1;1)$. C $(-1;0)$. D $(0;1)$.

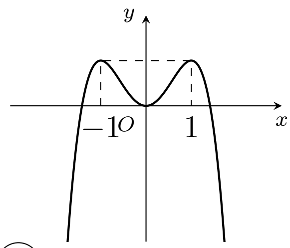
Lời giải.

Từ đồ thị, ta thấy hàm số đồng biến trên các khoảng $(-1;0)$ và $(1;+\infty)$.

Chọn đáp án C □

Câu 20 (Mã 102 – 2020 – Lần 2).

Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?



A $(-1;0)$. B $(-\infty;-1)$. C $(0;1)$. D $(0;+\infty)$.

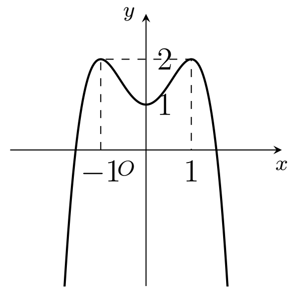
Lời giải.

Dựa vào đồ thị của hàm số $y=f(x)$ ta có hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên các khoảng $(-1;\,0)$ và $(1;\,+\infty)$, đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(0;1)$.

Chọn đáp án A □

Câu 21 (Mã 107 – 2020 Lần 2).

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên.



Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

Ⓐ $(0;1)$. Ⓑ $(-\infty;0)$. Ⓒ $(1;+\infty)$. Ⓓ $(-1;0)$.

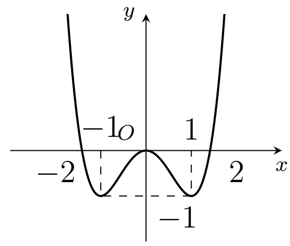
Lời giải.

Từ đồ thị hàm số $y = f(x)$ ta có hàm số đồng biến trên hai khoảng $(-\infty;-1)$ và $(0;1)$.

Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 22 (Mã 103 – 2020 – Lần 2).

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong hình bên. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?



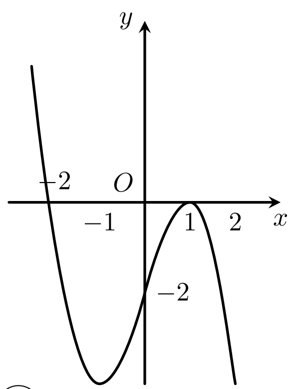
Ⓐ $(-1;0)$. Ⓑ $(-\infty;-1)$. Ⓒ $(0;+\infty)$. Ⓓ $(0;1)$.

Lời giải.

Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 23.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?



Ⓐ $(-\infty;-1)$. Ⓑ $(-1;1)$. Ⓒ $(0;+\infty)$. Ⓓ $(-\infty;+\infty)$.

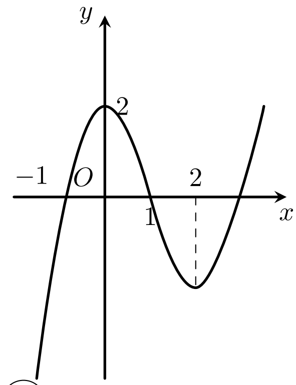
Lời giải.

Nhìn vào đồ thị đã cho, ta có hàm số đồng biến trên khoảng $(-1;1)$.

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 24.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?



(A) $(-1;1)$. (B) $(-1;2)$. (C) $(1;2)$. (D) $(2;+\infty)$.

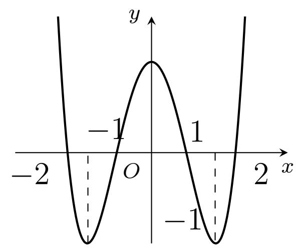
Lời giải.

Nhìn vào đồ thị đã cho, ta có hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;2)$ nên nghịch biến trên khoảng $(1;2)$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 25.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?



(A) $(-\infty;-1)$. (B) $(-1;1)$. (C) $(1;2)$. (D) $(0;1)$.

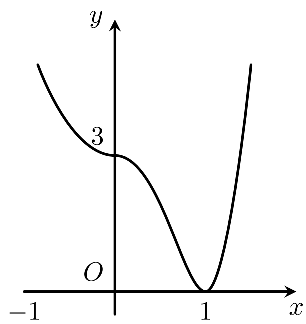
Lời giải.

Nhìn vào đồ thị đã cho, ta có trên khoảng $(0;1)$ đồ thị hàm số đi xuống (theo chiều từ trái qua phải) nên nghịch biến trên khoảng $(0;1)$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 26.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Mệnh đề nào sau đây là đúng?

(A) Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(0;2)$.

(B) Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-1;+\infty)$.

(C) Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-1;2)$.

(D) Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-\infty;1)$.

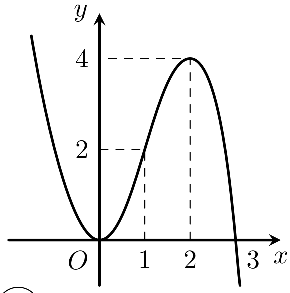
Lời giải.

Nhìn vào đồ thị đã cho, ta có trên khoảng $(-\infty; 1)$ đồ thị hàm số đi xuống (theo chiều từ trái qua phải) nên nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 1)$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 27.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào?



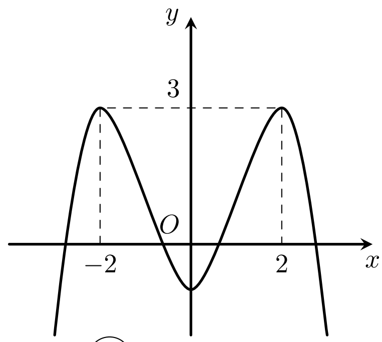
(A) $(-\infty; 0)$. (B) $(1; 3)$. (C) $(0; 2)$. (D) $(0; +\infty)$.

Lời giải.

Chọn đáp án (C) □

Câu 28.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào?



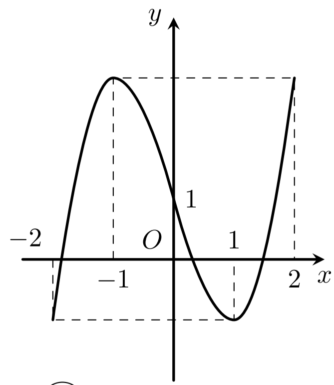
(A) $(-2; 0)$. (B) $(-\infty; 0)$. (C) $(-2; 2)$. (D) $(0; 2)$.

Lời giải.

Chọn đáp án (A) □

Câu 29.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào?



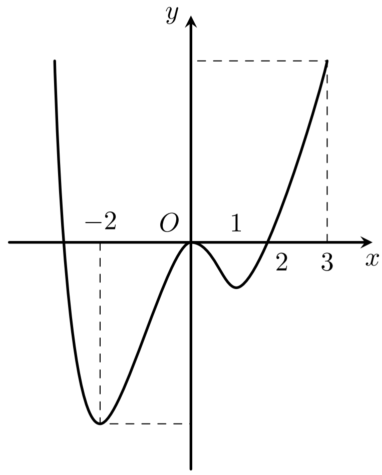
(A) $(-1; 1)$. (B) $(-2; -1)$. (C) $(-1; 2)$. (D) $(1; +\infty)$.

Lời giải.

Chọn đáp án (A) □

Câu 30 (Chuyên ĐH Vinh-Nghệ An-2020).

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng

(A) $(-1; 0)$. (B) $(-2; -1)$. (C) $(0; 1)$. (D) $(1; 3)$.

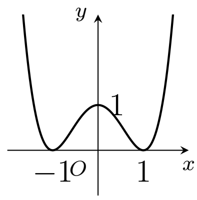
Lời giải.

Từ đồ thị hàm số ta có hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; -2)$ và $(0; 1)$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 31 (Chuyên Hưng Yên-2020).

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây là đúng?



(A) Hàm số đồng biến trên$(-\infty; 0)$ và$(0; +\infty)$.

(B) Hàm số đồng biến trên$(-1; 0)$ và$(1; +\infty)$.

(C) Hàm số đồng biến trên$(-1; 0) \cup (1; +\infty)$.

(D) Hàm số đồng biến trên$(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$.

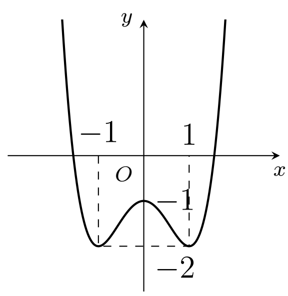
Lời giải.

Hàm số đồng biến trên$(-1; 0)$ và$(1; +\infty)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 32 (Mã 101-2021 Lần 1).

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên.



Hàm số đã cho nghịch biến trong khoảng nào dưới đây?

(A) $(0; 1)$. (B) $(-\infty; 0)$. (C) $(0; +\infty)$. (D) $(-1; 1)$.

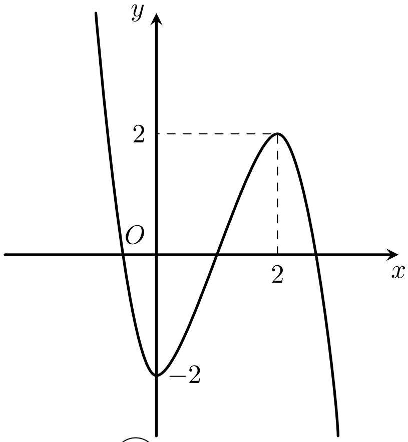
Lời giải.

Ta có hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; 1)$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 33 (Mã 103-2021-Lần 1).

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?



(A) $(-\infty; 2)$. (B) $(0; 2)$. (C) $(-2; 2)$. (D) $(2; +\infty)$.

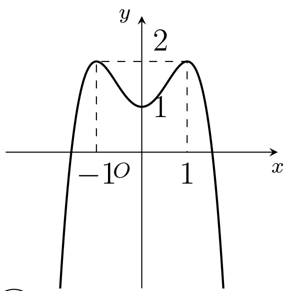
Lời giải.

Dựa vào đồ thị hàm số ta có hàm số đồng biến trên khoảng $(0; 2)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 34 (Mã 102-2021 Lần 1).

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?



(A) $(-1; 1)$. (B) $(-\infty; 0)$. (C) $(0; 1)$. (D) $(0; +\infty)$.

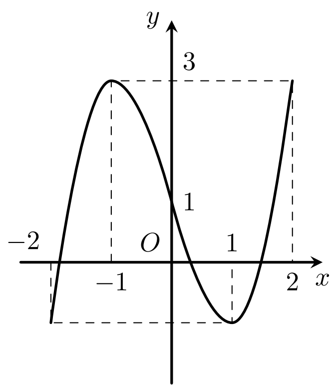
Lời giải.

Nhìn đồ thị ta thấy hàm số đã cho đồng biến trên $(0; 1)$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 35 (Mã 104-2021 Lần 1).

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên.



Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

(A) $(-1; 1)$. (B) $(1; +\infty)$. (C) $(-\infty; 1)$. (D) $(0; 3)$.

Lời giải.

Từ hình vẽ ta thấy hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-1;\,1)$.

Chọn đáp án A □

Câu 36 (Đề Minh Họa 2021). Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	1	↘	-1	↗	1	↘	$-\infty$

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào, trong các khoảng dưới đây?

A $(-2;2)$. B $(0;2)$. C $(-2;0)$. D $(2;+\infty)$.

Lời giải.

Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số đồng biến trên khoảng $(0;2)$.

Chọn đáp án B □

Câu 37 (Đề minh họa 2022). Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-1	↗	1	↘	-1	↗	$+\infty$

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A $(0;+\infty)$. B $(-\infty;-2)$. C $(0;2)$. D $(-2;0)$.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy đồ thị hàm số đồng biến trên $(-2;0)$ và $(2;+\infty)$.

Chọn đáp án D □

Câu 38 (Mã 101-2022). Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	3	↘	0	↗	$+\infty$

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A $(1+\infty)$. B $(0;1)$. C $(-1;0)$. D $(0;+\infty)$.

Lời giải.

Chọn B

Chọn đáp án B □

Câu 39 (Mã 102-2022). Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	3	↘	0	↗	$+\infty$

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

(A) $(0; +\infty)$. (B) $(1; +\infty)$. (C) $(-1; 0)$. (D) $(0; 1)$.

Lời giải.

Chọn đáp án (D) □

Câu 40 (Mã 103-2022). Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	3	↘	0	↗	$+\infty$

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

(A) $(0; 3)$. (B) $(0; +\infty)$. (C) $(-1; 0)$. (D) $(-\infty; -1)$.

Lời giải.

Chọn C

Chọn đáp án (C) □

Câu 41 (Mã 104-2022). Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	3	↘	0	↗	$+\infty$

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

(A) $(-\infty; -1)$. (B) $(0; 3)$. (C) $(0; +\infty)$. (D) $(-1; 0)$.

Lời giải.

Ta có đồ thị tăng trên khoảng $(-1; 0)$, nên đó là đáp án đúng.

Chọn đáp án (D) □

Dạng 2. Tìm khoảng đơn điệu của hàm số cho trước

Câu 42 (Mã 110-2017). Hàm số nào dưới đây đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$?

(A) $y=\dfrac{x-1}{x-2}$. (B) $y=x^3+x$. (C) $y=-x^3-3x$. (D) $y=\dfrac{x+1}{x+3}$.

Lời giải.

Vì $y=x^3+x\Rightarrow y'=3x^2+1>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 43 (Đề Tham Khảo - 2017). Cho hàm số $y=\dfrac{x-2}{x+1}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

(A) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$.

(B) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1;+\infty)$.

(C) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-1)$.

(D) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;-1)$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D}=\mathbb{R}\backslash\{-1\}$.

Ta có $y'=\dfrac{3}{(x+1)^2}>0,\ \forall x\in\mathbb{R}\backslash\{-1\}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 44 (Đề Tham Khảo - 2017). Hàm số nào dưới đây đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$?

(A) $y=x^4+3x^2$. (B) $y=\dfrac{x-2}{x+1}$. (C) $y=3x^3+3x-2$. (D) $y=2x^3-5x+1$.

Lời giải.

Hàm số $y=3x^3+3x-2$ có tập xác định là $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.

$y'=9x^2+3>0,\forall x\in\mathbb{R}$, suy ra hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 45 (Mã 110 - 2017). Cho hàm số $y=x^3-3x^2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

(A) Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;2)$. (B) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;2)$.

(C) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;0)$. (D) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(2;+\infty)$.

Lời giải.

Ta có $y'=3x^2-6x$; $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.$.

Lập bảng biến thiên rồi suy ra hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;2)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 46 (Đề Minh Họa - 2017). Hỏi hàm số $y=2x^4+1$ đồng biến trên khoảng nào?

(A) $(-\infty;0)$. (B) $\left(-\infty;-\dfrac{1}{2}\right)$. (C) $(0;+\infty)$. (D) $\left(-\dfrac{1}{2};+\infty\right)$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D}=\mathbb{R}$

Ta có $y'=8x^3$; $y'=0\Leftrightarrow 8x^3=0\Leftrightarrow x=0$ suy ra $y(0)=1$

Giới hạn: $\lim\limits_{x\to-\infty} y = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} y = +\infty$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

Chọn đáp án C □

Câu 47 (Mã 105 - 2017). Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2 + 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1; +\infty)$.

B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$.

C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.

D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$.

Lời giải.

Do hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2 + 1 > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$ nên hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.

Chọn đáp án C □

Câu 48 (Mã 105 - 2017). Cho hàm số $y = x^3 - 2x^2 + x + 1$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1; +\infty)$.

B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(\dfrac{1}{3}; 1\right)$.

C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty; \dfrac{1}{3}\right)$.

D. Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(\dfrac{1}{3}; 1\right)$.

Lời giải.

Ta có $y' = 3x^2 - 4x + 1 \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = \dfrac{1}{3} \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{31}{27}$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(\dfrac{1}{3};1\right)$.

Chọn đáp án B □

Câu 49 (Mã 105 - 2017). Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-2)$.

B) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1;1)$.

C) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$.

D) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;-2)$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

$$y' = 4x^3 - 4x; y' = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -1 \end{array}\right.$$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Suy ra hàm số đồng biến trên các khoảng $(-1;0)$, $(1;+\infty)$; hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$, $(0;1)$.

Vậy hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-2)$.

Chọn đáp án A □

Câu 50 (Mã 123 - 2017). Hàm số $y = \dfrac{2}{x^2+1}$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A) $(-\infty;+\infty)$. B) $(0;+\infty)$. C) $(-\infty;0)$. D) $(-1;1)$.

Lời giải.

Ta có $y' = \dfrac{-4x}{(x^2+1)^2} < 0 \Leftrightarrow x > 0$.

Chọn đáp án B □

Câu 51 (Mã 123 - 2017). Cho hàm số $y = x^3 + 3x + 2$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

A) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;0)$ và đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

B) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;0)$ và đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

C) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$.

D) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

$y' = 3x^2 + 3 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, do đó hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 52 (Mã 104 - 2017). Cho hàm số $y = \sqrt{2x^2+1}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

(A) Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.
(B) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;0)$.
(C) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;+\infty)$.
(D) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$.

Lời giải.

Ta có $\mathscr{D} = \mathbb{R}$, $y' = \dfrac{2x}{\sqrt{2x^2+1}}$; $y' > 0 \Leftrightarrow x > 0$.
Vậy hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;0)$ và đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 53 (Chuyên Lê Hồng Phong - Nam Định-2019).

Cho hàm số $y = \dfrac{x^3}{3} - x^2 + x + 2019$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

(A) Hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$.
(B) Hàm số đã cho nghịch biến trên $(-\infty;1)$.
(C) Hàm số đã cho đồng biến trên $(-\infty;1)$ và nghịch biến trên $(1;+\infty)$.
(D) Hàm số đã cho đồng biến trên $(1;+\infty)$ và nghịch biến trên $(-\infty;1)$.

Lời giải.

Ta có $y' = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 \geq 0, \forall x$ và $y' = 0 \Leftrightarrow x = 1$ (tại hữu hạn điểm)

Do đó hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 54 (Lê Quý Đôn - Đà Nẵng - 2019).

Hàm số $y = \dfrac{5-2x}{x+3}$ nghịch biến trên

(A) $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$.
(B) $\mathbb{R}$.
(C) $(-\infty;-3)$.
(D) $(3;+\infty)$.

Lời giải.

Hàm số $y = \dfrac{5-2x}{x+3}$ có tập xác định là $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$.
$y' = \dfrac{-11}{(x+3)^2} < 0$, với $x \in \mathscr{D}$.
Vậy hàm số đã cho nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-3)$ và $(-3;+\infty)$.
Chọn đáp án (C) □

Câu 55 (Chuyên Hà Tĩnh-Lần 1 - 2019).

Hàm số nào sau đây nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

(A) $y = x^3 - 3x + 2$.
(B) $y = x^4 + 2x^2 + 2$.
(C) $y = -x^3 + 2x^2 - 4x + 1$.
(D) $y = -x^3 - 2x^2 + 5x - 2$.

Lời giải.

$y = -x^3 + 2x^2 - 4x + 1 \Rightarrow y' = -3x^2 + 4x - 4 = -2x^2 - (x-2)^2 < 0, \forall x \in \mathbb{R}$

Do đó hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 56 (Chuyên Nguyễn Trãi - Hải Dương - 2019).

Hàm số $y = -x^3 + 3x^2 - 2$ đồng biến trên khoảng

Ⓐ $(0; 2)$. Ⓑ $(-\infty; 0)$. Ⓒ $(1; 4)$. Ⓓ $(4; +\infty)$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = -3x^2 + 6x$. $y' = 0 \Rightarrow -3x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$.

Bảng xét dấu của y' như sau

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	

Nhìn vào bảng xét dấu của y' ta thấy hàm số $y = -x^3 + 3x^2 - 2$ đồng biến trên khoảng $(0; 2)$.

Vậy hàm số $y = -x^3 + 3x^2 - 2$ đồng biến trên khoảng $(0; 2)$.

Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 57 (HSG-TP Đà Nẵng - 2019). Hàm số $y = x^4 - 4x^3$ đồng biến trên khoảng

Ⓐ $(-\infty; +\infty)$. Ⓑ $(3; +\infty)$. Ⓒ $(-1; +\infty)$. Ⓓ $(-\infty; 0)$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = 4x^3 - 12x^2$

Cho $y' = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 12x^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{3} \end{array}\right.$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng xét dấu ta thấy hàm số đồng biến trên khoảng $\left(\sqrt{3}; +\infty\right)$ nên cũng đồng biến trên khoảng $(3; +\infty)$.

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 58 (Chuyên Nguyễn Tất Thành - Yên Bái - 2019).

Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

Ⓐ Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$. Ⓑ Hàm số nghịch biến trên khoảng $(2; +\infty)$.

Ⓒ Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0)$. Ⓓ Hàm số đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

Đạo hàm: $y' = 4x^3 - 4x$.

Xét $y' = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \Rightarrow y = 1 \\ x = 0 \Rightarrow y = 2 \\ x = -1 \Rightarrow y = 1 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy, hàm số đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$.

Chọn đáp án D □

Câu 59 (THPT Ngô Quyền - Hải Phòng - 2019).

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x) = (1-x)^2(x+1)^3(3-x)$. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A $(-\infty; 1)$. B $(-\infty; -1)$. C $(1; 3)$. D $(3; +\infty)$.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow (1-x)^2(x+1)^3(3-x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -1 \\ x = 3 \end{array}\right.$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	

Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-1; 3)$.

Chọn đáp án C □

Câu 60 (HSG 12 - TP Nam Định - 2019).

Hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 2019$ nghịch biến trên

A $(-1; 3)$. B $(-\infty; -1)$.

C $(-\infty; -1)$ và $(3; +\infty)$. D $(3; +\infty)$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

$y' = x^2 - 2x - 3$.

Cho $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 3 \end{array}\right.$.

Ta có bảng xét dấu của y' như sau

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	

Nhìn vào bảng xét dấu của y' ta thấy hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 2019$ nghịch biến trên khoảng $(-1; 3)$.

Vậy hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 2019$ nghịch biến trên khoảng $(-1; 3)$.

Chọn đáp án A □

Câu 61 (Chuyên Ngoại Ngữ - Hà Nội - 2019).

Hàm số $y = \sqrt{2018x - x^2}$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau đây?

A $(1010; 2018)$. B $(2018; +\infty)$. C $(0; 1009)$. D $(1; 2018)$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = [0; 2018]$

$y' = \left(\sqrt{2018x - x^2}\right)' = \dfrac{2018 - 2x}{2\sqrt{2018x - x^2}} = \dfrac{1009 - x}{\sqrt{2018x - x^2}}; y' = 0 \Leftrightarrow x = 1009$

$y' < 0 \Leftrightarrow x \in (1009; 2018)$, suy ra hàm số nghịch biến trên khoảng $(1009; 2018)$, suy ra hàm số nghịch biến trên khoảng $(1010; 2018)$, chọn A.

Chọn đáp án A □

Câu 62 (Chuyên Lê Quý Đôn - Quảng Trị - 2019).

Hàm số $y = -x^3 + 3x^2 - 4$ đồng biến trên tập hợp nào trong các tập hợp được cho dưới đây?

A $(2; +\infty)$. B $(0; 2)$.

C $(-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$. D $(-\infty; 0)$.

Lời giải.

Ta có $y' = -3x^2 + 6x$; $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-4	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

Dựa vào bảng biến thiên thì hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(0; 2)$.

Chọn đáp án B □

Câu 63 (SGD & ĐT Hà Nội - 2018). Hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $y' = x^2$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

B Hàm số nghịch biến trên $(-\infty; 0)$ và đồng biến trên $(0; +\infty)$.

C Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

D Hàm số đồng biến trên $(-\infty; 0)$ và nghịch biến trên $(0; +\infty)$.

Lời giải.

$y' = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$+$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$			$+\infty$

Chọn đáp án C □

Câu 64 (THPT Lương Thế Vinh - HN - 2018).

Hàm số $y = x^3 - 3x$ nghịch biến trên khoảng nào?

A $(-\infty; -1)$. B $(-\infty; +\infty)$. C $(-1; 1)$. D $(0; +\infty)$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = 3x^2 - 3; y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 1 \end{array}\right.$.

Ta có bảng xét dấu y'

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	

Từ bảng xét dấu ta thấy hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$.

Chọn đáp án C □

Câu 65 (Chuyên Thái Bình - 2018).

Cho hàm $y = \sqrt{x^2 - 6x + 5}$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A Hàm số đồng biến trên khoảng $(5; +\infty)$. B Hàm số đồng biến trên khoảng $(3; +\infty)$.

C Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 1)$. D Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 3)$.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathscr{D} = (-\infty; 1] \cup [5; +\infty)$.

Ta có $y' = \dfrac{x - 3}{\sqrt{x^2 - 6x + 5}} > 0,\ \forall x \in (5; +\infty)$.

Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $(5; +\infty)$.

Chọn đáp án A □

Câu 66 (THPT Kinh Môn - Hải Dương - 2018).

Cho hàm số $y = -x^3 + 3x^2 - 1$, kết luận nào sau đây về tính đơn điệu của hàm số là đúng nhất:

A Hàm số đồng biến trên khoảng $(0; 2)$ và nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; 0)$;$(2; +\infty)$.

B Hàm số đồng biến trên khoảng $(0; 2)$.

C Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$ và đồng biến trên các khoảng $(-\infty; 0)$;$(2; +\infty)$.

D Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; 0)$ và $(2; +\infty)$.

Lời giải.

Ta có hàm số xác định trên $\mathbb{R}$.

$y = -x^3 + 3x^2 - 1 \Rightarrow y' = -3x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

Vậy đáp án A là đúng nhất.

Chọn đáp án A □

Câu 67 (Chuyên ĐH Vinh - 2018). Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x-2)^3$, với mọi $x \in \mathbb{R}$. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A $(1; 3)$. B $(-1; 0)$. C $(0; 1)$. D $(-2; 0)$.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$.

Đồng thời $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (0; 2)$ nên ta chọn đáp án theo đề bài là $(0; 1)$.

Chọn đáp án C □

Câu 68 (THPT Can Lộc - Hà Tĩnh-2018).

Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 12x - 1$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A Hàm số đồng biến trên khoảng $(-3; 4)$.

B Hàm số đồng biến trên khoảng $(4; +\infty)$.

C Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 4)$.

D Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-3; +\infty)$.

Lời giải.

$y' = x^2 - x - 12$

$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 4 \\ x = -3 \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-3		4		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số đồng biến trên khoảng $(4; +\infty)$.

Chọn đáp án B □

Câu 69 (Đề Minh Họa 2021). Hàm số nào dưới đây đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A $y = \dfrac{x+1}{x-2}$. B $y = x^2 + 2x$. C $y = x^3 - x^2 + x$. D $y = x^4 - 3x^2 + 2$.

Lời giải.

$y = x^3 - x^2 + x \Rightarrow y' = 3x^2 - 2x + 1 = 3\left(x - \dfrac{1}{3}\right)^2 + \dfrac{2}{3} > 0 \forall x \in \mathbb{R}$

Vậy hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Chọn đáp án C □

Câu 70 (Đề minh họa 2022). Hàm số nào dưới đây nghịch biến trên $\mathbb{R}$

A $y = -x^3 - x$. B $y = -x^4 - x^2$. C $y = -x^3 + x$. D $y = \dfrac{x+2}{x-1}$.

Lời giải.

Hàm số $y = -x^3 - x$ có tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$

$y' = -3x^2 - 1 = -(3x^2 + 1) < 0, \forall x \in \mathbb{R}$

Suy ra, hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Chọn đáp án A □

Câu 71 (Mã 101 - 2022). Hàm số nào dưới đây đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A $y = x^4 - x^2$. B $y = x^3 - x$. C $y = \dfrac{x-1}{x+2}$. D $y = x^3 + x$.

Lời giải.

Ta có $y = x^3 + x \Rightarrow y' = 3x^2 + 1 > 0 \forall x \in \mathbb{R}$.

Chọn đáp án D □

Câu 72 (Mã 102 - 2022). Hàm số nào dưới đây đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A $y = x^4 - x^2$. B $y = x^3 + x$. C $y = \dfrac{x-1}{x+2}$. D $y = x^3 - x$.

Lời giải.

Hàm số $y = x^3 + x \Rightarrow y' = 3x^2 + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Do đó hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Chọn đáp án B □

Câu 73 (Mã 103 - 2022). Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x + 1$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A $(-1; +\infty)$. B $(1; +\infty)$. C $(-\infty; -1)$. D $(-\infty; 1)$.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

Vậy hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 74 (Mã 104 - 2022). Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x + 1$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

(A) $(-\infty; -1)$. (B) $(-\infty; 1)$. (C) $(-1; +\infty)$. (D) $(1; +\infty)$.

Lời giải.

Ta có $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x + 1 < 0 \Leftrightarrow x < -1$.

Vậy hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$.

Chọn đáp án (A) □

BẢNG ĐÁP ÁN

1. D	2. C	3. D	4. D	5. D	6. C	7. A	8. A	9. B	10. A
11. D	12. C	13. D	14. C	15. B	16. A	17. C	18. B	19. C	20. A
21. A	22. A	23. B	24. C	25. D	26. D	27. C	28. A	29. A	30. C
31. B	32. A	33. B	34. C	35. A	36. B	37. D	38. B	39. D	40. C
41. D	42. B	43. D	44. C	45. B	46. C	47. C	48. B	49. A	50. B
51. C	52. A	53. A	54. C	55. C	56. A	57. B	58. D	59. C	60. A
61. A	62. B	63. C	64. C	65. A	66. A	67. C	68. B	69. C	70. A
			71. D	72. B	73. C	74. A			

MỨC ĐỘ 2. MỨC ĐỘ 7,8 ĐIỂM

Dạng 1. Tìm m để hàm số đơn điệu trên các khoảng xác định của nó

Câu 1 (Đề Tham Khảo Lần 2 2020).

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m sao cho hàm số $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + mx^2 + 4x + 3$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

(A) 5. (B) 4. (C) 3. (D) 2.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = x^2 + 2mx + 4$.

Hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $f'(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ (Dấu "=" xảy ra tại hữu hạn điểm).

Ta có $f'(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta' \leq 0$

$\Leftrightarrow \Delta' = m^2 - 4 \leq 0$

$\Leftrightarrow -2 \leq m \leq 2.$

Vì $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{-2; -1; 0; 1; 2\}$, vậy có 5 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Chọn đáp án A □

Câu 2 (Mã 123 - 2017). Cho hàm số $y = -x^3 - mx^2 + (4m+9)x + 5$, với m là tham số. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$

A 5.　　B 4.　　C 6.　　D 7.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$

$y' = -3x^2 - 2mx + 4m + 9.$

Hàm số nghịch biến trên $(-\infty; +\infty)$ khi $y' \leq 0, \forall x \in (-\infty; +\infty) \Leftrightarrow \begin{cases} a = -3 < 0 \\ \Delta' = m^2 + 3(4m+9) \leq 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow m \in [-9; -3] \Rightarrow$ có 7 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Chọn đáp án D □

Câu 3. Cho hàm số $y = -\dfrac{1}{3}x^3 + mx^2 + (3m+2)x + 1$. Tìm tất cả giá trị của m để hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

A $\left[\begin{array}{l} m \geq -1 \\ m \leq -2 \end{array}\right.$.　　B $-2 \leq m \leq -1$.　　C $-2 < m < -1$.　　D $\left[\begin{array}{l} m > -1 \\ m < -2 \end{array}\right.$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$, $y' = -x^2 + 2mx + 3m + 2$.

Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $y' \leq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 < 0 \\ \Delta' = m^2 + 3m + 2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -2 \leq m \leq -1.$

Chọn đáp án B □

Câu 4. Tìm m để hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3(2m-1) + 1$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A Không có giá trị m thỏa mãn.　　B $m \neq 1$.

C $m = 1$.　　D Luôn thỏa mãn với mọi m.

Lời giải.

$y' = 3x^2 - 6mx + 3(2m-1)$

Ta có $\Delta' = (-3m)^2 - 3.3.(2m-1)$. Để hàm số luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$ thì $\Delta' \leq 0$

$\Leftrightarrow 9m^2 - 18m + 9 < 0 \Leftrightarrow 9(m^2 - 2m + 1) \leq 0 \Leftrightarrow 9(m-1)^2 \leq 0 \Leftrightarrow m = 1.$

Chọn đáp án C □

Câu 5. Tìm điều kiện của tham số thực m để hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 3(m+1)x + 2$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A $m \geq 2$.　　B $m < 2$.　　C $m < 0$.　　D $m \geq 0$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = 3x^2 - 6x + 3(m+1)$

YCBT $\Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta' = -9m \leq 0 \Leftrightarrow m \geq 0$.

Chọn đáp án D □

Câu 6. Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + mx^2 + 4x - m$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.

A $[-2; 2]$. B $(-\infty; 2)$. C $(-\infty; -2]$. D $[2; +\infty)$.

Lời giải.

Ta có $y' = x^2 + 2mx + 4$.

Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$ khi và chỉ khi $y' \geq 0, \forall x \in (-\infty; +\infty)$.

$\Leftrightarrow \Delta' = m^2 - 4 \leq 0 \Leftrightarrow -2 \leq m \leq 2$.

Chọn đáp án A □

Câu 7. Giá trị của m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 2mx^2 + (m+3)x5 + m$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ là.

A $-\frac{3}{4} \leq m \leq 1$. B $m \leq -\frac{3}{4}$. C $-\frac{3}{4} < m < 1$. D $m \geq 1$.

Lời giải.

Ta có tập xác định $D = \mathbb{R}$.

$y' = x^2 4mx + (m+3)$.

$y' = 0 \Leftrightarrow x^2 4mx + (m+3) = 0$.

Hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$, đẳng thức chỉ xảy ra tại hữu hạn điểm $\Leftrightarrow \Delta' \leq 0 \Leftrightarrow (-2m)^2 - 1.(m+3) \leq 0 \Leftrightarrow 4m^2 - m - 3 \leq 0 \Leftrightarrow -\frac{3}{4} \leq m \leq 1$.

Vậy $-\frac{3}{4} \leq m \leq 1$.

Chọn đáp án A □

Câu 8 (Chuyên KHTN - Hà Nội - 2020).

Tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = x^3 + (m+1)x^2 + 3x + 2$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ là

A $[-4; 2]$. B $(-4; 2)$.

C $(-\infty; -4] \cup [2; +\infty)$. D $(-\infty; -4) \cup (2; +\infty)$.

Lời giải.

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = 3x^2 + 2(m+1)x + 3$.

Hàm số $y = x^3 + (m+1)x^2 + 3x + 2$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

$\Leftrightarrow \Delta' = (m+1)^2 - 9 \leq 0 \Leftrightarrow m^2 + 2m - 8 \leq 0 \Leftrightarrow -4 \leq m \leq 2$.

Vậy $m \in [-4; 2]$.

Nếu hệ số a chứa tham số thì phải xét trường hợp $a = 0$ và $a \neq 0$.

Chọn đáp án A □

Câu 9 (Đề Tham Khảo - 2017). Hỏi có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $y = (m^2-1)x^3 + (m-1)x^2 - x + 4$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.

Ⓐ 0. Ⓑ 3. Ⓒ 2. Ⓓ 1.

Lời giải.

Trường hợp 1 $m = 1$. Ta có: $y = -x + 4$ là phương trình của một đường thẳng có hệ số góc âm nên hàm số luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$. Do đó nhận $m = 1$.

Trường hợp 2 $m = -1$. Ta có: $y = -2x^2 - x + 4$ là phương trình của một đường Parabol nên hàm số không thể nghịch biến trên $\mathbb{R}$. Do đó loại $m = -1$.

TH3: $m \neq \pm 1$. Khi đó hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty) \Leftrightarrow y' \leq 0 \forall x \in \mathbb{R}$, dấu "=" chỉ xảy ra ở hữu hạn điểm trên $\mathbb{R}$.

$\Leftrightarrow 3(m^2-1)x^2 + 2(m-1)x - 1 \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta' \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 1 < 0 \\ (m-1)^2 + 3(m^2-1) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 1 < 0 \\ (m-1)(4m+2) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < m < 1 \\ -\dfrac{1}{2} \leq m \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow$

$-\dfrac{1}{2} \leq m < 1$. Vì $m \in \mathbb{Z}$ nên $m = 0$.

Vậy có 2 giá trị m nguyên cần tìm là $m = 0$ hoặc $m = 1$.

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 10. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số hàm số $y = \dfrac{1}{3}(m^2 - m)x^3 + 2mx^2 + 3x - 2$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$?

Ⓐ 4. Ⓑ 5. Ⓒ 3. Ⓓ 0.

Lời giải.

$y' = (m^2 - m)x^2 + 4mx + 3$

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty) \Leftrightarrow y' \geq 0$ với $\forall x \in \mathbb{R}$.

Với $m = 0$ ta có $y' = 3 > 0$ với $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.

Với $m = 1$ ta có $y' = 4x + 3 > 0 \Leftrightarrow x > -\dfrac{3}{4} \Rightarrow m = 1$ không thảo mãn.

Với $\begin{cases} m \neq 1 \\ m \neq 0 \end{cases}$ ta có $y' \geq 0$ với $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - m > 0 \\ \Delta' = m^2 + 3m \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m > 1 \\ m < 0 \end{array}\right. \\ -3 \leq m \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -3 \leq m < 0.$

Tổng hợp các trường hợp ta được $-3 \leq m \leq 0$.

$m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-3; -2; -1; 0\}$.

Vậy có 4 giá trị nguyên của m thỏa mãn bài ra.

Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 11. Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để hàm số $y = mx^3 + mx^2 + m(m-1)x + 2$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Ⓐ $m \leq \dfrac{4}{3}$ và $m \neq 0$. Ⓑ $m = 0$ hoặc $m \geq \dfrac{4}{3}$.

Ⓒ $m \geq \dfrac{4}{3}$. Ⓓ $m \leq \dfrac{4}{3}$.

Lời giải.

Trường hợp 1 $m = 0 \Rightarrow y = 2$ là hàm hằng nên loại $m = 0$.

Trường hợp 2 $m \neq 0$. Ta có: $y' = 3mx^2 + 2mx + m(m-1)$.

Hàm số đồng biến trên$\mathbb{R} \Leftrightarrow f'(x) \geq 0 \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \Delta' = m^2 - 3m^2(m-1) \leq 0 \\ 3m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2(4-3m) \leq 0 \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq \dfrac{4}{3} \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq \frac{4}{3}.$$

Chọn đáp án C ☐

Câu 12. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \dfrac{m}{3}x^3 - 2mx^2 + (3m+5)x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A 4. B 2. C 5. D 6.

Lời giải.

Ta có $y' = mx^2 - 4mx + 3m + 5$.

Với $a = 0 \Leftrightarrow m = 0 \Rightarrow y' = 5 > 0$. Vậy hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Với $a \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 0$. Hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi

$$y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ (2m)^2 - m(3m+5) \leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m^2 - 5m \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ 0 \leq m \leq 5 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m \leq 5.$$

Vì $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$.

Chọn đáp án D ☐

Câu 13. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $y = (m-1)x^3 - 3(m-1)x^2 + 3x + 2$ đồng biến biến trên $\mathbb{R}$?

A $1 < m \leq 2$. B $1 < m < 2$. C $1 \leq m \leq 2$. D $1 \leq m < 2$.

Lời giải.

Ta có $y' = 3(m-1)x^2 - 6(m-1)x + 3$.

Hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m - 1 = 0 \\ \begin{cases} m - 1 > 0 \\ \Delta' \leq 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ \begin{cases} m > 1 \\ 9(m-1)^2 - 9(m-1 \end{cases} \end{array}\right.$

$$\left[\begin{array}{l} m = 1 \\ \begin{cases} m > 1 \\ 1 \leq m \leq 2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow 1 \leq m \leq 2.$$

Chọn đáp án C ☐

Câu 14 (THPT Hoàng Hoa Thám-Hưng Yên - 2018).

Số giá trị nguyên của m để hàm số $y = (4 - m^2)x^3 + (m-2)x^2 + x + m - 1$ (1)đồng biến trên $\mathbb{R}$ bằng.

A 5. B 3. C 2. D 4.

Lời giải.

Trường hợp 1 $4-m^2=0 \Leftrightarrow m=\pm 2$.

$m=2$ (1) $\Leftrightarrow y=x+1 \Rightarrow$ hàm số luôn tăng trên $\mathbb{R} \Rightarrow m=2$ (nhận).

$m=-2$ (1) $\Leftrightarrow y=-4x^2+x-3$ là hàm số bậc hai nên tăng trên khoảng $\left(-\infty;\dfrac{1}{8}\right)$, giảm trên khoảng $\left(\dfrac{1}{8};+\infty\right) \Rightarrow m=-2$ (loại).

Trường hợp 2 $4-m^2 \neq 0$.

$y'=3\left(4-m^2\right)x^2+2\left(m-2\right)x+1$. $\Delta'=\left(m-2\right)^2-3\left(4-m^2\right)=4m^2-4m-8$.

hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}$.

$\Leftrightarrow \begin{cases} a>0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4-m^2>0 \\ 4m^2-4m-8 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \in (-2;2) \\ m \in [-1;2] \end{cases} \Leftrightarrow m \in [-1;2)$. $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m=-1; m=0; m=1$.

Vậy có 4 giá trị nguyên của $m$thỏa yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án D □

Câu 15 (Chuyên Hoàng Văn Thụ - Hòa Bình - 2018).

Số các giá trị nguyên của tham số m trong đoạn $[-100;100]$ để hàm số $y=mx^3+mx^2+\left(m+1\right)x-3$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ là:

Ⓐ 200. Ⓑ 99. Ⓒ 100. Ⓓ 201.

Lời giải.

Trường hợp 1 $m=0$. Ta có:

$y=x-3$ có $y'=1>0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ nên hàm số luôn đồng biến trên trên $\mathbb{R}$.

Do đó loại $m=0$.

Trường hợp 2 $m \neq 0$. Ta có: $y'=3mx^2+2mx+m+1$, $\Delta'=-2m^2-3m=m\left(-2m-3\right)$

Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $y' \leq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m<0 \\ \Delta' \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<0 \\ m\left(-2m-3\right) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<0 \\ -2m-3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \leq -\dfrac{3}{2}$.

Vì m là số nguyên thuộc đoạn $[-100;100]$ nên $m \in \{-2;-3;...;-99;-100\}$.

Vậy có 99 giá trị m.

Chọn đáp án B □

Câu 16 (Liên trường Nghệ An - 2020).

Tổng bình phương của tất cả các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\left(3m^2-12\right)x^3+3\left(m-2\right)x^2-x+2$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$là?

Ⓐ 9. Ⓑ 6. Ⓒ 5. Ⓓ 14.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.

Ta có $y'=9\left(m^2-4\right)x^2+6\left(m-2\right)x-1$.

Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' \leq 0 \forall x \in \mathbb{R}$(dấu "=" xãy ra tại hữu hạn $x \in \mathbb{R}$)

Trường hợp 1 $m^2-4=0 \Leftrightarrow m=\pm 2$.

Với $m=2$ ta có $y'=-1 \leq 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$ nên $m=2$ thỏa mãn.

Với $m=-2$ ta có $y'=-24x-1\le 0\Leftrightarrow x\ge -\frac{1}{24}$(không thỏa với mọi $x\in\mathbb{R}$) nên loại $m=-2$.

Trường hợp 2 $m^2-4\ne 0\Leftrightarrow m\ne \pm 2$. Ta có

$y'\le 0,\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow \begin{cases} a=9\left(m^2-4\right)<0\\ \Delta'=9\left(m-2\right)^2+9\left(m^2-4\right)\le 0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}-2<m<2\\ 0\le m\le 2\end{cases}\Leftrightarrow 0\le m<2\xrightarrow{m\in\mathbb{Z}}$ $m\in\{0;1\}$Vậy $m\in\{0;1;2\}\Rightarrow 0^2+1^2+2^2=5$.

Chọn đáp án C □

Câu 17 (Lý Nhân Tông - Bắc Ninh - 2020).

Hỏi có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $y=\left(m^2-1\right)x^3+\left(m-1\right)x^2-x+4$ nghịch biến trên khoảng$(-\infty;+\infty)$.

A 2. B 1. C 0. D 3.

Lời giải.

Ta có $y'=3\left(m^2-1\right)x^2+2\left(m-1\right)x-1$

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng$(-\infty;+\infty)\Leftrightarrow y'\le 0,\forall x\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow 3\left(m^2-1\right)x^2+2\left(m-1\right)x-1\le 0,\forall x\in\mathbb{R}$.

Trường hợp 1 $m^2-1=0\Leftrightarrow m=\pm 1$.

Với $m=1$, ta được $-1\le 0,\forall x\in\mathbb{R}$ (luôn đúng), suy ra $m=1$ (nhận).

Với $m=-1$, ta được $-4x-1\le 0\Leftrightarrow x\ge \frac{1}{4}$, suy ra $m=-1$ (loại).

Trường hợp 2 $m^2-1\ne 0\Leftrightarrow m\ne\pm 1$.

Ta có $\Delta'=\left(m-1\right)^2+3\left(m^2-1\right)=m^2-2m+1+3m^2-3=4m^2-2m-2$.

Để $y'\le 0,\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow \begin{cases} m^2-1<0\\ 4m^2-2m-2\le 0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}-1<m<1\\ -\frac{1}{2}\le m\le 1\end{cases}\Leftrightarrow -\frac{1}{2}\le m<1$.

Tổng hợp lại, ta có tất cả giá trị m cần tìm là $-\frac{1}{2}\le m\le 1$.

Vì $m\in\mathbb{Z}$, suy ra $m\in\{0;1\}$, nên có 2 giá trị nguyên của tham số m.

Chọn đáp án A □

Câu 18 (Mã 105 - 2017). Cho hàm số $y=\frac{mx-2m-3}{x-m}$ với m là tham số. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m để hàm số đồng biến trên các khoảng xác định. Tìm số phần tử của S .

A Vô số. B 3. C 5. D 4.

Lời giải.

$y'=\frac{-m^2+2m+3}{\left(x-m\right)^2}$ hàm số đồng biến trên khoảng xác định khi $-1<m<3$ nên có 3 giá trị của m nguyên.

Chọn đáp án B □

Câu 19 (Mã 104 - 2017). Cho hàm số $y=\frac{mx+4m}{x+m}$ với m là tham số. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m để hàm số nghịch biến trên các khoảng xác định. Tìm số phần tử của S .

A 4. B Vô số. C 3. D 5.

Lời giải.

$\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{-m\}$; $y' = \dfrac{m^2 - 4m}{(x+m)^2}$.

Hàm số nghịch biến trên các khoảng xác định khi $y' < 0, \forall x \in D \Leftrightarrow m^2 - 4m < 0 \Leftrightarrow 0 < m < 4$.

Mà $m \in \mathbb{Z}$ nên có 3 giá trị thỏa mãn.

Chọn đáp án D □

Câu 20 (THPT Hoa Lư A - 2018). Có tất cả bao nhiêu số nguyên m để hàm số $y = \dfrac{(m+1)x - 2}{x - m}$ đồng biến trên từng khoảng xác định của nó?

A. 1. B. 0. C. 2. D. 3.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{m\}$

$y' = \dfrac{-m^2 - m + 2}{(x-m)^2}$.

Để hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định của ta cần tìm m để $y' \geq 0$ trên $(-\infty; m)$ và $(m; +\infty)$ và dấu "=" chỉ xảy ra tại hữu hạn điểm trên các khoảng đó

ĐK $-m^2 - m + 2 > 0 \Leftrightarrow -2 < m < 1$. Vì $m \in \mathbb{Z}$ nên $m = -1, 0$.

Chọn đáp án C □

Câu 21 (SGD & ĐT Bắc Giang - 2018).

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \dfrac{x + m^2}{x + 4}$ đồng biến trên từng khoảng xác định của nó?

A. 5. B. 3. C. 1. D. 2.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{-4\}$, $y' = \dfrac{4 - m^2}{(x+4)^2}$.

Để hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định của nó thì $4 - m^2 > 0 \Leftrightarrow -2 < m < 2$.

Do đó có 3 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn.

Chọn đáp án B □

Câu 22 (THPT Hà Huy Tập - 2018). Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \dfrac{x + 2 - m}{x + 1}$ nghịch biến trên các khoảng mà nó xác định?

A. $m \leq 1$. B. $m \leq -3$. C. $m < -3$. D. $m < 1$.

Lời giải.

Với $m = 1$ thì hàm số là hàm hằng $(\forall x \neq -1)$ nên không nghịch biến.

Ta có $y' = \dfrac{m-1}{(x+1)^2}, \forall x \neq -1$.

Hàm số nghịch biến trên từng khoảng của tập xác định khi và chỉ khi $y' < 0, x \neq -1 \Leftrightarrow m < 1$.

Chọn đáp án D □

Câu 23 (SỞ GD & ĐT Yên Bái - 2018).

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \dfrac{mx - 4}{x - m}$ nghịch biến trên từng khoảng xác định của nó.

Ⓐ $\left[\begin{array}{l} m \leq -2 \\ m \geq 2 \end{array}\right.$. Ⓑ $-2 < m < 2$. Ⓒ $\left[\begin{array}{l} m < -2 \\ m > 2 \end{array}\right.$. Ⓓ $-2 \leq m \leq 2$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = (-\infty; m) \cup (m; +\infty)$.

Ta có $y = \dfrac{mx-4}{x-m} \Rightarrow y' = \dfrac{-m^2+4}{(x-m)^2}$. Vì hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định của nó nên $-m^2+4 < 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < -2 \\ m > 2 \end{array}\right.$.

Chọn đáp án C □

Câu 24 (THCS & THPT Nguyễn Khuyến - Bình Dương-2018).

Tìm tất cả các giá trị thực của m để hàm số $y = \dfrac{mx-2}{2x-m}$ đồng biến trên mỗi khoảng xác định

Ⓐ $\left[\begin{array}{l} m \leq -2 \\ m \geq 2 \end{array}\right.$. Ⓑ $-2 < m < 2$. Ⓒ $\left[\begin{array}{l} m < -2 \\ m > 2 \end{array}\right.$. Ⓓ $-2 \leq m \leq 2$.

Lời giải.

Ta có $y' = \dfrac{-m^2+4}{(2x-m)^2}, \forall x \neq \dfrac{m}{2}$

Hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định khi $-m^2+4 > 0 \Leftrightarrow -2 < m < 2$.

Chọn đáp án B □

Dạng 2. Tìm m để hàm số nhất biến đơn điệu trên khoảng cho trước

Câu 25 (Đề Tham Khảo Lần 1 2020).

Cho hàm số $f(x) = \dfrac{mx-4}{x-m}$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$?

Ⓐ 5. Ⓑ 4. Ⓒ 3. Ⓓ 2.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{m\}$.

Đạo hàm $f'(x) = \dfrac{-m^2+4}{(x-m)^2}$.

Hàm số đồng biến trên $(0; +\infty)$ khi và chỉ khi

$$f'(x) > 0 \forall x \in (0; +\infty) \Leftrightarrow \begin{cases} -m^2+4 > 0 \\ m \notin (0; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < m < 2 \\ m \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -2 < m \leq 0.$$

Do $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m = \{-1; 0\}$. Vậy có hai giá trị nguyên của m thỏa mãn đề bài.

Chọn đáp án D □

Câu 26 (Mã 101 – 2020 – Lần 1). Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \dfrac{x+4}{x+m}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; -7)$ là

Ⓐ $[4; 7)$. Ⓑ $(4; 7]$. Ⓒ $(4; 7)$. Ⓓ $(4; +\infty)$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{-m\}$.

Ta có $y' = \dfrac{m-4}{(x+m)^2}$.

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty;-7) \Leftrightarrow y' > 0, \forall x \in (-\infty;-7) \Leftrightarrow \begin{cases} m-4>0 \\ -m \notin (-\infty;-7) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m>4 \\ -m \geq -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>4 \\ m \leq 7 \end{cases} \Leftrightarrow 4 < m \leq 7.$

Chọn đáp án B □

Câu 27 (Mã 102 - 2020 - Lần 1). Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \dfrac{x+5}{x+m}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;-8)$ là

A. $(5;+\infty)$. B. $(5;8]$. C. $[5;8)$. D. $(5;8)$.

Lời giải.

Điều kiện $x \neq -m$. Ta có $y' = \dfrac{m-5}{(x+m)^2}$ Để hàm số $y = \dfrac{x+5}{x+m}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;-8)$ thì $\begin{cases} y' > 0 \\ -m \notin (-\infty;-8) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m-5>0 \\ -m \geq -8 \end{cases} \Rightarrow 5 < m \leq 8.$.

Chọn đáp án B □

Câu 28 (Mã 103 – 2020 – Lần 1). Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \dfrac{x+2}{x+m}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;-5)$

A. $(2;5]$. B. $[2;5)$. C. $(2;+\infty)$. D. $(2;5)$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{-m\}$.

Ta có $y' = \dfrac{m-2}{(x+m)^2}$

Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;-5) \Leftrightarrow \begin{cases} y' > 0 \forall x \in (-\infty;-5) \\ -m \notin (-\infty;-5) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m-2>0 \\ -m \geq -5 \end{cases} \Leftrightarrow 2 < m \leq 5$.

Chọn đáp án A □

Câu 29 (Mã 104-2020 – Lần 1). Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \dfrac{x+3}{x+m}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;-6)$ là

A. $(3;6]$. B. $(3;6)$. C. $(3;+\infty)$. D. $[3;6)$.

Lời giải.

Hàm số xác định khi: $x+m \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -m$.

$y = \dfrac{x+3}{x+m} \Rightarrow y' = \dfrac{m-3}{(x+m)^2}$

Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;-6)$ khi và chỉ khi: $\begin{cases} y' > 0, \forall x \in (-\infty;-6) \\ -m \notin (-\infty;-6) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m-3>0 \\ -m \in [-6;+\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>3 \\ -m \geq -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>3 \\ m \leq 6 \end{cases} \Leftrightarrow 3<m \leq 6.$

Vậy: $m \in (3;6]$.

Chọn đáp án A □

Câu 30 (Mã 104 - 2018). Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\dfrac{x+2}{x+3m}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;-6)$.

A 2. B 6. C Vô số. D 1.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D}=(-\infty;-3m)\cup(-3m;+\infty)$.

Ta có $y'=\dfrac{3m-2}{(x+3m)^2}$

Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;-6)\Leftrightarrow \begin{cases} 3m-2>0 \\ -6 \leq -3m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>\dfrac{2}{3} \\ m \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{2}{3}<m \leq 2.$

Mà m nguyên nên $m=\{1;2\}$.

Chọn đáp án A □

Câu 31 (Mã 103 - 2018). Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\dfrac{x+1}{x+3m}$ nghịch biến trên khoảng $(6;+\infty)$?

A 0. B 6. C 3. D Vô số.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D}=\mathbb{R}\backslash\{-3m\}; y'=\dfrac{3m-1}{(x+3m)^2}$.

Hàm số $y=\dfrac{x+1}{x+3m}$ nghịch biến trên khoảng $(6;+\infty)$ khi và chỉ khi

$\begin{cases} y'<0 \\ (6;+\infty)\subset \mathscr{D} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3m-1<0 \\ -3m \leq 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<\dfrac{1}{3} \\ m \geq -2 \end{cases} \Leftrightarrow -2 \leq m < \dfrac{1}{3}.$

Vì $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-2;-1;0\}$.

Chọn đáp án C □

Câu 32 (Mã 101 - 2018). Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\dfrac{x+2}{x+5m}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;-10)$?

A 2. B Vô số. C 1. D 3.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{-5m\}$.

$y'=\dfrac{5m-2}{(x+5m)^2}$.

Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;-10)$ khi và chỉ khi $\begin{cases} 5m-2>0 \\ -5m \in [-10;+\infty) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m>\dfrac{2}{5} \\ -5m \geq -10 \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{2}{5}<m \leq 2.$

Vì m nguyên nên $m \in \{1; 2\}$.

Vậy có 2 giá trị của tham số m.

Chọn đáp án (A) □

Câu 33 (Mã 102 - 2018). Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \dfrac{x+6}{x+5m}$ nghịch biến trên khoảng $(10; +\infty)$?

(A) Vô số. (B) 4. (C) 5. (D) 3.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{-5m\}$.

$y' = \dfrac{5m-6}{(x+5m)^2}$

Hàm số nghịch biến trên $(10; +\infty)$ khi và chỉ khi $\begin{cases} y' < 0, \forall x \in \mathscr{D} \\ -5m \notin (10; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5m - 6 < 0 \\ -5m \leq 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \dfrac{6}{5} \\ m \geq -2 \end{cases}$.

Mà $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{-2; -1; 0; 1\}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 34 (Chuyên KHTN - 2020). Tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = \dfrac{mx-4}{x-m}$ đồng biến trên khoảng $(-1; +\infty)$ là

(A) $(-2; 1]$. (B) $(-2; 2)$. (C) $(-2; -1]$. (D) $(-2; -1)$.

Lời giải.

Đạo hàm $y' = \dfrac{-m^2+4}{(x-m)^2} > 0, \forall x \neq m$.

Do đó hàm số đồng biến trên $(-1; +\infty)$ khi $y' > 0, \forall x \in (-1; +\infty) \Leftrightarrow \begin{cases} -m^2 + 4 > 0 \\ x - m \neq 0, \forall x \in (-1; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} -m^2 + 4 > 0 \\ x \neq m, \forall x \in (-1; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < m < 2 \\ m \leq -1 \end{cases} \Leftrightarrow -2 < m \leq -1.$

Chọn đáp án (C) □

Câu 35 (Chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm - Quảng Nam - 2020).

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \dfrac{mx-1}{m-4x}$ nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty; \dfrac{1}{4}\right)$.

(A) $m > 2$. (B) $1 \leq m < 2$. (C) $-2 < m < 2$. (D) $-2 \leq m \leq 2$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{m}{4}\right\}$.

Ta có $y' = \dfrac{m^2-4}{(m-4x)^2}$.

Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty; \dfrac{1}{4}\right)$ khi và chỉ khi $\begin{cases} m^2 - 4 < 0 \\ \dfrac{m}{4} \notin \left(-\infty; \dfrac{1}{4}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < m < 2 \\ \dfrac{m}{4} \geq \dfrac{1}{4} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -2 < m < 2 \\ m \geq 1 \end{cases} \Rightarrow 1 \leq m < 2.$

Vậy $1 \leq m < 2$.

Chọn đáp án B □

Câu 36 (Chuyên Thái Nguyên - 2020).

Cho hàm số $y = \dfrac{mx - 2m + 3}{x + m}$ với m là tham số. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m để hàm số nghịch biến trên khoảng $(2; +\infty)$. Tìm số phần tử của S.

A 5. B 3. C 4. D 1.

Lời giải.

Điều kiện xác định $x \neq -m$.

Ta có $y' = \dfrac{m^2 + 2m - 3}{(x + m)^2}$.

Để hàm số nghịch biến trên khoảng $(2; +\infty)$ thì

$\begin{cases} y' < 0; \forall x \in (2; +\infty) \\ x \neq -m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + 2m - 3 < 0 \\ -m \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 < m < 1 \\ m \geq -2 \end{cases} \Leftrightarrow -2 \leq m < 1.$

Vậy giá trị nguyên của m là $S = \{-2; -1; 0\}$.

Chọn đáp án B □

Câu 37 (ĐHQG Hà Nội - 2020). Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \dfrac{x + 18}{x + 4m}$ nghịch biến trên khoảng $(2; +\infty)$?

A Vô số. B 0. C 3. D 5.

Lời giải.

Điều kiện $x \neq -4m$.

Ta có $y = \dfrac{x + 18}{x + 4m} \Rightarrow y' = \dfrac{4m - 18}{(x + 4m)^2}$.

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(2; +\infty) \Leftrightarrow \begin{cases} y' < 0 \\ -4m \notin (2; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4m - 18 < 0 \\ -4m \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} m < \dfrac{9}{2} \\ m \geq -\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow -\dfrac{1}{2} \leq m < \dfrac{9}{2}.$

Vì $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{0; 1; 2; 3; 4\}$. Vậy có 5 giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \dfrac{x + 18}{x + 4m}$ nghịch biến trên khoảng $(2; +\infty)$.

Chọn đáp án D □

Câu 38 (Sở Hà Tĩnh - 2020). Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \dfrac{mx + 9}{4x + m}$ nghịch biến trên khoảng $(0; 4)$?

A 5. B 11. C 6. D 7.

Lời giải.

Điều kiện $x \neq -\dfrac{m}{4}$.

Ta có $y' = \dfrac{m^2 - 36}{(4x + m)^2}$.

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(0;4) \Leftrightarrow y' < 0, \forall x \in (0;4)$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 36 < 0 \\ -\dfrac{m}{4} \notin (0;4) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6 < m < 6 \\ \left[\begin{array}{l} -\dfrac{m}{4} \le 0 \\ -\dfrac{m}{4} \ge 4 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6 < m < 6 \\ \left[\begin{array}{l} m \ge 0 \\ m \le -16 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow 0 \le m < 6. .$$

Vì $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{0,1,2,3,4,5\}$. Vậy có 6 giá trị m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án C □

Câu 39 (Sở Yên Bái - 2020). Tìm tất cả các giá trị thực của tham số $m$sao cho hàm số $y = \dfrac{-mx + 3m + 4}{x - m}$ nghịch biến trên khoảng $(1;+\infty)$

A) $-1 < m < 4$. B) $-1 < m \le 1$. C) $\left[\begin{array}{l} m < -1 \\ m > 4 \end{array}\right.$. D) $1 \le m < 4$.

Lời giải.

$$y' = \frac{m^2 - 3m - 4}{(x-m)^2}$$

Để hàm số nghịch biến trên khoảng $(1;+\infty)$ thì $y' < 0, \forall x \in (1;+\infty)$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 3m - 4 < 0 \\ m \notin (1;+\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \in (-1;4) \\ m \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < m \le 1.$$

Chọn đáp án B □

Câu 40 (Đặng Thúc Hứa - Nghệ An - 2020).

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in (-2020;2020)$ sao cho hàm số $y = \dfrac{3x+18}{x-m}$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-3)$?

A) 2020. B) 2026. C) 2018. D) 2023.

Lời giải.

Điều kiện $x \ne m$ nên $m \notin (-\infty;-3)$

$$y = \frac{3x+18}{x-m} \Rightarrow y' = \frac{-3m-18}{(x-m)^2}$$

Để hàm số $y = \dfrac{3x+18}{x-m}$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-3)$ thì $-3m - 18 < 0 \Leftrightarrow m > -6$

Vì $m \in (-2020;2020)$ và $m \notin (-\infty;-3)$ nên $m \in [-3;2020)$

Vậy có 2023 giá trị m nguyên thoả mãn.

Chọn đáp án D □

Câu 41 (Lương Thế Vinh - Hà Nội - 2020).

Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của tham số m để hàm số $y = \dfrac{x+4}{2x-m}$ nghịch biến trên khoảng $(-3;4)$.

A) Vô số. B) 1. C) 3. D) 2.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{m}{2}\right\}$.

Có $y' = -\dfrac{m+8}{(2x-m)^2}$

Hàm số nghịch biến trên $(-3;4) \Leftrightarrow y' < 0 \forall x \in (-3;4) \Leftrightarrow -\dfrac{m+8}{(2x-m)^2} < 0 \forall x \in (-3;4)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -(m+8) < 0 \\ \dfrac{m}{2} \notin (-3;4) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -8 \\ \left[\begin{array}{l} \dfrac{m}{2} \leq -3 \\ \dfrac{m}{2} \geq 4 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -8 < m \leq -6 \\ m \geq 8 \end{array}\right. .$$

Do m nguyên âm nên $m \in \{-7;-6\}$, gồm 2 giá trị thỏa mãn.

Chọn đáp án D □

Câu 42 (Chuyên KHTN - Hà Nội - Lần 3).

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \dfrac{mx+4}{x+m}$ nghịch biến trên khoảng $(0;+\infty)$?

A 1. B 2. C 3. D 5.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{-m\}$

Ta có $y' = \dfrac{m^2-4}{(x+m)^2}$.

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;+\infty)$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} y' < 0, \forall x > 0 \\ -m \notin (0;+\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 4 < 0 \\ -m \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < m < 2 \\ m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq m < 2.$$

Vậy số giá trị nguyên của tham số m là 2.

Chọn đáp án B □

Dạng 3. Tìm m để hàm số bậc 3 đơn điệu trên khoảng cho trước

Câu 43. Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 - mx - 4$. Tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;0)$ là

A $(-1;5)$. B $(-\infty;-3]$. C $(-\infty;-4]$. D $(-1;+\infty)$.

Lời giải.

Ta có $y' = 3x^2 + 6x - m$.

Để hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;0)$ thì $y' \geq 0$, $\forall x \in (-\infty;0)$

$\Leftrightarrow 3x^2 + 6x - m \geq 0$, $\forall x \in (-\infty;0)$

$\Leftrightarrow m \leq 3x^2 + 6x$, $\forall x \in (-\infty;0)$.

Đặt $g(x) = 3x^2 + 6x$, hàm số $g(x)$ có bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		0
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	0

Dựa vào bảng biến thiên ta có $\Leftrightarrow m \leq 3x^2 + 6x,\ \forall x \in (-\infty;\ 0) \Leftrightarrow m \leq -3$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 44 (Mã 101 – 2020 - Lần 2). Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3x^2 + (4-m)\,x$ đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$ là

(A) $(-\infty;1]$. (B) $(-\infty;4]$. (C) $(-\infty;1)$. (D) $(-\infty;4)$.

Lời giải.

Ta có

$y' = 3x^2 - 6x + 4 - m.ycbt \Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in (2;+\infty)$

$\Leftrightarrow 3x^2 - 6x + 4 - m \geq 0, \forall x \in (2;+\infty) \Leftrightarrow m \leq 3x^2 - 6x + 4, \forall x \in (2;+\infty)$

$\Leftrightarrow m \leq \min\limits_{(2;+\infty)} g(x)$ với $g(x) = 3x^2 - 6x + 4$

Ta có.

$g(x) = 6x - 6$

$g(x) = 0 \Leftrightarrow 6x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

HÌNH Ở ĐÂY

Dựa vào bảng biến thiên, suy ra: $m \leq 4$ thỏa yêu cầu bài toán.

Vậy: $m \in (-\infty;4]$ thì hàm số đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 45 (Mã 102 – 2020 – Lần 2). Tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3x^2 + (5-m)\,x$ đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$ là

(A) $(-\infty;2)$. (B) $(-\infty;5)$. (C) $(-\infty;5]$. (D) $(-\infty;2]$.

Lời giải.

Ta có $y' = 3x^2 - 6x + 5 - m$.

Hàm số đã cho đồng biến trên $(2;+\infty)$ khi và chỉ khi $y' \geq 0, \forall x \in (2;+\infty)$

$\Leftrightarrow 3x^2 - 6x + 5 - m \geq 0, \forall x > 2 \Leftrightarrow m \leq 3x^2 - 6x + 5, \forall x > 2$.

Xét hàm số $f(x) = 3x^2 - 6x + 5$ trên khoảng $(2;+\infty)$.

Có $f'(x) = 6x - 6,\ f'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ (loại).

Bảng biến thiên

HÌNH Ở ĐÂY

Từ bảng biến thiên ta có $m \leq 3x^2 - 6x + 5, \forall x > 2 \Leftrightarrow m \leq 5$.

Vậy $m \in (-\infty;5]$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 46 (Mã 103 – 2020 – Lần 2). Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số mđể hàm số $y = x^3 - 3x^2 + (2-m)\,x$đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$là

(A) $(-\infty;-1]$. (B) $(-\infty;2)$. (C) $(-\infty;-1)$. (D) $(-\infty;2]$.

Lời giải.

Ta có $y' = 3x^2 - 6x + 2 - m$.

Để hàm số đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$ khi và chỉ khi $y' \geq 0, \forall x \in (2;+\infty)$

$\Leftrightarrow 3x^2 - 6x + 2 - m \geq 0, \forall x \in (2; +\infty) m \leq 3x^2 - 6x + 2, \forall x \in (2; +\infty)$.

Xét hàm số $f(x) = 3x^2 - 6x + 2, \forall x \in (2; +\infty)$.

$f'(x) = 6x - 6$; $f'(x) = 0 \Rightarrow 6x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Bảng biến thiên

HÌNH Ở ĐÂY

Từ bảng biến thiên ta thấy $m \leq 2$. Vậy $m \in (-\infty; 2]$.

Chọn đáp án D □

Câu 47 (Mã 104 – 2020 – Lần 2). Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3x^2 + (1 - m)x$ đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$ là

A $(-\infty; -2)$. B $(-\infty; 1)$. C $(-\infty; -2]$. D $(-\infty; 1]$.

Lời giải.

Ta có $y' = 3x^2 - 6x + 1 - m$.

Hàm số đồng biến trên khoảng $(2; +\infty) \Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in (2; +\infty)$

$\Leftrightarrow 3x^2 - 6x + 1 - m \geq 0, \Leftrightarrow \dfrac{|2P + P|}{\sqrt{(2P)^2 + (P - 4)^2}} \leq 1 \Leftrightarrow 3|P| \leq \sqrt{5P^2 - 8P + 16}$

$\Leftrightarrow 3x^2 - 6x + 1 \geq m, \Leftrightarrow \dfrac{|2P + P|}{\sqrt{(2P)^2 + (P - 4)^2}} \leq 1 \Leftrightarrow 3|P| \leq \sqrt{5P^2 - 8P + 16}$.

Xét hàm số $g(x) = 3x^2 - 6x + 1$ với $\Leftrightarrow \dfrac{|2P + P|}{\sqrt{(2P)^2 + (P - 4)^2}} \leq 1 \Leftrightarrow 3|P| \leq \sqrt{5P^2 - 8P + 16}$.

$g'(x) = 6x - 6$; $g'(x) > 0, \Leftrightarrow \dfrac{|2P + P|}{\sqrt{(2P)^2 + (P - 4)^2}} \leq 1 \Leftrightarrow 3|P| \leq \sqrt{5P^2 - 8P + 16}$.

Bảng biến thiên $g(x)$:

HÌNH Ở ĐÂY

Vậy $m \leq 1$.

Chọn đáp án D □

Câu 48 (Đề Tham Khảo 2019). Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = -x^3 - 6x^2 + (4m - 9)x + 4$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$ là

A $\left(-\infty; -\dfrac{3}{4}\right]$. B $[0; +\infty)$. C $(-\infty; 0]$. D $\left[-\dfrac{3}{4}; +\infty\right)$.

Lời giải.

Ta có $y' = -3x^2 - 12x + 4m - 9$

Để hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$ thì $y' = -3x^2 - 6x + 4m - 9 \leq 0 \forall x \in (-\infty; -1)$

$\Leftrightarrow 4m \leq 3x^2 + 12x + 9 \forall x \in (-\infty; -1) \Leftrightarrow 4m \leq \min\limits_{(-\infty; -1]} f(x)$, $f(x) = 3x^2 + 12x + 9$

Ta có $f'(x) = 6x + 12; f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -2$.

Khi đó, ta có bảng biến thiên

$$\begin{array}{c|ccccc}
x & -\infty & & -2 & & +\infty \\
\hline
 & +\infty & & & & +\infty \\
y & & \searrow & & \nearrow & \\
 & & & -3 & &
\end{array}$$

Suy ra $\min\limits_{(-\infty;0]} f(x) = -3 \Rightarrow 4m \leq -3 \Leftrightarrow m \leq \dfrac{-3}{4}$.

Chọn đáp án A □

Câu 49. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y = f(x) = \dfrac{mx^3}{3} + 7mx^2 + 14x - m + 2$ giảm trên nửa khoảng $[1; +\infty)$?

A $\left(-\infty; -\dfrac{14}{15}\right]$. B $\left[-2; -\dfrac{14}{15}\right]$. C $\left[-\dfrac{14}{15}; +\infty\right)$. D $\left(-\infty; -\dfrac{14}{15}\right)$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$, yêu cầu của bài toán đưa đến giải bất phương trình

$$mx^2 + 14mx + 14 \leq 0, \forall x \geq 1 \Leftrightarrow g(x) = \frac{-14}{x^2 + 14x} \geq m \quad (1)$$

Ta có $g'(x) = \dfrac{14(2x+14)}{(x^2+14x)^2} > 0$, $\forall x \in [1; +\infty)$, suy ra $\min\limits_{x\geq 1} g(x) = g(1) = -\dfrac{14}{15}$.

Kết luận: (1)$\Leftrightarrow \min\limits_{x \geq 1} g(x) \geq m \Leftrightarrow m \leq -\dfrac{14}{15}$.

Chọn đáp án A □

Câu 50. Xác định các giá trị của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3mx^2 - m$ nghịch biến trên khoảng $(0; 1)$?

A $m \geq 0$. B $m < \dfrac{1}{2}$. C $m \leq 0$. D $m \geq \dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

$y' = 3x^2 - 6mx = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2m \\ x = 0. \end{array}\right.$

Hàm số $y = x^3 - 3mx^2 - m$ nghịch biến trên khoảng $(0; 1) \Leftrightarrow 2m \geq 1 \Leftrightarrow m \geq \dfrac{1}{2}$

Chọn đáp án D □

Câu 51. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = x^3 + 3x^2 - mx + 1$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0)$.

A $m \leq 0$. B $m \geq -2$. C $m \leq -3$. D $m \leq -1$.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

Đạo hàm: $y' = 3x^2 + 6x - m$.

Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0)$ khi và chỉ khi $y' \geq 0$, $\forall x < 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 6x - m \geq 0$, $\forall x < 0$.

Cách 1. $3x^2 + 6x - m \geq 0$, $\forall x < 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 6x \geq m$, $\forall x < 0$.

Xét hàm số $f(x) = 3x^2 + 6x$ trên khoảng $(-\infty; 0)$, ta có $f'(x) = 6x + 6$.

Xét $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = -1$. Ta có $f(-1) = -3$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		0
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	0

Dựa vào bảng biến thiên, ta có: $m \leq -3$.

Cách 2. Ta có $\Delta' = 9 + 3m$.

Nếu $\Delta' \leq 0 \Leftrightarrow m \leq -3$ thì $y' \geq 0 \Rightarrow y' \geq 0\ \forall x < 0$.

Nếu $\Delta' > 0$ thì y' có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2. Khi đó để $y' \geq 0 \forall x < 0$ thì ta phải có $0 \leq x_1 < x_2$. Điều này không thể xảy ra vì $S = x_1 + x_2 = -2 < 0$. Vậy $m \leq -3$.

Chọn đáp án C □

Câu 52. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3mx^2 - 9m^2x$ nghịch biến trên khoảng $(0; 1)$.

A $-1 < m < \dfrac{1}{3}$.

B $m > \dfrac{1}{3}$.

C $m < -1$.

D $m \geq \dfrac{1}{3}$ hoặc $m \leq -1$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

$y' = 3x^2 - 6mx - 9m^2$; $y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6mx - 9m^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2mx - 3m^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -m \\ x = 3m. \end{array}\right.$

- Nếu $-m = 3m \Leftrightarrow m = 0$ thì nên hàm số không có khoảng nghịch biến.

- Nếu $-m < 3m \Leftrightarrow m > 0$ thì hàm số nghịch biến trên khoảng $(-m; 3m)$.

  Do đó hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; 1) \Leftrightarrow \begin{cases} -m \leq 0 \\ 3m \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq \dfrac{1}{3}$.

  Kết hợp với điều kiện ta được $m \geq \dfrac{1}{3}$.

- Nếu $-m > 3m \Leftrightarrow m < 0$ thì hàm số nghịch biến trên khoảng $(3m;\ -m)$.

  Do đó hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; 1) \Leftrightarrow \begin{cases} 3m \leq 0 \\ -m \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow m \leq -1$.

  Kết hợp với điều kiện ta được $m \leq -1$.

Vậy hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; 1)$ khi $m \leq -1$ hoặc $m \geq \dfrac{1}{3}$.

Chọn đáp án D □

Câu 53. Tìm các giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (2m-1)x - m + 2$ nghịch biến trên khoảng $(-2;0)$.

Ⓐ $m = 0$. Ⓑ $m > 1$. Ⓒ $m \leq -\frac{1}{2}$. Ⓓ $m < -\frac{1}{2}$..

Lời giải.

Ta có: $y' = x^2 - 2mx + 2m - 1$.

Cho $y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2mx + 2m - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 2m - 1. \end{array}\right.$

Nếu $1 \leq 2m - 1$ thì ta có $y' \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 2m - 1$. (trường hợp này hàm số không thể nghịch biến trên khoảng $(-2;0)$).

Xét $2m - 1 < 1$ ta có $y' \leq 0 \Leftrightarrow x \in [2m-1;1]$.

x	$-\infty$		$2m-1$		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

Vậy, hàm số nghịch biến trên khoảng $(-2;0)$ thì

$$(-2;0) \subset [2m-1;1] \Leftrightarrow 2m - 1 \leq -2 \Leftrightarrow m \leq -\frac{1}{2}.$$

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 54. Tìm tất cả các giá trị m để hàm số $y = x^3 - 3x^2 + mx + 2$ tăng trên khoảng $(1;\,+\infty)$

.

Ⓐ $m < 3$. Ⓑ $m \geq 3$. Ⓒ $m \neq 3$. Ⓓ $m \leq 3$.

Lời giải.

Đạo hàm : $y' = 3x^2 - 6x + m$

Để hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$ ta có

$$\begin{aligned} & y' \geq 0,\ \forall x \in (1;\,+\infty) \\ \Leftrightarrow\ & 3x^2 - 6x + m \geq 0,\ \forall x \in (1;\,+\infty) \\ \Leftrightarrow\ & m \geq -3x^2 + 6x,\ \forall x \in (1;\,+\infty)\,. \end{aligned}$$

Xét hàm số: $f(x) = -3x^2 + 6x$ trên $(1;+\infty)$. Bảng biến thiên

x	1		$+\infty$
y'		$-$	
y	3	$\searrow$	$-\infty$

Do đó : $m \geq f(x)$, $x \in (1; +\infty) \Rightarrow m \geq 3$.

Chọn đáp án B □

Câu 55. Tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = x^3 - mx^2 - (m-6)x + 1$ đồng biến trên khoảng $(0; 4)$ là:

A $(-\infty; 3)$. B $(-\infty; 3]$. C $[3; 6]$. D $(-\infty; 6]$.

Lời giải.

$y' = 3x^2 - 2mx - (m-6)$.

Để hàm số đồng biến trên khoảng $(0; 4)$ thì $y' \geq 0, \forall x \in (0; 4)$.

tức là $3x^2 - 2mx - (m-6) \geq 0\ \forall x \in (0; 4) \Leftrightarrow \dfrac{3x^2+6}{2x+1} \geq m$, $\forall x \in (0; 4)$.

Xét hàm số $g(x) = \dfrac{3x^2+6}{2x+1}$ trên $(0; 4)$.

$g'(x) = \dfrac{6x^2+6x-12}{(2x+1)^2}$, $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \in (0; 4) \\ x = -2 \notin (0; 4) \end{array}\right.$

Ta có bảng biến thiên:

x	0		1		4
y'		$-$	0	$+$	
y	6	$\searrow$	3	$\nearrow$	$\dfrac{54}{13}$

Vậy để $g(x) = \dfrac{3x^2+6}{2x+1} \geq m$, $\forall x \in (0; 4)$ thì $m \leq 3$.

Chọn đáp án B □

Câu 56. Tìm tất cả các giá thực của tham số m sao cho hàm số $y = 2x^3 - 3x^2 - 6mx + m$ nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$.

A $m \leq -\dfrac{1}{4}$. B $m \geq \dfrac{1}{4}$. C $m \geq 2$. D $m \geq 0$.

Lời giải.

Ta có $y' = 6x^2 - 6x - 6m$.

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$ khi và chỉ khi $y' \leq 0$ với $\forall x \in (-1; 1)$ hay $m \geq x^2 - x$ với $\forall x \in (-1; 1)$.

Xét $f(x) = x^2 - x$ trên khoảng $(-1; 1)$, ta có $f'(x) = 2x - 1$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2}$.

Bảng biến thiên

x	-1		$\dfrac{1}{2}$		1
y'		$-$	0	$+$	
y	2	$\searrow$	$-\dfrac{1}{4}$	$\nearrow$	0

Dựa vào bảng biến thiên ta có $m \geq f(x)$ với $\forall x \in (-1;1) \Leftrightarrow m \geq 2$.

Chọn đáp án C □

Câu 57. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y = x^3 - 6x^2 + mx + 1$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$?

A $m \geq 12$. B $m \leq 12$. C $m \geq 0$. D $m \leq 0$.

Lời giải.

Cách 1: Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$. Ta có $y' = 3x^2 - 12x + m$.

TH1: Hàm số đồng biến trên $\Leftrightarrow \begin{cases} 3 > 0 \\ 36 - 3m \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq 12$.

TH2: Hàm số đồng biến trên $(0;+\infty) \Leftrightarrow y' = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa $x_1 < x_2 \leq 0 \quad (*)$.

+ $y' = 0$ có nghiệm $x = 0$ suy ra $m = 0$. Nghiệm còn lại của $y' = 0$ là $x = 4$ (không thỏa $(*)$).

+ $y' = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa

$$x_1 < x_2 < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ S < 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 36 - 3m > 0 \\ 4 < 0 \quad \text{(vô lý)} \\ \dfrac{m}{3} > 0. \end{cases}$$

Vậy $m \geq 12$.

Cách 2: Hàm số đồng biến trên $(0;+\infty) \Leftrightarrow m \geq 12x - 3x^2 = g(x), \forall x \in (0;+\infty)$.

Lập bảng biến thiên của $g(x)$ trên $(0;+\infty)$.

x	0		2		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	0	$\nearrow$	12	$\searrow$	$-\infty$

Từ bảng biến thiên ta có $m \geq \max\limits_{(0;+\infty)} g(x) \Leftrightarrow m \geq 12$.

Chọn đáp án A □

Câu 58. Tìm m để hàm số $y = -x^3 + 3x^2 + 3mx + m - 1$ nghịch biến trên $(0;+\infty)$.

A $m \leq -1$. B $m \leq 1$. C $m < 1$. D $m > -1$.

Lời giải.

Ta có $y' = -3x^2 + 6x + 3m = 3\left(-x^2 + 2x + m\right)$.

Hàm số nghịch biến trên $(0;+\infty)$ khi và chỉ khi

$$\begin{aligned} & y' \leq 0,\ \forall x \in [0,+\infty) \\ \Leftrightarrow\ & -x^2+2x+m \leq 0,\ \forall x \in [0;+\infty) \\ \Leftrightarrow\ & m \leq x^2-2x = f(x),\ \forall x \in [0;+\infty) \\ \Leftrightarrow\ & m \leq \min_{[0;+\infty)} f(x) = f(1) = -1. \end{aligned}$$

Vậy $m \leq -1$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 59. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên dương của m để hàm số $y = x^3 - 3(2m+1)x^2 + (12m+5)x + 2$ đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$. Số phần tử của S bằng

(A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 0.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

$y' = 3x^2 - 6(2m+1)x + 12m + 5$.

Hàm số đồng biến trong khoảng $(2;+\infty)$ khi $y' \geq 0, \forall x \in (2;\ +\infty) \Leftrightarrow 3x^2 - 6(2m+1)x + 12m + 5 \geq 0, \forall x \in (2;+\infty)$.

$3x^2 - 6(2m+1)x + 12m + 5 \geq 0 \Leftrightarrow m \leq \dfrac{3x^2-6x+5}{12(x-1)}$

Xét hàm số $g(x) = \dfrac{3x^2-6x+5}{12(x-1)}$ với $x \in (2;\ +\infty)$.

$g'(x) = \dfrac{3x^2-6x+1}{12(x-1)^2} > 0$ với $\forall x \in (2;+\infty) \Rightarrow$ hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$.

Do đó $m \leq g(x), \forall x \in (2;+\infty) \Rightarrow m \leq g(2) \Leftrightarrow m \leq \dfrac{5}{12}$.

Vậy không có giá trị nguyên dương nào của m thỏa mãn bài toán.

Chọn đáp án (D) □

Câu 60. Tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = x^3 - mx^2 - (m-6)x + 1$ đồng biến trên khoảng $(0;4)$ là:

(A) $(-\infty;6]$. (B) $(-\infty;3)$. (C) $(-\infty;3]$. (D) $[3;6]$.

Lời giải.

$y' = 3x^2 - 2mx - (m-6)$. Để hàm số đồng biến trên khoảng $(0;4)$ thì $y' \geq 0, \forall x \in (0;4)$.

tức là $3x^2 - 2mx - (m-6) \geq 0\ \forall x \in (0;4) \Leftrightarrow \dfrac{3x^2+6}{2x+1} \geq m\ \forall x \in (0;4)$.

Xét hàm số $g(x) = \dfrac{3x^2+6}{2x+1}$ trên $(0;4)$.

$g'(x) = \dfrac{6x^2+6x-12}{(2x+1)^2}, g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \in (0;4) \\ x = -2 \notin (0;4). \end{array}\right.$

Ta có bảng biến thiên:

x	0		1		4
y'		$-$	0	$+$	
y	6		3		$\dfrac{54}{13}$

Vậy để $g(x) = \dfrac{3x^2+6}{2x+1} \geq m$, $\forall x \in (0;4)$ thì $m \leq 3$.

Chọn đáp án C

Câu 61. Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m+6)\,x + \dfrac{2}{3}$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$?

A 9. B 10. C 6. D 5.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = x^2 - 2mx + (m+6)$

Hàm số $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m+6)\,x + \dfrac{2}{3}$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$ khi và chỉ khi $f'(x) \geq 0, \forall x \in (0;+\infty)$.

Xét hàm số $y = f'(x) = x^2 - 2mx + (m+6)$ trong 3 trường hợp:

Trường hợp 1: $m = 0$, khi đó $f'(x) = x^2 + 6 > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Lúc này hàm số $f(x)$ đồng biến trên nên cũng đồng biến trên $(0;+\infty)$ (1).

Trường hợp 2: $m < 0$, ta có bảng biến thiên của hàm số $y = f'(x) = x^2 - 2mx + (m+6)$ như sau:

x	$-\infty$	m	0	$+\infty$
y	$+\infty$	$-m^2+m+6$	$m+6$	$+\infty$

$$f'(x) \geq 0, \forall x \in (0;+\infty) \Leftrightarrow \begin{cases} m+6 \geq 0 \\ m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow -6 \leq m < 0 \quad (2).$$

Trường hợp 3: $m > 0$, ta có bảng biến thiên của hàm số $y = f'(x) = x^2 - 2mx + (m+6)$ như sau:

x	$-\infty$	m	0	$+\infty$
y	$+\infty$	$m+6$	$-m^2+m+6$	$+\infty$

$$f'(x) \geq 0, \forall x \in (0;+\infty) \Leftrightarrow \begin{cases} -m^2+m+6 \geq 0 \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m \leq 3 \quad (3).$$

Từ (1), (2) và (3) suy ra có 10 giá trị nguyên của m để hàm số $f(x)=\frac{1}{3}x^3-mx^2+(m+6)x+\frac{2}{3}$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 62. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=-x^3-6x^2+(4m-9)x+4$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-1)$ là

(A) $\left(-\infty;-\frac{3}{4}\right]$. (B) $\left[-\frac{3}{4};+\infty\right)$. (C) $[0;+\infty)$. (D) $(-\infty;0]$.

Lời giải.

Ta có: $y'=-3x^2-12x+4m-9$.

Hàm số $y=-x^3-6x^2+(4m-9)x+4$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-1)$ khi và chỉ khi

$$\begin{aligned}&-3x^2-12x+4m-9\le 0,\quad \forall x\in(-\infty;-1)\\ \Leftrightarrow\ & m\le\frac{3}{4}\left(x^2+4x+3\right),\ \forall x\in(-\infty;-1)\\ \Leftrightarrow\ & m\le\frac{3}{4}\left[(x+2)^2-1\right],\ \forall x\in(-\infty;-1)\\ \Leftrightarrow\ & m\le\min_{x\in(-\infty;-1)}\left\{\frac{3}{4}\left[(x+2)^2-1\right]\right\}=-\frac{3}{4}.\end{aligned}$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 63. Cho hàm số $y=\frac{x^3}{3}-(m-1)x^2+3(m-1)x+1$. Số các giá trị nguyên của m để hàm số đồng biến trên $(1;+\infty)$ là

(A) 7. (B) 4. (C) 5. (D) 6.

Lời giải.

Ta có: $y'=x^2-2(m-1)x+3(m-1)$.

Hàm số đồng biến trên $(1;+\infty)$ khi và chỉ khi $\Leftrightarrow x^2-2(m-1)x+3(m-1)\ge 0$, $\forall x\in(1;+\infty)$.

$\Delta'=[-(m-1)]^2-3(m-1)=m^2-5m+4$.

Trường hợp 1: $\Delta'\le 0\Leftrightarrow m^2-5m+4\le 0\Leftrightarrow m\in[1;4]$. Ta được 4 giá trị nguyên của m.

Trường hợp 2: $\Delta'>0\Leftrightarrow m^2-5m+4>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m<1\\ m>4.\end{array}\right.$

Khi đó phương trình $x^2-2(m-1)x+3(m-1)=0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1<x_2\le 1$

$$\begin{aligned}&\Leftrightarrow\begin{cases}(x_1-1)+(x_2-1)<0\\ (x_1-1)(x_2-1)\ge 0\end{cases}\\ &\Leftrightarrow\begin{cases}(x_1+x_2)-2<0\\ x_1x_2-(x_1+x_2)+1\ge 0\end{cases}\\ &\Leftrightarrow\begin{cases}2(m-1)-2<0\\ 3(m-1)-2(m-1)+1\ge 0\end{cases}\\ &\Leftrightarrow\ 0\le m<2.\end{aligned}$$

Kết hợp với điều kiện ta được $0\le m<1$. Khi đó có 1 giá trị nguyên của m.

Vậy có 5 giá trị nguyên của m.

Chọn đáp án (C) □

Câu 64. Số giá trị nguyên thuộc khoảng $(-2020; 2020)$ của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3x^2 - mx + 2019$ đồng biến trên $(0; +\infty)$ là

(A) 2018. (B) 2019. (C) 2020. (D) 2017.

Lời giải.

Ta có $y' = 3x^2 - 6x - m$.

Hàm số đồng biến trên khi $y' \geq 0,\ \forall x \in (0; +\infty) \Leftrightarrow 3x^2 - 6x - m \geq 0,\ \forall x \in (0; +\infty)$

$\Leftrightarrow 3x^2 - 6x \geq m,\ \forall x \in (0; +\infty) \qquad (1)$

Xét hàm số $f(x) = 3x^2 - 6x$ trên $(0; +\infty)$

Ta có $f'(x) = 6x - 6$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$. Do đó $\min\limits_{(0;+\infty)} f(x) = f(1) = -3$

Vậy $(1) \Leftrightarrow m \leq -3$. Kết hợp với giả thiết ta được $m \in (-2020; -3]$, nên có 2017 số nguyên thỏa mãn.

Chọn đáp án (D) □

Câu 65. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc $[-2020; 2020]$ để hàm số $y = x^3 - 6x^2 + mx + 1$ đồng biến trên $(0; +\infty)$.

(A) 2004. (B) 2017. (C) 2020. (D) 2009.

Lời giải.

Ta có: $y' = 3x^2 - 12x + m$.

Hàm số đồng biến trên $(0; +\infty)$ khi và chỉ khi $y' \geq 0, \forall x \in (0; +\infty)$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \quad 3x^2 - 12x + m \geq 0, \forall x \in (0; +\infty) \\ &\Leftrightarrow \quad m \geq -3x^2 + 12x, \forall x \in (0; +\infty) \\ &\Leftrightarrow \quad m \geq \max_{(0;+\infty)} \left(-3x^2 + 12x\right) \end{aligned}$$

Đặt $g(x) = -3x^2 + 12x$. Ta có $g(x) = -3\left(x - 2\right)^2 + 12 \leq 12, \forall x \in (0; +\infty)$ nên

$$\max_{(0;+\infty)} g(x) = 12 = g(2).$$

Vậy $m \geq 12$.

Số các số nguyên m cần tìm là: $020 - 12 + 1 = 2009$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 66. Cho hàm số $f(x) = x^3 - (m+1)\,x^2 - (2m^2 - 3m + 2)\,x + 2$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m sao cho hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$?

(A) 2. (B) 3. (C) 4. (D) 5.

Lời giải.

$f(x) = x^3 - (m+1)\,x^2 - (2m^2 - 3m + 2)\,x + 2 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 2\,(m+1)\,x - (2m^2 - 3m + 2)$

Ta thấy $2m^2 - 3m + 2 > 0,\ \forall m \in \mathbb{R}$ nên $f'(x) = 3x^2 - 2\,(m+1)\,x - (2m^2 - 3m + 2) = 0$ luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m.

Do đó hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$ khi và chỉ khi $f'(x) \geq 0$ với mọi $x \in (2;+\infty)$. Điều này xảy ra khi

$$\begin{cases} 3f'(2) \geq 0 \\ x_1 < x_2 < 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3\left[3.4 - 4(m+1) - \left(2m^2 - 3m + 2\right)\right] \geq 0 \\ \dfrac{S}{2} < 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2m^2 - m + 6 \geq 0 \\ \dfrac{(m+1)}{3} < 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leq m \leq \dfrac{3}{2} \\ m < 5 \end{cases} \Leftrightarrow -2 \leq m \leq \dfrac{3}{2}.$$

Do m nguyên nên $m \in \{-2;-1;0;1\}$.

Chọn đáp án C □

Câu 67. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m thuộc $(-2020;2020)$ sao cho hàm số $y = 2x^3 + mx^2 + 2x$ đồng biến trên khoảng $(-2;0)$. Tính số phần tử của tập hợp S.

A 2025. B 2016. C 2024. D 2023.

Lời giải.

Ta có $y = 2x^3 + mx^2 + 2x \Rightarrow y' = 6x^2 + 2mx + 2$.

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-2;0) \Leftrightarrow y' = 6x^2 + 2mx + 2 \geq 0, \forall x \in (-2;0)$

$\Leftrightarrow m \leq -3x - \dfrac{1}{x}, \forall x \in (-2;0)$.

Xét hàm số $g(x) = -3x - \dfrac{1}{x}, \forall x \in (-2;0)$

$\Rightarrow g'(x) = -3 + \dfrac{1}{x^2} \Rightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow -3 + \dfrac{1}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

x	-2		$-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$		0
$g'(x)$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$\dfrac{13}{2}$	$\searrow$	$2\sqrt{3}$	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra $m \leq 2\sqrt{3}$. Mà $m \in \mathbb{Z}$, $m \in (-2020;2020)$ nên $m \in \{-2019;-2018;...;3\}$.

Vậy có 2023 giá trị nguyên của tham số m thuộc $(-2020;2020)$ sao cho hàm số $y = 2x^3 + mx^2 + 2x$ đồng biến trên khoảng $(-2;0)$.

Chọn đáp án D □

Câu 68. Với mọi giá trị $m \geq a\sqrt{b}$, thì hàm số $y = 2x^3 - mx^2 + 2x + 5$ đồng biến trên khoảng $(-2; 0)$. Khi đó $a - b$ bằng

Ⓐ 1. Ⓑ -2. Ⓒ 3. Ⓓ -5.

Lời giải.

Ta có: $y' = 6x^2 - 2mx + 2$.

Hàm số đồng biến trên khoảng $(-2; 0)$ khi $y' \geq 0, \forall x \in (-2; 0)$

$\Leftrightarrow 3x^2 - mx + 1 \geq 0, \forall x \in (-2; 0) \Leftrightarrow 3x^2 + 1 \geq mx \Leftrightarrow 3x + \dfrac{1}{x} \leq m$.

Xét hàm số $f(x) = 3x + \dfrac{1}{x}$. Ta có $f'(x) = 3 - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{3x^2 - 1}{x^2}$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{3x^2 - 1}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Bảng biến thiên của hàm số $f(x)$

x	-2		$-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$		0
$g'(x)$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	$-\dfrac{13}{2}$	↗	$-2\sqrt{3}$	↘	$-\infty$

Từ bảng biến thiên để $f(x) \leq m$, $\forall x \in (-2, ; 0)$ thì

$$\max_{(-2;0)} f(x) \leq m \Rightarrow m \geq -2\sqrt{3} \Rightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 3 \end{cases} \Rightarrow a - b = -5.$$

Chọn đáp án Ⓓ □

Dạng 4. Tìm m để hàm số khác đơn điệu trên khoảng cho trước

Câu 69. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y = \dfrac{\tan x - 2}{\tan x - m}$ đồng biến trên khoảng $\left(0; \dfrac{\pi}{4}\right)$.

Ⓐ $m \leq 0$ hoặc $1 \leq m < 2$. Ⓑ $m \leq 0$.

Ⓒ $1 \leq m < 2$. Ⓓ $m \geq 2$.

Lời giải.

Đặt $t = \tan x$, vì $x \in \left(0; \dfrac{\pi}{4}\right) \Rightarrow t \in (0; 1)$

Xét hàm số $f(t) = \dfrac{t - 2}{t - m}$, $\forall t \in (0; 1)$. Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{m\}$.

Ta có $f'(t) = \dfrac{2 - m}{(t - m)^2}$.

Ta thấy hàm số $t(x) = \tan x$ đồng biến trên khoảng $\left(0; \dfrac{\pi}{4}\right)$. Nên để hàm số $y = \dfrac{\tan x - 2}{\tan x - m}$ đồng biến trên khoảng $\left(0; \dfrac{\pi}{4}\right)$ khi và chỉ khi: $f'(t) > 0, \forall t \in (0; 1)$

$$\Leftrightarrow \frac{2-m}{(t-m)^2} > 0,\ \forall t \in (0;1) \Leftrightarrow \begin{cases} 2-m>0 \\ m \notin (0;1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<2 \\ \left[\begin{array}{l} m \le 0 \\ m \ge 1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow m \in (-\infty;0] \cup [1;2).$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 70. Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của tham số m để hàm số $y = x^3 + mx - \frac{1}{5x^5}$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$

(A) 0. (B) 4. (C) 5. (D) 3.

Lời giải.

$y' = 3x^2 + m + \frac{1}{x^6}$

Hàm số đồng biến trên $(0;+\infty)$ khi và chỉ khi $y' = 3x^2 + m + \frac{1}{x^6} \ge 0, \forall x \in (0;+\infty)$

$\Leftrightarrow -3x^2 - \frac{1}{x^6} \le m, \forall x \in (0;+\infty)$. Xét hàm số $g(x) = -3x^2 - \frac{1}{x^6} \le m,\ x \in (0;+\infty)$

$g'(x) = -6x + \frac{6}{x^7} = \frac{-6(x^8-1)}{x^7}$, $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x=1 & \\ x=-1 & \text{(loại)} \end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

x	0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	-4	$\searrow$	$-\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta có $m \ge -4$, suy ra các giá trị nguyên âm của tham số m là $-4; -3; -2; -1$

Chọn đáp án (B) □

Câu 71. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $f(x) = \frac{1}{5}m^2x^5 - \frac{1}{3}mx^3 + 10x^2 - (m^2 - m - 20)\,x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Tổng giá trị của tất cả các phần tử thuộc S bằng

(A) $\frac{5}{2}$. (B) -2. (C) $\frac{1}{2}$. (D) $\frac{3}{2}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} f'(x) &= m^2x^4 - mx^2 + 20x - \left(m^2 - m - 20\right) \\ &= m^2\left(x^4-1\right) - m\left(x^2-1\right) + 20\,(x+1) \\ &= m^2\,(x-1)\,(x+1)\left(x^2+1\right) - m\,(x-1)\,(x+1) + 20\,(x+1) \\ &= (x+1)\left[m^2\,(x-1)\left(x^2+1\right) - m\,(x-1) + 20\right]. \end{aligned}$$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x=-1 & \\ m^2\,(x-1)\left(x^2+1\right) - m\,(x-1) + 20 = 0 & (*) \end{array}\right.$

Ta có $f'(x) = 0$ có một nghiệm đơn là $x = -1$, do đó nếu $(*)$ không nhận $x = -1$ là nghiệm thì

$f'(x)$ đổi dấu qua $x = -1$. Do đó để $f(x)$ đồng biến trên thì hay $(*)$ nhận $x = -1$ làm nghiệm (bậc lẻ).

Suy ra $m^2(-1-1)(1+1) - m(-1-1) + 20 = 0 \Leftrightarrow -4m^2 + 2m + 20 = 0$.

Tổng các giá trị của m là $\dfrac{1}{2}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 72. Tập hợp các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x + 1 + \dfrac{m}{x-2}$ đồng biến trên mỗi khoảng xác định của nó là

(A) $[0;\, 1)$. (B) $(-\infty;\, 0]$. (C) $[0;\, +\infty) \setminus \{1\}$. (D) $(-\infty;\, 0)$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

Hàm số đã cho đồng biến trên mỗi khoảng xác định của nó khi và chỉ khi:

$y' \geq 0,\ \forall x \in D \Leftrightarrow 1 - \dfrac{m}{(x-2)^2} \geq 0,\ \forall x \in \mathscr{D}$

$\Leftrightarrow m \leq (x-2)^2,\ \forall x \in \mathscr{D}$.

Xét hàm số $f(x) = (x-2)^2$ ta có:

$f'(x) = 2x - 4 \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy, để hàm số đã cho đồng biến trên mỗi khoảng xác định của nó thì $m \leq 0$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 73. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số để hàm số $y = \dfrac{\cos x - 3}{\cos x - m}$ nghịch biến trên khoảng $\left(\dfrac{\pi}{2}; \pi\right)$

(A) $\left[\begin{array}{l} 0 \leq m < 3 \\ m \leq -1 \end{array}\right.$. (B) $\left[\begin{array}{l} 0 < m < 3 \\ m < -1 \end{array}\right.$. (C) $m \leq 3$. (D) $m < 3$.

Lời giải.

Điều kiện: $\cos x \neq m$. Ta có: $y' = \dfrac{(-m+3)}{(\cos x - m)^2} \cdot (-\sin x) = \dfrac{(m-3)}{(\cos x - m)^2} \cdot \sin x$

Vì $x \in \left(\dfrac{\pi}{2}; \pi\right) \Rightarrow \sin x > 0,\ (\cos x - m)^2 > 0,\ \forall x \in \left(\dfrac{\pi}{2}; \pi\right) \Rightarrow \cos x \neq m$.

Để hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{\pi}{2};\pi\right) \Leftrightarrow y' < 0,\ \forall x \in \left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m-3<0 \\ \cos x \neq m\, \forall x \in \left(\frac{\pi}{2};\pi\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m-3<0 \\ m \notin (-1;0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<3 \\ \left[\begin{array}{l} m \leq -1 \\ m \geq 0 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 \leq m < 3 \\ m \leq -1. \end{array}\right.$$

Chú ý : Tập giá trị của hàm số $y = \cos x,\ \forall x \in \left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$ là $(-1;0)$.

Chọn đáp án A □

Câu 74. Cho hàm số $y = \dfrac{(4-m)\sqrt{6-x}+3}{\sqrt{6-x}+m}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m trong khoảng $(-10;10)$ sao cho hàm số đồng biến trên $(-8;5)$?

A 14. B 13. C 12. D 15.

Lời giải.

Đặt $t = -\sqrt{6-x}$ vì $x \in (-8;5) \Rightarrow t \in \left(-\sqrt{14};-1\right)$ và $t = -\sqrt{6-x}$ đồng biến trên $(-8;5)$.

Hàm số trở thành $y = \dfrac{-(4-m)t+3}{-t+m}$ tập xác định $\Rightarrow y' = \dfrac{m^2-4m+3}{(-t+m)^2}$.

Để hàm số đồng biến trên khoảng $\left(-\sqrt{14};-1\right) \Leftrightarrow \begin{cases} m^2-4m+3>0 \\ \left[\begin{array}{l} m \leq -\sqrt{14} \\ m \geq -1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -\sqrt{14} \\ -1 \leq m < 1 \\ m > 3. \end{cases}$

$\Rightarrow m = \{-9,-8,-7,-6,-5,-4,-1,0,4,5,6,7,8,9\}$ có 14 giá trị.

Chọn đáp án A □

Câu 75. Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{4}x^4 + mx - \frac{3}{2x}$ đồng biến trên khoảng $(0;\,+\infty)$.

A 2. B 1. C 3. D 0.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}, y' = x^3 + m + \dfrac{3}{2x^2}$.

Ta có: hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(0;\,+\infty)$ khi và chỉ khi $y' \geq 0$ với $\forall x \in (0;\,+\infty)$

$\Leftrightarrow x^3 + m + \dfrac{3}{2x^2} \geq 0,\ \forall x \in (0;\,+\infty) \Leftrightarrow x^3 + \dfrac{3}{2x^2} \geq -m,\ \forall x \in (0;\,+\infty)$

$\Leftrightarrow -m \leq \min\limits_{(0;+\infty)} f(x)$,với $f(x) = x^3 + \dfrac{3}{2x^2}$ (1).

Cách 1:

Theo bất đẳng thức Cauchy ta có $f(x) = x^3 + \dfrac{3}{2x^2} = \dfrac{x^3}{2} + \dfrac{x^3}{2} + \dfrac{1}{2x^2} + \dfrac{1}{2x^2} + \dfrac{1}{2x^2} \geq 5\sqrt[5]{\dfrac{1}{2^5}} = \dfrac{5}{2}$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x = 1$. Do đó $\min\limits_{(0;\,+\infty)} f(x) = \dfrac{5}{2}$ (2).

Từ (1) và (2) ta có $-m \leq \dfrac{5}{2} \Leftrightarrow m \geq -\dfrac{5}{2}$. Do m nguyên âm nên $m = -1$ hoặc $m = -2$.

Vậy có hai giá trị nguyên âm của tham số m thỏa mãn điều kiện bài ra.

Cách 2:

Xét hàm số $f(x) = x^3 + \dfrac{3}{2x^2},\ \forall x \in (0;+\infty)$.

Ta có $f'(x) = 3x^2 - \dfrac{3}{x^3}$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Bảng biến thiên

x	0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{5}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta có $-m \leq \frac{5}{2} \Leftrightarrow m \geq -\frac{5}{2}$. Do m nguyên âm nên $m = -1$ hoặc $m = -2$.

Vậy có hai giá trị nguyên âm của tham số m thỏa mãn điều kiện bài ra.

Chọn đáp án A □

Câu 76. Cho hàm số $y = \dfrac{\ln x - 4}{\ln x - 2m}$ với m là tham số. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên dương của m để hàm số đồng biến trên khoảng $(1; \mathrm{e})$. Tìm số phần tử của S.

A 3. B 2. C 1. D 4.

Lời giải.

$y = f(x) = \dfrac{\ln x - 4}{\ln x - 2m}$.

Đặt $t = \ln x$, điều kiện $t \in (0;1)$, khi đó $g(t) = \dfrac{t-4}{t-2m}$; $g'(t) = \dfrac{-2m+4}{(t-2m)^2}$

Để hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(1; e)$ thì hàm số $g(t)$ đồng biến trên $(0;1) \Leftrightarrow g'(t) > 0,\ t \in (0;1)$

$\Leftrightarrow \dfrac{-2m+4}{(t-2m)^2} > 0, t \in (0;1) \Leftrightarrow \begin{cases} -2m+4>0 \\ 2m \notin (0;1) \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{1}{2} < m < 2 \\ m < 0 \end{array}\right.$

S là tập hợp các giá trị nguyên dương $\Rightarrow S = \{1\}$.

Vậy số phần tử của tập S là 1.

Chọn đáp án C □

Câu 77. Tìm m để hàm số $y = \dfrac{\cos x - 2}{\cos x - m}$ đồng biến trên khoảng $\left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$

A $\left[\begin{array}{l} m \geq 2 \\ m \leq -2 \end{array}\right.$. B $m > 2$. C $\left[\begin{array}{l} m \leq 0 \\ 1 \leq m < 2 \end{array}\right.$. D $-1 < m < 1$.

Lời giải.

Đặt $t = \cos x$, ta phát biểu lại bài toán như sau: Tìm m để hàm số $y = \dfrac{t-2}{t-m}$ nghịch biến trên $(0;1)$

Yêu cầu bài toán tương đương với $\begin{cases} y' = \dfrac{-m+2}{(t-m)^2} \\ -m+2<0 \\ m \notin (0;1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m > 2 \\ \left[\begin{array}{l} m \in (-\infty; 0] \\ m \in [1; +\infty) \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow m > 2.$

Chọn đáp án B □

Câu 78. Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của tham số m để hàm số $y = \dfrac{3}{4}x^4 - \dfrac{9}{2}x^2 + (2m+15)x - 3m + 1$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$?

A 2. B 3. C 5. D 4.

Lời giải.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow y' = 3x^3 - 9x + 2m + 15 \geq 0\ \forall x \in (0; +\infty) \Leftrightarrow 3x^3 - 9x + 15 \geq -2m\ \forall x \in (0; +\infty)$.

Xét hàm số: $g(x) = 3x^3 - 9x + 15$ trên $(0; +\infty)$.

Ta có: $g'(x) = 9x^2 - 9$

$g'(x) = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -1 \text{ (loại)}. \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	15	$\searrow$	9	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta có: $-2m \leq 9 \Leftrightarrow m \geq -\dfrac{9}{2}$.

Vậy $m \in \{-4; -3; -2; -1\}$.

Chọn đáp án D □

Câu 79. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = 3x + \dfrac{m^2 + 3m}{x + 1}$ đồng biến trên từng khoảng xác định của nó?

A 4. B 2. C 1. D 3.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

$y = 3x + \dfrac{m^2 + 3m}{x + 1} \Rightarrow y' = \dfrac{3\left(x+1\right)^2 - \left(m^2 + 3m\right)}{\left(x + 1\right)^2}$.

Hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định khi

$$y' \geq 0, \forall x \neq -1 \Leftrightarrow m^2 + 3m \leq 0 \Leftrightarrow -3 \leq m \leq 0.$$

Do $\Rightarrow m \in \{-3; -2; -1; 0\}$.

Vậy có 4 giá trị nguyên của m thỏa yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án A □

Câu 80. Tìm m để hàm số $y = \dfrac{\cos x - 2}{\cos x - m}$ nghịch biến trên khoảng $\left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$

A $m > 2$. B $\left[\begin{array}{l} m \leq 0 \\ 1 \leq m < 2 \end{array}\right.$. C $m < 2$. D $m \leq 2$.

Lời giải.

Đặt $t = \cos x$.

Ta có: $t' = -\sin x < 0,\ \forall x \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$.

$\Rightarrow$ Hàm số $t = \cos x$ nghịch biến trên khoảng $\left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Do đó hàm số $y=\dfrac{\cos x-2}{\cos x-m}$ nghịch biến trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$ $\Leftrightarrow$ hàm số $y=\dfrac{t-2}{t-m}$ đồng biến trên khoảng $(0;1)$.

Tập xác định $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{m\}$.

Hàm số $y=\dfrac{t-2}{t-m}$ đồng biến trên khoảng $(0;1)$ khi và chỉ khi

$$y'=\dfrac{2-m}{(t-m)^2}>0,\ \forall t\in(0;1)\Leftrightarrow\begin{cases}2-m>0\\ \left[\begin{array}{l}1\le m\\ m\le 0\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<2\\ \left[\begin{array}{l}1\le m\\ m\le 0\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}1\le m<2\\ m\le 0.\end{array}\right.$$

Vậy với $\left[\begin{array}{l}m\le 0\\ 1\le m<2\end{array}\right.$ thì hàm số $y=\dfrac{\cos x-2}{\cos x-m}$ nghịch biến trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Chọn đáp án B $\square$

Câu 81. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $y=8^{\cot x}+(m-3)\,2^{\cot x}+3m-2$ (1) đồng biến trên $\left[\dfrac{\pi}{4};\pi\right)$.

A $-9\le m<3$. B $m\le 3$. C $m\le -9$. D $m<-9$.

Lời giải.

Đặt $2^{\cot x}=t$ vì $x\in\left[\dfrac{\pi}{4};\pi\right)$ nên $0<t\le 2$.

Khi đó ta có hàm số: $y=t^3+(m-3)\,t+3m-2$ (2).

$\Rightarrow y'=3t^2+m-3$.

Để hàm số (1) đồng biến trên $\left[\dfrac{\pi}{4};\pi\right)$ thì hàm số (2) phải nghịch biến trên $(0;2]$

hay $3t^2+m-3\le 0,\ \forall t\in(0;2]\Leftrightarrow m\le 3-3t^2,\ \forall t\in(0;2]$.

Xét hàm số $f(t)=3-3t^2,\ \forall t\in(0;2]\Rightarrow f'(t)=-6t$.

$f'(t)=0\Leftrightarrow t=0$.

Ta có bảng biến thiên:

x	0		2
y'		$-$	
y	3	$\searrow$	-9

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy $-9\le f(t)<3,\ \forall t\in(0;2]$.

Vậy hàm số (1) đồng biến trên $\left[\dfrac{\pi}{4};\pi\right)$ khi $m\le -9$.

Chọn đáp án C $\square$

Câu 82. Cho hàm số $y=\dfrac{\ln x-4}{\ln x-2m}$ với m là tham số. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên dương của m để hàm số đồng biến trên khoảng $(1;\mathrm{e})$. Tìm số phần tử của S.

A 2. B 4. C 3. D 1.

Lời giải.

Điều kiện $\ln x - 2m \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \frac{1}{2}\ln x$.

Do $x \in (1;\mathrm{e})$ nên $\ln x \in (0;1) \Rightarrow m \in (-\infty;0] \cup \left[\frac{1}{2};+\infty\right)$.

Ta có $y' = \dfrac{\frac{1}{x}(4-2m)}{(\ln x - 2m)^2}$.

Để hàm số đồng biến trên khoảng $(0;1)$ thì $y' > 0$ với mọi $x \in (0;1)$

$\Leftrightarrow \dfrac{\frac{1}{x}(4-2m)}{(\ln x - 2m)^2} > 0 \Leftrightarrow 4 - 2m > 0 \Leftrightarrow m < 2$.

Do m là số nguyên dương nên $m = 1$.

Chọn đáp án D □

Câu 83. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \dfrac{m\ln x - 2}{\ln x - m - 1}$ nghịch biến trên $(e^2;+\infty)$.

A. $m \leq -2$ hoặc $m = 1$.
B. $m < -2$ hoặc $m = 1$.
C. $m < -2$.
D. $m < -2$ hoặc $m > 1$.

Lời giải.

Tập xác định $D = (0;+\infty) \setminus \{e^{m+1}\}$.

Cách 1: $y' = \dfrac{-m^2 - m + 2}{x(\ln x - m - 1)^2}$.

Vậy yêu cầu bài toán tương đương $\begin{cases} -m^2 - m + 2 < 0 \\ e^{m+1} \notin (e^2;+\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m > 1 \\ m < -2 \end{array}\right. \\ m + 1 \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow m < -2$

Cách 2: Đặt $t = \ln x$, ta thấy rằng hàm số $f(x) = \ln x$ đồng biến trên $(e^2;+\infty)$.

Xét hàm số $g(t) = \dfrac{mt - 2}{t - m - 1}$ với $t \in (2;+\infty)$, ta có $g'(t) = \dfrac{-m^2 - m + 2}{(t - m - 1)^2}$.

Vậy hàm số đã cho nghịch biến trên $(e^2;+\infty) \Leftrightarrow$ hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(2;+\infty)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} g'(t) < 0 \\ m + 1 \notin (2;+\infty) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -m^2 - m + 2 < 0 \\ m + 1 \leq 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m > 1 \\ m < -2 \end{array}\right. \\ m + 1 \leq 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m > 1 \\ m < -2 \end{array}\right. \\ m \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow m < -2.$$

Chọn đáp án C □

Câu 84. Có bao nhiêu số nguyên âm m để hàm số $y = \dfrac{1}{3}\cos^3 x - 4\cot x - (m+1)\cos x$ đồng biến trên khoảng $(0;\pi)$?

Ⓐ 5. Ⓑ 2. Ⓒ vô số. Ⓓ 3.

Lời giải.

Ta có: $y' = -\cos^2 x \cdot \sin x + \dfrac{4}{\sin^2 x} + (m+1)\cdot\sin x = \sin^3 x + \dfrac{4}{\sin^2 x} + m\cdot\sin x$.

Hàm số đồng biến trên $(0;\pi)$ khi và chỉ khi $y' \geq 0,\ \forall x \in (0;\pi)$

$\Leftrightarrow \sin^3 x + \dfrac{4}{\sin^2 x} + m.\sin x \geq 0,\ \forall x \in (0;\pi)$

$\Leftrightarrow \sin^2 x + \dfrac{4}{\sin^3 x} \geq -m,\ \forall x \in (0;\pi)$ (1).

Xét hàm số $g(x) = \sin^2 x + \dfrac{4}{\sin^3 x}$, trên $(0;\pi)$.

Có $g'(x) = 2\sin\cdot\cos x - \dfrac{12\cos x}{\sin^4 x} = 2\cos x\cdot\left(\sin x - \dfrac{6}{\sin^4 x}\right) = 2\cos x\cdot\dfrac{\sin^5 x - 6}{\sin^4 x}$

$\Rightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} \in (0;\pi)$.

Bảng biến thiên:

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	5	$\nearrow$	$+\infty$

Do đó: (1) $\Leftrightarrow -m \leq \min\limits_{x\in(0;\pi)} g(x) \Leftrightarrow -m \leq 5 \Leftrightarrow m \geq -5$.

Lại do m nguyên âm nên $m \in \{-5;-4;-3;-2;-1\}$. Vậy có 5 số nguyên âm.

Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 85. Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của m để hàm số $y = x + 5 + \dfrac{1-m}{x-2}$ đồng biến trên $[5\,;+\infty)$?

Ⓐ 10. Ⓑ 8. Ⓒ 9. Ⓓ 11.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathscr{D} = \mathbb{R}$. Đạo hàm $y' = 1 + \dfrac{m-1}{(x-2)^2} = \dfrac{x^2 - 4x + m + 3}{(x-2)^2}$.

Xét hàm số $f(x) = x^2 - 4x + 3$ trên $[5;+\infty)$.

Đạo hàm $f'(x) = 2x - 4$. Có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2 \Rightarrow y = -1$. Ta có: $f(5) = 8$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		2		5		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	8	$\nearrow$	$+\infty$

Do $(x-2)^2 > 0$ với mọi $x \in [5;+\infty)$ nên $y' \geq 0$, $\forall x \in [5;+\infty)$ khi và chỉ khi $f(x) \geq -m$, $\forall x \in [5\,;\,+\infty)$. Dựa vào bảng biến thiên ta có: $-m \leq 8 \Leftrightarrow m \geq -8$.

Mà m nguyên âm nên ta có: $m \in \{-8;-7;-6;-5;-4;-3;-2;-1\}$.

Vậy có 8 giá trị nguyên âm của m để hàm số $y = x + 5 + \dfrac{1-m}{x-2}$ đồng biến trên $[5;+\infty)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 86. (Chuyên Vĩnh Phúc-2018) Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y = \dfrac{3}{4}x^4 - (m-1)\,x^2 - \dfrac{1}{4x^4}$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

(A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4.

Lời giải.

Ta có $y' = 3x^3 - 2\,(m-1)\,x + \dfrac{1}{x^5}$.

Hàm số đồng biến trong khoảng $(0;\,+\infty)$ khi và chỉ khi $y' \geq 0$ với $\forall x \in (0;\,+\infty)$.

Có $y' \geq 0 \Leftrightarrow 2\,(m-1) \leq 3x^2 + \dfrac{1}{x^6}$.

Xét $g(x) = 3x^2 + \dfrac{1}{x^6}$ với $\forall x \in (0;\,+\infty)$. Ta có $g'(x) = 6x - \dfrac{6}{x^7}$; $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Bảng biến thiên:

x	0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$

Ta có $2\,(m-1) \leq g(x) \Leftrightarrow 2\,(m-1) \leq 4 \Leftrightarrow m \leq 3$.

Vì m nguyên dương nên $m \in \{1;2;3\}$.

Vậy có 3 giá trị m nguyên dương thỏa mãn bài toán.

Chọn đáp án (C) □

Câu 87. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y = \dfrac{x^2}{2} - mx + \ln(x-1)$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$?

(A) 3. (B) 4. (C) 2. (D) 1.

Lời giải.

Ta có $y' = x - m + \dfrac{1}{x-1}$.

Để hàm số $y = \dfrac{x^2}{2} - mx + \ln(x-1)$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$ thì $y' \geq 0$ với $\forall x \in (1;+\infty)$

$\Leftrightarrow x + \dfrac{1}{x-1} \geq m$ với $\forall x \in (1;+\infty) \Rightarrow m \leq \min\limits_{(1;+\infty)} f(x)$.

Xét hàm số $f(x) = x + \dfrac{1}{x-1}$ trên khoảng $(1;+\infty)$ ta có

$f(x) = x - 1 + \dfrac{1}{x-1} + 1 \geq 2\sqrt{(x-1)\dfrac{1}{(x-1)}} + 1 \geq 3 \Rightarrow \min\limits_{(1;+\infty)} f(x) = 3$.

Do $m \in \mathbb{Z}^+$ nên $m \in \{1;2;3\}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 88. Có bao nhiêu giá trị nguyên $m \in (-10; 10)$ để hàm số $y = m^2x^4 - 2(4m-1)x^2 + 1$ đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$?

(A) 15. (B) 6. (C) 7. (D) 16.

Lời giải.

Với $m = 0$, hàm số trở thành $y = 2x^2 + 1$ đồng biến trên $(0; +\infty)$ nên hàm số cũng đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$, do đó $m = 0$ thỏa mãn.

Với $m \neq 0$, hàm số đã cho làm hàm số trùng phương với hệ số $a = m^2 > 0$.

$$y' = 4m^2x^3 - 4(4m-1)x = 4x\left(m^2x^2 - 4m + 1\right), y' = 0 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = \dfrac{4m-1}{m^2}. \end{array}\right.$$

Để hàm số đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$ thì phương trình $x^2 = \dfrac{4m-1}{m^2}$ vô nghiệm hoặc có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 sao cho $-1 \leq x_1 < x_2 \leq 1$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4m - 1 \leq 0 \\ \left\{\begin{array}{l} 4m - 1 > 0 \\ \sqrt{\dfrac{4m-1}{m^2}} \leq 1 \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \leq \dfrac{1}{4} \\ \left\{\begin{array}{l} m > \dfrac{1}{4} \\ -m^2 + 4m - 1 \leq 0 \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} m \leq \dfrac{1}{4} \\ \left[\begin{array}{l} \dfrac{1}{4} < m < 2 - \sqrt{3} \\ m > 2 + \sqrt{3} \end{array}\right. \end{array}\right..$$

Vậy điều kiện để hàm số đồng biến trên $(1; +\infty)$ là $m \in \left(-\infty; 2 - \sqrt{3}\right) \cup \left(2 + \sqrt{3}; +\infty\right)$.

Vì m nguyên, $m \in (-10; 10)$ nên $m \in \{-9; -8; ...; 0; 4; 5; ...; 9\}$, có 6 giá trị.

Chọn đáp án (D) □

Câu 89. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-2018; 2018]$ để hàm số $y = \sqrt{x^2+1} - mx - 1$ đồng biến trên $(-\infty; +\infty)$.

(A) 2017. (B) 2019. (C) 2020. (D) 2018.

Lời giải.

$y' = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} - m.$

Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}, \Leftrightarrow m \leq \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}, \forall x \in \mathbb{R}.$ (1)

Xét $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ trên $\mathbb{R}$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -1$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$.

$f'(x) = \dfrac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, nên hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		$+\infty$
y'		$+$	
y	-1	$\nearrow$	1

Ta có: $m \leq \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}, \Leftrightarrow m \leq -1$.
Mặt khác $m \in [-2018;\ 2018] \Rightarrow m \in [-2018;\ -1]$.
Vậy có 2018 số nguyên m thoả điều kiện.
Chọn đáp án D □

Câu 90. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $y = 2^{\frac{mx+1}{x+m}}$ nghịch biến trên $\left(\dfrac{1}{2}; +\infty\right)$.

A $m \in (-1; 1)$. B $m \in \left(\dfrac{1}{2}; 1\right)$. C $m \in \left[\dfrac{1}{2}; 1\right]$. D $m \in \left[-\dfrac{1}{2}; 1\right)$.

Lời giải.

Hàm số $y = 2^{\frac{mx+1}{x+m}}$ nghịch biến trên $\left(\dfrac{1}{2}; +\infty\right)$ khi và chỉ khi hàm số $y = \dfrac{mx+1}{x+m}$ nghịch biến trên $\left(\dfrac{1}{2}; +\infty\right)$.
Xét hàm số $y = \dfrac{mx+1}{x+m}$, ta có: $y' = \dfrac{m^2-1}{(x+m)^2}$.
Hàm số $y = \dfrac{mx+1}{x+m}$ nghịch biến trên $\left(\dfrac{1}{2}; +\infty\right)$ khi và chỉ khi

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 1 < 0 \\ -m \leq \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < m < 1 \\ m \geq -\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow -\dfrac{1}{2} \leq m < 1.$$

Chọn đáp án D □

Câu 91. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \dfrac{x^2+2x+m}{x-1}$ nghịch biến trên khoảng $(1; 3)$ và đồng biến trên khoảng $(4; 6)$.

A 6. B 7. C 5. D 4.

Lời giải.

Ta có $y' = \dfrac{x^2-2x-2-m}{(x-1)^2}$.
Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1; 3)$ và đồng biến trên khoảng $(4; 6)$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} y' \leq 0, \forall x \in (1; 3) \\ y' \geq 0, \forall x \in (4; 6) \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x - 2 - m \leq 0, \forall x \in (1; 3) \\ x^2 - 2x - 2 - m \geq 0, \forall x \in (4; 6) \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \geq x^2 - 2x - 2, \forall x \in (1; 3) \\ m \leq x^2 - 2x - 2, \forall x \in (4; 6) \end{cases} \quad (*)$$

Xét hàm số $g(x) = x^2 - 2x - 2$, $g'(x) = 2x - 2$ ta có bảng biến thiên của $g(x)$ như sau

x	$-\infty$		1	3	4	6	$+\infty$
y'		$+$	0		$-$		
y	$+\infty$	$\searrow$	-3	1	6	18	$+\infty$

Từ bảng biến thiên của $g(x)$ ta có $(*) \Leftrightarrow 1 \leq m \leq 6$, và vì m là số nguyên nên chọn $m \in \{1;2;3;4;5;6\}$. Vậy có 6 giá trị nguyên của m thỏa mãn bài toán.

Chọn đáp án (A) □

Câu 92. Cho hàm số $y = \dfrac{\sqrt{1-\ln x}+1}{\sqrt{1-\ln x}+m}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc $[-5;5]$ để hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}^3};1\right)$.

(A) 7. (B) 6. (C) 5. (D) 4.

Lời giải.

Ta có đạo hàm của $y = \dfrac{\sqrt{1-\ln x}+1}{\sqrt{1-\ln x}+m}$ là $y' = \dfrac{1-m}{2x\sqrt{1-\ln x}(\sqrt{1-\ln x}+m)^2}$.

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}^3};1\right)$ khi và chỉ khi $y' > 0, \forall x \in \left(\dfrac{1}{\mathrm{e}^3};1\right)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1-m>0 \\ \sqrt{1-\ln x}+m \neq 0, \forall x \in \left(\dfrac{1}{\mathrm{e}^3};1\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<1 \\ \sqrt{1-\ln x}+m \neq 0, \forall x \in \left(\dfrac{1}{\mathrm{e}^3};1\right) \end{cases} (*)$$

Xét hàm số $g(x) = \sqrt{1-\ln x}, x \in \left(\dfrac{1}{\mathrm{e}^3};1\right)$, ta có $g'(x) = \dfrac{-1}{2x\sqrt{1-\ln x}} < 0, \forall x \in \left(\dfrac{1}{\mathrm{e}^3};1\right)$ do đó ta có bảng biến thiên của hàm số $g(x)$ như sau

x	$-\infty$	$\frac{1}{\mathrm{e}^3}$		1	$+\infty$
$g'(x)$			$-$		
$g(x)$		-2	$\searrow$	1	

Qua bảng biến thiên ta có $(*) \Leftrightarrow \begin{cases} m<1 \\ m \notin (-2;-1) \end{cases}$, kết hợp với $m \in [-5;5]$ ta có 6 giá trị nguyên của m là $m \in \{-5;-4;-3;-2;-1;0\}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 93. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để hàm số $y = \dfrac{\ln x - 6}{\ln x - 2m}$ đồng biến trên khoảng $(1;\mathrm{e})$?

(A) 2. (B) 1. (C) 4. (D) 3.

Lời giải.

Chọn A

Đặt $t=\ln x$ thì $t=\ln x$ đồng biến trên khoảng $(1;\mathrm{e})$ và $t\in(0;1)$

Ta được hàm số $f(t)=\dfrac{t-6}{t-2m}$. Điều kiện $t\neq 2m$ và $f'(t)=\dfrac{6-2m}{(t-2m)^2}$.

Hàm số $y=\dfrac{\ln x-6}{\ln x-2m}$ đồng biến trên khoảng $(1;\mathrm{e})$ khi và chỉ khi hàm số $f(t)=\dfrac{t-6}{t-2m}$ đồng biến trên khoảng $(0;1)$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}2m\notin(0;1)\\ f'(t)>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}2m\geq 1\\ 2m\leq 0\end{array}\right.\\ 6-2m>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}m\geq\dfrac{1}{2}\\ m\leq 0\end{array}\right.\\ m<3\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\dfrac{1}{2}\leq m<3\\ m\leq 0.\end{array}\right.$$

Vì m nguyên dương nên $m\in\{1;2\}$.

Vậy có 2 giá trị nguyên dương của m để hàm số $y=\dfrac{\ln x-6}{\ln x-2m}$ đồng biến trên khoảng $(1;\mathrm{e})$.

Chọn đáp án A □

Câu 94. Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $f(x)=m\left(2020+x-2\cos x\right)+\sin x-x$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

A Vô số. B 2. C 1. D 0.

Lời giải.

Ta có: Hàm số $f(x)=m\left(2020+x-2\cos x\right)+\sin x-x$ nghịch biến trên khi và chỉ khi

$f'(x)\leq 0,\ \forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow m(2\sin x+1)+\cos x-1\leq 0,\ \forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow 2m\sin x+\cos x\leq 1-m\quad(1).$

Ta lại có:

$2m\sin x+\cos x\leq\sqrt{\left(4m^2+1\right)\left(\sin^2x+\cos^2x\right)}=\sqrt{4m^2+1}$

$\Rightarrow 2m\sin x+\cos x\leq\sqrt{4m^2+1}$. Dấu bằng xảy ra khi $2m\cos x=\sin x$

Do đó

$$(1)\Leftrightarrow\sqrt{4m^2+1}\leq 1-m\Leftrightarrow\begin{cases}1-m\geq 0\\ 4m^2+1\leq 1-2m+m^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\leq 1\\ 3m^2+2m\leq 0\end{cases}\Leftrightarrow -\dfrac{2}{3}\leq m\leq 0.$$

Chọn đáp án C □

Câu 95. Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\ln(x^2+4)+mx+12$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ là

A $\left[\dfrac{1}{2};+\infty\right)$. B $\left(-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right)$. C $\left(-\infty;-\dfrac{1}{2}\right]$. D $\left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D}=\mathbb{R}$

Ta có $y'=\dfrac{2x}{x^2+4}+m$. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}\Leftrightarrow\dfrac{2x}{x^2+4}+m\geq 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

$\Leftrightarrow m\geq-\dfrac{2x}{x^2+4}$.

Xét $f(x)=\dfrac{-2x}{x^2+4}$. Ta có: $f'(x)=\dfrac{2(x^2-4)}{(x^2+4)}=0\Leftrightarrow x=\pm 2$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	0	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow$	0

Vậy giá trị m cần tìm là $m \geq \dfrac{1}{2}$

Chọn đáp án (A) □

Câu 96. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $y = |x^3 - mx^2 + 12x + 2m|$ luôn đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$?

(A) 18. (B) 19. (C) 21. (D) 20.

Lời giải.

Xét $f(x) = x^3 - mx^2 + 12x + 2m$. Ta có $f'(x) = 3x^2 - 2mx + 12$ và $f(1) = 13 + m$.

Để hàm số $y = |x^3 - mx^2 + 12x + 2m|$ đồng biến trên khoảng $(1\,;\,+\infty)$ thì có hai trường hợp sau

Trường hợp 1: Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên $(1\,;\,+\infty)$ và $f(1) \leq 0$.

Điều này không xảy ra vì $\lim\limits_{x\to+\infty} (x^3 - mx^2 + 12x + 2m) = +\infty$.

Trường hợp 2: Hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(1\,;\,+\infty)$ và $f(1) \geq 0$.

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 2mx + 12 \geq 0\,,\ \forall x > 1 \\ 13 + m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq \dfrac{3}{2}x + \dfrac{6}{x}\,,\ \forall x > 1 \\ m \geq -13 \quad (*) \end{cases}.$

Xét $g(x) = \dfrac{3}{2}x + \dfrac{6}{x}$ trên khoảng $(1; +\infty)$: $g'(x) = \dfrac{3}{2} - \dfrac{6}{x^2}$; $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{3}{2} - \dfrac{6}{x^2} = 0 \Rightarrow x = 2$.

Bảng biến thiên:

x	1		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$\frac{15}{2}$	$\searrow$	6	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra $m \leq \dfrac{3}{2}x + \dfrac{6}{x}$, $\forall x > 1 \Leftrightarrow m \leq 6$.

Kết hợp $(*)$ suy ra $-13 \leq m \leq 6$. Vì m nguyên nên $m \in \{-13; -12; -11; ...; 5; 6\}$. Vậy có 20 giá trị nguyên của m.

Chọn đáp án (D) □

Câu 97. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc khoảng $(-8; 8)$ sao cho hàm số $y = |-2x^3 + 3mx - 2|$ đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$?

(A) 10. (B) 9. (C) 8. (D) 11.

Lời giải.

$f(x) = -2x^3 + 3mx - 2$

$f'(x) = -6x^2 + 3m$

Nếu $m \leq 0 : f'(x) \leq 0, \forall x \Rightarrow$ hàm số $f(x)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Hàm số $y = |f(x)|$ đồng biến trên $(1; +\infty) \Leftrightarrow f(1) \leq 0 \Leftrightarrow m \leq \dfrac{4}{3} \Rightarrow m \leq 0$.

Nếu $m > 0 : f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\dfrac{m}{2}}$.

x	$-\infty$		$-\sqrt{\frac{m}{2}}$		$\sqrt{\frac{m}{2}}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-2m\sqrt{\frac{m}{2}} - 2$	$\nearrow$	$2m\sqrt{\frac{m}{2}} - 2$	$\searrow$	$-\infty$

Hàm số $y = |f(x)|$ đồng biến trên $(1; +\infty)$ khi và chỉ khi

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sqrt{\dfrac{m}{2}} > 1 \\ f\left(\sqrt{\dfrac{m}{2}}\right) = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} \sqrt{\dfrac{m}{2}} = 1 \\ f\left(\sqrt{\dfrac{m}{2}}\right) \leq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} \sqrt{\dfrac{m}{2}} < 1 \\ f(1) \leq 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sqrt{\dfrac{m}{2}} > 1 \\ m = \sqrt[3]{2}(L) \end{cases} \\ \begin{cases} m = 2(\mathrm{L}) \\ 2m\sqrt{\dfrac{m}{2}} - 2 \leq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} m < 2 \\ m \leq \dfrac{4}{3} \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow 0 < m \leq \frac{4}{3}.$$

Mà $m \in \mathbb{Z}$, $m \in (-8; 8) \Rightarrow m \in \{-7; -6; ...; -1; 0; 1\}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 98. Gọi T là tập hợp tất cả các giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 1$ đồng biến trên khoảng $(3; +\infty)$. Tổng giá trị các phần tử của T bằng

(A) 9. (B) 45. (C) 55. (D) 36.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = 4x^3 - 4mx = 4x(x^2 - m)$

Theo đề $m > 0$ nên $y' = 0$ có 3 nghiệm phân biệt $x = -\sqrt{m}, x = 0, x = \sqrt{m}$.

x	$-\infty$		$-\sqrt{m}$		0		$\sqrt{m}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Để hàm số đồng biến trên khoảng $(3;+\infty)$ thì $y' \geq 0, \forall x \in (3;+\infty) \Leftrightarrow \sqrt{m} \leq 3 \Leftrightarrow m \leq 9$.

Vì m nguyên dương nên $m = 1,2,3,4,5,6,7,8,9$ (là cấp số cộng).

Vậy tổng giá trị các phần tử của T bằng $\dfrac{9}{2}(1+9) = 45$.

Chọn đáp án B □

Câu 99. Tìm tập hợp tất cả các giá trị của m để hàm số $y = \dfrac{m - \sin x}{\cos^2 x}$ nghịch biến trên $\left(0;\dfrac{\pi}{6}\right)$.

A $m \geq 1$. B $m \leq 2$. C $m \leq \dfrac{5}{4}$. D $m \leq 0$.

Lời giải.

Ta có $y' = \dfrac{-\cos^2 x + 2m\sin x - 2\sin^2 x}{\cos^3 x} = \dfrac{-1 + 2m\sin x - \sin^2 x}{\cos^3 x}$

Để hàm số nghịch biến trên $\left(0;\dfrac{\pi}{6}\right)$ thì

$y' \leq 0, \forall x \in \left(0;\dfrac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow -\sin^2 x + 2m\sin x - 1 \leq 0, \forall x \in \left(0;\dfrac{\pi}{6}\right)$, vì $\cos^3 x > 0, \forall x \in \left(0;\dfrac{\pi}{6}\right)$ (1)

Đặt $\sin x = t$, $t \in \left(0;\dfrac{1}{2}\right)$.

Khi đó (1) $\Leftrightarrow -t^2 + 2mt - 1 \leq 0, \forall t \in \left(0;\dfrac{1}{2}\right) \Leftrightarrow m \leq \dfrac{t^2+1}{2t}, \forall t \in \left(0;\dfrac{1}{2}\right)$ (2)

Ta xét hàm $f(t) = \dfrac{t^2+1}{2t}$, $\forall t \in \left(0;\dfrac{1}{2}\right)$

Ta có $f'(t) = \dfrac{2(t^2-1)}{4t^2} < 0$, $\forall t \in \left(0;\dfrac{1}{2}\right)$.

Bảng biến thiên

x	0		$\frac{1}{2}$
y'		$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{5}{4}$

Từ bảng biến thiên suy ra (2) $\Leftrightarrow m \leq \dfrac{5}{4}$.

Chọn đáp án C □

Câu 100. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = 3x^2 + 6x + 4$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên thuộc $(-2020;2020)$ của tham số m để hàm số $g(x) = f(x) - (2m+4)x - 5$ nghịch biến trên $(0;2)$?

A 2008. B 2007. C 2018. D 2019.

Lời giải.

Ta có $g'(x) = f'(x) - (2m+4)$.

Hàm số $g(x) = f(x) - (2m+4)x - 5$ nghịch biến trên $(0;2)$ khi $g'(x) \leq 0, \forall x \in (0;2)$

$\Leftrightarrow f'(x) - (2m+4) \leq 0, \forall x \in (0;2) \Leftrightarrow 3x^2 + 6x + 4 \leq 2m + 4, \forall x \in (0;2)$.

Xét hàm số $h(x) = 3x^2 + 6x + 4 \Rightarrow h'(x) = 6x + 6$. Ta có bảng biến thiên

x	0		2
y'		$+$	
y	4	$\searrow$	28

Vậy $2m+4 \geq 28 \Leftrightarrow m \geq 12$. Vì m nguyên thuộc $(-2020; 2020)$ nên có 2008 giá trị thỏa mãn.

Chọn đáp án (A) □

Câu 101. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m$thuộc đoạn $[-10; 10]$ sao cho hàm số $y = \dfrac{x^4}{4} - \dfrac{mx^3}{3} - \dfrac{x^2}{2} + mx + 2020$ nghịch biến trên khoảng $(0; 1)$?

(A) 12. (B) 11. (C) 9. (D) 10.

Lời giải.

Ta có $y' = x^3 - mx^2 - x + m$. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(0; 1)$ khi và chỉ khi $y' \leq 0, \forall x \in (0; 1)$ hay $x^3 - x \leq m\left(x^2 - 1\right), \forall x \in (0; 1)$.

Vì $\forall x \in (0; 1)$, $x^2 - 1 < 0$ nên $x^3 - x \leq m\left(x^2 - 1\right), \forall x \in (0; 1) \Leftrightarrow m \leq x, \forall x \in (0; 1) \Leftrightarrow m \leq 0$.

Mặt khác $m \in \mathbb{Z}$, $m \in [-10; 10]$ nên có $0 - (-10) = 11$ giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án (B) □

Câu 102. Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $f(x) = m\,(2020 + x - 2\cos x) + \sin x - x$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

(A) Vô số. (B) 2. (C) 1. (D) 0.

Lời giải.

Ta có $f(x) = \sin x - 2m\cos x + (m-1)\,x + 2020m$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$.

Cần tìm m nguyên để $f'(x) = \cos x + 2m\sin x + m - 1 \leq 0, \forall x$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - m \geq 0 \\ 1 + 4m^2 \leq 1 - 2m + m^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 1 \\ -\dfrac{2}{3} \leq m \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\dfrac{2}{3} \leq m \leq 0.$$

Vì $m \in \mathbb{Z}$ nên $m = 0$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 103. Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số thực m để hàm số $y = \ln\left(x^2 + 4\right) + mx + 12$ đồng biến trên là

(A) $\left[\dfrac{1}{2}; +\infty\right)$. (B) $\left(-\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{2}\right)$. (C) $\left(-\infty; -\dfrac{1}{2}\right]$. (D) $\left(\dfrac{1}{2}; +\infty\right)$.

Lời giải.

Ta có $y' = \dfrac{2x}{x^2 + 4} + m$.

Hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ (vì $y' = 0$ chỉ có hữu hạn nghiệm)

$\Leftrightarrow \dfrac{2x}{x^2 + 4} + m \geq 0 \Leftrightarrow m \geq -\dfrac{2x}{x^2 + 4}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Ta có $-\dfrac{1}{2}-\dfrac{2x}{x^2+4}=-\dfrac{(x+2)^2}{2(x^2+4)}\leq 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$, suy ra $-\dfrac{2x}{x^2+4}\leq\dfrac{1}{2},\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Do đó, $m\geq-\dfrac{2x}{x^2+4}\ \forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow m\geq\dfrac{1}{2}$.

Chọn đáp án A □

Câu 104. Tìm tất cả các giá trị thực của m để hàm số $y=2^{x^3-x^2+mx+1}$ đồng biến trên $(1;2)$.

A $m>-8$. B $m\geq-1$. C $m\leq-8$. D $m<-1$.

Lời giải.

Ta có: $y'=(3x^2-2x+m)\,2^{x^3-x^2+mx+1}\cdot\ln 2$

Hàm số đồng biến trên $(1;2)\Leftrightarrow y'\geq 0,\ \forall x\in(1;2)$

$$\begin{aligned}&\Leftrightarrow\ \left(3x^2-2x+m\right)2^{x^3-x^2+mx+1}\cdot\ln 2\geq 0,\ \forall x\in(1;2)\\&\Leftrightarrow\ 3x^2-2x+m\geq 0,\ \forall x\in(1;2)\\&\Leftrightarrow\ m\geq-3x^2+2x,\ \forall x\in(1;2)\\&\Leftrightarrow\ m\geq\max_{(1;2)}\left(-3x^2+2x\right)\end{aligned}$$

Xét hàm số $f(x)=-3x^2+2x$, với $x\in(1;2)$.

Ta có: $f'(x)=-6x+2$.

Cho $f'(x)=0\Leftrightarrow-6x+2=0\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{3}$.

Bảng biến thiên:

x	1		2
y'		$-$	
y	-1	$\searrow$	-9

Vậy $m\geq-1$ thỏa yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án B □

BẢNG ĐÁP ÁN

1. A	2. D	3. B	4. C	5. D	6. A	7. A	8. A	9. C	10. A
11. C	12. D	13. C	14. D	15. B	16. C	17. A	18. B	19. D	20. C
21. B	22. D	23. C	24. B	25. D	26. B	27. B	28. A	29. A	30. A
31. C	32. A	33. B	34. C	35. B	36. B	37. D	38. C	39. B	40. D
41. D	42. B	43. B	44. B	45. C	46. D	47. D	48. A	49. A	50. D
51. C	52. D	53. C	54. B	55. B	56. C	57. A	58. A	59. D	60. C
61. B	62. A	63. C	64. D	65. D	66. C	67. D	68. D	69. A	70. B
71. C	72. B	73. A	74. A	75. A	76. C	77. B	78. D	79. A	80. B
81. C	82. D	83. C	84. A	85. B	86. C	87. A	88. D	89. D	90. D

91. A	92. B	93. A	94. C	95. A	96. D	97. B	98. B	99. C	100. A
101. B	102. C	103. A	104. B						

MỨC ĐỘ 3. MỨC 9,10 ĐIỂM

Dạng 1. Tìm m để hàm số đơn điệu trên các khoảng xác định của nó

Đang thiếu bài thầy Jf Câu 1 đến 26

Dạng 2. Tìm khoảng đơn điệu của hàm số $g(x) = f[u(x)] + v(x)$ khi biết đồ thị hoặc bảng biến thiên của hàm số $y = f'(x)$

Câu 1 (Đề tham khảo 2019). Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau

x	$-\infty$		1		2		3		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $y = 3f(x+2) - x^3 + 3x$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

(A) $(-\infty; -1)$. (B) $(-1; 0)$. (C) $(0; 2)$. (D) $(1; +\infty)$.

Lời giải.

Ta có $y' = 3\left[f'(x+2) - (x^2 - 3)\right]$.

Với $x \in (-1; 0) \Rightarrow x + 2 \in (1; 2) \Rightarrow f'(x+2) > 0$, lại có $x^2 - 3 < 0 \Rightarrow y' > 0;\ \forall x \in (-1; 0)$.

Vậy hàm số $y = 3f(x+2) - x^3 + 3x$ đồng biến trên khoảng $(-1; 0)$.

Chú ý:

+) Ta xét $x \in (1; 2) \subset (1; +\infty) \Rightarrow x + 2 \in (3; 4)$

$\Rightarrow f'(x+2) < 0;\ x^2 - 3 > 0$

Suy ra hàm số nghịch biến trên khoảng $(1; 2)$ nên loại hai phương án$(0; 2)$ và $(1; +\infty)$.

+) Tương tự ta xét $x \in (-\infty; -2) \Rightarrow x + 2 \in (-\infty; 0)$

$\Rightarrow f'(x+2) < 0; x^2 - 3 > 0 \Rightarrow y' < 0;\ \forall x \in (-\infty; -2)$.

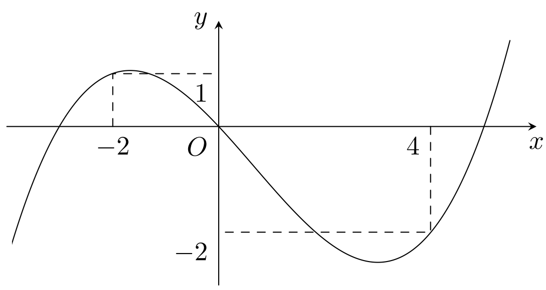
Suy ra hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -2)$ nên loại$(-\infty; -1)$.

Vậy hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-1; 0)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 2 (Đề Tham Khảo 2020 - Lần 1).

Cho hàm số $f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Hàm số $g(x) = f(1 - 2x) + x^2 - x$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?



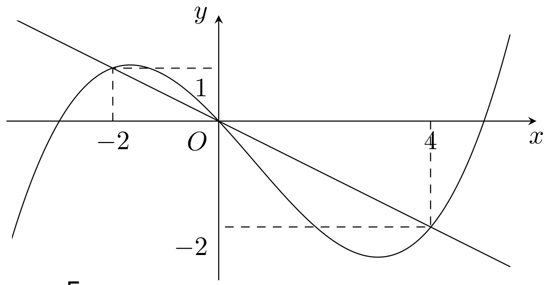
(A) $\left(1; \dfrac{3}{2}\right)$. (B) $\left(0; \dfrac{1}{2}\right)$.

(C) $(-2; -1)$. (D) $(2; 3)$.

Lời giải.

Ta có : $g(x) = f(1-2x) + x^2 - x \Rightarrow g'(x) = -2f'(1-2x) + 2x - 1$.

Đặt $t = 1 - 2x \Rightarrow g'(x) = -2f'(t) - t$.
$g'(x) = 0 \Rightarrow f'(t) = -\frac{t}{2}$.
Vẽ đường thẳng $y = -\frac{x}{2}$ và đồ thị hàm số $f'(x)$ trên cùng một hệ trục



Hàm số $g(x)$ nghịch biến $\Rightarrow g'(x) \leq 0 \Rightarrow f'(t) \geq -\frac{t}{2} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} -2 \leq t \leq 0 \\ t \geq 4. \end{array}\right.$

Như vậy $f'(1-2x) \geq \frac{1-2x}{-2} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} -2 \leq 1-2x \leq 0 \\ 4 \leq 1-2x \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{2} \\ x \leq -\frac{3}{2}. \end{array}\right.$

Vậy hàm số $g(x) = f(1-2x) + x^2 - x$ nghịch biến trên các khoảng $\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$ và $\left(-\infty; -\frac{3}{2}\right)$.

Mà $\left(1; \frac{3}{2}\right) \subset \left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$ nên hàm số $g(x) = f(1-2x) + x^2 - x$ nghịch biến trên khoảng $\left(1; \frac{3}{2}\right)$.

Chọn đáp án A □

Câu 3 (Chuyên Lê Quý Đôn Điện Biên 2019).

Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau

x	$-\infty$		0		1		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Hàm số $y = f(x-1) + x^3 - 12x + 2019$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

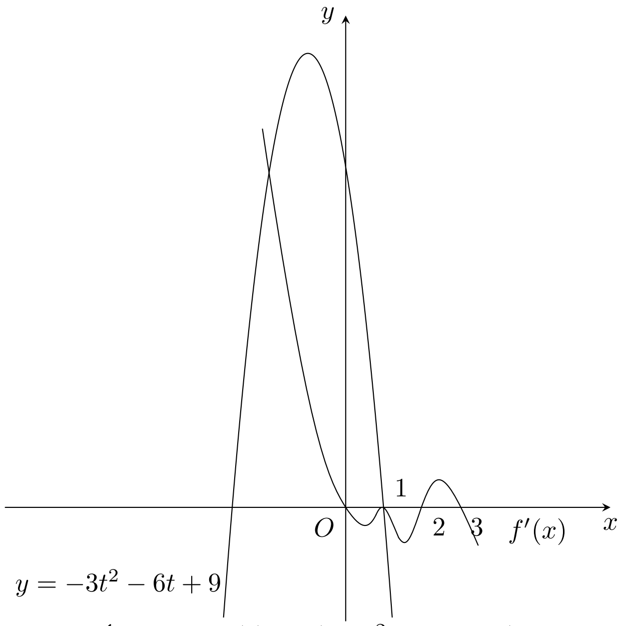
A $(1; +\infty)$. B $(1; 2)$. C $(-\infty; 1)$. D $(3; 4)$.

Lời giải.

$y' = f'(x-1) + 3x^2 - 12 = f'(t) + 3t^2 + 6t - 9 = f'(t) - (-3t^2 - 6t + 9)$, với $t = x - 1$.

Nghiệm của phương trình $y' = 0$ là hoành độ giao điểm của các đồ thị hàm số $y = f'(t)$ và $y = -3t^2 - 6t + 9$.

Vẽ đồ thị hàm số $y = f'(t)$ và $y = -3t^2 - 6t + 9$ trên cùng một hệ trục tọa độ như hình vẽ bên.



Dựa vào đồ thị trên, ta có bảng xét dấu của hàm số $y' = f'(t) - (-3t^2 - 6t + 9)$ như sau ($t_0 < -1$)

x	$-\infty$		t_0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số nghịch biến trên khoảng $t \in (t_0; 1)$.

Do đó hàm số nghịch biến trên khoảng $x \in (1; 2) \subset (t_0 + 1; 1)$.

Chọn đáp án B □

Câu 4 (Chuyên Phan Bội Châu Nghệ An 2019).

Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		1		2		3		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $y = 2f(1 - x) + \sqrt{x^2 + 1} - x$ nghịch biến trên những khoảng nào dưới đây

A $(-\infty; -2)$. B $(-\infty; 1)$. C $(-2; 0)$. D $(-3; -2)$.

Lời giải.

$y' = -2f'(1 - x) + \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} - 1$.

Có $\dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} - 1 < 0,\ \forall x \in (-2; 0)$.

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		-3		-2		-1		0		$+\infty$
$f'(1-x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	

$\Rightarrow -2f'(1 - x) < 0,\ \forall x \in (-2; 0)$

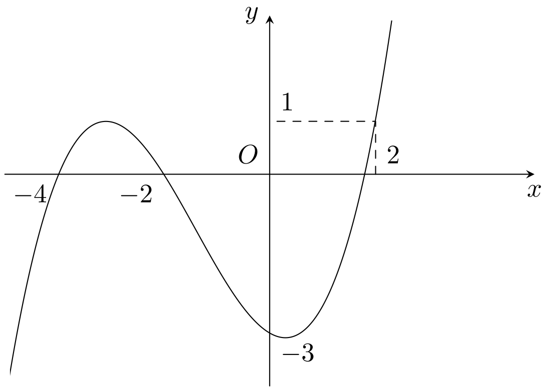
$\Rightarrow -2f'(1 - x) + \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} - 1 < 0,\ \forall x \in (-2; 0)$.

Chọn đáp án C □

Câu 5 (Sở Vĩnh Phúc 2019).

Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên.
Hàm số $y = 3f(x) + x^3 - 6x^2 + 9x$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau đây?

Ⓐ $(0; 2)$. Ⓑ $(-1; 1)$.
Ⓒ $(1; +\infty)$. Ⓓ $(-2; 0)$.



Lời giải.

Hàm số $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e, (a \neq 0)$. Có $f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$.
Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ đi qua các điểm $(-4; 0), (-2; 0), (0; -3), (2; 1)$ nên ta có

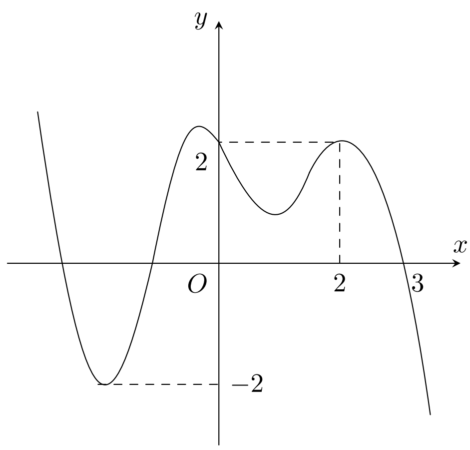
$$\begin{cases} -256a + 48b - 8c + d = 0 \\ -32a + 12b - 4c + d = 0 \\ d = -3 \\ 32a + 12b + 4c + d = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{5}{96} \\ b = \dfrac{7}{24} \\ c = -\dfrac{7}{24} \\ d = -3. \end{cases}$$

Xét hàm số $y = 3f(x) + x^3 - 6x^2 + 9x$
Ta có $y' = 3\left(f'(x) + x^2 - 4x + 3\right) = 3\left(\frac{5}{24}x^3 + \frac{15}{8}x^2 - \frac{55}{12}x\right)$
Ta có $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -11 \\ x = 0 \\ x = 2. \end{array}\right.$
Xét dấu y', ta được hàm số đã cho đồng biến trên các khoảng $(-11; 0)$ và $(2; +\infty)$.
Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 6 (Học Mãi 2019).

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên. Hỏi đồ thị hàm số $y = f(x) - 2x$ có bao nhiêu điểm cực trị?

Ⓐ 4. Ⓑ 3. Ⓒ 2. Ⓓ 1.



Lời giải.

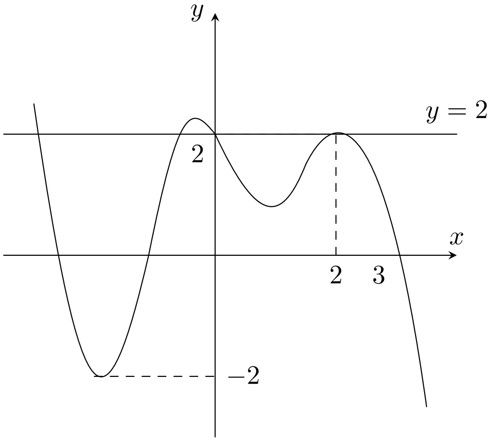
Đặt $g(x) = f(x) - 2x$.

$\Rightarrow g'(x) = f'(x) - 2$.

Vẽ đường thẳng $y = 2$.

$\Rightarrow$ phương trình $g'(x) = 0$ có 3 nghiệm bội lẻ.

$\Rightarrow$ đồ thị hàm số $y = f(x) - 2x$ có 3 điểm cực trị.

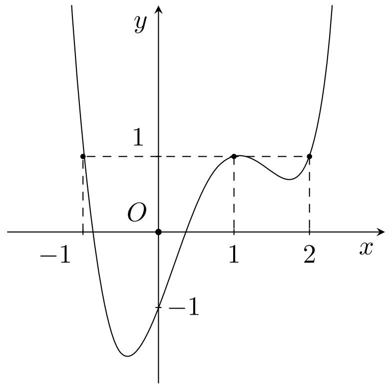


Chọn đáp án (B) □

Câu 7 (THPT Hoàng Hoa Thám Hưng Yên 2019).

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $g(x) = f(x-1) + \dfrac{2019 - 2018x}{2018}$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

(A) $(2; 3)$. (B) $(0; 1)$. (C) $(-1; 0)$. (D) $(1; 2)$.



Lời giải.

Ta có $g'(x) = f'(x-1) - 1$.

$$g'(x) \geq 0 \Leftrightarrow f'(x-1) - 1 \geq 0 \Leftrightarrow f'(x-1) \geq 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - 1 \leq -1 \\ x - 1 \geq 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \leq 0 \\ x \geq 3. \end{array}\right.$$

Từ đó suy ra hàm số $g(x) = f(x-1) + \dfrac{2019 - 2018x}{2018}$ đồng biến trên khoảng $(-1; 0)$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 8 ((Sở Ninh Bình 2019). Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau

x	$-\infty$		-2		-1		2		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $y = -2f(x) + 2019$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng dưới đây?

(A) $(-4; 2)$. (B) $(-1; 2)$. (C) $(-2; -1)$. (D) $(2; 4)$.

Lời giải.

Xét $y = g(x) = -2f(x) + 2019$.

Ta có $g'(x) = (-2f(x) + 2019)' = -2f'(x), g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 \\ x = -1 \\ x = 2 \\ x = 4. \end{array}\right.$.

Ta có bảng xét dấu của $g'(x)$

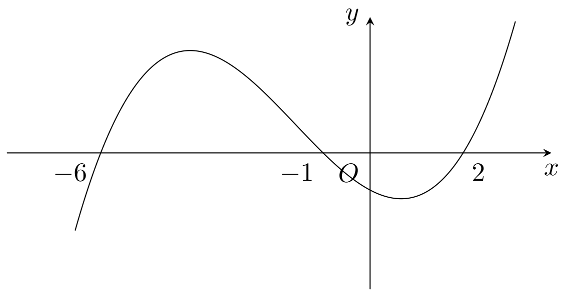
x	$-\infty$		-2		-1		2		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy hàm số $y = g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-1; 2)$.

Chọn đáp án B □

Câu 9 (THPT Lương Thế Vinh Hà Nội 2019).

Cho hàm số $y = f(x)$. Biết đồ thị hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hàm số $y = f\left(3 - x^2\right) + 2018$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?



A $(-1; 0)$.
B $(2; 3)$.
C $(-2; -1)$.
D $(0; 1)$.

Lời giải.

Ta có $\left[f\left(3 - x^2\right) + 2018\right]' = -2x \cdot f'\left(3 - x^2\right)$.

$$-2x \cdot f'\left(3 - x^2\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ 3 - x^2 = -6 \\ 3 - x^2 = -1 \\ 3 - x^2 = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm 3 \\ x = \pm 2 \\ x = \pm 1. \end{array}\right.$$

Bảng xét dấu của đạo hàm hàm số đã cho

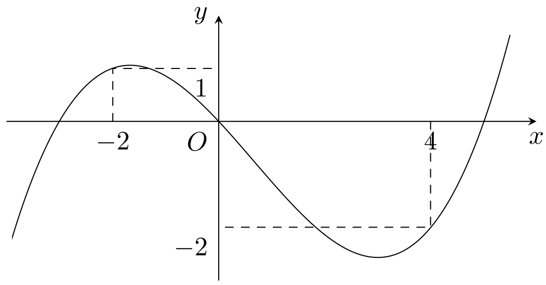
x	$-\infty$		-3		-2		-1		0		1		2		3		$+\infty$
$f'\left(3 - x^2\right)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$-2xf'\left(3 - x^2\right)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Từ bảng xét dấu suy ra hàm số đồng biến trên $(-1; 0)$.

Chọn đáp án A □

Câu 10 (Chuyên Biên Hòa - Hà Nam - 2020).

Cho hàm số đa thức $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Biết $f(0) = 0$ và đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình sau. Hàm số $g(x) = |4f(x) + x^2|$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?



A $(4; +\infty)$. B $(0; 4)$.

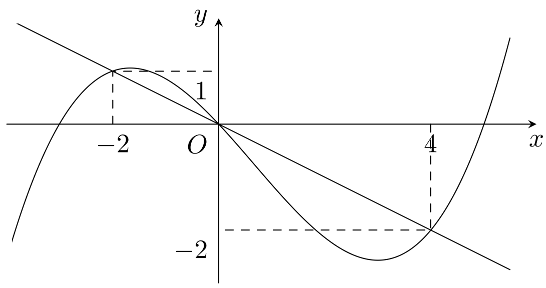
C $(-\infty; -2)$. D $(-2; 0)$.

Lời giải.

Xét hàm số $h(x) = 4f(x) + x^2$ trên $\mathbb{R}$.

Vì $f(x)$ là hàm số đa thức nên $h(x)$ cũng là hàm số đa thức và $h(0) = 4f(0) = 0$.

Ta có $h'(x) = 4f'(x) + 2x$. Do đó $h'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = -\dfrac{1}{2}x$.



Dựa vào sự tương giao của đồ thị hàm số $y = f'(x)$ và đường thẳng $y = -\dfrac{1}{2}x$, ta có $h'(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{-2; 0; 4\}$.

Bảng biến thiên của hàm số $h(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-2		0		4		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	y_1	$\nearrow$	0	$\searrow$	y_3	$\nearrow$	$+\infty$

Từ đó suy ra bảng biến thiên của hàm số $g(x) = |h(x)|$.

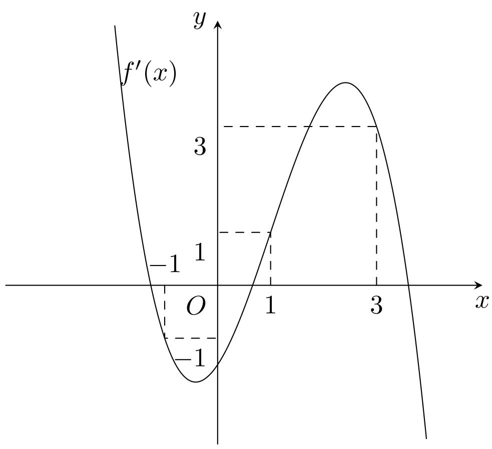
Dựa vào bảng biến thiên trên, ta thấy hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(0; 4)$.

Chọn đáp án B □

Câu 11 (Chuyên Thái Bình - 2020).

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ cho như hình vẽ bên.

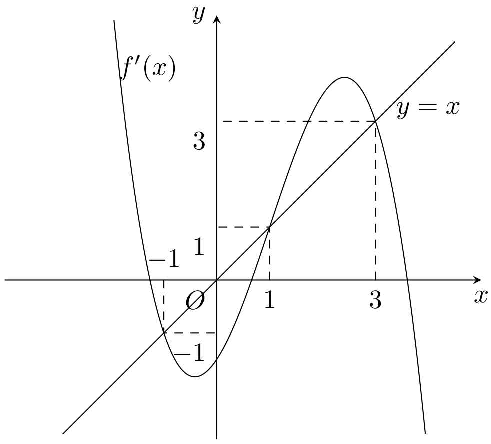
Hàm số $g(x) = 2f(|x - 1|) - x^2 + 2x + 2020$ đồng biến trên khoảng nào?



A $(0; 1)$. B $(-3; 1)$. C $(1; 3)$. D $(-2; 0)$.

Lời giải.

Ta có đường thẳng $y = x$ cắt đồ thị hàm số $y = f'(x)$ tại các điểm $x = -1; x = 1; x = 3$ như hình vẽ sau:



Dựa vào đồ thị của hai hàm số trên ta có $f'(x) > x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < -1 \\ 1 < x < 3 \end{array}\right.$ và $f'(x) < x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1 < x < 1 \\ x > 3. \end{array}\right.$

+Trường hợp 1: $x - 1 < 0 \Leftrightarrow x < 1$.

Khi đó $g(x) = 2f(1-x) - x^2 + 2x + 2020$.

Ta có $g'(x) = -2f'(1-x) + 2(1-x)$.

$g'(x) > 0 \Leftrightarrow -2f'(1-x) + 2(1-x) > 0 \Leftrightarrow f'(1-x) < 1 - x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1 < 1-x < 1 \\ 1-x > 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 < x < 2 \\ x < -2. \end{array}\right.$

Kết hợp điều kiện, ta có $g'(x) > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 < x < 1 \\ x < -2. \end{array}\right.$

+ Trường hợp 2: $x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$.

Khi đó ta có $g(x) = 2f(x-1) - x^2 + 2x + 2020$.

$g'(x) = 2f'(x-1) - 2(x-1)$

$g'(x) > 0 \Leftrightarrow 2f'(x-1) - 2(x-1) > 0 \Leftrightarrow f'(x-1) > x - 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-1 < -1 \\ 1 < x-1 < 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < 0 \\ 2 < x < 4. \end{array}\right.$

Kết hợp điều kiện ta có $g'(x) > 0 \Leftrightarrow 2 < x < 4$.

Vậy hàm số $g(x) = 2f(|x-1|) - x^2 + 2x + 2020$ đồng biến trên khoảng $(0; 1)$.

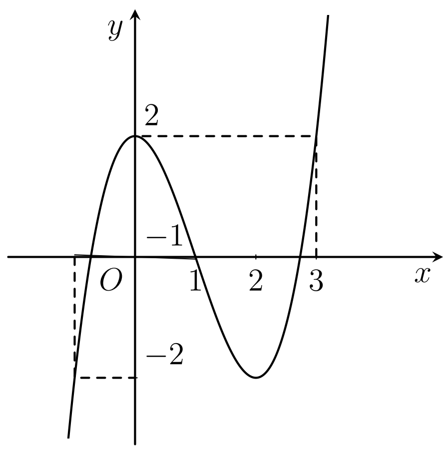
Chọn đáp án A □

Câu 12 (Chuyên Lào Cai - 2020).

Cho hàm số $f'(x)$ có đồ thị như hình bên.

Hàm số $g(x) = f(3x+1) + 9x^3 + \dfrac{9}{2}x^2$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A $(-1; 1)$. B $(-2; 0)$. C $(-\infty; 0)$. D $(1; +\infty)$.



Lời giải.

Xét hàm số $g(x) = f(3x+1) + 9x^3 + \dfrac{9}{2}x^2$

$\Rightarrow g'(x) = 3f'(3x+1) + 27x^2 + 9x$.

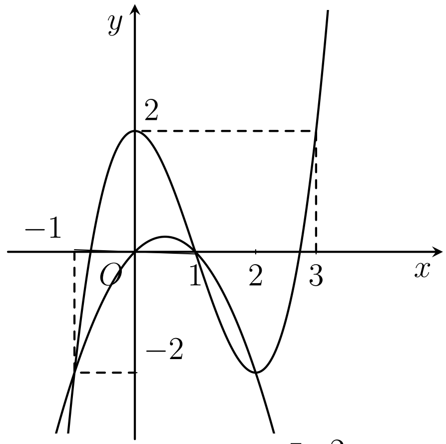
Hàm số đồng biến $\Leftrightarrow g'(x) > 0 \Leftrightarrow 3f'(3x+1) + 27x^2 + 9x > 0$

$\Leftrightarrow f'(3x+1) + 3x(3x+1) > 0 \qquad (*)$

Đặt $t = 3x+1$, khi đó $(*) \Leftrightarrow f'(t) + (t-1)t > 0$

$\Leftrightarrow f'(t) > -t^2 + t$.

Vẽ parabol $y = -x^2 + x$ và đồ thị hàm số $f'(x)$ trên cùng một hệ trục

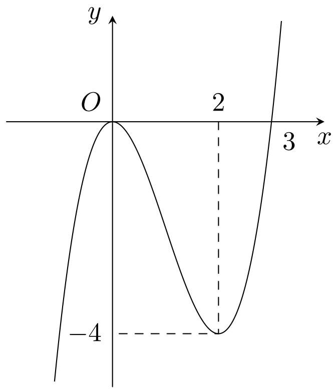


Dựa vào đồ thị ta thấy $f'(t) > -t^2+t \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1 < t < 1 \\ t > 2 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} -1 < 3x+1 < 1 \\ 3x+1 > 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{-2}{3} < x < 0 \\ x > \dfrac{1}{3}. \end{array}\right.$

Chọn đáp án D □

Câu 13 (Sở Phú Thọ-2020).

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ. Hàm số $g(x) = f\left(e^x - 2\right) - 2020$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?



A $\left(-1; \dfrac{3}{2}\right)$. B $(-1; 2)$. C $(0; +\infty)$. D $\left(\dfrac{3}{2}; 2\right)$.

Lời giải.

Dựa vào đồ thị hàm số $y = f'(x)$ suy ra $f'(x) \leq 0\ \forall x < 3$ và $f'(x) > 0\ \forall x > 3$. $g'(x) = e^x f'\left(e^x - 2\right)$. Hàm số $g(x) = f\left(e^x - 2\right) - 2020$ nghịch biến

$\Leftrightarrow g'(x) < 0 \Leftrightarrow e^x f'\left(e^x - 2\right) < 0$

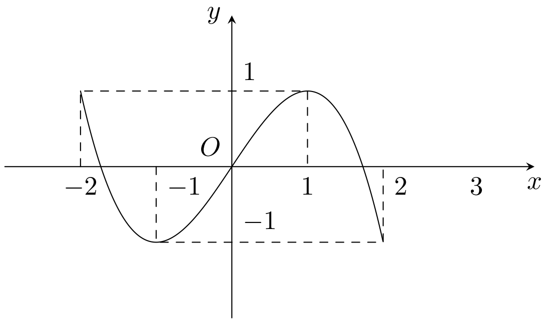
$\Leftrightarrow f'\left(e^x - 2\right) < 0 \Leftrightarrow e^x - 2 < 3 \Leftrightarrow e^x < 5 \Leftrightarrow x < \ln 5$.

Vậy hàm số đã cho nghịch biến trên $\left(-1; \dfrac{3}{2}\right)$.

Chọn đáp án A □

Câu 14 (Lý Nhân Tông - Bắc Ninh - 2020).

Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị hàm số $f'(x)$ như hình vẽ. Hàm số $y = f(\cos x) + x^2 - x$ đồng biến trên khoảng



A $(-2; 1)$. B $(0; 1)$.

C $(1; 2)$. D $(-1; 0)$.

Lời giải.

Đặt $g(x) = f(\cos x) + x^2 - x$.

Ta có $g'(x) = -\sin x \cdot f'(\cos x) + 2x - 1$

Vì $\cos x \in [-1; 1]$ nên từ đồ thị $f'(x)$ ta suy ra $f'(\cos x) \in [-1; 1]$.

Do đó $|-\sin x \cdot f'(\cos x)| \leq 1, \ \forall x \in \mathbb{R}$.

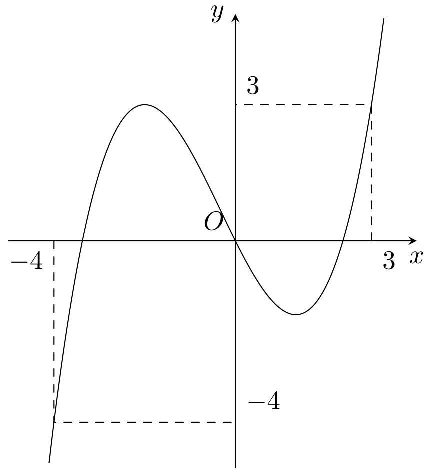
Ta suy ra $g'(x) = \sin x \cdot f'(\cos x) + 2x - 1 \geq -1 + 2x - 1 = 2x - 2 \Rightarrow g'(x) > 0, \ \forall x > 1$.

Vậy hàm số đồng biến trên $(1; 2)$.

Chọn đáp án C □

Câu 15 (THPT Nguyễn Viết Xuân - 2020).

Cho hàm số $f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $g(x) = f\left(3x^2 - 1\right) - \dfrac{9}{2}x^4 + 3x^2$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?



A $\left(-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}; \dfrac{-\sqrt{3}}{3}\right)$.

B $\left(0; \dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)$.

C $(1; 2)$.

D $\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}; \dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

Lời giải.

TXĐ: $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

Ta có $g'(x) = 6xf'\left(3x^2 - 1\right) - 18x^3 + 6x = 6x\left[f'\left(3x^2 - 1\right) - 3x^2 + 1\right]$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ f'(3x^2 - 1) = 3x^2 - 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ 3x^2 - 1 = -4 \text{ (vô nghiệm)} \\ 3x^2 - 1 = 0 \\ 3x^2 - 1 = 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{3} \\ x = \pm\dfrac{2\sqrt{3}}{3}. \end{array}\right.$$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$		$-\frac{\sqrt{3}}{3}$		0		$\frac{\sqrt{3}}{3}$		$\frac{2\sqrt{3}}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Vậy hàm số đồng biến trong khoảng $\left(-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}; \dfrac{-\sqrt{3}}{3}\right)$.

Chọn đáp án A □

Câu 16 (Trần Phú - Quảng Ninh - 2020).

Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau

x	$-\infty$		-4		-1		2		7		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $y = f(2x+1) + \dfrac{2}{3}x^3 - 8x + 5$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

(A) $(-\infty; -2)$. (B) $(1; +\infty)$. (C) $(-1; 7)$. (D) $\left(-1; \dfrac{1}{2}\right)$.

Lời giải.

Ta có $y' = 2f'(2x+1) + 2x^2 - 8$.

Xét $y' \le 0 \Leftrightarrow 2f'(2x+1) + 2x^2 - 8 \le 0 \Leftrightarrow f'(2x+1) \le 4 - x^2$.

Đặt $t = 2x+1$, ta có $f'(t) \le \dfrac{-t^2 + 2t + 15}{4}$.

Vì $\dfrac{-t^2+2t+15}{4} \ge 0, \forall t \in [-3; 5]$.

Mà $f'(t) \le 0, \forall t \in [-3; 2]$.

Nên $f'(t) \le \dfrac{-t^2+2t+15}{4} \Rightarrow t \in [-3; 2]$.

Suy ra $-3 \le 2x+1 \le 2 \Leftrightarrow -2 \le x \le \dfrac{1}{2}$.

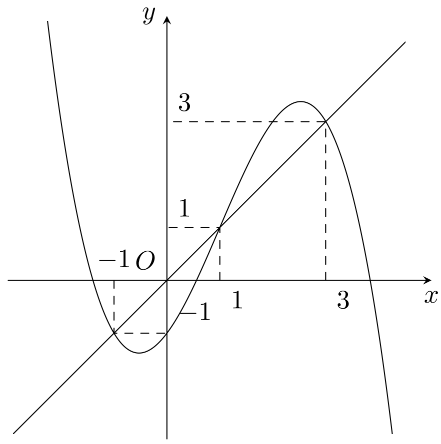
Chọn đáp án (D) □

Câu 17 (Chuyên Thái Bình - Lần 3 - 2020).

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ cho như hình vẽ.

Hàm số $g(x) = 2f(|x-1|) - x^2 + 2x + 2020$ đồng biến trên khoảng nào?

(A) $(0; 1)$. (B) $(-3; 1)$. (C) $(1; 3)$. (D) $(-2; 0)$.



Lời giải.

Với $x > 1$, ta có $g(x) = 2f(x-1) - (x-1)^2 + 2021 \Rightarrow g'(x) = 2f'(x-1) - 2(x-1)$.

Hàm số đồng biến $\Leftrightarrow 2f'(x-1) - 2(x-1) > 0 \Leftrightarrow f'(x-1) > x - 1 \quad (*)$.

Đặt $t = x - 1$, khi đó $(*) \Leftrightarrow f'(t) > t \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1 < t < 3 \\ t < -1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 2 < x < 4 \\ x < 0 \text{ (loại)}. \end{array}\right.$

Với $x < 1$, ta có $g(x) = 2f(1-x) - (1-x)^2 + 2021 \Rightarrow g'(x) = -2f'(1-x) + 2(1-x)$.

Hàm số đồng biến $\Leftrightarrow -2f'(1-x) + 2(1-x) > 0 \Leftrightarrow f'(1-x) < 1 - x \quad (**)$.

Đặt $t = 1 - x$, khi đó $(**) \Leftrightarrow f'(t) < t \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1 < t < 1 \\ t > 3 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 0 < x < 2 \\ x < -2 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 0 < x < 1 \\ x < -2. \end{array}\right.$

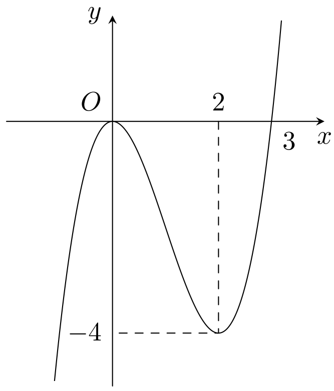
Vậy hàm số $g(x)$ đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -2), (0; 1), (2; 4)$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 18 (Sở Phú Thọ - 2020).

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị hàm số $f'(x)$ như hình vẽ.

Hàm số $g(x) = f\left(1 + e^x\right) + 2020$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?



(A) $(0; +\infty)$. (B) $\left(\frac{1}{2}; 1\right)$. (C) $\left(0; \frac{1}{2}\right)$. (D) $(-1; 1)$.

Lời giải.

$g'(x) = e^x f'\left(1 + e^x\right)$.

Do $e^x > 0, \forall x$ nên $g'(x) \leq 0 \Leftrightarrow f'\left(1 + e^x\right) \leq 0 \Leftrightarrow 1 + e^x \leq 3 \Leftrightarrow x \leq \ln 2$, dấu bằng xảy ra tại hữu hạn điểm.

Nên $g(x)$ nghịch biến trên $(-\infty; \ln 2)$.

Vì $\left(0; \frac{1}{2}\right) \subset (-\infty; \ln 2)$ nên hàm số đã cho nghịch biến trên $\left(0; \frac{1}{2}\right)$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 19 (THPT Anh Sơn - Nghệ An - 2020).

Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau.

x	$-\infty$		-2		-1		2		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $y = -2f(x) + 2019$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng dưới đây?

(A) $(2; 4)$. (B) $(-4; 2)$. (C) $(-2; -1)$. (D) $(-1; 2)$.

Lời giải.

Ta có $y' = -2f'(x)$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow -2f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 \\ x = -1 \\ x = 2 \\ x = 4. \end{array}\right.$$

Từ bảng xét dấu của $f'(x)$ ta có

x	$-\infty$		-2		-1		2		4		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Từ bảng xét dấu ta có hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -2), (-1; 2)$ và $(4; +\infty)$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 20 (THPT Anh Sơn - Nghệ An - 2020).

Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x)$ thỏa mãn $f'(x) = (1 - x)(x + 2)g(x) + 2019$ với $g(x) < 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Hàm số $y = f(1 - x) + 2019x + 2020$ nghịch biến trên khoảng nào?

(A) $(1;+\infty)$. (B) $(0;3)$. (C) $(-\infty;3)$. (D) $(3;+\infty)$.

Lời giải.

Đặt $h(x) = f(1-x) + 2019x + 2020$.

Vì hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ nên hàm số $h(x)$ cũng xác định trên $\mathbb{R}$.

Ta có $h'(x) = -f'(1-x) + 2019$.

Do $h'(x) = 0$ tại hữu hạn điểm nên để tìm khoảng nghịch biến của hàm số $h(x)$, ta tìm các giá trị của x sao cho $h'(x) < 0 \Leftrightarrow -f'(1-x) + 2019 < 0$

$\Leftrightarrow f'(1-x) - 2019 > 0$

$\Leftrightarrow x(3-x)g(1-x) > 0 \Leftrightarrow x(3-x) < 0(\text{ do } g(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R})$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < 0 \\ x > 3. \end{array}\right.$

Vậy hàm số $y = f(1-x) + 2019x + 2020$ nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;0)$ và $(3;+\infty)$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 21. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		-1		1		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Biết $f(x) > 2$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Xét hàm số $g(x) = f(3-2f(x)) - x^3 + 3x^2 - 2020$. Khẳng định nào sau đây đúng?

(A) Hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(-2;-1)$.

(B) Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0;1)$.

(C) Hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(3;4)$.

(D) Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(2;3)$.

Lời giải.

Ta có $g'(x) = -2f'(x)f'(3-2f(x)) - 3x^2 + 6x$.

Vì $f(x) > 2$, $\forall x \in \mathbb{R}$ nên $3 - 2f(x) < -1$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

Từ bảng xét dấu $f'(x)$ suy ra $f'(3-2f(x)) < 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Từ đó ta có bảng xét dấu sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		2		4		$+\infty$
$-f'(x)f'(3-2f(x))$		$-$	0	$+$	|	$+$	0	$-$	|	$-$	0	$+$	
$-3x^2+6x$		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	0	$-$	|	$-$	

Từ bảng xét dấu trên, loại trừ đáp án suy ra hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(2;3)$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 22. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		1		2		3		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số $y = (f(x))^3 - 3.(f(x))^2$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

(A) $(1; 2)$. (B) $(3; 4)$. (C) $(-\infty; 1)$. (D) $(2; 3)$.

Lời giải.

Ta có $y' = 3 \cdot (f(x))^2 \cdot f'(x) - 6 \cdot f(x) \cdot f'(x) = 3f(x) \cdot f'(x) \cdot [f(x) - 2]$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{x_1, 4 \mid x_1 < 1\} \\ f(x) = 2 \Leftrightarrow x \in \{x_2, x_3, 3, x_4 \mid x_1 < x_2 < 1 < x_3 < 2; 4 < x_4\} \\ f'(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{1, 2, 3, 4\}. \end{array}\right.$$

Lập bảng xét dấu ta có

x	$-\infty$		x_1		x_2		1		x_3		2		3		4		x_4		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	|	$+$	|	$+$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
$f(x)-2$		$-$	|	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	|	$-$	0	$-$	|	$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	|	$+$	|	$+$	0	$-$	|	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	|	$+$	
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Do đó hàm số nghịch biến trên khoảng $(2; 3)$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 23. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị nằm trên trục hoành và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, bảng xét dấu của biểu thức $f'(x)$ như bảng dưới đây.

x	$-\infty$		-2		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $y = g(x) = \dfrac{f\left(x^2 - 2x\right)}{f\left(x^2 - 2x\right) + 1}$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

(A) $(-\infty; 1)$. (B) $\left(-2; \dfrac{5}{2}\right)$. (C) $(1; 3)$. (D) $(2; +\infty)$.

Lời giải.

$$g'(x) = \frac{\left(x^2 - 2x\right)' \cdot f'\left(x^2 - 2x\right)}{\left(f\left(x^2 - 2x\right) + 1\right)^2} = \frac{(2x - 2) \cdot f'\left(x^2 - 2x\right)}{\left(f\left(x^2 - 2x\right) + 1\right)^2}.$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x - 2 = 0 \\ f'(x^2 - 2x) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x^2 - 2x = -2 \\ x^2 - 2x = -1 \\ x^2 - 2x = 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -1 \\ x = 3. \end{array}\right.$$

Ta có bảng xét dấu của $g'(x)$

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

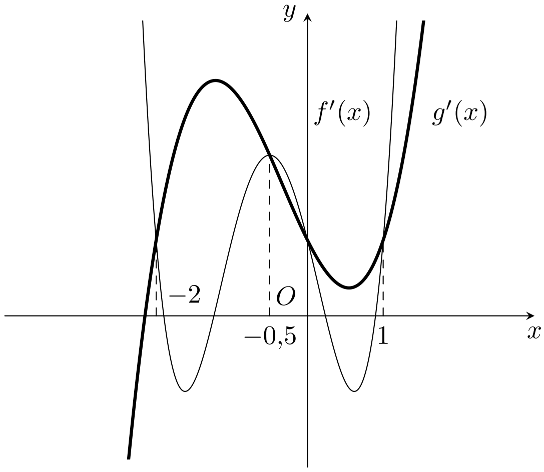
Dựa vào bảng xét dấu ta có hàm số $y = g(x)$ nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(1; 3)$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 24 (Liên trường huyện Quảng Xương - Thanh Hóa - 2021).

Cho các hàm số $y = f(x)$; $y = g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị các đạo hàm $f'(x)$; $g'(x)$ (đồ thị hàm số $y = g'(x)$ là đường đậm hơn) như hình vẽ.

Hàm số $h(x) = f(x-1) - g(x-1)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?



(A) $\left(\frac{1}{2}; 1\right)$. (B) $(1; +\infty)$.

(C) $(2; +\infty)$. (D) $\left(-1; \frac{1}{2}\right)$.

Lời giải.

Ta có: $h'(x) = f'(x-1) - g'(x-1)$.

Dựa vào hình vẽ ta có hàm số $h(x)$ nghịch biến

$\Leftrightarrow h'(x) < 0 \Leftrightarrow f'(x-1) < g'(x-1)$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -2 < x-1 < -\frac{1}{2} \\ 0 < x-1 < 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1 < x < \frac{1}{2} \\ 1 < x < 2. \end{array}\right.$$

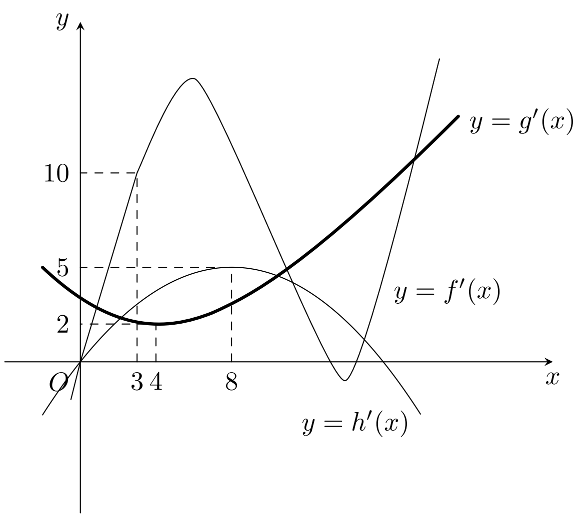
Do đó hàm số $h(x)$ nghịch biến trên các khoảng $\left(-1; \frac{1}{2}\right)$ và $(1; 2)$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 25 (THPT Quế Võ 1 - Bắc Ninh - 2021).

Cho ba hàm số $y = f(x), y = g(x), y = h(x)$. Đồ thị của ba hàm số $y = f'(x), y = g'(x), y = h'(x)$ được cho như hình vẽ.

Hàm số $k(x) = f(x+7) + g(5x+1) - h\left(4x + \frac{3}{2}\right)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?



(A) $\left(-\frac{5}{8}; 0\right)$. (B) $\left(\frac{5}{8}; +\infty\right)$.

(C) $\left(\frac{3}{8}; 1\right)$. (D) $\left(-\frac{3}{8}; 1\right)$.

Lời giải.

Ta có $k'(x) = f'(x+7) + 5g'(5x+1) - 4h'\left(4x + \dfrac{3}{2}\right)$.

Khi $x \in \left(\dfrac{3}{8}; 1\right)$ thì $\begin{cases} 7{,}375 < x + 7 < 8 \\ 2{,}875 < 5x + 1 < 6 \\ 3 < 4x + \dfrac{4}{3} < 5{,}5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x+7) > 10 \\ g'(5x+1) > 2 \Rightarrow 5g'(5x+1) > 10 \\ h'\left(4x+\dfrac{3}{2}\right) < 5 \Rightarrow -4h'\left(4x+\dfrac{3}{2}\right) > -20 \end{cases}$.

Do đó $k'(x) = f'(x+7) + 5g'(5x+1) - 4h'\left(4x + \dfrac{3}{2}\right) > 0$.

Hàm số $k(x) = f(x+7) + g(5x+1) - h\left(4x + \dfrac{3}{2}\right)$ đồng biến trên $\left(\dfrac{3}{8}; 1\right)$.

Chọn đáp án C □

Câu 26 (THPT Thanh Chương 1 - Nghệ An- 2021).

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau

x	$-\infty$		1		2		3		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $y = 3f(2x-1) - 4x^3 + 15x^2 - 18x + 1$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

(A) $(3; +\infty)$. (B) $\left(1; \dfrac{3}{2}\right)$. (C) $\left(\dfrac{5}{2}; 3\right)$. (D) $\left(2; \dfrac{5}{2}\right)$.

Lời giải.

Ta có $y' = 6f'(2x-1) - 12x^2 + 30x - 18 = 6\left[f'(2x-1) - 2x^2 + 5x - 3\right]$.

Có $f'(2x-1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x-1=1 \\ 2x-1=2 \\ 2x-1=3 \\ 2x-1=4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=\dfrac{3}{2} \\ x=2 \\ x=\dfrac{5}{2}. \end{array}\right.$ Ta có bảng xét dấu sau

x	$-\infty$		1		$\frac{3}{2}$		2		$\frac{5}{2}$		3		4		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	|	$+$	0	$+$	|	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f'(2x-1)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
$-2x^2+5x-3$		$-$	0	$+$	0	$-$	|	$-$	|	$-$	|	$-$	|	$-$	
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0		$?$		|		$?$	$?$		$?$	

Dựa vào bảng xét dấu trên, ta kết luận hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $\left(1; \dfrac{3}{2}\right)$.

Chọn đáp án B □

Câu 27 (THPT Hoàng Hoa Thám-Đà Nẵng-2021).

Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-3		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	

Hàm số $y = f\left(2 - e^x\right) - \dfrac{1}{3}e^{3x} + 3e^{2x} - 5e^x + 1$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

(A) $\left(0; \dfrac{3}{2}\right)$. (B) $(1; 3)$. (C) $(-3; 0)$. (D) $(-4; -3)$.

Lời giải.

Ta có $y' = -e^x.f'\left(2 - e^x\right) - e^{3x} + 6e^{2x} - 5e^x = e^x\left[-f'\left(2 - e^x\right) - e^{2x} + 6e^x - 5\right]$.

Đặt $t = 2 - e^x$, ta được

$y' = (2 - t)\left[-f'(t) - (2 - t)^2 + 6(2 - t) - 5\right] = (2 - t)\left[-f'(t) - t^2 - 2t + 3\right]$.

$y' = 0 \Leftrightarrow (2 - t)\left[-f'(t) - t^2 - 2t + 3\right] = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 2 \\ f'(t) = -t^2 - 2t + 3. \end{array}\right.$

Hàm số $g(x) = -x^2 - 2x + 3$ là parabol có trục đối xứng $x = -1$ và cắt trục hoành tại 2 điểm có hoành độ $\left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -3 \end{array}\right.$. Suy ra $f'(t) = -t^2 - 2t + 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = -3. \end{array}\right.$

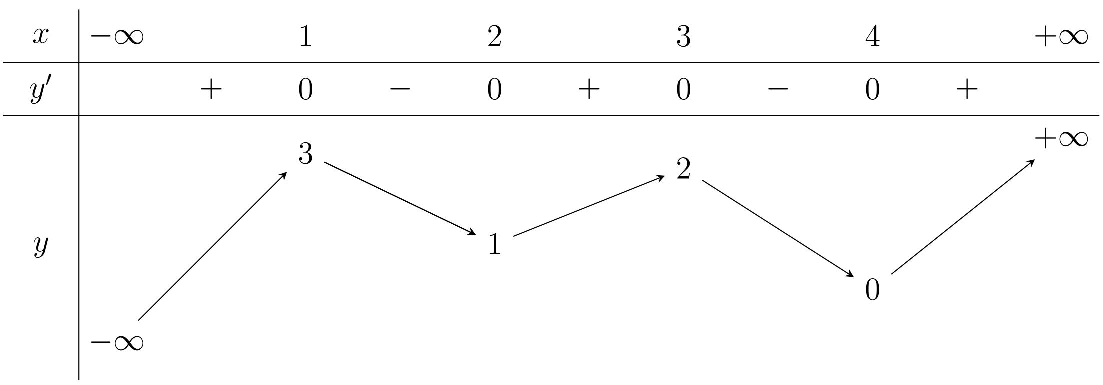
Bảng xét dấu

t	$-\infty$		-3		1		2		$+\infty$
$2 - t$		$+$	|	$+$	|	$+$	0	$-$	
$-f'(t) - t^2 - 2t + 3$		$-$	0	$+$	0	$-$	|	$-$	
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng xét dấu $y' > 0, \forall x \in (-3; 0)$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 28 (Sở Lạng Sơn 2022). Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:



Hàm số $y = [f(x)]^3 - 3[f(x)]^2$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

(A) $(-\infty; 1)$. (B) $(1; 2)$. (C) $(3; 4)$. (D) $(2; 3)$.

Lời giải.

Ta có $y' = 3f'(x)\left[f^2(x) - 2f(x)\right]$. Phương trình $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'(x) = 0 \\ f(x) = 0 \\ f(x) = 2. \end{array}\right.$

x	$-\infty$	a		b	1	c		2		3		4		d	$+\infty$
y'			$+$		0		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$		
y	$-\infty$		$\nearrow$		3		$\searrow$	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	0	$\nearrow$		$+\infty$

$y = 2$

$y = 0$

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{1\,;2\,;3\,;4\}$;

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = a < 1$ hoặc $x = 4$;

$$f(x) = 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = b \;\; (a < b < 1) \\ x = c \in (1\,;2) \\ x = 3 \\ x = d > 4. \end{array}\right.$$

Ta lập được bảng xét dấu của y'

x	$-\infty$		a		b		1		c		2		3		4		d		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Từ bảng xét dấu, ta thấy hàm số đồng biến trên các khoảng

$(-\infty; a)$, $(b; 1)$, $(c; 2)$, $(3; 4)$ và $(d; +\infty)$.

Chọn đáp án C □

Câu 29 (THPT Bùi Thị Xuân – Huế-2022).

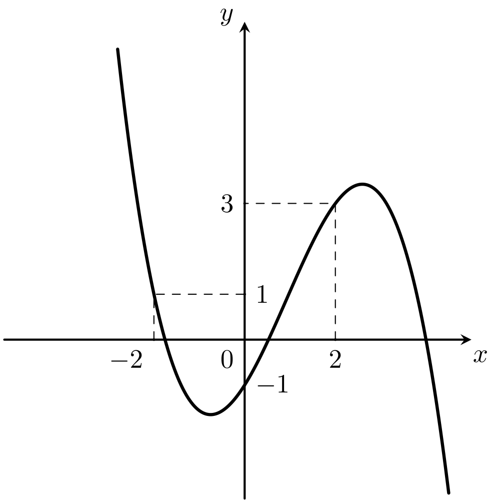
Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm đa thức bậc bốn. Đồ thị hàm số $f'(x+2)$ được cho trong hình vẽ bên. Hàm số

$$g(x) = 4f\left(x^2\right) - x^6 + 5x^4 - 4x^2 + 1$$

đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

(A) $(-4; -3)$. (B) $(2; +\infty)$.

(C) $(-\sqrt{2}; \sqrt{2})$. (D) $(-2; -1)$.



Lời giải.

$g(x) = 4f\left(x^2\right) - x^6 + 5x^4 - 4x^2 + 1 \Rightarrow g'(x) = 8xf'\left(x^2\right) - 6x^5 + 20x^3 - 8x$.

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 8xf'\left(x^2\right) - 6x^5 + 20x^3 - 8x = 0$

$\Leftrightarrow 2x\left[4f'\left(x^2\right) - 3x^4 + 10x^2 - 4\right] = 0$

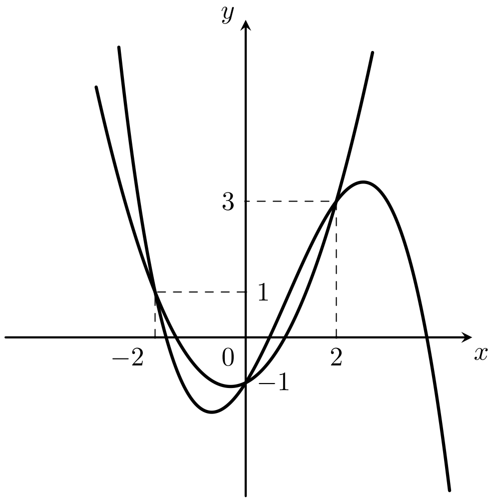
$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = 0 \\ 4f'(x^2) - 3x^4 + 10x^2 - 4 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ f'\left(x^2\right) = \dfrac{3}{4}x^4 - \dfrac{5}{2}x^2 + 1. \end{array}\right.$

Xét $f'\left(x^2\right) = \dfrac{3}{4}x^4 - \dfrac{5}{2}x^2 + 1$. Đặt $x^2 = t + 2$, ta có

$f'(t+2) = \dfrac{3}{4}(t+2)^2 - \dfrac{5}{2}(t+2) + 1 = \dfrac{3}{4}\left(t^2 + 4t + 4\right) - \dfrac{5}{2}(t+2) - 1 = \dfrac{3}{4}t^2 + \dfrac{1}{2}t - 1$

Khi đó số nghiệm của phương trình chính là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f'(t+2)$ và $y = \dfrac{3}{4}t^2 + \dfrac{1}{2}t - 1$

Ta có đồ thị



Dựa vào đồ thị ta có $f'(t+2) = \dfrac{3}{4}t^2 + \dfrac{1}{2}t - 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -2 \\ t = 0 \\ t = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+2 = -2 \\ x+2 = 0 \\ x+2 = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -4 \\ x = -2 \\ x = 0. \end{array}\right.$

Ta có bảng xét dấu $g'(x)$ như sau

x	$-\infty$		-4		-2		0		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

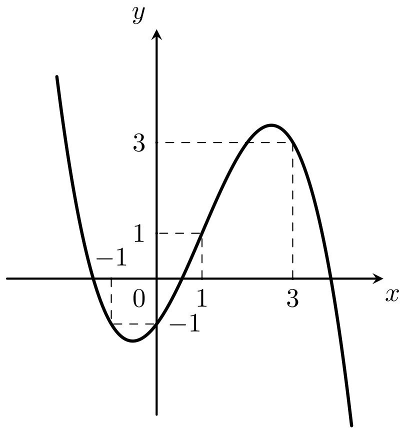
Vậy hàm số $g(x) = 4f\left(x^2\right) - x^6 + 5x^4 - 4x^2 + 1$ đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$.

Chọn đáp án B □

Câu 30 (Chuyên Bắc Ninh 2022).

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hàm số $g(x) = 2f(|x-1|) - x^2 + 2x + 2020$ đồng biến trên khoảng nào

Ⓐ $(-2;0)$. Ⓑ $(-3;1)$. Ⓒ $(1;3)$. Ⓓ $(0;1)$.



Lời giải.

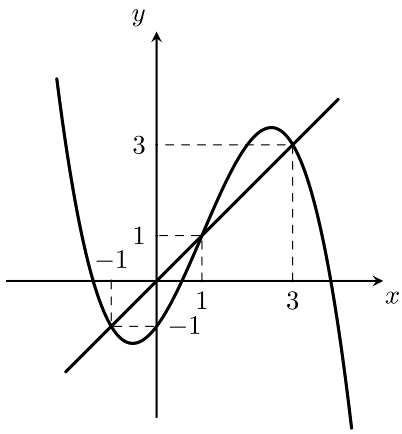
Ta có $g(x) = 2f(|x-1|) - x^2 + 2x + 2020 \Leftrightarrow g(x) = 2f(|x-1|) - (x-1)^2 + 2021$.

Xét hàm số $k(x-1) = 2f(x-1) - (x-1)^2 + 2021$.

Đặt $t = x - 1$

Xét hàm số $h(t) = 2f(t) - t^2 + 2021 \Rightarrow h'(t) = 2f'(t) - 2t$.

Kẻ đường $y = x$ như hình vẽ.



Khi đó $h'(t) > 0 \Leftrightarrow f'(t) - t > 0 \Leftrightarrow f'(t) > t \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t < -1 \\ 1 < t < 3. \end{array}\right.$

Do đó $k'(x-1) > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - 1 < -1 \\ 1 < x - 1 < 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < 0 \\ 2 < x < 4. \end{array}\right.$

Ta có bảng biến thiên của hàm số $k(x-1) = 2f(x-1) - (x-1)^2 + 2021$.

x	$-\infty$		0		2		4		$+\infty$
$k'(x-1)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$k(x-1)$		↗		↘		↗		↘	

Khi đó, ta có bảng biến thiên của $g(x) = 2f(|x-1|) - (x-1)^2 + 2021$ bằng cách lấy đối xứng qua đường thẳng $x = 1$ như sau

x	$-\infty$		-2		0		1		2		4		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$		↗		↘		↗		↘		↗		↘	

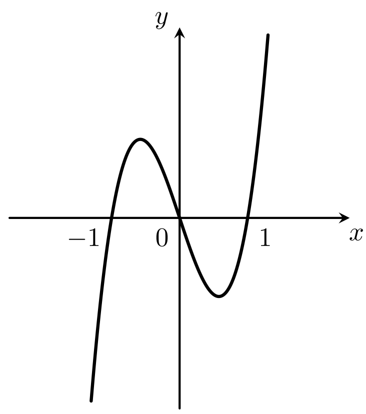
Vậy hàm số đồng biến trên $(0;1)$.

Chọn đáp án D □

Câu 31 (Chuyên Thái Bình 2022).

Cho hàm số $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+a$ có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ bên. Hàm số $y=g(x)=f(1-2x)f(2-x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A $\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{2}\right)$.　B $(-\infty;0)$.　C $(0;2)$.　D $(3;+\infty)$.



Lời giải.

Ta có $f'(x)=4ax^3+3bx^2+2cx+d$, theo đồ thị thì đa thức $f'(x)$ có ba nghiệm phân biệt là $-1,0,1$ nên $f'(x)=4ax(x+1)(x-1)=4ax^3-4ax\Rightarrow f(x)=ax^4-2ax^2+a=a(x^2-1)^2$.

Dựa vào đồ thị hàm số $y=f'(x)$ ta có $a>0$ nên $f(x)>0,\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{\pm1\}$.

$g'(x)=[f(1-2x)]'f(2-x)+f(1-2x)[f(2-x)]'=-2f'(1-2x)f(2-x)-f(1-2x)f'(2-x)$.

Xét $x\in\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{2}\right)\Rightarrow\begin{cases}1-2x\in(-2;0)\\2-x\in\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{2}\right)\end{cases}$, dấu của $f'(x)$ không cố định trên $\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{2}\right)$ nên ta không kết luận được tính đơn điệu của hàm số $g(x)$ trên $\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{2}\right)$.

Xét $x\in(-\infty;0)\Rightarrow\begin{cases}1-2x\in(1;+\infty)\\2-x\in(2;+\infty)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}f'(1-2x)>0\\f'(2-x)>0\end{cases}\Rightarrow g'(x)<0$.

Do đó, hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(-\infty;0)$.

$x\in(0;2)\Rightarrow\begin{cases}1-2x\in(-3;1)\\2-x\in(0;2)\end{cases}$, dấu của $f'(x)$ không cố định trên $(-3;1)$ và $(0;2)$ nên ta không kết luận được tính đơn điệu của hàm số $g(x)$ trên $\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{2}\right)$.

Xét $x\in(3;+\infty)\Rightarrow\begin{cases}1-2x\in(-\infty;-5)\\2-x\in(-\infty;-1)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}f'(1-2x)<0\\f'(2-x)<0\end{cases}\Rightarrow g'(x)>0$.

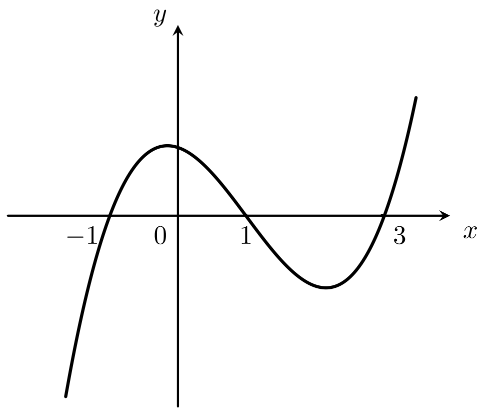
Do đó, hàm số $g(x)$ đồng biến trên $(3;+\infty)$.

Chọn đáp án D □

Dạng 3. Bài toán hàm ẩn, hàm hợp liên quan đến tham số và một số bài toán khác

Câu 32 (Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2019).

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên $m \in [-5\,;\,5]$ để hàm số $g(x) = f(x+m)$ nghịch biến trên khoảng $(1\,;\,2)$. Hỏi S có bao nhiêu phần tử?



Ⓐ 4. Ⓑ 3. Ⓒ 6. Ⓓ 5.

Lời giải.

Ta có $g'(x) = f'(x+m)$. Vì $y = f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên $g'(x) = f'(x+m)$ cũng liên tục trên $\mathbb{R}$. Căn cứ vào đồ thị hàm số $y = f'(x)$ ta thấy

$$g'(x) < 0 \Leftrightarrow f'(x+m) < 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+m < -1 \\ 1 < x+m < 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < -1-m \\ 1-m < x < 3-m. \end{array}\right.$$

Hàm số $g(x) = f(x+m)$ nghịch biến trên khoảng $(1\,;\,2) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2 \le -1-m \\ \left\{\begin{array}{l} 3-m \ge 2 \\ 1-m \le 1 \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \le -3 \\ 0 \le m \le 1. \end{array}\right.$

Mà m là số nguyên thuộc đoạn $[-5\,;\,5]$ nên ta có $S = \{-5; -4; -3; 0; 1\}$.

Vậy S có 5 phần tử.

Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 33 (Chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm-Quảng Nam-2020).

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và bảng xét dấu đạo hàm như hình vẽ sau

x	$-\infty$		-10		-2		3		8		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $y = f(x^3 + 4x + m)$ nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$?

Ⓐ 3. Ⓑ 0. Ⓒ 1. Ⓓ 2.

Lời giải.

Đặt $t = x^3 + 4x + m \Rightarrow t' = 3x^2 + 4$ nên t đồng biến trên $(-1; 1)$ và $t \in (m-5; m+5)$.

Yêu cầu bài toán trở thành tìm m để hàm số $f(t)$ nghịch biến trên khoảng $(m-5; m+5)$.

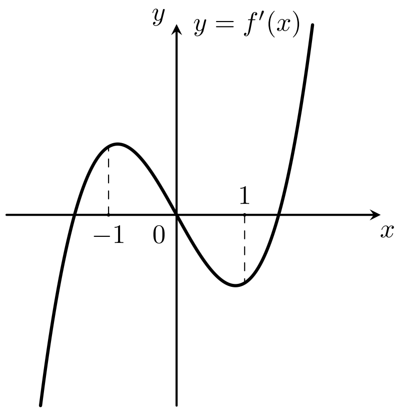
Dựa vào bảng biến thiên ta được $\begin{cases} m-5 \geq -2 \\ m+5 \leq 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 3 \\ m \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow m = 3.$

Chọn đáp án C □

Câu 34 (Chuyên ĐH Vinh-Nghệ An-2020).

Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$và $f(1) = 1$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên. Có bao nhiêu số nguyên dương a để hàm số $y = |4f(\sin x) + \cos 2x - a|$ nghịch biến trên $\left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$?

A 2. B 3. C Vô số. D 5.



Lời giải.

Đặt $g(x) = |4f(\sin x) + \cos 2x - a| \Rightarrow g(x) = \sqrt{[4f(\sin x) + \cos 2x - a]^2}$.

$\Rightarrow g'(x) = \dfrac{[4\cos x \cdot f'(\sin x) - 2\sin 2x][4f(\sin x) + \cos 2x - a]}{\sqrt{[4f(\sin x) + \cos 2x - a]^2}}$.

Ta có $4\cos x \cdot f'(\sin x) - 2\sin 2x = 4\cos x[f'(\sin x) - \sin x]$.

Với $x \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$ thì $\cos x > 0, \sin x \in (0;1) \Rightarrow f'(\sin x) - \sin x < 0$.

Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $\left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$ khi $4f(\sin x) + \cos 2x - a \geq 0, \forall x \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$

$\Leftrightarrow 4f(\sin x) + 1 - 2\sin^2 x \geq a, \forall x \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Đặt $t = \sin x$ được $4f(t) + 1 - 2t^2 \geq a, \forall t \in (0;1)$ (*).

Xét $h(t) = 4f(t) + 1 - 2t^2 \Rightarrow h'(t) = 4f'(t) - 4t = 4[f'(t) - 1]$.

Với $t \in (0;1)$ thì $h'(t) < 0 \Rightarrow h(t)$ nghịch biến trên $(0;1)$.

Do đó (*) $\Leftrightarrow a \leq h(1) = 4f(1) + 1 - 2.1^2 = 3$.

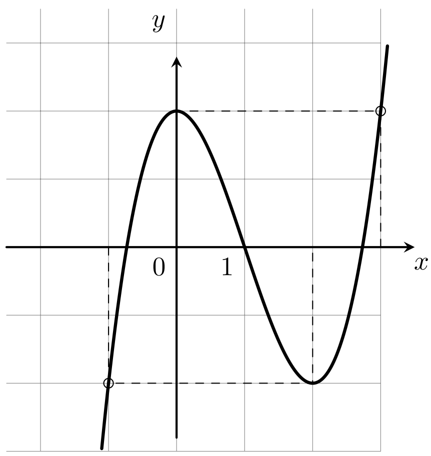
Vậy có 3 giá trị nguyên dương của a thỏa mãn.

Chọn đáp án B □

Câu 35 (Chuyên Quang Trung-2020).

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị $y = f'(x)$ như hình vẽ. Đặt $g(x) = f(x-m) - \dfrac{1}{2}(x-m-1)^2 + 2019$, với m là tham số thực. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên dương của m để hàm số $y = g(x)$ đồng biến trên khoảng $(5;6)$. Tổng tất cả các phần tử trong S bằng

A 4. B 11. C 14. D 20.



Lời giải.

Xét hàm số $g(x) = f\left(x-m\right) - \dfrac{1}{2}(x-m-1)^2 + 2019$.

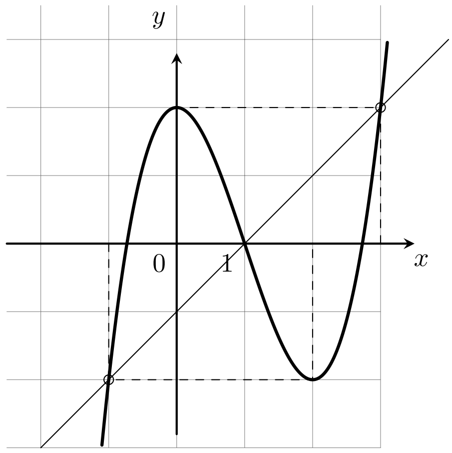
$g'(x) = f'\left(x-m\right) - (x-m-1)$.

Xét phương trình $g'(x) = 0$.   (1)

Đặt $x - m = t$, phương trình (1) trở thành $f'(t) - (t-1) = 0 \Leftrightarrow f'(t) = t - 1$.   (2)

Nghiệm của phương trình (2) là hoành độ giao điểm của hai đồ thị hàm số $y = f'(t)$ và $y = t - 1$.

Ta có đồ thị các hàm số $y = f'(t)$ và $y = t-1$ như sau



Căn cứ đồ thị các hàm số ta có phương trình (2) có nghiệm là $\left[\begin{array}{l} t = -1 \\ t = 1 \\ t = 3 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = m-1 \\ x = m+1 \\ x = m+3. \end{array}\right.$

Ta có bảng biến thiên của $y = g(x)$

x	$-\infty$		$m-1$		$m+1$		$m+3$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	$+\infty$

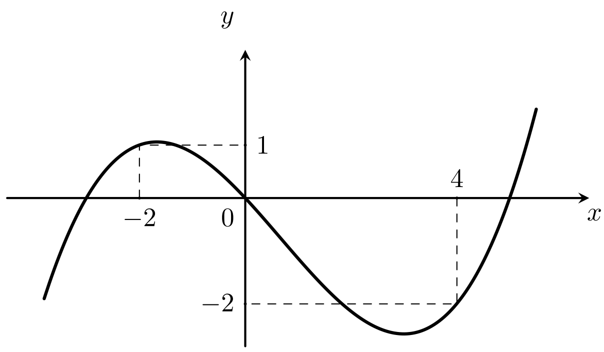
Để hàm số $y = g(x)$ đồng biến trên khoảng $(5;6)$ cần $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} m-1 \le 5 \\ m+1 \ge 6 \end{cases} \\ m+3 \le 5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5 \le m \le 6 \\ m \le 2. \end{array}\right.$

Vì $m \in \mathbb{N}^* \Rightarrow m$ nhận các giá trị 1; 2; 5; 6 $\Rightarrow S = 14$.

Chọn đáp án C □

Câu 36 (Sở Hà Nội-Lần 2-2020).

Cho hàm số $y = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e,\ a \neq 0$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên thuộc khoảng $(-6; 6)$ của tham số m để hàm số $g(x) = f(3 - 2x + m) + x^2 - (m+3)x + 2m^2$ nghịch biến trên $(0; 1)$. Khi đó, tổng giá trị các phần tử của S là



(A) 12. (B) 9. (C) 6. (D) 15.

Lời giải.

Xét $g'(x) = -2f'(3 - 2x + m) + 2x - (m+3)$.

Xét phương trình $g'(x) = 0$, đặt $t = 3 - 2x + m$ thì phương trình trở thành

$$-2 \cdot \left[f'(t) - \frac{-t}{2}\right] = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -2 \\ t = 4 \\ t = 0. \end{array}\right.$$

Từ đó, $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = \dfrac{5+m}{2}$, $x_2 = \dfrac{m+3}{2}$, $x_3 = \dfrac{-1+m}{2}$.

Lập bảng xét dấu, đồng thời lưu ý nếu $x > x_1$ thì $t < t_1$ nên $f(x) > 0$. Và các dấu đan xen nhau do các nghiệm đều làm đổi dấu đạo hàm nên suy ra $g'(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \in [x_2; x_1] \cup (-\infty; x_3]$.

Vì hàm số nghịch biến trên $(0; 1)$ nên

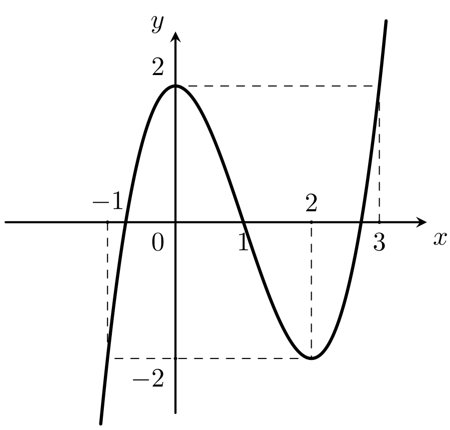
$g'(x) \leq 0, \forall x \in (0; 1)$ từ đó suy ra $\left[\begin{array}{l} \dfrac{3+m}{2} \leq 0 < 1 \leq \dfrac{5+m}{2} \\ 1 \leq \dfrac{-1+m}{2}. \end{array}\right.$

và giải ra các giá trị nguyên thuộc $(-6; 6)$ của m là -3; 3; 4; 5.

Chọn đáp án (B) □

Câu 37 (Chuyên Quang Trung-Bình Phước-Lần 2-2020).

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị $y = f'(x)$ như hình vẽ bên. Đặt $g(x) = f(x - m) - \dfrac{1}{2}(x - m - 1)^2 + 2019$, với m là tham số thực. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên dương của m để hàm số $y = g(x)$ đồng biến trên khoảng $(5; 6)$. Tổng tất cả các phần tử trong S bằng



(A) 4. (B) 11. (C) 14. (D) 20.

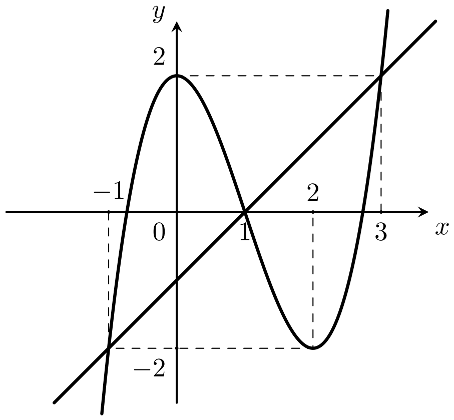
Lời giải.

Ta có $g'(x) = f'(x - m) - (x - m - 1)$.

Cho $g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x - m) = x - m - 1$.

Đặt $x - m = t \Rightarrow f'(t) = t - 1$

Khi đó nghiệm của phương trình là hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = f'(t)$ và và đường thẳng $y = t - 1$.



Dựa vào đồ thị hàm số ta có được $f'(t) = t - 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 \\ t = 1 \\ t = 3. \end{array}\right.$

Bảng xét dấu của $g'(t)$

t	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Từ bảng xét dấu ta thấy hàm số $g(t)$ đồng biến trên khoảng $(-1; 1)$ và $(3; +\infty)$.

Hay $\left[\begin{array}{l} -1 < t < 1 \\ t > 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1 < x - m < 1 \\ x - m > 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m - 1 < x < m + 1 \\ x > m + 3. \end{array}\right.$

Để hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(5; 6)$ thì $\left[\begin{array}{l} m - 1 \leq 5 < 6 \leq m + 1 \\ m + 3 \leq 5 < 6 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5 \leq m \leq 6 \\ m \leq 2. \end{array}\right.$

Vì m là các số nguyên dương nên $S = \{1; 2; 5; 6\}$.

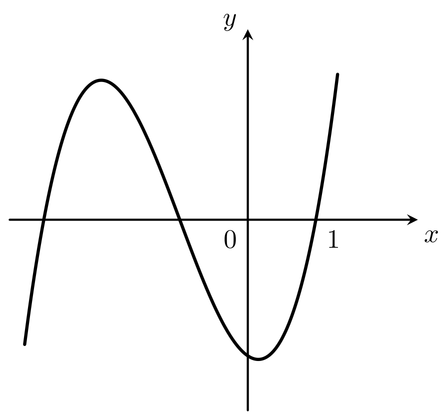
Vậy tổng tất cả các phần tử của S là $1 + 2 + 5 + 6 = 14$.

Chọn đáp án C □

Câu 38.

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Biết hàm số $f'(x)$ có đồ thị cho như hình vẽ bên. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc $[-2019; 2019]$ để hàm số $g(x) = f\left(2019^x\right) - mx + 2$ đồng biến trên $[0; 1]$.

A 2028. B 2019. C 2011. D 2020.



Lời giải.

Ta có $g'(x) = 2019^x \ln 2019 \cdot f'\left(2019^x\right) - m$.

Ta lại có hàm số $y = 2019^x$ đồng biến trên $[0; 1]$.

Với $x \in [0;1]$ thì $2019^x \in [1;2019]$ mà hàm $y = f'(x)$ đồng biến trên $(1;+\infty)$ nên hàm $y = f'(2019^x)$ đồng biến trên $[0;1]$.

Mà $2019^x \geq 1; f'(2019^x) > 0\, \forall x \in [0;1]$ nên hàm $h(x) = 2019^x \ln 2019 \cdot f'(2019^x)$ đồng biến trên $[0;1]$.

Hay $h(x) \geq h(0) = 0, \forall x \in [0;1]$.

Do vậy hàm số $g(x)$ đồng biến trên đoạn $[0;1] \Leftrightarrow g'(x) \geq 0, \forall x \in [0;1]$

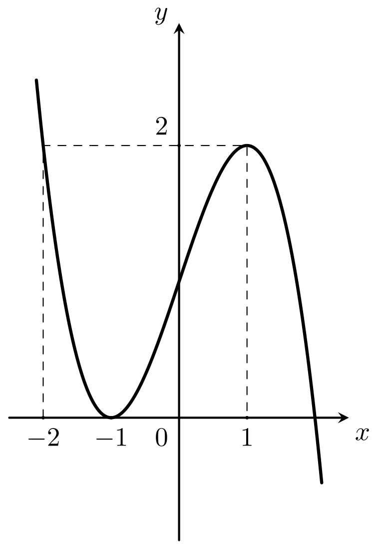
$\Leftrightarrow m \leq 2019^x \ln 2019 . f'(2019^x), \forall x \in [0;1] \Leftrightarrow m \leq \min\limits_{x\in[0;1]} h(x) = h(0) = 0$

Vì m nguyên và $m \in [-2019;2019] \Rightarrow$có 2020 giá trị m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án D □

Câu 39.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên $m \in (-2020\,;\,2020)$ để hàm số $g(x) = f(2x-3) - \ln(1+x^2) - 2mx$ đồng biến trên $\left(\dfrac{1}{2};2\right)$?



Ⓐ 2020. Ⓑ 2019. Ⓒ 2021. Ⓓ 2018.

Lời giải.

Ta có $g'(x) = 2f'(2x-3) - \dfrac{2x}{1+x^2} - 2m$.

Hàm số $g(x)$ đồng biến trên $\left(\dfrac{1}{2};2\right)$ khi và chỉ khi

$g'(x) \geq 0,\ \forall x \in (-1;\,2)$

$\Leftrightarrow m \leq f'(2x-3) - \dfrac{x}{1+x^2},\ \forall x \in \left(\dfrac{1}{2};2\right)$

$\Leftrightarrow m \leq \min\limits_{x\in\left[\frac{1}{2};2\right]} \left[f'(2x-3) - \dfrac{x}{1+x^2}\right]. \quad (1)$

Đặt $t = 2x-3$, khi đó $x \in \left(\dfrac{1}{2};2\right) \Leftrightarrow t \in (-2;\,1)$.

Từ đồ thị hàm $f'(x)$ suy ra $f'(t) \geq 0,\ \forall t \in (-2;1)$ và $f'(t) = 0$ khi $t = -1$.

Tức là $f'(2x-3) \geq 0,\ \forall x \in \left(\dfrac{1}{2};\,2\right) \Rightarrow \min\limits_{x\in\left[\frac{1}{2};2\right]} f'(2x-3) = 0$ khi $x = 1$. (2)

Xét hàm số $h(x) = -\dfrac{x}{1+x^2}$ trên khoảng $\left(\dfrac{1}{2};\,2\right)$.

Ta có $h'(x) = \dfrac{x^2-1}{(1+x^2)^2}$ và

$h'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

Bảng biến thiên của hàm số $h(x)$ trên $\left(\frac{1}{2};\,2\right)$ như sau

x	$\frac{1}{2}$		1		2
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$		$\searrow$	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	

Từ bảng biến thiên suy ra $h(x) \geq -\frac{1}{2} \Rightarrow \min\limits_{x\in\left[\frac{1}{2};2\right]} h(x) = -\frac{1}{2}$ khi $x = 1$. (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra $m \leq -\frac{1}{2}$.

Kết hợp với $m \in \mathbb{Z}$, $m \in (-2020;\, 2020)$ thì $m \in \{-2019;\, -201; \ldots; -2; -1\}$.

Vậy có tất cả 2019 giá trị m cần tìm.

Chọn đáp án B □

Câu 40. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x) = x^2(x-2)(x^2-6x+m)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu số nguyên m thuộc đoạn $[-2020; 2020]$ để hàm số $g(x) = f(1-x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$?

A 2016. B 2014. C 2012. D 2010.

Lời giải.

Ta có

$g'(x) = f'(1-x) = -(1-x)^2(-x-1)\left[(1-x)^2 - 6(1-x) + m\right] = (x-1)^2(x+1)(x^2+4x+m-5)$.

Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$

$\Leftrightarrow g'(x) \leq 0, \forall x < -1$ $(*)$, (dấu "$=$" xảy ra tại hữu hạn điểm).

Với $x < -1$ thì $(x-1)^2 > 0$ và $x + 1 < 0$ nên

$(*) \Leftrightarrow x^2 + 4x + m - 5 \geq 0, \forall x < -1 \Leftrightarrow m \geq -x^2 - 4x + 5, \forall x < -1$.

Xét hàm số $y = -x^2 - 4x + 5$ trên khoảng $(-\infty; -1)$, ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		-2		-1
y'		$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	9	$\searrow$	8

Từ bảng biến thiên suy ra $m \geq 9$.

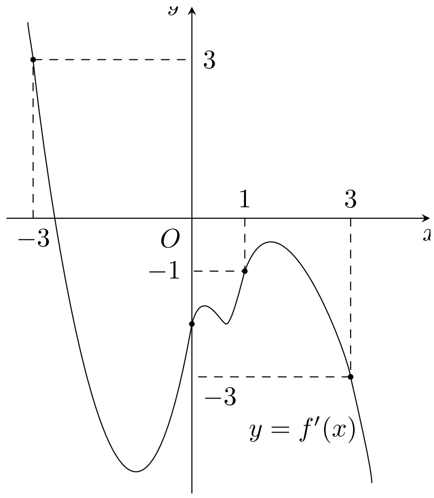
Kết hợp với m thuộc đoạn $[-2020; 2020]$ và m nguyên nên $m \in \{9; 10; 11; \ldots; 2020\}$.

Vậy có 2012 số nguyên m thỏa mãn đề bài.

Chọn đáp án C □

Câu 41.

Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên R. Hàm số $y = f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Xét hàm số $g(x) = f(x - 2m) + \frac{1}{2}(2m - x)^2 + 2020$, với m là tham số thực. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên dương của m để hàm số $y = g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(3; 4)$. Hỏi số phần tử của S bằng bao nhiêu?



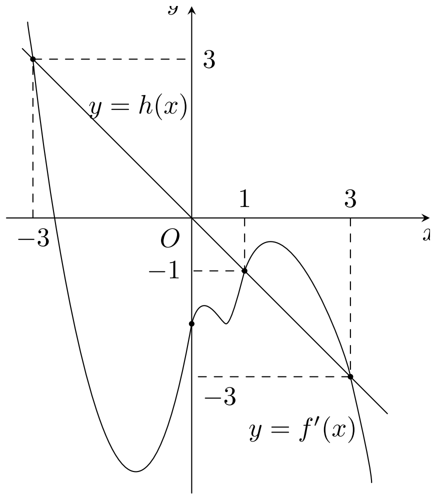
(A) 4. (B) 2. (C) 3. (D) Vô số.

Lời giải.

Ta có $g'(x) = f'(x - 2m) - (2m - x)$. Đặt $h(x) = f'(x) - (-x)$.

Từ đồ thị hàm số $y = f'(x)$ và đồ thị hàm số $y = -x$ trên hình vẽ suy ra

$$h(x) \le 0 \Leftrightarrow f'(x) \le -x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -3 \le x \le 1 \\ x \ge 3. \end{array}\right.$$



Ta có $g'(x) = h(x - 2m) \le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -3 \le x - 2m \le 1 \\ x - 2m \ge 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2m - 3 \le x \le 2m + 1 \\ x \ge 2m + 3. \end{array}\right.$.

Suy ra hàm số $y = g(x)$ nghịch biến trên các khoảng $(2m - 3; 2m + 1)$ và $(2m + 3; +\infty)$.

Do đó hàm số $y = g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(3; 4)$ $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2m - 3 \le 3 \\ 2m + 1 \ge 4 \end{cases} \\ 2m + 3 \le 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{3}{2} \le m \le 3 \\ m \le 0. \end{array}\right.$

Mặt khác, do m nguyên dương nên $m \in \{2; 3\} \Rightarrow S = \{2; 3\}$. Vậy số phần tử của S bằng 2.

Chọn đáp án (B) □

Câu 42. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ là $f'(x) = (x - 1)(x + 3)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-10; 20]$ để hàm số $y = f(x^2 + 3x - m)$ đồng biến trên khoảng $(0; 2)$?

(A) 18. (B) 17. (C) 16. (D) 20.

Lời giải.

Ta có $y' = f'\left(x^2+3x-m\right) = (2x+3)\,f'\left(x^2+3x-m\right)$.

Theo đề bài ta có $f'(x) = (x-1)(x+3)$

suy ra $f'(x) > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < -3 \\ x > 1 \end{array}\right.$ và $f'(x) < 0 \Leftrightarrow -3 < x < 1$.

Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;2)$ khi $y' \geq 0, \forall x \in (0;2)$

$\Leftrightarrow (2x+3)\,f'\left(x^2+3x-m\right) \geq 0, \forall x \in (0;2)$.

Do $x \in (0;2)$ nên $2x+3 > 0, \forall x \in (0;2)$. Do đó, ta có

$y' \geq 0, \forall x \in (0;2) \Leftrightarrow f'\left(x^2+3x-m\right) \geq 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+3x-m \leq -3 \\ x^2+3x-m \geq 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \geq x^2+3x+3 \\ m \leq x^2+3x-1 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \geq \max\limits_{[0;2]}\left(x^2+3x+3\right) \\ m \leq \min\limits_{[0;2]}\left(x^2+3x-1\right) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \geq 13 \\ m \leq -1 \end{array}\right.$.

Do $m \in [-10;20]$, $m \in \mathbb{Z}$ nên có 18 giá trị nguyên của m thỏa yêu cầu đề bài.

Chọn đáp án (A) □

Câu 43. Cho các hàm số $f(x) = x^3+4x+m$ và $g(x) = \left(x^2+2018\right)\left(x^2+2019\right)^2\left(x^2+2020\right)^3$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-2020;2020]$ để hàm số $g\left(f(x)\right)$ đồng biến trên $(2;+\infty)$?

(A) 2005. (B) 2037. (C) 4016. (D) 4041.

Lời giải.

Ta có $f(x) = x^3+4x+m$ và

$g(x) = \left(x^2+2018\right)\left(x^2+2019\right)^2\left(x^2+2020\right)^3 = a_{12}x^{12}+a_{10}x^{10}+\ldots+a_2x^2+a_0$.

Suy ra $f'(x) = 3x^2+4$, $g'(x) = 12a_{12}x^{11}+10a_{10}x^9+\ldots+2a_2x$.

Và có

$$\begin{aligned}\left[g\left(f(x)\right)\right]' &= f'(x)\left[12a_{12}(f(x))^{11}+10a_{10}(f(x))^9+\ldots+2a_2f(x)\right] \\ &= f(x)f'(x)\left(12a_{12}(f(x))^{10}+10a_{10}(f(x))^8+\ldots+2a_2\right).\end{aligned}$$

Dễ thấy $a_{12};a_{10};\ldots;a_2;a_0 > 0$ và $f'(x) = 3x^2+4 > 0,\ \forall x > 2$.

Do đó $f'(x)\left(12a_{12}(f(x))^{10}+10a_{10}(f(x))^8+\ldots+2a_2\right) > 0$, $\forall x > 2$.

Hàm số $g\left(f(x)\right)$ đồng biến trên $(2;+\infty)$ khi $\left[g\left(f(x)\right)\right]' \geq 0,\ \forall x > 2$

$\Rightarrow f(x) \geq 0,\ \forall x > 2 \Leftrightarrow x^3+4x+m \geq 0,\ \forall x > 3 \Leftrightarrow m \geq -x^3-4x,\ \forall x > 2$

$\Rightarrow m \geq \max\limits_{[2;+\infty)}\left(-x^3-4x\right) = -16$.

Vì $m \in [-2020;2020]$ và $m \in \mathbb{Z}$ nên có 2037 giá trị thỏa mãn m .

Chọn đáp án (B) □

Câu 44. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x+1)^2\left(x^2+2mx+1\right)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu số nguyên âm m để hàm số $g(x) = f\left(2x+1\right)$ đồng biến trên khoảng $(3;5)$?

Ⓐ 3. Ⓑ 2. Ⓒ 4. Ⓓ 6.

Lời giải.

Ta có $g'(x) = 2f'(2x+1) = 2(2x+1)(2x+2)^2[(2x+1)^2 + 2m(2x+1) + 1]$. Đặt $t = 2x + 1$

Để hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(3;5)$ khi và chỉ khi

$$\begin{aligned} & g'(x) \geq 0, \forall x \in (3;5) \\ \Leftrightarrow \quad & t(t^2 + 2mt + 1) \geq 0, \forall t \in (7;11) \Leftrightarrow t^2 + 2mt + 1 \geq 0,\ \forall t \in (7;11) \\ \Leftrightarrow \quad & 2m \geq \frac{-t^2 - 1}{t},\ \forall t \in (7;11) \end{aligned}$$

Xét hàm số $h(t) = \dfrac{-t^2 - 1}{t}$ trên $[7;11]$, có $h'(t) = \dfrac{-t^2 + 1}{t^2}$

Bảng biến thiên

t	$-\infty$		1		11		$+\infty$
$h'(t)$				$-$			
$h(t)$			$-\frac{50}{7}$	$\searrow$	$-\frac{122}{11}$		

Dựa vào BBT ta có $2m \geq \dfrac{-t^2 - 1}{t},\ \forall t \in (7;11) \Leftrightarrow 2m \geq \max\limits_{[7;11]} h(t) \Leftrightarrow m \geq -\dfrac{50}{14}$

Vì $m \in \mathbb{Z}^- \Rightarrow m \in \{-3; -2; -1\}$.

Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 45. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Có bao nhiêu số nguyên $m < 2019$ để hàm số $g(x) = f\left(x^2 - 2x + m\right)$ đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$?

Ⓐ 2016. Ⓑ 2015. Ⓒ 2017. Ⓓ 2018.

Lời giải.

Ta có $g'(x) = \left(x^2 - 2x + m\right)' f'\left(x^2 - 2x + m\right) = 2\left(x - 1\right) f'\left(x^2 - 2x + m\right)$.

Hàm số $y = g(x)$ đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$ khi và chỉ khi $g'(x) \geq 0, \forall x \in (1; +\infty)$ và $g'(x) = 0$ tại hữu hạn điểm

$\Leftrightarrow 2\left(x - 1\right) f'\left(x^2 - 2x + m\right) \geq 0, \forall x \in (1; +\infty)$

$\Leftrightarrow f'\left(x^2-2x+m\right)\geq 0, \forall x\in(1;+\infty) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-2x+m\geq 2, \forall x\in(1;+\infty) \\ x^2-2x+m\leq 0, \forall x\in(1;+\infty).\end{array}\right.$

Xét hàm số $y=x^2-2x+m$, ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$m-1$	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta có

TH1: $x^2-2x+m\geq 2, \forall x\in(1;+\infty)\Leftrightarrow m-1\geq 2\Leftrightarrow m\geq 3$.

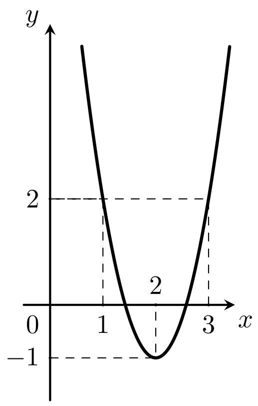
TH2: $x^2-2x+m\leq 0, \forall x\in(1;+\infty)$. Không có giá trị m thỏa mãn.

Vậy có 2016 số nguyên $m<2019$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án A □

Câu 46.

Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm là hàm số $f'(x)$ trên $\mathbb{R}$. Biết rằng hàm số $y=f'(x-2)+2$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng nào?

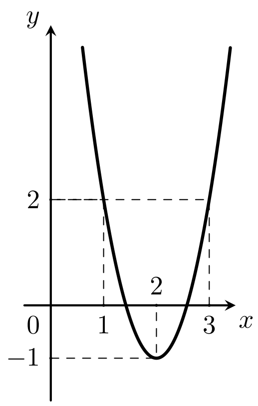


A $(-\infty;3)$, $(5;+\infty)$.   B $(-\infty;-1)$, $(1;+\infty)$.

C $(-1;1)$.   D $(3;5)$.

Lời giải.

Hàm số $y=f'(x-2)+2$ có đồ thị (C) như sau:



Dựa vào đồ thị (C) ta có

$f'(x-2)+2>2, \forall x\in(-\infty;1)\cup(3;+\infty)\Leftrightarrow f'(x-2)>0, \forall x\in(-\infty;1)\cup(3;+\infty)$.

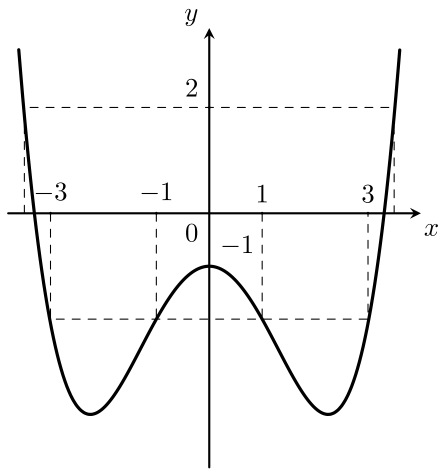
Đặt $x* = x - 2$ suy ra $f'(x*) > 0, \forall x* \in (-\infty; -1) \bigcup (1; +\infty)$.

Vậy hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; -1)$, $(1; +\infty)$.

Chọn đáp án B □

Câu 47.

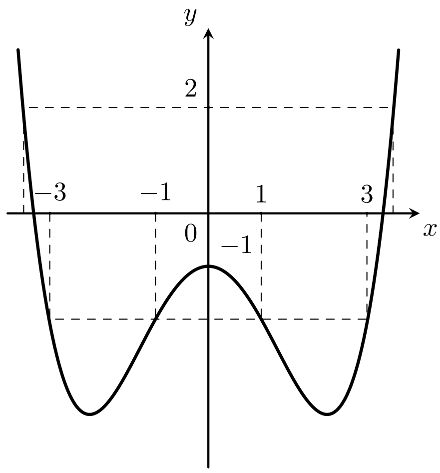
Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm là hàm số $f'(x)$ trên $\mathbb{R}$. Biết rằng hàm số $y = f'(x+2) - 2$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng nào?



A $(-3; -1)$, $(1; 3)$.
B $(-1; 1)$, $(3; 5)$.
C $(-\infty; -2)$, $(0; 2)$.
D $(-5; -3)$, $(-1; 1)$.

Lời giải.

Hàm số $y = f'(x+2) - 2$ có đồ thị (C) như sau



Dựa vào đồ thị (C) ta có

$f'(x+2) - 2 < -2, \forall x \in (-3; -1) \bigcup (1; 3) \Leftrightarrow f'(x+2) < 0, \forall x \in (-3; -1) \bigcup (1; 3)$.

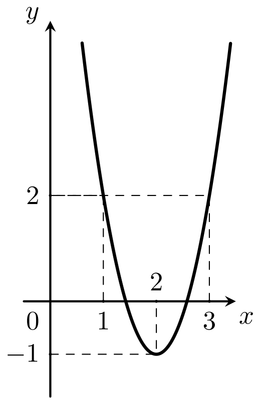
Đặt $x^* = x + 2$ suy ra: $f'(x^*) < 0, \forall x^* \in (-1; 1) \bigcup (3; 5)$.

Vậy: Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-1; 1)$, $(3; 5)$.

Chọn đáp án B □

Câu 48.

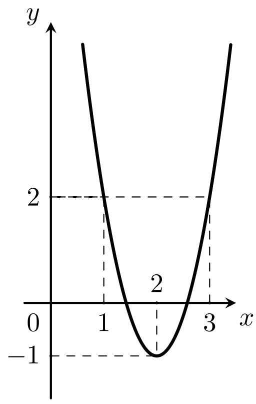
Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm là hàm số $f'(x)$ trên $\mathbb{R}$. Biết rằng hàm số $y = f'(x-2) + 2$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng nào?



A $(-\infty; 2)$. B $(-1; 1)$. C $\left(\frac{3}{2}; \frac{5}{2}\right)$. D $(2; +\infty)$.

Lời giải.

Hàm số $y = f'(x-2) + 2$ có đồ thị (C) như sau



Dựa vào đồ thị (C) ta có

$f'(x-2) + 2 < 2, \forall x \in (1; 3) \Leftrightarrow f'(x-2) < 0, \forall x \in (1; 3)$.

Đặt $x^* = x - 2$ thì $f'(x^*) < 0, \forall x^* \in (-1; 1)$.

Vậy: Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$.

Cách khác:

Tịnh tiến sang trái hai đơn vị và xuống dưới 2 đơn vị thì từ đồ thị (C) sẽ thành đồ thị của hàm$y = f'(x)$. Khi đó $f'(x) < 0, \forall x \in (-1; 1)$.

Vậy hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$.

Chọn đáp án B □

Câu 49. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp 3 liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(x) \cdot f'''(x) = x(x-1)^2(x+4)^3$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ và $g(x) = [f'(x)]^2 - 2f(x) \cdot f''(x)$. Hàm số $h(x) = g(x^2 - 2x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A $(-\infty; 1)$. B $(2; +\infty)$. C $(0; 1)$. D $(1; 2)$.

Lời giải.

Ta có $g'(x) = 2f''(x)f'(x) - 2f'(x) \cdot f''(x) - 2f(x) \cdot f'''(x) = -2f(x) \cdot f'''(x)$;

Khi đó $(h(x))' = (2x-2)\, g'(x^2 - 2x) = -2(2x-2)(x^2-2x)(x^2-2x-1)^2(x^2-2x+4)^3$

$h'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \\ x=2 \\ x=1\pm\sqrt{2}. \end{array}\right.$ Ta có bảng xét dấu của $h'(x)$

t	$-\infty$		$1-\sqrt{2}$		0		1		2		$1+\sqrt{2}$		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Suy ra hàm số $h(x)=g\left(x^2-2x\right)$ đồng biến trên khoảng $(1;2)$.

Chọn đáp án D □

Câu 50. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y=g(x)=f'(2x+3)+2$ có đồ thị là một parabol với tọa độ đỉnh $I(2;-1)$ và đi qua điểm $A(1;2)$. Hỏi hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A $(5;9)$. B $(1;2)$. C $(-\infty;9)$. D $(1;3)$.

Lời giải.

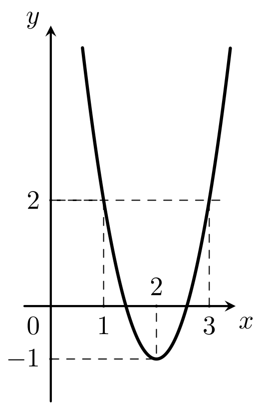
Xét hàm số $g(x)=f'(2x+3)+2$ có đồ thị là một Parabol nên có phương trình dạng $y=g(x)=ax^2+bx+c\ \ (P)$.

Vì (P) có đỉnh $I(2;-1)$ nên $\begin{cases} \dfrac{-b}{2a}=2 \\ g(2)=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -b=4a \\ 4a+2b+c=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a+b=0 \\ 4a+2b+c=-1 \end{cases}.$

Vì (P) đi qua điểm $A(1;2)$ nên $g(1)=2 \Leftrightarrow a+b+c=2$.

Ta có hệ phương trình $\begin{cases} 4a+b=0 \\ 4a+2b+c=-1 \\ a+b+c=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=-12 \\ c=11 \end{cases}$ nên $g(x)=3x^2-12x+11$.

Đồ thị của hàm $y=g(x)$ là



Theo đồ thị ta thấy $f'(2x+3)\le 0 \Leftrightarrow f'(2x+3)+2\le 2 \Leftrightarrow 1\le x\le 3$.

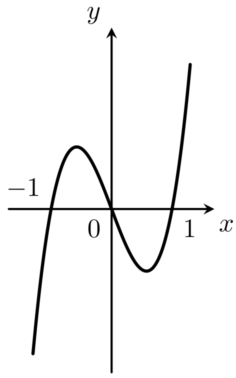
Đặt $t=2x+3 \Leftrightarrow x=\dfrac{t-3}{2}$ khi đó $f'(t)\le 0 \Leftrightarrow 1\le \dfrac{t-3}{2}\le 3 \Leftrightarrow 5\le t\le 9$.

Vậy $y=f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(5;9)$.

Chọn đáp án A □

Câu 51.

Cho hàm số $y = f(x)$, hàm số $f'(x) = x^3 + ax^2 + bx + c\,(a, b, c \in \mathbb{R})$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hàm số $g(x) = f\left(f'(x)\right)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?



Ⓐ $(1; +\infty)$. Ⓑ $(-\infty; -2)$.

Ⓒ $(-1; 0)$. Ⓓ $\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}; \dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

Lời giải.

Vì các điểm $(-1; 0)\,, (0; 0)\,, (1; 0)$ thuộc đồ thị hàm số $y = f'(x)$ nên ta có hệ

$$\begin{cases} -1 + a - b + c = 0 \\ c = 0 \\ 1 + a + b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = -1 \Rightarrow f'(x) = x^3 - x \Rightarrow f''(x) = 3x^2 - 1. \\ c = 0 \end{cases}$$

Ta có $g(x) = f\left(f'(x)\right) \Rightarrow g'(x) = f'\left(f'(x)\right) \cdot f''(x)$.

Xét

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow g'(x) = f'\left(f'(x)\right) \cdot f''(x) = 0$

$$\Leftrightarrow f'\left(x^3 - x\right)\left(3x^2 - 1\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^3 - x = 0 \\ x^3 - x = 1 \\ x^3 - x = -1 \\ 3x^2 - 1 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm 1 \\ x = 0 \\ x = x_1 (x_1 \approx 1,325) \\ x = x_2 (x_2 \approx -1,325) \\ x = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}. \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên

t	$-\infty$		$-1{,}325$		-1		$-\frac{\sqrt{3}}{3}$		0		$\frac{\sqrt{3}}{3}$		1		$1{,}325$		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng biến thiên ta có $g(x)$ nghịch biến trên $(-\infty; -2)$

Chọn đáp án Ⓑ □

BẢNG ĐÁP ÁN

1. B	2. A	3. B	4. C	5. D	6. B	7. C	8. B	9. A	10. B
11. A	12. D	13. A	14. C	15. A	16. D	17. A	18. C	19. D	20. D
21. D	22. D	23. C	24. D	25. C	26. B	27. C	28. C	29. B	30. D
31. D	32. D	33. C	34. B	35. C	36. B	37. C	38. D	39. B	40. C
41. B	42. A	43. B	44. A	45. A	46. B	47. B	48. B	49. D	50. A
51. B									

CHỦ ĐỀ 2

CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

MỨC ĐỘ 1. MỨC ĐỘ 7,8 ĐIỂM

Dạng 1. Tìm m để hàm số đạt cực trị tại $x = x_0$

Câu 1 (Mã 110-2017). Tìm giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2 - 4)x + 3$ đạt cực đại tại $x = 3$.

(A) $m = -1$. (B) $m = -7$. (C) $m = 5$. (D) $m = 1$.

Lời giải.

Ta có $y' = x^2 - 2mx + (m^2 - 4)$; $y'' = 2x - 2m$.

Hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2 - 4)x + 3$ đạt cực đại tại $x = 3$ khi và chỉ khi: $\begin{cases} y'(3) = 0 \\ y''(3) < 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 9 - 6m + m^2 - 4 = 0 \\ 6 - 2m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 6m + 5 = 0 \\ m > 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m = 1\,(\text{loại}) \\ m = 5\,(\text{thoả mãn}) \end{array}\right. \\ m > 3 \end{cases}.$$

Vậy $m = 5$ là giá trị cần tìm.

Chọn đáp án (C) □

Câu 2 (Chuyên Hạ Long 2019). Tìm m để hàm số $y = x^3 - 2mx^2 + mx + 1$ đạt cực tiểu tại $x = 1$.

(A) không tồn tại m. (B) $m = \pm 1$. (C) $m = 1$. (D) $m \in \{1; 2\}$.

Lời giải.

Ta có $y' = 3x^2 - 4mx + m; y'' = 6x - 4m$.

Hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} y'(1) = 0 \\ y''(1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 - 4m + m = 0 \\ 6 - 4m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m < \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow m = 1.$

Chọn đáp án (C) □

Câu 3. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3x^2 + mx + 1$ đạt cực tiểu tại $x = 2$.

(A) $m = 0$. (B) $m > 4$. (C) $0 \leq m < 4$. (D) $0 < m \leq 4$.

Lời giải.

$y' = 3x^2 - 6x + m$; $y'' = 6x - 6$.

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} y'(2) = 0 \\ y''(2) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ 6 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 0.$

Chọn đáp án (A) □

Câu 4. Có bao nhiêu số thực m để hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+\left(m^2-m+1\right)x+1$ đạt cực đại tại $x=1$?

(A) 0. (B) 2. (C) 1. (D) 3.

Lời giải.

$y'=x^2-2mx+m^2-m+1; y''=2x-2m$

Hàm số đạt cực đại tại $x=1 \Leftrightarrow \begin{cases} y'(1)=0 \\ y''(1)<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2-3m+2=0 \\ 2-2m<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=1 \vee m=2 \\ m>1 \end{cases} \Leftrightarrow m=$ 2.

Chọn đáp án (C) □

Câu 5. Tìm tập hợp tất cả các giá trị của m để hàm số $y=x^3+(3m-1)x^2+m^2x-3$ đạt cực tiểu tại $x=-1$.

(A) $\{5;1\}$. (B) $\{5\}$. (C) $\varnothing$. (D) $\{1\}$.

Lời giải.

Ta có $y'=3x^2+2(3m-1)x+m^2 \Rightarrow y''=6x+6m-2$.

Hàm số đạt cực tiểu tại $x=-1 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(-1)=0 \\ f''(-1)>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2-6m+5=0 \\ 6m-8>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=5 \end{array}\right. \\ m>\frac{4}{3} \end{cases}$

$\Leftrightarrow m=5$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 6. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+(m+1)x-1$ đạt cực đại tại $x=-2$?

(A) $m=2$. (B) $m=3$. (C) Không tồn tại m. (D) $m=-1$.

Lời giải.

Ta có $y'=x^2-2mx+m+1; y''=2x-2m$.

Hàm số đạt cực đại tại $x=-2 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(-2)=0 \\ f''(-2)<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5m+5=0 \\ -4-2m<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=-1 \\ m>-2 \end{cases} \Leftrightarrow m=-1$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 7. Tập hợp các số thực m để hàm số $y=x^3-3mx^2+(m+2)x-m$ đạt cực tiểu tại $x=1$ là.

(A) $\{1\}$. (B) $\{-1\}$. (C) $\varnothing$. (D) $\mathbb{R}$.

Lời giải.

$y'=3x^2-6mx+m+2; y''=6x-6m$.

Hàm số đạt cực tiểu tại $x=1 \Leftrightarrow \begin{cases} y'(1)=0 \\ y''(1)>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5m+5=0 \\ 6-6m>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=1 \\ m<1. \end{cases}$

Vậy không có giá trị của m thoả đề bài.

Chọn đáp án (C) □

Câu 8. Xác định tham số m sao cho hàm số $y = x + m\sqrt{x}$ đạt cực trị tại $x = 1$.

(A) $m = -2$. (B) $m = 2$. (C) $m = -6$. (D) $m = 6$.

Lời giải.

$y' = f'(x) = 1 + \dfrac{m}{2\sqrt{x}}, (x > 0)$

Để hàm số đạt cực trị tại $x = 1$ thì $f'(1) = 0 \Leftrightarrow 1 + \dfrac{m}{2} = 0 \Leftrightarrow m = -2$.

Thử lại với $m = -2$, hàm số $y = x - 2\sqrt{x}$ có cực tiểu tại $x = 1$, do đó $m = -2$ thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Chọn đáp án (A) □

Câu 9. Tìm tất cả tham số thực m để hàm số $y = (m-1)\,x^4 - (m^2-2)\,x^2 + 2019$ đạt cực tiểu tại $x = -1$.

(A) $m = 0$. (B) $m = -2$. (C) $m = 1$. (D) $m = 2$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

Đạo hàm $y' = 4\,(m-1)\,x^3 - 2\,(m^2-2)\,x$.

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = -1 \Rightarrow y'(-1) = 0 \Leftrightarrow -4\,(m-1) + 2\,(m^2-2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = 2. \end{array}\right.$

- Với $m = 0$, hàm số trở thành $y = -x^4 + 2x^2 + 2019$. Dễ thấy hàm số đạt cực đại tại $x = -1$.
- Với $m = 2$, hàm số trở thành $y = x^4 - 2x^2 + 2019$. Dễ thấy hàm số đạt cực tiểu tại $x = -1$.

Vậy $m = 2$ thì hàm số $y = (m-1)\,x^4 - (m^2-2)\,x^2 + 2019$ đạt cực tiểu tại $x = -1$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 10. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x) = (x - \sin x)\,(x - m - 3)\,(x$
$\forall x \in \mathbb{R}$ (m là tham số). Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $y = f(x)$ đạt cực tiểu tại $x = 0$?

(A) 6. (B) 7. (C) 5. (D) 4.

Lời giải.

Điều kiện: $9 - m^2 \geq 0 \Leftrightarrow -3 \leq m \leq 3$.

- **Trường hợp 1.** $0 \leq m < 3$ ta có bảng biến thiên.

x	$-\infty$		0		$\sqrt{9-m^2}$		$m+3$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y		↘		↗		↘		↗	

- **Trường hợp 2.** $-3 \leq m < 0$ ta có bảng biến thiên.

x	$-\infty$		0		$m+3$		$\sqrt{9-m^2}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

☑ **Trường hợp 3.** $m = 3$ ta có bảng biến thiên.

x	$-\infty$		0		6		$+\infty$
y'		$-$	0	$-$	0	$+$	
y		$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Từ đó suy ra $-3 \leq m < 3 \Rightarrow$ có 6 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Chọn đáp án (A) □

Câu 11. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = x^8 + (m-2)\,x^5 - (m^2-4)\,x^4 + 1$ đạt cực tiểu tại $x = 0$?

(A) Vô số. (B) 3. (C) 5. (D) 4.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} y &= x^8 + (m-2)\,x^5 - \left(m^2-4\right)x^4 + 1 \Rightarrow y' = 8x^7 + 5\,(m-2)\,x^4 - 4\left(m^2-4\right)x^3. \\ y' &= 0 \Leftrightarrow x^3\left(8x^4 + 5\,(m-2)\,x - 4\left(m^2-4\right)\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ g(x) = 8x^4 + 5\,(m-2)\,x - 4\left(m^2-4\right) = 0. \end{array}\right. \end{aligned}$$

Xét hàm số $g(x) = 8x^4 + 5\,(m-2)\,x - 4\,(m^2-4)$ có $g'(x) = 32x^3 + 5\,(m-2)$. Ta thấy $g'(x) = 0$ có một nghiệm nên $g(x) = 0$ có tối đa hai nghiệm.

☑ **Trường hợp 1.** Nếu $g(x) = 0$ có nghiệm $x = 0 \Rightarrow m = 2$ hoặc $m = -2$.

Với $m = 2$ thì $x = 0$ là nghiệm bội 4 của $g(x)$. Khi đó $x = 0$ là nghiệm bội 7 của y' và y' đổi dấu từ âm sang dương khi đi qua điểm $x = 0$ nên $x = 0$ là điểm cực tiểu của hàm số. Vậy $m = 2$ thỏa ycbt.

Với $m = -2$ thì $g(x) = 8x^4 - 20x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \sqrt[3]{\dfrac{5}{2}}. \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		$\sqrt[3]{\frac{5}{2}}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$-$	0	$+$	
y		$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Dựa vào bảng biến thiên $x = 0$ không là điểm cực tiểu của hàm số. Vậy $m = -2$ không thỏa yêu cầu bài toán.

- **Trường hợp 2.** $g(0) \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 2$.
Để hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0 \Leftrightarrow g(0) > 0 \Leftrightarrow m^2 - 4 < 0 \Leftrightarrow -2 < m < 2$. Do $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{-1; 0; 1\}$.

Vậy cả hai trường hợp ta được 4 giá trị nguyên của m thỏa yêu cầu bài toán.
Chọn đáp án D □

Câu 12. Tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \dfrac{x^5}{5} - \dfrac{mx^4}{4} + 2$ đạt cực đại tại $x = 0$ là

A. $m \in \mathbb{R}$. B. $m < 0$. C. Không tồn tại m. D. $m > 0$.

Lời giải.

Đặt $f(x) = \dfrac{x^5}{5} - \dfrac{mx^4}{4} + 2$. Ta có $f'(x) = x^4 - mx^3$.

- Khi $m = 0$ thì $f'(x) = x^4 \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ nên hàm số không có cực trị.
- Khi $m \neq 0$, xét $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^4 - mx^3 = 0 \Leftrightarrow x^3(x - m) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = m. \end{array}\right.$

  - **Trường hợp 1.** $m > 0$ ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		m		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	$f(m)$	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số đạt cực đại tại $x = 0$.

  - **Trường hợp 2.** $m < 0$ ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		m		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(m)$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số đạt cực tiểu tại $x=0$.

Như vậy, để hàm số đạt cực đại tại $x=0$ thì $m>0$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 13. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc khoảng $(-2019;2019)$ để hàm số $y=\dfrac{m-1}{5}x^5+\dfrac{m+2}{4}x^4+m+5$ đạt cực đại tại $x=0$?

(A) 101. (B) 2016. (C) 100. (D) 10.

Lời giải.

Ta xét $m=1 \Rightarrow y=\dfrac{3}{4}x^4+6 \Rightarrow y'=3x^3 \Rightarrow y'=0 \Rightarrow x=0$.

Ta có bảng xét dấu $y'=2x^3$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng xét dấu ta thấy $x=0$ là điểm cực tiểu. Suy ra $m=1$ (loại).

Ta xét $m\neq 1 \Rightarrow y'=(m-1)\,x^4+(m+2)\,x^3 \Rightarrow y'=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=0 \\ x_2=-\dfrac{m+2}{m-1}. \end{array}\right.$

- **Trường hợp 1.** Xét $m>1$, suy ra $x_2<x_1$. Ta có bảng xét dấu $y'=(m-1)\,x^4+(m+2)\,x^3$.

x	$-\infty$		$-\dfrac{m+2}{m-1}$		0		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng xét dấu ta thấy $x=0$ là điểm cực tiểu. Suy ra $m>1$ (loại).

- **Trường hợp 2.** $-2<m<1$, suy ra $x_2>x_1$. Ta có bảng xét dấu $y'=(m-1)\,x^4+(m+2)\,x^3$.

x	$-\infty$		0		$-\dfrac{m+2}{m-1}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	

Dựa, vào bảng xét dấu ta thấy $x=0$ là điểm cực tiểu. Suy ra $-2<m<1$ (loại).

- **Trường hợp 3.** $m<-2$, suy ra $x_2<x_1$. Ta có bảng xét dấu $y'=(m-1)\,x^4+(m+2)\,x^3$.

x	$-\infty$		$-\dfrac{m+2}{m-1}$		0		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	

Dựa vào bảng xét dấu ta thấy $x=0$ là điểm cực đại. Suy ra $m<-2$ (nhận).

Vậy tập hợp tất cả các giá trị của tham số m thỏa mãn đề bài là $m < -2$. Mà m thuộc khoảng $(-2019; 2019)$, suy ra số giá trị nguyên của m là 2016.

Chọn đáp án (B) □

Câu 14. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = x^8 + (m-3)\,x^5 - (m^2-9)\,x^4 + 1$ đạt cực tiểu tại $x = 0$?

(A) 6. (B) Vô số. (C) 4. (D) 7.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} y &= x^8 + (m-3)\,x^5 - \left(m^2-9\right)x^4 + 1 \Rightarrow y' = 8x^7 + 5\,(m-3)\,x^4 - 4\left(m^2-9\right)x^3. \\ y' &= 0 \Leftrightarrow x^3\left(8x^4 + 5\,(m-3)\,x - 4\left(m^2-9\right)\right) = 0. \\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ g(x) = 8x^4 + 5\,(m-3)\,x - 4\left(m^2-9\right) = 0. \end{array}\right. \end{aligned}$$

Xét hàm số $g(x) = 8x^4 + 5\,(m-3)\,x - 4\,(m^2-9)$ có $g'(x) = 32x^3 + 5\,(m-3)$.

Ta thấy $g'(x) = 0$ có một nghiệm nên $g(x) = 0$ có tối đa hai nghiệm.

- **Trường hợp 1.** Nếu $g(x) = 0$ có nghiệm $x = 0 \Rightarrow m = 3$ hoặc $m = -3$.

  Với $m = 3$ thì $x = 0$ là nghiệm bội 4 của $g(x)$. Khi đó $x = 0$ là nghiệm bội 7 của y' và y' đổi dấu từ âm sang dương khi đi qua điểm $x = 0$ nên $x = 0$ là điểm cực tiểu của hàm số. Vậy $m = 3$ thỏa ycbt.

  Với $m = -3$ thì $g(x) = 8x^4 - 30x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \sqrt[3]{\dfrac{15}{4}}. \end{array}\right.$

  Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		$\sqrt[3]{\dfrac{15}{4}}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$				$\nearrow$	$+\infty$

  Dựa vào bảng biến thiên $x = 0$ không là điểm cực tiểu của hàm số. Vậy $m = -3$ không thỏa ycbt.

- **Trường hợp 2.** $g(0) \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 3$. Để hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0 \Leftrightarrow g(0) > 0$ $\Leftrightarrow m^2 - 9 < 0 \Leftrightarrow -3 < m < 3$. Do $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{-2; -1; 0; 1; 2\}$.

Vậy cả hai trường hợp ta được 6 giá trị nguyên của m thỏa yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án (A) □

Câu 15. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = x^8+(m-4)\,x^5-(m^2-16)\,x^4+1$ đạt cực tiểu tại $x=0$.

(A) 8. (B) Vô số. (C) 7. (D) 9.

Lời giải.

Ta có $y' = 8x^7+5\,(m-5)\,x^4-4\,(m^2-16)\,x^3 x^3\left[8x^4+5\,(m-4)\,x-4\,(m^2-16)\right] = x^3\cdot g(x)$.
Với $g(x) = 8x^4+5\,(m-5)\,x-4\,(m^2-16)$.

- **Trường hợp 1.** $g(0)=0 \Leftrightarrow m=\pm 4$.
  - Với $m=4 \Rightarrow y' = 8x^7$. Suy ra $x=0$ là điểm cực tiểu của hàm số.
  - Với $m=-4 \Rightarrow y' = 8x^4\,(x^3-5)$. Suy ra $x=0$ không là điểm cực trị của hàm số.
- **Trường hợp 2.** $g(0)\neq 0 \Leftrightarrow m\neq \pm 4$.
  Để hàm số đạt cực tiểu tại $x=0$ thì qua giá trị $x=0$ dấu của y' phải chuyển từ âm sang dương do đó $g(0)>0 \Leftrightarrow -4<m<4$.

Kết hợp hai trường hợp ta được $-4<m\le 4$. Do $m\in\mathbb{Z} \Rightarrow m\in\{-3;-2;-1;0;1;2;3;4\}$.
Vậy có 8 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn.
Chọn đáp án (A) □

Câu 16. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = x^{12}+(m-5)x^7+(m^2-25)x^6+1$ đạt cực đại tại $x=0$?

(A) 8. (B) 9. (C) Vô số. (D) 10.

Lời giải.

Ta có $y' = 12x^{11}+7(m-5)x^6+6(m^2-25)x^5$.

- **Trường hợp 1.** $m=5 \Rightarrow y' = 12x^{11}$.
  Khi đó $y'=0 \Leftrightarrow x=0$ là nghiệm bội lẻ, đồng thời dấu của y đổi từ âm sang dương, nên $x=0$ là điểm cực tiểu của hàm số,do đó không thỏa mãn, $m=5$ (loại).
- **Trường hợp 2.** $m=-5 \Rightarrow y' = x^6(12x^5-70)=0 \Rightarrow x=0$ là nghiệm bội chẵn, do đó y không đổi dấu khi đi qua $x=0$, $m=-5$ (loại).
- **Trường hợp 3.** $m\neq\pm 5 \Rightarrow y' = x^5\left[12x^6+7(m-5)x+6(m^2-25)\right] = x^5.g(x)$.
  Với $g(x) = 12x^6+7(m-5)x+6(m^2-25)$, ta thấy $x=0$ không là nghiệm của $g(x)$.
  Để hàm số đạt cực đại tại $x=0$ thì y' phải đổi dấu từ dương sang âm khi đi qua $x=0$, xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0^-} g(x)<0\\ \lim\limits_{x\to 0^+} g(x)<0\end{cases} \Leftrightarrow 6(m^2-25)<0 \Leftrightarrow -5<m<5$.

Vì m nguyên nên $m=\{-4;-3;...;3;4\}$, vậy có 9 giá trị của m thỏa mãn bài toán.
Chọn đáp án (B) □

Câu 17. Cho hàm số $y = x^6 + (4+m)\,x^5 + (16-m^2)\,x^4 + 2$. Gọi S là tập hợp các gia trị m nguyên dương để hàm số đã cho đạt cực tiểu tại $x = 0$. Tổng các phần tử của S bằng

(A) 10. (B) 9. (C) 6. (D) 3.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} y' &= 6x^5 + 5\,(4+m)\,x^4 + 4\left(16-m^2\right)x^3 = x^3\left(6x^2 + 5\,(4+m)\,x + 16 - m^2\right).\\ y' &= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 = 0 \\ 6x^2 + 5\,(4+m)\,x + 16 - m^2 = 0 \quad (*). \end{cases} \end{aligned}$$

$(*)$ có $\Delta = (4+m)\,(49m+4)$.

Với mọi m nguyên dương thì $\begin{cases} \Delta > 0 \\ \dfrac{-5\,(4+m)}{6} < 0 \end{cases}$ do đó ta xét các trường hợp sau:

- **Trường hợp 1.** $16 - m^2 > 0 \Leftrightarrow 0 < m < 4$: $(*)$ có hai nghiệm âm phân biệt x_1, x_2, $(x_1 < x_2)$, ta có bảng xét dấu y' như sau:

x	$-\infty$		x_1		x_2		0		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

  Lúc này $x = 0$ là điểm cực tiểu.

- **Trường hợp 2.** $16 - m^2 < 0 \Leftrightarrow m > 4$: $(*)$ có hai nghiệm trái dấu x_1, x_2, $(x_1 < 0 < x_2)$, ta có bảng xét dấu y' như sau:

x	$-\infty$		x_1		0		x_2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

  Từ đây suy ra $x = 0$ là điểm cực đại (không thỏa mãn).

- **Trường hợp 3.** $(*)$ có một nghiệm bằng 0 và một nghiệm âm, lúc này $x = 0$ là nghiệm bội 4 của đạo hàm nên không phải là điểm cực trị.

Vậy có ba giá trị nguyên dương của m thỏa mãn yêu cầu bài toán là 1, 2, 3. Tổng các phần tử của S bằng 6.

Chọn đáp án (C) □

Câu 18. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = x^8 + (m-1)x^5 - (m^2-1)x^4 + 1$ đạt cực tiểu tại $x = 0$?

(A) 3. (B) 2. (C) Vô số. (D) 1.

Lời giải.

Ta có

$$y' = 8x^7 + 5(m-1)x^4 - 4(m^2-1)x^3 + 1 = x^3\left(8x^4 + 5(m-1)x - 4\left(m^2-1\right)\right)$$
$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ 8x^4 + 5(m-1)x - 4\left(m^2-1\right) = 0 \quad (1). \end{array}\right.$$

- Nếu $m = 1$ thì $y' = 8x^7$, suy ra hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$.
- Nếu $m = -1$ thì $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ 8x^4 - 10x = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \sqrt[3]{\dfrac{5}{4}} \end{array}\right.$, nhưng $x = 0$ là nghiệm bội chẵn nên không phải cực trị.
- Nếu $m \neq \pm 1$: khi đó $x = 0$ là nghiệm bội lẻ. Xét $g(x) = 8x^4 + 5(m-1)x - 4(m^2-1)$.
  Để $x = 0$ là điểm cực tiểu thì $\lim\limits_{x \to 0^-} g(x) = -4(m^2-1) > 0 \Leftrightarrow m^2 - 1 < 0 \Leftrightarrow -1 < m < 1$.
  Vì m nguyên nên chỉ có giá trị $m = 0$.

Vậy chỉ có hai tham số m nguyên để hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$ là $m = 0$ và $m = 1$.

Chọn đáp án (B) □

Dạng 2. Tìm m để hàm số có n cực trị

Câu 19. Biết rằng hàm số $y = (x+a)^3 + (x+b)^3 - x^3$ có hai điểm cực trị. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

(A) $ab \leq 0$. (B) $ab < 0$. (C) $ab > 0$. (D) $ab \geq 0$.

Lời giải.

Ta có $y = x^3 + 3(a+b)x^2 + 3(a^2+b^2)x + a^3 + b^3$.

$y' = 3x^2 + 6(a+b)x + 3(a^2+b^2)$.

Hàm số có hai điểm cực trị khi và chỉ khi y' có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta' = 18ab > 0 \Leftrightarrow ab > 0$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 20. Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để hàm số $y = mx^3 - 2mx^2 + (m-2)x + 1$ không có cực trị

(A) $m \in (-\infty; 6) \cup (0; +\infty)$. (B) $m \in (-6; 0)$.
(C) $m \in [-6; 0)$. (D) $m \in [-6; 0]$.

Lời giải.

Ta có $y' = 3mx^2 - 4mx + (m-2)$.

- Nếu $m = 0 \Rightarrow y' = -2 < 0$, $(\forall x \in \mathbb{R})$. Nên hàm số không có cực trị.
  Do đó $m = 0$ (chọn) (1).
- Nếu $m \neq 0$, hàm số không có cực trị $\Leftrightarrow y'$ không đổi dấu $\Leftrightarrow \Delta' \leq 0 \Leftrightarrow 4m^2 - 3m(m-2) \leq 0 \Leftrightarrow m^2 + 6m \leq 0 \Rightarrow -6 \leq m < 0$ (do $m \neq 0$) (2).

Kết hợp (1) và (2) ta được $-6 \leq m \leq 0$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 21. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = (m-1)\,x^4 - 2\,(m-3)\,x^2 + 1$ không có cực đại?

(A) $1 < m \leq 3$. (B) $m \leq 1$. (C) $m \geq 1$. (D) $1 \leq m \leq 3$.

Lời giải.

- **Trường hợp 1.** Nếu $m = 1 \Rightarrow y = 4x^2 + 1$. Suy ra hàm số không có cực đại.
- **Trường hợp 2.** Nếu $m > 1$.
  Để hàm số không có cực đại thì $-2\,(m-3) \geq 0 \Leftrightarrow m \leq 3$. Suy ra $1 < m \leq 3$.

Vậy $1 \leq m \leq 3$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 22. Để đồ thị hàm số $y = -x^4 - (m-3)\,x^2 + m + 1$ có điểm cực đại mà không có điểm cực tiểu thì tất cả các giá trị thực của tham số m là

(A) $m \geq 3$. (B) $m > 3$. (C) $m < 3$. (D) $m \leq 3$.

Lời giải.

$y' = -4x^3 - 2\,(m-3)\,x = -2x\,(2x^2 + m - 3) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = \dfrac{3-m}{2}. \end{array}\right.$

Vì hàm số đã cho là hàm trùng phương với $a = -1 < 0$ nên hàm số có điểm cực đại mà không có điểm cực tiểu $\Leftrightarrow y' = 0$ có đúng 1 nghiệm bằng $0 \Leftrightarrow \dfrac{3-m}{2} \leq 0 \Leftrightarrow m \geq 3$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 23. Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + m$. Tìm tất cả các giá trị thực của m để hàm số có 3 cực trị

(A) $m > 0$. (B) $m \geq 0$. (C) $m < 0$. (D) $m \leq 0$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

$y' = 4x^3 - 4mx = 4x\,(x^2 - m) = 0 \Leftrightarrow 4x\,(x^2 - m) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = m \quad (*). \end{array}\right.$

Hàm số có 3 cực trị $\Leftrightarrow y' = 0$ có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình $(*)$ có 2 nghiệm phân biệt $x \neq 0 \Leftrightarrow m > 0$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 24. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = m^2x^4 - (m^2 - 2019m)\,x^2 - 1$ có đúng một cực trị?

(A) 2019. (B) 2020. (C) 2018. (D) 2017.

Lời giải.

- **Trường hợp 1.** $m = 0 \Rightarrow y = -1$ nên hàm số không có cực trị $\Rightarrow m = 0$ (loại).

- **Trường hợp 2.** $m \neq 0 \Rightarrow m^2 > 0$.

  Hàm số $y = m^2x^4 - (m^2 - 2019m)\,x^2 - 1$ có đúng một cực trị

$$\Leftrightarrow -m^2 \cdot \left(m^2 - 2019m\right) \geq 0 \Leftrightarrow m^2 - 2019m \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq m \leq 2019.$$

  Vì $m \neq 0 \Rightarrow 0 < m \leq 2019$.

Do $m \in \mathbb{Z}$ nên có 2019 giá trị nguyên của tham số m thỏa đề.

Chọn đáp án (A) □

Câu 25. Cho hàm số $y = x^3 - 3\,(m+1)\,x^2 + 3\,(7m-3)\,x$. Gọi S là tập các giá trị nguyên của tham số m để hàm số không có cực trị. Số phần tử của S là

(A) 2. (B) 4. (C) 0. (D) Vô số.

Lời giải.

Ta có $y' = 3x^2 - 6\,(m+1)\,x + 3\,(7m-3) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2\,(m+1)\,x + 7m - 3 = 0$.

Để hàm số không có cực trị thì $\Delta' \leq 0 \Leftrightarrow (m+1)^2 - (7m-3) \leq 0 \Leftrightarrow m^2 - 5m + 4 \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq m \leq 4$.

Do $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow S = \{1;2;3;4\}$. Vậy S có 4 phần tử.

Chọn đáp án (B) □

Câu 26. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = x^4 + 4mx^3 + 3\,(m+1)\,x^2 + 1$ có cực tiểu mà không có cực đại.

(A) $m \in \left(-\infty; \dfrac{1-\sqrt{7}}{3}\right]$.

(B) $m \in \left[\dfrac{1-\sqrt{7}}{3}; 1\right] \cup \{-1\}$.

(C) $m \in \left[\dfrac{1+\sqrt{7}}{3}; +\infty\right)$.

(D) $m \in \left[\dfrac{1-\sqrt{7}}{3}; \dfrac{1+\sqrt{7}}{3}\right] \cup \{-1\}$.

Lời giải.

Ta có $y' = 4x^3 + 12mx^2 + 6\,(m+1)\,x$.

- **Trường hợp 1.** $m = -1$, ta có $y' = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x-3)$.

  Bảng xét dấu

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
y'		$-$	0	$-$	0	$+$	

  Hàm số có 1 cực tiểu duy nhất.

  Ta có $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ 2x^2 + 6mx + 3m + 3 = 0 \quad (*). \end{array}\right.$

- **Trường hợp 2.** $m \neq -1$.

  Để hàm số đã cho chỉ có một cực tiểu thì phương trình $(*)$ không có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow (3m)^2 - 2\,(3m+3) \leq 0 \Leftrightarrow \frac{1-\sqrt{7}}{2} \leq m \leq \frac{1+\sqrt{7}}{2}.$$

Vậy $m \in \left[\dfrac{1-\sqrt{7}}{3}; \dfrac{1+\sqrt{7}}{3}\right] \cup \{-1\}$.

Chọn đáp án D □

Câu 27. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2(x+1)(x^2+2mx+5)$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số có đúng một điểm cực trị?

A 0. B 5. C 6. D 7.

Lời giải.

Hàm số $f(x)$ có đúng một điểm cực trị khi và chỉ khi tam thức $g(x) = x^2 + 2mx + 5$ vô nghiệm hoặc có hai nghiệm phân biệt trong đó một nghiệm là $x = -1$, hoặc $g(x)$ có nghiệm kép $x = -1$

Tức là

$$\left[\begin{array}{l} \Delta'_g < 0 \\ \begin{cases} g(-1) = 0 \\ \Delta'_g > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} -\dfrac{b'}{a} = -1 \\ \Delta'_g = 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m^2 - 5 < 0 \\ \begin{cases} -2m + 6 = 0 \\ m^2 - 5 > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} -m = -1 \\ \Delta'_g = 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\sqrt{5} < m < \sqrt{5} \\ m = 3. \end{array}\right.$$

Do đó tập các giá trị nguyên thỏa mãn yêu cầu bài toán là $S = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$.

Chọn đáp án C □

Câu 28. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = -\dfrac{x^3}{3} + mx^2 - 2mx + 1$ có hai điểm cực trị.

A $0 < m < 2$. B $m > 2$. C $m > 0$. D $\left[\begin{array}{l} m > 2 \\ m < 0 \end{array}\right.$..

Lời giải.

Ta có $y' = -x^2 + 2mx - 2m$.

Hàm số $y = -\dfrac{x^3}{3} + mx^2 - 2mx + 1$ có hai điểm cực trị $\Leftrightarrow y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta' = m^2 - 2m > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > 2 \\ m < 0. \end{array}\right.$$

Chọn đáp án D □

Câu 29. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2mx + m$ có cực đại và cực tiểu?

A $m < \dfrac{3}{2}$. B $m < -\dfrac{3}{2}$. C $m \leq \dfrac{3}{2}$. D $m > \dfrac{3}{2}$.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

$y' = 3x^2 - 6x + 2m$.

Hàm số có cực đại và cực tiểu $\Leftrightarrow y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt. $\Leftrightarrow \Delta = 36 - 24m > 0 \Leftrightarrow m < \dfrac{3}{2}$.

Chọn đáp án A □

Câu 30. Tập hợp các giá trị của m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m+2)x + 1$ có hai cực trị là

A. $(-\infty; -1] \cup [2; +\infty)$. B. $(-\infty; -1) \cup (2; +\infty)$.
C. $(-1; 2)$. D. $[-1; 2]$.

Lời giải.

Ta có $y' = x^2 - 2mx + m + 2$.

Để hàm số có hai cực trị thì $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt nên $y' > 0 \Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow m^2 - m - 2 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < -1 \\ m > 2. \end{array}\right.$

Chọn đáp án B □

Câu 31. Cho hàm số $y = mx^4 - x^2 + 1$. Tập hợp các số thực m để hàm số đã cho có đúng một điểm cực trị là

A. $(0; +\infty)$. B. $(-\infty; 0]$. C. $[0; +\infty)$. D. $(-\infty; 0)$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

- **Trường hợp 1.** $m = 0$: Hàm số đã cho trở thành $y = -x^2 + 1$ là một hàm bậc hai nên luôn có một cực trị.
- **Trường hợp 2.** $m \neq 0$: Ta có $y' = 4mx^3 - 2x$.
  $y' = 0 \Leftrightarrow 4mx^3 - 2x = 0 \Leftrightarrow 2x\left(2mx^2 - 1\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ 2mx^2 - 1 = 0 \quad (*). \end{array}\right.$
  Để hàm số có đúng một cực trị thì phương trình $y' = 0$ có đúng 1 nghiệm.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ Phương trình $(*)$ có một nghiệm $x = 0$ hoặc vô nghiệm suy ra $m < 0$.

Vậy $m \leq 0$.

Chọn đáp án B □

Câu 32. Cho hàm số $y = mx^4 + (2m+1)x^2 + 1$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số có đúng một điểm cực tiểu.

A. Không tồn tại m. B. $m \geq 0$. C. $m \geq -\frac{1}{2}$. D. $-\frac{1}{2} \leq m \leq 0$.

Lời giải.

Với $m = 0$, ta có $y = x^2 + 1 \Rightarrow y' = 2x$. Khi đó hàm số có 1 cực trị và cực trị đó là cực tiểu. Suy ra $m = 0$ thỏa mãn yêu cầu bài toán. (1)

Với $m \neq 0$, ta có $y' = 4mx^3 + 2(2m+1)x = 2x(2mx^2 + 2m + 1)$

Hàm số có một cực trị là cực tiểu

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ 2mx^2 + 2m + 1 = 0 \quad (\text{vô nghiệm}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ \dfrac{-2m-1}{2m} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ \left[\begin{array}{l} m < -\frac{1}{2} \\ m > 0 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow m > 0 \quad (2).$$

Từ (1) và (2) suy ra hàm số có một cực trị là cực tiểu khi $m \geq 0$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 33. Tìm số các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = x^4 + 2\left(m^2 - m - 6\right)x^2 + m - 1$ có ba điểm cực trị.

(A) 6. (B) 5. (C) 4. (D) 3.

Lời giải.

Ta có $y' = 4x^3 + 4\left(m^2 - m - 6\right)x = 4x\left[x^2 + \left(m^2 - m - 6\right)\right]$.

$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 + \left(m^2 - m - 6\right) = 0 \quad (1). \end{array}\right.$

Hàm số có ba điểm cực trị $\Leftrightarrow$ (1) có hai nghiệm phân biệt khác 0 $\Leftrightarrow m^2 - m - 6 < 0 \Leftrightarrow -2 < m < 3$.

Ta có $m \in \mathbb{Z}$, $-2 < m < 3 \Leftrightarrow m \in \{-1; 0; 1; 2\}$.

Vậy có 4 giá trị nguyên của tham số m để hàm số có ba điểm cực trị.

Chọn đáp án (C) □

Câu 34. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m trên miền $[-10; 10]$ để hàm số $y = x^4 - 2(2m + 1)x^2 + 7$ có ba điểm cực trị?

(A) 20. (B) 10. (C) Vô số. (D) 11.

Lời giải.

Ta có $y' = 4x\left[x^2 - (2m + 1)\right]$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = 2m + 1 \ (*) \end{array}\right.$

Hàm số đã cho có ba cực trị khi và chỉ khi $y' = 0$ có ba nghiệm phân biệt hay $(*)$ có hai nghiệm phân biệt khác 0 .

$\Leftrightarrow 2m + 1 > 0 \Leftrightarrow m > -\dfrac{1}{2}$.

Do $m \in [-10; 10]$ nên có 11 giá trị thỏa mãn.

Chọn đáp án (D) □

Câu 35. Cho hàm số $y = mx^4 + \left(m^2 - 6\right)x^2 + 4$. Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số có ba điểm cực trị trong đó có đúng hai điểm cực tiểu và một điểm cực đại?

(A) 4. (B) 3. (C) 2. (D) 5.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = 4mx^3 + 2\left(m^2 - 6\right)x$.

Hàm số đã cho có ba điểm cực trị trong đó có đúng hai điểm cực tiểu và một điểm cực đại khi và chỉ khi

$\begin{cases} 4m > 0 \\ m\left(m^2 - 6\right) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < \sqrt{6}$.

Do đó có hai giá trị nguyên của tham số m.

Chọn đáp án (C) □

Câu 36. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = mx^4 + (m-1)x^2 + 1 - 2m$ có một cực trị.

(A) $m \geq 1$. (B) $m \leq 0$. (C) $0 \leq m \leq 1$. (D) $m \leq 0 \cup m \geq 1$.

Lời giải.

Ta có: $y' = 4mx^3 + 2(m-1)x$.

Trường hợp 1: Xét $m = 0 \Rightarrow y' = -2x$.

Ta thấy phương trình $y' = 0$ đổi dấu một lần nên hàm số có một điểm cực trị.

Suy ra $m = 0$ (thoả yêu cầu bài toán) (1)

Trường hợp 2: Xét $m = 1 \Rightarrow y' = 4x^3$.

Ta thấy phương trình $y' = 0$ đổi dấu một lần nên hàm số có một điểm cực trị.

Suy ra $m = 1$ (thoả yêu cầu bài toán) (2)

Trường hợp 3: Xét $m \neq 0$, $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = \dfrac{1-m}{2m} \end{array}\right.$

Để hàm số có một điểm cực trị thì $\dfrac{1-m}{2m} \leq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < 0 \\ m \geq 1 (3) \end{array}\right.$.

Từ (1), (2) và (3) suy ra $\left[\begin{array}{l} m \leq 0 \\ m \geq 1 \end{array}\right.$

Ghi chú: Dùng công thức tính nhanh

Hàm số có một điểm cực trị khi và chỉ khi $m(m-1) \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \leq 0 \\ m \geq 1 \end{array}\right.$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 37. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm

$$f'(x) = x^2(x+2)^4(x+4)^3\left[x^2 + 2(m+3)x + 6m + 18\right]$$

Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $f(x)$ có đúng một điểm cực trị?

(A) 7. (B) 5. (C) 8. (D) 6.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 = 0 \\ (x+2)^4 = 0 \\ (x+4)^3 = 0 \\ x^2 + 2(m+3)x + 6m + 18 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -2 \\ x = -4 \\ x^2 + 2(m+3)x + 6m + 18 = 0 (*) \end{array}\right.$

Để hàm số $f(x)$ có đúng một điểm cực trị $\Leftrightarrow$ Phương trình $(*)$ vô nghiệm, có nghiệm kép hoặc có hai nghiệm phân biệt trong đó có nghiệm là -4.

Trường hợp 1: Phương trình $(*)$ vô nghiệm $\Leftrightarrow \Delta = 4m^2 + 24m + 36 - 24m - 72 = 4m^2 - 36 < 0$ $\Leftrightarrow -3 < m < 3 \Rightarrow m \in \{-2; -1; 0; 1; 2\}$

Trường hợp 2: Phương trình $(*)$ có nghiệm kép $\Leftrightarrow \Delta = 4m^2 - 36 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 3 \\ m = -3 \end{array}\right.$

Trường hợp 3: Phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2. Trong đó $x_1 = -4$.

Phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1, x_2 \Leftrightarrow \Delta = 4m^2 - 36 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < -3 \\ m > 3 \end{array}\right.$

Theo định lí Vièta ta có

$$\begin{cases} S = x_1 + x_2 = -4 + x_2 = -2m - 6 \\ P = x_1 \cdot x_2 = -4x_2 = 6m + 18 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = -2m - 2 \\ x_2 = -\dfrac{3}{2}m - \dfrac{9}{2} \end{cases} \Leftrightarrow -2m - 2 = -\dfrac{3}{2}m - \dfrac{9}{2} \Leftrightarrow m = 5.$$

Vậy $m \in \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 5\}$ thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Chọn đáp án C □

Câu 38. Gọi S là tập hợp những giá trị của tham số m để hàm số sau không có cực trị trên $\mathbb{R}$. $f(x) = \dfrac{1}{4}m^2.e^{4x} + \dfrac{1}{3}m.e^{3x} - \dfrac{1}{2}e^{2x} - (m^2 + m - 1)e^x$. Tổng tất cả các phần tử của tập S bằng

A. $-\dfrac{2}{3}$. B. $\dfrac{2}{3}$. C. $\dfrac{1}{3}$. D. -1.

Lời giải.

$f'(x) = m^2.e^{4x} + m.e^{3x} - e^{2x} - (m^2 + m - 1)e^x = e^x(m^2.e^{3x} + m.e^{2x} - e^x - m^2 - m + 1) = 0$.

$\Leftrightarrow m^2.e^{3x} + m.e^{2x} - e^x - m^2 - m + 1 = 0$.

Đặt $t = e^x > 0$ ta có:

Ta có: $m^2t^3 + mt^2 - t - m^2 - m + 1 = 0$.

$\Leftrightarrow m^2(t^3 - 1) + m(t^2 - 1) + 1 - t = 0 \Leftrightarrow (t - 1)[m^2(t^2 + t + 1) + m(t + 1) - 1) = 0$

$\Leftrightarrow (t - 1)[m^2t^2 + (m^2 + m)t + m^2 + m - 1] = 0$

Điều kiện cần để hàm số không có cực trị thì phương trình $m^2t^2 + (m^2 + m)t + m^2 + m - 1$ có nghiệm $t = 1 \Leftrightarrow 3m^2 + 2m - 1 = 0 \Leftrightarrow m = -1, m = \dfrac{1}{3}$.

Thử lại ta thấy với hai giá trị m trên ta đều có nghiệm đơn $t = 1$.

Vậy hai giá trị $m = -1$, $m = \dfrac{1}{3}$ thỏa mãn.

Chọn đáp án A □

Dạng 3. Đường thẳng đi qua hai điểm cực trị

Câu 39. Đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$ có hai cực trị A và B. Điểm nào dưới đây thuộc đường thẳng AB?

A. $M\,(0; -1)$. B. $N\,(1; -10)$. C. $P\,(1; 0)$. D. $Q\,(-1; 10)$.

Lời giải.

Ta có: $y' = 3x^2 - 6x - 9$, thực hiện phép chia y cho y' ta được số dư là $y = -8x - 2$.

Phương trình đường thẳng $AB : y = -8x - 2$.

Toạ độ điểm $N\,(1; -10)$ thuộc đường thẳng AB.

Chọn đáp án B □

Câu 40. Tìm giá trị thực của tham số m để đường thẳng $d\colon y = (2m-1)x + 3 + m$ vuông góc với đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$.

Ⓐ $m = \dfrac{3}{2}$. Ⓑ $m = \dfrac{3}{4}$. Ⓒ $m = -\dfrac{1}{2}$. Ⓓ $m = \dfrac{1}{4}$.

Lời giải.

Ta có $y' = 3x^2 - 6x$. Từ đó ta có tọa độ hai điểm cực trị $A(0;1)$, $B(2;-3)$.

Đường thẳng qua hai điểm cực trị có phương trình $y = -2x + 1$. Đường thẳng này vuông góc với đường thẳng $y = (2m-1)x + 3 + m$ khi và chỉ khi

$(2m-1)(-2) = -1 \Leftrightarrow m = \dfrac{3}{4}$.

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 41. Tìm giá trị thực của tham số m để đường thẳng $y = (2m-1)x + m + 3$ song song với đường thẳng đi qua các điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$

Ⓐ $m = \dfrac{3}{4}$. Ⓑ $m = \dfrac{1}{2}$. Ⓒ $m = -\dfrac{3}{4}$. Ⓓ $m = -\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$ có tập xác định: $\mathscr{D} = \mathbb{R}$

$y' = 3x^2 - 6x$; $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$.

Suy ra đồ thị hàm số có hai điểm cực trị là $A(0;1)$, $B(2;-3)$.

Đường thẳng d đi qua hai điểm A, B có phương trình: $\dfrac{x}{2} = \dfrac{y-1}{-4} \Leftrightarrow y = -2x + 1$.

Đường thẳng $y = (2m-1)x + m + 3$ song song với đường thẳng d

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2m - 1 = -2 \\ m + 3 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow m = -\dfrac{1}{2}$.

Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 42. Đồ thị của hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$ có hai điểm cực trị A và B. Điểm nào dưới đây thuộc đường thẳng AB.

Ⓐ $P(1;0)$. Ⓑ $M(0;-1)$. Ⓒ $N(1;-10)$. Ⓓ $Q(-1;10)$.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

$y' = 3x^2 - 6x - 9$.

$y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x - 9 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \Rightarrow y = 6 \\ x = 3 \Rightarrow y = -26 \end{array}\right.$.

Ta có $A(-1;6)$, $B(3;-26) \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (4;-32)$ nên) Chọn $\vec{n}_{AB} = (8;1)$.

Phương trình đường thẳng AB là:

$8(x+1) + 1(y-6) = 0 \Leftrightarrow 8x + y + 2 = 0$.

Thay tọa độ các điểm P, M, N, Q vào phương trình đường thẳng AB ta có điểm $N(1;-10)$ thuộc đường thẳng.

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 43. Tìm giá trị thực của tham số m để đường thẳng $d: y = (3m+1)x + 3 + m$ vuông góc với đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 1$.

Ⓐ $\frac{1}{3}$. Ⓑ $-\frac{1}{6}$. Ⓒ $m = \frac{1}{6}$. Ⓓ $-\frac{1}{3}$.

Lời giải.

Xét hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 1$.

Có $y' = 3x^2 - 6x$, $y = \left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}\right)y' - 2x - 1$.

Do đó, đường thẳng Δ qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số này có phương trình là $y = -2x - 1$.

Để d vuông góc với Δ thì $(3m+1)\cdot(-2) = -1 \Leftrightarrow m = -\frac{1}{6}$.

Vậy giá trị cần tìm của m là $m = -\frac{1}{6}$.

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 44. Tìm tổng tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = 2x^3 + 3(m-1)x^2 + 6m(1-2m)x$ song song đường thẳng $y = -4x$.

Ⓐ $m = -\frac{1}{3}$. Ⓑ $m = \frac{2}{3}$. Ⓒ $m = -\frac{2}{3}$. Ⓓ $m = 1$.

Lời giải.

Ta có $y' = 6x^2 + 6(m-1)x + 6m(1-2m)$,

$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = m \\ x = 1 - 2m \end{array}\right.$.

Để hàm số có hai cực trị thì $m \neq 1 - 2m \Leftrightarrow m \neq \frac{1}{3}$.

Hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là $A(m; -7m^3 + 3m^2)$, $B(1-2m; 20m^3 - 24m^2 + 9m - 1)$.

Do đó $\overrightarrow{AB} = \left(1 - 3m; (3m-1)^3\right)$. Do đó AB có vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = \left((3m-1)^2; 1\right)$.

Do đó $AB: (3m-1)^2x + y - 2m^3 + 3m^2 - m = 0 \Leftrightarrow y = -(3m-1)^2x + 2m^3 - 3m^2 + m$.

Để đường thẳng AB song song với đường thẳng $y = -4x$ thì:

$$\begin{cases} -(3m-1)^2 = -4 \\ 2m^3 - 3m^2 + m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = -\frac{1}{3} \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} m \neq 0 \\ m \neq \frac{1}{2} \\ m \neq 1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow m = -\frac{1}{3}.$$

Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 45. Biết đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x + 1$ có hai điểm cực trị A, B. Khi đó phương trình đường thẳng AB là

Ⓐ $y = 2x - 1$. Ⓑ $y = -2x + 1$. Ⓒ $y = -x + 2$. Ⓓ $y = x - 2$.

Lời giải.

Thực hiện phép chia y cho y' ta được: $y = y'.\left(\frac{1}{3}x\right) + (-2x + 1)$.

Giả sử hai điểm cực trị của đồ thị hàm số lần lượt là: $A(x_1; y_1)$ và $B(x_2; y_2)$.

Ta có: $\begin{cases} y_1 = y(x_1) = y'(x_1).\left(\frac{1}{3}x_1\right) + (-2x_1+1) = -2x_1+1 \\ y_2 = y(x_2) = y'(x_2).\left(\frac{1}{3}x_2\right) + (-2x_2+1) = -2x_2+1 \end{cases}.$

Ta thấy, toạ độ hai điểm cực trị A và B thoả mãn phương trình $y = -2x+1$.

Vậy phương trình đường thẳng qua hai điểm cực trị là: $y = -2x+1$.

Chọn đáp án B □

Câu 46. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 + 2x^2 + (m-3)x + m$ có hai điểm cực trị và điểm $M(9;-5)$ nằm trên đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị.

A $m=-1$. B $m=-5$. C $m=3$. D $m=2$.

Lời giải.

Ta có $y' = 3x^2 + 4x + m - 3$.

Để hàm số có hai điểm cực trị thì phương trình $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow m < \frac{13}{3}$ $(*)$.

Ta có $y = y'.\left(\frac{1}{3}x + \frac{2}{9}\right) + \left(\frac{2m}{3} - \frac{26}{9}\right)x + \frac{7m}{9} + \frac{2}{3}$ nên phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị là $y = \left(\frac{2m}{3} - \frac{26}{9}\right)x + \frac{7m}{9} + \frac{2}{3}$.

Theo giả thiết, đường thẳng này đi qua $M(9;-5)$ nên $m=3$ (thỏa mãn điều kiện $(*)$).

Chọn đáp án C □

Câu 47. Đường thẳng nối hai điểm cực đại và cực tiểu của đồ thị hàm số $y = x^3 - 2x + m$ đi qua điểm $M(-3;7)$ khi m bằng bao nhiêu?

A 1. B -1. C 3. D 0.

Lời giải.

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

$y' = 3x^2 - 2$.

$y = x^3 - 2x + m = \frac{1}{3}x.y' + \left(-\frac{4}{3}x + m\right)$

Suy ra đường thẳng đi qua các điểm cực trị của đồ thị hàm số có phương trình là $y = -\frac{4}{3}x + m$.

Đường thẳng này đi qua điểm $M(-3;7)$ khi và chỉ khi $7 = -\frac{4}{3}.(-3) + m \Leftrightarrow m = 3$.

Chọn đáp án C □

Câu 48. Tìm giá trị thực của tham số m để đường thẳng d: $y = (3m+1)x + 3 + m$ vuông góc với đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 1$.

A $m = \frac{1}{6}$. B $-\frac{1}{3}$. C $\frac{1}{3}$. D $-\frac{1}{6}$.

Lời giải.

Xét hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 1$.

Có $y' = 3x^2 - 6x$.

$y = \left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}\right)y' - 2x - 1$.

Do đó, đường thẳng Δ qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số này có phương trình là $y = -2x - 1$.

Để d vuông góc với Δ thì $(3m+1).(-2)=-1 \Leftrightarrow m=-\dfrac{1}{6}$.

Vậy giá trị cần tìm của m là $m=-\dfrac{1}{6}$.

Chọn đáp án D □

Câu 49. Giả sử A, B là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ và đường thẳng AB đi qua gốc tọa độ. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P=abc+ab+c$.

Ⓐ $-\dfrac{16}{25}$. Ⓑ -9. Ⓒ $-\dfrac{25}{9}$. Ⓓ 1.

Lời giải.

TXĐ $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.

$f'(x)=3x^2+2ax+b$.

Điều kiện để hàm số có hai điểm cực trị là $f'(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt $\Rightarrow a^2-3b>0$.

Lấy $f(x)$ chia cho $f'(x)$.

Ta có $f(x)=f'(x).\left(\dfrac{1}{3}x+\dfrac{1}{9}a\right)+\left(\dfrac{2}{3}b-\dfrac{2}{9}\right)x+c-\dfrac{1}{9}ab$.

Suy ra đường thẳng đi qua A, B là: $y=\left(\dfrac{2}{3}b-\dfrac{2}{9}\right)x+c-\dfrac{1}{9}ab\ d$.

Theo bài ra (d) đi qua gốc tọa độ $\Rightarrow c-\dfrac{1}{9}ab=0 \Leftrightarrow ab=9c$.

Khi đó $P=abc+ab+c \Leftrightarrow P=9c^2+10c \Leftrightarrow P=\left(3c+\dfrac{5}{3}\right)^2-\dfrac{25}{9}$.

Suy ra $\min P=-\dfrac{25}{9}$.

Chọn đáp án C □

Câu 50. Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^3-3mx^2+2$ có hai điểm cực trị A và B sao cho các điểm A, B và $M(1;-2)$ thẳng hàng.

Ⓐ $m=\sqrt{2}$. Ⓑ $m=-\sqrt{2}$.

Ⓒ $m=2$. Ⓓ $m=-\sqrt{2}$; $m=\sqrt{2}$.

Lời giải.

Ta có: $y'=3x^2-6mx$.

$y'=0 \Leftrightarrow 3x^2-6mx=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\x=2m\end{array}\right.$.

Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị khi và chỉ khi phương trình $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow 2m\neq 0 \Leftrightarrow m\neq 0$.

Khi đó hai điểm cực trị là $A(0;2)$, $B(2m;2-4m^3)$.

Ta có $\overrightarrow{MA}=(-1;4)$, $\overrightarrow{MB}=(2m-1;4-4m^3)$.

Ba điểm A, B và $M(1;-2)$ thẳng hàng $\Leftrightarrow \overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MB}$ cùng phương

$\Leftrightarrow \dfrac{2m-1}{-1}=\dfrac{4-4m^3}{4} \Leftrightarrow \dfrac{2m-1}{-1}=\dfrac{1-m^3}{1} \Leftrightarrow 2m-1=m^3-1 \Leftrightarrow m^3=2m$

$\Leftrightarrow m^2=2 \Leftrightarrow m=\pm\sqrt{2}$ (do $m\neq 0$).

Chọn đáp án D □

Dạng 4. Tìm m để hàm số bậc 3 có cực trị thỏa mãn điều kiện cho trước

Câu 51. Với giá trị nào của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + m$ có hai điểm cực trị A, B thỏa mãn $OA = OB$ (O là gốc tọa độ)?

(A) $m = \frac{3}{2}$. (B) $m = 3$. (C) $m = \frac{1}{2}$. (D) $m = \frac{5}{2}$.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

$y' = 3x^2 - 6x$

$y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$.

Do đó đồ thị hàm số đã cho luôn có hai điểm cực trị lần lượt có tọa độ là $A\left(0; m\right)$ và $B\left(2; -4 + m\right)$.

Ta có $OA = OB \Leftrightarrow \sqrt{0^2 + m^2} = \sqrt{2^2 + (4 - m)^2} \Leftrightarrow m^2 = 4 + (4 - m)^2 \Leftrightarrow 20 - 8m = 0 \Leftrightarrow m = \frac{5}{2}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 52. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị của hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + \left(m^2 - 1\right)x$ có hai điểm cực trị A và B sao cho A, B nằm khác phía và cách đều đường thẳng d: $y = 5x - 9$. Tính tổng tất cả các phần tử của S.

(A) 3. (B) 6. (C) -6. (D) 0.

Lời giải.

Ta có $y' = x^2 - 2mx + \left(m^2 - 1\right)$

$\Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = m - 1 \\ x = m + 1 \end{array}\right.$

$\Rightarrow A\left(m - 1; \dfrac{m^3 - 3m + 2}{3}\right)$ và $B\left(m + 1; \dfrac{m^3 - 3m - 2}{3}\right)$

Khi đó phương trình đường thẳng $AB: y = -\frac{2}{3}x + \dfrac{m\left(m^2 - 1\right)}{3}$

Do đó AB không thể song song hoặc trùng với $d \Rightarrow A, B$ cách đều đường thẳng d: $y = 5x - 9$ nếu trung điểm I của AB nằm trên d

$$I\left(m; \frac{m^3 - 3m}{3}\right) \in d \Rightarrow \frac{m^3 - 3m}{3} = 5m - 9 \Leftrightarrow m^3 - 18m + 27 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 3 \\ m = \dfrac{-3 \pm 3\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$$

Với $m = 3 \Rightarrow A, B$ thỏa điều kiện nằm khác phía so với d.

Với $m = \dfrac{-3 \pm 3\sqrt{5}}{2} \Rightarrow A, B$ thỏa điều kiện nằm khác phía so với d.

Tổng các phần tử của S bằng 0.

Chọn đáp án (D) □

Câu 53. Có tất cả bao nhiêu giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{2}{3}x^3 - mx^2 - 2\left(3m^2 - 1\right)x + \frac{2}{3}$ có hai điểm cực trị có hoành độ x_1, x_2 sao cho $x_1x_2 + 2\left(x_1 + x_2\right) = 1$.

(A) 1. (B) 0. (C) 3. (D) 2.

Lời giải.

Ta có: $y' = 2x^2 - 2mx - 2(3m^2 - 1) = 2(x^2 - mx - 3m^2 + 1)$.

Đặt $g(x) = x^2 - mx - 3m^2 + 1$; $\Delta = 13m^2 - 4$.

Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị khi và chỉ khi y' có hai nghiệm phân biệt.

$\Leftrightarrow g(x)$ có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow \Delta > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > \dfrac{2\sqrt{13}}{13} \\ m < -\dfrac{2\sqrt{13}}{13} \end{array}\right.$ $(*)$.

x_1, x_2 là các nghiệm của $g(x)$ nên theo định lý Vi – ét, ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = m \\ x_1x_2 = -3m^2 + 1 \end{cases}$.

Do đó $x_1x_2 + 2(x_1 + x_2) = 1 \Leftrightarrow -3m^2 + 2m + 1 = 1 \Leftrightarrow -3m^2 + 2m = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = \dfrac{2}{3} \end{array}\right.$.

Đối chiếu với điều kiện $(*)$, ta thấy chỉ $m = \dfrac{2}{3}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án A □

Câu 54. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y = mx^3 - (2m-1)x^2 + 2mx - m - 1$ có hai điểm cực trị nằm về hai phía của trục hoành?

A. 4. B. 2. C. 1. D. 3.

Lời giải.

Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị nằm về hai phía đối với trục hoành khi và chỉ khi phương trình $mx^3 - (2m-1)x^2 + 2mx - m - 1 = 0$ (1) có 3 nghiệm phân biệt.

Ta có (1) $\Leftrightarrow (x-1)\left[mx^2 - (m-1)x + m + 1\right] = 0$.

Phương trình (1) có 3 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi phương trình $mx^2 - (m-1)x + m + 1 = 0$ có 2 nghiệm phân biệt khác 1.

$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m - (m-1) + m + 1 \neq 0 \\ (m-1)^2 - 4m(m+1) > 0 \end{cases}$.

$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m + 2 \neq 0 \\ -3m^2 - 6m + 1 > 0 \end{cases}$.

$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m \neq -2 \\ \dfrac{-3-2\sqrt{3}}{3} < m < \dfrac{-3+2\sqrt{3}}{3} \end{cases}$.

Do $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m = -1$.

Chọn đáp án C □

Câu 55. Cho hàm số $y = x^3 - (m+6)x^2 + (2m+9)x - 2$. Tìm m để đồ thị hàm số có hai điểm cực trị nằm về hai phía của trục hoành.

(A) $\left[\begin{array}{l} m \geq -2 \\ m \leq -6 \end{array}\right.$. (B) $m \geq -2$. (C) $m \leq -6$. (D) $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} m > -2 \\ m < -6 \end{array}\right. \\ m \neq \dfrac{-3}{2} \end{cases}$.

Lời giải.

$y' = 3x^2 - 2(m+6)x + 2m + 9$.

$y' = 3x^2 - 2(m+6)x + 2m + 9 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = \dfrac{2m+9}{3} \end{array}\right.$.

Hàm số có 2 cực trị $\Leftrightarrow \dfrac{2m+9}{3} \neq 1 \Leftrightarrow m \neq -3$ (1).

$y(1) = m + 2$.

$y\left(\dfrac{2m+9}{3}\right) = -m\dfrac{(2m+9)^2}{27} - 2$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow y(1).y\left(\dfrac{2m+9}{3}\right) < 0$.

$\Leftrightarrow (m+2).\left[-m\dfrac{(2m+9)^2}{27} - 2\right] < 0 \Leftrightarrow (m+2).(4m^3 + 36m^2 + 81m + 54) > 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m < -6 \\ m > -2 \end{array}\right. \\ m \neq \dfrac{-3}{2} \end{cases}$ (2).

Từ (1), (2) ta có yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m > -2 \\ m < -6 \end{array}\right. \\ m \neq \dfrac{-3}{2} \end{cases}$

Chọn đáp án (D) □

Câu 56. Cho hàm số $y = \dfrac{1}{3}mx^3 - (m-1)x^2 + 3(m-2)x + 2018$ với m là tham số. Tổng bình phương tất cả các giá trị của m để hàm số có hai điểm cực trị $x_1; x_2$ thỏa mãn $x_1 + 2x_2 = 1$ bằng

(A) $\dfrac{40}{9}$. (B) $\dfrac{22}{9}$. (C) $\dfrac{25}{4}$. (D) $\dfrac{8}{3}$.

Lời giải.

Ta có $y' = mx^2 - 2(m-1)x + 3(m-2)$

Để hàm số có hai điểm cực trị thì phương trình $mx^2 - 2(m-1)x + 3(m-2) = 0$ phải có hai nghiệm phân biệt.

$\Rightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta' = (m-1)^2 - 3m(m-2) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ -2m^2 + 4m + 1 > 0 \end{cases}$

Theo định lý Vi – ét ta có $\begin{cases} x_1. + x_2 = \dfrac{2(m-1)}{m} \\ x_1.x_2 = \dfrac{3(m-2)}{m} \end{cases}$

Theo bài ta có hệ phương trình $\begin{cases} x_1. + x_2 = \dfrac{2(m-1)}{m} \\ x_1 + 2x_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{3m-4}{m} \\ x_2 = 1 - \dfrac{2(m-1)}{m} = \dfrac{2-m}{m} \end{cases}$

$\Rightarrow \dfrac{3m-4}{m} \cdot \dfrac{2-m}{m} = \dfrac{3(m-2)}{m} \Rightarrow 3(2-m)m + (3m-4)(2-m) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 2 \text{ (t/m)} \\ m = \dfrac{2}{3} \text{ (t/m)} \end{array}\right.$.

Vậy $m_1^2 + m_2^2 = \dfrac{40}{9}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 57. Cho hàm số $y = -x^3 + 3mx^2 - 3m - 1$ với m là một tham số thực. Giá trị của m thuộc tập hợp nào sau đây để đồ thị hàm số đã cho có hai điểm cực trị đối xứng nhau qua đường thẳng $d\colon x + 8y - 74 = 0$.

(A) $m \in (-1; 1]$. (B) $m \in (-3; -1]$. (C) $m \in (3; 5]$. (D) $m \in (1; 3]$.

Lời giải.

$y' = -3x^2 + 6mx$

$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2m \end{array}\right.$.

Đồ thị có hai cực trị khi: $m \neq 0$.

Khi đó hai điểm cực trị là: $A(0; -3m-1)$, $B(2m; 4m^3 - 3m - 1)$.

Tọa độ trung điểm AB là: $I(m; 2m^3 - 3m - 1)$.

A và B đối xứng qua d khi và chỉ khi: $\begin{cases} I \in d \\ \overrightarrow{AB}.\vec{u}_d = 0 \end{cases}$

$\overrightarrow{AB} = (2m; 4m^3), \vec{u}_d = (8; -1)$

$\overrightarrow{AB} \cdot \vec{u}_d = 0 \Leftrightarrow 16m - 4m^3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = 2 \\ m = -2 \end{array}\right.$.

Với $m = 0$ loại.

Với $m = 2$, ta có $I(2; 9) \Rightarrow I \in d$.

Với $m = -2$, ta có $I(-2; -11) \Rightarrow I \notin d$.

Do đó $m = 2$ thỏa mãn yêu cầu.

Chọn đáp án (D) □

Câu 58. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 8x^2 + (m^2 + 11)x - 2m^2 + 2$ có hai điểm cực trị nằm về hai phía của trục Ox?

(A) 4. (B) 5. (C) 6. (D) 7.

Lời giải.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ đồ thị hàm số cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt.

$\Leftrightarrow x^3 - 8x^2 + (m^2 + 11)x - 2m^2 + 2 = 0$ có ba nghiệm phân biệt.

$x^3 - 8x^2 + (m^2 + 11)x - 2m^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x^2 - 6x + m^2 - 1) = 0$.

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x^2 - 6x + m^2 - 1 = 0 \ (*) \end{array}\right.$.

Suy ra phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt khác 2.

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 10 - m^2 > 0 \\ m^2 - 8 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m \neq \pm 2\sqrt{2} \\ -\sqrt{10} < m < \sqrt{10} \end{cases}$.

Vậy có 7 giá trị nguyên của tham số thỏa mãn đề bài.

Chọn đáp án D ☐

Câu 59. Cho hàm số $y = x^3 - (2m+1)x^2 + (m+1)x + m - 1$. Có bao nhiêu giá trị của số tự nhiên $m < 20$ để đồ thị hàm số có hai điểm cực trị nằm về hai phía trục hoành?

(A) 18. (B) 19. (C) 21. (D) 20.

Lời giải.

Hàm số có hai điểm cực trị nằm về hai phía trục hoành khi và chỉ khi đồ thị hàm số y cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt. Mà $y = (x-1)(x^2 - 2mx + 1 - m)$ nên yêu cầu trở thành phương trình

$$x^2 - 2mx + 1 - m = 0$$

có hai nghiệm phân biệt khác 1. Điều này tương đương

$$\begin{cases} m^2 + m - 1 > 0 \\ 2 - 3m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m < \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} \\ m > \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \end{array}\right. \\ m \neq \dfrac{2}{3}. \end{cases}$$

Do $m \in \mathbb{N}$, $m < 20$ nên $1 \leq m < 20$. Vậy có 19 số tự nhiên thỏa mãn bài toán.

Chọn đáp án B ☐

Câu 60. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị của hàm số

$$y = x^3 - (m+1)x^2 + \left(m^2 - 2\right)x - m^2 + 3$$

có hai điểm cực trị và hai điểm cực trị đó nằm về hai phía khác nhau đối với trục hoành?

(A) 2. (B) 1. (C) 3. (D) 4.

Lời giải.

Ta có

$$y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 2(m+1)x + m^2 - 2 = 0.$$

Hàm số có hai điểm cực trị khi và chỉ khi

$$\Delta' > 0 \Leftrightarrow -2m^2 + 2m + 7 > 0 \Leftrightarrow \frac{1-\sqrt{15}}{2} < m < \frac{1+\sqrt{15}}{2}.$$

Do m nguyên nên $m \in \{-1; 0; 1; 2\}$. Ta được bốn hàm số

$$y = x^3 - x + 2; \quad y = x^3 - x^2 - 2x + 3;$$
$$y = x^3 - 2x^2 - x + 2; \quad y = x^3 - 3x^2 + x - 1.$$

Khi đó ta nhận thấy chỉ có $m = 1$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án (B) □

Câu 61. Tìm tất cả cả các giá trị của tham số m để $y = x^3 - 3x^2 + mx - 1$ đạt cực trị tại x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 = 6$.

(A) $m = -3$. (B) $m = 3$. (C) $m = -1$. (D) $m = 1$.

Lời giải.

Ta có $y' = 3x^2 - 6x + m$. Hàm số đã cho có hai điểm cực trị x_1 và x_2 khi và chỉ khi

$$\Delta' > 0 \Leftrightarrow 9 - 3m > 0 \Leftrightarrow m < 3.$$

Khi đó x_1, x_2 là nghiệm của phương trình $y' = 0$ nên theo định lí Vète, ta có

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 x_2 = \dfrac{m}{3}. \end{cases}$$

Suy ra

$$6 = x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = 4 - \frac{2m}{3} \Leftrightarrow m = -3.$$

Từ đó $m = -3$ là giá trị cần tìm.

Chọn đáp án (A) □

Câu 62. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $f(x) = 2x^3 - 6x^2 - m + 1$ có các giá trị cực trị trái dấu?

(A) 7. (B) 9. (C) 2. (D) 3.

Lời giải.

Ta có

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x^2 - 12x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2. \end{array}\right.$$

Suy ra hàm số có hai giá trị cực trị là $f(0) = -m + 1$ và $f(2) = -m - 7$. Do đó hai giá trị cực trị trái dấu khi và chỉ khi

$$(-m + 1)(-m - 7) < 0 \Leftrightarrow (m - 1)(m + 7) < 0 \Leftrightarrow -7 < m < 1.$$

Vậy có 7 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Chọn đáp án (A) □

Câu 63. Cho hàm số $y = 2x^3 + 3(m - 1)x^2 + 6(m - 2)x - 1$ với m là tham số thực. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số có điểm cực đại và điểm cực tiểu nằm trong khoảng $(-2; 3)$.

(A) $m \in (-1; 4) \setminus \{3\}$. (B) $m \in (3; 4)$. (C) $m \in (1; 3)$. (D) $m \in (-1; 4)$.

Lời giải.

Ta có

$$y' = 0 \Leftrightarrow x^2 + (m-1)x + (m-2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = -m+2. \end{array}\right.$$

Hàm số có hai điểm cực trị nằm trong khoảng $(-2;3)$ khi và chỉ khi $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt nằm trong khoảng $(-2;3)$ hay

$$\begin{cases} -m+2 \neq -1 \\ -2 < -m+2 < 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 3 \\ -1 < m < 4. \end{cases}$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 64. Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 4m^2 - 2$ có đồ thị (C) và điểm $C(1;4)$. Tính tổng các giá trị nguyên dương của m để (C) có hai điểm cực trị A, B sao cho tam giác ABC có diện tích bằng 4.

(A) 6. (B) 5. (C) 3. (D) 4.

Lời giải.

Ta có

$$y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6mx = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2m. \end{array}\right.$$

Đồ thị (C) có hai điểm cực trị khi và chỉ khi $2m \neq 0$ hay $m \neq 0$. Khi đó $A(0; 4m^2-2)$, $B(2m; -4m^3+4m^2-2)$. Suy ra $AB = \sqrt{4m^2+16m^6} = 2|m|\sqrt{4m^4+1}$.

Phương trình đường thẳng AB là

$$\frac{x-0}{2m-0} = \frac{y-(4m^2-2)}{-4m^3} \Leftrightarrow 2m^2x + y - 4m^2 + 2 = 0.$$

Do đó

$$d(C, AB) = \frac{|2m^2+4-4m^2+2|}{\sqrt{4m^4+1}} = \frac{2|m^2-3|}{\sqrt{4m^4+1}}.$$

Suy ra

$$4 = S = \frac{1}{2}\cdot AB\cdot d(C,AB) = 4 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\cdot 2|m|\sqrt{4m^4+1}\cdot\frac{2|m^2-3|}{\sqrt{4m^4+1}}$$

$$\Leftrightarrow \left|m\left(m^2-3\right)\right| = 2 \Leftrightarrow m^6 - 6m^4 + 9m^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow \left(m^2-1\right)^2\left(m^2-4\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = \pm 1 \\ m = \pm 2. \end{array}\right.$$

Do m nguyên dương nên ta được $m = 1$, $m = 2$, tổng thu được là 3.

Chọn đáp án (C) □

Câu 65 (THPT Lê Quy Đôn Điện Biên 2019).

Cho hàm số $y = 2x^3 + 3(m-1)x^2 + 6(m-2)x - 1$ với m là tham số thực. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số có điểm cực đại và điểm cực tiểu nằm trong khoảng $(-2;3)$.

(A) $m \in (-1;3) \cup (3;4)$. (B) $m \in (1;3)$.

(C) $m \in (3;4)$. (D) $m \in (-1;4)$.

Lời giải.

Ta c

$$y' = 0 \Leftrightarrow 6x^2 + 6(m-1)x + 6(m-2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 2 - m. \end{array}\right.$$

Hàm số có điểm cực đại và điểm cực tiểu nằm trong khoảng $(-2; 3)$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} 2 - m \neq -1 \\ -2 < 2 - m < 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 3 \\ -1 < m < 4. \end{cases}$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 66. Tổng tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = 3x^3 + 2(m+1)x^2 - 3mx + m - 5$ có hai điểm cực trị x_1; x_2 đồng thời $y(x_1)\,y(x_2) = 0$ là

(A) -21. (B) -39. (C) -8. (D) $3\sqrt{11} - 13$.

Lời giải.

Ta có

$$y = 0 \Leftrightarrow (x-1)\left(3x^2 + (2m+5)x - m + 5\right) = 0.$$

Yêu cầu bài toán tương đương phương trình $y = 0$ có một nghiệm kép và một nghiệm bội lẻ, hay phương trình

$$3x^2 + (2m+5)x - m + 5 = 0 \quad (1)$$

có nghiệm kép khác 1 hoặc có nghiệm $x = 1$ và một nghiệm khác 1.

TH1. Phương trình (1) có nghiệm kép, hay

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow 4m^2 + 32m - 35 = 0.$$

Dễ thấy phương trình trên có hai nghiệm trái dấu có tổng là $-\dfrac{32}{4} = -8$.

TH2. Phương trình (1) có nghiệm $x = 1$ và một nghiệm khác 1. Thay $x = 1$ vào (1), ta được

$$3 + (2m+5) - m + 5 = 0 \Leftrightarrow m = -13.$$

Thử lại, $m = -13$ thỏa mãn.

Vậy tổng các giá trị của m thỏa mãn yêu cầu là $-8 + (-13) = -21$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 67. Gọi S là tập các giá trị dương của tham số m sao cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 27x + 3m - 2$ đạt cực trị tại x_1, x_2 thỏa mãn $|x_1 - x_2| \leq 5$. Biết $S = (a; b]$. Tính $T = 2b - a$.

(A) $T = \sqrt{51} + 6$. (B) $T = \sqrt{61} + 3$. (C) $T = \sqrt{61} - 3$. (D) $T = \sqrt{51} - 6$.

Lời giải.

Ta có $y' = 3x^2 - 6mx + 27$ và

$$y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2mx + 9 = 0. \quad (1)$$

Hàm số đạt cực trị tại x_1, x_2 khi và chỉ khi phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt hay

$$\Delta' > 0 \Leftrightarrow m^2 - 9 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > 3 \\ m < -3. \end{array}\right. \tag{2}$$

Khi đó phương trình (1) có 2 nghiệm x_1, x_2, theo định lí Viète, ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m \\ x_1 x_2 = 9. \end{cases}$

Do đó

$$|x_1 - x_2| \leq 5 \Leftrightarrow (x_1 - x_2)^2 \leq 25 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 - 25 \leq 0$$
$$\Leftrightarrow 4m^2 - 61 \leq 0 \Leftrightarrow -\frac{\sqrt{61}}{2} \leq m \leq \frac{\sqrt{61}}{2}. \tag{3}$$

Kết hợp (2) và (3) và điều kiện m dương ta được

$$3 < m \leq \frac{\sqrt{61}}{2} \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = \dfrac{\sqrt{61}}{2}. \end{cases}$$

Suy ra $T = 2b - a = \sqrt{61} - 3$.

Chọn đáp án C □

Câu 68 (Sở Bắc Giang 2019). Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \dfrac{x^3}{3} - 2x^2 + mx + 3$ có hai điểm cực trị $x_1, x_2 \leq 4$. Số phần tử của S là

A. 5. B. 3. C. 2. D. 4.

Lời giải.

Ta có $y' = x^2 - 4x + m$. Hàm số có hai điểm cực trị x_1, x_2 khi và chỉ khi phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt hay

$$\Delta' > 0 \Leftrightarrow 4 - m > 0 \Leftrightarrow m < 4.$$

Khi đó giả sử $x_1 < x_2$, ta có

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 2 - \sqrt{4 - m} \\ x_2 = 2 + \sqrt{4 - m}. \end{array}\right.$$

Yêu cầu bài toán trở thành

$$x_2 \leq 4 \Leftrightarrow 2 + \sqrt{4 - m} \leq 4 \Leftrightarrow 0 \leq m \leq 4.$$

Kết hợp với $m < 4$ ta được $0 \leq m < 4$. Do m nguyên nên $m \in \{0; 1; 2; 3\}$. Vậy có 4 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án D □

Câu 69. Tìm giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^3 + 4(m-2)x^2 - 7x + 1$ có hai điểm cực trị x_1; x_2 $(x_1 < x_2)$ thỏa mãn $|x_1| - |x_2| = -4$

A. $m = 5$. B. $m = \dfrac{1}{2}$. C. $m = 3$. D. $m = \dfrac{7}{2}$.

Lời giải.

Ta có $y' = 3x^2 + 8(m-2)x - 7$ là một tam thức bậc hai với $ac < 0$ nên $y' = 0$ có hai nghiệm $x_1 < 0 < x_2$ với mọi m, do đó hàm số đã cho luôn có hai điểm cực trị x_1; x_2 với mọi m.
Suy ra
$$|x_1| - |x_2| = -4 \Leftrightarrow -x_1 - x_2 = -4 \Leftrightarrow \frac{8(m-2)}{3} = -4 \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}.$$
Chọn đáp án (B) □

Câu 70. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để điểm $M(2m^3; m)$ tạo với hai điểm cực đại, cực tiểu của đồ thị hàm số $y = 2x^3 - 3(2m+1)x^2 + 6m(m+1)x + 1$ (C) một tam giác có diện tích nhỏ nhất?

(A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) không tồn tại.

Lời giải.

Ta có $y' = 6x^2 - 6(2m+1)x + 6m(m+1)$, suy ra
$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = m \\ x = m+1. \end{array}\right.$$
Từ đó đồ thị hàm số có hai điểm cực trị là $A(m; 2m^3 + 3m^2 + 1)$, $B(m+1; 2m^3 + 3m^2)$. Suy ra $AB = \sqrt{2}$ và phương trình đường thẳng AB là
$$x + y - 2m^3 - 3m^2 - m - 1 = 0.$$
Do đó, tam giác MAB có diện tích nhỏ nhất khi và chỉ khi khoảng cách từ M tới AB nhỏ nhất. Ta có
$$d(M, AB) = \frac{3m^2+1}{\sqrt{2}} \geq \frac{1}{\sqrt{2}},$$
Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $m = 0$. Vậy có đúng một giá trị của m thỏa mãn bài toán.
Chọn đáp án (B) □

Câu 71. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số thực m để đường thẳng đi qua hai điểm cực đại, cực tiểu của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3mx + 2$ cắt đường tròn (C) có tâm $I(1; 1)$, bán kính bằng 1 tại hai điểm phân biệt A, B sao cho diện tích tam giác IAB đạt giá trị lớn nhất.

(A) $m = \dfrac{2 \pm \sqrt{3}}{3}$. (B) $m = \dfrac{2 \pm \sqrt{3}}{2}$. (C) $m = \dfrac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$. (D) $m = \dfrac{2 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Lời giải.

Ta có $y' = 3x^2 - 3m$ nên đồ thị hàm số có điểm cực đại và cực tiểu khi và chỉ khi $m > 0$. Khi đó, các điểm cực đại, cực tiểu của đồ thị hàm số là $C(-\sqrt{m}; 2 + 2m\sqrt{m})$, $D(\sqrt{m}; 2 - 2m\sqrt{m})$.
Đường thẳng Δ đi qua các điểm cực trị của đồ thị hàm số có phương trình là: $y = -2mx + 2$. Do $m > 0$ nên
$$d(I, \Delta) = \frac{|2m-1|}{\sqrt{4m^2+1}} < R = 1,$$

kéo theo Δ luôn cắt đường tròn tâm $I(1;1)$, bán kính $R=1$ tại 2 điểm A, B phân biệt. Dễ thấy $m=\dfrac{1}{2}$ không thõa mãn do A, I, B thẳng hàng.
Với $m\neq\dfrac{1}{2}$ thì Δ không đi qua I, ta có

$$S_{\Delta ABI}=\frac{1}{2}IA\cdot IB\cdot\sin\widehat{AIB}\leq\frac{1}{2}R^2=\frac{1}{2}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\sin\widehat{AIB}=1$ hay ΔAIB vuông cân tại I. Gọi H là trung điểm AB, yêu cầu trở thành

$$IH=\frac{R}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow\frac{|2m-1|}{\sqrt{4m^2+1}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow m=\frac{2\pm\sqrt{3}}{2}.$$

Chọn đáp án B □

Câu 72. Biết đồ thị hàm số $y=x^3+ax^2+bx+c$ có hai điểm cực trị $M(x_1;y_1), N(x_2;y_2)$ thỏa mãn $x_1(y_1-y_2)=y_1(x_1-x_2)$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=abc+2ab+3c$ bằng

A $-\dfrac{49}{4}$. B $-\dfrac{25}{4}$. C $-\dfrac{841}{36}$. D $-\dfrac{7}{6}$.

Lời giải.

Ta có $y'=3x^2+2ax+b$.
Chia y cho y' ta được $y=y'\left(\dfrac{1}{3}x+\dfrac{1}{9}a\right)+\left(-\dfrac{a^2}{9}-\dfrac{2b}{3}\right)x+c-\dfrac{ab}{9}$.
Do $M(x_1;y_1), N(x_2;y_2)$là hai điểm cực trị nên $y'(x_1)=0, y'(x_2)=0$.
Do đó $y_1=\left(-\dfrac{a^2}{9}-\dfrac{2b}{3}\right)x_1+c-\dfrac{ab}{9}; y_2=\left(-\dfrac{a^2}{9}-\dfrac{2b}{3}\right)x_2+c-\dfrac{ab}{9}$.
Theo giả thiết

$$\begin{aligned}&x_1(y_1-y_2)=y_1(x_1-x_2)\Leftrightarrow x_1y_2=x_2y_1\\ \Leftrightarrow\ & x_1\left[\left(-\frac{a^2}{9}-\frac{2b}{3}\right)x_2+c-\frac{ab}{9}\right]=x_2\left[\left(-\frac{a^2}{9}-\frac{2b}{3}\right)x_1+c-\frac{ab}{9}\right]\\ \Leftrightarrow\ & x_1\left(c-\frac{ab}{9}\right)=x_2\left(c-\frac{ab}{9}\right)\Leftrightarrow c-\frac{ab}{9}=0(x_1\neq x_2)\Leftrightarrow ab=9c\end{aligned}$$

Ta có

$$P=abc+2ab+3c=9c^2+21c=\left(3c+\frac{7}{2}\right)^2-\frac{49}{4}\geq-\frac{49}{4}.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=abc+2ab+3c$ bằng $-\dfrac{49}{4}$.
Chọn đáp án A □

Câu 73. Cho hàm số $y=x^3-3mx^2+3(m^2-1)x-m^3-m$ (m là tham số). Gọi A, B là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số và $I(2;-2)$. Tổng tất cả các giá trị của m để ba điểm I, A, B tạo thành tam giác nội tiếp đường tròn có bán kính bằng $\sqrt{5}$ là

A $\dfrac{4}{17}$. B $\dfrac{14}{17}$. C $-\dfrac{2}{17}$. D $\dfrac{20}{17}$.

Lời giải.

Ta có $y'=3x^2-6mx+3(m^2-1)$. Suy ra

$$y'=0\Leftrightarrow x^2-2mx+(m-1)(m+1)=0\Leftrightarrow x=m\pm1.$$

Gọi $A\left(m+1;-4m-2\right)$, $B\left(m-1;-4m+2\right)$. Suy ra $AB=2\sqrt{5}$ và phương trình đường thẳng AB là

$$\frac{x-(m+1)}{2}=\frac{y+4m+2}{-4}\Leftrightarrow 2x+y+2m=0.$$

Khi đó

$$S_{IAB}=\frac{1}{2}AB\cdot d\left(I,AB\right)=\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{5}\cdot\frac{|2+2m|}{\sqrt{5}}=|2+2m|.$$

Do đó

$$\begin{aligned}&AB\cdot IA\cdot IB=4S_{IAB}\cdot R=4\sqrt{5}\,|2+2m|\\ \Leftrightarrow\ &\sqrt{20}\sqrt{17m^2-2m+1}\sqrt{17m^2-38m+25}=4\sqrt{5}\,|2+2m|\\ \Leftrightarrow\ &\left(17m^2-2m+1\right)\left(17m^2-38m+25\right)=4\left(4m^2+8m+4\right)\\ \Leftrightarrow\ &289m^4-680m^3+502m^2-120m+9=0\Leftrightarrow\left[\begin{aligned}&m=1\\&m=\frac{3}{17}.\end{aligned}\right.\end{aligned}$$

Vậy tổng các giá trị của m thỏa mãn bài toán là $\frac{20}{17}$.

Chọn đáp án D □

Câu 74. Cho hàm số $y=x^3-6mx+4$ có đồ thị (C_m). Gọi m_0 là giá trị của m để đường thẳng đi qua điểm cực đại, điểm cực tiểu của (C_m) cắt đường tròn tâm $I\left(1;0\right)$, bán kính $\sqrt{2}$ tại hai điểm phân biệt A, B sao cho tam giác IAB có diện tích lớn nhất. Chọn khẳng định đúng

A $m_0\in(3;4)$. B $m_0\in(1;2)$. C $m_0\in(0;1)$. D $m_0\in(2;3)$.

Lời giải.

Ta có: $y'=3x^2-6m$. Suy ra $y'=0\Leftrightarrow x^2=2m$.

Hàm số có cực đại, cực tiểu $\Leftrightarrow y'=0$ có hai nghiệm phân biệt hay $m>0$.

Khi đó $A\left(\sqrt{2m};4-4m\sqrt{2m}\right)$ và $B\left(-\sqrt{2m};4+4m\sqrt{2m}\right)$ là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số. Phương trình đường thẳng $AB: 4mx+y-4=0$. Đặt $a=d\left(I,AB\right)$ $\left(0<a<\sqrt{2}\right)$, suy ra $HB=\sqrt{2-a^2}$ với H là trung điểm của AB.

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$S_{IAB}=a\sqrt{2-a^2}\leq\frac{1}{2}\left(a^2+2-a^2\right)=1.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a=\sqrt{2-a^2}\Leftrightarrow a=1$. Khi đó

$$\begin{aligned}&d\left(I;AB\right)=\frac{|4m+0-4|}{\sqrt{16m^2+1}}=1\Leftrightarrow\sqrt{16m^2+1}=4\,|m-1|\\ \Leftrightarrow\ &16m^2+1=16m^2-32m+16\Leftrightarrow m=\frac{15}{32}\end{aligned}$$

Chọn đáp án C □

Câu 75. Cho hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}mx^2-4x-10$, với m là tham số; gọi x_1, x_2 là các điểm cực trị của hàm số đã cho. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\left(x_1^2-1\right)\left(x_2^2-1\right)$bằng

A 4. B 1. C 0. D 9.

Lời giải.

Ta có $y' = x^2 - mx - 4$. Từ đó dễ thấy phương trình $y' = 0$ luôn có hai nghiệm $x_1 < 0 < x_2$ với mọi m. Theo định lý Viète, ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = m \\ x_1 x_2 = -4 \end{cases}$. Do đó

$$\begin{aligned} P &= (x_1x_2)^2 - \left(x_1^2 + x_2^2\right) + 1 = (x_1x_2)^2 - (x_1 + x_2)^2 + 2x_1x_2 + 1 \\ &= 16 - m^2 - 8 + 1 = -m^2 + 9 \leq 9. \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ $m = 0$. Do đó giá trị lớn nhất của biểu thức P là 9.

Chọn đáp án D □

Câu 76. Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3\left(m^2 - 1\right)x - m^3$, với m là tham số; gọi (C) là đồ thị của hàm số đã cho. Biết rằng khi m thay đổi, điểm cực đại của đồ thị (C) luôn nằm trên một đường thẳng d cố định. Xác định hệ số góc k của đường thẳng d.

A $k = -\dfrac{1}{3}$. B $k = \dfrac{1}{3}$. C $k = -3$. D $k = 3$.

Lời giải.

Ta có $y' = 3x^2 - 6mx + 3\left(m^2 - 1\right)$. Suy ra

$$y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2mx + (m - 1)(m + 1) = 0 \Leftrightarrow x = m \pm 1.$$

Để ý hàm số bậc ba đã cho có $a > 0$ nên điểm cực đại của đồ thị hàm số là $A\,(m - 1; -3m + 2)$.
Suy ra $y_A = -3x_A - 1$, hay điểm A luôn thuộc đường thẳng d có phương trình $y = -3x - 1$.
Do đó hệ số góc k của đường thẳng d là -3.

Chọn đáp án C □

Câu 77. Biết m_0 là giá trị của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3x^2 + mx - 1$ có hai điểm cực trị x_1, x_2 sao cho $x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 = 13$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A $m_0 \in (-1; 7)$. B $m_0 \in (7; 10)$. C $m_0 \in (-15; -7)$. D $m_0 \in (-7; -1)$.

Lời giải.

Ta có

$$y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x + m = 0.$$

Do $\Delta' = 9 - 3m$ nên hàm số có hai điểm cực trị khi và chỉ khi $\Delta' > 0$ hay $m < 3$.
Hai điểm cực trị x_1; x_2 là nghiệm của $y' = 0$ nên theo định lí Viète, ta có $x_1 + x_2 = 2$; $x_1x_2 = \dfrac{m}{3}$.
Suy ra

$$x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 = 13 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2 = 13 \Leftrightarrow 4 - m = 13 \Leftrightarrow m = -9.$$

Vậy $m_0 = -9 \in (-15; -7)$.

Chọn đáp án C □

Câu 78. Biết rằng đồ thị hàm số $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{1}{2}mx^2 + x - 2$ có giá trị tuyệt đối của hoành độ hai điểm cực trị là độ dài hai cạnh của tam giác vuông có cạnh huyền là $\sqrt{7}$. Hỏi có mấy giá trị của m?

(A) 3. (B) 1. (C) Không có m. (D) 2.

Lời giải.

Ta có

$$y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - mx + 1 = 0. \quad (1)$$

Hàm số đã cho có hai điểm cực trị khi và chỉ khi (1) có hai nghiệm phân biệt hay

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow m^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > 2 \\ m < -2. \end{array}\right.$$

Gọi hai nghiệm của (1) là x_1, x_2. Khi đó, ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = m \\ x_1x_2 = 1 \end{cases}$. Từ giả thiết, ta có

$$x_1^2 + x_2^2 = 7 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 7 \Leftrightarrow m^2 - 2 = 7 \Leftrightarrow m^2 = 9 \Leftrightarrow m = \pm 3.$$

Vậy có hai giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án (D) □

Câu 79. Gọi A, B là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $f(x) = -x^3 + 3x - 4$ và $M(x_0; 0)$ là điểm trên trục hoành sao cho tam giác MAB có chu vi nhỏ nhất, đặt $T = 4x_0 + 2015$. Trong các khẳng định dưới đây, khẳng định nào đúng?

(A) $T = 2017$. (B) $T = 2019$. (C) $T = 2016$. (D) $T = 2018$.

Lời giải.

Ta có

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -3x^2 + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -1. \end{array}\right.$$

Suy ra đồ thị hàm số $f(x)$ có hai điểm cực trị là $A(1; -2)$ và $B(-1; -6)$. Ta thấy hai điểm A và B nằm cùng phía với trục hoành. Gọi $A'(1; 2)$ là điểm đối xứng với điểm A qua trục hoành. Chu vi tam giác MAB đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi ba điểm B, M và A' thẳng hàng.

Ta có: $\overrightarrow{A'M} = (x_0 - 1; -2)$ và $\overrightarrow{A'B} = (-2; -8) \Rightarrow \dfrac{x_0 - 1}{-2} = \dfrac{-2}{-8} \Leftrightarrow x_0 = \dfrac{1}{2} \Rightarrow M\left(\dfrac{1}{2}; 0\right)$.

Vậy $T = 4 \cdot \dfrac{1}{2} + 2015 = 2017$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 80. Tổng tất cả các giá trị của tham số thực m sao cho đồ thị hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 4m^3$ có điểm cực đại và cực tiểu đối xứng với nhau qua đường phân giác của góc phần tư thứ nhất là

(A) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. (B) $\dfrac{1}{2}$. (C) 0. (D) $\dfrac{1}{4}$.

Lời giải.

Ta có $y' = 3x^2 - 6mx$, $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2m \end{array}\right.$.

Hàm số có cực đại cực tiểu khi và chỉ khi $m \neq 0$. Khi đó các điểm cực trị của đồ thị hàm số là

$A(0;4m^3)$, $B(2m;0)$. Để ý $A \in Oy$ và $B \in Ox$ nên hai điểm A và B đối xứng qua đường phân giác của góc phần tư thứ nhất khi và chỉ khi

$$y_A = x_B \Leftrightarrow 4m^3 = 2m \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}. \end{array}\right.$$

Vậy tổng tất cả các giá trị của tham số thực m là 0.

Chọn đáp án C □

Câu 81. Tìm tập tất cả các giá trị của tham số thực m sao cho đồ thị hàm số $y = x^3 - 5x^2 + (m+4)x - m$ có hai điểm cực trị nằm về hai phía đối với trục hoành.

A) $\varnothing$. B) $(-\infty;3) \cup (3;4]$. C) $(-\infty;3) \cup (3;4)$. D) $(-\infty;4)$.

Lời giải.

Ta có

$$y = x^3 - 5x^2 + (m+4)x - m = (x-1)\left(x^2 - 4x + m\right).$$

Đồ thị hàm số đã cho có hai điểm cực trị nằm về hai phía trục hoành khi và chỉ khi phương trình $y = 0$ có ba nghiệm phân biệt hay $x^2 - 4x + m = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác 1, tương đương

$$\begin{cases} 4 - m > 0 \\ 1 - 4 + m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 4 \\ m \neq 3. \end{cases}$$

Chọn đáp án C □

Câu 82. Biết $\dfrac{a}{b}$ (trong đó $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản và a, $b \in \mathbb{N}*$) là giá trị của tham số m để hàm số $y = \dfrac{2}{3}x^3 - mx^2 - 2(3m^2 - 1)x + \dfrac{2}{3}$ có 2 điểm cực trị x_1, x_2 sao cho $x_1x_2 + 2(x_1 + x_2) = 1$. Tính giá trị biểu thức $S = a^2 + b^2$.

A) $S = 13$. B) $S = 25$. C) $S = 10$. D) $S = 34$.

Lời giải.

Đạo hàm $y' = 2x^2 - 2mx - 6m^2 + 2$. Hàm số có hai điểm cực trị khi và chỉ khi

$$\Delta' > 0 \Leftrightarrow m^2 - 2\left(-6m^2 + 2\right) > 0 \Leftrightarrow 13m^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > \dfrac{2\sqrt{13}}{13} \\ m < -\dfrac{2\sqrt{13}}{13}. \end{array}\right.$$

Khi đó hàm số có hai điểm cực trị x_1, x_2. Theo định lý Viète thì $\begin{cases} x_1 + x_2 = m \\ x_1x_2 = -3m^2 + 1 \end{cases}$.

Ta có

$$x_1x_2 + 2(x_1 + x_2) = 1 \Leftrightarrow -3m^2 + 1 + 2m = 1 \Leftrightarrow 3m^2 - 2m = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = \dfrac{2}{3}. \end{array}\right.$$

Chỉ có giá trị $m = \dfrac{2}{3}$ thỏa điều kiện, khi đó $S = a^2 + b^2 = 2^2 + 3^2 = 13$.

Chọn đáp án A □

Câu 83. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $y = x^3 + x^2 + mx - 1$ nằm bên phải trục tung. Tìm số phần tử của tập hợp $(-5; 6) \cap S$.

Ⓐ 2. Ⓑ 5. Ⓒ 3. Ⓓ 4.

Lời giải.

Ta có $y' = 3x^2 + 2x + m$. Hàm số đã cho có hai điểm cực trị khi và chỉ khi $y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt hay

$$\Delta' = 1 - 3m > 0 \Leftrightarrow m < \frac{1}{3}. \qquad (1)$$

Khi đó $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 - \sqrt{1-3m} \\ x = -1 + \sqrt{1-3m} \end{array}\right.$. Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-1-\sqrt{1-3m}$		$-1+\sqrt{1-3m}$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗		↘		↗	$+\infty$

Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số nằm về phía bên phải trục tung khi

$$-1 + \sqrt{1-3m} > 0 \Leftrightarrow \sqrt{1-3m} > 1 \Leftrightarrow m < 0.$$

Kết hợp với (1), ta có $m < 0$ thì điểm cực tiểu của đồ thị hàm số đã cho nằm bên phải trục tung. Từ đó $(-5; 6) \cap S = \{-4; -3; -2; -1\}$.

Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 84 (THPT Nghen-Hà Tĩnh-2018).

Cho hàm số $y = -x^3 + 3x^2 + 3\left(m^2 - 1\right)x - 3m^2 - 1$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để đồ thị hàm số có điểm cực đại, cực tiểu nằm bên trái đường thẳng $x = 2$?

Ⓐ 3. Ⓑ 1. Ⓒ 2. Ⓓ 0.

Lời giải.

Ta có

$$y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 3x + (1-m)(1+m) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 - m \\ x = 1 + m. \end{array}\right.$$

Đồ thị hàm số có điểm cực đại, cực tiểu nằm bên trái đường thẳng $x = 2$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} m \neq 0 \\ 1 + m < 2 \\ 1 - m < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m < 1 \\ m > -1. \end{cases}$$

Vậy không có giá trị nguyên nào của m thỏa yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 85. Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 2$ có hai điểm cực trị A và B sao cho các điểm A, B và $M(1;-2)$ thẳng hàng.

Ⓐ $m = \sqrt{2}$. Ⓑ $m = -\sqrt{2}$.

Ⓒ $m = 2$. Ⓓ $m = -\sqrt{2}$; $m = \sqrt{2}$.

Lời giải.

Ta có

$$y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6mx = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2m. \end{array}\right.$$

Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị khi và chỉ khi phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt hay $m \neq 0$.

Khi đó hai điểm cực trị là $A(0;2)$, $B(2m; 2 - 4m^3)$. Ta có

$$\overrightarrow{MA} = (-1;4), \quad \overrightarrow{MB} = \left(2m - 1; 4 - 4m^3\right).$$

Ba điểm A, B và $M(1;-2)$ thẳng hàng khi và chỉ khi $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MB}$ cùng phương hay

$$\Leftrightarrow \frac{2m-1}{-1} = \frac{4-4m^3}{4} \Leftrightarrow m^3 = 2m \Leftrightarrow m^2 = 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = \pm\sqrt{2} \\ m = 0 \end{array}\right. .$$

Kết hợp với điều kiện $m \neq 0$, ta được $m = \pm\sqrt{2}$.

Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 86. Cho hàm số $y = \frac{m}{3}x^3 - (m-1)x^2 + 3(m-2)x + 2$. Hàm số đạt cực trị tại x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + 2x_2 = 1$ khi $m = a$ và $m = b$. Hãy tính tổng $a + b$.

Ⓐ $-\frac{8}{3}$. Ⓑ $\frac{8}{3}$. Ⓒ $-\frac{5}{2}$. Ⓓ $\frac{5}{2}$.

Lời giải.

Có $y' = mx^2 - 2(m-1)x + 3(m-2)$. Giả sử hàm số đạt cực trị tại x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + 2x_2 = 1$.

Theo định lí Viète thì $x_1 + x_2 = \frac{2(m-1)}{m}$, suy ra $x_2 = \frac{2-m}{m}$.

Do $x_2 = \frac{2-m}{m}$ là nghiệm của phương trình $mx^2 - 2(m-1)x + 3(m-2) = 0$ nên

$$m\left(\frac{2-m}{m}\right)^2 - 2(m-1)\left(\frac{2-m}{m}\right) + 3(m-2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 2 \\ m = \frac{2}{3}. \end{array}\right.$$

Thử lại thấy $m = 2$ và $m = \frac{2}{3}$ đều thỏa mãn yêu cầu bài toán. Vậy $a + b = \frac{8}{3}$.

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 87. Cho hàm số $y = 2x^3 - 3(m+1)x^2 + 6mx + m^3$. Tìm m để đồ thị hàm số có hai điểm cực trị A, B sao cho độ dài $AB = \sqrt{2}$.

Ⓐ $m = 0$. Ⓑ $m = 0$ hoặc $m = 2$.

Ⓒ $m = 1$. Ⓓ $m = 2$.

Lời giải.

Ta có

$$y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - (m+1)x + m = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = m. \end{array}\right.$$

Suy ra đồ thị hàm số có hai điểm cực trị khi và chỉ khi $m \neq 1$. Khi đó ta có $A(1; m^3 + 3m - 1)$, $B(m; 3m^2)$. Do đó

$$AB = \sqrt{2} \Leftrightarrow (m-1)^2 + \left(m^3 - 3m^2 + 3m - 1\right)^2 = 2 \Leftrightarrow (m-1)^2 + (m-1)^6 = 2$$
$$\Leftrightarrow (m-1)^2 = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = 2. \end{array}\right.$$

Cả hai giá trị trên đều thỏa mãn điều kiện, vậy $m \in \{0; 2\}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 88. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = mx^3 - 3mx^2 + 3m - 3$ có hai điểm cực trị A, B sao cho $2AB^2 - (OA^2 + OB^2) = 20$ (trong đó O là gốc tọa độ)

(A) $m = -1$.
(B) $m = 1$.
(C) $\left[\begin{array}{l} m = -1 \\ m = -\dfrac{17}{11} \end{array}\right.$.
(D) $\left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = -\dfrac{17}{11} \end{array}\right.$.

Lời giải.

Ta có $y' = 3mx^2 - 6mx$. Do đó hàm số có hai điểm cực trị khi và chỉ khi $m \neq 0$. Khi đó

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2. \end{array}\right.$$

Các điểm cực trị là $A(0; 3m - 3)$, $B(2; -m - 3)$. Theo giả thiết

$$2AB^2 - \left(OA^2 + OB^2\right) = 20 \Leftrightarrow 22m^2 + 12m - 34 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = -\dfrac{17}{11}. \end{array}\right.$$

Chọn đáp án (D) □

Dạng 5. Tìm m để hàm số trùng phương có cực trị thỏa mãn điều kiện cho trước

Câu 89 (THPT Lương Thế Vinh-2018).

Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 2$. Diện tích S của tam giác có ba đỉnh là ba điểm cực trị của đồ thị hàm số đã cho có giá trị là

(A) $S = 3$.
(B) $S = \dfrac{1}{2}$.
(C) $S = 1$.
(D) $S = 2$.

Lời giải.

Ta có $y' = 4x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm 1 \end{array}\right.$. Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Đồ thị hàm số có ba điểm cực trị $A(0;2)$, $B(-1;1)$, $C(1;1)$. Để ý rằng tam giác ABC cân tại A nên

$$S=\frac{1}{2}|y_A-y_B|\cdot|x_C-x_B|=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 2=1.$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 90. Tìm m để đồ thị hàm số $y=x^4-2mx^2+1$ có ba điểm cực trị $A(0;1)$, B, C thỏa mãn $BC=4$.

(A) $m=\sqrt{2}$. (B) $m=4$. (C) $m=\pm 4$. (D) $m=\pm\sqrt{2}$.

Lời giải.

Ta có

$$y'=4x^3-4mx=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x^2=m.\end{array}\right.$$

Hàm số đã cho có ba điểm cực trị khi và chỉ khi $m>0$. Khi đó các điểm cực trị của đồ thị hàm số là $A(0;1)$, $B(\sqrt{m};-m^2+1)$, $C(-\sqrt{m};-m^2+1)$. Suy ra

$$BC=4\Leftrightarrow 4m=16\Leftrightarrow m=4\Leftrightarrow 16m^2+1=16m^2-32m+16\Leftrightarrow m=\frac{15}{32}.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 91. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị của hàm số $y=x^4+2mx^2+1$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác vuông cân

(A) $m=\frac{1}{\sqrt[3]{9}}$. (B) $m=1$. (C) $m=-\frac{1}{\sqrt[3]{9}}$. (D) $m=-1$.

Lời giải.

Hàm số $y=x^4+2mx^2+1$ có tập xác định: $\mathscr{D}=\mathbb{R}$

Ta có: $y'=4x^3+4mx; y'=0\Leftrightarrow 4x^3+4mx=0\Leftrightarrow 4x\left(x^2+m\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x^2=-m\ (*)\end{array}\right.$.

Hàm số có 3 điểm cực trị khi và chỉ khi phương trình $(*)$ có 2 nghiệm phân biệt khác $0\Leftrightarrow -m>0\Leftrightarrow m<0$.

Vậy tọa độ 3 điểm lần lượt là $A(0;1); B\left(-\sqrt{-m};1-m^2\right); C\left(\sqrt{-m};1-m^2\right)$.

Ta có $\overrightarrow{AB}=\left(-\sqrt{-m};-m^2\right); \overrightarrow{AC}=\left(\sqrt{-m};-m^2\right)$.

Kết hợp tam giác ABCvuông cân tại A và $m<0$, ta được

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0\Rightarrow -\sqrt{m^2}+m^2\cdot m^2=0\Rightarrow m+m^4=0\Rightarrow m=-1.$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 92. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị của hàm số $y = x^4 - 2mx^2$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác có diện tích nhỏ hơn 1.

(A) $0 < m < 1$. (B) $m > 0$. (C) $0 < m < \sqrt[3]{4}$. (D) $m < 1$.

Lời giải.

Ta có $y' = 4x^3 - 4mx$. Suy ra

$$y' = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 4mx = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = m. \end{array}\right.$$

Hàm số có ba điểm cực trị khi và chỉ khi $m > 0$. Khi đó đồ thị hàm số có ba điểm cực trị là $O(0;0)$, $A(\sqrt{m}; -m^2)$, $B(-\sqrt{m}; -m^2)$.

Do đó

$$1 > S_{OAB} = \frac{1}{2} \cdot d(O, AB) \cdot AB = \frac{1}{2} m^2 \cdot 2\sqrt{m} = m^2\sqrt{m} \Leftrightarrow 0 < m < 1.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 93. Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 - 2m^2 + m^4$ có đồ thị (C). Biết đồ thị (C) có ba điểm cực trị A, B, C thỏa mãn $ABCD$ là hình thoi với $D(0; -3)$. Số m thuộc khoảng nào sau đây?

(A) $m \in \left(\frac{1}{2}; \frac{9}{5}\right)$. (B) $m \in \left(\frac{9}{5}; 2\right)$. (C) $m \in \left(-1; \frac{1}{2}\right)$. (D) $m \in (2; 3)$.

Lời giải.

Ta có $y' = 4x^3 - 4mx$. Suy ra $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = m \end{array}\right.$.

Hàm số đã cho có ba điểm cực trị $\Leftrightarrow m > 0$.

Khi đó ba điểm cực trị của đồ thị hàm số là $A(0; -2m^2 + m^4)$; $B(\sqrt{m}; m^4 - 3m^2)$; $C(-\sqrt{m}; m^4 - 3m^2)$.

Gọi I trung điểm của $BC \Rightarrow I(0; m^4 - 3m^2)$.

Vì $A, D \in Oy$, B và C đối xứng nhau qua Oy nên tứ giác $ABCD$ là hình thoi $\Leftrightarrow I$ là trung điểm của AD

$$2\left(m^4 - 3m^2\right) = -2m^2 + m^4 - 3 \Leftrightarrow m^4 - 4m^2 + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m^2 = 1 \\ m^2 = 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = \pm 1 \\ m = \pm\sqrt{3}. \end{array}\right.$$

Kết hợp với điều kiện $m > 0$, ta được $m = 1$ hoặc $m = \sqrt{3}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 94. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2(m+1)x^2 + m^2$ có ba điểm cực trị tạo thành ba đỉnh của một tam giác vuông. Số phần tử của tập hợp S là

(A) 2. (B) 0. (C) 4. (D) 1.

Lời giải.

Ta có
$$y' = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 4(m+1)x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = m+1. \end{array}\right.$$
Suy ra, hàm số có ba điểm cực trị khi và chỉ khi $m+1 > -0$ hay $m > -1$. Khi đó, ba điểm cực trị của đồ thị hàm số là $A\left(-\sqrt{m+1}; -2m-1\right)$, $B(0; m^2)$, $C\left(\sqrt{m+1}; -2m-1\right)$. Suy ra
$$\overrightarrow{AB} = \left(\sqrt{m+1}; (m+1)^2\right), \quad \overrightarrow{CB} = \left(-\sqrt{m+1}; (m+1)^2\right).$$
Tam giác ABC vuông (tại B) khi và chỉ khi
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CB} = 0 \Leftrightarrow -(m+1) + (m+1)^4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -1 \\ m = 0 \end{array}\right. \Rightarrow m = 0.$$
Chọn đáp án D □

Câu 95. Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 1(1)$. Tổng lập phương các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số (1) có ba điểm cực trị và đường tròn đi qua 3 điểm này có bán kính $R = 1$ bằng

A $\dfrac{5-\sqrt{5}}{2}$. B $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. C $2+\sqrt{5}$. D $-1+\sqrt{5}$.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.
$y' = 4x^3 - 4mx = 4x(x^2 - m)$.
Để đồ thị hs (1) có 3 điểm cực trị $\Leftrightarrow m > 0$.
Gọi $A(0;1)$, $B(\sqrt{m}; -m^2+1)$, $C(-\sqrt{m}; -m^2+1)$ là các điểm cực trị của đồ thị hàm số (1), $I(0; -m^2+1)$ là trung điểm BC.
Ta có $AI = m^2$, $AB = AC = \sqrt{m+m^4}$. Suy ra $\dfrac{1}{2}AI.BC = \dfrac{AB.AC.BC}{4R} \Leftrightarrow R = \dfrac{2AI}{AB.AC}$.
$$\Leftrightarrow \frac{2m^2}{m+m^4} = 1 \Leftrightarrow m^4 - 2m^2 + m = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0(l) \\ m = 1(n) \\ m = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}(l) \\ m = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}(n) \end{array}\right..$$
Chọn đáp án B □

Câu 96. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2m^2x^2 + m + 4$ có ba điểm cực trị tạo thành ba đỉnh của một tam giác đều?

A $m \in \left\{0; \sqrt{3}; -\sqrt{3}\right\}$. B $m \in \left\{0; \sqrt[6]{3}; -\sqrt[6]{3}\right\}$.
C $m \in \left\{\sqrt[6]{3}; -\sqrt[6]{3}\right\}$. D $m \in \left\{-\sqrt{3}; \sqrt{3}\right\}$.

Lời giải.

Ta có
$$y' = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 4m^2x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm m. \end{array}\right.$$

Do đó, hàm số có 3 điểm cực trị khi và chỉ khi $m \neq 0$. Khi đó, 3 điểm cực trị của đồ thị hàm số là $A(0; m+4)$, $B(-m; -m^4+m+4)$, $C(m; -m^4+m+4)$.

Tam giác ABC có $AB = AC$ nên tam giác ABC cân tại A, suy ra tam giác ABC đều khi và chỉ khi

$$AB = BC \Leftrightarrow \sqrt{m^2+m^8} = 2|m| \Leftrightarrow m^8 + m^2 = 4m^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = \pm\sqrt[6]{3}. \end{array}\right.$$

Kết hợp điều kiện $m \neq 0$, ta được $m \in \left\{-\sqrt[6]{3}; \sqrt[6]{3}\right\}$.

Chọn đáp án C □

Câu 97. Tìm m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2m^2x^2 + 1$ có 3 điểm cực trị lập thành một tam giác vuông cân.

(A) $m = 1$. (B) $m \in \{-1; 1\}$. (C) $m \in \{-1; 0; 1\}$. (D) $m \in \varnothing$.

Lời giải.

Cách 1: Ta có

$$y' = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 4m^2x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm m. \end{array}\right.$$

Suy ra, hàm số có ba điểm cực trị khi và chỉ khi $m \neq 0$. Khi đó, ba điểm cực trị của đồ thị hàm số là $A(0; 1)$, $B(m; -m^4+1)$, $C(-m; -m^4+1)$.

Suy ra $\overrightarrow{AB} = (m; -m^4)$; $\overrightarrow{AC} = (-m; -m^4)$. Để ý rằng tam giác ABC cân tại A nên yêu cầu bài toán tương đương tam giác ABC vuông tại A, hay

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow -m^2 + m^8 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = 1 \\ m = -1. \end{array}\right.$$

Kết hợp với điều kiện $m \neq 0$, ta được $m \in \{-1; 1\}$.

Cách 2: (Áp dụng công thức tính nhanh cực trị hàm trùng phương)

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \begin{cases} ab < 0 \\ \dfrac{-8a}{b^3} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2m^2 < 0 \\ \dfrac{-8}{(-2m^2)^3} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m^6 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \left[\begin{array}{l} m = 1 (n) \\ m = -1 (n) \end{array}\right. \end{cases}$.

Vậy $m \in \{-1; 1\}$.

Chọn đáp án B □

Dạng 6. Tìm m để hàm số bậc 2 trên bậc 1 có cực trị thỏa mãn yêu cầu bài toán

Câu 98. Tìm tất cả các giá trị m sao cho đồ thị hàm số $y = x^4 + (m+1)x^2 - 2m - 1$ có ba điểm cực trị là ba đỉnh của một tam giác có một góc bằng $120°$.

(A) $m = -1 - \dfrac{2}{\sqrt[3]{3}}$. (B) $m = -1 - \dfrac{2}{\sqrt[3]{3}}$, $m = -1$.

Ⓒ $m = -\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}$. Ⓓ $m < -1$.

Lời giải.

Ta có

$$y' = 0 \Leftrightarrow 4x^3 + 2(m+1)x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ 2x^2 = -m - 1. \end{array}\right.$$

Hàm số có ba điểm cực trị khi và chỉ khi $y' = 0$ có ba nghiệm phân biệt hay $m < -1$. Khi đó đồ thị hàm số có ba điểm cực trị là $A(0; -2m-1)$, $B\left(-\sqrt{\dfrac{-m-1}{2}}; -\dfrac{(m+1)^2}{4} - 2m - 1\right)$, $C\left(\sqrt{\dfrac{-m-1}{2}}; -\dfrac{(m+1)^2}{4} - 2m - 1\right)$. Ta thấy $AB = AC = \sqrt{-\dfrac{m+1}{2} + \dfrac{(m+1)^4}{16}}$ nên tam giác ABC cân tại A. Do đó $A = 120°$. Áp dụng định lí cô-sin, ta được

$$\begin{aligned} & BC = \sqrt{AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cos 120°} = AB\sqrt{3} \\ \Leftrightarrow\ & 2\sqrt{\dfrac{-m-1}{2}} = \sqrt{3}\sqrt{-\dfrac{m+1}{2} + \dfrac{(m+1)^4}{16}} \\ \Leftrightarrow\ & \dfrac{3(m+1)^4}{16} = -\dfrac{m+1}{2} \Leftrightarrow 3(m+1)^3 = -8 \Leftrightarrow m = -1 - \dfrac{2}{\sqrt[3]{2}}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 99 (Chuyên Lương Văn Chánh-Phú Yên-2018).

Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị (C) của hàm số $y = x^4 - 2m^2x^2 + m^4 + 5$ có ba điểm cực trị, đồng thời ba điểm cực trị đó cùng với gốc tọa độ O tạo thành một tứ giác nội tiếp. Tìm số phần tử của S.

Ⓐ 1. Ⓑ 0. Ⓒ 2. Ⓓ 3.

Lời giải.

Ta có $y' = 4x^3 - 4m^2x$.

Hàm số có cực đại cực tiểu $\Leftrightarrow$ phương trình $y' = 0$ có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m \neq 0$.

Gọi $A(0; m^4 + 5)$, $B(m; 5)$, $C(-m; 5)$ lần lượt là ba điểm cực trị của đồ thị hàm số.

Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $ABOC$ khi đó ta có ba điểm A, I,O thẳng hàng.

Mặt khác do hai điểm B và C đối xứng nhau qua AO nên AO là đường kính của đường tròn ngoại tiếp tứ giác $ABOC$$\Rightarrow$ $AB \perp OB$$\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$.

Trong đó $\overrightarrow{AB} = (m; -m^4)$, $\overrightarrow{OB} = (m; 5)$. Ta có phương trình $m^2 - 5m^4 = 0$$\Leftrightarrow$ $m = \pm\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 100. Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 - 2m^2 + m^4$ có đồ thị (C). Biết đồ thị (C) có ba điểm cực trị A, B, C và $ABDC$ là hình thoi trong đó $D(0; -3)$, A thuộc trục tung. Khi đó m thuộc khoảng nào?

Ⓐ $m \in \left(\dfrac{9}{5}; 2\right)$. Ⓑ $m \in \left(-1; \dfrac{1}{2}\right)$. Ⓒ $m \in (2; 3)$. Ⓓ $m \in \left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{9}{5}\right)$.

Lời giải.

Ta có $y' = 4x\left(x^2 - m\right) \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = m \end{array}\right.$.

Với điều kiện $m > 0$ đồ thị hàm số có ba điểm cực trị là $A\left(0; m^4 - 2m^2\right)$; $B\left(-\sqrt{m}; m^4 - 3m^2\right)$; $C\left(\sqrt{m}; m^4 - 3m^2\right)$. Để $ABDC$ là hình thoi điều kiện là $BC \perp AD$ và trung điểm I của BC trùng với trung điểm J của AD. Do tính đối xứng ta luôn có $BC \perp AD$ nên chỉ cần $I \equiv J$ với $I\left(0; m^4 - 3m^2\right)$, $J\left(0; \dfrac{m^4 - 2m^2 - 3}{2}\right)$.

Điều kiện: $m^4 - 2m^2 - 3 = 2m^4 - 6m^2 \Leftrightarrow m^4 - 4m^2 + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = \sqrt{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow m \in \left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{9}{5}\right)$.

Chọn đáp án D □

Câu 101. Cho hàm số $y = -x^4 + 2mx^2 + 2$có đồ thị (C_m). Tìm m để đồ thị hàm số có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác vuông.

(A) $m = \sqrt[3]{3}$. (B) $-m = \sqrt[3]{3}$. (C) $0 < x < \dfrac{5}{4}$. (D) $m = 1$.

Lời giải.

Cách 1:

Ta có $y' = -4x^3 + 4mx = -4x\left(x^2 - m\right)$.

Để hàm số có ba cực trị thì phương trình $y' = 0$ có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow -4x\left(x^2 - m\right) = 0$ có ba nghiệm phân biệt $\Rightarrow m > 0$.

Gọi $A(0; 2)$, $B\left(-\sqrt{m}, m^2 + 2\right)$, $C\left(\sqrt{m}, m^2 + 2\right)$ là ba điểm cực trị của đồ thị hàm số.

Vì tam giác ABC cân tại A nên tam giác ABC chỉ có thể vuông tại $A \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$.

Với $\overrightarrow{AB} = \left(-\sqrt{m}; m^2\right)$, $\overrightarrow{AC} = \left(\sqrt{m}; m^2\right) \Rightarrow -m + m^4 = 0 \Leftrightarrow m\left(m^3 - 1\right) = 0 \Rightarrow m = 1$.

Cách 2: Áp dụng công thức tính nhanh: Ba điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ tạo thành một tam giác vuông khi $8a + b^3 = 0 \Leftrightarrow 8m^3 - 8 = 0 \Leftrightarrow m = 1$.

Chọn đáp án D □

Câu 102. Gọi A, B, C là các điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 4$. Bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC bằng

(A) 1. (B) $\sqrt{2} + 1$. (C) $\sqrt{2} - 1$. (D) $\sqrt{2}$.

Lời giải.

$y' = 4x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \Rightarrow A(0; 4) \\ x = -1 \Rightarrow B(-1; 3) \\ x = 1 \Rightarrow C(1; 3) \end{array}\right.$.

$\overrightarrow{AB} = (-1; -1) \Rightarrow AB = \sqrt{2}$; $\overrightarrow{AC} = (1; -1) \Rightarrow AC = \sqrt{2}$; $\overrightarrow{BC} = (2; 0) \Rightarrow BC = 2$.

Ta có ΔABC vuông cân tại A có $S = \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{2}\right)^2 = 1$, $p = \dfrac{AB + AC + BC}{2} = \sqrt{2} + 1$.

Vậy $r = \dfrac{S}{p} = \dfrac{1}{\sqrt{2} + 1} = \sqrt{2} - 1$.

Chọn đáp án C □

Câu 103. Cho hàm số $y = x^4 + 2(m - 4)x^2 + m + 5$ có đồ thị (C_m). Tìm m để (C_m) có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác nhận gốc tọa độ O làm trọng tâm.

(A) $m = 1$ hoặc $m = \dfrac{17}{2}$.
(B) $m = 1$.
(C) $m = 4$.
(D) $m = \dfrac{17}{2}$.

Lời giải.

Ta có $y' = 4x^3 + 4(m-4)x$; $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = 4 - m \end{array}\right.$.

Hàm số có ba điểm cực trị $\Leftrightarrow m < 4$. Khi đó các điểm cực trị của (C_m) là $A(0; m+5)$, $B\left(\sqrt{4-m}; m+5-(m-4)^2\right)$, $C\left(-\sqrt{4-m}; m+5-(m-4)^2\right)$.

Do O là trọng tâm tam giác ABC nên $3(m+5) = 2(m-4)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = \dfrac{17}{2} \end{array}\right.$.

Do $m < 4$ nên $m = 1$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 104. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị của hàm số $y = x^4 - 2mx^2$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác có diện tích nhỏ hơn 1.

(A) $m < 1$.
(B) $0 < m < 1$.
(C) $0 < m < \sqrt[3]{4}$.
(D) $m > 0$.

Lời giải.

Ta có $y' = 4x^3 - 4mx$; $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = m \end{array}\right.$.

Để đồ thị hàm số có ba điểm cực trị thì $m > 0$. Khi đó ba điểm cực trị là $O(0;0)$, $B(-\sqrt{m}; -m^2)$, $C(\sqrt{m}; -m^2)$. Theo yêu cầu bài toán, ta có

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}d(O, BC) \cdot BC = \frac{1}{2}\left|-m^2\right| \cdot 2\sqrt{m} < 1 \Leftrightarrow 0 < m < 1.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 105. Gọi m_0 là giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^4 + 2mx^2 - 1$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác có diện tích bằng $4\sqrt{2}$. Mệnh đề nào sau đây đúng

(A) $m_0 \in (-1; 0]$.
(B) $m_0 \in (-2; -1]$.
(C) $m_0 \in (-\infty; -2]$.
(D) $m_0 \in (-1; 0)$.

Lời giải.

Ta có

$$y' = 0 \Leftrightarrow 4x^3 + 4mx = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = -m. \end{array}\right.$$

Đồ thị hàm số $y = x^4 + 2mx^2 - 1$ có ba điểm cực trị thì $y' = 0$ phải có ba nghiệm phân biệt tức là $m < 0$.

Khi đó, đồ thị hàm số có ba điểm cực trị là $A(0; -1)$, $B\left(-\sqrt{-m}; -m^2 - 1\right)$, $C\left(\sqrt{-m}; -m^2 - 1\right)$.

Ta có

$$4\sqrt{2} = S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot d(A, BC) = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{-m} \cdot m^2 = m^2\sqrt{-m} \Rightarrow m = -2.$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 106. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị của hàm số $y = x^4 - 2(m+1)x^2 + m^2$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác vuông cân.

Ⓐ $m = 0$. Ⓑ $m = -1; m = 0$. Ⓒ $m = 1$. Ⓓ $m = 1; m = 0$.

Lời giải.

Cách 1: Điều kiện để đồ thị hàm trùng phương $y = ax^4 + bx^2 + c$ có ba điểm cực trị là $ab < 0 \Leftrightarrow m > -1 \Rightarrow$ loại B.

Khi đó ba điểm cực trị lập thành tam giác vuông cân khi $b^3 + 8a = 0 \Leftrightarrow -8(m+1)^3 + 8 = 0 \Leftrightarrow m = 0$.

Cách 2: Ta có $y' = 4x(x^2 - m - 1)$

Xét $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = m+1 \end{array}\right.$. Để đồ thị số có ba điểm cực trị thì $m > -1$ $(*)$.

Tọa độ ba điểm cực trị là $A(0; m^2)$, $B\left(\sqrt{m+1}; -2m-1\right)$, $C\left(-\sqrt{m+1}; -2m-1\right)$.

Gọi H là trung điểm của đoạn thẳng BC thì $H(0; -2m-1)$.

Khi đó ba điểm cực trị lập thành tam giác vuông cân khi

$$AH = BH \Leftrightarrow \sqrt{(m+1)^4} = \sqrt{m+1} \Leftrightarrow m = 0,$$

thỏa mãn (*).

Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 107. Cho hàm số: $y = x^4 + 2mx^2 + m^2 + m$. Tìm m để đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị lập thành tam giác có một góc bằng 120°.

Ⓐ $m = \dfrac{-1}{\sqrt{3}}$. Ⓑ $m = \dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}$. Ⓒ $m = \dfrac{-1}{\sqrt[3]{3}}$. Ⓓ $m = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Lời giải.

$y' = 4x^3 + 4mx = 4x(x^2 + m)$.

Hàm số có ba điểm cực trị $\Leftrightarrow y' = 0$ có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m < 0$.

Khi đó $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{-m} \end{array}\right.$.

Ba điểm cực trị của đồ thị hàm số là $A(0; m^2 + m)$, $B\left(\sqrt{-m}; m\right)$, $C\left(-\sqrt{-m}; m\right)$.

Suy ra $AB = AC = \sqrt{m^4 - m}$ và $BC = 2\sqrt{-m}$. Do đó, $\widehat{BAC} = 120^\circ$, áp dụng định lí cô-sin, ta được

$$-4m = BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cos 120^\circ = 3AB^2 = 3\left(m^4 - m\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = -\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}. \end{array}\right.$$

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 108. Đồ thị hàm số $y = x^4 - 2mx^2 - m$ có ba điểm cực trị và đường tròn đi qua ba điểm cực trị này có bán kính bằng 1 thì giá trị của m là:

Ⓐ $m = 1; m = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. Ⓑ $m = 1; m = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

Ⓒ $m=-1; m=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$. Ⓓ $m=-1; m=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$.

Lời giải.

$y=x^4-2mx^2-m \Rightarrow y'=4x^3-4mx$.

Với $m>0$ta có ba cực trị $A(0;-m)$; $B\left(-\sqrt{m};-m^2-m\right)$; $C\left(\sqrt{m};-m^2-m\right)$.

$S_{ABC}=\dfrac{abc}{4R} \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}2\sqrt{m}\left|m^2\right|=2\dfrac{\sqrt{m}AB^2}{4} \Leftrightarrow 2m^2=m^4+m \Leftrightarrow m^4-2m^2+m=0$.

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \text{ (l)} \\ m=1 \text{ (n)} \\ m=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \text{ (n)} \\ m=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} \text{ (l)} \end{array}\right.$.

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 109. Viết phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2+2x+3}{2x+1}$.

Ⓐ $y=2x+2$. Ⓑ $y=x+1$. Ⓒ $y=2x+1$. Ⓓ $y=1-x$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{1}{2}\right\}$.

$y'=\dfrac{2x^2+2x-4}{(2x+1)^2}$, $y'=0 \Leftrightarrow 2x^2+2x-4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1\,(\Rightarrow y=2) \\ x=-2\,(\Rightarrow y=-1) \end{array}\right.$.

Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị là $M(1;2)$ và $N(-2;-1)$.

Vậy phương trình đường thẳng qua hai điểm cực trị M, N của đồ thị hàm số đã cho là: $y=x+1$.

Cách khác:

Áp dụng tính chất: Nếu x_0 là điểm cực trị của hàm số hữu tỷ $y=\dfrac{u(x)}{v(x)}$ thì giá trị cực trị tương ứng của hàm số là $y_0=\dfrac{u(x_0)}{v(x_0)}=\dfrac{u'(x_0)}{v'(x_0)}$. Suy ra với bài toán trên ta có phương trình đường thẳng qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là $y=\dfrac{\left(x^2+2x+3\right)'}{(2x+1)'}=x+1$.

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 110. Điều kiện của tham số m để hàm số $y=\dfrac{x^2-mx}{1-x}$ có cực đại và cực tiểu là

Ⓐ $m<0$. Ⓑ $m>-1$. Ⓒ $m<2$. Ⓓ $m>-2$.

Lời giải.

Điều kiện $x\neq 1$.

Ta có $y=\dfrac{x^2-mx}{1-x} \Rightarrow y'=\dfrac{-x^2+2x-m}{(1-x)^2}$.

Hàm số $y=\dfrac{x^2-mx}{1-x}$ có cực đại và cực tiểu $\Leftrightarrow y'=0$ có hai nghiệm phân biệt và đổi dấu khi đi qua hai điểm đó $\Leftrightarrow -x^2+2x-m=0$ có hai nghiệm phân biệt khác 1 $\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta'>0 \\ -1+2-m\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} 1-m>0 \\ m\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow m<1.$

Vậy $m<1$ thì hàm số đã cho có cực đại và cực tiểu.

Chọn đáp án A □

Câu 111. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2+mx+2m}{x+1}$ có hai điểm cực trị A, B và tam giác OAB vuông tại O. Tổng tất cả các phần tử của S bằng

A 9. B 1. C 4. D 5.

Lời giải.

$y'=\dfrac{x^2+2x-m}{(x+1)^2}, \forall x\neq -1$. Đặt $f(x)=x^2+2x-m$, $h(x)=x^2+mx+2m$, $g(x)=x+1$.

Đồ thị hàm số đã cho có hai điểm cực trị A, B khi $f(x)$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 khác $-1 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'=m+1>0 \\ f(-1)=-m-1\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m>-1 (1)$. Khi đó $\begin{cases} y(x_1)=\dfrac{h'(x_1)}{g'(x_1)}=2x_1+m \\ y(x_2)=\dfrac{h'(x_2)}{g'(x_2)}=2x_2+m \end{cases}$.

Suy ra $A(x_1;2x_1+m)$, $B(x_2;2x_2+m)$. Suy ra $\overrightarrow{OA}=(x_1;2x_1+m)$, $\overrightarrow{OB}(x_2;2x_2+m)$.

ΔOAB vuông tại O khi $\begin{cases} \overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\neq\vec{0} (2) \\ \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=x_1.x_2+(2x_1+m)(2x_2+m)=0\ (3) \end{cases}$.

$(3)\Leftrightarrow m^2+5x_1.x_2+2m(x_1+x_2)=0$. Kết hợp với định lí Vi – et cho phương trình $f(x)=0$ ta được $m^2-5m-4m=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \text{ (không thỏa mãn (2))} \\ m=9 \text{ (thỏa mãn (1),(2))} \end{array}\right. \Rightarrow S=\{9\}$.

Vậy tổng tất cả các phần tử của S bằng 9.

Chọn đáp án A □

Câu 112. Biết rằng đồ thị $(H)\colon y=\dfrac{x^2+2x+m}{x-2}$ (với m là tham số thực) có hai điểm cực trị là A, B. Hãy tính khoảng cách từ gốc tọa độ $O(0;0)$ đến đường thẳng AB.

A $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$. B $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$. C $\dfrac{3}{\sqrt{5}}$. D $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

Lời giải.

Phương trình của đường thẳng AB là $y=\dfrac{(x^2+2x+m)'}{(x-2)'}\Leftrightarrow y=2x+2\Leftrightarrow 2x-y+2=0$.

Khoảng cách $d(O;AB)=\dfrac{|2.0-0+2|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$.

Chọn đáp án A □

Câu 113. Gọi S là tập hợp các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2+mx+m^2}{x-1}$ có hai điểm cực trị A, B. Khi $\widehat{AOB}=90^\circ$ thì tổng bình phương tất cả các phần tử của S bằng:

A $\dfrac{1}{16}$. B 8. C $\dfrac{1}{8}$. D 16.

Lời giải.

$y'=\dfrac{(2x+m)(x-1)-x^2-mx-m^2}{(x-1)^2}=\dfrac{x^2-2x-(m+m^2)}{(x-1)^2}$.

Để đồ thị hàm số có hai điểm cực trị A, B thì $y'=0$ phải có hai nghiệm phân biệt khác $1\Leftrightarrow$

$\begin{cases} \Delta' = 1+m+m^2 > 0 \\ -1-m-m^2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \forall m \in \mathbb{R}.$

Phương trình đường thẳng đi qua 2 điểm cực đại, cực tiểu là $y_A = 2x+m$.

Gọi x_A; x_B là hoành độ của A, B khi đó x_A; $x_B$là nghiệm của $x^2-2x-(m+m^2)$.

Theo định lí Vi − et ta có $x_A + x_B = 2$; $x_A.x_B = -m^2 - m$.

$y_A = 2x_A + m; y_B = 2x_B + m$.

$\widehat{AOB} = 90^\circ \Rightarrow x_A.x_B + y_A.y_B = 0 \Leftrightarrow x_Ax_B + 4x_Ax_B + 2m\left(x_A+x_B\right) + m^2 = 0$.

$\Leftrightarrow 5\left(-m^2-m\right) + 4m + m^2 = 0 \Leftrightarrow -4m^2 - m = 0 \Leftrightarrow m = 0; m = -\dfrac{1}{4}$.

Tổng bình phương tất cả các phần tử của S bằng: $0^2 + \left(-\dfrac{1}{4}\right)^2 = \dfrac{1}{16}$.

Chọn đáp án A □

Câu 114. Với tham số m, đồ thị của hàm số $y = \dfrac{x^2-mx}{x+1}$ có hai điểm cực trị A, B và $AB = 5$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

(A) $m > 2$. (B) $0 < m < 1$. (C) $1 < m < 2$. (D) $m < 0$.

Lời giải.

Ta có $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ và có đạo hàm là $y' = \dfrac{x^2+2x-m}{(x+1)^2}$.

Để hàm số có hai điểm cực trị ta phải có $\begin{cases} 1+m > 0 \\ 1-2-m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > -1$.

Gọi hai hoành độ cực trị là x_1 và x_2 ta có $\begin{cases} x_1+x_2 = -2 \\ x_1x_2 = -m \end{cases}$.

Khi đó điểm $A\left(x_1, 2x_1-m\right)$ và $B\left(x_2, 2x_2-m\right)$.

$AB = \sqrt{4+4m}.\sqrt{5} = 5 \Leftrightarrow 4+4m = 5 \Leftrightarrow m = \dfrac{1}{4}$.

Chọn đáp án B □

Câu 115. Cho hàm số $y = \dfrac{x^2-|m|\,x+4}{x-|m|}$. Biết rằng đồ thị hàm số có hai điểm cực trị phân biệt là A, B. Tìm số giá trị m sao cho ba điểm A, B, $C\,(4;2)$ phân biệt và thẳng hàng.

(A) 0. (B) 2. (C) 1. (D) 3.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{|m|\}$.

Ta có $y = \dfrac{x^2-|m|\,x+4}{x-|m|} = x + \dfrac{4}{x-|m|}$.

$y' = 1 - \dfrac{4}{(x-|m|)^2}$, $\forall x \in D$, $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2+|m| \\ x = -2+|m| \end{array}\right.$.

Tọa độ hai điểm cực trị là $B\left(2+|m|\,;4+|m|\right)$, $A\left(-2+|m|\,;-4+|m|\right)$.

$\overrightarrow{AB} = (4;8)$, $\overrightarrow{AC} = \left(6-|m|\,;6-|m|\right)$.

Ba điểm A, B, $C\,(4;2)$ phân biệt và thẳng hàng $\Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB} \\ 6-|m| \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6-|m| = 4k \\ 6-|m| = 8k \\ 6-|m| \neq 0 \end{cases}$ (vô nghiệm).

Vậy không có giá trị m nào thỏa mãn.

Chọn đáp án (A) □

Câu 116. Giá trị của tham số m để hàm số $y=\dfrac{x^2+mx+1}{x+m}$ đạt cực đại tại điểm $x_0=2$ là:

(A) $m=-1$. (B) $m=-3$. (C) $m=1$. (D) $m=3$.

Lời giải.

$y'=1-\dfrac{1}{(x+m)^2}; y''=\dfrac{2}{(x+m)^3}$.

Hàm số $y=\dfrac{x^2+mx+1}{x+m}$ đạt cực đại tại điểm $x_0=2$ khi

$$\begin{cases} y'(2)=0 \\ y''(2)<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-\dfrac{1}{(2+m)^2}=0 \\ \dfrac{2}{(2+m)^3}<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m=-1 \\ m=-3 \end{array}\right. \\ m<-2 \end{cases} \Leftrightarrow m=-3.$$

Thử lại thấy thỏa mãn.

Chọn đáp án (B) □

Câu 117. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2-2mx+m+2}{2x-2m}$. Để hàm số có cực đại và cực tiểu, điều kiện của tham số m là:

(A) $\left[\begin{array}{l} m<-1 \\ m>2 \end{array}\right.$. (B) $-1<m<2$. (C) $-2<m<1$. (D) $\left[\begin{array}{l} m<-2 \\ m>1 \end{array}\right.$.

Lời giải.

Điều kiện: $x\neq m$.

Đạo hàm $y'=\dfrac{x^2-2mx+2m^2-m-2}{2(x-m)^2}$.

Để hàm số có cực đại và cực tiểu, thì $y'=0 \Leftrightarrow x^2-2mx+2m^2-m-2=0$ có hai nghiệm phân biệt khác m.

Ta có: $\begin{cases} \Delta'=-m^2+m+2>0 \\ m^2-2m.m+2m^2-m-2\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1<m<2 \\ m^2-m-2\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1<m<2.$

Chọn đáp án (B) □

Câu 118. Để hàm số $y=\dfrac{x^2+mx+1}{x+m}$ đạt cực đại tại $x=2$ thì m thuộc khoảng nảo?

(A) $(0;2)$. (B) $(-4;-2)$. (C) $(-2;0)$. (D) $(2;4)$.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{-m\}$.

$y'=\dfrac{x^2+2mx+m^2-1}{(x+m)^2}, y''=\dfrac{2}{(x+m)^3}$.

Hàm số đạt cực đại tại $x=2$ nên $\begin{cases} y'(2)=0 \\ y''(2)<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{m^2+4m+3}{(m+2)^2}=0 \\ \dfrac{2}{(m+2)^3}<0 \end{cases} \Leftrightarrow m=-3$ thuộc $(-4;-2)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 119. Cho hàm số $y = x + p + \dfrac{q}{x+1}$ đạt cực đại tại điểm $A(-2;-2)$. Tính pq.

(A) $pq = 2$. (B) $pq = \dfrac{1}{2}$. (C) $pq = \sqrt{3}$. (D) $pq = 1$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Ta có $y' = 1 - \dfrac{q}{(x+1)^2}$.

Hàm số đạt cực đại tại $x = -2$, suy ra $y'(-2) = 0 \Rightarrow 0 = 1 - q \Leftrightarrow q = 1$.

Lại có đồ thị hàm số đi qua điểm $A(-2;-2)$ nên $-2 = -2 + p - q \Leftrightarrow p - q = 0$.

Do đó $p = q = 1$.

Thử lại: với $p = q = 1$ ta được $y = x + 1 + \dfrac{1}{x+1}$.

Ta có $y' = 1 - \dfrac{1}{(x+1)^2} = \dfrac{x^2+2x}{(x+1)^2} = 0 \Rightarrow x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -2 \end{array}\right.$.

Từ đó có bảng biến thiên của hàm số

x	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
y		↗	-2	↘	‖	↘		↗	

Rõ ràng đồ thị hàm số đạt cực đại tại điểm $A(-2;-2)$. Vậy $p = q = 1 \Rightarrow pq = 1$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 120. Cho hàm số $y = \dfrac{x^2+mx+1}{x+m}$ (với m là tham số). Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số có giá trị cực đại là 7.

(A) $m = 7$. (B) $m = 5$. (C) $m = -9$. (D) $m = -5$.

Lời giải.

Tập xác định của hàm số là: $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{-m\}$.

$y = \dfrac{x^2+mx+1}{x+m} \Rightarrow y' = \dfrac{x^2+2mx+m^2-1}{(x+m)^2}$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -m \\ x^2+2mx+m^2-1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -m \\ \left[\begin{array}{l} x = -m+1 \\ x = -m-1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -m+1 \\ x = -m-1. \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-m-1$		$-m$		$-m+1$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
y		↗		↘	‖	↘		↗	

Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số đạt cực đại tại $x = -m-1$.

Vậy $y(-m-1) = 7 \Leftrightarrow -m-2 = 7 \Leftrightarrow m = -9$.

Chọn đáp án C □

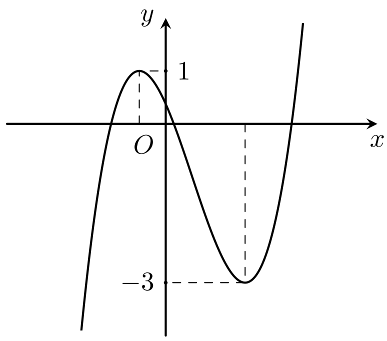
BẢNG ĐÁP ÁN

1. C	2. C	3. A	4. C	5. B	6. D	7. C	8. A	9. D	10. A
11. D	12. D	13. B	14. A	15. A	16. B	17. C	18. B	19. C	20. D
21. D	22. A	23. A	24. A	25. B	26. D	27. C	28. D	29. A	30. B
31. B	32. B	33. C	34. D	35. C	36. D	37. C	38. A	39. B	40. B
41. D	42. C	43. B	44. A	45. B	46. C	47. C	48. D	49. C	50. D
51. D	52. D	53. A	54. C	55. D	56. A	57. D	58. D	59. B	60. B
61. A	62. A	63. A	64. C	65. A	66. A	67. C	68. D	69. B	70. B
71. B	72. A	73. D	74. C	75. D	76. C	77. C	78. D	79. A	80. C
81. C	82. A	83. D	84. D	85. D	86. B	87. B	88. D	89. C	90. B
91. D	92. A	93. A	94. D	95. B	96. C	97. B	98. A	99. C	100. D
101. D	102. C	103. B	104. B	105. C	106. A	107. C	108. B	109. B	110. A
111. A	112. A	113. A	114. B	115. A	116. B	117. B	118. B	119. D	120. C

MỨC ĐỘ 2. MỨC ĐIỂM 9,10

Dạng 1. Bài toán cực trị hàm số chứa dấu trị tuyệt đối

Câu 1 (Chuyên Vinh – Lần 2). Đồ thị (C) có hình vẽ bên.



Tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = |f(x) + m|$ có ba điểm cực trị là:

A. $m \leq -1$ hoặc $m \geq 3$.
B. $m \leq -3$ hoặc $m \geq 1$.
C. $m = -1$ hoặc $m = 3$.
D. $1 \leq m \leq 3$.

Lời giải.

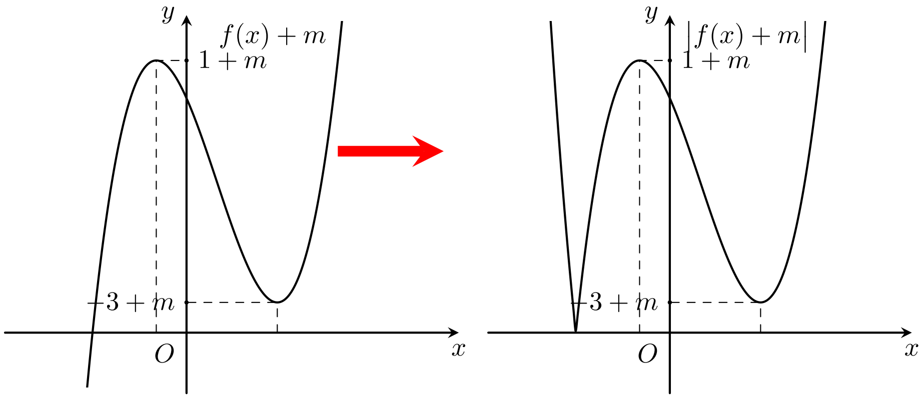
Cách 1:

Do $y = f(x) + m$ là hàm số bậc ba.

Khi đó, hàm số $y = |f(x) + m|$ có ba điểm cực trị.

$\Leftrightarrow$ hàm số $y = f(x) + m$ có $y_{\text{CĐ}}.y_{\text{CT}} \geq 0$.

(hình minh họa).



$\Leftrightarrow (1+m)(-3+m) \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \leq -1 \\ m \geq 3 \end{array}\right.$.

Cách 2:

Ta có $y = |f(x)+m| = \sqrt{(f(x)+m)^2} \Rightarrow y' = \dfrac{(f(x)+m).f'(x)}{\sqrt{(f(x)+m)^2}}$.

Để tìm cực trị của hàm số $y = |f(x)+m|$, ta tìm x thỏa mãn $y' = 0$ hoặc y' không xác định.

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'(x) = 0(1) \\ f(x) = -m(2) \end{array}\right.$.

Dựa vào đồ thị, suy ra hàm số có 2 điểm cực trị x_1, x_2 trái dấu.

Suy ra (1) có hai nghiệm x_1, x_2 trái dấu.

Vậy để đồ thị hàm số có 3 cực trị thì (2) có một nghiệm khác x_1, x_2.

Số nghiệm của (2) chính là số giao điểm của đồ thị (C) và đường thẳng $y = -m$.

Do đó để (2) có một nghiệm thì dựa vào đồ thị ta có điều kiện: $\left[\begin{array}{l} -m \geq 1 \\ -m \leq -3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \leq -1 \\ m \geq 3 \end{array}\right.$.

Chú ý:

Nếu $x = x_0$ là cực trị của hàm số $y = f(x)$ thì $f'(x_0) = 0$ hoặc không tồn tại $f'(x_0)$.

Chọn đáp án A □

Câu 2 (Đề Tham Khảo 2018). Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = |3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m|$ có 7 điểm cực trị?

A 5. B 6. C 4. D 3.

Lời giải.

$y = |f(x)| = |3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m|$

Ta có: $f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 24x$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = -1$ hoặc $x = 2$.

x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$m-5$	$\nearrow$	m	$\searrow$	$m-32$	$\nearrow$	$+\infty$

Do hàm số $f(x)$ có ba điểm cực trị nên hàm số $y = |f(x)|$ có 7 điểm cực trị khi

Phương trình $f(x) = 0$ có 4 nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m - 5 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < 5$.

Vậy có 4 giá trị nguyên thỏa đề bài là $m = 1$; $m = 2$; $m = 3$; $m = 4$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 3 (Gia Bình 2019). Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau.

x	$-\infty$		-2		4		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	6	↘	2	↗	$+\infty$

Hàm số $y = f(|x-3|)$ có bao nhiêu điểm cực trị

(A) 5.　(B) 6.　(C) 3.　(D) 1.

Lời giải.

$y = f(|x-3|)$ (1), Đặt $t = |x-3|$, $t \geq 0$ Thì (1) trở thành:$y = f(t)$ $(t \geq 0)$.

Có $t = \sqrt{(x-3)^2} \Rightarrow t' = \dfrac{x-3}{\sqrt{(x-3)^2}}$.

Có $y'_x = t'_x f'(t)$.

$$y'_x = 0 \Leftrightarrow t'_x f'(t) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t'_x = 0 \\ f'(t) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ t = -2 \text{ (L)} \\ t = 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = 7 \\ x = -1 \end{array}\right. .$$

Lấy $x = 8$ có $t'(8)f'(5) > 0$, đạo hàm đổi dấu qua các nghiệm đơn nên ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		3		7		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	$\|$	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘	CT	↗	CĐ	↘	CT	↗	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên thì hàm số $y = f(|x-3|)$ có 3 cực trị.

Chọn đáp án (C) □

Câu 4 (Cụm Liên Trường Hải Phòng 2019).

Tìm số các giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y = |x^4 - 2mx^2 + 2m^2 + m - 12|$ có bảy điểm cực trị

(A) 1.　(B) 4.　(C) 0.　(D) 2.

Lời giải.

Đồ thị hàm số $y = |x^4 - 2mx^2 + 2m^2 + m - 12|$ có bảy điểm cực trị khi và chỉ khi đồ thị hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 2m^2 + m - 12$ cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt.

$x^4 - 2mx^2 + 2m^2 + m - 12 = 0$ có bốn nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $\begin{cases} m^2 - \left(2m^2 + m - 12\right) > 0 \\ 2m > 0 \\ 2m^2 + m - 12 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} -4 < m < 3 \\ m > 0 \\ m < \dfrac{-1 - \sqrt{97}}{4} \vee m > \dfrac{-1 + \sqrt{97}}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{-1 + \sqrt{97}}{4} < m < 3.$

Vậy không có giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y = |x^4 - 2mx^2 + 2m^2 + m - 12|$ có bảy điểm cực trị.

Chọn đáp án C $\square$

Câu 5 (Sở Vĩnh Phúc 2019). Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = |3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m^2|$ có đúng 5 điểm cực trị?

A 5. B 7. C 6. D 4.

Lời giải.

Xét hàm số $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m^2$; $f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 24x$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0; x_2 = -1; x_3 = 2$. Suy ra, hàm số $y = f(x)$ có 3 điểm cực trị.

$\Rightarrow$ Hàm số $y = |3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m^2|$ có 5 điểm cực trị khi đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt trục hoành tại 2 điểm phân biệt $\Leftrightarrow 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m^2 = 0$ có 2 nghiệm phân biệt.

Phương trình $3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m^2 = 0 \Leftrightarrow -3x^4 + 4x^3 + 12x^2 = m^2$ (1).

Xét hàm số $g(x) = -3x^4 + 4x^3 + 12x^2$; $g'(x) = -12x^3 + 12x^2 + 24x$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	5	$\searrow$	0	$\nearrow$	32	$\searrow$	$-\infty$

Phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m^2 < 0 \\ 5 < m^2 < 32 \end{array}\right. \Leftrightarrow \sqrt{5} < |m| < \sqrt{32}$.

Vậy $m \in \{3; 4; 5; -3; -4; -5\}$.

Chọn đáp án C $\square$

Câu 6 (Chuyên Vĩnh Phúc 2019). Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y = |3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m|$ có 5 điểm cực trị?

A 16. B 44. C 26. D 27.

Lời giải.

Đặt: $g(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m$.

Ta có: $g'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 24x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \Rightarrow y = m - 32 \\ x = -1 \Rightarrow y = m - 5 \\ x = 0 \Rightarrow y = m \end{array}\right.$.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$m-5$	$\nearrow$	m	$\searrow$	$m-32$	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, hàm số có $y = |g(x)|$ có 5 điểm cực trị

khi $\left[\begin{array}{l} m < 0 \\ \begin{cases} m - 5 > 0 \\ m - 32 < 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < 0 \\ 5 < m < 32 \end{array}\right.$.

Vì m là số nguyên dương cho nên có 26 số m thỏa đề bài.

Chọn đáp án C □

Câu 7 (THPT Lương Thế Vinh Hà Nội 2019).

Cho hàm số $y = |x^4 - 2mx^2 + 2m - 1|$ với m là tham số thực. Số giá trị nguyên trong khoảng $[-2; 2]$ của m để hàm số đã cho có 3 điểm cực trị là

A 2. B 4. C 3. D 1.

Lời giải.

Đặt $f(x) = x^4 - 2mx^2 + 2m - 1$, $f'(x) = 4x^3 - 4mx$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = m \end{array}\right.$.

Trường hợp 1: hàm số có một cực trị $\Rightarrow m \in [-2; 0]$.

Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có một điểm cực trị là $A(0; 2m - 1)$.

Do $m \in [-2; 0] \Rightarrow y_A = 2m - 1 < 0$ nên đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt trục hoành tại 2 điểm phân biệt nên hàm số $y = |f(x)|$ có 3 cực trị $\Rightarrow$ có 3 giá trị nguyên của m thỏa yêu cầu bài toán.

Trường hợp 2: hàm số có ba cực trị $\Rightarrow m \in (0; 2]$.

Khi đó đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị là $A(0; 2m - 1)$, $B(\sqrt{m}; -m^2 + 2m - 1)$, $C(-\sqrt{m}; -m^2 + 2m - 1)$.

Do $a = 1 > 0$ nên hàm số $y = |f(x)|$ có 3 điểm cực trị khi hàm số $y = f(x)$ có $y_B = y_C \geq 0$

$\Leftrightarrow -m^2 + 2m - 1 \geq 0 \Leftrightarrow m = 1$.

Nếu $y_B = y_C < 0$ (trong bài toán này không xảy ra) thì hàm số có ít nhất 5 điểm cực trị.

Vậy có 4 giá trị của m thỏa yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án B □

Câu 8 (Chuyên Bắc Ninh 2019). Tập hợp các giá trị của m để hàm số $y = |3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m - 1|$ có 7 điểm cực trị là:

Ⓐ $(0;6)$. Ⓑ $(6;33)$. Ⓒ $(1;33)$. Ⓓ $(1;6)$.

Lời giải.

Xét hàm số $f(x)=3x^4-4x^3-12x^2+m-1$.

Có $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$.

$f'(x)=12x^3-12x^2-24x=12x\left(x^2-x-2\right)$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\x=-1\\x=2\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$m-6$	$\nearrow$	$m-1$	$\searrow$	$m-33$	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên, ta có hàm số $y=|f(x)|$ có 7 điểm cực trị $\Leftrightarrow$ đồ thị hàm số $y=f(x)$ cắt Ox tại 4 điểm phân biệt $\Leftrightarrow m-6<0<m-1 \Leftrightarrow 1<m<6$.

Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 9 (THPT Kinh Môn-2018). Cho hàm số $y=f(x)=x^3-(2m-1)x^2+(2-m)x+2$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=f(|x|)$ có 5 điểm cực trị.

Ⓐ $\frac{5}{4}<m\leq 2$. Ⓑ $-2<m<\frac{5}{4}$. Ⓒ $-\frac{5}{4}<m<2$. Ⓓ $\frac{5}{4}<m<2$.

Lời giải.

Ta có: $y'=3x^2-2\left(2m-1\right)x+2-m$.

Hàm số $y=f(|x|)$ có 5 điểm cực trị khi và chỉ khi hàm số $f(x)$ có hai cực trị dương.

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta>0\\S>0\\P>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(2m-1)^2-3\left(2-m\right)>0\\ \dfrac{2\left(2m-1\right)}{3}>0\\ \dfrac{2-m}{3}>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}4m^2-m-5>0\\ m>\dfrac{1}{2}\\ m<2\end{cases} \Leftrightarrow \frac{5}{4}<m<2.$$

Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 10 (Chuyên Đh Vinh-2018). Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=\left(x^3-2x^2\right)\left(x^3-2x\right)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Hàm số $\left|f\left(1-2018x\right)\right|$ có nhiều nhất bao nhiêu điểm cực trị?

Ⓐ 9. Ⓑ 2018. Ⓒ 2022. Ⓓ 11.

Lời giải.

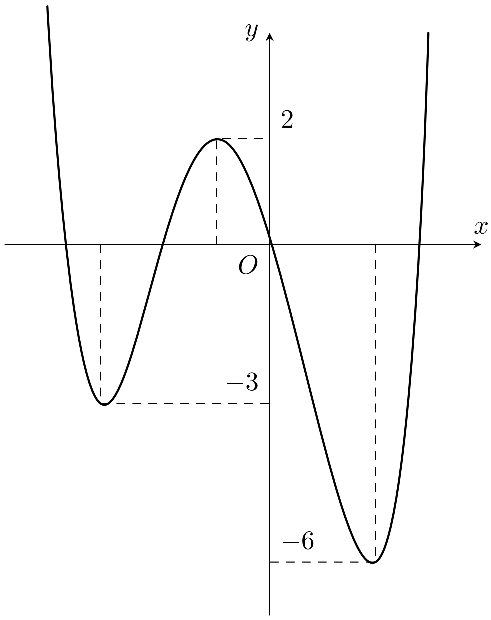
Ta có $f'(x)=x^3\left(x-2\right)\left(x^2-2\right)=0$ có 4 nghiệm và đổi dấu 4 lần nên hàm số $y=f(x)$ có 4 cực trị. Suy ra $f(x)=0$ có tối đa 5 nghiệm phân biệt.

Do đó $y=\left|f\left(1-2018x\right)\right|$ có tối đa 9 cực trị.

Chọn đáp án (A) □

Câu 11 (THPT Thạch Thanh 2-Thanh Hóa-2018).

Hình vẽ bên là đồ thị của hàm số $y = f(x)$.



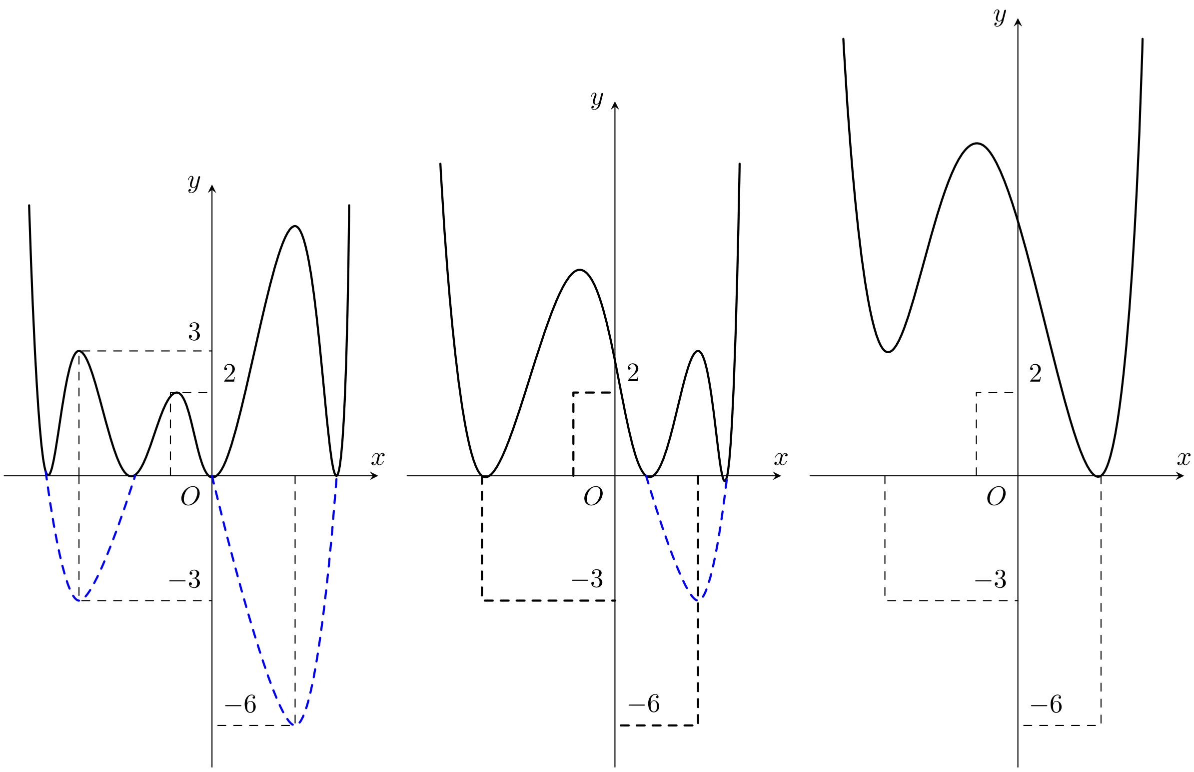
Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y = |f(x-1)+m|$ có 5 điểm cực trị. Tổng giá trị tất cả các phần tử của S bằng

(A) 9. (B) 12. (C) 18. (D) 15.

Lời giải.

Nhận xét: Số giao điểm của (C): $y = f(x)$ với Ox bằng số giao điểm của $(C') : y = f(x-1)$ với Ox.

Vì $m > 0$ nên $(C'') : y = f(x-1) + m$ có được bằng cách tịnh tiến $(C') : y = f(x-1)$ lên trên m đơn vị.



Trường hợp 1: $0 < m < 3$. Đồ thị hàm số có 7 điểm cực trị. Loại.

Trường hợp 2: $m = 3$. Đồ thị hàm số có 5 điểm cực trị. Nhận.

Trường hợp 3: $3 < m < 6$. Đồ thị hàm số có 5 điểm cực trị. Nhận.

Trường hợp 4: $m \geq 6$. Đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị. Loại.

Vậy $3 \leq m < 6$. Do $m \in \mathbb{Z}^*$ nên $m \in \{3; 4; 5\}$.

Vậy tổng giá trị tất cả các phần tử của S bằng 12.

Chọn đáp án B □

Câu 12 (THPT Quảng Yên-Quảng Ninh-2018).

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \left|3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + \frac{m}{2}\right|$ có 7 điểm cực trị?

A 3. B 9. C 6. D 4.

Lời giải.

Ta có $y = \left|3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + \frac{m}{2}\right| = \sqrt{\left(3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + \frac{m}{2}\right)^2}$.

$$\Rightarrow y' = \frac{(12x^3 + 12x^2 - 24x)\left(3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + \frac{m}{2}\right)}{\sqrt{\left(3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + \frac{m}{2}\right)^2}}.$$

$$\Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 12x^3 + 12x^2 - 24x = 0 \ (1) \\ 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + \frac{m}{2} = 0 \ (2) \end{array}\right..$$

$$\text{Từ (1)} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -2 \end{array}\right..$$

Vậy để hàm số có 7 điểm cực trị thì (2) phải có bốn nghiệm phân biệt khác $\{0; 1; -2\}$.

Xét hàm số $f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + \frac{m}{2} \Rightarrow f'(x) = 12x^3 + 12x^2 - 24x \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -2 \end{array}\right.$.

x	$-\infty$		-2		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-32 + \frac{m}{2}$	$\nearrow$	$\frac{m}{2}$	$\searrow$	$-5 + \frac{m}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

Để (2) có 4 nghiệm phân biệt thì $f(x)$ cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt $\Rightarrow \begin{cases} -5 + \frac{m}{2} < 0 \\ \frac{m}{2} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} m < 10 \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < 10$.

Vậy có 9 giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \left|3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + \frac{m}{2}\right|$ có 7 điểm cực trị.

Chọn đáp án B □

Câu 13 (THPT Nguyễn Tất Thành-Yên Bái-2018).

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = |x^3 - 3x^2 + m|$ có 5 điểm cực trị?

A 5. B 3. C 6. D 4.

Lời giải.

Hàm số $y = |x^3 - 3x^2 + m|$ có 5 điểm cực trị $\Leftrightarrow$ đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + m$ có hai điểm cực trị và nằm về hai phía của trục hoành $\Leftrightarrow$ phương trình $x^3 - 3x^2 + m = 0$ (1) có ba nghiệm phân biệt.

Xét bbt của hàm số $y = x^3 - 3x^2$

$$y' = 3x^2 - 6x = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right..$$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

Từ đó ta được (1) có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow -4 < -m < 0 \Leftrightarrow 0 < m < 4$. Vậy có 3 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Chọn đáp án B □

Câu 14 (Chuyên Nguyễn Thị Minh Khai-Sóc Trăng-2018).

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = |3x^5 - 25x^3 + 60x + m|$ có 7 điểm cực trị?

A 42. B 21. C 40. D 20.

Lời giải.

$y = 3x^5 - 25x^3 + 60x + m$

$\Rightarrow y' = 15x^4 - 75x^2 + 60$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 = 1 \\ x^2 = 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 \Rightarrow y = m - 16 \\ x = -1 \Rightarrow y = m - 38 \\ x = 1 \Rightarrow y = m + 38 \\ x = 2 \Rightarrow y = m + 16 \end{array}\right..$$

x	$-\infty$		-2		-1		1		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	$m-16$	↘	$m-38$	↗	$m+38$	↘	$m+16$	↗	$+\infty$

$y=0$

Suy ra $y=\left|3x^5-25x^3+60x+m\right|$ có 7 điểm cực trị

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m-38<0<m-16 \\ m+16<0<m+38 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 16<m<38 \\ -38<m<-16 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=\overline{17,37} \\ m=\overline{-37,-17} \end{array}\right..$$

Có tất cả 42 giá trị nguyên của m.

Chọn đáp án A □

Câu 15 (Sở Nam Định-2018). Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	11	↘	4	↗	$+\infty$

Đồ thị hàm số $y=|f(x)-2m|$ có 5 điểm cực trị khi và chỉ khi

A $m\in(4;11)$. B $m\in\left(2;\dfrac{11}{2}\right)$. C $m=3$. D $m\in\left[2;\dfrac{11}{2}\right]$.

Lời giải.

Từ bảng biến thiên của hàm số $y=f(x)$ ta có bảng biến thiên của hàm số $y=f(x)-2m$ như sau

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$[f(x)-2m]'$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)-2m$	$-\infty$	↗	$11-2m$	↘	$4-2m$	↗	$+\infty$

Đồ thị hàm số $y=|f(x)-2m|$ gồm hai phần:

- ☑ Phần đồ thị của hàm số $y=f(x)-2m$ nằm phía trên trục hoành.Phần đối xứng với đồ thị của hàm số $y=f(x)-2m$ nằm phía dưới trục hoành qua trục Ox.

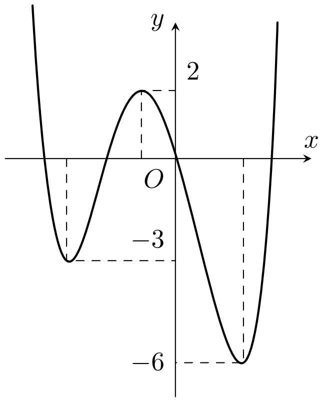
Do đó, đồ thị hàm số $y = |f(x) - 2m|$ có 5 điểm cực trị khi và chỉ khi $(4 - 2m)(11 - 2m) < 0 \Leftrightarrow m \in \left(2; \dfrac{11}{2}\right)$.

Chọn đáp án B □

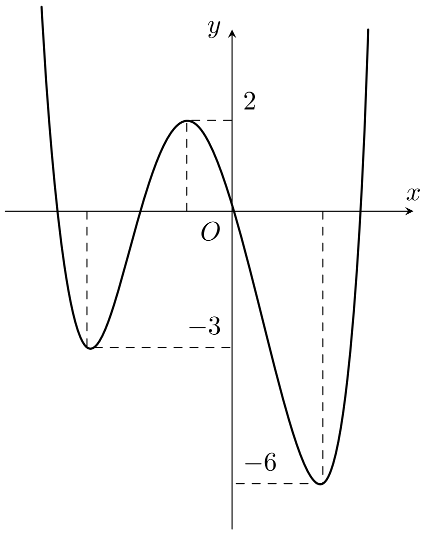
Câu 16 (THPT Nguyễn Huệ-Tt Huế-2018).

Hình vẽ bên là đồ thị của hàm số $y = f(x)$. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên dương của tham số m để đồ thị hàm số $y = |f(x-2) + m|$ có 5 điểm cực trị. Tổng giá trị tất cả các phần tử của S bằng

A 15. B 18. C 9. D 12.



Lời giải.



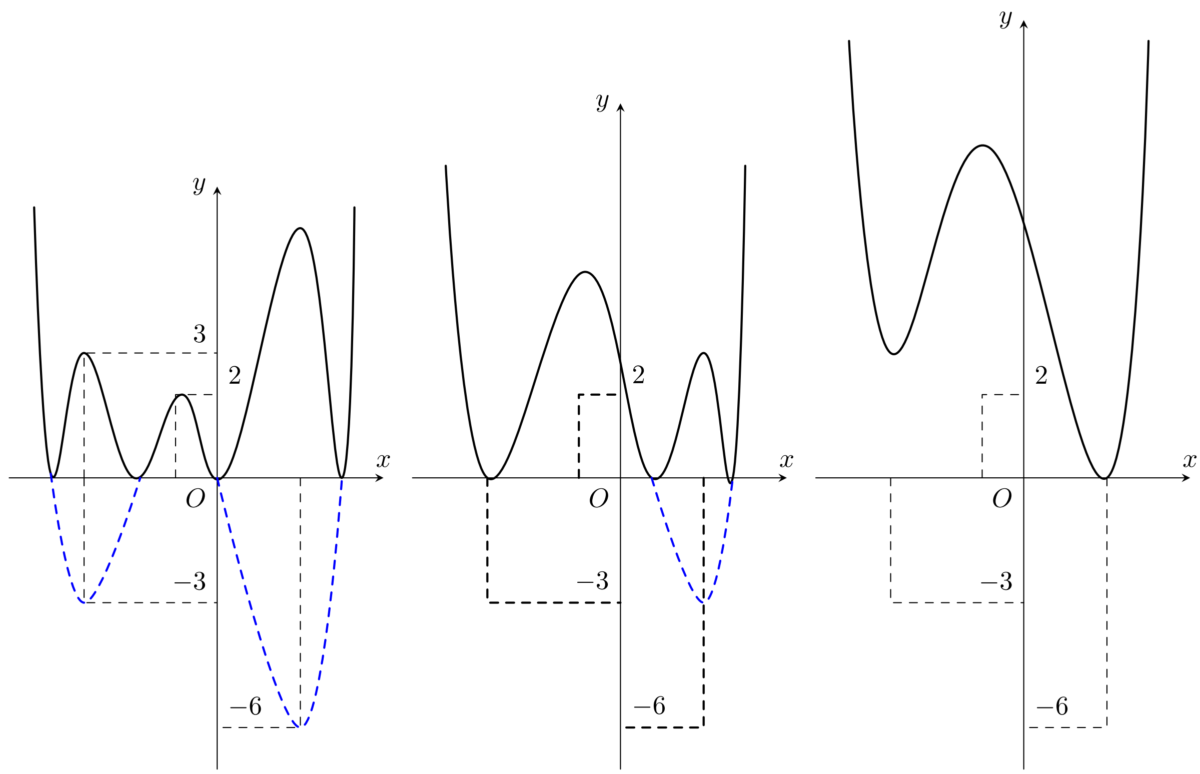
Cách 1: dùng đồ thị.

Nhận thấy: số giao điểm của (C): $y = f(x)$ với Ox bằng số giao điểm của $(C_1): y = f(x-2)$ với Ox.

Vì $m > 0$ nên $(C_2): y = f(x-2) + m$ có được bằng cách tịnh tiến $(C_1): y = f(x-2)$ lên trên m đơn vị.

Đồ thị hàm số $y = |f(x-2) + m|$ có được bằng cách lấy đối xứng qua trục hoành Ox phần đồ thị (C_2) nằm phía dưới trục Ox và giữ nguyên phần phía trên trục Ox .

Ta xét các trường hợp sau:



- ☑ Trường hợp 1: $0 < m < 3$: đồ thị hàm số có 7 điểm cực trị (loại).
- ☑ Trường hợp 2: $m = 3$: đồ thị hàm số có 5 điểm cực trị (thỏa mãn).
- ☑ Trường hợp 3: $3 < m < 6$: đồ thị hàm số có 5 điểm cực trị (thỏa mãn).
- ☑ Trường hợp 4: $m \geq 6$: đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị (loại).

Vậy $3 \leq m < 6$ Do $m \in \mathbb{Z}_+^*$ nên $m \in \{3; 4; 5\}$ hay $S = \{3; 4; 5\}$.

Vậy tổng giá trị tất cả các phần tử của S bằng 12.

Cách 2: đạo hàm hàm số hợp.

Ta có: $y = |f(x-2) + m| = \sqrt{[f(x-2)+m]^2} \Rightarrow y' = \dfrac{(f(x-2)+m).f'(x-2)}{\sqrt{[f(x-2)+m]^2}}$

Xét $f'(x-2) = 0$ (1)

Do phương trình $f'(x) = 0$ có 3 nghiệm phân biệt nên phương trình $f'(x-2) = 0$ cũng có 3 nghiệm phân biệt.

-Xét $f(x-2) + m = 0 \Leftrightarrow f(x-2) = -m$ (2)

Nếu $-6 < -m < -3 \Leftrightarrow 3 < m < 6$ thì phương trình (2) có 2 nghiệm phân biệt khác 3 nghiệm của (1).

Nếu $-m = -3 \Leftrightarrow m = 3$ thì (2) có 3 nghiệm phân biệt (trong đó có 2 nghiệm đơn khác 3 nghiệm của (1) và 1 nghiệm kép trùng với 1 nghiệm của (1))

Tóm lại: với $3 \leq m < 6$ thì hai phương trình (1) và (2) có tất cả 5 nghiệm bội lẻ phân biệt và y' đổi dấu khi x đi qua các nghiệm đó, hay đồ thị hàm số $y = |f(x-2) + m|$ có 5 điểm cực trị.

-Lại do $m \in \mathbb{Z}_+^*$ nên $m \in \{3; 4; 5\}$ hay $S = \{3; 4; 5\}$.

Vậy tổng giá trị tất cả các phần tử của S bằng 12.

Chọn đáp án (D) □

Câu 17 (Sở Hưng Yên-2018). Cho hàm số $f(x) = |x^3 - 3x^2 + m|$ với $m \in [-5; 5]$ là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $f(x)$ có đúng ba điểm cực trị.

(A) 3. (B) 0. (C) 8. (D) 6.

Lời giải.

Xét hàm số $g(x) = x^3 - 3x^2 + m$ có $g'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	m	$\searrow$	$-4+m$	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta thấy để hàm số $f(x)$ có đúng ba điểm cực trị thì đồ thị hàm số $g(x)$ phải có đúng một giao điểm hoặc tiếp xúc với Ox.

Điều kiện này tương đương với $\left[\begin{array}{l} m \le 0 \\ -4 + m \ge 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \le 0 \\ m \ge 4 \end{array}\right.$. Kết hợp điều kiện $m \in [-5; 5]$ ta có $m \in \{-5; -4; -3; -2; -1; 0; 4; 5\}$. Vậy có 8 giá trị thoả mãn.

Chọn đáp án (C) □

Câu 18 (Chuyên Hùng Vương-Bình Dương-2018).

Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau.

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2018	$\searrow$	-2018	$\nearrow$	$+\infty$

Đồ thị hàm số $y = |f(x - 2017) + 2018|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

(A) 2. (B) 3. (C) 5. (D) 4.

Lời giải.

Có $y = f(x - 2017)$ bằng cách tịnh tiến sang bên phải 2017 đơn vị ta có:

bảng biến thiên của hàm số $y = f(x - 2017)$.

x	$-\infty$		2016		2020		$+\infty$
$f(x-2017)$			2018				$+\infty$
		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	
	$-\infty$				-2018		

Tịnh tiến đồ thị hàm số $f(x-2017)$ lên trên 2018 đơn vị và lấy trị tuyệt đối ta có bảng biến thiên của hàm số $y = |f(x-2017)+2018|$.

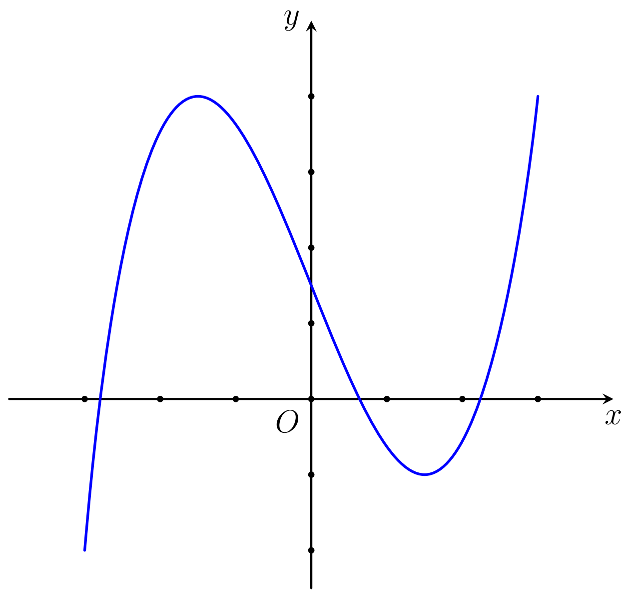
x	$-\infty$			2016		2020		$+\infty$
y				4036				
		$\searrow$		$\nearrow$	$\searrow$		$\nearrow$	
			0			0		

Từ bảng biến thiên, suy ra hàm số có 3 cực trị.

Chọn đáp án B □

Câu 19 (Chuyên Ngữ-Hà Nội-2018).

Hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ trên $\mathbb{R}$. Hình vẽ bên là đồ thị của hàm số $f'(x)$ trên $\mathbb{R}$.



Hỏi hàm số $y = f(|x|) + 2018$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A 5. B 3. C 2. D 4.

Lời giải.

Cách 1: Từ đồ thị hàm số của $f'(x)$ ta thấy $f(x)$ có hai cực trị dương nên hàm số $y = f(|x|)$ lấy đối xứng phần đồ thị hàm số bên phải trục tung qua trục tung ta được bốn cực trị, cộng thêm giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(|x|) + 2018$ với trục tung nữa ta được tổng cộng là 5 cực trị.

Cách 2: Ta có: $y = f(|x|) + 2018 = f\left(\sqrt{x^2}\right) + 2018$.

Đạo hàm: $y' = f'\left(\sqrt{x^2}\right)\left(\sqrt{x^2}\right)' = \dfrac{x}{\sqrt{x^2}}.f'(|x|)$.

Từ đồ thị hàm số của $f'(x)$ suy ra $f'(x)$ cùng dấu với $(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$ với $x_1<0$, $0<x_2<x_3$.

Suy ra: $f'(|x|)$ cùng dấu với $(|x|-x_1)(|x|-x_2)(|x|-x_3)$.

Do $|x|-x_1>0$ nên $y'=f'\left(\sqrt{x^2}\right)\left(\sqrt{x^2}\right)'=\dfrac{x}{\sqrt{x^2}}f'(|x|)$ cùng dấu với $(|x|-x_2)(|x|-x_3).\dfrac{x}{\sqrt{x^2}}$.

Vậy hàm số $y=f(|x|)+2018$ có 5 cực trị.

Chọn đáp án A □

Câu 20 (Sở-Nam Định-2018). Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	11	$\searrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$

Đồ thị hàm số $y=|f(x)-2m|$ có 5 điểm cực trị khi và chỉ khi

A $m\in(4;11)$. B $m\in\left(2;\dfrac{11}{2}\right)$. C $m=3$. D $m\in\left[2;\dfrac{11}{2}\right]$.

Lời giải.

Từ bảng biến thiên ta có đồ thị hàm số $y=f(x)$ có hai điểm cực trị.

Để đồ thị hàm số $y=|f(x)-2m|$ có 5 điểm cực trị thì đồ thị $y=f(x)$ cắt đường thẳng $y=2m$ tại $5-2=3$ điểm phân biệt $\Leftrightarrow 4<2m<11\Leftrightarrow 2<m<\dfrac{11}{2}$.

Chọn đáp án B □

Câu 21 (Sở Hưng Yên-2021). Gọi X là tập hợp các số nguyên $m\in[-2021;2021]$ sao cho đồ thị hàm số $y=\left|x^3-(2m+1)x^2+mx+m\right|$ có 5 điểm cực trị. Tổng các phần tử của X là

A 0. B 4036. C 1. D -1.

Lời giải.

Xét hàm số $f(x)=x^3-(2m+1)x^2+mx+m$.

Ta có $f'(x)=3x^2-2(2m+1)x+m$.

$\Delta'=(2m+1)^2-3m=3m^2+\left(m+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}>0$, với mọi $m\in\mathbb{R}$.

Suy ra hàm số $f(x)$ luôn có 2 điểm cực trị, với mọi $m\in\mathbb{R}$.

$f(x)=0\Leftrightarrow x^3-(2m+1)x^2+mx+m=0$ (1)

$\Leftrightarrow (x-1)\left(x^2-2mx-m\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ x^2-2mx-m=0\ (2)\end{array}\right.$.

Hàm số đã cho có 5 điểm cực trị $\Leftrightarrow$ phương trình (1) có 3 nghiệm phân biệt.

$\Leftrightarrow$ phương trình (2) có 2 nghiệm phân biệt, khác 1.

$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta'=m^2+m>0\\ 1-3m\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}m<-1\\ m>0\end{array}\right.\\ m\neq\dfrac{1}{3}\end{cases}$.

Vì $m \in \mathbb{Z}$ và $m \in [-2021; 2021]$ nên $m \in \{\pm 2021; \pm 2020; \ldots; \pm 2; 1\}$.

Suy ra $X = \{\pm 2021; \pm 2020; \ldots; \pm 2; 1\}$.

Vậy tổng các phần tử của tập X bằng 1.

Chọn đáp án C □

Câu 22 (Mã 101-2022). Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y = |x^4 - 2mx^2 + 64x|$ có đúng ba điểm cực trị

A 5. B 6. C 12. D 11.

Lời giải.

Xét hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 64x$.

Ta có: $y' = 4x^3 - 4mx + 64$ $(*)$.

Phương trình hoành độ giao điểm: $x^4 - 2mx^2 + 64x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^3 - 2mx + 64 = 0 \ (1) \end{array}\right.$.

Phương trình (1) luôn có một nghiệm $x \neq 0$ nên đồ thị hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 64x$ cắt Ox ít nhất hai điểm và $\lim\limits_{x \to \pm\infty} (x^4 - 2mx^2 + 64x) = +\infty$.

Suy ra để hàm số $y = |x^4 - 2mx^2 + 64x|$ có 3 điểm cực trị thì hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 64x$ có đúng một điểm cực trị $\Leftrightarrow$ phương trình $(*)$ có đúng một nghiệm đơn.

$m = x^2 + \dfrac{16}{x}$ có đúng một nghiệm đơn.

Xét hàm số: $f(x) = x^2 + \dfrac{16}{x}$, $f'(x) = 2x - \dfrac{16}{x^2}$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - \dfrac{16}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x = 2$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	12	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra $m \leq 12$.

Suy ra: $\begin{cases} m \in \mathbb{Z}_+^* \\ m \leq 12 \end{cases} \Rightarrow m \in \{1; 2; 3; \ldots; 11; 12\}$.

Vậy có 12 giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y = |x^4 - 2mx^2 + 64x|$ có đúng ba điểm cực trị.

Chọn đáp án A □

Câu 23 (Mã 102-2022). Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của tham số a để hàm số $y = |x^4 + 2ax^2 + 8x|$ có đúng ba điểm cực trị?

A 2. B 6. C 5. D 3.

Lời giải.

Xét hàm số $f(x) = x^4 + 2ax^2 + 8x$ trên $\mathbb{R}$.

$f'(x) = 4x^3 + 4ax + 8$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^3 + 4ax + 8 = 0 \Leftrightarrow a = -x^2 - \dfrac{2}{x}$ (Do $x = 0$ không thỏa mãn nên $x \neq 0$).

Xét hàm số $g(x) = -x^2 - \dfrac{2}{x}$ trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

$g'(x) = -2x + \dfrac{2}{x^2}$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -2x + \dfrac{2}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Bảng biến thiên của hàm số $g(x)$:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	||	$+$	0	$-$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	-3	$\searrow$	$-\infty$

Dễ thấy phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất hai nghiệm phân biệt, trong đó có ít nhất một nghiệm đơn $x = 0$ nên yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ Hàm số $f(x)$ có đúng một điểm cực trị $\Leftrightarrow$ Phương trình $a = g(x)$ có một nghiệm đơn duy nhất $\Leftrightarrow a \geq -3$.

Do a nguyên âm nên $a \in \{-3; -2; -1\}$.

Vậy có 3 giá trị nguyên âm của tham số a thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án D □

Câu 24 (Mã 103-2022). Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của tham số a để hàm số $y = |x^4 + ax^2 - 8x|$ có đúng 3 điểm cực trị?

A 5. B 6. C 11. D 10.

Lời giải.

Xét $g(x) = x^4 + ax^2 - 8x$.

$g'(x) = 4x^3 + 2ax - 8$.

Xét $g'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^3 + 2ax - 8 = 0 \Leftrightarrow -a = \dfrac{2x^3 - 4}{x} = 2x^2 - \dfrac{4}{x} = h(x)$ (do $x = 0$ không là nghiệm).

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^3 + ax - 8 = 0 \Leftrightarrow -a = \dfrac{x^3 - 8}{x} = x^2 - \dfrac{8}{x} = k(x) \end{array}\right.$$

$h'(x) = 4x + \dfrac{4}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x = -1$.

$k'(x) = 2x + \dfrac{8}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{-4}$.

x	$-\infty$		$\sqrt[3]{-4}$		-1		0		$+\infty$
$h(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$h(\sqrt[3]{-4})$	$\searrow$	6	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$
$k(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$k(\sqrt[3]{-4})$	$\nearrow$	9	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

Để hàm số $y = |g(x)|$ có đúng 3 cực trị $\Leftrightarrow -a \leq 6 \Leftrightarrow a \geq -6$.

Mà a là số nguyên âm nên $a \in \{-6; -5; -4; -3; -2; -1\}$.

Chọn đáp án B □

Câu 25 (Mã 104-2022). Có bao nhiêu số nguyên dương của tham số m để hàm số $y = |x^4 - mx^2 - 64x|$ có đúng 3 điểm cực trị?

A 23. B 12. C 24. D 11.

Lời giải.

Xét hàm số $g(x) = x^4 - mx^2 - 64x$; $g'(x) = 4x^3 - 2mx - 64$; có $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty$.

$g(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^3 - mx - 64 = 0 \end{array}\right. \Rightarrow g(x) = 0$ có ít nhất 2 nghiệm phân biệt.

Do đó hàm số $y = |g(x)|$ có đúng 3 điểm cực trị $\Leftrightarrow$ hàm số $y = g(x)$ có đúng 1 cực trị $\Leftrightarrow g'(x)$ đổi dấu đúng 1 lần $(*)$.

Nhận xét nếu $x = 0 \Rightarrow g'(0) = -64 < 0 \Rightarrow g(x)$ không có cực trị (hay $x = 0$ không thỏa mãn).

Nên $g'(x) = 0 \Leftrightarrow m = 2x^2 - \dfrac{32}{x}$. Đặt $h(x) = 2x^2 - \dfrac{32}{x}$.

Có $h'(x) = 4x + \dfrac{32}{x^2} = \dfrac{4\left(x^3 + 8\right)}{x^2}$; $h'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -2$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	||	$+$	
$h(x)$	$+\infty$	$\searrow$	24	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra $(*) \Leftrightarrow m \leq 24$.

Kết hợp với điều kiện m nguyên dương suy ra $m \in \{1; 2; 3; \ldots; 24\}$.

Chọn đáp án C □

Câu 26 (Liên trường Hà Tĩnh – 2022).

Cho hàm số $f(x) = x^4 - 14x^3 + 36x^2 + (16 - m)x$ với m là tham số thực. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $g(x) = f(|x|)$ có 7 điểm cực trị?

A 33. B 31. C 32. D 34.

Lời giải.

Xét hàm số: $f(x) = x^4 - 14x^8 + 36x^2 + (16 - m)x$.

Tập xác định: $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

$f'(x) = 4x^8 - 42x^2 + 72x + 16 - m$.

Hàm số $g(x) = f(|x|)$ có 7 điểm cực trị $\Leftrightarrow$ Hàm số $f(x)$ có 3 điểm cực trị dương.

$\Leftrightarrow$ Phương trình $f'(x) = 0$ có 3 nghiệm dương phân biệt.

Xét phương trình $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 42x^2 + 72x + 16 = m$ (1).

Đặt $h(x) = 4x^8 - 42x^2 + 72x + 16 \Rightarrow h'(x) = 12x^2 - 84x + 72 \Rightarrow h'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 6 \end{array}\right.$.

Ta có bảng biến thiên

x	0		1		$\boxed{6}$		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$	$\boxed{16}$	$\nearrow$	$\boxed{50}$	$\searrow$	$\boxed{-200}$	$\nearrow$	$+\infty$

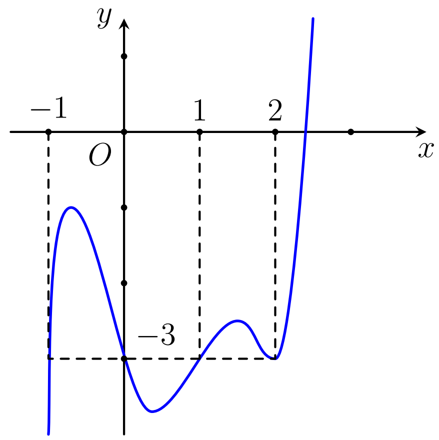
Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ (1) có 3 nghiệm dương phân biệt khi và chỉ khi đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị hàm số $y = h(x)$ tại 3 điểm phân biệt có hoành độ dương.

Dựa vào bảng biến thiên ta có $16 < m < 50$.

Vì m là số nguyên nên $m \in \{17; 18; \ldots; 49\}$ nên có 33 số nguyên.

Chọn đáp án A □

Câu 27 (Sở Thanh Hóa 2022). Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(0) < 0$, đồ thị của $f'(x)$ như hình vẽ:



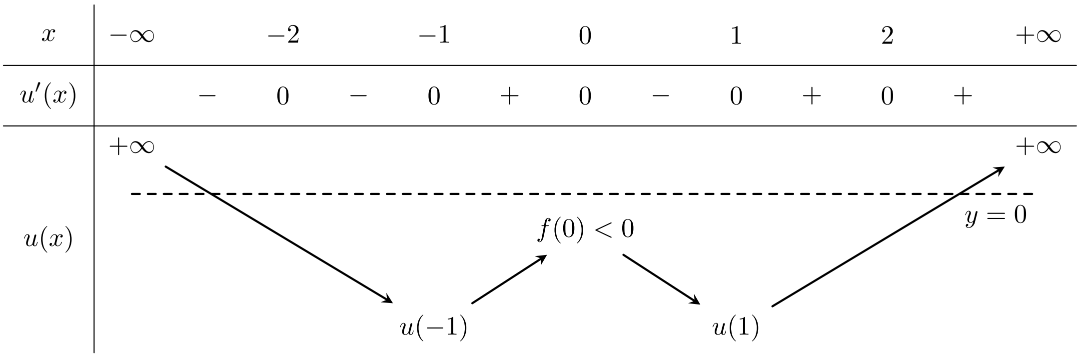
Gọi m, n lần lượt là số điểm cực đại, số điểm cực tiểu của hàm số $g(x) = |f(|x|) + 3|x||$. Giá trị của m^n bằng

(A) 4. (B) 8. (C) 27. (D) 16.

Lời giải.

Xét hàm số $u(x) = f(|x|) + 3|x|$ là một hàm số chẵn nên chỉ cần xét trên $[0; +\infty)$ để suy ra bảng biến thiên của $u(x)$ trên cả $\mathbb{R}$. Với $x \geq 0 \Rightarrow u(x) = f(x) + 3x \Rightarrow u'(x) = f'(x) + 3 = 0 \Leftrightarrow f'(x) = -3 \xleftrightarrow{x\geq 0} x = 0; x = 1; x = 2$.

Bảng biến thiên:



Trong đó $u(-1) = u(1) = f(1) + 3; u(0) = f(0) < 0$.

Suy $g(x) = |u(x)|$ có tất cả 5 điểm cực trị trong đó 2 điểm cực đại và 3 điểm cực tiểu.

Chọn đáp án (B) □

Câu 28 (THPT Lương Tài 2-Bắc Ninh-2022).

Cho hàm số$y = f(x) = 2x^3 + bx^2 + cx + d$ thỏa mãn $4b + 2c + d + 16 < 0$ và $9b - 3c + d > 54$. Hàm số $y = |f(x)|$ có tất cả bao nhiêu điểm cực trị?

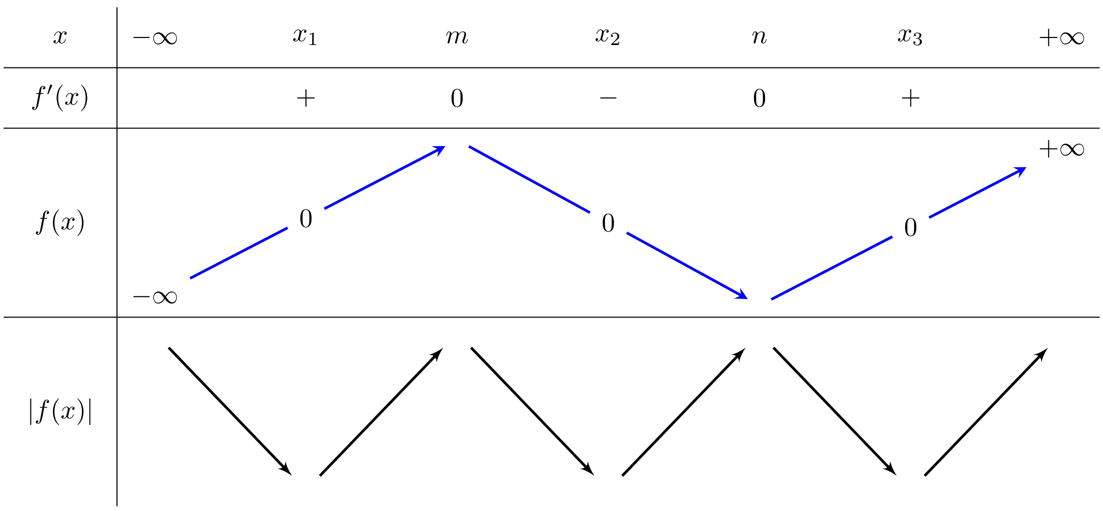
(A) 2. (B) 3. (C) 5. (D) 4.

Lời giải.

Ta có $y = f(x) = 2x^3 + bx^2 + cx + d$ liên tục trên$\mathbb{R}$. Vì $f(2) = 4b + 2c + d + 16 < 0$, $f(-3) = 9b - 3c + d - 54 > 0$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ nên phương trình $f(x) = 0$ có ba nghiệm phân biệt $x_1 < -3 < x_2 < 2 < x_3$

Suy ra $y = f(x)$ có hai điểm cực trị $x_1 < m < x_2 < n < x_3$.

Ta có bảng biến thiên



Vậy hàm số $y = |f(x)|$ có 5 điểm cực trị.

Chọn đáp án (C) □

Câu 29 (Chuyên Bắc Ninh 2022). Gọi S là tập giá trị nguyên $m \in [0; 100]$ để hàm số $y = |x^3 - 3mx^2 + 4m^3 - 12m - 8|$ có 5 cực trị. Tính tổng các phần tử của S.

(A) 10096. (B) 4048. (C) 5047. (D) 10094.

Lời giải.

Xét hàm số $f(x) = x^3 - 3mx^2 + 4m^3 - 12m - 8$ trên $\mathbb{R}$.

Ta có $f'(x) = 3x^2 - 6mx$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2m \end{array}\right.$.

Hàm số $y = |x^3 - 3mx^2 + 4m^3 - 12m - 8|$ có 5 cực trị $\Leftrightarrow f(x)$ có hai giá trị cực trị trái dấu$\Leftrightarrow\Leftrightarrow$
$\begin{cases} m \neq 0 \\ \left(4m^3 - 12m - 8\right)\left(8m^3 - 12m^3 + 4m^3 - 12m - 8\right) < 0 \end{cases}$.

$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \left(4m^3 - 12m - 8\right)(-12m - 8) < 0 \end{cases}$.

Kết hợp với $m \in [0; 100]$ và $m \in \mathbb{Z}$ ta được $m \in \{3; 4; \ldots, 100\}$.

Vậy $S = \{3, 4, \ldots, 100\}$.

Tổng các phần tử của S là 5047.

Chọn đáp án (C) □

Câu 30 (Chuyên Quang Trung-Bình Phước 2022).

Cho hàm số $f(x) = x^3 + mx^2 + nx - 1$ với m, n là các tham số thực thỏa mãn $\begin{cases} m + n > 0 \\ 7 + 2(2m + n) < 0 \end{cases}$

Tìm số cực trị của hàm $y = |f(|x|)|$.

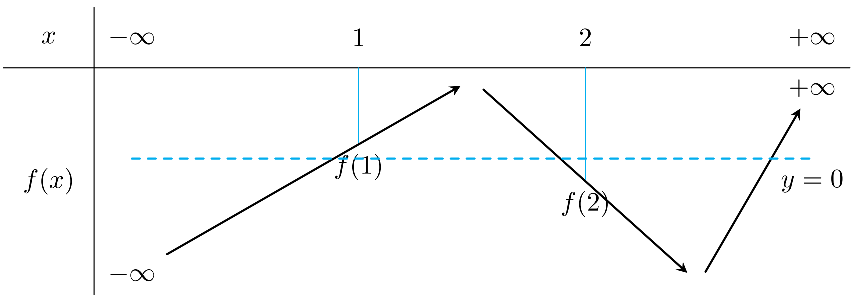
(A) 2. (B) 5. (C) 9. (D) 11.

Lời giải.

Ta có $f(x) = x^3 + mx^2 + nx - 1$ là hàm đa thức nên liên tục trên $\mathbb{R}$,

mặt khác $\begin{cases} f(1) = m + n > 0 \\ f(2) = 7 + 2(2m + n) < 0 \end{cases} \Rightarrow f(1).f(2) < 0$ suy ra $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(1; 2)$.

Ta có $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ ta có bảng biến thiên của hàm $y = f(x)$.



Hàm số $y = f(x)$ có 2 cực trị dương nên hàm số $y = f(|x|)$ có 5 cực trị.

Mặt khác, đồ thị hàm số $y = f(|x|)$ cắt trục Ox tại 6 điểm. Suy ra hàm số $y = |f(|x|)|$ có 11 cực trị.

Chọn đáp án (D) □

Câu 31 (THPT Đồng Lộc-Hà Tĩnh 2022).

Cho hàm số $y = f(x) = (x-1)\,g(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

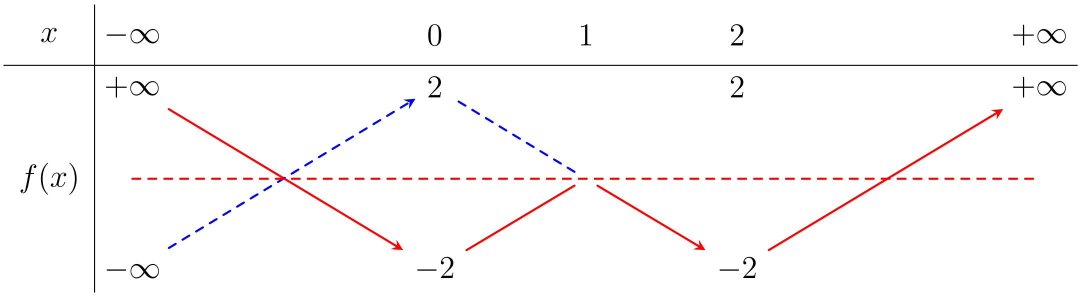
Đồ thị hàm số $y = |x-1|\,g(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

(A) 1. (B) 4. (C) 2. (D) 3.

Lời giải.

Ta có $y = |x-1|\,g(x) = \begin{cases} (x-1)\,g(x) khi x \geq 1 \\ -(x-1)\,g(x) khi x < 1 \end{cases}$ hay $y = |x-1|\,g(x) = \begin{cases} f(x) khi x \geq 1 \\ -f(x) khi x < 1 \end{cases}$.

Dựa vào đồ thị hàm số $y = f(x) = (x-1)\,g(x)$ ta có bảng biến thiên của hàm số $y = |x-1|\,g(x)$ như sau:



Do đó, đồ thị hàm số $y = |x-1|\,g(x)$ có 3 điểm cực trị.

Chọn đáp án (D) □

Câu 32 (THPT Nguyễn Viết Xuân – Vĩnh Phúc 2022).

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên tập $\mathbb{R}$, biết $f'(x) = x^{2022}(x-2)^{2021}\left(x^2 - 8x + m^2 - 3m - 4\right), \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Gọi S là tập tất cả các giá trị nguyên của m để đồ thị hàm số $y = f(|x|)$ có 5 điểm cực trị. Số phần tử của S là:

(A) 7. (B) 6. (C) 4. (D) 5.

Lời giải.

$f'(x) = x^{2022}(x-2)^{2021}\left(x^2 - 8x + m^2 - 3m - 4\right) = x^{2022}(x-2)^{2020}(x-2)\left(x^2 - 8x + m^2 - 3m - 4\right)$.

Để hàm số $y = g(x) = f(|x|)$ có 5 điểm cực trị thì đồ thị hàm số $y = f(x)$ có 2 cực trị dương.

Ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \\ x^2 - 8x + m^2 - 3m - 4 = 0\ (1) \end{array}\right.$

Có $x = 0$ là nghiệm bội 2, $x = 2$ là nghiệm đơn.

Vậy $x^2 - 8x + m^2 - 3m - 4 = 0$ (1) có hai nghiệm phân biệt, có một nghiệm dương $x \neq 2$, có một nghiệm $x \leq 0$

Trường hợp 1: Có nghiệm $x = 0$ khi đó $m^2 - 3m - 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -1 \\ m = 4 \end{array}\right.$.

Với $m = -1$, $m = 4$ ta được $x^2 - 8x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 8 \end{array}\right.(TM)$

Trường hợp 2: $x^2 - 8x + m^2 - 3m - 4 = 0$ (1) có hai nghiệm phân biệt, có một nghiệm dương $x \neq 2$, có một nghiệm âm điều kiện tương đương.

$$\begin{cases} m^2 - 3m - 4 < 0 \\ 2^2 - 8.2 + m^2 - 3m - 4 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < m < 4 \\ m^2 - 3m - 16 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < m < 4 \\ m \neq \dfrac{3 \pm \sqrt{73}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow -1 < m < 4. .$$

Vì $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m = 0, m = 1, m = 2, m = 3$.

Vậy có 6 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Chọn đáp án (B) □

Câu 33 (Chuyên Phan Bội Châu – Nghệ An 2022).

Có bao nhiêu số nguyên a thuộc đoạn $[-20; 20]$ sao cho hàm số $y = -2x + 2 + a\sqrt{x^2 - 4x + 5}$ có cực đại?

(A) 35. (B) 17. (C) 36. (D) 18.

Lời giải.

Ta có $y' = -2 + \dfrac{a(x-2)}{\sqrt{x^2 - 4x + 5}}, \forall x$; $y'' = \dfrac{a}{\left(\sqrt{x^2 - 4x + 5}\right)^3}, \forall x$.

Xét $a = 0 : y = -2x + 2$. Suy ra hàm số không có cực trị.

Xét $a \neq 0$:

Hàm số có cực đại $\Leftrightarrow \begin{cases} y' = 0 \\ y'' < 0 \end{cases}$ có nghiệm $\Leftrightarrow a < 0$ và phương trình $y' = 0$ có nghiệm.

$y' = 0 \Leftrightarrow \dfrac{a(x-2)}{\sqrt{x^2 - 4x + 5}} = 2 \Leftrightarrow f(x) = \dfrac{x - 2}{\sqrt{x^2 - 4x + 5}} = \dfrac{2}{a}$.

Ta có: $f'(x) = \dfrac{1}{\left(\sqrt{x^2 - 4x + 5}\right)^3} > 0, \forall x$; $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -1$; $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$.

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	-1	$\nearrow$	1

Vậy hàm số có cực đại $\Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ -1 < \dfrac{2}{a} < 1 \end{cases} \Leftrightarrow a < -2.$

Chọn đáp án (D) □

Câu 34 (THPT Nguyễn Huệ-Huế-2022).

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x+1)^4(x-m)^5(x+3)^3$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu số nguyên $m \in [-5;5]$ để hàm số $g(x) = f(|x|)$ có 3 điểm cực trị?

(A) 6. (B) 3. (C) 4. (D) 5.

Lời giải.

Ta có đồ thị hàm số $g(x) = f(|x|)$ đối xứng qua trục Oy nên ta chỉ xét số điểm cực trị dương của hàm số $g(x) = f(|x|)$.

$f'(x)$ đổi dấu qua hai điểm $x = m$, $x = -3$.

Xét $x > 0 \Rightarrow g(x) = f(x) \Rightarrow$ Số điểm cực trị dương của hàm $g(x) = f(x)$ bằng số nghiệm dương và đổi dấu của phương trình $f'(x) = (x+1)^4(x-m)^5(x+3)^3 = 0$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow f'(x) = 0$ có 1 nghiệm dương và $f'(x)$ đổi dấu qua nghiệm đó$\Leftrightarrow m > 0$.

Với $\begin{cases} m \in \mathbb{Z} \\ m \in [-5;5] \end{cases} \Rightarrow m = \{1;2;3;4;5\}$.

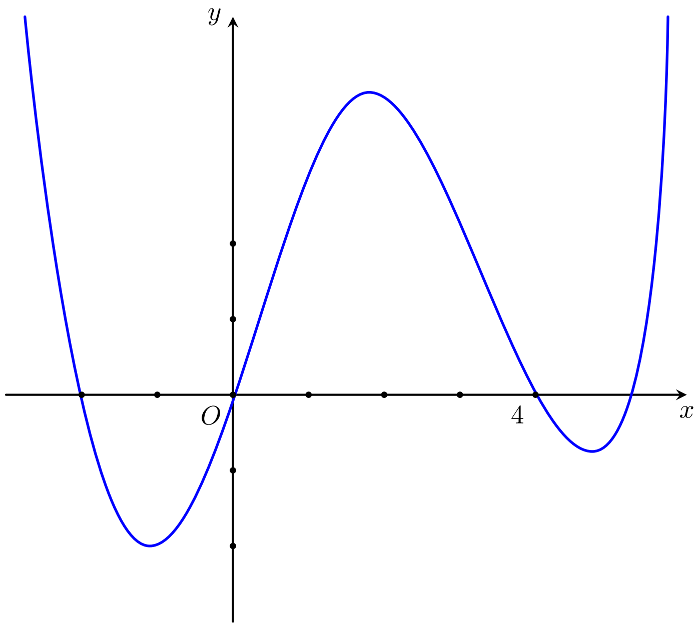
Vậy có 5 số.

Chọn đáp án (D) □

Dạng 2. Số điểm cực trị của hàm hợp không chứa dấu giá trị tuyệt đối

Câu 35 (Đề Tham Khảo 2020 Lần 1).

Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên. Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(x^3 + 3x^2)$ là



Ⓐ 5. Ⓑ 3. Ⓒ 7. Ⓓ 11.

Lời giải.

Từ đồ thị ta có bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ như sau:

x	$-\infty$		a		b		c		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

Ta có $g(x) = f\left(x^3 + 3x^2\right) \Rightarrow g'(x) = \left(3x^2 + 6x\right).f'\left(x^3 + 3x^2\right)$.

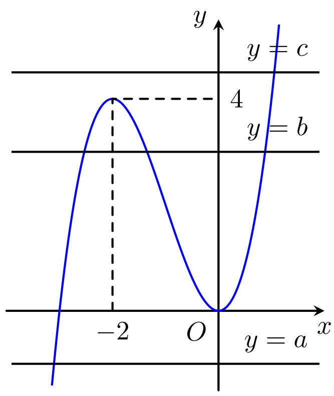
Cho $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x^2 + 6x = 0 \\ f'\left(x^3 + 3x^2\right) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -2 \\ x^3 + 3x^2 = a; a < 0 \\ x^3 + 3x^2 = b; 0 < b < 4 \\ x^3 + 3x^2 = c; c > 4 \end{array}\right.$.

Xét hàm số $h(x) = x^3 + 3x^2 \Rightarrow h'(x) = 3x^2 + 6x$. Cho $h'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -2 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Ta có đồ thị của hàm $h(x) = x^3 + 3x^2$ như sau:



Từ đồ thị ta thấy:

Đường thẳng $y = a$ cắt đồ thị hàm số $y = h(x)$ tại 1 điểm.

Đường thẳng $y = b$ cắt đồ thị hàm số $y = h(x)$ tại 3 điểm.

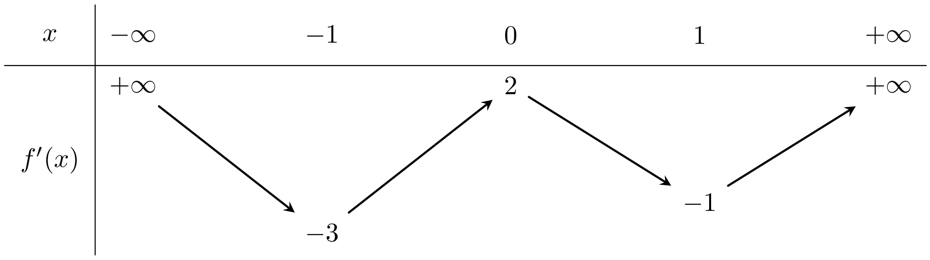
Đường thẳng $y = c$ cắt đồ thị hàm số $y = h(x)$ tại 1 điểm.

Như vậy phương trình $g'(x) = 0$ có tất cả 7 nghiệm đơn phân biệt.

Vậy hàm số $g(x) = f\left(x^3 + 3x^2\right)$ có 7 cực trị.

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 36 (Mã 101-2019). Cho hàm số $y = f(x)$, bảng biến thiên của hàm số $f'(x)$ như sau:



Số điểm cực trị của hàm số $y = f\left(x^2 - 2x\right)$ là

(A) 9. (B) 3. (C) 7. (D) 5.

Lời giải.

Ta có $y' = 2\left(x - 1\right).f'\left(x^2 - 2x\right)$.

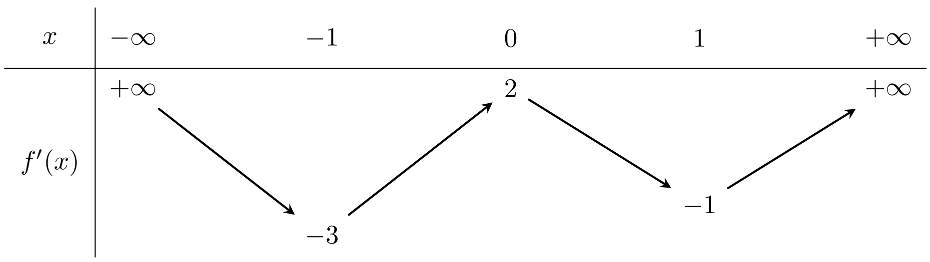
$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ f'\left(x^2 - 2x\right) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x^2 - 2x = a \in (-\infty; -1) \\ x^2 - 2x = b \in (-1; 0) \\ x^2 - 2x = c \in (0; 1) \\ x^2 - 2x = d \in (1; +\infty) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x^2 - 2x - a = 0, a \in (-\infty; -1)\ (1) \\ x^2 - 2x - b = 0, b \in (-1; 0)\ (2) \\ x^2 - 2x - c = 0, c \in (0; 1)\ (3) \\ x^2 - 2x - d = 0, d \in (1; +\infty)\ (4) \end{array}\right. .$$

Phương trình (1) vô nghiệm, các phương trình (2), (3), (4) đều có hai nghiệm phân biệt khác 1 và do b, c, d đôi một khác nhau nên các nghiệm của phương trình (2), (3), (4) cũng đôi một khác nhau. Do đó $f'\left(x^2 - 2x\right) = 0$ có 6 nghiệm phân biệt.

Vậy $y' = 0$ có 7 nghiệm phân biệt, do đó số điểm cực trị của hàm số $y = f\left(x^2 - 2x\right)$ là 7.

Chọn đáp án (C) □

Câu 37 (Mã 104-2019). Cho hàm số $f(x)$, bảng biến thiên của hàm số $f'(x)$ như sau:

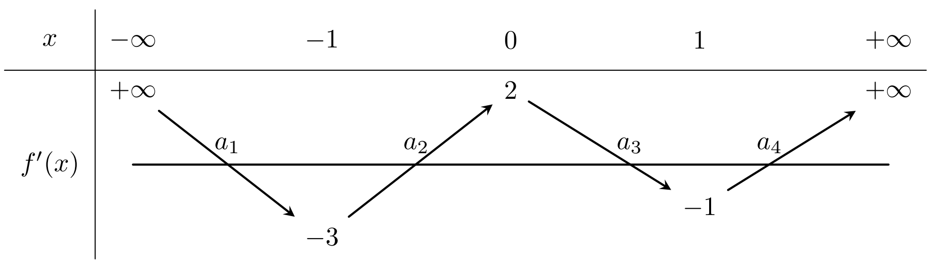


Số điểm cực trị của hàm số $y = f\left(4x^2 + 4x\right)$ là

(A) 5. (B) 9. (C) 7. (D) 3.

Lời giải.

Có $\left(f\left(4x^2 + 4x\right)\right)' = (8x + 4)\, f'\left(4x^2 + 4x\right)$, $\left(f\left(4x^2 + 4x\right)\right)' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{1}{2} \\ f'\left(4x^2 + 4x\right) = 0 \end{array}\right.$.



Từ bảng biến thiên trên ta có $f'\left(4x^2+4x\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4x^2+4x=a_1\in(-\infty;-1) \\ 4x^2+4x=a_2\in(-1;0) \\ 4x^2+4x=a_3\in(0;1) \\ 4x^2+4x=a_4\in(1;+\infty) \end{array}\right.$ (1).

Xét $g(x)=4x^2+4x$, $g'(x)=8x+4$, $g'(x)=0\Leftrightarrow x=-\dfrac{1}{2}$ ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-\dfrac{1}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Kết hợp bảng biến thiên của $g(x)$ và hệ (1) ta thấy:

Phương trình $4x^2+4x=a_1\in(-\infty;-1)$ vô nghiệm.

Phương trình $4x^2+4x=a_2\in(-1;0)$ tìm được hai nghiệm phân biệt khác $-\dfrac{1}{2}$.

Phương trình $4x^2+4x=a_2\in(0;1)$ tìm được thêm hai nghiệm mới phân biệt khác $-\dfrac{1}{2}$.

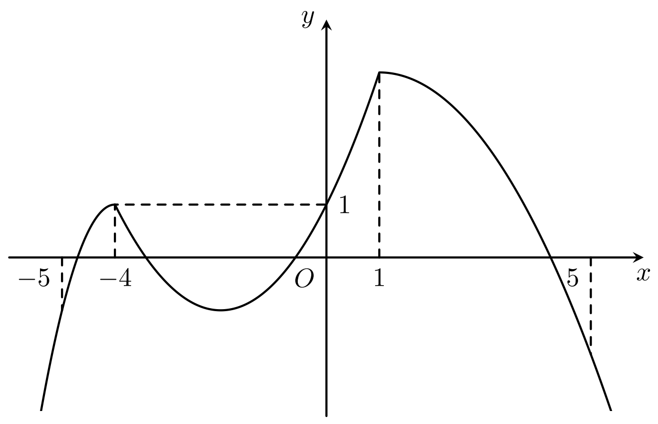
Phương trình $4x^2+4x=a_2\in(1;+\infty)$ tìm được thêm hai nghiệm phân biệt khác $-\dfrac{1}{2}$.

Vậy hàm số $y=f\left(4x^2+4x\right)$ có tất cả 7 điểm cực trị.

Chọn đáp án C □

Câu 38 (Chuyên ĐH Vinh-Nghệ An-2020).

Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ bên. Hàm số $y=f\left(x^2+4x\right)-x^2-4x$ có bao nhiêu điểm cực trị thuộc khoảng $(-5;1)$?



A 5. B 4. C 6. D 3.

Lời giải.

Đặt $g(x)=f\left(x^2+4x\right)-x^2-4x$.

$\Rightarrow g'(x)=(2x+4)\,f'\left(x^2+4x\right)-(2x+4)=(2x+4)\left[f'\left(x^2+4x\right)-1\right]$.

Ta có $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x+4=0 \\ x^2+4x=-4\ (1) \\ x^2+4x=0\ (2) \\ x^2+4x=a \in (1;5)\ (3) \end{array}\right.$.

Xét phương trình $x^2+4x=a \in (1;5)$, ta có bảng biến thiên của hàm số $y = x^2+4x$ trên $(-5;1)$ như sau:

x	-5		-4		-2		0		1
y'			$-$		0		$+$		
y	5	$\searrow$	0	$\searrow$	-4	$\nearrow$	0	$\nearrow$	5

Suy ra (1) có nghiệm kép $x=-2$, (2) có 2 nghiệm phân biệt $x=-4$; $x=0$, (3) có 2 nghiệm phân biệt $x=x_1$; $x=x_2$ khác -2; 0; -4. Do đó phương trình $g'(x)=0$ có 5 nghiệm trong đó có $x=-2$ là nghiệm bội ba, các nghiệm $x=-4$; $x=0$; $x=x_1$; $x=x_2$ là các nghiệm đơn.

Vậy $g(x)$ có 5 điểm cực trị.

Chọn đáp án (A) □

Câu 39 (Chuyên Hưng Yên-2020). Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm đến cấp hai trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu của hàm số $y=f'(x)$ như hình sau:

x	$-\infty$		-2		0		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Hỏi hàm số $g(x) = f(1-x) + \dfrac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x$ đạt cực tiểu tại điểm nào trong các điểm sau?

(A) $x=3$. (B) $x=0$. (C) $x=-3$. (D) $x=1$.

Lời giải.

$g'(x) = -f'(1-x) + x^2 - 4x + 3$.

$-f'(1-x) > 0 \Leftrightarrow f'(1-x) < 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1-x<-2 \\ 0<1-x<4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>3 \\ -3<x<1 \end{array}\right.$.

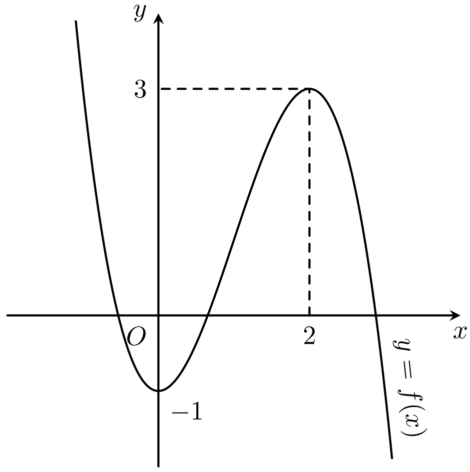
Bảng xét dấu $g'(x)$:

x	$-\infty$		-3		1		3		$+\infty$
$-f'(1-x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
x^2-4x+3		$+$	||	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g'(x)$		không xác định	||	$+$	0	$-$	0	$+$	

Từ bảng xét dấu $g'(x)$ ta suy ra hàm số đạt cực tiểu tại $x=3$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 40 (Chuyên KHTN-2020). Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$, có đồ thị $f(x)$ như hình vẽ.



Hàm số $g(x) = f(x^3 + x)$ đạt cực tiểu tại điểm x_0. Giá trị x_0 thuộc khoảng nào sau đây

(A) $(1; 3)$. (B) $(-1; 1)$. (C) $(0; 2)$. (D) $(3; +\infty)$.

Lời giải.

Ta có $g(x) = f(x^3 + x) \Rightarrow g'(x) = (3x^2 + 1) f'(x^3 + x)$.

$\Rightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow (3x^2 + 1) f'(x^3 + x) = 0 \Leftrightarrow f'(x^3 + x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^3 + x = 0 \\ x^3 + x = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \end{array}\right.$.

Do đó $g'(x) > 0 \Leftrightarrow (3x^2 + 1) f'(x^3 + x) > 0 \Leftrightarrow f'(x^3 + x) > 0 \Leftrightarrow 0 < x^3 + x < 2 \Leftrightarrow 0 < x < 1$.

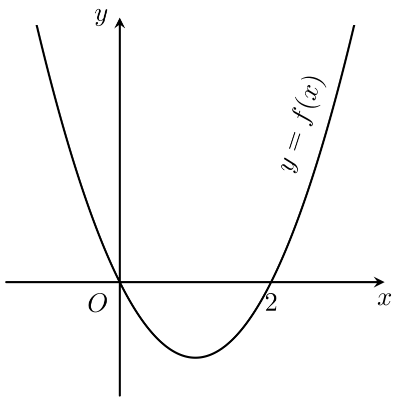
Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	$-\infty$

Vậy hàm số $g(x) = f(x^3 + x)$ đạt cực tiểu tại điểm $x_0 = 0$. Suy ra $x_0 \in (-1; 1)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 41 (Chuyên KHTN-2020). Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ.



Số điểm cực tiểu của hàm số $g(x) = f\left(-x^2 + x\right)$ là

Ⓐ 1. Ⓑ 4. Ⓒ 3. Ⓓ 2.

Lời giải.

Ta có $g(x) = f\left(-x^2 + x\right) \Rightarrow g'(x) = (-2x+1)\, f'\left(-x^2 + x\right)$.

$$\Rightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow (-2x+1)\, f'\left(-x^2+x\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -2x+1=0 \\ f'\left(-x^2+x\right)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{1}{2} \\ -x^2+x=0 \\ -x^2+x=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{1}{2} \\ x=1 \\ x=0 \end{array}\right..$$

$$\text{Do đó } g'(x) > 0 \Leftrightarrow (-2x+1)\, f'\left(-x^2+x\right) > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} -2x+1>0 \\ f'\left(-x^2+x\right)>0 \end{cases} \\ \begin{cases} -2x+1<0 \\ f'\left(-x^2+x\right)<0 \end{cases} \end{array}\right..$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x<\dfrac{1}{2} \\ \left[\begin{array}{l} -x^2+x>2 \\ -x^2+x<0 \end{array}\right. \end{cases} \\ \begin{cases} x>\dfrac{1}{2} \\ 0<-x^2+x<2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x<\dfrac{1}{2} \\ \left[\begin{array}{l} x>1 \\ x<0 \end{array}\right. \end{cases} \\ \begin{cases} x>\dfrac{1}{2} \\ 0<x<1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<0 \\ \dfrac{1}{2}<x<1 \end{array}\right..$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	$-\infty$

Vậy hàm số có 1 điểm cực tiểu.

Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 42 (Chuyên Lam Sơn-2020). Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, bảng biến thiên của hàm số $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Số điểm cực trị của hàm số $y = f\left(x^2 + 2x\right)$ là

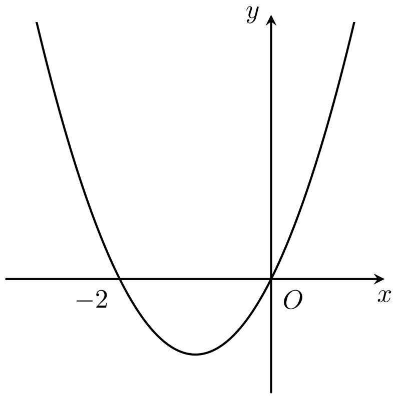
Ⓐ 4. Ⓑ 5. Ⓒ 1. Ⓓ 7.

Lời giải.

Ta có $y' = (2x+2)\, f'\left(x^2+2x\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ f'\left(x^2+2x\right)=0\ (1) \end{array}\right.$.

Từ bảng biến thiên ta thấy phương trình (1) $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+2x=a<-1\ (2) \\ x^2+2x=b\in(-1;1)\ \ (3) \\ x^2+2x=c>1\ (4) \end{array}\right.$.

Đồ thị hàm số $y = x^2+2x$ có dạng:



Từ đồ thị hàm số $y = x^2+2x$ ta thấy phương trình (2) vô nghiệm; phương trình (3); phương trình (4) đều có 2 nghiệm phân biệt.

Do đó $y' = 0$ có 5 nghiệm đơn phân biệt. Vậy hàm số $y = f\left(x^2+2x\right)$ có 5 điểm cực trị.

Chọn đáp án B □

Câu 43 (Sở Bắc Giang-2018). Cho hàm số $y = f(x)$ có đúng ba điểm cực trị là -2; -1; 0 và có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Khi đó hàm số $y = f\left(x^2-2x\right)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

(A) 3. (B) 8. (C) 10. (D) 7.

Lời giải.

Vì hàm số $y = f(x)$ có đúng ba điểm cực trị là -2; -1; 0 và có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ nên $f'(x) = 0$ có ba nghiệm là -2; -1; 0 (ba nghiệm bội lẻ).

Xét hàm số $y = f\left(x^2-2x\right)$ có $y' = (2x-2)\,.f'\left(x^2-2x\right)$; $y' = 0 \Leftrightarrow (2x-2)\,.f'\left(x^2-2x\right) = 0$.

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x^2-2x=-2 \\ x^2-2x=-1 \\ x^2-2x=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=0 \\ x=2 \end{array}\right..$$

Do $y' = 0$ có một nghiệm bội lẻ $(x = 1)$ và hai nghiệm đơn $(x = 0;\ x = 2)$ nên hàm số $y = f\left(x^2-2x\right)$ chỉ có ba điểm cực trị.

Chọn đáp án A □

Câu 44 (Mã 102-2019). Cho hàm số $f(x)$, bảng biến thiên của hàm số $f'(x)$ như sau

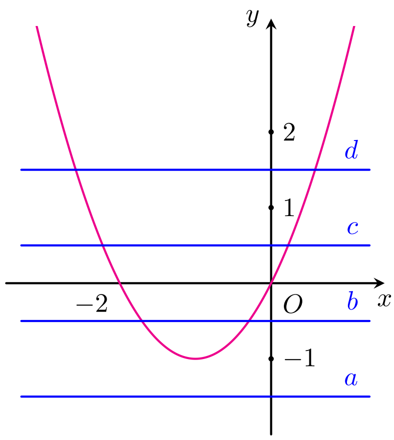
x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	2	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Số điểm cực trị của hàm số $y = f\left(x^2 + 2x\right)$ là

Ⓐ 9. Ⓑ 5. Ⓒ 7. Ⓓ 3.

Lời giải.

Ta có $y' = (2x+2)\, f'\left(x^2+2x\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x+2=0 \\ x^2+2x=a, a<-1 \\ x^2+2x=b, -1<b<0 \\ x^2+2x=c, 0<c<1 \\ x^2+2x=d, d>1 \end{array}\right.$.



Dựa vào đồ thị ta được $y' = 0$ có 7 nghiệm đơn nên nó có 7 cực trị.

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 45. Cho hàm số $f(x)$, bảng biến thiên của hàm số $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	2	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Số cực trị của hàm số $y = f\left(4x^2 - 4x\right)$ là

Ⓐ 3. Ⓑ 9. Ⓒ 5. Ⓓ 7.

Lời giải.

Từ bảng biến thiên

x	$-\infty$	a	-1	b	0	c	1	d	$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$+$	0	$+$	0	$+$	
$f'(x)$	$+\infty$ ↘	0	-3	↗ 0	2	↘ 0	-1	↗ 0	$+\infty$

Ta thấy $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = a \in (-\infty; -1) \\ x = b \in (-1; 0) \\ x = c \in (0; 1) \\ x = d \in (1; +\infty)\,. \end{array}\right.$

Với $y = f\left(4x^2 - 4x\right)$, ta có $y' = (8x - 4)\, f'\left(4x^2 - 4x\right)$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 8x - 4 = 0 \\ f'\left(4x^2 - 4x\right) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{1}{2} \\ 4x^2 - 4x = a \in (-\infty; -1)\ (1) \\ 4x^2 - 4x = b \in (-1; 0)\ (2) \\ 4x^2 - 4x = c \in (0; 1)\ (3) \\ 4x^2 - 4x = d \in (1; +\infty)\ (4). \end{array}\right.$$

Xét hàm số $g(x) = 4x^2 - 4x$, ta có $g'(x) = 8x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2}$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$-$	
$g(x)$	$+\infty$	↘	-1	↗	$+\infty$

Từ bảng biến thiên của $g(x)$ ta có:

- ☑ Vì $a \in (-\infty; -1)$ nên (1) vô nghiệm.
- ☑ Vì $b \in (-1; 0)$ nên (2) có 2 nghiệm phân biệt.
- ☑ Vì $c \in (0; 1)$ nên (3) có 2 nghiệm phân biệt.
- ☑ Vì $d \in (1; +\infty)$ nên (4) có 2 nghiệm phân biệt.

Vậy hàm số $y = f\left(4x^2 - 4x\right)$ có 7 điểm cực trị

Cách khác:

Ta có: $y' = (8x - 4) \cdot f'\left(4x^2 - 4x\right)$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow (8x-4)\cdot f'\left(4x^2-4x\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 8x-4=0 \\ f'\left(4x^2-4x\right)=0 \end{array}\right.$$

- $8x-4=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}$.

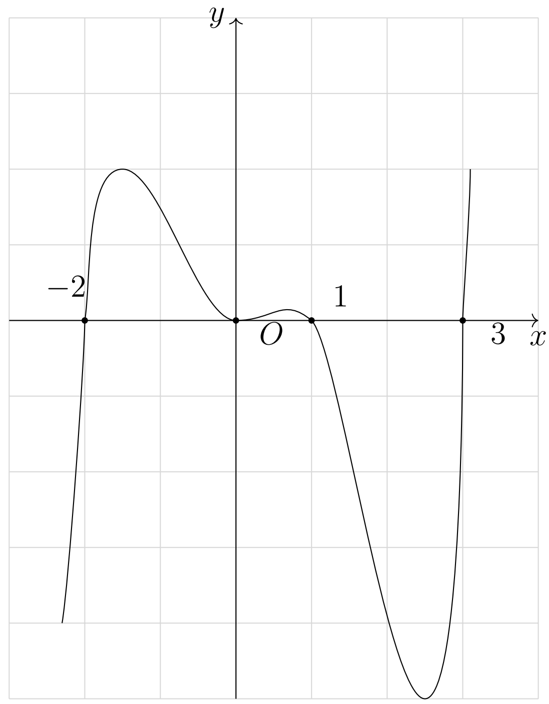
- $f'\left(4x^2-4x\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4x^2-4x=a\,(a<-1)\ \ (1) \\ 4x^2-4x=b\,(-1<b<0)\ \ (2) \\ 4x^2-4x=c\,(0<c<1)\ \ (3) \\ 4x^2-4x=d\,(d>1)\,.\ (4) \end{array}\right.$

Phương trình $4x^2-4x=m \Leftrightarrow 4x^2-4x-m=0$ có nghiệm khi $\Delta' = 4-4m \geq 0$ hay $m \leq 1$.
Từ đó, ta có phương trình (1); (2); (3) luôn có hai nghiệm phân biệt.
Phương trình (4) vô nghiệm.
Do đó, hàm số đã cho có 7 cực trị.
Chọn đáp án D □

Câu 46.

Cho hàm số $y=f(x)$. Đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ như hình bên. Hàm số $g(x)=f\left(x^2\right)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A 4. B 3. C 5. D 2.



Lời giải.

Từ đồ thị $y=f'(x)$ ta có $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=0 \\ x=1 \\ x=3. \end{array}\right.$

$f'(x)>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>3 \\ -2<x<1 \end{array}\right.$; $f'(x)<0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<-2 \\ 1<x<3 \end{array}\right.$.

Ta có $g'(x) = 2xf'\left(x^2\right)$; $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ f'\left(x^2\right) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = 1 \\ x^2 = 3 \\ x^2 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm 1 \\ x = \pm\sqrt{3}. \end{array}\right.$

Ta có $f'\left(x^2\right) > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 < x^2 < 1 \\ x^2 > 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} -1 < x < 1 \\ x \neq 0 \end{cases} \\ \left[\begin{array}{l} x > \sqrt{3} \\ x < -\sqrt{3}. \end{array}\right. \end{array}\right.$

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		-1		0		1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

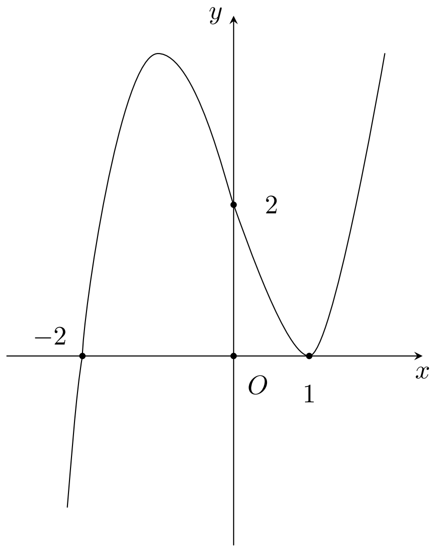
Từ bảng biến thiên ta có hàm số $g(x) = f\left(x^2\right)$ có 5 điểm cực trị.

Chọn đáp án C □

Câu 47.

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y = f\left(x^2 - 3\right)$.

Ⓐ 4. Ⓑ 2. Ⓒ 5. Ⓓ 3.



Lời giải.

Quan sát đồ thị ta có $y = f'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương qua $x = -2$ nên hàm số $y = f(x)$ có một điểm cực trị là $x = -2$.

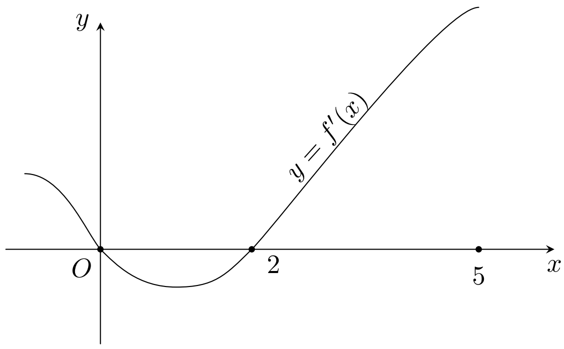
Ta có $y' = \left[f\left(x^2 - 3\right)\right]' = 2x \cdot f'\left(x^2 - 3\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 - 3 = -2 \\ x^2 - 3 = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm 1 \\ x = \pm 2. \end{array}\right.$

Mà $x = \pm 2$ là nghiệp kép, còn các nghiệm còn lại là nghiệm đơn nên hàm số $y = f\left(x^2 - 3\right)$ có ba cực trị.

Chọn đáp án D □

Câu 48.

Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên. Tính số điểm cực trị của hàm số $y = f\left(x^2\right)$ trên khoảng $\left(-\sqrt{5}; \sqrt{5}\right)$.



Ⓐ 2. Ⓑ 4. Ⓒ 3. Ⓓ 5.

Lời giải.

Xét hàm số $g(x) = f\left(x^2\right) \Rightarrow g'(x) = 2xf'\left(x^2\right)$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ f'\left(x^2\right) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = 0 \\ x^2 = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{2}. \end{array}\right.$$

Ta có bảng xét dấu

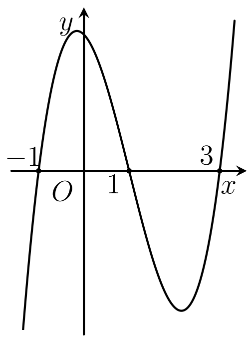
x	$-\sqrt{5}$		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		$\sqrt{5}$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Từ đó suy ra hàm số $y = f\left(x^2\right)$ có 3 điểm cực trị.

Chọn đáp án C □

Câu 49.

Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Số điểm cực đại của hàm số $y = f\left(\sqrt{x^2 + 2x + 2}\right)$ là



Ⓐ 1. Ⓑ 2. Ⓒ 4. Ⓓ 3.

Lời giải.

Từ đồ thị của $y = f'(x)$ ta chọn $f'(x) = (x + 1)(x - 1)(x - 3)$.

Áp dụng công thức $y = [f(u)]' = u'f'(u)$ với $u = \sqrt{x^2 + 2x + 2}$.

Ta có

$$\begin{aligned} y' &= \left[f\left(\sqrt{x^2 + 2x + 2}\right)\right]' \\ &= \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}} \cdot \left(\sqrt{x^2 + 2x + 2} + 1\right)\left(\sqrt{x^2 + 2x + 2} - 1\right)\left(\sqrt{x^2 + 2x + 2} - 3\right) \end{aligned}$$

$$= \frac{(x+1)\left(\sqrt{x^2+2x+2}+1\right)(x+1)^2\left(x^2+2x-7\right)}{\sqrt{x^2+2x+2}\left(\sqrt{x^2+2x+2}+1\right)\left(\sqrt{x^2+2x+2}+3\right)}$$

$$\Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=-1+2\sqrt{2} \\ x=-1-2\sqrt{2}. \end{array}\right.$$

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-1-2\sqrt{2}$		-1		$-1+2\sqrt{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

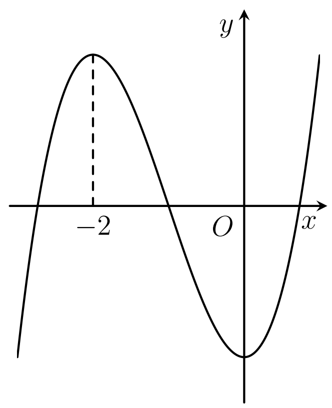
Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số có một điểm cực đại.

Chọn đáp án (A) $\square$

Câu 50.

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $g(x) = f\left(x^2-2x-4\right)$ có bao nhiêu điểm cực tiểu?

(A) 1. (B) 3. (C) 2. (D) 4.



Lời giải.

Ta có $g'(x) = 2(x-1)f'\left(x^2-2x-4\right)$.

Khi đó

$$\begin{aligned} g'(x)=0 &\Leftrightarrow (x-1)\,f'\left(x^2-2x-4\right)=0\\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1\\ f'\left(x^2-2x-4\right)=0 \end{array}\right.\\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1\\ x^2-2x-4=-2\\ x^2-2x-4=0 \end{array}\right.\\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1\\ x=1+\sqrt{3}\\ x=1-\sqrt{3}\\ x=1+\sqrt{5}\\ x=1-\sqrt{5}. \end{array}\right. \end{aligned}$$

Ta chọn $x=-2$ để xét dấu của $g'(x)$ có $g'(-2)=2\cdot(-3)\cdot f'(4)$.

Vì hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$ do đó $f'(4)>0$.

Suy ra $g'(-2)<0$.

Theo tính chất qua nghiệm bội lẻ $g'(x)$ đổi dấu, ta có bảng xét dấy $g'(x)$ như sau

x	$-\infty$		$1-\sqrt{5}$		$1-\sqrt{3}$		1		$1+\sqrt{3}$		$1+\sqrt{5}$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

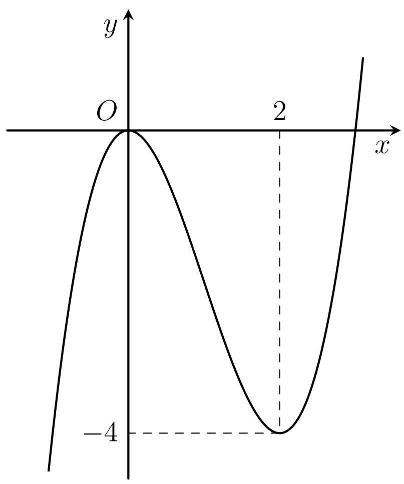
Từ bảng xét dấu, suy ra hàm số $y=g(x)$ có 3 điểm cực tiểu.

Chọn đáp án (B) □

Câu 51.

Biết rằng hàm số $f(x)$ có đồ thị được cho như hình vẽ bên. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y=f[f(x)]$.

(A) 5. (B) 3. (C) 4. (D) 6.



Lời giải.

Xét hàm số $y=f[f(x)]$, $y'=f'(x)\cdot f'[f(x)]$;

Ta có $y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'(x)=0 \\ f'\left[f(x)\right]=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \\ f(x)=0 \\ f(x)=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \\ x=a\in(2;+\infty) \\ x=b\in(a;+\infty)\,. \end{array}\right.$

- Với $x>b$, ta có $f(x)>2 \Rightarrow f'\left[f(x)\right]>0$.
- Với $a<x<b$, ta có $0<f(x)<2 \Rightarrow f'\left[f(x)\right]<0$.
- Với $0<x<a$ hoặc $x<0$, ta có $f(x)<0 \Rightarrow f'\left[f(x)\right]>0$.

Bảng biến thiên:

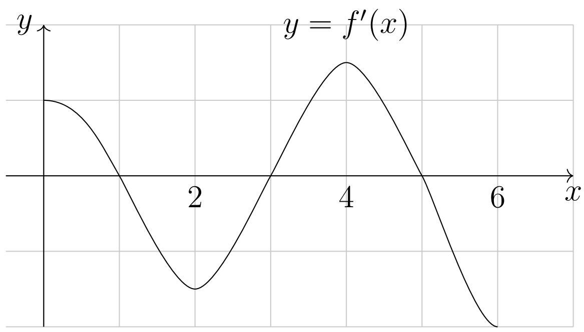
x	$-\infty$		0		2		a		b		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y		↗		↘		↗		↘		↗	

Dựa vào bảng biến thiên suy ra hàm số $y=f\left[f(x)\right]$ có bốn điểm cực trị.

Chọn đáp án C □

Câu 52.

Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $[0;6]$. Đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ trên đoạn $[0;6]$ được cho bởi hình bên dưới. Hỏi hàm số $y=\left[f(x)\right]^2$ có tối đa bao nhiêu cực trị.



A. 3. B. 7. C. 6. D. 4.

Lời giải.

Ta có $y'=2f(x)f'(x)$ nên $y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=0 \\ f'(x)=0. \end{array}\right.$

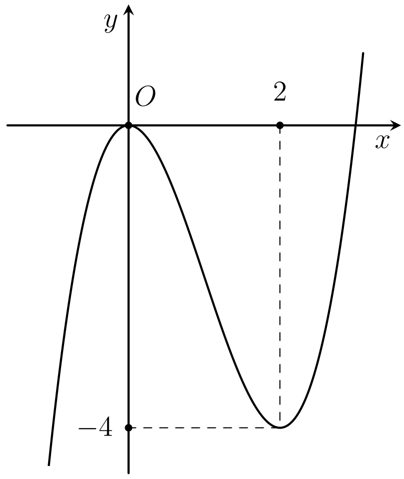
Từ đồ thị ta suy ra $f(x)=0$ có tối đa 4 nghiệm, $f'(x)=0$ có tối đa 3 nghiệm.

Do đó, hàm số $y=\left[f(x)\right]^2$ có tối đa 7 điểm cực trị nên có tối đa 7 cực trị.

Chọn đáp án B □

Câu 53.

Biết rằng hàm số $f(x)$ có đồ thị được cho như hình vẽ bên. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y = f[f(x)]$?



(A) 5. (B) 4. (C) 3. (D) 6.

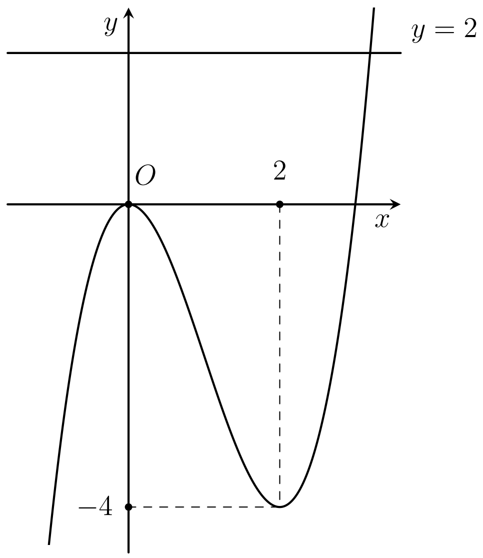
Lời giải.

Ta có $y' = [f(f(x))]' = f'(x) \cdot f'(f(x))$; $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'(x) = 0 \\ f'(f(x)) = 0. \end{array}\right.$

Có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$.

Vì hàm số $f(x)$ có hai điểm cực trị $x = 0; x = 2$.

$f'(f(x)) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = 0 \\ f(x) = 2 \end{array}\right.$.



Quan sát đồ thị ta thấy phương trình $f(x) = 0$ có một nghiệm bội chẵn $x = 0$ và một nghiệm đơn hoặc bội lẻ $x = a > 2$.

Kẻ đường thẳng $y = 2$ nhận thấy phương trình $f(x) = 2$ có một nghiệm đơn hoặc bội lẻ $x = b > a$.

Do đó y' có các điểm đổi dấu là $x = 0; x = 2, x = a, x = b$.

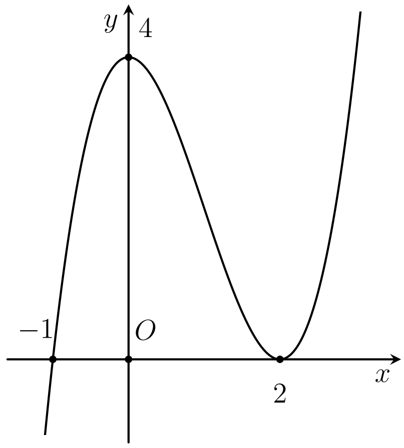
Vậy hàm số có 4 điểm cực trị.

Chọn đáp án (B) □

Câu 54.

Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(f(x))$ là

Ⓐ 3. Ⓑ 7. Ⓒ 6. Ⓓ 5.



Lời giải.

Ta có $g'(x) = f'(x) \cdot f'(f(x))$.

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'(x) = 0 \\ f'(f(x)) = 0. \end{array}\right.$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2. \end{array}\right.$

$f'(f(x)) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = 0 \ (*) \\ f(x) = 2. \ (**) \end{array}\right.$

Dựa vào đồ thị suy ra

Phương trình $(*)$ có hai nghiệm $\left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 2 \end{array}\right.$.

Phương trình $(**)$ có ba nghiệm $\left[\begin{array}{l} x = m\,(-1 < n < 0) \\ x = n\,(0 < n < 1) \\ x = p\,(p > 2)\,. \end{array}\right.$

$g'(x) = 0$ có nghiệm $\left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = m \\ x = 0 \\ x = n \\ x = 2 \\ x = p. \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		m		0		n		2		p		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

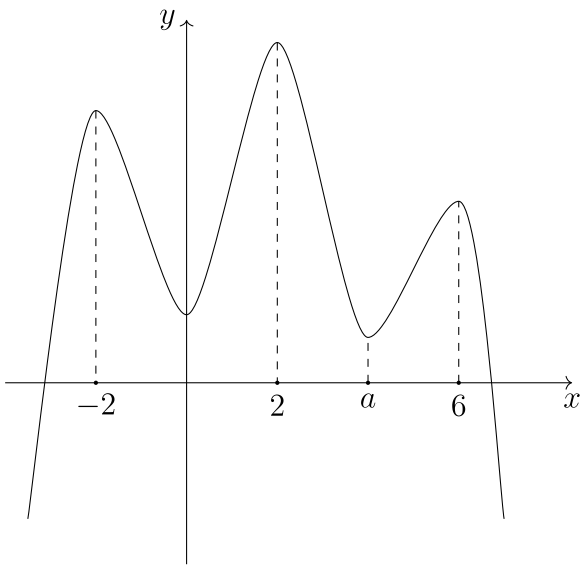
Nhìn bảng biến thiên ta thấy hàm số $g(x) = f(f(x))$ có 6 cực trị.

Chọn đáp án C □

Câu 55.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Biết tất cả các điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$ là -2; 0; 2; a; 6 với $4 < a < 6$. Số điểm cực trị của hàm số $y = f\left(x^6 - 3x^2\right)$ là

A 8. B 11. C 9. D 7.



Lời giải.

Từ đồ thị ta có -2; 0; 2; a; 6 là tất cả các nghiệm của $f'(x)$.

Ta có: $y' = \left(f\left(x^6 - 3x^2\right)\right)' = \left(6x^5 - 6x\right) f'\left(x^6 - 3x^2\right)$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 6x^5 - 6x = 0 \\ f'\left(x^6 - 3x^2\right) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0, x = \pm 1 \\ x^6 - 3x^2 = -2 \\ x^6 - 3x^2 = 0 \\ x^6 - 3x^2 = 2 \\ x^6 - 3x^2 = a \\ x^6 - 3x^2 = 6 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0, x = \pm 1 \\ x = \pm 1 \\ x = 0, x = \pm \sqrt[4]{3} \\ x = \pm \sqrt{2} \\ x = \pm m, m > \sqrt{2} \\ x = \pm n, n > m. \end{array}\right.$$

Ta có bảng biến thiên của hàm số $g(x) = x^6 - 3x^2$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	0	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên của hàm số $g(x) = x^6 - 3x^2$, ta suy ra ± 1 là nghiệm kép của phương trình $x^6 - 3x^2 = -2$ và 0 là nghiệm kép của phương trình $x^6 - 3x^2 = 0$.

Do đó ± 1 và 0 là nghiệm kép của $f'\left(x^6 - 3x^2\right)$. Do vậy ± 1 và 0 là nghiệm bội ba của y'.

Các nghiệm khác ± 1 và 0 của y' đều là nghiệm đơn.

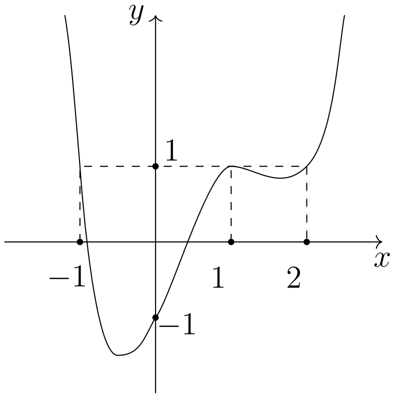
Vậy hàm số đã cho có 11 cực trị.

Chọn đáp án B □

Câu 56.

Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ bên. Đặt $g(x) = f(x) - x$. Hàm số đạt cực đại tại điểm thuộc khoảng nào dưới đây?

A $\left(\dfrac{3}{2}; 3\right)$. B $(-2; 0)$. C $(0; 1)$. D $\left(\dfrac{1}{2}; 2\right)$.



Lời giải.

Ta có $g'(x) = f'(x) - 1; g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -1 \\ x = 2. \end{array}\right.$

Bảng xét dấu của $g'(x)$

x	$-\infty$		-1		1		2		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	

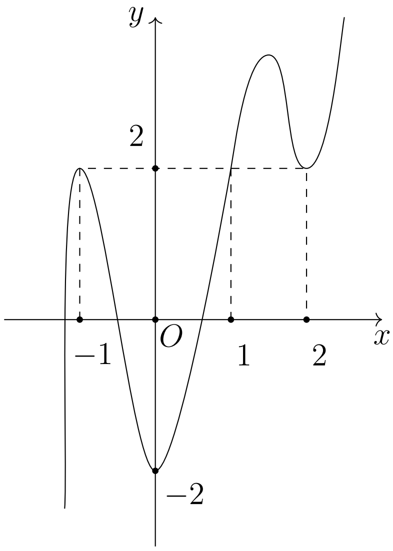
Từ bảng xét dấu nhận thấy $g(x)$ đạt cực đại tại $x = -1 \in (-2; 0)$.

Chọn đáp án B □

Câu 57.

Cho hàm số $y = f'(x-1)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $y = \pi^{2f(x)-4x}$ đạt cực tiểu tại điểm nào?

Ⓐ $x = 1$. Ⓑ $x = 0$. Ⓒ $x = 2$. Ⓓ $x = -1$.

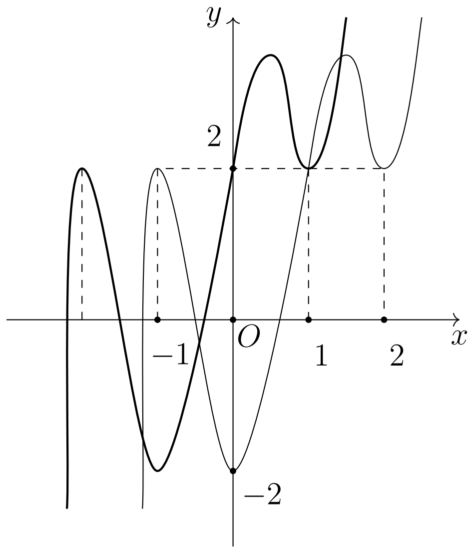


Lời giải.

Ta có $y' = \left[2f'(x) - 4\right]\pi^{2f(x)-4x}\ln\pi$.

$y' = 0 \Leftrightarrow 2f'(x) - 4 = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 2$.

Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ nhận được từ việc tịnh tiến đồ thị hàm số $y = f'(x-1)$ sang trái 1 đơn vị.



Do đó $f'(x) = 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 \\ x = 0 \\ x = 1. \end{array}\right.$

Do $x = -2$ và $x = 1$ là nghiệm bội chẵn nên ta có bảng biến thiên sau

x	$-\infty$		-2		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘		↘		↗		↗	$+\infty$

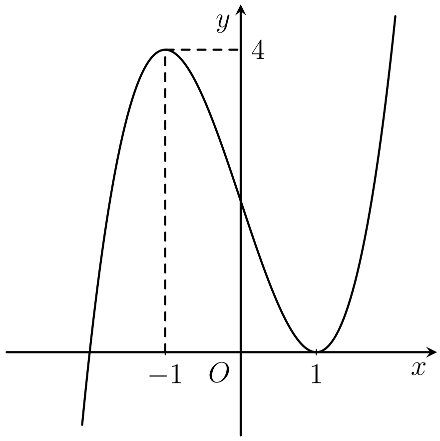
Từ bảng biến thiên ta có hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 58.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên.

Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x - 2017) - 2018x + 2019$ là.



(A) 3. (B) 4. (C) 1. (D) 2.

Lời giải.

Ta có $[f(x - 2017) - 2018x + 2019]' = 0 \Leftrightarrow f'(x - 2017) - 2018 = 0 \Leftrightarrow f'(x - 2017) = 2018$.

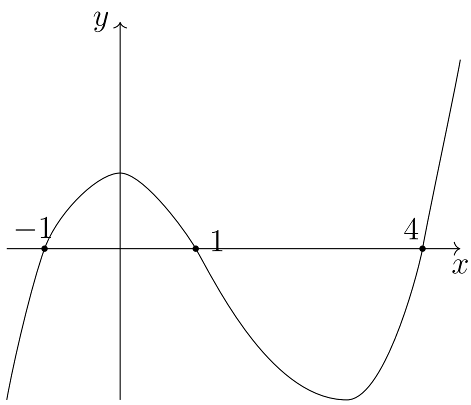
Dựa vào đồ thị hàm số $y = f'(x)$ suy ra phương trình $f'(x - 2017) = 2018$ có 1 nghiệm đơn duy nhất.

Suy ra hàm số $y = f(x - 2017) - 2018x + 2019$ có 1 điểm cực trị.

Chọn đáp án (C) □

Câu 59.

Cho hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y = e^{2f(x)+1+5^{f(x)}}$.



(A) 1. (B) 2. (C) 4. (D) 3.

Lời giải.

Ta có $y = e^{2f(x)+1} + 5^{f(x)}$.

$y' = 2f'(x) \cdot e^{2f(x)+1} + f'(x) \cdot 5^{f(x)} \ln 5 = f'(x)\left(2e^{2f(x)+1} + 5^{f(x)} \ln 5\right)$.

Nhận xét $2e^{2f(x)+1} + 5^{f(x)} \ln 5 > 0$, $\forall x$ làm cho $f(x)$ xác định nên dấu của y' phụ thuộc hoàn toàn vào $f'(x)$.

Vì vậy do $f'(x)$ đổi dấu 3 lần nên số điểm cực trị của hàm số $y = e^{2f(x)+1} + 5^{f(x)}$ là 3.

Chọn đáp án (D) □

Câu 60. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	1	↗	5	↘	$-\infty$

Hàm số $y = 2f(x) + 1$ đạt cực tiểu tại điểm

(A) $x = 2$. (B) $x = 0$. (C) $x = 1$. (D) $x = 5$.

Lời giải.

Ta có $y = 2f(x) + 1 \Rightarrow y' = 2f'(x)$.

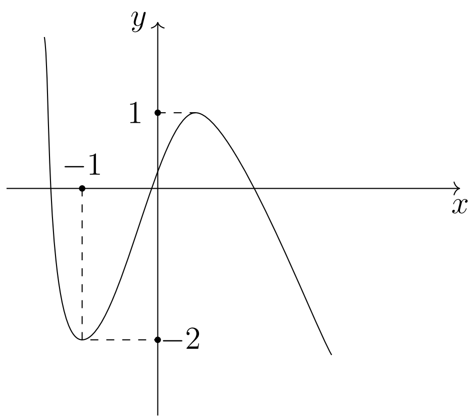
Suy ra, điểm cực tiểu của hàm số $y = f(x)$ cũng chính là điểm cực tiểu của hàm số $y = 2f(x)+1$.

Vậy, hàm số $y = 2f(x) + 1$ đạt cực tiểu tại điểm $x = 0$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 61.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ sau. Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x) + 2x$ là



(A) 4. (B) 1. (C) 3. (D) 2.

Lời giải.

Đặt $g(x) = f(x) + 2x$ suy ra $g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) + 2 = 0 \Leftrightarrow f'(x) = -2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = x_0 > -1. \end{array}\right.$

Dựa vào đồ thị ta có, trên $(-\infty; -1)$ thì $f'(x) > -2 \Leftrightarrow f'(x) + 2 > 0$.

Trên $(-1; x_0)$ thì $f'(x) > -2 \Leftrightarrow f'(x) + 2 > 0$.

Trên $(x_0; +\infty)$ thì $f'(x) < -2 \Leftrightarrow f'(x) + 2 < 0$.

x	$-\infty$		-1		x_0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗		↗		↘	

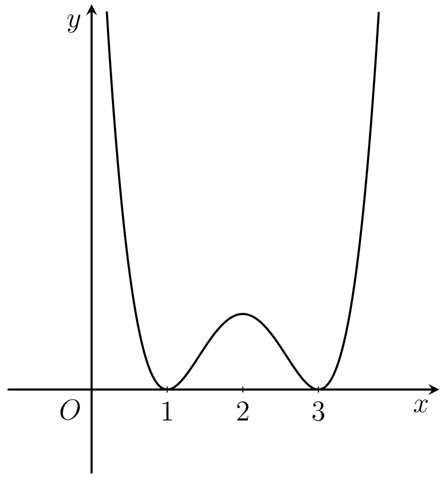
Vậy hàm số $g(x) = f(x) + 2x$ có 1 cực trị.

Chọn đáp án (B) □

Câu 62.

Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ dưới. Hàm số $g(x) = f(x) - \dfrac{x^3}{3} + 2x^2 - 5x + 2001$ có bao nhiêu điểm cực trị?

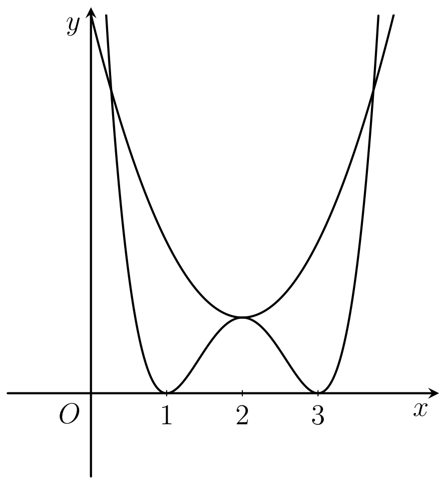
Ⓐ 3. Ⓑ 1. Ⓒ 2. Ⓓ 0.



Lời giải.

Có $g'(x) = f'(x) - x^2 + 4x - 5 \Rightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = x^2 - 4x + 5$.

Ta có đồ thị hàm số $y = x^2 - 4x + 5$ và đồ thị hàm $y = f'(x)$ như hình vẽ dưới



Quan sát hình vẽ ta thấy $g'(x) = 0$ có 3 nghiệm phân biệt trong đó chỉ có 1 nghiệm bội chẵn.

Vậy hàm số $g(x)$ có 2 điểm cực trị.

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 63.

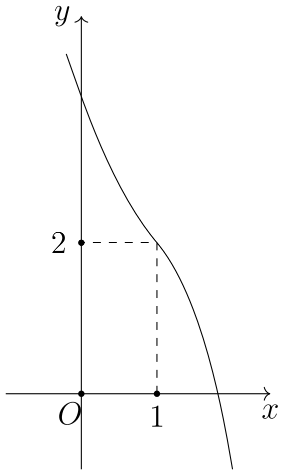
Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và không có cực trị, đồ thị của hàm số $y = f(x)$ là đường cong của như hình vẽ dưới đây. Xét hàm số $h(x) = \dfrac{1}{2}[f(x)]^2 - 2x \cdot f(x) + 2x^2$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

Ⓐ Đồ thị của hàm số $y = h(x)$ có điểm cực tiểu là $M(1; 0)$.

Ⓑ Hàm số $y = h(x)$ không có cực trị.

Ⓒ Đồ thị hàm số $y = h(x)$ có điểm cực đại là $N(1; 2)$.

Ⓓ Đồ thị hàm số $y = h(x)$ có điểm cực đại là $M(1; 0)$.



Lời giải.

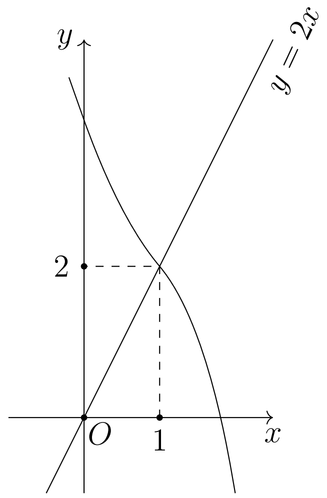
Theo bài ra ta có

$h'(x) = f'(x)\cdot f(x) - 2f(x) + 2x\cdot f'(x) + 4x = f'(x)\left(f(x) - 2x\right) - 2\left(f(x) - 2x\right) = \left(f'(x) - 2\right)\left(f(x) - 2x\right)$.

Từ đồ thị ta thấy $y = f(x)$ nghịch biến nên $f'(x) < 0$ suy ra $f'(x) - 2 < 0$.

Suy ra $h'(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) - 2x = 0$.

Từ đồ thị dưới ta thấy $f(x) - 2x = 0 \Leftrightarrow x = 1$.



Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	0	↗ $+\infty$

Suy ra đồ thị của hàm số $y = h(x)$ có điểm cực tiểu là $M(1;0)$.

Chọn đáp án A □

Câu 64. Cho hàm số $f(x) = x^4$. Hàm số $g(x) = f'(x) - 3x^2 - 6x + 1$ đạt cực tiểu, cực đại lần lượt tại x_1, x_2. Tính $m = g(x_1)\,g(x_2)$.

A $m = 0$. B $m = \dfrac{-371}{16}$. C $m = \dfrac{1}{16}$. D $m = -11$.

Lời giải.

Theo bài ra ta có $f'(x) = 4x^3$.

Suy ra $g(x) = 4x^3 - 3x^2 - 6x + 1$.

Suy ra $g'(x) = 12x^2 - 6x - 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 1 \\ x_2 = -\dfrac{1}{2}. \end{array}\right.$

Đồ thị hàm số lên - xuống – lên.

Hàm số $g(x) = f'(x) - 3x^2 - 6x + 1$ đạt cực tiểu, cực đại lần lượt tại $x_1 = 1, x_2 = -\dfrac{1}{2}$.

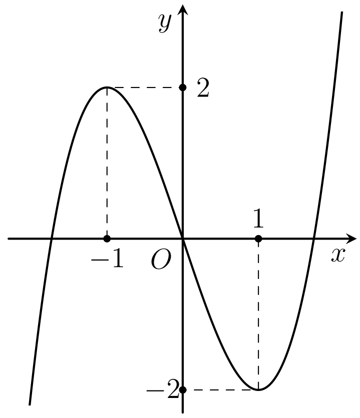
Suy ra $m = g(1)\cdot g(2) = (4 - 3 - 6 + 1)\left[4\cdot\left(\dfrac{-1}{2}\right)^3 - 3\cdot\left(\dfrac{-1}{2}\right)^2 - 6\cdot\left(\dfrac{-1}{2}\right) + 1\right] = -11$.

Chọn đáp án D □

Câu 65.

Biết đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $y = f(x) - 2x$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A 2. B 1. C 0. D 3.



Lời giải.

Đặt $g(x) = f'(x)$.

$g(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

Đồ thị hàm số $g(x)$ đi qua các điểm $O(0;0)$, $(-1;2)$, $(1;-2)$ nên ta có

$$\begin{cases} d = 0 \\ a + b + c + d = -2 \\ -a + b - c + d = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 0 \\ b = 0 \\ a + c = -2. \end{cases}$$

Do đó $g(x) = ax^3 + cx \Rightarrow g'(x) = 3ax^2 + c$.

Hàm số đạt cực trị tại $x = \pm 1$ nên $g'(\pm 1) = 0 \Leftrightarrow 3a + c = 0$.

Từ đó có $a = 1; c = -3 \Rightarrow g(x) = f'(x) = x^3 - 3x$.

Xét hàm số $y = f(x) - 2x$.

$y' = f'(x) - 2 = x^3 - 3x - 2 = (x+1)^2(x-2)$, $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 2. \end{array}\right.$

Dấu của y'

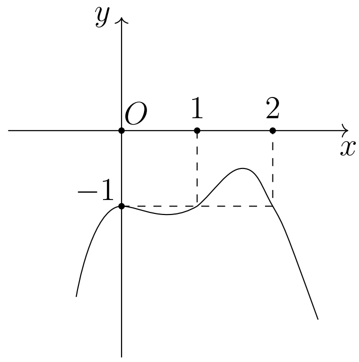
x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	

Do đó hàm số có 1 điểm cực trị.

Chọn đáp án B □

Câu 66.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Biết hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $g(x) = f(x) + x$ đạt cực tiểu tại điểm



Ⓐ $x = 1$. Ⓑ $x = 2$.

Ⓒ Không có điểm cực tiểu. Ⓓ $x = 0$.

Lời giải.

Xét hàm số $g(x) = f(x) + x$ có $g'(x) = f'(x) + 1$.

Dựa vào đồ thị hàm số $y = f'(x)$ có

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = -1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \\ x = 2. \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên

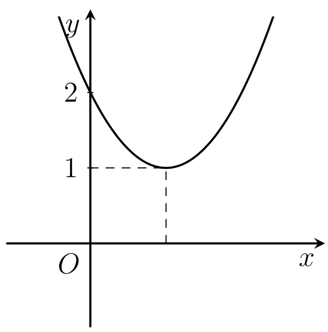
x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	↘				CT	↗	CĐ	↘	

Từ đó suy ra hàm số $y = g(x)$ đạt cực tiểu tại điểm $x = 1$.

Chọn đáp án Ⓐ ☐

Câu 67.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và đồ thị hàm số $y = f'(x)$ là parabol như hình bên dưới. Hàm số $y = f(x) - 2x$ có bao nhiêu cực trị?

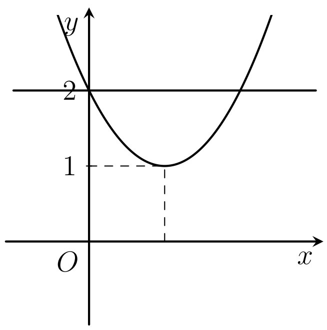


Ⓐ 3. Ⓑ 2. Ⓒ 0. Ⓓ 1.

Lời giải.

Ta có $y' = f'(x) - 2$.

khi đó $y' = 0 \Leftrightarrow f'(x) - 2 = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 2$. Số nghiệm của phương trình là số giao điểm của hai đồ thị $y = f'(x)$ và $y = 2$.



Từ đồ thị ta có $f'(x) = 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = x_1 > 1. \end{array}\right.$

Dựa vào đồ thị $y = f'(x)$ và đường thẳng $y = 2$, ta có bảng biến thiên sau

x	$-\infty$		0		x_1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Vậy hàm số $y = f(x) - 2x$ có hai điểm cực trị.

Chọn đáp án B □

Câu 68.

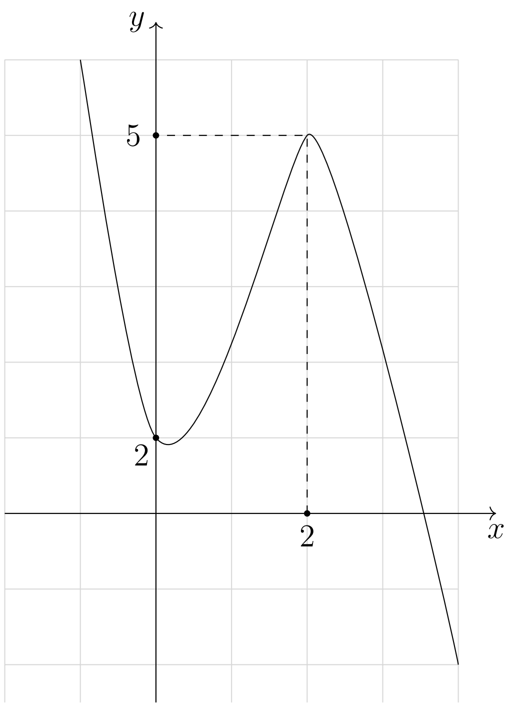
Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị đạo hàm $y = f'(x)$ như hình bên. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Hàm số $y = f(x) - x^2 - x$ đạt cực đại tại $x = 0$.

B. Hàm số $y = f(x) - x^2 - x$ đạt cực tiểu tại $x = 0$.

C. Hàm số $y = f(x) - x^2 - x$ không đạt cực trị tại $x = 0$.

D. Hàm số $y = f(x) - x^2 - x$ không có cực trị.



Lời giải.

Xét hàm số $g(x) = f(x) - x^2 - x$.

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Ta có $g'(x) = f'(x) - 2x - 1$.

Cho $g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 2x + 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2. \end{array}\right.$

Dựa vào đồ thị ta có $g'(1) = f'(1) - 3 < 0$, $g'(3) = f'(3) - 7 < 0$ nên $x = 0$ là nghiệm đơn và $x = 2$ là nghiệm kép.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\searrow$	

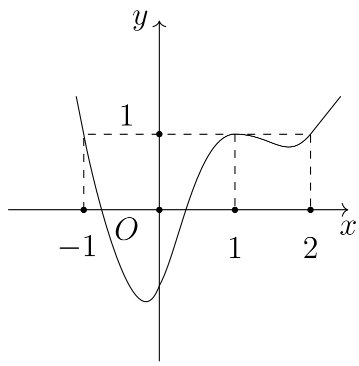
Từ bảng biến thiên ta có $x = 0$ là điểm cực đại.

Chọn đáp án (A) □

Câu 69.

Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ. Đặt $g(x) = f(x) - x$. Hàm số $g(x)$ đạt cực đại tại điểm nào sau đây?

(A) $x = 1$. (B) $x = 2$. (C) $x = 0$. (D) $x = -1$.



Lời giải.

Ta có $g'(x) = f'(x) - 1 = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 1$.

Từ đồ thị ta thấy đường thẳng $y = 1$ cắt đồ thị $f'(x)$ tại ba điểm có hoành độ là $x = -1$, $x = 1$ và $x = 2$

Bảng biến thiên

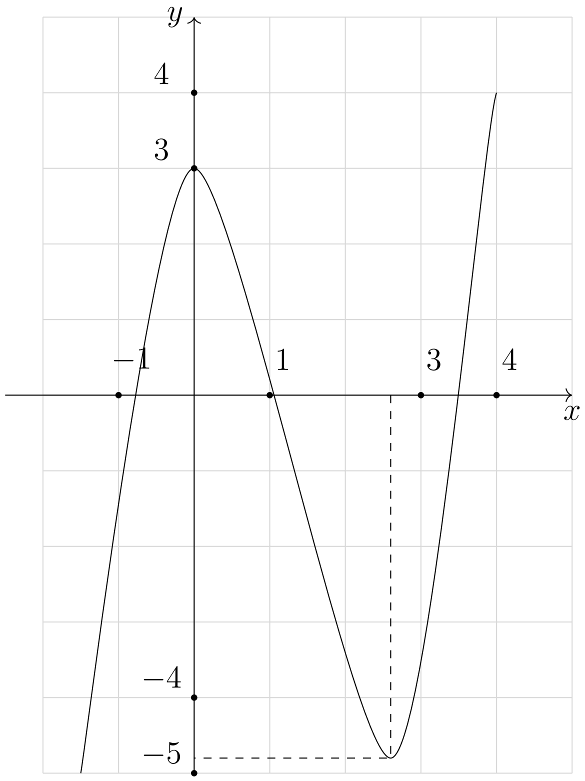
x	$-\infty$		-1		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$		$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta suy ra $x_{\text{CĐ}} = -1$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 70.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị là đường cong như hình vẽ. Đặt $g(x) = 3f(f(x)) + 4$. Tìm số cực trị của hàm số $g(x)$.



Ⓐ 2. Ⓑ 8. Ⓒ 10. Ⓓ 6.

Lời giải.

Ta có $g'(x) = 3f'(x).f'(f(x))$, $g'(x) = 0 \Leftrightarrow 3f'(x).f'(f(x)) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'(x) = 0 \\ f'(f(x)) = 0. \end{array}\right.$

Từ đồ thị hàm số trên ta thấy, phương trình $f'(x) = 0$ có 2 nghiệm phân biệt là $x = 0$; $x = \alpha$ với $\alpha \in (1; 3)$.

Phương trình $f'(f(x)) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = 0 \\ f(x) = \alpha. \end{array}\right.$

Phương trình $f(x) = 0$ có 3 nghiệm phân biệt khác 2 nghiệm trên.

Phương trình $f(x) = \alpha$ với $\alpha \in (1; 3)$ có 3 nghiệm phân biệt khác các nghiệm trên.

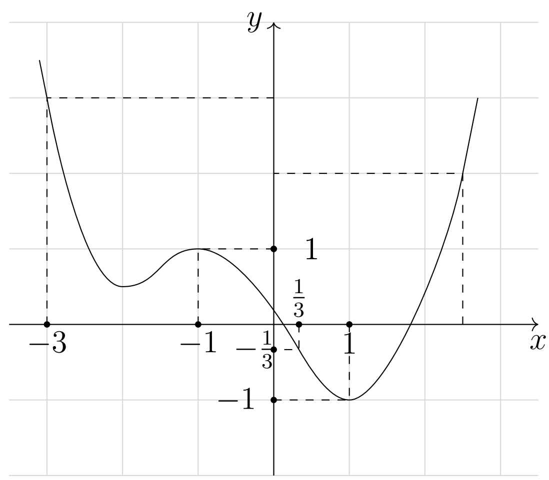
Vậy phương trình $g'(x) = 0$ có 8 nghiệm phân biệt và $g'(x)$ đổi dấu qua các nghiệm.

Do đó hàm số $g(x)$ có 8 điểm cực trị.

Chọn đáp án B □

Câu 71.

Cho hàm số $y = f(x)$, hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Hàm số $g(x) = 2f\left(\dfrac{5\sin x - 1}{2}\right) + \dfrac{(5\sin x - 1)^2}{4} + 3$ có bao nhiêu điểm cực trị trên khoảng $(0; 2\pi)$.



Ⓐ 9. Ⓑ 7. Ⓒ 6. Ⓓ 8.

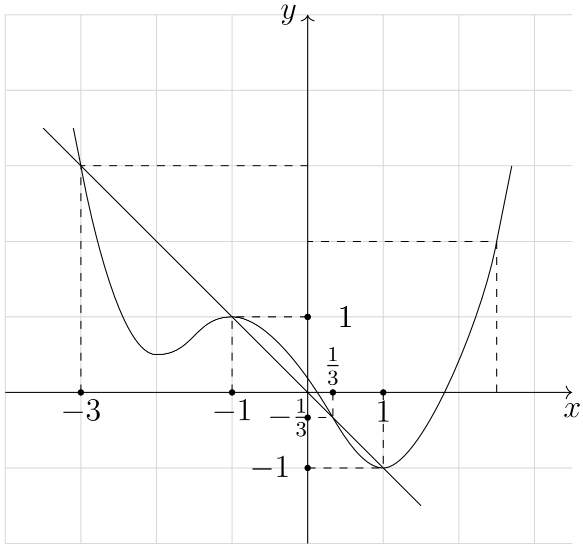
Lời giải.

Ta có $g'(x) = 5\cos x f'\left(\dfrac{5\sin x - 1}{2}\right) + \dfrac{5}{2}\cos x\,(5\sin x - 1)$.

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 5\cos x f'\left(\dfrac{5\sin x - 1}{2}\right) + \dfrac{5}{2}\cos x\,(5\sin x - 1) = 0$.

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 0 \\ f'\left(\dfrac{5\sin x - 1}{2}\right) = -\dfrac{5\sin x - 1}{2}. \end{array}\right.$

Ta có đồ thị



Từ đồ thị suy ra $\left[\begin{array}{l} \cos x = 0 \\ \dfrac{5\sin x - 1}{2} = -3 \\ \dfrac{5\sin x - 1}{2} = -1 \\ \dfrac{5\sin x - 1}{2} = \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{5\sin x - 1}{2} = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 0 \\ 5\sin x - 1 = -6 \\ 5\sin x - 1 = -2 \\ 5\sin x - 1 = \dfrac{2}{3} \\ 5\sin x - 1 = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 0 \\ \sin x = -1 \\ \sin x = -\dfrac{1}{5} \\ \sin x = \dfrac{1}{3} \\ \sin x = \dfrac{3}{5} \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 0 \\ \sin x = -1 \\ \sin x = -\dfrac{1}{5} \\ \sin x = \dfrac{1}{3} \\ \sin x = \dfrac{3}{5} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} \vee x = \dfrac{3\pi}{2} \\ x = \dfrac{3\pi}{2} \\ x = \pi - \arcsin\left(-\dfrac{1}{5}\right) \vee x = 2\pi + \arcsin\left(-\dfrac{1}{5}\right) \\ x = \arcsin\left(\dfrac{1}{3}\right) \vee x = \pi - \arcsin\left(\dfrac{1}{3}\right) \\ x = \arcsin\left(\dfrac{3}{5}\right) \vee x = \pi - \arcsin\left(\dfrac{3}{5}\right) \end{array}\right.$, (vì $0 < x < 2\pi$).

Suy phương trình $g'(x) = 0$ có 9 nghiệm, trong đó có nghiệm $x = \dfrac{3\pi}{2}$ là nghiệm kép.

Vậy hàm số $y = g(x)$ có 7 cực trị.

Chọn đáp án (B) □

Câu 72. Cho hàm số bậc bốn $f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	3	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = x^4 \left[f\left(x+1\right)\right]^2$ là

(A) 11. (B) 9. (C) 7. (D) 5.

Lời giải.

Ta chọn hàm $f(x) = 5x^4 - 10x^2 + 3$.

Đạo hàm

$g'(x) = 4x^3 \left[f\left(x+1\right)\right]^2 + 2x^4 f\left(x+1\right) f'\left(x+1\right) = 2x^3 f\left(x+1\right)\left[2f\left(x+1\right) + xf'\left(x+1\right)\right]$.

Ta có $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x^3 f\left(x+1\right) = 0 \\ 2f\left(x+1\right) + xf'\left(x+1\right) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ f\left(x+1\right) = 0 \\ 2f\left(x+1\right) + xf'\left(x+1\right) = 0 \end{array}\right.$.

$f\left(x+1\right) = 0 \ (*) \Leftrightarrow 5\left(x+1\right)^4 - 10\left(x+1\right) + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+1 \approx 1,278 \\ x+1 \approx 0,606 \\ x+1 \approx -0,606 \\ x+1 \approx -1,278. \end{array}\right.$

$\Rightarrow$ Phương trình có bốn nghiệm phân biệt khác 0.

$$\begin{aligned} & 2f\left(x+1\right) + xf'\left(x+1\right) = 0 \\ \stackrel{t=x+1}{\Rightarrow}\ & 2\left(5t^4 - 10t^2 + 3\right) + \left(t-1\right)\left(20t^3 - 20t\right) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & 30t^4 - 20t^3 - 40t^2 + 20t + 6 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} t \approx 1,199 \\ t \approx 0,731 \\ t \approx -0,218 \\ t \approx -1,045. \end{array}\right. \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Phương trình có bốn nghiệm phân biệt khác 0 và khác các nghiệm của phương trình $(*)$.

Vậy số điểm cực trị của hàm số $g(x)$ là 9.

Chọn đáp án (B) □

Câu 73. Cho hàm số bậc bốn $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = x^2\left[f(x-1)\right]^4$ là

Ⓐ 7. Ⓑ 8. Ⓒ 5. Ⓓ 9.

Lời giải.

Ta có $g'(x) = 2x \cdot \left[f(x-1)\right]^4 + 4x^2 f'(x-1)\left[f(x-1)\right]^3 = 2x \cdot \left[f(x-1)\right]^3 \left(f(x-1) + 2xf'(x-1)\right)$.

Vậy $g'(x) = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ f(x-1) = 0 \ (1) \\ f(x-1) + 2xf'(x-1) = 0. \ (2) \end{array}\right.$

Phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt.

Phương trình (2) có $f(x-1) = -2xf'(x-1) \Rightarrow f(x) = -2(x+1)f'(x)$.

Từ bảng biến thiên suy ra hàm $f(x)$ là bậc bốn trùng phương nên ta có:

$f(x) = -3x^4 + 6x^2 - 1$ thay vào $f(x) = -2(x+1)f'(x)$ vô nghiệm.

Vậy hàm $g(x)$ có 5 điểm cực trị.

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 74. Cho hàm số bậc bốn $f(x)$ có bảng biên thiên như sau

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = x^4[f(x-1)]^2$ là

Ⓐ 7. Ⓑ 5. Ⓒ 9. Ⓓ 11.

Lời giải.

Ta có $f(x) = 4x^4 - 8x^2 + 3 \Rightarrow f'(x) = 16x(x^2 - 1)$.

Ta có $g'(x) = 2x^3 \cdot f(x-1) \cdot [2f(x-1) + x \cdot f'(x-1)]$

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^3 = 0 \ (1) \\ f(x-1) = 0 \ (2) \\ 2f(x-1) + x \cdot f'(x-1) = 0. \ (3) \end{array}\right.$

Phương trình (1) có $x = 0$ (nghiệm bội ba).

Phương trình (2) có cùng số nghiệm với phương trình $f(x) = 0$ nên (2) có 4 nghiệm đơn.

Phương trình (3) có cùng số nghiệm với phương trình

$$\begin{aligned}&2f(x)+(x+1)\cdot f'(x)=0\\ \Leftrightarrow\ &2(4x^4-8x^2+3)+16x(x+1)(x^2-1)=0.\\ \Leftrightarrow\ &24x^4+16x^3-32x^2-16x+6=0.\end{aligned}$$

Phương trình 4 nghiệm phân biệt.

Dễ thấy 9 nghiệm trên phân biệt nên hàm số $g(x)=0$ có tất cả 9 điểm cực trị.

Chọn đáp án (C) □

Câu 75. Cho hàm số bậc bốn $f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-2	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=x^2\left[f(x+1)\right]^4$

(A) 7. (B) 8. (C) 9. (D) 5.

Lời giải.

$g'(x)=2x[f(x+1)]^4+4x^2\left[f(x+1)\right]^3\cdot f'(x+1)=2x[f(x+1)]^3\cdot\left[f(x+1)+2x\cdot f'(x+1)\right]$

$g'(x)=0$ ta được

Trường hợp 1: $x=0$

Trường hợp 2: $f(x+1)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=a<-2\\ x=b\in(-2;-1)\\ x=c\in(-1;0)\\ x=d>0\end{array}\right.$

Trường hợp 3: $f(x+1)+2x.f'(x+1)=0$.

Từ bảng biến thiên ta có hàm số thỏa mãn là $f(x)=-5x^4+10x^2-2$.

$$\begin{aligned}\Rightarrow\ &f(x+1)+2x.f'(x+1)=0\\ \Leftrightarrow\ &h(x)=f(x+1)+2(x+1)\cdot f'(x+1)-2f'(x+1)=0.\end{aligned}$$

Với $t=x+1$ ta có

$$h(t)=-5t^4+10t^2-2+2t(-20t^3+20t)-2(-20t^3+20t)=0\Leftrightarrow -45t^4+40t^3+50t^2-40t-2=0.$$

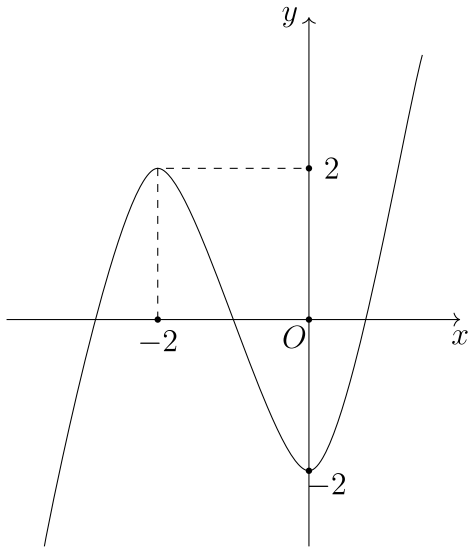
Lập bảng biến thiên ta suy ra có 4 nghiệm $t\Rightarrow$ 4 nghiệm x

Vậy có 9 cực trị.

Chọn đáp án (C) □

Câu 76.

Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ (với $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ và $a \neq 0$) có đồ thị như hình vẽ. Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f\left(-2x^2 + 4x\right)$



Ⓐ 2. Ⓑ 5. Ⓒ 4. Ⓓ 3.

Lời giải.

Dựa vào đồ thị hàm số $y = f(x)$ có hai điểm cực trị là $x = -2; x = 0$.

$g(x) = f\left(-2x^2 + 4x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

$g'(x) = (-4x + 4)\, f'\left(-2x^2 + 4x\right)$.

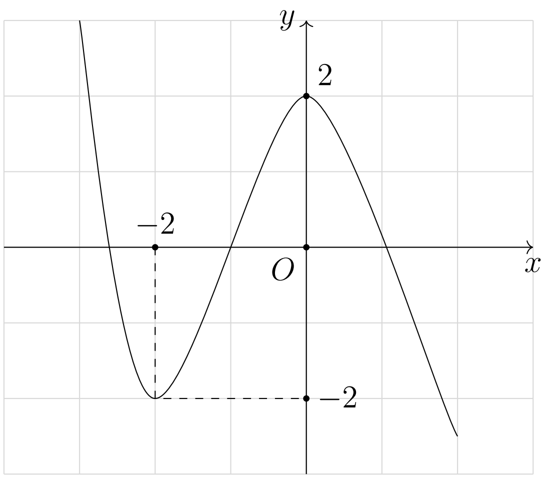
$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -4x + 4 = 0 \\ -2x^2 + 4x = 0 \\ -2x^2 + 4x = -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 0 \\ x = 2 \\ (x-1)^2 = 0. \end{array}\right.$$

Như vậy $g'(x)$ có 3 nghiệm, trong đó 1 là nghiệm bội 3, 0 và 2 là nghiệm đơn nên $g(x)$ có 3 điểm cực trị.

Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 77.

Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ Số điểm cực tiểu của hàm số $g(x) = f\left(-x^2 + x\right)$ bằng



Ⓐ 1. Ⓑ 5. Ⓒ 2. Ⓓ 3.

Lời giải.

Đặt $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Khi đó $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$.

Theo đồ thị hàm số $y = f(x)$, ta có

$$\begin{cases} f'(-2)=0 \\ f'(0)=0 \\ f(-2)=-2 \\ f(0)=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12a-4b+c=0 \\ c=0 \\ -8a+4b-2c+d=-2 \\ d=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12a-4b=0 \\ -8a+4b=-4 \\ c=0 \\ d=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=-3 \\ c=0 \\ d=2. \end{cases}$$

Vậy $f(x)=-x^3-3x^2+2$.

Khi đó, ta có $g(x)=f\left(-x^2+x\right)=x^6-3x^5+5x^3-3x^2+2$.

$$g'(x)=3x\left(2x^4-5x^3+5x-2\right) \Rightarrow g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=0 \\ x=\dfrac{1}{2} \\ x=1 \\ x=2 \end{array}\right..$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		0		$\frac{1}{2}$		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

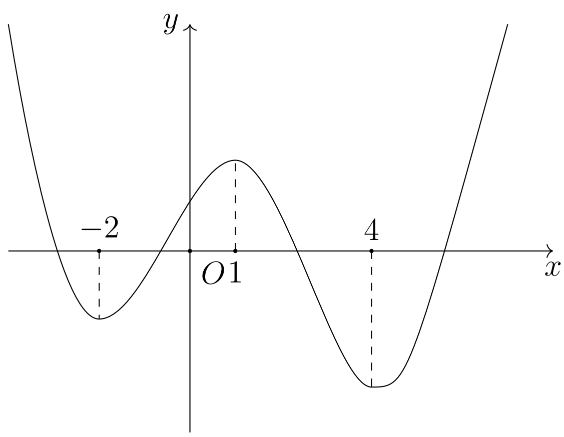
Suy ra, hàm số $g(x)=f\left(-x^2+x\right)$ có ba điểm cực tiểu.

Chọn đáp án D $\square$

Câu 78.

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $g(x)=f\left(\mathrm{e}^x-\dfrac{x^2+2x}{2}\right)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A 3. B 7. C 6. D 4.



Lời giải.

Ta có $g'(x)=\left(\mathrm{e}^x-x-1\right)f'\left(\mathrm{e}^x-\dfrac{x^2+2x}{2}\right)$.

Xét

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow (\mathrm{e}^x-x-1)\,f'\left(\mathrm{e}^x-\frac{x^2+2x}{2}\right)=0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\mathrm{e}^x-x-1=0\\ f'\left(\mathrm{e}^x-\dfrac{x^2+2x}{2}\right)=0\end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\mathrm{e}^x-x-1=0(1)\\ \mathrm{e}^x-\dfrac{x^2+2x}{2}=-2(2)\\ \mathrm{e}^x-\dfrac{x^2+2x}{2}=1(3)\\ \mathrm{e}^x-\dfrac{x^2+2x}{2}=4(4).\end{array}\right.$$

Ta xét $u(x)=\mathrm{e}^x-x-1; v(x)=\mathrm{e}^x-\dfrac{x^2+2x}{2}$.

Ta có $u'(x)=\mathrm{e}^x-1; u'(x)=0 \Leftrightarrow x=0$ $u'(x)=\mathrm{e}^x-1; v'(x)=\mathrm{e}^x-x-1$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy $u(x)\geq 0\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Xét hàm số $v(x)=\mathrm{e}^x-\dfrac{x^2+2x}{2}$.

Ta có $v'(x)=\mathrm{e}^x-x-1\geq 0 \forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow$ hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$		$\nearrow$		$+\infty$

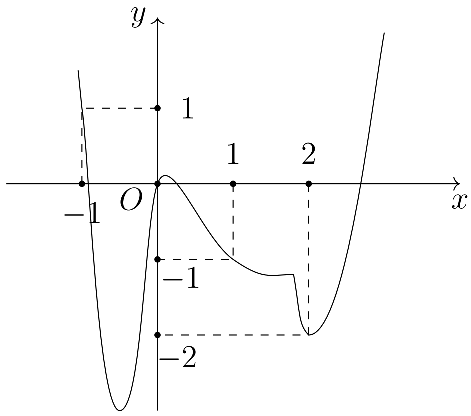
Khi đó các phương trình (2), (3), (4) có nghiệm duy nhất và $g'(x)$ đổi dấu qua các nghiệm đó.

Vậy hàm số $g(x)$ có 3 điểm cực trị.

Chọn đáp án A □

Câu 79.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên. Đặt $g(x) = 2f(x) + x^2 + 1$. Khẳng định nào sau đây đúng?



A) Hàm số $y = g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(1; +\infty)$.

B) Hàm số $y = g(x)$ đồng biến trên khoảng $(-1; 0)$.

C) Hàm số $y = g(x)$ đạt cực tiểu tại $x = 0$.

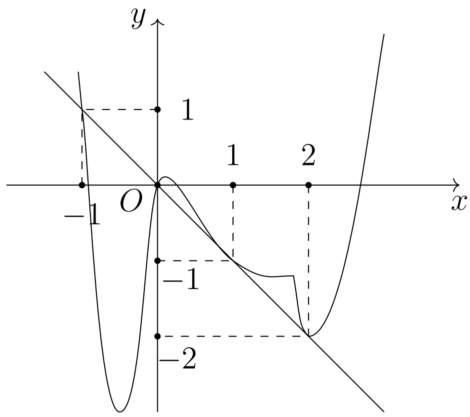
D) Hàm số $y = g(x)$ đạt cực đại tại $x = 1$.

Lời giải.

$g'(x) = 2f'(x) + 2x$.

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = -x$.

Ta vẽ thêm đường thẳng $y = -x$ và đồ thị.



Khi đó phương trình $g'(x) = 0$ có các nghiệm $x = -1$, $x = 1$, $x = 2$.

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		0		1		2		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	$+$		
$g(x)$		$\nearrow$		$\searrow$				$\nearrow$			

Dựa vào bảng biến thiên, hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$.

Chọn đáp án C $\square$

Câu 80. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây:

x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	1	$\searrow$	-2	$\nearrow$	1	$\searrow$	

Hàm số $y = f(2x)$ đạt cực đại tại

Ⓐ $x = \dfrac{1}{2}$.　　Ⓑ $x = -1$.　　Ⓒ $x = 1$.　　Ⓓ $x = -2$.

Lời giải.

Đặt $t = 2x \Rightarrow y = f(t)$.

Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số $y = f(t)$ đạt cực đại tại $\left[\begin{array}{l} t = -1 \\ t = 2 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = -1 \\ 2x = 2 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{1}{2} \\ x = 1 \end{array}\right.$.

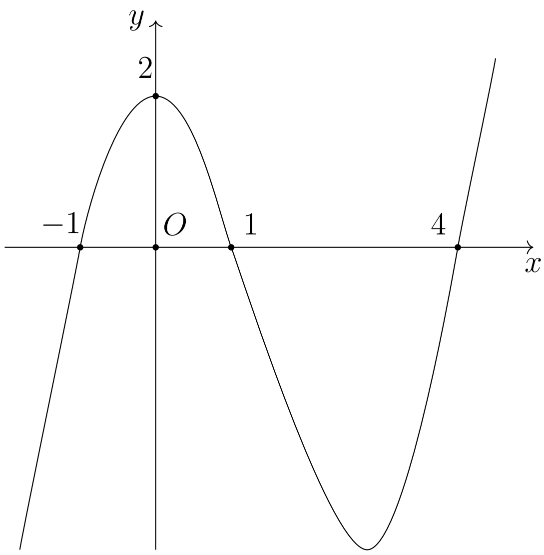
Vậy hàm số $y = f(2x)$ đạt cực đại tại điểm $x = 1$ và $x = -\dfrac{1}{2}$.

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 81.

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên. Tìm điểm cực đại của hàm số $y = 2019^{-f(x)} - 2020^{f(x)}$.

Ⓐ 2.　　Ⓑ 3.　　Ⓒ 0.　　Ⓓ 1.



Lời giải.

Từ đồ thị hàm số $y = f'(x)$ ta có bảng xét dấu của $y = f'(x)$ như sau

x	$-\infty$		-1		1		4		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Xét hàm số $y = 2019^{-f(x)} - 2020^{f(x)} \Rightarrow y' = -f'(x)\left(2019^{-f(x)}\ln 2019 + 2020^{f(x)}\ln 2020\right)$.

Vì $2019^{-f(x)}\ln 2019 + 2020^{f(x)}\ln 2020 > 0$.

Nên $y' = -f'(x)\left(2019^{-f(x)}\ln 2019 + 2020^{f(x)}\ln 2020\right)$ có bảng xét dấu như sau

x	$-\infty$		-1		1		4		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

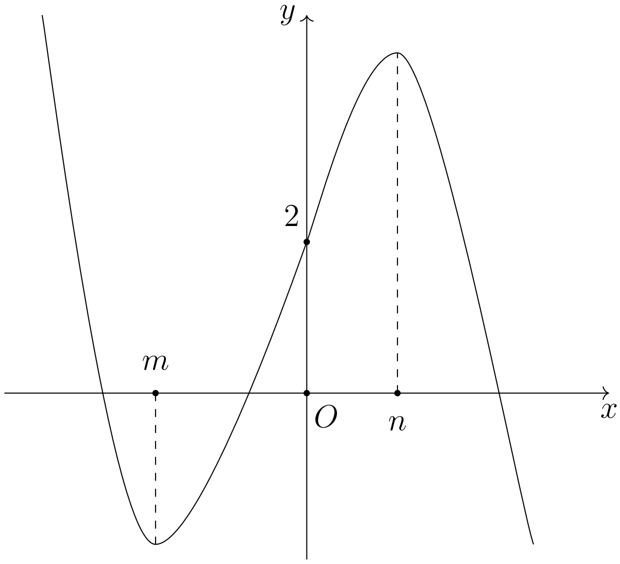
Vậy hàm số $y = 2019^{-f(x)} - 2020^{f(x)}$ có hai điểm cực đại.

Chọn đáp án (A) □

Câu 82.

Cho hàm số $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e, (a \neq 0)$ có đồ thị của đạo hàm $f'(x)$ như hình vẽ. Biết rằng $e > n$. Số điểm cực trị của hàm số $y = f'(f(x) - 2x)$ bằng

(A) 7. (B) 10. (C) 14. (D) 6.



Lời giải.

Ta có $y' = (f(x) - 2x)' \cdot f''(f(x) - 2x) = (f'(x) - 2) \cdot f''(f(x) - 2x)$.

$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'(x) - 2 = 0 \\ f''(f(x) - 2x) = 0 \end{array}\right.$.

$f'(x) - 2 = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 2$ có 3 nghiệm.

$f''(f(x) - 2x) = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) - 2x = m\ (1) \\ f(x) - 2x = n.\ (2) \end{array}\right.$

Xét phương trình (1): $f(x) - 2x = m\,(m < 0)$, đặt $g(x) = f(x) - 2x \Rightarrow g'(x) = f'(x) - 2$.

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = x_1 < m \\ x = 0 \\ x = x_2 > n. \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$x_1 < m$		0		$x_2 > n$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(x_1)$	$\searrow$	e	$\nearrow$	$f(x_2)$	$\searrow$	$-\infty$

Từ bảng biến thiên $\Rightarrow$ phương trình (1) có 2 nghiệm.

Xét phương trình (2) : $f(x)-2x=n\,(n<e)$, đặt $h(x)=f(x)-2x \Rightarrow h'(x)=f'(x)-2$.

$$h'(x)=0 \Leftrightarrow f'(x)=2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=x_1<m \\ x=0 \\ x=x_2>n. \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$x_1<m$		0		$x_2>n$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(x_1)$	$\searrow$	e	$\nearrow$	$f(x_2)$	$\searrow$	$-\infty$

Từ bảng biến thiên $\Rightarrow$ phương trình (2) có 2 nghiệm.

Vậy hàm số $y=f'\left(f(x)-2x\right)$ có 7 điểm cực trị.

Chọn đáp án A □

Câu 83. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	5	$\searrow$	$-\infty$

Số điểm cực đại của hàm số $g(x)=\left[f\left(2x^2+x\right)\right]^2$ là

A 3. B 4. C 2. D 1.

Lời giải.

Ta có $g'(x)=\left(\left[f\left(2x^2+x\right)\right]^2\right)'=2f\left(2x^2+x\right)(4x+1)\,f'\left(2x^2+x\right)$.

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f\left(2x^2+x\right)=0 \\ 4x+1=0 \\ f'\left(2x^2+x\right)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x^2+x=a\,(a>1) \\ x=-\dfrac{1}{4} \\ 2x^2+x=1 \\ 2x^2+x=-2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+8a}}{4}\,(a>1) \\ x=-\dfrac{1}{4} \\ x=\dfrac{1}{2} \\ x=-1. \end{array}\right.$$

Vì $a>1$ nên có thứ tự các nghiệm của $g'(x)=0$ là

$x_1=\dfrac{-1-\sqrt{1+8a}}{4}<x_2=-1<x_3=-\dfrac{1}{4}<x_4=\dfrac{1}{2}<x_5=\dfrac{-1+\sqrt{1+8a}}{4}$.

Vậy $g'(x)=0$ có 5 nghiệm đơn như trên suy ra $g'(x)$ đổi dấu khi x chạy qua các nghiệm đơn.

Với $0 \in \left(-\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right)$ $(0 \in (x_3; x_4))$. Xét $g'(0) = 2.f(0)f'(0) > 0$. Suy ra $g'(x) > 0$ trên khoảng $\left(-\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right)$ hay khoảng $(x_3; x_4)$. Ta có bảng xét dấu của $g'(x)$ như sau

x	$-\infty$		x_1		x_2		x_3		x_4		x_5		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Ta có hàm$f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên hàm số $g(x) = \left[f\left(2x^2+x\right)\right]^2$ cũng liên tục trên $\mathbb{R}$.
Vậy hàm số $g(x) = \left[f\left(2x^2+x\right)\right]^2$ có 2 điểm cực đại là $x = x_2 = -1$ và $x = x_4 = \frac{1}{2}$.
Chọn đáp án C □

Câu 84. Cho hàm số bậc bốn trùng phương $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Số điểm cực trị của hàm số $y = \frac{1}{x^4}[f(x)-1]^4$ là

A 6. B 7. C 5. D 4.

Lời giải.

Giả sử $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$.

Từ $\left[\begin{array}{l} f'(0)=0 \\ f(0)=1 \\ f'(\pm 1)=0 \\ f(\pm 1)=0 \end{array}\right. \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=2 \\ b=-4 \\ c=1 \end{array}\right.$.

Suy ra $f(x) = 2x^4 - 4x^2 + 1$.
Khi đó $y = \frac{1}{x^4}\left[2x^4-4x^2\right]^4 = 2^4x^4(x^2-2)^4$.
Có $y' = 2^4 \cdot 4 \cdot x^3 \cdot (x^2-2)^3 \cdot (3x^2-2)$.
Và $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (nghiệm bội lẻ); $x = \pm\sqrt{2}$ (nghiệm bội lẻ); $x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$.
Do đó, hàm số y có 5 cực trị.
Chọn đáp án C □

Câu 85. Cho hàm số bậc bốn $f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = \dfrac{(x-2)^4}{[f(x+1)]^3}$ là

(A) 7. (B) 4. (C) 5. (D) 6.

Lời giải.

Từ bảng biến thiên $\Rightarrow$ phương trình $f'(x) = 0$ có ba nghiệm là $x = -1$; $x = 0$; $x = 1$.

$\Rightarrow f'(x)$ có dạng $f'(x) = kx(x-1)(x+1) = k(x^3 - x)$, với $k \in \mathbb{R}$ và $k \neq 0$.

$\Rightarrow f(x) = k\left(\dfrac{x^4}{4} - \dfrac{x^2}{2} + C\right)$, C là một hằng số.

Mà đồ thị hàm số $f(x)$ đi qua $(1;3)$ và $(0;-1)$ $\Rightarrow \begin{cases} k\left(-\dfrac{1}{4} + C\right) = 3 \\ kC = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -16 \\ C = \dfrac{1}{16} \end{cases}$.

$\Rightarrow f(x) = -16\left(\dfrac{x^4}{4} - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{1}{16}\right) = -4x^4 + 8x^2 - 1$

$\Rightarrow f(x+1) = -4(x+1)^4 + 8(x+1)^2 - 1$

$\Rightarrow f(x+1) = -4(x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1) + 8(x^2 + 2x + 1) - 1$

$\Rightarrow f(x+1) = -4x^4 - 16x^3 - 16x^2 + 3 \Rightarrow f'(x+1) = -16x^3 - 48x^2 - 32x$.

Ta có: $g'(x) = \dfrac{4(x-2)^3[f(x+1)]^3 - (x-2)^4.3[f(x+1)]^2 \cdot f'(x+1)}{[f(x+1)]^6}$.

$\Rightarrow g'(x) = \dfrac{4(x-2)^3 f(x+1) - 3(x-2)^4 f'(x+1)}{[f(x+1)]^4} = \dfrac{(x-2)^3[4f(x+1) - 3(x-2)f'(x+1)]}{[f(x+1)]^4}$.

Do đó: $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \\ 4f(x+1) - 3(x-2)f'(x+1) = 0 \end{array}\right.$.

Phương trình: $4f(x+1) - 3(x-2)f'(x+1) = 0$.

$\Leftrightarrow 4(-4x^4 - 16x^3 - 16x^2 + 3) - 3(x-2)(-16x^3 - 48x^2 - 32x) = 0$.

$\Leftrightarrow -16x^4 - 64x^3 - 64x^2 + 12 - 3(-16x^4 - 16x^3 + 64x^2 + 64x) = 0$.

$\Leftrightarrow -16x^4 - 64x^3 - 64x^2 + 12 + 48x^4 + 48x^3 - 192x^2 - 192x = 0$.

$\Leftrightarrow 32x^4 - 16x^3 - 256x^2 - 192x + 12 = 0 \Leftrightarrow 8x^4 - 4x^3 - 64x^2 - 48x + 3 = 0$.

Xét hàm số $h(x) = 8x^4 - 4x^3 - 64x^2 - 48x + 3$.

Ta có: $h'(x) = 32x^3 - 48x^2 - 128x + 12 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = x_1 \\ x = x_2 \\ x = x_3 \end{array}\right.$ với $x_1 < -1 < 0 < x_2 < 1 < 2 < x_3$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		x_1	-1		0	0	1	x_2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0		$+$		0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$h(x_1)$	$\nearrow -1$	$\nearrow$	3	$\nearrow h(x_2)$	$\searrow -105$	$\searrow h(x_3)$	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra phương trình $h(x)=0$ có 4 nghiệm phân biệt.

Mà $h(2)=-233 \Rightarrow x=2$ không là nghiệm của phương trình $h(x)=0$.

$\Rightarrow$ Phương trình $g'(x)=0$ có 5 nghiệm phân biệt.

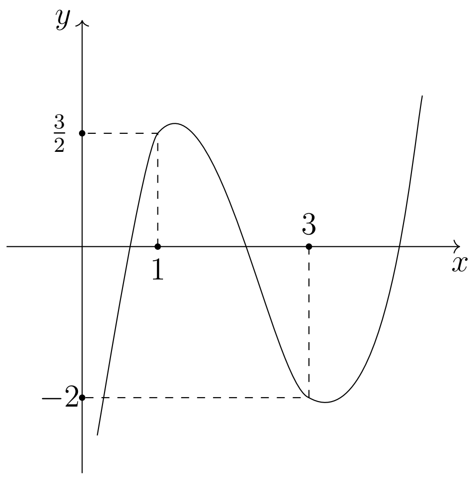
Vậy hàm số $g(x)=\dfrac{(x-2)^4}{[f(x+1)]^3}$ có 5 điểm cực trị.

Chọn đáp án C ☐

Câu 86.

Cho hàm đa thức bậc bốn $y=f(x)$, hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ Số điểm cực tiểu của hàm số $g(x)=f\left(x^4\right)-2x^3+1$ là

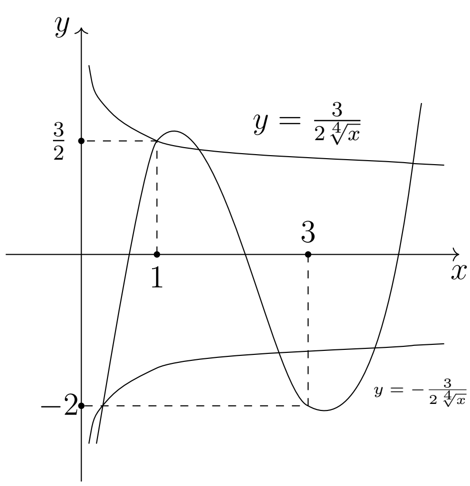
A 3. B 6. C 4. D 5.



Lời giải.

Ta có $g(x)=f\left(x^4\right)-2x^3+1 \Rightarrow g'(x)=4x^3\cdot f'\left(x^4\right)-6x^2=2x^2\cdot\left[2x\cdot f'\left(x^4\right)-3\right]$.

Xét $g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2=0 \\ f'\left(x^4\right)=\dfrac{3}{2x}.\ (*) \end{array}\right.$



Từ đồ thị, suy ra

$$(*) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x<0\\ f'\left(x^4\right)=-\dfrac{3}{2\sqrt[4]{x^4}}\end{cases}\\ \begin{cases}x>0\\ f'\left(x^4\right)=\dfrac{3}{2\sqrt[4]{x^4}}\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x<0\\ x^4=f \vee x^4=a \vee x^4=c \vee x^4=d\end{cases}\\ \begin{cases}x>0\\ x^4=1 \vee x^4=b \vee x^4=e\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-\sqrt[4]{f}\\ x=-\sqrt[4]{a}\\ x=-\sqrt[4]{c}\\ x=-\sqrt[4]{d}\\ x=1\\ x=\sqrt[4]{b}\\ x=\sqrt[4]{e}.\end{array}\right.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-\sqrt[4]{d}$		$-\sqrt[4]{c}$		$-\sqrt[4]{a}$		$-\sqrt[4]{f}$		0		1		$\sqrt[4]{b}$		$\sqrt[4]{e}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘		↗		↘		↗		↘		↘		↗		↘		↗	

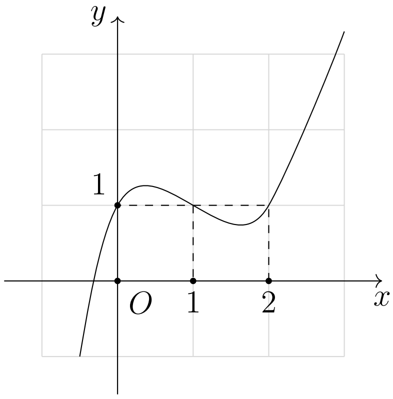
Vậy hàm số $g(x)$ có 4 điểm cực tiểu.

Chọn đáp án C ☐

Câu 87.

Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Số điểm cực đại của hàm số $g(x)=f(x)-\dfrac{1}{9}x^3$ là

A 4. B 1. C 2. D 3.



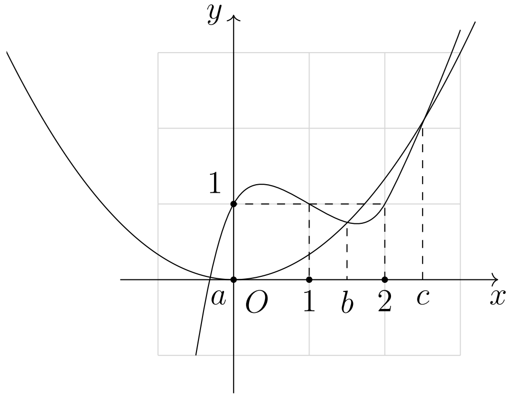
Lời giải.

Ta có $g'(x)=f'(x)-\dfrac{1}{3}x^2$.

$g'(x)=0 \Leftrightarrow f'(x)=\dfrac{1}{3}x^2$ (1).

Vẽ parabol (P): $y=\dfrac{1}{3}x^2$. Ta thấy (P) đi qua các điểm $\left(-1;\dfrac{1}{3}\right),(0;0),\left(1;\dfrac{1}{3}\right),\left(2;\dfrac{4}{3}\right),(3;3)$.

Parabol này cắt đồ thị $y=f'(x)$ tại các điểm có hoành độ lần lượt là $a\in(-1;0), b\in(1;2)$ và $c\in(2;+\infty)$. Suy ra (1) có các nghiệm là: $x=a, x=b, x=c$.



Bảng biến thiên của hàm $g(x) = f(x) - \dfrac{1}{9}x^3$ như sau:

x	$-\infty$		a		b		c		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘		↗		↘		↗	

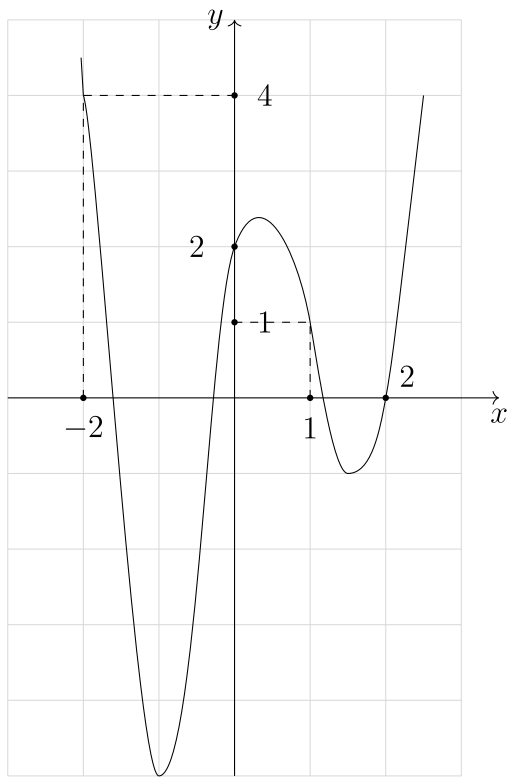
Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số đã cho có một điểm cực đại.

Chọn đáp án B □

Câu 88.

Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Số điểm cực đại của đồ thị hàm số $y = g(x) = f\left(x^2 - 4x + 3\right) - 3\left(x - 2\right)^2 + \dfrac{1}{2}(x - 2)^4$ là

(A) 3. (B) 7. (C) 4. (D) 5.



Lời giải.

Ta có: $g(x) = f\left(x^2 - 4x + 3\right) - 3\left(x - 2\right)^2 + \dfrac{1}{2}(x - 2)^4$.

$g'(x) = f'\left(x^2 - 4x + 3\right).2\left(x - 2\right) - 6\left(x - 2\right) + 2\left(x - 2\right)^3$.

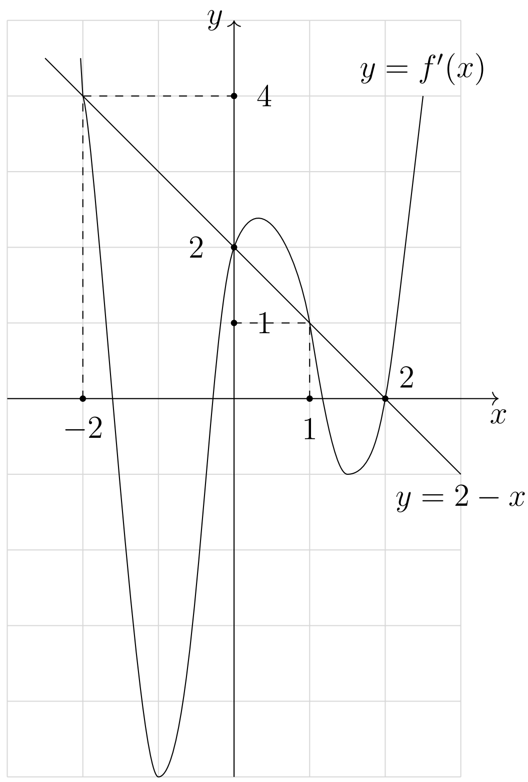
$= (x-2)\left(2f'\left(x^2-4x+3\right)-6+2\left(x-2\right)^2\right)$

$g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2\ (\text{ 1 nghiệm}) \\ f'\left(x^2-4x+3\right)=3-(x-2)^2\ \ (*) \end{array}\right.$.

Ta có

$$\begin{aligned}(*) \ &\Leftrightarrow\ f'\left(x^2-4x+3\right)=3-(x-2)^2 \\ &\Leftrightarrow\ f'\left(x^2-4x+3\right)=3-x^2+4x-4=-\left(x^2-4x+3\right)+2\end{aligned}$$

Đặt $t=x^2-4x+3$ suy ra phương trình trở thành $f'(t)=-t+2$.



Phương trình trên tương ứng với tương giao giữa đồ thị $y=f'(t)$ và đường thẳng $y=-t+2$.

Dựa vào hình vẽ trên, ta thấy phương trình có 3 nghiệm là $t=0$, $t=1$, $t=2$.

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=0 \\ t=1 \\ t=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-4x+3=0 \\ x^2-4x+3=1 \\ x^2-4x+3=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-4x+3=0 \\ x^2-4x+2=0 \\ x^2-4x+1=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1, x=3 \\ x=2-\sqrt{2}; x=2+\sqrt{2} \\ x=2-\sqrt{3}; x=2+\sqrt{3}. \end{array}\right.$

Từ đó, ta có bảng biến thiên của hàm $g(x)$ như sau:

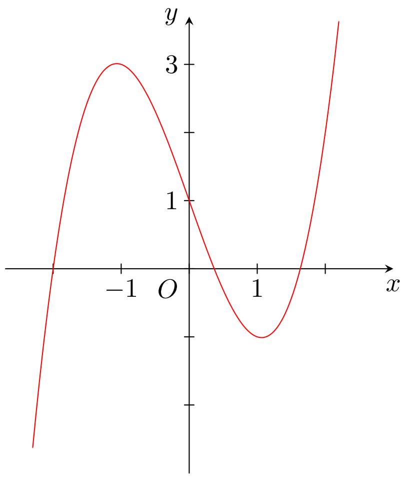
x	$-\infty$		$2-\sqrt{3}$		$2-\sqrt{2}$		1		2		3		$2+\sqrt{2}$		$2+\sqrt{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Dựa vào BBT trên, ta kết luận hàm số $g(x)$ có 3 điểm cực đại.

Chọn đáp án A □

Câu 89 (THPT Thanh Chương 1-Nghệ An-2021).

Cho hàm bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Số điểm cực trị của hàm số $y = [xf(x-1)]^2$ là



Ⓐ 9. Ⓑ 7. Ⓒ 6. Ⓓ 5.

Lời giải.

Đặt: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \Rightarrow f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$.

Ta có: đồ thị giao với trục Oy tại điểm $(0;1) \Rightarrow d = 1$.

Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có hai điểm cực trị là $(-1;3);(1;-1)$ nên

$$\Rightarrow \begin{cases} 3a - 2b + c = 0 \\ 3a + 2b + c = 0 \\ a + b + c + 1 = -1 \\ -a + b - c + 1 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ a = 1 \\ c = -3 \end{cases} \Rightarrow f(x) = x^3 - 3x + 1.$$

$\Rightarrow f(x-1) = (x-1)^3 - 3(x-1) + 1 = x^3 - 3x^2 + 3 \Rightarrow f'(x-1) = 3x^2 - 6x$.

$g(x) = [xf(x-1)]^2 \Rightarrow g'(x) = 2xf(x-1)[f(x-1) + xf'(x-1)]$.

$\Rightarrow g'(x) = 2x(x^3 - 3x^2 + 3)(4x^3 - 9x^2 + 3)$.

Suy ra $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^3 - 3x^2 + 3 = 0 \\ 4x^3 - 9x^2 + 3 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x \approx 2,532 \\ x \approx 1,347 \\ x \approx -0,879 \\ x \approx 2,076 \\ x \approx 0,694 \\ x \approx -0,52 \end{array}\right.$.

$g'(x)$ là phương trình bậc 7 và có 7 nghiệm phân biệt nên hàm số $g(x)$ có 7 điểm cực trị.

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 90. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = 4x^3 + 2x$ và $f(0) = 1$. Số điểm cực tiểu của hàm số $g(x) = f^3(x^2 - 2x - 3)$ là

Ⓐ 0. Ⓑ 2. Ⓒ 1. Ⓓ 3.

Lời giải.

Ta có: $f(x) = \int (4x^3 + 2x)dx = x^4 + x^2 + C$ và $f(0) = 1 \Rightarrow C = 1$.

Do đó ta có: $f(x) = x^4 + x^2 + 1 > 0$,

$forallx$.

Ta có: $g'(x) = 3(2x-2).f^2(x^2-2x-3).f'(x^2-2x-3)$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x-2=0 \\ 4\left(x^2-2x-3\right)^3 + 2\left(x^2-2x-3\right) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-1 \\ x=3 \end{array}\right..$$

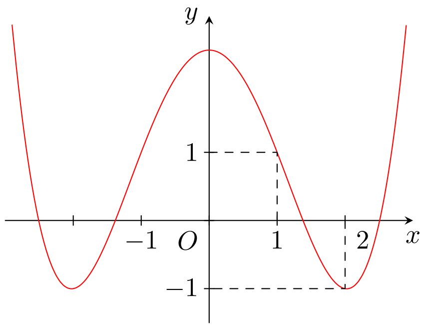
Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra hàm số $y = g(x)$ có hai cực tiểu.

Chọn đáp án B □

Câu 91 (Chuyên Vinh-2022). Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$. Biết rằng hàm số $y = f'(1-x^2)$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f\left(\dfrac{x^2-1}{x^2}\right) + \dfrac{2}{x}$ là

A 5. B 4. C 3. D 7.

Lời giải.

Ta có

$$g'(x) = \frac{2}{x^3}\cdot f'\left(\frac{x^2-1}{x^2}\right) - \frac{2}{x^2} = \frac{2}{x^2}\left[\frac{1}{x}\cdot f'\left(\frac{x^2-1}{x^2}\right) - 1\right]$$

$$\Rightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x}\cdot f'\left(\frac{x^2-1}{x^2}\right) - 1 = 0 \Rightarrow f'\left(\frac{x^2-1}{x^2}\right) = x \Leftrightarrow f'\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) = x$$

Đặt ta được $f'(1-t^2) = \dfrac{1}{t}$.

Xét hàm số $h(t) = \dfrac{1}{t}(t \neq 0) \Rightarrow h'(t) = -\dfrac{1}{t^2} < 0, \forall t \neq 0$.

Vẽ đồ thị hàm $h(t) = \dfrac{1}{t}$ trên cùng hệ trục toạ độ với hàm số $y = f'(1-t^2)$.

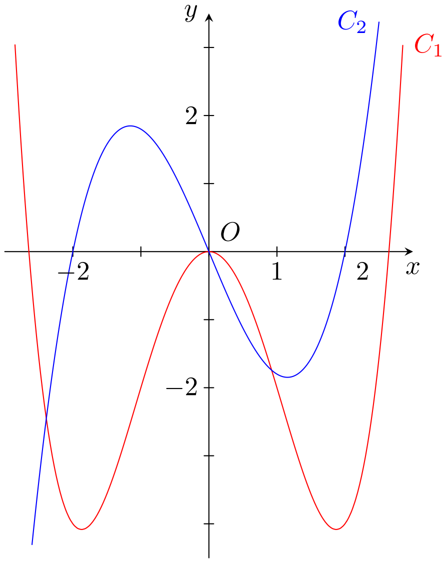
Từ đồ thị suy ra $g'(x) = 0$ có 5 nghiệm đơn.

Vậy hàm số $g(x) = f\left(\dfrac{x^2-1}{x^2}\right) + \dfrac{2}{x}$ có 5 điểm cực trị.

Chọn đáp án (A) □

Câu 92 (THPT Lê Thánh Tông-HCM-2022).

Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị (C_1) và $y = f'(x)$ có đồ thị (C_2) như hình vẽ dưới.



Số điểm cực đại của đồ thị hàm số $g(x) = f\left[e^{-x}f(x)\right]$ trên khoảng $(-\infty; 3)$ là

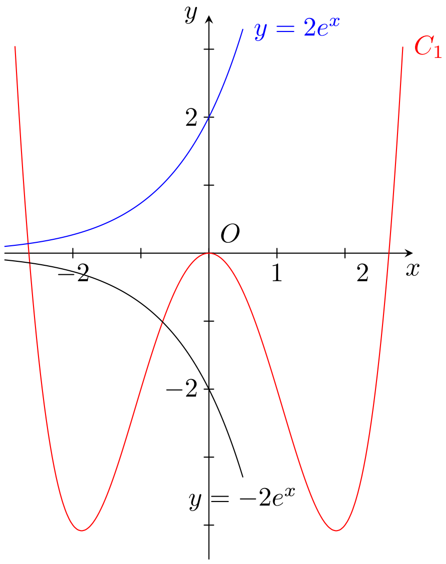
(A) 5. (B) 3. (C) 6. (D) 4.

Lời giải.

$$g'(x) = \left[-e^{-x}f(x) + e^{-x}f'(x)\right].f'\left[e^{-x}f(x)\right] = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -f(x)+f'(x)=0 \\ e^{-x}f(x)=-2 \\ e^{-x}f(x)=0 \\ e^{-x}f(x)=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=f'(x) \\ f(x)=0 \\ f(x)=-2e^x \\ f(x)=2e^x \end{array}\right. .$$

$f(x) = f'(x)$ có bốn nghiệm đơn trong đó 3 nghiệm phân biệt nhỏ hơn 3 (có một nghiệm $x = 0$) và một nghiệm lớn hơn 3.

$f(x) = 0$ có hai nghiệm đơn phân biệt và một nghiệm bội chẵn $x = 0$.



$f(x) = 2e^x$ có một nghiệm đơn.

$f(x) = -2e^x$ có hai nghiệm đơn phân biệt.

Như vậy, trên khoảng $(-\infty; 3)$ đạo hàm$g'(x)$ đổi dấu qua 8 điểm nên số điểm cực đại và cực tiểu bằng nhau và bằng 4.

Chọn đáp án (D) □

Câu 93. (Sở Hà Tình 2022) Cho hàm số bậc ba $f(x)$ và hàm số $g(x) = f(x+1)$ thoả mãn $(x-1)g'(x+3) = (x+1)g'(x+2)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số $y = f\left(2x^2 - 4x + 5\right)$ là

(A) 1. (B) 3. (C) 2. (D) 5.

Lời giải.

Có $g(x) = f(x+1) \Rightarrow g'(x) = f'(x+1) \Rightarrow g'(x+3) = f'(x+4)$; $g'(x+2) = f'(x+3)$.

Thay vào giả thiết đã cho có: $(x-1)g'(x+3) = (x+1)g'(x+2) \Leftrightarrow (x-1)f'(x+4) = (x+1)f'(x+3)$ $(*)$.

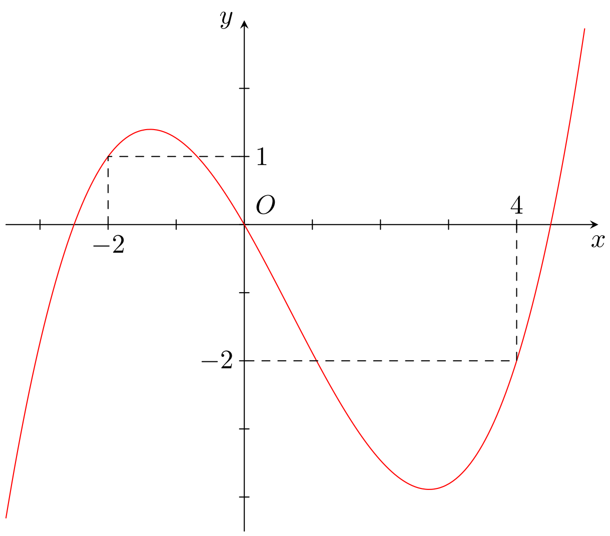
Thay $x = -1$ vào hai vế của $(*)$ có $f'(3) = 0$; thay $x = 1$ vào hai vế của $(*)$ có $f'(4) = 0$.

Do đó $f'(x)$ là đa thức bậc hai có 2 nghiệm $x_1 = 3$; $x_2 = 4$ nên $f'(x) = a(x-3)(x-4)$.

Khi đó hàm số $y = f\left(2x^2 - 4x + 5\right)$ có đạo hàm˙ $y' = (4x-4)f'\left(2x^2 - 4x + 5\right) = 4a(x-1)\left(2x^2 - 4x + 5 - 3\right)\left(2x^2 - 4x + 5 - 4\right) = 8a(x-1)^3\left(2x^2 - 4x + 1\right)$ đổi dấu 3 lần nên hàm số có 3 điểm cực trị.

Chọn đáp án (B) □

Câu 94 (Sở Thanh Hóa 2022). Cho hàm số bậc bốn $f(x)$ có đồ thị của đạo hàm như hình vẽ:



Số điểm cực tiểu của hàm số $g(x) = 4f\left(x^2 - 4\right) + x^4 - 8x^2$ là

(A) 4. (B) 7. (C) 3. (D) 5.

Lời giải.

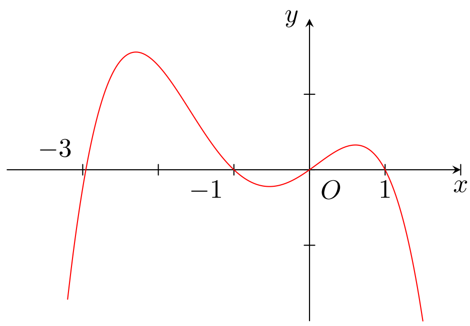
Có $g'(x) = 8xf'\left(x^2 - 4\right) + 4x^3 - 16x = 8x\left(f'\left(x^2 - 4\right) + \dfrac{x^2 - 4}{2}\right)$.

Xét $f'(x) + \dfrac{x}{2} = 0 \Leftrightarrow f'(x) = -\dfrac{x}{2} \Leftrightarrow x = -2$; $x = 0$; $x = 4$. Suy ra $f'(x) + \dfrac{x}{2}$ là đa thức bậc ba có 3 nghiệm là $x = -2$; $x = 0$; $x = 4$ nên $f'(x) + \dfrac{x}{2} = a(x+2)x(x-4), (a > 0; \lim_{x \to +\infty} f'(x) = +\infty)$
.

Do đó $g'(x) = 8ax\left(x^2 - 4 + 2\right)\left(x^2 - 4\right)\left(x^2 - 4 - 4\right) = 8ax\left(x^2 - 2\right)\left(x^2 - 4\right)\left(x^2 - 8\right)$ đổi dấu từ âm sang dương khi qua các điểm $x=-2\sqrt{2}$; $x=-\sqrt{2}$; $x=\sqrt{2}$; $x=2\sqrt{2}$ nên $g(x)$ có 4 điểm cực tiểu.

Chọn đáp án (A) □

Câu 95 (Sở Bạc Liêu 2022). Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị có 3 điểm cực trị như hình vẽ.



Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=f\left(x^3-3x+2\right)$ là

(A) 5. (B) 11. (C) 9. (D) 7.

Lời giải.

Ta có $g'(x)=\left(3x^2-3\right)f'\left(x^3-3x+2\right)$.

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}3x^2-3=0\\ f'\left(x^3-3x+2\right)=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\ x=-1\\ x^3-3x+2=a\in(-3;-1)\\ x^3-3x+2=a\in(-1;0)\\ x^3-3x+2=a\in(0;1)\end{array}\right..$$

Đặt $h(x)=x^3-3x+2 \Rightarrow h'(x)=3x^2-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\ x=-1\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Với $x^3-3x+2=a\in(-3;-1)$ có 1 nghiệm.

Với $x^3-3x+2=a\in(-1;0)$ có 1 nghiệm.

Với $x^3-3x+2=a\in(0;1)$ có 3 nghiệm.

Vậy $g(x)=f\left(x^3-3x+2\right)$ có 7 điểm cực trị.

Chọn đáp án (D) □

Câu 96 (Sở Hà Tĩnh 2022). Cho hàm số $y=f(x)$ là hàm số đa thức bậc bốn và có bảng biến thiên như hình bên. Tìm số điểm cực trị của hàm số $g(x)=2^{-\frac{1}{x^4}}\left[f(2x+1)\right]^3$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-2	↗	3	↘	-2	↗	$+\infty$

(A) 7. (B) 5. (C) 4. (D) 6.

Lời giải.

Ta có:

$g'(x) = \frac{4}{x^5} 2^{-\frac{1}{x^4}} . \ln 2 . [f(2x+1)]^3 + 2^{-\frac{1}{x^4}} .6. [f(2x+1)]^2 . f'(2x+1).$

$= 2.2^{-\frac{1}{x^4}} . [f(2x+1)]^2 \left[\frac{2\ln 2}{x^5} f(2x+1) + 3f'(2x+1)\right]$

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} [f(2x+1)]^2 = 0(1) \\ \frac{2\ln 2}{x^5} f(2x+1) + 3f'(2x+1) = 0(2) \end{array}\right.$.

Xét phương trình $[f(2x+1)]^2 = 0$ có các nghiệm đều là nghiệm bội chẵn do đó $g'(x)$ không đổi dấu khi qua các nghiệm đó.

Xét phương trình $\frac{2\ln 2}{x^5} f(2x+1) + 3f'(2x+1) = 0$. Đặt $2x+1 = t$; phương trình tương đương. $\frac{64\ln 2}{(t-1)^5} f(t) + 3f'(t) = 0$ $(*)$.

Do $f(t)$ và $f'(t)$ không đồng thời bằng 0 nên $\frac{64\ln 2}{(t-1)^5} + 3\frac{f'(t)}{f(t)} = 0$ $(*)$.

Dựa vào bảng biến thiên ta có: $f(t) = a(t-t_1)(t-t_2)(t-t_3)(t-t_4)$.

Tính $f'(t)$ thay vào $(*)$ ta được phương trình: $\frac{64\ln 2}{(t-1)^5} + \frac{3}{t-t_1} + \frac{3}{t-t_2} + \frac{3}{t-t_3} + \frac{3}{t-t_4} = 0$.

Xét hàm số:

$h(t) = \frac{64\ln 2}{(t-1)^5} + \frac{3}{t-t_1} + \frac{3}{t-t_2} + \frac{3}{t-t_3} + \frac{3}{t-t_4}$; $h'(t) = -\frac{320\ln 2}{(t-1)^6} - \frac{3}{(t-t_1)^2} - \frac{3}{(t-t_2)^2} - \frac{3}{(t-t_3)^2} - \frac{3}{(t-t_4)^2} < 0; \forall t \in \mathbb{R}$.

Ta có bảng biến thiên của $h(t)$:

t	$-\infty$		t_1		t_2		t_3		1		t_4		$+\infty$
$h'(t)$		$-$	‖	$-$	‖	$-$	‖	$-$	‖	$-$	‖	$-$	
$h(t)$	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0; $y=0$

Phương trình có 4 nghiệm nên hàm số có 4 điểm cực trị.

Chọn đáp án (C) □

Câu 97 (Sở Thái Nguyên 2022). Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đạo hàm $f'(x) = (x+1)(2x^2-3x-9), \forall x \in \mathbb{R}$. Hàm số $g(x) = f(x) + x^3 - 3x^2 - 9x + 6$ có bao nhiêu điểm cực trị?

(A) 2. (B) 1. (C) 0. (D) 3.

Lời giải.

Vì hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên hàm số $g(x) = f(x) + x^3 - 3x^2 - 9x + 6$ liên tục trên $\mathbb{R}$.
Ta có: $g'(x) = f'(x) + 3x^2 - 6x - 9 = (x+1)(2x^2 - 3x - 9) + 3(x+1)(x-3)$.
$= (x+1)(x-3)(2x-6)$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 3 \\ x = -3 \end{array}\right. .$$

Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-3		-1		3		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	↘		↗		↘		↗	$+\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra hàm số có 3 điểm cực trị.

Chọn đáp án (D) □

Câu 98 (Sở Thái Nguyên 2022). Cho hàm số đa thức bậc bốn $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

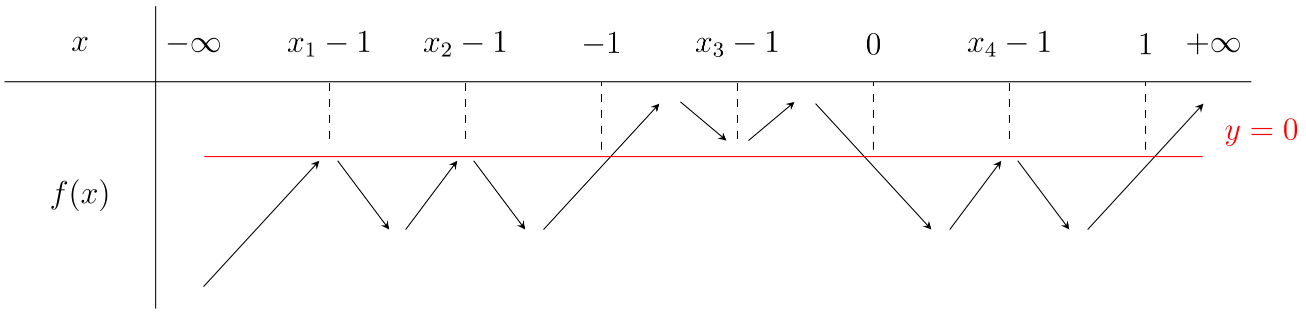
x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-2	↗	3	↘	-2	↗	$+\infty$

Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = (x^3 - x)[f(x+1)]^2$ là

(A) 11. (B) 8. (C) 13. (D) 10.

Lời giải.

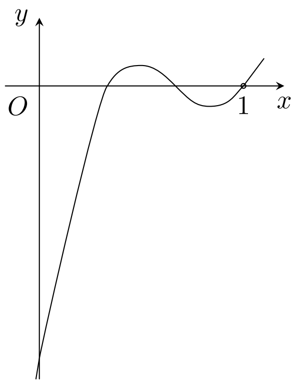
Từ bảng biến thiên ta thấy rằng $f(x) = 0$ có 4 nghiệm phân biệt, gọi 4 nghiệm đó lần lượt là x_1, x_2, x_3, x_4 với $x_1 < -1 < x_2 < 0 < x_3 < 1 < x_4$. Khi đó:
$g(x) = (x^3 - x)[a(x+1-x_1)(x+1-x_2)(x+1-x_3)(x+1-x_4)]^2$ (với $a > 0$).
Ta có $g(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{0; \pm 1; x_1 - 1; x_2 - 1; x_3 - 1; x_4 - 1\}$, trong đó $x_1 - 1, x_2 - 1, x_3 - 1, x_4 - 1$ là các nghiệm kép. Ta có bảng biến thiên của $g(x)$ như sau:



Vậy $g(x)$ có 10 điểm cực trị.

Chọn đáp án D □

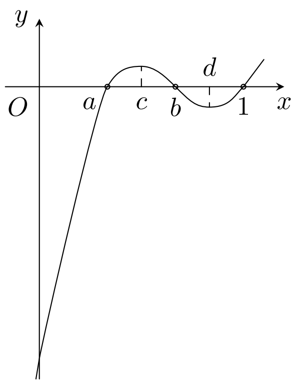
Câu 99 (Chuyên Lam Sơn 2022). Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ



Tìm số điểm cực trị của hàm số $y = f^2(g(x))$ với $g(x) = x^2 - 4x + 2\sqrt{4x - x^2}$

A 17. B 21. C 23. D 19.

Lời giải.



Xét hàm số $g(x) = x^2 - 4x + 2\sqrt{4x - x^2}$:

Tập xác định: $[0; 4]$.

$g'(x) = 2x - 4 + \dfrac{2(2-x)}{\sqrt{4x - x^2}} = 2(x-2)\dfrac{\sqrt{4x-x^2} - 1}{\sqrt{4x-x^2}}, \forall x \in (0; 4)$.

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ \sqrt{4x - x^2} = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = 2 \pm \sqrt{3} \end{array}\right.$.

$y = f^2(g(x)) \Rightarrow y' = 2f(g(x)) \cdot g'(x) f'(g(x))$.

$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(g(x)) = 0 \ (1) \\ g'(x) = 0 \ (2) \\ f'(g(x)) = 0 \ (3) \end{array}\right.$.

$(1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} g(x) = a \ (4) \\ g(x) = b \ (5) \\ g(x) = 1 \ (6) \end{array}\right. (0 < a < b < 1)$.

$(3) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} g(x) = c \ (7) \\ g(x) = d \ (8) \end{array}\right. (0 < a < c < b < d < 1)$.

Mỗi phương trình (4), (5), (7), (8) có 4 nghiệm phân biệt

Phương trình (6) có nghiệm kép $x = 1$

Phương trình (2) có 3 nghiệm phân biệt

Tất cả các nghiệm của các phương trình (2), (4), (5), (7), (8) là phân biệt và y' đổi dấu qua các nghiệm đó.

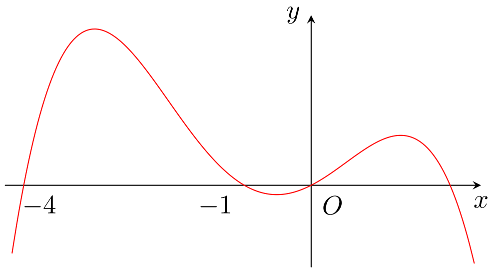
y' không đổi dấu qua $x = 1$.

Vậy hàm số đã cho có 19 điểm cực trị.

Chọn đáp án D □

Câu 100 (Chuyên Lương Văn Tụy – Ninh Bình – 2022).

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị có 3 điểm cực trị như hình dưới đây. Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f\left(x^3 - 3x + 2\right)$ là



A 5. B 9. C 11. D 7.

Lời giải.

Ta có $g'(x) = \left(3x^2 - 3\right) f'\left(x^3 - 3x + 2\right)$, $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm 1 \\ x^3 - 3x + 2 = m_1 \ (1) \\ x^3 - 3x + 2 = m_2 \ (2) \\ x^3 - 3x + 2 = m_3 \ (3) \end{array}\right.$.

$m_1 \in (-4; -1); m_2 \in (-1; 0); m_3 \in (0; 1)$.

Xét hàm số $y = x^3 - 3x + 2$, có $y' = 3x^2 - 3$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$	$-\infty$	↗	4	↘	0	↗	$+\infty$

Với $m_1 \in (-4; -1) \Rightarrow (1)$ có 1 nghiệm

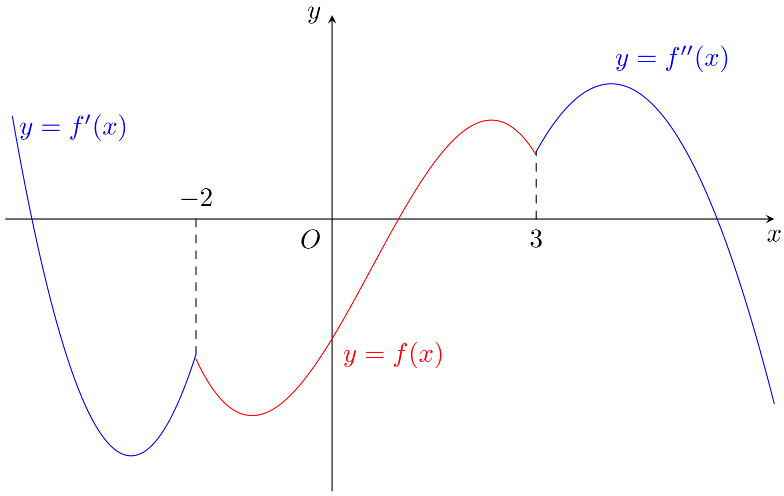
Với $m_2 \in (-1; 0) \Rightarrow (2)$ có 1 nghiệm

Với $m_3 \in (0; 1) \Rightarrow (3)$ có 3 nghiệm phân biệt

Vậy $g'(x) = 0$ có 7 nghiệm bội lẻ, nên có 7 điểm cực trị.

Chọn đáp án D □

Câu 101 (Sở Phú Thọ 2022). Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp hai liên tục trên $\mathbb{R}$. Hình vẽ bên dưới là đồ thị hàm số $y = f'(x)$ trên $(-\infty; -2]$, đồ thị hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-2; 3]$ và đồ thị hàm số $y = f''(x)$ trên $[3; +\infty)$. Số điểm cực trị tối đa của hàm số $y = f(x)$ là

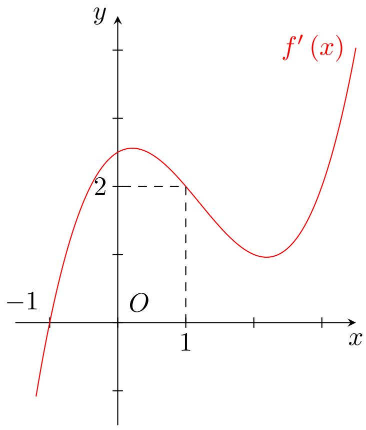


Ⓐ 7. Ⓑ 5. Ⓒ 3. Ⓓ 6.

Lời giải.

Đầu tiên từ hình vẽ, ta dễ dàng nhận thấy $f(x)$ có 2 điểm cực trị trên đoạn $[-2;3]$.
Tiếp đến xét trên $(-\infty;-2]$, ta thấy phương trình $f'(x)=0$ có 1 nghiệm nên $f(x)$ có 1 điểm cực trị. Cuối cùng, xét trên $[3;+\infty)$, ta nhận thấy phương trình $f''(x)=0$ có 1 nghiệm nên suy ra $f'(x)=0$ có tối đa 2 nghiệm trên $[3;+\infty)$, tức $f(x)$ có tối đa 2 điểm cực trị trên $[3;+\infty)$.
Vậy tổng cộng số điểm cực trị tối đa của hàm số $y=f(x)$ là 5 điểm cực trị.
Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 102 (Sở Hải Dương 2022). Cho $f(x)$ là hàm số đa thức bậc bốn và hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị là đường cong như hình dưới đây.



Hỏi hàm số $g(x)=f(\sin x-1)+\dfrac{\cos 2x}{4}$ có bao nhiêu điểm cực trị thuộc khoảng $(0;2\pi)$?
Ⓐ 3. Ⓑ 5. Ⓒ 4. Ⓓ 2.

Lời giải.

Ta có $g(x)=f(\sin x-1)+\dfrac{1}{4}-\dfrac{\sin^2 x}{2}\Rightarrow g'(x)=\cos x.f'(\sin x-1)-\sin x.\cos x$.

Xét $g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos x=0\ (1)\\ f'(\sin x-1)-\sin x=0\ (2)\end{array}\right.$.

(1) $\Leftrightarrow\cos x=0\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbb{Z}$. Vì $x\in(0;2\pi)\Rightarrow 0<\dfrac{\pi}{2}+k\pi<2\pi\Leftrightarrow k\in\{0;1\}$.
(2) $\Leftrightarrow f'(\sin x-1)-\sin x=0\Leftrightarrow f'(\sin x-1)=\sin x$.

Đặt $t = \sin x - 1, x \in (0; 2\pi) \Rightarrow t \in (-2; 0)$. Khi đó:

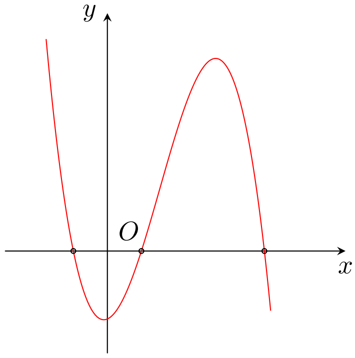
$f'(t) = t + 1, t \in (-2; 0) \Leftrightarrow t = -1 \Leftrightarrow \sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Vì $x \in (0; 2\pi) \Rightarrow 0 < k\pi < 2\pi \Leftrightarrow k \in \{1\}$.

Vậy hàm số có 3 điểm cực trị thuộc khoảng $(0; 2\pi)$.

Chọn đáp án A □

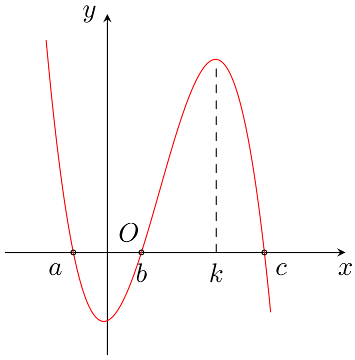
Câu 103 (Chuyên Thái Bình 2022). Cho hàm đa thức bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ



Số điểm cực tiểu của hàm số $y = \sqrt[3]{(f(x))^2}$ là

(A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 5.

Lời giải.



Đặt $g(x) = \sqrt[3]{(f(x))^2}$.

$g'(x) = \dfrac{2f'(x)}{3\sqrt[3]{f(x)}}$.

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = k \end{array}\right.$.

$g'(x) = 0$ không xác định $\Leftrightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = a \\ x = b \\ x = c \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên hàm số $y = g(x)$:

x	$-\infty$		a		0		b		k		c		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	$\|$	$+$	0	$-$	$\|$	$+$	0	$-$	$\|$	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$		$\searrow$	0	$\nearrow$		$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy hàm số đã cho có 3 điểm cực tiểu.

Chọn đáp án (C) □

Câu 104 (Cụm trường Nam Định 2022).

Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	0

Hàm số $g(x) = \dfrac{f(x)}{x^3}$ có bao nhiêu điểm cực trị trên khoảng $(0; +\infty)$?

(A) Vô số. (B) 1. (C) 2. (D) 0.

Lời giải.

Ta có $g'(x) = \dfrac{x^3 f'(x) - 3x^2 f(x)}{x^6} = \dfrac{x f'(x) - 3f(x)}{x^4}$.

Từ bảng biến thiên, trên khoảng $(0; +\infty)$ hàm số $f(x)$ đồng biến nên $f'(x) \geq 0$.

Hơn nữa $f(x) < 0, \forall x \in (0; +\infty)$.

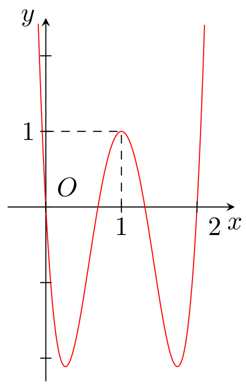
Do đó $g'(x) = \dfrac{x f'(x) - 3f(x)}{x^4} > 0$, $\forall x \in (0; +\infty)$.

Vậy hàm số $g(x)$ không có điểm cực trị trên khoảng $(0; +\infty)$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 105 (THPT Hoàng Hoa Thám-Đà Nẵng 2022).

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ (với $a \neq 0; \{b, c, d, e\} \subset \mathbb{R}$) và $f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Biết đồ thị hàm số $y = f'(x) + x^2 - 2x$ tiếp xúc với trục hoành tại điểm có hoành độ $x = 1$. Tích các điểm cực đại của hàm số $g(x) = f\left(x^2 - 2\right) + \dfrac{x^6}{3} - 3x^4 + 8x^2$ là

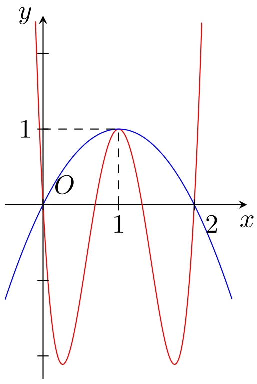
(A) -2. (B) 1. (C) 4. (D) 2.

Lời giải.

Xét $g(x) = f\left(x^2 - 2\right) + \dfrac{x^6}{3} - 3x^4 + 8x^2$ có $g'(x) = 2xf'\left(x^2 - 2\right) + 2x^5 - 12x^3 + 16x$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x\left[f'\left(x^2 - 2\right) + x^4 - 6x^2 + 8\right] = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ f'\left(x^2 - 2\right) = -x^4 + 6x^2 - 8 \ (*) \end{array}\right.$$

Đặt $t = x^2 - 2$. Khi đó, $(*) \Leftrightarrow f'(t) = -t^2 + 2t$. Các nghiệm của phương trình này là hoành độ giao điểm của hai đồ thị hàm số $y = f'(t)$ và $y = -t^2 + 2t$. Vẽ hai đồ thị hàm số trên cùng hệ trục ta được:



Từ đồ thị ta suy ra $\left[\begin{array}{l} t = 0 \text{ (t/m)} \\ t = 1 \text{ (KTM)} \\ t = 2 \text{ (t/m)} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - 2 = 0 \\ x^2 - 2 = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm\sqrt{2} \\ x = \pm 2 \end{array}\right.$

(Với $t = 1$ loại vì là nghiệm bội chẵn)

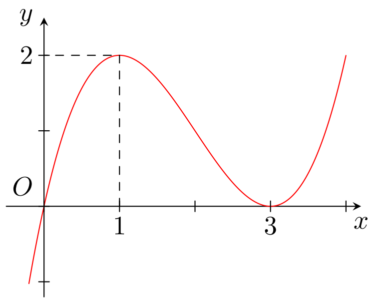
Bảng xét dấu $g'(x)$:

x	$-\infty$		-2		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Vậy các điểm cực đại của hàm số $g(x)$ là $x = \pm\sqrt{2}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 106 (Sở Vĩnh Phúc 2022). Cho hàm số $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e, (a \neq 0)$. Hàm số $f'(1 - x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f\left(\dfrac{x^2 - 1}{x^2}\right) - x^2$ là

(A) 10. (B) 6. (C) 8. (D) 4.

Lời giải.

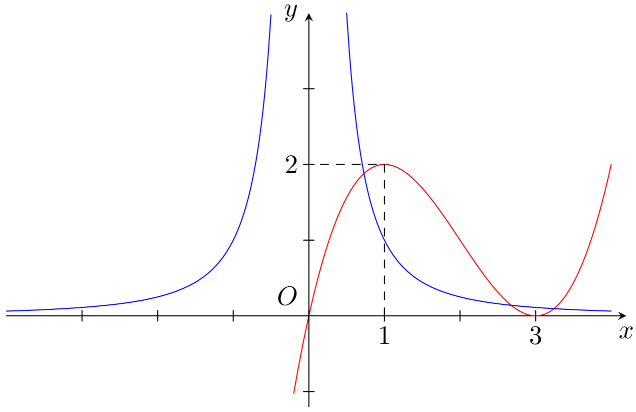
Ta có: $g(x) = f\left(\dfrac{x^2 - 1}{x^2}\right) - x^2 = f\left(1 - \dfrac{1}{x^2}\right) - x^2$.

$g'(x) = \left(1 - \dfrac{1}{x^2}\right)' f'\left(1 - \dfrac{1}{x^2}\right) - 2x = \dfrac{2}{x^3} f'\left(1 - \dfrac{1}{x^2}\right) - 2x$.

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{2}{x^3} f'\left(1 - \dfrac{1}{x^2}\right) = 2x \Leftrightarrow f'\left(1 - \dfrac{1}{x^2}\right) = \dfrac{1}{\left(\dfrac{1}{x^2}\right)^2}\ (*)$.

Nhận xét: Số cực trị của hàm số $g(x) = f\left(\frac{x^2-1}{x^2}\right) - x^2$ là số giao điểm (không tính điểm tiếp xúc) của đồ thị hàm số $y = f'\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)$ và đồ thị hàm số $y = \frac{1}{\left(\frac{1}{x^2}\right)^2}$.

Vẽ đồ thị hàm số $h(x) = \frac{1}{x^2}$ trên cùng một hệ trục với đồ thị hàm số $y = f'(1-x)$, ta được:



$$(*) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{1}{x^2} = a \in (0;1) \\ \frac{1}{x^2} = b \in (1;3) \\ \frac{1}{x^2} = c \in (3;+\infty) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 = \frac{1}{a} \\ x^2 = \frac{1}{b} \\ x^2 = \frac{1}{c} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm\sqrt{\frac{1}{a}} \\ x = \pm\sqrt{\frac{1}{b}} \\ x = \pm\sqrt{\frac{1}{c}} \end{array}\right..$$

Vậy hàm số có 6 điểm cực trị.

Chọn đáp án (B) □

Câu 107 (Chuyên Hùng Vương – Gia Lai 2022).

Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^5(x+1)^4(x-2)^3$. Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$ là

(A) 1. (B) 0. (C) 3. (D) 2.

Lời giải.

Ta có: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 2 \\ x = 0 \end{array}\right.$ và $g'(x) = \frac{2}{(x+1)^2} f'\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{x-1}{x+1} = -1 \\ \frac{x-1}{x+1} = 2 \\ \frac{x-1}{x+1} = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -3 \\ x = 1 \end{array}\right..$$

Lại có $x = 0$ là nghiệm bội chẵn nên suy ra hàm số $g(x)$ có 2 điểm cực trị.

Chọn đáp án (D) □

Câu 108 (Chuyên Thái Bình 2022). Cho hàm số $y = f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 1$. Số điểm cực trị của hàm số $y = f(f(x))$ bằng

(A) 13. (B) 10. (C) 3. (D) 11.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 24x$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 12x^3 - 12x^2 - 24x = 0 \Leftrightarrow x = 0, x = -1, x = 2$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-4	↗	1	↘	-31	↗	$+\infty$

Cách 1: Ta có $y' = f'(f(x)).f'(x)$, $y' = 0 \Leftrightarrow f'(f(x)).f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'(x) = 0 (1) \\ f'(f(x)) = 0 (2) \end{array}\right.$.

$(1) \Leftrightarrow x = -1; x = 0; x = 2$.

$(2) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = -1 \ (3) \\ f(x) = 0 \ (4) \\ f(x) = 2 \ (5) \end{array}\right.$

Theo bảng biến thiên thì (3) và (4) có bốn nghiệm phân biệt và (5) có hai nghiệm phân biệt. Do đó phương trình $y' = 0$ có 13 nghiệm phân biệt và y' đổi dấu khi đi qua các nghiệm đó.

Vậy hàm số đã cho có 13 điểm cực trị.

Cách 2: Sử dụng phương pháp ghép trục.

Đặt $g(x) = f(f(x))$, ta có bảng biến thiên của $g(x)$ như sau

x	$-\infty$				-1			0			2				$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	2	0	-1	-4	-1	0	1	0	-1	-31	-1	0	2	$+\infty$
$g(x)$	$+\infty$	-31	1	-4	833	-4	1	-12	1	-4	$f(-31)$	-4	1	-31	$+\infty$

Nhìn vào bảng biến thiên ta thấy hàm số đã cho có 13 điểm cực trị.

Chọn đáp án (A) □

Câu 109 (Sở Nghệ An 2022). Cho hàm số $f(x) = -x^3 + 3x^2 - 3x - 1$. Biết hàm số $g(x) = ax^4 + bx^2 + c$ $(a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0)$ nhận $x = 1$ là điểm cực trị. Số điểm cực trị của hàm số $y = g(f(x))$ là

(A) 4. (B) 6. (C) 5. (D) 3.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = -3x^2 + 6x - 3 = -3(x-1)^2 \leq 0$, suy ra $f(x)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Nhận xét: Hàm số $g(x) = ax^4 + bx^2 + c$ $(a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0)$ nhận $x = 1$ là điểm cực trị nên $g(x)$ có các điểm cực trị là $x = \pm 1$; $x = 0$.

Ta có $y' = f'(x) \cdot g'(f(x)) \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'(x) = 0 \\ g'(f(x)) = 0 \end{array}\right.$.

Phương trình $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ nghiệm kép.

Phương trình $g'(f(x)) = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = \pm 1 \\ f(x) = 0 \end{array}\right.$ (mỗi phương trình có một nghiệm).

Vậy hàm số $y = g(f(x))$ có ba điểm cực trị.

Chọn đáp án D □

Câu 110 (THPT Hoàng Hoa Thám-Quảng Ninh-2022).

Cho hàm số $f'(x) = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 19$. Số cực trị của hàm số $y = f\left(f'(x)\right)$ bằng

A 6. B 7. C 4. D 5.

Lời giải.

Ta có: $f''(x) = 12x^3 + 12x^2 - 24x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -2 \end{array}\right.$.

Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-2		0		1		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f'(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-13	$\nearrow$	19	$\searrow$	14	$\nearrow$	$+\infty$

$y = f\left(f'(x)\right) \Rightarrow y' = f''(x).f'\left(f'(x)\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f''(x) = 0 \\ f'(x) = a \approx -2,5 \\ f'(x) = b \approx -1,2 \end{array}\right.$.

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 \\ x = 0 \\ x = 1 \end{array}\right.$

$f'(x) = a$ có hai nghiệm phân biệt.

$f'(x) = b$ có hai nghiệm phân biệt.

Từ đó, ta được phương trình $y' = 0$ có 7 nghiệm phân biệt và y' đổi dấu qua các nghiệm này.

Vậy hàm số đã cho có 7 điểm cực trị.

Chọn đáp án B □

Câu 111 (Sở Cà Mau 2022). Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = 4x^3 - 16x$ và $f(0) = 3$. Gọi k là số điểm cực tiểu của hàm số $g(x) = \left[f\left(x^2\right)\right]^2 + 1$. Tính giá trị biểu thức $T = -2k^2 + k - 5$.

A $T = -33$. B $T = -11$. C $T = -20$. D $T = -96$.

Lời giải.

Ta có $f(x) = \displaystyle\int f'(x)dx = \int \left(4x^3 - 16x\right) dx = x^4 - 8x^2 + C$.

Mà $f(0) = 3 \Rightarrow C = 3$.

Vậy $f(x) = x^4 - 8x^2 + 3$.

$g'(x) = 2.2x.f(x^2).f'(x^2)$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ f(x^2) = 0 \\ f'(x^2) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ (x^2)^4 - 8(x^2)^2 + 3 = 0 \\ 4(x^2)^3 - 16(x^2) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{\sqrt{4 \pm \sqrt{13}}} \\ x = \pm\sqrt{2} \end{array}\right..$$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		$-\sqrt{\sqrt{4+\sqrt{13}}}$		$-\sqrt{2}$		$-\sqrt{\sqrt{4-\sqrt{13}}}$		0		$\sqrt{\sqrt{4-\sqrt{13}}}$		$\sqrt{2}$		$\sqrt{\sqrt{4+\sqrt{13}}}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Từ bảng xét dấu, ta thấy số điểm cực tiểu của hàm số $g(x)$ là $4 \Rightarrow k = 4$.

Vậy $T = -33$.

Chọn đáp án A □

Câu 112 (THPT Thanh Miện 2-Hải Dương 2022).

Cho hàm số bậc bốn $f(x)$ có bảng xét dấu như sau

x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	3	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = x^4[f(x+1)]^2$ là

A 9. B 7. C 11. D 5.

Lời giải.

Từ bảng biến thiên ta tìm được hàm số $f(x) = 5x^4 - 10x^2 + 3$.

Ta có: $g(x) = x^4[f(x+1)]^2 \Rightarrow g'(x) = 4x^3[f(x+1)]^2 + 2x^4 f'(x+1)f(x+1)$.

$$\text{Xét } g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^3 = 0 \ (1) \\ f(x+1) = 0 \ (2) \\ 2f(x+1) + xf'(x+1) = 0 \ (3) \end{array}\right..$$

Xét (1): phương trình có nghiệm bội lẻ $x = 0$.

Xét (2): dựa vào bảng biến thiên ta suy ra phương trình $f(x+1) = 0$ có 4 nghiệm phân biệt khác 0.

Xét (3). Đặt $x + 1 = t \Rightarrow x = t - 1$. Khi đó ta có:

$2f(t) + (t-1)f'(t) = 0 \Leftrightarrow 30t^4 - 20t^3 - 40t^2 + 20t + 6 = 0$.

Đặt $h(t) = 30t^4 - 20t^3 - 40t^2 + 20t + 6 \Rightarrow h'(t) = 120t^3 - 60t^2 - 80t + 20$.

$$h'(t) = 0 \Leftrightarrow 6t^3 - 3t^2 - 4t + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = \dfrac{-3 \pm \sqrt{33}}{12} \end{array}\right..$$

Bảng biến thiên của hàm số $h(t)$:

x	$-\infty$		$\frac{-3-\sqrt{33}}{12}$		$\frac{-3+\sqrt{33}}{12}$		1		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-13{,}61$	$\nearrow$	$8{,}32$	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

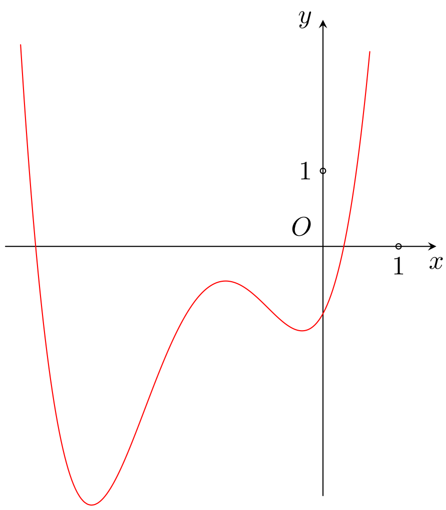
Dựa vào bảng biến thiên của $h(t) = 0$ có 4 nghiệm t phân biệt khác 1 nên phương trình (3) có 4 nghiệm x khác 0.

Do vậy $g'(x) = 0$ có 9 nghiệm phân biệt nên hàm số $y = g(x)$ có 9 điểm cực trị.

Chọn đáp án A □

Dạng 3. Số điểm cực trị của hàm hợp chứa dấu giá trị tuyệt đối

Câu 113 (Mã 101 – 2020 Lần 2). Cho hàm số $f(x)$ có $f(0) = 0$. Biết $y = f'(x)$ là hàm số bậc bốn và có đồ thị là đường cong trong hình bên. Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = \left|f\left(x^3\right) - x\right|$ là



A 5. B 4. C 6. D 3.

Lời giải.

Xét $h(x) = f\left(x^3\right) - x$.

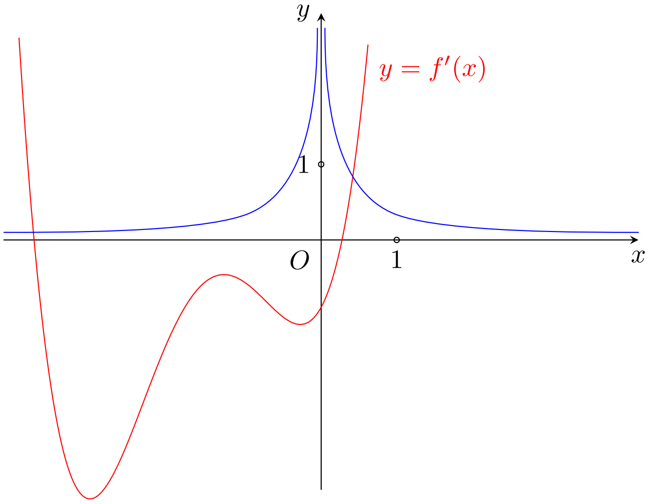
Có $h'(x) = 3x^2 f'\left(x^3\right) - 1$.

$h'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 f'\left(x^3\right) - 1 = 0 \Leftrightarrow f'\left(x^3\right) = \dfrac{1}{3x^2}\ (x \neq 0)$ (1).

Đặt $x^3 = t \Rightarrow x^2 = \sqrt[3]{t^2}$ phương trình (1) trở thành:

$f'(t) = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{t^2}}\ (t \neq 0)$ (2).

Vẽ đồ thị hàm $y = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ trên cùng hệ trục tọa độ với hàm $y = f'(x)$.



Dựa vào đồ thị ta có:

$f'(t) = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{t^2}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = b < 0 \\ t = a > 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^3 = b < 0 \\ x^3 = a > 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \sqrt[3]{b} < 0 \\ x = \sqrt[3]{a} > 0 \end{array}\right.$.

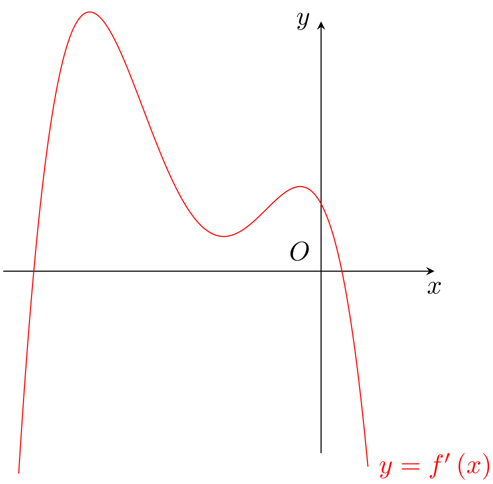
Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$\sqrt[3]{b}$		0		$\sqrt[3]{a}$		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	$\|$	$-$	0	$+$	
$h(x)$	$\nearrow$		$f(b) - \sqrt[3]{b}$	$\searrow$	0	$\searrow$	$f(a) - \sqrt[3]{a}$	$\nearrow$	
$g(x) = \|h(x)\|$	$\searrow$	0	$f(b) - \sqrt[3]{b}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$f(a) - \sqrt[3]{a}$	0	$\nearrow$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số $g(x) = |f(x^3) - x|$ có 5 điểm cực trị.

Chọn đáp án A □

Câu 114 (Mã 102-2020 Lần 2). Cho hàm số $f(x)$ có $f(0) = 0$. Biết $y = f'(x)$ là hàm số bậc bốn và có đồ thị là đường cong trong hình bên. Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = |f(x^3) + x|$ là



Ⓐ 4. Ⓑ 5. Ⓒ 3. Ⓓ 6.

Lời giải.

Đặt $h(x) = f\left(x^3\right) + x \Rightarrow h'(x) = 3x^2 f'\left(x^3\right) + 1 = 0 \Leftrightarrow f'\left(x^3\right) = -\dfrac{1}{3x^2}$.

Đặt $t = x^3 \Rightarrow x = \sqrt[3]{t}$ thế vào phương trình trên ta được $f'(t) = -\dfrac{1}{3\sqrt[3]{t^2}}$.

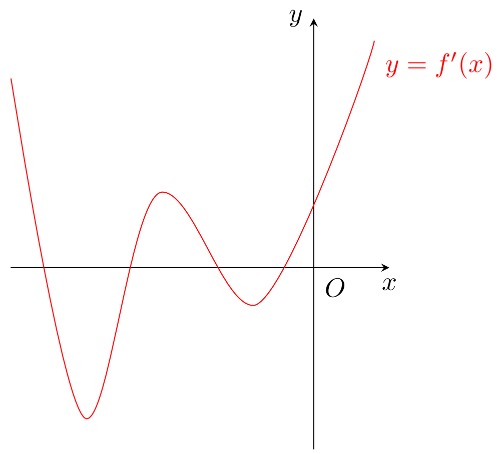
Xét hàm số $y = -\dfrac{1}{3\sqrt[3]{t^2}} \Rightarrow y' = \dfrac{2}{9\sqrt[3]{t^5}}$ đổi dấu khi qua 0 và đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y = 0$. Khi vẽ đồ thị trên cùng một mặt phẳng tọa độ với đồ thị hàm số $y = f'(t)$ ta thấy hai đồ thị cắt nhau tại 2 điểm phân biệt thuộc góc phần từ thứ 3 và 4, gọi 2 giao điểm lần lượt là $t_1 < 0, t_2 > 0 \Rightarrow x_1 = \sqrt[3]{t_1}, x_2 = \sqrt[3]{t_2}$. Như vậy ta có bảng biến thiên của hàm số $h(x)$ như sau.

x	$-\infty$		x_1		0		x_2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	
y	↘			↗	0	↗		↘	

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy phương trình $h(x) = 0$ có 3 nghiệm phân biệt và hàm số $h(x)$ có 2 điểm cực trị không nằm trên trục hoành, do đó hàm số $g(x) = |h(x)|$ có 5 điểm cực trị.

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 115 (Mã 103-2020 Lần 2). Cho hàm số $f(x)$ có $f(0) = 0$. Biết $y = f'(x)$ là hàm số bậc bốn và có đồ thị như hình vẽ. Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = \left|f\left(x^4\right) - x^2\right|$ là



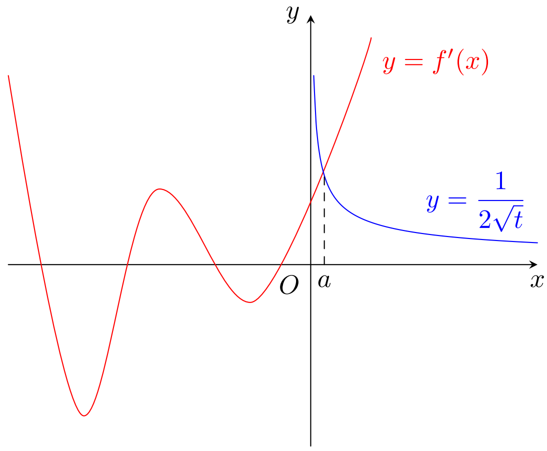
Ⓐ 4. Ⓑ 3. Ⓒ 6. Ⓓ 5.

Lời giải.

Xét hàm số $h(x) = f\left(x^4\right) - x^2$ có $h'(x) = 4x^3 f'\left(x^4\right) - 2x$.

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ f'\left(x^4\right) = \dfrac{1}{2x^2} \ (*) \end{array}\right..$$

Xét phương trình $(*)$: Đặt $t = x^4$ thì $(*)$ thành $f'(t) = \dfrac{1}{2\sqrt{t}}$ với $t > 0$.



Dựa vào đồ thị, phương trình $(*)$ có duy nhất một nghiệm $a > 0$.

Khi đó, ta được $x = \pm\sqrt[4]{a}$.

Bảng biến thiên của hàm số $h(x) = f\left(x^4\right) - x^2$.

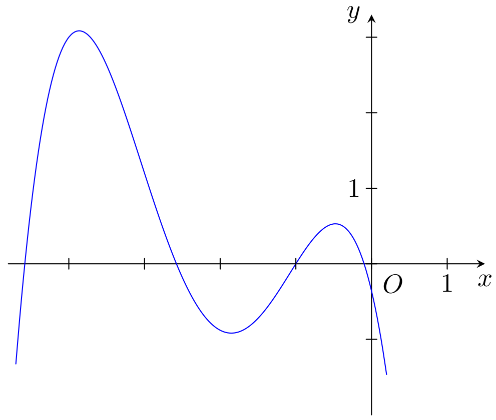
x	$-\infty$		$-\sqrt[4]{a}$		0		$\sqrt[4]{a}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘		↗	0	↘		↗	$+\infty$

Số cực trị của hàm số $g(x) = \left|f\left(x^4\right) - x^2\right|$ bằng số cực trị của hàm $h(x) = f\left(x^4\right) - x^2$ và số nghiệm đơn hoặc bội lẻ của phương trình $h(x) = 0$.

Dựa vào bảng biến thiên của hàm $f(x)$ thì số cực trị của $g(x)$ là 5.

Chọn đáp án D ☐

Câu 116 (Mã 104-2020 Lần 2). Cho hàm số $f(x)$ có $f(0) = 0$. Biết $y = f'(x)$ là hàm số bậc bốn và có đồ thị là đường cong trong hình bên. Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = \left|f\left(x^4\right) + x^2\right|$ là



A 3. B 6. C 5. D 4.

Lời giải.

Xét $h(x) = f\left(x^4\right) + x^2$.

Có $h'(x) = 4x^3 f'\left(x^4\right) + 2x = 2x\left(2x^2 f'\left(x^4\right) + 1\right)$.

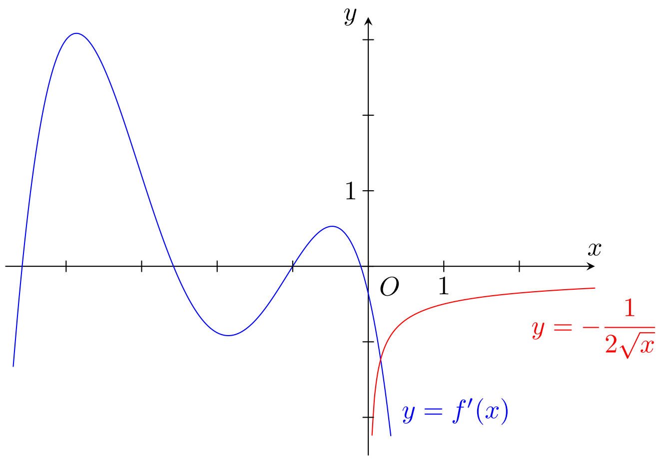
$$h'(x)=0 \Leftrightarrow 2x\left(2x^2f'\left(x^4\right)+1\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ 2x^2f'\left(x^4\right)+1=0\ (1) \end{array}\right..$$

$(1): 2x^2f'\left(x^4\right)+1=0 \Leftrightarrow f'\left(x^4\right)=-\dfrac{1}{2x^2}\,(x\neq 0)\,(2).$

Đặt $x^4=t \Rightarrow x^2=\sqrt{t}\,(t>0)$ phương trình (2) trở thành:

$f'(t)=-\dfrac{1}{2\sqrt{t}}\,(t>0)\ \ (3).$

Vẽ đồ thị hàm $y=-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ trên cùng hệ trục tọa độ với hàm $y=f'(x)$.



Dựa vào đồ thị ta có: phương trình (3) có nghiệm duy nhất $t=a>0 \Rightarrow x^4=a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\sqrt[4]{a} \\ x=-\sqrt[4]{a} \end{array}\right..$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$-\sqrt[4]{a}$		0		$\sqrt[4]{a}$		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$h(x)$		$\nearrow$	$f(a)+\sqrt{a}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$f(a)+\sqrt{a}$	$\searrow$	
$g(x)=\lvert h(x)\rvert$		$\searrow$ 0 $\nearrow$	$f(a)+\sqrt{a}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$f(a)+\sqrt{a}$	$\searrow$ 0 $\nearrow$	

Dựa vào bảng biến thiên ta thầy hàm số $g(x)=\left|f\left(x^4\right)+x^2\right|$ có 5 điểm cực trị.

Chọn đáp án C □

Câu 117 (Đề Minh Họa 2021). Cho hàm số $f(x)$ là hàm số bậc bốn thoả mãn $f(0)=0$. Hàm số $f'(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		-1		$+\infty$
$f'(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	$-\dfrac{61}{3}$	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số $g(x)=\left|f\left(x^3\right)-3x\right|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

Ⓐ 3. Ⓑ 5. Ⓒ 4. Ⓓ 2.

Lời giải.

Bảng biến thiên hàm số $f(x)$:

x	$-\infty$		-3		-1		x_0		$+\infty$
$f'(x)$				$-$			0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$			$\searrow$				$\nearrow$	$+\infty$

Đặt $h(x)=f\left(x^3\right)-3x \Rightarrow h'(x)=3x^2f'\left(x^3\right)-3=0 \Leftrightarrow f'\left(x^3\right)=\dfrac{1}{x^2}$.

Đặt $t=x^3 \Rightarrow x=\sqrt[3]{t}$ thế vào phương trình trên ta được $f'(t)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{t^2}}$ (1).

Xét hàm số $y=\dfrac{1}{\sqrt[3]{t^2}} \Rightarrow y'=-\dfrac{2}{3\sqrt[3]{t^5}}$, $\lim\limits_{t\to\pm\infty} y=0$.

Bảng biến thiên của hàm số $y=\dfrac{1}{\sqrt[3]{t^2}}$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$+$	‖	$-$	
y	0	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	0

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy phương trình (1) có một nghiệm $t=a>0$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		$\sqrt[3]{a}$		$+\infty$
$h'(x)$			$-$		0	$+$	
$h(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$f(a)+3\sqrt[3]{a}$	$\nearrow$	$+\infty$
$g(x)=\lvert h(x)\rvert$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$3\sqrt[3]{a}f(a)$	$\searrow$ 0 $\nearrow$	$+\infty$

Vậy hàm số $g(x)$ có 3 cực trị.

Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 118 (Chuyên Quang Trung-2020).

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu như hình vẽ bên

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Hỏi hàm số $y = f\left(x^2 - 2|x|\right)$ có tất cả bao nhiêu điểm cực trị?

A. 4. B. 7. C. 9. D. 11.

Lời giải.

Tập xác định của hàm số: $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

$y = h(x) = f\left(|x|^2 - 2|x|\right)$.

$y' = h'(x) = f'\left(|x|^2 - 2|x|\right) \cdot \dfrac{x}{|x|} \cdot (2|x| - 2)$.

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -1 \\ |x|^2 - 2|x| = 0 \\ |x|^2 - 2|x| = 1 \\ |x|^2 - 2|x| = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -1 \\ x = 2 \\ x = -2 \\ x = 1 + \sqrt{2} \\ x = -1 - \sqrt{2} \\ x = 1 + \sqrt{3} \\ x = -1 - \sqrt{3} \end{array}\right. .$$

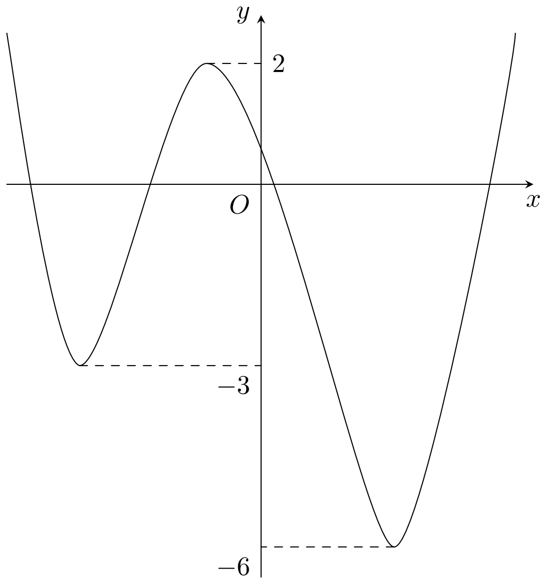
Ta thấy phương trình $h'(x) = 0$ có 8 nghiệm đơn (1).

$h'(x)$ không tồn tại tại $x = 0$ mà $x = 0$ thuộc tập xác định đồng thời qua đó $h'(x)$ đổi dấu (2).

Từ (1) và (2) suy ra hàm số đã cho có 9 điểm cực trị.

Chọn đáp án C $\square$

Câu 119 (Chuyên Thái Bình-2020). Cho $y = f(x)$ là hàm đa thức bậc 4 và có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-12; 12]$ để hàm số $g(x) = |2f(x-1) + m|$ có 5 điểm cực trị?



(A) 13. (B) 14. (C) 15. (D) 12.

Lời giải.

Đặt $h(x) = 2f(x-1) + m \Rightarrow g(x) = |h(x)|$.

Số điểm cực trị của $g(x)$=số điểm cực trị của $y = h(x)$+số giao điểm của $y = h(x)$ với trục Ox khác với điểm cực trị của $y = h(x)$.

Hàm số $y = f(x)$ có 3 điểm cực trị. Suy ra hàm số $y = h(x)$ cũng có 3 điểm cực trị.

Hàm số $g(x)$ có 5 điểm cực trị khi và chỉ khi $h(x) = 0 \Leftrightarrow f(x-1) = -\dfrac{m}{2}$ có 2 nghiệm phân biệt khác điểm cực trị của $h(x)$.

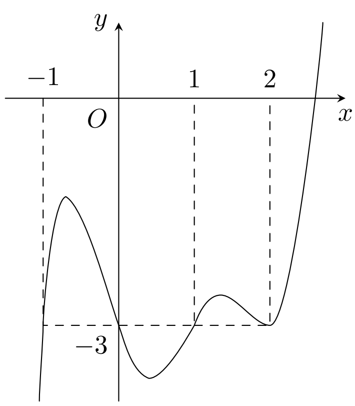
Đồ thị hàm số $y = f(x-1)$ có được bằng cách tịnh tiến đồ thị hàm số $y = f(x)$ sang bên phải 1 đơn vị.

Dựa vào đồ thị, ta được: $-\dfrac{m}{2} \geq 2$ hoặc $-6 < -\dfrac{m}{2} \leq -3$.

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \leq -4 \\ 6 \leq m < 12 \end{array}\right. \xrightarrow{m\in\mathbb{Z};m\in[-12;12]}$ có 15 giá trị m nguyên thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án (C) □

Câu 120. Cho hàm số đa thức $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, $f(0) < 0$ và đồ thị hình bên dưới là đồ thị của đạo hàm $f'(x)$. Hỏi hàm số $g(x) = |f(x) + 3x|$ có bao nhiêu cực trị?



(A) 4. (B) 5. (C) 3. (D) 6.

Lời giải.

Đặt $h(x) = f(x) + 3x$.

$h'(x) = f'(x) + 3$.

$h'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) + 3 = 0 \Leftrightarrow f'(x) = -3$.

Theo đồ thị của hàm số $f'(x)$ thì phương trình $f'(x) = -3$ có 4 nghiệm $\{-1; 0; 1; 2\}$.

Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$	$f(0)$	$\searrow$		$\nearrow$		$\nearrow$	$+\infty$

Theo bảng biến thiên ta có phương trình $h(x) = 0$ có hai nghiệm $x_1 < -1$; và $x_2 > 1$ (do có $f(0) < 0$).

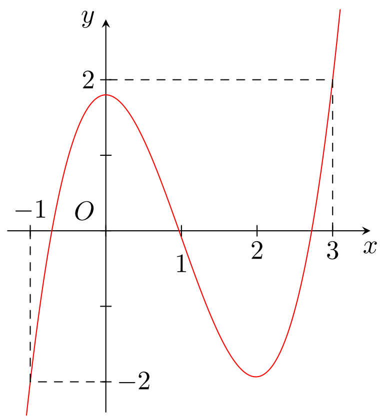
Khi đó ta có:

x	$-\infty$		x_1		-1		0		1		x_2		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$		$\searrow$	$\|f(0)\|$	$\nearrow$		$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy hàm số $g(x) = |f(x) + 3x|$ có 5 cực trị.

Chọn đáp án B □

Câu 121 (THPT Minh Khai). Cho hàm số Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và hàm số $g(x) = 2f(x) - x^2 + 2x + 2019$. Biết đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ.



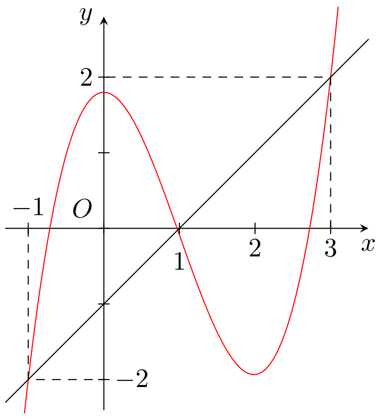
Số điểm cực trị của hàm số $y = g(|x|)$ là

A 5. B 3. C 2. D 4.

Lời giải.

$g'(x) = 2f'(x) - 2x + 2$, $g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = x - 1$.

Đường thẳng $y = x - 1$ đi qua các điểm $(-1; -2)$, $(1; 0)$, $(3; 2)$.



Quan sát vào vị trí tương đối của hai đồ thị trên hình vẽ, ta có bảng biến thiên của hàm số $y = g'(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		3		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0		$+$		0	$+$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$g(-1)$	$\nearrow$	$g(0)$	$\nearrow$	$g(1)$	$\searrow$	$g(3)$	$\nearrow$	$+\infty$

$*$ Đồ thị hàm số $y = g(|x|)$ nhận trục Oy làm trục đối xứng nên từ bảng biến thiên trên ta suy ra bảng biến thiên của hàm số $y = g(|x|)$ như sau:

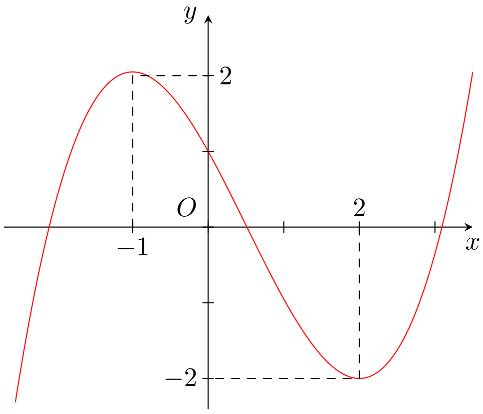
x	$-\infty$		-3		-1		0		1		3		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	|	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$	$g(3)$	$\nearrow$	$g(1)$	$\searrow$	$g(0)$	$\nearrow$	$g(1)$	$\searrow$	$g(3)$	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy hàm số $y = g(|x|)$ có 5 điểm cực trị.

Chọn đáp án A □

Câu 122 (HSG 12-Sở Quảng Nam-2019).

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, đồ thị hàm số $y = f(x)$ là đường cong ở hình vẽ. Hỏi hàm số $h(x) = \left|[f(x)]^2 - 4f(x) + 1\right|$ có bao nhiêu điểm cực trị?



Ⓐ 2. Ⓑ 3. Ⓒ 5. Ⓓ 7.

Lời giải.

Đặt $g(x) = [f(x)]^2 - 4f(x) + 1$.

Khi đó, $g'(x) = 2f(x).f'(x) - 4f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = 2 \\ f'(x) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = a\,(a > 2) \\ x = -1 \\ x = 2 \end{array}\right.$.

Do đó, ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		2		a		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	13	$\searrow$	$g(a) < 0$	$\nearrow$	$+\infty$

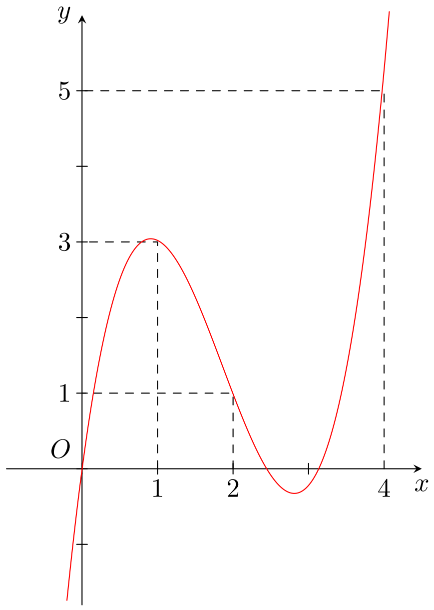
Suy ra đồ thị hàm số $y = g(x)$ có ba điểm cực không nằm trên trục hoành và bốn giao điểm với Ox.

Vậy đồ thị hàm số $y = h(x) = |g(x)|$ có số cực trị là $3 + 4 = 7$.

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 123 (THPT Nguyễn Viết Xuân-2020).

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(0) = 0$; $f(4) > 4$. Biết hàm $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = |f(x^2) - 2x|$ là

Ⓐ 2. Ⓑ 1. Ⓒ 4. Ⓓ 3.

Lời giải.

Xét hàm số $h(x) = f(x^2) - 2x$.

Ta có: $h'(x) = 2xf'(x^2) - 2$; $h'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x^2) = \dfrac{1}{x}$ (vô nghiệm $\forall x \leq 0$).

Đặt $t = x^2 \Rightarrow x = \sqrt{t}, \forall t > 0$.

Khi đó: $f'(t) = \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ $(*)$. Nhận thấy trên khoảng $(0;1)$ thì $w(t) = \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ nghịch biến và $f'(t)$ đồng biến, do đó $(*)$ nếu có nghiệm là duy nhất.

Mặt khác: $h'(0).h'(1) = -2(2f'(1) - 2) = -8 < 0$ và $h'(x)$ liên tục trên $[0;1]$ nên $\exists x_0 \in (0;1)$: $h'(x_0) = 0$.

Vậy $h'(x) = 0$ có nghiệm duy nhất $x_0 \in (0;1)$ và $h(x)$ có một điểm cực tiểu (vẽ bảng biến thiên). (1)

Xét phương trình: $h(x) = 0 \Leftrightarrow f(x^2) - 2x = 0$ $(**)$.

Ta có: $h(0) = f(0) = 0 \Rightarrow x = 0$ là một nghiệm của $(**)$.

Mặt khác: $h(\sqrt{x_0}).h(2) = (f(x_0) - 2\sqrt{x_0})(f(4) - 4) < 0 \Rightarrow \exists x_1 \in (\sqrt{x_0}; 2) : h(x_1) = 0$.

Nên $(**)$ có nghiệm $x_1 \in (\sqrt{x_0}; 2)$.

Vì $h(x)$ có một điểm cực trị, nên $(**)$ có không quá 2 nghiệm.

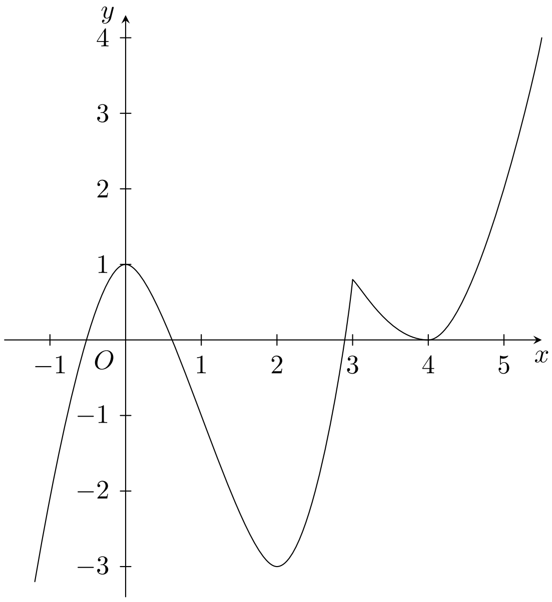
Vậy $h(x) = f(x^2) - 2x = 0$ có hai nghiệm phân biệt. (2)

Từ (1) và (2) ta được: hàm số $g(x) = |f(x^2) - 2x|$ có 3 điểm cực trị.

Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 124 (Hải Hậu-Nam Định-2020).

Cho hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $(4; +\infty)$ có đồ thị như hình vẽ. Số điểm cực trị của hàm số $y = f(2|x| - 2)$ bằng



Ⓐ 7. Ⓑ 5. Ⓒ 4. Ⓓ 9.

Lời giải.

$g(x) = f(2|x|-2) \Rightarrow g'(x) = (2|x|-2)'f'(2|x|-2) = \left(2\sqrt{x^2}-2\right)' f'(2|x|-2) = \dfrac{x}{|x|}f'(2|x|-2)$.

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{x}{|x|}f'(2|x|-2) = 0 \Leftrightarrow f'(2|x|-2) = 0 (x \neq 0)$.

Dựa vào đồ thị ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \\ x=3 \\ x=4 \end{array}\right.$

$\Rightarrow f'(2|x|-2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2|x|-2=0 \\ 2|x|-2=2 \\ 2|x|-2=3 \\ 2|x|-2=4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} |x|=1 \\ |x|=2 \\ |x|=\dfrac{5}{2} \\ |x|=3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pm 1 \\ x=\pm 2 \\ x=\pm\dfrac{5}{2} \\ x=\pm 3. \end{array}\right.$

Ta có bảng xét dấu $g'(x)$

x	$-\infty$		-3		$-\frac{5}{2}$		-2		-1		0		1		2		$\frac{5}{2}$		3		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Suy ra hàm số $y = f(2|x|-2)$ có 9 điểm cực trị

Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 125 (Kìm Thành-Hải Dương-2020).

Cho hàm số $y = f(x)$ là một hàm đa thức có bảng xét dấu $f'(x)$ như sau

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f\left(x^2 - |x|\right)$

Ⓐ 5. Ⓑ 3. Ⓒ 1. Ⓓ 7.

Lời giải.

Ta có $g(x) = f\left(x^2 - |x|\right) = f\left(|x|^2 - |x|\right)$. Số điểm cực trị của hàm số $f(|x|)$ bằng hai lần số điểm cực trị dương của hàm số $f(x)$ cộng thêm 1.

Xét hàm số

$$h(x) = f\left(x^2 - x\right) \Rightarrow h'(x) = (2x-1)f'\left(x^2 - x\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{1}{2} \\ x^2 - x = -1 \\ x^2 - x = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{1}{2} \\ x = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}. \end{array}\right.$$

Bảng xét dấu hàm số $h(x) = f\left(x^2 - x\right)$.

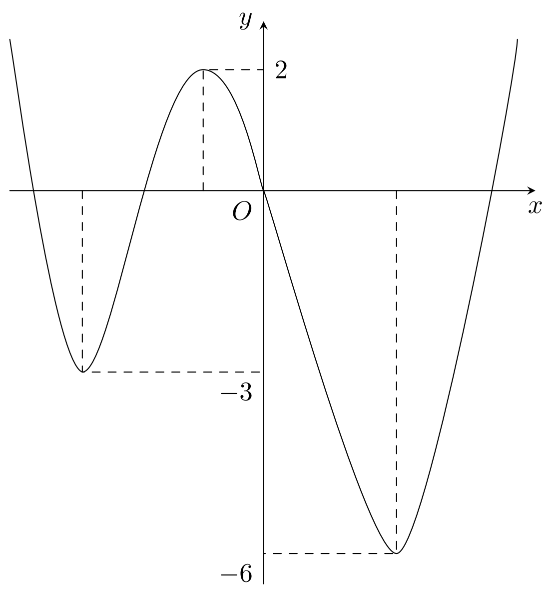
x	$-\infty$		$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$		$\frac{1}{2}$		$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $h(x) = f\left(x^2 - x\right)$ có 2 điểm cực trị dương, vậy hàm số $g(x) = f\left(x^2 - |x|\right) = f\left(|x|^2 - |x|\right)$ có 5 điểm cực trị.

Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 126 (Trần Phú-Quảng Ninh-2020).

Cho đồ thị $y = f(x)$ như hình vẽ dưới đây:



Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y = \left|f(x+2018) + \dfrac{1}{3}m^2\right|$ có 5 điểm cực trị. Tổng tất cả các giá trị của các phần tử trong tập S bằng

Ⓐ 6. Ⓑ 5. Ⓒ 7. Ⓓ 9.

Lời giải.

Đặt $g(x) = \left|f(x+2018) + \dfrac{1}{3}m^2\right| \Rightarrow g'(x) = \dfrac{f'(x+2018)\left[f(x+2018) + \dfrac{1}{3}m^2\right]}{\left|f(x+2018) + \dfrac{1}{3}m^2\right|}$.

Phương trình $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'(x+2018) = 0 \ (1) \\ f(x+2018) = -\dfrac{m^2}{3} \ (2) \end{array}\right.$.

Dựa vào đồ thị ta thấy phương trình (1) luôn có 3 nghiệm phân biệt.

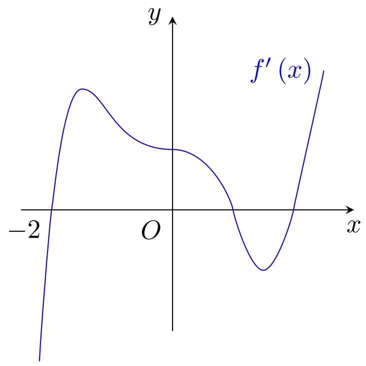
Vậy để đồ thị hàm số $y = g(x)$ có 5 điểm cực trị thì phương trình (2) phải có 2 nghiệm đơn phân biệt $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\dfrac{m^2}{3} > 2 \\ -6 < -\dfrac{m^2}{3} \leq -3 \end{array}\right. \quad (m \in \mathbb{N}^*) \Leftrightarrow m \in \{3; 4\}$.

Vậy tổng các phần tử là 7.

Chọn đáp án C □

Câu 127 (THPT Mai Anh Tuấn-Thanh Hóa-2021).

Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(-2) < f(2) = 0$, đồ thị $y = f'(x)$ là đường cong trong hình bên. Hàm số $g(x) = \left|f(x) + \dfrac{1}{4}x^4 - \dfrac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 4x\right|$ có bao nhiêu điểm cực trị?



(A) 5. (B) 7. (C) 6. (D) 4.

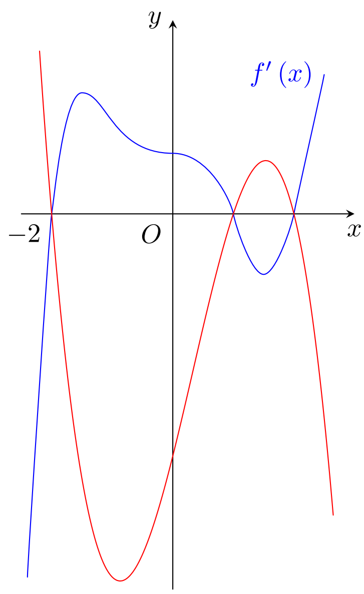
Lời giải.

Xét hàm số $h(x) = f(x) + \dfrac{1}{4}x^4 - \dfrac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 4x$.

Ta có $h'(x) = f'(x) + x^3 - x^2 - 4x + 4 = f'(x) - (1-x)(x^2-4)$.

$h'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = (1-x)(x^2-4)$.

Vẽ đồ thị hàm số $y = (1-x)(x^2-4)$ lên cùng hệ trục tọa độ với đồ thị $f'(x)$ thì hai đồ thị này cắt nhau tại 3 điểm $x = 1; x = \pm 2$.



Mà $h(-2) = f(-2) - \dfrac{28}{3} < 0$, (do $f(-2) < 0$); $h(1) = f(1) + \dfrac{23}{12}$.
$h(2) = f(2) + \dfrac{2}{3} > 0$, do $f(2) = 0$
Bảng biến thiên:

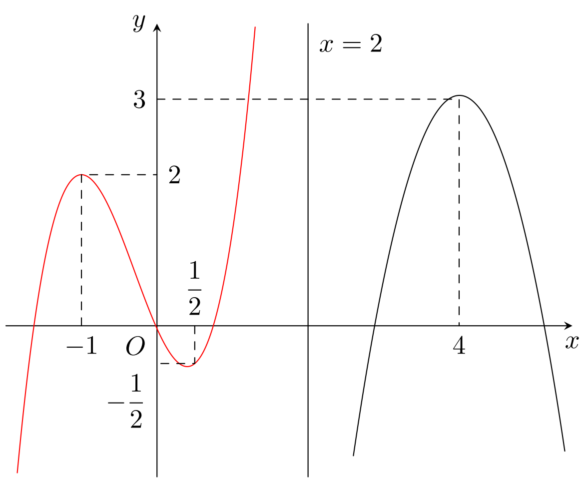
x	$-\infty$		-2		1		2		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$		↘		↗		↘		↗	$+\infty$
								$y=0$	

Từ bảng biến thiên suy đồ thị hàm số $h(x)$ có 3 điểm cực trị và cắt trục hoành tại 2 điểm phân biệt nên đồ thị hàm số $g(x) = |h(x)|$ có 5 cực trị.

Chọn đáp án A □

Câu 128 (THPT Đồng Quan-Hà Nội-2021).

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên các khoảng $(-\infty; 2)$ và $(2; +\infty)$ có đồ thị như hình vẽ.



Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(|2x-1| + 2)$ là

(A) 5. (B) 4. (C) 2. (D) 3.

Lời giải.

$g(x)=f(|2x-1|+2) \Rightarrow g'(x)=\dfrac{2(2x-1)}{|2x-1|}f'(|2x-1|+2)$.

Ta có: $g'(x)=0 \Leftrightarrow f'(|2x-1|+2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}|2x-1|+2=-1 \text{ (VN)}\\ |2x-1|+2=\dfrac{1}{2} \text{ (VN)}\\ |2x-1|+2=4\end{array}\right. \Leftrightarrow |2x-1|+2=4$

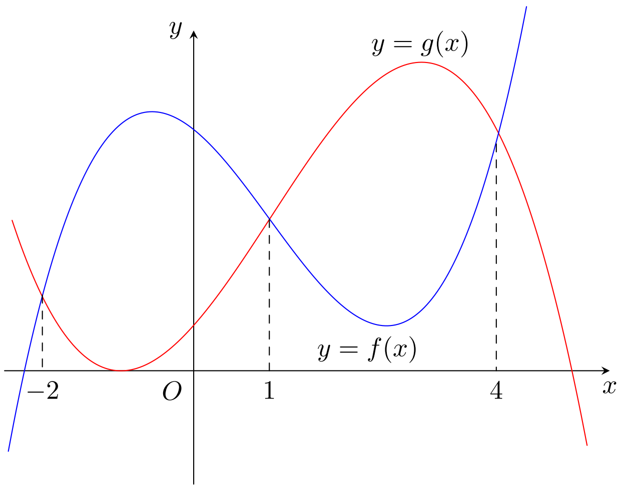
$$\Leftrightarrow |2x-1|=2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2x-1=2\\ 2x-1=-2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{3}{2}\\ x=-\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$$

$g'(x)$ không xác định tại $x=\dfrac{1}{2}$ và $g'(x)$ đổi dấu tại $x=\frac{1}{2}$, nhưng tại $x=\dfrac{1}{2}$ thì $g(x)$ không xác định (vì $f(x)$ không xác định tại $x=2$). Vậy hàm số có 2 điểm cực trị là $x=\dfrac{-1}{2}$, $x=\dfrac{3}{2}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 129 (Trung Tâm Thanh Tường-2021).

Cho $f(x), g(x)$ là các hàm đa thức bậc 3 có đồ thị như hình vẽ bên. Đặt $h(x)=f(x)-g(x)$. Số điểm cực trị của hàm số $|h(|x|)|$ là

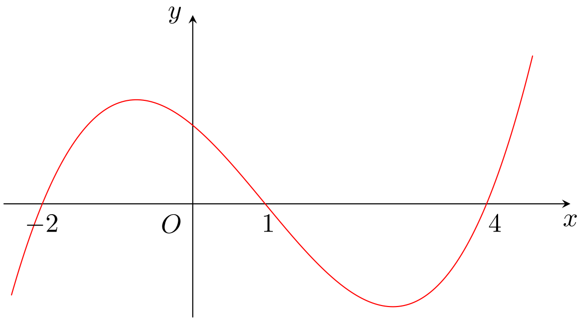


(A) 7. (B) 7. (C) 3. (D) 9.

Lời giải.

Theo đồ thị của $f(x), g(x)$ thì hai đồ thị cắt nhau tại 3 điểm có hoành độ lần lượt là -2, 1, 4 nên $h(x)=a\,(x+2)\,(x-1)\,(x-4)$ với $a>0$ (do hệ số của x^3 của $f(x)$ dương còn hệ số của x^3 của $g(x)$ âm).

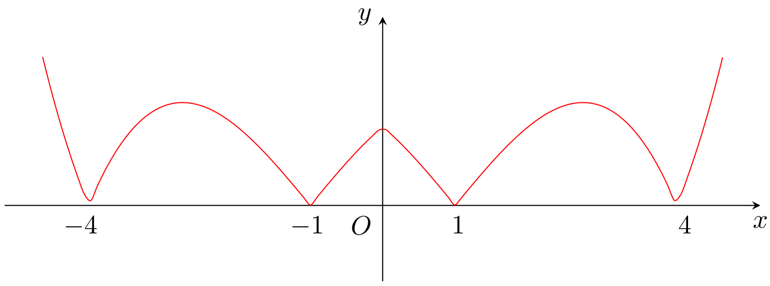
$\Rightarrow$ đồ thị của $y=h(x)$ có dạng:



⇒ Đồ thị hàm số $y = |h(|x|)|$ được vẽ dựa trên đồ thị hàm số $y = h(x)$ như sau:

Bước 1: Giữ nguyên phần đồ thị bên phải trục tung, bỏ phần bên trái rồi lấy đối xứng phần bên phải trục tung qua trục tung.

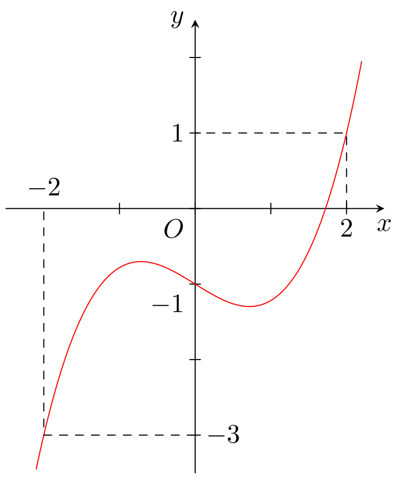
Từ đồ thì có được qua bước 1, giữ nguyên phần đồ thị trên trục hoành, lấy đối xứng với phần đồ thị dưới trục hoành.



Từ đó suy ra số điểm cực trị của hàm số $|h(|x|)|$ là 7.

Chọn đáp án A □

Câu 130. Cho $f(x)$ là hàm bậc bốn thỏa mãn $f(0) = 0$. Hàm số $f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ



Hàm số $g(x) = |2f(x^2 + x) - x^4 - 2x^3 + x^2 + 2x|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A 4. B 5. C 6. D 7.

Lời giải.

Gọi $h(x) = 2f(x^2 + x) - x^4 - 2x^3 + x^2 + 2x = 2f(x^2 + x) - (x^2 + x)^2 + 2(x^2 + x)$.

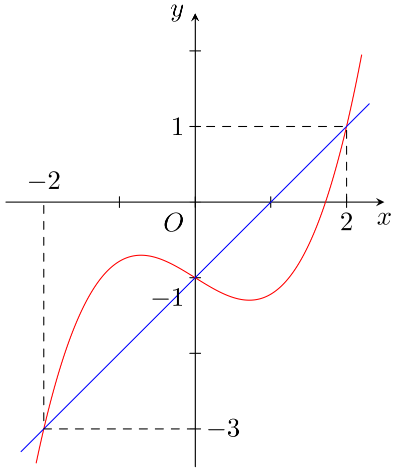
$\Rightarrow h'(x) = 2(2x + 1) f'(x^2 + x) - 2(2x + 1)(x^2 + x) + 2(2x + 1)$.

$\Rightarrow h'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x + 1 = 0 \\ f'(x^2 + x) - (x^2 + x) + 1 = 0 (*) \end{array}\right.$

Đặt $t = x^2 + x$. Khi đó phương trình $(*)$ trở thành $f'(t) - t + 1 = 0$.

$\Leftrightarrow f'(t) = t - 1$.

Ta vẽ đồ thị hai hàm số $y = f'(t)$ và $y = t - 1$ trên cùng một hệ trục tọa độ:



Dựa vào đồ thị ta thấy $f'(t) > t - 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -2 < t < 0 \\ t > 2 \end{array}\right.$.

Khi đó: $\left[\begin{array}{l} -2 < x^2 + x < 0 \\ x^2 + x > 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1 < x < 0 \\ x < -2 \vee 1 < x \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-2		-1		$-\frac{1}{2}$		0		1		$+\infty$
$2x+1$		$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
$f'(t)-t+1$		$+$	0	$-$	0	$+$	|	$+$	0	$-$	0	$+$	
$h'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$	$+\infty$				$h(-1)=0$				$h(0)=0$				$+\infty$
$g(x)$													$x=0$

Vậy hàm số $g(x) = |h(x)|$ có 7 điểm cực trị.

Chọn đáp án D □

Câu 131. Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm số bậc bốn thỏa mãn $f(0) = 0$. Hàm số $y = f'(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		m		0		$+\infty$
$f'(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số $g(x) = \left|f\left(x^2\right) - x^2\right|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

Ⓐ 1. Ⓑ 3. Ⓒ 5. Ⓓ 7.

Lời giải.

Đặt $h(x) = f\left(x^2\right) - x^2 \Rightarrow h(0) = 0$.

Ta có $h'(x) = 2xf'\left(x^2\right) - 2x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ f'\left(x^2\right) = 1 \end{array}\right.$.

Dựa vào bảng biến thiên của hàm số $t = f'(x)$ ta có phương trình $f'(x) = 1$ có duy nhất một nghiệm và nghiệm đó dương. Gọi x_0 là nghiệm của phương trình $f'(x) = 1$.

Suy ra $f'\left(x^2\right) = 1 \Leftrightarrow x^2 = x_0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{x_0}$.

Ta có $y = f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e \Rightarrow f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = +\infty \Rightarrow a > 0$.

Khi đó $h(x) = f\left(x^2\right) - x^2$ là hàm bậc 8 và $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = +\infty$.

Lập bảng biến thiên của $h(x)$ ta có:

x	$-\infty$		$-\sqrt{x_0}$		0		$\sqrt{x_0}$		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$	0	$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta có hàm số $g(x) = |h(x)|$ có 5 điểm cực trị.

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 132. Cho $f(x)$ là hàm số bậc bốn thỏa mãn $f(0) = -\dfrac{1}{\ln 2}$. Hàm số $f'(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-4	$\nearrow$	-1	$\searrow$	$-\infty$

Hàm số $g(x) = \left|f\left(-x^2\right) - x^2 + \dfrac{2^{x^2}}{\ln 2}\right|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

Ⓐ 3. Ⓑ 2. Ⓒ 4. Ⓓ 5.

Lời giải.

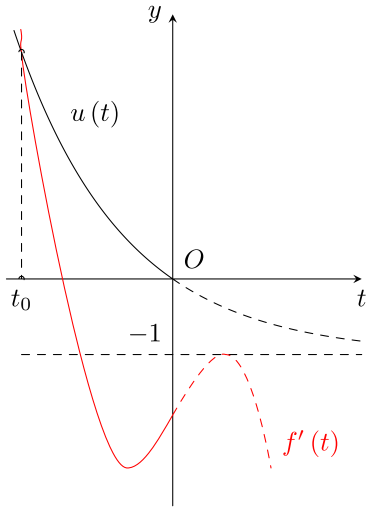
Từ bảng biến thiên, ta tìm được $f'(x) = -\dfrac{3}{4}x^3 + \dfrac{9}{4}x - \dfrac{5}{2}$.

Đặt $h(x) = f\left(-x^2\right) - x^2 + \dfrac{2^{x^2}}{\ln 2}$. Ta có $h(0) = f(0) + \dfrac{1}{\ln 2} = 0$.

$h'(x) = -2x \cdot f'\left(-x^2\right) - 2x + 2x \cdot 2^{x^2} = -2x\left[f'\left(-x^2\right) + 1 - 2^{x^2}\right]$.

$h'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ f'\left(-x^2\right) = 2^{x^2} - 1 \ (*) \end{array}\right.$.

Đặt $t = -x^2, t \leq 0$. Phương trình $(*)$ trở thành: $f'(t) = u(t)$, với $u(t) = 2^-t - 1$.



Từ đồ thị ta thấy phương trình $f'(t) = u(t) \Leftrightarrow t = t_0$, với $t_0 < -1$.

Từ đó, phương trình $(*) \Leftrightarrow -x^2 = t_0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{-t_0}$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-\sqrt{-t_0}$		0		$\sqrt{-t_0}$		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$h(x)$		↗		↘	0	↗		↘	

Từ bảng biến thiên suy ra hàm số $g(x) = |h(x)|$ có 5 điểm cực trị.

Chọn đáp án D □

BẢNG ĐÁP ÁN

1. A	**2. C**	**3. C**	**4. C**	**5. C**	**6. C**	**7. B**	**8. D**	**9. D**	**10. A**
11. B	**12. B**	**13. B**	**14. A**	**15. B**	**16. D**	**17. C**	**18. B**	**19. A**	**20. B**
21. C	**22. A**	**23. D**	**24. B**	**25. C**	**26. A**	**27. B**	**28. C**	**29. C**	**30. D**
31. D	**32. B**	**33. D**	**34. D**	**35. C**	**36. C**	**37. C**	**38. A**	**39. A**	**40. B**
41. A	**42. B**	**43. A**	**44. C**	**45. D**	**46. C**	**47. D**	**48. C**	**49. A**	**50. B**
51. C	**52. B**	**53. B**	**54. C**	**55. B**	**56. B**	**57. B**	**58. C**	**59. D**	**60. B**

61. B	62. C	63. A	64. D	65. B	66. A	67. B	68. A	69. D	70. B
71. B	72. B	73. C	74. C	75. C	76. D	77. D	78. A	79. C	80. C
81. A	82. A	83. C	84. C	85. C	86. C	87. B	88. A	89. B	90. B
91. A	92. D	93. B	94. A	95. D	96. C	97. D	98. D	99. D	100. D
101. B	102. A	103. C	104. D	105. A	106. B	107. D	108. A	109. D	110. B
111. A	112. A	113. A	114. B	115. D	116. C	117. A	118. C	119. C	120. B
121. A	122. B	123. D	124. D	125. A	126. C	127. A	128. C	129. A	130. D
				131. C	132. D				

CHỦ ĐỀ 3

GIÁ TRỊ LỚN NHẤT - GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ

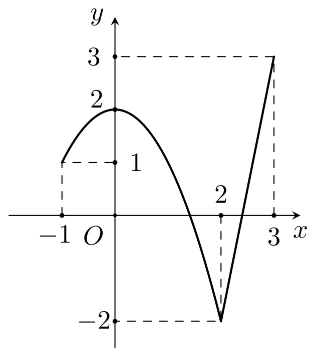
MỨC ĐỘ 1. MỨC ĐỘ 5,6 ĐIỂM

Dạng 1. Xác định giá trị lớn nhất - giá trị nhỏ nhất của hàm số thông qua đồ thị, bảng biến thiên

Câu 1 (Đề tham khảo 2019).

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1;3]$ và có đồ thị như hình bên. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-1;3]$. Giá trị của $M - m$ bằng

A. 1. B. 4. C. 5. D. 0.



Lời giải.

Từ đồ thị, ta có $M = \max\limits_{[-1;3]} f(x) = 3$ và $m = \min\limits_{[-1;3]} f(x) = -2$.

Vậy $M - m = 5$.

Chọn đáp án C □

Câu 2 (Đề minh họa 2017). Cho hàm số $f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		$+$	$\|$	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. Hàm số có giá trị cực tiểu bằng 1.

B. Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 0 và giá trị nhỏ nhất bằng -1.

C. Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$ và đạt cực tiểu tại $x = 1$.

D. Hàm số có đúng một cực trị.

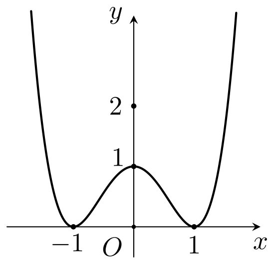
Lời giải.

Từ bảng biến thiên, ta có hàm số đạt cực đại tại $x = 0$ và đạt cực tiểu tại $x = 1$. □

Câu 3.

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1;1]$ và có đồ thị như hình vẽ. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-1;1]$. Giá trị của $M - m$ bằng

(A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3.



Lời giải.

Từ đồ thị, ta thấy $M = \max\limits_{[-1;1]} f(x) = 1$ và $m = \min\limits_{[-1;1]} f(x) = 0$.

Vậy $M - m = 1$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 4. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[-3;2]$ và có bảng biến thiên như hình.

x	-3		-1		0		1		2
y	-2	↗	3	↘	0	↗	2	↘	1

Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[-1;2]$. Tính $M + m$.

(A) 3. (B) 2. (C) 1. (D) 4.

Lời giải.

Từ bảng biến thiên, ta thấy $M = \max\limits_{[-1;2]} f(x) = 3$ và $m = \min\limits_{[-1;2]} f(x) = 0$.

Vậy $M + m = 3$.

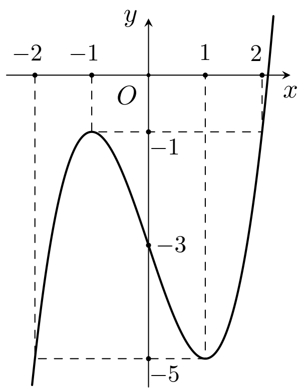
Chọn đáp án (A) □

Câu 5 (Chuyên Lương Thế Vinh - Đồng Nai 2019).

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ bên. Tìm giá trị nhỏ nhất m và giá trị lớn nhất M của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-2;2]$.

(A) $m = -5$; $M = -1$. (B) $m = -2$; $M = 2$.

(C) $m = -1$; $M = 0$. (D) $m = -5$; $M = 0$.



Lời giải.

Từ đồ thị, ta thấy $M = \max\limits_{[-2;2]} f(x) = -1$ và $m = \min\limits_{[-2;2]} f(x) = -5$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 6 (THPT Ba Đình 2019). Xét hàm số $y = f(x)$ với $x \in [-1;5]$ có bảng biến thiên như sau

x	-1		0		2		5
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	3	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Khẳng định nào sau đây đúng?

(A) Hàm số đã cho không tồn tại giá trị lớn nhất trên đoạn $[-1; 5]$.

(B) Hàm số đã cho đạt giá trị nhỏ nhất tại $x = -1$ và $x = 2$ trên đoạn $[-1; 5]$.

(C) Hàm số đã cho đạt giá trị nhỏ nhất tại $x = -1$ và đạt giá trị lớn nhất tại $x = -5$ trên đoạn $[-1; 5]$.

(D) Hàm số đã cho đạt giá trị nhỏ nhất tại $x = 0$ trên đoạn $[-1; 5]$.

Lời giải.

Từ bảng biến thiên, ta có hàm số không tồn tại giá trị lớn nhất trên đoạn $[-1; 5]$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 7 (THPT Ba Đình 2019). Xét hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, có bảng biến thiên như hình

x	$-\infty$		-1		1		2		$+\infty$
y'		$-$	$\|$	$+$	0	$+$	$\|$	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$		$\nearrow$	2	$\searrow$	-4

Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

(A) Hàm số có hai điểm cực trị.

(B) Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 2 và giá trị nhỏ nhất bằng -3.

(C) Đồ thị hàm số có đúng một đường tiệm cận.

(D) Hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty; -1)$, $(2; +\infty)$.

Lời giải.

Từ bảng biến thiên,ta có

- ☑ Hàm số có hai điểm cực trị, đạt tại $x = -1$ và $x = 2$.
- ☑ Hàm số không có giá trị lớn nhất và không có giá trị nhỏ nhất.
- ☑ Đồ thị hàm số có đúng một đường tiệm cận là tiệm cận ngang có phương trình $y = -4$.
- ☑ Hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty; -1)$ và $(2; +\infty)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 8 (Chuyên Nguyễn Tất Thành - Yên Bái 2019).

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và có bảng biến thiên trên đoạn $[-1; 3]$ như hình.

x	-1		0		2		3
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	0	$\nearrow$	5	$\searrow$	1	$\nearrow$	4

Khẳng định nào sau đây là đúng?

(A) $\max\limits_{[-1;3]} f(x) = f(0)$.
(B) $\max\limits_{[-1;3]} f(x) = f(3)$.
(C) $\max\limits_{[-1;3]} f(x) = f(2)$.
(D) $\max\limits_{[-1;3]} f(x) = f(-1)$.

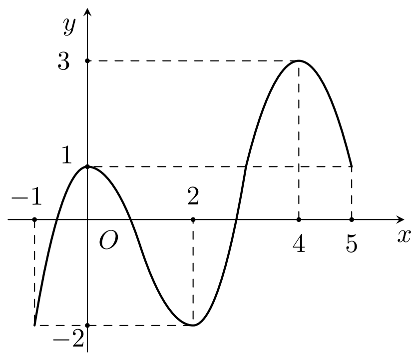
Lời giải.

Từ bảng biến thiên, ta có $\max\limits_{[-1;3]} f(x) = f(0) = 5$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 9 (VTED 2019).

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[-1;5]$ và có đồ thị trên đoạn $[-1;5]$ như hình vẽ. Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[-1;5]$ bằng



(A) -1. (B) 4. (C) 1. (D) 2.

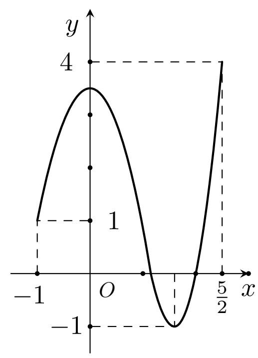
Lời giải.

Từ đồ thị, ta có $\max\limits_{[-1;5]} f(x) + \min\limits_{[-1;5]} f(x) = 3 + (-2) = 1$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 10 (THPT Yên Mỹ - Hưng Yên 2019).

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\left[-1; \dfrac{5}{2}\right]$ và có đồ thị là đường cong như hình vẽ. Giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất m của hàm số $f(x)$ trên $\left[-1; \dfrac{5}{2}\right]$ là



(A) $M = 4$; $m = 1$.
(B) $M = 4$; $m = -1$.
(C) $M = \dfrac{7}{2}$; $m = -1$.
(D) $M = \dfrac{7}{2}$; $m = 1$.

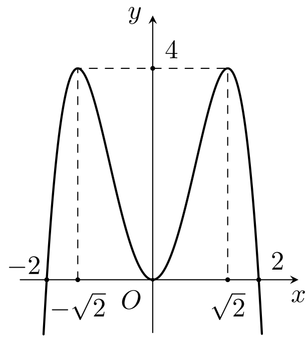
Lời giải.

Từ đồ thị, ta có $M = \max\limits_{\left[-1;\frac{5}{2}\right]} f(x) = 4$ và $m = \min\limits_{\left[-1;\frac{5}{2}\right]} f(x) = -1$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 11 (THPT Nghĩa Hưng - Nam Định 2019).

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[0;2]$ là



Ⓐ $\max\limits_{[0;2]} f(x) = 2$.
Ⓑ $\max\limits_{[0;2]} f(x) = \sqrt{2}$.
Ⓒ $\max\limits_{[0;2]} f(x) = 4$.
Ⓓ $\max\limits_{[0;2]} f(x) = 0$.

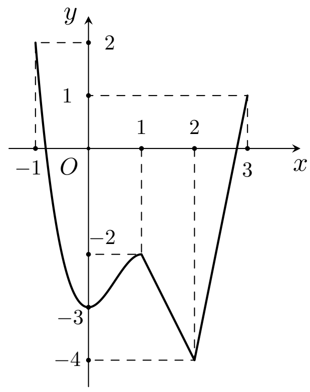
Lời giải.

Từ đồ thị, ta có $\max\limits_{[0;2]} f(x) = 4$.

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 12 (Sở Bắc Giang 2019).

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1;3]$ và có đồ thị như hình vẽ. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-1;3]$. Giá trị của $M + m$ là



Ⓐ 2. Ⓑ −6. Ⓒ −5. Ⓓ −2.

Lời giải.

Từ đồ thị, ta có $M = \max\limits_{[-1;3]} f(x) = 2$ và $m = \min\limits_{[-1;3]} f(x) = -4$.

Vậy $M + m = -2$.

Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 13 (Sở Hà Nội 2019). Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên trên $[-5;7)$ như sau

x	-5		1		7
y'		$-$	0	$+$	‖
y	6	$\searrow$	2	$\nearrow$	9 ‖

Mệnh đề nào dưới đây đúng?

Ⓐ $\min\limits_{[-5;7)} f(x) = 6$. Ⓑ $\min\limits_{[-5;7)} f(x) = 2$. Ⓒ $\min\limits_{[-5;7)} f(x) = 9$. Ⓓ $\min\limits_{[-5;7)} f(x) = 6$.

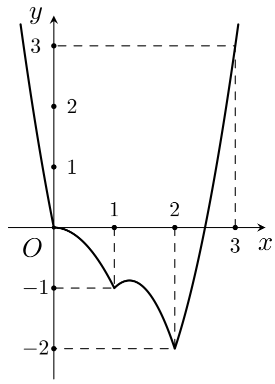
Lời giải.

Từ bảng biến thiên, ta có $\min\limits_{[-5;7)} f(x) = 2$.

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 14.

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;3]$ và có đồ thị như hình vẽ. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên $[0;3]$. Giá trị của $M+m$ bằng



Ⓐ 5. Ⓑ 3. Ⓒ 2. Ⓓ 1.

Lời giải.

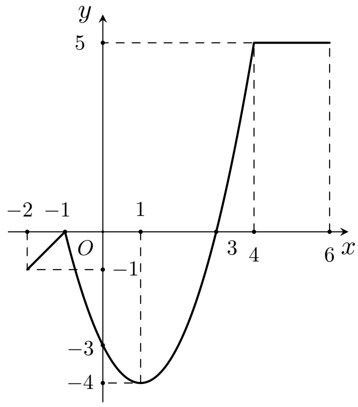
Từ đồ thị hàm số, ta có $M = \max\limits_{[0;3]} f(x) = 3$ và $m = \min\limits_{[0;3]} f(x) = -2$.

Vậy $M + m = 1$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 15 (Chuyên Lê Quý Đôn - Điện Biên 2019).

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-2;6]$ và có đồ thị như hình vẽ. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-2;6]$. Giá trị của $M - m$ bằng



Ⓐ 9. Ⓑ -8. Ⓒ -9. Ⓓ 8.

Lời giải.

Từ đồ thị, ta có $M = \max\limits_{[-2;6]} f(x) = 5$ và $m = \min\limits_{[-2;6]} f(x) = -4$.

Vậy $M - m = 9$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 16 (THPT Ngô Sĩ Liên - Bắc Giang 2019).

Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	

Mệnh đề nào sau đây đúng?

Ⓐ $\max\limits_{(-1;1]} f(x) = f(0)$. Ⓑ $\max\limits_{(0;+\infty)} f(x) = f(1)$.

Ⓒ $\min\limits_{(-\infty;-1)} f(x) = f(-1)$. Ⓓ $\min\limits_{(-1;+\infty)} f(x) = f(0)$.

Lời giải.

Mệnh đề đúng là $\min\limits_{(0;+\infty)} f(x) = f(1)$.

Chọn đáp án (B) □

Dạng 1. Xác định giá trị lớn nhất - giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn từ công thức của hàm số

Câu 17 (Đề minh họa 2020 Lần 1). Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=-x^4+12x^2+1$ trên đoạn $[-1;2]$ bằng

Ⓐ 1. Ⓑ 37. Ⓒ 33. Ⓓ 12.

Lời giải.

Ta có $f'(x)=-4x^3+24x=-4x\left(x^2-6\right)$.

$$f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\sqrt{6}\quad(\text{loại})\\x=-\sqrt{6}\quad(\text{loại}).\end{array}\right.$$

Mặt khác, $f(-1)=12$, $f(2)=33$, $f(0)=1$.

Suy ra $\max\limits_{[-1;2]} f(x)=f(2)=33$.

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 18 (Đề tham khảo 2022 Lần 2).

Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=x^4-10x^2+2$ trên đoạn $[-1;2]$ bằng

Ⓐ 2. Ⓑ -23. Ⓒ -22. Ⓓ -7.

Lời giải.

Ta có $f'(x)=4x^3-20x=4x\left(x^2-5\right)$.

$$f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\sqrt{5}\quad(\text{loại})\\x=-\sqrt{5}\quad(\text{loại}).\end{array}\right.$$

Mặt khác, $f(-1)=-7$, $f(2)=-22$, $f(0)=2$.

Suy ra $\min\limits_{[-1;2]} f(x)=f(2)=-22$.

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 19 (Mã 101 - 2020 Lần 1). Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=x^3-24x$ trên đoạn $[2;19]$ bằng

Ⓐ $32\sqrt{2}$. Ⓑ -40. Ⓒ $-32\sqrt{2}$. Ⓓ -45.

Lời giải.

Ta có $f'(x)=3x^2-24$.

$$f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\sqrt{2}\\x=-2\sqrt{2}\quad(\text{loại}).\end{array}\right.$$

Mặt khác $f(2)=-40$, $f(19)=6403$, $f\left(2\sqrt{2}\right)=-32\sqrt{2}$.

Suy ra $\min\limits_{[2;19]} f(x)=f\left(2\sqrt{2}\right)=-32\sqrt{2}$.

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 20. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=x^3-21x$ trên đoạn $[2;19]$ bằng

Ⓐ -36. Ⓑ $-14\sqrt{7}$. Ⓒ $14\sqrt{7}$. Ⓓ -34.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = 3x^2 - 21$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \sqrt{7} \\ x = -\sqrt{7} \quad \text{(loại)}. \end{array}\right.$

Mặt khác, $f(2) = -34$, $f(19) = 6460$, $f\left(\sqrt{7}\right) = -14\sqrt{7}$.

Suy ra $\min\limits_{[2;19]} f(x) = f\left(\sqrt{7}\right) = -14\sqrt{7}$.

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 21. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x^3 - 30x$ trên đoạn $[2;19]$ bằng

Ⓐ $20\sqrt{10}$. Ⓑ -63. Ⓒ $-20\sqrt{10}$. Ⓓ -52.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = 3x^2 - 30$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \sqrt{10} \\ x = -\sqrt{10} \quad \text{(loại)}. \end{array}\right.$

Mặt khác, $f(2) = -52$, $f(19) = 6289$, $f\left(\sqrt{10}\right) = -20\sqrt{10}$.

Suy ra $\min\limits_{[2;19]} f(x) = f\left(\sqrt{10}\right) = -20\sqrt{10}$.

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 22 (Mã 104 - 2020 Lần 1). Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x^3 - 33x$ trên đoạn $[2;19]$ bằng

Ⓐ -72. Ⓑ $-22\sqrt{11}$. Ⓒ -58. Ⓓ $22\sqrt{11}$.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = 3x^2 - 33 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \sqrt{11} \in [2;19] \\ x = -\sqrt{11} \notin [2;19]. \end{array}\right.$

Khi đó ta có $f(2) = -58$, $f(\sqrt{11}) = -22\sqrt{11}$, $f(19) = 6232$.

Vậy $f_{\min} = f(\sqrt{11}) = -22\sqrt{11}$.

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 23 (Mã 101 - 2020 Lần 2). Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x^4 - 10x^2 - 4$ trên $[0;9]$ bằng

Ⓐ -28. Ⓑ -4. Ⓒ -13. Ⓓ -29.

Lời giải.

Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[0;9]$.

Có $f'(x) = 4x^3 - 20x$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \sqrt{5} \\ x = -\sqrt{5} \notin [0;9]. \end{array}\right.$

Ta có $f(0) = -4$, $f(\sqrt{5}) = -29$, $f(9) = 5747$.

Do đó $\min\limits_{[0;9]} f(x) = f(\sqrt{5}) = -29$.

Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 24 (Mã 102 - 2020 Lần 2). Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x^4 - 12x^2 - 4$ trên đoạn $[0; 9]$ bằng

(A) -39. (B) -40. (C) -36. (D) -4.

Lời giải.

Ta có: $f'(x) = 4x^3 - 24x$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{6}. \end{array}\right.$

Tính được: $f(0) = -4$; $f(9) = 5585$ và $f(\sqrt{6}) = -40$.

Suy ra $\min\limits_{[0;9]} f(x) = -40$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 25 (Mã 103 - 2020 Lần 2). Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x^4 - 10x^2 - 2$ trên đoạn $[0; 9]$ bằng

(A) -2. (B) -11. (C) -26. (D) -27.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = 4x^3 - 20x$.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 20x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \notin (0; 9) \\ x = \sqrt{5} \in (0; 9) \\ x = -\sqrt{5} \notin (0; 9). \end{array}\right.$$

$f(0) = -2$; $f(\sqrt{5}) = -27$; $f(9) = 5749$.

Vậy $\min\limits_{[0;9]} f(x) = -27$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 26 (Mã 104 - 2020 Lần 2). Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x^4 - 12x^2 - 1$ trên đoạn $[0; 9]$ bằng

(A) -28. (B) -1. (C) -36. (D) -37.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = 4x^3 - 24x$.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 24x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \in [0; 9] \\ x = \sqrt{6} \in [0; 9] \\ x = -\sqrt{6} \notin [0; 9]. \end{array}\right.$$

$f(0) = -1$, $f(\sqrt{6}) = -37$, $f(9) = 5588$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 27 (Mã 102 - 2019). Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x^3 - 3x + 2$ trên đoạn $[-3; 3]$ bằng

(A) 0 . (B) -16. (C) 20 . (D) 4 .

Lời giải.

Cách 1: Mode 7, nhập $f(x)=x^3-3x+2$. Start -3. End 3. Step 1.

Cách 2: $f'(x)=3x^2-3.f'(x)=0 \Leftrightarrow x=\pm 1 \in [-3;3]$.

$f(-3)=-16; f(-1)=4; f(1)=0; f(3)=20$.

Giá trị nhỏ nhất là -16.

Chọn đáp án B □

Câu 28 (Mã 110 2017). Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số $y=x^4-2x^2+3$ trên đoạn $[0;\sqrt{3}]$.

Ⓐ $M=6$. Ⓑ $M=1$. Ⓒ $M=9$. Ⓓ $M=8\sqrt{3}$.

Lời giải.

Ta có: $y'=4x^3-4x=4x\left(x^2-1\right)$

$$y'=0 \Leftrightarrow 4x\left(x^2-1\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \\ x=-1 \text{ (loại)}. \end{array}\right.$$

Ta có : $y(0)=3$; $y(1)=2$; $y(\sqrt{3})=6$.

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số $y=x^4-2x^2+3$ trên đoạn $[0;\sqrt{3}]$ là $M=y(\sqrt{3})=6$.

Chọn đáp án A □

Câu 29 (Đề Minh Họa 2017). Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{x^2+3}{x-1}$ trên đoạn $[2;4]$.

Ⓐ $\min\limits_{[2;4]} y=-3$. Ⓑ $\min\limits_{[2;4]} y=\dfrac{19}{3}$. Ⓒ $\min\limits_{[2;4]} y=6$. Ⓓ $\min\limits_{[2;4]} y=-2$.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathscr{D}=\mathbb{R}\backslash\{1\}$.

Hàm số $y=\dfrac{x^2+3}{x-1}$ xác định và liên tục trên đoạn $[2;4]$.

Ta có $y'=\dfrac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}$; $y'=0 \Leftrightarrow x^2-2x-3=0 \Leftrightarrow x=3$ hoặc $x=-1$ (loại).

Suy ra $y(2)=7$; $y(3)=6$; $y(4)=\dfrac{19}{3}$.

Vậy $\min\limits_{[2;4]} y=6$ tại $x=3$.

Chọn đáp án C □

Câu 30 (Mã 103 - 2019). Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=x^3-3x$ trên đoạn $[-3;3]$ bằng

Ⓐ -2. Ⓑ 18 . Ⓒ 2 . Ⓓ -18.

Lời giải.

Ta có $y'=3x^2-3=0 \Leftrightarrow x=\pm 1$.

$$f(-3)=-18; f(-1)=2; f(1)=-2; f(3)=18.$$

Chọn đáp án B □

Câu 31 (Mã 104 2018). Giá trị lớn nhất của hàm số $y=x^4-x^2+13$ trên đoạn $[-1;2]$ bằng

Ⓐ 85. Ⓑ $\dfrac{51}{4}$. Ⓒ 13. Ⓓ 25.

Lời giải.

$$y = f(x) = x^4 - x^2 + 13$$
$$y' = 4x^3 - 2x$$
$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \in [-1;2] \\ x = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \in [-1;2] \\ x = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \in [-1;2] \end{array}\right.$$
$$f(-1) = 13; f(2) = 25; f(0) = 13; f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{51}{4}; f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{51}{4}.$$

Giá trị lớn nhất của hàm số $y = x^4 - x^2 + 13$ trên đoạn $[-1;2]$ bằng 25.

Chọn đáp án D □

Câu 32 (Mã 104 2017). Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = x^2 + \dfrac{2}{x}$ trên đoạn $\left[\dfrac{1}{2};2\right]$.

A $m = 5$. B $m = 3$. C $m = \dfrac{17}{4}$. D $m = 10$.

Lời giải.

Đặt $y = f(x) = x^2 + \dfrac{2}{x}$.

Ta có $y' = 2x - \dfrac{2}{x^2} = \dfrac{2x^3 - 2}{x^2}$, $y' = 0 \Rightarrow x = 1 \in \left[\dfrac{1}{2};2\right]$.

Khi đó $f(1) = 3$, $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{17}{4}$, $f(2) = 5$.

Vậy $m = \min\limits_{\left[\frac{1}{2};2\right]} f(x) = f(1) = 3$.

Chọn đáp án B □

Câu 33 (Chuyên Bắc Ninh 2018). Tìm tập giá trị của hàm số $y = \sqrt{x-1} + \sqrt{9-x}$

A $T = [1;9]$. B $T = [2\sqrt{2};4]$. C $T = (1;9)$. D $T = [0;2\sqrt{2}]$.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathscr{D} = [1;9]$

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x-1}} - \frac{1}{2\sqrt{9-x}} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{9-x} = \sqrt{x-1} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ 9 - x = x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 5.$$
$$f(1) = f(9) = 2\sqrt{2}; f(5) = 4$$

Vậy tập giá trị là $T = [2\sqrt{2};4]$.

Chọn đáp án B □

Câu 34 (Mã 123 2017). Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = x^3 - 7x^2 + 11x - 2$ trên đoạn $[0;2]$.

A $m = 3$. B $m = 0$. C $m = -2$. D $m = 11$.

Lời giải.

Xét hàm số trên đoạn $[0;2]$.

Ta có $y' = 3x^2 - 14x + 11$ suy ra $y' = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Tính $f(0) = -2; f(1) = 3, f(2) = 0$.

Suy ra $\min\limits_{[0;2]} f(x) = f(0) = -2 = m$.

Chọn đáp án C □

Câu 35 (Mã 101 2018). Giá trị lớn nhất của hàm số $y = x^4 - 4x^2 + 9$ trên đoạn $[-2; 3]$ bằng

(A) 201. (B) 2. (C) 9. (D) 54.

Lời giải.

$$y' = 4x^3 - 8x; y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{2} \end{array}\right..$$

Ta có $y(-2) = 9$; $y(3) = 54$; $y(0) = 9$; $y(\pm\sqrt{2}) = 5$.

Vậy $\max\limits_{[-2;3]} y = 54$.

Chọn đáp án D □

Câu 36 (Đề Tham Khảo 2018). Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = x^4 - 4x^2 + 5$ trên đoạn $[-2; 3]$ bằng

(A) 122. (B) 50. (C) 5. (D) 1.

Lời giải.

$$f'(x) = 4x^3 - 8x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \in [-2; 3]; \\ x = \pm\sqrt{2} \in [-2; 3]. \end{array}\right.$$

$$f(0) = 5; f(\pm\sqrt{2}) = 1; f(-2) = 5; f(3) = 50.$$

Vậy $\max\limits_{[-2;3]} y = 50$.

Chọn đáp án B □

Câu 37 (Mã 105 2017). Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = x^4 - x^2 + 13$ trên đoạn $[-2; 3]$.

(A) $m = 13$. (B) $m = \dfrac{51}{4}$. (C) $m = \dfrac{51}{2}$. (D) $m = \dfrac{49}{4}$.

Lời giải.

$$y' = 4x^3 - 2x; y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \in [-2; 3]; \\ x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}} \in [-2; 3]. \end{array}\right.$$

Tính $y(-2) = 25$, $y(3) = 85$, $y(0) = 13$, $y\left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \dfrac{51}{4} = 12,75$.

Kết luận: giá trị nhỏ nhất m của hàm số là $m = \dfrac{51}{4}$.

Chọn đáp án B □

Câu 38 (Mã 104 2019). Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x^3 - 3x$ trên đoạn $[-3; 3]$ bằng

(A) -18. (B) -2. (C) 2. (D) 18.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -1 \end{array}\right.$.

Mà $f(-3) = -18; f(-1) = 2; f(1) = -2; f(3) = 18$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x^3 - 3x$ trên đoạn $[-3; 3]$ bằng -18.

Chọn đáp án (A) □

Câu 39 (Mã 103 2018). Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^3 + 3x^2$ trên đoạn $[-4; -1]$ bằng

(A) -16. (B) 0. (C) 4. (D) -4.

Lời giải.

Ta có $y' = 3x^2 + 6x; y' = 0 \Rightarrow 3x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x = 0 & \notin [-4; -1] \\ x = -2 & \in [-4; -1] \end{array}\right.$.

Khi đó $y(-4) = -16$; $y(-2) = 4$; $y(-1) = 2$.

Vậy $\min_{[-4;-1]} y = -16$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 40 (Mã 102 2018). Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^3 + 2x^2 - 7x$ trên đoạn $[0; 4]$ bằng

(A) -259. (B) 68. (C) 0. (D) -4.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

Hàm số liên tục trên đoạn $[0; 4]$. Ta có $y' = 3x^2 + 4x - 7$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \in [0; 4] \\ x = -\dfrac{7}{3} \notin [0; 4] \end{array}\right.$$

$$y(0) = 0; y(1) = -4; y(4) = 68.$$

Vậy $\min\limits_{[0;4]} y = -4$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 41 (Mã 101 - 2019). Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = x^3 - 3x + 2$ trên đoạn $[-3; 3]$ là

(A) 4. (B) -16. (C) 20. (D) 0.

Lời giải.

$f(x) = x^3 - 3x + 2$ tập xác định $\mathbb{R}$.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1 \in [-3; 3].$$

$$f(1) = 0; f(-1) = 4; f(3) = 20; f(-3) = -16.$$

Từ đó suy ra $\max\limits_{[-3;3]} f(x) = f(3) = 20$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 42 (SGD Nam Định). Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^2 + \dfrac{2}{x}$ trên đoạn $[2; 3]$ bằng

(A) $\dfrac{15}{2}$. (B) 5. (C) $\dfrac{29}{3}$. (D) 3.

Lời giải.

+ Ta có hàm số $y = f(x) = x^2 + \dfrac{2}{x}$ xác định và liên tục trên $[2; 3]$.

+ $y' = f'(x) = 2x - \dfrac{2}{x^2}$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \notin [2; 3]$ mà $f(2) = 5, f(3) = \dfrac{29}{3}$.

Vậy $\min\limits_{[2;3]} y = 5$ tại $x = 2$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 43 (Sở Quảng Trị 2019). Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số $y = \dfrac{3x-1}{x-3}$ trên đoạn $[0;2]$

(A) $M = \dfrac{1}{3}$. (B) $M = -\dfrac{1}{3}$. (C) $M = 5$. (D) $M = -5$.

Lời giải.

Trên đoạn $[0;2]$ ta luôn có $y' = -\dfrac{8}{(x-3)^2} < 0$, $\forall x \in (0;2)$.

Vì $y(0) = \dfrac{1}{3}$, $y(2) = -5$ nên $M = \max\limits_{[0;2]} y = \dfrac{1}{3}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 44 (Sở Nam Định-2019). Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \sqrt{4-x^2}$ là

(A) 2. (B) 0. (C) 4. (D) 1.

Lời giải.

- Tập xác định: $D = [-2;2]$.

- Ta có: $y' = \dfrac{-x}{\sqrt{4-x^2}} \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow x = 0 \in (-2;2)$.

- Ta có: $\begin{cases} y(-2) = y(2) = 0 \\ y(0) = 2 \end{cases} \Rightarrow \max\limits_{[-2;2]} y = 2$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 45 (Đề Minh Họa 2021). Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3$ trên đoạn $[0;2]$. Tổng $M + m$ bằng

(A) 11. (B) 14. (C) 5. (D) 13.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

$$f'(x) = 4x^3 - 4x$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x = 0 & \in [0;2] \\ x = -1 & \notin [0;2] \\ x = 1 & \in [0;2] \end{array}\right.$$

$$f(0) = 3;\ f(1) = 2;\ f(2) = 11$$

$$\Rightarrow \begin{cases} M = 11 \\ m = 2 \end{cases} \Rightarrow M + m = 13.$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 46 (Mã 101 - 2021 Lần 1). Trên đoạn $[0;3]$, hàm số $y = -x^3 + 3x$ đạt giá trị lớn nhất tại điểm

(A) $x = 0$. (B) $x = 3$. (C) $x = 1$. (D) $x = 2$.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathbb{R}$.

$$y' = -3x^2 + 3$$
$$y' = 0 \Leftrightarrow -3x^2 + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \quad \in (0;3) \\ x = -1 \notin (0;3) \end{array}\right.$$

Ta có $y(0) = 0; y(1) = 2; y(3) = -18$. Vậy $\max\limits_{[0;3]} y = y(1) = 2$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 47 (Mã 103 - 2021 - Lần 1). Trên đoạn $[0;3]$, hàm số $y = x^3 - 3x + 4$ đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm

(A) $x = 1$. (B) $x = 0$. (C) $x = 3$. (D) $x = 2$.

Lời giải.

Ta có $y' = 3x^2 - 3$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \in [0;3] \\ x = -1 \notin [0;3] \end{array}\right. .$$

Lại có $y(0) = 4; y(1) = 2; y(3) = 22$. Vậy $\min\limits_{[0;3]} y = y(1) = 2$

Chọn đáp án (A) □

Câu 48 (Mã 102 - 2021 Lần 1). Trên đoạn $[-2;1]$, hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 1$ đạt giá trị lớn nhất tại điểm

(A) $x = -2$. (B) $x = 0$. (C) $x = -1$. (D) $x = 1$.

Lời giải.

Ta có $y' = 3x^2 - 6x \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$.

Ta đang xét trên đoạn $[-2;1]$ nên loại $x = 2$.

Ta có $f'(-2) = -21; f'(0) = -1; f'(1) = -3$.

Do đó giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[-2;1]$ là -1, tại $x = 0$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 49 (Mã 104 - 2021 Lần 1). Trên đoạn $[-1;2]$, hàm số $y = x^3 + 3x^2 + 1$ đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm

(A) $x = 2$. (B) $x = 0$. (C) $x = -1$. (D) $x = 1$.

Lời giải.

Xét hàm số $y = f(x) = x^3 + 3x^2 + 1$.

$\Rightarrow y' = f'(x) = 3x^2 + 6x. +f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \in [-1;2] \\ x = -2 \notin [-1;2] \end{array}\right.$.

Ta có $f(-1)=3, f(0)=1$ và $f(2)=21$.

Nên $\min\limits_{x\in[-1;2]} f(x)=1$ khi $x=0$.

Chọn đáp án B □

Câu 50 (Chuyên Bắc Ninh 2018). Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\sin^2 x-4\sin x-5$.

A -20. B -8. C -9. D 0.

Lời giải.

Đặt $t=\sin x, t\in[-1;1]$. Xét $f(t)=t^2-4t-5, t\in[-1;1]$. $f'(t)=2t-4=0\Leftrightarrow t=2\notin[-1;1]$.

$f(1)=-8, f(-1)=0$.

Ta thấy $\min\limits_{[-1;1]} f(t)=f(1)=-8$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của hàm số là -8.

Chọn đáp án B □

Câu 51 (THPT Hoa Lư A 2018). Gọi m, M lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=\frac{1}{2}x-\sqrt{x+1}$ trên đoạn $[0;3]$. Tính tổng $S=2m+3M$.

A $S=-\frac{7}{2}$. B $S=-\frac{3}{2}$. C -3. D $S=4$.

Lời giải.

Ta có: $f'(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2\sqrt{x+1}}=\frac{\sqrt{x+1}-1}{2\sqrt{x+1}}$, cho $f'(x)=0\Rightarrow\sqrt{x+1}=1\Leftrightarrow x=0\in[0;3]$.

Khi đó: $f(0)=-1, f(3)=-\frac{1}{2}$ nên $m=-1$ và $M=-\frac{1}{2}$.

Vậy $S=2m+3M=-\frac{7}{2}$.

Chọn đáp án A □

Câu 52 (Chuyên ĐHSPHN - 2018). Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=\sin x+\cos 2x$ trên $[0;\pi]$ là

A $\frac{9}{8}$. B $\frac{5}{4}$. C 2. D 1.

Lời giải.

$$f(x)=\sin x+\cos 2x=\sin x+1-2\sin^2 x$$

Đặt $\sin x=t\quad(0\le t\le 1)$.

$$f(t)=-2t^2+t+1, f'(t)=-4t+1$$
$$f'(t)=0\Leftrightarrow t=\frac{1}{4}$$
$$f(0)=1, f(1)=0, f\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{9}{8}$$
$$\text{Vậy }\max_{[0;1]} f(x)=\frac{9}{8}.$$

Chọn đáp án A □

Câu 53 (THPT Hà Huy Tập - 2018). Giá trị lớn nhất của hàm số $y=2\cos x-\frac{4}{3}\cos^3 x$ trên $[0;\pi]$ là

(A) $\frac{2}{3}$. (B) $\frac{10}{3}$. (C) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$. (D) 0.

Lời giải.

Đặt: $t = \cos x \Rightarrow t \in [-1;1] \Rightarrow y = 2t - \frac{4}{3}t^3$.

$$y' = 2 - 4t^2 \quad y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{-1}{\sqrt{2}} \in [-1;1] \\ x = \frac{1}{\sqrt{2}} \in [-1;1] \end{array}\right. .$$

Tính: $y(-1) = \frac{-2}{3}, y\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{-2\sqrt{2}}{3}, y\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{2\sqrt{2}}{3}, y(1) = \frac{2}{3}$.

Vậy: $\max\limits_{[0;\pi]} y = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

Chọn đáp án (C) □

Câu 54. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{3\sin x + 2}{\sin x + 1}$ trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. Khi đó giá trị của $M^2 + m^2$ là

(A) $\frac{31}{2}$. (B) $\frac{11}{2}$. (C) $\frac{41}{4}$. (D) $\frac{61}{4}$.

Lời giải.

Đặt $t = \sin x, t \in [0;1]$.

Xét hàm $f(t) = \frac{3t+2}{t+1}$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ có $f'(t) = \frac{1}{(t+1)^2} > 0, t \in [0;1]$.

Suy ra hàm số đồng biến trên $[0;1]$.

$$\Rightarrow M = \text{Max}_{[0;1]}\, f(t) = f(1) = \frac{5}{2} \text{và} m = \underset{[0;1]}{\text{Min}} f(t) = f(0) = 2.$$

$$\text{Khi đó } M^2 + m^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 2^2 = \frac{41}{4}.$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 55 (THPT Can Lộc - Hà Tĩnh - 2018).

Cho hàm số $y = \frac{\sin x + 1}{\sin^2 x + \sin x + 1}$. Gọi M là giá trị lớn nhất và m là giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho. Chọn mệnh đề đúng.

(A) $M = m + \frac{3}{2}$. (B) $M = \frac{3}{2}m$. (C) $M = m + 1$. (D) $M = m + \frac{2}{3}$.

Lời giải.

Đặt $\sin x = t, (-1 \le t \le 1)$ ta được $y = \frac{t+1}{t^2+t+1}$.

Xét hàm số $y = \frac{t+1}{t^2+t+1}$ trên đoạn $[-1;1]$ ta có $y' = \frac{-t^2-2t}{(t^2+t+1)^2}$.

Giải phương trình $y' = 0 \Leftrightarrow -t^2 - 2t = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0 \text{ (thỏa mãn)} \\ t = -2 \text{ (loại)} . \end{array}\right.$.

Vì $y(-1) = 0$; $y(0) = 1$; $y(1) = \frac{2}{3}$ nên

$$\max_{[-1;1]} y = y(0) = 1 \Rightarrow M = 1; \min_{[-1;1]} y = y(-1) = 0 \Rightarrow m = 0.$$

Vậy $M = m + 1$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 56 (Đề minh họa 2022). Trên đoạn $[1;5]$, hàm số $y = x + \frac{4}{x}$ đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm

(A) $x = 5$. (B) $x = 2$. (C) $x = 1$. (D) $x = 4$.

Lời giải.

Hàm số $y = f(x) = x + \frac{4}{x}$ xác định trên $[1;5]$.

$$f'(x) = 1 - \frac{4}{x^2} = \frac{x^2-4}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \in [1;5] \\ x = -2 \notin [1;5] \end{array}\right.$$

$$f'(1) = 5; f(2) = 4; f(5) = \frac{29}{5}.$$

Suy ra, hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x = 2$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 57 (Mã 101-2022). Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 10$ trên đoạn $[-2;2]$ bằng

(A) -12. (B) 10 . (C) 15. (D) -1.

Lời giải.

Xét hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 10$ trên đoạn $[-2;2]$.

$$\Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 6x - 9.$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x - 9 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x = -1 & \in [-2;2] \\ x = 3 & \notin [-2;2] \end{array}\right. .$$

Ta có:

$$f(-2) = 8; f(-1) = 15; f(2) = -12.$$

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 10$ trên đoạn $[-2;2]$ bằng 15.

Chọn đáp án (C) □

Dạng 2. Xác định giá trị lớn nhất - giá trị nhỏ nhất của hàm số trên khoảng $(a;b)$

Câu 58 (Đề Tham Khảo 2017). Tính giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 3x + \frac{4}{x^2}$ trên khoảng $(0;+\infty)$.

(A) $\min\limits_{(0;+\infty)} y = \frac{33}{5}$. (B) $\min\limits_{(0;+\infty)} y = 2\sqrt[3]{9}$. (C) $\min\limits_{(0;+\infty)} y = 3\sqrt[3]{9}$. (D) $\min\limits_{(0;+\infty)} y = 7$.

Lời giải.

Cách 1:

$$y=3x+\frac{4}{x^2}=\frac{3x}{2}+\frac{3x}{2}+\frac{4}{x^2}\geq 3\sqrt[3]{\frac{3x}{2}\cdot\frac{3x}{2}\cdot\frac{4}{x^2}}=3\sqrt[3]{9}$$

Dấu " =" xảy ra khi $\frac{3x}{2}=\frac{4}{x^2}\Leftrightarrow x=\sqrt[3]{\frac{8}{3}}$.

Vậy $\min\limits_{(0;+\infty)} y=3\sqrt[3]{9}$.

Cách 2: Xét hàm số $y=3x+\frac{4}{x^2}$ trên khoảng $(0;+\infty)$.

Ta có $y=3x+\frac{4}{x^2}\Rightarrow y'=3-\frac{8}{x^3}$.

Cho $y'=0\Leftrightarrow\frac{8}{x^3}=3\Leftrightarrow x^3=\frac{8}{3}\Leftrightarrow x=\sqrt[3]{\frac{8}{3}}$.

Bảng biến thiên:

x	0		$\sqrt[3]{\frac{8}{3}}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y		$\searrow$	$3\sqrt[3]{9}$	$\nearrow$	

$$\Rightarrow \min\limits_{(0;+\infty)} y=y\left(\sqrt[3]{\frac{8}{3}}\right)=3\sqrt[3]{9}.$$

Chọn đáp án C □

Câu 59. Gọi m là giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x-1+\frac{4}{x-1}$ trên khoảng $(1;+\infty)$. Tìm m ?

A) $m=5$. B) $m=4$. C) $m=2$. D) $m=3$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D}=R\backslash\{1\}$.

$$y'=\frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}, y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=3\end{array}\right..$$

Bảng biến thiên:

x	1		3		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$

$$\Rightarrow m=\min\limits_{(1;+\infty)} y=4 \text{ khi } x=3.$$

Chọn đáp án B □

Câu 60 (THPT Minh Châu Hưng Yên 2019).

Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x - 5 + \frac{1}{x}$ trên khoảng $(0; +\infty)$ bằng bao nhiêu?

(A) 0. (B) -1. (C) -3. (D) -2.

Lời giải.

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si ta có:

$$y = x + \frac{1}{x} - 5 \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{1}{x}} - 5 = -3$$

Dấu bằng xảy ra khi $x = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 1$ (vì $x > 0$).

Vậy $\min\limits_{(0;+\infty)} y = -3$

Chọn đáp án (C) □

Câu 61. (Chuyên Lương Thế Vinh Đồng Nai 2019) Gọi m là giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x + \frac{4}{x}$ trên khoảng $(0; +\infty)$. Tìm m

(A) $m = 4$. (B) $m = 2$. (C) $m = 1$. (D) $m = 3$.

Lời giải.

$$y' = 1 - \frac{4}{x^2}$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2; \quad x = 2 \in (0; +\infty).$$

Bảng biến thiên:

x	0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$

Suy ra giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng $y(2) = 4 \Rightarrow m = 4$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 62 (Chuyên Bắc Giang 2019). Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x + \frac{1}{x}$ trên nửa khoảng $[2; +\infty)$ là

(A) 2. (B) $\frac{5}{2}$. (C) 0. (D) $\frac{7}{2}$.

Lời giải.

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta được: $f(x) = x + \frac{1}{x} = \frac{3x}{4} + \frac{x}{4} + \frac{1}{x} \geq \frac{3 \cdot 2}{4} + 2\sqrt{\frac{x}{4} \cdot \frac{1}{x}} = \frac{5}{2}$.

Dấu bằng xảy ra khi $x = 2$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 63. Gọi m là giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x + \frac{4}{x}$ trên khoảng $(0; +\infty)$. Tìm m.

(A) $m = 3$. (B) $m = 4$. (C) $m = 2$. (D) $m = 1$.

Lời giải.

Cách 1: Hàm số $y = x + \dfrac{4}{x}$ liên tục và xác định trên $(0; +\infty)$.

Ta có $y' = 1 - \dfrac{4}{x^2} = \dfrac{x^2 - 4}{x^2} \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \in (0; +\infty) \\ x = -2 \notin (0; +\infty) \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:

x	0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy giá trị nhỏ nhất là $m = 4$ khi $x = 2$.

Cách 2: Với $x \in (0; +\infty) \Rightarrow x > 0; \dfrac{4}{x} > 0$.

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si ta có: $x + \dfrac{4}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \dfrac{4}{x}} = 4$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} x > 0 \\ x = \dfrac{4}{x} \end{cases} \Leftrightarrow x = 2$.

Vậy $m = 4$ khi $x = 2$.

Chọn đáp án B □

Câu 64. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sqrt{4 - x} + \sqrt{3}$ trên tập xác định của nó là

A. $2 + \sqrt{3}$.
B. $2\sqrt{3}$.
C. 0.
D. $\sqrt{3}$.

Lời giải.

Tập xác định của hàm số là: $\mathscr{D} = (-\infty; 4]$.

Ta có $y' = \dfrac{-1}{2\sqrt{4 - x}} < 0, \forall x \in \mathscr{D}$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		4
y'		$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$\sqrt{3}$

Từ bảng biến thiên suy ra $\min\limits_{(-\infty;4]} y = \sqrt{3}$ khi $x = 4$.

Chọn đáp án D □

Câu 65. Với giá trị nào của x thì hàm số $y = x^2 + \dfrac{1}{x}$ đạt giá trị nhỏ nhất trên khoảng $(0; +\infty)$?

A. $\dfrac{3}{\sqrt[3]{4}}$.
B. $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.
C. 1.
D. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

$$y' = 2x - \frac{1}{x^2}, y' = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}.$$

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$		$+\infty$
y'		$-$	‖	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$\sqrt[3]{2} + \frac{1}{\sqrt[3]{4}}$	↗	$+\infty$

Dựa vào BBT thì $x = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$ hàm số đạt giá trị nhỏ nhất trên $(0; +\infty)$.

Chọn đáp án D □

Câu 66. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x + \dfrac{2}{x} - (1 + \sqrt{2})^2$ trên khoảng $(0; +\infty)$

A không tồn tại. B -3. C $-1 + \sqrt{2}$. D 0.

Lời giải.

Hàm số xác định và liên tục trên khoảng $(0; +\infty)$.

$$y' = 1 - \frac{2}{x^2} = \frac{x^2 - 2}{x^2}.$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \sqrt{2} \\ x = -\sqrt{2} \end{array}\right. .$$

Bảng biến thiên:

x	0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘	-3	↗	$+\infty$

Vậy $\min\limits_{(0;+\infty)} y = f(\sqrt{2}) = -3$.

Chọn đáp án B □

Câu 67. Cho hàm số $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 - 1}}{x - 2}$ với x thuộc $\mathscr{D} = (-\infty; -1] \cup \left[1; \dfrac{3}{2}\right]$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A $\max\limits_{\mathscr{D}} f(x) = 0; \min\limits_{\mathscr{D}} f(x) = -\sqrt{5}$.

B $\max\limits_{\mathscr{D}} f(x) = 0$; không tồn tại $\min\limits_{\mathscr{D}} f(x)$.

C $\max\limits_{\mathscr{D}} f(x) = 0; \min\limits_{\mathscr{D}} f(x) = -1$.

D $\min\limits_{\mathscr{D}} f(x) = 0$; không tồn tại $\max\limits_{\mathscr{D}} f(x)$.

Lời giải.

Hàm số xác định và liên tục trên $\mathscr{D} = -\infty; -1 \cup \left[1; \dfrac{3}{2}\right]$.

$$f'x = \frac{-2x + 1}{x - 2^2\sqrt{x^2 - 1}}; f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \notin \mathscr{D}.$$

x	$-\infty$	-1		1	$\frac{3}{2}$
$f'(x)$	$+$			$-$	
$f(x)$	$-1 \nearrow$	0		0	$\searrow \sqrt{5}$

Vậy $\max\limits_{\mathscr{D}} f(x) = 0; \min\limits_{\mathscr{D}} f(x) = -\sqrt{5}$

Chọn đáp án (A) □

Câu 68 (Cụm liên trường Hải Phòng 2019).

Mệnh đề nào sau đây là đúng về hàm số $y = \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+5}}$ trên tập xác định của nó.

(A) Hàm số không có giá trị lớn nhất và không có giá trị nhỏ nhất.

(B) Hàm số không có giá trị lớn nhất và có giá trị nhỏ nhất.

(C) Hàm số có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất.

(D) Hàm số có giá trị lớn nhất và không có giá trị nhỏ nhất.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

$$y' = \frac{\sqrt{x^2+5} - x + 1\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+5}}}{x^2+5} = \frac{x^2+5-x^2-x}{\sqrt{x^2+5}x^2+5} = \frac{5-x}{\sqrt{x^2+5}x^2+5}.$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \frac{5-x}{\sqrt{x^2+5}x^2+5} = 0 \Leftrightarrow 5 - x = 0 \Leftrightarrow x = 5.$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		5		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	
y	-1	$\nearrow$	$\dfrac{\sqrt{30}}{5}$	$\searrow$	-1

Từ bảng biến thiên có $\max\limits_{\mathbb{R}} y = y(5) = \dfrac{\sqrt{30}}{5}$ khi $x = 5$.

Hàm số $y = \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+5}}$ không có giá trị nhỏ nhất.

Vậy hàm số có giá trị lớn nhất và không có giá trị nhỏ nhất.

Chọn đáp án (D) □

BẢNG ĐÁP ÁN

1. C	3. B	4. A	5. A	6. A	7. B	8. A	9. C	10. B	11. C
12. D	13. B	14. D	15. A	16. B	17. C	18. C	19. C	20. B	21. C
22. B	23. D	24. B	25. D	26. D	27. B	28. A	29. C	30. B	31. D
32. B	33. B	34. C	35. D	36. B	37. B	38. A	39. A	40. D	41. C

42. B	43. A	44. A	45. D	46. C	47. A	48. B	49. B	50. B	51. A
52. A	53. C	54. C	55. C	56. B	57. C	58. C	59. B	60. C	61. A
62. B	63. B	64. D	65. D	66. B	67. A	68. D			

MỨC ĐỘ 2. MỨC ĐỘ 7,8 ĐIỂM

Dạng 1. Định m để GTLN-GTNN của hàm số thỏa mãn điều kiện cho trước

Câu 1. Cho hàm số $y=\dfrac{x+m}{x-1}$ (m là tham số thực) thỏa mãn $\min\limits_{[2;4]} y=3$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

(A) $m>4$. (B) $3<m\leq 4$. (C) $m<-1$. (D) $1\leq m<3$.

Lời giải.

Ta có $y'=\dfrac{-1-m}{(x-1)^2}$.

*__Trường hợp 1:__ $-1-m>0 \Leftrightarrow m<-1$ suy ra y đồng biến trên $[2;4]$, suy ra

$$\min_{[2;4]} f(x)=f(2)=\frac{2+m}{1}=3\Leftrightarrow m=1 \text{ (loại).}$$

*__Trường hợp 2:__ $-1-m<0 \Leftrightarrow m>-1$ suy ra y nghịch biến trên $[2;4]$, suy ra

$$\min_{[2;4]} f(x)=f(4)=\frac{4+m}{3}=3\Leftrightarrow m=5\Rightarrow m>4.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 2. Cho hàm số $y=\dfrac{x+m}{x+1}$ (m là tham số thực) thỏa mãn $\min\limits_{[1;2]} y+\max\limits_{[1;2]} y=\dfrac{16}{3}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

(A) $m>4$. (B) $2<m\leq 4$. (C) $m\leq 0$. (D) $0<m\leq 2$.

Lời giải.

Ta có $y'=\dfrac{1-m}{(x+1)^2}$.

*__Trường hợp 1:__ $m<1$ suy ra y đồng biến trên đoạn $[1;2]$, suy ra

$$\min_{[1;2]} y+\max_{[1;2]} y=\frac{16}{3}\Leftrightarrow y(1)+y(2)=\frac{16}{3}\Leftrightarrow\frac{m+1}{2}+\frac{m+2}{3}=\frac{16}{3}\Leftrightarrow m=5 \text{ (loại).}$$

*__Trường hợp 2:__ $m>1$ suy ra y nghịch biến trên đoạn $[1;2]$, suy ra

$$\min_{[1;2]} y+\max_{[1;2]} y=\frac{16}{3}\Leftrightarrow y(2)+y(1)=\frac{16}{3}\Leftrightarrow\frac{m+2}{2}+\frac{m+1}{3}=\frac{16}{3}\Leftrightarrow m=5 \text{ (nhận).}$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 3. Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{x+m}{x+1}$ trên đoạn $[1;2]$ bằng 8 (m là tham số thực). Khẳng định nào sau đây là đúng?

(A) $m > 10$. (B) $8 < m < 10$. (C) $0 < m < 4$. (D) $4 < m < 8$.

Lời giải.

Ta có: $y' = \dfrac{1-m}{(x+1)^2}$.

Nếu $y' < 0$ hoặc $y' > 0$ nên hàm số đạt giá trị lớn nhất và nhỏ nhất tại $x = 1$, $x = 2$.

Theo đề bài ta có:

$$\max_{[1;2]} y + \min_{[1;2]} y = 8 \Leftrightarrow y(1) + y(2) = 8 \Leftrightarrow \frac{m+1}{2} + \frac{m+2}{3} = 8 \Leftrightarrow m = \frac{41}{5} \in (8;10).$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 4. Có bao nhiêu giá trị của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số $y = \dfrac{x - m^2 - 2}{x - m}$ trên đoạn $[0;4]$ bằng -1?

(A) 3. (B) 2. (C) 1. (D) 0.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{m\}$.

$y' = \dfrac{m^2 - m + 2}{(x-m)^2} > 0, \forall x \neq m$.

Do đó hàm số đồng biến trên mỗi khoảng xác định.

Hàm số đạt giá trị lớn nhất trên đoạn $[0;4]$ bằng -1 khi

$$\begin{cases} m < 0 \\ f(4) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ \dfrac{2 - m^2}{4 - m} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ m^2 + m - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ \left[\begin{array}{l} m = 2 \\ m = -3 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow m = -3.$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 5. Cho hàm số $y = \dfrac{x+1}{x - m^2}$ (m là tham số thực) thỏa mãn $\min\limits_{[-3;-2]} y = \dfrac{1}{2}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

(A) $3 < m \leq 4$. (B) $-2 < m \leq 3$. (C) $m > 4$. (D) $m \leq -2$.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{m^2\}$.

Ta có $y' = \dfrac{-m^2 - 1}{(x-m)^2} < 0, \forall x \in D$ nên hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định.

Do $\min\limits_{[-3;-2]} y = \dfrac{1}{2} = y(-2) = \dfrac{-2+1}{-2-m^2} \Rightarrow -2 - m^2 = -2 \Leftrightarrow m = 0 \Rightarrow -2 < m \leq 3$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 6. Tìm giá trị dương của tham số m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \dfrac{m^2 x - 1}{x + 2}$ trên đoạn $[1;3]$ bằng 1.

(A) $m = \sqrt{2}$. (B) $m = \sqrt{3}$. (C) $m = 4$. (D) $m = 2$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

Ta có $y' = \dfrac{2m^2 + 1}{(x+2)^2} > 0, \forall x \neq -2$.

Hàm số đồng biến trên đoạn $[1;3]$ nên $\max\limits_{[1;3]} y = y(3) \Leftrightarrow \dfrac{3m^2-1}{5} = 1 \Leftrightarrow m = \sqrt{2}$(vì $m>0$).

Chọn đáp án (A) □

Câu 7. Cho hàm số $y = \dfrac{x-m^2}{x+8}$ với m là tham số thực. Giả sử m_0 là giá trị dương của tham số m để hàm số có giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[0;3]$ bằng -3. Giá trị m_0 thuộc khoảng nào trong các khoảng dưới đây?

(A) $(2;5)$. (B) $(1;4)$. (C) $(6;9)$. (D) $(20;25)$.

Lời giải.

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{-8\}$.

Ta có $y' = \dfrac{8+m^2}{(x+8)^2} > 0, \forall x \in D$ suy ra hàm số đồng biến trên $[0;3] \Rightarrow \min\limits_{[0;3]} y = y(0) = \dfrac{-m^2}{8}$.

Để $\min\limits_{[0;3]} y = -3 \Leftrightarrow \dfrac{-m^2}{8} = -3 \Leftrightarrow m = \pm 2\sqrt{6} \Rightarrow m_0 = 2\sqrt{6} \in (2;5)$. □

Câu 8. Tìm giá trị của tham số thực m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \dfrac{2x+m}{x+1}$ trên đoạn $[0;4]$ bằng 3.

(A) $m=3$. (B) $m=1$. (C) $m=7$. (D) $m=5$.

Lời giải.

Ta có $y' = \dfrac{2-m}{(x+1)^2}$

Nếu $m>2$ suy ra hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định.

Suy ra $\min\limits_{[0;4]} y = y(4) = \dfrac{m+8}{5} \Rightarrow \dfrac{8+m}{5} = 3 \Leftrightarrow m = 7$(thỏa mãn).

Nếu $m<2$ suy ra hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định.

Suy ra $\min\limits_{[0;4]} y = y(0) = 0 \Rightarrow m = 3$(loại).

Vậy $m=7$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 9. Tìm các giá trị của tham số m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \dfrac{x-m^2+m}{x+1}$ trên đoạn $[0;1]$ bằng -2.

(A) $\left[\begin{array}{l} m=-1 \\ m=-2 \end{array}\right.$. (B) $\left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=2 \end{array}\right.$. (C) $\left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=-2 \end{array}\right.$. (D) $\left[\begin{array}{l} m=-1 \\ m=2 \end{array}\right.$.

Lời giải.

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Ta có: $y = \dfrac{1-(-m^2+m)}{(x+1)^2} = \dfrac{m^2-m+1}{(x+1)^2} > 0, \forall x \in D \Rightarrow$ hàm số đồng biến trên đoạn $[0;1]$.

Vậy giá trị nhỏ nhất tại $x=0$ là $y(0) = 2 \Leftrightarrow -m^2+m = -2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-1 \\ m=2. \end{array}\right.$

Chọn đáp án (D) □

Câu 10. Cho hàm số $y = \dfrac{x+m}{x+1}$ (m là tham số thực) thỏa mãn $\min\limits_{[0;1]} y = 3$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

(A) $1 \le m < 3$. (B) $m > 6$. (C) $m < 1$. (D) $3 < m \le 6$.

Lời giải.

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Ta có $y' = \dfrac{1-m}{(x+1)^2}$.

*__Trường hợp 1:__ $y' > 0 \Leftrightarrow m < 1$ thì $\min\limits_{[0;1]} y = y(0) \Rightarrow m = 3$ (loại).

*__Trường hợp 2:__ $y' < 0 \Leftrightarrow m > 1$ thì $\min\limits_{[0;1]} y = y(1) \Rightarrow m = 5$ (thỏa mãn).

Chọn đáp án D □

Câu 11. Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \dfrac{x+m}{x+1}$ trên $[1;2]$ bằng 8 (m là tham số thực). Khẳng định nào sau đây đúng?

A $m > 10$. B $8 < m < 10$. C $0 < m < 4$. D $4 < m < 8$.

Lời giải.

Nếu $m = 1$ thì $y = 1$ (không thỏa mãn tổng của giá trị lớn nhất và nhỏ nhất bằng 8)

Nếu $m \neq 1$ thì hàm số đã cho liên tục trên $[1;2]$ và $y' = \dfrac{1-m}{(x+1)^2}$.

Khi đó đạo hàm của hàm số không đổi dấu trên đoạn $[1;2]$.

Do vậy $\min\limits_{[1;2]} y + \max\limits_{[1;2]} y = y(1) + y(2) = \dfrac{m+1}{2} + \dfrac{m+2}{3} = 8 \Leftrightarrow m = \dfrac{41}{5}$.

Chọn đáp án B □

Câu 12. Gọi A, B lần lượt là giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của hàm số $y = \dfrac{x+m^2+m}{x-1}$ trên đoạn $[2;3]$. Tìm tất cả các giá trị thực của hàm số m để $A + B = \dfrac{13}{2}$.

A $m = 1; m = -2$. B $m = -2$. C $m = \pm 2$. D $m = -1; m = 2$.

Lời giải.

Xét hàm số $y = \dfrac{x+m^2+m}{x-1}$ trên đoạn $[2;3]$.

Ta có $y' = \dfrac{-m^2-m-1}{(x-1)^2} < 0, \forall x \in [2;3]$.

Suy ra $A = f(3) = \dfrac{m^2+m+3}{2}$, $B = f(2) = \dfrac{m^2+m+2}{1}$.

Khi đó $A + B = \dfrac{13}{2} \Leftrightarrow \dfrac{m^2+m+3}{2} + \dfrac{m^2+m+2}{1} = \dfrac{13}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 2 \\ m = -2. \end{array}\right.$

Chọn đáp án A □

Câu 13. Cho hàm số $f(x) = \dfrac{x-m^2}{x+8}$ với m là tham số thực. Giả sử m_0 là giá trị dương của tham số m để hàm số có giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[0;3]$ bằng -3. Giá trị m_0 thuộc khoảng nào trong các khoảng cho dưới đây?

A $(20;25)$. B $(5;6)$. C $(6;9)$. D $(2;5)$.

Lời giải.

Xét hàm số $f(x) = \dfrac{x-m^2}{x+8}$ trên đoạn $[0;3]$.

Ta có: $y' = \dfrac{8+m^2}{(x+8)^2} > 0, \forall x \in [0;3]$.

Suy ra hàm số $f(x) = \dfrac{x-m^2}{x+8}$ đồng biến trên đoạn $[0;3]$.

Khi đó $\min\limits_{[0;3]} f(x) = f(0) = \dfrac{-m^2}{8}$.

Theo giả thuyết, ta có: $\min\limits_{[0;3]} f(x) = -3 \Leftrightarrow \dfrac{-m^2}{8} = -3 \Leftrightarrow m^2 = 24 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} m = 2\sqrt{6} \\ m = -2\sqrt{6} \text{ (loại)}. \end{array}\right.$

Vậy $m = 2\sqrt{6} \in (2;5)$.

Chọn đáp án D ☐

Câu 14. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = -x^3 - 3x^2 + m$ trên đoạn $[-1;1]$ bằng 0.

A $m = 2$. B $m = 6$. C $m = 0$. D $m = 4$.

Lời giải.

Xét hàm số $y = -x^3 - 3x^2 + m$ trên đoạn $[-1;1]$.

Ta có $y' = -3x^2 - 6x$.

Khi đó $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \in [-1;1] \\ x = -2 \in [-1;1]. \end{array}\right.$

Mà $\begin{cases} y'(-1) = m - 2 \\ y'(0) = m \\ y'(1) = m - 4. \end{cases}$

Do đó $\min\limits_{[-1;1]} y = -4 + m = 0 \Leftrightarrow m = 4$.

Vậy $m = 4$ thỏa yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án D ☐

Câu 15. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3x^2 + m$ có giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[-1;1]$ bằng $\sqrt{2}$.

A $m = \sqrt{2}$. B $m = 2 + \sqrt{2}$. C $m = 4 + \sqrt{2}$. D $\left[\begin{array}{l} m = 2 + \sqrt{2} \\ m = 4 + 2\sqrt{2} \end{array}\right.$.

Lời giải.

Ta có $y' = 3x^2 - 6x$.

Khi đó $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2. \end{array}\right.$

Trên $[-1;1]$ ta có $\begin{cases} y'(-1) = m - 4 \\ y'(0) = m \\ y'(1) = m - 2 \end{cases}$ nên $\min\limits_{[-1;1]} f(x) = \sqrt{2} \Leftrightarrow m - 4 = \sqrt{2} \Leftrightarrow m = 4 + \sqrt{2}$.

Chọn đáp án C ☐

Câu 16. Có một giá trị m_0 của tham số m để hàm số $y = x^3 + (m^2 + 1)x + m + 1$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng 5 trên đoạn $[0;1]$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A $2018m_0 - m_0^2 \geq 0$. B $2m_0 - 1 < 0$. C $6m_0 - m_0^2 < 0$. D $2m_0 + 1 < 0$.

Lời giải.

Đặt $f(x) = x^3 + (m^2 + 1)x + m + 1$.

Ta có: $y' = 3x^2 + m^2 + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ hàm số đồng biến trên $[0; 1]$.

Vì thế $\min\limits_{[0;1]} f(x) = f(0) = m + 1$.

Theo bài ta có: $m + 1 = 5 \Rightarrow m = 4$.

Vậy nên $m_0 = 4$ và mệnh đề đúng là $2018m_0 - m_0^2 \leq 0$.

Chọn đáp án A □

Câu 17. Nếu hàm số $y = x + m + \sqrt{1 - x^2}$ có giá trị lớn nhất bằng $2\sqrt{2}$ thì giá trị của m là

A $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. B $-\sqrt{2}$. C $\sqrt{2}$. D $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải.

Xét hàm số $y = x + m + \sqrt{1 - x^2}$ xác định trên $[-1; 1]$.

Ta có: $y' = 1 - \dfrac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$.

$$\text{Khi đó } y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{1 - x^2} = x \\ 1 - x^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 1 > x \geq 0 \\ 1 - x^2 = x \end{cases} \\ \begin{cases} 1 > x \leq 0 \\ 2x^2 = 1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} 1 > x \geq 0 \\ \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ x = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}.$$

Ta có $y(-1) = -1 + m$, $y(1) = 1 + m$, $y\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2} + m$.

Do hàm số y liên tục trên $[-1; 1]$ nên $\max\limits_{[-1;1]} y = m + \sqrt{2}$.

Theo đề bài thì $\max\limits_{[-1;1]} y = 2\sqrt{2} \Rightarrow m + \sqrt{2} = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow m = \sqrt{2}$.

Chọn đáp án C □

Câu 18. Cho hàm số $y = 2x^3 - 3x^2 - m$. Trên $[-1; 1]$ hàm số có giá trị nhỏ nhất là -1. Tính m.

A $m = -6$. B $m = -3$. C $m = -4$. D $m = -5$.

Lời giải.

Ta có $y' = 6x^2 - 6x$.

Khi đó $y' = 0 \Leftrightarrow 6x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \in [-1; 1] \\ x = 1 \in [-1; 1] \end{array}\right.$.

Khi đó $y(-1) = -5 - m$. $y(0) = -m$; $y(1) = -1 - m \Rightarrow \min\limits_{[-1;1]} y = -5 - m$.

Theo đề bài ta có $-5 - m = -1 \Leftrightarrow m = -4$.

Chọn đáp án C □

Câu 19. Biết S là tập giá trị của m để tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^4 - m^2x^3 - 2x^2 - m$ trên đoạn $[0; 1]$ bằng -16. Tính tích các phần tử của S.

A 2. B -2. C -15. D -17.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

Ta có: $y' = 4x^3 - 3m^2x^2 - 4x$.

Khi đó $y' = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 3m^2x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ 4x^2 - 3m^2x - 4 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \dfrac{3m^2 + \sqrt{9m^4 + 64}}{8} > 1 \\ x = \dfrac{3m^2 - \sqrt{9m^4 - 64}}{8} < 0. \end{array}\right.$

Nên hàm số đơn điệu trên $(0;1)$.

Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[0;1]$ bằng -16 nên

$$y(0) + y(1) = -16 \Leftrightarrow -m + (-m^2 - m - 1) = -16 \Leftrightarrow -m^2 - 2m + 15 = 0.$$

Vậy $m_1 \cdot m_2 = -15$.

Chọn đáp án C □

Câu 20. Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \dfrac{x^2 + mx + 1}{x + m}$ liên tục và đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[0;2]$ tại một điểm $x_0 \in (0;2)$.

Ⓐ $0 < m < 1$.　Ⓑ $m > 1$.　Ⓒ $m > 2$.　Ⓓ $-1 < m < 1$.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{-m\}$.

Hàm số liên tục trên $[0;2]$ nên $\left[\begin{array}{l} -m < 0 \\ -m > 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > 0 \\ m < -2. \end{array}\right.$

Ta có: $y' = \dfrac{x^2 + 2mx + m^2 - 1}{(x+m)^2} = \dfrac{(x+m)^2 - 1}{(x+m)^2}$.

Khi đó $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = -m - 1 \\ x_2 = -m + 1. \end{array}\right.$

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		x_1		$-m$		0	x_2	2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$-$		0		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	CĐ	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘		CT		↗	$+\infty$

Hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x_0 \in (0;2)$ nên $0 < -m + 1 < 2 \Leftrightarrow -1 < m < 1$.

So với điều kiện hàm số liên tục trên đoạn $[0;2]$.

Vậy ta có $0 < m < 1$.

Chọn đáp án A □

Câu 21. Cho hàm số $y = \dfrac{1 - m\sin x}{\cos x + 2}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[0;10]$ để giá trị nhỏ nhất của hàm số nhỏ hơn -2?

Ⓐ 1.　Ⓑ 9.　Ⓒ 3.　Ⓓ 6.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.
Ta có $y = \dfrac{1 - m\sin x}{\cos x + 2} \Leftrightarrow y\cos x + m\sin x = 1 - 2y$.
Phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $y^2 + m^2 \geq 1 - 4y + 4y^2 \Leftrightarrow 3y^2 - 4y + 1 - m^2 \leq 0 \Leftrightarrow \dfrac{2 - \sqrt{1 + 3m^2}}{3} \leq y \leq \dfrac{2 + \sqrt{1 + 3m^2}}{3}$.

Theo đề bài, ta có $\begin{cases} \min\limits_{x\in\mathbb{R}} y = \dfrac{2 - \sqrt{1 + 3m^2}}{3} < -2 \\ m \in [0; 10] \\ m \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{1 + 3m^2} > 8 \\ m \in [0; 10] \\ m \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3m^2 > 63 \\ m \in [0; 10] \\ m \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 > 21 \\ m \in [0; 10] \\ m \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow$
$m \in \{5; 6; 7; 8; 9; 10\}$.

Vậy có 6 giá trị nguyên của tham số m thỏa yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án D □

Câu 22. Cho hàm số $y = ax^3 + cx + d$, $a \neq 0$ có $\min\limits_{x\in(-\infty;0)} f(x) = f(-2)$. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[1; 3]$ bằng

(A) $d - 11a$. (B) $d - 16a$. (C) $d + 2a$. (D) $d + 8a$.

Lời giải.

Vì $y = ax^3 + cx + d$ là hàm số bậc ba và có $\min\limits_{x\in(-\infty;0)} f(x) = f(-2)$ nên $a < 0$ và $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt.

Ta có $y' = 3ax^2 + c$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow ac < 0$.

Vậy với $a < 0$, $c > 0$ thì $y' = 0$ có hai nghiệm đối nhau $x = \pm\sqrt{-\dfrac{c}{3a}}$.

Từ đó suy ra $\min\limits_{x\in(-\infty;0)} f(x) = f\left(-\sqrt{-\dfrac{c}{3a}}\right) \Leftrightarrow -\sqrt{-\dfrac{c}{3a}} = -2 \Leftrightarrow \sqrt{-\dfrac{c}{3a}} = 2 \Leftrightarrow c = -12a$.

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	-2	0	1	2	3	$+\infty$
$y'(x)$	$-$	0	$+$		0	$-$	
y	$+\infty$	$f(-2)$			$f(2)$		$-\infty$

Ta suy ra $\max\limits_{x\in[1;3]} f(x) = f(2) = 8a + 2c + d = -16a + d$.

Chọn đáp án B □

Câu 23. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = \dfrac{x + m}{x^2 + x + 1}$ có giá trị lớn nhất trên $\mathbb{R}$ nhỏ hơn hoặc bằng 1.

(A) $m \leq 1$. (B) $m \geq 1$. (C) $m \geq -1$. (D) $m \leq -1$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

$\lim\limits_{x \to \infty} y = 0$.

$y' = \dfrac{-x^2 - 2mx + 1 - m}{(x^2 + x + 1)^2}$.

$y' = 0 \Leftrightarrow -x^2 - 2mx + 1 - m = 0$

Có $\Delta' = m^2 - m + 1 > 0$, $\forall m \in \mathbb{R}$ nên $(*)$ có 2 nghiệm phân biệt $x_1 < x_2$, $\forall m \in \mathbb{R}$.

Bảng biên thiên

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	0	$\searrow$	$f(x_1)$	$\nearrow$	$f(x_2)$	$\searrow$	0

Vậy hàm số đạt giá trị lớn nhất là $f(x_2) = \dfrac{1}{2x_2 + 1}$ với $x_2 = -m + \sqrt{m^2 - m + 1}$.

Theo yêu cầu bài toán $\dfrac{1}{-2m + 2\sqrt{m^2 - m + 1} + 1} \leq 1 \Leftrightarrow 1 - 2m + +2\sqrt{m^2 - m + 1} \geq 1$ (vì $f(x_2) > 0 \Rightarrow 2x_2 + 1 > 0) \Leftrightarrow \sqrt{m^2 - m + 1} \geq m \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < 0 \\ \begin{cases} m \geq 0 \\ m^2 - m + 1 \geq m^2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow m \leq 1$. □

Câu 24. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \dfrac{x^3 + x^2 - m}{x + 1}$ trên $[0; 2]$ bằng 5. Tham số m nhận giá trị là

(A) -5. (B) 1. (C) -3. (D) -8.

Lời giải.

Tập xác định của hàm số $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\} \Rightarrow [0; 2] \subset \mathscr{D}$.

Ta có $y = \dfrac{x^3 + x^2 - m}{x + 1} \Rightarrow y' = \dfrac{2x^3 + 4x^2 + 2x + m}{(x + 1)^2}$.

$y' = 0 \Leftrightarrow 2x^3 + 4x^2 + 2x + m = 0 \Leftrightarrow -(2x^2 + 4x^2 + 2x) = m\,(1)$.

Ta có $y(0) = m$, $y(2) = 4 - \dfrac{m}{3}$.

Đặt $g(x) = -(2x^3 + 4x^2 + 2x) \Rightarrow g'(x) = -(6x^2 + 8x + 2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = -\dfrac{1}{3} \end{array}\right.$. Trên $[0; 2]$ ta có bảng biến thiên

x	0	x_0	2
$g'(x)$		$-$	
$g(x)$	0	$\searrow$	-36

Từ bảng biến thiên ta có $g(x) \in [-36; 0]$, $\forall x \in [0; 2]$.

- **Trường hợp 1** $m > 0 \Rightarrow$ phương trình (1) vô nghiệm $\Leftrightarrow$ phương trình $y' = 0$ vô nghiệm.
  Dễ thấy $y(0) = -m < y(2) = 4 - \dfrac{m}{3}$ khi $m > 0$.
  Khi đó $\max\limits_{[0;2]} y = y(2) = 4 - \dfrac{m}{3} = 5 \Leftrightarrow m = -3$ loại do $m > 0$.
- **Trường hợp 2** $m < -36$ phương trình (1) vô nghiệm $\Leftrightarrow$ phương trình $y' = 0$ vô nghiệm.
  Dễ thấy $y(0) = -m > y(2) = 4 - \dfrac{m}{3}$ khi $m < -36$.
  Khi đó $\max\limits_{[0;2]} y = y(0) = -m = 5 \Leftrightarrow m = -5$ loại do $m < -36$.
- **Trường hợp 3** $m \in [-36; 0] \Rightarrow$ phương trình $y' = 0$ có nghiệm duy nhất (giả sử $x = x_0$).
  Trên $[0; 2]$ ta có bảng biến thiên

x	0	x_0	2
$g'(x)$		$-$	
$g(x)$	0	$\searrow$ $y(x_0)$ $\quad y = m$	-36

Nhìn vào bảng biến thiên ta có:

- $x = x_0$ Khi đó $g(x) = m \Leftrightarrow -(2x^3 + 4x^2 + 2x) = m \Leftrightarrow 2x^3 + 4x^2 + 2x + m = 0 \Leftrightarrow y' = 0$.
- $x \in (0; x_0)$ Khi đó $g(x) > m \Leftrightarrow -(2x^3 + 4x^2 + 2x) > m \Leftrightarrow 2x^3 + 4x^2 + 2x + m < 0 \Leftrightarrow y' < 0$.
- $x \in (x_0; 0)$ Khi đó $g(x) < m \Leftrightarrow -(2x^3 + 4x^2 + 2x) < m \Leftrightarrow 2x^3 + 4x^2 + 2x + m > 0 \Leftrightarrow y' > 0$.

Ta có bảng biến thiên sau

x	0		x_0		2
y'		$-$	0	$+$	
y	$y(0)$	$\searrow$	$y(x_0)$	$\nearrow$	$y(2)$

Từ bảng biến thiên ta thấy $\max\limits_{[0;2]} y \in \{y(2); y(0)\}$.

Nếu $m \in [-36; -6] \Rightarrow y(0) \geq y(2) \Rightarrow \max\limits_{[0;2]} y = y(0) = -m = 5 \Leftrightarrow m = -5$ (loại).

Nếu $m \in [-6; 0] \Rightarrow y(0) < y(2) \Rightarrow \max\limits_{[0;2]} y = y(2) = 4 - \dfrac{m}{3} = 5 \Leftrightarrow m = -3$ (nhận).

Vậy $m = -3$ thỏa mãn bài toán.

Chọn đáp án C □

Câu 25. Câu 25. Cho hàm số $y = (x^3 - 3x + m)^2$. Tổng tất cả các giá trị của tham số m sao cho giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[-1; 1]$ bằng 1 là

A. 1. B. -4. C. 0. D. 4.

Lời giải.

$\mathscr{D} = \mathbb{R}$ Đặt $t = x^3 - 3x$, $x \in [-1; 1] \Rightarrow tg \in [-2; 2]$.

Khi đó ta có hàm số $f(t) = (t + m)^2$

$f'(t) = 2\,(t + m)$

$f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = -m$.

- **Trường hợp 1** $-2 < -m < 2 \Leftrightarrow -2 < m < 2$.

t	-2		$-m$		2	$+\infty$
$f'(t)$		$-$	0	$+$		
$f(t)$		$\searrow$	$f(-m)$	$\nearrow$		

Từ bảng biến thiên ta thấy $\min\limits_{[-2;2]} f(t) = f(-m) = 0$ không thoả mãn yêu cầu.

- **Trường hợp 2** $-m \leq -2 \Leftrightarrow m \geq 2$.

t		$-m$		-2		2		$+\infty$
$f'(t)$	$-$	0			$+$			
$f(t)$						$f(2)$		
					$\nearrow$			
				$f(-2)$				

Từ bảng biến thiên ta thấy $\min\limits_{[-2;2]} f(t) = f(-2) = (m-2)^2$.

Theo yêu cầu của bài toán $(m-2)^2 = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 3 \\ m = 1 \end{array}\right.$.

Do $m \geq 2$ nên $m = 3$.

☑ **Trường hợp 3** $-m \geq 2 \Leftrightarrow m \leq -2$.

t		-2		2		$-m$		$+\infty$
$f'(t)$			$-$			0	$+$	
$f(t)$		$f(2)$						
			$\searrow$					
				$f(2)$				

Từ bảng biến thiên ta thấy $\min\limits_{[-2;2]} f(t) = f(2) = (m+2)^2$.

Theo yêu cầu của bài toán $(m+2)^2 = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -3 \\ m = -1 \end{array}\right.$.

Do $m \leq -2$ nên $m = -3$.

Vậy tổng các giá trị của m thoả mãn yêu cầu là $3 + (-3) = 0$.

Chọn đáp án C □

Câu 26. Tìm tất cả các giá trị của $m > 0$ để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^3 - 3x + 1$ trên đoạn $[m+1; m+2]$ luôn bé hơn 3.

A $m \in (0;2)$. B $m \in (0;1)$. C $m \in (1;+\infty)$. D $m \in (0;+\infty)$.

Lời giải.

Ta có $y' = 3x^2 - 3$, $y' = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$ do đó $y_{CT} = y(1) = -1$ và $y_{CD} = y(-1) = 3$.

Thấy ngay với $m > 0$ thì trên đoạn $[m+1; m+2]$ hàm số luôn đồng biến.

Vậy GTNN của hàm số đã cho trên đoạn $[m+1; m+2]$ là $y(m+1) = (m+1)^3 - 3(m+1) + 1$.

GTNN luôn bé hơn 3 $\Leftrightarrow (m+1)^2 - 3(m+1) - 2 < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m+1 < 2 \\ m+1 \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 1 \\ m \neq -2. \end{cases}$

Kết hợp điều kiện $m > 0$ ta được $m \in (0;1)$. □

Câu 27. Biết rằng giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = mx + \dfrac{36}{x+1}$ trên $[0;3]$ bằng 20. Mệnh đề nào sau đây đúng?

Ⓐ $0 < m \leq 2$. Ⓑ $4 < m \leq 8$. Ⓒ $2 < m \leq 4$. Ⓓ $m > 8$.

Lời giải.

$y = mx + \dfrac{36}{x+1} \Rightarrow y' = \dfrac{36}{(x+1)^2}$

- **Trường hợp 1** $m = 0$, ta có $y' \dfrac{36}{(x+1)^2} < 0\,\forall x \neq -1$. Khi đó $\min\limits_{[0;3]} y = y(3) = 9$ (loại).

- **Trường hợp 2** $m \neq 0$

  - Nếu $m < 0$, ta có $y' < 0$, $\forall x \neq -1$. Khi đó $\min\limits_{[0;3]} y = y(3) \Leftrightarrow 20 = 3m + 9 \Leftrightarrow m = \dfrac{11}{3}$ (loại).
  - Nếu $m > 0$, ta có $y' = 0 \Leftrightarrow m - \dfrac{36}{(x+1)^2} = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 = \dfrac{36}{m} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\dfrac{6}{\sqrt{m}} - 1 \\ x = -\dfrac{6}{\sqrt{m}} - 1 \text{ (loại)}. \end{array}\right.$
  - $0 < \dfrac{6}{\sqrt{m}} - 1 \leq 3 \Leftrightarrow \dfrac{4}{9} < m \leq 36$, $\min\limits_{[0;3]} y = y\left(\dfrac{6}{\sqrt{m}} - 1\right) = 12\sqrt{m} - m = 20 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 4 \\ m = 100 \text{ (loại)} \end{array}\right.$.
  - $\dfrac{6}{\sqrt{m}} - 1 > 3 \Leftrightarrow m < \dfrac{9}{4}$, $\min\limits_{[0;3]} y = y(3) \Leftrightarrow 20 = 3m + 9 \Leftrightarrow m = \dfrac{11}{3}$ (loại).

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 28. Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 1)x + 2020$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m sao cho hàm số có giá trị nhỏ nhất trên khoảng $(0;+\infty)$?

Ⓐ 2. Ⓑ 1. Ⓒ Vô số. Ⓓ 3.

Lời giải.

Ta có $y' = 3x^2 - 6mx + 3(m^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = m - 1 \\ x_2 = m + 1. \end{array}\right.$. Để hàm số có giá trị nhỏ nhất trên khoảng $(0;+\infty)$ thì $x_1 \leq 0 < x_2$ hoặc $0 < x_1 < x_2$.

- **Trường hợp 1** $x_1 \leq 0 < x_2 \Leftrightarrow m - 1 \leq 0 < m + 1 \Leftrightarrow -1 < m \leq 1$.

  Do $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{0;1\}$.

  Bảng biến thiên của hàm số

x	0		$m+1$		$+\infty$
$y'(x)$		$-$	0	$+$	
$y(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

☑ **Trường hợp 2** $0 < x_1 < x_2$. Bảng biến thiên của hàm số

x	$0y$		$m-1$		$m+1$		$+\infty$
$y'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$y(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Hàm số có giá trị nhỏ nhất trên khoảng $(0;+\infty)$ khi và chỉ khi $\begin{cases} m-1>0 \\ y(m+1) \le y(0) \end{cases} \Leftrightarrow$
$\begin{cases} m>1 \\ (m+1)^3 - 3m(m+1)^2 + 3(m^2-1)(m+1) + 2020 \le 2020 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>1 \\ (m+1)^2(m-2) \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow$
$\begin{cases} m>1 \\ \left[\begin{array}{l} m \le 2 \\ m=-1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow 1 < m \le 2.$
Do $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m = 2$.

Vậy $m \in \{0;1;2\}$.

Chọn đáp án D □

Câu 29. Cho hàm số $f(x) = m\sqrt{x-1}$ (m là tham số thực khác 0). Gọi m_1, m_2 là hai giá trị của m thoả mãn $\min\limits_{[2;5]} f(x) + \max\limits_{[2;5]} f(x) = m^2 - 10$. Giá trị của $m_1 + m_2$ bằng

A. 3. B. 5. C. 10. D. 2.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = m\dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}$; Do $m \ne 0$ nên $f'(x)$ khác 0 và có dấu không thay đổi với $\forall x \in (1;+\infty)$.
Nếu $m > 0$ thì $f'(x) > 0$, $\forall x \in [2;5]$.

Do đó $\min\limits_{[2;5]} f(x) = f(2) = m$; $\max\limits_{[2;5]} f(x) = f(5) = 2m$.

$\min\limits_{[2;5]} f(x) + \max\limits_{[2;5]} f(x) = m^2 - 10 \Leftrightarrow m + 2m = m^2 - 10 \Leftrightarrow m^2 - 3x - 10 = 0 \left[\begin{array}{l} m_1 = -2 \\ m_2 = 5. \end{array}\right.$ Do $m > 0$ nên nhận $m_2 = 5$.

Nếu $m < 0$ thì $f'(x) < 0$, $\forall x \in [2;5]$.

Do đó $\min\limits_{[2;5]} f(x) = f(5) = 2m$; $\max\limits_{[2;5]} f(x) = f(2) = m$.

$\min\limits_{[2;5]} f(x) + \max\limits_{[2;5]} f(x) = m^2 - 10 \Leftrightarrow 2m + m = m^2 - 10 \Leftrightarrow m^2 - 3x - 10 = 0 \left[\begin{array}{l} m_1 = -2 \\ m_2 = 5. \end{array}\right.$ Do $m < 0$ nên nhận $m_2 = -2$.

Vậy $m_1 + m_2 = 3$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 30. Cho hàm số $y = \dfrac{m\sin x + 1}{\cos x + 2}$ có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-5; 5]$ để giá trị nhỏ nhất của y nhỏ hơn -1.

(A) 4. (B) 2. (C) 6. (D) 8.

Lời giải.

Điều kiện $\cos x + 2 \neq 0$ luôn đúng $\forall x \in \mathbb{R}$.

$y = \dfrac{m\sin x + 1}{\cos x + 2} \Leftrightarrow y(\cos x + 2) = m\sin x + 1$ (do $\cos x + 1 \neq 0$ luôn đúng $\forall x \in \mathbb{R}$).

$\Leftrightarrow m\sin x - y\cos x = 2y - 1\,(*)$. Phương trình (*) có nghiệm $\Leftrightarrow m^2 + y^2 \geq (2y-1)^2 \Leftrightarrow 3y^2 - 4y + 1 - m^2 \leq 0 \Leftrightarrow \dfrac{2 - \sqrt{1 + 3m^2}}{3} \leq yh \leq \dfrac{2 + \sqrt{1 + 3m^2}}{3}$.

Vậy $\min\limits_{\mathbb{R}} y \dfrac{2 - \sqrt{1 + 3m^2}}{3}$.

$\min\limits_{\mathbb{R}} y < -1 \Leftrightarrow \dfrac{2 - \sqrt{1 + 3m^2}}{3} < -1 \Leftrightarrow \sqrt{1 + 3m^2} > 5 \Leftrightarrow m^2 - 8 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > 2\sqrt{2} \\ m < -2\sqrt{2}. \end{array}\right.$. Mà $m \in \mathbb{Z}$,$m \in [-5; 5]$ nên $m \in \{-5; -4; -3; 3; 4; 5\}$.

Vậy có tất cả 6 giá trị của m thoả đề bài.

Chọn đáp án (C) □

Câu 31. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \dfrac{34}{\sqrt{(x^3 - 3x + 2m)^2 + 1}}$ trên đoạn $[0; 3]$ bằng 2. Tổng tất cả các phần tử của S bằng

(A) 8. (B) -8. (C) -6. (D) -1.

Lời giải.

Ta có $\sqrt{(x^3 - 3x + 2m)^2} = \mid x^3 - 3x + 2 \mid$.

Nhận thấy $\min\limits_{[0;3]} f(x) = 2 \Leftrightarrow \max\limits_{[0;3]} f(x) = 16\,(1)$.

Xét hàm số $g(x) = x^3 - 3x + 2m$ trên $[0; 3]$, ta có:

- ☑ $g'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \in (0; 3) \\ x = -1 \notin (0; 3) \end{array}\right.$.
- ☑ $g(0) = 2m$, $g(1) = 2m - 2$, $g(3) = 2m + 18$.

Do đó $2m - 2 \leq g(x) \leq 2m + 18, \forall x \in [0; 3]$ tức $\max\limits_{[0;3]} \mid x^3 - 3x + 2m \mid = \max\limits_{[0;3]} \{\mid 2m - 2 \mid ; \mid 2m + 18 \mid\}$.

Từ đây ta có (1) $\Leftrightarrow \max\limits_{[0;3]}\{|\,2m-2\,|;|\,2m+18\,|\}=16 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}|\,2m+18\,|>|\,2m-2\,|\\ |\,2m+18\,|=16\end{cases}\\ \begin{cases}|\,2m+18\,|\le|\,2m-2\,|\\ |\,2m-2\,|=16\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m=-1\\ m=-7\end{array}\right.$.

Suy ra $S=\{-7;-1\}$. Vậy tổng các phần tử của S là -8.

Chọn đáp án (B) □

Câu 32. Cho hàm số $y=\left(x^3-3x+m+1\right)^2$. Tổng tất cả các giá trị của tham số m sao cho giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[-1;1]$ bằng 1 là

(A) -2. (B) 4. (C) -4. (D) 0.

Lời giải.

Đặt $y=f(x)=\left(x^3-3x+m+1\right)^2$ là hàm số xác định và liên tục trên đoạn $[-1;1]$.

Ta có $y'=f'(x)=2\left(x^3-3x+m+1\right)\cdot\left(3x^2-2\right)$.

$f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\pm1\\ m=-x^3+3x-1=g(x).\end{array}\right.$.

Ta khảo sát hàm số $g(x)$ trên đoạn $[-1;1]$.

Bảng biến thiên của $g(x)$.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

Nếu $m\in[-3;1]$ thì luôn tồn tại $x_0\in[-1;1]$ sao cho $m=g(x_0)$ hay $f(x_0)=0$.

Suy ra $\min\limits_{[-1;1]}y=0$, tức là không tồn tại m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Nếu $m\notin[-3;1]$ thì $f'(x)=0\Leftrightarrow x=\pm1\in[-1;1]$.

Ta có $\min\limits_{[-1;1]}f(x)=\min\{f(1);f(-1)\}=\min\left\{(m-1)^2;(m+3)^2\right\}$.

- ☑ **Trường hợp 1** $m>1$ tức là $m+3>m-1>0$ suy ra $\min\limits_{[-1;1]}f(x)=(m-1)^2=1\Leftrightarrow$ $\left[\begin{array}{l}m=0\,(\text{loại})\\ m=2\,(\text{nhận}).\end{array}\right.$
- ☑ **Trường hợp 2** $m<-3$ tức là $m-1<m+3<0$ suy ra $\min\limits_{[-1;1]}f(x)=(m+3)^2=1\Leftrightarrow$ $\left[\begin{array}{l}m=-2\,(\text{loại})\\ m=-4\,(\text{nhận}).\end{array}\right.$

Vậy có hai giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán, do đó tổng tất cả các giá trị của m là -2.
□

Câu 33. Cho hàm số $y = f(x) = m^2\left(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}\right) + 4\sqrt{4-x^2} + m + 1$. Tính tổng tất cả các giá trị của m để hàm số $y = f(x)$ có giá trị nhỏ nhất bằng 4.

Ⓐ $-\dfrac{7}{2}$. Ⓑ $\dfrac{5}{2}$. Ⓒ $-\dfrac{1}{2}$. Ⓓ $\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = [-2; 2]$.
Đặt $t = \sqrt{2+x} + \sqrt{2-x}$; $t \in [2; 2\sqrt{2}]$.
$t^2 = 4 + 2\sqrt{4-x^2} \Leftrightarrow 2\sqrt{4-x^2} = t^2 - 4$.
$\Rightarrow y = g(t) = m^2t + 2(t^2-4) + m + 1 = 2t^2 + m^2t + m - 7$ với $t \in [2; 2\sqrt{2}]$.
Ta có $g'(t) = 4t + m^2$.
$g'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{-m^2}{4} < 0, \forall m \in \mathbb{R} \Rightarrow g(t)$ đồng biến trên $[2; 2\sqrt{2}] \Rightarrow \min\limits_{[2;2\sqrt{2}]} g(t) = g(2) = 4$.
Mà $g(2) = 2m^2 + m + 1 \Leftrightarrow 2m^2 + m + 1 = 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = -\dfrac{3}{2}. \end{array}\right.$
Tổng các giá trị của m thỏa mãn ycbt là $S = 1 + \left(-\dfrac{3}{2}\right) = -\dfrac{1}{2}$.

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 34. Cho hàm số $f(x) = \dfrac{2x-m}{x+1}$ với $m \neq -2$. Mệnh đề nào dưới đây sai?

Ⓐ $\max\limits_{[1;3]} f(x) = \max\left\{\dfrac{2-m}{2}; \dfrac{6-m}{4}\right\}$. Ⓑ $\max\limits_{[1;3]} f(x) = \dfrac{6-m}{2}$ khi $m < -2$.
Ⓒ $\min\limits_{[1;3]} f(x) = \max\left\{\dfrac{2-m}{2}; \dfrac{6-m}{4}\right\}$. Ⓓ $\min\limits_{[1;3]} f(x) = \dfrac{2-m}{2}$ khi $m > -2$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.
Ta có $f'(x) = \dfrac{2+m}{(x+1)^2}$ suy đạo hàm không đổi dấu $x \in [1; 3]$ suy ra $\max\limits_{[1;3]} f(x) = \max\{f(1); f(3)\} = \max\left\{\dfrac{2-m}{2}; \dfrac{6-m}{4}\right\}$;
$\min\limits_{[1;3]} f(x) = \max\{f(1); f(3)\} = \min\left\{\dfrac{2-m}{2}; \dfrac{6-m}{4}\right\}$.
Xét với $m < -2 \Rightarrow f'(x) < 0\, \forall x \in [1; 3]$.
Vậy $\forall x \in [1; 3] \Rightarrow f(x) \leq f(1) = \dfrac{2-m}{2} \Rightarrow \max\limits_{[1;3]} f(x) = \dfrac{2-m}{2}$.
Xét với $m > -2 \Rightarrow f'(x) > 0\, \forall x \in [1; 3]$. Vậy $\forall x \in [1; 3] \Rightarrow f(x) \geq f(1) = \dfrac{2-m}{2} \Rightarrow \min\limits_{[1;3]} f(x) = \dfrac{2-m}{2}$.
Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 35. Có bao nhiêu số nguyên m thuộc đoạn $[-20; 20]$ để giá trị lớn nhất của hàm số $y = \dfrac{x+m+6}{x-m}$ trên đoạn $[1; 3]$ là số dương?

Ⓐ 9. Ⓑ 8. Ⓒ 11. Ⓓ 10.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{m\}$.

Để hàm số có giá trị lớn nhất trên $[1;3]$ thì $m \notin [1;3]$.

$y' = \dfrac{-2m-6}{(x-m)^2}$.

- **Trường hợp 1** $-2m-6>0 \Leftrightarrow m<-3$.

  Khi đó $\max\limits_{[1;3]} y = y(3) = \dfrac{m+9}{3-m}$.

  Để giá trị lớn nhất trên đoạn $[1;3]$ là số dương thì $\dfrac{m+9}{3-m} > 0 \Leftrightarrow m+9>0 \Leftrightarrow m>-9$.

  Vậy các số nguyên m thỏa là $-8; -7-6; -5; -4$.

- **Trường hợp 2** $-2m-6<0 \Leftrightarrow m>-3$. $\max\limits_{[1;3]} y = y(1) = \dfrac{m+7}{1-m}$.

  Để giá trị lớn nhất trên đoạn $[1;3]$ là số dương thì $\dfrac{m+7}{1-m} > 0 \Leftrightarrow 1-m>0 \Leftrightarrow m<1$.

  Vậy các số nguyên m thỏa là $-2; -1; 0$.

- **Trường hợp 3** $-2m-6=0 \Leftrightarrow m=-3$. Khi đó $y=1$. Nên $\max\limits_{[1;3]} y = 1$.

  Vậy $m=-3$ thỏa.

Vậy có 9 số nguyên thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án A □

Câu 36. Cho hàm số $f(x) = (m-1)x^4 - 2mx^2 + 1$ với m là tham số thực. Nếu $\min\limits_{[0;3]} f(x) = f(2)$ thì $\max\limits_{[0;3]} f(x)$ bằng

A. $-\dfrac{13}{3}$. B. 4. C. $-\dfrac{14}{3}$. D. 1.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = 4(m-1)x^3 - 4mx = 4x\left[(m-1)x^2 - m\right]$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2 = \dfrac{m}{m-1} \end{array}\right.$ ($m=1$ không thoả yêu cầu bài toán)

Vì $\min\limits_{[0;3]} f(x) = f(2) \Rightarrow x=2$ là nghiệm của $f'(x)=0$

$\Rightarrow \dfrac{m}{m-1} = 4 \Rightarrow m = 4m-4 \Rightarrow m = \dfrac{4}{3}$.

$\Rightarrow f(x) = \dfrac{1}{3}x^4 - \dfrac{8}{3}x^2 + 1$

$f(0) = 1,\ f(3) = \dfrac{81}{3} - \dfrac{72}{3} + \dfrac{3}{3} = \dfrac{12}{3} = 4$.

$\max\limits_{[0;3] f(x)=4}$.

Chọn đáp án B □

Câu 37. Cho hàm số $f(x) = mx^4 + 2(m-1)x^2$ với m là tham số thực. Nếu $\min\limits_{[0;2]} f(x) = f(1)$ thì $\max\limits_{[0;2]} f(x)$ bằng

A. 2. B. -1. C. 4. D. 0.

Lời giải.

$f'(x) = 4mx^3 + 4(m-1)x$

Do $f(x)$ là hàm đa thức và $\min\limits_{[0;2]} f(x) = f(1) \Rightarrow f'(1) = 0 \Leftrightarrow 4m + 4(m-1) = 0 \Leftrightarrow m = \dfrac{1}{2}$.

Thay $m = \dfrac{1}{2}$ vào hàm số ban đầu ta được

$y = \dfrac{1}{2}x^4 + 2\left(\dfrac{1}{2} - 1\right)x^2 = \dfrac{1}{2}x^4 - x^2 \Rightarrow y' = 2x^3 - 2x = 2x\left(x-1\right)\left(x+1\right)$.

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		0		1		2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\dfrac{1}{2}$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\dfrac{1}{2}$	$\nearrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy với $m = \dfrac{1}{2}$ thì $\min\limits_{[0;2]} f(x) = f(1)$ (thoả mãn).

Dựa vào bảng biến thiên ta có $\max\limits_{[0;2]} f(x) = f(2) = 4$.

Chọn đáp án C □

Câu 38. Cho hàm số $f(x) = ax^4 + 2\left(a+4\right)x^2 - 1$ với a là tham số thực. Nếu $\max\limits_{[0;2]} f(x) = f(1)$ thì $\min\limits_{[0;2]} f(x)$ bằng

A. -17. B. -16. C. -1. D. 3.

Lời giải.

Từ giả thiết ta có $f'(1) = 0$

$\Rightarrow 4a + 4\left(a+4\right) = 0 \Leftrightarrow a = -2$ và $f(x) = -2x^4 + 4x^2 - 1$.

Ta có $f(0) = -1,\ f(1) = 1,\ f(2) = -17$.

Vậy $\min\limits_{[0;2]} f(x) = f(2) = -17$.

Chọn đáp án A □

Câu 39. Cho hàm số $f(x) = \left(a+3\right)x^4 - 2ax^2 + 1$ với a là tham số thực. Nếu $\max\limits_{[0;3]} f(x) = f(2)$ thì $\min\limits_{[0;3]} f(x)$ bằng

A. -9. B. 4. C. 1. D. -8.

Lời giải.

Xét hàm $f(x) = \left(a+3\right)x^4 - 2axx^2 + 1 \Rightarrow f'(x) = 4\left(a+3\right)x^3 - 4ax$.

Hàm số đạt GTLN tại $x = 2$ và liên tục trên đoạn $[0;3]$.

$\Rightarrow f'(2) = 0 \Leftrightarrow 32\left(a+3\right) - 8a = 0 \Leftrightarrow a = -4$.

Với $a = -4$ ta có $f(x) = -x^4 + 8x^2 + 1$ với $x \in [0;3]$. $f'(x) = -4x^3 + 16x$.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0\,(\text{thoả mãn}) \\ x = 2\,(\text{thoả mãn}) \\ x = -2\,(\text{loại}). \end{array}\right.$$

Khi đó $f(0) = 1,\ f(2) = 17,\ f(3) = -8$.

Suy ra $\max\limits_{[0;3]} f(x) = f(2) = 17$ (thỏa mãn giả thiết). Vậy $\max\limits_{[0;3]} f(x) = f(3) = -8$.

Chọn đáp án D

Câu 40. Cho hàm số $f(x) = \dfrac{2x - m^2}{x + 1}$, với m là tham số. Gọi $m_1,\ m_2$ $(m_1 < m_2)$ là các giá trị của tham số m thỏa mãn $2\max\limits_{[0;2]} f(x) - \min\limits_{[0;2]} f(x) = 8$. Tổng $2m_1 + 3m_2$ bằng

(A) 1. (B) -2. (C) 4. (D) -1.

Lời giải.

Ta có: $f'(x) = \dfrac{2 + m^2}{(x+1)^2} > 0,\ \forall x \in [0;2]$.

$\Rightarrow \min\limits_{[0;2]} f(x) = f(0) = -m^2$.

$\max\limits_{[0;2]} f(x) = f(2) = \dfrac{4 - m^2}{3}$.

Do đó:$2\max\limits_{[0;2]} f(x) - \min\limits_{[0;2]} f(x) = 8 \Leftrightarrow 2\left(\dfrac{4 - m^2}{3}\right) + m^2 = 8 \Leftrightarrow m^2 - 16 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -4 \\ m = 4. \end{array}\right.$

Vậy $2m_1 + 3m_2 = 2 \cdot (-4) + 3 \cdot 4 = 4$.

Câu 41. Có bao nhiêu giá trị của tham số a thuộc đoạn $[-10;10]$ để hàm số $y = ax^4 + 3x^2 + cx$ đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[0;4]$ tại $x = 1$

(A) 11. (B) 10. (C) 6. (D) 5.

Lời giải.

$y = f(x) = ax^4 + 3x^2 + cx$ đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[0;4]$ tại $x = 1 \Rightarrow f'(1) = 0$.

Ta có $f'(x) = 4ax^3 + 6x + c$.

$f'(a) = 0 \Leftrightarrow 4a + 6 + x = 0 \Rightarrow c = -4a - 6$.

$\Rightarrow 4ax^3 + 6x - 4a - 6 = 0$

$\Leftrightarrow 4a\left(x^3 - 1\right) + 6\left(x - 1\right) = 0$

$\Leftrightarrow (x - 1)\left[4a\left(x^2 + x + 1\right) + 6\right] = 0$

Để $y = f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[0;4]$ tại $x = 1$

$\Rightarrow 4axx^2 + 4ax + 4a + 6 = 0$ vô nghiệm.

$\Rightarrow \Delta' = 4a^2 - 4a\left(4a + 6\right) < 0 \Leftrightarrow a^2 + 2a > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a < -2 \\ a > 0 \end{array}\right.$

$f(4) > f(1) \Leftrightarrow 256a + 48 + 4\left(-4a - 6\right) > a + 3 + \left(-4a - 6\right) \Rightarrow a > \dfrac{-1}{9}$.

$f(0) > f(1) \Leftrightarrow 0 > a + 3 + \left(-4a - 6\right) \Rightarrow a > -1$.

Kết hợp với điều kiện $m = \{1;2;3;4;\cdots;10\}$ có 10 giá trị.

Chọn đáp án B

MỨC ĐỘ 3. MỨC ĐỘ 9,10 ĐIỂM

Dạng 1. Xác định m để GTLN-GTNN của hàm số chứa dấu giá trị tuyệt đối thỏa mãn điều kiện cho trước

Câu 1 (Đề Tham Khảo 2018-BGD). Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y = |x^3 - 3x + m|$ trên đoạn $[0; 2]$ bằng 3. Số phần tử của S là

A. 1. B. 2. C. 0. D. 6.

Lời giải.

Xét hàm số $f(x) = x^3 - 3x + m$ với $x \in [0; 2]$.

Ta có $f'(x) = 3x^2 - 3$.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -1 \notin [0; 2] \end{array}\right..$$

Bảng biến thiên

x	0		1		2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	m	$\searrow$	$m-2$	$\nearrow$	$m+2$

Vậy $m - 2 \leq f(x) \leq m + 2$ với mọi x thuộc đoạn $[0; 2]$.

Suy ra $\max\limits_{[0;2]} y = \max\{|m-2|; |m+2|\}$.

- Trường hợp 1: $m \geq 0$ khi đó $\max\limits_{[0;2]} y = m + 2 = 3 \Leftrightarrow m = 1$.
- Trường hợp 2: $m < 0$ khi đó $\max\limits_{[0;2]} y = 2 - m = 3 \Leftrightarrow m = -1$.

Chọn đáp án B □

Câu 2. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = |x^3 - 3x + m|$ trên đoạn $[0; 3]$ bằng 16. Tổng tất cả các phần tử của S bằng

A. -16. B. 16. C. -12. D. -2.

Lời giải.

Xét hàm số $g(x) = x^3 - 3x + m$ trên $[0; 3]$.

Ta có $g'(x) = 3x^2 - 3$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -1 \notin [0; 3] \end{array}\right..$$

Bảng biến thiên

x	0		1		3
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	m	$\searrow$	$m-2$	$\nearrow$	$m+18$

Vậy $m-2 \leq g(x) \leq m+18$ với mọi x thuộc đoạn $[0;3]$.

Suy ra $\begin{cases} \max\limits_{[0;3]} g(x) = \max\{g(0), g(1), g(3)\} = \max\{m, m-2, m+18\} = m+18 \\ \min\limits_{[0;3]} g(x) = \min\{g(0), g(1), g(3)\} = \min\{m, m-2, m+18\} = m-2. \end{cases}$

Suy ra $\max_{[0;3]} f(x) = \max\{|m-2|, |m+18|\} = 16 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} |m+18| = 16 \\ |m+18| \geq |m-2| \end{cases} \\ \begin{cases} |m-2| = 16 \\ |m-2| \geq |m+18| \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-2 \\ m=-14. \end{array}\right.$

Vậy tổng các phần tử của S bằng $-14 + (-2) = -16$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 3. Cho hàm số $y = \dfrac{x+m}{x+1}$ (m là tham số thực). Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của m sao cho $\max\limits_{[0;1]} |f(x)| + \min\limits_{[0;1]} |f(x)| = 2$. Số phần tử của S là

(A) 6. (B) 2. (C) 1. (D) 4.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = \dfrac{1-m}{(x+1)^2}$.

- Nếu $m=1$ thì $f(x) = \dfrac{x+1}{x+1} = 1, \forall x \neq -1$. Khi đó $\max\limits_{[0;1]} |f(x)| + \min\limits_{[0;1]} |f(x)| = 2$ (thỏa mãn). Do đó $m=1$ thỏa mãn bài toán.

- Nếu $m \neq 1$ thì hàm số đơn điệu trên $[0;1]$.

TH 1. $\left(\dfrac{m+1}{2}\right) \cdot m \leq 0$ thì $\min\limits_{[0;1]} |f(x)| = 0, \max\limits_{[0;1]} |f(x)| = \max\left\{\dfrac{|m+1|}{2}; |m|\right\}$.

Do đó

$$\max_{[0;1]} |f(x)| + \min_{[0;1]} |f(x)| = 2 \Leftrightarrow 0 + \frac{\left|\dfrac{m+1}{2} + m\right| + \left|\dfrac{m+1}{2} - m\right|}{2} = 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{|3m+1| + |m-1|}{4} = 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \geq 1 : m = 2(\text{ loại}) \\ 1 > m \geq -\dfrac{1}{3} : m = 3(\text{ loại}) \\ m < -\dfrac{1}{3} : m = -2(\text{ loại}) \end{array}\right.$$

TH 2. $\left(\dfrac{m+1}{2}\right) \cdot m > 0$ thì $\min\limits_{[0;1]} |f(x)| = \min\left\{\dfrac{|m+1|}{2}; |m|\right\}, \max\limits_{[0;1]} |f(x)| = \max\left\{\dfrac{|m+1|}{2}; |m|\right\}$.

Do đó

$$\begin{aligned}
&\max_{[0;1]}|f(x)|+\min_{[0;1]}|f(x)|=2\\
\Leftrightarrow\ &\frac{\left|\left|\frac{m+1}{2}+m\right|-\left|\frac{m+1}{2}-m\right|\right|}{2}+\frac{\left|\frac{m+1}{2}+m\right|+\left|\frac{m+1}{2}-m\right|}{2}=2\\
\Leftrightarrow\ &\frac{||3m+1|-|m-1||}{4}+\frac{|3m+1|+|m-1|}{4}=2\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{ll}|3m+1|\geq|m+1|:2|3m+1|=8 & (2)\\ |3m+1|<|m+1|:2|m-1|=8 & (3)\end{array}\right.
\end{aligned}$$

Giải (2) $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1(\text{ thỏa})\\ m=-\dfrac{5}{3}(\text{thỏa mãn}).\end{array}\right.$

Giải (3) $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=5(\text{ loại})\\ m=-3(\text{ loại}).\end{array}\right.$

Vậy $S=\left\{1;\dfrac{-5}{3}\right\}$. Suy ra số phần tử của S là 2.

Chọn đáp án (B) □

Câu 4. Tìm m để giá trị lớn nhất của hàm số $y=|x^3-3x+2m-1|$ trên đoạn $[0;2]$ là nhỏ nhất. Giá trị của m thuộc khoảng nào?

(A) $\left(-\dfrac{3}{2};-1\right)$. (B) $\left(\dfrac{2}{3};2\right)$. (C) $[-1;0]$. (D) $(0;1)$.

Lời giải.

Xét hàm số $y=f(x)=x^3-3x+2m-1$ trên đoạn $[0;2]$.

Ta có $f'(x)=3x^2-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1\notin[0;2]\\ x=1.\end{array}\right.$

Ta có $f(0)=2m-1,\ f(1)=2m-3$ và $f(2)=2m+1$.

Suy ra $\max\limits_{[0;3]}|f(x)|=\max\{|2m-1|;|2m-3|;|2m+1|\}=\max\{|2m-3|;|2m+1|\}=P$.

- **Trường hợp 1:** Nếu $|2m-3|\geq|2m+1|\Leftrightarrow -4(4m-2)\geq 0\Leftrightarrow m\leq\dfrac{1}{2}$.

  Khi đó $P=|2m-3|\geq 2,\forall m\leq\dfrac{1}{2}$. Suy ra $\mathrm{P_{min}}=2\Leftrightarrow m=\dfrac{1}{2}$.

- **Trường hợp 2:** Nếu $|2m-3|<|2m+1|\Leftrightarrow -4(4m-2)<0\Leftrightarrow m>\dfrac{1}{2}$.

  Khi đó $P=|2m+1|>2,\ \forall m>\dfrac{1}{2}$. Suy ra $\mathrm{P_{min}}$ không tồn tại.

Vậy $m=\dfrac{1}{2}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 5. Tính tổng tất cả các giá trị của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y=|x^2-2x+m|$ trên đoạn $[-1;2]$ bằng 5.

(A) -1. (B) 2. (C) -2. (D) 1.

Lời giải.

Ta có $y' = \dfrac{2x-2}{|x^2-2x+m|}$.

Khi đó $y' = 0 \Rightarrow x = 1$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \max\{y(-1), y(2), y(1)\} = 5 \Leftrightarrow \max\{|3+m|, |m|, |m-1|\} = 5$.

- **Trường hợp 1:** Nếu $m \geq -1$, ta có $\max\{|3+m|, |m|, |m-1|\} = 5 \Leftrightarrow |3+m| = 5 \Rightarrow m = 2$.
- **Trường hợp 2:** Nếu $m < -1$, ta có $\max\{|3+m|, |m|, |m-1|\} = 5 \Leftrightarrow |m-1| = 5 \Rightarrow m = -4$

Vậy tổng các giá trị m bằng -2.

Chọn đáp án (C) □

Câu 6. Cho hàm số $y = |x^2+2x+a-4|$ (a là tham số). Tìm a để giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[-2;1]$ đạt giá trị nhỏ nhất.

(A) $a = 1$. (B) $a = 3$. (C) $a = 2$. (D) $a = 5$.

Lời giải.

Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $[-2;1]$.

Ta có $y = |x^2+2x+a-4| = |(x+1)^2+a-5|$ $(*)$.

Đặt $t = (x+1)^2$. Do $x \in [-2;1] \Rightarrow t \in [0;4]$.

Lúc đó hàm số đã cho trở thành $f(t) = |t+a-5|$ với $t \in [0;4]$.

Suy ra

$$\begin{aligned}\max_{x\in[-2;1]} y = \max_{t\in[0;4]} f(t) &= \max_{t\in[0;4]} f(t)\{f(0); f(4)\}\\ &= \max_{t\in[0;4]}\{|a-5|; |a-1|\}\\ &\geq \frac{|a-1|+|a-5|}{2}\\ &\geq \frac{|a-1+5-a|}{2} = 2.\end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi $|a-1| = |a-5| = 2 \Leftrightarrow a = 3$.

Do đó giá trị nhỏ nhất của $\max\limits_{t\in[0;4]} f(t)$ là 2 khi $a = 3$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 7. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y = \left|\dfrac{x^2+mx+m}{x+1}\right|$ trên $[1;2]$ bằng 2. Số phần tử của tập S là

(A) 3. (B) 1. (C) 4. (D) 2.

Lời giải.

Xét hàm số $y = \dfrac{x^2+mx+m}{x+1}$ trên $[1;2]$.

Ta có $f'(x) = \dfrac{x^2+2x}{(x+1)^2}$.

Khi $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \notin [1;2] \\ x = -2 \notin [1;2] \end{array}\right.$.

Mà $f(1) = \dfrac{2m+1}{2}$, $f(2) = \dfrac{3m+4}{3} \Rightarrow \max\limits_{x\in[1;2]} y = \left\{\left|\dfrac{2m+1}{2}\right|; \left|\dfrac{3m+4}{3}\right|\right\}$.

Trường hợp 1: $\max\limits_{x\in[1;2]} y = \left|\dfrac{2m+1}{2}\right| = 2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} m = \dfrac{3}{2} \\ m = -\dfrac{5}{2}. \end{array}\right.$

- Với $m = \dfrac{3}{2} \Rightarrow \left|\dfrac{3m+4}{3}\right| = \dfrac{17}{6} > 2$ (loại).
- Với $m = -\dfrac{5}{2} \Rightarrow \left|\dfrac{3m+4}{3}\right| = \dfrac{7}{6} < 2$ (thỏa mãn).

Trường hợp 2: $\max\limits_{x\in[1;2]} y = \left|\dfrac{3m+4}{3}\right| = 2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 3m+4 = 6 \\ 3m+4 = -6 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = \dfrac{2}{3} \\ m = -\dfrac{10}{3}. \end{array}\right.$

- Với $m = \dfrac{2}{3} \Rightarrow \left|\dfrac{2m+1}{2}\right| = \dfrac{7}{6} < 2$ (thỏa mãn).
- Với $m = -\dfrac{10}{3} \Rightarrow \left|\dfrac{2m+1}{2}\right| = \dfrac{17}{6} > 2$ (loại).

Vậy có 2 giá trị của m thỏa mãn.

Chọn đáp án (D) □

Câu 8. Xét hàm số $f(x) = |x^2 + ax + b|$, với a, b là tham số. Gọi M là giá trị lớn nhất của hàm số trên $[-1;3]$. Khi M nhận giá trị nhỏ nhất có thể được, tính $a + 2b$.

(A) 2. (B) 4. (C) -4. (D) 3.

Lời giải.

Xét hàm số $f(x) = |x^2 + ax + b|$.

Theo đề bài, M là giá trị lớn nhất của hàm số trên $[-1;3]$.

Suy ra

$$\begin{aligned} &\begin{cases} M \geq f(-1) \\ M \geq f(3) \\ M \geq f(1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} M \geq |1 - a + b| \\ M \geq |9 + 3a + b| \\ M \geq |1 + a + b| \end{cases} \\ &\Rightarrow \quad 4M \geq |1 - a + b| + |9 + 3a + b| + 2|-1 - a - b| \\ &\geq \quad |1 - a + b + 9 + 3a + b + 2(-1 - a - b)| \\ &\Rightarrow \quad 4M \geq 8 \\ &\Rightarrow \quad M \geq 2. \end{aligned}$$

Nếu $M = 2$ thì điều kiện cần là $|1-a+b| = |9+3a+b| = |-1-a-b| = 2$ và $1-a+b$, $9+3a+b$, $-1-a-b$ cùng dấu $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1-a+b = 9+3a+b = -1-a-b = 2 \\ 1-a+b = 9+3a+b = -1-a-b = -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = -1. \end{cases}$

Ngược lại khi $\begin{cases} a = -2 \\ b = -1 \end{cases}$ ta có, hàm số $f(x) = |x^2 - 2x - 1|$ trên $[-1;3]$.

Xét hàm số $g(x) = x^2 - 2x - 1$ xác định và liên tục trên $[-1; 3]$.

Ta có $g'(x) = 2x - 2$.

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \in [-1; 3]$.

Do $M = \max\limits_{x \in [-1;3]} f(x) \Rightarrow M = \max\{|g(-1)|; |g(3)|; |g(1)|\} = 2$.

Vậy $\begin{cases} a = -2 \\ b = -1. \end{cases}$

Ta có: $a + 2b = -4$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 9. Cho hàm số $y = |x^3 + x^2 + m^2 + 1)x + 27|$. Giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[-3; -1]$ có giá trị nhỏ nhất bằng

(A) 26. (B) 18. (C) 28. (D) 16.

Lời giải.

Xét hàm số $u = x^3 + x^2 + (m^2 + 1)x + 27$ trên đoạn $[-3; -1]$.

Ta có $u' = 3x^2 + 2x + m^2 + 1 > 0, \forall x \in [-3; -1]$.

Do đó $A = \max\limits_{x \in [-3;-1]} u = u(-1) = 26 - m^2$; $a = \min\limits_{x \in [-3;-1]} u = u(-3) = 6 - 3m^2$.

Do $M = \max\limits_{x \in [-3;-1]} y = \max\{|26 - m^2|, |6 - 3m^2|\}$ và $4M \geq 3|26 - m^2| + |6 - 3m^2| \geq 72$.

Vậy $M \geq 18$.

Dấu bằng xảy ra khi $|26 - m^2| = |6 - 3m^2| = 18 \Leftrightarrow m = \pm 2\sqrt{2}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 10. Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số $y = |x^2 + 2x + m - 4|$ trên đoạn $[-2; 1]$ bằng 4?

(A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4.

Lời giải.

Xét hàm số $f(x) = x^2 + 2x + m - 4$.

Ta có $f'(x) = 2x + 2$.

Do đó $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$.

Do đó $\max\limits_{x \in [-2;1]} |x^2 + 2x + m - 4| = \max\{|m - 1|; |m - 4|; |m - 5|\}$.

Ta thấy $m - 5 < m - 4 < m - 1$ với mọi $m \in \mathbb{R}$.

Suy ra $\max\limits_{x \in [-2;1]} y$ chỉ có thể là $|m - 5|$ hoặc $|m - 1|$.

Nếu $\max\limits_{x \in [-2;1]} y = |m - 5|$ thì $\begin{cases} |m - 5| = 4 \\ |m - 5| \geq |m - 1| \end{cases} \Leftrightarrow m = 1$.

Nếu $\max\limits_{x \in [-2;1]} y = |m - 1|$ thì $\begin{cases} |m - 1| = 4 \\ |m - 1| \geq |m - 5| \end{cases} \Leftrightarrow m = 5$.

Vậy $m \in \{1; 5\}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 11. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y = |x^3 - 3x^2 - 9x + m|$ trên đoạn $[-2; 4]$ bằng 16. Số phần tử của S là

(A) 0. (B) 2. (C) 4. (D) 1.

Lời giải.

Xét hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + m$ trên đoạn $[-2; 4]$.

$f' = 3x^2 - 6x - 9$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 3 \end{array}\right.$ (thỏa mãn).

$f(-2) = -2 + m$; $f(-1) = 5 + m$; $f(3) = -27 + m$; $f(4) = -20 + m$.

$\Rightarrow \min\limits_{[-2;4]} f(x) = m - 27$; $\max\limits_{[-2;4]} f(x) = m + 5 \Rightarrow \max\limits_{[-2;4]} |f(x)| = \max\{|m-27|; |m+5|\}$.

TH1: Nếu $|m - 27| \leq |m + 5|$ $(*)$

$\Rightarrow \max\limits_{[-2;4]} |f(x)| = |m + 5| \Rightarrow |m + 5| = 16 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 11 \\ m = -21 \end{array}\right.$. Đối chiếu điều kiện $(*) \Rightarrow m = 11$.

TH2: Nếu $|m - 27| > |m + 5|$ $(**)$

$\Rightarrow \max\limits_{[-2;4]} |f(x)| = |m - 27| \Rightarrow |m - 27| = 16 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 43 \\ m = 11 \end{array}\right.$. (Không thỏa mãn điều kiện $(**)$).

Vậy $S = \{11\} \Rightarrow S$ có 1 phần tử.

Chọn đáp án (D) □

Câu 12. Gọi S là tập tất cả các giá trị nguyên của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y = \left|\frac{1}{4}x^4 - \frac{19}{2}x^2 + 30x + m - 20\right|$ trên đoạn $[0; 2]$ không vượt quá 20. Tổng các phần tử của S bằng

(A) 210. (B) -195. (C) 105. (D) 300.

Lời giải.

Xét hàm số $g(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{19}{2}x^2 + 30x + m - 20$ trên đoạn $[0; 2]$.

Ta có $g'(x) = x^3 - 19x + 30$; $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -5 \notin [0; 2] \\ x = 2 \\ x = 3 \notin [0; 2]. \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-5		0		2		3		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0			$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$					$g(0)$	$\nearrow$	$g(2)$				

$g(0) = m - 20$; $g(2) = m + 6$.

Để $\max\limits_{[0;2]} |g(x)| \leq 20$ thì $\begin{cases} g(0) \leq 20 \\ g(2) \leq 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |m - 20| \leq 20 \\ |m + 6| \leq 20 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq m \leq 14$.

Mà $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{0; 1; 2; ...; 14\}$.

Vậy tổng các phần tử của S là 105.

Chọn đáp án (C) □

Câu 13. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y = \left|\sin^2 x - 2\sin x + m\right|$ bằng 1. Số phần tử của S là

(A) 0. (B) 1. (C) 4. (D) 3.

Lời giải.

Đặt $\sin x = t$ $(t \in [-1;1]) \Rightarrow y = |t^2 - 2t + m|$.

Xét hàm số $f(t) = t^2 - 2t + m$

Có $f'(t) = 2t - 2 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \in [-1;1]$; $f(-1) = m + 3$, $f(1) = m - 1$.

Khi đó $\begin{cases} \max\limits_{[-1;1]} f(x) = \max\{m+3; m-1\} = m+3 \\ \min\limits_{[-1;1]} f(x) = \min\{m+3; m-1\} = m-1. \end{cases}$

TH1: $|m+3| \geq |m-1| \Leftrightarrow m \geq -1 \Rightarrow \max f(x) = |m+3| = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -2 \text{ (loại)} \\ m = -4 \text{ (loại)}. \end{array}\right.$

TH1: $|m+3| < |m-1| \Leftrightarrow m < -1 \Rightarrow \max f(x) = |m-1| = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 2 \text{ (loại)} \\ m = 0 \text{ (loại)}. \end{array}\right.$

Suy ra không tồn tại m thỏa mãn.

Chọn đáp án (A) □

Câu 14. Cho hàm số $y = \left|\dfrac{x^4 + ax + a}{x+1}\right|$, với a là tham số thực. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[1;2]$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số a để $M \geq 2m$?

(A) 10. (B) 14. (C) 5. (D) 20.

Lời giải.

Xét hàm số $y = \dfrac{x^4 + ax + a}{x+1} = \dfrac{x^4}{x+1} + a$.

Ta có $y' = \dfrac{3x^4 + 4x^3}{(x+1)^2} \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{4}{3} \\ x = 0. \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-\frac{4}{3}$		-1		0		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$		$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên suy ra $M = \max\left\{\left|a + \dfrac{1}{2}\right|; \left|a + \dfrac{16}{3}\right|\right\}$ và $m = \min\left\{\left|a + \dfrac{1}{2}\right|; \left|a + \dfrac{16}{3}\right|\right\}$.

TH1: $a + \dfrac{1}{2} \geq 0 \Leftrightarrow a \geq -\dfrac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} M = \left|a + \dfrac{16}{3}\right| = a + \dfrac{16}{3} \\ m = \left|a + \dfrac{1}{2}\right| = a + \dfrac{1}{2}. \end{cases}$

Khi đó $M \geq 2m \Leftrightarrow a + \dfrac{16}{3} \geq 2\left(a + \dfrac{1}{2}\right) \Leftrightarrow a \leq \dfrac{13}{3}$.

Kết hợp điều kiện, ta có $-\dfrac{1}{2} \le a \le \dfrac{13}{3} \Rightarrow$ có 5 giá trị nguyên thỏa mãn điều kiện.

TH2: $a + \dfrac{16}{3} \le 0 \Leftrightarrow a \le -\dfrac{16}{3} \Rightarrow \begin{cases} M = \left|a + \dfrac{1}{2}\right| = -a - \dfrac{1}{2} \\ m = \left|a + \dfrac{16}{3}\right| = -a - \dfrac{16}{3}. \end{cases}$

$M \ge 2m \Leftrightarrow -a - \dfrac{1}{2} \ge 2\left(-a - \dfrac{16}{3}\right) \Leftrightarrow a \ge -\dfrac{61}{6}$. Kết hợp điều kiện ta có $-\dfrac{61}{6} \le a \le -\dfrac{16}{3}$. Suy ra có 5 giá trị nguyên của a thỏa mãn.

TH3: $\begin{cases} a + \dfrac{1}{2} < 0 \\ a + \dfrac{16}{3} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\dfrac{16}{3} < a < -\dfrac{1}{2}$.

Nếu $\left|a + \dfrac{1}{2}\right| > \left|a + \dfrac{16}{3}\right| \Leftrightarrow -a - \dfrac{1}{2} > a + \dfrac{16}{3} \Leftrightarrow a < -\dfrac{35}{12}$ thì $\begin{cases} M = -a - \dfrac{1}{2} \\ m = a + \dfrac{16}{3} \end{cases}$

$\Rightarrow M \ge 2m \Leftrightarrow -a - \dfrac{1}{2} \ge 2\left(a + \dfrac{16}{3}\right) \Leftrightarrow a \le -\dfrac{67}{18}$.

Kết hợp điều kiện, ta có $-\dfrac{16}{3} < a \le -\dfrac{67}{18}$. Suy ra có 2 giá trị nguyên của a thỏa mãn điều kiện.

Nếu $\left|a + \dfrac{1}{2}\right| \le \left|a + \dfrac{16}{3}\right| \Leftrightarrow -a - \dfrac{1}{2} \le a + \dfrac{16}{3} \Leftrightarrow a \ge -\dfrac{35}{12}$ thì $\begin{cases} M = a + \dfrac{16}{3} \\ m = -a - \dfrac{1}{2} \end{cases}$

$\Rightarrow M \ge 2m \Leftrightarrow a + \dfrac{16}{3} \ge 2\left(-a - \dfrac{1}{2}\right) \Leftrightarrow a \ge -\dfrac{19}{9}$. Kết hợp điều kiện, ta có $-\dfrac{19}{9} \le a < -\dfrac{1}{2}$. Suy ra có 2 giá trị nguyên của a thỏa mãn điều kiện.

Vậy có 14 giá trị nguyên của a thỏa mãn điều kiện.

Chọn đáp án (B) □

Câu 15. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số thực m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y = \left|\dfrac{1}{4}x^4 - 14x^2 + 48x + m - 30\right|$ trên đoạn $[0;2]$ không vượt quá 30. Tổng giá trị các phần tử của tập hợp S bằng bao nhiêu?

(A) 120. (B) 210. (C) 108. (D) 136.

Lời giải.

Đặt $f(x) = \dfrac{1}{4}x^4 - 14x^2 + 48x + m - 30$ là hàm số xác định và liên tục trên $[0;2]$.

Với mọi $x \in [0;2]$ ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - 28x + 48 = 0 \Leftrightarrow x = 2$.

Suy ra $\max\limits_{[0;2]} |f(x)| = \max\{|f(0)|;|f(2)|\}$.

Theo đề $\max\limits_{[0;2]} |f(x)| \le 30 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} |m-30| \le 30 \\ |m+14| \le |m-30| \end{cases} \\ \begin{cases} |m+14| \le 30 \\ |m-30| \le |m+14| \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} |m-30| \le 30 \\ |m+14| \le 30 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -30 \le m - 30 \le 30 \\ -30 \le m + 14 \le 30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le m \le 60 \\ -44 \le m \le 16 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \le m \le 16$.

Do $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in S = \{0;1;2;...;16\}$.

Vậy tổng tất cả 17 giá trị trong tập S là 136.

Chọn đáp án (D) □

Câu 16. Cho hàm số $f(x) = |3e^{4x} - 4e^{3x} - 24e^{2x} + 48e^x + m|$. Gọi A, B lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên $[0; \ln 2]$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m thuộc $[-23; 10)$ thỏa mãn $A \leq 3B$. Tổng các phần tử của tập S bằng

(A) -33. (B) 0. (C) -111. (D) -74.

Lời giải.

Đặt $t = e^x$, $x \in [0; \ln 2] \Rightarrow t \in [1; 2]$.

Xét hàm số $h(t) = |3t^4 - 4t^3 - 24t^2 + 48t + m|$trên $[1; 2]$.

Đặt $g(t) = 3t^4 - 4t^3 - 24t^2 + 48t + m$.

$$g'(t) = 12t^3 - 12t^2 - 48t + 48;\ g'(t) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -2 \notin [1; 2] \\ t = 2 \\ t = 1; \end{array}\right.$$

$g(1) = m + 23$, $g(2) = m + 16$.

TH1: $-16 \leq m < 10 \Rightarrow m + 23 \geq m + 16 \geq 0$

$\Rightarrow A = \max\limits_{[1;2]} h(t) = m + 23;\ B = \min\limits_{[1;2]} h(t) = m + 16$.

Suy ra: $\begin{cases} -16 \leq m < 10 \\ m + 23 \leq 3m + 48 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -16 \leq m < 10 \\ m \geq \dfrac{-25}{2} \end{cases} \Rightarrow \dfrac{-25}{2} \leq m < 10.$

Do đó có 22 giá trị.

TH2: $-23 \leq m < -16 \Rightarrow |m + 23| = m + 23, |m + 16| = -m - 16$.

Dễ thấy $B = 0$. Suy ra $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} m + 23 < -m - 16 \\ -m - 16 \leq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} m + 23 \geq -m - 16 \\ m + 23 \leq 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -16 \leq m < -19.5 \\ -19.5 \leq m \leq -23 \end{array}\right. (VL).$

Vậy $S = \{-12; -11; ...; 0; 1; ...\ 9\}$ và tổng các phần tử của tập S bằng $-12 + (-11) + (-10) = -33$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 17. Cho hàm số $y = |x^4 - 2x^3 + x^2 + a|$. Có bao nhiêu số thực a để $\min\limits_{[1;2]} y + \max\limits_{[1;2]} y = 10$?

(A) 3. (B) 5. (C) 2. (D) 1.

Lời giải.

Đặt $y = |x^4 - 2x^3 + x^2 + a| = |f(x)|$.

Xét hàm số $f(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 + a$.

Khi đó $f'(x) = 4x^3 - 6x^2 + 2x = 2x(2x^2 - 3x + 1) = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{0; \dfrac{1}{2}; 1\right\}$.

Suy ra $f'(x) \geq 0, \forall x \in [1; 2]$ và $f(1) = a; f(2) = a + 4$.

Ta có $\forall x \in [1; 2]$ thì $\begin{cases} \max y \in \{|a|, |a + 4|\} \\ \min y \in \{|a|, 0, |a + 4|\}. \end{cases}$

Xét các trường hợp

+ $a \geq 0 \Rightarrow \max y = a + 4; \min y = a \Rightarrow 2a + 4 = 10 \Rightarrow a = 3$, nhận.

+ $a \leq -4 \Rightarrow \max y = -a; \min y = -a - 4 \Rightarrow -a - 4 - a = 10 \Rightarrow a = -7$, nhận.

+ $\begin{cases} a < 0 \\ a + 4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -4 < a < 0 \Rightarrow \min y = 0; \max y \in \{a + 4; -a\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a + 4 = 10 \\ -a = 10 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a = 6 \\ a = -10 \end{array}\right.$ (loại).

Vậy tồn tại hai giá trị a thỏa mãn.

Chọn đáp án C □

Câu 18. Cho hàm số $f(x) = |x^3 - 3x^2 + m|$. Có bao nhiêu số nguyên m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[1; 3]$ không lớn hơn 2020?

A 4045. B 4046. C 4044. D 4042.

Lời giải.

Với $u = x^3 - 3x^2 + m$ có $u' = 3x^2 - 6x; u' = 0 \Leftrightarrow x = 0; x = 2$.

Do đó $\begin{cases} \min\limits_{[1;3]} u = \min\{u(1); u(3); u(2)\} = \min\{m - 2; m; m - 4\} = m - 4 \\ \max\limits_{[1;3]} u = \max\{u(1); u(3); u(2)\} = \max\{m - 2; m; m - 4\} = m. \end{cases}$

* Nếu $m - 4 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq 4 \Rightarrow \min\limits_{[1;3]} f(x) = m - 4 \leq 2020 \Leftrightarrow m \leq 2024 \Rightarrow m \in \{4, ..., 2024\}$.

* Nếu $m \leq 0 \Rightarrow \min\limits_{[1;3]} f(x) = -m \leq 2020 \Leftrightarrow -2020 \leq m \Rightarrow m \in \{-2020; ...; 0\}$.

* Nếu $0 < m < 4$ khi đó $\min\limits_{[1;3]} u < 0; \max\limits_{[1;3]} u > 0 \Rightarrow \min\limits_{[1;3]} f(x) = 0$ (thỏa mãn).

Vậy $m \in \{-2020, ..., 2024\}$ có tất cả 4045 số nguyên thỏa mãn.

Chọn đáp án A □

Câu 19. Xét hàm số $f(x) = \left|\dfrac{mx - 2\sqrt{x + 4}}{2x + 4}\right|$, với m là tham số thực. Có bao nhiêu số nguyên m thỏa mãn điều kiện $0 < \min\limits_{[-1;1]} f(x) < 1$?

A 4. B 8. C 2. D 1.

Lời giải.

Cách 1: Xét hàm số $g(x) = \dfrac{mx - 2\sqrt{x + 4}}{2x + 4}$ liên tục trên $[-1; 1]$ và $f(x) = |g(x)|$.

Ta có $g(0) = -1$; $g(1) = \dfrac{m - 2\sqrt{5}}{6}$; $g(-1) = \dfrac{-m - 2\sqrt{3}}{2}$.

- Nếu $\left[\begin{array}{l} g(-1) \geq 0 \\ g(1) \geq 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \geq 2\sqrt{5} \\ m \leq -2\sqrt{3} \end{array}\right.$ thì $\min\limits_{[-1;1]} f(x) = 0$, không thỏa mãn bài toán.

- Nếu $\begin{cases} g(-1) < 0 \\ g(1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow -2\sqrt{3} < m < 2\sqrt{5}$.

Mà m nguyên nên $m \in \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4\}$. Ta có $g'(x) = \dfrac{4m + \dfrac{2x + 12}{\sqrt{x + 4}}}{(2x + 4)^2}$.

TH1: $m \geq 0$. Khi đó $g'(x) > 0 \, \forall x \in [-1; 1]$, do đó hàm số $g(x)$ đồng biến trên $[-1; 1]$.

Mà $g(0) = -1 \Rightarrow g(1) > -1$, do đó $-1 < g(1) < 0$.

Vậy $0 < \min\limits_{[-1;1]} f(x) < 1$ hay $m \in \{0; 1; 2; 3; 4\}$ thỏa mãn bài toán.

TH2: $m < 0$. Xét hàm số $h(x) = \dfrac{2x+12}{\sqrt{x+4}}$ trên $[-1; 1]$.

Ta có $h'(x) = \dfrac{x+2}{(x+4)\sqrt{x+4}} > 0\, \forall x \in [-1; 1]$. Khi đó dễ thấy $h(x) \in \left[\dfrac{10}{\sqrt{3}}; \dfrac{14}{\sqrt{5}}\right]$.

* Khi $m = -1 \Rightarrow 4m + h(x) > 0\, \forall x \in [-1; 1] \Rightarrow g'(x) > 0\, \forall x \in [-1; 1]$ hay hàm số $g(x)$ đồng biến trên $[-1; 1]$. Khi đó $-1 < g(1) < 0$ nên $0 < \min\limits_{[-1;1]} f(x) < 1$. Vậy $m = -1$ thỏa mãn.

* Khi $m \in \{-3; -2\} \Rightarrow 4m + h(x) < 0\, \forall x \in [-1; 1] \Rightarrow g'(x) < 0\, \forall x \in [-1; 1]$ hay hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $[-1; 1]$. Khi đó $g(-1) > g(0) \Rightarrow -1 < g(-1) < 0$ nên $0 < \min\limits_{[-1;1]} f(x) < 1$. Vậy $m \in \{-3; -2\}$ thỏa mãn.

Do đó $m \in \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4\}$ hay có 8 giá trị nguyên của m.

Cách 2: Nhận thấy $f(x)$ liên tục trên $[-1; 1]$ nên tồn tại giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ trên đoạn $[-1; 1]$.

Ta có $\begin{cases} f(x) \geq 0, \forall x \in [-1; 1] \\ f(0) = 1 \end{cases}$ nên suy ra $0 \leq \min\limits_{x\in[-1;1]} f(x) \leq 1$.

Vậy điều kiện $0 < \min\limits_{x\in[-1;1]} f(x) < 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \min\limits_{x\in[-1;1]} f(x) > 0 \ (1) \\ \min\limits_{x\in[-1;1]} f(x) \neq 1 \ (2). \end{cases}$

Ta có (1) $\Leftrightarrow$ Phương trình $mx - 2\sqrt{x+4} = 0$ vô nghiệm trên $[-1; 1]$.

Do đó phương trình $m = \dfrac{2\sqrt{x+4}}{x}$ vô nghiệm trên $[-1; 1] \setminus \{0\}$.

Xét hàm số $g(x) = \dfrac{2\sqrt{x+4}}{x}$, $\forall x \in [-1; 1] \setminus \{0\}$ $g'(x) = \dfrac{-x-8}{x^2\sqrt{x+4}} < 0, \forall x \in [-1; 1] \setminus \{0\}$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$g'(x)$				$-$	‖	$-$			
$g(x)$			$-2\sqrt{3}$	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	$2\sqrt{5}$		

Từ bảng biến thiên suy ra điều kiện phương trình $m = \dfrac{2\sqrt{x+4}}{x}$ vô nghiệm trên $[-1; 1] \setminus \{0\}$

$$\Leftrightarrow -2\sqrt{3} < m < 2\sqrt{5}.$$

Do m nguyên nên $m \in \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4\}$.

Để giải (2) trước hết ta đi tìm điều kiện để $\min\limits_{x\in[-1;1]} f(x) = 1$.

Do $f(0) = 1$ nên $\min\limits_{x\in[-1;1]} f(x) = f(0)$, mà $0 \in (-1; 1)$, suy ra $x = 0$ là điểm cực trị của hàm số $f(x)$.

Đặt $h(x) = \dfrac{mx - 2\sqrt{x+4}}{2x+4} \Rightarrow h'(0) = 0 \Leftrightarrow m = -\dfrac{3}{2}$.

Do đó với m nguyên thì (2) chắc chắn xảy ra.

Vậy $m \in \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4\}$ thỏa mãn điều kiện (2).

Kết luận: Có 8 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu.

Chọn đáp án (B) □

Câu 20. Gọi S là tập hợp những giá trị của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = |x^3 - 12x + m|$ trên đoạn $[1; 3]$ bằng 12. Tổng tất cả các phần tử của tập S bằng

(A) 25. (B) 4. (C) 15. (D) 21.

Lời giải.

Xét hàm số $g(x) = x^3 - 12x + m\,(1 \leq x \leq 3)$, $g'(x) = 3x^2 - 12 = 0 \Leftrightarrow x = 2$, $x = -2$.

$g(1) = m - 11$, $g(2) = m - 16$, $g(3) = m - 9$.

Suy ra $\max\limits_{[1;3]} f(x) = \{|m - 16|\,; |m - 9|\}$.

Giả sử $|m - 16| = 12 \Leftrightarrow m = 28$, $m = 4$ thử lại ta thấy $m = 4$ (nhận).

Giả sử $|m - 9| = 12 \Leftrightarrow m = 21$, $m = -3$ thử lại ta thấy $m = 21$ (nhận).

Vậy $m = 4$ và $m = 21$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 21. Gọi S_0 là tập tất cả các giá trị nguyên của tham số thực m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y = \left|\dfrac{1}{4}x^4 - 14x^2 + 48x + m\right|$ trên đoạn $[2; 4]$ không vượt quá 30. Số phần tử của S là

(A) 50. (B) 49. (C) 66. (D) 73.

Lời giải.

Xét hàm số $f(x) = \dfrac{1}{4}x^4 - 14x^2 + 48x + m$.

$$f'(x) = x^3 - 28x + 48\ f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -6\,(\text{ktm}) \\ x = 4\,(\text{tm}) \\ x = 2\,(\text{tm}). \end{array}\right.$$

$f(2) = m + 44$; $f(4) = m + 32$.

$\Rightarrow \min\limits_{[2;4]} f(x) = m + 32$; $\max\limits_{[2;4]} f(x) = m + 4$. $\Rightarrow \max\limits_{[2;4]} y = \max\{|m + 44|\,; |m + 32|\}$.

Để giá trị lớn nhất của hàm số $y = \left|\dfrac{1}{4}x^4 - 14x^2 + 48x + m\right|$ trên đoạn $[2; 4]$ không vượt quá 30 thì $\begin{cases} |m + 44| \leq 30 \\ |m + 32| \leq 30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -74 \leq m \leq -14 \\ -62 \leq m \leq -2 \end{cases} \Leftrightarrow -62 \leq m \leq -14.$

Chọn đáp án (B) □

Câu 22. Có bao nhiêu giá trị của tham số m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = |\mathrm{e}^{2x} - 4\mathrm{e}^x + m|$ trên đoạn $[0; \ln 4]$ bằng 6?

(A) 3. (B) 4. (C) 2. (D) 1.

Lời giải.

Đặt $t = \mathrm{e}^x$, vì $x \in [0; \ln 4] \Rightarrow t \in [1; 4]$.

Khi đó yêu cầu bài toán trở thành tìm m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(t) = |t^2 - 4t + m|$ trên đoạn $[1; 4]$ bằng 6.

Đặt $s = t^2 - 4t$, vì $t \in [1;4] \Rightarrow s \in [-4;0]$.

Xét hàm số $g(s) = s + m$ với $s \in [-4;0]$, suy ra hàm số $g(s)$ đồng biến trên đoạn $[-4;0]$.

Khi đó giá trị nhỏ nhất của $f(s) = |s+m|$, $s \in [-4;0]$ chỉ đạt tại các đầu mút.

TH1: $\begin{cases} \min\limits_{[-4;0]} f(s) = |m-4| = 6 \\ |m| > |m-4| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m = 10 \\ m = -2 \end{array}\right. \\ |m| > |m-4| \end{cases} \Leftrightarrow m = 10$ thỏa mãn.

TH2: $\begin{cases} \min\limits_{[-4;0]} f(s) = |m| = 6 \\ |m| < |m-4| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m = 6 \\ m = -6 \end{array}\right. \\ |m| > |m-4| \end{cases} \Leftrightarrow m = -6$ thỏa mãn.

Vậy có 2 giá trị của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án (C) □

Câu 23. Gọi S là tập tất cả các giá trị nguyên của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y = \left|\frac{1}{3}x^3 - 9x + m + 10\right|$ trên đoạn $[0;3]$ không vượt quá 12. Tổng giá trị các phần tử của S bằng bao nhiêu?

(A) -7. (B) 0. (C) 3. (D) 12.

Lời giải.

Xét hàm số $g(x) = \frac{1}{3}x^3 - 9x + m + 10$. Dễ thấy hàm số $g(x)$ liên tục trên đoạn $[0;3]$.

Ta có $g'(x) = x^2 - 9$; $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = -3 \notin [0;3]. \end{array}\right.$

Ta có $g(0) = m + 10$; $g(3) = m - 8$.

Theo yêu cầu bài toán

$$\max_{[0;3]} y = \max |g(x)| \leq 12 \Leftrightarrow \begin{cases} |g(0)| \leq 12 \\ |g(3)| \leq 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |m+10| \leq 12 \\ |m-8| \leq 12 \end{cases} \Leftrightarrow -4 \leq m \leq 2.$$

Mà $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{-4;-3;-2;-1;0;1;2\}$.

Vậy tổng các phần tử của S là -7.

Chọn đáp án (A) □

Câu 24. Gọi S là tập tất cả các giá trị nguyên của tham số thực m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y = \left|\frac{1}{4}x^4 - 14x^2 + 48x + m - 30\right|$ trên đoạn $[0;2]$ không vượt quá 30. Tổng tất cả các giá trị của S là

(A) 180. (B) 136. (C) 120. (D) 210.

Lời giải.

Xét $u = \frac{1}{4}x^4 - 14x^2 + 48x + m - 30$ trên đoạn $[0;2]$.

$u' = 0 \Leftrightarrow x^3 - 28x + 48 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -6 \notin [0;2] \\ x = 2 \in [0;2] \\ x = 4 \notin [0;2]. \end{array}\right.$

Khi đó $\max\limits_{[0;2]} u = \max\{u(0), u(2)\} = \max\{m-30, m+14\} = m+14$.

Suy ra $\max\limits_{[0;2]} y = \max\{|m-30|, |m+14|\}$.

TH1: $\max\limits_{[0;2]} y = |m+14|$

$$\begin{cases} |m+14| \geq |m-30| \\ |m+14| \leq 30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |m+14|^2 \geq |m-30|^2 \\ -30 \leq m+14 \leq 30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 88m \geq 704 \\ -44 \leq m \leq 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 8 \\ -44 \leq m \leq 16 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow 8 \leq m \leq 16$, mà $m \in \mathbb{Z}$.

$\Leftrightarrow m \in \{8; 9; 10; ...; 16\}$.

TH2: $\max\limits_{[0;2]} y = |m-30|$

$$\begin{cases} |m-30| \geq |m+14| \\ |m-30| \leq 30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |m+14|^2 \leq |m-30|^2 \\ -30 \leq m-30 \leq 30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 88m \leq 704 \\ 0 \leq m \leq 60 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 8 \\ 0 \leq m \leq 60 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow 0 \leq m \leq 8$, mà $m \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow m \in \{0; 1; 2; ...; 8\}$.

Vậy tổng các giá trị m thỏa mãn là $0 + 1 + 2 + ... + 16 = 136$.

Chọn đáp án B □

Câu 25. Biết giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x) = |2x^3 - 15x + m - 5| + 9x$ trên $[0; 3]$ bằng 60. Tính tổng tất cả các giá trị của tham số thực m.

A 48. B 5. C 6. D 62.

Lời giải.

Có $\max\limits_{[0;3]} f(x) = 60 \Leftrightarrow f(x) \leq 60, \forall x \in [0; 3]$ và $\exists x_0 \in [0; 3]$ sao cho $f(x_0) = 60$.

Có $f(x) \leq 60 \Leftrightarrow \left|2x^3 - 15x + m - 5\right| + 9x \leq 60$

$\Leftrightarrow \left|2x^3 - 15x + m - 5\right| \leq 60 - 9x$

$\Leftrightarrow 9x - 60 \leq 2x^3 - 15x + m - 5 \leq 60 - 9x$

$\Leftrightarrow -2x^3 + 24x - 55 \leq m \leq -2x^3 + 6x + 65, \forall x \in [0; 3]$.

Có $-2x^3 + 6x + 65 \geq 29, \forall x \in [0; 3]$ nên $m \leq -2x^3 + 6x + 65, \forall x \in [0; 3] \Leftrightarrow m \leq 29$.

Tương tự $-2x^3 + 24x - 55 \leq -23$ nên $-2x^3 + 24x - 55 \leq m, \forall x \in [0; 3] \Leftrightarrow m \geq -23$.

Vậy $-23 \leq m \leq 29$ thì $f(x) \leq 60, \forall x \in [0; 3]$.

Để $\exists x_0 \in [0; 3]$ sao cho $f(x_0) = 60$ thì $\left[\begin{array}{l} -2x^3 + 24x - 55 = m \\ -2x^3 + 6x + 65 = m \end{array}\right.$ có nghiệm trên $[0; 3]$.

Hay $\left[\begin{array}{l} m \geq 29 \\ m \leq -23 \end{array}\right.$, vậy $\left[\begin{array}{l} m = 29 \\ m = -23 \end{array}\right.$ thì $\max\limits_{[0;3]} f(x) = 60$.

Khi đó tổng các giá trị của m là $29 - 23 = 6$.

Chọn đáp án C □

Câu 26. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y = |x^3 - 3x + m|$ trên đoạn $[0; 2]$ bằng 3. Số phần tử của S là

A 2. B 6. C 1. D 0.

Lời giải.

Xét hàm số $g(x) = x^3 - 3x + m$, ta có $g'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \notin [0;2] \\ x = 1 \in [0;2]. \end{array}\right.$

$g(0) = m$, $g(1) = m - 2$, $g(2) = m + 2$.

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = |x^3 - 3x + m|$ bằng max của $F = \{|m|; |m-2|; |m+2|\}$

TH1: $|m| = 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 3 \\ m = -3. \end{array}\right.$

Với $m = 3 \Rightarrow F = \{3; 1; 5\}$ loại vì max bằng 5.

Với $m = -3 \Rightarrow F = \{3; 5; 1\}$ loại vì max bằng 5.

TH2: $|m - 2| = 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 5 \\ m = -1. \end{array}\right.$

Với $m = 5 \Rightarrow F = \{5; 3; 7\}$ loại vì max bằng 7.

Với $m = -1 \Rightarrow F = \{1; 3; 1\}$ có max bằng 3. Chọn $m = -1$.

TH3: $|m + 2| = 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = -5. \end{array}\right.$

Với $m = 1 \Rightarrow F = \{1; 1; 3\}$ có max bằng 3. Chọn $m = 1$.

Với $m = -5 \Rightarrow F = \{5; 7; 3\}$ loại vì max bằng 7.

Vậy $S = \{-1; 1\} \Rightarrow$ có 2 giá trị m thoả mãn yêu cầu đề bài.

Chọn đáp án A □

Câu 27. Cho hàm số $f(x) = |x^4 - 2x^3 + x^2 + m|$ (m là tham số thực). Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của m sao cho $\min\limits_{[-1;2]} f(x) + \max\limits_{[-1;2]} f(x) = 10$. Số phần tử của S là?

A 2. B 3. C 5. D 1.

Lời giải.

Đặt $g(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 + m \Rightarrow g'(x) = 4x^3 - 6x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \dfrac{1}{2} \\ x = 1. \end{array}\right.$

Bảng biến thiên của hàm $g(x)$

x	-1		0		$\frac{1}{2}$		1		2
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$m+4$	$\searrow$	m	$\nearrow$	$m+\frac{1}{16}$	$\searrow$	m	$\nearrow$	$m+4$

Dựa vào bảng biến thiên của $g(x)$ ta suy ra bảng biến thiên của $f(x) = |g(x)| = |x^4 - 2x^3 + x^2 + m|$.

Ta có các trường hợp sau:

TH1: $m \geq 0$. Bảng biến thiên của $f(x) = |g(x)| = |x^4 - 2x^3 + x^2 + m|$.

x	-1		0		$\frac{1}{2}$		1		2
$f(x)$	$m+4$	$\searrow$	m	$\nearrow$	$m+\frac{1}{16}$	$\searrow$	m	$\nearrow$	$m+4$

Dựa vào bảng biến thiên ta có $\min\limits_{[-1;2]} f(x)+\max\limits_{[-1;2]} f(x)=10 \Leftrightarrow m+m+4=10 \Leftrightarrow m=3$ (thỏa).

TH2: $m<0<m+\dfrac{1}{16} \Leftrightarrow -\dfrac{1}{16}<m<0$. Bảng biến thiên:

x	-1				0				$\frac{1}{2}$				1				2
$f(x)$	$m+4$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$-m$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$m+\frac{1}{16}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$-m$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$m+4$

Dựa vào bảng biến thiên ta có $\min\limits_{[-1;2]} f(x)+\max\limits_{[-1;2]} f(x)=10 \Leftrightarrow 0+m+4=10 \Leftrightarrow m=6$ (loại).

TH3: $m+\dfrac{1}{16}=0 \Leftrightarrow m=-\dfrac{1}{16}$.

Tương tự ta có: $\min\limits_{[-1;2]} f(x)+\max\limits_{[-1;2]} f(x)=10 \Leftrightarrow 0+m+4=10 \Leftrightarrow m=6$ (loại)

TH4: $m+\dfrac{1}{16}<0<m+4 \Leftrightarrow -4<m<-\dfrac{1}{16}$.

Bảng biến thiên:

x	-1				0		$\frac{1}{2}$		1				2
$f(x)$	$m+4$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$-m$	$\searrow$	$m+\frac{1}{16}$	$\nearrow$	$-m$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$m+4$

Dựa vào bảng biến thiên ta có $\left[\begin{array}{l}\min\limits_{[-1;2]} f(x)+\max\limits_{[-1;2]} f(x)=10\\ \min\limits_{[-1;2]} f(x)+\max\limits_{[-1;2]} f(x)=10\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}0+m+4=10\\ 0+(-m)=10\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m=6\\ m=-10\end{array}\right.$ (loại).

TH5: $m+4=0 \Leftrightarrow m=-4$.

Ta có $\min\limits_{[-1;2]} f(x)+\max\limits_{[-1;2]} f(x)=10 \Leftrightarrow 0-m=10 \Leftrightarrow m=-10$ (loại).

TH6: $m+4<0 \Leftrightarrow m<-4$.

Ta có $\min\limits_{[-1;2]} f(x)+\max\limits_{[-1;2]} f(x)=10 \Leftrightarrow -m-m-4=10 \Leftrightarrow m=-7$ (thỏa).

Vậy $m\in\{-7;3\}$.

Chọn đáp án A □

Câu 28. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $f(x)=\left|\dfrac{2mx-2\sqrt{4x+8}}{x+2}\right|$ có giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[-1;1]$ là a thỏa mãn $0<a<1$.

(A) 3. (B) 4. (C) 5. (D) 2.

Lời giải.

Đặt $t=\sqrt{x+2}$, $x\in[-1;1]\Rightarrow t\in\left[1;\sqrt{3}\right]$; $x=t^2-2$.

Hàm số đã cho trở thành $g(t)=\left|\dfrac{2mt^2-4t-4m}{t}\right|$.

Xét hàm $h(t)=\dfrac{2mt^2-4t-4m}{t}$ trên đoạn $\left[1;\sqrt{3}\right]$.

Ta có $h'(t)=\dfrac{2m(t^2+2)}{t^2}$.

TH1: $m=0$ thì $h(t)=-4\Rightarrow g(t)=4\ \forall t\in\left[1;\sqrt{3}\right]\Rightarrow a=4$ (loại).

TH2: $m\neq 0$ thì hàm số $h(t)$ đồng biến hoặc nghịch biến trên $\left[1;\sqrt{3}\right]$.

Ta có $h(1)=-2m-4$; $h(\sqrt{3})=\dfrac{2m-4\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$.

Nếu $h(1)\cdot h(\sqrt{3})\leq 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m\leq -2\\ m\geq 2\sqrt{3}\end{array}\right.$ và hàm số $h(t)$ liên tục trên đoạn $\left[1;\sqrt{3}\right]$ suy ra đồ thị hàm số $h(t)$ trên đoạn $\left[1;\sqrt{3}\right]$ cắt trục hoành nên $a=0$ (loại).

Nếu $h(1)\cdot h(\sqrt{3})>0\Leftrightarrow -2<m<2\sqrt{3}$.

Khi đó, $h(1)<0$; $h\left(\sqrt{3}\right)<0\Rightarrow a=\left|\dfrac{2m-4\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right|$.

Suy ra $\left[\begin{array}{l}m=3\\ m=4\end{array}\right.$ là các giá trị nguyên dương để $0<a<1$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 29. Cho hàm số $y=|x^4-2x^2+3m|$ với m là tham số. Biết rằng có đúng hai giá trị m_1, m_2 của m để giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên $[-1;2]$ bằng 2021. Tính giá trị $|m_1-m_2|$.

(A) $\dfrac{1}{3}$. (B) $\dfrac{4052}{3}$. (C) $\dfrac{8}{3}$. (D) $\dfrac{4051}{3}$.

Lời giải.

Xét hàm số $f(x)=x^4-2x^2+3m$, ta có $f'(x)=4x^3-4x=4x(x^2-1)f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=\pm 1.\end{array}\right.$

Bảng biến thiên của hàm số trên $[-1;2]$:

x	-1		0		1		2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$3m-1$	$\nearrow$	$3m$	$\searrow$	$3m-1$	$\nearrow$	$3m+8$

Vì $\min\limits_{[-1;2]} y=2021$ suy ra phương trình $f(x)=0$ không có nghiệm thuộc $[-1;2]$.

TH1: $3m-1>0\Leftrightarrow m>\dfrac{1}{3}$.

Ta có $\min\limits_{[-1;2]} y=|3m-1|=3m-1=2021\Leftrightarrow m=\dfrac{2022}{3}$.

TH2: $3m+8<0\Leftrightarrow m<-\dfrac{8}{3}$.

Ta có $\min\limits_{[-1;2]} y = |3m+8| = -3m-8 = 2021 \Leftrightarrow m = -\dfrac{2029}{3}$.

Vậy $|m_1 - m_2| = \left|\dfrac{2022}{3} + \dfrac{2029}{3}\right| = \dfrac{4051}{3}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 30. Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 + m + 1$ (m là tham số thực). Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m thuộc đoạn $[-2020; 2020]$ sao cho $\max\limits_{[1;4]} |f(x)| \leq 3 \min\limits_{[1;4]} |f(x)|$. Số phần tử của S là

(A) 4003. (B) 4002. (C) 4004. (D) 4001.

Lời giải.

Xét hàm số $y = f(x) = x^3 - 3x^2 + m + 1 \Rightarrow y' = f'(x) = 3x^2 - 6x$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \text{ (loại)} \\ x = 2. \end{array}\right.$

$f(1) = m - 1; f(2) = m - 3; f(4) = 17 + m; \max\limits_{[1;4]} f(x) = m + 17; \min\limits_{[1;4]} f(x) = m - 3$.

+Nếu $m - 3 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq 3$ thì $\max\limits_{[1;4]} |f(x)| = m + 17$, $\min\limits_{[1;4]} |f(x)| = m - 3$.

Khi đó: $\max\limits_{[1;4]} |f(x)| \leq 3 \min\limits_{[1;4]} |f(x)| \Leftrightarrow 17 + m \leq 3(m-3) \Leftrightarrow m \geq 13$.

+Nếu $m + 17 \leq 0 \Leftrightarrow m \leq -17$ thì $\max\limits_{[1;4]} |f(x)| = -m + 3$, $\min\limits_{[1;4]} |f(x)| = -17 - m$.

Khi đó: $\max\limits_{[1;4]} |f(x)| \leq 3 \min\limits_{[1;4]} |f(x)| \Leftrightarrow -m + 3 \leq 3(-17 - m) \Leftrightarrow m \leq -27$.

+Nếu $(m-3)(m+17) < 0 \Leftrightarrow -17 < m < 3$ thì

$\max\limits_{[1;4]} |f(x)| = \max\{|m+17|, |m-3|\} = \max\{m+17, 3-m\} > 0$; $\min\limits_{[1;4]} |f(x)| = 0$.

Khi đó, không thỏa điều kiện $\max\limits_{[1;4]} |f(x)| \leq 3 \min\limits_{[1;4]} |f(x)|$.

Do đó: $\left[\begin{array}{l} m \leq -27 \\ m \geq 13 \end{array}\right.$ kết hợp với $m \in [-2020; 2020]$ ta có $m \in [-2020; -27] \cup [13; 2020]$.

Vậy 4002 giá trị nguyên của m cần tìm.

Chọn đáp án (B) □

Câu 31. Cho hàm số $f(x) = \dfrac{x + 2m}{x + 2}$ (m là tham số). Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của m sao cho $\max\limits_{[1;3]} |f(x)| + \min\limits_{[1;3]} |f(x)| = 2$. Số phần tử của S bằng

(A) 1. (B) 0. (C) 2. (D) 3.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = \dfrac{2 - 2m}{(x+2)^2}, \forall x \neq -2$.

Nếu $m = 1 \Rightarrow f(x) = 1, \forall x \neq -2$, khi đó $\max\limits_{[1;3]} |f(x)| = \min\limits_{[1;3]} |f(x)| = 1 = \left|\dfrac{1 + 2m}{3}\right| + \left|\dfrac{3 + 2m}{5}\right|$.

Nếu $m \neq 1$ ta có $f(x)$ là hàm số đơn điệu trên đoạn $[1; 3]$, $f(1) = \dfrac{1 + 2m}{3}$, $f(3) = \dfrac{3 + 2m}{5}$.

+ Nếu $f(1) \cdot f(3) \leq 0 \Leftrightarrow -\dfrac{3}{2} \leq m \leq -\dfrac{1}{2}$ thì $\min\limits_{[1;3]} |f(x)| = 0, \max\limits_{[1;3]} |f(x)| = f(1)$ hoặc $\max\limits_{[1;3]} |f(x)| =$

$f(3)$, do đó $\max\limits_{[1;3]}|f(x)| + \min\limits_{[1;3]}|f(x)| = 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left|\dfrac{1+2m}{3}\right| = 2 \\ \left|\dfrac{3+2m}{5}\right| = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = \dfrac{5}{2}, m = -\dfrac{7}{2} \\ m = \dfrac{7}{2}, m = -\dfrac{13}{2}. \end{array}\right.$

Kết hợp điều kiện xét thì không có giá trị m.

+ Nếu $f(1)\cdot f(3) > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > -\dfrac{1}{2} \\ m < -\dfrac{3}{2} \end{array}\right.$ thì $\min\limits_{[1;3]}|f(x)| + \max\limits_{[1;3]}|f(x)| = |f(1)| + |f(3)| = \left|\dfrac{1+2m}{3}\right| + \left|\dfrac{3+2m}{5}\right|$, do đó $\max\limits_{[1;3]}|f(x)| + \min\limits_{[1;3]}|f(x)| = 2 \Leftrightarrow \left|\dfrac{1+2m}{3}\right| + \left|\dfrac{3+2m}{5}\right| = 2$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} m < -\dfrac{3}{2} \\ \dfrac{1+2m}{3} + \dfrac{3+2m}{5} = -2 \end{cases} \\ \begin{cases} m > -\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1+2m}{3} + \dfrac{3+2m}{5} = 2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -\dfrac{11}{4} \\ m = 1 \text{ (loại do } m \neq 1). \end{array}\right.$$

Vậy S có hai phần tử $m = 1$, $m = -\dfrac{11}{4}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 32. Cho hàm số $f(x) = |2x^2 + (a+4)x + b + 3|$. Đặt $M = \max\limits_{[-2;3]} f(x)$. Khi M đạt giá trị nhỏ nhất, giá trị của biểu thức $T = a + 4b$ là

(A) -42. (B) -41. (C) 41. (D) 42.

Lời giải.

Đặt $g(x) = 2x^2 + (a+4)x + b + 3 \Rightarrow g'(x) = 4x + a + 4$.

$g'(x) = 0 \Rightarrow x = -1 - \dfrac{a}{4}$; $g(-2) = -2a + b + 3$; $g(3) = 3a + b + 33$; $g\left(-1 - \dfrac{a}{4}\right) = b + 3 - \dfrac{(a+4)^2}{8}$.

$$\text{Suy ra } M = \max\left\{|-2a+b+3|\,;|3a+b+33|\,;\left|b+3-\dfrac{(a+4)^2}{8}\right|\right\}$$
$$= \max\left\{|-2a+b+3|\,;|3a+b+33|\,;\left|\dfrac{(a+4)^2}{8}-b-3\right|\right\}.$$

Ta có $\begin{cases} M \geq |-2a+b+3| \\ M \geq |3a+b+33| \\ M \geq \left|\dfrac{(a+4)^2}{8} - b - 3\right| \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{2}M \geq \left|-a + \dfrac{1}{2}b + \dfrac{3}{2}\right| \\ \dfrac{1}{2}M \geq \left|\dfrac{3}{2}a + \dfrac{1}{2}b + \dfrac{33}{2}\right| \\ M \geq \left|\dfrac{(a+4)^2}{8} - b - 3\right|. \end{cases}$

$$\begin{aligned}\text{Suy ra}\quad 2M &\geq \left|-a+\frac{1}{2}b+\frac{3}{2}\right|+\left|\frac{3}{2}a+\frac{1}{2}b+\frac{33}{2}\right|+\left|\frac{(a+4)^2}{8}-b-3\right|\\ &\geq \left|-a+\frac{1}{2}b+\frac{3}{2}+\frac{3}{2}a+\frac{1}{2}b+\frac{33}{2}+\frac{(a+4)^2}{8}-b-3\right|\\ &=\left|\frac{1}{8}a^2+\frac{3}{2}a+17\right|\geq\frac{25}{2}\\ \Rightarrow M &\geq \frac{25}{4}.\end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases}|-2a+b+3|=|3a+b+33|=\left|\dfrac{(a+4)^2}{8}-b-3\right|=\dfrac{25}{4}\\ a=-6\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-6\\ b=-\dfrac{35}{4}.\end{cases}$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 33. Xét hàm số $f(x)=|x^2+ax+b|$, với a, b là tham số. Với M là giá trị lớn nhất của hàm số trên $[-1;3]$. Khi M nhận giá trị nhỏ nhất có thể được, tính $a+2b$.

(A) 5. (B) -5. (C) -4. (D) 4.

Lời giải.

Theo bài ra, ta có $\begin{cases}M\geq f(-1)\\ M\geq f(3)\\ M\geq f(1)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}M\geq|-a+b+1|\\ M\geq|3a+b+9|\\ 2M\geq 2|a+b+1|=|-2a-2b-2|.\end{cases}$.

$$\begin{aligned}\text{Suy ra}\quad 4M &\geq |-a+b+1|+|3a+b+9|+|-2a-2b-2|\\ &\geq |-a+b+1+3a+b+9-2a-2b-2|\\ \Leftrightarrow 4M &\geq 8\Leftrightarrow M\geq 2.\end{aligned}$$

Điều kiện cần để $M=2$ là $|-a+b+1|=|3a+b+9|=|-a-b-1|=2$ và $-a+b+1$, $3a+b+9$, $-a-b-1$ cùng dấu

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-a+b+1=3a+b+9=-a-b-1=2\\ -a+b+1=3a+b+9=-a-b-1=-2\end{array}\right.\Leftrightarrow\begin{cases}a=-2\\ b=-1.\end{cases}$$

Ngược lại, với $\begin{cases}a=-2\\ b=-1\end{cases}$ thì $f(x)=|x^2-2x-1|$.

Xét hàm số $g(x)=x^2-2x-1$ trên đoạn $[-1;3]$.

Ta có $g'(x)=2x-2$; $g'(x)=0\Leftrightarrow x=1\in[-1;3]$.

Do M là giá trị lớn nhất của $f(x)$ trên đoạn $[-1;3]$ nên $M=\max\{|g(-1)|\,;|g(3)|\,;|g(1)|\}=2$.

Từ đó suy ra với $\begin{cases}a=-2\\ b=-1\end{cases}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán, vậy $a+2b=-4$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 34. Cho hàm số $f(x)=|x^3-15x+2m|+12x-m$. Giá trị nhỏ nhất của $M=\max\limits_{[-2;3]}f(x)$ bằng

(A) 36. (B) 9. (C) 25. (D) 27.

Lời giải.

Đặt $a = \max\limits_{[-2;3]} f(x)$.

Ta có $f(x) \le a, \forall x \in [-2;3]$ và điều kiện $a + m - 12x \ge 0, \forall x \in [-2;3]$

$$\Leftrightarrow \left|x^3 - 15x + 2m\right| + 12x - m \le a, \forall x \in [-2;3]$$

$$\Leftrightarrow \left|x^3 - 15x + 2m\right| \le a + m - 12x, \forall x \in [-2;3]$$

$$\Leftrightarrow -a - m + 12x \le \left|x^3 - 15x + 2m\right| \le a + m - 12x, \forall x \in [-2;3]$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \ge -x^3 + 27x - 3m \\ a \ge x^3 - 3x + m \\ a \ge -m + 12x \end{cases}, \forall x \in [-2;3] \ (*)$$

Xét hàm $g(x) = -x^3 + 27x - 3m$ trên đoạn $[-2;3]$.

Ta có $g'(x) = -3x^2 + 27$.

BBT của hàm $g(x)$

x	-2		3
$g'(x)$		$+$	
$g(x)$		$\nearrow$	$54 - 3m$

Xét hàm $h(x) = x^3 - 3x + m$ trên đoạn $[-2;3]$.

Ta có $h'(x) = 3x^2 - 3$.

BBT của hàm $h(x)$

x	-2		-1		1		3
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$		$\nearrow$	$m+2$	$\searrow$		$\nearrow$	$m+18$

Hệ $(*) \Leftrightarrow \begin{cases} a \ge 54 - 3m \\ a \ge m + 18 \\ a \ge 36 - m. \end{cases}$

TH1: $\min a = m + 18$ nếu $\begin{cases} m + 18 \le 54 - 3m \\ m + 18 \le 36 - m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4m \le 36 \\ 2m \le 18 \end{cases} \Leftrightarrow m \le 9$.

TH2: $\min a = 36 - m$ nếu $\begin{cases} 36 - m \le 54 - 3m \\ 36 - m \le m + 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m \le 18 \\ 2m \ge 18 \end{cases} \Leftrightarrow m = 9$.

TH3: $\min a = 54 - 3m$ nếu $\begin{cases} 54 - 3m \le 36 - m \\ 54 - 3m \le m + 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \ge 9 \\ m \ge 9 \end{cases} \Leftrightarrow m \ge 9$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của $M = \max\limits_{[-2;3]} f(x)$ bằng 27.

Chọn đáp án (D) □

Câu 35. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m sao cho $|2x^3 - 3x^2 + m| \leq 16, \forall x \in [0;3]$. Tổng tất cả các phần tử của S bằng

(A) -65. (B) -74. (C) -42. (D) 87.

Lời giải.

Xét $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + m$, với $x \in [0;3]$.

Ta có $f'(x) = 6x^2 - 6x$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1. \end{array}\right.$

$f(0) = m$; $f(1) = m - 1$; $f(3) = 27 + m$.

Do đó: $f(x) \in [m - 1; m + 27]$.

Vậy $|f(x)| \leq 16 \Leftrightarrow \begin{cases} m - 1 \geq -16 \\ m + 27 \leq 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -15 \\ m \leq -11 \end{cases} \Leftrightarrow m \in [-15; -11]$.

Vì $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-15; -14; -13; -12; -11\}$.

Ta có $(-15) + (-14) + (-13) + (-12) + (-11) = -65$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 36. Cho hàm số $y = \left|\dfrac{x^2 - 2mx + 1}{x^2 - x + 2}\right|$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-10; 10]$ để giá trị lớn nhất của hàm số lớn hơn hoặc bằng 4.

(A) 14. (B) 10. (C) 20. (D) 18.

Lời giải.

Theo đề ra ta có $\max\left\{\left|\dfrac{x^2 - 2mx + 1}{x^2 - x + 2}\right|\right\} \geq 4$.

Ta có $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{x^2 - 2mx + 1}{x^2 - x + 2} = 1$ do đó luôn tồn tại $\max\left\{\left|\dfrac{x^2 - 2mx + 1}{x^2 - x + 2}\right|\right\}$ trên $\mathbb{R}$ thoả yêu cầu bài toán.

Ta tìm m để $\max\left\{\left|\dfrac{x^2 - 2mx + 1}{x^2 - x + 2}\right|\right\} < 4, \forall x \in \mathbb{R}$.

Ta có $\left|\dfrac{x^2 - 2mx + 1}{x^2 - x + 2}\right| < 4, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2 - 2mx + 1}{x^2 - x + 2} > -4, \forall x \in \mathbb{R} \\ \dfrac{x^2 - 2mx + 1}{x^2 - x + 2} < 4, \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x^2 - (2m + 4)x + 9 > 0, \forall x \in \mathbb{R} \\ -3x^2 - (2m - 4)x - 7 < 0, \forall x \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + 4m - 41 < 0 \\ m^2 - 4m - 17 < 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -2 - 3\sqrt{5} < m < -2 + 3\sqrt{5} \\ 2 - \sqrt{21} < m < 2 + \sqrt{21} \end{cases} \Leftrightarrow 2 - \sqrt{21} < m < -2 + 3\sqrt{5}$.

Khi đó $\max\left\{\left|\dfrac{x^2 - 2mx + 1}{x^2 - x + 2}\right|\right\} \geq 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \leq 2 - \sqrt{21} \\ m \geq -2 + 3\sqrt{5}. \end{array}\right.$

Giá trị nguyên của tham số $m \in [-10; 10]$ là $m \in \{-10; -9; ...; -3; 5; 6; ...; 10\}$.

Chọn đáp án A □

BẢNG ĐÁP ÁN

1. B	2. A	3. B	4. D	5. C	6. B	7. D	8. C	9. B	10. B
11. D	12. C	13. A	14. B	15. D	16. A	17. C	18. A	19. B	20. A
21. B	22. C	23. A	24. B	25. C	26. A	27. A	28. D	29. D	30. B
31. C	32. B	33. C	34. D	35. A	36. A				

CHỦ ĐỀ 4

TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

MỨC ĐỘ 1. MỨC ĐỘ 5,6 ĐIỂM

Dạng 1. Xác định đường tiệm cận thông qua bảng biến thiên, đồ thị

Câu 1 (BGD-Minh Họa 1-2017). Cho hàm số $y=f(x)$ có $\lim\limits_{x\to+\infty} y=1$ và $\lim\limits_{x\to-\infty} y=-1$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

(A) Đồ thị hàm số đã cho không có tiệm cận ngang.

(B) Đồ thị hàm số đã cho có đúng một tiệm cận ngang.

(C) Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận ngang là các đường thẳng $y=1$ và $y=-1$.

(D) Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận ngang là các đường thẳng $x=1$ và $x=-1$.

Lời giải.

Theo định nghĩa đường tiệm cận, ta có:

- $\lim\limits_{x\to+\infty} y=1$ suy ra $y=1$ là đường tiệm cận ngang.
- $\lim\limits_{x\to-\infty} y=-1$ suy ra $y=-1$ là đường tiệm cận ngang.

Chọn đáp án (C) □

Câu 2 (BGD-Minh Họa-2020-L2). Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-2}{x+1}$ có phương trình là

(A) $y=-2$. (B) $y=1$. (C) $x=-1$. (D) $x=2$.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} y=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-2}{x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-\dfrac{2}{x}}{1+\dfrac{1}{x}}=1$ và $\lim\limits_{x\to-\infty} y=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x-2}{x+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1-\dfrac{2}{x}}{1+\dfrac{1}{x}}=1$ nên đường thẳng $y=1$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị.

Chọn đáp án (B) □

Câu 3 (BGD-THPT-2020-101-L1). Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{4x+1}{x-1}$ có phương trình là

(A) $y=\dfrac{1}{4}$. (B) $y=4$. (C) $y=1$. (D) $y=-1$.

Lời giải.

Do $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{4x+1}{x-1}=4$ nên $y=4$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{4x+1}{x-1}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 4 (BGD-THPT-2020-102-L1). Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \dfrac{5x+1}{x-1}$ có phương trình là

Ⓐ $y = 1$. Ⓑ $y = \dfrac{1}{5}$. Ⓒ $y = -1$. Ⓓ $y = 5$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{5x+1}{x-1} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{5+\dfrac{1}{x}}{1-\dfrac{1}{x}} = 5$.

Vậy tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho là $y = 5$.

Chọn đáp án D □

Câu 5 (BGD-THPT-2020-103-L1). Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x+1}{x-1}$ có phương trình là

Ⓐ $y = \dfrac{1}{2}$. Ⓑ $y = -1$. Ⓒ $y = 1$. Ⓓ $y = 2$.

Lời giải.

Ta có: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y = 2$, nên tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là $y = 2$.

Chọn đáp án D □

Câu 6 (BGD-THPT-2020-104-L1). Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \dfrac{3x+1}{x-1}$ có phương trình là

Ⓐ $y = \dfrac{1}{3}$. Ⓑ $y = 3$. Ⓒ $y = -1$. Ⓓ $y = 1$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y = 3$ nên $y = 3$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho.

Chọn đáp án B □

Câu 7 (BGD-THPT-2020-101-L2). Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x+2}{x-1}$ có phương trình là

Ⓐ $x = 2$. Ⓑ $x = -2$. Ⓒ $x = 1$. Ⓓ $x = -1$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Ta có $\lim\limits_{x\to 1^+} y = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 1^-} y = -\infty$ nên đường thẳng $x = 1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x+2}{x-1}$.

Chọn đáp án C □

Câu 8 (BGD-THPT-2020-102-L2). Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \dfrac{x-1}{x-3}$ có phương trình là

Ⓐ $x = -3$. Ⓑ $x = -1$. Ⓒ $x = 1$. Ⓓ $x = 3$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{3\}$.

Ta có $\lim\limits_{x\to 3^+} y = +\infty$ và $\lim\limits_{x\to 3^-} y = -\infty$.

Suy ra đồ thị hàm số đã cho có đường tiệm cận đứng là $x = 3$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 9 (BGD-THPT-2020-103-L2). Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-2}{x+1}$ có phương trình là

(A) $x=-2$. (B) $x=1$. (C) $x=-1$. (D) $x=2$.

Lời giải.

Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-2}{x+1}$ là $x=-1$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 10 (BGD-THPT-2020-104-L2). Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+1}{x+3}$ có phương trình là

(A) $x=-1$. (B) $x=1$. (C) $x=-3$. (D) $x=3$.

Lời giải.

Tập xác định của hàm số đã cho $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{-3\}$.

Ta có $\lim\limits_{x\to-3^-} y=\lim\limits_{x\to-3^-}\dfrac{x+1}{x+3}=+\infty$ và $\lim\limits_{x\to-3^+} y=\lim\limits_{x\to-3^+}\dfrac{x+1}{x+3}=-\infty$.

Khi đó đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là $x=-3$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 11 (BGD-Minh Họa-2020-L2). Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-2}{x+1}$ có phương trình là

(A) $y=-2$. (B) $y=1$. (C) $x=-1$. (D) $x=2$.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} y=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-2}{x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-\dfrac{2}{x}}{1+\dfrac{1}{x}}=1$ và $\lim\limits_{x\to-\infty} y=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x-2}{x+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1-\dfrac{2}{x}}{1+\dfrac{1}{x}}=1$ nên đường thẳng $y=1$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị.

Chọn đáp án (B) □

Câu 12 (BGD-THPT-2021-101-L1). Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x-1}$ là đường thẳng có phương trình là

(A) $x=1$. (B) $x=-1$. (C) $x=2$. (D) $x=\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Vì $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{2x-1}{x-1}=+\infty$ và $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{2x-1}{x-1}=-\infty$ nên đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x-1}$ có một tiệm cận đứng là đường thẳng $x=1$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 13 (BGD-THPT-2021-102-L1). Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+1}{x-2}$ là đường thẳng có phương trình là

(A) $x=-1$. (B) $x=-2$. (C) $x=2$. (D) $x=1$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{x+1}{x-2} = +\infty$; $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x+1}{x-2} = -\infty$.
Vậy đồ thị hàm số $y = \dfrac{x+1}{x-2}$ có tiệm cận đứng là đường thẳng $x = 2$.
Chọn đáp án (C) □

Câu 14 (BGD-THPT-2021-103-L1). Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x+1}{x-1}$ là đường thẳng có phương trình là

(A) $x = 2$. (B) $x = 1$. (C) $x = -\dfrac{1}{2}$. (D) $x = -1$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to 1^+} y = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{2x+1}{x-1} = +\infty$ nên tiệm cận đứng của đồ thị hàm số là đường thẳng $x = 1$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 15 (BGD-THPT-2021-104-L1). Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \dfrac{x-1}{x+2}$ là đường thẳng có phương trình là

(A) $x = 2$. (B) $x = -1$. (C) $x = -2$. (D) $x = 1$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to(-2)^+} \dfrac{x-1}{x+2} = -\infty$, $\lim\limits_{x\to(-2)^-} \dfrac{x-1}{x+2} = +\infty$.
Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là đường thẳng có phương trình $x = -2$.
Chọn đáp án (C) □

Câu 16 (BGD-THPT-2019-103). Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
y'		$-$	$\|$	$+$	0	$-$	
y	1 ↘		$-\infty$ $\|$ 2	↘	-3	↗	3

Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho là

(A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4.

Lời giải.

Nhìn bảng biến thiên ta thấy

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -\infty \Rightarrow x = 0$ là TCĐ của đồ thị hàm số.
$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 3 \Rightarrow y = 3$ là TCN của đồ thị hàm số.
$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = 1 \Rightarrow y = 1$ là TCN của đồ thị hàm số.
Vậy hàm số có 3 tiệm cận.
Chọn đáp án (C) □

Câu 17 (BGD-THPT-2019-102). Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\infty$ || 2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho là

Ⓐ 3. Ⓑ 1. Ⓒ 2. Ⓓ 4.

Lời giải.

Từ bảng biến thiên đã cho ta có

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ nên đường thẳng $y = 0$ là một tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

$\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = -\infty$ nên đường thẳng $x = 0$ là một tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Vậy đồ thị hàm số đã cho có hai đường tiệm cận.

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 18 (BGD-THPT-2019-101). Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		$-$	||	$-$	0	$+$	
y	2	$\searrow$	-4 || $+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho là

Ⓐ 4. Ⓑ 1. Ⓒ 3. Ⓓ 2.

Lời giải.

Hàm số $y = f(x)$ có tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Ta có

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ suy ra không tồn tại tiệm cận ngang khi $x \to +\infty$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 2$, suy ra đồ thị hàm số $y = f(x)$ có tiệm cận ngang $y = 2$.

$\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = -4$, suy ra đồ thị hàm số $y = f(x)$ có tiệm cận đứng $x = 0$.

Vậy tổng số tiệm cận đứng và ngang là 2.

Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 19 (BGD-Minh Họa-2019).

Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình bên. Tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f(x)$	2	$\nearrow$	$+\infty$ || 3	$\nearrow$	5

Ⓐ 4. . Ⓑ 1.

Ⓒ 3. Ⓓ 2.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên, suy ra:

$\lim\limits_{x\to-\infty} y = 2 \Rightarrow y = 2$ là tiệm cận ngang.

$\lim\limits_{x\to+\infty} y = 5 \Rightarrow y = 5$ là tiệm cận ngang.

$\lim\limits_{x\to1^+} y = +\infty \Rightarrow x = 1$ là tiệm cận đứng.

Vậy tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng là 3.

Chọn đáp án C □

Câu 20 (THPT Yên Định - Thanh Hóa 2019).

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và có đạo hàm trên $\mathbb{R}\setminus\{\pm1\}$. Hàm số có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$+$	‖	$-$	‖	$+$	‖	$+$	
y	-4	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	-1

Tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho là

(A) 1 . (B) 2 . (C) 3 . (D) 4 .

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên, suy ra:

$\lim\limits_{x\to-\infty} y = -4$, $\lim\limits_{x\to+\infty} y = -1$. Đồ thị có hai tiệm cận ngang là $y = -4$ và $y = -1$.

Lại có $\lim\limits_{x\to(-1)^+} y = +\infty$ và $\lim\limits_{x\to1^-} y = +\infty$, $\lim\limits_{x\to1^-} y = -\infty$. Đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận đứng là $x = 1$ và $x = -1$.

Chọn đáp án D □

Câu 21. (Đề tham khảo 2017) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây.

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
y'			‖	$+$	‖	$-$	
y			‖ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ 1	$\searrow$	0

Hỏi đồ thị của hàm số đã cho có bao nhiêu đường tiệm cận?

(A) 3. (B) 2. (C) 4. (D) 1.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên ta có:

$\lim\limits_{x\to-2^+} f(x) = -\infty$, suy ra đường thẳng $x = -2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = +\infty$, suy ra đường thẳng $x = 0$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.
$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 0$, suy ra đường thẳng $y = 0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.
Vậy đồ thị hàm số có 3 đường tiệm cận.

Chọn đáp án A □

Câu 22. (Mã 104 - 2019) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
y'		$-$	||	$-$	0	$+$	
y	0 $\searrow$	-4	||	$+\infty$ $\searrow$	-3	$\nearrow$	3

Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho là

(A) 1. (B) 3. (C) 4. (D) 2.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 3$ và $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = 0$ nên đồ thị hàm số có 2 tiệm cận ngang là các đường thẳng có phương trình $y = 3$ và $y = 0$.

Lại có $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$ nên hàm số có 1 tiệm cận đứng là đường thẳng có phương trình $x = 0$.

Chọn đáp án B □

Câu 23. (Chuyên Lê Quý Đôn Điện Biên 2019) Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-2		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$ $\nearrow$	$+\infty$ ||	1 $\nearrow$	3

Tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là

(A) 4. (B) 3. (C) 1. (D) 2.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên ta có:

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 3$ ta được tiệm cận ngang $y = 3$.
$\lim\limits_{x\to (-2)^-} f(x) = +\infty$ ta được tiệm cận đứng $x = -2$.

Chọn đáp án D □

Câu 24. (Liên Trường THPT TP Vinh Nghệ An 2019) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-2		$+\infty$
y	-5 $\searrow$	$-\infty$ ||	1 $\searrow$	-5

Tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là

(A) 4. (B) 2. (C) 3. (D) 1.

Lời giải.

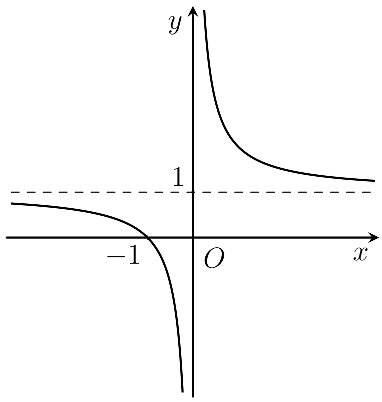
Từ bảng biến thiên ta có:

- $\lim\limits_{x \to \pm\infty} y = -5$ nên tiệm cận ngang là $y = -5$.
- $\lim\limits_{x \to -2^-} y = -\infty$ nên tiệm cận đứng là $x = 2$.

Vậy đồ thị hàm số đã cho có 2 tiệm cận.

Chọn đáp án (B) □

Câu 25. (THPT Hùng Vương Bình Phước 2019) Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình bên dưới.



Khẳng định nào sau đây là đúng?

(A) Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = 0$, tiệm cận ngang $y = 1$.

(B) Hàm số có hai cực trị.

(C) Đồ thị hàm số chỉ có một đường tiệm cận.

(D) Hàm số đồng biến trong khoảng $(-\infty; 0)$ và $(0; +\infty)$.

Lời giải.

Dựa vào đồ thị, ta có một tiệm cận ngang là $y = 1$ và một tiệm cận đứng là $x = 0$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 26. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	‖	$+$	
y	0	↗	2	↘	$-\infty$ ‖ 3	↗	5

Tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là

(A) 4. (B) 1. (C) 3. (D) 2.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên của hàm số ta có:

- ☑ $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0 \Rightarrow y = 0$ là một tiệm cận ngang.
- ☑ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 5 \Rightarrow y = 5$ là một tiệm cận ngang.
- ☑ $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\infty \Rightarrow x = 1$ là một tiệm cận đứng.

Vậy đồ thị hàm số có tổng số đường tiệm cận là 3.

Chọn đáp án C □

Câu 27. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y	2	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	2

Tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là

A 4. B 1. C 3. D 2.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên của hàm số ta có

- ☑ $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 2 \Rightarrow y = 2$ là tiệm cận ngang.
- ☑ $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = -\infty \Rightarrow x = 1$ là tiệm cận đứng.

Vậy đồ thị hàm số có tổng số đường tiệm cận là 2.

Chọn đáp án D □

Câu 28. (Sở Hà Nội 2019) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
y'		$-$	‖	$+$	‖	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	1 ‖ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ 1	$\searrow$	0

Tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho bằng

A 2. B 1. C 0. D 3.

Lời giải.

Ta có

- ☑ $\lim\limits_{x \to -2^+} y = -\infty \Rightarrow x = -2$ là tiệm cận đứng.
- ☑ $\lim\limits_{x \to 0^-} y = +\infty \Rightarrow x = 0$ là tiệm cận đứng.

☑ $\lim\limits_{x\to+\infty} y = 0 \Rightarrow y = 0$ là tiệm cận ngang.

Vậy đồ thị hàm số đã cho có tổng đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang là 3.

Chọn đáp án D □

Câu 29. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ có bảng biến thiên như bảng sau:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	‖	$+$	
y	1	↘	$-\sqrt{2}$	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	-1

Tổng số đường tiệm cận đứng và đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x)$ là

A 1. B 4. C 2. D 3.

Lời giải.

Do $\lim\limits_{x\to1^+} y = -\infty \Rightarrow$ Tiệm cận đứng $x = 1$.

Lại có $\lim\limits_{x\to+\infty} y = -1$; $\lim\limits_{x\to-\infty} y = 1 \Rightarrow$ Đồ thị có 2 tiệm cận ngang là $y = \pm1$.

Vậy, đồ thị hàm số đã cho có tổng số tiệm cận là 3.

Chọn đáp án D □

Câu 30. (Cụm liên trường Hải Phòng 2019) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến như sau:

x	$-\infty$		-3		3		$+\infty$
y'		$+$	‖	$+$	‖	$+$	
y	0	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	0

Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số là

A 3. B 1. C 4. D 2.

Lời giải.

Từ bảng biến thiên của hàm số ta có

☑ $\lim\limits_{x\to-\infty} y = 0$; $\lim\limits_{x\to+\infty} y = 0 \Rightarrow$ Đường thẳng $y = 0$ là tiệm cận ngang.

☑ $\lim\limits_{x\to(-3)^-} y = +\infty \Rightarrow$ Đường thẳng $x = -3$ là tiệm cận đứng.

☑ $+ \lim\limits_{x\to3^-} y = +\infty \Rightarrow$ Đường thẳng $x = 3$ là tiệm cận đứng.

Vậy số đường tiệm cận của đồ thị hàm số là 3.

Chọn đáp án A □

Câu 31. (Thi thử cụm Vũng Tàu 2019) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
y'		$-$	||	$-$	||	$-$	
y	0	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	$-\infty$

Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho là

(A) 4. (B) 2. (C) 3. (D) 1.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên, ta có:

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ nên đường thẳng $y = 0$ là đường tiệm cận ngang.
- $\lim\limits_{x\to-2^+} f(x) = +\infty$ nên đường thẳng $x = -2$ là đường tiệm cận đứng.
- $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = +\infty$ nên đường thẳng $x = 2$ là đường tiệm cận đứng.

Vậy, tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho là 3.

Chọn đáp án (C) □

Câu 32. (Đề minh họa 2022) Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \dfrac{3x+2}{x-2}$ là đường thẳng có phương trình là

(A) $x = 2$. (B) $x = -1$. (C) $x = 3$. (D) $x = -2$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to 2^+} y = \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{3x+2}{x-2} = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 2^-} y = \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{3x+2}{x-2} = -\infty$.
Vậy $x = 2$ là tiệm cận đứng.

Chọn đáp án (A) □

Câu 33. (Mã 101 - 2022) Tiệm cận ngang của đồ thì hàm số $y = \dfrac{2x-1}{2x+4}$ là đường thẳng có phương trình là

(A) $x = -2$. (B) $x = 1$. (C) $y = 1$. (D) $y = -2$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{2x-1}{2x+4} = 1$.
Vậy tiệm cận ngang của đồ là đường thẳng $y = 1$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 34. (Mã 102 - 2022) Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x-1}{2x+4}$ là đường thẳng có phương trình là

(A) $y = -2$. (B) $x = -2$. (C) $x = 1$. (D) $y = 1$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} y = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x-1}{2x+4} = 1$ và $\lim\limits_{x\to-\infty} y = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x-1}{2x+4} = 1$.
Vậy đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $y = 1$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 35. (Mã 103 - 2022) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
y'		$-$	$\|\|$	$-$	
y	-1	$\searrow$	$-\infty$ $\|\|$ $+\infty$	$\searrow$	-1

Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là đường thẳng có phương trình là

Ⓐ $x = -1$. Ⓑ $y = -1$. Ⓒ $y = -2$. Ⓓ $x = -2$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = +\infty$ và $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = -\infty$.

Vậy đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = -2$.

Chọn đáp án D □

Câu 36 (Mã 104 - 2022). Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
y'		$-$	$\|\|$	$-$	
y	-1	$\searrow$	$-\infty$ $\|\|$ $+\infty$	$\searrow$	-1

Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho là đường thẳng có phương trình là

Ⓐ $y = -1$. Ⓑ $y = -2$. Ⓒ $x = -2$. Ⓓ $x = -1$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = -1$.

Vậy đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là đường thẳng $y = -1$.

Chọn đáp án A □

BẢNG ĐÁP ÁN

1. C	2. B	3. B	4. D	5. D	6. B	7. C	8. D	9. C	10. C
11. B	12. A	13. C	14. B	15. C	16. C	17. C	18. D	19. C	20. D
21. A	22. B	23. D	24. B	25. A	26. C	27. D	28. D	29. D	30. A
		31. C	32. A	33. C	34. D	35. D	36. A		

MỨC ĐỘ 2. MỨC ĐỘ 7,8 ĐIỂM

Dạng 2. Xác định đường tiệm cận đồ thị hàm số thông qua hàm số cho trước

Câu 37. Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{5x^2-4x-1}{x^2-1}$ là

Ⓐ 0. Ⓑ 1. Ⓒ 2. Ⓓ 3.

Lời giải.

- Tiệm cận ngang:

$$\lim_{x\to\pm\infty} y=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{5x^2-4x-1}{x^2-1}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{5-\dfrac{4}{x}-\dfrac{1}{x^2}}{1-\dfrac{1}{x^2}}=5.$$

Suy ra đồ thị hàm số có một tiệm cận ngang $y=5$.

- Tiệm cận đứng: Cho $x^2=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-1\end{array}\right.$

$$\lim_{x\to1} y=\lim_{x\to1}\frac{5x^2-4x-1}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{(5x+1)(x-1)}{(x+1)(x-1)}=\lim_{x\to1}\frac{5x+1}{x+1}=3.$$

Suy ra đường thẳng $x=1$ không phải là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

$$\lim_{x\to-1^+} y=\lim_{x\to-1^+}\frac{5x^2-4x-1}{x^2-1}=\lim_{x\to-1^+}\frac{1}{x+1}\cdot\frac{5x^2-4x-1}{x-1}=-\infty$$

Vì $\displaystyle\lim_{x\to-1^+}\frac{1}{x+1}=+\infty$ và $\displaystyle\lim_{x\to-1^+}\frac{5x^2-4x-1}{x-1}=-4<0$.

Suy ra đồ thị hàm số có một tiệm cận đứng $x=-1$.

Tổng cộng đồ thị hàm số có tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang là 2.

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 38. Đồ thị của hàm số nào dưới đây có tiệm cận đứng?

Ⓐ $y=\dfrac{x^2-3x+2}{x-1}$. Ⓑ $y=\dfrac{x^2}{x^2+1}$. Ⓒ $y=\sqrt{x^2-1}$. Ⓓ $y=\dfrac{x}{x+1}$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\lim_{x\to-1^+}\frac{x}{x+1}=-\infty$ nên đồ thị hàm số $y=\dfrac{x}{x+1}$ có tiệm cận đứng là đường thẳng $x=-1$.

Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 39. Tìm số tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2-5x+4}{x^2-1}$.

Ⓐ 2. Ⓑ 3. Ⓒ 0. Ⓓ 1.

Lời giải.

Tập xác định của hàm số $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{\pm1\}$.

Ta có $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} y=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1-\dfrac{5}{x}+\dfrac{4}{x^2}}{1-\dfrac{1}{x^2}}=1$ nên đồ thị hàm số có một đường tiệm cận ngang $y=1$.

Mặt khác $\displaystyle\lim_{x\to1} y=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x-4)}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to1}\frac{x-4}{x+1}=-\frac{3}{2}$ nên đường thẳng $x=1$ không là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Vì $\displaystyle\lim_{x\to-1^+} y=\lim_{x\to-1^+}\frac{x^2-5x+4}{x^2-1}=-\infty$ nên đường thẳng $x=-1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Vậy đồ thị hàm số có 2 đường tiệm cận.

Chọn đáp án (A) □

Câu 40. Tìm số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \dfrac{x^2 - 3x - 4}{x^2 - 16}$.

(A) 2. (B) 3. (C) 1. (D) 0.

Lời giải.

Tập xác định của hàm số $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{\pm 4\}$.

Khi đó $y = \dfrac{x^2 - 3x - 4}{x^2 - 16} = \dfrac{x+1}{x+4}$, do đó đồ thị hàm số có 1 đường tiệm cận đứng.

Chọn đáp án (C) □

Câu 41. Đồ thị hàm số $y = \dfrac{x-2}{x^2-4}$ có mấy tiệm cận?

(A) 3. (B) 1. (C) 2. (D) 0.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{\pm 2\}$.

Ta có:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x-2}{x^2-4} = \lim_{x \to 2} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{4}$$

Do đó đường thẳng $x = 2$ không phải là tiệm cận đứng.

Lại có

$$\lim_{x \to -2^+} \frac{x-2}{x^2-4} = \lim_{x \to -2^+} \frac{1}{x+2} = +\infty$$

Do đó đường thẳng $x = -2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Mặt khác

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x-2}{x^2-4} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x+2} = 0$$

Do đó đồ thị hàm số có một đường tiệm cận ngang là đường thẳng $y = 0$.

Vậy đồ thị có hai đường tiệm cận.

Chọn đáp án (C) □

Câu 42. Số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \dfrac{\sqrt{x+9} - 3}{x^2 + x}$ là

(A) 1. (B) 2. (C) 0. (D) 3.

Lời giải.

Tập xác định của hàm số $\mathscr{D} = [-9; +\infty) \setminus \{-1; 0\}$.

Ta có

$$\lim_{x \to -1^+} \frac{\sqrt{x+9} - 3}{x^2 + x} = \lim_{x \to -1^+} \frac{x}{(x^2 + x)\left(\sqrt{x+9} + 3\right)} = \lim_{x \to -1^+} \frac{1}{(x+1)\left(\sqrt{x+9} + 3\right)} = +\infty$$

Suy ra đường thẳng $x = -1$ là tiệm cận đứng.

Lại có

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+9} - 3}{x^2 + x} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{(x+1)\left(\sqrt{x+9} + 3\right)} = \frac{1}{6}.$$

Suy ra đường thẳng $x=0$ không phải là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Vậy đồ thị hàm số đã cho chỉ có 1 tiệm cận đứng.

Chọn đáp án (A) □

Câu 43. Số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x^2+x}$ là

(A) 2. (B) 1. (C) 3. (D) 0.

Lời giải.

Tập xác định của hàm số $\mathscr{D}=[-4;+\infty)\setminus\{-1;0\}$.

Ta có

$$\lim_{x\to(-1)^+}\frac{\sqrt{x+4}-2}{x^2+x}=\lim_{x\to(-1)^+}\frac{x}{(x^2+x)\left(\sqrt{x+4}+2\right)}=\lim_{x\to(-1)^+}\frac{1}{(x+1)\left(\sqrt{x+4}+2\right)}=+\infty.$$

Suy ra đường thẳng $x=-1$ là tiệm cận đứng.

Lại có

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+4}-2}{x^2+x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{(x+1)\left(\sqrt{x+4}+2\right)}=\frac{1}{4}$$

Suy ra đường thẳng $x=0$ không phải là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Vậy đồ thị hàm số đã cho chỉ có 1 tiệm cận đứng.

Chọn đáp án (B) □

Câu 44. Đồ thị hàm số $y=\dfrac{5x+1-\sqrt{x+1}}{x^2+2x}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận?

(A) 3. (B) 0. (C) 2. (D) 1.

Lời giải.

Tập xác định của hàm số $\mathscr{D}=[-1;+\infty)\setminus\{0\}$.

Ta có

$$\lim_{x\to+\infty}y=\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{5}{x}+\dfrac{1}{x^2}-\sqrt{\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{1}{x^4}}}{1+\dfrac{2}{x}}=0$$

Suy ra đồ thị hàm số có một đường tiệm cận ngang $y=0$.

Lại có

$$\lim_{x\to 0}y=\lim_{x\to 0}\frac{(5x+1)^2-(x+1)}{(x^2+2x)\left(5x+1+\sqrt{x+1}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{25x+9}{(x+2)\left(5x+1+\sqrt{x+1}\right)}=\frac{9}{4}$$

Suy ra đường thẳng $x=0$ không phải là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Vậy đồ thị hàm số đã cho chỉ có 1 đường tiệm cận.

Chọn đáp án (D) □

Câu 45. Tìm tất cả các tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-1-\sqrt{x^2+x+3}}{x^2-5x+6}$.

(A) $x=3$, $x=2$. (B) $x=3$. (C) $x=-3$, $x=-2$. (D) $x=-3$.

Lời giải.

Tập xác định của hàm số $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{2; 3\}$.

Ta có

$$\lim_{x\to 2} y = \lim_{x\to 2} \frac{(2x-1)^2 - (x^2+x+3)}{(x^2-5x+6)\left(2x-1+\sqrt{x^2+x+3}\right)} = \lim_{x\to 2} \frac{3x+1}{(x-3)\left(2x-1+\sqrt{x^2+x+3}\right)} = -\frac{7}{6}$$

Suy ra đường thẳng $x = 2$ không phải là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Lại có

$$\lim_{x\to 3^+} y = \lim_{x\to 3^+} \frac{3x+1}{(x-3)\left(2x-1+\sqrt{x^2+x+3}\right)} = +\infty$$

Suy ra đường thẳng $x = 3$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Vậy đồ thị hàm số có một đường tiệm cận đứng $x = 3$.

Chọn đáp án B □

Câu 46. Số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \dfrac{\sqrt{x+25}-5}{x^2+x}$ là

A 3. B 2. C 0. D 1.

Lời giải.

Tập xác định của hàm số $\mathscr{D} = [-25; +\infty) \setminus \{-1; 0\}$.

Ta có

$$\lim_{x\to -1^+} \frac{\sqrt{x+25}-5}{x(x+1)} = \lim_{x\to -1^+} \frac{x}{(x^2+x)\left(\sqrt{x+25}+5\right)} = \lim_{x\to -1^+} \frac{1}{(x+1)\left(\sqrt{x+25}+5\right)} = +\infty$$

Suy ra đường thẳng $x = -1$ là tiệm cận đứng.

Lại có

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+25}-5}{x^2+x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{(x+1)\left(\sqrt{x+25}+5\right)} = \frac{1}{10}$$

Suy ra đường thẳng $x = 0$ không phải là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Vậy đồ thị hàm số đã cho chỉ có 1 tiệm cận đứng.

Chọn đáp án D □

Câu 47. Số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \dfrac{\sqrt{x+16}-4}{x^2+x}$ là

A 3. B 2. C 1. D 0.

Lời giải.

Tập xác định của hàm số $\mathscr{D} = [-16; +\infty) \setminus \{-1; 0\}$.

Ta có

$$\lim_{x\to -1^+} \frac{\sqrt{x+16}-4}{x(x+1)} = +\infty$$

Suy ra đường thẳng $x = -1$ là tiệm cận đứng.

Lại có

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+16}-4}{x^2+x} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{(x^2+x)\left(\sqrt{x+16}+4\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{(x+1)\left(\sqrt{x+16}+4\right)} = \frac{1}{8}$$

Suy ra đường thẳng $x = 0$ không phải là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Vậy đồ thị hàm số đã cho chỉ có 1 tiệm cận đứng.

Chọn đáp án C □

Câu 48. Số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x^2+x}$ là

Ⓐ 3. Ⓑ 0. Ⓒ 1. Ⓓ 2.

Lời giải.

Tập xác định của hàm số $\mathscr{D} = [-4; +\infty) \setminus \{-1; 0\}$.

Ta có

$$\lim_{x\to -1^+} \frac{\sqrt{x+4}-2}{x(x+1)} = +\infty$$

Suy ra đường thẳng $x = -1$ là tiệm cận đứng.

Lại có

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+4}-2}{x^2+x} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{(x^2+x)\left(\sqrt{x+4}+2\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{(x+1)\left(\sqrt{x+4}+2\right)} = \frac{1}{4}$$

Suy ra đường thẳng $x = 0$ không phải là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Vậy đồ thị hàm số đã cho chỉ có 1 tiệm cận đứng.

Chọn đáp án C □

Câu 49. Đồ thị hàm số $f(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2-1}}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang?

Ⓐ 4. Ⓑ 3. Ⓒ 1. Ⓓ 2.

Lời giải.

Tập xác định của hàm số: $\mathscr{D} = (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$.

- Trên khoảng $(-\infty; -1)$ ta có

$$f(x) = \frac{-\sqrt{(x+1)^2}}{\sqrt{(x-1)(x+1)}} = -\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}.$$

  Suy ra hàm số có tiệm cận ngang $y = -1$ và không có tiệm cận đứng.

- Trên khoảng $(1; +\infty)$ ta có

$$f(x) = \frac{\sqrt{(x+1)^2}}{\sqrt{(x-1)(x+1)}} = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}.$$

  Suy ra hàm số có tiệm cận ngang $y = 1$ và tiệm cận đứng $x = 1$.

Vậy hàm số có 2 đường tiệm cận ngang và 1 đường tiệm cận đứng.

Chọn đáp án B □

Câu 50. Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x(4x+6)}-2}{x+2}$ là?

Ⓐ 1. Ⓑ 3. Ⓒ 2. Ⓓ 4.

Lời giải.

Tập xác định của hàm số: $\mathscr{D}=\left(-\infty;-\dfrac{3}{2}\right]\cup[0;+\infty)\setminus\{-2\}$.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x(4x+6)}-2}{x+2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{4+\frac{6}{x}}-\frac{2}{x}}{1+\frac{2}{x}}=2.$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x(4x+6)}-2}{x+2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-\sqrt{4+\frac{6}{x}}-\frac{2}{x}}{1+\frac{2}{x}}=-2.$$

$$\lim_{x\to-2^{\pm}}\frac{\sqrt{x(4x+6)}-2}{x+2}=\lim_{x\to-2^{\pm}}\frac{(x+2)(4x-2)}{(x+2)(\sqrt{x(4x+6)}+2)}=\lim_{x\to-2^{\pm}}\frac{4x-2}{\sqrt{x(4x+6)}+2}=\frac{-5}{2}.$$

Vậy hàm số có hai tiệm cận ngang $y=\pm2$ và không có tiệm cận đứng.

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 51. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2+3x+2}{\sqrt{x^4-3x^2+2}}$. Đồ thị hàm số đã cho có bao nhiêu đường tiệm cận?

Ⓐ 4. Ⓑ 5. Ⓒ 3. Ⓓ 6.

Lời giải.

Điều kiện: $x\in(-\infty;-\sqrt{2})\cup(-1;1)\cup(\sqrt{2};+\infty)$. Ta có

$$\lim_{x\to+\infty}y=\lim_{x\to-\infty}y=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+3x+2}{\sqrt{x^4-3x^2+2}}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}{\sqrt{1-\frac{3}{x^2}+\frac{2}{x^4}}}=1\Rightarrow y=1$$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

$\lim\limits_{x\to1^-}y=+\infty$ nên đường thẳng $x=1$ là đường tiệm cận đứng.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to(-1)^+}y&=\lim_{x\to(-1)^+}\frac{(x+1)(x+2)}{\sqrt{(x+1)(x+\sqrt{2})(x-1)(x-\sqrt{2})}}\\&=\lim_{x\to(-1)^+}\frac{\sqrt{(x+1)}(x+2)}{\sqrt{(x+\sqrt{2})(x-1)(x-\sqrt{2})}}=0\end{aligned}$$

nên đường thẳng $x=-1$ không là đường tiệm cận đứng.

$\lim\limits_{x\to(\sqrt{2})^+}y=+\infty$ nên đường thẳng $x=\sqrt{2}$ là đường tiệm cận đứng.

$\lim\limits_{x\to(-\sqrt{2})^-}y=+\infty$ nên đường thẳng $x=-\sqrt{2}$ là đường tiệm cận đứng.

Vậy đồ thị hàm số có 4 đường tiệm cận (1 tiệm cận ngang, 3 tiệm cận đứng).

Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 52. Hàm số $y=\dfrac{x+\sqrt{x^2+x+1}}{x^3+x}$ có bao nhiêu đường tiệm cận?

Ⓐ 1. Ⓑ 3. Ⓒ 2. Ⓓ 4.

Lời giải.

TXĐ: $\mathscr{D} = \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

$$\lim_{x\to-\infty} y = \lim_{x\to-\infty} \frac{x\left(1-\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\right)}{x^3\left(1+\frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x^2}.\frac{1-\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}{1+\frac{1}{x^2}}\right) = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} y = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\right)}{x^3\left(1+\frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x^2}.\frac{1+\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}{1+\frac{1}{x^2}}\right) = 0$$

$\Rightarrow$ Tiệm cân ngang là $y = 0$.

$\lim\limits_{x\to0^+} y = +\infty \Rightarrow$ Tiệm cận đứng là $x = 0$.

Chọn đáp án C □

Câu 53. Số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \dfrac{\sqrt{x-2}+1}{x^2-3x+2}$ là

A 4. B 1. C 3. D 2.

Lời giải.

Đkxđ: $\begin{cases} x-2 \geq 0 \\ x^2-3x+2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x \neq 2, x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x > 2.$

Ta có $\lim\limits_{x\to2^+} \dfrac{\sqrt{x-2}+1}{x^2-3x+2} = +\infty$ nên đường thẳng $x = 2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x-2}+1}{x^2-3x+2} = 0$ nên đường thẳng $y = 0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Chọn đáp án D □

Câu 54. Cho hàm số $y = \dfrac{5\sqrt{x^2+6}+x-12}{4x^3-3x-1}$ có đồ thị (C). Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A Đồ thị (C) của hàm số không có tiệm cận.

B Đồ thị (C) của hàm số chỉ có một tiệm cận ngang $y = 0$.

C Đồ thị (C) của hàm số có một tiệm cận ngang $y = 0$ và hai tiệm cận đứng $x = 1; x = -\dfrac{1}{2}$.

D Đồ thị (C) của hàm số chỉ có một tiệm cận ngang $y = 0$ và một tiệm cận đứng $x = 1$.

Lời giải.

TXĐ: $\mathscr{D} = \mathbb{R}\backslash\left\{1; -\dfrac{1}{2}\right\}$.

$\lim\limits_{x\to1^-} y = -\infty; \lim\limits_{x\to1^+} y = +\infty \Rightarrow$ Đồ thị hàm số có một tiệm cận đứng là $x = 1$.

Ta có:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\frac{1}{2}} y &= \lim_{x\to-\frac{1}{2}} \frac{24x^2+24x+6}{(x-1)(2x+1)^2(5\sqrt{x^2+6}-x+12)} \\ &= \lim_{x\to-\frac{1}{2}} \frac{6}{(x-1)(5\sqrt{x^2+6}-x+12)} = -\frac{4}{25}\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng là $x = -\dfrac{1}{2}$.

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} y = 0 \Rightarrow$ Đồ thị hàm số có một tiệm cận ngang là $y = 0$.

Chọn đáp án D □

Câu 55. Đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+\sqrt{x^2-x}}{3x+1}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận?

A 2. B 3. C 0. D 1.

Lời giải.

Xét hàm số $y=\dfrac{2x+\sqrt{x^2-x}}{3x+1}$ có tập xác định $\mathscr{D}=(-\infty;0]\cup[1;+\infty)\backslash\left\{-\dfrac{1}{3}\right\}$.

Ta có: $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{3}}\dfrac{2x+\sqrt{x^2-x}}{3x+1}=\lim\limits_{x\to-\frac{1}{3}}\dfrac{3x^2+x}{(3x+1)\left(2x-\sqrt{x^2-x}\right)}=\lim\limits_{x\to-\frac{1}{3}}\dfrac{x}{2x-\sqrt{x^2-x}}=\dfrac{1}{4}$.

$\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{2x+\sqrt{x^2-x}}{3x+1}=0$ và $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{2x+\sqrt{x^2-x}}{3x+1}=\dfrac{1}{2}$ nên đồ thị không có tiệm cận đứng.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x+\sqrt{x^2-x}}{3x+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x-x\sqrt{1-\frac{1}{x}}}{3x+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2-\sqrt{1-\frac{1}{x}}}{3+\frac{1}{x}}=\frac{1}{3}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+\sqrt{x^2-x}}{3x+1}=\lim_{x\to-\frac{1}{3}}\frac{2x+x\sqrt{1-\frac{1}{x}}}{3x+1}=\lim_{x\to-\frac{1}{3}}\frac{2+\sqrt{1-\frac{1}{x}}}{3+\frac{1}{x}}=1$$

nên đồ thị có hai tiệm cận ngang là $y=\dfrac{1}{3}$ và $y=1$.

Vậy đồ thị hàm số có tất cả hai đường tiệm cận.

Chọn đáp án A □

Câu 56. Đồ thị hàm số $y=\dfrac{1-\sqrt{4-x^2}}{x^2-2x-3}$ có số đường tiệm cận đứng là m và số đường tiệm cận ngang là n. Giá trị của $m+n$ là

A 1. B 2. C 3. D 0.

Lời giải.

$\mathscr{D}=[-2;2]\backslash\{-1\}$.

$\lim\limits_{x\to(-1)^+}y=\lim\limits_{x\to(-1)^+}\dfrac{1-\sqrt{4-x^2}}{x^2-2x-3}=+\infty;\ \lim\limits_{x\to(-1)^-}y=\lim\limits_{x\to(-1)^-}\dfrac{1-\sqrt{4-x^2}}{x^2-2x-3}=-\infty$

$\Rightarrow x=-1$ là tiệm cận đứng.

Đồ thị hàm số không có đường tiệm cận ngang. Vậy $m+n=1$.

Chọn đáp án A □

Câu 57. Gọi n, d lần lượt là số đường tiệm cận ngang và số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{1-x}}{(x-1)\sqrt{x}}$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A $n=0,d=2$. B $n=d=1$. C $n=1,d=2$. D $n=0,d=1$.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathscr{D}=(0;1)$.

Từ tập xác định suy ra đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang $\Rightarrow n=0$.

$\lim\limits_{x\to0^+}y=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\sqrt{1-x}}{(x-1)\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{-1}{\sqrt{1-x}\sqrt{x}}=-\infty.$

$\lim\limits_{x\to1^-}y=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{\sqrt{1-x}}{(x-1)\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{-1}{\sqrt{1-x}\sqrt{x}}=-\infty.$

Suy ra đồ thị hàm số có hai tiệm cận đứng $\Rightarrow d=2$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 58. Đồ thị hàm số $y=\dfrac{5x+1-\sqrt{x+1}}{x^2-2x}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận?

(A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

Lời giải.

Tập xác định của hàm số là $\mathscr{D}=[-1;+\infty)\setminus\{0;2\}$. Ta có:

$\lim\limits_{x\to 0} y=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{25x^2+9x}{(x^2-2x)\left(5x+1+\sqrt{x+1}\right)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{25x+9}{(x-2)(5x+1+\sqrt{x+1})}=-\dfrac{9}{4}$.

$\lim\limits_{x\to 2^+} y=+\infty$, $\lim\limits_{x\to +\infty} y=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\dfrac{5}{x}+\dfrac{1}{x^2}-\sqrt{\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{1}{x^4}}}{1-\dfrac{2}{x}}=0$.

Vậy đồ thị của hàm số có hai đường tiệm cận có phương trình $x=2$ và $y=0$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 59. Tìm số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-1}{4\sqrt{3x+1}-3x-5}$.

(A) 2. (B) 3. (C) 1. (D) 0.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D}=\left[-\dfrac{1}{3};+\infty\right)\setminus\{1\}$.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1^+}\frac{x-1}{4\sqrt{3x+1}-3x-5}&=\lim_{x\to 1^+}\frac{(x-1)(4\sqrt{3x+1}+3x+5)}{-9(x-1)^2}\\&=\lim_{x\to 1^+}\frac{4\sqrt{3x+1}+3x+5}{-9(x-1)}=-\infty\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ đường thẳng $x=1$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

$\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x-1}{4\sqrt{3x+1}-3x-5}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{1-\dfrac{1}{x}}{4\sqrt{\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{x^2}}-3-\dfrac{5}{x}}=-\dfrac{1}{3}$

$\Rightarrow$ đường thẳng $y=-\dfrac{1}{3}$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Vậy đồ thị hàm số có 2 đường tiệm cận.

Chọn đáp án (A) □

Câu 60. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2+2x+3}{\sqrt{x^4-3x^2+2}}$. Đồ thị hàm số đã cho có bao nhiêu đường tiệm cận?

(A) 4. (B) 5. (C) 3. (D) 6.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D}=(-\infty;-\sqrt{2})\cup(-1;1)\cup(\sqrt{2};+\infty)$.

$\lim\limits_{x\to(-\sqrt{2})^-} y=\lim\limits_{x\to(\sqrt{2})^+} y=\lim\limits_{x\to(-1)^+} y=\lim\limits_{x\to(1)^-} y=+\infty$.

$\Rightarrow$ Các đường tiệm cận đứng của đồ thị là $x=\pm\sqrt{2}, x=\pm 1$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} y=\lim\limits_{x\to+\infty} y=1\Rightarrow$ đồ thị có một tiệm cận ngang $y=1$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 61. Đồ thị hàm số $y=\dfrac{5x-8}{\sqrt{x^2-3x}}$ có bao nhiêu đường tiệm cận?

(A) 2. (B) 4. (C) 1. (D) 3.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = (-\infty; 0) \cup (3; +\infty)$.

$$\lim_{x\to+\infty} y = \lim_{x\to+\infty} \frac{5x-8}{\sqrt{x^2-3x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{5x-8}{x\sqrt{1-\dfrac{3}{x}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{5-\dfrac{8}{x}}{\sqrt{1-\dfrac{3}{x}}} = 5$$

$\Rightarrow$ Đường thẳng $y = 5$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

$$\lim_{x\to-\infty} y = \lim_{x\to-\infty} \frac{5x-8}{\sqrt{x^2-3x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{5x-8}{-x\sqrt{1-\dfrac{3}{x}}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{5-\dfrac{8}{x}}{-\sqrt{1-\dfrac{3}{x}}} = -5$$

$\Rightarrow$ Đường thẳng $y = -5$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

$$\lim_{x\to0^-} y = \lim_{x\to0^-} \frac{5x-8}{\sqrt{x^2-3x}} = -\infty$$

$$\left(\text{vì } \lim_{x\to0^-}(5x-8) = -8 < 0; \lim_{x\to0^-}\sqrt{x^2-3x} = 0; \sqrt{x^2-3x} > 0 \quad \forall x \to 0^-\right)$$

Suy ra đường thẳng $x = 0$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

$$\lim_{x\to3^+} y = \lim_{x\to3^+} \frac{5x-8}{\sqrt{x^2-3x}} = +\infty$$

$$\left(\text{vì } \lim_{x\to3^+}(5x-8) = 7 > 0; \lim_{x\to3^+}\sqrt{x^2-3x} = 0; \sqrt{x^2-3x} > 0 \, \forall x \to 3^+\right)$$

Suy ra đường thẳng $x = 3$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Chọn đáp án (B) □

Câu 62. Đồ thị hàm số $y = \dfrac{\sqrt{4x^2+2x-1}+x}{x+1}$ có bao nhiêu đường tiệm cận?

(A) 1. (B) 0. (C) 2. (D) 3.

Lời giải.

Hàm số $y = \dfrac{\sqrt{4x^2+2x-1}+x}{x+1}$ xác định $\Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2+2x-1 \geq 0 \\ x+1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x \leq \dfrac{-1-\sqrt{5}}{4} \\ x \geq \dfrac{-1+\sqrt{5}}{4} \end{array}\right. \\ x \neq -1 \end{cases}$.

Tập xác định của hàm số đã cho là $\mathscr{D} = (-\infty; -1) \cup \left(-1; \dfrac{-1-\sqrt{5}}{4}\right] \cup \left[\dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}; +\infty\right)$.

$$\begin{aligned} \lim_{x\to-\infty} y &= \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{4x^2+2x-1}+x}{x+1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{|x|\sqrt{4+\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{x^2}}+x}{x+1} \\ &= \lim_{x\to-\infty} \frac{-x\sqrt{4+\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{x^2}}+x}{x+1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-\sqrt{4+\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{x^2}}+1}{1+\dfrac{1}{x}} = -1. \end{aligned}$$

$\Rightarrow y = -1$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số khi $x \to -\infty$.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} y &= \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{4x^2+2x-1}+x}{x+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{|x|\sqrt{4+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}+x}{x+1}\\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{x\sqrt{4+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}+x}{x+1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{4+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}+1}{1+\frac{1}{x}} = 3.\end{aligned}$$

$\Rightarrow y = 3$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số khi $x \to +\infty$.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-1} y = \lim_{x\to-1} \frac{\sqrt{4x^2+2x-1}+x}{x+1} &= \lim_{x\to-1} \frac{4x^2+2x-1-x^2}{(x+1)\left(\sqrt{4x^2+2x-1}-x\right)}\\ &= \lim_{x\to-1} \frac{(x+1)(3x-1)}{(x+1)\left(\sqrt{4x^2+2x-1}-x\right)} = -2.\end{aligned}$$

Vậy đồ thị hàm số $y = \dfrac{\sqrt{4x^2+2x-1}+x}{x+1}$ có 2 đường tiệm cận.

Chọn đáp án C □

Câu 63. Tìm số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x^2-3x+2}$.

A 0. B 3. C 1. D 2.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = [-3; +\infty) \setminus \{1; 2\}$.

Ta có $x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ hay $x = 2$.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1} y = \lim_{x\to1} \frac{\sqrt{x+3}-2}{x^2-3x+2} &= \lim_{x\to1} \frac{x-1}{(x-1)(x-2)(\sqrt{x+3}+2)}\\ &= \lim_{x\to1} \frac{1}{(x-2)(\sqrt{x+3}+2)} = -\frac{1}{4}.\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Đồ thị không có tiệm cận đứng $x = 1$.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to2^+} y &= \lim_{x\to2^+} \frac{\sqrt{x+3}-2}{x^2-3x+2} = \lim_{x\to2^+} \frac{\sqrt{x+3}-2}{(x-1)(x-2)} = +\infty\\ \lim_{x\to2^-} y &= \lim_{x\to2^-} \frac{\sqrt{x+3}-2}{x^2-3x+2} = \lim_{x\to2^-} \frac{\sqrt{x+3}-2}{(x-1)(x-2)} = -\infty\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Đồ thị có tiệm cận đứng $x = 2$.

Vậy đồ thị hàm số có 1 tiệm cận đứng.

Chọn đáp án C □

Câu 64. Số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \dfrac{\sqrt{4x^2-1}+3x^2+2}{x^2-x}$ là

A 1.　　B 3.　　C 4.　　D 2.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \left(-\infty; -\dfrac{1}{2}\right] \cup \left[\dfrac{1}{2}; 1\right) \cup (1; +\infty)$.

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} y = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{4x^2-1}+3x^2+2}{x^2-x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\dfrac{1}{x}\sqrt{4-\dfrac{1}{x^2}}+3+\dfrac{2}{x^2}}{1-\dfrac{1}{x}} = 3$

$\lim\limits_{x\to-\infty} y = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{4x^2-1}+3x^2+2}{x^2-x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-\dfrac{1}{x}\sqrt{4-\dfrac{1}{x^2}}+3+\dfrac{2}{x^2}}{1-\dfrac{1}{x}} = 3.$

Do đó đồ thị hàm số nhận đường thẳng $y = 3$ là tiệm cận ngang.

$\lim\limits_{x\to1^+} y = \lim\limits_{x\to1^+} \dfrac{\sqrt{4x^2-1}+3x^2+2}{x^2-x} = +\infty.$

Do đó đồ thị hàm số nhận đường thẳng $x = 1$ là tiệm cận đứng.

Vậy đồ thị hàm số đã cho có 1 tiệm cận đứng và 1 tiệm cận ngang.

Chọn đáp án D □

Dạng 3. Định m để đồ thị hàm số có đường tiệm cận thỏa điều kiện cho trước

Câu 65. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị của hàm số $y = \dfrac{x+1}{\sqrt{mx^2+1}}$ có hai tiệm cận ngang.

A $m < 0$.

B $m = 0$.

C $m > 0$.

D Không có giá trị thực nào của m thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Lời giải.

Xét các trường hợp sau:

Với $m = 0$: hàm số trở thành $y = x + 1$ nên không có tiệm cận ngang.

Với $m < 0$: hàm số $y = \dfrac{x+1}{\sqrt{mx^2+1}} = \dfrac{x+1}{\sqrt{1-|m|x^2}}$ có tập xác định là $\mathscr{D} = \left(-\dfrac{1}{\sqrt{|m|}}; \dfrac{1}{\sqrt{|m|}}\right)$, suy ra không tồn tại giới hạn $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y$ hay hàm số không có tiệm cận ngang.

Với $m > 0$: Ta có

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty} y &= \lim_{x\to-\infty} \frac{x+1}{\sqrt{mx^2+1}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x+1}{|x|\sqrt{m+\dfrac{1}{x^2}}} \\ &= \lim_{x\to-\infty} \frac{x+1}{-x\sqrt{m+\dfrac{1}{x^2}}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}{\sqrt{m+\dfrac{1}{x^2}}} = -\frac{1}{\sqrt{m}}.\end{aligned}$$

và

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} y &= \lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{\sqrt{mx^2+1}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{|x|\sqrt{m+\dfrac{1}{x^2}}}\\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{x\sqrt{m+\dfrac{1}{x^2}}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}{\sqrt{m+\dfrac{1}{x^2}}} = \frac{1}{\sqrt{m}}.\end{aligned}$$

Vậy hàm số có hai tiệm cận ngang là $y=\dfrac{1}{\sqrt{m}}$; $y=-\dfrac{1}{\sqrt{m}}$ khi $m>0$.

Chọn đáp án C □

Câu 66. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x^2-6x+2m}}$ có hai đường tiệm cận đứng. Số phần tử của S là

(A) Vô số. (B) 12. (C) 14. (D) 13.

Lời giải.

Điều kiện xác định $\begin{cases}x+2\ge 0\\ x^2-6x+2m>0.\end{cases}$

Để đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận đứng thì phương trình $x^2-6x+2m=0$ có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2 lớn hơn -2

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta'=9-2m>0\\ \dfrac{x_1+x_2}{2}>-2\\ (-2)^2-6\cdot(-2)+2m>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m<\dfrac{9}{2}\\ 3>-2\\ 4+12+2m>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m<\dfrac{9}{2}\\ m>-8.\end{cases}$$

Do đó tập $S=\{-7;-6;-5;...;4\}$ có 12 giá trị.

Chọn đáp án B □

Câu 67. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-1}{x^2-8x+m}$ có 3 đường tiệm cận?

(A) 14. (B) 8. (C) 15. (D) 16.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x-1}{x^2-8x+m}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-1}{x^2-8x+m}=0$ nên hàm số có một tiệm cận ngang $y=0$.

Đồ thị hàm số có 3 đường tiệm cận khi và chỉ khi đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận đứng khi $\Leftrightarrow$ Phương trình $x^2-8x+m=0$ có hai nghiệm phân biệt khác 1 $\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta'=16-m>0\\ m-7\ne 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m<16\\ m\ne 7.\end{cases}$

Kết hợp với điều kiện m nguyên dương ta có $m\in\{1;2;3;...;6;8;...;15\}$.

Vậy có 14 giá trị của m thỏa mãn đề bài.

Chọn đáp án A □

Câu 68. Cho hàm số $y=\dfrac{x-3}{x^3-3mx^2+(2m^2+1)x-m}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-2020;2020]$ để đồ thị hàm số có 4 đường tiệm cận?

(A) 4039. (B) 4040. (C) 4038. (D) 4037.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} y=0$, $\lim\limits_{x\to-\infty} y=0$ suy ra đồ thị hàm số đã cho có 1 tiệm cận ngang.
Do đó đồ thị hàm số đã cho có 4 đường tiệm cận khi và chỉ khi nó có 3 tiệm cận đứng $(*)$.

Có $x^3-3mx^2+\left(2m^2+1\right)x-m=(x-m)\left(x^2-2mx+1\right)$.

$x^3-3mx^2+\left(2m^2+1\right)x-m=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=m \\ x^2-2mx+1=0\,(2)\end{array}\right.$ $(*) \Leftrightarrow x^3-3mx^2+(2m^2+1)x-m=0$ có 3 nghiệm phân biệt khác 3.

Khi và chỉ khi $m\neq 3$ và (2) có 2 nghiệm phân biệt khác m và khác 3.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 3 \\ m^2-2m.m+1\neq 0 \\ 3^2-2m.3+1\neq 0 \\ \Delta'_2=m^2-1>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 3, m\neq \dfrac{5}{3} \\ \left[\begin{array}{l} m>1 \\ m<-1.\end{array}\right.\end{cases}$$

Do đó tập tất cả giá trị nguyên của m thỏa yêu cầu bài toán là $\{-2020;-2019;\ldots;-2;2;4;5;\ldots;2020\}$.

Vậy có 4037 giá trị m thỏa yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án (D) □

Câu 69. Có bao nhiêu số nguyên của m thuộc đoạn $[-100;100]$ để đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{(x-m)\sqrt{2x-x^2}}$ có đúng hai đường tiệm cận?

(A) 200. (B) 2. (C) 199. (D) 0.

Lời giải.

Ta có điều kiện xác định là $\begin{cases} x\neq m \\ x\in(0;2)\end{cases}$, khi đó đồ thị hàm số sẽ không có tiệm cận ngang.

Ta có $\lim\limits_{x\to0^+} y=\infty$, $\lim\limits_{x\to2^-} y=\infty$.
Suy ra $x=0$, $x=2$ là hai đường tiệm cận đứng.

Vậy để đồ thị hàm số có đúng hai đường tiệm cận thì $\left[\begin{array}{l} m\leq 0 \\ m\geq 2\end{array}\right.$, theo bài m thuộc đoạn $[-100;100]$.

Vậy có 200 số nguyên của m thỏa mãn đầu bài.

Chọn đáp án (A) □

Câu 70. Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2+m}{x^2-3x+2}$ có đúng hai đường tiệm cận.

(A) $m=-1$. (B) $m\in\{1;4\}$. (C) $m=4$. (D) $m\in\{-1;-4\}$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{1;2\}$.

$y=\dfrac{x^2+m}{x^2-3x+2}=\dfrac{x^2+m}{(x-1)(x-2)}$. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}=1\Rightarrow y=1$ là đường tiệm cận ngang.

Đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2+m}{x^2-3x+2}$ có đúng hai đường tiệm cận khi và chỉ khi đồ thị hàm số có đúng một tiệm cận đứng khi và chỉ khi phương trình $x^2 + m = 0$ nhận nghiệm $x = 1$ hoặc $x = 2$.

Khi đó $\left[\begin{array}{l} m = -1 \\ m = -4. \end{array}\right.$

Với $m = -1$ có một tiệm cận đứng $x = 2$.

Với $m = -4$ có một tiệm cận đứng $x = 1$.

Vậy $m \in \{-1; -4\}$.

Chọn đáp án D □

Câu 71. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để đồ thị hàm số $y = \dfrac{6x-3}{(mx^2-6x+3)(9x^2+6mx+1)}$ có đúng một đường tiệm cận?

A 0. B 2. C 1. D Vô số.

Lời giải.

Kí hiệu (C) là đồ thị hàm số $y = \dfrac{6x-3}{(mx^2-6x+3)(9x^2+6mx+1)}$.

* Trường hợp 1: $m = 0$.

Khi đó $y = \dfrac{6x-3}{(-6x+3)(9x^2+1)}$. Đồ thị hàm số có đúng một đường tiệm cận ngang $y = 0$.

Do đó chọn $m = 0$.

* Trường hợp 2: $m \neq 0$.

Xét phương trình $(mx^2 - 6x + 3)\left(9x^2 + 6mx + 1\right) = 0$ (1).

Nhận thấy (C) luôn có một đường tiệm cận ngang $y = 0$ và phương trình (1) không thể có duy nhất một nghiệm đơn với mọi m.

Do đó (C) có đúng một đường tiệm cận khi và chỉ khi (C) không có tiệm cận đứng $\Leftrightarrow$ (1) vô nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} 9 - 3m < 0 \\ 9m^2 - 9 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 3 \\ -1 < m < 1 \end{cases}$, (không tồn tại m).

Kết hợp các trường hợp ta được $m = 0$.

Chọn đáp án C □

Câu 72. Cho hàm số $y = f(x) = \dfrac{x+1}{x^2 - 2mx + 4}$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị có ba đường tiệm cận.

A $m > 2$. B $\begin{cases} m < -2 \\ m \neq -\dfrac{5}{2} \end{cases}$. C $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} m > 2 \\ m < -2 \end{array}\right. \\ m \neq -\dfrac{5}{2} \end{cases}$. D $\left[\begin{array}{l} m < -2 \\ m > 2 \end{array}\right.$.

Lời giải.

Để đồ thị có ba đường tiệm cận thì $x^2 - 2mx + 4 = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác -1

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ (-1)^2 - 2m(-1) + 4 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m > 2 \\ m < -2 \end{array}\right. \\ m \neq -\dfrac{5}{2}. \end{cases}$$

Chọn đáp án C □

Câu 73. Biết rằng đồ thị của hàm số $y = \dfrac{(n-3)x+n-2017}{x+m+3}$ (m, n là các số thực) nhận trục hoành làm tiệm cận ngang và trục tung là tiệm cận đứng. Tính tổng $m+n$.

(A) 0. (B) -3. (C) 3. (D) 6.

Lời giải.

Theo công thức tìm nhanh tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ ta có

Đồ thị hàm số nhận $x = -\dfrac{d}{c} = -m-3 = 0$ làm TCĐ $\Rightarrow m = -3$.

Đồ thị hàm số nhận $y = \dfrac{a}{c} = n-3 = 0$ làm TCN $\Rightarrow n = 3$.

Vậy $m+n = 0$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 74. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y = \dfrac{x-1}{\sqrt{mx^2-8x+2}}$ có đúng bốn đường tiệm cận?

(A) 8. (B) 6. (C) 7. (D) Vô số.

Lời giải.

Trường hợp 1: $m < 0$ suy ra tập xác định của hàm số là $\mathscr{D} = (x_1; x_2)$, ($x_1; x_2$ là nghiệm của phương trình $mx^2 - 8x + 2 = 0$). Do đó $m < 0$ không thỏa yêu cầu của bài toán.

Trường hợp 2: $m = 0 => y = \dfrac{x-1}{\sqrt{-8x+2}}$ suy ra tập xác định của hàm số là $\mathscr{D} = (-\infty; 4)$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} y = -\infty$; $\lim\limits_{x\to 4^-} y = -\infty$. Khi đó ta có $x = -4$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Do đó $m = 0$ không thỏa yêu cầu của bài toán.

Trường hợp 3: $m > 0$ suy ra tập xác định của hàm số là $\mathscr{D} = (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$ ($x_1; x_2$ là nghiệm của phương trình $mx^2 - 8x + 2 = 0$).

Do đó đồ thị hàm số có bốn đường tiệm cận khi phương trình $mx^2 - 8x + 2 = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác 1 $\Leftrightarrow \begin{cases} 16 - 2m > 0 \\ m > 0; m \in \mathbb{Z} \\ m - 8 + 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 8 \\ m > 0; m \in \mathbb{Z} \\ m \neq 6 \end{cases} \Rightarrow m = \{1; 2; 3; 4; 5; 7\}$.

Suy ra có tất cả 6 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn yêu cầu của bài toán.

Chọn đáp án (B) □

Câu 75. Với giá trị nào của hàm số m để đồ thị hàm số $y = x - \sqrt{mx^2 - 3x + 7}$ có tiệm cận ngang.

(A) $m = 1$. (B) $m = -1$. (C) $m = \pm 1$. (D) Không có m.

Lời giải.

Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang nên hàm số xác định trên một trong các miền $(-\infty; a)$, $(-\infty; a]$, $(a, +\infty)$ hoặc $[a; +\infty)$.

Trường hợp 1: $m = 0 \Rightarrow y = x - \sqrt{-3x+7}$.

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} y = \pm\infty$ đồ thị không có tiệm cận ngang.

Trường hợp 2: $m > 0$, $y = x - \sqrt{mx^2 - 3x + 7}$.

Khi $\lim\limits_{x\to+\infty} = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(x - x\sqrt{m - \dfrac{3}{x} + \dfrac{7}{x^2}}\right) = \dfrac{3}{2}$ đồ thị hàm số có tiệm cận ngang khi và chỉ khi $m = 1$.

Vậy $m = 1$.

Cách trắc nghiệm:

Thay $m = 1 \Rightarrow y = x - \sqrt{x^2 - 3x + 7} \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\left(x - \sqrt{x^2 - 3x + 7}\right) = \dfrac{3}{2}$ đồ thị hàm số có tiệm cận ngang.

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x - \sqrt{x^2 - 3x + 7}\right) = -\infty$ không có tiệm cận ngang.

Thay $m = -1 \Rightarrow y = x - \sqrt{-x^2 - 3x + 7} \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\left(x - \sqrt{-x^2 - 3x + 7}\right)$ không xác định.

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x - \sqrt{-x^2 - 3x + 7}\right)$ không xác định. Vậy $m = 1$.

Chọn đáp án A □

Câu 76. Cho hàm số $y = \dfrac{ax + 1}{bx - 2}$. Tìm a, b để đồ thị hàm số có $x = 1$ là tiệm cận đứng và $y = \dfrac{1}{2}$ là tiệm cận ngang.

A. $a = -1; b = 2$.	B. $a = 4; b = 4$.	C. $a = 1; b = 2$.	D. $a = -1; b = -2$.

Lời giải.

Trường hợp: $b = 0 \Rightarrow$ đồ thị hàm số $y = \dfrac{ax + 1}{-2}$ không có tiệm cận.

Trường hợp: $b \neq 0$, tập xác định của hàm số $y = \dfrac{ax + 1}{bx - 2}$ là $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{2}{b}\right\}$.

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} y = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{ax + 1}{bx - 2} = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{a + \dfrac{1}{x}}{b - \dfrac{2}{x}} = \dfrac{a}{b}$.

Suy ra đồ thị hàm số $y = \dfrac{ax + 1}{bx - 2}$ có tiệm cận ngang là đường thẳng $y = \dfrac{a}{b} \Rightarrow \dfrac{a}{b} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow b = 2a$.

$\lim\limits_{x\to\left(\frac{2}{b}\right)^+} y = \lim\limits_{x\to\left(\frac{2}{b}\right)^+}\dfrac{ax + 1}{bx - 2} = \left[\begin{array}{l} +\infty \\ -\infty \end{array}\right. \Rightarrow$ đồ thị hàm số $y = \dfrac{ax + 1}{bx - 2}$ có tiệm cận đứng là đường thẳng $x = \dfrac{2}{b} \Rightarrow \dfrac{2}{b} = 1 \Leftrightarrow b = 2 \Rightarrow a = 1$.

Vậy $a = 1$; $b = 2$.

Chọn đáp án C □

Câu 77. Có bao nhiêu giá trị nguyên $m \in [-10; 10]$ sao cho đồ thị hàm số $y = \dfrac{x - 1}{2x^2 + 6x - m - 3}$ có hai đường tiệm cận đứng?

A. 19.	B. 15.	C. 17.	D. 18.

Lời giải.

Ta có đồ thị hàm số $y = \dfrac{x - 1}{2x^2 + 6x - m - 3}$ có hai đường tiệm cận đứng khi phương trình $2x^2 + 6x - m - 3 = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác 1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3^2 - 2(-m - 3) > 0 \\ 2.1^2 + 6.1 - m - 3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -\dfrac{15}{2} \\ m \neq 5. \end{cases}$$

Từ đó ta suy ra tập các giá trị nguyên của m thỏa mãn là

$$\{-7,-6,-5,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,6,7,8,9,10\}.$$

Vậy có 17 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Chọn đáp án C □

Câu 78. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{mx^2+3mx+4}}{x+2}$ bằng 3?

A 4. B 2. C Vô số. D 3.

Lời giải.

Đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{mx^2+3mx+4}}{x+2}$ có nhiều nhất một tiệm cận đứng và hai tiệm cận ngang.

Điều kiện để đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{mx^2+3mx+4}}{x+2}$ có 3 tiệm cận là nó có đúng 1 tiệm cận đứng và 2 tiệm cận ngang.

* Xét điều kiện tồn tại $\lim\limits_{x\to+\infty} y$ và $\lim\limits_{x\to-\infty} y$

Trường hợp 1: $g(x)=mx^2+3mx+4\geq 0$ với $\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=0\\ \begin{cases}m>0\\ \Delta=9m^2-16m\leq 0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow 0\leq m\leq \dfrac{16}{9}$.

Trường hợp 2: $g(x)=mx^2+3mx+4\geq 0$ với $\forall x\in(-\infty;x_1)\cup(x_2;+\infty)$ với x_1; x_2 là nghiệm của $g(x)\Leftrightarrow\begin{cases}m>0\\ \Delta=9m^2-16m>0\end{cases}\Leftrightarrow m>\dfrac{16}{9}$.

Vậy $m\geq 0$ thì tồn tại $\lim\limits_{x\to+\infty} y$ và $\lim\limits_{x\to-\infty} y$.

Khi đó $\lim\limits_{x\to+\infty} y=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{mx^2+3mx+4}}{x+2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{m+\dfrac{3m}{x}+\dfrac{4}{x^2}}}{1+\dfrac{2}{x}}=\sqrt{m}$.

$$\lim_{x\to-\infty} y=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{mx^2+3mx+4}}{x+2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-\sqrt{m+\dfrac{3m}{x}+\dfrac{4}{x^2}}}{1+\dfrac{2}{x}}=-\sqrt{m}.$$

Vậy điều kiện để đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận ngang là $m>0$.

* Xét trường hợp $x=-2$ là nghiệm của tử số $\Rightarrow x=-2$ là nghiệm của $g(x)=mx^2+3mx+4$.

Suy ra $g(-2)=0\Rightarrow m=2$.

Khi đó $y=\dfrac{\sqrt{2x^2+6x+4}}{x+2}\Rightarrow\lim\limits_{x\to-2^-} y=\dfrac{\sqrt{2(x+1)(x+2)}}{x+2}=\lim\limits_{x\to-2^-}\left[-\sqrt{\dfrac{2(x+1)}{x+2}}\right]=-\infty$.

Suy ra đồ thị hàm số có một tiệm cận đứng $x=-2$.

Suy ra $m=2$ thỏa mãn.

* Xét trường hợp $x=-2$ không là nghiệm của tử số, để $x=-2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số thì $\begin{cases}g(-2)\neq 0\\ g(-2)\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow g(-2)>0\Leftrightarrow 4-2m>0\Leftrightarrow m<2$.

Suy ra đồ thị hàm số có một đường tiệm cận đứng $x = -2$ với $\forall m \in (0; 2]$.

Vậy điều kiện để đồ thị hàm số $y = \dfrac{\sqrt{mx^2 + 3mx + 4}}{x + 2}$ có 3 tiệm cận là $\forall m \in (0; 2]$.

Vậy có hai giá trị nguyên của m thỏa mãn đề bài là $m = 1$; $m = 2$.

Chọn đáp án B □

Câu 79. Tổng các giá trị của tham số m để đồ thị của hàm số $y = \dfrac{x - 1}{x^2 + 2(m - 1)x + m^2 - 2}$ có đúng một tiệm cận đứng.

(A) $-\dfrac{1}{2}$. (B) 2. (C) -3. (D) $\dfrac{3}{2}$.

Lời giải.

Đặt $f(x) = x^2 + 2(m - 1)x + m^2 - 2$.

Đồ thị hàm số có đúng một tiệm cận đứng khi và chỉ khi $f(x) = 0$ có 2 nghiệm phân biệt trong đó có 1 nghiệm $x = 1$ hoặc $f(x) = 0$ có nghiệm kép

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \Delta' > 0 \\ f(1) = 0 \end{cases} \\ \Delta' = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} (m-1)^2 - \left(m^2 - 2\right) > 0 \\ 1 + 2(m - 1) + m^2 - 2 = 0 \end{cases} \\ m = \dfrac{3}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} m < \dfrac{3}{2} \\ m = 1; m = -3 \end{cases} \\ m = \dfrac{3}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = -3 \\ m = \dfrac{3}{2}. \end{array}\right.$$

Vậy tổng các giá trị m thỏa mãn là: $-\dfrac{1}{2}$.

Chọn đáp án A □

Câu 80. Cho hàm số $y = \dfrac{x - 3}{x^3 - 3mx^2 + (2m^2 + 1)x - m}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên thuộc đoạn $[-6; 6]$ của tham số m để đồ thị hàm số có bốn đường tiệm cận?

(A) 12. (B) 9. (C) 8. (D) 11.

Lời giải.

$\lim\limits_{x \to +\infty} y = \lim\limits_{x \to -\infty} y = 0$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là đường thẳng $y = 0$.

Do đó, đồ thị hàm số có bốn đường tiệm cận khi phương trình $x^3 - 3mx^2 + (2m^2 + 1)x - m = 0$ có 3 nghiệm phân biệt $x \neq 3$.

Xét phương trình $x^3 - 3mx^2 + (2m^2 + 1)x - m = 0 \quad (*)$ ta có

$$x^3 - 3mx^2 + \left(2m^2 + 1\right)x - m = 0 \Leftrightarrow (x - m)\left(x^2 - 2mx + 1\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = m \\ x^2 - 2mx + 1 = 0. \end{array}\right.$$

Phương trình (*) có ba nghiệm phân biệt $x \neq 3$ khi và chỉ khi $m \neq 3$ và phương $x^2 - 2mx + 1 = 0$ có hai nghiệm phân biệt $x \neq 3 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 3 \\ m^2 - 1 > 0 \\ 3^2 - 2 \cdot 3 \cdot m + 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 3 \\ m > 1 \\ m < -1 \\ m \neq \dfrac{5}{3}. \end{cases}$

Do m nguyên và $m \in [-6; 6]$ nên $m \in \{-6; -5; -4; -3; -2; 2; 4; 5; 6\}$.

Vậy có 9 giá trị nguyên của m thỏa mãn đề bài.

Chọn đáp án B □

Câu 81. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x^2+3x+m}{x-m}$ **không** có tiệm cận đứng.

A $m = 1$.
B $m > 1$.
C $m = 1$ hoặc $m = 0$.
D $m \neq 0$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \backslash \{m\}$.

Có $\lim\limits_{x\to m} \dfrac{2x^2-3x+m}{x-m} = \lim\limits_{x\to m} \left(2x+2m-3+\dfrac{2m^2-2m}{x-m}\right)$.

Để đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng thì phải tồn tại $\lim\limits_{x\to m} \dfrac{2x^2-3x+m}{x-m}$, $\Rightarrow 2m^2-2m = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=1. \end{array}\right.$

Chọn đáp án C □

Câu 82. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số thực m thuộc đoạn $[-2017;2017]$ để đồ thị hàm số $y = \dfrac{x+2}{\sqrt{x^2-4x+m}}$ có hai tiệm cận đứng?

A 2019.
B 2021.
C 2018.
D 2020.

Lời giải.

Để đồ thị hàm số $y = \dfrac{x+2}{\sqrt{x^2-4x+m}}$ có hai tiệm cận đứng thì phương trình $x^2-4x+m=0$ có hai nghiệm phân biệt khác $-2 \Leftrightarrow \begin{cases} 4-m>0 \\ 12+m \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2017 \leq m < 4 \\ m \neq -12 \\ m \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow m \in \{-2017;-2016;\ldots;3\} \backslash \{-12\}$.

Do đó số giá trị nguyên của tham số m thỏa đề bài là $3-(-2017)+1-1 = 2020$ giá trị.

Chọn đáp án D □

Câu 83. Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 2019m$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2020m^4$, (với m là tham số thực). Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị của m để đồ thị của hàm số $y = f(x)$ có duy nhất một tiệm cận ngang?

A 4.
B 2.
C 3.
D 1.

Lời giải.

Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có duy nhất một tiệm cận ngang $\Leftrightarrow 2019m = 2020m^4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=\sqrt[3]{\dfrac{2019}{2020}}. \end{array}\right.$

Vậy có 2 giá trị của m thỏa bài toán.

Chọn đáp án B □

Câu 84. Cho hàm số $y = \dfrac{1}{[x^2-(2m+1)x+2m]\sqrt{x-m}}$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số có 4 đường tiệm cận.

(A) $\begin{cases} 0 < m < 1 \\ m \neq \dfrac{1}{2} \end{cases}$. (B) $\begin{cases} m < 1 \\ m \neq \dfrac{1}{2} \end{cases}$. (C) $m > 1$. (D) $\begin{cases} 0 \leq m \leq 1 \\ m \neq \dfrac{1}{2} \end{cases}$.

Lời giải.

Điều kiện $x > m$.

Ta có $\lim\limits_{x \to +\infty} y = 0 \Rightarrow y = 0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Xét phương trình $[x^2 - (2m+1)x + 2m]\sqrt{x-m} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = m \\ x^2 - (2m+1)x + 2m = 0 \quad (*) \end{array}\right.$.

Để hàm số có 4 đường tiệm cận thì phương trình (*) có 2 nghiệm phân biệt $m < x_1 < x_2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (2m-1)^2 > 0 \\ (x_1 - m)(x_2 - m) > 0 \\ x_1 + x_2 > 2m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq \dfrac{1}{2} \\ x_1x_2 - m(x_1 + x_2) - m^2 > 0 \\ 2m + 1 > 2m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq \dfrac{1}{2} \\ m - m^2 > 0 \\ 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq \dfrac{1}{2} \\ 0 < m < 1. \end{cases}$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 85. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để đồ thị hàm số $y = \dfrac{6x-3}{(mx^2 - 6x + 3)(9x^2 + 6mx + 1)}$ có đúng 1 đường tiệm cận?

(A) 0. (B) 2. (C) 1. (D) Vô số.

Lời giải.

Đặt $f(x) = mx^2 - 6x + 3$ và $g(x) = 9x^2 + 6mx + 1$. Ta xét các trường hợp:

- ☑ **Trường hợp 1.** $m = 0$ khi đó ta có $y = \dfrac{6x-3}{(-6x+3)(9x^2+1)}$ đồ thị hàm số có 1 đường tiệm cận ngang là đường thẳng $y = 0$ do đó $m = 0$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

- ☑ **Trường hợp 2.** $m \neq 0$ và cả hai tam thức $f(x)$ và $g(x)$ đều vô nghiệm

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'_f < 0 \\ \Delta'_g < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9 - 3m < 0 \\ 9m^2 - 9 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 3 \\ -1 < m < 1 \end{cases} \Leftrightarrow m \in \varnothing.$$

- ☑ **Trường hợp 3.** Tam thức $g(x)$ nhận $x = \dfrac{1}{2}$ làm nghiệm $g\left(\dfrac{1}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow m = -\dfrac{13}{12}$, khi đó $f(x)$ luôn có 2 nghiệm phân biệt nên đồ thị hàm số đã cho có nhiều hơn 1 đường tiệm cận.

Vậy có 1 giá trị nguyên của m để đồ thị hàm số $y = \dfrac{6x-3}{(mx^2 - 6x + 3)(9x^2 + 6mx + 1)}$ có đúng 1 đường tiệm cận

Chọn đáp án (C) □

Câu 86. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = x + \sqrt{mx^2 + 1}$ có tiệm cận ngang?

(A) $0 < m < 1$. (B) $m = 1$. (C) $m = -1$. (D) $m > 1$.

Lời giải.

Điều kiện cần và đủ để đồ thị hàm số $y = x + \sqrt{mx^2+1}$ có tiệm cận ngang là tồn tại số thực k sao cho $\left[\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+\sqrt{mx^2+1}\right)=k \\ \lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt{mx^2+1}\right)=k \\ x\to\infty. \end{array}\right.$

Hiển nhiên nếu $m \le 0$ thì giới $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(x+\sqrt{mx^2+1}\right)$ không hữu hạn.

Nếu $m > 0$ ta có

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+\sqrt{mx^2+1}\right) = +\infty$.
- $\lim\limits_{x\to-\infty} y = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt{mx^2+1}\right) = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2(1-m)-1}{x-\sqrt{mx^2+1}} = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x(1-m)-\dfrac{1}{x}}{1+\sqrt{m+\dfrac{1}{x^2}}}$.

Giới hạn trên hữu hạn khi và chỉ khi $m = 1$.

Chọn đáp án B □

Câu 87. Cho hàm số $y = \dfrac{x-2}{mx^2-2x+4}$. Có tất cả bao nhiêu giá trị của tham số m để đồ thị hàm số có đúng hai đường tiệm cận (tiệm cận đứng và tiệm cận ngang)?

A. 0. B. 2. C. 3. D. 1.

Lời giải.

Với $m = 0$, ta có hàm số $y = \dfrac{x-2}{-2x+4} = -2$: không thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Với $m \neq 0$, ta có $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x-2}{mx^2-2x+4} = 0 \Rightarrow y = 0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Đồ thị hàm số có đúng hai đường tiệm cận khi và chỉ khi đồ thị hàm số có đúng 1 tiệm cận đứng khi và chỉ khi $mx^2-2x+4=0$ có nghiệm duy nhất hoặc $mx^2-2x+4=0$ có hai nghiệm phân biệt trong đó có một nghiệm $x = 2$.

- Phương trình $mx^2-2x+4=0$ có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow \Delta' = 0 \Leftrightarrow 1-4m=0 \Leftrightarrow m = \dfrac{1}{4}$.
- Phương trình $mx^2-2x+4=0$ có hai nghiệm phân biệt trong đó có một nghiệm $x = 2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta' > 0 \\ 4m = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \dfrac{1}{4} \\ m = 0\end{cases} \Rightarrow m = 0$$

  không thỏa mãn điều kiện.

Vậy chỉ có một giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án D □

Câu 88. Gọi S là tập các giá trị nguyên của m sao cho đồ thị hàm số $y = \dfrac{2019x}{\sqrt{17x^2-1}-m|x|}$ có bốn đường tiêm cận (bao gồm tiệm cận đứng và tiệm cận ngang). Tính số phần tử của tập S.

A. Vô số. B. 3. C. 5. D. 4.

Lời giải.

$\lim\limits_{x\to-\infty} y = \dfrac{2019}{m-\sqrt{17}}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} y = \dfrac{2019}{\sqrt{17}-m}$.

Với $m \neq \sqrt{17}$ thì đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận ngang là $y = \dfrac{2019}{m-\sqrt{17}}$, $y = \dfrac{2019}{\sqrt{17}-m}$.

Khi đó đồ thị hàm số đã cho có 4 đường tiệm cận khi và chỉ khi phương trình:

$\sqrt{17x^2-1} - m|x| = 0$ (1) có hai nghiệm phân biệt khác 0.

Ta có (1)$\Leftrightarrow \sqrt{17x^2-1} = m|x| \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 0 \\ 17x^2 - 1 = m^2x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 0 \\ (17-m^2)x^2 = 1 \end{cases}$ (2)

Phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt khác 0 khi và chỉ khi phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt khác 0. Vậy $S = \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

Chọn đáp án C □

Câu 89. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực m sao cho đồ thị hàm số $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^3+mx+1} - \sqrt[3]{x^4+x+1} + m^2x}$ nhận trục tung là tiệm cận đứng. Khi đó tổng các phần tử của S bằng

(A) $\dfrac{1}{2}$. (B) $-\dfrac{1}{2}$. (C) $\dfrac{1}{3}$. (D) $-\dfrac{1}{3}$.

Lời giải.

Ta có: $\lim\limits_{x\to0} f(x) = \lim\limits_{x\to0} \dfrac{1}{\dfrac{\sqrt{x^3+mx+1} - \sqrt[3]{x^4+x+1} + m^2x}{x}}$

mà $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sqrt{x^3+mx+1} - \sqrt[3]{x^4+x+1} + m^2x}{x}$

$= \lim\limits_{x\to0} \left[\dfrac{\sqrt{x^3+mx+1}-1}{x} - \dfrac{\sqrt[3]{x^4+x+1}-1}{x} + \dfrac{m^2x}{x}\right]$

$= \lim\limits_{x\to0} \left[\dfrac{x^3+mx}{x\left(\sqrt{x^3+mx+1}+1\right)} - \dfrac{x^4+x}{x\left(\sqrt[3]{(x^4+x+1)^2} + \sqrt[3]{x^4+x+1}+1\right)} + m^2\right]$.

Đồ thị hàm số $f(x)$ nhận trục tung làm tiệm cận đứng

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to0} \left[\dfrac{x^2+m}{\sqrt{x^3+mx+1}+1} - \dfrac{x^3+1}{\sqrt[3]{(x^4+x+1)^2} + \sqrt[3]{x^4+x+1}+1} + m^2\right] = 0$$

$\Leftrightarrow \dfrac{m}{2} - \dfrac{1}{3} + m^2 = 0 \Leftrightarrow 6m^2 + 3m - 2 = 0.$

Chọn đáp án B □

Câu 90. Có bao nhiêu giá trị m nguyên thuộc khoảng $(-10; 10)$ để đồ thị hàm số $y = \dfrac{\sqrt{x(x-m)}-1}{x+2}$ có đúng ba đường tiệm cận?

(A) 12 . (B) 11. (C) 0. (D) 10.

Lời giải.

Xét $g(x) = \sqrt{x(x-m)} - 1$.

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x(x-m)}-1}{x+2} = 1$ và $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{x(x-m)}-1}{x+2} = -1$.

Nên đồ thị hàm số luôn có hai đường tiệm cận ngang $y = 1$ và $y = -1$.

Trường hợp 1: $m = 0$ khi đó hàm số là $y = \dfrac{|x| - 1}{x + 2}$.

Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x = -2$.

Vậy $m = 0$ thoả mãn yêu cầu bài toán.

Trường hợp 2: $m > 0$.

Hàm số $g(x)$ có tập xác định là $\mathscr{D} = (-\infty; 0] \cup [m; +\infty)$.

$x = -2 \in \mathscr{D}$

$g(-2) = \sqrt{2(m+2)} - 1 \neq 0$ nên $x = -2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Vậy $m = 1, m = 2, ..., m = 9$ thoả mãn. Nên có 9 giá trị của m.

Trường hợp 3: $m < 0$

Hàm số $g(x)$ có tập xác định $\mathscr{D} = (-\infty; m] \cup [0; +\infty)$.

Để $x = -2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số thì trước hết $x = -2 \in \mathscr{D}$ hay $m \geq -2$. Nên chỉ có $m = -2, m = -1$ thoả mãn.

Với $m = -1$ ta có $g(x) = \sqrt{x(x+1)} - 1, g(-2) = \sqrt{2} - 1 \neq 0$ nên $x = -2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Với $m = -2$ ta có $g(x) = \sqrt{x(x+2)} - 1, g(-2) = \sqrt{x(x+2)} - 1 = -1 \neq 0$ nên $x = -2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Vậy có 12 giá trị m nguyên thoả yêu cầu.

Chọn đáp án A □

Câu 91. Tìm số giá trị nguyên thuộc đoạn $[-2019; 2019]$ của tham số m để đồ thị hàm số $y = \dfrac{\sqrt{x-3}}{x^2 + x - m}$ có đúng hai đường tiệm cận.

A 2007. B 2010 . C 2009 . D 2008.

Lời giải.

Điều kiện xác định: $\begin{cases} x - 3 \geq 0 \\ x^2 + x \neq m \end{cases}$.

Dựa vào điều kiện xác định ta suy ra hàm số đã cho không có giới hạn khi $x \to -\infty$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x-3}}{x^2 + x - m} = 0, \forall m$.

$\Rightarrow y = 0$ là phương trình đường tiệm cận ngang.

Xét hàm số $f(x) = x^2 + x$.

$f'(x) = 2x + 1; f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{1}{2}$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0		$+$		
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\frac{1}{4}$	$\nearrow$	12	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy:

Khi $m < 12$ thì đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng.

Khi $m \geq 12$ thì đồ thị hàm số có 1 tiệm cận đứng.

Do đó để hàm số có đúng 2 đường tiệm cận thì $m \in [12; 2019]$.

Vậy có 2008 giá trị nguyên của m.

Chọn đáp án D □

Câu 92. Cho hàm số $y = \dfrac{x-1}{mx^2 - 2x + 3}$. Có tất cả bao nhiêu giá trị m để đồ thị hàm số có đúng hai đường tiệm cận?

A 2. B 3. C 0. D 1.

Lời giải.

Nhận xét:

+ $f(x) = mx^2 - 2x + 3$ có bậc ≥ 1 nên đồ thị hàm số luôn có 1 tiệm cận ngang.

+ Do đó yêu cầu bài toán tìm m để đồ thị hàm số có đúng 1 tiệm cận đứng.

+ $m = 0$, đồ thị hàm số có 1 tiệm cận đứng là đường thẳng $x = \dfrac{3}{2} \Rightarrow m = 0$ thoả bài toán.

+ $m \neq 0$, đồ thị hàm số có đúng 1 tiệm cận đứng khi và chỉ khi phương trình $m^2 - 2x + 3 = 0$ có nghiệm kép hoặc nhận $x = 1$ là nghiệm $\left[\begin{array}{l}\Delta_f = 0\\ f(1) = 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m = \dfrac{1}{3}\\ m = 1\end{array}\right.$

+ Kết luận: $m \in \left\{0; \dfrac{1}{3}; -1\right\}$.

Chọn đáp án B □

Câu 93. Cho hàm số $y = \dfrac{1}{\sqrt{x^3 - 3x^2 + m - 1}}$ với m là tham số. Tìm tất cả các giá trị của m để đồ thị hàm số đã cho có 4 đường tiệm cận.

A $1 < m < 5$. B $-1 < m < 2$.

C $m < 1$ hoặc $m > 5$. D $m > 2$ hoặc $m < -1$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} y = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x^3 - 3x^2 + m - 1}} = 0$, $\lim\limits_{x\to-\infty} y = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x^3 - 3x^2 + m - 1}}$ không tồn tại. Suy ra $y = 0$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Do đó, để đồ thị hàm số đã cho có 4 đường tiệm cận thì phương trình $x^3 - 3x^2 + m - 1 = 0$ có 3 nghiệm phân biệt.

Xét hàm số $g(x) = x^3 - 3x^2 + m - 1$.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

$g'(x) = 3x^2 - 6x$.

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = 2\\ x = 2.\end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		2		∞
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	↗	$m-1$	↘	$m-5$	↗	$+\infty$

Từ bảng biến thiên, ta thấy phương trình $x^3-3x^2+m-1=0$ có 3 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $m-5<0<m-1 \Leftrightarrow 1<m<5$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 94. Hàm số $y=\dfrac{\sqrt{3x+1}+ax+b}{(x-1)^2}$ không có tiệm cận đứng. Khi đó hiệu $a-b$ bằng:

(A) $\dfrac{1}{2}$. (B) $-\dfrac{3}{4}$. (C) $-\dfrac{5}{4}$. (D) $=\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Do hàm số không có tiệm cận đứng nên $f(x)=\sqrt{3x+1}+ax+b=(x-1)^2g(x)$.

Suy ra $\begin{cases} f(1)=0 \\ f'(1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b+2=0 \\ a+\dfrac{3}{4}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-\dfrac{3}{4} \\ b=-\dfrac{5}{4} \end{cases} \Rightarrow a-b=\dfrac{1}{2}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 95. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham để m đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{-x^2+2016x+2017}-24\sqrt{7}}{x-m}$ có tiệm cận đứng?

(A) Vô số. (B) 2. (C) 2017. (D) 2019.

Lời giải.

Biểu thức $\sqrt{-x^2+2016x+2017}$ có nghĩa khi $-x^2+2016x+2017 \geq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 2017$.

Đặt $f(x)=\sqrt{-x^2+2016x+2017}$. Xét $x-m=0 \Leftrightarrow x=m$. Vậy đồ thị nếu có tiệm cận đứng chỉ có thể là $x=m$, khi đó điều kiện là:

$\begin{cases} -1 \leq x \leq 2017 \\ f(m) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \in [-1;2017] \\ \sqrt{-m^2+2016m+2017} \neq 24\sqrt{7} \end{cases} (*)$

Ta có $(*) \Leftrightarrow m^2-2016m+2015 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m \neq 2015 \end{cases}$

Từ $(1),(2) \Rightarrow m \in [-1;2017] \backslash \{1;2015\} \xrightarrow{m\in\mathbb{Z}}$ có $2019-2=2017$ số nguyên m thỏa mãn bài toán

Chọn đáp án (C) □

Câu 96. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực m sao cho đồ thị hàm số $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^3+mx+1}-\sqrt[3]{x^4+x+1}+m^2x}$ nhận trục tung làm tiệm cận đứng. Khi đó tổng các phần tử của S bằng

(A) $\dfrac{1}{2}$. (B) $-\dfrac{1}{2}$. (C) $\dfrac{1}{3}$. (D) $-\dfrac{1}{3}$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to 0} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{\dfrac{\sqrt{x^3+mx+1}-\sqrt[3]{x^4+x+1}}{x}}$

Mà $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x^3+mx+1}-\sqrt[3]{x^4+x+1}+m^2x}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{\sqrt{x^3+mx+1}-1}{x} - \dfrac{\sqrt[3]{x^4+x+1}-1}{x} + \dfrac{m^2x}{x}\right]$

$= \lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{x^3+mx}{x\left(\sqrt{x^3+mx+1}+1\right)} - \dfrac{x^4+x}{x\left(\sqrt[3]{(x^4+x+1)^2}+\sqrt[3]{x^4+x+1}+1\right)} + m^2\right]$.

Đồ thị hàm số $f(x)$ nhận trục tung làm tiệm cận đứng

$\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{(x^2+m)}{\left(\sqrt{x^3+mx+1}+1\right)} - \dfrac{(x^3+1)}{\sqrt[3]{(x^4+x+1)^2}+\sqrt[3]{x^4+x+1}+1} + m^2\right) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{m}{2} - \dfrac{1}{3} + m^2 = 0.$

$\Leftrightarrow 6m^2+3m-2=0$ Vậy $m_1+m_2 = -\dfrac{1}{2}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 97. Có bao nhiêu giá trị m nguyên thuộc khoảng $(-10;10)$ để đồ thị hàm số $y = \dfrac{\sqrt{x(x-m)}-1}{x+2}$ có đúng ba đường tiệm cận?

(A) 12. (B) 11. (C) 0. (D) 10.

Lời giải.

Xét $g(x) = \sqrt{x(x-m)}-1$.

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x(x-m)}-1}{x+2} = 1$ và $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{x(x-m)}-1}{x+2} = -1$.

Nên đồ thị hàm số luôn có hai đường tiệm cận ngang $y=1$ và $y=-1$.

Trường hợp 1: $m=0$ khi đó hàm số là $y = \dfrac{|x|-1}{x+2}$.

Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x=-2$.

Vậy $m=0$ thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Trường hợp 2: $m>0$. Hàm số $g(x)$ có tập xác định là $\mathscr{D} = (-\infty;0]\cup[m;+\infty)$.

$x=-2\in\mathscr{D}$.

$g(-2) = \sqrt{2(m+2)}-1 \neq 0$ nên $x=-2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Vậy $m=1, m=2, m=9$ thỏa mãn. Nên có 9 giá trị m.

Trường hợp 3: $m<0$. Hàm số $g(x)$ có tập xác định là $\mathscr{D} = (-\infty;m]\cup[0;+\infty)$.

Để $x=-2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số thì trước hết $x=-2\in\mathscr{D}$ hay $m\geq -2$. Nên chỉ có $m=-2, m=-1$ thỏa mãn

Với $m=-1$ ta có $g(x) = \sqrt{x(x+1)}-1, g(-2) = \sqrt{2}-1\neq 0$ nên $x=-2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Với $m=-2$ ta có $g(x) = \sqrt{x(x+2)}-1, g(-2) = \sqrt{x(x+2)}-1 = -1 \neq 0$ nên $x=-2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Vậy 12 giá trị m nguyên thỏa mãn yêu cầu.

Chọn đáp án (A) □

Câu 98. Tìm tất cả các giá trị thực của m sao cho đồ thị hàm số $y = \dfrac{\sqrt{mx^2+1}}{x+1}$ có đúng một đường tiệm cận.

(A) $-1\leq m<0$. (B) $-1\leq m\leq 0$. (C) $m<-1$. (D) $m>0$.

Lời giải.

Nếu $m=0$ thì $y=\dfrac{1}{x+1}$. Hàm số này có tập xác định $\mathscr{D}=\mathbb{R}\backslash\{-1\}$.

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x+1}=0$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $y=0$.

$\lim\limits_{x\to(-1)^+}\dfrac{1}{x+1}=+\infty$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x=-1$.

Vậy với $m=0$ thì đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận (loại).

Nếu $m>0$ thì $mx^2+1>0$ với mọi x và tập xác định của hàm số là $\mathscr{D}=\mathbb{R}\backslash\{-1\}$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{mx^2+1}}{x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{m+\dfrac{1}{x^2}}}{1+\dfrac{1}{x}}=\sqrt{m}$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{mx^2+1}}{x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-\sqrt{m+\dfrac{1}{x^2}}}{1+\dfrac{1}{x}}=-\sqrt{m}$. Suy ra đồ thị hàm số có hai tiệm cận ngang là $y=\sqrt{m}$ và $y=-\sqrt{m}$.

$\lim\limits_{x\to(-1)^+}\dfrac{\sqrt{mx^2+1}}{x+1}=+\infty$ nên $x=-1$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Vậy $m>0$ không thỏa mãn.

Nếu $m<0$ thì tập xác định của hàm số là $\mathscr{D}=\left[-\sqrt{-\dfrac{1}{m}};\sqrt{-\dfrac{1}{m}}\right]\backslash\{-1\}$.

Trường hợp này đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.

Để đồ thị hàm số có đúng một đường tiệm cận thì đồ thị hàm số phải có một tiệm cận đứng. Điều này xảy ra khi

$-\sqrt{-\dfrac{1}{m}}\le-1\Leftrightarrow\sqrt{-\dfrac{1}{m}}\ge1\Leftrightarrow-\dfrac{1}{m}\ge1\Leftrightarrow m\ge-1.$

Vậy với $-1\le m<0$ thì đồ thị hàm số có đúng một đường tiệm cận.

Chọn đáp án A □

Câu 99. Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m sao cho đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-1}{x^3+3x^2+m+1}$ có đúng một tiệm cận đứng.

A $\left[\begin{array}{l}m\le-4\\m>0\end{array}\right.$. B $\left[\begin{array}{l}m<-5\\m>-1\end{array}\right.$. C $-5\le m<-1$. D $\left[\begin{array}{l}m\le-5\\m>-1\end{array}\right.$.

Lời giải.

Đặt $f(x)=x^3+3x^2+m+1$.

Nếu $f(1)=0\Rightarrow m=-5$. Khi đó $f(x)=x^3+3x^2-4=(x-1)(x+2)^2$ nên $y=\dfrac{x-1}{f(x)}=\dfrac{1}{(x-2)^2}$.

Như vậy, đồ thị hàm số có 1 tiệm cận đứng $x=2$.

Nếu $m\ne-5$ thì đồ thị hàm số có một tiệm cận đứng khi $f(x)$ có đúng 1 nghiệm thực khác 1.

Xét $f(x)=x^3+3x^2+m+1$ có $f'(x)=3x^2+6x=3x(x+2)$ và hàm số đạt cực đại tại $x=-2$, $f(-2)=m+5$; hàm số đạt cực tiểu tại $x=0$, $f(0)=m+1$.

Để $f(x)=x^3+3x^2+m+1$ có đúng 1 nghiệm thực khi $\left[\begin{array}{l}f(-2)<0\\f(0)>0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m+5<0\\m+1>0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m<-5\\m>-1\end{array}\right.$.

Vậy đồ thi hàm số đã cho có đúng một tiệm cận đứng khi $\left[\begin{array}{l}m\le-5\\m>-1\end{array}\right.$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 100. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-4}{x^2-m^2x}$ có đúng hai đường tiệm cận?

(A) 3. (B) 1. (C) 2. (D) 4.

Lời giải.

Vì $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-4}{x^2-m^2x}=0$ nên đồ thị hàm số đã cho có 1 đường tiệm cận ngang $y=0$.

Vì $\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{x-4}{x^2-m^2x}=-\infty$ nên đồ thị hàm số đã cho có 1 đường tiệm cận đứng là $x=0$.

Để $y=\dfrac{x-4}{x^2-m^2x}=\dfrac{x-4}{x\left(x-m^2\right)}$ có đúng hai đường tiệm cận thì $\left[\begin{array}{l}x-m^2=x-4\\ m^2=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m^2=4\\ m=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=\\ m=\end{array}\right.$

Vậy có 3 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án (A) □

Câu 101. Tìm m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x^2-3x+4}{x^2+mx+1}$ có duy nhất một đường tiệm cận.

(A) $m\in(-2;2)$. (B) $m\in[-2;2]$. (C) $m\in\{-2;2\}$. (D) $m\in(2;+\infty)$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2-3x+4}{x^2+mx+1}=2$ và $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^2-3x+4}{x^2+mx+1}=2$ nên đồ thị hàm số có 1 tiệm cậ ngang $y=2$.

Vì $2x^2-3x+4>0,\forall x\in\mathbb{R}$ nên đồ thị hàm số có một đường tiệm cận khi $x^2+mx+1=0$ vô nghiệm.

$\Delta=m^2-4<0\Leftrightarrow m\in(-2;2)$

Chọn đáp án (A) □

Câu 102. Có bao nhiêu giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-1}{x^2-(2m+1)x+m^2-3}$ có đúng hai đường tiệm cận?

(A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 0.

Lời giải.

Đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-1}{x^2-(2m+1)x+m^2-3}$ có 1 tiệm cận ngang là $y=0$.

Đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-1}{x^2-(2m+1)x+m^2-3}$ có đúng hai đường tiệm cận

$\Leftrightarrow$ Đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-1}{x^2-(2m+1)x+m^2-3}$ có đúng 1 tiệm cận đứng

$\Leftrightarrow$ Phương trình $x^2-(2m+1)x+m^2-3=0$ có nghiệm kép hoặc phương trình $x^2-(2m+1)x+m^2-3=0$ có hai nghiệm phân biệt trong đó có một nghiệm bằng 1 khi và chỉ khi

$$\left[\begin{array}{l}\Delta=0\\ \begin{cases}\Delta>0\\ 1-(2m+1)+m^2+3\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}(2m+1)^2-4\left(m^2-3\right)=0\\ \begin{cases}(2m+1)^2-4\left(m^2-3\right)>0\\ m^2-2m-3=0\end{cases}\end{array}\right.$$

Vậy có ba giá trị của m thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Chọn đáp án (C) □

BẢNG ĐÁP ÁN

1. C	2. D	3. A	4. C	5. C	6. A	7. B	8. D	9. B	10. C
11. C	12. C	13. B	14. C	15. A	16. C	17. D	19. A	20. A	21. A
22. C	23. A	24. B	25. B	26. C	27. C	28. D	1. C	2. B	3. A
4. D	5. A	6. D	7. A	8. C	9. A	10. B	11. A	12. C	13. C
14. B	15. A	16. B	17. C	18. D	19. B	20. A	21. C	22. B	23. D
24. C	25. B	26. A	27. D	28. B	29. A	30. A	31. C	32. B	33. A
34. A	35. D	36. A	37. A	38. C					

MỨC ĐỘ 3. MỨC ĐỘ 9,10 ĐIỂM

Dạng 1. Xác định tiệm cận của hàm số g khi biết bảng biến thiên hàm số $f(x)$

Câu 1. (THPT Lương Văn Can - 2018) Cho đồ thị hàm số $y = f(x) = \dfrac{3x-1}{x-1}$. Khi đó đường thẳng nào sau đây là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \dfrac{1}{f(x)-2}$?

Ⓐ $x = 1$. Ⓑ $x = -2$. Ⓒ $x = -1$. Ⓓ $x = 2$.

Lời giải.

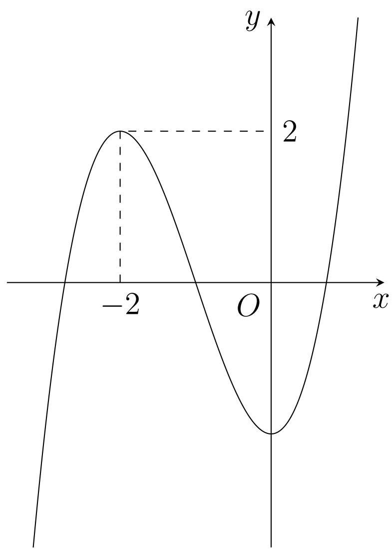
$f(x) = 2 \Leftrightarrow \dfrac{3x-1}{x-1} = 2 \Rightarrow 3x - 1 = 2x - 2 \Leftrightarrow x = -1$

Với $y = \dfrac{1}{f(x)-2}$ ta có $\lim\limits_{x \to (-1)^-} y = +\infty$

Vậy đồ thị hàm số $y = \dfrac{1}{f(x)-2}$ có đường tiệm cận đứng $x = -1$.

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 2. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ



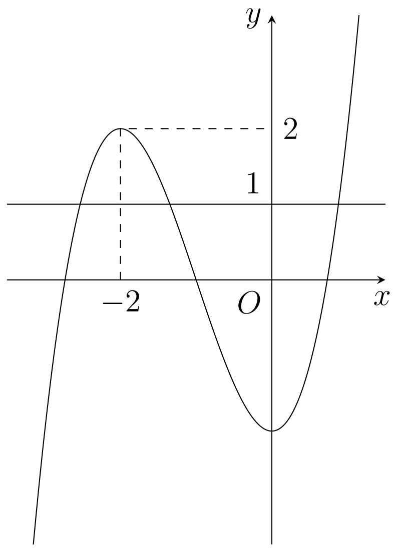
Số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \dfrac{2019}{f(x)-1}$ là

(A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4.

Lời giải.

Từ đồ thị của hàm số $y = f(x)$ suy ra tập xác định của hàm số $y = f(x)$ là $D = \mathbb{R}$

Do đó số đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \dfrac{2019}{f(x) - 1}$ chính là số nghiệm của phương trình $f(x) = 1$.



Qua đồ thị ta có: đường thẳng $y = 1$ cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại 3 điểm phân biệt nên phương trình $f(x) = 1$ có 3 nghiệm phân biệt.

Vậy đồ thị hàm số $y = \dfrac{2019}{f(x) - 1}$ có 3 đường tiệm cận đứng.

Chọn đáp án (C) □

Câu 3. (Chuyên Thái Bình - 2020) Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R} \backslash \{-1\}$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y'		$-$	||	$-$	
y	2 ↘		$-\infty$ || $+\infty$	↘	-2

Hỏi đồ thị hàm số $y = \dfrac{1}{f(x)}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang?

(A) 4. (B) 3. (C) 2. (D) 1.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 2 \Rightarrow \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{f(x)} = \dfrac{1}{2}$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -2 \Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{f(x)} = -\dfrac{1}{2}$.

Suy ra đồ thị hàm số $y = \dfrac{1}{f(x)}$ có hai đường tiệm cận ngang là $y = \dfrac{1}{2}$ và $y = -\dfrac{1}{2}$.

Dựa vào bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ ta thấy: phương trình $f(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1 < -1 < x_2$.

Khi đó: $f(x_1) = f(x_2) = 0$.

Ta có $\begin{cases} \lim\limits_{x\to x_1^-} f(x) = 0 \\ f(x) > 0 \text{ khi } x \to x_1^- \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_1^-} \dfrac{1}{f(x)} = +\infty$ và $\begin{cases} \lim\limits_{x\to x_2^-} f(x) = 0 \\ f(x) > 0 \text{ khi } x \to x_2^- \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_2^-} \dfrac{1}{f(x)} = +\infty$ Vậy đồ thị hàm số $y = \dfrac{1}{f(x)}$ có hai tiệm cận đứng là đường thẳng $x = x_1$ và $x = x_2$.

Chọn đáp án A □

Câu 4. (Chuyên Vĩnh Phúc- 2020) Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -1$ và $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = m$. Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \dfrac{1}{f(x)+2}$ có duy nhất một tiệm cận ngang.

A 1. B 0. C 2. D Vô số.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty} y = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{f(x)+2} = 1 \Rightarrow$ đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y = 1$.

TH 1: Nếu $m = -1$ thì $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{f(x)+2} = 1$ và $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{f(x)+2} = 1$ thì đồ thị hàm số có một tiệm cận.

TH 2: Nếu $m \neq -1$

Để đồ thị hàm số có một tiệm cận ngang $\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{f(x)+2}$ không có giá trị hữu hạn

$\Leftrightarrow m + 2 = 0 \Leftrightarrow m = -2$

Vậy khi $m \in \{-2; -1\}$ thì đồ thị hàm số có duy nhất một tiệm cận ngang.

Chọn đáp án C □

Câu 5. (Kim Liên - Hà Nội 2019) Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn $f(\tan x) = \cos^4 x$. Tìm tất cả các giá trị thực của m để đồ thị hàm số $g(x) = \dfrac{2019}{f(x) - m}$ có hai tiệm cận đứng.

A $m < 0$. B $0 < m < 1$. C $m > 0$. D $m < 1$.

Lời giải.

$f(\tan x) = \cos^4 x \Leftrightarrow f(\tan x) = \dfrac{1}{(1+\tan^2 x)^2} \Rightarrow f(t) = \dfrac{1}{(1+t^2)^2}$

Hàm số $g(x) = \dfrac{2019}{f(x) - m} \Rightarrow g(x) = \dfrac{2019}{\dfrac{1}{(1+x^2)^2} - m}$

Hàm số $g(x)$ có hai tiện cận đứng khi và chỉ khi phương trình $\dfrac{1}{(1+x^2)^2} - m = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow (1+x^2)^2 = \dfrac{1}{m} > 1 \Leftrightarrow 0 < m < 1$

Chọn đáp án B □

Câu 6. (THPT Quỳnh Lưu 3 Nghệ An 2019) Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình bên dưới:

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \dfrac{1}{2f(x)-1}$ là:

Ⓐ 4. Ⓑ 3. Ⓒ 1. Ⓓ 2.

Lời giải.

Đặt $h(x) = \dfrac{1}{2f(x)-1}$.

Tiệm cận ngang: Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{2f(x)-1} = 0$; $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{2f(x)-1} = 0$.

Suy ra đồ thị hàm số có một đường tiệm cận ngang $y = 0$.

Tiệm cận đứng: Xét phương trình: $2f(x) - 1 = 0 \Leftrightarrow f(x) = \dfrac{1}{2}$.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy phương trình $f(x) = \dfrac{1}{2}$ có ba nghiệm phân biệt a, b, c thỏa mãn $a < 1 < b < 2 < c$.

Đồng thời $\lim\limits_{x\to a^+} h(x) = \lim\limits_{x\to b^-} h(x) = \lim\limits_{x\to c^+} h(x) = +\infty$ nên đồ thị hàm số $y = h(x)$ có ba đường tiệm cận đứng là $x = a, x = b$ và $x = c$.

Vậy tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = h(x)$ là 4.

Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 7. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	||	$-$	
$f(x)$	-2	$\nearrow$	-1	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	0

Đồ thị $y = \dfrac{1}{2f(x)+3}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

Ⓐ 2. Ⓑ 0. Ⓒ 1. Ⓓ 3.

Lời giải.

Đặt $g(x) = \dfrac{1}{2f(x)+3}$ có tử số là $1 \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Ta có $2f(x) + 3 = 0 \Leftrightarrow f(x) = -\dfrac{3}{2}$ (1).

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	
$f(x)$					‖ $+\infty$		
			-1				0
	-2				$-\infty$ ‖		

Từ bảng biến thiên có phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt: $x_1 \in (-\infty; 0), x_2 \in (0; 1)$.

Do đó đồ thị hàm số $y = \dfrac{1}{2f(x) + 3}$ có 2 đường tiệm cận đứng.

Chọn đáp án A □

Câu 8. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \backslash \{1\}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		1		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$				$+\infty$ ‖		3		
			2		‖ $-\infty$				$-\infty$

Đồ thị hàm số $y = \dfrac{1}{2f(x) - 5}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

A 0. B 4. C 2. D 1.

Lời giải.

Ta có: $2f(x) - 5 = 0 \Leftrightarrow f(x) = \dfrac{5}{2} \quad (1)$.

Phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt $x_1, x_2, x_3, x_4 \neq 1$ và giới hạn của hàm số $y = \dfrac{1}{2f(x) - 5}$ tại các điểm x_1, x_2, x_3, x_4 đều bằng $\pm\infty$.

Mặt khác $\lim\limits_{x \to 1^{\pm}} \dfrac{1}{2f(x) - 5} = 0$ nên $x = 1$ không phải tiệm cận đứng.

Vậy đồ thị hàm số $y = \dfrac{1}{2f(x) - 5}$ có 4 đường tiệm cận đứng.

Chọn đáp án B □

Câu 9. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình dưới đây:

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	1				1
			-3		

Tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \dfrac{1}{2f(x) - 1}$ là

Ⓐ 0. Ⓑ 1. Ⓒ 2. Ⓓ 3.

Lời giải.

Số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \dfrac{1}{2f(x) - 1}$ đúng bằng số nghiệm thực của phương trình $2f(x) - 1 = 0 \Leftrightarrow f(x) = \dfrac{1}{2}$.

Mà số nghiệm thực của phương trình $f(x) = \dfrac{1}{2}$ bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ với đường thẳng $y = \dfrac{1}{2}$.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy đường thẳng $y = \dfrac{1}{2}$ cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại 2 điểm phân biệt.

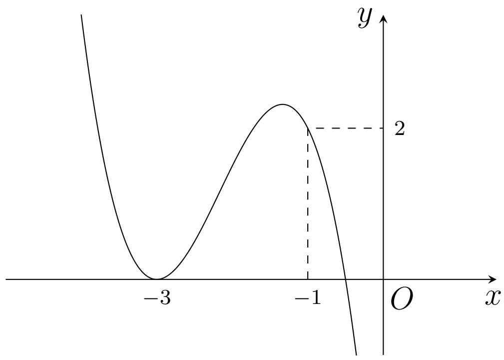
Vậy đồ thị hàm số $y = \dfrac{1}{2f(x) - 1}$ có 2 tiệm cận đứng.

Lại có $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{1}{2f(x) - 1} = 1 \Rightarrow$ đồ thị hàm số có một tiệm cận ngang là $y = 1$.

Vậy tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \dfrac{1}{2f(x) - 1}$ là 3.

Chọn đáp án Ⓓ □

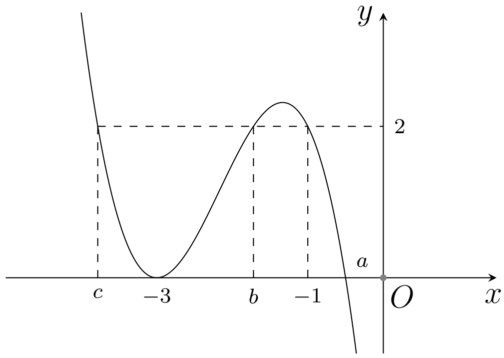
Câu 10. Cho hàm bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Hỏi đồ thị hàm số $y = \dfrac{(x^2 + 4x + 3)\sqrt{x^2 + x}}{x\left[f^2(x) - 2f(x)\right]}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

Ⓐ 2. Ⓑ 3. Ⓒ 4. Ⓓ 6.

Lời giải.



Xét hàm số: $y = \dfrac{(x^2 + 4x + 3)\sqrt{x^2 + x}}{x\left[f^2(x) - 2f(x)\right]} = \dfrac{(x+1)(x+3)\sqrt{x(x+1)}}{x.f(x).\left[f(x) - 2\right]}$.

Điều kiện tồn tại căn $\sqrt{x^2 + x}$: $\left[\begin{array}{l} x \geq 0 \\ x \leq -1 \end{array}\right.$

Xét phương trình$x\left[f^2(x)-2f(x)\right]=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ f(x)=0 \\ f(x)=2 \end{array}\right.$

- Với $x=0$ ta có $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{(x+1)(x+3)\sqrt{x(x+1)}}{x.f(x).[f(x)-2]}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{(x+1)(x+3)\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}.f(x).[f(x)-2]}=+\infty$.
Suy ra $x=0$ là tiệm cận đứng.

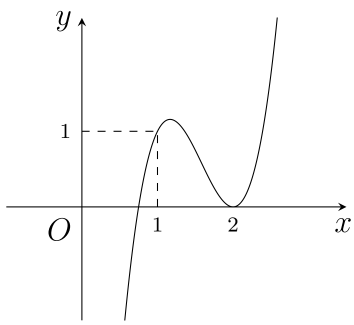
- Với $f(x)=0\Rightarrow x=-3$ (nghiệm bội 2) hoặc $x=a$ (loại vì $-1<a<0$).
Ta có: $\lim\limits_{x\to -3^+}\dfrac{(x+1)(x+3)\sqrt{x(x+1)}}{x.f(x).[f(x)-2]}=-\infty$ nên $x=-3$ là tiệm cận đứng.

- Với $f(x)=2\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=b\,(-3<b<-1)\,\text{(nghiệm bội 1).} \\ x=c\,(c<-3) \end{array}\right.$
Ta có:
$+)\ \lim\limits_{x\to b^+}\dfrac{(x+1)(x+3)\sqrt{x(x+1)}}{x.f(x).[f(x)-2]}=0\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{(x+1)(x+3)\sqrt{x(x+1)}}{x.f(x).[f(x)-2]}=0 \\ \lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{(x+1)(x+3)\sqrt{x(x+1)}}{x.f(x).[f(x)-2]}=0 \end{array}\right.$
nên $x=-1$ không là tiệm cận đứng.
$+)\ \lim\limits_{x\to b^+}\dfrac{(x+1)(x+3)\sqrt{x(x+1)}}{x.f(x).[f(x)-2]}=+\infty$ (do $x\to b^+$ thì $f(x)\to 2^+$)
nên $x=b$ là tiệm cận đứng.
$+)\ \lim\limits_{x\to c^+}\dfrac{(x+1)(x+3)\sqrt{x(x+1)}}{x.f(x).[f(x)-2]}=+\infty$ (do $x\to c^+$ thì $f(x)\to 2^-$)
nên $x=c$ là tiệm cận đứng.

Vậy đồ thị hàm số có 4 tiệm cận đứng.

Chọn đáp án (C) □

Câu 11. Cho hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Hỏi đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{(x^2-3x+2)\sqrt{x-1}}{x\left[f^2(x)-f(x)\right]}$ có bao nhiêu tiệm cận đứng?

(A) 2. (B) 4. (C) 3. (D) 5.

Lời giải.

- **Nhận xét 1**: Với $x_0\geq 1$ và $\lim\limits_{x\to x_0^+}g(x)$ hoặc $\lim\limits_{x\to x_0^-}g(x)$ có kết quả là $+\infty$ hoặc $-\infty$ thì $x=x_0$ là tiệm cận đứng của của đồ thị hàm số $g(x)$

☑ **Nhận xét 2**: Dựa vào đồ thị hàm số $f(x)$ ta có: $f(x) = a(x - x_1)(x-2)^2$

Ta có: $x\left[f^2(x) - f(x)\right] = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ f(x) = 0 \\ f(x) = 1 \end{array}\right.$

☑ $f(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = x_1,\ 0 < x_1 < 1 \\ x = 2 \end{array}\right.$

☑ $f(x) = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = x_2\,,\ 1 < x_2 < 2 \text{ suy ra } f(x) - 1 = a(x-1)(x-x_2)(x-x_3) \\ x = x_3\,,\ x_3 > 2 \end{array}\right.$

Khi đó ta có $g(x) = \dfrac{(x^2 - 3x + 2)\sqrt{x-1}}{x\left[f^2(x) - f(x)\right]} = \dfrac{(x-1)(x-2)\sqrt{x-1}}{x.f(x)\left[f(x) - 1\right]}$.

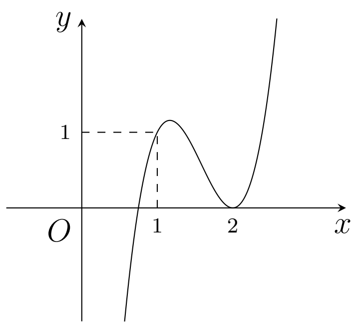
$g(x) = \dfrac{(x-1)(x-2)\sqrt{x-1}}{x.a(x-x_1)(x-2)^2.a(x-1)(x-x_2)(x-x_3)} = \dfrac{\sqrt{x-1}}{a^2x(x-x_1)(x-2)(x-x_2)(x-x_3)}$

$x = 0\,,\ x = x_1$ không phải tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = g(x)$ không thỏa mãn điều kiện $x_0 \geq 1$.

Đồ thị hàm số $g(x)$ có 3 đường tiệm cận đứng là: $x = 2$, $x = x_2$, $x = x_3$

Chọn đáp án C ☐

Câu 12. Cho hàm số bậc ba $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ sau.



Hỏi đồ thị hàm số $g(x) = \dfrac{(x^2 - 3x + 2)\sqrt{x-1}}{(x+1)\left[f^2(x) - f(x)\right]}$ có bao nhiêu tiệm cận đứng?

(A) 5. (B) 4. (C) 6. (D) 3.

Lời giải.

Ta có $g(x) = \dfrac{(x-1)(x-2)\sqrt{x-1}}{(x+1)f(x)\left[f(x) - 1\right]}$. ĐKXĐ: $\begin{cases} x \geq 1 \\ f(x) \neq 0 \\ f(x) \neq 1 \end{cases}$

Dựa vào đồ thị hàm số $y = f(x)$, ta có:

☑ $f(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = x_1 \end{array}\right.$. Với $x = 2$ là nghiệm kép, $x_1 \in (0;\ 1)$

☑ $f(x) = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = x_2 \\ x = x_3 \end{array}\right.$. Với $x_2 \in (1;\, 2)\,;\, x_3 > 2$

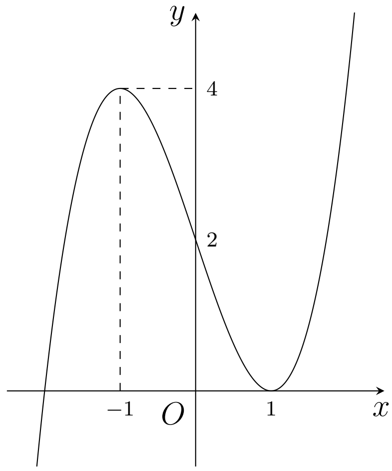
Vậy

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{(x-1)(x-2)\sqrt{x-1}}{a^2(x+1)(x-2)^2(x-x_1)(x-1)(x-x_2)(x-x_3)} \\ &= \frac{\sqrt{x-1}}{a^2\,(x+1)\,(x-2)\,(x-x_1)\,(x-x_2)\,(x-x_3)} \end{aligned}$$

Vậy đồ thị hàm số có 3 TCĐ $x = 2$; $x = x_2$; $x = x_3$ (do $x \geq 1$ nên ta loại $x = -1$; $x = x_1$).

Chọn đáp án (D) □

Câu 13. Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm số đa thức có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Đặt $g(x) = \dfrac{x^2 - x}{f^2(x) - 2f(x)}$. Hỏi đồ thị hàm số $y = g(x)$ có bao nhiêu tiệm cận đứng?

(A) 5. (B) 3. (C) 4. (D) 2.

Lời giải.

Ta xét phương trình $f^2(x) - 2f(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = 0 \\ f(x) = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = x_1 < -1 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = x_2 > 1 \\ x = x_3 < -1, x_3 \neq x_1 \end{array}\right. \end{array}\right.$

Khi đó $g(x) = \dfrac{x^2 - x}{ax(x-1)^2\,(x-x_1)\,(x-x_2)\,(x-x_3)} = \dfrac{1}{a\,(x-1)\,(x-x_1)\,(x-x_2)\,(x-x_3)}$; $(a \neq 0)$

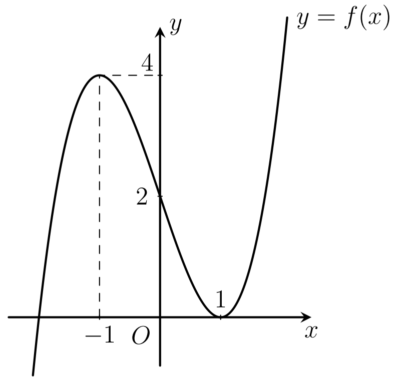
Vậy đồ thị hàm số $y = g(x)$ có 4 đường tiệm cận đứng.

Chọn đáp án (C) □

Câu 14 (THPT Thuận Thành 3 - Bắc Ninh 2019).

Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm số đa thức có đồ thị như hình vẽ dưới đây, đặt $g(x) = \dfrac{x^2 - x}{f^2(x) - 2f(x)}$.

Hỏi đồ thị hàm số có bao nhiêu tiệm cận đứng?



(A) 5. (B) 3. (C) 4. (D) 2.

Lời giải.

Ta xét phương trình:

$$f^2(x)-2f(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=0 \\ f(x)=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=x_1<-1 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=x_2>1 \\ x=x_3<-1, x_3\neq x_1 \end{array}\right. \end{array}\right. . \text{ Khi đó:}$$

$$g(x)=\frac{x^2-x}{ax(x-1)^2(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}=\frac{1}{a(x-1)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}; \ (a\neq 0).$$

Vậy đồ thị hàm số $g(x)$ có 4 đường tiệm cận đứng.

Chọn đáp án (C) □

Câu 15 (Chuyên Bắc Giang 2019). Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình bên dưới

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{f(x^3+x)+3}$ là

(A) 2. (B) 4. (C) 3. (D) 1.

Lời giải.

* Tính tiệm cận ngang.

Ta có: $x^3+x \xrightarrow{x\to+\infty} +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{f(x^3+x)+3}=0$

$x^3+x \xrightarrow{x\to-\infty} -\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{f(x^3+x)+3}=0$

Vậy đồ thị hàm số có 1 tiệm cận ngang $y=0$.

* Tính tiệm cận đứng.

Số đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số là số nghiệm của phương trình $f(x^3+x)+3=0$.

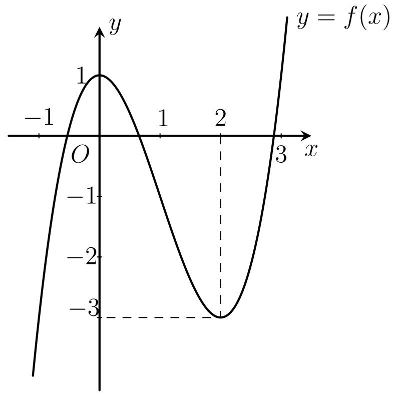
Dựa vào bảng biến thiên ta có $f(x^3+x)+3=0 \Leftrightarrow f(x^3+x)=-3 \Leftrightarrow x^3+x=x_0; x_0 \in (-\infty;1)$

Vì hàm số $y=x^3+x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ do đó $x^3+x=x_0; x_0 \in (-\infty;1)$ có một nghiệm duy nhất.

Vậy đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{f(x^3+x)+3}$ có 1 tiệm cận đứng.

Chọn đáp án A $\square$

Câu 16 (THPT Minh Khai 2020). Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như bên dưới.



Hỏi đồ thị hàm số $y=\dfrac{(x^2-2x)\sqrt{2-x}}{(x-3)\left[f^2(x)-f(x)\right]}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

A 4. B 6. C 3. D 5.

Lời giải.

Ta có $y'=3ax^2+2bx+c$.

Dựa vào đồ thị hàm số, ta thấy hàm số đạt cực trị tại $x=0$, $x=2$. Do đó, ta có hệ:

$$\begin{cases} y(0)=1 \\ y(2)=-3 \\ y'(0)=0 \\ y'(2)=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d=1 \\ c=0 \\ 12a+4b=0 \\ 8a+4b=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-3 \\ c=0 \\ d=1 \end{cases}.$$

Vậy $y=f(x)=x^3-3x^2+1$. Khi đó:

$$y=\frac{(x^2-2x)\sqrt{2-x}}{(x-3)\left[f^2(x)-f(x)\right]}=\frac{(x^2-2x)\sqrt{2-x}}{(x-3)(x^3-3x^2+1)(x^3-3x^2)}=\frac{(x^2-2x)\sqrt{2-x}}{x^2(x-3)^2(x^3-3x^2+1)}.$$

Ta có: $x^2(x-3)^2(x^3-3x^2+1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=3 \\ x=x_1 \in (-1;0) \\ x=x_2 \in (0;1) \\ x=x_3 \in (2;3) \end{array}\right.$.

Hàm số $y=\dfrac{(x^2-2x)\sqrt{2-x}}{(x-3)\left[f^2(x)-f(x)\right]}$ có tập xác định $\mathscr{D}=(-\infty;2]\setminus\{0;x_1;x_2\}$.

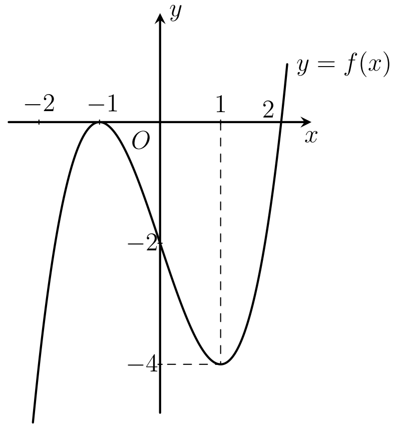
$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{(x^2-2x)\sqrt{2-x}}{x^2(x-3)^2(x^3-3x^2+1)}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x(x-2)\sqrt{2-x}}{x^2(x-3)^2(x^3-3x^2+1)}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{(x-2)\sqrt{2-x}}{x(x-3)^2(x^3-3x^2+1)}=-\infty$. Suy ra $x=0$ là đường tiệm cận đứng.

$\lim\limits_{x\to x_1^+}\dfrac{(x^2-2x)\sqrt{2-x}}{x^2(x-3)^2(x^3-3x^2+1)}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to x_2^+}\dfrac{(x^2-2x)\sqrt{2-x}}{x^2(x-3)^2(x^3-3x^2+1)}=+\infty$.

Suy ra $x=x_1$ và $x=x_2$ cũng là các đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Chọn đáp án (C) □

Câu 17 (Yên Phong 1 - 2018). Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $a \neq 0$ có đồ thị như hình dưới đây.



Hỏi đồ thị hàm số $g(x) = \dfrac{\sqrt{f(x)}}{(x+1)^2(x^2-4x+3)}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

(A) 2. (B) 1. (C) 3. (D) 4.

Lời giải.

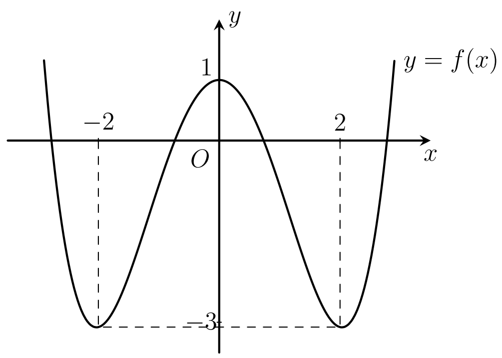
Điều kiện xác định: $\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ x \neq -1 \\ x^2 - 4x + 3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x \neq -1 \\ x \neq 1 \\ x \neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x \neq 3 \end{cases}$.

Ta có: $\lim\limits_{x \to 3^+} g(x) = \lim\limits_{x \to 3^+} \dfrac{\sqrt{f(x)}}{(x+1)^2(x^2-4x+3)} = +\infty$ và $\lim\limits_{x \to 3^-} g(x) = \lim\limits_{x \to 3^-} \dfrac{\sqrt{f(x)}}{(x+1)^2(x^2-4x+3)} = -\infty$. Vậy đồ thị hàm số $g(x) = \dfrac{\sqrt{f(x)}}{(x+1)^2(x^2-4x+3)}$ có một đường tiệm cận đứng là: $x = 3$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 18 (Chuyên Quang Trung - 2020).

Cho hàm số trùng phương $y = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị như hình vẽ.



Hỏi đồ thị hàm số $y = \dfrac{(x^2-4)(x^2+2x)}{[f(x)]^2 + 2f(x) - 3}$ có tổng cộng bao nhiêu tiệm cận đứng?

(A) 5. (B) 2. (C) 3. (D) 4.

Lời giải.

$y = \dfrac{(x^2-4)(x^2+2x)}{[f(x)]^2+2f(x)-3} = \dfrac{x(x+2)^2(x-2)}{[f(x)]^2+2f(x)-3}$.

Ta có: $[f(x)]^2+2f(x)-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=1 \\ f(x)=-3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=m(m<-2) \\ x=0 \\ x=n(n>2) \\ x=2 \\ x=-2 \end{array}\right.$.

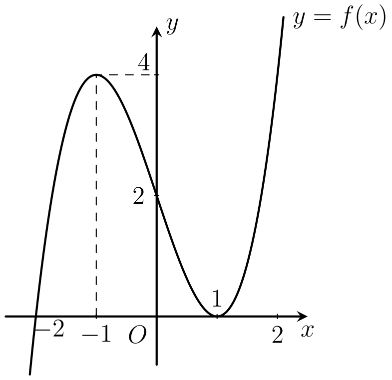
Dựa vào đồ thị ta thấy các nghiệm $x=0, x=\pm 2$ là các nghiệm kép (nghiệm bội 2) và đa thức $[f(x)]^2+2f(x)-3$ có bậc là 8 nên $y = \dfrac{x(x+2)^2(x-2)}{a^2x^2(x+2)^2(x-2)^2(x-m)(x-n)}$.

Vậy hàm số có các tiệm cận đứng là $x=0, x=2, x=m, x=n$.

Chọn đáp án D □

Câu 19 (Chuyên Quang Trung - Bình Phước 2021).

Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị $y=f(x)$ như hình vẽ.



Số đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2+x-2}{f^2(x)-f(x)}$ là

(A) 4. (B) 3. (C) 2. (D) 5.

Lời giải.

Xét hàm số $y=\dfrac{x^2+x-2}{f^2(x)-f(x)} = \dfrac{(x-1)(x+2)}{f(x)\,[f(x)-1]}$.

Xét phương trình $f(x)\,[f(x)-1]=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=0 \\ f(x)=1 \end{array}\right.$.

Với $f(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1(\text{nghiệm kép}) \\ x=-2(\text{nghiệm đơn}) \end{array}\right. \Rightarrow x=1$ là TCĐ, $x=-2$ không là TCĐ.

Với $f(x)=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=x_1\in(0;1) \\ x=x_2\in(-2;-1) \end{array}\right. \Rightarrow x=0, x=x_1, x=x_2$ đều là các đường TCĐ.

Vậy đồ thị hàm số có 4 đường TCĐ.

Chọn đáp án A □

Câu 20 (Chuyên Lê Quý Đôn - Điện Biên 2021).

Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$, có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	
y	0	↗	1	↘	0

Với giá trị nào của m thì đồ thị hàm số $y = \dfrac{1}{f^2(x) - m}$ có tổng số đường tiệm cận ngang và tiệm cận đứng bằng 3.

Ⓐ $0 < m \leq 1$. Ⓑ $0 \leq m \leq 1$. Ⓒ $0 < m < 1$. Ⓓ $m = 0$.

Lời giải.

Ta có: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} y = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{1}{f^2(x) - m} = \dfrac{1}{-m}$ vì $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$. Do đó:

Nếu $m = 0$ thì đồ thị hàm số $y = \dfrac{1}{f^2(x) - m}$ không có tiệm cận ngang.

Mặt khác phương trình $f^2(x) - m = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$ vô nghiệm nên đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng.

Nếu $m \neq 0$ thì đồ thị hàm số $y = \dfrac{1}{f^2(x) - m}$ có một đường tiệm cận ngang là $y = -\dfrac{1}{m}$.

* $m < 0$; Phương trình $f^2(x) - m = 0$ vô nghiệm nên đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng.

* $m > 0$: Phương trình $f^2(x) - m = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = \sqrt{m} \\ f(x) = -\sqrt{m} \end{array}\right.$. Dựa vào bảng biến thiên ta thấy phương trình $f(x) = -\sqrt{m}$ vô nghiệm với $\forall m > 0$.

Vậy đồ thị hàm số có 3 đường tiệm cận $\Leftrightarrow$ phương trình $f(x) = \sqrt{m}$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow 0 < m < 1$.

Vậy $0 < m < 1$ thì đồ thị hàm số $y = \dfrac{1}{f^2(x) - m}$ có 3 tiệm cận

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 21 (THPT Đồng Quan - Hà Nội 2021).

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\infty$		-1		1		2		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	2	↘	-8	↗	8	↘	4	↗	10	↘	$-\infty$

Số đường tiệm cận (đứng và ngang) của đồ thị hàm số $y = \dfrac{1}{[f(x+1) - 4]\sqrt{x^2 - 4}}$ là

(A) 5. (B) 2. (C) 3. (D) 4.

Lời giải.

Điều kiện: $\left[\begin{array}{l} x^2-4>0 \\ f(x+1)\neq 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<-2 \vee x>2 \\ f(x+1)\neq 4 \end{array}\right.$.

Xét $f(x+1)=4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+1=\alpha\in(-1;1) \\ x+1=2 \\ x+1=\beta\in(4;+\infty) \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} x=\alpha-1\in(-2;0)(\text{loại}) \\ x=1(\text{loại}) \\ x=\beta-1\in(3;+\infty)(\text{nhận}) \end{array}\right.$.

Khi đó:

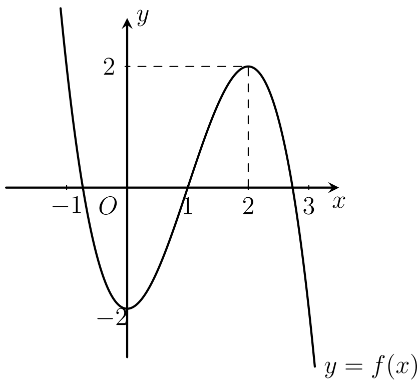
* $\lim\limits_{x\to(-2)^-} y=-\infty$, $\lim\limits_{x\to 2^+} y=+\infty$, $\lim\limits_{x\to(\beta-1)^-} y=+\infty$, $\lim\limits_{x\to(\beta-1)^+} y=-\infty$ nên đồ thị hàm số có 3 tiệm cận đứng.

* $\lim\limits_{x\to-\infty} y=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} y=0$ nên đồ thị có 1 tiệm cận ngang.

Chọn đáp án (D) □

Câu 22 (Liên trường Nghệ An - 2021).

Cho $f(x)$ là hàm đa thức bậc ba và có đồ thị như hình vẽ.



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-100;100]$ để đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{1+mx^2}}{f(x)-m}$ có đúng hai đường tiệm cận.

(A) 100. (B) 99. (C) 2. (D) 196.

Lời giải.

Trường hợp 1: $m=0 \Rightarrow y=\dfrac{1}{f(x)}$. Đồ thị hàm số có một TCN $y=0$ và ba tiệm cận đứng nên $m=0$ không thoả mãn.

Trường hợp 2: $m<0$. Đồ thị hàm số không có TCN.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow f(x)=m$ có nghiệm, trong đó có đúng hai nghiệm thoả mãn $1+mx^2\geq 0$, mà m là số nguyên nên dựa vào đồ thị ta chỉ cần xét $m\in\{-2;-1\}$.

* Với $m=-2 \Rightarrow y=\dfrac{\sqrt{1-2x^2}}{f(x)+2}$. Khi đó $f(x)=-2$ có hai nghiệm $x_1=0, x_2=a>2$. Nghiệm x_2 không thoả mãn điều kiện $1+mx^2\geq 0$ nên $m=-2$ không thoả mãn.

* Với $m=-1 \Rightarrow y=\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{f(x)+1}$. Khi đó $f(x)=-1$ có hai nghiệm $x_1=b\in(-1;0), x_2=c\in(0;1)$. cả hai nghiệm đều thoả mãn điều kiện $1-x^2\geq 0$ nên $m=-1$ thoả mãn.

Trường hợp 3: $m>0$. Khi đó $1+mx^2\geq 0, \forall x\in\mathbb{R}$.

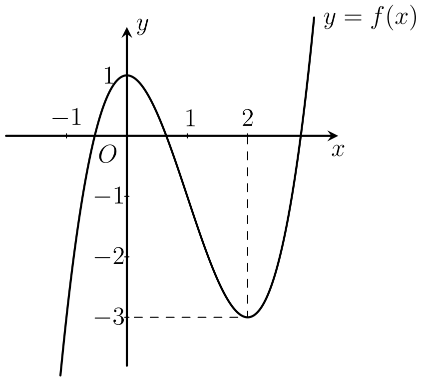
Đồ thị hàm số có một TCN $y = 0$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow f(x) = m$ có đúng một nghiệm $x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow m > 2$.

Vì m nguyên thuộc đoạn $[-100; 100] \Leftrightarrow \begin{cases} m \in \mathbb{Z} \\ m \in [3; 100] \cup \{-1\} \end{cases}$ nên có 99 giá trị.

Chọn đáp án B □

Câu 23 (Chuyên Bắc Ninh- 2022). Cho hàm số bậc ba $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ.



Hỏi đồ thị hàm số $g(x) = \dfrac{(x^2 - 2x)\sqrt{2 - x}}{(x - 3)\left[f^2(x) + 3f(x)\right]}$ có bao nhiêu tiệm cận đứng?

A 6. B 3. C 4. D 5.

Lời giải.

Điều kiện: $\sqrt{2 - x}$ là $x \leq 2$ (*).

Ta có: $(x - 3)\left[f^2(x) + 3f(x)\right] = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ f(x) = 0 \\ f(x) = -3 \end{array}\right.$.

* Ta có $x = 3$ không thoả mãn (*).

* $f(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = a < 0 \\ x = b \in (0; 2) \\ x = c > 2 \end{array}\right.$. Ta có $x = c$ không thoả mãn (*).

Ta có $\lim\limits_{x \to a^+} g(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to b^+} g(x) = +\infty$. Vậy $x = a, x = b$ là các đường tiệm cận đứng.

* $f(x) = -3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = d < 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$. Ta có $\lim\limits_{x \to d^+} g(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to 2^-} g(x) = +\infty$. vậy $x = d, x = 2$ là các đường tiệm cận đứng.

Chọn đáp án C □

BẢNG ĐÁP ÁN

1. C	2. C	3. A	4. C	5. B	6. A	7. A	8. B	9. D	10. C
11. C	12. D	13. C	14. C	15. A	16. C	17. B	18. D	19. A	20. C
21. D	22. B	23. C							

CHỦ ĐỀ 5

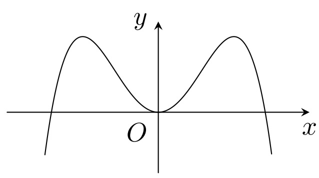
ĐỌC ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

MỨC ĐỘ 1. MỨC ĐỘ 5,6 ĐIỂM

Dạng 1. Nhận dạng hàm số thường gặp thông qua đồ thị

Câu 1 (Đề Minh Họa 2020 Lần 1).

Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong dưới đây?



(A) $y = -x^4 + 2x^2$.
(B) $y = x^4 - 2x^2$.
(C) $y = x^3 - 3x^2$.
(D) $y = -x^3 + 3x^2$.

Lời giải.

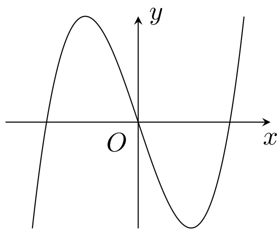
Từ hình dạng của đồ thị ta loại phương án $y = x^3 - 3x^2$.

Nhận thấy $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = -\infty$ suy ra hệ số của x^4 âm nên chọn phương án $y = -x^4 + 2x^2$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 2 (Đề Tham Khảo 2020 Lần 2).

Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình bên?



(A) $y = x^3 - 3x$.
(B) $y = -x^3 + 3x$.
(C) $y = x^4 - 2x^2$.
(D) $y = -x^4 + 2x^2$.

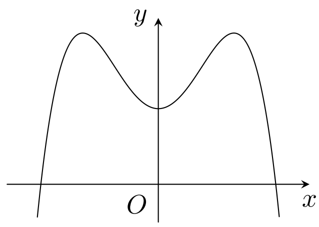
Lời giải.

Đường cong có dạng của đồ thị hàm số bậc 3 với hệ số $a > 0$ nên chỉ có hàm số $y = x^3 - 3x$ thỏa yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án (A) □

Câu 3 (Mã 101 - 2020 Lần 1).

Đồ thị hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình bên?



(A) $y = x^3 - 3x^2 + 1$.
(B) $y = -x^3 + 3x^2 + 1$.
(C) $y = -x^4 + 2x^2 + 1$.
(D) $y = x^4 - 2x^2 + 1$.

Lời giải.

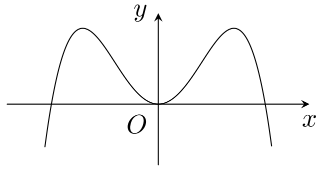
Từ hình có đây là hình dạng của đồ thị hàm bậc 4.

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty \Rightarrow a < 0$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 4 (Mã 102 - 2020 Lần 1).

Đồ thị hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình bên?



(A) $y - x^4 + 2x^2$.
(B) $y = -x^3 + 3x$.
(C) $y = x^4 - 2x^2$.
(D) $y = x^3 - 3x$.

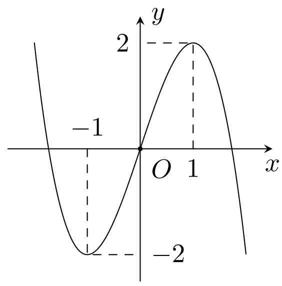
Lời giải.

Đồ thị trong hình là đồ thị hàm $y = ax^4 + bx^2 + c$ với $a < 0$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 5 (Mã 103 - 2020 Lần 1).

Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Số nghiệm thực của phương trình $f(x) = 1$ là



(A) 1. (B) 0. (C) 2. (D) 3.

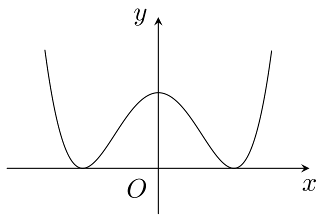
Lời giải.

Từ đồ thị hàm số ta có số nghiệm thực của phương trình $f(x) = 1$ là 3 .

Chọn đáp án (D) □

Câu 6 (Mã 104 - 2020 Lần 1).

Đồ thị hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình bên?



(A) $y = x^4 - 2x^2 + 1$.
(B) $y = -x^3 + 3x^2 + 1$.
(C) $y = x^3 - 3x^2 + 1$.
(D) $y = -x^4 + 2x^2 + 1$.

Lời giải.

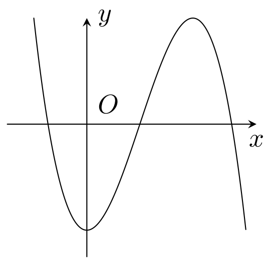
Dựa vào hình vẽ, ta thấy đồ thị hàm số có ba điểm cực trị nên loại các phương án $y = -x^3 + 3x^2 + 1$ và $y = x^3 - 3x^2 + 1$.

Mặt khác, ta thấy $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^4 - 2x^2 + 1) = +\infty$ nên chọn đáp án $y = x^4 - 2x^2 + 1$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 7 (Mã 101 - 2020 Lần 2).

Đồ thị hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong hình bên



(A) $y = x^4 - 2x^2 - 2$.
(B) $y = -x^3 + 3x^2 - 2$.
(C) $y = x^3 - 3x^2 - 2$.
(D) $y = -x^4 + 2x^2 - 2$.

Lời giải.

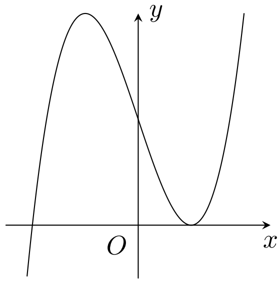
Đồ thị đã cho là hàm bậc 3 nên loại $y = x^4 - 2x^2 - 2$ và $y = -x^4 + 2x^2 - 2$.

Bên phải ngoài cùng của đồ thị đi xuống nên hệ số $a < 0$, suy ra loại đáp án $y = x^3 - 3x^2 - 2$.

Chọn đáp án B □

Câu 8 (Mã 104 - 2017).

Đường cong hình bên là đồ thị của một trong bốn hàm số dưới đây. Hàm số đó là hàm số nào?



A $y = -x^3 + 3x + 2$.
B $y = x^4 - x^2 + 1$.
C $y = x^4 + x^2 + 1$.
D $y = x^3 - 3x + 2$.

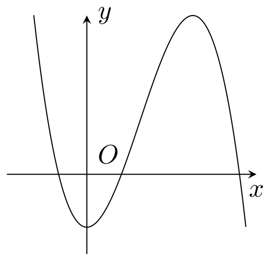
Lời giải.

Đồ thị hình vẽ là đồ thị hàm số bậc ba có hệ số $a > 0$ nên chỉ có hàm số $y = x^3 - 3x + 2$ thỏa mãn điều kiện trên.

Chọn đáp án D □

Câu 9 (Mã 102 - 2020 Lần 2).

Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình bên?



A $y = -x^4 + 2x^2 - 1$.
B $y = x^4 - 2x^2 - 1$.
C $y = x^3 - 3x^2 - 1$.
D $y = -x^3 + 3x^2 - 1$.

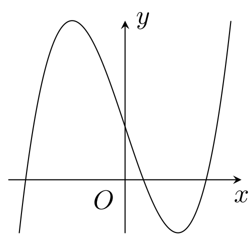
Lời giải.

Dựa vào đồ thị có dạng đồ thị của hàm số bậc ba có hệ số $a < 0$ nên đáp án $y = -x^3 + 3x^2 - 1$ đúng.

Chọn đáp án D □

Câu 10 (Mã 103 - 2020 Lần 2).

Đồ thị của hàm số dưới đây có dạng như đường cong bên?



A $y = x^3 - 3x + 1$.
B $y = x^4 - 2x^2 + 1$.
C $y = -x^4 + 2x^2 + 1$.
D $y = -x^3 + 3x + 1$.

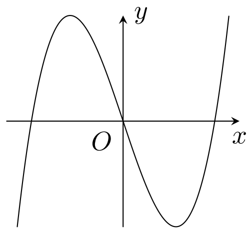
Lời giải.

Đồ thị đã cho là đồ thị hàm bậc ba, với hệ số $a > 0$.

Chọn đáp án A □

Câu 11 (Mã 104 - 2020 Lần 2).

Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình bên?



Ⓐ $y = x^4 + 2x^2$. Ⓑ $y = -x^3 - 3x$.
Ⓒ $y = x^3 - 3x$. Ⓓ $y = -x^4 + 2x^2$.

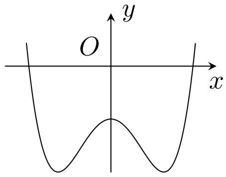
Lời giải.

Đây là đồ thị của hàm số bậc ba với hệ số $a > 0$, đó là hàm số $y = x^3 - 3x$.

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 12 (Mã 102 - 2018).

Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



Ⓐ $y = -x^3 + x^2 - 1$. Ⓑ $y = -x^4 + 2x^2 - 1$.
Ⓒ $y = x^3 - x^2 - 1$. Ⓓ $y = x^4 - 2x^2 - 1$.

Lời giải.

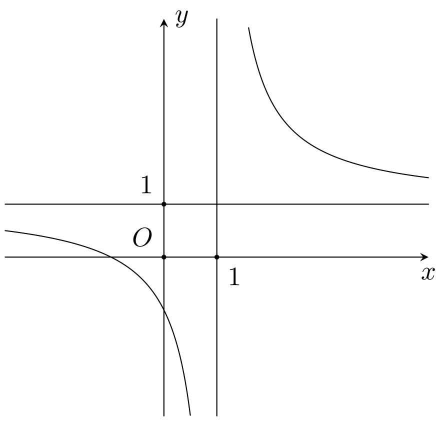
Dựa vào hình vẽ suy ra hàm số đã cho có 3 cực trị$\rightarrow$ loại $y = x^3 - x^2 - 1$.

Mặt khác nhánh bên tay phải của đồ thị hàm số đi lên suy ra hệ số $a > 0$, nên chọn $y = x^4 - 2x^2 - 1$.

Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 13 (Đề Tham Khảo 2019).

Đường con trong hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



Ⓐ $y = \dfrac{2x - 1}{x - 1}$. Ⓑ $y = \dfrac{x + 1}{x - 1}$.
Ⓒ $y = x^4 + x^2 + 1$. Ⓓ $y = x^3 - 3x - 1$.

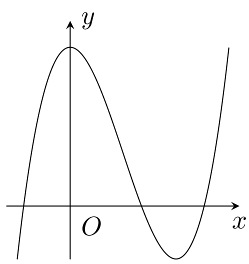
Lời giải.

Từ đồ thị ta suy ra đồ thị của hàm phân thức có tiệm cận đứng và ngang lần lượt là các đường thẳng $x = 1$; $y = 1$.

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 14 (Mã 110 - 2017).

Đường cong ở hình bên dưới là đồ thị của một trong bốn hàm số dưới đây. Hàm số đó là hàm số nào?



Ⓐ $y = -x^3 + 3x^2 + 1$. Ⓑ $y = x^3 - 3x^2 + 3$.
Ⓒ $y = -x^4 + 2x^2 + 1$. Ⓓ $y = x^4 - 2x^2 + 1$.

Lời giải.

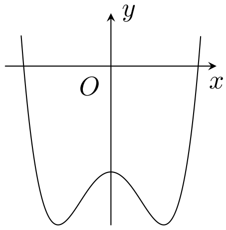
Dựa vào đồ thị ta thấy đây là hình ảnh đồ thị của hàm số bậc ba nên loại đáp án $y=-x^4+2x^2+1$ và $y=x^4-2x^2+1$.

Mặt khác dựa vào đồ thị ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} y=+\infty$ nên hệ số của x^3 dương nên ta chọn đáp án $y=x^3-3x^2+3$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 15 (Mã 103 - 2019).

Đồ thị hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình vẽ bên?



(A) $y=x^3-3x^2-2$. (B) $y=x^4-2x^2-2$.

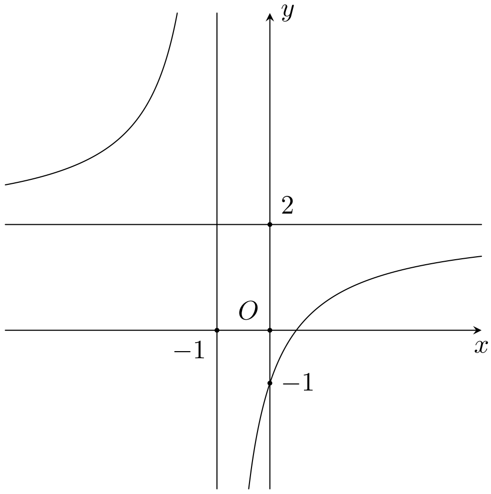
(C) $y=-x^3+3x^2-2$. (D) $y=-x^4+2x^2-2$.

Lời giải.

Quan sát đồ thị ta thấy đây là đồ thị của hàm số $y=ax^4+bx^2+c\ (a>0)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 16 (Đề Tham Khảo 2017). Cho đường cong hình vẽ dưới đây là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi đó là hàm số nào?



(A) $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$. (B) $y=\dfrac{2x+3}{x+1}$. (C) $y=\dfrac{2x-1}{x+1}$. (D) $y=\dfrac{2x-2}{x-1}$.

Lời giải.

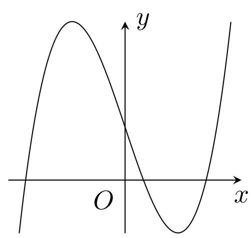
Dựa vào đồ thị suy ra tiệm cận đứng $x=-1$ loại $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$ và $y=\dfrac{2x-2}{x-1}$.

Đồ thị hàm số giao với trục hoành có hoành độ dương suy ra chọn $y=\dfrac{2x-1}{x+1}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 17 (Đề Minh Họa 2017).

Đường cong trong hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?



(A) $y=x^3-3x+1$. (B) $y=-x^3+3x+1$.

(C) $y=x^4-x^2+1$. (D) $y=-x^2+x-1$.

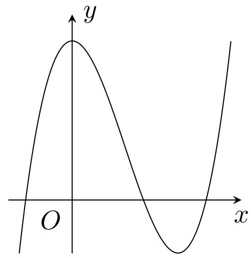
Lời giải.

Từ đồ thị $\lim\limits_{x\to+\infty} y = +\infty$ và đây là đồ thị hàm bậc ba nên ta chọn phương án $y = x^3 - 3x + 1$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 18 (Mã 101 - 2019).

Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình vẽ bên?



(A) $y = x^3 - 3x^2 + 3$. (B) $y = -x^3 + 3x^2 + 3$.
(C) $y = x^4 - 2x^2 + 3$. (D) $y = -x^4 + 2x^2 + 3$.

Lời giải.

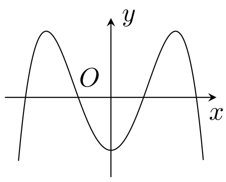
Dạng hàm bậc ba nên loại $y = x^4 - 2x^2 + 3$ và $y = -x^4 + 2x^2 + 3$.

Từ đồ thị ta có $a > 0$. Do đó loại $y = -x^3 + 3x^2 + 3$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 19 (Mã 101 - 2018).

Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



(A) $y = x^3 - 3x^2 - 1$. (B) $y = -x^3 + 3x^2 - 1$.
(C) $y = -x^4 + 3x^2 - 1$. (D) $y = x^4 - 3x^2 - 1$.

Lời giải.

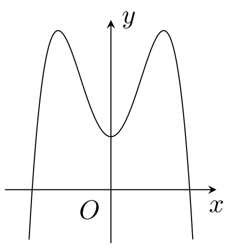
Nhìn đồ thị khẳng định đồ thị hàm trùng phương loại $y = x^3 - 3x^2 - 1$ và $y = -x^3 + 3x^2 - 1$.

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} y = -\infty$ nên chọn $y = -x^4 + 3x^2 - 1$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 20 (Mã 104 - 2019).

Đồ thị hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình vẽ bên?



(A) $y = 2x^4 - 4x^2 + 1$. (B) $y = -2x^3 + 3x + 1$.
(C) $y = 2x^3 - 3x + 1$. (D) $y = -2x^4 + 4x^2 + 1$.

Lời giải.

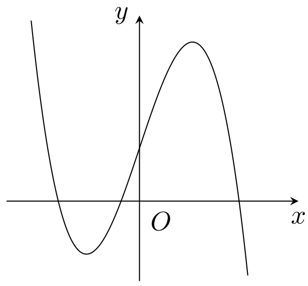
Dạng đồ thị hình bên là đồ thị hàm số trùng phương $y = ax^4 + bx^2 + c$ có hệ số $a < 0$.

Do đó, chỉ có đồ thị ở đáp án $y = -2x^4 + 4x^2 + 1$ là thỏa mãn.

Chọn đáp án (D) □

Câu 21 (Mã 102 2019).

Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình vẽ bên



(A) $y = -x^3 + 3x + 1$. (B) $y = x^3 - 3x + 1$.
(C) $y = x^4 - 2x^2 + 1$. (D) $y = -x^4 + 2x^2 + 1$.

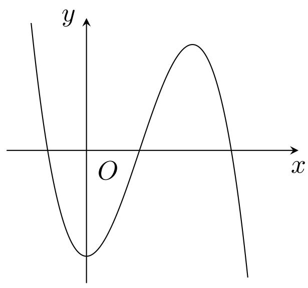
Lời giải.

Trong bốn hàm số đã cho thì chỉ có hàm số $y = -x^3 + 3x + 1$ (hàm số đa thức bậc ba với hệ số $a < 0$) có dạng đồ thị như đường cong trong hình.

Chọn đáp án (A) □

Câu 22 (Mã 104 2018).

Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



(A) $y = x^4 - x^2 - 2$. (B) $y = -x^4 + x^2 - 2$.
(C) $y = -x^3 + 3x^2 - 2$. (D) $y = x^3 - 3x^2 - 2$.

Lời giải.

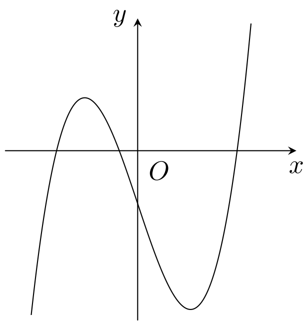
Dựa trên hình dáng đồ thị, ta loại $y = x^3 - 3x^2 - 2$ và $y = x^4 - x^2 - 2$.

Mặt khác từ đồ thị, ta thấy $\lim\limits_{x \to +\infty} y = -\infty$ nên loại $y = -x^4 + x^2 - 2$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 23 (Mã 103 2018).

Đường cong trong hình vẽ là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



(A) $y = x^3 - 3x - 1$. (B) $y = x^4 - 3x^2 - 1$.
(C) $y = -x^3 - 3x - 1$. (D) $y = -x^4 + x^2 - 1$.

Lời giải.

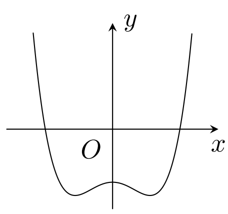
Dựa trên hình dáng đồ thị, ta loại các hàm số $y = x^4 - 3x^2 - 1$ và $y = -x^4 + x^2 - 1$.

Mặt khác từ đồ thị, ta thấy $\lim\limits_{x \to -\infty} y = -\infty$ nên loại $y = -x^3 - 3x - 1$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 24 (Mã 123 2017).

Đường cong ở hình bên là đồ thị của một trong bốn hàm số dưới đây. Hàm số đó là hàm số nào?



(A) $y = x^4 - x^2 - 1$. (B) $y = -x^4 + x^2 - 1$.
(C) $y = x^3 - x^2 - 1$. (D) $y = -x^3 + x^2 - 1$.

Lời giải.

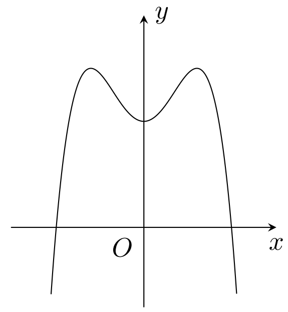
Đây là hình dáng của đồ thị hàm bậc bốn trùng phương có hệ số $a > 0$ nên ta loại các hàm số $y = -x^4 + x^2 - 1$, $y = x^3 - x^2 - 1$, $y = -x^3 + x^2 - 1$.

Chọn đáp án A □

Câu 25 (Đề Tham Khảo 2018).

Đường cong trong hình bên là của đồ thị hàm số nào dưới đây?

A. $y = x^3 - 3x^2 + 2$.
B. $y = -x^3 + 3x^2 + 2$.
C. $y = -x^4 + 2x^2 + 2$.
D. $y = x^4 - 2x^2 + 2$.



Lời giải.

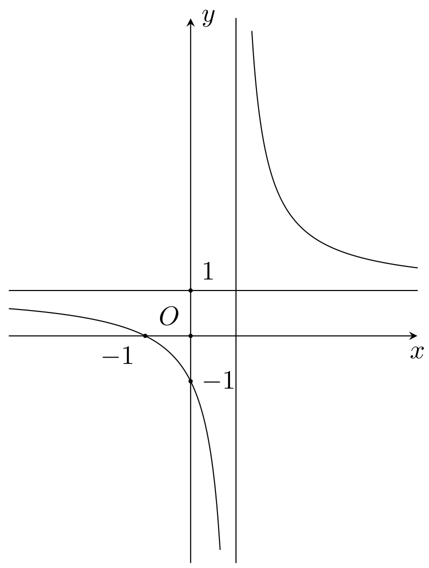
Đồ thị hàm số trên là đồ thị hàm số trùng phương có 3 cực trị và có $a < 0$ nên loại các hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$, $y = -x^3 + 3x^2 + 2$, $y = x^4 - 2x^2 + 2$.

Chọn đáp án C □

Câu 26 (Mã 123 2017).

Đường cong ở hình bên là đồ thị của hàm số $y = \dfrac{ax + b}{cx + d}$ với a, b, c, d là các số thực. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $y' < 0, \forall x \in \mathbb{R}$.
B. $y' > 0, \forall x \neq 1$.
C. $y' < 0, \forall x \neq 1$.
D. $y' > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.



Lời giải.

Đồ thị đã cho nhận đường thẳng $x = 1$ làm tiệm cận đứng nên hàm số ta có

Điều kiện xác định của hàm số là $x \neq 1$.

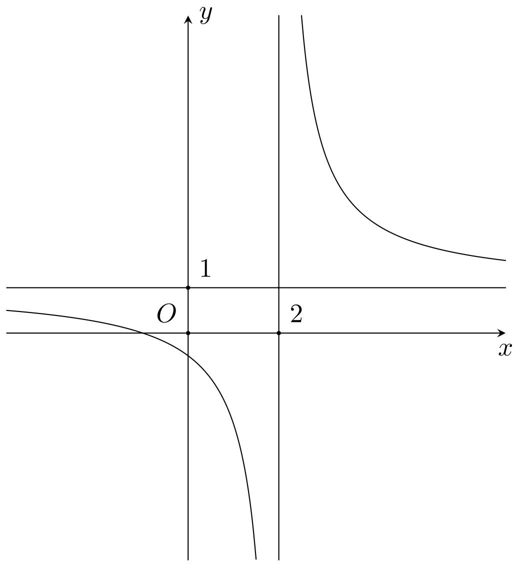
Đây là đồ thị của hàm nghịch biến.

Từ đó ta được $y' < 0, \forall x \neq 1$.

Chọn đáp án C □

Câu 27 (Mã 105 2017).

Đường cong ở hình bên là đồ thị của hàm số $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ với a, b, c, d là các số thực. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



Ⓐ $y' > 0, \forall x \neq 1$. Ⓑ $y' < 0, \forall x \neq 1$.
Ⓒ $y' < 0, \forall x \neq 2$. Ⓓ $y' > 0, \forall \neq 2$.

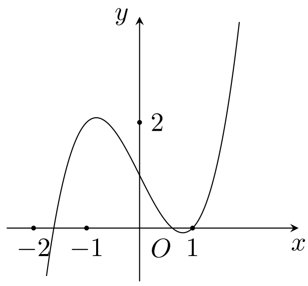
Lời giải.

Đồ thị đã cho nhận đường thẳng $x = 2$ làm tiệm cận đứng và là đồ thị của hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty; 2)$, $(2; +\infty)$ nên $y' < 0, \forall x \neq 2$.

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 28 (THPT Yên Phong 1 Bắc Ninh 2019).

Hình vẽ sau đây là đồ thị của một trong bốn hàm số cho ở các đáp án A, B, C, D. Hỏi đó là hàm số nào?



Ⓐ $y = x^3 + 2x + 1$. Ⓑ $y = x^3 - 2x^2 + 1$.
Ⓒ $y = x^3 - 2x + 1$. Ⓓ $y = -x^3 + 2x + 1$.

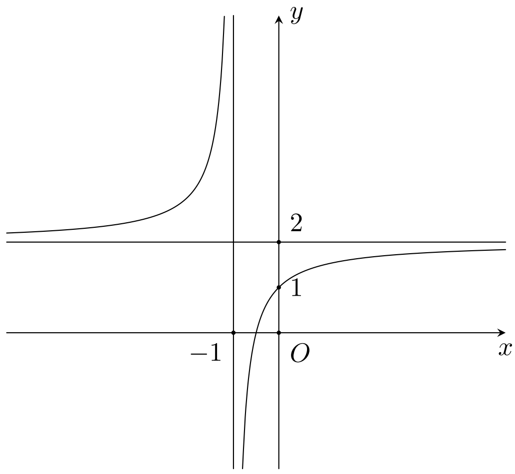
Lời giải.

Dựa vào đồ thị, ta có $\lim\limits_{x \to +\infty} y = +\infty$, loại hàm số $y = -x^3 + 2x + 1$.
Xét hàm số $y = x^3 + 2x + 1$, ta có $y' = 3x^2 + 2 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, hàm số không có cực tri.
Xét hàm số $y = x^3 - 2x^2 + 1$ có $y' = 3x^2 - 6x$ và y' đổi dấu khi đi qua các điểm $x = 0, x = 2$ nên hàm số đạt cực tri tại $x = 0$ và $x = 2$.
Vậy phương án đúng là C.

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 29 (Sở Cần Thơ - 2019).

Hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào trong các hàm số sau?



(A) $y = \dfrac{x-1}{x+1}$. (B) $y = \dfrac{2x+1}{x+1}$.

(C) $y = \dfrac{2x-3}{x+1}$. (D) $y = \dfrac{2x+5}{x+1}$.

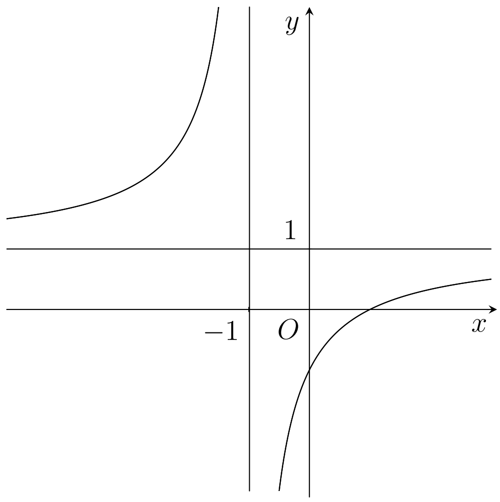
Lời giải.

Đồ thị hàm số cắt trục Oy tai điểm có tọa độ $(0;1)$. Ta thấy hàm số $y = \dfrac{2x+1}{x+1}$ có đồ thị thỏa mãn hình đã cho.

Chọn đáp án (B) □

Câu 30 (SGD Nam Định).

Đường cong trong hình là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



(A) $y = \dfrac{x-1}{x+1}$. (B) $y = \dfrac{-2x+1}{2x+2}$.

(C) $y = x^4 - 3x^2$. (D) $y = x^3 - 3x^2$.

Lời giải.

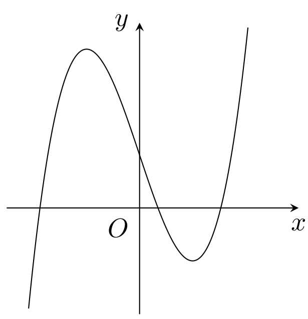
Hình vẽ trên là đồ thị của hàm số dạng $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}\,(c \neq 0; ad - bc \neq 0)$ nên loại các hàm số $y = x^4 - 3x^2$, $y = x^3 - 3x^2$.

Ta thấy: Đồ thị có đường tiệm cận đứng là $x = -1$ và đường tiệm cận ngang là $y = 1$ nên loại hàm số $y = \dfrac{-2x+1}{2x+2}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 31 (Sở Gia Lai 2019).

Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào sau đây?



(A) $y = -x^3 + 3x + 1$. (B) $y = x^4 - x^2 + 1$.

(C) $y = -x^2 + x - 1$. (D) $y = x^3 - 3x + 1$.

Lời giải.

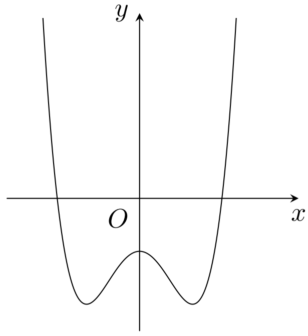
Đồ thị đã cho có hình dạng của đồ thị hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ nên loại các hàm số $y = x^4 - x^2 + 1$, $y = -x^2 + x - 1$.

Dựa vào đồ thị, ta có $\lim\limits_{x \to +\infty} y = +\infty \Rightarrow a > 0$ nên loại hàm số $y = -x^3 + 3x + 1$.

Chọn đáp án D □

Câu 32 (Đề Minh Họa 2021).

Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình sau



A $y = -x^4 + 2x^2 - 1$.

B $y = x^4 - 2x^2 - 1$.

C $y = x^3 - 3x^2 - 1$.

D $y = -x^3 + 3x^2 - 1$.

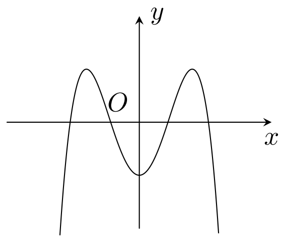
Lời giải.

Dựa vào đồ thị hàm số ta thấy đây là đồ thị của hàm số bậc 4 trùng phương với hệ số $a > 0$. Do đó nhận đáp án $y = x^4 - 2x^2 - 1$.

Chọn đáp án B □

Câu 33 (Mã 101 - 2021 Lần 1).

Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình bên dưới?



A $y = -2x^4 + 4x^2 - 1$.

B $y = -x^3 + 3x - 1$.

C $y = 2x^4 - 4x^2 - 1$.

D $y = x^3 - 3x - 1$.

Lời giải.

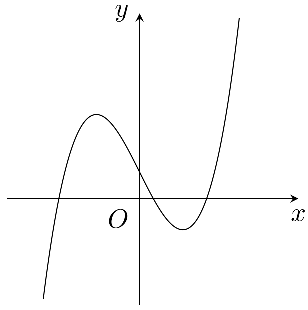
Dựa vào dáng đồ thị, đây là hàm trùng phương nên loại các hàm số $y = -x^3 + 3x - 1$, $y = x^3 - 3x - 1$.

Dựa vào đồ thị, ta có $\lim\limits_{x \to +\infty} y = -\infty \Rightarrow a < 0$ nên loại hàm số $y = 2x^4 - 4x^2 - 1$.

Chọn đáp án C □

Câu 34 (Mã 103 - 2021 - Lần 1).

Đồ thị hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình vẽ?



A $y = -x^3 - 2x + \dfrac{1}{2}$.

B $y = x^3 - 2x + \dfrac{1}{2}$.

C $y = -x^4 + 2x^2 + \dfrac{1}{2}$.

D $y = x^4 + 2x^2 + \dfrac{1}{2}$.

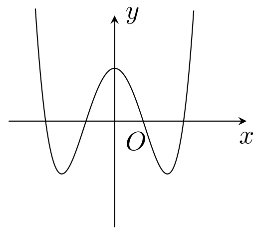
Lời giải.

Đồ thị đã cho là đồ thị hàm số bậc ba có hệ số bậc ba $a > 0$. Đó là đồ thị của hàm số $y = x^3 - 2x + \dfrac{1}{2}$.

Chọn đáp án B □

Câu 35 (Mã 102 - 2021 Lần 1).

Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình vẽ?



(A) $y = x^3 - 3x + 1$. (B) $y = -2x^4 + 4x^2 + 1$.
(C) $y = -x^3 + 3x + 1$. (D) $y = 2x^4 - 4x^2 + 1$.

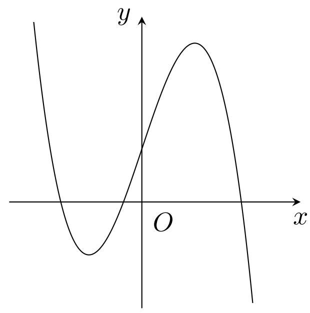
Lời giải.

Đây là đồ thị hàm số bậc 4 với hệ số $a > 0$. Đó là đồ thị hàm số $y = 2x^4 - 4x^2 + 1$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 36 (Mã 104 - 2021 Lần 1).

Đồ thị hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình vẽ?



(A) $y = x^3 - 3x + 1$. (B) $y = x^4 + 4x^2 + 1$.
(C) $y = -x^3 + 3x + 1$. (D) $y = -x^4 + 2x^2 + 1$.

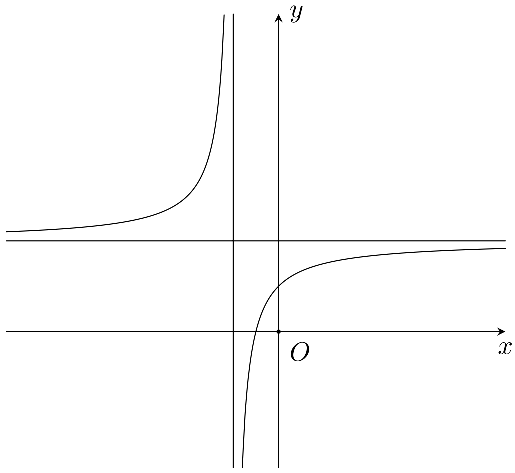
Lời giải.

Dựa vào đồ thị ta thấy đây là hàm số bậc 3 có hệ số $a < 0$, đó là đồ thị hàm số $y = -x^3 + 3x + 1$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 37 (Mã 101 - 2021 Lần 1).

Biết hàm số $y = \dfrac{x + a}{x + 1}$ (a là số thực cho trước, $a \neq 1$ có đồ thị như hình bên). Mệnh đề nào dưới đây đúng?



(A) $y' < 0, \forall x \neq -1$. (B) $y' > 0, \forall x \neq -1$.
(C) $y' < 0, \forall x \in \mathbb{R}$. (D) $y' > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Lời giải.

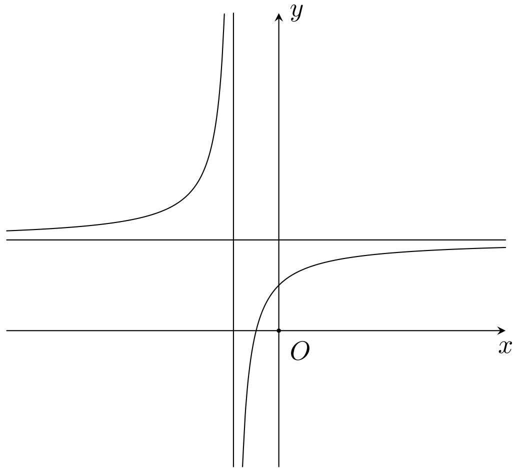
Ta có $y = \dfrac{x + a}{x + 1} \Rightarrow y' = \dfrac{1 - a}{(x + 1)^2} > 0, \forall x \neq -1$.
Từ đồ thị ta thấy hàm số đã ch đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty; -1)$, $(1; +\infty)$.

Vậy khẳng định đúng là $y' > 0, \forall x \neq -1$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 38 (Mã 103 - 2021 - Lần 1).

Biết hàm số $y = \dfrac{x+a}{x-1}$ (a là số thực cho trước, $a \neq -1$) có đồ thị như trong hình vẽ. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



(A) $y' > 0, \forall x \neq 1$.
(B) $y' > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.
(C) $y' < 0, \forall x \in \mathbb{R}$.
(D) $y' < 0, \forall x \neq 1$.

Lời giải.

Tập xác định của hàm số đã cho là $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

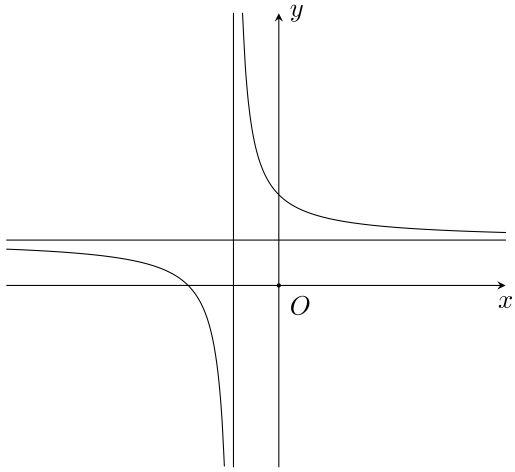
Ta có: $y' = \dfrac{-1-a}{(x-1)^2}, \forall x \neq 1$.

Từ đồ thị của hàm số suy ra hàm số đã cho đồng biến trên mỗi khoảng xác định vì vậy $y' > 0, \forall x \neq 1$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 39 (Mã 102 - 2021 Lần 1).

Biết hàm số $y = \dfrac{x+a}{x+1}$ (a là số thực cho trước, $a \neq -1$) có đồ thị như hình bên. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?



(A) $y' < 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$.
(B) $y' > 0,\ \forall x \neq -1$.
(C) $y' < 0,\ \forall x \neq -1$.
(D) $y' > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

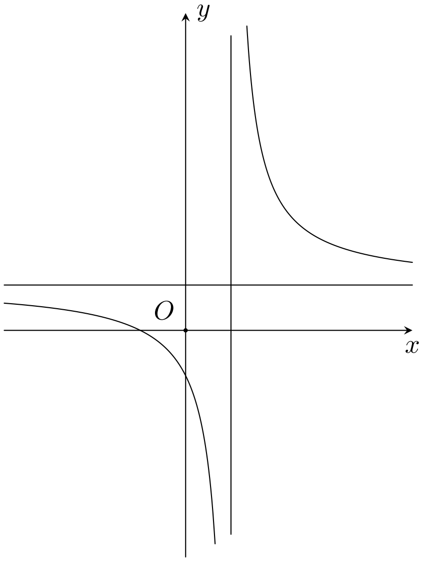
Từ đồ thị hàm số, ta thấy hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định.

Do đó $y' < 0,\ \forall x \neq -1$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 40 (Mã 104 - 2021 Lần 1).

Biết hàm số $y = \dfrac{x+a}{x-1}$ (a là số thực cho trước, $a \neq -1$) có đồ thị như trong hình bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



Ⓐ $y' < 0, \forall x \in \mathbb{R}$.
Ⓑ $y' < 0, \forall x \neq 1$.
Ⓒ $y' > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.
Ⓓ $y' > 0, \forall x \neq 1$.

Lời giải.

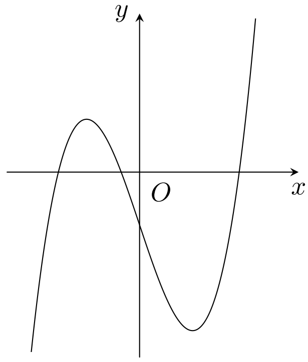
Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

$y' = \dfrac{-1-a}{(x-1)^2} \neq 0, \forall x \neq 1$ và đồ thị là đường đi xuống trên từng khoảng xác định nên hàm số đã cho nghịch biến trên mỗi khoảng xác định.

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 41 (Đề minh họa 2022).

Hàm số nào dưới đây có đồ thị như đường cong hình bên?



Ⓐ $y = x^4 - 2x^2 - 1$.
Ⓑ $y = \dfrac{x+1}{x-1}$.
Ⓒ $y = x^3 - 3x - 1$.
Ⓓ $y = x^2 + x - 1$.

Lời giải.

Đồ thị đã cho là đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x - 1$.

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 42 (Mã 101-2022). Hàm số nào dưới đây có bảng biến thiên như sau?

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Ⓐ $y = x^4 - 2x^2$.
Ⓑ $y = -x^3 + 3x$.
Ⓒ $y = -x^4 + 2x^2$.
Ⓓ $y = x^3 - 3x$.

Lời giải.

Từ bảng biến thiên ta nhận thấy hàm số có hai điểm cực trị và đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$. Do đó hàm số là hàm đa thức bậc ba có hệ số $a > 0$.

Chọn đáp án D □

Câu 43 (Mã 102 - 2022). Hàm số nào dưới đây có bảng biến thiên như sau?

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

(A) $y = -x^3 + 3x$. (B) $y = x^3 - 3x$. (C) $y = -x^4 + 2x^2$. (D) $y = x^4 - 2x^2$.

Lời giải.

Từ đồ thị ta có đây là đồ thị hàm số bậc 3 với hệ số $a > 0$.

Chọn đáp án B □

Câu 44 (Mã 103 - 2022). Hàm số nào dưới đây có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

(A) $y = x^3 - 3x$. (B) $y = -x^3 + 3x$. (C) $y = x^2 - 2x$. (D) $y = -x^2 + 2x$.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên ta nhận thấy:

Đây là hàm $y = ax^3 + bx^2 + cx + d (a \neq 0)$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} y = -\infty \Rightarrow a < 0$.

Do đó hàm số thỏa mãn là $y = -x^3 + 3x$.

Chọn đáp án B □

Câu 45 (Mã 104-2022). Hàm số nào dưới đây có bảng biến thiên như sau?

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

(A) $y = x^3 - 3x$. (B) $y = x^2 - 2x$. (C) $y = -x^3 + 3x$. (D) $y = -x^2 + 2x$.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên trên, ta nhận thấy đây là hàm số bậc ba có dạng $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ với $a \neq 0$.

Mà $\lim\limits_{x\to+\infty}(ax^3+bx^2+cx+d)=-\infty \Rightarrow a<0$.
Do đó có duy nhất hàm số $y=-x^3+3x$ thoả mãn.
Chọn đáp án C □

BẢNG ĐÁP ÁN

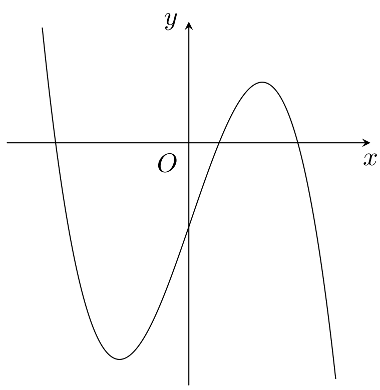
1. A	2. A	3. C	4. A	5. D	6. A	7. B	8. D	9. D	10. A
11. C	12. D	13. B	14. B	15. B	16. C	17. A	18. A	19. C	20. D
21. A	22. C	23. A	24. A	25. C	26. C	27. C	28. C	29. B	30. A
31. D	32. B	33. C	34. B	35. D	36. C	37. B	38. A	39. C	40. B
41. C	42. D	43. B	44. B	45. C					

MỨC ĐỘ 2. MỨC ĐỘ 7,8 ĐIỂM

Dạng 1. Xét dấu của các hệ số hàm số thông qua đồ thị

Câu 1 (Đề Minh Họa 2020 Lần 1).

Cho hàm số $y=ax^3+3x+d(a;d\in\mathbb{R})$ có đồ thị như hình bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. $a>0,d>0$.
B. $a<0,d>0$.
C. $a>0,d<0$.
D. $a<0,d<0$.

Lời giải.

Ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty}y=-\infty \Rightarrow$ đồ thị nhánh ngoài cùng của hàm số hướng đi xuống nên hệ số $a<0$.
Giao điểm của đồ thị hàm số với trục tung $Oy\colon x=0$ là điểm nằm bên dưới trục hoành nên khi $x=0\Rightarrow y=d<0$.
Chọn đáp án D □

Câu 2 (Đề Tham Khảo 2020 Lần 2).

Cho hàm số $f(x)=\dfrac{ax+1}{bx+c}$ $(a,b,c\in\mathbb{R})$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\|$	$+$	
$f(x)$	1	$\nearrow$	$+\infty \;\|\; -\infty$	$\nearrow$	1

Trong các số a, b và c có bao nhiêu số dương?

A. 2. B. 3. C. 1. D. 0.

Lời giải.

Hàm số $f(x)=\dfrac{ax+1}{bx+c}$ có đường tiệm cận đứng là đường thẳng $x=-\dfrac{c}{b}$ và đường tiệm cận ngang là đường thẳng $y=\dfrac{a}{b}$.

Từ bảng biến thiên ta có: $\begin{cases} -\dfrac{c}{b}=2 \\ \dfrac{a}{b}=1 \end{cases} \Leftrightarrow a=b=-\dfrac{c}{2} (1)$.

Mặt khác: $f'(x)=\dfrac{ac-b}{(bx+c)^2}$.

Vì hàm số đã cho đồng biến trên các khoảng $(-\infty;2)$ và $(2;+\infty)$ nên.

$f'(x)=\dfrac{ac-b}{(bx+c)^2}>0 \Leftrightarrow ac-b>0 (2)$.

Thay (1) vào (2), ta được: $-\dfrac{c^2}{2}+\dfrac{c}{2}>0 \Leftrightarrow -c^2+c>0 \Leftrightarrow 0<c<1$.

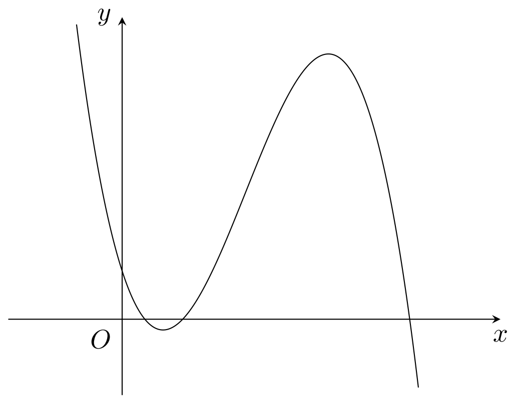
Suy ra c là số dương và a, b là số âm.

Chọn đáp án C □

Câu 3 (Mã 101 - 2020 Lần 1).

Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d\,(a,b,c,d\in\mathbb{R})$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Có bao nhiêu số dương trong các số a, b, c, d?

A 4. B 1. C 2. D 3.



Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} y=+\infty \Rightarrow a<0$.

Gọi x_1, x_2 là hoành độ hai điểm cực trị của hàm số suy ra x_1, x_2 nghiệm phương trình $y'=3ax^2+2bx+c=0$ nên theo định lý Vi-ét:

+) Tổng hai nghiệm $x_1+x_2=-\dfrac{2b}{3a}>0 \Rightarrow \dfrac{b}{a}<0 \Rightarrow b>0$.

+) Tích hai nghiệm $x_1x_2=\dfrac{c}{3a}>0 \Rightarrow c<0$.

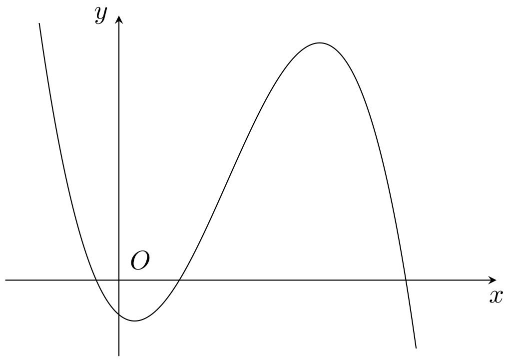
Lại có đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ dương nên $d>0$.

Vậy có 2 số dương trong các số a, b, c, d.

Chọn đáp án C □

Câu 4 (Mã 102 - 2020 Lần 1).

Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d\,(a, b, c, d \in \mathbb{R})$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Có bao nhiêu số dương trong các hệ số a, b, c, d?



(A) 4. (B) 3. (C) 1. (D) 2.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty \Rightarrow a < 0$.

Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị nằm cùng phía của trục tung nên $ac > 0 \Rightarrow c < 0$.

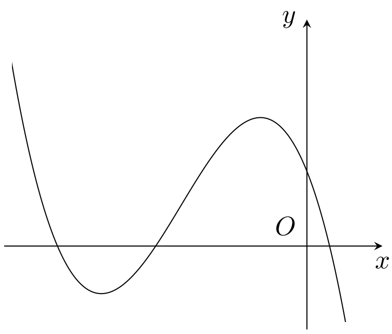
Đồ thị hàm số có điểm uốn nằm bên phải trục tung nên $ab < 0 \Rightarrow b > 0$.

Đồ thị hàm số cắt trục tung ở dưới trục hoành $\Rightarrow d < 0$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 5 (Mã 103 - 2020 Lần 1).

Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d\,(a, b, c, d \in \mathbb{R})$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Có bao nhiêu số dương trong các số a, b, c, d?



(A) 4. (B) 2. (C) 1. (D) 3.

Lời giải.

Ta có $y' = 3ax^2 + 2bx + c$. Dựa vào đồ thị ta thấy $a < 0$.

Hàm số có 2 cực trị âm nên $\begin{cases} \Delta'_{y'} > 0 \\ S < 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^2 - 9ac > 0 \\ -\dfrac{2b}{3a} < 0 \\ \dfrac{c}{3a} > 0 \end{cases} \Rightarrow \Rightarrow \begin{cases} b < 0 \\ c < 0 \end{cases}$.

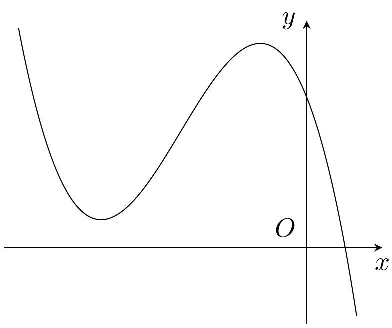
Đồ thị cắt trục Oy tại điểm $(0; d)$ nên $d > 0$.

Vậy có đúng một số dương trong các số a, b, c, d.

Chọn đáp án (C) □

Câu 6 (Mã 104 - 2020 Lần 1).

Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d\,(a, b, c, d \in \mathbb{R})$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Có bao nhiêu số dương trong các số a, b, c, d?



(A) 4. (B) 2. (C) 1. (D) 3.

Lời giải.

Ta có $y' = 3ax^2 + 2bx + c$.

Dựa vào đồ thị ta thấy $a < 0$.

Hàm số có 2 cực trị âm nên $\begin{cases} \Delta'_{y'} > 0 \\ S < 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^2 - 9ac > 0 \\ -\dfrac{2b}{3a} < 0 \\ \dfrac{c}{3a} > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b < 0 \\ c < 0. \end{cases}$

Đồ thị cắt trục Oy tại điểm $(0; d)$ nên $d > 0$.

Vậy có đúng 1 số dương trong các số a, b, c, d.

Chọn đáp án C □

Câu 7 (Mã 102 - 2020 Lần 2). Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d\,(a, b, c, d \in \mathbb{R})$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Có bao nhiêu số dương trong các số a, b, c, d?

A 2. B 4. C 1. D 3.

Lời giải.

Từ dáng điệu sự biến thiên hàm số ta có $a > 0$.

Khi $x = 0$ thì $y = d = 1 > 0$.

Mặt khác $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$. Từ bảng biến thiên ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 \\ x = 0. \end{array}\right.$

Từ đó suy ra $c = 0$; $\dfrac{-2b}{3a} = -2 \Rightarrow b = 3a > 0$.

Vậy có 3 số dương là a, b, d.

Chọn đáp án D □

Câu 8 (Mã 103 - 2020 Lần 2). Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $(a, b, c, d \in \mathbb{R})$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Có bao nhiêu số dương trong các số a, b, c, d?

A 3. B 4. C 2. D 1.

Lời giải.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \Rightarrow a > 0.$

$f(0) = -1 \Rightarrow d = -1 < 0.$

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c.$

Ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = -2 \\ x_1x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\dfrac{2b}{3a} = -2 \\ \dfrac{c}{3a} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 3a > 0 \\ c = 0. \end{cases}$

Có 2 số dương là a, b.

Chọn đáp án C □

Câu 9 (Mã 101 – 2020 Lần 2). Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d\,(a, b, c, d \in \mathbb{R})$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	3	↘	-5	↗	$+\infty$

Có bao nhiêu số dương trong các số a, b, c, d?

A 2. B 4. C 1. D 3.

Lời giải.

Từ bảng biến thiên, ta có

$$\begin{cases} f(0) = 3 \\ f(4) = -5 \\ f'(0) = 0 \\ f'(4) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 3 \\ 64a + 16b + 4c + d = -5 \\ c = 0 \\ 48a + 8b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{1}{4} \\ b = -\dfrac{3}{2} \\ c = 0 \\ d = 3. \end{cases}$$

Vậy trong các số a, b, c, d có 2 số dương.

Chọn đáp án A □

Câu 10 (Mã 104 - 2020 Lần 2). Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d\,(a, b, c, d \in \mathbb{R})$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-1	↘	-5	↗	$+\infty$

Có bao nhiêu số dương trong các số a, b, c, d?

A 4. B 2. C 3. D 1.

Lời giải.

Ta có: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d\,(a,b,c,d \in \mathbb{R})$

$\Rightarrow f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c.$

Đồ thị hàm số $f(x)$ có hai điểm cực trị $A(0;-1), B(4;-5)$ nên ta có hệ:

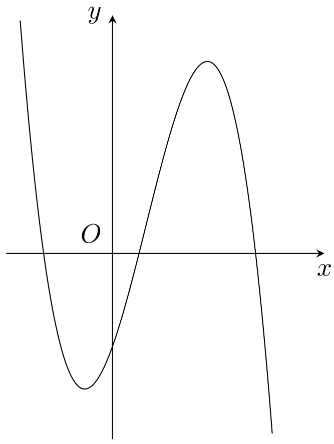
$\begin{cases} f(0) = -1 \\ f(4) = -5 \\ f'(0) = 0 \\ f'(4) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = -1 \\ 64a + 16b + 4c + d = -5 \\ c = 0 \\ 48a + 8b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{1}{8} \\ b = -\dfrac{3}{4} \\ c = 0 \\ d = -1 \end{cases}$. Trong các số a,b,c,d có 1 số dương.

Chọn đáp án D □

Câu 11.

Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A $a < 0, b > 0, c > 0, d < 0$.
B $a < 0, b < 0, c > 0, d < 0$.
C $a > 0, b < 0, c < 0, d > 0$.
D $a < 0, b > 0, c < 0, d < 0$.



Lời giải.

Dựa vào đồ thị suy ra hệ số $a < 0 \Rightarrow$ loại phương án "$a > 0, b < 0, c < 0, d > 0$".

$y' = 3ax^2 + 2bx + c = 0$ có 2 nghiệm x_1, x_2 trái dấu (do hai điểm cực trị của đồ thị hàm số nằm hai phía với Oy) $\Rightarrow 3a \cdot c < 0 \Rightarrow c > 0$.

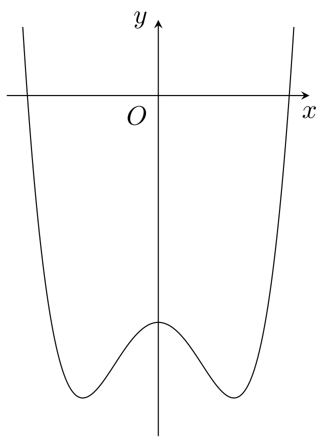
Do $(C) \cap Oy = D(0; d) \Rightarrow d < 0$.

Chọn đáp án A □

Câu 12 (THPT Nguyễn Khuyến 2019).

Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị như hình bên. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

A $a > 0, b < 0, c > 0$.
B $a > 0, b < 0, c < 0$.
C $a > 0, b > 0, c < 0$.
D $a < 0, b > 0, c < 0$.



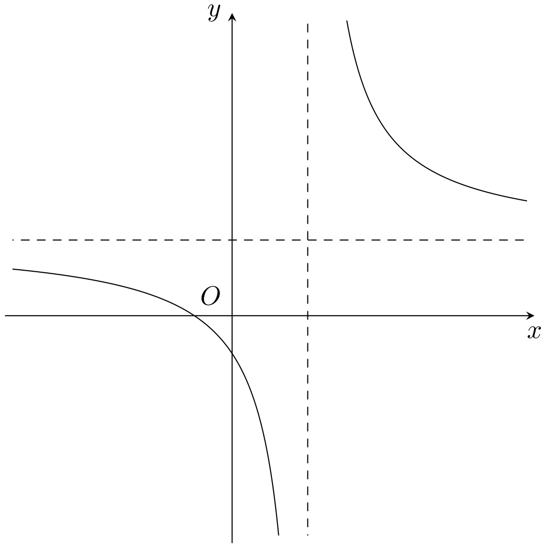
Lời giải.

Ta có đồ thị có hình dạng như trên với hàm bậc bốn trùng phương có hai điểm cực tiểu và một điểm cực đại nên $a > 0, b < 0$. Giá trị cực đại nhỏ hơn 0 nên $c < 0$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 13 (Chuyên Trần Phú Hải Phòng 2019).

Cho hàm số $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ có đồ thị như sau



Mệnh đề nào sau đây đúng?

(A) $ac > 0; bd > 0$. (B) $ab < 0; cd < 0$. (C) $bc > 0; ad < 0$. (D) $ad > 0; bd < 0$.

Lời giải.

Theo đồ thị:

Tiệm cận ngang: $y = \dfrac{a}{c} > 0(1)$.

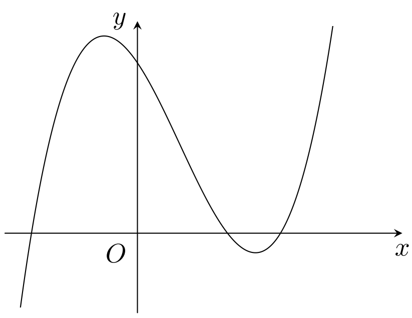
Tiệm cận đứng: $x = -\dfrac{d}{c} > 0 \Rightarrow \dfrac{d}{c} < 0(2)$.

$y = 0 \Rightarrow x = -\dfrac{b}{a} < 0 \Rightarrow \dfrac{b}{a} > 0(3)$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 14 (THPT Thiệu Hóa – Thanh Hóa 2019).

Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad (a \neq 0)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Chọn khẳng định đúng về dấu của a, b, c, d?



(A) $a > 0,\ b > 0,\ d > 0,\ c > 0$. (B) $a > 0,\ c > 0 > b,\ d < 0$.

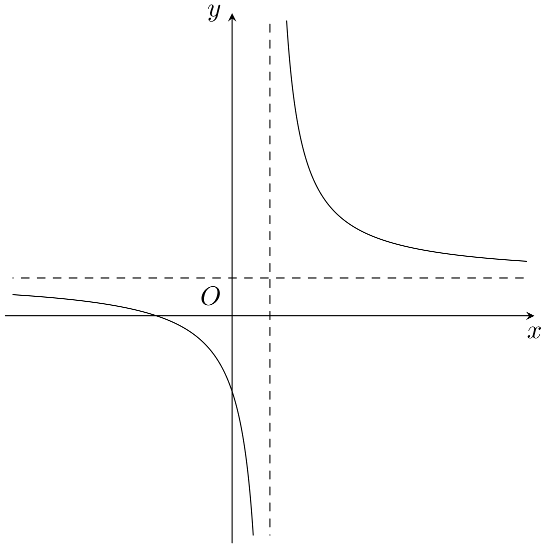
(C) $a > 0, b > 0, c > 0, d > 0$. (D) $a > 0,\ b < 0,\ c < 0,\ d > 0$.

Lời giải.

Dựa vào đồ thị ta có $a > 0$, đồ thị cắt Oy tại 1 điểm có tung độ dương nên $d > 0$, đồ thị có 2 cực trị trái dấu nên $x_1 \cdot x_2 < 0 \Rightarrow \dfrac{c}{a} < 0 \Rightarrow c < 0$.

Chọn đáp án D □

Câu 15 (Toán Học Tuổi Trẻ 2019). Cho hàm số $y = \dfrac{(a-1)x+b}{(c-1)x+d}, d < 0$ có đồ thị như hình trên. Khẳng định nào dưới đây là đúng?



Ⓐ $a > 1, b > 0, c < 1$. Ⓑ $a > 1, b < 0, c > 1$. Ⓒ $a < 1, b > 0, c < 1$. Ⓓ $a > 1, b > 0, c > 1$.

Lời giải.

Theo bài ra, đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số là $x = -\dfrac{d}{c-1}$.

Đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là $y = \dfrac{a-1}{c-1}$.

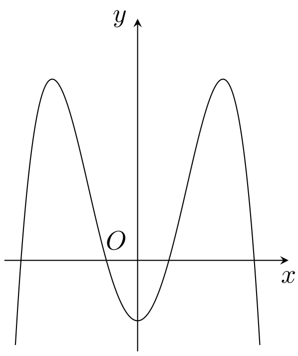
Nhìn đồ thị ta thấy: $x = -\dfrac{d}{c-1} > 0$ mà $d < 0 \Rightarrow c - 1 > 0 \Rightarrow c > 1$.

$y = \dfrac{a-1}{c-1} > 0 \Rightarrow a - 1 > 0 \Rightarrow a > 1$.

Đồ thị cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng $\dfrac{b}{d} < 0 \Rightarrow b > 0$.

Chọn đáp án D □

Câu 16 (Sở Ninh Bình 2019). Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ $(a \neq 0)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $a < 0,\ b > 0,\ c < 0$.
B. $a < 0,\ b < 0,\ c > 0$.
C. $a < 0,\ b > 0,\ c > 0$.
D. $a < 0,\ b < 0,\ c < 0$.

Lời giải.

Đồ thị cắt trục tung tại điểm $(0; c)$, từ đồ thị suy ra $c < 0$.

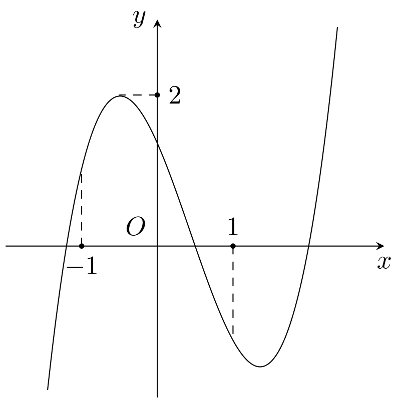
Mặt khác đồ thị hàm số có ba điểm cực trị nên $y' = 0$ có ba nghiệm phân biệt, hay $y' = 4ax^3 + 2bx = 2x\left(2ax^2 + b\right) = 0$ có ba nghiệm phân biệt. Suy ra a, b trái dấu.

Mà $a < 0 \Rightarrow b > 0$.

Chọn đáp án A □

Câu 17 (Cụm Liên Trường Hải Phòng 2019).

Hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới:



Khẳng định nào là đúng?

A. $a < 0,\ b < 0,\ c < 0,\ d < 0$.
B. $a > 0,\ b > 0,\ c > 0,\ d < 0$.
C. $a > 0,\ b > 0,\ c < 0,\ d > 0$.
D. $a > 0,\ b < 0,\ c < 0,\ d > 0$.

Lời giải.

+ Dựa vào hình dạng đồ thị ta khẳng định được $a > 0$.

+ Đồ thị cắt trục Oy tại điểm có tọa độ $(0; d)$. Dựa vào đồ thị suy ra $d > 0$.

+ Ta có: $y' = 3ax^2 + 2bx + c$. Hàm số có hai điểm cực trị x_1, $x_2 (x_1 < x_2)$ trái dấu nên phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 trái dấu. Vì thế $3a \cdot c < 0$, nên suy ra $c < 0$.

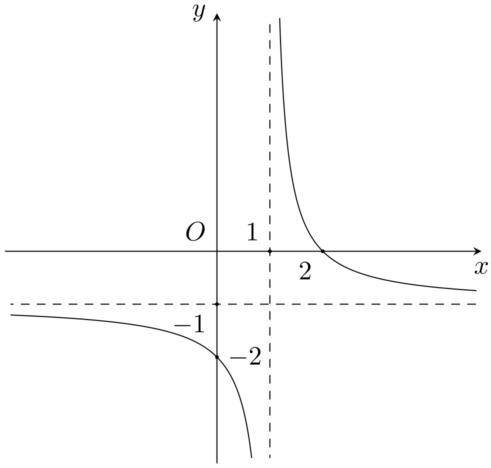
+ Mặt khác từ đồ thị ta thấy $\begin{cases} x_1 > -1 \\ x_2 > 1 \end{cases}$ nên $x_1 + x_2 > 0$.

Mà $x_1 + x_2 = \dfrac{-2b}{3a}$ nên suy ra $\dfrac{-2b}{3a} > 0 \Rightarrow b < 0$.

Vậy $a > 0,\ b < 0,\ c < 0,\ d > 0$.

Chọn đáp án D □

Câu 18 (THPT Ba Đình 2019). Cho hàm số $y = \dfrac{ax + b}{x + c}$ có đồ thị như hình bên dưới, với a, b, $c \in \mathbb{Z}$. Tính giá trị của biểu thức $T = a + 2b + 3c$?



Ⓐ $T = -8$. Ⓑ $T = 2$. Ⓒ $T = 6$. Ⓓ $T = 0$.

Lời giải.

Từ đồ thị hàm số, ta suy ra

Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là đường thẳng $x = 1$, tiệm cận ngang là đường thẳng $y = -1$.

Đồ thị hàm số đi qua các điểm $A(2; 0)$, $B(0; -2)$.

Từ biểu thức hàm số $y = \dfrac{ax + b}{x + c}$ (vì đồ thị hàm số là đồ thị hàm nhất biến nên $ac - b \neq 0$), ta suy ra

Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là đường thẳng $x = -c$, tiệm cận ngang là đường thẳng $y = a$.

Đồ thị hàm số đi qua $A\left(-\dfrac{b}{a}; 0\right)$, $B\left(0; \dfrac{b}{c}\right)$.

Đối chiếu lại, ta suy ra $c = -1$, $a = -1$, $b = 2$.

Vậy $T = a + 2b + 3c = (-1) + 2 \cdot 2 + 3(-1) = 0$.

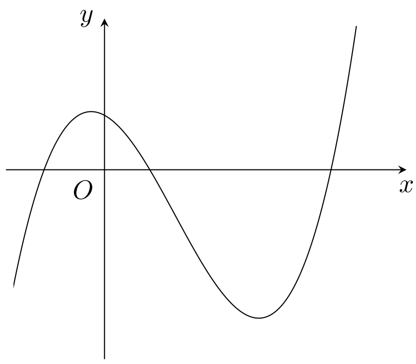
Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 19 (THPT Việt Đức Hà Nội 2019).

Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình bên. Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào đúng?

Ⓐ $ab < 0, bc > 0, cd < 0$. Ⓑ $ab < 0, bc < 0, cd > 0$.

Ⓒ $ab > 0, bc > 0, cd < 0$. Ⓓ $ab > 0, bc > 0, cd > 0$.



Lời giải.

Từ dáng điệu của đồ thị ta có ngay được:

⊕ $\lim\limits_{x \to +\infty} y = +\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} y = -\infty \Rightarrow a > 0$.

⊕ Đồ thị hàm số cắt trục tung tại một điểm có tung độ dương nên $d > 0$.

Ta có: $y' = 3ax^2 + 2bx + c$.

Mặt khác dựa vào đồ thị ta thấy phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm trái dấu và tổng hai nghiệm này luôn dương nên $\begin{cases} ac < 0 \\ -\dfrac{2b}{3a} > \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c < 0 \\ b < 0 \end{cases}$ (do $a > 0$).

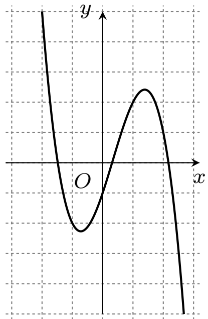
Do đó: $ab < 0, bc >, cd < 0$.

Chọn đáp án A □

Câu 20 (THPT Lương Thế Vinh Hà Nội 2019).

Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình dưới. Khẳng định nào sau đây đúng?

A $a < 0, b < 0, c < 0, d < 0$.
B $a < 0, b > 0, c > 0, d > 0$.
C $a < 0, b > 0, c < 0, d > 0$.
D $a < 0, b > 0, c > 0, d < 0$.



Lời giải.

- Dựa vào hình dáng của đồ thị suy ra hệ số $a < 0$.

- Đồ thị cắt trục Oy tại điểm có tung độ âm nên $d < 0$.

- Ta thấy đồ thị như hình vẽ có hai điểm cực trị, hoành độ các điểm cực trị trái dấu suy ra phương trình $y' = 3ax^2 + 2bx + c = 0$ có 2 nghiệm x_1, x_2 trái dấu kéo theo $3a \cdot c < 0 \Rightarrow c > 0$.

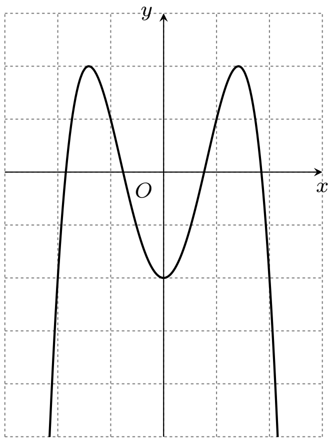
- Mặt khác $\dfrac{x_1 + x_2}{2} = -\dfrac{b}{3a} > 0 \Rightarrow b > 0$.

Chọn đáp án D □

Câu 21 (THPT Chuyên Bắc Ninh 2019).

Cho hàm số có đồ thị như hình vẽ. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A $a > 0, b < 0, c < 0$.
B $a < 0, b < 0, c < 0$.
C $a < 0, b > 0, c < 0$.
D $a > 0, b < 0, c > 0$.



Lời giải.

- Dựa vào hình dạng đồ thị suy ra $a < 0$.

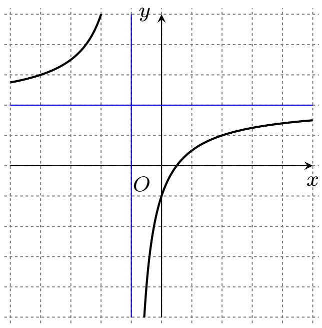
- Hàm số có 3 điểm cực trị nên $ab < 0 \Rightarrow b > 0$.

- Giao điểm với trục tung nằm dưới trục hoành nên $c < 0$.

Chọn đáp án C □

Câu 22 (Chuyên Lê Quý Đôn Quảng Trị 2019).

Cho hàm số $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ có đồ thị như trong hình bên dưới. Biết rằng a là số thực dương, hỏi trong các số b, c, d có tất cả bao nhiêu số dương?



(A) 1. (B) 2. (C) 0. (D) 3.

Lời giải.

Nhìn vào đồ thị ta thấy.

tiệm cận ngang $y = \dfrac{a}{c}$ nằm trên trục hoành nên $c > 0$ (vì $a > 0$).

tiệm cận đứng $x = \dfrac{-d}{c}$ nằm bên trái trục tung nên $\dfrac{-d}{c} < 0$. Suy ra $d > 0$ (vì $c > 0$).

giao điểm của đồ thị và trục tung nằm bên dưới trục hoành nên $\dfrac{b}{d} < 0$.

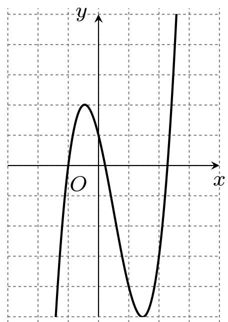
Suy ra $b < 0$ (vì $d > 0$).

Vậy $c > 0, d > 0$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 23 (Cụm liên trường Hải Phòng 2019).

Hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Khẳng định nào là đúng?



(A) $a < 0,\ b < 0,\ c < 0,\ d < 0$. (B) $a > 0,\ b > 0,\ c > 0,\ d < 0$.

(C) $a > 0,\ b > 0,\ c < 0,\ d > 0$. (D) $a > 0,\ b < 0,\ c < 0,\ d > 0$.

Lời giải.

+ Dựa vào hình dạng đồ thị ta khẳng định được $a > 0$.

+ Đồ thị cắt trục Oy tại điểm có tọa độ $(0; d)$. Dựa vào đồ thị suy ra $d > 0$.

+ Ta có: $y' = 3ax^2 + 2bx + c$. Hàm số có hai điểm cực trị x_1, $x_2 (x_1 < x_2)$ trái dấu nên phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 trái dấu. Vì thế $3a \cdot c < 0$, nên suy ra $c < 0$.

+ Mặt khác từ đồ thị ta thấy $\begin{cases} x_1 > -1 \\ x_2 > 1 \end{cases}$ nên $x_1 + x_2 > 0$.

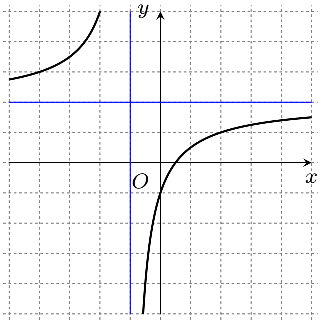
Mà $x_1 + x_2 = \dfrac{-2b}{3a}$ nên suy ra $\dfrac{-2b}{3a} > 0 \Rightarrow b < 0$.

Vậy $a > 0,\ b < 0,\ c < 0,\ d > 0$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 24 (Chuyên Nguyễn Huệ 2019).

Cho hàm số $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ có đồ thị như hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?



(A) $\begin{cases} ad < 0 \\ bc > 0 \end{cases}$. (B) $\begin{cases} ad < 0 \\ bc < 0 \end{cases}$. (C) $\begin{cases} ad > 0 \\ bc < 0 \end{cases}$. (D) $\begin{cases} ad > 0 \\ bc > 0 \end{cases}$.

Lời giải.

Nhận xét từ đồ thị:

+ Giao với trục hoành tại $x_o = -\dfrac{b}{a} > 0 \Rightarrow a$ và b trái dấu (1).

+ Giao với trục tung tại $y_o = \dfrac{b}{d} < 0 \Rightarrow b$ và d trái dấu (2).

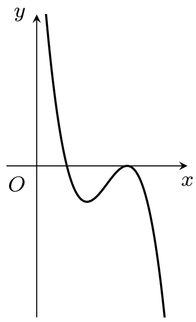
+ Tiệm cận đứng: $x = -\dfrac{d}{c} < 0 \Rightarrow d$ và c cùng dấu (3).

Từ (1) và (2) suy ra: a và d cùng dấu hay $ad > 0$.

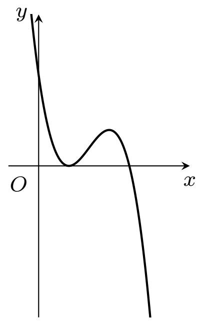
Từ (2) và (3) suy ra: b và c trái dấu hay $bc < 0$.

Chọn đáp án (C) □

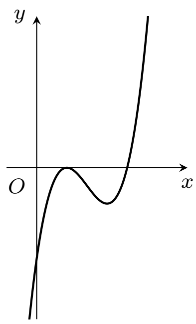
Câu 25. Tìm đồ thị hàm số $y = f(x)$ được cho bởi một trong các phương án dưới đây, biết $f(x) = (a-x)(b-x)^2$ với $a < b$.

(A) 

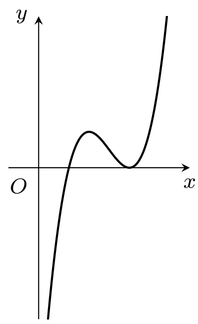
.

(B) 

.

(C) 

.

(D) 

.

Lời giải.

Có $f'(x) = -(b-x)^2 + (a-x)\cdot(-2)(b-x) = -(b-x)(b-x+2a-2x) = -(b-x)(b+2a-3x)$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = b \\ x = \dfrac{2a+b}{3}. \end{array}\right.$

Có $\dfrac{2a+b}{3} < \dfrac{2b+b}{3} = b$.

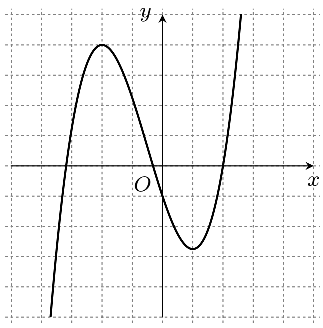
Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		$\frac{2a+b}{3}$		b		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

Chọn đáp án (A) □

Câu 26.

Cho đường cong $(C)\colon y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình bên. Khẳng định nào sau đây là đúng?



(A) $a > 0, b < 0, c < 0, d < 0$. (B) $a > 0, b > 0, c < 0, d > 0$.

(C) $a < 0, b > 0, c > 0, d < 0$. (D) $a > 0, b > 0, c < 0, d < 0$.

Lời giải.

Từ đồ thị ta có $x = 0 \Rightarrow y = d < 0$, từ dạng đồ thị suy ra $a > 0$.

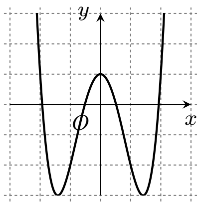
Mặt khác $y' = 3ax^2 + 2bx + c$ từ đồ thị ta có phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm trái dấu suy ra $ac < 0$ mà $a > 0$ suy ra $c < 0$.

Hơn nữa phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1 + x_2 = -\dfrac{2b}{3a} = -1$ suy ra $3a = 2b \Rightarrow b > 0$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 27 (Gia Lai 2019).

Hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây đúng?



(A) $a > 0,\ b > 0,\ c < 0$. (B) $a < 0,\ b > 0,\ c < 0$.

(C) $a > 0,\ b < 0,\ c > 0$. (D) $a > 0,\ b < 0,\ c < 0$.

Lời giải.

Dựa vào đồ thị:

$+ \lim\limits_{x\to+\infty} y = +\infty \Rightarrow a > 0$.

+ Đồ thị hàm số có ba điểm cực trị $\Rightarrow ab < 0 \Rightarrow b < 0$.

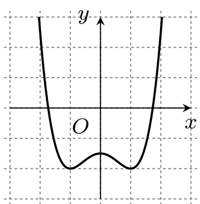
+ Giao điểm của đồ thị hàm số và trục tung có tung độ dương $\Rightarrow$.

Vậy $a > 0,\ b < 0,\ c > 0$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 28 (THPT Thăng Long 2019).

Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị như hình vẽ. Tìm kết luận đúng



(A) $a + b > 0$. (B) $bc > 0$. (C) $ab > 0$. (D) $ac > 0$.

Lời giải.

Từ hình vẽ ta thấy:

Đồ thị hàm số có bề lõm hướng lên $\Rightarrow a > 0$.

Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ âm $\Rightarrow c < 0$.

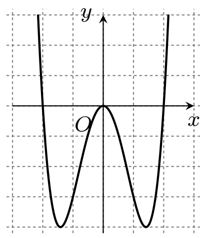
Đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị $\Rightarrow ab < 0 \Rightarrow b < 0$.

Vậy chỉ có $bc > 0$.

Chọn đáp án B □

Câu 29 (THPT Cẩm Bình Hà Tĩnh 2019).

Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c (a \neq 0)$ có đồ thị như hình bên. Hãy chọn mệnh đề đúng.



A. $a < 0, b < 0, c = 0$.
B. $a < 0, b > 0, c = 0$.
C. $a > 0, b < 0, c = 0$.
D. $a > 0, b < 0, c > 0$.

Lời giải.

Dựa vào hình dạng đồ thị hàm số ta nhận thấy:

Hệ số $a > 0$.

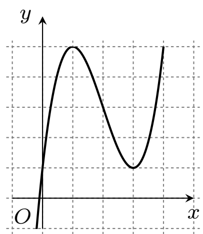
Đồ thị hàm số đi qua gốc tọa tọa $\Rightarrow c = 0$.

Hàm số có 3 điểm cực trị $\Rightarrow a \cdot b < 0 \Rightarrow b < 0$.

Chọn đáp án C □

Câu 30 (Chuyên Long An 2019).

Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ ở bên. Mệnh đề nào sau đây đúng?



A. $a > 0,\ b > 0,\ c > 0,\ d > 0$.
B. $a > 0,\ b > 0,\ c < 0,\ d > 0$.
C. $a > 0,\ b < 0,\ c > 0,\ d > 0$.
D. $a < 0,\ b < 0,\ c > 0,\ d < 0$.

Lời giải.

Đồ thị hàm số đi qua các điểm $A(0;1)$, $B(1;5)$ và $C(3;1)$ và đạt cực trị tại các điểm B và C.

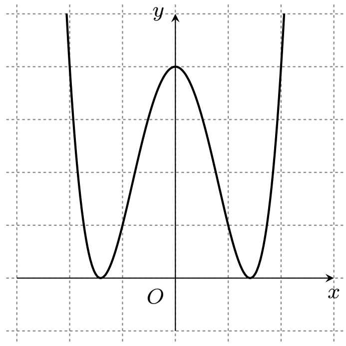
$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$. Ta có

$$\begin{cases} f(0) = 1 \\ f(1) = 5 \\ f'(1) = 0 \\ f'(3) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d = 1 \\ a + b + c + d = 5 \\ 3a + 2b + c = 0 \\ 27a + 6b + c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -6 \\ c = 9 \\ d = 1 \end{cases}.$$

Chọn đáp án C □

Câu 31 (THPT Trần Phú 2019).

Cho hàm số bậc bốn trùng phương $y = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?



Ⓐ $a < 0, b > 0, c > 0$. Ⓑ $a > 0, b < 0, c > 0$.

Ⓒ $a < 0, b > 0, c = 0$. Ⓓ $a > 0, b < 0, c < 0$.

Lời giải.

Dựa vào hình dạng đồ thị hàm số ta nhận thấy:

Hệ số $a < 0$.

Hàm số có 3 điểm cực trị $\Rightarrow a \cdot b < 0 \Rightarrow b > 0$.

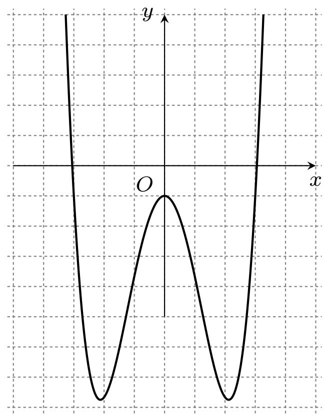
Đồ thị hàm số đi qua gốc tọa độ $\Rightarrow c = 0$.

Vậy $a < 0, b > 0, c = 0$.

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 32 (THPT Cộng Hiền 2019).

Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hỏi khẳng định nào sau đây đúng?



Ⓐ $a > 0, b < 0, c < 0$. Ⓑ $a > 0, b > 0, c < 0$.

Ⓒ $a > 0, b < 0, c > 0$. Ⓓ $a < 0, b > 0, c < 0$.

Lời giải.

Nhìn vào đồ thị ta có:

Khi $x \in (2; +\infty)$ hàm số đồng biến $\Rightarrow a > 0$.

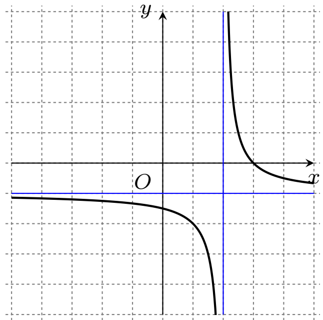
Hàm số có 3 điểm cực trị nên $a.b < 0$ mà $a > 0 \Rightarrow b < 0$.

$y(0) = -1 = c \Rightarrow c < 0$.

Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 33 (SGD Điện Biên - 2019).

Cho hàm số $y = \dfrac{ax+3}{x+c}$ có đồ thị như hình vẽ bên. Tính giá trị của $a - 2c$.



Ⓐ $a - 2c = 3$.
Ⓑ $a - 2c = -3$.
Ⓒ $a - 2c = -1$.
Ⓓ $a - 2c = -2$.

Lời giải.

Đồ thị hàm số có TCN $y = -1 \Leftrightarrow \dfrac{a}{1} = -1 \Leftrightarrow a = -1$.

Mặt khác Đồ thị hàm số có TCĐ $x = 2$ nên $2 + c = 0 \Leftrightarrow c = -2$

$\Rightarrow a - 2c = -1 - 2 \cdot (-2) = 3$.

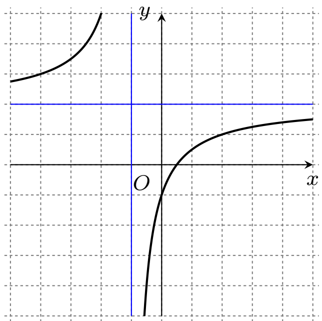
Dựa vào đồ thị ta thấy các điểm $(3;0)$ và $\left(0; -\dfrac{3}{2}\right)$ thuộc vào đồ thị hàm số đã cho nên ta được hệ phương trình $\begin{cases} 0 = \dfrac{a \cdot 3 + 3}{3 + c} \\ -\dfrac{3}{2} = \dfrac{a \cdot 0 + 3}{0 + c} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a + 3 = 0 \\ -3c = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ c = -2 \end{cases}$

$\Rightarrow a - 2c = -1 - 2 \cdot (-2) = 3$.

Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 34.

Hình vẽ bên là đồ thị hàm số $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



Ⓐ $ad > 0$ và $bd > 0$.
Ⓑ $ad > 0$ và $ab < 0$.
Ⓒ $bd < 0$ và $ab > 0$.
Ⓓ $ad < 0$ và $ab < 0$.

Lời giải.

Đồ thị hàm số giao với trục Ox tại điểm có hoành độ $x = -\dfrac{b}{a}$, giao với Oy tại điểm có tung độ $y = \dfrac{b}{d}$.

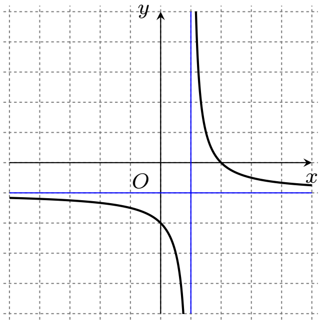
Dựa vào hình vẽ ta có $\begin{cases} -\dfrac{b}{a} > 0 \\ \dfrac{b}{d} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{b}{a} < 0 \\ \dfrac{b}{d} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ab < 0 \\ bd < 0 \end{cases} \Rightarrow ad > 0$.

Trong các phương án chỉ có phương án B thỏa mãn.

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 35.

Cho hàm số $y = \dfrac{ax - b}{x - 1}$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây: Khẳng định nào sau đây đúng?



Ⓐ $b < a < 0$. Ⓑ $a < b < 0$.
Ⓒ $b > a$ và $a < 0$. Ⓓ $a < 0 < b$.

Lời giải.

Ta thấy đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y = -1$ suy ra $a = -1$.

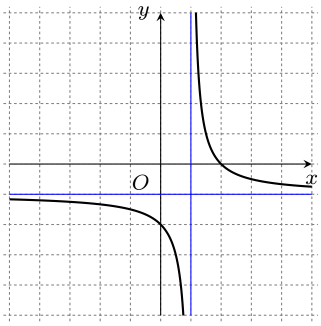
Do đồ thị hàm số đi qua điểm $(2; 0)$ nên $2a - b = 0 \Leftrightarrow -2 - b = 0 \Leftrightarrow b = -2$.

Vậy $b < a < 0$.

Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 36 (Chuyên Lương Văn Chánh - Phú Yên - 2020).

Đồ thị trong hình bên dưới là của hàm số $y = \dfrac{ax + b}{x + c}$ (với $a, b, c \in \mathbb{R}$). Khi đó tổng $a + b + c$ bằng



Ⓐ -1. Ⓑ 1. Ⓒ 2. Ⓓ 0.

Lời giải.

Đồ thị hàm số $y = \dfrac{ax + b}{x + c}$ có đường tiệm cận ngang $y = a$, đường tiệm cận đứng $x = -c$ và cắt Oy tại điểm $\left(0; \dfrac{b}{c}\right)$.

Từ đồ thị hàm số ta có đường tiệm cận ngang $y = -1$, đường tiệm cận đứng $x = 1$ và cắt Oy tại điểm $(0; -2)$.

Từ đó suy ra: $\begin{cases} a = -1 \\ -c = 1 \\ \dfrac{b}{c} = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ c = -1 \\ b = -2c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ c = -1 \\ b = 2 \end{cases}$. Vậy $a + b + c = -1 - 1 + 2 = 0$.

Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 37 (Chuyên Lương Văn Tụy - Ninh Bình - 2020).

Cho hàm số $f(x) = \dfrac{2 - ax}{bx - c}$ $(a, b, c \in \mathbb{R}, b \neq 0)$ có bảng biến thiên như sau. Tổng các số $(a + b + c)^2$ thuộc khoảng nào sau đây

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		$+$	||	$+$	
y	3	↗	$+\infty$ || $-\infty$	↗	3

Ⓐ $(1; 2)$. Ⓑ $(2; 3)$. Ⓒ $\left(0; \dfrac{4}{9}\right)$. Ⓓ $\left(\dfrac{4}{9}; 1\right)$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2-ax}{bx-c}=\dfrac{-a}{b}$, theo giả thiết suy ra $\dfrac{-a}{b}=3\Leftrightarrow a=-3b$.
Hàm số không xác định tại $x=1\Rightarrow b-c=0\Leftrightarrow b=c$.
Hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định nên $f'(x)=\dfrac{ac-2b}{(bx-c)^2}>0$ với mọi x khác 1. Suy ra $ac-2b>0\Leftrightarrow -3b^2-2b>0\Leftrightarrow -\dfrac{2}{3}<b<0\Leftrightarrow 0<-b<\dfrac{2}{3}$.
Lại có $a+b+c=-3b+b+b=-b$. Suy ra $(a+b+c)^2=b^2\in\left(0;\dfrac{4}{9}\right)$.
Vậy tổng $a+b+c$ thuộc khoảng $\left(0;\dfrac{4}{9}\right)$.
Chọn đáp án (C) □

Câu 38 (Chuyên Hùng Vương - Gia Lai - 2020).
Cho hàm số $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}(a,b,c,d\in\mathbb{R}$ và $c\neq 0)$. Biết rằng đồ thị hàm số đã cho đi qua điểm $(-1;7)$ và giao điểm hai tiệm cận là $(-2;3)$. Giá trị biểu thức $\dfrac{2a+3b+4c+d}{7c}$ bằng

(A) 7. (B) 4. (C) 6. (D) -5.

Lời giải.

+ Ta có đồ thị hàm số $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ có đường tiệm cận ngang là $y=\dfrac{a}{c}$, đường tiệm cận đứng là $x=\dfrac{-d}{c}$.

Theo bài ra, ta có: $\begin{cases}\dfrac{a}{c}=3\\ \dfrac{-d}{c}=-2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=3c\\ d=2c.\end{cases}$

+ Điểm $(-1;7)$ thuộc đồ thị hàm số $f(x)$ nên $\dfrac{-a+b}{-c+d}=7\Leftrightarrow\dfrac{-3c+b}{-c+2c}=7\Leftrightarrow b=10c$.
Vậy $\dfrac{2a+3b+4c+d}{7c}=\dfrac{2\cdot(3c)+3\cdot(10c)+4c+2c}{7c}=6$.
Chọn đáp án (C) □

Câu 39 (Chuyên Lê Hồng Phong - Nam Định - 2020).
Cho hàm số $y=\dfrac{ax+1}{bx+c}$ (a, b, c là các tham số) có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$		2		$+\infty$
y'		$+$	‖	$+$	
y	1 ↗	$+\infty$	‖	$-\infty$ ↗	1

Xét các phát biểu sau: $(1)\colon c>1$; $(2)\colon a+b<0$; $(3)\colon a+b+c=0$; $(4)\colon a>0$. Số phát biểu đúng là

(A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên ta có hàm số luôn đồng biến trên từng khoảng xác định, đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là đường thẳng $x = 2$ và tiệm cận ngang là đường thẳng $y = 1$ nên ta có hệ.

$$\begin{cases} -\dfrac{c}{b} = 2 \\ \dfrac{a}{b} = 1 \\ ac - b > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = -2b \\ a = b \\ ac - b > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = -2b \\ a = b \\ -2b^2 - b > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < c < 1 \\ -\dfrac{1}{2} < a < 0 \\ -\dfrac{1}{2} < b < 0 \\ a + b + c = 0. \end{cases}$$

Dựa vào hệ trên ta có các phát biểu (1), (4) là sai, (2), (3) đúng.

Chọn đáp án B □

Câu 40 (Đô Lương 4 - Nghệ An - 2020).

Ta xác định được các số a, b, c để đồ thị hàm số $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ đi qua điểm $(1; 0)$ và có điểm cực trị $(-2; 0)$. Tính giá trị biểu thức $T = a^2 + b^2 + c^2$.

A 25. B -1. C 7. D 14.

Lời giải.

Ta có $y = x^3 + ax^2 + bx + c \Rightarrow y' = 3x^2 + 2ax + b$.

Theo đề, ta có hệ phương trình

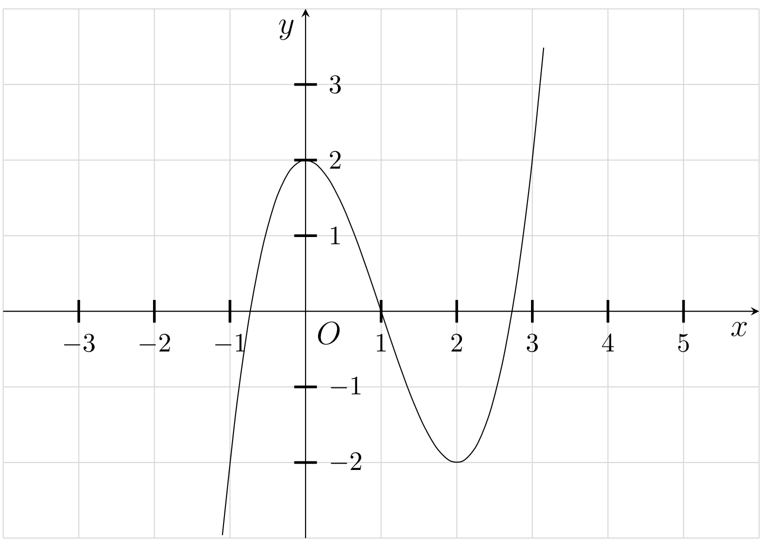
$$\begin{cases} y(1) = 0 \\ y(-2) = 0 \\ y'(-2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 1^3 + a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c \\ 0 = (-2)^3 + a \cdot (-2)^2 + b \cdot (-2) + c \\ 0 = 3 \cdot (-2)^2 + 2a \cdot (-2) + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b + c = -1 \\ 4a - 2b + c = 8 \\ -4a + b = -12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 0 \\ c = -4. \end{cases}$$

Vậy $T = a^2 + b^2 + c^2 = 3^2 + 0^2 + (-4)^2 = 25$.

Chọn đáp án A □

Câu 41 (Lê Lai - Thanh Hóa - 2020).

Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ. Tính $S = a + b$?



A $S = -2$. B $S = 0$. C $S = 1$. D $S = -1$.

Lời giải.

Vì đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm $y = 2$ nên $d = 2$.

Ta có $y' = 3ax^2 + 2bx + c$.

Hàm số đạt cực trị tại $x = 0$ và $x = 2$ nên

$$\begin{cases} y'(0) = 0 \\ y'(2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ 12a + 4b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ b = -3a \end{cases} \quad (1)$$

Từ đồ thị ta nhận thấy

$$y(2) = -2 \Leftrightarrow 8a + 4b + d = -2 \Leftrightarrow 8a + 4b = -4 \Leftrightarrow 2a + b = -1 \quad (2).$$

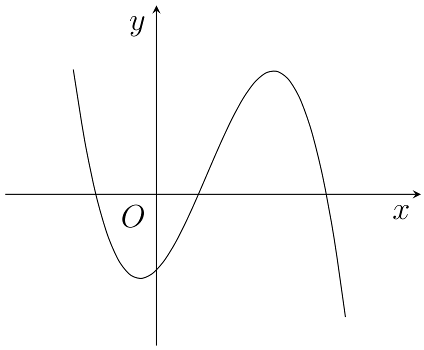
Thay (1) vào (2) ta tìm được $a = 1, b = -3$.

Vậy $S = -2$.

Chọn đáp án A □

Câu 42 (Lý Nhân Tông - Bắc Ninh - 2020).

Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A $a < 0,\ b < 0,\ c > 0,\ d < 0$.

B $a < 0,\ b > 0,\ c < 0,\ d < 0$.

C $a > 0,\ b < 0,\ c < 0,\ d > 0$.

D $a < 0,\ b > 0,\ c > 0,\ d < 0$.

Lời giải.

Ta có $y' = 3ax^2 + 2bx + c$, $y'' = 6ax + 2b$.

Từ đồ thị ta thấy:

$$\lim_{x \to +\infty} y = -\infty \Rightarrow a < 0.$$

$$y(0) < 0 \Rightarrow d < 0.$$

Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị với hoành độ x_1, x_2 trái dấu và $x_1 + x_2 > 0$. Ta suy ra phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm trái dấu và $x_1 + x_2 > 0$.

Ta suy ra $x_1 x_2 = \dfrac{c}{3a} < 0, \Rightarrow c > 0$.

Hơn nữa, $\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{3a} > 0 \\ a < 0 \end{cases} \Rightarrow b > 0$.

Vậy $a < 0,\ b > 0,\ c > 0,\ d < 0$.

Chọn đáp án D □

Câu 43 (Nguyễn Huệ - Phú Yên - 2020).

Cho hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+1}$ $(a,b,c\in\mathbb{R})$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y'	$+$	||	$+$
y	$2 \nearrow +\infty$	||	$-\infty \nearrow 2$

Tập các giá trị b là tập nghiệm của bất phương trình nào dưới đây?

(A) $b^3-8\le 0$. (B) $-b^2+4>0$. (C) $b^2-3b+2<0$. (D) $b^3-8<0$.

Lời giải.

Đồ thị hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+1}$ có đường tiệm cận đứng là đường thẳng $x=-\dfrac{1}{c}$ và đường tiệm cận ngang là đường thẳng $y=\dfrac{a}{c}$.

Nhìn vào bảng biến thiên, ta thấy $-\dfrac{1}{c}=-1\Rightarrow c=1$ và $\dfrac{a}{c}=2\Rightarrow a=2$ (vì $c=1$).

Ta có $y'=\dfrac{a-bc}{(cx+1)^2}$.

Vì hàm số đã cho đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(-1;+\infty)$ nên

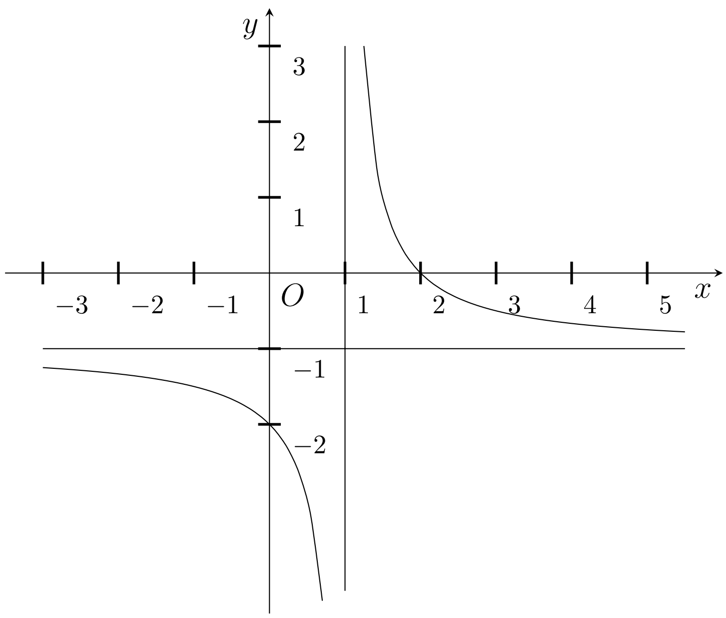
$$y'=\frac{a-bc}{(bx+c)^2}>0\Leftrightarrow a-bc>0\Leftrightarrow 2-b>0\Leftrightarrow b<2\Leftrightarrow b^3<8\Leftrightarrow b^3-8<0.$$

Vậy tập các giá trị b là tập nghiệm của bất phương trình $b^3-8<0$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 44 (Tiên Du - Bắc Ninh - 2020).

Cho hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ (với a, b, c, d là số thực) có đồ thị như hình dưới đây. Tính giá trị biểu thức $T=\dfrac{a-2b+3d}{c}$.



(A) $T = 6$. (B) $T = 0$. (C) $T = -8$. (D) $T = 2$.

Lời giải.

Từ đồ thị ta có:

TCĐ: $x = 1 \Rightarrow \dfrac{-d}{c} = 1 \Rightarrow \dfrac{d}{c} = -1 \Rightarrow d = -c$.

TCN: $y = -1 \Rightarrow \dfrac{a}{c} = -1 \Rightarrow a = -c$.

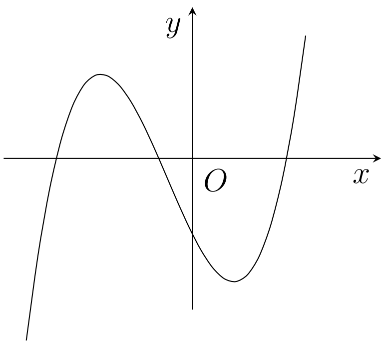
Đồ thị cắt trục hoành tại điểm: $x = 2 \Rightarrow \dfrac{-b}{a} = 2 \Rightarrow \dfrac{-b}{-c} = 2 \Rightarrow \dfrac{b}{c} = 2 \Rightarrow b = 2c$.

Vậy $T = \dfrac{a - 2b + 3d}{c} = \dfrac{-c - 4c - 3c}{c} = -8$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 45 (Thanh Chương 1 - Nghệ An - 2020).

Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ. Trong các số a, b, c và d có bao nhiêu số dương?



(A) 1. (B) 4. (C) 3. (D) 2.

Lời giải.

Từ hình dạng đồ thị hàm số ta có $a > 0$.

Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ âm $\Rightarrow d < 0$.

Ta có: $y' = 3ax^2 + 2bx + c$.

Hàm số có hai điểm cực trị trái dấu $\Rightarrow y' = 0$ có hai nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow ca < 0$.

Mà $a > 0$ nên $c < 0$.

Ta lại có: $y'' = 6ax + 2b$.

$y'' = 0 \Leftrightarrow 6ax + 2b = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{b}{3a}$.

Từ đồ thị hàm số ta thấy tâm đối xứng có hoành độ âm. Do đó $-\dfrac{b}{3a} < 0$.

Mà $a > 0$ nên $b > 0$.

Vậy trong các số a, b, c và d có 2 số dương là a và b.

Chọn đáp án (D) □

Câu 46 (Tiên Lãng - Hải Phòng - 2020).

Cho hàm số $f(x) = \dfrac{ax - 6}{bx - c}$ $(a, b, c \in \mathbb{R})$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
y'		$-$	||	$-$	
y	1	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	1

Trong các số a, b, c có bao nhiêu số âm?

(A) 0. (B) 3. (C) 1. (D) 2.

Lời giải.

Từ bảng biến thiên của hàm số, ta thấy đồ thị có hai đường tiệm cận, trong đó tiệm cận đứng là đường thẳng $x=-2$ và tiệm cận ngang là đường thẳng $y=1$.

Suy ra $\begin{cases} \dfrac{c}{b}=-2 \\ \dfrac{a}{b}=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} bc<0 \\ ab>0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} b>0, c<0, a>0 & (1) \\ b<0, c>0, a<0. & (2) \end{array}\right.$

Lại có hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng xác định $f'(x)=\dfrac{-ac+6b}{(bx-c)^2}<0 \Rightarrow ac>6b$.

Ta thấy (1) không thể xảy ra do nếu $b>0$ thì $ac>6b>0$; và (2) có thể xảy ra do nếu $c>0$, $a<0$ thì $6b<ac<0$.

Vậy trong các số a, b, c có hai số âm.

Chọn đáp án (D) □

Câu 47 (Chuyên Ngoại Ngữ Hà Nội - 2021).

Cho hàm số $y=\dfrac{ax-1}{bx+c}$ với a, b, $c \in \mathbb{R}$ có bảng biến thiên như hình vẽ:

x	$-\infty$		2		$+\infty$
y'		$-$	||	$-$	
y	-1	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	-1

Hỏi trong ba số a, b, c có bao nhiêu số dương?

(A) 0. (B) 3. (C) 2. (D) 1.

Lời giải.

Cho $x=0 \Rightarrow y=\dfrac{-1}{c}<0 \Leftrightarrow c>0$.

Đường tiện cận đứng $x=\dfrac{-c}{b}=2 \Rightarrow c=-2b \Rightarrow b<0$ (do $c>0$).

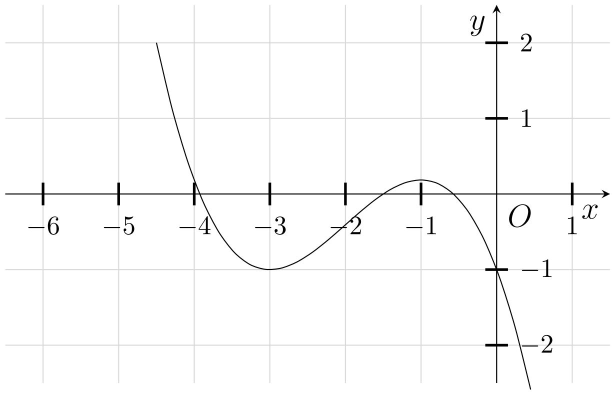
Tiệm cận ngang $y=\dfrac{a}{b}=-1 \Leftrightarrow a=-b \Rightarrow a>0$ (do $b<0$).

Khi đó $\begin{cases} b<0 \\ a>0 \\ c>0. \end{cases}$

Chọn đáp án (C) □

Câu 48 (Chuyên ĐHSP Hà Nội - 2021).

Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $(a, b, c, d \in \mathbb{R})$ có đồ thị là đường cong như hình vẽ bên.



Có bao nhiêu số dương trong các số a, b, c, d?

(A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

Lời giải.

Dựa vào giao điểm của đồ thị với trục tung ta có $d < 0$, dựa vào dáng của đồ thị suy ra $a < 0$.

Ta có $y' = 3ax^2 + 2bx + c$, dựa vào đồ thị ta có phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt âm suy ra $\begin{cases} \dfrac{c}{3a} > 0 \Rightarrow c < 0 \\ -\dfrac{2b}{3a} < 0 \Rightarrow b < 0. \end{cases}$

Chọn đáp án (A) □

Câu 49 (THPT Phan Đình Phùng - Quảng Bình - 2021).

Cho hàm số $f(x) = \dfrac{ax - 4}{bx + c}$ $(a, b, c \in \mathbb{R})$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y'	$+$	‖	$+$
y	$+1 \nearrow +\infty$	‖	$-\infty \nearrow 1$

Trong các số a, b, c có bao nhiêu số dương?

(A) 3. (B) 0. (C) 2. (D) 1.

Lời giải.

Ta có: $f(0) = -\dfrac{4}{c} > 0 \Rightarrow c < 0$.

Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số: $x = -\dfrac{c}{b} > 0 \Rightarrow b > 0$.

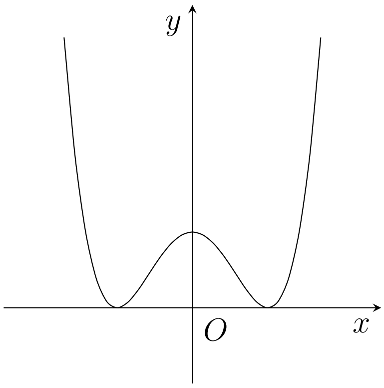
Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số: $y = \dfrac{a}{b} > 0 \Rightarrow a > 0$.

Vậy trong các số a, b, c có 2 số dương.

Chọn đáp án (C) □

Câu 50 (THPT Đào Duy Từ - Hà Nội - 2021).

Cho đồ thị của hàm số $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ như hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây là đúng?



Ⓐ $a > 0;\ b < 0;\ c > 0;\ b^2 - 4ac = 0$.
Ⓑ $a > 0;\ b > 0;\ c > 0;\ b^2 - 4ac = 0$.
Ⓒ $a > 0;\ b < 0;\ c > 0;\ b^2 - 4ac > 0$.
Ⓓ $a > 0;\ b < 0;\ c > 0;\ b^2 - 4ac < 0$.

Lời giải.

Quan sát dáng điệu đồ thị ta thấy $a > 0$, đồ thị có 3 cực trị nên $ab < 0 \Rightarrow b < 0$.

Đồ thị cắt trục tung tại điểm có tung độ dương nên $c > 0$.

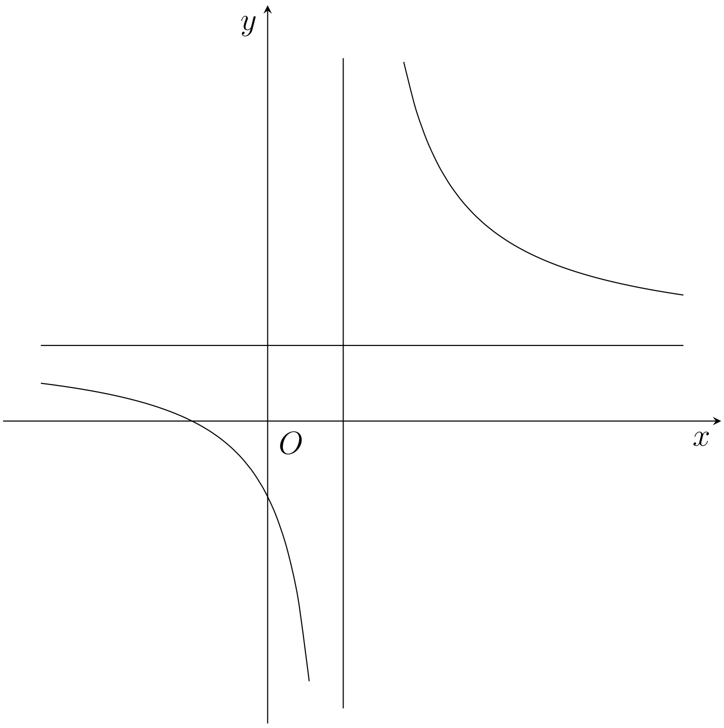
Đồ thị tiếp xúc với trục hoành nên tại $x_1 > 0$ ta có

$$\begin{cases} ax_1^4 + bx_1^2 + c = 0 \\ 4ax_1^3 + 2bx_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ax_1^4 + bx_1^2 + c = 0 \\ x_1^2 = \dfrac{-b}{2a} \end{cases}$$

$$\Rightarrow a \cdot \left(\frac{-b}{2a}\right)^2 + b \cdot \frac{-b}{2a} + c = 0 \Rightarrow \frac{4ac - b^2}{4a} = 0 \Rightarrow b^2 - 4ac = 0.$$

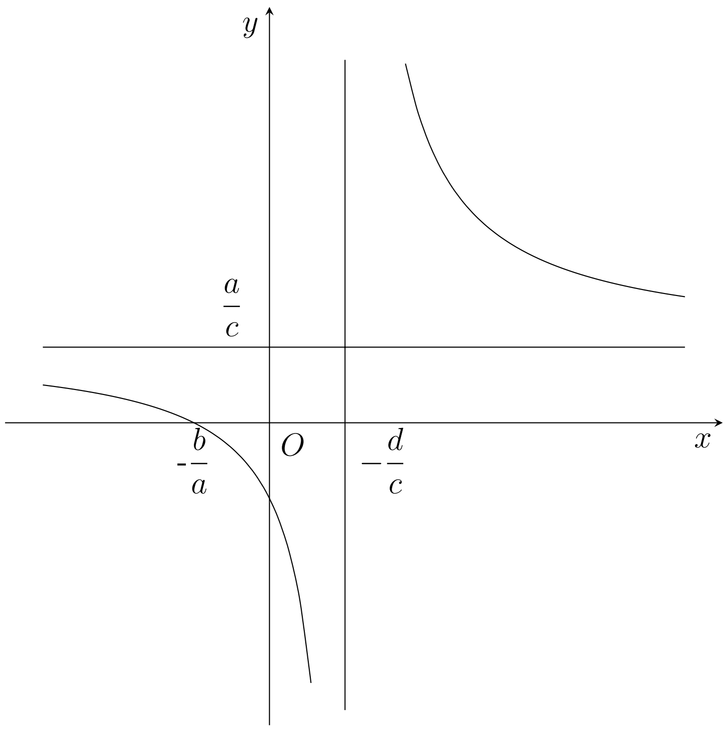
Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 51 (Sở Quảng Bình - 2021). Cho hàm số $y = \dfrac{ax + b}{cx + d}$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới, trong đó $d < 0$. Trong các số a, b, c có bao nhiêu số dương?



Ⓐ 0.
Ⓑ 1.
Ⓒ 2.
Ⓓ 3.

Lời giải.



Đồ thị có tiệm cận đứng $x = -\frac{d}{c}$ mà $-\frac{d}{c} > 0 \Rightarrow c > 0$.

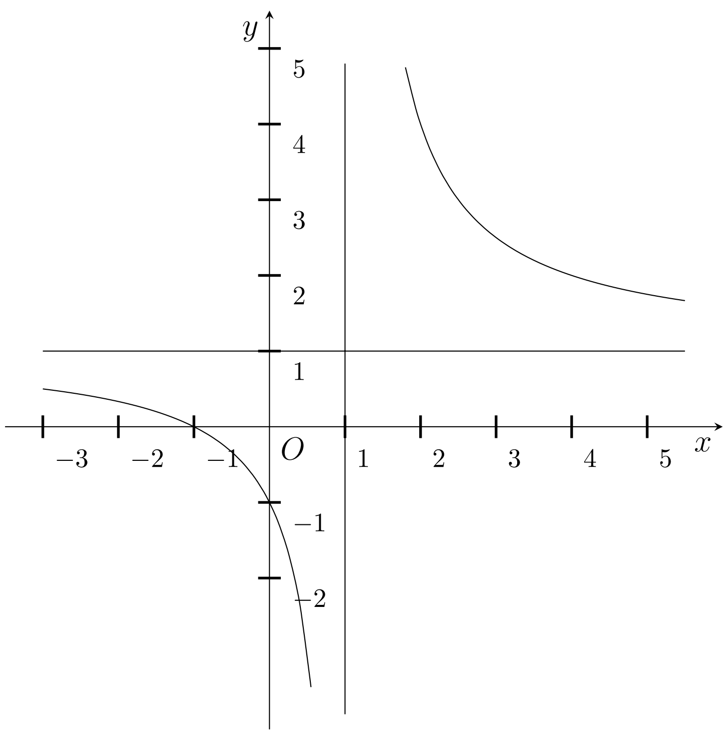
Đồ thị có tiệm cận ngang $y = \frac{a}{c}$ mà $\frac{a}{c} > 0 \Rightarrow a > 0$.

Đồ thị cắt trục Ox mà tại điểm có hoành độ $-\frac{b}{a}$ mà $-\frac{b}{a} < 0 \Rightarrow b > 0$.

Vậy trong các số a, b, c có 3 số dương.

Chọn đáp án D □

Câu 52 (Sở Cần Thơ - 2021). Cho hàm số $y = \dfrac{bx - c}{x - a}$ ($a \neq 0$ và a, b, $c \in \mathbb{R}$) có đồ thị như sau:



Khẳng định nào sau đây đúng?

A $a < 0$; $b > 0$; $c < 0$.

B $a < 0$; $b < 0$; $c > 0$.

Ⓒ $a > 0$; $b < 0$; $c < 0$. Ⓓ $a > 0$; $b > 0$; $c < 0$.

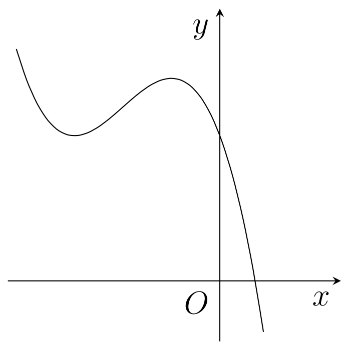
Lời giải.

Đồ thị hàm số $y = \dfrac{bx - c}{x - a}$ có tiệm cận đứng $x = a$, tiệm cận ngang $y = b$.

Đồ thị cắt trục tung tại điểm $\left(0; \dfrac{c}{a}\right)$. Nhìn hình vẽ ta thấy: $\begin{cases} a > 0 \\ b > 0 \\ \dfrac{c}{a} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ b > 0 \\ c < 0. \end{cases}$

Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 53 (Sở Cần Thơ - 2021). Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d\,(a, b, c, d \in \mathbb{R})$ có đồ thị như sau:



Có bao nhiêu số dương trong các số a, b, c, d?

Ⓐ 4. Ⓑ 2. Ⓒ 1. Ⓓ 3.

Lời giải.

Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ dương $\Rightarrow d > 0$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} y < 0 \Rightarrow a < 0$.

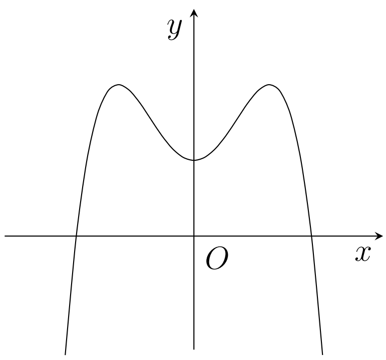
Ta có: $y' = 3ax^2 + 2bx + c$.

Đồ thị hàm số có 2 điểm cực trị nằm về bên trái trục tung nên phương trình $y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt $x_1 < x_2 < 0$.

Khi đó theo Vi-ét ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{2b}{3a} < 0 \\ x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{3a} > 0 \end{cases}$. Từ đó suy ra $b < 0$ và $c < 0$.

Vậy trong các số a, b, c, d chỉ có $d > 0$. □

Câu 54 (Chuyên Biên Hòa - 2021). Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị như hình vẽ sau:



Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

Ⓐ $a < 0$; $b < 0$; $c > 0$.
Ⓑ $a > 0$; $b < 0$; $c > 0$.
Ⓒ $a < 0$; $b > 0$; $c > 0$.
Ⓓ $a > 0$; $b < 0$; $c < 0$.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathscr{D} = \mathbb{R}$. Ta có: $y' = 4ax^3 + 2bx = 2x(2ax^2 + b)$.

Nhìn hình dáng đồ thị ta có $a < 0$.

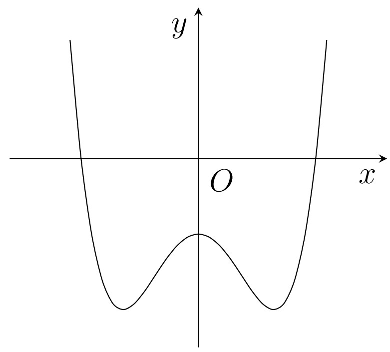
Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm $M(0; c)$ nằm phía trên trục hoành nên $c > 0$.

Đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị nên phương trình $y' = 0$ có 3 nghiệm phân biệt. Do đó $-\dfrac{b}{2a} > 0 \Rightarrow b > 0$.

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 55 (Liên Trường Nghệ An – 2021).

Cho hàm số $f(x) = ax^4 + bx^2 + c(a, b, c \in \mathbb{R})$ có đồ thị cho bởi hình vẽ bên. Chọn khẳng định đúng:



Ⓐ $b > a$.
Ⓑ $ab + c > 0$.
Ⓒ $a - c > 0$.
Ⓓ $abc < 0$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty \Rightarrow a > 0$; Hàm số có 3 điểm cực trị nên $ab < 0 \Rightarrow b < 0$.

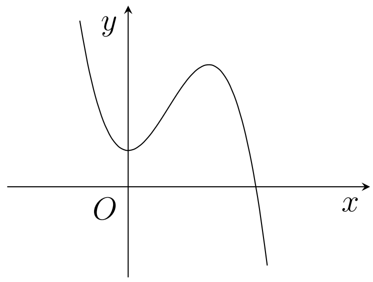
Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm nằm phía dưới trục hoành nên $c < 0$.

Vậy $a > 0$; $b < 0$; $c < 0$ suy ra $a - c > 0$.

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 56 (Chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm - Quảng Nam - 2021).

Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây đúng?



Ⓐ $a < 0$, $b > 0$, $c > 0$, $d > 0$.
Ⓑ $a < 0$, $b < 0$, $c = 0$, $d > 0$.
Ⓒ $a < 0$, $b > 0$, $c = 0$, $d > 0$.
Ⓓ $a > 0$, $b < 0$, $c > 0$, $d > 0$.

Lời giải.

Nhánh cuối đồ thị đi xuống nên $a < 0$.

Điểm uốn lệch bên phải trục Oy nên $ab < 0 \Rightarrow b > 0$.

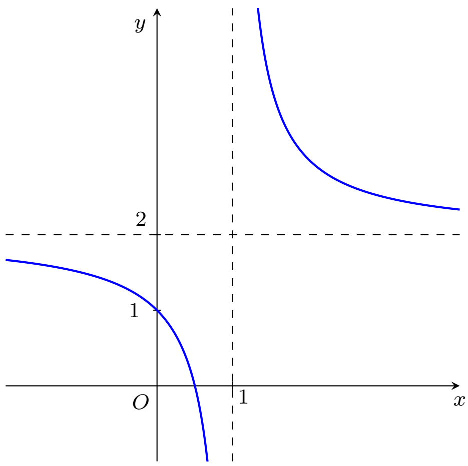
Đồ thị có 2 cực trị trong đó một cực trị thuộc Oy nên $c = 0$.

Đồ thị cắt trục tung tại điểm có tung độ dương nên $d > 0$.

Chọn đáp án C □

Câu 57 (Sở Cần Thơ - 2021).

Cho hàm số $f(x) = \dfrac{ax+2}{bx+c}$, $(a, b, c, d \in \mathbb{R})$ có đồ thị như hình bên. Khẳng định nào dưới đây đúng?



A. $b < a < 0 < c$.
B. $b < 0 < a < c$.
C. $a < b < 0 < c$.
D. $b < 0 < c < a$.

Lời giải.

Khi $x = 0 \Rightarrow y = \dfrac{2}{c} = 1 \Rightarrow c = 2$.

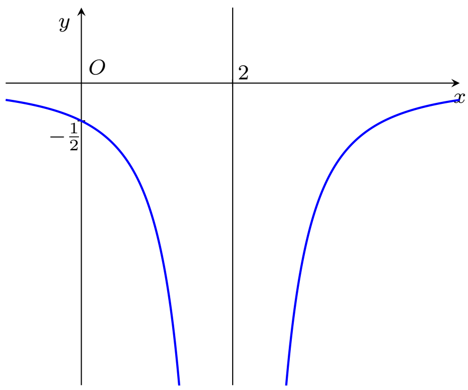
Tiệm cận đứng $x = -\dfrac{c}{b} = 1 \Rightarrow -\dfrac{2}{b} = 1 \Rightarrow b = -2$.

Tiệm cận ngang $y = \dfrac{a}{b} = 2 \Rightarrow \dfrac{a}{-2} = 2 \Rightarrow a = -4$.

Vậy $a < b < 0 < c$. □

Câu 58 (Sở Thái Nguyên 2022).

Cho hàm số $y = f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ có đồ thị hàm số $f'(x)$ như trong hình vẽ bên. Biết rằng đồ thị hàm số $f(x)$ đi qua điểm $A(0; 2)$. Giá trị $f(3)$ bằng



A. -2.
B. -1.
C. 3.
D. 5.

Lời giải.

Ta có $y = f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}$.

Vì đồ thị thị hàm số $f(x)$ đi qua điểm $A(0; 2)$ suy ra $f(0) = 2 \Rightarrow \dfrac{b}{d} = 2 \Leftrightarrow b = 2d$. (1)

Dựa vào đồ thị hàm số $f'(x)$ ta có: $\begin{cases} f'(0) = -\dfrac{1}{2} \\ x = -\dfrac{d}{c} = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{ad-bc}{d^2} = -\dfrac{1}{2} & (2) \\ d = -2c. & (3) \end{cases}$

Thay (1) vào (2):

$$\frac{ad-2dc}{d^2} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{a-2c}{d} = -\frac{1}{2} \Rightarrow a = -\frac{1}{2}d + 2c = -\frac{1}{2} \cdot (-2c) + 2c = 3c.$$

Vậy, $f(3) = \dfrac{3a+b}{3c+d} = \dfrac{3\cdot 3c - 4c}{3c-2c} = \dfrac{5c}{c} = 5$.

Chọn đáp án (D) □

Dạng 2. Đồ thị hàm số chứa dấu giá trị tuyệt đối, biến đổi đồ thị

Dạng 3. Từ đồ thị $(C)\colon y = f(x)$ suy ra đồ thị $(C')\colon y = |f(x)|$.

Ta có $y = |f(x)| = \begin{cases} f(x) \text{ khi } f(x) \geq 0 \\ -f(x) \text{ khi } f(x) < 0. \end{cases}$

Cách vẽ (C') từ (C):

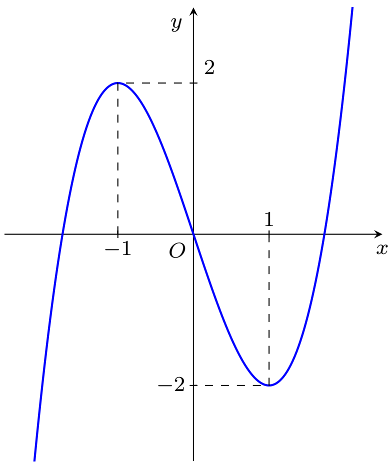
- Giữ nguyên phần đồ thị phía trên Ox của đồ thị $(C)\colon y = f(x)$.
- Bỏ phần đồ thị phía dưới Ox của (C), lấy đối xứng phần đồ thị bị bỏ qua Ox.

Ví dụ 1. Từ đồ thị $(C)\colon y = f(x) = x^3 - 3x$ suy ra đồ thị $y = |x^3 - 3x|$.

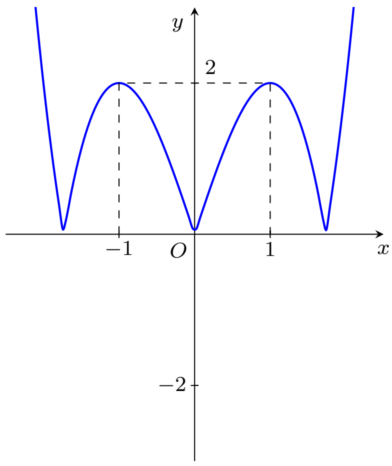
Lời giải.

Biến đổi (C):

- Bỏ phần đồ thị của (C) dưới Ox, giữ nguyên (C) phía trên Ox.
- Lấy đối xứng phần đồ thị bị bỏ qua Ox.



$(C) : y = x^3 - 3x$



$(C') : y = |x^3 - 3x|$

□

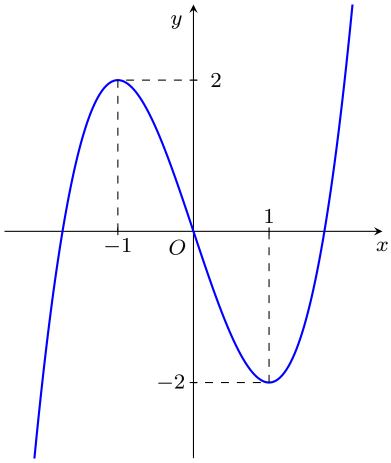
Dạng 4. Từ đồ thị $(C)\colon y = f(x)$ suy ra đồ thị $(C')\colon y = f(|x|)$

Câu 59. Từ đồ thị $(C)\colon y = f(x) = x^3 - 3x$ suy ra đồ thị $(C')\colon y = |x|^3 - 3|x|$.

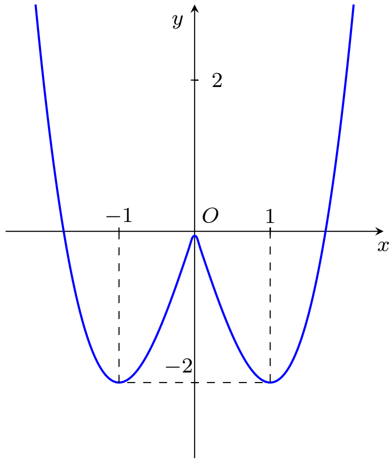
Lời giải.

Biến đổi (C):

- Giữ nguyên phần đồ thị bên phải Oy của đồ thị $(C)\colon y = f(x)$.
- Bỏ phần đồ thị bên trái Oy của (C), lấy đối xứng phần đồ thị được giữ qua Oy.



$(C) : y = x^3 - 3x$



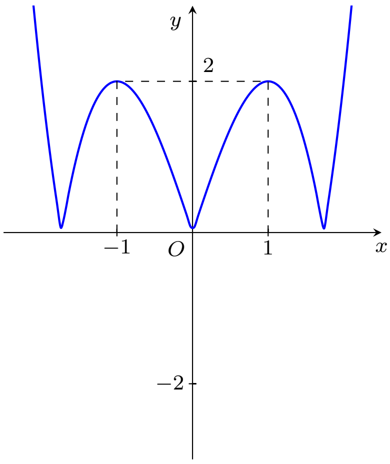
$(C') : y = |x|^3 - 3|x|$

□

Câu 60. Từ đồ thị $(C)\colon y = f(x) = x^3 - 3x$ suy ra đồ thị $y = ||x|^3 - 3|x||$.

Lời giải.

Biến đổi (C) để được đồ thị $(C')\colon y = |x|^3 - 3|x|$. Biến đổi $(C')\colon y = |x|^3 - 3|x|$ ta được đồ thị $(C'')\colon y = ||x|^3 - 3|x||$.



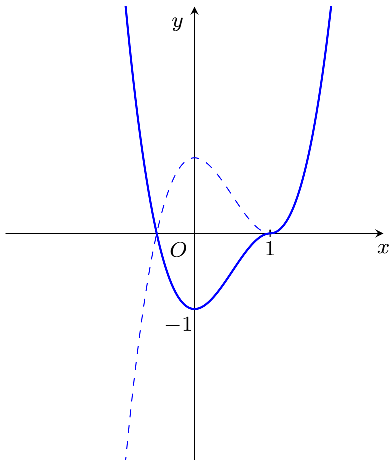
□

Dạng 5. Từ đồ thị $(C)\colon y = u(x){\cdot}v(x)$ suy ra đồ thị $(C')\colon y = |u(x)|{\cdot}v(x)$

Câu 61. Từ đồ thị $(C)\colon y = f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$ suy ra đồ thị $(C')\colon y = |x - 1|(2x^2 - x - 1)$.

Lời giải.

$$y = |x-1|\left(2x^2 - x - 1\right) = \begin{cases} f(x) \text{ khi } x \geq 1 \\ -f(x) \text{ khi } x < 1. \end{cases}$$



Đồ thị (C'):

- Giữ nguyên (C) với $x \geq 1$.
- Bỏ (C) với $x < 1$. Lấy đối xứng phần đồ thị bị bỏ qua Ox.

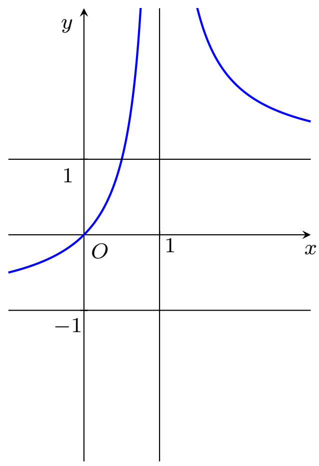
Nhận xét: Trong quá trình thực hiện phép suy đồ thị nên lấy đối xứng các điểm đặc biệt của (C): giao điểm với Ox, Oy, CĐ, CT...

□

Câu 62. Từ đồ thị $(C)\colon y = f(x) = \dfrac{x}{x-1}$ suy ra đồ thị $(C')\colon y = \dfrac{x}{|x-1|}$.

Lời giải.

$$y = \frac{x}{|x-1|} = \begin{cases} \dfrac{x}{x-1} \text{ khi } x \in (1; +\infty) \\ -\dfrac{x}{x-1} \text{ khi } x \in (-\infty; 1). \end{cases}$$



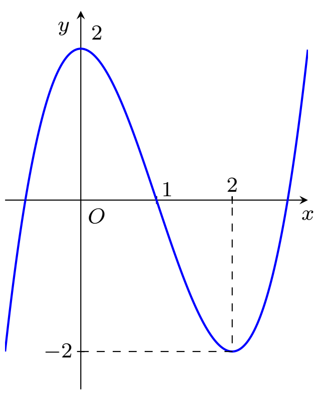
Đồ thị (C'):

- Bỏ phần đồ thị của (C) với $x < 1$, giữ nguyên (C) với $x > 1$.
- Lấy đối xứng phần đồ thị bị bỏ qua Ox.

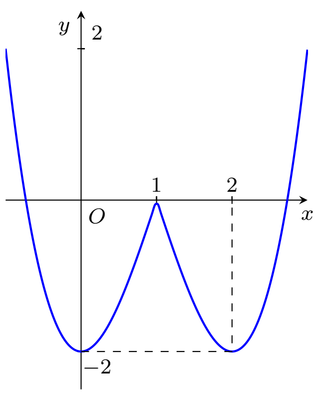
Nhận xét: Đối với hàm phân thức thì nên lấy đối xứng các đường tiệm cận để thực hiện phép suy đồ thị một cách tương đối chính xác.

□

Câu 63. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ có đồ thị như hình 1. Đồ thị hình 2 là của hàm số nào dưới đây?



Hình 1



Hình 2

Ⓐ $y = \left|x^3 - 3x^2 + 2\right|$.	Ⓑ $y = |x|^3 - 3x^2 + 2$.

Ⓒ $y = |x-1|\left(x^2 - 2x - 2\right)$.	Ⓓ $y = (x-1)\left|x^2 - 2x - 2\right|$.

Lời giải.

Ta có $y = x^3 - 3x^2 + 2 = (x-1)(x^2 - 2x - 2)$.

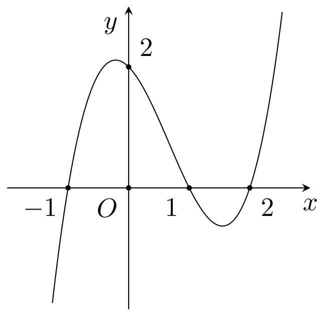
Từ đồ thị ban đầu (hình 1) sang đồ thị thứ 2 (hình 2) ta thấy.

Toàn bộ đồ thị ứng với $x \geq 1$ được giữ nguyên.

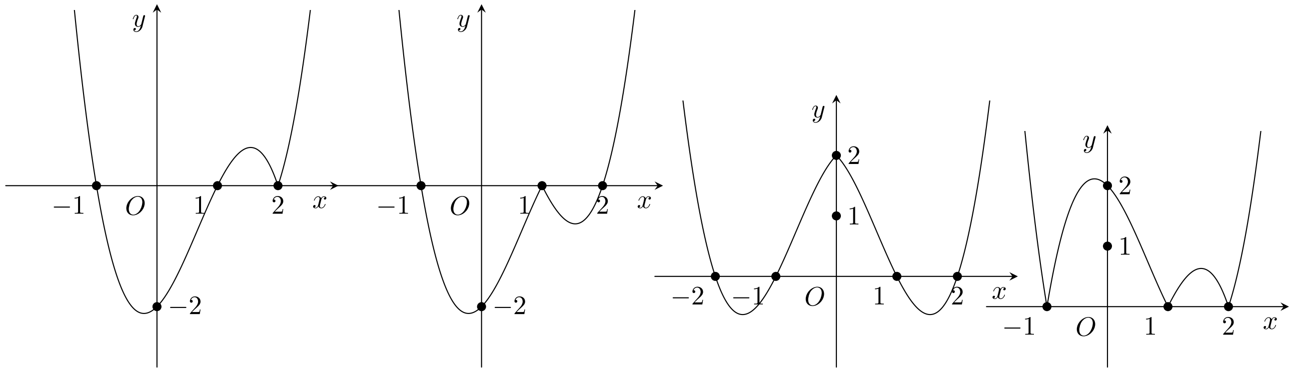
Phần đồ thị ứng với $x < 1$ lấy đối xứng qua trục hoành.

Chọn đáp án C □

Câu 64 (Đề Tham Khảo 2017). Hàm số $y = f(x) = (x-2)(x^2-1)$ có đồ thị như hình dưới đây:



Hình nào dưới đây là đồ thị của hàm số $y = |x-2|(x^2-1)$?



Hình 1 Hình 2 Hình 3 Hình 4

A Hình 1. B Hình 2. C Hình 3. D Hình 4.

Lời giải.

Ta có $y = |x-2|(x^2-1) = \begin{cases} (x-2)(x^2-1), x \geq 2 \\ -(x-2)(x^2-1), x < 2 \end{cases}$ nên đồ thị gồm 2 phần:

+) Giữ nguyên phần đồ thị đã cho ứng với $x \geq 2$.

+) Lấy đối xứng phần đồ thị đã cho ứng với $x < 2$ qua trục Ox.

Hình 1 nhận vì đồ thị là hàm $y = |x-2|(x^2-1)$.

Hình 2 loại vì đồ thị là hàm $y = (x-2)|x-1|(x+1)$.

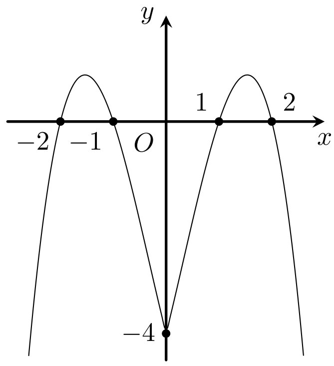
Hình 3 loại vì đồ thị hàm số $y = (|x|-2)(x^2-1)$.

Hình 4 loại vì đồ thị hàm $y = |(x-2)(x^2-1)|$.

Chọn đáp án A □

Câu 65 (THPT Việt Đức Hà Nội 2019).

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị hàm số $y = f(|x|)$ như hình vẽ. Chọn kết luận đúng trong các kết luận sau:



(A) $f(x) = -x^3 + x^2 + 4x - 4$. (B) $f(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$.
(C) $f(x) = -x^3 - x^2 + 4x - 4$. (D) $f(x) = x^3 + x^2 - 4x - 4$.

Lời giải.

Do đồ thị giao với trục Oy tại điểm có tung độ bằng -4 và $\lim\limits_{x \to +\infty} y = -\infty$.

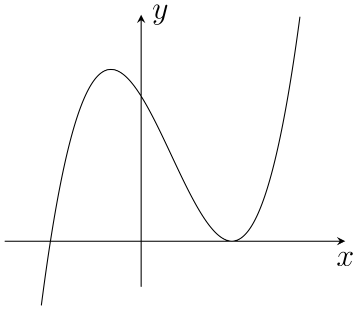
Chọn đáp án (A) □

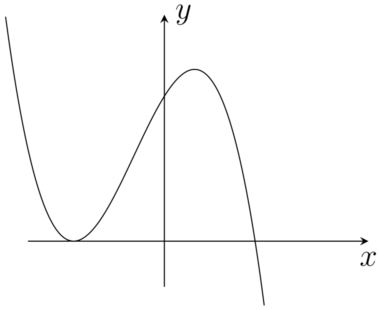
Câu 66. Biết phương trình $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 (a \neq 0)$ có đúng hai nghiệm thực. Hỏi đồ thị hàm số $y = |ax^3 + bx^2 + cx + d|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

(A) 4. (B) 5. (C) 2. (D) 3.

Lời giải.

Phương trình $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ $(a \neq 0)$ có 2 nghiệm thực nên đồ thị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + \text{d}$ $(a \neq 0)$ dạng:





Ta có:

Phương trình $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 (a \neq 0)$ có đúng hai nghiệm thực.

Nên đồ thị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ được minh họa như hình vẽ.

Gọi m là số điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$ và k là nghiệm bội lẻ.

của phương trình $f(x) = 0$

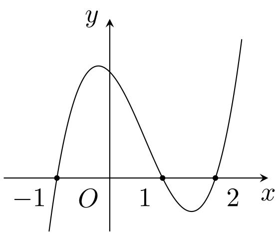
$\Rightarrow$ Số điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ là $m + k$.

Vậy đồ thị hàm số $y = |ax^3 + bx^2 + cx + d|$ có số điểm cực trị là $2 + 1$.

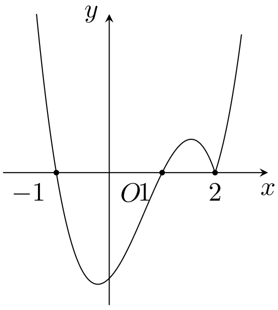
Chọn đáp án (D) □

Câu 67 (Chu Văn An - Hà Nội - 2019).

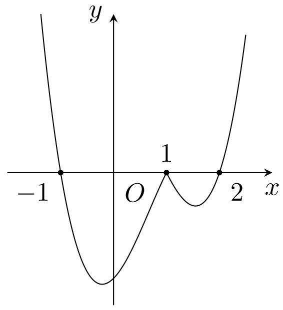
Cho hàm số $y = (x - 2)(x^2 - 1)$ có đồ thị như hình vẽ:



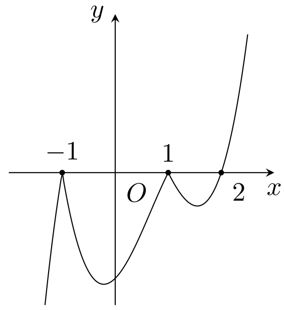
Một trong bốn hình dưới đây là đồ thị của hàm số $y = (x-2)\left|x^2-1\right|$. Hỏi đó là hình nào?



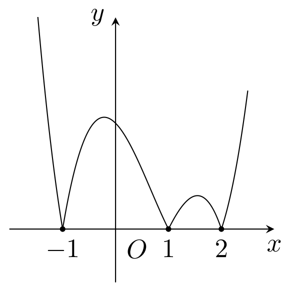
Hình 1



Hình 2



Hình 3



Hình 4

Ⓐ Hình 2. Ⓑ Hình 4. Ⓒ Hình 3. Ⓓ Hình 1.

Lời giải.

Gọi (C) là đồ thị hàm số $y = (x-2)\left(x^2-1\right)$.

Ta có $y = (x-2)\left|x^2-1\right| = \begin{cases} (x-2)\left(x^2-1\right) & \text{khi } x \le -1 \text{ hay } x \ge 1 \\ -(x-2)\left(x^2-1\right) & \text{khi } -1 < x < 1. \end{cases}$

Cách vẽ đồ thi như sau:

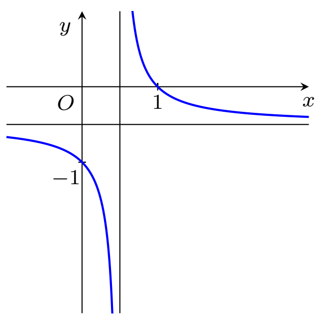
+ Giữ nguyên phần đồ (C) ứng với $x \in (-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$ ta được (C_1).

+ Lấy đối xứng phần (C) ứng với $x \in (-1; 1)$ qua trục hoành ta được (C_2).

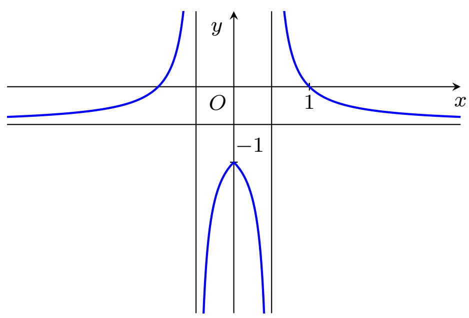
Khi đó đồ thị hàm số $y = (x-2)\left|x^2-1\right|$ gồm (C_1) và (C_2).

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 68. Cho hàm số $y = \dfrac{-x+1}{2x-1}$ có đồ thị như hình 1. Đồ thị hình 2 là của hàm số nào dưới đây?



Hình 1



Hình 2

Ⓐ $y = \left|\dfrac{-x+1}{2x-1}\right|$. Ⓑ $y = \dfrac{-|x|+1}{2|x|-1}$. Ⓒ $y = \dfrac{|-x+1|}{2x-1}$. Ⓓ $y = \dfrac{-x+1}{|2x-1|}$.

Lời giải.

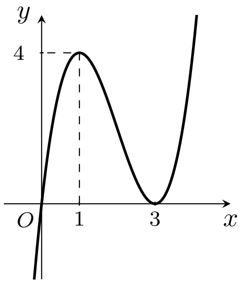
Từ đồ thị ban đầu (hình 1) sang đồ thị thứ 2 (hình 2) ta thấy.

Toàn bộ đồ thị phía bên phải Oy được giữ nguyên.

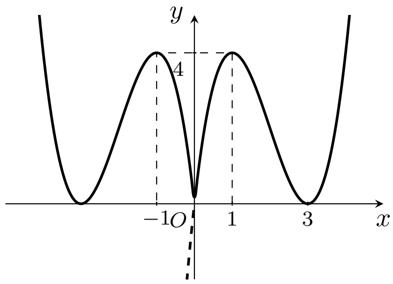
Sau đó, được lấy đối xứng sang trái.

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 69. Cho hàm số $y = x^3 - 6x^2 + 9x$ có đồ thị như Hình 1. Khi đó đồ thị Hình 2 là của hàm số nào dưới đây?



Hình 1



Hình 2

(A) $y = -x^3 + 6x^2 - 9x$.
(B) $y = |x^3 - 6x^2 + 9x|$.
(C) $y = |x|^3 - 6x^2 + 9|x|$.
(D) $y = |x|^3 + 6|x|^2 + 9|x|$.

Lời giải.

+/ Loại đáp án $y = -x^3 + 6x^2 - 9x$ vì $y = -x^3 + 6x^2 - 9x = -\left(x^3 - 6x^2 + 9x\right)$.

+/ Loại đáp án $y = |x^3 - 6x^2 + 9x|$, vì đồ thị của hàm số $y = |x^3 - 6x^2 + 9x|$ giữ lại phần đồ thị phía trên trục hoành và chỉ lấy đối xứng phần dưới trục hoành của đồ thị Hình 1.

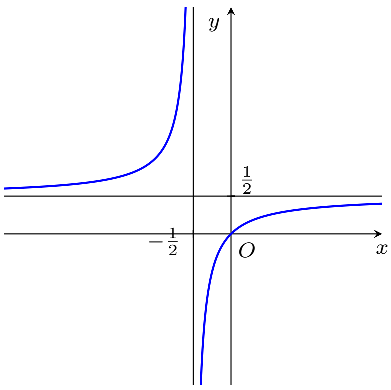
+/ Loại đáp án $y = |x|^3 + 6|x|^2 + 9|x|$ vì hệ số của x^2 khác -6.

+/ Đồ thị ở đáp án $y = |x|^3 - 6x^2 + 9|x|$ là đồ thị của hàm số dạng $y = f(|x|)$.

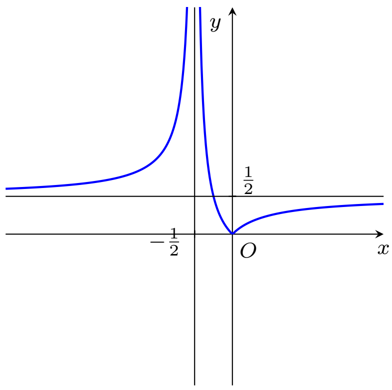
Chọn đáp án (C) □

Câu 70 (Cụm liên trường Hải Phòng -2019).

Cho hàm số $y = \dfrac{x}{2x+1}$ có đồ thị như Hình 1. Đồ thị Hình 2 là của hàm số nào trong các đáp án A, B, C, D dưới đây?



Hình 1



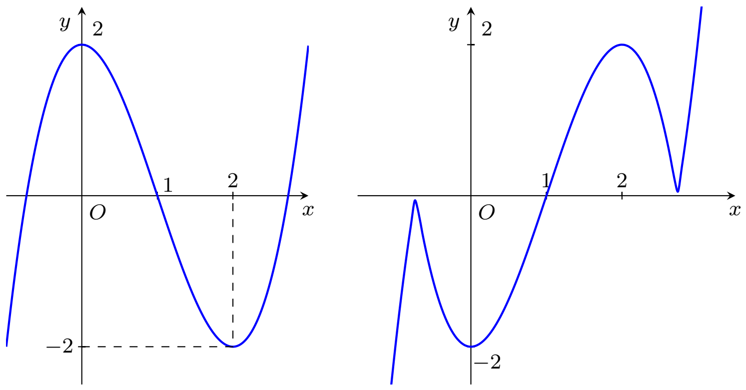
Hình 2

(A) $y = \left|\dfrac{x}{2x+1}\right|$.
(B) $y = \dfrac{|x|}{2|x|+1}$.
(C) $y = \dfrac{x}{2|x|+1}$.
(D) $y = \left|\dfrac{|x|}{2|x|+1}\right|$.

Lời giải.

Chọn đáp án (A) □

Câu 71. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ có đồ thị như hình 1. Đồ thị hình 2 là của hàm số nào dưới đây?



Hình 1 Hình 2

Ⓐ $y = |x^3 - 3x^2 + 2|$.
Ⓑ $y = |x|^3 - 3x^2 + 2$.
Ⓒ $y = |x - 1|\,(x^2 - 2x - 2)$.
Ⓓ $y = (x - 1)\,|x^2 - 2x - 2|$.

Lời giải.

Ta có: $y = x^3 - 3x^2 + 2 = (x - 1)\,(x^2 - 2x - 2)$.

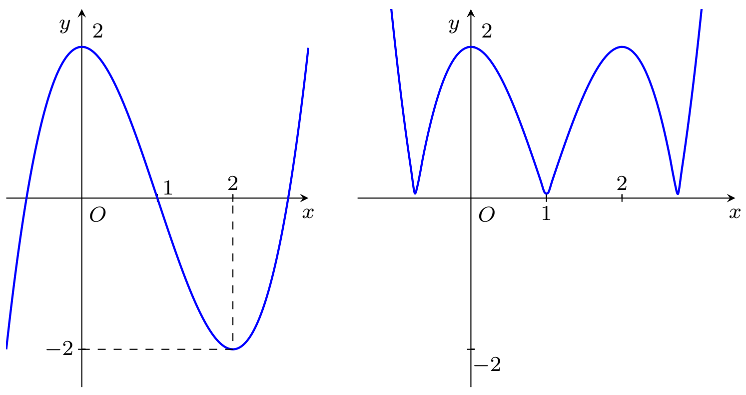
Từ đồ thị ban đầu (hình 1) sang đồ thị thứ 2 (hình 2) ta thấy.

Toàn bộ đồ thị ứng với $\left[\begin{array}{l} x \geq 1 + \sqrt{3} \\ x \leq 1 - \sqrt{3} \end{array}\right.$ được giữ nguyên.

Phần đồ thị ứng với $1 - \sqrt{3} \leq x \leq 1 + \sqrt{3}$ lấy đối xứng qua trục hoành.

Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 72. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ có đồ thị như hình 1. Đồ thị hình 2 là của hàm số nào dưới đây?



Hình 1 Hình 2

Ⓐ $y = |x^3 - 3x^2 + 2|$.
Ⓑ $y = |x|^3 - 3x^2 + 2$.
Ⓒ $y = |x - 1|\,(x^2 - 2x - 2)$.
Ⓓ $y = (x - 1)\,|x^2 - 2x - 2|$.

Lời giải.

Ta có $y = x^3 - 3x^2 + 2 = (x - 1)\,(x^2 - 2x - 2)$.

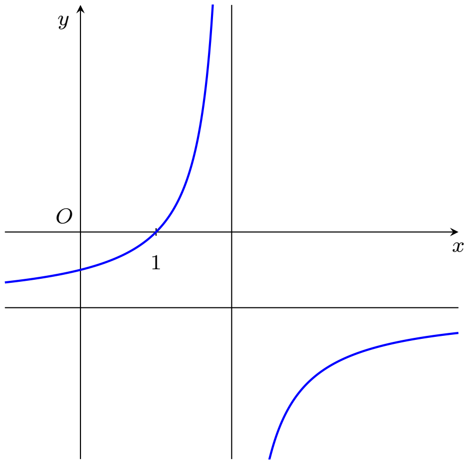
Từ đồ thị ban đầu (hình 1) sang đồ thị thứ 2 (hình 2) ta thấy.

Toàn bộ đồ thị nằm phía trên Ox được giữ nguyên.

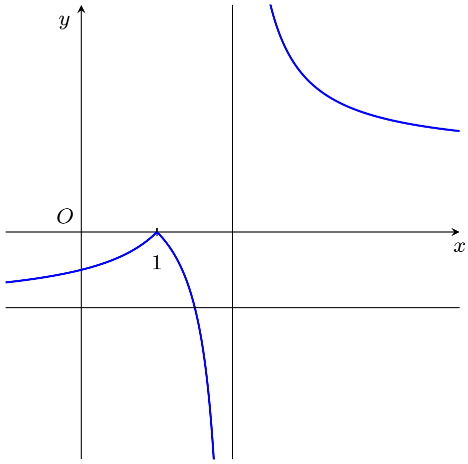
Phần đồ thị phía dưới Ox được lấy đối xứng qua Ox.

Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 73. Cho hàm số $y = \dfrac{-x+1}{x-2}$ có đồ thị như hình 1. Đồ thị hình 2 là của hàm số nào dưới đây?



Hình 1



Hình 2

Ⓐ $y = \left|\dfrac{-x+1}{x-2}\right|$. Ⓑ $y = \dfrac{|x|+1}{|x|-2}$. Ⓒ $y = \dfrac{|-x+1|}{x-2}$. Ⓓ $y = \dfrac{-x+1}{|x-2|}$.

Lời giải.

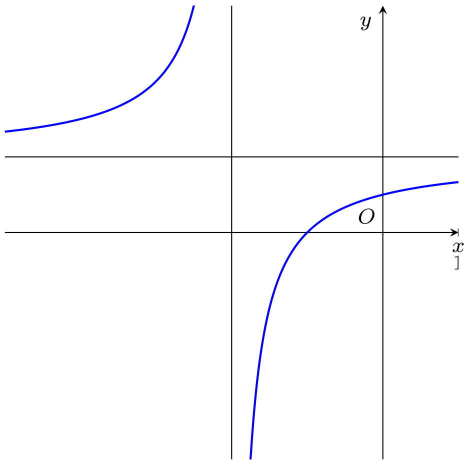
Từ đồ thị ban đầu (hình 1) sang đồ thị thứ 2 (hình 2) ta thấy.

Toàn bộ đồ thị phía bên trái đường thẳng $x = 1$ được giữ nguyên.

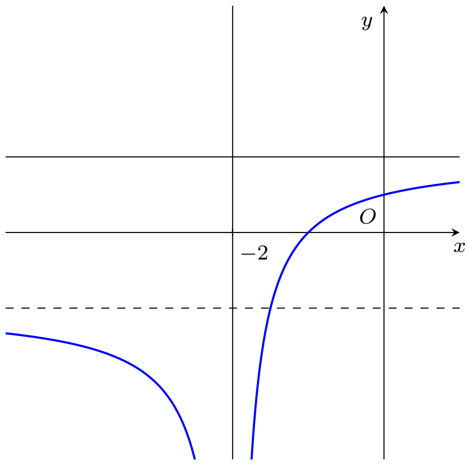
Toàn bộ đồ thị phía bên phải đường thẳng $x = 1$ lấy đối xứng qua Ox.

□

Câu 74. Cho hàm số $y = \dfrac{x+1}{x+2}$ có đồ thị như hình 1. Đồ thị hình 2 là của hàm số nào dưới đây?



Hình 1



Hình 2

Ⓐ $y = \left|\dfrac{x+1}{x+2}\right|$. Ⓑ $y = \dfrac{|x|+1}{|x|+2}$. Ⓒ $y = \dfrac{|x+1|}{x+2}$. Ⓓ $y = \dfrac{x+1}{|x+2|}$.

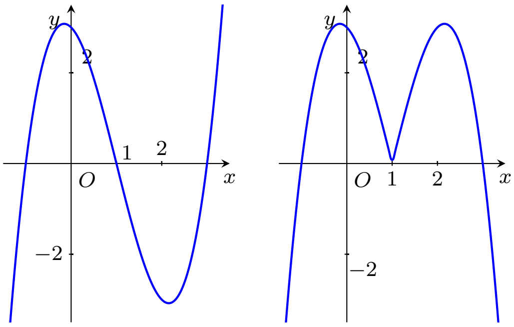
Lời giải.

Từ đồ thị ban đầu (hình 1) sang đồ thị thứ 2 (hình 2) ta thấy.

Toàn bộ đồ thị phía bên phải đường thẳng $x = -2$ được giữ nguyên.

Toàn bộ đồ thị phía bên trái đường thẳng $x = -2$ lấy đối xứng qua Ox. □

Câu 75. Cho hàm số $y = (x-1)(x^2-2x-3)$ có đồ thị như hình 1. Đồ thị hình 2 là của hàm số nào dưới đây?



Hình 1 Hình 2

Ⓐ $y = |(x-1)(x^2-2x-3)|$.
Ⓑ $y = |x-1|(x^2-2x-3)$.
Ⓒ $y = -|x-1|(x^2-2x-3)$.
Ⓓ $y = (x-1)|x^2-2x-3|$.

Lời giải.

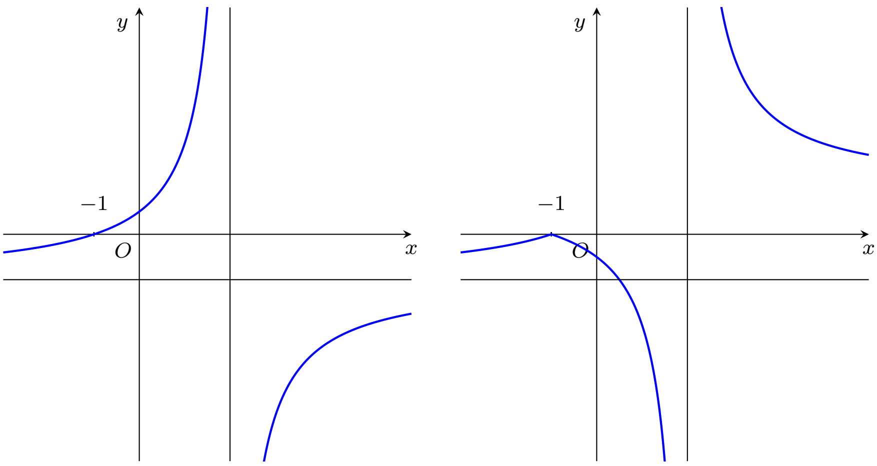
Từ đồ thị ban đầu (hình 1) sang đồ thị thứ 2 (hình 2) ta thấy.

Toàn bộ đồ thị nằm bên trái (ứng với $x \leq 1$) đường thẳng $x = 1$ được giữ nguyên.

Toàn bộ đồ thị nằm bên phải (ứng với $x > 1$) đường thẳng $x = 1$ được lấy đối xứng qua Ox.

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 76. Cho hàm số $y = \dfrac{x+1}{-x+2}$ có đồ thị như hình 1. Đồ thị hình 2 là của hàm số nào dưới đây?



Hình 1 Hình 2

Ⓐ $y = \left|\dfrac{x+1}{x+2}\right|$.
Ⓑ $y = \dfrac{|x+1|}{x-2}$.
Ⓒ $y = \dfrac{|x+1|}{-x+2}$.
Ⓓ $y = \dfrac{x+1}{|x+2|}$.

Lời giải.

Từ đồ thị ban đầu (hình 1) sang đồ thị thứ 2 (hình 2) ta thấy.

Toàn bộ đồ thị phía bên trái đường thẳng $x = -1$ (ứng với $x \leq -1$) được giữ nguyên.

Toàn bộ đồ thị phía bên phải đường thẳng $x = -1$ (ứng với $x \leq -1$) được lấy đối xứng qua trục Ox.

Chọn đáp án Ⓑ □

BẢNG ĐÁP ÁN

1. D	2. C	3. C	4. C	5. C	6. C	7. D	8. C	9. A	10. D
11. A	12. B	13. C	14. D	15. D	16. A	17. D	18. D	19. A	20. D
21. C	22. B	23. D	24. C	25. A	26. D	27. C	28. B	29. C	30. C
31. C	32. A	33. A	34. B	35. A	36. D	37. C	38. C	39. B	40. A
41. A	42. D	43. D	44. C	45. D	46. D	47. C	48. A	49. C	50. A
51. D	52. D	54. C	55. C	56. C	58. D	63. C	64. A	65. A	66. D
	67. C	68. B	69. C	70. A	71. D	72. A	75. C	76. B	

TƯƠNG GIAO ĐỒ THỊ HÀM SỐ

MỨC ĐỘ 1. MỨC ĐỘ 5,6 ĐIỂM

Dạng 1. Bài toán tương giao đồ thị thông qua đồ thị, bảng biến thiên

Câu 1 (Đề Minh Họa 2020 - Lần 1). Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Số nghiệm của phương trình $3f(x)-2=0$ là

Ⓐ 2. Ⓑ 0. Ⓒ 3. Ⓓ 1.

Lời giải.

Ta có $3f(x)-2=0 \Leftrightarrow f(x)=\dfrac{2}{3}$.

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
							$y=\dfrac{2}{3}$

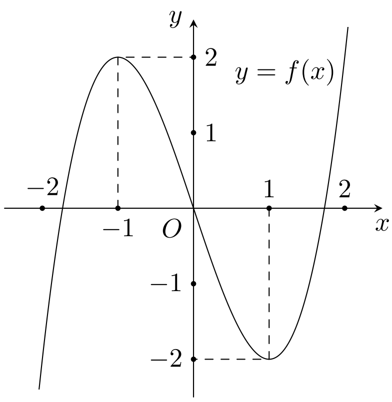
Căn cứ vào bảng biến thiên thì phương trình $3f(x)-2=0 \Leftrightarrow f(x)=\dfrac{2}{3}$ có 3 nghiệm phân biệt.

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 2 (Mã 101 - 2020 Lần 1).

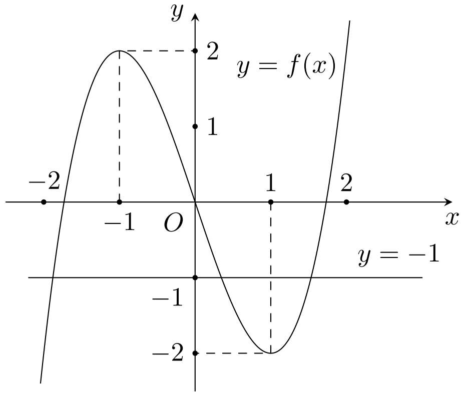
Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Số nghiệm thực của phương trình $f(x)=-1$ là

Ⓐ 3. Ⓑ 1. Ⓒ 0. Ⓓ 2.



Lời giải.

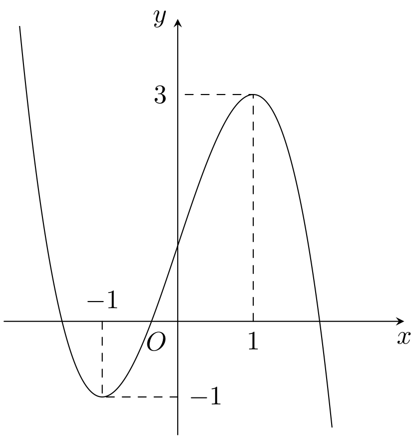
Số nghiệm thực của phương trình $f(x) = -1$ chính là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng $y = -1$.



Từ hình vẽ suy ra 3 nghiệm.

Chọn đáp án (A) □

Câu 3 (Mã 102 - 2020 Lần 1). Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Số nghiệm thực của phương trình $f(x) = 1$ là



(A) 0. (B) 3. (C) 1. (D) 2.

Lời giải.

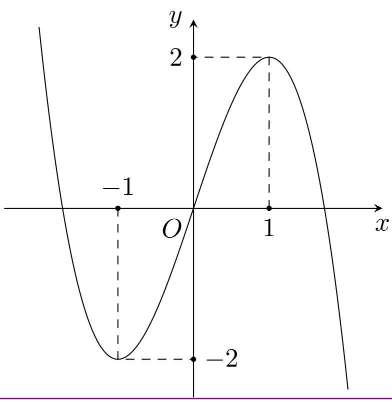
Ta thấy đường thẳng $y = 1$ cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại 3 điểm phân biệt nên phương trình $f(x) = 1$ có 3 nghiệm phân biệt.

Chọn đáp án (B) □

Câu 4 (Mã 103 - 2020 Lần 1).

Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Số nghiệm thực của phương trình $f(x) = 1$ là

(A) 1. (B) 0. (C) 2. (D) 3.

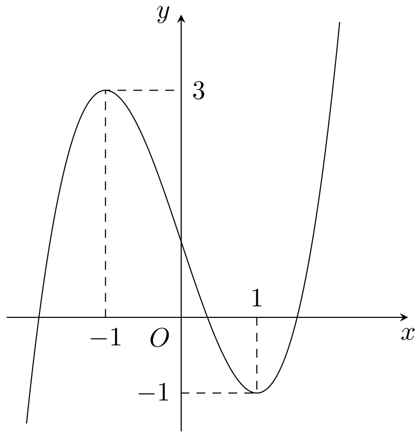


Lời giải.

Từ đồ thị hàm số ta có số nghiệm thực của phương trình $f(x) = 1$ là 3.

Chọn đáp án D □

Câu 5 (Mã 104 - 2020 Lần 1). Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình vẽ.



Số nghiệm thực của phương trình $f(x) = 2$ là

A 0. B 3. C 1. D 2.

Lời giải.

Ta có số nghiệm của phương trình là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ với đường thẳng $y = 2$.

Dựa vào đồ thị ta có phương trình có ba nghiệm phân biệt.

Chọn đáp án B □

Câu 6 (Mã 101 - 2019). Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

Số nghiệm thực của phương trình $2f(x) - 3 = 0$ là

A 2. B 1. C 4. D 3.

Lời giải.

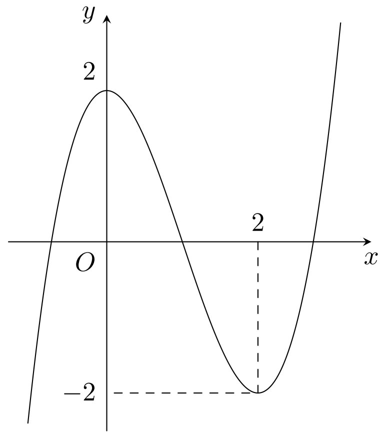
Ta có $2f(x) - 3 = 0 \Leftrightarrow f(x) = \frac{3}{2}$.

Số nghiệm của phương trình bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng $y = \frac{3}{2}$.

Dựa vào bảng biến thiên của $f(x)$ ta có số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng $y = \frac{3}{2}$ là 4.

Chọn đáp án C □

Câu 7 (Mã 101 - 2018). Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, (a, b, c, d \in \mathbb{R})$. Đồ thị của hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ. Số nghiệm thực của phương trình $3f(x) + 4 = 0$ là



Ⓐ 2. Ⓑ 0. Ⓒ 1. Ⓓ 3.

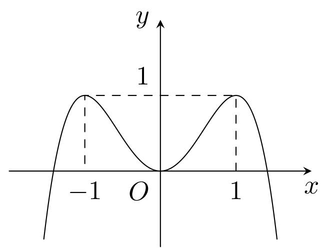
Lời giải.

Ta có $3f(x) + 4 = 0 \Leftrightarrow f(x) = -\dfrac{4}{3} \quad (*)$

$(*)$ là phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng $y = -\dfrac{4}{3}$.
Dựa vào đồ thị hàm số, ta thấy $(*)$ có 3 nghiệm.

Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 8 (Mã 102 - 2018). Cho hàm số $f(x) = ax^4 + bx^2 + c, (a, b, c \in \mathbb{R})$. Đồ thị của hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ bên.

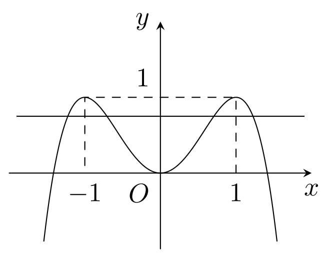


Số nghiệm của phương trình $4f(x) - 3 = 0$ là

Ⓐ 2. Ⓑ 0. Ⓒ 4. Ⓓ 3.

Lời giải.

Ta có $4f(x) - 3 = 0 \Leftrightarrow f(x) = \dfrac{3}{4}$.



Đường thẳng $y == \dfrac{3}{4}$ cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại 4 điểm phân biệt nên phương trình đã cho có 4 nghiệm phân biệt.

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 9 (Mã 103 - 2019). Cho hàm số $f(x)$ bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	↘	-1	↗	2	↘	$-\infty$

Số nghiệm thực của phương trình $2f(x) - 3 = 0$ là

(A) 3. (B) 0. (C) 1. (D) 2.

Lời giải.

Ta có $2f(x) - 3 = 0 \Leftrightarrow f(x) = \dfrac{3}{2}$. (1)

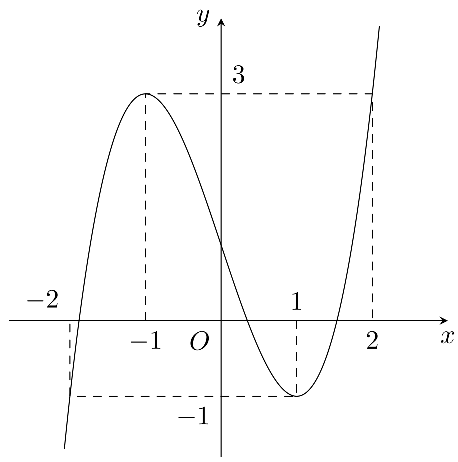
Số nghiệm thực của phương trình (1) bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ với đường thẳng $y = \dfrac{3}{2}$.

Từ bảng biến thiên đã cho của hàm số $f(x)$, ta thấy đường thẳng $y = \dfrac{3}{2}$ cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại ba điểm phân biệt.

Do đó phương trình (1) có ba nghiệm thực phân biệt.

Chọn đáp án (A) □

Câu 10 (Mã 103 - 2018). Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[-2; 2]$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Số nghiệm thực của phương trình $3f(x) - 4 = 0$ trên đoạn $[-2; 2]$ là



(A) 4. (B) 3. (C) 1. (D) 2.

Lời giải.

Ta có $3f(x) - 4 = 0 \Leftrightarrow f(x) = \dfrac{4}{3}$.

Dựa vào đồ thị, ta thấy đường thẳng $y = \dfrac{4}{3}$ cắt $y = f(x)$ tại 3 điểm phân biệt nên phương trình đã cho có 3 nghiệm phân biệt.

Chọn đáp án (B) □

Câu 11 (Mã 102 - 2019). Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	2	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Số nghiệm thực của phương trình $3f(x)-5=0$ là

Ⓐ 3. Ⓑ 4. Ⓒ 0. Ⓓ 2.

Lời giải.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	2	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$
									$y=\dfrac{5}{3}$

Xét phương trình $3f(x)-5=0 \Leftrightarrow f(x)=\dfrac{5}{3}$.

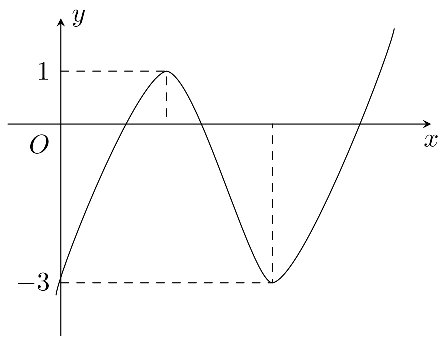
Số nghiệm của phương trình bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $(C)\colon y=f(x)$ và đường thẳng $d\colon y=\dfrac{5}{3}$.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy đường thẳng d cắt đồ thị (C) tại bốn điểm phân biệt.

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 12 (THCS - THPT Nguyễn Khuyến 2019).

Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.



Số nghiệm của phương trình $|f(x)|=2$ là

Ⓐ 3. Ⓑ 2. Ⓒ 4. Ⓓ 6.

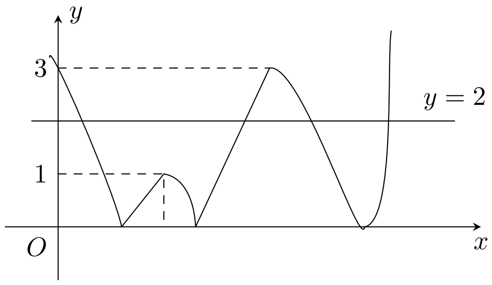
Lời giải.

*Đồ thị $y=|f(x)|$

- Bước 1: Giữ nguyên phần đồ thị của $y=f(x)$ nằm phía trên Ox.

- Bước 2: Lấy đối xứng phần đồ thị của $y=f(x)$ nằm phía dưới Ox qua trục hoành.

- Bước 3: Xóa phần đồ thị của $y=f(x)$ nằm phía dưới trục hoành



Số nghiệm của phương trình $|f(x)| = 2$ cũng chính là số giao điểm cũng đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ và đường thẳng $y = 2$. Dựa vào hình vẽ trên, ta thấy có 4 giao điểm.

*Cách giải khác: $|f(x)| = 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = 2 \\ f(x) = -2 \end{array}\right.$, dựa vào đồ thị suy ra phương trình đã cho có 4 nghiệm.

Chọn đáp án (C) □

Câu 13 (Mã 104 - 2019). Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Số nghiệm thực của phương trình $2f(x) + 3 = 0$ là

(A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

Lời giải.

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$
						$y = -\dfrac{3}{2}$	

Ta có $2f(x) + 3 = 0 \Leftrightarrow f(x) = -\dfrac{3}{2}$.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy phương trình này có 3 nghiệm.

Chọn đáp án (D) □

Câu 14 (Mã 110 - 2017).

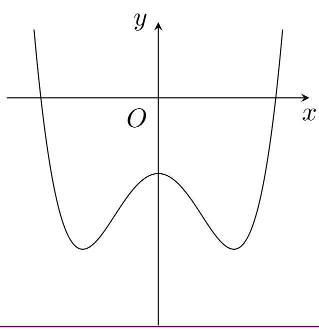
Đường cong ở hình bên là đồ thị của hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$, với a, b, c là các số thực. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

(A) Phương trình $y' = 0$ vô nghiệm trên tập số thực.

(B) Phương trình $y' = 0$ có đúng một nghiệm thực.

(C) Phương trình $y' = 0$ có đúng hai nghiệm thực phân biệt.

(D) Phương trình $y' = 0$ có đúng ba nghiệm thực phân biệt.

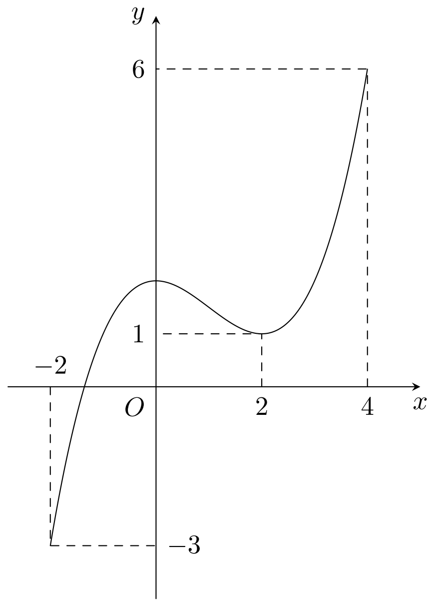


Lời giải.

Dựa vào hình dáng của đồ thị hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ ta thấy đây là đồ thị của hàm số bậc bốn trùng phương có 3 điểm cực trị nên phương trình $y' = 0$ có ba nghiệm thực phân biệt.

Chọn đáp án (D) □

Câu 15 (Mã 104 - 2018). Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-2; 4]$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Số nghiệm thực của phương trình $3f(x) - 5 = 0$ trên đoạn $[-2; 4]$ là



(A) 2. (B) 1. (C) 0. (D) 3.

Lời giải.

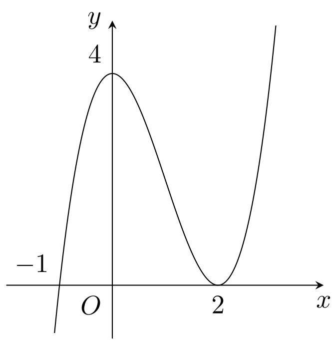
Ta có $3f(x) - 5 = 0 \Leftrightarrow f(x) = \dfrac{5}{3}$.

Dựa vào đồ thị ta thấy đường thẳng $y = \dfrac{5}{3}$ cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại ba điểm phân biệt thuộc đoạn $[-2; 4]$.

Do đó phương trình $3f(x) - 5 = 0$ có ba nghiệm thực.

Chọn đáp án (D) □

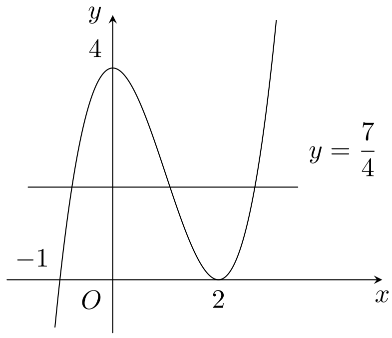
Câu 16 (THPT Cù Huy Cận 2019). Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Số nghiệm thực của phương trình $4f(x) - 7 = 0$.

(A) 2. (B) 4. (C) 3. (D) 1.

Lời giải.

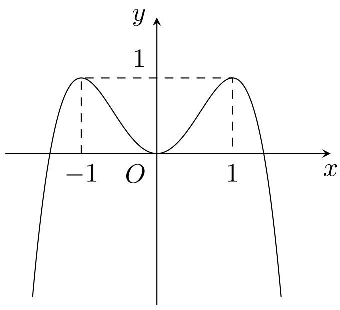


Ta có $4f(x) - 7 = 0 \Leftrightarrow f(x) = \frac{7}{4}$.

Do đường thẳng $y = \frac{7}{4}$ cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại 3 điểm phân biệt nên suy ra phương trình đã cho có 3 nghiệm.

Chọn đáp án C □

Câu 17 (THPT Lương Tài số 2 2019). Cho hàm số $y = f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị như hình vẽ. Phương trình $1 - 2f(x) = 0$ có tất cả bào nhiêu nghiệm?



(A) 4. (B) 3. (C) Vô nghiệm. (D) 2.

Lời giải.

Xét phương trình $1 - 2f(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{2}$.

Dựa vào đồ thị ta thấy đường thẳng $y = \frac{1}{2}$ cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại bốn điểm phân biệt.

Do đó phương trình $1 - 2f(x) = 0$ có bốn nghiệm phân biệt.

Chọn đáp án A □

Câu 18 (THPT Yên Phong 1 Bắc Ninh 2019).

Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên sau đây

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

Hỏi phương trình $2f(x) - 5 = 0$ có bao nhiêu nghiệm thực?

(A) 0. (B) 1. (C) 3. (D) 2.

Lời giải.

Phương trình $2f(x)-5=0 \Leftrightarrow f(x)=\dfrac{5}{2}$. $(*)$

Số nghiệm của phương trình $(*)$ bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $y=f(x)$ và đường thẳng $y=\dfrac{5}{2}$.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy 2 đồ thị $y=f(x)$ và $y=\dfrac{5}{2}$ có 3 điểm chung.

Vậy phương trình $2f(x)-5=0$ có 3 nghiệm thực.

Chọn đáp án C □

Câu 19 (THPT Lương Thế Vinh Hà Nội 2019).

Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình bên.

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y			4				$+\infty$
	$-\infty$				-2		

Số nghiệm của phương trình $f(x)-3=0$ là

A. 3. B. 2. C. 1. D. 0.

Lời giải.

Phương trình $f(x)-3=0 \Leftrightarrow f(x)=3$. $(*)$

Số nghiệm của phương trình $(*)$ bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $y=f(x)$ và đường thẳng $y=3$.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy 2 đồ thị $y=f(x)$ và $y=3$ có 3 điểm chung.

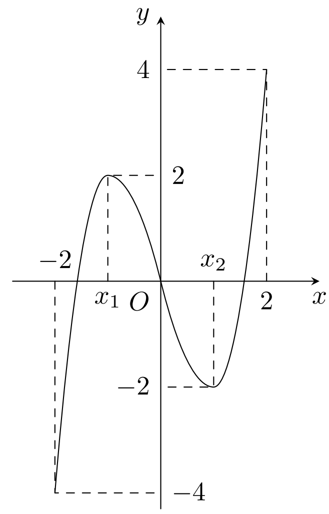
Vậy phương trình $f(x)-3=0$ có 3 nghiệm thực.

Chọn đáp án A □

Câu 20 (THPT - Yên Định Thanh Hóa 2019).

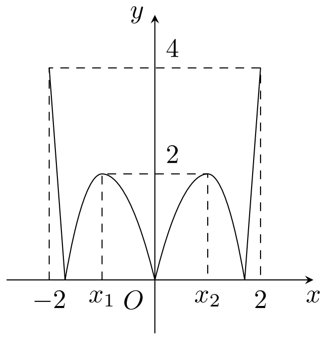
Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[-2;2]$ và có đồ thị là đường cong như hình vẽ bên. Tìm số nghiệm của phương trình $|f(x)|=1$ trên đoạn $[-2;2]$.

A. 3. B. 5. C. 6. D. 4.



Lời giải.

Ta có số nghiệm của phương trình $|f(x)| = 1$ là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ với đường thẳng $y = 1$.

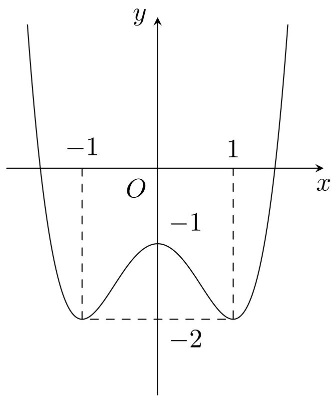


Từ hình vẽ ta thấy đường thẳng $y = 1$ cắt đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ tại 6 điểm.

Vậy số nghiệm của phương trình $|f(x)| = 1$ là 6.

Chọn đáp án C □

Câu 21 (Mã 102 - 2020 Lần 2). Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên. Số nghiệm thực của phương trình $f(x) = -\dfrac{3}{2}$ là



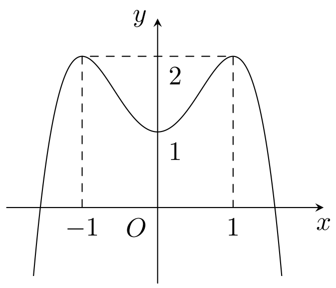
A 4. B 1. C 3. D 2.

Lời giải.

Từ đồ thị ta $f(x) = -\dfrac{3}{2}$ có 4 nghiệm phân biệt.

Chọn đáp án A □

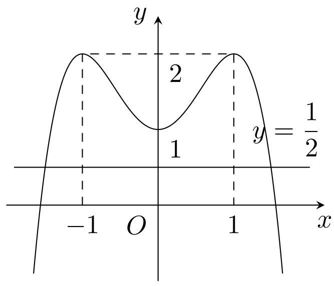
Câu 22 (Mã 103 - 2020 Lần 2). Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Số nghiệm thực của phương trình $f(x) = \dfrac{1}{2}$ là



A 2. B 4. C 1. D 3.

Lời giải.

Số nghiệm thực của phương trình $f(x) = \frac{1}{2}$ chính là số giao điểm của đồ thị hàm số $f(x)$ với đường thẳng $y = \frac{1}{2}$.

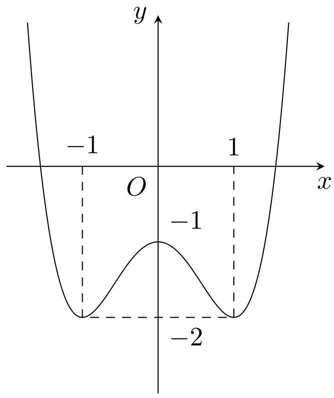


Dựa vào hình trên ta thấy đồ thị hàm số $f(x)$ với đường thẳng $y = \frac{1}{2}$ có 2 giao điểm.

Vậy phương trình $f(x) = \frac{1}{2}$ có hai nghiệm.

Chọn đáp án A □

Câu 23 (Mã 101 – 2020 Lần 2). Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên.



Số nghiệm của phương trình $f(x) = -\frac{1}{2}$ là

A 3. B 4. C 2. D $x = 1$.

Lời giải.

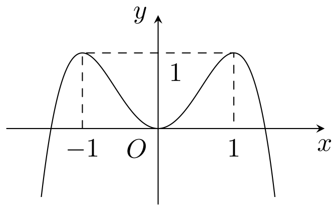
Số nghiệm của phương trình $f(x) = -\frac{1}{2}$ bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng $y = -\frac{1}{2}$.

Dựa vào đồ thị ta thấy: đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng $y = -\frac{1}{2}$ cắt nhau tại 2 điểm.

Nên phương trình $f(x) = -\frac{1}{2}$ có 2 nghiệm.

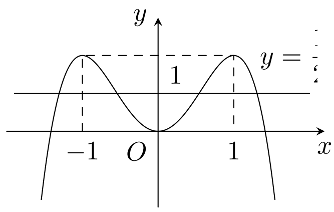
Chọn đáp án C □

Câu 24 (Mã 104 - 2020 Lần 2). Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Số nghiệm thực của phương trình $f(x) = \frac{1}{2}$ là



Ⓐ 4. Ⓑ 2. Ⓒ 1. Ⓓ 3.

Lời giải.

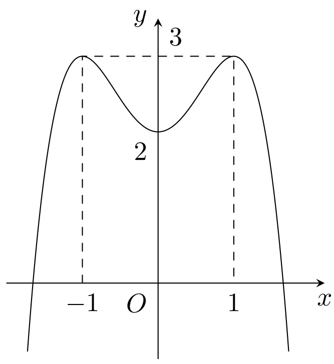


Số nghiệm thực của phương trình $f(x) = \dfrac{1}{2}$ bằng số giao điểm của đường thẳng $y = \dfrac{1}{2}$ và có đồ thị hàm số $y = f(x)$.

Ta thấy đường thẳng $y = \dfrac{1}{2}$ cắt đồ thị hàm số tại 4 điểm nên phương trình $f(x) = \dfrac{1}{2}$ có 4 nghiệm.

Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 25 (Mã 101-2022). Cho hàm số $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị là đường cong trong hình bên

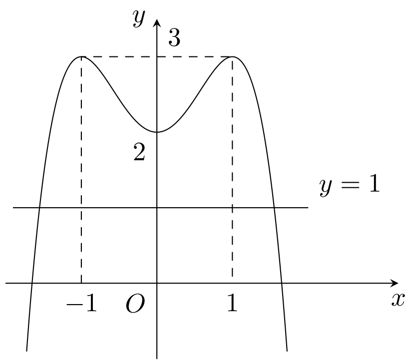


Số nghiệm thực của phương trình $f(x) = 1$.

Ⓐ 1. Ⓑ 2. Ⓒ 4. Ⓓ 3.

Lời giải.

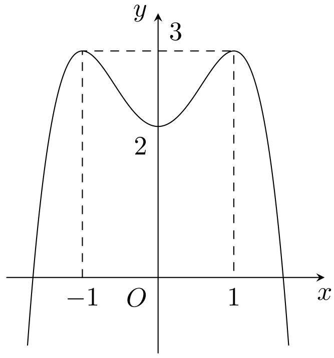
Đường thẳng (d) có phương trình $y = 1$ cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại 2 điểm phân biệt.



Suy ra phương trình $f(x) = 1$ có 2 nghiệm thực phân biệt.

Chọn đáp án B □

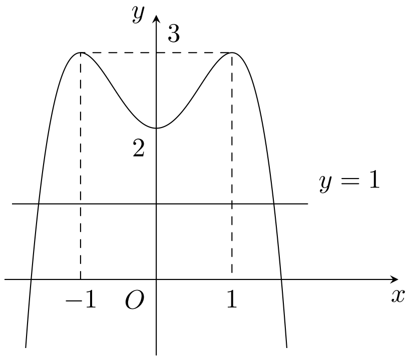
Câu 26 (Mã 102 - 2022). Cho hàm số $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị là đường cong trong hình vẽ sau



Số nghiệm thực của phương trình $f(x) = 1$ là

A 4. B 3. C 2. D 1.

Lời giải.



Số nghiệm thực của phương trình $f(x) = 1$ bằng với số giao điểm của đường thẳng $(d)\colon y = 1$ và đồ thị (C) của hàm số $y = f(x)$. Dựa vào hình vẽ, ta thấy (d) và (C) cắt nhau tại hai điểm phân biệt nên phương trình đã cho có hai nghiệm thực phân biệt

Chọn đáp án C □

Câu 27 (Mã 103-2022). Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	↘	-1	↗	3	↘	$-\infty$

Số giao điểm của đồ thị hàm số đã cho và đường thẳng $y = 1$ là

A 1. B 0. C 2. D 3.

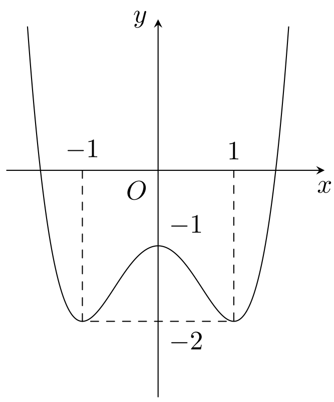
Lời giải.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	↘	-1	↗	3	↘	$-\infty$
							$y=1$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy đường thẳng $y=1$ cắt đồ thị hàm số tại 3 điểm

Chọn đáp án (D) □

Câu 28 (Mã 103 - 2022). Cho hàm số $f(x)=ax^4+bx^2+c$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Có bao nhiêu giá trị nguyên thuộc đoạn $[-2;5]$ của tham số m để phương trình $f(x)=m$ có đúng 2 nghiệm thực phân biệt?



(A) 1. (B) 6. (C) 7. (D) 5.

Lời giải.

Dựa vào đồ thị ta thấy phương trình $f(x)=m$ có đúng hai nghiệm thực phân biệt khi $m=-2$. Hoặc $m>-1$. Vậy $m\in\{-2;0;1;2;3;4;5\}$. Vậy có 7 giá trị m thỏa mãn

Chọn đáp án (C) □

Câu 29 (Mã 104-2022). Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	↘	-1	↗	3	↘	$-\infty$

Số giao điểm của đồ thị hàm số đã cho và đường thẳng $y=1$ là

(A) 2. (B) 1. (C) 3. (D) 0.

Lời giải.

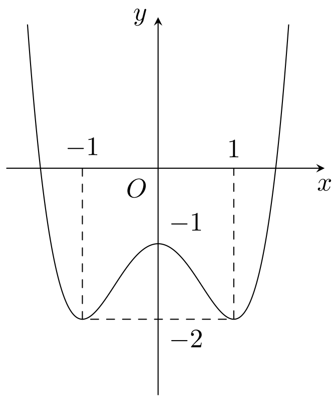
Ta vẽ đường thẳng $y=1$.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$		-1		3		$y=1$ $-\infty$

Đường thẳng $y = 1$ cắt đồ thị hàm số tại 3 giao điểm.

Chọn đáp án (C) □

Câu 30 (Mã 104-2022). Cho hàm số $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị là đường cong trong hình bên dưới.



Có bao nhiêu giá trị nguyên thuộc đoạn $[-2; 5]$ của tham số m để phương trình $f(x) = m$ có đúng 2 nghiệm thực phân biệt?

(A) 7. (B) 6. (C) 5. (D) 1.

Lời giải.

Ta có yêu cầu bài toán tương đương với $\left[\begin{array}{l} m = -2 \\ m > -1. \end{array}\right.$

Do $m \in [-2; 5]$ và m nguyên nên có 7 giá trị m cần tìm là $-2, 0, 1, 2, 3, 4, 5$.

Chọn đáp án (A) □

Dạng 2. Bài toán tương giao đồ thị thông qua hàm số cho trước

Câu 31 (Đề Minh Họa 2021). Đồ thị của hàm số $y = x^3 - 3x + 2$ cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng

(A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) -2.

Lời giải.

Gọi $M(x_0; y_0)$ là giao điểm của đồ thị hàm số với trục tung. Ta có $x_0 = 0 \Rightarrow y_0 = 2$

Chọn đáp án (C) □

Câu 32 (Mã 101 - 2021 Lần 1). Đồ thị hàm số $y = -x^4 + 4x^2 - 3$ cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng

(A) 0. (B) 3. (C) 1. (D) -3.

Lời giải.

Đồ thị hàm số $y=-x^4+4x^2-3$ sẽ cắt trục tung tại điểm có hoành độ $x=0$.

Từ đó ta được $y=-3$

Chọn đáp án (D) □

Câu 33 (Mã 103 - 2021 Lần 1). Đồ thị hàm số $y=-x^3+2x^2-1$ cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng

(A) 3. (B) 1. (C) -1. (D) 0.

Lời giải.

Từ hàm số: $y=-x^3+2x^2-1$, cho $x=0 \Rightarrow y=-1$.

Vậy đồ thị hàm số $y=-x^3+2x^2-1$ cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng -1.

Chọn đáp án (C) □

Câu 34 (Mã 102 - 2021 Lần 1). Đồ thị của hàm số $y=-x^4-2x^2+3$ cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng

(A) 1. (B) 0. (C) 2. (D) 3.

Lời giải.

Giả sử $y=-x^4-2x^2+3. \quad (C)$

Gọi $(C)\cap Oy=M(x_0;y_0) \Rightarrow x_0=0 \Rightarrow y_0=3$.

Vậy đồ thị của hàm số $y=-x^4-2x^2+3$ cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 3

Chọn đáp án (D) □

Câu 35 (Mã 104 - 2021 Lần 1). Đồ thị của hàm số $y=-2x^3+3x^2-5$ cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng

(A) -5. (B) 0. (C) -1. (D) 2.

Lời giải.

Gọi $M(x_0;y_0)$ là giao điểm của đồ thị hàm số $y=-2x^3+3x^2-5$ và trục tung, ta có: $x_0=0 \Rightarrow y_0=-5$

Chọn đáp án (A) □

Câu 36 (Đề Tham Khảo 2020 Lần 2).

Số giao điểm của đồ thị hàm số $y=x^3-3x+1$ và trục hoành là

(A) 3. (B) 0. (C) 2. (D) 1.

Lời giải.

Tập xác định $\mathbb{R}$.

Ta có: $y'=3x^2-3=3\left(x^2-1\right); y'=0 \Leftrightarrow x=\pm 1$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta thấy đồ thị hàm số cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt.

Chọn đáp án (A) □

Câu 37 (Mã 101 - 2020 Lần 1). Số giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^3 + 3x^2$ và đồ thị hàm số $y = 3x^2 + 3x$ là

(A) 3. (B) 1. (C) 2. (D) 0.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị đã cho là

$$x^3 + 3x^2 = 3x^2 + 3x \Leftrightarrow x^3 - 3x = 0 \Leftrightarrow x\left(x^2 - 3\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \sqrt{3} \\ x = -\sqrt{3}. \end{array}\right.$$

Hai đồ thị đã cho cắt nhau tại 3 điểm.

Chọn đáp án (A) □

Câu 38 (Mã 102 - 2020 Lần 1). Số giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^3 - x^2$ và đồ thị hàm số $y = -x^2 + 5x$ là

(A) 2. (B) 3. (C) 1. (D) 0.

Lời giải.

Số giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^3 - x^2$ và đồ thị hàm số $y = -x^2 + 5x$ chính là số nghiệm thực của phương trình $x^3 - x^2 = -x^2 + 5x \Leftrightarrow x^3 - 5x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{5} \end{array}\right.$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 39 (Mã 103 - 2020 Lần 1). Số giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^3 + x^2$ và đồ thị hàm số $y = x^2 + 5x$.

(A) 3. (B) 0. (C) 1. (D) 2.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm: $x^3 + x^2 = x^2 + 5x \Leftrightarrow x^3 - 5x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{5} \end{array}\right.$.

Vậy số giao điểm của hai đồ thị là 3.

Chọn đáp án (A) □

Câu 40 (Mã 104 - 2020 Lần 1). Số giao điểm của đồ thị hàm số $y = -x^2 + 3x$ và đồ thị hàm số $y = x^3 - x^2$ là

(A) 1. (B) 0. (C) 2. (D) 3.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị là $x^3-x^2=-x^2+3x \Leftrightarrow x^3-3x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm\sqrt{3} \end{array}\right.$.

Chọn đáp án D □

Câu 41 (Mã 102 - 2020 Lần 2). Số giao điểm của đồ thị hàm số $y=-x^3+7x$ với trục hoành là

A 0. B 3. C 2. D 1.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị và trục hoành là

$-x^3+7x=0 \Leftrightarrow x\left(x^2-7\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm\sqrt{7}. \end{array}\right.$

Số giao điểm của đồ thị hàm số $y=-x^3+7x$ với trục hoành bằng 3.

Chọn đáp án B □

Câu 42 (Mã 103 - 2020 Lần 2). Số giao điểm của đồ thị hàm số $y=-x^3+3x$ với trục hoành là

A 2. B 0. C 3. D 1.

Lời giải.

Xét phương trình hoành dộ giao điểm $-x^3+3x=0 \Leftrightarrow x(-x^2+3)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm\sqrt{3} \end{array}\right.$.

Vậy có 3 giao điểm.

Chọn đáp án C □

Câu 43 (Mã 101 – 2020 Lần 2). Số giao điểm của đồ thị hàm số $y=-x^3+6x$ với trục hoành là

A 2. B 3. C 1. D 0.

Lời giải.

Ta có hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y=-x^3+6x$ với trục hoành là nghiệm của phương trình

$-x^3+6x=0 \Leftrightarrow -x\left(x^2-6\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm\sqrt{6}. \end{array}\right.$

Phương trình trên có ba nghiệm phân biệt, do đó đồ thị hàm số $y=-x^3+6x$ cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt.

Chọn đáp án B □

Câu 44 (Mã 104 - 2020 Lần 2). Số giao điểm của đồ thị hàm số $y=-x^3+5x$ với trục hoành là

A 3. B 2. C 0. D 1.

Lời giải.

Ta có $-x^3+5x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\sqrt{5} \\ x=-\sqrt{5}. \\ x=0 \end{array}\right.$

Vậy số giao điểm của đồ thị hàm số $y=-x^3+5x$ với trục hoành là 3.

Chọn đáp án (A) □

Câu 45 (Mã 105 2017). Cho hàm số $y=(x-2)(x^2+1)$ có đồ thị (C). Mệnh đề nào dưới đây đúng?

(A) (C) cắt trục hoành tại một điểm. (B) (C) cắt trục hoành tại ba điểm.

(C) (C) cắt trục hoành tại hai điểm. (D) (C) không cắt trục hoành.

Lời giải.

Dễ thấy phương trình $(x-2)(x^2+1)=0$ có 1 nghiệm $x=2 \Rightarrow (C)$ cắt trục hoành tại một điểm.

Chọn đáp án (A) □

Câu 46 (Đề Minh Họa 2017). Biết rằng đường thẳng $y=-2x+2$ cắt đồ thị hàm số $y=x^3+x+2$ tại điểm duy nhất; kí hiệu $(x_0;y_0)$ là tọa độ của điểm đó. Tìm y_0.

(A) $y_0=4$. (B) $y_0=0$. (C) $y_0=2$. (D) $y_0=-1$.

Lời giải.

Xét phương trình hoành độ giao điểm: $-2x+2=x^3+x+2 \Leftrightarrow x^3+3x=0 \Leftrightarrow x=0$.

Với $x_0=0 \Rightarrow y_0=2$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 47 (THPT - Yên Định Thanh Hóa 2019).

Gọi P là số giao điểm của hai đồ thị $y=x^3-x^2+1$ và $y=x^2+1$. Tìm P.

(A) $P=0$. (B) $P=2$. (C) $P=1$. (D) $P=3$.

Lời giải.

Xét phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị $y=x^3-x^2+1$ và $y=x^2+1$:

$x^3-x^2+1=x^2+1 \Leftrightarrow x^3-2x^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2. \end{array}\right.$

Với $x=0 \Rightarrow y=1$.

Với $x=2 \Rightarrow y=5$.

Nên hai đồ thị trên có hai giao điểm là $(0;1)$ và $(2;5)$.

Vậy $P=2$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 48 (Đề Tham Khảo 2017). Cho hàm số $y=x^3-3x$ có đồ thị (C). Tìm số giao điểm của (C) và trục hoành.

(A) 2. (B) 3. (C) 1. (D) 0.

Lời giải.

Xét phương trình hoành độ giao điểm của (C) và trục hoành: $x^3 - 3x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{3} \end{array}\right.$.

Vậy số giao điểm của (C) và trục hoành là 3.

Chọn đáp án B □

Câu 49 (THPT Yên Khánh - Ninh Bình 2019).

Cho hàm số $y = x^4 - 3x^2$ có đồ thị (C). Số giao điểm của đồ thị (C) và đường thẳng $y = 2$ là

A 2. B 1. C 0. D 4.

Lời giải.

Số giao điểm của đồ thị (C) và đường thẳng $y = 2$ là số nghiệm của phương trình sau:

$$x^4 - 3x^2 = 2 \Leftrightarrow x^4 - 3x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 = \dfrac{3+\sqrt{17}}{2} \\ x^2 = \dfrac{3-\sqrt{17}}{2} < 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\dfrac{3+\sqrt{17}}{2}}.$$

Phương trình hoành độ giao điểm có 2 nghiệm nên số giao điểm của đồ thị (C) và đường thẳng là 2.

Chọn đáp án A □

Câu 50 (Chuyên Trần Phú Hải Phòng 2019).

Biết rằng đường thẳng $y = 4x + 5$ cắt đồ thị hàm số $y = x^3 + 2x + 1$ tại điểm duy nhất; kí hiệu $(x_0; y_0)$ là tọa độ của điểm đó. Tìm y_0.

A $y_0 = 10$. B $y_0 = 13$. C $y_0 = 11$. D $y_0 = 12$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm là $x^3 + 2x + 1 = 4x + 5 \Leftrightarrow x^3 - 2x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2$.

Với $x = 2 \Rightarrow y = 13$. Vậy $y_0 = 13$.

Chọn đáp án B □

Câu 51 (THPT Yên Phong 1 Bắc Ninh 2019).

Đồ thị của hàm số $y = -x^4 - 3x^2 + 1$ cắt trục tung tại điểm có tung độ bao nhiêu

A -3. B 0. C 1. D -1.

Lời giải.

Trục tung có phương trình: $x = 0$. Thay $x = 0$ vào $y = -x^4 - 3x^2 + 1$ được: $y = 1$.

Chọn đáp án C □

Câu 52 (THPT Việt Đức Hà Nội 2019).

Số giao điểm của đường cong $y = x^3 - 2x^2 + 2x + 1$ và đường thẳng $y = 1 - x$ là

A 1. B 2. C 3. D 0.

Lời giải.

Xét phương trình hoành độ giao điểm.

$x^3 - 2x^2 + 2x + 1 = 1 - x$

$\Leftrightarrow x^3 - 2x^2 + 3x = 0$

$\Leftrightarrow x\left(x^2 - 2x + 3\right) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 53. Đồ thị hàm số $y = x^4 - 3x^2 + 1$ và đồ thị hàm số $y = -2x^2 + 7$ có bao nhiêu điểm chung?

(A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm:

$x^4 - 3x^2 + 1 = -2x^2 + 7 \Leftrightarrow x^4 - x^2 - 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 = 3 \\ x^2 = -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{3}.$

Do pt có 2 nghiệm nên đồ thị hai hàm số có 2 điểm chung.

Chọn đáp án (C) □

Câu 54. Cho hàm số $y = -2x^3 + 5x$ có đồ thị (C) Tìm số giao điểm của (C) và trục hoành.

(A) 2. (B) 3. (C) 1. (D) 0.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và trục hoành là

$-2x^3 + 5x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{\dfrac{5}{2}} \end{array}\right.$ có 3 giao điểm.

Chú ý: Ở bài toán này hoàn toàn có thể giải trực tiếp bằng Casio với phương trình $-2x^3 + 5x = 0$, nhưng chắc chắn thao tác bấm máy sẽ chậm hơn việc tính tay(thậm chí bài này không cần nháp khi mà kết quả đã hiện ra luôn khi ta đọc đề xong). Vì vậy, Casio là điều không cần thiết với câu hỏi này.

Chọn đáp án (B) □

Câu 55. Cho hàm số $y = (x - 3)(x^2 + 2)$ có đồ thị (C). Mệnh đề nào dưới đây đúng?

(A) (C) cắt trục hoành tại hai điểm. (B) (C) cắt trục hoành tại một điểm.

(C) (C) không cắt trục hoành. (D) (C) cắt trục hoành tại ba điểm.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và trục hoành là

$(x - 3)(x^2 + 2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x^2 = -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow x = 3$ nghĩa là (C) cắt trục hoành tại một điểm.

Chọn đáp án (B) □

Câu 56. Biết rằng đường thẳng $y = x + 2$ cắt đồ thị hàm số $y = x^3 - x^2 + x + 4$ tại điểm duy nhất, kí hiệu $(x_0; y_0)$ là tọa độ của điểm đó. Tìm y_0.

(A) $y_0 = 1$. (B) $y_0 = 3$. (C) $y_0 = -2$. (D) $y_0 = 4$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm

$x + 2 = x^3 - x^2 + x + 4 \Leftrightarrow x^3 - x^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \Rightarrow y_0 = 1.$

Chọn đáp án (A) □

Câu 57. Đồ thị hàm số nào sau đây cắt trục tung tại điểm có tung độ âm?

(A) $y = \dfrac{x-1}{x-3}$. (B) $y = \dfrac{x+1}{x+4}$. (C) $y = \dfrac{x-1}{x+2}$. (D) $y = \dfrac{2x+1}{x+5}$.

Lời giải.

Trục tung có phương trình $x = 0$, ta thay $x = 0$ lần lượt vào các phương án thì chỉ có phương án C cho ta $y = -\dfrac{1}{2} < 0$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 58. Gọi M, N là giao điểm của đường thẳng $y = x + 1$ và đường cong $y = \dfrac{2x+4}{x-1}$. Khi đó hoành độ x_I của trung điểm I của đoạn MN bằng bao nhiêu?

(A) $x_I = 2$. (B) $x_I = 1$. (C) $x_I = -5$. (D) $x_I = -\dfrac{5}{2}$.

Lời giải.

Điều kiện: $x \neq 1$.

Phương trình hoành độ giao điểm $\dfrac{2x+4}{x-1} = x + 1 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 5 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_M = 1 + \sqrt{6} \\ x_N = 1 - \sqrt{6} \end{array}\right.$.

Khi đó $x_I = \dfrac{x_M + x_N}{2} = 1$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 59. Cho hàm số $y = \dfrac{x+1}{x-3}$ có đồ thị (C) và các đường thẳng $d_1\colon y = 2x$, $d_2\colon y = 2x - 2$, $d_3\colon y = 3x + 3$, $d_4\colon y = -x + 3$. Hỏi có bao nhiêu đường thẳng trong bốn đường thẳng d_1, d_2, d_3, d_4 đi qua giao điểm của (C) và trục hoành.

(A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4.

Lời giải.

Ta có (C) cắt trục hoành $(y = 0)$ tại điểm $M(-1; 0)$.

Trong các đường thẳng d_1, d_2, d_3, d_4 chỉ có $M \in d_3$, có nghĩa là có 1 đường thẳng đi qua $M(-1; 0)$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 60 (THPT Quang Trung Đống Đa Hà Nội 2019).

Tìm số giao điểm của đồ thị hàm số $y = \sqrt{x^4 - 4} + 5$ và đường thẳng $y = x$.

(A) 3. (B) 0. (C) 2. (D) 1.

Lời giải.

Cách 1: Phương trình hoành độ giao điểm $\sqrt{x^4 - 4} + 5 = x \Leftrightarrow \sqrt{x^4 - 4} = x - 5$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 5 \\ x^4 - 4 = (x-5)^2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 5 \\ x^4 - x^2 + 10x - 29 = 0 \quad (*). \end{cases}$

Do $x \geq 5$ nên $x^4 - x^2 = x^2(x^2 - 1) > 0$ và $10x - 29 > 0$. Vì vậy $(*)$ vô nghiệm.

Như vậy phương trình $\sqrt{x^4 - 4} + 5 = x$ vô nghiệm hay đồ thị hàm số $y = \sqrt{x^4 - 4} + 5$ và đường thẳng $y = x$ không có giao điểm nào.

Cách 2. Phương trình hoành độ giao điểm $\sqrt{x^4-4}+5=x$. Ta có điều kiện xác định $\left[\begin{array}{l} x\geq\sqrt{2} \\ x\leq-\sqrt{2} \end{array}\right.$.

Với điều kiện trên ta có $\sqrt{x^4-4}+5=x\Leftrightarrow\sqrt{x^4-4}+5-x=0$.

Xét hàm số $h(x)=\sqrt{x^4-4}+5-x$.

Ta có $h'(x)=\dfrac{2x^3}{\sqrt{x^4-4}}-1$; $h'(x)=0\Leftrightarrow 2x^3=\sqrt{x^4-4}$.

Với $x\geq\sqrt{2}$ ta có $2x^3>\sqrt{x^4-4}$.

Với $x\leq-\sqrt{2}$ ta có $2x^3<\sqrt{x^4-4}$.

Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	‖		‖	$+$	
$h(x)$	$+\infty$	↘	$5+\sqrt{2}$		$5-\sqrt{2}$	↗	$+\infty$

Số nghiệm của phương trình $\sqrt{x^4-4}+5=x$ là số giao điểm của đồ thị $y=h(x)=\sqrt{x^4-4}+5-x$ và trục hoành $y=0$. Dựa vào BBT ta thấy phương trình $\sqrt{x^4-4}+5=x$ vô nghiệm hay đồ thị hàm số $y=\sqrt{x^4-4}+5$ và đường thẳng $y=x$ không có giao điểm nào.

Chọn đáp án B □

BẢNG ĐÁP ÁN

1. C	2. A	3. B	4. D	5. B	6. C	7. D	8. C	9. A	10. B
11. B	12. C	13. D	14. D	15. D	16. C	17. A	18. C	19. A	20. C
21. A	22. A	23. C	24. A	25. B	26. C	27. D	28. C	29. C	30. A
31. C	32. D	33. C	34. D	35. A	36. A	37. A	38. B	39. A	40. D
41. B	42. C	43. B	44. A	45. A	46. C	47. B	48. B	49. A	50. B
51. C	52. A	53. C	54. B	55. B	56. A	57. C	58. B	59. A	60. B

MỨC ĐỘ 2. MỨC ĐỘ 7,8 ĐIỂM

Dạng 1. Bài toán tương giao đường thẳng với đồ thị hàm số bậc 3 (chứa tham số)

Câu 1. Cho hàm số $y=x^3-3mx^2+2m$. Có bao nhiêu giá trị của tham số thực m để đồ thị hàm số cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt có hoành độ lập thành cấp số cộng?

A 1. B 2. C 3. D 0.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm: $x^3-3mx^2+2m=0$ (*)

Phương trình $ax^3+bx^2+cx+d=0$ có ba nghiệm lập thành cấp số cộng nên phương trình (*) có một nghiệm $x_0=-\dfrac{b}{3a}$.

Suy ra phương trình $(*)$ có một nghiệm $x = m$.

Thay $x = m$ vào phương trình $(*)$, ta được $m^3 - 3m \cdot m^2 + 2m = 0 \Leftrightarrow -2m^3 + 2m = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = \pm 1 \\ m = 0 \end{array}\right.$.

Thử lại:

- Với $m = 1$, ta được $x^3 - 3x^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 - \sqrt{3} \\ x = 1 \\ x = 1 + \sqrt{3} \end{array}\right.$.

  Do đó $m = 1$ thỏa mãn.

- Với $m = -1$, ta được $x^3 + 3x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 + \sqrt{3} \\ x = -1 \\ x = -1 - \sqrt{3} \end{array}\right.$.

  Do đó $m = -1$ thỏa mãn.

- Với $m = 0$, ta được $x^3 = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

  Do đó $m = 0$ không thỏa mãn.

Vậy $m = \pm 1$ là hai giá trị cần tìm.

Chọn đáp án B □

Câu 2. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $(C)\colon y = x^3 - 3x^2 + 2$ cắt đường thẳng $d : y = m(x - 1)$ tại ba điểm phân biệt x_1, x_2, x_3.

(A) $m > -2$. (B) $m = -2$. (C) $m > -3$. (D) $m = -3$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và d là $x^3 - 3x^2 + 2 = m(x - 1)$ (1)

$$\begin{aligned} \text{Phương trình (1)} &\Leftrightarrow x^3 - 3x^2 - mx + 2 + m = 0 \Leftrightarrow (x - 1)\left(x^2 - 2x - m - 2\right) = 0. \\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - 1 = 0 \\ f(x) = x^2 - 2x - m - 2 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x = 1 & \\ f(x) = x^2 - 2x - m - 2 = 0 & (2) \end{array}\right. . \end{aligned}$$

Phương trình (1) luôn có nghiệm $x = 1$, do đó để phương trình (1) có ba nghiệm phân biệt thì phương trình (2) phải có hai nghiệm phân biệt khác 1.

$\begin{cases} \Delta' = 1 + m + 2 > 0 \\ f(1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -3 \\ m \neq -3 \end{cases} \Leftrightarrow m > -3.$

Vậy $m > -3$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án C □

Câu 3. Đường thẳng Δ có phương trình $y = 2x + 1$ cắt đồ thị của hàm số $y = x^3 - x + 3$ tại hai điểm A và B với tọa độ được kí hiệu lần lượt là $A\left(x_A; y_A\right)$ và $B\left(x_B; y_B\right)$ trong đó $x_B < x_A$. Tìm $x_B + y_B$?

(A) $x_B + y_B = -5$. (B) $x_B + y_B = -2$. (C) $x_B + y_B = 4$. (D) $x_B + y_B = 7$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của Δ và $y = x^3 - x + 3$ là

$$x^3 - x + 3 = 2x + 1 \Leftrightarrow x^3 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 \Rightarrow y = -3 \\ x = 1 \Rightarrow y = 3 \end{array}\right..$$

Vậy $A(1;3)$; $B(-2;-3) \Rightarrow x_B + y_B = -5$.

Chọn đáp án A □

Câu 4. Cho hàm số $y = x^3 + 3mx^2 - m^3$ có đồ thị (C_m) và đường thẳng $d : y = m^2x + 2m^3$. Biết rằng m_1, m_2 $(m_1 > m_2)$ là hai giá trị thực của m để đường thẳng d cắt đồ thị (C_m) tại 3 điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3 thỏa mãn $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 = 83$. Phát biểu nào sau đây là đúng về quan hệ giữa hai giá trị m_1, m_2?

A $m_1 + m_2 = 0$. B $m_1^2 + 2m_2 > 4$. C $m_2^2 + 2m_1 > 4$. D $m_1 - m_2 = 0$.

Lời giải.

Xét phương trình hoành độ giao điểm của d và (C_m).

$$\begin{aligned} x^3 + 3mx^2 - m^3 = m^2x + 2m^3 &\Leftrightarrow x^3 + 3mx^2 - m^2x - 3m^3 = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(x^3 - m^2x\right) + \left(3mx^2 - 3m^3\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow x\left(x^2 - m^2\right) + 3m\left(x^2 - m^2\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow (x + 3m)\left(x^2 - m^2\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -3m \\ x = m \\ x = -m \end{array}\right. \end{aligned}$$

Để đường thẳng d cắt đồ thị (C_m) tại 3 điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, $x_3 \Leftrightarrow m \neq 0$.

Khi đó, $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 = 83 \Leftrightarrow m^4 + (-m)^4 + (-3m)^4 = 83 \Leftrightarrow 83m^4 = 83 \Leftrightarrow m = \pm 1$.

Vậy $m_1 = 1, m_2 = -1$ hay $m_1 + m_2 = 0$.

Chọn đáp án A □

Câu 5. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2$ cắt đường thẳng $y = m$ tại ba điểm phân biệt.

A $m \in (-\infty; -4)$.

B $m \in (-4; 0)$.

C $m \in (0; +\infty)$.

D $m \in (-\infty; -4) \cup (0 + \infty)$.

Lời giải.

Ta có $y = x^3 - 3x^2 \Rightarrow y' = 3x^2 - 6x$; $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2$ cắt đường thẳng $y = m$ tại ba điểm phân biệt khi $-4 < m < 0$.

Chọn đáp án B □

Câu 6. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $y = mx - m + 1$ cắt đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + x + 2$ tại ba điểm A, B, C phân biệt sao $AB = BC$

A) $m \in \left(-\frac{5}{4}; +\infty\right)$.

B) $m \in (-2; +\infty)$.

C) $m \in \mathbb{R}$.

D) $m \in (-\infty; 0) \cup [4; +\infty)$.

Lời giải.

$x^3 - 3x^2 + x + 2 = mx - m + 1 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + x - mx + m + 1 = 0 \quad (1)$

$$\Leftrightarrow (x-1)\left(x^2 - 2x - m - 1\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x^2 - 2x - m - 1 = .0 \end{array}\right.$$

Để đường thẳng cắt đồ thị hàm số tại ba điểm phân biệt thì phương trình $x^2 - 2x - m - 1 = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác 1.

Hay $\begin{cases} 1 + m + 1 > 0 \\ 1 - 2 - m - 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -2 \\ m \neq -2 \end{cases} \Leftrightarrow m > -2.$

Với $m > -2$ thì phương trình (1) có ba nghiệm phân biệt là 1, x_1, $x_2\,(x_1, x_2$ là nghiệm của $x^2 - 2x - m - 1 = 0)$.

Mà $\dfrac{x_1 + x_2}{2} = 1$ suy ra điểm có hoành độ $x = 1$ luôn là trung điểm của hai điểm còn lại.

Nên luôn có 3 điểm A, B, C thoả mãn $AB = BC$.

Vậy $m > -2$.

Chọn đáp án B □

Câu 7. Tất cả giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 + (m^2 - 2)\,x + 2m^2 + 4$ cắt các trục tọa độ Ox, Oy lần lượt tại A, B sao cho diện tích tam giác OAB bằng 8 là

A) $m = \pm 2$.

B) $m = \pm 1$.

C) $m = \pm\sqrt{3}$.

D) $m = \pm\sqrt{2}$.

Lời giải.

Giao điểm của đồ thị hàm số đã cho với trục tung là $B\,(0; 2m^2 + 4)$.

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị đã cho với trục hoành là:

$$x^3 + (m^2 - 2)\,x + 2m^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow (x + 2)\,(x^2 - 2x + m^2 + 2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 \\ (x-1)^2 + m^2 + 1 = 0 \end{array}\right..$$

Ta có phương trình $(x-1)^2 + m^2 + 1 = 0$ vô nghiệm.

Giao điểm của đồ thị đã cho với trục hoành là $A(-2; 0)$.

Diện tích tam giác ABC là: $S = \dfrac{1}{2}OA \cdot OB = \dfrac{1}{2} \cdot 2 \cdot (2m^2+4) = 8 \Rightarrow m = \pm\sqrt{2}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 8. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $y = -mx$ cắt đồ thị của hàm số $y = x^3 - 3x^2 - m + 2$ tại ba điểm phân biệt A, B, C sao cho $AB = BC$.

(A) $m \in (-\infty; -1)$. (B) $m \in (-\infty : +\infty)$. (C) $m \in (1 : +\infty)$. (D) $m \in (-\infty; 3)$.

Lời giải.

Hoành độ giao điểm là nghiệm của phương trình

$$x^3 - 3x^2 - m + 2 = -mx \Leftrightarrow (x-1)\left(x^2 - 2x + m - 2\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &x = 1 \\ &x^2 - 2x + m - 2 = 0 \end{aligned}\right..$$

Đặt nghiệm $x_2 = 1$. Từ giải thiết bài toán trở thành tìm m để phương trình có 3 nghiệm lập thành cấp số cộng.

Khi đó phương trình $x^2 - 2x + m - 2 = 0$ phải có 2 nghiệm phân biệt (vì theo Viet rõ ràng $x_1 + x_3 = 2 = 2x_2$).

Vậy ta chỉ cần $\Delta' = 1 - (m-2) > 0 \Leftrightarrow m < 3$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 9. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^3 + 3x^2 - 2 = m$ có ba nghiệm phân biệt.

(A) $m \in (2; +\infty]$. (B) $m \in (-\infty; -2]$. (C) $m \in (-2; 2)$. (D) $m \in [-2; 2]$.

Lời giải.

Xét hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 2$, $y' = 3x^2 + 6x$.

Lập bảng biến thiên

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Số nghiệm của phương trình $x^3 + 3x^2 - 2 = m$ $(*)$ bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 2$ và đường thẳng $y = m$.

Dựa vào bảng biến thiên suy ra phương trình (*) có 3 nghiệm phân biệt khi $-2 < m < 2$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 10. Đường thẳng Δ có phương trình $y = 2x + 1$ cắt đồ thị của hàm số $y = x^3 - x + 3$ tại hai điểm A và B với tọa độ được kí hiệu lần lượt là $A(x_A; y_A)$ và $B(x_B; y_B)$ trong đó $x_B < x_A$. Tìm $x_B + y_B$?

(A) $x_B + y_B = -5$. (B) $x_B + y_B = -2$. (C) $x_B + y_B = 4$. (D) $x_B + y_B = 7$.

Lời giải.

Hoành độ giao điểm là nghiệm của phương trình: $x^3 - x + 3 = 2x + 1$.

Giải phương trình ta được $\left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 2 \end{array}\right.$.

Vì $x_B < x_A$ Vậy $x_B = 1$; $y_B = 3 \Rightarrow x_B + y_B = 4$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 11. Gọi S là tập tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $2x^3 - 3x^2 = 2m + 1$ có đúng hai nghiệm phân biệt. Tổng các phần tử của S bằng

(A) $-\frac{1}{2}$. (B) $-\frac{3}{2}$. (C) $-\frac{5}{2}$. (D) $\frac{1}{2}$.

Lời giải.

Xét hàm số: $y = 2x^3 - 3x^2 \Rightarrow y' = 6x^2 - 6x \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 1$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Số nghiệm của phương trình đã cho bằng số giao điểm của hai đồ thị: $\begin{cases} (C)\colon y = 2x^3 - 3x^2 \\ d\colon y = 2m + 1 \end{cases}$.

Nhìn vào bảng biến thiên ta thấy: Phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2m + 1 = -1 \\ 2m + 1 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -1 \\ m = -\frac{1}{2} \end{array}\right. \Rightarrow S = \left\{-1; -\frac{1}{2}\right\}.$$

Vậy tổng các phần tử của S bằng $-1 + \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{-3}{2}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 12. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $y = -x + 5$ cắt đồ thị hàm số $y = x^3 + 2mx^2 + 3(m-1)x + 5$ tại 3 điểm phân biệt.

(A) $\left[\begin{array}{l} m < 1 \\ m > 2 \end{array}\right.$. (B) $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} m \neq \frac{2}{3} \\ m \leq 1 \end{cases} \\ m \geq 2 \end{array}\right.$. (C) $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} m \neq \frac{2}{3} \\ m < 1 \end{cases} \\ m > 2 \end{array}\right.$. (D) $\left[\begin{array}{l} m \leq 1 \\ m \geq 2 \end{array}\right.$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm chung là: $x^3 + 2mx^2 + 3(m-1)x + 5 = -x + 5$.

$$\Leftrightarrow x^3 + 2mx^2 + (3m-2)x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 + 2mx + 3m - 2 = 0 \quad (1) \end{array}\right..$$

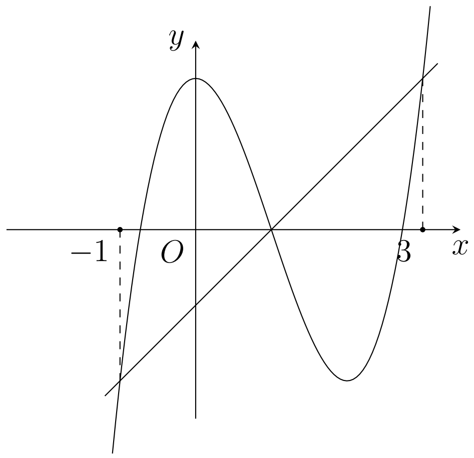
Đường thẳng $y = -x + 5$ cắt đồ thị hàm số $y = x^3 + 2mx^2 + 3(m-1)x + 5$ tại 3 điểm phân biệt.

$\Leftrightarrow$ phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khác 0.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = m^2 - 3m + 2 > 0 \\ 3m - 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m > 2 \\ m < 1 \end{array}\right. \\ m \neq \dfrac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} m \neq \dfrac{2}{3} \\ m < 1 \end{cases} \\ m > 2 \end{array}\right. .$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 13. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị (C) như hình vẽ, đường thẳng d có phương trình $y = x - 1$. Biết phương trình $f(x) = 0$ có ba nghiệm $x_1 < x_2 < x_3$. Giá trị của x_1x_3 bằng



(A) -3. (B) $-\dfrac{7}{3}$. (C) -2. (D) $-\dfrac{5}{2}$.

Lời giải.

- Ta có: $f(x) = x - 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 1 \\ x = 3 \end{array}\right.$.

  $f(x)$ là hàm bậc ba nên $f(x) - (x - 1) = a(x + 1)(x - 1)(x - 3)$

  Suy ra $f(x) = a(x + 1)(x - 1)(x - 3) + x - 1$.

  Ta có $f(0) = 2 \Leftrightarrow a = 1$.

  Suy ra $f(x) = (x + 1)(x - 1)(x - 3) + x - 1$.

- $f(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 = x_2 \\ (x + 1)(x - 3) + 1 = 0 \quad (2) \end{array}\right.$.

  x_1, x_3 là các nghiệm của (2) nên ta có $x_1x_3 = -2$.

  Đường thẳng $y = \dfrac{5}{2}$ nên từ đồ thị ta có phương trình đã cho có 4 nghiệm phân biệt.

Chọn đáp án (C) □

Câu 14. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-2018; 2019]$ để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3mx + 3$ và đường thẳng $y = 3x + 1$ có duy nhất một điểm chung?

(A) 1. (B) 2019. (C) 4038. (D) 2018.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm

$$x^3 - 3mx + 3 = 3x + 1 \Leftrightarrow x^3 - 3x + 2 = 3mx \Leftrightarrow 3m = \frac{x^3 - 3x + 2}{x}. \quad (1)$$

Xét hàm $f(x) = \dfrac{x^3 - 3x + 2}{x} = x^2 - 3 + \dfrac{2}{x}$; $f'(x) = 2x - \dfrac{2}{x^2} = \dfrac{2x^3 - 2}{x^2}$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Bảng biến thiên.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Khi đó yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow m < 0$.

Mà m nguyên và $m \in [-2018; 2019]$ nên có 2018 giá trị thỏa mãn.

Chọn đáp án (D) □

Câu 15. Phương trình $x^3 - 6mx + 5 = 5m^2$ có 3 nghiệm phân biệt lập thành cấp số cộng khi

(A) $m = 0$. (B) $m = -1 \vee m = 1$. (C) $m = 1$. (D) $m \in \varnothing$.

Lời giải.

Phương trình đã cho tương đương: $x^3 - 6mx + 5 - 5m^2 = 0$.

Đặt $y = f(x) = x^3 - 6mx + 5 - 5m^2$ có $f'(x) = 3x^2 - 6m$; $f''(x) = 6x$.

Phương trình đã cho có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ Hàm số $y = f(x)$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt.

$\Leftrightarrow f'(x) = 0$ có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $f(x_1) \cdot f(x_2) < 0$.

3 nghiệm đó lập thành cấp số cộng nên $x_2 - x_1 = x_3 - x_2$.

Suy ra, x_2 là hoành độ của tâm đối xứng hay là nghiệm của $f''(x) = 0$.

Cho $f''(x) = 0 \Rightarrow 6x = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Với $x = 0$ ta có: $5 - 5m^2 = 0 \Leftrightarrow m = \pm 1$.

Thử lại:

- Với $m = 1$ thì ta có $x^3 - 6x + 5 = 5 \Leftrightarrow x(x^2 - 6) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{6} \end{array}\right.$.
- Với $m = -1$ thì ta có: $x^3 + 6x + 5 = 5 \Leftrightarrow x(x^2 + 6) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 16. Tính tổng tất cả các giá trị của m biết đồ thị hàm số $y = x^3 + 2mx^2 + (m+3)x + 4$ và đường thẳng $y = x + 4$ cắt nhau tại ba điểm phân biệt $A(0; 4)$, B, C sao cho diện tích tam giác IBC bằng $8\sqrt{2}$ với $I(1; 3)$.

(A) 3. (B) 8. (C) 1. (D) 5.

Lời giải.

Gọi đồ thị hàm số $y = x^3 + 2mx^2 + (m+3)x + 4$ là (C_m) và đồ thị hàm số $y = x + 4$ là (d).

Phương trình hoành độ giao điểm của (C_m) và (d) là

$x^3+2mx^2+(m+3)x+4=x+4 \Leftrightarrow x^3+2mx^2+(m+2)x=0 \quad (*) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2+2mx+m+2=0 \end{array}\right.$.

Gọi $g(x)=x^2+2mx+m+2$.

(d) cắt (C_m) tại ba điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình $(*)$ có ba nghiệm phân biệt.

$\Leftrightarrow$ phương trình $g(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt khác 0.

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'_g>0 \\ g(0)\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2-m-2>0 \\ m+2\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m<-1 \\ m>2 \end{array}\right. \quad (a). \\ m\neq -2 \end{cases}$

$x=0$ là hoành độ điểm A, hoành độ điểm B, C là hai nghiệm x_1, x_2 của phương trình $g(x)=0$.

$BC^2=(x_2-x_1)^2+[(x_2+4)-(x_1+4)]^2=2(x_2-x_1)^2$ (do B, C thuộc đường thẳng (d)).

Suy ra $BC^2=2\left[(x_2+x_1)^2-4x_1x_2\right]=8(m^2-m-2)$.

Viết phương trình đường thẳng (d) dưới dạng $x-y+4=0$, ta có $d(I,(d))=\dfrac{|1-3+4|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$.

$$\begin{aligned} S_{IBC}=8\sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2}BC\cdot d(I,(d))=8\sqrt{2} &\Leftrightarrow \frac{1}{4}BC^2\cdot[d(I,(d))]^2=128 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{4}8\left(m^2-m-2\right)\cdot 2=128 \\ &\Leftrightarrow m^2-m-34=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=\dfrac{1+\sqrt{137}}{2} \\ m=\dfrac{1-\sqrt{137}}{2} \end{array}\right. \end{aligned}$$

(thỏa điều kiện (a)).

Vậy tổng tất cả các giá trị m là 1.

Chọn đáp án (C) □

Câu 17. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-2018;2019]$ để đồ thị hàm số $y=x^3-3mx+3$ và đường thẳng $y=3x+1$ có duy nhất một điểm chung?

(A) 1. (B) 2019. (C) 4038. (D) 2018.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm: $x^3-3mx+3=3x+1 \Leftrightarrow 3mx=x^3-3x+2$. (1)

Dễ thấy $x=0$ không thỏa.

$(1) \Leftrightarrow 3m=x^2-3+\dfrac{2}{x}=f(x)$.

$f'(x)=2x-\dfrac{2}{x^2}=\dfrac{2x^3-2}{x^2}=0 \Leftrightarrow x=1$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$ ↘		$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

Đồ thị hàm số $y = x^3 - 3mx + 3$ và đường thẳng $y = 3x + 1$ có duy nhất một điểm chung $\Leftrightarrow 3m < 0 \Leftrightarrow m < 0$.

Do $m \in \mathbb{Z}$ và $m \in [-2018; 2019]$ nên có 2018 giá trị.

Chọn đáp án D □

Câu 18. Đường thẳng d có phương trình $y = x+4$ cắt đồ thị hàm số $y = x^3+2mx^2+(m+3)x+4$ tại 3 điểm phân biệt $A(0;4)$, B và C sao cho diện tích của tam giác MBC bằng 4, với $M(1;3)$. Tìm tất cả các giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

A $m = 3$.

B $m = 2$ hoặc $m = 3$.

C $m = -2$ hoặc $m = -3$.

D $m = -2$ hoặc $m = 3$.

Lời giải.

Hoành độ giao điểm của hai đồ thị là nghiệm của phương trình $x^3 + 2mx^2 + (m+3)x + 4 = x + 4 \Leftrightarrow x^3 + 2mx^2 + (m+2)x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 + 2mx + (m-2) = 0 \quad (*) \end{array}\right.$.

Đường thẳng d cắt đồ thị hàm số (1) tại 3 điểm phân biệt khi phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt khác 0 $\Leftrightarrow \begin{cases} m^2-,-2 > 0 \\ m+2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m < -1 \\ m > 21 \end{array}\right. \\ m \neq -2 \end{cases}$.

Giả sử $B\left(x_1; x_1+4\right)$; $C\left(x_2; x_2+4\right)$ với x_1; x_2 là nghiệm của phương trình (*) khi đó

$$BC = \sqrt{2\left(x_1 - x_2\right)^2} = \sqrt{2\left(x_1+x_2\right)^2 - 8x_1 \cdot x_2} = \sqrt{8m^2 - 8m - 16}.$$

Suy ra $S_{MBC} = \dfrac{1}{2} BC \cdot d(M,d) = \dfrac{1}{2} \cdot BC \cdot \dfrac{|1-3+4|}{\sqrt{2}} = 4 \Rightarrow BC = 4\sqrt{2}$.

Ta có $m^2 - m - 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -2 \\ m = 3 \end{array}\right.$.

Đối chiếu điều kiện ta có $m = 3$.

Chọn đáp án A □

Câu 19. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $y = -x + 5$ cắt đồ thị hàm số $y = x^3 + 2mx^2 + 3(m-1)x + 5$ tại 3 điểm phân biệt.

A $\left[\begin{array}{l} m < 1 \\ m > 2 \end{array}\right.$.

B $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} m \neq \dfrac{2}{3} \\ m \leq 1 \end{cases} \\ m \geq 2 \end{array}\right.$.

C $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} m \neq \dfrac{2}{3} \\ m < 1 \end{cases} \\ m > 2 \end{array}\right.$.

D $\left[\begin{array}{l} m \leq 1 \\ m \geq 2 \end{array}\right.$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm chung là $x^3 + 2mx^2 + 3(m-1)x + 5 = -x + 5$.

$$\Leftrightarrow x^3 + 2mx^2 + (3m-2)x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 + 2mx + 3m - 2 = 0 \quad (1) \end{array}\right..$$

Đường thẳng $y = -x + 5$ cắt đồ thị hàm số $y = x^3 + 2mx^2 + 3(m-1)x + 5$ tại 3 điểm phân biệt.

$\Leftrightarrow$ phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khác 0.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = m^2 - 3m + 2 > 0 \\ 3m - 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m > 2 \\ m < 1 \end{array}\right. \\ m \neq \dfrac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} m \neq \dfrac{2}{3} \\ m < 1 \end{cases} \\ m > 2 \end{array}\right. .$$

Chọn đáp án (C) ☐

Câu 20. Gọi S là tập tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $2x^3 - 3x^2 = 2m + 1$ có đúng hai nghiệm phân biệt. Tổng các phần tử của S bằng

(A) $-\dfrac{1}{2}$. (B) $-\dfrac{3}{2}$. (C) $-\dfrac{5}{2}$. (D) $\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Xét hàm số: $y = 2x^3 - 3x^2 \Rightarrow y' = 6x^2 - 6x \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 1$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Số nghiệm của phương trình đã cho bằng số giao điểm của hai đồ thị $\begin{cases} (C)\colon y = 2x^3 - 3x^2 \\ d\colon y = 2m + 1 \end{cases}$.

Nhìn vào bảng biến thiên ta thấy: Phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2m + 1 = -1 \\ 2m + 1 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -1 \\ m = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Rightarrow S = \left\{-1; -\dfrac{1}{2}\right\}.$$

Vậy tổng các phần tử của S bằng $-1 + \left(-\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{-3}{2}$.

Chọn đáp án (B) ☐

Câu 21. Giá trị lớn nhất của m để đường thẳng $(d)\colon y = x - m + 1$ cắt đồ thị hàm số $y = x^3 + 2(m-2)x^2 + (8-5m)x + m - 5$ tại 3 điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3 thỏa mãn điều kiện $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 20$ là

(A) 3. (B) 1. (C) 0. (D) $-\dfrac{3}{2}$.

Lời giải.

Hoành độ giao điểm của đường thẳng (d) và đồ thị hàm số là nghiệm của phương trình

$x^3 + 2(m-2)x^2 + (8-5m)x + m - 5 = x - m + 1$

$$\Leftrightarrow (x-2)\left[x^2 + (2m-2)x - m + 3\right] = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_3 = 2 \\ x^2 + (2m-2)x - m + 3 = 0 \quad (1) \end{array}\right.$$

Đường thẳng (d) cắt đồ thị hàm số tại 3 điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1; x_2 khác 2 $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = (m-1)^2 + (m-3) > 0 \\ 4 + (2m-2)\cdot 2 - m + 3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m < -1 \\ m > 21 \end{array}\right. \\ m \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < -1 \\ m > 2 \end{array}\right.$ (2).

Khi đó, $\begin{cases} x_1 + x_2 = -(2m-2) \\ x_1x_2 = -m+3 \end{cases}$.

Theo giả thiết $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 20 \Leftrightarrow (x_1+x_2)^2 - 2x_1x_2 + x_3^2 = 20$.

Vậy giá trị lớn nhất của m thỏa mãn yêu cầu bài toán là 3.

Chọn đáp án A □

Câu 22. Có bao nhiêu giá trị của m để đồ thị hàm số $y = -2x^3 - 3m^2x^2 + (m^3 + 2m)x + 2$ cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt có hoành độ là ba số hạng liên tiếp của một cấp số nhân?

A 0. B 1. C 2. D 3.

Lời giải.

Hoành độ giao điểm của đồ thị với trục hoành là nghiệm của phương trình

$$-2x^3 - 3m^2x^2 + (m^3 + 2m)x + 2 = 0 \quad (*).$$

Giả sử đồ thị cắt trục hoành tại 3 điểm có hoành độ x_1, x_2, x_3.

Khi đó

$$y = -2(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) = -2x^3 + 2(x_1+x_2+x_3)x^2 - 2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1)x + 2x_1x_2x_3.$$

Đồng nhất thức ta được

$$\begin{cases} 2(x_1+x_2+x_3) = -3m^2 \\ -2(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1) = m^3 + 2m \\ 2x_1x_2x_3 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1+x_2+x_3 = -\dfrac{3m^2}{2} & (1) \\ x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1 = -\dfrac{m^3+2m}{2} & (2) \\ x_1x_2x_3 = 1 & (3) \end{cases}.$$

Vì x_1, x_2, x_3 lập thành cấp số nhân nên $x_1x_3 = x_2^2$ (4).

Từ (2) và (3) : $x_2 = 1$. Thay vào phương trình $(*)$ rút ra được $\left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = 1 \\ m = 2 \end{array}\right.$.

Với $m = 0 \Rightarrow$ phương trình $(*) : -2x^3 + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ (không thỏa mãn). Với $m = 1 \Rightarrow$ phương trình $(*) : -2x^3 - 3x^2 + 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = -2 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$ (thỏa mãn).

Với $m = 2 \Rightarrow$ phương trình $(*) : x^3 + 6x^2 - 6x - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = \dfrac{-7-\sqrt{45}}{2} \\ x_2 = 2 \\ x_3 = \dfrac{-7+\sqrt{45}}{2} \end{array}\right.$ (thỏa mãn).

Vậy có 2 giá trị m thỏa mãn.

Chọn đáp án C □

Câu 23. Tìm m để đồ thị (C) của $y = x^3 - 3x^2 + 4$ và đường thẳng $y = mx + m$ cắt nhau tại 3 điểm phân biệt $A(-1;0)$, B, C sao cho $\triangle OBC$ có diện tích bằng 64.

(A) $m = 14$. (B) $m = 15$. (C) $m = 16$. (D) $m = 17$.

Lời giải.

- **Cách 1:** $d(O, BC) = \dfrac{m}{\sqrt{m^2+1}}$.

$$BC = \sqrt{(x_B - x_C)^2 + (y_b - y_c)^2} = \sqrt{(m^2+1)(x_B - x_C)^2}$$
$$= \sqrt{(m^2+1)\left[(x_B + x_C)^2 - 4x_Bx_C\right]} = \sqrt{(m^2+1)\,4m}.$$

Suy ra $S_{\triangle OBC} = \dfrac{1}{2}d(O, BC)\cdot BC = m\sqrt{m} = 64 \Leftrightarrow m = 16$.

- **Cách 2:** Phương trình hoành độ giao điểm:

$$x^3 - 3x^2 + 4 = mx + m \Leftrightarrow (x+1)(x^2 - 4x + 4 - m) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ (x-2)^2 = m \quad (*) \end{array}\right..$$

Để d cắt (C) tại 3 điểm phân biệt nên phương trình $(*)$ có 2 nghiệm phân biệt khác $-1 \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m \neq 9 \end{cases}$.

$$(*) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 - \sqrt{m} \Rightarrow B(2 - \sqrt{m}; 3m - m\sqrt{m}) \\ x = 2 + \sqrt{m} \Rightarrow C(2 + \sqrt{m}; 3m + m\sqrt{m}) \end{array}\right..$$

$\overrightarrow{OB} = (2 - \sqrt{m}; 3m - m\sqrt{m})$, $\overrightarrow{OC} = (2 + \sqrt{m}; 3m + m\sqrt{m})$.

$\Rightarrow S_{\triangle OBC} = \dfrac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}\right]\right| = m\sqrt{m} = 64 \Rightarrow m = 16$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 24. Cho hàm số $y = x^3 - 8x^2 + 8x$ có đồ thị (C) và hàm số $y = x^2 + (8-a)x - b$ (với $a, b \in \mathbb{R}$) có đồ thị (P). Biết đồ thị hàm số (C) cắt (P) tại ba điểm có hoành độ nằm trong $[-1;5]$. Khi a đạt giá trị nhỏ nhất thì tích ab bằng

(A) -729. (B) 375. (C) 225. (D) -384.

Lời giải.

- **Cách 1:** Phương trình hoành độ giao điểm là $x^3 - 8x^2 + 8x = x^2 + (8-a)x - b \Leftrightarrow x^3 - 9x^2 + ax + b = 0$. (1)

Gọi m, n, p là 3 nghiệm của phương trình (1) ta có $\begin{cases} m + n + p = 9 \\ mn + np + pm = a \\ mnp = -b \end{cases}$.

Do (C) cắt (P) tại ba điểm có hoành độ nằm trong $[-1;5]$ nên

$$\begin{cases} (m+1)(n+1)(p+1) \geq 0 \\ (5-m)(5-n)(5-p) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} mnp + (mn + np + pm) + (m + n + p) + 1 \geq 0 \\ -mnp + 5(mn + np + pm) - 25(m + n + p) + 125 \geq 0 \end{cases}.$$

Cộng vế theo vế của hệ phương trình trên ta có $6(mn + np + pm) - 24(m + n + p) - 124 \geq 0 \Leftrightarrow mn + np + pm \geq 15 \Rightarrow a \geq 15$.

Dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases} mnp \geq -25 \\ mnp \leq -25 \end{cases} \Leftrightarrow mnp = -25 \Rightarrow b = 25.$

Vậy tích $ab = 375$.

☑ **Cách 2:** Phương trình hoành độ giao điểm là

$$x^3 - 8x^2 + 8x = x^2 + (8-a)x - b \Leftrightarrow x^3 - 9x^2 + ax + b = 0. \qquad (1)$$

Khi đó phương trình (1) có 3 nghiệm nằm trong $[-1; 5]$.

Đặt $f(x) = x^3 - 9x^2 + ax + b$ suy ra $f'(x) = 3x^2 - 18x + a$.

Để phương trình (1) có 3 nghiệm nằm trong $[-1; 5]$ thì $f'(x) = 3x^2 - 18x + a = 0$ có hai nghiệm phân biệt thuộc $[-1; 5] \Leftrightarrow a = -3x^2 + 18x$ có hai nghiệm phân biệt thuộc $[-1; 5]$.

Xét hàm số $g(x) = -3x^2 + 18x$ suy ra $g'(x) = -6x + 18$, ta có $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 3$.

Bảng biến thiên của $y = g(x)$

x	-1		3		5
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	21	$\nearrow$	27	$\searrow$	15

Từ BBT ta có $15 \leq a < 27$ suy ra giá trị nhỏ nhất của a bằng 15 khi $x = 5$, khi đó $b = 25$.

Vậy tích $ab = 375$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 25. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đường thẳng $y = -mx + m$ cắt đồ thị hàm số $y = x^3 + mx^2 + m$ tại 3 điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3 thỏa mãn $-1 < x_1 + x_2 + x_3 < 3$?

(A) 6. (B) 5. (C) 2. (D) 3.

Lời giải.

$(d)\colon y = -mx + m$, $(C)\colon y = x^3 + mx^2 + m$.

Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (C) : $x^3 + mx^2 + mx = 0(1). \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 + mx + m = 0 \quad (2) \end{cases}.$

Gọi x_1, x_2 là 2 nghiệm của phương trình (2), $x_3 = 0$.

(1) có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ (2) có 2 nghiệm x_1, x_2 phân biệt và khác 0.

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0, \Delta = m^2 - 4m \\ m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \in (-\infty; 0) \cup (4; +\infty).$

(1) có 3 nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3 thỏa $-1 < x_1 + x_2 + x_3 < 3$, với $x_1 + x_2 = -m$, $x_3 = 0$.

$\Leftrightarrow -1 < -m < 3$.

$\Leftrightarrow -3 < m < 1$ mà $m \in (-\infty; 0) \cup (4; +\infty)$, $m \in \mathbb{Z}$.

$\Rightarrow m \in \{-2; -1\}$.

Vậy có 2 giá trị m .

Chọn đáp án (C) □

Câu 26. Cho hàm số $y = x^3 + 2mx^2 + (m+3)x + 4\,(C_m)$. Tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng $(d)\colon y = x + 4$ cắt (C_m) tại ba điểm phân biệt $A(0;4)$, B, C sao cho tam giác KBC có diện tích bằng $8\sqrt{2}$ với điểm $K(1;3)$ là:

(A) $m = \dfrac{1+\sqrt{137}}{2}$. (B) $m = \dfrac{\pm 1+\sqrt{137}}{2}$. (C) $m = \dfrac{1\pm\sqrt{137}}{2}$. (D) $m = \dfrac{1-\sqrt{137}}{2}$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của (C_m) và (d) là: $x^3 + 2mx^2 + (m+3)x + 4 = x + 4$. (1)

$\Leftrightarrow x^3 + 2mx^2 + (m+2)x = 0$

$\Leftrightarrow x \cdot \left[x^2 + 2mx + (m+2)\right] = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \Rightarrow y = 4 \\ x^2 + 2mx + m + 2 = 0 \quad (2) \end{array}\right.$

(d) cắt (C_m) tại ba điểm phân biệt.

$\Leftrightarrow$ (1) có ba nghiệm phân biệt.

$\Leftrightarrow$ (2) có hai nghiệm phân biệt khác 0.

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ 0^{+}2m \cdot 0 + m + 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - m - 2 > 0 \\ m + 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m > 2 \\ m < -1 \end{array}\right. \\ m \neq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > 2 \\ \begin{cases} m < -1 \\ m \neq -2 \end{cases} \end{array}\right..$

Khi đó, (2) có hai nghiệm phân biệt x_1 và x_2 tương ứng cũng là hoành độ của B và C.

$\Rightarrow B\left(x_1; x_1 + 4\right)$ và $C\left(x_2; x_2 + 4\right)$.

$\Rightarrow \overrightarrow{KB} = \left(x_1 - 1; x_2 + 1\right)$ và $\overrightarrow{KC} = \left(x_2 - 1; x_2 + 1\right)$.

$\Rightarrow S_{\triangle KBC} = \dfrac{\left|\left(x_1 - 1\right)\left(x_2 + 1\right) - \left(x_2 - 1\right)\left(x_1 + 1\right)\right|}{2} = \left|x_1 - x_2\right|.$

Theo đề bài: $S_{\triangle KBC} = 8\sqrt{2} \Leftrightarrow \left|x_1 - x_2\right| = 8\sqrt{2} \Leftrightarrow \left(x_1 - x_2\right)^2 = 128 \Leftrightarrow S^2 - 4P = 128.$

$\Leftrightarrow (-2m)^2 - 4(m+2) = 128 \Leftrightarrow m = \dfrac{1\pm\sqrt{137}}{2}$ (nhận).

Vậy tất cả các giá trị m thỏa đề là $m = \dfrac{1\pm\sqrt{137}}{2}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 27. Gọi T là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $x^3 - 3x^2 - m^3 + 3m^2 = 0$ có ba nghiệm phân biệt. Tổng tất cả các phần tử của T bằng

(A) 1. (B) 5. (C) 0. (D) 3.

Lời giải.

☑ **Cách 1:** Ta có $x^3 - 3x^2 - m^3 + 3m^2 = 0 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 = m^3 - 3m^2 \Leftrightarrow f(x) = f(m)$. (1)

Xét hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2$.

$f'(x) = 3x^2 - 6x, f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$

$.f(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 3 \end{array}\right.$

$.f(x) = -4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = -1 \end{array}\right.$

.

x	$-\infty$	-1		0		2	3	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$		
$f(x)$	$-\infty$	-4		0		-4	0	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, suy ra (1) có ba nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow -4 < f(m) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < m < 3 \\ m \neq 0 \\ m \neq 2 \end{cases}.$$

Suy ra $T = \{1\}$. Vậy tổng tất cả các phần tử của T bằng 1.

Cách 2: Ta có $x^3 - 3x^2 - m^3 + 3m^2 = 0 \Leftrightarrow (x^3 - m^3) - 3(x^2 - m^2) = 0$ $\Leftrightarrow (x-m)\left[x^2 + (m-3)x + m\right.$ $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = m \\ x^2 + (m-3)x + m^2 - 3m \end{array}\right.$

Phương trình đã cho có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow (*)$ có hai nghiệm phân biệt, khác m

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = (m-3)^2 - 4(m^2 - 3m) > 0 \\ m^2 + (m-3)m + m^2 - 3m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m-3)(-3m-3) > 0 \\ 3m^2 - 6m \neq 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 < m < 3 \\ m \neq 0 \\ m \neq 2 \end{cases} \Rightarrow m = 1 \quad (\text{vì} \quad m \in \mathbb{Z})$

Suy ra $T = \{1\}$. Vậy tổng tất cả các phần tử của T bằng 1.

Chọn đáp án A □

Câu 28. Cho đồ thị hàm số $f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3. Tính giá trị của biểu thức $P = \dfrac{1}{f'(x_1)} + \dfrac{1}{f'(x_2)} + \dfrac{1}{f'(x_3)}$.

A. $P = 3 + 2b + c$. B. $P = 0$. C. $P = b + c + d$. D. $P = \dfrac{1}{2b} + \dfrac{1}{c}$.

Lời giải.

Vì x_1, x_2, x_3 là ba nghiệm của phương trình bậc ba $f(x) = 0 \Rightarrow f(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$.

Ta có $f'(x) = (x - x_1)(x - x_2) + (x - x_2)(x - x_3) + (x - x_1)(x - x_3)$.

Khi đó $\begin{cases} f'(x_1) = (x_1 - x_2)(x_1 - x_3) \\ f'(x_2) = (x_2 - x_3)(x_2 - x_1) \\ f'(x_3) = (x_3 - x_1)(x_3 - x_2) \end{cases}$.

Suy ra $P = \dfrac{1}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} + \dfrac{1}{(x_2 - x_3)(x_2 - x_1)} + \dfrac{1}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}$

$= \dfrac{(x_2 - x_3) - (x_1 - x_3) + (x_1 - x_2)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_2 - x_3)} = 0.$

Chọn đáp án B □

Câu 29. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị đi qua điểm $A(1;1)$, $B(2;4)$, $C(3;9)$. Các đường thẳng AB, AC, BC lại cắt đồ thị lần lượt tại các điểm M, N, P (M khác A và B, N khác A và C, P khác B và C. Biết rằng tổng các hoành độ của M, N, P bằng 5, giá trị của $f(0)$ là

A -6. B -18. C 18. D 6.

Lời giải.

Từ giả thuyết bài toán ta giả sử $f(x) = a(x-1)(x-2)(x-3) + x^2 (a \neq 0)$.

Ta có: $AB\colon y = 3x - 2$, $AC\colon y = 4x - 3$, $BC\colon y = 5x - 6$.

Khi đó hoành độ của M là nghiệm của phương trình:

$a(x_M - 1)(x_M - 2)(x_M - 3) + x_M^2 = 3x_M - 2 \Leftrightarrow a(x_M - 1)(x_M - 2)(x_M - 3) + (x_M - 1)(x_M - 2) = 0$.

$\Leftrightarrow a(x_M - 3) + 1 = 0 \Leftrightarrow x_M = 3 - \dfrac{1}{a}$.

Hoành độ của N là nghiệm của phương trình:

$a(x_N - 1)(x_N - 2)(x_N - 3) + x_N^2 = 4x_N - 3 \Leftrightarrow a(x_N - 1)(x_N - 2)(x_N - 3) + (x_N - 1)(x_N - 3) = 0$.

$\Leftrightarrow a(x_N - 2) + 1 = 0 \Leftrightarrow x_N = 2 - \dfrac{1}{a}$.

Hoành độ của P là nghiệm của phương trình:

$a(x_P - 1)(x_P - 2)(x_P - 3) + x_P^2 = 5x_P - 6 \Leftrightarrow a(x_P - 1)(x_P - 2)(x_P - 3) + (x_P - 2)(x_P - 3) = 0$.

$\Leftrightarrow a(x_P - 1) + 1 = 0 \Leftrightarrow x_P = 1 - \dfrac{1}{a}$.

Từ giả thuyết ta có $x_M + x_N + x_P = 5 \Leftrightarrow 6 - \dfrac{3}{a} = 5 \Leftrightarrow a = 3$.

Do đó: $f(x) = 3(x-1)(x-2)(x-3) + x^2$.

Vậy $f(0) = -18$.

Chọn đáp án B □

Câu 30. Tìm giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ cắt đường thẳng $d\colon y = m(x-1)$ tại ba điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 + x_2^2 > 5$.

A $m \geq -3$. B $m \geq -2$. C $m > -3$. D $m > -2$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm:

$x^3-3x^2+2=m(x-1)\Leftrightarrow x^3-3x^2-mx+m+2=0$

$$\Leftrightarrow (x-1)\left(x^2-2x-m-2\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_1=1\\ g(x)=x^2-2x-(m+2)=0\quad(*)\end{array}\right.$$

Để hai đồ thị cắt nhau tại ba điểm phân biệt thì phương trình $(*)$ phải có hai nghiệm phân biệt khác 1 $\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta'>0\\ g(1)\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1^2+(m+2)>0\\ 1-2-m-2\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>-3\\ m\neq -3\end{cases}\Leftrightarrow m>-3.$

Gọi x_2, x_3 là hai nghiệm phương trình $(*)$.

Theo định lý Viét ta có $\begin{cases}x_2+x_3=2\\ x_2\cdot x_3=-(m+2)\end{cases}.$

Theo bài ta có $x_1^2+x_2^2+x_3^2>5\Leftrightarrow 1+x_2^2+x_3^2>5\Leftrightarrow x_2^2+x_3^2>4.$

$\Leftrightarrow (x_2+x_3)^2-2x_2x_3>4\Leftrightarrow 4+2(m+2)>4\Leftrightarrow m>-2.$

So sánh với điều kiện ở trên suy ra $m>-2$.

Kết luận: $m>-2$ thỏa mãn yêu cầu bài toán

Chọn đáp án D □

Câu 31. Gọi S là tập tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^3+3x^2-9x+2m+1$ và trục Ox có đúng hai điểm chung phân biệt. Tính tổng T của các phần tử thuộc tập S

A) $T=-10$. B) $T=10$. C) $T=-12$. D) $T=12$.

Lời giải.

Hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y=x^3+3x^2-9x+2m+1$ và trục Ox là nghiệm của phương trình : $x^3+3x^2-9x+2m+1=0\Leftrightarrow -x^3-3x^2+9x=2m+1.$

Xét hàm số $f(x)=-x^3-3x^2+9x$.

Tập xác định: $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.

$f'(x)=-3x^2-6x+9,\ f'(x)=0\Leftrightarrow -3x^2-6x+9=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ x=-3\end{array}\right..$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-27	$\nearrow$	5	$\searrow$	$-\infty$

Đồ thị hàm số $y=x^3+3x^2-9x+2m+1$ cắt trục Ox tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi đường thẳng $y=2m+1$ cắt đồ thị hàm số $f(x)=-x^3-3x^2+9x$ tại hai điểm phân biệt.

Từ bảng biến thiên suy ra: $\left[\begin{array}{l}2m+1=5\\ 2m+1=-27\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=2\\ m=-14\end{array}\right.\Rightarrow S=\{-14;2\}.$

Tổng của các phần tử thuộc tập S là: $T=-14+2=-12$.

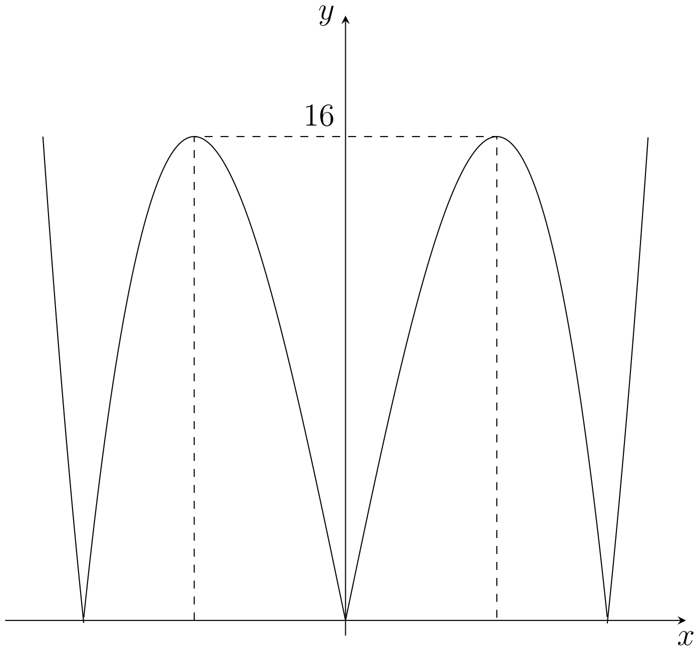
Chọn đáp án C □

Câu 32. Gọi m_0 là số thực sao cho phương trình $|x^3-12x|=m_0$ có ba nghiệm dương phân biệt x_1; x_2; x_3 thỏa mãn $x_1+x_2+x_3=1+4\sqrt{3}$. Biết rằng m_0 có dạng $a\sqrt{3}+b$ với a; b là các số hữu tỷ. Tính $4a^2+8b$.

Ⓐ 106. Ⓑ 115. Ⓒ 113. Ⓓ 101.

Lời giải.

Vẽ đồ thị hàm số $y=|x^3-12x|$.



Do đó với mọi $m\in(0;16)$ thì phương trình đã cho luôn có ba nghiệm dương phân biệt x_1; x_2; x_3 $(x_1<x_2<x_3)$ thỏa mãn: $\begin{cases}-x_1^3+12x_1=m_0\\-x_2^3+12x_2=m_0\\x_3^3-12x_3=m_0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(-x_1)^3-12(-x_1)-m_0=0\\(-x_2)^3-12(-x_2)-m_0=0\\x_3^3-12x_3-m_0=0\end{cases}$.

$\Rightarrow -x_1$; $-x_2$; x_3 là ba nghiệm của phương trình $x^3-12x-m_0=0$.

$\Rightarrow -x_1-x_2+x_3=0\Rightarrow x_3=x_1+x_2$.

Mà $x_1+x_2+x_3=1+4\sqrt{3}\Rightarrow x_3=\dfrac{1+4\sqrt{3}}{2}\Rightarrow m_0=\left(\dfrac{1+4\sqrt{3}}{2}\right)^3-12\left(\dfrac{1+4\sqrt{3}}{2}\right)=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}+\dfrac{97}{8}$.

$\Rightarrow a=\dfrac{3}{2};b=\dfrac{97}{8}\Rightarrow 4a^2+8b=106$.

Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 33. Cho hàm số $y=x^3+3x^2-3mx+m-1$. Biết rằng hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số và trục Ox có diện tích phần nằm phía trên trục Ox và phần nằm dưới trục Ox bằng nhau. Giá trị của m là?

Ⓐ $-\dfrac{2}{3}$. Ⓑ $\dfrac{2}{3}$. Ⓒ 1. Ⓓ $-\dfrac{1}{4}$.

Lời giải.

Ta có $y'=3x^2+6x-3m$ và $y''=6x+6$, $y''=0\Leftrightarrow x=-1$, $y(-1)=1+4m\Rightarrow U(-1;1+4m)$.

Từ giả thiết suy ra hàm số có hai điểm cực trị và điểm uốn nằm trên trục hoành, nên $1+4m=0\Leftrightarrow m=-\dfrac{1}{4}$.

Chọn đáp án D □

Câu 34. Số giá trị nguyên của tham số $m \in [-2020; 2021]$ để đường thẳng $y = 3mx + 1$ cắt đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x + 3$ tại ba điểm phân biệt là

(A) 1. (B) 2021. (C) 670. (D) 2020.

Lời giải.

- Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị $y = x^3 - 3x + 3$ và đường thẳng $y = 3mx + 1$ là $x^3 - 3x + 3 = 3mx + 1 \Leftrightarrow x^3 + 2 = 3x(m + 1)$. (1)
  Nếu $x = 0$ thì (1) không thỏa mãn.
  Nếu $x \neq 0$ ta có (1) $\Leftrightarrow \dfrac{x^3 + 2}{x} = 3(m + 1)$.
- Xét hàm số $g(x) = \dfrac{x^3 + 2}{x}$ với $x \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$.
  Ta có $g'(x) = \dfrac{2x^3 - 2}{x^2}$, $\forall x \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$.
  $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$.
  Bảng biến thiên của hàm số $g(x) = \dfrac{x^3 + 2}{x}$ với $x \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	||	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$

- Dựa vào bảng biến thiên ta thấy đồ thị hàm số đã cho cắt đường thẳng $y = 3mx + 1$ tại 3 điểm phân biệt $\Leftrightarrow 3(m + 1) > 3 \Leftrightarrow m + 1 > 1 \Leftrightarrow m \in (0; +\infty)$.
  Kết hợp với điều kiện $m \in [-2020; 2021]$ ta được $m \in (0; 2021]$.
  Do $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{1; 2; 3; \ldots; 2021\}$

Chọn đáp án B □

Dạng 2. Bài toán tương giao của đường thẳng với đồ thị hàm số nhất biến (chứa tham số)

Câu 35. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên thuộc đoạn $[-2020; 2020]$ của tham số m để đường thẳng $y = x + m$ cắt đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x - 3}{x - 1}$ tại hai điểm phân biệt?

(A) 4036. (B) 4040. (C) 4038. (D) 4034.

Lời giải.

Ta có phương trình hoành dộ giao điểm của đường thẳng $y = x + m$ và đường cong $y = \dfrac{2x - 3}{x - 1}$ là $x - m = \dfrac{2x - 3}{x - 1} \Leftrightarrow g(x) = x^2 + (m - 3)x - m + 3 = 0, x \neq 1$ (1) có $\Delta = (m - 3)^2 - 4(-m + 3) =$

$m^2 - 2m - 3$

Để đường thẳng $y = x + m$ cắt đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x-3}{x-1}$ tại hai điểm phân biệt thì (1) có hai nghiệm phân biệt khác 1 $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ g(1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 2m - 3 > 0 \\ 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < -1 \\ m > 3 \end{array}\right.$

Kết hợp giả thiết: $\begin{cases} -2020 \leq m \leq 2020 \\ m \in \mathbb{Z} \\ m < -1; m > 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \in \mathbb{Z} \\ \left[\begin{array}{l} -2020 \leq m < -1 \\ 3 < m \leq 2020 \end{array}\right. \end{cases}.$

Trường hợp 1: $\begin{cases} m \in \mathbb{Z} \\ -2020 \leq m < -1 \end{cases} \Rightarrow$ có $\dfrac{-2-(-2020)}{1} + 1 = 2019$ giá trị nguyên m.

Trường hợp 2: $\begin{cases} m \in \mathbb{Z} \\ 3 \leq m < 2020 \end{cases} \Rightarrow$ có $\dfrac{2020-4}{1} + 1 = 2017$ giá trị nguyên m.

Vậy có tất cả $2019 + 2017 = 4036$ giá trị nguyên của tham số m.

Chọn đáp án A □

Câu 36. Đường thẳng $y = x + 2m$ cắt đồ thị hàm số $y = \dfrac{x-3}{x-1}$ tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi?

(A) $\left[\begin{array}{l} m < -1 \\ m > 3 \end{array}\right.$. (B) $\left[\begin{array}{l} m \leq -1 \\ m \geq 3 \end{array}\right.$. (C) $\left[\begin{array}{l} m < -3 \\ m > 1 \end{array}\right.$. (D) $-3 < m < 1$.

Lời giải.

Ta có phương trình hoành độ giao điểm của đường thẳng $y = x + 2m$ và đường cong $y = \dfrac{x-3}{x-1}$ là $x + 2m = \dfrac{x-3}{x-1} \Leftrightarrow g(x) = x^2 + 2mx + 2m + 3 = 0, x \neq 1$ (1) có $\Delta' = (m)^2 - (2m+3) = m^2 + 2m + 3$

Để đường thẳng $y = x + m$ cắt đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x-3}{x-1}$ tại hai điểm phân biệt thì (1) có hai nghiệm phân biệt khác 1 $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ g(1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + 2m + 3 > 0 \\ -4 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < -1 \\ m > 3 \end{array}\right.$

Vậy tập hợp các giá trị của tham số m là $\left[\begin{array}{l} m < -1 \\ m > 3 \end{array}\right.$.

Chọn đáp án A □

Câu 37. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để dường thẳng $y = 2x + m$ cắt đồ thị hàm số $y = \dfrac{x+3}{x+1}$ tại hai điểm phân biệt?

(A) $m \in (-\infty; +\infty)$. (B) $m \in (-1; +\infty)$. (C) $m \in (-2; 4)$. (D) $m \in (-\infty; -2)$.

Lời giải.

Ta có phương trình hoành độ giao điểm của đường thẳng $y = x + 2m$ và đường cong $y = \dfrac{x-3}{x-1}$ là $x + 2m = \dfrac{x-3}{x-1} \Leftrightarrow g(x) = x^2 + 2mx + 2m + 3 = 0, x \neq 1$ (1) có $\Delta' = (m)^2 - (2m+3) = m^2 + 2m + 3$

Để đường thẳng $y = x + m$ cắt đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x-3}{x-1}$ tại hai điểm phân biệt thì (1) có hai nghiệm phân biệt khác 1 $\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta > 0\\ g(1) \neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2+2m+3>0\\ -4 \neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m<-1\\ m>3\end{array}\right.$

Vậy tập hợp các giá trị của tham số m là $\left[\begin{array}{l} m<-1\\ m>3\end{array}\right.$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 38. Gọi A và B là hai điểm thuộc hai nhánh khác nhau của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x}{x-2}$. Khi đó độ dài đoạn AB ngắn nhất bằng

(A) $4\sqrt{2}$. (B) 4. (C) $2\sqrt{2}$. (D) $\sqrt{2}$.

Lời giải.

Gọi $A\left(a;\dfrac{a}{a-2}\right)$ và $B\left(b;\dfrac{b}{b-2}\right)$ là hai điểm thuộc hai nhánh của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x}{x-2}$, $(a<2<b)$.

Ta có $\overrightarrow{AB}=\left(b-a;\dfrac{b-a}{(b-2)(a-2)}\right)$.

Áp dụng BĐT Côsi, ta có $(b-2)(a-2)\leq\dfrac{(b-a)^2}{4}$.

Suy ra $AB^2=(b-a)^2+\dfrac{(b-a)^2}{[(b-2)(a-2)]^2}\geq(b-a)^2+\dfrac{64}{(b-a)^2}\geq 16$. Suy ra $AB\geq 4$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=2-\sqrt{2}$ à $b=2+\sqrt{2}$.

Vậy $AB=4$

Chọn đáp án (B) □

Câu 39. Cho hàm số $y=\dfrac{x}{x-1}$ và đường thẳng $d\colon y=-x+m$. Gọi S là tập các số thực m để đường thẳng d cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho tam giác OAB (O là gốc tọa độ) có bán kính đường tròn ngoại tiếp bằng $2\sqrt{2}$. Tổng các phần tử của S bằng

(A) 4. (B) 3. (C) 0. (D) 8.

Lời giải.

Xét phương trình $\dfrac{x}{x-1}=-x+m \Leftrightarrow x^2-mx+m=0 \quad (1),\ x\neq 1$.

b Đồ thị (C) và đường thẳng d cắt nhau tại hai điểm phân biệt A và B khi và chỉ khi phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $x\neq 1 \Leftrightarrow \Delta=m^2-4m\geq\Leftrightarrow m<0; m>4$.

Khi đó hai giao điểm là $A\left(x_1;-x_1+m\right)$, $B\left(x_2;-x_2+m\right)$

Ta có $OA=\sqrt{m^2-2m}$; $OB=\sqrt{m^2-2m}$; $AB=\sqrt{2(m^2-4m)}$; $\mathrm{d}(O;d)=\dfrac{|m|}{\sqrt{2}}$.

Khi đó $S_{\mathrm{OAB}}=\dfrac{1}{2}AB\cdot\mathrm{d}(O,d)=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{|m|}{\sqrt{2}}\sqrt{2(m^2-4m)}=\dfrac{(m^2-2m)\sqrt{2(m^2-4m)}}{4\cdot 2\sqrt{2}}$

$\Leftrightarrow m^2-2m=4|m| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0(\text{loại})\\ m=6(\text{nhận})\\ m=-2(\text{nhận})\end{array}\right.$.

Vậy tổng các phần tử của S bằng 4.

Chọn đáp án (A) □

Câu 40. Đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-1}{1-x}$ có đồ thị (C) và đường thẳng $d\colon y=x+m$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng d cắt đồ thị (C) tại 2 điểm phân biệt.

(A) $m > -1$. (B) $-5 < m < -1$. (C) $m < -5$. (D) $m < -5; m > -1$.

Lời giải.

Hàm số $y = \dfrac{2x-1}{1-x}$ có tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Phương trình hoành độ giao điểm của hai đường $\dfrac{2x-1}{1-x} = x + m \Leftrightarrow x^2 + (m+1)x - (m+1) = 0, x \neq 1 \quad (1)$.

Đường thẳng d cắt đồ thị hàm số tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khác 1.

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ 1^1 + (m+1) - (m+1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + 6m + 5 > 0 \\ 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < -5; m > -1$

Chọn đáp án (D) □

Câu 41. Cho hàm số $y = \dfrac{x+3}{x+1}$ có đồ thị (C) và đường thẳng $d\colon y = x - m$, với m là tham số thực. Biết rằng đường thẳng d cắt (C) tại hai điểm phân biệt A và B sao cho điểm $G(2;-2)$ là trọng tâm của tam giác OAB (O là gốc toạ độ). Giá trị của m bằng

(A) 6. (B) 3. (C) -9. (D) 5.

Lời giải.

Hàm số $y = \dfrac{x+3}{x+1}$ có $y' = \dfrac{-2}{(x+1)^2}, \forall x \mathscr{D}$ và đường thẳng d có hệ số $a = 1 > 0$ nên d luôn cắt (C) tại hai điểm phân biệt $A(x_A; y_A$ và $B(x_B; y_B)$ với mọi giá trị của tham số m.

Phương trình hoành độ giao điểm của d và (C) là $\dfrac{x+3}{x+1} = x - m \Leftrightarrow x^2 - mx - m - 3 = 0$, $x \neq -1$.

Suy ra x_A, x_B là nghiệm phương trình $x^2 - mx - m - 3 = 0$.

Theo định lí Vi-et, ta có $x_A + x_B = m$.

Mặt khác, $G(2;-2)$ là trọng tâm của tam giác OAB nên $x_A + x_B + x_O = 3x_G \Leftrightarrow x_A + x_B = 6 \Leftrightarrow m = 6$.

Vậy $m = 6$ thỏa yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án (A) □

Câu 42. Cho hàm số $y = \dfrac{3x-2m}{mx+1}$ với m là tham số. Biết rằng với mọi $m \neq 0$ đồ thị hàm số luôn cắt đường thẳng $d\colon y = 3x - 3m$ tại hai điểm phân biệt A, B Tích tất cả các giá trị của m tìm được để đường thẳng d cắt các trục Ox, Oy lần lượt tại C, D sao cho diện tích ΔOAB bằng 2 lần diện tích ΔOCD bằng

(A) $-\dfrac{4}{9}$. (B) -4. (C) -1. (D) 0.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của hai đường $\dfrac{3x-2m}{mx+1} = 3x - 3m \Leftrightarrow 3x^2 - 3mx - 1 = 0 \quad (*)$

Gọi tọa độ các giao điểm của d với đồ thị hàm số đã cho là $A(x_1; 3x_1 - 3m)$, $B(x_2; 3x_2 - 3m)$.

Tọa độ các điểm $C(m;0)$, $D(0;-3m)$. Gọi $h = \mathrm{d}(O,d)$, suy ra h là chiều cao của các tam giác OAB và OCD.

Theo giả thiết $S_{OAB} = 2S_{OCD} \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}AB \cdot h = 2 \cdot \dfrac{1}{2}CD \cdot h \Leftrightarrow AB = 2CD \Leftrightarrow AB^2 = 4CD^2$

$$\begin{aligned}&\Leftrightarrow (x_1 - x_2)^2 + [3(x_1 - x_2)]^2 = 4\left[m^2 + (-3m)^2\right]\\ &\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = 4m^2\\ &\Leftrightarrow m^2 + \frac{4}{3} = 4m^2 \Leftrightarrow m^2 = \frac{4}{9} \Leftrightarrow m = \pm\frac{2}{3}.\end{aligned}$$

Vậy tích tích tất cả các giá trị của thma số m bằng $= -\dfrac{4}{9}$.

Chọn đáp án A □

Câu 43. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đường thẳng $y = -3x + m$ cắt đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x+1}{x-1}$ tại hai điểm phân biệt A và B sao cho trọng tâm tam giác OAB thuộc đường thẳng $x - 2y - 2 = 0$

A 2. B 1. C 0. D 3.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của hai đường: $3x^2 - (m-1)x + m - 1 = 0$, $x \neq 1$ (1).

YCBT $\Leftrightarrow$ (1) có hai nghiệm phân biệt khác 1 $\Leftrightarrow \begin{cases}(m-1)^2 - 12(m-1) > 0\\ 3 \cdot 1^2 - (m-1) \cdot 1 + m - 1 \neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m^2 - 10m - 11 >\\ 3 \neq 0\end{cases}$

$m < -1; m > 11$ (2)

Không mất tính tổng quát, giả sử $A(x_1; -3x_1 + m)$, $B(x_2; -3x_2 + m)$ với x_1, x_2 là hai nghiệm phân biệt của (1). Theo định lí Vi-et ta có: $x_1 + x_2 = \dfrac{m-1}{3}$.

Gọi M là trung điểm $AB \Rightarrow M\left(\dfrac{m-1}{6}; \dfrac{m-1}{2}\right)$. Giả sử $G(x; y)$ là trọng tâm tam giác OAB, suy ra $\overrightarrow{OG} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{OM} \Rightarrow G\left(\dfrac{m-1}{9}; \dfrac{m-1}{3}\right)$.

Mặt khác, điểm $G \in d\colon x - 2y - 2 = 0$ nên $\dfrac{m-1}{9} - 2 \cdot \dfrac{m-1}{3} - 2 = 0 \Leftrightarrow m = -\dfrac{11}{5}$ không thỏa (2). Do đó không có giá trị nguyên m thỏa yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án C □

Câu 44. Giả sử $m = -\dfrac{b}{a}$, $a, b \in \mathbb{Z}^+$, $(a, b) = 1$ là giá trị thực của tham số m để đường thẳng $d\colon y = -3x + m$ cắt đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x+1}{x-1}$ tại hai điểm phân biệt A, B sao cho trọng tâm tam giác OAB thuộc đường thẳng $\Delta\colon x - 2y - 2 = 0$, với O là gốc toạ độ. Tính $a + 2b$.

A 2. B 5. C 11. D 21.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của hai đường: $3x^2 - (m-1)x + m + 1 = 0$, $x \neq 1$ (1).

YCBT $\Leftrightarrow$ (1) có hai nghiệm phân biệt khác 1 $\Leftrightarrow \begin{cases}(m-1)^2 - 12(m+1) > 0\\ 3 \cdot 1^2 - (m-1) \cdot 1 + m + 1 \neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m^2 - 10m - 11 >\\ 3 \neq 0\end{cases}$

$m < -1; m > 11$ (2)

Không mất tính tổng quát, giả sử $A(x_1; -3x_1 + m)$, $B(x_2; -3x_2 + m)$ với x_1, x_2 là hai nghiệm phân biệt của (1). Theo định lí Vi-et ta có: $x_1 + x_2 = \dfrac{m-1}{3}$.

Gọi M là trung điểm $AB \Rightarrow M\left(\dfrac{m-1}{6}; \dfrac{m-1}{2}\right)$. Giả sử $G(x; y)$ là trọng tâm tam giác OAB, suy ra $\overrightarrow{OG} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{OM} \Rightarrow G\left(\dfrac{m-1}{9}; \dfrac{m-1}{3}\right)$.

Mặt khác, điểm $G \in \Delta\colon x - 2y - 2 = 0$ nên $\dfrac{m-1}{9} - 2 \cdot \dfrac{m-1}{3} - 2 = 0 \Leftrightarrow m = -\dfrac{11}{5}$ suy ra $a = 11; b = 5$. Vậy $a - 2b = 21$.

Chọn đáp án D □

Câu 45. Cho hàm số $y = \dfrac{3x-2}{x-2}$ có đồ thị (C) và đường thẳng $d\colon ax + 2b - 4$. Đường thẳng d cắt đồ thị (C) tại A, B đối xứng nhau qua gốc tọa độ O, khi đó $T = a + b$ bằng

A. 2. B. $\dfrac{5}{2}$. C. 4. D. $\dfrac{7}{2}$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của hai đường: $ax^2 + (2a + 2b - 7)x - 10 = 0,\ x \neq -2 \quad (1)$.

YCBT $\Leftrightarrow$ (1) có hai nghiệm phân biệt khác $-2 \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ (2a + 2b - 7)^2 - 4a(4b - 10) > 0 \quad (2) \\ 4 \neq 0 \end{cases}$

Không mất tính tổng quát, giả sử $A(x_1; ax_1 + 2b - 4)$, $B(x_2; ax_2 + 2b - 4)$ với x_1, x_2 là hai nghiệm phân biệt của (1). Do A, B đối xứng qua gốc tọa độ O nên $\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ 4b - 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ b = 2 \\ x_1 + x_2 = -\dfrac{2a + 2b - 7}{a} \end{cases} \Rightarrow$
$\begin{cases} a = \dfrac{3}{2} \\ b = 2 \end{cases}$ thỏa điều kiện (2).

Vậy $a + b = \dfrac{7}{2}$

Chọn đáp án D □

Câu 46. Tìm các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $d\colon y = -3x + m$ cắt đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x+1}{x-1}$ tại hai điểm phân biệt A, B sao cho trọng tâm tam giác OAB thuộc đường thẳng $\Delta\colon x - 2y - 2 = 0$, với O là gốc toạ độ.

A. $-\dfrac{11}{5}$. B. $-\dfrac{1}{5}$. C. 0. D. -2.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của hai đường: $3x^2 - (m - 1)x + m + 1 = 0,\ x \neq 1 \quad (1)$.

YCBT $\Leftrightarrow$ (1) có hai nghiệm phân biệt khác $1 \Leftrightarrow \begin{cases} (m-1)^2 - 12(m+1) > 0 \\ 3 \cdot 1^2 - (m-1) \cdot 1 + m + 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 10m - 11 > 0 \\ 3 \neq 0 \end{cases}$
$m < -1; m > 11 \quad (2)$

Không mất tính tổng quát, giả sử $A(x_1; -3x_1 + m)$, $B(x_2; -3x_2 + m)$ với x_1, x_2 là hai nghiệm phân biệt của (1). Theo định lí Vi-et ta có: $x_1 + x_2 = \dfrac{m-1}{3}$.

Gọi M là trung điểm $AB \Rightarrow M\left(\dfrac{m-1}{6}; \dfrac{m-1}{2}\right)$. Giả sử $G(x; y)$ là trọng tâm tam giác OAB, suy ra $\overrightarrow{OG} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{OM} \Rightarrow G\left(\dfrac{m-1}{9}; \dfrac{m-1}{3}\right)$.

Mặt khác, điểm $G \in \Delta\colon x - 2y - 2 = 0$ nên $\dfrac{m-1}{9} - 2 \cdot \dfrac{m-1}{3} - 2 = 0 \Leftrightarrow m = -\dfrac{11}{5}$. Vậy $m = -\dfrac{11}{5}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 47. Cho hàm số $y = \dfrac{2x}{x-1}$ có đồ thị (C). Tìm tập hợp các giá trị của $a \in \mathbb{R}$ để qua điểm $M(0;a)$ có thể kẻ được đường thẳng cắt (C) tại hai điểm phân biệt đối xứng nhau qua M.

(A) $(-\infty;0) \cup (2;+\infty)$.
(B) $(3;+\infty)$.
(C) $(-\infty;0)$.
(D) $(-\infty;-1] \cup [3;+\infty)$.

Lời giải.

Đường thẳng có hệ số góc k đi qua điểm $M(0;a)$ có dạng $d: y = kx + a$.

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị (C) và d

$$\frac{2x}{x-1} = kx + a \Leftrightarrow kx^2 + (a-k-2)x - a = 0, \quad x \neq 1. \quad (1)$$

YCBT $\Leftrightarrow$ (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 khác 1 và thỏa mãn $\dfrac{x_1+x_2}{2} = 0 \Leftrightarrow x_1 + x_2 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k \neq 0 \\ (a-k-2)^2 + 4ka > 0 \\ k \cdot 1^2 + (a-k-2) \cdot 1 - a \neq 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k \neq 0 \\ k = a-2 \\ 4(a-2)a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-2 \neq 0 \\ k = a-2 \\ a < 0; a > 2 \end{cases} \Leftrightarrow a < 0; a > 2.$$

Vậy $a \in (-\infty;0) \cup (2;+\infty)$

Chọn đáp án (A) □

Câu 48. Có bao nhiêu số nguyên dương m sao cho đường thẳng $y = x + m$ cắt đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x-1}{x+1}$ tại hai điểm phân biệt M, N sao cho $MN \leq 10$.

(A) 2.
(B) 3.
(C) 1.
(D) 4.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm $\dfrac{2x-1}{x+1} = x + m \Leftrightarrow x^2 + (m-1)x + m + 1 = 0$, $x \neq 1$ (1).

YCBT $\Leftrightarrow$ (1) có hai nghiệm phân biệt khác -1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 6m - 3 > 0 \\ 3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 3 - 2\sqrt{3} \\ 3 + 2\sqrt{3} \end{cases} \quad (2).$$

Gọi $M(x_1; x_1 + m)$, $N(x_2; x_2 + m)$ là tọa độ giao điểm đường thẳng d và đồ thị hàm số (C).

$MN \leq 10 \Leftrightarrow (x_1+x_2)^2 - 4x_1x_2 \leq 50 \Leftrightarrow m^2 - 6m - 53 \leq 0 \Leftrightarrow 3 - \sqrt{62} \leq m \leq 3 + \sqrt{62}$.

Kết hợp điều kiện (2), ta có $m \in (3 - \sqrt{62}; 3 - 2\sqrt{2}) \cup (3 + 2\sqrt{2}; 3 + \sqrt{62})$. Do $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{7;8;9;10\}$

Chọn đáp án (D) □

Câu 49. Cho đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x+1}{x+1}$. Tìm k để đương thẳng d: $y = kx + 2k + 1$ cắt đồ thị hàm số tại hai điểm phân biệt A, B sao cho khoảng cách từ A đến trục hoành bằng khoảng cách từ B đến trục hoành.

(A) 1.
(B) $\dfrac{2}{5}$.
(C) -3.
(D) -2.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của hai đường $\dfrac{2x+1}{x+1} = kx+2k+1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ kx^2 + (3k-1)x + 2k = 0 \quad (1) \end{cases}$.

YCBT $\Leftrightarrow \begin{cases} k \neq 0 \\ \Delta = k^2 - 6k + 1 > 0 \\ k(x_1 + x_2) + 4k + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k \neq 0 \\ k^2 - 6k + 1 > 0 \\ 1 - 3k + 4k + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow k = -3.$

Chọn đáp án (C) □

Câu 50. Tìm điều kiện của m để đường thẳng $y = mx + 1$ cắt đồ thị hàm số $y = \dfrac{x-3}{x+1}$ tại hai điểm phân biệt

(A) $(-\infty; 0] \cup [16; \infty)$.
(B) $(16; \infty)$.
(C) $(-\infty; 0)$.
(D) $(-\infty; 0) \cup (16; \infty)$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của hai đường $mx^2 + mx + 4 = 0, x \neq -1 \quad (1)$.

YCBT $\Leftrightarrow$ (1) có hai nghiệm phân biệt khác -1

$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 16m > 0 \\ 4 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < 0; m > 16.$

Chọn đáp án (D) □

Câu 51. Gọi $M(a; b)$ là điểm trên đồ thị hàm số (C) : $y = \dfrac{x-2}{x}$ sao cho khoảng cahcs từ M đến đường thẳng d: $y = 2x - 6$ nhỏ nhất. Tính $(4x + 5b)^2 + (2b - 7)^2$

(A) 162.
(B) 2.
(C) 18.
(D) 0.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của hai đường $\dfrac{x-2}{x} = 2x + 6 \Leftrightarrow x = -2; x = -\dfrac{1}{2}$.

Suy ra dường thẳng cắt đồ thị hàm số tại hai điểm phân biệt $M(-2; 2)$, $N(-\dfrac{1}{2}; 5)$.

Ta có $\mathrm{d}(M; d) \geq 0, \forall M \Rightarrow \min \mathrm{d}(M; d) = 0$ khi $M \in d$.

Vì M(C) suy ra $M = d \cap$ (C) $\Rightarrow \left[\begin{array}{l} M(-2; 2) \\ M\left(-\dfrac{1}{2}; 5\right) \end{array}\right.$.

Với $M(-2; 2) \Rightarrow a = -2; b = 2 \Rightarrow (4a + 5)^2 + (2b - 7)^2 = 18$.

Với $M\left(-\dfrac{1}{2}; 5\right) \Rightarrow a = -\dfrac{1}{2}; b = 5 \Rightarrow (4a + 5)^2 + (2b - 7)^2 = 18$

Chọn đáp án (C) □

Câu 52. Có bao nhiêu giá trị của m để đồ thị của hàm số $y = \dfrac{x}{1-x}$ cắt đường thẳng $y = x - m$ tại hai điểm phân biệt A, B sao cho góc giữa hai đường thẳng OA và OB bằng $60°$(với O là gốc tọa độ)?

(A) 2.
(B) 1.
(C) 3.
(D) 0.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của hai đường $x^2 - mx + m = 0, x \neq 1 \quad (1)$.

Điều kiện đường thẳng cắt đồ thị hàm số tại hai điểm phân biệt A, $B \Leftrightarrow$ (1) có hai nghiệm phân biệt khác 1 $\Leftrightarrow \begin{cases} 1-m+m \neq 0 \\ m^2-4m>0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m>4 \\ m<0 \end{array}\right.$. Khi đó áp dụng định lí Vi-et trong (1), ta có $x_1+x_2=m; x_1x_2=m$.

Giả sử $A(x_1;x_1-m)$, $B(x_2;x_2-m)$, suy ra $\overrightarrow{OA}(x_1;x_1-m)$, $\overrightarrow{OB}(x_2;x_2-m)$.

Theo giả thiết góc giữa hai đường thẳng OA và OB bằng $60°$ suy ra

$$\begin{aligned}
&\cos\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)=\cos 60°\\
\Leftrightarrow&\frac{|2x_1x_2-m(x_1-x_2)-m^2|}{\sqrt{x_1^2+(x_1-m)^2}\cdot\sqrt{x_2^2+)x_2-m)^2}}=\frac{1}{2}\\
\Leftrightarrow&\frac{|2m|}{\sqrt{m^2+(m-mx_2)^2+(m-mx_1)^2+[x_1x_2-m(x_1+x_2)+m^2]^2}}=\frac{1}{2}\\
\Leftrightarrow&\frac{2}{\sqrt{2+(1-x_1)^2+(1-x_2)^2}}=\frac{1}{2}\\
\Leftrightarrow&(x_1+x_2)^2-2x_1x_2-2(x_1+x_2)=12\\
\Leftrightarrow&m^2-4m-12=0\Leftrightarrow m=6; m=-2.
\end{aligned}$$

Chọn đáp án A □

Câu 53. Để đường thẳng $d\colon y=x-m+2$ cắt đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x}{x-1}$ tại hai điểm phân biệt A, B sao cho độ dài đoạn AB ngắn nhất thì m thuộc khoảng nào?

A $m\in(-4;-2)$. B $m\in(2;4)$. C $m\in(-2;0)$. D $m\in(0;2)$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của d và (C): $g(x)=x^2-(m+1)x+m-2=0, x\neq 1$ (1)

YCBT $\Leftrightarrow$ (1) có hai nghiệm phân biệt khác 1.

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta>0 \\ g(1)\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \forall m\in\mathbb{R}$.

Theo định lí Vi-et, ta có $x_1+x_2=m+1$, $x_1x_2=m-2$.

Khi đó $A(x_1;x_1-m+2)$, $B(x_2;x_2-m+2)$.

$$\begin{aligned}
AB&=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(x_2-m+2-x_1+m-2)^2}=\sqrt{2)x_1-x_2)^2}\\
&=\sqrt{2}\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}\\
&=\sqrt{2}\sqrt{(m-1)^2+8}\geq 4.
\end{aligned}$$

Vậy AB nhỏ nhất khi và chỉ khi $AB=4\Leftrightarrow m=1$

Chọn đáp án D □

Câu 54. Biết rằng đường thẳng $d\colon y=2x+2m$ đồ thị hàm số (C): $y=\dfrac{x^2+3}{x+1}$ tại hai điểm phân biệt A, B với mọi giá trị tham số m. Tìm hoành độ trung điểm của AB

A $m+1$. B $-m-1$. C $-2m-2$. D $-2m+1$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của d và (C) là $x^2+2(1+m)x+2m-3=0, x\neq 1$ (1) Để đường thẳng d cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ (1) có hai nghiệm phân biệt khác -1

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = m^2 - 4 > 0 \\ g(-1) = -4 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \forall m \in \mathbb{R}$

Khi đó, giả sử $A(x_1; 2x_1 + 2m)$, $B(x_2; 2x_2 + 2m)$, với x_1, x_2 là hai nghiệm của (1).

Hoành độ trung điểm đoạn AB là $\frac{1}{2}(x_1 + x_2) = -\frac{2+2m}{2} = -m - 1$

Chọn đáp án B ☐

Câu 55. Gọi (H) là đồ thị hàm số $y = \frac{2x+3}{x+1}$. Điểm $M(x_0; y_0)$ thuộc (H) có tổng khoảng cách đến hai đường tiệm cận là nhỏ nhất, với $x_0 < 0$ khi đó $x_0 + y_0$ bằng

A -1. B -2. C 3. D 0.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}\backslash$ Đồ thị (H) có đường tiệm cận đứng $d_1\colon x = -1$ và tiệm cận ngang $d_2\colon y = 2$.

Do $M \in$ (H) $\Rightarrow M\left(x_0; \frac{2x_0+3}{x_0+1}\right)$.

Xét $\mathrm{d}(M, d_1) + \mathrm{d}(M, d_2) = |x_0 + 1| + \left|\frac{2x_0+3}{x_0+1} - 2\right| = |x_0 + 1| + \left|\frac{1}{x_0+1}\right| \geq 2$.

Đẳng thức xảy ra khi $|x_0 + 1| = \left|\frac{1}{x_0+1}\right| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = 0 \\ x_0 = -2. \end{array}\right.$

Theo đề bài, ta có $x_0 < 0$ nên nhận $x_0 = -2 \Rightarrow y_0 = 1$.

Vậy $x_0 + y_0 = -1$.

Chọn đáp án A ☐

Câu 56. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để đường thẳng $d\colon y = -x+m$ cắt đồ thị hàm số (C): $y = \frac{-2x+1}{x+1}$ tại hai điểm phân biệt A, B sao cho $AB \leq 2\sqrt{2}$. Tổng các giá trị các phần tử của S bằng

A -6. B -27. C 9. D 0.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của d và (C) là $g(x) = -x^2 + (m+1)x + m - 1 = 0, x \neq -1$ (1).

Để đường thẳng d cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ (1) có hai nghiệm phân biệt khác

$\Leftrightarrow \begin{cases} 7\Delta > 0 \\ \qquad g(-1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m^2 + 6m - 3 > 0 \Leftrightarrow m < -3 - 2\sqrt{3}; m > -3 + 2\sqrt{3}$ (2)

Khi đó $A(x_A; -x_A + m)$, $B(x_B; -x_B + m)$, với x_A, x_B là hai nghiệm của (1).

$$\begin{aligned} AB \leq 2\sqrt{2} \Leftrightarrow & \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (x_B - x_A)^2} \\ \Leftrightarrow & 2(x_B - x_A)^2 = 8 \Leftrightarrow (x_A + x_B)^2 - 4x_Ax_B - 4 < 0 \\ \Leftrightarrow & (m+1)^2 - 4(1-m) - 4 < 0 \\ \Leftrightarrow & m^2 + 6m - 7 < 0 \Leftrightarrow -7 < m < 1 \quad (3) \end{aligned}$$

Từ (2) và (3) ta có $m \in (-7; -3 - 2\sqrt{3}) \cup (-3 + 2\sqrt{3}; 1)$.

Vì $m \in \mathbb{Z}$ nên $m = -6; m = 0$

Chọn đáp án A ☐

Câu 57. Cho hàm số $y=\dfrac{2x-m^2}{x+1}$ có đồ thị (C_m), trong đó m là tham số thực. Đường thẳng $d: y=m-x$ cắt (C_m) tại hai điểm phân biệt $A(x_A;y_A)$, $B(x_B;y_B)$ với $x_A<x_B$; đường thẳng $d': y=2-m-x$ cắt (C_m) tại hai điểm phân biệt $C(x_C;y_C)$, $D(x_D;y_D)$ với $x_c<x_D$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để $x_Ax_D=-3$. Số phần tử của tập S là

A. 1. B. 2. C. 0. D. 3.

Lời giải.

Hoành độ điểm A, B là nghiệm của phương trình $x^2+(3-m)x-m^2-m=0$. Suy ra $x_A+x_B=m-3$, $x_Ax_B=-m^2-m$.

Hoành độ điểm C, D là nghiệm của phương trình $x^2+(m+1)x-m^2+m-2=0$. Suy ra $x_C+x_D=-m-1$, $x_Cx_D=-m^2+m-2$.

Mặc khác x_A, x_D là nghiệm của phương trình $x^2-2x+3=0 \Leftrightarrow x_A=-3; x_D=1$.

Suy ra $m^2+6m+9=5m^2-2m+9 \Leftrightarrow m=0; m=2$

Chọn đáp án B □

Câu 58. Trong mặt phẳng Oxy cho hàm số $y=\dfrac{2x+2}{x-1}$ có đồ thị (C) và đương thẳng d: $y=-x+m$. Tìm m để đường thẳng d cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt.

A. $m<-1$; $m>7$. B. $-1<m<7$. C. $m\le -1$; $m\ge 7$. D. $-1\le m\le 7$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của d và (C) là $x^2+(1-m)x+2+m=0, x\ne 1 \quad (1)$

Để đường thẳng d cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ (1) có hai nghiệm phân biệt khác 1

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta=m^2-6m-7>0\\ 1^2+)1-m)1+2+m\ne 0\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m>7\\ m<-1\end{array}\right.$$

Khi đó $A(x_1;)$, $B(x_2;)$

Chọn đáp án A □

Câu 59. Tìm m để đường thẳng $y=2xm$ cắt đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+3}{x+1}$ tại hai điểm A, B sao cho độ dài đoạn AB là nhỏ nhất.

A. 2. B. 1. C. -1. D. 3.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của hai đường $g(x)=2x^2+(m+1)x+m-3=0, \forall x\ne -1$ (1).

$$\text{YCBT} \Leftrightarrow \begin{cases}\Delta>0\\ g(-1)\ne 0\end{cases} \Leftrightarrow m^2-6m+25>0, \forall m.$$

Giả sử $A(x_1;2x_1+m)$, $B(x_2;2x_2+m)$, với x_1,x_2 là hai nghiệm của (1). Theo định lí Vi-et, ta có $x_1+x_2=-\dfrac{m+1}{2}$, $x_1x_2=\dfrac{m-3}{2}$.

Ta có

$$AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (2x_1 = 2x_2)^2} = \sqrt{5)x_1 - x_2)^2} = \sqrt{5(x_1 + x_2)^2 - 20x_1x_2}$$
$$= \sqrt{5\left(\frac{m+1}{2}\right)^2 - 20\frac{m-3}{2}} = \frac{\sqrt{5(m-3)^2 + 80}}{2} \geq 2\sqrt{5}.$$

Dấu "="xảy ra khi và chỉ khi $m = 3$.

Vậy $m = 3$ thì độ dài đoạn AB đạt giá trị nhỏ nhất bằng $2\sqrt{5}$.

Chọn đáp án (D) □

Dạng 3. Bài toán tương giao của đường thẳng với hàm số trùng phương (chứa tham số)

Câu 60. Tập tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^4 - 4x^2 + 3 + m = 0$ có 4 nghiệm phân biệt

(A) $(-1; 3)$. (B) $(-3; 1)$. (C) $(2; 4)$. (D) $(-3; 0)$.

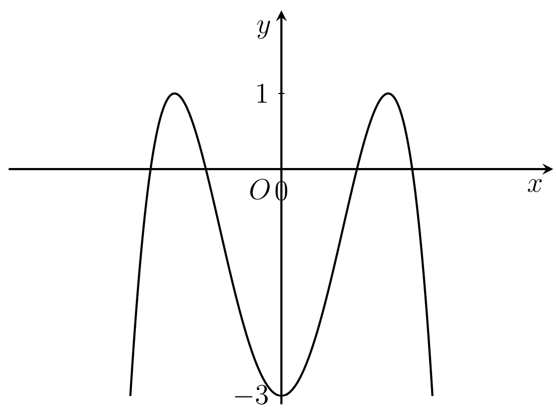
Lời giải.

Ta có $x^4 - 4x^2 + 3 + m = 0 \Leftrightarrow -x^4 + 4x^2 - 3 = m$.

Xét hàm số $y = -x^4 + 4x^2 - 3$. Khi đó

$y' = 4x^3 + 8x; y' = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm\sqrt{2} \\ x = 0 \end{array}\right.$

Suy ra $y_{\text{CD}} = 1$; $y_{\text{CT}} = -3$ Đồ thị



Vậy để phương trình có 4 nghiệm phân biệt thì $-3 < m < 1$

Chọn đáp án (B) □

Câu 61. Tập tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^4 - 2mx^2 + 2m - 1 = 0$ có 4 nghiệm thực phân biệt

(A) $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right) \setminus \{1\}$. (B) $(1; +\infty)$. (C) $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$. (D) $\mathbb{R}$.

Lời giải.

Xét phương trình $x^4 - 2mx^2 + 2m - 1 = 0 \quad (1)$

Đặt $t = x^2, t \leq 0$

Phương trình được viết lại $t^2 - 2mt + 2m - 1 = 0 \quad (2)$.

Để phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt thì phương trình (2) có hai nghiệm dương phân biệt
$$\begin{cases}\Delta' > 0\\ S > 0\\ P > 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 2m + 1 > 0\\ 2m > 0\\ 2m - 1 > 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > \dfrac{1}{2}\\ m \neq 1\end{cases} \Leftrightarrow m \in \left(\dfrac{1}{2}; +\infty\right).$$
Chọn đáp án (A) □

Câu 62. Cho hàm số $y = x^4 - 3x^3 - 2$. Tìm số thực m dương để đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị hàm số tại 2 điểm phân biệt A, B sao cho tam giác OAB vuông tại O, trong đó O là gốc tọa độ.

(A) $m = 2$. (B) $m = \dfrac{3}{2}$. (C) $m = 3$. (D) $m = 1$.

Lời giải.

Hoành độ giao điểm của hai đồ thị là nghiệm của phương trình $x^4 - 3x^2 - 2 - m = 0 \quad (1)$.

Vì $m > 0 \Rightarrow -m - 2 < 0$, suy ra (1) luôn có hai nghiệm phân biệt thỏa
$x^2 = \dfrac{3 + \sqrt{4m + 17}}{2} \Rightarrow x_1 = \sqrt{\dfrac{3 + \sqrt{4m + 17}}{2}}$ và $x_2 = -\sqrt{\dfrac{3 + \sqrt{4m + 17}}{2}}$.

Ta có ΔOAB vuông tại $O \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0 \Leftrightarrow x_1x_2 + m^2 = 0. \Leftrightarrow \dfrac{3 + \sqrt{4m + 17}}{2} = m^2 \Leftrightarrow$
$$\begin{cases} 2m^2 - 3 \leq 0\\ 4m^2 - 12m^2 - 4m - 8 = 0\end{cases} \Rightarrow m = 2(\text{do } m > 0.$$
Chọn đáp án (A) □

Câu 63. Đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị hàm số $y = x^4 - x^2$ tại 4 điểm phân biệt khi và chỉ khi

(A) $-\dfrac{1}{4} < m < 0$. (B) $0 < m < \dfrac{1}{4}$. (C) $m > 0$. (D) $m > -\dfrac{1}{4}$.

Lời giải.

Tập xác định của hàm số là $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

$y' = 4x^3 - 2x$; $y' = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0\\ x = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		0		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$-\frac{1}{4}$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị hàm số $y = x^2 - x^2$ tại 4 điểm phân biệt $\Leftrightarrow -\dfrac{1}{4} < m < 0$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 64. Một đường thẳng cắt đồ thị hàm số $y = x^4 - 2x^2$ tại 4 điểm phân biệt có hoành độ là $0, 1, m, n$. Tính $S = m^2 + n^2$

(A) $S = 1$. (B) $S = 0$. (C) $S = 3$. (D) $S = 2$.

Lời giải.

Tọa độ giao điểm của hai đường lần lượt là $A(0;0)$, $B(1;-1)$, $C(m;m^4 - 2m^2)$, $D(n;n^4 - 2n^2)$.

Khi đó đường thẳng qua hai điểm A, B có phương trình $y = x$.

Xét phương trình hoành độ giao điểm của $y = x^4 - 2x^2$ và đường thẳng $y = x$

$$x^4 - 2x^2 + x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \\ x^2 + x - 1 = 0 \quad (1) \end{array}\right.$$

Vậy m, n là các nghiệm của phương trình (1). Với $m + n = -1; mn = -1$

Khi đó $m^2 + n^2 = (m+n)^2 - 2mn = 3$

Chọn đáp án (C) □

Câu 65. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để đồ thị hàm số $y = x^4 = 4x^3 +)m - 2)x^2 + 8x + 4$ cắt trục hoành tại đúng hai điểm có hoành độ lớn hơn 1.

(A) 8. (B) 7. (C) 5. (D) 3.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm $x^4 - 4x^3 + (m-2)x^2 + 8x + 4 = 0 \quad (1)$.

YCBT $\Leftrightarrow$ (1) có đúng hai nghiệm lớn hơn 1

Ta có (1) $\Leftrightarrow x^4 - 4x^3 + 8x + 4 = (2-m)x^2 \Leftrightarrow 2 - m = x^2 - 4x + \dfrac{8}{x} + \dfrac{4}{x^2}, (x > 1)$.

Đây là phương trình hoành độ giao điểm của (C): $y = x^2 - 4x + \dfrac{8}{x} + \dfrac{4}{x^2}, (x > 1)$ với đường thẳng $y = 2 - m$ song song với trục hoành.

Xét hàm số $x^2 - 4x + \dfrac{8}{x} + \dfrac{4}{x^2}, (x > 1)$.

$y' = 2x - 4 - \dfrac{8}{x^2} - \dfrac{8}{x^3} = \dfrac{2x^4 - 4x^3 - 8x - 8}{x^2}$;

$$y' = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 - \sqrt{3} (\text{loại}) \\ x = 1 + \sqrt{3} (\text{nhận}) \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên

x	1		$1-\sqrt{3}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	9	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, YCBT $\Leftrightarrow 0 < 2 - m < 9 \Leftrightarrow -7 < m < 2$.

Vì m nguyên nên $m \in \{-6; -5; \ldots, 1\}$. Vậy có 8 giá trị nguyên thỏa bài toán.

Chọn đáp án (A) □

Câu 66. Cho hàm số $f(x) = -4x^4 + 8x^2 - 1$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để phương trình $f(x) = m$ có đúng hai nghiệm phân biệt?

Ⓐ 0. Ⓑ 2. Ⓒ 3. Ⓓ 1.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = -16x^3 + 16x; f'(x) = 0 \Leftrightarrow\Rightarrow x = 0; x = \pm 1$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

Phương trình $f(x) = m$ là phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số (C) : $f(x) = -4x^4 + 8x^2 - 1$ và đường thẳng $d : y = m$. Phương trình đã cho có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ Đường thẳng d cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 3 \\ m < -1 \end{array}\right.$.

Vậy có 1 giá trị nguyên dương của m để phương trình $f(x) = m$ có đúng hai nghiệm phân biệt.

Chọn đáp án D □

Câu 67. Cho hàm số $y = x^4 + 2mx^2 + m$ (với m là tham số thực). Tập tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số đã cho cắt đường thẳng $y = -3$ tại bốn điểm phân biệt, trong đó có một điểm có hoành độ lớn hơn 2 còn ba điểm kia có hoành độ nhỏ hơn 1 , là khoảng $(a; b)$ (với $a, b\mathbb{Q}$, a, b là phân số tối giản). Khi đó, $15ab$ nhận giá trị nào sau đây?

Ⓐ -63. Ⓑ 63. Ⓒ 95. Ⓓ -95.

Lời giải.

Xét phương trình hoành độ giao điểm $x^4 + 2mx^2 + m = -3$. Đặt $x^2 = t, t > 0$. Khi đó phương trình trở thành $t^2 + 2mt + m + 3 = 0, \quad (1)$ và đặt $f(t) = t^2 + 2mt + m + 3$. Để đồ thị hàm số cắt đường thẳng $y = -3$ tại 4 điểm phân biệt thì phương trình (1) có hai nghiệm thỏa mãn $0 < t_1 < t_2$ và khi đó hoành độ bốn giao điểm là $-\sqrt{t_2} < -\sqrt{t_1} < \sqrt{t_1} < \sqrt{t_2}$ .. Do đó, từ điều kiện của bài toán suy ra $\begin{cases} \sqrt{t_2} \\ \sqrt{t_1} < 1 \end{cases}$ hay $0 < t_1 < 1 < 4 < t_2$. Điều này xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} f(0) > 0 \\ f(1) < 0 \\ f(4) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m + 3 > 0 \\ 3m + 4 < 0 \\ 9m + 19 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow -3 < m < -\frac{19}{9}$$. Vậy $a = -3$, $b = -\frac{19}{9}$ nên $15ab = 95$.

Chọn đáp án C □

Câu 68. Đường thẳng $y = m^2$ cắt đồ thị hàm số $y = x^4 - x^2 - 10$ tại hai điểm phân biệt A, B sao cho tam giác OAB vuông (O là gốc tọa độ). Mệnh đề nào sau đây đúng?

(A) $m^2 \in (5;7)$. (B) $m^2 \in (3;5)$. (C) $m^2 \in (1;3)$. (D) $m^2 \in (0;1)$.

Lời giải.

Ta có $y' = 4x^3 - 2x$; $y' = 0 \Rightarrow x = 0; x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-0.71		0		0.71		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-10.25	$\nearrow$	-10	$\searrow$	-10.25	$\nearrow$	$+\infty$

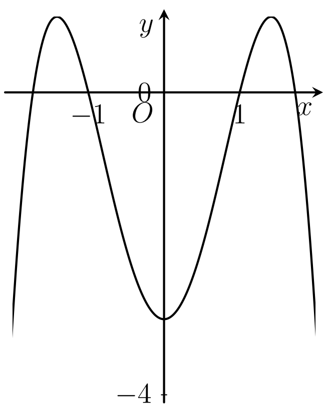
Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy đường thẳng $y = m^2 > 0$ luôn phía trên trục hoành nên nó luôn cắt đồ thị hàm số tại hai điểm phân biệt A, B. Gọi $A\left(\sqrt{a}; m^2\right)$ và $B\left(-\sqrt{a}; m^2\right)$ là giao điểm của hai đồ thị đã cho, với $a > 0$. Ta có

- $A \in (\mathrm{C}) \Rightarrow a^2 - a - 10 = 0 \quad (1)$
- Tam giác OAB cân tại O nên tam giác OAB vuông tại $O \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0 \Leftrightarrow m^4 = a \quad (2)$.
  Từ (1) và (2) ta có $\Leftrightarrow m^8 - m^4 - m^2 - 10 = 0 \Leftrightarrow t^4 - t^2 - t - 10 = 0$, với $t = m^2 > 0$
  $\Leftrightarrow (t-2)(t^3 + 2t^2 + 3t + 5) = 0 \Leftrightarrow t = 2 \Leftrightarrow m^2 = 2 \in (1;3)$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 69.

Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2 - 3$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Với giá trị nào của m thì phương trình $x^4 - 2x^2 - 3 = 2m - 4$ có 2 nghiệm phân biệt.



(A) $\left[\begin{array}{l} m < 0 \\ m = \dfrac{1}{2} \end{array}\right.$. (B) $m \le \dfrac{1}{2}$. (C) $0 < m < \dfrac{1}{2}$. (D) $\left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m > \dfrac{1}{2} \end{array}\right.$.

Lời giải.

Dựa vào đồ thị, ta có $\left[\begin{array}{l} 2m - 4 = 0 \\ 2m - 4 > -3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m > \dfrac{1}{2} \end{array}\right.$ □

Câu 70. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $-x^4 + 2x^2 + 3 + 2m = 0$ có 4 nghiệm phân biệt.

(A) $-2 \le m \le= \dfrac{3}{2}$. (B) $-\dfrac{3}{2} < m < 2$. (C) $-2 < m <= \dfrac{3}{2}$. (D) $3 < m < 4$.

Lời giải.

Ta có $-x^4+2x^2+3+2m=0 \Leftrightarrow x^4-2x^2-3=2m$

Lập bảng biến thiên của hàm số $y=x^4-2x^2-3$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-4	$\nearrow$	-3	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, YCBT $\Leftrightarrow -4<2m<-3 \Leftrightarrow -2<m<-\dfrac{3}{2}$.

Chọn đáp án C ☐

Câu 71. Tất cả các giá trị thực của tham số m, để đồ thị hàm số $y=x^4-2(2-m)x^2+m^2-2m-2$ không cắt trục hoành.

A $m \geq \sqrt{3}+1$. B $m<3$. C $m>\sqrt{3}+1$. D $m>3$.

Lời giải.

Xét phương trình hoành độ giao điểm $x^4-2(2-m)x^2+m^2-2m-2=0 \quad (1)$

Đặt $t=x^2 \geq 0$. Phương trình (1) trở thành $t^2-2(2-m)t+m^2-2m-2=0 \quad (2)$

Đồ thị hàm số không cắt trục hoành $\Leftrightarrow$ (1) vô nghiệm $\Leftrightarrow$ (2) vô nghiệm hoặc có nghiệm âm

Hay $\left[\begin{array}{l} \Delta'=-2m+6<0 \\ \begin{cases} \Delta'=2m+6 \geq 0 \\ 2-m<0 \\ m^2-2m-2>0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m>3 \\ \begin{cases} m \leq 3 \\ m>2 \\ \left[\begin{array}{l} m>1+\sqrt{3} \\ m<1-\sqrt{3} \end{array}\right. \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m>3 \\ 1+\sqrt{3}<m \leq 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow m>1+\sqrt{3}$.

Chọn đáp án C ☐

Câu 72. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=(m+1)x^4-2(2m-3)x^2+6m+5$ cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt có các hoành độ x_1,x_2,x_3,x_4 thỏa mãn $x_1<x_2<x_3<1<x_4$ thỏa mãn

A $m \in \left(-1;-\dfrac{5}{6}\right)$. B $m \in (-3;-1)$. C $m \in (-3;1)$. D $m \in (-4;-1)$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số và trục hoành là

$$y=(m+1)x^4-2(2m-3)x^2+6m+5, \quad (1)$$

Đặt $t=x^2 \geq 0$ pt trở thành $y=(m+1)t^2-2(2m-3)t+6m+5, \quad (2)$ Để pt (1) có 4 nghiệm phân biệt thì pt (2) phải có 2 nghiệm dương phân biệt Hay $\begin{cases} m+1 \neq 0 \\ \Delta' > 0 \\ t_1t_2 > 0 \\ t_1 + t_2 > 0 \end{cases}$ $\begin{cases} m \neq -1 \\ (2m-3)^2 - (m+1)(6m+5) > 0 \\ \dfrac{6m+5}{m+1} \\ \dfrac{2m-3}{m+1} > 0 \end{cases}$ $\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} m \neq -1 \\ \dfrac{-23-\sqrt{561}}{4} \\ m < -1; m > -\dfrac{5}{6} \\ m < -1; m > \dfrac{3}{2} \end{cases} \quad (1)$$

Để pt (1) có 4 nghiệm thỏa mãn $x_1 < x_2 < x_3 < 1 < x_4$ thì pt (2) phải có 2 nghiệm thỏa $0 < t_1 < 1 < t_2$

$\Leftrightarrow \begin{cases} t_1 - 1 < 0 \\ t_2 - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left\{(t_1-1)(t_2-1) < 0 \right. \quad \Leftrightarrow t_1t_2 - (t_1t_2) + 1 < 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{6m+5}{m+1} - \dfrac{2(2m-3)}{m+1} + 1 < 0 \Leftrightarrow \dfrac{3m+12}{m+1} < 0 \Leftrightarrow -4 < m < -1.$

Kết hợp (1) ta có $m \in (-4; -1)$.

Chọn đáp án D □

Câu 73. Cho hàm số $y = x^4 - (3m+2)x^2 + 3m$ có đồ thị là $(\mathrm{C_m})$. Tìm m để đường thẳng $d\colon y = -1$ cắt đồ thị $(\mathrm{C_m})$ tại 4 điểm phân biệt đều có hoành độ nhỏ hơn 2.

A $= \dfrac{1}{3} < m < 1$ và $m \neq 0$. B $-\dfrac{1}{2} < m < 1$ và $m \neq 0$.

C $-\dfrac{1}{2} < m < \dfrac{1}{2}$ và $m \neq 0$. D $-\dfrac{1}{3} < m < 1$ và $m \neq 0$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của $(\mathrm{C_m})$ và đường thẳng d là $x^4 - (3m+2)x^2 + 3m + 1 = 0$ (2)

Đặt $t = x^2 \geq 0$ phương trình trở thành

$t^4 - (3m+2)t^2 + 3m + 1 = 0 \quad (2) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = 3m+1 \end{array}\right.$ Đường thẳng d cắt đồ thị $(\mathrm{C_m})$ tại 4 điểm phân biệt đều có hoành độ nhỏ hơn 2 khi và chỉ khi phương trình có hai nghiệm dương phân biệt t_1, t_2 thỏa mãn $0 < t_1 < t_2 < 4$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3m+1 \neq 1 \\ 0 < 3m+1 < 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ -\dfrac{1}{3} < m < 1. \end{cases}$$

Chọn đáp án A □

Câu 74. Tìm tất cả các giá trị thực của m để phương trình $|x^4 - 2x^2 - 3| = 2m - 1$ có đúng 6 nghiệm thực phân biệt

A $1 < m < \dfrac{3}{2}$. B $4 < m < 5$. C $3 < m < 4$. D $2 < m < \dfrac{5}{2}$.

Lời giải.

Xét hàm số $g(x) = x^4 - 2x^2 - 3$, có tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$

$g'(x) = 4x^3 - 4x$, $g'(x) = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm 1 \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-4	$\nearrow$	-3	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

Suy ra bảng biến thiên của hàm số $y = |x^4 - 2x^2 - 3|$

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		-1		0		1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
y	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	4	$\searrow$	-3	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

YCBT $\Leftrightarrow 3 < 2m - 1 < 4 \Leftrightarrow 2 < m\frac{5}{2}$

Chọn đáp án D □

BẢNG ĐÁP ÁN

1. B	**2. C**	**3. A**	**4. A**	**5. B**	**6. B**	**7. D**	**8. D**	**9. C**	**10. C**
11. B	**12. C**	**13. C**	**14. D**	**15. C**	**16. C**	**17. D**	**18. A**	**19. C**	**20. B**
21. A	**22. C**	**23. C**	**24. B**	**25. C**	**26. C**	**27. A**	**28. B**	**29. B**	**30. D**
31. C	**32. A**	**33. D**	**34. B**	**35. A**	**36. A**	**37. A**	**38. B**	**39. A**	**40. D**
41. A	**42. A**	**43. C**	**44. D**	**45. D**	**46. A**	**47. A**	**48. D**	**49. C**	**50. D**
51. C	**52. A**	**53. D**	**54. B**	**55. A**	**56. A**	**57. B**	**58. A**	**59. D**	**60. B**
61. A	**62. A**	**63. A**	**64. C**	**65. A**	**66. D**	**67. C**	**68. C**	**70. C**	**71. C**
72. D	**73. A**	**74. D**							

MỨC ĐỘ 3. MỨC ĐỘ 9,10 ĐIỂM

Dạng 1. Biện luận m để phương trình có nghiệm thỏa mãn điều kiện cho trước

Câu 1 (Mã 101 2019). Cho hai hàm số $y = \dfrac{x-3}{x-2} + \dfrac{x-2}{x-1} + \dfrac{x-1}{x} + \dfrac{x}{x+1}$ và $y = |x+2| - x + m$ (m là tham số thực) có đồ thị lần lượt là (C_1) và (C_2) . Tập hợp tất cả các giá trị của m để (C_1) và (C_2) cắt nhau tại đúng bốn điểm phân biệt là

(A) $[2;+\infty)$. (B) $(-\infty;2)$. (C) $(2;+\infty)$. (D) $(-\infty;2]$.

Lời giải.

Xét phương trình $\dfrac{x-3}{x-2}+\dfrac{x-2}{x-1}+\dfrac{x-1}{x}+\dfrac{x}{x+1}=|x+2|-x+m$

$\Leftrightarrow \dfrac{x-3}{x-2}+\dfrac{x-2}{x-1}+\dfrac{x-1}{x}+\dfrac{x}{x+1}-|x+2|+x=m$ (1)

Hàm số $p(x)=\dfrac{x-3}{x-2}+\dfrac{x-2}{x-1}+\dfrac{x-1}{x}+\dfrac{x}{x+1}-|x+2|+x$

$$=\begin{cases}\dfrac{x-3}{x-2}+\dfrac{x-2}{x-1}+\dfrac{x-1}{x}+\dfrac{x}{x+1}-2 \text{ khi } x\geq -2\\ \dfrac{x-3}{x-2}+\dfrac{x-2}{x-1}+\dfrac{x-1}{x}+\dfrac{x}{x+1}+2x+2 \text{ khi } x<-2\end{cases}.$$

Ta có $p'(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{(x-2)^2}+\dfrac{1}{(x-1)^2}+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{(x+1)^2}>0, \forall x\in(-2;+\infty)\backslash\{-1;0;1;2\}\\ \dfrac{1}{(x-2)^2}+\dfrac{1}{(x-1)^2}+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{(x+1)^2}+2>0, \forall x<-2\end{cases}$

nên hàm số $y=p(x)$ đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty;-1)$, $(-1;0)$, $(0;1)$, $(1;2)$, $(2;+\infty)$.

Mặt khác ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} p(x)=2$ và $\lim\limits_{x\to-\infty}=-\infty$.

Bảng biến thiên hàm số $y=g(x)$:

x	$-\infty$		-2		-1		0		1		2		$+\infty$
$g'(x)$		+		+	‖	+	‖	+	‖	+	‖	+	
$g(x)$	$-\infty$	↗	$\frac{49}{12}$	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	2

Do đó để (C_1) và (C_2) cắt nhau tại đúng bốn điểm phân biệt thì phương trình (1) phải có 4 nghiệm phân biệt.

Điều này xảy ra khi và chỉ khi đường thẳng $y=m$ cắt đồ thị hàm số $y=p(x)$ tại 4 điểm phân biệt $\Leftrightarrow m\geq 2$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 2 (Mã 103 2019). Cho hai hàm số $y=\dfrac{x-1}{x}+\dfrac{x}{x+1}+\dfrac{x+1}{x+2}+\dfrac{x+2}{x+3}$ và $y=|x+2|-x-m$ (m là tham số thực) có đồ thị lần lượt là $(C_1),(C_2)$. Tập hợp tất cả các giá trị của m để (C_1) và (C_2) cắt nhau tại đúng bốn điểm phân biệt là

(A) $(-2;+\infty)$. (B) $(-\infty;-2]$. (C) $[-2;+\infty)$. (D) $(-\infty;-2)$.

Lời giải.

Xét phương trình hoành độ giao điểm

$\dfrac{x-1}{x}+\dfrac{x}{x+1}+\dfrac{x+1}{x+2}+\dfrac{x+2}{x+3}=|x+2|-x-m$

$\Leftrightarrow \dfrac{x-1}{x}+\dfrac{x}{x+1}+\dfrac{x+1}{x+2}+\dfrac{x+2}{x+3}-|x+2|+x=-m(1)$

Xét $f(x)=\dfrac{x-1}{x}+\dfrac{x}{x+1}+\dfrac{x+1}{x+2}+\dfrac{x+2}{x+3}-|x+2|+x, x\in D=\mathbb{R}\backslash\{-3;-2;-1;0\}$

Ta có $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-1}{x}+\dfrac{x}{x+1}+\dfrac{x+1}{x+2}+\dfrac{x+2}{x+3}-2, x\in(-2;+\infty)\cup D=D_1\\ \dfrac{x-1}{x}+\dfrac{x}{x+1}+\dfrac{x+1}{x+2}+\dfrac{x+2}{x+3}+2x+2, x\in(-\infty;-2)\cup D=D_2\end{cases}$

Có $f'(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{(x+1)^2}+\dfrac{1}{(x+2)^2}+\dfrac{1}{(x+3)^2}, \forall x\in D_1\\ \dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{(x+1)^2}+\dfrac{1}{(x+2)^2}+\dfrac{1}{(x+3)^2}+2, \forall x\in D_2\end{cases}$

Dễ thấy $f'(x)>0,\ \forall x\in D_1\cup D_2$, ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		-3		-2		1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	||	$+$	||	$+$	||	$+$	||	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	2

Hai đồ thị cắt nhau tại đúng 4 điểm phân biện khi và chỉ khi phương trình (1) có đúng 4 nghiệm phân biệt, từ bảng biến thiên ta có: $-m\geq 2\Leftrightarrow m\leq -2$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 3 (Mã 102 2019). Cho hai hàm số $y=\dfrac{x}{x+1}+\dfrac{x+1}{x+2}+\dfrac{x+2}{x+3}+\dfrac{x+3}{x+4}$ và $y=|x+1|-x+m$ (m là tham số thực) có đồ thị lần lượt là (C_1) và (C_2) . Tập hợp tất cả các giá trị của m để (C_1) và (C_2) cắt nhau tại đúng 4 điểm phân biệt là

(A) $(-\infty;3]$. (B) $(-\infty;3)$. (C) $[3;+\infty)$. (D) $(3;+\infty)$.

Lời giải.

Điều kiện $x\neq -1; x\neq -2; x\neq -3$ và $x\neq -4$.

Ta có phương trình hoành độ giao điểm

$\dfrac{x}{x+1}+\dfrac{x+1}{x+2}+\dfrac{x+2}{x+3}+\dfrac{x+3}{x+4}=|x+1|-x+m$

$(1-\dfrac{1}{x+1})+(1-\dfrac{1}{x+2})+(1-\dfrac{1}{x+3})+(1-\dfrac{1}{x+4})=|x-1|-x+m$

$\Leftrightarrow x-|x+1|+4-(\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{1}{x+3}+\dfrac{1}{x+4})=m$

Đặt tập $D_1=(-1;+\infty)$ và $D_2=(-\infty;-4)\cup(-4;-3)\cup(-3;-2)\cup(-2;-1)$.

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3-(\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{1}{x+3}+\dfrac{1}{x+4})=m,\ \text{khi } x\in D_1\\ 2x+5-(\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{1}{x+3}+\dfrac{1}{x+4})=m,\ \text{khi } x\in D_2\end{array}\right.$

Đặt $f(x)=\begin{cases}3-(\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{1}{x+3}+\dfrac{1}{x+4}),\ \text{khi } x\in D_1\\ 2x+5-(\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{1}{x+3}+\dfrac{1}{x+4})\ \text{khi } x\in D_2\end{cases}$.

$$\Rightarrow f'(x) = \begin{cases} \left(\dfrac{1}{(x+1)^2} + \dfrac{1}{(x+2)^2} + \dfrac{1}{(x+3)^2} + \dfrac{1}{(x+4)^2}\right) > 0, \text{ khi } x \in D_1 \\ 2 + \left(\dfrac{1}{(x+1)^2} + \dfrac{1}{(x+2)^2} + \dfrac{1}{(x+3)^2} + \dfrac{1}{(x+4)^2}\right) > 0 \text{ khi } x \in D_2 \end{cases}.$$

Vậy hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 3$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ nên ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		-4		-3		-2		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	‖	$+$	‖	$+$	‖	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	3

Do đó để phương trình có 4 nghiệm phân biệt thì $m \geq 3 \Rightarrow m \in [3; +\infty)$.

Chọn đáp án C □

Câu 4 (Mã 104 2019). Cho hai hàm số $y = \dfrac{x-2}{x-1} + \dfrac{x-1}{x} + \dfrac{x}{x+1} + \dfrac{x+1}{x+2}$ và $y = |x+1| - x - m$ (m là tham số thực) có đồ thị lần lượt là (C_1) và (C_2) . Tập hợp tất cả các giá trị của m để (C_1) và (C_2) cắt nhau tại đúng bốn điểm phân biệt là

A $(-\infty; -3)$. B $[-3; +\infty)$. C $(-\infty; -3]$. D $(-3; +\infty)$.

Lời giải.

Xét phương trình hoành độ giao điểm

$$\frac{x-2}{x-1} + \frac{x-1}{x} + \frac{x}{x+1} + \frac{x+1}{x+2} = |x+1| - x - m$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-2}{x-1} + \frac{x-1}{x} + \frac{x}{x+1} + \frac{x+1}{x+2} - |x+1| + x = -m(1)$$

Số nghiệm của (1) là số giao điểm của

$$F(x) = \frac{x-2}{x-1} + \frac{x-1}{x} + \frac{x}{x+1} + \frac{x+1}{x+2} - |x+1| + x$$

$$= \begin{cases} \dfrac{x-2}{x-1} + \dfrac{x-1}{x} + \dfrac{x}{x+1} + \dfrac{x+1}{x+2} - 1, x > -1 \\ \dfrac{x-2}{x-1} + \dfrac{x-1}{x} + \dfrac{x}{x+1} + \dfrac{x+1}{x+2} + 2x + 1, x < -1 \end{cases}$$

Ta có $F'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(x-1)^2} + \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{(x+1)^2} + \dfrac{1}{(x+2)^2}, x \in (-1; +\infty)\backslash\{0; 1\} \\ \dfrac{1}{(x-1)^2} + \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{(x+1)^2} + \dfrac{1}{(x+2)^2} + 2, x \in (-\infty; -1)\backslash\{-2\} \end{cases}.$

Mặt khác $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 3$

$\lim\limits_{x\to-2^+} F(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to-2^-} F(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to-1^+} F(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to-1^-} F(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to0^+} F(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to0^-} F(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to1^+} F(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to1^-} F(x) = +\infty$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-2		-1		0		1		$+\infty$
$F'(x)$		$+$	$\|\|$	$+$	$\|\|$	$+$	$\|\|$	$+$	$\|\|$	$+$	
$F(x)$	3	$\nearrow$	$+\infty \,\|\|\, -\infty$	$\nearrow$	$+\infty \,\|\|\, -\infty$	$\nearrow$	$+\infty \,\|\|\, -\infty$	$\nearrow$	$+\infty \,\|\|\, -\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

Để phương trình có 4 nghiệm thì $-m \leq 3 \Leftrightarrow m \geq -3$.

Chọn đáp án B □

Câu 5. Cho hai hàm số $y = \dfrac{x^2-1}{x} + \dfrac{x^2-2x}{x-1} + \dfrac{x^2-4x+3}{x-2} + \dfrac{x^2-6x+8}{x-3}$ và $y = |x+2| - x + m$ (m là tham số thực) có đồ thị lần lượt là (C_1) và (C_2) . Tính tổng tất cả các giá trị nguyên thuộc khoảng $(-15; 20)$ của tham số m để (C_1) và (C_2) cắt nhau tại nhiều hơn hai điểm phân biệt.

A 210 . B 85 . C 119 . D 105 .

Lời giải.

Xét phương trình hoành độ giao điểm

$\dfrac{x^2-1}{x} + \dfrac{x^2-2x}{x-1} + \dfrac{x^2-4x+3}{x-2} + \dfrac{x^2-6x+8}{x-3} = |x+2| - x + m$

$\Leftrightarrow \dfrac{x^2-1}{x} + \dfrac{x^2-2x}{x-1} + \dfrac{x^2-4x+3}{x-2} + \dfrac{x^2-6x+8}{x-3} - |x+2| + x = m(1).$

Đặt $g(x) = \dfrac{x^2-1}{x} + \dfrac{x^2-2x}{x-1} + \dfrac{x^2-4x+3}{x-2} + \dfrac{x^2-6x+8}{x-3} - |x-2| + x$.

Ta có $g'(x) = 4 + \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{(x-1)^2} + \dfrac{1}{(x-2)^2} + \dfrac{1}{(x-3)^2} + \dfrac{|x-2| - (x-2)}{|x-2|} > 0$ với mọi x thuộc các khoảng sau $(-\infty; 0)$, $(0; 1)$, $(1; 2)$, $(2; 3)$ và $(3; +\infty)$ nên hàm số $y = g(x)$ đồng biến trên mỗi khoảng đó.

Mặt khác ta có $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$

Bảng biến thiên hàm số $y = g(x)$

x	$-\infty$		0		1		2		3		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	$\|\|$	$+$	$\|\|$	$+$	$\|\|$	$+$	$\|\|$	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty \,\|\|\, -\infty$	$\nearrow$	$+\infty \,\|\|\, -\infty$	$\nearrow$	$+\infty \,\|\|\, -\infty$	$\nearrow$	$+\infty \,\|\|\, -\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy đường thẳng $y = m$ luôn cắt đồ thị hàm số $y = g(x)$ tại năm điểm phân biệt nên (C_1) và (C_2) luôn cắt nhau tại đúng năm điểm phân biệt với mọi giá trị của m .

Kết hợp điều kiện m nguyên thuộc $(-15; 20)$ nên $m \in \{-14; -13; \cdots; 18; 19\}$. Khi đó tổng tất cả các giá trị m là $S = 15 + 16 + 17 + 18 + 19 = 85$.

Chọn đáp án B □

Câu 6. Cho hai hàm số $y = \dfrac{x}{x-1} + \dfrac{x+1}{x} + \dfrac{x+2}{x+1}$ và $y = e^x + 2020 + 3m$ (m là tham số thực) có đồ thị lần lượt là (C_1) và (C_2) . Có bao nhiêu số nguyên m thuộc $(-2019; 2020)$ để (C_1) và (C_2) cắt nhau tại 3 điểm phân biệt?

A 2692 . B 2691 . C 2690 . D 2693 .

Lời giải.

Xét phương trình hoành độ giao điểm $\dfrac{x}{x-1} + \dfrac{x+1}{x} + \dfrac{x+2}{x+1} = e^x + 2020 + 3m$

$\Leftrightarrow \dfrac{x}{x-1} + \dfrac{x+1}{x} + \dfrac{x+2}{x+1} - e^x - 2020 = 3m$ (1).

Đặt $g(x) = \dfrac{x}{x-1} + \dfrac{x+1}{x} + \dfrac{x+2}{x+1} - e^x - 2020$.

Ta có $g'(x) = -\dfrac{1}{(x-1)^2} - \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{(x+1)^2} - e^x < 0$ với mọi x thuộc các khoảng sau $(-\infty; -1)$, $(-1; 0)$, $(0; 1)$ và $(1; +\infty)$ nên hàm số $y = g(x)$ nghịch biến trên mỗi khoảng đó.

Mặt khác ta có $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = -2017$; $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$

Bảng biến thiên hàm số $y = g(x)$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	||	$-$	||	$-$	||	$-$	
$g(x)$	-2007		|| $+\infty$		|| $+\infty$		|| $+\infty$		
			$-\infty$ ||		$-\infty$ ||		$-\infty$ ||		$-\infty$

Do đó để (C_1) và (C_2) cắt nhau tại đúng ba điểm phân biệt thì phương trình (1) phải có ba nghiệm phân biệt. Điều này xảy ra khi và chỉ khi đường thẳng $y = 3m$ cắt đồ thị hàm số $y = g(x)$ tại ba điểm phân biệt khi và chỉ khi $3m \geq -2017 \Leftrightarrow m \geq -\dfrac{2017}{3} \approx -672{,}3$.

Do m nguyên thuộc $(-2019; 2020)$ nên $m \in \{-672; -671; \cdots; 2019\}$.

Vậy có tất cả 2692 giá trị m thỏa mãn.

Chọn đáp án A □

Câu 7. Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hai hàm số $y = (2x^2+1)\sqrt{x-1}$ và $y = \dfrac{11}{3x-4} - \dfrac{1}{2-x} + 11 + m$ cắt nhau tại 2 điểm phân biệt?

A $(-\infty; 0)$. B $(-\infty; 1)$. C $(-\infty; 1]$. D $(-\infty; 2]$.

Lời giải.

Xét phương trình hoành độ giao điểm: $(2x^2+1)\sqrt{x-1} = \dfrac{11}{3x-4} - \dfrac{1}{2-x} + 11 + m$ (*) Điều kiện:

$$\begin{cases} x-1\geq 0 \\ x\neq \dfrac{4}{3} \\ x\neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 1 \\ x\neq \dfrac{4}{3} \\ x\neq 2 \end{cases}$$

Ta có:

$(*) \Leftrightarrow (2x^2+1)\sqrt{x-1} - \dfrac{11}{3x-4} + \dfrac{1}{2-x} - 11 = m$

Xét hàm số $f(x) = (2x^2+1)\sqrt{x-1} - \dfrac{11}{3x-4} + \dfrac{1}{2-x} - 11$ trên $[1;+\infty)\backslash\left\{\dfrac{4}{3};2\right\}$

Nhận thấy, hàm số $f(x)$ liên tục trên các khoảng $\left[1;\dfrac{4}{3}\right), \left(\dfrac{4}{3};2\right), (2;+\infty)$

Ta có, $f'(x) = \left[(2x^2+1)\sqrt{x-1} - \dfrac{11}{3x-4} + \dfrac{1}{2-x} - 11\right]'$

$= 4x\sqrt{x-1} + (2x^2+1)\dfrac{1}{2\sqrt{x-1}} + \dfrac{33}{(3x-4)^2} + \dfrac{1}{(2-x)^2}$

$= \dfrac{10x^2-8x+1}{2\sqrt{x-1}} + \dfrac{33}{(3x-4)^2} + \dfrac{1}{(2-x)^2} > 0$ với $\forall x\in[1;+\infty)\backslash\left\{\dfrac{4}{3};2\right\}$

Suy ra, hàm số $f(x)$ đồng biến trên $[1;+\infty)\backslash\left\{\dfrac{4}{3};2\right\}$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$\frac{4}{3}$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	||	$+$	||	$+$	
$f(x)$	-1	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta suy ra đồ thị hai hàm số $y = (2x^2+1)\sqrt{x-1}$ và $y = \dfrac{11}{3x-4} - \dfrac{1}{2-x} + 11 + m$ cắt nhau tại 2 điểm phân biệt khi $m\in(-\infty;1]$.

Chọn đáp án C □

Câu 8. Cho hai hàm số $y = \dfrac{x-1}{x} + \dfrac{x}{x+1} + \dfrac{x+1}{x+2} + \dfrac{x+2}{x+3}$ và $y = 2^{1-x} + 2m$ (là tham số thực) có đồ thị lần lượt là (C_1) và (C_2) . Tập hợp tất cả các giá trị của để (C_1) và (C_2) cắt nhau tại đúng năm điểm phân biệt là

A $(2;+\infty)$. B $(-\infty;2]$. C $(-\infty;2)$. D $(-\infty;4)$.

Lời giải.

Xét phương trình hoành độ giao điểm $\dfrac{x-1}{x} + \dfrac{x}{x+1} + \dfrac{x+1}{x+2} + \dfrac{x+2}{x+3} = 2^{1-x} + 2m$

$\Leftrightarrow \dfrac{x}{x+1} + \dfrac{x+1}{x+2} + \dfrac{x+2}{x+3} + \dfrac{x+3}{x+4} - 2^{1-x} = 2m$.

Đặt $g(x) = \dfrac{x}{x+1} + \dfrac{x+1}{x+2} + \dfrac{x+2}{x+3} + \dfrac{x+3}{x+4} - 2^{1-x}$.

Ta có $g'(x) = \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{(x+1)^2} + \dfrac{1}{(x+2)^2} + \dfrac{1}{(x+3)^2} + 2^{1-x}\ln 2 > 0$

với mọi x thuộc các khoảng sau $(-\infty;-3)$, $(-3;-2)$ $(-2;-1)$, $(-1;0)$ và $(0;+\infty)$ nên hàm số $y=g(x)$ đồng biến trên mỗi khoảng đó.

Mặt khác ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=4;\ \lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=-\infty$

Bảng biến thiên hàm số $y=g(x)$

x	$-\infty$		-3		-2		-1		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	||	$+$	||	$+$	||	$+$	||	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	4

Do đó để và cắt nhau tại đúng năm điểm phân biệt thì phương trình (1) phải có 5 nghiệm phân biệt. Điều này xảy ra khi và chỉ khi đường thẳng $y=2m$ cắt đồ thị hàm số $y=g(x)$ tại 5 điểm phân biệt khi và chỉ khi $2m<4 \Leftrightarrow m<2$.

Chọn đáp án C □

Câu 9. Cho hai hàm số $y=\dfrac{x}{x^2-1}+\dfrac{x-1}{x^2-2x}+\dfrac{x-2}{x^2-4x+3}$ và $y=x-|x+1|+m$ (là tham số thực) có đồ thị lần lượt là (C_1) và (C_2) . Số các giá trị m nguyên thuộc khoảng $(-20;20)$ để (C_1) và (C_2) cắt nhau tại năm điểm phân biệt là

(A) 22 . (B) 39 . (C) 21 . (D) 20 .

Lời giải.

Xét phương trình hoành độ giao điểm $\dfrac{x}{x^2-1}+\dfrac{x-1}{x^2-2x}+\dfrac{x-2}{x^2-4x+3}=x-|x+1|+m$

$\Leftrightarrow \dfrac{x}{x^2-1}+\dfrac{x-1}{x^2-2x}+\dfrac{x-2}{x^2-4x+3}-x+|x+1|=m(1)$.

Đặt $g(x)=\dfrac{x}{x^2-1}+\dfrac{x-1}{x^2-2x}+\dfrac{x-2}{x^2-4x+3}-x+|x+1|$.

Ta có $g'(x)=\dfrac{-x^2-1}{(x^2-1)^2}+\dfrac{-x^2+2x-2}{(x^2-2x)^2}+\dfrac{-x^2+4x-5}{(x^2-4x+3)^2}-1+\dfrac{x+1}{|x+1|}$

$=\dfrac{-x^2-1}{(x^2-1)^2}+\dfrac{-(x-1)^2-1}{(x^2-2x)^2}+\dfrac{-(x-2)^2-1}{(x^2-4x+3)^2}+\dfrac{x+1-|x+1|}{|x+1|}<0$

với mọi x thuộc các khoảng sau $(-\infty;-1)$, $(-1;0)$, $(0;1)$, $(1;2)$, $(2;3)$ và $(3;+\infty)$ nên hàm số $y=g(x)$ nghịch biến trên mỗi khoảng đó.

Mặt khác ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=1;\ \lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=+\infty$.

Bảng biến thiên hàm số $y=g(x)$

x	$-\infty$		-1		0		1		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\|$	$-$	$\|$	$-$	$\|$	$-$	$\|$	$-$	$\|$	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty \,\|\, +\infty$	$\searrow$	$-\infty \,\|\, +\infty$	$\searrow$	$-\infty \,\|\, +\infty$	$\searrow$	$-\infty \,\|\, +\infty$	$\searrow$	$-\infty \,\|\, +\infty$	$\searrow$	1

Do đó để (C_1) và (C_2) cắt nhau tại đúng năm điểm phân biệt thì phương trình (1) phải có năm nghiệm phân biệt.

Điều này xảy ra khi và chỉ khi đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị hàm số $y = g(x)$ tại năm điểm phân biệt khi $m \leq 1$, do m nguyên thuộc $(-20; 20)$ nên $m \in \{-19; -18; \cdots ; 0; 1\}$. Vậy có tất cả 21 giá trị m thỏa mãn.

Chọn đáp án (C) □

Câu 10. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình $m^2x^4 - (m+2)x^3 + x^2 + (m^2-1)x \geq 0$ nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$. Số phần tử của tập S là

(A) 3 . (B) 2 . (C) 0 . (D) 1 .

Lời giải.

Đặt $f(x) = m^2x^4 - (m+2)x^3 + x^2 + (m^2-1)x$

Ta có $f(x) = m^2x^4 - (m+2)x^3 + x^2 + (m^2-1)x = x[m^2x^3 - (m+2)x^2 + x + (m^2-1)]$. Giả sử $x = 0$ không phải là nghiệm của phương trình $g(x) = m^2x^3 - (m+2)x^2 + x + (m^2-1) = 0$ thì hàm số $f(x) = m^2x^4 - (m+2)x^3 + x^2 + (m^2-1)x$ sẽ đổi dấu khi qua điểm $x = 0$, nghĩa là $m^2x^4 - (m+2)x^3 + x^2 + (m^2-1)x \geq 0$ không có nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Do đó, để yêu cầu bài toán được thỏa mãn thì một điều kiện cần là $g(x) = m^2x^3 - (m+2)x^2 + x + (m^2-1) = 0$ phải có nghiệm $x = 0$, suy ra $m^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow m = \pm 1$

Điều kiện đủ:

Với $m = 1, f(x) = x^4 - 3x^3 + x^2 = x^2(x^2 - 3x + 1)$ khi đó $f(1) = -1 < 0$ không thỏa mãn điều kiện $m^2x^4 - (m+2)x^3 + x^2 + (m^2-1)x \geq 0$ nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$. (loại)

Với $m = 1, f(x) = x^4 - x^3 + x^2 = x^2(x^2 - x + 1) \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$.

Vậy $S = \{-1\}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 11. Có bao nhiêu cặp số thực $(a; b)$ để bất phương trình $(x-1)(x+2)(ax^2 + bx + 2) \geq 0$ nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$

(A) 3 . (B) 2 . (C) 0 . (D) 1 .

Lời giải.

Đặt $f(x) = (x-1)(x+2)(ax^2 + bx + 2)$

Giả sử $x = 1$ không phải là nghiệm của phương trình $g(x) = (x+2)(ax^2 + bx + 2) = 0$ thì hàm số

$f(x)=(x-1)(x+2)(ax^2+bx+2)$ sẽ đổi dấu khi qua điểm $x=1$, nghĩa là $(x-1)(x+2)(ax^2+bx+2)\geq 0$ không có nghiệm đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$.

Do đó, để yêu cầu bài toán được thỏa mãn thì một điều kiện cần là $g(x)=(x+2)(ax^2+bx+2)=0$ có nghiệm $x=1$ suy ra $a+b+2=0$ (1)

Lí luận tương tự có $h(x)=(x-1)(ax^2+bx+2)=0$ cũng phải nhận $x=-2$ là nghiệm, suy ra $4a-2b+2=0$ (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ $\begin{cases}a+b+2=0\\4a-2b+2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-1\\b=-1\end{cases}$

Điều kiện đủ:

Với $\begin{cases}a=-1\\b=-1\end{cases}$ có $f(x)=(x-1)(x+2)(-x^2-x+2)=-(x-1)^2(x+2)^2\leq 0, x\in\mathbb{R}$.

Vậy không tồn tại cặp số thực $(a;b)$ nào thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án C □

Câu 12. Trong số các cặp số thực $(a;b)$ để bất phương trình $(x-1)(x-a)(x^2+x+b)\geq 0$ nghiệm đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$, tích ab nhỏ nhất bằng

A $-\dfrac{1}{4}$. B -1 . C $\dfrac{1}{4}$. D 1 .

Lời giải.

Đặt $f(x)=(x-1)(x-a)(x^2+x+b)$ và $g(x)=(x-a)(x^2+x+b)$

Giả sử $x=1$ không phải là nghiệm của phương trình $g(x)=(x-a)(x^2+x+b)=0$ thì hàm số $f(x)=(x-1)(x-a)(x^2+x+b)$ sẽ đổi dấu khi qua điểm $x=1$, nghĩa $(x-1)(x-a)(x^2+x+b)\geq 0$ không có nghiệm đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$.

Do đó yêu cầu bài toán được thỏa mãn thì một điều kiện cần là $g(x)=(x-a)(x^2+x+b)=0$ có nghiệm $x=1$ suy ra hoặc $\begin{cases}a=1\\x^2+x+b\geq 0,\forall x\in\mathbb{R}\end{cases}$ hoặc là phương trình $x^2+x+b=0$ có hai nghiệm $x=1$ và $x=a$

Trường hợp 1: $\begin{cases}a=1\\x^2+x+b\geq 0,\forall x\in R\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\1>0\\\Delta=1-4b\leq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\b\geq\dfrac{1}{4}\end{cases}$

Trường hợp 2: phương trình $x^2+x+b=0$ có hai nghiệm $x=1$ và $x=a$

Ta thay $x=1$ vào phương trình $x^2+x+b=0$ có $1^2+1+b=0\Rightarrow b=-2$. Với $b=-2$ có phương trình $x^2+x+b=0\Leftrightarrow x^2+x-2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-2\end{array}\right.$

Vì $x=a$ cũng là nghiệm của phương trình nên $a=-2$.

☑ Trong trường hợp 1: $\begin{cases} a = 1 \\ b \geq \dfrac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow ab \geq \dfrac{1}{4}$ suy ra tích ab nhỏ nhất khi $ab = \dfrac{1}{4}$

Và với $a = 1, b = \dfrac{1}{4}$, tích $ab = \dfrac{1}{4}$ thì bất phương trình đã cho tương đương với

$(x-1)(x-1)(x^2+x+\dfrac{1}{4}) \geq 0 \Leftrightarrow (x-1)^2(x+\dfrac{1}{2})^2 \geq 0; \forall x \in \mathbb{R}(n)$

☑ Trong trường hợp 2: Tích $ab = 4 > \dfrac{1}{4}$

Vậy tích ab nhỏ nhất khi $ab = \dfrac{1}{4}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 13. Cho 2 hàm số $y = x^7 + x^5 + x^3 + 3m - 1$ và $y = |x-2| - x - 2m$ (m là tham số thực) có đồ thị lần lượt là (C_1) , (C_2) . Tập hợp tất cả các giá trị của m để (C_1) cắt (C_2) là

(A) $m \in \mathbb{R}$. (B) $m \in (2; +\infty)$. (C) $m \in (-\infty; 2)$. (D) $m \in [2; +\infty)$.

Lời giải.

Xét phương trình hoành độ giao điểm:

$x^7 + x^5 + x^3 + 3m - 1 = |x-2| - x - 2m \Leftrightarrow x^7 + x^5 + x^3 - |x-2| + x = -5m + 1(1)$.

Xét hàm số $f(x) = x^7 + x^5 + x^3 - |x-2| + x$.

Ta có $f(x) = \begin{cases} x^7 + x^5 + x^3 + 2 \text{ khi } x \in [2; +\infty) \\ x^7 + x^5 + x^3 + 2x - 2 \text{ khi } x \in (-\infty; 2) \end{cases}$.

$f'(x) = \begin{cases} 7x^6 + 5x^4 + 3x^2 > 0 \text{ khi } x \in (2; +\infty) \\ 7x^6 + 5x^4 + 3x^2 + 2 > 0 \text{ khi } x \in (-\infty; 2) \end{cases}$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty; \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$f(2)$	↗	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta thấy phương trình (1) luôn có nghiệm với mọi $m \in \mathbb{R}$ .Vậy để (C_1) cắt (C_2) thì $m \in \mathbb{R}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 14. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số thực m thuộc đoạn $[-2019; 2019]$ để phương trình $\sqrt{3+x}\left(2\sqrt{3+x} - m\right) + \sqrt{1-x}\left(5\sqrt{1-x} + 2m\right) = 4\sqrt{-x^2 - 2x + 3}$ có nghiệm thực?

Ⓐ 2019 . Ⓑ 4032 . Ⓒ 4039 . Ⓓ 4033 .

Lời giải.

Đk: $x \in [-3; 1]$.

Phương trình đã cho $\Leftrightarrow 11 - 3x - 4\sqrt{(3+x)(1-x)} + m\left(2\sqrt{1-x} - \sqrt{3+x}\right) = 0$. (*)

Đặt $t = 2\sqrt{1-x} - \sqrt{3+x} = g(x)$, với $x \in [-3; 1] \Rightarrow 11 - 3x - 4\sqrt{(3+x)(1-x)} = t^2 + 4$.

Có $g'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x}} - \dfrac{1}{2\sqrt{3+x}} < 0, \forall x \in (-3; 1)$. Suy ra $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-3; 1)$.

$\Rightarrow \min\limits_{[-3;1]} g(x) = g(1) = -2; \max\limits_{[-3;1]} g(x) = g(-3) = 4 \Rightarrow t \in [-2; 4]$.

Từ (*) $\Rightarrow t^2 + mt + 4 = 0$.

- Nếu $t = 0 \Rightarrow 0 + 4 = 0$ (vô lí).

- Nếu $t \in [-2; 4] \backslash \{0\}$, ta có $m = \dfrac{-t^2 - 4}{t} = -t - \dfrac{4}{t} = f(t)$.

  Có $f'(t) = \dfrac{4 - t^2}{t^2}, f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \pm 2$.

  Bảng biến thiên

t	-2		0		2		4
$f'(t)$	0	$+$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
$f(t)$	4	$\nearrow$	$+\infty \Vert -\infty$	$\nearrow$	-4	$\searrow$	-5

  Từ bảng biến thiên, suy ra phương trình có nghiệm thực khi và chỉ khi $\left[\begin{array}{l} m \geq 4 \\ m \leq -4 \end{array}\right.$.

Do đó $\begin{cases} m \in [-2019; 2019] \\ \left[\begin{array}{l} m \geq 4 \\ m \leq -4 \end{array}\right. \\ m \in \mathbb{Z} \end{cases}$

$\Rightarrow m \in \{-2019; -2018; \cdots; -4; 4; \cdots; 2018; 2019\}$.

Vậy có $(2019 - 4 + 1) \cdots 2 = 4032$ giá trị nguyên của tham số thực m .

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 15. (Chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm - Quảng Nam - 2020) Tập hợp tất cả các số thực của tham số m để phương trình $x^6 + 6x^4 - m^3x^3 + (15 - 3m^2)x^2 - 6mx + 10 = 0$ có đúng hai nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[\frac{1}{2}; 2]$ là:

(A) $2 < m \leq \frac{5}{2}$. (B) $\frac{7}{5} \leq m < 3$. (C) $\frac{11}{5} < m < 4$. (D) $0 < m < \frac{9}{4}$.

Lời giải.

Ta có:
$x^6 + 6x^4 - m^3x^3 + (15 - 3m^2)x^2 - 6mx + 10 = 0$

$\Leftrightarrow (x^2 + 2)^3 + 3(x^2 + 2) = (mx + 1)^3 + 3(mx + 1)$

$\Leftrightarrow f(x^2 + 2) = f(mx + 1)(*)$

Với $f(t) = t^3 + 3t$. Do $f'(t) = 3t^2 + 3 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$

Hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Nên $(*) \Leftrightarrow x^2 + 2 = mx + 1$

$\Leftrightarrow x^2 - mx + 1 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{x^2 + 1}{x}$.

Xét hàm số $g(x) = \frac{x^2 + 1}{x}$ trên $[\frac{1}{2}; 2]$

Ta có: $g'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} \Rightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Bảng biến thiên.

x	$\frac{1}{2}$		1		2
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$\frac{5}{2}$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$\frac{5}{2}$

Dựa vào bảng biến thiên suy ra phương trình đã cho có đúng hai nghiệm phân biệt thuộc $\left[\frac{1}{2}; 2\right]$ khi và chỉ khi $2 < m \leq \frac{5}{2}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 16. (Chuyên Hùng Vương - Phú Thọ - 2020) Có bao nhiêu m nguyên dương để hai đường cong $(C_1) : y = \left|2 + \frac{2}{x - 10}\right|$ và $(C_2) : y = \sqrt{4x - m}$ cắt nhau tại ba điểm phân biệt có hoành độ dương?

(A) 35. (B) 37. (C) 36. (D) 34.

Lời giải.

Điều kiện: $\begin{cases} x \neq 10 \\ x \geq \frac{m}{4} \end{cases}$.

Xét trên $(0; +\infty)\backslash\{10\}$, phương trình hoành độ giao điểm của (C_1) và (C_2) là

$\left|2 + \frac{2}{x - 10}\right| = \sqrt{4x - m} \Leftrightarrow m = 4x - \left(\frac{2x - 18}{x - 10}\right)^2$.

Đặt $g(x) = 4x - (\frac{2x - 18}{x - 10})^2$ với $x \in (0; +\infty)\backslash\{10\}$.

Ta có: $g'(x) = 4(1 + \frac{2x - 18}{(x - 10)}^3)$; $g''(x) = \frac{-4x + 34}{(x - 10)^4}$.

$g'(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	0		$\frac{17}{2}$		10		$+\infty$
$g''(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	
$g'(x)$	4.072	$\nearrow$		$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	0

Suy ra phương trình $g'(x) = 0$ có một nghiệm duy nhất $\alpha \in \left(\frac{17}{2}; 10\right)$. Lại có $g'(9,22) > 0$ nên $\alpha \in (9,22; 10)$. Ta có bảng biến thiên của $g(x)$ trên $(0; +\infty) \backslash \{10\}$:

x	0		9		α		10		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	|	$+$	0	$-$	‖	$+$	
$g(x)$	$-\frac{81}{25}$	$\nearrow$	36	$\nearrow$	$g(\alpha)$	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

Từ đó suy ra phương trình $m = g(x)$ có 3 nghiệm dương phân biệt khi và chỉ khi $\frac{-81}{25} < m < g(\alpha)$.

Trên khoảng $(9,22; 10)$ thì $\begin{cases} 4x < 40 \\ 3 < (\frac{2x-18}{x-10})^2 \end{cases}$ nên $g(x) < 37 \Rightarrow g(\alpha) \in (36; 37)$.

Vậy những giá trị m nguyên dương thỏa mãn yêu cầu bài toán là $1; 2; 3; \cdots; 36$ hay có 36 giá trị của m cần tìm.

Chọn đáp án C □

Câu 17 (Chuyên Phan Bội Châu - Nghệ An - 2020).

Cho hàm số $f(x) = (x-1)(x-2)\cdots(x-2020)$ Có bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc đoạn $[-2020; 2020]$ để phương trình $f'(x) = mf(x)$ có 2020 nghiệm phân biệt?

(A) 2020. (B) 4040. (C) 4041. (D) 2020.

Lời giải.

Ta có nhận xét: khi $f(x) = 0$ thì phương trình $f'(x) = mf(x)$ vô nghiệm.

Do đó: $f'(x) = mf(x) \Leftrightarrow m = \frac{f'(x)}{f(x)}$

Xét hàm số $g(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-3} + \cdots + \frac{1}{x-2020}$.

Ta có $g'(x) = \frac{-1}{(x-1)^2} + \frac{-1}{(x-2)^2} + \frac{-1}{(x-3)^2} + \cdots + \frac{-1}{(x-2020)^2} < 0, \forall x \in \mathbb{R} \backslash \{1; 2; 3 \cdots; 2020\}$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		1		2		3		$\cdots$		2020		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	||	$-$	||	$-$	||		$\cdots$		||	$-$	
$g(x)$	0	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	$-\infty$ ||		$\cdots$		|| $+\infty$	$\searrow$	0

Dựa vào BBT, phương trình $f'(x) = mf(x)$ có 2020 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $m > 0$ hoặc $m < 0$.

Kết hợp với điều kiện m là số nguyên thuộc $[-2020; 2020]$ nên $m \in \{-2020; -2019; \cdots; -1; 1; 2; \cdots; 2020\}$

Vậy có tất cả 4040 giá trị m thỏa yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án B □

Câu 18 (ĐHQG Hà Nội - 2020). Cho phương trình $4\cos^3 x - 12\cos^2 x - 33\cos x = 4m + 3\sqrt[3]{3\cos^2 x + 9\cos}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình có nghiệm duy nhất thuộc $[0; \frac{2\pi}{3}]$.

A 15 . B 16 . C 17 . D 18 .

Lời giải.

Đặt $t = \cos x$ với $x \in [0; \frac{2\pi}{3}] \Rightarrow t \in [-\frac{1}{2}; 1]$, với mỗi $t \in \left[-\frac{1}{2}; 1\right]$ chỉ có một $x \in \left[0; \frac{2\pi}{3}\right]$

Ta có $4t^3 - 12t^2 - 33t = 4m + 3\sqrt[3]{3t^2 + 9t + m}(1)$.

Bài toán trở thành tìm m để phương trình (1) có nghiệm duy nhất $t \in [-\frac{1}{2}; 1]$

Đặt $u = \sqrt[3]{3t^2 + 9t + m} \Rightarrow \begin{cases} 4t^3 - 12t^2 - 33t = 4m + 3u \\ u^3 = 3t^2 + 9t + m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4t^3 = 12t^2 + 33t + 4m + 3u \\ 4u^3 = 12t^2 + 36t + 4m \end{cases}$

$\Rightarrow 4t^3 - 4u^3 = 3u - 3t \Leftrightarrow (t-u)(4t^2 + 4ut + 4u^2 + 3) = 0 \Leftrightarrow u = t$ vì $4t^2 + 4ut + 4u^2 + 3 > 0$

Ta tìm m để phương trình $m = t^3 - 3t^2 - 9t$ có nghiệm duy $t \in [-\frac{1}{2}; 1]$

Xét $g(t) = t^3 - 3t^2 - 9t \Rightarrow g'(t) = 3t^2 - 6t - 9 \Rightarrow g'(t) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1(l) \\ t = 3(l) \end{array}\right.$

Vậy $g(1) \leq m \leq g(-\frac{1}{2}) \Leftrightarrow -11 \leq m \leq \frac{29}{8}$. Vậy có 15 giá trị nguyên của m .

Chọn đáp án A □

Câu 19. (Sở Ninh Bình 2020) Cho hai hàm số $y = \ln\left|\frac{x-2}{x}\right|$ và $y = \frac{3}{x-2} - \frac{1}{x} + 4m - 2020$, Tổng tất các các giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hai hàm số cắt nhau tại một điểm duy nhất là

A 506 . B 1011 . C 2020 . D 1010 .

Lời giải.

☑ Phương trình hoành độ điểm chung của hai đồ thị hàm số là $\ln\left|\frac{x-2}{x}\right| = \frac{3}{x-2} - \frac{1}{x} + 4m - 2020 \Leftrightarrow \ln\left|\frac{x-2}{x}\right| - \frac{3}{x-2} + \frac{1}{x} = 4m - 2020(*)$

Đồ thị của hai hàm số đã cho cắt nhau tại một điểm duy nhất khi và chỉ khi (*) có duy nhất một nghiệm.

☑ Xét hàm số $y=\ln\left|\dfrac{x-2}{x}\right|-\dfrac{3}{x-2}+\dfrac{1}{x}=\begin{cases} g_1(x)=\ln(x-2)-\ln x-\dfrac{3}{x-2}+\dfrac{1}{x} \text{ khi } x>2\\ g_2(x)=\ln(2-x)-\ln x-\dfrac{3}{x-2}+\dfrac{1}{x} \text{ khi } 0<x<2\\ g_3(x)=\ln(2-x)-\ln(-x)-\dfrac{3}{x-2}+\dfrac{1}{x} \text{ khi } x<0\end{cases}$

Ta có $\begin{cases} g_1'(x)=\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{x}+\dfrac{3}{(x-2)^2}-\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{4(x^2-1)}{x^2(x-2)^2} \text{ khi } x>2\\ g_2'(x)=\dfrac{-1}{2-x}-\dfrac{1}{x}+\dfrac{3}{(x-2)^2}-\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{4(x^2-1)}{x^2(x-2)^2} \text{ khi } 0<x<2\\ g_3'(x)=\dfrac{-1}{2-x}-\dfrac{1}{x}+\dfrac{3}{(x-2)^2}-\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{4(x^2-1)}{x^2(x-2)^2} \text{ khi } x<0\end{cases}$

Do vậy $y=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\ x=1\end{array}\right.$

bảng biến thiên hàm số như sau

x	$-\infty$		-1		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	‖	$+$	
$f(x)$	0	↗	$\ln 3$	↘ $-\infty$	‖ $+\infty$	↘	4	↗ $+\infty$	‖ $-\infty$	↗	0

☑ Qua bảng biến thiên này ta có (*) có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi
$\left[\begin{array}{l}4m-2020=4\\ 4m-2020=\ln 3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=506\in\mathbb{Z}\\ m=\dfrac{2020+\ln 3}{4}\notin\mathbb{Z}\end{array}\right.$

☑ Từ đây yêu cầu bài toán xảy ra khi và chỉ khi $m=506$.

Chọn đáp án A □

Câu 20. Đặng Thúc Hứa - Nghệ An - 2020 Cho hai hàm số $y=(x+1)(2x+1)(3x+1)(m+2|x|)$; $y=-12x^4-22x^3-x^2+10x+3$ có đồ thị lần lượt là (C_1) , (C_2) . Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m trên đoạn $[-2020;2020]$ để (C_1) cắt (C_2) tại 3 điểm phân biệt?

A 4040 . B 2020 . C 2021 . D 4041 .

Lời giải.

Xét phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị (C_1) và (C_2) :

$(x+1)(2x+1)(3x+1)(m+2|x|) = -12x^4 - 22x^3 - x^2 + 10x + 3 (1)$

Để đồ thị (C_1) cắt (C_2) tại 3 điểm phân biệt thì phương trình (1) có 3 nghiệm phân biệt.

- Với $x \in \left\{-1; -\frac{1}{2}; -\frac{1}{3}\right\}$: Không là nghiệm của phương trình (1).

- Với $x \notin \left\{-1; -\frac{1}{2}; -\frac{1}{3}\right\}$ ta có:

  $(1) \Leftrightarrow m = \dfrac{-12x^4 - 22x^3 - x^2 + 10x + 3}{(x+1)(2x+1)(3x+1)} - 2|x| \Leftrightarrow m = -2x - 2|x| + \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{2x+1} + \dfrac{1}{3x+1}$

  .

  Xét hàm số $f(x) = -2x - 2|x| + \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{2x+1} + \dfrac{1}{3x+1}$, $\forall x \in \mathbb{R} \backslash \left\{-1; -\frac{1}{2}; -\frac{1}{3}\right\}$.

  Suy ra: $f'(x) = -2 - \dfrac{2x}{\sqrt{x^2}} - \dfrac{1}{(x+1)^2} - \dfrac{2}{(2x+1)^2} - \dfrac{3}{(3x+1)^2}$.

  Ta có: $f'(x) = \begin{cases} -4 - \dfrac{1}{(x+1)^2} - \dfrac{2}{(2x+1)^2} - \dfrac{3}{(3x+1)^2} & \text{khi } x \in (0; +\infty) \\ -\dfrac{1}{(x+1)^2} - \dfrac{2}{(2x+1)^2} - \dfrac{3}{(3x+1)^2} & \text{khi } x \in (-\infty; 0) \backslash \left\{-1; -\frac{1}{2}; -\frac{1}{3}\right\} \end{cases}$

  và $f'(x)$ không xác định tại $x = 0$.

  Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		$\frac{-1}{2}$		$\frac{-1}{3}$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	‖	$-$	‖	$-$	‖	$-$	
$f(x)$	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$		↘		$-\infty$

  Dựa vào bảng biến thiên ta thấy để phương trình (1) có 3 nghiệm phân biệt thì $m \geq 0$. Do đó có 2021 giá trị nguyên của tham số m .

Chọn đáp án C

Câu 21 (Hậu Lộc 2 - Thanh Hóa - 2020).

Cho hàm số $y = \dfrac{(x^2 - 2x + m)^2 - 3x - m}{x - 3} (C)$ và đường thẳng $(d): y = 2x$ (là tham số thực). Số giá trị nguyên của $m \in [-15; 15]$ để đường thẳng (d) cắt đồ thị (C) tại bốn điểm phân biệt là

(A) 15 . (B) 30 . (C) 16 . (D) 17 .

Lời giải.

Xét pt hoành độ giao điểm của hai đồ thị:
$\dfrac{(x^2-2x+m)^2-3x-m}{x-3}=2x \Leftrightarrow (x^2-2x+m)^2-3x-m=2x^2-6x; (x\neq 3)$
$\Leftrightarrow (x^2-2x+m)^2=2x^2-3x+m(x\neq 3)(*)$
Đặt: $x^2-2x+m=t$ ta được hệ: $\begin{cases} x^2-2x+m=t \\ t^2=2x^2-3x+m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-2x-t+m=0 \\ 2x^2-t^2-3x+m=0 \end{cases}$
$\Rightarrow x^2-t^2-x+t=0 \Rightarrow (x-t)(x+t-1)=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t=x \\ t=1-x \end{array}\right.$
Suy ra: $\left[\begin{array}{l} x^2-2x+m=x \\ x^2-2x+m=1-x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-3x+m=0(1) \\ x^2-x+m-1=0(2) \end{array}\right.$
YCBT $\Leftrightarrow (*)$ phải có 4 nghiệm phân biệt khác 3 $\Leftrightarrow (1),(2)$ đều phải có hai nghiệm pb khác 3 và các nghiệm của chúng không trùng nhau.

$(1),(2)$ đều có hai nghiệm phân biệt khác 3 khi: $\begin{cases} 9-4m>0 \\ 3^3-3.3+m\neq 0 \\ 1-4(m-1)>0 \quad 3^2-3+m-1\neq 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m<\dfrac{9}{4} \\ m\neq 0 \\ m<\dfrac{5}{4} \\ m\neq -5 \end{cases}$
$\Leftrightarrow \begin{cases} m<1,25 \\ m\neq 0 \qquad (**) \\ m\neq -5 \end{cases}$

$(1),(2)$ không có nghiệm trùng nhau $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-3x+m=0 \\ x^2-x+m-1=0 \end{cases}$ vô nghiệm
$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1=0 \\ x^2-3x+m=0 \end{cases}$ vô nghiệm
$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{1}{2} \\ x^2-3x+m=0 \end{cases}$ vô nghiệm
$\Leftrightarrow \left(\dfrac{1}{2}\right)^2-3\left(\dfrac{1}{2}\right)+m\neq 0$
$\Leftrightarrow m\neq \dfrac{5}{4}(***)$
Vậy số giá trị nguyên của $m\in[-15;15]$ đồng thời thỏa mãn $(**)$ và $(***)$ là 15.
Chọn đáp án A □

Câu 22 (Thanh Chương 1 - Nghệ An - 2020).

Cho hai hàm số $y = x^6 + 6x^4 + 6x^2 + 1$ và $y = x^3\sqrt{m - 15x}(m + 3 - 15x)$ có đồ thị lần lượt là (C_1) và (C_2) . Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-2019; 2019]$ để (C_1) và (C_2) cắt nhau tại hai điểm phân biệt. Số phần tử của tập hợp S bằng

(A) 2006 . (B) 2005 . (C) 2007 . (D) 2008 .

Lời giải.

Ta biết (C_1) cắt (C_2) tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi phương trình $x^6 + 6x^4 + 6x^2 + 1 = x^3\sqrt{m - 15x}(m + 3 - 15x)(1)$ có hai nghiệm phân biệt.

Điều kiện: $m - 15x \geq 0 \Leftrightarrow m \geq 15x(*)$.

- Nếu $x = 0$ thì phương trình (1) vô nghiệm. Suy ra $x \neq 0$.
  Khi đó (1) $\Leftrightarrow x^3 + 6x^2 + 6x + \dfrac{1}{x^3} = \sqrt{m - 15x}\,(m + 3 - 15x)$
  $\Leftrightarrow \left(x + \dfrac{1}{x}\right)^3 + 3\left(x + \dfrac{1}{x}\right) = \left(\sqrt{m - 15x}\right)^3 + 3\sqrt{m - 15x}$.
  Xét hàm số $f(t) = t^3 + 3t$. Tập xác định $D = \mathbb{R}$.
  $f'(t) = 3t^2 + 3 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$. Suy ra hàm số $f(t) = t^3 + 3t$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.
  Do đó (1) $\Leftrightarrow x + \dfrac{1}{x} = \sqrt{m - 15x}(2)$.

- Nếu $x < 0 \Rightarrow x + \dfrac{1}{x} < 0 \Rightarrow$ Phương trình (2) vô nghiệm $\Rightarrow x > 0$.
  Khi đó $\begin{cases} m > 0 \\ x + \dfrac{1}{x} > 0 \end{cases}$ nên (2) $\Leftrightarrow x^2 + \dfrac{1}{x^2} + 2 = m - 15x \Leftrightarrow m = x^2 + \dfrac{1}{x^2} + 2 + 15x$.
  Đặt $g(x) = x^2 + \dfrac{1}{x^2} + 2 + 15x, x > 0.$
  $g'(x) = 2x - \dfrac{2}{x^3} + 15$.
  Phương trình $g'(x) = 0$ có một nghiệm $x = \dfrac{1}{2}$ trên khoảng $(0; +\infty)$.
  Bảng biến thiên

x	$-\infty$	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		‖	$-$	0	$+$	
$g(x)$		‖ $+\infty$	$\searrow$	$\frac{55}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

Suy ra (1) có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $m > \dfrac{55}{4}$ (thỏa $m > 0$).

Kết hợp với m nguyên và $m \in [-2019; 2019]$ ta có được m nguyên và $m \in [14; 2019]$.

Khi đó S có $2019 - 14 + 1 = 2006$ phần tử.

Chọn đáp án (A) □

Câu 23 (THPT Nguyễn Công Trứ Hà Tĩnh 2021).

Cho hàm số $f(x) = (1-m^3)x^3 + 3mx^2 + (3m^2 - 2m + 2)x + m^3 + 2m$ với m là tham số. Có bao nhiêu số nguyên $m \in [-2020; 2021]$ sao cho $f(x) \geq 0$ với mọi $x \in [2020; 2021]$?

(A) 2023 . (B) 2022 . (C) 2021 . (D) 2020 .

Lời giải.

$f(x) = (1-m^3)x^3 + 3mx^2 + (3m^2 - 2m + 2)x + m^3 + 2m \geq 0\ \forall x \in [2020; 2021]$

$\Leftrightarrow (x+m)^3 + 2(x+m) \geq (mx)^3 + 2mx\ \forall x \in [2020; 2021] (1)$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + 2t,\ f'(t) = 3t^2 + 2 > 0 \forall t$

Vậy hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên (1) suy ra

$x + m \geq mx\ \forall x \in [2020; 2021] \Leftrightarrow m \leq \dfrac{x}{x-1} \forall x \in [2020; 2021] \Leftrightarrow m \leq \dfrac{2021}{2020}$

Vậy trên đoạn $[-2020; 2021]$ có 2022 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Chọn đáp án (B) □

Câu 24 (Sở Lạng Sơn 2022). Biết rằng tập tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $m(x+4)\sqrt{x^2+2} = 5x^2 + 8x + 24$ có bốn nghiệm thực phân biệt là khoảng $(a; b)$. Giá trị $a + b$ bằng

(A) $\dfrac{28}{3}$. (B) $\dfrac{25}{3}$. (C) 4 . (D) 9 .

Lời giải.

Ta có: $m(x+4)\sqrt{x^2+2} = 5x^2 + 8x + 24 \Leftrightarrow m(x+4)\sqrt{x^2+2} = (x+4)^2 + 4(x^2+2) (1)$.

- Với $x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = -4$.

  Khi đó $(1) \Leftrightarrow 4(x^2+2) = 0$ vô nghiệm.

- Với $x + 4 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -4$.

  $(1) \Leftrightarrow m = \dfrac{(x+4)^2 + 4(x^2+2)}{(x+4)\sqrt{x^2+2}} \Leftrightarrow m = \dfrac{x+4}{\sqrt{x^2+2}} + \dfrac{4\sqrt{x^2+2}}{(x+4)} (2)$

  Đặt $t = \dfrac{x+4}{\sqrt{x^2+2}}$

  Xét hàm số $f(x) = \dfrac{x+4}{\sqrt{x^2+2}}$

  $f'(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+2} - (x+4)\dfrac{x}{\sqrt{x^2+2}}}{x^2+2} = \dfrac{2-4x}{(x^2+2)\sqrt{x^2+2}}$

  $f'(x) = 0 \Rightarrow 2 - 4x = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2}$.

  Bảng biến thiên hàm số $f(x)$

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	1

Từ bảng biến thiên ta được điều kiện của t là $-1 < t \leq 3$

Vậy để có 2 nghiệm x ứng với 1 giá trị t thì $1 < t < 3$

(2) suy ra $m = t + \dfrac{4}{t}, t \in (1;3)$.

Xét hàm số $g(t) = t + \dfrac{4}{t}$ trên $(1;3)$.

$g'(t) = 1 - \dfrac{4}{t^2}$; $g'(t) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 2(\mathrm{n}) \\ t = -2(\mathrm{l}) \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên thu gọn

x	1		2		3
y'		$-$	0	$+$	
y	5	$\searrow$	4	$\nearrow$	$\frac{13}{3}$

Từ BBT để phương trình (1) có 4 nghiệm thực thì $4 < m < \dfrac{13}{3}$.

Nên $a = 4; b = \dfrac{13}{3}$.

Vậy $a + b = \dfrac{25}{3}$.

Chọn đáp án B □

Câu 25. (THPT Nguyễn Cảnh Quân Nghệ An 2022) Cho hàm số $y = \dfrac{x}{x+1} + \dfrac{x+1}{x+2} + \dfrac{x+2}{x+3} + \dfrac{x+3}{x+4}$ và $y = |x+1| - x + m$ (m là tham số thực) có đồ thị lần lượt là (C_1) và (C_2). Tập hợp tất cả các giá trị của m để (C_1) và (C_2) cắt nhau tại đúng 4 điểm phân biệt là

A $[3;+\infty)$. B $(-\infty;3]$. C $(-\infty;3)$. D $(3;+\infty)$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của (C_1) và (C_2) $\dfrac{x}{x+1} + \dfrac{x+1}{x+2} + \dfrac{x+2}{x+3} + \dfrac{x+3}{x+4} = |x+1| - x + m$

$\Leftrightarrow \dfrac{x}{x+1} + \dfrac{x+1}{x+2} + \dfrac{x+2}{x+3} + \dfrac{x+3}{x+4} - |x+1| + x = m.$

Đặt $g(x) = \dfrac{x}{x+1} + \dfrac{x+1}{x+2} + \dfrac{x+2}{x+3} + \dfrac{x+3}{x+4} - |x+1| + x$ có tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-1; -2; -3; -4\}$
và $g'(x) = \dfrac{1}{(x+1)^2} + \dfrac{1}{(x+2)^2} + \dfrac{1}{(x+3)^2} + \dfrac{1}{(x+4)^2} - \dfrac{x+1}{|x+1|} + 1 \Rightarrow g'(x) > 0, \forall x \in D$.
Ta có bảng biến thiên:

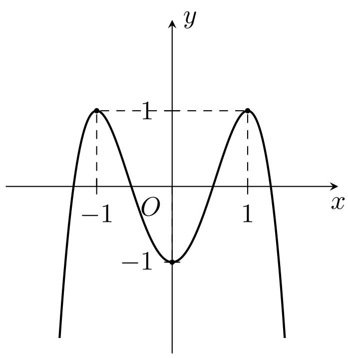
x	$-\infty$		-4		-3		-2		-1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	‖	$+$	‖	$+$	‖	$+$	‖	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	3

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ (1) có 4 nghệm phân biệt $\Leftrightarrow m \geq 3$.

Chọn đáp án (A) □

Dạng 2. Tương giao hàm hợp, hàm ẩn không chứa tham số, không chứa dấu giá trị tuyệt đối

Câu 26 (Mã 104 - 2021 Lần 1). Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f(f(x)) = 0$ là

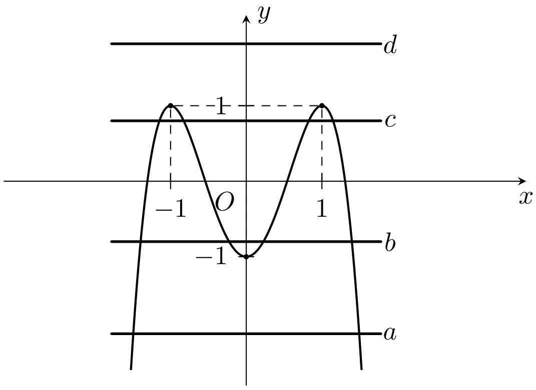


(A) 12. (B) 10. (C) 8. (D) 4.

Lời giải.

Nhìn vào đồ thị ta thấy $f(x) = 0$ có 4 nghiệm phân biệt theo thứ tự a, b, c, d.

Ta có: $f(f(x)) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = a, a \in (-\infty; -1) \\ f(x) = b, b \in (-1; 0) \\ f(x) = c, c \in (0; 1) \\ f(x) = d, d \in (1; +\infty) \end{array}\right.$.



Dựa vào đồ thị ta thấy:

Phương trình $f(x) = a$ có 2 nghiệm thực phân biệt.

Phương trình $f(x) = b$ có 4 nghiệm thực phân biệt.

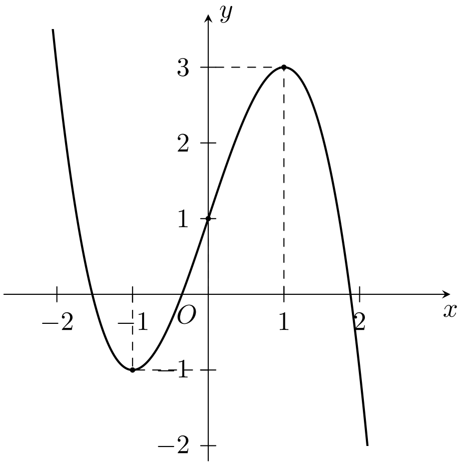
Phương trình $f(x) = c$ có 4 nghiệm thực phân biệt.

Phương trình $f(x) = d$ vô nghiệm trên $\mathbb{R}$.

Vậy phương trình $f(f(x)) = 0$ có 10 nghiệm thực phân biệt.

Chọn đáp án B □

Câu 27 (Mã 102 - 2021 Lần 1). Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f(f(x)) = 1$ là



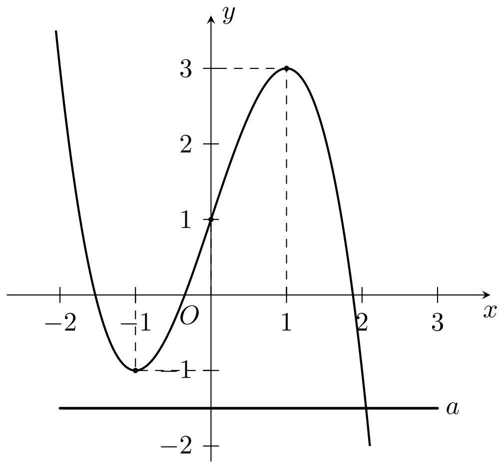
A 9. B 7. C 3. D 6.

Lời giải.

Dựa vào đồ thị hàm số $y = f(x)$ suy ra $f(f(x)) = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = a(a < -1) \\ f(x) = 0 \\ f(x) = b(1 < b < 2) \end{array}\right.$

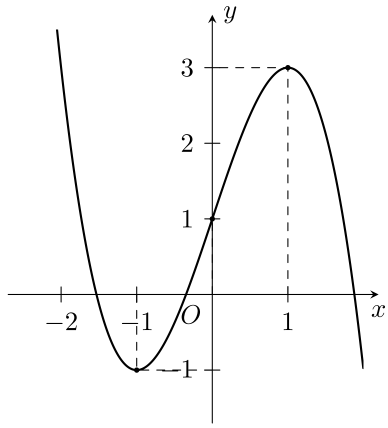
TH1

$f(x) = a \quad (a < -1) \Rightarrow$ phương trình có một nghiệm.



TH2

$f(x) = 0 \Rightarrow$ phương trình có ba nghiệm phân biệt.

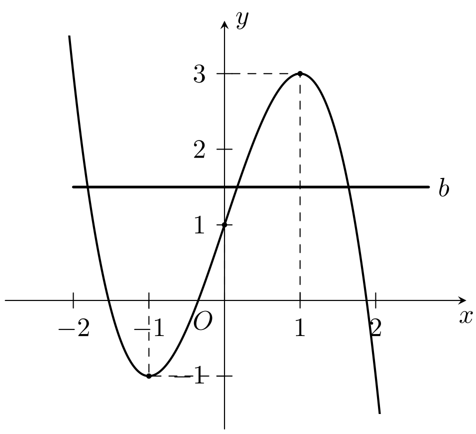


TH3:

$f(x) = b(1 < b < 2) \Rightarrow$ phương trình có ba nghiệm phân biệt.

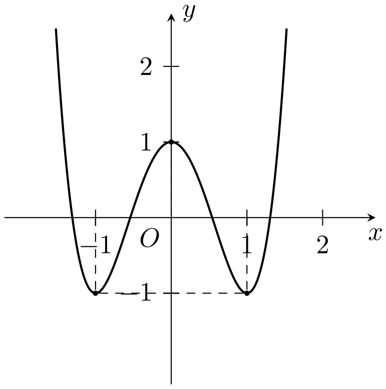
Các nghiệm của (1); (2); (3) là đôi một khác nhau.

Vậy $f(f(x)) = 1$ có 7 nghiệm nghiệm phân biệt.



Chọn đáp án B □

Câu 28 (Mã 103 - 2021 - Lần 1). Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên dưới:

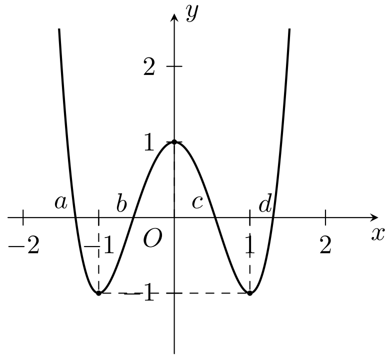


Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f(f(x)) = 0$ là

Ⓐ 4. Ⓑ 10. Ⓒ 12. Ⓓ 8.

Lời giải.

Ta có: $f(f(x)) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} f(x) = a & (a < -1) \\ f(x) = b & (-1 < b < 0) \\ f(x) = c & (0 < c < 1) \\ f(x) = d & (d > 1) \end{array}\right.$.



Phương trình $f(x) = a$ với $a < -1$ vô nghiệm.

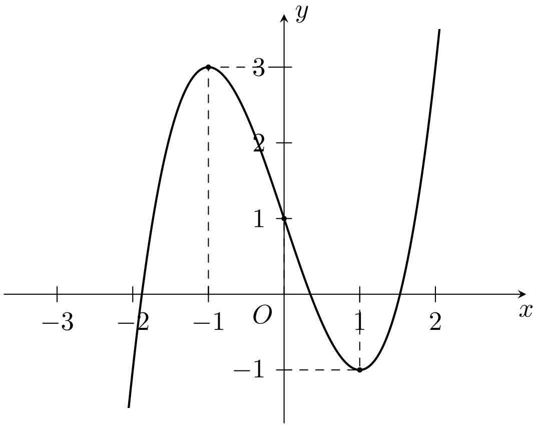
Phương trình $f(x) = b$ với $-1 < b < 0$ có 4 nghiệm phân biệt.

Phương trình $f(x) = c$ với $0 < c < 1$ có 4 nghiệm phân biệt.

Phương trình $f(x) = d$ với $d > 1$ có 2 nghiệm phân biệt.

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 29 (Mã 101 - 2021 Lần 1). Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên.



Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f(f(x)) = 1$ là:

Ⓐ 9. Ⓑ 3. Ⓒ 6. Ⓓ 7.

Lời giải.

Ta có: $f(f(x)) = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} f(x) = 0 & \\ f(x) = a & (a < -1) \\ f(x) = b & (1 < b < 2). \end{array}\right.$

Ta dựa vào đồ thị:

Phương trình $f(x) = 0$ có 3 nghiệm.

Phương trình $f(x) = a$ có 1 nghiệm.

Phương trình $f(x) = b$ có 3 nghiệm.

Vậy phương trình $f(f(x)) = 1$ có 7 nghiệm phân biệt.

Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 30 (Đề Minh Họa 2020 Lần 1). Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	-1	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Số nghiệm thuộc đoạn $[-\pi; 2\pi]$ của phương trình $2f(\sin x) + 3 = 0$ là

Ⓐ 4. Ⓑ 6. Ⓒ 3. Ⓓ 8.

Lời giải.

Đặt $t = \sin x$. Do $x \in [-\pi; 2\pi]$ nên $t \in [-1; 1]$.

Khi đó ta có phương trình $2f(t) + 3 = 0 \Leftrightarrow f(t) = -\dfrac{3}{2}$.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy phương trình $f(t) = -\dfrac{3}{2}$ có 2 nghiệm $t = a \in (-1; 0)$ và $t = b \in (0; 1)$.

Trường hợp 1: $t = a \in (-1; 0)$.

Ứng với mỗi giá trị $t \in (-1; 0)$ thì phương trình có 4 nghiệm $-\pi < x_1 < x_2 < 0 < \pi < x_3 < x_4 < 2\pi$.

Trường hợp 2: $t = b \in (0; 1)$.

Ứng với mỗi giá trị $t \in (0; 1)$ thì phương trình có 4 nghiệm $0 < x_5 < x_6 < \pi$.

Hiển nhiên cả 6 nghiệm trong 2 trường hợp trên đều khác nhau.

Vậy phương trình đã cho có 6 nghiệm thuộc đoạn $[-\pi; 2\pi]$.

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 31 (Đề Tham Khảo 2020 Lần 2).

Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

Ⓐ 7. Ⓑ 4. Ⓒ 5. Ⓓ 6.

Lời giải.

Đặt $t = \sin x, x \in \left[0; \dfrac{5\pi}{2}\right] \Rightarrow t \in [-1; 1]$.

Khi đó phương trình $f(\sin x) = 1$ trở thành $f(t) = 1, \forall t \in [-1; 1]$.

Đây là phương trình hoành độ giao điểm của hàm số $y = f(t)$ và đường thẳng $y = 1$.

Dựa vào bảng biến thiên, ta có $f(t) = 1 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t = a \in (-1; 0) \\ t = b \in (0; 1). \end{array}\right.$

Trường hợp 1: $t = a \in (-1; 0)$.

Ứng với mỗi giá trị $t \in (-1; 0)$ thì phương trình $\sin x = t$ có 2 nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $\pi < x_1 <$

$x_2 < 2\pi$.

Trường hợp 2: $t = b \in (0;1)$.

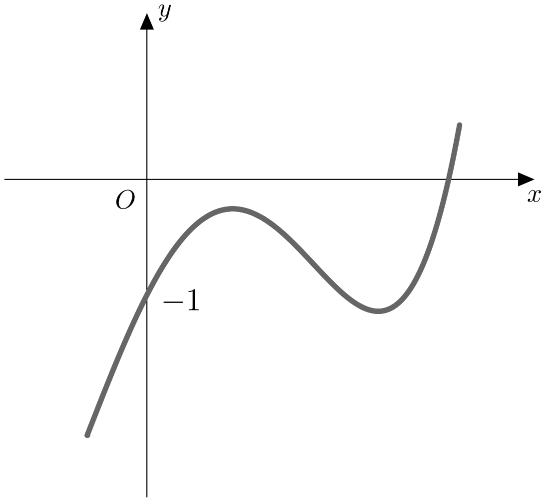
Ứng với mỗi giá trị $t \in (0;1)$ thì phương trình có 3 nghiệm x_1, x_2, x_3 thỏa mãn $0 < x_3 < x_4 < \pi; 2\pi < x_5 < \dfrac{5\pi}{2}$.

Hiển nhiên cả 5 nghiệm trong 2 trường hợp trên đều khác nhau.

Vậy phương trình đã cho có 5 nghiệm thuộc đoạn $\left[0; \dfrac{5\pi}{2}\right]$.

Chọn đáp án C □

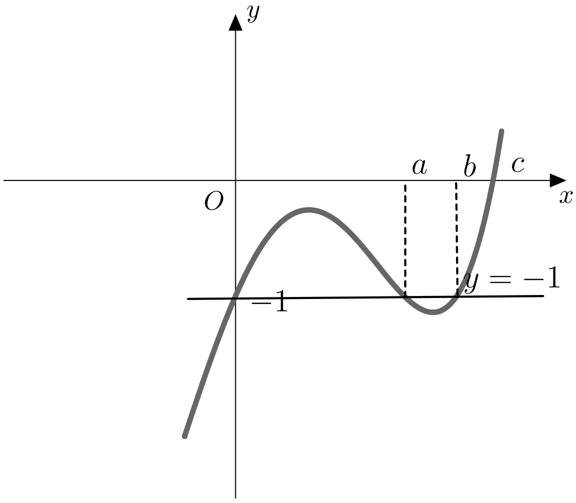
Câu 32 (Mã 101 - 2020 Lần 1). Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f\left(x^3 f(x)\right) + 1 = 0$ là



A 8. B 5. C 6. D 4.

Lời giải.

$$f\left(x^3 f(x)\right) + 1 = 0 \Leftrightarrow f\left(x^3 f(x)\right) = -1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^3 f(x) = 0 \\ x^3 f(x) = a > 0 \\ x^3 f(x) = b > 0 \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ f(x) = 0 \\ f(x) = \dfrac{a}{x^3} \text{ (do } x \neq 0) \\ f(x) = \dfrac{b}{x^3} \text{ (do } x \neq 0). \end{array}\right.$$



$f(x) = 0$ có một nghiệm dương $x = c$.

Xét phương trình $f(x) = \dfrac{k}{x^3}$ với $x \neq 0, k > 0$.

Đặt $g(x) = f(x) - \dfrac{k}{x^3}$. Suy ra $g'(x) = f'(x) + \dfrac{3k}{x^4}$.

Với $x > c$, nhìn hình ta ta thấy $f'(x) > 0 \Rightarrow g'(x) = f'(x) + \dfrac{3k}{x^4} > 0 \Rightarrow g(x) = 0$ có tối đa một nghiệm.

Mặt khác $\begin{cases} g(c) < 0 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty \end{cases}$ và $g(x)$ liên tục trên $(c; +\infty) \Rightarrow g(x) = 0$ có duy nhất nghiệm trên $(c; +\infty)$.

Với $0 < x < c$ thì $f(x) < 0 < \dfrac{k}{x^3} \Rightarrow g(x) = 0$ vô nghiệm.

Với $x < 0$, nhìn hình ta thấy $f'(x) > 0 \Rightarrow g'(x) = f'(x) + \dfrac{3k}{x^4} > 0 \Rightarrow g(x) = 0$ có tối đa một nghiệm.

Mặt khác $\begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^-} g(x) > 0 \\ \lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = -\infty \end{cases}$ và $g(x)$ liên tục trên $(-\infty; 0) \Rightarrow g(x) = 0$ có duy nhất nghiệm trên $(-\infty; 0)$.

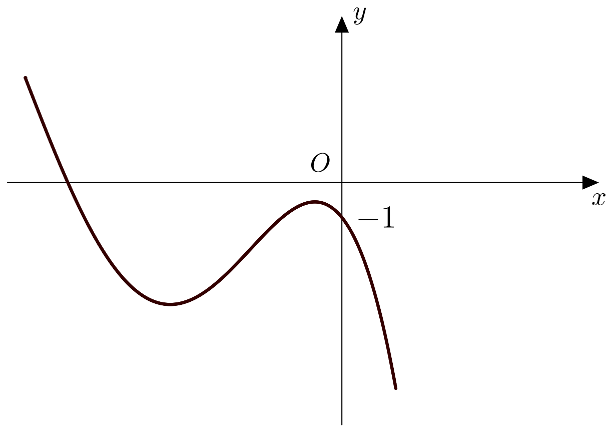
Tóm lại $g(x) = 0$ có đúng hai nghiệm trên $\mathbb{R} \backslash \{0\}$.

Suy ra hai phương trình $f(x) = \dfrac{a}{x^3}$, $f(x) = \dfrac{b}{x^3}$ có 4 nghiệm phân biệt khác 0 và khác c.

Vậy phương trình $f\left(x^3 f(x)\right) + 1 = 0$ có đúng 6 nghiệm.

Chọn đáp án C □

Câu 33 (Mã 102 — 2020 Lần 1). Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị là đường cong như hình vẽ bên dưới.



Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f\left(x^3 f(x)\right) + 1 = 0$ là

A 6. B 4. C 5. D 8.

Lời giải.

Dựa vào đồ thị, ta thấy $f\left(x^3 f(x)\right) + 1 = 0 \Leftrightarrow f\left(x^3 f(x)\right) = -1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^3 f(x) = a \in (-6; -5) \\ x^3 f(x) = b \in (-3; -2) \\ x^3 f(x) = 0. \end{array}\right.$

+ Phương trình (3) tương đương $\left[\begin{array}{l} x = 0 \\ f(x) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = x_1 \ (-6 < x_1 < a < -5.) \end{array}\right.$

+ Các hàm số $g(x) = \frac{a}{x^3}$ và $h(x) = \frac{b}{x^3}$ đồng biến trên các khoảng $(-\infty; 0)$ và $(0; +\infty)$, và nhận xét rằng $x = 0$ không phải là nghiệm của phương trình (1) nên:

$$(1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = g(x) \\ f(x) = h(x). \end{array}\right.$$

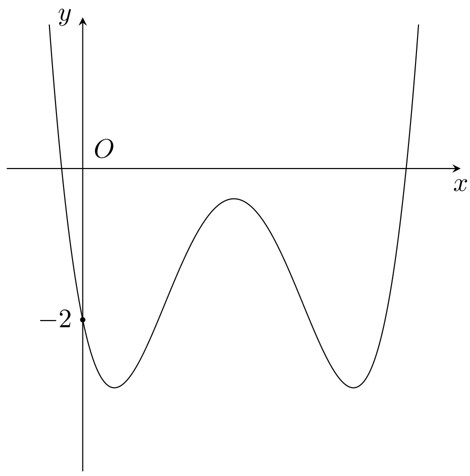
- Trên khoảng $(-\infty; 0)$, ta có $\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty;\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -1 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0^-} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} h(x) = +\infty \end{cases}$ nên các phương trình $f(x) = g(x)$ và $f(x) = h(x)$ có nghiệm duy nhất.

- Trên khoảng $(0; +\infty)$, ta có $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty;\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -1 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} h(x) = -\infty \end{cases}$ nên các phương trình $f(x) = g(x)$ và $f(x) = h(x)$ có nghiệm duy nhất.

Do đó, phương trình $f\left(x^3 f(x)\right) + 1 = 0$ có 6 nghiệm phân biệt.

Chọn đáp án A □

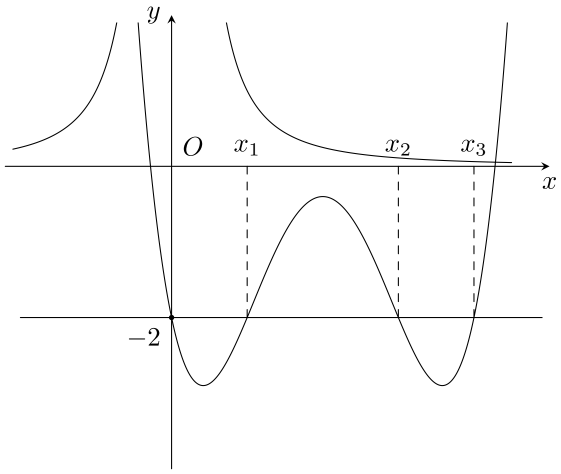
Câu 34 (Mã 103 - 2020 Lần 1). Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên.



Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f\left(x^2 f(x)\right) + 2 = 0$ là

A. 8.
B. 12.
C. 6.
D. 9.

Lời giải.



$$f\left(x^2f(x)\right)+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2f(x)=0 \\ x^2f(x)=a(1) \\ x^2f(x)=b(2) \\ x^2f(x)=c(3) \end{array}\right. \text{ với } 0<a<b<c.$$

Xét phương trình $f(x)=\dfrac{m}{x^2}(1) \quad (m>0)$.

Gọi α,β là hoành độ giao điểm của $(C)\colon y=f(x)$ và $Ox;\alpha<0<\beta$.

Ta có: $(1)\Leftrightarrow f(x)-\dfrac{m}{x^2}=0$.

Đặt $g(x)=f(x)-\frac{m}{x^2}$ suy ra $g'(x)=f'(x)+\dfrac{2m}{x^3}$.

- Trường hợp 1: $x<\alpha; f'(x)<0; \dfrac{2m}{x^3}<0\Rightarrow g'(x)<0$.
  Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=+\infty, g(\alpha)=-\dfrac{m}{\alpha^2}<0$.
  Phương trình $g(x)=0$ có một nghiệm thuộc $(-\infty;\alpha)$.

- Trường hợp 2 : $\alpha<x<\beta$.
  $f(x)<0, \dfrac{m}{x^2}>0$ suy ra $g(x)<0 \quad \forall x\in(\alpha,\beta)$.

- Trường hợp 3: $x>\beta; f'(x)>0; \dfrac{2m}{x^3}>0\Rightarrow g'(x)>0$.
  Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=+\infty, g(\beta)=-d\frac{m}{\beta^2}<0$. Phương trình $g(x)=0$ có một nghiệm thuộc $(\beta;+\infty)$.

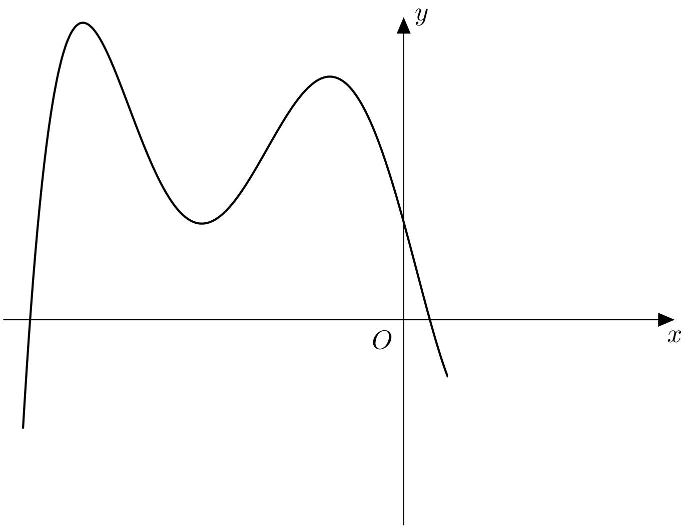
Vậy phương trình $f(x)=\dfrac{m}{x^2}$ có hai nghiệm $\forall m>0$.

Ta có: $x^2f(x)=0\Leftrightarrow x=0\vee f(x)=0$: có ba nghiệm.

Vậy phương trình (1) có 9 nghiệm.

Chọn đáp án D □

Câu 35 (Mã 104 – 2020 Lần 1). Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên.



Số nghiệm thực của phương trình $f\left(x^2 f(x)\right) = 2$ là:

(A) 6. (B) 12. (C) 8. (D) 9.

Lời giải.

Ta có: $f\left(x^2 f(x)\right) = 2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 f(x) = 0 \\ x^2 f(x) = a < 0 \\ x^2 f(x) = b < 0 \\ x^2 f(x) = c < 0 \end{array}\right.$.

Xét phương trình: $x^2 f(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ f(x) = 0 \end{array}\right.$ mà $f(x) = 0$ có hai nghiệm $\Rightarrow x^2 \cdot f(x) = 0$ có ba nghiệm.

Xét phương trình: $x^2 f(x) = a < 0$.

Do $x^2 \geq 0; x = 0$ không là nghiệm của phương trình $\Rightarrow f(x) = \frac{a}{x^2} < 0$.

Xét $g(x) = \dfrac{a}{x^2} \Rightarrow g'(x) = \frac{-2a}{x^3}$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	‖	$+$	
$g(x)$	0	↘ $-\infty$	‖	$-\infty$ ↗	0

Từ bảng biến thiên với $f(x) < 0 \Rightarrow f(x) = \dfrac{a}{x^2}$ có 2 nghiệm.

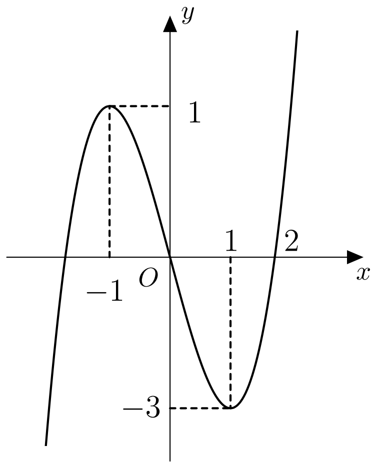
Tương tự: $x^2 f(x) = b$ và $x^2 f(x) = c (b, c < 0)$ mỗi phương trình cũng có hai nghiệm.

Vậy số nghiệm của phương trình $f\left(x^2 f(x)\right) = 2$ là 9 nghiệm.

Chọn đáp án (D) □

Câu 36.

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên.
Số nghiệm của phương trình $f\left(2 + f\left(\mathrm{e}^x\right)\right) = 1$ là



Ⓐ 4. Ⓑ 2.
Ⓒ 1. Ⓓ 3.

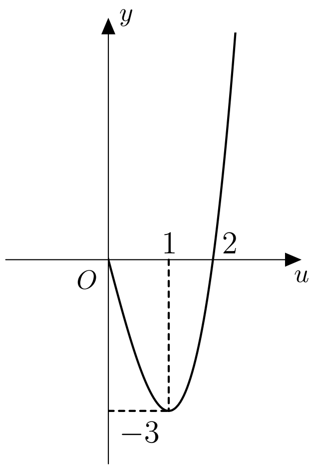
Lời giải.

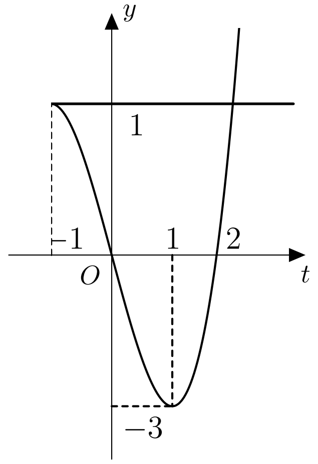
Đặt $u = \mathrm{e}^x > 0$, từ đồ thị suy ra: $f(u) \geq -3, \forall u > 0$.

Đặt $t = 2 + f(u), t \geq -1$. Ứng với mỗi nghiệm $t = -1$, có một nghiệm $u = 1$.

Ứng với mỗi nghiệm $t \in (-1; 2)$, có hai nghiệm $u \in (0; 2)$.

Ứng với mỗi nghiệm $t > 2$, có một nghiệm $u > 2$.



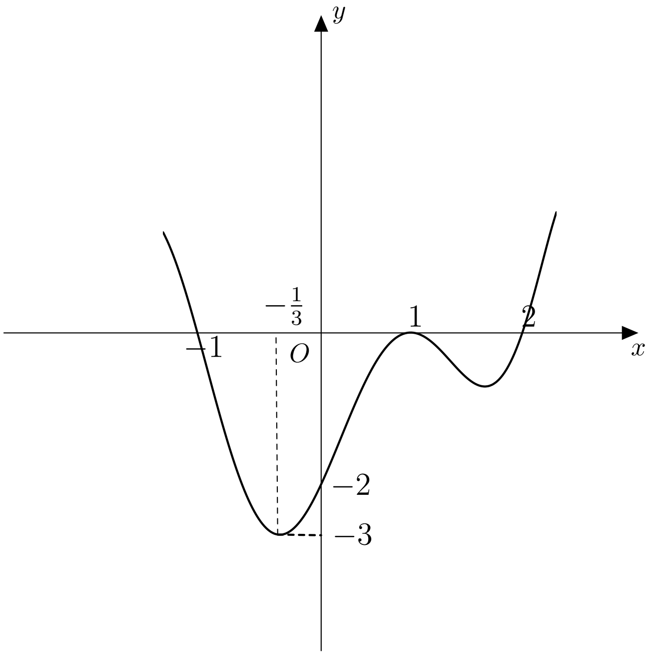


Phương trình $f(t) = 1$ có một nghiệm $t = -1$ và một nghiệm $t > 2$.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm.

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 37. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp 2 trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị $f'(x)$ là đường cong trong hình vẽ bên.



Đặt $g(x) = f\left(f'(x) - 1\right)$. Gọi S là tập nghiệm của phương trình $g'(x) = 0$. Số phần tử của tập S là

(A) 8. (B) 10. (C) 9. (D) 6.

Lời giải.

Hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp 2 trên $\mathbb{R}$ nên hàm số $f(x)$ và $f'(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$.

Do đó, tập xác định của hàm số $g(x)$ là $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $g'(x) = f''(x) \cdot f'\left(f'(x) - 1\right), g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f''(x) = 0 \\ f'\left(f'(x) - 1\right) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{-1}{3} \\ x = 1 \\ x = x_0 \in (1; 2) \\ f'(x) - 1 = -1 \\ f'(x) - 1 = 1 \\ f'(x) - 1 = 2 \end{array}\right.$

Từ đồ thị ta cũng có: $f'(x) - 1 = -1 \Leftrightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -1 \\ x = 2 \end{array}\right.$

$f'(x) - 1 = 1 \Leftrightarrow f'(x) = 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = x_1 \in (-\infty; -1) \\ x = x_2 \in (2; +\infty) \end{array}\right.$.

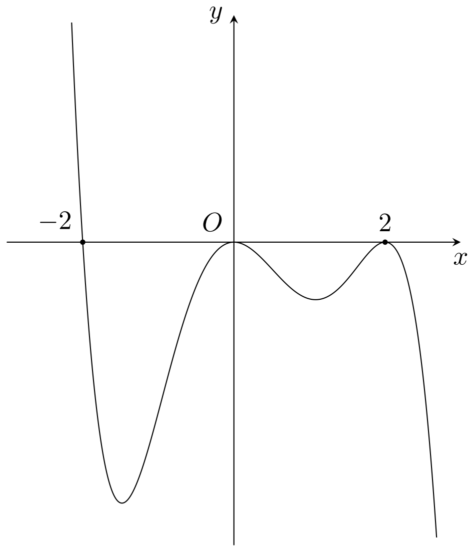
$f'(x) - 1 = 2 \Leftrightarrow f'(x) = 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = x_3 \in (-\infty; x_1) \\ x = x_4 \in (x_2; +\infty) \end{array}\right.$.

Vậy phương trình $g'(x) = 0$ có 9 nghiệm.

Chọn đáp án (C) □

Câu 38 (THPT Cẩm Bình Hà Tỉnh 2019).

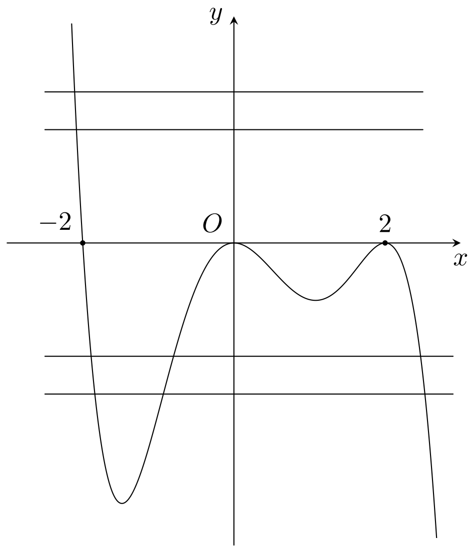
Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.



Đặt $g(x) = f(f(x))$. Hỏi phương trình $g'(x) = 0$ có mấy nghiệm thực phân biệt?

(A) 14. (B) 10. (C) 8. (D) 12.

Lời giải.



Ta có $g'(x) = f'(f(x)) \cdot f'(x)$.

Suy ra $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'(f(x)) = 0 \\ f'(x) = 0 \end{array}\right.$

Có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = x_1, (-2 < x_1 < -1) \\ x = 0 \\ x = x_2, (1 < x_2 < 2) \\ x = 2 \end{array}\right.$; $f'(f(x)) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = x_1 \\ f(x) = 0 \\ f(x) = x_2 \\ f(x) = 2. \end{array}\right.$ Dựa vào đồ thị ta thấy:

$f(x) = 0$ có 3 nghiệm phân biệt là $x = -2, x = 0, x = 2$, trong đó có 2 nghiệm trùng với nghiệm của $f'(x) = 0$.

$f(x) = x_1$ có 3 nghiệm phân biệt $x_3 \in (-2; -1), x_4 \in (-1; 1), x_5 \in (2; +\infty)$.

$f(x) = x_2$ có 1 nghiệm duy nhất $x_6 \in (-\infty; -2)$.

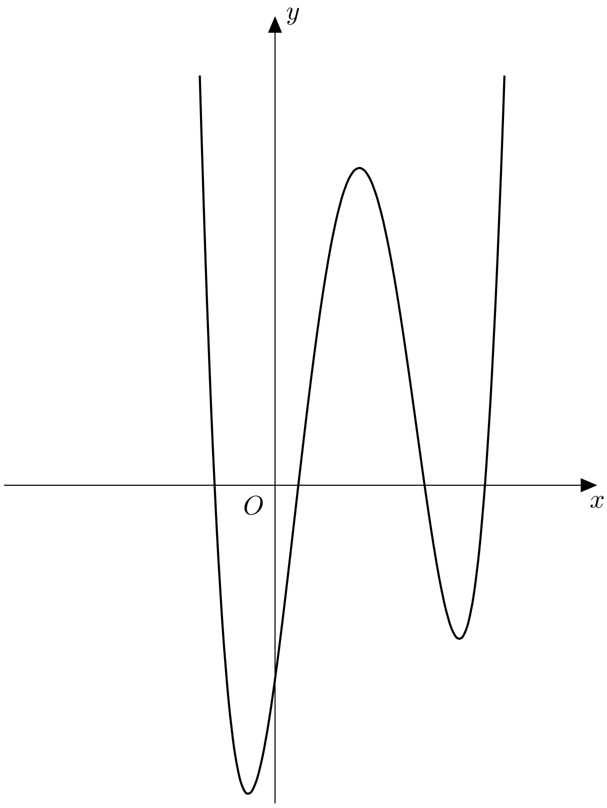
$f(x) = 2$ có 1 nghiệm duy nhất $x_7 \in (-\infty; -2)$.

Cũng từ đồ thị có thể thấy các nghiệm $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, -2, 0, 2$ đôi một khác nhau.

Vậy $g'(x) = 0$ có tổng cộng 10 nghiệm phân biệt.

Chọn đáp án B □

Câu 39. Biết rằng đồ thị hàm số $y = f(x)$ được cho như hình vẽ sau



Số giao điểm của đồ thị hàm số $y = [f'(x)]^2 - f''(x) \cdot f(x)$ và trục Ox là:

A 4. B 6. C 2. D 0.

Lời giải.

Đặt $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4), a \neq 0, x_1 < x_2 < x_3 < x_4$.

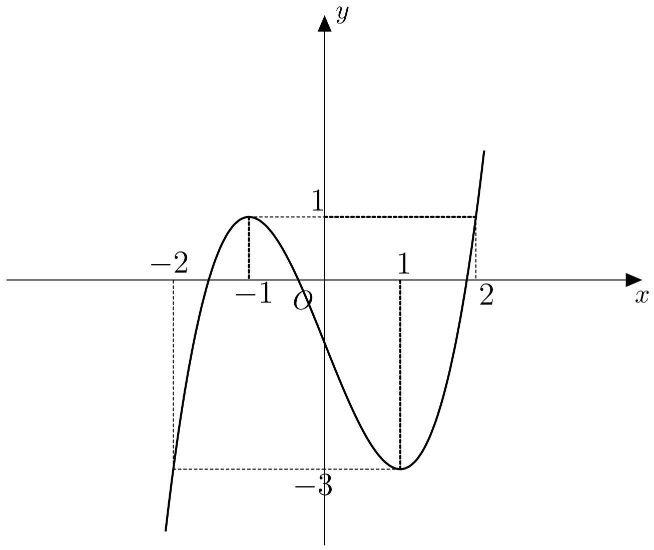
Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = [f'(x)]^2 - f''(x) \cdot f(x)$ và trục Ox là
$[f'(x)]^2 - f''(x) \cdot f(x) = 0 \Rightarrow \left[\dfrac{f'(x)}{f(x)}\right]' = 0 \Rightarrow \left[\dfrac{1}{x - x_1} + \dfrac{1}{x - x_2} + \dfrac{1}{x - x_3} + \dfrac{1}{x - x_4}\right]' = 0.$

Suy ra $-\dfrac{1}{(x - x_1)^2} - \dfrac{1}{(x - x_2)^2} - \dfrac{1}{(x - x_3)^2} - \dfrac{1}{(x - x_4)^2} = 0$ (vô nghiệm.)

Vậy số giao điểm của đồ thị hàm số $y = [f'(x)]^2 - f''(x) \cdot f(x)$ và trục Ox là 0 .

Chọn đáp án D □

Câu 40 (Chuyên Lam Sơn 2019). Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên.



Phương trình $f(f(x)-1)=0$ có tất cả bao nhiêu nghiệm thực phân biệt?

(A) 6. (B) 5. (C) 7. (D) 4.

Lời giải.

Ta có $f(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=x_1\in(-2;-1) \\ x=x_2\in(-1;0) \\ x=x_3\in(1;2). \end{array}\right.$

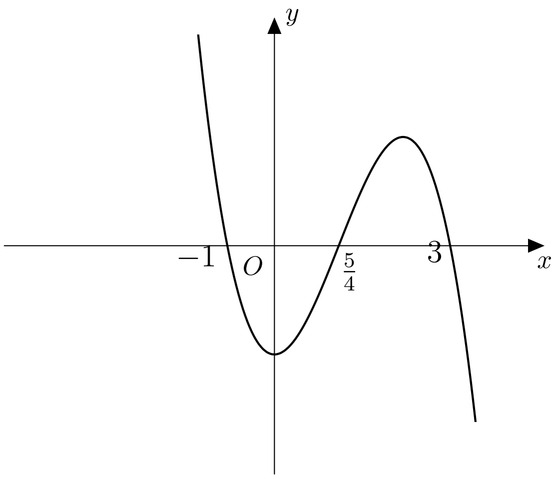
Khi đó: $f(f(x)-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)-1=x_1\in(-2;-1) \\ f(x)-1=x_2\in(-1;0) \\ f(x)-1=x_3\in(1;2) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=1+x_1\in(-1;0) \\ f(x)=1+x_2\in(0;1) \\ f(x)=1+x_3\in(2;3). \end{array}\right.$

- Ta thấy hai phương trình $f(x)=1+x_1\in(-1;0)$; $f(x)=1+x_2\in(0;1)$ đều có ba nghiệm phân biệt.
- Phương trình $f(x)=1+x_3\in(2;3)$ có một nghiệm.

Vậy phương trình $f(f(x)-1)=0$ có 7 nghiệm.

Chọn đáp án (C) □

Câu 41 (Đề tham khảo 2019). Cho hàm số $f(x)=mx^4+nx^3+px^2+qx+r$, Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới:



Tập nghiệm của phương trình $f(x) = r$ có số phần tử là

Ⓐ 4.   Ⓑ 3.   Ⓒ 1.   Ⓓ 2.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = 4mx^3 + 3nx^2 + 2px + q(1)$.

Dựa vào đồ thị $y = f'(x)$ ta thấy phương trình $f'(x) = 0$ có ba nghiệm đơn là $-1, \dfrac{5}{4}, 3$.

Do đó $f'(x) = m(x+1)(4x-5)(x-3)$ và $m \neq 0$. Hay $f'(x) = 4mx^3 - 13mx^2 - 2mx + 15m(2)$.

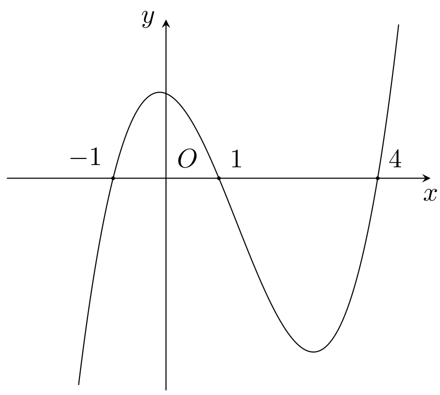
Từ (1) và (2) suy ra $n = -\dfrac{13}{3}m, p = -m$ và $q = 15m$.

Khi đó phương trình $f(x) = r \Leftrightarrow mx^4 + nx^3 + px^2 + qx = 0 \Leftrightarrow m\left(x^4 - \frac{13}{3}x^3 - x^2 + 15x\right) = 0$
$\Leftrightarrow 3x^4 - 13x^3 - 3x^2 + 45x = 0 \Leftrightarrow x(3x+5)(x-3)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -\frac{5}{3} \vee x = 3$.

Vậy tập nghiệm của phương trình $f(x) = r$ là $S = \left\{-\dfrac{5}{3}; 0; 3\right\}$.

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 42 (Chuyên Bắc Giang 2019). Cho hàm số $y = f(x) = mx^4 + nx^3 + px^2 + qx + r$, trong đó $m, n, p, q, r \in \mathbb{R}$. Biết rằng hàm số $y = f'(x)$ có đồ như hình vẽ dưới.



Tập nghiệm của phương trình $f(x) = 16m + 8n + 4p + 2q + r$ có tất cả bao nhiêu phần tử.

Ⓐ 4.   Ⓑ 3.   Ⓒ 5.   Ⓓ 6.

Lời giải.

Từ đồ thị ta thấy $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 1 \vee x = 4$.

Ta có bảng biến thiên

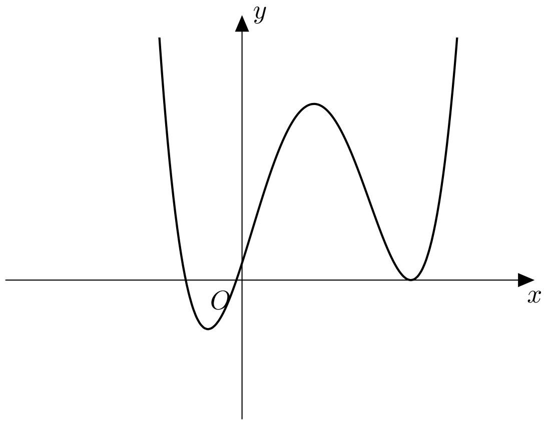
x	$-\infty$		-1		1		2		4		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0		$+$		0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$f(-1)$	$\searrow$	$f(1)$	$\nearrow$	$f(2)$	$\nearrow$	$f(4)$	$\searrow$	$+\infty$

Phương trình $f(x) = 16m + 8n + 4p + 2q + r \Leftrightarrow f(x) = f(2)$.

Từ bảng biến thiên ta thấy phương trình có 4 nghiệm.

Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 43. Cho $f(x)$ là một hàm đa thức bậc bốn có đồ thị như hình dưới đây.



Tập nghiệm của phương trình $[f'(x)]^2 = f(x) \cdot f''(x)$ có số phần tử là

Ⓐ 1. Ⓑ 2. Ⓒ 6. Ⓓ 0.

Lời giải.

Xét phương trình $[f'(x)]^2 = f(x) \cdot f''(x)$.

Do $f(x) = 0$ có ba nghiệm $x_1, x_2, x_2\,(x_1 < x_2 < x_3)$ và $f'(x_3) = 0$ suy ra x_3 là một nghiệm của (1).

Ta có $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)^2, (a \neq 0)$.

Với $x \neq x_3$:

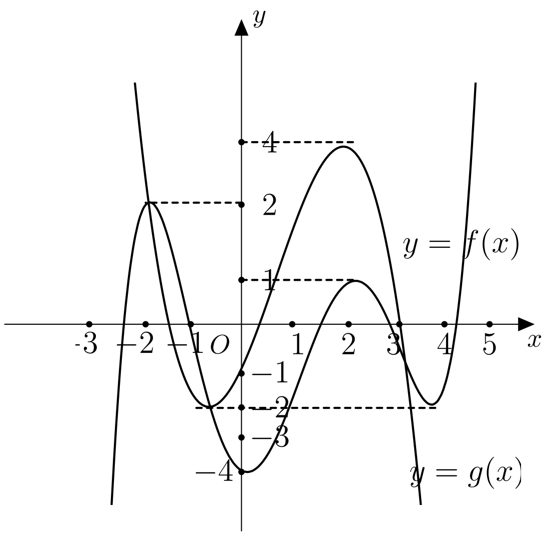
$(1) \Leftrightarrow \left(\dfrac{f'(x)}{f(x)}\right)' = 0 \Leftrightarrow \left(\dfrac{1}{x - x_1} + \dfrac{1}{x - x_2} + \dfrac{2}{x - x_3}\right)' = 0 \Leftrightarrow -\dfrac{1}{(x - x_1)^2} - \dfrac{1}{(x - x_2)^2} - \dfrac{2}{(x - x_3)^2} = 0$ vô nghiệm.

Vậy, phương trình (1) có đúng một nghiệm $x = x_3$.

Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 44 (KTNL GV Thuận Thành 2 Bắc Ninh 2019).

Cho hai hàm số $y = f(x), y = g(x)$ có đồ thị như hình sau:



Khi đó tổng số nghiệm của hai phương trình $f(g(x)) = 0$ và $g(f(x)) = 0$ là

Ⓐ 25. Ⓑ 22. Ⓒ 21. Ⓓ 26.

Lời giải.

Quan sát đồ thị ta thấy: $f(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=x_1\,(-3<x_1<-2) \\ x=-1 \\ x=x_2\,(1<x_2<2) \\ x=x_3\,(2<x_3<3) \\ x=x_4\,(4<x_4<5) \end{array}\right.$.

Do đó: $f(g(x))=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} g(x)=x_1(1) \\ g(x)=-1(2) \\ g(x)=x_2(3) \\ g(x)=x_3(4) \\ g(x)=x_4(5) \end{array}\right.$

Phương trình (1) có đúng 1 nghiệm; Phương trình (2) có đúng 3 nghiệm; Phương trình (3) có đúng 3 nghiệm; Phương trình (4) có đúng 3 nghiệm; Phương trình (5) có đúng 1 nghiệm. Tất cả các nghiệm trên đều phân biệt nên phương trình $f(g(x))=0$ có đúng 11 nghiệm.

Quan sát đồ thị ta thấy: $g(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=x_5\,(-2<x_5<-1) \\ x=x_6\,(0<x_6<1) \\ x=3 \end{array}\right.$

Do đó $g(f(x))=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=x_5(6) \\ f(x)=x_6(7) \\ f(x)=3(8) \end{array}\right.$

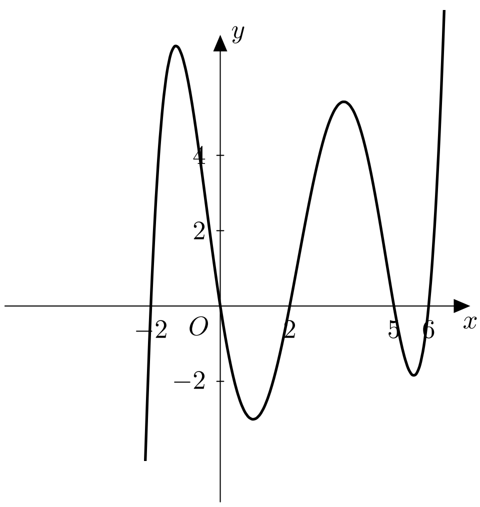
Phương trình (6) có 5 nghiệm; Phương trình (7) có 5 nghiệm; Phương trình (8) có 1 nghiệm.

Tất cả các nghiệm này đều phân biệt nên phương trình $g(f(x))=0$ có đúng 11 nghiệm.

Vậy tổng số nghiệm của hai phương trình $f(g(x))=0$ và $g(f(x))=0$ là 22 nghiệm.

Chọn đáp án B □

Câu 45. (THPT Nghĩa Hưng 2019) Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới:



Số nghiệm thuộc đoạn $[-2;6]$ của phương trình $f(x)=f(0)$ là

A 5. B 2. C 3. D 4.

Lời giải.

Từ đồ thị của hàm số $f'(x)$ ta có BBT.

x	$-\infty$		-2		0		2		5		6		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$f(-2)$	$\nearrow$	$f(0)$	$\searrow$	$f(2)$	$\nearrow$	$f(5)$	$\searrow$	$f(6)$	$\nearrow$	$+\infty$

Gọi S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y = f'(x); y = 0; x = 0; x = 2$.

Gọi S_2 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y = f'(x); y = 0; x = 2; x = 5$

Gọi S_3 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y = f'(x); y = 0; x = 5; x = 6$.

$S_1 = -\int_0^2 f'(x)dx = f(0) - f(2); S_2 = \int_2^5 f'(x)dx = f(5) - f(2); S_3 = -\int_5^6 f'(x)dx = f(5) - f(6)$.

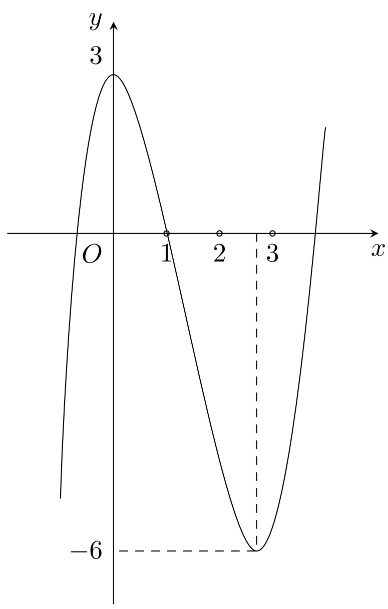
Từ đồ thị ta thấy $S_2 > S_1 \Rightarrow f(5) - f(2) > f(0) - f(2) \Rightarrow f(5) > f(0)$ và $S_1 + S_3 < S_2 \Rightarrow f(0) - f(2) + f(5) - f(6) < f(5) - f(2) \Rightarrow f(6) > f(0)$.

Khi đó ta có BBT chính xác (dạng đồ thị chính xác) như sau:

Chọn đáp án B □

Câu 46.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị là đường cong trong hình vẽ dưới. Đặt $g(x) = f\left[f(x)\right]$. Tìm số nghiệm của phương trình $g'(x) = 0$.



A 2. B 8. C 4. D 6.

Lời giải.

Ta có $g'(x) = f'(x) \cdot f'\left[f(x)\right] = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'(x) = 0 \\ f'[f(x)] = 0. \end{array}\right.$

Dựa vào tương giao đồ thị, ta có được $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = a, \text{ với } 2 < a < 3. \end{array}\right.$

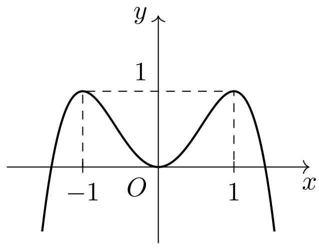
$f'\left[f(x)\right] = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = 0 \text{ có 3 ngiệm phân biệt} \\ f(x) = a \text{ có 3 nghiệm phân biệt.} \end{array}\right.$

Vậy $g'(x) = 0$ có 8 nghiệm phân biệt.

Chọn đáp án B □

Câu 47.

Cho hàm số $y = f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ có đồ thị như hình vẽ bên. Số nghiệm của phương trình $f\left(\sqrt{f(x)}\right) + f(x) + 2\sqrt{f(x)} - 1 = 0$ là



(A) 3. (B) 4. (C) 2. (D) 0.

Lời giải.

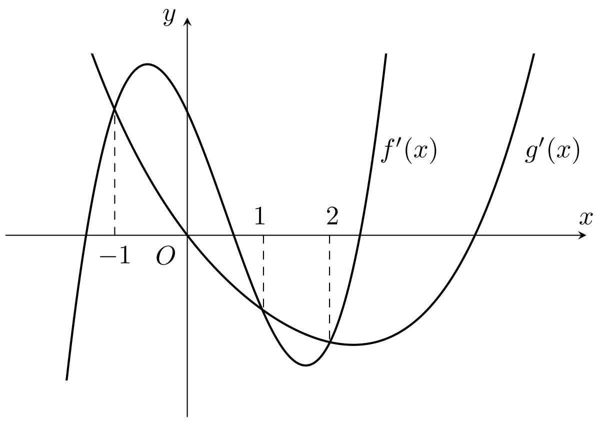
Do đồ thị là đồ thị của hàm trùng phương, có các điểm cực trị là $x = \pm 1$, $x = 0$ nên ta tìm được $f(x) = x^4 + 2x^2$.

Khi đó $f\left(\sqrt{f(x)}\right) + f(x) + 2\sqrt{f(x)} - 1 = 0 \Leftrightarrow f^2(x) + 2f(x) + f(x) + 2\sqrt{f(x)} - 1 = 0$ có duy nhất một nghiệm $f(x) \in (0;1)$.

Suy ra phương trình $f(x) = a$ với $a \in (0;1)$ luôn có 4 nghiệm.

Chọn đáp án (B) □

Câu 48. Cho các hàm số $f(x) = mx^4 + nx^3 + px^2 + qx + r$ và $g(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ thỏa mãn $f(0) = g(0)$. Các hàm số $f'(x)$, $g'(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Tập nghiệm của phương trình $f(x) = g(x)$ có số phần tử là

(A) 4. (B) 2. (C) 1. (D) 3.

Lời giải.

Từ giả thiết $f(0) = g(0)$ suy ra $r = d$ do đó phương trình $f(x) = g(x)$ tương đương với

$$x\left[mx^3 + (n-a)x^2 + (p-b)x + (q-c)\right] = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ mx^3 + (n-a)x^2 + (p-b)x + (q-c) = 0. \end{array}\right.$$

Từ đồ thị của $f'(x), g'(x)$ ta tính được $\begin{cases} n - a = -\dfrac{8}{3}m \\ p - b = -2m \\ q - c = 8m \end{cases}$.

Từ đó ta có được $mx^3 + (n-a)x^2 + (p-b)x + (q-c) = 0 \Leftrightarrow x^3 - \dfrac{8}{3}x^2 - 2x + 8 = 0$ có một nghiệm khác 0.

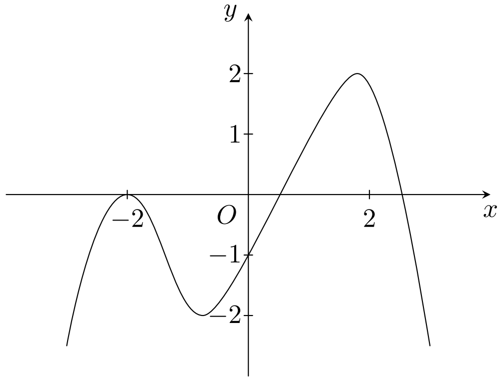
Vậy $f(x) = g(x)$ có hai nghiệm.

Chọn đáp án B □

Câu 49.

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Tập hợp nghiệm của phương trình $f(f(x)) + 1 = 0$ có bao nhiêu phần tử?

A 4. B 7. C 6. D 9.



Lời giải.

Dựa vào đồ thị ta có $f(f(x)) = -1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = a, a < -2 \text{ có 2 nghiệm phân biệt} \\ f(x) = b, -2 < b < -1 \text{ có 4 nghiệm phân biệt} \\ f(x) = 0 \text{ có 3 nghiệm phân biệt} \\ f(x) = c, c > 2 \text{ vô nghiệm.} \end{array}\right.$

Vậy phương trình có 9 nghiệm phân biệt.

Chọn đáp án D □

Câu 50. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$		-1		0		1		2		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	↗	5	↘	2	↗	4	↘	2	↘	$-\infty$

Phương trình $f\left(\sqrt{2x - x^2}\right) = 3$ có bao nhiêu nghiệm?

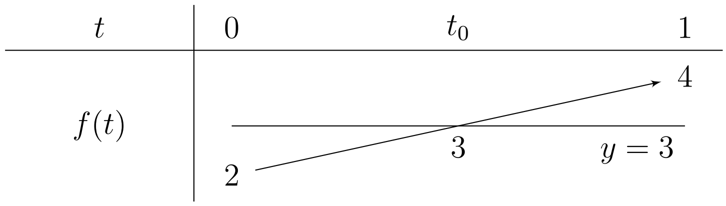
A 1. B 2. C 3. D 4.

Lời giải.

Lập bảng biến thiên của hàm số $g(x) = \sqrt{2x - x^2}$, ta được

x	0		1		2
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	0	↗	1	↘	0

Lúc này phương trình $f\left(\sqrt{2x - x^2}\right) = 3$ trở thành $f(t) = 3$ với $t \in [0; 1]$.



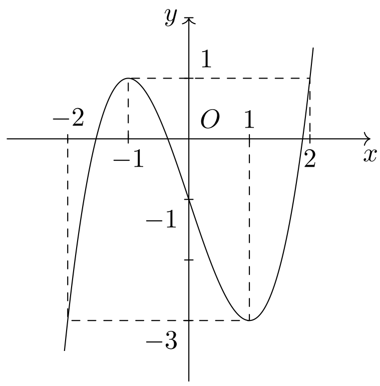
Dựa vào tương giao đồ thị ta tìm được phương trình $f(t)=3$ có 1 nghiệm $t_0 \in (0;1)$, từ đó suy ra $f\left(\sqrt{2x-x^2}\right)=3$ có đúng 2 nghiệm

Chọn đáp án B □

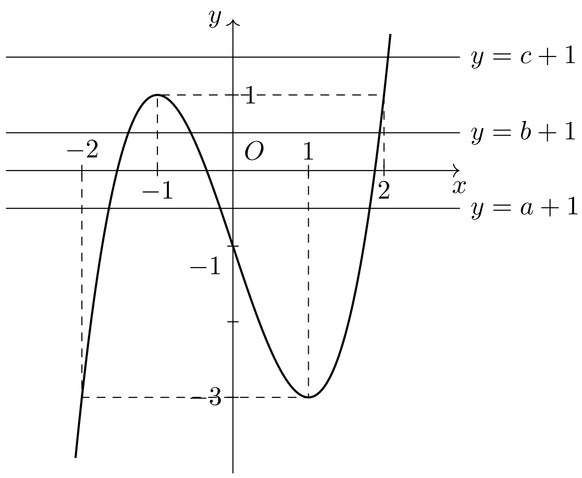
Câu 51.

Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình bên. Phương trình $f\left[f(\cos x)-1\right]=0$ có bao nhiêu nghiệm thuộc $[0;2\pi]$

A 2. B 5. C 4. D 6.



Lời giải.



Dựa vào tương giao đồ thị ta có được

$$f\left[f(\cos x)-1\right]=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} f(\cos x)=a+1\in(-1;0) & \text{có 2 nghiệm thỏa} \\ f(\cos x)=b+1\in(0;1) & \text{có 2 nghiệm thỏa} \\ f(\cos x)=c+1\in(2;3) & \text{vô nghiệm.} \end{array}\right.$$

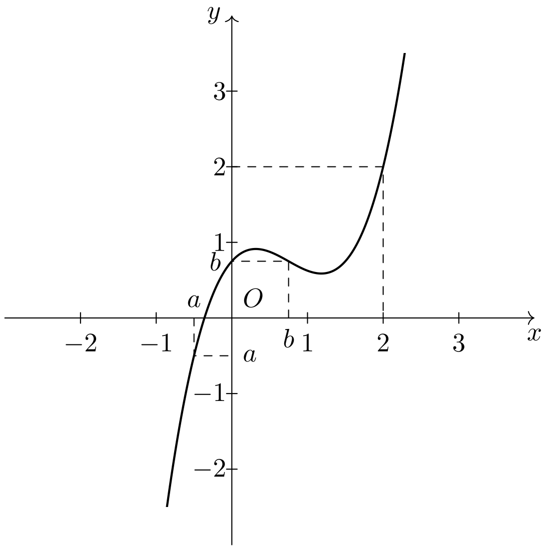
Vậy phương trình $f\left[f(\cos x)-1\right]=0$ có 4 nghiệm phân biệt thuộc $[0;2\pi]$.

Chọn đáp án C □

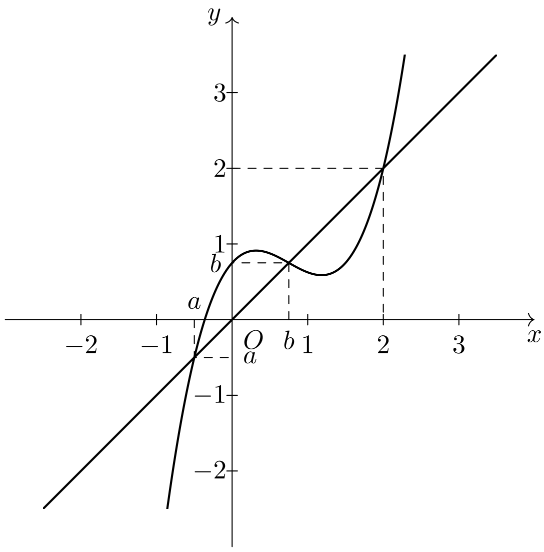
Câu 52.

Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ. Số nghiệm nằm trong $\left(-\dfrac{\pi}{2}; 3\pi\right)$ của phương trình $f(\cos x + 1) = \cos x + 1$ là

Ⓐ 2. Ⓑ 3. Ⓒ 5. Ⓓ 4.



Lời giải.



Dựa vào tương giao đồ thị, ta có $f(x) = x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = b \\ x = 2 \end{array}\right.$.

Từ đó suy ra: $f(\cos x + 1) = \cos x + 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = a - 1 \\ \cos x = b - 1 \\ \cos x = 1 \end{array}\right.$ có 5 nghiệm nằm trong $\left(-\dfrac{\pi}{2}; 3\pi\right)$.

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 53. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	↗	2	↘	0	↗	2	↘	$-\infty$

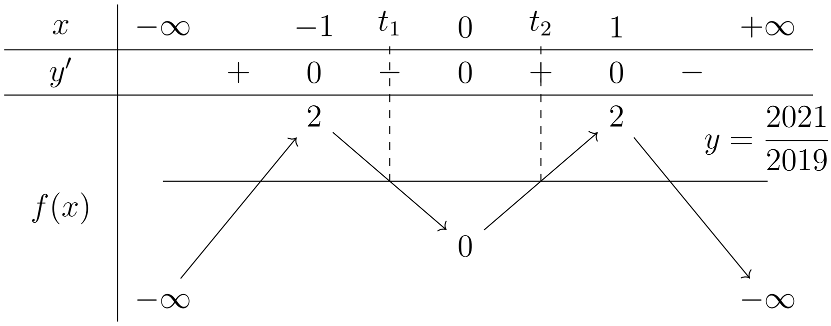
Số nghiệm thuộc khoảng $(-\infty; \ln 2)$ của phương trình $2019f(1 - e^x) - 2021 = 0$ là

(A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4.

Lời giải.

Đặt $t = 1 - \mathrm{e}^x$, $x \in (-\infty; \ln 2) \Rightarrow t \in (-1; 1)$.

Phương trình trở thành $f(t) = \dfrac{2021}{2019}$.



Dựa vào bảng biến thiên ta thấy phương trình $f(t) = \dfrac{2021}{2019}$ có hai nghiệm $t_1, t_2 \in (-1; 1)$.

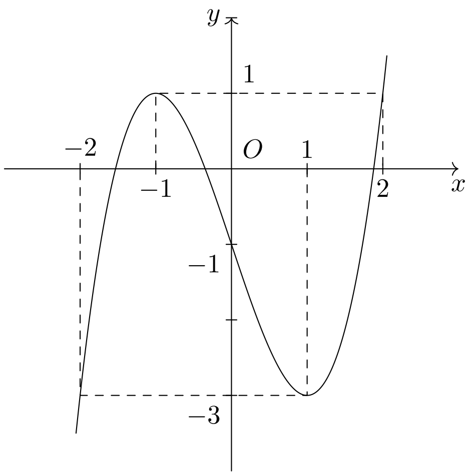
Do đó phương trình $2019f(1 - e^x) - 2021 = 0$ có hai nghiệm $x \in (-\infty; \ln 2)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 54.

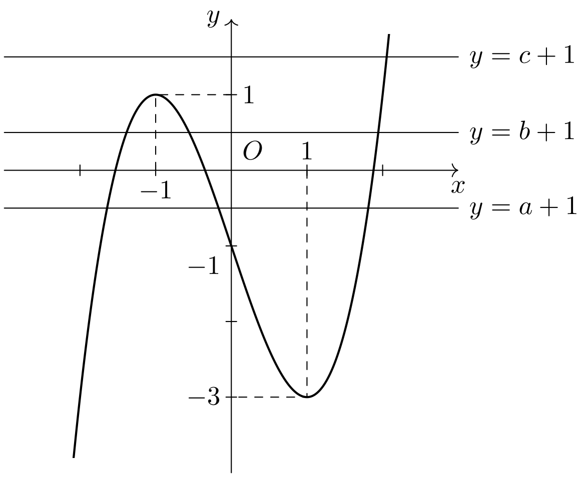
Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm số đa thức bậc ba và có đồ thị như hình vẽ bên. Hỏi phương trình $f\left(f(\cos x) - 1\right) = 0$ có bao nhiêu nghiệm thuộc $[0; 3\pi]$?

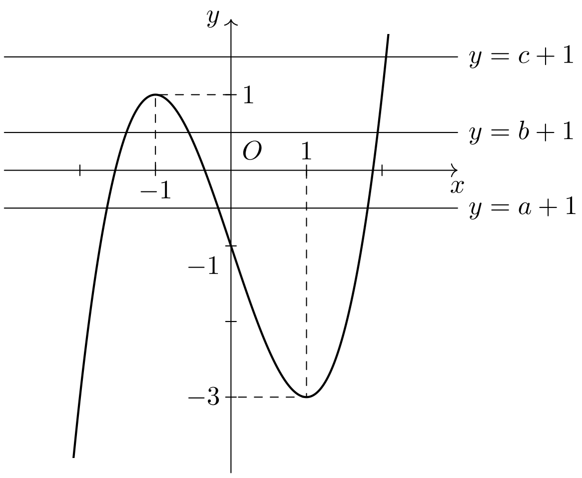
(A) 2. (B) 4. (C) 5. (D) 6.



Lời giải.

Đặt $t = \cos x$, $x \in [0; 3\pi] \Rightarrow t \in [-1; 1]$.





$$f\left(f(t)-1\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(t)=a+1 \text{ có 3 nghiệm} \\ f(t)=b+1 \text{ có 3 nghiệm} \\ f(t)=c+1 \text{ vô nghiệm.} \end{array}\right.$$

Vậy phương trình có 6 nghiệm.

Chọn đáp án D □

Câu 55. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	3	$\searrow$	2	$\nearrow$	∞

Số nghiệm thuộc đoạn $\left[-\frac{5\pi}{4};\frac{5\pi}{4}\right]$ của phương trình $3f\left(\frac{\sin x-\cos x}{\sqrt{2}}\right)-7=0$ là

A 6. B 3. C 5. D 4.

Lời giải.

Đặt $t=\frac{\sin x-\cos x}{\sqrt{2}}$, $x\in\left[-\frac{5\pi}{4};\frac{5\pi}{4}\right] \Rightarrow t\in[-1;1]$.

Bài toán trở thành $3f(t)-7=0 \Leftrightarrow f(t)=\frac{7}{3} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=a\in(-1;0) \\ t=b\in(0;1) \end{array}\right.$ có 5 nghiệm.

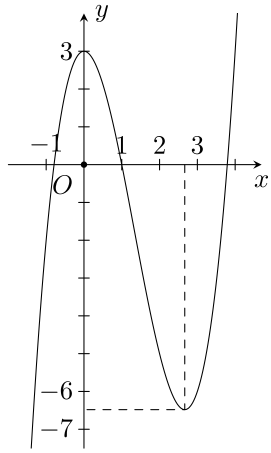
Chọn đáp án C □

Câu 56.

Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên. Đặt $g(x)=f\left[f(x)\right]$, tính số nghiệm của phương trình $g'(x)=0$.

A 8. B 2.

C 4. D 6.



Lời giải.

Ta có $g'(x)=f'(x)f'\left[f(x)\right]$ và $g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} f'(x)=0 & (1) \\ f'\left[f(x)\right]=0. & (2) \end{array}\right.$

Quan sát thấy đồ thị hàm số $f(x)$ có hai điểm cực trị với hoành độ lần lượt là $x=0$ và $x=a$ $(2<a<3)$ nên phương trình $f'(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt là $x=0$, $x=a$.

Khi đó, $f'\left[f(x)\right]=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=0 \\ f(x)=a. \end{array}\right.$

Dựa vào đồ thị thì phương trình $f(x)=0$ có 3 nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3 không thuộc tập hợp

$\{0; a\}$.

Phương trình $f(x) = a$ có 3 nghiệm phân biệt x_4, x_5, x_6 không thuộc tập hợp $\{0; a; x_1; x_2; x_3\}$.

Vậy phương trình $g'(x) = 0$ có tất cả 8 nghiệm phân biệt.

Chọn đáp án (A) □

Câu 57. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ dưới.

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Số nghiệm thuộc đoạn $\left[0; \dfrac{9\pi}{2}\right]$ của phương trình $f(2\sin x + 1) = 1$ là

(A) 7. (B) 5. (C) 4. (D) 6.

Lời giải.

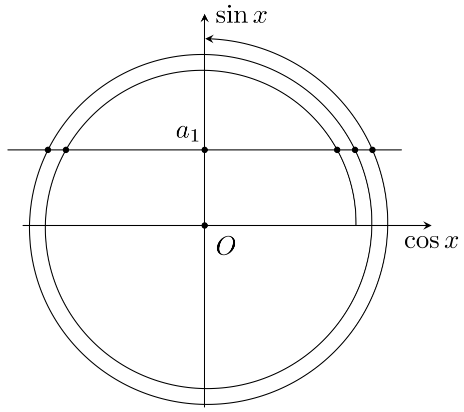
Dựa vào bảng biến thiên ta có

$$f(2\sin x + 1) = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2\sin x + 1 = -1 \\ 2\sin x + 1 = a,\ (a \in (1; 3)) \\ 2\sin x + 1 = b,\ (b > 3) : \text{phương trình vô nghiệm.} \end{array}\right.$$

- $2\sin x + 1 = -1 \Leftrightarrow \sin x = -1$.
- $2\sin x + 1 = a \Leftrightarrow \sin x = \dfrac{a-1}{2} \in (0; 1)$.

Dựa vào vòng tròn lượng giác, trên đoạn $\left[0; \dfrac{9\pi}{2}\right]$

- phương trình $\sin x = -1$ có hai nghiệm
- phương trình $\sin x = \dfrac{a-1}{2} = a_1 \in (0; 1)$ có năm nghiệm

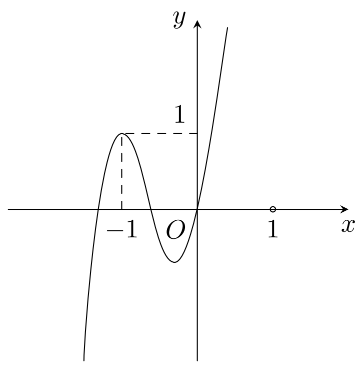


Vậy trên đoạn $\left[0; \dfrac{9\pi}{2}\right]$ phương trình $f(\sin x + 1) = 1$ có tất cả 7 nghiệm.

Chọn đáp án (A) □

Câu 58.

Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $(a, b, c, d \in \mathbb{R})$ có đồ thị như hình vẽ bên. Số nghiệm của phương trình $f\left(f\left(\sqrt{f(x)}\right) + f(x) + 2\sqrt{f(x)}\right) - f(1) = 0$ là



Ⓐ 2. Ⓑ 3. Ⓒ 1. Ⓓ 0.

Lời giải.

Đặt $t = \sqrt{f(x)}$, $t \geq 0$.

Ta có: $f\left(f(t) + t^2 + 2t\right) - f(1) = 0 \quad (*)$.

Xét $t = 0$: $(*) \Leftrightarrow f(0) - f(1) = 0$ (không thỏa).

Xét $t > 0$: Ta có $f(t) > 0$ và $f(t) + t^2 + 2t > 0$.

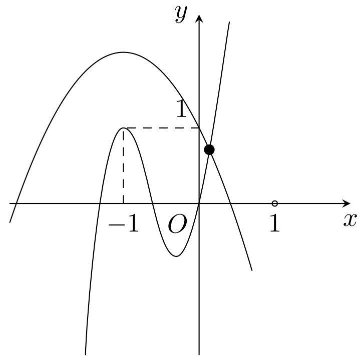
Theo đồ thị, hàm $f(u)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$.

Do đó,

$$\begin{aligned}(*) \quad &\Leftrightarrow f\left(f(t) + t^2 + 2t\right) = f(1) \Leftrightarrow f(t) + t^2 + 2t = 1 \\ &\Leftrightarrow f(t) = 1 - t^2 - 2t \\ &\Leftrightarrow f(t) = g(t) \quad (**) \ \left(\text{với } g(t) = 1 - t^2 - 2t,\ t > 0\right).\end{aligned}$$

Vì hàm $f(t)$ đồng biến và $g(t)$ nghịch biến trên $(0; +\infty)$ nên phương trình $(**)$ có nghiệm duy nhất $t = \alpha$.

Theo đồ thị hàm $f(t)$, $g(t)$ ta có $\alpha \in (0; 1)$.



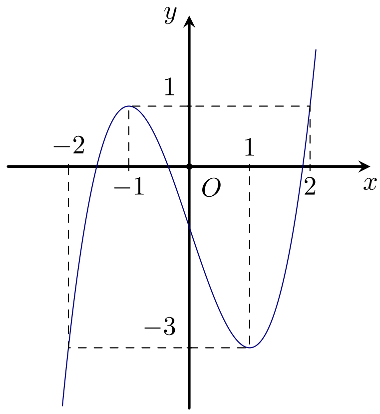
Khi đó, $t = \alpha \Leftrightarrow f(x) = \alpha^2$, $\alpha^2 \in (0; 1) \quad (***)$.

Vì đồ thị hàm $f(x)$ cắt đường thẳng $y = \alpha^2$ tại 3 điểm phân biệt nên phương trình $(***)$ có 3 nghiệm phân biệt.

Chọn đáp án Ⓑ □

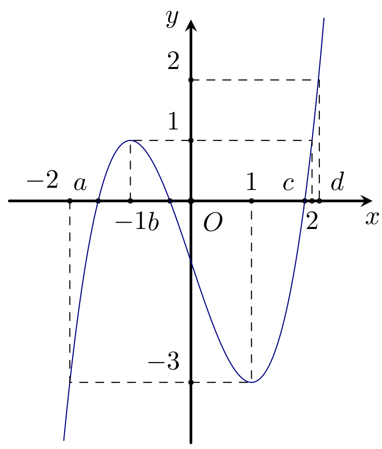
Câu 59.

Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Phương trình $f\left(f(x)-1\right) = 0$ có tất cả bao nhiêu nghiệm thực phân biệt?



Ⓐ 6. Ⓑ 5. Ⓒ 7. Ⓓ 4.

Lời giải.



Đặt $g(x) = f\left(f(x)-1\right)$.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

Ta có $g'(x) = f'\left(f(x)-1\right) \cdot f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'(x) = 0 \\ f'\left(f(x)-1\right) = 0. \end{array}\right.$

- ☑ $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 1. \end{array}\right.$
- ☑ $f'\left(f(x)-1\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)-1 = -1 \\ f(x)-1 = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = 0 \\ f(x) = 2. \end{array}\right.$
  - $f(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x = a & (-2 < a < -1) \\ x = b & (-1 < b < 0) \\ x = c & (1 < c < 2). \end{array}\right.$
  - $f(x) = 2 \Leftrightarrow x = d \quad (d > 2)$.

Bảng biến thiên

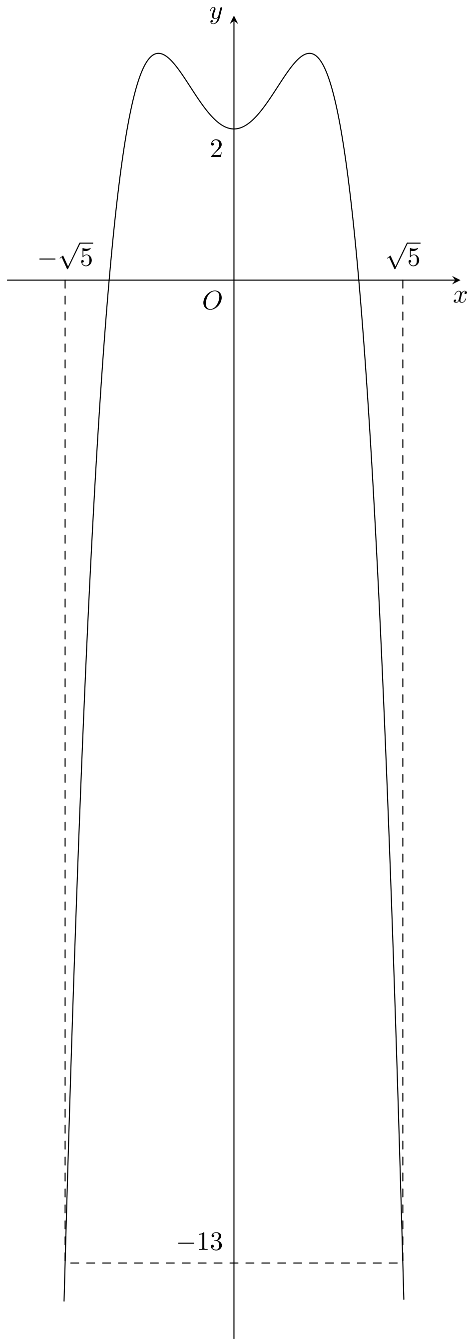
x	$-\infty$		a		-1		b		1		c		d		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	|	$+$	0	$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
$f'(f(x)-1)$		$+$	0	$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$g(-1)$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$g(1)$	$\nearrow$	1	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta suy ra phương trình $f\left(f(x)-1\right) = 0$ có 7 nghiệm phân biệt.

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 60.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị $y = f'(x)$ như hình vẽ. Xét hàm số $g(x) = 2f(x) + 2x^3 - 4x - 3m - 6\sqrt{5}$ với m là số thực. Để $g(x) \leq 0$, $\forall x \in [-\sqrt{5}; \sqrt{5}]$ thì điều kiện của m là



A) $m \geq \dfrac{2}{3}f(-\sqrt{5}) - 4\sqrt{5}$.
B) $m \leq \dfrac{2}{3}f(\sqrt{5})$.
C) $m \leq \dfrac{2}{3}f(0) - 2\sqrt{5}$.
D) $m \geq \dfrac{2}{3}f(\sqrt{5})$.

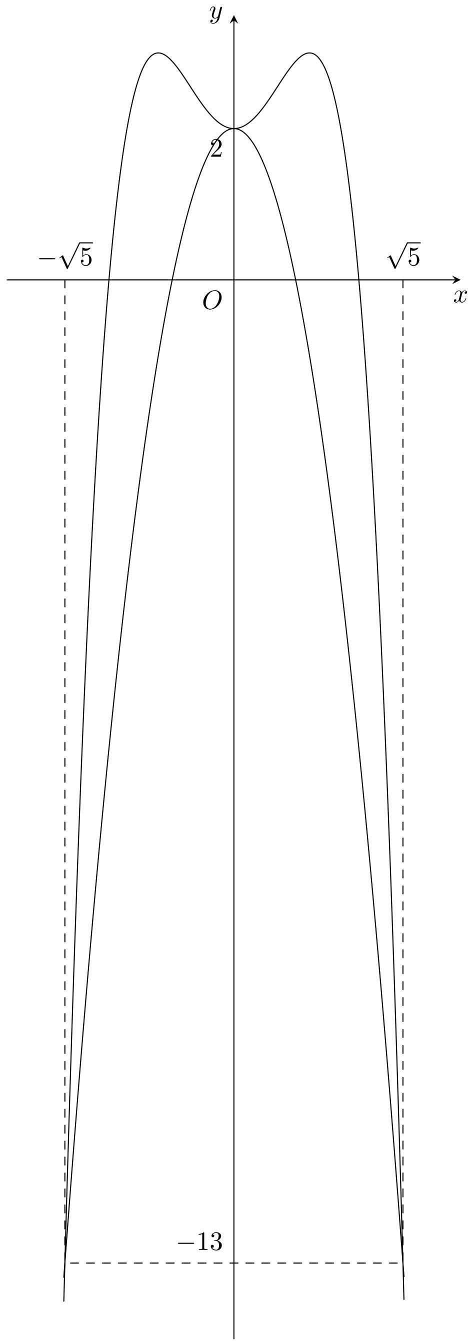
Lời giải.

Ta có $g(x) \leq 0 \Leftrightarrow 2f(x) + 2x^3 - 4x \leq 3m + 6\sqrt{5}$.

Đặt $h(x) = 2f(x) + 2x^3 - 4x$ thì bất phương trình $g(x) \leq 0 \Leftrightarrow h(x) \leq 3m + 6\sqrt{5}$

$h'(x) = 2f'(x) + 2 \cdot 3x^2 - 4 = 2\left(f'(x) - (-3x^2 + 2)\right)$.

Vẽ đồ thị hàm số $y = -3x^2 + 2$ trên cùng hệ trục tọa độ với hàm số $y = f'(x)$.



Ta thấy $f'(x) \geq -3x^2 + 2$, $\forall x \in [-\sqrt{5}; \sqrt{5}]$ nên $h'(x) \geq 0$, $\forall x \in [-\sqrt{5}; \sqrt{5}]$.

Suy ra $h(x) \leq h(\sqrt{5}), \forall x \in [-\sqrt{5}; \sqrt{5}]$ hay $\max\limits_{[-\sqrt{5};\sqrt{5}]} h(x) = h(\sqrt{5}) = 2f(\sqrt{5}) + 6\sqrt{5}$.

Do đó $h(x) \leq 3m + 6\sqrt{5}$, $\forall x \in [-\sqrt{5}; \sqrt{5}] \Leftrightarrow \max\limits_{[-\sqrt{5};\sqrt{5}]} h(x) \leq 3m + 6\sqrt{5}$

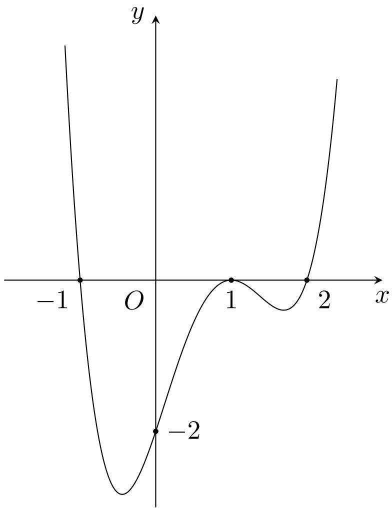
$\Leftrightarrow 2f(\sqrt{5}) + 6\sqrt{5} \leq 3m + 6\sqrt{5} \Leftrightarrow m \geq \dfrac{2}{3} f(\sqrt{5})$.

Chọn đáp án D □

Câu 61.

Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Đặt $g(x) = f(f(x) - 1)$. Số nghiệm của phương trình $g'(x) = 0$ là

Ⓐ 6. Ⓑ 10. Ⓒ 9. Ⓓ 8.



Lời giải.

Ta có $g'(x) = f'(x) \cdot f'(f(x) - 1)$.

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) \cdot f'(f(x) - 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'(x) = 0 \\ f'(f(x) - 1) = 0. \end{array}\right.$

- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = a_1\,(a_1 \in (-1;0)) \\ x = 1 \\ x = a_2\,(a_2 \in (1;2)). \end{array}\right.$

- $f'(f(x) - 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) - 1 = a_1 \\ f(x) - 1 = 1 \\ f(x) - 1 = a_2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} f(x) = a_1 + 1 \in (0;1) & (1) \\ f(x) = 2 & (2) \\ f(x) = a_2 + 1 \in (2;3) & (3). \end{array}\right.$

Từ đồ thị suy ra

- Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $b_1 \in (-2;-1)$; $b_2 \in (2;3)$.

- Phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt $c_1 \in (-2;b_1)$; $c_2 \in (b_2;3)$.

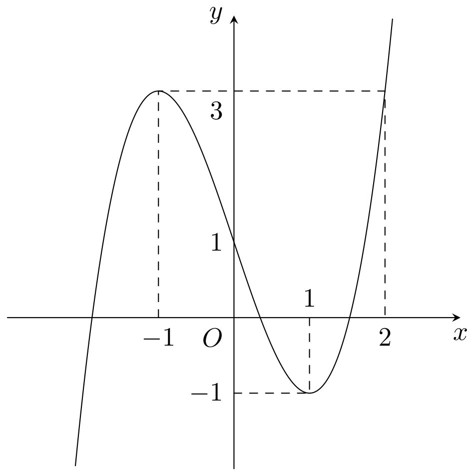
- Phương trình (3) có hai nghiệm phân biệt $d_1 \in (-2;c_1)$; $d_2 \in (c_2;3)$.

Vậy phương trình đã cho có 9 nghiệm phân biệt.

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 62.

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên Số nghiệm thuộc đoạn $\left[0; \dfrac{7\pi}{2}\right]$ của phương trình $f(f(\cos x)) = 0$ là



Ⓐ 7. Ⓑ 5. Ⓒ 8. Ⓓ 6.

Lời giải.

Đặt $f(\cos x) = t$ ta được phương trình $f(t) = 0$.

Quan sát đồ thị $y = f(x)$ ta suy ra $f(t) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = t_1 \in (-2; -1) \\ t = t_2 \in (0; 1) \\ t = t_3 \in (1; 2) \end{array}\right.$.

- Với $t = t_1$ ta có $f(\cos x) = t_1$. Xét tương giao giữa hai đồ thị $y = f(x)$ và $y = t_1 \in (-2; -1) \Rightarrow f(\cos x) = t_1 \Leftrightarrow \cos x = x_1 < -1$ nên phương trình vô nghiệm.

- Với $t = t_2$ ta có $f(\cos x) = t_2$. Xét tương giao giữa hai đồ thị $y = f(x)$ và $y = t_2 \in (0; 1) \Rightarrow$ $f(\cos x) = t_2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = x_2 < -1 \\ \cos x = x_3 \in (0; 1) \\ \cos x = x_4 \in (1; 2). \end{array}\right.$.

  Chỉ có $\cos x = x_3$ thỏa mãn. Khi đó tồn tại 3 giá trị $x \in \left[0; \dfrac{7\pi}{2}\right]$ tương ứng để $\cos x = x_3$.

- Với $t = t_3$ tương tự ta có $\left[\begin{array}{l} \cos x = x_5 < -1 \\ \cos x = x_6 \in (-1; 0) \\ \cos x = x_7 > 1 \end{array}\right.$.

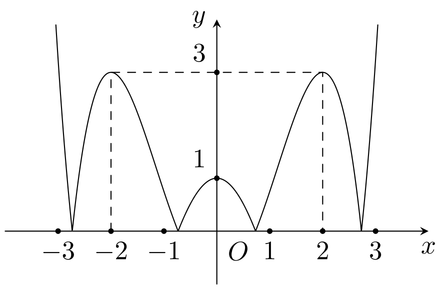
  Chỉ có $\cos x = x_6$ thỏa mãn. Khi đó tồn tại 2 giá trị $x \in \left[0; \dfrac{7\pi}{2}\right]$ tương ứng để $\cos x = x_6$.

Vậy phương trình đã cho có 5 nghiệm thuộc đoạn $\left[0; \dfrac{7\pi}{2}\right]$.

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 63.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Tìm số nghiệm thuộc đoạn $[2017\pi; 2020\pi]$ của phương trình $3f(2\cos x) = 8$.



Ⓐ 8. Ⓑ 3. Ⓒ 4. Ⓓ 6.

Lời giải.

Đặt $t = 2\cos x$, với $x \in [2017\pi; 2020\pi] \Rightarrow t \in [-2; 2]$.

Ta có $t' = -2\sin x$, $t' = 0 \Leftrightarrow -2\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi$.

Mà $x \in [2017\pi; 2020\pi]$ nên $x \in \{2017\pi; 2018\pi; 2019\pi; 2020\pi\}$.

Ta có bảng biến thiên

x	2017π		2018π		2019π		2020π
t'		$+$	0	$-$	0	$+$	
t	-2	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	2

Từ đồ thị, trên đoạn $[-2; 2]$ ta có $3f(t) = 8 \Leftrightarrow f(t) = \dfrac{8}{3} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = a \in (-2; -1) \\ t = b \in (1; 2). \end{array}\right.$

Với $t = a \in (-2; -1)$ thì phương trình có 3 nghiệm.

Với $t = b \in (1; 2)$ thì phương trình có 3 nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có 6 nghiệm phân biệt.

Chọn đáp án D □

Câu 64. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình bên.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Phương trình $2f\left(\dfrac{\sin x + \cos x}{\sqrt{2}}\right) + 3 = 0$ có bao nhiêu nghiệm trên $\left[-\dfrac{3\pi}{4}; \dfrac{7\pi}{4}\right]$.

A 3. B 4. C 5. D 6.

Lời giải.

Ta có: $\dfrac{\sin x + \cos x}{\sqrt{2}} = \sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$. Đặt $\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = t$, $t \in [-1; 1]$.

Phương trình tương đương: $f(t) = -\dfrac{3}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = t_1 \in (-\infty; -1) \text{ (loại)} \\ t = t_2 \in (-1; 0) \end{array}\right.$.

Với $x \in \left[-\dfrac{3\pi}{4}; \dfrac{7\pi}{4}\right]$, ta có bảng biến thiên của t như sau:

x	$-\dfrac{3\pi}{4}$		$-\dfrac{\pi}{4}$		$\dfrac{\pi}{4}$		$\dfrac{3\pi}{4}$		$\dfrac{5\pi}{4}$		$\dfrac{7\pi}{4}$
t	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0

$t = t_2$

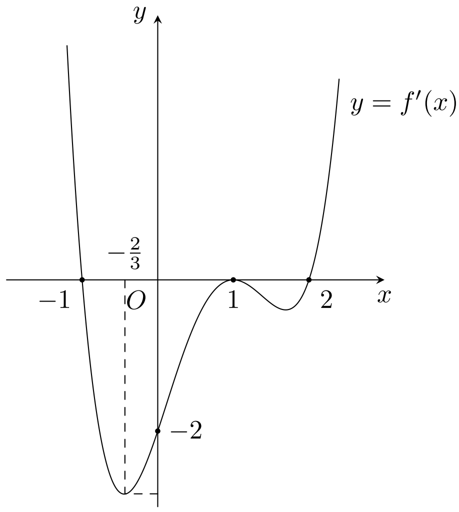
Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy phương trình $t = t_2$ có 3 nghiệm $x \in \left[-\dfrac{3\pi}{4}; \dfrac{7\pi}{4}\right]$.

Chọn đáp án (A) □

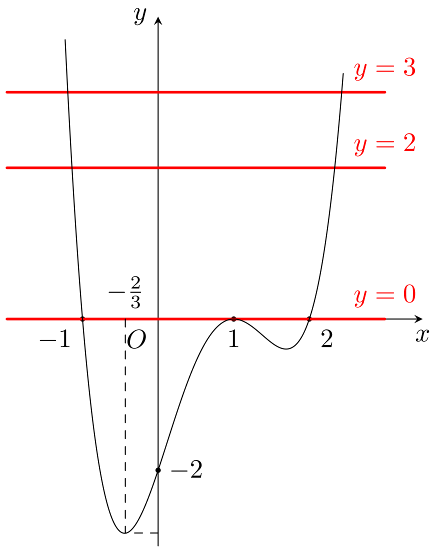
Câu 65.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp hai trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị $y = f'(x)$ là đường cong trong hình vẽ bên. Đặt $g(x) = f\left(f'(x) - 1\right)$. Gọi S là tập nghiệm của phương trình $g'(x) = 0$. Số phần tử của tập S là

(A) 8. (B) 6. (C) 10. (D) 9.



Lời giải.



- Ta có: $g(x) = f\left(f'(x) - 1\right) \Rightarrow g'(x) = f''(x) \cdot f'\left(f'(x) - 1\right)$.

Phương trình $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f''(x) = 0 \\ f'\left(f'(x) - 1\right) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f''(x) = 0 \\ f'(x) - 1 = -1 \\ f'(x) - 1 = 1 \\ f'(x) - 1 = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f''(x) = 0 \\ f'(x) = 0 \\ f'(x) = 2 \\ f'(x) = 3. \end{array}\right.$

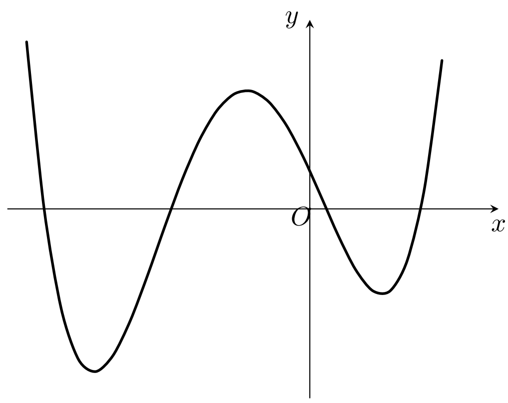
Ta có đồ thị $y = f'(x)$ có cực trị tại $\left\{\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -\dfrac{2}{3} \\ x = x_0 \in (1; 2). \end{array}\right.$

$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} f''(1) = 0 \\ f''\left(-\dfrac{2}{3}\right) = 0 \\ f''(x_0) = 0 \end{array}\right. \Rightarrow f''(x) = 0$ có 3 nghiệm $x = 1$; $x = -\dfrac{2}{3}$ và $x = x_0$.

Tại phương trình $f'(x) = 0$ ta thấy có 2 nghiệm bội lẻ $x = -1$, $x = 2$ và nghiệm bội chẵn $x = 1$.
Tại phương trình $f'(x) = 2$ ta thấy có 2 nghiệm mà đường thẳng $y = 2$ cắt đồ thị $y = f(x)$ đó là hai điểm $x = x_1 \in (-\infty; -1)$ và $x = x_2 \in (2; +\infty)$.
Tại phương trình $f'(x) = 3$ ta thấy có 2 nghiệm mà đường thẳng $y = 3$ cắt đồ thị $y = f(x)$ đó là hai điểm $x = x_3 \in (-\infty; -1)$ $(x_3 \neq x_1)$ và $x = x_4 \in (2; +\infty)$ $(x_4 \neq x_2)$.
Vậy từ đó ta thấy phương trình $g'(x) = 0$ tổng cộng có tất cả 9 nghiệm.
Chọn đáp án (D) □

Câu 66 (Chuyên Thoại Ngọc Hầu - An Giang – 2021).

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Gọi (C_1) và (C_2) lần lượt là đồ thị của hai hàm số $y = f''(x) \cdot f(x) - [f'(x)]^2$ và $y = 2021^x$. Số giao điểm của (C_1) và (C_2) là



(A) 1. (B) 0. (C) 2. (D) 4.

Lời giải.

Số giao điểm (C_1) và (C_2) là nghiệm của phương trình

$$f''(x) \cdot f(x) - [f'(x)]^2 = 2021^x. \quad (*)$$

Từ đồ thị ta thấy $f(x)$ cắt trục Ox tại bốn điểm phân biệt có hoành độ lần lượt là x_1; x_2; x_3; x_4 nên phương trình $f(x) = 0$ có bốn nghiệm phân biệt x_1; x_2; x_3; x_4 nên

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4).$$

Nếu $f(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = x_1 \\ x = x_2 \\ x = x_3 \\ x = x_4 \end{array}\right.$ thay vào $(*)$ ta thấy vế trái âm, vế phải dương nên phương trình $(*)$ vô nghiệm.

Nếu $f(x) \neq 0$ nên ta có phương trình $(*)$ tương đương với

$$\frac{f''(x) \cdot f(x) - [f'(x)]^2}{[f(x)]^2} = \frac{2021^x}{[f(x)]^2} \Leftrightarrow \left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)' = \frac{2021^x}{[f(x)]^2}.$$

Ta có: $f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)$

$$\Rightarrow f'(x) = a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)\left[\frac{1}{x-x_1}+\frac{1}{x-x_2}+\frac{1}{x-x_3}+\frac{1}{x-x_4}\right]$$

$$\Rightarrow f'(x) = f(x)\left[\frac{1}{x-x_1}+\frac{1}{x-x_2}+\frac{1}{x-x_3}+\frac{1}{x-x_4}\right]$$

$$\Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x-x_1}+\frac{1}{x-x_2}+\frac{1}{x-x_3}+\frac{1}{x-x_4}.$$

Khi đó: $\left(\dfrac{f'(x)}{f(x)}\right)' = \left(\dfrac{1}{x-x_1}+\dfrac{1}{x-x_2}+\dfrac{1}{x-x_3}+\dfrac{1}{x-x_4}\right)'$

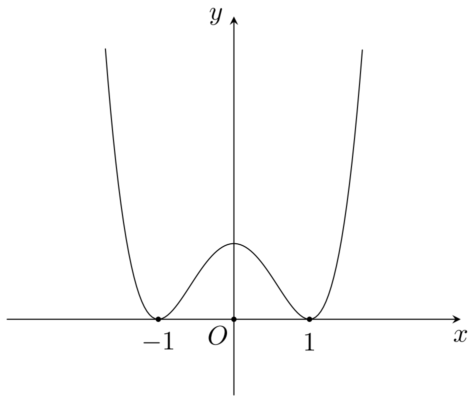
$$= -\left(\frac{1}{(x-x_1)^2}+\frac{1}{(x-x_2)^2}+\frac{1}{(x-x_3)^2}+\frac{1}{(x-x_4)^2}\right) < 0.$$

Mà $\dfrac{2021^x}{[f(x)]^2} > 0$ nên phương trình $\left(\dfrac{f'(x)}{f(x)}\right)' = \dfrac{2020^x}{[f(x)]^2}$ vô nghiệm,do đó phương trình (*) vô nghiệm.

Chọn đáp án B □

Câu 67 (THPT Nguyễn Đức Cảnh - Thái Bình – 2021).

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên



Số nghiệm thực của bất phương trình $\sqrt{2f^2\left(x^3-3x^2+4\right)+8} \le f\left(x^3-3x^2+4\right)+2$ là

(A) 6. (B) 4. (C) 5. (D) Vô số.

Lời giải.

Đặt $t = f(x^3-3x^2+4)$.

BPT $\Leftrightarrow \sqrt{2t^2+8} \le t+2 \Leftrightarrow \begin{cases} t+2 \ge 0 \\ 2t^2+8 \le t^2+4t+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \ge -2 \\ t = \pm 2 \end{cases} \Leftrightarrow t = 2.$

Với $t = 2$ thì $f(x^3-3x^2+4) = 2$.

Sử dụng phương pháp ghép trục ta có BBT

x	$-\infty$				0		2		$+\infty$
$u = x^3-3x^2+4$	$-\infty$	-1	0	1	4	1	0	1	$+\infty$
$f(u=2)$	$+\infty$	0	1	0	$f(4) > 2$	0	1	0	$+\infty$

$y = 2$

Vậy bất phương trình đã cho có 4 nghiệm thực phân biệt.

Chọn đáp án B □

Câu 68 (THPT Quế Võ 1 - Bắc Ninh – 2021).

Cho hàm số $f(x)$ bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Số nghiệm thuộc đoạn $\left[0; \dfrac{9\pi}{2}\right]$ của phương trình $f(2\sin x + 1) = 1$ là

A 5. B 6. C 7. D 4.

Lời giải.

Xét phương trình $f(2\sin x + 1) = 1$. (1)

Đặt $t = 2\sin x + 1$,suy ra $t' = 2\cos x$.

$t' = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $(k \in \mathbb{Z})$.

Vì $x \in \left[0; \dfrac{9\pi}{2}\right]$ nên $x \in \left\{0; \dfrac{\pi}{2}; \dfrac{3\pi}{2}; \dfrac{5\pi}{2}; \dfrac{7\pi}{2}; \dfrac{9\pi}{2}\right\}$.

Bảng biến thiên

x	0		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{2}$		$\frac{5\pi}{2}$		$\frac{7\pi}{2}$		$\frac{9\pi}{2}$
t'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0
t	1	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3

Phương trình (1) trở thành $f(t) = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 \\ t = a \in (1;3) \\ t = b \in (3;+\infty). \end{array}\right.$

Căn cứ bảng biến thiên ta có

+ Với $t = -1$ phương trình (1) có 2 nghiệm.

+ Với $t = a$ phương trình (1) có 5 nghiệm.

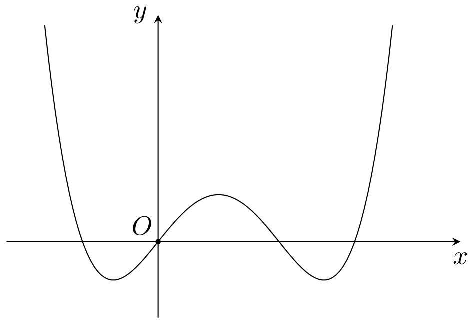
+Với $t = b$ phương trình (1) vô nghiệm.

Vậy phương trình có 7 nghiệm.

Chọn đáp án C □

Câu 69 (THPT Quảng Xương 1-Thanh Hóa – 2021).

Biết đồ thị hàm số bậc bốn $y = f(x)$ được cho bởi hình vẽ bên dưới.



Tìm số giao điểm củađồ thị hàm số $y = g(x) = [f'(x)]^2 - f(x) \cdot f''(x)$ và trục hoành.

(A) 4. (B) 0. (C) 6. (D) 2.

Lời giải.

Ta có phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị $y = g(x)$ và Ox là

$$[f'(x)]^2 - f(x) \cdot f''(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) \cdot f''(x) - [f'(x)]^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\frac{f'(x)}{f(x)}\right]' = 0.$$

Ta thấy đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt trục Ox tại 4 điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3, x_4.

Giả sử $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)$, $a \neq 0$, $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$.

Ta có: $f'(x) = a(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4) + a(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4) + a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_4) + a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$.

Suy ra $\dfrac{f'(x)}{f(x)} = \dfrac{1}{x - x_1} + \dfrac{1}{x - x_2} + \dfrac{1}{x - x_3} + \dfrac{1}{x - x_4}$.

Do đó $\left[\dfrac{f'(x)}{f(x)}\right]' = 0 \Leftrightarrow -\dfrac{1}{(x - x_1)^2} - \dfrac{1}{(x - x_2)^2} - \dfrac{1}{(x - x_3)^2} - \dfrac{1}{(x - x_4)^2} = 0$ vô nghiệm.

Vậy số giao điểm của đồ thị hàm số $y = g(x)$ và trục hoành bằng 0.

Chọn đáp án (B) □

Câu 70 (THPT Đào Duy Từ - Hà Nội – 2021).

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		2		5		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

Số nghiệm của phương trình $f\left(2^3x^4 - 4x^2 + 2\right) + 1 = 0$ là

(A) 2. (B) 3. (C) 6. (D) 5.

Lời giải.

$$f\left(2^3x^4 - 4x^2 + 2\right) + 1 = 0 \Leftrightarrow f\left(2^3x^4 - 4x^2 + 2\right) = -1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} 2^3x^4 - 4x^2 + 2 = 2 & (1) \\ 2^3x^4 - 4x^2 + 2 = a,\ (a < -1) & (2) \\ 2^3x^4 - 4x^2 + 2 = b,\ (b > 5) & (3) \end{array}\right.$$

Giải (1):

$2^{3x^4-4x^2+2}=2 \Leftrightarrow 3x^4-4x^2+2=1 \Leftrightarrow 3x^4-4x^2+1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2=1 \\ x^2=\dfrac{1}{3}. \end{array}\right.$

Suy ra phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt.

Phương trình (2) vô nghiệm.

Phương trình (3) $2^{3x^4-4x^2+2}=b \Leftrightarrow 3x^4-4x^2+2=\log_2 b \Leftrightarrow 3x^4-4x^2+2-\log_2 b=0.$ (4)

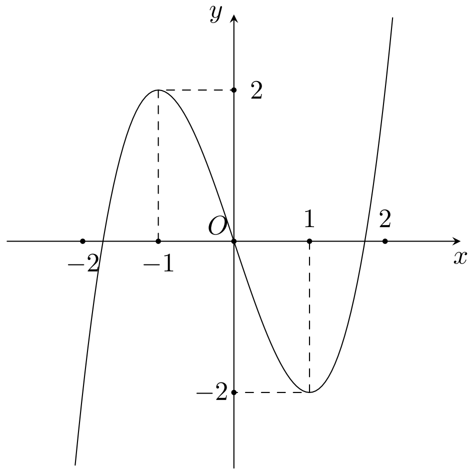
Phương trình (4) có hai nghiệm trái dấu nên phương trình(3) có hai nghiệm phân biệt khác với 4 nghiệm của (1).

Vậy, phương trình đã cho có 6 nghiệm

Chọn đáp án C □

Câu 71 (THPT Đào Duy Từ - Hà Nội – 2021).

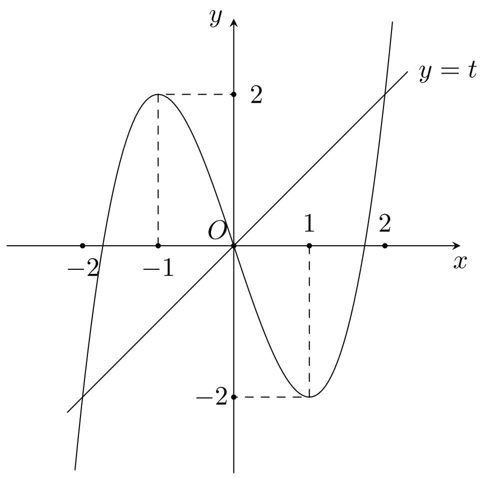
Cho hàm số $y=f(x)$ là hàm số bậc 3, có đồ thị như sau



Phương trình $f^2(\sin x+\cos x)+1=2\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)f(\sin x+\cos x)-\sin 2x$ có bao nhiêu nghiệm thực thuộc đoạn $\left[-\dfrac{5\pi}{4};\dfrac{5\pi}{4}\right]$?

(A) 1. (B) 3. (C) 4. (D) 6.

Lời giải.



$f^2(\sin x+\cos x)+1=2\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)f(\sin x+\cos x)-\sin 2x=0\,(*)$

Đặt $t=\sin x+\cos x$.

Ta có $x \in \left[-\frac{5\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}\right] \Rightarrow t \in \left[-\sqrt{2}; \sqrt{2}\right]$.

Phương trình $(*) \Leftrightarrow f^2(t) - 2t \cdot f(t) + t^2 = 0 \Leftrightarrow (f(t) - t)^2 = 0 \Leftrightarrow f(t) = t$.

Yêu cầu bài toán trở thành tìm nghiệm của phương trình $f(t) = t_{(1)}$ với $t \in \left[-\sqrt{2}; \sqrt{2}\right]$.

Từ đồ thị hàm số của phương trình (1) có 1 nghiệm $t = 0 \Leftrightarrow \sin x + \cos x = 0$

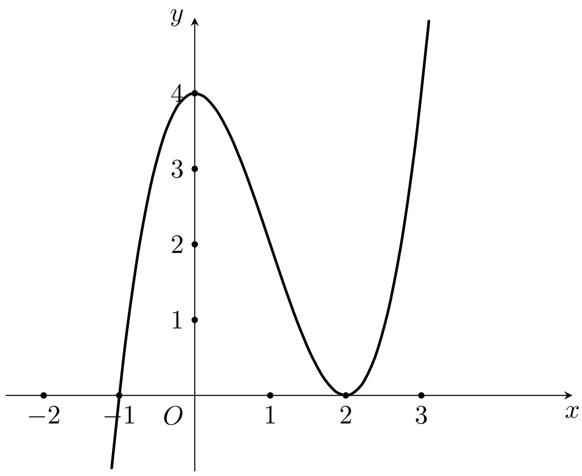
$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \quad \sqrt{2}\sin(x + \frac{\pi}{4}) = 0 \Leftrightarrow x + \frac{\pi}{4} = k\pi (k \in \mathbb{Z})\\
&\Rightarrow \quad x = -\frac{\pi}{4} + k\pi\\
&\Rightarrow \quad x \in \left[-\frac{5\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}\right]\\
&\Rightarrow \quad -\frac{5\pi}{4} \le -\frac{\pi}{4} + k\pi \le \frac{5\pi}{4}\\
&\Rightarrow \quad -1 \le k \le \frac{3}{2}; k \in \mathbb{Z} \Rightarrow k \in \{-1; 0; 1\}.
\end{aligned}$$

Vậy có 3 nghiệm.

Chọn đáp án B □

Câu 72 (THPT Đặng Thúc Hứa - Nghệ An – 2021).

Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như bên dưới



Số nghiệm phương trình $2f\left(x + 1 - \sqrt{6x+3}\right) = 1$ là

A 3. B 4. C 6. D 5.

Lời giải.

Đặt $t = x + 1 - \sqrt{6x+3}$, $x \ge -\frac{1}{2}$.

Ta có $t' = 1 - \frac{3}{\sqrt{6x+3}} = 0 \Leftrightarrow x = 1$. Khi đó bảng biến thiên của hàm số là

x	$-\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
t'		$-$	0	$+$	
t	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Phương trình đã cho trở thành $f(t) = \dfrac{1}{2}$. Dựa và đồ thị ta thấy phương trình có 3 nghiệm là
$$\left[\begin{array}{l} t = a \in (-1;0) \\ t = b \in (1;2) \\ t = c \in (2;3). \end{array}\right.$$
Dựa vào bảng biến thiên của hàm số $t = x + 1 - \sqrt{6x+3}$ ta có

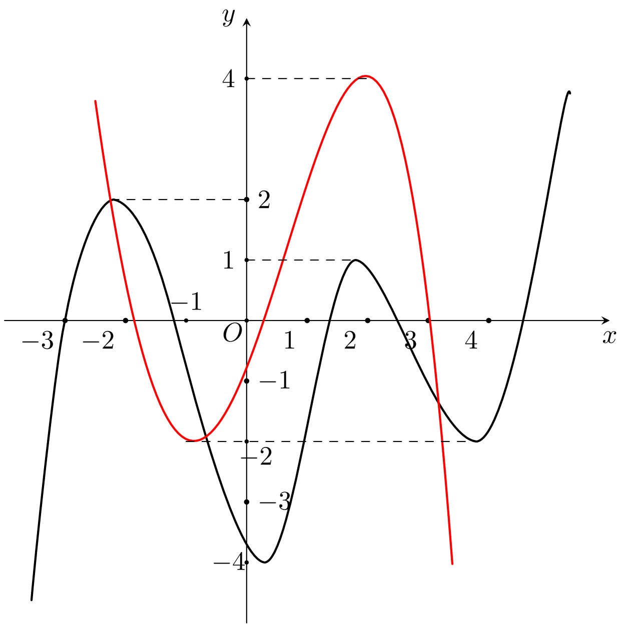
- Phương trình $t = a \Leftrightarrow x + 1 - \sqrt{6x+3} = a$ có 2 nghiệm.
- Phương trình $t = b \Leftrightarrow x + 1 - \sqrt{6x+3} = b$ có 1 nghiệm.
- Phương trình $t = c \Leftrightarrow x + 1 - \sqrt{6x+3} = c$ có 1 nghiệm.

Vậy phương trình $2f\left(x + 1 - \sqrt{6x+3}\right) = 1$ có 4 nghiệm.

Chọn đáp án (B) □

Câu 73 (THPT Triệu Sơn - Thanh Hóa – 2021).

Cho hai hàm $y = f(x)$ và $y = g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.



Khi đó tổng số nghiệm của phương trình $f(g(x)) = 0$ và $g(f(x)) = 0$ là

(A) 25. (B) 22. (C) 21. (D) 26.

Lời giải.

Ta có $g(f(x)) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = -2 \quad (1) \\ f(x) = \alpha,\ (\alpha \in (0;1)) \quad (2) \\ f(x) = 3 \quad (3). \end{array}\right.$

Dựa vào đồ thị hàm số $g(x)$ suy ra phương trình (1) có 4 nghiệm; phương trình (2) có 5 nghiệm và phương trình (3) có 1 nghiệm. Vậy phương trình $g(f(x)) = 0$ có 10 nghiệm.

Ta có $f\left(g(x)\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} g(x)=-3 \quad (4)\\ g(x)=-1 \quad (5)\\ g(x)=1 \quad (6)\\ g(x)=a,\ (a\in(1;2)) \quad (7)\\ g(x)=b,\ (b\in(4;5)) \quad (8).\end{array}\right.$

Dựa vào đồ thị hàm số $g(x)$ suy ra phương trình (4) có 1 nghiệm; phương trình (5); (6); (7) mỗi phương trình có 3 nghiệm và phương trình (8) có 1 nghiệm. Suy ra phương trình $f\left(g(x)\right)=0$ có 11 nghiệm.

Vậy tổng số nghiệm của phương trình $f\left(g(x)\right)=0$ và $f\left(g(x)\right)=0$ là 21.

Chọn đáp án C □

Câu 74 (Chuyên Quốc Học Huế - 2021).

Cho hàm số$f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f'(x)=f(x)+\mathrm{e}^x\cdot\cos 2021x$ và $f(0)=0$. Đồ thị hàm số $y=f(x)$ cắt trục hoành tại bao nhiêu điểm có hoành độ thuộc đoạn $[-1;1]$?

(A) 4043. (B) 3. (C) 1. (D) 1287.

Lời giải.

$$\begin{aligned} & f'(x)=f(x)+\mathrm{e}^x\cdot\cos 2021x\\ \Leftrightarrow\ & f'(x)-f(x)=e^x\cdot\cos 2021x\\ \Leftrightarrow\ & f'(x)\cdot\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-x}\cdot f(x)=\cos 2021x.\\ \Leftrightarrow\ & \left(\mathrm{e}^{-x}\cdot f(x)\right)'=\cos 2021x\\ \Leftrightarrow\ & \int\left(\mathrm{e}^{-x}\cdot f(x)\right)'\mathrm{d}x=\int\cos 2021x\,\mathrm{d}x.\\ \Leftrightarrow\ & \mathrm{e}^{-x}\cdot f(x)=\frac{1}{2021}\sin 2021x+C.\end{aligned}$$

Ta có: $f(0)=0$ suy ra $C=0$, do đó $f(x)=\dfrac{\sin 2021x}{2021\cdot\mathrm{e}^{-x}}$

$$f(x)=0\Leftrightarrow\frac{\sin 2021x}{2021\cdot\mathrm{e}^{-x}}=0\Leftrightarrow\sin 2021x=0\Leftrightarrow 2021x=k\pi\Leftrightarrow x=\frac{k\pi}{2021},\ (k\in\mathbb{Z}).$$

Vì $x\in[-1;1]$ nên

$$\frac{-2021}{\pi}\le k\le\frac{2021}{\pi}\Leftrightarrow -643{,}6\le k\le 643{,}6\Rightarrow k\in\{-643;\ldots;643\}.$$

Vậy có 1287 nghiệm.

Chọn đáp án D □

Câu 75 (Sở Bạc Liêu – 2021). Cho hàm số $y=f(x)=x^3+ax^2+bx-3$, a, b là các số thực thỏa mãn $\begin{cases} a+b-2>0\\ 24+3(3a+b)<0\end{cases}$. Hỏi phương trình $2f(x)\cdot f''(x)=\left[f'(x)\right]^2$ có bao nhiêu nghiệm?

(A) 2. (B) 4. (C) 3. (D) 1.

Lời giải.

Không mất tính tổng quát, chọn $a = -\dfrac{33}{4}$, $b = 14$.

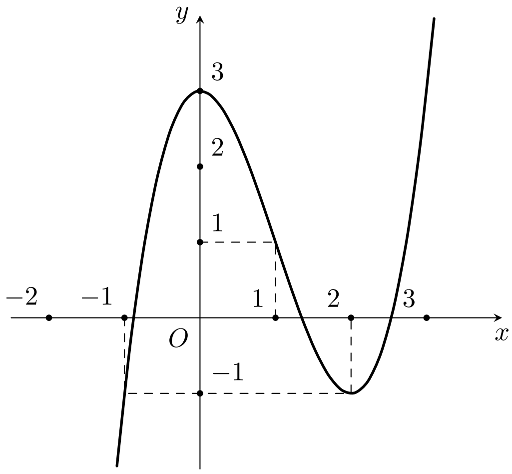
Khi đó: Hai số a, b thỏa hệ $\begin{cases} a+b-2>0 \\ 24+3(3a+b)<0. \end{cases}$

Ta có: $f(x) = x^3 - \dfrac{33}{4}x^2 + 14x - 3$, $f'(x) = 3x^2 - \dfrac{33}{2}x + 14$, $f''(x) = 6x - \dfrac{33}{2}$.

Xét: $2f(x)\cdot f''(x) = [f'(x)]^2 \Leftrightarrow 3x^4 - 33x^3 + 84x^2 - 36x - 97 = 0 \quad (*)$.

Vậy $(*)$ có 2 nghiệm thực. □

Câu 76 (Sở Cần Thơ – 2021). Cho hàm số bậc ba có đồ thị như sau:



Số nghiệm của phương trình $\left[f\left(x^2+1\right)\right]^2 - 2f\left(x^2+1\right) - 3 = 0$ là

Ⓐ 3. Ⓑ 4. Ⓒ 5. Ⓓ 2.

Lời giải.

$\left[f\left(x^2+1\right)\right]^2 - 2f\left(x^2+1\right) - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f\left(x^2+1\right) = -1 \\ f\left(x^2+1\right) = 3. \end{array}\right.$

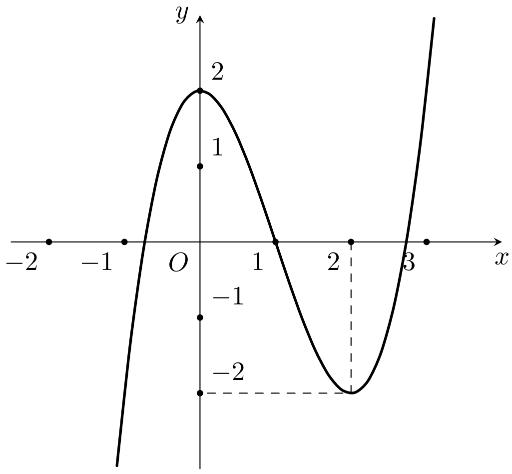
- $f\left(x^2+1\right) = -1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+1=-1 \text{ (VN)} \\ x^2+1=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow x = \pm 1.$
- $f\left(x^2+1\right) = 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+1=0 \text{ (VN)} \\ x^2+1=a>2 \end{array}\right. \Leftrightarrow x^2 = a-1>1 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{a-1}.$

(Các nghiệm $x = \pm\sqrt{a-1}$ không trùng với các nghiệm $x = \pm 1$).

Vậy số nghiệm phương trình $\left[f\left(x^2+1\right)\right]^2 - 2f\left(x^2+1\right) - 3 = 0$ là 4.

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 77 (Sở Cần Thơ – 2021). Cho hàm số $f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị là đường cong trong hình bên dưới.



Số nghiệm của phương trình $\sqrt{f(f(x))+4}=f(x)+1$ là

Ⓐ 7. Ⓑ 4. Ⓒ 3. Ⓓ 2.

Lời giải.

Ta có $f(x)=x^3+bx^2+cx+d$. $f'(x)=3x^2+2bx+c$.

Do đồ thị hàm số có hai điểm cực trị $M(0;2)$, $N(2;-2)$ nên ta có hệ sau

$$\begin{cases}f'(0)=0\\ f(0)=2\\ f'(2)=0\\ f(2)=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}c=0\\ d=2\\ 12+4b+c=0\\ 8+4b+2c+d=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}c=0\\ d=2\\ b=-3.\end{cases}$$

Suy ra $f(x)=x^3-3x^2+2$.

Đặt $t=f(x)$. Phương trình đã cho trở thành $\sqrt{f(t)+4}=t+1$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}t\geq -1\\ f(t)+4=t^2+2t+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t\geq -1\\ (t^3-3t^2+2)+4=t^2+2t+1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}t\geq -1\\ t^3-4t^2-2t+5=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t\geq -1\\ \left[\begin{array}{l}t=1\\ t=\dfrac{3+\sqrt{29}}{2}\\ t=\dfrac{3-\sqrt{29}}{2}\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\\ t=\dfrac{3+\sqrt{29}}{2}.\end{array}\right.$$

Với $t=1$ ta được $f(x)=1\in(-2;2)$. Dựa vào đồ thị ta thấy phương trình này có 3 nghiệm phân biệt.

Với $t=\dfrac{3+\sqrt{29}}{2}$ ta được $f(x)=\dfrac{3+\sqrt{29}}{2}\in(2;+\infty)$. Dựa vào đồ thị ta thấy phương trình này có đúng 1 nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có 4 nghiệm phân biệt. □

Câu 78 (Đề minh họa 2022). Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	-5	$\nearrow$	$+\infty$

Số nghiệm thực của phương trình $f'(f(x)) = 0$ là

(A) 3. (B) 4. (C) 5. (D) 6.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên suy ra $f'(f(x)) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} f(x) = -1 & (1) \\ f(x) = 2 & (2). \end{array}\right.$

(1): $f(x) = -1$ là phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng $y = -1$.

Từ bảng biến thiên suy ra đường thẳng $y = -1$ cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại 3 điểm phân biệt, suy ra phương trình (1) có 3 nghiệm.

(2): $f(x) = 2$ là phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng $y = -1$.

Từ bảng biến thiên suy ra đường thẳng $y = 2$ cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại 1 điểm, suy ra phương trình (1) có 1 nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có 4 nghiệm thực.

Chọn đáp án (B) □

Câu 79 (Đại học Hồng Đức – 2022).

Cho $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$. Phương trình $\sqrt{f(f(x)+1)+1} = f(x) + 2$ có số nghiệm thực là

(A) 7. (B) 6. (C) 4. (D) 9.

Lời giải.

Đặt $t = f(x) + 1 \Rightarrow t = x^3 - 3x^2 + 2 \quad (*)$

Suy ra $t' = 3x^2 - 6x$. Khi đó $t' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2. \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
t'		$+$	0	$-$	0	$+$	
t	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Khi đó $\sqrt{f(f(x)+1)+1} = f(x) + 2$ trở thành

$$\sqrt{f(t)+1} = t + 1 \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq -1 \\ f(t) + 1 = t^2 + 2t + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq -1 \\ t^3 - 4t^2 - 2t + 1 = 0. \end{cases}$$

Từ bảng biến thiên ta có

+) Với $t = a \in (-1; 0)$, phương trình(*) có 3 nghiệm phân biệt.

+) Với $t = b \in (0; 1)$, phương trình(*) có 3 nghiệm phần biệt khác 3 nghiệm trên.

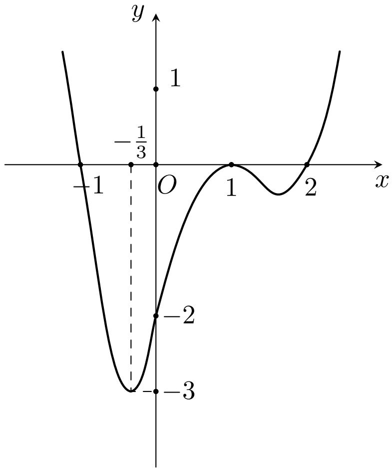
+) Với $t = c \in (4; 5)$, phương trình(*) có 1 nghiệm khác 6 nghiệm trên.

Vậy phương trình đã cho có 7 nghiệm.

Chọn đáp án A □

Câu 80 (Liên trường Quảng Nam 2022).

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp 2 trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị $f'(x)$ là đường cong trong hình vẽ bên.



Đặt $g(x) = f\left(f'(x) - 1\right)$. Gọi S là tập nghiệm của phương trình $g'(x) = 0$. Số phần tử của tập S là

A 9. B 10. C 8. D 6.

Lời giải.

Ta có: $g'(x) = f''(x) \cdot f'\left(f'(x) - 1\right)$. Xét phương trình: $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f''(x) = 0 \\ f'\left(f'(x) - 1\right) = 0. \end{array}\right.$

Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ có ba điểm cực trị, nên ta có: $f''(x) = 0$ có ba nghiệm $x = \dfrac{-1}{3}$; $x = 1$; $x = a$ $(a \in (1; 2))$.

Ta có: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 1 \\ x = 2 \end{array}\right.$.

Do đó: $f'\left(f'(x) - 1\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'(x) - 1 = -1 \\ f'(x) - 1 = 1 \\ f'(x) - 1 = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'(x) = 0 \\ f'(x) = 2 \\ f'(x) = 3. \end{array}\right.$

Với $f'(x) = 0$ có ba nghiệm $x = -1$; $x = 1$; $x = 2$.

Với $f'(x) = 2$ có hai nghiệm $x = b$ $(b < -1)$; $x = c$ $(c > 2)$.

Với $f'(x) = 3$ có hai nghiệm $x = d$ $(d < b < -1)$; $x = e$ $(e > c > 2)$.

Vậy phương trình $g'(x) = 0$ có tất cả 9 nghiệm phân biệt.

Chọn đáp án (A) □

Câu 81 (THPT Cò Nòi - Sơn La 2022).

Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ sau

x	0		1		$\sqrt{2}$		4		$+\infty$
y'		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$-\dfrac{3}{2}\ \Vert\ -\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	$-\infty\ \Vert\ -\dfrac{3}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

Số nghiệm thực của phương trình $f(1-2f(x)) = 3$ là

(A) 14. (B) 16. (C) 8. (D) 9.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$.

x	0		1		$\sqrt{2}$		4		$+\infty$
y'		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$-\dfrac{3}{2}\ \Vert\ -\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	$-\infty\ \Vert\ -\dfrac{3}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

Ta có: $f(x) = 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = a\ (0 < a < 1) \\ x = b\ \left(1 < b < \sqrt{2}\right) \\ x = c\ \left(\sqrt{2} < c < 4\right) \\ x = d\ (d > 4). \end{array}\right.$

Khi đó:

$$f\left(1-2f(x)\right) = 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1-2f(x) = a\ (0 < a < 1) \\ 1-2f(x) = b\ (1 < b < \sqrt{2}) \\ 1-2f(x) = c\ (\sqrt{2} < c < 4) \\ 1-2f(x) = d\ (d > 4) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = \dfrac{1-a}{2} = m\ \left(0 < m < \dfrac{1}{2}\right) \\ f(x) = \dfrac{1-b}{2} = n\ \left(\dfrac{1-\sqrt{2}}{2} < n < 0\right) \\ f(x) = \dfrac{1-c}{2} = p\ \left(-\dfrac{3}{2} < p < \dfrac{1-\sqrt{2}}{2}\right) \\ f(x) = \dfrac{1-d}{2} = q\ \left(q < -\dfrac{3}{2}\right). \end{array}\right.$$

Từ bảng biến thiên ta thấy:

Phương trình: $f(x) = m\ \left(0 < m < \dfrac{1}{2}\right)$ có 4 nghiệm phân biệt.

Phương trình: $f(x) = n\ \left(\dfrac{1-\sqrt{2}}{2} < n < 0\right)$ có 4 nghiệm phân biệt.

Phương trình: $f(x) = p\ \left(-\dfrac{3}{2} < p < \dfrac{1-\sqrt{2}}{2}\right)$ có 4 nghiệm phân biệt.

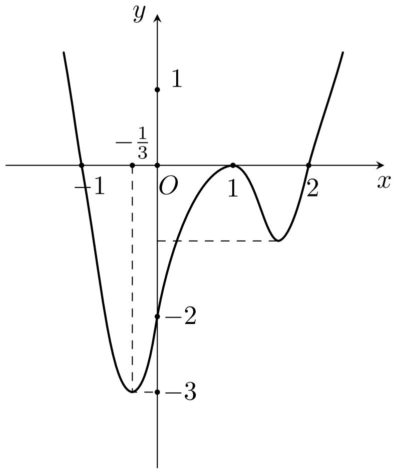
Phương trình: $f(x) = q \left(q < -\dfrac{3}{2}\right)$ có 2 nghiệm phân biệt.

Vậy phương trình $f(1 - 2f(x)) = 3$ có 14 nghiệm phân biệt.

Chọn đáp án A □

Câu 82 (THPT Trần Quốc Tuấn - Quảng Ngãi – 2022).

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp 2 trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị $f'(x)$ là đường cong trong hình vẽ bên.



Đặt $g(x) = f(f'(x))$. Gọi S là tập nghiệm của phương trình $g'(x) = 0$. Số phần tử của tập S là

(A) 9. (B) 10. (C) 7. (D) 11.

Lời giải.

Ta có $g'(x) = f''(x) \cdot f'(f'(x))$.

Phương trình $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f''(x) = 0 \\ f'(f'(x)) = 0. \end{array}\right.$

Phương trình $f''(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{1}{3} \\ x = 1 \\ x = x_1 \in (1; 2). \end{array}\right.$

Phương trình $f'(f'(x)) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'(x) = -1 \\ f'(x) = 1 \\ f'(x) = 2. \end{array}\right.$

$f'(x) = -1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = x_1 \\ x = x_2 \in (0; 1) \\ x = x_3 \in \left(-1; -\dfrac{1}{3}\right). \end{array}\right.$

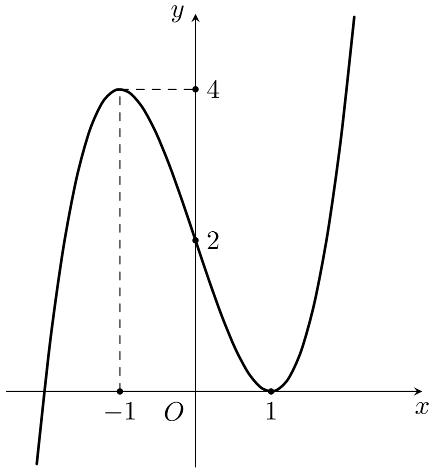
$f'(x) = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = x_4 < -1 \\ x = x_5 > 2. \end{array}\right.$

$$f'(x) = 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = x_6 < x_4 \\ x = x_7 > x_5. \end{array}\right.$$

Vậy phương trình $g'(x) = 0$ có 9 nghiệm phân biệt, hay S có 9 phần tử.

Chọn đáp án (A) □

Câu 83 (Sở Hòa Bình 2022). Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Số nghiệm thuộc đoạn $[0; 5\pi]$ của phương trình $f(\cos x) = 1$ là

(A) 6. (B) 3. (C) 4. (D) 5.

Lời giải.

Đặt $u = \cos x$. Phương trình trở thành $f(u) = 1$.

Ta có $u' = -\sin x$; $u' = 0 \Leftrightarrow x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Vì $x \in [0; 5\pi]$ nên $x \in \{0; \pi; 2\pi; 3\pi; 4\pi; 5\pi\}$.

Bảng ghép trục

x	0		π		2π		3π		4π		5π
u	1		-1		1		-1		1		-1
$f(u)$	0	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	4

$y = 1$

Vậy phương trình $f(\cos x) = 1$ có 5 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[0; 5\pi]$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 84 (THPT Nguyễn Huệ - Huế - 2022).

Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	-1	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Số nghiệm thuộc đoạn $[-\pi; 2\pi]$ của phương trình $4f(\cos 2x) + 5 = 0$ là

Ⓐ 12. Ⓑ 6. Ⓒ 9. Ⓓ 10.

Lời giải.

Đặt $u(x) = \cos 2x$.

Ta có: $u'(x) = -2\sin 2x$; $u'(x) = 0 \Leftrightarrow \sin 2x = 0 \Leftrightarrow x = k\dfrac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Do $x \in [-\pi; 2\pi] \Rightarrow x \in \left\{-\pi; -\dfrac{\pi}{2}; 0; \dfrac{\pi}{2}; \pi; \dfrac{3\pi}{2}; 2\pi\right\}$.

Ta có bảng biến thiên

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π
$\cos 2x$	1	0	-1	0	1	0	-1	0	1	0	-1	0	1
$f(\cos 2x)$	-2	$\nearrow -1 \searrow$	-2	$\nearrow -1 \searrow$	-2	$\nearrow -1 \searrow$	-2	$\nearrow -1 \searrow$	-2	$\nearrow -1 \searrow$	-2	$\nearrow -1 \searrow$	-2

Ta có $4f(\cos 2x) + 5 = 0 \Leftrightarrow f(\cos 2x) = -\dfrac{5}{4}$.

Từ bảng biến thiên suy ra phương trình $4f(\cos 2x) + 5 = 0$ có 12 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[-\pi; 2\pi]$.

Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 85 (Cụm trường Bắc Ninh 2022).

Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	1	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Số nghiệm thực của phương trình $f(f(x)) + 2 = 0$ là

Ⓐ 3. Ⓑ 6. Ⓒ 4. Ⓓ 2.

Lời giải.

Ta có: $f(f(x)) + 2 = 0 \Leftrightarrow f(f(x)) = -2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} f(x) = -2 & (1) \\ f(x) = 2. & (2) \end{array}\right.$

Số nghiệm của phương trình $f(x) = -2$ là số giao điểm của đồ thị $y = f(x)$ và đường thẳng $y = -2$. Dựa vào bảng biến thiên suy ra phương trình(1) có 2 nghiệm phân biệt.

Số nghiệm của phương trình $f(x) = 2$ là số giao điểm của đồ thị $y = f(x)$ và đường thẳng $y = 2$. Phương trình(2) có 2 nghiệm phân biệt.

Vậy phương trình $f(f(x)) + 2 = 0$ có 4 nghiệm.

Chọn đáp án Ⓒ □

Dạng 3. Biện luận tương giao hàm hợp, hàm ẩn chứa tham số

Câu 86 (Đề Tham Khảo 2019). Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(\sin x) = m$ có nghiệm thuộc khoảng $(0; \pi)$ là

(A) $(-1; 3)$. (B) $[-1; 1)$. (C) $[-1; 3)$. (D) $(-1; 1)$.

Lời giải.

Đặt $t = \sin x \Rightarrow \forall x \in (0; \pi) \Rightarrow t \in (0; 1]$.

Vậy phương trình trở thành $f(t) = m$.

Dựa và đồ thị hàm số suy ra $m \in [-1; 1)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 87 (Mã 102 - 2020 Lần 2). Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ:

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $6f\left(x^2 - 4x\right) = m$ có ít nhất ba nghiệm thực phân biệt thuộc khoảng $(0; +\infty)$?

(A) 25. (B) 30. (C) 29. (D) 24.

Lời giải.

Ta đặt: $g(x) = f\left(x^2 - 4x\right)$.

$g'(x) = (2x - 4)f'\left(x^2 - 4x\right) = 2(x - 2)(x^2 - 4x + 4)(x^2 - 4x + 2)(x^2 - 4x)$.

Dựa vào bảng biến thiên ta suy ra

$$g'(x) = 2(x - 2)^3(x^2 - 4x + 2)x(x - 4).$$

Mặt khác

$g(0) = f(0) = -3$; $g(2 - \sqrt{2}) = g(2 + \sqrt{2}) = f(-2) = 2$; $g(2) = f(-4) = -2$; $g(4) = f(0) = -3$.

Ta có bảng biến thiên:

Từ bảng biến thiên ta được: yêu cầu bài toán tương đương $-3 < \dfrac{m}{6} \leq 2 \Leftrightarrow -18 < m \leq 12$.

Vậy có tất cả 30 giá trị của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án (B) □

Câu 88 (Mã 103 - 2020 Lần 2). Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $3f\left(x^2 - 4x\right) = m$ có ít nhất ba nghiệm thực phân biệt thuộc khoảng $(0; +\infty)$?

(A) 15. (B) 12. (C) 14. (D) 13.

Lời giải.

Đặt $u = x^2 - 4x$. (1)

Ta có BBT sau:

Ta thấy: + Với $u < -4$, phương trình (1) vô nghiệm.

+ Với $u = -4$, phương trình (1) có một nghiệm $x = 2 > 0$.

+ Với $-4 < u < 0$, phương trình (1) có hai nghiệm $x > 0$.

+ Với $u \geq 0$, phương trình (1) có một nghiệm $x > 0$.
Khi đó $3f(x^2 - 4x) = m \Rightarrow f(u) = \dfrac{m}{3}$ (2), ta thấy:
+ Nếu $\dfrac{m}{3} = -3 \Leftrightarrow m = -9$, phương trình (2) có một nghiệm $u = 0$ nên phương trình đã cho có một nghiệm $x > 0$.
+ Nếu $-3 < \dfrac{m}{3} < -2 \Leftrightarrow -9 < m < -6$, phương trình (2) có một nghiệm $u > 0$ và một nghiệm $u \in (-2; 0)$ nên phương trình đã cho có ba ngiệm $x > 0$.
+ Nếu $\dfrac{m}{3} = -2 \Leftrightarrow m = -6$, phương trình (2) có một nghiệm $u = -4$, một nghiệm $u \in (-2; 0)$ và một nghiệm $u > 0$ nên phương trình đã cho có bốn nghiệm $x > 0$.
+ Nếu $-2 < \dfrac{m}{3} < 2 \Leftrightarrow -6 < m < 6$, phương trình (2) có một nghiệm $u < -4$, hai nghiệm $u \in (-4; 0)$ và một nghiệm $u > 0$ nên phương trình đã cho có năm nghiệm $x > 0$.
+ Nếu $\dfrac{m}{3} = 2 \Leftrightarrow m = 6$, phương trình (2) có một nghiệm $u < -4$, một nghiệm $u = -2$ và một nghiệm $u > 0$ nên phương trình đã cho có ba nghiệm $x > 0$.
+ Nếu $\dfrac{m}{3} > 2 \Leftrightarrow m > 6$, phương trình (2) có một nghiệm $u < -4$ và một nghiệm $u > 0$ nên phương trình đã cho có một nghiệm $x > 0$.
Vậy $-9 < m \leq 6 \Rightarrow$ có 15 giá trị m nguyên thỏa ycbt.

Chọn đáp án A □

Câu 89 (Mã 101 – 2020 Lần 2). Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $5f(x^2 - 4x) = m$ có ít nhất 3 nghiệm phân biệt thuộc khoảng $(0; +\infty)$

A 24. B 21. C 25. D 20.

Lời giải.

Đặt $t = x^2 - 4x$. Ta có $t' = 2x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2$.

Bảng biến thiên

Với $t = x^2 - 4x$.

Dựa vào bảng biến thiên ta có $-3 < \dfrac{m}{5} \leq 2 \Leftrightarrow -15 < m \leq 10$. Vì m nguyên nên $m \in \{-14; -13; ....; 10\}$. Do đó có 25 giá trị nguyên của m thỏa mãn đề bài.

Chọn đáp án C □

Câu 90 (Mã 104 - 2020 Lần 2). Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $4f(x^2 - 4x) = m$ có ít nhất 3 nghiệm thực phân biệt thuộc khoảng $(0; +\infty)$?

A 16. B 19. C 20. D 17.

Lời giải.

Ta có $4f(x^2 - 4x) = m \Leftrightarrow f(x^2 - 4x) = \dfrac{m}{4}$.
Đặt $t = x^2 - 4x \Rightarrow t' = 2x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2$.

Vì $x \in (0; +\infty) \Rightarrow t \geq -4$.

Ta có $f(t) = \dfrac{m}{4}$.

Phương trình đã cho có ít nhất 3 nghiệm phân biệt thuộc khoảng $(0;+\infty) \Rightarrow -3 < \dfrac{m}{4} \leq 2 \Leftrightarrow -12 < m \leq 8$ mà m nguyên nên $m \in \{-11;-10;...;0;1;...;8\}$.

Vậy có 20 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Chọn đáp án C □

Câu 91 (Chuyên Biên Hòa - Hà Nam – 2020).

Cho hàm số $f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình sau

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $2f(\sin x - 2) - \dfrac{2\sin^3 x}{3} + \sin x > m + \dfrac{5\cos 2x}{4}$ nghiệm đúng với mọi $x \in \left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$.

A. $m \leq 2f(-3) + \dfrac{11}{12}$.

B. $m < 2f(-1) + \dfrac{19}{12}$.

C. $m \leq 2f(-1) + \dfrac{19}{12}$.

D. $m < 2f(-3) + \dfrac{11}{12}$.

Lời giải.

Ta có $2f(\sin x - 2) - \dfrac{2\sin^3 x}{3} + \sin x > m + \dfrac{5\cos 2x}{4}$

$\Leftrightarrow m < 2f(\sin x - 2) - \dfrac{2\sin^3 x}{3} + \sin x - \dfrac{5(1-2\sin^2 x)}{4}$.

Đặt $t = \sin x - 2$ (với $x \in \left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$ thì $t \in (-3;-1)$, khi đó bất phương trình được viết lại thành

$$m < 2f(t) - \frac{2(t+2)^3}{3} + (t+2) - \frac{5[1-2(t+2)^2]}{4} \text{ hay } m < 2f(t) - \frac{2}{3}t^3 - \frac{3}{2}t^2 + 3t + \frac{65}{12} \quad (*).$$

Xét hàm số $g(t) = 2f(t) - \dfrac{2}{3}t^3 - \dfrac{3}{2}t^2 + 3t + \dfrac{65}{12}$ trên đoạn $[-3;-1]$.

Ta có $g'(t) = 2f'(t) - 2t^2 - 3t + 3$.

Do đó $g'(t) = 0 \Leftrightarrow f'(t) = t^2 + \dfrac{3}{2}t - \dfrac{3}{2}$.

Dựa vào sự tương giao của đồ thị hàm số $y = f'(t)$ và parabol $y = t^2 + \dfrac{3}{2}t - \dfrac{3}{2}$ trên đoạn $[-3;-1]$ thì $g'(t) = 0 \Leftrightarrow t \in \{-3;-1\}$.

Suy ra bảng biến thiên của hàm số $g(t)$ trên đoạn $[-3;-1]$ như sau

Bất phương trình đã cho nghiệm đúng với mọi $x \in \left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$ khi và chỉ khi bất phương trình $(*)$ nghiệm đúng với mọi $t \in (-3;-1)$. Điều đó tương đương với $m \leq g(-1) = 2f(-1) + \dfrac{19}{12}$ dựa vào tính liên tục của hàm số $g(t)$.

Chọn đáp án C □

Câu 92 (Chuyên Lam Sơn – 2020). Cho hàm số $y = f(x)$, hàm số $y = f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Bất phương trình $f(x) > x^2 - 2x + m$ (m là tham số thực) nghiệm đúng với mọi $x \in (1;2)$ khi và chỉ khi

A. $m \leq f(2) - 2$.

B. $m \leq f(1) + 1$.

C. $m \leq f(1) - 1$.

D. $m \leq f(2)$.

Lời giải.

Ta có: $f(x) > x^2 - 2x + m$ $(\forall x \in (1;2)) \Leftrightarrow f(x) - x^2 + 2x > m$ $(\forall x \in (1;2))$. (*)

Gọi $g(x) = f(x) - (x^2 - 2x) \Rightarrow g'(x) = f'(x) - (2x - 2)$.

Theo đồ thị ta thấy $f'(x) < (2x-2)$ $\forall x \in [1;2]) \Rightarrow g'(x) < 0$ $(\forall x \in [1;2])$.

Vậy hàm số $y = g(x)$ liên tục và nghịch biến trên $[1; 2]$.

Do đó $(*) \Leftrightarrow m \leq \min\limits_{[1;2]} g(x) = g(2) = f(2)$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 93 (Chuyên Bến Tre – 2020). Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ. Cho bất phương trình $3f(x) \geq x^3 - 3x + m$ (m là tham số thực). Điều kiện cần và đủ để bất phương trình $3f(x) \geq x^3 - 3x + m$ đúng với mọi $x \in \left[-\sqrt{3}; \sqrt{3}\right]$ là

(A) $m \geq 3f(1)$. (B) $m \geq 3f(-\sqrt{3})$. (C) $m \leq 3f(0)$. (D) $m \leq 3f(\sqrt{3})$.

Lời giải.

Ta có $3f(x) \geq x^3 - 3x + m \Leftrightarrow 3f(x) - x^3 + 3x \geq m$.

Đặt $g(x) = 3f(x) - x^3 + 3x$. Tính $g'(x) = 3f'(x) - 3x^2 + 3$.

Có $g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = x^2 - 1$.

Nghiệm của phương trình $g'(x) = 0$ là hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = f'(x)$ và parabol $y = x^2 - 1$.

Dựa vào đồ thị hàm số ta có: $f'(x) = x^2 - 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\sqrt{3} \\ x = 0 \\ x = \sqrt{3} \end{array}\right.$

Để bất phương trình nghiệm đúng với mọi $x \in \left[-\sqrt{3}; \sqrt{3}\right]$ thì $m \leq \min\limits_{\left[-\sqrt{3};\sqrt{3}\right]} g(x) = g\left(\sqrt{3}\right) = 3f(\sqrt{3})$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 94 (Chuyên Hùng Vương - Gia Lai – 2020).

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Gọi S là tập hợp tất cả giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(\sin x) - m + 2 = 2\sin x$ có nghiệm thuộc khoảng $(0; \pi)$. Tổng các phần tử của S bằng

(A) 4. (B) -1. (C) 3. (D) 2.

Lời giải.

Đặt $t = \sin x$, với $x \in (0; \pi) \Rightarrow t \in (0; 1]$.

Ta được phương trình: $f(t) - 2t = m - 2 \Leftrightarrow f(t) = 2t + m - 2$. (1)

Số nghiệm của phương trình bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(t)$ và đường thẳng $(r)\colon y = 2t + m - 2$.

Gọi $(p)\colon y = 2x + 1$ song song với đường thẳng $(\Delta)\colon y = 2t$ và đi qua điểm $A(0; 1)$.

Gọi $q\colon y = 2x - 3$ song song với đường thẳng $(\Delta)\colon y = 2t$ và đi qua điểm $B(1; -1)$.

Để phương trình $f(\sin x) - m + 2 = 2\sin x$ có nghiệm thuộc khoảng $(0; \pi)$ thì phương trình (1) phải có nghiệm $t \in (0; 1]$, suy ra đường thẳng r nằm trong miền nằm giữa hai đường thẳng q và p (có thể trùng lên q và bỏ p) $\Rightarrow -3 \leq m - 2 < 1 \Leftrightarrow -1 \leq m < 3 \Rightarrow m \in \{-1; 0; 1; 2\} \Rightarrow S = \{-1; 0; 1; 2\}$.

Do đó tổng các phần tử là: $-1 + 0 + 1 + 2 = 2$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 95 (Chuyên Hùng Vương - Gia Lai – 2020).

Cho hàm số $f(x) = x^3 + x + 2$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(\sqrt[3]{f^3(x) + f(x) + m}\right) = -x^3 - x + 2$ có nghiệm $x \in [-1; 2]$?

(A) 1750. (B) 1748. (C) 1747. (D) 1746.

Lời giải.

Xét hàm số $f(t) = t^3 + t + 2$, ta có $f'(t) = 3t^2 + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$.

Do đó hàm số f đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Ta có

$$\begin{aligned} f\left(\sqrt[3]{f^3(x) + f(x) + m}\right) = f(-x) &\Leftrightarrow -x = \sqrt[3]{f^3(x) + f(x) + m} \\ &\Leftrightarrow f^3(x) + f(x) + x^3 + m = 0. \quad (3) \end{aligned}$$

Xét $h(x) = f^3(x) + f(x) + x^3 + m$ trên đoạn $[-1; 2]$.

Ta có $h'(x) = 3f'(x) \cdot f^2(x) + f'(x) + 3x^2 = f'(x)[3f^2(x) + 1] + 3x^2$.

Ta có $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0, \forall x \in [-1; 2] \Rightarrow h'(x) > 0, \forall x \in [-1; 2]$.

Hàm số $h(x)$ đồng biến trên $[-1; 2]$ nên $\min\limits_{[-1;2]} h(x) = h(-1) = m - 1$, $\max\limits_{[-1;2]} h(x) = h(2) = m + 1748$.

Phương trình (1) có nghiệm khi và chỉ khi

$$\min_{[-1;2]} h(x) \cdot \max_{[-1;2]} h(x) \leq 0 \Leftrightarrow h(-1) \cdot h(2) \Leftrightarrow (m-1)(1748 + m) \leq 0 \Leftrightarrow -1748 \leq m \leq 1.$$

Do m nguyên nên tập các giá trị m thỏa mãn là $S = \{-1748; -1747; \ldots; 0; 1\}$.

Vậy có tất cả 1750 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Chọn đáp án (A) □

Câu 96 (Chuyên Quang Trung – 2020).

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[2; 4]$ và có bảng biến thiên như hình vẽ bên. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $x + 2\sqrt{x^2 - 2x} = m \cdot f(x)$ có nghiệm thuộc đoạn $[2; 4]$?

(A) 6. (B) 5. (C) 4. (D) 3.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên ta có $\min\limits_{[2;4]} f(x) = f(4) = 2$ và $\max\limits_{[2;4]} f(x) = f(2) = 4$.

Hàm số $g(x) = x + 2\sqrt{x^2 - 2x}$ liên tục và đồng biến trên $[2; 4]$.

Suy ra $\min\limits_{[2;4]} g(x) = g(2) = 2$ và $\max\limits_{[2;4]} g(x) = g(4) = 4 + 4\sqrt{2}$.

Ta có $x + 2\sqrt{x^2 - 2x} = m \cdot f(x) \Leftrightarrow \dfrac{x + 2\sqrt{x^2 - 2x}}{f(x)} = m \Leftrightarrow \dfrac{g(x)}{f(x)} = m$.

Xét hàm số $h(x) = \dfrac{g(x)}{f(x)}$ liên tục trên $[2; 4]$.

Vì $g(x)$ nhỏ nhất và $f(x)$ lớn nhất đồng thời xảy ra tại $x = 2$ nên

$$\min_{[2;4]} h(x) = \frac{\min\limits_{[2;4]} g(x)}{\max\limits_{[2;4]} f(x)} = \frac{g(2)}{f(2)} = h(2) = \frac{1}{2}.$$

Vì $g(x)$ lớn nhất và $f(x)$ nhỏ nhất đồng thời xảy ra tại $x = 4$ nên

$$\max_{[2;4]} h(x) = \frac{\max\limits_{[2;4]} g(x)}{\min\limits_{[2;4]} f(x)} = \frac{g(4)}{f(4)} = h(4) = 2 + 2\sqrt{2}.$$

Từ đó suy ra phương trình $h(x) = m$ có nghiệm khi và chỉ khi $\frac{1}{2} \le m \le 2 + 2\sqrt{2}$.

Vậy có 4 giá trị nguyên của m để phương trình có nghiệm.

Chọn đáp án C □

Câu 97 (huyên Sơn La – 2020). Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Số giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f^2(\cos x) + (m - 2019)f(\cos x) + m - 2020 = 0$ có đúng 6 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[0; 2\pi]$ là

A 1. B 3. C 2. D 5.

Lời giải.

Ta có $f^2(\cos x) + (m - 2019)f(\cos x) + m - 2020 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(\cos x) = -1 \\ f(\cos x) = 2020 - m. \end{array}\right.$ (1)

* Với $f(\cos x) = -1$.

Dựa vào đồ thị ta có $f(\cos x) = -1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 0 \\ \cos x = x_1\ (x_1 > 1)\ (VN) \end{array}\right. \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi.$

Vì $x \in [0; 2\pi] \Rightarrow x \in \left\{\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right\}$.

* Với $f(\cos x) = 2020 - m$.

Đặt $t = \cos x$ $(t \in [-1; 1])$.

Với $t \in (-1; 1]$ thì phương trình $t = \cos x$ có hai nghiệm phân biệt thuộc $[0; 2\pi]$.

Với $t = -1$ thì phương trình $t = \cos x$ có một nghiệm thuộc $[0; 2\pi]$.

Phương trình trở thành $f(t) = 2020 - m$.

Để phương trình (1) có tất cả 6 nghiệm phân biệt thì phương trình $f(\cos x) = 2020 - m$ có 4 nghiệm phân biệt, hay phương trình $f(t) = 2020 - m$ có hai nghiệm $t \in (-1; 1]$.

Dựa vào đồ thị ta có để phương trình $f(t) = 2020 - m$ có hai nghiệm $t \in (-1; 1]$ thì $-1 < 2020 - m \le 1 \Leftrightarrow 2019 \le m < 2021$.

Vì m nguyên nên $m \in \{2019; 2020\}$.

Vậy có 2 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Chọn đáp án C □

Câu 98 (Chuyên Vĩnh Phúc – 2020).

Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Biết $f(-1) = 1; f\left(-\frac{1}{e}\right) = 2$. Tìm tất cả các giá trị của m để bất phương trình $f(x) < \ln(-x) + m$ nghiệm đúng với mọi $x \in \left(-1; \frac{-1}{e}\right)$.

A $m \ge 2$. B $m \ge 3$. C $m > 2$. D $m > 3$.

Lời giải.

Ta có $f(x) < \ln(-x) + m \Leftrightarrow m > f(x) - \ln(-x)$.
Xét hàm số $g(x) = f(x) - \ln(-x)$ trên $\left(-1; -\dfrac{1}{e}\right)$.
Có $g'(x) = f'(x) - \dfrac{1}{x}$.
Trên $\left(-1; -\dfrac{1}{e}\right)$ có $f'(x) > 0$ và $\dfrac{1}{x} < 0$ nên $g'(x) > 0, \forall x \in \left(-1; -\dfrac{1}{e}\right)$
$\Rightarrow$ hàm số $g(x)$ đồng biến trên $\left(-1; -\dfrac{1}{e}\right)$.
Vậy nên $f(x) < \ln(-x) + m$ nghiệm đúng với mọi $x \in \left(-1; -\dfrac{1}{e}\right)$

$$\Leftrightarrow m \geq g(x), \forall x \in \left(-1; -\dfrac{1}{e}\right) \Leftrightarrow m \geq g\left(-\dfrac{1}{e}\right) \Leftrightarrow m \geq 3.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 99 (Sở Phú Thọ - 2020). Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(-1) = 5$, $f(-3) = 0$ và có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

Số giá trị nguyên dương của tham số m để phương trình $3f(2-x) + \sqrt{x^2+4} - x = m$ có nghiệm trong khoảng $(3; 5)$ là

(A) 16. (B) 17. (C) 0. (D) 15.

Lời giải.

Đặt $g(x) = 3f(2-x) + \sqrt{x^2+4} - x$ với $x \in (3; 5)$.
Ta có: $g'(x) = -3f'(2-x) + \dfrac{x}{\sqrt{x^2+4}} - 1$.
Với $x \in (3; 5)$:
Ta có: $2 - x \in (-3; -1)$ nên $f'(2-x) > 0$ suy ra $-3f'(2-x) < 0$.
Ta có: $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+4}} < \dfrac{x}{x} = 1$.
Suy ra $g'(x) = -3f'(2-x) + \dfrac{x}{\sqrt{x^2+4}} - 1 < 0, \forall x \in (3; 5)$ nên hàm số nghịch biến trên $(3; 5)$.
Suy ra $\min\limits_{(3;5)} g(x) = g(5) = 3f(-3) + \sqrt{5^2+4} - 5 = \sqrt{29} - 5$;
$\max\limits_{(3;5)} g(x) = g(3) = 3f(-1) + \sqrt{3^2+4} - 3 = 12 + \sqrt{13}$.
Để phương trình $3f(2-x) + \sqrt{x^2+4} - x = m$ có nghiệm thì $\sqrt{29} - 5 \leq m \leq 12 + \sqrt{13}$ mà m nguyên dương nên $m \in \{1, 2, ..., 15\}$ tức là có 15 giá trị.
Chọn đáp án (D) □

Câu 100 (Sở Phú Thọ - 2020). Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(-1) = 1$, $f\left(-\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right) = 2$. Hàm số $f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Bất phương trình $f(x) < \ln(-x) + x^2 + m$ nghiệm đúng với mọi $x \in \left(-1; -\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)$ khi và chỉ khi

(A) $m > 0$. (B) $m > 3 - \dfrac{1}{\mathrm{e}^2}$. (C) $m \geq 3 - \dfrac{1}{\mathrm{e}^2}$. (D) $m \geq 0$.

Lời giải.

Điều kiện: $-x > 0 \Leftrightarrow x < 0$.
Bất phương trình đã cho tương đương với $f(x) - \ln(-x) - x^2 < m$. (*)

Xét hàm số $g(x) = f(x) - \ln(-x) - x^2$ trên $\left(-1; -\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)$.

Ta có $g'(x) = f'(x) - \dfrac{1}{x} - 2x$. Với $x \in \left(-1; -\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)$ thì $f'(x) > 0$; $-\dfrac{1}{x} - 2x > 0$ nên $g'(x) > 0$.

Do đó hàm số $g(x)$ đồng biến trên $\left(-1; -\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)$.

Suy ra (*) nghiệm đúng với mọi $x \in \left(-1; -\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)$ khi và chỉ khi

$$m \geq g\left(-\frac{1}{\mathrm{e}}\right) = f\left(-\frac{1}{\mathrm{e}}\right) - \ln\frac{1}{\mathrm{e}} - \frac{1}{\mathrm{e}^2} = 3 - \frac{1}{\mathrm{e}^2}.$$

Chọn đáp án C □

Câu 101 (Sở Hà Tĩnh – 2020). Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(f(\cos x)\right) = m$ có nghiệm thuộc khoảng $\left(\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{3\pi}{2}\right)$?

A. 2. B. 4. C. 5. D. 3.

Lời giải.

Khi $x \in \left(\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{3\pi}{2}\right)$ thì $\cos x \in [-1; 0)$.

Dựa vào đồ thị hàm số $y = f(x)$ ta thấy khi $\cos x \in [-1; 0)$ thì $f(\cos x) \in [-1; 1)$; khi đó $f\left(f(\cos x)\right) \in [-1; 3)$.

Do đó phương trình $f\left(f(\cos x)\right) = m$ có nghiệm thuộc khoảng $\left(\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{3\pi}{2}\right)$ khi và chỉ khi $-1 \leq m < 3$.

Vậy có 4 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án B □

Câu 102 (Sở Yên Bái – 2020). Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(x^3 - 3x^2 + m) + 3 = 0$ có nghiệm thuộc đoạn $[-1; 2]$.

A. 7. B. 8. C. 10. D. 5.

Lời giải.

Từ hình vẽ, ta suy ra được hình vẽ là đồ thị của hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$.

$$\begin{aligned} f(x^3 - 3x^2 + m) + 3 = 0 &\Leftrightarrow f(x^3 - 3x^2 + m) = -3 \\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^3 - 3x^2 + m = -1 \\ x^3 - 3x^2 + m = 2 \end{array}\right. \\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^3 - 3x^2 + 1 = -m \\ x^3 - 3x^2 + 1 = -m + 3. \end{array}\right. \end{aligned}$$

Để phương trình đã cho có nghiệm thuộc đoạn $[-1; 2]$ thì $\left[\begin{array}{l} -3 \leq -m \leq 1 \\ -3 \leq -m + 3 \leq 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1 \leq m \leq 3 \\ 2 \leq m \leq 6 \end{array}\right.$.

$\Rightarrow m \in [-1; 6]$.

Do $m \in \mathbb{Z}$ nên có 8 giá trị m để phương trình đã cho có nghiệm.

Chọn đáp án B □

Câu 103 (Sở Yên Bái – 2020). Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Số các giá trị nguyên của tham số m để bất phương trình $16 \cdot 8^{f(x)} \leq (-m^2 + 5m) \cdot 4^{f(x)} - (4 - f^2(x)) \cdot 16^{f(x)}$ nghiệm đúng với mọi số thực x là

Ⓐ 3. Ⓑ 5. Ⓒ 1. Ⓓ 4.

Lời giải.

$16 \cdot 8^{f(x)} \leq (-m^2 + 5m) \cdot 4^{f(x)} - \left(4 - f^2(x)\right) \cdot 16^{f(x)} \Leftrightarrow -m^2 + 5m \geq 16 \cdot 2^{f(x)} + \left(4 - f^2(x)\right) \cdot 4^{f(x)}$.

Vì. nên ta có $16 \cdot 2^f(x) + (4 - f^2(x)) \cdot 4^{f(x)} \leq 16 \cdot 2^{-2} + 0 = 4 \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow -m^2 + 5m \geq 4 \Leftrightarrow m^2 - 5m + 4 \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq m \leq 4$.

Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 104 (Hậu Lộc 2 - Thanh Hóa – 2020).

Cho hàm số $y = f(x)$, hàm số $y = f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Bất phương trình $m + \mathrm{e}^x < f(x)$ có nghiệm với mọi $x \in (-1; 1)$ khi và chỉ khi

Ⓐ $m \leq \min\left\{f(1) - \mathrm{e};\ f(-1) - \dfrac{1}{\mathrm{e}}\right\}$. Ⓑ $m < f(0) - 1$.

Ⓒ $m < \min\left\{f(1) - \mathrm{e};\ f(-1) - \dfrac{1}{\mathrm{e}}\right\}$. Ⓓ $m \leq f(0) - 1$.

Lời giải.

Ta có: $m + \mathrm{e}^x < f(x) \Leftrightarrow m < f(x) - \mathrm{e}^x$.

Xét hàm số $g(x) = f(x) - \mathrm{e}^x$ với $x \in (-1; 1)$.

$g'(x) = f'(x) - \mathrm{e}^x$; $g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) - \mathrm{e}^x = 0 \Leftrightarrow f'(x) = \mathrm{e}^x$.

Dễ thấy với $x \in (-1; 1)$; $f'(0) = 1$; $\mathrm{e}^0 = 1 \Rightarrow x = 0$ là nghiệm của phương trình $f'(x) = \mathrm{e}^x$ hơn nữa là nghiệm duy nhất (Minh họa bằng hình vẽ).

Dựa vào vị trí đồ thị hình vẽ trên ta có bảng biến thiên

Qua bảng biến thiên và chỉ xét trong khoảng $(-1; 1)$ $m < g(x) \Leftrightarrow m \leq \min\{g(-1); g(1)\} \Leftrightarrow m \leq \min\left\{f(1) - \mathrm{e}; f(-1) - \dfrac{1}{\mathrm{e}}\right\}$.

Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 105 (Kìm Thành - Hải Dương – 2020).

Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ

Bất phương trình $\mathrm{e}^{\sqrt{x}} \geq m - f(x)$ có nghiệm $x \in [4; 16]$ khi và chỉ khi

Ⓐ $m < f(4) + \mathrm{e}^2$. Ⓑ $m \leq f(4) + \mathrm{e}^2$. Ⓒ $m < f(16) + \mathrm{e}^2$. Ⓓ $m \leq f(16) + \mathrm{e}^2$.

Lời giải.

Từ BBT suy ra $f'(x) > 0, \forall x \in [4; 16]$.

Ta có: $\mathrm{e}^{\sqrt{x}} \geq m - f(x) \Leftrightarrow m \leq \mathrm{e}^{\sqrt{x}} + f(x)$. (*)

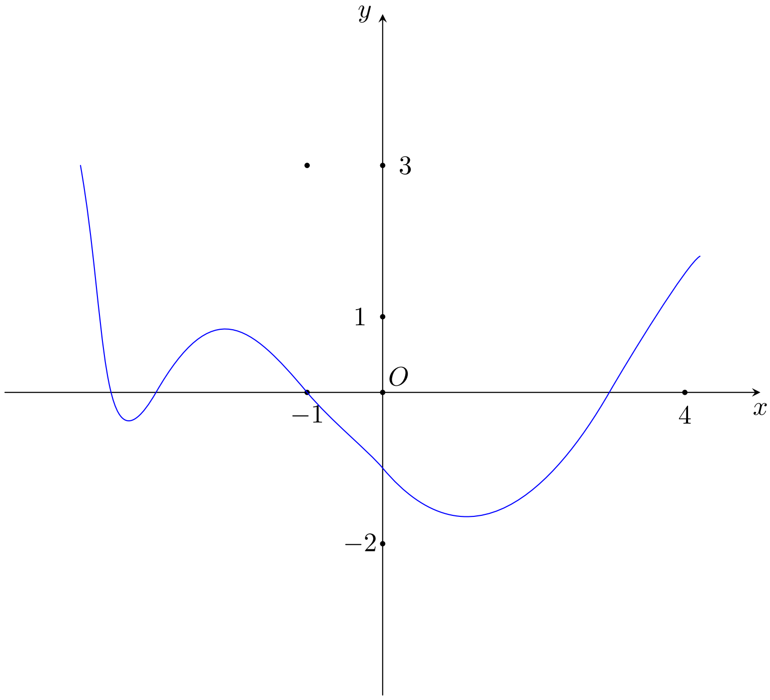
Đặt $g(x) = \mathrm{e}^{\sqrt{x}} + f(x)$, $\forall x \in [4; 16] \Rightarrow g'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} + f'(x) > 0, \forall x \in [4; 16]$.

Bảng biến thiên

(*) thỏa mãn khi $m \leq \min\limits_{[4;16]} g(x) = f(4) + \mathrm{e}^2$. □

Câu 106 (Kìm Thành - Hải Dương – 2020).

Cho hàm số đa thức bậc bốn $y = f(x)$ và $y = g(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây đường đậm hơn là đồ thị hàm số $y = f(x)$. Biết rằng hai đồ thị tiếp xúc với nhau tại điểm có hoành độ là -3 và cắt nhau tại hai điểm nữa có hoành độ lần lượt là -1 và 3. Tìm tập hợp tất các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $f(x) \geq g(x) + m$ nghiệm đúng với mọi $x \in [-3; 3]$.



Ⓐ $\left(-\infty; \dfrac{12-10\sqrt{3}}{9}\right]$. Ⓑ $\left[\dfrac{12-8\sqrt{3}}{9}; +\infty\right)$.

Ⓒ $\left[\dfrac{12-10\sqrt{3}}{9}; +\infty\right)$. Ⓓ $\left(-\infty; \dfrac{12-8\sqrt{3}}{9}\right]$.

Lời giải.

Xét hàm số $h(x) = f(x) - g(x)$.

Vì đồ thị hàm số $f(x)$ tiếp xúc với đồ thị hàm số $g(x)$ tại điểm có hoành độ -3 và cắt nhau tại hai điểm nữa có hoành độ lần lượt là -1 và 3 suy ra $h(x) = f(x) - g(x) = a(x+3)^2(x+1)(x-3)$.

Nhận xét từ đồ thị khi $x \to \pm\infty$ thì phần đồ thị $f(x)$ nằm dưới $g(x)$ nên $a < 0$.

Mặt khác ta có $h(0) = 27a = -2 - (-1) = -1 \Rightarrow a = \dfrac{-1}{27}$.

Xét hàm $y = h(x) = \dfrac{-1}{27}(x+3)^2(x+1)(x-3) = \dfrac{-1}{27}(x^4 + 4x^3 - 6x^2 - 36x - 27)$.

Ta có $y' = h'(x) = \dfrac{-1}{27}(4x^3 + 12x^2 - 12x - 36) = \dfrac{-1}{27}(x+3)(4x^2 - 12)$.

Suy ra $y' = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = -3 \\ x = \sqrt{3} \\ x = -\sqrt{3}. \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

Vậy tập hợp tất các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $f(x) \geq g(x) + m \Leftrightarrow f(x) - g(x) \geq m$ nghiệm đúng với mọi $x \in [-3; 3]$ là $m \leq \dfrac{12-8\sqrt{3}}{9}$.

Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 107 (Kìm Thành - Hải Dương – 2020).

Cho hàm số $f(x) = x^5 + 3x^3 - 4m$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(\sqrt[3]{f(x)+m}\right) = x^3 - m$ có nghiệm thuộc đoạn $[1;2]$?

Ⓐ 18. Ⓑ 17. Ⓒ 15. Ⓓ 16.

Lời giải.

Xét phương trình $f\left(\sqrt[3]{f(x)+m}\right) = x^3 - m$. (1)

Đặt $t = \sqrt[3]{f(x)+3}$. Ta có $\begin{cases} f(t) = x^3 - m \\ f(x) = t^3 - m \end{cases} \Rightarrow f(t) + t^3 = f(x) + x^3$. (2)

Xét hàm số $g(u) = f(u) + u^3 \Rightarrow g'(u) = f'(u) + 3u^2 = 5u^4 + 12u^2 \geq 0, \forall u$.

Khi đó (2) $\Leftrightarrow g(t) = g(x) \Leftrightarrow t = x \Leftrightarrow \sqrt[3]{f(x)+m} = x \Leftrightarrow x^3 - f(x) = m \Leftrightarrow x^5 + 2x^3 = 3m$.

Xét hàm số $h(x) = x^5 + 2x^3 \Rightarrow h'(x) = 5x^4 + 6x^2 \geq 0, \forall x$.

Ta có bảng biến thiên của hàm số $h(x)$

Từ bảng biến thiên suy ra để (1) có nghiệm thuộc đoạn $[1;2] \Leftrightarrow 3 \leq 3m \leq 48 \Leftrightarrow 1 \leq m \leq 16$.

Mà $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{1;2;3;...;16\}$ suy ra có 16 giá trị của m thỏa mãn bài toán. □

Câu 108 (Tiên Lãng - Hải Phòng – 2020).

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ.

Số giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f^2(\cos x) + (3-m)f(\cos x) + 2m - 10 = 0$ có đúng 4 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $\left[-\frac{\pi}{3};\pi\right]$ là

Ⓐ 5. Ⓑ 6. Ⓒ 7. Ⓓ 4.

Lời giải.

Xét $f^2(\cos x) + (3-m)f(\cos x) + 2m - 10 = 0$. Ta có $\Delta = (m-7)^2$.

Do đó $\left[\begin{array}{l} f(\cos x) = m - 5 \quad (1) \\ f(\cos x) = 2. \quad (2) \end{array}\right.$ Với $f(\cos x) = 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = a < -1 \\ \cos x = \frac{1}{2} \\ \cos x = 1. \end{array}\right.$

Trường hợp này được 3 nghiệm trong $\left[-\frac{\pi}{3};\pi\right]$.

Để phương trình đã cho có đúng 4 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $\left[-\frac{\pi}{3};\pi\right]$ thì (1) có đúng 1 nghiệm trong $\left[-\frac{\pi}{3};\pi\right]$ và không trùng với nghiệm của các phương trình $\cos x = \frac{1}{2}; \cos x = 1$ $\Leftrightarrow f(t) = m - 5$ với $t = \cos x$ có đúng 1 nghiệm trong $\left[-1;\frac{1}{2}\right) \Rightarrow -4 \leq m - 5 < 2 \Leftrightarrow 1 \leq m < 7$.

Do m nguyên nên có 6 giá trị của m thỏa mãn.

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 109 (Trần Phú - Quảng Ninh – 2020).

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $y = f(\sin x) = 3\sin x + m$ có nghiệm thuộc khoảng $(0;\pi)$. Tổng các phần tử của S bằng

Ⓐ -5. Ⓑ -8. Ⓒ -6. Ⓓ -10.

Lời giải.

Đặt $t = \sin x$, $x \in (0;\pi) \Leftrightarrow t \in (0;1]$.

Phương trình $f(\sin x) = 3\sin x + m$ có nghiệm thuộc khoảng $(0;\pi)$ khi và chỉ khi phương trình $f(t) = 3t + m$ có nghiệm thuộc $(0;1]$ khi và chỉ khi đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng $d\colon y = 3x + m$ có điểm chung với hoành độ $x \in (0;1]$.

$\Delta_1\colon y = 3x - 4$ là đường thẳng qua điểm $(1;-1)$ và $\Delta_2\colon y = 3x + 1$ là đường thẳng qua điểm $(0;1)$.

Đồ thị hàm số $y = f(x)$ trên $(0;1]$ là phần đường cong nằm giữa hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2.

Vậy phương trình $f(t) = 3t + m$ có nghiệm thuộc nửa khoảng $(0;1]$ khi và chỉ khi d dao động trong miền giới hạn bởi Δ_1 và Δ_2 (không trùng với Δ_2) khi và chỉ khi $-4 \leq m < 1 \Leftrightarrow m \in \{-4;-3;-2;-1;0\}$.

Vậy tổng giá trị của S bằng -10.

Chọn đáp án D □

Câu 110 (NK HCM-2019). Cho $f(x)$ là một hàm số liên tục trên đoạn $[-2;9]$, biết $f(-1) = f(2) = f(9) = 3$ và $f(x)$ có bảng biến thiên như sau

Tìm m để phương trình $f(x) = f(m)$ có ba nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[-2;9]$.

A. $m \in (-2;9] \setminus ((-1;2) \cup \{6\})$.
B. $m \in [-2;9] \setminus ((-1;2) \cup \{6\})$.
C. $m \in (-2;9] \setminus \{6\}$.
D. $m \in [-2;9] \setminus \{-2;6\}$.

Lời giải.

Phương trình $f(x) = f(m)$ có ba nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[-2;\ 9]$ khi $-4 < f(m) \leq 3$.

Trên $(-2;0)$, hàm số $f(x)$ đồng biến và $f(-1) = 3$ nên $-4 < f(m) \leq 3 \Leftrightarrow -2 < m \leq -1$.

Trên $(0;6)$, hàm số $f(x)$ nghịch biến và $f(2) = 3$ nên $-4 < f(m) \leq 3 \Leftrightarrow 6 > m \geq 2$.

Trên $(6;9)$, hàm số $f(x)$ đồng biến và $f(9) = 3$ nên $-4 < f(m) \leq 3 \Leftrightarrow 6 < m \leq 9$.. Vậy điều kiện của m là: $m \in (-2;-1] \cup [2;6) \cup (6;9] \Leftrightarrow m \in (-2;9] \setminus ((-1;2) \cup \{6\})$.

Chọn đáp án A □

Câu 111 (Chuyên Đại học Vinh 2019).

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $f(x^3 - 3x) = m$ có 6 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[-1;2]$?

A. 3.
B. 2.
C. 6.
D. 7.

Lời giải.

Đặt $t = g(x) = x^3 - 3x$, $x \in [-1;2]$.

$$g'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -1. \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên của hàm số $g(x)$ trên $[-1;2]$

Suy ra với $t = -2$, có 1 giá trị của x thuộc đoạn $[-1;2]$.

$t \in (-2;2]$, có 2 giá trị của x thuộc đoạn $[-1;2]$.

Phương trình $f(x^3 - 3x) = m$ có 6 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[-1;2]$ khi và chỉ khi phương trình $f(t) = m$ có 3 nghiệm phân biệt thuộc $(-2; 2]$. (1)

Dựa vào đồ thị hàm số $y = f(x)$ và m nguyên ta có hai giá trị của m thỏa mãn điều kiện (1) là $m = 0,\ m = -1$.

Chọn đáp án B □

Câu 112 (Hội 8 trường chuyên ĐBSH 2019).

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.

Số giá trị nguyên dương của m để phương trình $f(x^2 - 4x + 5) + 1 = m$ có nghiệm là

(A) Vô số. (B) 4. (C) 0. (D) 3.

Lời giải.

Đặt $t = x^2 - 4x + 5$. Ta có $t = (x-2)^2 + 1 \geq 1$.

Phương trình $f(x^2 - 4x + 5) + 1 = m\,(1)$ trở thành phương trình $f(t) = m - 1\,(2)$.

Sử dụng các nhận xét ở trên và đồ thị của hàm số $y = f(x)$ ta có (1) có nghiệm $\Leftrightarrow$ (2) có nghiệm thuộc $[1; +\infty) \Leftrightarrow m - 1 \leq 2 \Leftrightarrow m \leq 3$.

Vậy tập hợp các giá trị nguyên dương của m thỏa yêu cầu bài toán là $\{1\,; 2\,; 3\}$.

Chọn đáp án D □

Câu 113. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $2f\left(3 - 4\sqrt{6x - 9x^2}\right) = m - 3$ có nghiệm

(A) 13. (B) 12. (C) 8. (D) 10.

Lời giải.

Điều kiện: $6x - 9x^2 \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq \dfrac{2}{3}$.

Đặt $t = 3 - 4\sqrt{6x - 9x^2}$; $0 \leq x \leq \dfrac{2}{3}$.

Ta có: $t'(x) = \dfrac{12(3x-1)}{\sqrt{6x - 9x^2}}$; $0 < x < \dfrac{2}{3}$;

$t'(x) = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{1}{3}$ (nhận).

$t(0) = 3$; $t\left(\dfrac{1}{3}\right) = -1$; $t\left(\dfrac{2}{3}\right) = 3$.

Nên $-1 \leq t \leq 3$.

Mặt khác: $f(t) = \dfrac{m-3}{2}$, $t \in [-1; 3]$ có nghiệm.

Từ đồ thị ta có $-5 \leq \dfrac{m-3}{2} \leq 1 \Leftrightarrow -7 \leq m \leq 5$.

Do m nguyên nên có 13 giá trị m là $-7,\ -6,\ -5,\ -4,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$.

Chọn đáp án A □

Câu 114 (Chuyên Bắc Giang 2019).

Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên

Tìm m để phương trình $f^2(2x) - 2f(2x) - m - 1 = 0$ có nghiệm trên $(-\infty; 1)$

(A) $(-1; +\infty)$. (B) $[-2; +\infty)$. (C) $(-2; +\infty)$. (D) $[-1; +\infty)$.

Lời giải.

Ta có: $f^2(2x) - 2f(2x) - m - 1 = 0 \Leftrightarrow f^2(2x) - 2f(2x) - 1 = m$ (1).

Đặt $t = f(x)$, với $x \in (-\infty; 1)$ thì $2x \in (-\infty; 2)$, khi đó $t = f(2x) \in [0; +\infty)$.

Phương trình (1) trở thành: $t^2 - 2t - 1 = m$ (2).

(1) có nghiệm trên $(-\infty; 1)$ tương ứng khi và chỉ khi (2) có nghiệm trên $[0; +\infty)$.

Xét $g(t) = t^2 - 2t - 1$, $t \in [0; +\infty)$, có $g'(t) = 2t - 2$, $g'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 1$.

Bảng biến thiên của $g(t)$

Từ bảng biến thiên suy ra phương trình (2) có nghiệm $t \in [0; +\infty)$ khi và chỉ khi $m \geq -2$.

Chọn đáp án B □

Câu 115. Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ

Gọi S là tập hợp các giá trị của $m (m \in \mathbb{R})$ sao cho $(x-1)[m^3 f(2x-1) - mf(x) + f(x) - 1] \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Số phần tử của tập S là

A 0. B 3. C 2. D 1.

Lời giải.

Từ đồ thị ta thấy $f(x) = 1$. Đặt $g(x) = m^3 f(2x-1) - mf(x) + f(x) - 1$.

$(x-1)\left[m^3 f(2x-1) - mf(x) + f(x) - 1\right] \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}.$quad (*)

Từ giả thiết ta có điều kiện cần để có $(*)$ là $g(1) = 0 \Leftrightarrow m^3 f(1) - mf(1) + f(1) - 1 = 0 \Leftrightarrow m^3 - m = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = \pm 1. \end{array}\right.$

Điều kiện đủ:

+)Với $m = 0$ ta có $(*) \Leftrightarrow g(x) = (x-1)[f(x) - 1] \geq 0$ đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Do đó $m = 0$ thỏa mãn.

+)Với $m = 1$ ta có $(x-1)[f(2x-1) - 1] = \dfrac{1}{2}[(2x-1) - 1][f(2x-1) - 1] \geq 0\ \forall x \in \mathbb{R}$. Do đó $m = 1$ thỏa mãn.

+) Với $m = -1$, $(*) \Leftrightarrow (x-1)[-f(2x-1) + 2f(x) - 1] \geq 0 \quad (**)$.

Xét $x > 1$ ta có

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(2x-1) + 1}{2f(x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{a(2x-1)^3 + b(2x-1)^2 + c(2x-1) + d + 1}{2(ax^3 + bx^2 + cx + d)} = 4 > 0$$

$\Rightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R}, \alpha > 1$: $f(2\alpha - 1) + 1 > 2f(\alpha)$ hay $2f(\alpha) - f(2\alpha - 1) - 1 < 0$.

$\Rightarrow (\alpha - 1)[2f(\alpha) - f(2\alpha - 1) - 1] < 0$ (không thỏa mãn $(**)$).

Do đó $m = -1$ không thỏa mãn.

Vậy S có 2 phần tử.

Chọn đáp án C □

Câu 116. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên R và có đồ thị như hình bên.

Phương trình $f(2\sin x) = m$ có đúng ba nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[-\pi; \pi]$ khi và chỉ khi

A $m \in \{-3; 1\}$. B $m \in (-3; 1)$. C $m \in [-3; 1)$. D $m \in (-3; 1]$.

Lời giải.

Đặt$t = 2\sin x$ (*), $x \in [-\pi;\pi] \Rightarrow t \in [-2;2]$.

Khi đó phương trình $f(2\sin x) = m$ trở thành $f(t) = m$ (1). Số nghiệm của PT(1) bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(t)$ và đường thẳng $y = m$.

Nhận thấy:

Với $t \in \{-2;2\}$ thì PT(*) có 1 nghiệm $x \in [-\pi;\pi]$.

Với $t = 0$ thì PT(*) có 3 nghiệm phân biệt $x \in [-\pi;\pi]$.

Với $t \in (-2;2)\setminus\{0\}$ thì PT(*) có 2 nghiệm phân biệt $x \in [-\pi;\pi]$.

Do đó, dựa vào đồ thị đã cho ta có:

+) TH 1: $m < -3$ thì phương trình (1) có một nghiệm $t < -2$. Suy ra$m < -3$ bị loại.

+) TH 2:$m = -3$ thì PT(1) có hai nghiệm là $t = 1$ và $t = -2$. Suy ra$m = -3$ là giá trị thỏa mãn.

+) TH 3: $-3 < m < 1$ thì phương trình (1) có ba nghiệm phân biệt thuộc khoảng $(-2;2)$. Suy ra$-3 < m < 1$ bị loại.

+) TH 4: Xét trường hợp $m = 1$ thì PT(1) có hai nghiệm là $t = -1$ và $t = 2$. Suy ra$m = 1$ là giá trị thỏa mãn.

+) TH 5: $m > 1$ thì phương trình (1) có một nghiệm $t > 2$. Do đó $m > 1$ bị loại.

Vậy các giá trị m cần tìm là $m \in \{-3;1\}$.

Chọn đáp án A □

Câu 117. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $2 \cdot f\left(3 - 3\sqrt{-9x^2 + 30x - 21}\right) = m - 2019$ có nghiệm.

Ⓐ 15. Ⓑ 14. Ⓒ 10. Ⓓ 13.

Lời giải.

Ta có: $\sqrt{-9x^2 + 30x - 21} = \sqrt{4 - (3x-5)^2} \Rightarrow 0 \le \sqrt{-9x^2 + 30x - 21} \le 2 \Rightarrow -3 \le 3 - 3\sqrt{-9x^2 + 30x - 21} \le 3$.

Đặt $t = 3 - 3\sqrt{-9x^2 + 30x - 21} \Rightarrow t \in [-3;3]$.

Khi đó, phương trình $2 \cdot f\left(3 - 3\sqrt{-9x^2 + 30x - 21}\right) = m - 2019$ (1) $\Leftrightarrow 2f(t) = m - 2019$ $\Leftrightarrow f(t) = \dfrac{m - 2019}{2}$ (2).

Phương trình (1) có nghiệm khi và chỉ khi phương trình (2) có nghiệm $t \in [-3;3]$.

Dựa vào đồ thị hàm số$y = f(x)$ ta có, phương trình (2) có nghiệm $t \in [-3;3]$ khi và chỉ khi $-5 \le \dfrac{m - 2019}{2} \le 1 \Leftrightarrow -10 \le m - 2019 \le 2 \Leftrightarrow 2009 \le m \le 2021$.

Vì $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{2009, 2010, ..., 2021\}$. Vậy có 13 giá trị m nguyên thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án D □

Câu 118 (Thi thử cụm Vũng Tàu – 2019).

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $2f(3 - 4\sqrt{6x - 9x^2}) = m - 3$ có nghiệm.

Ⓐ 9. Ⓑ 17. Ⓒ 6. Ⓓ 5.

Lời giải.

Điều kiện: $6x - 9x^2 \ge 0 \Leftrightarrow 0 \le x \le \dfrac{2}{3}$.

Đặt $t = 3 - 4\sqrt{6x - 9x^2}, x \in \left[0; \frac{2}{3}\right]$.

Ta có: $t' = -4 \cdot \dfrac{6 - 18x}{2\sqrt{6x - 9x^2}} = 0 \Rightarrow x = \dfrac{1}{3} \in (0; \dfrac{2}{3})$.

Bảng biến thiên cho $t = 3 - 4\sqrt{6x - 9x^2}$. Vì $x \in \left[0; \frac{2}{3}\right] \Rightarrow t \in [-1; 3]$.

Phương trình trở thành: $2f(t) = m - 3 \Leftrightarrow f(t) = \dfrac{m-3}{2}, t \in [-1; 3]\,(*)$.

Phương trình $2f(3 - 4\sqrt{6x - 9x^2}) = m - 3$ có nghiệm$\Leftrightarrow f(t) = \dfrac{m-3}{2}$ có nghiệm $t \in [-1; 3]$ $\Leftrightarrow -6 \leq \dfrac{m-3}{2} \leq -2 + a \Leftrightarrow -12 \leq m - 3 \leq -4 + 2a \Leftrightarrow -9 \leq m \leq -1 + 2a$, với $\max\limits_{[-1;3]} f(t) = a + 2, a \in (0; \dfrac{1}{2})$.

Mà $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-9; -8; -7; ..; -1\} \Rightarrow$ có 9 giá trị m nguyên thỏa ycbt.

Chọn đáp án (A) □

Câu 119 (SGD Điện Biên – 2019). Cho hàm số $y = f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ với $(a, b, c, d, e \in \mathbb{R})$. Biết hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ, đạt cực trị tại điểm $O(0; 0)$ và cắt trục hoành tại $A(3; 0)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m trên $[-5; 5]$ để phương trình $f(-x^2 + 2x + m) = e$ có bốn nghiệm phân biệt.

(A) 0. (B) 2. (C) 5. (D) 7.

Lời giải.

Theo hình vẽ ta có $y = f'(x)$ là hàm số bậc ba bên $a \neq 0$.

$f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d \Rightarrow f''(x) = 12ax^2 + 6bx + 2c$.

Theo giả thiết, ta có $\begin{cases} f'(0) = 0 \\ f'(3) = 0 \\ f''(0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 0 \\ 108a + 27b + 6c + d = 0 \\ c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -4a \\ c = d = 0. \end{cases}$

$\Rightarrow f(x) = ax^4 - 4ax^3 + e$.

$\Rightarrow f(x) = e \Leftrightarrow ax^4 - 4ax^3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 4. \end{array}\right.$

Khi đó $f(-x^2 + 2x + m) = e$ (1) $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -x^2 + 2x + m = 0 \\ -x^2 + 2x + m = 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (x-1)^2 = 1 + m \\ (x-1)^2 = m - 3. \end{array}\right.$

PT (1) có bốn nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} 1 + m > 0 \\ m - 3 > 0 \\ 1 + m \neq m - 3 \end{cases} \Leftrightarrow m > 3$.

Mà $m \in \mathbb{Z} \cap [-5; 5] \Rightarrow m \in \{4; 5\}$.

Vậy có 2 giá trị m thỏa đề bài.

Chọn đáp án (B) □

Câu 120. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên đoạn $[-2; 4]$ và có bảng biến thiên như sau

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hệ phương trình $\begin{cases} \dfrac{9}{x^2} - 4 \geq 0 \\ 6f(-2x+1) - 8x^3 + 6x - m = 0 \end{cases}$ có ba nghiệm phân biệt?

(A) 9. (B) 11. (C) 10. (D) 8.

Lời giải.

Ta có: $\dfrac{9}{x^2} - 4 \geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{9-4x^2}{x^2} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 9 - 4x^2 \geq 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{3}{2} \leq x \leq \dfrac{3}{2} \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left[-\dfrac{3}{2}; \dfrac{3}{2}\right] \setminus \{0\}.$

Xét phương trình $6f(-2x+1) - 8x^3 + 6x - m = 0 \Leftrightarrow m = 6f(-2x+1) - 8x^3 + 6x.$ (1)

Xét hàm số $g(x) = 6f(-2x+1) - 8x^3 + 6x$, với $x \in \left[-\dfrac{3}{2}; \dfrac{3}{2}\right] \setminus \{0\}$.

Ta có $g'(x) = -12f'(-2x+1) - 24x^2 + 6 = -6\left[2f'(-2x+1) + 4x^2 - 1\right]$.

Từ giả thiết ta suy ra $f'(-2x+1) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -2x+1 < 2 \\ -2x+1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\dfrac{1}{2} < x < \dfrac{1}{2}$;

$f'(-2x+1) > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -2 < -2x+1 < 0 \\ 2 < -2x+1 < 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{1}{2} < x < \dfrac{3}{2} \\ -\dfrac{3}{2} < x < -\dfrac{1}{2}. \end{array}\right.$

Bảng biến thiên của hàm số $g(x) = 6f(-2x+1) - 8x^3 + 6x$ trên $\left[-\dfrac{3}{2}; \dfrac{3}{2}\right] \setminus \{0\}$.

Từ bảng biến thiên ta suy ra hệ có đúng ba nghiệm $\Leftrightarrow$ (1) có đúng ba nghiệm $x \in \left[-\dfrac{3}{2}; \dfrac{3}{2}\right] \setminus \{0\}$
$\Leftrightarrow \begin{cases} 4 < m < 14 \\ m \neq 9. \end{cases}$ Vì $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m = \{5; 6; 7; 8; 10; 11; 12; 13\}$.

Vậy có 8 số nguyên m.

Chọn đáp án (D) □

Câu 121 (Hậu Lộc 2-Thanh Hóa 2019).

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[0; 5]$ và có bảng biến thiên như hình sau

Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để bất phương trình $mf(x) + \sqrt{3x} \leq 2019f(x) - \sqrt{10-2x}$ nghiệm đúng với mọi $x \in [0; 5]$.

(A) 2014. (B) 2015. (C) 2019. (D) Vô số.

Lời giải.

Trên $[0; 5]$, ta có

$$\begin{aligned} & mf(x) + \sqrt{3x} \leq 2019f(x) - \sqrt{10-2x} \\ \Leftrightarrow\ & m \leq 2019 - \dfrac{\sqrt{3x} + \sqrt{10-2x}}{f(x)}. \end{aligned}$$

Xét hàm số $g(x) = \sqrt{3x} + \sqrt{10-2x}$ trên đoạn $[0; 5]$.

$g'(x) = \dfrac{3}{2\sqrt{3x}} - \dfrac{1}{\sqrt{10-2x}} = \dfrac{3\sqrt{10-2x} - 2\sqrt{3x}}{2\sqrt{3x} \cdot \sqrt{10-2x}}$.

Cho $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 3 \in [0; 5]$.

Do $g(0) = \sqrt{10}$, $g(3) = 5$ và $g(5) = \sqrt{15}$ nên $\max\limits_{[0;5]} g(x) = g(3) = 5$.

Mặt khác $\min\limits_{[0;5]} f(x) = f(3) = 1$ nên

$$\begin{aligned} & m \le 2019 - \frac{\sqrt{3x}+\sqrt{10-2x}}{f(x)}, \forall x \in [0;5] \\ \Leftrightarrow\ & m \le \min\limits_{[0;5]}\left(2019 - \frac{\sqrt{3x}+\sqrt{10-2x}}{f(x)}\right) = 2019 - \frac{5}{1} = 2014 \end{aligned}$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 122 (Hậu Lộc 2-Thanh Hóa -2019).

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Số giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f^2(\cos x) + (m-2018)f(\cos x) + m - 2019 = 0$ có đúng 6 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[0; 2\pi]$ là

(A) 5. (B) 3. (C) 2. (D) 1.

Lời giải.

Ta có $f^2(\cos x) + (m-2018)f(\cos x) + m - 2019 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(\cos x) = -1 \\ f(\cos x) = 2019 - m. \end{array}\right.$

Dựa vào đồ thị ta có: $f(\cos x) = -1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 0\,(1) \\ \cos x = k > 1.\,(2) \end{array}\right.$

PT có 2 nghiệm thỏa mãn, PT vô nghiệm.

Yêu cầu: phương trình $f(\cos x) = 2019 - m (2019 - m \neq 1)$ có thêm 4 nghiệm thuộc $[0; 2\pi]$.

Nhận xét:

+ Với mỗi $t \notin [-1; 1]$, phương trình $\cos x = t$ vô nghiệm.

+ Với mỗi $t \in (-1; 1]$, phương trình $\cos x = t$ có 2 nghiệm $x \in [0; 2\pi]$.

+ Với $t = -1$, phương trình $\cos x = t$ có đúng 1 nghiệm $x \in [0; 2\pi]$.

Như vậy, $-1 < 2019 - m \le 1 \Leftrightarrow 2018 \le m \le 2020$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 123 (THPT Gia Lộc Hải Dương 2019).

Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

Tìm m để phương trình $2f(x+2019) - m = 0$ có 4 nghiệm phân biệt.

(A) $m \in (0; 2)$. (B) $m \in (-2; 2)$. (C) $m \in (-4; 2)$. (D) $m \in (-2; 1)$.

Lời giải.

$2f(x+2019) - m = 0 \Leftrightarrow f(x+2019) = \frac{m}{2}$. (*) Ta có bảng biến thiên của hàm số $y = g(x) = f(x+2019)$ như sau:

Phương trình $(*)$ có 4 nghiệm phân biệt khi $-2 < \frac{m}{2} < 1 \Leftrightarrow -4 < m < 2$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 124. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên R và có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(x^2 + 2x - 2) = 3m + 1$ có nghiệm thuộc khoảng $[0; 1]$.

(A) $[0; 4]$. (B) $[-1; 0]$. (C) $[0; 1]$. (D) $[-\frac{1}{3}; 1]$.

Lời giải.

Đặt $t = x^2 + 2x - 2$. Với $x \in [0; 1] \Rightarrow t \in [-2; 1]$.

Phương trình $f(x^2 + 2x - 2) = 3m + 1$ có nghiệm thuộc đoạn $[0; 1]$ khi và chỉ khi phương trình $f(t) = 3m + 1$ có nghiệm thuộc $[-2; 1] \Leftrightarrow -\frac{1}{3} \leq m \leq 1$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 125 (THPT Lê Quý Đôn Đà Nẵng 2019).

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Tập hợp các giá trị thực của tham số m để phương trình $f\left(\sqrt{4x - x^2} - 1\right) = m$ có nghiệm là

(A) $[-2; 0]$. (B) $[-4; -2]$. (C) $[-4; 0]$. (D) $[-1; 1]$.

Lời giải.

Phương trình $f\left(\sqrt{4x - x^2} - 1\right) = m$ có điều kiện $0 \leq x \leq 4$. Ta có bảng biến thiên

Từ bảng biến thiên suy ra, với $0 \leq x \leq 4$ thì $-1 \leq \sqrt{4x - x^2} - 1 \leq 1$.

Đặt $t = \sqrt{4x - x^2} - 1$, $-1 \leq t \leq 1$. (Có thể biến đổi $t = \sqrt{4 - (x - 2)^2} - 1 \Rightarrow -1 \leq t \leq 1$).

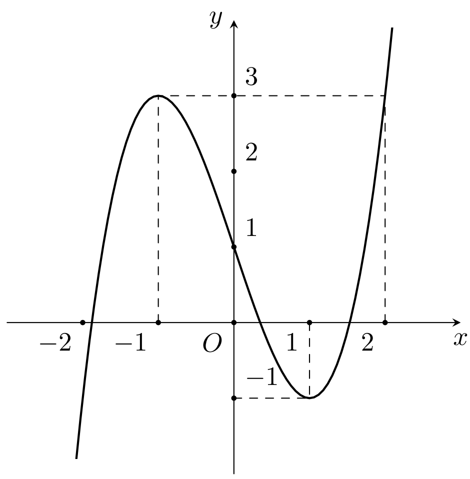
Phương trình đã cho trở thành $f(t) = m$ (1).

Phương trình đã cho có nghiệm $\Leftrightarrow$(1) có nghiệm $t \in [-1; 1] \Leftrightarrow -4 \leq m \leq 0$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 126 (Chuyên Phan Bội Châu 2019).

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f\left(\sqrt{4 - x^2}\right) = m$ có nghiệm thuộc nửa khoảng $\left[-\sqrt{2}; \sqrt{3}\right)$ là

(A) $[-1; 3]$. (B) $\left[-1; f\left(\sqrt{2}\right)\right]$. (C) $\left(-1; f\left(\sqrt{2}\right)\right]$. (D) $(-1;]$.

Lời giải.

Đặt $t = g(x) = \sqrt{4 - x^2}$ với $x \in \left[-\sqrt{2}; \sqrt{3}\right)$.

Suy ra $g'(x) = \frac{-x}{\sqrt{4 - x^2}}$. $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \in \left[-\sqrt{2}; 3\right)$.

Ta có $g(0) = 2$, $g(-\sqrt{2}) = \sqrt{2}$, $g(\sqrt{3}) = 1$.

Mà hàm số $g(x)$ liên tục trên $[-\sqrt{2};\sqrt{3})$ nên suy ra, $t \in (1;2]$.

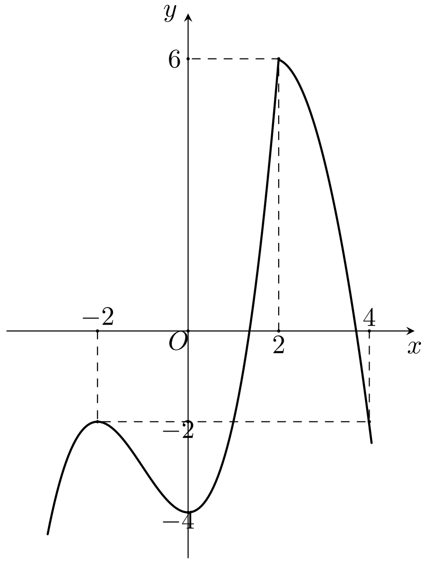
Từ đồ thị, phương trình $f(t) = m$ có nghiệm thuộc khoảng $(1;2]$ khi $m \in (-1;3]$.

Chọn đáp án D □

Câu 127 (Chuyên Đại Học Vinh 2019).

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $\frac{1}{3}f\left(\frac{x}{2}+1\right) + x = m$ có nghiệm thuộc đoạn $[-2;2]$?

Ⓐ 11. Ⓑ 9. Ⓒ 8. Ⓓ 10.



Lời giải.

Đặt $t = \frac{x}{2}+1$, khi $-2 \le x \le 2$ thì $0 \le t \le 2$.

Phương trình đã cho trở thành $\frac{1}{3}f(t) + 2t - 2 = m \Leftrightarrow f(t) + 6t - 6 = 3m$.

Xét hàm số $g(t) = f(t) + 6t - 6$ trên đoạn $[0;2]$.

Ta có $g'(t) = f'(t) + 6$. Từ đồ thị hàm số $y = f(x)$ suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên khoảng $(0;2)$ nên $f'(t) > 0$, $\forall t \in (0;2) \Rightarrow g'(t) > 0$, $\forall t \in (0;2)$ và $g(0) = -10$; $g(2) = 12$.

Bảng biến thiên của hàm số $g(t)$ trên đoạn $[0;2]$

t	0		2
$g'(t)$		$+$	
$g(t)$	-10	$\nearrow$	12

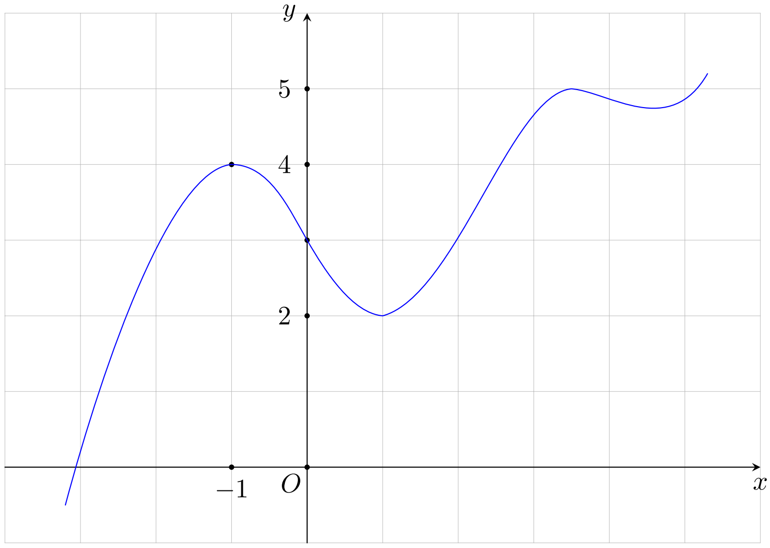
Phương trình đã cho có nghiệm thuộc đoạn $[-2;2]$ khi và chỉ khi phương trình $g(t) = 3m$ có nghiệm thuộc đoạn $[0;2]$ hay $-10 \le 3m \le 12 \Leftrightarrow -\frac{10}{3} \le m \le 4$.

Mặt khác m nguyên nên $m \in \{-3;-2;-1;0;1;2;3;4\}$.

Vậy có 8 giá trị m thoả mãn bài toán.

Chọn đáp án C □

Câu 128. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Tìm số giá trị nguyên của m để phương trình $f(x^2 - 2x) = m$ có đúng 4 nghiệm thực phân biệt thuộc đoạn $\left[-\frac{3}{2};\frac{7}{2}\right]$.



Ⓐ 1. Ⓑ 2. Ⓒ 3. Ⓓ 4.

Lời giải.

Xét phương trình $f\left(x^2-2x\right)=m$ (1).

Đặt $t=x^2-2x$, với $x\in\left[-\frac{3}{2};\frac{7}{2}\right]$.

Ta có $t'=2x-2$; $t'=0\Leftrightarrow x=1$.

Bảng biến thiên của hàm số $t=x^2-2x$ trên đoạn $\left[-\frac{3}{2};\frac{7}{2}\right]$

x	$-\frac{3}{2}$		1		$\frac{7}{2}$
t'		$-$	0	$+$	
t	$\frac{21}{4}$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$\frac{21}{4}$

Dựa vào bảng biến thiên suy ra $t\in\left[-1;\frac{21}{4}\right]$.

Xét $t=-1$ khi đó phương trình (1) thành $f(-1)=m\Rightarrow 4=m$.

Với $m=4$ phương trình $f\left(x^2-2x\right)=4\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2-2x=-1\\x^2-2x=a\end{array}\right.$ $(*)$ với $2<a<3$.

Dễ thấy $(*)$ có tối đa 3 nghiệm (không thỏa mãn yêu cầu).

Xét $t_0\in\left(-1;\frac{21}{4}\right]$, nhận xét với mỗi $t_0\in\left(-1;\frac{21}{4}\right]$ thì có 2 giá trị $x\in\left[-\frac{3}{2};\frac{7}{2}\right]$ thỏa mãn $t_0=x^2-2x$.

Do đó phương trình $f\left(x^2-2x\right)=m$ có 4 nghiệm thực phân biệt thuộc đoạn $\left[-\frac{3}{2};\frac{7}{2}\right]$ khi phương trình $f(t)=m$ có 2 nghiệm phân biệt $t\in\left(-1;\frac{21}{4}\right]$. Khi đó đường thẳng $y=m$ phải cắt đồ thị hàm số $y=f(t)$ tại 2 điểm với $t\in\left(-1;\frac{21}{4}\right]$.

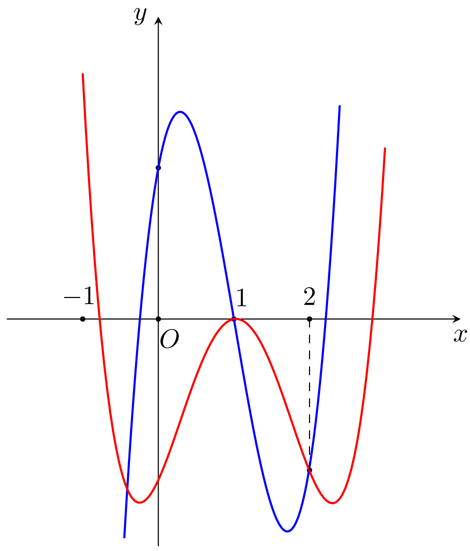
Mà $m\in\mathbb{Z}$ nên từ đồ thị hàm số $y=f(x)$ ta có $m=3; m=5$ thỏa mãn yêu cầu.

Vậy có 2 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài.

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 129 (Thanh Tường Nghệ An 2019).

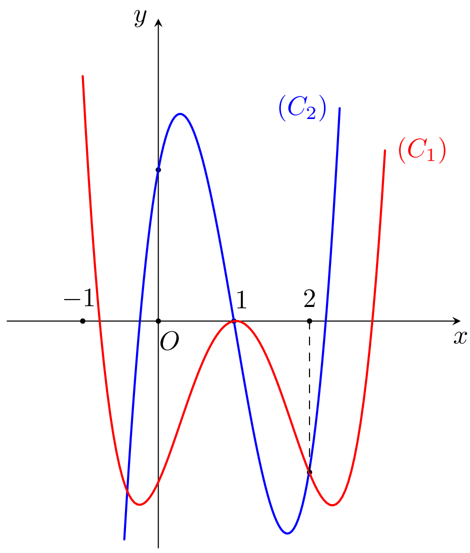
Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm đa thức với hệ số thực. Hình vẽ bên dưới là một phần đồ thị của hai hàm số $y = f(x)$ và $y = f'(x)$.



Tập các giá trị của tham số m để phương trình $f(x) = me^x$ có hai nghiệm phân biệt trên $[0; 2]$ là nửa khoảng $[a; b)$. Tổng $a + b$ gần nhất với giá trị nào sau đây?

Ⓐ $-0{,}81$. Ⓑ $-0{,}54$. Ⓒ $-0{,}27$. Ⓓ $0{,}27$.

Lời giải.



Nhận xét: Đồ thị hàm $y = f'(x)$ cắt trục hoành tại điểm x_0 thì x_0 là điểm cực trị của hàm $y = f(x)$. Dựa vào hai đồ thị đề bài cho, thì (C_1) là đồ thị hàm $y = f(x)$ và (C_2) là đồ thị hàm $y = f'(x)$.

Xét phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và $y = me^x$ ta có

$f(x) = me^x \Leftrightarrow m = \dfrac{f(x)}{\mathrm{e}^x}$.

Đặt $g(x) = \dfrac{f(x)}{\mathrm{e}^x}$ ta có $g'(x) = \dfrac{f'(x) - f(x)}{\mathrm{e}^x}$.

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow f'(x)=f(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=2 \\ x=x_0 \in (-1;0). \end{array}\right.$$

Dựa vào đồ thị của hai hàm số $y=f(x)$ và $y=f'(x)$ ta được

x	0		1		2
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	$f(0)$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$\dfrac{f(2)}{e^2}$

Yêu cầu bài toán ta suy ra $\dfrac{f(2)}{e^2} \le m < 0$ (dựa vào đồ thị ta nhận thấy

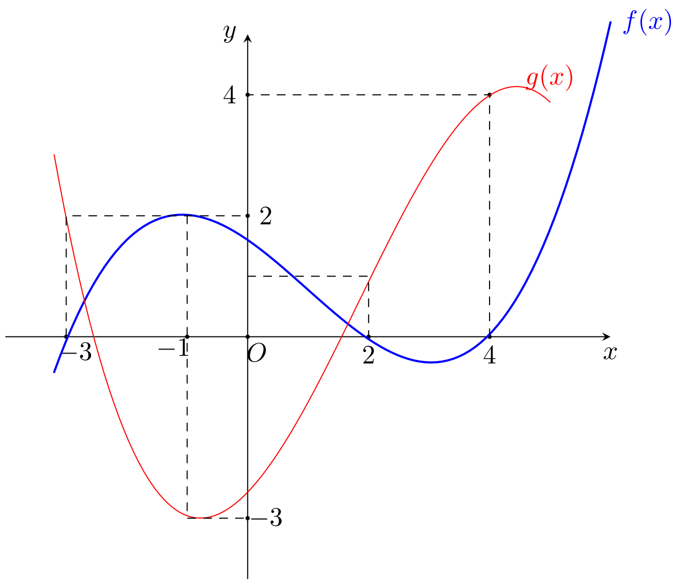
$$f(0)=f(2)\approx -2) \Leftrightarrow -0,27 \le m < 0.$$

Suy ra $a=-0{,}27$; $b=0$.

Vậy $a+b=-0,27$.

Chọn đáp án C □

Câu 130 (VTED 2019). Cho hai hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ là các hàm xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên (trong đó đường cong đậm hơn là đồ thị của hàm số $y=f(x)$). Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $f(1-g(2x-1))=m$ có nghiệm thuộc đoạn $\left[-1;\dfrac{5}{2}\right]$.



(A) 8. (B) 3. (C) 6. (D) 4.

Lời giải.

Với $x \in \left[-1;\dfrac{5}{2}\right] \Rightarrow 2x-1 \in [-3;4] \Rightarrow g(2x-1) \in [-3;4] \Rightarrow t=1-g(2x-1) \in [-3;4]$.

Vậy ta cần tìm m để phương trình $f(t)=m$ có nghiệm thuộc đoạn $[-3;4]$

$$\Leftrightarrow \min_{[-3;4]} f(t) \le m \le \max_{[-3;4]} f(t) \Leftrightarrow \min_{[-3;4]} f(t) \le m \le 2$$

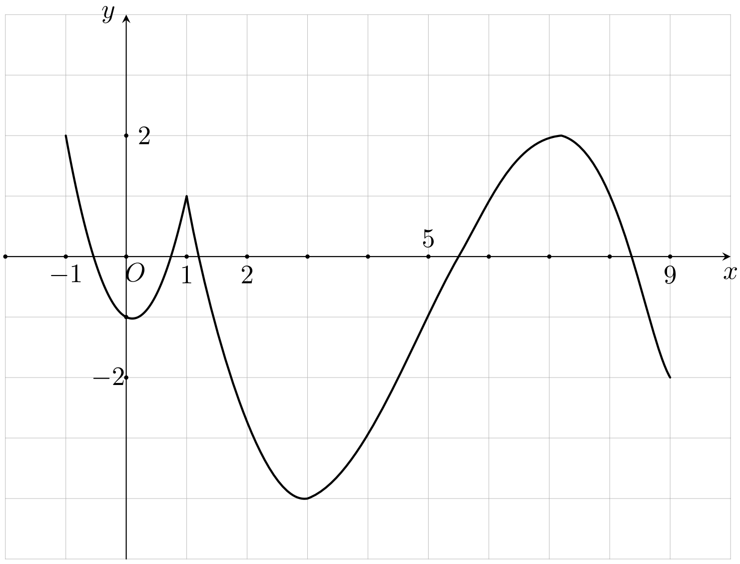
trong đó $\min\limits_{[-3;4]} f(t) \in (-1;0)$.

Vậy các số nguyên cần tìm là $a \in \{0;1;2\}$.

Chọn đáp án B □

Câu 131 (THPT Yên Khánh A - Ninh Bình - 2019).

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1;9]$ và có đồ thị là đường cong trong hình vẽ dưới đây.



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để bất phương trình $16 \cdot 3^{f(x)} - [f^2(x) + 2f(x) - 8] \cdot 4^{f(x)} \geq (m^2 - 3m) \cdot 6^{f(x)}$ nghiệm đúng với mọi giá trị thuộc $[-1;9]$?

A 32. B 31. C 5. D 6.

Lời giải.

Dễ thấy $-4 \leq f(x) \leq 2,\ \forall x \in [-1;9]$ (1) nên $-[f(x)+4]\cdot[f(x)-2] \geq 0,\ \forall x \in [-1;9]$.

Do đó $-[f^2(x) + 2f(x) - 8] \geq 0,\ \forall x \in [-1;9]$ (2).

Ta có

$$\begin{aligned} & 16 \cdot 3^{f(x)} - \left[f^2(x) + 2f(x) - 8\right] \cdot 4^{f(x)} \geq \left(m^2 - 3m\right) \cdot 6^{f(x)} \text{ nghiệm đúng } \forall x \in [-1;9] \\ \Leftrightarrow\ & 16 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{f(x)} - \left[f^2(x) + 2f(x) - 8\right] \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{f(x)} \geq m^2 - 3m \text{ nghiệm đúng } \forall x \in [-1;9] \\ \Leftrightarrow\ & \alpha = \min_{x\in[-1;9]} \left\{16 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{f(x)} - \left[f^2(x) + 2f(x) - 8\right] \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{f(x)}\right\} \geq m^2 - 3m. \quad (3) \end{aligned}$$

Từ (1) và (2) ta có

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{f(x)} \geq \left(\frac{1}{2}\right)^2 \text{ và } -\left[f^2(x) + 2f(x) - 8\right] \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{f(x)} \geq 0,\ \forall x \in [-1;9].$$

Suy ra

$$16 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{f(x)} - \left[f^2(x) + 2f(x) - 8\right] \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{f(x)} \geq 4,\ \forall x \in [-1;9].$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $f(x) = 2 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = a\ (7 < a < 8)$.

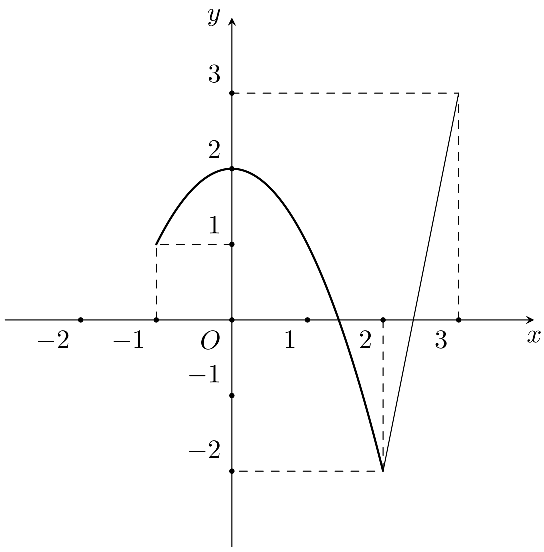
Do đó $\alpha = 4$ và (3) $\Leftrightarrow 4 \geq m^2 - 3m \Leftrightarrow -1 \leq m \leq 4$.

Vì m nguyên nên $m \in \{-1;0;1;2;3;4\}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 132 (THPT Yên Khánh A - Ninh Bình - 2019).

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[-1; 3]$ và có đồ thị như hình vẽ.



Bất phương trình $f(x) + \sqrt{x+1} + \sqrt{7-x} \geq m$ có nghiệm thuộc $[-1; 3]$ khi và chỉ khi

(A) $m \leq 7$. (B) $m \geq 7$. (C) $m \leq 2\sqrt{2} - 2$. (D) $m \geq 2\sqrt{2} - 2$.

Lời giải.

Bất phương trình $f(x) + \sqrt{x+1} + \sqrt{7-x} \geq m$ có nghiệm thuộc $[-1; 3]$ khi và chỉ khi $m \leq \max\limits_{[1;3]} \left(f(x) + \sqrt{x+1} + \sqrt{7-x}\right)$.

Xét hàm số $g(x) = \sqrt{x+1} + \sqrt{7-x}$ trên đoạn $[-1; 3]$.

Ta có $g'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}} - \dfrac{1}{2\sqrt{7-x}} = \dfrac{\sqrt{7-x} - \sqrt{x+1}}{2\sqrt{7-x} \cdot \sqrt{x+1}}$.

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{7-x} - \sqrt{x+1} = 0 \Leftrightarrow x = 3$.

$g(-1) = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$, $g(3) = 2 + 2 = 4$.

Suy ra $\max\limits_{[1;3]} g(x) = 4$ tại $x = 3$. (1)

Mặt khác, dựa vào đồ thị của $f(x)$ ta có $\max\limits_{[1;3]} f(x) = 3$ tại $x = 3$.(2)

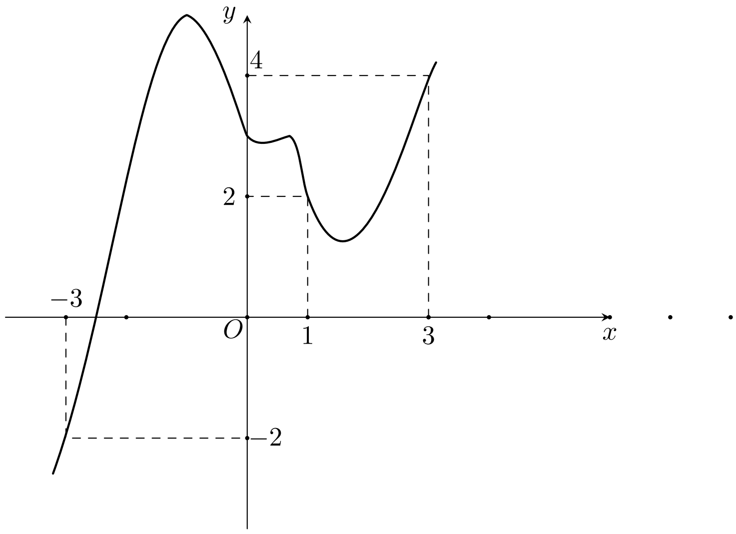
Từ (1) và (2) suy ra $\max\limits_{[1;3]} \left(f(x) + \sqrt{x+1} + \sqrt{7-x}\right) = 7$ tại $x = 3$.

Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm thuộc $[-1; 3]$ khi và chỉ khi $m \leq 7$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 133 (THPT Yên Khánh A - Ninh Bình - 2019).

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[-3; 3]$ và đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ dưới đây



Biết $f(1)=6$ và $g(x)=f(x)-\dfrac{(x+1)^2}{2}$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

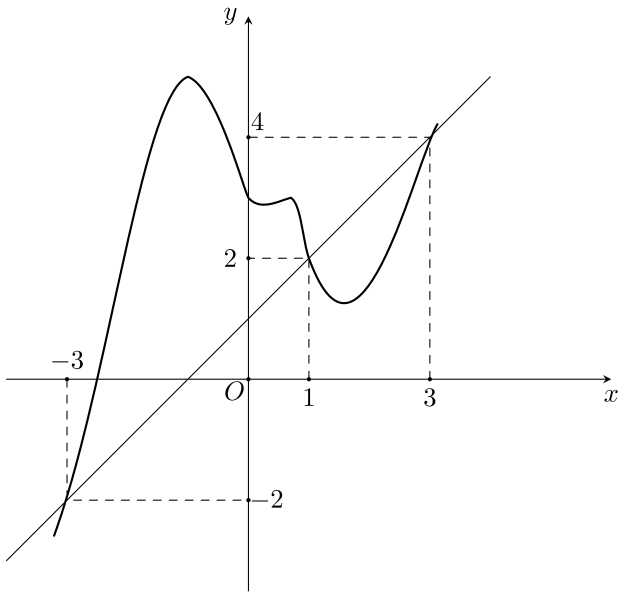
(A) Phương trình $g(x)=0$ có đúng hai nghiệm thuộc đoạn $[-3;3]$.

(B) Phương trình $g(x)=0$ không có nghiệm thuộc đoạn $[-3;3]$.

(C) Phương trình $g(x)=0$ có đúng một nghiệm thuộc đoạn $[-3;3]$.

(D) Phương trình $g(x)=0$ có đúng ba nghiệm thuộc đoạn $[-3;3]$.

Lời giải.



Ta có $g(1)=f(1)-\dfrac{(1+1)^2}{2}=f(1)-2=4$ và $g'(x)=f'(x)-(x+1)$.

Từ đồ thị hàm số $y=f'(x)$ và $y=x+1$ ta có $g'(x)=0 \Leftrightarrow f'(x)=x+1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-3 \\ x=1 \\ x=3. \end{array}\right.$

Xét hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $y=f'(x)$; $y=x+1$; $x=-3$; $x=1$ có diện tích $S_1>4$ $\Leftrightarrow \displaystyle\int_{-3}^{1}|f'(x)-(x+1)|\,\mathrm{d}x>4 \Leftrightarrow \int_{-3}^{1}|g'(x)|\,\mathrm{d}x>4 \Leftrightarrow g(1)-g(-3)>4 \Rightarrow g(-3)<g(1)-4=0.$

Xét hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $y=f'(x)$; $y=x+1$; $x=1$; $x=3$ có diện tích $S_2<4$

$$\Leftrightarrow \int\limits_1^3 |f'(x)-(x+1)|\,dx < 4 \Leftrightarrow \int\limits_1^3 |g'(x)|\,dx < 4 \Leftrightarrow -g(3)+g(1) < 4 \Rightarrow g(3) > g(1)-4 = 0.$$

Dựa vào đồ thị ta có bảng biến thiên của hàm $y = g(x)$ trên $[-3;3]$

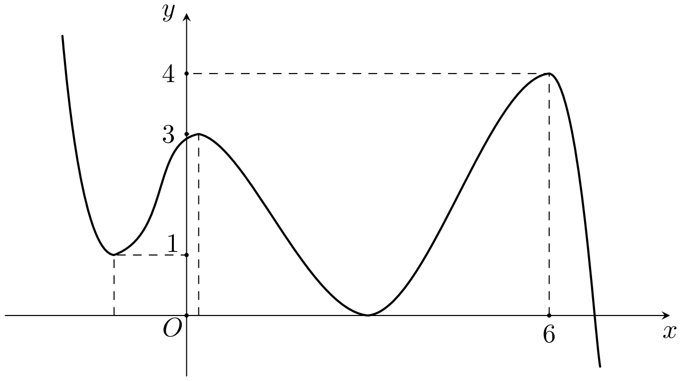
x	-3		1		3
$g'(x)$	0	$+$	0	$-$	0
$g(x)$	$g(3) < 0$	$\nearrow$	4	$\searrow$	$g(3) > 0$

Từ bảng biến thiên suy ra phương trình $g(x) = 0$ có đúng một nghiệm thuộc đoạn $[-3;3]$.

Chọn đáp án C □

Câu 134 (Chuyên Sơn La - Lần 2 - 2019).

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.



Các giá trị của tham số m để phương trình $\dfrac{4m^3+m}{\sqrt{2f^2(x)+5}} = f^2(x)+3$ có ba nghiệm phân biệt là

Ⓐ $m = \dfrac{\sqrt{37}}{2}$. Ⓑ $m = \pm\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$. Ⓒ $m = \pm\dfrac{\sqrt{37}}{2}$. Ⓓ $m = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.

$$\frac{4m^3+m}{\sqrt{2f^2(x)+5}} = f^2(x)+3 \Leftrightarrow 4m^3+m = \left(f^2(x)+3\right)\sqrt{2f^2(x)+5}$$
$$\Leftrightarrow (2m)^3+2m = \left(2f^2(x)+5\right)\sqrt{2f^2(x)+5}+\sqrt{2f^2(x)+5}.$$

Xét hàm số $f(t) = t^3+t$, $\forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow f'(t) = 3t^2+1 > 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow f(2m) = f\left(\sqrt{2f^2(x)+5}\right) \Leftrightarrow 2m = \sqrt{2f^2(x)+5}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ f^2(x) = \dfrac{4m^2-5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ f(x) = \pm\sqrt{\dfrac{4m^2-5}{2}}. \end{cases}$$

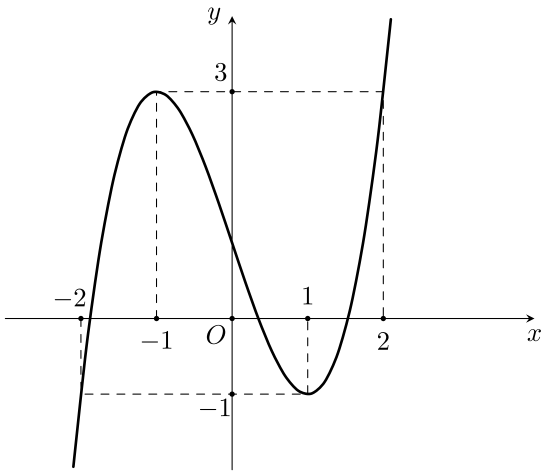
Với $f(x) = -\sqrt{\dfrac{4m^2-5}{2}}$ từ đồ thị ta thấy chỉ có 1 nghiệm.

Vậy để phương trình có 3 nghiệm phân biệt thì phương trình $f(x) = \sqrt{\dfrac{4m^2-5}{2}}$ phải có hai nghiệm$\Leftrightarrow \sqrt{\dfrac{4m^2-5}{2}} = 4 \Leftrightarrow m = \dfrac{\sqrt{37}}{2}$, $(m > 0)$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 135 (THPT Ngô Quyền - Ba Vì – 2019).

Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ sau đây.



Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số thực m để phương trình $f\left(f(x)\right) = m$ có 4 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[-1; 2]$?

(A) 5. (B) 4. (C) 0. (D) 3.

Lời giải.

Đặt $g(x) = f\left(f(x)\right)$. $g'(x) = f'\left(f(x)\right) \cdot f'(x)$.

Cho $g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'\left(f(x)\right) \cdot f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'(x) = 0 \\ f'\left(f(x)\right) = 0. \end{array}\right.$

$+\ f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -1 \end{array}\right.$ (hoành độ các điểm cực trị).

$+\ f'\left(f(x)\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = 1 \\ f(x) = -1. \end{array}\right.$

Dựa vào đồ thị, ta có

$+$ Khi $f(x) = 1 \Leftrightarrow x = 0$; $x = a \in (-2; -1)$; $x = b \in (1; 2)$.

$+$ Khi $f(x) = -1 \Leftrightarrow x = 1$; $x = -2$.

Bảng biến thiên

x	-1		0		1		b		2
$g'(x)$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$		↘	-1	↗	3	↘	-1	↗	

Phương trình $f\left(f(x)\right) = m$ có 4 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[-1; 2] \Leftrightarrow -1 < m < 3$.

Mà m là số nguyên nên $m \in \{0; 1; 2\}$.

Vậy có 3 giá trị của m thỏa đề bài.

Chọn đáp án (D) □

Câu 136 (THPT Nguyễn Đức Cảnh - Thái Bình - 2019).

Cho hàm số $g(x) = 2x^3 + x^2 - 8x$. Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $\sqrt{g(g(x)+3)-m} = 2g(x)+7$ có đúng 6 nghiệm thực phân biệt

Ⓐ 7. Ⓑ 8. Ⓒ 24. Ⓓ 25.

Lời giải.

Đặt $t = g(x)+3 \Rightarrow t = 2x^3 + x^2 - 8x + 3 \Rightarrow t' = 6x^2 + 2x - 8$.

$t' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{4}{3} \\ x = 1. \end{array}\right.$

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-\dfrac{4}{3}$		1		$+\infty$
t'		$+$	0	$-$	0	$+$	
t	$-\infty$	$\nearrow$	$\dfrac{289}{27}$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra mỗi giá trị $t \in \left(-2; \dfrac{289}{27}\right)$ sẽ có tương ứng 3 giá trị x.

$$\begin{aligned} \sqrt{g(g(x)+3)-m} = 2g(x)+7 &\Leftrightarrow \sqrt{g(t)-m} = 2(t+3)+7 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} t \geq -\dfrac{1}{2} \\ g(t) - m = (2t+1)^2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} t \geq -\dfrac{1}{2} \\ m = 2t^3 + t^2 - 8t - 4t^2 - 4t - 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} t \geq -\dfrac{1}{2} \\ m = 2t^3 - 3t^2 - 12t - 1. \ (1) \end{cases} \end{aligned}$$

Phương trình đã cho có 6 nghiệm thực phân biệt khi và chỉ khi phương trình (1) có 3 nghiệm phân biệt $t \in \left[-\dfrac{1}{2}; \dfrac{289}{27}\right)$.

Xét hàm số $f(t) = 2t^3 - 3t^2 - 12t - 1$ với $t \in \left[-\dfrac{1}{2}; \dfrac{289}{27}\right)$.

$f'(t) = 6t^2 - 6t - 12 \Rightarrow f'(t) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 \\ t = 2 \end{array}\right.$.

Ta có bảng biến thiên

t	$-\frac{1}{2}$		2		$\frac{316}{27}$
$h'(t)$		$+$	0	$-$	
y			14		
	-11	$\nearrow$		$\searrow$	$2660{,}89$

Từ bảng biến thiên, phương trình đã cho có 6 nghiệm thực phân biệt $m \in (-21; 4]$.

Mà $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-20; -19; -18; ...; 4\} \Rightarrow$ có 25 số nguyên thỏa mãn.

Chọn đáp án (D) □

Câu 137 (Sở GD Bạc Liêu - 2019). Cho hàm số $f(x) = 2x^3 + x^2 - 8x + 7$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên dương của tham số m để phương trình $\sqrt{f(f(x)-3)+m} = 2f(x) - 5$ có 6 nghiệm thực phân biệt. Tổng các phần tử của S bằng

(A) 25. (B) -66. (C) 105. (D) 91.

Lời giải.

Đặt $t = f(x) - 3$.

* $t = f(x) - 3 \Leftrightarrow t = 2x^3 + x^2 - 8x + 4.\quad (1)$

Đặt $g(x) = 2x^3 + x^2 - 8x + 4$; $g'(x) = 6x^2 + 2x - 8$; $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \Rightarrow y = -1 \\ x = -\dfrac{4}{3} \Rightarrow y = \dfrac{316}{27}. \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-\frac{4}{4}$		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$			$\frac{316}{27}$				$+\infty$
	$-\infty$	$\nearrow$		$\searrow$	-1	$\nearrow$	

Số nghiệm của phương trình (1) chính là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = g(x)$ và $y = t$

Dựa vào bảng biến thiên ta có

- $t < -1$ hoặc $t > \dfrac{316}{27}$ thì phương trình (1) có 1 nghiệm.
- $t = -1$ hoặc $t = \dfrac{316}{27}$ thì phương trình (1) có 2 nghiệm.
- $-1 < t < \dfrac{316}{27}$ thì phương trình (1) có 3 nghiệm phân biệt.

* Ta có $\sqrt{f(f(x)-3)+m} = 2f(x) - 5 \Leftrightarrow \sqrt{f(t)+m} = 2t + 1.\quad (2)$

Phương trình (2) có nghiệm $\geq -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow f(t) + m = 4t^2 + 4t + 1$

$$\Leftrightarrow m = 4t^2 + 4t + 1 - f(t)$$

$$\Leftrightarrow m = -2t^3 + 3t^2 + 12t - 6.$$

Đặt $h(t) = -2t^3 + 3t^2 + 12t - 6$; $h'(t) = -6t^2 + 6t + 12$; $h(t) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 \\ t = 2. \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

t	$-\dfrac{1}{2}$		2		$\dfrac{316}{27}$
$h'(t)$		$+$	0	$-$	
y	-11	$\nearrow$	14	$\searrow$	$2660{,}89$

Số nghiệm của phương trình (2) chính là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = h(t)$ và $y = m$.

Dựa vào bảng biến thiên ta có

- $m > 14$ thì phương trình (2) vô nghiệm.
- $m = 14$ hoặc $m < -11$ thì phương trình (2) có 1 nghiệm.
- $-11 \leq m < 14$ thì phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt.

Phương trình $\sqrt{f(f(x)-3)+m} = 2f(x) - 5$ có 6 nghiệm thực phân biệt khi phương trình (1) có 3 nghiệm phân biệt và phương trình (2) có 2 nghiệm phân biệt.

Vậy phương $\sqrt{f(f(x)-3)+m} = 2f(x) - 5$ có 6 nghiệm thực phân biệt khi phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt $-\dfrac{1}{2} \leq t < \dfrac{316}{27}$.

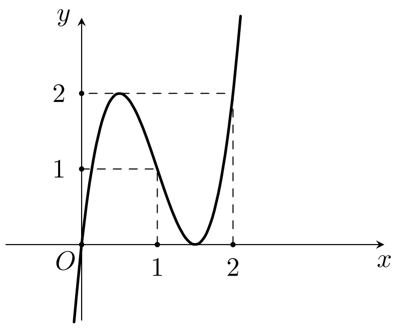
Dựa vào bảng biến thiên ta được kết quả là $-11 \leq m < 14$. Suy ra $S = \{1; 2; ...; 13\}$

Tổng các phần tử của $S = 1 + ... + 11 + 12 + 13 = 91$.

Chọn đáp án D □

Câu 138 (Quang Trung - Bình Phước - 2019).

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ



Bất phương trình $f(2\sin x) - 2\sin^2 x < m$ đúng với mọi $x \in (0; \pi)$ khi và chỉ khi

A. $m > f(0) - \dfrac{1}{2}$. B. $m > f(1) - \dfrac{1}{2}$. C. $m \geq f(1) - \dfrac{1}{2}$. D. $m \geq f(0) - \dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

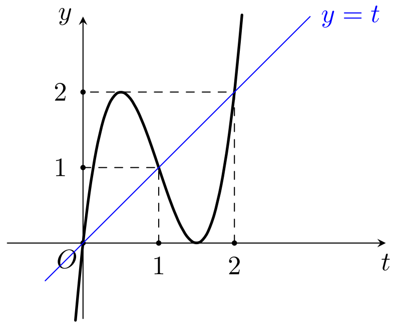
Đặt $2\sin x = t$. Vì $x \in (0; \pi)$ nên $t \in (0; 2)$.

Bất phương trình trở thành $f(t) - \dfrac{t^2}{2} < m$. Đặt $g(t) = f(t) - \dfrac{t^2}{2}$ với $t \in (0; 2)$.

Bất phương trình đúng với mọi $t \in (0;2)$ khi và chỉ khi $\max\limits_{(0;2)} g(t) < m$.

Ta có $g'(t) = f'(t) - t$. $g'(t) = 0 \Leftrightarrow f'(t) = t$.

Nghiệm phương trình này trên khoảng $(0;2)$ là hoành độ giao điểm của đồ thị $y = f'(t)$ và đường thẳng $y = t$ với $t \in (0;2)$.



Dựa vào đồ thị ta được nghiệm $t = 1 \in (0;2)$.

Cũng dựa vào đồ thị ta thấy khi $t \in (0;1)$ thì $f'(t) > t \Rightarrow g'(t) > 0$, khi $t \in (1;2)$ thì $f'(t) < t$ $\Rightarrow g'(t) < 0$.

Bảng biến thiên

t	0		1		2
$g'(t)$		$+$	0	$-$	
g		$\nearrow$	$f(1) - \frac{1}{2}$	$\searrow$	

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy $\max\limits_{(0;2)} g(t) = g(1) = f(1) - \dfrac{1}{2}$.

Vậy bất phương trình đã cho đúng với mọi $x \in (0;\pi)$ khi và chỉ khi $m > f(1) - \dfrac{1}{2}$.

Chọn đáp án B □

Câu 139 (Lương Thế Vinh - Hà Nội - 2019).

Cho hàm số $f(x) = x^5 + 3x^3 - 4m$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(\sqrt[3]{f(x) + m}\right) = x^3 - m$ có nghiệm thuộc $[1;2]$?

A 15. B 16. C 17. D 18.

Lời giải.

Đặt $t = \sqrt[3]{f(x) + m} \Rightarrow t^3 = f(x) + m$.

Ta có hệ $\begin{cases} t^3 = f(x) + m \\ x^3 = f(t) + m \end{cases} \Rightarrow f(x) + x^3 = f(t) + t^3$.

Xét hàm số $g(x) = f(x) + x^3$, $x \in [1;2] \Rightarrow g'(x) = f'(x) + 3x^2 > 0\, \forall x \in [1;2]$.

$\Rightarrow$ Hàm số $g(x)$ đồng biến trên đoạn $[1;2]$.

Vì $g(x) = g(t) \Leftrightarrow x = t \Rightarrow f(x) = x^3 - m \Leftrightarrow x^5 + 3x^3 - 4m = x^3 - m \Rightarrow 3m = x^5 + 2x^3$. (1)

Xét hàm số $h(x) = x^5 + 2x^3$, $x \in [1;2] \Rightarrow h'(x) = 5x^4 + 6x^2 > 0\, \forall x \in [1;2]$.

Phương trình(1) có nghiệm $\Leftrightarrow h(1) \le 3m \le h(2) \Leftrightarrow 3 \le 3m \le 48 \Leftrightarrow 1 \le m \le 16$.

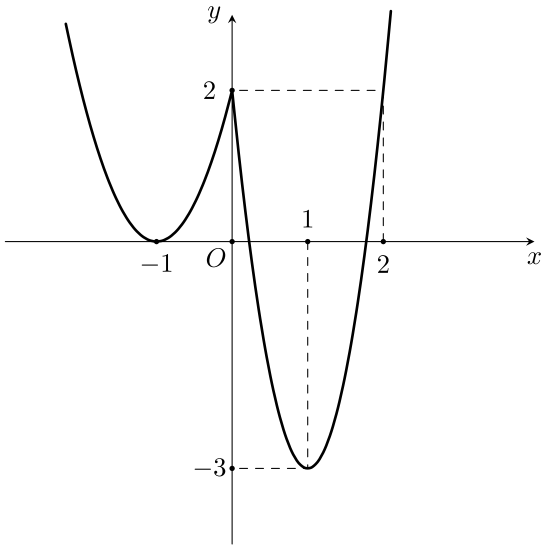
Do $m \in Z \Rightarrow m \in \{1; 2; 3; 4; ...; 16\}$.

Vậy có 16 giá trị nguyên của tham số m.

Chọn đáp án B □

Câu 140 (Chuyên ĐH Vinh - Nghệ An - 2021).

Cho hai hàm số $u(x) = \dfrac{x+3}{\sqrt{x^2+3}}$ và $f(x)$, trong đó đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ bên. Hỏi có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $f(u(x)) = m$ có đúng 3 nghiệm phân biệt?



Ⓐ 1. Ⓑ 4. Ⓒ 3. Ⓓ 2.

Lời giải.

Đặt $t = u(x) = \dfrac{x+3}{\sqrt{x^2+3}}$.

$$u'(x) = \frac{\sqrt{x^2+3} - \dfrac{x(x+3)}{\sqrt{x^2+3}}}{x^2+3} = \frac{3-3x}{\sqrt{x^2+3}\,(x^2+3)}$$

$u'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Dựa vào BBT, ta có $u(x) \in (-1; 2]$.

Phương trình $f(u(x)) = m$ trở thành $f(t) = m$, $t \in (-1; 2]$.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$u'(t)$		$+$	0	$-$	
$u(x)$	-1	↗	2	↘	1

Dựa vào đồ thị đã cho ta có

- Khi $m = 2$: phương trình $f(t) = 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0 \\ t = 2 \end{array}\right. \Rightarrow$ phương trình $f(u(x)) = m$ có 2 nghiệm phân biệt.
- Khi $m = 1$: phương trình $f(t) = 1$ có 3 nghiệm $t_1 \in (-1; 0)$, $t_2 \in (0; 1)$, $t_3 \in (1; 2) \Rightarrow$ phương trình $f(u(x)) = m$ có 4 nghiệm phân biệt.

- ☑ Khi $m \in \{0;-1;-2\}$: phương trình $f(t)=m$ có 2 nghiệm $t_1 \in (0;1)$, $t_2 \in (1;2) \Rightarrow$ phương trình $f(u(x))=m$ có 3 nghiệm phân biệt.
- ☑ Khi $m=-3$: phương trình $f(t)=m$ có 1 nghiệm $t=1 \Rightarrow$ phương trình $f(u(x))=m$ có 1 nghiệm.

Vậy $m \in \{0;-1;-2\}$.

Chọn đáp án C □

Câu 141 (THPT Nguyễn Đức Cảnh - Thái Bình - 2021).

Biết hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ đạt cực trị tại $x=1$ và $x=2021$. Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $f(x)=f(m)$ có ba nghiệm phân biệt?

A 4037. B 2019. C 4001. D 2021.

Lời giải.

Ta có $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d \Rightarrow f'(x)=3ax^2+2bx+cx$.

Do hàm số có 2 điểm cực trị là: $x_1=1$ và $x_2=2021$.

Nên: $\begin{cases} x_1+x_2=-\dfrac{2b}{3a}=2022 \\ x_1\cdot x_2=\dfrac{3}{3a}=2021 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-3033a \\ c=6063a. \end{cases}$

Xét phương trình

$$\begin{aligned} f(x)=f(m) &\Leftrightarrow ax^3+bx^2+cx+d=am^3+bm^2+cm+d \\ &\Leftrightarrow a\left(x^3-m^3\right)+b\left(x^2-m^2\right)+c(x-m)=0 \\ &\Leftrightarrow a(x^3-m^3)-3033a\left(x^2-m^2\right)+6063(x-m)=0 \\ &\Leftrightarrow (x-m)(x^2+mx+m^2-3033x-3033m+6063)=0 \\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-m=0 \\ x^2+mx+m^2-3033x-3033m+6063=0 \quad (*). \end{array}\right. \end{aligned}$$

Phương trình $f(x)=f(m)$ có 3 nghiệm phân biệt thì pt(*) có 2 nghiệm phân biệt khác m

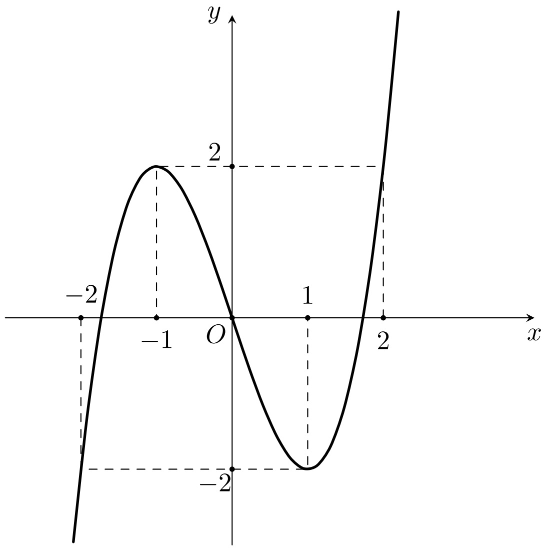
$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta=(m-3033)^2-4\left(m^2-3033m+6063\right)>0 \\ m^2+(m-3033)m+m^2-3033m+6063\neq 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} m^2-6063m+3033^2-4m^2+4\cdot 3033m-4\cdot 6063>0 \\ m^2+(m-3033)m+m^2-3033m+6063\neq 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -1009<m<3031 \\ m\neq 2021;\ m\neq 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy $m\in(-1009;3031)\setminus\{1;2021\}$ có 4037 giá trị m nguyên.

Chọn đáp án A □

Câu 142 (THPT Lê Lợi - Thanh Hóa - 2021).

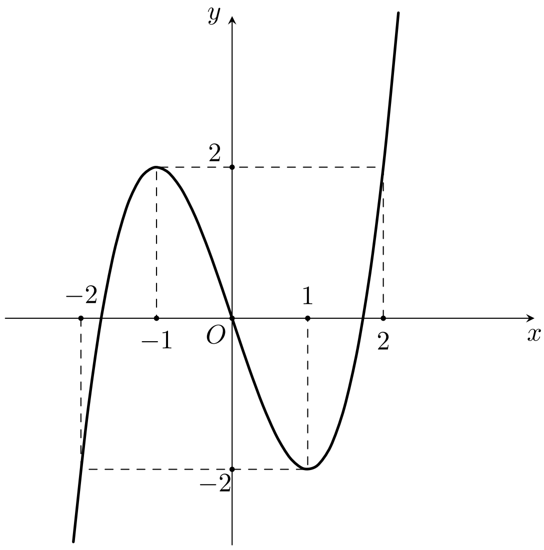
Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị hình vẽ.



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(\sqrt{4+2f(\cos x)}\right)=m$ có nghiệm $x\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$

A) 4. B) 5. C) 3. D) 2.

Lời giải.



Đặt $t=\cos x$, với $x\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)\Rightarrow t\in(0;1)$.

Từ đồ thị suy ra $f(t)\in(-2;0)\Rightarrow 4+2f(t)\in(0;4)\Rightarrow u=\sqrt{4+2f(t)}\in(0;2)$.

Ta có $f(u)=m$ với $u\in(0;2)$.

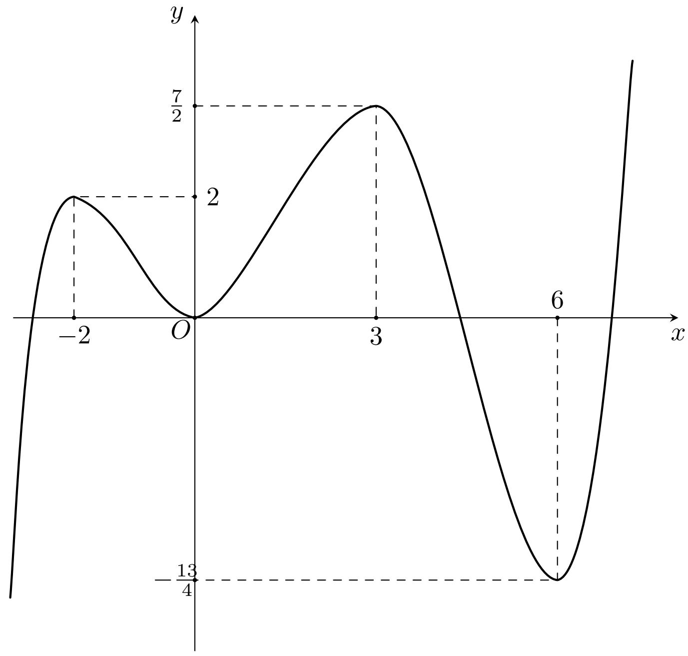
Phương trình đã cho có nghiệm $x\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$ khi và chỉ khi phương trình $f(u)=m$ có nghiệm $u\in(0;2)\Leftrightarrow -2\le m<2$.

Do $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\in\{-2;-1;0;1\}$.

Vậy có 4 giá trị nguyên của tham số m thoả mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án A □

Câu 143 (Sở Hà Tĩnh - 2021). Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ sau



Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $f\left(2x^3-6x+2\right)=\dfrac{1}{2}m-5$ có 6 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[-1;2]$?

(A) 4. (B) 3. (C) 2. (D) 1.

Lời giải.

Đặt $g(x)=f\left(2x^3-6x+2\right)$; $g'(x)=\left(6x^2-6\right)\cdot f'\left(2x^3-6x+2\right)$.

$g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}6x^2-6=0\ (1)\\ f'\left(2x^3-6x+2\right)=0\quad(2)\end{array}\right.$

+ Giải (1): $6x^2-6=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\ x=1.\end{array}\right.$

+ Giải (2): $f'\left(2x^3-6x+2\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x^3-6x+2=-2\\ 2x^3-6x+2=0\\ 2x^3-6x+2=3\\ 2x^3-6x+2=6\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}x=-2\notin[-1;2]\\ x=1\ \text{(nghiệm kép)}\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}x\approx-1,87\notin[-1;2]\\ x\approx 0{,}34\\ x\approx 1{,}53\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}x\approx-1{,}64\notin[-1;2]\\ x\approx-0{,}16\\ x\approx 1{,}81\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}x=-1\ \text{(nghiệm kép)}\\ x=2.\end{array}\right.\end{array}\right.$

Bảng biến thiên của $g(x)$ trên đoạn $[-1;2]$

x	-1		$-0{,}16$		$0{,}45$		1		$1{,}53$		$1{,}81$		2
$g'(x)$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0
$g(x)$	$-\frac{13}{4}$	$\nearrow$	$\frac{7}{2}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{7}{2}$	$\searrow$	$-\frac{13}{4}$

$y = \frac{1}{2}m - 5$

Số nghiệm của phương trình $f\left(2x^3 - 6x + 2\right) = \dfrac{1}{2}m - 5$ bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $g(x) = f\left(2x^3 - 6x + 2\right)$ và đường thẳng $y = \dfrac{1}{2}m - 5$.

Kẻ đường thẳng $y = \dfrac{1}{2}m - 5$ trên cùng bảng biến thiên của $g(x)$.

Điều kiện để đường thẳng $y = \dfrac{1}{2}m - 5$ cắt đồ thị hàm số $g(x) = f\left(2x^3 - 6x + 2\right)$ tại 6 điểm phân biệt là

$$0 < \frac{1}{2}m - 5 < 2 \Leftrightarrow 10 < m < 14.$$

Vì $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{11; 12; 13\}$.

Vậy có 3 số nguyên m thỏa mãn ycbt.

Chọn đáp án B □

Câu 144 (THPT Thanh Chương 1- Nghệ An - 2021).

Cho hàm số $f(x) = x + \sqrt{1 + x^2}$. Số giá trị nguyên của tham số m để phương trình $xf(x) - \dfrac{1 + \sqrt{4x + m - 1}}{f\left(-1 - \sqrt{4x + m - 1}\right)} = 0$ có hai nghiệm phân biệt là

A 2. B 3. C 6. D 4.

Lời giải.

Ta có $f(x) = x + \sqrt{1 + x^2} \Rightarrow f'(x) = 1 + \dfrac{x}{\sqrt{1 + x^2}} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Suy ra hàm số $f(x) = x + \sqrt{1 + x^2}$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Mặt khác, ta lại có $f(-x) = -x + \sqrt{1 + x^2} = \dfrac{1}{x + \sqrt{1 + x^2}} = \dfrac{1}{f(x)}$.

Nên phương trình tiếp theo tương đương với

$$\begin{aligned} & xf(x) - \frac{1 + \sqrt{4x + m - 1}}{f\left(-1 - \sqrt{4x + m - 1}\right)} = 0. \\ \Leftrightarrow\ & xf(x) - \left(1 + \sqrt{4x + m - 1}\right) f\left(1 + \sqrt{4x + m - 1}\right) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & xf(x) = \left(1 + \sqrt{4x + m - 1}\right) f\left(1 + \sqrt{4x + m - 1}\right) \end{aligned}$$

Đến đây ta xét hàm đặc trưng $y = g(t) = tf(t) = t \cdot \left(t + \sqrt{t^2 + 1}\right) = t^2 + t\sqrt{t^2 + 1}$.

Có $g'(t) = 2t + \sqrt{t^2 + 1} + \dfrac{t^2}{\sqrt{t^2 + 1}} > 0,\ \forall t \in \mathbb{R}$ nên $g(t)$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow\ & g(x) = g\left(1 + \sqrt{4x + m - 1}\right) \\ \Leftrightarrow\ & x = 1 + \sqrt{4x + m - 1} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \quad \sqrt{4x+m-1} = x-1.$$

Do $\sqrt{4x+m-1} \geq 0$ nên suy ra $\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ 4x+m-1 = (x-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ m = x^2 - 6x + 2. \end{cases}$

Xét hàm $y = p(x) = x^2 - 6x + 2,\ \forall x \geq 1 \Rightarrow p'(x) = 2x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 3$ (nhận).

Ta có BBT của hàm $p(x)$ như sau

x	1		3		$+\infty$
$p'(x)$		$-$	0	$+$	
$p(x)$	-3	$\searrow$	-7	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào BBT trên để phương trình có hai nghiệm phân biệt thì $m \in (p(3); p(1)] \Leftrightarrow m \in (-7; -3]$.

Như vậy, ta kết luận có tất cả 4 giá trị nguyên thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Chọn đáp án D □

Câu 145 (THPT Nguyễn Huệ - Phú Yên - 2021).

Cho hàm số $y = f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$. Tập hợp các giá trị m để phương trình $f\left(f\left(\dfrac{2\sin x + 1}{2}\right)\right) = f(m)$ có nghiệm là đoạn $[a; b]$. Khi đó giá trị $4a^2 + 8b$ thuộc khoảng nào sau đây?

A $\left(7; \dfrac{23}{2}\right)$. B $(-2; 5)$. C $\left(\dfrac{43}{3}; \dfrac{39}{2}\right)$. D $\left(\dfrac{37}{3}; \dfrac{65}{4}\right)$.

Lời giải.

Ta có: $y' = 6x^2 - 6x$.

$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1. \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Ta có $\dfrac{2\sin x + 1}{2} = \sin x + \dfrac{1}{2} \in \left[-\dfrac{1}{2}; \dfrac{3}{2}\right]$ suy ra $f\left(\dfrac{2\sin x + 1}{2}\right) \in [0; 1]$ nên $f\left(f\left(\dfrac{2\sin x + 1}{2}\right)\right) \in [0; 1]$.

Phương trình $f\left(f\left(\dfrac{2\sin x + 1}{2}\right)\right) = f(m)$ có nghiệm $\Leftrightarrow 0 \leq f(m) \leq 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2m^3 - 3m^2 + 1 \geq 0 \\ 2m^3 - 3m^2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq m \leq \frac{3}{2}.$$

Vậy $4a^2 + 8b = 4 \cdot \dfrac{1}{4} + 8 \cdot \dfrac{3}{2} = 13$.

Chọn đáp án D □

Câu 146 (THPT Hoàng Hoa Thám - Đà Nẵng - 2021).

Cho hàm số $f(x) = \dfrac{x^2+5x+2}{2x+1}$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để bất phương trình $2021f\left(\sqrt{3x^2-18x+28}\right) - m\sqrt{3x^2-18x+28} \geq m+4042$ nghiệm đúng với mọi x thuộc đoạn $[2;4]$.

(A) 673. (B) 808. (C) 135. (D) 898.

Lời giải.

Đặt $u = \sqrt{3x^2-18x+28} = \sqrt{3(x-3)^2+1} = \sqrt{3(x-2)(x-4)+4}$ do đó ta có với $\forall x \in [2;4]$ thì $u \in [1;2]$.

Biến đổi BPT ta được

$$2021f(u) - m\cdot u \geq m+4042 \Leftrightarrow 2021\left[f(u)-2\right] \geq m(u+1).$$

Ta có $f(x) = \dfrac{x^2+5x+2}{2x+1}$ nên

$$f(u)-2 = \frac{u^2+5u+2}{2u+1} - 2 = \frac{u^2+u}{2u+1}$$

do vậy bất phương trình được biến đổi tiếp

$$\frac{2021\left(u^2+u\right)}{2u+1} \geq m(u+1) \Leftrightarrow m \leq \frac{2021u}{2u+1}.$$

Lúc này yêu cầu bài toán tương đương

$$m \leq \frac{2021u}{2u+1},\ \forall u \in [1;2] \Leftrightarrow m \leq \min_{[1;2]} g(u).$$

Xét hàm số $g(u) = \dfrac{2021u}{2u+1}$, $u \in [1;2]$ ta có $g'(u) = \dfrac{2021}{(2u+1)^2} > 0$, $\forall u \in [1;2]$ do vậy hàm số $g(u)$ tăng trên đoạn $[1;2]$.

Vì vậy $\min\limits_{[1;2]} g(u) = \dfrac{2021u}{2u+1} = g(1) = \dfrac{2021}{3}$.

Kết hợp với m là các số nguyên dương ta được $m \in \{1;2;3;\ldots;673\}$.

Vậy tìm được 673 số nguyên dương thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án (A) □

Câu 147 (Chuyên Lương Văn Chánh - Phú Yên - 2021).

Cho hàm số $f(x) = x^3+2x-5^m$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc đoạn $[-6;6]$ để bất phương trình $f(f(x)) \geq x$ đúng với mọi x thuộc khoảng $(2;6)$.

(A) 5. (B) 11. (C) 8. (D) 6.

Lời giải.

Ta có $f(f(x)) \geq x \Leftrightarrow f(f(x)) + f(x) \geq f(x) + x$.

Xét hàm số $h(t) = f(t) + t$ trên tập số thực $\mathbb{R}$.

Ta có $h'(t) = 3t^2+3 > 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Suy ra hàm số $h(t) = f(t)+t$ luôn đồng biến trên tập $\mathbb{R}$.

Suy ra $f(f(x)) + f(x) \geq f(x) + x \Leftrightarrow f(x) \geq x \Leftrightarrow x^3+x \geq 5^m$.

$f\left(f(x)\right) \geq x \Leftrightarrow x^3 + x \geq 5^m$ đúng với mọi x thuộc khoảng $(2;6) \Leftrightarrow \min\limits_{[2;6]}\left(x^3+x\right) \geq 5^m$

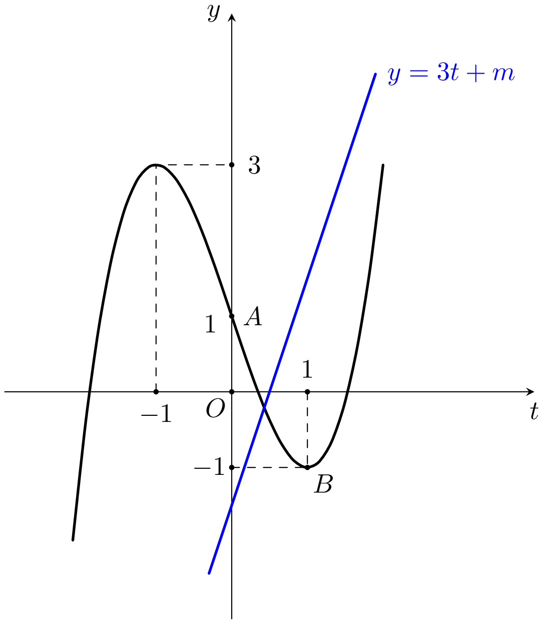
$$\Leftrightarrow 2^3 + 2 \geq 5^m \Leftrightarrow m \leq \log_5 10.$$

Do m là số nguyên thuộc đoạn $[-6;6]$ nên $m \in \{-6;-5;-4;-3;-2;-1;0;1\}$.

Vậy có 8 giá trị nguyên của m cần tìm.

Chọn đáp án C □

Câu 148 (Sở Bình Phước - 2021). Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(\sin x) = 3\sin x + m$ có nghiệm thuộc khoảng $(0;\pi)$. Tổng các phần tử của S bằng



(A) -6. (B) -5. (C) -8. (D) -10.

Lời giải.

Xét phương trình $f(\sin x) = 3\sin x + m$ (1).

Đặt $t = \sin x$, ta có phương trình $f(t) = 3t + m$ (2), phương trình (1) có nghiệm $x \in (0;\pi)$ khi và chỉ khi phương trình (2) có nghiệm $t \in (0;1]$.

Số nghiệm của (2) bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(t)$, $t \in (0;1]$ và đường thẳng $y = 3t + m$.

Đường thẳng $y = 3t + m$ đi qua điểm $A(0;1)$ nên có phương trình $y = 3t + 1$.

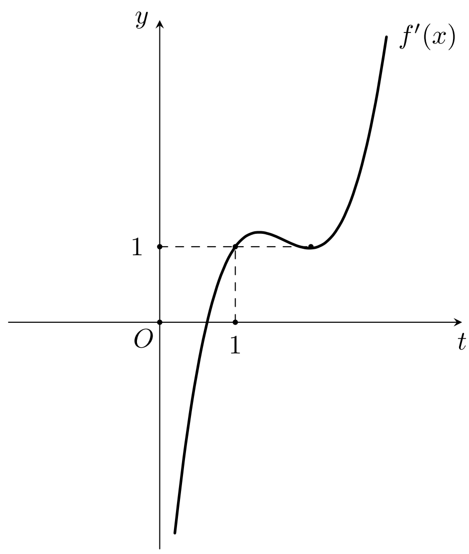
Đường thẳng $y = 3t + m$ đi qua điểm $B(1;-1)$ nên có phương trình $y = 3t - 4$.

Từ đó ta có giá trị m thỏa mãn bài toán là $m \in [-4;1)$. Các giá trị nguyên của m là tập $S = \{-4;-3;-2;-1;0\}$, vậy tổng các phần tử bằng -10.

Chọn đáp án D □

Câu 149 (Liên Trường Nghệ An – 2021).

Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ được cho bởi hình vẽ bên. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m trong khoảng $(1;2021)$ để bất phương trình $f\left(1-m^2\right) - f\left(-x^2+2mx+1-3m^2\right) < x^2 - 2mx + 2m^2$ có nghiệm?



Ⓐ 0. Ⓑ 1. Ⓒ 2019. Ⓓ 2020.

Lời giải.

$$f\left(1-m^2\right)-f\left(-x^2+2mx+1-3m^2\right)<x^2-2mx+2m^2$$
$$\Leftrightarrow\quad -x^2+2mx+1-3m^2-f\left(-x^2+2mx+1-3m^2\right)<1-m^2-f\left(1-m^2\right).\quad(*)$$

Ta có$1-m^2<0,\ \forall m\in(1;2021)$.

$-x^2+2mx+1-3m^2=-(x-m)^2-2m^2+1<0,\ \forall m\in(1;2021),\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Xét hàm số $g(t)=t-f(t),\ t<0$.

Có $g'(t)=1-f'(t)>0,\ \forall t<0$ (do từ đồ thị ta có $f'(x)<0,\ \forall x<0$).

Vậy $g(t)$ là hàm số đồng biến trên $(-\infty;0)$.

$(*)$ có dạng $g\left(-x^2+2mx+1-3m^2\right)<g\left(1-m^2\right)$

$$\Leftrightarrow -x^2+2mx+1-3m^2<1-m^2$$
$$\Leftrightarrow -x^2+2mx-m^2<m^2$$
$$\Leftrightarrow -(x-m)^2<m^2 \text{ luôn đúng } \forall m\in(1:2021),\ \forall x\in\mathbb{R}.$$

Vì m nguyên nên $m\in\{2;\,3;\,\ldots;\,2020\}$.

Vậy có 2019 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 150 (Sở Nam Định - 2021). Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện $f(0)=2\sqrt{2}$, $f(x)>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$ và $f(x)\cdot f'(x)=(2x+1)\cdot\sqrt{1+f^2(x)},\ \forall x\in\mathbb{R}$. Tất các giá trị m để phương trình $2x^2+2x-mf(x)+5=0$ có nghiệm là $\left[a\sqrt{\frac{15}{7}}+b\sqrt{\frac{7}{15}};2\right)$,$a,\ b\in\mathbb{Q}$. Tính tổng $S=a+b$.

Ⓐ $S=2$. Ⓑ $S=3$. Ⓒ $S=4$. Ⓓ $S=1$.

Lời giải.

Ta có $f(x)\cdot f'(x)=(2x+1)\cdot\sqrt{1+f^2(x)} \Leftrightarrow \dfrac{f(x)\cdot f'(x)}{\sqrt{1+f^2(x)}}=2x+1$

$$\Leftrightarrow \frac{2f(x)\cdot f'(x)}{2\sqrt{1+f^2(x)}}=2x+1$$
$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{1+f^2(x)}\right)'=2x+1$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{1+f^2(x)}=x^2+x+C.$$

Vì $f(0)=2\sqrt{2}\Rightarrow C=3$.

Suy ra

$$\begin{aligned}\sqrt{1+f^2(x)}&=x^2+x+3\\ \Rightarrow 1+f^2(x)&=\left(x^2+x+3\right)^2\\ \Rightarrow f(x)&=\sqrt{\left(x^2+x+3\right)^2-1}>0.\end{aligned}$$

Theo đề ta có

$$2x^2+2x-mf(x)+5=0\Leftrightarrow m=\frac{2x^3+2x+5}{f(x)}=\frac{2\left(x^2+x\right)+5}{\sqrt{\left(x^2+x+3\right)^2-1}}.$$

Đặt $t=x^2+x\Rightarrow t\geq -\dfrac{1}{4}$.

Xét hàm số $h(t)=\dfrac{2t+5}{\sqrt{(t+3)^2-1}}$, $\forall t\in\left[-\dfrac{1}{4};+\infty\right)$.

$h'(t)=\dfrac{2\sqrt{t^2+6t+8}-\dfrac{(2t+6)(2t+5)}{2\sqrt{t^2+6t+8}}}{\left(t^2+6t+8\right)^2}=\dfrac{t+1}{\left(t^2+6t+8\right)^2}$, $\forall t\in\left[-\dfrac{1}{4};+\infty\right)$ Bảng biến thiên

x	$-\frac{1}{4}$		$+\infty$
y'		$+$	
y	$\frac{6\sqrt{105}}{35}$	$\nearrow$	2

Suy ra phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $m\in\left[\dfrac{6\sqrt{105}}{35};+\infty\right)$.

Ta có $\dfrac{6\sqrt{105}}{35}=\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{15}{7}}+\dfrac{3}{2}\sqrt{\dfrac{7}{15}}\Rightarrow a=\dfrac{1}{2};\ b=\dfrac{3}{2}\Rightarrow S=a+b=2$.

Chọn đáp án A □

Câu 151 (THPT Hồ Nghinh – Quảng Nam – 2022).

Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-4		-2		0		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	2	$\searrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $6f\left(x^2-4x\right)=m$ có ít nhất 3 nghiệm thực phân biệt thuộc khoảng $(0;+\infty)$?

Ⓐ 29. Ⓑ 25. Ⓒ 24. Ⓓ 30.

Lời giải.

Ta có: $6f\left(x^2-4x\right)=m \Leftrightarrow f\left(x^2-4x\right)=\dfrac{m}{6}$.

Đặt $u=x^2-4x \Rightarrow u'=0 \Leftrightarrow x=2$.

x	0		2			$+\infty$
u	0	-2	-4	-2	0	$+\infty$
$f(u)$	-3 ↗	2 ↘	-2 ↗	2 ↘	-3 ↗	$+\infty$

Phương trình $f\left(x^2-4x\right)=\dfrac{m}{6}$ có ít nhất 3 nghiệm phân biệt thuộc $(0;+\infty)$

$$\Leftrightarrow -3<\frac{m}{6}\leq 2 \Leftrightarrow -18<m\leq 12.$$

Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 152 (Liên trường Hà Tĩnh – 2022).

Cho hàm số $y=f(x)=2022^x-2022^{-}x+x+\sin x$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $f(x+3)+f\left(x^3-4x+m\right)=0$ có ba nghiệm phân biệt?

Ⓐ 4. Ⓑ 3. Ⓒ 2. Ⓓ 5.

Lời giải.

Xét hàm số $y=f(x)=2022^x-2022^{-}x+x+\sin x$

$\Rightarrow f'(x)=2022^x\ln 2022+2022^{-}x\ln 2022+1+\cos x>0\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Suy ra $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Ta có $f(-x)=2022^{-}x-2022^x-x-\sin x=-\left(2022^x-2022^{-}x+x+\sin x\right)=-f(x)$.

Xét phương trình

$$f(x+3)+f\left(x^3-4x+m\right)=0 \Leftrightarrow f\left(x^3-4x+m\right)=-f(x+3)=f(-x-3).$$

Vì $f(x)$ đồng biến nên

$$f\left(x^3-4x+m\right)=f(-x-3)\Leftrightarrow x^3-4x+m=-x-3\Leftrightarrow x^3-3x+3=-m \quad (1)$$

YCBT phương trình (1) phải có ba nghiệm phân biệt.

Xét hàm số $f(x)=x^3-3x+3$, ta có bảng biến thiên

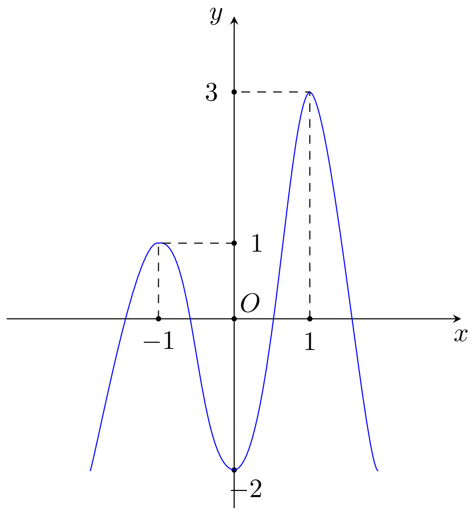
x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	5	↘	1	↗	$+\infty$

Dựa vào BBT suy ra $1 < -m < 5 \Leftrightarrow -5 < m < -1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-4 \\ m=-3 \\ m=-2. \end{array}\right.$

Vậy có 3 giá trị nguyên của m.

Chọn đáp án (B) □

Câu 153 (Sở Hà Tĩnh 2022). Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và đồ thị của hàm số $y = f(1-x)$ như hình vẽ bên



Số giá trị nguyên của m để phương trình $f\left(\dfrac{1-x}{x+2}\right) - \dfrac{2x+1}{x+2} + m = 0$ có 4 nghiệm phân biệt là

(A) 3. (B) 4. (C) 2. (D) 5.

Lời giải.

Đặt $\dfrac{1-x}{x+2} = 1 - t \Leftrightarrow t = 1 - \dfrac{1-x}{x+2} = \dfrac{2x+1}{x+2}$.

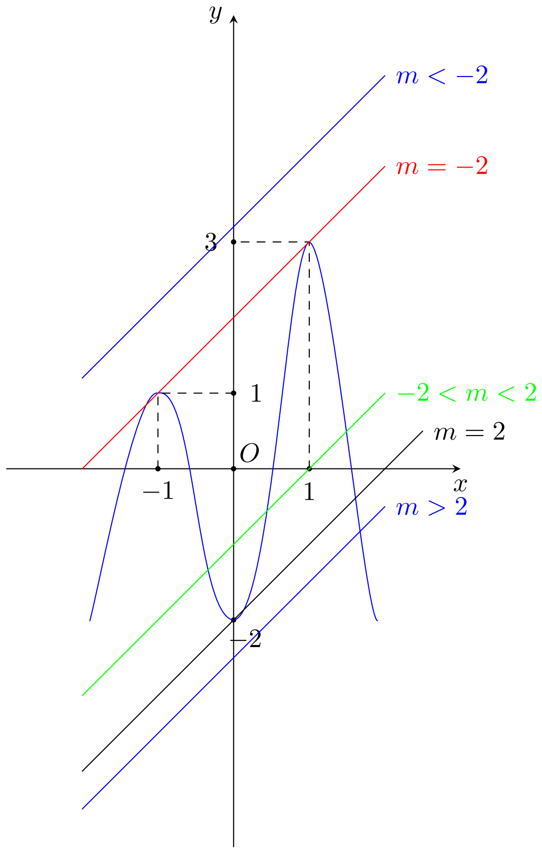
Phương trình trở thành $f(1-t) - t + m = 0 \Leftrightarrow f(1-t) = t - m(*)$.

Yêu cầu bài toán tương đương với (*) có 4 nghiệm phân biệt.

Điều này tương đương với đồ thị của hai hàm số $(C)\colon y = f(1-x)$; $d\colon y = x - m$ cắt nhau tại bốn điểm phân biệt.

Chú ý đường thẳng $y = x - m$ qua hai điểm $(m; 0)$; $(0; -m)$ và song song hoặc trùng với đường thẳng $y = x$.

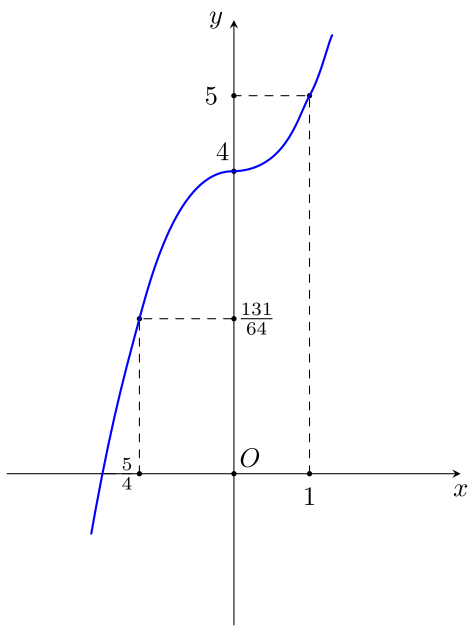
Vẽ đường thẳng $d\colon y = x - m$ trên cùng hệ trục toạ độ với đồ thị (C) như hình vẽ



Từ đồ thị suy ra $d \cap (C)$ tại 4 điểm phân biệt khi và chỉ khi $-2 < m < 2 \Rightarrow m \in \{-1; 0; 1\}$

Chọn đáp án (A) □

Câu 154 (Sở Hà Tĩnh 2022). Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có $f'(1) = 3$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m và $m \in [-10; 10]$ để phương trình $\ln \dfrac{f(x)}{3mx^2} + x\left[f(x) - 3mx\right] = 3mx^3 - f(x)$ có hai nghiệm dương phân biệt?



(A) 18. (B) 9. (C) 10. (D) 15.

Lời giải.

Do yêu cầu bài toán là phương trình có hai nghiệm dương phân biệt nên ta chỉ xét $x > 0$.

Giả sử $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Vì đồ thị đi qua các điểm $A\left(-\frac{5}{4}; \frac{131}{64}\right)$, $B(0;4)$, $C(1;5)$ nên ta có $\begin{cases} -\frac{125}{64}a + \frac{25}{16}b - \frac{5}{4}c + d = \frac{131}{64} \\ d = 4 \\ a + b + c + d = 5. \end{cases}$ (1)

Ta có $f'(1) = 3 \Leftrightarrow 3a + 2b + c = 3$. (2)

Từ (1) và (2) ta có $a = 1$, $b = 0$, $c = 0$, $d = 4$, suy ra $f(x) = x^3 + 4$.

Điều kiện $\frac{f(x)}{3mx^2} > 0 \Rightarrow m > 0$.

$$\begin{aligned} & \ln \frac{f(x)}{3mx^2} + x\left[f(x) - 3mx\right] = 3mx^3 - f(x) \\ \Leftrightarrow\ & \ln f(x) - \ln\left(3mx^2\right) + x\left[f\left(x - 3mx^2\right)\right] + f(x) - 3mx^2 = 0. \end{aligned}$$

Nếu $f(x) > mx^2$ thì $\log f(x) > \log\left(mx^2\right)$ và $xf(x) > x(mx^2)$, $\forall x > 0 \Rightarrow$ (3) vô nghiệm.

Tương tự nếu $f(x) < mx^2$ thì phương trình (3) vô nghiệm.

Do đó $f(x) = 3mx^2 \Leftrightarrow x^3 + 4 = 3mx^2 \Leftrightarrow \frac{x^3+4}{3x^2} = m$, vì $x > 0$.

Xét hàm số $g(x) = \frac{x^3+4}{3x^2}$ với $x > 0$.

$g'(x) = \frac{3x^4 - 24x}{9x^4} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2. \end{array}\right.$

Vì $x > 0$ nên ta nhận $x = 2$.

Ta có bảng biến thiên

x	0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

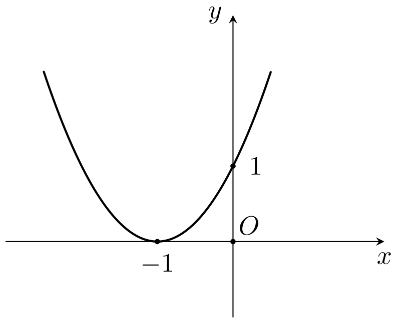
Để phương trình $\frac{x^3+4}{3x^2} = m$ có hai nghiệm dương phân biệt thì $m > 1$.

Mà $m \in \mathbb{Z}$ và $m \in [-10; 10]$ nên $m \in \{2; 3; \ldots; 10\}$.

Vậy có 9 giá trị nguyên của tham số m thoả yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án B □

Câu 155 (Sở Ninh Bình 2022). Cho $f(x)$ là hàm số bậc ba. Hàm số $f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f\left(e^x - 1\right) - x - m = 0$ có hai nghiệm thực phân biệt?



Ⓐ $m < f(2)$. Ⓑ $m > f(0)$. Ⓒ $m < f(0)$. Ⓓ $m > f(2)$.

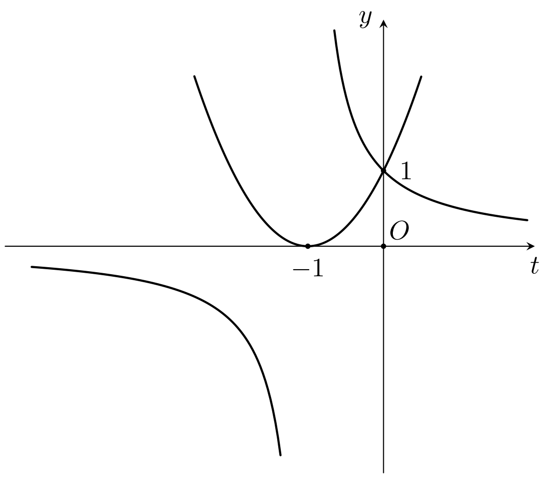
Lời giải.

Cách 1. Ta có $f\left(e^x - 1\right) - x - m = 0 \Leftrightarrow f\left(e^x - 1\right) - x = m$.

Đặt $h(x) = f\left(e^x - 1\right) - x$ thì $h'(x) = e^x f'\left(e^x - 1\right) - 1$.

Suy ra $h'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x f'\left(e^x - 1\right) - 1 = 0 \Leftrightarrow f'\left(e^x - 1\right) = \dfrac{1}{e^x}$.

Đặt $t = e^x - 1,\ t > -1$ thì (1) trở thành $f'(t) = \dfrac{1}{t+1}$. Ta có đồ thị sau



x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Từ đồ thị ta có nghiệm của phương trình (2) là $t = 0$, suy ra $e^x - 1 = 0$ hay $x = 0$.

Ta có bảng biến thiên của $h(x)$ như trên. Từ đó, phương trình $h(x) = m$ có hai nghiệm thực phân biệt khi và chỉ khi $m > f(0)$.

Cách 2. Từ đồ thị ta có $f'(x) = (x+1)^2$. Suy ra $f(x) = \dfrac{1}{3}(x+1)^3 + C$.

Thay vào phương trình, ta được $\dfrac{e^3 x}{3} + C - x - m = 0 \Leftrightarrow m = \dfrac{e^3 x}{3} - x + C$.

Đặt $g(x) = \dfrac{e^3 x}{3} - x + C$. Ta có $g'(x) = 0 \Leftrightarrow e^3 x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

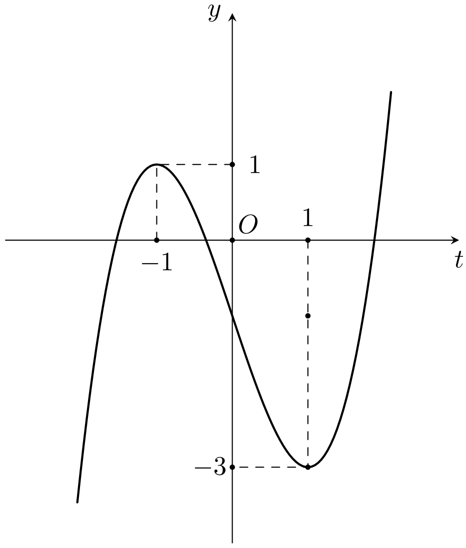
Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		$+\infty$
g'		$-$	0	$+$	
g	$+\infty$	$\searrow$	$g(0) = f(0)$	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên, phương trình có hai nghiệm thực khi và chỉ khi $m > f(0)$.

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 156 (Sở Hà Tĩnh 2022). Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ.



Tính tổng tất cả các giá trị nguyên của m để phương trình $f(1-2\sin x) = m$ có đúng hai nghiệm trên $[0;\pi]$

Ⓐ -3. Ⓑ -2. Ⓒ 0. Ⓓ -6.

Lời giải.

Xét phương trình $f(1-2\sin x) = m$.

Có $-2 \le -2\sin x \le 2 \Rightarrow -1 \le 1-2\sin x \le 1; x \in [0;\pi] \Rightarrow 1-2\sin x \in [-1;1]$.

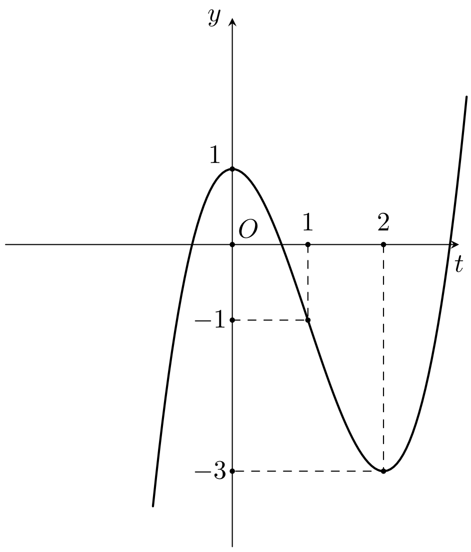
Mỗi giá trị $t = 1-2\sin x \in (-1;1]$ ứng với hai giá trị x phân biệt thuộc $[0;\pi]$.

Từ đồ thị suy ra $-3 \le f(1-2\sin x) \le 1 \Rightarrow -3 \le m < 1$ thì $f(1-2\sin x) = m$ có hai nghiệm phân biệt.

Mà $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{-3;-2;-1;0\}$. Tổng tất cả các giá trị nguyên của m là -6.

Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 157 (Sở Vĩnh Phúc 2022). Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ dưới đây.



Bất phương trình $f(x) - \dfrac{1}{3}x^3 + x^2 + 3x - m > 0$ nghiệm đúng với mọi $x \in (0;2)$ khi và chỉ khi

(A) $m < f(0)$. (B) $m < f(2) + \dfrac{22}{3}$. (C) $m \leq f(0)$. (D) $m \leq f(2) + \dfrac{22}{3}$.

Lời giải.

Bất phương trình $f(x) - \dfrac{1}{3}x^3 + x^2 + 3x - m > 0 \Leftrightarrow f(x) - \dfrac{1}{3}x^3 + x^2 + 3x > m$. (1)

Xét $g(x) = f(x) - \dfrac{1}{3}x^3 + x^2 + 3x$, $x \in (0;2)$ có $g'(x) = f'(x) - x^2 + 2x + 3$.

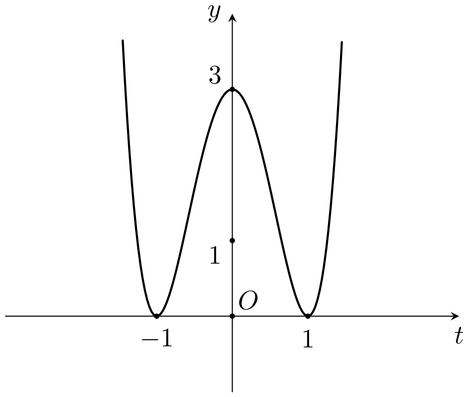
Ta thấy trên khoảng $(0;2)$ thì $f'(x) > -3$ và $-x^2 + 2x + 3 > 3 \Rightarrow g'(x) > 0$, $\forall x \in (0;2)$.

Do đó $g(x)$ là hàm đồng biến trên khoảng $(0;2)$.

Bất phương trình (1) nghiệm đúng với mọi $x \in (0;2)$ khi và chỉ khi $m \leq g(0) = f(0)$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 158 (Chuyên Lam Sơn 2022). Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-2021; 2021]$ để phương trình $\left(f^2(x) + x^2\right)^2 - \left(m^2 + 2m + 14\right)\left(f^2(x) + x^2\right) + 4(m+1)^2 + 36 = 0$ có đúng 6 nghiệm phân biệt?

(A) 2022. (B) 4043. (C) 4042. (D) 2021.

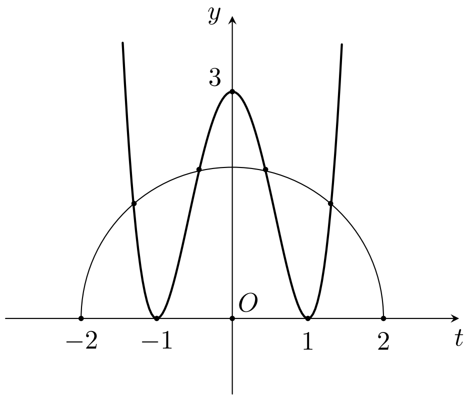
Lời giải.

Đặt $t = f^2(x) + x^2$, $(t \geq 0)$ ta có phương trình

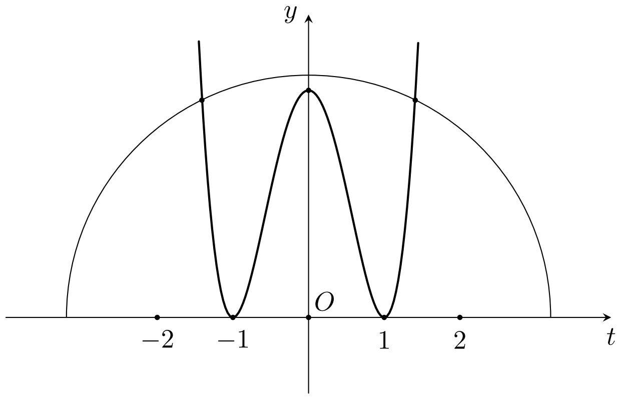
$$t^2 - \left(m^2 + 2m + 14\right)t + 4(m+1)^2 + 36 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 4 \\ t = m^2 + 2m + 10. \end{array}\right.$$

+ Với $t = 4$ hay $f^2(x) + x^2 = 4 \Leftrightarrow f^2(x) = 4 - x^2 \Rightarrow f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ (do $f(x) \geq 0$).

Số nghiệm của phương trình $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ là số giao điểm của đường cong $y = f(x)$ và nửa đường tròn $C(O;2)$.



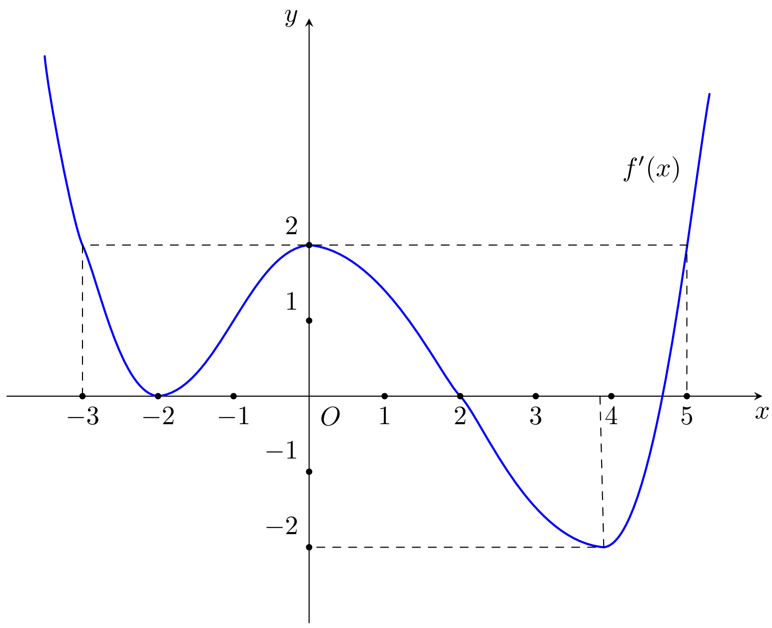
Dựa vào đồ thị ta thấy phương trình có 4 nghiệm phân biệt.
$t = m^2 + 2m + 10$ hay $f^2(x) + x^2 = m^2 + 2m + 10 \Leftrightarrow f^2(x) = m^2 + 2m + 10 - x^2$
$\Rightarrow f(x) = \sqrt{m^2 + 2m + 10 - x^2}$ (do $f(x) \geq 0$).
Số nghiệm của phương trình là số giao điểm của đường cong $y = f(x)$ và nửa đường tròn $C\left(O; \sqrt{m^2 + 2m + 10}\right)$



$\left(f^2(x) + x^2\right)^2 - (m^2 + 2m + 14)\left(f^2(x) + x^2\right) + 4(m+1)^2 + 36 = 0$ chỉ có 6 nghiệm phân biệt thì phương trình $f(x) = \sqrt{m^2 + 2m + 10 - x^2}$ chỉ có 2 nghiệm phân biệt.
Dựa vào đồ thị ta có điều kiện $m^2 + 2m + 10 > 9 \Leftrightarrow m^2 + 2m + 1 > 0 \Leftrightarrow m \neq -1$.
Vậy có 4042 giá trị của $m \in [-2021; 2021]$.
Chọn đáp án C □

Câu 159 (Chuyên Nguyễn Trãi – Hải Dương-2022).

Cho hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ. Biết rằng $f(3) = 2f(5) = 4$. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(\frac{1}{2}f(x) - m\right) = 2x + 2m$ có đúng 3 nghiệm thực phân biệt?



A 8. B 6. C 3. D 7.

Lời giải.

Đặt $\frac{1}{2}f(x)-m=u \Rightarrow \begin{cases} f(x)=2u+2m \\ f(u)=2x+2m \end{cases} \Rightarrow f(u)+2u=f(x)+2x.$

Xét hàm số $g(t)=f(t)+2t \Rightarrow g't)=f'(t)+2 \geq -2+2=0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$

Do đó hàm số $g(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R} \Rightarrow u=x \Leftrightarrow \frac{1}{2}f(x)-m=x \Leftrightarrow h(x)=\frac{1}{2}f(x)-x=m.$

Xét hàm số $h(x)=\frac{1}{2}f(x)-x \Rightarrow h'(x)=\frac{1}{2}f'(x)-1.$

$$\Rightarrow h'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}f'(x)=1 \Leftrightarrow f'(x)=2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-3 \Rightarrow h(-3)=\frac{1}{2}f(-3)-(-3)=5 \\ x=0 \\ x=5 \Rightarrow h(5)=\frac{1}{2}f(5)-(5)=-4. \end{array}\right.$$

Ta có bảng biến thiên của hàm số $h(x)=\frac{1}{2}f(x)-x$ như sau

t	$-\infty$		-3		0		5		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	5		$\searrow$		-4	$\nearrow$	$+\infty$

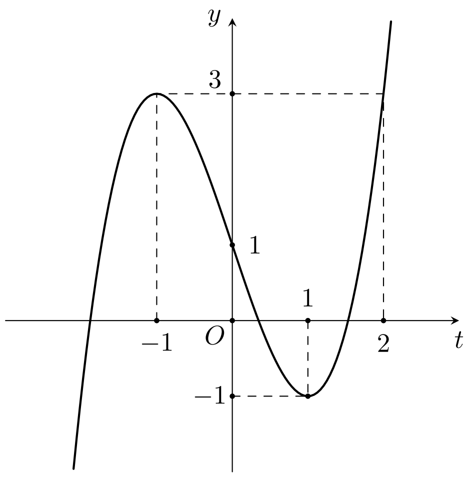
Dựa vào bảng biến thiên ta suy ra phương trình có 3 nghiệm khi $-4<m<5$.

Do $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-3;-2;-1;0;1;2;3;4\}$ Vậy có 8 giá trị nguyên của m.

Chọn đáp án A □

Câu 160 (THPT Lương Thế Vinh – Hà Nội – 2022).

Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình vẽ



Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(3-\sqrt{4-x^2}\right)=m$ có hai nghiệm phân biệt thuộc đoạn $\left[-\sqrt{3};\sqrt{3}\right]$. Số phần tử của S là

A 1. B 4. C 4. D 3.

Lời giải.

Xét $y=f\left(3-\sqrt{4-x^2}\right) \Rightarrow y'=\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}f'\left(3-\sqrt{4-x^2}\right)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ f'\left(3-\sqrt{4-x^2}\right)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ 3-\sqrt{4-x^2}=-1 \Leftrightarrow x=0. \\ 3-\sqrt{4-x^2}=1. \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên

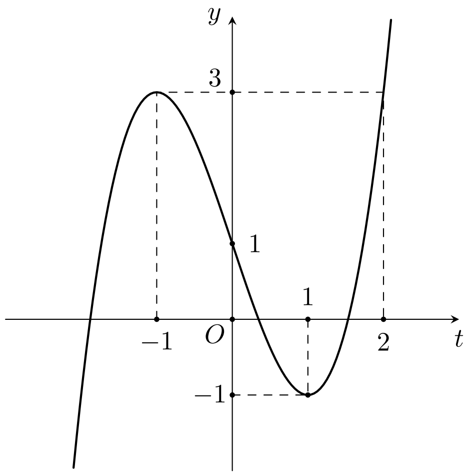
x	$-\sqrt{3}$		0		$+\sqrt{3}$
y'	2		1		2
y	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3

Vậy ycbt $\Leftrightarrow -1 < m \leq 3 \Rightarrow m \in \{0, 1, 2, 3\}$.

Chọn đáp án B ☐

Câu 161 (THPT Lương Tài 2 - Bắc Ninh - 2022).

Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm số bậc ba có đồ thị như hình vẽ. Tìm tất cả các gía trị của tham số m sao cho phương trình $f(\sin x) = f(m + 1)$ có nghiệm.



Ⓐ $-1 \leq m \leq 3$. Ⓑ $-2 \leq m \leq 0$. Ⓒ $-3 \leq m \leq 1$. Ⓓ $-2 \leq m \leq 2$.

Lời giải.

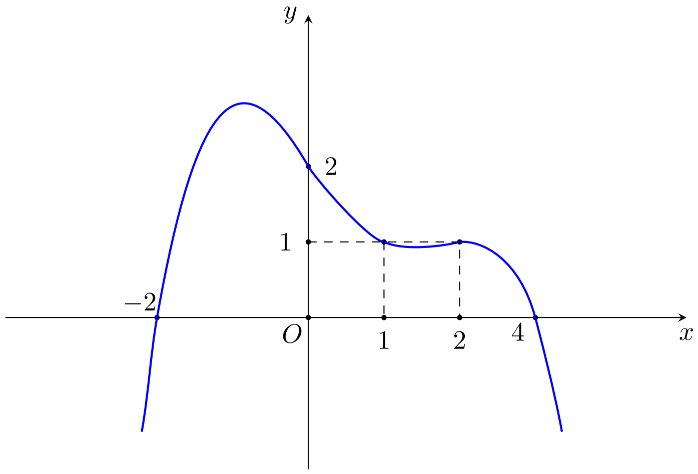
Ta có: $\sin x \in [-1; 1]$ nên $f(\sin x) \in [-1; 3]$.

nên$f(m + 1) \in [-1; 3]$. Do đó, phương trình phương trình $f(\sin x) = f(m + 1)$ có nghiệm $-1 \leq f(m + 1) \leq 3 \Leftrightarrow -2 \leq m + 1 \leq 2 \Leftrightarrow -3 \leq m \leq 1$.

Chọn đáp án C ☐

Câu 162 (THPT Yên Lạc - Vĩnh Phúc - 2022).

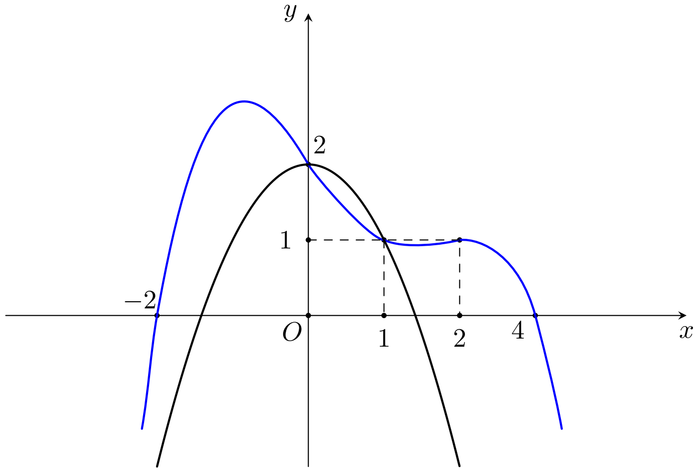
Cho hàm số $f(x)$, đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ là đường cong trong hình bên. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $f(2x) + \dfrac{8x^3}{3} - 4x - m < 0$ đúng với mọi $x \in \left[-\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{2}\right]$.



Ⓐ $m > f(1) - \dfrac{5}{3}$. Ⓑ $m > f(0)$. Ⓒ $m \geq f(0)$. Ⓓ $m > f(3)$.

Lời giải.

Đặt $g(x) = f(2x) + \dfrac{8x^3}{3} - 4x$ ta có $g'(x) = 2f'(2x) + 8x^2 - 4$.
$g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(2x) = 2 - (2x)^2$.



Theo giả thiết chỉ xét $x \in \left[-\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{2}\right]$ nên $2x \in [-1; 1]$, trên đồ thị hàm số $y = f'(x)$ ta vẽ thêm parabol $y = 2 - x^2$.

Ta có $f'(2x) = 2 - (2x)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = 1 \\ 2x = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{1}{2} \\ x = 0. \end{array}\right.$

- ☑ $g(0) = f(2 \cdot 0) + \dfrac{8 \cdot 0^3}{3} - 4 \cdot 0 = f(0)$.
- ☑ $g\left(\dfrac{1}{2}\right) = f\left(2 \cdot \dfrac{1}{2}\right) + \dfrac{8 \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^3}{3} - 4 \cdot \dfrac{1}{2} = f(1) - \dfrac{5}{3}$.

Bảng biến thiên của hàm số $g(x)$ trên $x \in \left[-\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{2}\right]$ như sau

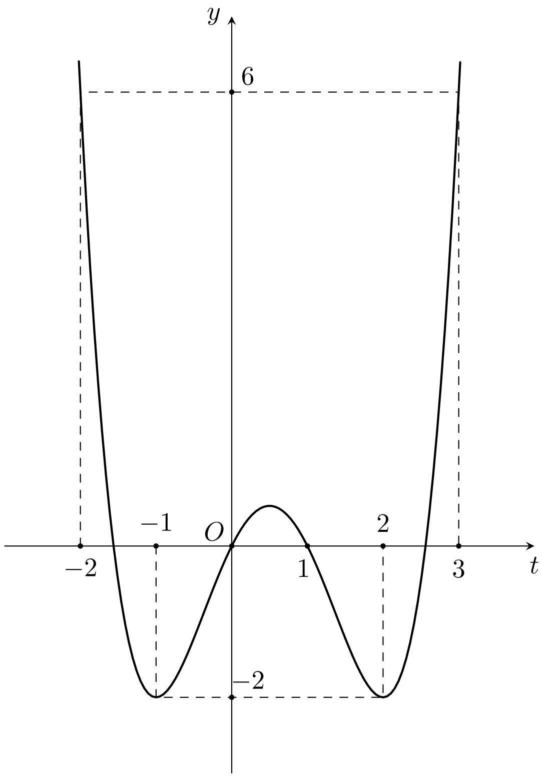
x	$-\infty$		0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(0)$	$\searrow$	$f(1)-\frac{5}{3}$	$\nearrow$	$+\infty$

Từ YCBT cho ta mệnh đề

$$f(2x)+\frac{8x^3}{3}-4x-m<0, x\in\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]\Leftrightarrow g(x)<m, x\in\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]\Leftrightarrow m>f(0).$$

Chọn đáp án B □

Câu 163 (Chuyên Bắc Ninh 2022). Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $f\left(x^3-3x\right)=m$ có 6 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[-1;2]$?



A 3. B 7. C 6. D 2.

Lời giải.

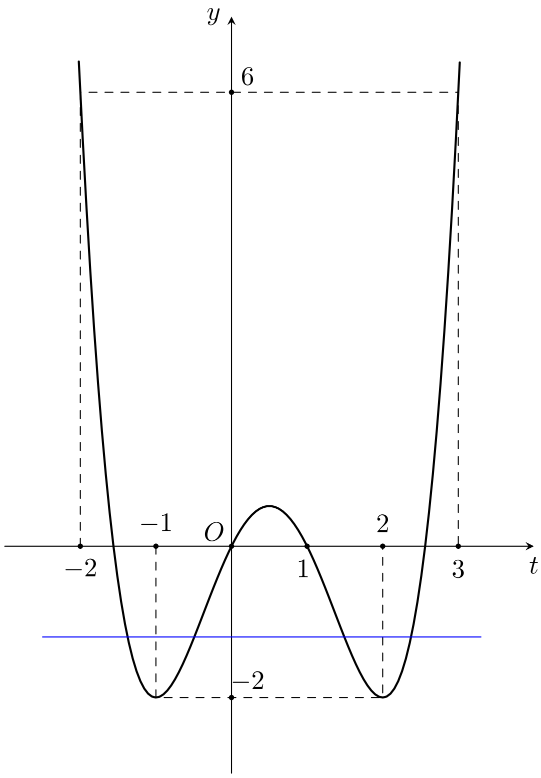
Đặt $t=x^3-3x,\ x\in[-1;2]\Rightarrow g'(x)=3x^2-3,\ g'(x)=0\Leftrightarrow x=\pm1$.

x	-1		1		2
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	2

Suy ra với $t=-2$, chỉ có 1 giá trị $x \in [-1;2]$.

Với $t \in (-2;2]$ có 2 giá trị $x \in [-1;2]$.

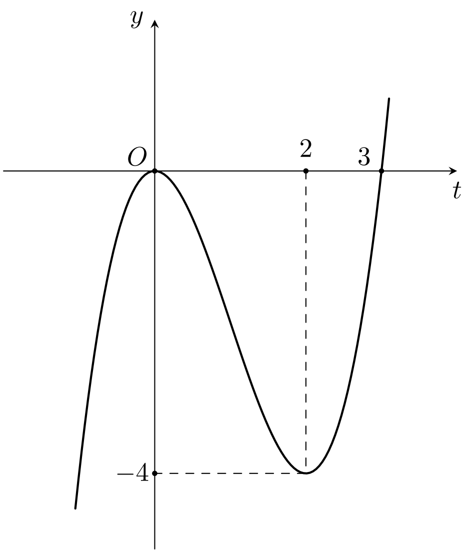
Phương trình đã cho có 6 nghiệm phân biệt $x \in [-1;2]$ khi phương trình $f(t)=m$ có ba nghiệm phân biệt $\in (-2;2]$.



Dựa vào đồ thị và giả thiết m nguyên, suy ra $m \in \{-1;0\}$.

Chọn đáp án D □

Câu 164 (Chuyên Bắc Ninh 2022). Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên R và có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(4\left(\sin^6 x+\cos^6 x\right)-1\right)=m$ có nghiệm?



A 6. B 4. C 3. D 5.

Lời giải.

Xét: $t = 4\left(\sin^6 x + \cos^6 x\right) - 1$.

Ta có: $\sin^6 x + \cos^6 x = 1 - 3\sin^2 x \cdot \cos^2 x = 1 - \dfrac{3}{4}\sin^2 2x = \dfrac{1}{4}(1 + 3\cos^2 2x)$

$\Rightarrow t = 4\left(\sin^6 x + \cos^6 x\right) - 1 = 4\left(\dfrac{1}{4}(1 + 3\cos^2 2x)\right) - 1 = 3\cos^2 2x$.

Lại có $0 \le \cos^2 2x \le 1 \Rightarrow 0 \le 3\cos^2 2x \le 3$ hay $t \in [0;3] \Rightarrow f(t) \in [-4;0]$.

$\Rightarrow$ Để $f\left(4\left(\sin^6 x + \cos^6 x\right) - 1\right) = m$ có nghiệm $m \in [-4;0]$ Thì $m \in \{-4;-3;-2;-1;0\}$.

Vậy có 5 giá trị m thỏa mãn. □

Câu 165 (Chuyên Hà Tĩnh 2022). Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$, gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $[f(x)]^2 - (2m+4)f(x) + m(m+4) = 0$ có đúng 4 nghiệm thực phân biệt. Tổng các phần tử thuộc S bằng:

(A) -5. (B) -17. (C) -18. (D) -21.

Lời giải.

Xét phương trình $[f(x)]^2 - (2m+4)f(x) + m(m+4) = 0$.

Đặt $t = f(x)$, phương trình trở thành $t^2 - 2(m+2)t + m(m+4) = 0$.

Ta có $\Delta' = (m+2)^2 - m(m+4) = 4 > 0$. Do đó $\left[\begin{array}{l} t = m \\ t = m+4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = m \\ f(x) = m+4. \end{array}\right.$

Xét hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$.

Ta có $f'(x) = 3x^2 - 6x$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2. \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$

Phương trình đã cho có 4 nghiệm phân biệt trong các trường hợp sau

TH1. $\begin{cases} m+4 > 1 \\ -3 < m < 1 \end{cases} \Leftrightarrow -3 < m < 1$.

TH2. $\begin{cases} m+4 = 1 \\ m = -3 \end{cases} \Leftrightarrow m = -3$.

TH3. $\begin{cases} -3 < m+4 < 1 \\ m < -3 \end{cases} \Leftrightarrow -7 < m < -3$.

Vậy $-7 < m < 1$.

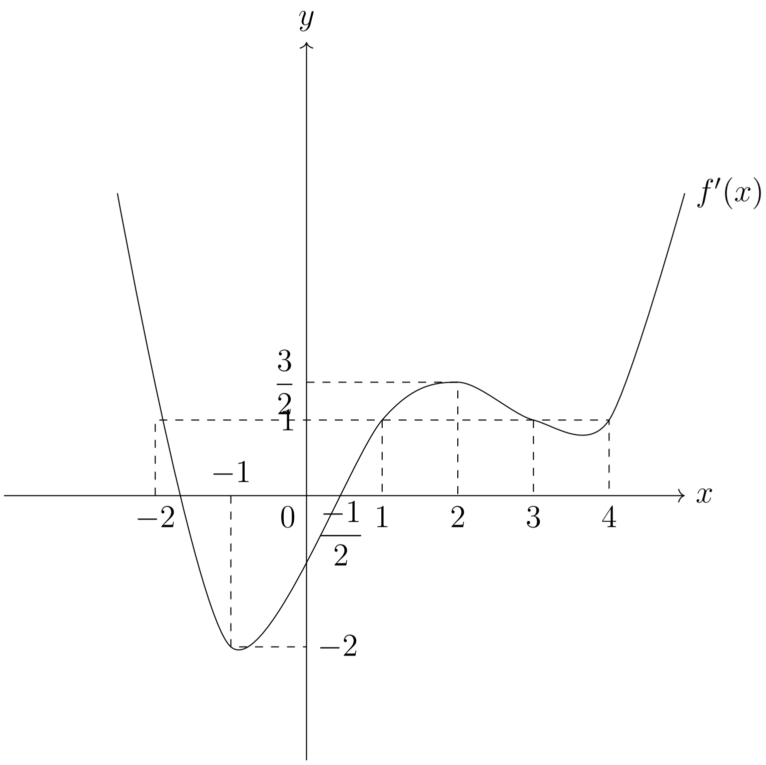
Vì m nguyên nên $m \in \{-6;-5;-4;-3;-2;-1;0\}$.

Tổng các phần tử bằng -21.

Chọn đáp án (D) □

Câu 166 (Chuyên Lê Khiết - Quảng Ngãi 2022).

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $2f\left(\sqrt{9-x^2}\right) - m + 2022 = 0$ có nghiệm?



Ⓐ 7. Ⓑ 8. Ⓒ 4. Ⓓ 5.

Lời giải.

Xét phương trình $2f\left(\sqrt{9-x^2}\right) - m + 2022 = 0$ (1)

Đặt $t = \sqrt{9-x^2} (0 \le t \le 3)$. Khi đó (1) trở thành $f(t) = \dfrac{m-2022}{2}$ (2)

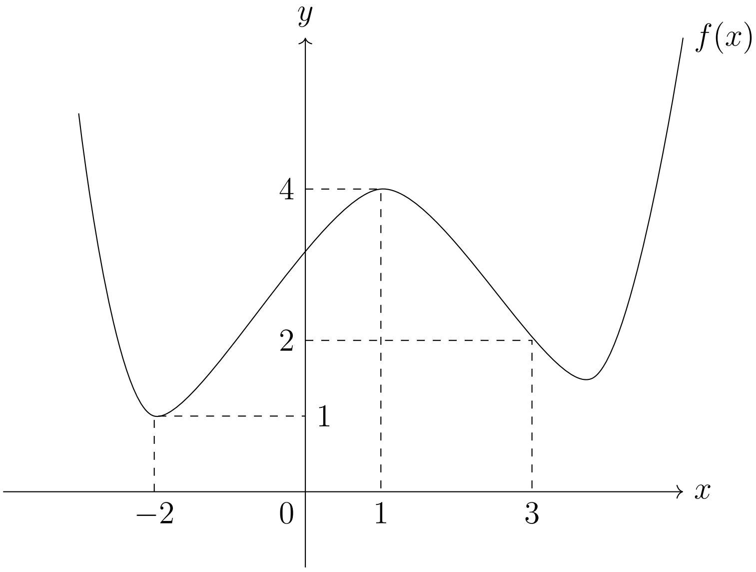
Từ đồ thị để phương trình (1) có nghiệm $x \Leftrightarrow$ phương trình (2) có nghiệm $t \in [0;3]$

$\Leftrightarrow -\dfrac{1}{2} \le \dfrac{m-2020}{2} \le \dfrac{3}{2} \Leftrightarrow 2019 \le m \le 2023$

Mà $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{2019; 2020; 2021; 2022; 2023\}$. Do đó, có 5 giá trị nguyên của m thỏa mãn bài toán.

Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 167 (Sở Sơn La 2022). Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m không vượt quá 2022 để bất phương trình $\dfrac{m}{f(x)} - \sqrt{mf(x)} - 1 \geq \dfrac{3}{4}f^2(x)$ đúng với mọi $x \in [-2;3]$.

(A) 1875. (B) 1872. (C) 1874. (D) 1873.

Lời giải.

Điều kiện: $mf(x) \geq 0$. Do $x \in [-2;3]$ thì $f(x) \geq 0$ nên $m \geq 0$.

Ta có: $\dfrac{m}{f(x)} - \sqrt{mf(x)} - 1 \geq \dfrac{3}{4}f^2(x) \Leftrightarrow \dfrac{m}{f(x)} - \sqrt{mf(x)} + \dfrac{f^2(x)}{4} \geq f^2(x) + 1$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{\frac{m}{f(x)}} - \frac{f(x)}{2}\right)^2 \geq f^2(x) + 1$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{\dfrac{m}{f(x)}} - \dfrac{f(x)}{2} \geq \sqrt{f^2(x)+1} \\ \sqrt{\dfrac{m}{f(x)}} - \dfrac{f(x)}{2} \leq -\sqrt{f^2(x)+1} \end{array}\right.$$

Nên $\sqrt{m} \geq \sqrt{(f^2(x)+1)f(x)} + \dfrac{1}{2}f(x)\sqrt{f(x)} \vee \sqrt{m} \leq -\sqrt{(f^2(x)+1)f(x)} + \dfrac{1}{2}f(x)\sqrt{f(x)}$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{m} \geq \max\limits_{[-2;3]}\left(\sqrt{\left[f^2(x)+1\right]f(x)} + \dfrac{1}{2}f(x)\sqrt{f(x)}\right) \\ \sqrt{m} \leq \min\limits_{[-2;3]}\left(-\sqrt{\left[f^2(x)+1\right]f(x)} + \dfrac{1}{2}f(x)\sqrt{f(x)}\right) \end{array}\right.$$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{m} \geq 4 + 2\sqrt{17} \\ \sqrt{m} \leq 4 - 2\sqrt{17} \end{array}\right.$ Nên $m \geq (4+2\sqrt{17})^2 \simeq 149{,}96$ Kết hợp với $m \in \mathbb{Z}$ thì có 1873 giá trị m thỏa mãn.

Chọn đáp án (D) □

Câu 168 (Chuyên Phan Bội Châu - Nghệ An 2022).

Cho hàm số có $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-4		-2		0		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	2	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

Số giá trị nguyên của tham số m để phương trình $3f(x^2-4x)=m+5$ có ít nhất 5 nghiệm thực phân biệt thuộc khoảng $(0;+\infty)$

(A) 13. (B) 9. (C) 10. (D) 11.

Lời giải.

Ta có bảng biến thiên của hàm số $y=x^2-4x$ là:

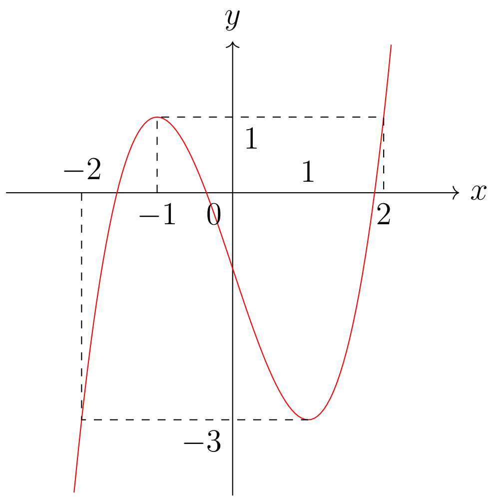
x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$-$	|	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta thấy được phương trình $x^2-4x=a$ có hai nghiệm dương khi $-4<a<0$ và có một nghiệm dương khi $a=-4$ hay $a>0$.

Khi đó để phương trình $f(x^2-4x)=\dfrac{m+5}{3}$ khi và chỉ khi $-2<\dfrac{m+5}{3}<2 \Leftrightarrow -11<m<1$.

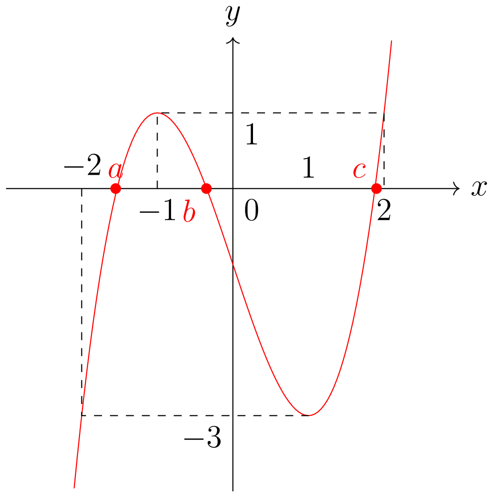
Chọn đáp án (D) □

Câu 169 (Chuyên Thái Bình 2022). Cho hàm số bậc ba $f=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $f(f(x)-m)=0$ có tất cả 9 nghiệm thực phân biệt?



Ⓐ 0. Ⓑ 1. Ⓒ 2. Ⓓ 3.

Lời giải.



Gọi a, b, c là hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và trục hoành.

Ta có $a \in (-2; -1)$, $b \in (-1; 0)$, $c \in (1; 2)$.

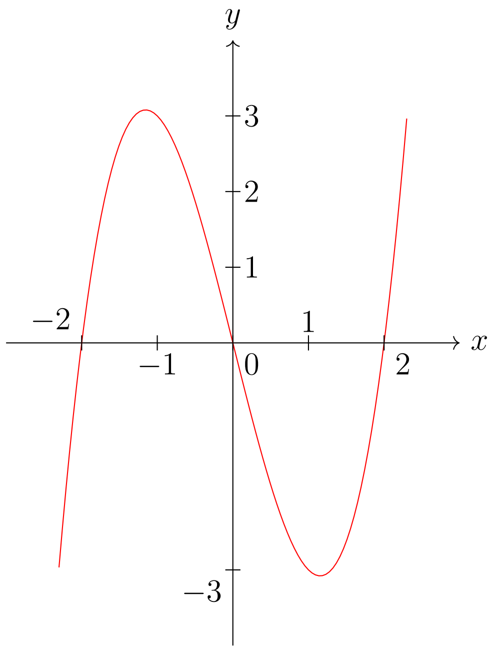
Xét phương trình: $f(f(x) - m) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) - m = a \\ f(x) - m = b \\ f(x) - m = c \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = a + m \\ f(x) = b + m \\ f(x) = c + m \end{array}\right.$.

Ycbt $\Leftrightarrow \begin{cases} -3 < a + m < 1 \\ -3 < b + m < 1 \\ -3 < c + m < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 - a < m < 1 - a \\ -3 - b < m < 1 - b \\ -3 - c < m < 1 - c \end{cases} \Leftrightarrow -3 - a < m < 1 - c.$

Do $a \in (-2; -1)$, $c \in (1; 2)$ và $-3 - a < m < 1 - c$ nên có 1 giá trị nguyên của $m = -1$ thỏa mãn.

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 170 (Sở Nghệ An 2022). Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y = f'(-x)$ được cho bởi hình vẽ sau:



Điều kiện của m để bất phương trình $f\left(\sqrt{4-x^2}\right) \leq m$ nghiệm đúng với mọi $x \in [-2;2]$ là

Ⓐ $m \geq f(0)$. Ⓑ $m \geq f(2)$. Ⓒ $m > f(2)$. Ⓓ $m \leq f(2)$.

Lời giải.

Quan sát đồ thị $y = f'(-x)$ ta có: $f'(-x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -2 \\ x = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -x = 0 \\ -x = 2 \\ -x = -2. \end{array}\right.$

Vậy $f'(t) = 0 \left[\begin{array}{l} t = 0 \\ t = 2 \\ t = -2 \end{array}\right.$ ta có bảng xét dấu của $f'(t)$ như sau:

t	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Xét hàm số $y = f\left(\sqrt{4-x^2}\right)$ có TXĐ $D = [-2;2]$.

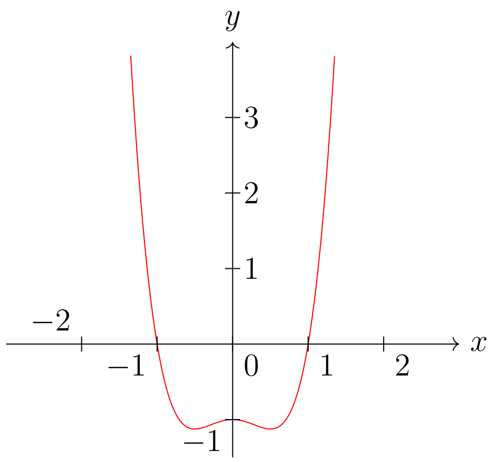
Đặt $t = \sqrt{4-x^2}$ khi đó ta có: $t \in [0;2]$.

Ta có $f\left(\sqrt{4-x^2}\right) \leq m$ nghiệm đúng với mọi $x \in [-2;2]$ khi và chỉ khi $f(t) \leq m, \forall t \in [0;2]$.

Hay $m \geq \max_{t\in[0;2]} f(t) = f(2)$.

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 171 (Sở Nghệ An 2022). Cho đồ thị của hàm số $y = f(x) = ax^4 - b^2x + c, (a,b,c \in \mathbb{R})$ là đường cong ở hình vẽ:



Tổng các giá trị nguyên của m để phương trình $xf(\sqrt{x}) = (2-2m)x^2 - (m^2-5)x - 1$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 < 1 < x_2$?

Ⓐ 2. Ⓑ 0. Ⓒ 5. Ⓓ -5.

Lời giải.

Từ đồ thị hàm số, ta suy ra được $f(x) = x^4 - 1$

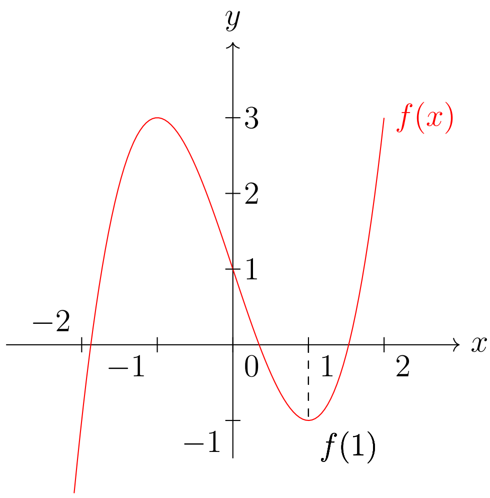
Khi đó, phương trình $xf(\sqrt{x}) = (2-2m)x^2 - (m^2-5)x - 1$, (điều kiện $\cdot x \geq 0$) trở thành:

$x(x^2-1)=(2-2m)x^2-(m^2-5)x-1 \Leftrightarrow x^3+(2m-2)x^2+(m^2-6)x+1=0(1)$

Xét hàm số $y=g(x)=x^3+(2m-2)x^2+(m^2-6)x+1,\quad y'=3x^2+4(m-1)x+m^2-6\ \Delta'=4(m-1)$

Do đó hàm số luôn có hai cực trị.

Do có $g(0)=1$. Vậy để phương trình (1) có hai nghiệm x_1,x_2 thỏa mãn $0<x_1<1<x_2$ thì cần điều kiện $f(1)<0$.(minh họa hình vẽ)



Hay $1+2m-2+m^2-6+1<0 \Leftrightarrow m^2+2m-6<0 \Leftrightarrow -1-\sqrt{7}<m<-1+\sqrt{7}, (-3{,}64<m<1{,}7)$

$m\in Z \Rightarrow m\in\{-3;-2;-1;0;1\}$.

Vậy có 5 giá trị nguyên m cần tìm, tổng các giá trị là -5.

Chọn đáp án (D) □

Câu 172 (Sở Thái Bình 2022). Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

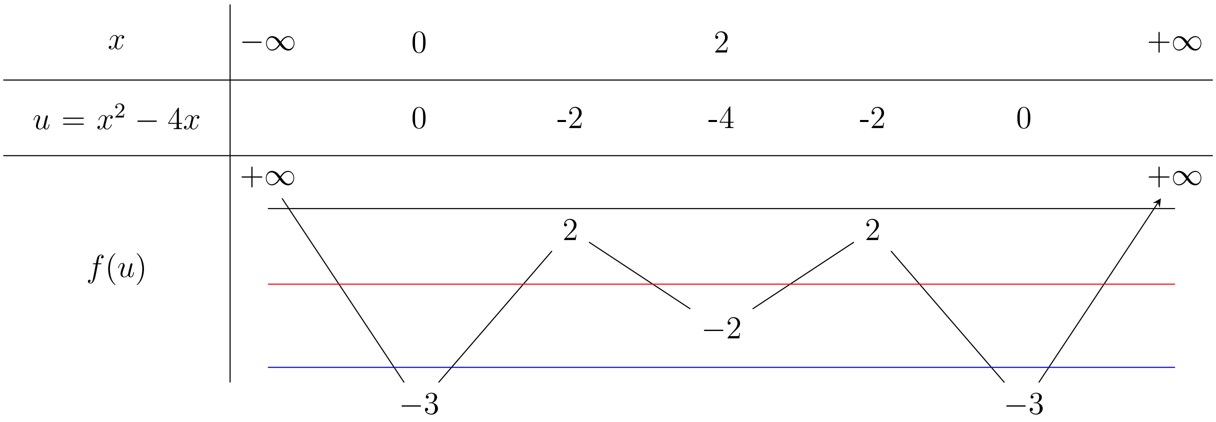
x	$-\infty$		-4		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-2	↗	2	↘	-3	↗	$+\infty$

Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $5f^2(x^2-4x)-(m+5)f(x^2-4x)+m=0$ có đúng 8 nghiệm thực phân biệt thuộc khoảng $(0;+\infty)$?

(A) 5. (B) 6. (C) 7. (D) 4.

Lời giải.

$$5f^2(x^2-4x)-(m+5)f(x^2-4x)+m=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x^2-4x)=1 \\ f(x^2-4x)=\dfrac{m}{5} \end{array}\right.$$



Phương trình $f(x^2 - 4x) = 1$ cho ta 5 nghiệm thực phân biệt thuộc khoảng $(0; +\infty)$

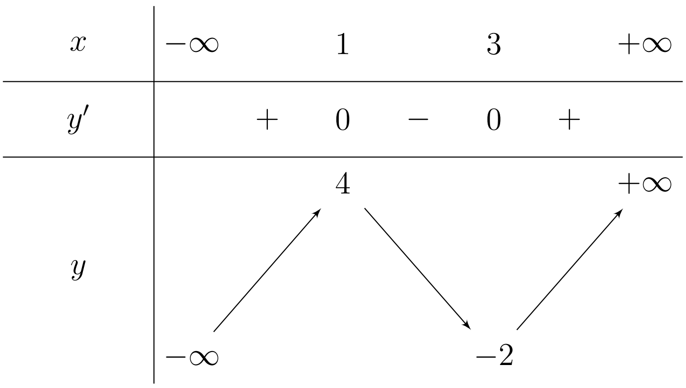
Do đó, yêu cầu bài toán thỏa mãn khi phương trình $f(x^2 - 4x) = \dfrac{m}{5}$ cho ta ba nghiệm thực phân biệt thuộc khoảng $(0; +\infty)$ khi và chỉ khi $\left[\begin{array}{l} \dfrac{m}{5} = 2 \\ -3 < \dfrac{m}{5} < -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 10 \\ -15 < m < -10 \end{array}\right.$.

Vậy có 5 giá trị nguyên m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án A □

Câu 173 (Chuyên ĐHSP Hà Nội 2022).

Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên:



Tìm tất cả các giá trị của m để bất phương trình $f\left(\sqrt{x-1}+1\right) \leq m$ có nghiệm.

A $m \geq 4$. B $m \geq 1$. C $m \geq -2$. D $m \geq 0$.

Lời giải.

Bất phương trình $f\left(\sqrt{x-1}+1\right) \leq m$ có nghiệm$\Leftrightarrow m \geq \min\limits_{[1;+\infty)} g(x)$ với $g(x) = f\left(\sqrt{x-1}+1\right)$.

Ta có $\sqrt{x-1}+1 \geq 1, \forall x \in [1; +\infty) \Rightarrow g(x) = f\left(\sqrt{x-1}+1\right) \geq -2, \forall x \in [1; +\infty), g(5) = -2$.

Vậy ta được $m \geq -2$.

Chọn đáp án C □

Câu 174 (Sở Gia Lai 2022). Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-5	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

Có bao nhiêu giá trị của tham số m để phương trình $\dfrac{1}{f(x)-4}+\dfrac{1}{f(x)+6}=m$ có 3 nghiệm thực phân biệt.

(A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4.

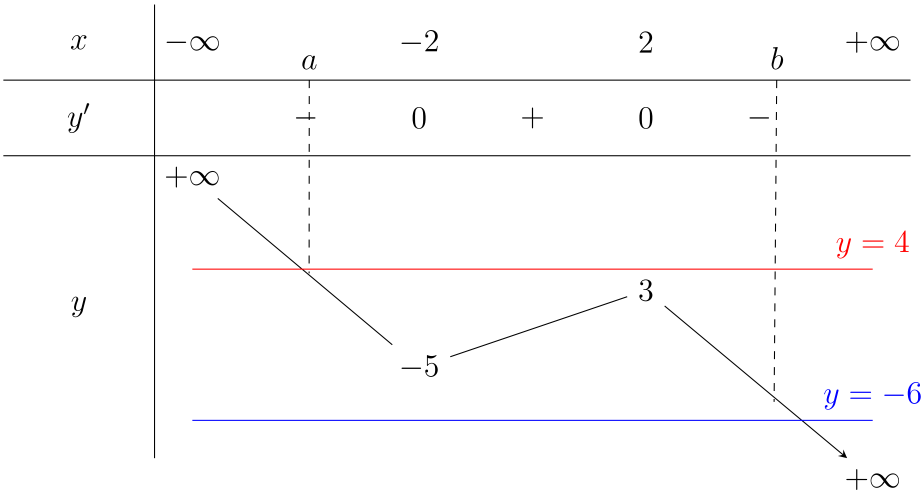
Lời giải.

Đặt $g(x)=\dfrac{1}{f(x)-4}+\dfrac{1}{f(x)+6}$.

Ta có: $g(x)=-\dfrac{f'(x)}{[f(x)-4]^2}-\dfrac{f'(x)}{[f(x)+6]^2}=-f'(x)\cdot\left[\dfrac{1}{[f(x)-4]^2}+\dfrac{1}{[f(x)+6]^2}\right]$

$g(x)=0\Rightarrow f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-2\\x=2.\end{array}\right.$

$g(x)$ không xác định tại giá trị $x=a;x=b$ với $x=a;x=b$ lần lượt là nghiệm của phương trình: $f(x)=4$ và $f(x)=-6$.



Ta có bảng biến thiên hàm số $y=g(x)$

x	$-\infty$		a		-2		2		b		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	$\Vert$	$+$	0	$-$	0	$+$	$\Vert$	$+$	
g	0	$\nearrow$	$+\infty \Vert -\infty$	$\nearrow$	$\frac{8}{9}$	$\searrow$	$\frac{-8}{9}$	$\nearrow$	$+\infty \Vert 0$		

Từ bảng biến thiên ta thấy, với $m=0;m=\dfrac{8}{9};m=-\dfrac{8}{9}$ thì phương trình đã cho có 3 nghiệm phân biệt.

Chọn đáp án C □

Câu 175 (Cụm trường Bắc Ninh 2022).

Cho các số thực a, b, c và các hàm số $f(x)$, $g(x) = f(x) + a$, $h(x) = x[f(x) + b]$. Trong đó, $f(x) + f(-x) = 2c$, $\forall x \in \mathbb{R}$ và $f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	↗	$c+2$	↘	$c-2$	↗	$+\infty$

Nếu $g(x)$ là hàm số lẻ và $h(x)$ là hàm số chẵn thì phương trình $g(x).h(x) = x$ có bao nhiêu nghiệm?

(A) 4. (B) 7. (C) 1. (D) 5.

Lời giải.

Ta có: $g(x), h(x)$ xác định với $\forall x \in \mathbb{R}$.

Theo bài ra: $f(1) + f(-1) = 2c$.

Vì $g(x)$ là hàm số lẻ nên: $g(-1) = -g(1) \Leftrightarrow f(-1) + a = -(f(1) + a) \Leftrightarrow f(1) + f(-1) = -2a$ suy ra $a = -c$.

$h(x)$ là hàm số chẵn nên: $h(-1) = h(1) \Leftrightarrow -1 \cdot \left[f(-1) + b\right] = 1 \cdot \left[f(1) + b\right] \Leftrightarrow f(1) + f(-1) = -2b$, suy ra $b = -c$.

Vậy nên $g(x) \cdot h(x) = (f(x) - c) \cdot x(f(x) - c) = x(f(x) - c)^2$.

Xét phương trình:

Dựa vào bảng biến thiên và $f(0) = c$. Phương trình $f(x) = c + 1$ có 3 nghiệm khác 0.

Phương trình $f(x) = c - 1$ có 3 nghiệm khác 0.

Vậy phương trình $g(x).h(x) = x$ có 7 nghiệm.

Chọn đáp án B □

Câu 176 (Sở Nam Định 2022). Cho hàm số đa thức bậc ba $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình dưới

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	1	↘	-5	↗	$+\infty$

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f'(f(x) + m) = 0$ có đúng bốn nghiệm thực phân biệt?

(A) 6. (B) 4. (C) 5. (D) 0.

Lời giải.

Ta có $f'(f(x)+m)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)+m=-1 \\ f(x)+m=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=-m-1 \\ f(x)=-m+2 \end{array}\right.$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} -m-1=1 \\ -m+2=-5 \end{cases} (1) \\ \begin{cases} -5<-m-1<1 \\ -m+2>1 \end{cases} (2) \\ \begin{cases} -5<-m+2<1 \\ -m-1<-5 \end{cases} (3) \end{array}\right.$$

Ta có:

$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} m=-2 \\ m=7 \end{cases} \Leftrightarrow m \in \varnothing.$

$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} -2<m<4 \\ m<1 \end{cases} \Leftrightarrow -2<m<1.$

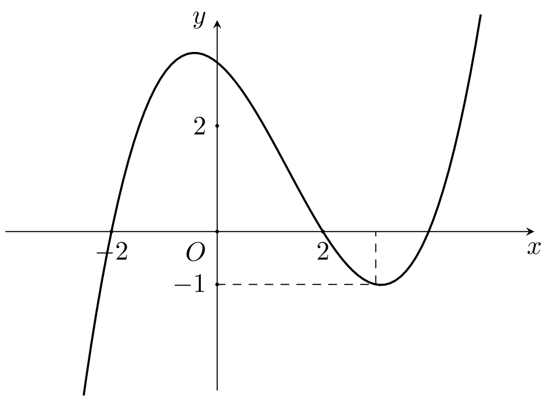
$(3) \Leftrightarrow \begin{cases} 1<m<7 \\ m>4 \end{cases} \Leftrightarrow 4<m<7.$

Vậy có 4 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Chọn đáp án (B) □

Dạng 4. Tương giao hàm hợp, hàm ẩn chứa dấu giá trị tuyệt đối

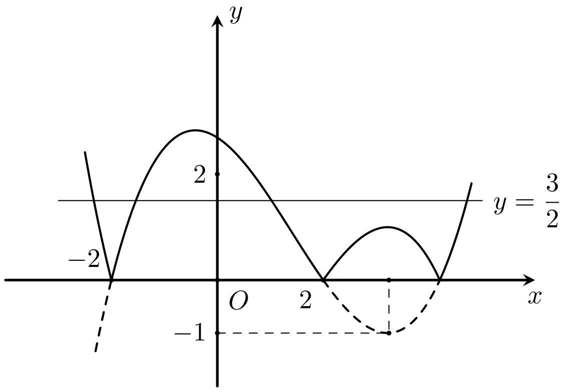
Câu 177 (Mã 103 2019). Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Số nghiệm thực của phương trình $\left|f\left(x^3-3x\right)\right|=\dfrac{3}{2}$ là



(A) 7. (B) 3. (C) 8. (D) 4.

Lời giải.

Đặt $t=x^3-3x$ ta có phương trình $|f(t)|=\dfrac{3}{2}$. (*)



Từ đồ thị hàm số $y = |f(t)|$ và đường thẳng $y = \dfrac{3}{2}$ ta suy ra phương trình $(*)$ có 4 nghiệm $t_1 < -2 < t_2 < 0 < t_3 < 2 < t_4$.

Xét hàm $t = x^3 - 3x$. Ta có $t' = 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -1. \end{array}\right.$

Ta có bảng biến thiên

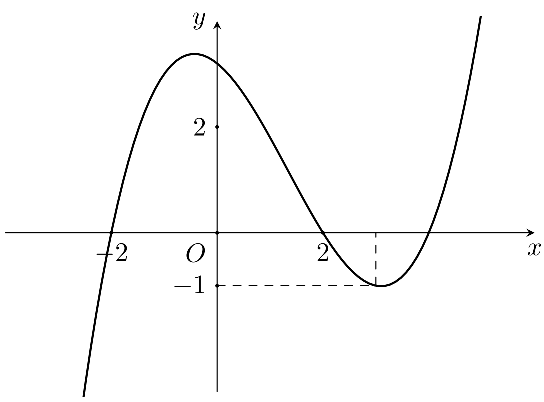
x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
t'		$+$	0		$-$		0	$+$	
t	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	0	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

- ☑ Với $t_1 < -2$ phương trình: $t_1 = x^3 - 3x$ cho ta 1 nghiệm.
- ☑ Với $-2 < t_2 < 0$ phương trình: $t_2 = x^3 - 3x$ cho ta 3 nghiệm.
- ☑ Với $0 < t_3 < 2$ phương trình: $t_3 = x^3 - 3x$ cho ta 3 nghiệm.
- ☑ Với $2 < t_4$ phương trình: $t_4 = x^3 - 3x$ cho ta 1 nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có tất cả 8 nghiệm.

Chọn đáp án C □

Câu 178 (Mã 104 2019). Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Số nghiệm thực của phương trình $\left|f\left(x^3 - 3x\right)\right| = \dfrac{2}{3}$ là



(A) 10. (B) 3. (C) 9. (D) 6.

Lời giải.

Đặt $t = g(x) = x^3 - 3x$. (1)

Ta có $g'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x \pm 1$.

Bảng biến thiên

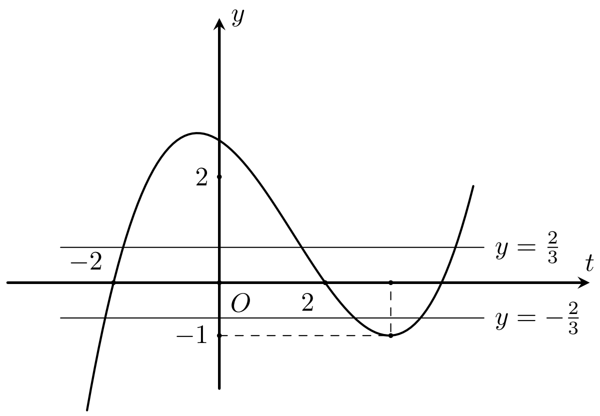
x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$			2				$+\infty$
		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	
	$-\infty$				-2		

Dựa vào bảng biến thiên ta có với $t \in (-2; 2)$ cho ta 3 giá trị x thỏa mãn (1).

$t \in \{-2; 2\}$ cho ta 2 giá trị x thỏa mãn (1).

$t \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$ cho ta 1 giá trị x thỏa mãn (1).

Phương trình $|f(x^3 - 3x)| = \dfrac{2}{3}$ (2) trở thành $|f(t)| = \dfrac{2}{3} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(t) = \dfrac{2}{3} \\ f(t) = -\dfrac{2}{3}. \end{array}\right.$



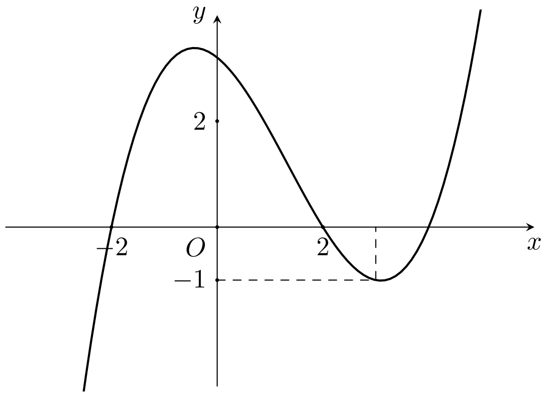
Dựa vào đồ thị ta có:

- Phương trình $f(t) = \dfrac{2}{3}$ có 3 nghiệm thỏa mãn $-2 < t_1 < t_2 < 2 < t_3 \Rightarrow$ có 7 nghiệm của phương trình (2).

- Phương trình $f(t) = -\dfrac{2}{3}$ có 3 nghiệm thỏa mãn $t_4 < -2 < 2 < t_5 < t_6 \Rightarrow$ có 3 nghiệm của phương trình (2).

Vậy phương trình đã cho có 10 nghiệm. □

Câu 179 (Mã 101 2019). Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Số nghiệm thực của phương trình $|f(x^3 - 3x)| = \dfrac{4}{3}$ là



Ⓐ 7. Ⓑ 4. Ⓒ 3. Ⓓ 8.

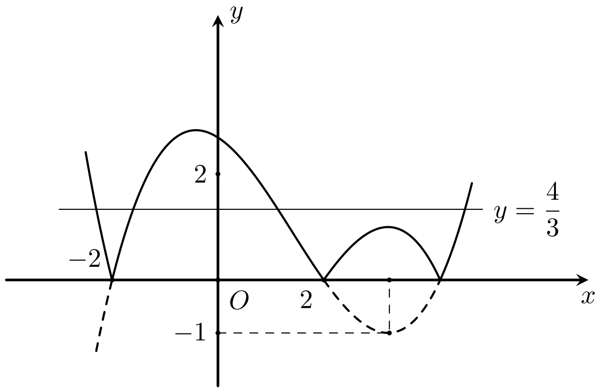
Lời giải.

Đặt $t = x^3 - 3x \Rightarrow t' = 3x^2 - 3$.

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
t'		$+$	0	$-$	0	$+$	
t	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Khi đó $|f(t)| = \dfrac{4}{3}$ (1).



Dựa vào đồ thị hàm số $|f(t)|$ ta thấy phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt $t_1 < -2$; $-2 < t_2 < 0$; $0 < t_3 < 2$; $t_4 > 2$.

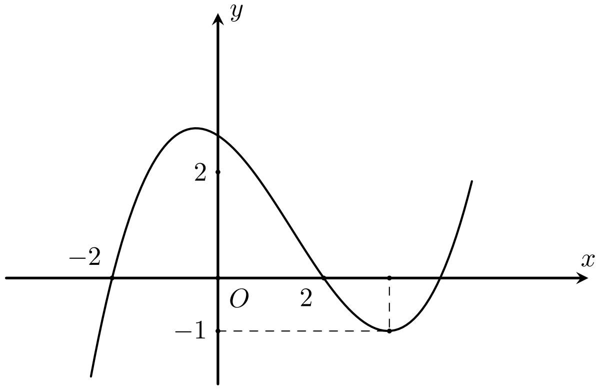
Mỗi nghiệm t của phương trình (1), ta thay vào phương trình $t = x^3 - 3x$ để tìm nghiệm x.

Khi đó

- ☑ $t_1 < -2 \Rightarrow$ phương trình $t_1 = x^3 - 3x$ có 1 nghiệm.
- ☑ $-2 < t_2 < 0 \Rightarrow$ phương trình $t_2 = x^3 - 3x$ có 3 nghiệm.
- ☑ $0 < t_3 < 2 \Rightarrow$ phương trình $t_3 = x^3 - 3x$ có 3 nghiệm.
- ☑ $t_4 > 2 \Rightarrow$ phương trình $t_4 = x^3 - 3x$ có 1 nghiệm.

Vậy phương trình $|f(x^3-3x)| = \dfrac{4}{3}$ có 8 nghiệm. □

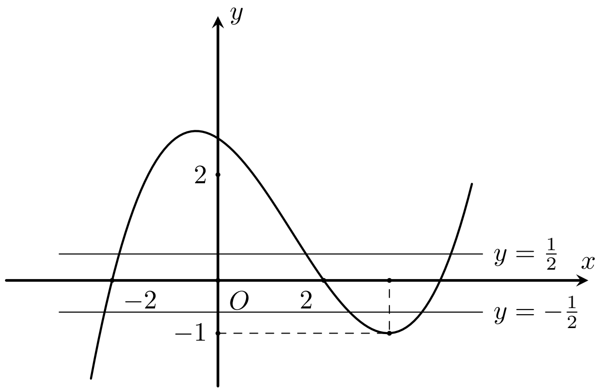
Câu 180 (Mã 102 2019). Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Số nghiệm thực của phương trình $|f(x^3-3x)| = \dfrac{1}{2}$ là

Ⓐ 6. Ⓑ 10. Ⓒ 12. Ⓓ 3.

Lời giải.



Ta có $|f(x^3-3x)| = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} f(x^3-3x) = \dfrac{1}{2} & (1) \\ f(x^3-3x) = -\dfrac{1}{2}. & (2) \end{array}\right.$

- $(1) \Leftrightarrow f(x^3-3x) = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^3-3x = \alpha_1 \ (-2 < \alpha_1 < 0) \\ x^3-3x = \alpha_2 \ (0 < \alpha_2 < 2) \\ x^3-3x = \alpha_3 \ (\alpha_3 > 2). \end{array}\right.$

- $(2) \Leftrightarrow f(x^3-3x) = -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^3-3x = \alpha_4 \ (\alpha_4 < -2) \\ x^3-3x = \alpha_5 \ (\alpha_5 > 2) \\ x^3-3x = \alpha_6 \ (\alpha_6 > 2). \end{array}\right.$

Xét hàm số $y = x^3 - 3x$.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = 3x^2 - 3$, $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 1. \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

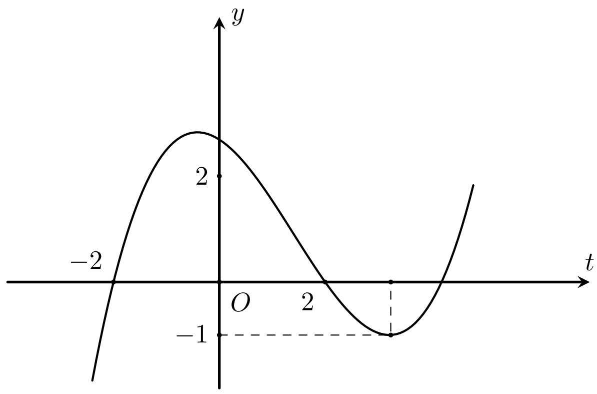
x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	2	↘	-2	↗	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta có

- ☑ Phương trình: $x^3 - 3x = \alpha_1$ có 3 nghiệm.
- ☑ Phương trình: $x^3 - 3x = \alpha_2$ có 3 nghiệm.

Mỗi phương trình $x^3 - 3x = \alpha_3$, $x^3 - 3x = \alpha_4$, $x^3 - 3x = \alpha_5$, $x^3 - 3x = \alpha_6$ đều có một nghiệm.
Từ đó suy ra phương trình $|f(x^2 - 3x)| = \dfrac{1}{2}$ có 10 nghiệm.
Chọn đáp án B □

Câu 181 (Chuyên Lam Sơn-2020). Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Số nghiệm thực của phương trình $|f(x^3 - 3x)| = 1$ là

A 10. B 8. C 9. D 7.

Lời giải.

Xét phương trình $|f(x^3 - 3x)| = 1$. (1)
Đặt $t = x^3 - 3x$, ta có bảng biến thiên của hàm số $t = g(x) = x^3 - 3x$ như sau:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	↗	2	↘	-2	↗	$+\infty$

Từ bảng biến thiên, ta thấy

- Với mỗi $t_0 > 2$ hoặc $t_0 < -2$, phương trình $t_0 = x^3 - 3x$ có một nghiệm;
- Với mỗi $-2 < t_0 < 2$, phương trình $t_0 = x^3 - 3x$ có 3 nghiệm.

Khi đó, (1) trở thành $|f(t)| = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(t) = 1 \\ f(t) = -1. \end{array}\right.$

- TH 1: $f(t) = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = t_1 \in (-2; 0) \\ t = t_2 \in (0; 2) \\ t = t_3 \in (2; +\infty). \end{array}\right.$
  Với $t = t_1 \in (-2; 0) \Rightarrow$Phương trình $t_1 = x^3 - 3x$ có 3 nghiệm;
  Với $t = t_2 \in (0; 2) \Rightarrow$Phương trình $t_2 = x^3 - 3x$ có 3 nghiệm;
  Với $t = t_3 \in (2; +\infty) \Rightarrow$Phương trình $t_3 = x^3 - 3x$ có 1 nghiệm;
- TH 2: $f(t) = -1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = t_4 \in (-\infty; -2) \\ t = t_5 \in (2; +\infty). \end{array}\right.$
  Với $t = t_4 \in (-\infty; -2) \Rightarrow$Phương trình $t_4 = x^3 - 3x$ có 1 nghiệm;
  Với $t = t_5 \in (2; +\infty) \Rightarrow$Phương trình $t_5 = x^3 - 3x$ có 1 nghiệm.
  Mặt khác, các nghiệm này đều phân biệt.
  Vậy phương trình $|f(x^3 - 3x)| = 1$ có 9 nghiệm phân biệt.

Chọn đáp án C □

Câu 182 (Chuyên Thái Nguyên-2020).

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	5	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

Phương trình $|f(3x + 1) - 2| = 5$ có bao nhiêu nghiệm?

A 3. B 5. C 6. D 4.

Lời giải.

Ta có $|f(3x + 1) - 2| = 5 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(3x + 1) - 2 = 5 \\ f(3x + 1) - 2 = -5. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} f(3x + 1) = 7 & (1) \\ f(3x + 1) = -3. & (2) \end{array}\right.$

Dựa vào bảng biến thiên,

- Phương trình (1) có nghiệm duy nhất thỏa mãn $3x + 1 = a > 3 \Leftrightarrow x = \dfrac{a - 1}{3} > \dfrac{2}{3}$.

- Phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn

$$\begin{cases} 3x_1 + 1 = 3 \\ 3x_2 + 1 = b < -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{2}{3} \\ x_2 = \dfrac{b-1}{3} < -\dfrac{2}{3}. \end{cases}$$

Vậy phương trình đã cho có 3 nghiệm.

Chọn đáp án A □

Câu 183 (Nguyễn Huệ-Phú Yên-2020).

Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-2020	↗	2020	↘	$-\infty$

Số nghiệm của phương trình $|f(x+2019) - 2020| = 2021$ là

(A) 4. (B) 6. (C) 2. (D) 3.

Lời giải.

Ta có $|f(x+2019) - 2020| = 2021 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x+2019) - 2020 = -2021 \\ f(x+2019) - 2020 = 2021 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x+2019) = -1 \\ f(x+2019) = 4041. \end{array}\right.$

Từ bảng biến thiên suy ra

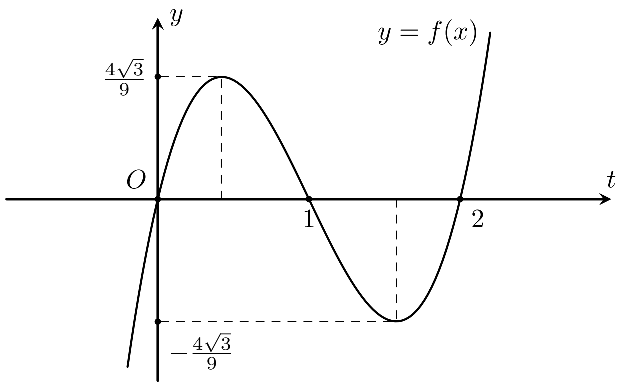
- Phương trình: $f(x+2019) = -1$ có 3 nghiệm.
- Phương trình: $f(x+2019) = 4041$ có 1 nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có 4 nghiệm.

Chọn đáp án A □

Câu 184 (Chuyên Hạ Long-Quảng Bình-2021).

Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên dưới. Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f\left(\left|\sqrt{4-x^2} - |x^2-1|\right|\right) = \dfrac{1}{2021}$ là



(A) 24. (B) 14. (C) 12. (D) 10.

Lời giải.

Đặt $y = g(x) = f\left(\left|\sqrt{4-x^2} - |x^2-1|\right|\right)$ với $g(x) = \dfrac{1}{2021}$.

Ta đặt $t = \sqrt{4-x^2}$, $\forall x \in [-2;2]$ thì suy ra $y = g(t) = f\left(|t - |t^2-3||\right)$, $\forall t \in [0;2]$.

Suy ra $h(t) = t - |t^2-3| = \begin{cases} t^2+t-3, & t \in \left[0;\sqrt{3}\right] \\ -t^2+t+3, & t \in \left[\sqrt{3};2\right] \end{cases}$.

Từ đó ta có BBT của hàm số $h(t)$

x	0		$\sqrt{3}$		2
$h'(t)$		$+$	0	$-$	
$h(t)$	-3	$\nearrow$	$\sqrt{3}$	$\searrow$	1

Đặt $u = |t - |t^2-3||$ thì ta cũng có BBT của u như sau

x	-2		0		2
t	0		2		0
$t-\lvert t^2-3\rvert$	-3	$\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	-3
$\lvert t-\lvert t^2-3\rvert\rvert$	$3 \searrow 0 \nearrow$	$\sqrt{3} \searrow$	$1 \nearrow$	$\sqrt{3} \searrow 0 \nearrow$	3

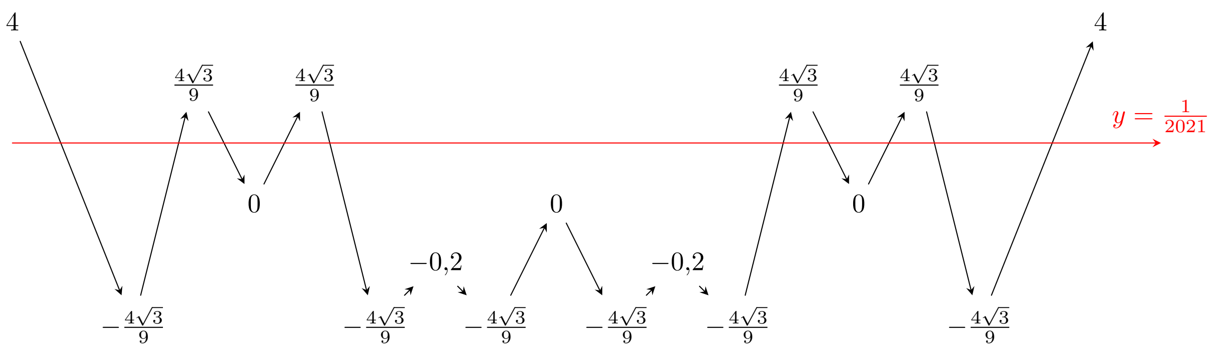
Nhìn vào đồ thị $y = f(x)$ trên ta có được:

$$\Rightarrow \begin{cases} f(x) = ax^3+bx^2+cx, & a \neq 0 \\ f(1) = f(2) = 0, & f''(1) = 0 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{2}{3} > 0.$$

Như vậy ta suy ra $f(x) = \dfrac{2}{3}x(x-1)(x-2)$. Mà hàm số đó có cực trị bằng $-\dfrac{4\sqrt{3}}{9}$ tại $x = x_0$ nên suy ra $f(x_0) = \dfrac{-4\sqrt{3}}{9} \Rightarrow x_0 = \dfrac{3+\sqrt{3}}{3}$.

Như vậy $f(3) = 4$, $f\left(\sqrt{3}\right) = -0{,}2$, $f\left(\dfrac{3+\sqrt{3}}{3}\right) = \dfrac{-4\sqrt{3}}{9}$.

Từ đó, ta phác họa được đồ thị $y = f(u)$ với $u = |t - |t^2-3||$ như sau

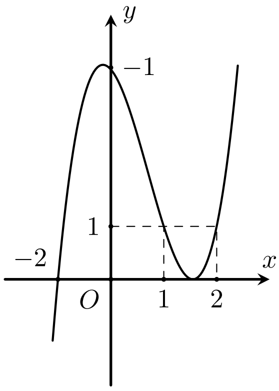


Dựa vào hình vẽ trên, ta kết luận phương trình $g(x) = \dfrac{1}{2021}$ có tất cả 10 nghiệm phân biệt.

Chọn đáp án D □

Câu 185 (THPT Đồng Quan-Hà Nội-2021).

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Số nghiệm trên khoảng $(-\pi; 4\pi)$ của phương trình $f(2|\cos 2x|) = 1$ là



A 48. B 29. C 31. D 40..

Lời giải.

Đặt $t = 2|\cos 2x|$.

Vì $x \in (-\pi; 4\pi)$ nên $t \in [0; 2]$.

Phương trình trở thành $f(t) = 1$.

Từ đồ thị hàm số ta suy ra phương trình $f(t) = 1$ có các nghiệm thuộc $[0; 2]$ là $t = 1$, $t = 2$.

$$\text{Với } t = 1 \Leftrightarrow |\cos 2x| = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 2x = \dfrac{1}{2} \\ \cos 2x = \dfrac{-1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pm\pi}{6} + k\pi \\ x = \dfrac{\pm\pi}{3} + k\pi \end{array}\right. .$$

$$\text{Vì } x \in (-\pi; 4\pi) \Rightarrow \left[\begin{array}{l} -\pi < \dfrac{\pi}{6} + k\pi < 4\pi \\ -\pi < \dfrac{-\pi}{6} + k\pi < 4\pi \\ -\pi < \dfrac{\pi}{3} + k\pi < 4\pi \\ -\pi < \dfrac{-\pi}{3} + k\pi < 4\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{-7}{6} < k < \dfrac{23}{6} \\ \dfrac{-5}{6} < k < \dfrac{25}{6} \\ \dfrac{-4}{3} < k < \dfrac{11}{3} \\ \dfrac{-2}{3} < k < \dfrac{13}{3} \end{array}\right. .$$

$\Rightarrow$ Phương trình có 20 nghiệm thuộc khoảng $(-\pi; 4\pi)$.

$$\text{Với } t = 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 2x = 1 \\ \cos 2x = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k\pi \\ x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \end{array}\right. .$$

$$\text{Vì } x \in (-\pi; 4\pi) \Rightarrow \left[\begin{array}{l} -\pi < k\pi < 4\pi \\ -\pi < \dfrac{\pi}{2} + k\pi < 4\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1 < k < 4 \\ \dfrac{-3}{2} < k < \dfrac{7}{2} \end{array}\right. .$$

$\Rightarrow$ Phương trình có 9 nghiệm thuộc khoảng $(-\pi; 4\pi)$.

$\Rightarrow$ phương trình có 9 nghiệm thuộc khoảng $(-\pi; 4\pi)$.

Vậy phương trình đã cho có tất cả 29 nghiệm.

Chọn đáp án (B) □

Câu 186 (Sở Tuyên Quang-2021). Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$		-4		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-2	↗	1	↘	-4	↗	$+\infty$

Số nghiệm của phương trình $|f(f(x))| = 2$ là

(A) 4. (B) 5. (C) 9. (D) 7.

Lời giải.

Ta có $|f(f(x))| = 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(f(x)) = 2 \\ f(f(x)) = -2. \end{array}\right.$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy

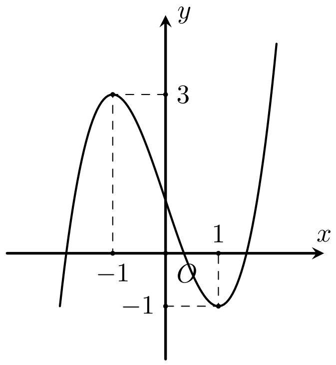
- $f(f(x)) = 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = a \ (a \in (-\infty; -4)) \\ f(x) = b \ (b \in (3; +\infty)). \end{array}\right.$
- $f(f(x)) = -2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = -4 \\ f(x) = d \ (d \in (1; 3)) \\ f(x) = e \ (e \in (3; +\infty)). \end{array}\right.$
- $f(x) = a \, (a \in (-\infty; -4))$ vô nghiệm.
- $f(x) = b \, (b \in (3; +\infty))$ có 2 nghiệm.
- $f(x) = -4$ có 1 nghiệm.
- $f(x) = d \, (d \in (1; 3))$ có 2 nghiệm.
- $f(x) = e \, (e \in (3; +\infty))$ có 2 nghiệm.

Vậy $|f(f(x))| = 2$ có 7 nghiệm.

Chọn đáp án (D) □

Câu 187 (Trung tâm Thanh Tường-2021).

Cho hàm đa thức $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.

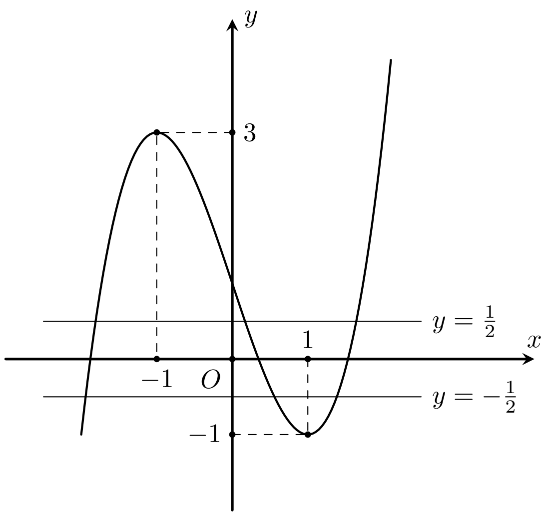


Đặt $g(x) = |f(x^2)|$. Số nghiệm của phương trình $g(x) \cdot [2g(x) - 1] = 0$ là

Ⓐ 11. Ⓑ 10. Ⓒ 13. Ⓓ 12.

Lời giải.

Ta có $g(x) \cdot [2g(x) - 1] = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} g(x) = 0 \\ g(x) = \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} |f(x^2)| = 0 \\ |f(x^2)| = \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} f(x^2) = 0 & (1) \\ f(x^2) = \dfrac{1}{2} & (2) \\ f(x^2) = -\dfrac{1}{2} & (3). \end{array}\right.$



Từ đồ thị hàm số $y = f(x)$ suy ra

- $(1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 = a < -1 \\ x^2 = b \in (0; 1) \\ x^2 = c > 1. \end{array}\right.$

  Suy ra phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt.

- $(2) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x^2 = d < -1, & (d \neq a) \\ x^2 = e \in (0; 1), & (e \neq b) \\ x^2 = f > 1, & (f \neq c). \end{array}\right.$

  Suy ra phương trình (2) có 4 nghiệm phân biệt khác 4 nghiệm phân biệt của phương trình (1).

☑ $(3) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x^2 = m < -1, & (m \neq d, a) \\ x^2 = n \in (0;1), & (n \neq e, b) \\ x^2 = p > 1, & (p \neq f, c). \end{array}\right.$

Suy ra phương trình (3) có 4 nghiệm phân biệt khác 4 nghiệm phân biệt của phương trình (1) và 4 nghiệm phân biệt của phương trình (2).

Vậy phương trình $g(x).\left[2g(x)-1\right]=0$ có tất cả 12 nghiệm.

Chọn đáp án D □

Câu 188 (THPT Triệu Sơn-Thanh Hóa-2021).

Hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	5	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

Phương trình $|f(2x^2+3)-2|=5$ có bao nhiêu nghiệm?

A 3. B 5. C 6. D 4.

Lời giải.

Gọi $g(x)=f\left(2x^2+3\right)-2$.

Ta có $g'(x)=4x\cdot f'\left(2x^2+3\right)$.

$g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ 2x^2+3=-1 \\ 2x^2+3=3. \end{array}\right. \Leftrightarrow x=0.$

Ta có bảng biến thiên

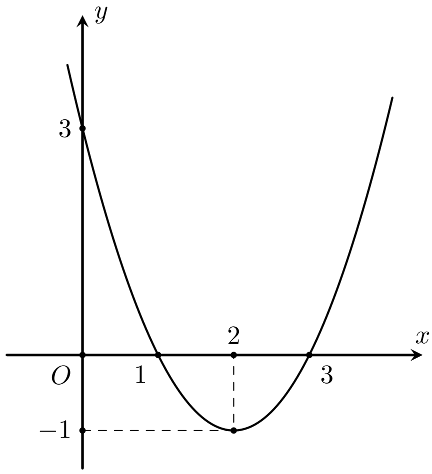
x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-5	$\nearrow$	$+\infty$

Mà $|g(x)|=5 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} g(x)=5 \\ g(x)=-5. \end{array}\right.$

Từ bảng biến thiên ta thấy phương trình có 3 nghiệm.

Chọn đáp án A □

Câu 189 (Sở Tuyên Quang-2021). Cho hàm số $y=f(x)=ax^2+bx+c$ có đồ thị (C) (như hình vẽ)



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f^2(|x|) + (m-2)f\left(|x|\right) + m - 3 = 0$ có 6 nghiệm phân biệt?

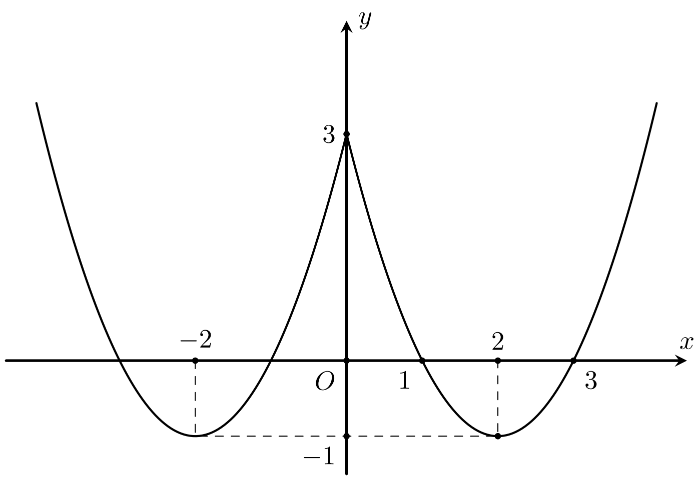
A 2. B 3. C 1. D 4.

Lời giải.

Xét phương trình $f^2\left(|x|\right) + (m-2)f\left(|x|\right) + m - 3 = 0$.

Nhận thấy $1 - (m-2) + (m-3) = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} f(|x|) = -1 \\ f(|x|) = 3 - m. \end{array}\right.$

Từ đồ thị hàm số $f(x)$, suy ra đồ thị hàm số $f\left(|x|\right)$ như sau



Với $f\left(|x|\right) = -1$, ta được 2 nghiệm x.

Để phương trình đã cho có 6 nghiệm phân biệt, tức là phương trình $f\left(|x|\right) = 3 - m$ có 4 nghiệm phân biệt.

Hay $-1 < 3 - m < 3 \Leftrightarrow 0 < m < 4$.

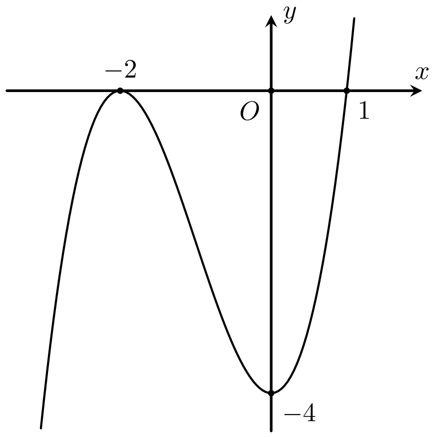
Mà $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{1; 2; 3\}$.

Như vậy có 3 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Chọn đáp án B □

Câu 190 (Chuyên Biên Hòa-Hà Nam-2020).

Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình dưới đây.



Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in (-5; 5)$ để phương trình $f^2(x) - (m+4)|f(x)| + 2m + 4 = 0$ có 6 nghiệm phân biệt.

(A) 2. (B) 4. (C) 3. (D) 5.

Lời giải.

Ta có $f^2(x) - (m+4)|f(x)| + 2m + 4 = 0$

$$\Leftrightarrow |f(x)|^2 - m|f(x)| - 4|f(x)| + 2m + 4 = 0$$

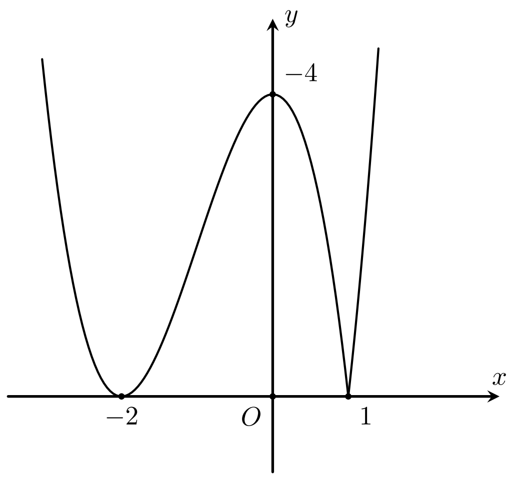
$$\Leftrightarrow (|f(x)| - 2)^2 - m(|f(x)| - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (|f(x)| - 2)(|f(x)| - 2 - m) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} |f(x)| - 2 = 0 \\ |f(x)| - 2 - m = 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} |f(x)| = 2 & (1) \\ |f(x)| = m + 2. & (2) \end{array}\right.$$

Dựa vào đồ thị hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ta có đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ như sau



Dựa vào đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ suy ra phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt.

Suy ra phương trình đã cho có 6 nghiệm phân biệt (2) có 2 nghiệm phân biệt khác các nghiệm của phương trình (1).

Ta có phương trình (2) là phương trình hoành độ giao điểm của hai đường$y = |f(x)|$ và $y = m+2$.

Số nghiệm phương trình (2) là số giao điểm của 2 đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ và $y = m + 2$.

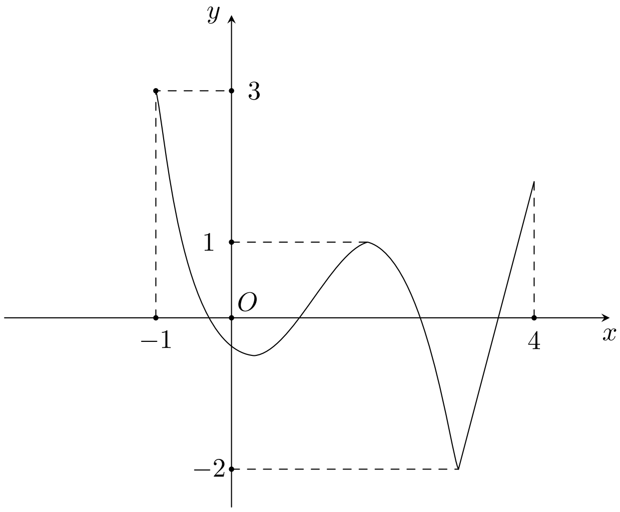
Dựa vào hình vẽ đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ ta được phương trình $|f(x)| = m + 2$ có 2 nghiệm phân biệt khác các nghiệm của phương trình $|f(x)| = 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m+2=0 \\ m+2>4 \\ m+2 \neq 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-2 \\ m>2. \end{array}\right.$

Do $m \in \mathbb{Z}$ và $m \in (-5; 5) \Rightarrow m \in \{-2; 3; 4\}$.

Vậy có 3 giá trị nguyên $m \in (-5; 5)$ thỏa mãn điều kiện bài toán.

Chọn đáp án C □

Câu 191 (Chuyên Thái Bình-2020). Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1; 4]$ và có đồ thị như hình vẽ



Có bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc đoạn $[-10; 10]$ để bất phương trình $|f(x) + m| < 2m$ đúng với mọi x thuộc đoạn $[-1; 4]$.

A 6. B 5. C 7. D 8.

Lời giải.

Bất phương trình $|f(x) + m| < 2m$ có nghiệm ta suy ra điều kiện $m > 0$.

$|f(x) + m| < 2m \Leftrightarrow -2m < f(x) + m < 2m \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > -3m \\ f(x) < m. \end{cases}$

Bất phương trình $|f(x) + m| < 2m$ đúng với mọi x thuộc đoạn $[-1; 4] \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > -3m \\ f(x) < m. \end{cases}$ đúng với mọi x thuộc đoạn $[-1; 4] \Leftrightarrow \begin{cases} -3m < \min\limits_{[-1;4]} f(x) \\ m > \max\limits_{[-1;4]} f(x). \end{cases}$

Từ đồ thị hàm số $y = f(x)$ ta suy ra $\min\limits_{[-1;4]} f(x) = -2; \max\limits_{[-1;4]} f(x) = 3$.

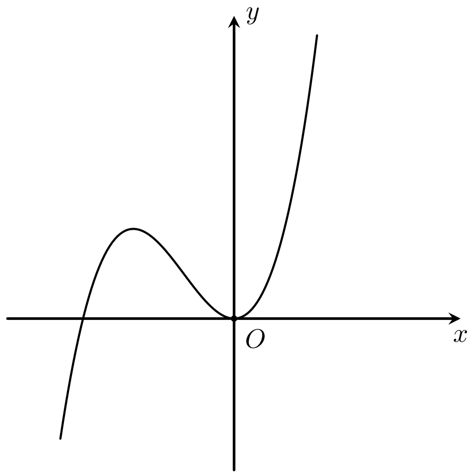
$\Rightarrow \begin{cases} -3m < \min\limits_{[-1;4]} f(x) \\ m > \max\limits_{[-1;4]} f(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3m < -2 \\ m > 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > \dfrac{2}{3} \\ m > 3. \end{cases}$

$\Leftrightarrow m > 3$ (thỏa mãn điều kiện $m > 0$)

Vậy trên đoạn $[-10; 10]$ có 7 giá trị nguyên của m thỏa mãn điều kiện bài toán.

Chọn đáp án (C) □

Câu 192 (Sở Ninh Bình). Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ



Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(2|\sin x|) = f(m^2 + 6m + 10)$ có nghiệm?

(A) 2. (B) 3. (C) 4. (D) 1.

Lời giải.

Từ đồ thị suy ra hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên nửa khoảng $[0; +\infty)$.

Do $2|\sin x| \geq 0; m^2 + 6m + 10 > 0$

Nên $f(2|\sin x|) = f(m^2 + 6m + 10) \Leftrightarrow 2|\sin x| = m^2 + 6m + 10$.

Mà $0 \leq 2|\sin x| \leq 2$

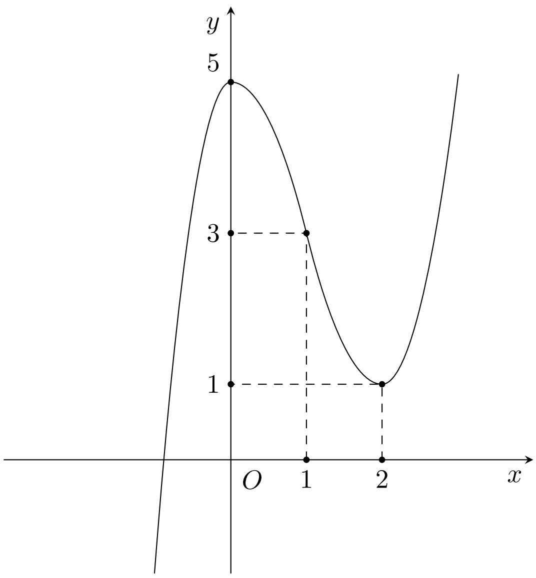
Nên yêu cầu bài toán tương đương $0 \leq m^2 + 6m + 10 \leq 2 \Leftrightarrow m^2 + 6m + 8 \leq 0 \Leftrightarrow -4 \leq m \leq -2$.

Vậy có 3 số nguyên m thỏa mãn.

Chọn đáp án (B) □

Câu 193 (Liên trường huyện Quảng Xương-Thanh Hóa-2021).

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(\left|\dfrac{3\sin x-\cos x-1}{2\cos x-\sin x+4}\right|+2\right)=f\left(\sqrt{(m+2)^2+4}\right)$ có nghiệm?

Ⓐ 3. Ⓑ 5. Ⓒ 4. Ⓓ 2.

Lời giải.

Ta có $-1\le\sin x\le 1,\ -1\le\cos x\le 1$ nên suy ra $2\cos x-\sin x+4>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Đặt $t=\dfrac{3\sin x-\cos x-1}{2\cos x-\sin x+4}\Rightarrow t(2\cos x-\sin x+4)=3\sin x-\cos x-1$

$$\Leftrightarrow (2t+1)\cos x-(t+3)\sin x=-(4t+1).$$

Phương trình trên có nghiệm khi

$$\begin{aligned}&(2t+1)^2+(t+3)^2\ge(4t+1)^2\\ \Leftrightarrow\ &\frac{-9}{11}\le t\le 1\\ \Rightarrow\ &2\le|t|+2\le 3.\end{aligned}$$

Nhìn vào hình trên ta thấy hàm số $f(x)$ luôn đồng biến trên $[2;3]$ nên phương trình

$$f\left(\left|\frac{3\sin x-\cos x-1}{2\cos x-\sin x+4}\right|+2\right)=f\left(\sqrt{(m+2)^2+4}\right)$$

hay phương trình

$$f(|t|+2)=f\left(\sqrt{(m+2)^2+4}\right)$$

có nghiệm khi và chỉ khi phương trình $|t|+2=\sqrt{(m+2)^2+4}$ có nghiệm t thỏa mãn điều kiện

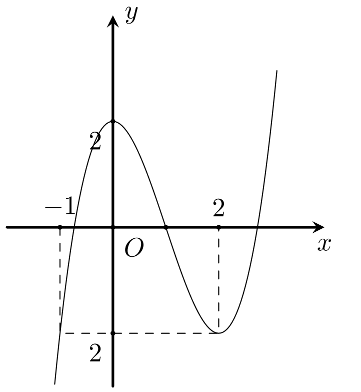
$$\begin{aligned}&2\le|t|+2\le 3\\ \Leftrightarrow\ &2\le\sqrt{(m+2)^2+4}\le 3\\ \Rightarrow\ &m^2+4m-1\le 0\\ \Leftrightarrow\ &2-\sqrt{5}\le m\le 2+\sqrt{5}.\end{aligned}$$

Mà $m\in\mathbb{Z}$ nên có tất cả 5 giá trị m thỏa mãn.

Chọn đáp án B □

Câu 194 (Liên trường Nghệ An-2020).

Cho hàm số $f(x)$ là hàm số đa thức bậc bốn. Biết $f(0)=0$ và đồ thị hàm số $y=f'(x)$ có hình vẽ bên dưới



Tập nghiệm của phương trình $f(|2\sin x-1|-1)=m$ (với m là tham số) trên đoạn $[0;3\pi]$ có tất cả bao nhiêu phần tử?

(A) 8. (B) 20. (C) 12. (D) 16.

Lời giải.

Đồ thị đã cho là đồ thị hàm số bậc ba có hai điểm cực trị $x=0$ và $x=2$ nên có dạng $f'(x)=ax^3+bx^2+cx+d$.

Lần lượt thay thế các dữ kiện từ hình vẽ, ta được $\begin{cases} d=2 \\ c=0 \\ 3\cdot a\cdot 2^2+2\cdot b\cdot 2=0 \\ -a^3+b+d=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-3 \\ c=0 \\ d=2. \end{cases}$

Suy ra $f'(x)=x^3-3x^2+2 \Rightarrow f(x)=\dfrac{x^4}{4}-x^3+2x+C$.

Mà $f(0)=0 \Rightarrow C=0 \Rightarrow f(x)=\dfrac{x^4}{4}-x^3+2x$.

Ta có $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=1-\sqrt{3} \\ x=1+\sqrt{3}. \end{array}\right.$

Suy ra bảng biến thiên

x	$-\infty$		$1-\sqrt{3}$		1		$1+\sqrt{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$\frac{5}{4}$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Từ đó ta có bảng biến thiên của $f(x-1)$

x	$-\infty$		$2-\sqrt{3}$		2		$2+\sqrt{3}$		$+\infty$
$f'(x-1)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x-1)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$\frac{5}{4}$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Vì $-1\le \sin x\le 1, \forall x\in[0;3\pi]$ nên $0\le |2\sin x-1|\le 3$.

Đặt $t=|2\sin x-1|$, $t\in[0;3]$.

Dựa vào bảng biến thiên, suy ra phương trình $f(t-1)=m$ có tối đa 2 nghiệm $t=h$, $t=k$.

Do đó $\left[\begin{array}{l} 2\sin x-1=\pm h \\ 2\sin x-1=\pm k \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x=\dfrac{\pm h+1}{2} \\ \sin x=\dfrac{\pm k+1}{2}. \end{array}\right.$

Trên $[0;3\pi]$, mỗi phương trình có nhiều nhất 4 nghiệm, do đó phương trình đã cho có nhiều nhất 16 nghiệm.

Chọn đáp án (D) □

Câu 195 (Sở Hà Nam-2019). Cho hàm số $f(x) = x^2 - 4x + 3$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f^2(|x|) - (m-6)f(|x|) - m + 5 = 0$ có 6 nghiệm thực phân biệt?

(A) 1. (B) 2. (C) 4. (D) 3.

Lời giải.

Hàm số $f(x) = x^2 - 4x + 3$ có bảng biến thiên

t	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	↘	3	↘	-1	↗	$+\infty$

Hàm số $y = f(|x|)$ có bảng biến thiên

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f(\|x\|)$	$+\infty$	↘	-1	↗	3	↘	-1	↗	$+\infty$

Đặt $t = f(|x|) \geq -1$. (*)

Nhận xét

- Với $t_0 < -1 \Rightarrow (*) x \in \varnothing$.
- Với $t_0 = -1; t_0 > 3 \Rightarrow (*)$ 2 nghiệm.
- Với $t_0 = 3 \Rightarrow (*)$ 3 nghiệm.
- Với $t_0 \in (-1; 3) \Rightarrow (*)$ 4 nghiệm.

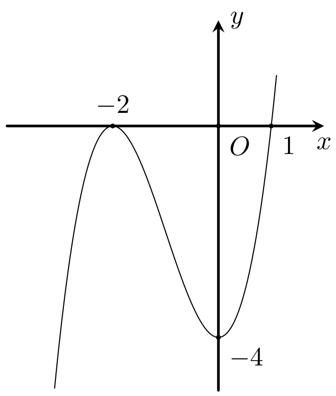
Phương trình trở thành $t^2 - (m-6)t - m + 5 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 \\ t = m - 5. \end{array}\right.$

Yêu cầu bài toán suy ra $-1 < m - 5 < 3 \Leftrightarrow 4 < m < 8$.

Mà $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{5; 6; 7\}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 196. Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình bên dưới



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f^2(x) - (m+5)|f(x)| + 4m + 4 = 0$ có 7 nghiệm phân biệt?

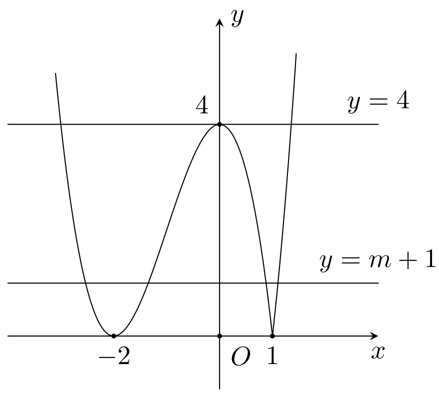
(A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4.

Lời giải.

Phương trình tương đương với $f^2(x) - 5|f(x)| + 4 - m(|f(x)| - 4) = 0$

$$\Leftrightarrow (|f(x)| - 4)(|f(x)| - 1) - m(|f(x)| - 4) = 0$$
$$\Leftrightarrow (|f(x)| - 4)(|f(x)| - 1 - m) = 0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} |f(x)| = 4 & (1) \\ |f(x)| = m+1. & (2) \end{array}\right.$$

Từ đồ thị hàm số $y = f(x)$, ta suy ra đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ như sau



Dựa vào đồ thị hàm số $y = |f(x)|$, suy ra phương trình (1) luôn có 3 nghiệm phân biệt.

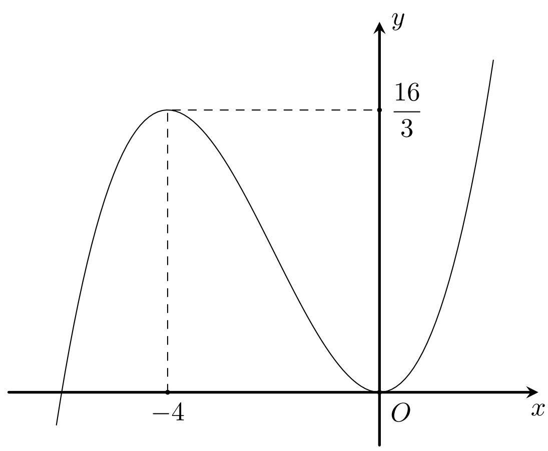
Vì vậy, yêu cầu bài toán tương đương với phương trình (2) có 4 nghiệm phân biệt khác 4.

Suy ra $0 < m+1 < 4 \Leftrightarrow -1 < m < 3 \Rightarrow m = \{0; 1; 2\}$.

Vậy có 3 giá trị nguyên của tham số m thỏa bài toán.

Chọn đáp án (C) □

Câu 197. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(\left|\dfrac{3\sin x - \cos x - 1}{2\cos x - \sin x + 4}\right|\right) = f(m^2 + 4m + 4)$ có nghiệm?

(A) 4. (B) 5. (C) Vô số. (D) 3.

Lời giải.

Ta có $\left|\dfrac{3\sin x - \cos x - 1}{2\cos x - \sin x + 4}\right| \geq 0, \forall x$ và $m^2 + 4m + 4 = (m+2)^2 \geq 0, \forall m$.

Nhìn vào đồ thị hàm số $y = f(x)$ ta thấy hàm số đã cho đồng biến trên $[0; +\infty)$ suy ra phương trình đã cho tương đương $\left|\dfrac{3\sin x - \cos x - 1}{2\cos x - \sin x + 4}\right| = m^2 + 4m + 4$. (1)

Đặt $P = \dfrac{3\sin x - \cos x - 1}{2\cos x - \sin x + 4}$. (*)

Vì $2\cos x - \sin x + 4 > 0, \forall x$ nên $(*) \Leftrightarrow (3 - P)\sin x - (1 + 2P)\cos x = 4P + 1$. (2)

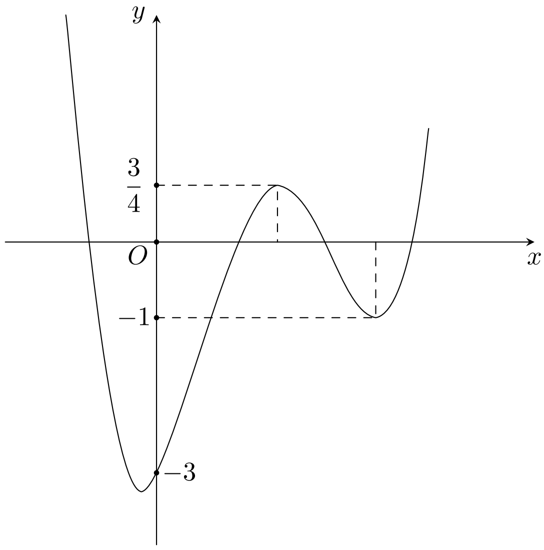
Phương trình (2) có nghiệm $\Leftrightarrow (4P+1)^2 \leq (3-P)^2 + (1+2P)^2 \Leftrightarrow \dfrac{-9}{11} \leq P \leq 1 \Rightarrow |P| \leq 1$.

Suy ra phương trình (1) có nghiệm $\Leftrightarrow m^2 + 4m + 4 \leq 1 \Leftrightarrow m \in [-3; -1]$.

Vậy có ba giá trị nguyên của m thỏa mãn bài toán.

Chọn đáp án D □

Câu 198 (Sở Hà Nội-2019). Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Số giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(|x+m|) = m$ có 4 nghiệm phân biệt là



A) 2. B) Vô số. C) 1. D) 0.

Lời giải.

Đặt $t = |x + m| \geq 0$.

Với $t = 0 \Rightarrow x = m$.

Với mỗi giá trị $t > 0$ sẽ ứng với 2 giá trị x.

Ta có phương trình $f(t) = m$ $(t \geq 0)$. (*)

Để phương trình có 4 nghiệm phân biệt thì $(*)$ có 2 nghiệm phân biệt dương.

Từ đồ thị của hàm số $y = f(t)$ trên miền $t \geq 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} m = \dfrac{3}{4} \\ m = -1. \end{array}\right.$

Vậy có 1 giá trị nguyên thỏa mãn

Chọn đáp án C □

Câu 199 (THPT Thiệu Hóa-Thanh Hóa-2019).

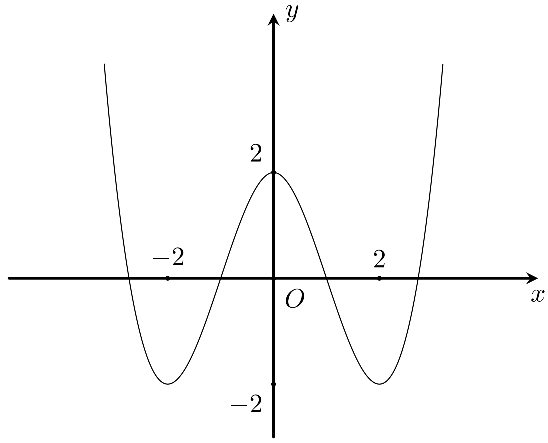
Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $x^2(|x|-3)+2-m^2(|m|-3)=0$ có 4 nghiệm phân biệt.

(A) 3. (B) 12. (C) $T=7$. (D) 5.

Lời giải.

Ta có $x^2(|x|-3)+2-m^2(|m|-3)=0 \Leftrightarrow |x|^3-3|x|^2+2=|m|^3-3|m|^2$. (*)

Xét hàm số: $y=f(x)=|x|^3-3|x|^2+2$ có đồ thị như hình vẽ



Từ đồ thị của hàm số ta có phương trình (*) có 4 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow -2<|m|^3-3|m|^2<2$

Mà $m\in\mathbb{Z}\Rightarrow |m|^3-3|m|^2\in\mathbb{Z}$

$$\Leftrightarrow m^2(|m|-3)\in\mathbb{Z}$$

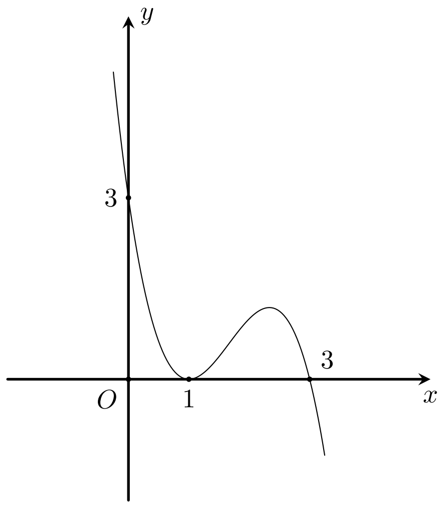
$$\Rightarrow m^2(|m|-3)\in\{-1;0;1\}$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ll}|m|=3 & \\ m=0 & \\ m=1 & \text{(loại)} \\ m=-1 & \text{(loại)}.\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} m=\pm 3 \\ m=0.\end{array}\right.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 200 (Chuyên Lam Sơn-Thanh Hóa-2019).

Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $f(0)=0$ và $f'(x)$ được cho như hình vẽ.



Phương trình $|f(|x|)| = m$ (với m là tham số) có nhiều nhất bao nhiêu nghiệm?

Ⓐ 8. Ⓑ 6. Ⓒ 2. Ⓓ 4.

Lời giải.

BBT của hàm số $y = f(x)$

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$+$	0	$-$	
y					$f(3)$		
			0				
	$-\infty$						$-\infty$

BBT của hàm số $y = f(|x|)$

x	$-\infty$		-3		0		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y			$f(3)$				$f(3)$		
					0				
	$-\infty$								$-\infty$

BBT của hàm số $y = |f(|x|)|$

x	$-\infty$				3		$+\infty$
y	$+\infty$		$f(3)$		$f(3)$		$+\infty$
		0		0		0	

Suy ra phương trình $|f(|x|)| = m$ có nhiều nhất là 6 nghiệm.

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 201 (THPT Hà Nam-2019). Cho hàm số $f(x) = x^2 - 4x + 3$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f^2(|x|) - (m-6)f(|x|) - m + 5 = 0$ có 6 nghiệm thực phân biệt?

Ⓐ 1. Ⓑ 2. Ⓒ 4. Ⓓ 3.

Lời giải.

Hàm số $f(x) = x^2 - 4x + 3$ có bảng biến thiên

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$				$+\infty$
			-1		

Hàm số $y = f(|x|)$ có bảng biến thiên

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f(\lvert x\rvert)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Đặt $t = f(|x|) \geq -1$. (*)

Nhận xét

- Với $t_0 < -1 \xrightarrow{(*)}$ vô nghiệm.
- Với $t_0 = -1$; $t_0 > 3 \Rightarrow (*)$ có 2 nghiệm.
- Với $t_0 = 3 \Rightarrow (*)$ có 3 nghiệm.
- Với $t_0 \in (-1; 3) \Rightarrow (*)$ có 4 nghiệm.

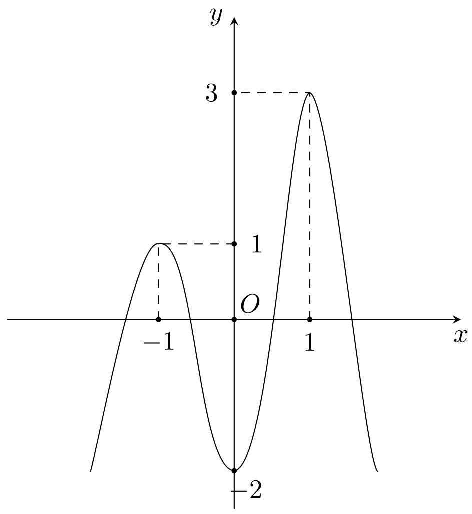
Phương trình trở thành $t^2 - (m-6)t - m + 5 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 \\ t = m - 5. \end{array}\right.$

Yêu cầu bài toán suy ra $-1 < m - 5 < 3 \Leftrightarrow 4 < m < 8$.

Mà $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{5; 6; 7\}$.

Chọn đáp án D □

Câu 202 (Chuyên Vinh-2021). Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị của hàm số $y = f(1-x)$ được cho trong hình vẽ bên.



Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $\left|f\left(\dfrac{1-x}{x+2}\right) + m\right| = 1$ có đúng 3 nghiệm phân biệt thuộc $[-1; 1]$?

A 3. B 4. C 2. D 1.

Lời giải.

Đặt $g(x) = f\left(\dfrac{1-x}{x+2}\right) \Rightarrow g'(x) = \dfrac{-3}{(x+2)^2} \cdot f'\left(\dfrac{1-x}{x+2}\right)$.

Nhận xét: Dựa vào đồ thị, hàm số $y = f(1-x)$ đạt cực trị tại các điểm $x = 0$; $x = \pm 1$ nên hàm số $y = f(x)$ sẽ đạt cực trị tại các điểm $x = 0$; $x = 1$; $x = 2$.

Giải phương trình $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \dfrac{1-x}{x+2} = 0 & \Leftrightarrow x = -\dfrac{1}{2}. \\ \dfrac{1-x}{x+2} = 1 & \Leftrightarrow x = 1 \\ \dfrac{1-x}{x+2} = 2 & \Leftrightarrow x = -1. \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	-1		$\frac{1}{2}$		1
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	0
$f(x)$	1	$\searrow$	-2	$\nearrow$	3

Phương trình đã cho tương đương với $\left[\begin{array}{l} g(x) = 1 - m \\ g(x) = -1 - m. \end{array}\right.$

Để phương trình có đúng 3 nghiệm phân biệt thuộc $[-1; 1]$ thì

- Trường hợp 1:

  Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \begin{cases} 1 < 1 - m \le 3 \\ -2 < -1 - m \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \le m < 0 \\ -2 \le m < 1 \end{cases} \Rightarrow m \in \{-2; -1\}.$

- Trường hợp 2:

  Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \begin{cases} -2 \le 1 - m \le 1 \\ -1 - m = -2 \end{cases} \Rightarrow m = 1.$

Vậy có 3 giá trị của m thoả mãn.

Chọn đáp án A □

Câu 203 (Chuyên Thái Bình-2021). Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Tìm m để phương trình $|f(x-1) + 2| = m$ có 4 nghiệm thỏa mãn $x_1 < x_2 < x_3 < 1 < x_4$.

A. $2 < m < 6$. B. $3 < m < 6$. C. $2 < m < 4$. D. $4 < m < 6$.

Lời giải.

Đặt $g(x) = f(x-1) + 2$.

Ta có $g'(x) = f'(x-1)$.

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - 1 = -1 \\ x - 1 = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \Rightarrow g(0) = 6 \\ x = 2 \Rightarrow g(2) = 2. \end{array}\right.$

Vì $f(x)$ là hàm bậc ba nên $f(0) = \dfrac{y_{CT} + y_{CD}}{2} = 2 \Rightarrow g(1) = f(0) + 2 = 4$.

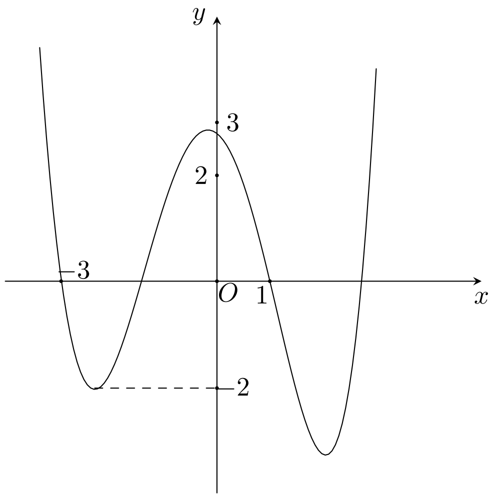
Bảng biến thiên của hàm số $y = |g(x)|$

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
y'		$+$	0		$-$		0	$+$	
y	$+\infty$	0	6		4		2		$+\infty$

Để phương trình $|f(x-1) + 2| = m$ có 4 nghiệm thỏa mãn $x_1 < x_2 < x_3 < 1 < x_4$ thì $4 < m < 6$.

Chọn đáp án D □

Câu 204 (Chuyên Vinh-2022). Cho hàm số đa thức bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Có bao nhiêu số nguyên a để phương trình $f\left(|x^2 - 4x| - 3\right) = a$ có không ít hơn 10 nghiệm thực phân biệt?

A 4. B 6. C 2. D 8.

Lời giải.

Đặt $t = |x^2 - 4x| - 3$, ta có $t'(x) = \dfrac{x^2 - 4x}{|x^2 - 4x|} \cdot (2x - 4)$.

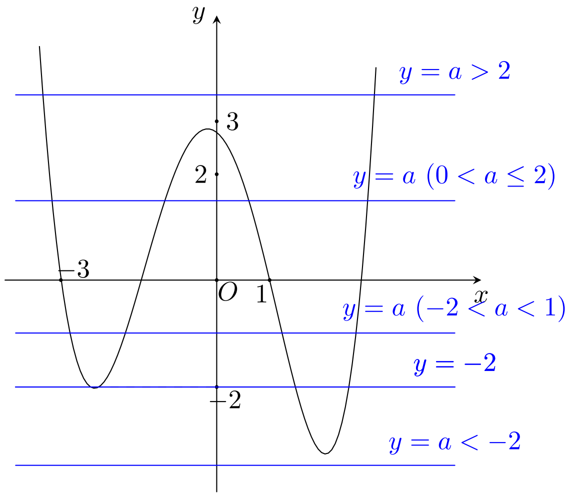
$$t'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - 4x = 0 \\ 2x - 4 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0; 4 \\ x = 2. \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		2		4		$+\infty$
$t'(x)$		$-$	$\|\|$	$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	
$t(x)$	$+\infty$		-3		1		-3		$+\infty$

Nhận xét

- Với $t < -3$ thì vô nghiệm x.
- Với $t = -3$ thì có 2 nghiệm x.
- Với $t \in (-3; 1)$ thì có 4 nghiệm x.
- Với $t = 1$ thì có 3 nghiệm x.
- Với $t > 1$ thì có 2 nghiệm x.



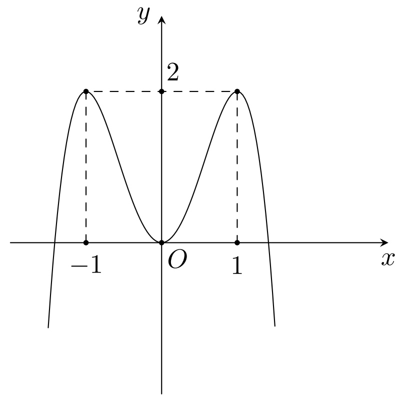
Khi đó ta có phương trình $f(t) = a$ (1). Từ đồ thị hàm số $f(x)$ ta có

- Nếu $a < -2$ thì (1) có 2 nghiệm phân biệt $t > 1$ hoặc vô nghiệm $\Rightarrow$ Phương trình đã cho có số nghiệm không lớn hơn 4.
- Nếu $a = -2$ thì (1) có 3 nghiệm phân biệt trong đó 1 nghiệm $t \in (-3; 0)$ và có 2 nghiệm $t > 1 \Rightarrow$ Phương trình đã cho có 8 nghiệm.
- Nếu $a \in (-2; 0)$ thì (1) có 4 nghiệm phân biệt trong đó có 2 nghiệm $t \in (-3; 1)$ và 2 nghiệm $t > 1 \Rightarrow$ Phương trình đã cho có 12 nghiệm phân biệt.
- Nếu $a = 0$ thì (1) có 4 nghiệm phân biệt trong đó có 1 nghiệm $t \in (-3; 1)$ và 1 nghiệm $t > 1$ và nghiệm $t = 1; t = -3 \Rightarrow$ Phương trình đã cho có 11 nghiệm phân biệt.
- Nếu $a \in (0; 2]$ thì (1) có 4 nghiệm phân biệt trong đó có 2 nghiệm $t \in (-3; 1)$ và 1 nghiệm $t < -3$ và 1 nghiệm $t > 1 \Rightarrow$ Phương trình đã cho có 10 nghiệm phân biệt.
- Nếu $\begin{cases} a > 2 \\ a \in \mathbb{Z} \end{cases}$ thì (1) có 2 nghiệm phân biệt trong đó 1 nghiệm $t < -3$ và 1 nghiệm $t > 1 \Rightarrow$ Phương trình đã cho có 2 nghiệm phân biệt.

Vậy với $-2 < a \leq 2$ thì phương trình đã cho có không it hơn 10 nghiệm thực phân biệt, do đó có 4 số nguyên a cần tìm.

Chọn đáp án A □

Câu 205 (Sở Phú Thọ-2022). Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ



Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $2\left|f\left(x-1-2\sqrt{x-1}\right)\right| = 3$ là

A 12. B 5. C 8. D 4.

Lời giải.

Xét phương trình $2\left|f\left(x-1-2\sqrt{x-1}\right)\right| = 3$. (1)

Đặt $t = x - 1 - 2\sqrt{x-1}$, với $x \geq 1$.

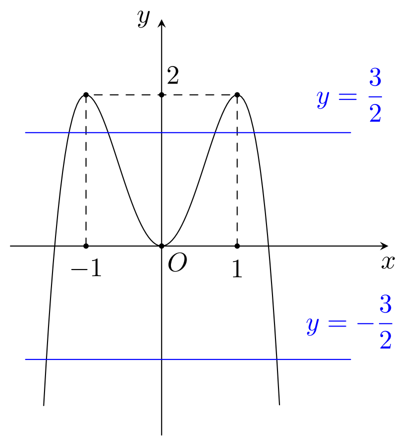
Ta có $t' = 1 - \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$; $t' = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x-1} = 1 \Leftrightarrow x = 2$.

Bảng biến thiên của hàm $t = t(x)$

x	$-\infty$	1		2		$+\infty$
$t'(x)$		‖	$-$	0	$+$	
$t(x)$		0	↘	-1	↗	$+\infty$

Suy ra với $x \geq 1$ thì $t \geq -1$.

Khi đó, phương trình (1) trở thành $2\left|f(t)\right| = 3 \Leftrightarrow \left|f(t)\right| = \dfrac{3}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(t) = \dfrac{3}{2} \\ f(t) = -\dfrac{3}{2}. \end{array}\right.$



- Trường hợp 1: $f(t) = \dfrac{3}{2} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t = a \in (-x_0; -1) \\ t = b \in (-1; 0) \\ t = c \in (0; 1) \\ t = d \in (1; x_0). \end{array}\right.$
- Trường hợp 2: $f(t) = -\dfrac{3}{2} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t = e \in (-\infty; -x_0) \\ t = f \in (x_0; +\infty). \end{array}\right.$

Dựa vào bảng biến thiên của hàm số t ta có

- Với $t = a \in (-x_0; -1) \Rightarrow$ phương trình (1) vô nghiệm.
- Với $t = b \in (-1; 0) \Rightarrow$ phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2.
- Với $t = c \in (0; 1) \Rightarrow$ phương trình (1) có 1 nghiệm x_3.
- Với $t = d \in (1; x_0) \Rightarrow$ phương trình (1) có 1 nghiệm x_4.
- Với $t = e \in (-\infty; -x_0) \Rightarrow$ phương trình (1) vô nghiệm.
- Với $t = f \in (x_0; +\infty) \Rightarrow$ phương trình (1) có 1 nghiệm x_5.

Các nghiệm x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 không trùng nhau.

Vậy phương trình đã cho có 5 nghiệm.

Chọn đáp án B □

Câu 206 (Sở Thái Nguyên-2022). Cho hàm số $f(x) = \log_3 x + 3^x - 3^{\frac{1}{x}}$. Tổng bình phương các giá trị của tham số m để phương trình $f\left(\dfrac{1}{4|x-m|+3}\right) + f\left(x^2 - 4x + 7\right) = 0$ có đúng 3 nghiệm thực phân biệt bằng

A. 14. B. 13. C. 10. D. 5.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = \dfrac{1}{x \ln 3} + 3^x \cdot \ln 3 + \dfrac{1}{x^2} \cdot 3^{\frac{1}{x}} \cdot \ln 3 > 0, \forall x > 0$.

$\Rightarrow$ Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$ (1).

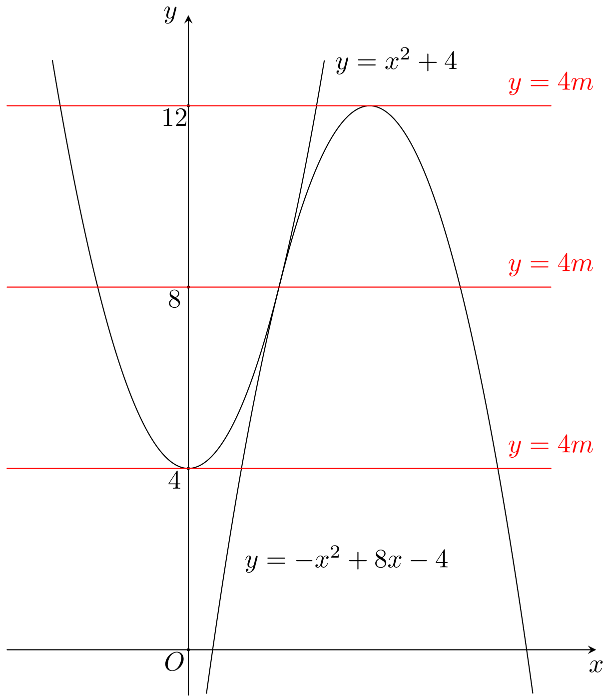
Mặt khác $f\left(\dfrac{1}{x}\right) = \log_3 \dfrac{1}{x} + 3^{\frac{1}{x}} - 3^x = -\left(\log_3 x - 3^{\frac{1}{x}} + 3^x\right) = -f(x)$.

Khi đó

$$\begin{aligned} & f\left(\frac{1}{4|x-m|+3}\right) + f\left(x^2 - 4x + 7\right) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & -f(4|x-m|+3) + f\left(x^2 - 4x + 7\right) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & f(4|x-m|+3) = f\left(x^2 - 4x + 7\right). \quad (2) \end{aligned}$$

Từ (1), (2) $\Rightarrow 4|x-m| + 3 = x^2 - 4x + 7 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4m = -x^2 + 8x - 4 \\ 4m = x^2 + 4. \end{array}\right.$

Ta có đồ thị sau



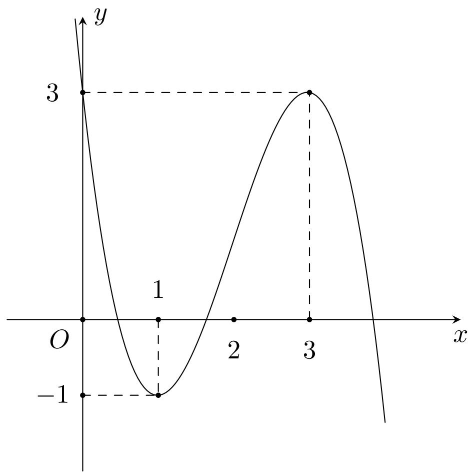
Theo yêu cầu bài toán tương đương $\left[\begin{array}{l} 4m = 4 \\ 4m = 8 \\ 4m = 12 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = 2 \\ m = 3. \end{array}\right.$

Vậy $1^2 + 2^2 + 3^2 = 14$.

Chọn đáp án A □

Câu 207 (THPT Bùi Thị Xuân-Huế-2022).

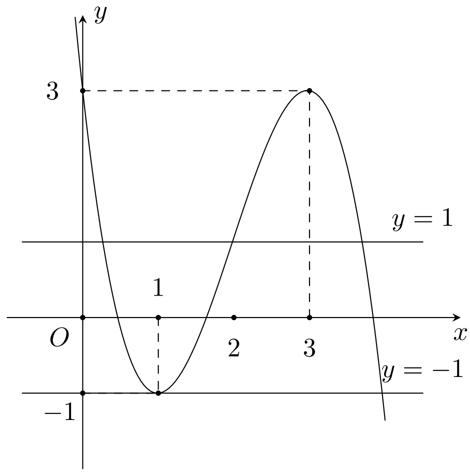
Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm số bậc ba và có đồ thị $y = f(2 - x)$ như hình vẽ.



Hỏi phương trình $|f(|x^2 - 2x|)| = 1$ có tất cả bao nhiêu nghiệm?

A 8. B 7. C 9. D 6.

Lời giải.



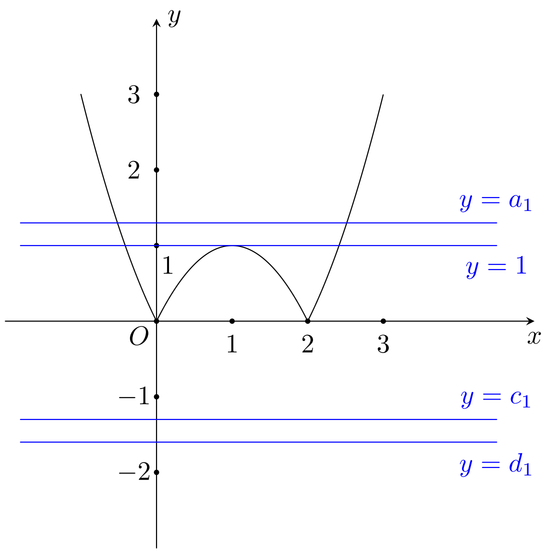
$$f(2-x)=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2-x=a\ (0<a<1)\\ 2-x=2\\ 2-x=c\ (c>3)\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=2-a=a_1\ (1<a_1<2)\\ x=0\\ x=2-c=c_1\ (c_1<-1).\end{array}\right.$$

$$f(2-x)=-1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2-x=1\\ 2-x=d\ (d>c>3)\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\ x=2-c=d_1\ (d_1<c_1<-1).\end{array}\right.$$

$$\left|f\left(\left|x^2-2x\right|\right)\right|=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll}f\left(\left|x^2-2x\right|\right)=1 & (1)\\ f\left(\left|x^2-2x\right|\right)=-1. & (2)\end{array}\right.$$

- $f\left(\left|x^2-2x\right|\right)=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\left|x^2-2x\right|=a_1,\quad (3)\ (1<a_1<2)\\ \left|x^2-2x\right|=0\quad (4)\\ \left|x^2-2x\right|=c_1\quad (c_1<-1)\ (\text{VN}).\end{array}\right.$

- $f\left(\left|x^2-2x\right|\right)=-1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll}\left|x^2-2x\right|=1 & (5)\\ \left|x^2-2x\right|=d_1\quad (d_1<c_1<-1)\ (\text{VN}). & \end{array}\right.$



Dựa vào đồ thị thì (3) có 2 nghiệm phân biệt, (4) có 2 nghiệm, (5) có 3 nghiệm. Các nghiệm này khác nhau đôi một.

Vậy phương trình $\left|f\left(\left|x^2-2x\right|\right)\right|=1$ có 7 nghiệm.

Chọn đáp án (B) □

Câu 208 (Chuyên Lê Hồng Phong-Nam Định-2022).

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

Tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $|f(x^3+1)+3m| = 1$ có đúng 6 nghiệm phân biệt là $(a;b)$. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định dưới đây.

(A) $b-a=-\dfrac{2}{3}$. (B) $b-a=2$. (C) $b-a=\dfrac{4}{3}$. (D) $b-a=\dfrac{2}{3}$.

Lời giải.

Ta có $|f(x^3+1)+3m| = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f\left(x^3+1\right)+3m=1 \\ f\left(x^3+1\right)+3m=-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -3m=f\left(x^3+1\right)-1 \\ -3m=f\left(x^3+1\right)+1. \end{array}\right.$ (1)

Ta xét hàm số $y = f(x^3+1)+1$ có $y' = 3x^2 \cdot f'(x^3+1)$.

$y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ f'\left(x^3+1\right)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^3+1=-1 \\ x^3+1=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-\sqrt[3]{2} \\ x=1 \end{array}\right.$ trong đó $x=0$ là nghiệm kép.

Ta có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		$-\sqrt[3]{2}$		1		$+\infty$
$y'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x^3+1)+1$	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$
$f(x^3+1)-1$	$+\infty$	$\searrow$	-4	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

Phương trình (1) có 6 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $-2 < -3m < 0 \Leftrightarrow 0 < m < \dfrac{2}{3} \Leftrightarrow m \in \left(0;\dfrac{2}{3}\right)$.

Vậy $a=0$, $b=\dfrac{2}{3} \Rightarrow b-a=\dfrac{2}{3}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 209 (Sở Lai Châu-2022).

Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên

x	$-\infty$		-2		-1		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$				$+$	0	$-$		$-$	0	$+$			
$f(x)$	$+\infty$	↗	-3	↗	0	↘	-2	↘	-4	↗	0	↗	$+\infty$

Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên của m để phương trình $f\left(f(|x+1|-2)\right) = m$ có 10 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[-3;3]$. Số phần tử của tập hợp S là

A 0. **B** 1. **C** 2. **D** 3.

Lời giải.

Đặt $t = f\left(|x+1|-2\right)$. Khi $x > -1$, ta có $y = f\left(|x+1|-2\right) = f(x-1)$.

Tịnh tiến đồ thị hàm số $y = f(x)$ sang phải 1 đơn vị ta được đồ thị hàm số $y = f(x-1)$ và vì đồ thị hàm số $y = f\left(|x+1|-2\right)$ nhận đường thẳng $x = -1$ làm trục đối xứng nên ta có bảng biến thiên của hàm số $y = f\left(|x+1|-2\right)$

x	-3		-2		-1		0		1		2		3
$f\left(\|x+1\|-2\right)$	-2	↗	0	↘	-4	↗	0	↘	-2	↘	-4	↗	0

Với $x \in [-3;3]$, ta có $t \in [-4;0]$.

Nhận xét

- Mỗi $t \in (-4;-2)$ cho 4 nghiệm $x \in [-3;3]$.
- Mỗi $t \in [-2;0)$ cho 5 nghiệm $x \in [-3;3]$.
- Với $t = -4$, ta có 2 nghiệm $x \in [-3;3]$.
- Với $t = 0$, ta có 3 nghiệm $x \in [-3;3]$.
- Ta có phương trình $f\left(f\left(|x+1|-2\right)\right) = m$ trở thành phương trình $\Leftrightarrow f(t) = m$.

t	-4	-3	-2	t_1	-1	t_2	0	1	2	3
$f(t)$		↗	-4	↗	0	↘	-2	↘ -4	↗ 0	↗

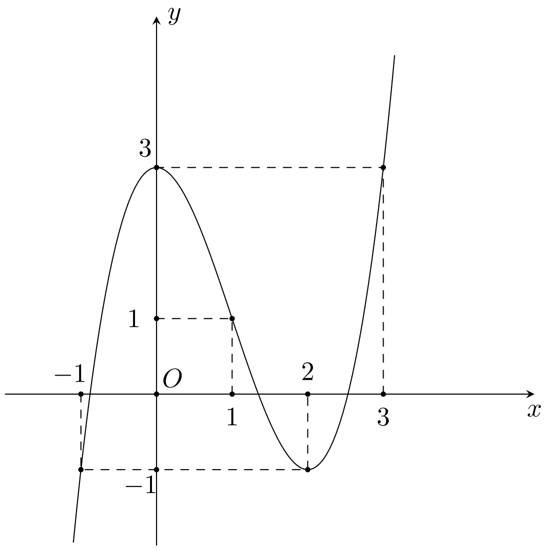
- Phương trình $f\left(f\left(|x+1|-2\right)\right) = m$ có 10 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[-3;3]$

$\Leftrightarrow$ Phương trình $f(t) = m$ có 2 nghiệm phân biệt $t \in [-2; 0) \Leftrightarrow -2 < m < 0$.

Vậy có 1 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán là $m = -1$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 210 (Sở Lai Châu-2022). Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.

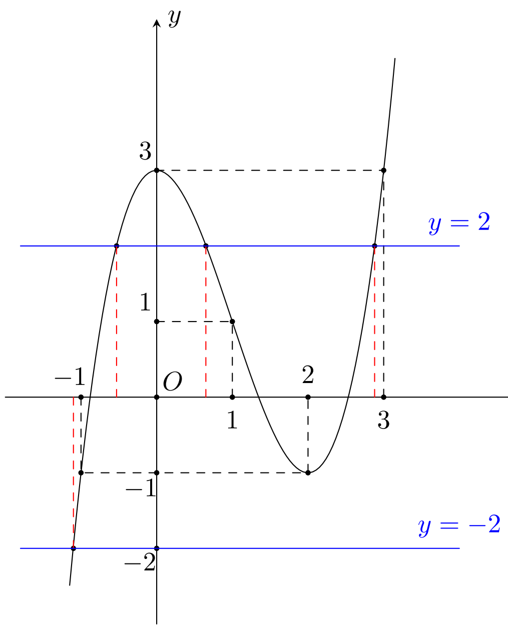


Số nghiệm thực của phương trình $|f(x^4 - 2x^2)| = 2$ là

(A) 8. (B) 9. (C) 7. (D) 10.

Lời giải.

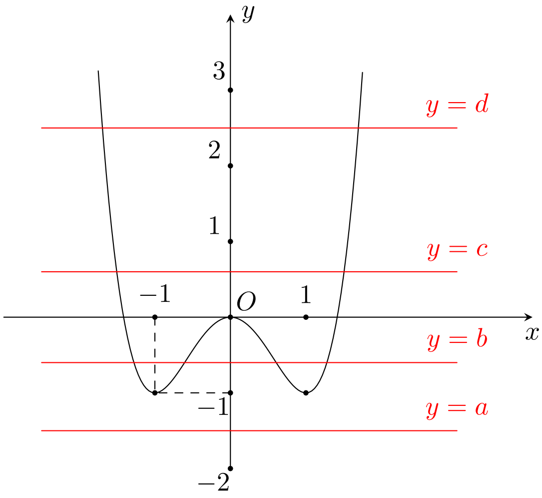
Phương trình $|f(x^4-2x^2)| = 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x^4-2x^2) = 2 \\ f(x^4-2x^2) = -2. \end{array}\right.$



☑ Phương trình $f(x^4-2x^2) = 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x^4-2x^2 = b, & (-1 < b < 0) \\ x^4-2x^2 = c, & (0 < c < 1) \\ x^4-2x^2 = d, & (2 < d < 3). \end{array}\right.$

☑ Phương trình $f(x^4-2x^2) = -2 \Leftrightarrow x^4-2x^2 = a, (-2 < a < -1)$.

Đồ thị hàm số $y = x^4 - 2x^2$ như hình vẽ sau



Dựa vào đồ thị trên ta có:

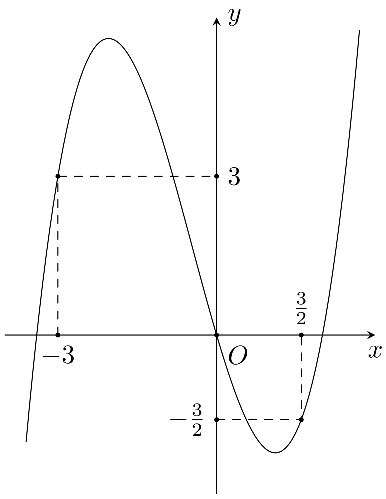
- Phương trình $x^4 - 2x^2 = a,\ (-2 < a < -1)$ không có nghiệm thực.
- Phương trình $x^4 - 2x^2 = b,\ (-1 < b < 0)$ có 4 nghiệm thực phân biệt.
- Phương trình $x^4 - 2x^2 = c,\ (0 < c < 1)$ có 2 nghiệm thực phân biệt.
- Phương trình $x^4 - 2x^2 = d,\ (2 < d < 3)$ có 2 nghiệm thực phân biệt.

Vậy phương trình $|f(x^4 - 2x^2)| = 2$ có 8 nghiệm thực phân biệt.

Chọn đáp án A □

Câu 211 (Chuyên Thái Bình-2022). Cho hàm $y = f(x)$ là hàm đa thức bậc bốn. Biết rằng $f(0) = 0,\ f(-3) = f\left(\dfrac{3}{2}\right) = -\dfrac{19}{4}$ và đồ thị hàm số $y = f'(x)$ có dạng như hình vẽ. Xét hàm số $g(x) = |4f(x) + 2x^2| - 2m^2 + 1$ với m là tham số thực. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên $m \in (-50; 50)$ để phương trình $g(x) = 1$ có đúng hai nghiệm thực?

A. 94. B. 96. C. 47. D. 48.

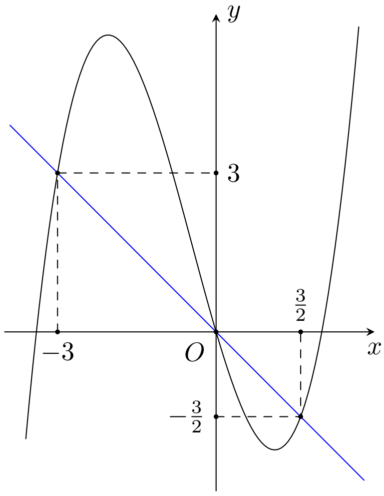


Lời giải.

Ta có $|4f(x)+2x^2|-2m^2+1=1 \Leftrightarrow |4f(x)+2x^2|=2m^2$. (1)

Xét hàm số $h(x)=4f(x)+2x^2$, ta có $h'(x)=4\left[f'(x)-(-x)\right]$.

Dựa vào đồ thị hàm số $f'(x)$ và đường thẳng $y=-x$.



Ta thấy: $h'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-3 \\ x=0 \\ x=\dfrac{3}{2} \end{array}\right.$

$>$=stealth và

$$h(-3)=4f(-3)+2(-3)^2=-1, h(0)=0, h\left(\frac{3}{2}\right)=4f\left(\frac{3}{2}\right)+2\left(\frac{3}{2}\right)^2=-\frac{29}{2}.$$

Do đó ta có bảng biến thiên hàm số $h(x)$ như sau

x	$-\infty$		-3		0		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$	$+\infty$	↘	-1	↗	0	↘	$-\frac{29}{2}$	↗	$+\infty$

Từ đó suy ra bảng biến thiên của hàm số $|h(x)|$ như sau

x	$-\infty$		x_1		-3		0		$\frac{3}{2}$		x_2		$+\infty$
$h'(x)$		$-$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
$h(x)$	$+\infty$	↘		↘	-1	↗	0	↘	$-\frac{29}{2}$	↗		↗	$+\infty$
$\vert h(x)\vert$	$+\infty$	↘	0	↗	1	↘	0	↗	$\frac{29}{2}$	↘	0	↗	$+\infty$

Do đó để phương trình (1) có đúng hai nghiệm thực thì $2m^2 > \dfrac{29}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > \dfrac{\sqrt{29}}{2} \\ m < -\dfrac{\sqrt{29}}{2}. \end{array}\right.$

Mà m là số nguyên thuộc $(-50; 50)$ nên $\left[\begin{array}{l} 3 \leq m \leq 49 \\ -49 \leq m \leq -3. \end{array}\right.$

Vậy có 94 số nguyên m thỏa mãn.

Chọn đáp án A □

BẢNG ĐÁP ÁN

1. A	2. B	3. C	4. B	5. B	6. A	7. C	8. C	9. C	10. D
11. C	12. C	13. A	14. B	15. A	16. C	17. B	18. A	19. A	20. C
21. A	22. A	23. B	24. B	25. A	26. B	27. B	28. B	29. D	30. B
31. C	32. C	33. A	34. D	35. D	36. B	37. C	38. B	39. D	40. C
41. B	42. A	43. A	44. B	45. B	46. B	47. B	48. B	49. D	50. B
51. C	52. C	53. B	54. D	55. C	56. A	57. A	58. B	59. C	60. D
61. C	62. B	63. D	64. A	65. D	66. B	67. B	68. C	69. B	70. C
71. B	72. B	73. C	74. D	76. B	78. B	79. A	80. A	81. A	82. A
83. D	84. A	85. C	86. B	87. B	88. A	89. C	90. C	91. C	92. D
93. D	94. D	95. A	96. C	97. C	98. B	99. D	100. C	101. B	102. B
103. D	104. A	106. D	108. B	109. D	110. A	111. B	112. D	113. A	114. B
115. C	116. A	117. D	118. A	119. B	120. D	121. A	122. C	123. C	124. D
125. C	126. D	127. C	128. B	129. C	130. B	131. B	132. A	133. C	134. A
135. D	136. D	137. D	138. B	139. B	140. C	141. A	142. A	143. B	144. D
145. D	146. A	147. C	148. D	149. C	150. A	151. D	152. B	153. A	154. B
155. B	156. D	157. C	158. C	159. A	160. B	161. C	162. B	163. D	165. D
166. D	167. D	168. D	169. B	170. B	171. D	172. A	173. C	174. C	175. B
176. B	177. C	180. B	181. C	182. A	183. A	184. D	185. B	186. D	187. D
188. A	189. B	190. C	191. C	192. B	193. B	194. D	195. D	196. C	197. D
198. C	199. A	200. B	201. D	202. A	203. D	204. A	205. B	206. A	207. B
			208. D	209. B	210. A	211. A			

CHỦ ĐỀ 7

GÓC - HÌNH HỌC KHÔNG GIAN

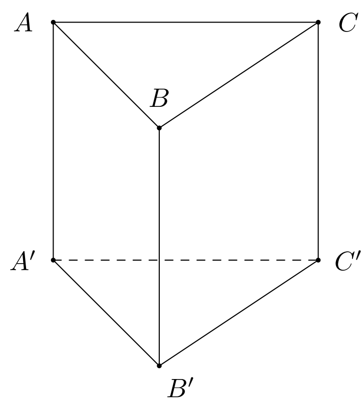
MỨC ĐỘ 1. MỨC ĐỘ 7,8,9,10

Dạng 1. Góc giữa đường thẳng với đường thẳng

Câu 1 (Mã 101 - 2021 Lần 1).

Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng Góc giữa đường thẳng AA' và BC' bằng

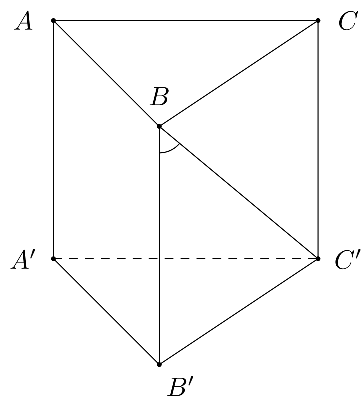
(A) 30°. (B) 90°. (C) 45°. (D) 60°.



Lời giải.

Vì $AA' \parallel BB'$ nên $(AA', BC') = (BB', BC') = \widehat{B'BC}$.

Ta có $\tan \widehat{B'BC} = \dfrac{B'C'}{BB'} = 1 \Rightarrow \widehat{B'BC} = 45^\circ$.

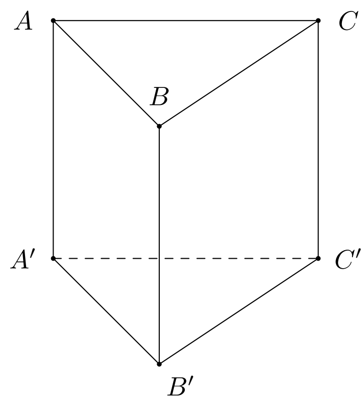


Chọn đáp án (C) □

Câu 2.

Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng nhau (tham khảo hình bên dưới). Góc giữa hai đường thẳng $A'B$ và CC' bằng

(A) 45°. (B) 30°. (C) 90°. (D) 60°.

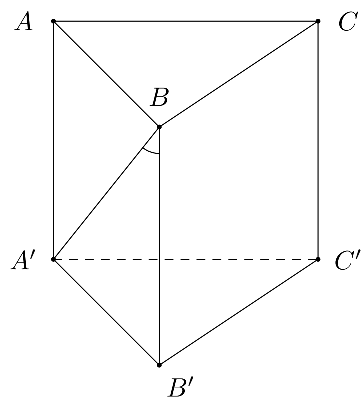


Lời giải.

Ta có $CC' \parallel BB'$. Nên $\left(\widehat{A'B;CC'}\right) = \left(\widehat{A'B;BB'}\right) = \widehat{A'BB'}$ ($\widehat{A'BB'}$ là góc nhọn).

Mặt khác, tam giác $A'BB'$ là tam giác vuông cân ($A'B = BB'$ và $A'B \perp BB'$) suy ra $\widehat{A'BB'} = 45°$.

Vậy góc giữa hai đường thẳng $A'B$ và CC' bằng $45°$.

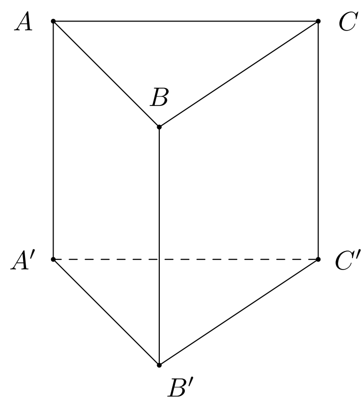


Chọn đáp án (A) □

Câu 3.

Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng nhau (tham khảo hình bên). Góc giữa hai đường thẳng AA' và $B'C$ bằng

(A) $90°$. (B) $45°$. (C) $30°$. (D) $60°$.

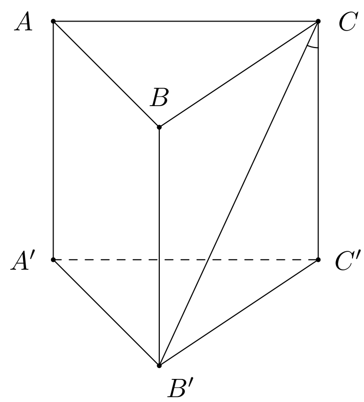


Lời giải.

Ta có $AA' \parallel CC'$ nên $(AA', B'C) = (CC', B'C)$.

Mặt khác tam giác BCC' vuông tại C' có $CC' = B'C'$ nên là tam giác vuông cân.

Vậy góc giữa hai đường thẳng AA' và $B'C$ bằng $45°$.

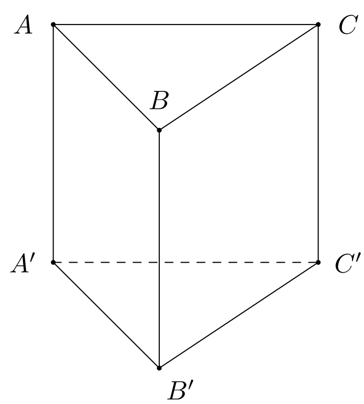


Chọn đáp án (B) □

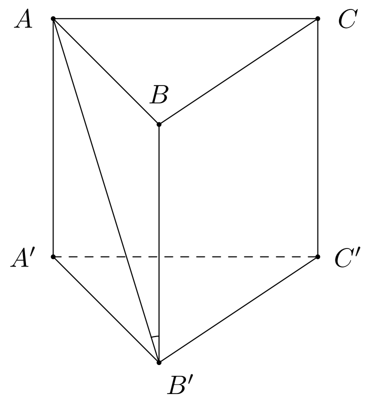
Câu 4.

Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng nhau (tham khảo hình bên). Góc giữa hai đường thẳng AB' và CC' bằng

(A) $30°$. (B) $90°$. (C) $60°$. (D) $45°$.



Lời giải.

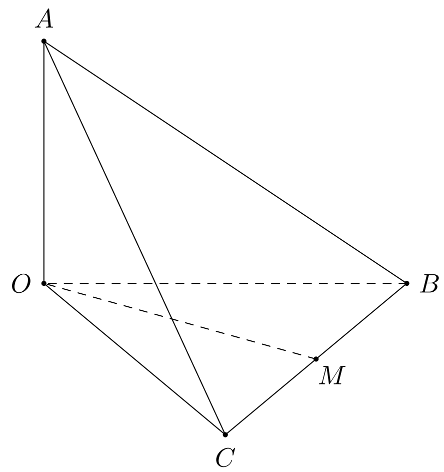


Ta có $BB' \parallel CC'$ (do BB' và CC' là cạnh bên của hình lăng trụ).
Suy ra $\left(\widehat{AB', CC'}\right) = \left(\widehat{AB', BB'}\right)$.
Tứ giác $ABB'A'$ là hình vuông (do $ABC.A'B'C'$ là lăng trụ đứng có tất cả các cạnh bằng nhau) nên $\widehat{AB'B} = 45^\circ$.
Vậy $\left(\widehat{AB', CC'}\right) = \left(\widehat{AB', BB'}\right) = \widehat{AB'B} = 45^\circ$.

Chọn đáp án D □

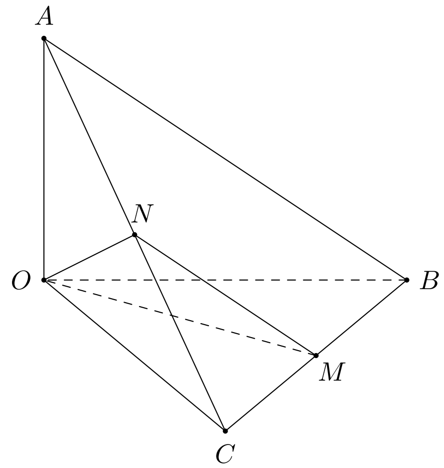
Câu 5.

Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau và $OA = OB = OC$. Gọi M là trung điểm của BC (tham khảo hình vẽ bên dưới). Góc giữa hai đường thẳng OM và AB bằng



Ⓐ 45°. Ⓑ 90°. Ⓒ 30°. Ⓓ 60°.

Lời giải.



Đặt $OA = a$ suy ra $OB = OC = a$ và $AB = BC = AC = a\sqrt{2}$.
Gọi N là trung điểm AC ta có $MN \parallel AB$ và $MN = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.
Suy ra góc $\widehat{(OM, AB)} = \widehat{(OM, MN)}$. Xét $\widehat{OMN}$.
Trong tam giác OMN có $ON = OM = MN = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$ nên OMN là tam giác đều.
Suy ra $\widehat{OMN} = 60^\circ$.
Vậy $\widehat{(OM, AB)} = \widehat{(OM, MN)} = 60^\circ$.

Chọn đáp án D □

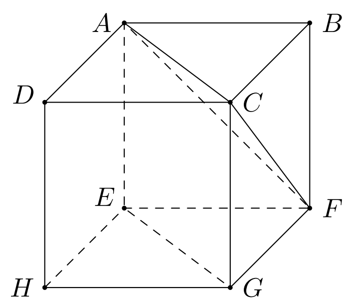
Câu 6. Cho hình lập phương $ABCD.EFGH$. Góc giữa cặp véc-tơ $\overrightarrow{AF}$ và $\overrightarrow{EG}$ bằng

Ⓐ 30°. Ⓑ 120°. Ⓒ 60°. Ⓓ 90°.

Lời giải.

Ta có $\left(\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{EG}\right) = \left(\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AC}\right) = \widehat{CAF}$.

$\triangle CAF$ là tam giác đều, nên $\widehat{CAF} = 60^\circ$.



Chọn đáp án (C) □

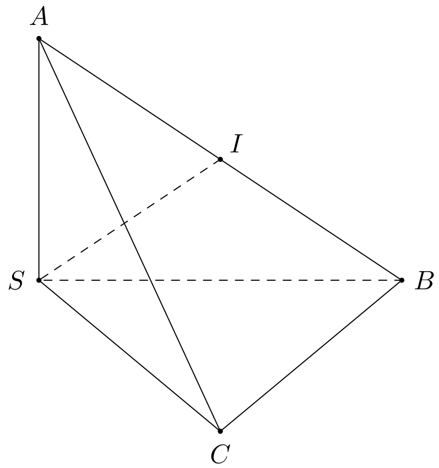
Câu 7. Hình chóp $S.ABC$ có SA, SB, SC đôi một vuông góc với nhau và $SA = SB = SC$. Gọi I là trung điểm của AB. Góc giữa SI và BC bằng

(A) 30°. (B) 60°. (C) 45°. (D) 90°.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}\cos\left(\overrightarrow{SI}; \overrightarrow{BC}\right) &= \frac{\overrightarrow{SI}\cdot\overrightarrow{BC}}{SI\cdot BC} = \frac{\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}\right)\cdot\overrightarrow{BC}}{\frac{BC}{2}\cdot BC}\\ &= \frac{\overrightarrow{SA}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{SB}\cdot\overrightarrow{BC}}{BC^2} = \frac{\overrightarrow{SB}\cdot\overrightarrow{BC}}{BC^2}\\ &= \frac{SB\cdot BC\cdot\cos 135^\circ}{BC^2} = \frac{SB\cdot SB\sqrt{2}\cdot\cos 135^\circ}{2SB^2}\\ &= \frac{\sqrt{2}\cdot\cos 135^\circ}{2} = -\frac{1}{2}.\end{aligned}$$



Suy ra $\left(\overrightarrow{SI}; \overrightarrow{BC}\right) = 120^\circ \Rightarrow (SI; BC) = 60^\circ$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 8. Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có cạnh a. Gọi I là trung điểm BD. Góc giữa hai đường thẳng A_1D và B_1I bằng

(A) 120°. (B) 30°. (C) 45°. (D) 60°.

Lời giải.

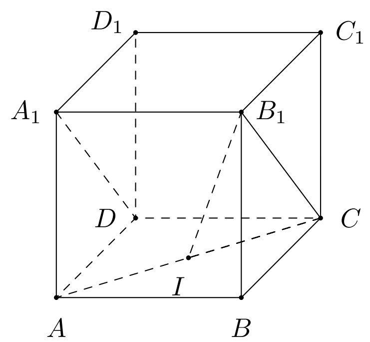
Ta có $B_1C \parallel A_1D \Rightarrow (A_1D, B_1I) = (B_1C, B_1I)$.

Vì $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ là hình lập phương cạnh a nên $B_1C = a\sqrt{2}; IC = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}; B_1I = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

Xét $\triangle B_1IC$ có $\cos\widehat{IB_1C} = \dfrac{B_1I^2 + B_1C^2 - IC^2}{2B_1I\cdot B_1C} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow \widehat{IB_1C} = 30^\circ$.

Do đó $(A_1D, B_1I) = (B_1C, B_1I) = \widehat{IB_1C} = 30^\circ$.

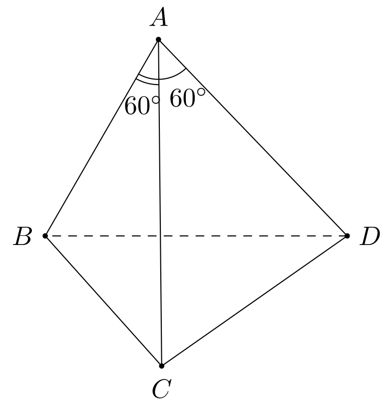


Chọn đáp án (B) □

Câu 9. Cho tứ diện $ABCD$ với $AC = \dfrac{3}{2}AD$, $\widehat{CAB} = \widehat{DAB} = 60^\circ$, $CD = AD$. Gọi φ là góc giữa hai đường thẳng AB và CD. Chọn khẳng định đúng về góc φ.

Ⓐ $\cos\varphi = \dfrac{3}{4}$. Ⓑ 30°. Ⓒ 60°. Ⓓ $\cos\varphi = \dfrac{1}{4}$.

Lời giải.



Ta có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} &= \overrightarrow{AB}\cdot\left(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC}\right) = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\\ &= AB\cdot AD\cdot\cos 60^\circ - AB\cdot AC\cdot\cos 60^\circ\\ &= AB\cdot AD\cdot\cos 60^\circ - AB\cdot\frac{3}{2}AD\cdot\cos 60^\circ\\ &= \frac{-1}{4}AB\cdot AD.\end{aligned}$$

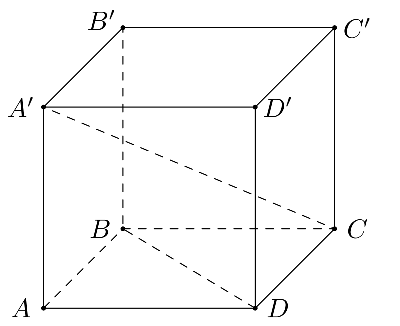
$\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\right) = \dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}}{AB\cdot CD} = \dfrac{-1}{4} \Rightarrow \cos\varphi = \dfrac{1}{4}$.

Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 10.

Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$, biết đáy $ABCD$ là hình vuông. Tính góc giữa $A'C$ và BD.

Ⓐ 90°. Ⓑ 30°. Ⓒ 60°. Ⓓ 45°.



Lời giải.

Vì $ABCD$ là hình vuông nên $BD \perp AC$.

Mặt khác $AA' \perp (ABCD) \Rightarrow BD \perp AA'$.

Ta có $\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp AA' \end{cases} \Rightarrow BD \perp (AA'C) \Rightarrow BD \perp A'C$.

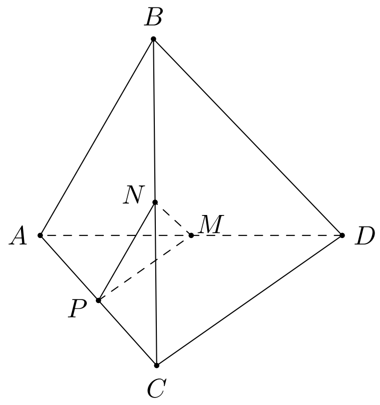
Do đó góc giữa $A'C$ và BD bằng 90°.

Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 11. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = CD = 2a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm AD và BC. Biết $MN = a\sqrt{3}$, góc giữa hai đường thẳng AB và CD bằng

Ⓐ 45°. Ⓑ 90°. Ⓒ 60°. Ⓓ 30°.

Lời giải.



Gọi P là trung điểm AC, ta có $PM \parallel CD$ và $PN \parallel AB$, suy ra $\left(\widehat{AB,CD}\right) = \left(\widehat{PM,PN}\right)$.

Dễ thấy $PM = PN = a$.

Xét $\triangle PMN$ ta có

$$\begin{aligned}\cos\widehat{MPN} &= \frac{PM^2+PN^2-MN^2}{2PM\cdot PN}\\ &= \frac{a^2+a^2-3a^2}{2\cdot a\cdot a} = -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

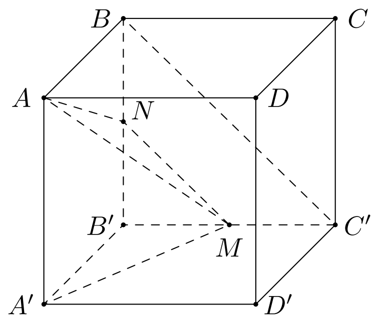
$\Rightarrow \widehat{MPN} = 120^\circ \Rightarrow \left(\widehat{AB,CD}\right) = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$.

Chọn đáp án C □

Câu 12. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$; gọi M là trung điểm của $B'C'$. Góc giữa hai đường thẳng AM và BC' bằng

(A) 45°. (B) 90°. (C) 30°. (D) 60°.

Lời giải.



Giả sử cạnh của hình lập phương là $a > 0$.

Gọi N là trung điểm đoạn thẳng BB'. Khi đó, $MN \parallel BC'$ nên $(AM, BC') = (AM, MN)$.

Xét tam giác $A'B'M$ vuông tại B' ta có $A'M = \sqrt{A'B'^2 + B'M^2} = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$.

Xét tam giác $AA'M$ vuông tại A' ta có $AM = \sqrt{AA'^2 + A'M^2} = \sqrt{a^2 + \frac{5a^2}{4}} = \frac{3a}{2}$.

Có $AN = A'M = \frac{a\sqrt{5}}{2}$; $MN = \frac{BC'}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Trong tam giác AMN ta có

$$\cos\widehat{AMN} = \frac{MA^2+MN^2-AN^2}{2\cdot MA\cdot MN} = \frac{\frac{9a^2}{4}+\frac{2a^2}{4}-\frac{5a^2}{4}}{2\cdot\frac{3a}{2}\cdot\frac{a\sqrt{2}}{2}} = \frac{6a^2}{4}\cdot\frac{4}{6a^2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Suy ra $\widehat{AMN} = 45^\circ$.

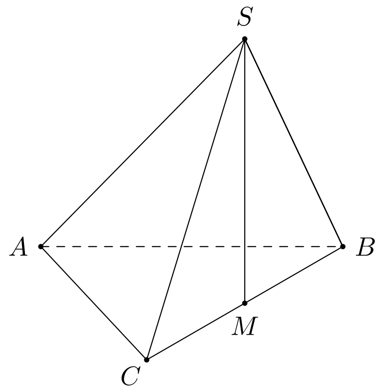
Vậy $(AM, BC') = (AM, MN) = \widehat{AMN} = 45^\circ$.

Chọn đáp án A □

Câu 13. Cho hình chóp $S.ABC$ có độ dài các cạnh $SA = SB = SC = AB = AC = a$ và $BC = a\sqrt{2}$. Góc giữa hai đường thẳng AB và SC là

(A) 45°. (B) 90°. (C) 60°. (D) 30°.

Lời giải.



Ta có $BC = a\sqrt{2}$ nên tam giác ABC vuông tại A.

Vì $SA = SB = SC = a$ nên hình chiếu vuông góc của S lên (ABC) trùng với tâm I của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Tam giác ABC vuông tại A nên I là trung điểm của BC.

Ta có $\cos(AB, SC) = \left|\cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{SC}\right)\right| = \dfrac{\left|\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{SC}\right|}{AB \cdot SC}$.

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{SC} = \overrightarrow{AB}\left(\overrightarrow{SI} + \overrightarrow{IC}\right) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{SI} = -\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = -\dfrac{1}{2}BA \cdot BC \cdot \cos 45° = -\dfrac{a^2}{2}$.

$\cos(AB, SC) = \dfrac{\dfrac{a^2}{2}}{a^2} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \widehat{(AB, SC)} = 60°$.

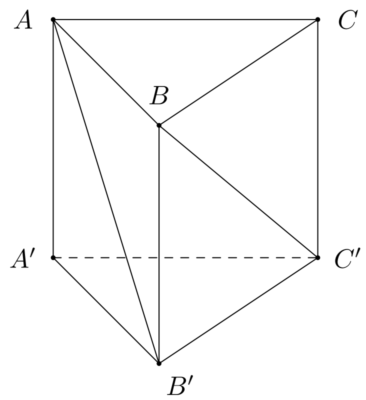
Cách 2: $\cos(AB, SC) = \left|\cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{SC}\right)\right| = \dfrac{\left|\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{SC}\right|}{AB \cdot SC}$.

Ta có $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{SC} = \left(\overrightarrow{SB} - \overrightarrow{SA}\right)\overrightarrow{SC} = \overrightarrow{SB} \cdot \overrightarrow{SC} - \overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SC} = SB \cdot SC \cdot \cos 90° - SA \cdot SC \cdot \cos 60° = -\dfrac{a^2}{2}$.

Khi đó $\cos(AB, SC) = \dfrac{\left|\dfrac{-a^2}{2}\right|}{a^2} = \dfrac{1}{2}$.

Chọn đáp án C □

Câu 14.



Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = a$ và $AA' = \sqrt{2}a$. Góc giữa hai đường thẳng AB' và BC' bằng

A. $60°$. B. $45°$. C. $90°$. D. $30°$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AB'} \cdot \overrightarrow{BC'} &= \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB'}\right)\left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CC'}\right) \\
&= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{BB'} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BB'} \cdot \overrightarrow{CC'} \\
&= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{BB'} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BB'} \cdot \overrightarrow{CC'} \\
&= -\frac{a^2}{2} + 0 + 0 + 2a^2 = \frac{3a^2}{2}.
\end{aligned}$$

Suy ra $\cos\left(\overrightarrow{AB'}, \overrightarrow{BC'}\right) = \dfrac{\overrightarrow{AB'} \cdot \overrightarrow{BC'}}{\left|\overrightarrow{AB'}\right| \cdot \left|\overrightarrow{BC'}\right|} = \dfrac{\dfrac{3a^2}{2}}{a\sqrt{3} \cdot a\sqrt{3}} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \widehat{(AB', BC')} = 60°$.

Chọn đáp án A □

Câu 15 (Kim Liên - Hà Nội - 2018). Cho tứ diện $ABCD$ có $DA = DB = DC = AC = AB = a$, $\widehat{ABC} = 45°$. Tính góc giữa hai đường thẳng AB và DC.

Ⓐ 60°. Ⓑ 120°. Ⓒ 90°. Ⓓ 30°.

Lời giải.

Ta có tam giác ABC vuông cân tại A, tam giác BDC vuông cân tại D.

$$\text{Ta có } \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} = \left(\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{DA}\right)\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{CD}$$
$$= \left|\overrightarrow{DB}\right|\left|\overrightarrow{CD}\right|\cos\left(\overrightarrow{DB},\overrightarrow{CD}\right) - \left|\overrightarrow{DA}\right|\left|\overrightarrow{CD}\right|\cos\left(\overrightarrow{DA},\overrightarrow{CD}\right)$$
$$= -\frac{1}{2}a^2$$

Mặt khác ta lại có $\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\right) = \dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{CD}\right|} = -\dfrac{1}{2}$

Suy ra $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{DC}\right) = 120^\circ \Rightarrow (AB, CD) = 60^\circ$.

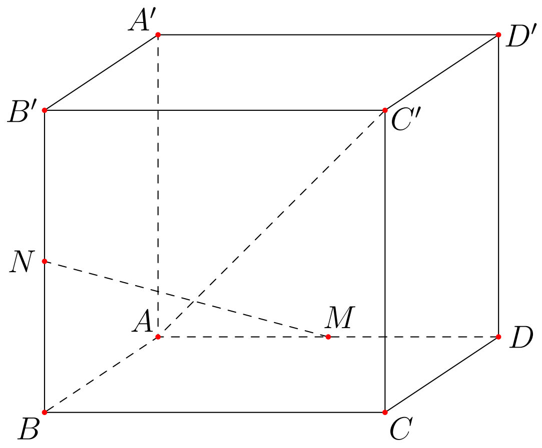
Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 16 (Chuyên Trần Phú - Hải Phòng - 2018).

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD, BB'. Cosin của góc hợp bởi MN và AC' bằng

Ⓐ $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. Ⓑ $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$. Ⓒ $\dfrac{\sqrt{5}}{3}$. Ⓓ $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

Lời giải.



Xét hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a.

Đặt $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$, $\vec{c} = \overrightarrow{AA'} \Rightarrow |\vec{a}| = \left|\vec{b}\right| = |\vec{c}| = a$.

Từ đó suy ra $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{c} = \vec{a}\cdot\vec{c} = 0$.

Ta có

- ☑ $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} - \overrightarrow{AM} = \vec{a} - \dfrac{1}{2}\vec{b} + \dfrac{1}{2}\vec{c} \Rightarrow \left|\overrightarrow{MN}\right| = \sqrt{a^2 + \dfrac{1}{4}a^2 + \dfrac{1}{4}a^2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$.
- ☑ $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} \Rightarrow \left|\overrightarrow{AC'}\right| = \sqrt{a^2 + a^2 + a^2} = a\sqrt{3}$.
- ☑ $\overrightarrow{AC'}\cdot\overrightarrow{MN} = a^2 - \dfrac{1}{2}a^2 + \dfrac{1}{2}a^2 = a^2$.

Từ đso suy ra $\cos(MN; AC') = \left|\cos\left(\overrightarrow{MN};\overrightarrow{AC'}\right)\right| = \dfrac{\left|\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{AC'}\right|}{\left|\overrightarrow{MN}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC'}\right|} = \dfrac{\sqrt{2}}{3}$.

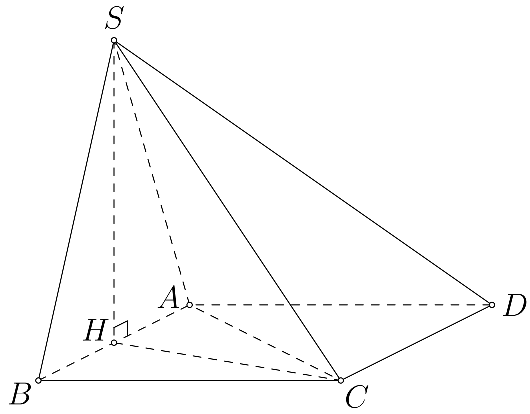
Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 17 (Cụm 5 Trường Chuyên - ĐBSH - 2018).

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật, $AB = 2a$, $BC = a$. Hình chiếu vuông góc H của đỉnh S trên mặt phẳng đáy là trung điểm của cạnh AB, góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng đáy bằng $60°$. Tính cosin góc giữa hai đường thẳng SB và AC

A. $\dfrac{2}{\sqrt{7}}$.   B. $\dfrac{2}{\sqrt{35}}$.   C. $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$.   D. $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}}$.

Lời giải.



Ta có $(SC, (ABCD)) = (SC, CH) = \widehat{SCH} = 60°$.

Ta có $AC = a\sqrt{5}$, $CH = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$,

$SH = CH \cdot \tan \widehat{SCH} = a\sqrt{6}$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{SB} \cdot \overrightarrow{AC} &= \left(\overrightarrow{SH} + \overrightarrow{HB}\right)\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right)\\ &= \overrightarrow{SH} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{SH} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{BC}\\ &= \overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}AB^2 = 2a^2.\end{aligned}$$

$SB = \sqrt{SH^2 + HB^2} = \sqrt{(a\sqrt{6})^2 + a^2} = a\sqrt{7}$.

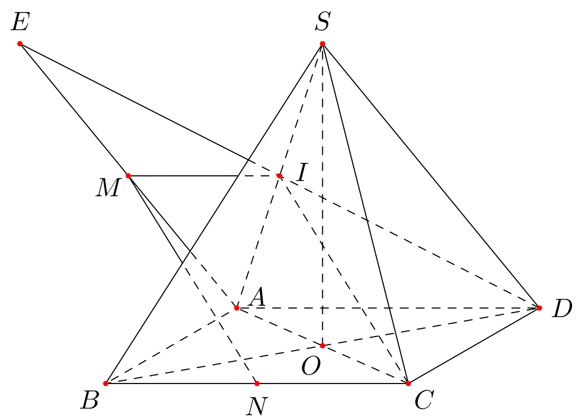
Vậy $\cos(SB, AC) = \dfrac{\overrightarrow{SB} \cdot \overrightarrow{AC}}{SB \cdot AC} = \dfrac{2a^2}{a\sqrt{7} \cdot a\sqrt{5}} = \dfrac{2}{\sqrt{35}}$.

Chọn đáp án B □

Câu 18 (Chuyên Thái Bình - 2018). Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, E là điểm đối xứng của D qua trung điểm SA. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AE và BC. Góc giữa hai đường thẳng MN và BD bằng

A. $90°$.   B. $60°$.   C. $45°$.   D. $75°$.

Lời giải.



Gọi I là trung điểm SA thì $IMNC$ là hình bình hành nên $MN \parallel IC$.

Ta có $BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp IC$ mà $MN \parallel IC \Rightarrow BD \perp MN$ nên góc giữa hai đường thẳng MN và BD bằng $90°$.

Cách khác: có thể dùng hệ trục tọa độ của lớp 12, tính tích vô hướng $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{MN} = 0$.

Chọn đáp án A □

Câu 19 (Chuyên Thái Bình - 2018). Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD và SD. Số đo của góc giữa hai đường thẳng MN và SC là

(A) 45°. (B) 60°. (C) 30°. (D) 90°.

Lời giải.

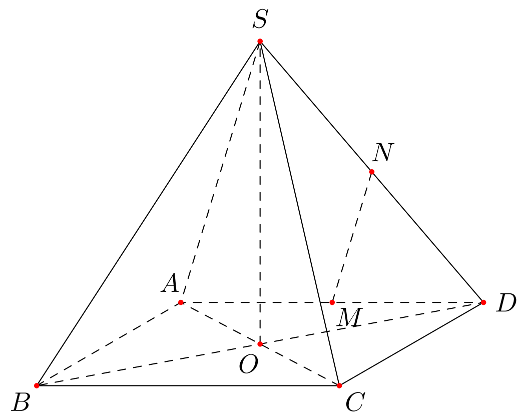
Ta có $MN \parallel SA$ (MN là đường trung bình của $\triangle SAD$).

Suy ra $(MN, SC) = (SA, SC)$.

Trong $\triangle SAC$, có $SA = SC = a$ và $AC = a\sqrt{2}$

Nên $\triangle SAC$ vuông cân tại S.

Vậy $(MN, SC) = (SA, SC) = \widehat{ASC} = 90^\circ$.

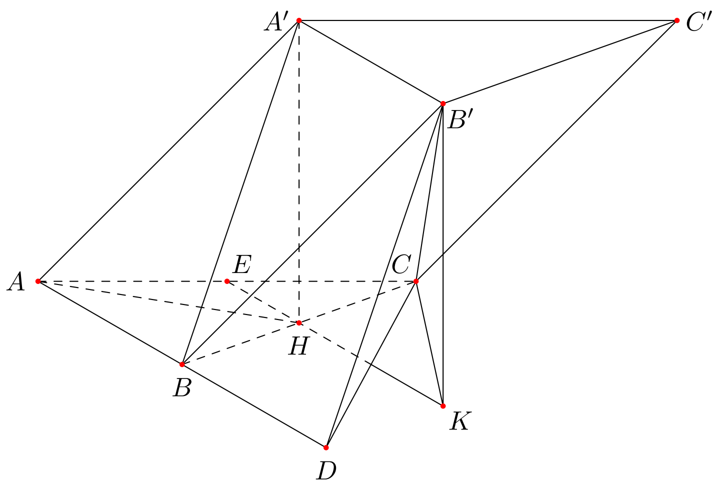


Chọn đáp án (D) □

Câu 20 (Sở Quảng Nam - 2018). Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $AB = a$, $AC = a\sqrt{3}$. Hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng (ABC) là trung điểm H của BC, $A'H = a\sqrt{3}$. Gọi φ là góc giữa hai đường thẳng $A'B$ và $B'C$. Tính $\cos\varphi$.

(A) $\cos\varphi = \dfrac{1}{2}$. (B) $\cos\varphi = \dfrac{\sqrt{6}}{8}$. (C) $\cos\varphi = \dfrac{\sqrt{6}}{4}$. (D) $\cos\varphi = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.



Gọi E là trung điểm của AC; D và K là các điểm thỏa $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{HK} = \overrightarrow{A'B'}$.

Ta có $B'K \perp (ABC)$ và $B'D \parallel A'B \Rightarrow (A'B, B'C) = (B'D, B'C) = \widehat{DB'C}$.

Ta tính được $BC = 2a \Rightarrow BH = a$; $B'D = A'B = \sqrt{(a\sqrt{3})^2 + a^2} = 2a$.

$CD = \sqrt{AC^2 + AD^2} = a\sqrt{7}$; $CK = \sqrt{CE^2 + EK^2} = a\sqrt{3}$.

$B'C = \sqrt{B'K^2 + CK^2} = \sqrt{3a^2 + 3a^2} = a\sqrt{6}$.

$\cos\widehat{CB'D} = \dfrac{B'D^2 + B'C^2 - CD^2}{2 \cdot B'D \cdot B'C} = \dfrac{4a^2 + 6a^2 - 7a^2}{2 \cdot 2a \cdot a\sqrt{6}} = \dfrac{\sqrt{6}}{8}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 21 (Sở Yên Bái - 2018). Cho tứ diện đều $ABCD$, M là trung điểm của cạnh BC. Tính giá trị của $\cos(AB, DM)$.

Ⓐ $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Ⓑ $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$. Ⓒ $\dfrac{1}{2}$. Ⓓ $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải.

Giả sử cạnh của tứ diện đều bằng a.

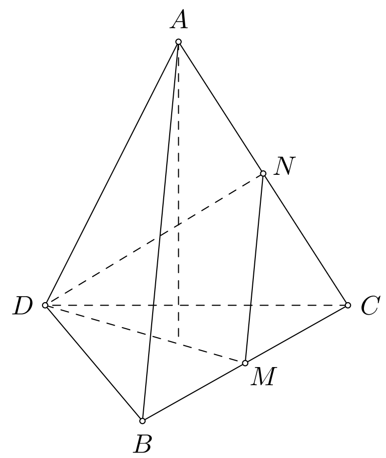
Gọi N là trung điểm của AC.

Khi đó $(AB, DM) = (MN, DM)$.

Ta có $MN = \dfrac{a}{2}$, $DM = DN = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

$$\cos\widehat{NMD} = \dfrac{MN^2 + MD^2 - ND^2}{2 \cdot MN \cdot MD} = \dfrac{\dfrac{a^2}{4}}{2 \cdot \dfrac{a}{2} \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{6}.$$

Vậy $\cos(AB, DM) = \dfrac{\sqrt{3}}{6}$.



Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 22 (Sở Nam Định - 2018). Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, tam giác $A'BC$ đều nằm trong mặt phẳng vuông góc với (ABC). M là trung điểm cạnh CC'. Tính cosin góc α giữa hai đường thẳng AA' và BM.

Ⓐ $\cos\alpha = \dfrac{2\sqrt{22}}{11}$. Ⓑ $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{33}}{11}$. Ⓒ $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{11}}{11}$. Ⓓ $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{22}}{11}$.

Lời giải.

Ta có $AH = A'H = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ và $AH \perp BC$, $A'H \perp BC$.

Suy ra $BC \perp (AA'H) \Rightarrow BC \perp AA'$ hay $BC \perp BB'$.

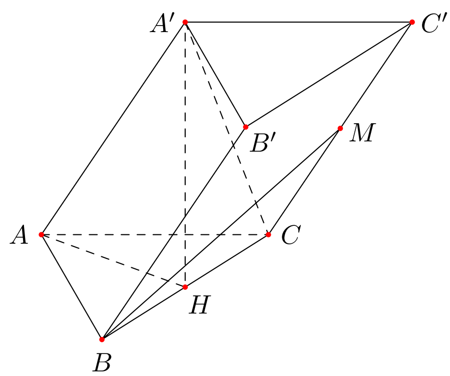
Do đó $BCC'B'$ là hình chữ nhật.

Khi đó $CC' = AA' = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{2} = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

$BM = \sqrt{a^2 + \dfrac{a^2 \cdot 6}{16}} = a\dfrac{\sqrt{22}}{4}$.

Xét $\overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AA'} \cdot \left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CM}\right) = \dfrac{3a^2}{4}$.

Suy ra $\cos(AA', BM) = \dfrac{\left|\dfrac{3a^2}{4}\right|}{\dfrac{a\sqrt{6}}{2} \cdot \dfrac{a\sqrt{22}}{4}} = \dfrac{\sqrt{33}}{11}$.



Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 23 (Sở Hà Tĩnh - 2018). Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.MNP$ có tất cả các cạnh bằng nhau. Gọi I là trung điểm cạnh AC. Côsin của góc giữa hai đường thẳng NC và BI bằng

Ⓐ $\dfrac{\sqrt{6}}{4}$. Ⓑ $\dfrac{\sqrt{15}}{5}$. Ⓒ $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$. Ⓓ $\dfrac{\sqrt{10}}{4}$.

Lời giải.

Giả sử các cạnh của lăng trụ bằng a.

Gọi K là trung điểm của MP.

Suy ra $BI \parallel NK \Rightarrow (NC, BI) = (NC, NK)$.

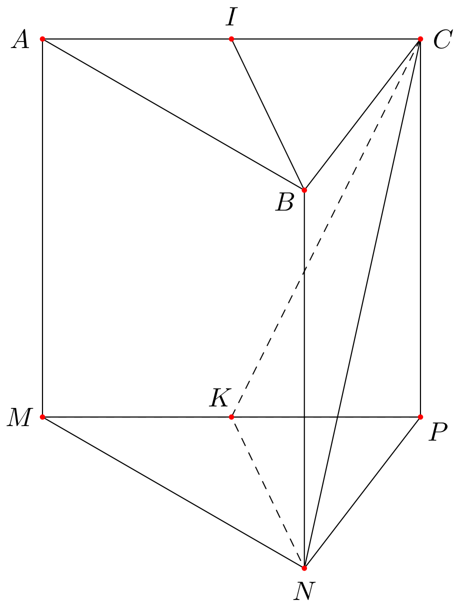
Vì $ABC.MNP$ là lăng trụ tam giác đều $\Rightarrow CP \perp (MNP)$.

$CK = \sqrt{CP^2 + PK^2} = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$.

$CN = \sqrt{CP^2 + NP^2} = a\sqrt{2}$.

$NK = \sqrt{NP^2 - KP^2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Vậy $\cos \widehat{CNK} = \dfrac{NC^2 + NK^2 - CK^2}{2NC \cdot NK} = \dfrac{\sqrt{6}}{4}$.



Chọn đáp án A □

Câu 24 (Chuyên Biên Hòa - Hà Nam - 2020).

Cho tứ diện đều $ABCD$, M là trung điểm của cạnh BC. Khi đó $\cos(AB, DM)$ bằng

A. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. B. $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$. C. $\dfrac{1}{2}$. D. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.

Gọi N là trung điểm của AC. Suy ra $MN \parallel AB$.

Do đó $\cos(AB, DM) = \cos(MN, DM)$.

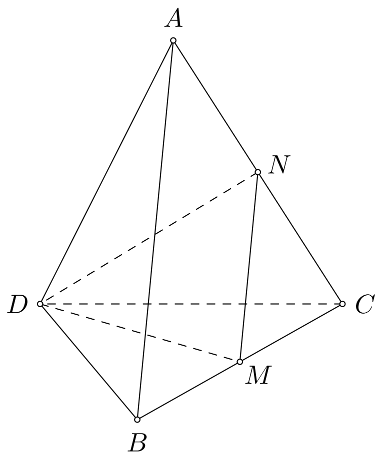
Gọi a là độ dài cạnh của tứ diện đều $ABCD$.

Suy ra $MN = \dfrac{a}{2}$; $ND = MD = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Trong tam giác MND ta có

$$\cos \widehat{NMD} = \frac{MN^2 + MD^2 - ND^2}{2 \cdot MN \cdot MD} = \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

Vậy $\cos(AB, DM) = \cos \widehat{NMD} = \dfrac{\sqrt{3}}{6}$.



Chọn đáp án B □

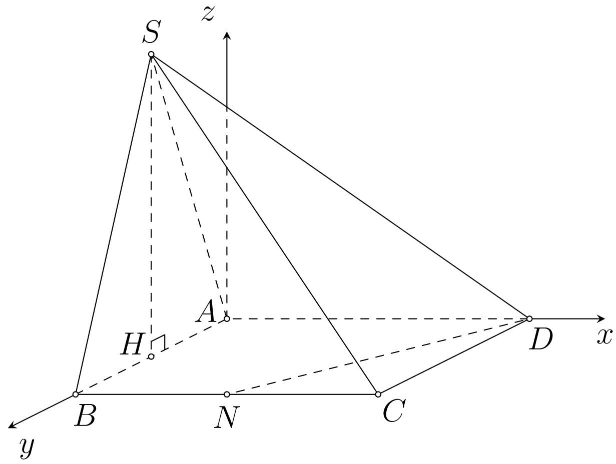
Câu 25 (ĐHQG Hà Nội - 2020). Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy hình vuông. Cho tam giác SAB vuông tại S và góc SBA bằng 30°. Mặt phẳng (SAB) vuông góc mặt phẳng đáy. Gọi M, N là trung điểm AB, BC. Tìm cosin góc tạo bởi hai đường thẳng (SM, DN).

A. $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$. B. $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$. C. $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. D. $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

Lời giải.

Trong (SAB), kẻ $SH \perp AB$ tại H. Ta có: $\begin{cases} (SAB) \perp (ABCD) \\ (SAB) \cap (ABCD) = AB \\ SH \subset (SAB), SH \perp AB \end{cases} \Rightarrow SH \perp (ABCD)$.

Kẻ tia $Az \parallel SH$ và chọn hệ trục tọa độ $Axyz$ như hình vẽ sau đây.



Trong tam giác SAB vuông tại S, $SB = AB \cdot \cos\widehat{SBA} = a \cdot \cos 30^\circ = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Trong tam giác SBH vuông tại H, $BH = SB \cdot \cos\widehat{SBH} = \dfrac{3a}{4}$ và $SH = BH \cdot \sin\widehat{SBA} = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

Ta có $AH = AB - BH = a - \dfrac{3a}{4} = \dfrac{a}{4}$. Suy ra $H\left(0;\dfrac{a}{4};0\right) \Rightarrow S\left(0;\dfrac{a}{4};\dfrac{a\sqrt{3}}{4}\right)$.

$M\left(0;\dfrac{a}{2};0\right)$, $D(a;0;0)$, $N\left(\dfrac{a}{2};a;0\right)$.

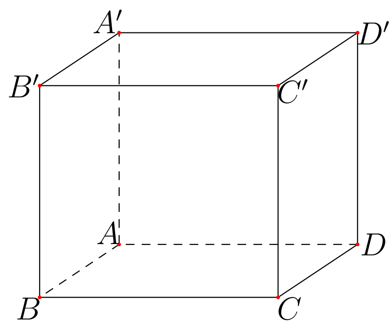
Ta có $\overrightarrow{SM} = \left(0;\dfrac{a}{4};-\dfrac{a\sqrt{3}}{4}\right)$, $\overrightarrow{DN} = \left(-\dfrac{a}{2};a;0\right)$.

$$\cos(SM,DN) = \frac{\left|\overrightarrow{SM}\cdot\overrightarrow{DN}\right|}{SN \cdot DN} = \frac{\dfrac{a^2}{4}}{\dfrac{a}{2}\cdot\dfrac{a\sqrt{5}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Chọn đáp án B □

Câu 26 (Đề minh họa 2022).

Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các cạnh bằng nhau (tham khảo hình bên). Góc giữa hai đường thẳng $A'C'$ và BD bằng



A. 90°. B. 30°. C. 45°. D. 60°.

Lời giải.

Ta có $A'C' \parallel AC$ nên $(A'C';BD) = (AC;BD) = 90^\circ$.

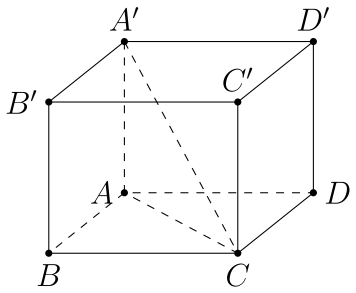
Chọn đáp án A □

Dạng 2. Góc của đường thẳng với mặt phẳng

Câu 27 (Đề Minh Hoạ 2021).

Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = AD = 2$, $AA' = 2\sqrt{2}$ (tham khảo hình vẽ bên). Góc giữa đường thẳng CA' và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng

Ⓐ 30°. Ⓑ 45°. Ⓒ 60°. Ⓓ 90°.



Lời giải.

Vì $AA' \perp (ABCD)$ nên góc giữa đường thẳng CA' và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng góc $\widehat{A'CA}$.

Ta có $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 2\sqrt{2}$.

Khi đó ta có $\tan \widehat{A'CA} = \dfrac{AA'}{AC} = \dfrac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = 1$.

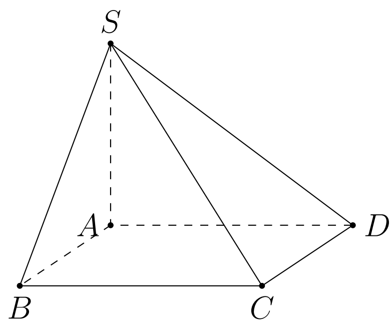
Vậy số đo góc $\widehat{A'CA} = 45^\circ$.

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 28 (Đề Minh Hoạ 2020 lần 1).

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $a\sqrt{3}$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = 2a$. Góc giữa SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng

Ⓐ 45°. Ⓑ 60°. Ⓒ 30°. Ⓓ 90°.



Lời giải.

Ta có $SA \perp (ABCD)$ nên $\left(\widehat{SC, (ABCD)}\right) = \widehat{SCA}$.

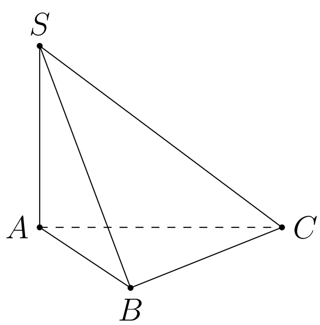
$\tan \widehat{SCA} = \dfrac{SA}{AC} = \dfrac{a \cdot \sqrt{2}}{a \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \widehat{SCA} = 30^\circ$.

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 29 (Đề Tham Khảo 2020 Lần 2).

Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, $SA = a\sqrt{2}$, tam giác ABC vuông cân tại B và $AC = 2a$ (minh hoạ hình bên). Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (ABC) bằng

Ⓐ 30°. Ⓑ 45°. Ⓒ 60°. Ⓓ 90°.



Lời giải.

Ta có $\begin{cases} SB \cap (ABC) \\ SA \perp (ABC) \end{cases} \Rightarrow AB$ là hình chiếu của SB lên mặt phẳng (ABC).

Do đó $\left(\widehat{SB, (ABC)}\right) = \widehat{SBA}$.

Do tam giác ABC vuông cân tại B suy ra $AB = \dfrac{AC}{\sqrt{2}} = a\sqrt{2}$.

Xét tam giác SAB vuông tại A, có $SA = AB = a\sqrt{2}$.

Suy ra $\triangle SAB$ vuông cân tại A và $\widehat{SBA} = 45^\circ$.

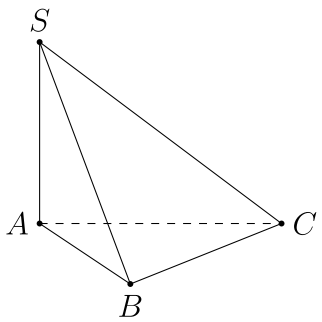
Vậy góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng ABC bằng 45°.

Chọn đáp án B □

Câu 30 (Mã 101 – 2020 Lần 1).

Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $AB = a$, $BC = 2a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a\sqrt{15}$ (tham khảo hình bên). Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng đáy bằng

(A) 45°. (B) 30°. (C) 60°. (D) 90°.



Lời giải.

Do SA vuông góc với mặt phẳng đáy nên AC là hình chiếu vuông góc của SC lên mặt phẳng đáy.

Từ đó suy ra $\left(\widehat{SC,(ABC)}\right) = \left(\widehat{SC,AC}\right) = \widehat{SCA}$.

Trong tam giác ABC vuông tại B ta có $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{a^2 + 4a^2} = a\sqrt{5}$.

Trong tam giác SAC vuông tại A ta có $\tan\widehat{SCA} = \dfrac{SA}{AC} = \dfrac{a\sqrt{15}}{a\sqrt{5}} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{SCA} = 60^\circ$.

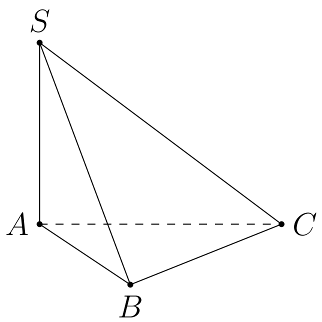
Vậy $\left(\widehat{SC,(ABC)}\right) = 60^\circ$.

Chọn đáp án C □

Câu 31 (Mã 102 – 2020 Lần 1).

Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại B, $AB = 3a$, $BC = a\sqrt{3}$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = 2a$ (tham khảo hình vẽ). Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng đáy bằng

(A) 60°. (B) 45°. (C) 30°. (D) 90°.



Lời giải.

Vì SA vuông góc với mặt phẳng đáy nên AC là hình chiếu vuông góc của SC lên đáy.

Suy ra $\left(\widehat{SC,(ABC)}\right) = \left(\widehat{SC,AC}\right) = \widehat{SCA}$.

$$\tan\widehat{SCA} = \frac{SA}{AC} = \frac{2a}{\sqrt{(3a)^2 + (a\sqrt{3})^2}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \widehat{SCA} = 30^\circ.$$

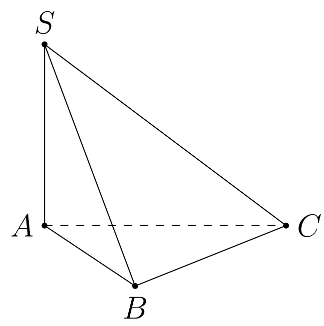
Vậy $\left(\widehat{SC,(ABC)}\right) = 30^\circ$.

Chọn đáp án C □

Câu 32 (Mã 103 – 2020 Lần 1).

Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $AB = a$, $BC = 3a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a\sqrt{30}$ (tham khảo hình bên). Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng đáy bằng

Ⓐ 45°. Ⓑ 90°. Ⓒ 60°. Ⓓ 30°.



Lời giải.

Do AC là hình chiếu vuông góc với SC trên mặt phẳng (ABC) nên $\left(\widehat{SC,(ABC)}\right) = \widehat{SCA}$.

Ta có $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = a\sqrt{10}$.

Khi đó $\tan\widehat{SCA} = \dfrac{SA}{AC} = \dfrac{a\sqrt{30}}{a\sqrt{10}} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{SCA} = 60^\circ$.

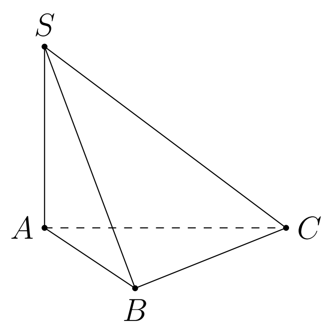
Vậy góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng đáy bằng 60°.

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 33 (Mã 104 – 2020 Lần 1).

Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $AB = a$, $BC = a\sqrt{2}$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a$ (tham khảo hình bên). Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng đáy bằng

Ⓐ 90°. Ⓑ 45°. Ⓒ 60°. Ⓓ 30°.



Lời giải.

Ta có góc giữa SC và đáy là $\widehat{SCA}$.

Xét tam giác SCA vuông tại A có $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = a\sqrt{3}$.

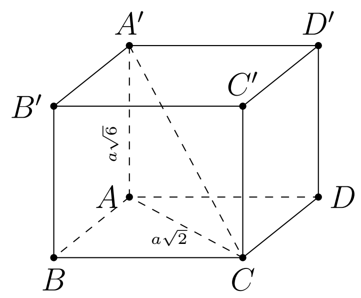
$\tan\widehat{SCA} = \dfrac{SA}{AC} = \dfrac{a}{a\sqrt{3}} \Rightarrow \widehat{SCA} = 30^\circ$.

Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 34 (Mã 101 – 2020 Lần 2).

Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = BC = a$, $A'A = a\sqrt{6}$ (tham khảo hình bên). Góc giữa đường thẳng $A'C$ và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng

Ⓐ 60°. Ⓑ 90°. Ⓒ 30°. Ⓓ 45°.

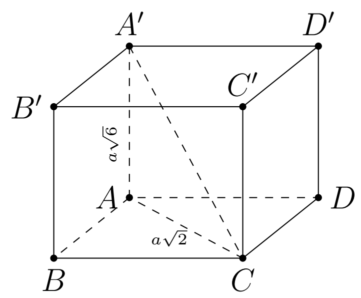


Lời giải.

Ta có góc giữa đường thẳng $A'C$ và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng góc giữa $A'C$ và AC là $\widehat{A'CA}$.

Ta có $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = a\sqrt{2}$.

Xét tam giác $A'CA$ có



$$\tan \widehat{A'CA} = \frac{A'A}{AC} = \frac{a\sqrt{6}}{a\sqrt{2}} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{A'CA} = 60^\circ.$$

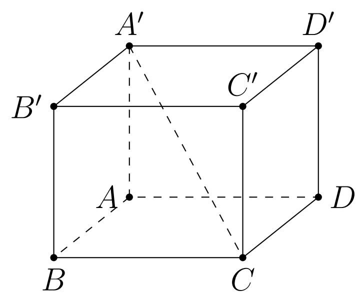
Vậy góc $A'C$ và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 60°.

Chọn đáp án (A) □

Câu 35 (Mã 102 – 2020 Lần 2).

Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a$, $AD = 2a\sqrt{2}$, $A'A = a\sqrt{3}$ (tham khảo hình bên). Góc giữa đường thẳng $A'C$ và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng

(A) 45°. (B) 90°. (C) 60°. (D) 30°.



Lời giải.

Ta thấy hình chiếu của $A'C$ xuống $(ABCD)$ là AC do đó $(A'C, (ABCD)) = (A'C, AC) = \widehat{A'CA}$.

Ta có $AC = \sqrt{AB^2 + AD^2} = 3a$.

Xét tam giác $A'CA$ vuông tại C ta có $\tan \widehat{A'CA} = \dfrac{A'A}{AC} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3a} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$. Suy ra $\widehat{A'CA} = 30^\circ$.

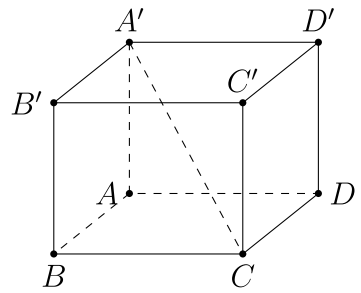
Vậy $\left(\widehat{A'C, (ABCD)}\right) = \widehat{A'CA} = 30^\circ$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 36 (Mã 103 – 2020 Lần 2).

Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = AA' = a$, $AD = a\sqrt{2}$ (tham khảo hình bên). Góc giữa đường thẳng $A'C$ và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng

(A) 30°. (B) 45°. (C) 90°. (D) 60°.



Lời giải.

Vì $ABCD$ là hình chữ nhật, có $AB = a$, $AD = a\sqrt{2}$ nên

$$AC = BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{a^2 + \left(a\sqrt{2}\right)^2} = a\sqrt{3}.$$

Ta có $\left(\widehat{A'C, (ABCD)}\right) = \left(\widehat{A'C, CA}\right) = \widehat{A'CA}$.

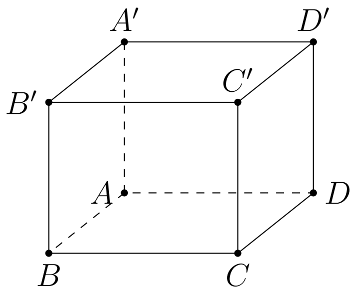
Do tam giác $A'AC$ vuông tại A nên $\tan \widehat{A'AC} = \dfrac{A'A}{AC} = \dfrac{a}{a\sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \widehat{A'AC} = 30^\circ$.

Vậy góc giữa đường thẳng $A'C$ và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 30°.

Chọn đáp án (A) □

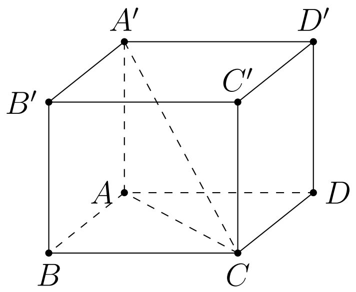
Câu 37 (Mã 104 – 2020 Lần 2).

Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a$, $AD = a\sqrt{3}$, $AA' = 2a\sqrt{3}$ (tham khảo hình bên). Góc giữa đường thẳng $A'C$ và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng



Ⓐ 45°. Ⓑ 30°. Ⓒ 60°. Ⓓ 90°.

Lời giải.



Do $AA' \perp (ABCD)$ nên AC là hình chiếu của $A'C$ lên mặt phẳng $(ABCD)$, suy ra góc giữa đường thẳng $A'C$ và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng $\widehat{A'CA}$.

$\tan \widehat{A'CA} = \dfrac{A'A}{\sqrt{AB^2 + AD^2}} = \dfrac{2a\sqrt{3}}{\sqrt{a^2 + \left(a\sqrt{3}\right)^2}} = \sqrt{3}$.

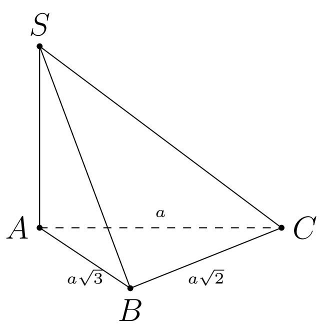
Suy ra $\widehat{A'CA} = 60^\circ$.

Vậy góc giữa đường thẳng $A'C$ và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng $\widehat{A'CA} = 60^\circ$.

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 38 (Mã 103 – 2018).

Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại C, $AC = a$, $BC = a\sqrt{2}$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a$. Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng đáy bằng



Ⓐ 60°. Ⓑ 90°. Ⓒ 30°. Ⓓ 45°.

Lời giải.

Có $SA \perp (ABC)$ nên AB là hình chiếu SA trên mặt phẳng (ABC).

Suy ra $\left(\widehat{SB, (ABC)}\right) = (\widehat{SB, AB}) = \widehat{SBA}$.

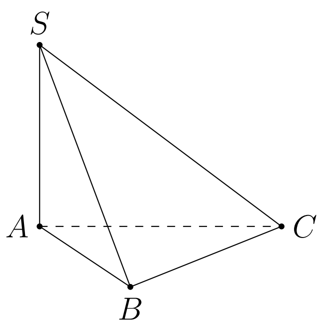
Mặt khác có $\triangle ABC$ vuông tại C nên $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = a\sqrt{3}$.

Khi đó $\tan \widehat{SBA} = \dfrac{SA}{AB} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ nên $\left(\widehat{SB, (ABC)}\right) = 30^\circ$.

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 39 (Mã 102 – 2019).

Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC), $SA = 2a$, tam giác ABC vuông tại B, $AB = a$ và $BC = a\sqrt{3}$ (minh hoạ như hình bên). Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC) bằng



Ⓐ 30°. Ⓑ 60°. Ⓒ 45°. Ⓓ 90°.

Lời giải.

Vì $SA \perp (ABC)$ suy ra góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC) bằng $\widehat{SCA}$.

Mà $\tan\widehat{SCA} = \dfrac{SA}{AC} = \dfrac{2a}{\sqrt{a^2+3a^2}} = 1$.

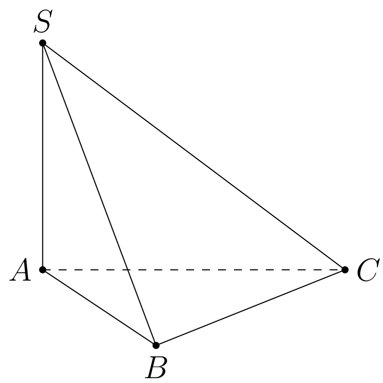
Vậy $\widehat{SCA} = 45^\circ$

Chọn đáp án C □

Câu 40 (THPT Phan Đình Phùng – Quảng Bình - 2021).

Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC), $SA = a\sqrt{2}$, tam giác ABC vuông tại A và $AC = a$, $\sin B = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ (minh hoạ như hình bên). Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (ABC) bằng

A. 90°. B. 30°. C. 45°. D. 60°.



Lời giải.

Ta có $SA \perp (ABC) \Rightarrow \left(\widehat{SB,(ABC)}\right) = \widehat{SBA}$.

Do $\sin B = \sin\widehat{SBA} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ nên ta có

$$\Rightarrow \cos B = \cos\widehat{SBA} = \frac{\sqrt{6}}{3}, \tan B = \tan\widehat{SBA} = \frac{AC}{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow AB = a\sqrt{2}.$$

Vậy tam giác SAB vuông cân tại A.

Suy ra $\left(\widehat{SB,(ABC)}\right) = \widehat{SBA} = 45^\circ$.

Chọn đáp án C □

Câu 41 (THPT Hậu Lộc 4 - Thanh Hóa - 2021).

Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, $SA = a\sqrt{3}$, tam giác ABC vuông tại B có $AC = 2a$, $BC = a$. Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (ABC) bằng

A. 60°. B. 90°. C. 30°. D. 45°.

Lời giải.

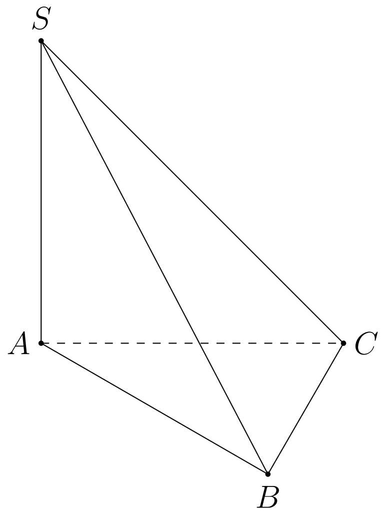
Vì $SA \perp (ABC)$ nên AB là hình chiếu vuông góc của SB lên (ABC).

Do đó $\left(\widehat{SB,(ABC)}\right) = \left(\widehat{SB,AB}\right) = \widehat{SBA}$.

Tam giác ABC vuông tại B nên $AB = \sqrt{(2a)^2 - a^2} = a\sqrt{3}$.

Do đó $\triangle SAB$ vuông cân tại A suy ra $\widehat{SBA} = 45°$.

Vậy $\left(\widehat{SB,(ABC)}\right) = 45°$.

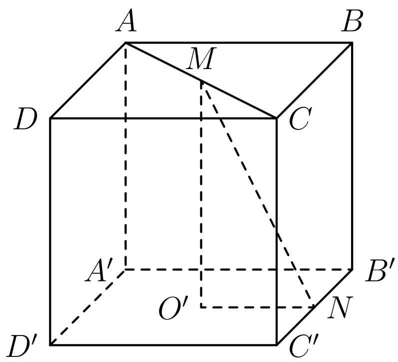


Chọn đáp án (D) □

Câu 42 (Sở Lào Cai - 2021). Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm AC và $B'C'$, α là góc giữa đường thẳng MN và mặt phẳng $(A'B'C'D')$. Tính giá trị α.

(A) $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. (B) $\sin\alpha = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$. (C) $\sin\alpha = \dfrac{1}{2}$. (D) $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

Lời giải.



Giả sử cạnh hình lập phương là a.

Gọi O' là tâm của hình vuông $A'B'C'D'$. Suy ra $O'N$ là hình chiếu của MN lên $(A'B'C'D')$. Do đó góc giữa MN và $(A'B'C'D')$ là góc giữa MN và $O'N$.

Tam giác $O'MN$ vuông tại O có $O'N = \dfrac{1}{2}a$, $O'M = a$ nên

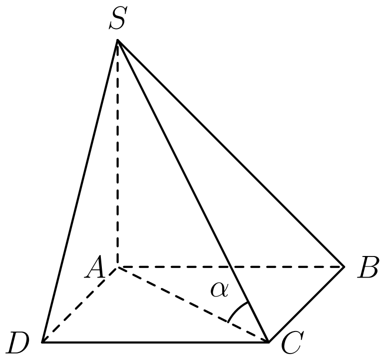
$$\sin\widehat{O'NM} = \frac{O'M}{MN} = \frac{O'M}{\sqrt{O'N^2 + O'M^2}} = \frac{a}{\sqrt{\dfrac{a^2}{4} + a^2}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 43 (Sở Tuyên Quang - 2021). Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, đường thẳng SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = 2a$. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$ là α. Khi đó $\tan\alpha$ bằng

(A) $2\sqrt{2}$. (B) 2. (C) $\sqrt{2}$. (D) $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

Lời giải.



Ta có $(\widehat{SC;(ABCD)}) = \widehat{SCA} = \alpha$.

Xét tam giác SAC vuông tại A có: $\tan \widehat{SCA} = \dfrac{SA}{AC} = \dfrac{2a}{a\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

$\Rightarrow \tan \alpha = \sqrt{2}$.

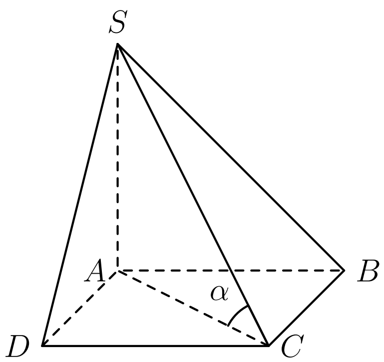
Chọn đáp án (C) □

Câu 44 (Chuyên Thoại Ngọc Hầu - An Giang - 2021).

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ cạnh bằng $3a$, SA vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$, $SB = 5a$. Tính sin của góc giữa cạnh SC và mặt đáy $(ABCD)$.

(A) $\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$. (B) $\dfrac{2\sqrt{34}}{17}$. (C) $\dfrac{4}{5}$. (D) $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải.



Do $SA \perp (ABCD)$ nên AC là hình chiếu của SC lên mặt phẳng $(ABCD)$. Do đó góc giữa cạnh SC và mặt đáy $(ABCD)$ là $\widehat{SCA}$.

Xét tam giác ABC có $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 3a\sqrt{2}$.

Xét tam giác SAB có $SA = \sqrt{SB^2 - AB^2} = 4a$.

Xét tam giác SAC có $SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = a\sqrt{34}$.

Xét tam giác SAC có $\sin \widehat{SCA} = \dfrac{SA}{SC} = \dfrac{4a}{a\sqrt{34}} = \dfrac{2\sqrt{34}}{17}$.

Vậy sin của góc giữa cạnh SC và mặt đáy $(ABCD)$ bằng $\dfrac{2\sqrt{34}}{17}$.

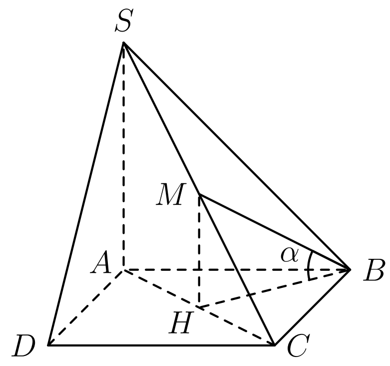
Chọn đáp án (B) □

Câu 45 (Chuyên Lê Hồng Phong - TPHCM - 2021).

Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, cạnh SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = 2a$, gọi M là trung điểm của SC. Tính cosin của góc α là góc giữa đường thẳng BM và (ABC).

(A) $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{7}}{14}$. (B) $\cos\alpha = \dfrac{2\sqrt{7}}{7}$. (C) $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{21}}{7}$. (D) $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{5}}{7}$.

Lời giải.



Trong mặt phẳng (SAC), dựng $MH \perp AC$ tại H.

Do $SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp AC \subset (ABC) \Rightarrow SA \,/\!/\, MH$.

Khi đó: $MH \perp (ABC)$.

Suy ra: $\left(\widehat{BM,(ABC)}\right) = \left(\widehat{BM,BH}\right) = \widehat{MBH}$. Khi đó:

$$\cos\alpha = \frac{BH}{BM} = \frac{\dfrac{a\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{2a}{2}\right)^2}} = \frac{\sqrt{21}}{7}.$$

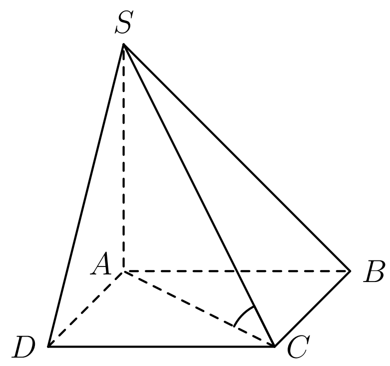
Chọn đáp án (C) □

Câu 46 (Chuyên Hoàng Văn Thụ - Hòa Bình - 2021).

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, $SA \perp (ABC), SA = a\sqrt{2}$. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng

(A) 60°. (B) 90°. (C) 45°. (D) 30°.

Lời giải.



Ta có $AC = a\sqrt{2}$ suy ra $\triangle SAC$ vuông cân tại A.

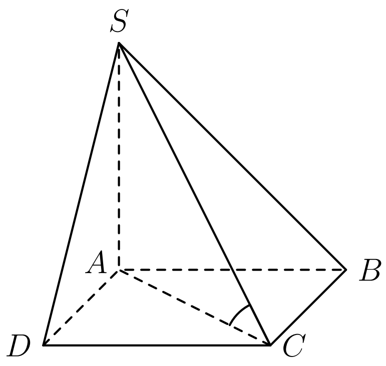
Góc giữa SC và mp $(ABCD)$ chính là góc $\widehat{SCA} = 45^\circ$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 47 (Sở Yên Bái - 2021). Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông canh a, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a\sqrt{6}$. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng

(A) 60°. (B) 45°. (C) 90°. (D) 30°.

Lời giải.



Ta có AC là hình chiếu của SC lên mặt đáy $(ABCD)$

$\Rightarrow \widehat{(SC,(ABCD))} = \widehat{(SC,AC)} = \widehat{SCA} \Rightarrow \tan\widehat{SCA} = \dfrac{SA}{AC} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{(SC,(ABCD))} = 60^\circ$.

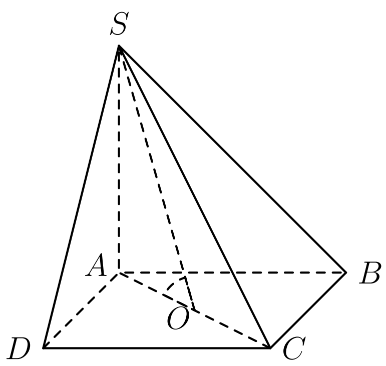
Chọn đáp án (A) □

Câu 48 (THPT Lương Thế Vinh - 2021).

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi tâm O, $\triangle ABD$ đều cạnh $a\sqrt{2}$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = \dfrac{3a\sqrt{2}}{2}$. Góc giữa đường thẳng SO và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng

(A) 45°. (B) 90°. (C) 30°. (D) 60°.

Lời giải.



Ta có: $ABCD$ là hình thoi có tâm là $O \Rightarrow O$ là trung điểm của BD.

Mà $\triangle ABD$ đều nên $AO \perp BD$.

Lại có $SA \perp (ABCD) \Rightarrow \widehat{(SO,(ABCD))} = \widehat{SOA}$.

Xét $\triangle ABO$ có: $AO = \sqrt{AB^2 - BO^2} = \sqrt{(a\sqrt{2})^2 - \left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

Ta có: $\tan\widehat{SAO} = \dfrac{SA}{AO} = \dfrac{\dfrac{3a\sqrt{2}}{2}}{\dfrac{a\sqrt{6}}{2}} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{SOA} = 60^\circ$.

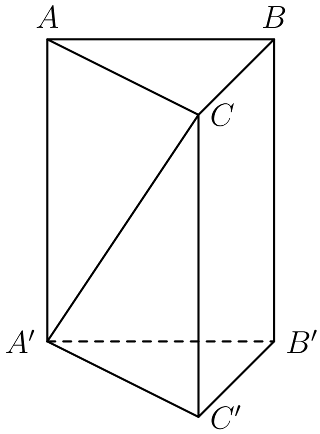
Chọn đáp án (D) □

Câu 49 (THPT Đặng Thúc Hứa - Nghệ An - 2021).

Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $AA' = a\sqrt{6}$, đáy ABC là tam giác vuông cân tại B và $BA = BC = a$. Góc giữa đường thẳng $A'C$ và mặt phẳng đáy bằng

(A) 45°. (B) 90°. (C) 60°. (D) 30°.

Lời giải.



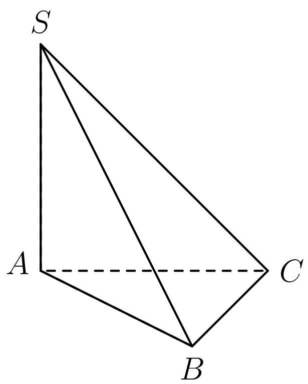
Ta có $AA' \perp (ABC) \Rightarrow AC$ là hình chiếu của $A'C$ lên mặt phẳng (ABC).
Khi đó $\widehat{(A'C,(ABC))} = \widehat{(A'C,AC)} = \widehat{A'CA}$.
Ta có $AC = AB\sqrt{2} = a\sqrt{2}$.
$\tan \widehat{A'CA} = \dfrac{AA'}{AC} = \dfrac{a\sqrt{6}}{a\sqrt{2}} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{A'CA} = 60^\circ$.
Chọn đáp án (C) □

Câu 50 (THPT Chu Văn An - Thái Nguyên - 2021).

Cho chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại B. $AB = 3a, BC = \sqrt{3}a$. SA vuông góc với đáy và $SA = 2a$. Góc giữa SC và đáy là

(A) 90°. (B) 45°. (C) 60°. (D) 30°.

Lời giải.



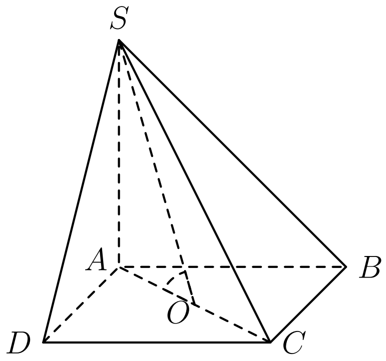
Ta có $AC = \sqrt{12}a$.
Xét tam giác $\triangle SAC$ ta có $\tan \widehat{SCA} = \dfrac{2a}{\sqrt{12}a} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \widehat{SCA} = 30^\circ$.
Chọn đáp án (D) □

Câu 51 (THPT Quảng Xương 1-Thanh Hóa - 2021).

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi tâm O, $\triangle ABD$ đều cạnh $a\sqrt{2}$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = \dfrac{3a\sqrt{2}}{2}$. Góc giữa đường thẳng SO và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng

(A) 45°. (B) 30°. (C) 60°. (D) 90°.

Lời giải.



Tam giác ABD đều cạnh $a\sqrt{2}$, suy ra $AO = \dfrac{(a\sqrt{2})\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

Vì $SA \perp (ABCD)$, suy ra OA là hình chiếu của OS lên mặt phẳng $(ABCD)$, suy ra:

$(SO;(ABCD)) = \widehat{SOA}$.

Xét tam giác vuông SAO ta có $\tan \widehat{SOA} = \dfrac{SA}{AO} = \dfrac{3a\sqrt{2}}{2} \cdot \dfrac{2}{a\sqrt{6}} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{SOA} = 60^\circ$.

Vậy $(SO;(ABCD)) = 60^\circ$.

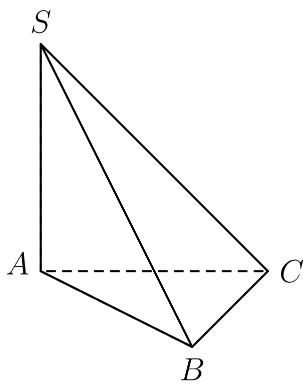
Chọn đáp án C □

Câu 52 (Trung Tâm Thanh Tường - 2021).

Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, $SA = a\sqrt{3}$, tam giác ABC vuông tại B có $AC = 2a, BC = a\sqrt{3}$. Góc giữa SB và mặt phẳng (ABC) bằng

A. 90°. B. 45°. C. 30°. D. 60°.

Lời giải.



Ta có $AB = \sqrt{AC^2 - BC^2} = \sqrt{(2a)^2 - (a\sqrt{3})^2} = a$.

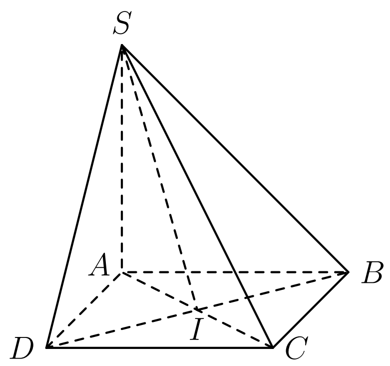
Dễ thấy $\widehat{(SB;(ABC))} = \widehat{(SB;AB)} = \widehat{SBA}$. Khi đó $\tan \widehat{SBA} = \dfrac{SA}{AB} = \dfrac{a\sqrt{3}}{a} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{SBA} = 60^\circ$.

Vậy $\widehat{(SB;(ABC))} = 60^\circ$.

Chọn đáp án D □

Câu 53 (THPT Trần Phú - Đà Nẵng - 2021).

Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm I, cạnh a. Biết SA vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$ và $SA = a\sqrt{3}$ (tham khảo hình vẽ bên). Khi đó tan của góc giữa đường thẳng SI và mặt phẳng $(ABCD)$ là



Ⓐ $\sqrt{6}$. Ⓑ $\dfrac{\sqrt{6}}{6}$. Ⓒ $\sqrt{3}$. Ⓓ $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải.

Ta có: $AI = \dfrac{1}{2}AC = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Mà $SA \perp (ABCD)$ nên AI là hình chiếu của SI trên mặt phẳng $(ABCD)$

$\Rightarrow \widehat{(SI;(ABCD))} = \widehat{(SI;AI)} = \widehat{SIA}$ (do tam giác SAI vuông tại A).

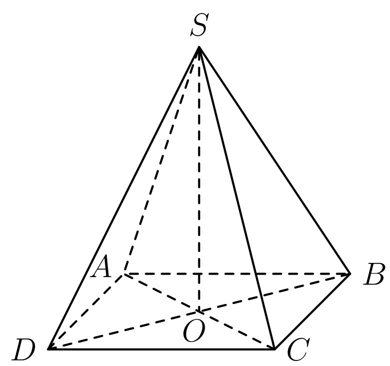
Vậy $\tan\widehat{(SI;(ABCD))} = \tan\widehat{SIA} = \dfrac{SA}{AI} = \sqrt{6}$.

Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 54 (Chuyên Biên Hòa - 2021). Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a, O là giao điểm của AC và BD. $\widehat{ABC} = 60°$; SO vuông góc với $(ABCD)$ và $SO = a\sqrt{3}$. Góc giữa SB và mặt phẳng (SAC) bằng

Ⓐ $(25°;27°)$. Ⓑ $(62°;66°)$. Ⓒ $(53°;61°)$. Ⓓ $(27°;33°)$.

Lời giải.



Ta có $\widehat{ABC} = 60°$; $\triangle ABC$ cân tại B nên $\triangle ABC$ đều cạnh a.

Suy ra: $BO = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Do $OB \perp (SAC)$ nên góc giữa SB và mặt phẳng (SAC) chính là góc $\widehat{BSO}$.

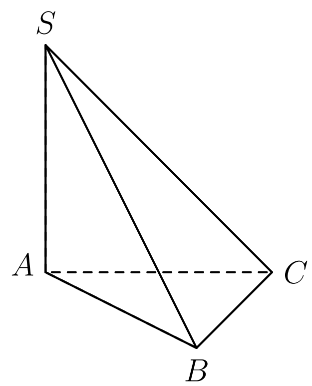
Ta có tam giác SOB vuông tại O nên $\tan\widehat{BSO} = \dfrac{BO}{SO} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \widehat{BSO} \approx 26,56°$.

Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 55 (Sở Cần Thơ - 2021). Cho hình chóp $S.ABC$ có tam giác ABC vuông tại B, có $AB = a\sqrt{3}$, $BC = a$, SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) và $SA = 2a$. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC) bằng

Ⓐ $45°$. Ⓑ $30°$. Ⓒ $60°$. Ⓓ $90°$.

Lời giải.



Hình chiếu của SC lên mặt phẳng (ABC) là AC. Khi đó $(SC,(ABC)) = (SC, AC) = \widehat{SCA}$.

Xét tam giác ABC vuông tại B ta có $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{(a\sqrt{3})^2 + a^2} = 2a$.

Xét tam giác SAC vuông tại A ta có $\tan \widehat{SCA} = \dfrac{SA}{AC} = \dfrac{2a}{2a} = 1 \Rightarrow \widehat{SCA} = 45^\circ$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 56 (Sở Quảng Bình - 2021). Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, biết $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{2}$. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng

(A) 60°. (B) 45°. (C) 30°. (D) 90°.

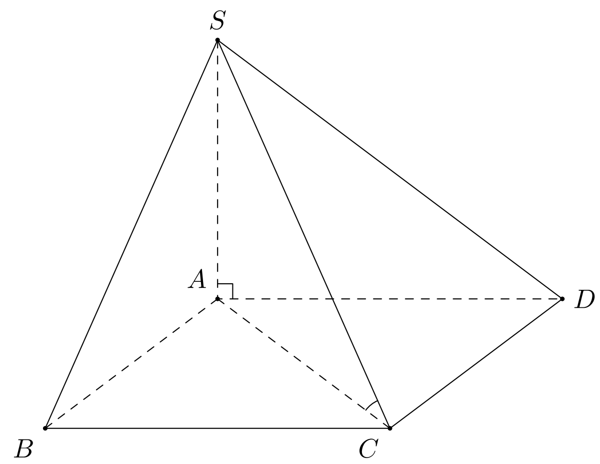
Lời giải.

Ta có $SA \perp (ABCD)$ nên AC là hình chiếu của SC trên mặt phẳng $(ABCD)$.

Do đó: $\widehat{(SC,(ABCD))} = \widehat{(SC, AC)} = \widehat{SCA}$.

Xét hình vuông $ABCD$ ta có: $AC = a\sqrt{2}$.

Xét $\triangle ABC$ vuông tại A, ta có: $\tan \widehat{SCA} = \dfrac{SA}{AC} = \dfrac{a\sqrt{2}}{a\sqrt{2}} = 1 \Rightarrow \widehat{SCA} = 45^\circ$.



Chọn đáp án (B) □

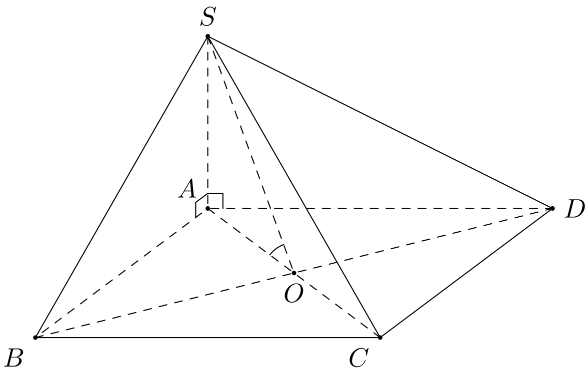
Câu 57 (Chuyên Tuyên Quang - 2021).

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi tâm O, tam giác ABD đều cạnh bằng $a\sqrt{2}$, $SA = \dfrac{3a\sqrt{2}}{2}$ và vuông góc với mặt phẳng đáy. Góc giữa đường thẳng SO và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng

(A) 60°. (B) 45°. (C) 30°. (D) 90°.

Lời giải.

Ta có AO là hình chiếu vuông góc của SO trên mp $(ABCD)$ nên góc giữa giữa đường thẳng SO và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng góc giữa SO và AO.



Xét tam giác SAO vuông tại A có

$SA = \dfrac{3a\sqrt{2}}{2}$; $AO = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

$\tan \widehat{SOA} = \dfrac{SA}{OA} = \dfrac{\dfrac{3a\sqrt{2}}{2}}{\dfrac{\sqrt{6}a}{2}} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{SOA} = 60^\circ$.

Vậy góc giữa giữa đường thẳng SO và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 60°.

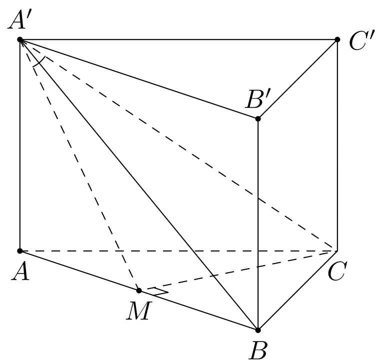
Chọn đáp án (A) □

Câu 58 (Chuyên Vinh - 2021). Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = a$, $AA' = a\sqrt{2}$. Góc giữa đường thẳng $A'C$ và mặt phẳng $(ABB'A')$ bằng

(A) 45°. (B) 75°. (C) 60°. (D) 30°.

Lời giải.

Gọi M là trung điểm AB. Do tam giác ABC đều nên $CM \perp AB$.



Lại có $CM \perp A'A$ nên suy ra $CM \perp (ABB'A')$

$\Rightarrow \widehat{(A'C, (ABB'A'))} = \widehat{(A'C, A'M)} = \widehat{MA'C}$.

Ta có $A'C = \sqrt{A'A^2 + AC^2} = \sqrt{2a^2 + a^2} = a\sqrt{3}$ và $CM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Trong tam giác vuông CMA', ta có

$\sin \widehat{MA'C} = \dfrac{MC}{A'C} = \dfrac{\dfrac{a\sqrt{3}}{2}}{a\sqrt{3}} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \widehat{MA'C} = 30^\circ$.

Vậy góc giữa đường thẳng $A'C$ và mặt phẳng $(ABB'A')$ bằng 30°.

Chọn đáp án (D) □

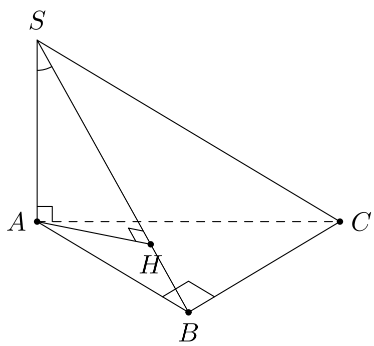
Câu 59 (Cụm Liên Trường Hải Phòng 2019).

Cho khối chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, tam giác ABC vuông tại B, $AC = 2a$, $BC = a$, $SB = 2a\sqrt{3}$. Tính góc giữa SA và mặt phẳng (SBC).

(A) 45°. (B) 30°. (C) 60°. (D) 90°.

Lời giải.

Trong (SAB) kẻ $AH \perp SB (H \in SB)$.



Vì $\begin{cases} SA \perp BC \\ AB \perp BC \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AH$.

Mà $SB \perp AH$ do cách dựng nên $AH \perp (SBC)$, hay H là hình chiếu của A lên (SBC) suy ra góc giữa SA và (SBC) là góc $\widehat{ASH}$ hay góc $\widehat{ASB}$.

Tam giác ABC vuông ở $B \Rightarrow AB = \sqrt{AC^2 - BC^2} = a\sqrt{3}$.

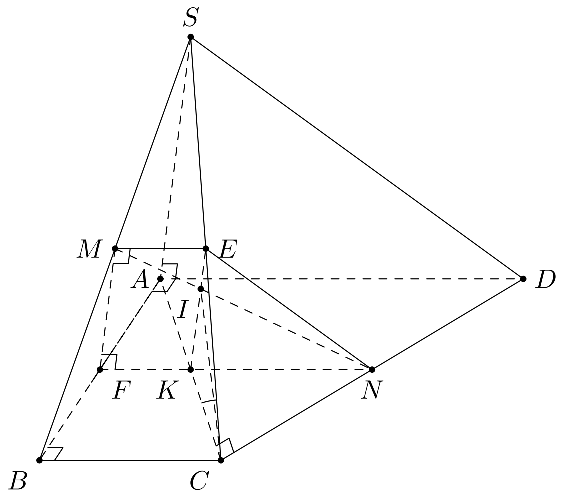
Tam giác SAB vuông ở $A \Rightarrow \sin \widehat{ASB} = \dfrac{AB}{SB} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \widehat{ASB} = 30^\circ$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 60 (Chuyên Bắc Ninh 2019). Cho hình chóp $SABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và B, $AB = BC = a, AD = 2a$. Biết SA vuông góc với đáy $(ABCD)$ và $SA = a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SB và CD. Tính sin góc giữa đường thẳng MN và mặt phẳng (SAC).

(A) $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$. (B) $\dfrac{\sqrt{55}}{10}$. (C) $\dfrac{3\sqrt{5}}{10}$. (D) $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

Lời giải.



Ta gọi E, F lần lượt là trung điểm của SC, AB.

Ta có $ME \parallel NF$ (do cùng song song với BC).

Nên tứ giác $MENF$ là hình thang,

và $\begin{cases} MF \parallel SA \\ SA \perp (ABCD) \end{cases} \Rightarrow MF \perp (ABCD)$

hay tứ giác $MENF$ là hình thang vuông tại M, F.

Gọi $K = NF \cap AC, I = EK \cap M$ thì $I = MN \cap (SAC)$.

Ta có $\begin{cases} NC \perp AC \\ NC \perp SA \end{cases} \Rightarrow NC \perp (SAC)$

hay C là hình chiếu vuông góc của N lên (SAC).

Từ đó ta có được, góc giữa MN và (SAC) là góc giữa MN và CI.

Suy ra, gọi α là góc giữa MN và (SAC) thì $\sin\alpha = \dfrac{CN}{IN}$.

$NC = \dfrac{1}{2}CD = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$; $\dfrac{IN}{IM} = \dfrac{KN}{ME} = 2 \Rightarrow IN = \dfrac{2}{3}MN = \dfrac{2}{3}\sqrt{MF^2 + FN^2} = \dfrac{a\sqrt{10}}{3}$.

Vậy $\sin\alpha = \dfrac{CN}{IN} = \dfrac{3\sqrt{5}}{10}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 61 (Mã 102 - 2018). Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = \sqrt{6}a$. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng đáy bằng

(A) 45°. (B) 60°. (C) 30°. (D) 90°.

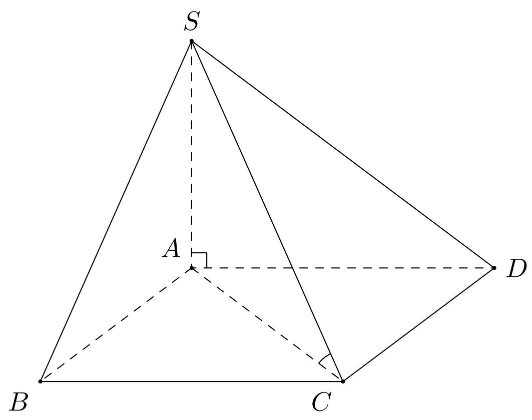
Lời giải.

Do $SA \perp (ABCD)$ nên góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng đáy bằng góc $\widehat{SCA}$.

Ta có $SA = \sqrt{6}a$, $AC = \sqrt{2}a$

$\Rightarrow \tan \widehat{SCA} = \dfrac{SA}{AC} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{SCA} = 60^\circ$.

Vậy góc giữa đường thẳng SC và và mặt phẳng đáy bằng bằng 60°.



Chọn đáp án (B) □

Câu 62 (Mã 101 - 2018). Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SB = 2a$. Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng đáy bằng

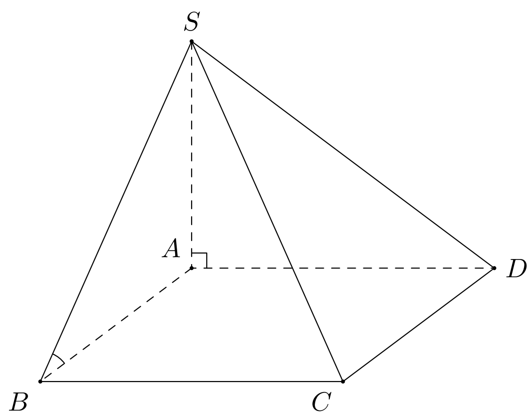
(A) 45°. (B) 60°. (C) 90°. (D) 30°.

Lời giải.

Do $SA \perp (ABCD)$ nên góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng đáy bằng góc $\widehat{SBA}$.

Ta có $\cos \widehat{SBA} = \dfrac{AB}{SB} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \widehat{SBA} = 60^\circ$.

Vậy góc giữa đường thẳng SB và và mặt phẳng đáy bằng bằng 60°.

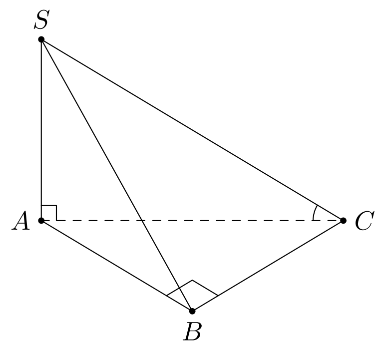


Chọn đáp án (B) □

Câu 63 (Mã 101 - 2019).

Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC), $SA = 2a$, tam giác ABC vuông tại $B, AB = a\sqrt{3}$ và $BC = a$ (minh họa như hình vẽ bên). Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC) bằng

(A) 45°. (B) 30°. (C) 60°. (D) 90°.



Lời giải.

Ta có $SA \perp (ABC)$ nên AC là hình chiếu của SC lên mặt phẳng (ABC).

Do đó $(SC, (ABC)) = (SC, AC) = \widehat{SCA}$.

Tam giác ABC vuông tại $B, AB = a\sqrt{3}$ và $BC = a$ nên $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{4a^2} = 2a$.

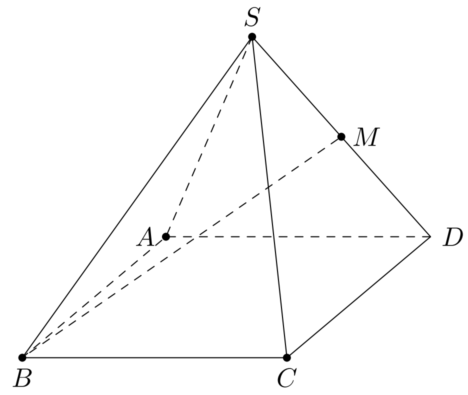
Do đó tam giác SAC vuông cân tại A nên $\widehat{SCA} = 45^\circ$.

Vậy $(SC, (ABC)) = 45^\circ$.

Chọn đáp án (A) □

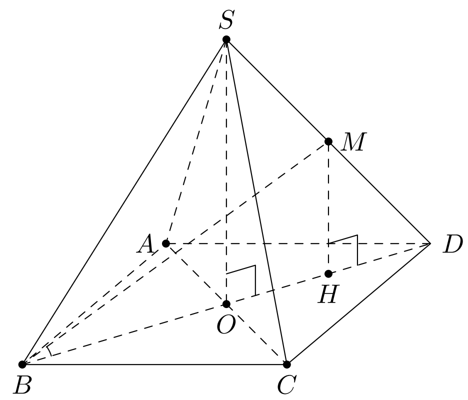
Câu 64 (Đề Tham Khảo 2018).

Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng a. Gọi M là trung điểm của SD (tham khảo hình vẽ bên). Tang của góc giữa đường thẳng BM và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng



(A) $\frac{\sqrt{2}}{2}$. (B) $\frac{\sqrt{3}}{3}$. (C) $\frac{2}{3}$. (D) $\frac{1}{3}$.

Lời giải.



Gọi O là tâm của hình vuông.

Ta có $SO \perp (ABCD)$ và $SO = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Gọi M là trung điểm của OD ta có $MH \parallel SO$ nên H là hình chiếu của M lên mặt phẳng $(ABCD)$ và $MH = \frac{1}{2}SO = \frac{a\sqrt{2}}{4}$.

Do đó góc giữa đường thẳng BM và mặt phẳng $(ABCD)$ là $\widehat{MBH}$.

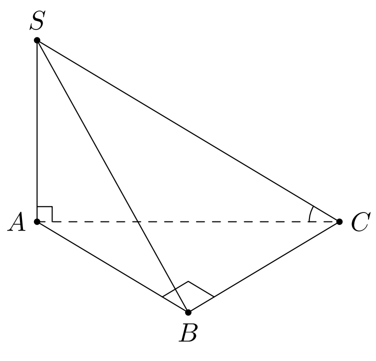
Khi đó ta có $\tan \widehat{MBH} = \frac{MH}{BH} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{4}}{\frac{3a\sqrt{2}}{4}} = \frac{1}{3}$.

Vậy tang của góc giữa đường thẳng BM và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng $\frac{1}{3}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 65 (Mã 104 - 2019).

Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC), $SA = 2a$, tam giác ABC vuông cân tại B và $AB = a\sqrt{2}$ (minh họa như hình vẽ bên). Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC) bằng



(A) 30°. (B) 90°. (C) 60°. (D) 45°.

Lời giải.

Ta có $SA \perp (ABC)$ nên đường thẳng AC là hình chiếu vuông góc của đường thẳng SC lên mặt phẳng (ABC).

Do đó, $\alpha = \left(\widehat{SC, (ABC)}\right) = \left(\widehat{SC, AC}\right) = \widehat{SCA}$ (tam giác SAC vuông tại A).

Tam giác ABC vuông cân tại B nên $AC = AB\sqrt{2} = 2a$.

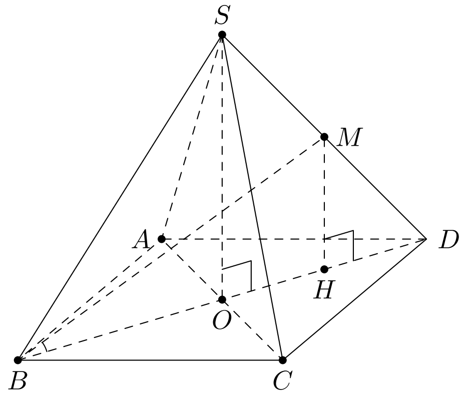
Suy ra $\tan \widehat{SCA} = \frac{SA}{AC} = 1$ nên $\alpha = 45^\circ$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 66 (Sở Vĩnh Phúc 2019). Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng $2a$. Gọi M là trung điểm của SD. Tính tan của góc giữa đường thẳng BM và mặt phẳng $(ABCD)$.

(A) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. (B) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. (C) $\dfrac{2}{3}$. (D) $\dfrac{1}{3}$.

Lời giải.



Trong tam giác SOD dựng $MH \parallel SO, H \in OD$ ta có $MH \perp (ABCD)$.

Vậy góc tạo bởi BM và mặt phẳng $(ABCD)$ là $\widehat{MBH}$.

Ta có $MH = \dfrac{1}{2}SO = \dfrac{1}{2}\sqrt{SD^2 - OD^2} = \dfrac{1}{2}\sqrt{4a^2 - 2a^2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

$BH = \dfrac{3}{4}BD = \dfrac{3}{4}2a\sqrt{2} = \dfrac{3a\sqrt{2}}{2}$.

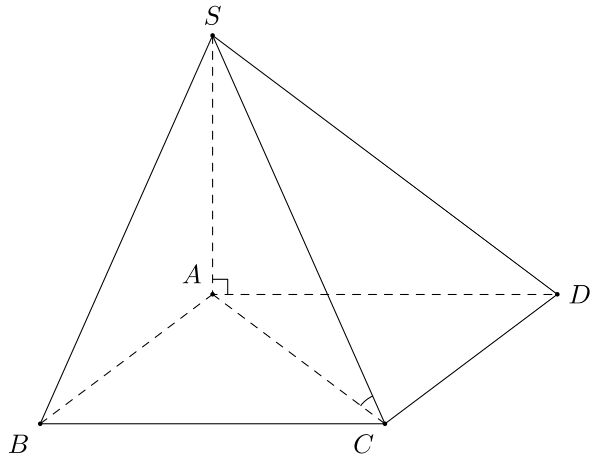
Vậy $\tan \widehat{MBH} = \dfrac{MH}{BH} = \dfrac{1}{3}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 67 (Chuyên Bắc Giang 2019). Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a và $SA \perp (ABCD)$. Biết $SA = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. Tính góc giữa SC và $(ABCD)$.

(A) 30°. (B) 60°. (C) 75°. (D) 45°.

Lời giải.



Ta có $AC = a\sqrt{2}$.

Vì AC là hình chiếu của SC lên $(ABCD)$ nên góc giữa SC và $(ABCD)$ là góc giữa SC và AC.

Xét $\triangle SAC$ vuông tại A, ta có

$\tan \widehat{SCA} = \dfrac{\dfrac{a\sqrt{6}}{3}}{a\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$. Suy ra $\widehat{SCA} = 30^\circ$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 68 (Chuyên Hùng Vương Gia Lai 2019).

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với đáy và $SA = a\sqrt{3}$. Gọi α là góc giữa SD và (SAC). Giá trị $\sin\alpha$ bằng

(A) $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$. (B) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. (C) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. (D) $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải.

Gọi $O = AC \cap BD$.

Ta có $\begin{cases} DO \perp AC \\ DO \perp SA \, (SA \perp (ABCD)) \end{cases}$

$\Rightarrow DO \perp (ABCD)$

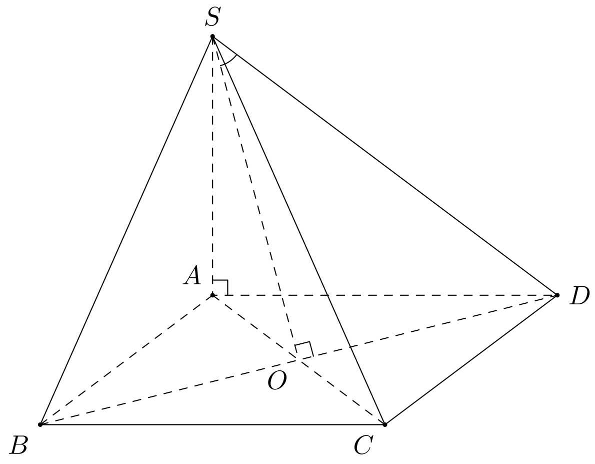
$\Rightarrow SO$ là hình chiếu của SD lên mặt phẳng (SAC)

$\Rightarrow \widehat{(SD; (SAC))} = \widehat{(SD; SO)} = \widehat{DSO} = \alpha$.

Xét $\triangle SAD$ vuông tại A có $SD = \sqrt{3a^2 + a^2} = 2a$.

Xét $\triangle SOD$ vuông tại O có có $SD = 2a$, $OD = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

$\Rightarrow \sin\alpha = \sin\widehat{DSO} = \dfrac{DO}{SD} = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$.



Chọn đáp án A □

Câu 69 (Sở Bắc Giang 2019). Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Tam giác SAB cân tại S và thuộc mặt phẳng vuông góc với đáy. Biết SC tạo với mặt phẳng đáy một góc $60°$, gọi M là trung điểm của BC. Gọi α là góc giữa đường thẳng SM và mặt phẳng (ABC). Tính $\cos\alpha$.

(A) $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$. (B) $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$. (C) $\cos\alpha = \dfrac{3}{\sqrt{10}}$. (D) $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$.

Lời giải.

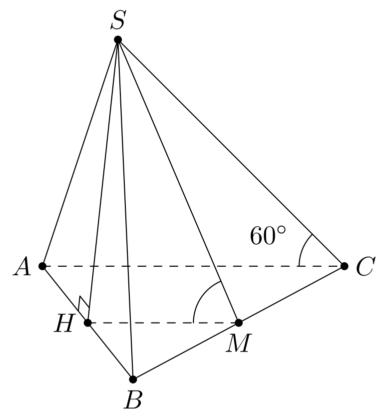
Gọi H là trung điểm AB dễ thấy $SH \perp (ABC)$.

SC tạo với mặt phẳng đáy một góc $60°$ suy ra $\widehat{SCH} = 60°$.

Có $HC = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow SH = HC \cdot \tan\widehat{SCH} = \dfrac{3a}{2}$.

Dễ thấy $\alpha = \widehat{SMH}$, $HM = \dfrac{1}{2}AC = \dfrac{a}{2}$

$\Rightarrow SM = \dfrac{a\sqrt{10}}{2} \Rightarrow \cos\alpha = \dfrac{HM}{SM} = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$.



Chọn đáp án D □

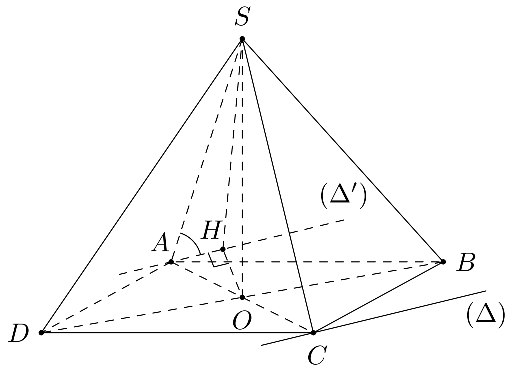
Câu 70 (THCS - THPT Nguyễn Khuyến 2019).

Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có $AB = a$, O là trung điểm AC và $SO = b$. Gọi (Δ) là đường thẳng đi qua C, (Δ) chứa trong mặt phẳng $(ABCD)$ và khoảng cách từ O đến (Δ) là $\dfrac{a\sqrt{14}}{6}$. Giá trị lượng giác $\cos((SA), (\Delta))$ bằng

(A) $\dfrac{2a}{3\sqrt{4b^2 - 2a^2}}$. (B) $\dfrac{2a}{3\sqrt{2a^2 + 4b^2}}$. (C) $\dfrac{a}{3\sqrt{2a^2 + 4b^2}}$. (D) $\dfrac{a}{3\sqrt{4b^2 - 2a^2}}$.

Lời giải.

Gọi (Δ') là đường thẳng đi qua A và song song với (Δ). Hạ $OH \perp (\Delta')\,(H \in (\Delta'))$. Do O là trung điểm của AC và $(\Delta) \parallel (\Delta')$ nên $\mathrm{d}\,(O,(\Delta')) = \mathrm{d}\,(O,(\Delta))$ hay $OH = \dfrac{a\sqrt{14}}{6}$.



Do $S.ABCD$ là hình chóp tứ giác đều nên đáy $ABCD$ là hình vuông và $SO \perp (ABCD)$.

Do $AH \perp OH$ và $AH \perp SO$ nên, suy ra $AH \perp SH$.

Do $ABCD$ là hình vuông cạnh a nên $AC = a\sqrt{2}$, suy ra $OA = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Áp dụng Định lí Pitago vào tam giác vuông AHO ta có

$$AH = \sqrt{OA^2 - OH^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{14}}{6}\right)^2} = \frac{a}{3}.$$

Áp dụng Định lí Pitago vào tam giác vuông SAO ta có

$$SA = \sqrt{OA^2 + SO^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 + b^2} = \frac{\sqrt{2a^2+4b^2}}{2}.$$

Do $(\Delta) \parallel (\Delta')$ nên $\cos\left((SA),(\Delta)\right) = \cos\left((SA),(\Delta')\right) = \cos\widehat{SAH} = \dfrac{AH}{SA} = \dfrac{2a}{3\sqrt{2a^2+4b^2}}$.

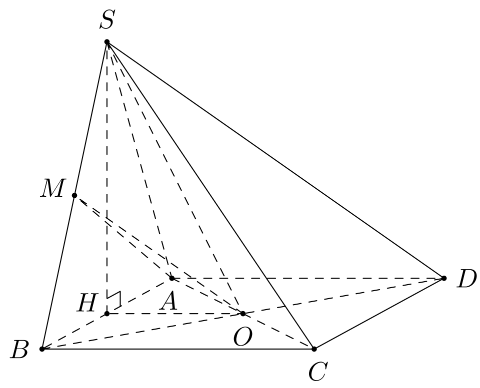
Chọn đáp án (B) □

Câu 71 (HSG Bắc Ninh 2019). Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a$, $AD = a\sqrt{3}$. Mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt đáy. Cosin của góc giữa đường thẳng SD và mặt phẳng (SBC) bằng

(A) $\dfrac{\sqrt{13}}{4}$. (B) $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$. (C) $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$. (D) $\dfrac{1}{4}$.

Lời giải.

Gọi H, M lần lượt là trung điểm của AB, SB; O là tâm của hình chữ nhật $ABCD$.



Ta có $MO \parallel SD$.

Dễ thấy $BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AM$, mà $SB \perp AM$ nên $AM \perp (SBC)$.

Xét tam giác AMO, có:

$AM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$;

$AO = \dfrac{1}{2}AC = \dfrac{1}{2}\sqrt{a^2+3a^2} = a$;

$$MO = \frac{1}{2}SD = \frac{1}{2}\sqrt{SH^2+HD^2} = \frac{1}{2}\sqrt{SH^2+HA^2+AD^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 + 3a^2} = a$$

$\Rightarrow \triangle AMO$ cân tại O.

$$\Rightarrow \sin\widehat{AMO} = \frac{\mathrm{d}(O;AM)}{OM} = \frac{\sqrt{MO^2 - \dfrac{AM^2}{4}}}{OM} = \frac{\sqrt{a^2 - \dfrac{3a^2}{16}}}{a} = \frac{\sqrt{13}}{4}.$$

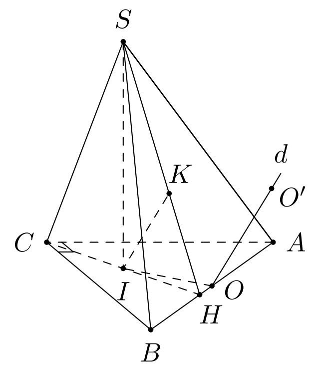
$$\Rightarrow \cos\left(SD,(SBC)\right) = \sin\widehat{AMO} = \frac{\sqrt{13}}{4}.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 72 (Sở Hà Nội 2019). Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại C, CH vuông góc với AB tại H, I là trung điểm của đoạn HC. Biết SI vuông góc với mặt phẳng đáy, $\widehat{ASB} = 90^\circ$. Gọi O là trung điểm của đoạn AB, O' là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $SABI$. Góc tạo bởi đường thẳng OO' và mặt phẳng (ABC) bằng

A. 60°. B. 30°. C. 90°. D. 45°.

Lời giải.



Do $\widehat{ASB} = 90^\circ$ nên tâm O' của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $SABI$ nằm trên đường thẳng d đi qua trung điểm O của đoạn thẳng AB và $d \perp (SAB)$. (1)

Trong mặt phẳng (SCH) kẻ $IK \perp SH$ tại K.

Theo giả thiết $SI \perp (ABC)$ suy ra $SI \perp AB$.

Từ $SI \perp AB$ và $AB \perp CH$ suy ra $AB \perp (SCH) \Rightarrow AB \perp IK$.

Từ $IK \perp SH$ và $AB \perp IK$ ta có $IK \perp (SAB)$. (2)

Từ (1) và (2) ta có $IK \parallel d$. Bởi vậy

$(OO'; (ABC)) = (d; (ABC)) = (IK; (ABC))$.

Vì $(SCH) \perp (ABC)$ nên IH là hình chiếu vuông góc của IK trên mặt phẳng (ABC). Bởi vậy

$(IK, (ABC)) = (IK, IH) = \widehat{HIK} = \widehat{HSI}$.

Do tam giác ABC vuông tại C và SAB vuông tại S nên $CO = SO = \dfrac{AB}{2}$.

Xét hai tam giác vuông CHO và SHO có $CO = SO$, cạnh OH chung nên $\triangle CHO = \triangle SHO$ (c.g.c), bởi vậy $CH = SH$.

Xét tam giác SIH vuông tại I có $IH = \dfrac{CH}{2} = \dfrac{SH}{2}$, ta có $\sin \widehat{HSI} = \dfrac{IH}{SH} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \widehat{HSI} = 30^\circ$.

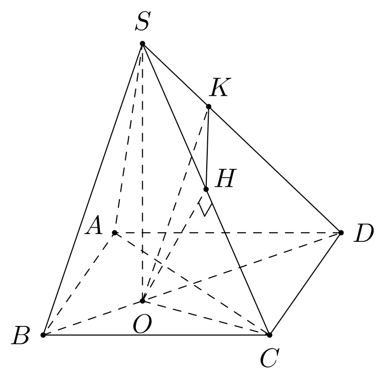
Vậy $(OO'; (ABC)) = 30^\circ$.

Chọn đáp án B □

Câu 73 (Sở Bắc Ninh 2019). Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a và $\widehat{ABC} = 60^\circ$. Hình chiếu vuông góc của điểm S lên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với trọng tâm của tam giác ABC, gọi φ là góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (SCD), tính $\sin\varphi$ biết rằng $SB = a$.

A. $\sin\varphi = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. B. $\sin\varphi = \dfrac{1}{4}$. C. $\sin\varphi = \dfrac{1}{2}$. D. $\sin\varphi = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải.



Cách 1: Gọi O là trọng tâm của tam giác ABC. Dựng đường thẳng d qua O và $d \parallel SB$, d cắt SD tại K. Khi đó góc giữa SB và (SCD) chính là góc giữa OK và (SCD).

Vì $SO \perp (ABCD) \Rightarrow SO \perp CD$.

Ta lại có $\triangle ABC$ đều ($\triangle ABC$ cân tại B và $\widehat{BAC} = 60^\circ$)

$\Rightarrow AB \perp CO \Rightarrow CD \perp CO$

$\Rightarrow CD \perp (SCO) \Rightarrow (SCD) \perp (SCO)$.

Gọi H là hình chiếu của O trên SC, khi đó ta có:

$\begin{cases} OH \perp SC \\ OH \perp CD \end{cases} \Rightarrow OH \perp (SCD)$. Do đó góc giữa SB và mặt phẳng (SCD) là $\widehat{OKH} = \varphi$.

Ta có $\sin\varphi = \sin\widehat{OKH} = \dfrac{OH}{OK}$.

Tứ diện $S.ABC$ là tứ diện đều cạnh a nên ta tính được:

$OC = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$, $SO = \dfrac{a\sqrt{6}}{3} \Rightarrow OH = \dfrac{a\sqrt{2}}{3}$.

Vì $OK \parallel SB \Rightarrow \dfrac{OK}{SB} = \dfrac{DO}{DB} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow OK = \dfrac{2}{3}SB = \dfrac{2}{3}a$.

Vậy: $\sin\varphi = \dfrac{OH}{OK} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Cách 2: Trước hết ta chứng minh được $\sin(SB;(SCD)) = \dfrac{\mathrm{d}(B,(SCD))}{SB}$ (như hình trên).

Gọi O là trọng tâm tam giác ABC. Khi đó ta có $CO \perp CD$.

Dựng $OH \perp SC$ suy ra $OH \perp (SCD)$. Ta tính được $OC = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}, SO = \dfrac{a\sqrt{6}}{3} \Rightarrow OH = \dfrac{a\sqrt{2}}{3}$.

Khi đó $\mathrm{d}(B,(SCD)) = \dfrac{3}{2}\mathrm{d}(O,(SCD)) = \dfrac{3}{2}OH = \dfrac{3}{2}\dfrac{a\sqrt{2}}{3} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

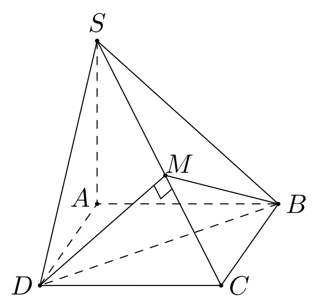
Vậy $\sin(SB;(SCD)) = \dfrac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{a} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Chọn đáp án D □

Câu 74 (Sở Bình Phước - 2018). Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, $SA \perp (ABCD)$, $SA = x$. Xác định x để hai mặt phẳng (SBC) và (SCD) hợp với nhau góc 60°.

A $x = 2a$. B $x = a$. C $x = \dfrac{3a}{2}$. D $x = \dfrac{a}{2}$.

Lời giải.



$SB = SD = \sqrt{SA^2 + AD^2} = \sqrt{x^2 + a^2}$.

$\triangle SDC = \triangle SBC$; $BM \perp SC$; $DM \perp SC$; $BM = DM$; $M \in SC$.

$SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = \sqrt{x^2 + 2a^2}$; $MD = \dfrac{SD \cdot CD}{SC} = \dfrac{a\sqrt{x^2 + a^2}}{\sqrt{x^2 + 2a^2}}$.

$\left(\widehat{(SBC);(SDC)}\right) = \widehat{(BM;BD)} = 60^\circ$.

TH1: $\widehat{BMD} = 60^\circ \Rightarrow MD = BD \Leftrightarrow \dfrac{a\sqrt{x^2 + a^2}}{\sqrt{x^2 + 2a^2}} = a\sqrt{2}$ (vô nghiệm).

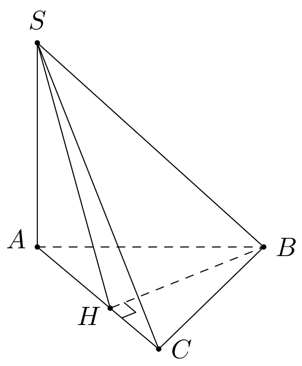
TH2: $\widehat{BMD} = 120^\circ \Rightarrow BD = MD\sqrt{3} \Leftrightarrow a\sqrt{2} = \dfrac{a\sqrt{3}\sqrt{x^2 + a^2}}{\sqrt{x^2 + 2a^2}} \Leftrightarrow x = a$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 75 (Sở Lào Cai - 2018). Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại B, cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy, $AB = 2a$, $\widehat{BAC} = 60°$ và $SA = a\sqrt{2}$. Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (SAC) bằng

(A) $45°$. (B) $60°$. (C) $30°$. (D) $90°$.

Lời giải.



Kẻ $BH \perp AC$ $(H \in AC)$ và theo giả thiết $BH \perp SA$ nên $BH \perp (SAC)$.

Do đó, SH là hình chiếu vuông góc của SB lên mặt phẳng (SAC).

Suy ra, $(SB, (SAC)) = (SB, SH) = \widehat{BSH}$.

Mà ta có: $SB = a\sqrt{6}$, $HB = AB \sin 60° = a\sqrt{3}$.

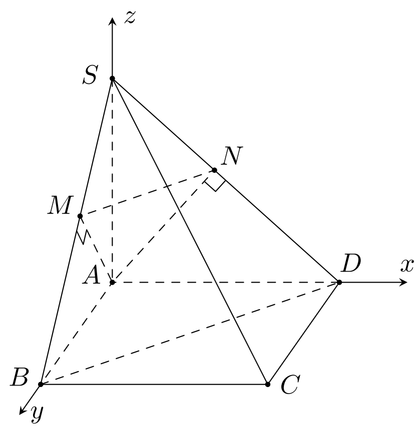
$\Rightarrow \sin(\widehat{BSH}) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \widehat{BSH} = 45°$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 76 (Chuyên Hạ Long - 2018). Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy, $SA = a\sqrt{2}$. Gọi M, N lần lượt là hình chiếu vuông góc của điểm A trên các cạnh SB, SD. Góc giữa mặt phẳng (AMN) và đường thẳng SB bằng

(A) $45°$. (B) $90°$. (C) $120°$. (D) $60°$.

Lời giải.



Ta có $BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AM \Rightarrow AM \perp (SBC) \Rightarrow AM \perp SC$. Tương tự ta cũng có $AN \perp SC \Rightarrow (AMN) \perp SC$.

Gọi φ là góc giữa đường thẳng SB và (AMN).

Chuẩn hóa và chọn hệ trục tọa độ sao cho $A(0;0;0)$, $B(0;1;0)$, $D(1;0;0)$, $S\left(0;0;\sqrt{2}\right)$, $C(1;1;0)$,

$\overrightarrow{SC} = \left(1;1;-\sqrt{2}\right)$, $\overrightarrow{SB} = \left(0;1;-\sqrt{2}\right)$.

Do $(AMN) \perp SC$ nên (AMN) có véc-tơ pháp tuyến $\overrightarrow{SC}$.

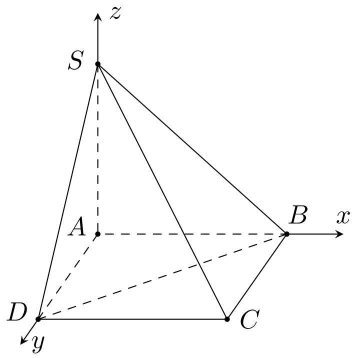
$\sin\varphi = \dfrac{|3|}{2\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \varphi = 60°$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 77 (Sở Bắc Giang - 2018). Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a$, $BC = a\sqrt{3}$, $SA = a$ và SA vuông góc với đáy $ABCD$. Tính $\sin\alpha$, với α là góc tạo bởi giữa đường thẳng BD và mặt phẳng (SBC).

(A) $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{7}}{8}$. (B) $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. (C) $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$. (D) $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{5}$.

Lời giải.



Đặt hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ. Khi đó, ta có $A(0;0;0)$, $B(a;0;0)$, $D\left(0;a\sqrt{3};0\right)$, $S(0;0;a)$.
Ta có $\overrightarrow{BD}=\left(-a;a\sqrt{3};0\right)=a\left(-1;\sqrt{3};0\right)$, nên đường thẳng BD có véc-tơ chỉ phương là $\vec{u}=\left(-1;\sqrt{3};0\right)$.
Ta có $\overrightarrow{SB}=(a;0;-a)$, $\overrightarrow{BC}=\left(0;a\sqrt{3};0\right)\Rightarrow\left[\overrightarrow{SB},\overrightarrow{BC}\right]=\left(a^2\sqrt{3};0;a^2\sqrt{3}\right)=a^2\sqrt{3}(1;0;1)$.
Như vậy, mặt phẳng (SBC) có véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}=(1;0;1)$.
Do đó, α là góc tạo bởi giữa đường thẳng BD và mặt phẳng (SBC) thì

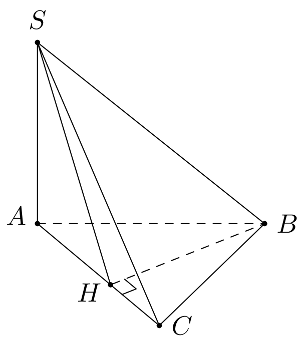
$$\sin\alpha=\frac{|\vec{u}\cdot\vec{n}|}{|\vec{u}|\cdot|\vec{n}|}=\frac{\left|(-1)\cdot 1+\sqrt{3}\cdot 0+0\cdot 1\right|}{\sqrt{(-1)^2+\sqrt{3}^2+0^2}\cdot\sqrt{1^2+0^2+1^2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 78 (Chuyên ĐHSPHN - 2018). Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại B, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy, $AB=2a$, $\widehat{BAC}=60^\circ$ và $SA=a\sqrt{2}$. Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (SAC) bằng

(A) 30°. (B) 45°. (C) 60°. (D) 90°.

Lời giải.



Trong mặt phẳng (ABC) kẻ $BH\perp AC$.
Mà $BH\perp SA\Rightarrow BH\perp(SAC)$.
Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (SAC) bằng $\widehat{BSH}$.
Xét tam giác ABH vuông tại H, $BH=AB\cdot\sin 60^\circ=2a\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=a\sqrt{3}$.
$AH=AB\cdot\cos 60^\circ=2a\cdot\dfrac{1}{2}=a$.
Xét tam giác SAH vuông tại S có
$SH=\sqrt{SA^2+AH^2}=\sqrt{(a\sqrt{2})^2+a^2}=a\sqrt{3}$.
Xét tam giác SBH vuông tại H có $SH=HB=a\sqrt{3}$ suy ra tam giác SBH vuông tại H.
Vậy $\widehat{BSH}=45^\circ$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 79 (Chuyên Vĩnh Phúc - 2018).

Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a, tâm O. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của SA và BC. Biết rằng góc giữa MN và $(ABCD)$ bằng 60°, cosin góc giữa MN và mặt phẳng (SBD) bằng

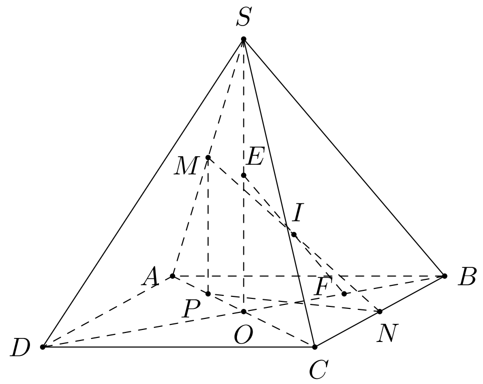
(A) $\dfrac{\sqrt{41}}{41}$. (B) $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$. (C) $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$. (D) $\dfrac{2\sqrt{41}}{41}$.

Lời giải.

Gọi E, F lần lượt là trung điểm SO, OB thì EF là hình chiếu của MN trên (SBD).

Gọi P là trung điểm OA thì PN là hình chiếu của MN trên $(ABCD)$.

Theo bài ra: $\widehat{MNP} = 60°$.



Áp dụng định lý cos trong tam giác CNP ta được:

$NP^2 = CP^2 + CN^2 - 2CP \cdot CN \cdot \cos 45°$

$$= \left(\frac{3a\sqrt{2}}{4}\right)^2 + \frac{a^2}{4} - 2 \cdot \frac{3a\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{5a^2}{8}.$$

Suy ra: $NP = \dfrac{a\sqrt{10}}{4}$, $MP = NP \cdot \tan 60° = \dfrac{a\sqrt{30}}{4}$; $SO = 2MP = \dfrac{a\sqrt{30}}{2}$.

$SB = \sqrt{SO^2 + OB^2} = 2a\sqrt{2} \Rightarrow EF = a\sqrt{2}$.

Ta lại có: $MENF$ là hình bình hành (vì ME và NF song song và cùng bằng $\dfrac{1}{2}OA$).

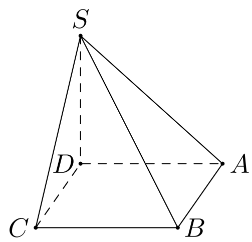
Gọi I là giao điểm của MN và EF, khi đó góc giữa MN và mặt phẳng (SBD) là $\widehat{NIF}$.

$\cos \widehat{NIF} = \dfrac{IK}{IN} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \dfrac{4}{a\sqrt{10}} = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

Chọn đáp án C □

Câu 80 (Chuyên Vinh -2018).

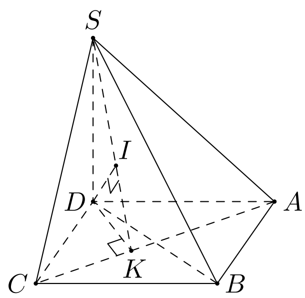
Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, $AB = 2a$, $BC = a$, $\widehat{ABC} = 120°$. Cạnh bên $SD = a\sqrt{3}$ và SD vuông góc với mặt phẳng đáy (tham khảo hình vẽ bên). Tính sin của góc tạo bởi SB và mặt phẳng (SAC)



A. $\dfrac{3}{4}$. B. $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$. C. $\dfrac{1}{4}$. D. $\dfrac{\sqrt{3}}{7}$.

Lời giải.

Ta có $\sin(SB,(SAC)) = \dfrac{d(B,(SAC))}{SB} = \dfrac{d(D,SAC)}{SB}$.



Xét tam giác ABC ta có

$AC = \sqrt{BA^2 + BC^2 - 2BA \cdot BC \cdot \cos \widehat{BAC}} = a\sqrt{7}$.

$BO = \sqrt{\dfrac{BA^2 + BC^2}{2} - \dfrac{AC^2}{4}} = \sqrt{\dfrac{4a^2 + a^2}{2} - \dfrac{7a^2}{4}} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow BD = a\sqrt{3}$ và $SB = \sqrt{SD^2 + BD^2} = \sqrt{3a^2 + 3a^2} = a\sqrt{6}$.

Xét tam giác ADC ta có

$$\frac{AD}{\sin C} = \frac{AC}{\sin D} \Rightarrow \sin C = \frac{AD \cdot \sin D}{AC} = \frac{a \cdot \sin 120°}{a\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{21}}{14}.$$

Gọi K là hình chiếu của D lên AC, và I là hình chiếu của D lên SK.

Ta có $\begin{cases} AC \perp DK \\ AC \perp SD \end{cases} \Rightarrow AC \perp DI$. Do đó $\begin{cases} DI \perp SK \\ DI \perp AC \end{cases} \Rightarrow d(D,(SAC)) = DI$.

Mặt khác $\sin C = \dfrac{DK}{DC} \Rightarrow DK = DC \cdot \sin C = 2a \cdot \dfrac{\sqrt{21}}{14} = \dfrac{a\sqrt{21}}{7}$.

Xét tam giác SDK ta có $DI = \dfrac{SD \cdot DK}{\sqrt{SD^2 + DK^2}} = \dfrac{a\sqrt{3} \cdot \dfrac{a\sqrt{21}}{7}}{\sqrt{3a^2 + \dfrac{21}{49}a^2}} = \dfrac{\sqrt{6}}{4}a$.

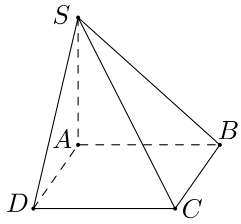
Vậy $\sin\left(SB,(SAC)\right) = \dfrac{\mathrm{d}(D,SAC)}{SB} = \dfrac{DI}{SB} = \dfrac{\dfrac{\sqrt{6}}{4}a}{a\sqrt{6}} = \dfrac{1}{4}$.

Trong mặt phẳng (SDK) kẻ $DI \perp SK$ suy ra $\mathrm{d}\left(D,(SAC)\right) = DI$.

Chọn đáp án C □

Câu 81 (Chuyên Lương Văn Chánh - Phú Yên - 2020).

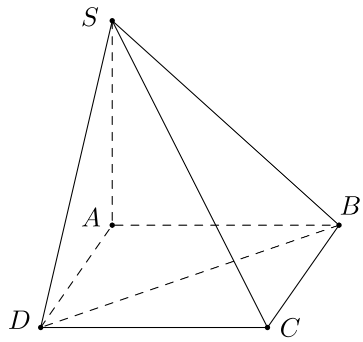
Cho hình chóp $S.ABCD$ có SA vuông góc với mặt phẳng đáy, $SA = a\sqrt{3}$, tứ giác $ABCD$ là hình vuông, $BD = a\sqrt{2}$ (minh họa như hình bên). Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (SAD) bằng



Ⓐ 0°. Ⓑ 30°. Ⓒ 45°. Ⓓ 60°.

Lời giải.

Đáy $ABCD$ là hình vuông có đường chéo $BD = a\sqrt{2}$ nên cạnh $AB = a$.



Ta có $\begin{cases} AB \perp AD \\ AB \perp SA \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SAD) \Rightarrow SA$ là hình chiếu của SB trên mặt phẳng (SAD)

$\Rightarrow (SB,(SAD)) = (SB,SA) = \widehat{BSA}$.

Trong tam giác vuông BSA, ta có $\tan\widehat{BSA} = \dfrac{AB}{AS} = \dfrac{a}{a\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \widehat{BSA} = 30^\circ$.

Vậy $(SB,(SAD)) = 30^\circ$.

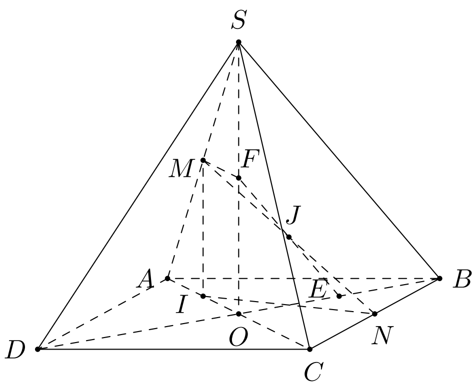
Chọn đáp án B □

Câu 82 (Chuyên Thái Bình - 2020). Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đáy là hình vuông tâm O, cạnh a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA và BC. Góc giữa đường thẳng MN và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 60°. Tính cos của góc giữa đường thẳng MN và mặt phẳng (SBD).

Ⓐ $\dfrac{\sqrt{41}}{4}$. Ⓑ $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$. Ⓒ $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$. Ⓓ $\dfrac{2\sqrt{41}}{4}$.

Lời giải.

Từ giả thiết ta có $SO \perp (ABCD)$.



Gọi I là trung điểm OA thì MI là đường trung bình của $\triangle SOA \Rightarrow MI \parallel SO \Rightarrow MI \perp (ABCD)$

$\Rightarrow I$ là hình chiếu của M trên mặt phẳng $(ABCD) \Rightarrow IN$ là hình chiếu của MN trên mặt phẳng $(ABCD)$. Suy ra $\left(\widehat{MN,(ABCD)}\right) = \left(\widehat{MN,IN}\right) \Rightarrow \widehat{MNI} = 60^\circ$.

Ta có $NC = \dfrac{1}{2}BC = \dfrac{a}{2}$; $IC = \dfrac{3}{4}AC = \dfrac{3a\sqrt{2}}{4}$.

Áp dụng định lý cosin trong $\triangle INC$ ta có

$IN^2 = CI^2 + CN^2 - 2CI \cdot CN \cdot \cos\widehat{NCI}$

$\Rightarrow IN^2 = \left(\dfrac{3a\sqrt{2}}{4}\right)^2 + \left(\dfrac{a}{2}\right)^2 - 2\cdot\dfrac{3a\sqrt{2}}{4}\cdot\dfrac{a}{2}\cdot\cos 45^\circ = \dfrac{5a^2}{8} \Rightarrow IN = \dfrac{a\sqrt{10}}{4}$.

Do $\triangle MIN$ vuông tại I nên $\cos\widehat{MNI} = \dfrac{IN}{MN} \Rightarrow MN = \dfrac{IN}{\cos 60^\circ} = \dfrac{a\sqrt{10}}{4} : \dfrac{1}{2} = \dfrac{a\sqrt{10}}{2}$.

Lại có $AC \perp BD, AC \perp SO \Rightarrow AC \perp (SBD)$.

Gọi E là trung điểm $OB \Rightarrow EN$ là đường trung bình của $\triangle BOC \Rightarrow EN \parallel OC$ hay $EN \parallel AC$ $\Rightarrow NE \perp (SBD)$ hay E là hình chiếu của N trên mặt phẳng (SBD).

Gọi F là trung điểm của $SO \Rightarrow MF$ là đường trung bình của $\triangle SAO \Rightarrow MF \parallel AO$ hay $MF \parallel AC$ $\Rightarrow MF \perp (SBD)$ hay F là hình chiếu của M trên mặt phẳng (SBD).

Ta có $MF \parallel NE$ nên bốn điểm E, N, F, M cùng nằm trên một mặt phẳng.

Trong mặt phẳng $(ENFM)$ gọi $J = MN \cap EF \Rightarrow J = MN \cap (SBD)$ (do $EF \subset (SBD)$).

Suy ra $\left(\widehat{MN,(SBD)}\right) = \left(\widehat{MN,EF}\right) = \widehat{EJN}$ (do $\widehat{EJN} < 90^\circ$).

Ta có $EN = \dfrac{1}{2}OC = \dfrac{1}{4}AC = \dfrac{a\sqrt{2}}{4}$; $MF = \dfrac{1}{2}AO = \dfrac{1}{4}AC = \dfrac{a\sqrt{2}}{4} \Rightarrow EN = MF$, mà $EN \parallel MF$

$\Rightarrow$ Tứ giác $ENFM$ là hình bình hành $\Rightarrow J$ là trung điểm $MN \Rightarrow JN = \dfrac{1}{2}MN = \dfrac{a\sqrt{10}}{4}$.

Vậy $\cos(MN,(SBD)) = \cos\widehat{EJN} = \dfrac{JE}{JN} = \dfrac{\sqrt{\left(\dfrac{a\sqrt{10}}{4}\right)^2 - \left(\dfrac{a\sqrt{2}}{4}\right)^2}}{\dfrac{a\sqrt{10}}{4}} = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

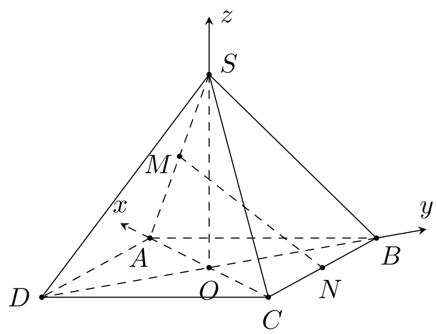
Chọn đáp án C □

Câu 83 (Đô Lương 4 - Nghệ An - 2020).

Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a, tâm O. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của SA và BC. Biết rằng góc giữa MN và $(ABCD)$ bằng 60°, côsin của góc giữa đường thẳng MN và mặt phẳng (SBD) bằng

A. $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$. B. $\dfrac{\sqrt{41}}{41}$. C. $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$. D. $\dfrac{2\sqrt{41}}{41}$.

Lời giải.



Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ.

Đặt $SO = m, (m > 0)$.

$A\left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2};0;0\right)$; $S(0;0;m)$; $N\left(-\dfrac{a\sqrt{2}}{4};\dfrac{a\sqrt{2}}{4};0\right)$

$\Rightarrow M\left(\dfrac{a\sqrt{2}}{4};0;\dfrac{m}{2}\right)$. $\Rightarrow \overrightarrow{MN} = \left(-\dfrac{a\sqrt{2}}{2};\dfrac{a\sqrt{2}}{4};-\dfrac{m}{2}\right)$.

Mặt phẳng $(ABCD)$ có véc-tơ pháp tuyến $\vec{k} = (0;0;1)$

Ta có $\sin(MN,(ABCD)) = \dfrac{\left|\overrightarrow{MN}\cdot\vec{k}\right|}{\left|\overrightarrow{MN}\right|\left|\vec{k}\right|} = \dfrac{\dfrac{m}{2}}{\sqrt{\dfrac{5a^2}{8} + \dfrac{m^2}{4}}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow m^2 = \dfrac{15a^2}{8} + \dfrac{3m^2}{4}$

$\Rightarrow 2m^2 = 15a^2 \Rightarrow m = \dfrac{a\sqrt{30}}{2}$.

Nên $\overrightarrow{MN} = \left(-\dfrac{a\sqrt{2}}{2};\dfrac{a\sqrt{2}}{4};-\dfrac{a\sqrt{30}}{4}\right)$, mặt phẳng (SBD) có véc-tơ pháp tuyến là $\vec{i} = (1;0;0)$.

$$\Rightarrow \sin(MN,(SBD)) = \frac{\left|\overrightarrow{MN}\cdot\vec{i}\right|}{\left|\overrightarrow{MN}\right|\left|\vec{i}\right|} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{\frac{a^2}{2}+\frac{a^2}{8}+\frac{30a^2}{16}}} = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

Suy ra $\cos(MN,(SBD)) = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

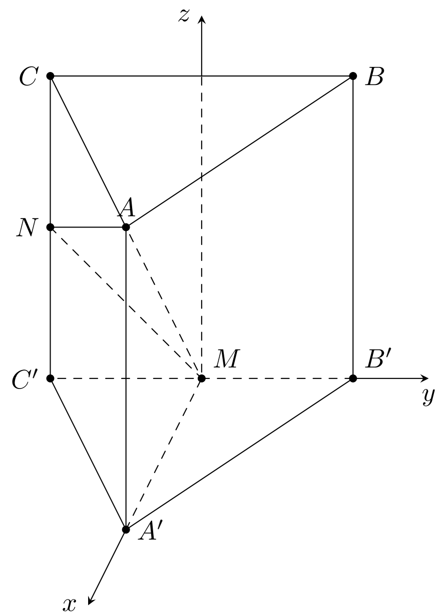
Chọn đáp án C □

Câu 84 (THPT Nguyễn Viết Xuân - 2020).

Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $AB = AC = a$, $\widehat{BAC} = 120°$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của $B'C'$ và CC'. Biết thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{4}$. Gọi α là góc giữa mặt phẳng (AMN) và mặt phẳng (ABC). Khi đó

A $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. B $\cos\alpha = \dfrac{1}{2}$. C $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{13}}{4}$. D $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải.



Ta có: $V_{ABC.A'BC'} = CC'\cdot S_{\triangle ABC} = \dfrac{\sqrt{3}a^3}{4}$

$\Rightarrow CC' = a$ vì $S_{\triangle ABC} = \dfrac{\sqrt{3}a^2}{4}$.

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ. Ta có $M \equiv O$.

$M(0;0;0)$, $A'\left(\dfrac{a}{2};0;0\right)$, $B'\left(0;\dfrac{\sqrt{3}a}{2};0\right)$, $C'\left(0;-\dfrac{\sqrt{3}a}{2};0\right)$;

$A\left(\dfrac{a}{2};0;a\right)$; $N\left(0;-\dfrac{\sqrt{3}a}{2};\dfrac{a}{2}\right)$.

Ta có: $(ABC)\perp Oz$ nên (ABC) có một véc-tơ pháp tuyến là $\vec{k} = (0;0;1)$.

Ta có $\overrightarrow{MA} = \left(\dfrac{a}{2};0;a\right)$, $\overrightarrow{MN} = \left(0;-\dfrac{\sqrt{3}a}{2};\dfrac{a}{2}\right)$.

Gọi $\vec{v}_1 = \dfrac{a}{2}\overrightarrow{MA} \Rightarrow \vec{v}_1 = (1;0;2)$,

$\vec{v}_2 = \dfrac{a}{2}\overrightarrow{MN} \Rightarrow \vec{v}_2 = \left(0;-\sqrt{3};1\right)$.

Khi đó mặt phẳng (AMN) song song hoặc chứa giá của hai véc-tơ không cùng phương là $\vec{v}_1$ và $\vec{v}_2$ nên có một véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n} = [\vec{v}_1, \vec{v}_2] = \left(2\sqrt{3};-1;-\sqrt{3}\right)$.

Vậy $\cos\alpha = \left|\cos\left(\vec{k},\vec{n}\right)\right| = \dfrac{\left|\vec{k}\cdot\vec{n}\right|}{\left|\vec{k}\right|\cdot|\vec{n}|} = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

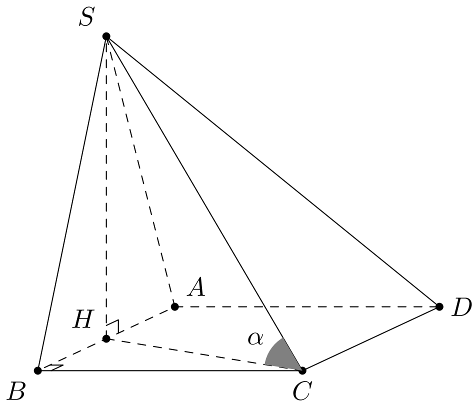
Chọn đáp án D □

Câu 85 (Chuyên Hạ Long - Quảng Ninh - 2020).

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng $2a$. Tam giác SAB cân tại S và $(SAB)\perp(ABCD)$. Biết thể tích của khối chóp $S.ABCD$ là $\dfrac{4a^3}{3}$. Gọi α là góc giữa SC và $(ABCD)$. Tính $\tan\alpha$.

A $\tan\alpha = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$. B $\tan\alpha = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$. C $\tan\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$. D $\tan\alpha = \dfrac{\sqrt{7}}{7}$.

Lời giải.



Gọi H là trung điểm AB.

Vì $\triangle SAB$ cân tại S nên $SH \perp AB$.

Và $\begin{cases}(SAB) \perp (ABCD)\\(SAB) \cap (ABCD) = AB\end{cases}$

nên suy ra $SH \perp (ABCD)$.

Khi đó ta có: $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3} \cdot SH \cdot S_{ABCD}$

$\Rightarrow SH = \dfrac{3V_{S.ABCD}}{S_{ABCD}} = \dfrac{3 \cdot \dfrac{4a^3}{3}}{(2a)^2} = a.$

Lại có HC là cạnh huyền trong tam giác vuông BHC nên $HC = \sqrt{BH^2 + BC^2} = a\sqrt{5}$.

Mặt khác, do $SH \perp (ABCD)$, $(H \in (ABCD))$ nên HC là hình chiếu của SC lên mặt phẳng $(ABCD)$. Suy ra $\alpha = \widehat{(SC, (ABCD))} = \widehat{SCH}$.

Vậy, trong tam giác vuông SHC, $\tan\alpha = \tan\widehat{SCH} = \dfrac{SH}{HC} = \dfrac{a}{a\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

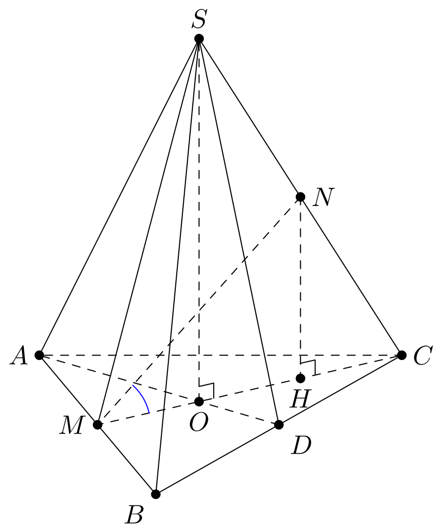
Chọn đáp án A □

Câu 86 (Chuyên Lê Hồng Phong - Nam Định - 2020).

Cho tứ diện đều $SABC$ cạnh a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, SC. Tính tan của góc giữa đường thẳng MN và mặt phẳng (ABC).

A $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. B $\dfrac{1}{2}$. C $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. D 1.

Lời giải.



Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp đáy.

Vì $SABC$ là tứ diện đều cạnh a nên $h = \dfrac{\sqrt{6}}{3}a$.

Gọi H là chân đường vuông góc từ N xuống (ABC)

$\Rightarrow H$ là trung điểm của OC

$\Rightarrow MH = \dfrac{2}{3}MC = \dfrac{2}{3} \cdot \sqrt{a^2 - \left(\dfrac{a}{2}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}a.$

Vì N là trung điểm của SC nên $NH = \dfrac{1}{2}h = \dfrac{\sqrt{6}}{6}a$.

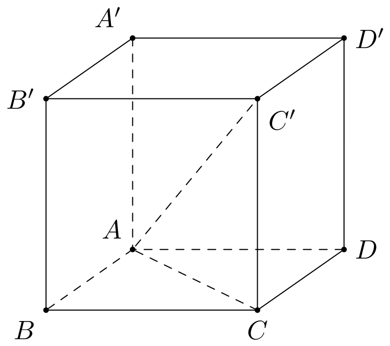
Góc giữa đường thẳng MN và mặt phẳng (ABC) là $\widehat{NMH}$.

Vậy $\tan\widehat{NMH} = \dfrac{NH}{MH} = \left(\dfrac{\sqrt{6}}{6}a\right) : \left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}a\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Chọn đáp án C □

Câu 87 (Mã 103 - 2022).

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ (tham khảo hình bên). Giá trị sin của góc giữa đường thẳng AC' và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng



(A) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. (B) $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$. (C) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. (D) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải.

Ta có $AC = CC'\sqrt{2} \Rightarrow AC' = \sqrt{AC^2 + CC'^2} = CC'\sqrt{3}$.

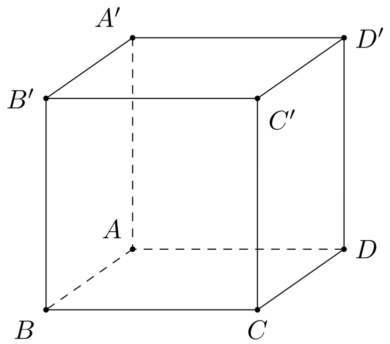
Khi đó $\widehat{(AC'; (ABCD))} = \widehat{(AC'; AC)} = \widehat{CAC'}$.

Suy ra $\sin \widehat{CAC'} = \dfrac{CC'}{AC'} = \dfrac{CC'}{CC'\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 88 (Mã 104-2022).

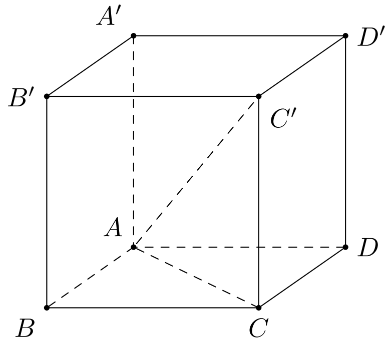
Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ (tham khảo hình vẽ bên). Giá trị sin của góc giữa đường thẳng AC' và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng



(A) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. (B) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. (C) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. (D) $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

Lời giải.

Hình chiếu của đường thẳng AC' lên mặt phẳng $(ABCD)$ là đường thẳng AC suy ra góc giữa đường thẳng AC' và mặt phẳng $(ABCD)$, suy ra $\widehat{(CA', (ACBCD))} = \widehat{(CA, CA')} = \widehat{CAC'}$.



Gọi cạnh hình lập phương bằng 1, suy ra $AC = \sqrt{2}$.

Xét tam giác vuông CAC' vuông tại C ta có:

$AC' = \sqrt{CC'^2 + AC'^2} = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + 1} = \sqrt{3}$.

Suy ra: $\sin\left(\widehat{CA', (ABCD)}\right) = \sin \widehat{CAC'} = \dfrac{CC'}{AC'} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Chọn đáp án (A) □

Dạng 3. Góc của mặt phẳng với mặt phẳng

Câu 89 (Chuyên KHTN - 2021). Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng a và cạnh bên bằng $\dfrac{3a}{2}$. Góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC)$ và (ABC) bằng

(A) $30°$. (B) $60°$. (C) $45°$. (D) $90°$.

Lời giải.

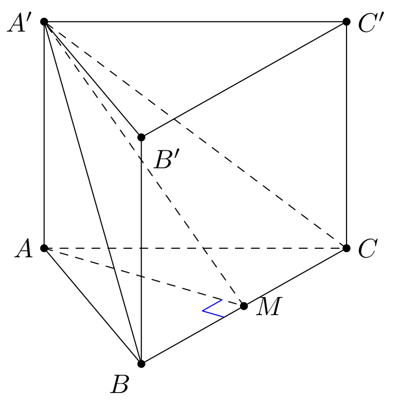
Gọi M là trung điểm của $BC \Rightarrow AM \perp BC$ (vì tam giác ABC đều)

$\Rightarrow AM = \sqrt{AB^2 - BM^2} = \sqrt{a^2 - \dfrac{a^2}{4}} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

$((A'BC), (ABC)) = \widehat{AMA'}$.

Lại có: $\tan \widehat{AMA'} = \dfrac{AA'}{AM} = \dfrac{\dfrac{3a}{2}}{\dfrac{a\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{3}$.

$\Rightarrow \widehat{AMA'} = 60^\circ \Leftrightarrow ((A'BC), (ABC)) = 60^\circ$.



Chọn đáp án B □

Câu 90 (Chuyên Quốc Học Huế - 2021).

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có O, O' lần lượt là tâm của các hình vuông $ABCD$ và $A'B'C'D'$. Góc giữa hai mặt phẳng $(A'BD)$ và $(ABCD)$ bằng

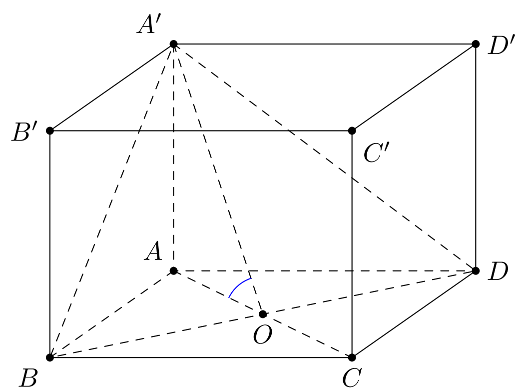
(A) $\widehat{A'AD}$. (B) $\widehat{A'OC}$. (C) $\widehat{A'OA}$. (D) $\widehat{OA'A}$.

Lời giải.

Ta có $ABCD$ là hình vuông nên $AO \perp BD$, đồng thời $BD \perp A'A \Rightarrow BD \perp (A'AO) \Rightarrow BD \perp A'O$.

Ta có $\begin{cases} (A'BD) \cap (ABCD) = BD \\ AO \perp BD \\ A'O \perp BD \end{cases}$

$\Rightarrow \left(\widehat{(A'BD); (ABCD)}\right) = \left(\widehat{A'O; AO}\right) = \widehat{A'OA}$.



Chọn đáp án C □

Câu 91 (THPT Thanh Chương 1- Nghệ An - 2021).

Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $2a$ cạnh bên bằng $\sqrt{5}a$. Góc giữa mặt bên và mặt phẳng đáy bằng

(A) 60°. (B) 30°. (C) 70°. (D) 45°.

Lời giải.

Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$. Khi đó $SO \perp (ABCD)$.

Gọi H là trung điểm cạnh CD. Ta có: $OH \perp CD$ và $HD = OH = \dfrac{CD}{2} = a$.

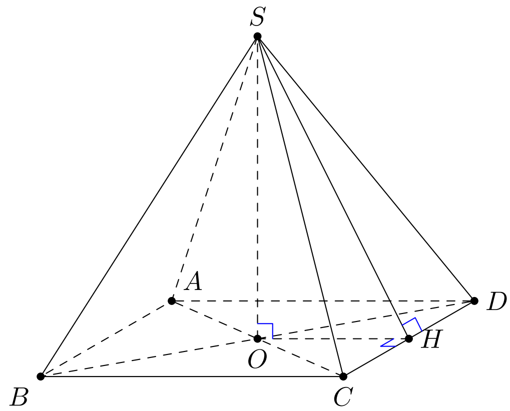
Do $\triangle SCD$ cân tại S nên $SH \perp CD$.

Vậy góc giữa mặt bên (SCD) và mặt phẳng $(ABCD)$ là góc $\widehat{SHO}$.

Trong $\triangle SHD$ vuông tại H ta có:

$SH = \sqrt{SD^2 - HD^2} = \sqrt{5a^2 - a^2} = 2a$.

Khi đó $\cos \widehat{SHO} = \dfrac{OH}{SH} = \dfrac{a}{2a} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \widehat{SHO} = 60^\circ$.



Chọn đáp án A □

Câu 92 (Chuyên Lê Khiết - Quảng Ngãi - 2021).

Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, cạnh $AC = a$, các cạnh bên $SA = SB = SC = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$. Tính góc tạo bởi mặt bên (SAB) và mặt phẳng đáy (ABC).

A $\dfrac{\pi}{6}$. B $\dfrac{\pi}{4}$. C $\arctan \sqrt{2}$. D $\arctan 2$.

Lời giải.

Gọi H là trung điểm của BC

$\Rightarrow HA = HB = HC = \dfrac{1}{2}BC = \dfrac{1}{2}a\sqrt{2}$.

mà $SA = SB = SC = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$ nên $SH \perp BC$,

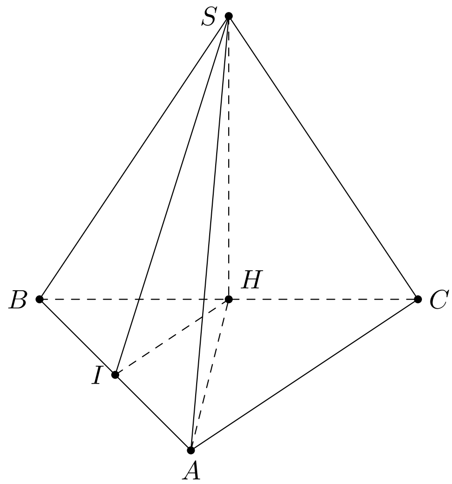
$\triangle SHA = \triangle SHB = \triangle SHC$.

suy ra $SH \perp (ABC)$.

Kẻ $HI \perp AB \Rightarrow \left(\widehat{(SAB),(ABC)}\right) = \left(\widehat{SI, HI}\right) = \widehat{SIH}$.

Ta có $HI = \dfrac{1}{2}AB = \dfrac{1}{2}AC = \dfrac{1}{2}a$ (do tam giác ABH vuông cân tại H).

$SH = \sqrt{SC^2 - HC^2} = \sqrt{\left(\dfrac{a\sqrt{6}}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = a$.



Xét tam giác SIH vuông tại H, ta có

$\tan \widehat{SIH} = \dfrac{SH}{IH} = \dfrac{a}{\frac{1}{2}a} = 2 \Rightarrow \widehat{SIH} = \arctan 2$.

Chọn đáp án D □

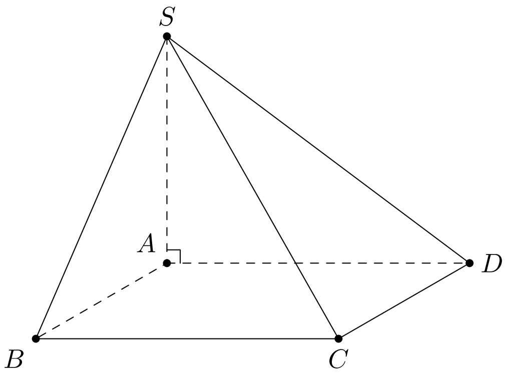
Câu 93 (Sở Cần Thơ - 2021). Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SA = \sqrt{3}a$. Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$. Giá trị $\tan \varphi$ là

A $\sqrt{3}$. B $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. C $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$. D $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.

Ta có
$$\begin{cases}(SBC)\cap(ABCD)=BC\\ SB\subset(SBC), SB\perp BC\\ AB\subset(ABCD), AB\perp BC\end{cases}$$
$\Rightarrow \widehat{(SBC),(ABCD)}=\widehat{SB,AB}=\widehat{SBA}$.

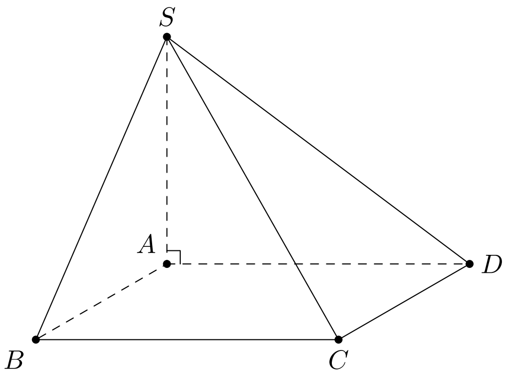
$\tan\varphi=\tan\widehat{SBA}=\dfrac{SA}{AB}=\dfrac{\sqrt{3}a}{a}=\sqrt{3}$.



Chọn đáp án A □

Câu 94 (Sở Cần Thơ - 2021).

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy ABCD là hình vuông, SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Góc giữa hai mặt phẳng (SCD) và mặt phẳng $(ABCD)$ là



A $\widehat{SDC}$. B $\widehat{SCD}$. C $\widehat{DSA}$. D $\widehat{SDA}$.

Lời giải.

Ta có $(SCD)\cap(ABCD)=CD$.

Mặt khác $CD\perp(SAD)\Rightarrow CD\perp SD$, lại có $AD\perp CD$.

Vậy góc giữa hai mặt phẳng (SCD) và mặt phẳng $(ABCD)$ là $\widehat{SDA}$.

Chọn đáp án D □

Câu 95 (Sở Sơn La - 2021). Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy tam giác đều cạnh a. Cạnh bên $SA=a\sqrt{3}$ vuông góc với mặt đáy (ABC). Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC). Khi đó $\sin\varphi$ bằng

A $\dfrac{\sqrt{3}}{5}$. B $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$. C $\dfrac{2\sqrt{3}}{5}$. D $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

Lời giải.

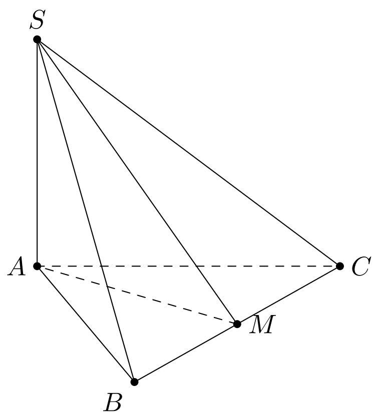
Ta có $(SBC)\cap(ABC)=BC$; gọi M là trung điểm BC (1), tam giác ABC đều nên $AM\perp BC$ (2).

$$\begin{cases}BC\perp AM\\ BC\perp SA\end{cases}\Rightarrow BC\perp SM\ (3).$$

Từ (1), (2) và (3) ta có $\varphi=\widehat{(SM,AM)}=\widehat{SMA}$.

$SM=\sqrt{SA^2+AM^2}=\sqrt{(a\sqrt{3})^2+\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\dfrac{a\sqrt{15}}{2}$.

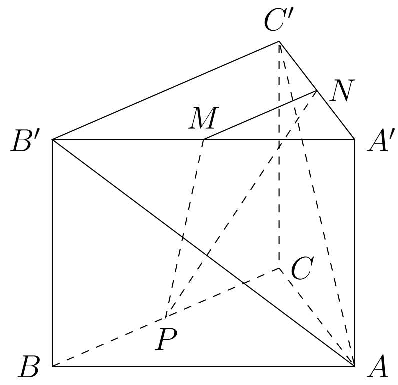
$\sin\varphi=\sin\widehat{SMA}=\dfrac{SA}{SM}=a\sqrt{3}:\dfrac{a\sqrt{15}}{2}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.



Chọn đáp án B □

Câu 96.

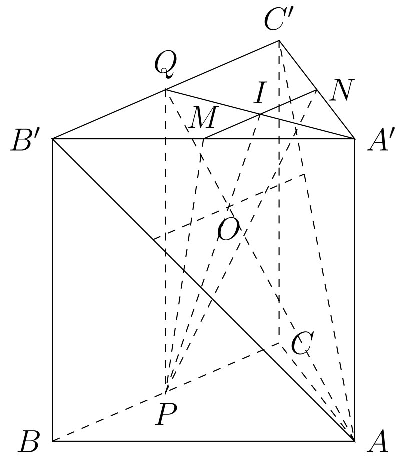
Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = 2\sqrt{3}$ và $AA' = 2$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh $A'B'$, $A'C'$ và BC (tham khảo hình vẽ bên dưới). Côsin của góc tạo bởi hai mặt phẳng $(AB'C')$ và (MNP) bằng



Ⓐ $\dfrac{6\sqrt{13}}{65}$. Ⓑ $\dfrac{\sqrt{13}}{65}$. Ⓒ $\dfrac{17\sqrt{13}}{65}$. Ⓓ $\dfrac{18\sqrt{13}}{65}$.

Lời giải.

Cách 1: dùng phương pháp cổ điển



Gọi I, Q lần lượt là trung điểm của MN, $B'C'$. Gọi $O = PI \cap AQ$.

Khi đó $\begin{cases} O \in (AB'C') \cap (MNP) \\ B'C' \parallel MN \\ B'C' \subset (AB'C'),\ MN \subset (MNP) \end{cases}$ nên giao tuyến của $(AB'C')$ và (MNP) là đường thẳng d qua O và $d \parallel MN \parallel B'C'$.

Tam giác $AB'C'$ cân tại A nên $AQ \perp B'C' \Rightarrow AQ \perp d$.

Tam giác PMN cân tại P nên $PI \perp MN \Rightarrow PI \perp d$.

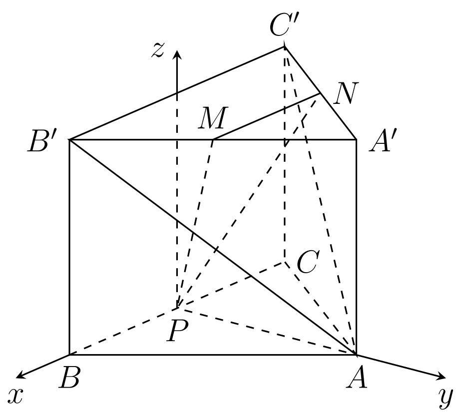
Vậy $(\widehat{(AB'C'), (MNP)}) = (\widehat{AQ, PI})$.

Ta có $AP = 3$, $AQ = \sqrt{13}$, $IP = \dfrac{5}{2}$.

Vì $\triangle OAP \backsim \triangle OQI$ và $\dfrac{AP}{IQ} = 2$ nên $OA = \dfrac{2}{3}AQ = \dfrac{2\sqrt{13}}{3}$; $OP = \dfrac{2}{3}IP = \dfrac{5}{3}$.

$\cos\left(\widehat{(AB'C'), (MNP)}\right) = \cos(\widehat{AQ, PI}) = \left|\cos(\widehat{AOP})\right| = \dfrac{OA^2 + OP^2 - AP^2}{2OA.OP} = \dfrac{\sqrt{13}}{65}$.

Cách 2: dùng phương pháp toạ độ hoá một hình không gian



Gắn hệ trục toạ độ $Pxyz$ như hình vẽ, lúc đó

$P(0,0,0)$, $A(0;3;0)$, $B'(\sqrt{3};0;2)$, $C'(-\sqrt{3};0;2)$, $A'(0;3;2)$

$$\Rightarrow M\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{3}{2}; 2\right), N\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{3}{2}; 2\right).$$

Ta có $\overrightarrow{PM} = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}; \dfrac{3}{2}; 2\right)$, $\overrightarrow{PN} = \left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}; \dfrac{3}{2}; 2\right)$

$$\Rightarrow \left[\overrightarrow{PM}, \overrightarrow{PN}\right] = \left(0; -2\sqrt{3}; \frac{3\sqrt{3}}{2}\right).$$

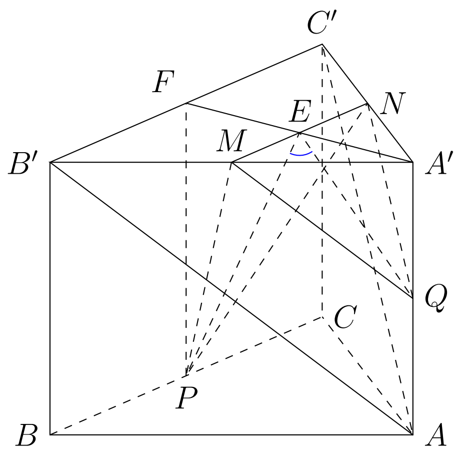
Và $\begin{cases} \overrightarrow{AB'} = (\sqrt{3}; -3; 2) \\ \overrightarrow{AC'} = (-\sqrt{3}; -3; 2) \end{cases}$

$\Rightarrow \left[\overrightarrow{AB'}, \overrightarrow{AC'}\right] = (0; -4\sqrt{3}; -6\sqrt{3})$.

Như vậy (PMN) có VTPT $\overrightarrow{n_1} = (0; -4; 3)$; $(AB'C')$ có VTPT $\overrightarrow{n_2} = (0; 2; 3)$.

Cuối cùng $\cos(\widehat{(PMN),(AB'C')}) = \dfrac{|\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}|}{|\overrightarrow{n_1}|.|\overrightarrow{n_2}|} = \dfrac{\sqrt{13}}{65}$.

Cách 3



Gọi Q là trung điểm của AA', khi đó mặt phẳng $(AB'C')$ song song với mặt phẳng (MNQ) nên góc giữa hai mặt phẳng $(AB'C')$ và (MNP) cũng bằng góc giữa hai mặt phẳng (MNQ) và (MNP).

Ta có:
$$\begin{cases} (MNP) \cap (MNQ) = MN \\ PE \subset (MNP); PE \perp MN \\ QE \subset (MNQ); QE \perp MN \end{cases}$$
$\Rightarrow \widehat{((MNP);(MNQ))} = \widehat{PEQ}$

hoặc $\widehat{((MNP);(MNQ))} = 180^\circ - \widehat{PEQ}$.

Tam giác ABC đều có cạnh $2\sqrt{3} \Rightarrow AP = 3$.

Tam giác APQ vuông tại A nên ta có: $PQ = \sqrt{AP^2 + AQ^2} = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$.

Tam giác $A'QE$ vuông tại A' nên ta có: $QE = \sqrt{A'E^2 + A'Q^2} = \sqrt{\left(\dfrac{3}{2}\right)^2 + 1^2} = \dfrac{\sqrt{13}}{2}$.

Tam giác PEF vuông tại F nên ta có: $PE = \sqrt{FP^2 + FE^2} = \sqrt{2^2 + \left(\dfrac{3}{2}\right)^2} = \dfrac{5}{2}$.

Áp dụng định lý hàm số côsin vào tam giác PQE ta có:

$$\cos\widehat{PEQ} = \dfrac{EP^2 + EQ^2 - PQ^2}{2 \cdot EP \cdot EQ} = \dfrac{\dfrac{25}{4} + \dfrac{13}{4} - 10}{2 \cdot \dfrac{5}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{13}}{2}} = -\dfrac{\sqrt{13}}{65}.$$

Do đó: $\cos\left(\widehat{(MNP);(AB'C')}\right) = \cos\left(180^\circ - \widehat{PEQ}\right) = -\cos\widehat{PEQ} = \dfrac{\sqrt{13}}{65}$.

Chọn đáp án B □

BẢNG ĐÁP ÁN

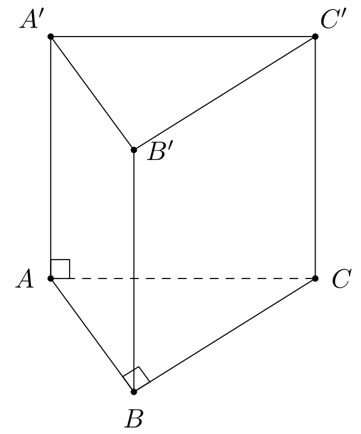
1. C	2. A	3. B	4. D	5. D	6. C	7. B	8. B	9. D	10. A
11. C	12. A	13. C	14. A	15. A	16. B	17. B	18. A	19. D	20. B
21. B	22. B	23. A	24. B	25. B	26. A	27. B	28. C	29. B	30. C
31. C	32. C	33. D	34. A	35. A	36. A	37. C	38. C	39. C	40. C
41. D	42. B	43. C	44. B	45. C	46. C	47. A	48. D	49. C	50. D
51. C	52. D	53. A	54. A	55. A	56. B	57. A	58. D	59. B	60. C
61. B	62. B	63. A	64. D	65. D	66. D	67. A	68. A	69. D	70. B
71. A	72. B	73. D	74. B	75. A	76. D	77. C	78. B	79. C	80. C
81. B	82. C	83. C	84. D	85. A	86. C	87. A	88. A	89. B	90. C
		91. A	92. D	93. A	94. D	95. B	96. B		

KHOẢNG CÁCH - GÓC TRONG KHÔNG GIAN

Dạng 1. Khoảng cách từ điểm đến mặt phẳng

Câu 1.

Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B và $AB = 4$ (tham khảo hình bên). Khoảng cách từ C đến mặt phẳng $(ABB'A')$ bằng



Ⓐ $2\sqrt{2}$. Ⓑ 2. Ⓒ $4\sqrt{2}$. Ⓓ 4.

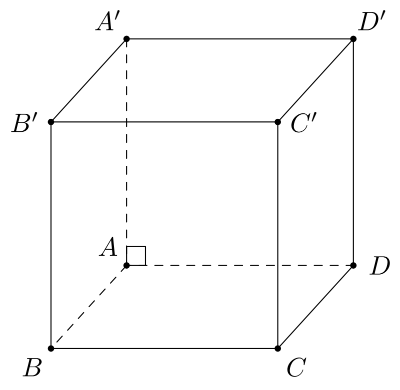
Lời giải.

Ta có $\begin{cases} CB \perp BB' \\ CB \perp AB \end{cases} \Rightarrow CB \perp (ABB'A')$ tại B. Vậy $\mathrm{d}\left(C;(ABB'A')\right) = CB = AB = 4$.

Chọn đáp án Ⓓ □

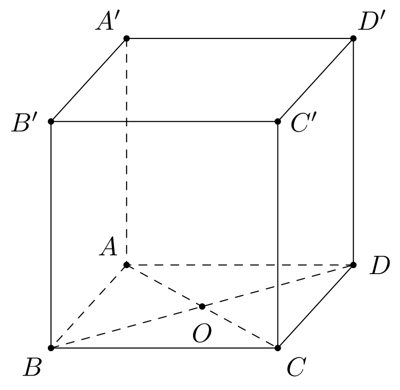
Câu 2.

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng 3 (tham khảo hình bên dưới). Khoảng cách từ B đến mặt phẳng $(ACC'A')$ bằng



Ⓐ 3. Ⓑ $3\sqrt{2}$. Ⓒ $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$. Ⓓ $\dfrac{3}{2}$.

Lời giải.



Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$.

Do $ABCD$ là hình vuông nên $BD \perp AC$ tại O.

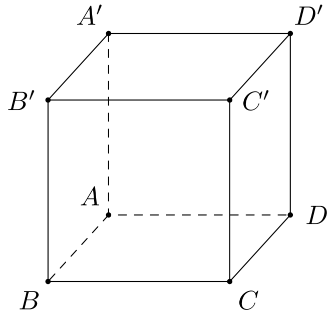
Do $ABCD.A'B'C'D'$ là hình lập phương nên $AA' \perp (ABCD) \Rightarrow AA' \perp BD \Rightarrow BO \perp (ACC'A')$ tại O

$\Rightarrow \mathrm{d}\left(B,(ACC'A')\right) = BO = \dfrac{1}{2}BD = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 3.

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng 3 (tham khảo hình bên). Khoảng cách từ B đến mặt phẳng $(ACC'A')$ bằng



(A) $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$. (B) $\dfrac{3}{2}$. (C) $3\sqrt{2}$. (D) 3.

Lời giải.

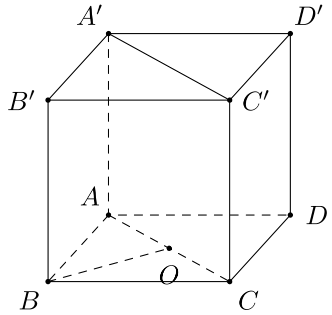
Gọi H là trung điểm của AC.

Vì $ABCD.A'B'C'D'$ là hình lập phương nên $BH \perp (ACC'A')$

$\Rightarrow \mathrm{d}\left(B;(ACC'A')\right) = BH = \dfrac{1}{2}AC$.

Mà $ABCD$ là hình vuông cạnh 3 nên $AC = 3\sqrt{2}$

$\Rightarrow \mathrm{d}\left(B;(ACC'A')\right) = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.



Chọn đáp án (A) □

Câu 4. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, $AB = 2a$ và SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SAB) bằng

(A) $\sqrt{2}a$. (B) $2a$. (C) a. (D) $2\sqrt{2}a$.

Lời giải.

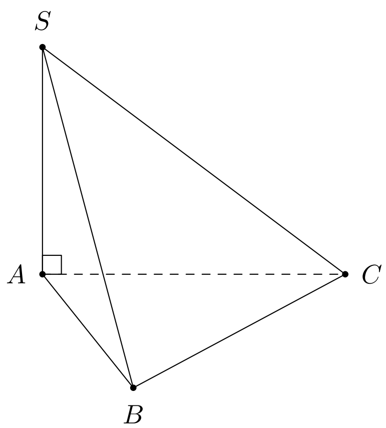
Vì $SA \perp (ABC)$ suy ra $CB \perp SA$.

Tam giác ABC vuông tại B, nên $CB \perp AB$ (2).

Từ (1) và (2), ta suy ra $CB \perp (SAB)$ nên khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SAB) bằng CB.

Mà tam giác ABC vuông cân tại B, suy ra $AB = BC = 2a$.

Vậy $\mathrm{d}_{(C,(SAB))} = CB = 2a$.



Chọn đáp án (B) □

Câu 5. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại C, $AC = a$ và SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SAC) bằng

(A) $\dfrac{1}{2}a$. (B) $\sqrt{2}a$. (C) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}a$. (D) a.

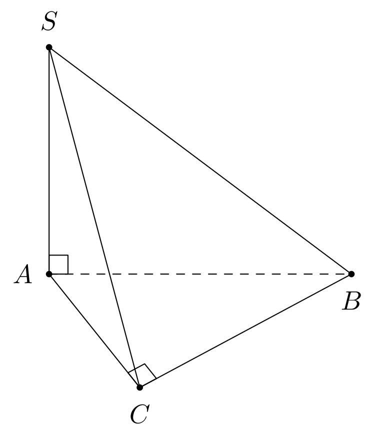
Lời giải.

Ta có: SA vuông góc với mặt đáy suy ra $SA \perp BC$.

Tam giác ABC vuông cân tại C suy ra $BC = a$ và $AC \perp BC$.

Do đó ta có: $\begin{cases} SA \perp BC \\ CA \perp BC \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAC)$.

Vậy khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SAC) bằng $BC = a$.



Chọn đáp án (D) □

Câu 6. (Mã 102 - 2021 Lần 1) Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại C, $AC = 3a$ và SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SAC) bằng

(A) $\dfrac{3}{2}a$. (B) $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}a$. (C) $3a$. (D) $3\sqrt{2}a$.

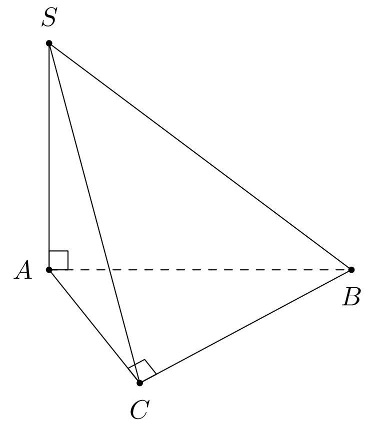
Lời giải.

Ta có $\triangle ABC$ vuông cân tại C nên $BC \perp AC(1)$ và $AC = BC = 3a$.

Mặt khác $SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp BC(2)$.

Từ (1) và (2) suy ra $BC \perp (SAC) \Rightarrow \mathrm{d}\left(B, (SAC)\right) = BC = 3a$.

Vậy khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SAC) bằng $3a$.



Chọn đáp án (C) □

Câu 7. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại B, $AB = 4a$ và SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SAB) bằng

(A) $4a$. (B) $4\sqrt{2}a$. (C) $2\sqrt{2}a$. (D) $2a$.

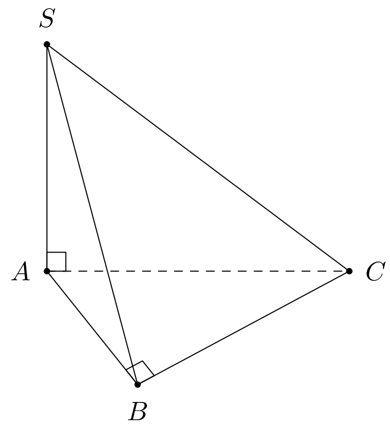
Lời giải.

Ta có: $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \ \ (SA \perp (ABC)) \\ AB \cap SA = A \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB)$ tại B.

Suy ra $\mathrm{d}\left(C, (SAB)\right) = CB$.

Xét $\triangle ABC$ vuông cân tại B có: $BC = AB = 4a$.

Vậy $\mathrm{d}\left(C, (SAB)\right) = 4a$.

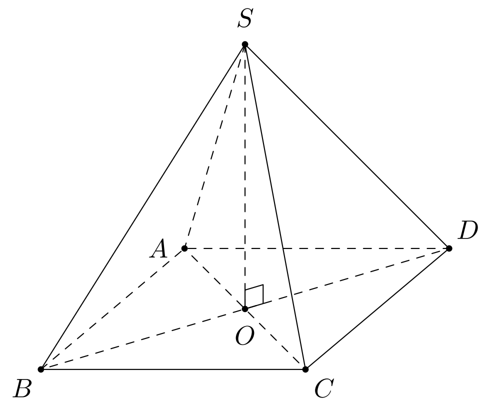


Chọn đáp án (A) □

Câu 8.

Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có độ dài cạnh đáy bằng 2 và độ dài cạnh bên bằng 3 (tham khảo hình vẽ bên). Khoảng cách từ S đến mặt phẳng $ABCD$ bằng

(A) $\sqrt{7}$. (B) 1. (C) 7. (D) $\sqrt{11}$.

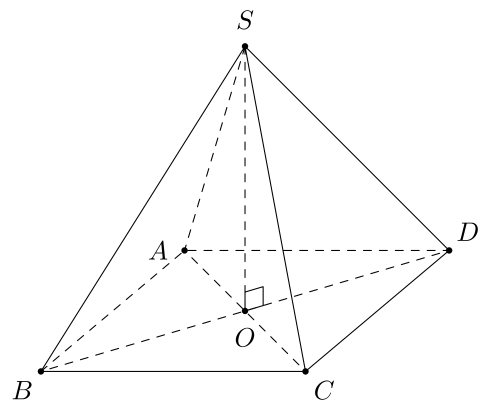


Lời giải.

Gọi O là tâm đáy $ABCD$. Vì $S.ABCD$ là hình chóp đều nên SO là đường cao khối chóp.

Khi đó $\mathrm{d}(S;ABCD)=SO$.

Ta có $AO=\dfrac{1}{2}AC=\dfrac{1}{2}\sqrt{AB^2+AC^2}=\sqrt{2}\Rightarrow SO=\sqrt{SA^2-AO^2}=\sqrt{3^2-2}=\sqrt{7}$.



Chọn đáp án (A) □

Câu 9. Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc và $OA=OB=2a$, $OC=a\sqrt{2}$. Khoảng cách từ điểm O đến mặt phẳng (ABC) bằng

(A) $a\sqrt{2}$. (B) a. (C) $\dfrac{a}{2}$. (D) $\dfrac{3a}{4}$.

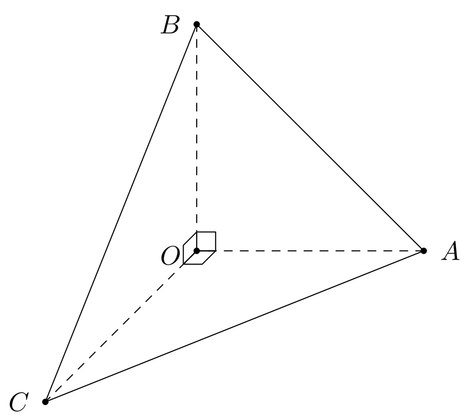
Lời giải.

Xét hệ trục tọa độ $Oxyz$ như sau điểm O là gốc tọa độ $OA\equiv Oz$; $OB\equiv Ox$ và $OC\equiv Oy$. Khi đó ta có $O(0;0;0)$; $A(0;0;2a)$; $B(2a;0;0)$ và $C\left(0;a\sqrt{2};0\right)$.

Phương trình mặt phẳng (ABC) là

$$\frac{x}{2a}+\frac{y}{a\sqrt{2}}+\frac{z}{2a}=1\Leftrightarrow x+\sqrt{2}y+z-2a=0.$$

Khoảng cách từ điểm O đến mặt phẳng (ABC) là $\mathrm{d}\left(O,(ABC)\right)=\dfrac{\left|0+\sqrt{2}\cdot 0+0-2a\right|}{\sqrt{1+2+1}}=a$.



Chọn đáp án (B) □

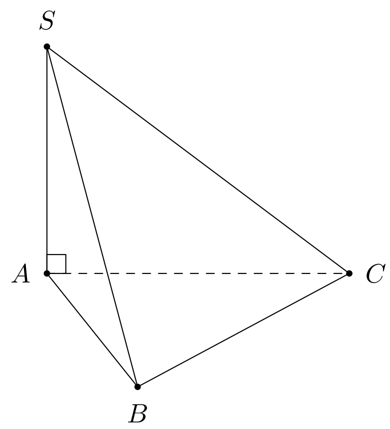
Câu 10. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $AB=a$, $AC=a\sqrt{2}$. Biết thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng $\dfrac{a^3}{2}$. Khoảng cách từ S đến mặt phẳng (ABC) bằng

Ⓐ $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. Ⓑ $\dfrac{a\sqrt{2}}{6}$. Ⓒ $\dfrac{3a\sqrt{2}}{4}$. Ⓓ $\dfrac{3a\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải.

Ta có $S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{2}AB \cdot AC = \dfrac{a^2\sqrt{2}}{2}$

$\Rightarrow \mathrm{d}\left(S,(ABC)\right) = \dfrac{3V_{S.ABC}}{S_{\triangle ABC}} = \dfrac{3 \cdot \dfrac{a^3}{2}}{\dfrac{a^2\sqrt{2}}{2}} = \dfrac{3a\sqrt{2}}{2}$.



Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 11. Cho khối chóp đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a. Gọi M là trung điểm của SA. Biết thể tích của khối chóp đó bằng $\dfrac{a^3}{2}$, khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (ABC) bằng

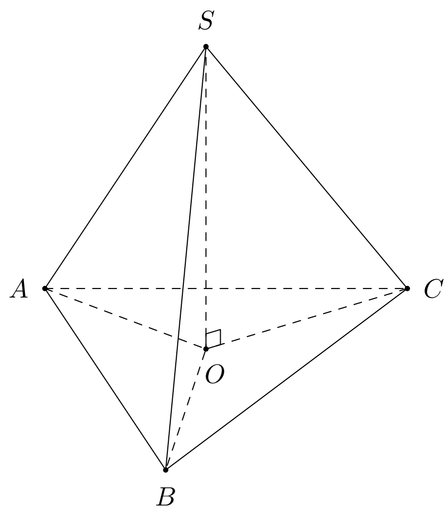
Ⓐ $a\sqrt{3}$. Ⓑ $3a$. Ⓒ $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. Ⓓ $2a\sqrt{3}$.

Lời giải.

Ta có $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}AB \cdot AC \cdot \sin\widehat{BAC} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Mà $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}S_{ABC} \cdot \mathrm{d}\left(S,(ABC)\right) \Rightarrow \mathrm{d}\left(S,(ABC)\right) = \dfrac{3V_{S.ABC}}{S_{ABC}} = 2a\sqrt{3}$.

Khi đó $\mathrm{d}\left(M,(ABC)\right) = \dfrac{1}{2}\mathrm{d}\left(S,(ABC)\right) = a\sqrt{3}$.

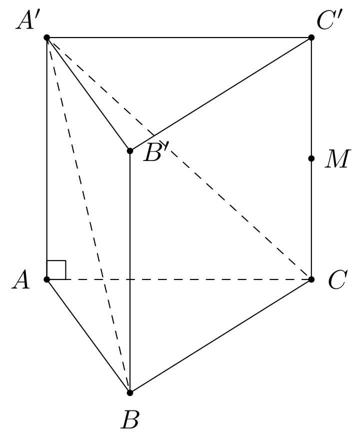


Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 12.

Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh đều bằng a. Gọi M là trung điểm của CC' (tham khảo hình bên). Khoảng cách từ M đến mặt phẳng $(A'BC)$ bằng

Ⓐ $\dfrac{\sqrt{21}a}{7}$. Ⓑ $\dfrac{\sqrt{2}a}{4}$. Ⓒ $\dfrac{\sqrt{21}a}{14}$. Ⓓ $\dfrac{\sqrt{2}a}{2}$.

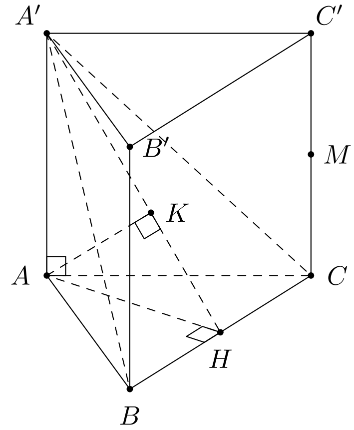


Lời giải.

Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của A lên BC và $A'H$. Ta có $\mathrm{d}\left(M,(A'BC)\right) = \dfrac{1}{2}\mathrm{d}\left(C',(A'BC)\right) = \dfrac{1}{2}\mathrm{d}\left(A,(A'BC)\right) = \dfrac{1}{2}AK$.

Mà $AH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$; $AA' = a$ nên $AK = \dfrac{AH\cdot AA'}{\sqrt{AH^2 + AA'^2}} = \dfrac{a\sqrt{21}}{7}$.

Vậy $\mathrm{d}\left(M;(A'BC)\right) = \dfrac{a\sqrt{21}}{14}$.



Chọn đáp án (C) □

Câu 13. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = a\sqrt{3}$. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng

(A) $\dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$. (B) $a\sqrt{3}$. (C) $\dfrac{a}{2}$. (D) $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.

Kẻ $AH \perp SB(*)$.

Ta có $BC \perp AB$ (Do $ABCD$ là hình vuông).

$BC \perp SA$ (Do $SA \perp (ABCD)$).

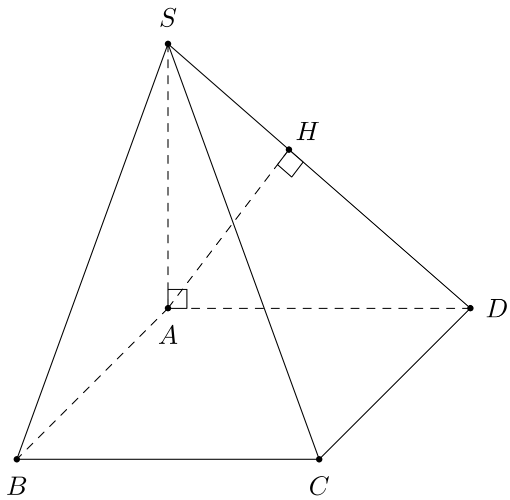
Suy ra $BC \perp (SAB)$.

Suy ra $BC \perp AH(**)$.

Từ $(*), (**)$ suy ra $AH \perp (SBC)$. Suy ra $\mathrm{d}\left(A,(SBC)\right) = AH$.

$\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{SA^2} = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{3a^2} = \dfrac{4}{3a^2}$.

Suy ra $AH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

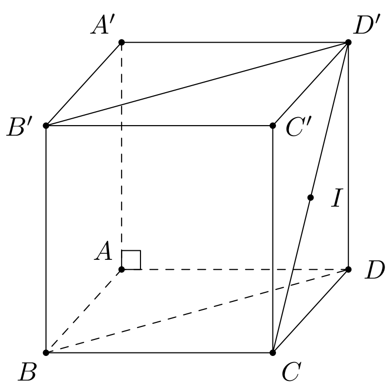


Chọn đáp án (D) □

Câu 14.

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh $a\sqrt{3}$, I là trung điểm CD' (tham khảo hình vẽ). Khoảng cách từ I đến mặt phẳng $(BDD'B')$ bằng

(A) $\dfrac{a\sqrt{2}}{4}$. (B) $\dfrac{a}{4}$. (C) $\dfrac{a\sqrt{6}}{4}$. (D) $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.



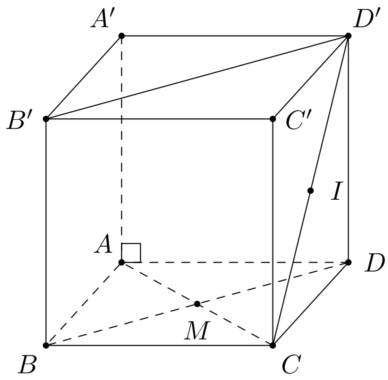
Lời giải.

Do $CI \cap (BDD'B') = D'$ nên ta có

$$\frac{\mathrm{d}\left(I,(BDD'B')\right)}{\mathrm{d}\left(C,(BDD'B')\right)} = \frac{ID'}{CD'} = \frac{1}{2}.$$

Gọi $\{M\} = BD \cap AC$. Khi đó $CM = \dfrac{AC}{2} = \dfrac{\sqrt{6}a}{2}$.

Vậy $\mathrm{d}\left(I,(BDD'B')\right) = \dfrac{1}{2} \cdot \mathrm{d}\left(C,(BDD'B')\right) = \dfrac{CM}{2} = \dfrac{\sqrt{6}a}{4}$.



Chọn đáp án C □

Câu 15. Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng 2022. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng $(BCC'B')$ bằng

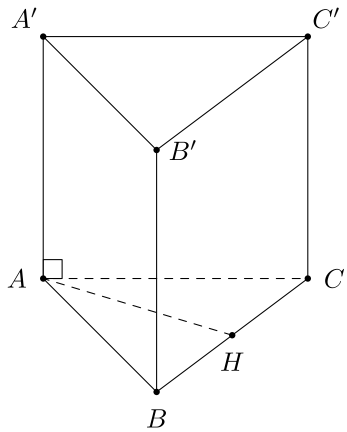
A. $1011\sqrt{3}$. B. $2022\sqrt{3}$. C. $2022\sqrt{2}$. D. $1011\sqrt{2}$.

Lời giải.

Gọi H là trung điểm của BC.

Ta có $\begin{cases} AH \perp BC \\ AH \perp BB' \end{cases} \Rightarrow AH \perp (BB'C'C)$

$\Rightarrow \mathrm{d}\left(A,(BCC'B')\right) = AH = 1011\sqrt{3}$.



Chọn đáp án A □

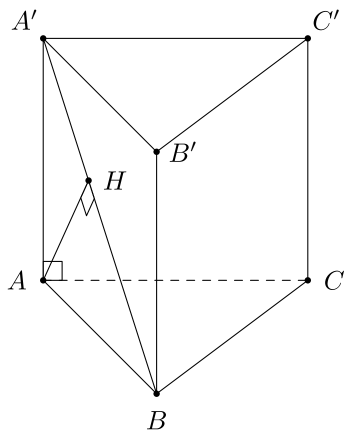
Câu 16. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $AB = a$, $AA' = 2a$. Tính theo a khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng $(A'BC)$.

A. $\dfrac{2a\sqrt{3}}{5}$. B. $\dfrac{a\sqrt{5}}{3}$. C. $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. D. $\dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$.

Lời giải.

Vẽ $AH \perp A'B \Rightarrow AH \perp (A'BC) \Rightarrow \mathrm{d}\left(A,(A'BC)\right) = AH$.

Ta có: $AH = \dfrac{AA' \cdot AB}{\sqrt{(AA')^2 + (AB)^2}} = \dfrac{2a \cdot a}{\sqrt{4a^2 + a^2}} = \dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$.



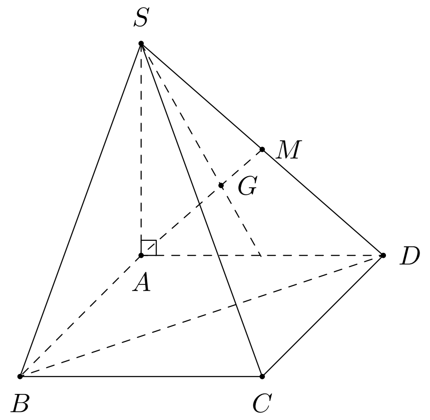
□

Câu 17. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $SA \perp (ABCD)$. Biết $SA = a$,

$AB = a$ và $AD = 2a$. Gọi G là trọng tâm tam giác SAD. Khoảng cách từ điểm G đến mặt phẳng (SBD) bằng

Ⓐ $\dfrac{a}{3}$. Ⓑ $\dfrac{2a}{9}$. Ⓒ $\dfrac{a}{6}$. Ⓓ $\dfrac{2a}{3}$.

Lời giải.



Gọi M là trung điểm SD

$$\Rightarrow \mathrm{d}\left(G;(SBD)\right) = \frac{GM}{AM}\mathrm{d}\left(A;(SBD)\right) = \frac{1}{3}\mathrm{d}\left(A;(SBD)\right).$$

Mà SA; AB; AD đôi một vuông góc

$\Rightarrow \dfrac{1}{\left[\mathrm{d}\left(A;(SBD)\right)\right]^2} = \dfrac{1}{SA^2} + \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{AD^2}$

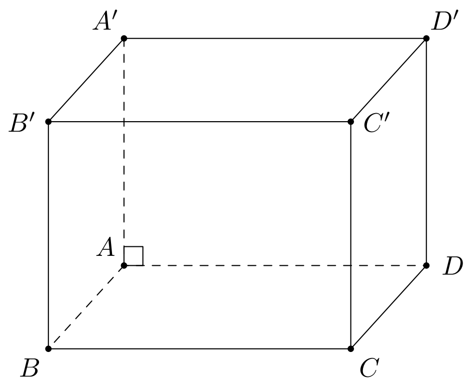
$\Rightarrow \mathrm{d}\left(A;(SBD)\right) = \dfrac{2a}{3}$.

Vậy khoảng cách từ điểm G đến mặt phẳng (SBD) là $\mathrm{d}\left(G;(SBD)\right) = \dfrac{1}{3}\mathrm{d}\left(A;(SBD)\right) = \dfrac{2a}{9}$.

Chọn đáp án Ⓓ □

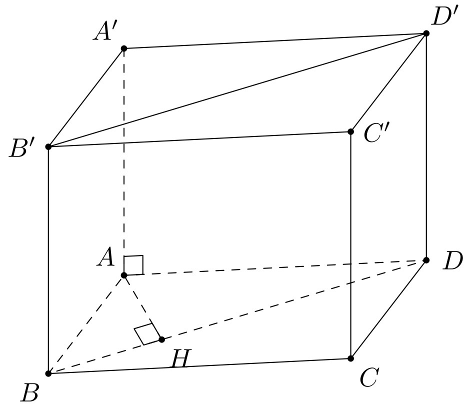
Câu 18.

Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a, AD = 2a$ (tham khảo hình vẽ bên). Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng $(BDD'B')$ bằng



Ⓐ $\dfrac{a\sqrt{5}}{2}$. Ⓑ $a\sqrt{5}$. Ⓒ $\dfrac{a\sqrt{5}}{5}$. Ⓓ $\dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$.

Lời giải.



Nhận thấy $(BDD'B') \perp (ABCD)$.

Trong mặt phẳng $(ABCD)$ kẻ $AH \perp BD (H \in BD) \Rightarrow AH \perp (BDD'B')$

$\Rightarrow \mathrm{d}\left(A, (BDD'B')\right) = AH$.

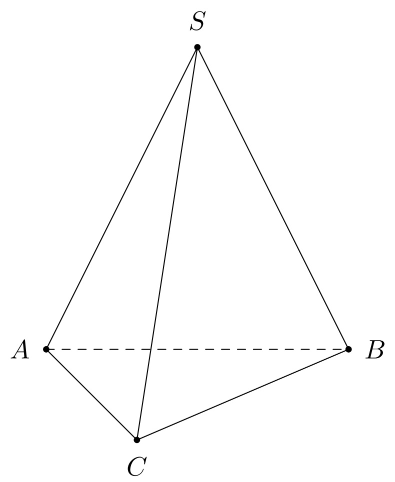
$\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{AD^2} = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{4a^2} = \dfrac{5}{4a^2} \Rightarrow AH = \dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$

$\Rightarrow \mathrm{d}\left(A, (BDD'B')\right) = \dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$.

Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 19.

Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều có cạnh bằng 3, mặt bên (SAB) là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy (tham khảo hình vẽ bên). Khoảng cách từ đỉnh S đến mặt phẳng (ABC) bằng



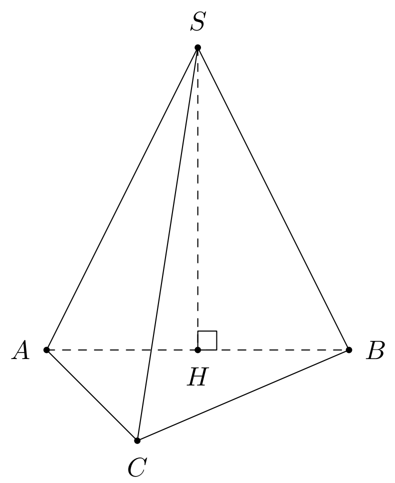
(A) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. (B) $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$. (C) 3. (D) $\dfrac{3}{2}$.

Lời giải.

Gọi H là trung điểm của $AB \Rightarrow SH \perp AB$ và $SH = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ (do SAB là tam giác đều có cạnh bằng 3).

Ta có $\begin{cases} (SAB) \perp (ABC) \\ (SAB) \cap (ABC) = AB \Rightarrow SH \perp (ABC). \\ SH \perp AB \end{cases}$

Khoảng cách từ đỉnh S đến mặt phẳng (ABC) bằng $SH = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.



Chọn đáp án (B) □

Câu 20. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật $AB = a\sqrt{3}$, $BC = a$, các cạnh bên của hình chóp cùng bằng $a\sqrt{5}$. Gọi M là trung điểm của SC. Tính khoảng cách từ M đến mặt phẳng $(ABCD)$:

(A) $2a$. (B) $a\sqrt{2}$. (C) $a\sqrt{3}$. (D) a.

Lời giải.

Gọi O là giao của hai đường chéo.

Dễ thấy cạnh bên của hình chóp bằng nhau nên chân đường cao của hình chóp chính là tâm của đáy.

Ta có $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{3a^2 + a^2} = 2a$

$\Rightarrow AO = \dfrac{1}{2}AC = a$.

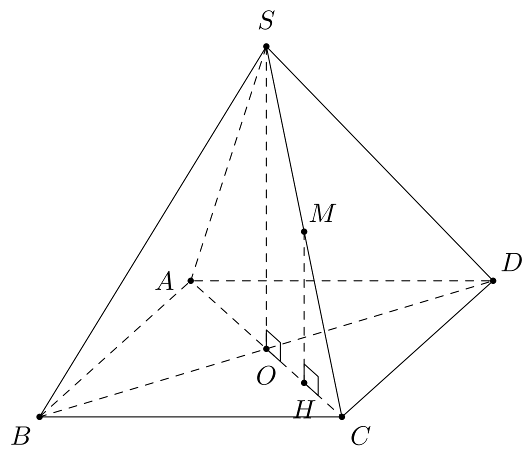
Khi đó ta có $SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \sqrt{5a^2 - a^2} = 2a$.

Gọi H là chân đường cao hạ từ M xuống AC

$\Rightarrow \mathrm{d}(M; (ABCD)) = MH$.

Mặt khác M là trung điểm của SC nên MH là đường trung bình của $\triangle SOC \Rightarrow MH = \dfrac{1}{2}SO = a$.

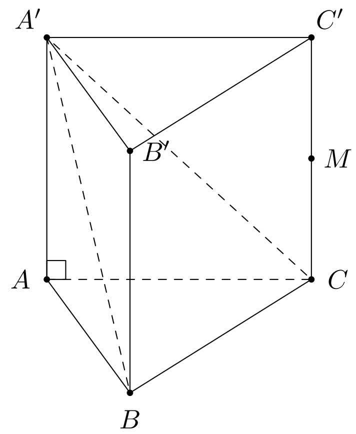
Vậy $\mathrm{d}(M; (ABCD)) = a$.



Chọn đáp án (D) ☐

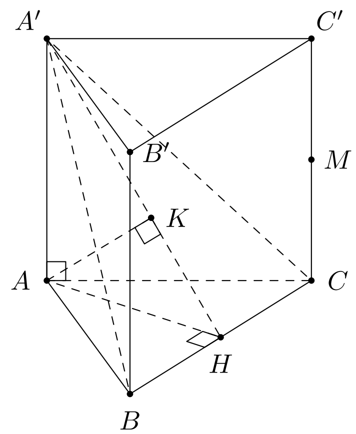
Câu 21.

Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a và $AA' = 2a$. Gọi M là trung điểm của CC' (tham khảo hình bên). Khoảng cách từ M đến mặt phẳng $(A'BC)$ bằng



(A) $\dfrac{a\sqrt{5}}{5}$. (B) $\dfrac{2\sqrt{5}a}{5}$. (C) $\dfrac{2\sqrt{57}a}{19}$. (D) $\dfrac{\sqrt{57}a}{19}$.

Lời giải.



Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của A lên BC và $A'H$. Ta có $\mathrm{d}\left(M,(A'BC)\right) = \dfrac{1}{2}\mathrm{d}\left(C',(A'BC)\right) = \dfrac{1}{2}\mathrm{d}\left(A,(A'BC)\right) = \dfrac{1}{2}AK$.

Mà $AH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$; $AA' = 2a$ nên $AK = \dfrac{AH \cdot AA'}{\sqrt{AH^2 + AA'^2}} = \dfrac{2a\sqrt{57}}{19}$.

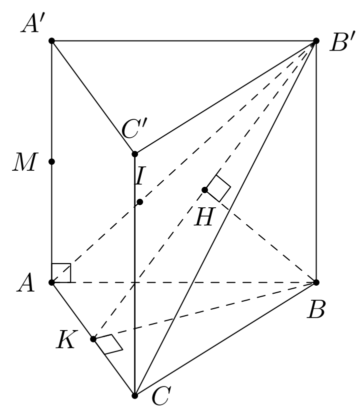
Vậy $\mathrm{d}\left(M;(A'BC)\right) = \dfrac{a\sqrt{57}}{19}$.

Chọn đáp án (D) ☐

Câu 22. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a và $A'A = 2a$. Gọi M là trung điểm của $A'A$ (tham khảo hình vẽ bên). Khoảng cách từ M đến mặt phẳng $(AB'C)$ bằng

(A) $\dfrac{\sqrt{57}a}{19}$. (B) $\dfrac{\sqrt{5}a}{5}$. (C) $\dfrac{2\sqrt{5}a}{5}$. (D) $\dfrac{2\sqrt{57}a}{19}$.

Lời giải.



Gọi $I = BM \cap AB'$ và K là trung điểm AC.

Ta có $\dfrac{\mathrm{d}\left(M,(AB'C)\right)}{\mathrm{d}\left(B,(AB'C)\right)} = \dfrac{MI}{BI} = \dfrac{MA}{BB'} = \dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow \mathrm{d}\left(M,(AB'C)\right) = \dfrac{1}{2}\mathrm{d}\left(B,(AB'C)\right) = \dfrac{BH}{2}$.

Xét tam giác $BB'K$ có

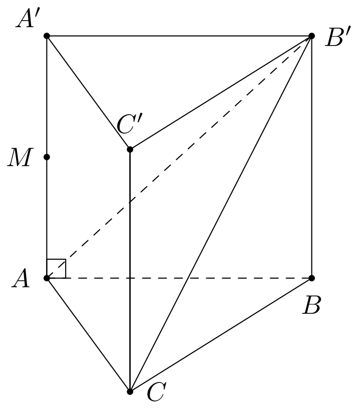
$$\frac{1}{BH^2} = \frac{1}{B'B^2} + \frac{1}{BK^2} = \frac{1}{(2a)^2} + \frac{1}{\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} \Rightarrow BH = \frac{2\sqrt{57}a}{19}.$$

Vậy $\mathrm{d}\left(M,(AB'C)\right) = \dfrac{BH}{2} = \dfrac{\sqrt{57}a}{19}$.

Chọn đáp án (A) ☐

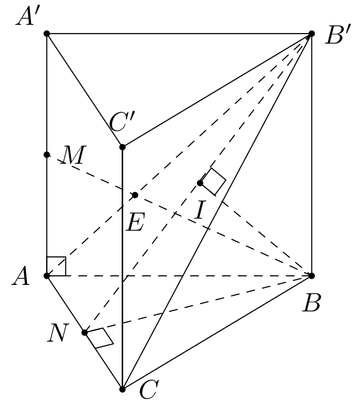
Câu 23.

Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng a. Gọi M là trung điểm của AA' (tham khảo hình vẽ). Khoảng cách từ M đến mặt phẳng $(AB'C)$ bằng



(A) $\dfrac{a\sqrt{2}}{4}$. (B) $\dfrac{a\sqrt{21}}{7}$. (C) $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. (D) $\dfrac{a\sqrt{21}}{14}$.

Lời giải.



Trong $(ABB'A')$, gọi E là giao điểm của BM và AB'. Khi đó hai tam giác EAM và $EB'B$ đồng dạng.

Do đó $\dfrac{\mathrm{d}\left(M,(AB'C)\right)}{\mathrm{d}\left(B,(AB'C)\right)} = \dfrac{EM}{EB} = \dfrac{MA}{BB'} = \dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow \mathrm{d}\left(M,(AB'C)\right) = \dfrac{1}{2}\cdot \mathrm{d}\left(B,(AB'C)\right)$.

Từ B kẻ $BN \perp AC$ thì N là trung điểm của AC và $BN = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, $BB' = a$.

Kẻ $BI \perp B'N$, ta có

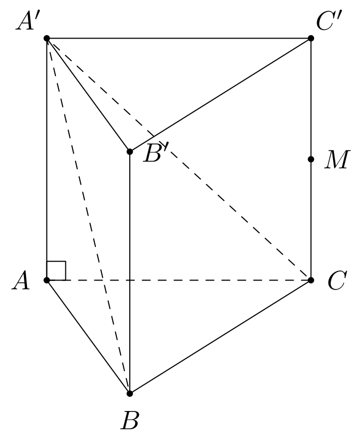
$$\mathrm{d}\left(B,(AB'C)\right) = BI = \frac{BB'\cdot BN}{\sqrt{BB'^2+BN^2}} = \frac{a\sqrt{21}}{7}.$$

Vậy $\mathrm{d}\left(M,(AB'C)\right) = \dfrac{1}{2}\cdot \mathrm{d}\left(B,(AB'C)\right) = \dfrac{a\sqrt{21}}{14}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 24.

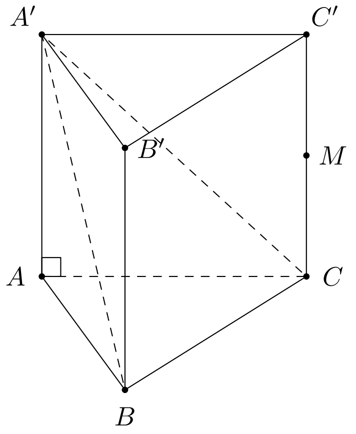
Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng a. Gọi M là trung điểm của CC' (tham khảo hình bên). Khoảng cách từ M đến mặt phẳng $(A'BC)$ bằng



(A) $\dfrac{\sqrt{21}a}{14}$. (B) $\dfrac{\sqrt{2}a}{2}$. (C) $\dfrac{\sqrt{21}a}{7}$. (D) $\dfrac{\sqrt{2}a}{4}$.

Lời giải.

$C'M \cap (A'BC) = C$, suy ra $\dfrac{\mathrm{d}\left(M,(A'BC)\right)}{\mathrm{d}\left(C',(A'BC)\right)} = \dfrac{C'M}{C'C} = \dfrac{1}{2}$.



Ta có

$V_{C'.A'BC} = \dfrac{1}{3}V_{ABC.A'B'C'} = \dfrac{1}{3} \cdot C'C \cdot S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{3} \cdot a \cdot \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

Lại có $A'B = a\sqrt{2}$, $CB = a$, $A'C = a\sqrt{2} \Rightarrow S_{A'BC} = \dfrac{a^2\sqrt{7}}{4}$.

Suy ra $\mathrm{d}\left(C',(A'BC)\right) = \dfrac{3V_{C'.A'BC}}{S_{\triangle A'BC}} = \dfrac{3 \cdot \dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}}{\dfrac{a^2\sqrt{7}}{4}} = \dfrac{a\sqrt{21}}{7}$.

Vậy $\mathrm{d}\left(M,(A'BC)\right) = \dfrac{1}{2}\mathrm{d}\left(C',(A'BC)\right) = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{a\sqrt{21}}{7} = \dfrac{a\sqrt{21}}{14}$.

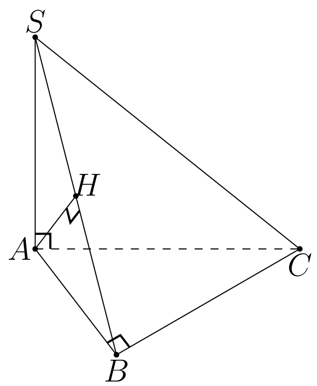
Chọn đáp án A □

Câu 25. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông đỉnh B, $AB = a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = 2a$. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng

A $\dfrac{2\sqrt{5}a}{5}$. B $\dfrac{\sqrt{5}a}{3}$. C $\dfrac{2\sqrt{2}a}{3}$. D $\dfrac{\sqrt{5}a}{5}$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB)$.



Kẻ $AH \perp SB$. Khi đó $AH \perp BC \Rightarrow AH \perp (SBC)$

$\Rightarrow AH$ là khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC).

Ta có $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{SA^2} + \dfrac{1}{AB^2} = \dfrac{1}{4a^2} + \dfrac{1}{a^2} = \dfrac{5}{4a^2}$

$\Rightarrow AH^2 = \dfrac{4a^2}{5} \Rightarrow AH = \dfrac{2\sqrt{5}a}{5}$.

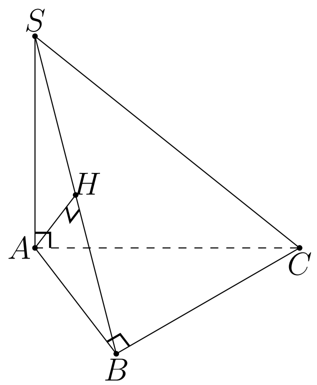
Chọn đáp án A □

Câu 26. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông đỉnh B, $AB = a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a$. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC) bằng

A $\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. B $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. C $\dfrac{a}{2}$. D a.

Lời giải.

Kẻ $AH \perp SB$ trong mặt phẳng (SBC).



Ta có: $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AH$.

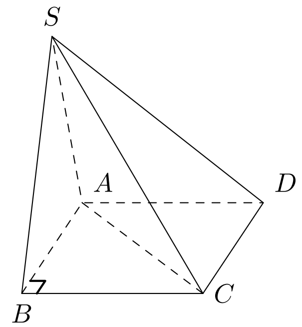
Vì $\begin{cases} AH \perp BC \\ AH \perp SB \end{cases} \Rightarrow AH \perp (SBC)$.

Vậy $\mathrm{d}\left(A,(SBC)\right) = AH = \dfrac{1}{2}SB = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Chọn đáp án (B) □

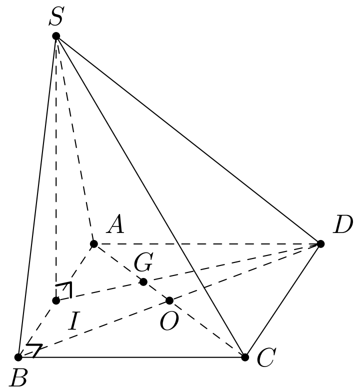
Câu 27.

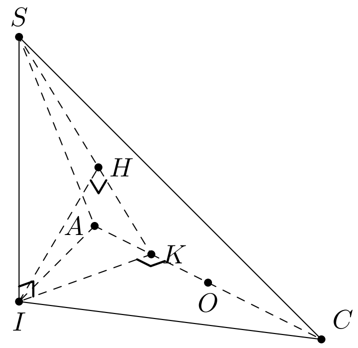
Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy (minh họa như hình vẽ bên). Khoảng cách từ D đến mặt phẳng (SAC) bằng



(A) $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. (B) $\dfrac{a\sqrt{21}}{7}$. (C) $\dfrac{a\sqrt{21}}{14}$. (D) $\dfrac{a\sqrt{21}}{28}$.

Lời giải.





* Gọi $O = AC \cap BD$ và G là trọng tâm tam giác ABD, I là trung điểm của AB ta có $SI \perp (ABCD)$ và $\dfrac{\mathrm{d}\left(D,(SAC)\right)}{\mathrm{d}\left(I,(SAC)\right)} = \dfrac{DG}{IG} = 2 \Rightarrow \mathrm{d}\left(D,(SAC)\right) = 2 \cdot \mathrm{d}\left(I,(SAC)\right)$.

* Gọi K là trung điểm của AO, H là hình chiếu của I lên SK ta có $IK \perp AC; IH \perp (SAC)$

$\Rightarrow \mathrm{d}\left(D,(SAC)\right) = 2 \cdot \mathrm{d}\left(I,(SAC)\right) = 2 \cdot IH$.

* Xét tam giác SIK vuông tại I ta có: $SI = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}; IK = \dfrac{BO}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{4}$ (do IK là đường trung bình của tam giác ABO).

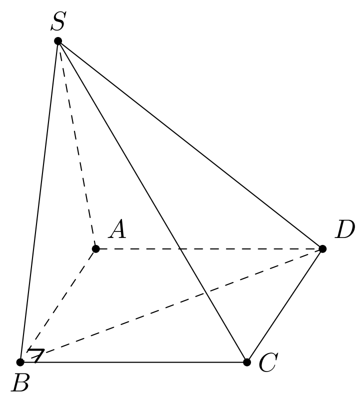
$$\frac{1}{IH^2} = \frac{1}{SI^2} + \frac{1}{IK^2} = \frac{4}{3a^2} + \frac{16}{2a^2} = \frac{28}{3a^2} \Rightarrow IH = \frac{a\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}$$

$$\Rightarrow \mathrm{d}\left(D,(SAC)\right) = 2 \cdot \mathrm{d}\left(I,(SAC)\right) = 2 \cdot IH = \frac{a\sqrt{21}}{7}.$$

Chọn đáp án (B) □

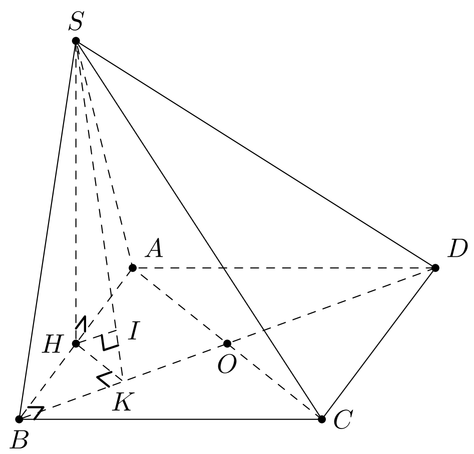
Câu 28.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy (minh họa như hình vẽ bên). Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBD) bằng



(A) $\dfrac{\sqrt{21}a}{14}$. (B) $\dfrac{\sqrt{21}a}{7}$. (C) $\dfrac{\sqrt{2}a}{2}$. (D) $\dfrac{\sqrt{21}a}{28}$.

Lời giải.



Gọi H là trung điểm của AB.

Khi đó, $SH \perp (ABCD)$.

Gọi O là giao điểm của AC và BD suy ra $AC \perp BD$.

Kẻ $HK \perp BD$ tại $K \Leftrightarrow K$ là trung điểm BO.

Kẻ $HI \perp SH$ tại I.

Khi đó: $\mathrm{d}\left(A,(SBD)\right) = 2\mathrm{d}\left(H,(SBD)\right) = 2HI$.

Xét tam giác SHK, có

$SH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}, HK = \dfrac{1}{2}AO = \dfrac{a\sqrt{2}}{4}$.

Khi đó: $\dfrac{1}{HI^2} = \dfrac{1}{SH^2} + \dfrac{1}{HK^2} = \dfrac{28}{3a^2} \Rightarrow HI = \dfrac{a\sqrt{21}}{14}$.

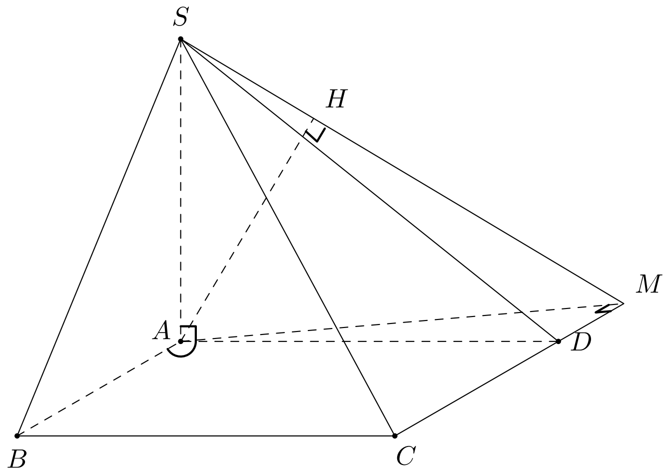
Suy ra: $\mathrm{d}\left(A,(SBD)\right) = 2HI = \dfrac{a\sqrt{21}}{7}$.

Chọn đáp án B □

Câu 29. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh a, $\widehat{BAD} = 60°$, $SA = a$ và SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Khoảng cách từ B đến (SCD) bằng

(A) $\dfrac{\sqrt{21}a}{3}$. (B) $\dfrac{\sqrt{15}a}{3}$. (C) $\dfrac{\sqrt{21}a}{7}$. (D) $\dfrac{\sqrt{15}a}{7}$.

Lời giải.



CÁCH 1.

Ta có $AB \parallel CD \Rightarrow \mathrm{d}\left(B,(SCD)\right) = \mathrm{d}\left(A,(SCD)\right)$.

Kẽ $MA \perp CD$ $(M \in CD)$, kẻ $AH \perp SM \Rightarrow AH \perp (SCD) \Rightarrow \mathrm{d}\left(A,(SCD)\right) = AH$.

Ta có $SA = a$; $AM = \dfrac{2S_{ACD}}{CD} = \dfrac{S_{ABCD}}{CD} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

$\dfrac{1}{SH^2} = \dfrac{1}{SA^2} + \dfrac{1}{AM^2} \Rightarrow SM = \dfrac{\sqrt{21}}{7}a$.

CÁCH 2.

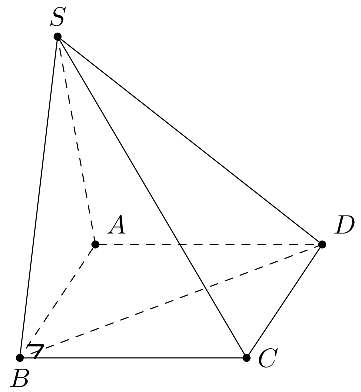
Ta có $AB \parallel CD \Rightarrow \mathrm{d}\left(B,(SCD)\right) = \mathrm{d}\left(A,(SCD)\right) = \dfrac{3V_{S.BCD}}{S_{SCD}} = \dfrac{3V_{S.ABCD}}{2S_{SCD}} = \dfrac{\sqrt{21}a}{7}$.

$(\triangle SCD$ có $SD = a\sqrt{2}; SC = 2a; CD = a)$.

Chọn đáp án C □

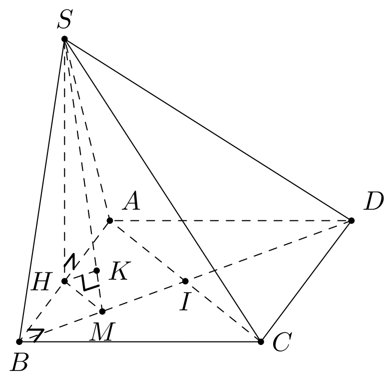
Câu 30.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy (minh họa như hình vẽ bên). Khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SBD) bằng



Ⓐ $\dfrac{\sqrt{21}a}{14}$. Ⓑ $\dfrac{\sqrt{2}a}{2}$. Ⓒ $\dfrac{\sqrt{21}a}{7}$. Ⓓ $\dfrac{\sqrt{21}a}{28}$.

Lời giải.



Gọi H là trung điểm của AB

$\Rightarrow SH \perp AB \Rightarrow SH \perp (ABCD)$.

Từ H kẻ $HM \perp BD$, M là trung điểm của BI và I là tâm của hình vuông.

Ta có: $\begin{cases} BD \perp HM \\ BD \perp SH \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SHM)$.

Từ H kẻ $HK \perp SM \Rightarrow HK \perp BD$ (Vì $BD \perp (SHM)$)

$\Rightarrow HK \perp (SBD) \Rightarrow \mathrm{d}(H,(SBD)) = HK$.

Ta có: $HM = \dfrac{AI}{2} = \dfrac{AC}{4} = \dfrac{\sqrt{2}a}{4}$, $SH = \dfrac{\sqrt{3}a}{2}$.

$$HK = \frac{HM \cdot HS}{\sqrt{HM^2 + HS^2}} = \frac{\dfrac{\sqrt{2}a}{4} \cdot \dfrac{\sqrt{3}a}{2}}{\sqrt{\left(\dfrac{\sqrt{2}a}{4}\right)^2 + \left(\dfrac{\sqrt{3}a}{2}\right)^2}} = \frac{\sqrt{21}a}{14}.$$

$\mathrm{d}(C,(SBD)) = \mathrm{d}(A,(SBD)) = 2\mathrm{d}(H,(SBD)) = 2HK = 2 \cdot \dfrac{\sqrt{21}a}{14} = \dfrac{\sqrt{21}a}{7}$.

Vậy $\mathrm{d}(C,(SBD)) = \dfrac{\sqrt{21}a}{7}$.

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 31. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $\sqrt{3}a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a$. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng

Ⓐ $\dfrac{\sqrt{6}a}{6}$. Ⓑ $\dfrac{\sqrt{3}a}{3}$. Ⓒ $\dfrac{\sqrt{5}a}{3}$. Ⓓ $\dfrac{\sqrt{3}a}{2}$.

Lời giải.

Ta có: $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB)$

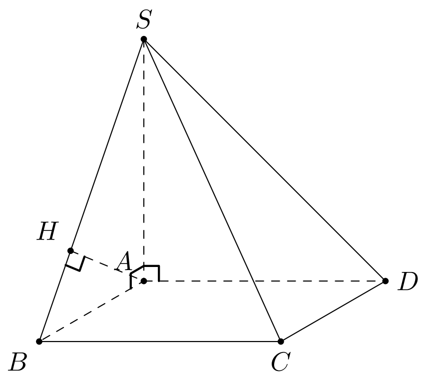
$\Rightarrow \begin{cases} (SAB) \perp (SBC) \\ (SAB) \cap (SBC) = SB. \end{cases}$

Trong mặt phẳng (SAB)

Kẻ $AH \perp SB \Rightarrow AH = \mathrm{d}\left(A,(SBC)\right)$.

$\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{SA^2} + \dfrac{1}{AB^2} = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{3a^2} = \dfrac{4}{3a^2}$.

$\Rightarrow \mathrm{d}\left(A,(SBC)\right) = AH = \dfrac{\sqrt{3}a}{2}$.



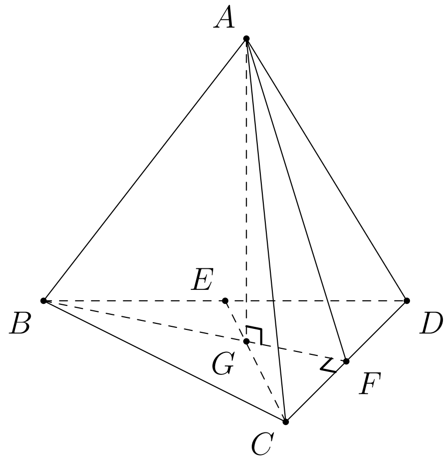
Chọn đáp án (D) □

Câu 32. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (BCD) bằng

(A) $\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$. (B) $\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. (C) $\dfrac{3a}{2}$. (D) $2a$.

Lời giải.

Gọi E, F, G lần lượt là trung điểm của BD, CD và trọng tâm tam giác BCD.



Tam giác BCD đều nên suy ra $CE = \dfrac{BC\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$,

$CG = \dfrac{2}{3}CE = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Tam giác ACG vuông tại G nên

$AG^2 = AC^2 - CG^2 = a^2 - \dfrac{a^2}{3} = \dfrac{2a^2}{3} \Rightarrow AG = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

Vậy $\mathrm{d}\left(A, (BCD)\right) = AG = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

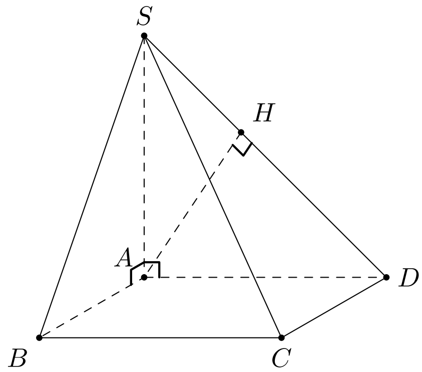
Chọn đáp án (B) □

Câu 33. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$, đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. Biết $AD = 2a$, $SA = a$. Khoảng cách từ A đến (SCD) bằng

(A) $\dfrac{3a}{\sqrt{7}}$. (B) $\dfrac{3a\sqrt{2}}{2}$. (C) $\dfrac{2a}{\sqrt{5}}$. (D) $\dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải.

Gọi H là hình chiếu của A lên SD ta chứng minh được $AH \perp (SCD)$.



$\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{SA^2} + \dfrac{1}{AD^2} \Rightarrow AH = \dfrac{2a}{\sqrt{5}}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 34. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại A, $AB = a$, $AC = a\sqrt{3}$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = 2a$. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC) bằng

(A) $\dfrac{a\sqrt{57}}{19}$. (B) $\dfrac{2a\sqrt{57}}{19}$. (C) $\dfrac{2a\sqrt{3}}{19}$. (D) $\dfrac{2a\sqrt{38}}{19}$.

Lời giải.

Kẻ $AH \perp BC, H \in BC$, $AK \perp SH, K \in SH$.

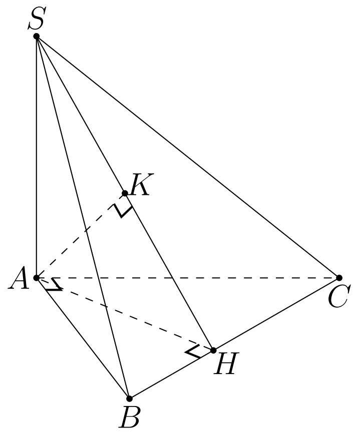
Ta chứng minh được $\mathrm{d}(A,(SBC)) = AK$.

Ta có $\dfrac{1}{AK^2} = \dfrac{1}{AH^2} + \dfrac{1}{AS^2}$

$= \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{AC^2} + \dfrac{1}{AS^2}$

$= \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{3a^2} + \dfrac{1}{4a^2} = \dfrac{19}{12a^2}$.

Suy ra $AK = \dfrac{2a\sqrt{3}}{\sqrt{19}}$ hay $\mathrm{d}(A,(SBC)) = \dfrac{2a\sqrt{57}}{19}$.

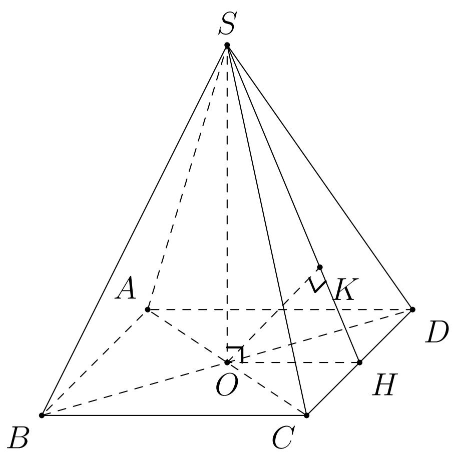


Chọn đáp án B □

Câu 35. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a và chiều cao bằng $a\sqrt{2}$. Tính khoảng cách d từ tâm O của đáy $ABCD$ đến một mặt bên theo a.

A $\mathrm{d} = \dfrac{2a\sqrt{5}}{3}$. B $\mathrm{d} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. C $\mathrm{d} = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$. D $\mathrm{d} = \dfrac{a\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải.



$S.ABCD$ là hình chóp tứ giác đều nên $ABCD$ là hình vuông và $SO \perp (ABCD)$.

Vẽ OH vuông góc với CD tại H thì H là trung điểm CD, $OH = \dfrac{a}{2}$.

Dễ thấy $CD \perp (SOH) \Rightarrow (SCD) \perp (SOH)$.

Trong (SOH), kẻ OK vuông góc với SH tại K thì $OK \perp (SCD)$.

Do đó $d\,(O,(SCD)) = OK$.

Tam giác vuông SOH có OK là đường cao nên $OK = \dfrac{OS \cdot OH}{\sqrt{OS^2 + OH^2}} = \dfrac{a\sqrt{2} \cdot \dfrac{a}{2}}{\sqrt{2a^2 + \dfrac{a^2}{4}}} = \dfrac{a\sqrt{2}}{3}$.

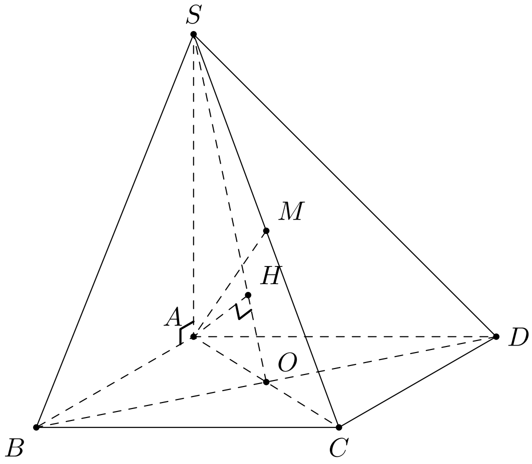
Vậy $\mathrm{d}\,(O,(SCD)) = \dfrac{a\sqrt{2}}{3}$.

Chọn đáp án D □

Câu 36. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{2}$. Gọi M là trung điểm cạnh SC. Khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (SBD) bằng

A $\dfrac{a\sqrt{2}}{4}$. B $\dfrac{a\sqrt{10}}{10}$. C $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. D $\dfrac{a\sqrt{10}}{5}$.

Lời giải.



Do M là trung điểm SC nên $\mathrm{d}\left(M,(SBD)\right)=\dfrac{1}{2}\mathrm{d}\left(C,(SBD)\right)=\dfrac{1}{2}\mathrm{d}\left(A,(SBD)\right)$.

Gọi H là hình chiếu của A lên $(SBD)\Rightarrow \mathrm{d}\left(A,(SBD)\right)=AH$.

Lại có AS, AB, AD đôi một vuông góc nên $\dfrac{1}{AH^2}=\dfrac{1}{AS^2}+\dfrac{1}{AB^2}+\dfrac{1}{AD^2}=\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{(a\sqrt{2})^2}=\dfrac{5}{2a^2}$

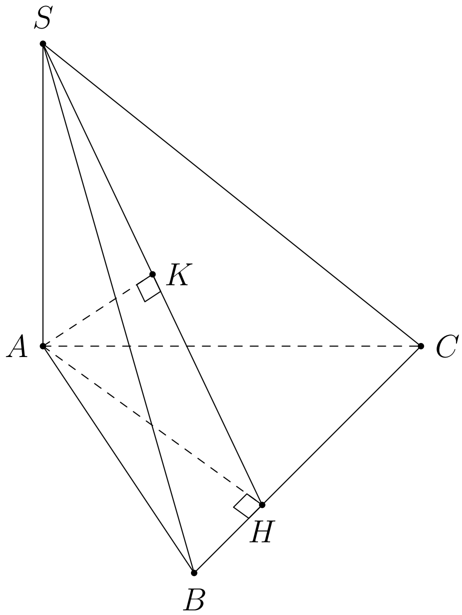
$\Rightarrow AH=\dfrac{a\sqrt{10}}{5}\Rightarrow \mathrm{d}\left(M,(SBD)\right)=\dfrac{a\sqrt{10}}{10}$.

Chọn đáp án B □

Câu 37. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $AB=a$, $AC=a\sqrt{3}$; SA vuông góc với đáy, $SA=2a$. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC) bằng

A $\dfrac{2a\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$. B $\dfrac{a\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$. C $\dfrac{a\sqrt{3}}{\sqrt{19}}$. D $\dfrac{2a\sqrt{3}}{\sqrt{19}}$.

Lời giải.



Ta có

$\begin{cases} SA\perp (ABC)\\ BC\subset (ABC)\end{cases}\Rightarrow SA\perp BC.$

Trong (ABC), kẻ $AH\perp BC$, mà $BC\perp SA\Rightarrow BC\perp (SAH)\Rightarrow BC\perp SH$.

Trong (SAH), kẻ $AK\perp SH$, mà $SH\perp BC\Rightarrow AK\perp (SBC)$ hay $\mathrm{d}\left(A;(SBC)\right)=AK$.

Vì $\triangle ABC$ vuông tại A nên $BC=\sqrt{AB^2+AC^2}=2a$.

Mặt khác có AH là đường cao nên $AH=\dfrac{AB\cdot AC}{BC}=\dfrac{\sqrt{3}a}{2}$.

Vì $\triangle SAH$ vuông tại A nên $SH=\sqrt{SA^2+AH^2}=\dfrac{\sqrt{19}a}{2}$.

Vậy có AK là đường cao $AK=\dfrac{SA\cdot AH}{SH}=\dfrac{2a\sqrt{3}}{\sqrt{19}}$.

Nhận xét. Trong thực hành làm toán trắc nghiệm ta nên áp dụng bài toán sau:

Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau và H là hình chiếu của O lên mặt phẳng (ABC). Khi đó $\dfrac{1}{OH^2}=\dfrac{1}{OA^2}+\dfrac{1}{OB^2}+\dfrac{1}{OC^2}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 38. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, $SA = a$ và SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC) bằng

(A) $\dfrac{\sqrt{2}a}{2}$. (B) $\dfrac{\sqrt{3}a}{7}$. (C) $\dfrac{\sqrt{21}a}{7}$. (D) $\dfrac{\sqrt{15}a}{5}$.

Lời giải.

Gọi M là trung điểm BC. Kẻ $AH \perp SM$ tại H.

Ta có $AM \perp BC$ và $SA \perp BC$ nên $BC \perp (SAM)$

$\Rightarrow BC \perp AH \quad (1)$.

Mà $AH \perp SM \quad (2)$.

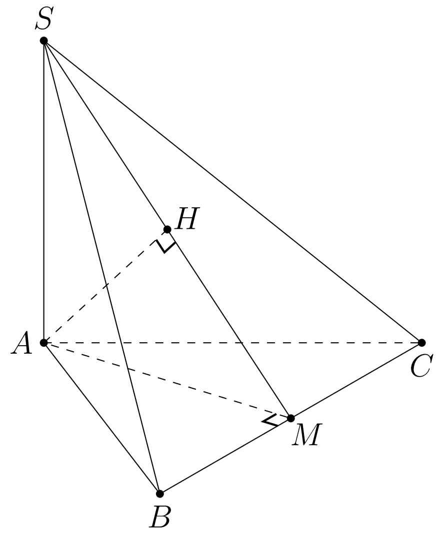
Từ (1) và (2) suy ra $AH \perp (SBC)$.

Do đó $\mathrm{d}\left(A, (SBC)\right) = AH$.

Xét tam giác SAM vuông tại A, có.

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AS^2} = \frac{1}{\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{7}{3a^2}$$

$$\Rightarrow AH = a\sqrt{\frac{3}{7}} = \frac{\sqrt{21}a}{7}.$$



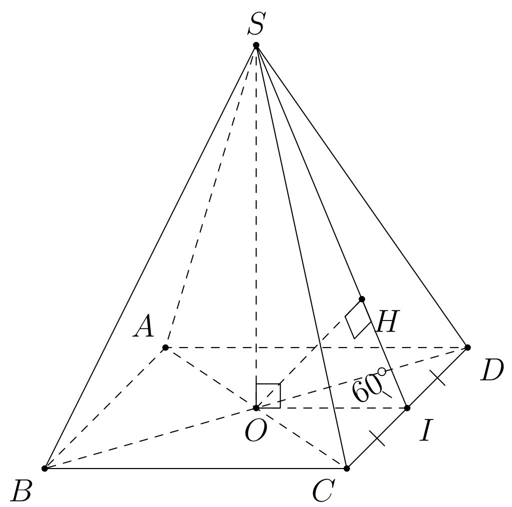
Chọn đáp án (C) □

Câu 39. Cho hình chóp đều $S.ABCD$, cạnh đáy bằng a, góc giữa mặt bên và mặt đáy là 60°. Tính khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (SCD).

(A) $\dfrac{a}{4}$. (B) $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$. (C) $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. (D) $\dfrac{a}{2}$.

Lời giải.

* Ta có: $\dfrac{\mathrm{d}\left(B, (SCD)\right)}{\mathrm{d}\left(O, (SCD)\right)} = \dfrac{BD}{OD} = 2 \Rightarrow \mathrm{d}\left(B, (SCD)\right) = 2 \cdot \mathrm{d}\left(O, (SCD)\right) = 2OH$. Trong đó H là hình chiếu vuông góc của O lên (SCD).



* Gọi I là trung điểm của CD.

Ta có: $\begin{cases}(SCD)\cap(ABCD)=CD\\ SI\perp CD\\ OI\perp CD\end{cases}\Rightarrow ((SCD);(ABCD))=(OI;SI)=\widehat{SIO}=60^\circ.$

Xét tam giác SOI vuông tại O ta có: $SO=OI\cdot\tan 60^\circ=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Xét $\triangle SOI$, ta có $\dfrac{1}{OH^2}=\dfrac{1}{OI^2}+\dfrac{1}{OS^2}=\dfrac{4}{a^2}+\dfrac{4}{3a^2}=\dfrac{16}{3a^2}\Rightarrow OH=\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

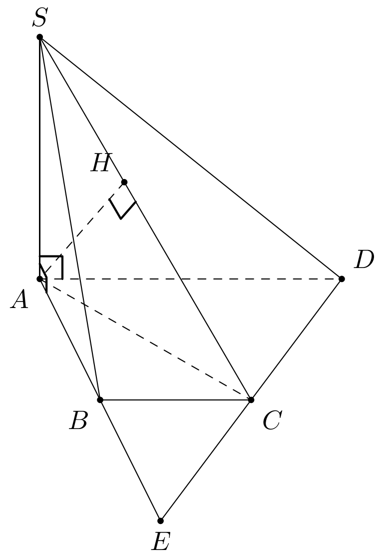
Vậy $\mathrm{d}\left(B;(SCD)\right)=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

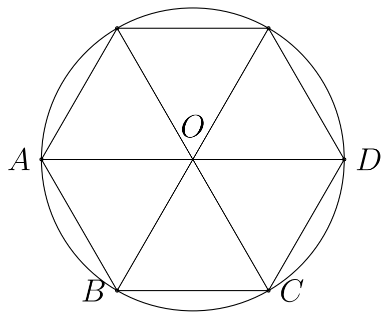
Chọn đáp án C □

Câu 40. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là nửa lục giác đều $ABCD$ nội tiếp trong đường tròn đường kính $AD=2a$ và có cạnh SA vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$ với $SA=a\sqrt{6}$. Tính khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SCD).

Ⓐ $a\sqrt{2}$. Ⓑ $a\sqrt{3}$. Ⓒ $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. Ⓓ $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.





Từ giả thiết suy ra: $AB=BC=CD=\dfrac{AD}{2}=a$, $AC=a\sqrt{3}$.

Gọi $E=AB\cap CD$, suy ra tam giác ADE đều.

Khi đó C là trung điểm của ED và $AC\perp ED$.

Dựng $AH\perp SC$ thì $AH\perp(SCD)$, suy ra $\mathrm{d}\left(A,(SCD)\right)=AH$.

Xét tam giác SAC vuông tại A, có AH là đường cao.

Suy ra: $\dfrac{1}{AH^2}=\dfrac{1}{SA^2}+\dfrac{1}{AC^2}\Rightarrow AH=\sqrt{2}a$.

Mà $\mathrm{d}\left(B,(SCD)\right)=\dfrac{1}{2}\mathrm{d}\left(A,(SCD)\right)=\dfrac{1}{2}AH=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Chọn đáp án C □

Câu 41. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B, $AD=2a$, $AB=BC=a$. Hình chiếu của S lên mặt phẳng đáy trùng với trung điểm H của AD và $SH=\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$. Tính khoảng cách d từ B đến mặt phẳng (SCD).

(A) $d = \dfrac{\sqrt{6}a}{8}$. (B) $d = a$. (C) $d = \dfrac{\sqrt{6}a}{4}$. (D) $d = \dfrac{\sqrt{15}a}{5}$.

Lời giải.

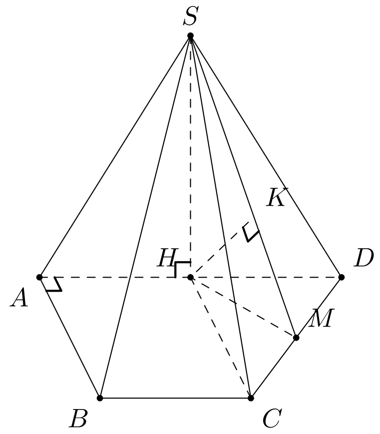
Gọi M là trung điểm của CD, K là hình chiếu của H lên SM.

Tam giác HCD vuông tại H có $CD = a\sqrt{2}$ và $HM = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Ta có $BH \parallel CD \Rightarrow d(B, (SCD)) = d(H, (SCD)) = HK$.

Tam giác SHM vuông tại H có $HK = \dfrac{HM \cdot HS}{\sqrt{HM^2 + HS^2}} = \dfrac{a\sqrt{6}}{4}$.

Vậy $d(B, (SCD)) = \dfrac{a\sqrt{6}}{4}$.



Chọn đáp án (C) □

Câu 42. Tứ diện $O.ABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau $OA = OB = OC = \sqrt{3}$. Khoảng cách từ O đến (ABC) bằng

(A) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. (B) 1. (C) $\dfrac{1}{2}$. (D) $\dfrac{1}{3}$.

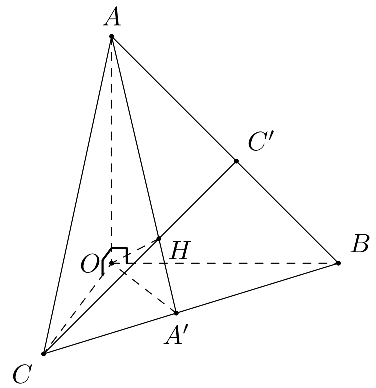
Lời giải.

Gọi A' là chân đường cao kẻ từ A lên BC, C' là chân đường cao kẻ từ C lên AB.

Gọi H là giao của AA' với CC' suy ra H là trực tâm của tam giác ABC. Ta dễ dàng chứng minh được $OH \perp (ABC)$.

Do đó $d(O; (ABC)) = OH$.

Tam giác OAA' vuông tại O, có OH là đường cao.



Suy ra $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OA^2} + \dfrac{1}{OA'^2}$ (1) .

Mà tam giác OBC vuông tại B, có OA' là đường cao.

Nên $\dfrac{1}{OA'^2} = \dfrac{1}{OB^2} + \dfrac{1}{OC^2}$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OA^2} + \dfrac{1}{OB^2} + \dfrac{1}{OC^2}$.

Thay $OA = OB = OC = \sqrt{3}$ vào, ta được $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3} = 1 \Leftrightarrow OH = 1$.

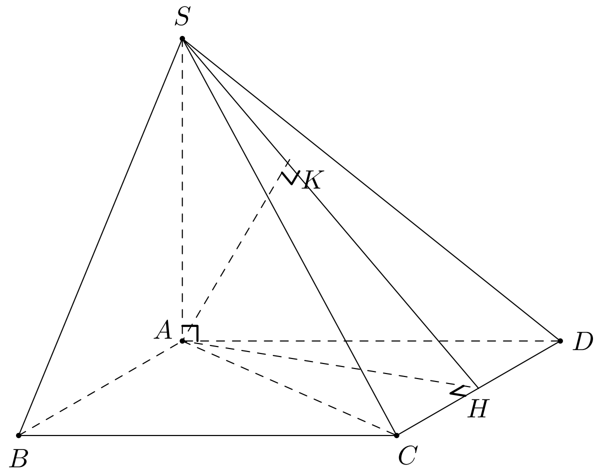
Vậy $d(O, (ABC)) = OH = 1$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 43. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a, $\widehat{ABC} = 60^\circ$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy, $SC = 2a$. Khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SCD) bằng

(A) $\dfrac{a\sqrt{15}}{5}$. (B) $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. (C) $\dfrac{2a}{\sqrt{5}}$. (D) $\dfrac{5a\sqrt{30}}{3}$.

Lời giải.



Cách 1: Sử dụng kiến thức ở lớp 11.

$ABCD$ là hình thoi cạnh a, $\widehat{ABC} = 60^\circ \Rightarrow \triangle ABC, \triangle ACD$ là các tam giác đều cạnh a.

Xét $\triangle SAC$ vuông tại A có: $SA = \sqrt{SC^2 - AC^2} = \sqrt{4a^2 - a^2} = a\sqrt{3}$.

Vì $AB \parallel CD$ nên $AB \parallel (SCD)$. Do đó $\mathrm{d}\,(B, (SCD)) = \mathrm{d}\,(A, (SCD))$.

Kẻ $AH \perp CD$ $(H \in CD)$. Suy ra H là trung điểm của cạnh CD, $AH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Kẻ $AK \perp SH (K \in SH)$ $\quad$ (1).

Ta có: $\begin{cases} CD \perp AH \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAH) \Rightarrow CD \perp AK \qquad (2).$

Từ (1) và (2) suy ra: $AK \perp (SCD) \Rightarrow \mathrm{d}\,(A, (SCD)) = AK$.

Xét $\triangle SAH$ vuông ở A: $\dfrac{1}{AK^2} = \dfrac{1}{AH^2} + \dfrac{1}{SA^2} = \dfrac{4}{3a^2} + \dfrac{1}{3a^2} = \dfrac{5}{3a^2} \Rightarrow AK = \dfrac{a\sqrt{15}}{5}$.

Vậy $\mathrm{d}\,(B, (SCD)) = \dfrac{a\sqrt{15}}{5}$.

Cách 2: Tính khoảng cách thông qua tính thể tích.

$ABCD$ là hình thoi cạnh a, $\widehat{ABC} = 60^\circ \Rightarrow \triangle ABC, \triangle ACD$ là các tam giác đều cạnh a.

Xét $\triangle SAC$ vuông tại A có: $SA = \sqrt{SC^2 - AC^2} = \sqrt{4a^2 - a^2} = a\sqrt{3}$.

Vì $AB \parallel DC$ nên $AB \parallel (SDC)$. Do đó $\mathrm{d}\,(B, (SCD)) = \mathrm{d}\,(A, (SCD)) = \dfrac{3V_{SACD}}{S_{\triangle SCD}}$.

$V_{SACD} = \dfrac{1}{3} SA \cdot S_{\triangle ACD} = \dfrac{1}{3} a\sqrt{3} \cdot \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a^3}{4}$.

Xét $\triangle SAC$ và $\triangle SAD$ có: $AD = AC = a$, SA chung, $\widehat{SAC} = \widehat{SAD} = 90^\circ$.

Do đó $\triangle SAC = \triangle SAD \Rightarrow SC = SD \Rightarrow \triangle SCD$ cân tại S.

Gọi H là trung điểm $CD \Rightarrow SH \perp CD$.

Xét $\triangle SHC$ vuông ở H: $SH = \sqrt{SC^2 - CH^2} = \sqrt{4a^2 - \dfrac{a^2}{4}} = \dfrac{a\sqrt{15}}{2}$.

$S_{\triangle SCD} = \dfrac{1}{2} SH \cdot CD = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{a\sqrt{15}}{2} \cdot a = \dfrac{a^2\sqrt{15}}{4}$.

$\mathrm{d}\,(A, (SCD)) = \dfrac{3 \cdot \dfrac{a^3}{4}}{\dfrac{a^2\sqrt{15}}{4}} = \dfrac{a\sqrt{15}}{5}$.

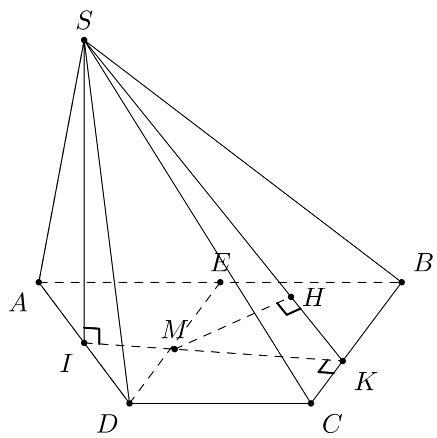
Vậy $\mathrm{d}\,(B, (SCD)) = \dfrac{a\sqrt{15}}{5}$.

Chọn đáp án A $\square$

Câu 44. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D; $AB = AD = 2a$; $DC = a$. Điểm I là trung điểm đoạn AD, hai mặt phẳng (SIB) và (SIC) cùng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Mặt phẳng (SBC) tạo với mặt phẳng $(ABCD)$ một góc $60°$. Tính khoảng cách từ D đến (SBC) theo a.

(A) $\dfrac{a\sqrt{15}}{5}$. (B) $\dfrac{9a\sqrt{15}}{10}$. (C) $\dfrac{2a\sqrt{15}}{5}$. (D) $\dfrac{9a\sqrt{15}}{20}$.

Lời giải.



Theo đề ta có $SI \perp (ABCD)$.

Gọi K là hình chiếu vuông góc của I trên BC.

Suy ra góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$ là $\widehat{SKI} = 60°$.

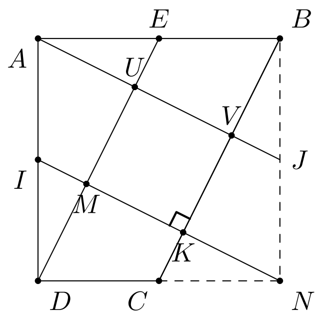
Gọi E là trung điểm của AB, $M = IK \cap DE$.

Do $BCDE$ là hình bình hành nên $DE \parallel (SBC)$

$\Rightarrow \mathrm{d}(D, (SBC)) = \mathrm{d}(DE, (SBC)) = \mathrm{d}(M, (SBC))$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của M trên SK.

Suy ra $\mathrm{d}(M, (SCD)) = MH$.



Dễ thấy: $IM = \dfrac{1}{2}AU = \dfrac{1}{2}KN = \dfrac{1}{2}MK$.

$IN = IM + MK + KN = \dfrac{1}{2}MK + MK + MK = \dfrac{5}{2}MK$.

Suy ra: $MK = \dfrac{2}{5}IN = \dfrac{2}{5}\sqrt{ID^2 + DN^2} = \dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$.

Trong tam giác MHK, ta có: $MH = MK \cdot \sin 60° = \dfrac{a\sqrt{15}}{5}$.

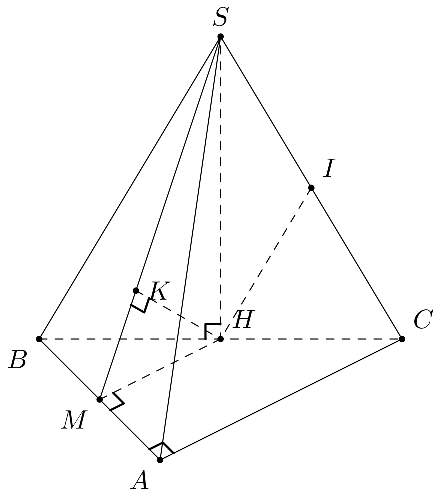
Vậy $\mathrm{d}(D, (SBC)) = \dfrac{a\sqrt{15}}{5}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 45. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại A, $AC = a$, I là trung điểm SC. Hình chiếu vuông góc của S lên (ABC) là trung điểm H của BC. Mặt phẳng (SAB) tạo với (ABC) một góc $60°$. Tính khoảng cách từ I đến mặt phẳng (SAB).

(A) $\dfrac{\sqrt{3}a}{4}$. (B) $\dfrac{\sqrt{3}a}{5}$. (C) $\dfrac{\sqrt{5}a}{4}$. (D) $\dfrac{\sqrt{2}a}{3}$.

Lời giải.



Gọi M là trung điểm cạnh AB thì MH là đường trung bình của tam giác ABC nên $MH = \dfrac{a}{2}$, $MH \parallel AC$
$\Rightarrow MH \perp AB$.
Mặt khác, do $SH \perp (ABC)$ nên $(SMH) \perp BC$.
Suy ra góc giữa (SAB) và (ABC) là góc giữa SM và MH; lại có $SH \perp MH$ nên góc này bằng góc $\widehat{SMH}$.
Từ giả thiết suy ra $\widehat{SMH} = 60^\circ$.
Gọi K là hình chiếu của H lên SM thì $HK \perp (SAB)$.
Xét tam giác vuông SMH có
$SH = MH \cdot \tan 60^\circ = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, $MH = \dfrac{a}{2} \Rightarrow HK = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.
Gọi khoảng cách từ I, C, H đến mặt phẳng (SAB) lần lượt là $\mathrm{d}\,(I,(SAB))\,, \mathrm{d}\,(C,(SAB))\,, \mathrm{d}\,(H,(SAB))$.

Cách 1. Ta có $\begin{cases} \mathrm{d}\,(I,(SAB)) = \dfrac{1}{2}\mathrm{d}\,(C,(SAB)) \\ \mathrm{d}\,(H,(SAB)) = \dfrac{1}{2}\mathrm{d}\,(C,(SAB)) \end{cases} \Rightarrow \mathrm{d}\,(I,(SAB)) = \mathrm{d}\,(H,(SAB)) = \dfrac{a\sqrt{3}}{4.}$

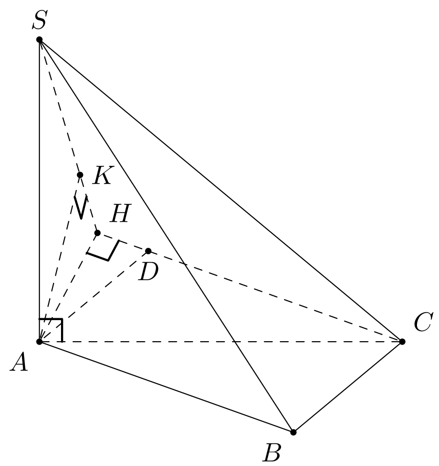
Cách 2. IH là đường trung bình của tam giác SBC nên $IH \parallel SB \Rightarrow IH \parallel (SAB)$
$\Rightarrow \mathrm{d}\,(I,(SAB)) = \mathrm{d}\,(H,(SAB)) = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 46. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác cân, $BA = BC = a$ và $\widehat{BAC} = 30^\circ$. Cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a$. Gọi D là điểm đối xứng với B qua AC. Khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SCD) bằng

(A) $\dfrac{2a\sqrt{21}}{7}$. (B) $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. (C) $\dfrac{a\sqrt{21}}{14}$. (D) $\dfrac{a\sqrt{21}}{7}$.

Lời giải.

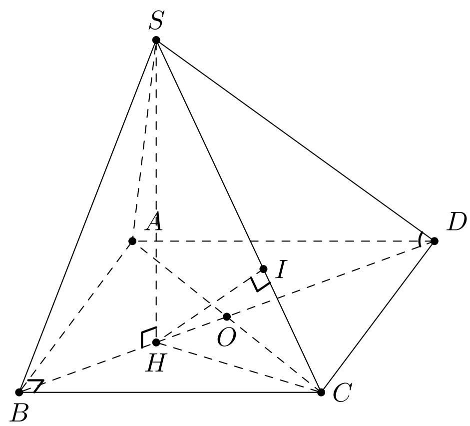


Tam giác ABC cân tại B có $\widehat{BAC} = 30^\circ$ và D đối xứng với B qua AC nên tứ giác $ABCD$ là hình thoi có $\widehat{ADC} = \widehat{ABC} = 120^\circ$.
Trong mặt phẳng (ABC), kẻ AH vuông góc với đường thẳng CD tại H. Khi đó $CD \perp AH$ và $CD \perp SA$ nên $CD \perp (SAH)$. Do đó $(SCD) \perp (SAH)$.
Trong mặt phẳng (SAH), kẻ $AK \perp SH$ tại K. Khi đó, $AK \perp (SCD)$ và $AK = \mathrm{d}\,(A,(SCD))$.
Ta có $AH = AD \cdot \sin 60^\circ = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.
Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông SAH, ta có $\dfrac{1}{AK^2} = \dfrac{1}{AH^2} + \dfrac{1}{SA^2} = \dfrac{7}{3a^2}$.
Từ đó, $AK = \dfrac{a\sqrt{21}}{7}$.
Vì $AB \parallel (SCD)$ nên $\mathrm{d}\,(B,(SCD)) = \mathrm{d}\,(A,(SCD)) = AK = \dfrac{a\sqrt{21}}{7}$.
Chọn đáp án (D) □

Câu 47. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a. Tam giác ABC là tam giác đều, hình chiếu vuông góc của đỉnh S lên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với trọng tâm tam giác ABC. Góc giữa đường thẳng SD và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng $30°$. Khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (SCD) bằng

Ⓐ $\dfrac{a\sqrt{21}}{7}$. Ⓑ $a\sqrt{3}$. Ⓒ a. Ⓓ $\dfrac{2a\sqrt{21}}{3}$.

Lời giải.



Gọi H là trọng tâm tam giác $\triangle ABC$, O là tâm của hình thoi $ABCD$.

Do $SH \perp (ABCD)$: $\left(\widehat{SD,(ABCD)}\right) = \widehat{SDH} = 30°$.

Xét tam giác $\triangle SDH$ vuông tại H có

$\widehat{SDH} = 30°$;

$HD = \dfrac{2}{3}BD = \dfrac{4}{3}BO = \dfrac{4}{3} \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$.

Mà $\dfrac{SH}{HD} = \tan\widehat{SDH}$

$\Rightarrow SH = HD \cdot \tan\widehat{SDH} = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3} \cdot \tan 30° = \dfrac{2a}{3}$.

Từ H hạ $HI \perp SC$ tại I.

$$\text{Ta có: } \begin{cases} HI \perp SC \\ HI \perp CD\,(CD \perp (SHC)) \\ SC, CD \subset (SCD) \\ SC \cap CD = \{C\} \end{cases} \Rightarrow HI \perp (SCD).$$

Từ đó, $\mathrm{d}(H,(SCD)) = HI$.

Xét tam giác $\triangle SHC$ vuông tại H, đường cao HI:

$$HI = \dfrac{HS \cdot HC}{\sqrt{HS^2 + HC^2}} = \dfrac{\dfrac{2a}{3} \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{3}}{\sqrt{\left(\dfrac{2a}{3}\right)^2 + \left(\dfrac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2}} = \dfrac{2a\sqrt{21}}{21}.$$

Mặt khác: $\dfrac{\mathrm{d}(B,(SCD))}{\mathrm{d}(H,(SCD))} = \dfrac{DB}{DH} = \dfrac{3}{2}$.

Vậy $\mathrm{d}(B,(SCD)) = \dfrac{3}{2}\mathrm{d}(H,(SCD)) = \dfrac{3}{2}HI = \dfrac{3}{2} \cdot \dfrac{2a\sqrt{21}}{21} = \dfrac{a\sqrt{21}}{7}$.

Cách khác:

Thể tích khối chóp $S.BCD$ là

$V_{S.BCD} = \dfrac{1}{3}SH \cdot S_{BCD} = \dfrac{1}{3}SH \cdot \dfrac{1}{2} \cdot CB \cdot CD \cdot \sin\widehat{BCD} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{2a}{3} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot a \cdot a \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{18}$ (đvtt).

Xét tam giác $\triangle SCD$ có $SD = \dfrac{SH}{\sin 30°} = \dfrac{4a}{3}$; $CD = a$; $SC = \sqrt{SH^2 + HC^2} = \dfrac{a\sqrt{7}}{3}$.

Diện tích tam giác $\triangle SCD$ là $S_{\triangle SCD} = \sqrt{p(p-SC)(p-SD)(p-CD)} = \dfrac{a^2\sqrt{7}}{6}$ (đvdt)

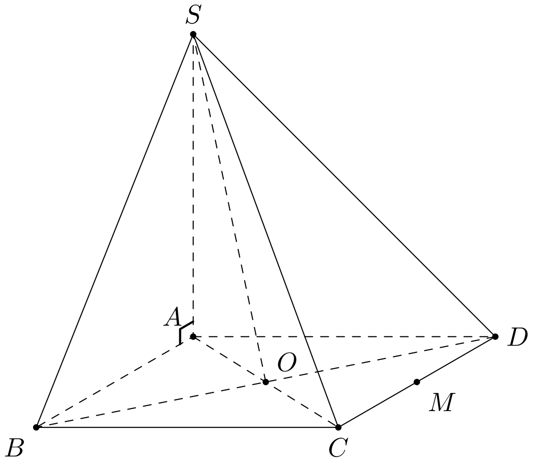
(với $p = \dfrac{SC + SD + CD}{2}$ là nửa chu vi tam giác $\triangle SCD$).

Vậy khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (SCD) là

$$\mathrm{d}\left(B,(SCD)\right)=\dfrac{3\cdot V_{B.SCD}}{S_{\triangle SCD}}=\dfrac{3\cdot V_{S.BCD}}{S_{\triangle SCD}}=\dfrac{3\cdot\dfrac{a^3\sqrt{3}}{18}}{\dfrac{a^2\sqrt{7}}{6}}=\dfrac{a\sqrt{21}}{7}.$$

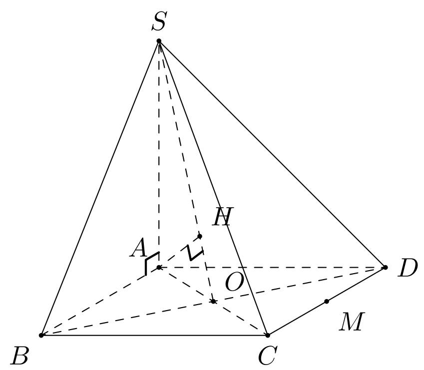
Chọn đáp án (A) □

Câu 48. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông, $AB=a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA=2a$ (minh họa như hình vẽ bên dưới). Gọi M là trung điểm của CD, khoảng cách giữa điểm M và mặt phẳng (SBD) bằng



(A) $\dfrac{2a}{3}$. (B) $\dfrac{a}{\sqrt{2}}$. (C) $\dfrac{a}{2}$. (D) $\dfrac{a}{3}$.

Lời giải.



Ta có $\mathrm{d}(M,(SBD)=\dfrac{1}{2}\mathrm{d}(C,(SBD)=\dfrac{1}{2}\mathrm{d}(A,(SBD))$.

Dựng AH vuông góc với SO tại H.

Ta có $\begin{cases}BD\perp SA\\BD\perp AO\end{cases}\Rightarrow BD\perp(SAO)\Rightarrow BD\perp AH$.

Mà $\begin{cases}AH\perp SO\\AH\perp BD\end{cases}\Rightarrow AH\perp(SBD)$.

Do đó, $\mathrm{d}(A,(SBD))=AH$.

$$\dfrac{1}{AH^2}=\dfrac{1}{AS^2}+\dfrac{1}{AB^2}+\dfrac{1}{AD^2}=\dfrac{1}{4a^2}+\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{a^2}=\dfrac{9}{4a^2}\Rightarrow AH=\dfrac{2a}{3}.$$

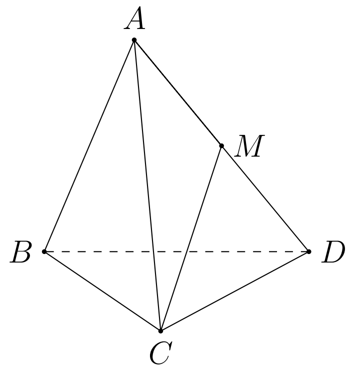
Vậy $\mathrm{d}(M,(SBD)=\dfrac{a}{3}$.

Chọn đáp án (D) □

Dạng 2. Khoảng cách đường thẳng với đường thẳng

Câu 49 ((Chuyên Lê Hồng Phong - Nam Định - 2020)).

Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a. Gọi M là trung điểm của cạnh AD. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và CM.



(A) $\dfrac{a\sqrt{33}}{11}$. (B) $\dfrac{a}{\sqrt{33}}$. (C) $\dfrac{a}{\sqrt{22}}$. (D) $\dfrac{a\sqrt{22}}{11}$.

Lời giải.

Ta có: $V_{ABCD} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$; $\dfrac{V_{ABCD}}{V_{ABCM}} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow V_{ABCM} = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{24}$.

$V_{ABCM} = \dfrac{1}{6}AB \cdot CM \cdot \mathrm{d}(AB, CM) \cdot \sin(AB, CM)$.

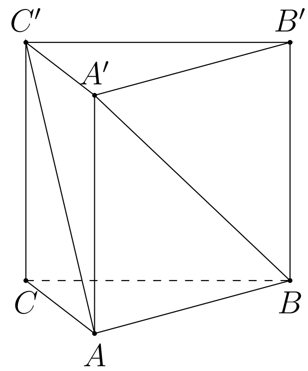
$\cos(AB, CM) = \dfrac{\left|\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CM}\right|}{AB \cdot CM} = \dfrac{\left|\overrightarrow{AB} \cdot \left(\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AC}\right)\right|}{AB \cdot CM} = \dfrac{\left|\dfrac{a^2}{4} - \dfrac{a^2}{2}\right|}{a \cdot a\dfrac{\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{6}$.

$\Rightarrow \sin(AB, CM) = \sqrt{1 - \dfrac{1}{12}} = \sqrt{\dfrac{11}{12}}$. Vậy $\mathrm{d}(AB, CM) = \dfrac{6V_{ABCM}}{AB \cdot CM \cdot \sin(AB, CM)} = \dfrac{a\sqrt{22}}{11}$.

Chọn đáp án (D) □

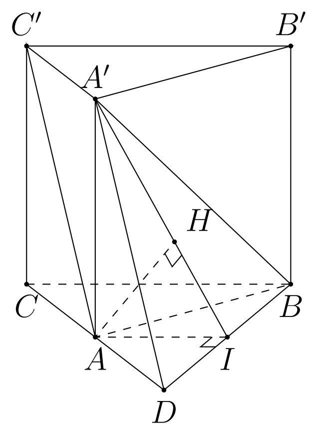
Câu 50 (Chuyên Phan Bội Châu - Nghệ An - 2020).

Cho hình lăng trụ đều có tất cả các cạnh có độ dài bằng 2 (tham khảo hình vẽ). Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AC' và $A'B$.



(A) $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$. (B) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. (C) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. (D) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$.

Lời giải.



Gọi D là điểm đối xứng của C qua A ta có tứ giác $ADA'C'$ là hình bình hành do đó $A'D \parallel AC'$, suy ra khoảng cách $\mathrm{d}(AC', BA') = \mathrm{d}(AC', (A'BD)) = \mathrm{d}(A, (A'BD))$.

Theo giả thiết $ABC.A'B'C'$ là lăng trụ đều nên $AA' \perp (ABC)$ hay $AA' \perp (ABCD)$ suy ra $A'A \perp BD \quad (1)$.

Ta có $\triangle ABD$ có $AB = AD$ nên là tam giác cân tại A, gọi I là trung điểm BD ta có $AI \perp BD \quad (2)$.

Xét tam giác $\triangle BCD$ có A, I lần lượt là trung điểm của DC, DB nên $AI = \dfrac{1}{2}BC = 1$.

Trong mặt phẳng $(A'AI)$ dựng $AH \perp A'I; H \in A'I (3)$.

Từ (1) và (2) suy ra $BD \perp (A'AI) \Rightarrow BD \perp AH (4)$.

Từ (3) và (4) suy ra $AH \perp (A'BD)$ do đó khoảng cách $\mathrm{d}(A, (SBD)) = AH$.

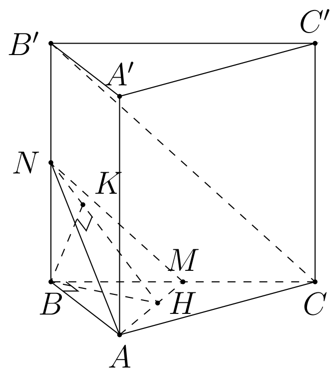
Trong tam giác $A'AI$ vuông tại A ta có $AH = \dfrac{AI \cdot AA'}{\sqrt{AI^2 + (AA')^2}} = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$.

Chọn đáp án A □

Câu 51 (Đại Học Hà Tĩnh - 2020). Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông và $AB = BC = a$, $AA' = a\sqrt{2}$, M là trung điểm của BC. Tính khoảng cách d của hai đường thẳng AM và $B'C$.

A. $d = \dfrac{a\sqrt{6}}{6}$. B. $d = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. C. $d = \dfrac{a\sqrt{7}}{7}$. D. $d = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải.



Cách 1. Do $\triangle ABC$ vuông và có $AB = BC$ nên $\triangle ABC$ vuông cân tại B.

Gọi N là trung điểm của BB', ta có $B'C \parallel (AMN)$.

Khi đó

$\mathrm{d}(AM, B'C) = \mathrm{d}(B'C, (AMN)) = \mathrm{d}(C, (AMN)) = \mathrm{d}(B, (AMN))$.

Kẻ $BH \perp AM$ tại H và kẻ $BK \perp NH$ tại K.

Ta có $BH \perp AM, BN \perp AM \Rightarrow AM \perp (NBH) \Rightarrow BK \perp AM$.

Do $BK \perp NH$, $BK \perp AM$ nên $BK \perp (AMN)$.

Suy ra $\mathrm{d}(B, (AMN)) = BK$.

Mặt khác

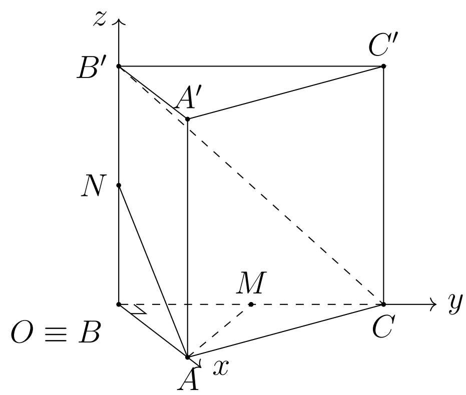
$BH = \dfrac{BM \cdot BA}{\sqrt{BM^2 + BA^2}} = \dfrac{\sqrt{5}a}{5}$; $BK = \dfrac{BH \cdot BN}{\sqrt{BH^2 + BN^2}} = \dfrac{a\sqrt{7}}{7}$.

Vậy $\mathrm{d}(AM, B'C) = \mathrm{d}(B, (AMN)) = BK = \dfrac{a\sqrt{7}}{7}$.

Cách 2.

Do $\triangle ABC$ vuông và có $AB = BC$ nên $\triangle ABC$ vuông cân tại B.

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ. Không mất tính tổng quát, ta giả sử $a = 1$.



Ta có $A(1;0;0)$, $M\left(0;\dfrac{1}{2};0\right)$, $B'\left(0;0;\sqrt{2}\right)$, $C(0;1;0)$.

$\overrightarrow{AM} = \left(-1;\dfrac{1}{2};0\right)$, $\overrightarrow{B'C} = \left(0;1;-\sqrt{2}\right)$,

$\overrightarrow{AC} = (-1;1;0) \Rightarrow \left[\overrightarrow{AM},\overrightarrow{B'C}\right] = \left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2};-\sqrt{2};-1\right)$.

Khi đó $\mathrm{d}(AM,B'C) = \dfrac{\left|\left[\overrightarrow{AM},\overrightarrow{B'C}\right]\cdot\overrightarrow{AC}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{AM},\overrightarrow{B'C}\right]\right|} = \dfrac{\left|\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\sqrt{2}+0\right|}{\sqrt{\dfrac{1}{2}+2+1}} = \dfrac{\sqrt{7}}{7}$.

Trong trường hợp tổng quát, ta có $\mathrm{d}(AM,B'C) = \dfrac{a\sqrt{7}}{7}$.

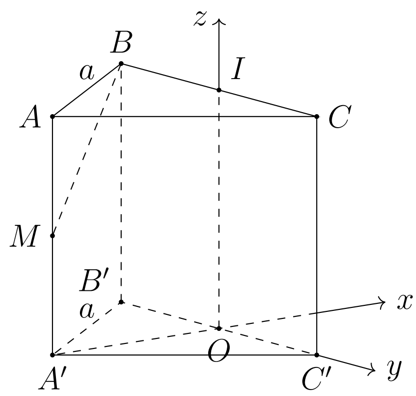
Chọn đáp án (C) □

Câu 52 (ĐHQG Hà Nội - 2020). Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng a. Gọi M là trung điểm của AA'. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng BM và $B'C$.

(A) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}a$. (B) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{10}}a$. (C) $\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}a$. (D) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}a$.

Lời giải.

Gọi O và I lần lượt là trung điểm của $B'C'$, BC. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho



$O(0;0;0)$; $A' \in Ox \Rightarrow A'\left(\dfrac{-\sqrt{3}}{2};0;0\right)$; $C' \in Oy \Rightarrow C'\left(0;\dfrac{1}{2};0\right)$; $I \in Oz \Rightarrow I(0;0;1)$

$\Rightarrow B'\left(0;\dfrac{-1}{2};0\right)$; $C\left(0;\dfrac{1}{2};1\right)$; $B\left(0;\dfrac{-1}{2};1\right)$; $A\left(\dfrac{-\sqrt{3}}{2};0;1\right)$; $M\left(\dfrac{-\sqrt{3}}{2};0;\dfrac{1}{2}\right)$

$\Rightarrow \overrightarrow{B'C} = (0;1;1)$; $\overrightarrow{BM} = \left(\dfrac{-\sqrt{3}}{2};\dfrac{1}{2};\dfrac{-1}{2}\right) \Rightarrow \left[\overrightarrow{BM},\overrightarrow{B'C}\right] = \left(1;\dfrac{\sqrt{3}}{2};\dfrac{-\sqrt{3}}{2}\right)$

$\Rightarrow \overrightarrow{BC} = (0;1;0)$.

Vậy khoảng cách giữa hai đường thẳng BM và $B'C$ là

$\mathrm{d}(BM;B'C) = \dfrac{\left|\overrightarrow{BC}\cdot\left[\overrightarrow{BM},\overrightarrow{B'C}\right]\right|}{\left|\left[\overrightarrow{BM},\overrightarrow{B'C}\right]\right|} = \dfrac{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{1+\dfrac{3}{4}+\dfrac{3}{4}}} = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{10}}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 53 (Sở Phú Thọ - 2020). Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a.

Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng $(ABCD)$ là trung điểm của cạnh AB, góc giữa mặt phẳng (SAC) và đáy bằng $45°$. Gọi M là trung điểm của cạnh SD. Khoảng cách giữa hai đường AM và SC bằng

Ⓐ a. Ⓑ $\dfrac{a\sqrt{2}}{4}$. Ⓒ $\dfrac{a\sqrt{5}}{10}$. Ⓓ $\dfrac{a\sqrt{5}}{5}$.

Lời giải.

Gọi H là trung điểm cạnh AB, I là trung điểm cạnh AO.

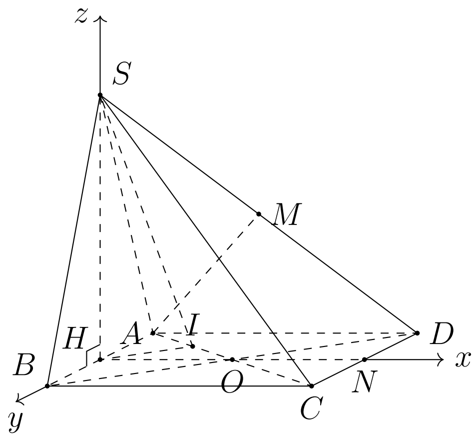
Suy ra

$SH \perp (ABCD)$, $\widehat{(SAC),(ABCD)} = \widehat{SIH} = 45°$.

Do đó $SH = IH = \dfrac{1}{2}BO = \dfrac{a\sqrt{2}}{4}$.

Gọi N là trung điểm cạnh CD, khi đó $HN \perp AB$.

Chọn hệ trục tọa độ trong không gian như hình vẽ bên, ta có tọa độ các điểm.



$H(0;0;0)$, $A\left(0;-\dfrac{a}{2};0\right)$; $S\left(0;0;\dfrac{a\sqrt{2}}{4}\right)$; $D\left(a;-\dfrac{a}{2};0\right)$; $M\left(\dfrac{a}{2};-\dfrac{a}{4};\dfrac{a\sqrt{2}}{8}\right)$; $C\left(a;\dfrac{a}{2};0\right)$.

Nên $\overrightarrow{AM} = \left(\dfrac{a}{2};\dfrac{a}{4};\dfrac{a\sqrt{2}}{8}\right)$; $\overrightarrow{SC} = \left(a;\dfrac{a}{2};-\dfrac{a\sqrt{2}}{4}\right)$; $\overrightarrow{AC} = (a;a;0)$.

Khoảng cách giữa hai đường AM và SC là $\mathrm{d}(AM,SC) = \dfrac{\left|\left[\overrightarrow{AM},\overrightarrow{SC}\right]\cdot\overrightarrow{AC}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{AM},\overrightarrow{SC}\right]\right|} = \dfrac{a\sqrt{5}}{5}$.

Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 54 (Sở Hà Tĩnh - 2020). Cho tứ diện $ABCD$ có AB, AC, AD đôi một vuông góc với nhau và $AD = 2, AB = AC = 1$. Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng BC, khoảng cách giữa hai đường thẳng AI và BD bằng

Ⓐ $\dfrac{3}{2}$. Ⓑ $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$. Ⓒ $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$. Ⓓ $\dfrac{2}{3}$.

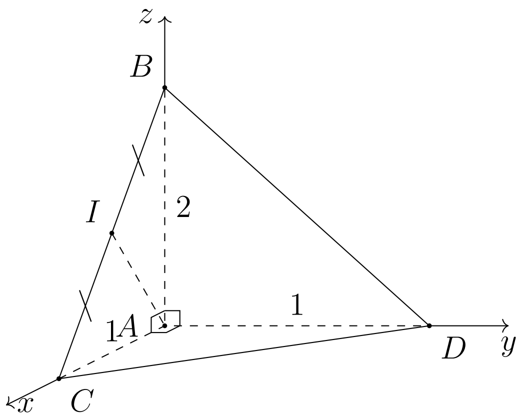
Lời giải.

Vì tứ diện $ABCD$ có AB, AC, AD đôi một vuông góc với nhau, nên ta chọn hệ trục tọa độ $Axyz$ như hình vẽ (với A là gốc tọa độ, đường thẳng AC nằm trên trục Ax, AD nằm trên trục Ay và AB nằm trên trục Az).

Từ đó suy ra: $A(0;0;0)$, $B(0;0;1)$ vì $B \in Az$, $C(1;0;0)$ vì $C \in Ax$, $D(0;2;0)$ vì $D \in Ay$.

Vì I là trung điểm của BC nên $I\left(\dfrac{1}{2};0;\dfrac{1}{2}\right)$.

Từ đó, ta quay về bài toán tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau trong hệ tọa độ không gian $Axyz$.



Ta có $\overrightarrow{AI} = \left(\frac{1}{2}; 0; \frac{1}{2}\right), \overrightarrow{BD} = (0; 2; -1) \Rightarrow \left[\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{BD}\right] = \left(-1; \frac{1}{2}; 1\right)$ và $\overrightarrow{AB} = (0; 0; 1)$.

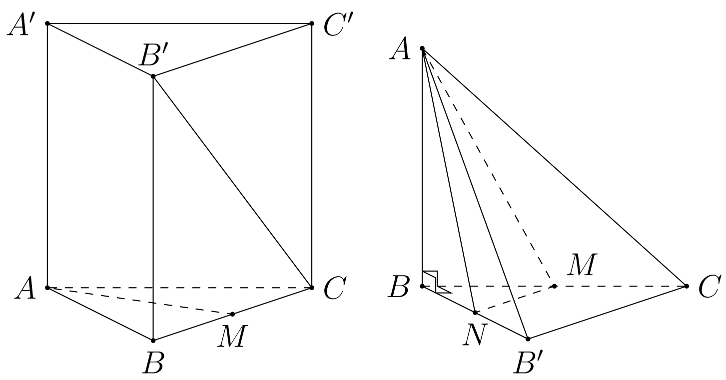
Ta có $\mathrm{d}(AI, BD) = \dfrac{\left|\left[\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{BD}\right] \cdot \overrightarrow{AB}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{BD}\right]\right|} = \dfrac{\left|(-1) \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 0 + 1 \cdot 1\right|}{\sqrt{(-1)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2}} = \dfrac{2}{3}$.

Chọn đáp án D ☐

Câu 55 (Sở Yên Bái - 2020). Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông cân tại B, biết $AB = BC = a$, $AA' = a\sqrt{2}$, M là trung điểm của BC. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AM và $B'C$.

(A) $\dfrac{a\sqrt{7}}{7}$. (B) $\dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$. (C) $\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$. (D) $\dfrac{a\sqrt{15}}{5}$.

Lời giải.



Kẻ $MN \parallel B'C' \Rightarrow B'C \parallel (AMN)$

$\Rightarrow \mathrm{d} = \mathrm{d}(B'C, MN) = \mathrm{d}(B'C, (AMN)) = \mathrm{d}(C, (AMN)) = \mathrm{d}(B, (AMN))$.

Ta có tứ diện $BAMN$ là tứ diện vuông nên

$$\frac{1}{\mathrm{d}^2} = \frac{1}{BA^2} + \frac{1}{BM^2} + \frac{1}{BN^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{\left(\frac{a}{2}\right)^2} + \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{7}{a^2}$$

$\Rightarrow d = \dfrac{a\sqrt{7}}{7}$.

Chọn đáp án A ☐

Câu 56 (Đặng Thúc Hứa - Nghệ An - 2020).

Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $2a$, cạnh SA tạo với mặt phẳng đáy một góc $30°$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và CD bằng

(A) $\dfrac{2\sqrt{15}a}{5}$. (B) $\dfrac{3\sqrt{14}a}{5}$. (C) $\dfrac{2\sqrt{10}a}{5}$. (D) $\dfrac{4\sqrt{5}a}{5}$.

Lời giải.

Gọi O là tâm của mặt đáy, M là trung điểm của AB, H là hình chiếu của O trên SM.

Ta có $(SA,(ABCD)) = (SA,OA) = \widehat{SAO}$

$\Rightarrow \widehat{SAO} = 30^\circ \Rightarrow SO = AO\tan 30^\circ = \dfrac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

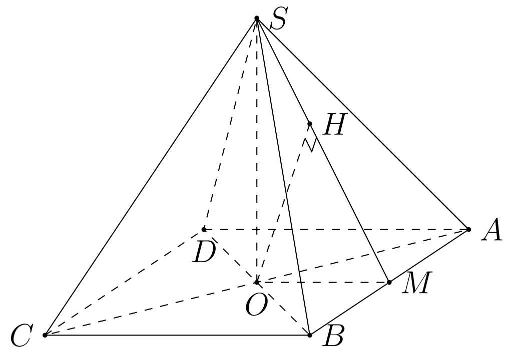
Ta có $AB \perp OM, AB \perp SO \Rightarrow AB \perp (SOM)$

$\Rightarrow AB \perp OH$, mà $SM \perp OH \Rightarrow OH \perp (SAB)$.

Tam giác SOM vuông tại O và có đường cao OH nên

$\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{SO^2} + \dfrac{1}{OM^2} = \dfrac{3}{2a^2} + \dfrac{1}{a^2} = \dfrac{5}{2a^2}$

$\Rightarrow OH = \dfrac{\sqrt{10}a}{5}$.



Vì $CD \parallel AB$

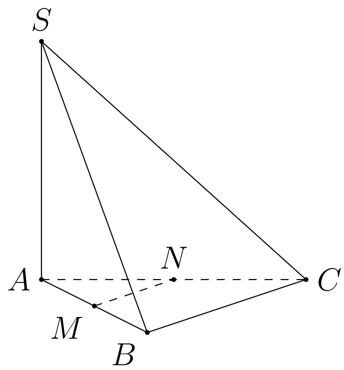
$\Rightarrow \mathrm{d}(CD,SA) = \mathrm{d}(CD,(SAB)) = \mathrm{d}(C,(SAB)) = 2\mathrm{d}(O,(SAB)) = 2OH = \dfrac{2\sqrt{10}a}{5}$.

Chọn đáp án C □

Câu 57 (Kim Liên - Hà Nội - 2020).

Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a, SA vuông góc với mặt phẳng đáy, góc giữa mặt phẳng (SBC) và mặt phẳng đáy là 60° (minh họa như hình dưới đây). Gọi M,N lần lượt là trung điểm của AB,AC. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và MN bằng

(A) $\dfrac{3a}{8}$. (B) $\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$. (C) $\dfrac{3a}{4}$. (D) $a\sqrt{6}$.



Lời giải.

Gọi E là trung điểm của BC, vì tam giác ABC đều

$\Rightarrow AE \perp BC$, lại có $SA \perp BC \Rightarrow BC \perp SE$.

Mặt khác $(SBC) \cap (ABC) = BC$

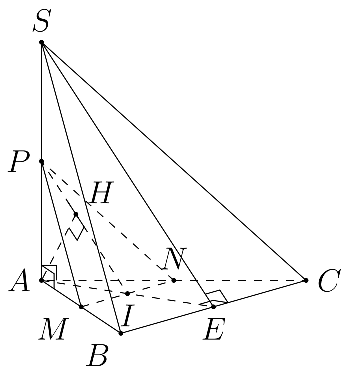
$\Rightarrow ((SBC),(ABC)) = \widehat{SEA} = 60^\circ$.

Gọi P là trung điểm của SA

$\Rightarrow SB \parallel MP, MP \subset (MNP) \Rightarrow SB \parallel (MNP)$. Dẫn đến

$\mathrm{d}(SB,MN) = \mathrm{d}(SB,(MNP)) = \mathrm{d}(B,(MNP)) = \mathrm{d}(A,(MNP))$.

Gọi $AE \cap MN = I \Rightarrow \widehat{PIA} = \widehat{SEA} = 60^\circ$ và $AI \perp MN$.



Ta có $MN \perp AI, MN \perp PI \Rightarrow MN \perp (API) \Rightarrow (PMN) \perp (API)$.

Mà $(PMN) \cap (API) = PI$, kẻ $AH \perp PI \Rightarrow AH \perp (PMN) \Rightarrow \mathrm{d}(A,(PMN)) = AH$.

Xét $\triangle API$ có $\widehat{AIP} = 60^\circ, AI = \dfrac{1}{2}AE = \dfrac{a\sqrt{3}}{4} \Rightarrow AH = AI \cdot \sin\widehat{AIP} = \dfrac{a\sqrt{3}}{4} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{3a}{8}$.

Vậy $\mathrm{d}(SB,MN) = \dfrac{3a}{8}$.

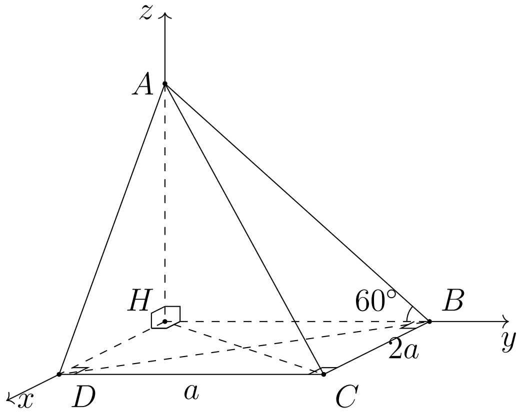
Chọn đáp án A □

Câu 58 (Liên trường Nghệ An - 2020).

Cho tứ diện $ABCD$ có $\widehat{ABC}=\widehat{ADC}=\widehat{ACD}=90^\circ, BC=2a, CD=a$, góc giữa đường thẳng AB và mặt phẳng (BCD) bằng 60°. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và BD.

Ⓐ $\dfrac{a\sqrt{6}}{\sqrt{31}}$. Ⓑ $\dfrac{2a\sqrt{6}}{\sqrt{31}}$. Ⓒ $\dfrac{2a\sqrt{3}}{\sqrt{31}}$. Ⓓ $\dfrac{a\sqrt{3}}{\sqrt{31}}$.

Lời giải.



Gọi H là chân đường cao của tứ diện $ABCD$.

Ta có: $\begin{cases} BC\perp AB \\ BC\perp AH \end{cases} \Rightarrow BC\perp HB(1)$.

Lại có: $\begin{cases} CD\perp AD \\ CD\perp AH \end{cases} \Rightarrow CD\perp HD(2)$.

Mà $\widehat{BCD}=90^\circ$.

Từ đây ta suy ra $HBCD$ là hình chữ nhật.

Mặt khác $\left(\widehat{AB,(BCD)}\right)=\widehat{ABH}=60^\circ$.

Suy ra $AH=HB\cdot\tan 60^\circ=a\sqrt{3}$.

Chọn hệ trục $Oxyz\equiv H\cdot DBA$ như hình vẽ.

Ta có $H(0;0;0)$, $A\left(0;0;a\sqrt{3}\right)$, $B(0;a;0)$, $C(2a;a;0)$, $D(2a;0;0)$.

$\overrightarrow{AC}=\left(2a;a;-a\sqrt{3}\right)$, $\overrightarrow{BD}=(2a;-a;0)$, $\overrightarrow{AB}=\left(0;a;-a\sqrt{3}\right)$.

Vậy $\mathrm{d}(AC,BC)=\dfrac{\left|\left[\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BD}\right]\cdot\overrightarrow{AB}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BD}\right]\right|}=\dfrac{2a^3\sqrt{3}}{\sqrt{\left(-a^2\sqrt{3}\right)^2+\left(-2a^2\sqrt{3}\right)^2+(-4a^2)^2}}=\dfrac{2a\sqrt{93}}{31}$.

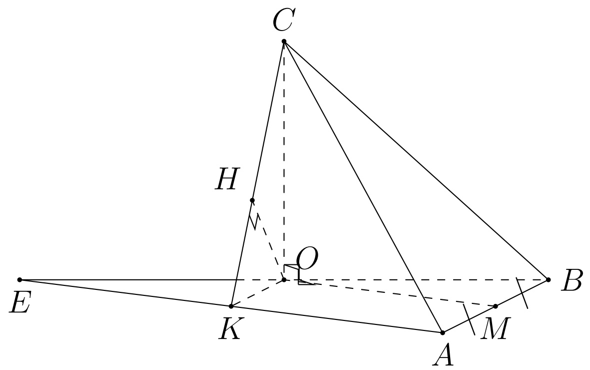
Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 59 (Lý Nhân Tông - Bắc Ninh - 2020).

Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau và $OA=OB=a$, $OC=2a$. Gọi M là trung điểm của AB. Khoảng cách giữa hai đường thẳng OM và AC bằng

Ⓐ $\dfrac{\sqrt{2}a}{3}$. Ⓑ $\dfrac{2\sqrt{5}a}{5}$. Ⓒ $\dfrac{\sqrt{2}a}{2}$. Ⓓ $\dfrac{2a}{3}$.

Lời giải.



Dựng $AE\parallel OM$, khi đó $OM\parallel(CAE)$. Do đó $\mathrm{d}(OM,AC)=\mathrm{d}(OM,(CAE))=\mathrm{d}(O,(CAE))$.

Dựng $OK\perp AE$, ta có

$\begin{cases} AE\perp OK \\ AE\perp OC\ (\text{Vì } CO\perp(ABC)) \end{cases} \Rightarrow AE\perp(COK)$.

Mà $AE \subset (CAE)$ nên $(CAE) \perp (COK)$.

Ta có $(CAE) \cap (COK) = CK$. Kẻ $OH \perp CK$, khi đó $OH \perp (COK)$.

Suy ra $\mathrm{d}(O, (CAE)) = OH$.

Xét tam giác OAB ta có $AB = \sqrt{OA^2 + OB^2} = a\sqrt{2}$.

Dễ thấy $OKAM$ là hình chữ nhật nên $OK = AM = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Xét tam giác COK ta có

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OK^2} + \frac{1}{OC^2} \Rightarrow \frac{1}{OH^2} = \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} + \frac{1}{(2a)^2} \Rightarrow OH = \frac{2}{3}a.$$

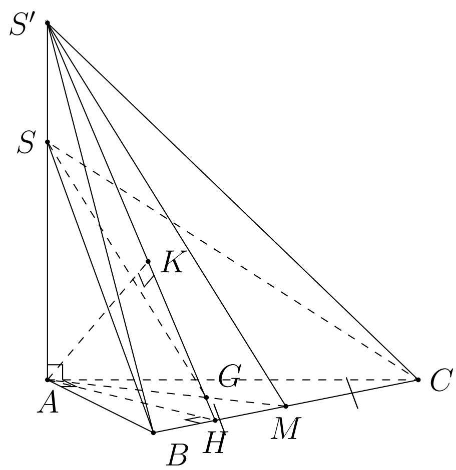
Chọn đáp án D ☐

Câu 60 (Nguyễn Huệ - Phú Yên - 2020).

Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại A, $AB = a$, $AC = 2a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = 2a$. Gọi G là trọng tâm của $\triangle ABC$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SG và BC bằng

(A) $\dfrac{2a}{7}$. (B) $\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. (C) $\dfrac{2a\sqrt{6}}{9}$. (D) $\dfrac{4a}{7}$.

Lời giải.



Gọi M là trung điểm của BC. Trong mp (SAM) dựng $S'M \parallel SG$. Suy ra $S'A = \dfrac{3}{2}SA = 3a$.

Do đó $\mathrm{d}(SG, BC) = \mathrm{d}(SG, (S'BC)) = \mathrm{d}(G, (S'BC))$.

Vì $AM = 3GM$ nên $\mathrm{d}(G, (S'BC)) = \dfrac{1}{3}\mathrm{d}(A, (S'BC))$.

Kẻ $AH \perp BC$ ta có $BC \perp (S'AH)$.

Kẻ $AK \perp S'H \Rightarrow AK = \mathrm{d}(A, (S'BC))$.

Ta có $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{AC^2} \Rightarrow AH = \dfrac{2a}{\sqrt{5}}$.

Suy ra $\dfrac{1}{AK^2} = \dfrac{1}{S'A^2} + \dfrac{1}{AH^2} \Rightarrow AK = \dfrac{6a}{7}$.

Do đó $\mathrm{d}(G, (S'BC)) = \dfrac{1}{3}AK = \dfrac{2a}{7}$.

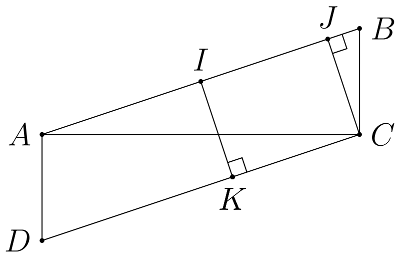
Chọn đáp án A ☐

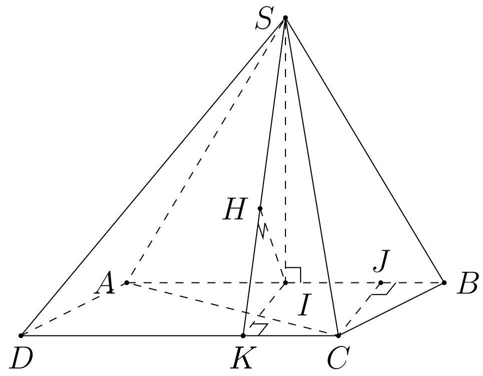
Câu 61 (Nguyễn Trãi - Thái Bình - 2020).

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành và $SA = SB = SC = 11$, góc $\angle SAB = 30^\circ$, góc $\angle SBC = 60^\circ$, góc $\angle SCA = 45^\circ$. Tính khoảng cách d giữa hai đường thẳng AB và SD.

(A) $2\sqrt{22}$. (B) $\sqrt{22}$. (C) $\dfrac{\sqrt{22}}{2}$. (D) $4\sqrt{11}$.

Lời giải.





Trong tam giác $\triangle SAB$ ta có $SB^2 = SA^2 + AB^2 - 2SA \cdot AB \cdot \cos 30^\circ \Leftrightarrow AB = 11\sqrt{3}$.

Trong tam giác $\triangle SBC$ ta có $SB = SC = 11, \angle SBC = 60^\circ$ nên $\triangle SBC$ đều suy ra $BC = 11$.

Trong tam giác $\triangle SCA$ ta có $SC = SA = 11, \angle SCA = 45^\circ$ nên $\triangle SCA$ vuông cân tại S suy ra $AC = 11\sqrt{2}$.

Xét tam giác ABC có $BC^2 + AC^2 = AB^2$ do vậy $\triangle ABC$ vuông tại C.

Gọi I là hình chiếu của S lên mặt phẳng $(ABCD)$ vì $SA = SB = SC$ nên I là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, vì $\triangle ABC$ vuông tại C nên I là trung điểm của AB và $SI \perp (ABCD) \Rightarrow SI \perp CD(1)$. Vẽ $IK \perp CD \quad (2), IH \perp SK \quad (3)$.

Từ (1) và (2) suy ra $CD \perp (SIK) \Rightarrow CD \perp IH \quad (4)$.

Từ (3) và (4) suy ra $IH \perp (SCD)$ do đó khoảng cách $\mathrm{d}(I, (SCD)) = IH$.

Ta lại có $AB \parallel CD$ suy ra khoảng cách $\mathrm{d}(AB, SD) = \mathrm{d}(AB, (SCD)) = \mathrm{d}(I, (SCD)) = IH$.

Trong mặt phẳng đáy vẽ $CJ \perp AB$ ta suy ra $IK = CJ = \dfrac{CA \cdot CB}{AB} = \dfrac{11\sqrt{6}}{3}$.

Trong tam giác SAB cân tại S có $SI = \sqrt{SA^2 - \dfrac{AB^2}{4}} = \dfrac{11}{2}$.

Trong tam giác SIK vuông tại I ta có $IH = \dfrac{IK \cdot SI}{\sqrt{IK^2 + SI^2}} = \sqrt{22}$.

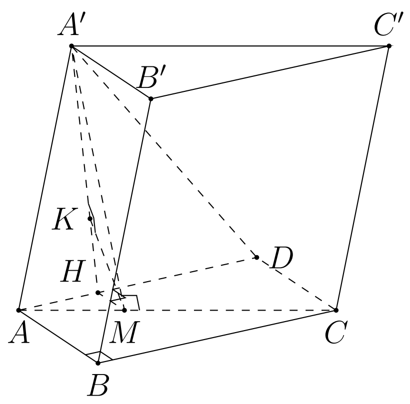
Chọn đáp án B □

Câu 62 (Tiên Du - Bắc Ninh - 2020).

Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có cạnh bên bằng $a\sqrt{2}$, đáy ABC là tam giác vuông tại $B, BC = a\sqrt{3}, AB = a$. Biết hình chiếu vuông góc của đỉnh A' lên mặt đáy là điểm M thoả mãn $3\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AC}$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và BC bằng

A. $\dfrac{a\sqrt{210}}{15}$. B. $\dfrac{a\sqrt{210}}{45}$. C. $\dfrac{a\sqrt{714}}{17}$. D. $\dfrac{a\sqrt{714}}{51}$.

Lời giải.



Dựng hình bình hành $ABCD$, vì tam giác ABC là tam giác vuông tại B nên $ABCD$ là hình chữ nhật.

Suy ra $BC \parallel AD \Rightarrow BC \parallel (A'AD)$.

Do đó $\mathrm{d}(BC, AA') = \mathrm{d}\left(BC, (A'AD)\right) = \mathrm{d}\left(C, (A'AD)\right)$.

Mà $3\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AC}$ nên $\mathrm{d}\left(C, (A'AD)\right) = 3\mathrm{d}\left(M, (A'AD)\right)$.

Kẻ $MH \perp AD \Rightarrow (A'MH) \perp (A'AD) = A'H$.

Kẻ $MK \perp A'H \Rightarrow MK \perp (A'AD)$

$\Rightarrow MK = \mathrm{d}\left(M, (A'AD)\right)$.

Mặt khác ta có $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 2a$

$\Rightarrow AM = \dfrac{1}{3}AC = \dfrac{2a}{3}$.

$\Rightarrow A'M = \sqrt{A'A^2 - AM^2} = \dfrac{a\sqrt{14}}{3}$.

Và $MH \parallel CD \Rightarrow \dfrac{MH}{CD} = \dfrac{AM}{AC} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow MH = \dfrac{1}{3}CD = \dfrac{1}{3}AB = \dfrac{a}{3}$.

Suy ra

$$\frac{1}{MK^2} = \frac{1}{A'M^2} + \frac{1}{MH^2} \Leftrightarrow \frac{1}{MK^2} = \frac{1}{\left(\dfrac{a\sqrt{14}}{3}\right)^2} + \frac{1}{\left(\dfrac{a}{3}\right)^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{MK^2} = \frac{135}{14a^2} \Leftrightarrow MK = \frac{a\sqrt{210}}{45}.$$

Vậy $\mathrm{d}(BC, AA') = \mathrm{d}\left(C, (A'AD)\right) = 3\mathrm{d}\left(M, (A'AD)\right) = 3MK = 3\dfrac{a\sqrt{210}}{45} = \dfrac{a\sqrt{210}}{15}$.

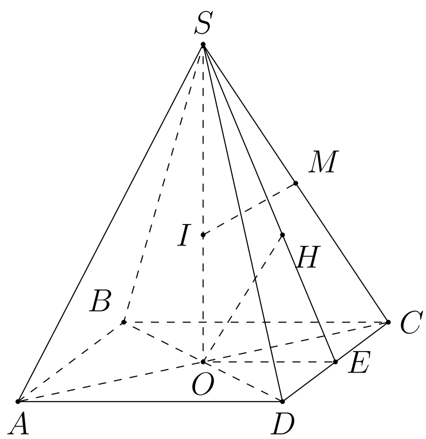
Chọn đáp án A □

Câu 63 (Hải Hậu - Nam Định - 2020).

Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $a\sqrt{2}$. Biết rằng bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp bằng $\dfrac{9a\sqrt{2}}{8}$, độ dài cạnh bên lớn hơn độ dài cạnh đáy. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SD bằng

A. $\dfrac{2a\sqrt{17}}{17}$. B. $\dfrac{4a\sqrt{17}}{17}$. C. $\dfrac{4a\sqrt{34}}{17}$. D. $\dfrac{2a\sqrt{34}}{17}$.

Lời giải.



Gọi $O = AC \cap BD$, M là trung điểm SC.

Trong tam giác SAC, dựng đường trung trực của đoạn thẳng SC cắt SO tại I, I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$, bán kính $R = SI = \dfrac{9a\sqrt{2}}{8}$.

Vì độ dài cạnh bên lớn hơn độ dài cạnh đáy nên tâm I của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp thuộc đoạn SO.

Gọi x là độ dài cạnh bên của hình chóp.

Ta có $\triangle SOC$ đồng dạng với $\triangle SMI$.

Suy ra

$$\begin{aligned}\frac{SI}{SC}=\frac{SM}{SO} &\Leftrightarrow \frac{\frac{9a\sqrt{2}}{8}}{x}=\frac{\frac{x}{2}}{\sqrt{x^2-a^2}}\\ &\Leftrightarrow \frac{9a\sqrt{2}}{8}\sqrt{x^2-a^2}=\frac{x^2}{2}\\ &\Leftrightarrow 9a\sqrt{x^2-a^2}=2\sqrt{2}x^2\\ &\Leftrightarrow 81a^2\left(x^2-a^2\right)=8x^4\\ &\Leftrightarrow 8x^4-81a^2x^2+81a^4=0\\ &\Leftrightarrow 8\left(\frac{x^2}{a^2}\right)^2-81\left(\frac{x}{a}\right)+81=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\left(\frac{x}{a}\right)^2=9\\ \left(\frac{x}{a}\right)^2=\frac{9}{8}.\end{array}\right.\end{aligned}$$

$\left(\frac{x}{a}\right)^2=\frac{9}{8}$ không thỏa vì $x<a\sqrt{2}$.
$\left(\frac{x}{a}\right)^2=9\Leftrightarrow x=3a$.
Suy ra $SO^2=(3a)^2-a^2=8a^2$.

$\mathrm{d}(AB;SD)=\mathrm{d}\left(AB,(SDC)\right)=\mathrm{d}\left(A;(SCD)\right)=2\mathrm{d}\left(O;(SCD)\right)$.

Gọi E là trung điểm CD, kẻ $OH\perp SE$, khi đó $\mathrm{d}\left(O,(SCD)\right)=OH$.

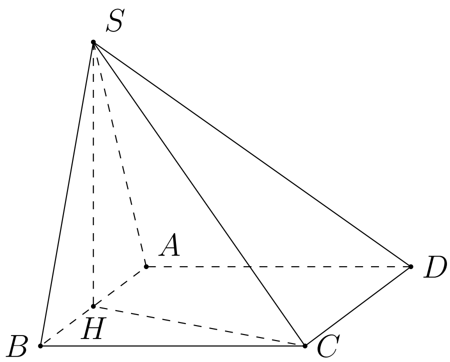
$\dfrac{1}{OH^2}=\dfrac{1}{SO^2}+\dfrac{1}{OE^2}=\dfrac{1}{8a^2}+\dfrac{2}{a^2}\Rightarrow OH=\dfrac{2\sqrt{2}a}{17}$.
.

$\mathrm{d}(AB;SD)=2OH=\dfrac{4\sqrt{34}a}{17}$.

Chọn đáp án D □

Câu 64 (Lương Thế Vinh - Hà Nội - 2020).

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB=2a$, $AD=3a$ (tham khảo hình vẽ). Tam giác SAB cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt đáy; góc giữa mặt phẳng (SCD) và mặt đáy là 45°. Gọi H là trung điểm cạnh AB. Tính theo a khoảng cách giữa hai đoạn thẳng SD và CH.

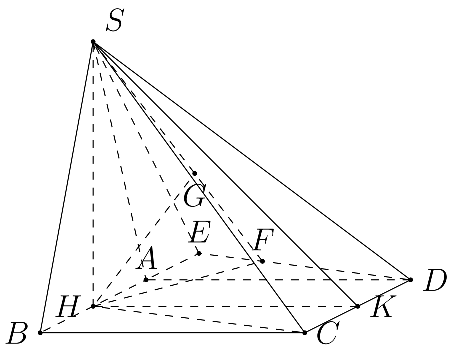


(A) $\dfrac{3\sqrt{11}a}{11}$. (B) $\dfrac{3\sqrt{14}a}{7}$. (C) $\dfrac{3\sqrt{10}a}{\sqrt{109}}$. (D) $\dfrac{3\sqrt{85}a}{17}$.

Lời giải.

Cách 1:

Ta có $\begin{cases}(SAB)\perp(ABCD)\\(SAB)\cap(ABCD)\\SH\perp AB; SH\subset(SAB)\end{cases} \Rightarrow SH\perp(ABCD).$



Kẻ $HK\perp CD$ (K là trung điểm của CD)

$\Rightarrow CD\perp(SHK)\Rightarrow CD\perp SK$

$\Rightarrow (\widehat{(SCD);(ABCD)}) = (\widehat{SK;HK}) = \widehat{SKH} = 45^\circ$

$\Rightarrow \triangle SHK$ vuông cân tại $H \Rightarrow SH = HK = 3a$.

Kẻ d qua D song song với HC cắt AB tại E

$\Rightarrow ED = HC = a\sqrt{10}$

$\Rightarrow \mathrm{d}(CH;SD) = \mathrm{d}(CH;(SED)) = \mathrm{d}(H;(SED))$.

Kẻ $HF\perp ED \Rightarrow ED\perp(SHF)$.

Kẻ $HG\perp SF\Rightarrow HG\perp(SED)\Rightarrow \mathrm{d}(H;(SED)) = HG$.

Ta có: $S_{\triangle HED} = \dfrac{1}{2}AD\cdot EH = \dfrac{1}{2}HF\cdot ED \Rightarrow HF = \dfrac{AD\cdot EH}{ED} = \dfrac{3a\cdot 2a}{a\sqrt{10}} = \dfrac{3\sqrt{10}a}{5}$.

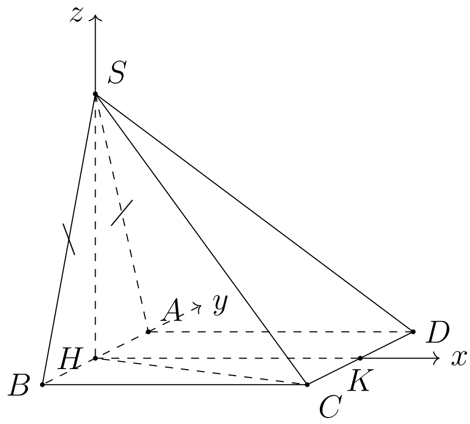
Xét tam giác SHF vuông tại H ta có

$$\frac{1}{HG^2} = \frac{1}{SH^2}+\frac{1}{HF^2}\Rightarrow HG = \frac{SH\cdot HF}{\sqrt{SH^2+HF^2}} = \frac{3a\cdot\dfrac{3\sqrt{10}a}{5}}{\sqrt{9a^2+\dfrac{18a^2}{5}}} = \frac{3\sqrt{14}a}{7}$$

$\Rightarrow \mathrm{d}(CH;SD) = \dfrac{3\sqrt{14}a}{7}$.

Cách 2:

Ta có $\begin{cases}(SAB)\perp(ABCD)\\(SAB)\cap(ABCD)\\SH\perp AB; SH\subset(SAB)\end{cases} \Rightarrow SH\perp(ABCD).$



Kẻ $HK\perp CD$ (K là trung điểm của CD)

$\Rightarrow CD\perp(SHK)\Rightarrow CD\perp SK$

$\Rightarrow (\widehat{(SCD);(ABCD)}) = (\widehat{SK;HK}) = \widehat{SKH} = 45^\circ$

$\Rightarrow \triangle SHK$ vuông cân tại $H \Rightarrow SH = HK = 3a$.

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ $H\equiv O$, tia Ox chứa HK, tia Oy chứa HA, tia Oz chứa HS.

Khi đó $H(0;0;0)$; $C(3a;-a;0)$; $D(3a;a;0)$; $S(0;0;3a)$.

Ta có $\overrightarrow{HC} = (3a;-a;0)$, $\overrightarrow{SD} = (3a;a;-3a)$, $\overrightarrow{SH} = (0;0;-3a)$

$\Rightarrow \left[\overrightarrow{HC};\overrightarrow{SD}\right] = (3a^2;9a^2;6a^2)$

$$\Rightarrow \mathrm{d}(CH;SD) = \frac{\left|\overrightarrow{SH}\cdot\left[\overrightarrow{HC};\overrightarrow{SD}\right]\right|}{\left|\left[\overrightarrow{HC};\overrightarrow{SD}\right]\right|} = \frac{|6a^2\cdot(-3a)|}{\sqrt{(3a^2)^2+(9a^2)^2+(6a^2)^2}} = \frac{3\sqrt{14}a}{7}.$$

Chọn đáp án B □

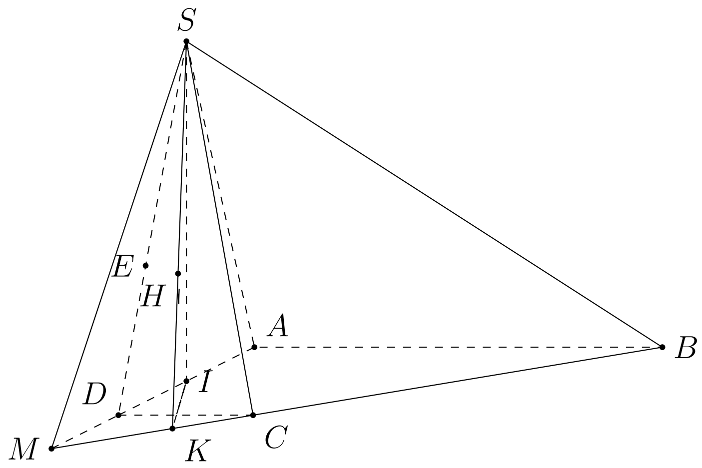
Dạng 3. Khoảng cách của đường với mặt, mặt với mặt

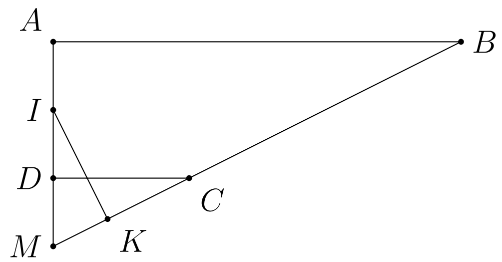
Câu 65 (Chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm - Quảng Nam - 2020).

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D, $AB = 3a$, $AD = DC = a$. Gọi I là trung điểm của AD, biết hai mặt phẳng (SBI) và (SCI) cùng vuông góc với đáy và mặt phẳng (SBC) tạo với đáy một góc $60°$. Tính theo a khoảng cách từ trung điểm cạnh SD đến mặt phẳng (SBC).

A. $\dfrac{a\sqrt{17}}{5}$. B. $\dfrac{a\sqrt{6}}{19}$. C. $\dfrac{a\sqrt{3}}{15}$. D. $\dfrac{a\sqrt{15}}{20}$.

Lời giải.





Kẻ $IK \perp BC (K \in BC) \Rightarrow ((SBC);(ABCD)) = \widehat{SKI} = 60°$.

Gọi $M = AD \cap BC$. Ta có $\dfrac{MD}{MA} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow MD = \dfrac{a}{2}$.

Ta có $\triangle MIK$ đồng dạng với $\triangle MBA$ nên suy ra $\dfrac{IK}{BA} = \dfrac{MI}{MB} = \dfrac{a}{\sqrt{(3a)^2 + \left(\dfrac{3a}{2}\right)^2}} = \dfrac{2\sqrt{5}}{15}$

$\Rightarrow IK = \dfrac{2\sqrt{5}}{15} \cdot 3a = \dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$.

Gọi N là trung điểm của SD.

Ta có $\mathrm{d}\left(N, (SBC)\right) = \dfrac{1}{2}\mathrm{d}\left(D, (SBC)\right) = \dfrac{1}{4}\mathrm{d}\left(I, (SBC)\right)$.

Từ I kẻ $IH \perp SK$ suy ra $IH = \mathrm{d}\left(I, (SBC)\right) = IK \cdot \sin 60° = \dfrac{a\sqrt{15}}{5} \Rightarrow \mathrm{d}\left(N, (SBC)\right) = \dfrac{a\sqrt{15}}{20}$.

Chọn đáp án B □

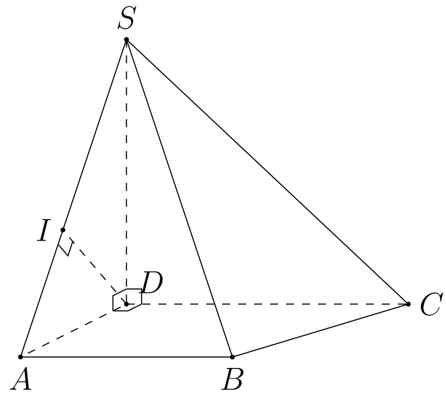
Câu 66 (THPT Lê Xoay Vĩnh Phúc 2019).

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và D, SD vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$, $AD = 2a$, $SD = a\sqrt{2}$. Tính khoảng cách giữa đường thẳng CD và mặt phẳng (SAB)

A. $\dfrac{a}{\sqrt{2}}$. B. $a\sqrt{2}$. C. $\dfrac{2a}{\sqrt{3}}$. D. $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} AB \perp AD \\ AB \perp SD \end{cases}$ nên $AB \perp (SAD)$.



Kẻ $DH \perp SA$ tại H. Do $DH \subset (SAD)$ nên $AB \perp DH$.

Ta có $\begin{cases} DH \perp SA \\ DH \perp AB \end{cases} \Rightarrow DH \perp (SAB)$.

Do $DC \parallel AB$ nên $DC \parallel (SAB)$.

Vậy khoảng cách giữa đường thẳng CD và mặt phẳng (SAB) là DH.

Xét $\triangle SAD$ vuông tại D có

$\dfrac{1}{DH^2} = \dfrac{1}{SD^2} + \dfrac{1}{AD^2} = \dfrac{1}{(a\sqrt{2})^2} + \dfrac{1}{(2a)^2} = \dfrac{3}{4a^2}$

$\Rightarrow DH = \dfrac{2a}{\sqrt{3}}$. Khoảng cách giữa đường thẳng CD và mặt phẳng (SAB) là $\dfrac{2a}{\sqrt{3}}$.

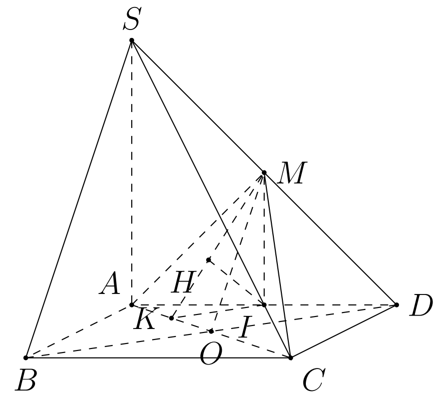
Chọn đáp án C □

Câu 67. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với đáy và $SA = 2a$. Gọi M là trung điểm của SD. Tính khoảng cách d giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (ACM)

A $d = \dfrac{3a}{2}$. B $d = a$. C $d = \dfrac{2a}{3}$. D $d = \dfrac{a}{3}$.

Lời giải.

Gọi O là tâm hình vuông.



Ta có $MO \parallel SB \Rightarrow SB \parallel (ACM)$

$\Rightarrow \mathrm{d}(SB, (ACM)) = \mathrm{d}(B, (ACM)) = \mathrm{d}(D, (ACM))$ (vì O là trung điểm BD).

Gọi I là trung điểm AD

$\Rightarrow \begin{cases} MI \parallel SA \Rightarrow MI \perp (ABCD) \\ \mathrm{d}(D, (ACM)) = 2\mathrm{d}(I, (ACM)). \end{cases}$

Trong $(ABCD)$ kẻ $IK \perp AC$ tại K.

Trong (MIK) kẻ $IH \perp MK$ tại H. (1)

Ta có $AC \perp MI, AC \perp IK$

$\Rightarrow AC \perp (MIK) \Rightarrow AC \perp IH$. (2)

Từ (1)&(2) $\Rightarrow IH \perp (ACM) \Rightarrow \mathrm{d}(I, (ACM)) = IH$.

Trong tam giác MIK ta có $IH = \dfrac{IM \cdot IK}{\sqrt{IM^2 + IK^2}}$.

Biết $MI = \dfrac{SA}{2} = a, IK = \dfrac{OD}{2} = \dfrac{BD}{4} = \dfrac{a\sqrt{2}}{4} \Rightarrow IH = \dfrac{a \cdot \dfrac{a\sqrt{2}}{4}}{\sqrt{a^2 + \dfrac{a^2}{8}}} = \dfrac{a}{3}$.

Vậy $\mathrm{d}(SB, (ACM)) = \dfrac{2a}{3}$.

Chọn đáp án C □

Câu 68 (THPT Lương Đắc Bằng - Thanh Hóa - 2018).

Cho hình chóp $O.ABC$ có đường cao $OH = \dfrac{2a}{\sqrt{3}}$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm OA và OB. Khoảng cách giữa đường thẳng MN và (ABC) bằng

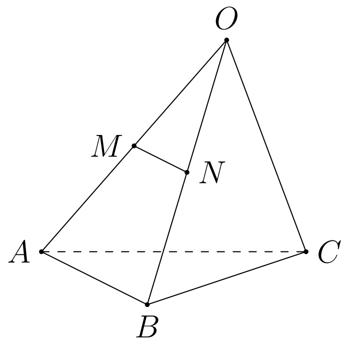
Ⓐ $\dfrac{a}{2}$. Ⓑ $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. Ⓒ $\dfrac{a}{3}$. Ⓓ $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải.

Ta có $MN \parallel (ABC) \Rightarrow \mathrm{d}\,(MN;(ABC)) = \mathrm{d}\,(M;(ABC))$.

Mà $\dfrac{AM}{AO} = \dfrac{1}{2} = \dfrac{\mathrm{d}\,(M;(ABC))}{\mathrm{d}\,(O;(ABC))}$

$\Rightarrow \mathrm{d}\,(M;(ABC)) = \dfrac{1}{2}\mathrm{d}\,(O;(ABC)) = \dfrac{1}{2}OH = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.



Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 69 (Chuyên Nguyễn Quang Diêu - Đồng Tháp - 2018).

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của BC và AD. Tính khoảng cách d giữa hai mặt phẳng (AIA') và (CJC').

Ⓐ $d = 2a\sqrt{\dfrac{5}{2}}$. Ⓑ $d = 2a\sqrt{5}$. Ⓒ $d = \dfrac{a\sqrt{5}}{5}$. Ⓓ $d = \dfrac{3a\sqrt{5}}{5}$.

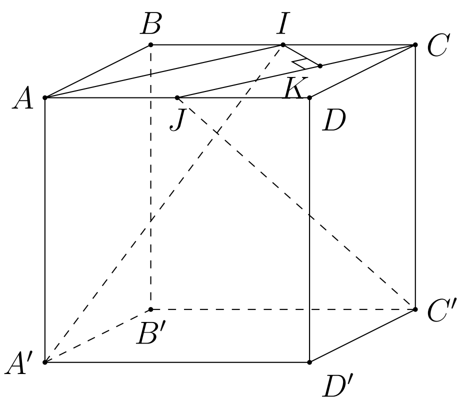
Lời giải.

Ta có $\begin{cases} AA' \parallel CC' \\ AI \parallel CJ \\ AA' \cap AI = A \\ AA', AI \subset (AIA') \end{cases} \Rightarrow (AIA') \parallel (CJC')$.

$d = 2(\sqrt{5}+2)a$.

Kẻ $IK \perp CJ$. (1)

Lại có $\begin{cases} CC' \perp IK \\ CC' \cap CJ = C \\ CC', CJ \subset (CJC'). \end{cases}$ (2)



Từ (1), (2) suy ra $IK \perp (CJC')$ hay $\mathrm{d}\,(I,(CJC')) = IK$.

Xét tam giác CJI vuông tại I

$$\frac{1}{IK^2} = \frac{1}{IC^2} + \frac{1}{IJ^2} \Leftrightarrow \frac{1}{IK^2} = \frac{1}{\left(\frac{a}{2}\right)^2} + \frac{1}{a^2} \Leftrightarrow IK^2 = \frac{a^2}{5} \Leftrightarrow IK = \frac{a\sqrt{5}}{5}.$$

Chọn đáp án Ⓒ □

BẢNG ĐÁP ÁN

1. D	2. C	3. A	4. B	5. D	6. C	7. A	8. A	9. B	10. D
11. B	12. C	13. D	14. C	15. A	17. D	18. D	19. B	20. D	21. D
22. A	23. D	24. A	25. A	26. B	27. B	28. B	29. C	30. C	31. D

32. B	33. C	34. B	35. D	36. B	37. D	38. C	39. C	40. C	41. C
42. B	43. A	44. A	45. A	46. D	47. A	48. D	49. D	50. A	51. C
52. B	53. D	54. D	55. A	56. C	57. A	58. C	59. D	60. A	61. B
	62. A	63. D	64. B	65. B	66. C	67. C	68. B	69. C	

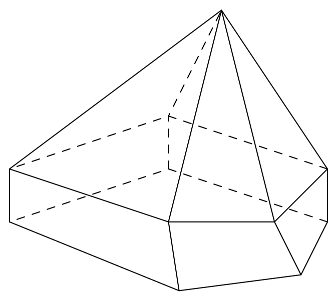
NHẬN DIỆN KHỐI ĐA DIỆN

MỨC ĐỘ 1. MỨC ĐỘ 5,6 ĐIỂM

Dạng 1. Xác định đường tiệm cận thông qua bảng biến thiên, đồ thị

Câu 1.

Hình đa diện trong hình vẽ bên có bao nhiêu mặt?



(A) 10. (B) 6. (C) 12. (D) 11.

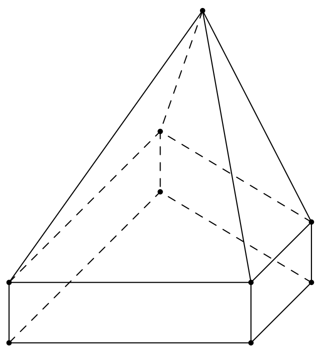
Lời giải.

Hình chóp có 5 mặt tam giác và 5 mặt tứ giác và một mặt đáy. Vậy có 11 mặt.

Chọn đáp án (D) □

Câu 2.

Hình đa diện sau có bao nhiêu cạnh?



(A) 15. (B) 12. (C) 20. (D) 16.

Câu 3. Hình chóp ngũ giác có bao nhiêu mặt?

(A) 7. (B) 6. (C) 5. (D) 10.

Lời giải.

Hình chóp ngũ giác có 5 mặt bên và 1 mặt đáy, nên tổng cộng có 6 mặt.

Chọn đáp án (B) □

Câu 4. Trong một khối đa diện, mệnh đề nào sau đây **đúng**?

(A) Hai cạnh bất kỳ có ít nhất một điểm chung.

(B) Ba mặt bất kì có ít nhất một đỉnh chung.

(C) Hai mặt bất kì có ít nhất một điểm chung.

(D) Mỗi đỉnh là đỉnh chung của ít nhất ba mặt.

Lời giải.

Ta có tính chất "Mỗi đỉnh là đỉnh chung của ít nhất ba mặt" là tính chất đúng của khối đa diện.

Chọn đáp án (D) □

Câu 5. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **đúng**?

(A) Tồn tại hình đa diện có số đỉnh và số mặt bằng nhau.
(B) Số đỉnh và số mặt của một hình đa diện luôn bằng nhau.
(C) Tồn tại một hình đa diện có số cạnh và số mặt bằng nhau.
(D) Tồn tại một hình đa diện có số cạnh bằng số đỉnh.

Lời giải.

Hình tứ diện có số đỉnh bằng số mặt và bằng 4.

Chọn đáp án (A) □

Câu 6. Hình nào sau đây **không** phải là hình đa diện?

(A) Hình lăng trụ. (B) Hình chóp. (C) Hình lập phương. (D) Hình vuông.

Lời giải.

Hình vuông không phải hình đa diện.

Chọn đáp án (D) □

Câu 7. Cho các mệnh đề sau:

I. Số cạnh của một khối đa diện lồi luôn lớn hơn hoặc bằng 6.

II. Số mặt của khối đa diện lồi luôn lớn hơn hoặc bằng 5.

III. Số đỉnh của khối đa diện lồi luôn lớn hơn 4.

Trong các mệnh đề trên, những mệnh đề nào là mệnh đề đúng?

(A) II và III. (B) I và II. (C) Chỉ I. (D) Chỉ II.

Lời giải.

Mệnh đề II sai vì khối tứ diện là khối đa diện lồi có số mặt nhỏ hơn 5.

Mệnh đề III sai vì khối tứ diện là khối đa diện lồi có 4 đỉnh.

Chọn đáp án (C) □

Câu 8. Cho khối đa diện đều. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

(A) Số đỉnh của khối lập phương là 8.
(B) Số mặt của khối tứ diện đều bằng 4.
(C) Khối bát diện đều là loại $\{4;3\}$.
(D) Số cạnh của khối bát diện đều bằng 12.

Lời giải.

Khối bát diện đều là loại $\{3;4\}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 9. Có tất cả bao nhiêu khối đa diện đều

(A) 6. (B) 7. (C) 5. (D) 4.

Lời giải.

Có tất cả 5 khối đa diện đều là: Khối tứ diện đều, khối lập phương, khối bát diện đều (hay khối tám mặt đều), khối mười hai mặt đều và khối hai mươi mặt đều.

Chọn đáp án (C) □

Câu 10. Số cạnh của hình mười hai mặt đều là

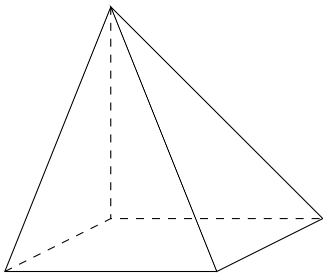
(A) 20. (B) 30. (C) 16. (D) 12.

Lời giải.

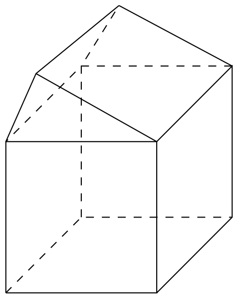
Hình mười hai mặt đều có 30 cạnh.

Chọn đáp án (B) □

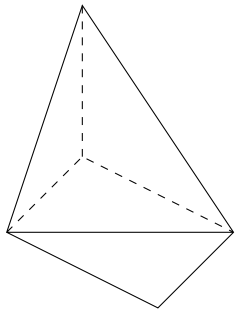
Câu 11. Hình nào dưới đây không phải là hình đa diện?



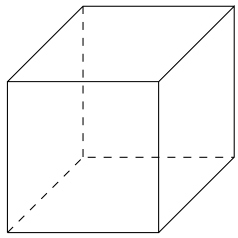
Hình 1



Hình 2



Hình 3



Hình 4

(A) Hình 1. (B) Hình 2. (C) Hình 3. (D) Hình 4.

Lời giải.

Hình đa diện gồm một số hữu hạn đa giác phẳng thỏa mãn hai điều kiện sau:

- Hai đa giác bất kì hoặc không có điểm chung, hoặc có một đỉnh chung, hoặc có một cạnh chung.
- Mỗi cạnh của một đa giác là cạnh chung của đúng hai đa giác.

Vậy hình 3 có một cạnh là cạnh chung của 3 mặt nên hình 3 không phải hình đa diện.

Chọn đáp án (C) □

Câu 12. Khối đa diện đều loại $\{3;5\}$ là khối

(A) hai mươi mặt đều. (B) tám mặt đều. (C) lập phương. (D) tứ diện đều.

Lời giải.

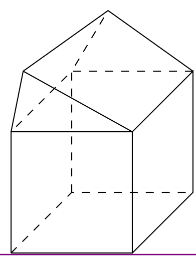
Khối đa diện đều loại $\{3;5\}$ là khối hai mươi mặt đều.

Chọn đáp án (A) □

Câu 13.

Hình vẽ bên có bao nhiêu mặt?

(A) 7. (B) 9. (C) 4. (D) 10.



Lời giải.

Hình vẽ đã cho có 9 mặt.

Chọn đáp án B □

Câu 14. Biết (H) là đa diện đều loại $\{3;5\}$ với số đỉnh và số cạnh lần lượt là a và b. Giá trị $a-b$ bằng

A) 18. B) -8. C) -18. D) 10.

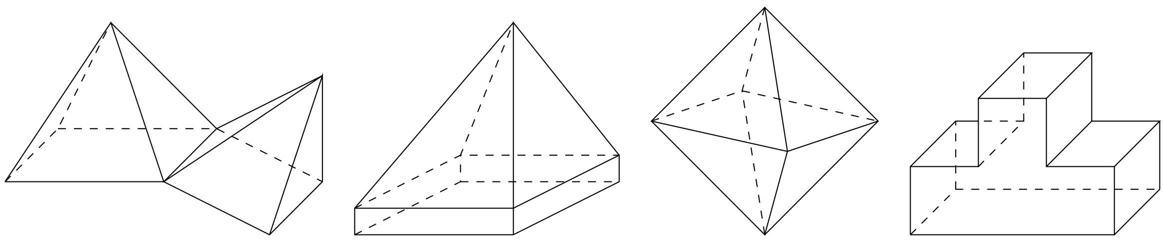
Lời giải.

Khối đa diện đều loại $\{3;5\}$ có số đỉnh $a=12$ và số cạnh $b=30$.

Vậy $a-b=-18$.

Chọn đáp án C □

Câu 15. Gọi n là số hình đa diện trong bốn hình bên dưới. Tìm n.

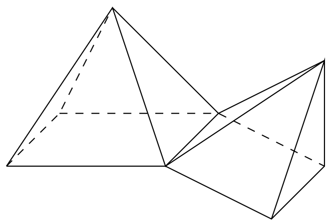


A) $n=3$. B) $n=1$. C) $n=2$. D) $n=4$.

Lời giải.

Có 3 hình đa diện trong số các hình đã cho.

Hình bên không phải đa diện vì có một cạnh là cạnh chung của 4 mặt.



Chọn đáp án A □

Câu 16. Khối đa diện đều loại $\{4;3\}$ là

A) Khối tứ diện đều. B) Khối lập phương.

C) Khối bát diện đều. D) Khối hộp chữ nhật.

Lời giải.

Theo định nghĩa, khối đa diện đều loại $\{4;3\}$ là khối có:

- ☑ Mỗi mặt là 1 đa giác đều có 4 cạnh (hình vuông).
- ☑ Mỗi đỉnh là đỉnh chun của đúng 3 mặt.

Vậy nó là khối lập phương.

Bảng tóm tắt về năm loại khối đa diện đều

Loại	Tên gọi	Số đỉnh	Số cạnh	Số mặt
$\{3;3\}$	Tứ diện đều	4	6	4
$\{4;3\}$	Lập phương	8	12	6
$\{3;4\}$	Bát diện đều	6	12	6
$\{5;3\}$	Mười hai mặt đều	20	30	12
$\{3;5\}$	Hai mươi mặt đều	12	30	20

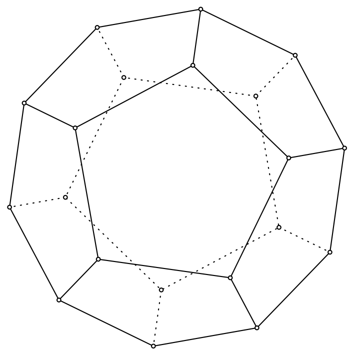
Chọn đáp án B □

Câu 17. Khối đa diện đều nào sau đây có mặt **không phải** là tam giác đều?

A. Bát diện đều.
B. Tứ diện đều.
C. Mười hai mặt đều.
D. Hai mươi mặt đều.

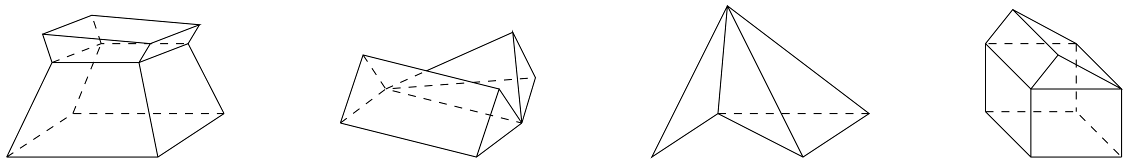
Lời giải.

Hình khối 12 mặt đều có mỗi mặt là một ngũ giác đều.



Chọn đáp án C □

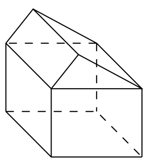
Câu 18. Số hình đa diện lồi trong các hình dưới đây là



A. 0.
B. 1.
C. 2.
D. 3.

Lời giải.

Trong các hình đã cho, chỉ có hình bên là đa diện lồi vì thỏa mãn nếu lấy bất kì hai điểm nào thì đoạn thẳng nối hai điểm đó nằm trong khối đa diện. Vậy chỉ có 1 đa diện lồi.



Chọn đáp án B □

Câu 19. Cho khối đa diện đều loại $\{3;4\}$. Tổng các góc phẳng tại 1 đỉnh của khối đa diện bằng

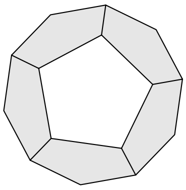
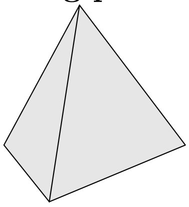
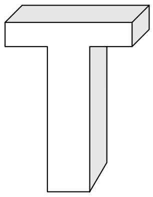
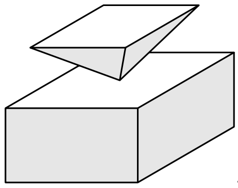
A. 324°.
B. 360°.
C. 180°.
D. 240°.

Lời giải.

Khối đa diện đều loại $\{3;4\}$ là khôi bát diện đều, mỗi mặt là một tam giác đều và mỗi đỉnh là đỉnh chung của 4 mặt nên tổng các góc tại 1 đỉnh là 240°.

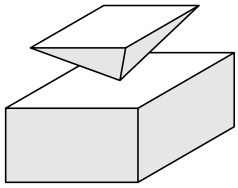
Chọn đáp án D □

Câu 20. Hình nào dưới đây **không phải** là một khối đa diện?

(A)  .
(B)  .
(C)  .
(D)  .

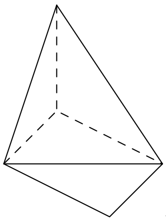
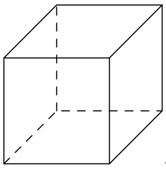
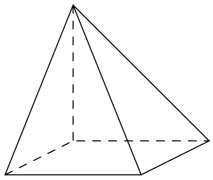
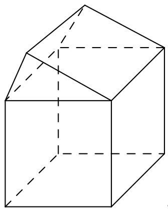
Lời giải.

Hình bên không phải là khối đa diện



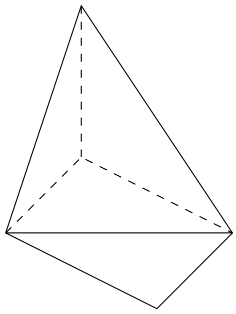
Chọn đáp án (D) □

Câu 21. Hình nào dưới đây **không phải** là hình đa diện?

(A)  .
(B)  .
(C)  .
(D)  .

Lời giải.

Hình bên không phải là hình đa diện.



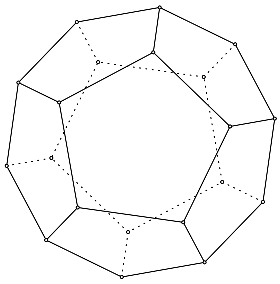
Chọn đáp án (A) □

Câu 22. Khối đa diện 12 mặt đều có số đỉnh và số cạnh lần lượt là

(A) 30 và 20. (B) 12 và 20. (C) 20 và 30. (D) 12 và 30.

Lời giải.

Hình khối đa diện 12 mặt đều có số đỉnh là 20 và số cạnh là 30.



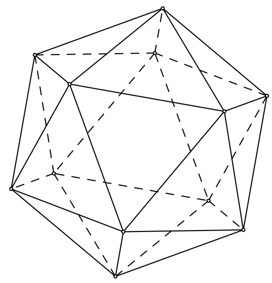
Chọn đáp án (C) □

Câu 23. Khối hai mươi mặt đều thuộc loại nào sau đây?

(A) $\{3;4\}$. (B) $\{4;3\}$. (C) $\{3;5\}$. (D) $\{5;3\}$.

Lời giải.

Khối hai mươi mặt đều có các mặt là tam giác đều và mỗi đỉnh là đỉnh chung của 5 mặt nên thuộc loại $\{3; 5\}$.



Chọn đáp án (C) □

Câu 24. Khối đa diện có mười hai mặt đều có số đỉnh, số cạnh, số mặt lần lượt là

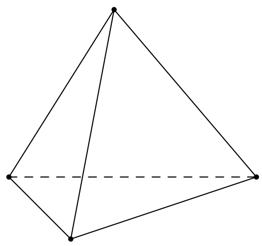
(A) $30, 20, 12$. (B) $20, 12, 30$. (C) $12, 30, 20$. (D) $20, 30, 12$.

Lời giải.

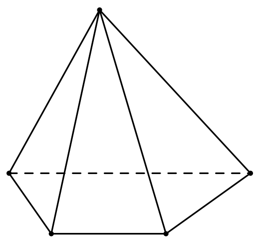
Khối mười hai mặt đều có 20 đỉnh, 30 cạnh và 12 mặt

Chọn đáp án (D) □

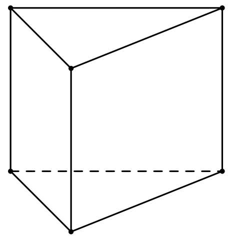
Câu 25. Trong các hình dưới đây, hình nào không phải là đa diện lồi?



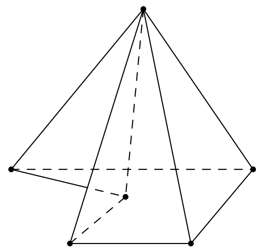
Hình 1



Hình 2



Hình 3



Hình 4

(A) Hình (IV). (B) Hình (III). (C) Hình (II). (D) Hình (I).

Lời giải.

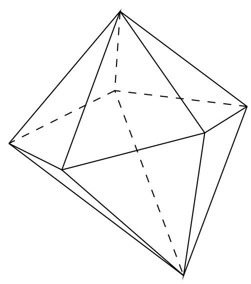
Hình IV không phải đa diện lồi

Chọn đáp án (A) □

Câu 26.

Hình đa diện bên có bao nhiêu mặt?

(A) 7. (B) 11. (C) 12. (D) 10.



Lời giải.

Hình đa diện bên có 10 mặt.

Chọn đáp án (D) □

Câu 27. Một hình lăng trụ có đúng 11 cạnh bên thì hình lăng trụ đó có tất cả bao nhiêu cạnh?

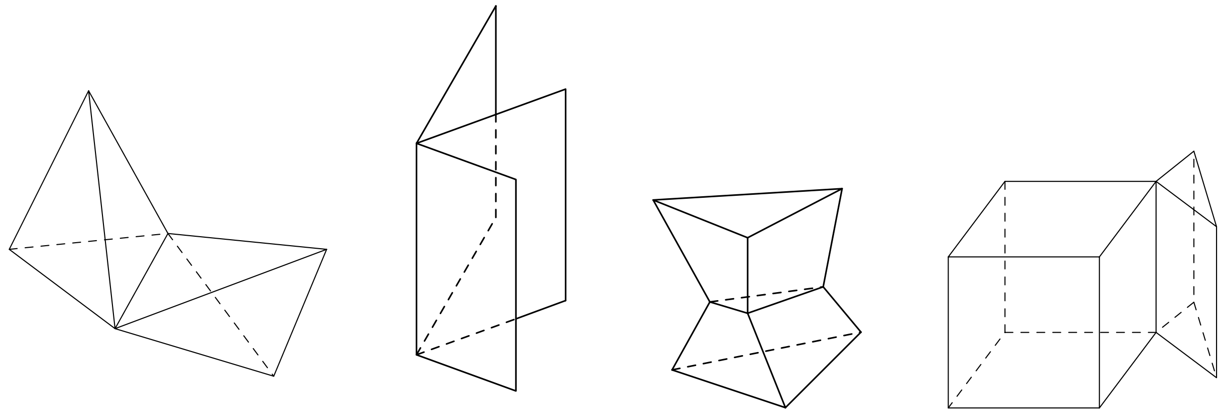
(A) 33. (B) 31. (C) 30. (D) 22.

Lời giải.

Hình lăng trụ có 11 cạnh bên thì đáy có 11 cạnh. Vậy hình lăng trụ có 33 cạnh.

Chọn đáp án (A) □

Câu 28. Trong các hình dưới đây, hình nào là hình đa diện?



Hình 1 **Hình 2** **Hình 3** **Hình 4**

Ⓐ Hình 4. Ⓑ Hình 2. Ⓒ Hình 1. Ⓓ Hình 3.

Lời giải.

Hình 1, Hình 2, Hình 4 không phải hình đa diện vì nó vi phạm tính chất: " mỗi cạnh là cạnh chung của đúng hai mặt".

Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 29. Cho đa giác đều 16 đỉnh. Hỏi có bao nhiêu tam giác vuông có ba đỉnh là ba đỉnh của đa giác đều đó?

Ⓐ 560. Ⓑ 112. Ⓒ 121. Ⓓ 128.

Lời giải.

Ta có đa giác đều có 16 đỉnh nên có 8 đường chéo đi qua tâm. Ứng với mỗi đường chéo đi qua tâm có 14 tam giác vuông. Vậy có $8 \cdot 14 = 112$ tam giác.

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 30. Hình đa diện nào dưới đây **không** có tâm đối xứng?

Ⓐ Tứ diện đều. Ⓑ Bát diện đều.

Ⓒ Hình lập phương. Ⓓ Lăng trụ lục giác đều.

Lời giải.

Dễ thấy tứ diện đều không có tâm đối xứng

Chọn đáp án Ⓐ □

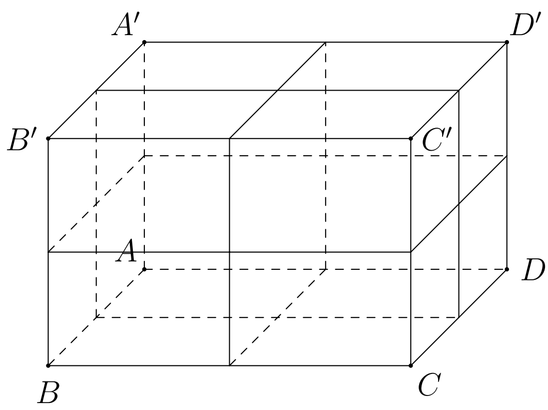
Câu 31. Hình hộp chữ nhật có ba kích thước đôi một khác nhau có bao nhiêu mặt phẳng đối xứng?

Ⓐ 6 mặt phẳng. Ⓑ 9 mặt phẳng. Ⓒ 3 mặt phẳng. Ⓓ 4mặt phẳng.

Lời giải.

Xét hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có ba kích thước đôi một khác nhau.

Gọi $M, N, O, P, Q, R, S, T, X, U, V, W$ lần lượt là trung điểm của $AB, CD, C'D', A'B', AD, BC, B'C', A'D', DD', AA', BB', CC'$. Khi đó có 3 mặt phẳng đối xứng là $(MNOP), (QRST), (XUVW)$



Chọn đáp án (C) □

Câu 32. Hình tứ diện đều có bao nhiêu trục đối xứng?

(A) 0. (B) 1. (C) 3. (D) 2.

Lời giải.

Gọi S là tập hợp các đỉnh của khối tứ diện đều $ABCD$. Giả sử d là trục đối xứng của tứ diện đã cho, Phép đối xứng trục d biến S thành chính S nên d phải là trung trực của ít nhất một đoạn thẳng nối hai đỉnh bất kì của tứ diện. Vậy tứ diện đều có 3 trục đối xứng là các đường thẳng nối trung điểm của các cặp cạnh đối diện.

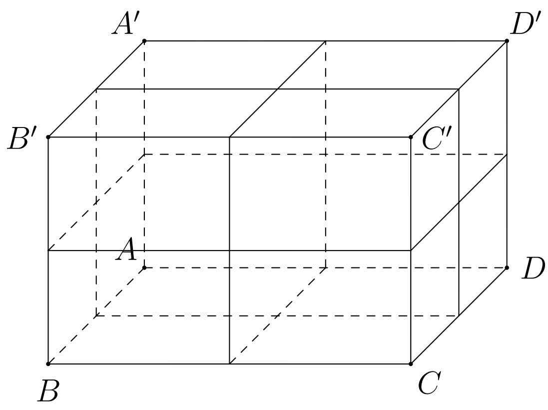
Chọn đáp án (C) □

Câu 33. Một hình hộp đứng có đáy là hình thoi (không phải là hình vuông) có bao nhiêu mặt phẳng đối xứng?

(A) 3 mặt phẳng. (B) 4 mặt phẳng. (C) 2 mặt phẳng. (D) 1 mặt phẳng.

Lời giải.

Hình hộp đứng có đáy là hình thoi có 3 mặt phẳng đối xứng trong đó bao gồm hai mặt phẳng chứa từng cặp đường chéo nhau song song của mỗi mặt đáy và 1 mặt phẳng cắt ngang tại trung điểm của chiều cao hình hộp. Cụ thể theo hình vẽ trên là $(BDEH), (ACGF), (IJKL)$



Chọn đáp án (B) □

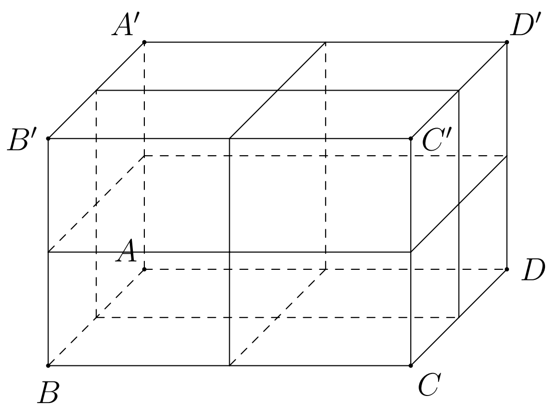
Câu 34. Hình hộp chữ nhật có ba kích thước đôi một khác nhau có bao nhiêu mặt phẳng đối xứng?

(A) 6 mặt phẳng. (B) 4 mặt phẳng. (C) 3 mặt phẳng. (D) 9 mặt phẳng.

Lời giải.

Xét hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có ba kích thước đôi một khác nhau.

Gọi $M, N, O, P, Q, R, S, T, X, U, V, W$ lần lượt là trung điểm của $AB, CD, C'D', A'B', AD, BC, B'C', A'D', DD', AA', BB', CC'$. Khi đó có 3 mặt phẳng đối xứng là $(MNOP), (QRST), (XUVW)$



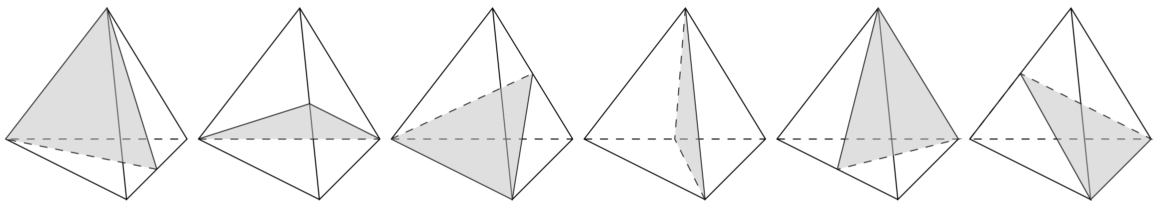
Chọn đáp án (C) □

Câu 35. Hình tứ diện đều có bao nhiêu mặt phẳng đối xứng?

(A) 6. (B) 3. (C) 4. (D) 2.

Lời giải.

Hình tứ diện đều có 6 mặt phẳng đối xứng.



Chọn đáp án (A) □

Câu 36. Hình nào sau đây không có trục đối xứng?

(A) Hình hộp xiên. (B) Tam giác đều. (C) Hình tròn. (D) Đường thẳng.

Lời giải.

Đường tròn có vô số trục đối xứng. Đường thẳng có một trục đối xứng trùng với nó. Tam giác đều có 3 trục đối xứng, các trục này đi qua trọng tâm của tam giác đều. Hình hộp xiên không có trục đối xứng

Chọn đáp án (A) □

Câu 37. Biết rằng một hình đa diện H có 6 mặt là 6 tam giác đều. Hãy chỉ ra mệnh đề nào dưới đây là đúng?

(A) Không tồn tại hình H nào có mặt phẳng đối xứng.

(B) Có tồn tại một hình H có 4 mặt phẳng đối xứng.

(C) Không tồn tại hình H nào có đúng 5 đỉnh.

(D) Có tồn tại hình H có hai tâm đối xứng phân biệt.

Lời giải.

Luôn tồn tại hình đa diện H có mặt phẳng đối xứng và có đúng 5 đỉnh, H không có tâm đối xứng

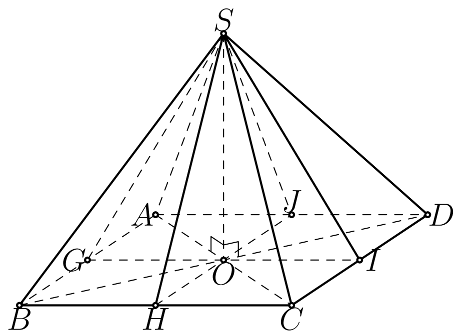
Chọn đáp án (B) □

Câu 38 (Chuyên Thái Bình-2018). Hình chóp tứ giác đều có bao nhiêu mặt phẳng đối xứng?

A 2. B 6. C 8. D 4.

Lời giải.

Đó là các mặt phẳng (SAC) , (SBD) , (SEF) , (SMN) với E , M , F , N là các trung điểm của các cạnh AB, CB, CD, AD (hình vẽ bên).



Chọn đáp án D □

Câu 39 (Chuyên Quốc Học Huế-2018).

Hình đa diện nào dưới đây không có tâm đối xứng?

A Hình bát diện đều. B Hình tứ diện đều.

C Hình lập phương. D Hình lăng trụ tứ giác đều.

Lời giải.

Ta có phép đối xứng tâm I biến hình (H) thành chính nó. Khi đó hình (H) có tâm đối xứng là I suy ra hình lăng trụ tứ giác đều, hình bát diện đều và hình lập phương là các hình đa diện có tâm đối xứng.

Chọn đáp án D □

Câu 40 (Chuyên Hạ Long-QNinh-2018).

Hình nào dưới nào dưới đây không có trục đối xứng?

A Tam giác cân. B Hình thang cân. C Hình elip. D Hình bình hành.

Lời giải.

Chọn đáp án D □

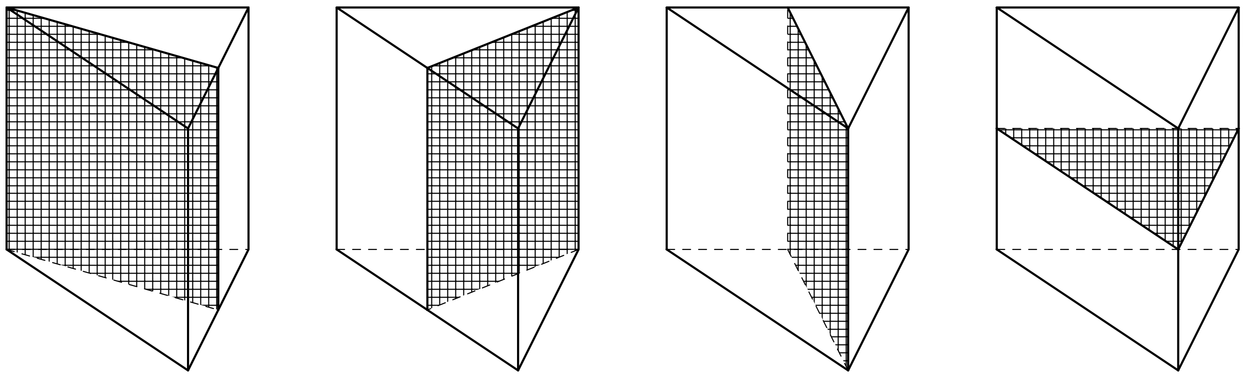
Câu 41 (THPT Đặng Thúc Hứa-Nghệ An-2018).

Hình lăng trụ tam giác đều có tất cả các cạnh bằng nhau có bao nhiêu mặt phẳng đối xứng?

A 4. B 3. C 5. D 6.

Lời giải.

Có 4 mặt phẳng đối xứng như hình vẽ sau.



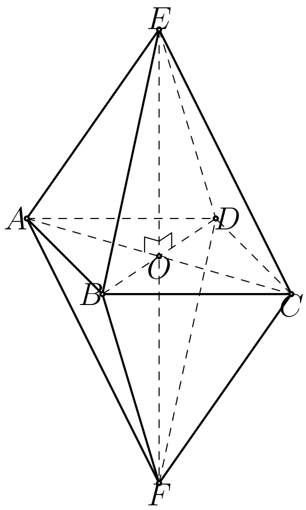
Chọn đáp án (A) □

Câu 42 (Vĩnh Phúc-2018). Khối bát diện đều có bao nhiêu mặt phẳng đối xứng?

(A) 8. (B) 4. (C) 9. (D) 6.

Lời giải.

Hình bát diện $ABCDEF$ có 9 mặt phẳng đối xứng gồm 3 mặt phẳng $(ABCD), (AECF), (BEDF)$ và 6 mặt phẳng mà mỗi mặt phẳng là mặt phẳng trung trực của hai cạnh song song.



Chọn đáp án (C) □

Câu 43 (Trần Phú-Hải Phòng-2019).

Cho khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Phép đối xứng qua mặt phẳng $(ABC'D')$ biến khối tứ diện $BCDD'$ thành khối tứ diện nào sau đây?

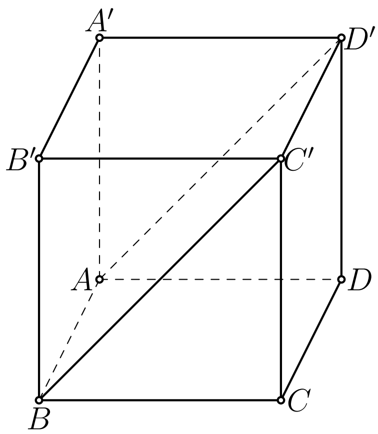
(A) $BCA'D'$. (B) $BB'A'D'$. (C) $B'BC'A'$. (D) $BC'D'A'$.

Lời giải.

Ký hiệu Đ là phép đối xứng qua mặt phẳng $(ABC'D')$.

Ta có Đ$(B) = B$, Đ$(C) = B'$, Đ$(D) = A'$, Đ$(D') = D'$.

Vậy phép đối xứng qua mặt phẳng $ABC'D'$ biến khối tứ diện $BCDD'$ thành khối tứ diện $BB'A'D'$.



Chọn đáp án (B) □

Câu 44 (Mã 110 - 2017). Mặt phẳng $(AB'C')$ chia khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ thành các khối đa diện nào?

(A) Hai khối chóp tam giác.

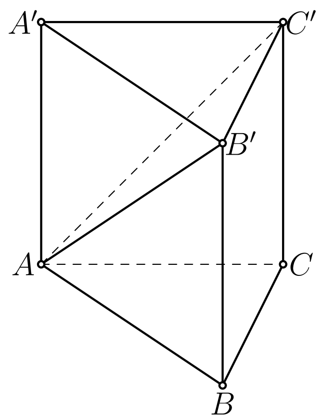
(B) Hai khối chóp tứ giác.

(C) Một khối chóp tam giác và một khối chóp tứ giác.

(D) Một khối chóp tam giác và một khối chóp ngũ giác.

Lời giải.

Mặt phẳng $(AB'C')$ chia khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ thành một khối chóp tam giác $A.A'B'C'$ và một khối chóp tứ giác $A.BB'C'C$.



Chọn đáp án (C) □

Câu 45 (THPT An Lão Hải Phòng 2019).

Cắt khối trụ $ABC.A'B'C'$ bởi các mặt phẳng $(AB'C')$ và (ABC') ta được những khối đa diện nào?

(A) Hai khối tứ diện và hai khối chóp tứ giác.

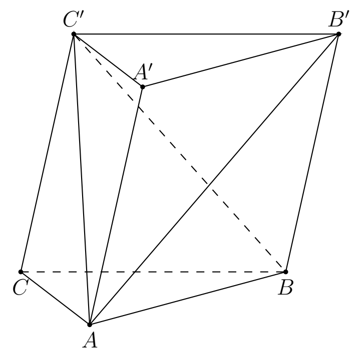
(B) Ba khối tứ diện.

(C) Một khối tứ diện và hai khối chóp tứ giác.

(D) Hai khối tứ diện và một khối chóp tứ giác.

Lời giải.

Ba khối tứ diện là $A.A'B'C'$, $A.BB'C'$, $A.BCC'$.



Chọn đáp án (B) □

Câu 46 (THPT Đoàn Thượng-Hải Phòng-2018).

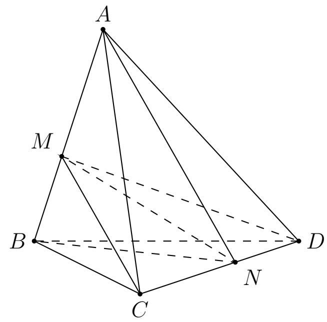
Cho khối tứ diện $ABCD$. Lấy điểm M nằm giữa A và B, điểm N nằm giữa C và D. Bằng hai mặt phẳng (CDM) và (ABN), ta chia khối tứ diện đó thành bốn khối tứ diện nào sau đây?

(A) $NACB$, $BCMN$, $ABND$, $MBND$. (B) $MANC$, $BCDN$, $AMND$, $ABND$.

(C) $MANC$, $BCMN$, $AMND$, $MBND$. (D) $ABCN$, $ABND$, $AMND$, $MBND$.

Lời giải.

Bằng hai mặt phẳng (CDM) và (ABN), ta chia khối tứ diện đó thành bốn khối tứ diện:
$MANC$, $BCMN$, $AMND$, $MBND$.



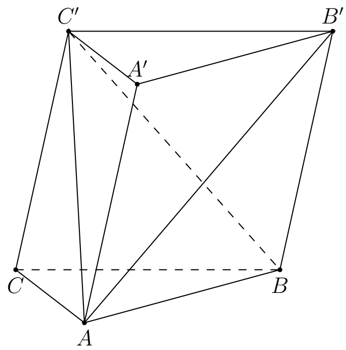
Chọn đáp án (C) □

Câu 47 (THPT An Lão 2017). Cắt khối trụ $ABC.A'B'C'$ bởi các mặt phẳng $(AB'C')$ và (ABC') ta được những khối đa diện nào?

(A) Một khối tứ diện và hai khối chóp tứ giác.
(B) Ba khối tứ diện.
(C) Hai khối tứ diện và hai khối chóp tứ giác.
(D) Hai khối tứ diện và một khối chóp tứ giác.

Lời giải.

Ta có ba khối tứ diện là $A.A'B'C'$; $B'.ABC'$; $C'.ABC$.



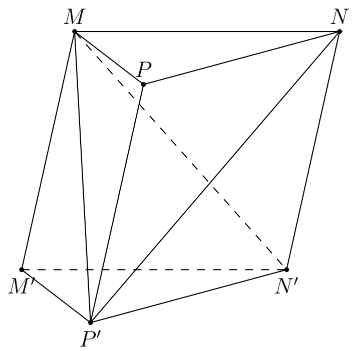
Chọn đáp án (B) □

Câu 48 (THPT Ngô Quyền-2017). Cắt khối lăng trụ $MNP.M'N'P'$ bởi các mặt phẳng $(MN'P')$ và (MNP') ta được những khối đa diện nào?

(A) Ba khối tứ diện.
(B) Hai khối tứ diện và một khối chóp tứ giác.
(C) Hai khối tứ diện và hai khối chóp tứ giác.
(D) Một khối tứ diện và một khối chóp tứ giác.

Lời giải.

Cắt khối lăng trụ $MNP.M'N'P'$ bởi các mặt phẳng $(MN'P')$ và (MNP') ta được ba khối tứ diện là $P.MNP'$; $P.MNN'$; $M'.MN'P'$.



Chọn đáp án (A) □

Câu 49 (THPT Yên Định-Thanh Hóa 2018).

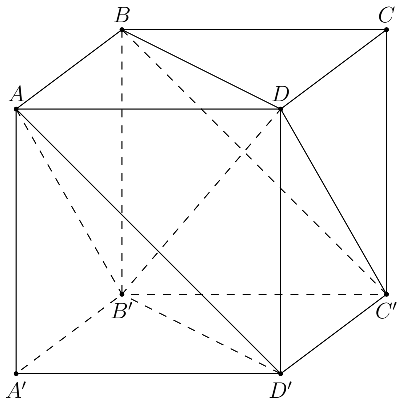
Có thể chia một khối lập phương thành bao nhiêu khối tứ diện có thể tích bằng nhau mà các đỉnh của tứ diện cũng là đỉnh của hình lập phương?

(A) 2. (B) 8. (C) 4. (D) 6.

Lời giải.

- Ta chia khối lập phương thành hai khối lăng trụ đứng.
- Ứng với mỗi khối lăng trụ đứng ta có thể chia thành ba khối tứ diện mà các đỉnh của tứ diện cũng là đỉnh của hình lập phương.

Vậy có tất cả là 6 khối tứ diện có thể tích bằng nhau.



Chọn đáp án (D) □

Câu 50 (THPT Lương Thế Vinh Hà Nội 2019).

Cho đa giác đều có 2018 đỉnh. Hỏi có bao nhiêu hình chữ nhật có 4 đỉnh là các đỉnh của đa giác đã cho?

(A) C^4_{2018}. (B) C^4_{1009}. (C) C^2_{2018}. (D) C^2_{1009}.

Lời giải.

Số đường chéo đi qua tâm của đa giác đều 2018 đỉnh là 1009.

Cứ hai đường chéo đi qua tâm tạo thành một hình chữ nhật. Vậy số hình chữ nhật có 4 đỉnh là các đỉnh của đa giác đã cho là C^2_{1009}.

Chọn đáp án (D) □

BẢNG ĐÁP ÁN

1. D	2. D	3. B	4. D	5. A	6. D	7. C	8. C	9. C	10. B
11. C	12. A	13. B	14. C	15. A	16. B	17. C	18. B	19. D	20. D
21. A	22. C	23. C	24. D	25. A	26. D	27. A	28. D	29. B	30. A

31. C	**32. C**	**33. B**	**34. C**	**35. A**	**36. A**	**37. B**	**38. D**	**39. D**	**40. D**
41. A	**42. C**	**43. B**	**44. C**	**45. B**	**46. C**	**47. B**	**48. A**	**49. D**	**50. D**

THỂ TÍCH KHỐI CHÓP

MỨC ĐỘ 1. MỨC ĐỘ 5,6 ĐIỂM

Dạng 1. Cạnh bên vuông góc với đáy

Câu 1. (Mã 101-2022) Cho khối chóp $S.ABC$ có chiều cao bằng 3, đáy ABC có diện tích bằng 10. Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng

A. 2. B. 15. C. 10. D. 30.

Lời giải.

Thể tích khối chóp $S.ABC$ là $V = \dfrac{1}{3} \cdot S \cdot h = \dfrac{1}{3} \cdot 10 \cdot 3 = 10$.

Chọn đáp án C □

Câu 2. (Mã 103-2022) Cho khối chóp $S.ABC$ có chiều cao bằng 5, đáy ABC có diện tích bằng 6. Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng

A. 11. B. 10. C. 15. D. 30.

Lời giải.

$V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3} \cdot S \cdot h = \dfrac{1}{3} \cdot 6 \cdot 5 = 10$.

Chọn đáp án B □

Câu 3. (Đề minh họa 2022) Cho khối chóp có diện tích đáy $S = 7$ và chiều cao $h = 6$. Thể tích khối chóp đã cho bằng

A. 42. B. 126. C. 14. D. 56.

Lời giải.

Thể tích khối chóp là $V = \dfrac{1}{3} \cdot S \cdot h = \dfrac{1}{3} \cdot 7 \cdot 6 = 14$.

Chọn đáp án C □

Câu 4. (Đề Minh Họa 2021) Một khối chóp có diện tích đáy bằng 6 và chiều cao bằng 5. Thể tích của khối chóp đã cho bằng

A. 10. B. 30. C. 90. D. 15.

Lời giải.

$$V = \frac{1}{3} \cdot S \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot 5 = 10.$$

Chọn đáp án A □

Câu 5. (Mã 104-2021 Lần 1) Cho khối chóp có diện tích đáy $S = 8a^2$ và chiều cao $h = a$. Thể tích của khối chóp đã cho bằng

A. $8a^3$. B. $\dfrac{4}{3}a^3$. C. $4a^3$. D. $\dfrac{8}{3}a^3$.

Lời giải.

Thể tích của khối chóp có diện tích đáy $S = 8a^2$ và chiều cao $h = a$ là

$$V = \frac{1}{3} \cdot S \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 8a^2 \cdot a = \frac{8}{3}a^3.$$

Chọn đáp án D □

Câu 6. (Mã 101-2021 Lần 1) Cho khối chóp có diện tích đáy $S = 5a^2$ và chiều cao $h = a$. Thể tích của khối chóp đã cho bằng

A $\frac{5}{6}a^3$. B $\frac{5}{2}a^3$. C $5a^3$. D $\frac{5}{3}a^3$.

Lời giải.

Thể tích của khối chóp đã cho bằng $V = \frac{1}{3} \cdot S \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 5a^2 \cdot a = \frac{5}{3}a^3$.

Chọn đáp án D □

Câu 7. (Mã 103-2021-Lần 1) Cho khối chóp có diện tích đáy $S = 7a^2$ và chiều cao $h = a$. Thể tích của khối chóp đã cho bằng

A $\frac{7}{6}a^3$. B $\frac{7}{2}a^3$. C $\frac{7}{3}a^3$. D $7a^3$.

Lời giải.

Thể tích khối chóp $V = \frac{1}{3} \cdot S \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 7a^2 \cdot a = \frac{7}{3}a^3$.

Chọn đáp án C □

Câu 8. (Mã 102-2021 Lần 1) Cho khối chóp có diện tích đáy $S = 3a^2$ và chiều cao $h = a$. Thể tích của khối chóp đã cho bằng

A $\frac{3}{2}a^3$. B $3a^3$. C $\frac{1}{3}a^3$. D a^3.

Lời giải.

Thể tích của khối chóp đã cho bằng

$$V = \frac{1}{3} \cdot S \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 3a^2 \cdot a = a^3.$$

Chọn đáp án D □

Câu 9. (Đề Tham Khảo 2020 Lần 2) Cho khối chóp có diện tích đáy $S = 3$ và chiều cao $h = 4$. Thể tích của khối chóp đã cho bằng

A 6. B 12. C 36. D 4.

Lời giải.

Ta có công thức thể tích khối chóp

$$V = \frac{1}{3} \cdot S \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot 4 = 4.$$

Chọn đáp án D □

Câu 10. (Mã 101-2020 Lần 1) Cho khối chóp có diện tích đáy $S = 6$ và chiều cao $h = 2$. Thể tích của khối chóp đã cho bằng

(A) 6. (B) 3. (C) 4. (D) 12.

Lời giải.

Thể tích của khối chóp

$$V = \frac{1}{3} \cdot S \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot 2 = 4.$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 11. (Mã 102-2020 Lần 1) Cho khối chóp có diện tích đáy $S = 3$ và chiều cao $h = 2$. Thể tích khối chóp đã cho bằng

(A) 6. (B) 12. (C) 2. (D) 3.

Lời giải.

Thể tích khối chóp đã cho là

$$V = \frac{1}{3} \cdot B \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot 2 = 2.$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 12. (Mã 102-2020 Lần 2) Cho khối chóp có diện tích đáy $S = 6a^2$ và chiều cao $h = 2a$. Thể tích khối chóp đã cho bằng

(A) $2a^3$. (B) $4a^3$. (C) $6a^3$. (D) $12a^3$.

Lời giải.

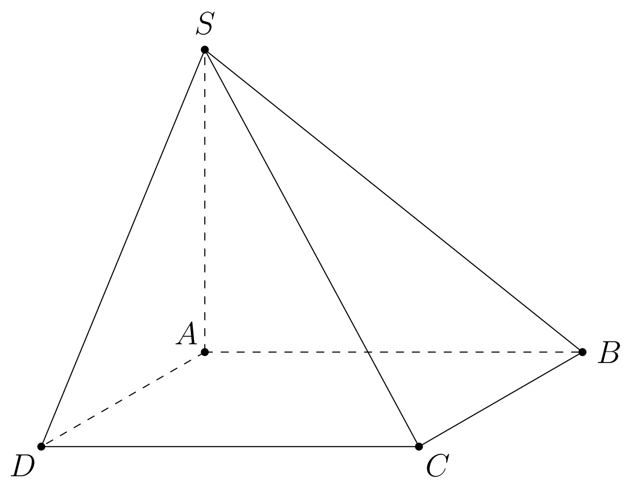
$$V = \frac{1}{3} \cdot S \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 6a^2 \cdot 2a = 4a^3.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 13. (Đề Minh Họa 2017) Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a\sqrt{2}$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$

(A) $V = \frac{\sqrt{2}a^3}{6}$. (B) $V = \frac{\sqrt{2}a^3}{4}$. (C) $V = \sqrt{2}a^3$. (D) $V = \frac{\sqrt{2}a^3}{3}$.

Lời giải.



Ta có $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA$ là đường cao của hình chóp.

Thể tích khối chóp $S.ABCD$

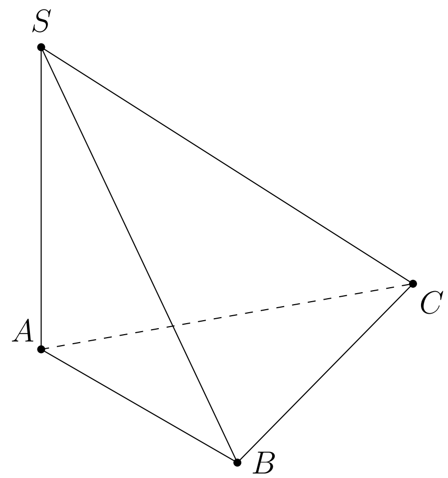
$$V = \frac{1}{3} \cdot SA \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot a\sqrt{2} \cdot a^2 = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}.$$

Chọn đáp án D □

Câu 14. (Mã 105 2017) Cho khối chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với đáy, $SA = 4$, $AB = 6$, $BC = 10$ và $CA = 8$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABC$

(A) $V = 32$. (B) $V = 192$. (C) $V = 40$. (D) $V = 24$.

Lời giải.



Ta có $BC^2 = AB^2 + AC^2$ suy ra ΔABC vuông tại A.

Diện tích tam giác ABC là $S_{ABC} = 24$.

Thể tích V của khối chóp $S.ABC$ là

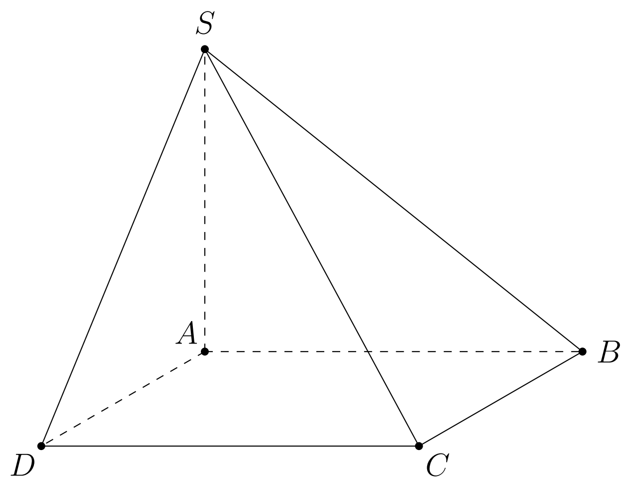
$$V = \frac{1}{3} \cdot S_{ABC} \cdot SA = 32.$$

Chọn đáp án A □

Câu 15. (THPT Nguyễn Khuyến 2019) Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = \sqrt{2}a$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$

(A) $\frac{\sqrt{2}a^3}{6}$. (B) $\frac{\sqrt{2}a^3}{4}$. (C) $\sqrt{2}a^3$. (D) $\frac{\sqrt{2}a^3}{3}$.

Lời giải.



Ta có $S_{ABCD} = a^2$.

Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là

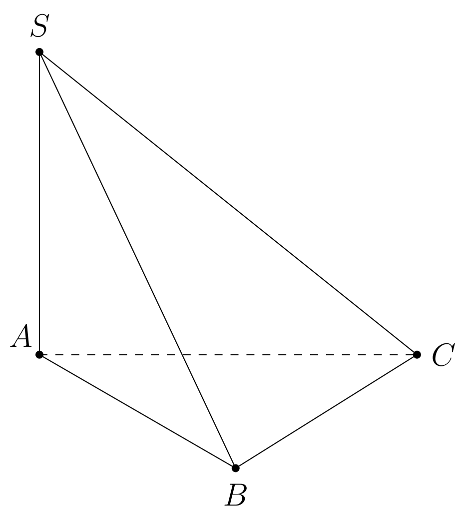
$$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot SA \cdot S_{ABCD} = \frac{\sqrt{2}a^3}{3}.$$

Chọn đáp án D □

Câu 16. (THPT Đoàn Thượng-Hải Dương 2019) Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với đáy và thể tích của khối chóp đó bằng $\frac{a^3}{4}$. Tính cạnh bên SA

A $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. B $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. C $a\sqrt{3}$. D $2a\sqrt{3}$.

Lời giải.



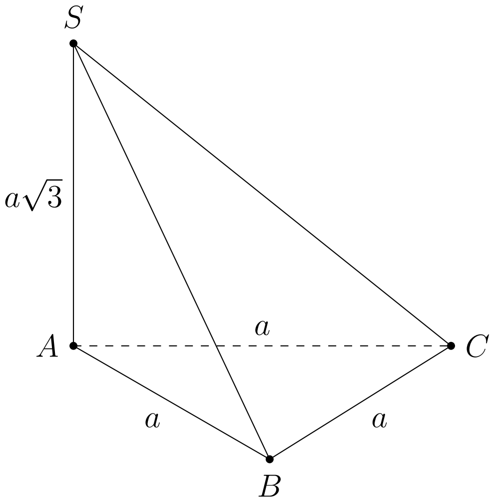
$$V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot S_{\Delta ABC} \cdot SA \Rightarrow SA = \frac{3V_{S.ABC}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{3 \cdot \frac{a^3}{4}}{\frac{a^2\sqrt{3}}{4}} = a\sqrt{3}.$$

Chọn đáp án C □

Câu 17. (THPT Minh Châu Hưng Yên 2019) Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Biết $SA \perp (ABC)$ và $SA = a\sqrt{3}$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$

(A) $\frac{a}{4}$. (B) $\frac{a^3}{2}$. (C) $\frac{a^3}{4}$. (D) $\frac{3a^3}{4}$.

Lời giải.



Ta có SA là đường cao hình chóp.

Tam giác ABC đều cạnh a nên $S_{\Delta ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

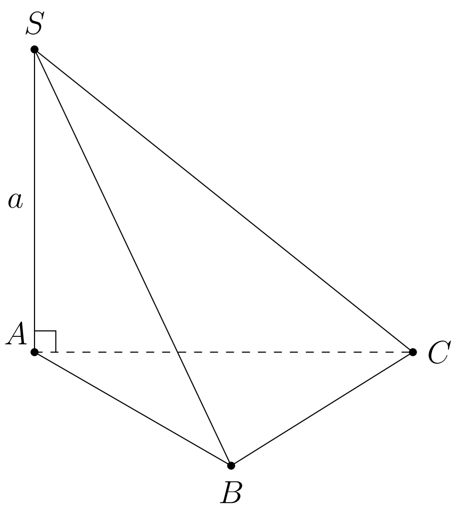
Vậy thể tích cần tìm là $V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot a\sqrt{3} = \frac{a^3}{4}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 18. (THPT Việt Đức Hà Nội 2019) Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Cạnh bên SC vuông góc với mặt phẳng (ABC), $SC = a$. Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng

(A) $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. (B) $\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$. (C) $\frac{a^3\sqrt{3}}{9}$. (D) $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

Lời giải.



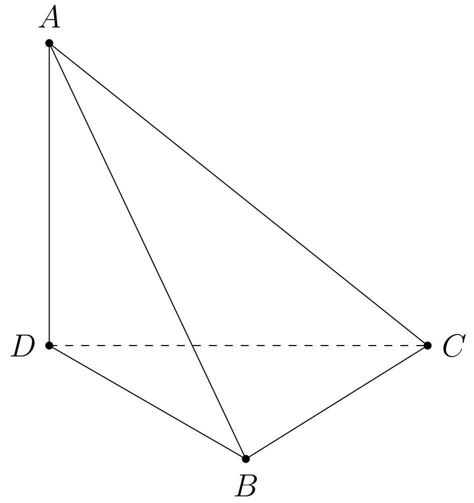
$$S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot a \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}.$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 19. (THPT An Lão Hải Phòng 2019) Cho tứ diện $ABCD$ có AD vuông góc với mặt phẳng (ABC) biết đáy ABC là tam giác vuông tại B và $AD = 10$, $AB = 10$, $BC = 24$. Tính thể tích của tứ diện $ABCD$

(A) $V = 1200$. (B) $V = 960$. (C) $V = 400$. (D) $V = \dfrac{1300}{3}$.

Lời giải.



Ta có:

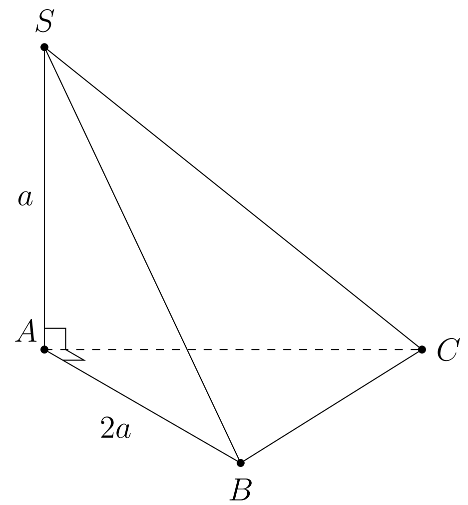
$$V_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot AD \cdot \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC = \frac{1}{6} \cdot 10 \cdot 10 \cdot 24 = 400.$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 20. (THPT Hùng Vương Bình Phước 2019) Cho hình chóp $S.ABC$ có cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy (ABC). Biết $SA = a$, tam giác ABC là tam giác vuông cân tại A, $AB = 2a$. Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABC$

(A) $V = \dfrac{a^3}{6}$. (B) $V = \dfrac{a^3}{2}$. (C) $V = \dfrac{2a^3}{3}$. (D) $V = 2a^3$.

Lời giải.



Diện tích tam giác ABC vuông cân tại A là

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot 2a = 2a^2.$$

Thể tích khối chóp $S.ABC$ là

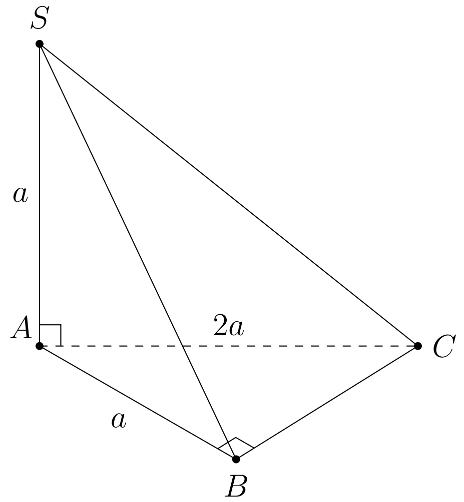
$$V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot SA \cdot S_{ABC} = \frac{1}{3} \cdot a \cdot 2a^2 = \frac{2a^3}{3}.$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 21. (Chuyên KHTN 2019) Cho khối chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $AB = a$, $AC = 2a$, $SA \perp (ABC)$ và $SA = a$. Thể tích của khối chóp đã cho bằng

Ⓐ $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$. Ⓑ $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$. Ⓒ $\dfrac{a^3}{3}$. Ⓓ $\dfrac{2a^3}{3}$.

Lời giải.



Ta có $BC^2 = AC^2 - AB^2 = 3a^2 \Rightarrow BC = a\sqrt{3}$.

Vậy thể tích khối chóp $S.ABC$ là

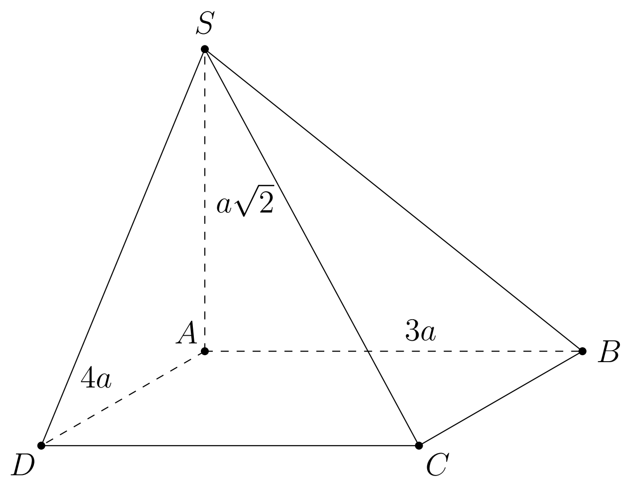
$$V_{S.ABC} = \frac{1}{3}S_{\Delta ABC}.SA = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}AB \cdot BC \cdot SA = \frac{1}{6} \cdot a \cdot a\sqrt{3} \cdot a = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}.$$

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 22. (Sở Cần Thơ 2019) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = 3a$ và $AD = 4a$. Cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SA = a\sqrt{2}$. Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ bằng

Ⓐ $4\sqrt{2}a^3$. Ⓑ $12\sqrt{2}a^3$. Ⓒ $\dfrac{4\sqrt{2}a^3}{3}$. Ⓓ $\dfrac{2\sqrt{2}a^3}{3}$.

Lời giải.



Diện tích đáy hình chữ nhật là $S = AB \cdot AD = 3a \cdot 4a = 12a^2$ (đvdt).

Thể tích của hình chóp có đáy hình chữ nhật là

$$V = \frac{1}{3}Sh = \frac{1}{3} \cdot 12a^2 \cdot a\sqrt{2} = 4\sqrt{2}a^3.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 23. (Sở Cần Thơ 2019) Thể tích của khối chóp có diện tích đáy bằng $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ và chiều cao bằng $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ là

(A) $\dfrac{\sqrt{6}}{6}$. (B) $\dfrac{1}{3}$. (C) $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$. (D) 1.

Lời giải.

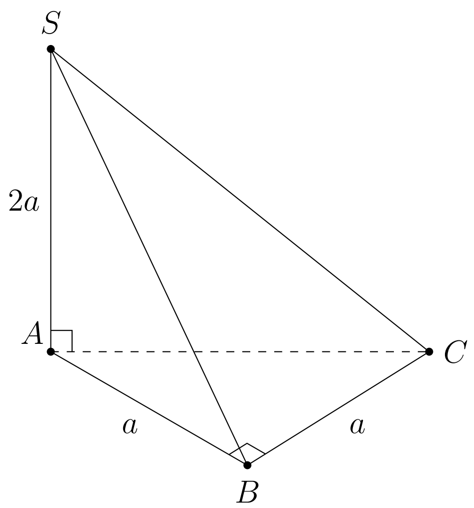
Thể tích khối chóp là $V = \dfrac{1}{3} \cdot$ chiều cao $\cdot$ diện tích đáy $= \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{2\sqrt{3}}{3} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{1}{3}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 24. (Sở Nam Định 2019) Cho khối chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, độ dài cạnh $AB = BC = a$, cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = 2a$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABC$

(A) $V = \dfrac{a^3}{3}$. (B) $V = \dfrac{a^3}{2}$. (C) $V = a^3$. (D) $V = \dfrac{a^3}{6}$.

Lời giải.



Thể tích khối chóp $S.ABC$ là

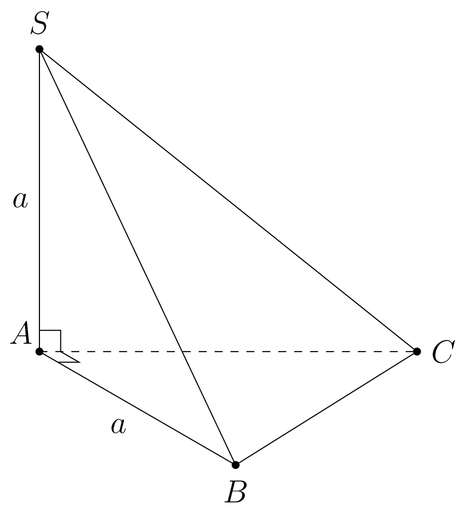
$$V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot SA \cdot S_{ABC} = \frac{1}{3} \cdot 2a \cdot \frac{1}{2} \cdot a^2 = \frac{a^3}{3}.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 25. (Bạc Liêu – Ninh Bình 2019) Cho hình chóp $S.ABC$, có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, $SA = AB = a$, SA vuông góc với mặt phẳng (ABC). Thể tích của khối chóp $S.ABC$ bằng

(A) $\dfrac{a^3}{3}$. (B) $\dfrac{a^3}{6}$. (C) $\dfrac{a^3}{2}$. (D) $\dfrac{3a^3}{2}$.

Lời giải.



Thể tích của khối chóp $S.ABC$

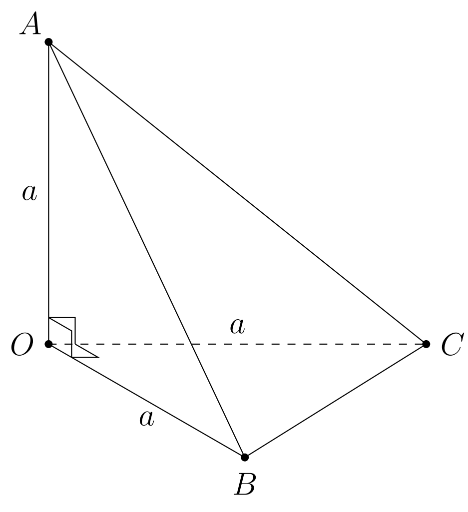
$$V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot SA \cdot S_{ABC} = \frac{a^3}{6}.$$

Chọn đáp án B □

Câu 26. (Nguyễn Khuyến HCM-2019) Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc và $OA = OB = OC = a$. Khi đó thể tích của tứ diện $OABC$ là

A $\frac{a^3}{12}$. B $\frac{a^3}{6}$. C $\frac{a^3}{3}$. D $\frac{a^3}{2}$.

Lời giải.



Thể tích của tứ diện $OABC$ là

$$V = \frac{1}{3} S_{OBC} \cdot OA = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot OB \cdot OC \cdot OA = \frac{a^3}{6}.$$

Chọn đáp án B □

Câu 27. (THPT Minh Khai-2019) Cho hình chóp $S.ABC$ có diện tích đáy là $a^2\sqrt{3}$, cạnh bên SA vuông góc với đáy, $SA = a$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$ theo a

A $a^3\sqrt{3}$. B $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. C $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. D $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.

Ta có:

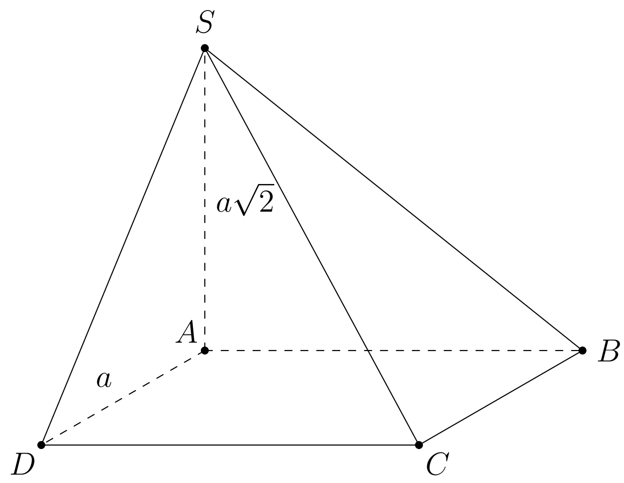
$$V = \frac{1}{3}Sh = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 28. (Thpt Vĩnh Lộc-Thanh Hóa 2019) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a\sqrt{2}$. Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ bằng

(A) $V = \sqrt{2}a^3$. (B) $V = \frac{\sqrt{2}a^3}{6}$. (C) $V = \frac{\sqrt{2}a^3}{4}$. (D) $V = \frac{\sqrt{2}a^3}{3}$.

Lời giải.



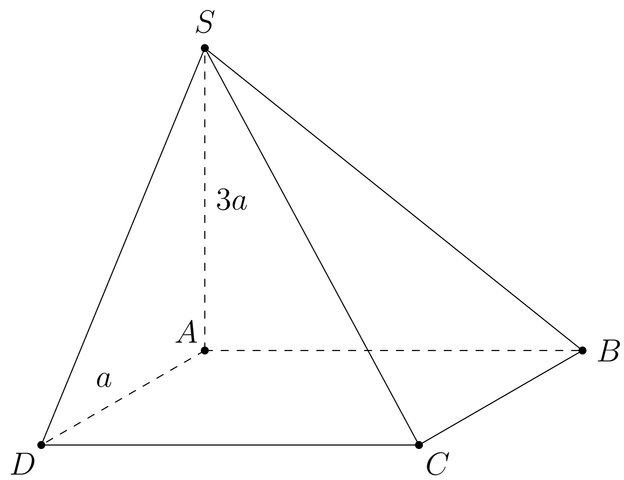
$$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot SA \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot a\sqrt{2} \cdot a^2 = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}.$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 29. (Hội 8 trường chuyên ĐBSH-2019) Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a, $SA \perp (ABC)$, $SA = 3a$. Thể tích V của khối chóp $S.ABCD$ là

(A) $V = a^3$. (B) $V = 3a^3$. (C) $V = \frac{1}{3}a^3$. (D) $V = 2a^3$.

Lời giải.



Diện tích đáy $ABCD$ là $S_{ABCD} = a^2$.

Vì $SA \perp (ABC)$ nên chiều cao của khối chóp là $SA = 3a$.

Vậy thể tích khối chóp $S.ABCD$ là

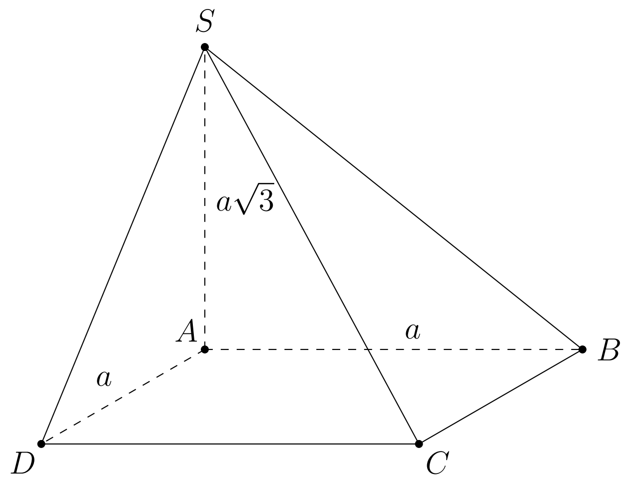
$$V=\frac{1}{3}\cdot S_{ABCD}\cdot SA=\frac{1}{3}\cdot a^2\cdot 3a=a^3.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 30. (THPT Hàm Rồng 2019) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Biết $SA\perp(ABCD)$ và $SA=a\sqrt{3}$. Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ là

(A) $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$. (B) $a^3\sqrt{3}$. (C) $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. (D) $\frac{a^3}{4}$.

Lời giải.



Khối chóp $S.ABCD$ có chiều cao $h=a\sqrt{3}$ và diện tích đáy $S=a^2$.

Suy ra, ta có thể tích

$$V=\frac{1}{3}\cdot a^2\cdot a\sqrt{3}=\frac{a^3\sqrt{3}}{3}.$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 31. (THPT Cộng Hiền-2019) Khẳng định nào sau đây là sai?

(A) Thể tích của khối chóp có diện tích đáy S và chiều cao h là $V=\frac{1}{3}Sh$.

(B) Thể tích của khối lăng trụ có diện tích đáy S và chiều cao h là $V=Sh$.

(C) Thể tích của một khối hộp chữ nhật bằng tích ba kính thước của nó.

(D) Thể tích của khối chóp có diện tích đáy S và chiều cao h là $V=3Sh$.

Lời giải.

Thể tích của khối chóp có diện tích đáy S và chiều cao h là $V=\frac{1}{3}Sh$.

Thể tích của khối lăng trụ có diện tích đáy S và chiều cao h là $V=Sh$.

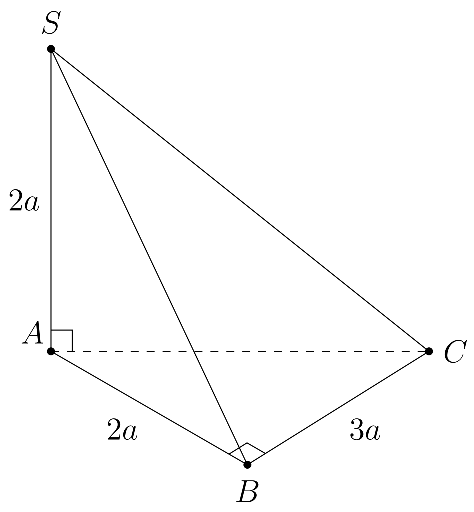
Thể tích của một khối hộp chữ nhật bằng tích ba kính thước của nó.

Chọn đáp án (D) □

Câu 32. (Lý Nhân Tông-Bắc Ninh 2019) Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B. Cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Biết $SA=AB=2a$, $BC=3a$. Tính thể tích của $S.ABC$ là

(A) $3a^3$. (B) $4a^3$. (C) $2a^3$. (D) a^3.

Lời giải.



Thể tích của khối chóp $S.ABC$ là

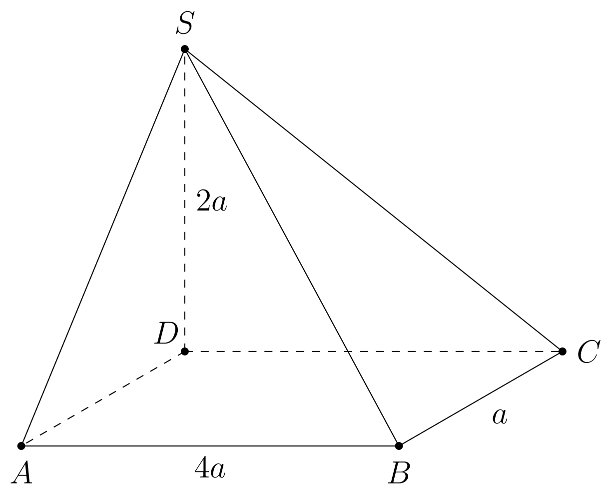
$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC \cdot SA = 2a^3.$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 33. (Kinh Môn-Hải Dương 2019) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ hình chữ nhật với $AB = 4a$, $BC = a$, cạnh bên $SD = 2a$ và SD vuông góc với mặt phẳng đáy. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng

(A) $6a^3$. (B) $3a^3$. (C) $\frac{8}{3}a^3$. (D) $\frac{2}{3}a^3$.

Lời giải.



Theo đề, ta có thể tích hình chóp: $S.ABCD$ là $V = \frac{1}{3} \cdot S_{ABCD} \cdot SD$.
$ABCD$ là hình chữ nhật nên $S_{ABCD} = AB \cdot BC = 4a^2$.
Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là

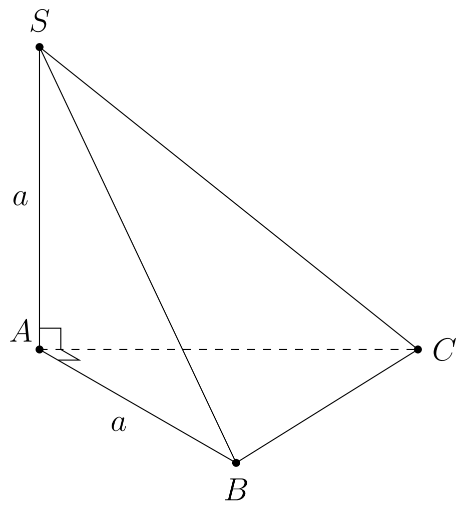
$$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot 4a^2 \cdot 2a = \frac{8}{3}a^3.$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 34. (Sở Điện Biên-2019) Tính thể tích của khối chóp $S.ABC$ có SA là đường cao, đáy là tam giác BAC vuông cân tại A; $SA = AB = a$.

Ⓐ $V = \frac{a^3}{3}$. Ⓑ $V = \frac{a^3}{6}$. Ⓒ $V = \frac{2a^3}{3}$. Ⓓ $V = \frac{a^3}{9}$.

Lời giải.



Thể tích khối chóp $S.ABC$ là

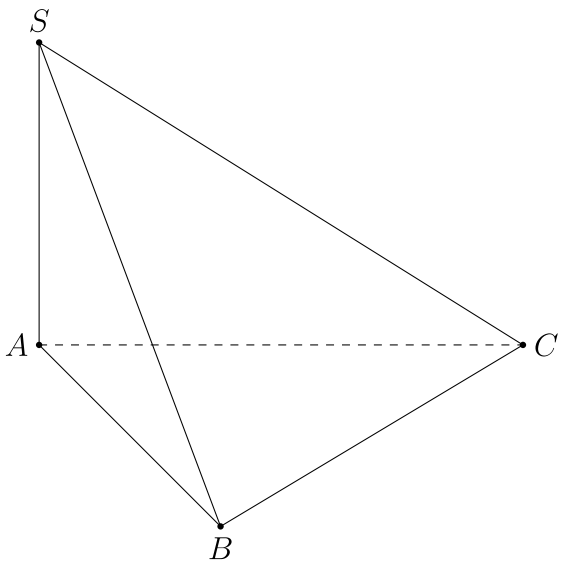
$$V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot SA \cdot S_{\Delta ABC} = \frac{1}{3} \cdot SA \cdot \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC = \frac{1}{6} \cdot a \cdot a \cdot a = \frac{a^3}{6}.$$

Chọn đáp án B □

Câu 35 (Sở Điện Biên-2019). Tính thể tích của khối chóp $S.ABC$ có SA là đường cao, đáy là tam giác BAC vuông cân tại A, $SA = AB = a$

Ⓐ $V = \frac{a^3}{3}$. Ⓑ $V = \frac{a^3}{6}$. Ⓒ $V = \frac{2a^3}{3}$. Ⓓ $V = \frac{a^3}{9}$.

Lời giải.



Ta có $V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot SA \cdot S_{\triangle ABC} = \frac{1}{3}SA \cdot \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC = \frac{1}{6} \cdot a \cdot a \cdot a = \frac{a^3}{6}$.

Chọn đáp án B □

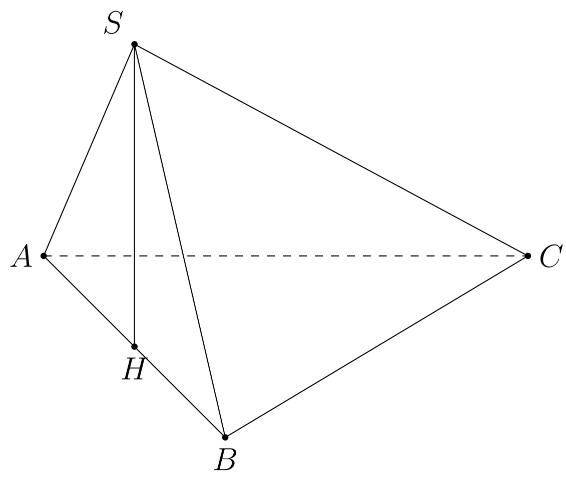
Dạng 2. Mặt bên vuông góc với đáy

Câu 36 (THPT Lương Thế Vinh Hà Nội 2019).

Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B và $AB = 2a$. Tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABC$

(A) $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$. (B) $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$. (C) $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$. (D) $V = \dfrac{2a^3\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải.



Gọi H là trung điểm của AB suy ra $SH = a\sqrt{3}$.

$AB = 2a \Rightarrow BC = 2a \Rightarrow S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{2}(2a)^2 = 2a^2$.

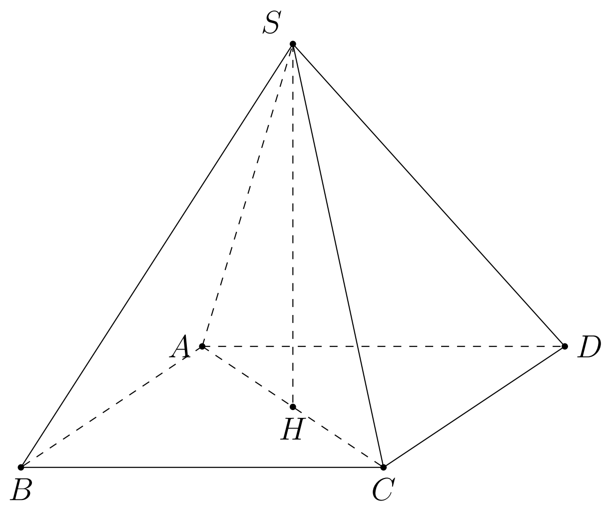
$V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}S_{ABC}SH = \dfrac{1}{3}2a^2a\sqrt{3} = \dfrac{2a^3\sqrt{3}}{3}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 37 (Chuyên Bắc Ninh 2019). Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $a\sqrt{2}$, tam giác SAC vuông tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy, cạnh bên SA tạo với đáy góc $60°$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$

(A) $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$. (B) $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$. (C) $V = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{12}$. (D) $V = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{12}$.

Lời giải.



Kẻ $SH \perp AC$, $H \in AC$ suy ra $SH \perp (ABCD)$.

$AC = 2a$, tam giác SAC vuông ở S, góc $\widehat{SAC} = 60°$

nên $SA = a$, $SC = a\sqrt{3}$, $SH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

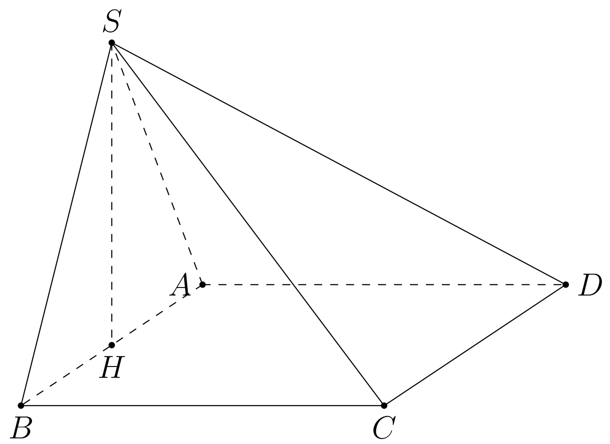
Thể tích hình chóp là $V = \dfrac{1}{3}\left(a\sqrt{2}\right)^2 \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

Chọn đáp án B □

Câu 38. (SGD Nam Định 2019) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh bằng $2a$. Mặt bên (SAB) là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ là

A $4a^3\sqrt{3}$. B $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$. C $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$. D $\dfrac{4a^3\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải.



Gọi H là trung điểm của AB, ta có $SH \perp AB$.

Mà $(SAB) \perp (ABCD)$ theo giao tuyến là đường thẳng AB nên $SH \perp (ABCD)$.

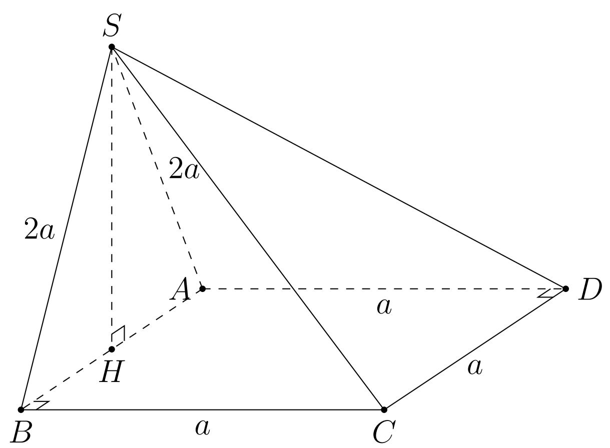
Thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng $V = \dfrac{1}{3}S_{ABCD} \cdot SH = \dfrac{1}{3} \cdot (2a)^2 \cdot \dfrac{2a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{4a^3\sqrt{3}}{3}$.

Chọn đáp án D □

Câu 39. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, tam giác SAB cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy, $SA = 2a$. Tính theo a thể tích khối chóp $S.ABCD$

A $V = 2a^3$. B $V = \dfrac{a^3\sqrt{15}}{12}$. C $V = \dfrac{a^3\sqrt{15}}{6}$. D $V = \dfrac{2a^3}{3}$.

Lời giải.



Gọi H là trung điểm AB.

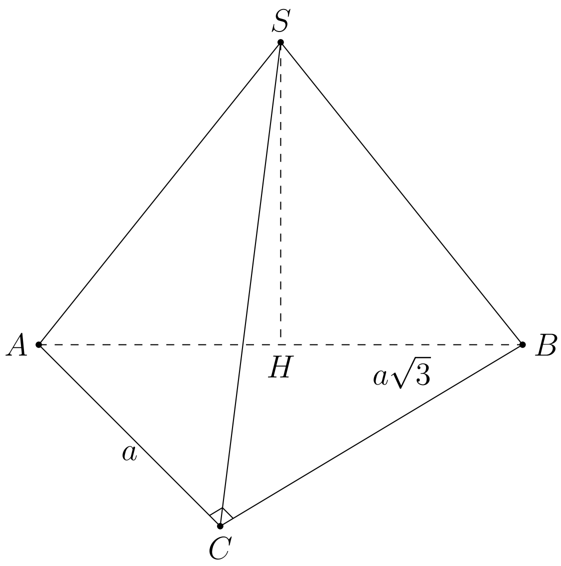
Theo đề bài, tam giác SAB cân tại S nên suy ra $SH \perp AB$.

Mặt khác, tam giác SAB nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy nên suy ra $SH \perp (ABCD)$.
Xét tam giác SHA vuông tại H.
$SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \sqrt{(2a)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{15}}{2}$.
Diện tích hình vuông là $S_{ABCD} = a^2$.
Vậy thể tích khối chóp $S.ABCD$ là $V = \frac{1}{3} \cdot SH \cdot S_{ABCD} = \frac{a^3\sqrt{15}}{6}$.
Chọn đáp án C □

Câu 40. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại C, tam giác SAB đều nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính theo a thể tích của khối chóp. Biết rằng $AB = a\sqrt{3}; AC = a$

A $\frac{a^3}{2}$. B $\frac{a^3\sqrt{2}}{4}$. C $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$. D $\frac{a^3\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải.



Trong mặt phẳng (SAB). Gọi H là trung điểm của AB.
$\triangle SAB$ đều $\Rightarrow SH \perp AB$.

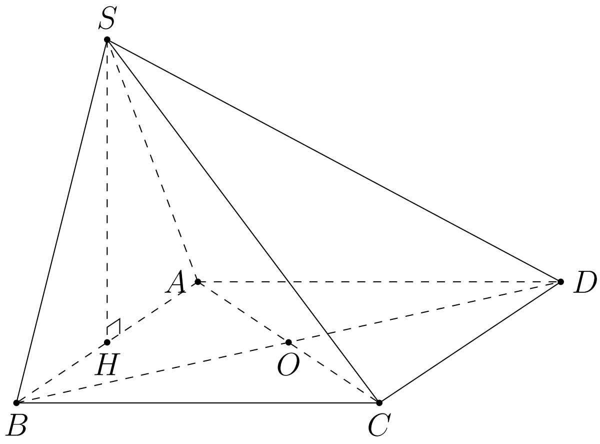
Ta có $\begin{cases} SH \perp AB \\ (SAB) \cap (ABC) = AB \\ (SAB) \perp (ABC) \end{cases} \Rightarrow SH \perp (ABC)$.

$\triangle SAB$ đều $AB = a\sqrt{3} \Rightarrow SH = \frac{3a}{2}$.
$\triangle ABC$ là tam giác vuông cân tại $C \Rightarrow AB^2 = AC^2 + BC^2 \Rightarrow BC = \sqrt{3a^2 - a^2} = a\sqrt{2}$.
$V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3a}{2} \cdot \frac{1}{2 \cdot} a\sqrt{2} \cdot a = \frac{a^3\sqrt{2}}{4}$.
Chọn đáp án B □

Câu 41. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , mặt bên SAB là một tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy $(ABCD)$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$

A $\frac{a^3}{6}$. B $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. C $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$. D 10.

Lời giải.



Gọi H là trung điểm AB thì $SH \perp AB$ và $SH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Ta có $\begin{cases} (SAB) \perp (ABCD) \\ (SAB) \cap (ABCD) = AB \\ SH \perp AB \end{cases} \Rightarrow SH \perp (ABCD)$.

Suy ra SH là đường cao của hình chóp.

Diện tích đáy $S_{ABCD} = a^2$.

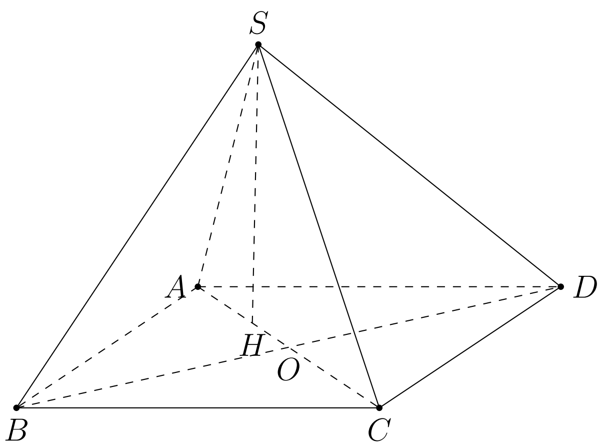
Vậy thể tích khối chóp $S.ABCD$ là $V_{ABCD} = \dfrac{1}{3} SH \cdot S_{ABCD} = \dfrac{1}{3} \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \cdot a^2 = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Chọn đáp án B □

Câu 42. (Chuyên ĐH Vinh 2019) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, $SA = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$, tam giác SAC vuông tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với $(ABCD)$. Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABCD$

A $V = \dfrac{\sqrt{6}a^3}{12}$. B $V = \dfrac{\sqrt{6}a^3}{3}$. C $V = \dfrac{\sqrt{6}a^3}{4}$. D $V = \dfrac{\sqrt{2}a^3}{6}$.

Lời giải.



Gọi H là hình chiếu vuông góc của S lên AC.

Ta có $SO = \dfrac{1}{2} AC = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$ suy ra $\triangle SAO$ là tam giác đều.

$\Rightarrow SH = \dfrac{a\sqrt{6}}{4}$.

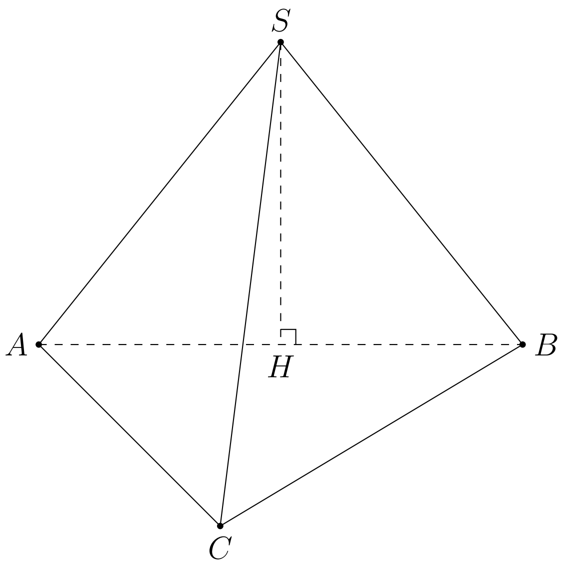
Vậy $V = \dfrac{1}{3} . \dfrac{a\sqrt{6}}{4} . a^2 = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{12}$.

Chọn đáp án A □

Câu 43. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác cân tại A , $AB = AC = a$, $\widehat{BAC} = 120^\circ$. Tam giác SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt đáy. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABC$

Ⓐ $V = \dfrac{a^3}{2}$. Ⓑ $V = 2a^3$. Ⓒ $V = a^3$. Ⓓ $V = \dfrac{a^3}{8}$.

Lời giải.



Gọi H là trung điểm AB, ta có $SH \perp AB$ và $SH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

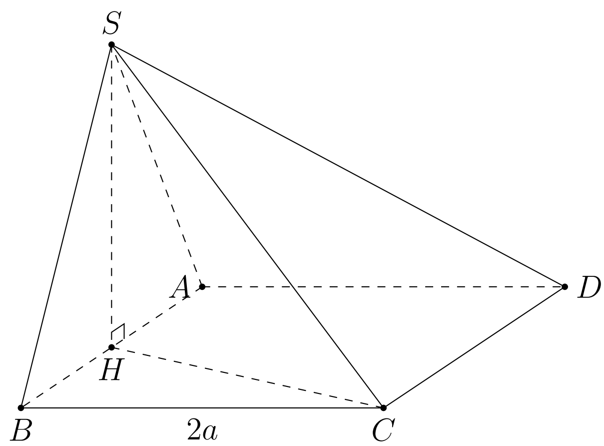
Khi đó $\begin{cases} (SAB) \perp (ABC) \\ (SAB) \cap (ABC) = AB \\ SH \perp AB \end{cases} \Rightarrow SH \perp (ABC)$.

Thể tích khối chóp $V = \dfrac{1}{3} SH \cdot S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot a^2 \cdot \sin 120^\circ = \dfrac{a^3}{8}$.

Vậy $V = \dfrac{a^3}{8}$.

Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 44. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh bằng $2a$. Tam giác SAB cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Biết thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng $\dfrac{4a^3}{3}$. Gọi α là góc giữa SC và mặt đáy, tính $\tan \alpha$



Ⓐ $\tan\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$. Ⓑ $\tan\alpha = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$. Ⓒ $\tan\alpha = \dfrac{\sqrt{7}}{7}$. Ⓓ $\tan\alpha = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

Lời giải.

Dựng $SH \perp AB$, do $(SAB) \perp (ABCD)$ theo giao tuyến AB nên $SH \perp (ABCD) \Rightarrow \alpha = \widehat{SCH}$.

Ta có $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}SH \cdot S_{ABCD} \Rightarrow \dfrac{1}{3}SH \cdot 4a^2 = \dfrac{4a^3}{3} \Rightarrow SH = a$.

Do $\triangle SAB$ cân tại S nên H là trung điểm của $AB \Rightarrow HC = \sqrt{BH^2 + BC^2} = a\sqrt{5}$.

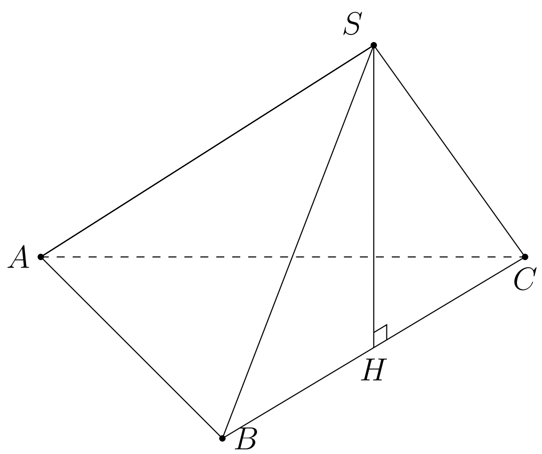
$\Rightarrow \tan\alpha = \tan\widehat{SCH} = \dfrac{SH}{HC} = \dfrac{a}{a\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 45. (Sở Bắc Giang 2019) Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A. Hình chiếu của S lên mặt phẳng (ABC) là trung điểm H của BC, $AB = a$, $AC = a\sqrt{3}$, $SB = a\sqrt{2}$. Thể tích của khối chóp $S.ABC$ bằng

Ⓐ $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$. Ⓑ $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{2}$. Ⓒ $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$. Ⓓ $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{6}$.

Lời giải.



Xét tam giác ABC vuông tại A có: $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{a^2 + \left(a\sqrt{3}\right)^2} = 2a$.

H là trung điểm của BC nên $BH = a$.

Xét tam giác SBH vuông tại H có: $SH = \sqrt{SB^2 - HB^2} = \sqrt{\left(a\sqrt{2}\right)^2 - a^2} = a$.

Diện tích đáy ABC là $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}AB \cdot AC = \dfrac{1}{2}a^2\sqrt{3}$.

Thể tích của khối chóp $S.ABC$ là: $V = \dfrac{1}{3}SH \cdot S_{ABC} = \dfrac{1}{3} \cdot a \cdot \dfrac{1}{2} \cdot a^2\sqrt{3} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

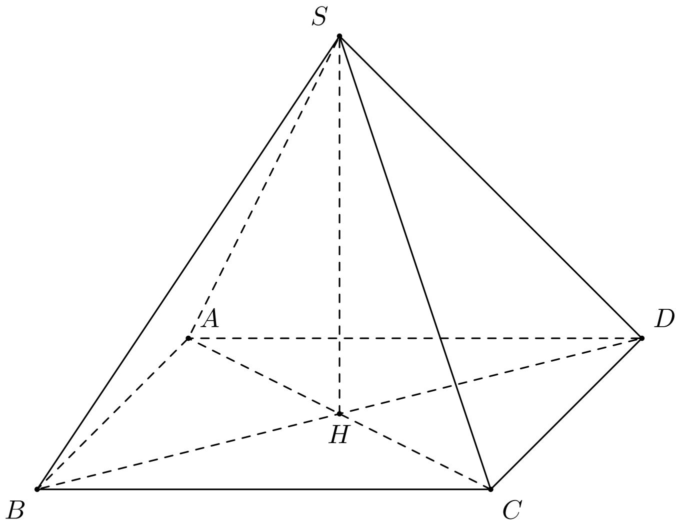
Chọn đáp án Ⓒ □

Dạng 3. Thể tích khối chóp đều

Câu 46. (Chuyên Hùng Vương Gia Lai 2019) Thể tích của khối chóp tứ giác đều có tất cả các cạnh bằng a là

Ⓐ $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}$. Ⓑ $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}$. Ⓒ a^3. Ⓓ $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải.



Giả sử khối chóp tứ giác đều đã cho là $S.ABCD$.

Khi đó $ABCD$ là hình vuông cạnh a và $SA = SB = SC = SD = a$.

Gọi H là tâm của hình vuông $ABCD$ thì $SH \perp (ABCD)$ nên SH là chiều cao của khối chóp $S.ABCD$.

Tính SH. Xét tam giác ABC vuông tại B ta có $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$.

Nhận thấy $AC^2 = SA^2 + SC^2$ nên tam giác SAC vuông tại S. Suy ra $SH = \dfrac{AC}{2} = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$.

Diện tích đáy của khối chóp $S.ABCD$ là $S_{ABCD} = a^2$.

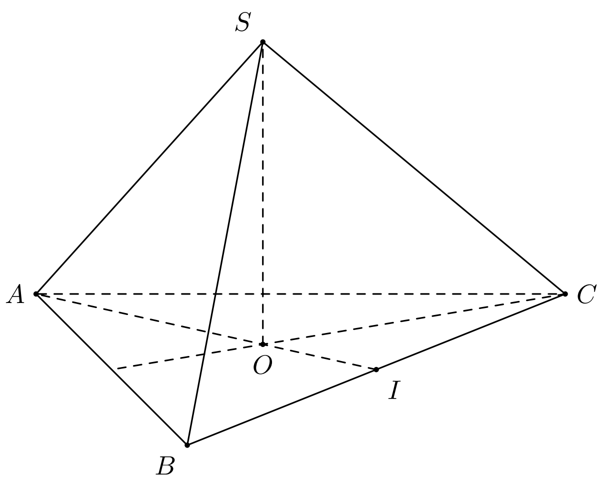
Vậy thể tích khối chóp $S.ABCD$ là: $V = \dfrac{1}{3} \cdot S_{ABCD} \cdot SH = \dfrac{1}{3} \cdot a^2 \cdot \dfrac{a}{\sqrt{2}} = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}$.

Chọn đáp án A □

Câu 47. (Mã 104 2017) Cho khối chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a và cạnh bên bằng $2a$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABC$

A $V = \dfrac{\sqrt{11}a^3}{6}$. B $V = \dfrac{\sqrt{11}a^3}{4}$. C $V = \dfrac{\sqrt{13}a^3}{12}$. D $V = \dfrac{\sqrt{11}a^3}{12}$.

Lời giải.



Do đáy là tam giác đều nên gọi I là trung điểm cạnh BC, khi đó AI là đường cao của tam giác ABC.

Theo định lý Pitago ta có $AI = \sqrt{a^2 - \dfrac{a^2}{4}} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ và $AO = \dfrac{2}{3}AI = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3.2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

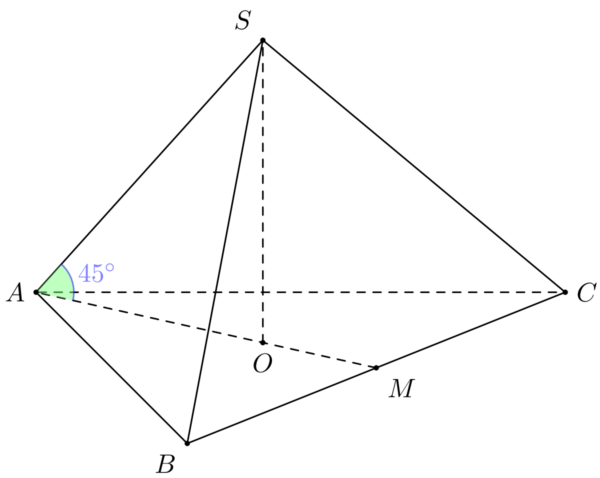
Trong tam giác SOA vuông tại O ta có $SO = \sqrt{4a^2 - \dfrac{a^2}{3}} = \dfrac{\sqrt{11}a}{\sqrt{3}}$.

Vậy thể tích khối chóp $S.ABC$ là $V = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{2}a \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{11}a}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{11}a^3}{12}$. □

Câu 48. (Chuyên Vĩnh Phúc 2019) Cho một hình chóp tam giác đều có cạnh đáy bằng a, góc giữa cạnh bên và mặt phẳng đáy bằng $45°$. Thể tích khối chóp đó là

Ⓐ $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$. Ⓑ $\dfrac{a^3}{12}$. Ⓒ $\dfrac{a^3}{36}$. Ⓓ $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{36}$.

Lời giải.



$(SA; (ABC)) = \widehat{SAO} = 45°$.

$SO = AO.\tan 45° = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

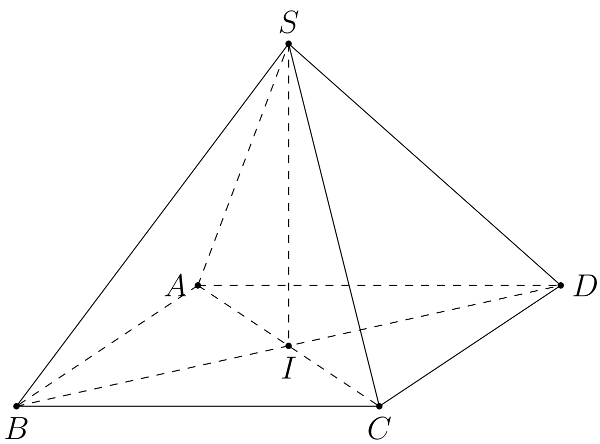
$V = \dfrac{1}{3} \cdot SO \cdot S_{ABC} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{3} \cdot \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a^3}{12}$.

Chọn đáp án B □

Câu 49. (Đề Tham Khảo 2019) Cho khối chóp tứ giác đều có tất cả các cạnh bằng 2a. Thể tích của khối chóp đã cho bằng

Ⓐ $\dfrac{2\sqrt{2}a^3}{3}$. Ⓑ $\dfrac{8a^3}{3}$. Ⓒ $\dfrac{8\sqrt{2}a^3}{3}$. Ⓓ $\dfrac{4\sqrt{2}a^3}{3}$.

Lời giải.



Gọi hình chóp tứ giác đều có tất cả các cạnh bằng $2a$ là $S.ABCD$ và I tâm của đáy.

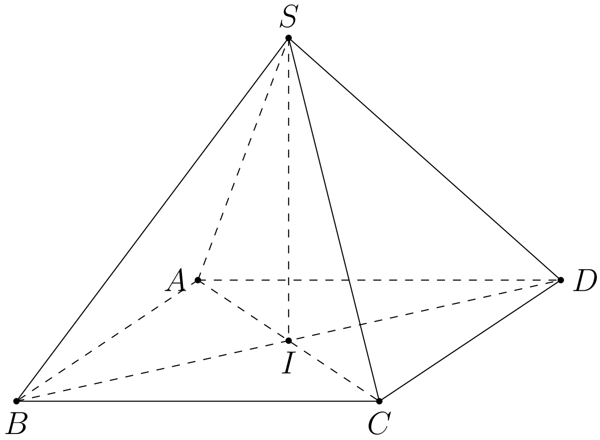
Ta có $SA = SC = BA = BC = DA = DC$

Suy ra $\triangle SAC = \triangle BAC = \triangle DBC \Rightarrow \triangle SAC; \triangle BAC; \triangle DAC$lần lượt vuông tại S, B, D.
I là trung điểm của AC suy ra $SI = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}2\text{a} \cdot \sqrt{2} = a\sqrt{2}$.
$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}S_{ABCD}.SI = \frac{1}{3}(2a)^2 \cdot a\sqrt{2} = \frac{4\sqrt{2}a^3}{3}$. □

Câu 50. (Mã 123 2017) Cho khối chóp tứ giác đều có cạnh đáy bằng a, cạnh bên gấp hai lần cạnh đáy. Tính thể tích V của khối chóp đã cho

Ⓐ $V = \frac{\sqrt{2}a^3}{2}$. Ⓑ $V = \frac{\sqrt{14}a^3}{2}$. Ⓒ $V = \frac{\sqrt{2}a^3}{6}$. Ⓓ $V = \frac{\sqrt{14}a^3}{6}$.

Lời giải.



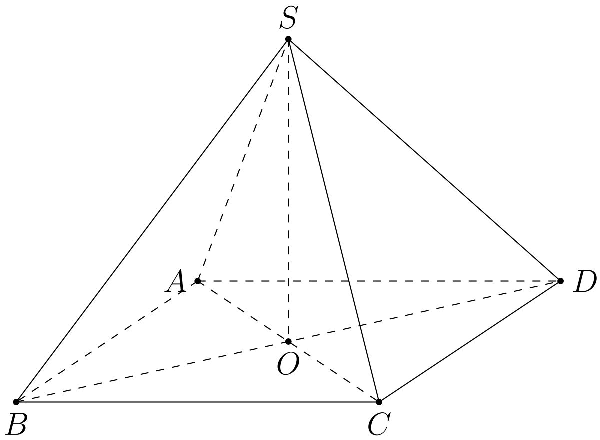
Chiều cao của khối chóp: $SI = \sqrt{SA^2 - AI^2} = \sqrt{4a^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{14}}{2}$.

Thể tích khối chóp: $V = \frac{1}{3}SI.S_{ABCD} = \frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{14}}{2}a^2 = \frac{\sqrt{14}a^3}{6}$. □

Câu 51. (Liên Trường Thpt Tp Vinh Nghệ An 2019) Cho khối chóp tứ giác đều có cạnh đáy bằng $2a$ cạnh bên bằng $a\sqrt{5}$. Thể tích của khối chóp đã cho bằng

Ⓐ $4\sqrt{5}a^3$. Ⓑ $4\sqrt{3}a^3$. Ⓒ $\frac{4\sqrt{5}a^3}{3}$. Ⓓ $\frac{4\sqrt{3}a^3}{3}$.

Lời giải.

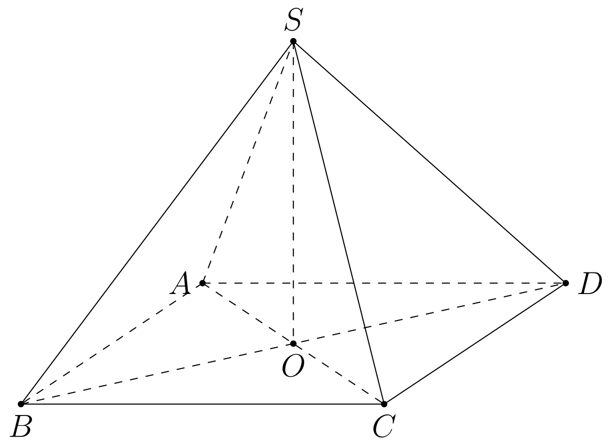


Ta có $S_{ABCD} = 4a^2$; $SO = \sqrt{SB^2 - OB^2} = \sqrt{5a^2 - 2a^2} = a\sqrt{3}$.
Vậy $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SO \cdot S_{ABCD} = \frac{a\sqrt{3} \cdot 4a^2}{3} = \frac{4\sqrt{3}a^3}{3}$.
Chọn đáp án D □

Câu 52. (THPT Lương Tài Số 2 2019) Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có cạnh đáy bằng $a\sqrt{6}$, góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng $60°$. Tính thể tích V của khối chóp S.ABC

Ⓐ $V = 9a^3$. Ⓑ $V = 2a^3$. Ⓒ $V = 3a^3$. Ⓓ $V = 6a^3$.

Lời giải.



Diện tích đáy là: $S_{ABCD} = AB^2 = \left(a\sqrt{6}\right)^2 = 6a^2$.

Góc giữa cạnh bên SB và mặt đáy $(ABCD)$ là $\left(\widehat{SD,(ABCD)}\right) = \widehat{SDO} \Rightarrow \widehat{SDO} = 60°$

$ABCD$ là hình vuông suy ra $DO = \dfrac{1}{2}BD = \dfrac{1}{2}AB\sqrt{2} = \dfrac{1}{2}a\sqrt{6} \cdot \sqrt{2} = a\sqrt{3}$.

Xét tam giác vuông SOD : $SO = DO \cdot \tan \widehat{SDO} = a\sqrt{3} \cdot \tan 60° = 3a$.

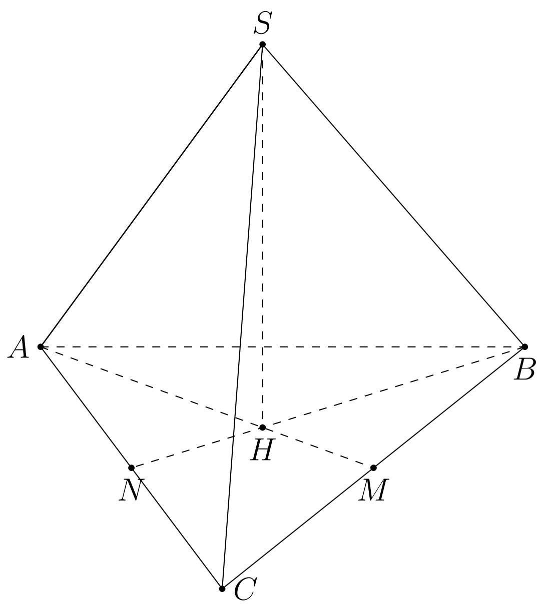
Vậy $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3} \cdot SO \cdot S_{ABCD} = \dfrac{1}{3} \cdot 3a \cdot 6a^2 = 6a^3$.

Chọn đáp án D □

Câu 53. (THPT Gia Lộc Hải Dương 2019) Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có độ dài cạnh đáy bằng a , góc hợp bởi cạnh bên và mặt đáy bằng 60° . Thể tích của khối chóp đã cho bằng

Ⓐ $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$. Ⓑ $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$. Ⓒ $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$. Ⓓ $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải.



Gọi H là tâm của tam giác đều ABC .

Khi đó $SH \perp (ABC)$, $BH = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Theo đề bài ta có: $\widehat{(SB, (ABC))} = \widehat{SBH} = 60^\circ$.

Xét $\triangle SBH$ vuông tại H . Có $SH = BH.\tan 60^\circ = \dfrac{a\sqrt{3}}{3} \cdot \sqrt{3} = a$.

Thể tích $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}SH \cdot S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{3}a \cdot \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

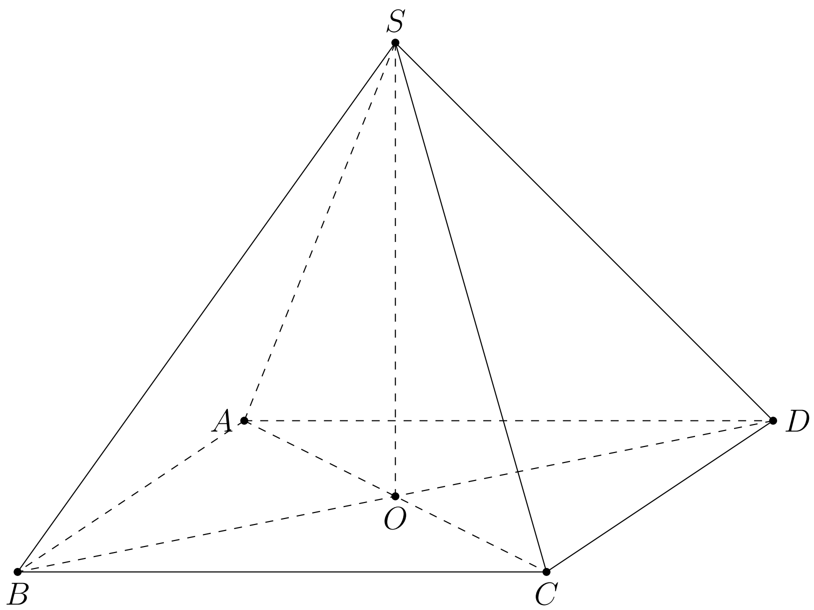
Chọn đáp án A □

Câu 54 (Chuyên Nguyễn Du ĐăkLăk).

Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có chiều cao bằng $a\sqrt{2}$ và độ dài cạnh bên bằng $a\sqrt{6}$. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng

A $\dfrac{10a^3\sqrt{3}}{3}$. B $\dfrac{10a^3\sqrt{2}}{3}$. C $\dfrac{8a^3\sqrt{3}}{3}$. D $\dfrac{8a^3\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải.



Gọi $O = AC \cap BD$ thì $SO = a\sqrt{2}$.

Tam giác SOA vuông tại O và $SA = a\sqrt{6}$ nên $OA = \sqrt{SA^2 - SO^2} = 2a \Rightarrow AC = BD = 4a$.

Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là

$$V = \frac{1}{3} \cdot SO \cdot \frac{AC \cdot BD}{2} = \frac{1}{3} \cdot a\sqrt{2} \cdot \frac{4a \cdot 4a}{2} = \frac{8a^3\sqrt{2}}{3}.$$

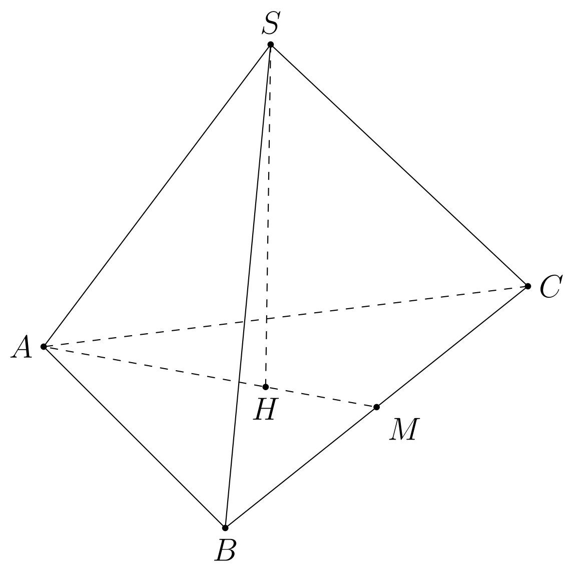
Chọn đáp án D □

Câu 55 (Thi thử Lômônôxốp - Hà Nội 2019).

Xét khối chóp tam giác đều cạnh đáy bằng a, cạnh bên bằng 2 lần chiều cao tam giác đáy. Tính thể tích khối chóp

A $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$. B $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{18}$. C $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}$. D $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{4}$.

Lời giải.



Gọi H là trọng tâm tam giác $ABC \Rightarrow SH \perp (ABC)$.

Gọi M là trung điểm của cạnh $BC \Rightarrow AM \perp BC, AM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow SA = a\sqrt{3}$.

Xét tam giác SAH vuông tại $H \Rightarrow SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \sqrt{(a\sqrt{3})^2 - \left(\dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \dfrac{2a\sqrt{6}}{3}$.

Ta có

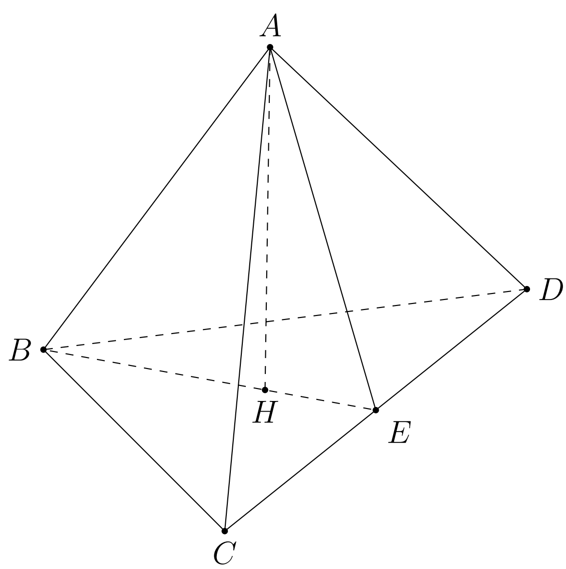
$$V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot S_{\triangle ABC} \cdot SH = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{2a\sqrt{6}}{3} = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}.$$

Chọn đáp án C ☐

Câu 56 (SP Đồng Nai - 2019). Thể tích khối tứ diện đều có cạnh bằng 3 là

A $\dfrac{9\sqrt{2}}{4}$. B $2\sqrt{2}$. C $\dfrac{4\sqrt{2}}{9}$. D $\sqrt{2}$.

Lời giải.



Có $\triangle BCD$ đều cạnh $3 \Rightarrow BE = \dfrac{3\sqrt{3}}{2} \Rightarrow BH = \sqrt{3}$.

$\triangle ABH$ vuông tại $H \Rightarrow AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = \sqrt{3^2 - (\sqrt{3})^2} = \sqrt{6}$.

$S_{\triangle BCD} = \dfrac{1}{2} \cdot BE \cdot CD = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{3\sqrt{3}}{2} \cdot 3 = \dfrac{9\sqrt{3}}{4}$.

Vậy

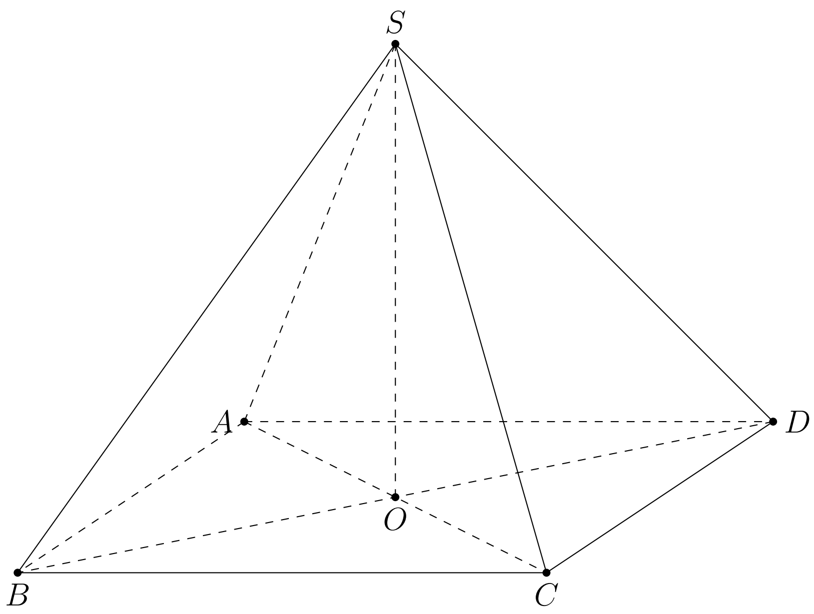
$$V_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot AH \cdot S_{\triangle BCD} = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{6} \cdot \frac{9\sqrt{3}}{4} = \frac{9\sqrt{2}}{4}.$$

Chọn đáp án A □

Câu 57. Cho khối chóp tứ giác đều có cạnh đáy bằng a, cạnh bên gấp hai lần cạnh đáy. Tính thể tích V của khối chóp đã cho

A $V = \frac{\sqrt{14}a^3}{6}$. B $V = \frac{\sqrt{14}a^3}{2}$. C $V = \frac{\sqrt{2}a^3}{2}$. D $V = \frac{\sqrt{2}a^3}{6}$.

Lời giải.



Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$, ta có $SO \perp (ABCD)$.

Trong tam giác SOC vuông tại O có $SO = \sqrt{SC^2 - OC^2} = \sqrt{(2a)^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{14}}{2}$.

Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là

$$V = \frac{1}{3} \cdot SO \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{14}}{2} \cdot a^2 = \frac{a^3\sqrt{14}}{6}.$$

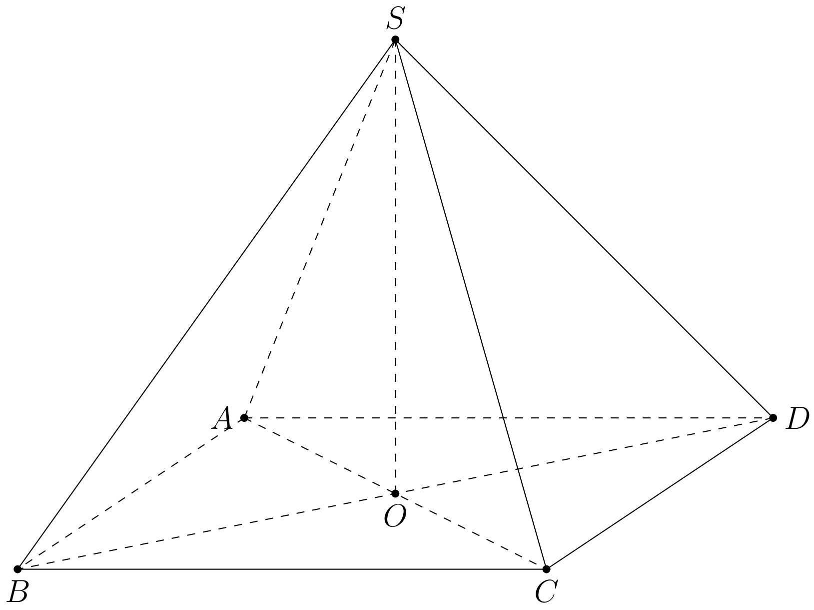
Chọn đáp án A □

Câu 58 (Nguyễn Huệ - Ninh Bình - 2019).

Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Cạnh bên SA tạo với đáy góc $60°$. Tính thể tích khối $SBCD$

A $\frac{a^3\sqrt{6}}{6}$. B $\frac{a^3\sqrt{6}}{12}$. C $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. D $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

Lời giải.



Gọi $O = AC \cap BD$. Do hình chóp $S.ABCD$ đều nên $SO \perp (ABCD)$ suy ra OA là hình chiếu vuông góc của SA trên mp$(ABCD) \Rightarrow (SA, (ABCD)) = (SA, OA) = \widehat{SAO} = 60°$.

Ta có $SO = AO \cdot \tan 60° = \dfrac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{3} = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$; $S_{BCD} = \dfrac{a^2}{2}$.

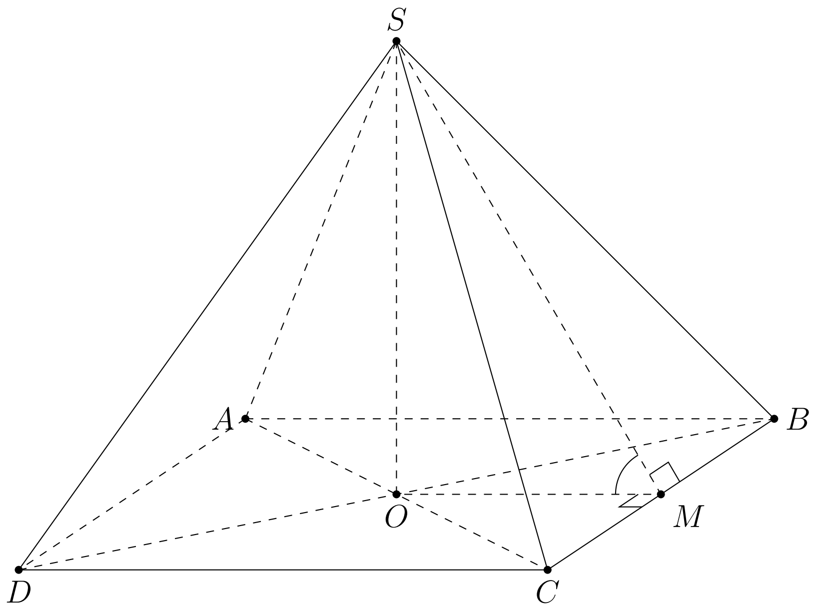
Từ đó, $V_{SBCD} = \dfrac{1}{3} SO \cdot S_{BCD} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{a\sqrt{6}}{2} \cdot \dfrac{a^2}{2} = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{12}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 59. Cho khối chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy là a, các mặt bên tạo với đáy một góc 60°. Tính thể tích khối chóp đó

(A) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$. (B) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$. (C) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$. (D) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải.



Gọi M là trung điểm BC, Góc giữa mặt bên (SBC) và mặt phẳng $(ABCD)$ là góc $\widehat{SMO} = 60°$.

Xét $\triangle SOM$ có $OM = \dfrac{a}{2}$, $\widehat{SMO} = 60°$ thì $SO = OM \cdot \tan \widehat{SMO} = \dfrac{a}{2} \cdot \sqrt{3} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

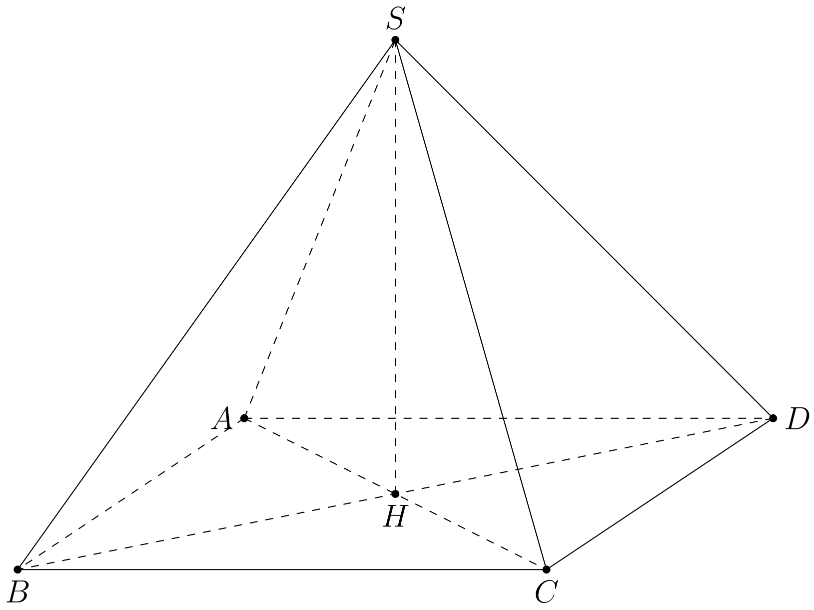
Nên $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3} \cdot SO \cdot S_{ABCD} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$(đvtt).

Chọn đáp án (C) □

Câu 60. Cho khối chóp tứ giác đều $S \cdot ABCD$ có cạnh đáy bằng a. Biết $\widehat{ASC} = 90^\circ$, tính thể tích V của khối chóp đó

(A) $V = \dfrac{a^3}{3}$. (B) $V = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}$. (C) $V = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}$. (D) $V = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{12}$.

Lời giải.



Ta có $S_{ABCD} = a^2$.

Gọi H là tâm của hình vuông $ABCD$. Tam giác ASC là tam giác vuông, H là trung điểm của AC nên $SH = \dfrac{AC}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

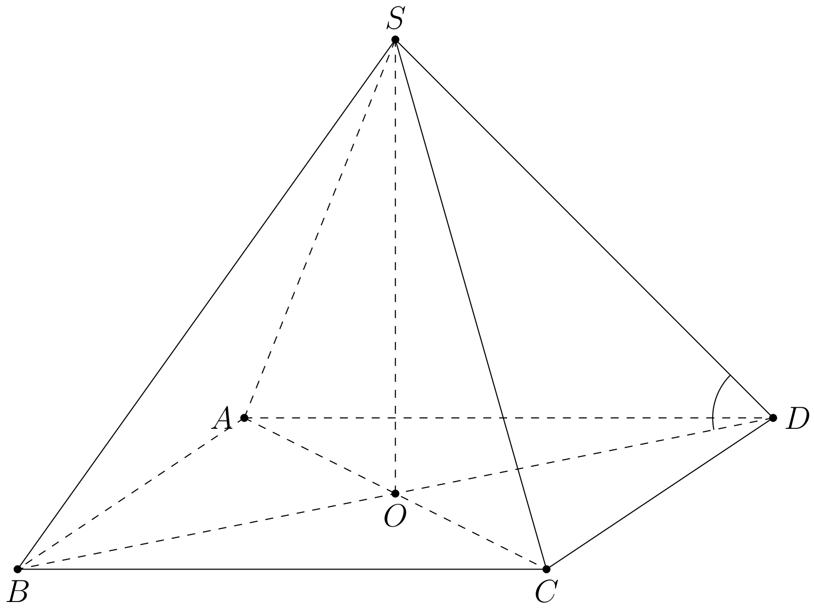
Vậy $V_{S \cdot ABCD} = \dfrac{1}{3} S_{ABCD} \cdot SH = \dfrac{1}{3} \cdot a^2 \cdot \dfrac{a\sqrt{2}}{2} = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 61. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a, góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng 60°. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là

(A) $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{6}$. (B) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$. (C) $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{12}$. (D) $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{2}$.

Lời giải.



Gọi O là tâm của đáy thì $SO \perp (ABCD)$. Suy ra $\widehat{SDB} = 60^\circ$.

$\triangle SDB$ đều nên $SO = \dfrac{DB\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là $V = \dfrac{1}{3}S_{ABCD} \cdot SO = \dfrac{1}{3}a^2 \cdot \dfrac{a\sqrt{6}}{2} = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{6}$.

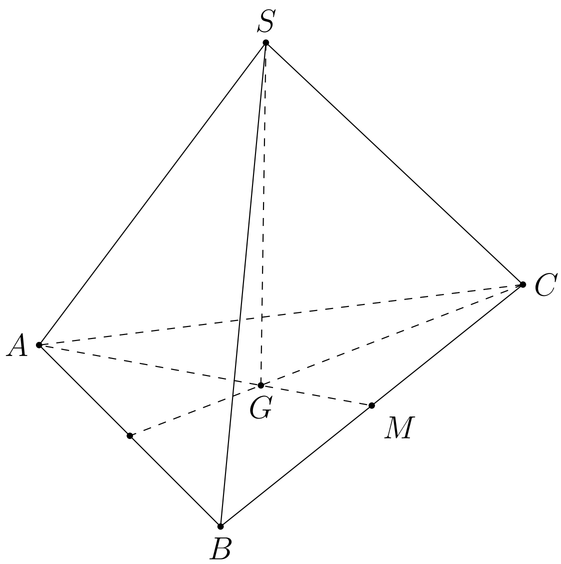
Chọn đáp án A □

Câu 62 (Trường THPT Thăng Long 2019).

Hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy là a và mặt bên tạo với đáy góc 45°. Tính theo a thể tích khối chóp $S.ABC$

A $\dfrac{a^3}{8}$. B $\dfrac{a^3}{24}$. C $\dfrac{a^3}{12}$. D $\dfrac{a^3}{4}$.

Lời giải.



Gọi G là tâm của tam giác đều ABC và M là trung điểm BC. Theo giả thiết góc giữa mặt bên và đáy bằng 45° suy ra $\widehat{SMG} = 45^\circ$.

Tam giác ABC đều cạnh a nên $AM = \dfrac{\sqrt{3}}{2}a$ và $GM = \dfrac{1}{3}AM = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$.

Xét tam giác SGM có $\tan\widehat{SMG} = \dfrac{SG}{GM} \Rightarrow \tan 45^\circ = \dfrac{SG}{GM} \Rightarrow SG = GM = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$.
Vậy thể tích khối chóp $S.ABC$ là

$$V_{S.ABC} = \frac{1}{3}S_{ABC} \cdot SG = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{6} = \frac{a^3}{24}.$$

Chọn đáp án B □

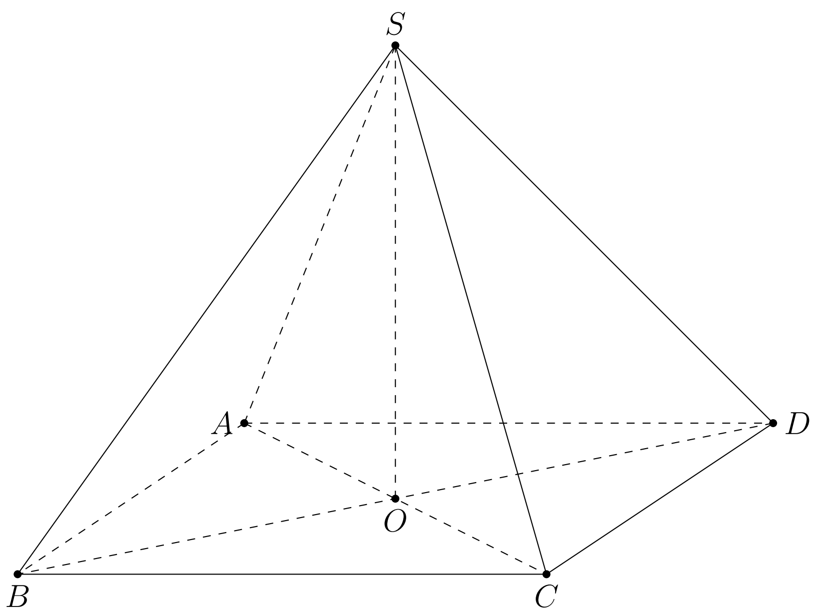
Câu 63 (THPT Quỳnh Lưu - Nghệ An - 2019).

Cho khối chóp có đáy hình thoi cạnh a, $(a > 0)$, các cạnh bên bằng nhau và cùng tạo với đáy góc 45°. Thể tích của khối chóp đã cho bằng

A $\dfrac{1}{3\sqrt{2}}a^3$. B $\sqrt{2}a^3$. C $\dfrac{3a^3}{\sqrt{2}}$. D $\dfrac{1}{\sqrt{2}}a^3$.

Lời giải.

Ta có hình vẽ dưới đây.



Xét khối chóp trên ta thấy hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng đáy trùng với tâm của hình thoi $ABCD$.
Mặt khác $SA = SB = SC = SD$ và góc hợp bởi các cạnh bên bằng 45° nên ta có các tam giác vuông cân tại O bằng nhau: $\triangle SOA = \triangle SOB = \triangle SOC = \triangle SOD$.
Suy ra hình thoi $ABCD$ là một hình vuông diện tích đáy bằng $S_{ABCD} = a^2$.
Chiều cao của hình chóp trên là $SO = OD = \dfrac{1}{2}BD = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.
Suy ra thể tích khối chóp bằng

$$V_{S \cdot ABCD} = \frac{1}{3} \cdot SO \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot a^2 = \frac{a^3}{3\sqrt{2}}.$$

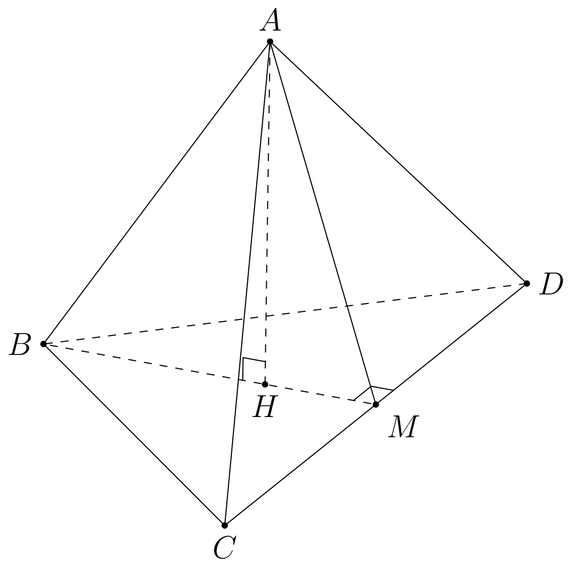
Chọn đáp án A □

Câu 64 (Chuyên Quang Trung- Bình Phước 2019).

Tính thể tích khối tứ diện đều có tất cả các cạnh bằng a

Ⓐ a^3. Ⓑ $\dfrac{\sqrt{2}}{12}a^3$. Ⓒ $\dfrac{1}{12}a^3$. Ⓓ $6a^3$.

Lời giải.



Gọi M là trung điểm của CD. Ta có $BM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow BH = \dfrac{a\sqrt{3}}{3} \cdot AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

Do đáy BCD là tam giác đều cạnh $a \Rightarrow S_{BCD} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Vậy thể tích tứ diện đều là

$$V_{ABCD} = \frac{1}{3}\frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{3} = \frac{\sqrt{2}}{12}a^3.$$

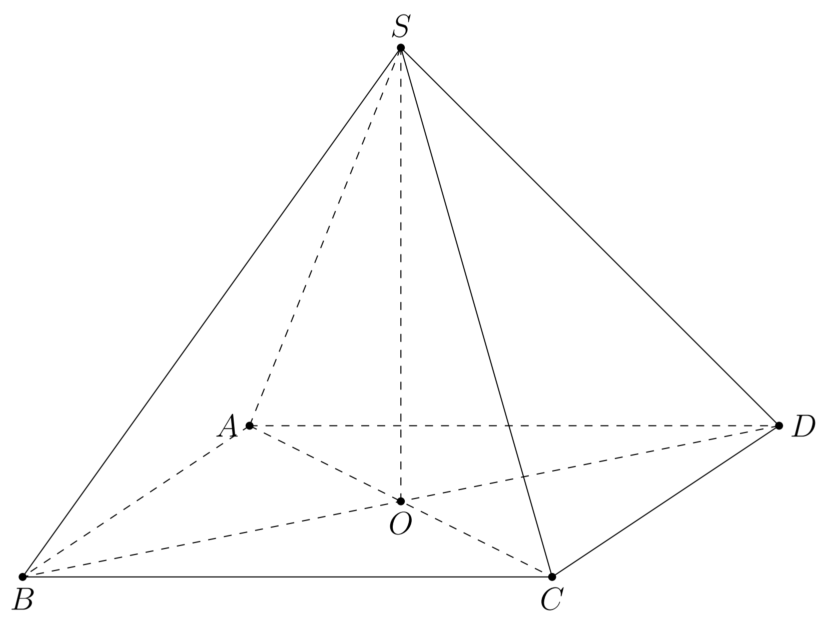
Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 65 (Hậu Lộc 2 - Thanh Hóa - 2019).

Cho hình chóp tứ giác đều có cạnh đáy bằng a, góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng 60°. Thể tích khối chóp là

Ⓐ $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{6}$. Ⓑ $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{2}$. Ⓒ $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$. Ⓓ $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{3}$.

Lời giải.



Giả sử hình chóp tứ giác đều là $S.ABCD$. Gọi O là giao điểm của BD và AC.

Ta có $SO \perp (ABCD), \widehat{SAO} = 60°, AC = a\sqrt{2} \Rightarrow OA = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Khi đó $SO = AO \cdot \tan\widehat{SAO} = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}, S_{ABCD} = a^2$.

Thể tích khối chóp là

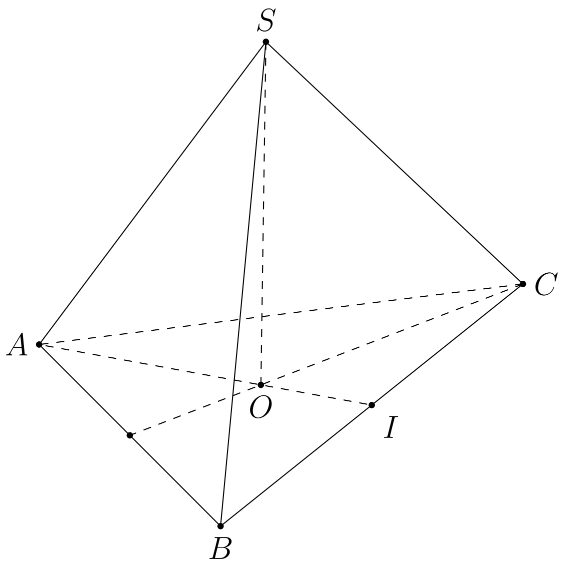
$$V = \frac{1}{3}SO \cdot S_{ABCD} = \frac{a^3\sqrt{6}}{6}.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 66. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng $2a$, cạnh bên tạo với đáy một góc $60°$. Thể tích khối chóp $S.ABC$ là

(A) $\dfrac{2a^3\sqrt{3}}{3}$. (B) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$. (C) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$. (D) $a^3\sqrt{3}$.

Lời giải.



Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$ thì $SO \perp (ABC)$. Suy ra $\widehat{SAO} = 60°$.

$AO = \dfrac{2}{3} \cdot 2a \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}, SH = AO \cdot \tan 60° = 2a$.

Diện tích $\triangle ABC$ là $S_{ABC} = \dfrac{(2a)^2\sqrt{3}}{4} = a^2\sqrt{3}$.

Thể tích khối chóp $S \cdot ABC$ là

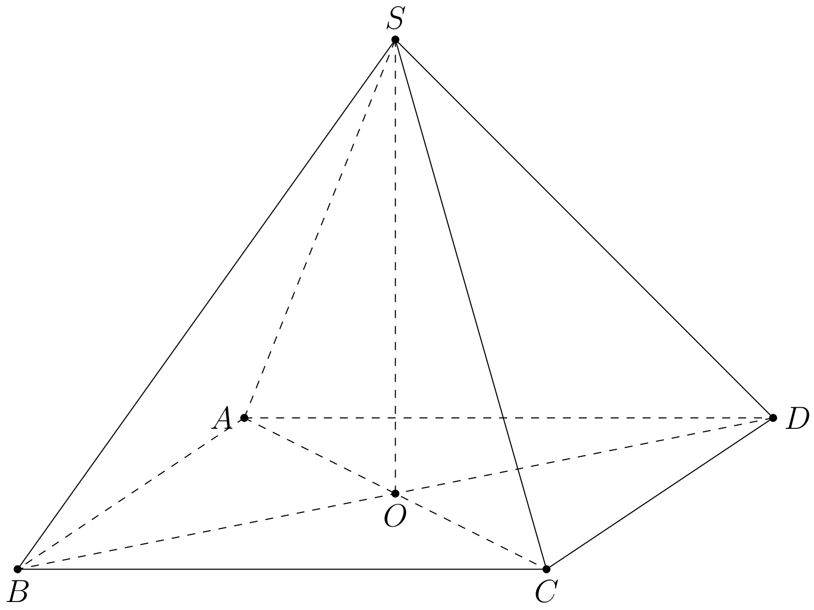
$$V = \frac{1}{3}S_{ABC} \cdot SO = \frac{2a^3\sqrt{3}}{3}.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 67 (SGD Điện Biên - 2019). Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $2a$, cạnh bên bằng $3a$. Tính thể tích V của khối chóp đã cho

(A) $V = 4\sqrt{7}a^3$. (B) $V = \dfrac{4\sqrt{7}a^3}{9}$. (C) $V = \dfrac{4a^3}{3}$. (D) $V = \dfrac{4\sqrt{7}a^3}{3}$.

Lời giải.



Diện tích đáy $S_{ABCD} = (2a)^2 = 4a^2$.

$S.ABCD$ là hình chóp tứ giác đều nên $SO \perp (ABCD)$.

$h = SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \sqrt{9a^2 - 2a^2} = a\sqrt{7}$.

Vậy $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}Sh = \dfrac{4a^3\sqrt{7}}{3}$.

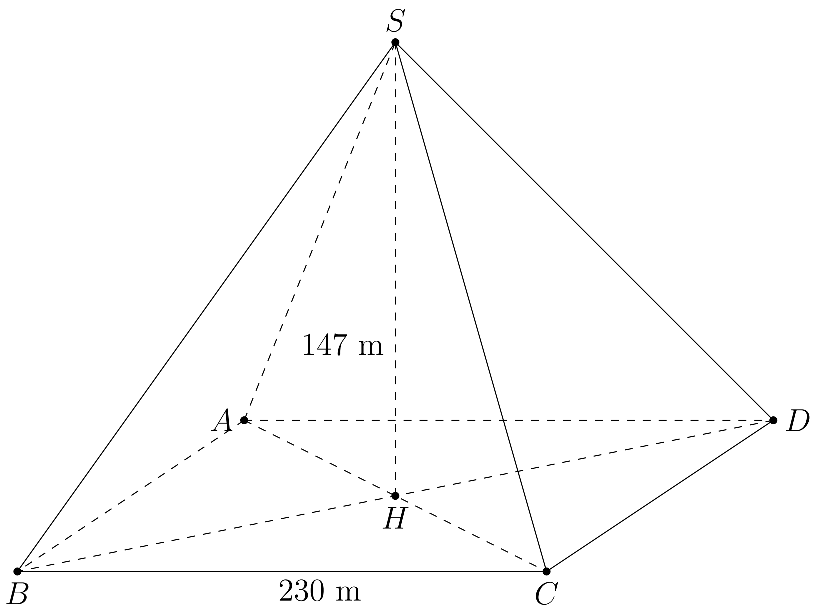
Chọn đáp án D □

Câu 68 (Nguyễn Huệ - Ninh Bình - 2019).

Kim tự tháp Kê - ốp ở Ai Cập được xây dựng vào khoảng 2500 năm trước Công nguyên. Kim tự tháp này là một khối chóp tứ giác đều có chiều cao là 147 m, cạnh đáy là 230 m. Thể tích của nó là

A. $2592100\ \text{m}^3$. B. $2952100\ \text{m}^3$. C. $2529100\ \text{m}^3$. D. $2591200\ \text{m}^3$.

Lời giải.



Gọi khối chóp tứ giác đều là $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh 230 m; chiều cao $SH = 147$ m.

Thể tích của nó là

$$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot S_{ABCD} \cdot SH = \frac{1}{3} \cdot \left(230^2\right) \cdot 147 = 2592100.$$

Vậy thể tích Kim tự tháp là 2592100 m^3.

Chọn đáp án (A) □

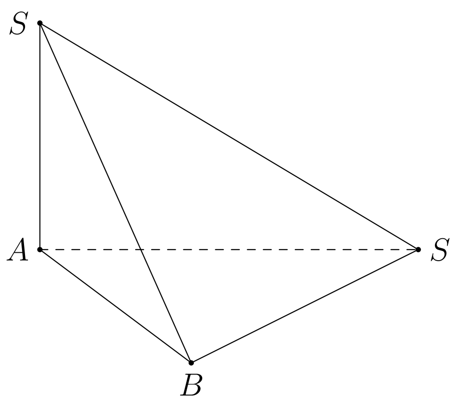
BẢNG ĐÁP ÁN

1. C	2. B	3. C	4. A	5. D	6. D	7. C	8. D	9. D	10. C
11. C	12. B	13. D	14. A	15. D	16. C	17. C	18. D	19. C	20. C
21. B	22. A	23. B	24. A	25. B	26. B	27. B	28. D	29. A	30. C
31. D	32. C	33. C	34. B	35. B	36. D	37. B	38. D	39. C	40. B
41. B	42. A	43. D	44. D	45. C	46. A	48. B	51. D	52. D	53. A
54. D	55. C	56. A	57. A	58. B	59. C	60. C	61. A	62. B	63. A
64. B	65. A	66. A	67. D	68. A					

MỨC ĐỘ 2. MỨC 7,8 ĐIỂM

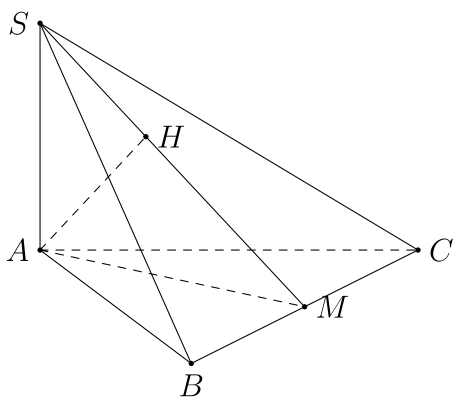
Dạng 1. Cạnh bên vuông góc với đáy

Câu 1 (Đề Minh Họa 2021). Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy, góc giữa SAvà mặt phẳng (SBC) bằng 45^0 (tham khảo hình bên). Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng



(A) $\frac{a^3}{8}$. (B) $\frac{3a^3}{8}$. (C) $\frac{\sqrt{3}a^3}{12}$. (D) $\frac{a^3}{4}$.

Lời giải.



Gọi M là trung điểm BC thì $AM \perp BC$ và $SA \perp BC$ nên $BC \perp (SAM)$.

Kẻ $AH \perp SM$ tại H thì $AH \perp (SBC)$. Suy ra góc giữa SAvà mặt phẳng (SBC) bằng $\widehat{ASH} = \widehat{ASM} = 45^\circ$. Do đó, ΔSAM vuông cân ở A và $SA = AM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

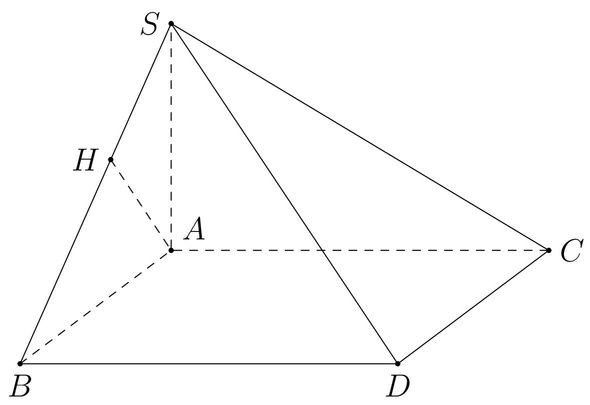
Suy ra $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a^3}{8}$.

Chọn đáp án A □

Câu 2 (Mã 105 2017). Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với đáy và khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. Tính thể tích của khối chóp đã cho.

A $\dfrac{a^3}{3}$. B a^3. C $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{9}$. D $\dfrac{a^3}{2}$.

Lời giải.



Ta có $BC \perp AB, BC \perp SA \Rightarrow BC \perp AH$. Kẻ $AH \perp SB \Rightarrow AH \perp (SBC)$.

Suy ra $d\left(A; (SBC)\right) = AH = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Tam giác SAB vuông tại A có: $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{SA^2} + \dfrac{1}{AB^2} \Rightarrow SA = a$.

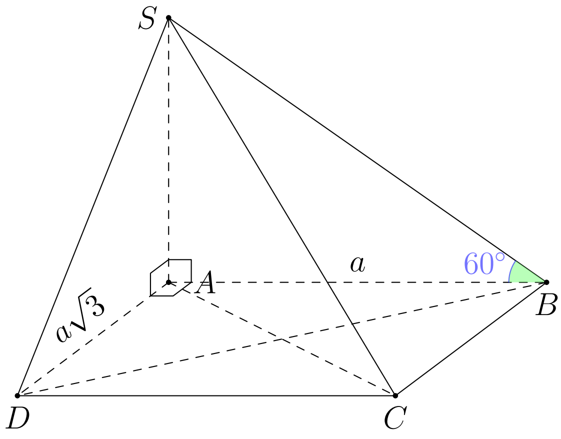
Vậy $V_{SABCD} = \dfrac{1}{3} SA.S_{ABCD} = \dfrac{a^3}{3}$.

Chọn đáp án A □

Câu 3 (Mã 110 2017). Cho khối chóp $S.ABCD$có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a$, $AD = a\sqrt{3}$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và mặt phẳng (SBC) tạo với đáy một góc 60^o. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

A $V = 3a^3$. B $V = \dfrac{\sqrt{3}a^3}{3}$. C $V = a^3$. D $V = \dfrac{a^3}{3}$.

Lời giải.



Ta có $S_{ABCD} = \sqrt{3}a^2$.

Vì $\begin{cases} (SBC) \cap (ABCD) = BC \\ BC \perp SB \subset (SBC) \\ BC \perp AB \subset (ABCD) \end{cases} \Rightarrow (\widehat{(SBC), (ABCD)}) = (\widehat{SB; AB}) = \widehat{SBA}$.

Vậy $\widehat{SBA} = 60^o$

Xét tam giác vuông SAB có: $\tan 60^o = \dfrac{SA}{AB} \Rightarrow SA = AB.\tan 60^o = a\sqrt{3}$.

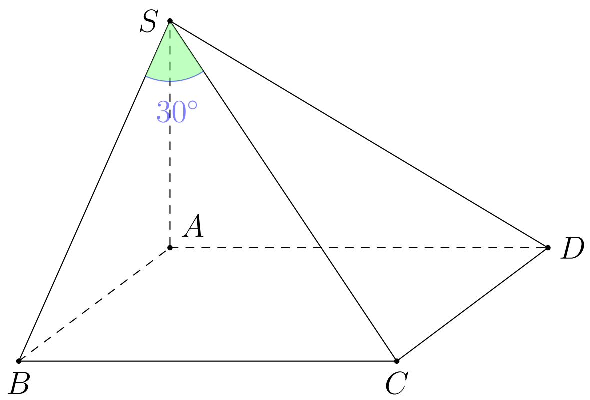
Vậy $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}S_{ABCD}.SA = \dfrac{1}{3}a^2\sqrt{3}.a\sqrt{3} = a^3$.

Chọn đáp án C □

Câu 4 (Mã 123 2017). Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với đáy, SC tạo với mặt phẳng (SAB) một góc 30^0. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$

A $\dfrac{2a^3}{3}$. B $\dfrac{\sqrt{2}a^3}{3}$. C $\dfrac{\sqrt{6}a^3}{3}$. D $\sqrt{2}a^3$.

Lời giải.



+) Do ABCD là hình vuông cạnh a nên: $S_{ABCD} = a^2$

+) Chứng minh được $BC \perp (SAB) \Rightarrow$ góc giữa SC và (SAB) là $\widehat{CSB} = 30^0$.

+) Đặt $SA = x \Rightarrow SB = \sqrt{x^2 + a^2}$. Tam giác SBC vuông tại B nên $\tan \widehat{CSA} = \tan 30^0 = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{BC}{SB}$.

Ta được: $SB = BC\sqrt{3} \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + a^2} = a\sqrt{3} \Rightarrow x = a\sqrt{2}$.

Vậy $V_{SABCD} = \dfrac{1}{3}.SA.S_{ABCD} = \dfrac{1}{3}.a\sqrt{2}.a^2 = \dfrac{\sqrt{2}a^3}{3}$ (Đvtt).

Chọn đáp án B □

Câu 5 (Chuyên Vĩnh Phúc 2019). Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại C, cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy, biết $AB = 4a, SB = 6a$. Thể tích khối chóp $S.ABC$ là V. Tỷ số $\dfrac{a^3}{3V}$ là

Ⓐ $\dfrac{\sqrt{5}}{80}$. Ⓑ $\dfrac{\sqrt{5}}{40}$. Ⓒ $\dfrac{\sqrt{5}}{20}$. Ⓓ $\dfrac{3\sqrt{5}}{80}$.

Lời giải.

Ta có:

+ ΔABC vuông cân tại C, $AB = 4a$ suy ra $AC = BC = 2a\sqrt{2}$.

Do đó: $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}AC.BC = 4a^2$.

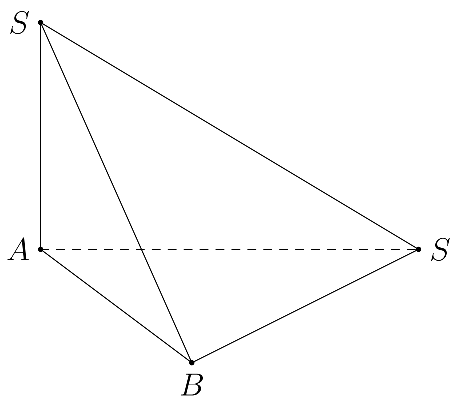
+ $SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp AB \Rightarrow \Delta ABC$ vuông tại A

$SA = \sqrt{SB^2 - AB^2} = \sqrt{(6a)^2 - (4a)^2} = 2a\sqrt{5}$.

+ Khối chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$.

$\Rightarrow V = \dfrac{1}{3}S_{ABC}.SA = \dfrac{1}{3}4a^2.2a\sqrt{5} = \dfrac{8a^3\sqrt{5}}{3}$.

Vậy tỷ số: $\dfrac{a^3}{3V} = \dfrac{a^3}{\dfrac{3.8a^3\sqrt{5}}{3}} = \dfrac{\sqrt{5}}{40}$.

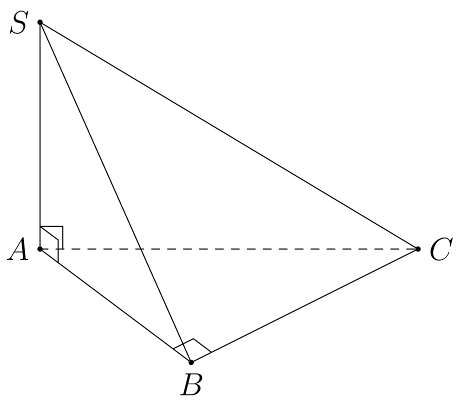


Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 6 (Chuyên Bắc Giang 2019). Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $AB = a$, $\widehat{ACB} = 60°$, cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy và SB hợp với mặt đáy một góc $45°$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

Ⓐ $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{18}$. Ⓑ $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$. Ⓒ $V = \dfrac{a^3}{2\sqrt{3}}$. Ⓓ $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{9}$.

Lời giải.



ABC là tam giác vuông tại B, $AB = a$, $\widehat{ACB} = 60° \Rightarrow BC = \dfrac{AB}{\tan 60^0} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}a$.

$(SB, \widehat{(ABC)}) = (\widehat{SB, AB}) = 45^0$ nên tam giác SAB vuông cân tại $S \Rightarrow SA = AB = a$.

$V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}S_{\Delta ABC}.SA = \dfrac{1}{3}.\dfrac{1}{2}BA.BC.SA = \dfrac{1}{6}a.a\dfrac{\sqrt{3}}{3}a = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{18}$.

Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 7 (Lương Thế Vinh Hà Nội Năm 2019).

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật $AB = a$ và $AD = 2a$, cạnh bên SA vuông góc với đáy. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$ biết góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và $(ABCD)$ bằng 60^0 .

(A) $V = \dfrac{a^3\sqrt{15}}{15}$. (B) $V = \dfrac{a^3\sqrt{15}}{6}$. (C) $V = \dfrac{4a^3\sqrt{15}}{15}$. (D) $V = \dfrac{a^3\sqrt{15}}{3}$.

Lời giải.

Kẻ $AE \perp BD$.

$\left(\widehat{(SBD),(ABCD)}\right) = \widehat{SEA} = 60^0$.

Xét ΔABD vuông tại A.

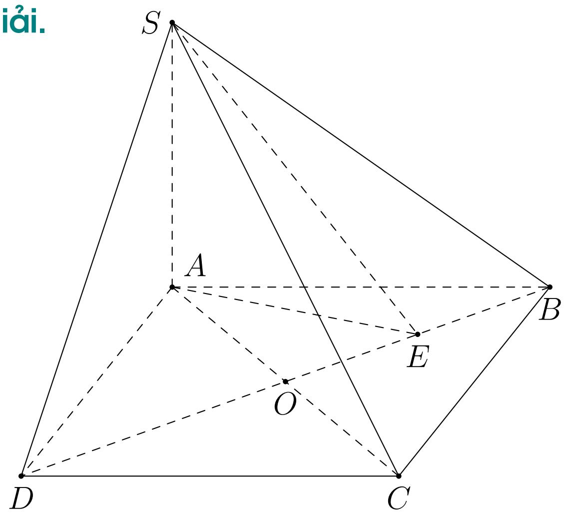
$AE = \dfrac{AD.AB}{\sqrt{AD^2 + AB^2}} = \dfrac{2a^2}{a\sqrt{5}} = \dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$.

Xét ΔSAE vuông tại A.

$SA = AE.\tan 60^0 = \dfrac{2a\sqrt{5}}{5}.\sqrt{3} = \dfrac{2a\sqrt{15}}{5}$.

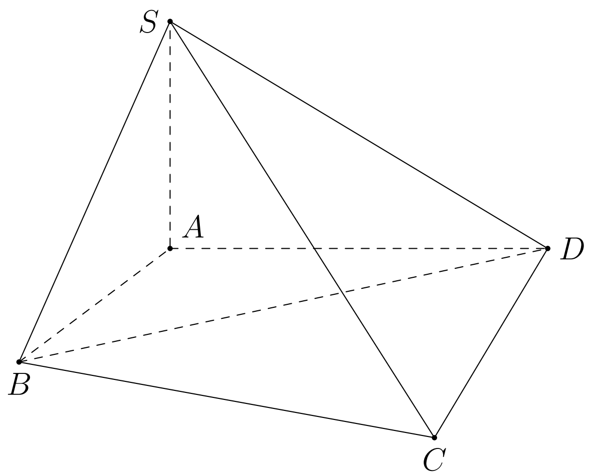
Khi đó thể tích $S.ABCD$.

$V = \dfrac{1}{3}SA.S_{ABCD} = \dfrac{1}{3}.\dfrac{2a\sqrt{15}}{5}.2a^2 = \dfrac{4a^3\sqrt{15}}{15}$.



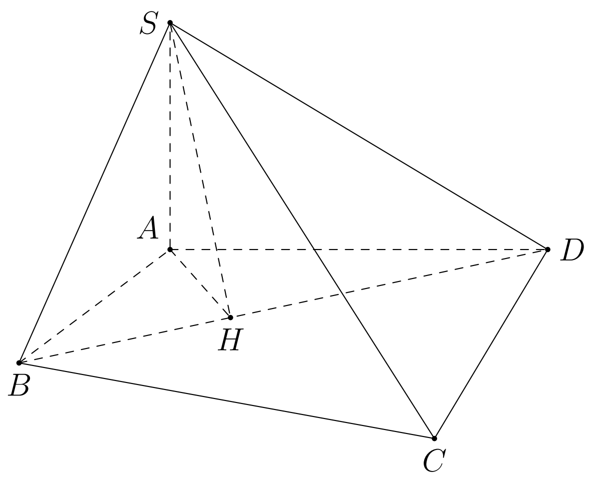
Chọn đáp án (C) □

Câu 8 (Hoàng Hoa Thám 2019). Cho hình chóp $S.ABCD$ có $AB = 5\sqrt{3}, BC = 3\sqrt{3}$, góc $\widehat{BAD} = \widehat{BCD} = 90^\circ$, $SA = 9$ và SA vuông góc với đáy. Biết thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng $66\sqrt{3}$, tính cotang của góc giữa mặt phẳng (SBD) và mặt đáy.



(A) $\dfrac{20\sqrt{273}}{819}$. (B) $\dfrac{\sqrt{91}}{9}$. (C) $\dfrac{3\sqrt{273}}{20}$. (D) $\dfrac{9\sqrt{91}}{9}$.

Lời giải.



Có: $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}.SA.S_{ABCD} \Leftrightarrow 66\sqrt{3} = \frac{1}{3}.9.S_{ABCD} \Rightarrow S_{ABCD} = 44\sqrt{3}$

Suy ra $\frac{1}{2}AB.AD + \frac{1}{2}BC.CD = 44\sqrt{3} \Leftrightarrow 5AD + 3CD = 44$. (1)

Áp dụng định lí Pitago trong 2 tam giác vuông $ABD; BCD$, ta có:

$AB^2 + AD^2 = BD^2 = BC^2 + CD^2 \Leftrightarrow CD^2 - AD^2 = 48$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\left[\begin{array}{l} AD = 4 \\ AD = \frac{47}{2} \end{array}\right.$

$AD = \frac{47}{2}$ không thỏa mãn do từ (1) ta có: $AD < \frac{44}{5} \Rightarrow AD = 4$.

Trong tam giác ABD , dựng $AH \perp BD$ lại có $SA \perp BD \Rightarrow BD \perp SH$.

Vậy góc giữa (SBD) và đáy là góc $\widehat{SHA}$.

Dễ tính $BD = \sqrt{91}, AH = \frac{AB.AD}{BD} = \frac{20\sqrt{273}}{91}$, $\cot\widehat{SHA} = \frac{AH}{SA} = \frac{20\sqrt{273}}{819}$.

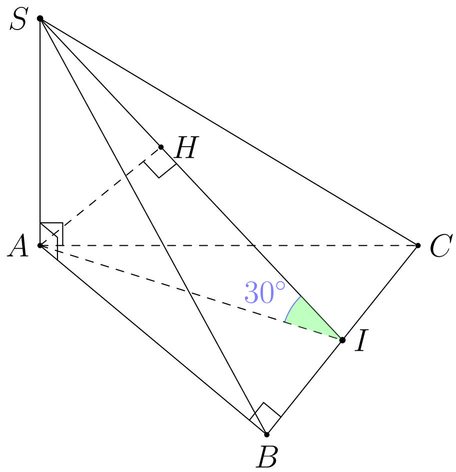
Chọn đáp án A □

Câu 9 (THPT Yên Khánh-Ninh Bình-2019).

Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều, $SA \perp (ABC)$. Mặt phẳng (SBC) cách A một khoảng bằng a và hợp với mặt phẳng (ABC) góc 30^0 . Thể tích của khối chóp $S.ABC$ bằng

(A) $\frac{8a^3}{9}$. (B) $\frac{8a^3}{3}$. (C) $\frac{\sqrt{3}a^3}{12}$. (D) $\frac{4a^3}{9}$.

Lời giải.

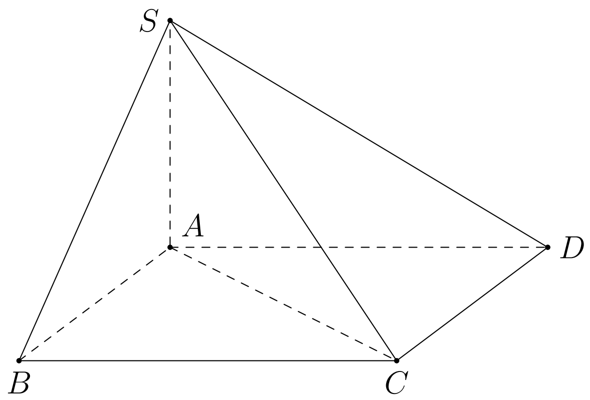


Gọi I là trung điểm sủa BC suy ra góc giữa mp (SBC) và mp (ABC) là $\widehat{SIA} = 30^0$.
H là hình chiếu vuông góc của A trên SI suy ra $d\left(A,(SBC)\right) = AH = a$.
Xét tam giác AHI vuông tại H suy ra $AI = \dfrac{AH}{\sin 30^0} = 2a$.
Giả sử tam giác đều ABC có cạnh bằng x , mà AI là đường cao suy ra $2a = x\dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x = \dfrac{4a}{\sqrt{3}}$.
Diện tích tam giác đều ABC là $S_{ABC} = \left(\dfrac{4a}{\sqrt{3}}\right)^2 . \dfrac{\sqrt{3}}{4} = \dfrac{4a^2\sqrt{3}}{3}$.
Xét tam giác SAI vuông tại A suy ra $SA = AI.\tan 30^0 = \dfrac{2a}{\sqrt{3}}$.
Vậy $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}.S_{ABC}.SA = \dfrac{1}{3}.\dfrac{4a^2\sqrt{3}}{3}.\dfrac{2a}{\sqrt{3}} = \dfrac{8a^3}{9}$.
Chọn đáp án A □

Câu 10. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với đáy. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ biết rằng $SC = a\sqrt{3}$.

A $V_{S.ABCD} = a^3$. B $V_{S.ABCD} = \dfrac{a^3}{3}$. C $V_{S.ABCD} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$. D $V_{S.ABCD} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{9}$.

Lời giải.

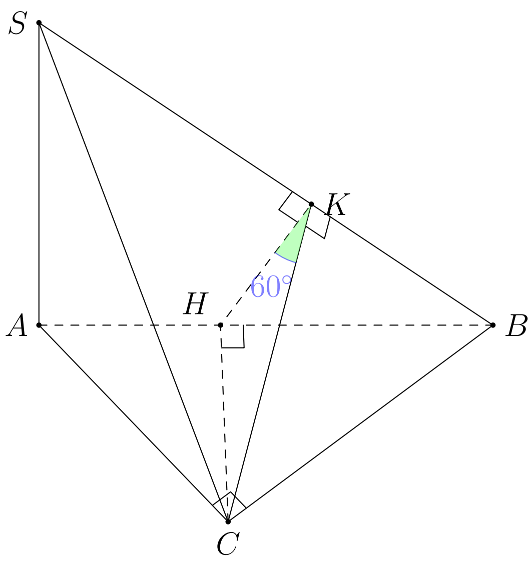


Vì hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với đáy. Mà $(SAB) \cap (SAD) = SA$ nên $SA \perp (ABCD)$.
Ta có: $AC = a\sqrt{2}$; $SA = \sqrt{SC^2 - AC^2} = \sqrt{\left(a\sqrt{3}\right)^2 - \left(a\sqrt{2}\right)^2} = a$.
Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là: $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}SA.S_{ABCD} = \dfrac{1}{3}a.a^2 = \dfrac{a^3}{3}$.
Chọn đáp án B □

Câu 11. Cho hình chóp $S.ABC$có đáy là tam giác ABC vuông tại C, $AB = 2a$, $AC = a$ và SA vuông góc với mặt phẳng (ABC). Biết góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SBC) bằng $60°$. Tính thể tích của khối chóp $S.ABC$.

A $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}$. B $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{12}$. C $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{4}$. D $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải.



Trong ΔABCkẻ $CH \perp AB \Rightarrow CH \perp (SAB) \Rightarrow CH \perp SB(1)$.

$BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = a\sqrt{3}$,

$BH.BA = BC^2$,

$\Rightarrow BH = \dfrac{3a}{2}$, $CH = \sqrt{BC^2 - BH^2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Trong ΔSABkẻ $HK \perp SB \Rightarrow CK \perp SB(2)$.

Từ $(1),(2) \Rightarrow HK \perp SB$.

Góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SBC) là $\widehat{CKH} = 60°$.

Trong vuông ΔCKH có $HK = CH.\cot 60° = \dfrac{a}{2}$, $BK = \sqrt{BH^2 - HK^2} = a\sqrt{2}$.

$\Delta SAB \backsim \Delta HKB\,(g.g)$ nên $\dfrac{SA}{HK} = \dfrac{AB}{BK} = \dfrac{2a}{a\sqrt{2}} \Rightarrow SA = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$

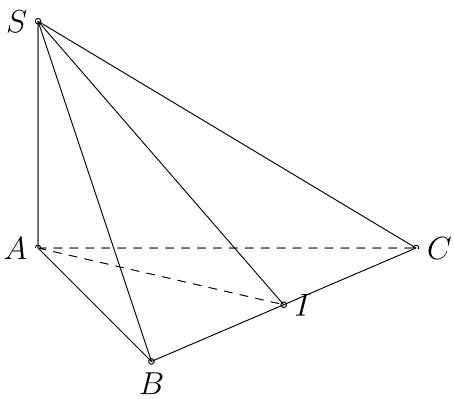
Thể tích hình chóp $S.ABC$ là $V = \dfrac{1}{3}SA.S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{3}\dfrac{a}{\sqrt{2}}.\dfrac{1}{2}.a.\sqrt{3}.a = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{12}$.

Chọn đáp án B □

Câu 12. Cho khối chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác cân tại A với $BC = 2a$, $\widehat{BAC} = 120°$, biết $SA \perp (ABC)$ và mặt (SBC) hợp với đáy một góc $45°$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

Ⓐ $\dfrac{a^3}{2}$. Ⓑ $a^3\sqrt{2}$. Ⓒ $\dfrac{a^3}{9}$. Ⓓ $\dfrac{a^3}{3}$.

Lời giải.



Gọi I là trung điểm BC.

+ Do ΔABC cân tại A nên $BC \perp AI$

+ Mặt khác do $SA \perp (ABC) \Rightarrow BC \perp SA$

Suy ra $BC \perp SI$.

Do đó góc giữa (SBC) và đáy chính là góc $\widehat{SIA} = 45°$.

Xét ΔAIB vuông tại I có $IB = a$, $\widehat{IAB} = 60°$, suy ra $IA = \dfrac{IB}{\tan 60°} = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$.

ΔSAI vuông tại A có $IA = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$, $\widehat{SIA} = 45°$ nên ΔSAI vuông cân tại A, do đó $SA = IA = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$.

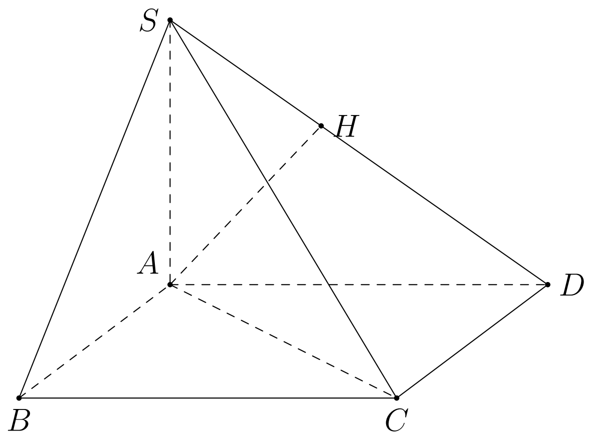
Thể tích của khối chóp $S.ABC$là $V = \dfrac{1}{3}S_{\Delta ABC}.SA = \dfrac{1}{3}.\dfrac{1}{2}BC.AI.SA = \dfrac{a^3}{9}$.

Chọn đáp án C □

Câu 13 (Bạc Liêu – Ninh Bình). Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật có $AB = a$, $AD = 2a$; SA vuông góc với đáy, khoảng cách từ A đến (SCD) bằng $\dfrac{a}{2}$. Tính thể tích của khối chóp theo a.

A. $\dfrac{4\sqrt{15}}{45}a^3$. B. $\dfrac{4\sqrt{15}}{15}a^3$. C. $\dfrac{2\sqrt{5}}{15}a^3$. D. $\dfrac{2\sqrt{5}}{45}a^3$.

Lời giải.



Gọi H là hình chiếu vuông góc của điểm A trên đường thẳng SD. Ta có

$\begin{cases} AH \perp SD \\ AH \perp CD \end{cases} \Rightarrow AH \perp (SCD) \Rightarrow AH = d(A,(SCD))$. Suy ra $AH = \dfrac{a}{2}$.

ΔSAD vuông tại A có đường cao AH nên

$\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{SA^2} + \dfrac{1}{AD^2} \Leftrightarrow \dfrac{1}{SA^2} = \dfrac{1}{AH^2} - \dfrac{1}{AD^2} = \dfrac{15}{4a^2} \Rightarrow SA = \dfrac{2a\sqrt{15}}{15}$.

Vậy $V = \dfrac{1}{3}AB.AD.SA = \dfrac{1}{3}a.2a.\dfrac{2a\sqrt{15}}{15} = \dfrac{4\sqrt{15}}{45}a^3$.

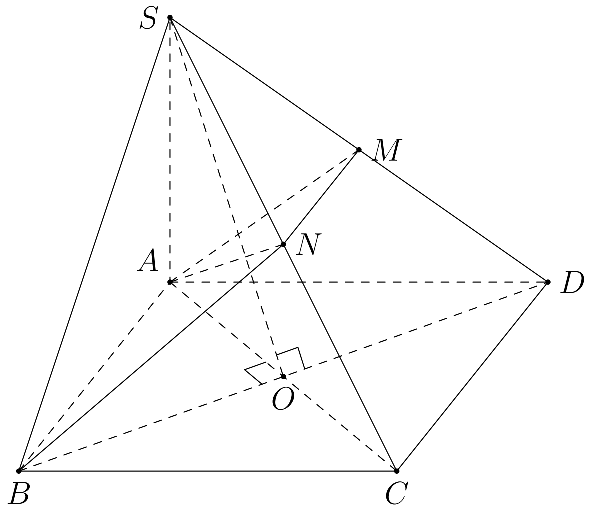
Chọn đáp án A □

Câu 14 (Cụm liên trường Hải Phòng-2019).

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với đáy$ABCD$, góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và $ABCD$ bằng 60^0. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SB, SC. Tính thể tích khối chóp $S.ADNM$.

A. $V = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{16}$. B. $V = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{24}$. C. $V = \dfrac{3a^3\sqrt{6}}{16}$. D. $V = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{8}$.

Lời giải.



Gọi $O = AC \cap BD$.

$AO \perp BD \Rightarrow SO \perp BD$. Nên góc của (SBD) và $ABCD$ là góc $\widehat{SOA} = 60^0$.

$V_{S.ADN} = \frac{1}{2}.V_{S.ADC} = \frac{1}{4}.V_{S.ABCD}$ và $V_{S.AMN} = \frac{1}{2}.\frac{1}{2}V_{S.ABC} = \frac{1}{8}V_{S.ABCD}$.

$\Rightarrow V_{S.ADMN} = V_{S.ADN} + V_{S.AMN} = \frac{3}{8}V_{S.ABCD}$.

$SA = AO.\tan\widehat{SOA} = \frac{a\sqrt{2}}{2}\tan 60^0 = \frac{a\sqrt{6}}{2} \Rightarrow V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}S_{ABCD}.SA = \frac{a^3\sqrt{6}}{6}$.

$\Rightarrow V_{S.ADMN} = \frac{3}{8}.\frac{a^3\sqrt{6}}{6} = \frac{a^3\sqrt{6}}{16}$.

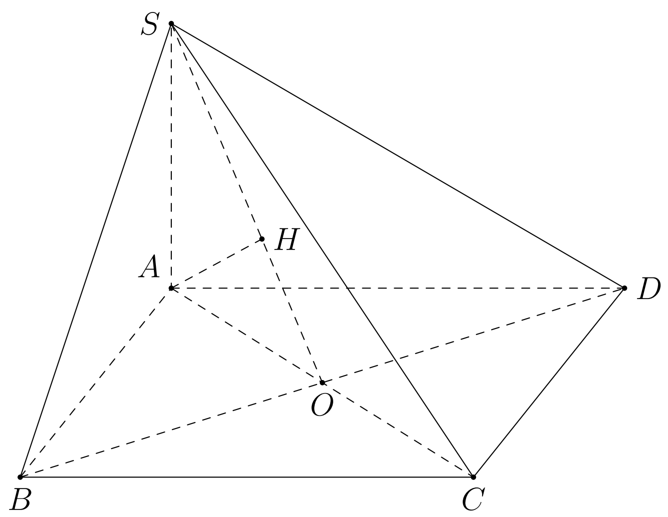
Chọn đáp án A □

Câu 15 (Chuyên Lê Quý Đôn Điện Biên 2019).

Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với đáy và khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SBD) bằng $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. Tính thể tích V của khối chóp đã cho.

A $V = \frac{a^3}{2}$. B $V = a^3$. C $V = \frac{a^3}{3}$. D $V = \frac{\sqrt{3}a^3}{9}$.

Lời giải.



Gọi $O = AC \cap BD$, gọi H là hình chiếu của A lên SO.

Vì O là trung điểm của AC nên $d(C, (SBD)) = d(A, (SBD))$

Ta có: $BD \perp AC$; $BD \perp SA$

$Rightarrow BD \perp (SAC) \Rightarrow (SBD) \perp (SAC)$;

$SO = (SAC) \cap (SBD)$

$AH \perp SO \Rightarrow AH \perp (SBD) \Rightarrow AH = d(A,(SBD)) = d(C,(SBD)) = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$

Ta có: $AO = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Trong tam giác SAO : $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{SA^2} + \dfrac{1}{AO^2} \Rightarrow SA = a$.

$V_{SABCD} = \dfrac{1}{3}.S_{ABCD}.SA = \dfrac{a^3}{3}$.

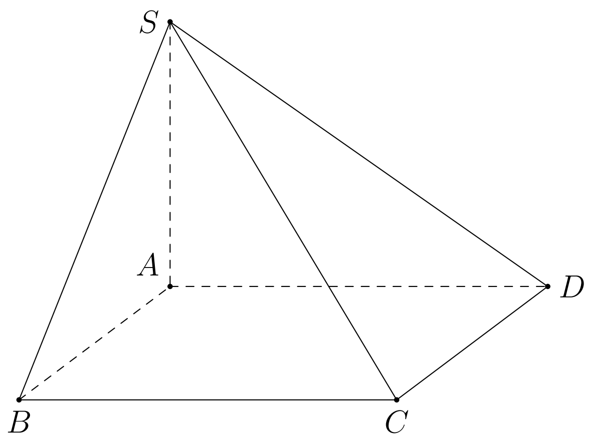
Chọn đáp án C □

Câu 16 (Bỉm Sơn-Thanh Hóa-2019).

Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với mặt đáy, SD tạo với mặt phẳng (SAB) một góc bằng $30°$. Tính thể tích V của khối chóp S.ABCD.

(A) $V = \sqrt{3}a^3$. (B) $V = \dfrac{\sqrt{3}a^3}{3}$. (C) $V = \dfrac{\sqrt{6}a^3}{18}$. (D) $V = \dfrac{\sqrt{6}a^3}{3}$.

Lời giải.



Ta có hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh, SA vuông góc với mặt đáy nên $DA \perp AB$ và $DA \perp SA$. Suy ra $DA \perp (SAB)$. Vậy góc giữa SD và mặt phẳng (SAB) là $\widehat{DSA} = 30°$.

Ta có $SA = AD.cot30° = a\sqrt{3}$

$V = \dfrac{1}{3}.SA.S_{ABCD} = \dfrac{1}{3}.a\sqrt{3}.a^2 = \dfrac{\sqrt{3}}{3}a^3$.

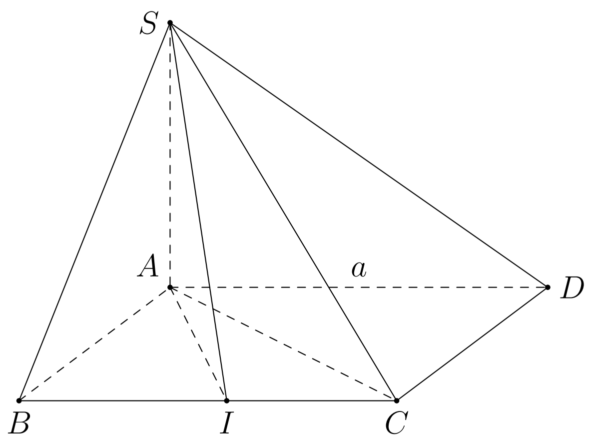
Chọn đáp án B □

Câu 17 (Thpt Vĩnh Lộc-Thanh Hóa 2019).

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi, góc BAD bằng 120^0,$AB = a$. Hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với đáy. Góc giữa (SBC) và mặt phẳng đáy là 60^0. Tính thể tích V của chóp $S.ABCD$.

(A) $V = \dfrac{2a^3\sqrt{15}}{15}$. (B) $V = \dfrac{a^3}{12}$. (C) $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$. (D) $V = \dfrac{a^3\sqrt{13}}{12}$.

Lời giải.



Vì hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với đáy nên $SA \perp mp\,(ABCD)$.

Ta có tam giác ABC đều cạnh a, gọi I là trung điểm của BC khi đó:$AI = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

Và góc giữa (SBC) và mặt phẳng đáy là $\widehat{SIA} = 60^0$.

Xét tam giác SAI ta có:$\dfrac{SA}{AI} = \tan\left(\widehat{SIA}\right) \Rightarrow SA = AI\tan\left(60^0\right) \Rightarrow SA = \dfrac{3a}{2}$.

Ta có diện tích đáy $ABCD$là:$S_{ABCD} = 2S_{ABC} = 2\left(\dfrac{1}{2}AI.BC\right) = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}a = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

Thể tích của chóp $S.ABCD$là: $V = \dfrac{1}{3}SA.S_{ABCD} = \dfrac{1}{3}.\dfrac{3a}{2}.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$.

Chọn đáp án C □

Dạng 2. Thể tích khối chóp đều

Câu 18. (Chuyên Trần Phú Hải Phòng 2019) Cho khối chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a, góc giữa mặt bên và mặt đáy bằng $60°$. Thể tích V của khối chóp $S.ABCD$ bằng

A. $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$. B. $V = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{2}$. C. $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$. D. $V = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}$.

Lời giải.

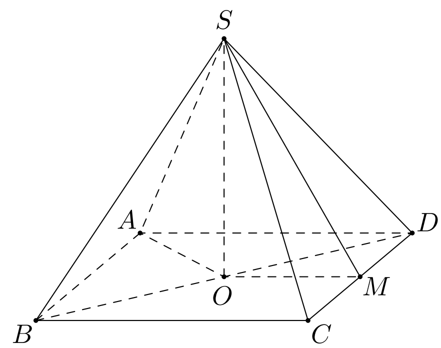
Gọi O là tâm của đáy, gọi M là trung điểm của BC.

Ta có $\begin{cases} SO \perp BC \\ OM \perp BC \end{cases}$ nên $(SOM) \perp BC$, suy ra $[(SCD),(ABCD)] = (SM, OM) = \widehat{SMO} = 60°$.

Có $OM = \dfrac{1}{2}BC = \dfrac{a}{2}$, $SO = OM\tan 60° = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là

$V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}SO \cdot S_{ABCD} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \cdot a^2 = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$.



Chọn đáp án C □

Câu 19. (HSG Bắc Ninh 2019) Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a, tâm của đáy là O. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của SA và BC. Biết góc giữa đường thẳng MN và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng $60°$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

A. $\dfrac{a^3\sqrt{10}}{6}$. B. $\dfrac{a^3\sqrt{30}}{2}$. C. $\dfrac{a^3\sqrt{30}}{6}$. D. $\dfrac{a^3\sqrt{10}}{3}$.

Lời giải.

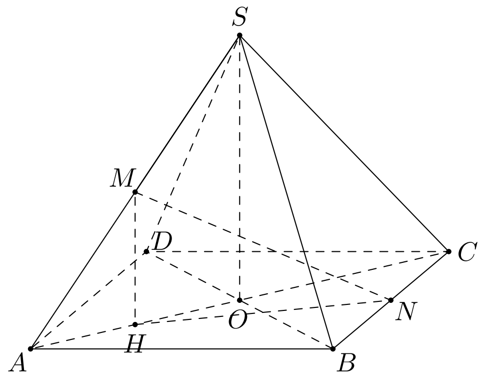
Gọi H là trung điểm AO. Khi đó góc giữa MN và $(ABCD)$ là $\widehat{MNH}$.

Ta có $HN = \sqrt{CN^2 + CH^2 - 2CN \cdot CH \cdot \cos 45^\circ}$

$= \dfrac{a\sqrt{10}}{4}$.

Suy ra $MH = HN \cdot \tan 60^\circ = \dfrac{a\sqrt{10}}{4} \cdot \sqrt{3} = \dfrac{a\sqrt{30}}{4}$.

Do đó $SO = 2MH = \dfrac{a\sqrt{30}}{2}$.



Chọn đáp án (C) □

Câu 20. (Chuyên Lê Quý Đôn Quảng Trị 2019) Nếu một hình chóp tứ giác đều có cạnh đáy bằng 2 và có diện tích xung quanh bằng $4\sqrt{3}$ thì có thể tích bằng

(A) $\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$. (B) $4\sqrt{3}$. (C) $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$. (D) $4\sqrt{2}$.

Lời giải.

Xét hình chóp đều $S.ABCD$ như hình vẽ.

Kẻ $OE \perp BC \Rightarrow E$ là trung điểm BC và $BC \perp (SOE)$.

Do đó $BC \perp SE$.

Xét ΔSOE vuông tại O, ta có

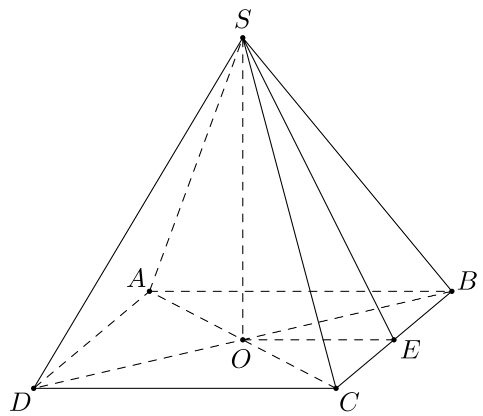
$SE^2 = SO^2 + OE^2 \Rightarrow SE = \sqrt{SO^2 + 1}$.

Mặt khác $S_{xq} = 4S_{\Delta SBC}$

$\Leftrightarrow 4\sqrt{3} = 4 \cdot \dfrac{1}{2} \cdot SE \cdot BC$

$\Leftrightarrow 4\sqrt{3} = 2 \cdot \sqrt{SO^2 + 1} \cdot 2$

$\Leftrightarrow SO = \sqrt{2}\ (x > 0)$.



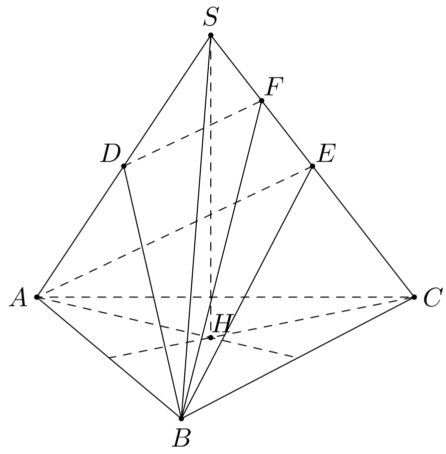
$V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3} \cdot SO \cdot S_{ABCD} = \dfrac{1}{3} \cdot \sqrt{2} \cdot 2^2 = \dfrac{4\sqrt{2}}{3}$ (đvtt).

Chọn đáp án (A) □

Câu 21. Cho hình chóp đều $S.ABC$ có $SA = a$. Gọi D, E lần lượt là trung điểm của SA, SC. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$ theo a, biết BD vuông góc với AE.

(A) $\dfrac{a^3\sqrt{21}}{54}$. (B) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$. (C) $\dfrac{a^3\sqrt{7}}{27}$. (D) $\dfrac{a^3\sqrt{21}}{27}$.

Lời giải.



Gọi F là trung điểm $SE \Rightarrow BD \perp DF$; gọi $AB = x$.

Ta có

$$BE^2 = BD^2 = AE^2 = \frac{2AS^2 + 2AC^2 - SC^2}{4}$$
$$= \frac{2a^2 + 2x^2 - a^2}{4} = \frac{a^2 + 2x^2}{4}.$$
$$BF^2 = \frac{2BS^2 + 2BE^2 - SE^2}{4} = \frac{2a^2 + \dfrac{a^2 + 2x^2}{2} - \dfrac{a^2}{4}}{4}$$
$$= \frac{9a^2 + 4x^2}{16}.$$
$$BF^2 = BD^2 + DF^2 \Leftrightarrow BF^2 = \frac{5BD^2}{4}.$$
$$\Leftrightarrow \frac{9a^2 + 4x^2}{16} = \frac{5}{4} \cdot \frac{a^2 + 2x^2}{4} \Leftrightarrow 9a^2 + 4x^2 = 5a^2 + 10x^2 \Leftrightarrow 4a^2 = 6x^2 \Rightarrow x = a\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Gọi H là hình chiếu của S lên (ABC) khi đó H là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

Suy ra $SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \sqrt{a^2 - \left(\dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{x\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \dfrac{a\sqrt{7}}{3}$.

Tam giác ABC đều có cạnh là $x \Rightarrow S_{\Delta ABC} = \dfrac{x^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{6}$.

Vậy $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3} SH \cdot S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{a\sqrt{7}}{3} \cdot \dfrac{a^2\sqrt{3}}{6} = \dfrac{a^3\sqrt{21}}{54}$.

Hoặc sử dụng công thức tính thể tích chóp tam giác ABC đều có cạnh bên bằng a, cạnh đáy bằng x.

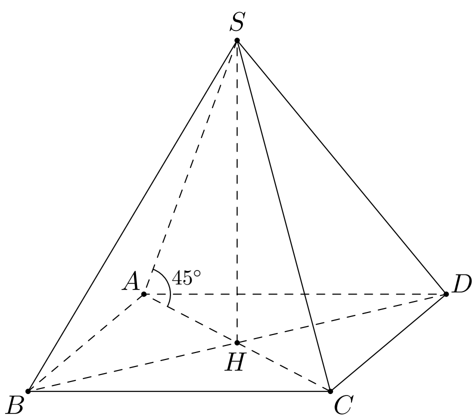
$$V_{S.ABC} = \frac{x^2 \cdot \sqrt{3a^2 - x^2}}{12} = \frac{\dfrac{2a^2}{3}\sqrt{3a^2 - \dfrac{2a^2}{3}}}{12} = \frac{a^3\sqrt{21}}{54}.$$

Chọn đáp án A □

Câu 22. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh $AB = a$, góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (ABC) bằng 45°. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là

A. $\dfrac{a^3}{3}$. B. $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}$. C. $\dfrac{a^3}{6}$. D. $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải.



Vì $S.ABCD$ là hình chóp đều nên đáy $ABCD$ là hình vuông và chân đường cao H trùng với tâm của hình vuông $ABCD$.

Diện tích đáy của khối chóp $S.ABCD$ là $S_{ABCD} = a^2$.

Nhận thấy HA là hình chiếu vuông góc của SA trên (ABC). Vì thế $(SA, (ABC)) = (SA, HA) = \widehat{SAH}$.

Suy ra $\widehat{SAH} = 45^\circ$.

Xét tam giác ABC vuông tại B, ta có

$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = a\sqrt{2}$. Suy ra $HA = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Tam giác SHA vuông tại H và có $\widehat{SAH} = 45^\circ$ nên là tam giác vuông cân tại H. Suy ra $SH = HA = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là: $V = \dfrac{1}{3} \cdot S_{ABCD} \cdot SH = \dfrac{1}{3} \cdot a^2 \cdot \dfrac{a\sqrt{2}}{2} = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}$.

Chọn đáp án B □

Câu 23. (HKI-NKHCM 2019) Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ độ dài cạnh đáy là a. Biết rằng mặt phẳng (P) qua A và vuông góc với SC, cắt cạnh SB tại B' với $\dfrac{SB'}{SB} = \dfrac{2}{3}$. Tính thể tích của khối chóp $S.ABCD$

A $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{6}$. B $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{4}$. C $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{2}$. D $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{3}$.

Lời giải.

Ta có $\left.\begin{array}{l} BD \perp AC \\ BD \perp SO \end{array}\right\} \Rightarrow BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp SC$.

Mà $(P) \perp SC \Rightarrow (P) \parallel BD$.

Trong (SAC), gọi $G = AC' \cap SO$.

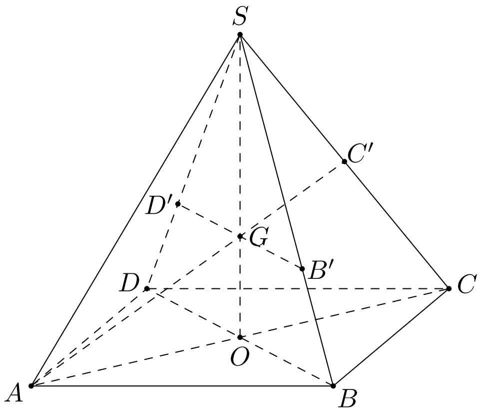
Suy ra $GB' \parallel BD \Rightarrow \dfrac{SG}{SO} = \dfrac{SB'}{SB} = \dfrac{2}{3}$.

Suy ra G là trọng tâm $\Delta SAC \Rightarrow C'$ là trung điểm SC.

Nên ΔSAC là tam giác đều cạnh $AC = a\sqrt{2}$.

Suy ra $SO = a\sqrt{2} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = a\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

$\Rightarrow V_{SABCD} = \dfrac{1}{3} S_{ABCD} \cdot SO = \dfrac{1}{3} a^2 \cdot \dfrac{a\sqrt{6}}{2} = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{6}$.



Chọn đáp án A □

Câu 24. (Sở Quảng Trị 2019) Cho một hình chóp tứ giác đều có cạnh đáy bằng $2a$ và cạnh bên tạo với mặt phẳng đáy một góc 45°. Thể tích của khối chóp đó là

A $\dfrac{4a^3\sqrt{2}}{3}$. B $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{8}$. C $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}$. D $2a^3\sqrt{2}$.

Lời giải.

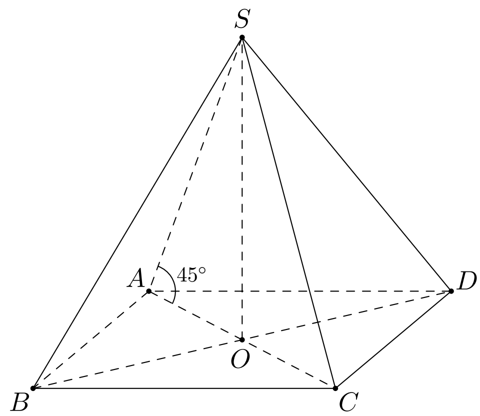
Dựng hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ thỏa mãn các điều kiện đề bài với $O = AC \cap BD$.

Theo giả thiết ta có $AB = 2a$, SA tạo với mặt phẳng $(ABCD)$ một góc 45° suy ra $\widehat{SAO} = 45^\circ$.

$ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$ nên tính được

$AC = 2\sqrt{2}a \Rightarrow OA = a\sqrt{2}$.

Tam giác SOA vuông cân tại O vì có $SO \perp OA$, $\widehat{SAO} = 45^\circ$ suy ra $SO = OA = a\sqrt{2}$.



Vậy thể tích khối chóp là

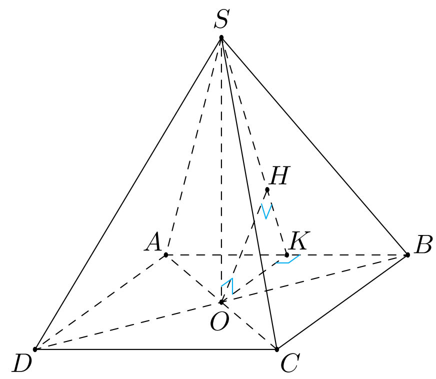
$V = \dfrac{1}{3} S_{ABCD} \cdot SO = \dfrac{1}{3} 4a^2 \cdot a\sqrt{2} = \dfrac{4a^3\sqrt{2}}{3}$.

Chọn đáp án A □

Câu 25. (THPT Trần Phú 2019) Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $2a\sqrt{3}$, khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và CD bằng $3a$. Thể tích khối chóp đã cho bằng:

(A) $a^3\sqrt{3}$. (B) $6a^3\sqrt{3}$. (C) $12a^3$. (D) $\dfrac{8a^3\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải.



Gọi $O = AC \cap BD$.

Ta có $\begin{cases} CD \parallel AB \\ AB \subset (SAB) \end{cases} \Rightarrow d(CD, SA) = d\left(CD, (SAB)\right)$

$= d\left(D, (SAB)\right) = 2d(O, (SAB))$.

Kẻ $\begin{cases} OK \perp AB \\ OH \perp SK \end{cases} \Rightarrow OH \perp (SAB)$

$\Rightarrow OH = d\left(O, (SAB)\right) = \dfrac{3a}{2}$.

Xét ΔSOK: $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{SO^2} + \dfrac{1}{OK^2} \Leftrightarrow SO = 3a$.

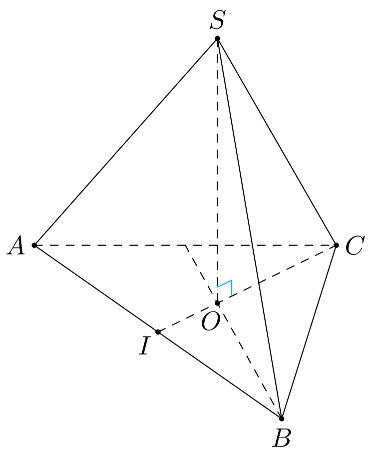
Vậy thể tích khối chóp $S.ABCD$: $V = \dfrac{1}{3}S_{ABCD} \cdot SO = 12a^3$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 26. (Kiểm tra năng lực-ĐH-Quốc Tế 2019) Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$, cạnh $AB = a$ và cạnh bên hợp với đáy một góc $45°$. Thể tích V của khối chóp là

(A) $V = \dfrac{a^3}{12}$. (B) $V = \dfrac{a^3}{6}$. (C) $V = \dfrac{a^3}{3}$. (D) $V = \dfrac{a^3}{4}$.

Lời giải.



Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Vì $S.ABC$ là hình chóp tam giác đều nên $SO \perp (ABC)$.

Do $S.ABC$ là hình chóp tam giác đều nên các cạnh bên đều tạo với mặt đáy các góc bằng nhau.

Góc giữa cạnh SC với đáy là góc giữa hai đường thẳng SC và OC hay chính là góc $\widehat{SCO}$.

Theo bài ra ta có $\widehat{SCO} = 45° \Rightarrow \Delta SOC$ vuông cân tại O.

Tam giác ABC đều cạnh a nên $CO = SO = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Diện tích đáy: $S_{ABC} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

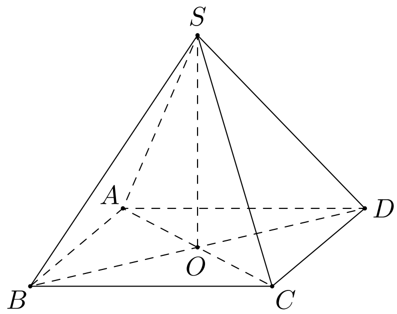
Thể tích của khối chóp $V = \dfrac{1}{3}S_{ABC} \cdot SO = \dfrac{1}{3}\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{3} = \dfrac{a^3}{12}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 27. Cho khối chóp tứ giác đều có tất cả các cạnh bằng $2a$. Thể tích của khối chóp đã cho bằng:

(A) $\dfrac{2\sqrt{2}a^3}{3}$. (B) $\dfrac{8a^3}{3}$. (C) $\dfrac{8\sqrt{2}a^3}{3}$. (D) $\dfrac{4\sqrt{2}a^3}{3}$.

Lời giải.



Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$, ta có $SO \perp (ABCD)$.

Xét tam giác SOA vuông tại O có

$SA = 2a$, $AO = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2} \cdot 2a\sqrt{2} = a\sqrt{2}$.

Suy ra $SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \sqrt{(2a)^2 - \left(a\sqrt{2}\right)^2} = a\sqrt{2}$.

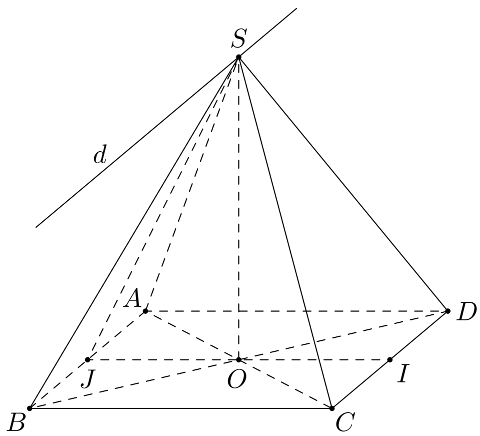
Vậy $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot SO \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot a\sqrt{2} \cdot (2a)^2 = \frac{4a^3\sqrt{2}}{3}$.

Chọn đáp án D □

Câu 28. (Đề minh họa 2022) Cho khối chóp đều $S.ABCD$ có $AC = 4a$, hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) vuông góc với nhau. Thể tích của khối chóp đã cho bằng.

A $\frac{16\sqrt{2}}{3}a^3$. B $\frac{8\sqrt{2}}{3}a^3$. C $16a^3$. D $\frac{16}{3}a^3$.

Lời giải.



Gọi O là giao điểm của AC và BD.

Gọi I, J lần lượt là trung điểm của cạnh CD và AB.

Vì $S.ABCD$ đều nên $SO \perp (ABCD)$.

Ta có $\begin{cases} S \in (SAB) \cap (SBC) \\ AB \parallel CD. \end{cases}$

Suy ra giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) là đường thẳng d đi qua S và song song với AB, CD.

Hơn nữa, tam giác SCD là tam giác cân tại S có SI là đường trung tuyến đồng thời là đường cao nên $SI \perp d$.

Ta có $\begin{cases} (SAB) \perp (SCD) \\ (SAB) \cap (SCD) = d \\ SI \subset (SCD),\ SI \perp d \end{cases} \Rightarrow SI \perp (SAB)$.

Mà $SJ \subset (SAB)$ nên $SI \perp SJ$.

Dễ thấy $\Delta SOI = \Delta SOJ$ (c.g.c).

Suy ra $SJ = SI$. Như vậy tam giác SIJ vuông cân tại S.

Ta có $AC = 4a \Rightarrow AB = BC = IJ = \frac{AC}{\sqrt{2}} = 2a\sqrt{2}$.

Xét tam giác SIJ vuông cân tại S, có

$\begin{cases} SI = SJ = \frac{IJ}{\sqrt{2}} = \frac{2a\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 2a \\ SO \cdot IJ = SJ \cdot SI \Leftrightarrow SO \cdot 2a\sqrt{2} = 2a \cdot 2a \Rightarrow SO = a\sqrt{2}. \end{cases}$

Thể tích khối chóp đều $S.ABCD$: $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SO \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3}a\sqrt{2} \cdot \left(2a\sqrt{2}\right)^2 = \frac{8\sqrt{2}}{3}a^3$.

Chọn đáp án B □

Câu 29. (Đề Minh Họa 2017) Cho tứ diện $ABCD$ có các cạnh AB, AC và AD đôi một vuông góc với nhau; $AB = 6a$, $AC = 7a$ và $AD = 4a$. Gọi M, N, P tương ứng là trung điểm các cạnh BC, CD, DB. Tính thể tích V của tứ diện $AMNP$.

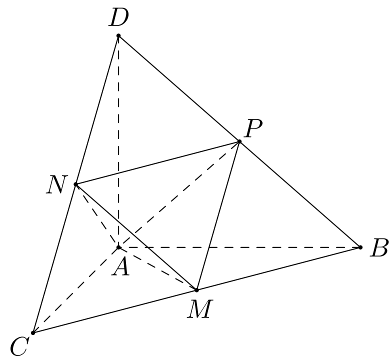
(A) $V = 7a^3$. (B) $V = 14a^3$. (C) $V = \dfrac{28}{3}a^3$. (D) $V = \dfrac{7}{2}a^3$.

Lời giải.

Ta có $V_{ABCD} = \dfrac{1}{3}AB \cdot \dfrac{1}{2}AD \cdot AC = \dfrac{1}{6}6a \cdot 7a \cdot 4a = 28a^3$.

Ta nhận thấy $S_{MNP} = \dfrac{1}{2}S_{MNPD} = \dfrac{1}{4}S_{BCD}$.

Suy ra $V_{AMNP} = \dfrac{1}{4}V_{ABCD} = 7a^3$.



Chọn đáp án (A) □

Câu 30. (Chuyên Hùng Vương-Phú Thọ 2020) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy ABC là tam giác vuông cân đỉnh A, $AB = a\sqrt{2}$ Gọi I là trung điểm của BC, hình chiếu vuông góc của đỉnh S lên mặt phẳng (ABC) là điểm H thỏa mãn $\overrightarrow{IA} = -2\overrightarrow{IH}$, góc giữa SC và mặt phẳng (ABC) bằng $60°$. Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng

(A) $\dfrac{a^3\sqrt{5}}{2}$. (B) $\dfrac{a^3\sqrt{5}}{6}$. (C) $\dfrac{a^3\sqrt{15}}{6}$. (D) $\dfrac{a^3\sqrt{15}}{12}$.

Lời giải.

$S_{ABC} = \dfrac{1}{2}AB \cdot AC = \dfrac{1}{2} \cdot a\sqrt{2} \cdot a\sqrt{2} = a^2$.

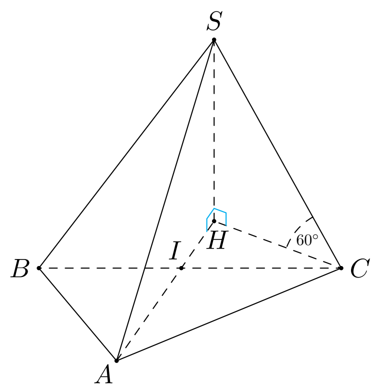
$BC = 2a$, $IA = a$, $IH = \dfrac{a}{2}$.

Tam giác HIC vuông tại I ta có

$HC^2 = HI^2 + IC^2 = \dfrac{a^2}{4} + a^2 = \dfrac{5a^2}{4} \Rightarrow HC = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$.

$\tan\widehat{SCH} = \dfrac{SH}{HC} \Leftrightarrow SH = HC \cdot \tan\widehat{SCH} = \dfrac{a\sqrt{5}}{2} \cdot \sqrt{3} = \dfrac{a\sqrt{15}}{2}$.

Vậy $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3} \cdot SH \cdot S_{ABC} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{a\sqrt{15}}{2} \cdot a^2 = \dfrac{a^3\sqrt{15}}{6}$.

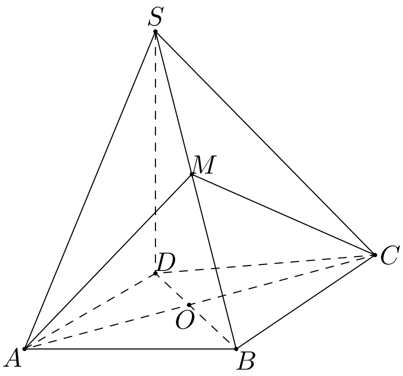


Chọn đáp án (C) □

Câu 31. (Sở Yên Bái 2020) Cho hình chóp $S.ABC$ có ABC là tam giác đều cạnh $3a$, $\widehat{SAB} = \widehat{SCB} = 90°$, góc giữa (SAB) và (SCB) bằng $60°$. Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng

(A) $\dfrac{3\sqrt{2}a^3}{8}$. (B) $\dfrac{\sqrt{2}a^3}{3}$. (C) $\dfrac{\sqrt{2}a^3}{24}$. (D) $\dfrac{9\sqrt{2}a^3}{8}$.

Lời giải.



Trong mặt phẳng (ABC) lấy D nằm trên đường trung trực của AC sao cho $SD \perp (ABC)$ và $\widehat{BCD} = \widehat{BAD} = 90°$.

Suy ra $\widehat{SAB} = \widehat{SCB} = 90°$.

Gọi $O = AC \cap BD \Rightarrow BD = \dfrac{BC^2}{OB} = 2a\sqrt{3} \Rightarrow CD = a\sqrt{3}$.

Dựng $AM \perp SB$, do $\Delta SAB = \Delta SCB$

$\Rightarrow CM \perp SB \Rightarrow ((SAB), (SCB)) = \widehat{(AM, CM)}$.

+Nếu $\widehat{AMC} = 60° \Rightarrow MC = \dfrac{OC}{\sin 30°} = 3a = BC$ vô lí vì tam giác MBC vuông tại M.

+Nếu $\widehat{AMC} = 120° \Rightarrow MC = \dfrac{OC}{\sin 60°} = \sqrt{3} \Rightarrow SC = \dfrac{3a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow SB = \dfrac{3a\sqrt{6}}{2}$.

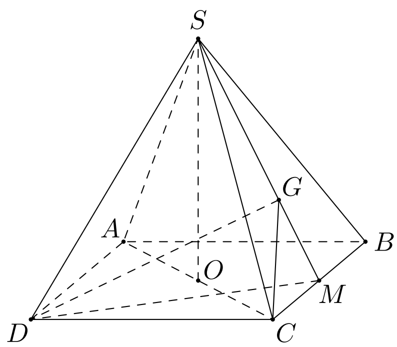
$SD = \sqrt{SB^2 - BD^2} = \dfrac{a\sqrt{6}}{2} \Rightarrow V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3} \cdot S_{ABC} \cdot SD = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{9a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \dfrac{a\sqrt{6}}{2} = \dfrac{9a^3\sqrt{3}}{8}$.

Chọn đáp án D □

Câu 32. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng 1. Gọi G là trọng tâm tam giác SBC. Thể tích tứ diện $SGCD$ bằng

A $\dfrac{\sqrt{2}}{36}$. B $\dfrac{\sqrt{2}}{6}$. C $\dfrac{\sqrt{3}}{36}$. D $\dfrac{\sqrt{2}}{18}$.

Lời giải.



Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$, M là trung điểm BC.

Vì $S.ABCD$ là hình chóp tứ giác đều nên $SO \perp (ABCD)$

$\dfrac{V_{SGCD}}{V_{SMCD}} = \dfrac{SG}{SM} = \dfrac{2}{3}$ suy ra $V_{SGCD} = \dfrac{2}{3}V_{SMCD}$ (1).

Mặt khác:

Hình chóp $S.ABCD$ và $S.MCD$ có chung đường cao SO và $S_{\Delta MCD} = \dfrac{1}{2}S_{\Delta BCD} = \dfrac{1}{4}S_{ABCD}$ nên $V_{SMCD} = \dfrac{1}{4}V_{S.ABCD}$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra: $V_{SGCD} = \dfrac{1}{6}V_{S.ABCD}$.

Mặt khác $SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3} \cdot SO \cdot S_{ABCD} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} \cdot 1 = \dfrac{\sqrt{2}}{6}$.

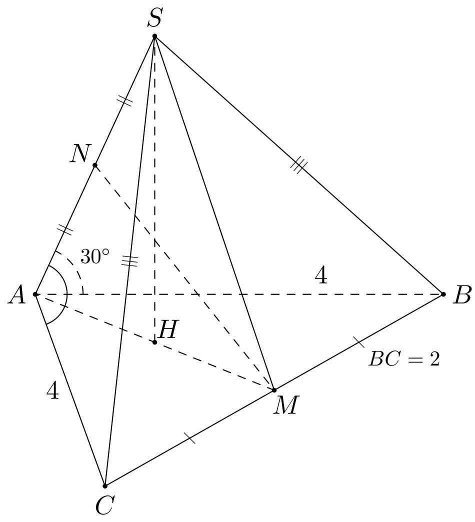
Vậy $V_{SGCD} = \dfrac{\sqrt{2}}{36}$.

Chọn đáp án A □

Câu 33. Cho hình chóp $S.ABC$ có $AB = AC = 4$, $BC = 2$, $SA = 4\sqrt{3}$, $\widehat{SAC} = \widehat{SAB} = 30°$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng

A 4. B 5. C $5\sqrt{2}$. D $2\sqrt{5}$.

Lời giải.



Ta có $SC^2 = SA^2 + AC^2 - 2SA \cdot AC \cdot \cos\widehat{SAC}$ $SB^2 =$

$= 48 + 16 - 2 \cdot 4\sqrt{3} \cdot 4 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow SC = 4.$

$SA^2 + AB^2 - 2SA \cdot AB \cdot \cos\widehat{SAB} \Rightarrow SB = 4.$

Gọi MN lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, SA.

Ta có

ΔSBC cân tại S, ΔABC cân tại A.

$\Rightarrow \begin{cases} SM \perp BC \\ AM \perp BC \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAM).$

Kẻ $SH \perp AM$, có $BC \perp (SAM) \Rightarrow BC \perp SH$.

Vậy, $SH \perp (ABC)$.

Ta có, $SM = \sqrt{SC^2 - MC^2} = \sqrt{15} = AM$.

Nên ΔSAM cân tại $M \Rightarrow MN \perp SA$.

Ta có $MN = \sqrt{AM^2 - AN^2} = \sqrt{3}$;

$MN \cdot SA = SH \cdot AM \Rightarrow SH = \dfrac{MN \cdot SA}{AM} = \dfrac{4\sqrt{15}}{5}$;

$S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}AM \cdot BC = \sqrt{15}$. Do đó: $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3} \cdot SH \cdot S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{3} \cdot \sqrt{15} \cdot \dfrac{4\sqrt{15}}{5} = 4$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 34. (Chuyên-Vĩnh Phúc 2019) Cho hình chóp $S.ABC$ có các cạnh $SA = BC = 3$; $SB = AC = 4$; $SC = AB = 2\sqrt{5}$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

(A) $\dfrac{\sqrt{390}}{4}$. (B) $\dfrac{\sqrt{390}}{6}$. (C) $\dfrac{\sqrt{390}}{12}$. (D) $\dfrac{\sqrt{390}}{8}$.

Lời giải.

Áp dụng công thức thể tích khối tứ diện gần đều:

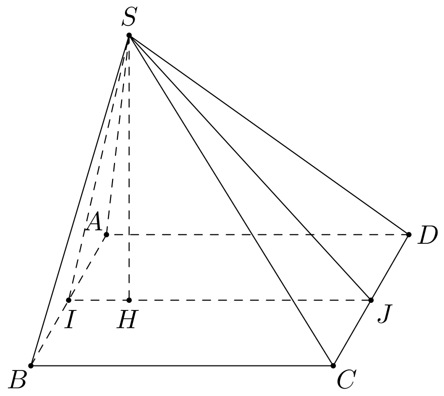
$V_{S.ABC} = \dfrac{\sqrt{2}}{12}\sqrt{(a^2 + b^2 - c^2)(a^2 - b^2 + c^2)(-a^2 + b^2 + c^2)} = \dfrac{\sqrt{390}}{4}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 35. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$, $SA = SB = a\sqrt{2}$. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SCD) bằng a. Thể tích khối chóp đã cho bằng

(A) $\dfrac{\sqrt{6}a^3}{3}$. (B) $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{6}$. (C) $2\dfrac{\sqrt{6}a^3}{3}$. (D) $\dfrac{2\sqrt{3}a^3}{3}$.

Lời giải.



Gọi I và J lần lượt là trung điểm của AB và CD theo đề bài ta có $SA = SB = a\sqrt{2}$ nên hình chiếu H của S lên đáy nằm trên đường thẳng IJ. Dễ thấy $CD \perp (SIJ)$.

Suy ra $d\left(A,(SCD)\right) = d\left(I,(SCD)\right) = d\left(I,SJ\right) = a$.

Tam giác SAB vuông cân tại S nên $SI = a$.

Suy ra $SI = d\left(I,SJ\right) = a \Rightarrow SI \perp (SCD)$.

Trong tam giác vuông SIJ ta có $SH \cdot IJ = SI \cdot SJ$.

Nên $SH = \dfrac{SI \cdot SJ}{IJ} = \dfrac{a \cdot \sqrt{(2a)^2 - a^2}}{2a} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là

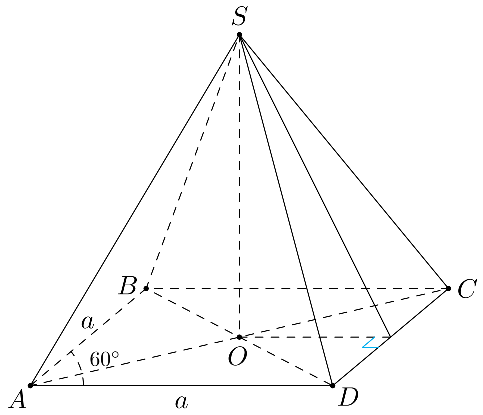
$V = \dfrac{1}{3}S_{ABCD} \cdot AH = \dfrac{1}{3} \cdot 4a^2 \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{2\sqrt{3}a^3}{3}$.

Chọn đáp án D □

Câu 36. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O, $AB = a$, $\widehat{BAD} = 60^\circ$, $SO \perp (ABCD)$ và mặt phẳng (SCD) tạo với mặt phẳng đáy một góc bằng 60°. Thể tích khối chóp đã cho bằng

Ⓐ $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{8}$. Ⓑ $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{24}$. Ⓒ $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{48}$. Ⓓ $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{12}$.

Lời giải.



Từ giả thiết hình thoi $ABCD$ có $AB = a$, $\widehat{BAD} = 60^\circ$ nên $BD = a$, $AC = a\sqrt{3}$.

Dựng $OK \perp CD$, $(K \in CD)$.

Ta có $SO \perp (ABCD) \Rightarrow SO \perp CD$ và $OK \perp CD$ nên $CD \perp (SOK) \Rightarrow CD \perp SK$.

Do đó góc giữa 2 mặt phẳng (SCD) và $(ABCD)$ là góc $\widehat{SKO} = 60^\circ$.

Trong tam giác vuông OCD, $(\widehat{COD} = 90^\circ)$ có

$\dfrac{1}{OK^2} = \dfrac{1}{OC^2} + \dfrac{1}{OD^2} = \dfrac{1}{\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} + \dfrac{1}{\left(\dfrac{a}{2}\right)^2} = \dfrac{16}{3a^2}$.

Suy ra $OK = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

Trong tam giác vuông SOK, $(\widehat{SOK} = 90^\circ)$ có $SO = OK \cdot \tan\widehat{SKO} = \dfrac{a\sqrt{3}}{4} \cdot \tan 60^\circ = \dfrac{3a}{4}$.

Diện tích hình thoi $ABCD$ là: $S_{ABCD} = \dfrac{AC \cdot BD}{2} = \dfrac{a\sqrt{3} \cdot a}{2} = \dfrac{\sqrt{3}a^2}{2}$.

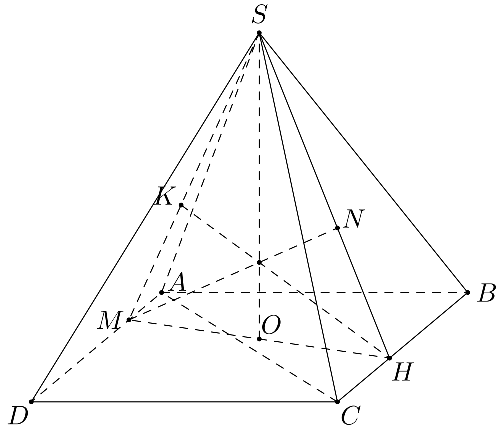
Vậy $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3} \cdot S_{ABCD} \cdot SO = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{\sqrt{3}a^2}{2} \cdot \dfrac{3a}{4} = \dfrac{\sqrt{3}a^3}{8}$.

Chọn đáp án A □

Câu 37. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC) là $\dfrac{a\sqrt{15}}{5}$, khoảng cách giữa SA và BC là $\dfrac{a\sqrt{15}}{5}$. Biết hình chiếu của S lên mặt phẳng (ABC) nằm trong tam giác ABC, tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

Ⓐ $\dfrac{a^3}{4}$. Ⓑ $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{8}$. Ⓒ $\dfrac{a^3}{8}$. Ⓓ $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải.



Dựng hình bình hành $ABCD$. Gọi O là hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng $(ABCD)$.

Dựng đường thẳng d đi qua O, vuông góc với BC và cắt BC, AD lần lượt tại H, M.

Khi đó $AD, BC \perp (SHM)$.

Trong ΔSHM, dựng $HK \perp SM$ $(K \in SM)$ và $MN \perp SH$ $(N \in SH)$.

Ta có $MN \perp SH$ và $MN \perp BC$ nên $MN \perp (SBC)$.

Vì vậy $MN = d(M,(SBC)) = d(A,(SBC)) = \dfrac{a\sqrt{15}}{5}$.

Do $BC \parallel (SAD)$ nên

$d(BC, SA) = d(BC,(SAD)) = d(H,(SAD)) = HK$. Suy ra $HK = \dfrac{a\sqrt{15}}{5}$.

Do ΔSHM có hai đường cao $MN = HK$ nên cân tại S. Suy ra O là trung điểm của MH.

Ta có $MH = d(AD, BC) = d(A, BC) = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ (do ΔABC đều, cạnh bằng a).

Suy ra $MO = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

Xét hai tam giác đồng dạng MKH và MOS, ta có

$$\frac{KH}{SO} = \frac{MK}{MO} \Rightarrow SO = \frac{MO \cdot KH}{MK} = \frac{\dfrac{a\sqrt{3}}{4} \times \dfrac{a\sqrt{15}}{5}}{\sqrt{\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{a\sqrt{15}}{5}\right)^2}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

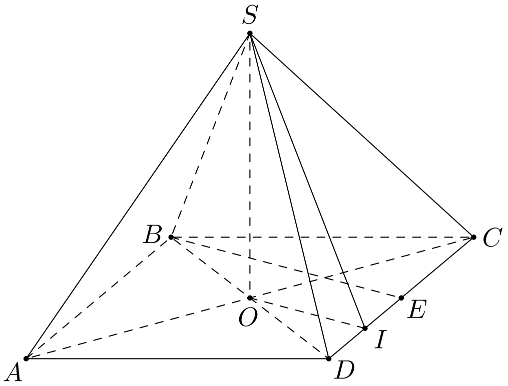
Vậy thể tích khối chóp $S.ABC$ là $V = \dfrac{1}{3}SO \times S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \times \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a^3}{8}$.

Chọn đáp án D □

Câu 38. Hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O, $AB = a$, $\widehat{BAD} = 60^\circ$, $SO \perp (ABCD)$ và mặt phẳng (SCD) tạo với mặt đáy một góc 60°. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

A $V = \dfrac{\sqrt{3}a^3}{24}$. B $V = \dfrac{\sqrt{3}a^3}{48}$. C $V = \dfrac{\sqrt{3}a^3}{12}$. D $V = \dfrac{\sqrt{3}a^3}{8}$.

Lời giải.



Do $ABCD$ là hình thoi tâm O, $AB = a$, $\widehat{BAD} = 60^\circ$, nên tam giác BCD đều cạnh a.

Ta có $S_{ABCD} = AB \cdot AD \cdot \sin\widehat{BAD} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

Gọi E là trung điểm CD và I là trung điểm ED. $BE = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, $OI = \dfrac{1}{2}BE = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$; $BE \perp CD$ nên $OI \perp CD$.

Nên góc giữa mặt phẳng (SCD) và mặt đáy là góc $\widehat{SIO}$, suy ra $\widehat{SIO} = 60^\circ$. $SO = OI \cdot \tan 60^\circ = \dfrac{3a}{4}$.

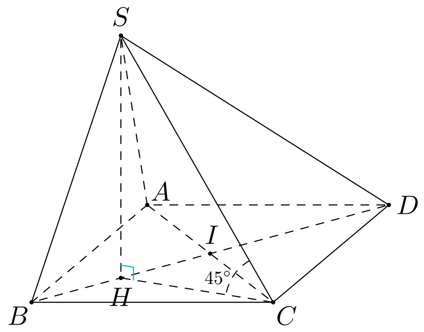
Vậy thể tích V của khối chóp $S.ABCD$ là $V = \dfrac{1}{3}S_{ABCD} \cdot SO = \dfrac{1}{3}\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{3a}{4} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{8}$.

Chọn đáp án D □

Câu 39. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh x, $\widehat{BAD} = 60°$, gọi I là giao điểm AC và BD. Hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng $(ABCD)$ là H sao cho H là trung điểm của BI. Góc giữa SC và $(ABCD)$ bằng $45°$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

Ⓐ $V = \dfrac{\sqrt{39}x^3}{12}$. Ⓑ $V = \dfrac{\sqrt{39}x^3}{36}$. Ⓒ $V = \dfrac{\sqrt{39}x^3}{24}$. Ⓓ $V = \dfrac{\sqrt{39}x^3}{48}$.

Lời giải.



Tam giác ABD đều cạnh $x \Rightarrow BD = x \Rightarrow IH = \dfrac{x}{4}$.

Áp dụng định lí cosin cho tam giác ABC:

$AC = \sqrt{x^2 + x^2 - 2x \cdot x \cdot \cos 120°} = x\sqrt{3} \Rightarrow IC = \dfrac{x\sqrt{3}}{2}$.

Xét tam giác IHC vuông tại I:

$HC = \sqrt{IH^2 + IC^2} = \sqrt{\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{3x^2}{4}} = \dfrac{x\sqrt{13}}{4}$.

Do tam giác SHC vuông tại H, có $\widehat{SCH} = (SC, (ABCD)) = 45°$ nên tam giác SHC vuông cân tại H, suy ra $HC = SH = \dfrac{x\sqrt{13}}{4}$.

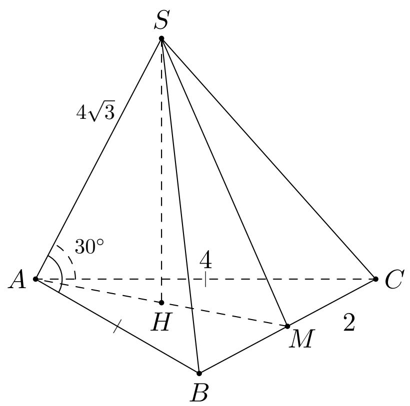
Vậy thể tích khối chóp $S.ABCD$: $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot AC \cdot BD \cdot SH = \dfrac{1}{6} \cdot x\sqrt{3} \cdot x \cdot \dfrac{x\sqrt{13}}{4} = \dfrac{x^3\sqrt{39}}{24}$.

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 40. Cho hình chóp $S.ABC$ có $AB = AC = 4$, $BC = 2$, $SA = 4\sqrt{3}$, $\widehat{SAB} = \widehat{SAC} = 30°$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$

Ⓐ $V_{S.ABC} = 8$. Ⓑ $V_{S.ABC} = 6$. Ⓒ $V_{S.ABC} = 4$. Ⓓ $V_{S.ABC} = 12$.

Lời giải.



Cách 1:

Gọi M là trung điểm của cạnh BC. Vì ΔABC cân tại A (do $AB = AC = 4$) nên $AM \perp BC$.

$AM = \sqrt{AC^2 - MC^2} = \sqrt{15}$; $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}AM \cdot BC = \sqrt{15}$.

$\Delta SAB = \Delta SAC$ (c.g.c) nên $SB = SC$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của điểm S trên mặt phẳng (ABC) suy ra $H \in AM$.

Áp dụng định lí cosin cho ΔSAB, ta có

$SB^2 = SA^2 + AB^2 - 2SA \cdot AB \cdot \cos 30° = 16 \Rightarrow SB = 4$.

ΔSMB vuông tại M nên $SM = \sqrt{SB^2 - MB^2} = \sqrt{15}$.

Áp dụng định lí cosin cho ΔSAM, ta có $\cos \widehat{SMA} = \dfrac{SM^2 + AM^2 - SA^2}{2 \cdot SM \cdot AM} = -\dfrac{3}{5}$.

$\Rightarrow \sin \widehat{SMA} = \sqrt{1 - \cos^2 \widehat{SMA}} = \dfrac{4}{5}$.

$\Rightarrow SH = SM \cdot \sin \widehat{SMA} = \sqrt{15} \cdot \dfrac{4}{5} = \dfrac{4\sqrt{15}}{5}$.

Vậy $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}S_{\Delta ABC} \cdot SH = \dfrac{1}{3} \cdot \sqrt{15} \cdot \dfrac{4\sqrt{15}}{5} = 4$.

Cách 2:

Áp dụng định lí cosin cho ΔABC, ta có $\cos A = \dfrac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \cdot AC} = \dfrac{7}{8}$.

Sử dụng công thức

$V=\dfrac{abc}{6}\sqrt{1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}$

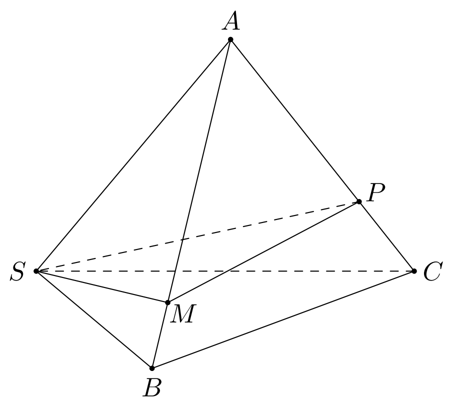
$=V=\dfrac{AB\cdot AC\cdot SA}{6}\sqrt{1-\cos^2 30^\circ-\cos^2 30^\circ-\left(\dfrac{7}{8}\right)^2+2\cos 30^\circ\cdot\cos 30^\circ\cdot\dfrac{7}{8}}=4.$

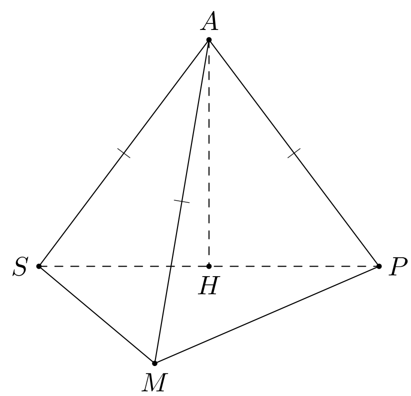
Chọn đáp án (C) □

Câu 41. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA=a$, $AB=a\sqrt{3}$, $AC=a\sqrt{2}$. Góc $\widehat{SAB}=60^\circ$, $\widehat{BAC}=90^\circ$, $\widehat{AS}=120^\circ$. Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng

(A) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$. (B) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$. (C) $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{3}$. (D) $\dfrac{a^3}{3}$.

Lời giải.





Lấy trên cạnh AB, AC lần lượt các điểm M, P sao cho $AS=AM=AP=a$.

Ta có $SM=a$, $MP=a\sqrt{2}$, $SP=a\sqrt{3}\Rightarrow\Delta SMP$ vuông tại M.

Do $AS=AM=AP=a$ suy ra hình chiếu của A trên đáy (SMP) là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác SMP, là H.

Ta có $S_{\Delta SMP}=\dfrac{1}{2}\cdot SM\cdot MP=\dfrac{1}{2}\cdot a\cdot a\sqrt{2}=\dfrac{a^2\sqrt{2}}{2}$.

$AH=\sqrt{SA^2-\left(\dfrac{SP}{2}\right)^2}=\sqrt{a^2-\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\dfrac{a}{2}\Rightarrow V_{ASMP}=\dfrac{1}{3}S_{\Delta SMP}\cdot AH=\dfrac{a^3\sqrt{2}}{12}$.

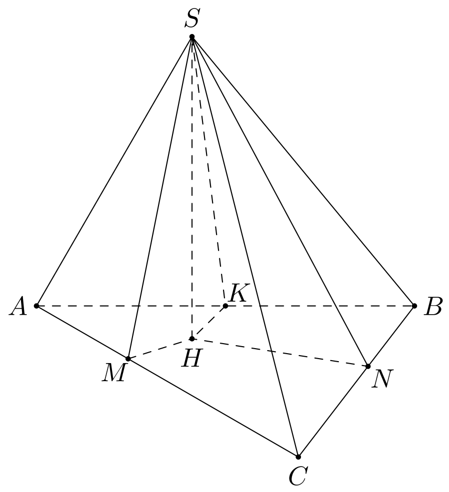
Ta lại có $\dfrac{V_{A.SBC}}{V_{A.SMP}}=\dfrac{AB}{AM}\cdot\dfrac{AC}{AP}=\sqrt{6}\Rightarrow V_{S.ABC}=V_{A.SBC}=\sqrt{6}\cdot V_{A.SMP}=\sqrt{6}\cdot\dfrac{a^3\sqrt{2}}{12}=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 42. (THPT Minh Khai-Lần 1) Cho hình chóp $S.ABC$ có $AB=7$ cm, $BC=8$ cm, $AC=9$ cm. Các mặt bên tạo với đáy góc 30°. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$. Biết hình chiếu vuông góc của S trên (ABC) thuộc miền trong của tam giác ABC.

(A) $\dfrac{20\sqrt{3}}{3}$ cm^3. (B) $20\sqrt{3}$ cm^3. (C) $\dfrac{63\sqrt{3}}{2}$ cm^3. (D) $72\sqrt{3}$ cm^3.

Lời giải.

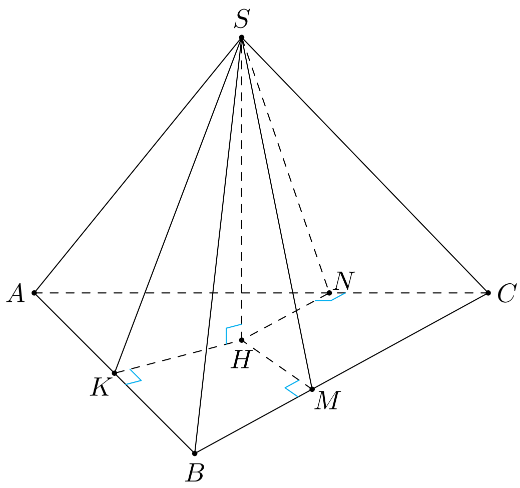


Ta có $p = \dfrac{AB + BC + AC}{2} = 12$ cm.
Diện tích tam giác ABC là
$S = \sqrt{p\,(p - AB)\,(p - AC)\,(p - BC)} = 12\sqrt{5}$ cm^2.
Gọi H là hình chiếu vuông góc của S trên (ABC).
Gọi K, N, M là hình chiếu vuông góc của H trên AB, BC, CA.
Theo bài ra ta có $\widehat{SKH} = \widehat{SNH} = \widehat{SMH} = 30^\circ$.
Ta có $\Delta SKH = \Delta SNH = \Delta SMH$ vì
$\widehat{SHK} = \widehat{SHN} = \widehat{SHM} = 90^\circ$, SH chung,
$\widehat{SKH} = \widehat{SNH} = \widehat{SMH} = 30^\circ$.
Suy ra $KH = NH = MH$.
VậyH là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.
Khi đó $KH = NH = MH = \dfrac{S_{\Delta ABC}}{p} = \sqrt{5}$ cm.
$SH = HK \tan 30^\circ = \dfrac{\sqrt{15}}{3}$ cm.
Thể tích khối chóp $S.ABC$ là $V = \dfrac{1}{3}SH \cdot S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{3} \cdot 12\sqrt{5} \cdot \dfrac{\sqrt{15}}{3} = \dfrac{20\sqrt{3}}{3}$ cm^3.
Chọn đáp án A □

Câu 43. Cho hình chóp $S.ABC$ có các mặt bên (SAB), (SAC), (SBC) tạo với đáy các góc bằng nhau và đều bằng 60°. Biết $AB = 13a$, $AC = 14a$, $BC = 15a$, tính thể tích V của khối chóp $S.ABC$

A $V = 28\sqrt{3}a^3$. B $V = 112\sqrt{3}a^3$. C $V = 84\sqrt{3}a^3$. D $84a^3$.

Lời giải.

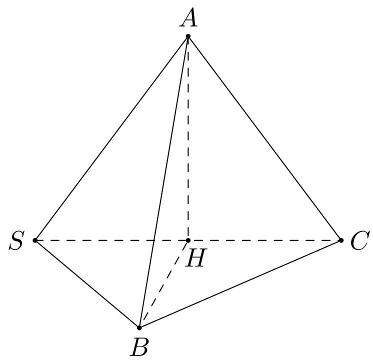


Gọi H là hình chiếu của S trên mặt phẳng (ABC).
Gọi M, N, K lần lượt là hình chiếu của H trên các cạnh BC, AC, AB. Khi đó, ta có các tam giác ΔSHK, ΔSHM, ΔSHN bằng nhau.
Suy ra $HM = HN = HK = r$, với r là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC.
Ta có nửa chu vi của tam giác ABC là
$p = \dfrac{AB + BC + CA}{2} = \dfrac{13 + 14 + 15}{2} = 21$.
Ta có $S_{ABC} = \sqrt{p\,(p - AB)\,(p - BC)\,(p - AC)}$
$= \sqrt{21 \cdot (21 - 13)\,(21 - 14)\,(21 - 15)} = 84$.
Mà $S_{ABC} = pr \Leftrightarrow r = \dfrac{S_{ABC}}{p} = \dfrac{84}{21} = 4 = HM$.
Ta lại có $\widehat{((SBC),(ABC))} = \widehat{SMH} = 60^\circ \Rightarrow SH = r \cdot \tan 60^\circ = 4\sqrt{3}$.
Suy ra $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3} \cdot 84 \cdot 4\sqrt{3} = 112\sqrt{3}$.
Chọn đáp án B □

Câu 44. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC = 6$, $AC = 4$; ABC là tam giác vuông cân tại B. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

(A) $V = 16\sqrt{7}$. (B) $V = \dfrac{16\sqrt{7}}{3}$. (C) $V = 16\sqrt{2}$. (D) $V = \dfrac{16\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải.



Gọi H là hình chiếu của S trên mặt phẳng (ABC).

Do $SA = SB = SC$ nên $\Delta SHA = \Delta SHB = \Delta SHC$ (cạnh huyền-cạnh góc vuông) $\Rightarrow HA = HB = HC$.

Suy ra H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Tam giác ABC vuông cân tại B nên H là trung điểm AC.

Suy ra $HA = HC = \dfrac{1}{2}AC = 2 \Rightarrow SH = \sqrt{SA^2 - HA^2} = 4\sqrt{2}$.

Ta có $BA = BC = \dfrac{AC\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$.

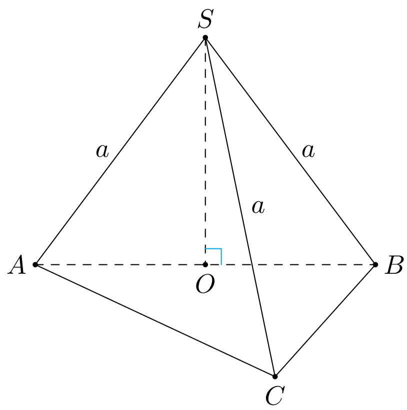
Vậy $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3} \cdot S_{ABC} \cdot SH = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{2}\left(2\sqrt{2}\right)\left(2\sqrt{2}\right) \cdot 4\sqrt{2} = \dfrac{16\sqrt{2}}{3}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 45. (THPT Quỳnh Lưu 3 Nghệ An 2019) Cho hình chóp $S.ABC$ biết rằng $SA = SB = SC = a$, $\widehat{ASB} = 120^\circ$, $\widehat{BSC} = 60^\circ$ và $\widehat{ASC} = 90^\circ$. Thể tích khối chóp $S.ABC$ là

(A) $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{12}$. (B) $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}$. (C) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$. (D) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{8}$.

Lời giải.



Ta có $SB = SC = a$, $\widehat{BSC} = 60^\circ$ suy ra tam giác BSC đều $\Rightarrow BC = a$.

Lại có $SA = SC = a$, $\widehat{ASC} = 90^\circ$ suy ra tam giác ASC vuông cân tại $S \Rightarrow AC = a\sqrt{2}$.

Mặt khác, $SA = SB = a$, $\widehat{ASB} = 120^\circ$, áp dụng định lí cosin cho tam giác ASB, ta được:

$AB^2 = SA^2 + SB^2 - 2SA \cdot SB \cdot \cos\widehat{ASB} = 3a^2 \Leftrightarrow AB = a\sqrt{3}$.

Xét tam giác ABC có $BC^2 + AC^2 = a^2 + 2a^2 = 3a^2 = AB^2$ suy ra tam giác ABC vuông tại C.

Vậy diện tích tam giác ABC là: $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}AC \cdot BC = \dfrac{a^2\sqrt{2}}{2}$.

Gọi O là trung điểm của cạnh AB suy ra O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Mà $SA = SB = SC \Rightarrow SO \perp (ABC)$.

Xét tam giác vuông ASO vuông tại O có $SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \sqrt{a^2 - \left(\dfrac{\sqrt{3}a}{2}\right)^2} = \dfrac{a}{2}$.

Vậy thể tích khối chóp $S.ABC$ là: $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3} \cdot S_{\Delta ABC} \cdot SO = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{a^2\sqrt{2}}{2} \cdot \dfrac{a}{2} = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{12}$.

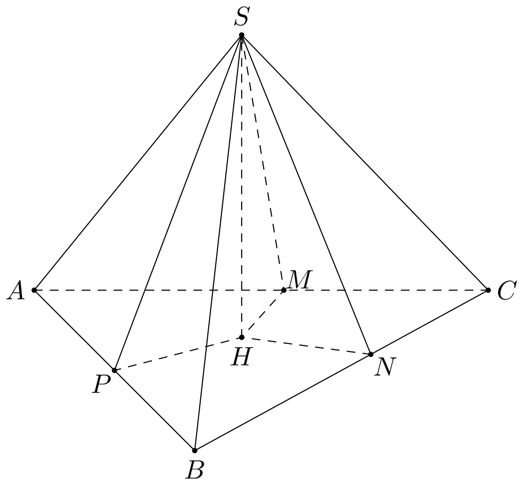
Chọn đáp án (A) □

Câu 46. (THPT Lương Thế Vinh Hà Nội 2019) Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh 1, biết khoảng cách từ A đến (SBC) là $\dfrac{\sqrt{6}}{4}$, từ B đến (SCA) là $\dfrac{\sqrt{15}}{10}$, từ C đến (SAB)

là $\dfrac{\sqrt{30}}{20}$ và hình chiếu vuông góc của S xuống đáy nằm trong tam giác ABC. Tính thể tích khối chóp $V_{S.ABC}$.

A. $\dfrac{1}{36}$. B. $\dfrac{1}{48}$. C. $\dfrac{1}{12}$. D. $\dfrac{1}{24}$.

Lời giải.



Gọi M, N, P lần lượt là hình chiếu của H lên các cạnh AC, BC, AB.

Đặt $SH = h \Rightarrow V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3} \cdot h \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{4} = \dfrac{h\sqrt{3}}{12}$.

Ta có $AP = \dfrac{2S_{SAB}}{AB} = 2S_{SAB} = \dfrac{6V_{S.ABC}}{d\left(C, (SAB)\right)}$ $= \dfrac{h\sqrt{3}}{2} : \dfrac{\sqrt{30}}{20} = h\sqrt{10}$. Tương tự, tính được $HM = 2h$, $HN = h$.

$\Rightarrow PH = \sqrt{SP^2 - SH^2} = 3h$.

Ta có $S_{ABC} = S_{HAB} + S_{HAC} + S_{HBC}$

$= \dfrac{1}{2}(HP + HM + HN)$.

Suy ra $3h = \dfrac{\sqrt{3}}{4} \Leftrightarrow h = \dfrac{\sqrt{3}}{12}$. Vậy $V_{S.ABC} = \dfrac{\sqrt{3}}{12} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{12} = \dfrac{1}{48}$.

Chọn đáp án B □

BẢNG ĐÁP ÁN

1. A	2. A	3. C	4. B	5. B	6. A	7. C	8. A	9. A	10. B
11. B	12. C	13. A	14. A	15. C	16. B	17. C	18. C	19. C	20. A
21. A	22. B	23. A	24. A	25. C	26. A	27. D	28. B	29. A	30. C
31. D	32. A	33. A	34. A	35. D	36. A	37. D	38. D	39. C	40. C
41. B	42. A	43. B	44. D	45. A	46. B				

CHỦ ĐỀ 11

THỂ TÍCH KHỐI LĂNG TRỤ

MỨC ĐỘ 1. MỨC 5,6 ĐIỂM

Dạng 1. Thể tích khối lăng trụ đứng

Câu 1. (Đề minh họa 2022) Cho khối lăng trụ có diện tích đáy B và chiều cao h. Thể tích V của khối lăng trụ đã cho được tính theo công thức nào dưới đây?

Ⓐ $V = \frac{1}{3}Bh$. Ⓑ $V = \frac{4}{3}Bh$. Ⓒ $V = 6Bh$. Ⓓ $V = Bh$.

Lời giải.

Định nghĩa thể tích khối lăng trụ là $V = Bh$.

Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 2. (Mã 101-2022) Cho khối lăng trụ có diện tích đáy là $3a^2$ và chiều cao $2a$. Thể tích khối lăng trụ đã cho bằng

Ⓐ a^3. Ⓑ $6a^3$. Ⓒ $3a^3$. Ⓓ $2a^3$.

Lời giải.

Ta có: $V = B \cdot h = 3a^2 \cdot 2a = 6a^3$.

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 3. (Mã 104-2022) Cho khối chóp và khối lăng trụ có diện tích đáy, chiều cao tương ứng bằng nhau và có thể tích lần lượt là V_1, V_2. Tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$ bằng

Ⓐ $\frac{2}{3}$. Ⓑ $\frac{3}{2}$. Ⓒ 3. Ⓓ $\frac{1}{3}$.

Lời giải.

Gọi đường cao, diện tích đáy lần lượt là h, B.

Khi đó áp dụng công thức thể tích khối chóp, khối lăng trụ ta được $V_1 = \frac{1}{3}B \cdot h$ và $V_2 = B \cdot h$.

Suy ra: $\frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{1}{3}B \cdot h}{B \cdot h} = \frac{1}{3}$.

Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 4. (Đề Minh Họa 2021) Thể tích khối hộp chữ nhật có ba kích thước $2, 3, 7$ bằng

Ⓐ 14. Ⓑ 42. Ⓒ 126. Ⓓ 12.

Lời giải.

Thể tích khối hộp có ba kích thước $2, 3, 7$ bằng $V = abc = 2 \cdot 3 \cdot 7 = 42$. □

Câu 5. (Mã 101 - 2021 Lần 1) Thể tích của khối lập phương cạnh $5a$ bằng

Ⓐ $5a^3$. Ⓑ a^3. Ⓒ $125a^3$. Ⓓ $25a^3$.

Lời giải.

Thể tích của khối lập phương cạnh bằng $5a$ là

$V = (5a)^3 = 125a^3$. □

Câu 6. (Mã 103 - 2021 - Lần 1) Thể tích khối lập phương có độ dài cạnh $3a$ bằng

A. $27a^3$. B. $3a^3$. C. $9a^3$. D. a^3.

Lời giải.

Thể tích khối lập phương là $(3a)^3 = 27a^3$. □

Câu 7. (Mã 102 - 2021 Lần 1) Thể tích của khối lập phương cạnh $4a$ bằng

A. $64a^3$. B. $32a^3$. C. $16a^3$. D. $8a^3$.

Lời giải.

Thể tích của khối lập phương cạnh $4a$ là $V = (4a)^3 = 64a^3$. □

Câu 8. (Mã 104 - 2021 Lần 1) Thể tích của khối lập phương cạnh $2a$ bằng

A. a^3. B. $2a^3$. C. $8a^3$. D. $4a^3$.

Lời giải.

Ta có $V = (2a)^3 = 8a^3$. □

Câu 9. (Mã 101 - 2019) Thể tích khối lăng trụ có diện tích đáy B và có chiều cao h là

A. Bh. B. $\frac{4}{3}Bh$. C. $\frac{1}{3}Bh$. D. $3Bh$.

Lời giải.

Thể tích khối lăng trụ có diện tích đáy B và có chiều cao h là $V = B \cdot h$. □

Câu 10. (Đề Minh Họa 2020 Lần 1) Cho khối lập phương có cạnh bằng 6. Thể tích của khối lập phương đã cho bằng

A. 216. B. 18. C. 36. D. 72.

Lời giải.

Thể tích khối lập phương có cạnh bằng 6 là $V = 6^3 = 216$.

Chọn đáp án A □

Câu 11. (Đề Tham Khảo 2020 Lần 2) Thể tích khối lập phương cạnh 2 bằng

A. 6. B. 8. C. 4. D. 2.

Lời giải.

Thể tích khối lập phương cạnh a là $V = a^3$.

Vậy thể tích khối lập phương cạnh 2 là $V = 2^3 = 8$.

Chọn đáp án B □

Câu 12. (Mã 101 - 2020 Lần 1) Cho khối hộp chữ nhật có 3 kích thước $3; 4; 5$. Thể tích của khối hộp đã cho bằng

A. 10. B. 20. C. 12. D. 60.

Lời giải.

Thể tích của khối hộp đã cho bằng $V = 3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$.

Chọn đáp án D □

Câu 13. (Mã 102 - 2020 Lần 1) Cho khối hộp hình chữ nhật có ba kích thước 2, 4, 6. Thể tích của khối hộp đã cho bằng

A 16. B 12. C 48. D 8.

Lời giải.

Thể tích của khối hộp đã cho bằng $2 \cdot 4 \cdot 6 = 48$.

Chọn đáp án C □

Câu 14. (Mã 102 - 2020 Lần 2) Cho khối lăng trụ có diện tích đáy $B = 3$ và chiều cao $h = 2$. Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

A 1. B 3. C 2. D 6.

Lời giải.

Thể tích khối lăng trụ là $V = B \cdot h = 3 \cdot 2 = 6$.

Chọn đáp án D □

Câu 15. (Mã 103 2018) Cho khối lăng trụ có đáy là hình vuông cạnh a và chiều cao bằng $4a$. Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

A $16a^3$. B $4a^3$. C $\frac{16}{3}a^3$. D $\frac{4}{3}a^3$.

Lời giải.

$V = S_{day} \cdot h = a^2 \cdot 4a = 4a^3$. □

Câu 16. (Mã 104 2018) Cho khối lăng trụ có đáy là hình vuông cạnh a và chiều cao bằng $2a$. Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

A $\frac{2}{3}a^3$. B $\frac{4}{3}a^3$. C $2a^3$. D $4a^3$.

Lời giải.

Ta có: $V_{langtru} = S_{day} \cdot h = a^2 \cdot 2a = 2a^3$. □

Câu 17. (THPT Thiệu Hóa – Thanh Hóa 2019) Cho khối lăng trụ có diện tích đáy bằng $a^2\sqrt{3}$, khoảng cách giữa hai đáy của lăng trụ bằng $a\sqrt{6}$. Tính thể tích V của khối lăng trụ

A $V = 3a^3\sqrt{2}$. B $V = a^3\sqrt{2}$. C $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}$. D $V = \frac{3a^3\sqrt{2}}{4}$.

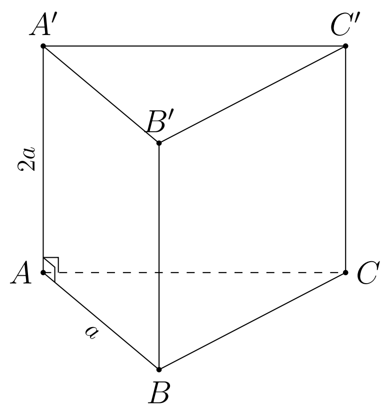
Lời giải.

Thể tích khối lăng trụ là $V = B \cdot h = a^2\sqrt{3} \cdot a\sqrt{6} = 3a^3\sqrt{2}$.

Chọn đáp án A □

Câu 18.

Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a và $AA' = 2a$ (minh họa như hình vẽ bên). Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng



(A) $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{2}$. (B) $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{6}$. (C) $\sqrt{3}a^3$. (D) $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{3}$.

Lời giải.

Tam giác ABC đều cạnh a nên$S_{\Delta ABC} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$

Do khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là lăng trụ đứng nên đường cao của lăng trụ là $AA' = 2a$

Thể tích khối lăng trụ là $V = AA'.S_{\Delta ABC} = 2a.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{\sqrt{3}a^3}{2}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 19 (Đề Minh Họa 2017). Tính thể tích V của khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$, biết $AC' = a\sqrt{3}$.

(A) $V = a^3$. (B) $V = \dfrac{3\sqrt{6}a^3}{4}$. (C) $V = 3\sqrt{3}a^3$. (D) $V = \dfrac{1}{3}a^3$.

Lời giải.

Giả sử khối lập phương có cạnh bằng $x; (x > 0)$

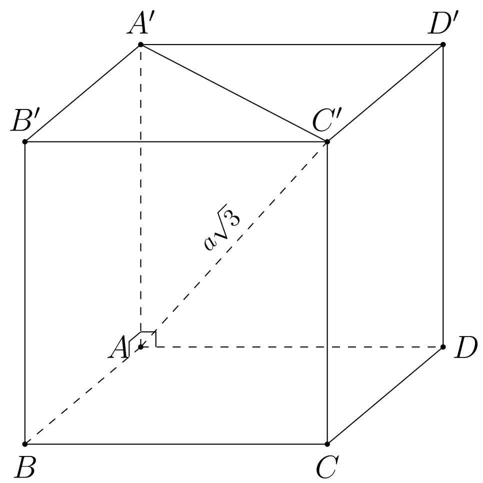
Xét tam giác $A'B'C'$ vuông cân tại B' ta có:

$A'C'^2 = A'B'^2 + B'C'^2 = x^2 + x^2 = 2x^2 \Rightarrow A'C' = x\sqrt{2}$

Xét tam giác $A'AC'$ vuông tại A' ta có

$AC'^2 = A'A^2 + A'C'^2 \Leftrightarrow 3a^2 = x^2 + 2x^2 \Leftrightarrow x = a$

Thể tích của khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ là $V = a^3$.



Chọn đáp án (A) □

Câu 20 (SGD Nam Định). Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $B'C = 3a$, đáy ABC là tam giác vuông cân tại B và $AC = a\sqrt{2}$. Tính thể tích V của khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$.

(A) $V = 2a^3$. (B) $V = \sqrt{2}a^3$. (C) $V = \dfrac{\sqrt{2}a^3}{3}$. (D) $V = \dfrac{a^3}{6\sqrt{2}}$.

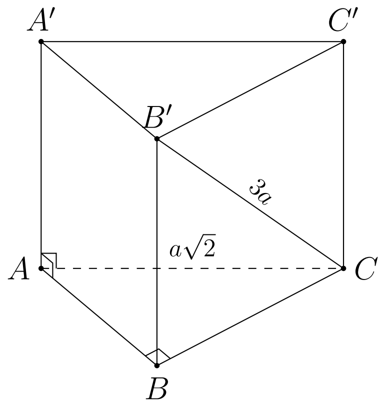
Lời giải.

Đáy ABC là tam giác vuông cân tại B và $AC = a\sqrt{2} \Rightarrow BC = AC = \dfrac{AC}{\sqrt{2}} = \dfrac{a\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = a$.

$\Delta BB'C$ vuông tại $B \Rightarrow BB' = \sqrt{B'C^2 - BC^2} = \sqrt{9a^2 - a^2} = 2a\sqrt{2}$.

$V = \dfrac{1}{3} \cdot BB' \cdot S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{3}2a\sqrt{2} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot a^2 = \dfrac{\sqrt{2}a^3}{3}$.

Vậy thể tích của khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ là $V = \dfrac{\sqrt{2}a^3}{3}$.



Chọn đáp án C □

Câu 21. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A , biết $AB = a$, $AC = 2a$ và $A'B = 3a$. Tính thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

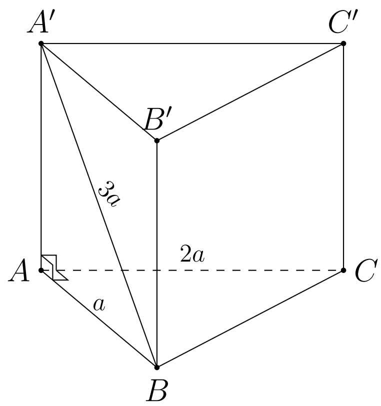
(A) $\dfrac{2\sqrt{2}a^3}{3}$. (B) $\dfrac{\sqrt{5}a^3}{3}$. (C) $\sqrt{5}a^3$. (D) $2\sqrt{2}a^3$.

Lời giải.

+ Diện tích đáy là $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}AB.AC = \dfrac{1}{2}.a.2a = a^2$.

+ Tam giác ABA' vuông tại A nên có $AA' = \sqrt{A'B^2 - AB^2} = \sqrt{(3a)^2 - a^2} = 2a\sqrt{2}$.

+ Thể tích cần tính là: $V = S_{ABC}.AA' = a^2.2a\sqrt{2} = 2\sqrt{2}a^3$.



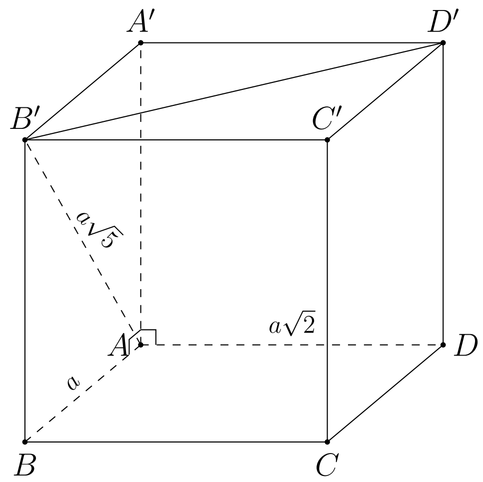
Chọn đáp án D □

Câu 22 (Gia Lai 2019).

Cho hình lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a$, $AD = a\sqrt{2}$, $AB' = a\sqrt{5}$ (tham khảo hình vẽ). Tính theo a thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

(A) $V = a^3\sqrt{2}$. (B) $V = 2a^3\sqrt{2}$.

(C) $V = a^3\sqrt{10}$. (D) $V = \dfrac{2a^3\sqrt{2}}{3}$.



Lời giải.

$S_{ABCD} = AB.AD = a.a\sqrt{2} = a^2\sqrt{2}$.

Trong tam giác ABB' , $BB' = \sqrt{AB'^2 - AB^2} = \sqrt{\left(a\sqrt{5}\right)^2 - a^2} = 2a$.

Vậy $V = BB'.S_{ABCD} = 2a.a^2\sqrt{2} = 2a^3\sqrt{2}$.

Chọn đáp án B □

Câu 23. Lăng trụ tam giác đều có độ dài tất cả các cạnh bằng 3. Thể tích khối lăng trụ đã cho bằng:

A $\frac{27\sqrt{3}}{4}$. B $\frac{9\sqrt{3}}{2}$. C $\frac{9\sqrt{3}}{4}$. D $\frac{27\sqrt{3}}{2}$..

Lời giải.

Đáy hình lăng trụ là tam giác đều cạnh bằng 3 nên $S = \frac{3^2\sqrt{3}}{4} = \frac{9\sqrt{3}}{4}$.

Chiều cao của hình lăng trụ bằng $h = 3$

Thể tích $V = S.h = \frac{9\sqrt{3}}{4}.3 = \frac{27\sqrt{3}}{4}$.

Chọn đáp án A □

Câu 24 (Đề Tham Khảo 2019). Thể tích của khối lập phương cạnh $2a$ bằng

A $8a^3$. B $2a^3$. C a^3. D $6a^3$.

Lời giải.

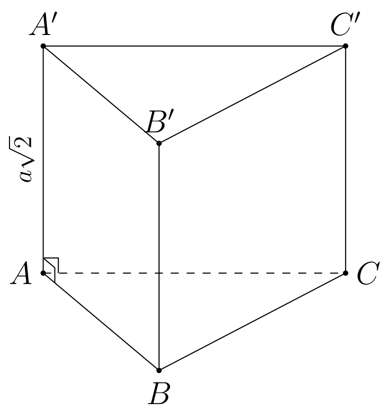
Thể tích của khối lập phương cạnh $2a$ bằng: $V = (2a)^3 = 8a^3$

Chọn đáp án A □

Câu 25 (Mã 104-2019).

Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a và $AA' = \sqrt{2}a$ (minh họa như hình vẽ bên dưới). Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

A $\frac{\sqrt{6}a^3}{2}$. B $\frac{\sqrt{6}a^3}{4}$. C $\frac{\sqrt{6}a^3}{6}$. D $\frac{\sqrt{6}a^3}{12}$.



Lời giải.

Ta có: $S_{\Delta ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Vậy thể tích của khối lăng trụ đã cho là

$V_{ABC.A'B'C'} = S_{\Delta ABC}.AA' = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.a\sqrt{2} = \frac{a^3\sqrt{6}}{4}$.

Chọn đáp án B □

Câu 26 (Đề Tham Khảo 2017). Thể tích của khối lăng trụ tam giác đều có tất cả các cạnh bằng a .

A $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$. B $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{2}$. C $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}$. D $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Lời giải.

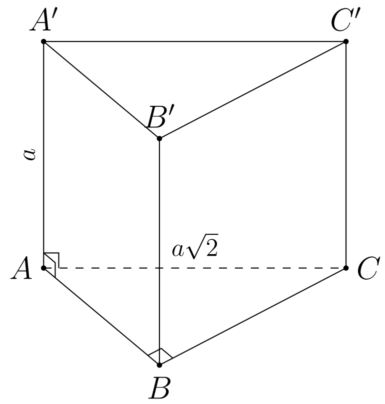
$$\begin{cases} h = a \\ S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \end{cases} \Rightarrow V = h.S = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}$$

Chọn đáp án C □

Câu 27 (Mã 110-2017).

Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $BB' = a$, đáy ABC là tam giác vuông cân tại B và $AC = a\sqrt{2}$. Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

Ⓐ $V = \dfrac{a^3}{3}$. Ⓑ $V = \dfrac{a^3}{2}$. Ⓒ $V = a^3$. Ⓓ $V = \dfrac{a^3}{6}$.



Lời giải.

Tam giác ABC vuông cân tại $B \Rightarrow AB = BC = \dfrac{AC}{\sqrt{2}} = a$. Suy ra: $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}a^2$.

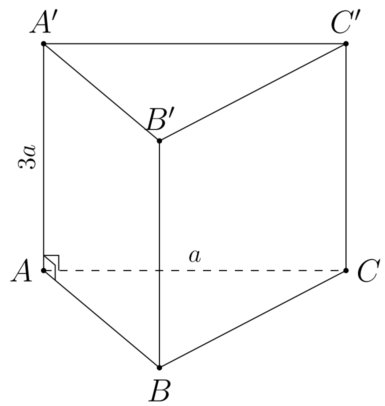
Khi đó: $V_{ABC.A'B'C'} = S_{ABC}.BB' = \dfrac{1}{2}a^2.a = \dfrac{a^3}{2}$

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 28 (Mã 103-2019).

Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh $2a$ và $AA' = 3a$ (minh họa như hình vẽ bên). Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

Ⓐ $6\sqrt{3}a^3$. Ⓑ $3\sqrt{3}a^3$. Ⓒ $2\sqrt{3}a^3$. Ⓓ $\sqrt{3}a^3$.



Lời giải.

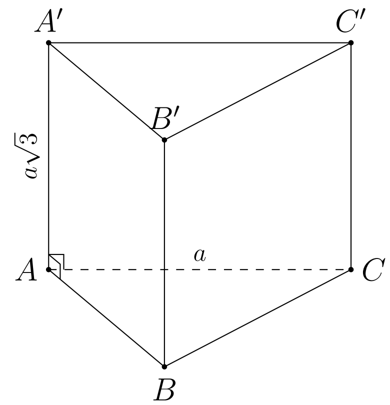
Khối lăng trụ đã cho có đáy là tam giác đều có diện tích là $\dfrac{(2a)^2\sqrt{3}}{4}$ và chiều cao là $AA' = 3a$ (do là lăng trụ đứng) nên có thể tích là $\dfrac{(2a)^2\sqrt{3}}{4}.3a = 3\sqrt{3}a^3$

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 29 (Mã 101-2019).

Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a và $AA' = \sqrt{3}a$ (minh họa hình vẽ bên). Thể tích khối lăng trụ đã cho bằng.

Ⓐ $\dfrac{a^3}{4}$. Ⓑ $\dfrac{a^3}{2}$. Ⓒ $\dfrac{3a^3}{4}$. Ⓓ $\dfrac{3a^3}{2}$.



Lời giải.

Ta có $S_{ABC} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$; $AA' = a\sqrt{3}$. Từ đó suy ra $V = a\sqrt{3}.a^2\dfrac{\sqrt{3}}{4} = \dfrac{3a^3}{4}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 30 (THPT Việt Đức Hà Nội Năm 2019).

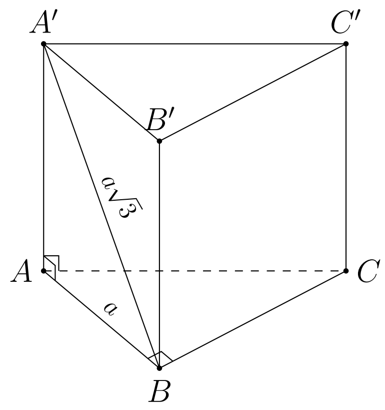
Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông cân tại B , $AB = a$ và $A'B = a\sqrt{3}$. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là

(A) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$. (B) $\dfrac{a^3}{6}$. (C) $\dfrac{a^3}{2}$. (D) $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải.

Ta có $AA' = \sqrt{A'B^2 - AB^2} = a\sqrt{2}$, $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}AB^2 = \dfrac{a^2}{2}$.

Thể tích khối lăng trụ là $V = AA'.S_{ABC} = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{2}$.



Chọn đáp án (D) □

Câu 31. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a, $A'B$ tạo với mặt phẳng đáy một góc 60^o. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

(A) $\dfrac{3a^3}{2}$. (B) $\dfrac{a^3}{4}$. (C) $\dfrac{3a^3}{4}$. (D) $\dfrac{3a^3}{8}$.

Lời giải.

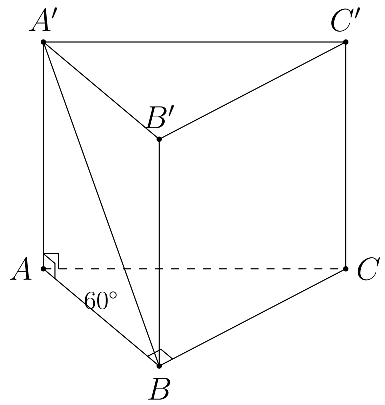
Đáy là tam giác đều cạnh a, có diện tích: $S_{\Delta ABC} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Vì $AA' \perp (ABC) \Rightarrow \widehat{A'BA} = (A'B, (ABC)) = 60^o$, suy ra:

$AA' = AB\tan 60^o = a\sqrt{3}$

Vậy thể tích khối lăng trụ:

$V_{ABC.A'B'C'} = S_{\Delta ABC}.AA' = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}.a\sqrt{3} = \dfrac{3a^3}{4}$.



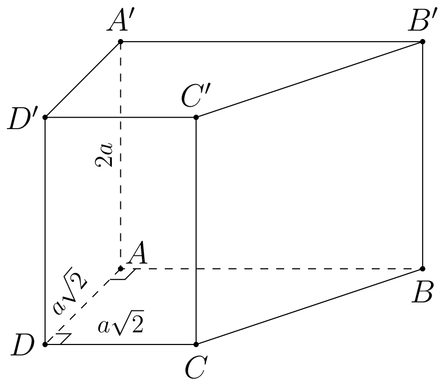
Chọn đáp án (C) □

Câu 32. Cho hình lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$, đáy là hình thang vuông tại A và D, có $AB = 2CD, AD = CD = a\sqrt{2}, AA' = 2a$. Thể tích khối lăng trụ đã cho bằng

(A) $12a^3$. (B) $6a^3$. (C) $2a^3$. (D) $4a^3$.

Lời giải.

Diện tích hình thang $ABCD$ là:
$S_{ABCD} = \dfrac{(AB+CD).AD}{2} = \dfrac{(2CD+CD).AD}{2} = \dfrac{3CD.AD}{2} = \dfrac{3.a\sqrt{2}.a\sqrt{2}}{2} = 3a^2$.
Thể tích khối lăng trụ đã cho: $V = S_{ABCD}.AA' = 3a^2.2a = 6a^3$.



Chọn đáp án (B) □

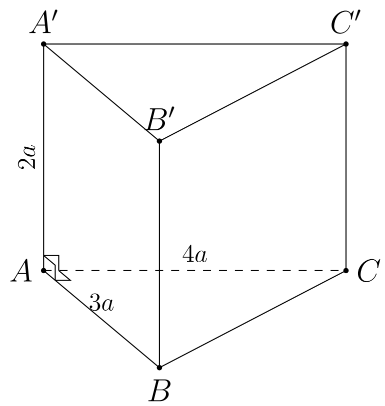
Câu 33 (Chuyên Lê Quý Đôn Điện Biên 2019).

Tính thể tích khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ biết $AA' = 2a$; $AB = 3a$; $AC = 4a$ và $AB \perp AC$
.

(A) $12a^3$. (B) $4a^3$. (C) $24a^3$. (D) $8a^3$.

Lời giải.

Ta có:$S_{ABC} = \dfrac{1}{2}AB.AC = \dfrac{1}{2}3a.4a = 6a^2$.
Vậy $V_{ABC.A'B'C'} = AA'.S_{ABC} = 12a^3$.



Chọn đáp án (A) □

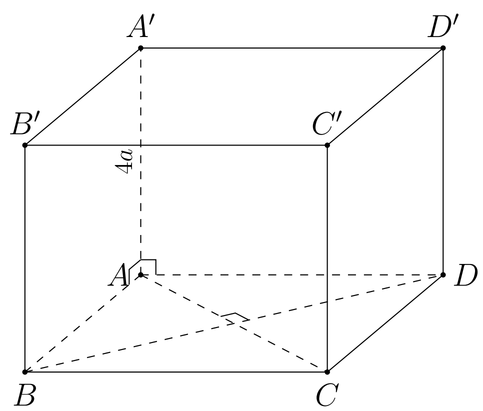
Câu 34 (Hội 8 trường chuyên ĐBSH-2019).

Cho hình lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình thoi, biết $AA' = 4a$, $AC = 2a$, $BD = a$. Thể tích V của khối lăng trụ là

(A) $V = 8a^3$. (B) $V = 2a^3$. (C) $V = \dfrac{8}{3}a^3$. (D) $V = 4a^3$.

Lời giải.

Thể tích V của khối lăng trụ là: $V = S_{ABCD}.AA' = \dfrac{1}{2}.AC.BD.AA' = \dfrac{1}{2}.2a.a.4a = 4a^3$.



Chọn đáp án (D) □

Câu 35 (THPT Phan Bội Châu-Nghệ An 2019).

Cho hình hộp đứng có một mặt là hình vuông cạnh a và một mặt có diện tích là 3a². Thể tích khối hộp là

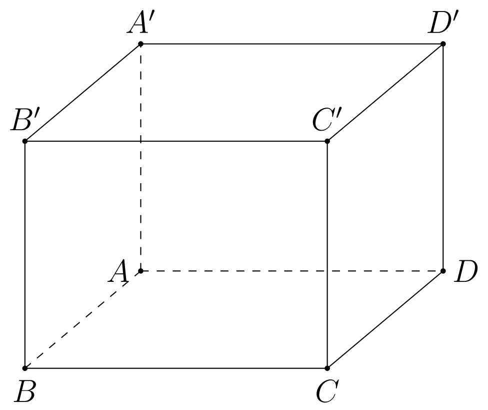
(A) a^3. (B) $3a^3$. (C) $2a^3$. (D) $4a^3$.

Lời giải.

Giả sử mặt $ABB'A'$ là hình vuông cạnh bằng a, mặt $ABCD$ có diện tích bằng 3a².

Do đó chiều cao $h = AA' = a$, diện tích đáy là $B = S_{ABCD} = 3a^2$.

Suy ra thể tích của khối hộp đó là $V = 3a^2a = 3a^3$.



Chọn đáp án (B) □

Câu 36 (Chuyên Bắc Giang 2019). Cho khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$, biết $AB = a$; $BC = 2a$; $AC' = a\sqrt{21}$. Tính thể tích V của khối hộp đó?

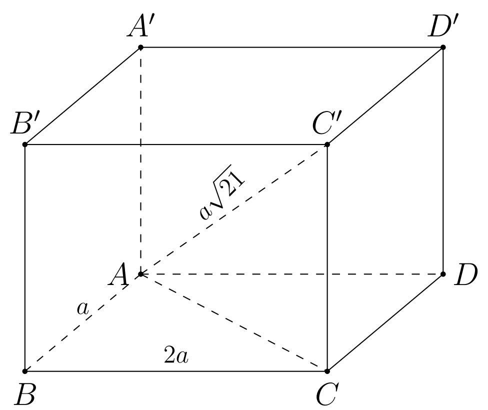
(A) $4a^3$. (B) $16a^3$. (C) $\frac{8}{3}a^3$. (D) $8a^3$.

Lời giải.

Xét tam giác vuông ABC, ta có: $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = a\sqrt{5}$.

Xét tam giác vuông ACC', ta có: $CC' = \sqrt{AC'^2 - AC^2} = 4a$.

Vậy thể tích của khối hộp hộp chữ nhật $ABCD \cdot A'B'C'D'$ là: $V = a \cdot 2a \cdot 4a = 8a^3$.



Chọn đáp án (D) □

Câu 37. Hình lập phương có độ dài đường chéo bằng 6 thì có thể tích là

(A) $2\sqrt{2}$. (B) $54\sqrt{2}$. (C) $24\sqrt{3}$. (D) 8.

Lời giải.

Gọi cạnh của hình lập phương là $a\,(a > 0)$.

$\Rightarrow$ đường chéo của hình lập phương là $a\sqrt{3}$.

Theo bài ra ta có $a\sqrt{3} = 6 \Rightarrow a = 2\sqrt{3}$.

Vậy thể tích của khối lập phương là: $V = \left(2\sqrt{3}\right)^3 = 24\sqrt{3}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 38. Cho khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AA' = a$, $AB = 3a$, $AC = 5a$. Thể tích của khối hộp đã cho là

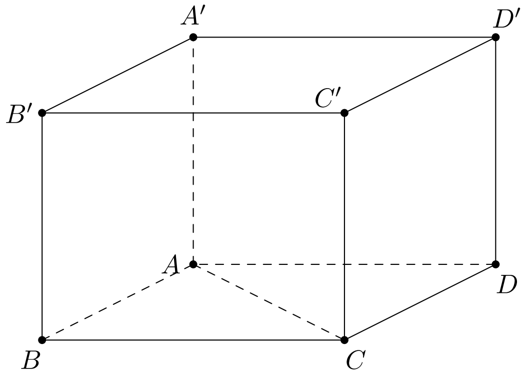
(A) $5a^3$. (B) $4a^3$. (C) $12a^3$. (D) $15a^3$.

Lời giải.

Xét ΔABC vuông tại B, ta có $BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = \sqrt{(5a)^2 - (3a)^2} = 4a$.

$S_{ABCD} = AB \cdot BC = 3a \cdot 4a = 12a^2$.

$V_{ABCD.A'B'C'D'} = S_{ABCD} \cdot AA' = 12a^2 \cdot a = 12a^3$.



Chọn đáp án (C) □

Câu 39. Cho hình hộp đứng có cạnh bên độ dài $3a$, đáy là hình thoi cạnh a và có một góc $60°$. Khi đó thể tích khối hộp là

(A) $\dfrac{3a^3\sqrt{3}}{4}$. (B) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$. (C) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$. (D) $\dfrac{3a^3\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.

Ta có chiều cao $h = 3a$.

Hình thoi cạnh a và có một góc $60°$ có diện tích $S = 2.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

Thể tích khối hộp là $V = S \cdot h = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2} \cdot 3a = \dfrac{3a^3\sqrt{3}}{2}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 40. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $BB' = a$, đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, $AC = a\sqrt{2}$. Tính thể tích lăng trụ

(A) $\dfrac{a^3}{3}$. (B) $\dfrac{a^3}{6}$. (C) a^3. (D) $\dfrac{a^3}{2}$.

Lời giải.

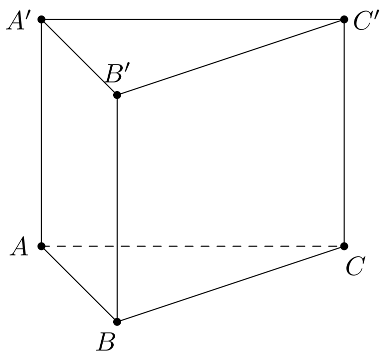
Trong ΔABC có $AC^2 = AB^2 + BC^2$

$\Leftrightarrow 2AB^2 = \left(a\sqrt{2}\right)^2 \Leftrightarrow AB = BC = a$.

Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là

$V_{ABC.A'B'C'} = S_{\Delta ABC} \cdot BB'$

$= \dfrac{1}{2}AB \cdot BC \cdot BB' = \dfrac{1}{2} \cdot a \cdot a \cdot a = \dfrac{a^3}{2}$.



Chọn đáp án (D) □

Câu 41. Cho hình lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$, có $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$, cạnh $AC' = 2a\sqrt{3}$. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

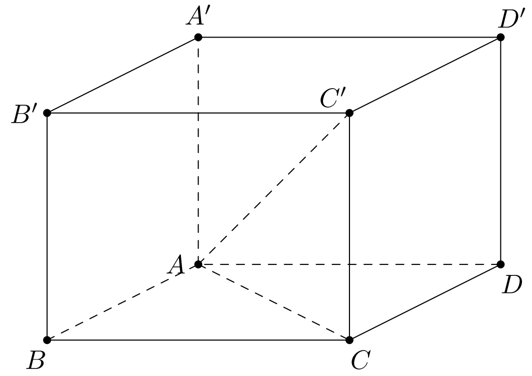
(A) $4a^3$. (B) $3a^3$. (C) $2a^3$. (D) a^3.

Lời giải.

Ta có $AC'^2 = AB^2 + AD^2 + AA'^2 \Rightarrow AA'^2 = 4a^2$

$\Rightarrow AA' = 2a.$

Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là $V_{ABC.A'B'C'} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AD \cdot AA' = \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot 2a \cdot 2a = 4a^3.$

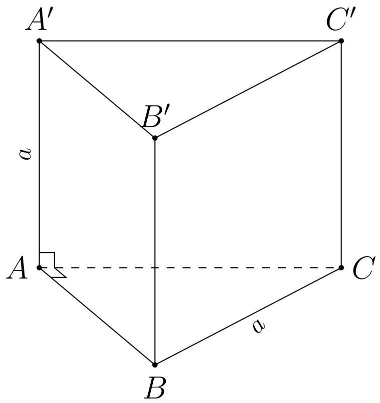


Chọn đáp án (A) □

Câu 42. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A với $BC = a$ và mặt bên $AA'B'B$ là hình vuông. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

(A) $\frac{\sqrt{2}}{8}a^3$. (B) $\frac{\sqrt{2}}{4}a^3$. (C) $\frac{1}{4}a^3$. (D) $\frac{1}{12}a^3$.

Lời giải.



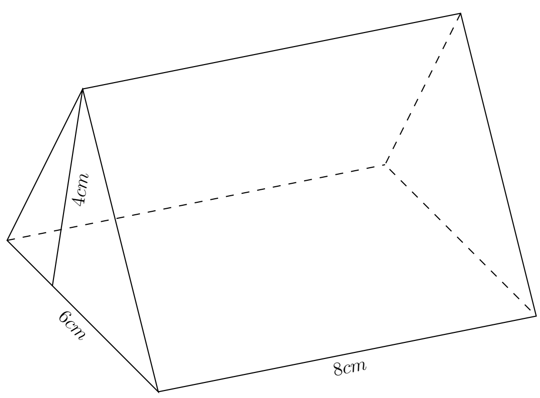
Tam giác ABC vuông cân tại $A \Rightarrow AB = \frac{BC\sqrt{2}}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2}AB^2 = \frac{a^2}{4}.$

Mặt bên $AA'B'B$ là hình vuông $\Rightarrow AA' = AB = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$

Vậy $V_{ABC.A'B'C''} = AA'.S_{ABC} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.\frac{a^2}{4} = \frac{a^3\sqrt{2}}{8}.$

Chọn đáp án (A) □

Câu 43. (Thăng Long-Hà Nội 2019) Cho khối đa diện (kích thước như hình vẽ bên) được tạo bởi ba hình chữ nhật và hai tam giác bằng nhau.



Tính thể tích khối đa diện đã cho.

(A) $48cm^3$. (B) $192cm^3$. (C) $32cm^3$. (D) $96cm^3$.

Lời giải.

Từ giả thiết, suy ra khối đa diện là một khối lăng trụ đứng có đáy là tam giác và các mặt bên là hình chữ nhật.

Thể tích khối đa diện là $V = \dfrac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4 \cdot 8 = 96\,(cm^3)$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 44. (Thi thử cụm Vũng Tàu - 2019) Cho khối lăng trụ tam giác đều có tất cả các cạnh bằng a. Thể tích khối lăng trụ đó bằng

(A) $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{4}$. (B) $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{4}$. (C) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$. (D) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

Lời giải.

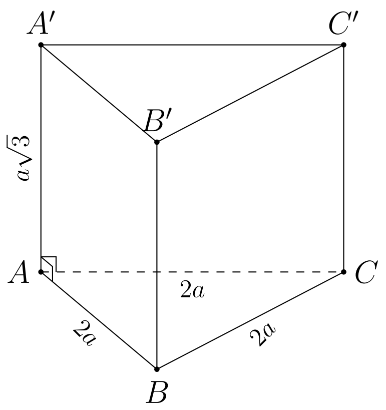
Diện tích đáy $S = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$, chiều cao $h = a$. Khi đó $V = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}a = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 45 (SP Đồng Nai - 2019). Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = 2a$, $AA' = a\sqrt{3}$. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

(A) $3a^3$. (B) $\dfrac{a^3}{4}$. (C) $\dfrac{3a^3}{4}$. (D) a^3.

Lời giải.



Lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là lăng trụ đều nên $\triangle ABC$ là tam giác đều và $AA' \perp (ABC)$.

$AA' \perp (ABC) \Rightarrow$ chiều cao của lăng trụ là $h = AA' = a\sqrt{3}$.

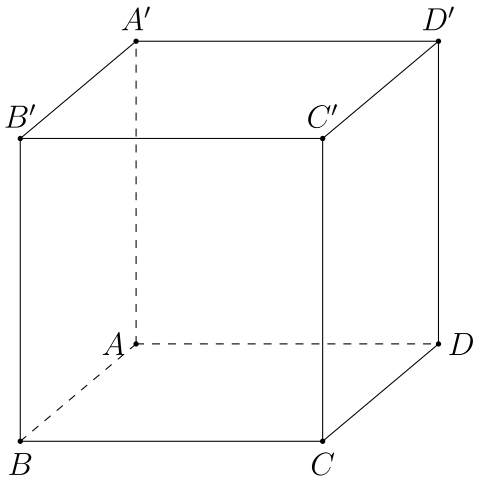
$\triangle ABC$ là tam giác đều có $AB = 2a \Rightarrow \triangle ABC$ diện tích là

$S_{\triangle ABC} = \dfrac{(AB)^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{(2a)^2\sqrt{3}}{4} = a^2\sqrt{3}$

$\Rightarrow$ Thể tích khối lăng trụ là $V_{S.ABC} = h \cdot S_{\triangle ABC} = a\sqrt{3} \cdot a^2\sqrt{3} = 3a^3$.

Chọn đáp án (A) □

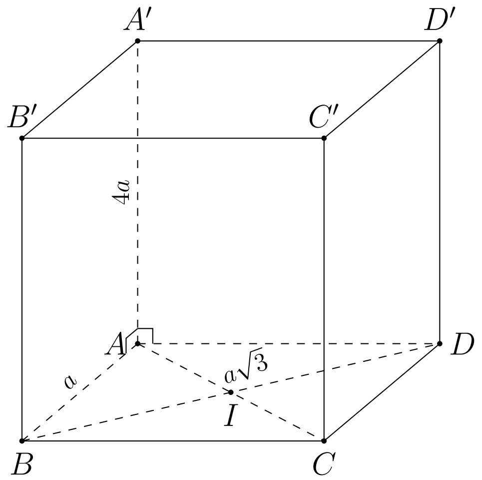
Câu 46. (Đề Minh Họa 2020 Lần 1) Cho khối lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình thoi cạnh a, $BD = a\sqrt{3}$ và $AA' = 4a$ (minh họa như hình bên). Thể tích của khối lăng trụ đã cho



bằng

(A) $2\sqrt{3}a^3$. (B) $4\sqrt{3}a^3$. (C) $\dfrac{2\sqrt{3}a^3}{3}$. (D) $\dfrac{4\sqrt{3}a^3}{3}$.

Lời giải.



Gọi $I = AC \cap BD$. Ta có: $AC \perp BD, BI = \dfrac{BD}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Xét tam giác vuông BAI vuông tại I:

$AI^2 = BA^2 - BI^2 = a^2 - \left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 = a^2 - \dfrac{3a^2}{4} = \dfrac{a^2}{4} \Rightarrow AI = \dfrac{a}{2} \Rightarrow AC = a.$

Diện tích hình bình hành $ABCD$: $S_{ABCD} = 2S_{\triangle ABC} = 2 \cdot \dfrac{1}{2} BI \cdot AC = 2 \cdot \dfrac{1}{2} \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \cdot a = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

Vậy: $V_{ABCD.A'B'C'D'} = S_{ABCD} \cdot AA' = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2} \cdot 4a = 2\sqrt{3}a^3$.

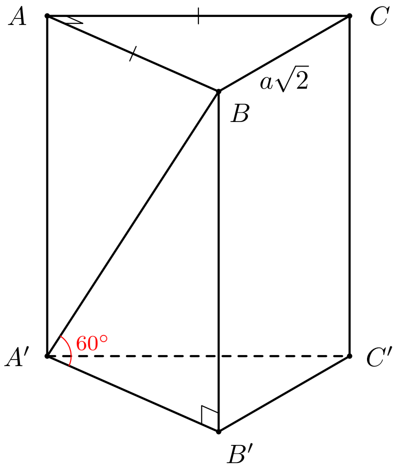
Chọn đáp án (A) □

MỨC ĐỘ 2. MỨC 7,8 ĐIỂM

Câu 1. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, $BC = a\sqrt{2}$, $A'B$ tạo với đáy một góc bằng $60°$. Thể tích của khối lăng trụ bằng

(A) $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{2}$. (B) $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{4}$. (C) $\dfrac{3a^3}{2}$. (D) $\dfrac{a^3}{2}$.

Lời giải.

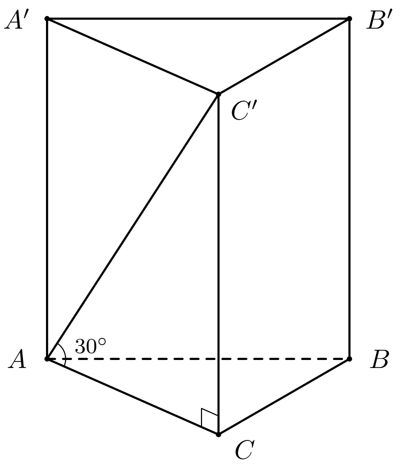


$\triangle ABC$ là tam giác vuông cân tại A, $BC = a\sqrt{2} \Rightarrow AB = AC = a \Rightarrow S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{2}a \cdot a = \dfrac{1}{2}a^2$.
$A'B$ tạo với đáy một góc bằng $60^\circ \Rightarrow \widehat{BA'B'} = 60^\circ$.
$\triangle_v BA'B'$: $\tan \widehat{BA'B'} = \dfrac{BB'}{A'B'} = \sqrt{3} \Rightarrow BB' = \sqrt{3}A'B' = a\sqrt{3}$.
Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là $V_{ABC.A'B'C'} = BB' \cdot S_{\triangle ABC} = a\sqrt{3} \cdot \dfrac{1}{2}a^2 = \dfrac{\sqrt{3}a^3}{2}$.
Chọn đáp án A □

Câu 2. Cho khối lăng trụ đứng tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy là một tam giác vuông tại A. Cho $AC = AB = 2a$, góc giữa AC' và mặt phẳng (ABC) bằng 30°. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A $\dfrac{2a^3\sqrt{3}}{3}$. B $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$. C $\dfrac{5a^3\sqrt{3}}{3}$. D $\dfrac{4a^3\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải.

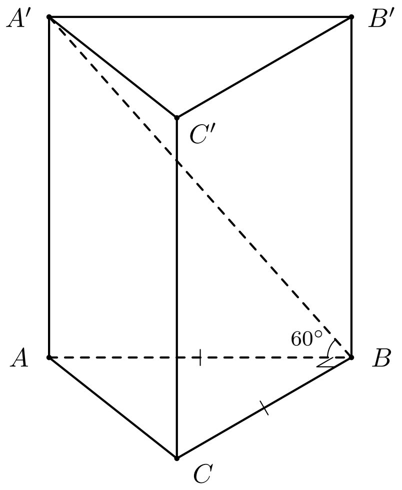


Diện tích tam giác ABC: $S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{2}AB \cdot AC = 2a^2$.
Hình chiếu vuông góc của AC' lên (ABC) là AC.
$\Rightarrow$ Góc giữa AC' và mặt phẳng (ABC) là góc tạo bởi giữa đường thẳng AC' và AC hay $\widehat{C'AC}$.
Theo bài ra có $\widehat{C'AC} = 30^\circ$.
Xét tam giác $C'CA$ vuông tại C có $CC' = AC \cdot \tan 30^\circ = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$.
Thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là $V_{ABC.A'B'C'} = CC' \cdot S_{\triangle ABC} = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3} \cdot 2a^2 = \dfrac{4a^3\sqrt{3}}{3}$.
Chọn đáp án D □

Câu 3. Cho lăng trụ đứng tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B với $BA = BC = a$, biết $A'B$ tạo với mặt phẳng (ABC) một góc 60°. Thể tích khối lăng trụ đã cho bằng

Ⓐ $2a^3$. Ⓑ $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$. Ⓒ $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$. Ⓓ $\dfrac{a^3}{2}$.

Lời giải.

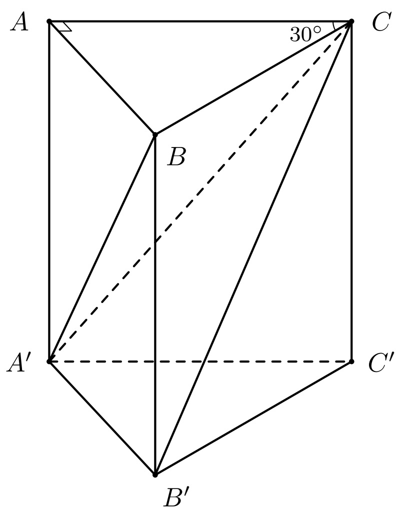


Góc giữa đường thẳng $A'B$ và mặt phẳng (ABC) là $\widehat{A'BA} = 60^\circ \Rightarrow A'A = AB \cdot \tan 60^\circ = a\sqrt{3}$.
Có $S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{2}BA \cdot BC = \dfrac{a^2}{2} \Rightarrow V_{ABC.A'B'C'} = S_{\triangle ABC} \cdot A'A = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$.
Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 4. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $\widehat{ACB} = 30^\circ$, biết góc giữa $B'C$ và mặt phẳng $(ACC'A')$ bằng α thỏa mãn $\sin\alpha = \dfrac{1}{2\sqrt{5}}$. Cho khoảng cách giữa hai đường thẳng $A'B$ và CC' bằng $a\sqrt{3}$. Tính thể tích V của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

Ⓐ $V = a^3\sqrt{6}$. Ⓑ $V = \dfrac{3a^3\sqrt{6}}{2}$. Ⓒ $V = a^3\sqrt{3}$. Ⓓ $V = 2a^3\sqrt{3}$.

Lời giải.



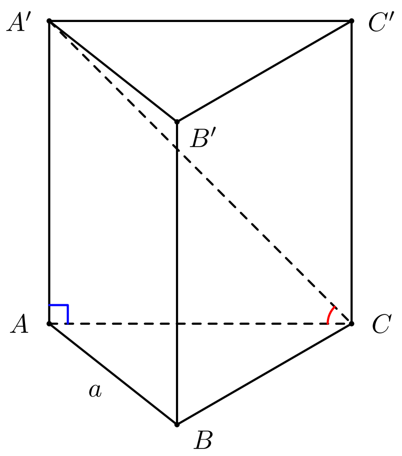
Ta có: $CC' \parallel AA' \Rightarrow CC' \parallel (AA'B'B)$. Mà $A'B \subset (AA'B'B)$, nên:
$\mathrm{d}(CC'; A'B) = \mathrm{d}(CC'; (AA'B'B)) = C'A' = a\sqrt{3}$.
Ta có: $AC = A'C' = a\sqrt{3}$; $AB = A'B' = a$.

Diện tích đáy là $B = S_{\triangle ABC} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$.
Dễ thấy $A'B' \perp (ACC'A')$.
Góc giữa $B'C$ và mặt phẳng $(ACC'A')$ là $\widehat{B'CA'} = \alpha$.
$\sin\alpha = \dfrac{A'B'}{B'C} = \dfrac{1}{2\sqrt{5}} \Leftrightarrow B'C = 2a\sqrt{5}$.
$CC' = \sqrt{B'C^2 - B'C'^2} = \sqrt{20a^2 - 4a^2} = 4a$.
Thể tích lăng trụ là: $V = B \cdot h$ với $h = CC'$ nên $V = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2} \cdot 4a = 2a^3\sqrt{3}$.
Chọn đáp án D □

Câu 5. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = a$, góc giữa đường thẳng $A'C$ và mặt phẳng (ABC) bằng $45°$. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

A. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$. B. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$. C. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$. D. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Lời giải.

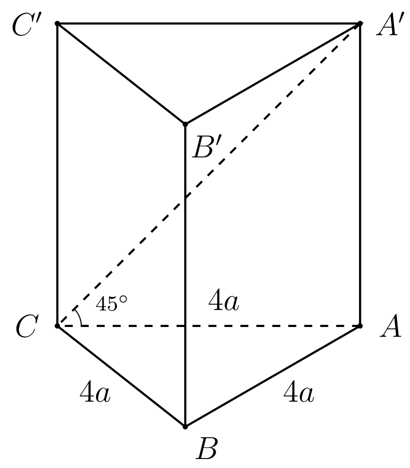


Có: $\widehat{(A'C, (ABC))} = \widehat{A'CA} = 45°$.
Xét tam giác $A'AC$ vuông tại A, ta có: $\tan\widehat{A'CA} = \dfrac{AA'}{AC} \Rightarrow AA' = a$.
Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là $V = AA' \cdot S_{\triangle ABC} = a \cdot \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$.
Chọn đáp án A □

Câu 6. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = 4a$, góc giữa đường thẳng $A'C$ và mặt phẳng (ABC) bằng $45°$. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

A. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$. B. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$. C. $16a^3\sqrt{3}$. D. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Lời giải.



$ABC.A'B'C'$ là lăng trụ tam giác đều $\Rightarrow ABC.A'B'C'$ là lăng trụ đứng và đáy là tam giác đều.

Ta có:

$A'A \perp (ABC) \Rightarrow \left(\widehat{A'C,(ABC)}\right) = \widehat{A'CA} = 45° \Rightarrow \triangle A'AC$ vuông cân tại $A \Rightarrow A'A = AC = 4a$.

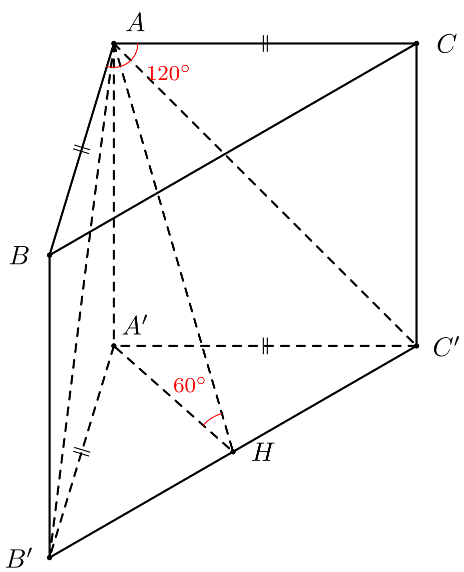
$S_{\triangle ABC} = \dfrac{(AB)^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{(4a)^2\sqrt{3}}{4} = 4a^2\sqrt{3} \Rightarrow V_{ABC.A'B'C'} = AA' \cdot S_{\triangle ABC} = 4a \cdot 4a^2\sqrt{3} = 16a^3\sqrt{3}$.

Chọn đáp án C □

Câu 7. Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác cân với $AB = AC = a$, $\widehat{BAC} = 120°$. Mặt phẳng $(AB'C')$ tạo với đáy một góc $60°$. Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

A $V = \dfrac{3a^3}{8}$. B $V = \dfrac{9a^3}{8}$. C $V = \dfrac{a^3}{8}$. D $V = \dfrac{3a^3}{4}$.

Lời giải.



Gọi H là trung điểm của $B'C'$, khi đó góc giữa mp $(AB'C')$ và đáy là góc $\widehat{AHA'} = 60°$.

Ta có $S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{2}AC \cdot AB \cdot \sin 120° = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

$B'C' = BC = \sqrt{AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos 120°} = \sqrt{a^2 + a^2 - 2 \cdot a \cdot a \cdot \dfrac{-1}{2}} = a\sqrt{3} \Rightarrow A'H = \dfrac{2S_{\triangle ABC}}{B'C'} = \dfrac{a}{2} \Rightarrow AA' = A'H \cdot \tan 60° = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

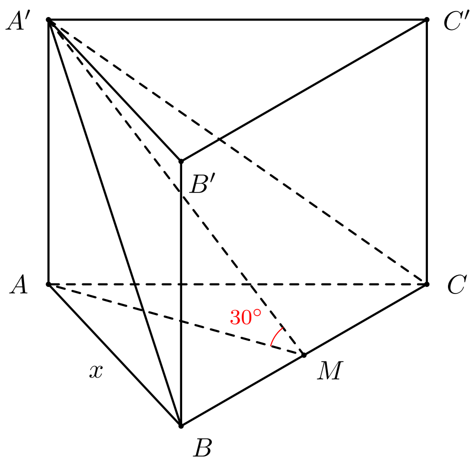
Vậy $V = S_{\triangle ABC} \cdot AA' = \dfrac{3a^3}{8}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 8. Cho lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$. Biết rằng góc giữa $(A'BC)$ và (ABC) là $30°$, tam giác $A'BC$ có diện tích bằng 8. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

(A) $8\sqrt{3}$. (B) 8. (C) $3\sqrt{3}$. (D) $8\sqrt{2}$.

Lời giải.



Đặt $AB = x\,(x > 0)$, gọi M là trung điểm BC.

Ta có $\begin{cases}(A'BC)\cap(ABC) = BC\\ AM \perp BC\\ A'M \perp BC\end{cases} \Rightarrow (\widehat{(A'BC),(ABC)}) = \widehat{A'MA} = 30°$.

Xét $\triangle A'AM$, có $A'M = \dfrac{AM}{\cos 30°} = \dfrac{x\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{2}{\sqrt{3}} = x$.

$S_{\triangle A'BC} = 8 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}A'M\cdot BC = 8 \Leftrightarrow x^2 = 16 \Rightarrow x = 4$.

Suy ra $A'A = AM\cdot\tan 30° = \dfrac{4\cdot\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{3}} = 2$; $S_{\triangle ABC} = \dfrac{16\cdot\sqrt{3}}{4} = 4\sqrt{3}$.

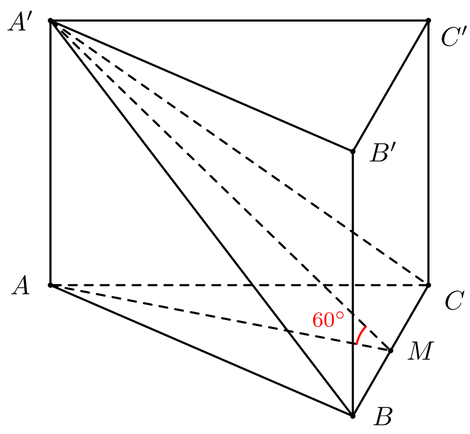
Vậy $V_{ABC.A'B'C'} = A'A\cdot S_{\triangle ABC} = 2\cdot 4\sqrt{3} = 8\sqrt{3}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 9. Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có diện tích đáy bằng $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$. Mặt phẳng $(A'BC)$ hợp với mặt phẳng đáy một góc $60°$. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

(A) $\dfrac{3a^3\sqrt{3}}{8}$. (B) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{8}$. (C) $\dfrac{5a^3\sqrt{3}}{12}$. (D) $\dfrac{3a^3\sqrt{2}}{8}$.

Lời giải.



Vì đáy ABC là tam giác đều có diện tích bằng $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow$ Cạnh đáy bằng a.

Gọi M trung điểm BC, ta có $\begin{cases} BC \perp AM \\ BC \perp AA' \end{cases} \Rightarrow BC \perp A'M$.

Từ đó ta có $\widehat{((A'BC),(ABC))} = \widehat{(A'M, AM)} = \widehat{A'MA} = 60^\circ$.

Xét $\triangle A'AM$ ta có $AA' = AM \cdot \tan 60^\circ = \dfrac{3a}{2}$.

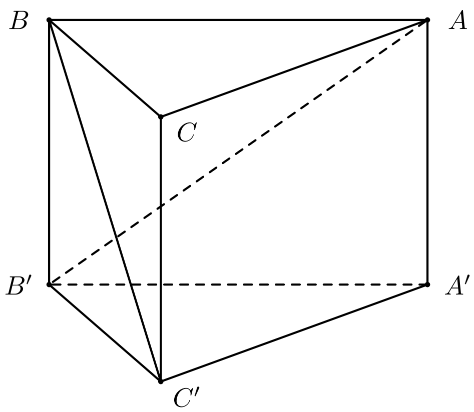
Thể tích lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là $V_{ABC.A'B'C'} = AA' \cdot S_{\triangle ABC} = \dfrac{3a^3\sqrt{3}}{8}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 10. Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng a và AB' vuông góc với BC'. Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

(A) $V = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{4}$. (B) $V = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{8}$. (C) $V = a^3\sqrt{6}$. (D) $V = \dfrac{7a^3}{8}$.

Lời giải.



Đặt $\vec{x} = \overrightarrow{BA}, \vec{y} = \overrightarrow{BC}, \vec{z} = \overrightarrow{BB'}$, theo giả thiết $AB' \perp BC'$ nên.

$\overrightarrow{AB'} \cdot \overrightarrow{BC'} = 0 \Leftrightarrow (\vec{z} - \vec{x})(\vec{y} + \vec{z}) = 0 \Leftrightarrow \vec{z} \cdot \vec{y} + |\vec{z}|^2 - \vec{x} \cdot \vec{y} - \vec{x} \cdot \vec{z} = 0 \Leftrightarrow |\vec{z}|^2 = \vec{x} \cdot \vec{y}$

$\Leftrightarrow |\vec{z}|^2 = |\vec{x}|\,|\vec{y}| \cos 60^\circ = \dfrac{a^2}{2} \Rightarrow |\vec{z}| = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

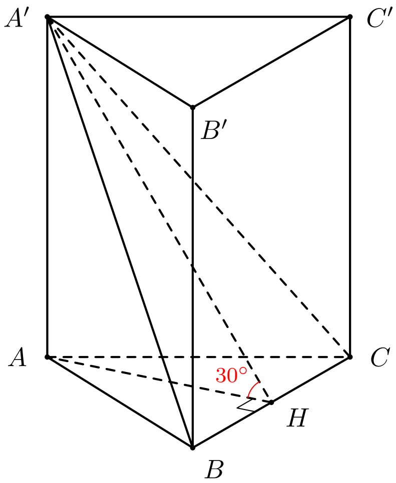
Vậy $V_{ABC.A'B'C'} = S_{\triangle ABC} \cdot BB' = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \dfrac{a\sqrt{2}}{2} = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{8}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 11. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng a và $(A'BC)$ hợp với mặt đáy ABC một góc 30°. Tính thể tích V của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

(A) $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{8}$. (B) $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$. (C) $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{24}$. (D) $V = \dfrac{3a^3}{8}$.

Lời giải.



Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên BC. Suy ra $AH \perp BC$.

$A'H \perp BC$.

Mà $(ABC) \cap (A'BC) = BC$.

$\Rightarrow$ Góc giữa $(A'BC)$ và (ABC) bằng góc $(AH; A'H) = \widehat{AHA'} = 30°$.

Ta có: ABC là tam giác đều cạnh bằng a nên $AH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, $A'A = AH \cdot \tan 30° = \dfrac{a}{2}$.

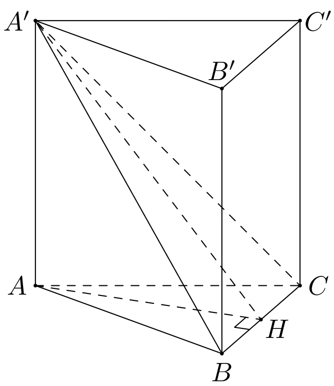
Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là $V = A'A \cdot S_{\triangle ABC} = \dfrac{a}{2} \cdot \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{8}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 12. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A và $AB = a$, $AC = a\sqrt{3}$, mặt phẳng $(A'BC)$ tạo với đáy một góc $30°$. Thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

(A) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$. (B) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$. (C) $\dfrac{3\sqrt{3}\,a^3}{4}$. (D) $\dfrac{\sqrt{3}\,a^3}{4}$.

Lời giải.



* Xác định góc giữa mặt phẳng $(A'BC)$ và mặt phẳng đáy:

Trong mặt phẳng (ABC), dựng $AH \perp BC$ với H nằm trên cạnh BC.

Theo định lý ba đường vuông góc, ta có: $A'H \perp BC$.

Vậy $(\widehat{(A'BC); (ABC)}) = \widehat{A'HA} = 30°$.

* Xét tam giác ABC có: $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{AC^2} = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{3a^2}$

$\Rightarrow AH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

Diện tích B của tam giác ABC là:$B =, \dfrac{AB.AC}{2} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$

* Xét tam giác $A'HA$ vuông tại A, ta có: $A'A = AH.\tan 30° = \dfrac{a}{2}$

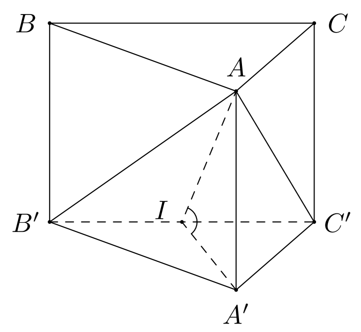
Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng $V = B.h = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}.\dfrac{a}{2} = \dfrac{\sqrt{3}a^3}{4}$

Chọn đáp án (D) □

Câu 13. Cho hình lăng trụ đứng, có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, $AB = a\sqrt{2}$, góc giữa mp$(AB'C')$ và mp(ABC) bằng $60°$. Thể tích khối lăng trụ bằng

(A) $3a^3$. (B) $3\sqrt{3}a^3$. (C) a^3. (D) $\sqrt{3}a^3$.

Lời giải.



Gọi I là trung điểm của cạnh $B'C'$

Ta có $\widehat{((AB'C'),(ABC))} = \widehat{((AB'C'),(A'B'C'))}$

và $(AB'C') \cap (A'B'C') = B'C'$.

Vì ABC là tam giác vuông cân tại A nên hai mặt bên $ABB'A'$ và $ACC'A'$ là hai hình chữ nhật bằng nhau.

Do đó $AC' = AB' \Rightarrow \Delta AB'C'$ là tam giác cân tại $A \Rightarrow AI \perp B'C'$

Vì $\Delta A'B'C'$ là tam giác vuông cân tại A' nên $A'I \perp B'C'$.

Như vậy $\widehat{((AB'C'),(ABC))} = \widehat{AIA'} = 60°$.

Ta có $A'I = \dfrac{1}{2}BC = a \Rightarrow AA' = A'I.\tan 60° = a\sqrt{3}$.

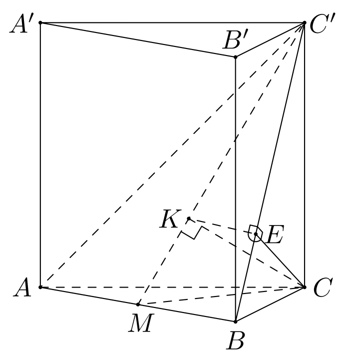
$\Rightarrow V_{ABC.A'B'C'} = AA'.S_{ABC} = a\sqrt{3}.\dfrac{1}{2}\left(a\sqrt{2}\right)^2 = a^3\sqrt{3}$

Chọn đáp án D ☐

Câu 14. Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$. Biết khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng (ABC') bằng a, góc giữa hai mặt phẳng (ABC') và $(BCC'B')$ bằng α với $\cos\alpha = \dfrac{1}{2\sqrt{3}}$. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$

A $V = \dfrac{3a^3\sqrt{2}}{4}$. B $V = \dfrac{3a^3\sqrt{2}}{2}$. C $V = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{2}$. D $V = \dfrac{3a^3\sqrt{2}}{8}$.

Lời giải.



Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và BC

Do $\begin{cases} AB \perp CC' \\ AB \perp CM \end{cases} \Rightarrow AB \perp (MCC') \Rightarrow (ABC') \perp (MCC')$

Kẻ CK vuông góc với CM tại K thì ta được $CK \perp (ABC')$.

Do đó $CK = d\left(C;(ABC')\right) = a$.

Đặt $BC = x, CC' = y, (x > 0, y > 0)$, ta được: $CM = \dfrac{x\sqrt{3}}{2}$

$\dfrac{1}{CM^2} + \dfrac{1}{CC'^2} = \dfrac{1}{CK^2} \Leftrightarrow \dfrac{4}{3x^2} + \dfrac{1}{y^2} = \dfrac{1}{a^2} \quad (1)$

Kẻ $CE \perp BC'$ tại E, ta được $\widehat{KEC} = \alpha$,

$EC = \dfrac{KC}{\sin\alpha} = \dfrac{a}{\sqrt{1-\dfrac{1}{12}}} = a\sqrt{\dfrac{12}{11}}$

Lại có $\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} = \dfrac{1}{CE^2} = \dfrac{11}{12a^2} \quad (2)$

Giải $(1),(2)$ ta được: $x = 2a, y = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

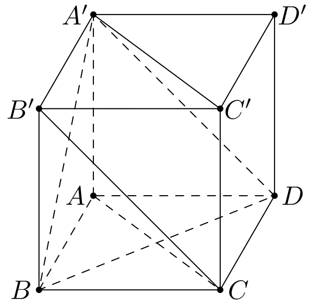
Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là: $V = y.\dfrac{x^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}.\dfrac{4a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{3\sqrt{2}a^3}{2}$

Chọn đáp án B ☐

Câu 15. (THPT Minh Khai - 2019) Cho khối lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $A'B = a\sqrt{6}$, đường thẳng $A'B$ vuông góc với đường thẳng $B'C$. Tính thể tích khối lăng trụ đã cho theo a?

A $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{3}$. B $a^3\sqrt{6}$. C $\dfrac{3a^3}{4}$. D $\dfrac{9a^3}{4}$.

Lời giải.



Dựng hình hộp $ABCD.ABCD$ khi đó tứ giác $ABCD$ là hình thoi.

Đặt $AB = x, \Rightarrow AD = x$.

Tam giác ABD có góc $\widehat{BAD} = 120^\circ$; áp dụng định lý côsin ta có:

$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB.AD.\cos\widehat{BAD}$

$= x^2 + x^2 - 2x.x.\cos 120^\circ = 3x^2$.

Ta có: $A'B = a\sqrt{6} \Rightarrow A'D = a\sqrt{6}$

Ta có: $A'D \,/\!/\, B'C \Rightarrow A'B \perp A'D \Rightarrow \Delta A'BD$ vuông tại A'

$\Rightarrow BD^2 = A'B^2 + A'D^2 \Leftrightarrow 3x^2 = 12a^2 \Leftrightarrow x^2 = 4a^2 \Rightarrow x = 2a$.

Chiều cao hình trụ $AA'^2 = A'B^2 - AB^2 = 6a^2 - 4a^2 = 2a^2$

$\Rightarrow AA' = a\sqrt{2}$.

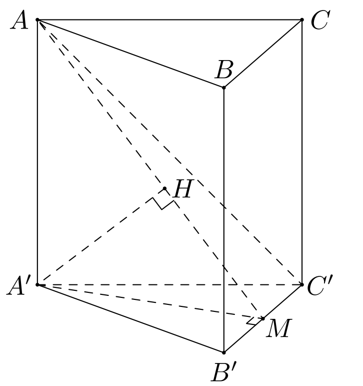
$\Rightarrow V_{ABC.A'B'C'} = \dfrac{1}{3}AA'.S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{3}a\sqrt{2}.\dfrac{1}{2}.2a.2a.\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\sqrt{6}a^3}{3}$.

Chọn đáp án A □

Câu 16. (Chuyên Lam Sơn Thanh Hóa 2019) Cho khối lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng a. Khoảng cách từ điểm A' đến mặt phẳng $(AB'C')$ bằng $\dfrac{2a\sqrt{3}}{\sqrt{19}}$. Thể tích của khối lăng trụ đã cho là

(A) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$. (B) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$. (C) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$. (D) $\dfrac{3a^3}{2}$.

Lời giải.



Gọi M là trung điểm của $B'C'$.

Ta có $\begin{cases} AA' \perp B'C' \\ A'M \perp B'C' \end{cases} \Rightarrow B'C' \perp (AA'M)$

$\Rightarrow (AB'C') \perp (AA'M)$ theo giao tuyến AM.

Kẻ $A'H \perp AM$ trong mặt phẳng $(AA'M)$, suy ra $A'H \perp (AB'C')$.

Vậy khoảng cách từ A' đến mặt phẳng $(AB'C')$ là $A'H = \dfrac{2a\sqrt{3}}{\sqrt{19}}$.

Ta có $\dfrac{1}{A'H^2} = \dfrac{1}{A'A^2} + \dfrac{1}{A'M^2} \Rightarrow \dfrac{1}{A'A^2} = \dfrac{1}{A'H^2} - \dfrac{1}{A'M^2} = \dfrac{1}{4a^2}$

$\Rightarrow A'A = 2a$.

Vậy thể tích khối lăng trụ là $V = AA'.S_{A'B'C'} = 2a.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$.

Chọn đáp án C □

Câu 17. (Chuyên Vĩnh Phúc - 2018)Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ đáy là tam giác vuông cân tại B, $AC = a\sqrt{2}$, biết góc giữa $(A'BC)$ và đáy bằng 60°. Tính thể tích V của khối lăng trụ.

(A) $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$. (B) $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$. (C) $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$. (D) $V = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{6}$.

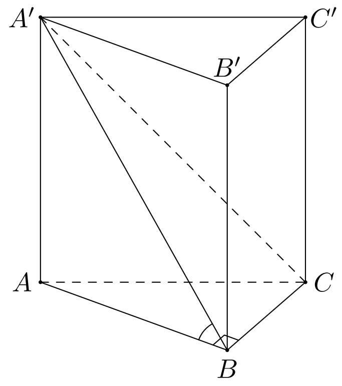
Lời giải.

Tam giác ABC vuông cân tại B, $AC = a\sqrt{2}$

$\Rightarrow AB = BC = a \Rightarrow S_{\Delta ABC} = \dfrac{a^2}{2}$.

$\left(\widehat{(A'BC),(ABC)}\right) = \widehat{A'BA} = 60^\circ \Rightarrow A'A = AB.\tan 60^\circ = a\sqrt{3}$.

Vậy: $V_{ABC.A'B'C'} = S_{\Delta ABC}.A'A = \dfrac{a^2}{2}.a\sqrt{3} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$.



Chọn đáp án A □

Câu 18. (Liên Trường - Nghệ An 2018) Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC)$ và (ABC) bằng 60°, cạnh $AB = a$. Tính thể tích V của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$

A $V = \dfrac{\sqrt{3}}{4}a^3$. B $V = \dfrac{3}{4}a^3$. C $V = \dfrac{3\sqrt{3}}{8}a^3$. D $V = \sqrt{3}a^3$.

Lời giải.

Gọi M là trung điểm của BC suy ra $AM \perp BC$ (1)

Ta có $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp AA' \end{cases} \Rightarrow BC \perp A'M$ (2).

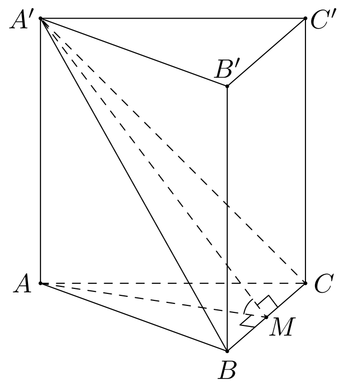
Mặt khác $(ABC) \cap (A'BC) = BC$, (3)

Từ $(1), (2), (3)$ suy ra $\left(\widehat{(ABC);(A'BC)}\right) = \widehat{A'MA} = 60^\circ$.

Vì tam giác ABC đều nên $S_{\Delta ABC} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$ và $AM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Ta có $AA' = AM.\tan 60^\circ = \dfrac{3a}{2}$.

Vậy $V_{ABC.A'B'C'} = AA'.S_{\Delta ABC} = \dfrac{3a}{2}.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{3a^3\sqrt{3}}{8}$.

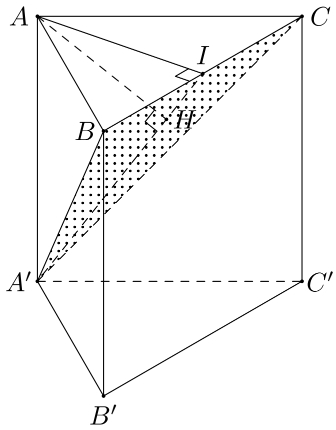


Chọn đáp án C □

Câu 19. (THPT Triệu Thị Trinh - 2018) Cho khối lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy là a và khoảng cách từ A đến mặt phẳng $(A'BC)$ bằng $\dfrac{a}{2}$. Thể tích của khối lăng trụ bằng:

A $\dfrac{3\sqrt{2}a^3}{12}$. B $\dfrac{\sqrt{2}a^3}{16}$. C $\dfrac{3a^3\sqrt{2}}{16}$. D $\dfrac{3a^3\sqrt{2}}{48}$.

Lời giải.



Gọi I là trung điểm của BC và H là hình chiếu vuông góc của A trên $A'I$.

Khi đó ta có: $d\left(A,(A'BC)\right) = AH = \dfrac{a}{2}$.

Trong tam giác vuông $AA'I$ ta có: $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AA'^2} + \dfrac{1}{AI^2}$

$\Rightarrow \dfrac{1}{AA'^2} = \dfrac{1}{AH^2} - \dfrac{1}{AI^2} = \dfrac{1}{\left(\frac{a}{2}\right)^2} - \dfrac{1}{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \dfrac{4}{a^2} - \dfrac{4}{3a^2} = \dfrac{8}{3a^2}$. Suy ra: $AA' = \dfrac{a\sqrt{6}}{4}$

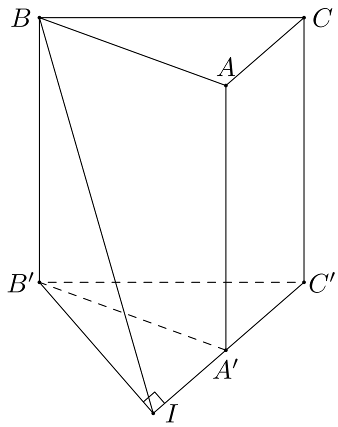
Thể tích khối lăng trụ là: $V = S_{\Delta ABC}.AA' = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot\dfrac{a\sqrt{6}}{4} = \dfrac{3a^3\sqrt{2}}{16}$.

Chọn đáp án C □

Câu 20. (THPT Tứ Kỳ - Hải Dương - 2018) Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác cân với $AB = AC = a$, $\widehat{BAC} = 120^\circ$, mặt phẳng $(A'BC')$ tạo với đáy một góc 60°. Tính thể tích của khối lăng trụ đã cho

A. $V = \dfrac{3a^3}{8}$. B. $V = \dfrac{9a^3}{8}$. C. $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{8}$. D. $V = \dfrac{3\sqrt{3}a^3}{8}$.

Lời giải.



Hạ $B'I \perp A'C'$. Khi đó ta có $\left(\widehat{(A'BC'),(ABC)}\right) = \widehat{B'IB} = 60^\circ$.

Vì $\widehat{B'A'C'} = 120^\circ \Rightarrow \widehat{B'A'I} = 60^\circ$. Do đó $\sin 60^\circ = \dfrac{B'I}{B'A} \Leftrightarrow B'I = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Suy ra $\tan\widehat{B'IB} = \dfrac{BB'}{B'I} \Leftrightarrow \tan 60^\circ = \dfrac{BB'}{B'I} \Leftrightarrow BB' = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}.\sqrt{3} = \dfrac{3a}{2}$.

Mặt khác $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}.AI.BC = \dfrac{1}{2}.\dfrac{a}{2}.a\sqrt{3} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

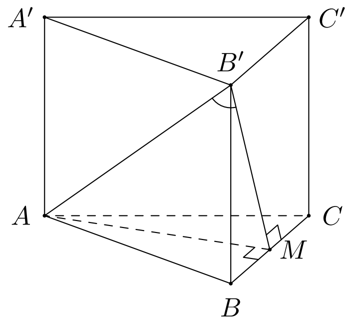
Vậy thể tích khối chóp là $V = B.h = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}.\dfrac{a3}{2} = \dfrac{3\sqrt{3}a^3}{8}$.

Chọn đáp án D □

Câu 21. (THPT Yên Lạc - 2018) Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng a. Đường thẳng AB' tạo với mặt phẳng $(BCC'B')$ một góc 30°. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ theo a

A. $\dfrac{3a^3}{4}$. B. $\dfrac{a^3}{4}$. C. $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{12}$. D. $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{4}$.

Lời giải.



Gọi M là trung điểm của cạnh BC.

Do $ABC.A'B'C'$ là hình lăng trụ tam giác đều nên ta có:

$AM \perp (BCC'B') \Rightarrow (AB', (BCC'B')) = \widehat{AB'M} = 30°$.

Xét tam giác vuông $AB'M$ ta có $\tan 30° = \dfrac{AM}{AB'}$

$\Leftrightarrow AB' = \dfrac{AM}{\tan 30°} \Leftrightarrow AB' = \dfrac{3a}{2}$.

Xét tam giác vuông $B'BM$ ta có

$BB' = \sqrt{B'M^2 - BM^2} = \sqrt{\dfrac{9a^2}{4} - \dfrac{a^2}{4}} = a\sqrt{2}$.

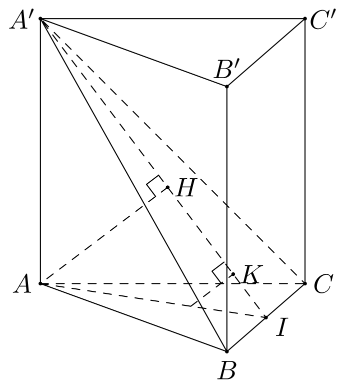
Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là $V_{ABC.A'B'C'} = \dfrac{1}{2}AB.AC.\sin 60°.BB' = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{4}$.

Chọn đáp án D □

Câu 22. (THPT Xuân Hòa - 2018) Cho hình lăng trụ đứng$ABC.A'B'C'$, biết đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Khoảng cách từ tâm O của tam giác ABC đến mặt phẳng $(A'BC)$ bằng $\dfrac{a}{6}$. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$

Ⓐ $\dfrac{3a^3\sqrt{2}}{8}$. Ⓑ $\dfrac{3a^3\sqrt{2}}{28}$. Ⓒ $\dfrac{3a^3\sqrt{2}}{4}$. Ⓓ $\dfrac{3a^3\sqrt{2}}{16}$.

Lời giải.



Diện tích đáy là $B = S_{\Delta ABC} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Chiều cao là $h = d\left((ABC); (A'B'C')\right) = AA'$.

Do tam giác ABC là tam giác đều nên O là trọng tâm của tam giác ABC.

Gọi I là trung điểm của BC, H là hình chiếu vuông góc của A lên $A'I$.

Ta có $AH \perp (A'BC) \Rightarrow d\left(A; (A'BC)\right) = AH$.

$\dfrac{d\left(O; (A'BC)\right)}{d\left(A; (A'BC)\right)} = \dfrac{IO}{IA} = \dfrac{1}{3}$

$\Rightarrow d\left(O; (A'BC)\right) = \dfrac{d\left(A; (A'BC)\right)}{3} = \dfrac{AH}{3} = \dfrac{a}{6} \Rightarrow AH = \dfrac{a}{2}$.

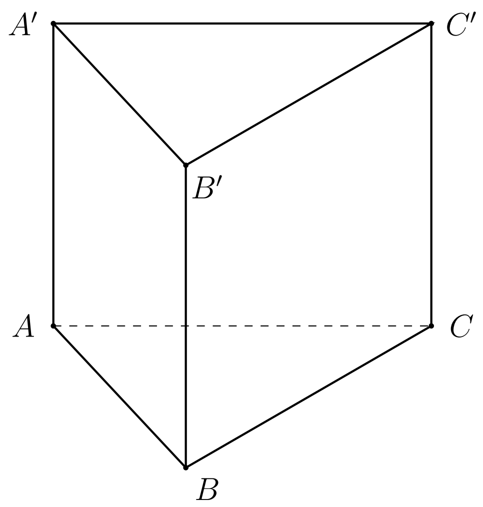
Xét tam giác $A'AI$ vuông tại A ta có:

$\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AA'^2} + \dfrac{1}{AI^2} \Rightarrow \dfrac{1}{AA'^2} = \dfrac{1}{AH^2} - \dfrac{1}{AI^2} \Rightarrow AA' = \dfrac{a\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \Rightarrow h = \dfrac{a\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$

$\Rightarrow V_{ABC.A'B'C'} = \dfrac{3a^3\sqrt{2}}{16}$

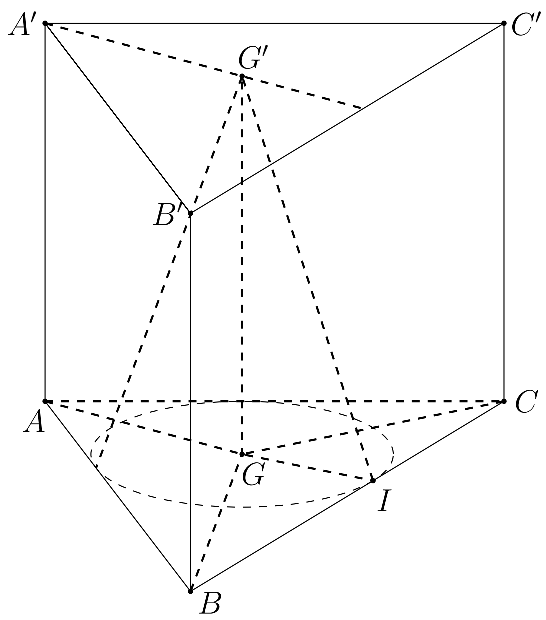
Chọn đáp án D □

Câu 23. Cho một lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng a, góc giữa $A'C$ và mặt phẳng đáy bằng $60°$. Tính diện tích xung quanh S_{xq} của hình nón có đáy là đường tròn nội tiếp tam giác ABC và đỉnh là trọng tâm của tam giác $A'B'C'$.



Ⓐ $S_{\text{xq}} = \dfrac{\pi a^2\sqrt{333}}{36}$. Ⓑ $S_{\text{xq}} = \dfrac{\pi a^2\sqrt{333}}{6}$. Ⓒ $S_{\text{xq}} = \dfrac{\pi a^2\sqrt{111}}{6}$. Ⓓ $S_{\text{xq}} = \dfrac{\pi a^2\sqrt{111}}{36}$.

Lời giải.



Gọi I là trung điểm của đoạn BC

Ta có $\widehat{(A'C;(ABC))} = \widehat{A'CA} = 60^\circ$ suy ra $AA' = AC \cdot \tan 60^\circ = \sqrt{3}a$.

Có $r = GI = \dfrac{1}{3}AI = \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{\sqrt{3}a}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{6}a$ và $l = G'I = \sqrt{G'G^2 + GI^2} = \sqrt{3a^2 + \dfrac{3a^2}{36}} = \dfrac{\sqrt{111}a}{6}$.

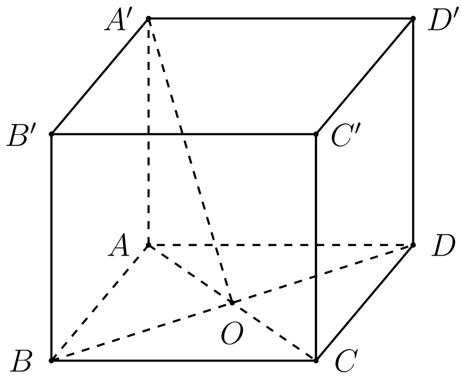
Vậy $S_{xq} = \pi r l = \pi \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{6}a \cdot \dfrac{\sqrt{111}}{6}a = \dfrac{\pi a^2\sqrt{333}}{36}$.

Chọn đáp án A □

Câu 24. Cho khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình vuông, $BD = 4a$, góc giữa hai mặt phẳng $(A'BD)$ và $(ABCD)$ bằng 30°. Thể tích của khối hộp chữ nhật bằng

Ⓐ $\dfrac{16\sqrt{3}}{9}a^3$. Ⓑ $48\sqrt{3}a^3$. Ⓒ $\dfrac{16\sqrt{3}}{3}a^3$. Ⓓ $16\sqrt{3}a^3$.

Lời giải.



Theo giả thiết $ABCD$ là hình vuông nên có $2AB^2 = BD^2 \Rightarrow AB = 2\sqrt{2}a$.

Do đó $S_{ABCD} = AB^2 = 8a^2$.

Gọi O là tâm của đáy $ABCD \Rightarrow OA \perp BD$ và $OA = \dfrac{1}{2}BD = 2a$.

Vì $ABCD.A'B'C'D'$ là hình hộp chữ nhật nên có $A'A \perp (ABCD) \Rightarrow A'A \perp BD \Rightarrow BD \perp (A'AO)$. Do đó góc giữa $(A'BD)$ và mặt phẳng $(ABCD)$ là góc $\widehat{A'OA} \Rightarrow \widehat{A'OA} = 30^\circ$.

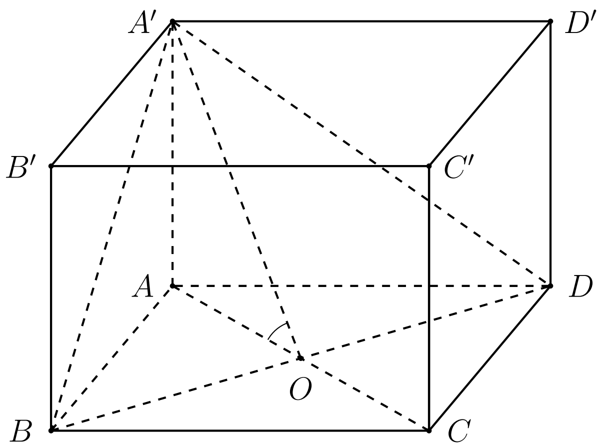
Tam giác $A'OA$ vuông tại A có $A'A = OA \cdot \tan \widehat{A'OA} = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$.

Vậy $V_{ABCD.A'B'C'D'} = 8a^2 \cdot \dfrac{2a\sqrt{3}}{3} = \dfrac{16\sqrt{3}}{3}a^3$. □

Câu 25. Cho khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình vuông, $BD = 2a$, góc giữa hai mặt phẳng $(A'BD)v(ABCD)$ bằng 60°. Thể tích của khối hộp đã cho bằng

Ⓐ $\dfrac{2\sqrt{3}}{9}a^3$. Ⓑ $6\sqrt{3}a^3$. Ⓒ $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}a^3$. Ⓓ $2\sqrt{3}a^3$.

Lời giải.



Gọi $O = AC \cap BD$.

Ta có: $\begin{cases} (A'BD) \cap (ABCD) = BD \\ A'O \perp BD \\ AC \perp BD \end{cases} \Rightarrow 60^\circ = \widehat{A'OA}$.

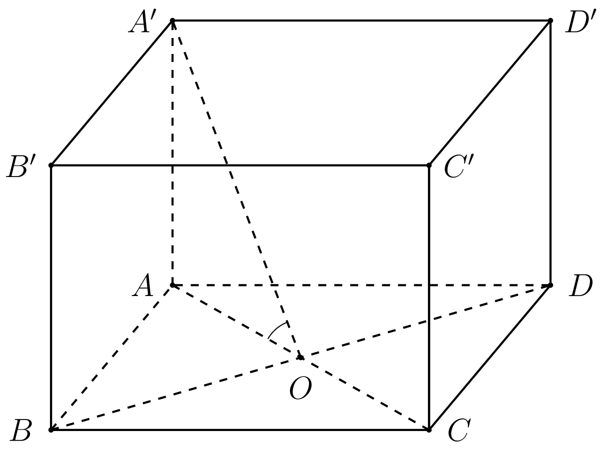
Tam giác $AA'O$ có: $AA' = \tan 60^\circ \cdot OA = \sqrt{3}a$ và $S_{ABCD} = 2a^2$.

Vậy $V_{ABCD.A'B'C'D'} = AA' \cdot S_{ABCD} = 2\sqrt{3}a^3$. □

Câu 26. Cho khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình vuông, $BD = 2a$, góc giữa hai mặt phẳng $(A'BD)$ và $(ABCD)$ bằng 30°. Thể tích khối hộp chữ nhật đã cho bằng

(A) $6\sqrt{3}a^3$. (B) $\dfrac{2\sqrt{3}}{9}a^3$. (C) $2\sqrt{3}a^3$. (D) $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}a^3$.

Lời giải.



Gọi $O = AC \cap BD$.

Diện tích hình vuông $ABCD$ là $S_{ABCD} = AB^2 = \left(\dfrac{BD}{\sqrt{2}}\right)^2 = \left(\dfrac{2a}{\sqrt{2}}\right)^2 = 2a^2$.

Ta có: $((A'BD),(ABCD)) = (A'O; AO) = 30°$.

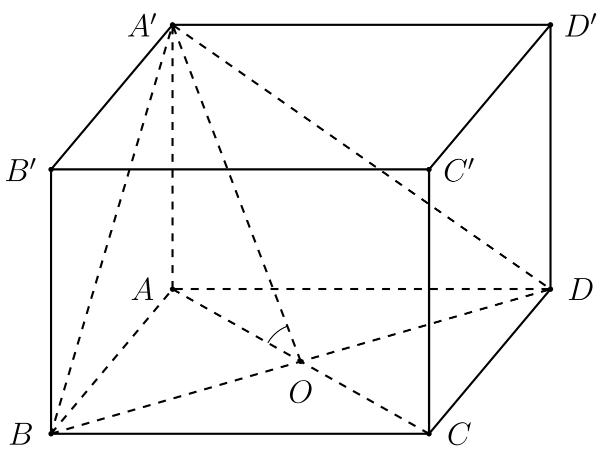
Xét tam giác $A'OA$ vuông tại A, ta có: $A'A = \tan 30° \cdot AO = \dfrac{\sqrt{3}}{3}a$.

Thể tích khối hộp chữ nhật đã cho là $V = A'A \cdot S_{ABCD} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}a \cdot 2a^2 = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}a^3$. □

Câu 27. Cho khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình vuông, $BD = 4a$, góc giữa hai mặt phẳng $(A'BD)$ và $(ABCD)$ bằng $60°$. Thể tích của khối hộp chữ nhật đã cho bằng

(A) $48\sqrt{3}a^3$. (B) $\dfrac{16\sqrt{3}}{9}a^3$. (C) $\dfrac{16\sqrt{3}}{3}a^3$. (D) $16\sqrt{3}a^3$.

Lời giải.



Gọi O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD.

Ta có:

$$\begin{cases} OA \perp BD \\ A'A \perp (ABCD) \Rightarrow A'A \perp BD \end{cases} \Rightarrow BD \perp A'O.$$

Xét $(A'BD)$ và $(ABCD)$ có:

$\begin{cases} (A'BD) \cap (ABCD) = BD \\ AO \perp BD \\ A'O \perp BD \end{cases} \Rightarrow$ góc giữa hai mặt phẳng $(A'BD)$ và $(ABCD)$ là $\widehat{A'OA}$

$\Rightarrow \widehat{A'OA} = 60^\circ$.

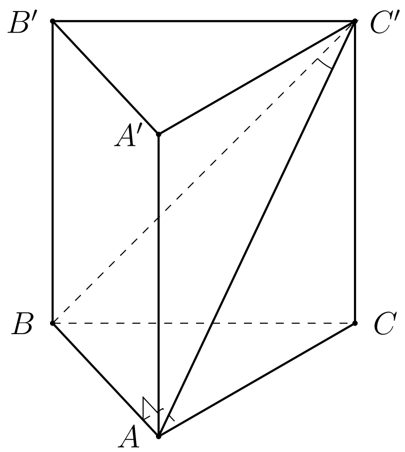
Ta có: $BD = 4a \Rightarrow OA = 2a$ và $\tan \widehat{A'OA} = \dfrac{AA'}{OA} \Leftrightarrow AA' = OA \cdot \tan 60^\circ = 2\sqrt{3}a$.

Vậy $V_{ABCD.A'B'C'D'} = AA' \cdot S_{ABCD} = AA' \cdot \dfrac{1}{2} AC \cdot BD = 2\sqrt{3}a \cdot \dfrac{1}{2} \cdot (4a)^2 = 16\sqrt{3}a^3$. □

Câu 28. Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, $AB = 2a$. Góc giữa đường thẳng BC' và mặt phẳng $(ACC'A')$ bằng 30°. Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

Ⓐ $3a^3$. Ⓑ a^3. Ⓒ $12\sqrt{2}a^3$. Ⓓ $4\sqrt{2}a^3$.

Lời giải.



Ta có: $\begin{cases} AB \perp AC \\ AB \perp AA' \end{cases} \Rightarrow AB \perp (ACC'A') \Rightarrow AB \perp AC'$.

Vậy góc giữa đường thẳng BC' và mặt phẳng $(ACC'A')$ là góc $\widehat{BC'A}$.

Trong tam giác vuông $BC'A$ ta có $\widehat{BC'A} = 30^\circ$; $AB = 2a \Rightarrow AC' = AB \cdot \cot \widehat{BC'A} = 2a \cdot \sqrt{3}$.

Trong tam giác vuông ACC' ta có $CC' = \sqrt{AC'^2 - AC^2} = 2\sqrt{2}a$.

Vậy thể tích khối lăng trụ đã cho là

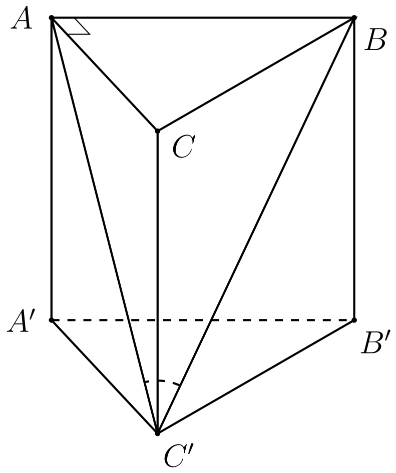
$V = CC' \cdot \dfrac{1}{2} AB^2 = 2\sqrt{2}a \cdot \dfrac{1}{2} \cdot 4a^2 = 4\sqrt{2}a^3$.

Chọn đáp án D □

Câu 29. Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, $AB = a$. Góc giữa đường thẳng BC' và mặt phẳng $(ACC'A')$ bằng 30°. Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

Ⓐ $\dfrac{1}{8}a^3$. Ⓑ $\dfrac{3}{8}a^3$. Ⓒ $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}a^3$. Ⓓ $\dfrac{\sqrt{2}}{2}a^3$.

Lời giải.



Diện tích đáy: $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}AB \cdot AC = \dfrac{a^2}{2}$.

Ta có: $\begin{cases} AB \perp AC \\ AB \perp AA' \end{cases} \Rightarrow AB \perp (ACC'A') \Rightarrow \widehat{(BC', (ACC'A'))} = \widehat{BC'A} = 30^\circ$.

Khi đó $AC' = AB \cdot \cot 30^\circ = a\sqrt{3} \Rightarrow AA' = \sqrt{AC'^2 - A'C'^2} = \sqrt{(a\sqrt{3})^2 - a^2} = a\sqrt{2}$.

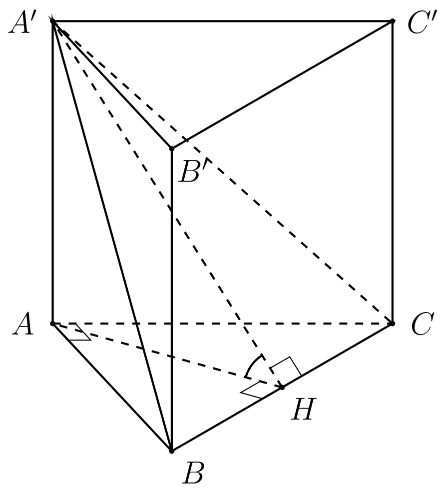
Vậy, thể tích khối lăng trụ đã cho là $V = S_{ABC} \cdot AA' = \dfrac{a^2}{2} \cdot a\sqrt{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \cdot a^3$.

Chọn đáp án D □

Câu 30. Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, cạnh bên $AA' = 2a$, góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC)$ và (ABC) bằng 30°. Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

A. $24a^3$. B. $\dfrac{8}{3}a^3$. C. $8a^3$. D. $\dfrac{8}{9}a^3$.

Lời giải.



Kẻ $AH \perp BC$, ta có $AA' \perp (ABC)$ nên $AA' \perp BC$.

$AH \perp BC$ và $AA' \perp BC$ suy ra $BC \perp (AA'H) \Rightarrow A'H \perp BC$.

Suy ra góc giữa $(A'BC)$ và (ABC) là $\widehat{A'HA} \Rightarrow \widehat{A'HA} = 30^\circ$.

$\triangle A'AH$ vuông tại A có.

$\tan \widehat{A'HA} = \dfrac{AA'}{AH} \Rightarrow \tan 30^\circ = \dfrac{2a}{AH} \Leftrightarrow AH = \dfrac{2a}{\tan 30^\circ} = 2a\sqrt{3}$.

$\triangle ABC$ vuông cân tại A nên $BC = 2AH = 4a\sqrt{3}$

$\Rightarrow S_{ABC} = \dfrac{1}{2}AH \cdot BC = \dfrac{1}{2}2a\sqrt{3} \cdot 4a\sqrt{3} = 12a^2$.

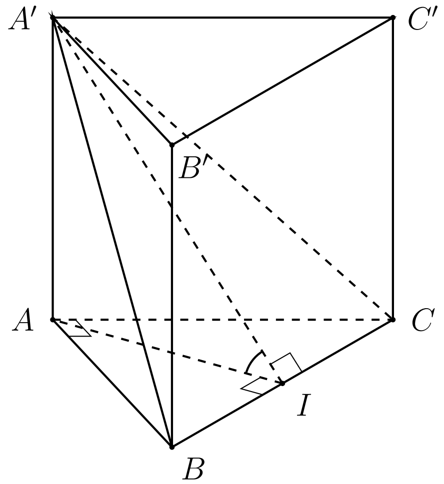
Vậy thể tích của khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ là.

Chọn đáp án A □

Câu 31. Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, cạnh bên $AA' = 2a$, góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC)$ và (ABC) bằng 60°. Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

Ⓐ $\dfrac{8}{9}a^3$. Ⓑ $8a^3$. Ⓒ $\dfrac{8}{3}a^3$. Ⓓ $24a^3$.

Lời giải.



Gọi I là trung điểm của BC.

Ta có: + ABC là tam giác vuông cân tại A nên $AI \perp BC$.

+ $ABC.A'B'C'$ là khối lăng trụ đứng nên $AA' \perp BC$.

suy ra $BC \perp (AA'I) \Rightarrow BC \perp A'I$.

Do đó, góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC)$ và (ABC) bằng góc giữa $A'I$ và AI, mà tam giác $AA'I$ vuông tại A nên ta có $\widehat{AIA'}$ là góc nhọn. Suy ra góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC)$ và (ABC) bằng $\widehat{AIA'} = 60^\circ$.

Trong tam giác vuông $AA'I$, ta có $AI = \dfrac{AA'}{\tan 60^\circ} = \dfrac{2a}{\sqrt{3}}$.

ABC là tam giác vuông cân tại A nên $BC = 2AI = \dfrac{4a}{\sqrt{3}}$, $AB = AC = \dfrac{BC}{\sqrt{2}} = \dfrac{2a\sqrt{6}}{3}$.

Vậy thể tích khối lăng trụ đã cho là $V = AA' \cdot S_{\triangle ABC} = AA' \cdot \dfrac{1}{2}AB \cdot AC = \dfrac{1}{2} \cdot 2a \cdot \left(\dfrac{2a\sqrt{6}}{3}\right)^2 = \dfrac{8a^3}{3}$.

Chọn đáp án C □

A Dạng 2: Thể tích khối lăng trụ xiên

Câu 32. (Sở Bình Phước 2019) Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng a, các cạnh bên tạo với đáy góc 60°. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

Ⓐ $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{24}$. Ⓑ $\dfrac{3a^3}{8}$. Ⓒ $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{8}$. Ⓓ $\dfrac{a^3}{8}$.

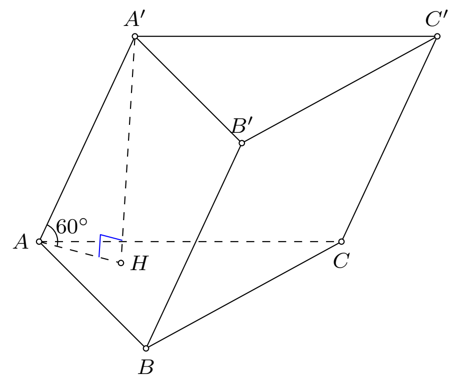
Lời giải.

Kẻ $AH' \perp (ABC) \Rightarrow (A'A, (ABC)) = \widehat{A'AH} = 60^\circ$.

Xét $\triangle AHA'$: $\sin 60^\circ = \dfrac{A'H}{AA'} \Leftrightarrow A'H = AA' \cdot \sin 60^\circ = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là

$V = S_{\triangle ABC} \cdot A'H = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{3a^3}{8}$.

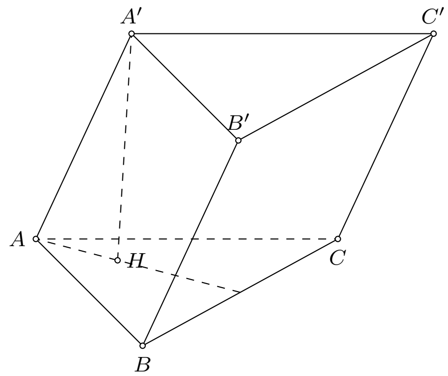


Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 33. (THPT Thăng Long - Hà Nội - 2018) Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng a, biết $A'A = A'B = A'C = a$. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$?

Ⓐ $\dfrac{3a^3}{4}$. Ⓑ $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{4}$. Ⓒ $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$. Ⓓ $\dfrac{a^3}{4}$.

Lời giải.



Gọi H là trọng tâm tam giác ABC. Theo giả thiết ta có ABC là tam giác đều cạnh bằng a và $A'A = A'B = A'C = a$ nên $A' \cdot ABC$ là tứ diện đều cạnh $a \Rightarrow A'H \perp (ABC)$ hay $A'H$ là đường cao của khối chóp $A' \cdot ABC$.

Xét tam giác vuông $A'HA$ ta có $A'H = \sqrt{A'A^2 - AH^2} = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

Diện tích tam giác ABC là $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}a \cdot a \cdot \sin 60^\circ = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

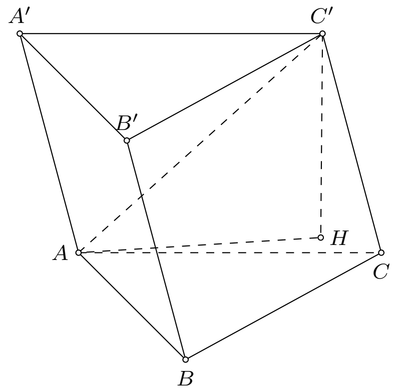
Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là $V_{ABC.A'B'C'} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}\dfrac{a\sqrt{6}}{3} = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{4}$.

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 34. (HSG Bắc Ninh 2019) Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại $A, AC = 2\sqrt{2}$, biết góc giữa AC' và (ABC) bằng 60° và $AC' = 4$. Tính thể tích V của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

Ⓐ $V = \dfrac{8}{3}$. Ⓑ $V = \dfrac{16}{3}$. Ⓒ $V = \dfrac{8\sqrt{3}}{3}$. Ⓓ $8\sqrt{3}$.

Lời giải.



Gọi H là hình chiếu của C' lên mặt phẳng (ABC), khi đó $C'H$ là đường cao $\Rightarrow \widehat{AC', (ABC)} = \widehat{C'AH} = 60^\circ$.

Xét tam giác vuông $AC'H$ ta có $C'H = C'A \cdot \sin 60^\circ = 2\sqrt{3}$.

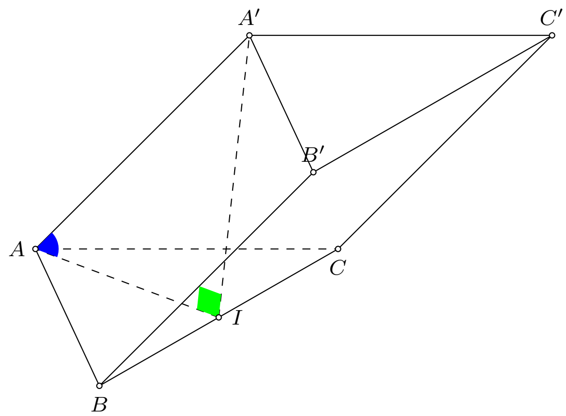
Khi đó $V_{ABC.A'B'C} = S_d \cdot C'H = \dfrac{1}{2}(2\sqrt{2})^2 \cdot 2\sqrt{3} = 8\sqrt{3}$.

Chọn đáp án D □

Câu 35. (Gia Bình 2019) Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a, góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng 30°. Hình chiếu của A' lên (ABC) là trung điểm I của BC. Tính thể tích khối lăng trụ

A $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$. B $\dfrac{a^3\sqrt{13}}{12}$. C $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{8}$. D $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Lời giải.



Ta có $A'I \perp (ABC) \Rightarrow AI$ là hình chiếu vuông góc của AA' lên (ABC).

Nên $\left(\widehat{AA', (ABC)}\right) = \left(\widehat{AA', AI}\right) = \widehat{A'AI} = 30^\circ$.

Ta có $AI = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow A'I = AI \tan 30^\circ = \dfrac{a}{2}, S_{\triangle ABC} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

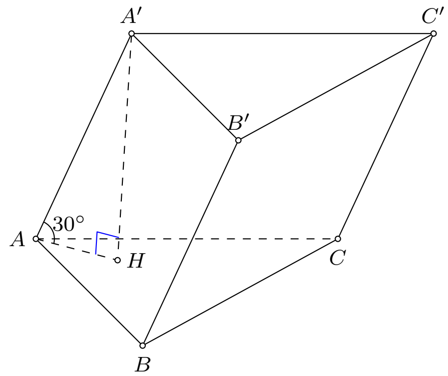
Vậy $V_{ABC.A'B'C'} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \dfrac{a}{2} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{8}$.

Chọn đáp án C □

Câu 36. (Nguyễn Khuyến 2019) Một khối lăng trụ tam giác có đáy là tam giác đều cạnh bằng 3, cạnh bên bằng $2\sqrt{3}$ tạo với mặt phẳng đáy một góc 30°. Khi đó thể tích khối lăng trụ là

A $\dfrac{9}{4}$. B $\dfrac{27}{4}$. C $\dfrac{27\sqrt{3}}{4}$. D $\dfrac{9\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải.

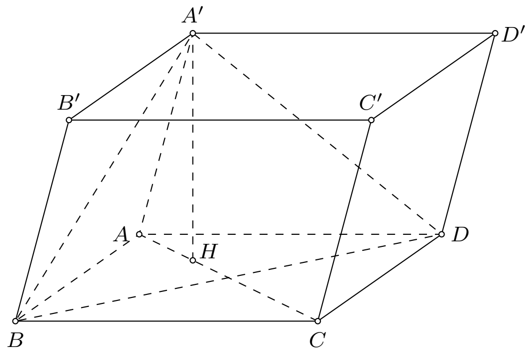


Gọi H là hình chiếu của A' lên mặt đáy. Suy ra góc $\widehat{A'AH} = 30°$.
$\sin 30° = \dfrac{A'H}{A'A} \Rightarrow A'H = A'A \cdot \sin 30° = 2\sqrt{3} \cdot \dfrac{1}{2} = \sqrt{3}$.
Khi đó: $V_{ABC.A'B'C} = 3^2 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{4} \cdot \sqrt{3} = \dfrac{27}{4}$.
Chọn đáp án B □

Câu 37. (Chuyên Bến Tre - 2020) Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có các cạnh bằng $2a$. Biết $\widehat{BAD} = 60°$, $\widehat{A'AB} = \widehat{A'AD} = 120°$. Tính thể tích V của khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$.

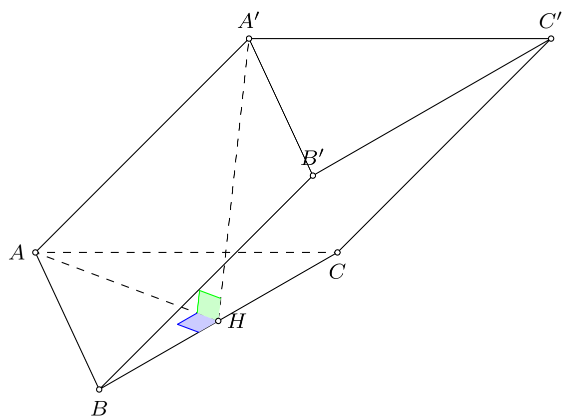
A. $4\sqrt{2}a^3$. B. $2\sqrt{2}a^3$. C. $8a^3$. D. $\sqrt{2}a^3$.

Lời giải.



Từ giả thuyết ta có các tam giác $\triangle ABD$, $\triangle A'AD$ và $A'AB$ là các tam giác đều
$\Rightarrow A'A = A'B = A'D$ nên hình chiếu H của A' trên mặt phẳng $(ABCD)$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác đều ABD
$\Rightarrow AH = \dfrac{2}{3} \cdot 2a \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}a$
$\Rightarrow A'H = \sqrt{A'A^2 - AH^2} = \dfrac{2\sqrt{6}}{3}a$.
Thể tích của khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$: $V = A'H \cdot S_{ABCD} = \dfrac{2\sqrt{6}}{3}a \cdot 2 \cdot \dfrac{4a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 4\sqrt{2}a^3$.
Chọn đáp án A □

Câu 38. (SGD Gia Lai 2019) Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh bằng 2. Hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trung điểm H của cạnh BC. Góc tạo bởi cạnh bên $A'A$ với đáy bằng $45°$ (hình vẽ bên). Tính thể tích V của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.



(A) $V = \dfrac{\sqrt{6}}{24}$. (B) $V = 1$. (C) $V = \dfrac{\sqrt{6}}{8}$. (D) $V = 3$.

Lời giải.

Thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$: $V_{ABC.A'B'C'} = S_{ABC} \cdot A'H$.

Ta có

$S_{ABC} = \dfrac{4\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}$.

$$\begin{cases} AH = \dfrac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \\ \tan 45^\circ = \dfrac{A'H}{AH} \Rightarrow A'H = AH = \sqrt{3}. \end{cases}$$

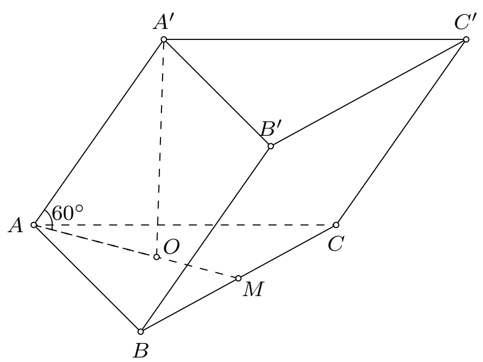
Vậy thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng $V_{ABC.A'B'C'} = S_{ABC} \cdot A'H = \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 3$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 39. Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, hình chiếu của A' xuống (ABC) là tâm O đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Biết AA' hợp với đáy (ABC) một góc 60°, thể tích khối lăng trụ là

(A) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$. (B) $\dfrac{3a^3\sqrt{3}}{4}$. (C) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$. (D) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{36}$.

Lời giải.



Gọi M là trung điểm cạnh BC. Khi đó $AM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ và $AO = \dfrac{2}{3}AM = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Do $A'O \perp (ABC)$ tại điểm O nên AO là hình chiếu vuông góc của AA' xuống (ABC). Suy ra góc giữa đường thẳng AA' và (ABC) là góc $\widehat{A'AO}$, suy ra $\widehat{A'AO} = 60^\circ$.

Xét $\triangle A'AO$ vuông tại O ta có $A'O = AO \cdot \tan 60 = \dfrac{a\sqrt{3}}{3} \cdot \sqrt{3} = a$.

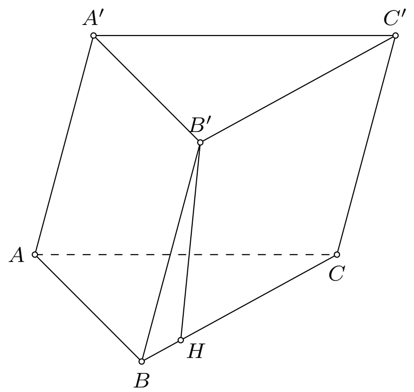
Vậy thể tích khối lăng trụ là $V = A'O \cdot S_{\triangle ABC} = a \cdot \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 40. (THPT Ngô Quyền - Ba Vì - Hải Phòng 2019) Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Độ dài cạnh bên bằng 4 a. Mặt phẳng $(BCC'B')$ vuông góc với đáy và $\widehat{B'BC} = 30°$. Thể tích khối chóp $A.CC'B'$ là

(A) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$. (B) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$. (C) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{18}$. (D) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Lời giải.



Ta có $(BCC'B') \perp (ABC)$ (gt).

Hạ $B'H \perp BC \Rightarrow B'H \perp (ABC)$ và $\widehat{B'BH} = \widehat{B'BC} = 30°$.

Suy ra chiều cao của lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là $h = B'H = BB' \cdot \sin 30° = 2a$.

Diện tích đáy là

Thể tích của khối lăng trụ là

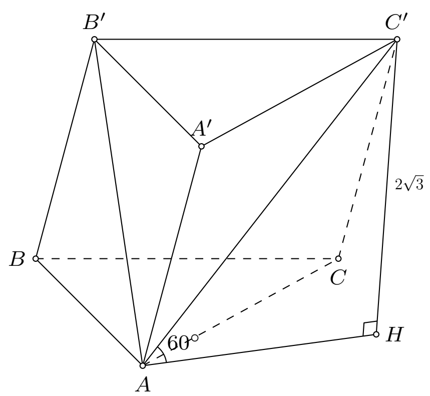
Thể tích khối chóp $A.CC'B'$ là $V = \dfrac{1}{3}V_{LT} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 41. (Đề thử nghiệm 2017) Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, cạnh $AC = 2\sqrt{2}$. Biết AC' tạo với mặt phẳng (ABC) một góc $60°$ và $AC' = 4$. Tính thể tích V của khối đa diện $ABCB'C'$.

(A) $V = \dfrac{8}{3}$. (B) $V = \dfrac{16}{3}$. (C) $V = \dfrac{8\sqrt{3}}{3}$. (D) $V = \dfrac{16\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải.



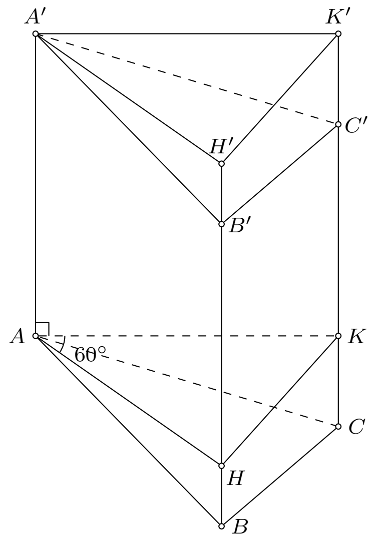
Phân tích: Tính thể tích của khối đa diện $ABCB'C'$ bằng thể tích khối của lăng trụ $ABC.A'B'C'$ trừ đi thể tích của khối chóp $A.A'B'C'$.

Giả sử đường cao của lăng trụ là $C'H$. Khi đó góc giữa AC' mặt phẳng (ABC) là góc $\widehat{C'AH} = 60^\circ$.
Ta có: $\sin 60^\circ = \dfrac{C'H}{AC'} \Rightarrow C'H = 2\sqrt{3}$; $S_{\triangle ABC} = 4$; $V_{ABC.A'B'C'} = C'H \cdot S_{\triangle ABC} = 2\sqrt{3} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot (2\sqrt{2})^2 = 8\sqrt{3}$.
$V_{A.A'B'C'} = \dfrac{1}{3} C'H \cdot S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{3} \cdot V_{ABC.A'B'C'} = \dfrac{8\sqrt{3}}{3}$; $V_{ABB'C'C} = V_{ABC.A'B'C'} - V_{A.A'B'C'} = 8\sqrt{3} - \dfrac{8\sqrt{3}}{3} = \dfrac{16\sqrt{3}}{3}$.
Chọn đáp án D □

Câu 42. (THPT Hoàng Hoa Thám - Hưng Yên 2019) Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có độ dài cạnh bên bằng $8a$ và khoảng cách từ điểm A đến các đường thẳng BB', CC' lần lượt bằng $2a$ và $4a$. Biết góc giữa hai mặt phẳng $(ABB'A')$ và $(ACC'A')$ bằng 60°. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $\dfrac{16}{3}\sqrt{3}a^3$.
B. $8\sqrt{3}a^3$.
C. $24\sqrt{3}a^3$.
D. $16\sqrt{3}a^3$.

Lời giải.

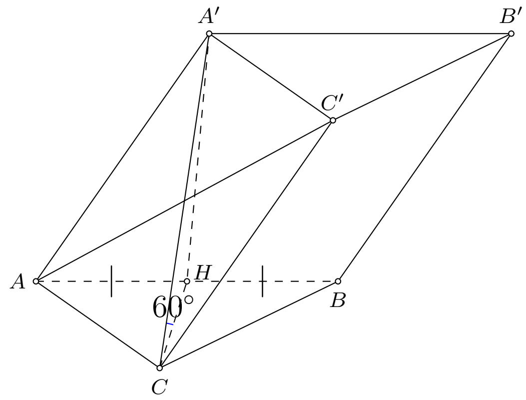


Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên BB', CC'.
Ta có $HA \perp BB', KA \perp CC' \Rightarrow A'A \perp (AHK)$ do đó $\angle AHK = 60^\circ$.
Khi đó $HK^2 = AK^2 + AH^2 - 2AK \cdot AH \cdot \cos 60^\circ = 12a^2 \Rightarrow AK^2 = HK^2 + AH^2$. Suy ra tam giác AHK vuông tại H.
Gọi H', K' lần lượt là hình chiếu vuông góc của A' trên BB', CC'. Ta có $V_{A.BCKH} = V_{A.B'C'K'H'}$.
Khi đó $V_{ABC.A'B'C'} = V_{AHK \cdot A'H'K'} = AA' \cdot S_{AHK} = 16\sqrt{3}a^3$.
Chọn đáp án D □

Câu 43. (Chuyên - KHTN - Hà Nội - 2019) Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, hình chiếu vuông góc của A' trên (ABC) là trung điểm cạnh AB, góc giữa đường thẳng $A'C$ và mặt phẳng đáy bằng 60°. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

A. $\dfrac{\sqrt{2}a^3}{4}$.
B. $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{4}$.
C. $\dfrac{3\sqrt{3}a^3}{8}$.
D. $\dfrac{3\sqrt{3}a^3}{4}$.

Lời giải.



Gọi H là hình chiếu vuông góc của A' trên mặt phẳng (ABC).

Ta có: $A'H \perp (ABC) \Rightarrow HC$ là hình chiếu vuông góc của $A'C$ lên mặt phẳng (ABC)

$\Rightarrow \widehat{(A'C,(ABC))} = \widehat{(A'C,HC)} = \widehat{A'CH} = 60°$.

$CH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Xét tam giác vuông $A'HC$, ta có: $A'H = CH \cdot \tan 60° = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{3} = \dfrac{3a}{2}$, $S_{ABC} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

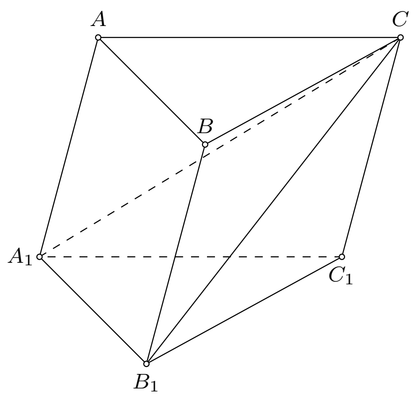
Vậy thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là $V_{ABC.A'B'C'} = S_{ABC} \cdot A'H = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \dfrac{3a}{2} = \dfrac{3\sqrt{3}a^3}{8}$.

Chọn đáp án C □

Câu 44. (Hội 8 trường chuyên ĐBSH - 2019) Cho lăng trụ $ABC.A_1B_1C_1$ có diện tích mặt bên (ABB_1A_1) bằng 4, khoảng cách giữa cạnh CC_1 đến mặt phẳng (ABB_1A_1) bằng 6. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A_1B_1C_1$.

A 12. B 18. C 24. D 9.

Lời giải.



Ta có: $V_{C.ABB_1A_1} = \dfrac{1}{3}\mathrm{d}(C,(ABB_1A_1)) \cdot S_{ABB_1A_1} = \dfrac{1}{3} \cdot 4 \cdot 6 = 8$ (đvtt).

$V_{C.ABB_1A_1} = V_{ABC.A_1B_1C_1} - V_{C.C_1B_1A_1} = V_{ABC.A_1B_1C_1} - \dfrac{1}{3}V_{ABC.A_1B_1C_1} = \dfrac{2}{3}V_{ABC.A_1B_1C_1}$

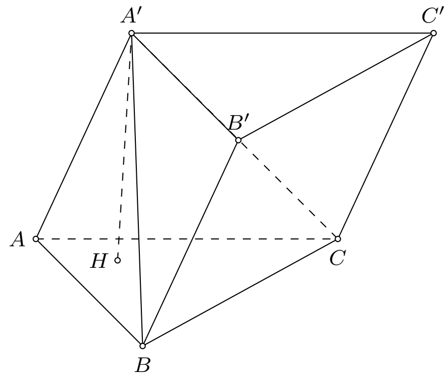
$\Rightarrow V_{ABC.A_1B_1C_1} = \dfrac{3}{2} \cdot V_{C.ABB_1A_1} = \dfrac{3}{2} \cdot 8 = 12$ (đvtt).

Chọn đáp án A □

Câu 45. (chuyên Hùng Vương Gia Lai 2019) Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$, tam giác $A'BC$ có diện tích bằng 1 và khoảng cách từ A đến mặt phẳng $(A'BC)$ bằng 2. Thể tích khối lăng trụ đã cho bằng

(A) 6. (B) 3. (C) 2. (D) 1.

Lời giải.



Gọi H là hình chiếu vuông góc của A' trên mp (ABC) suy ra $A'H$ là chiều cao của lăng trụ.

Xét khối chóp $A.A'BC$ có diện tích đáy $B = S_{A'BC} = 1$, chiều cao $h = \mathrm{d}\left(A, (A'BC)\right) = 2$ suy ra thể.

tích của khối chóp $A.A'BC$ là $V_{A.A'BC} = \dfrac{1}{3}Bh = \dfrac{1}{3} \cdot 1 \cdot 2 = \dfrac{2}{3}$.

Mặt khác $\begin{cases} V_{A.A'BC} = V_{A' \cdot ABC} = \dfrac{1}{3}S_{ABC} \cdot A'H = \dfrac{2}{3} \\ V_{ABC.A'B'C'} = S_{ABC} \cdot A'H \end{cases} \Rightarrow V_{ABC.A'B'C'} = 3V_{A.A'BC} = 3 \cdot \dfrac{2}{3} = 2.$

* Cách khác.

Ta thấy lăng trụ $ABC.A'B'C'$ được chia thành ba khối chóp có thể thích bằng nhau là

$A' \cdot ABC, A' \cdot BCB', A' \cdot B'C'C$.

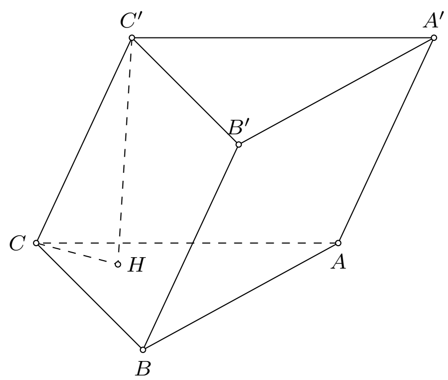
Mà $V_{A' \cdot ABC} = V_{A.A'BC} = \dfrac{1}{3}Bh = \dfrac{1}{3} \cdot 1 \cdot 2 = \dfrac{2}{3}$ suy ra $V_{ABC.A'B'C'} = 3V_{A.A'BC} = 3 \cdot \dfrac{2}{3} = 2$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 46. (Đại học Hồng Đức –Thanh Hóa – 2019) Một khối lăng trụ tam giác có đáy là tam giác đều cạnh 3, cạnh bên bằng $2\sqrt{3}$ và tạo với mặt phẳng đáy một góc 60°. Khi đó thể tích khối lăng trụ là

(A) $\dfrac{27}{4}$. (B) $\dfrac{9\sqrt{3}}{4}$. (C) $\dfrac{27\sqrt{3}}{4}$. (D) $\dfrac{9}{4}$.

Lời giải.



Gọi H là hình chiếu vuông góc của C' xuống $mp(ABC)$, khi đó góc hợp bởi CC' và $mp(ABC)$ là $\widehat{C'CH}$. Theo đề bài: $\widehat{C'CH} = 60^\circ \Rightarrow C'H = C'C \cdot \sin 60^\circ = 2\sqrt{3} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 3$.

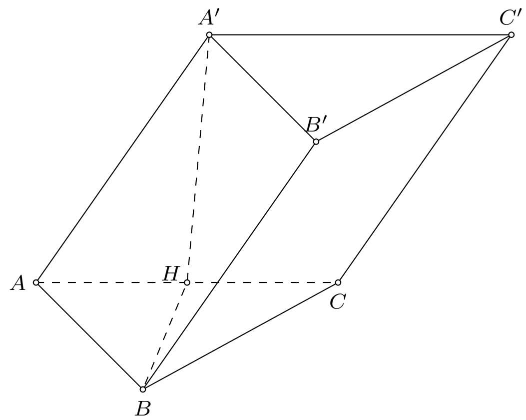
Lại có $\triangle ABC$ đều cạnh bằng 3 nên $S_{ABC} = \dfrac{\sqrt{3}}{4} \cdot 3^2 = \dfrac{9\sqrt{3}}{4}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 47. Do đó $V_{ABC.A'B'C'} = S_{ABC} \cdot C'H = \dfrac{9\sqrt{3}}{4} \cdot 3 = \dfrac{27\sqrt{3}}{4}$. (Sở Hà Nội 2019) Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, đường cao BH. Biết $A'H \perp (ABC)$ và $AB = 1, AC = 2, AA' = \sqrt{2}$. Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

(A) $\dfrac{\sqrt{21}}{12}$. (B) $\dfrac{\sqrt{7}}{4}$. (C) $\dfrac{\sqrt{21}}{4}$. (D) $\dfrac{3\sqrt{7}}{4}$.

Lời giải.



Tam giác ABC vuông tại B có $AB = 1; AC = 2$ nên $\mathrm{d}(A;(P)) = \dfrac{\sqrt{6}}{2}; \mathrm{d}(A;(Q)) = \sqrt{6} \Rightarrow \mathrm{d}(A;(Q)) = \mathrm{d}(A;(P)) + \mathrm{d}((Q);(P))$.

Độ dài của đường cao BH: $BH = \dfrac{AB \cdot BC}{AC} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Suy ra $AH = \dfrac{\sqrt{3}}{2} : \sqrt{3} = \dfrac{1}{2}$.

Khi đó độ dài đường cao $A'H$ của hình lăng trụ bằng $A'H = \sqrt{AA'^2 - AH^2} = \sqrt{2 - \dfrac{1}{4}} = \dfrac{\sqrt{7}}{2}$.

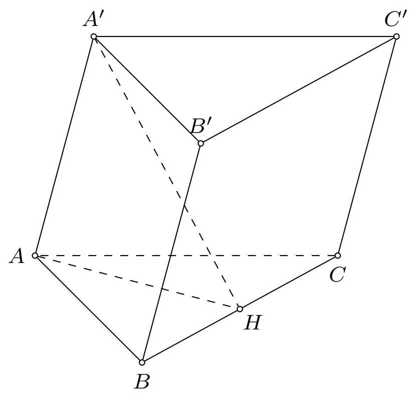
Thể tích khối lăng trụ đã cho bằng $V = \dfrac{1}{2} AB \cdot BC \cdot A'H = \dfrac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sqrt{3} \dfrac{\sqrt{7}}{2} = \dfrac{\sqrt{21}}{4}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 48. (THPT Lương Thế Vinh Hà Nội 2019) Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a, góc giữa cạnh bên và mặt phẳng đáy bằng 30°. Hình chiếu của A' xuống (ABC) là trung điểm BC. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

(A) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{8}$. (B) $\dfrac{a^3}{8}$. (C) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{24}$. (D) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải.



Gọi H là trung điểm BC suy ra $A'H \perp (ABC)$.

Ta có $(A'A, (ABC)) = (A'A, AH) = \widehat{A'AH} = 30^\circ$.

Ta có $AH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Ta có $A'H = AH \cdot \tan 30^\circ = \dfrac{a}{2}$ và $S_{ABC} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

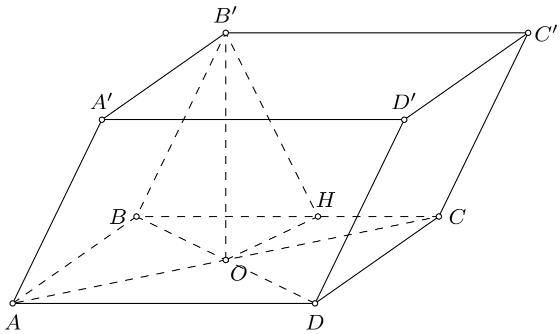
Vậy $V = A'H \cdot S_{ABC} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{8}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 49. (THPT Việt Đức Hà Nội 2019) Cho hình lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a, $\widehat{ABC} = 60^\circ$. Chân đường cao hạ từ B' trùng với tâm O của đáy $ABCD$; góc giữa mặt phẳng $(BB'C'C)$ với đáy bằng 60°. Thể tích lăng trụ bằng

(A) $\dfrac{3a^3\sqrt{3}}{8}$. (B) $\dfrac{2a^3\sqrt{3}}{9}$. (C) $\dfrac{3a^3\sqrt{2}}{8}$. (D) $\dfrac{3a^3}{4}$.

Lời giải.



$ABCD$ là hình thoi nên $AB = BC$. Lại có $\widehat{ABC} = 60^\circ$ nên $\triangle ABC$ là tam giác đều. $OH \perp BC$.

Góc giữa mặt phẳng $(BB'C'C)$ với đáy khi đó là $\widehat{B'HO} = 60^\circ$.

Ta có $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OB^2} + \dfrac{1}{OC^2} = \dfrac{1}{\frac{3a^2}{4}} + \dfrac{1}{\frac{a^2}{4}} = \dfrac{4}{3a^2} + \dfrac{4}{a^2} = \dfrac{16}{3a^2}$. $\Rightarrow OH = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

Theo giả thiết, $B'O$ là đường cao lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$.

$B'O = OH \cdot tan\widehat{B'HO} = \dfrac{a\sqrt{3}}{4} \tan 60^\circ = \dfrac{3a}{4}$.

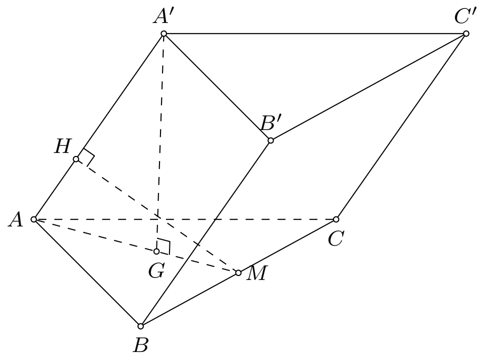
$V_{ABCD.A'B'C'D'} = S_{day} \cdot h = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{3a}{4} = \dfrac{3a^3\sqrt{3}}{8}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 50. (THPT Lê Quy Đôn Điện Biên 2019) Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a, hình chiếu vuông góc của điểm lên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm tam giác ABC. Biết khoảng cách giữa hai đường thẳng và BC bằng $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$. Tính theo a thể tích của khối lăng trụ đã cho.

(A) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$. (B) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{24}$. (C) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$. (D) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

Lời giải.



Ta có $\begin{cases} BC \perp AM \\ BC \perp A'G \end{cases} \Rightarrow BC \perp AA'$.

Kẻ $MH \perp AA'$ tại H, suy ra MH là đoạn vuông góc chung của giữa hai đường thẳng và BC.

Tam giác MHA vuông tại H có $AH = \sqrt{AM^2 - AH^2} = \dfrac{3}{4}a$.

Tam giác $A'GA$ đồng dạng tam giác MHA nên $\dfrac{A'G}{MH} = \dfrac{GA}{HA} \Rightarrow A'G = \dfrac{MH \cdot GA}{HA} = \dfrac{a}{3}$.

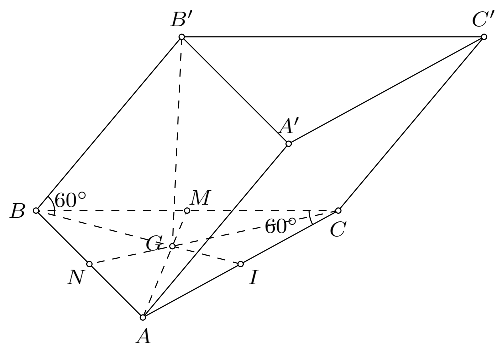
Thể tích khối lăng trụ là $V = S_{ABC} \cdot A'G = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

Chọn đáp án D □

Câu 51. (Toán Học Tuổi Trẻ 2019) Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có $AA' = 2a$, tam giác ABC vuông tại C và $\widehat{BAC} = 60^\circ$, góc giữa cạnh bên BB' và mặt đáy (ABC) bằng 60°. Hình chiếu vuông góc của B' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm của tam giác ABC. Thể tích của khối tứ diện $A' \cdot ABC$ theo a bằng

Ⓐ $\dfrac{9a^3}{208}$. Ⓑ $\dfrac{3a^3}{26}$. Ⓒ $\dfrac{9a^3}{26}$. Ⓓ $\dfrac{27a^3}{208}$.

Lời giải.



Ta có

$B'G = BB' \sin 60^\circ = 2a \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$

$BG = BB' \cos 60^\circ = 2a \cdot \dfrac{1}{2} = a \Rightarrow BI = \dfrac{3}{2}BG = \dfrac{3a}{2}$.

Đặt $AC = 2x (x > 0) \Rightarrow CI = x; BC = AC \cdot \tan 60^\circ = 2x\sqrt{3}$.

Khi đó

$x^2 + (2x\sqrt{3})^2 = \left(\dfrac{3a}{2}\right)^2 \Leftrightarrow x = \dfrac{3a\sqrt{13}}{26} \Rightarrow S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{2}AC \cdot BC = \dfrac{1}{2} \cdot 2 \cdot \dfrac{3a\sqrt{13}}{26} \cdot 2 \cdot \dfrac{3a\sqrt{13}}{26} \cdot \sqrt{3} = \dfrac{9a^2\sqrt{3}}{26}$.

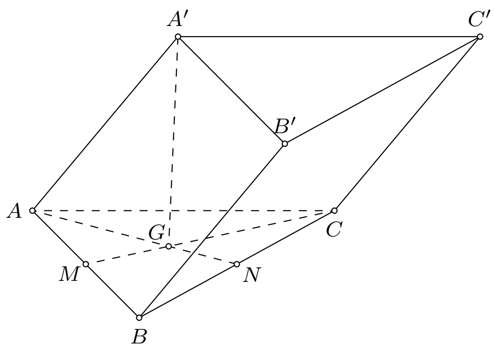
Vậy $V_{A' \cdot ABC} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{9a^2\sqrt{3}}{26} \cdot a\sqrt{3} = \dfrac{9a^3}{26}$.

Chọn đáp án C □

Câu 52. (THPT Thiệu Hóa – Thanh Hóa 2019) Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu của điểm A' trên mặt phẳng (ABC) trùng vào trọng tâm G của tam giác ABC. Biết tam giác $A'BB'$ có diện tích bằng $\dfrac{2a^2\sqrt{3}}{3}$. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A $\dfrac{6a^3\sqrt{2}}{7}$. B $\dfrac{3a^3\sqrt{7}}{8}$. C $\dfrac{3a^3\sqrt{5}}{8}$. D $\dfrac{3a^3\sqrt{3}}{8}$.

Lời giải.



$+$ Ta có $\begin{cases} AB \perp CM \\ AB \perp A'M \end{cases} \Rightarrow AB \perp (A'CM) \Rightarrow AB \perp A'M.$

Nên $S_{\triangle A'AB} = \dfrac{1}{2}A'M \cdot AB = \dfrac{2a^2\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow A'M = \dfrac{4a\sqrt{3}}{3}$.

Do $\triangle ABC$ đều cạnh bằng a nên $GM = \dfrac{1}{3}CM = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$.

$+$ Trong $\triangle A'GM$ vuông tại G ta có $A'G = \sqrt{A'M^2 - GM^2} = \dfrac{a\sqrt{21}}{2}$.

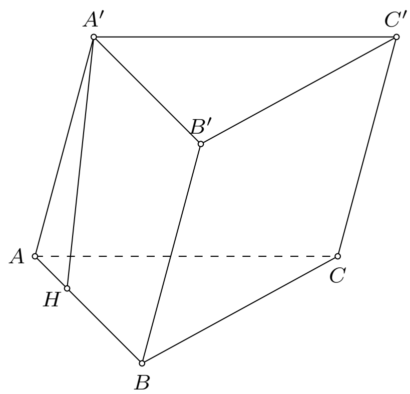
Vậy $V_{ABC.A'B'C'} = A'G \cdot \mathrm{dt}(\triangle ABC) = \dfrac{a\sqrt{21}}{2} \cdot \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{3a^3\sqrt{7}}{8}$.

Chọn đáp án B □

Câu 53. (Cụm liên trường Hải Phòng 2019) Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B và $AC = 2a$. Hình chiếu vuông góc của A' trên mặt phẳng (ABC) là trung điểm H của cạnh AB và $AA' = a\sqrt{2}$. Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

A $V = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{6}$. B $V = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{2}$. C $V = 2a^2\sqrt{2}$. D $V = a^3\sqrt{3}$.

Lời giải.

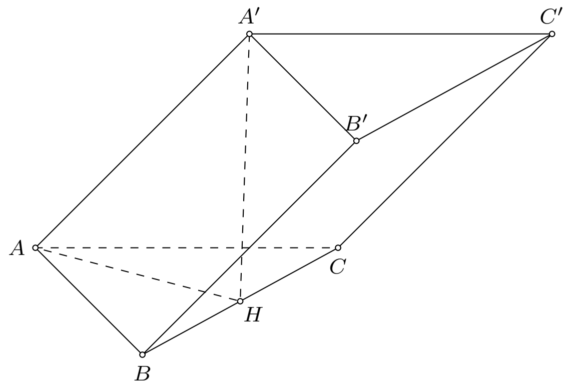


Tam giác ABC vuông cân tại B cạnh $AC = 2a$ nên suy ra $AB = a\sqrt{2}$, có diện tích đáy.
$S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{2}AB^2 = \dfrac{1}{2}(a\sqrt{2})^2 = a^2$.
H là hình chiếu vuông góc của A' trên mặt phẳng (ABC) nên $A'H$ là chiều cao của khối lăng trụ.
Thể tích là $V = A'H \cdot S_{\triangle ABC}$.
H là trung điểm của cạnh $AB \Rightarrow AH = \dfrac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow A'H = \sqrt{AA'^2 - AH^2} = \sqrt{2a^2 - \dfrac{2a^2}{4}} = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.
Suy ra $V = A'H \cdot S_{\triangle ABC} = \dfrac{a\sqrt{6}}{2} \cdot a^2 = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{2}$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 54. (THPT Trần Phú 2019) Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh $2a$, cạnh bên $AA' = 2a$. Hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng (ABC) là trung điểm BC. Thể tích của khối lăng trụ đã cho là

(A) $a^3\sqrt{3}$. (B) $2a^3\sqrt{3}$. (C) $3a^3\sqrt{2}$. (D) $2a^3\sqrt{6}$.

Lời giải.

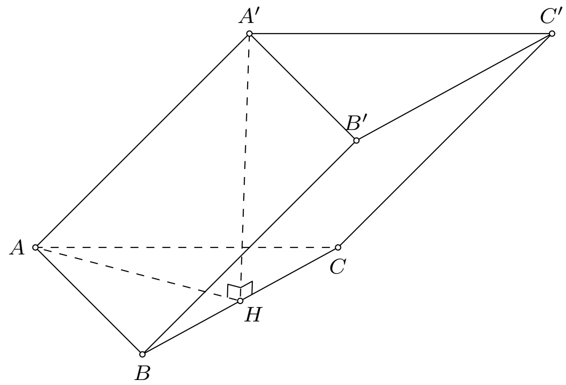


Gọi H là hình chiếu của A' trên mặt phẳng (ABC), suy ra H là trung điểm của BC.
Tam giác ABC đều cạnh $2a$, suy ra $AH = a\sqrt{3}$.
Đường cao hình lăng trụ: $h = A'H = \sqrt{4a^2 - 3a^2} = a$.
Vậy thể tích lăng trụ: $V = S_{\triangle ABC} \cdot h = \dfrac{1}{2}AH \cdot BC \cdot A'H = \dfrac{1}{2}a\sqrt{3} \cdot 2a \cdot a = a^3\sqrt{3}$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 55. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, $AA' = \dfrac{3a}{2}$. Biết rằng hình chiếu vuông góc của điểm A' lên mặt phẳng (ABC) là trung điểm của cạnh BC. Tính thể tích V của khối lăng trụ đó theo a.

(A) $V = a^3\sqrt{\dfrac{3}{2}}$. (B) $V = \dfrac{2a^3}{3}$. (C) $V = \dfrac{3a^3}{4\sqrt{2}}$. (D) $V = a^3$.

Lời giải.



Gọi M là trung điểm của BC.

Theo bài ra ABC là tam giác đều cạnh a nên: $AM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$; $S_{ABC} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Hình chiếu vuông góc của điểm A' lên mặt phẳng (ABC) là trung điểm M của cạnh BC nên có: $A'M \perp (ABC)$; $A'M \perp BC$.

Xét tam giác $A'MA$ vuông tại M: $A'M = \sqrt{AA'^2 - AM^2} = \sqrt{\left(\dfrac{3a}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

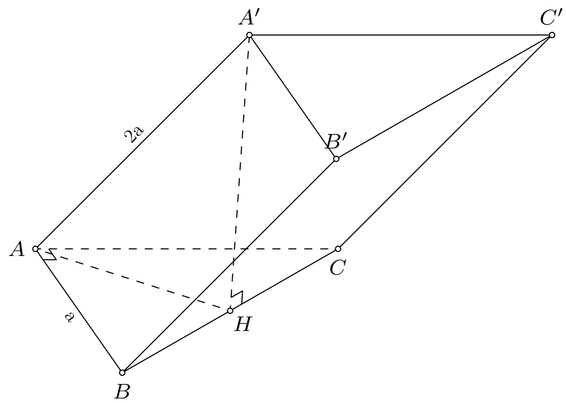
Thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là $V_{ABC.A'B'C'} = A'M \cdot S_{ABC} = \dfrac{a\sqrt{6}}{2} \cdot \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{3a^3}{4\sqrt{2}}$.

Chọn đáp án C □

Câu 56. (Ngô Quyền - Hải Phòng 2019) Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông cân đỉnh A, $AB = a$, $AA' = 2a$, hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng (ABC) là trung điểm H của cạnh BC. Thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

A. $\dfrac{a^3\sqrt{14}}{2}$. B. $\dfrac{a^3\sqrt{14}}{4}$. C. $\dfrac{a^3\sqrt{7}}{4}$. D. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.



Tam giác ABC vuông cân tại $A \Rightarrow BC = a\sqrt{2}$; $AH = \dfrac{1}{2}BC = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

$A'H \perp (ABC) \Rightarrow A'H \perp AH$.

Trong tam giác $AA'H$ vuông tại H ta có: $A'H = \sqrt{AA'^2 - AH^2} = \sqrt{4a^2 - \dfrac{2a^2}{4}} = a\dfrac{\sqrt{14}}{2}$.

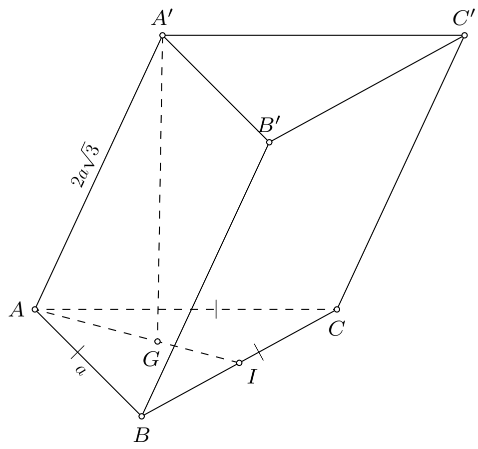
Vậy $V_{ABC.A'B'C'} = A'H \cdot S_{ABC} = a\dfrac{\sqrt{14}}{2} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot a \cdot a = \dfrac{a^3\sqrt{14}}{4}$.

Chọn đáp án B □

Câu 57. (SGD Hưng Yên) Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, độ dài cạnh bên bằng $\dfrac{2a}{3}$, hình chiếu của đỉnh A' trên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm của tam giác ABC. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

Ⓐ $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{36}$. Ⓑ $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$. Ⓒ $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$. Ⓓ $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{24}$.

Lời giải.



Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC. Ta có:

$AG = \dfrac{2}{3}AI = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$; $A'G^2 = A'A^2 - AG^2 = \left(\dfrac{2a}{3}\right)^2 - \left(\dfrac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \dfrac{a^2}{9} \Rightarrow A'G = \dfrac{a}{3}$.

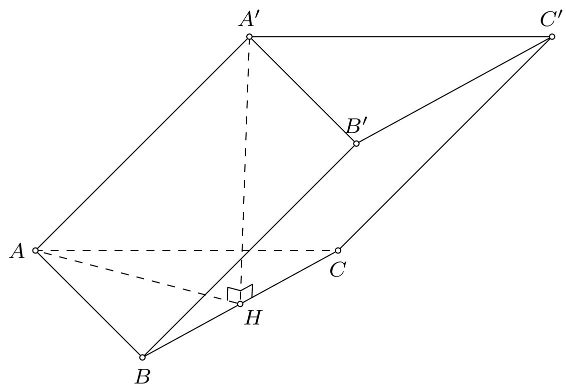
$V = B \cdot h = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \dfrac{a}{3} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 58. (SGD Bắc Ninh 2019) Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, $AA' = \dfrac{3a}{2}$. Biết rằng hình chiếu vuông góc của A' lên (ABC) là trung điểm BC. Thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là

Ⓐ $\dfrac{a^3 \cdot \sqrt{2}}{8}$. Ⓑ $\dfrac{3a^3 \cdot \sqrt{2}}{8}$. Ⓒ $\dfrac{a^3 \cdot \sqrt{6}}{2}$. Ⓓ $\dfrac{2a^3}{3}$.

Lời giải.



Gọi H là trung điểm BC, vì tam giác ABC đều nên ta có $AH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow S_{\triangle ABC} = \dfrac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$.

Theo đề: $A'H \perp (ABC) \Rightarrow A'H \perp AH$. Trong tam giác vuông $A'AH$ có.

$A'H = \sqrt{A'A^2 - AH^2} = \sqrt{\dfrac{9a^2}{4} - \dfrac{3a^2}{4}} = \dfrac{a\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$.

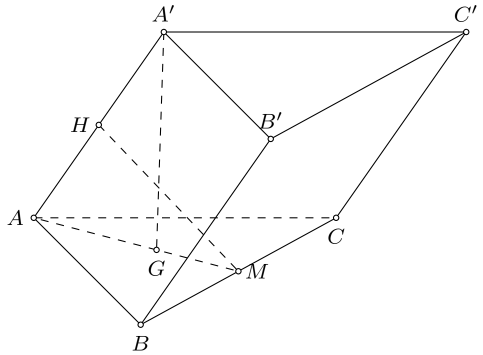
Suy ra $V_{ABC.A'B'C'} = B \cdot h = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \dfrac{3a^3 \cdot \sqrt{2}}{8}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 59. (THPT Cẩm Bình Hà Tỉnh 2019) Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh bằng a, hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm G của tam giác ABC. Biết khoảng cách giữa BC và AA' bằng $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$. Thể tích khối chóp $B'\cdot ABC$ bằng

(A) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{36}$.	(B) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{9}$.	(C) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{18}$.	(D) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

Lời giải.



Gọi M là trung điểm của BC, $MH \perp AA'$ tại H.

Ta có $BC \perp (AA'M) \Rightarrow BC \perp HM$. Do đó $HM = \mathrm{d}(AA', BC)$.

$AM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}, AG = \dfrac{a\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \sin\widehat{HAM} = \dfrac{HM}{AM} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \widehat{HAM} = 30^\circ$.

$A'G = AG\cdot\tan 30^\circ = \dfrac{a}{3}, S_{ABC} = \dfrac{1}{2}AM\cdot BC = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

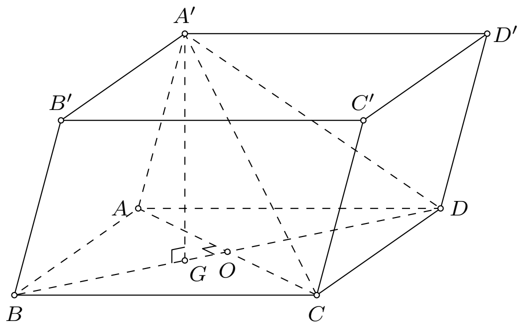
$V_{B'\cdot ABC} = \dfrac{1}{3}A'G\cdot S_{ABC} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{36}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 60. (TT Diệu Hiền - Cần Thơ - 2018) Cho lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ACBD$ là hình thoi cạnh a, biết $A'\cdot ABC$ là hình chóp đều và $A'D$ hợp với mặt đáy một góc 45°. Thể tích khối lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ là

(A) a^3.	(B) $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{12}$.	(C) $a^3\sqrt{3}$.	(D) $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{3}$.

Lời giải.



Ta có $(\widehat{A'D, (ABCD)}) = \widehat{A'DG} = 45^\circ$.

Ta giác ABC đều cạnh a nên $BG = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$, $DB = a\sqrt{3}$, $DG = 2BG = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$.

Tam giác $A'DG$ vuông cân tại G nên $A'G = DG = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$.

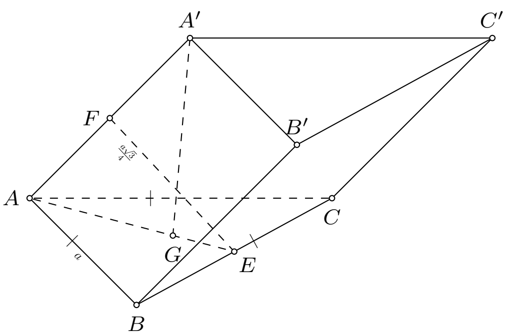
$V_{ABCD.A'B'C'D'} = S_{ABCD} \cdot AG = \dfrac{1}{2}a \cdot a\sqrt{3} \cdot \dfrac{2a\sqrt{3}}{3} = a^3$.

Chọn đáp án A □

Câu 61. (Chuyên Long An - 2018) Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh $m \in [-5; 2)$. Hình chiếu vuông góc của điểm A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm tam giác ABC. Biết khoảng cách giữa hai đường AA' và BC bằng $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$. Tính thể tích V của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$. B $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{24}$. C $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$. D $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải.



Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. Vì $A'G \perp (ABC)$ và tam giác ABC đều nên $A'ABC$ là hình chóp đều. Kẻ $EF \perp AA'$ và $BC \perp (AA'E)$ nên $\mathrm{d}(AA', BC) = EF = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$. Đặt $A'G = h$.

Ta có $A'A = \sqrt{h^2 + \left(\dfrac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2}$.

Tam giác $A'AG$ đồng dạng với tam giác EAF nên.

$\dfrac{A'A}{EA} = \dfrac{AG}{FA} = \dfrac{A'G}{FE} \Rightarrow A'G \cdot EA = A'A \cdot FE \Leftrightarrow h \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \sqrt{h^2 + \left(\dfrac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{4} \Leftrightarrow h = \dfrac{a}{3}$.

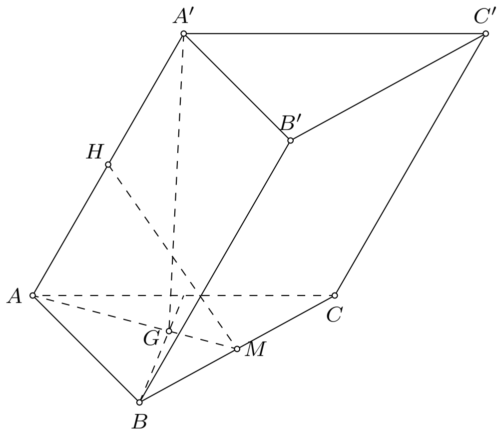
Thể tích V của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là $V = AG \cdot S_{ABC} = \dfrac{a}{3} \cdot \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

Chọn đáp án C □

Câu 62. (Lê Quý Đôn - Quảng Trị - 2018) Cho hình lăng trụ C có đáy là tam giác đều cạnh H. Hình chiếu vuông góc của điểm D lên mặt phẳng M trùng với trọng tâm tam giác ABC. Biết khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và BC bằng $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$. Tính thể tích V của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$. B $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$. C $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{24}$. D $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

Lời giải.



Gọi M là trung điểm của BC. Vẽ $MH \perp AA'(H \in BC)$.

Ta có $AM \perp BC$, $A'G \perp BC \Rightarrow BC \perp (A'AG) \Rightarrow BC \perp MH \Rightarrow \mathrm{d}(AA', BC) = MH$.

$AH = \sqrt{AM^2 - MH^2} = \sqrt{\dfrac{3a^2}{4} - \dfrac{3a^2}{16}} = \dfrac{3a}{4}$.

Ta có $\dfrac{MH}{AH} = \dfrac{A'G}{AG} = \tan\widehat{GAH} \Rightarrow A'G = \dfrac{MH \cdot AG}{AH} = \dfrac{\dfrac{a\sqrt{3}}{4} \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{3}}{\dfrac{3a}{4}} = \dfrac{a}{3}$.

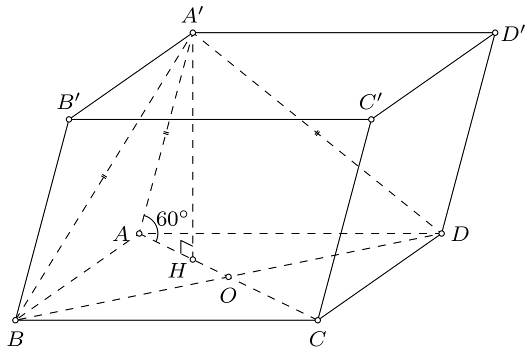
Vậy $V = S_{ABC} \cdot A'G = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \dfrac{a}{3} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

Chọn đáp án D □

Câu 63. (THPT Hà Huy Tập - Hà Tĩnh - 2018) Cho lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a, tâm O và $\widehat{ABC} = 120°$. Góc giữa cạnh bên AA' và mặt đáy bằng $60°$. Đỉnh A' cách đều các điểm A, B, D. Tính theo a thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

A $V = \dfrac{3a^3}{2}$. B $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$. C $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$. D $V = a^3\sqrt{3}$.

Lời giải.



Ta có tam giác ABD cân tại A và $\widehat{BAD} = 60°$ nên ABD là tam giác đều.

Gọi H là trọng tâm tam giác ABD. Vì A' cách đều A, B, D nên $A'H$ là trục đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD. Do đó $A'H \perp (ABD)$.

Suy ra góc giữa $A'A$ và đáy $(ABCD)$ là góc $\widehat{A'AH} = 60°$.

Ta có $AH = \dfrac{2}{3}AO = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Do đó $A'H = AH \cdot \tan 60° = \dfrac{3a}{2}$.

Ngoài ra $S_{ABCD} = 2S_{ABD} = 2 \cdot \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

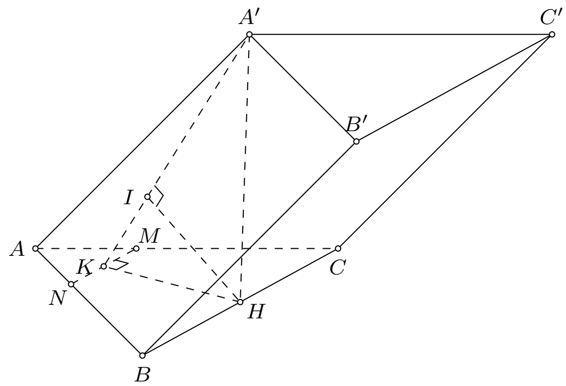
Thể tích khối lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ là $V = S_{ABCD} \cdot A'H = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{3a}{2} = \dfrac{3a^3\sqrt{3}}{8}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 64. (THPT Trần Quốc Tuấn - 2018) Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy $S.ABCD$ là tam giác vuông tại A, $AB = a$, $AC = a\sqrt{3}$. Hình chiếu vuông góc của đỉnh A' lên (ABC) trùng với tâm của đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC. Trên cạnh AC lấy điểm M sao cho $CM = 2MA$. Biết khoảng cách giữa hai đường thẳng $A'M$ và BC bằng $\dfrac{a}{2}$. Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

(A) $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$. (B) $V = a^3$. (C) $V = \dfrac{3a^3}{2}$. (D) $V = \dfrac{2a^3\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải.



Kẻ $MN \parallel BC$, $N \in AB$. $HK \perp MN$, $HI \perp A'K$.

$\mathrm{d}(A'M; BC) = \mathrm{d}(BC; (A'MN)) = \mathrm{d}(H; (A'MN)) = HI \Rightarrow HI = \dfrac{a}{2}$.

Kẻ $AT \parallel HK$, $AT \cap MN = P \Rightarrow HK = PT = \dfrac{2}{3}AT$.

Tam giác ABC vuông tại $A \Rightarrow \dfrac{1}{AT^2} = \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{AC^2} = \dfrac{4}{3a^2} \Rightarrow HK = \dfrac{2}{3}AT = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$.

Tam giác $A'HK$ vuông tại $H \Rightarrow \dfrac{1}{A'H^2} = \dfrac{1}{HI^2} - \dfrac{1}{HK^2} = \dfrac{4}{a^2} - \dfrac{3}{a^2} = \dfrac{1}{a^2} \Rightarrow A'H = a$.

Vậy thể tích khối lăng trụ đã cho là $V = A'H \cdot S_{ABC} = a \cdot \dfrac{1}{2} \cdot a \cdot a\sqrt{3} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$.

Chọn đáp án (A) □

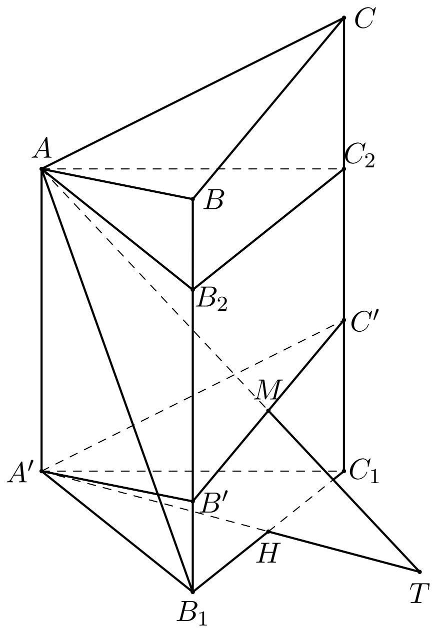
MỘT SỐ BÀI TOÁN KHÓ VỀ THỂ TÍCH

MỨC ĐỘ 1. MỨC ĐỘ 9,10 ĐIỂM

Câu 1 (trích dẫn). (Mã 101 2018) Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$, khoảng cách từ C đến đường thẳng BB' bằng 2, khoảng cách từ A đến các đường thẳng BB' và CC' lần lượt bằng 1 và $\sqrt{3}$, hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng $(A'B'C')$ là trung điểm M của $B'C'$ và $A'M = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$. Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

(A) 2. (B) 1. (C) $\sqrt{3}$. (D) $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải.



Cắt lăng trụ bởi một mặt phẳng qua A' và vuông góc với AA' ta được thiết diện là tam giác $A'B_1C_1$ có các cạnh $A'B_1 = 1$; $A'C_1 = \sqrt{3}$; $B_1C_1 = 2$.

Suy ra tam giác $A'B_1C_1$ vuông tại A' và trung tuyến $A'H$ của tam giác đó bằng 1.

Gọi giao điểm của AM và $A'H$ là T.

Ta có $A'M = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$; $A'H = 1 \Rightarrow MH = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Suy ra $\widehat{MA'H} = 30^\circ$.

Do đó $\widehat{MA'A} = 60^\circ \Rightarrow AA' = \dfrac{A'M}{\cos \widehat{MA'A}} = \dfrac{4}{\sqrt{3}}$.

Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng thể tích khối lăng trụ $A'B_1C_1 \cdot AB_2C_2$ và bằng

$$V = AA' \cdot S_{A'B_1C_1} = \frac{4}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2.$$

□

Câu 2. (Mã 103 -2018) Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$, khoảng cách từ C đến đường thẳng BB' bằng 2, khoảng cách từ A đến các đường thẳng BB' và CC' lần lượt bằng 1 và $\sqrt{3}$, hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng $(A'B'C')$ là trung điểm M của $B'C'$ và $A'M = 2$. Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

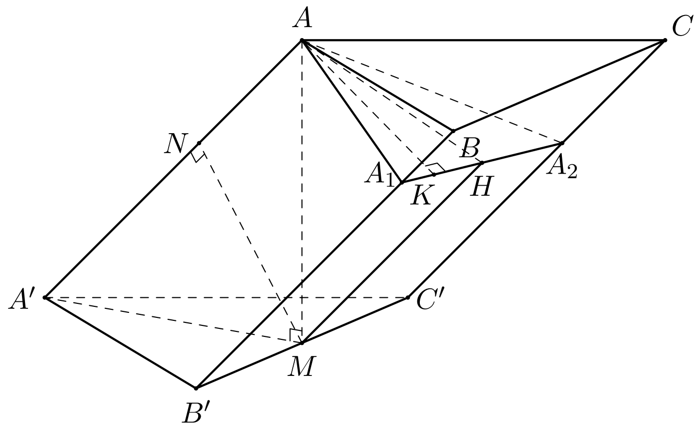
(A) $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$. (B) 1. (C) $\sqrt{3}$. (D) 2.

Lời giải.

Gọi A_1, A_2 lần lượt là hình chiếu của A trên BB', CC'. Theo đề ra $AA_1 = 1; AA_2 = \sqrt{3}; A_1A_2 = 2$.

Do $AA_1^2 + AA_2^2 = A_1A_2^2$ nên tam giác AA_1A_2 vuông tại A.

Gọi H là trung điểm A_1A_2 thì $AH = \dfrac{A_1A_2}{2} = 1$.



Lại có $MH \parallel BB' \Rightarrow MH \perp (AA_1A_2) \Rightarrow MH \perp AH$ suy ra $MH = \sqrt{AM^2 - AH^2} = \sqrt{3}$.

nên $\cos((ABC), (AA_1A_2)) = \cos(MH, AM) = \cos HMA = \dfrac{MH}{AM} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Suy ra $S_{ABC} = \dfrac{S_{AA_1A_2}}{\cos((ABC), (AA_1A_2))} = 1$. Thể tích lăng trụ là $V = AM \cdot S_{ABC} = 2$.

Nhận xét. Ý tưởng câu này là dùng diện tích hình chiếu $S' = S\cos\alpha$. □

Câu 3. (Mã 102 2018) Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$, khoảng cách từ C đến BB' là $\sqrt{5}$, khoảng cách từ A đến BB' và CC' lần lượt là $1; 2$. Hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng $A'B'C'$ là trung điểm M của $B'C'$, $A'M = \dfrac{\sqrt{15}}{3}$. Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

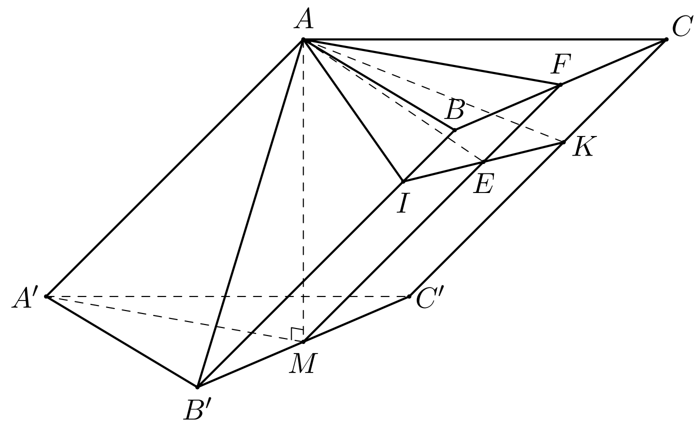
Ⓐ $\dfrac{2\sqrt{5}}{3}$. Ⓑ $\sqrt{5}$. Ⓒ $\dfrac{2\sqrt{15}}{3}$. Ⓓ $\dfrac{\sqrt{15}}{3}$.

Lời giải.

Kẻ $AI \perp BB'$, $AK \perp CC'$ (hình vẽ).

Khoảng cách từ A đến BB' và CC' lần lượt là $1; 2 \Rightarrow AI = 1$, $AK = 2$.

Gọi F là trung điểm của BC thì $A'M = \dfrac{\sqrt{15}}{3} \Rightarrow AF = \dfrac{\sqrt{15}}{3}$.



Ta có $\begin{cases} AI \perp BB' \\ BB' \perp AK \end{cases} \Rightarrow BB' \perp (AIK) \Rightarrow BB' \perp IK$.

Vì $CC' \parallel BB' \Rightarrow \mathrm{d}(C, BB') = \mathrm{d}(K, BB') = IK = \sqrt{5} \Rightarrow \triangle AIK$ vuông tại A.

Gọi E là trung điểm của $IK \Rightarrow EF \parallel BB' \Rightarrow EF \perp (AIK) \Rightarrow EF \perp AE$.

Lại có $AM \perp (ABC)$. Do đó góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (AIK) là góc giữa EF và AM bằng góc $\widehat{AME} = \widehat{FAE}$. Ta có $\cos\widehat{FAE} = \dfrac{AE}{AF} = \dfrac{\frac{\sqrt{5}}{2}}{\frac{\sqrt{15}}{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \widehat{FAE} = 30^\circ$.

Hình chiếu vuông góc của tam giác ABC lên mặt phẳng (AIK) là $\triangle AIK$ nên ta có

$$S_{AIK} = S_{ABC}\cos\widehat{EAF} \Rightarrow 1 = S_{ABC}\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \frac{2}{\sqrt{3}} = S_{ABC}.$$

Xét $\triangle AMF$ vuông tại A: $\tan \widehat{AMF} = \dfrac{AF}{AM} \Rightarrow AM = \dfrac{\dfrac{\sqrt{15}}{3}}{\dfrac{\sqrt{3}}{3}} \Rightarrow AM = \sqrt{5}$.

Vậy $V_{ABC.A'B'C'} = \sqrt{5} \cdot \dfrac{2}{\sqrt{3}} = \dfrac{2\sqrt{15}}{3}$. □

Câu 4. (Mã 104 2018) Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Khoảng cách từ C đến đường thẳng BB' bằng $\sqrt{5}$, khoảng cách từ A đến các đường thẳng BB' và CC' lần lượt bằng 1 và 2, hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng $(A'B'C')$ là trung điểm M của $B'C'$ và $A'M = \sqrt{5}$. Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

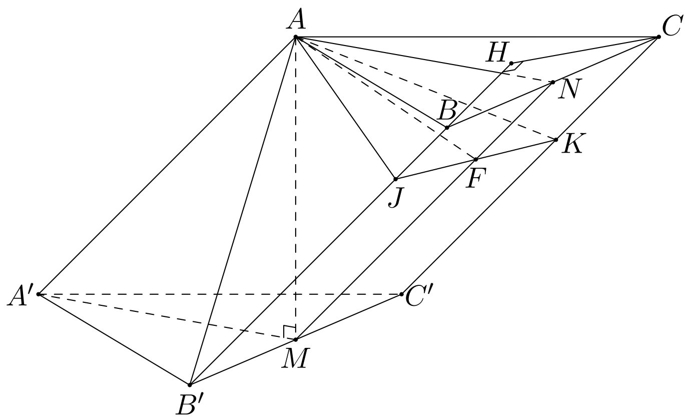
Ⓐ $\sqrt{5}$. Ⓑ $\dfrac{\sqrt{15}}{3}$. Ⓒ $\dfrac{2\sqrt{5}}{3}$. Ⓓ $\dfrac{2\sqrt{15}}{3}$.

Lời giải.

Gọi J, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên BB' và CC', H là hình chiếu vuông góc của C lên BB'.

Ta có $AJ \perp BB'(1)$.

$AK \perp CC' \Rightarrow AK \perp BB'(2)$.



Từ (1) và (2) suy ra $BB' \perp (AJK) \Rightarrow BB' \perp JK \Rightarrow JK \,/\!/\, CH \Rightarrow JK = CH = \sqrt{5}$.

Xét $\triangle AJK$ có $JK^2 = AJ^2 + AK^2 = 5$ suy ra $\triangle AJK$ vuông tại A.

Gọi F là trung điểm JK khi đó ta có $AF = JF = FK = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

Gọi N là trung điểm BC, xét tam giác vuông ANF ta có:

$\cos \widehat{NAF} = \dfrac{AF}{AN} = \dfrac{\dfrac{\sqrt{5}}{2}}{\sqrt{5}} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \widehat{NAF} = 60^\circ$. ($AN = AM = \sqrt{5}$ vì $AN \,/\!/\, AM$ và $AN = AM$).

Vậy ta có

$$S_{\triangle AJK} = \frac{1}{2} AJ \cdot AK = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 = 1.$$

Suy ra

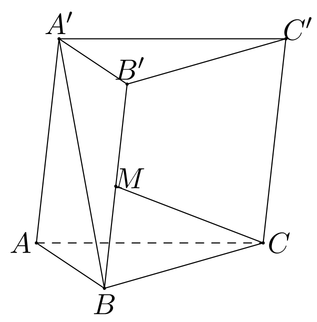
$$S_{\triangle AJK} = S_{\triangle ABC} \cdot \cos 60^\circ \Rightarrow S_{\triangle ABC} = \frac{S_{\triangle AJK}}{\cos 60^\circ} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2.$$

Xét tam giác AMA' vuông tại M ta có $\widehat{MAA'} = \widehat{AMF} = 30^\circ$ hay $AM = A'M \cdot \tan 30^\circ = \dfrac{\sqrt{15}}{3}$.

Vậy thể tích khối lăng trụ là $V = AM \cdot S_{\triangle ABC} = \dfrac{\sqrt{15}}{3} \cdot 2 = \dfrac{2\sqrt{15}}{3}$. □

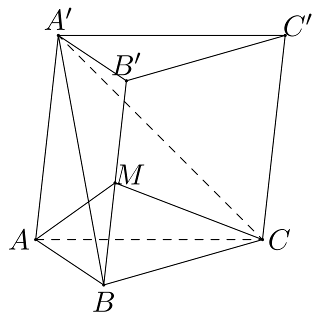
Câu 5.

(Chuyên Hưng Yên - 2020) Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông tại A, $AB = 2$, $AC = \sqrt{3}$. Góc $\widehat{CAA'} = 90^\circ$, $\widehat{BAA'} = 120^\circ$. Gọi M là trung điểm cạnh BB' (tham khảo hình vẽ). Biết CM vuông góc với $A'B$, tính thể tích khối lăng trụ đã cho.



Ⓐ $V = \dfrac{3\left(1+\sqrt{33}\right)}{8}$.
Ⓑ $V = \dfrac{1+\sqrt{33}}{8}$.
Ⓒ $V = \dfrac{3\left(1+\sqrt{33}\right)}{4}$.
Ⓓ $V = \dfrac{1+\sqrt{33}}{4}$.

Lời giải.



Do $AC \perp AB$, $AC \perp AA'$ nên $AC \perp (ABB'A')$.
Mà $A'B \subset (ABB'A')$ nên $AC \perp A'B$.
$A'B \perp AC$, $A'B \perp CM$ nên $A'B \perp (AMC) \Rightarrow A'B \perp AM$.
Đặt $AA' = x (x > 0)$. Ta có $\overrightarrow{A'B} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AA'}$ và
$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AA'}$.

Suy ra

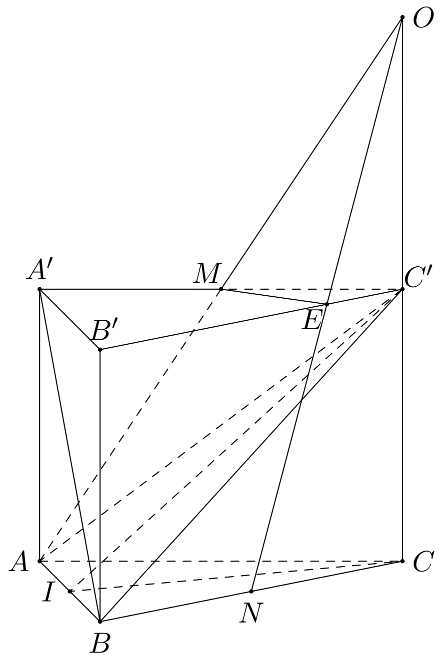
$$\begin{aligned}
\overrightarrow{A'B} \cdot \overrightarrow{AM} &= \left(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AA'}\right) \cdot \left(\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AA'}\right) \\
&= AB^2 - \frac{1}{2}AA'^2 - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AA'}. \\
&= AB^2 - \frac{1}{2}AA'^2 - \frac{1}{2}AB \cdot AA' \cdot \cos\widehat{BAA'} \\
&= 2^2 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot x \cdot \cos 120^\circ \\
&= -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 4.
\end{aligned}$$

Do $A'B \perp AM$ nên $\overrightarrow{A'B} \cdot \overrightarrow{AM} = 0 \Leftrightarrow -\dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{2}x + 4 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{1+\sqrt{33}}{2}$.
Lại có $S_{ABB'A'} = AB \cdot AA' \cdot \sin\widehat{BAA'} = 2 \cdot \dfrac{1+\sqrt{33}}{2} \cdot \sin 120^\circ = \dfrac{\sqrt{3}\left(1+\sqrt{33}\right)}{2}$ (đvdt).
Do $AC \perp (ABB'A')$ nên $V_{C.ABB'A'} = \dfrac{1}{3} \cdot AC \cdot S_{ABB'A'} = \dfrac{1}{3} \cdot \sqrt{3} \cdot \dfrac{\sqrt{3}\left(1+\sqrt{33}\right)}{2} = \dfrac{1+\sqrt{33}}{2}$ (đvtt).
Mà $V_{C.A'B'C'} = \dfrac{1}{3}V_{ABC.A'B'C'} \Rightarrow V_{C.ABB'A'} = V_{ABC.A'B'C'} - V_{C.A'B'C'} = \dfrac{2}{3}V_{ABC.A'B'C'}$.
Vậy $V_{ABC.A'B'C'} = \dfrac{3}{2}V_{C.ABB'A'} = \dfrac{3}{2} \cdot \dfrac{1+\sqrt{33}}{2} = \dfrac{3\left(1+\sqrt{33}\right)}{4}$ (đvtt).
Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 6. (Chuyên KHTN - 2020) Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại C, $AB = 2a$ và góc tạo bởi hai mặt phẳng (ABC') và (ABC) bằng 60°. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của $A'C'$ và BC. Mặt phẳng (AMN) chia khối lăng trụ thành hai phần. Thể tích của phần nhỏ bằng

Ⓐ $\dfrac{7\sqrt{3}a^3}{24}$.
Ⓑ $\dfrac{\sqrt{6}a^3}{6}$.
Ⓒ $\dfrac{7\sqrt{6}a^3}{24}$.
Ⓓ $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{3}$.

Lời giải.



Gọi I là trung điểm AB, suy ra $AB \perp (CIC')$ nên góc giữa $(C'AB)$ và (ABC) là góc $(CI, C'I)$, suy ra $\widehat{C'IC} = 60^\circ$.

Tam giác $C'IC$ vuông tại C nên

$$C'C = CI \cdot \tan \widehat{C'IC} = \frac{AB}{2} \cdot \tan 60^\circ = a\sqrt{3}.$$

Diện tích tam giác ABC là $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot CI = a^2$.

Thể tích khối lăng trụ là $V = CC' \cdot S_{ABC} = a\sqrt{3} \cdot a^2 = a^3\sqrt{3}$.

Trong $(ACC'A')$, kéo dài AM cắt CC' tại O, $C'M$ là đường trung bình của $\triangle OAC$ nên $OC = 2CC' = 2a\sqrt{3}$.

Thể tích khối chóp $O.ACN$ là

$$V_{O.ACN} = \frac{1}{3} \cdot S_{ACN} \cdot OC = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot S_{ABC} \cdot 2CC' = \frac{1}{3}V.$$

Thể tích khối chóp $O.C'ME$ là

$$V_{O.C'ME} = \frac{1}{3} \cdot S_{C'ME} \cdot OC' = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{8} S_{A'B'C'} \cdot OC' = \frac{1}{24}V.$$

Do đó

$$V_{C'EM \cdot CAN} = V_{O.ACN} - V_{O.C'ME} = \frac{1}{3}V - \frac{1}{24}V = \frac{7}{24}V = \frac{7}{24} \cdot a^3\sqrt{3} = \frac{7\sqrt{3}a^3}{24}.$$

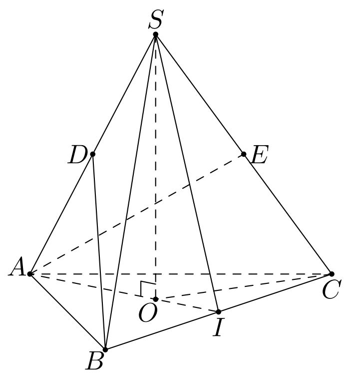
Vậy phần thể tích nhỏ hơn là $V_{C'EM \cdot CAN} = \dfrac{7\sqrt{3}a^3}{24}$.

Chọn đáp án A □

Câu 7. (Chuyên Bắc Ninh - 2020) Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có $SA = 2$. Gọi D, E lần lượt là trung điểm của cạnh SA, SC. Thể tích khối chóp $S.ABC$ biết $BD \perp AE$.

A $\dfrac{4\sqrt{21}}{7}$. B $\dfrac{4\sqrt{21}}{3}$. C $\dfrac{4\sqrt{21}}{9}$. D $\dfrac{4\sqrt{21}}{27}$.

Lời giải.



Gọi O là tâm tam giác đều ABC. Do $S.ABC$ là hình chóp đều nên ta có $SO \perp (ABC)$.

Ta có

$$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{SE} - \overrightarrow{SA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{SC} - \overrightarrow{SA};$$
$$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{SD} - \overrightarrow{SB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{SA} - \overrightarrow{SB}.$$

Đặt $\widehat{ASC} = \widehat{BSC} = \widehat{ASB} = \alpha$.

$$\begin{aligned} BD \perp AE \quad &\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AE} = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{SA} - \overrightarrow{SB}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{SC} - \overrightarrow{SA}\right) = 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{4}\overrightarrow{SA}\cdot\overrightarrow{SC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{SA}^2-\frac{1}{2}\overrightarrow{SB}\cdot\overrightarrow{SC}+\overrightarrow{SA}\cdot\overrightarrow{SB}=0$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos\alpha-2-2\cos\alpha+4\cos\alpha=0\Leftrightarrow\cos\alpha=\frac{2}{3}.$$

Áp dụng định lý hàm số côsin trong tam giác SAC, ta có

$$AC^2=SA^2+SC^2-2SA\cdot SC\cdot\cos\alpha=\frac{8}{3}\Rightarrow AC=\frac{2\sqrt{6}}{3}.$$

Ta tính được

$$S_{ABC}=\frac{2\sqrt{3}}{3};\ AO=\frac{2}{3}\cdot\frac{2\sqrt{6}}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{2\sqrt{2}}{3};\ SO=\sqrt{SA^2-AO^2}=\frac{2\sqrt{7}}{3}.$$

Thể tích khối chóp $S.ABC$ là

$$V=\frac{1}{3}SO\cdot S_{ABC}=\frac{1}{3}\frac{2\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{2\sqrt{7}}{3}=\frac{4\sqrt{21}}{27}.$$

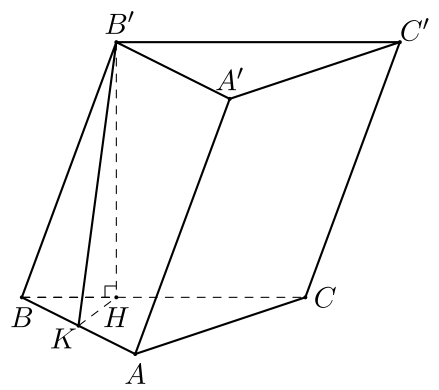
Chọn đáp án D □

Câu 8. (Chuyên Thái Bình - 2020) Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, cạnh $BC=2a$ và $\widehat{ABC}=60^\circ$. Biết tứ giác $BCC'B'$ là hình thoi có $\widehat{B'BC}$ nhọn. Mặt phẳng $(BCC'B')$ vuông góc với (ABC) và mặt phẳng $(ABB'A')$ tạo với (ABC) góc 45°. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

A) $\dfrac{\sqrt{7}a^3}{7}$. B) $\dfrac{3\sqrt{7}a^3}{7}$. C) $\dfrac{6\sqrt{7}a^3}{7}$. D) $\dfrac{\sqrt{7}a^3}{21}$.

Lời giải.

Có $\begin{cases}(BCC'B')\perp(ABC)\\(BCC'B')\cap(ABC)=BC\end{cases}$.



Do đó trong $(BCC'B')$ kẻ $B'H$ vuông góc với BC tại H thì $B'H\perp(ABC)$ hay $B'H$ là chiều cao của hình lăng trụ.

Trong (ABC) kẻ HK vuông góc với AB tại K.

Khi đó $AB\perp(B'HK)$.

Ta có $\begin{cases}(ABB'A')\cap(ABC)=AB\\(B'HK)\perp AB\\(B'HK)\cap(ABB'A')=B'K\\(B'HK)\cap(ABC)=KH\end{cases}$

nên góc giữa $(ABB'A')$ và (ABC) chính là góc giữa $B'K$ và KH.

$\triangle B'HK$ vuông tại H nên $\widehat{B'KH}$ là góc nhọn. Do đó $\widehat{B'KH}=45^\circ$.

$\triangle B'HK$ vuông tại H có $\widehat{B'KH}=45^\circ\Rightarrow\triangle B'HK$ vuông cân tại $H\Rightarrow B'H=KH$.

Xét hai tam giác vuông $B'BH$ và BKH, ta có

$$\tan\widehat{B'BH}=\frac{B'H}{BH}=\frac{KH}{BH}=\sin\widehat{ABC}=\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Do đó

$$\frac{B'H}{B'B}=\sin\widehat{B'BH}=\sqrt{1-\cos^2\widehat{B'BH}}=\sqrt{1-\frac{1}{\tan^2\widehat{B'BH}+1}}=\sqrt{1-\frac{1}{\frac{3}{4}+1}}=\frac{\sqrt{21}}{7},$$

và

$$B'H = B'B \cdot \frac{\sqrt{21}}{7} = \frac{2a\sqrt{21}}{7} \text{ (vì } BCC'B' \text{ là hình thoi có cạnh } BC = 2a).$$

Ta có

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot AC = \frac{1}{2}(BC \cdot \cos 60^\circ) \cdot (BC \cdot \sin 60^\circ) = \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}.$$

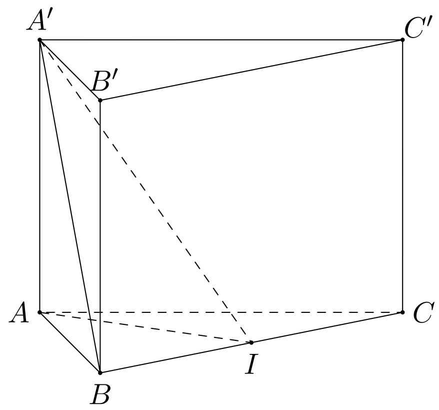
Vậy $V_{ABC.A'B'C'} = B'H \cdot S_{ABC} = \frac{2a\sqrt{21}}{7} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{7}a^3}{7}$.

Chọn đáp án B □

Câu 9. (Chuyên Vĩnh Phúc - 2020) Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều. Mặt phẳng $(A'BC)$ tạo với đáy góc 30° và tam giác $A'BC$ có diện tích bằng 8. Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

A $64\sqrt{3}$. B $2\sqrt{3}$. C $16\sqrt{3}$. D $8\sqrt{3}$.

Lời giải.



Gọi I là trung điểm cạnh BC.

Vì $ABC.A'B'C'$ là lăng trụ đứng có đáy là tam giác đều nên $ABC.A'B'C'$ là khối lăng trụ đều.

Do đó ta có: $A'B = A'C$. Suy ra tam giác $A'BC$ cân tại $A' \Rightarrow A'I \perp BC$.

Mặt khác: tam giác ABC đều $\Rightarrow AI \perp BC$.

Suy ra $BC \perp (A'IA)$.

Vậy góc giữa mặt phẳng $(A'BC)$ và mặt đáy bằng góc $\widehat{A'IA} = 30^\circ$.

Tam giác ABC là hình chiếu của tam giác $A'BC$ trên mặt đáy nên

$$S_{ABC} = S_{A'BC} \cdot \cos\alpha = 8 \cdot \cos 30^\circ = 4\sqrt{3}.$$

Đặt $AB = x \Rightarrow S_{ABC} = \frac{x^2\sqrt{3}}{4} = 4\sqrt{3} \Rightarrow x = 4$.

Ta có $AI = \frac{x\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3} \Rightarrow AA' = AI \cdot \tan\widehat{AIA'} = 2$.

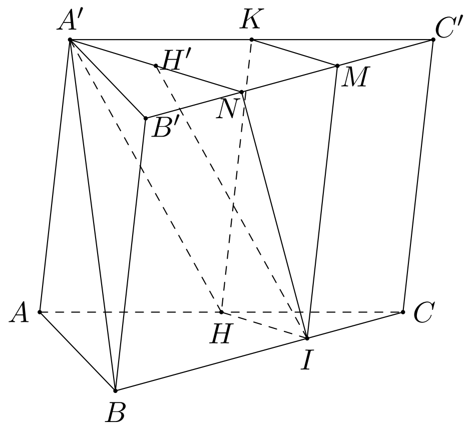
Vậy $V_{ABC.A'B'C'} = AA' \cdot S_{ABC} = 2 \cdot 4\sqrt{3} = 8\sqrt{3}$.

Chọn đáp án D □

Câu 10. (Sở Phú Thọ - 2020) Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $AB = a$, $BC = 2a$. Hình chiếu vuông góc của đỉnh lên mặt phẳng (ABC) là trung điểm của cạnh H của cạnh AC. Góc giữa hai mặt phẳng $(BCB'C')$ và (ABC) bằng 60°. Thể tích khối lăng trụ đã cho bằng

A $\frac{3\sqrt{3}a^3}{4}$. B $\frac{\sqrt{3}a^3}{8}$. C $\frac{3\sqrt{3}a^3}{8}$. D $\frac{a^3\sqrt{3}}{16}$.

Lời giải.



Tam giác ABC vuông tại A, $AB = a$, $BC = 2a$ nên $BC = a\sqrt{3}$.

Gọi I là hình chiếu của H trên BC.

Ta có $\triangle HIC \backsim \triangle BAC$ nên $\dfrac{HI}{AB} = \dfrac{HC}{BC}$.

Suy ra $HI = \dfrac{AB \cdot HC}{BC} = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

Gọi K là trung điểm của. Từ K kẻ KM vuông góc với.

Tứ giác $KMIH$ là hình bình hành nên

$$KM = IH = \frac{a\sqrt{3}}{4}.$$

Gọi N là điểm trên sao cho M là trung điểm của $\Rightarrow A'N = 2KM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Do $A'H \perp (ABC)$ nên $(A'NIH) \perp (ABC)$. Mà $A'N > HI$ nên $\widehat{HIN}$ là góc tù. Suy ra $\widehat{HIN} = 120° \Rightarrow \widehat{A'NI} = 60°$.

Gọi là hình chiếu của I lên suy ra là trung điểm của thì

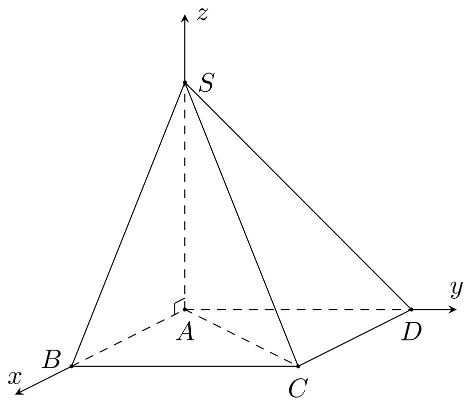
$$A'H = IH' = NH' \cdot \tan 60° = \frac{3a}{4} \Rightarrow V = A'H \cdot S_{ABC} = \frac{3a}{4} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}a^3}{8}.$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 11. (Sở Phú Thọ - 2020) Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a$. Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SCD) bằng φ, với $cos\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$. Thể tích của khối chóp đã cho bằng

(A) $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}$. (B) $a^3\sqrt{2}$. (C) $\dfrac{2\sqrt{2}a^3}{3}$. (D) $\dfrac{2a^3}{3}$.

Lời giải.



Đặt $AD = m$, $m > 0$.

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ, gốc tọa độ trùng với A, tia Ox, Oy, Oz lần lượt trùng với các tia AB, AD, AS.

Khi đó tọa độ của các điểm là

$$B(a;0;0); D(0;m;0); C(a;m;0); S(0;0;a).$$

và $\begin{cases} \overrightarrow{SB} = (a;0;-a) \\ \overrightarrow{BC} = (0;m;0) \end{cases} \Rightarrow \left[\overrightarrow{SB}, \overrightarrow{BC}\right] = (ma;0;ma)$,

$\begin{cases} \overrightarrow{SD} = (0;m;-a) \\ \overrightarrow{DC} = (a;0;0) \end{cases} \Rightarrow \left[\overrightarrow{SD}, \overrightarrow{DC}\right] = (0;-a;-ma)$.

Véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (SBC) là $\left[\overrightarrow{SB}, \overrightarrow{BC}\right] = (ma;0;ma)$.

Véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (SCD) là $\left[\overrightarrow{SD}, \overrightarrow{DC}\right] = (0;-a^2;-ma)$.

Theo giả thiết

$$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{m^2a^2}{a\sqrt{a^2+m^2}\cdot ma\cdot\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow 3m^2 = 2\left(a^2+m^2\right) \Rightarrow m = a\sqrt{2}.$$

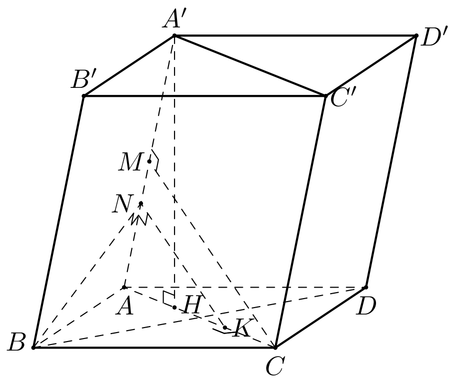
Vậy thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng $V = \frac{1}{3}\cdot SA\cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3}\cdot a\cdot a\cdot a\sqrt{2} = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 12. (Sở Ninh Bình) Cho lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = \sqrt{6}$, $AD = \sqrt{3}$, $A'C = 3$ và mặt phẳng $(AA'C'C)$ vuông góc với mặt đáy. Biết hai mặt phẳng $(AA'C'C)$, $(AA'B'B)$ tạo với nhau góc α có $\tan\alpha = \frac{3}{4}$. Thể tích của khối lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ là

(A) $V = 12$. (B) $V = 6$. (C) $V = 8$. (D) $V = 10$.

Lời giải.



Gọi M là trung điểm của AA'. Kẻ $A'H$ vuông góc với AC tại H, BK vuông góc với AC tại K, KN vuông góc với AA' tại N.

Do $(AA'C'C) \perp (ABCD)$ suy ra $A'H \perp (ABCD)$ và $BK \perp (AA'C'C) \Rightarrow BK \perp AA'$

$\Rightarrow AA' \perp (BKN) \Rightarrow AA' \perp NB$ suy ra $\left(\widehat{(AA'C'C),(AA'B'B)}\right) = \widehat{KNB} = \alpha$.

Ta có: $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = \sqrt{6}$, $AD = \sqrt{3}$ suy ra $BD = 3 = AC$. Suy ra $\triangle ACA'$ cân tại C.

Do đó $CM \perp AA' \Rightarrow KN \parallel CM \Rightarrow \frac{AK}{AC} = \frac{AN}{AM} = \frac{NK}{MC}$.

Xét $\triangle ABC$ vuông tại B có BK là đường cao suy ra $BK = \frac{BA\cdot BC}{AC} = \sqrt{2}$ và

$AB^2 = AK\cdot AC \Rightarrow AK = \frac{AB^2}{AC} = 2$.

Xét $\triangle NKB$ vuông tại K có $\tan\alpha = \tan\widehat{KNB} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{KB}{KN} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow KN = \frac{4\sqrt{2}}{3}$.

Xét $\triangle ANK$ vuông tại N có $KN = \frac{4\sqrt{2}}{3}$, $AK = 2$ suy ra $AN = \frac{2}{3}$.

Khi đó

$$\frac{2}{3} = \frac{\frac{2}{3}}{AM} = \frac{\frac{4\sqrt{2}}{3}}{MC} \Rightarrow \begin{cases} AM = 1 \Rightarrow AA' = 2 \\ CM = 2\sqrt{2}. \end{cases}$$

Ta lại có $A'H\cdot AC = CM\cdot AA' \Rightarrow A'H = \frac{CM\cdot AA'}{AC} = \frac{2\sqrt{2}\cdot 2}{3} = \frac{4\sqrt{2}}{3}$.

Suy ra thể tích khối lăng trụ cần tìm là $V = A'H\cdot AB\cdot AD = \frac{4\sqrt{2}}{3}\cdot\sqrt{6}\cdot\sqrt{3} = 8$.

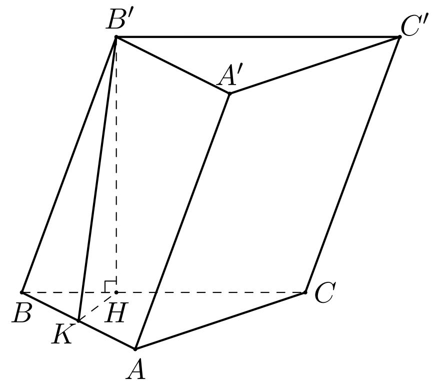
Chọn đáp án (C) □

Câu 13. (Đô Lương 4 - Nghệ An - 2020) Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, cạnh $BC = 2a$ và $\widehat{ABC} = 60^\circ$. Biết tứ giác $BCC'B'$ là hình thoi có $\widehat{B'BC}$

nhọn. Biết $(BCC'B')$ vuông góc với (ABC) và $(ABB'A')$ tạo với (ABC) góc 45°. Thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

(A) $\dfrac{a^3}{\sqrt{7}}$. (B) $\dfrac{3a^3}{\sqrt{7}}$. (C) $\dfrac{6a^3}{\sqrt{7}}$. (D) $\dfrac{a^3}{3\sqrt{7}}$.

Lời giải.



Gọi H là chân đường cao hạ từ B' của tam giác $B'BC$. Do góc $\widehat{B'BC}$ là góc nhọn nên H thuộc cạnh BC.

$(BCC'B')$ vuông góc với (ABC) suy ra $B'H$ là đường cao của lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

$BCC'B'$ là hình thoi suy ra $BB' = BC = 2a$.

Tam giác ABC vuông tại A, cạnh $BC = 2a$ và $\widehat{ABC} = 60^\circ$ suy ra $AB = a$, $AC = a\sqrt{3}$.

Gọi K là hình chiếu của H lên AB, do tam giác ABC là tam giác vuông tại A nên $HK \parallel AC \Rightarrow \dfrac{BK}{BA} = \dfrac{BH}{BC} \Rightarrow BH = 2BK$.

Khi đó mặt phẳng $(B'HK)$ vuông góc với AB nên góc giữa hai mặt phẳng $(ABB'A')$ và (ABC) là góc $\widehat{B'KH}$. Theo giả thiết, $\widehat{B'KH} = 45^\circ \Rightarrow B'K = h\sqrt{2}$, với $B'H = h$.

Xét tam giác vuông $B'BH$ có $B'H^2 + BH^2 = B'B^2$ hay $h^2 + 4BK^2 = 4a^2(1)$.

Xét tam giác vuông $B'BK$: $B'K^2 + BK^2 = B'B^2$ hay $2h^2 + BK^2 = 4a^2(2)$.

Từ (1) và (2) ta có $h = \dfrac{2\sqrt{3}a}{\sqrt{7}}$.

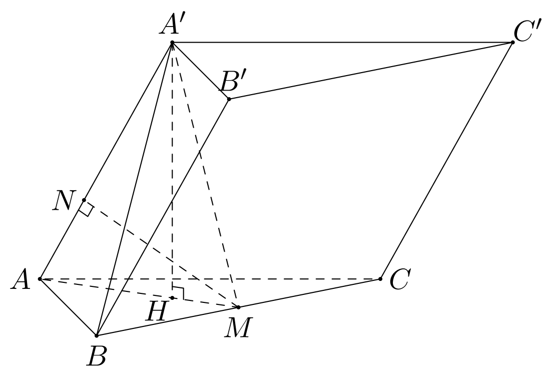
Vậy thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng $V = S_{ABC} \cdot h = \dfrac{1}{2}AB \cdot BC \cdot h = \dfrac{3a^3}{\sqrt{7}}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 14. (Chuyên Lê Quý Đôn – Điện Biên 2019) Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a, hình chiếu vuông góc của điểm A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm tam giác ABC. Biết khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và BC bằng $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$. Tính theo a thể tích khối lăng trụ đó.

(A) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$. (B) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$. (C) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$. (D) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{24}$.

Lời giải.



- ☑ Gọi M là trung điểm BC, H là trọng tâm tam giác $ABC \Rightarrow A'H \perp (ABC)$.
- ☑ $\begin{cases} AM \perp BC \\ AH \perp BC \end{cases} \Rightarrow BC \perp (AA'M)$.
- ☑ Gọi N là hình chiếu của M trên AA' thì MN là đoạn vuông góc chung của AA' và BC.
- ☑ Khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và BC bằng $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$ nên $MN = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

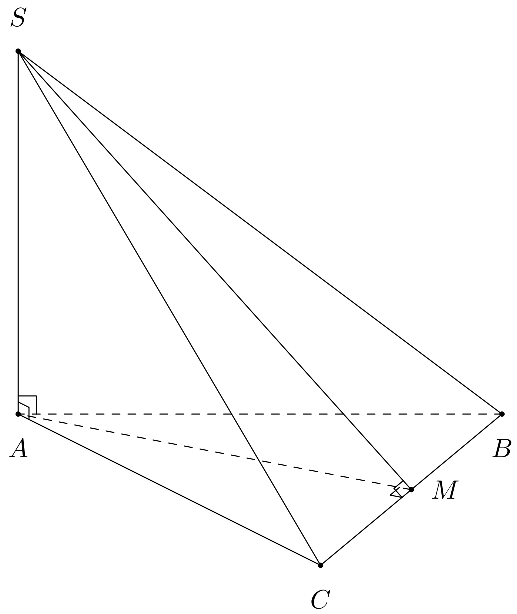
- Tam giác $AA'M$ có $S_{\triangle AA'M} = \frac{1}{2}A'H \cdot AM = \frac{1}{2}MN \cdot AA'$
$\Rightarrow A'H \cdot AM = MN \cdot AA' \Leftrightarrow A'H \cdot AM = MN \cdot \sqrt{A'H^2 + AH^2}$
$\Rightarrow A'H = \dfrac{MN \cdot \sqrt{A'H^2 + AH^2}}{AM} = \dfrac{\frac{a\sqrt{3}}{4}\sqrt{A'H^2 + \left(\frac{2}{3}\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{\sqrt{A'H^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2}}{2}$
$\Rightarrow 4A'H^2 = A'H^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 \Rightarrow A'H = \frac{a}{3}$.

Vậy thể tích khối lăng trụ $V_{ABC.A'B'C'} = A'H \cdot S_{\triangle ABC} = \frac{a}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 15. (Bỉm Sơn - Thanh Hóa - 2019) Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) và tam giác ABC cân tại A. Cạnh bên SB lần lượt tạo với mặt phẳng đáy, mặt phẳng trung trực của BC các góc bằng $30°$ và $45°$, khoảng cách từ S đến cạnh BC bằng a. Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng

(A) $V_{S.ABC} = \frac{a^3}{2}$. (B) $V_{S.ABC} = \frac{a^3}{3}$. (C) $V_{S.ABC} = \frac{a^3}{6}$. (D) $V_{S.ABC} = a^3$.

Lời giải.



- Lấy M là trung điểm của BC, tam giác ABC cân tại A nên $AM \perp BC$ kết hợp với $SA \perp BC$ suy ra $BC \perp (SAM)$. Do đó (SAM) là mặt phẳng trung trực cạnh BC.
- Góc giữa SB và mặt phẳng (SAM) bằng góc giữa SB và SM. Suy ra $\widehat{BSM} = 45°$.
- Góc giữa SB và mặt phẳng (ABC) bằng góc giữa SB và AB nên $\widehat{SBA} = 30°$.
- $BC \perp (SAM) \Rightarrow BC \perp SM$. Suy ra khoảng cách từ S đến cạnh BC bằng $SM = a$.
- Tam giác vuông cân SBM có $BM = a, SB = a\sqrt{2} \Rightarrow BC = 2BM = 2a$.
- Tam giác vuông SAB có $sin30° = \frac{SA}{SB} \Rightarrow SA = a\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$; $AB = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.
- Tam giác vuông ABM có $AM = \sqrt{AB^2 - BM^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{6}}{2}\right)^2 - a^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

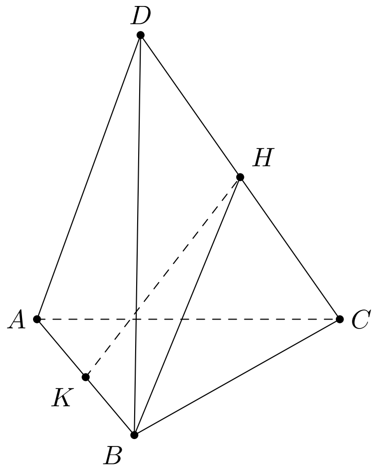
Vậy thể tích khối chóp $S.ABC$ là $V_{S.ABC} = \frac{1}{3}SA \cdot S_{\triangle ABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a^3}{6}$.
Chọn đáp án (C) □

Câu 16 (Chu Văn An - Hà Nội - 2019).

Cho tứ diện $ABCD$ có $BC = BD = AC = AD = 1, (ACD) \perp (BCD)$ và $(ABD) \perp (ABC)$. Thể tích của tứ diện $ABCD$ bằng

Ⓐ $\dfrac{2\sqrt{3}}{9}$. Ⓑ $\dfrac{\sqrt{3}}{27}$. Ⓒ $\dfrac{2\sqrt{3}}{27}$. Ⓓ $\dfrac{2\sqrt{2}}{27}$.

Lời giải.



Gọi H, K lần lượt là trung điểm cạnh CD, AB.

Đặt $AH = x, (x > 0)$.

• $\triangle ACD$ và $\triangle BCD$ lần lượt cân tại A và D nên AH và BH là hai đường cao tương ứng.

$$\begin{cases} (ACD) \perp (BCD) \\ (ACD) \cap (BCD) = CD \Rightarrow AH \perp (BCD). \\ (ACD) \supset AH \perp CD \end{cases}$$

Do đó $AH \perp BH (1)$.

$\triangle ACD = \triangle BCD (c \cdot c \cdot c)$ do đó $AH = BH$ (2 đường cao tương ứng) (2).

Từ (1), (2) suy ra $\triangle AHB$ vuông cân tại H

$\Rightarrow AB = AH\sqrt{2} = x\sqrt{2}$. (3).

• Chứng minh tương tự ta được $\triangle CKD$ vuông cân tại K

$\Rightarrow CK = \dfrac{CD}{\sqrt{2}} = \dfrac{2 \cdot HD}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{AD^2 - AH^2} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{1 - x^2}$.

Mặt khác, $\triangle ACD$ cân tại A có CK là đường cao nên:

$AB = 2AK = 2\sqrt{AC^2 - CK^2} = 2\sqrt{1 - 2\left(1 - x^2\right)}$ (4).

Từ (3), (4) ta có:

$x\sqrt{2} = 2\sqrt{1 - 2\left(1 - x^2\right)}$

$\Leftrightarrow 2x^2 = 4\left(2x^2 - 1\right)$

$\Leftrightarrow x^2 = \dfrac{2}{3} \Leftrightarrow x = \dfrac{\sqrt{6}}{3} (x > 0)$.

$CD = 2 \cdot HD = 2\sqrt{1 - AH^2} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

$V_{ABCD} = \dfrac{1}{3} AH \cdot S_{\triangle BCD} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{\sqrt{6}}{3} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{6}}{3} \cdot \dfrac{2\sqrt{3}}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{27}$.

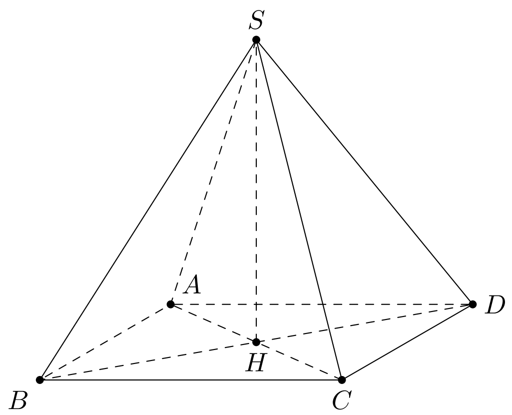
Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 17 (Chuyên Đại học Vinh - 2019).

Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có $SA = a\sqrt{11}$, cosin góc hợp bởi hai mặt phẳng (SBC) và (SCD) bằng $\dfrac{1}{10}$. Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ bằng

(A) $3a^3$. (B) $9a^3$. (C) $4a^3$. (D) $12a^3$.

Lời giải.



Gọi H là tâm của hình vuông $ABCD$ nên $SH \perp (ABCD)$. Đặt $m = HA$, $n = SH$. Do tam giác SAH vuông tại H nên $m^2 + n^2 = 11a^2$.

Xây dựng hệ trục tọa độ như sau: $H(0;0;0)$, $B(m;0;0)$, $D(-m;0;0)$, $C(0;m;0)$, $S(0;0;n)$.

Khi đó phương trình mặt phẳng (SBC) là $\dfrac{x}{m} + \dfrac{y}{m} + \dfrac{z}{n} = 1$ hay véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (SBC) là $\overrightarrow{n_1} = (n;n;m)$.

Khi đó phương trình mặt phẳng (SCD) là $\dfrac{x}{-m} + \dfrac{y}{m} + \dfrac{z}{n} = 1$ hay véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (SBC) là $\overrightarrow{n_2} = (n;-n;-m)$.

Do cosin góc hợp bởi hai mặt phẳng (SBC) và (SCD) bằng $\dfrac{1}{10}$ nên $\dfrac{1}{10} = \dfrac{|\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2}|}{|\overrightarrow{n_1}| \cdot |\overrightarrow{n_2}|}$ hay $\dfrac{m^2}{2n^2+m^2} = \dfrac{1}{10}$ mà $n^2 = 11a^2 - m^2$.

Vậy $\dfrac{m^2}{2n^2+m^2} = \dfrac{1}{10} \Leftrightarrow \dfrac{m^2}{22a^2-m^2} = \dfrac{1}{10} \Leftrightarrow m^2 = 2a^2 \Rightarrow m = a\sqrt{2} \Rightarrow SH = 3a$.
$m = HA = a\sqrt{2}$ nên $AB = 2a$,

Chiều cao của hình chóp là $SH = 3a$.

Diện tích của hình vuông là $S_{ABCD} = 4a^2$.

Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ là $V = \dfrac{1}{3}S_{ABCD} \cdot SH = \dfrac{1}{3} \cdot 4a^2 \cdot 3a = 4a^3$.

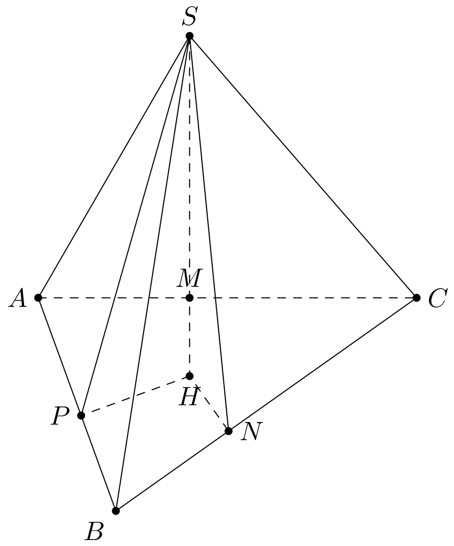
Chọn đáp án (C) □

Câu 18 (THPT Lương Thế Vinh Hà Nội 2019).

Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh 1, biết khoảng cách từ A đến (SBC) là $\dfrac{\sqrt{6}}{4}$, từ B đến (SCA) là $\dfrac{\sqrt{15}}{10}$, từ C đến (SAB) là $\dfrac{\sqrt{30}}{20}$ và hình chiếu vuông góc của S xuống đáy nằm trong tam giác ABC. Tính thể tích khối chóp $V_{S.ABC}$.

(A) $\dfrac{1}{36}$. (B) $\dfrac{1}{48}$. (C) $\dfrac{1}{12}$. (D) $\dfrac{1}{24}$.

Lời giải.



Gọi M, N, P lần lượt là hình chiếu của H lên các cạnh AC, BC, AB.

Đặt $SH = h \Rightarrow V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3} \cdot h \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{4} = \dfrac{h\sqrt{3}}{12}$.

Ta có $AP = \dfrac{2S_{SAB}}{AB} = 2S_{SAB} = \dfrac{6V_{S.ABC}}{\mathrm{d}\,(C;(SAB))} = \dfrac{h\sqrt{3}}{2} : \dfrac{\sqrt{30}}{20} = h\sqrt{10}$.

Tương tự, tính được $HM = 2h, HN = h$

$\Rightarrow PH = \sqrt{SP^2 - SH^2} = 3h$.

Ta có $S_{ABC} = S_{HAB} + S_{HAC} + S_{HBC} = \dfrac{1}{2}(HP + HM + HN) \Leftrightarrow 3h = \dfrac{\sqrt{3}}{4} \Leftrightarrow h = \dfrac{\sqrt{3}}{12}$.

Vậy $V_{S.ABC} = \dfrac{\sqrt{3}}{12} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{12} = \dfrac{1}{48}$.

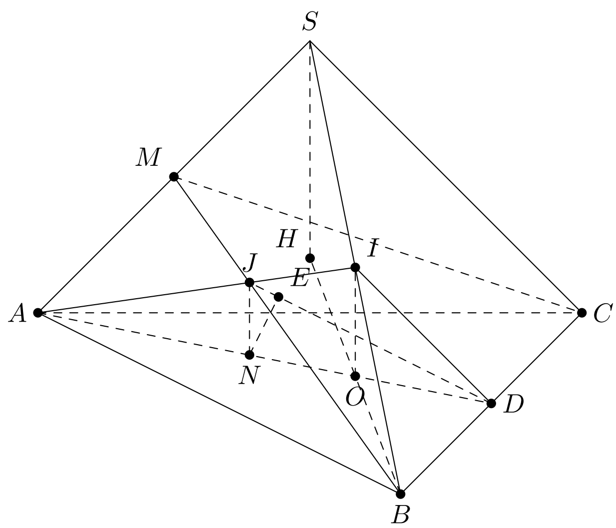
Chọn đáp án B □

Câu 19 (Cụm Liên Trường Hải Phòng 2019).

Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a. $\widehat{SAB} = \widehat{SCB} = 90^\circ$. Gọi M là trung điểm của SA. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (MBC) bằng $\dfrac{6a}{7}$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

A $V = \dfrac{5\sqrt{3}a^3}{12}$. B $V = \dfrac{5\sqrt{3}a^3}{6}$. C $V = \dfrac{4\sqrt{3}a^3}{3}$. D $V = \dfrac{7\sqrt{3}a^3}{12}$.

Lời giải.



Vì $\widehat{SAB} = \widehat{SCB} = 90^\circ \Rightarrow S, A, B, C$ cùng thuộc mặt cầu đường kính SB.

Gọi D là trung điểm BC, I là trung điểm SB và O là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$, ta có $OI \perp (ABC)$.

Gọi H là điểm đối xứng với B qua $O \Rightarrow SH \perp (ABC)$ (vì OI là đường trung bình $\triangle SHB$).

Gọi $BM \cap AI = J$, ta có J trọng tâm $\triangle SAB$.

Trong $\triangle AID$, kẻ $JN \parallel IO$. Khi đó, vì $BC \perp (JND)$ nên $(JND) \perp (MBC)$.

Kẻ $NE \perp JD$, ta có $NE \perp (MBC)$. Do đó $\mathrm{d}(N; (MBC)) = NE$.

Ta có $\dfrac{\mathrm{d}(A, (MBC))}{\mathrm{d}(N, (MBC))} = \dfrac{AD}{ND} = \dfrac{AD}{AD - AN} = \dfrac{AD}{AD - \frac{2}{3}AO} = \dfrac{AD}{AD - \frac{4}{9}AD} = \dfrac{9}{5}$.

Suy ra, $\mathrm{d}(N, (MBC)) = \dfrac{5}{9}\mathrm{d}(A, (MBC)) = \dfrac{10a}{21}$.

Xét $\triangle JND$ có $\dfrac{1}{NE^2} = \dfrac{1}{ND^2} + \dfrac{1}{NJ^2}$ nên $NJ = \dfrac{10a}{3} \Rightarrow OI = \dfrac{3}{2}NJ = 5a \Rightarrow SH = 10a$.

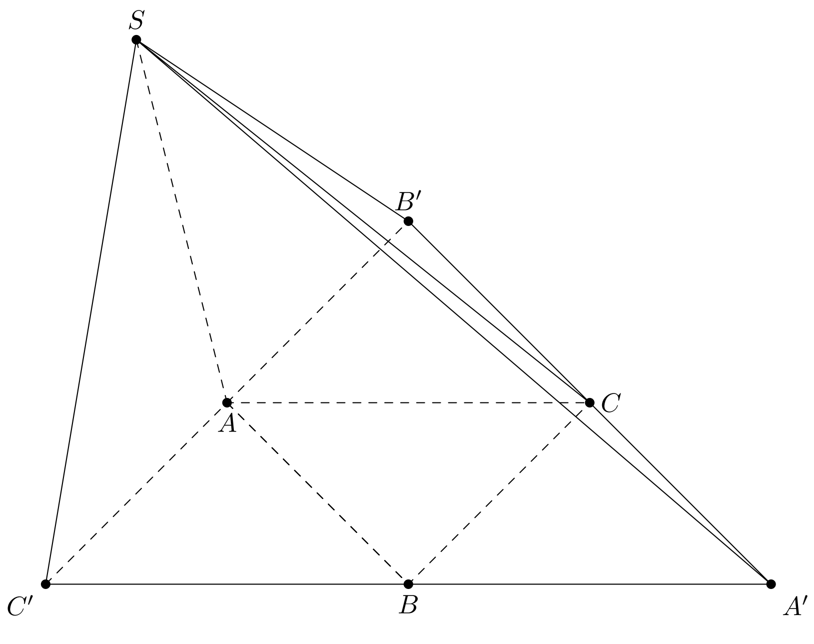
Vậy $V_{SABC} = \dfrac{1}{3}SH \cdot S_{ABC} = \dfrac{1}{3} \cdot 10a \cdot \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{5\sqrt{3}a^3}{6}$.

Chọn đáp án B □

Câu 20 (Chuyên Vĩnh Phúc 2019). Cho hình chóp $S.ABC$ có các cạnh $SA = BC = 3$; $SB = AC = 4$; $SC = AB = 2\sqrt{5}$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

A $\dfrac{\sqrt{390}}{12}$. B $\dfrac{\sqrt{390}}{4}$. C $\dfrac{\sqrt{390}}{6}$. D $\dfrac{\sqrt{390}}{8}$.

Lời giải.



+ Dựng hình chóp $S.A'B'C'$ sao cho A là trung điểm $B'C'$, B là trung điểm $A'C'$, C là trung điểm $A'B'$.

+ Khi đó $SB = AC = BA' = BC' = 4$ nên $\triangle SA'C'$ vuông tại S và $SA'^2 + SC'^2 = (2 \cdot SB)^2 = 64 (1)$.

+ Tương tự $\triangle SB'C'$, $\triangle SA'B'$ vuông tại S và $\begin{cases} SA'^2 + SB'^2 = 80 (2) \\ SB'^2 + SC'^2 = 36 (3). \end{cases}$

+ Từ $(1); (2); (3)$ ta suy ra $SC' = \sqrt{10}$; $SB' = \sqrt{26}$; $SA' = \sqrt{54}$.

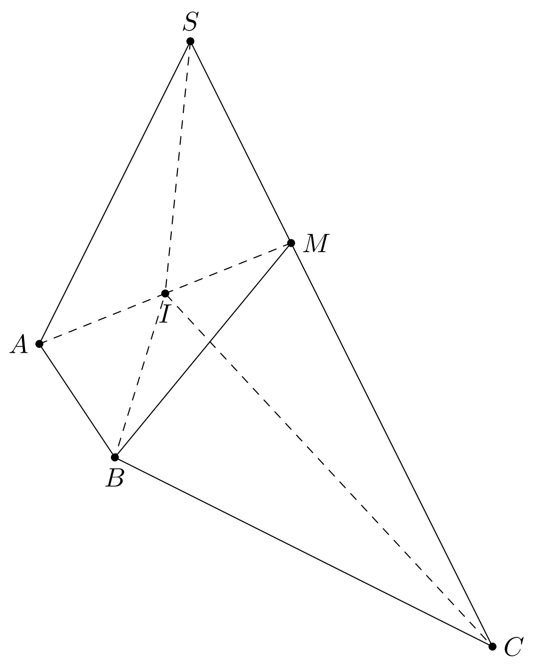
+ Ta tính được $V_{S.A'B'C'} = \dfrac{1}{3}SC' \cdot \dfrac{1}{2} \cdot SA' \cdot SB' = \sqrt{390}$ và $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{4}V_{S.A'B'C'} = \dfrac{\sqrt{390}}{4}$ (đvtt).

Chọn đáp án (B) □

Câu 21. Cho hình chóp $S.ABC$ có $\widehat{ASB} = \widehat{CSB} = 60°$, $\widehat{ASC} = 90°$, $SA = SB = a$, $SC = 3a$. Tính thể tích của khối chóp $S.ABC$.

(A) $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{4}$. (B) $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{18}$. (C) $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{12}$. (D) $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{6}$.

Lời giải.



Cách 1. Gọi M là điểm nằm trên SC sao cho $SM = \dfrac{1}{3}SC = a$.

Ta có:

Tam giác SAM vuông tại $S \Rightarrow AM = \sqrt{SA^2 + SM^2} = a\sqrt{2}$.

Tam giác SBM là tam giác đều có độ dài cạnh $SM = SB = BM = a$.

Tam giác SAB là tam giác đều có độ dài cạnh $SA = SB = AB = a$.

Vậy $AB^2 + BM^2 = AM^2 \Rightarrow$ Tam giác ABM là tam giác vuông tại B

$\Rightarrow \triangle ABM = \triangle ASM \Rightarrow SI = IB = \dfrac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow IB^2 + SI^2 = SB^2 \Rightarrow$ Tam giác SIB vuông tại I

$\Rightarrow \begin{cases} SI \perp IB \\ SI \perp AM \end{cases} \Rightarrow SI \perp (ABM) \Rightarrow SI$ là đường cao của khối chóp $SABM$.

Thể tích của khối chóp $S.ABM$ là $V_{S.ABM} = \dfrac{1}{3} \cdot S_{\triangle ABM} \cdot SI = \dfrac{1}{6} \cdot AB \cdot BM \cdot SI = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{12}$ (đvtt).

Mà $\dfrac{V_{S.ABM}}{V_{S.ABC}} = \dfrac{SM}{SC} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow V_{S.ABC} = 3 \cdot V_{S.ABM} = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{4}$.

Cách 2: Ta có $V_{S.ABC} = \dfrac{abc}{6} \cdot \sqrt{1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\delta - 2\cos\alpha \cdot \cos\beta \cdot \cos\delta}$.

Trong đó $a = SA$; $b = SB$; $c = SC$; $\alpha = \widehat{ASB}$; $\beta = \widehat{ASC}$; $\delta = \widehat{BSC}$

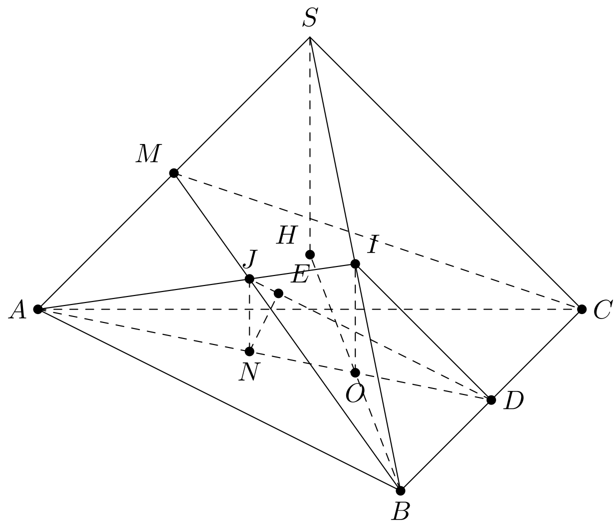
$\Rightarrow V_{S.ABC} = \dfrac{a \cdot a \cdot 3a}{6} \cdot \sqrt{1 - \cos^2 60° - \cos^2 60° - \cos^2 90° - 2\cos 60° \cdot \cos 60° \cdot \cos 90°} = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{4}$ (đvtt).

Chọn đáp án (A) □

Câu 22. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh $2a$. Gọi M là trung điểm cạnh SA, $\widehat{SAB} = \widehat{SCB} = 90°$, biết khoảng cách từ A đến (MBC) bằng $\dfrac{6a}{\sqrt{21}}$. Thể tích của khối chóp $S.ABC$ bằng

Ⓐ $\dfrac{10a^3\sqrt{3}}{9}$. Ⓑ $\dfrac{8a^3\sqrt{39}}{3}$. Ⓒ $\dfrac{4a^3\sqrt{13}}{3}$. Ⓓ $2a^3\sqrt{3}$.

Lời giải.



Vì $\widehat{SAB} = \widehat{SCB} = 90° \Rightarrow S, A, B, C$ cùng thuộc mặt cầu đường kính SB.

Gọi D là trung điểm BC, I là trung điểm SB và O là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$, ta có $OI \perp (ABC)$.

Gọi H là điểm đối xứng với B qua $O \Rightarrow SH \perp (ABC)$ (vì OI là đường trung bình $\triangle SHB$).

Gọi $BM \cap AI = J$, ta có J trọng tâm $\triangle SAB$.

Trong $\triangle AID$, kẻ $JN \parallel IO$. Khi đó, vì $BC \perp (JND)$ nên $(JND) \perp (MBC)$.

Kẻ $NE \perp JD$, ta có $NE \perp (MBC)$. Do đó $\mathrm{d}(N; (MBC)) = NE$.

Ta có $\dfrac{\mathrm{d}(A, (MBC))}{\mathrm{d}(N, (MBC))} = \dfrac{AD}{ND} = \dfrac{AD}{AD - AN} = \dfrac{AD}{AD - \dfrac{2}{3}AO} = \dfrac{AD}{AD - \dfrac{4}{9}AD} = \dfrac{9}{5}$.

Suy ra, $\mathrm{d}(N, (MBC)) = \dfrac{5}{9}\mathrm{d}(A, (MBC)) = \dfrac{10a}{3\sqrt{21}}$.

Xét $\triangle JND$ có $\dfrac{1}{NE^2} = \dfrac{1}{ND^2} + \dfrac{1}{NJ^2}$ nên $NJ = \dfrac{10a}{9} \Rightarrow OI = \dfrac{3}{2}NJ = \dfrac{5a}{3} \Rightarrow SH = \dfrac{10a}{3}$.

Vậy $V_{SABC} = \dfrac{1}{3}SH \cdot S_{ABC} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{10a}{3} \cdot \dfrac{(2a)^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{10\sqrt{3}a^3}{9}$.

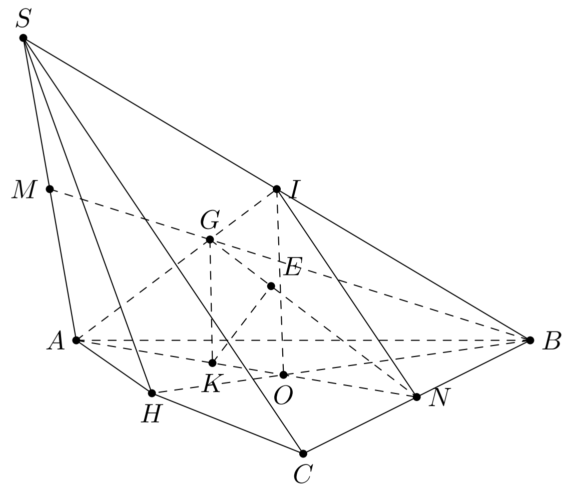
Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 23 (Cụm liên trường Hải Phòng 2019).

Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a. $\widehat{SAB} = \widehat{SCB} = 90°$. Gọi M là trung điểm của SA. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (MBC) bằng $\dfrac{6a}{7}$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

Ⓐ $V = \dfrac{5\sqrt{3}a^3}{12}$. Ⓑ $V = \dfrac{5\sqrt{3}a^3}{6}$. Ⓒ $V = \dfrac{4\sqrt{3}a^3}{3}$. Ⓓ $V = \dfrac{7\sqrt{3}a^3}{12}$.

Lời giải.



Gọi I là trung điểm của SB.

Do $\widehat{SAB} = \widehat{SCB} = 90^\circ$ nên I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

Gọi O là tâm của đáy $ABC \Rightarrow OI \perp (ABC)$.

Gọi H là hình chiếu của S lên mặt phẳng (ABC). Ta có $AB \perp (SAH) \Rightarrow AB \perp AH$. Tương tự, $BC \perp CH$. Suy ra H thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, có tâm là O nên O là trung điểm của BH. Do đó, $SH = 2OI$.

Gọi N là trung điểm của $BC \Rightarrow IN \parallel SC$ nên $BC \perp IN \Rightarrow BC \perp (AIN)(*)$.

Gọi G là trọng tâm của tam giác SAB và K là hình chiếu của G lên mặt phẳng $(ABC) \Rightarrow K \in AO$ và $GK \parallel OI \Rightarrow AK = \dfrac{2}{3}AO = \dfrac{4}{9}AN \Rightarrow KN = \dfrac{5}{9}AN$

$\Rightarrow d[K,(MBC)] = \dfrac{5}{9}d[A,(MBC)] = \dfrac{10a}{21}$.

Kẻ $KE \perp GN \overset{(*)}{\Rightarrow} KE \perp BC \Rightarrow KE \perp (MBC) \Rightarrow d[K,(MBC)] = KE = \dfrac{10a}{21}$.

Tam giác GKN vuông tại K có $\dfrac{1}{KE^2} = \dfrac{1}{GK^2} + \dfrac{1}{KN^2} \Rightarrow GK = \dfrac{10a}{3} \Rightarrow SH = 2OI = 3GK = 10a$.

Vậy thể tích khối chóp $S.ABC$ là $V = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot 10a = \dfrac{5a^3\sqrt{3}}{6}$.

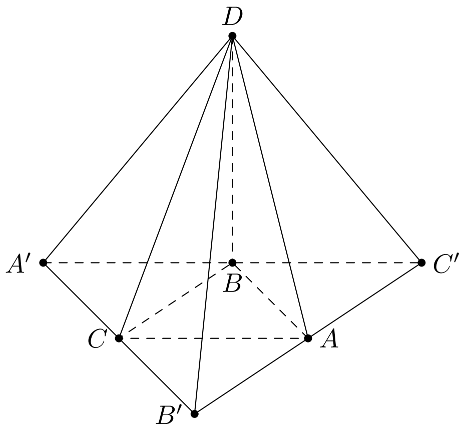
Chọn đáp án (B) □

Câu 24 (Chuyên Lê Quý Đôn Điện Biên 2019).

Cho tứ diện $ABCD$ có các cạnh $AD = BC = 3$, $AC = BD = 4$, $AB = CD = 2\sqrt{3}$. Tính thể tích khối tứ diện $ABCD$.

(A) $\dfrac{\sqrt{2740}}{12}$. (B) $\dfrac{\sqrt{2474}}{12}$. (C) $\dfrac{\sqrt{2047}}{12}$. (D) $\dfrac{\sqrt{2470}}{12}$.

Lời giải.



Dựng tứ diện $D.A'B'C'$ sao cho A, B, C lần lượt là trung điểm của $B'C'$, $A'C'$, $A'B'$.

Theo cách dựng và theo bài ra có: $AC = BC' = BD$.

Xét tam giác $DA'C'$ có: BD là đường trung tuyến và $A'B = BC' = BD \Rightarrow \triangle DA'C'$ vuông tại D.

Chứng minh tương tự ta cũng có: $\triangle DB'C'$, $\triangle DA'B'$ vuông tại D.

Khi đó tứ diện $D.A'B'C'$ có các cạnh DA', DB', DC' đôi một vuông góc với nhau.

Ta có: $V_{ABCD} = \dfrac{1}{4}V_{D.A'B'C'} = \dfrac{1}{24}DA' \cdot DB' \cdot DC'$.

Theo bài ra ta có: $\begin{cases} DA'^2 + DB'^2 = 48 \\ DA'^2 + DC'^2 = 64 \\ DB'^2 + DC'^2 = 36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} DA'^2 = 38 \\ DB'^2 = 10 \\ DC'^2 = 26 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} DA' = \sqrt{38} \\ DB' = \sqrt{10} \\ DC' = \sqrt{26}. \end{cases}$

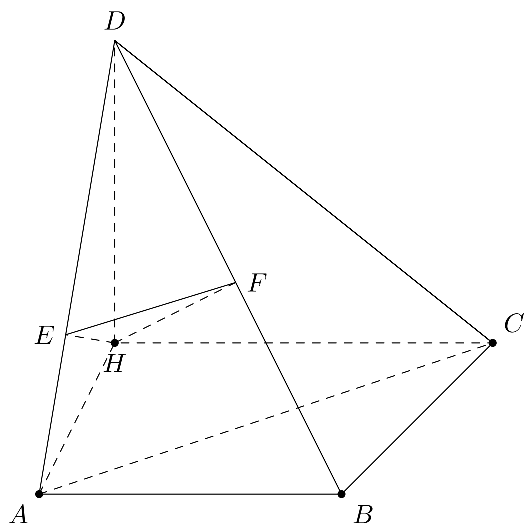
Vậy $V_{ABCD} = \dfrac{1}{24}DA' \cdot DB' \cdot DC' = \dfrac{1}{24} \cdot \sqrt{38} \cdot \sqrt{10} \cdot \sqrt{26} = \dfrac{\sqrt{2470}}{12}$.

Chọn đáp án D □

Câu 25. Cho tứ diện $ABCD$ có $\widehat{DAB} = \widehat{CBD} = 90°$; $AB = a$; $AC = a\sqrt{5}$; $\widehat{ABC} = 135°$. Biết góc giữa hai mặt phẳng (ABD), (BCD) bằng $30°$. Thể tích của tứ diện $ABCD$ là

Ⓐ $\dfrac{a^3}{\sqrt{2}}$. Ⓑ $\dfrac{a^3}{3\sqrt{2}}$. Ⓒ $\dfrac{a^3}{6}$. Ⓓ $\dfrac{a^3}{2\sqrt{3}}$.

Lời giải.



Gọi H thuộc mặt phẳng (ABC) và $DH \perp (ABC)$.

Ta có $\begin{cases} BA \perp DA \\ BA \perp DH \end{cases} \Rightarrow BA \perp AH$. Tương tự $\begin{cases} BC \perp BD \\ BC \perp DH \end{cases} \Rightarrow BC \perp BH$.

Tam giác ABH có $AB = a; \widehat{ABC} = 135°; \widehat{CBH} = 90° \Rightarrow \widehat{ABH} = 45°$ suy ra $\triangle ABH$ vuông cân tại $A \Rightarrow AH = AB = a$.

Áp dụng định lý côsin ta có $BC = a\sqrt{2}$.

Diện tích tam giác ABC: $S_{ABC} = \dfrac{1}{2} \cdot BA \cdot BC \cdot sin\widehat{ABC} = \dfrac{1}{2} \cdot a \cdot a\sqrt{2} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{a^2}{2}$.

Kẻ HE, HF lần lượt vuông góc với DA, DB.

Suy ra $HE \perp (ABD)$, $HF \perp (BCD)$ nên góc giữa hai mặt phẳng (ABD), (BCD) bằng góc $\widehat{EHF}$.

Tam giác EHF vuông tại E, ta có $HE = \dfrac{a \cdot DH}{\sqrt{a^2 + DH^2}}$, $HF = \dfrac{DH \cdot a \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2a^2 + DH^2}}$.

Mặt khác: $\cos \widehat{EHF} = \dfrac{HE}{HF} = \sqrt{\dfrac{3}{4}} = \dfrac{\sqrt{DH^2 + 2a^2}}{\sqrt{2 \cdot DH^2 + 2a^2}} \Rightarrow DH = a$.

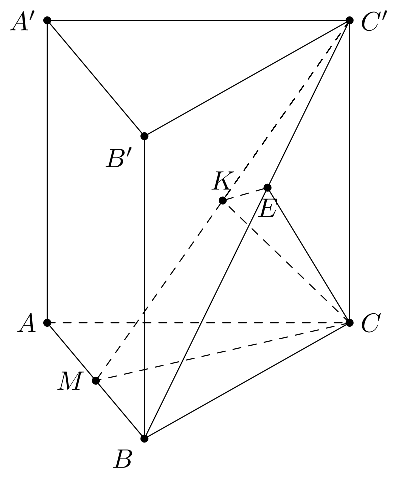
Thể tích tứ diện $ABCD$ là $V_{ABCD} = \dfrac{1}{3} \cdot DH \cdot S_{\triangle ABC} = \dfrac{a^3}{6}$.

Chọn đáp án C □

Câu 26. Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$. Biết khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng (ABC') bằng a, góc giữa hai mặt phẳng (ABC') và $(BCC'B')$ bằng α với $\cos\alpha = \dfrac{1}{2\sqrt{3}}$. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A $V = \dfrac{3a^3\sqrt{2}}{4}$. B $V = \dfrac{3a^3\sqrt{2}}{2}$. C $V = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{2}$. D $V = \dfrac{3a^3\sqrt{2}}{8}$.

Lời giải.



Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và BC.

Do $\begin{cases} AB \perp CC' \\ AB \perp CM \end{cases} \Rightarrow AB \perp (MCC') \Rightarrow (ABC') \perp (MCC')$.

Kẻ CK vuông góc với CM tại K thì ta được $CK \perp (ABC')$, do đó $CK = \mathrm{d}(C; (ABC')) = a$.

Đặt $BC = x, CC' = y, (x > 0, y > 0)$, ta được: $CM = \dfrac{x\sqrt{3}}{2}$.

$\dfrac{1}{CM^2} + \dfrac{1}{CC'^2} = \dfrac{1}{CK^2} \Leftrightarrow \dfrac{4}{3x^2} + \dfrac{1}{y^2} = \dfrac{1}{a^2} (1)$.

Kẻ $CE \perp BC'$ tại E, ta được $\widehat{KEC} = \alpha$, $EC = \dfrac{KC}{\sin\alpha} = \dfrac{a}{\sqrt{1 - \dfrac{1}{12}}} = a\sqrt{\dfrac{12}{11}}$.

Lại có $\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} = \dfrac{1}{CE^2} = \dfrac{11}{12a^2}(2)$.

Giải $(1),(2)$ ta được $x = 2a, y = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là

$V = y \cdot \dfrac{x^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a\sqrt{6}}{2} \cdot \dfrac{4a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{3\sqrt{2}a^3}{2}$.

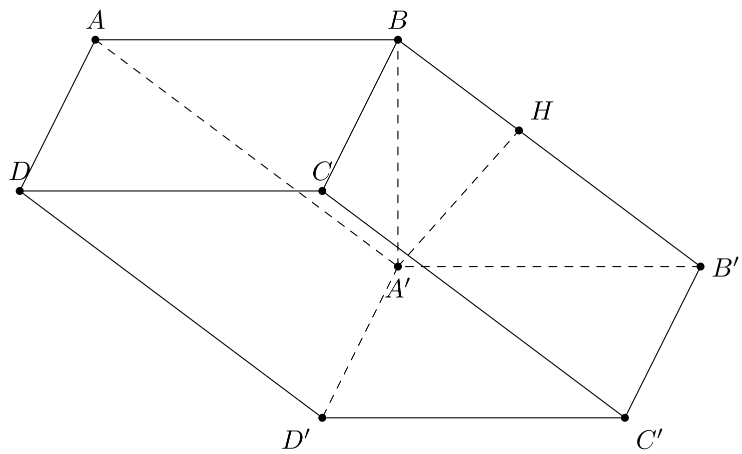
Chọn đáp án B □

Câu 27 (Chuyên Nguyễn Trãi Hải Dương 2019).

Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $A'B$ vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$. Góc giữa AA' với mặt phẳng $(ABCD)$ bằng $45°$. Khoảng cách từ A đến các đường thẳng BB' và DD' bằng 1. Góc giữa mặt phẳng $(BB'C'C)$ và mặt phẳng $(CC'D'D)$ bằng $60°$, Tính thể tích khối hộp đã cho.

A $2\sqrt{3}$. B 2. C $\sqrt{3}$. D $3\sqrt{3}$.

Lời giải.



Ta có $A'B \perp (ABCD) \Rightarrow (AA', ABCD) = \widehat{AA'B} = \widehat{B'BA} = 45°$.

Vì $\mathrm{d}(A, BB') = \mathrm{d}(A', BB') = A'H = 1$ (H là hình chiếu của A lên BB'). Suy ra ta có $A'B' = \dfrac{A'H}{\sin(BB'A)} = \sqrt{2}$ và $A'B = A'B' \cdot \tan(BB'A') = \sqrt{2}$.

Gán hệ trục tọa độ gốc A' với điểm $B \in Oz, B' \in Oy$ và mặt phẳng $(A'B'C'D') \equiv (Oxy)$. Ta có tọa độ các điểm $A'(0,0,0), B\left(0,0,\sqrt{2}\right), B'\left(0,\sqrt{2},0\right)$.

Ta có $D \in (Oxy)$, giả sử $D'(a,b,0); a \geq 0 \Rightarrow C'\left(a, b+\sqrt{2}, 0\right)$.

Chọn $\vec{n}_{(BB'C'C)} = (-b, a, a)$ và $\vec{n}_{(DD'C'C)} = (1,0,0)$.

Vì góc giữa mặt phẳng $(BB'C'C)$ và mặt phẳng $(CC'D'D)$ bằng $60°$. Ta có $\cos(60°) = \dfrac{|-b|}{\sqrt{b^2+2a^2}} \Leftrightarrow b = \pm\dfrac{\sqrt{6}}{3}a$.

Mặt khác ta có đường thẳng DD' có phương trình $\begin{cases} x = a \\ y = b - t \\ z = t \end{cases}$ 4. Vì khoảng cách từ A đến đường thẳng DD' bằng 1. Ta có:

$\mathrm{d}(A, DD'0) = \mathrm{d}(A', DD') = \dfrac{\left|\left[\overrightarrow{A'D'}, \vec{u}_{DD'}\right]\right|}{\left|\vec{u}_{DD'}\right|} \Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{b^2+2a^2}}{\sqrt{2}} = 1 \Rightarrow \sqrt{b^2+2a^2} = \sqrt{2} \Rightarrow b = \pm\sqrt{2}$.

Trường hợp 1: $D\left(\sqrt{3}, \sqrt{2}, 0\right) \Rightarrow V_{ABCD.A'B'C'D'} = A'B \cdot S_{A'B'C'D'} = \sqrt{2} \cdot \left|\left[\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'D'}\right]\right| = 2\sqrt{3}$.

Trường hợp 2. $D\left(\sqrt{3}, -\sqrt{2}, 0\right) \Rightarrow V_{ABCD.A'B'C'D'} = A'B \cdot S_{A'B'C'D'} = \sqrt{2} \cdot \left|\left[\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'D'}\right]\right| = 2\sqrt{3}$.

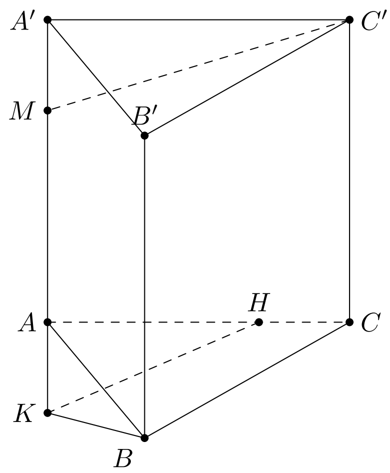
Chọn đáp án A □

Câu 28 (Chuyên Thoại Ngọc Hầu - 2018).

Cho lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = \sqrt{6}$, $AD = \sqrt{3}$, $A'C = 3$ và mặt phẳng $(AA'C'C)$ vuông góc với mặt đáy. Biết hai mặt phẳng $(AA'C'C), (AA'B'B)$ tạo với nhau góc α thỏa mãn $\tan\alpha = \dfrac{3}{4}$. Thể tích khối lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ bằng

(A) $V = 8$. (B) $V = 12$. (C) $V = 10$. (D) $V = 6$.

Lời giải.



Gọi H là hình chiếu của B lên $(ACC'A')$, vậy $BH \perp (ACC'A')$.

$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 3$; $BH = \dfrac{AB \cdot BC}{AC} = \dfrac{\sqrt{6}\cdot\sqrt{3}}{3} = \sqrt{2}$; $HC = \sqrt{BC^2 - BH^2} = 1$; $AH = AC - HC = 2$.

Kẻ $HK \perp AA', (K \in AA')$, $AA' \perp BH$ vì $BH \perp (ACC'A')$ nên $AA' \perp BK$.

$\left(\widehat{(ABB'A');(ACC'A')}\right) = \widehat{BKH}$; $\triangle BKH$ vuông tại H.

$\tan\widehat{BKH} = \dfrac{BH}{KH} \Leftrightarrow \dfrac{3}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{KH} \Rightarrow KH = \dfrac{4\sqrt{2}}{3}$; $AK = \sqrt{AH^2 - AK^2} = \dfrac{2}{3}$.

Gọi M là trung điểm AA'. Tam giác $A'C'A$ cân tại C', $(AC = A'C' = AC' = 3) \Rightarrow C'M \perp AA' \Rightarrow KH \parallel C'M$

$\Rightarrow A'M = \dfrac{AK \cdot A'C'}{AH} = 1 \Rightarrow AA' = 2$; $C'M = \dfrac{A'C' \cdot KH}{AH} = 2\sqrt{2}$.

$S_{ACC'A'} = C'M \cdot AA' = \mathrm{d}(A'; AC) \cdot AC = 4\sqrt{2} \Rightarrow \mathrm{d}(A'; AC) = \dfrac{4\sqrt{2}}{3}$.

$V_{ABCD.A'B'C'D'} = \mathrm{d}(A'; AC) \cdot S_{ABCD} = \dfrac{4\sqrt{2}}{3} \cdot \sqrt{6} \cdot \sqrt{3} = 8$.

Chọn đáp án A □

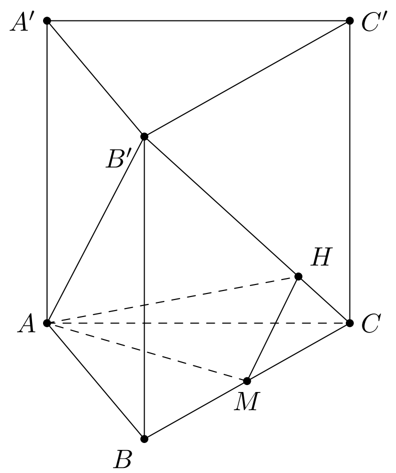
Câu 29 (Cụm 5 Trường Chuyên - Đbsh - 2018).

Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác ABC vuông cân tại A, cạnh $BC = a\sqrt{6}$.

Góc giữa mặt phẳng $(AB'C)$ và mặt phẳng $(BCC'B')$ bằng 60°. Tính thể tích V của khối đa diện $AB'CA'C'$.

Ⓐ $a^3\sqrt{3}$. Ⓑ $\dfrac{3a^3\sqrt{3}}{2}$. Ⓒ $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$. Ⓓ $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải.



Khối đa diện $AB'CA'C'$ là hình chóp $B' \cdot ACC'A'$ có $A'B' \perp (ACC'A')$.

Từ giả thiết tam giác ABC vuông cân tại A, cạnh $BC = a\sqrt{6}$ ta suy ra $AB = AC = a\sqrt{3}$.

Gọi M là trung điểm của BC, suy ra $AM \perp BC$ và $AM = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

Ta có $\begin{cases} AM \perp BC \\ AM \perp BB' \end{cases} \Rightarrow AM \perp (BCC'B') \Rightarrow AM \perp B'C$ (1).

Gọi H là hình chiếu vuông góc của M lên $B'C$, suy ra $MH \perp B'C$ (2).

Từ (1) và (2) ta suy ra $B'C \perp (AMH)$. Từ đó suy ra góc giữa mặt phẳng $(AB'C)$ và mặt phẳng $(BCC'B')$ là góc giữa AH và MH. Mà tam giác AMH vuông tại H nên $\Rightarrow \widehat{AHM} = 60^\circ$

$\Rightarrow MH = AM \cdot \cot 60^\circ = \dfrac{a\sqrt{6}}{2} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Tam giác $B'BC$ đồng dạng với tam giác MHC nên suy ra $\sin \widehat{HCM} = \dfrac{MH}{MC} = \dfrac{\dfrac{a\sqrt{2}}{2}}{\dfrac{a\sqrt{6}}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$\Rightarrow 1 + \tan^2 \widehat{MCH} = \dfrac{1}{1 - \sin^2 \widehat{MCH}} = \dfrac{1}{1 - \dfrac{1}{3}} = \dfrac{3}{2} \Rightarrow \tan \widehat{MCH} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\Rightarrow BB' = BC \cdot \tan \widehat{MCH} = a\sqrt{6} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} = a\sqrt{3}$

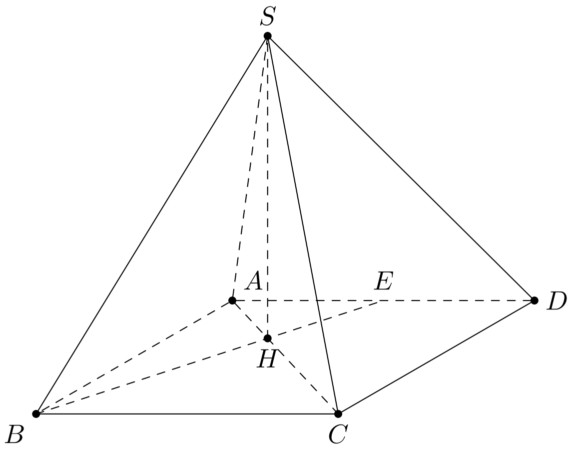
$\Rightarrow V_{AB'CA'C'} = V_{B' \cdot ACC'A'} = \dfrac{1}{3} B'A' \cdot AC \cdot AA' = \dfrac{1}{3} \cdot a\sqrt{3} \cdot a\sqrt{3} \cdot a\sqrt{3} = a^3\sqrt{3}$.

Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 30 (Sở Lào Cai - 2021). Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. E là điểm trên cạnh AD sao cho BE vuông góc với AC tại H và $AB > AE$, cạnh SH vuông góc với mặt phẳng đáy, góc $\widehat{BSH} = 45^\circ$. Biết $AH = \dfrac{2a}{\sqrt{5}}$, $BE = a\sqrt{5}$. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng

Ⓐ $\dfrac{a^3\sqrt{5}}{15}$. Ⓑ $\dfrac{16a^3}{3\sqrt{5}}$. Ⓒ $\dfrac{32a^3}{\sqrt{5}}$. Ⓓ $\dfrac{8a^3\sqrt{5}}{5}$.

Lời giải.



Đặt $AE = x$, $AB = y (y > x)$.

Tam giác ABE vuông tại A, có đường cao AH. Áp dụng các hệ thức lượng trong tam giác vuông ta có:

+) $\begin{cases} BE^2 = AE^2 + AB^2 \\ \dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AE^2} + \dfrac{1}{AB^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5a^2 = x^2 + y^2 \\ \dfrac{5}{4a^2} = \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 5a^2 \\ xy = 2a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 3a \\ xy = 2a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = a \\ y = 2a. \end{cases}$

+) $BH = \dfrac{AB^2}{BE} = \dfrac{4a^2}{a\sqrt{5}} = \dfrac{4\sqrt{5}a}{5} \Rightarrow EH = BE - BH = a\sqrt{5} - \dfrac{4\sqrt{5}a}{5} = \dfrac{\sqrt{5}a}{5}$.

Tam giác SHB vuông cân tại H (có $\widehat{BSH} = 45°$), suy ra: $SH = \dfrac{4\sqrt{5}a}{5}$.

+) $\dfrac{BC}{EA} = \dfrac{BH}{EH} = 4 \Rightarrow BC = 4a$.

Vậy $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3} \cdot SH \cdot S_{ABCD} = \dfrac{1}{6} \cdot SH \cdot AB \cdot BC = \dfrac{1}{6} \cdot \dfrac{4\sqrt{5}a}{5} \cdot 2a \cdot 4a = \dfrac{16\sqrt{5}a^3}{15}$. □

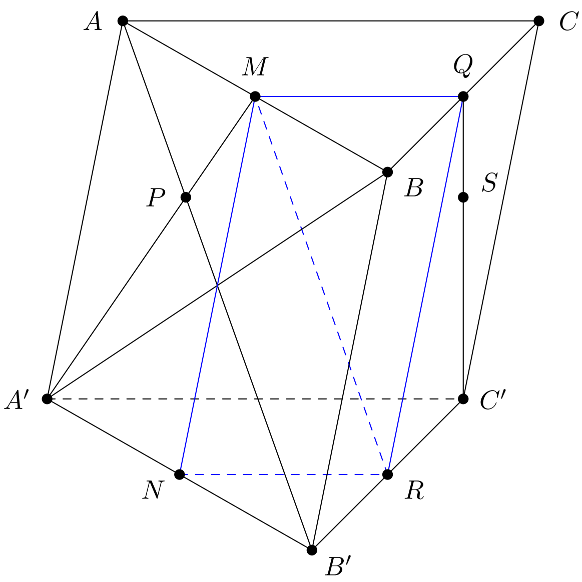
Câu 31 (Liên trường Quỳnh Lưu - Hoàng Mai - Nghệ An - 2021).

Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Gọi M, N, Q, R lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, $A'B'$, BC, $B'C'$ và P, S lần lượt là trọng tâm của các tam giác $AA'B$, $CC'B$. Tỉ số thể tích khối đa diện $MNRQPS$ và khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là

Ⓐ $\dfrac{1}{9}$. Ⓑ $\dfrac{5}{54}$. Ⓒ $\dfrac{1}{10}$. Ⓓ $\dfrac{2}{27}$.

Lời giải.

(*) Cách 1:



Đặt: $V = V_{ABC.A'B'C'}$; $V_{B'.AA'C'C} = \dfrac{1}{3}S_{AA'C'C} \cdot \mathrm{d}\left(B', (AA'C'C)\right) = \dfrac{2}{3}V$.

$$V_{B'\cdot MNRQ} = \frac{1}{3} \cdot S_{MNRQ} \cdot \mathrm{d}\left(B', (MNRQ)\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}S_{AA'C'C}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\mathrm{d}\left(B', (AA'C'C)\right)\right)$$

$$= \left(\frac{1}{3} \cdot S_{AA'C'C} \cdot \mathrm{d}\left(B', (AA'C'C)\right)\right) \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3}V = \frac{1}{6}V.$$

$V_{P.MNRQ} = \dfrac{1}{3} \cdot V_{A'\cdot MNRQ} = \dfrac{1}{3} \cdot V_{B'\cdot MNRQ} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{6}V = \dfrac{1}{18}V$.

$V_{A.BB'C'C} = \dfrac{1}{3}S_{BB'C'C} \cdot \mathrm{d}\left(A, (BB'C'C)\right) = \dfrac{2}{3}V$.

$S_{\triangle QRC'} = \dfrac{1}{2}S_{QRC'C} = \dfrac{1}{4}S_{BB'C'C}$; $S_{\triangle QRS} = \dfrac{1}{3}S_{QRC'} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{4}S_{BB'C'C} = \dfrac{1}{12}S_{BB'C'C}$

$$V_{A\cdot QRS} = \frac{1}{3}S_{\triangle QRS} \cdot \mathrm{d}(A, (QRS)) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{12}S_{BB'C'C}\right) \cdot \left(\mathrm{d}\left(A, (BB'C'C)\right)\right)$$

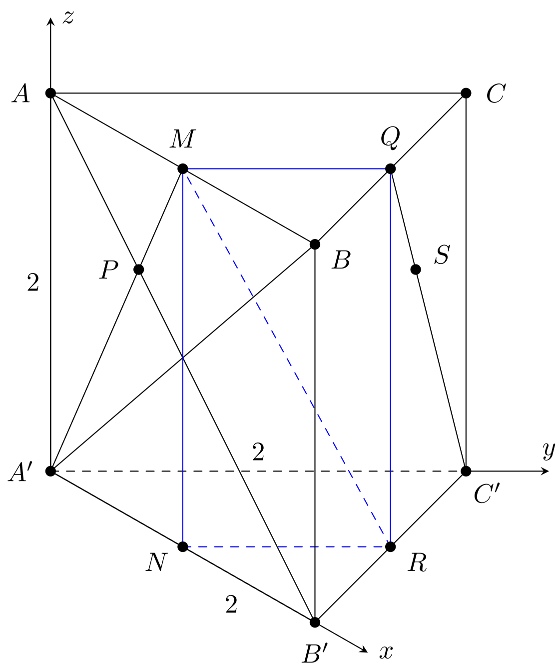
$$= \left(\frac{1}{3} \cdot S_{BB'C'C} \cdot \mathrm{d}\left(A, (BB'C'C)\right)\right) \cdot \frac{1}{12} = \frac{1}{12} \cdot \frac{2}{3}V = \frac{1}{18}V.$$

$V_{P.QRS} = \dfrac{PB'}{AB'} \cdot V_{A.QRS} = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{1}{18}V = \dfrac{1}{27}V$.

$V_{MNRQPS} = V_{P.MNRQ} + V_{P.QRS} = \dfrac{1}{18}V + \dfrac{1}{27}V = \dfrac{5}{54}V$.

Vậy: $\dfrac{V_{MNRQPS}}{V_{ABC.A'B'C'}} = \dfrac{5}{54}$.

(*) Cách 2:



Chuẩn hóa lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là lăng trụ đứng có đáy là $\triangle ABC$ vuông tại A và các cạnh $AB = AC = AA' = 2$. Khi đó: $V_{ABC.A'B'C'} = \left(\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2\right) \cdot 2 = 4$.

Đặt khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ vào hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho: $A' \equiv O$ và B', C', A lần lượt nằm trên chiều dương của các trục Ox, Oy, Oz (như hình vẽ).

Khi đó: $A'(0;0;0)$, $B'(2;0;0)$, $C'(0;2;0)$, $A(0;0;2)$, $B(2;0;2)$, $C(0;2;2)$.

$M(1;0;2)$, $N(1;0;0)$, $R(1;1;0)$, $Q(1;1;2)$, P $\left(\frac{2}{3};0;\frac{4}{3}\right)$, $\overrightarrow{SC'} = -2\overrightarrow{SQ} \Rightarrow S = \left(\frac{2}{3};\frac{4}{3};\frac{4}{3}\right)$.

$\overrightarrow{PM} = \left(\frac{1}{3};0;\frac{2}{3}\right)$, $\overrightarrow{PR} = \left(\frac{1}{3};1;-\frac{4}{3}\right)$, $\overrightarrow{PQ} = \left(\frac{1}{3};1;\frac{2}{3}\right)$, $\overrightarrow{PS} = \left(0;\frac{4}{3};0\right)$.

$V_{P.MQR} = \frac{1}{6} \cdot \left|\left[\overrightarrow{PM};\overrightarrow{PQ}\right]\right| \cdot \overrightarrow{PR} = \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{9}$; $V_{P.MQRN} = 2 \cdot V_{P.MQR} = \frac{2}{9}$.

$V_{P.QRS} = \frac{1}{6} \cdot \left|\left[\overrightarrow{PR};\overrightarrow{PQ}\right]\right| \cdot \overrightarrow{PS} = \frac{1}{6} \cdot \frac{8}{9} = \frac{4}{27}$.

$V_{MNRQPS} = V_{P.MQRN} + V_{P.QRS} = \frac{2}{9} + \frac{4}{27} = \frac{10}{27}$.

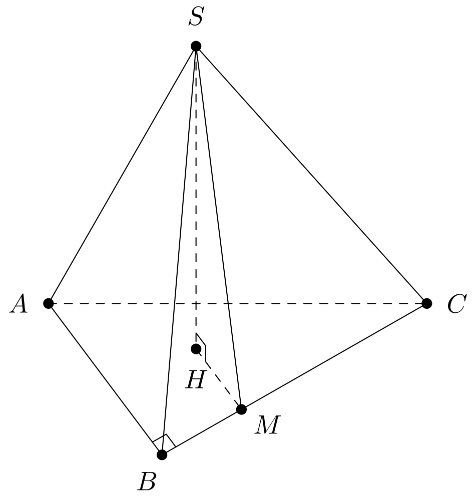
Vậy: $\frac{V_{MNRQPS}}{V_{ABC.A'B'C'}} = \frac{\frac{10}{27}}{4} = \frac{5}{54}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 32 (Chuyên KHTN - 2021). Cho hình chóp $S.ABC$ có $AB = 3a$, $BC = 4a$, $CA = 5a$, các mặt bên tạo với đáy góc $60°$, hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng (ABC) thuộc miền trong của tam giác ABC. Tính thể tích hình chóp $S.ABC$.

(A) $2a^3\sqrt{3}$. (B) $6a^3\sqrt{3}$. (C) $12a^3\sqrt{3}$. (D) $2a^3\sqrt{2}$.

Lời giải.



Ta có $AC^2 = 25a^2 = 9a^2 + 16a^2 = AB^2 + BC^2$, vậy tam giác ABC vuông tại B.

Gọi H là hình chiếu của S trên mặt phẳng (ABC). Vì các mặt bên tạo với đáy góc 60° suy ra: $\mathrm{d}(H;AC) = \mathrm{d}(H;BC) = \mathrm{d}(H;AB)$ và H thuộc miền trong của tam giác ABC nên H là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

Từ H kẻ đường thẳng vuông góc với BC tại M, suy ra:

$\begin{cases} BC \perp HM \\ BC \perp SH \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SHM) \Rightarrow BC \perp SM.$

Suy ra: $\widehat{SMH} = ((SBC);(ABC)) = 60^\circ$.

Đoạn HM là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC, suy ra:

$HM = \dfrac{S_{\triangle ABC}}{p} = \dfrac{AB \cdot BC}{AB + BC + CA} = \dfrac{3a \cdot 4a}{3a + 4a + 5a} = \dfrac{12a^3}{12a} = a.$

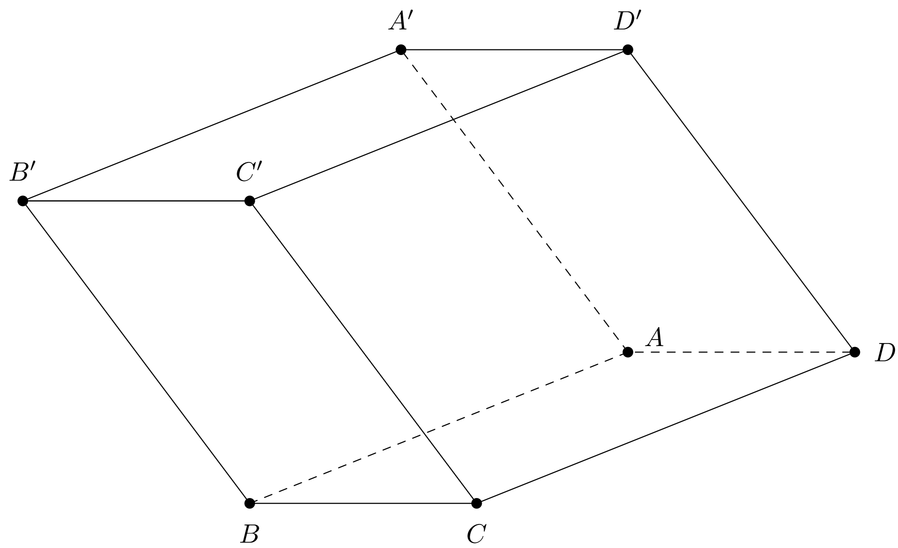
$SH = HM \cdot \tan 60^\circ = a\sqrt{3}.$

Vậy $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{6} AB \cdot BC \cdot SH = \dfrac{1}{6} \cdot 3a \cdot 4a \cdot a\sqrt{3} = 2a^3\sqrt{3}.$

Chọn đáp án A □

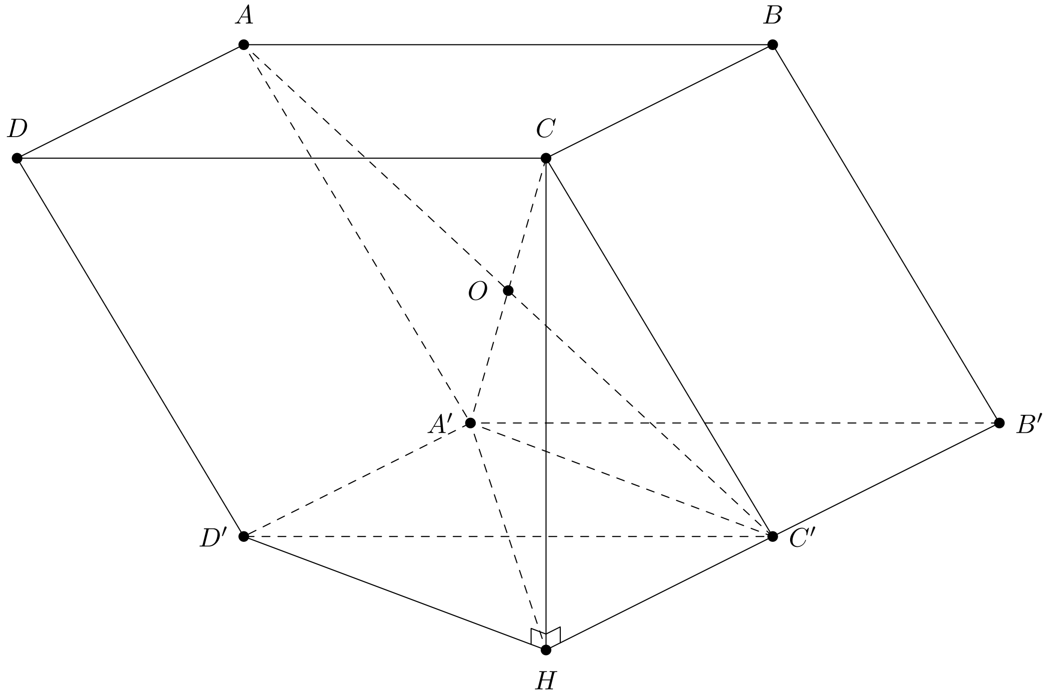
Câu 33 (Chuyên Quang Trung - Bình Phước - 2021).

Cho hình lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ đáy là hình bình hành. Với $AC = BC = a, CD = a\sqrt{2}, AC' = a\sqrt{3}, \widehat{CA'B'} = \widehat{A'D'C} = 90^\circ$. Thể tích khối tứ diện $BCDA'$ là



(A) $\frac{a^3}{6}$. (B) a^3. (C) $\frac{2a^3}{3}$. (D) $\sqrt{6}a^3$.

Lời giải.



Ta có tam giác ABC vuông cân tại C.

Gọi O là trung điểm của $AC' \Rightarrow OC' = OA = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Gọi H là chân đường cao hạ từ C' xuống mặt $(A'B'C'D')$.

Ta có: $\begin{cases} A'D' \perp CH \\ A'D' \perp D'C \end{cases} \Rightarrow A'D' \perp HD'$.

Lại có: $\begin{cases} A'B' \perp A'C \\ A'B' \perp CH \end{cases} \Rightarrow A'B' \perp A'H$.

Ta có: $A'H \perp A'B' \Rightarrow \widehat{HA'B'} = 90°$; $\widehat{A'D'H} = 90°$. Tam giác $A'D'H$ vuông cân tại D'.

Giả sử $CH = x \Rightarrow CA' = \sqrt{x^2 + 2a^2}$.

$CC'^2 = x^2 + a^2$.

$C'O = \frac{CC'^2 + C'A'^2}{2} - \frac{CA'^2}{4} \Leftrightarrow \frac{3a^2}{4} = \frac{x^2 + a^2 + a^2}{2} - \frac{x^2 + 2a^2}{4} = \frac{x^2 + 2a^2}{4}$.

$x^2 + 2a^2 = 3a^2 \Rightarrow x = a = CH$.

$V_{BCDA'} = \frac{1}{6}V_{ABCD.A'B'C'D} = \frac{1}{6} \cdot CH \cdot S_{ABCD} = \frac{a^3}{6}$.

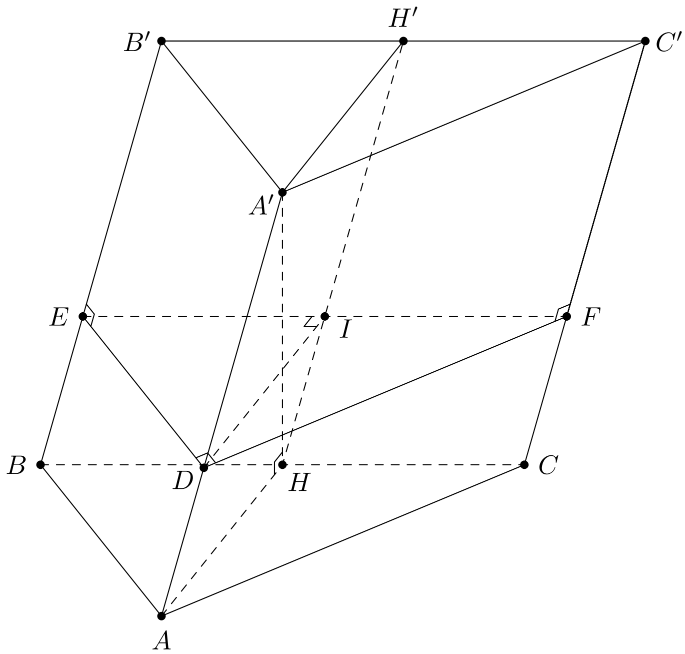
Chọn đáp án (A) □

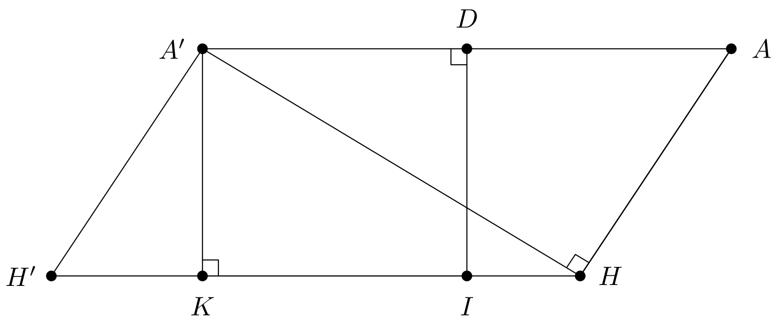
Câu 34 (Chuyên ĐHSP Hà Nội - 2021).

Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều. Hình chiếu vuông góc của A' trên (ABC) là trung điểm của BC. Mặt phẳng (P) vuông góc với các cạnh bên và cắt các cạnh bên của hình lăng trụ lần lượt tại D, E, F. Biết mặt phẳng $(ABBA')$ vuông góc với mặt phẳng $(ACC'A')$ và chu vi của tam giác DEF bằng 4, thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

(A) $12\left(10 - 7\sqrt{2}\right)$. (B) $4\left(10 + 7\sqrt{2}\right)$. (C) $6\left(10 - 7\sqrt{2}\right)$. (D) $12\left(10 + 7\sqrt{2}\right)$.

Lời giải.





Gọi H và H' lần lượt là trung điểm của BC và $B'C'$.

Khi đó ta có $\begin{cases} BC \perp A'H \\ BC \perp AH \end{cases} \Rightarrow BC \perp AA' \Rightarrow BC \perp BB', BC \perp CC'$, suy ra $BB'C'C$ là hình chữ nhật.

Vì $E \in BB'$, $F \in CC'$, và $EF \perp BB'$, $EF \perp CC'$ (do $EF \subset (P)$ vuông góc với các cạnh bên của lăng trụ), suy ra $EF \parallel BC$ và $EF = BC = a$ (giả sử cạnh đáy của lăng trụ là a).

Gọi I là trung điểm của $HH' \Rightarrow I$ cũng là trung điểm của EF.

Kẻ $ED \perp AA'$, $D \in AA'$, suy ra $DF \perp AA'$.

Do $(ABB'A') \perp (ACC'A')$ nên suy ra $ED \perp DF$. Hơn nữa dễ thấy $DE = DF$, nên $\triangle DEF$ vuông cân tại D. Suy ra $2ED^2 = EF^2 = a^2 \Rightarrow ED = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Chu vi $\triangle DEF$ bằng $DE + DF + EF = a\sqrt{2} + a = 4 \Rightarrow a = 4(\sqrt{2} - 1)$.

Xét hình bình hành $AA'H'H$, kẻ $A'K \perp HH'$.

Ta thấy, $ID \perp AA' \Rightarrow ID \perp HH'$, suy ra $A'K \parallel ID \Rightarrow A'K = ID = \dfrac{EF}{2} = \dfrac{a}{2}$ (do $\triangle DEF$ vuông cân tại D).

Khi đó, ta có diện tích hình bình hành $AA'H'H$ bằng $A'K \cdot AA' = A'H \cdot AH$

$\Rightarrow \dfrac{a}{2} \cdot AA' = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \cdot A'H \Rightarrow AA' = \sqrt{3}A'H$.

Mà $AA'^2 = A'H^2 + AH^2 \Rightarrow 2A'H^2 = AH^2 = \dfrac{3a^2}{4} \Rightarrow A'H = \dfrac{a\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$.

$S_{ABC} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Suy ra $V_{ABC.A'B'C'} = A'H \cdot S_{ABC} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \cdot \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Với $a = 4(\sqrt{2}-1)$ thì $V_{ABC.A'B'C'} = \dfrac{4(\sqrt{2}-1)}{2\sqrt{2}} \cdot \dfrac{16(\sqrt{2}-1)^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 12\left(10 - 7\sqrt{2}\right)$.

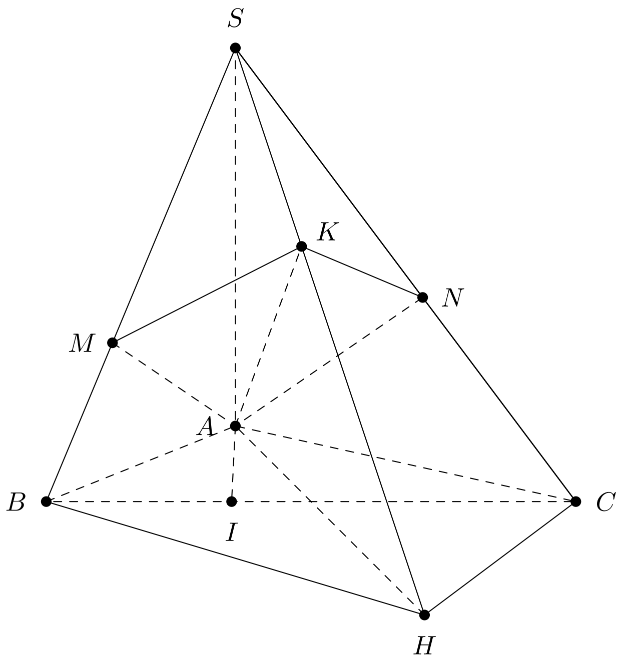
Chọn đáp án A □

Câu 35 (THPT Đào Duy Từ - Hà Nội - 2021).

Cho khối chóp $S.ABC$ có $AB = 2, AC = 3$ và $\widehat{BAC} = 120^\circ$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi M, N lần lượt là hình chiếu của A trên SB và SC. Biết góc giữa mặt phẳng (ABC) và (AMN) bằng 60°. Thể tích của khối chóp đã cho bằng

A $\sqrt{57}$. B $3\sqrt{57}$. C $\dfrac{\sqrt{57}}{3}$. D $\dfrac{3\sqrt{57}}{2}$.

Lời giải.



Ttrong mặt phẳng (ABC): Kẻ $HC \perp AC, HB \perp AB$

$\Rightarrow HB \perp (SAB), HC \perp (SAC)$

$\Rightarrow AM \perp (SBH), AN \perp (SCH) \Rightarrow SH \perp (AMN)$.

Mà $SA \perp (ABC), \widehat{ASH} < 90^\circ$

$\Rightarrow \left(\widehat{(AMN),(ABC)}\right) = \left(\widehat{SA, SH}\right) = \widehat{ASH}$

$\Rightarrow \widehat{ASH} = 60^\circ; BC = \sqrt{AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos 120^\circ} = \sqrt{19}$.

$S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin 120^\circ = \dfrac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{3\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AI = \dfrac{2S_{\triangle ABC}}{BC} = \dfrac{3\sqrt{3}}{\sqrt{19}}$

$$AH = \dfrac{AB}{\sin \widehat{BCA}} = \dfrac{AB}{\dfrac{AI}{AC}} = \dfrac{AB \cdot AC}{AI} = \dfrac{2 \cdot 3}{\dfrac{3\sqrt{3}}{\sqrt{19}}} = \dfrac{2\sqrt{19}}{\sqrt{3}}$$

$$SA = \dfrac{AH}{\tan 60^\circ} = \dfrac{\dfrac{2\sqrt{19}}{\sqrt{3}}}{\sqrt{3}} = \dfrac{2\sqrt{19}}{3} \Rightarrow V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3} \cdot SA \cdot S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{2\sqrt{19}}{3} \cdot \dfrac{3\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\sqrt{57}}{3}.$$

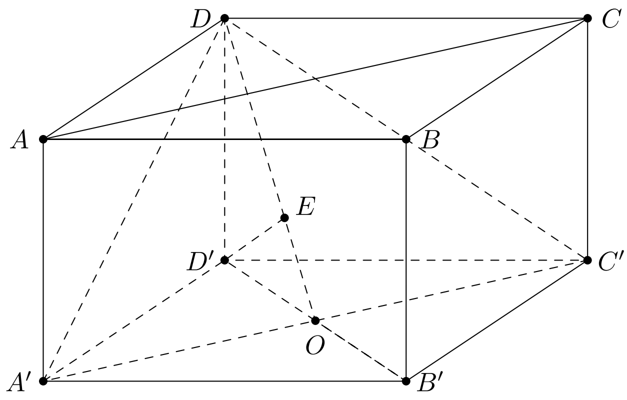
Chọn đáp án (C) □

Câu 36 (THPT Đặng Thúc Hứa - Nghệ An - 2021).

Cho khối lăng trụ tứ giác đều $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình vuông; khoảng cách và góc giữa hai đường thẳng AC và DC' lần lượt bằng $\dfrac{3\sqrt{7}a}{7}$ và φ với $\cos\varphi = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$. Thể tích khối lăng trụ đã cho bằng

(A) $3a^3$. (B) $9a^3$. (C) $3\sqrt{3}a^3$. (D) $\sqrt{3}a^3$.

Lời giải.



$\mathrm{d}(AC, DC') = \mathrm{d}(AC, (A'C'D)) = \mathrm{d}(A, (A'C'D)) = \mathrm{d}(D', (A'C'D)) = \dfrac{3a}{\sqrt{7}}$.

$\varphi = \widehat{A'C'D}$ với $\cos\varphi = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

Đặt $DD' = x, D'E = \dfrac{3a}{\sqrt{7}}$, ta có $\dfrac{1}{DD'^2} + \dfrac{1}{D'O^2} = \dfrac{1}{D'E^2} = \dfrac{7}{9a^2} \Leftrightarrow \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{D'O^2} = \dfrac{7}{9a^2}$

$\Rightarrow D'O = \dfrac{3ax}{\sqrt{7x^2 - 9a^2}} \Rightarrow DO = \sqrt{\dfrac{9a^2x^2}{7x^2 - 9a^2} + x^2} = \dfrac{x^2 \cdot \sqrt{7}}{\sqrt{7x^2 - 9a^2}}$.

và $\tan\varphi = \sqrt{\dfrac{1}{\cos^2\varphi} - 1} = \sqrt{7}$.

Khi đó $\tan\varphi = \dfrac{DO}{OC'} = \dfrac{x\sqrt{7}}{3a} = \sqrt{7} \Rightarrow x = 3a$.

Vì $AA' = 3a$ và $AB = \dfrac{3ax\sqrt{2}}{\sqrt{7x^2 - 9a^2}} = a\sqrt{3}$ nên $V_{ABCD.A'B'C'D'} = AA' \cdot S_{ABCD} = 9a^3$.

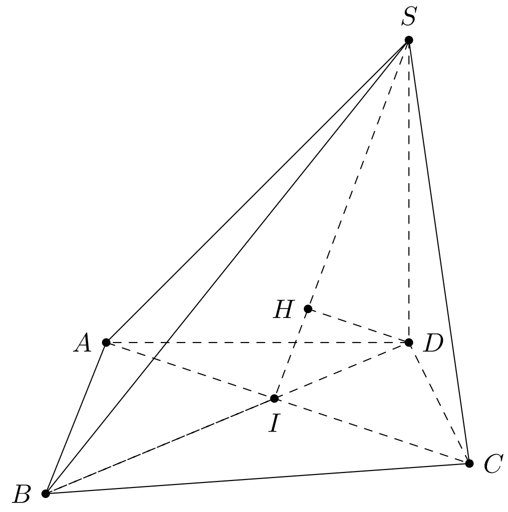
Chọn đáp án (B) □

Câu 37 (THPT Hậu Lộc 4 - Thanh Hóa - 2021).

Cho hình chóp $S.ABC$ có $AB = BC = a$, góc $\widehat{ABC} = 120^\circ$, $\widehat{SAB} = \widehat{SCB} = 90^\circ$ và khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SAC) bằng $\dfrac{2a}{\sqrt{21}}$. Tính thể tích khối $S.ABC$.

(A) $V = \dfrac{a^3\sqrt{5}}{10}$. (B) $V = \dfrac{a^3\sqrt{15}}{10}$. (C) $V = \dfrac{a^3\sqrt{15}}{5}$. (D) $V = \dfrac{a^3\sqrt{5}}{2}$.

Lời giải.



Gọi D là hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng (ABC).

Có $\begin{cases} BC \perp SC \\ BC \perp SD \end{cases} \Rightarrow BC \perp CD.$

Có $\begin{cases} AB \perp SD \\ AB \perp SA \end{cases} \Rightarrow AB \perp AD.$

Gọi I là giao điểm của BD và AC (BD là đường phân giác của góc $\widehat{ABC}$).

$BD = \dfrac{BC}{\cos 60^\circ} = 2a$; $BI = BC \cdot \cos 60^\circ = \dfrac{a}{2}$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của D lên SI.

$\begin{cases} (SAC) \perp (SBC) \\ (SAC) \cap (SBC) = SI \\ DH \perp SI \end{cases} \Rightarrow DH \perp (SAC)$ hay $DH = \mathrm{d}\,(D; (SAC))$.

Ta có: $\mathrm{d}\,(D; (SAC)) = \dfrac{DI}{BI} \cdot \mathrm{d}\,(B; (SAC)) = 3 \cdot \dfrac{2a}{\sqrt{21}} = \dfrac{6a}{\sqrt{21}} = DH$.

Suy ra: $SD = \dfrac{DI \cdot DH}{\sqrt{DI^2 - DH^2}} = \dfrac{\dfrac{3a}{2} \cdot \dfrac{6a}{\sqrt{21}}}{\sqrt{\dfrac{9a^2}{4} - \dfrac{12a^2}{7}}} = \dfrac{6a\sqrt{5}}{5}$.

Vậy $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3} SD \cdot S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{6a\sqrt{5}}{5} \cdot \dfrac{1}{2} a \cdot a \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a^3\sqrt{15}}{10}$.

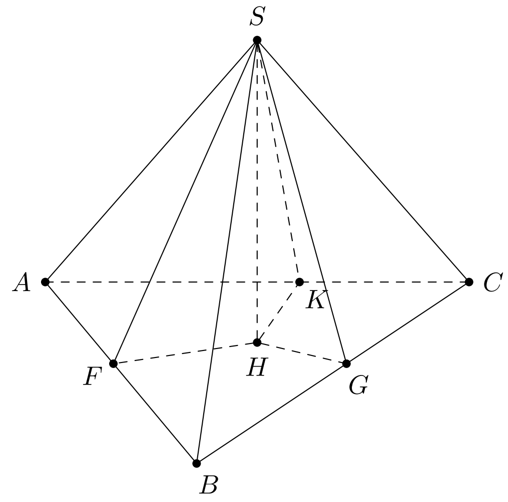
Chọn đáp án (B) □

Câu 38 (THPT Triệu Sơn - Thanh Hóa - 2021).

Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng 1, biết khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng $\dfrac{\sqrt{6}}{4}$, khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SCA) bằng $\dfrac{\sqrt{15}}{10}$, khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SAB) bằng $\dfrac{\sqrt{30}}{20}$ và hình chiếu vuông góc của S xuống đáy nằm trong tam giác ABC. Tính thể tích khối chóp $V_{S.ABC}$.

(A) $\dfrac{1}{24}$. (B) $\dfrac{1}{12}$. (C) $\dfrac{1}{36}$. (D) $\dfrac{1}{48}$.

Lời giải.



Gọi H là hình chiếu của S trên (ABC). F, G, K lần lượt là hình chiếu của H trên AB, BC, CA.

Đặt $V = V_{S.ABC}; h = SH$.

Ta có $3V = h \cdot S_{\triangle ABC} = \mathrm{d}(A, (SBC)) \cdot S_{\triangle SBC} = \mathrm{d}(B, (SAC)) \cdot S_{\triangle SAC} = \mathrm{d}(C, (SAB)) \cdot S_{\triangle SAB}$

$\Rightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{4}h = \dfrac{\sqrt{6}}{4} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot SF = \dfrac{\sqrt{15}}{10} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot SG = \dfrac{\sqrt{30}}{20} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot SK$

$\Rightarrow SF = h\sqrt{2}; SG = h\sqrt{5}; SK = h\sqrt{10} \Rightarrow HF = h; HG = 2h; HK = 3h.$

Mặt khác $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle HAB} + S_{\triangle HBC} + S_{\triangle HCA} \Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{4} = \dfrac{1}{2}HF + \dfrac{1}{2}HG + \dfrac{1}{2}HK \Leftrightarrow h = \dfrac{\sqrt{3}}{12}.$

Vậy $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{12} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{4} = \dfrac{1}{48}.$

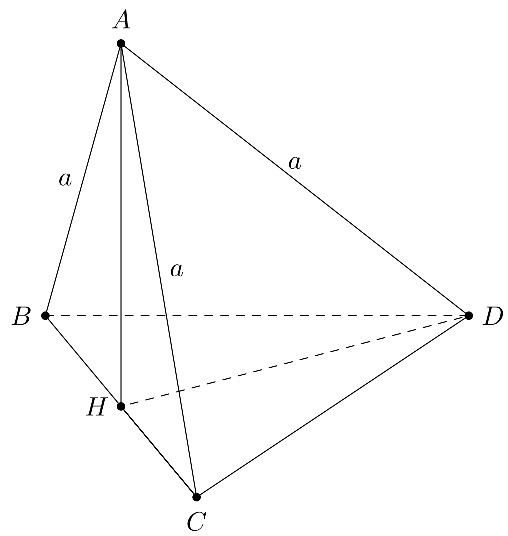
Chọn đáp án D □

Câu 39 (THPT Ngô Quyền - Quảng Ninh - 2021).

Tứ diện $ABCD$ có $AB = AC = AD = a$, $\widehat{BAC} = 120°$, $\widehat{BAD} = 60°$ và tam giác BCD là tam giác vuông tại D. Tính thể tích khối tứ diện $ABCD$.

Ⓐ $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{4}$. Ⓑ $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}$. Ⓒ $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}$. Ⓓ $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{12}$.

Lời giải.



Gọi H là hình chiếu của A lên (BCD).

Dễ thấy, $\triangle AHB = \triangle AHC = \triangle AHD \Rightarrow HB = HC = HD$.

Do đó, H là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle BCD \Rightarrow H$ là trung điểm của BC.

Xét tam giác ABC, có $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos \widehat{BAC} = a^2 + a^2 - 2a \cdot a \cdot \cos 120^\circ = 3a^2$

$\Rightarrow BC = a\sqrt{3} \Rightarrow BH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Xét $\triangle AHB$ vuông tại H, có $AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = \sqrt{a^2 - \left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \dfrac{a}{2}$.

Xét $\triangle ABD$, có $AB = AD = a$ và $\widehat{BAD} = 60^\circ \Rightarrow \triangle ABD$ là tam giác đều cạnh $a \Rightarrow BD = a$.

Xét $\triangle BDC$ vuông tại D, có $CD = \sqrt{BC^2 - BD^2} = \sqrt{3a^2 - a^2} = a\sqrt{2}$

$\Rightarrow S_{\triangle BDC} = \dfrac{1}{2} \cdot a \cdot a\sqrt{2} = \dfrac{a^2\sqrt{2}}{2}$ (đvdt).

Vậy $V_{ABCD} = \dfrac{1}{3} AH \cdot S_{\triangle BCD} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{a}{2} \cdot \dfrac{a^2\sqrt{2}}{2} = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{12}$ (đvtt).

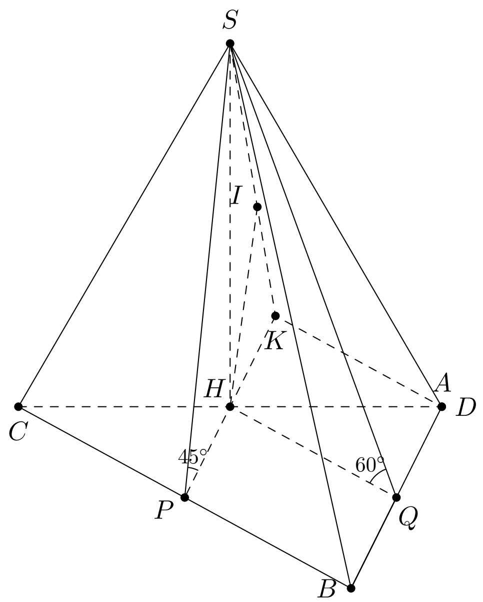
Chọn đáp án D □

Câu 40 (Chuyên Bắc Giang - 2021).

Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, mặt bên SAC là tam giác cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Hai mặt phẳng (SAB) và (SBC) lần lượt tạo với đáy các góc 60° và 45°, khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC bằng a. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$ theo a.

A. $\dfrac{\sqrt{6}a^3}{18}$. B. $\dfrac{\sqrt{2}a^3}{12}$. C. $\dfrac{\sqrt{2}a^3}{6}$. D. $\dfrac{\sqrt{6}a^3}{12}$.

Lời giải.



Gọi H là trung điểm cạnh AC, có $\triangle SAC$ cân tại S nên $SH \perp AC$.

Lại có: $(SAC) \perp (ABC)$.

$(SAC) \cap (ABC) = AC$.

Suy ra: $SH \perp (ABC)$.

Kẻ $HP \perp BC, HQ \perp AB$.

Ta có: $\begin{cases} BC \perp HP \\ BC \perp SH \,(\text{do } SH \perp (ABC)) \end{cases} \Rightarrow BC \perp SP.$

Vậy có: $\begin{cases} (SBC) \cap (ABC) = BC \\ SP \subset (SBC), SP \perp BC \\ HP \subset (ABC), HP \perp BC \end{cases} \Rightarrow \left(\widehat{(SBC),(ABC)}\right) = \left(\widehat{SP,HP}\right) = \widehat{SPH} = 45^\circ$.

Tương tự, $\left(\widehat{(SAB),(ABC)}\right) = \left(\widehat{SQ,HQ}\right) = \widehat{SQH} = 60^\circ$.

Từ A, kẻ đường thẳng d // BC, kẻ $HK \perp d$, nối SK, kẻ $HI \perp HK$.

Có $\begin{cases} AK \perp HK (\text{cd}) \\ AK \perp SH\,(\text{do } SH \perp (ABC), AK \subset (ABC)) \\ HK \cap SH = H \\ HK, SH \subset (SHK) \end{cases} \Rightarrow AK \perp (SHK) \Rightarrow AK \perp HI$.

Mà $HI \perp SK; AK \cap SK = K; AK, SK \subset (SAK)$

$\Rightarrow HI \perp (SAK) \Rightarrow \mathrm{d}\,(H,(SAK)) = HI$.

Ta có: $\begin{cases} BC \parallel AK \\ AK \subset (SAK) \Rightarrow BC \parallel (SAK) \text{ mà } SA \subset (SAK) \\ BC \not\subset (SAK) \end{cases}$

$\Rightarrow \mathrm{d}(SA,BC) = \mathrm{d}\,(BC,(SAK)) = \mathrm{d}\,(B,(SAK)) = 2\mathrm{d}\,(H,(SAK)) = 2HI = a$

$\Rightarrow HI = \dfrac{a}{2}$.

Lại có: $\begin{cases} BC \parallel AK \\ HK \perp AK, HP \perp BC \end{cases} \Rightarrow H, K, P$ thẳng hàng và $\dfrac{HP}{HK} = \dfrac{HC}{HA} = 1 \Rightarrow HK = HP$. Đặt: $SH = x\ (x > 0)$.

Tam giác SHP vuông tại H, $\widehat{SPH} = 45^\circ \Rightarrow HP = x \Rightarrow HK = x$.

$\triangle SHK$ vuông tại $H, HI \perp SK \Rightarrow HI = \dfrac{SH \cdot HK}{\sqrt{SH^2 + HK^2}} \Rightarrow \dfrac{a}{2} = \dfrac{x^2}{x\sqrt{2}} \Rightarrow x = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$.

Tam giác SHQ vuông tại H, $\widehat{SPQ} = 60^\circ \Rightarrow HQ = \dfrac{SH}{\tan 60^\circ} = \dfrac{x}{\sqrt{3}}$.

Mặt khác, $\triangle ABC$ vuông tại B nên $HP \parallel AB$, $HQ \parallel BC$ mà H là trung điểm của AC nên HP, HQ là các đường trung bình của $\triangle ABC \Rightarrow AB = 2x = a\sqrt{2}, BC = \dfrac{2x}{\sqrt{3}} = \dfrac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

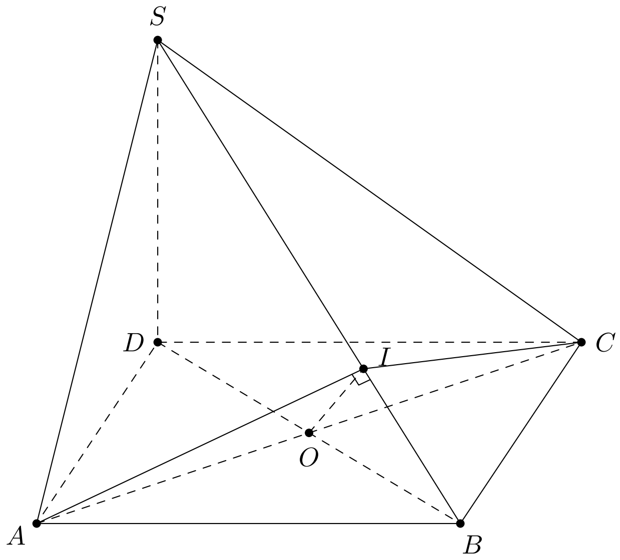
Vậy $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3} \cdot SH \cdot S_{ABC} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{a}{\sqrt{2}} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot a\sqrt{2} \cdot \dfrac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{18}$.

Chọn đáp án A □

Câu 41 (Chuyên Biên Hòa - 2021). Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B với $BA = BC = 3a$; $\widehat{SAB} = \widehat{SCB} = 90^\circ$. Biết góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SBA) bằng α với $\cos\alpha = \dfrac{1}{3}$. Thể tích của khối chóp $S.ABC$ bằng

A. $\dfrac{3\sqrt{2}a^3}{2}$. B. $\dfrac{27\sqrt{2}a^3}{2}$. C. $\dfrac{9\sqrt{2}a^3}{2}$. D. $9\sqrt{2}a^3$.

Lời giải.



Dựng hình bình hành $ABCD$.

Từ gt $\Rightarrow ABCD$ là hình vuông; $SA \perp AB$; $SC \perp BC \Rightarrow SA \perp CD$; $SC \perp AD$.

Do đó $CD \perp (SAD)$; $AD \perp (SCD) \Rightarrow CD \perp SD$; $AD \perp SD \Rightarrow SD \perp (ABCD)$.

Trong $(ABCD)$: Gọi $O = AC \cap BD$.

Trong (SAB): Kẻ $AI \perp SB$ tại I.

Mà $AC \perp BD$; $SD \perp AC \Rightarrow AC \perp (SBD) \Rightarrow AC \perp SB \Rightarrow SB \perp (CIA)$

$\Rightarrow (\widehat{(SBC);(SBA)}) = \widehat{(IA;IC)}$.

Dễ thấy $\triangle SBD \sim \triangle OBI \Rightarrow \dfrac{OI}{SD} = \dfrac{OB}{SB} \Rightarrow OI = \dfrac{OB \cdot SD}{SB} = \dfrac{3\sqrt{2}SD}{2\sqrt{SD^2+18}}$

$\Rightarrow IC = \sqrt{OI^2 + OC^2} = \sqrt{\dfrac{9SD^2}{2\left(SD^2+18\right)} + \dfrac{9}{2}}$.

Lại có: $\triangle SAB = \triangle SCB \Rightarrow IA = IC = \sqrt{\dfrac{9SD^2}{2\left(SD^2+18\right)} + \dfrac{9}{2}}$.

Ta có:

$$\cos\alpha = \left|\cos\widehat{CIA}\right| \Leftrightarrow \left|\frac{IA^2 + IC^2 - AC^2}{2IA \cdot IC}\right| = \frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow \left|\frac{\dfrac{9SD^2}{SD^2+18} + 9 - 18}{\dfrac{9SD^2}{SD^2+18} + 9}\right| = \frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow SD = 3\sqrt{2}.$$

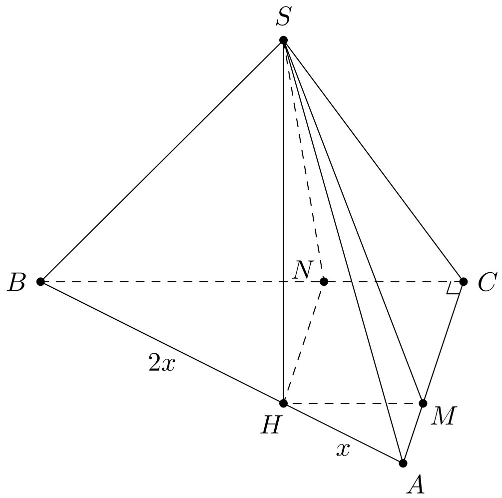
Vậy thể tích của khối chóp $S.ABC$ là $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}SD \cdot S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{3}SD \cdot \dfrac{1}{2}AB \cdot BC = \dfrac{9\sqrt{2}a^3}{2}$.

Chọn đáp án B □

Câu 42 (Chuyên ĐHSP - 2021). Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại C, H là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{HB} = -2 \cdot \overrightarrow{HA}$ và $SH \perp (ABC)$, các mặt bên (SAC) và (SBC) cùng tạo với đáy góc 45°. Biết $SB = a\sqrt{6}$, thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng

A. $\dfrac{3a^3}{4}$. B. $\dfrac{9a^3}{4}$. C. $\dfrac{3\sqrt{2}a^3}{4}$. D. $\dfrac{3a^3}{2}$.

Lời giải.



Gọi M, N lần lượt là hình chiếu của H trên các cạnh CA, CB. Ta có: $\widehat{SMH} = \widehat{SNH} = 45°$.

Suy ra: $HM = SH = HN$ hay $MCNH$ là hình vuông.

Đặt $HA = x$, suy ra $HB = 2x$.

$$\begin{cases} \dfrac{AC}{MC} = \dfrac{AB}{HB} = \dfrac{3}{2} \Rightarrow AC = \dfrac{3}{2}MC \\ \dfrac{BC}{NC} = \dfrac{BA}{HA} = 3 \Rightarrow BC = 3NC \\ MC = NC \end{cases} \Rightarrow BC = 2AC.$$

Tam giác ABC vuông tại C, suy ra $CB^2 + CA^2 = BC^2 \Leftrightarrow 5CA^2 = 9x^2 \Leftrightarrow CA = \dfrac{3x\sqrt{5}}{5}$.

Suy ra: $SH = HM = CM = \dfrac{2}{3}AC = \dfrac{2x\sqrt{5}}{5}$.

Mặt khác tam giác SHB vuông tại H nên $SB^2 = BH^2 + HS^2 \Leftrightarrow 6a^2 = 4x^2 + \dfrac{20}{25}x^2 \Leftrightarrow x = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$.

Vậy thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng

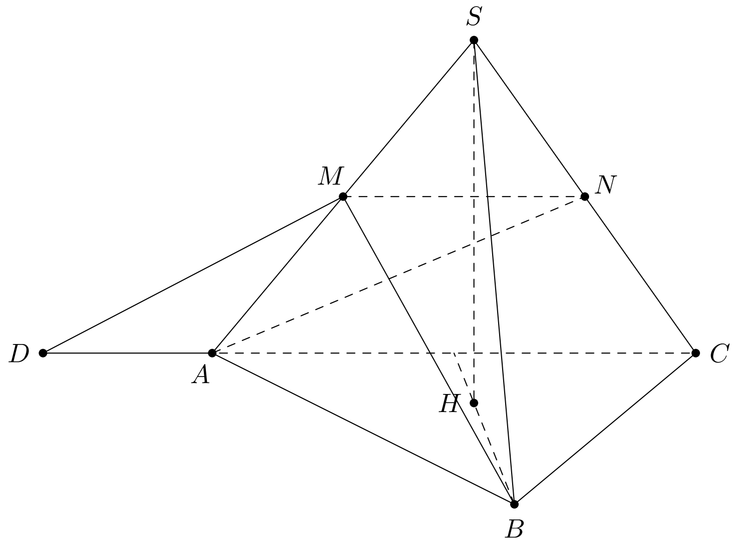
$V_{S.ABC} = \dfrac{1}{6} \cdot SH \cdot CA \cdot CB = \dfrac{1}{6} \cdot \dfrac{2x\sqrt{5}}{5} \cdot \dfrac{3x\sqrt{5}}{5} \cdot 2\dfrac{3x\sqrt{5}}{5} = \dfrac{6x^3\sqrt{5}}{25} = \dfrac{3a^3}{4}$.

Chọn đáp án B □

Câu 43 (Sở Bình Phước - 2021). Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$, cạnh đáy bằng a. Các điểm M, N lần lượt là trung điểm của SA, SC. Biết rằng BM vuông góc với AN. Thể tích của khối chóp bằng

A. $\dfrac{\sqrt{7}}{24}a^3$. B. $\dfrac{\sqrt{7}}{8}a^3$. C. $\dfrac{\sqrt{14}}{8}a^3$. D. $\dfrac{\sqrt{14}}{24}a^3$.

Lời giải.



Gọi D sao cho $MNAD$ là hình bình hành. BM vuông góc với AN nên tam giác DMB vuông cân tại M. Suy ra: $BM = \dfrac{BD}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{a^2 + \left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2}}{\sqrt{2}} = \dfrac{a\sqrt{14}}{4}$.

Gọi cạnh $SA = x, x > 0$. BM là đường trung tuyến tam giác SAB nên ta có:

$BM^2 = \dfrac{2\left(BA^2 + BS^2\right) - SA^2}{4} \Leftrightarrow \left(\dfrac{a\sqrt{14}}{4}\right)^2 = \dfrac{2\left(a^2 + x^2\right) - x^2}{4} \Leftrightarrow x = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

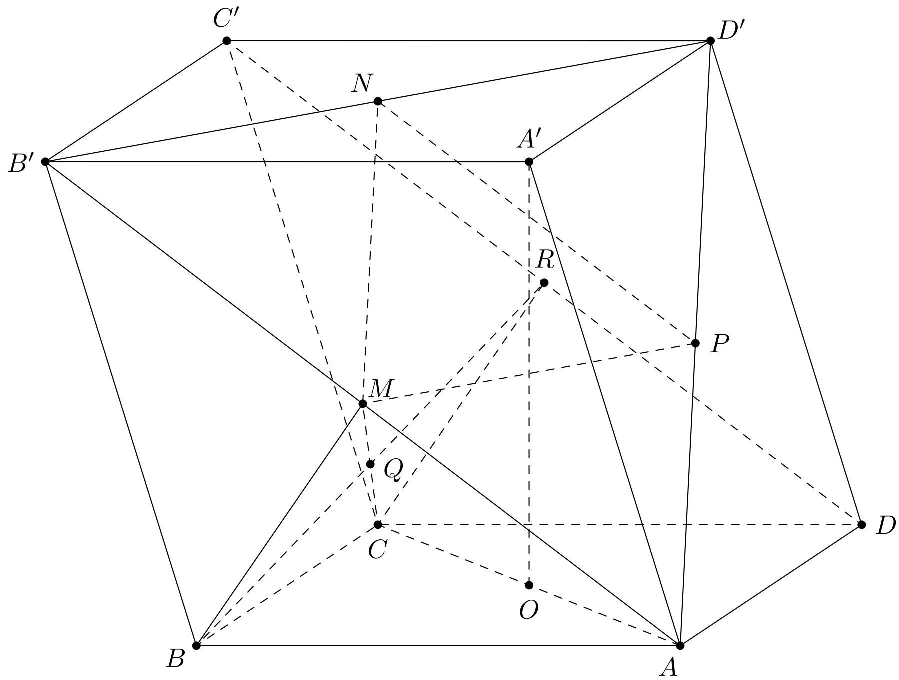
$SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \dfrac{a\sqrt{42}}{6}$. Vậy $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{a\sqrt{42}}{6} \cdot \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a^3\sqrt{14}}{24}$.

Chọn đáp án D □

Câu 44 (Sở Quảng Bình - 2021). Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình thoi cạnh a, $\widehat{BCD} = 120^O$ và $AA' = \dfrac{7a}{2}$, hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với giao điểm của AC và BD. Gọi M, N, P, R lần lượt là trung điểm của AB', $B'D'$, AD', DC' và Q là trung điểm của BR. Thể tích của khối chóp $MNPQ$ bằng

A. $\dfrac{a^3}{16}$. B. $\dfrac{a^3}{24}$. C. $\dfrac{a^3}{8}$. D. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{27}$.

Lời giải.



$A'O = \sqrt{A'A^2 - AO^2} = 2a\sqrt{3}; S_{ABCD} = 2S_{\triangle ABC} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2} \Rightarrow V_{ABCD.A'B'C'D'} = 3a^3.$

Ta có: $\mathrm{d}\left(Q, (MNP)\right) = \dfrac{1}{2}\mathrm{d}\left(C; (MNP)\right) = \dfrac{1}{2}\mathrm{d}\left(C; (AB'D')\right), S_{\triangle MNP} = \dfrac{1}{4}S_{\triangle AB'D'}$.

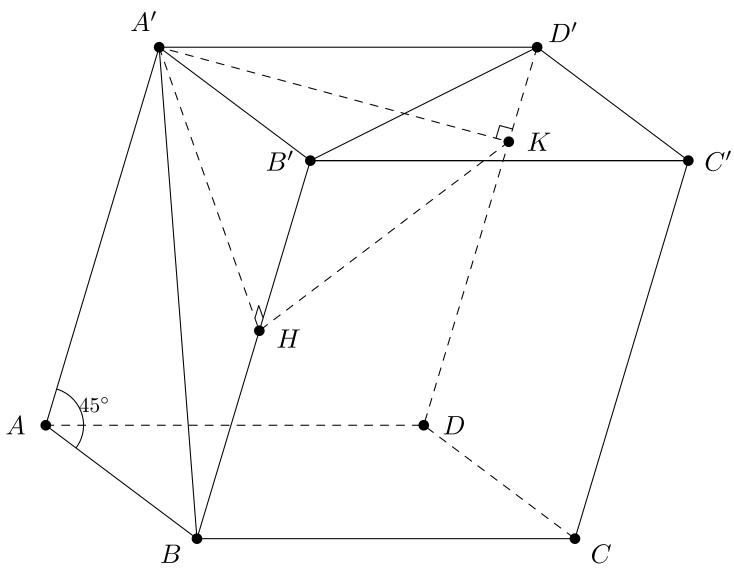
$$V_{Q.MNP} = \frac{1}{3}\mathrm{d}\left(Q; (MNP)\right) \cdot S_{\triangle MNP} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}\mathrm{d}\left(C; (AB'D')\right) \cdot \frac{1}{4}S_{\triangle AB'D'}$$
$$= \frac{1}{8}V_{CAB'D'} = \frac{1}{8} \cdot \frac{V_{ABCD.A'B'C'D'}}{3} = \frac{a^3}{8}.$$

Chọn đáp án C □

Câu 45 (Sở Hưng Yên - 2021). Cho khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $A'B$ vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$; góc giữa AA' với $(ABCD)$ bằng 45°. Khoảng cách từ A đến các đường thẳng BB', DD' cùng bằng 1. Góc giữa hai mặt phẳng $(BB'C'C)$ và $(C'CDD')$ bằng 60°. Tính thể tích khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$

A $\sqrt{3}$. B 2. C $2\sqrt{3}$. D $3\sqrt{3}$.

Lời giải.



Ta có: $A'B \perp (ABCD) \Rightarrow (AA'; (ABCD)) = \widehat{A'AB} = 45°$.

Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A' lên BB' và DD'

$\Rightarrow A'H = A'K = 1$ và $\begin{cases} AA' \perp A'H \\ AA' \perp A'K \end{cases} \Rightarrow AA' \perp (A'HK)$.

Xét hình bình hành $ABB'A'$ có $\begin{cases} A'B \perp AB \\ \widehat{A'AB} = 45° \end{cases} \Rightarrow \triangle A'AB, \triangle A'B'B$ vuông cân tại B và A'.

Do đó H là trung điểm $BB' \Rightarrow A'H = \dfrac{1}{2}BB' \Rightarrow BB' = 2A'H = 2$.

Xét $\triangle AA'B$ vuông cân tại $B \Rightarrow A'B = \dfrac{AA'}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$.

Do $ABCD.A'B'C'D'$ là hình hộp nên $((BB'C'C); (C'CDD')) = ((ABB'A'); (ADD'A'))$.

Mà $((ABB'A'); (ADD'A')) = (A'H; A'K) = 60°$.

Do đó $\widehat{HA'K} = 60°$ hoặc $\widehat{HA'K} = 120°$.

Ta có: $S_{\triangle A'HK} = \dfrac{1}{2}A'H \cdot A'K \cdot \sin\widehat{HA'K} = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

Mặt khác: $\begin{cases} A'A \perp (A'HK) \\ A'B \perp (A'B'C'D') \end{cases} \Rightarrow ((A'HK); (A'B'C'D')) = (A'A; A'B) = 45°$.

Lại có: $\triangle A'HK$ là hình chiếu vuông góc của $\triangle A'B'D'$ nên:

$S_{\triangle A'HK} = S_{\triangle A'B'D'} \cdot \cos 45° \Rightarrow S_{\triangle A'B'D'} = \dfrac{\sqrt{6}}{4}$.

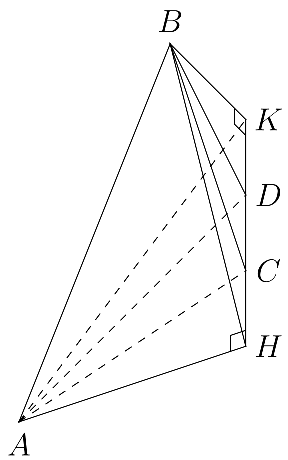
Suy ra: $V_{ABCD.A'B'C'D'} = 2V_{ABD.A'B'D'} = 2 \cdot A'B \cdot S_{\triangle A'B'D'} = 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \dfrac{\sqrt{6}}{4} = \sqrt{3}$ (đvtt).

Chọn đáp án (A) □

Câu 46. (Cụm Trường Nghệ An - 2022) Cho tứ diện $ABCD$ có $AC = 2CD = DB = 2a$. Gọi H và K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A và B lên đường thẳng CD sao cho H, C, D, K theo thứ tự cách đều nhau. Biết góc tạo bởi AH và BK bằng $60°$. Thể tích khối tứ diện $ABCD$ bằng

(A) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$. (B) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{8}$. (C) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$. (D) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải.



Ta có $HC = CD = DK = a$; $AC = 2a$; $BD = 2a$.

Tam giác AHC vuông tại H nên

$$AH = \sqrt{AC^2 - HC^2} = \sqrt{4a^2 - a^2} = a\sqrt{3}.$$

Tam giác BKD vuông tại K nên

$$BK = \sqrt{BD^2 - HK^2} = \sqrt{4a^2 - a^2} = a\sqrt{3}.$$

Tứ diện $ABKH$ có cặp cạnh đối $AH = BK = a\sqrt{3}$, $(AH; BK) = 60°$, và $\mathrm{d}(AH; BK) = HK = 3a$.

Suy ra $V_{ABKH} = \dfrac{1}{6}AH \cdot BK \cdot \mathrm{d}(AH, BK) \cdot \sin(AH, BK) = \dfrac{1}{6} \cdot a\sqrt{3} \cdot a\sqrt{3} \cdot 3a \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{3\sqrt{3}}{4}a^3$.

Dễ thấy $V_{ABCD} = \frac{1}{3}V_{ABKH} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3a^3\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}$.

Chọn đáp án D □

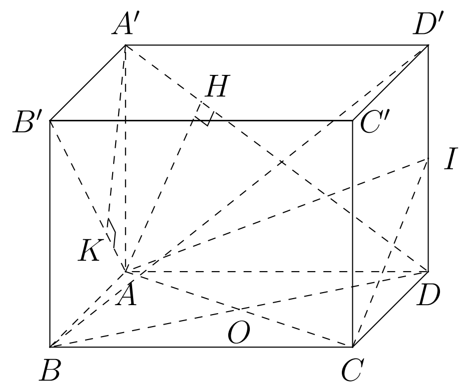
Câu 47. (THPT Hồ Nghinh – Quảng Nam – 2022) Cho khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$. Khoảng cách giữa 2 đường thẳng AB, CB' bằng $\frac{2}{\sqrt{5}}a$, khoảng cách giữa 2 đường thẳng $A'D', B'A$ bằng $\frac{2}{\sqrt{5}}a$. Khoảng cách giữa 2 đường thẳng BD', AC bằng $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}}a$. Tính thể tích khối hộp chữ nhật đã cho.

(A) a^3. (B) $\frac{a^3}{2}$. (C) $2a^3$. (D) $\sqrt{2}a^3$.

Lời giải.

Giả sử các kích thước của hình hộp chữ nhật là $AB = x$, $AD = y$, $AA' = z$ với $x, y, z > 0$.

Khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và $B'C$ bằng $\frac{2a\sqrt{5}}{5}$.



Ta có $\begin{cases} AB \parallel CD \\ CD \subset (A'B'CD) \\ AB \not\subset (A'B'CD) \end{cases} \Rightarrow AB \parallel (A'B'CD)$. Do đó

$$\begin{aligned} d(AB; B'C) &= d\left(AB; (A'B'CD)\right) = d\left(A, (A'B'CD)\right) \\ &= AH = \frac{2a\sqrt{5}}{5}, \end{aligned}$$

với H là hình chiếu của A trên $A'D$.

Từ $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AA'}^2 + \frac{1}{AD^2} \Rightarrow \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} = \frac{5}{4a^2}$. (1)

Khoảng cách giữa hai đường thẳng $A'D'$ và AB' bằng $\frac{2a\sqrt{5}}{5}$.

Tương tự, ta có $A'D' \parallel (AB'C'D) \Rightarrow d(A'D'; AB') = d\left(A'D', (AB'C'D)\right) = A'K = \frac{2a\sqrt{5}}{5}$, với K là hình chiếu của A' trên AB'.

Từ $\frac{1}{A'K^2} = \frac{1}{A'A^2} + \frac{1}{A'B'^2} \Rightarrow \frac{1}{x^2} + \frac{1}{z^2} = \frac{5}{4a^2}$. (2)

Khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và BD' bằng $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Gọi $\{O\} = AC \cap BD \Rightarrow O$ là trung điểm của BD.

Gọi I là trung điểm của DD' thì OI là đường trung bình của $\triangle BDD' \Rightarrow OI \parallel BD' \Rightarrow BD' \parallel (ACI)$. Do đó

$$d(BD'; AC) = d(BD'; (ACI)) = d(D'; (ACI)) = d(D; (ACI)).$$

Ta thấy DI, DA, DC đôi một vuông góc với nhau nên

$$\frac{1}{d^2(D, (ACI))} = \frac{1}{DA^2} + \frac{1}{DC^2} + \frac{1}{DI^2} = \frac{1}{DA^2} + \frac{1}{DC^2} + \frac{4}{DD'^2} \Rightarrow \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{4}{z^2} = \frac{3}{a^2}. \quad (3)$$

Từ (1),(2),(3) ta có hệ $\begin{cases} \dfrac{1}{y^2}+\dfrac{1}{z^2}=\dfrac{5}{4a^2} \\ \dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{z^2}=\dfrac{5}{4a^2} \\ \dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}+\dfrac{4}{z^2}=\dfrac{3}{a^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{x^2}=\dfrac{1}{a^2} \\ \dfrac{1}{y^2}=\dfrac{1}{a^2} \\ \dfrac{1}{z^2}=\dfrac{1}{4a^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=a \\ y=a \\ z=2a. \end{cases}$

Vậy thể tích khối hộp là $V=xyz=a\cdot a\cdot 2a=2a^3$.

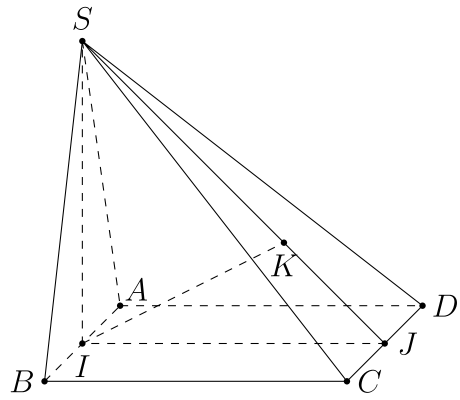
Chọn đáp án C □

Câu 48. (Liên trường Hà Tĩnh - 2022) Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy là hình vuông; mặt bên (SAB) là tam giác vuông cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Biết khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SD bằng $\dfrac{3\sqrt{5}a}{5}$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

A $V=\dfrac{3}{2}a^3$. B $V=\dfrac{6\sqrt{3}}{2}a^3$. C $V=\dfrac{27}{2}a^3$. D $V=\dfrac{9}{2}a^3$.

Lời giải.

Gọi I,J lần lượt là trung điểm của AB,CD; K là hình chiếu của I lên SJ.



Đặt cạnh đáy bằng $AB=x$ khi đó $SI=\dfrac{x}{2}, IJ=x$.

Vì $AB\ /\!/\ CD$ nên. Suy ra.

$\mathrm{d}(I;(SCD))=IK=\dfrac{IS\cdot IJ}{\sqrt{IS^2+IJ^2}}$

$\Leftrightarrow \dfrac{3a\sqrt{5}}{5}=\dfrac{x\cdot\dfrac{x}{2}}{\sqrt{x^2+\dfrac{x^2}{4}}}\Leftrightarrow x=3a.$

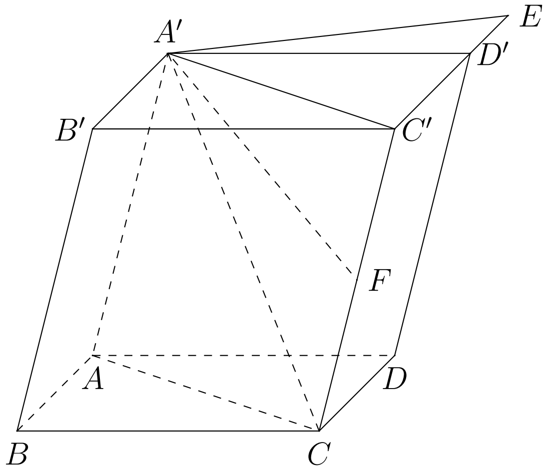
Từ đó suy ra $V=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{x}{2}\cdot x^2=\dfrac{9a^3}{2}$.

Chọn đáp án D □

Câu 49. (Sở Hà Tĩnh 2022) Cho lăng trụ $ABCD.A'B'C'D$ có đáy là hình chữ nhật với $AB=\sqrt{6}$, $AD=\sqrt{3}$, $A'C=3$ và mặt phẳng $(AA'C'C)$ vuông góc với mặt đáy. Biết hai mặt phẳng $(AA'C'C)$ và $(AA'B'B)$ tạo với nhau góc α có $\tan\alpha=\dfrac{3}{4}$. Thể tích V của khối lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ là

A 12. B 6. C 8. D 10.

Lời giải.



Dễ thấy $A'C' = AC = BD = 3$ nên tam giác $A'CC'$ cân tại A', do đó $A'F \perp CC'$, với F là trung điểm của CC'. Gọi E là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{C'E} = \dfrac{3}{2}\overrightarrow{C'D'}$. Khi đó $C'E = \dfrac{3\sqrt{6}}{2}$ và $D'E = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$, suy ra

$$A'E^2 + A'C'^2 = A'D'^2 + D'E^2 + A'C'^2 = \frac{27}{2} = C'E^2.$$

Suy ra $A'E \perp A'C'$, từ đó $A'E \perp (ACC'A')$, suy ra $EA' \perp A'F$ và $CC' \perp (EA'F)$.

Do đó

$$\begin{aligned}\widehat{EFA'} &= \widehat{(A'F, EF)} = (\widehat{(AA'C'A), (CDD'C')})\\ &= (\widehat{(AA'C'C), (AA'B'B)}) = \alpha.\end{aligned}$$

Ta có $EA' = \sqrt{D'E^2 + A'D'^2} = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

Suy ra $A'F = A'E\cot\alpha = 2\sqrt{2}$ và $CC' = 2\sqrt{A'C'^2 - A'F^2} = 2$. Do đó chiều cao của khối lăng trụ là

$$h = \mathrm{d}\left(C, (A'B'C'D')\right) = \mathrm{d}(C, A'C') = \frac{A'F \cdot CC'}{A'C'} = \frac{4\sqrt{2}}{3}.$$

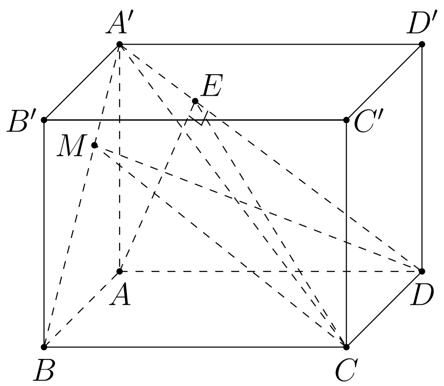
Vậy $V = AB \cdot AD \cdot h = 8$.

Chọn đáp án C □

Câu 50. (Sở Phú Thọ 2022) Cho hình lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình vuông cạnh a, góc giữa AC và mặt phẳng $(A'CD)$ bằng 30°. Gọi M là điểm sao cho $\overrightarrow{A'M} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{A'B}$. Thể tích khối tứ diện $A'CDM$ bằng

A $\dfrac{a^3}{18}$. B $\dfrac{a^3}{3}$. C $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$. D $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải.



Kẻ $AE \perp A'D$.

Ta có $\begin{cases} CD \perp AD \\ CD \perp DD' \\ AD, DD' \subset (ADD'A') \\ AD \cap DD' = D \end{cases} \Rightarrow CD \perp (ADD'A')$, mà $AE \subset (ADD'A') \Rightarrow AE \perp CD$.

Suy ra $\begin{cases} AE \perp CD \\ AE \perp A'D \\ CD, A'D \subset (A'CD) \\ CD \cap A'D = D \end{cases} \Rightarrow AE \perp (A'CD)$.

Hình chiếu vuông góc của AC lên mặt phẳng $(A'CD)$ là EC nên

$$(\widehat{AC, (A'CD)}) = (\widehat{AC, EC}) = \widehat{ACE} = 30^\circ.$$

Xét tam giác ACE vuông ở $E \Rightarrow AE = AC \cdot \sin 30^\circ = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.
Ta có chiều cao của hình chóp $A'CDM$ hạ từ đỉnh M là

$$h = \mathrm{d}\left(M, (A'CD)\right) = \frac{1}{3}\mathrm{d}\left(B, (A'CD)\right) = \frac{1}{3}\mathrm{d}\left(A, (A'CD)\right) = \frac{AE}{3} = \frac{a\sqrt{2}}{6}.$$

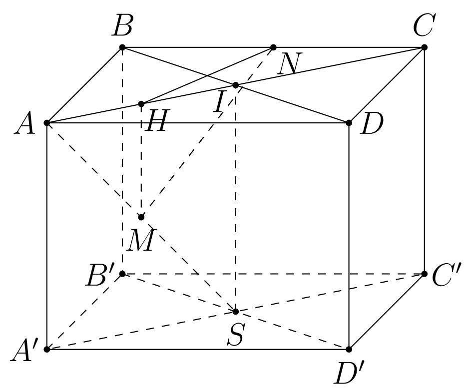
Xét tam giác $AA'D$ vuông ở A có.
$AE \perp A'D \Rightarrow \dfrac{1}{AE^2} = \dfrac{1}{AA'^2} + \dfrac{1}{AD^2} \Rightarrow \dfrac{1}{AA'^2} = \dfrac{1}{AE^2} - \dfrac{1}{AD^2} = \dfrac{1}{\left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} - \dfrac{1}{a^2} \Rightarrow AA' = a.$

Ta có diện tích tam giác $A'CD$ bằng $S_{A'CD} = \dfrac{1}{2} \cdot A'D \cdot DC = \dfrac{1}{2}a\sqrt{2} \cdot a = \dfrac{a^2\sqrt{2}}{2}$.
Thể tích khối tứ diện $A'CDM$ bằng $V_{A'CDM} = \dfrac{1}{3} \cdot h \cdot S_{A'CD} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{a\sqrt{2}}{6} \cdot \dfrac{a^2\sqrt{2}}{2} = \dfrac{a^3}{18}$.
Chọn đáp án A □

Câu 51. (THPT Võ Nguyên Giáp - Quảng Bình - 2022) Cho hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình vuông. Gọi S là tâm hình vuông $A'B'C'D'$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của SA và BC. Biết rằng, nếu MN tạo với mặt phẳng $(ABCD)$ một góc 60° và $AB = a$ thì thể tích $S.ABC$ bằng

A. $\dfrac{a^3\sqrt{30}}{12}$. B. $\dfrac{a^3\sqrt{30}}{3}$. C. $a^3\sqrt{30}$. D. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.



Gọi I là tâm hình vuông $ABCD$; H là trung điểm của AI.
Ta có $SI \perp (ABCD) \Rightarrow MH \perp (ABCD) \Rightarrow$ hình chiếu của MN lên $(ABCD)$ là $HN \Rightarrow \widehat{HNM}$ là góc giữa MN và mặt phẳng $(ABCD) \Rightarrow \widehat{HNM} = 60^\circ$.
Xét $\triangle HNC$ có $NC = \dfrac{a}{2}$; $CH = \dfrac{3}{4}AC = \dfrac{3a\sqrt{2}}{4}$;

$$HN^2 = NC^2 + HC^2 - 2NC \cdot HC \cos 45^\circ$$
$$= \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{3a\sqrt{2}}{4}\right)^2 - 2\frac{a}{2} \cdot \frac{3a\sqrt{2}}{4}\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{5a^2}{8}$$
$$\Rightarrow NH = \frac{a\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}.$$

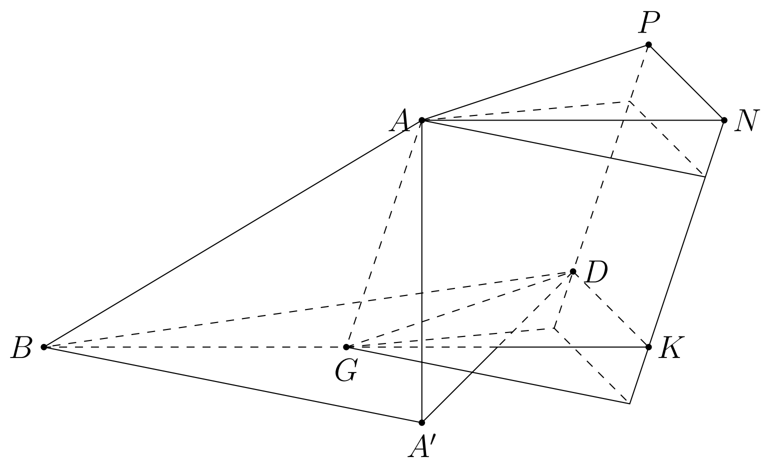
Xét $\triangle HMN$ vuông ở H có: $\tan\widehat{HNM} = \dfrac{MH}{HN} \Rightarrow MH = NH \cdot \tan 60^\circ = \dfrac{a\sqrt{5}}{2\sqrt{2}} \cdot \sqrt{3} = \dfrac{a\sqrt{15}}{2\sqrt{2}}$.
Do đó, $SI = 2MH = \dfrac{a\sqrt{15}}{\sqrt{2}}$.
Thể tích khối chóp $S.ABC$ là $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}SI \cdot S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{a\sqrt{15}}{\sqrt{2}} \cdot \dfrac{a^2}{2} = \dfrac{a^3\sqrt{30}}{12}$.
Chọn đáp án A □

Câu 52. (Sở Ninh Bình 2022) Cho khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $AC' = \sqrt{3}$. Biết rằng các khoảng cách từ các điểm A', B, D đến đường thẳng AC' là độ dài ba cạnh của một tam giác có diện tích $S = \dfrac{\sqrt{6}}{12}$, thể tích của khối hộp đã cho là

(A) $\dfrac{\sqrt{2}}{12}$. (B) 1. (C) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. (D) $\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$.

Lời giải.

Gọi $G = AC' \cap (A'BD)$, khi đó dễ thấy G là trọng tâm $\triangle A'BD$ và $\dfrac{AG}{AC'} = \dfrac{1}{3}$ nên $AG = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.
Lấy điểm K đối xứng với B qua G và dựng hình lăng trụ $GDK.APN$.
Nhận thấy rằng khoảng cách giữa các mặt bên của lăng trụ $GDK.APN$ bằng với khoảng cách từ đỉnh A', B, D đến AG.



Từ đó, qua cách dựng các mặt phẳng đi qua A, G và vuông góc với các cạnh bên của lăng trụ $GDK.APN$, đồng thời cắt các mặt phẳng chứa các mặt bên của lăng trụ này, ta lại thu được một lăng trụ mới (như hình vẽ) là một lăng trụ đứng có chiều cao là AG, tam giác đáy có kích thước lần lượt bằng độ dài khoảng cách từ các đỉnh A', B, D đến đường thẳng AC'.

Khối lăng trụ mới và lăng trụ $GDK.APN$ có cùng thể tích nên $V_m = V_{GDK \cdot APN} = S_m \cdot AG = \dfrac{\sqrt{2}}{12}$ với $S_m = \dfrac{\sqrt{6}}{12}$.

Suy ra $V_{ABCD.A'B'C'D'} = 6V_{A' \cdot ABD} = 6V_{GDK \cdot APN} = 6 \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{12} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Chọn đáp án (C) □

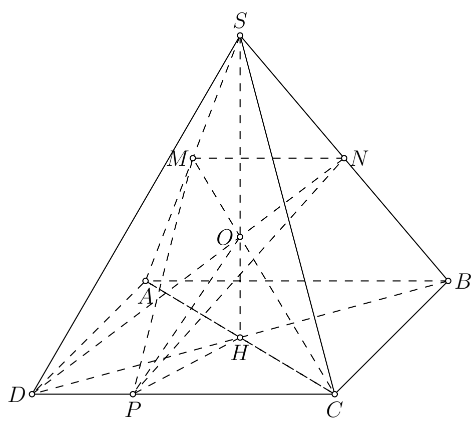
Câu 53. (THPT Quảng Xương 1 – Thanh Hóa 2022) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi tâm H, $SH \perp (ABCD)$. Hai đường chéo $AC = 2a$, $BD = a\sqrt{2}$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh SA, SB và điểm P thuộc cạnh CD. Biết rằng khoảng cách từ A đến mặt phẳng (MNP) bằng a, thể tích khối đa diện $AMNP$ bằng

(A) $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{8}$. (B) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$. (C) $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{4}$. (D) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{8}$.

Lời giải.

Đầu tiên ta chuẩn hóa $a = 1$. Gọi $O = CM \cap DN$ khi đó O là trọng tâm $\triangle SAC$. (*)

Ta nhận thấy do mặt phẳng (MNP) luôn trùng với mặt phẳng $(MNCD)$ nên ta đặc biệt hóa điểm P nằm tại chân đường vuông góc hạ từ H xuống CD. Khi đó ta có: $CD \perp (OHP)$ tức ta suy ra



$$\mathrm{d}(A;(MNP)) = 2\mathrm{d}(H;(MNP)) = 2\mathrm{d}(H;OP) = 1$$
$$\Rightarrow \mathrm{d}(H;OP) = \frac{1}{2}.$$

Đặt $SH = x$, khi đó $OH = \dfrac{1}{3}SO = \dfrac{x}{3}$. (**)

Do $HP \perp CD$ nên xét trong tam giác vuông CHD ta có $HP = \dfrac{HC \cdot HD}{\sqrt{HC^2 + HD^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.
Suy ra $\mathrm{d}(H;OP) = \dfrac{OH \cdot HP}{\sqrt{OH^2 + HP^2}} = \dfrac{x}{\sqrt{3\left(x^2+3\right)}} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow x = SH = 3$.
Ta giả sử tiếp P di động đến trùng điểm D, khi đó ta có

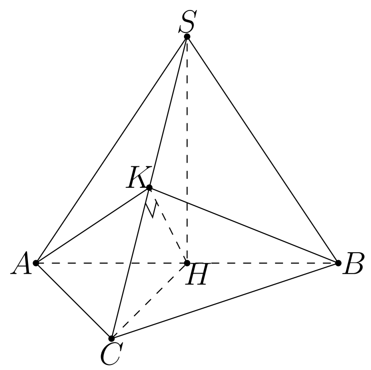
$$V_{AMNP} = V_{AMND} = V_{SMND} = \frac{1}{4}V_{SABD} = \frac{1}{8}V_{S.ABCD}.$$

Vậy $V_{AMNP} = \dfrac{1}{8}V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{24}SH \cdot S_{ABCD} = \dfrac{1}{24} \cdot 3 \cdot \dfrac{1}{2} \cdot AC \cdot BD = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{8}$.
Chọn đáp án A □

Câu 54. (Cụm trường Nam Định 2022) Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều, hình chiếu vuông góc của đỉnh S trên mặt đáy là trung điểm H của cạnh AB. Biết $SH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ và mặt phẳng (SAC) vuông góc với mặt phẳng (SBC). Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng

A. $\dfrac{a^3}{4}$. B. $\dfrac{a^3}{16}$. C. $\dfrac{a^3}{2}$. D. $\dfrac{3a^3}{8}$.

Lời giải.



Từ H kẻ $HK \perp SC$. Ta có $\begin{cases} AB \perp HC \\ AB \perp SH \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SHC)$
$\Rightarrow AB \perp SC$ mà $HK \perp SC \Rightarrow SC \perp (AKB)$.
Suy ra $\begin{cases} SC \perp AK \\ SC \perp BK \end{cases} \Rightarrow$ góc giữa (SAC) và (SBC) là $\widehat{AKB}$.
Suy ra $AK \perp BK$ và $AK \perp (SBC), BK \perp (SAC)$.
Gọi $AB = x$. Xét $\triangle AKB$ vuông tại K, KH là trung tuyến $HK = \dfrac{1}{2}AB = \dfrac{x}{2}$.
Mà $\triangle ABC$ đều $\Rightarrow HC = \dfrac{x\sqrt{3}}{2}$.

Xét $\triangle SHC$ vuông tại H, có HK là đường cao $\dfrac{1}{HK^2} = \dfrac{1}{SH^2} + \dfrac{1}{HC^2}$
$\Leftrightarrow \left(\dfrac{2}{x}\right)^2 = \left(\dfrac{2}{a\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\dfrac{2}{x\sqrt{3}}\right)^2 \Leftrightarrow \dfrac{4}{a^2} = \dfrac{4}{3a^2} + \dfrac{4}{3x^2} \Leftrightarrow 3a^2 = x^2 + a^2 \Leftrightarrow x = a\sqrt{2}$.
Thể tích khối chóp:

$$V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot SH \cdot S_{\triangle ABC} = \frac{1}{3} \cdot SH\frac{1}{2} \cdot AB \cdot CH = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}\frac{1}{2} \cdot a\sqrt{2} \cdot \frac{a\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{a^3}{4}.$$

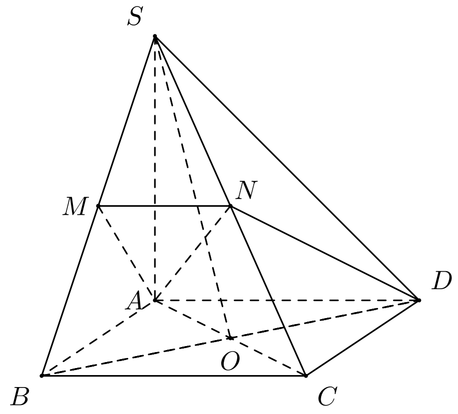
Chọn đáp án A □

Câu 55. (Liên trường Quảng Nam 2022) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với mặt phẳng đáy $ABCD$, góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và $(ABCD)$ bằng $60°$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của cạnh SB, SC. Tính thể tích khối chóp $S.ADNM$.

A. $V = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{24}$. B. $V = \dfrac{3a^3\sqrt{6}}{16}$. C. $V = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{8}$. D. $V = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{16}$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} BD \perp SA \\ BD \perp AC \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp SO.$



Lại có $\begin{cases} OA \subset (ABCD), OA \perp BD \\ SO \subset (SBD), SO \perp BD \\ (SBD) \cap (ABCD) = BD \end{cases}$ nên

$$\widehat{((SBD),(ABCD))} = \widehat{SOA} = 60^\circ.$$

$OA = \dfrac{AC}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}.$

Tam giác SOA vuông tại A nên

$$SA = OA \cdot \tan \widehat{SOA} = \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \tan 60^\circ = \frac{a\sqrt{6}}{2}.$$

Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là $V = \dfrac{1}{3} SA \cdot S_{ABCD} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{a\sqrt{6}}{2} \cdot a^2 = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{6}.$

Ta có $\dfrac{V_{S.AMN}}{V_{S.ABC}} = \dfrac{SM}{SB} \cdot \dfrac{SN}{SC} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{4} \Rightarrow V_{S.AMN} = \dfrac{1}{4} V_{S.ABC}.$

$\dfrac{V_{S.ADN}}{V_{S.ADC}} = \dfrac{SN}{SC} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow V_{S.ADN} = \dfrac{1}{2} V_{S.ADC}.$

$V_{S.ABC} = V_{S.ADC} = \dfrac{1}{2} V_{S.ABCD}$. Suy ra.

$V_{S.ADNM} = V_{S.AMN} + V_{S.ADN} = \dfrac{1}{4} V_{S.ABC} + \dfrac{1}{2} V_{S.ADC} = \dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{1}{2} V + \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{2} V = \dfrac{3}{8} V = \dfrac{3}{8} \cdot \dfrac{a^3\sqrt{6}}{6} = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{16}.$

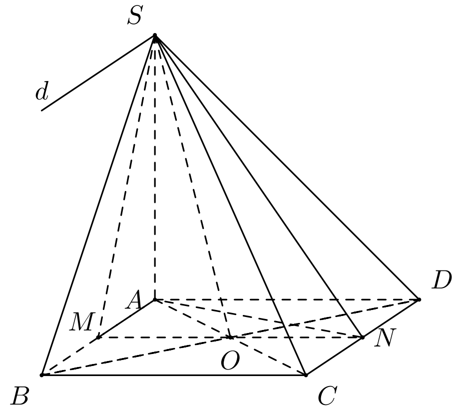
Chọn đáp án D □

Câu 56. (Sở Hưng Yên 2022) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = 1, AD = \sqrt{10}, SA = SB, SC = SD$. Biết mặt phẳng (SAB) và (SCD) vuông góc với nhau đồng thời tổng diện tích của hai tam giác $\triangle SAB$ và $\triangle SCD$ bằng 2. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng

A. 2. B. $\dfrac{3}{2}$. C. 1. D. $\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Vì $\begin{cases} S \in (SAB) \cap (SCD) \\ AB \subset (SAB) \\ CD \subset (SCD) \\ AB \parallel CD \end{cases}$ nên giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) là đường thẳng d đi qua S và song song với AB, CD.



Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD.

Vì $SA = SB, SC = SD$ nên $SM \perp AB, SN \perp CD \Rightarrow SM \perp d, SN \perp d \Rightarrow d \perp (SMN)$.

Mà mặt phẳng (SAB) và (SCD) vuông góc với nhau nên $SM \perp SN$.

Kẻ $SH \perp MN$. (1)

Vì $d \perp (SMN) \Rightarrow d \perp SH \Rightarrow SH \perp AB$. (2)

Từ (1), (2) suy ra $SH \perp (ABCD) \Rightarrow V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3} \cdot SH \cdot S_{ABCD} = \dfrac{1}{3} \cdot SH \cdot AB \cdot AD$.

Đặt $SM = x, SN = y \Rightarrow SH = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

Ta có $SM^2 + SN^2 = MN^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 10$.

Mặt khác $S_{SAB} + S_{SCD} = 2 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2} \cdot x \cdot 1 + \dfrac{1}{2} \cdot y \cdot 1 = 2 \Leftrightarrow x + y = 4$.

Suy ra $xy = \dfrac{(x+y)^2 - (x^2 + y^2)}{2} = 3 \Rightarrow SH = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \dfrac{3}{\sqrt{10}} \Rightarrow V_{S.ABCD} = 1$.

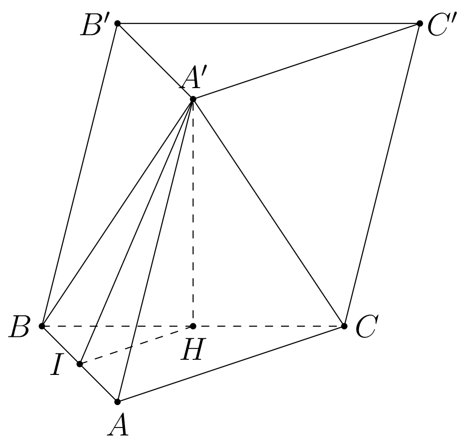
Vậy thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng 1.

Chọn đáp án C □

Câu 57. (Sở Vĩnh Phúc 2022) Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có tam giác đáy ABC vuông đỉnh A, $AB = a, AC = \sqrt{3}a$, $A'A = A'B = A'C$ và mặt phẳng $(ABB'A')$ tạo với mặt đáy (ABC) một góc $60°$. Tính thể tích V của lăng trụ đã cho.

A $V = \dfrac{3\sqrt{3}a^3}{4}$. B $V = \dfrac{\sqrt{3}a^3}{4}$. C $V = \dfrac{3a^3}{4}$. D $V = \dfrac{3\sqrt{3}a^3}{2}$.

Lời giải.



Gọi H là trung điểm của BC.

Xét ba tam giác $A'HB, A'HA, A'HC$ có $A'H$ chung, $A'A = A'B = A'C$ và $HA = HB = HC$ (vì AH là đường trung tuyến của tam giác vuông ABC)

$\Rightarrow \triangle A'HA = \triangle A'HB = \triangle A'HC$ mà $\triangle A'HB$ vuông tại $H \Rightarrow \widehat{A'HA} = \widehat{A'HB} = \widehat{A'HC} = 90^\circ$

$\Rightarrow A'H \perp (ABC)$.

Tam giác $A'AB$ cân tại A' có I là trung điểm của AB nên $A'I \perp AB$.

Ta có $\begin{cases} A'I \perp AB \\ A'H \perp AB\,(do A'H \perp (ABC)) \end{cases}$

$\Rightarrow AB \perp (A'HI) \Rightarrow HI \perp AB$.

Do đó, $((\widehat{ABB'A'), (ABC})) = \widehat{A'IH} = 60^\circ$.

Tam giác ABC có H, I lần lượt là trung điểm của BC, AB nên $HI = \dfrac{1}{2}AC = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Tam giác $A'HI$ vuông tại H có

$$\tan\widehat{A'IH} = \frac{A'H}{IH} \Rightarrow \tan 60^\circ = \frac{A'H}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} \Leftrightarrow A'H = \frac{a\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{3} = \frac{3a}{2}.$$

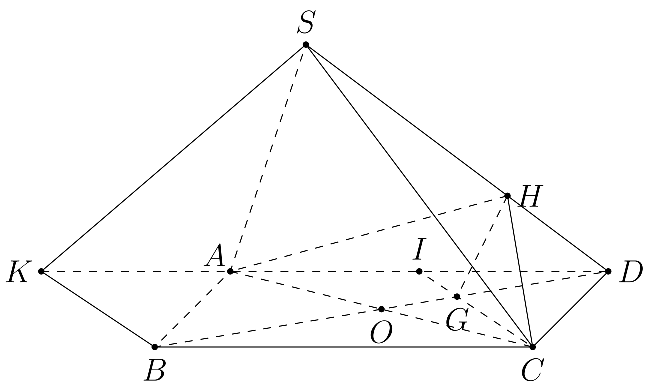
Thể tích lăng trụ là $V = \dfrac{1}{3}\cdot A'H \cdot S_{ABC} = \dfrac{1}{6}\cdot A'H\cdot AB\cdot AC = \dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{3a}{2}\cdot a\cdot a\sqrt{3} = \dfrac{\sqrt{3}a^3}{4}$.

Chọn đáp án B □

Câu 58. (THPT Trần Nhân Tông – Quảng Ninh 2022) Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình bình hành biết rằng $\widehat{SAD} = \widehat{BAC} = 90^\circ$, cạnh $SA = 2\sqrt{2}a, BC = 2a, SB = \sqrt{6}a$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên SD biết khoảng cách giữa CH và SB bằng $\sqrt{2}a$. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng

A $\sqrt{2}a^3$. B $\dfrac{\sqrt{2}a^3}{3}$. C $\sqrt{10}a^3$. D $\dfrac{\sqrt{10}}{3}a^3$.

Lời giải.



Ta gọi I là trung điểm AD và G là trọng tâm $\triangle ACD$, kẻ, khi đó ta có $\dfrac{DG}{DB} = \dfrac{DH}{DS} = \dfrac{1}{3}$.

Kẻ $BK \parallel IC$ với $K \in AD$ ta suy ra và $d(CH, SB) = d((HCI);(SBK)) = d(I;(SBK))$. Tiếp đến ta dễ thấy $IKBC$ là hình bình hành nên suy ra A là trung điểm IK, từ đó ta có $SK = 3a$ và $CI = BK = \dfrac{AD}{2} = a$. Mà $SB = \sqrt{6}a$ nên theo Công thức He-ron ta suy ra $S_{\triangle SBK} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}a^2$.

Mặt khác ta có

$$\mathrm{d}(CH, SB) = \mathrm{d}(I; (SBK)) = 2\mathrm{d}(A; (SBK)) = \frac{6V_{SABK}}{S_{\triangle SBK}} = \frac{6V_{SABK}}{\frac{\sqrt{5}}{2}}a^2 = \sqrt{2}a$$

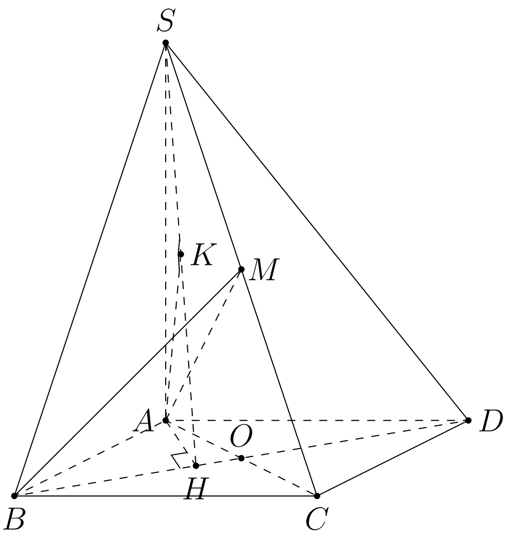
nên ta suy ra $V_{S.ABK} = \frac{1}{6}\frac{\sqrt{5}}{2}a^2 \cdot \sqrt{2}a = \frac{\sqrt{10}}{12}a^3$, mà $S_{\triangle ABK} = S_{\triangle ABI} = \frac{S_{ABCD}}{4} \Rightarrow V_{SABK} = \frac{V_{S.ABCD}}{4}$ nên ta suy ra $V_{S.ABCD} = 4V_{S.ABK} = 4\frac{\sqrt{10}}{12}a^3 = \frac{\sqrt{10}}{3}a^3$.

Chọn đáp án D □

Câu 59. (Sở Nghệ An 2022) Cho hình chóp có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, biết $AB = 4a$, $AD = 2a$ và SA vuông góc với đáy. Gọi M là trung điểm của cạnh SC, khoảng cách từ M đến mặt phẳng (SBD) bằng $\frac{a}{4}$. Thể tích khối chóp $S.ABM$ là

Ⓐ $\frac{16a^3\sqrt{59}}{177}$. Ⓑ $\frac{8a^3\sqrt{59}}{177}$. Ⓒ $\frac{12a^3\sqrt{59}}{177}$. Ⓓ $\frac{24a^3\sqrt{59}}{177}$.

Lời giải.



Trong $(ABCD)$, gọi O là giao điểm của AC và BD.

Ta có

$$\mathrm{d}(M, (SBD)) = \frac{MS}{CS} \cdot \mathrm{d}(C, (SBD)) = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{CO}{AO} \cdot \mathrm{d}(A, (SBD))\right] = \frac{1}{2}\mathrm{d}(A, (SBD)).$$

Trong $(ABCD)$, dựng $AH \perp BD$. Trong (SAH), dựng $AK \perp SH$.

Ta có $\begin{cases} BD \perp AH \\ BD \perp SA \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAH) \Rightarrow BD \perp AK$.

Lại có $\begin{cases} AK \perp BD \\ AK \perp SH \end{cases} \Rightarrow AK \perp (SBD)$.

Do đó $\mathrm{d}(M, (SBD)) = \frac{1}{2}AK$. Theo giả thiết: $\mathrm{d}(M, (SBD)) = \frac{a}{4} \Rightarrow AK = \frac{a}{2}$.

Xét tam giác ABD vuông tại A có: $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AD^2} \Rightarrow AH = \frac{4a\sqrt{5}}{5}$.

Xét tam giác SAH vuông tại A có: $\frac{1}{AK^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AH^2} \Rightarrow SA = \frac{4a\sqrt{59}}{59}$.

Ta có: $\frac{V_{S.ABM}}{V_{S.ABC}} = \frac{SM}{SC} = \frac{1}{2} \Rightarrow V_{S.ABM} = \frac{1}{2} \cdot V_{S.ABC}$. Lại có: $V_{S.ABC} = \frac{1}{3}SA \cdot S_{ABC} = \frac{16a^3\sqrt{59}}{177}$.

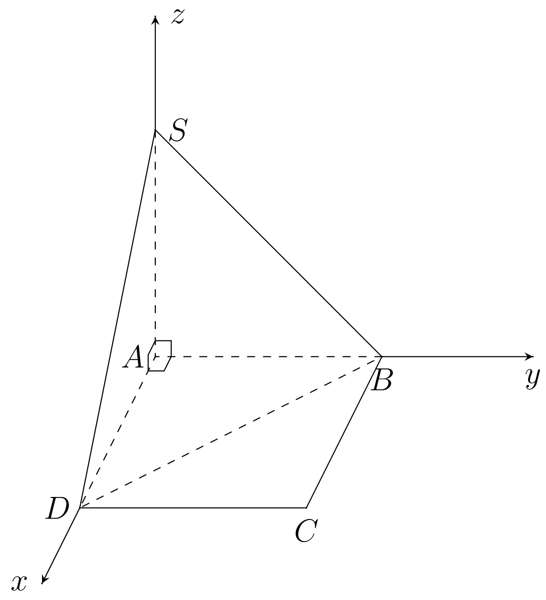
Do đó: $V_{S.ABM} = \frac{8a^3\sqrt{59}}{177}$. Vậy thể tích của khối chóp $S.ABM$ là $\frac{8a^3\sqrt{59}}{177}$.

Chọn đáp án B □

Câu 60. (Sở Nam Định 2022) Cho khối chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$. Đáy $ABCD$ là hình chữ nhật $AB = a\sqrt{3}$, $AD = a$. Biết góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SBD) bằng 45°, hãy tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

Ⓐ $V = \frac{\sqrt{6}}{6}a^3$. Ⓑ $V = \frac{\sqrt{2}}{2}a^3$. Ⓒ $V = \frac{\sqrt{2}}{6}a^3$. Ⓓ $V = 3\sqrt{2}a^3$.

Lời giải.



Đặt $a = 1$. Trong không gian $Oxyz$, chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ bên, ta có $A \equiv O(0;0;0)$, $B\left(0;\sqrt{3};0\right)$, $D(1;0;0)$, $C\left(1;\sqrt{3};0\right)$, $S(0;0;b)$ với $b > 0$.

Ta có $\overrightarrow{AS} = (0;0;b)$; $\overrightarrow{AB} = \left(0;\sqrt{3};0\right)$; $\overrightarrow{DS} = (-1;0;b)$; $\overrightarrow{DB} = \left(-1;\sqrt{3};0\right)$.

Suy ra VTPT của (SAB) là

$$\overrightarrow{n_1} = \left[\overrightarrow{AS}, \overrightarrow{AB}\right] = \left(-b\sqrt{3};0;0\right).$$

Suy ra VTPT của (SBD) là

$$\overrightarrow{n_2} = \left[\overrightarrow{DS}, \overrightarrow{DB}\right] = \left(-b\sqrt{3};-b;-\sqrt{3}\right).$$

Do góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SBD) bằng $45°$ nên ta có

$$\begin{aligned}\cos 45° = \frac{|\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}|}{|\overrightarrow{n_1}|\cdot|\overrightarrow{n_2}|} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3b^2}{\sqrt{3b^2}\cdot\sqrt{4b^2+3}} &\Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{3}b}{\sqrt{4b^2+3}}\\ &\Leftrightarrow \sqrt{8b^2+6} = 2\sqrt{3}b \Leftrightarrow 8b^2+6 = 12b^2\\ &\Leftrightarrow 6 = 4b^2 \Leftrightarrow b^2 = \frac{3}{2} \Rightarrow b = \frac{\sqrt{6}}{2}.\end{aligned}$$

Suy ra $S\left(0;0;\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right)$.

Ta có $\overrightarrow{AS} = \left(0;0;\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right) \Rightarrow SA = \dfrac{\sqrt{6}}{2} = \dfrac{\sqrt{6}}{2}a$; $S_{ABCD} = AB\cdot AD = a^2\sqrt{3}$.

Vậy thể tích khối chóp $S.ABCD$ là $V = \dfrac{1}{3}\cdot SA\cdot S_{ABCD} = \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{a\sqrt{6}}{2}\cdot a^2\sqrt{3} = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{2}$.

Chọn đáp án B □

CHỦ ĐỀ 13

THỂ TÍCH KHỐI ĐA DIỆN KHÁC

MỨC ĐỘ 1. MỨC ĐỘ 5 - 6 ĐIỂM

Dạng 1. Tỉ số thể tích khối chóp tam giác

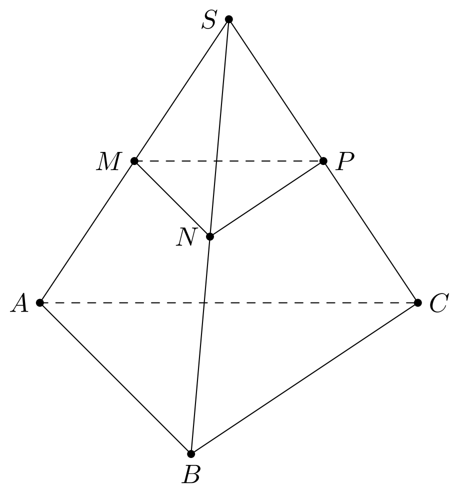
Câu 1 (THPT Quỳnh Lưu 3 Nghệ An 2019).

Cho hình chóp $S.ABC$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của SA, SB, SC. Tỉ số thể tích $\dfrac{V_{S.ABC}}{V_{S.MNP}}$ bằng

(A) 12 . (B) 2 . (C) 8 . (D) 3 .

Lời giải.

Ta có $\dfrac{V_{S.ABC}}{V_{S.MNP}} = \dfrac{SA}{SM} \cdot \dfrac{SB}{SN} \cdot \dfrac{SC}{SP} = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$



Chọn đáp án (C) □

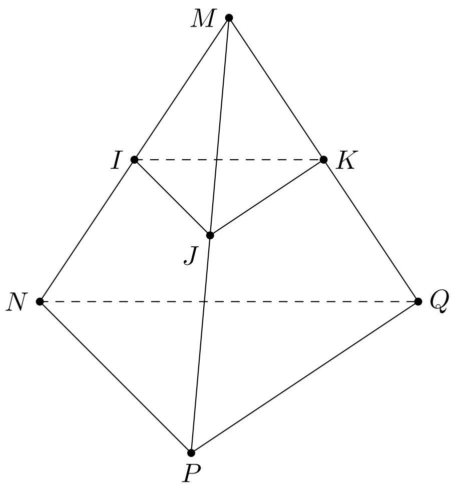
Câu 2 (THPT Lê Văn Thịnh Bắc Ninh 2019).

Cho tứ diện $MNPQ$. Gọi I, J, K lần lượt là trung điểm của các cạnh MN, MP, MQ. Tỉ số thể tích $\dfrac{V_{MIJK}}{V_{MNPQ}}$ bằng

(A) $\dfrac{1}{3}$. (B) $\dfrac{1}{4}$. (C) $\dfrac{1}{6}$. (D) $\dfrac{1}{8}$.

Lời giải.

Ta có: $\dfrac{V_{M.IJK}}{V_{M.NPQ}} = \dfrac{MI}{MN} \cdot \dfrac{MJ}{MP} \cdot \dfrac{MK}{MQ} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{8}$.



Chọn đáp án (D) □

Câu 3 (THPT Lê Văn Thịnh Bắc Ninh 2019).

Cho hình chóp $S.ABCD$. Gọi A', B', C', D' theo thứ tự là trung điểm của SA, SB, SC, SD . Tính tỉ số thể tích của hai khối chóp $S.A'B'C'D'$. và $S.ABCD$.

(A) $\dfrac{1}{16}$. (B) $\dfrac{1}{4}$. (C) $\dfrac{1}{8}$. (D) $\dfrac{1}{2}$.

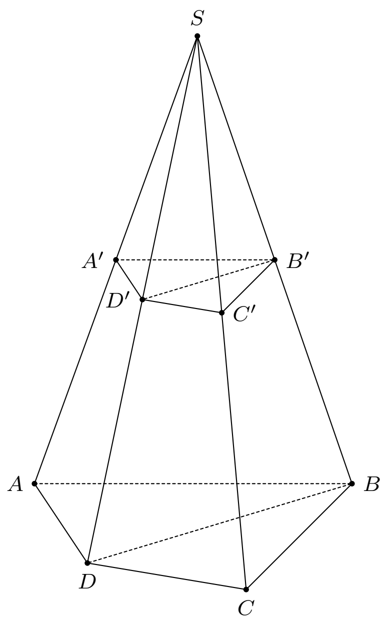
Lời giải.

Ta có $\dfrac{V_{S.A'B'D'}}{V_{S.ABD}} = \dfrac{SA'}{SA} \cdot \dfrac{SB'}{SB} \cdot \dfrac{SD'}{SD} = \dfrac{1}{8} \Rightarrow \dfrac{V_{S.A'B'D'}}{V_{S.ABCD}} = \dfrac{1}{16}$.

Và $\dfrac{V_{S.B'D'C'}}{V_{S.BDC}} = \dfrac{SB'}{SB} \cdot \dfrac{SD'}{SD} \cdot \dfrac{SC'}{SC} = \dfrac{1}{8} \Rightarrow \dfrac{V_{S.B'D'C'}}{V_{S.ABCD}} = \dfrac{1}{16}$.

Suy ra $\dfrac{V_{S.A'B'D'}}{V_{S.ABCD}} + \dfrac{V_{S.B'D'C'}}{V_{S.ABCD}} = \dfrac{1}{16} + \dfrac{1}{16} = \dfrac{1}{8}$.

Vậy $\dfrac{V_{S.A'B'C'D'}}{V_{S.ABCD}} = \dfrac{1}{8}$.



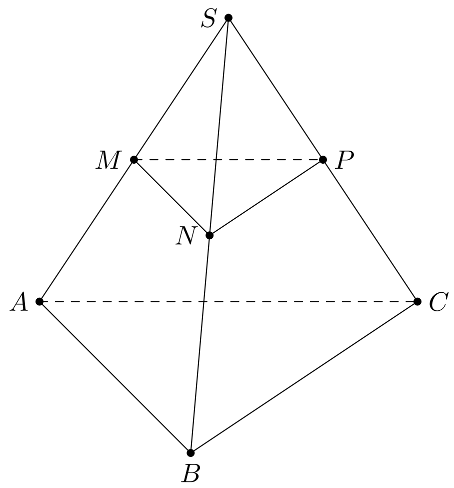
Chọn đáp án (C) □

Câu 4. Cho hình chóp $S.ABC$. Gọi M, N, P theo thứ tự là trung điểm của SA, SB, SC. Tính tỉ số thể tích của 2 khối chóp $S.MNP$ và $S.ABC$ bằng

(A) $\dfrac{1}{4}$. (B) $\dfrac{1}{8}$. (C) $\dfrac{1}{16}$. (D) $\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Ta có $\dfrac{V_{S.MNP}}{V_{S.ABC}} = \dfrac{SM}{SA} \cdot \dfrac{SN}{SB} \cdot \dfrac{SP}{SC} = \dfrac{1}{8}$.



Chọn đáp án B □

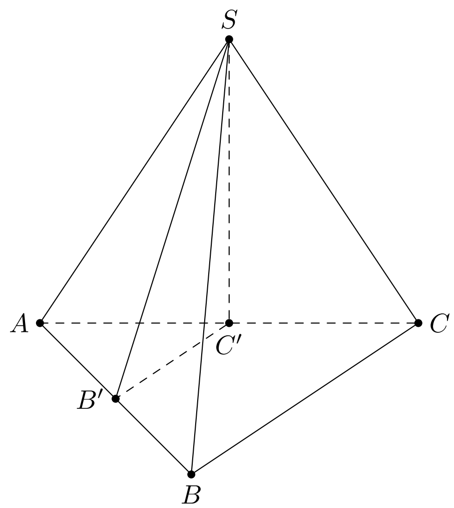
Câu 5 (SGD Hưng Yên 2019). Cho khối chóp $S.ABC$ có thể tích V. Gọi B', C' lần lượt là trung điểm của AB, AC. Tính theo V thể tích khối chóp $S.AB'C'$.

A $\dfrac{1}{3}V$. B $\dfrac{1}{2}V$. C $\dfrac{1}{12}V$. D $\dfrac{1}{4}V$.

Lời giải.

Ta có tỷ số thể tích $\dfrac{V_{ASB'C'}}{V_{A.SBC}} = \dfrac{AB'}{AB} \cdot \dfrac{AC'}{AC} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{4}$.

Do đó $V_{A.SB'C'} = \dfrac{1}{4} V_{A.SBC}$ hay $V_{S.AB'C'} = \dfrac{1}{4} V$.



Chọn đáp án D □

Câu 6 (THPT Thăng Long 2019). Cho hình chóp $S.ABCD$, gọi I, J, K, H lần lượt là trung điểm các cạnh SA, SB, SC, SD . Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ biết thể tích khối chóp $S.IJKH$ bằng 1 .

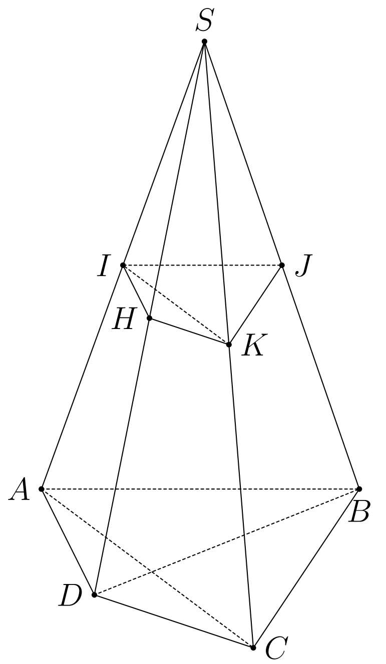
A 16. B 8. C 2. D 4.

Lời giải.

Ta có: $\dfrac{V_{S.ABC}}{V_{S.IJK}} = \dfrac{SA}{SI} \cdot \dfrac{SB}{SJ} \cdot \dfrac{SC}{SK} = 8 \Rightarrow V_{S.ABC} = 8V_{S.IJK}$.

$\dfrac{V_{S.ACD}}{V_{S.IKH}} = \dfrac{SA}{SI} \cdot \dfrac{SC}{SK} \cdot \dfrac{SD}{SH} = 8 \Rightarrow V_{S.ACD} = 8V_{S.IKH}$

Do đó: $V_{S.ABCD} = 8V_{S.IJKH} = 8$.



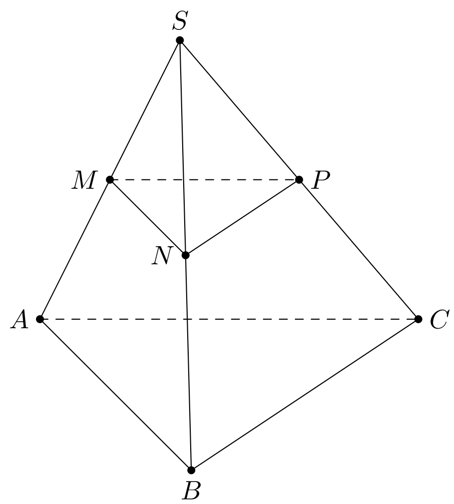
Chọn đáp án (B) □

Câu 7. Cho hình chóp $S.ABC$, trên các tia SA, SB, SC lần lượt lấy các điểm A', B', C'. Gọi V_1, V_2 lần lượt là thể tích khối chóp $S.ABC$ và $S.A'B'C'$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

(A) $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{SA}{SA'} \cdot \dfrac{SB'}{SB} \cdot \dfrac{SC}{SC'}$.
(B) $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{SB}{SB'} \cdot \dfrac{SC}{SC'}$.
(C) $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{SA}{SA'} \cdot \dfrac{SB}{SB'}$.
(D) $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{SA}{SA'} \cdot \dfrac{SB}{SB'} \cdot \dfrac{SC}{SC'}$.

Lời giải.

Theo công thức tỉ số thể tích ta có $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{SA}{SA'} \cdot \dfrac{SB}{SB'} \cdot \dfrac{SC}{SC'}$.



Chọn đáp án (D) □

Câu 8 (Gia Lai 2019). Cho khối chóp SABC có thể tích bằng $5a^3$. Trên các cạnh SB, SC lần lượt lấy các điểm M và N sao cho $SM = 3MB$, $SN = 4NC$ (tham khảo hình vẽ). Tính thể tích V của khối chóp $AMNCB$.

(A) $V = \dfrac{3}{5}a^3$. (B) $V = \dfrac{3}{4}a^3$. (C) $V = a^3$. (D) $V = 2a^3$.

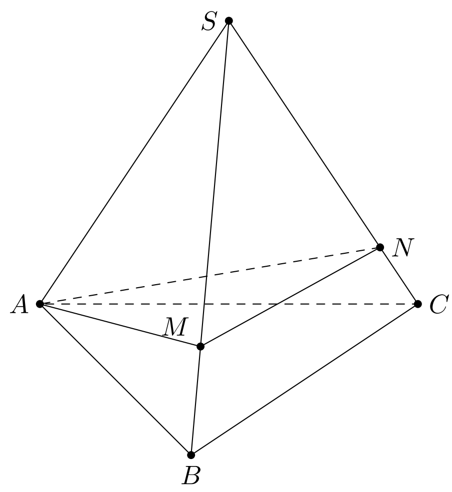
Lời giải.

Gọi V_1 là thể tích khối chóp $SAMN$ và V_0 là thể tích khối chóp $SABC$.

Theo công thức tỷ lệ thể tích ta có: $\dfrac{V_1}{V_0} = \dfrac{SM}{SB} \cdot \dfrac{SN}{SC} = \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{4}{5} = \dfrac{3}{5}$.

V là thể tích khối chóp $AMNCB$ ta có $V + V_1 = V_0$.

Vậy $V = \dfrac{2}{5} V_0 = \dfrac{2}{5} \cdot 5a^3 = 2a^3$.



Chọn đáp án D □

Câu 9. Nếu một hình chóp tứ giác đều có chiều cao và cạnh đáy cùng tăng lên 2 lần thì thể tích của nó tăng lên bao nhiêu lần?

A. 2 lần. B. 4 lần. C. 6 lần. D. 8 lần.

Lời giải.

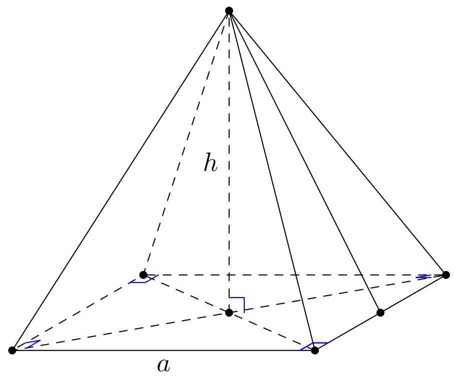
Gọi h , a lần lượt là chiều cao và cạnh đáy của hình chóp tứ giác đều.

Thể tích của khối chóp tứ giác đều là $V = \dfrac{1}{3} a^2 h$.

Khi tăng chiều cao và cạnh đáy lên 2 lần thì ta được khối chóp tứ giác đều mới có thể tích là

$V' = \dfrac{1}{3}(2a)^2(2h) = 8 \cdot \dfrac{1}{3} a^2 h = 8V$.

Vậy thể tích của khối chóp tăng lên 8 lần.



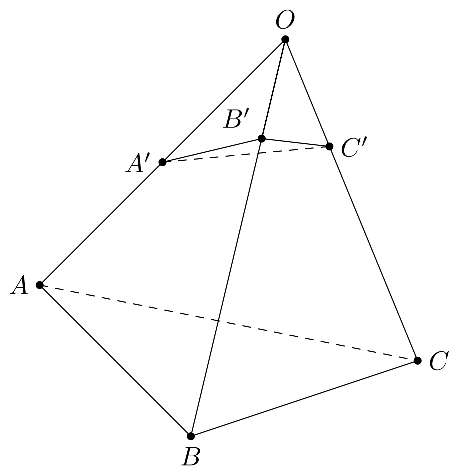
Chọn đáp án D □

Câu 10. Trên ba cạnh OA, OB, OC của khối chóp $O.ABC$ lần lượt lấy các điểm A', B', C' sao cho $2OA' = OA$, $4OB' = OB$ và $3OC' = OC$. Tỉ số thể tích giữa hai khối chóp $O.A'B'C'$ và $O.ABC$ là

A. $\dfrac{1}{12}$. B. $\dfrac{1}{24}$. C. $\dfrac{1}{32}$. D. $\dfrac{1}{16}$.

Lời giải.

$\dfrac{V_{O.A'B'C'}}{V_{O.ABC}} = \dfrac{OA'}{OA} \cdot \dfrac{OB'}{OB} \cdot \dfrac{OC'}{OC} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{24}$.



.

Chọn đáp án (B) □

Câu 11. Cho khối chóp $SABC$, M là trung điểm của SA. Tỉ số thể tích $\dfrac{V_{M.ABC}}{V_{S.ABC}}$ bằng

(A) $\dfrac{1}{4}$. (B) $\dfrac{1}{2}$. (C) 2. (D) $\dfrac{1}{8}$.

Lời giải.

Ta có $\dfrac{V_{S.MBC}}{V_{S.ABC}} = \dfrac{SM}{SA} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \dfrac{V_{M.ABC}}{V_{S.ABC}} = \dfrac{1}{2}$.

Chọn đáp án (B) □

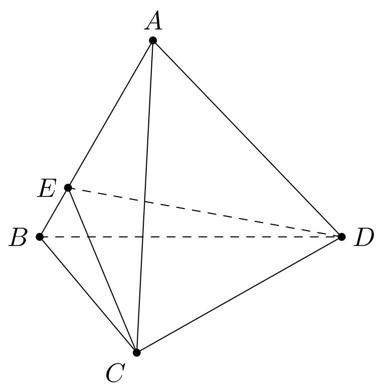
Câu 12 (THPT Hoa Lư A - 2018). Cho khối tứ diện $ABCD$ có thể tích V và điểm E trên cạnh AB sao cho $AE = 3EB$. Tính thể tích khối tứ diện $EBCD$ theo V.

(A) $\dfrac{V}{4}$. (B) $\dfrac{V}{3}$. (C) $\dfrac{V}{2}$. (D) $\dfrac{V}{5}$.

Lời giải.

$\dfrac{V_{BECD}}{V_{A.BCD}} = \dfrac{BE}{BA} \cdot \dfrac{AC}{AC} \cdot \dfrac{AD}{AD} = \dfrac{1}{4}$

$\Rightarrow V_{B.ECD} = V_{E.BCD} = \dfrac{1}{4}V$.



Chọn đáp án (A) □

Câu 13. (Chuyên Vinh - 2018) Cho khối chóp $S.ABCD$ có thể tích V . Các điểm A' , B' , C' tương ứng là trung điểm các cạnh SA , SB , SC . Thể tích khối chóp $S.A'B'C'$ bằng

(A) $\dfrac{V}{8}$. (B) $\dfrac{V}{4}$. (C) $\dfrac{V}{2}$. (D) $\dfrac{V}{16}$.

Lời giải.

Ta có $\dfrac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \dfrac{SA'}{SA} \cdot \dfrac{SB'}{SB} \cdot \dfrac{SC'}{SC} = \dfrac{1}{8} \Rightarrow V_{S.A'B'C'} = \dfrac{V}{8}$.

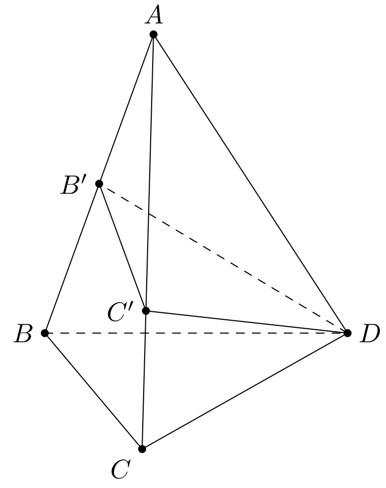
Chọn đáp án (A) □

Câu 14. (THPT Cao Bá Quát - 2018) Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh a . Trên các cạnh AB , AC lần lượt lấy các điểm B', C' sao cho $AB' = \dfrac{a}{2}, AC' = \dfrac{2a}{3}$. Tỉ số thể tích của khối tứ diện $AB'C'D$ và khối tứ diện $ABCD$ là

(A) $\dfrac{1}{2}$. (B) $\dfrac{1}{3}$. (C) $\dfrac{1}{4}$. (D) $\dfrac{1}{5}$.

Lời giải.

Ta có $\dfrac{V_{AB'C'D}}{V_{ABCD}} = \dfrac{AB'}{AB} \cdot \dfrac{AC'}{AC} = \dfrac{1}{3}$.



Chọn đáp án (B) □

Dạng 2. Tỉ số khối lăng trụ

Câu 1 (Sở Nam Định - 2019). Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có thể tích bằng V. Tính thể tích khối đa diện $BAA'C'C$

(A) $\dfrac{3V}{4}$. (B) $\dfrac{2V}{3}$. (C) $\dfrac{V}{2}$. (D) $\dfrac{V}{4}$.

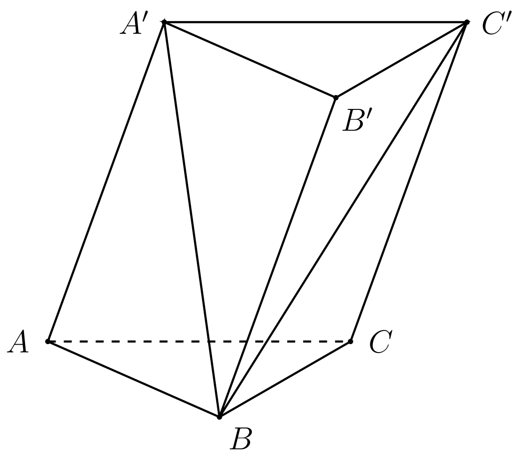
Lời giải.

Mặt phẳng $(BA'C')$ chia khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ thành hai khối: $B.AA'C'C$ và $B.A'B'C'$.

$\Rightarrow V_{B.AA'C'C} = V_{ABC.A'B'C'} - V_{B.A'B'C'}$.

Khối chóp $S.BA'B'C'$ và khối lăng trụ có chung đáy và chung chiều cao $\Rightarrow V_{B.A'B'C'} = \dfrac{1}{3}V$

$\Rightarrow V_{BAA'C'C} = V - \dfrac{1}{3}V = \dfrac{2V}{3}$.



Chọn đáp án (B) □

Câu 2 (Chuyên Lê Thánh Tông 2019).

Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$, M là trung điểm CC'. Mặt phẳng (ABM) chia khối lăng trụ thành hai khối đa diện. Gọi V_1 là thể tích khối lăng trụ chứa đỉnh C và V_2 là thể tích khối đa diện còn lại. Tính tỉ số $\dfrac{V_1}{V_2}$.

(A) $\dfrac{1}{5}$. (B) $\dfrac{1}{6}$. (C) $\dfrac{1}{2}$. (D) $\dfrac{2}{5}$.

Lời giải.

Ta có V_1 là thể tích khối lăng trụ chứa đỉnh C tức là $V_1 = V_{M.ABC} = \dfrac{1}{3}S_{ABC} \cdot MC$

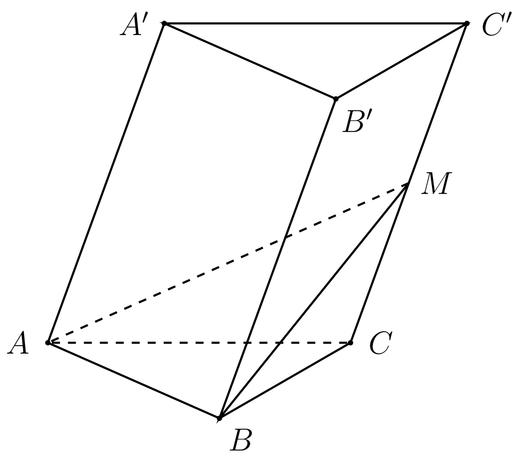
V_2 là thể tích khối đa diện còn lại

$\Rightarrow V_2 = V_{ABC.A'B'C'} - V_1 = S_{ABC} \cdot CC' - \dfrac{1}{6}S_{ABC} \cdot CC'$

$= \dfrac{5}{6}S_{ABC} \cdot CC'.$

Khi đó ta có tỉ số

$\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{\frac{1}{3}S_{ABC}.MC}{\frac{5}{6}S_{ABC} \cdot CC'} = \dfrac{\frac{1}{6}S_{ABC} \cdot CC'}{\frac{5}{6}S_{ABC} \cdot CC'} = \dfrac{1}{5}.$

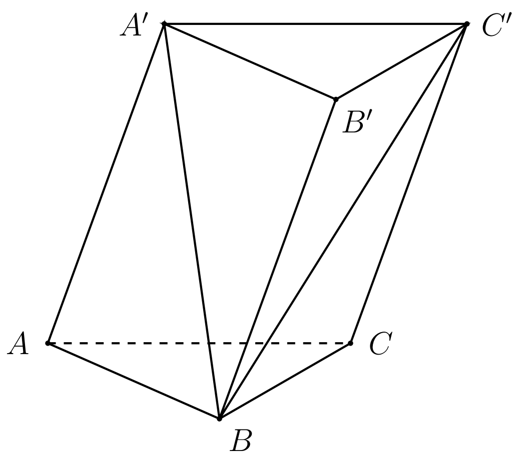


Chọn đáp án (A) □

Câu 3. Khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có thể tích bằng 6. Mặt phẳng $(A'BC')$ chia khối lăng trụ thành một khối chóp tam giác và một khối chóp tứ giác có thể tích lần lượt là

(A) 2 và 4 . (B) 3 và 3 . (C) 4 và 2 . (D) 1 và 5 .

Lời giải.



- Thể tích khối lăng trụ là $V_{ABC.A'B'C'} = \mathrm{d}(B, (A'B'C')) \cdot S_{A'B'C'} = 6.$

- Thể tích khối chóp tam giác $.BA'B'C'$ là $V_{B.A'B'C'} = \dfrac{1}{3} \cdot \mathrm{d}(B, (A'B'C')) \cdot S_{A'B'C'} = \dfrac{1}{3} \cdot V_{ABC.A'B'C'} = \dfrac{1}{3} \cdot 6 = 2.$

Vậy thể tích khối chóp tứ giác $BACC'A'$ là:

$V_{B.ACC'A'} = V_{ABC.A'B'C'} - V_{B.A'B'C'} = 6 - 2 = 4.$

Chọn đáp án (A) □

Câu 4. Cho khối lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có thể tích V. Gọi M là trung điểm của cạnh CC'. Mặt phẳng (MAB) chia khối lăng trụ thành hai phần có tỉ số $k \leq 1$. Tìm k ?

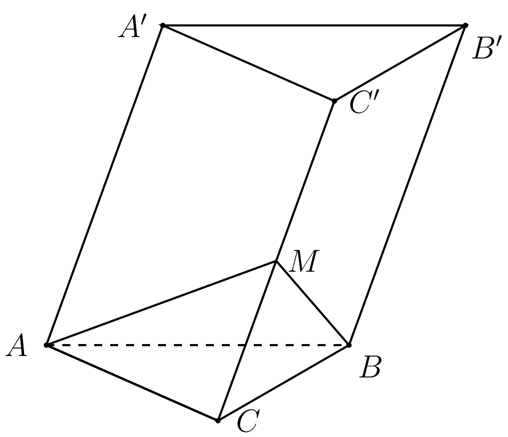
(A) $\dfrac{2}{5}$. (B) $\dfrac{3}{5}$. (C) $\dfrac{1}{5}$. (D) $\dfrac{1}{6}$.

Lời giải.

Ta có $V = d(C', (ABC)) \cdot S_{ABC}$.

Khi đó $V_{M.ABC} = \dfrac{1}{3}\mathrm{d}(M, (ABC)) \cdot S_{ABC} = \dfrac{1}{6}\mathrm{d}(C', (ABC)) \cdot S_{ABC} = \dfrac{1}{6}V \Rightarrow V_{ABM.A'B'C'} = \dfrac{5}{6}V.$

Vậy $k = \dfrac{V_{M.ABC}}{V_{ABM.A'B'C'}} = \dfrac{1}{5}.$



Chọn đáp án (C) □

Câu 5. (THPT Thăng Long 2019) Một khối lăng trụ tứ giác đều có thể tích là 4 . Nếu gấp đôi các cạnh đáy đồng thời giảm chiều cao của khối lăng trụ này hai lần thì được khối lăng trụ mới có thể tích là:

(A) 8. (B) 4. (C) 16. (D) 2.

Lời giải.

Giả sử khối lăng trụ tứ giác đều có độ dài cạnh đáy là a và chiều cao là h . Khi đó thể tích khối lăng trụ tứ giác đều được tính bởi công thức $V = Bh = a^2 \cdot h = 4$.

Nếu gấp đôi các cạnh đáy thì diện tích đáy mới $B' = 4a^2$. Giảm chiều cao hai lần nên chiều cao mới $h' = \dfrac{h}{2}$.

Vì vậy thể tích khối lăng trụ mới sẽ là $V = B'h' = 4a^2 \cdot \dfrac{h}{2} = 2a^2h = 8$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 6. Biết khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có thể tích V. Nếu tăng mỗi cạnh của hình hộp đó lên gấp hai lần thì thể tích khối hộp mới là:

(A) $8V$. (B) $4V$. (C) $2V$. (D) $16V$.

Lời giải.

Ta có nếu tăng mỗi cạnh của khối hộp lên hai lần thì ta được khối hộp mới đồng dạng với khối hộp cũ theo tỉ số 2. Do đó thể tích khối hộp mới bằng $2^3 \cdot V = 8V$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 7. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có M là trung điểm của AA'. Tỉ số thể tích $\dfrac{V_{M.ABC}}{V_{ABC.A'B'C'}}$ bằng

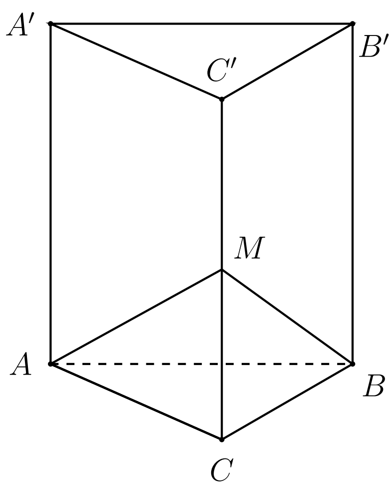
(A) $\dfrac{1}{6}$. (B) $\dfrac{1}{3}$. (C) $\dfrac{1}{12}$. (D) $\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Ta có: $V_{ABC.A'B'C'} = AA' \cdot S_{\triangle ABC}$ (1);

$V_{M.ABC} = \dfrac{1}{3}AM.S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{2}AA' \cdot S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{6}V_{ABC.A'B'C'}$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $\dfrac{V_{M.ABC}}{V_{ABC.A'B'C'}} = \dfrac{1}{6}$.

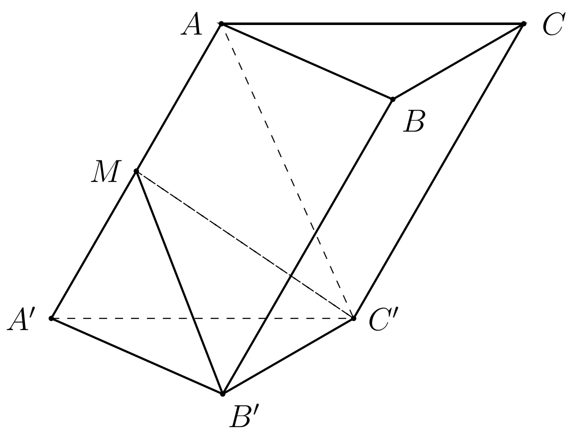


Chọn đáp án (A) □

Câu 8 (HKI-NK HCM-2019). Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có thể tích là V . Gọi M là trung điểm cạnh AA' . Khi đó thể tích khối chóp $M.BCC'B'$ là

Ⓐ $\dfrac{V}{2}$. Ⓑ $\dfrac{2V}{3}$. Ⓒ $\dfrac{V}{3}$. Ⓓ $\dfrac{V}{6}$.

Lời giải.



Vì $AA' \parallel (BB'C'C)$ nên

$d(M,(BB'C'C)) = d(A,(BB'C'C))$

suy ra $V_{M.BB'C'C} = V_{ABB'C'C}$.

Mà

$V_{A.BB'C'C} = V_{ABC.A'B'C'} - V_{AA'B'C'} = V - \dfrac{1}{3}V = \dfrac{2}{3}V$.

Vậy $V_{M.BB'C'C} = \dfrac{2}{3}V$.

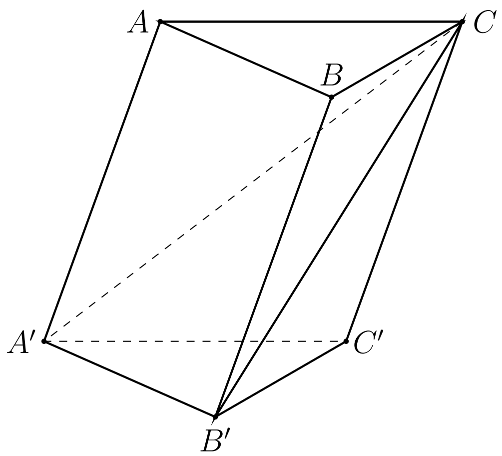
Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 9 (THPT Hoàng Hoa Thám - Hưng Yên 2019).

Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Biết diện tích mặt bên $(ABB'A')$ bằng 15, khoảng cách từ điểm C đến $(ABB'A')$ bằng 6. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

Ⓐ 30. Ⓑ 45. Ⓒ 60. Ⓓ 90.

Lời giải.



Ta có

$V_{CABB'A'} = \dfrac{1}{3}d(C;(ABB'A')) \cdot S_{ABB'A'} = \dfrac{1}{3} \cdot 6 \cdot 15 = 30$.

Mà $V_{CABB'A'} = \dfrac{2}{3} \cdot V_{ABC.A'B'C'}$

$\Rightarrow V_{ABC.A'B'C'} = \dfrac{3}{2}V_{CABB'A'} = 45$.

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 10 (Chuyên Vĩnh Phúc - 2019).

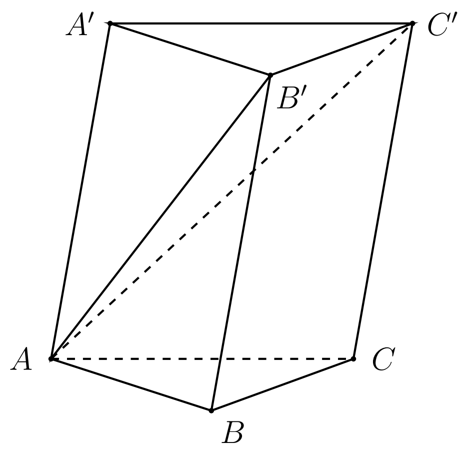
Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có thể tích bằng V. Tính thể tích khối đa diện $ABCB'C'$.

Ⓐ $\dfrac{V}{4}$. Ⓑ $\dfrac{V}{2}$. Ⓒ $\dfrac{3V}{4}$. Ⓓ $\dfrac{2V}{3}$.

Lời giải.

Gọi chiều cao của lăng trụ là h , $S_{ABC} = S_{A'B'C'} = S$. Khi đó $V = Sh$.

Ta có $V_{AA'B'C'} = \dfrac{1}{3}Sh = \dfrac{1}{3}V \Rightarrow V_{ABCB'C'} = \dfrac{2}{3}V$.



Chọn đáp án D □

Câu 11. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có I là giao điểm của AC và BD. Gọi V_1 và V_2 lần lượt là thể tích của các khối $ABCD.A'B'C'D'$ và $I.A'B'C'$. Tính tỉ số $\dfrac{V_1}{V_2}$.

Ⓐ $\dfrac{V_1}{V_2} = 6$. Ⓑ $\dfrac{V_1}{V_2} = 2$. Ⓒ $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{3}{2}$. Ⓓ $\dfrac{V_1}{V_2} = 3$.

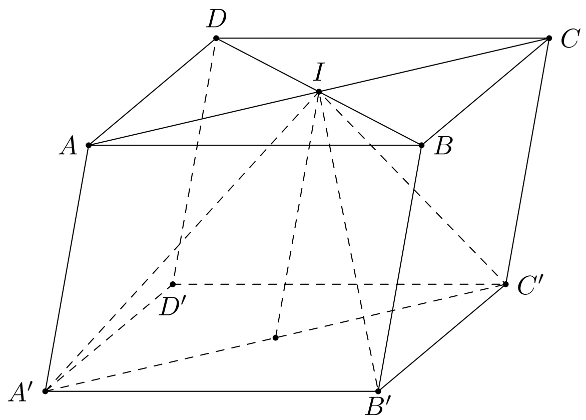
Lời giải.

Ta có:

$V_1 = AA'.S_{A'B'C'D'}$,

$$V_2 = \frac{1}{3}\mathrm{d}(I;(A'B'C')) \cdot S_{\Delta A'B'C'}$$
$$= \frac{1}{3}\mathrm{d}(A;(A'B'C')) \cdot \frac{1}{2}S_{A'B'C'D'}$$
$$= \frac{1}{6}AA'.S_{A'B'C'D'}$$
$$= \frac{1}{6}V_1.$$

$\Rightarrow \dfrac{V_1}{V_2} = 6$.



Chọn đáp án A □

BẢNG ĐÁP ÁN

1. C	2. D	3. C	4. B	5. D	6. B	7. D	8. D	9. D	10. B
11. B	12. A	13. A	14. B	1. B	2. A	3. A	4. C	5. A	6. A
7. A	8. B	9. B	10. D	11. A					

MỨC ĐỘ 2. MỨC ĐỘ 7 - 8 - 9 - 10 ĐIỂM

Dạng 1. Tỉ số thể tích khối chóp – khối lăng trụ

Câu 1 (HSG 12-Sở Nam Định-2019).

Cho tứ diện $ABCD$ có thể tích V, với M, N lần lượt là trung điểm AB, CD. Gọi V_1, V_2 lần lượt là thể tích của tứ diện $MNBC$ và $MNDA$. Tính tỉ lệ $\dfrac{V_1+V_2}{V}$.

(A) 1. (B) $\dfrac{1}{2}$. (C) $\dfrac{1}{3}$. (D) $\dfrac{2}{3}$.

Lời giải.

Vì M, N lần lượt là trung điểm AB, CD nên ta có

$\mathrm{d}(A,(MCD))=\mathrm{d}\big(B,(MCD)\big)$;

$\mathrm{d}\big(C,(NAB)\big)=\mathrm{d}\big(D,(NAB)\big)$.

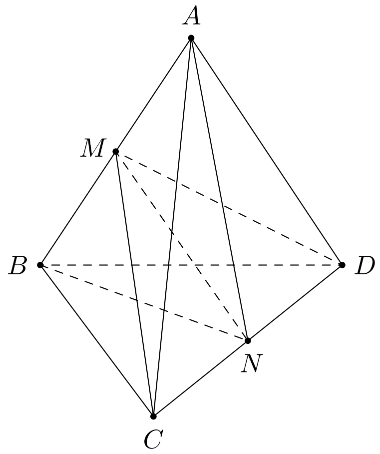
Do đó

$V_{A.MCD}=V_{B.MCD}=\dfrac{V}{2}$;

$V_1=V_{MNBC}=V_{C.MNB}=V_{D.MNB}=\dfrac{V_{B.MCD}}{2}=\dfrac{V}{4}$;

$V_2=V_{MNAD}=V_{D.MNA}=V_{C.MNA}=\dfrac{V_{A.MCD}}{2}=\dfrac{V}{4}$.

$\Rightarrow \dfrac{V_1+V_2}{V}=\dfrac{\dfrac{V}{4}+\dfrac{V}{4}}{V}=\dfrac{1}{2}$.



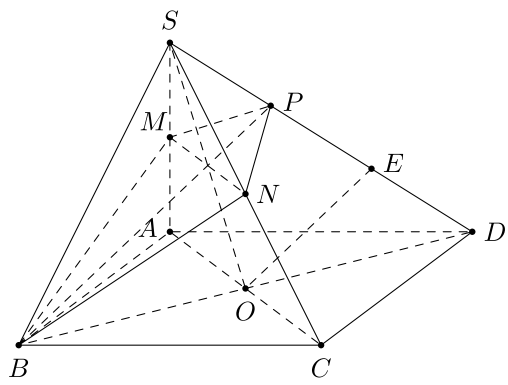
Chọn đáp án (B) □

Câu 2 (THPT Thuận Thành 3 - Bắc Ninh).

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi M, N là trung điểm các cạnh SA, SC; mặt phẳng (BMN) cắt cạnh SD tại P. Tỉ số $\dfrac{V_{SBMPN}}{V_{SABCD}}$ bằng

(A) $\dfrac{V_{SBMPN}}{V_{SABCD}}=\dfrac{1}{16}$. (B) $\dfrac{V_{SBMPN}}{V_{SABCD}}=\dfrac{1}{6}$. (C) $\dfrac{V_{SBMPN}}{V_{SABCD}}=\dfrac{1}{12}$. (D) $\dfrac{V_{SBMPN}}{V_{SABCD}}=\dfrac{1}{8}$.

Lời giải.



Dựng $SO\cap MN=I$, $SI\cap SD=P$ và $OE\parallel BP$.

Khi đó: I là trung điểm của MN, SO nên $\dfrac{SP}{SE}=\dfrac{SI}{SO}=\dfrac{1}{2}$; $\dfrac{DE}{DP}=\dfrac{DO}{DP}=\dfrac{1}{2}$.

Vậy $SP=PE=ED\Rightarrow \dfrac{SP}{SD}=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{V_{SMPB}}{V_{SADB}}=\dfrac{SP}{SD}\cdot\dfrac{SM}{SA}=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{6}$.

$\Rightarrow \dfrac{V_{SMPB}}{V_{SABCD}} = \dfrac{1}{12} \cdot \dfrac{V_{SNPB}}{V_{SCDB}} = \dfrac{SP}{SD} \cdot \dfrac{SN}{SC} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{6} \Rightarrow \dfrac{V_{SNPB}}{V_{SABCD}} = \dfrac{1}{12} \cdot V_{SBMPN} = V_{SBMP} + V_{SBPN}$

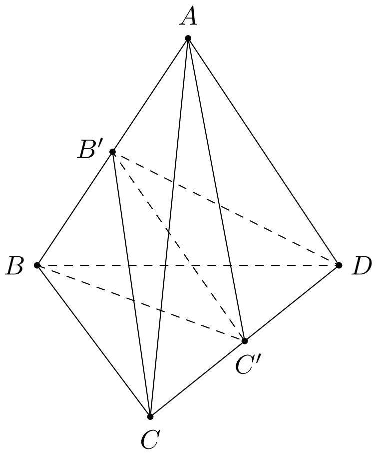
$\Rightarrow \dfrac{V_{SMPNB}}{V_{SABCD}} = \dfrac{1}{12} + \dfrac{1}{12} = \dfrac{1}{6}$.

Chọn đáp án B □

Câu 3. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi B', C' lần lượt là trung điểm của AB và CD. Khi đó tỉ số thể tích của khối đa diện $AB'C'D$ và khối tứ diện $ABCD$ bằng

A $\dfrac{1}{2}$. B $\dfrac{1}{4}$. C $\dfrac{1}{6}$. D $\dfrac{1}{8}$.

Lời giải.



Ta có $\dfrac{V_{AB'C'D}}{V_{ABCD}} = \dfrac{V_{B'AC'D}}{V_{BACD}} = \dfrac{\frac{1}{3} S_{\triangle DC'A} \cdot \mathrm{d}\left(B', (DC'A)\right)}{\frac{1}{3} S_{\triangle DCA'} \cdot \mathrm{d}(B, (DCA))}$.

$$= \dfrac{\frac{1}{2} DC' \cdot DA \cdot \sin \widehat{ADC'}}{\frac{1}{2} DC \cdot DA \cdot \sin \widehat{ADC}} \cdot \dfrac{\mathrm{d}\left(B', (DC'A)\right)}{\mathrm{d}(B, (DCA))}$$

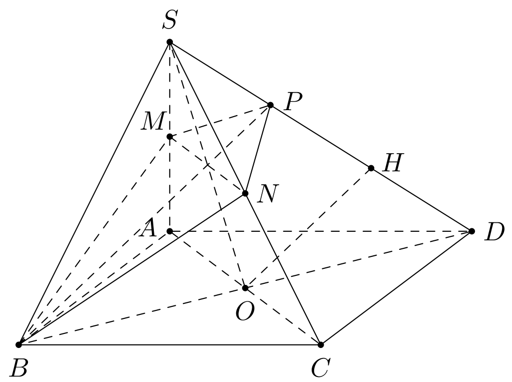
$$= \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{4}$$

Chọn đáp án B □

Câu 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA, SC. Mặt phẳng (BMN) cắt SD tại P. Tỉ số $\dfrac{V_{S.BMPN}}{V_{S.ABCD}}$ bằng

A $\dfrac{V_{S.BMPN}}{V_{S.ABCD}} = \dfrac{1}{16}$. B $\dfrac{V_{S.BMPN}}{V_{S.ABCD}} = \dfrac{1}{6}$. C $\dfrac{V_{S.BMPN}}{V_{S.ABCD}} = \dfrac{1}{12}$. D $\dfrac{V_{S.BMPN}}{V_{S.ABCD}} = \dfrac{1}{8}$.

Lời giải.



Ta có M, N là trung điểm của SA, SC nên $\dfrac{SM}{SA} = \dfrac{SN}{SC} = \dfrac{1}{2}$.

Cách 1: Áp dụng định lý Menelaus cho $\triangle SOD$ ta có

$$\frac{PS}{PD} \cdot \frac{BD}{BO} \cdot \frac{IO}{IS} = 1 \Rightarrow \frac{PS}{PD} \cdot 2 \cdot 1 = 1 \Rightarrow \frac{PS}{PD} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{SP}{SD} = \frac{1}{3}.$$

Cách 2: Kẻ $OH \parallel BP$, ta có O là trung điểm của BD nên H là trung điểm của PD.

Ta có $OH \parallel IP$ mà I là trung điểm của SO nên P là trung điểm của SH.

Suy ra $SP = PH = HD \Rightarrow \dfrac{SP}{SD} = \dfrac{1}{3}$.

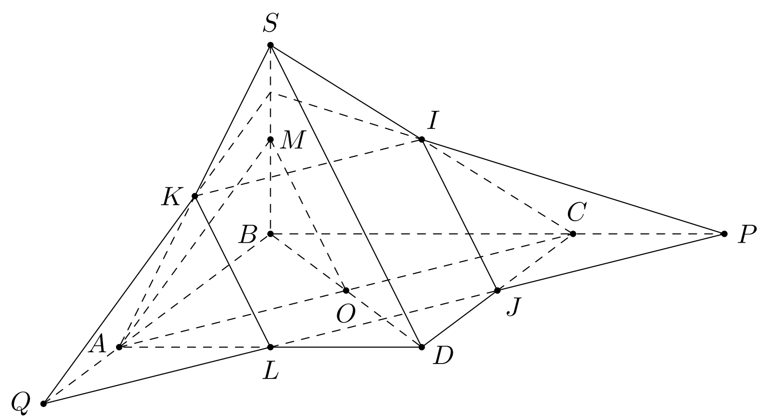
Theo công thức tỉ số thể tích ta có $\dfrac{V_{S.BMPN}}{V_{S.ABCD}} = \dfrac{2V_{S.BMP}}{2V_{SBAD}} = \dfrac{SM}{SA} \cdot \dfrac{SP}{SD} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{6}$.

Chọn đáp án B □

Câu 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi K, M lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng SA, SB, (α) là mặt phẳng qua K song song với AC và AM. Mặt phẳng (α) chia khối chóp $S.ABCD$ thành hai khối đa diện. Gọi V_1 là thể tích của khối đa diện chứa đỉnh S và V_2 là thể tích khối đa diện còn lại. Tính tỉ số $\dfrac{V_1}{V_2}$.

A $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{7}{25}$. B $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{5}{11}$. C $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{7}{17}$. D $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{9}{23}$.

Lời giải.



Gọi V là thể tích khối chóp $S.ABCD$; I, H lần lượt là trung điểm SC, SM.

Do $(\alpha) \parallel (ACM)$ nên (α) cắt (SAD), (SBD), (SCD) lần lượt tại KL, HP, IJ cùng song song với OM.

Ta có $\dfrac{V_{B.HQP}}{V_{B.SAC}} = \dfrac{BH}{BS} \cdot \dfrac{BQ}{BA} \cdot \dfrac{BP}{BC} = \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{3}{2} \cdot \dfrac{3}{2} = \dfrac{27}{16}$.

Suy ra $V_{B.HQP} = \dfrac{27}{16} V_{B.SAC} = \dfrac{27}{16} \cdot \dfrac{1}{2} V = \dfrac{27}{32} V$.

$\dfrac{V_{A.KQL}}{V_{A.SBD}} = \dfrac{AK}{AS} \cdot \dfrac{AQ}{AB} \cdot \dfrac{AL}{AD} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{8} \Rightarrow V_{A.KQL} = \dfrac{1}{8} V_{A.SBD} = \dfrac{1}{8} \cdot \dfrac{1}{2} V = \dfrac{1}{16} V$.

Tương tự: $V_{C.IPJ} = \dfrac{1}{16} V$.

Do đó $V_2 = \left(\dfrac{27}{32} - \dfrac{1}{16} - \dfrac{1}{16}\right) V = \dfrac{23}{32} V \Rightarrow V_1 = \dfrac{9}{32} V$.

Vậy tỉ số $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{9}{23}$.

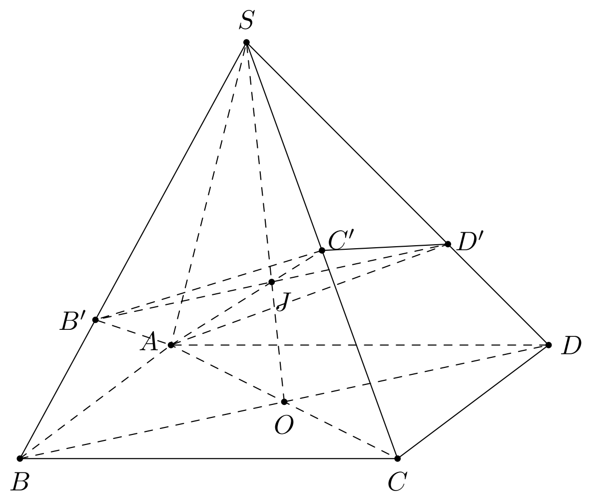
Chọn đáp án D □

Câu 6 (THPT Hai Bà Trưng-Huế-2019).

Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$. Mặt phẳng (P) qua A và vuông góc với SC cắt SB, SC, SD lần lượt tại B', C', D'. Biết C' là trung điểm của SC. Gọi V_1, V_2 lần lượt là thể tích hai khối chóp $S.AB'C'D'$ và $S.ABCD$. Tính tỷ số $\dfrac{V_1}{V_2}$.

Ⓐ $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{2}{3}$. Ⓑ $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{2}{9}$. Ⓒ $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{4}{9}$. Ⓓ $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{1}{3}$.

Lời giải.



Ta có $V_2 = 2 \cdot V_{S.ABC} = 2 \cdot V_{S.ACD}$.

Gọi $O = AC \cap BD$, $J = SO \cap AC'$.

Vì C' là trung điểm của SC nên J là trọng tâm của $\triangle SAC$.

Vì $BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp SC$ mà (P) qua A và vuông góc với SC nên $(P) \parallel BD$.

Trong (SBD) qua J kẻ đường thẳng song song với BD cắt SB, SD lần lượt tại B', D'.

Ta có $\dfrac{SB'}{SB} = \dfrac{SD'}{SD} = \dfrac{SJ}{SO} = \dfrac{2}{3}$.

Khi đó $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{V_{S.AB'C'}}{2V_{S.ABC}} + \dfrac{V_{S.AC'D'}}{2V_{S.ACD}} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{SA}{SA} \cdot \dfrac{SB'}{SB} \cdot \dfrac{SC'}{SC} + \dfrac{SA}{SA} \cdot \dfrac{SD'}{SD} \cdot \dfrac{SC'}{SC}\right) = \dfrac{1}{2} \cdot 2 \cdot \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{3}$.

Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 7. Cho hình chóp $S.ABCD$. Gọi A', B', C', D' theo thứ tự là trung điểm của SA, SB, SC, SD. Tính tỉ số thể tích của hai khối chóp $S.A'B'C'D'$ và $S.ABCD$.

Ⓐ $\dfrac{1}{16}$. Ⓑ $\dfrac{1}{4}$. Ⓒ $\dfrac{1}{8}$. Ⓓ $\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Ta có $\dfrac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \dfrac{SA'}{SA} \cdot \dfrac{SB'}{SB} \cdot \dfrac{SC'}{SC} = \dfrac{1}{8}$; $\dfrac{V_{S.A'D'C'}}{V_{S.ADC}} = \dfrac{SA'}{SA} \cdot \dfrac{SD'}{SD} \cdot \dfrac{SC'}{SC} = \dfrac{1}{8}$.

Mà $V_{S.ABCD} = V_{S.ABC} + V_{S.ACD}$, suy ra

$$\frac{V_{S.A'B'C'D'}}{V_{S.ABCD}} = \frac{V_{S.A'B'C'} + V_{S.A'C'D'}}{V_{S.ABCD}} = \frac{\frac{1}{8}\left(V_{S.ABC} + V_{S.ACD}\right)}{V_{S.ABCD}} = \frac{1}{8}.$$

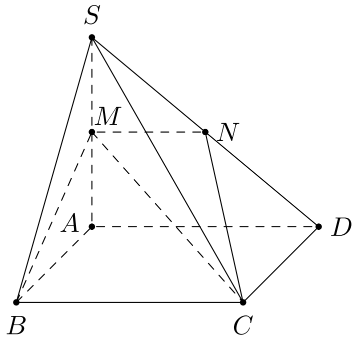
Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 8 (Chuyên Hùng Vương Gia Lai 2019).

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, trên cạnh SA lấy điểm M và đặt $\dfrac{SM}{SA} = x$. Giá trị x để mặt phẳng (MBC) chia khối chóp đã cho thành hai phần có thể tích bằng nhau là

Ⓐ $x = \dfrac{1}{2}$. Ⓑ $x = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$. Ⓒ $x = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$. Ⓓ $x = \dfrac{\sqrt{5}-1}{3}$.

Lời giải.



Ta có $\begin{cases} BC \parallel (SAD) \\ BC \subset (BMC) \end{cases} \Rightarrow (SAD) \cap (BMC) = MN \parallel BC \Rightarrow \dfrac{SM}{SA} = \dfrac{SN}{SD} = x$.

$\dfrac{V_{S.MBC}}{V_{S.ABC}} = \dfrac{2V_{S.MBC}}{V} = \dfrac{SM}{SA} = x$; $\dfrac{V_{S.MCN}}{V_{S.ACD}} = \dfrac{2V_{S.MCN}}{V} = \dfrac{SM}{SA} \cdot \dfrac{SN}{SD} = x^2$.

$\Rightarrow \dfrac{2\left(V_{S.MCN} + V_{S.MBC}\right)}{V} = x + x^2 \Leftrightarrow \dfrac{2V_{S.MBCN}}{V} = x + x^2 \Leftrightarrow \dfrac{V_{S.MBCN}}{V} = \dfrac{x + x^2}{2}$.

Mặt phẳng (MBC) chia khối chóp đã cho thành hai phần có thể tích bằng nhau $\dfrac{V_{S.MNBC}}{V} = \dfrac{1}{2}$.

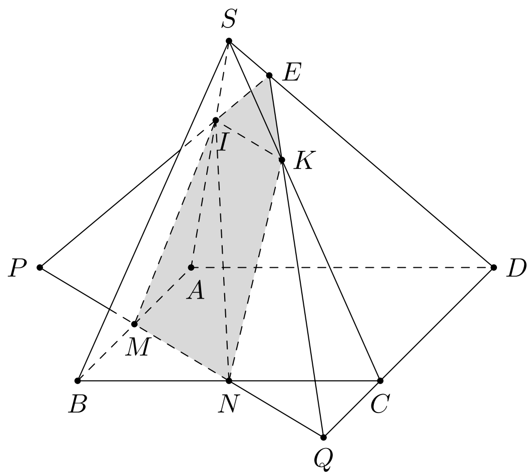
Do đó $1 = x + x^2 \Leftrightarrow x = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Chọn đáp án Ⓑ □

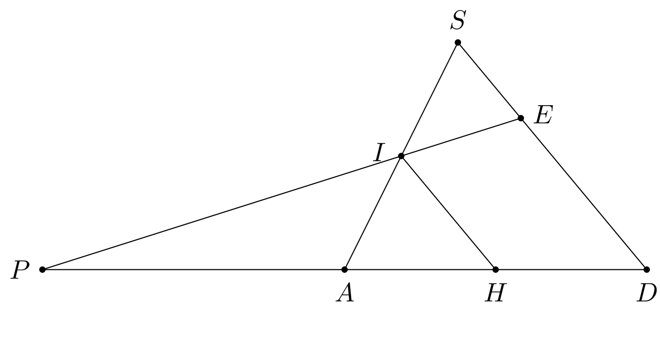
Câu 9. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC. Điểm I thuộc đoạn SA. Biết mặt phẳng (MNI) chia khối chọp $S.ABCD$ thành hai phần, phần chứa đỉnh S có thể tích bằng $\dfrac{7}{13}$ lần phần còn lại. Tính tỉ số $k = \dfrac{IA}{IS}$?

Ⓐ $\dfrac{1}{2}$. Ⓑ $\dfrac{2}{3}$. Ⓒ $\dfrac{1}{3}$. Ⓓ $\dfrac{3}{4}$.

Lời giải.



Hình 1



Hình 2

Mặt phẳng (MNI) cắt khối chóp theo thiết diện như hình 1. Đặt $V_{S.ABCD} = V$.

Ta có $S_{\triangle APM} = S_{\triangle BMN} = \dfrac{1}{4} S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{8} S_{ABCD} \Rightarrow \dfrac{S_{\triangle APM}}{S_{ABCD}} = \dfrac{1}{8}$.

$\dfrac{\mathrm{d}(I,(ABCD))}{\mathrm{d}(S,(ABCD))} = \dfrac{IA}{SA} = \dfrac{k}{k+1}$.

$\Rightarrow \dfrac{V_{I.APM}}{V_{S.ABCD}} = \dfrac{S_{\triangle APM}}{S_{ABCD}} \cdot \dfrac{\mathrm{d}(I,(ABCD))}{\mathrm{d}(S,(ABCD))} = \dfrac{k}{8(k+1)} \Rightarrow V_{I.APM} = \dfrac{k}{8(k+1)} V$.

Do $MN \parallel AC \Rightarrow IK \parallel AC \Rightarrow IK \parallel (ABCD) \Rightarrow \mathrm{d}(I,(ABCD)) = \mathrm{d}(K,(ABCD))$.

Mà $S_{\triangle APM} = S_{\triangle NCQ} \Rightarrow V_{I.APM} = V_{K.NCQ} = \dfrac{k}{8(k+1)} V$.

Kẻ $IH \parallel SD$ $(H \in SD)$ như hình 2. Ta có

$\dfrac{IH}{SD} = \dfrac{AH}{AD} = \dfrac{AI}{AS} = \dfrac{k}{k+1}$.

$\dfrac{IH}{ED} = \dfrac{PH}{PD} = \dfrac{PA}{PD} + \dfrac{AH}{PD} = \dfrac{PA}{PD} + \dfrac{2AH}{3AD} = \dfrac{1}{3} + \dfrac{2k}{3(k+1)} = \dfrac{3k+1}{3(k+1)}$.

$\Rightarrow \dfrac{ED}{SD} = \dfrac{IH}{SD} : \dfrac{ID}{ED} = \dfrac{3k}{3k+1} \Rightarrow \dfrac{\mathrm{d}(E,(ABCD))}{\mathrm{d}(S,(ABCD))} = \dfrac{ED}{SD} = \dfrac{3k}{3k+1}$.

$\dfrac{S_{\triangle PQD}}{S_{ABCD}} = \dfrac{9}{8} \Rightarrow \dfrac{V_{E.PQD}}{V_{S.ABCD}} = \dfrac{27k}{24k+8} \Rightarrow V_{E.PQD} = \dfrac{27k}{24k+8} V$.

$V_{EIKAMNCD} = \dfrac{13}{20} V$

$\Leftrightarrow V_{E.PDC} - V_{I.APM} - V_{K.NQC} = \dfrac{13}{20} V$

$\Leftrightarrow \dfrac{27k}{8(3k+1)} V - \dfrac{k}{8(k+1)} V - \dfrac{k}{8(k+1)} V = \dfrac{13}{20} V$

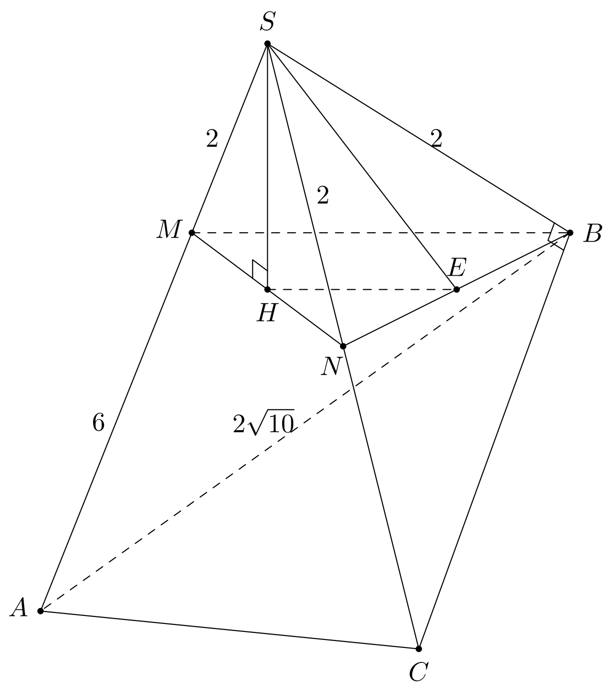
$\Leftrightarrow \dfrac{27k}{2(3k+1)} - \dfrac{k}{k+1} = \dfrac{13}{5} \Leftrightarrow k = \dfrac{2}{3}$.

Chọn đáp án B □

Câu 10. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = 6$, $SB = 2$, $SC = 4$, $AB = 2\sqrt{10}$, $\widehat{SBC} = 90^\circ$, $\widehat{ASC} = 120^\circ$. Mặt phẳng (P) đi qua B và trung điểm N của SC đồng thời vuông góc với (SAC) cắt SA tại M. Tính tỉ số thể tích $k = \dfrac{V_{S.BMN}}{V_{S.ABC}}$.

A. $k = \dfrac{2}{5}$.   B. $k = \dfrac{1}{4}$.   C. $k = \dfrac{1}{6}$.   D. $k = \dfrac{2}{9}$.

Lời giải.



Ta có

- $SA^2 + SB^2 = 6^2 + 2^2 = 40 = AB^2 \Rightarrow \widehat{ASB} = 90°$.
- $\triangle SBC$ vuông tại $B \Rightarrow BN = \frac{1}{2}SC = 2$.

$\Rightarrow SN = NB = SB = 2 \Rightarrow \triangle SNB$ đều. Gọi D là điểm thuộc cạnh SA sao cho $SD = 2$, ta có

$$DB^2 = 2^2 + 2^2 = 8$$
$$DN^2 = 2^2 + 2^2 - 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \cos 120° = 12$$
$$NB^2 = 4$$

$\Rightarrow DB^2 + NB^2 = DN^2 \Rightarrow \triangle DNB$ vuông tại B.

- Gọi H, E lần lượt là trung điểm của DN, NB; ta có

+) $\begin{cases} NB \perp SE \\ NB \perp HE \end{cases} \Rightarrow NB \perp (SHE) \Rightarrow NB \perp SH.$

+) $\begin{cases} SH \perp DN \\ SH \perp NB \end{cases} \Rightarrow SH \perp (DNB) \Rightarrow (SDN) \perp (DNB) \Rightarrow D \equiv M \Rightarrow SM = 2.$

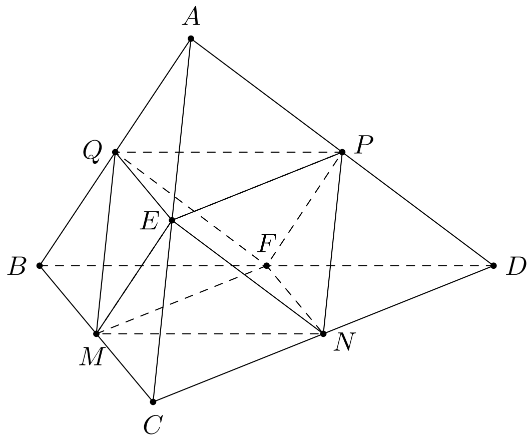
$\Rightarrow k = \frac{V_{S.BMN}}{V_{S.ABC}} = \frac{SM}{SA} \cdot \frac{SN}{SC} = \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{4} = \frac{1}{6}.$

Chọn đáp án C □

Câu 11 (Đề tham khảo 2017). Cho khối tứ diện có thể tích bằng V. Gọi V' là thể tích của khối đa diện có các đỉnh là các trung điểm của các cạnh của khối tứ diện đã cho, tính tỉ số $\frac{V'}{V}$.

A $\frac{V'}{V} = \frac{1}{2}$. B $\frac{V'}{V} = \frac{1}{4}$. C $\frac{V'}{V} = \frac{2}{3}$. D $\frac{V'}{V} = \frac{5}{8}$.

Lời giải.



Cách 1. Đặc biệt hóa tứ diện cho là tứ diện đều cạnh a. Hình đa diện cần tính có được bằng cách cắt 4 góc của tứ diện, mỗi góc cũng là một tứ diện đều có cạnh bằng $\frac{a}{2}$. Do đó thể tích phần cắt bỏ là $V'' = 4 \cdot \frac{V}{8} = \frac{V}{2}$. (Vì với tứ diện cạnh giảm nửa thì thể tích giảm $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$).

Vậy $V' = \frac{V}{2} \Leftrightarrow \frac{V'}{V} = \frac{1}{2}$.

Cách 2. Khối đa diện là hai khối chóp tứ giác (giống nhau) có cùng đáy là hình bình hành úp lại. Suy ra $V' = 2V_{N\cdot MEPF} = 4 \cdot V_{N.MEP} = 4 \cdot V_{P.MNE} = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}V = \frac{1}{2}V$ (Do chiều cao giảm một nửa, cạnh đáy giảm một nửa nên diện tích giảm 4).

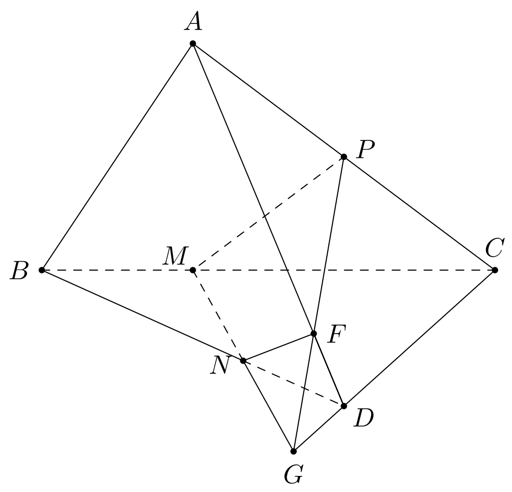
Cách 3. Ta có
$$\begin{aligned}\frac{V'}{V} &= \frac{V - V_{A.QEP} - V_{B.QMF} - V_{C.MNE} - V_{D.NPF}}{V}\\ &= 1 - \frac{V_{A\cdot QEP}}{V} - \frac{V_{B\cdot QMF}}{V} - \frac{V_{C\cdot MNE}}{V} - \frac{V_{D\cdot NPF}}{V}\\ &= 1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\\ &= \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Chọn đáp án A □

Câu 12. Cho tứ diện $ABCD$, trên các cạnh BC, BD, AC lần lượt lấy các điểm M, N, P sao cho $BC = 3BM$, $BD = \frac{3}{2}BN$, $AC = 2AP$. Mặt phẳng (MNP) chia khối tứ diện $ABCD$ thành hai khối đa diện có thể tích là V_1, V_2, trong đó khối đa diện chứa cạnh CD có thể tích là V_2. Tính tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$.

Ⓐ $\frac{V_1}{V_2} = \frac{26}{19}$. Ⓑ $\frac{V_1}{V_2} = \frac{26}{13}$. Ⓒ $\frac{V_1}{V_2} = \frac{15}{19}$. Ⓓ $\frac{V_1}{V_2} = \frac{3}{19}$.

Lời giải.



Áp dụng định lí Me-ne-la-uyt ta có

$$\frac{MB}{MC}\cdot\frac{ND}{NB}\cdot\frac{GC}{GD}=1\Rightarrow\frac{GC}{GD}=4 \text{ và } \frac{GC}{GD}\cdot\frac{FD}{FA}\cdot\frac{PA}{PC}=1.$$

$\Rightarrow \dfrac{FD}{FA}=\dfrac{1}{4}.$

$V_{DCPMNF}=V_{CPMF}+V_{CMNF}+V_{CNFD}$

$\dfrac{V_{CPMF}}{V_{ABCD}}=\dfrac{\frac{1}{3}\mathrm{d}(F,(CPM))\cdot S_{CPM}}{\frac{1}{3}\mathrm{d}(D,(ABC))\cdot S_{ABC}}=\dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2}{3}=\dfrac{4}{15}.$

$\dfrac{V_{CNMF}}{V_{ABCD}}=\dfrac{\frac{1}{3}\mathrm{d}(F,(CNM))\cdot S_{CNM}}{\frac{1}{3}\mathrm{d}(A,(CBD))\cdot S_{CBD}}=\dfrac{1}{5}\cdot\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{2}{3}=\dfrac{4}{45}.$

$\dfrac{V_{CNDF}}{V_{ABCD}}=\dfrac{\frac{1}{3}\mathrm{d}(C,(FND))\cdot S_{FND}}{\frac{1}{3}\mathrm{d}(C,(ABD))\cdot S_{ABD}}=\dfrac{1}{5}\cdot\dfrac{2}{3}=\dfrac{4}{15}.$

$\Rightarrow \dfrac{V_2}{V_{ABCD}}=\dfrac{4}{15}+\dfrac{4}{45}+\dfrac{1}{15}=\dfrac{19}{45}.$

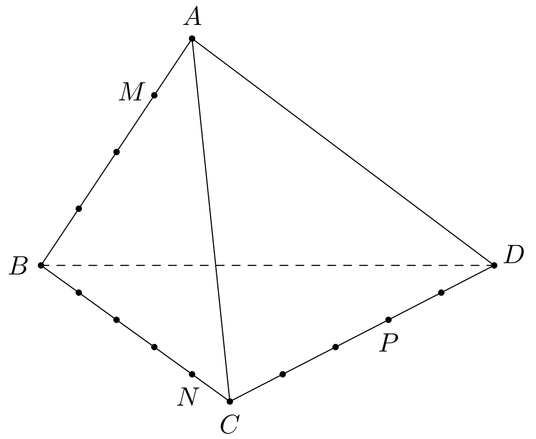
$\Rightarrow \dfrac{V_1}{V_2}=\dfrac{45-19}{19}=\dfrac{26}{19}.$

Chọn đáp án A □

Câu 13. Cho tứ diện $ABCD$. Xét điểm M trên cạnh AB, điểm N trên cạnh BC, điểm P trên cạnh CD sao cho $\dfrac{MB}{MA}=3$, $\dfrac{NB}{NC}=4$, $\dfrac{PC}{PD}=\dfrac{3}{2}$. Gọi V_1, V_2 theo thứ tự là thể tích các khối tứ diện $MNBD$ và $NPAC$. Tỉ số $\dfrac{V_1}{V_2}$ bằng

A. 3. B. 5. C. $\dfrac{1}{5}$. D. $\dfrac{1}{3}$.

Lời giải.



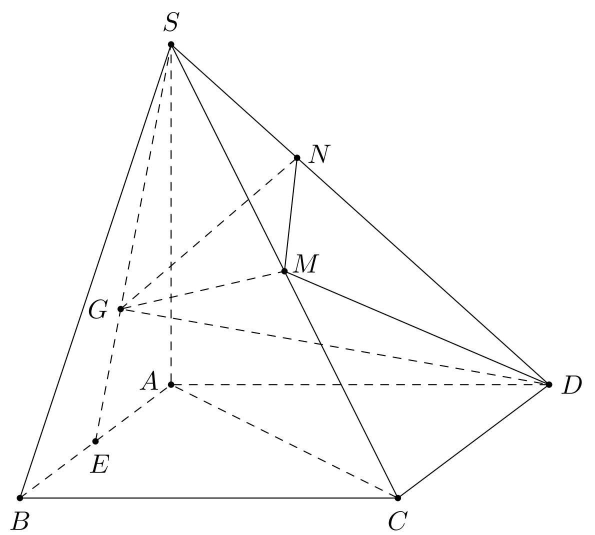
$V_1 = \dfrac{1}{3}h_1 \cdot S_1$ với $h_1 = \mathrm{d}(M, (BCD)); S_1 = S_{\triangle NBD}$.
$V_2 = \dfrac{1}{3}h_2 \cdot S_2$ với $h_2 = \mathrm{d}(A, (BCD)); S_2 = S_{\triangle CNP}$.
$\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{h_1 \cdot S_1}{h_2 \cdot S_2} = 5$.
Vì $\dfrac{h_1}{h_2} = \dfrac{3}{4}$ và $S_1 = \dfrac{4}{5}S_{\triangle BCD}; S_2 = \dfrac{1}{5} \cdot \dfrac{3}{5}S_{\triangle BCD} = \dfrac{3}{25}S_{\triangle BCD} \Rightarrow \dfrac{S_1}{S_2} = \dfrac{20}{3}$.

Chọn đáp án B □

Câu 14 (SGD Điện Biên-2019). Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi M, N là hai điểm nằm trên hai cạnh SC, SD sao cho $\dfrac{SM}{SC} = \dfrac{1}{2}$, $\dfrac{SN}{ND} = 2$, biết G là trọng tâm tam giác SAB. Tỉ số thể tích $\dfrac{V_{G.MND}}{V_{S.ABCD}} = \dfrac{m}{n}$; m, n là các số nguyên dương và $(m, n) = 1$. Giá trị của $m + n$ bằng

A 17. B 19. C 21. D 7.

Lời giải.



Ta có $S_{\triangle DMN} = \dfrac{1}{3}S_{\triangle SMD} = \dfrac{1}{6}S_{\triangle SCD}$.
Gọi E là trung điểm của AB.
$\Rightarrow \mathrm{d}(G, (DMN)) = \dfrac{2}{3} \cdot \mathrm{d}(E, (DMN)) = \dfrac{2}{3} \cdot \mathrm{d}(A, (DMN)) = \dfrac{2}{3} \cdot \mathrm{d}(A, (SCD))$.

$\Rightarrow V_{G.MND} = \dfrac{1}{3} \cdot S_{\triangle DMN} \cdot d_(G, (DMN)) = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{6} S_{\triangle SCD} \cdot \dfrac{2}{3} \cdot \mathrm{d}(A, (SCD)) = \dfrac{1}{9} V_{S.ACD} = \dfrac{1}{18} V_{S.ABCD}$.

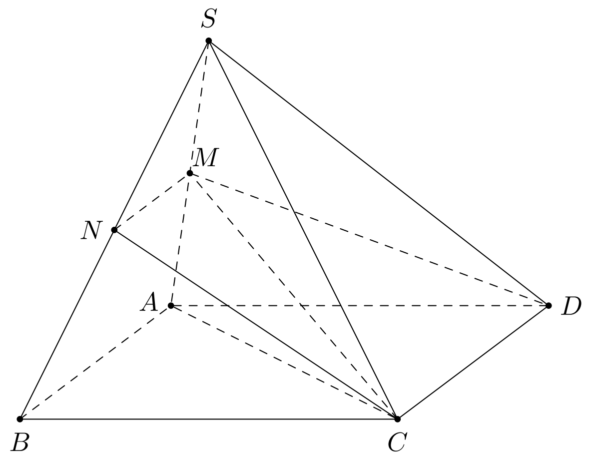
$\Rightarrow \dfrac{V_{G.MND}}{V_{S.ABCD}} = \dfrac{1}{18} \Rightarrow m + n = 19$.

Chọn đáp án B □

Câu 15 (Sở Bắc Ninh 2019). Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA, SB. Mặt phẳng $(MNCD)$ chia hình chóp đã cho thành hai phần. Tỉ số thể tích hai phần là (số bé chia số lớn)

A. $\dfrac{3}{5}$. B. $\dfrac{3}{4}$. C. $\dfrac{1}{3}$. D. $\dfrac{4}{5}$.

Lời giải.



Gọi thể tích khối chóp $S.ABCD$ là V, khi đó thể tích khối chóp $S.ABC$ và $S.ACD$ là

$$V_{S.ABC} = V_{S.ACD} = \frac{1}{2} V$$

Ta có $\dfrac{V_{S.MNC}}{V_{S.ABC}} = \dfrac{SM}{SA} \cdot \dfrac{SN}{SB} \cdot \dfrac{SC}{SC} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot 1 = \dfrac{1}{4}$, do đó $V_{S.MNC} = \dfrac{1}{4} V_{S.ABC} = \dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{1}{2} V = \dfrac{1}{8} V$.

Ta có $\dfrac{V_{S.MCD}}{V_{S.ACD}} = \dfrac{SM}{SA} \cdot \dfrac{SC}{SC} \cdot \dfrac{SD}{SD} = \dfrac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \dfrac{1}{2}$, do đó $V_{S.MCD} = \dfrac{1}{2} V_{S.ACD} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{2} V = \dfrac{1}{4} V$.

Từ đó $V_{S.MNCD} = V_{S.MNC} + V_{S.MCD} = \dfrac{1}{8} V + \dfrac{1}{4} V = \dfrac{3}{8} V$, do đó $V_{MNABCD} = V - \dfrac{3}{8} V = \dfrac{5}{8} V$.

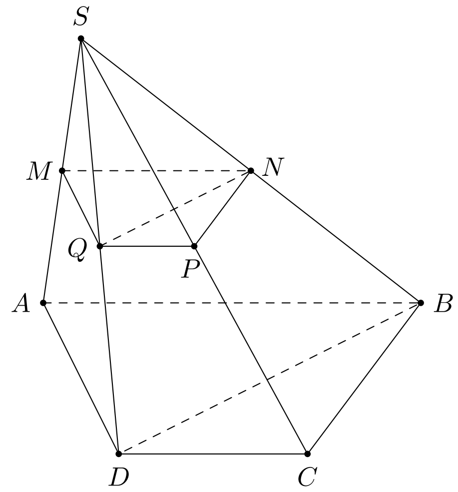
Vậy $\dfrac{V_{S.MNCD}}{V_{MNABCD}} = \dfrac{3}{8} V : \dfrac{5}{8} V = \dfrac{3}{5}$.

Chọn đáp án A □

Câu 16. Cho hình chóp $S.ABCD$. Gọi M, N, P, Q theo thứ tự là trung điểm của SA, SB, SC, SD. Gọi V_1, V_2 lần lượt là thể tích của hai khối chóp $S.MNPQ$ và $S.ABCD$. Tỉ số $\dfrac{V_1}{V_2}$ bằng

A. $\dfrac{1}{16}$. B. $\dfrac{1}{8}$. C. $\dfrac{1}{2}$. D. $\dfrac{1}{4}$.

Lời giải.



Ta có

$$\frac{V_{S.MNQ}}{V_{S.ABD}} = \frac{SM}{SA} \cdot \frac{SN}{SB} \cdot \frac{SQ}{SD} = \frac{1}{8} \Rightarrow V_{S.MNQ} = \frac{1}{8} \cdot V_{S.ABD};$$
$$\frac{V_{S.NPQ}}{V_{S.BCD}} = \frac{SN}{SB} \cdot \frac{SP}{SC} \cdot \frac{SQ}{SD} = \frac{1}{8} \Rightarrow V_{S.NPQ} = \frac{1}{8} \cdot V_{S.BCD}.$$

Suy ra $V_1 = V_{S.MNPQ} = V_{S.MNQ} + V_{S.NPQ} = \frac{1}{8}(V_{S.ABD} + V_{S.BCD}) = \frac{1}{8} \cdot V_{S.ABCD} = \frac{1}{8}.V_2$

$\Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{8}$.

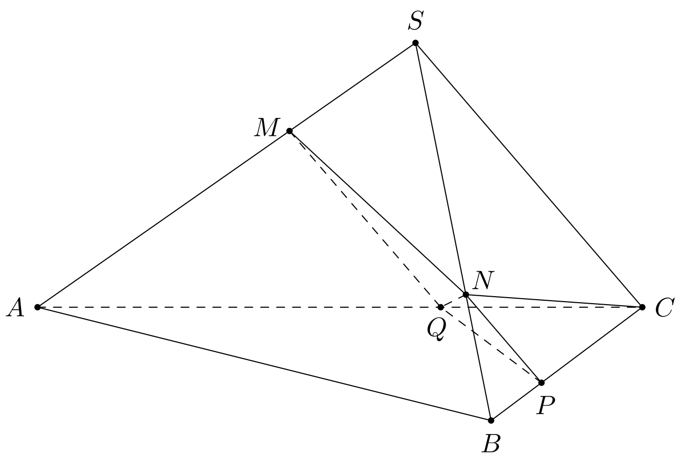
Chọn đáp án B □

Câu 17 (Hồng Quang-Hải Dương-2018).

Cho hình chóp $S.ABC$; M và N là các điểm thuộc các cạnh SA và SB sao cho $MA = 2SM$, $SN = 2NB$, (α) là mặt phẳng qua MN và song song với SC. Mặt phẳng (α) chia khối chóp $S.ABC$ thành hai khối đa diện (H_1) và (H_2) với (H_1) là khối đa diện chứa điểm S, (H_2) là khối đa diện chứa điểm A. Gọi V_1 và V_2 lần lượt là thể tích của (H_1) và (H_2). Tính tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$.

A $\frac{4}{5}$. B $\frac{5}{4}$. C $\frac{3}{4}$. D $\frac{4}{3}$.

Lời giải.



Kí hiệu V là thể tích khối tứ diện $SABC$.

Gọi P, Q lần lượt là giao điểm của (α) với các đường thẳng BC, AC.

Ta có $NP \parallel MQ \parallel SC$.

Khi chia khối (H_1) bởi mặt phẳng (QNC), ta được hai khối chóp $N.SMQC$ và $N.QPC$.

Ta có $\dfrac{V_{N.SMQC}}{V_{B.ASC}} = \dfrac{\mathrm{d}(N,(SAC))}{\mathrm{d}(B,(SAC))} \cdot \dfrac{S_{SMQC}}{S_{SAC}}$.

$$\frac{\mathrm{d}(N,(SAC))}{\mathrm{d}(B,(SAC))} = \frac{NS}{BS} = \frac{2}{3}; \frac{S_{AMQ}}{S_{ASC}} = \frac{AM}{AS} \cdot \frac{AQ}{AC} = \left(\frac{AM}{AS}\right)^2 = \frac{4}{9} \Rightarrow \frac{S_{SMQC}}{S_{ASC}} = \frac{5}{9}.$$

Do đó $\dfrac{V_{N.SMQC}}{V_{B.ASC}} = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{5}{9} = \dfrac{10}{27}$.

$\dfrac{V_{N.QPC}}{V_{S.ABC}} = \dfrac{\mathrm{d}(N,(QPC))}{\mathrm{d}(S,(ABC))} \cdot \dfrac{S_{QPC}}{S_{ABC}} = \dfrac{NB}{SB} \cdot \left(\dfrac{CQ}{CA} \cdot \dfrac{CP}{CB}\right) = \dfrac{1}{3} \cdot \left(\dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{2}{3}\right) = \dfrac{2}{27}$.

Do đó $\dfrac{V_1}{V} = \dfrac{V_{N.SMQC}}{V_{B.ASC}} + \dfrac{V_{N.OPC}}{V_{S.ABC}} = \dfrac{10}{27} + \dfrac{2}{27} = \dfrac{4}{9} \Rightarrow \dfrac{V_1}{V_1 + V_2} = \dfrac{4}{9} \Rightarrow 5V_1 = 4V_2 \Rightarrow \dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{4}{5}$.

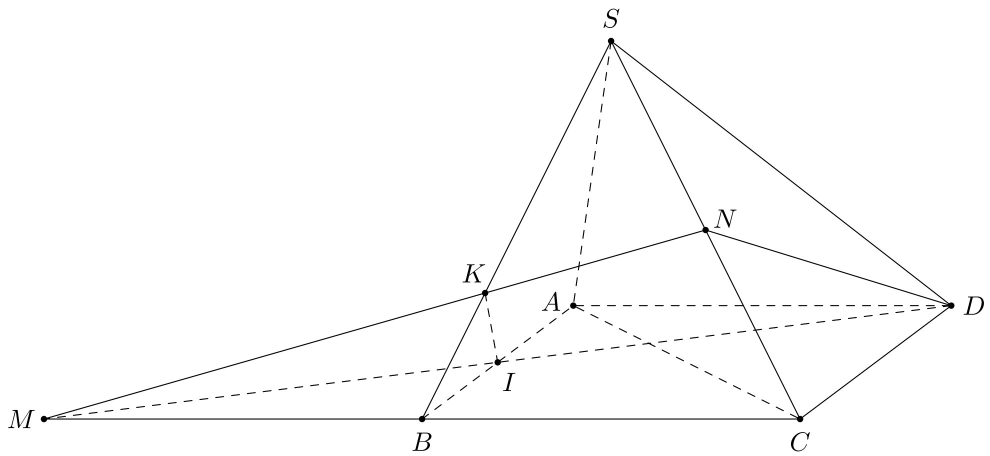
Chọn đáp án A □

Câu 18 (THPT Trần Phú-Đà Nẵng-2018).

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a, $\widehat{BAD} = 60^\circ$ và SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và $(ABCD)$ bằng 45°. Gọi M là điểm đối xứng của C qua B và N là trung điểm của SC. Mặt phẳng (MND) chia khối chóp $S.ABCD$ thành hai khối đa diện, trong đó khối đa diện chứa đỉnh S có thể tích V_1, khối đa diện còn lại có thể tích V_2 (tham khảo hình vẽ bên). Tính tỉ số $\dfrac{V_1}{V_2}$.

A $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{12}{7}$. B $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{5}{3}$. C $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{1}{5}$. D $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{7}{5}$.

Lời giải.



Gọi $O = AC \cap BD$.

Khi đó góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và $(ABCD)$ bằng $45^\circ \Leftrightarrow \widehat{SOA} = 45^\circ$.

$\triangle BAD$ đều $\Rightarrow AO = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow SA = AO \cdot \tan 45^\circ = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{a\sqrt{6}}{4}$.

Thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng $V = \dfrac{1}{3}SA \cdot 2S_{\triangle ABD} = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{a\sqrt{6}}{4} \cdot \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{8}$.

Thể tích khối chóp $N.MCD$ bằng thể tích khối chóp $N.ABCD$ bằng $V' = \dfrac{1}{2}V = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{16}$.

Thể tích khối chóp $KMIB$ bằng $V'' = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{3}SA \cdot S\Delta_{MBI} = \dfrac{1}{9} \cdot \dfrac{a\sqrt{6}}{4} \cdot \dfrac{a^2\sqrt{3}}{8} = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{96}$.

Khi đó $V_2 = V' - V'' = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{16} - \dfrac{a^3\sqrt{2}}{96} = \dfrac{5\sqrt{2}a^3}{96}$; $V_1 = V - V_2 = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{8} - \dfrac{5\sqrt{2}a^3}{96} = \dfrac{7a^3\sqrt{2}}{96}$.

Vậy $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{7}{5}$.

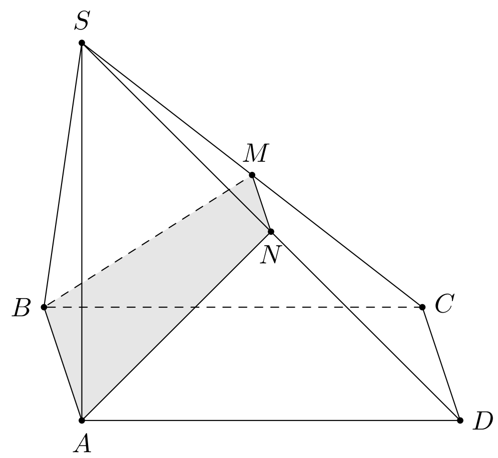
Chọn đáp án D □

Câu 19 (THPT Nguyễn Thị Minh Khai-Hà Tĩnh-2018).

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. Mặt phẳng (α) đi qua A, B và trung điểm M của SC. Mặt phẳng (α) chia khối chóp đã cho thành hai phần có thể tích lần lượt là V_1, V_2 với $V_1 < V_2$. Tính $\dfrac{V_1}{V_2}$.

A $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{3}{5}$. B $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{1}{3}$. C $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{1}{4}$. D $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{3}{8}$.

Lời giải.



Ta có $\begin{cases} AB \subset (\alpha) \\ AB \parallel CD \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (SCD) = MN \parallel AB \parallel CD.$

$\Rightarrow (\alpha)$ cắt hình chóp theo thiết diện là hình thang $ABMN$.

Khi đó $(ABMN)$ chia hình chóp thành hai đa diện là $S.ABMN$ và $ABCDNM$ có thể tích lần lượt là V_1 và V_2.

Lại có $\dfrac{V_{SABM}}{V_{SABC}} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow V_{SABM} = \dfrac{1}{2}V_{SABC} = \dfrac{1}{4}V_{S.ABCD}$.

$\dfrac{V_{SAMN}}{V_{SACD}} = \dfrac{1}{4} \Rightarrow V_{SAMN} = \dfrac{1}{4}V_{SABC} = \dfrac{1}{8}V_{S.ABCD}$.

Mà $V_1 = V_{SABM} + V_{SAMN} = \dfrac{3}{8}V_{S.ABCD}$ và $V_2 = V_{S.ABCD} - V_{S.ABMN} = \dfrac{5}{8}V_{SABCD}$.

Vậy $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{3}{5}$.

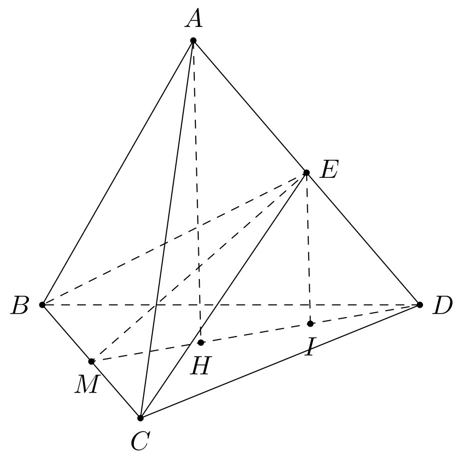
Chọn đáp án A □

Câu 20 (THPT Kinh Môn-Hải Dương-2018).

Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh a. Mặt phẳng (P) chứa cạnh BC cắt cạnh AD tại E. Biết góc giữa hai mặt phẳng (P) và (BCD) có số đo là α thỏa mãn $\tan\alpha = \dfrac{5\sqrt{2}}{7}$. Gọi thể tích của hai tứ diện $ABCE$ và tứ diện $BCDE$ lần lượt là V_1 và V_2. Tính tỉ số $\dfrac{V_1}{V_2}$.

A $\dfrac{3}{5}$. B $\dfrac{5}{8}$. C $\dfrac{3}{8}$. D $\dfrac{1}{8}$.

Lời giải.



Gọi H, I lần lượt là hình chiếu vuông góc của A, E trên mặt phẳng (BCD).
Khi đó $H, I \in DM$ với M là trung điểm BC.
Ta tính được $AH = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$, $DH = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$, $MH = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$.
Ta có góc giữa (P) với $(BCD) \Rightarrow ((P),(BCD)) = \widehat{EMD} = \alpha$.
Khi đó $\tan\alpha = \dfrac{EI}{MI} = \dfrac{5\sqrt{2}}{7}$.

Gọi $DE = x \Rightarrow \dfrac{DE}{AD} = \dfrac{EI}{AH} = \dfrac{DI}{DH} \Rightarrow \begin{cases} EI = \dfrac{DE\cdot AH}{AD} = \dfrac{x\cdot\dfrac{a\sqrt{6}}{3}}{a} = \dfrac{x\sqrt{6}}{3} \\ DI = \dfrac{DE\cdot DH}{AD} = \dfrac{x\cdot\dfrac{a\sqrt{3}}{3}}{a} = \dfrac{x\sqrt{3}}{3}. \end{cases}$

Khi đó $MI = DM - DI = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} - \dfrac{x\sqrt{3}}{3}$.

Vậy $\tan\alpha = \dfrac{EI}{MI} = \dfrac{5\sqrt{2}}{7} \Leftrightarrow \dfrac{\dfrac{x\sqrt{6}}{3}}{\dfrac{a\sqrt{3}}{2} - \dfrac{x\sqrt{3}}{3}} = \dfrac{5\sqrt{2}}{7} \Leftrightarrow x = \dfrac{5}{8}a$.

Khi đó $\dfrac{V_{DBCE}}{V_{ABCD}} = \dfrac{DE}{AD} = \dfrac{5}{8} \Rightarrow \dfrac{V_{ABCE}}{V_{BCDE}} = \dfrac{3}{5}$.

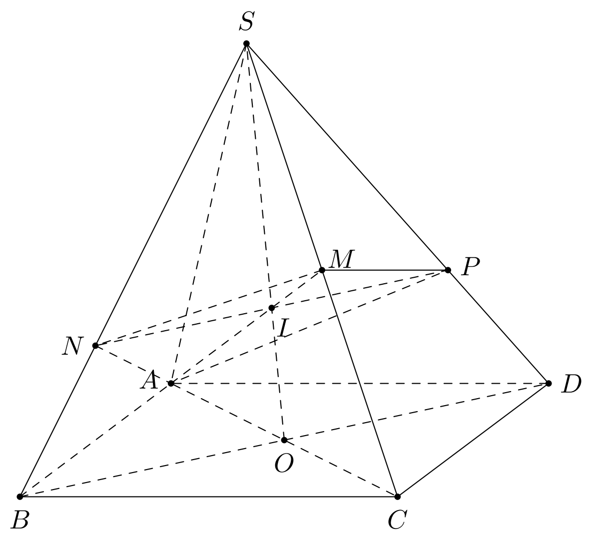
Chọn đáp án A □

Câu 21 (THPT Tứ Kỳ-Hải Dương-2018).

Cho khối chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi M là trung điểm của SC, mặt phẳng (P) chứa AM và song song BD chia khối chóp thành hai khối đa diện, đặt V_1 là thể tích khối đa diện có chứa đỉnh S và V_2 là thể tích khối đa diện có chứa đáy $ABCD$. Tỉ số $\dfrac{V_2}{V_1}$ là

A. $\dfrac{V_2}{V_1} = 3$. B. $\dfrac{V_2}{V_1} = 2$. C. $\dfrac{V_2}{V_1} = 1$. D. $\dfrac{V_2}{V_1} = \dfrac{3}{2}$.

Lời giải.



Đặt $V_{S.ABCD} = V$.

Gọi O là giao điểm hai đường chéo AC và BD. Gọi I là giao điểm của SO và AM.

Do $(P) \parallel BD$ nên (P) cắt mặt phẳng (SBD) theo giao tuyến NP qua I và song song với BD; $(N \in SB; P \in SD)$.

Xét tam giác SAC có I là giao điểm hai trung tuyến nên I là trọng tâm.

Ta có $\dfrac{V_{S.APN}}{V_{S.ADB}} = \dfrac{SP.SN}{SD.SB} = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{2}{3} = \dfrac{4}{9} \Rightarrow V_{S.APN} = \dfrac{4}{9} V_{S.ADB} = \dfrac{4}{9} \cdot \dfrac{1}{2} V = \dfrac{2}{9} V$.

Tương tự $\dfrac{V_{S.PMN}}{V_{S.DCB}} = \dfrac{SP \cdot SM.SN}{SD \cdot SC \cdot SB} = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{2}{3} = \dfrac{2}{9} \Rightarrow V_{S.PMN} = \dfrac{2}{9} V_{S.DCB} = \dfrac{2}{9} \cdot \dfrac{1}{2} V = \dfrac{1}{9} V$.

Từ đó $V_1 = V_{S.APN} + V_{S.PMN} = \dfrac{1}{3} V$. Do đó $\dfrac{V_2}{V_1} = 2$.

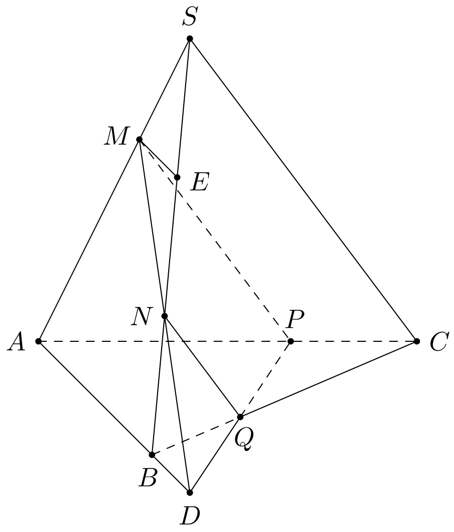
Chọn đáp án B □

Câu 22 (THPT Lý Thái Tổ-Bắc Ninh-2018).

Cho điểm M nằm trên cạnh SA, điểm N nằm trên cạnh SB của hình chóp tam giác $S.ABC$ sao cho $\dfrac{SM}{MA} = \dfrac{1}{2}$, $\dfrac{SN}{NB} = 2$. Mặt phẳng (α) qua MN và song song với SC chia khối chóp thành 2 phần. Gọi V_1 là thể tích của khối đa diện chứa A, V_2 là thể tích của khối đa diện còn lại. Tính tỉ số $\dfrac{V_1}{V_2}$?

A. $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{4}{5}$.
B. $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{5}{4}$.
C. $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{5}{6}$.
D. $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{6}{5}$.

Lời giải.



- Trong mặt phẳng (SAC) dựng MP song song với SC cắt AC tại P. Trong mặt phẳng (SBC) dựng NQ song song với SC cắt BC tại Q. Gọi D là giao điểm của MN và PQ. Dựng ME song song với AB cắt SB tại E (như hình vẽ).
- Ta thấy $\dfrac{SE}{SB} = \dfrac{SM}{SA} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow SN = NE = NB = \dfrac{1}{3}SB$.

Suy ra N là trung điểm của BE và DM, đồng thời $DB = ME = \dfrac{1}{3}AB \Rightarrow \dfrac{DB}{DA} = \dfrac{1}{4}, \dfrac{DN}{DM} = \dfrac{1}{2}$.
Do $NQ \parallel MP \Rightarrow \dfrac{DQ}{DP} = \dfrac{DN}{DM} = \dfrac{1}{2}$.

- Nhận thấy $V_1 = V_{D.AMP} - V_{D.BNQ}$.

$\dfrac{V_{D.BNQ}}{V_{D.AMP}} = \dfrac{DB}{DA} \cdot \dfrac{DN}{DM} \cdot \dfrac{DQ}{DP} = \dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{16}$.
$\Rightarrow V_{D.BNQ} = \dfrac{1}{16}V_{D.AMP} \Rightarrow V_1 = \dfrac{15}{16} \cdot V_{D.AMP} = \dfrac{15}{16} \cdot V_{M.ADP}$.

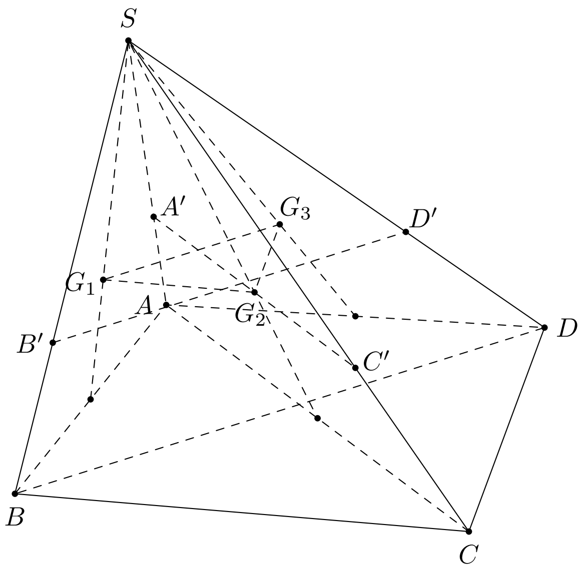
- Do $NQ \parallel SC \Rightarrow \dfrac{QB}{CB} = \dfrac{NB}{SB} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow \dfrac{\mathrm{d}(N; DB)}{\mathrm{d}(C; AB)} = \dfrac{QB}{CB} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow \mathrm{d}(Q; DB) = \dfrac{1}{3} \cdot \mathrm{d}(C; AB)$.

$\Rightarrow S_{QDB} = \dfrac{1}{2} \cdot \mathrm{d}(Q; DB) \cdot DB = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{3} \cdot \mathrm{d}(C; AB) \cdot \dfrac{1}{3}AB = \dfrac{1}{9}S_{CAB} \Rightarrow S_{ADP} = \dfrac{8}{9} \cdot S_{ABC}$.
Và $\mathrm{d}(M; (ADP)) = \dfrac{2}{3}\mathrm{d}(S; (ABC))$.
$\Rightarrow V_{M.ADP} = \dfrac{1}{3} \cdot \mathrm{d}(M; (ADP)) \cdot S_{ADP} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{2}{3}\mathrm{d}(S; (ABC)) \cdot \dfrac{8}{9}S_{ABC} = \dfrac{16}{27} \cdot V_{S.ABC}$.
$\Rightarrow V_1 = \dfrac{15}{16} \cdot \dfrac{16}{27} \cdot V_{S.ABC} = \dfrac{5}{9} \cdot V_{S.ABC} \Rightarrow V_2 = V_{S.ABC} - V_1 = \dfrac{4}{9} \cdot V_{S.ABC}$.
Vậy $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{5}{4}$.
Chọn đáp án B □

Câu 23 (Chuyên KHTN-2018). Cho khối chóp tứ giác $S.ABCD$. Mặt phẳng đi qua trọng tâm các tam giác SAB, SAC, SAD chia khối chóp thành hai phần có thể tích là V_1 và V_2 $(V_1 < V_2)$. Tính tỉ lệ $\dfrac{V_1}{V_2}$.

A $\dfrac{8}{27}$. B $\dfrac{16}{81}$. C $\dfrac{8}{19}$. D $\dfrac{16}{75}$.

Lời giải.



Cách 1:

Gọi G_1, G_2, G_3 lần lượt là trọng tâm các tam giác SAB, SAC, SAD. Ta có $(G_1G_2G_3) \parallel (ABCD)$. Gọi $(G_1G_2G_3)$ cắt SA, SB, SC, SD theo thứ tự lần lượt tại A', B', C', D', ta có $S.A'B'C'D'$ đồng dạng với $S.ABCD$ theo tỉ số $k = \dfrac{2}{3}$ suy ra $V_{S.A'B'C'D'} = \dfrac{8}{27}V_{S.ABCD} \Rightarrow \dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{8/27}{1-8/27} = \dfrac{8}{19}$.

Cách 2:

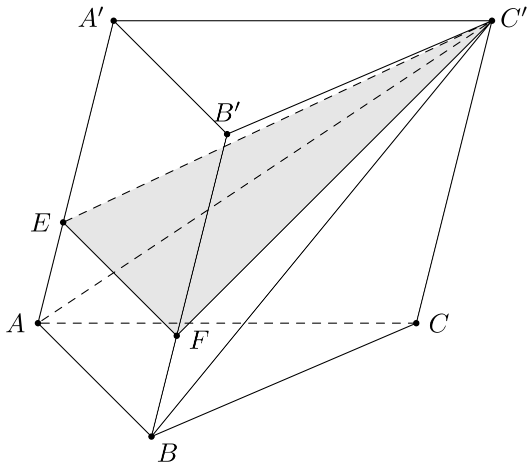
$$V_{S.ABCD} = V_{S.ABC} + V_{S.ACD}$$
$$\frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA'}{SA} \cdot \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SC'}{SC} = \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27} \Rightarrow V_{S.A'B'C'} = \frac{8}{27}V_{S.ABC}$$
$$\frac{V_{S.A'D'D'}}{V_{S.ACD}} = \frac{SA'}{SA} \cdot \frac{SC'}{SC} \cdot \frac{SD'}{SD} = \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27} \Rightarrow V_{S.A'D'D'} = \frac{8}{27}V_{S.ACD}$$
$$V_{S.A'B'C'D'} = V_{S.A'B'C'} + V_{S.A'\mathrm{C}D'} = \frac{8}{27}V_{S.ABCD} \Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{8/27}{1-\dfrac{8}{27}} = \frac{8}{19}.$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 24. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Trên các cạnh AA', BB' lần lượt lấy các điểm E, F sao cho $AA' = kA'E$, $BB' = kB'F$. Mặt phẳng $(C'EF)$ chia khối lăng trụ đã cho thành hai khối đa diện bao gồm khối chóp $C'.A'B'FE$ có thể tích V_1 và khối đa diện $ABCEFC'$ có thể tích V_2. Biết rằng $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{2}{7}$, tìm k.

(A) $k = 4$. (B) $k = 3$. (C) $k = 1$. (D) $k = 2$.

Lời giải.



Ta có

$AA' = kA'E; BB' = kB'F; S_{A'B'FE} = \dfrac{1}{k} S_{ABB'A'}$

$\dfrac{V_{C'.A'B'FE}}{V_{C'.ABB'A'}} = \dfrac{1}{k};$

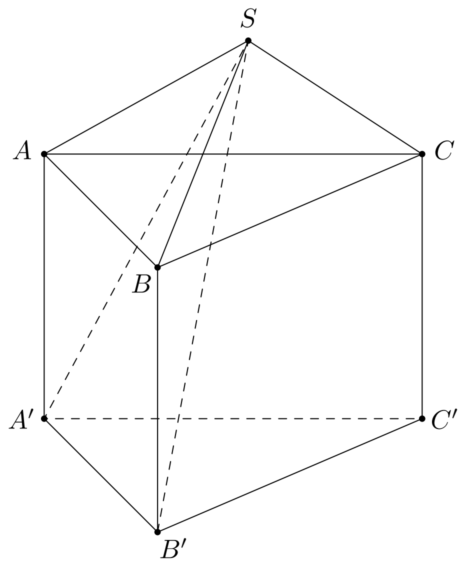
$V_{C'.ABB'A'} = \dfrac{2}{3} \cdot V_{ABC.A'B'C'} \Rightarrow V_{C'.A'B'FE} = \dfrac{2}{3k} \cdot V_{ABC.A'B'C'} \Rightarrow V_{ABCEFC'} = \left(1 - \dfrac{2}{3k}\right) V_{ABC.A'B'C'}$

$\dfrac{V_{C'.A'B'FE}}{V_{ABCEFC'}} = \dfrac{\dfrac{2}{3k}}{\left(1 - \dfrac{2}{3k}\right)} = \dfrac{2}{7} \Leftrightarrow \dfrac{14}{3k} = 2\left(1 - \dfrac{2}{3k}\right) \Leftrightarrow k = 3.$

Chọn đáp án B □

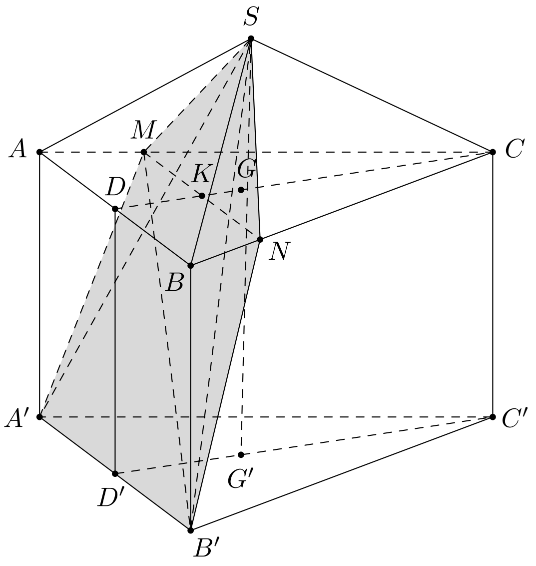
Câu 25.

Cho khối đa diện như hình vẽ bên. Trong đó $ABC.A'B'C'$ là khối lăng trụ tam giác đều có tất cả các cạnh đều bằng 1, $S.ABC$ là khối chóp tam giác đều có cạnh bên $SA = \dfrac{2}{3}$. Mặt phẳng $(SA'B')$ chia khối đa diện đã cho thành hai phần. Gọi V_1 là thể tích phần khối đa diện chứa đỉnh A, V_2 là thể tích phần khối đa diện không chứa đỉnh A. Mệnh đề nào sau đây đúng?



A $72V_1 = 5V_2$. B $3V_1 = V_2$. C $24V_1 = 5V_2$. D $4V_1 = 5V_2$.

Lời giải.



Dựng thiết diện $SMA'B'N$ tạo bởi mặt phẳng $(SA'B')$ và khối đa diện đã cho như hình vẽ.

$$SG = \sqrt{SC^2 - GC^2} = \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{1}{3}; GD = G'D' = \frac{1}{3}CD = \frac{\sqrt{3}}{6};$$

$$GK = \frac{1}{4}G'D' = \frac{\sqrt{3}}{24}$$

$$DK = GD - GK = \frac{\sqrt{3}}{6} - \frac{\sqrt{3}}{24} = \frac{\sqrt{3}}{8}; MN = \frac{3}{4}.$$

Gọi V là thể tích toàn bộ khối đa diện $V = V_{ABC.A'B'C'} + V_{S.A'B'C'} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{5\sqrt{3}}{18}$.

$$V_{B'.ABNM} = \frac{1}{3}BB' \cdot S_{ABNM} = \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2}\left(1 + \frac{3}{4}\right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{8} = \frac{7\sqrt{3}}{192}.$$

$$V_{B'.AA'M} = \frac{1}{3}\mathrm{d}\left(B; (ACC'A')\right) \cdot S_{AA'M} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{4} = \frac{\sqrt{3}}{48}.$$

$$V_{S.ABNM} = \frac{1}{3}SG \cdot S_{ABNM} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}\left(1 + \frac{3}{4}\right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{8} = \frac{7\sqrt{3}}{576}.$$

$$V_1 = \frac{7\sqrt{3}}{192} + \frac{\sqrt{3}}{48} + \frac{7\sqrt{3}}{576} = \frac{5\sqrt{3}}{72} \Rightarrow V_2 = V - V_1 = \frac{5\sqrt{3}}{18} - \frac{5\sqrt{3}}{72} = \frac{5\sqrt{3}}{24}.$$

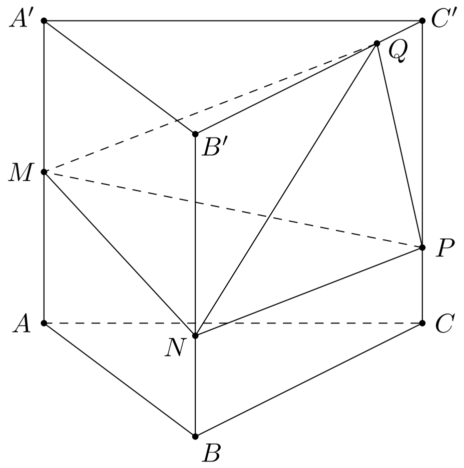
Suy ra $3V_1 = V_2$.

Chọn đáp án B □

Câu 26. Cho khối lăng trụ đứng tam giác $ABC.A'B'C'$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là các điểm thuộc AA', BB', CC', $B'C'$ thỏa mãn $\frac{AM}{AA'} = \frac{1}{2}$, $\frac{BN}{BB'} = \frac{1}{3}$, $\frac{CN}{CC'} = \frac{1}{4}$, $\frac{C'Q}{C'B'} = \frac{1}{5}$. Gọi V_1, V_2 là thể tích khối tứ diện $MNPQ$ và $ABC.A'B'C'$. Tính tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$.

A. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{11}{30}$. B. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{11}{45}$. C. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{19}{45}$. D. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{22}{45}$.

Lời giải.



$$\frac{S_{C'PQ}}{S_{C'B'C}}=\frac{C'Q}{C'B'}\cdot\frac{C'P}{C'C}=\frac{1}{5}\cdot\frac{3}{4}=\frac{3}{20}\Rightarrow S_{C'PQ}=\frac{3}{40}S_{C'B'BC}.$$
$$\frac{S_{B'NQ}}{S_{B'BC'}}=\frac{B'Q}{B'C'}\cdot\frac{B'N}{B'B}=\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}=\frac{8}{15}\Rightarrow S_{B'NQ}=\frac{4}{15}S_{C'B'BC}.$$
$$\frac{S_{NPCB}}{S_{C'B'BC}}=\frac{1}{2}\left(\frac{BN}{BB'}+\frac{CP}{CC'}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)=\frac{7}{24}\Rightarrow S_{NPCB}=\frac{7}{24}S_{C'B'BC}.$$

Suy ra, $\dfrac{S_{NPQ}}{S_{C'B'BC}}=1-\dfrac{S_{C'QP}+S_{B'NQ}+S_{CPNB}}{S_{BB'C'C}}=1-\left(\dfrac{3}{40}+\dfrac{4}{15}+\dfrac{7}{24}\right)=\dfrac{11}{30}$.

Mặt khác $AM \parallel CC'$ nên $\mathrm{d}\left(A,(BB'C'C)\right)=\mathrm{d}\left(M,(BB'C'C)\right)$

$$V_{M.NPQ}=\frac{11}{30}V_{A.BB'C'C}=\frac{11}{30}\cdot\frac{2}{3}V_{ABC.A'B'C'}$$

Vậy $\dfrac{V_1}{V_2}=\dfrac{11}{45}$.

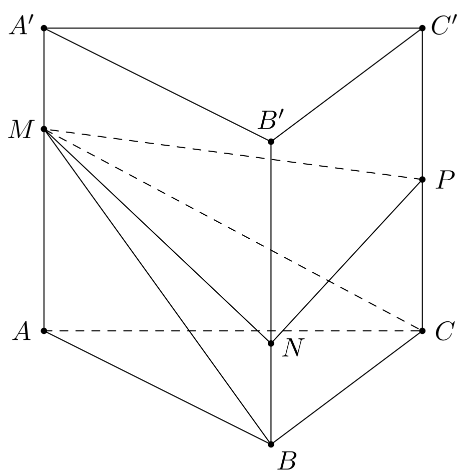
Chọn đáp án B □

Câu 27 (Chuyên Ngữ-Hà Nội-2018).

Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Gọi M, N, P lần lượt là các điểm thuộc các cạnh AA', BB', CC' sao cho $AM=2MA'$, $NB'=2NB$, $PC=PC'$. Gọi V_1, V_2 lần lượt là thể tích của hai khối đa diện $ABCMNP$ và $A'B'C'MNP$. Tính tỉ số $\dfrac{V_1}{V_2}$.

Ⓐ $\dfrac{V_1}{V_2}=2$. Ⓑ $\dfrac{V_1}{V_2}=\dfrac{1}{2}$. Ⓒ $\dfrac{V_1}{V_2}=1$. Ⓓ $\dfrac{V_1}{V_2}=\dfrac{2}{3}$.

Lời giải.



Gọi V là thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Ta có $V_1 = V_{M.ABC} + V_{M.BCPN}$.

$$V_{M.ABC} = \frac{1}{3}S_{ABC} \cdot \mathrm{d}(M,(ABC)) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}S_{ABC} \cdot \mathrm{d}\left(A',(ABC)\right) = \frac{2}{9}V.$$
$$V_{M.A'B'C'} = \frac{1}{3}S_{A'B'C'} \cdot \mathrm{d}\left(M,(A'B'C')\right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}S_{A'B'C'} \cdot \mathrm{d}\left(M,(A'B'C')\right) = \frac{1}{9}V.$$

Do $BCC'B'$ là hình bình hành và $NB' = 2NB$, $PC = PC'$ nên $S_{B'C'PN} = \frac{7}{5}S_{BCPN}$.

Suy ra $V_{M.B'C'PN} = \frac{7}{5}V_{M.BCPN}$, Từ đó $V = V_{M.ABC} + V_{M.BCPN} + V_{M.A'B'C'} + V_{M.B'C'PN}$

$$\Leftrightarrow V = \frac{2}{9}V + V_{M.BCPN} + \frac{1}{9}V + \frac{7}{5}V_{M.BCPN} \Leftrightarrow V_{M.BCPN} = \frac{5}{18}V.$$

Như vậy $V_1 = \frac{2}{9}V + \frac{5}{18}V = \frac{1}{2}V \Rightarrow V_2 = \frac{1}{2}V$. Bởi vậy $\frac{V_1}{V_2} = 1$.

Chọn đáp án C □

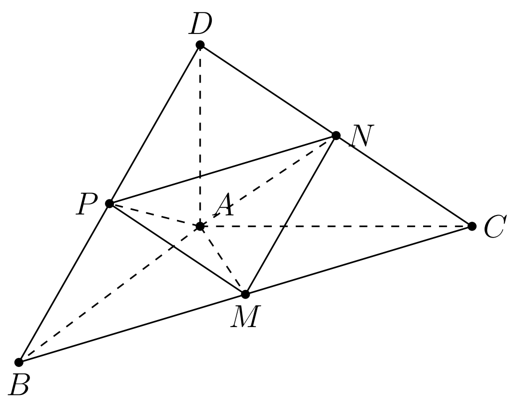
Dạng 2. Ứng dụng tỉ số thể tích để tính thể tích

Câu 28 (Đề minh họa lần 1 - 2017).

Cho tứ diện $ABCD$ có các cạnh AB, AC và AD đôi một vuông góc với nhau; $AB = 6a$, $AC = 7a$ và $AD = 4a$. Gọi M, N, P tương ứng là trung điểm các cạnh BC, CD, DB. Tính thể tích V của tứ diện $AMNP$.

A $V = \frac{7}{2}a^3$. B $V = 14a^3$. C $V = \frac{28}{3}a^3$. D $V = 7a^3$.

Lời giải.



Ta có $V_{ABCD} = \frac{1}{3}AB \cdot \frac{1}{2}AD \cdot AC = \frac{1}{6}6a \cdot 7a \cdot 4a = 28a^3$.

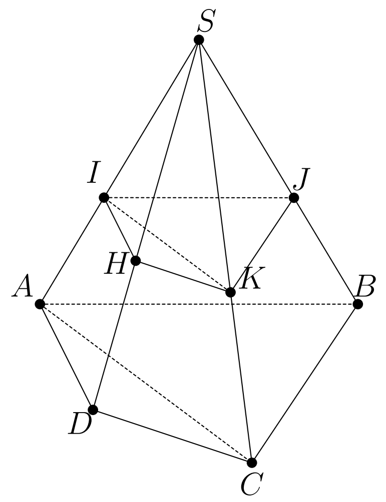
Ta nhận thấy $S_{MNP} = \frac{1}{2}S_{MNPD} = \frac{1}{4}S_{BCD} \Rightarrow V_{AMNP} = \frac{1}{4}V_{ABCD} = 7a^3$.

Chọn đáp án D □

Câu 29 (THPT Thăng Long 2019). Cho hình chóp $S.ABCD$, gọi I, J, K, H lần lượt là trung điểm các cạnh SA, SB, SC, SD. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ biết thể tích khối chóp $S.IJKH$ bằng 1.

A 16. B 8. C 2. D 4.

Lời giải.



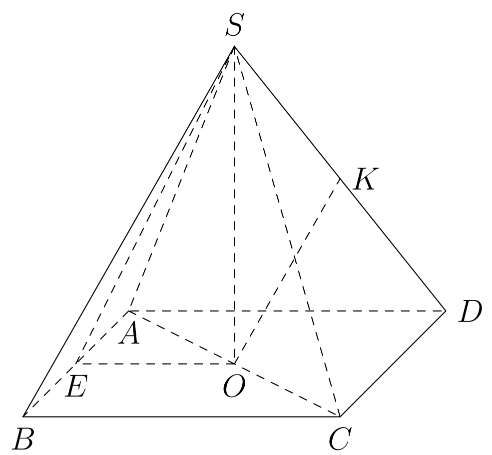
Ta có $\dfrac{V_{S.ABC}}{V_{S.IJK}} = \dfrac{SA}{SI} \cdot \dfrac{SB}{SJ} \cdot \dfrac{SC}{SK} = 8 \Rightarrow V_{S.ABC} = 8V_{S.IJK}$.
$\dfrac{V_{S.ACD}}{V_{S.IKH}} = \dfrac{SA}{SI} \cdot \dfrac{SC}{SK} \cdot \dfrac{SD}{SH} = 8 \Rightarrow V_{S.ACD} = 8V_{S.IKH}$.
Do đó $V_{S.ABCD} = 8V_{S.IJKH} = 8$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 30. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$. Mặt bên tạo với đáy góc $60°$. Gọi K là hình chiếu vuông góc của O trên SD. Tính theo a thể tích khối tứ diện $DKAC$.

(A) $V = \dfrac{4a^3\sqrt{3}}{15}$. (B) $V = \dfrac{4a^3\sqrt{3}}{5}$. (C) $V = \dfrac{2a^3\sqrt{3}}{15}$. (D) $V = a^3\sqrt{3}$.

Lời giải.



- Gọi E là trung điểm của AB, O là tâm của hình vuông $ABCD$.
  $\Rightarrow OE \perp AB,\ SO \perp AB \Rightarrow AB \perp (SOE)$.
  $\Rightarrow$ góc giữa mặt bên (SAB) và mặt đáy $(ABCD)$ là $\widehat{SEO} \Rightarrow \widehat{SEO} = 60°$.
- Xét tam giác SEO ta có $\tan 60° = \dfrac{SO}{OE} \Rightarrow SO = OE.\tan 60° = a\sqrt{3}$.
- Xét tam giác SOD có đường cao $OK \Rightarrow SO^2 = SK.SD \Rightarrow \dfrac{SO^2}{SD^2} = \dfrac{SK}{SD} = \dfrac{\left(a\sqrt{3}\right)^2}{3a^2 + 2a^2} = \dfrac{3}{5}$.
  $\Rightarrow \dfrac{KD}{SD} = \dfrac{2}{5}$.

- $\dfrac{\mathrm{d}\left(K,(ABCD)\right)}{\mathrm{d}\left(S,(ABCD)\right)} = \dfrac{KD}{SD} = \dfrac{2}{5} \Rightarrow \mathrm{d}\left(K,(ABCD)\right) = \dfrac{2}{5}SO = \dfrac{2a\sqrt{3}}{5}$.
- Vậy $V_{DKAC} = \dfrac{1}{3}d\left(K,(ABCD)\right).S_{\Delta ACD} = \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{2a\sqrt{3}}{5}\cdot\dfrac{(2a)^2}{2} = \dfrac{4a^3\sqrt{3}}{15}$.

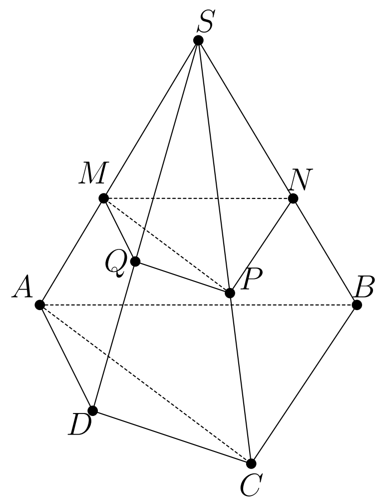
Chọn đáp án (A) □

Câu 31 (Chuyên - KHTN - Hà Nội - 2019).

Cho khối chóp $S.ABCD$ có thể tích bằng 32. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm SA, SB, SC, SD. Thể tích khối chóp $S.MNPQ$ bằng

(A) 16. (B) 8. (C) 4. (D) 2.

Lời giải.



Ta có $\dfrac{V_{S.MNP}}{V_{S.ABC}} = \dfrac{SM}{SA}\cdot\dfrac{SN}{SB}\cdot\dfrac{SP}{SC} = \dfrac{1}{8} \Rightarrow V_{S.MNP} = \dfrac{1}{8}V_{S.ABC}$.

$\dfrac{V_{S.MPQ}}{V_{S.ACD}} = \dfrac{SM}{SA}\cdot\dfrac{SP}{SC}\cdot\dfrac{SQ}{SD} = \dfrac{1}{8} \Rightarrow V_{S.MPQ} = \dfrac{1}{8}V_{S.ACD}$.

Do đó $V_{S.MNPQ} = V_{S.MNP} + V_{S.MPQ} = \dfrac{1}{8}\left(V_{S.ABC} + V_{S.ACD}\right) = \dfrac{1}{8}V_{S.ABCD} = 4$.

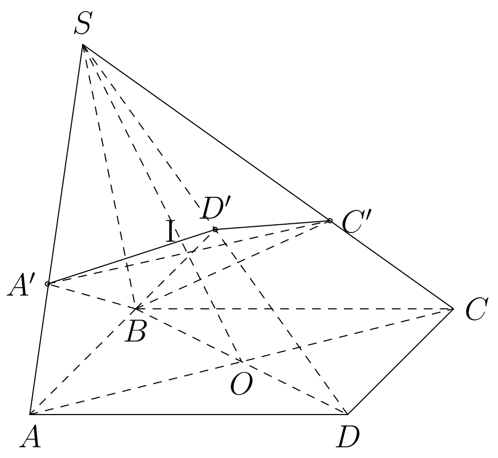
Vậy $V_{S.MNPQ} = 4$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 32. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi. Gọi D' là trung điểm SD, mặt phẳng chứa BD' và song song với AC lần lượt cắt các cạnh SA, SC tại A' và C'. Biết thể tích khối chóp $S.A'BC'D'$ bằng 1, tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

(A) $V = \dfrac{9}{2}$. (B) $V = \dfrac{3}{2}$. (C) $V = 6$. (D) $V = 3$.

Lời giải.



Gọi O là tâm hình bình hành đáy và $\{I\} = SO \cap BD'$.

Mặt phẳng được nói đến đi qua I và song song AC nên cắt (SAC) theo giao tuyến là đường thẳng $A'C'$ qua I và song song AC (với $A' \in SA$, $C' \in SC$).

I là trọng tâm tam giác SBD nên $\dfrac{SA'}{SA} = \dfrac{SC'}{SC} = \dfrac{SI}{SO} = \dfrac{2}{3}$.

Ta có $\begin{cases} \dfrac{V_{S.A'BD'}}{V_{S.ABD}} = \dfrac{SA'}{SA} \cdot \dfrac{SD'}{SD} = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{3}. \\ \dfrac{V_{S.BC'D'}}{V_{S.BCD}} = \dfrac{SC'}{SC} \cdot \dfrac{SD'}{SD} = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{3}. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} V_{S.A'BD'} = \dfrac{1}{6}V. \\ V_{S.BC'D'} = \dfrac{1}{6}V. \end{cases}$

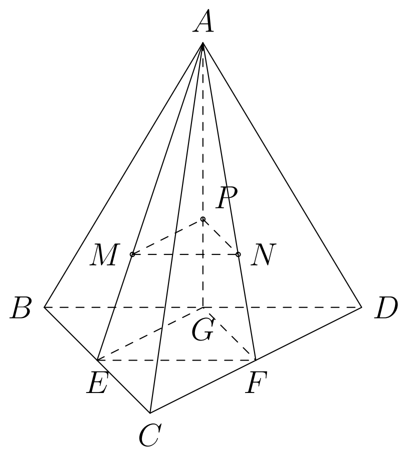
$\Rightarrow V_{S.AB'C'D'} = V_{S.A'BD'} + V_{S.BC'D'} = \dfrac{1}{3}V \Rightarrow V = 3V_{S.AB'C'D'} = 3.$

Chọn đáp án D □

Câu 33. Cho tứ diện $ABCD$ có thể tích bằng 1. Gọi M, N, P lần lượt là trọng tâm của tam giác ABC, ACD, ABD. Tính thể tích của tứ diện $AMNP$.

A $\dfrac{1}{27}$. B $\dfrac{2}{9}$. C $\dfrac{1}{3}$. D $\dfrac{2}{27}$.

Lời giải.



Gọi E, F, G lần lượt là trung điểm của BC, CD và DB.

Ta có $S_{\Delta EFG} = \dfrac{1}{4}S_{\Delta BCD} \Rightarrow V_{A.GEF} = \dfrac{1}{4}V_{A.BCD} = \dfrac{1}{4}$.

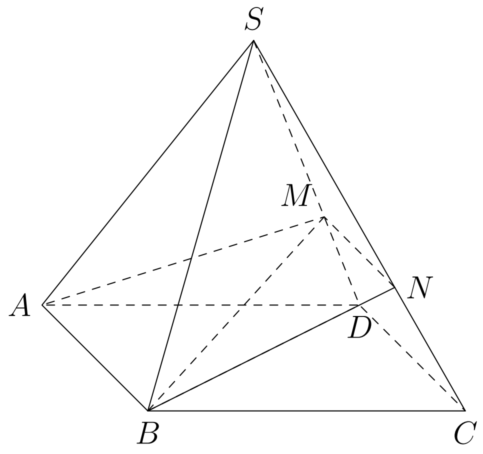
$\dfrac{V_{AMNP}}{V_{AEFG}} = \dfrac{AM}{AE} \cdot \dfrac{AN}{AF} \cdot \dfrac{AP}{AG} = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{2}{3} = \dfrac{8}{27} \Rightarrow V_{AMNP} = \dfrac{8}{27}V_{AEFG} = \dfrac{2}{27}$.

Chọn đáp án D □

Câu 34 (Sở Cần Thơ - 2019). Cho khối chóp $S.ABCD$ có thể tích bằng 18, đáy $ABCD$ là hình bình hành. Điểm M thuộc cạnh SD sao cho $SM = 2MD$. Mặt phẳng (ABM) cắt đường thẳng SC tại N. Thể tích khối chóp $S.ABNM$ bằng

Ⓐ 6. Ⓑ 10. Ⓒ 12. Ⓓ 8.

Lời giải.



Mặt phẳng (MAB) và mặt phẳng (SCD) có chung điểm M và lần lượt chứa hai đường thẳng song song AB và CD nên $MN \parallel AB \parallel CD$.

Vì $ABCD$ là hình bình hành nên $V_{S.ABD} = V_{S.BDC} = \dfrac{1}{2}V_{S.ABCD} = 9$.

Ta có

- $\dfrac{V_{M.ABD}}{V_{S.ABD}} = \dfrac{\mathrm{d}\left(M,(ABD)\right)}{\mathrm{d}\left(S,(ABD)\right)} = \dfrac{MD}{SD} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow V_{M.ABD} = 3 \Rightarrow V_{S.ABM} = 6$.
- $\dfrac{V_{S.BMN}}{V_{S.BDC}} = \dfrac{V_{B.SMN}}{V_{B.SDC}} = \dfrac{SM.SN}{SD.SC} = \dfrac{2}{3}.\dfrac{2}{3} = \dfrac{4}{9} \Rightarrow V_{S.BMN} = 4$.

$\Rightarrow V_{S.ABNM} = V_{S.ABM} + V_{S.BMN} = 6 + 4 = 10$.

Chú ý: Có thể áp dụng công thức tỉ số thể tích và tính như sau:

Ta có

- $\dfrac{V_{S.ABM}}{V_{S.ABD}} = \dfrac{SM}{SD} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow V_{S.ABM} = \dfrac{2}{3}.V_{S.ABD} = 6$.
- $\dfrac{V_{S.BMN}}{V_{S.BDC}} = \dfrac{SM}{SD} \cdot \dfrac{SN}{SC} = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{2}{3} = \dfrac{4}{9} \Rightarrow V_{S.BMN} = \dfrac{4}{9}.V_{S.BDC} = 4$.

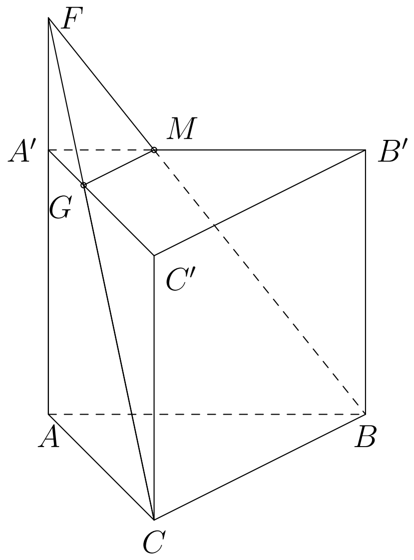
$\Rightarrow V_{S.ABNM} = V_{S.ABM} + V_{S.BMN} = 6 + 4 = 10$.

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 35. Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Điểm M thuộc cạnh $A'B'$ sao cho $A'B' = 3A'M$. Đường thẳng BM cắt đường thẳng AA' tại F, và đường thẳng CF cắt đường thẳng $A'C'$ tại G, Tính tỉ số thể tích khối chóp $FA'MG$ và thể tích khối đa diện lồi $GMB'C'CB$.

Ⓐ $\dfrac{1}{11}$. Ⓑ $\dfrac{1}{27}$. Ⓒ $\dfrac{3}{22}$. Ⓓ $\dfrac{1}{28}$.

Lời giải.



Ta có $GM \parallel C'B' \Rightarrow \dfrac{GM}{C'B'} = \dfrac{A'M}{A'B'} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow S_{A'MG} = \dfrac{1}{9}S_{ABC}$.
Gọi h là chiều cao của lăng trụ $ABC.A'B'C'$, V là thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

Ta có

$$\begin{aligned} V_{A'MG.ABC} &= \frac{h}{3}\left(S_{ABC} + S_{A'MG} + \sqrt{S_{ABC}.S_{A'MG}}\right) \\ &= \frac{h}{3}\left(S_{ABC} + \frac{1}{9}S_{ABC} + \sqrt{S_{ABC}.\frac{1}{9}S_{ABC}}\right) \\ &= \frac{13}{27}S_{ABC}.h = \frac{13}{27}V. \end{aligned}$$

$\Rightarrow V_{GMB'C'CB} = V - V_{A'MG.ABC} = \dfrac{14}{27}V$.

Mặt khác ta cũng có

$$\frac{FG}{FC} = \frac{GM}{CB} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{FA'}{FA} = \frac{FG}{FC} = \frac{FM}{FB} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{V_{FA'GM}}{V_{FACB}} = \frac{FA'}{FA}\cdot\frac{FG}{FC}\cdot\frac{FM}{FB} = \frac{1}{27}.$$

$\Rightarrow V_{FA'GM} = \dfrac{1}{27}V_{FACB} = \dfrac{1}{27}\left(V_{A'MG.ABC} + V_{FA'GM}\right)$

$\Rightarrow V_{FA'GM} = \dfrac{1}{26}V_{A'MG.ABC} = \dfrac{1}{54}V$.

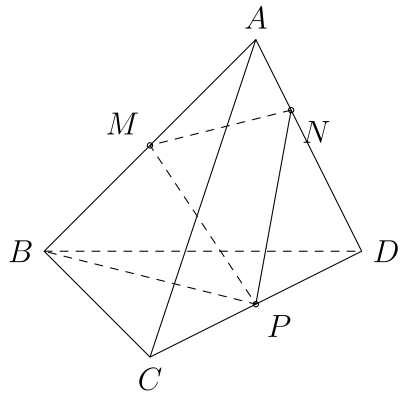
Vậy $\dfrac{V_{FA'GM}}{V_{A'MG.ABC}} = \dfrac{1}{28}$.

Chọn đáp án D □

Câu 36 (Sở Nam Định 2019). Cho tứ diện $ABCD$ có thể tích bằng V, hai điểm M và P lần lượt là trung điểm của AB, CD; điểm N thuộc đoạn AD sao cho $AD = 3AN$. Tính thể tích tứ diện $BMNP$.

A $\dfrac{V}{4}$. B $\dfrac{V}{12}$. C $\dfrac{V}{8}$. D $\dfrac{V}{6}$.

Lời giải.



Ta có $MB = \dfrac{AB}{2}$, $AN = \dfrac{AD}{3} \Rightarrow \mathrm{d}\left(N, AB\right) = \dfrac{1}{3}\mathrm{d}\left(D, AB\right) \Rightarrow S_{\Delta NMB} = \dfrac{1}{6}S_{\Delta DAB}DP = \dfrac{CD}{2}$.

Ta suy ra $\mathrm{d}\left(P, (MNB)\right) = \dfrac{1}{2}\mathrm{d}\left(C, (ABD)\right)$.

Dẫn đến, $V_{P.MNB} = \dfrac{1}{3}\mathrm{d}\left(P, (MNB)\right).\mathrm{S}_{\Delta MNB} = \dfrac{1}{3}.\dfrac{1}{2}\mathrm{d}\left(C, (ABD)\right).\dfrac{1}{6}\mathrm{S}_{\Delta ABD} = \dfrac{1}{12}V$.

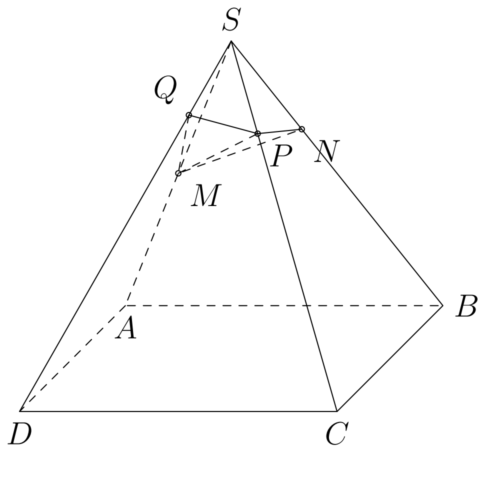
Chọn đáp án B □

Câu 37 (Nguyễn Huệ- Ninh Bình 2019).

Cho hình chóp $S.ABCD$ có thể tích bằng 48 và $ABCD$ là hình thoi. Các điểm M, N, P, Q lần lượt là các điểm trên các đoạn SA, SB, SC, SD thỏa mãn $SA = 2SM$, $SB = 3SN$, $SC = 4SP$, $SD = 5SQ$. Tính thể tích khối đa diện $S.MNPQ$.

A $\dfrac{2}{5}$. B $\dfrac{4}{5}$. C $\dfrac{6}{5}$. D $\dfrac{8}{5}$.

Lời giải.



Ta có $ABCD$ là hình thoi nên $S_{\Delta ACD} = S_{\Delta ABC}$.

Suy ra $V_{S.ACD} = V_{S.ABC} = \dfrac{1}{2}V_{S.ABCD} = 24$.

- $\dfrac{V_{S.MPQ}}{V_{S.ACD}} = \dfrac{SM}{SA} \cdot \dfrac{SP}{SC} \cdot \dfrac{SQ}{SD} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{1}{5} \Rightarrow V_{S.MPQ} = \dfrac{3}{5}$.
- $\dfrac{V_{S.MNP}}{V_{S.ABC}} = \dfrac{SM}{SA} \cdot \dfrac{SN}{SB} \cdot \dfrac{SP}{SC} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{4} \Rightarrow V_{SMNP} = 1$.

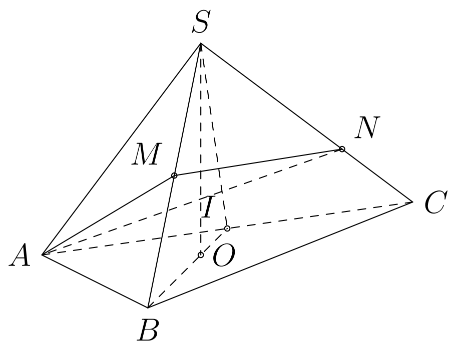
Vậy $V_{S.MNPQ} = V_{S.MPQ} + V_{S.MNP} = \dfrac{8}{5}$.

Chọn đáp án D □

Câu 38. Cho khối chóp đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a, cạnh bên bằng $2a$. Gọi M là trung điểm SB, N là điểm trên đoạn SC sao cho $NS = 2NC$. Thể tích của khối chóp $A.BCNM$ bằng

Ⓐ $\dfrac{a^3\sqrt{11}}{18}$. Ⓑ $\dfrac{a^3\sqrt{11}}{24}$. Ⓒ $\dfrac{a^3\sqrt{11}}{36}$. Ⓓ $\dfrac{a^3\sqrt{11}}{16}$.

Lời giải.



Gọi O là trọng tâm của tam giác ABC. Khi đó $BO = \dfrac{2}{3}BI = \dfrac{2}{3}\dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Khối chóp $S.ABC$ đều và O là trọng tâm tam giác ABC lên $SO \perp (ABC) \Rightarrow SO \perp OB$

$\Rightarrow \Delta SOB$ vuông tại $O \Rightarrow SO = \sqrt{SB^2 - OB^2} = \sqrt{4a^2 - \dfrac{3a^2}{9}} = \dfrac{a\sqrt{33}}{3}$.

Suy ra $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}SO \cdot S_{ABC} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{a\sqrt{33}}{3} \cdot \dfrac{1}{2}a \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a^3\sqrt{11}}{12}$.

Ta có $\dfrac{V_{S.AMN}}{V_{S.ABC}} = \dfrac{SM}{SB} \cdot \dfrac{SN}{SC} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow V_{S.AMN} = \dfrac{1}{3}V_{S.ABC}$.

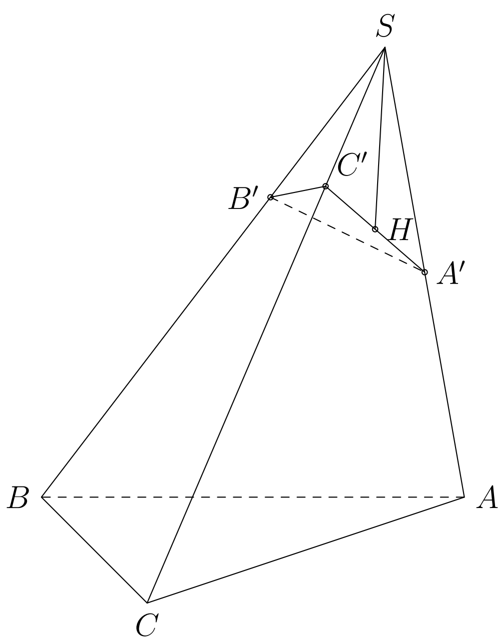
$V_{A.BCNM} = V_{S.ABC} - V_{S.AMN} = V_{S.ABC} - \dfrac{1}{3}V_{S.ABC} = \dfrac{2}{3}V_{S.ABC} = \dfrac{2}{3}.\dfrac{a^3\sqrt{11}}{12} = \dfrac{a^3\sqrt{11}}{18}$.

Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 39. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = 2a$, $SB = 3a$, $SC = 4a$ và $\widehat{ASB} = \widehat{BSC} = 60°$, $\widehat{ASC} = 90°$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

Ⓐ $V = \dfrac{2a^3\sqrt{2}}{9}$. Ⓑ $V = 2a^3\sqrt{2}$. Ⓒ $V = \dfrac{4a^3\sqrt{2}}{3}$. Ⓓ $V = a^3\sqrt{2}$.

Lời giải.



Trên SA, SB, SC lần lượt lấy các điểm A', B', C' sao cho $SA' = SB' = SC' = a$. Vì $SA = 2a = 2SA'$, $SB = 3a = 3SB'$, $SC = 4a = 4SC'$ nên ta suy ra

$$\frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA'}{SA} \cdot \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SC'}{SC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{24} \Rightarrow V_{S.ABC} = 24V_{S.A'B'C'}.$$

Theo giả thiết $\widehat{ASB} = \widehat{BSC} = 60^\circ$ và $SA' = SB' = a$ suy ra hai tam giác $SA'B'$, $SB'C'$ đều và $A'B' = B'C' = a$.

Vì $\widehat{ASC} = 90^\circ$ và $SA' = SC' = a$ nên tam giác $A'SC'$ vuông cân tại S, do đó $A'C' = a\sqrt{2}$.

Gọi H là trung điểm $A'C'$ thì $SH = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$ và $SH \perp A'C'$ (1).

Tam giác $A'B'C'$ cân tại B' nên trung tuyến, cũng là đường cao $B'H = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Xét tam giác SHB'có $SH^2 + HB'^2 = \dfrac{2a^2}{4} + \dfrac{2a^2}{4} = a^2$ suy ra $SH \perp HB'$.

Từ (1), (2) suy ra $SH \perp (A'B'C')$, nên SH là chiều cao khối chóp $S.A'B'C'$.

Thể tích khối chóp $S.A'B'C'$ là

$V_{S.A'B'C'} = \dfrac{1}{3}SH.S_{\Delta A'B'C'} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \dfrac{1}{2}A'C' \cdot B'H = \dfrac{a\sqrt{2}}{12} \cdot a\sqrt{2} \cdot \dfrac{a\sqrt{2}}{2} = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{12}.$

Suy ra $V_{S.ABC} = 24V_{S.A'B'C'} = 24 \cdot \dfrac{a^3\sqrt{2}}{12} = 2a^3\sqrt{2}$.

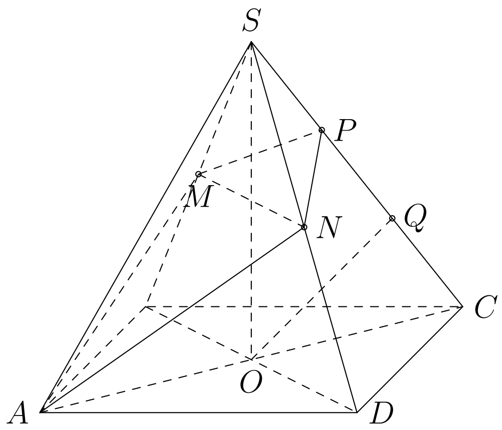
Chọn đáp án B □

Câu 40 (THPT Cẩm Bình Hà Tỉnh 2019).

Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có đáy và cạnh bên đều bằng $a\sqrt{2}$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh SB, SD. Mặt phẳng (AMN) chia khối chóp thành hai phần có thể tích V_1, V_2 với $V_1 < V_2$. Ta có V_2 bằng

A. $\dfrac{a^3}{18}$.   B. $\dfrac{5a^3}{9}$.   C. $\dfrac{8a^3}{15}$.   D. $\dfrac{a^3}{9}$.

Lời giải.



Gọi $O = AC \cap BD$, $I = SO \cap MN$, $P = AI \cap SC$.

Khi đó I là trung điểm của SO.

Gọi Q là trung điểm của $CP \Rightarrow IP \parallel OQ \Rightarrow P$ là trung điểm của $SQ \Rightarrow SP = PQ = QC$.

Ta có

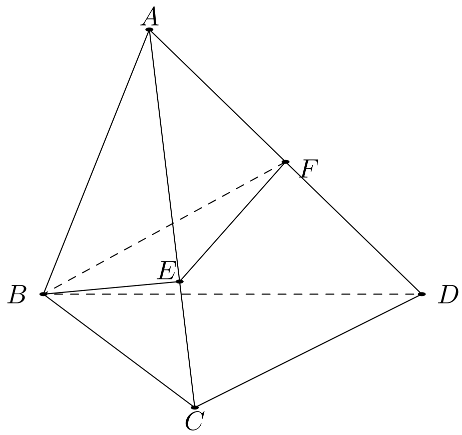
$$\frac{V_{S.AMP}}{V_{S.ABC}} = \frac{SM}{SB} \cdot \frac{SP}{SC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \Rightarrow \frac{V_{S.AMPN}}{V_{S.ABCD}} = \frac{1}{6}.$$

Suy ra $V_1 = \frac{1}{6}V_{S.ABCD}, V_2 = \frac{5}{6}V_{S.ABCD}$ (vì $V_1 < V_2$).
Mặt khác $SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \sqrt{2a^2 - a^2} = a$.
Do đó $V_2 = \frac{5}{6}.\frac{1}{3}a.2a^2 = \frac{5}{9}a^3$.
Chọn đáp án B

Câu 41. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = 1$; $AC = 2$; $AD = 3$ và $\widehat{BAC} = \widehat{CAD} = \widehat{DAB} = 60°$. Tính thể tích V của khối tứ diện $ABCD$.

Ⓐ $V = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Ⓑ $V = \frac{\sqrt{2}}{6}$. Ⓒ $V = \frac{\sqrt{3}}{4}$. Ⓓ $V = \frac{\sqrt{2}}{12}$.

Lời giải.

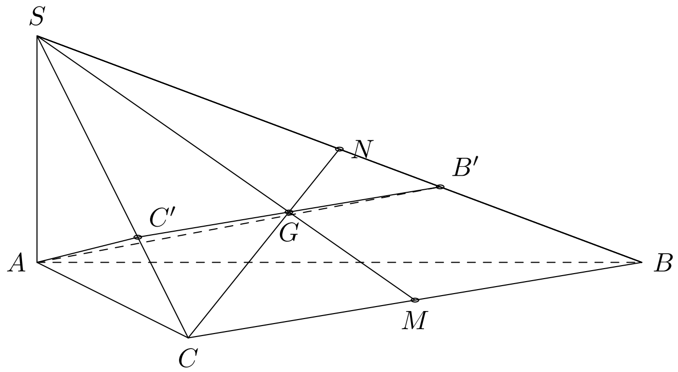


Do $AB < AC < AD$ nên chọn $E \in AC$, $AE = 1$, $F \in AD$, $AF = 1$.
Ta có $\widehat{BAC} = \widehat{CAD} = \widehat{DAB} = 60°$(giả thiết)
Suy ra tứ diện $ABEF$ là tứ diện đều cạnh bằng 1. Ta có $V_{ABEF} = \frac{\sqrt{2}}{12}$.
Mặt khác ta có $\frac{V_{ABCD}}{V_{ABEF}} = \frac{AB.AC.AD}{AB.AE.AF} = \frac{1.2.3}{1.1.1} = 6$.
Từ đó $V_{ABCD} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
Chọn đáp án A

Câu 42. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC vuông cân ở B, $AC = a\sqrt{2}$. SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) và $SA = a$. Gọi G là trọng tâm của tam giác SBC. Một mặt phẳng đi qua hai điểm A, G và song song với BC cắt SB, SC lần lượt tại B' và C'. Thể tích khối chóp $S.AB'C'$ bằng

Ⓐ $\frac{2a^3}{27}$. Ⓑ $\frac{a^3}{9}$. Ⓒ $\frac{4a^3}{27}$. Ⓓ $\frac{2a^3}{9}$.

Lời giải.



Gọi M, N lần lượt là trung điểm của đoạn thẳng BC, SB. Khi đó, $G = SM \cap CN$.

Đặt $BA = BC = x > 0$. Theo định lý Pitago trong tam giác ABC vuông tại B, ta có $AC^2 = BA^2 + BC^2 \Rightarrow \left(a\sqrt{2}\right)^2 = x^2 + x^2 \Rightarrow x^2 = a^2 \Rightarrow x = a$.

Diện tích tam giác ABC là $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}.BA.BC = \dfrac{a^2}{2}$.

Thể tích khối chóp $S.ABC$ là $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3} \cdot S_{ABC} \cdot SA = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{a^2}{2} \cdot a = \dfrac{a^3}{6}$.

Mặt phẳng qua A, G song song với BC cắt SB, SC lần lượt tại B', C' nên $B'C' \parallel BC$.

Khi đó ta có $\dfrac{SB'}{SB} = \dfrac{SC'}{SC} = \dfrac{SG}{SM} = \dfrac{2}{3}$.

Ta lại có $\dfrac{V_{S.AB'C'}}{V_{S.ABC}} = \dfrac{SA}{SA} \cdot \dfrac{SB'}{SB} \cdot \dfrac{SC'}{SC} = 1 \cdot \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{2}{3} = \dfrac{4}{9}$.

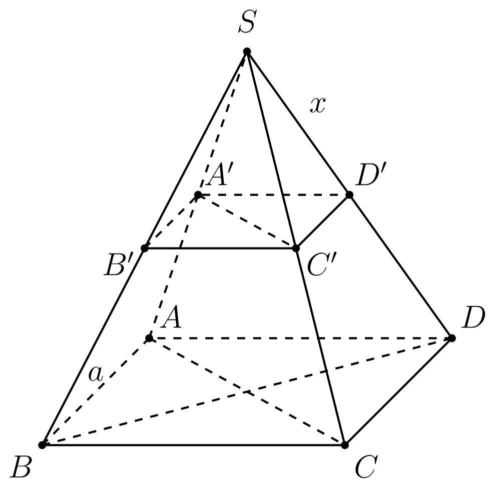
Suy ra, $V_{S.AB'C'} = \dfrac{4}{9} \cdot V_{S.ABC} = \dfrac{4}{9} \cdot \dfrac{a^3}{6} = \dfrac{2a^3}{27}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 43. Một viên đá có dạng khối chóp tứ giác đều với tất cả các cạnh bằng nhau và bằng a. Người ta cưa viên đá đó theo mặt phẳng song song với mặt đáy của khối chóp để chia viên đá thành hai phần có thể tích bằng nhau. Tính diện tích thiết diện viên đá bị cưa bởi mặt phẳng nói trên.

(A) $\dfrac{a^2}{\sqrt[3]{2}}$. (B) $\dfrac{a^2}{\sqrt{3}}$. (C) $\dfrac{a^2}{\sqrt[3]{4}}$. (D) $\dfrac{\sqrt[3]{2}a^2}{4}$.

Lời giải.



Gọi khối chóp tứ giác đều là $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng a.

Vì mặt phẳng cắt hình khối chóp song song với đáy nên thiết diện tạo bởi mặt cắt và khối chóp là một hình vuông $A'B'C'D'$.

Giả sử $\dfrac{SA'}{SA} = k$, ta có $\dfrac{SA'}{SA} = \dfrac{SB'}{SB} = \dfrac{SC'}{SC} = \dfrac{SD'}{SD} = \dfrac{A'B'}{AB} = k$ (định lí Talet).

Theo giả thiết $V_{S.A'B'C'D'} = \dfrac{1}{2}V_{S.ABCD} \Leftrightarrow 2V_{S.A'B'C'} = \dfrac{1}{2} \cdot 2 \cdot V_{S.ABC}$

$\Leftrightarrow V_{S.A'B'C'} = \dfrac{1}{2} \cdot V_{S.ABC} \Leftrightarrow \dfrac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \dfrac{SA'}{SA} \cdot \dfrac{SB'}{SB} \cdot \dfrac{SC'}{SC} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow (k)^3 = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow k = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}} \Rightarrow \dfrac{A'B'}{AB} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$

$\Rightarrow A'B' = \dfrac{a}{\sqrt[3]{2}} \Rightarrow S_{A'B'C'D'} = \left(\dfrac{a}{\sqrt[3]{2}}\right)^2 = \dfrac{a^2}{\sqrt[3]{4}}$.

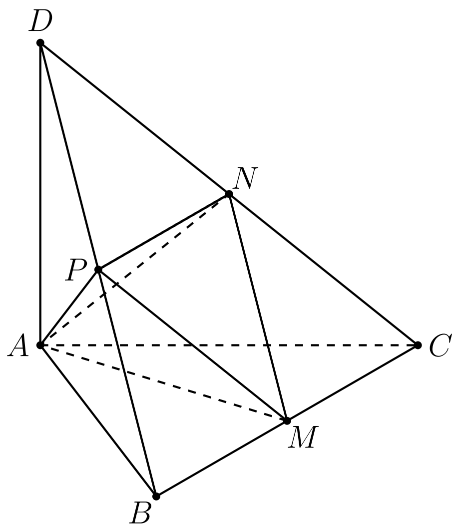
Chọn đáp án C □

Câu 44 (THPT Yên Dũng 2-Bắc Giang).

Cho tứ diện $ABCD$ có các cạnh AB, AC, AD vuông góc với nhau từng đôi một và $AB = 3a$, $AC = 6a$, $AD = 4a$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CD, BD. Tính thể tích khối đa diện $AMNP$.

(A) $12a^3$. (B) $3a^3$. (C) $2a^3$. (D) a^3.

Lời giải.



Ta có: $\dfrac{V_{D.APN}}{V_{D.ABC}} = \dfrac{DP}{DB} \cdot \dfrac{DN}{DC} = \dfrac{1}{4}$; $\dfrac{V_{B.APM}}{V_{B.ACD}} = \dfrac{BP}{BD} \cdot \dfrac{BM}{BC} = \dfrac{1}{4}$; $\dfrac{V_{C.AMN}}{V_{C.ABD}} = \dfrac{CM}{CB} \cdot \dfrac{CN}{CD} = \dfrac{1}{4}$.

Mà $V_{AMNP} = V_{ABCD} - V_{DAPN} - V_{BAPM} - V_{CAMN} = \dfrac{1}{4}V_{ABCD} = \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{6} \cdot AB \cdot AC \cdot AD\right)$

$\Rightarrow V_{AMNP} = \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{6} \cdot 3a \cdot 6a \cdot 4a\right) = 3a^3$.

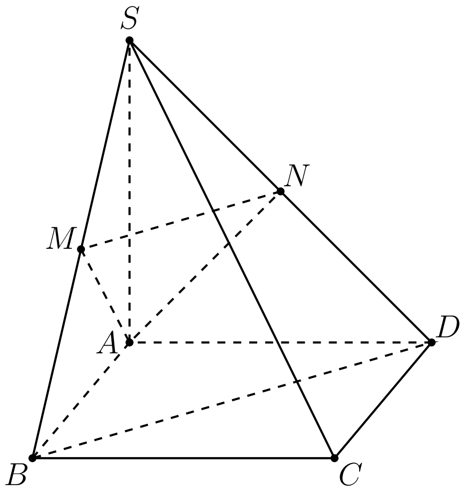
Chọn đáp án B □

Câu 45 (HKI-Chuyên Long An-2019).

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi và có thể tích bằng 2. Gọi M, N lần lượt là các điểm trên cạnh SB và SD sao cho $\dfrac{SM}{SB} = \dfrac{SN}{SD} = k$. Tìm giá trị của k để thể tích khối chóp $S.AMN$ bằng $\dfrac{1}{8}$.

(A) $k = \dfrac{1}{8}$. (B) $k = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$. (C) $k = \dfrac{1}{4}$. (D) $k = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải.



Vì đáy $ABCD$ là hình thoi nên $S_{\Delta ABD} = S_{\Delta CBD} \Rightarrow V_{S.ABD} = \dfrac{1}{2}V_{S.ABCD} = 1$.

Mặt khác $\dfrac{V_{S.AMN}}{V_{S.ABD}} = \dfrac{SA}{SA} \cdot \dfrac{SM}{SB} \cdot \dfrac{SN}{SD} \Leftrightarrow V_{S.AMN} = k^2$, Có $V_{S.AMN} = \dfrac{1}{8}$

Suy ra $k^2 = \dfrac{1}{8} \Rightarrow k = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$ (do $k > 0$). Vậy $k = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

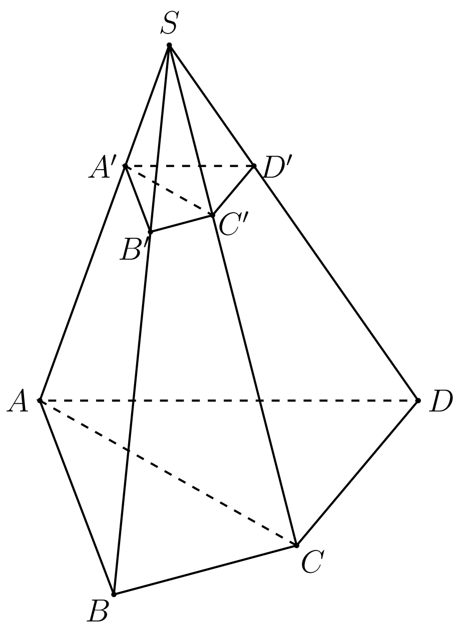
Chọn đáp án B □

Câu 46 (THPT Đoàn Thượng – Hải Dương).

Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có thể tích bằng V. Lấy điểm A' trên cạnh SA sao cho $SA' = \dfrac{1}{3}SA$. Mặt phẳng qua A' và song song với đáy của hình chóp cắt các cạnh SB, SC, SD lần lượt tại B', C', D'. Tính theo V thể tích khối chóp $S.A'B'C'D'$?

Ⓐ $\dfrac{V}{3}$. Ⓑ $\dfrac{V}{81}$. Ⓒ $\dfrac{V}{27}$. Ⓓ $\dfrac{V}{9}$.

Lời giải.



Ta có $V_{S.ABC} + V_{S.ACD} = V_{S.ABCD}$; $\dfrac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \dfrac{SA'}{SA} \cdot \dfrac{SB'}{SB} \cdot \dfrac{SC'}{SC} = \left(\dfrac{1}{3}\right)^3 = \dfrac{1}{27}$

$\dfrac{V_{S.A'D'C'}}{V_{S.ADC}} = \dfrac{SA'}{SA} \cdot \dfrac{SD'}{SD} \cdot \dfrac{SC'}{SC} = \left(\dfrac{1}{3}\right)^3 = \dfrac{1}{27}$; $V_{S.A'B'C'D'} = V_{S.A'B'C'} + V_{S.A'C'D'} = \dfrac{1}{27}V_{S.ABCD}$.

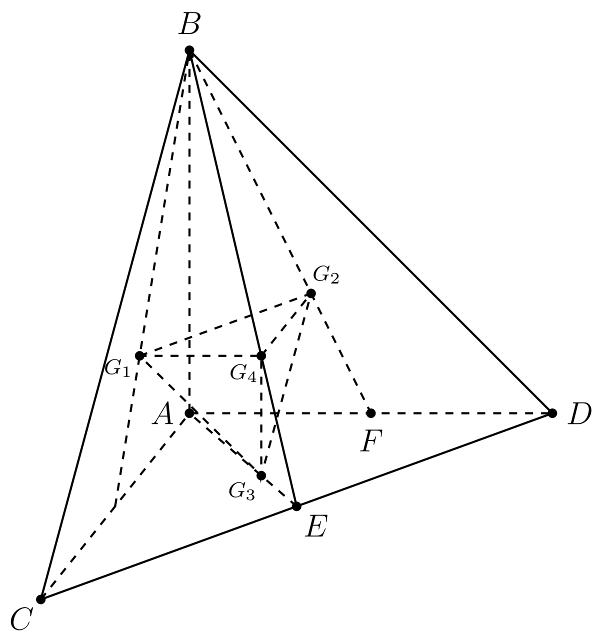
Chọn đáp án C □

Câu 47 (THPT Đoàn Thượng – Hải Dương).

Cho tứ diện $ABCD$ có các cạnh AB, AC và AD đôi một vuông góc với nhau. Gọi G_1, G_2, G_3 và G_4 lần lượt là trọng tâm các tam giác ABC, ABD, ACD và BCD. Biết $AB = 6a$, $AC = 9a$, $AD = 12a$. Tính theo a thể tích khối tứ diện $G_1G_2G_3G_4$.

Ⓐ $4a^3$. Ⓑ a^3. Ⓒ $108a^3$. Ⓓ $36a^3$.

Lời giải.



$\Delta G_1G_2G_3$ đồng dạng với ΔACD theo tỉ số $\dfrac{1}{3}$ và nằm trong hai mặt phẳng song song.

$S_{\Delta G_1G_2G_3} = \dfrac{1}{9}S_{\Delta ABD} = 6a^2$.

$G_3G_4 \parallel AB$ và $G_3G_4 = \dfrac{1}{3}AB = 2a$.

Suy ra $V_{G_1G_2G_3G_4} = \dfrac{1}{3}G_3G_4.S_{\Delta G_1G_2G_3} = 4a^3$.

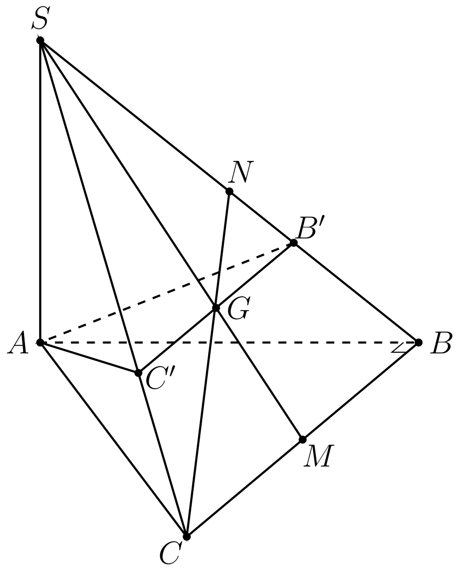
Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 48 (Chuyên Vĩnh Phúc - 2019).

Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC vuông cân ở B, $AC = a\sqrt{2}$, $SA \perp (ABC)$, $SA = a$. Gọi G là trọng tâm của tam giác SBC, mặt phẳng (α) đi qua AG và song song với BC chia khối chóp thành hai phần. Gọi V là thể tích của khối đa diện không chứa đỉnh S. Tính V.

Ⓐ $\dfrac{4a^3}{9}$. Ⓑ $\dfrac{4a^3}{27}$. Ⓒ $\dfrac{5a^3}{54}$. Ⓓ $\dfrac{2a^3}{9}$.

Lời giải.



Trong mặt phẳng (SBC) kẻ đường thẳng qua G song song với BC, cắt SB, SC lần lượt tại B', C'. Khi đó mặt phẳng (α) trùng với mặt phẳng $(AB'C')$.

Gọi M, N lần lượt là trung điểm của đoạn thẳng BC, SB.

Đặt $BA = BC = x > 0$. Theo định lý Pitago trong tam giác ABC vuông tại B, ta có $AC^2 = BA^2 + BC^2 \Rightarrow \left(a\sqrt{2}\right)^2 = x^2 + x^2 \Rightarrow x^2 = a^2 \Rightarrow x = a$.

Diện tích tam giác ABC là $S_{ABC} = \dfrac{1}{2} \cdot BA \cdot BC = \dfrac{a^2}{2}$.

Thể tích khối chóp $S.ABC$ là $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3} \cdot S_{ABC} \cdot SA = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{a^2}{2} \cdot a = \dfrac{a^3}{6}$.

Ta lại có $\dfrac{SB'}{SB} = \dfrac{SC'}{SC} = \dfrac{SG}{SM} = \dfrac{2}{3}$.

Suy ra: $\dfrac{V_{S.AB'C'}}{V_{S.ABC}} = \dfrac{SA}{SA} \cdot \dfrac{SB'}{SB} \cdot \dfrac{SC'}{SC} = 1 \cdot \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{2}{3} = \dfrac{4}{9}$.

Vì thế, $V_{S.AB'C'} = \dfrac{4}{9}.V_{S.ABC} = \dfrac{4}{9} \cdot \dfrac{a^3}{6} = \dfrac{2a^3}{27}$.

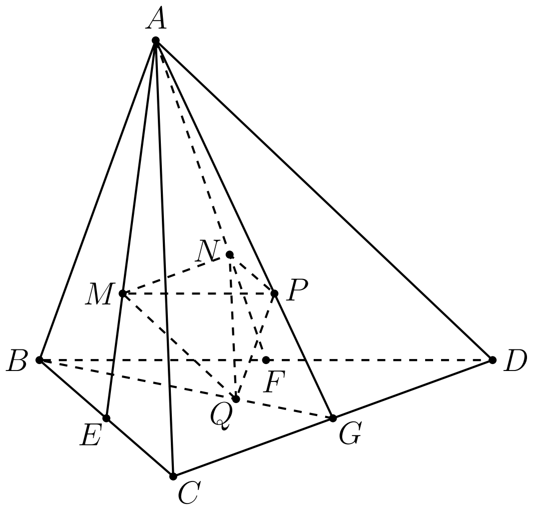
Vậy $V = V_{S.ABC} - V_{S.AB'C'} = \dfrac{a^3}{6} - \dfrac{2a^3}{27} = \dfrac{5a^3}{54}$.

Chọn đáp án C □

Câu 49 (Chuyên Lam Sơn 2019). Cho tứ diện $ABCD$ có thể tích V. Gọi E, F, G lần lượt là trung điểm của BC, BD, CD và M, N, P, Q lần lượt là trọng tâm ΔABC, ΔABD, ΔACD, ΔBCD. Tính thể tích khối tứ diện $MNPQ$ theo V.

(A) $\dfrac{V}{9}$. (B) $\dfrac{V}{3}$. (C) $\dfrac{2V}{9}$. (D) $\dfrac{V}{27}$.

Lời giải.



Ta có $\Delta MNP \sim \Delta EFG$ và $\dfrac{MN}{EF} = \dfrac{2}{3}$; $\Delta EFG \sim \Delta DCB$ và $\dfrac{EF}{DC} = \dfrac{1}{2}$.

Do đó $\Delta MNP \sim \Delta DCB$ và $\dfrac{MN}{DC} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{S_{\Delta MNP}}{S_{\Delta BCD}} = \dfrac{1}{9} \Rightarrow S_{\Delta MNP} = \dfrac{1}{9} S_{\Delta BCD}$

Mặt khác $\mathrm{d}\left(Q, (MNP)\right) = \dfrac{1}{3}\mathrm{d}\left(A, (BCD)\right)$

Suy ra $V_{MNPQ} = \dfrac{1}{27}V$.

Chọn đáp án D □

Câu 50 (THPT QG - 2017). Cho tứ diện $ABCD$ có thể tích bằng 12 và G là trọng tâm của tam giác BCD. Tính thể tích V của khối chóp $A.GBC$.

A $V = 3$. B $V = 4$. C $V = 6$. D $V = 5$.

Lời giải.

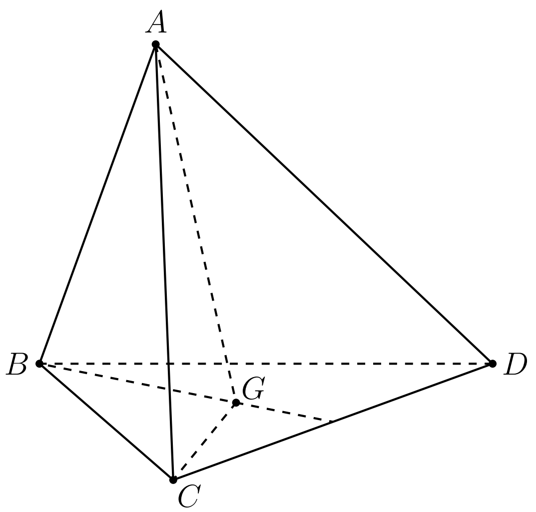
Do G là trọng tâm tam giác BCD nên ta có $S_{\Delta BGC} = S_{\Delta BGD} = S_{\Delta CGD}$.

Khi đó, $S_{\Delta BCD} = 3S_{\Delta BGC}$.

Áp dụng công thức thể tích hình chóp ta có

$$\left.\begin{array}{l} V_{ABCD} = \dfrac{1}{3}h.S_{\Delta BCD} \\ V_{A.GBC} = \dfrac{1}{3}h.S_{\Delta GBC} \end{array}\right\} \Rightarrow \dfrac{V_{ABCD}}{V_{A.GBC}} = \dfrac{\dfrac{1}{3}h.S_{\Delta BCD}}{\dfrac{1}{3}h.S_{\Delta GBC}} = \dfrac{S_{\Delta BCD}}{S_{\Delta GBC}} = 3$$

$\Rightarrow V_{A.GBC} = \dfrac{1}{3}V_{ABCD} = \dfrac{1}{3}.12 = 4$.

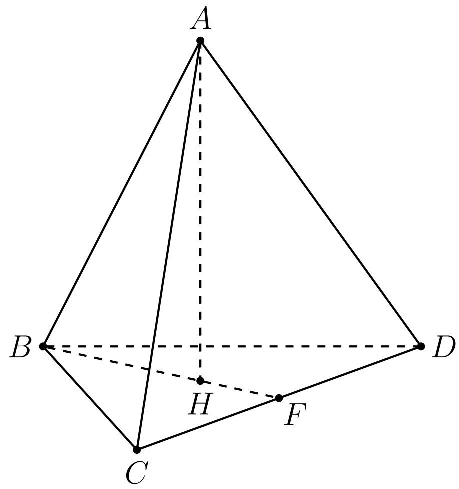


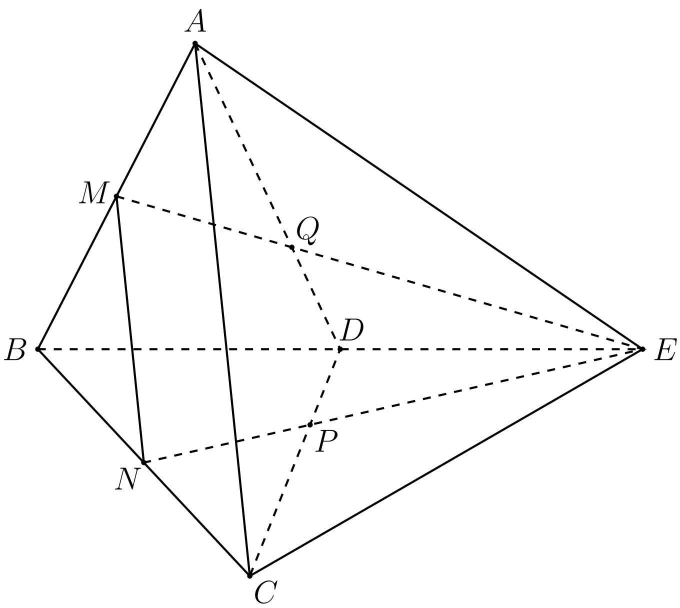
Chọn đáp án B □

Câu 51. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC và E là điểm đối xứng với B qua D. Mặt phẳng (MNE) chia khối tứ diện $ABCD$ thành hai khối đa diện, trong đó khối chứa điểm A có thể tích V. Tính V.

(A) $\dfrac{13\sqrt{2}a^3}{216}$. (B) $\dfrac{7\sqrt{2}a^3}{216}$. (C) $\dfrac{\sqrt{2}a^3}{18}$. (D) $\dfrac{11\sqrt{2}a^3}{216}$.

Lời giải.





Tính thể tích T có khối tứ diện $ABCD$. Gọi F là trung điểm BC và H trọng tâm tam giác BCD.
Ta có $BF = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ và $BH = \dfrac{2}{3}BF = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$ suy ra $BH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = a\sqrt{\dfrac{2}{3}}$.
Thể tích tứ diện $ABCD$ là $T = \dfrac{1}{3}AH \cdot S_{BCD} = \dfrac{1}{3}a\sqrt{\dfrac{2}{3}} \cdot \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{12}$.
Gọi diện tích một mặt của tứ diện làS. Gọi P là giao điểm của NE và CD, tương tự cho Q.
Ta thấy P, Q lần lượt là trọng tâm các tam giác BEC và BEA nên $PD = \dfrac{1}{3}DC$, $QD = \dfrac{1}{3}AD$.
Sử dụng công thức tỉ số thể tích ta có
$\dfrac{V_{B.ACE}}{V_{B.ACD}} = 2$ nên $V_{B.ACE} = 2T$; $\dfrac{V_{E.BMN}}{V_{E.BAC}} = \dfrac{1}{4}$ nên $V_{E.BMN} = \dfrac{1}{4}.2T = \dfrac{T}{2}$.
Nên $V_{E.AMNC} = V_{E.ABC} - V_{B.EMN} = 2T - \dfrac{T}{2} = \dfrac{3}{2}T$.

Tương tự: $\dfrac{V_{E.DPQ}}{V_{E.DCA}} = \dfrac{1}{9}$ nên $V_{E.DPQ} = \dfrac{1}{9}T$. Nên $V_{ACPQ} = T - \dfrac{1}{9}T = \dfrac{8}{9}T$.

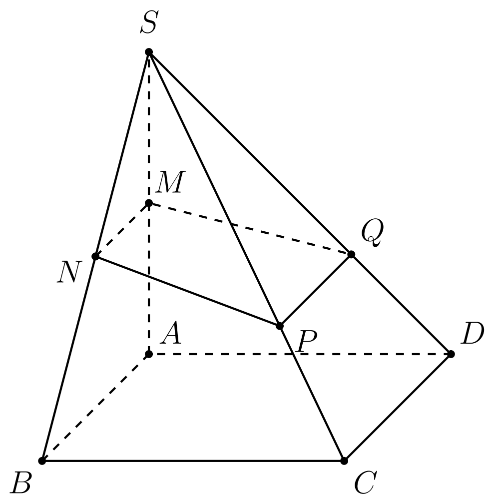
Suy ra $V = V_{E.AMNC} - V_{E.ACPQ} = \dfrac{3}{2}T - \dfrac{8}{9}T = \dfrac{11}{18}T = \dfrac{11a^3\sqrt{2}}{216}$.

Chọn đáp án D □

Câu 52. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành và có thể tích $V = 12$. Gọi M, N lần lượt trung điểm SA, SB; P là điểm thuộc cạnh SC sao cho $PS = 2PC$. Mặt phẳng (MNP) cắt cạnh SD tại Q. Tính thể tích khối chóp $S.MNPQ$ bằng

Ⓐ $\dfrac{5}{18}$. Ⓑ $\dfrac{7}{3}$. Ⓒ $\dfrac{4}{3}$. Ⓓ $\dfrac{12}{25}$.

Lời giải.



Ta có $PQ \parallel CD \Rightarrow \dfrac{SQ}{SD} = \dfrac{SP}{SC} = \dfrac{2}{3}$.

Khi đó ta có $\dfrac{V_{SMNP}}{V_{SABC}} = \dfrac{SM}{SA} \cdot \dfrac{SN}{SB} \cdot \dfrac{SP}{SC} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{6} \Rightarrow V_{SMNP} = \dfrac{1}{12}V$.

$\dfrac{V_{SMPQ}}{V_{SACD}} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{2}{3} = \dfrac{2}{9} \Rightarrow V_{SMPQ} = \dfrac{1}{9}V$. Vậy $V_{S.MNPQ} = \dfrac{7}{36}V = \dfrac{7}{3}$.

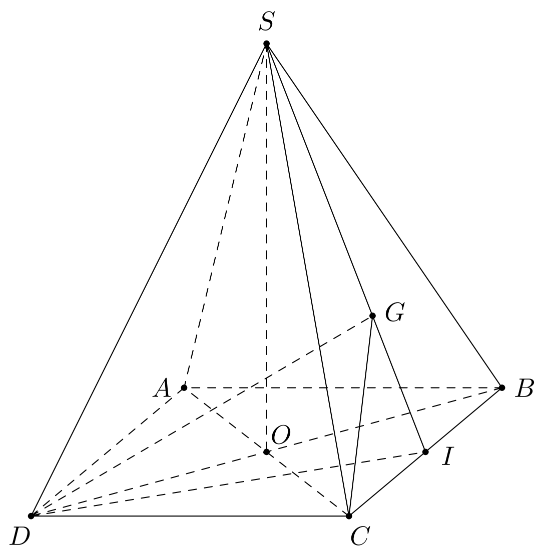
Chọn đáp án B □

Câu 53 (Chuyên Hoàng Văn Thụ - Hòa Bình 2019).

Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng 1. Gọi G là trọng tâm của tam giác SBC. Thể tích khối tứ diện $SGCD$ bằng

Ⓐ $\dfrac{\sqrt{2}}{36}$. Ⓑ $\dfrac{\sqrt{2}}{6}$. Ⓒ $\dfrac{\sqrt{3}}{36}$. Ⓓ $\dfrac{\sqrt{2}}{18}$.

Lời giải.



Gọi $O = AC \cap BD \Rightarrow SO \perp (ABCD)$, I là trung điểm cạnh BC.

$OC = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow SO = \sqrt{SC^2 - OC^2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\Rightarrow V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3} SO.S_{ABCD} = \dfrac{\sqrt{2}}{6}$.

$V_{S.DCI} = \dfrac{1}{4} V_{S.ABCD} = \dfrac{\sqrt{2}}{24}$.

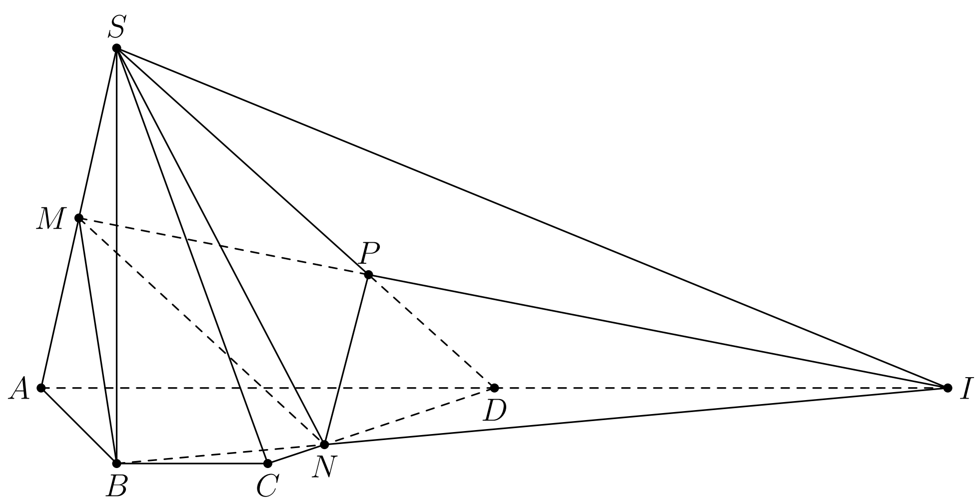
$\dfrac{V_{S.DCG}}{V_{S.DCI}} = \dfrac{SD}{SD} \cdot \dfrac{SC}{SC} \cdot \dfrac{SG}{SI} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow V_{S.DCG} = \dfrac{2}{3} V_{S.DCI} = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{24} = \dfrac{\sqrt{2}}{36}$.

Chọn đáp án A □

Câu 54. Cho khối chóp $S.ABCD$ có thể tích bằng 1, đáy $ABCD$ là hình thang với cạnh đáy lớn là AD và $AD = 3BC$. Gọi M là trung điểm cạnh SA, N là điểm thuộc cạnh CD sao cho $ND = 3NC$. Mặt phẳng (BMN) cắt cạnh SD tại P. Thể tích khối chóp $A.MBNP$ bằng

Ⓐ $\dfrac{3}{8}$. Ⓑ $\dfrac{5}{12}$. Ⓒ $\dfrac{5}{16}$. Ⓓ $\dfrac{9}{32}$.

Lời giải.



Đặt $V = V_{S.ABCD} = 1$.

Gọi I là giao điểm của BN với AD, suy ra P là giao điểm của MI với SD.

$BC \parallel DI$ và $ND = 3NC \Rightarrow DI = 3BC \Rightarrow D$ là trung điểm của AI.

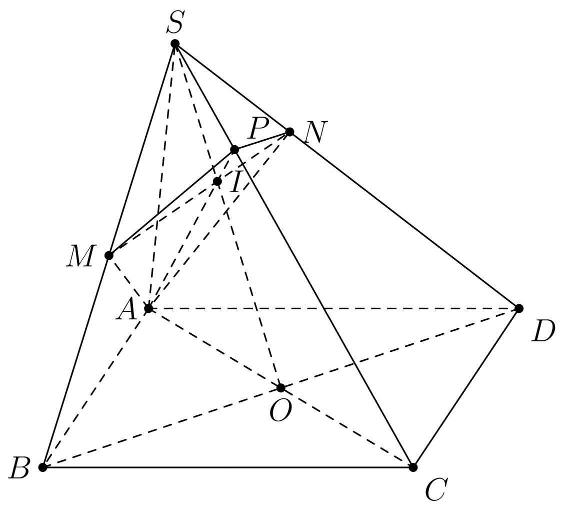
Do đó P là trọng tâm của tam giác $SAI \Rightarrow \dfrac{SP}{SD} = \dfrac{2}{3}$.
$S_{BCN} = \dfrac{1}{4}S_{BCD} = \dfrac{1}{4}.\dfrac{1}{4}S_{ABCD} = \dfrac{1}{16}S_{ABCD}$; $S_{ADN} = S_{NID} = 9S_{BCN} = \dfrac{9}{16}S_{ABCD}$.
$S_{ABN} = S_{ABCD} - S_{BCN} - S_{ADN} = \dfrac{3}{8}S_{ABCD}$. Suy ra $V_{S.ABN} = \dfrac{3}{8}V$; $V_{S.ADN} = \dfrac{9}{16}V$.
$V_{S.MBN} = \dfrac{1}{2}V_{S.ABN} \Rightarrow V_{A.BMN} = \dfrac{1}{2}V_{S.ABN} = \dfrac{3}{16}V$;
$V_{S.MNP} = \dfrac{1}{2}V_{S.ANP} \Rightarrow V_{A.MNP} = \dfrac{1}{2}V_{S.ANP} = \dfrac{1}{2}.\dfrac{2}{3}V_{S.AND} = \dfrac{3}{16}V$.
Do đó $V_{A.MBNP} = V_{A.BMN} + V_{A.MNP} = \dfrac{3}{8}V = \dfrac{3}{8}$.
Chọn đáp án A □

Câu 55 (THPT Ninh Bình-Bạc Liêu-2019).

Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có thể tích bằng V. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, $A'C'$, BB'. Tính thể tích khối tứ diện $CMNP$.

Ⓐ $\dfrac{1}{8}V$. Ⓑ $\dfrac{7}{48}V$. Ⓒ $\dfrac{5}{48}V$. Ⓓ $\dfrac{1}{6}V$.

Lời giải.

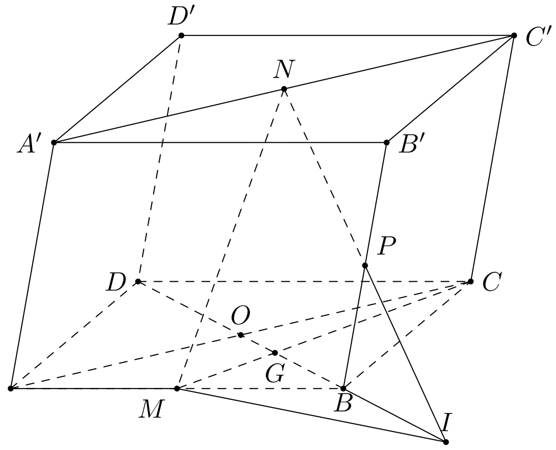


Gọi $G = CM \cap BD$, $I = PN \cap BD$, $O = AC \cap BD$. Dễ thấy BP là đường trung bình của ΔINO và G là trọng tâm ΔABC nên $BG = \dfrac{2}{3}BO = \dfrac{2}{3}BI$.
$\dfrac{V_{N.CMP}}{V_{N.CMI}} = \dfrac{NP}{NI} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow V_{CMNP} = \dfrac{1}{2}V_{N.CMI}$.
Đặt $S = S_{ABCD}$ và h là chiều cao của khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Ta có
$\dfrac{S_{\Delta BMC}}{S_{\Delta IMC}} = \dfrac{\frac{1}{2}\mathrm{d}(B, MC).MC}{\frac{1}{2}\mathrm{d}(I, MC).MC} = \dfrac{BG}{IG} = \dfrac{2}{5} \Rightarrow S_{\Delta IMC} = \dfrac{5}{2}S_{\Delta BMC} = \dfrac{5}{2}.\dfrac{1}{4}S = \dfrac{5}{8}S$.
Mà $V_{N.IMC} = \dfrac{1}{3}S_{\Delta IMC}.\mathrm{d}(N, (ABCD)) = \dfrac{1}{3}.\dfrac{5}{8}S.h = \dfrac{5}{24}V$.
Vậy $V_{CMNP} = \dfrac{1}{2}V_{N.CMI} = \dfrac{5}{48}V$.
Chọn đáp án C □

Câu 56. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành và có thể tích bằng 48. Trên cạnh SB, SD lấy các điểm M, N sao cho $SM = MB$, $SD = 3SN$. Mặt phẳng (AMN) cắt SC tại P. Tính thể tích V của khối tứ diện $SMNP$.

Ⓐ $V = \dfrac{1}{3}$. Ⓑ $V = \dfrac{1}{2}$. Ⓒ $V = 2$. Ⓓ $V = 1$.

Lời giải.

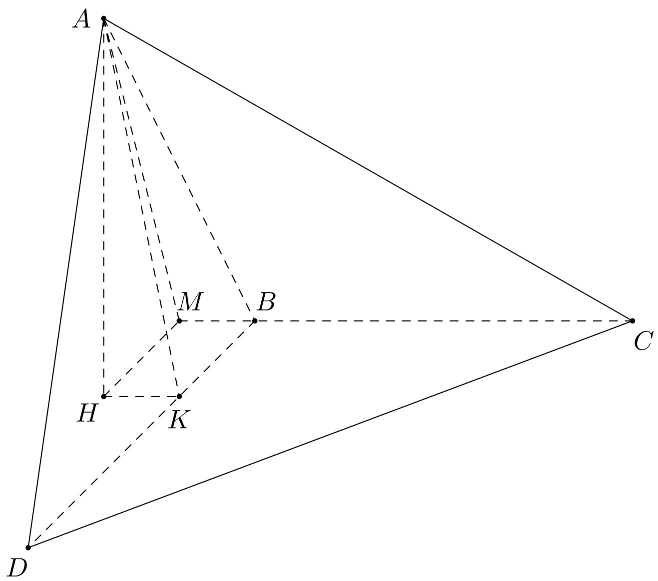


Ta có $\dfrac{SB}{SM} + \dfrac{SD}{SN} = \dfrac{SA}{SA} + \dfrac{SC}{SP} \Leftrightarrow 2 + 3 = 1 + \dfrac{SC}{SP} \Rightarrow \dfrac{SC}{SP} = 4$.
$\dfrac{V_{S.MNP}}{V_{S.ABCD}} = \dfrac{1}{2}\dfrac{V_{S.MNP}}{V_{S.BCD}} = \dfrac{1}{2}\dfrac{SP}{SC} \cdot \dfrac{SM}{SB} \cdot \dfrac{SN}{SD} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{48} \Rightarrow V_{S.MNP} = \dfrac{1}{48} V_{S.ABCD} = 1$.
Chọn đáp án D □

Câu 57 (Sở Bắc Ninh - 2019). Cho tứ diện $ABCD$ có $\widehat{DAB} = \widehat{CBD} = 90^\circ$; $AB = a$; $AC = a\sqrt{5}$; $\widehat{ABC} = 135^\circ$. Biết góc giữa hai mặt phẳng (ABD), (BCD) bằng 30°. Thể tích của tứ diện $ABCD$ là

Ⓐ $\dfrac{a^3}{2\sqrt{3}}$. Ⓑ $\dfrac{a^3}{\sqrt{2}}$. Ⓒ $\dfrac{a^3}{3\sqrt{2}}$. Ⓓ $\dfrac{a^3}{6}$.

Lời giải.



Vẽ $AH \perp (BCD)$, $H \in (BCD)$.

Vẽ $HK \parallel BC$, $K \in BD$, có $BD \perp BC \Rightarrow HK \perp BD$, mà $AH \perp BD$.

$\Rightarrow BD \perp (AHK) \Rightarrow BD \perp AK$.

Nên $\left(\widehat{(ABD), (BCD)}\right) = \widehat{AKH} = 30^\circ$

Vẽ $HM \parallel BD$, $M \in BD$, có $BC \perp BD \Rightarrow HM \perp BC$, mà $AH \perp BC$.

$\Rightarrow BC \perp AM$, có góc $\widehat{ABC} = 135°$.

Suy ra $\widehat{ABM} = 45°$ (nên B ở giữa M và C).

ΔAMB vuông tại M có $\widehat{ABM} = 45°$.

Suy ra ΔAMB vuông cân tại $B \Rightarrow AM = MB = \dfrac{AB}{\sqrt{2}} = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$.

Tứ giác $BKHM$ là hình chữ nhật, nên $BM = HK$.

ΔAHK vuông tại H có $\widehat{AKH} = 30°$, nên $AH = \dfrac{HK}{\sqrt{3}} = \dfrac{a}{\sqrt{6}}$, $AK = 2AH = \dfrac{2a}{\sqrt{6}}$.

ΔBAD vuông tại A có AK là đường cao nên $\dfrac{1}{AK^2} = \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{AD^2}$.

$\Rightarrow \dfrac{3}{2a^2} = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{AD^2} \Rightarrow \dfrac{1}{AD^2} = \dfrac{1}{2a^2} \Rightarrow AD = a\sqrt{2}$ và $BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = a\sqrt{3}$.

Có $BC = CM - BM$, $CM^2 = CA^2 - AM^2 = 5a^2 - \dfrac{a^2}{2} = \dfrac{9a^2}{2}$.

$\Rightarrow BC = \dfrac{3a}{\sqrt{2}} - \dfrac{a}{\sqrt{2}} = a\sqrt{2}$.

Có $V = \dfrac{1}{3}AH.S_{BCD} = \dfrac{1}{6}AH.BD.BC = \dfrac{1}{6}\dfrac{a}{\sqrt{6}}.a\sqrt{3}.a\sqrt{2} = \dfrac{a^3}{6}$.

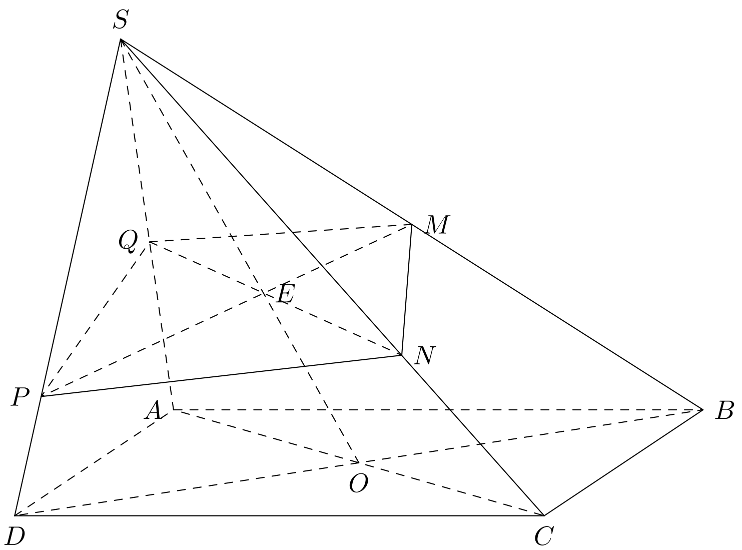
Vậy $V = \dfrac{a^3}{6}$.

Chọn đáp án D □

Câu 58 (Sở Hà Nam-2019). Cho hình chóp $SABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M là trung điểm SB. N là điểm thuộc cạnh SC sao cho $SN = 2CN$, P là điểm thuộc cạnh SD sao cho $SP = 3DP$. Mặt phẳng (MNP) cắt SA tại Q. Biết khối chóp $SMNPQ$ có thể tích bằng 1. Khối đa diện $ABCD.QMNP$ có thể tích bằng

A. $\dfrac{9}{7}$. B. $\dfrac{17}{5}$. C. 4. D. $\dfrac{14}{5}$.

Lời giải.



Ta có $\dfrac{SA}{SQ} + \dfrac{SC}{SN} = \dfrac{SB}{SM} + \dfrac{SD}{SP}$.

Do đó ta có $\dfrac{SQ}{SA} = \dfrac{6}{11}$.

Ta có $\dfrac{V_{SMNQ}}{V_{SBCA}} = \dfrac{SM}{SB}.\dfrac{SN}{SC}.\dfrac{SQ}{SA} = \dfrac{2}{11} \Rightarrow V_{SMNQ} = \dfrac{1}{11}V_{SABCD}$.

Tương tự: $V_{SQPN} = \dfrac{3}{22}V_{SABCD}$. Do đó $V_{SMNQ} + V_{SQPN} = \dfrac{5}{22}V_{SABCD} \Rightarrow V_{SABCD} = \dfrac{22}{5}$.

Vậy $V_{ABCD.QMNP} = \dfrac{17}{5}$.

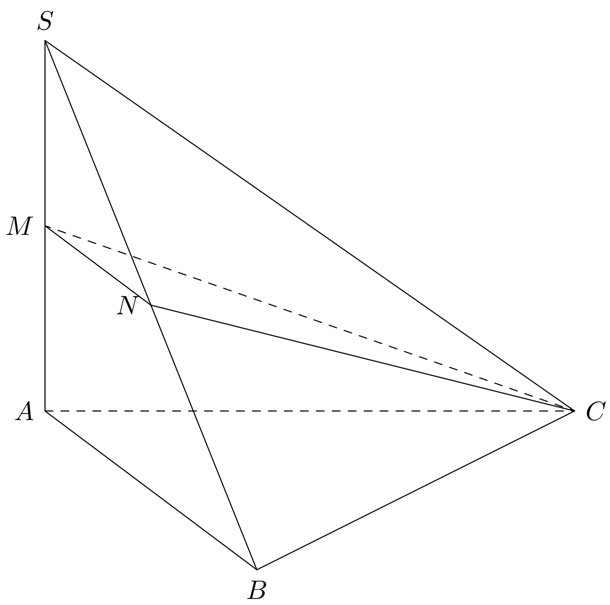
Chọn đáp án (B) □

Câu 59 (THPT Thăng Long-Hà Nội-2019).

Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, tam giác ABC đều, $AB = a$, góc giữa SB và mặt phẳng (ABC) bằng $60°$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA, SB. Tính thể tích của khối chóp $S.MNC$.

(A) $\dfrac{a^3}{8}$. (B) $\dfrac{a^3}{4}$. (C) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$. (D) $\dfrac{a^3}{16}$.

Lời giải.



Ta có: $SA \perp (ABC)$

$\Rightarrow AB$ là hình chiếu của SB lên mặt phẳng (ABC)

$\Rightarrow (SB, (ABC)) = (SB, AB) = \widehat{SBA} = 60°$.

$SA = AB \cdot \tan \widehat{SBA} = a \cdot \tan 60° = a\sqrt{3}$.

$V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3} \cdot S_{ABC} \cdot SA = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot a\sqrt{3} = \dfrac{a^3}{4}$.

$\dfrac{V_{S.MNC}}{V_{S.ABC}} = \dfrac{SM}{SA} \cdot \dfrac{SN}{SB} \cdot \dfrac{SC}{SC} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{4}$.

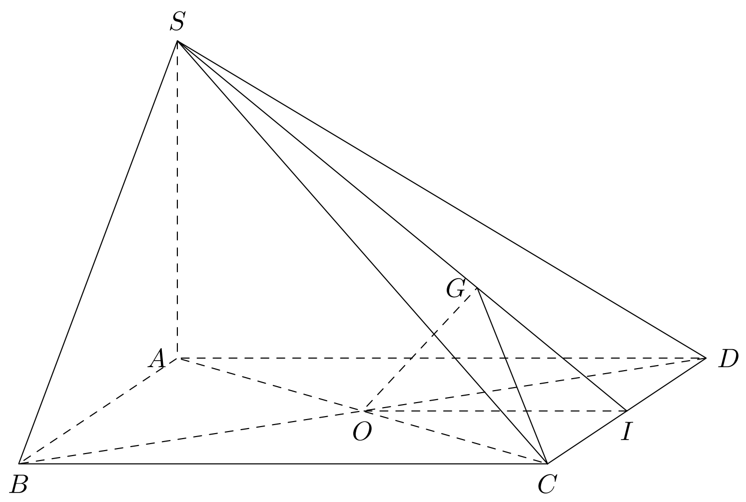
$\Rightarrow V_{S.MNC} = \dfrac{1}{4} \cdot V_{S.ABC} = \dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{a^3}{4} = \dfrac{a^3}{16}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 60. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy là hình vuông tâm O, $SA = a\sqrt{6}$, SA vuông góc với đáy, mặt phẳng (SBC) tạo với đáy góc φ sao cho $\tan\varphi = \sqrt{6}$. Gọi G là trọng tâm tam giác SCD. Tính thể tích khối tứ diện $SOGC$.

(A) $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{36}$. (B) $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{6}$. (C) $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{12}$. (D) $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{24}$.

Lời giải.



Ta có: $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp SB.$

Như vậy $\begin{cases} (SBC) \cap (ABCD) = BC \\ BC \perp AB \\ BC \perp SB \end{cases} \Rightarrow \left(\widehat{(SBC);(ABCD)}\right) = \left(\widehat{AB;SB}\right) = \widehat{SBA} = \varphi.$

Trong tam giác SAB vuông tạiA, $\tan\varphi = \dfrac{SA}{AB} \Leftrightarrow \sqrt{6} = \dfrac{a\sqrt{6}}{AB} \Leftrightarrow AB = a.$

Gọi I là trung điểmCD, trọng tâm G của tam giác SCD,Gthuộc SI.

Có $V_{S.OCI} = \dfrac{1}{3}SA.S_{\Delta OIC} = \dfrac{1}{3} \cdot SA \cdot \dfrac{1}{2} \cdot IO \cdot IC = \dfrac{1}{6} \cdot a \cdot \dfrac{a}{2} \cdot \dfrac{a}{2} = \dfrac{a^3}{24}.$

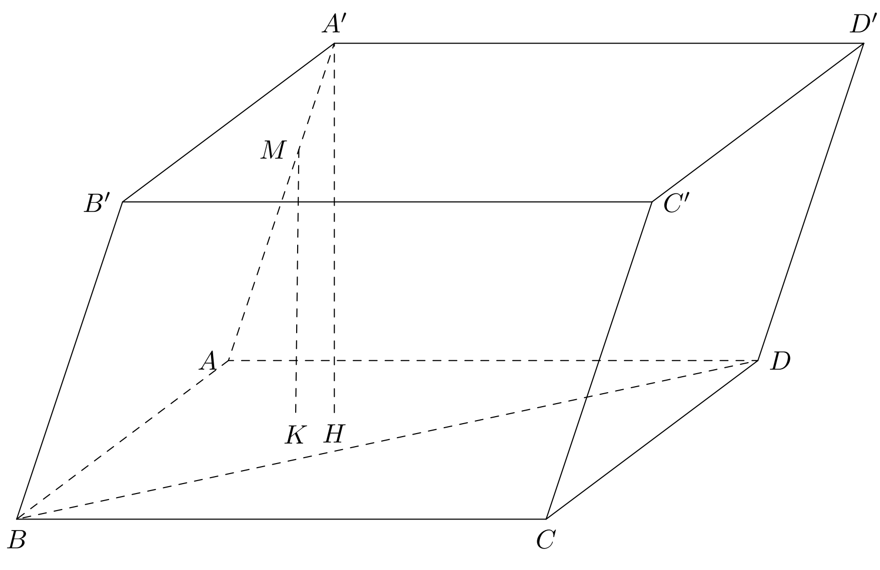
Khi đó: $\dfrac{V_{SOGC}}{V_{SOIC}} = \dfrac{SG}{SI} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow V_{SOGC} = \dfrac{2}{3}V_{SOIC} = \dfrac{2}{3}\dfrac{a^3\sqrt{6}}{24} = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{36}.$

Chọn đáp án A □

Câu 61. Cho khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có thể tích V. Lấy điểm M thuộc cạnh AA' sao cho $MA = 2MA'$. Thể tích của khối chóp $M.ABC$ bằng

Ⓐ $\dfrac{V}{3}$. Ⓑ $\dfrac{V}{9}$. Ⓒ $\dfrac{V}{18}$. Ⓓ $\dfrac{V}{6}$.

Lời giải.



Thể tích hình hộp là $V = B \cdot h$.

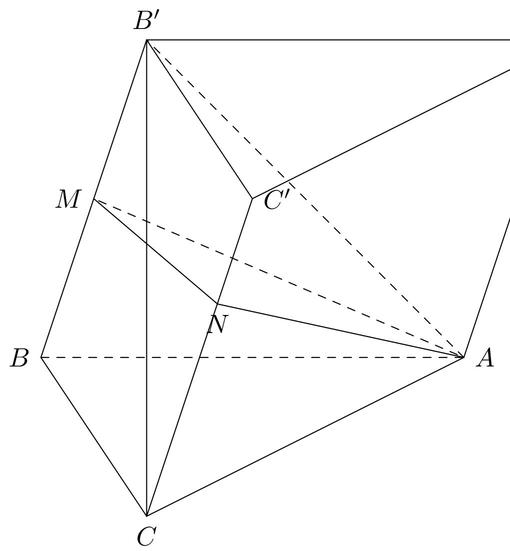
Gọi diện tích tam giác ABC là B', ta có: $B' = \frac{1}{2}B$.
Gọi $A'H$ là đường cao hạ từ A' xuống mặt phẳng đáy: $A'H \perp (ABCD)$ tại H, đặt $h = A'H$.
Dựng $MK \perp (ABCD)$ tại K, ta có $MK//A'H$ và có tỉ số $\frac{MK}{A'H} = \frac{MA}{A'A} = \frac{2}{3}(gt) \Rightarrow h' = \frac{2}{3}h$.
Gọi V là thể tích hình chóp $M.ABC$, ta có: $V' = \frac{1}{3} \cdot B' \cdot h' = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot B \cdot \frac{2}{3} \cdot h' = \frac{1}{9} \cdot B \cdot h = \frac{V}{9}$.
Chọn đáp án B □

Câu 62. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có thể tích là V. Gọi M là trung điểm BB', điểm N thuộc cạnh CC' sao cho $CN = 2C'N$. Tính thể tích khối chóp $A.BCMN$ theo V.

A $V_{A.BCMN} = \frac{7V}{12}$. B $V_{A.BCMN} = \frac{7V}{18}$. C $V_{A.BCMN} = \frac{V}{3}$. D $V_{A.BCMN} = \frac{5V}{18}$.

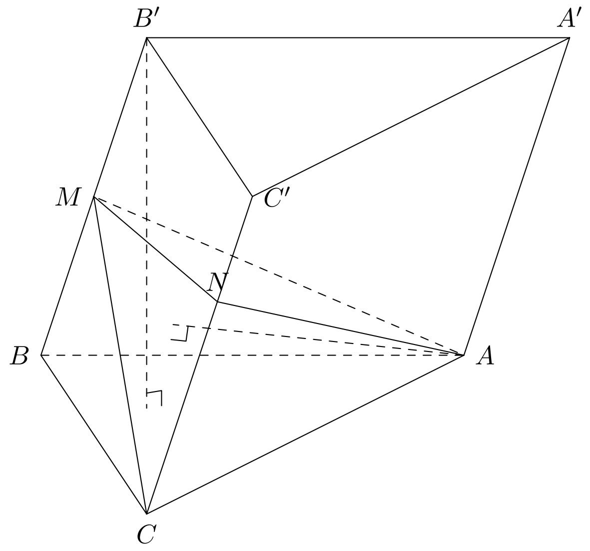
Lời giải.

☑ Cách 1:



Ta có $V_{B'BAC} = \frac{1}{3} \cdot d(B', (ABC)) \cdot S_{\Delta ABC} = \frac{1}{3}V$.
Theo công thức tỷ số thể tích:
$\frac{V_{B.MAC}}{V_{B.B'AC}} = \frac{BM}{BB'} = \frac{1}{2} \Rightarrow V_{B.MAC} = \frac{1}{2} \cdot V_{B.B'AC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}V = \frac{V}{6}$.
Ta có $BB' = 2BM = \frac{3}{2}NC \Rightarrow BM = \frac{3}{4}NC$.
$\Rightarrow \frac{S_{\Delta BMC}}{S_{\Delta NMC}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot BM \cdot d(C, BB')}{\frac{1}{2} \cdot NC \cdot d(M, CC')} = \frac{3}{4}$.
$\Rightarrow \frac{S_{BCNM}}{S_{\Delta BMC}} = 1 + \frac{4}{3} = \frac{7}{3} \Rightarrow \frac{V_{A.BCNM}}{V_{A.BMC}} = \frac{7}{3}$.
Vậy: $V_{A.BCNM} = \frac{7}{3} \cdot V_{A.BMC} = \frac{7}{3} \cdot \frac{V}{6} = \frac{7V}{18}$.

☑ Cách 2:



Gọi h, k lần lượt là độ dài đường cao của hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ và hình chóp $A.BCMN$, S là diện tích tam giác ABC .

$\Rightarrow$ Độ dài đường cao của hình chóp $M.ABC$ là: $\dfrac{h}{2}$

$V_{MABC} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{h}{2} \cdot S = \dfrac{Sh}{6}$ (1).

Mặt khác:

$V_{MABC} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{h}{2} \cdot S = \dfrac{1}{3} \cdot k \cdot S_{\Delta BCM} \Rightarrow k \cdot S_{\Delta BCM} = \dfrac{hS}{2}$

Ta có

$S_{\Delta MNC} = \dfrac{4}{3} S_{\Delta BCM}$ (vì 2 tam giác MNC và BCM có cùng chiều cao và $CN = \dfrac{4}{3} BM$).

$V_{AMNC} = \dfrac{1}{3} \cdot k \cdot S_{\Delta MNC} = \dfrac{1}{3} \cdot k \cdot \dfrac{4}{3} \cdot S_{\Delta BCM} = \dfrac{4}{9} \cdot k \cdot S_{\Delta BCM} = \dfrac{4}{9} \cdot \dfrac{hS}{2} = \dfrac{2hS}{9}$ (2).

Từ (1) và (2) ta có

$V_{A.BCMN} = V_{MABC} + V_{AMNC} = \dfrac{hS}{6} + \dfrac{2hS}{9} = \dfrac{7hS}{18} = \dfrac{7V}{18}$.

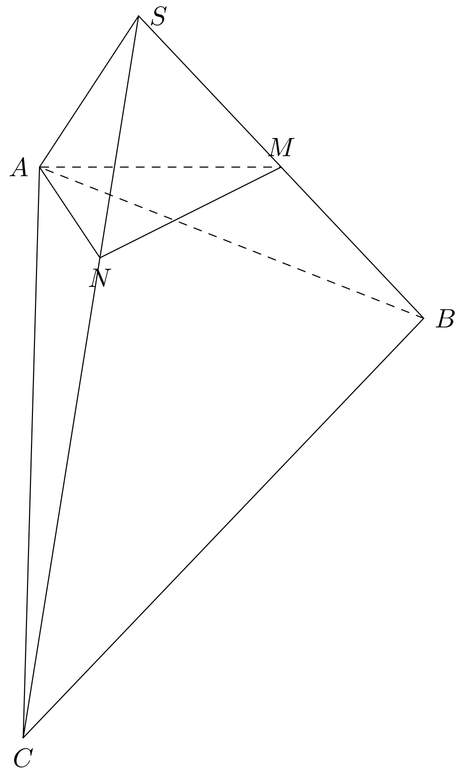
Chọn đáp án B □

Câu 63 (Chuyên Quang Trung-2018).

Cho khối chóp $S.ABC$ có $\widehat{ASB} = \widehat{BSC} = \widehat{CSA} = 60^\circ$, $SA = a$, $SB = 2a$, $SC = 4a$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$ theo a.

A $\dfrac{8a^3\sqrt{2}}{3}$. B $\dfrac{2a^3\sqrt{2}}{3}$. C $\dfrac{4a^3\sqrt{2}}{3}$. D $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải.



Lấy $M \in SB$, $N \in SC$ thoả mãn: $SM = SN = SA = a \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{SM}{SB} = \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{SN}{SC} = \dfrac{1}{4}. \end{cases}$

Theo giả thiết: $\widehat{ASB} = \widehat{BSC} = \widehat{CSA} = 60^0 \Rightarrow S.AMN$ là khối tứ diện đều cạnh a.

Do đó: $V_{S.AMN} = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{12}$.

Mặt khác: $\dfrac{V_{S.AMN}}{V_{S.ABC}} = \dfrac{SM}{SB} \cdot \dfrac{SN}{SC} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{8} \Rightarrow V_{S.ABC} = 8V_{S.AMN} = \dfrac{2a^3\sqrt{2}}{3}$.

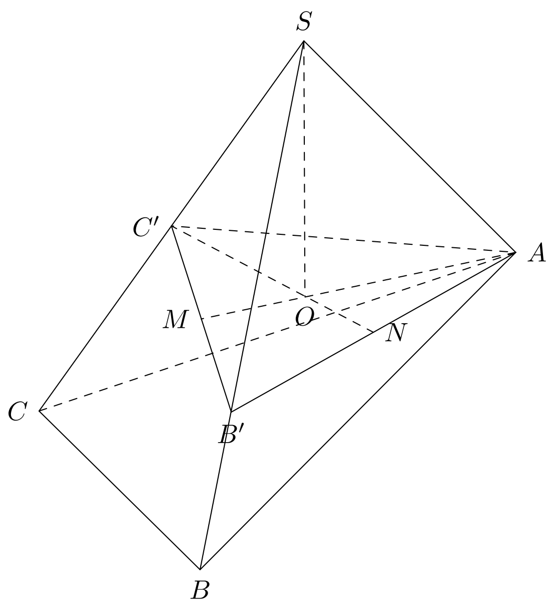
Chọn đáp án B □

Câu 64 (Chuyên Lê Hồng Phong 2018).

Cho khối chóp $S.ABC$ có góc $\widehat{ASB} = \widehat{BSC} = \widehat{CSA} = 60°$ và $SA = 2$, $SB = 3$, $SC = 4$. Thể tích khối chóp $S.ABC$.

A $2\sqrt{2}$. B $2\sqrt{3}$. C $4\sqrt{3}$. D $3\sqrt{2}$.

Lời giải.



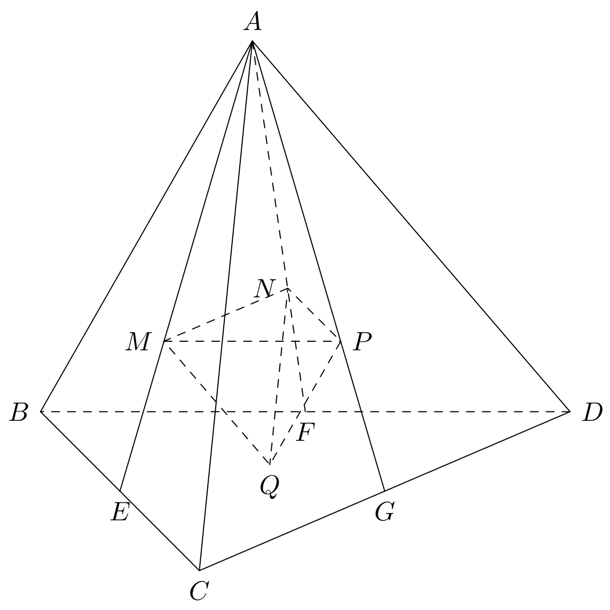
Gọi B' trên SB sao cho $SB' = \dfrac{2}{3}SB$ và C' trên SC sao cho $SC' = \dfrac{1}{2}SC$.
Khi đó $SA = SB' = SC' = 2 \Rightarrow S.AB'C'$ là khối tứ diện đều.
Ta có $AM = \dfrac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \Rightarrow AO = \dfrac{2}{3}AM = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$
Nên $SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \dfrac{2\sqrt{6}}{3}$ và $S_{AB'C'} = \sqrt{3}$.
Khi đó $V_{S.AB'C'} = \dfrac{1}{3}S_{AB'C'} \cdot SO = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.
Mà ta lại có: $\dfrac{V_{S.ABC}}{V_{S.AB'C'}} = \dfrac{SA}{SA} \cdot \dfrac{SB}{SB'} \cdot \dfrac{SC}{SC'} = 3 \Rightarrow V_{S.ABC} = 3V_{S.AB'C'} = 2\sqrt{2}$.
Cách khác:
$V_{S.ABC} = \dfrac{SA \cdot SB \cdot SC}{6} \cdot \sqrt{1 - \cos^2 \widehat{ASB} - \cos^2 \widehat{BSC} - \cos^2 \widehat{CSB} + 2\cos \widehat{ASB} \cos \widehat{BSC} \cos \widehat{CSB}} = 2\sqrt{2}$

Chọn đáp án A □

Câu 65 (Chuyên Bắc Ninh-2018). Cho khối tứ diện $ABCD$ có thể tích 2017. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trọng tâm của các tam giác ABC, ABD, ACD, BCD. Tính theo V thể tích của khối tứ diện $MNPQ$.

A $\dfrac{2017}{9}$. B $\dfrac{4034}{81}$. C $\dfrac{8068}{27}$. D $\dfrac{2017}{27}$.

Lời giải.



$\dfrac{V_{AEFG}}{V_{ABCD}} = \dfrac{S_{EFG}}{S_{BCD}} = \dfrac{1}{4} \Rightarrow V_{AEFG} = \dfrac{1}{4}V_{ABCD}$.
(Do E,F,G lần lượt là trung điểm của BC, BD, CD).
$\dfrac{V_{AMNP}}{V_{AEFG}} = \dfrac{SM}{SE} \cdot \dfrac{SN}{SE} \cdot \dfrac{SP}{SG} = \dfrac{8}{27} \Rightarrow V_{AMNP} = \dfrac{8}{27}V_{AEFG} = \dfrac{8}{27} \cdot \dfrac{1}{4}V_{ABCD} = \dfrac{2}{27}V_{ABCD}$.
Do mặt phẳng $(MNP) // (BCD)$ nên $\dfrac{V_{QMNP}}{V_{AMNP}} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow V_{QMNP} = \dfrac{1}{2}V_{AMNP}$.
$V_{QMNP} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{2}{27}V_{ABCD} = \dfrac{1}{27}V_{ABCD} = \dfrac{2017}{27}$.
Chọn đáp án D □

Câu 66 (Chuyên Hùng Vương-Phú Thọ-2018).

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, $SA = a$ và SA vuông góc với đáy. Gọi M là trung điểm SB, N là điểm thuộc cạnh SD sao cho $SN = 2ND$. Tính thể tích V của khối tứ diện $ACMN$.

A $V = \dfrac{1}{12}a^3$. B $V = \dfrac{1}{6}a^3$. C $V = \dfrac{1}{8}a^3$. D $V = \dfrac{1}{36}a^3$.

Lời giải.

☑ Cách 1.

Ta có $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}SA \cdot S_{ABCD} = \dfrac{a^3}{3}$.

$V_{NDAC} = \dfrac{1}{3} \cdot NH \cdot S_{\Delta DAC} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{3}a \cdot \left(\dfrac{1}{2}a^2\right) = \dfrac{a^3}{18}$.

$V_{MABC} = \dfrac{1}{3} \cdot MK \cdot S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{a}{2} \cdot \left(\dfrac{1}{2}a^2\right) = \dfrac{a^3}{12}$.

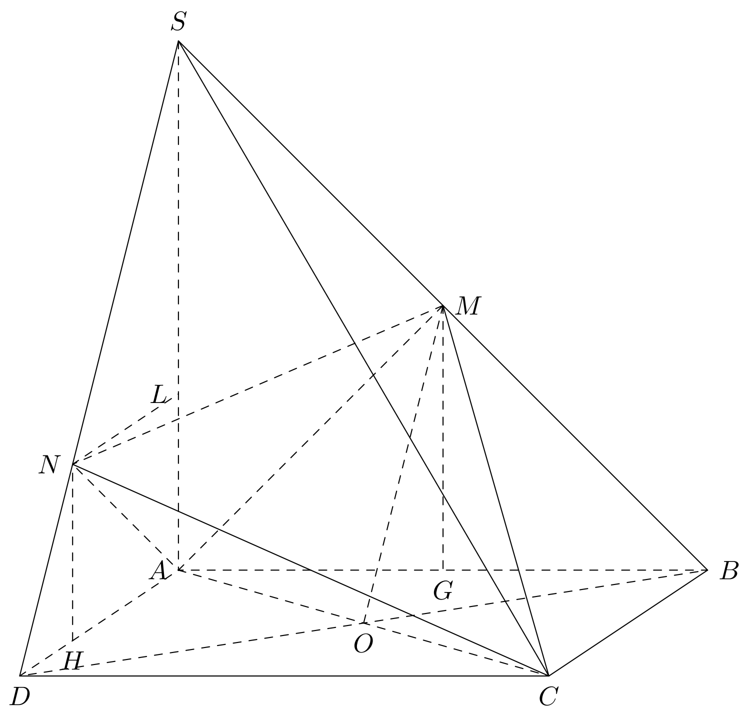
$\dfrac{1}{3}d\,(A, (SMN)) \cdot S_{\Delta SMN} = \dfrac{a^3}{18}$.

Suy ra $V_{NSAM} = \dfrac{1}{3} \cdot NL \cdot S_{\Delta SAM} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{2}{3}a \cdot \left(\dfrac{1}{2}a \cdot \dfrac{a}{2}\right) = \dfrac{a^3}{18}$.

Mặt khác $V_{C.SMN} = \dfrac{1}{3}d\,(C, (SMN)) \cdot S_{\Delta SMN} = \dfrac{1}{3}d\,(A, (SMN)) \cdot S_{\Delta SMN} = \dfrac{a^3}{18}$.

Vậy

$$\begin{aligned} V_{ACMN} &= V_{S.ABCD} - V_{NSAM} - V_{NADC} - V_{MABC} - V_{SCMN} \\ &= \dfrac{a^3}{3} - \dfrac{a^3}{18} - \dfrac{a^3}{18} - \dfrac{a^3}{12} - \dfrac{a^3}{18} = \dfrac{1}{12}a^3. \end{aligned}$$



☑ Cách 2.

Gọi O là giao điểm của AC và BD.

Ta có $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot SA \cdot S_{ABCD} = \frac{a^3}{3}$.

Vì $OM // SD$ nên $SD // (AMC)$.

Do đó $d(N, (AMC)) = d(D, (AMC)) = d(B, (AMC))$.

$\Rightarrow V_{ACMN} = V_{N.MAC} = V_{D.MAC} = V_{B.MAC} = V_{M.BAC} = \frac{1}{4} V_{S.ABCD} = \frac{a^3}{12}$.

(do $d(M, (ABC)) = \frac{1}{2} d(S, (ABC))$ và $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} S_{ABCD}$.)

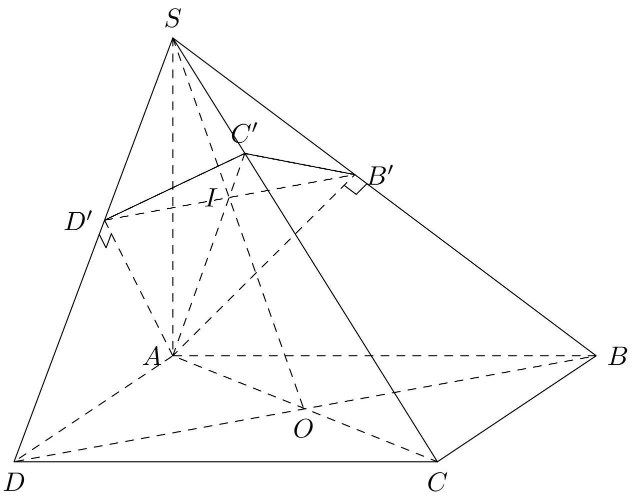
Chọn đáp án (A) □

Câu 67 (Chuyên Quốc Học Huế-2018).

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a. Cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy và $SA = 2a$. Gọi B', D' lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên các cạnh SB, SD. Mặt phẳng $(AB'D')$ cắt cạnh SC tại C'. Tính thể tích của khối chóp $S.AB'C'D'$.

(A) $\frac{a^3}{3}$. (B) $\frac{16a^3}{45}$. (C) $\frac{a^3}{2}$. (D) $\frac{\sqrt{2}a^3}{4}$.

Lời giải.



Ta có $V_{S.AB'C'D'} = 2V_{S.AB'C'}(1)$ mà $\dfrac{V_{SAB'C'}}{V_{SABC}} = \dfrac{SB'}{SB} \cdot \dfrac{SC'}{SC}(*)$

ΔSAC vuông tại A nên $SC^2 = SA^2 + AC^2 = (2a)^2 + \left(a\sqrt{2}\right)^2 = 6a^2$ suy ra $SC = a\sqrt{6}$.

Ta có $BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AB'$ và $SB \perp AB'$ suy ra $AB' \perp (SBC)$ nên $AB' \perp BC$

Tương tự $AD' \perp SC$.

Từ đó suy ra $SC \perp (AB'D') \equiv (AB'C'D')$ nên $SC \perp AC'$

Mà $SC' \cdot SC = SA^2$ suy ra $\dfrac{SC'}{SC} = \dfrac{SA^2}{SC^2} = \dfrac{4a^2}{6a^2} = \dfrac{2}{3}$.

Ta cũng có

$\dfrac{SB'}{SB} = \dfrac{SA^2}{SB^2} = \dfrac{SA^2}{SA^2 + AB^2} = \dfrac{4a^2}{4a^2 + a^2} = \dfrac{4}{5}$

Từ $(*) \Rightarrow \dfrac{V_{SAB'C'}}{V_{SABC}} = \dfrac{8}{15}$ suy ra $V_{SAB'C'} = \dfrac{8}{15}V_{SABC} = \dfrac{8}{15} \cdot \dfrac{1}{2}V_{SABCD} = \dfrac{8}{30}V_{SABCD}$.

Mà $V_{SABCD} = \dfrac{1}{3}S_{ABCD} \cdot SA = \dfrac{2a^3}{3}$.

Suy ra $V_{SAB'C'} = \dfrac{8}{30} \cdot \dfrac{2a^3}{3} = \dfrac{8a^3}{45}$.

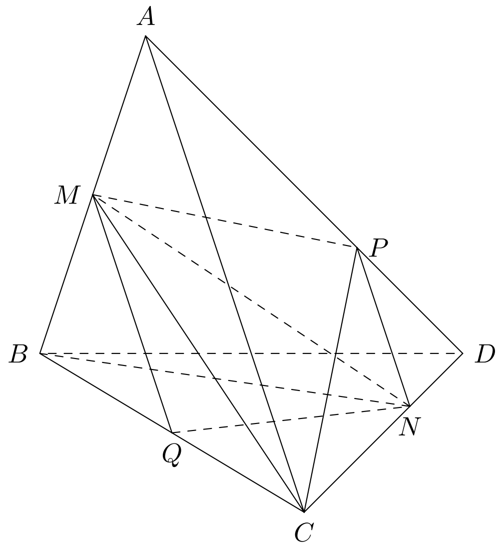
Từ (1) suy ra $V_{S.AB'C'D'} = 2V_{S.AB'C'} = \dfrac{16a^3}{45}$.

Chọn đáp án B □

Câu 68 (Kim Liên-Hà Nội-2018). Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng 1. Trên các cạnh AB và CD lần lượt lấy các điểm M và N sao cho $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$ và $\overrightarrow{NC} = -2\overrightarrow{ND}$. Mặt phẳng (P) chứa MN và song song với AC chia khối tứ diện $ABCD$ thành hai khối đa diện, trong đó khối đa diện chứa đỉnh A có thể tích là V. Tính V.

Ⓐ $V = \dfrac{\sqrt{2}}{18}$. Ⓑ $V = \dfrac{11\sqrt{2}}{216}$. Ⓒ $V = \dfrac{7\sqrt{2}}{216}$. Ⓓ $V = \dfrac{\sqrt{2}}{108}$.

Lời giải.



Từ N kẻ $NP//AC$, $N \in AD$.

Qua M kẻ $MQ//AC$, $Q \in BC$. Mặt phẳng (P) là $MPNQ$.

Ta có $V_{ABCD} = \dfrac{1}{3} \cdot AH \cdot S_{ABCD} = \dfrac{\sqrt{2}}{12}$.

$V = V_{ACMPNQ} = V_{AMPC} + V_{MQNC} + V_{MPNC}$.

Ta có $V_{AMPC} = \dfrac{AM}{AB} \cdot \dfrac{AP}{AD} \cdot V_{ABCD} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{2}{3} V_{ABCD} = \dfrac{1}{3} V_{ABCD}$.

$V_{MQNC} = \dfrac{1}{2} V_{AQNC} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{CQ}{CB} \cdot \dfrac{CN}{CD} \cdot V_{ABCD} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{2}{3} V_{ABCD} = \dfrac{1}{2} V_{ABCD}$.

$V_{MPNC} = \dfrac{2}{3} V_{MPCD} = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{1}{3} V_{MACD} = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{AM}{AB} \cdot V_{ABCD} = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{2} V_{ABCD} = \dfrac{1}{9} V_{ABCD}$.

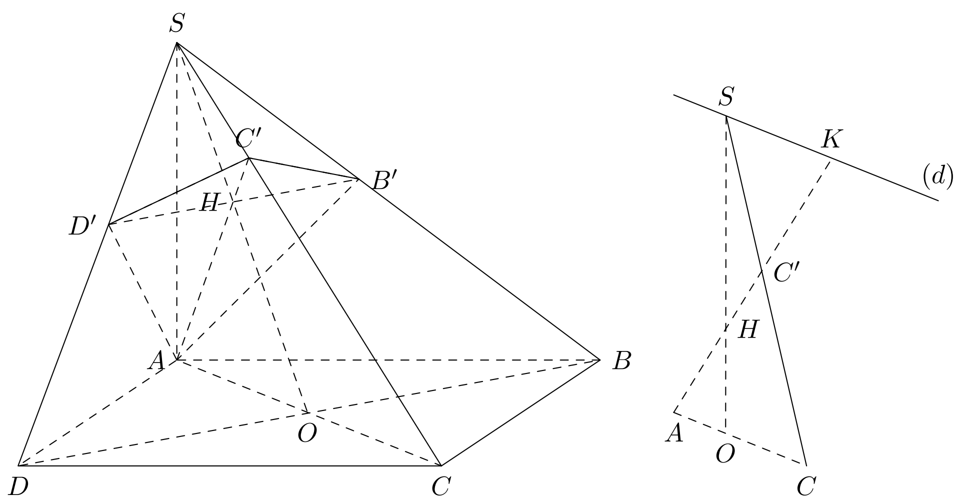
Vậy $V = \left(\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{9}\right) V_{ABCD} \Rightarrow V = \dfrac{11}{18} V_{ABCD} = \dfrac{11\sqrt{2}}{216}$.

Chọn đáp án B □

Câu 69 (Chuyên Vĩnh Phúc-2018). Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ đáy là hình bình hành có thể tích bằng V. Lấy điểm B', D' lần lượt là trung điểm của cạnh SB và SD. Mặt phẳng qua $(AB'D')$ cắt cạnh SC tại C'. Khi đó thể tích khối chóp $S.AB'C'D'$ bằng

A $\dfrac{V}{3}$. B $\dfrac{2V}{3}$. C $\dfrac{V^3}{3}$. D $\dfrac{V}{6}$.

Lời giải.



Gọi O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD thì $SO \cap B'D' = H$.

Khi đó H là trung điểm của SO và $C' = AH \cap SO$.

Trong mặt phẳng (SAC):

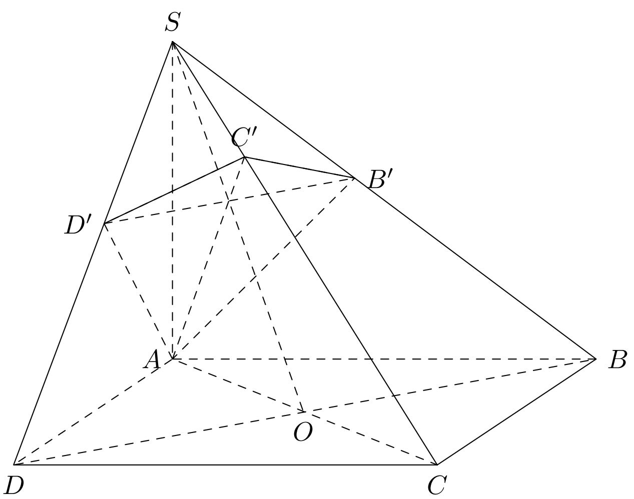
Ta kẻ $(d)//AC$ và AC' cắt (d) tại K. Khi đó áp dụng tính đồng dạng của các tam giác ta có
$\dfrac{OH}{SH} = \dfrac{OA}{SK} = 1 \Rightarrow SK = OA \Rightarrow \dfrac{SK}{AC} = \dfrac{1}{2}$;
$\dfrac{SK}{AC} = \dfrac{SC'}{CC'} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \dfrac{SC'}{SC} = \dfrac{1}{3}$.
Vì $V_{S.ABD} = V_{S.BCD} = \dfrac{1}{2} \cdot V_{S.ABCD} = \dfrac{V}{2}$.
Nên ta có $\dfrac{V_{S.AB'D'}}{V_{S.ABD}} = \dfrac{SA}{SA} \cdot \dfrac{SB'}{SB} \cdot \dfrac{SD'}{SD} = \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow V_{S.AB'D'} = \dfrac{1}{8}V$
và $\dfrac{V_{S.B'C'D'}}{V_{S.BCD}} = \dfrac{SB'}{SB} \cdot \dfrac{SC'}{SC} \cdot \dfrac{SD'}{SD} = \dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{SC'}{SC} \Leftrightarrow V_{S.B'C'D'} = \dfrac{SC'}{SC} \cdot \dfrac{V}{8}$.
Suy ra $V_{S.AB'C'D'} = V_{S.AB'D'} + V_{S.B'C'D'} = \dfrac{1}{8}V + \dfrac{SC'}{SC} \cdot \dfrac{V}{8} = \dfrac{V}{8}\left(1 + \dfrac{SC'}{SC}\right) = \dfrac{V}{6}$.

Chọn đáp án D □

Câu 70 (Toán Học Tuổi Trẻ-2018). Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với đáy, $SA = a\sqrt{2}$. Một mặt phẳng đi qua A vuông góc với SC cắt SB, SD, SC lần lượt tại B', D', C'. Thể tích khối chóp $SAB'C'D'$ là

A $V = \dfrac{2a^3\sqrt{3}}{9}$. B $V = \dfrac{2a^3\sqrt{2}}{3}$. C $V = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{9}$. D $V = \dfrac{2a^3\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải.



Ta có $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3} \cdot a^2 \cdot a\sqrt{2} = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}$.
Ta có $AD' \perp (SDC) \Rightarrow AD' \perp SD$; $AB' \perp (SBC) \Rightarrow AB' \perp SB$.

Do $SC \perp (AB'D') \Rightarrow SC \perp AC'$.

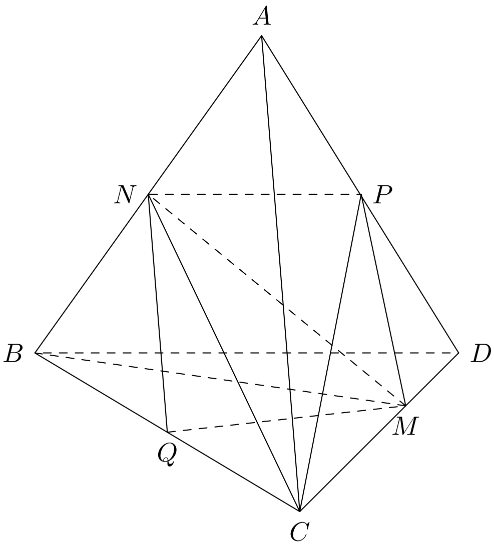
Tam giác SAC vuông cân tại A nên C' là trung điểm của SC.

Trong tam giác vuông SAB' ta có $\dfrac{SB'}{SB} = \dfrac{SA^2}{SB^2} = \dfrac{2a^2}{3a^2} = \dfrac{2}{3}$.
$\dfrac{V_{SAB'C'D'}}{V_{S.ABCD}} = \dfrac{V_{SAB'C'} + V_{SAC'D'}}{V_{S.ABCD}} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{SB'}{SB}\dfrac{SC'}{SC} + \dfrac{SD'}{SD}\dfrac{SC'}{SC}\right) = \dfrac{SB'}{SB}\dfrac{SC'}{SC} = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{3}$.
Vậy $V_{SAB'C'D'} = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{9}$.
Chọn đáp án C □

Câu 71 (Chuyên Thái Bình-2018). Cho khối tứ diện đều $ABCD$ có thể tích là V. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AC, AD, BD, BC. Thể tích khối chóp $AMNPQ$ là

Ⓐ $\dfrac{V}{6}$. Ⓑ $\dfrac{V}{3}$. Ⓒ $\dfrac{V}{4}$. Ⓓ $\dfrac{V\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải.



Ta có $V_{AMNPQ} = 2V_{APMQ}$ (do $MNPQ$ là hình thoi), $AB \mathbin{//} MQ \Rightarrow V_{APMQ} = V_{BPMQ}$.

Mặt khác do P là trung điểm của BD nên

$d\left(P, (ABC)\right) = \dfrac{1}{2} d\left(D, (ABC)\right)$, đồng thời $S_{BQM} = \dfrac{1}{4} S_{ABC}$

$\Rightarrow V_{BPMQ} = \dfrac{1}{3} d\left(P, (ABC)\right) \cdot S_{BQM} = \dfrac{1}{6} d\left(D, (ABC)\right) \cdot \dfrac{1}{4} S_{ABC}$.

$= \dfrac{1}{8} \cdot \dfrac{1}{3} d\left(D, (ABC)\right) \cdot S_{ABC} = \dfrac{V}{8} \Rightarrow V_{AMNPQ} = \dfrac{V}{4}$.

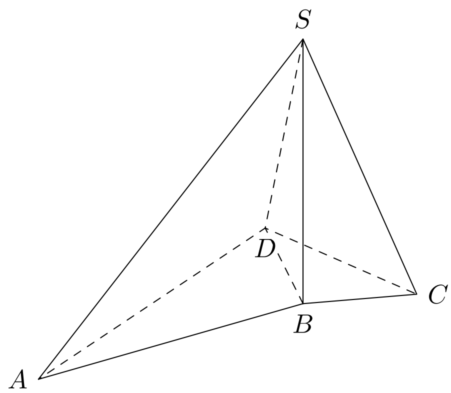
Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 72 (Phan Đình Phùng-Hà Tĩnh-2018).

Cho hình đa diện như hình vẽ. Biết $SA = 6$, $SB = 3$, $SC = 4$, $SD = 2$ và $\widehat{ASB} = \widehat{BSC} = \widehat{CSD} = \widehat{DSA} = \widehat{BSD} = 60^\circ$.

Thể tích khối đa diện $S.ABCD$ là

Ⓐ $6\sqrt{2}$. Ⓑ $5\sqrt{2}$. Ⓒ $30\sqrt{2}$. Ⓓ $10\sqrt{2}$.



Lời giải.

Trên SA, SB, SC lần lượt lấy các điểm A', B', C' sao cho $SA' = SB' = SC' = SD = 2$.

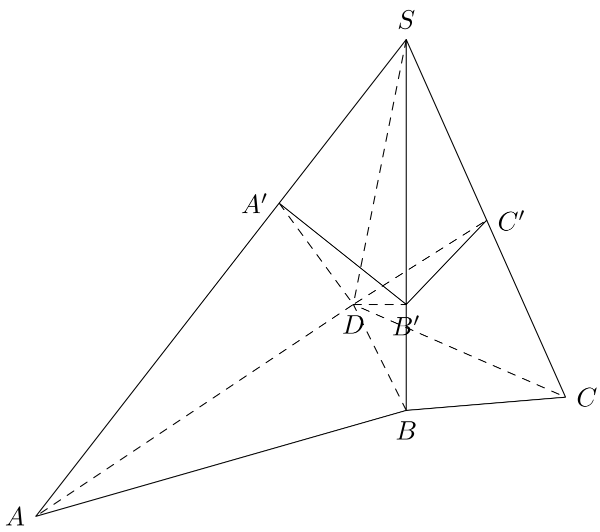
Ta có $A'B' = B'C' = C'D = DA' = 2$.

Khi đó hình chóp $S.A'B'D$ và hình chóp $S.CB'D$ là các hình chóp tam giác đều có tất cả các cạnh bằng 2.

$V_{S.A'B'D} = V_{S.C'B'D} = \dfrac{2^3\sqrt{2}}{12} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

Mặt khác
$\dfrac{V_{S.ABD}}{V_{S.A'B'D}} = \dfrac{SA}{SA'} \cdot \dfrac{SB}{SB'} \cdot \dfrac{SD}{SD} = 3 \cdot \dfrac{3}{2} = \dfrac{9}{2}$, nên $V_{S.ABD} = \dfrac{9}{2} V_{S.A'B'D} = \dfrac{9}{2} \cdot \dfrac{2\sqrt{2}}{3} = 3\sqrt{2}$.
$\dfrac{V_{S.CBD}}{V_{S.C'B'D}} = \dfrac{SC}{SC'} \cdot \dfrac{SB}{SB'} \cdot \dfrac{SD}{SD} = 2 \cdot \dfrac{3}{2} = 3$, nên $V_{S.CBD} = 3V_{S.C'B'D} = 3 \cdot \dfrac{2\sqrt{2}}{3} = 2\sqrt{2}$.
Thể tích khối đa diện $S.ABCD$ là

$V = V_{S.ABD} + V_{S.CBD} = 3\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$.



Chọn đáp án B □

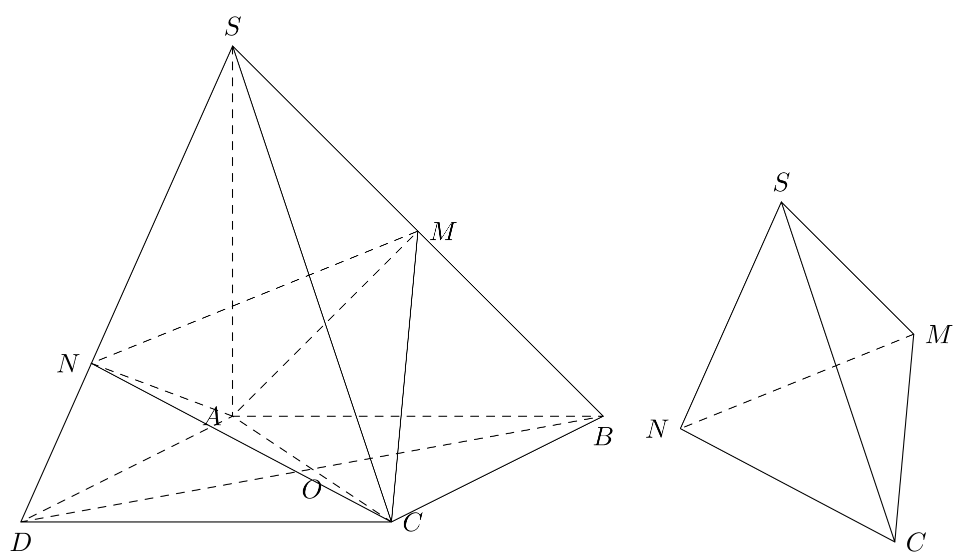
Câu 73 (THPT Thạch Thanh 2-Thanh Hóa 2018).

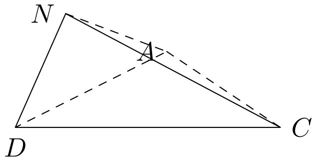
Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, $SA = a$ và SA vuông góc với đáy. Gọi M là trung điểm SB, N thuộc cạnh SD sao cho $SN = 2ND$. Tính thể tích V của khối tứ diện $ACMN$.

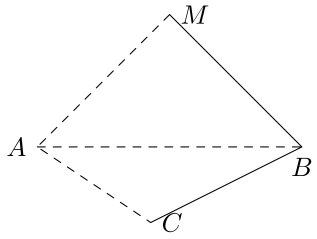
(A) $V = \dfrac{1}{8}a^3$. (B) $V = \dfrac{1}{6}a^3$. (C) $V = \dfrac{1}{36}a^3$. (D) $V = \dfrac{1}{12}a^3$.

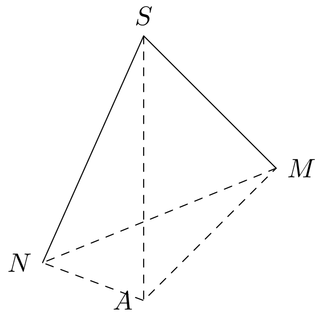
Lời giải.

Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là: $V = \dfrac{1}{3} \cdot a^3 = \dfrac{a^3}{3}$.









Thể tích tứ diện $SMNC$ là

$V_{SMNC} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} V_{S.BDC} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} V = \frac{1}{6} V$.

Thể tích tứ diện $NACD$ là

$V_{NADC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} V = \frac{1}{6} V$.

Thể tích tứ diện $MABC$ là

$V_{MABC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} V = \frac{1}{4} V$.

Thể tích tứ diện $SAMN$ là

$V_{SAMN} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} V_{S.BDC} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} V = \frac{1}{6} V$.

Mặt khác ta có

$V_{SMNC} + V_{NACD} + V_{MABC} + V_{SAMN} + V_{AMNC} = V_{S.ABCD}$

Suy ra

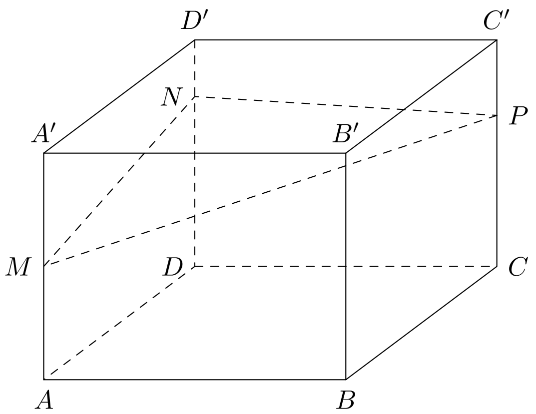
$V_{AMNC} = V - (V_{SMNC} + V_{NACD} + V_{MABC} + V_{SAMN})$

$= V - \left(\frac{1}{6} V + \frac{1}{6} V + \frac{1}{4} V + \frac{1}{6} V\right) = \frac{1}{4} V = \frac{a^3}{12}$.

Chọn đáp án D □

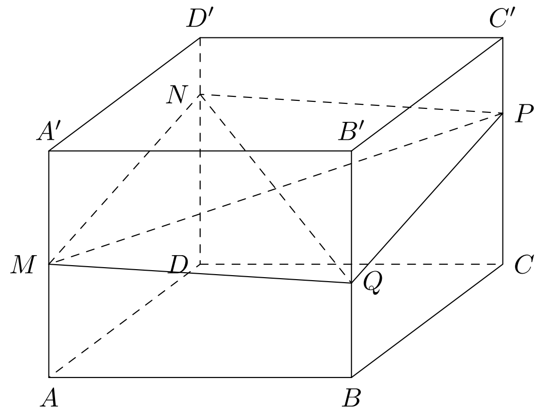
Câu 74 (THPT Thạch Thanh 2-Thanh Hóa-2018).

Cho khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có thể tích bằng 2110. Biết (MNP), $DN = 3ND'$, $CP = 2C'P$ như hình vẽ. Mặt phẳng (MNP) chia khối hộp đã cho thành hai khối đa diện. Thể tích khối đa diện nhỏ hơn bằng



Ⓐ $\frac{5275}{6}$. Ⓑ $\frac{8440}{9}$. Ⓒ $\frac{7385}{18}$. Ⓓ $\frac{5275}{12}$.

Lời giải.



Gọi Q là giao điểm của mặt phẳng (MNP) với BB'.

Giả sử $\dfrac{A'M}{AA'} = x$, $\dfrac{C'P}{CC'} = y$, $\dfrac{D'N}{DD'} = z$, $\dfrac{B'Q}{BB'} = t$. Khi đó $x + y = z + t$.

$\dfrac{V_{A'B'D'.MQN}}{V_{A'B'D'.ABD}} = \dfrac{x+z+t}{3} \Rightarrow \dfrac{V_{A'B'D'.MQN}}{V_{A'B'C'D'.ABCD}} = \dfrac{x+z+t}{6}$

$\dfrac{V_{C'B'D'.PQN}}{V_{C'B'D'.CBD}} = \dfrac{y+z+t}{3} \Rightarrow \dfrac{V_{C'B'D'.PQN}}{V_{A'B'C'D'.ABCD}} = \dfrac{y+z+t}{6}$

$\Rightarrow \dfrac{V_{MNPQ.AD'C'B'}}{V_{ABCD.A'D'C'B'}} = \dfrac{1}{2}(x+y)$.

$\dfrac{V_{MNPQ.A'D'C'B'}}{V_{ABCD.A'D'C'B'}} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{A'M}{AA'} + \dfrac{C'P}{CC'}\right) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{5}{12}$

$\Rightarrow V_{MNPQ.A'D'C'B'} = \dfrac{5}{12} \cdot V_{ABCD.A'D'C'B'} = \dfrac{5275}{6}$.

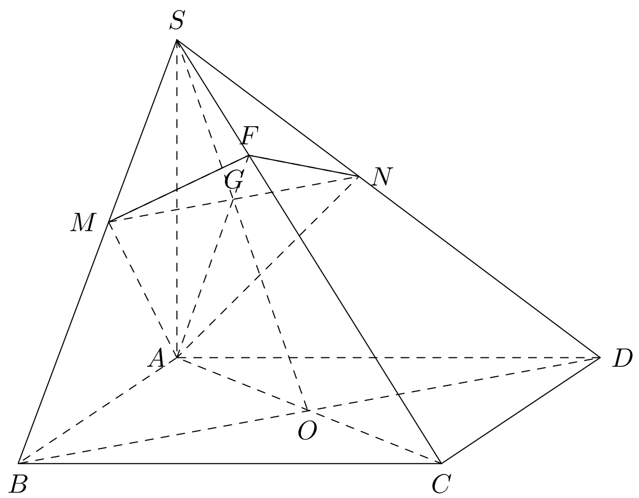
Chọn đáp án A □

Câu 75 (Chuyên Thăng Long-Đà Lạt-2018).

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành có thể tích bằng V. Gọi E là điểm trên cạnh SC sao cho $EC = 2ES$. Gọi (α) là mặt phẳng chứa AE và song song với BD, (α) cắt SB, SD lần lượt tại hai điểm M, N. Tính theo V thể tích của khối chóp $S.AMEN$.

A $\dfrac{3V}{8}$. B $\dfrac{V}{6}$. C $\dfrac{3V}{16}$. D $\dfrac{V}{9}$.

Lời giải.



Gọi G là giao điểm của AE và SO.

Áp dụng định lý Menelaus cho tam giác SOC ta có

$\dfrac{AC}{AO} \cdot \dfrac{GO}{GS} \cdot \dfrac{ES}{EC} = 1 \Rightarrow \dfrac{GO}{GS} = 1$.

$\Rightarrow \dfrac{SG}{SO} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \dfrac{SM}{SB} = \dfrac{SN}{SD} = \dfrac{1}{2}$.

Ta có

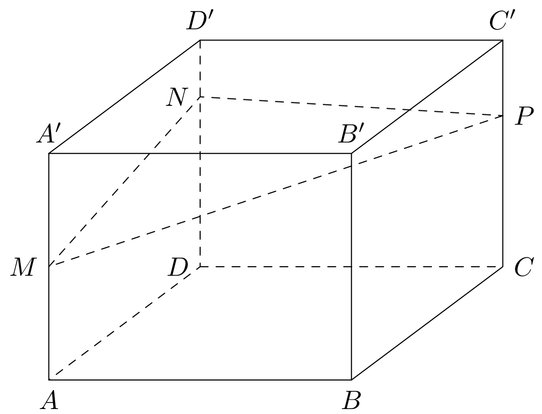
$\dfrac{V_{S.AMEN}}{V} = \dfrac{V_{S.AME}}{2V_{S.ABC}} + \dfrac{V_{S.AEN}}{2V_{S.ACD}} = \dfrac{1}{2} \cdot 1 \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{2} \cdot 1 \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{6}$.

Vậy $V_{S.AMEN} = \dfrac{1}{6}V$.

Chọn đáp án B □

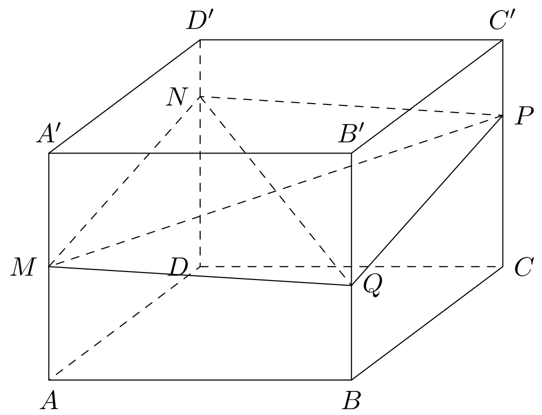
Câu 76 (Chuyên Hùng Vương-Phú Thọ-2018).

Cho khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có thể tích bằng 2110. Biết $A'M = MA$; $DN = 3ND'$; $CP = 2PC'$. Mặt phẳng (MNP) chia khối hộp đã cho thành hai khối đa diện. Thể tích khối đa diện nhỏ hơn bằng



A. $\dfrac{7385}{18}$. B. $\dfrac{5275}{12}$. C. $\dfrac{8440}{9}$. D. $\dfrac{5275}{6}$.

Lời giải.



Ta có

$\dfrac{V_{MNPQ.A'B'C'D'}}{V_{ABCD.A'B'C'D'}} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{A'M}{A'A} + \dfrac{C'P}{C'C}\right) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{5}{12}$.

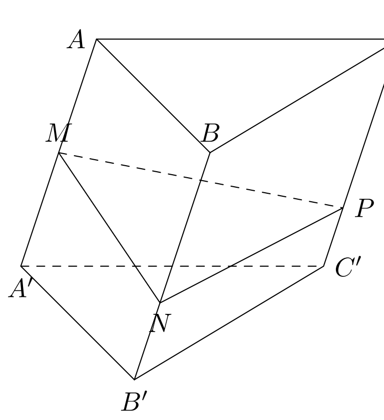
$V_{\text{nhỏ}} = V_{MNPQ.A'B'C'D'} = \dfrac{5}{12}V_{ABCD.A'B'C'D'} = \dfrac{5}{12} \cdot 2110 = \dfrac{5275}{6}$.

Chọn đáp án D □

Câu 77 (Chuyên Bắc Ninh-2018). Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có thể tích bằng 2018. Gọi M là trung điểm AA'; N, P lần lượt là các điểm nằm trên các cạnh BB', CC' sao cho $BN = 2B'N$, $CP = 3C'P$. Tính thể tích khối đa diện $ABC.MNP$.

Ⓐ $\dfrac{32288}{27}$. Ⓑ $\dfrac{40360}{27}$. Ⓒ $\dfrac{4036}{3}$. Ⓓ $\dfrac{23207}{18}$.

Lời giải.



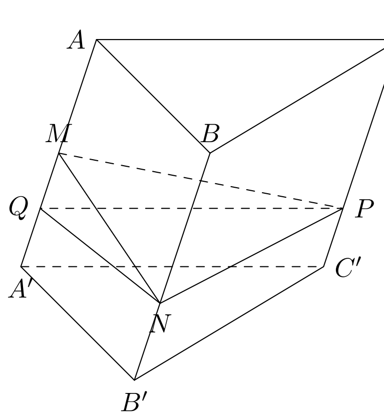
Ta có
$\dfrac{V_{ABC.MNP}}{V_{ABC.A'B'C'}} = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{AM}{AA'} + \dfrac{BN}{BB'} + \dfrac{CP}{CC'}\right) = \dfrac{23}{36}$.
Vậy $V_{ABC.MNP} = \dfrac{23207}{18}$.
Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 78 (Quảng Xương-Thanh Hóa-2018).

Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có thể tích bằng $6a^3$. Các điểm M, N, P lần lượt thuộc các cạnh AA', BB', CC' sao cho $\dfrac{AM}{AA'} = \dfrac{1}{2}$, $\dfrac{BN}{BB'} = \dfrac{CP}{CC'} = \dfrac{2}{3}$. Tính thể tích V' của đa diện $ABC.MNP$.

Ⓐ $V' = \dfrac{11}{27}a^3$. Ⓑ $V' = \dfrac{9}{16}a^3$. Ⓒ $V' = \dfrac{11}{3}a^3$. Ⓓ $V' = \dfrac{11}{18}a^3$.

Lời giải.



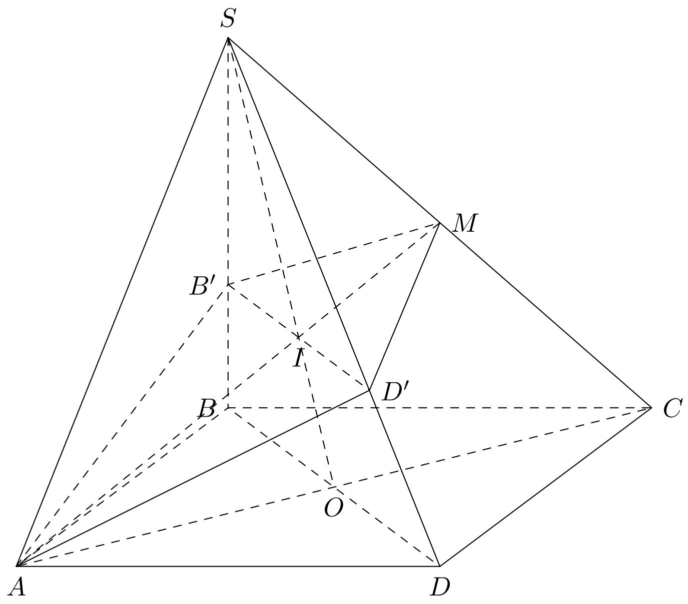
Lấy điểm $Q \in AA'$ sao cho $PQ//AC$.
Ta có $MQ = AQ - AM = \dfrac{1}{6}AA'$.
Dễ thấy $V_{ABC.MNP} = \dfrac{2}{3} \cdot V_{ABC.A'B'C'}$; $V_{M.QNP} = \dfrac{1}{12} \cdot V_{ABC.A'B'C'}$.
Vậy $V' = V_{ABC.MNP} - V_{M.QNP} = \dfrac{11}{18}V = \dfrac{11}{3}a^3$.
Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 79 (Chuyên Lê Quý Đôn-Điện Biên-2022).

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành và M là trung điểm cạnh bên SC. Gọi (P) là mặt phẳng chứa AM và song song với BD, mặt phẳng (P) cắt SB, SD lần lượt tại B' và D'. Tính tỉ số $\dfrac{V_{S.AB'MD'}}{V_{S.ABCD}}$.

Ⓐ $\dfrac{1}{6}$. Ⓑ $\dfrac{1}{3}$. Ⓒ $\dfrac{3}{4}$. Ⓓ $\dfrac{2}{3}$.

Lời giải.



Trong $(ABCD)$ gọi O là giao điểm của AC và BD.

Trong (SAC) gọi I là giao điểm của SO và AM.

Trong (SBD) từ I vẽ đường thẳng song song với BD cắt SB, SD lần lượt tại B', D' suy ra mặt phẳng (P) là mặt phẳng $(AB'MD')$.

Ta thấy I là giao điểm của hai đường trung tuyến AM và SO của tam giác $SAC \Rightarrow I$ là trọng tâm tam giác SAC, suy ra:

$\dfrac{SI}{SO} = \dfrac{SB'}{SB} = \dfrac{SD'}{SD} = \dfrac{2}{3}$ (định lý Ta-lét vì $B'D' // BD$)

Ta có

$\dfrac{V_{SAB'M}}{V_{SABC}} = \dfrac{SA \cdot SB' \cdot SM}{SA \cdot SB \cdot SC} = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow V_{SAB'M} = \dfrac{1}{3} V_{SABC}$.

$\dfrac{V_{SAD'M}}{V_{SADC}} = \dfrac{SA \cdot SD' \cdot SM}{SA \cdot SD \cdot SC} = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow V_{SAD'M} = \dfrac{1}{3} V_{SADC}$.

$\Rightarrow \dfrac{V_{SAB'MD'}}{V_{SABCD}} = \dfrac{V_{SAB'M} + V_{SAD'M}}{V_{SABCD}} = \dfrac{\frac{1}{3}\left(V_{SABC} + V_{SADC}\right)}{V_{SABCD}} = \dfrac{\frac{1}{3} V_{SABCD}}{V_{SABCD}} = \dfrac{1}{3}$.

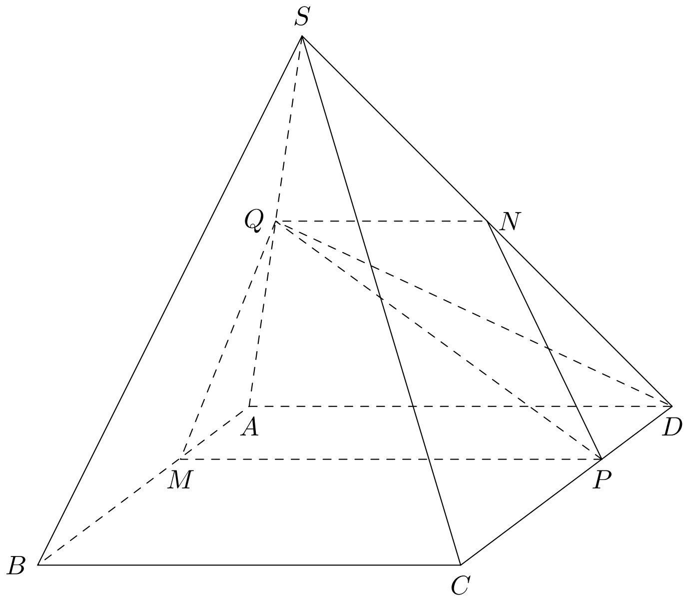
Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 80 (THPT Yên Phong 1-Bắc Ninh-2022).

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M là điểm di động trên cạnh AB và N là trung điểm SD. Mặt phẳng (α) đi qua M, N và song song BC chia khối chóp thành hai khối có tỉ lệ thể tích $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{3}{5}$, trong đó V_1 là thể tích khối đa diện chứa đỉnh A, V_2 là thể tích khối đa diện chứa đỉnh B. Tỉ số $\dfrac{AM}{AB}$ bằng

Ⓐ $\dfrac{1}{3}$. Ⓑ $\dfrac{1}{2}$. Ⓒ $\dfrac{3}{5}$. Ⓓ $\dfrac{3}{7}$.

Lời giải.



- Đặt $\dfrac{AM}{AB} = x$. Kẻ $MP // BC$; $NQ // AD$.
$\Rightarrow (\alpha)$ cắt hình chóp theo thiết diện là hình thang $MPNQ$.

- Đặt S là diện tích $ABCD$; h là chiều cao của $S.ABCD$.
$\Rightarrow$ Diện tích $AMPD$: $S_{AMPD} = x \cdot S$
$\Rightarrow d\left(Q;\,(AMPD)\right) = \dfrac{1}{2}h$.

- Thể tích $Q.AMPD$
$V_{Q.AMPD} = \dfrac{1}{3}d\left(Q;\,(AMPD)\right) \cdot S_{AMPD} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{2}h \cdot xS = \dfrac{1}{2}x \cdot \dfrac{hS}{3} = \dfrac{1}{2}x \cdot V$
(V là thể tích $S.ABCD$).

- Lại có $V_{S.ACD} = \dfrac{1}{2}V \Rightarrow d\left(A;\,(SCD)\right) = \dfrac{3V_{S.ACD}}{S_{\Delta SCD}} = \dfrac{\frac{3}{2}V}{S_{\Delta SCD}}$.
Vì Q là trung điểm SA nên $d\left(Q;\,(SCD)\right) = \dfrac{1}{2}d\left(A;\,(SCD)\right) = \dfrac{\frac{3}{4}V}{S_{\Delta SCD}}$.
Diện tích ΔDPN
$S_{\Delta DPN} = \dfrac{1}{2}DN \cdot DP \cdot \sin\widehat{NDP} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{2}DS \cdot xDC \cdot \sin\widehat{NDP} = \dfrac{x}{2} \cdot S_{\Delta SCD}$.

Thể tích $Q.PDN$

$$V_{Q.PDN} = \dfrac{1}{3}\mathrm{d}\left(Q;\,(SCD)\right) \cdot S_{\Delta DPN} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{\frac{3}{4}V}{S_{\Delta SCD}} \cdot \dfrac{x}{2} \cdot S_{\Delta SCD} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{3}{4}V \cdot \dfrac{x}{2} = \dfrac{xV}{8}.$$

$$\Rightarrow V_1 = V_{Q.ANPD} + V_{Q.PND} = \dfrac{xV}{2} + \dfrac{xV}{8} = \dfrac{5xV}{8}.$$

$V_2 = V - V_1 = V - \frac{5x}{8}V = \left(1 - \frac{5x}{8}\right)V.$

Theo giả thiết: $\frac{V_1}{V_2} = \frac{3}{5} \Leftrightarrow \frac{\frac{5x}{8}V}{\left(1-\frac{5x}{8}\right)V} = \frac{3}{5} \Leftrightarrow \frac{5x}{8} = \frac{3}{5}\left(1 - \frac{5x}{8}\right).$

$\Leftrightarrow \frac{8}{5} \cdot \frac{5x}{8} = \frac{3}{5} \Leftrightarrow x = \frac{3}{5}.$

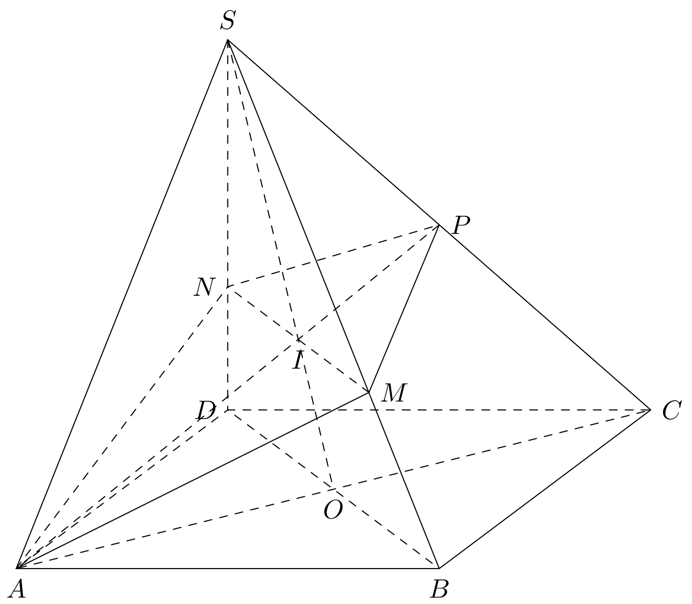
Vậy $\frac{AM}{AB} = \frac{3}{5}.$

Chọn đáp án C □

Câu 81 (Sở Hà Nam 2022). Cho hình chóp $S.ABCD$ có thể tích bằng 2 và đáy $ABCD$ là hình bình hành. Lấy các điểm M, N lần lượt thuộc các cạnh SB, SD thỏa mãn $\frac{SM}{SB} = \frac{SN}{SD} = k\,(0 < k < 1)$. Mặt phẳng (AMN) cắt cạnh SC tại P. Biết khối chóp $S.AMPN$ có thể tích bằng $\frac{1}{3}$, khi đó giá trị của k bằng.

(A) $\frac{1}{2}$. (B) $\frac{1}{3}$. (C) $\frac{2}{3}$. (D) $\frac{1}{4}$.

Lời giải.



Gọi $O = AC \cap BD$; $I = MN \cap SO$; $P = AI \cap SC$

- Ta có $\frac{V_{S.AMPN}}{V_{S.ABCD}} = \frac{1}{2}.\frac{SP}{SC}\left(\frac{SM}{SB} + \frac{SN}{SD}\right) \quad (*)$

- Mà $\frac{SC}{SP} + 1 = \frac{SB}{SM} + \frac{SD}{SN} \Rightarrow \frac{SP}{SC} = \frac{k}{2-k}$

- Do đó: $(*) \Leftrightarrow \frac{1}{6} = \frac{1}{2}.\frac{k}{2-k}.2k \Leftrightarrow 6k^2 + k - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k = \frac{1}{2}\,(TM) \\ k = \frac{-2}{3}\,(KTM). \end{array}\right.$

Vậy $k = \dfrac{1}{2}$.

Chọn đáp án (A) □

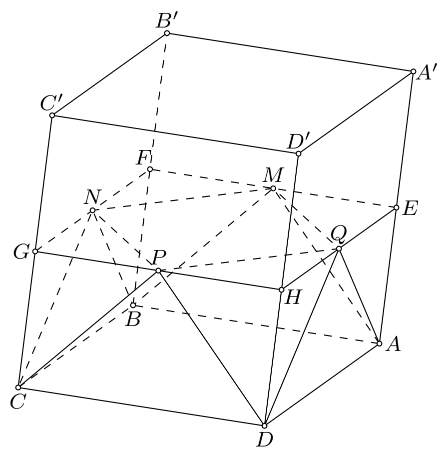
BẢNG ĐÁP ÁN

1. B	2. B	3. B	4. B	5. D	6. D	7. C	8. B	9. B	10. C
11. A	12. A	13. B	14. B	15. A	16. B	17. A	18. D	19. A	20. A
21. B	22. B	23. C	24. B	25. B	26. B	27. C	28. D	29. B	30. A
31. C	32. D	33. D	34. B	35. D	36. B	37. D	38. A	39. B	40. B
41. A	42. A	43. C	44. B	45. B	46. C	47. A	48. C	49. D	50. B
51. D	52. B	53. A	54. A	55. C	56. D	57. D	58. B	59. D	60. A
61. B	62. B	63. B	64. A	65. D	66. A	67. B	68. B	69. D	70. C
71. C	72. B	73. D	74. A	75. B	76. D	77. D	78. C	79. B	80. C
81. A									

Câu 1. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có chiều cao bằng 8 và diện tích đáy bằng 9. Gọi M, N, P và Q lần lượt là tâm của các mặt bên $ABB'A'$, $BCC'B'$, $CDD'C'$ và $DAA'D'$. Thể tích của khối đa diện lồi có các đỉnh là các điểm A, B, C, D, M, N, P và Q bằng

(A) 27. (B) 30. (C) 18. (D) 36.

Lời giải.



Gọi E, F, G, H lần lượt là trung điểm của AA', BB', CC', DD'.

Khi đó $V_{ABCD.EFGH} = \dfrac{1}{2}V_{ABCD.A'B'C'D'} = \dfrac{1}{2}\cdot 9\cdot 8 = 36$

Gọi V là thể tích khối đa diện lồi cần tính, khi đó

$V = V_{ABCD.EFGH} - V_{E.AMQ} - V_{F.BMN} - V_{G.CNP} - V_{H.DPQ}$.

Trong đó $V_{E.AMQ} = V_{F.BMN} = V_{G.CNP} = V_{H.DPQ}$

$= \dfrac{EQ}{EH}\cdot\dfrac{EM}{EF}\cdot V_{E.AHF} = \dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1}{6}\cdot V_{ABCD.EFGH} = \dfrac{36}{24} = \dfrac{3}{2}$

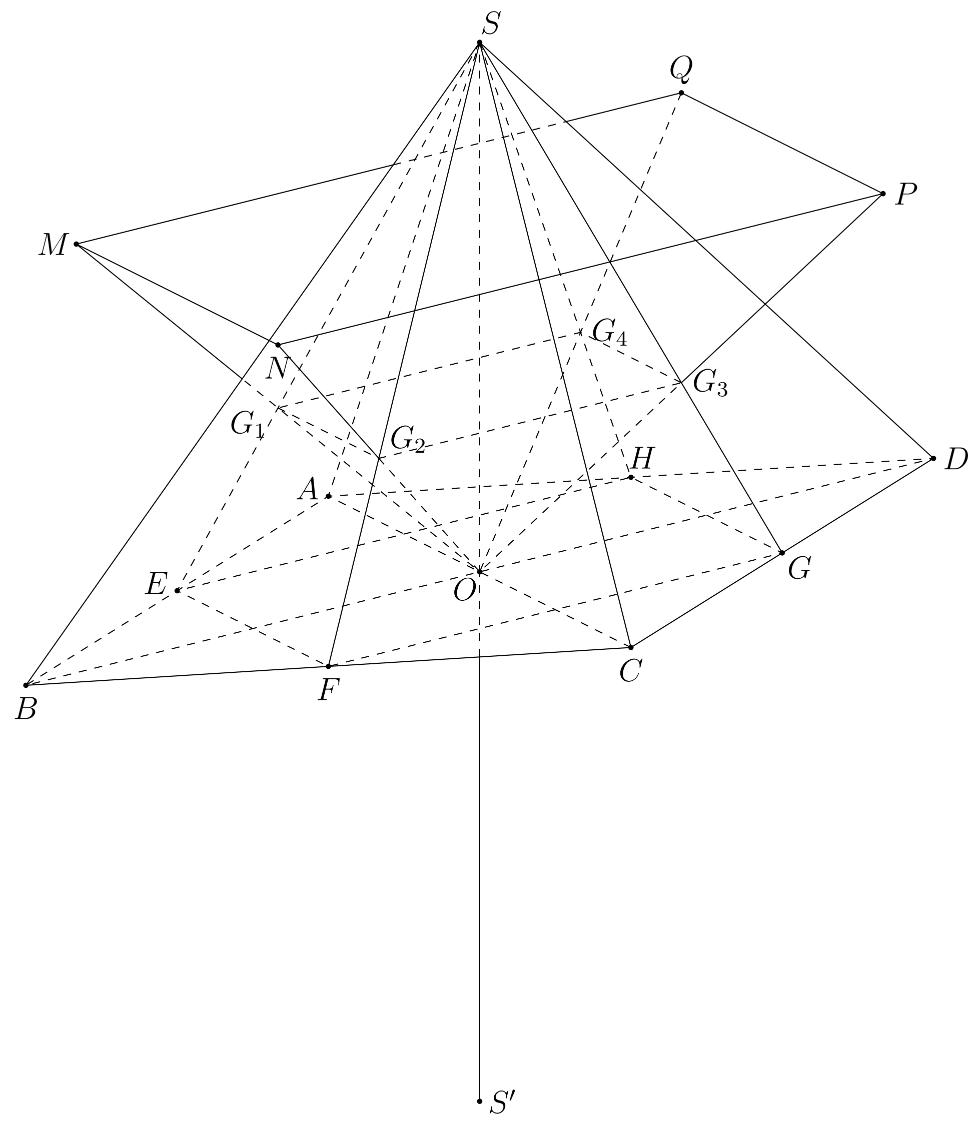
$\Rightarrow V = 36 - 4\cdot\dfrac{3}{2} = 30$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 2. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a, cạnh bên bằng $2a$ và O là tâm của đáy. Gọi M,N, P, Q lần lượt là các điểm đối xứng với O qua trọng tâm của các tam giác SAB, SBC, SCD, SDA và S' là điểm đối xứng với S qua O. Thể tích của khối chóp $S'.MNPQ$ bằng

(A) $\dfrac{20\sqrt{14}a^3}{81}$. (B) $\dfrac{40\sqrt{14}a^3}{81}$. (C) $\dfrac{10\sqrt{14}a^3}{81}$. (D) $\dfrac{2\sqrt{14}a^3}{9}$.

Lời giải.



Gọi G_1, G_2, G_3, G_4 lần lượt là trọng tâm $\triangle SAB$, $\triangle SBC$, $\triangle SCD$, $\triangle SDA$.
E, F, G, H lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA .
Ta có $S_{MNPQ} = 4S_{G_1G_2G_3G_4} = 4.\dfrac{4}{9}S_{EFGH} = 4.\dfrac{4}{9}\cdot\dfrac{1}{2}EG\cdot HF = \dfrac{8a^2}{9}$.

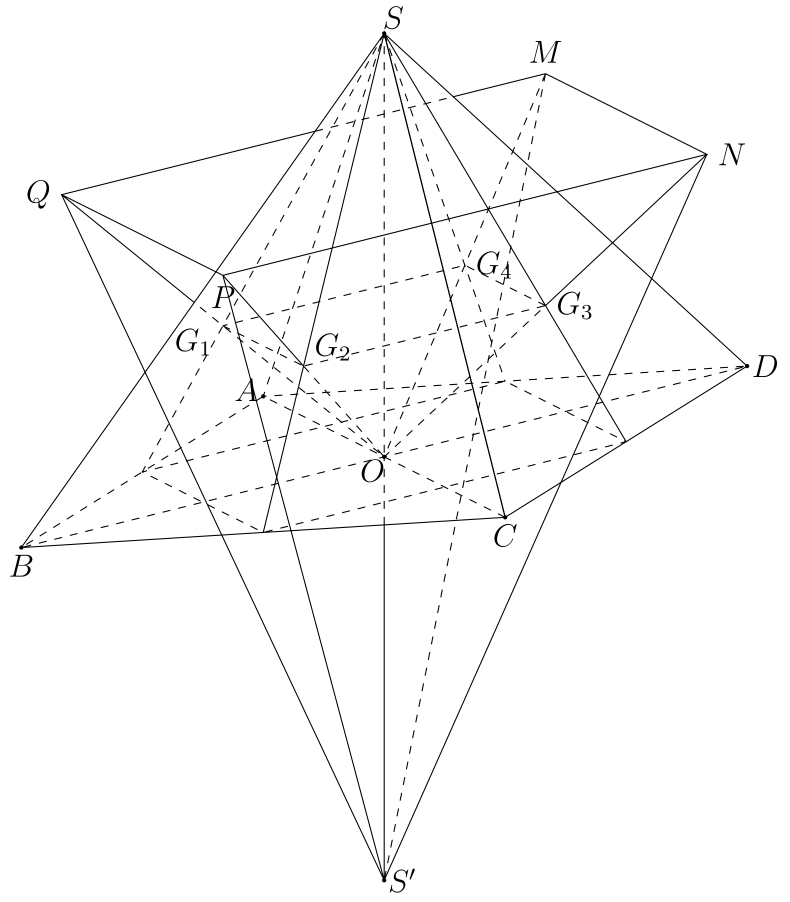
$$\begin{aligned}&\mathrm{d}\left(S',(MNPQ)\right) = \mathrm{d}\left(S',(ABCD)\right) + \mathrm{d}\left(O,(MNPQ)\right)\\&= \mathrm{d}\left(S,(ABCD)\right) + 2\mathrm{d}\left(O,(G_1G_2G_3G_4)\right)\\&= \mathrm{d}\left(S,(ABCD)\right) + \dfrac{2}{3}d\left(S,(ABCD)\right)\\&= \dfrac{5}{3}\mathrm{d}\left(S,(ABCD)\right) = \dfrac{5a\sqrt{14}}{6}\end{aligned}$$

Vậy $V_{S'.MNPQ} = \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{5a\sqrt{14}}{6}\cdot\dfrac{8a^2}{9} = \dfrac{20a^3\sqrt{14}}{81}$.
Chọn đáp án A □

Câu 3. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a, cạnh bên bằng $a\sqrt{3}$ và O là tâm của đáy. Gọi M, N, P, Q lần lượt là các điểm đối xứng với O qua trọng tâm các tam giác SAB, SBC, SCD, SDA và S' là điểm đối xứng với S qua O. Thể tích của khối chóp $S'.MNPQ$ bằng

A $\dfrac{40\sqrt{10}a^3}{81}$. B $\dfrac{10\sqrt{10}a^3}{81}$. C $\dfrac{20\sqrt{10}a^3}{81}$. D $\dfrac{2\sqrt{10}a^3}{9}$.

Lời giải.



Ta gọi G_1, G_2, G_3, G_4 lần lượt là trọng tâm của tam giác SAB, SBC, SCD, SDA thì

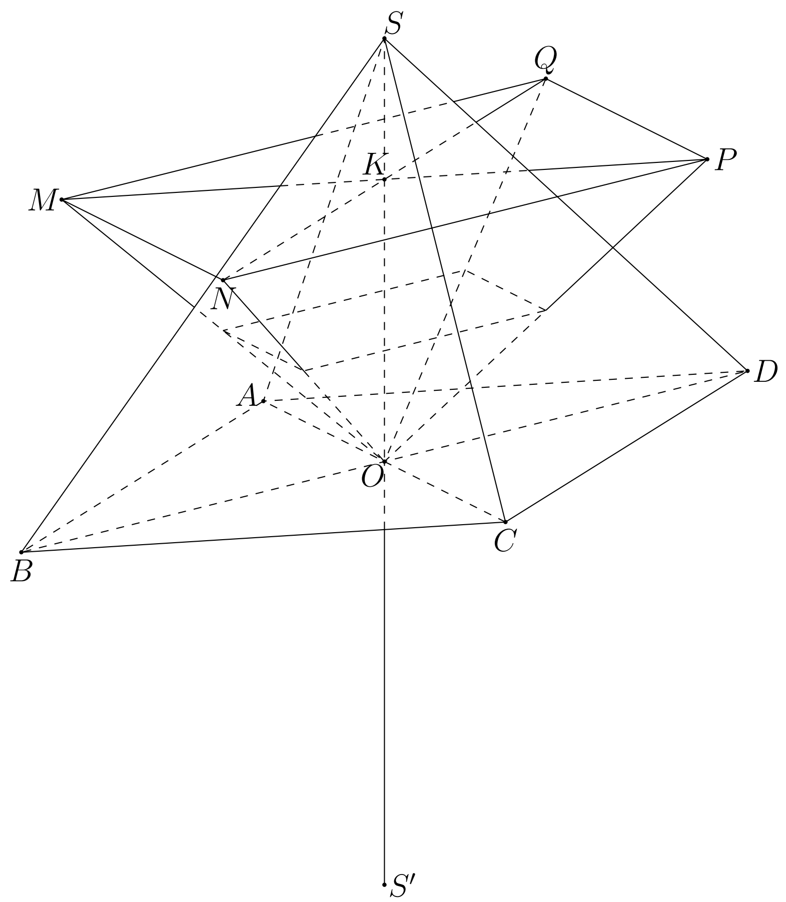
$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\left(S',(MNPQ)\right) &= \frac{5}{2}\mathrm{d}\left(O,(MNPQ)\right)\\
&\Rightarrow V_{S'.MNPQ} = \frac{5}{2}V_{O.MNPQ} = \frac{5}{2}\cdot 8V_{O.G_1G_2G_3G_4}\\
&= 10V_{S.G_1G_2G_3G_4} = 10\cdot\frac{4}{27}V_{S.ABCD}\\
&= \frac{40}{27}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{a\sqrt{10}}{2}\cdot a^2 = \frac{20\sqrt{10}a^3}{81}.
\end{aligned}$$

Chọn đáp án C □

Câu 4. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a, cạnh bên bằng $\sqrt{2}a$ và O là tâm của đáy. Gọi M, N, P, Q lần lượt là các điểm đối xứng với O qua trọng tâm của các tam giác SAB, SBC, SCD, SDA và S' là điểm đối xứng với S qua O. Thể tích khối chóp $S'.MNPQ$ bằng.

A. $\dfrac{2\sqrt{6}a^3}{9}$. B. $\dfrac{40\sqrt{6}a^3}{81}$. C. $\dfrac{10\sqrt{6}a^3}{81}$. D. $\dfrac{20\sqrt{6}a^3}{81}$.

Lời giải.



Ta có $S'K = S'O + OK = SO + \dfrac{2}{3}SO = \dfrac{5a\sqrt{6}}{6}$.

Ta có $MNPQ = 4 \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{4}{9} S_{ABCD} = \dfrac{8}{9}a^2$.

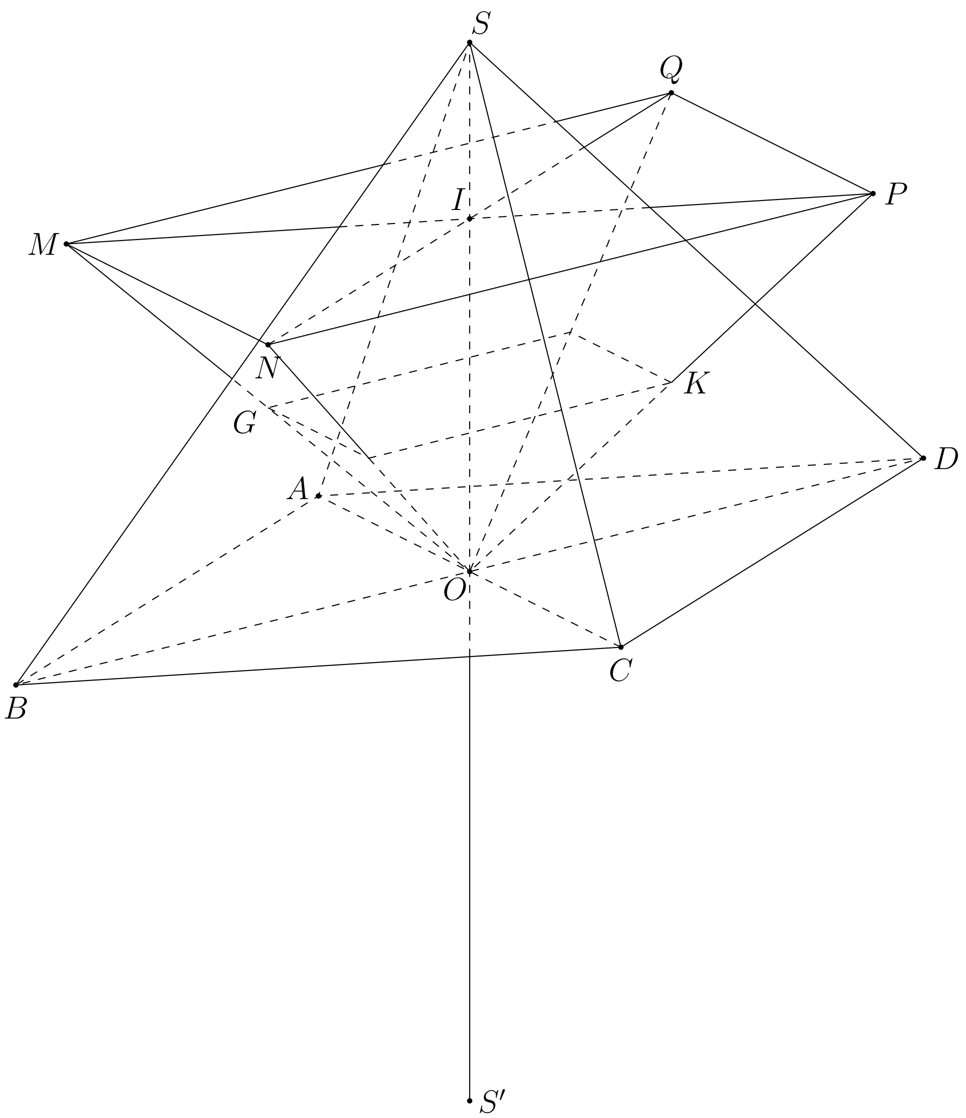
Vậy $V_{S'.MNPQ} = \dfrac{20\sqrt{6}a^3}{81}$.

Chọn đáp án D ☐

Câu 5. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng a và O là tâm của đáy. Gọi M, N, P, Q lần lượt là các điểm đối xứng với O qua trọng tâm của các tam giác SAB, SBC, SCD, SDA và S' là điểm đối xứng với S qua O. Thể tích khối chóp $S'.MNPQ$ bằng

A $\dfrac{2\sqrt{2}a^3}{9}$. B $\dfrac{20\sqrt{2}a^3}{81}$. C $\dfrac{40\sqrt{2}a^3}{81}$. D $\dfrac{10\sqrt{2}a^3}{81}$.

Lời giải.



Ta có $SO = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

Gọi G, K lần lượt là trọng tâm của tam giác SAB và tam giác SCD.

Suy ra $MP = 2GK = \dfrac{4}{3}a$, tương tự $NQ = \dfrac{4}{3}a$.

$\Rightarrow S_{MNPQ} = \dfrac{8}{9}a^2$.

Ta có $(MNPQ) \parallel (ABCD)$

$\mathrm{d}\left(M, (ABCD)\right) = 2\mathrm{d}\left(G, (ABCD)\right) = \dfrac{2}{3}SO = \dfrac{a\sqrt{2}}{3}$.

$\Rightarrow \mathrm{d}\left((MNPQ), (ABCD)\right) = \dfrac{a\sqrt{2}}{3}$

$\Rightarrow \mathrm{d}\left(S', (MNPQ)\right) = S'O + \dfrac{a\sqrt{2}}{3} = \dfrac{5a\sqrt{2}}{6}$

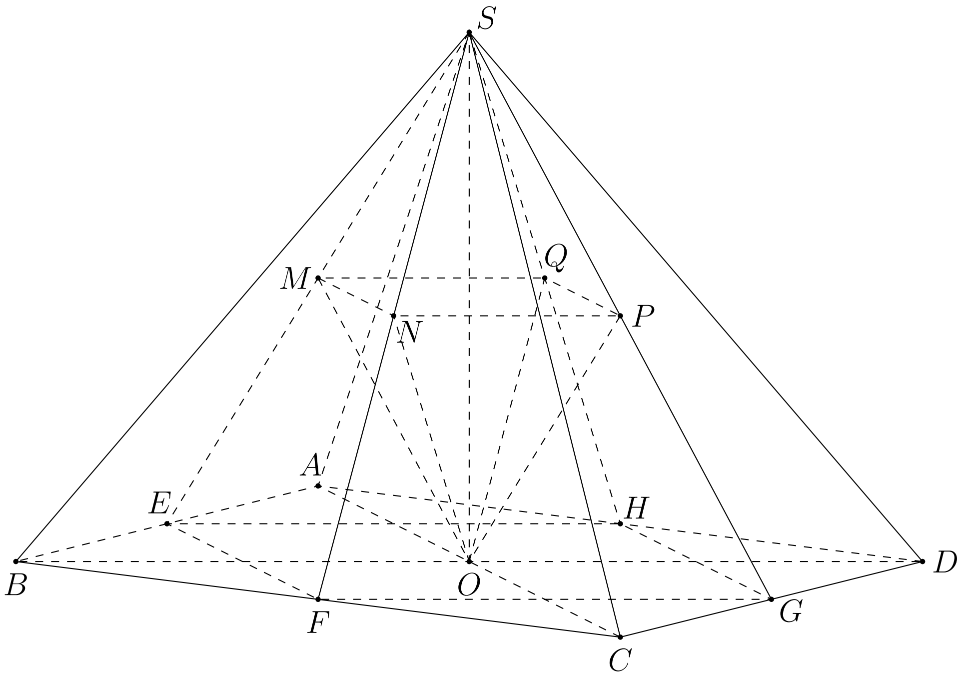
$\Rightarrow V_{S'.MNPQ} = \dfrac{1}{3}.\dfrac{5a\sqrt{2}}{6}.\dfrac{8a^2}{9} = \dfrac{20\sqrt{2}a^3}{81}$.

Chọn đáp án B □

Câu 6. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $4a$, cạnh bên bằng $2\sqrt{3}a$ và O là tâm của đáy. Gọi M, N, P và Q lần lượt là hình chiếu vuông góc của O lên các mặt phẳng (SAB), (SBC), (SCD) và (SDA). Thể tích khối chóp $O.MNPQ$ bằng

A $\dfrac{4a^3}{3}$. B $\dfrac{64a^3}{81}$. C $\dfrac{128a^3}{81}$. D $\dfrac{2a^3}{3}$.

Lời giải.



Gọi E là trung điểm của AB, vẽ $OM \perp SE$ suy ra $OM \perp (SAB)$.

$SO = \sqrt{SB^2 - OB^2} = \sqrt{12a^2 - 8a^2} = 2a$ và $SM \cdot SE = SO^2$.

Suy ra $\dfrac{SM}{SE} = \dfrac{SO^2}{SE^2} = \dfrac{4a^2}{8a^2} = \dfrac{1}{2}$ suy ra M là trung điểm của SE.

Chứng minh tương tự đối với N, P, Q.

Suy ra $MNPQ$ là hình vuông cạnh $\dfrac{AC}{4} = \sqrt{2}a$

$\mathrm{d}\left(O, (MNPQ)\right) = \mathrm{d}\left(S, (MNPQ)\right) = \dfrac{SO}{2} = a$

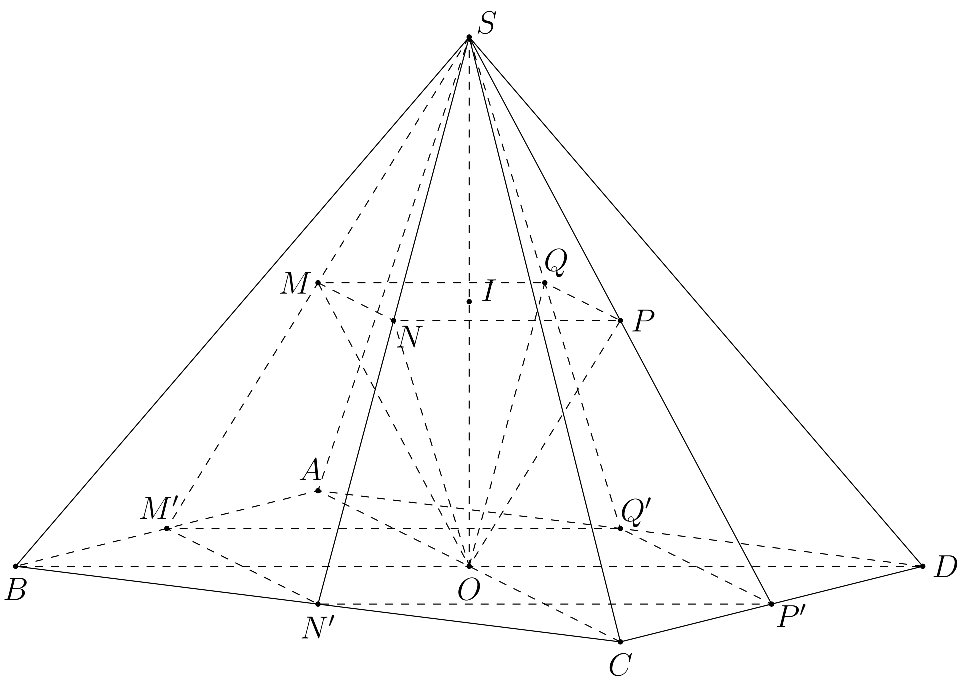
$\Rightarrow V_{O.MNPQ} = \dfrac{1}{3}a \cdot 2a^2 = \dfrac{2a^3}{3}$.

Chọn đáp án D □

Câu 7. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a, cạnh bên bằng $\dfrac{\sqrt{3}a}{2}$ và O là tâm của đáy. Gọi M, N, P và Q lần lượt là hình chiếu vuông góc của O trên các mặt phẳng (SAB), (SBC), (SCD) và (SDA). Thể tích của khối chóp $O.MNPQ$ bằng

(A) $\dfrac{a^3}{48}$. (B) $\dfrac{2a^3}{81}$. (C) $\dfrac{a^3}{81}$. (D) $\dfrac{a^3}{96}$.

Lời giải.



Gọi M', N', P', Q' lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA.

Ta có $AB \perp OM'$ và $AB \perp SO$ nên $AB \perp (SOM')$.

Suy ra $(SAB) \perp (SOM')$ theo giao tuyến SM'.

Theo giả thiết ta có $OM \perp (SAB)$ nên $OM \perp SM'$, do đó M là hình chiếu vuông góc của O trên SM'.

Tương tự như vậy: N, P, Q là hình chiếu vuông góc của O lần lượt trên SN', SP', SQ'.

Ta có $SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \sqrt{\dfrac{3a^2}{4} - \dfrac{2a^2}{4}} = \dfrac{a}{2} = OM'$. Suy ra tam giác SOM' vuông cân tại O nên M là trung điểm của SM'.

Từ đó dễ chứng minh được $MNPQ$ là hình vuông có tâm I thuộc SO và nằm trong mặt phẳng song song với $(ABCD)$, với I là trung điểm của SO. Suy ra $OI = \dfrac{1}{2}OS = \dfrac{a}{4}$.

Do đó $MN = \dfrac{1}{2}M'N' = \dfrac{1}{4}AC = \dfrac{\sqrt{2}a}{4}$.

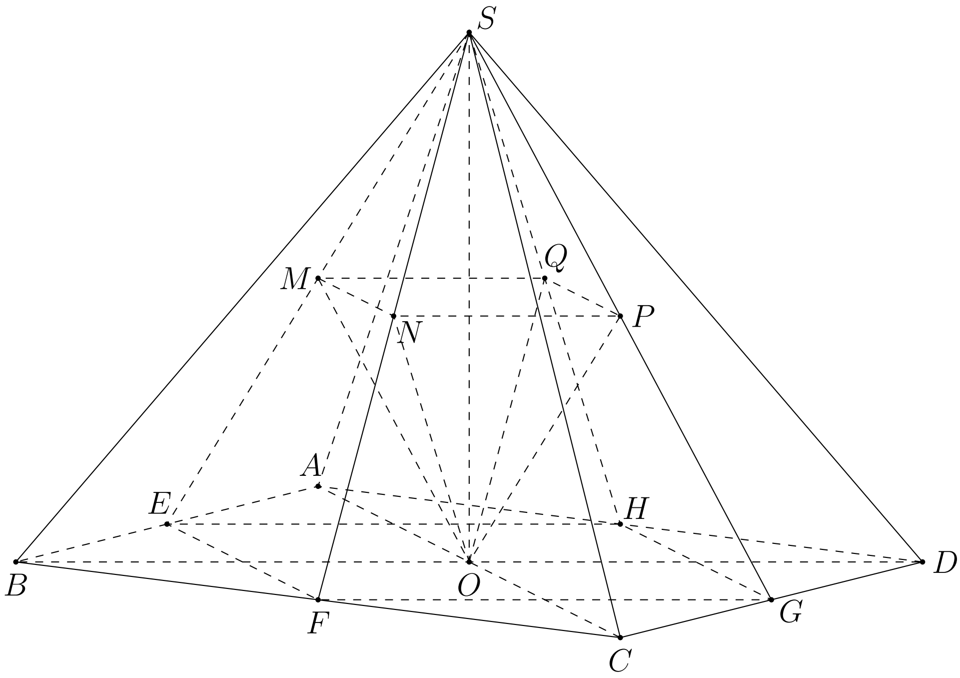
Thể tích khối chóp $O.MNPQ$ bằng $\dfrac{1}{3}S_{MNPQ} \cdot OI = \dfrac{1}{3} \cdot MN^2 \cdot OI = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{a^2}{8} \cdot \dfrac{a}{4} = \dfrac{a^3}{96}$.

Chọn đáp án D □

Câu 8. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $3a$, cạnh bên bằng $\dfrac{3a\sqrt{3}}{2}$ và O là tâm của đáy. Gọi M, N, P và Q lần lượt là hình chiếu vuông góc của O trên các mặt phẳng (SAB), (SBC), (SCD) và (SAD). Thể tích khối chóp $O.MNPQ$ bằng

A $\dfrac{9a^3}{16}$. B $\dfrac{2a^3}{3}$. C $\dfrac{9a^3}{32}$. D $\dfrac{a^3}{3}$.

Lời giải.



Gọi E, F, G, H lần lượt là giao điểm của SM với AB, SN với BC, SP với CD, SQ với DA thì E, F, G, H là trung điểm của AB, BC, CD, DA thì

Ta có $\dfrac{SP}{SG} = \dfrac{SP \cdot SG}{SG^2} = \dfrac{SO^2}{SG^2} = \dfrac{\frac{9a^2}{4}}{\frac{9a^2}{2}} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow P$ là trung điểm SG.

Chứng minh tương tự ta cũng có M, N, Q lần lượt là trung điểm AB, BC, DA.

Khi đó $\mathrm{d}(O,(MNPQ)) = \dfrac{1}{2}SO = \dfrac{3a}{4}$.

$S_{MNPQ} = \dfrac{1}{4}S_{EFGH} = \dfrac{1}{8}S_{ABCD} = \dfrac{9a^2}{8}$.

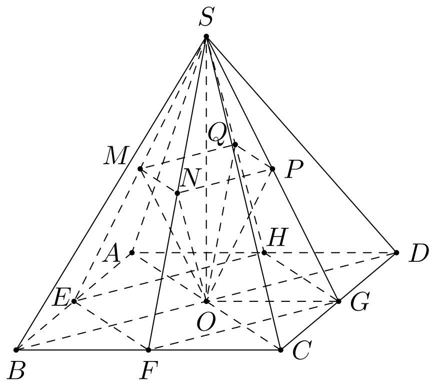
Vậy $V_{O.MNPQ} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{3a}{4} \cdot \dfrac{9a^2}{8} = \dfrac{9a^3}{32}$.

Chọn đáp án C □

Câu 9 (Mã 104 - 2020 đợt 2). Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $2a$, cạnh bên bằng $\sqrt{3}a$ và O là tâm của đáy. Gọi M, N, P và Q lần lượt là hình chiếu vuông góc của O trên các mặt phẳng (SAB), (SBC), (SCD) và (SDA). Thể tích của khối chóp $O.MNPQ$ bằng

(A) $\dfrac{8a^3}{81}$. (B) $\dfrac{a^3}{6}$. (C) $\dfrac{a^3}{12}$. (D) $\dfrac{16a^3}{81}$.

Lời giải.



Gọi E là trung điểm AB. Gọi M là hình chiếu vuông góc của O lên SE, suy ra $OM \perp (SAB)$.

Tam giác SOB có

$$SO = \sqrt{SB^2 - OB^2} = \sqrt{3a^2 - 2a^2} = a.$$

Tam giác SOE có $SE^2 = SO^2 + OE^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$ và

$$SM \cdot SE = SO^2 \Leftrightarrow \frac{SM}{SE} = \frac{SO^2}{SE^2} = \frac{a^2}{2a^2} = \frac{1}{2}.$$

Do đó M là trung điểm SE.
Gọi H, G, F lần lượt là trung điểm của AD, DC, CB.

Tương tự ta chứng minh được N, P, Q lần lượt là trung điểm của SF, SG, SH.

Suy ra $MNPQ$ là hình vuông có độ dài cạnh bằng $\dfrac{AC}{4} = \dfrac{2a\sqrt{2}}{4} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Ta có

$$\mathrm{d}(O,(MNPQ)) = \mathrm{d}(S,(MNPQ)) = \frac{SO}{2} = \frac{a}{2}.$$

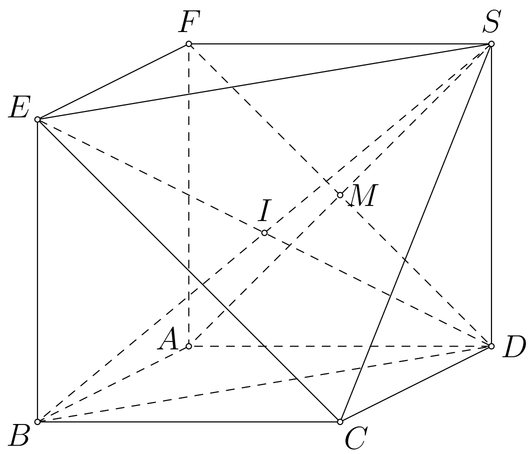
Vậy $V_{O.MNPQ} = \dfrac{1}{3} \cdot \mathrm{d}(O,(MNPQ)) \cdot S_{MNPQ} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{a}{2} \cdot \left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \dfrac{a^3}{12}$.

Chọn đáp án C □

Câu 10 (Đề tham khảo 2018). Cho hình vuông $ABCD$ và $ABEF$ có cạnh bằng 1, lần lượt nằm trên hai mặt phẳng vuông góc với nhau. Gọi S là điểm đối xứng với B qua đường thẳng DE. Thể tích của khối đa diện $ABCDSEF$ bằng

Ⓐ $\dfrac{7}{6}$. Ⓑ $\dfrac{11}{12}$. Ⓒ $\dfrac{2}{3}$. Ⓓ $\dfrac{5}{6}$.

Lời giải.



Gọi M, I lần lượt là trung điểm của DF, $DE \Rightarrow AM \perp (DCEF)$.

Vì S là điểm đối xứng với B qua DE, suy ra M là trung điểm của SA.

Suy ra $SA \perp (DCEF)$ và $SM = AM = \dfrac{1}{2}DF = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Khi đó $V_{ABCDSEF} = V_{ADF.BCE} + V_{S.DCEF} = AB \cdot S_{\triangle ADF} + \dfrac{1}{3} \cdot SM \cdot S_{DCEF}$.

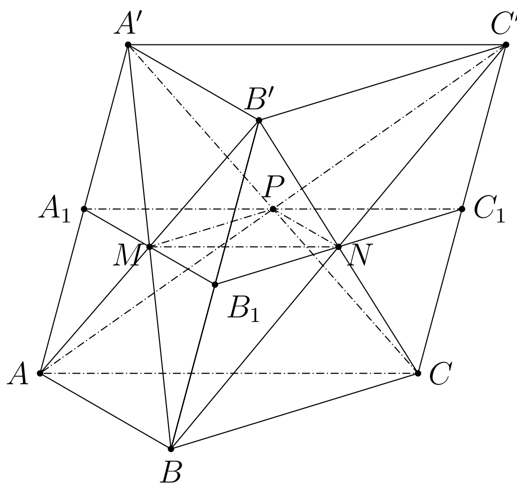
Vậy $V_{ABCDSEF} = 1 \cdot \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{2} = \dfrac{5}{6}$.

Chọn đáp án D □

Câu 11 (Mã đề 104 - BGD - 2019). Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có chiều cao bằng 4 và đáy là tam giác đều cạnh bằng 4. Gọi M, N, P lần lượt là tâm của các mặt bên $ABB'A'$, $BCC'B'$ và $ACC'A'$. Thể tích của khối đa diện lồi có các đỉnh là các điểm A, B, C, M, N, P bằng

A $8\sqrt{3}$. B $6\sqrt{3}$. C $\dfrac{20\sqrt{3}}{3}$. D $\dfrac{14\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải.



Mặt phẳng (MNP) cắt các cạnh AA', BB', CC' lần lượt tại các điểm A_1, B_1, C_1.

Dễ thấy, $(MNP) \parallel (ABC)$ và (MNP) chia khối lăng trụ thành hai phần có thể tích bằng nhau.

Gọi V là thể tích khối đa diện cần tìm. Khi đó:

$V = \dfrac{1}{2}V_{ABC.A'B'C'} - V_{AA_1MP} - V_{CC_1PN} - V_{BB_1MN}$.

Mặt khác $V_{AA_1MP} = \dfrac{1}{3}\mathrm{d}\left(A,(MNP)\right)\cdot S_{\Delta A_1MP}$

$= \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2}\mathrm{d}\left(A,(A'B'C')\right)\cdot\dfrac{1}{4}S_{A'B'C'}$

$= \dfrac{1}{24}V_{ABC.A'B'C'}$.

Tương tự: $V_{CC_1PN} = V_{BB_1MN} = \dfrac{1}{24}V_{ABC.A'B'C'}$.

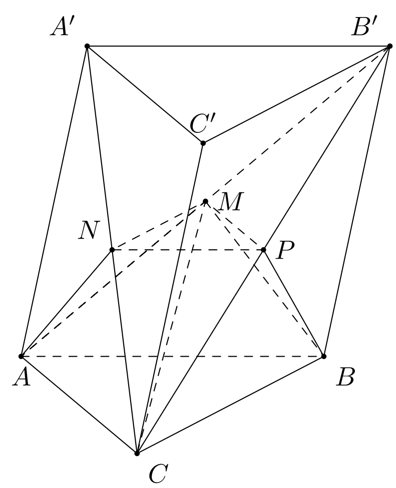
Do đó: $V = \dfrac{1}{2}V_{ABC.A'B'C'} - \dfrac{3}{24}V_{ABC.A'B'C'} = \dfrac{3}{8}V_{ABC.A'B'C'} = \dfrac{3}{8}\cdot\dfrac{4^2\sqrt{3}}{4}\cdot 4 = 6\sqrt{3}$.

Chọn đáp án B □

Câu 12 (Mã đề 103 - BGD - 2019). Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có chiều cao bằng 6 và đáy là tam giác đều cạnh bằng 4. Gọi M, N và P lần lượt là tâm của các mặt bên $ABB'A'$, $ACC'A'$ và $BCC'B'$. Thể tích của khối đa diện lồi có các đỉnh là các điểm A, B, C, M, N, P bằng

A $9\sqrt{3}$. B $10\sqrt{3}$. C $7\sqrt{3}$. D $12\sqrt{3}$.

Lời giải.



Gọi $h = \mathrm{d}(A',(ABC)) = 6$, ta có $S_{ABC} = \dfrac{4^2\cdot\sqrt{3}}{4} = 4\sqrt{3}$.

Khi đó, $V = V_{ABC.A'B'C'} = S_{ABC}\cdot h = 4\sqrt{3}\cdot 6 = 24\sqrt{3}$.

Ta có $(MNP) \parallel (ABC)$ và $\mathrm{d}(M,(ABC)) = \dfrac{1}{2}h = 3$.

Suy ra, $V_{MABC} = \dfrac{1}{3}\cdot 3\cdot 4\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$.

Tam giác ABC đồng dạng với tam giác MNP theo tỉ số 2 nên

$$S_{MNP} = \frac{1}{4}\cdot S_{ABC} = \frac{1}{4}\cdot 4\sqrt{3} = \sqrt{3} \Rightarrow V_{CMNP} = \frac{1}{3}\cdot 3\cdot\sqrt{3} = \sqrt{3}.$$

Ta có,

$$V_{MNAC} = \frac{1}{3}\mathrm{d}(M,(NAC))\cdot S_{NAC} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\mathrm{d}(B',(ACC'A'))\cdot\frac{1}{4}S_{ACC'A'} = \frac{1}{8}V_{B'.ACC'A'} = \frac{1}{8}\cdot\frac{2}{3}V = 2\sqrt{3}.$$

Tương tự, $V_{MPBC} = 2\sqrt{3}$.

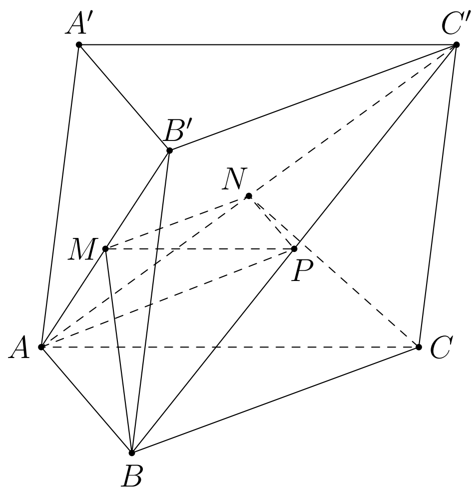
Vậy $V_{MNPACB} = V_{MABC} + V_{CMNP} + V_{MNAC} + V_{MPBC} = 4\sqrt{3} + \sqrt{3} + 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 9\sqrt{3}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 13 (Mã đề 102 - BGD - 2019). Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có chiều cao bằng 8 và đáy là tam giác đều cạnh bằng 4. Gọi M, N và P lần lượt là tâm của các mặt bên $ABB'A'$, $ACC'A'$ và $BCC'B'$. Thể tích của khối đa diện lồi có các đỉnh là các điểm A, B, C, M, N, P bằng

(A) $12\sqrt{3}$. (B) $16\sqrt{3}$. (C) $\dfrac{28\sqrt{3}}{3}$. (D) $\dfrac{40\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải.



Ta có $V_{ABC.A'B'C'} = 8 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{4} \cdot 4^2 = 32\sqrt{3}$;

$V_{C'.ABC} = \dfrac{1}{3}V_{ABC.A'B'C'}$; $V_{A.BC'B'} = \dfrac{1}{3}V_{ABC.A'B'C'}$.

Gọi thể tích của khối đa diện lồi có các đỉnh là các điểm A, B, C, M, N, P là V.

Ta có $V = V_{C.ABPN} + V_{P.AMN} + V_{P.ABM}$.

Mặt khác

$$V_{C.ABPN} = \frac{3}{4}V_{C'.ABC} = \frac{1}{4}V_{ABC.A'B'C'}$$
$$V_{PAMN} = \frac{1}{8}V_{ABC'B'} = \frac{1}{24}V_{ABC.A'B'C'}$$
$$V_{PABM} = \frac{1}{4}V_{ABC'B'} = \frac{1}{12}V_{ABC.A'B'C'}.$$

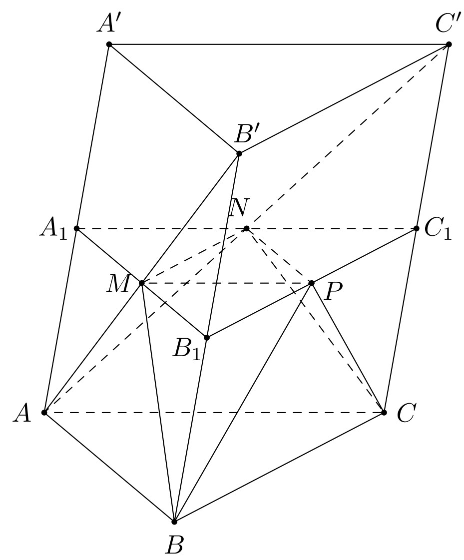
Vậy $V = \dfrac{1}{4}V_{ABC.A'B'C'} + \dfrac{1}{24}V_{ABC.A'B'C'} + \dfrac{1}{12}V_{ABC.A'B'C'} = \dfrac{3}{8}V_{ABC.A'B'C'} = 12\sqrt{3}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 14 (Mã đề 101 - BGD - 2019). Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có chiều cao bằng 8 và đáy là tam giác đều cạnh bằng 6. Gọi M, N và P lần lượt là tâm của các mặt bên $ABB'A'$, $ACC'A'$ và $BCC'B'$. Thể tích của khối đa diện lồi có các đỉnh là các điểm A, B, C, M, N, P bằng

(A) $27\sqrt{3}$. (B) $21\sqrt{3}$. (C) $30\sqrt{3}$. (D) $36\sqrt{3}$.

Lời giải.



Thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là

$$V = 8 \cdot \frac{6^2\sqrt{3}}{4} = 72\sqrt{3}.$$

Gọi A_1, B_1, C_1 lần lượt là trung điểm của AA', BB', CC'.

Ta có thể tích khối lăng trụ $ABC.A_1B_1C_1$ là $V_{ABC.A_1B_1C_1} = \dfrac{V}{2}$.

Thể tích khối chóp $A.A'B'C'$ là

$$V_{A.A'B'C'} = \frac{1}{3}V_{ABC.A'B'C'} = \frac{V}{3}.$$

Mặt khác, ta có

$$\frac{V_{A.A_1MN}}{V_{A.A'B'C'}} = \frac{AA_1}{AA'} \cdot \frac{AM}{AB'} \cdot \frac{AN}{AC'} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}.$$

Suy ra $V_{A.A_1MN} = \dfrac{1}{8}V_{A.A'B'C'} = \dfrac{1}{8} \cdot \dfrac{1}{3}V = \dfrac{V}{24}$.

Tương tự ta tính được $V_{B.B_1MP} = V_{C.C_1NP} = \dfrac{V}{24}$.

Khi đó

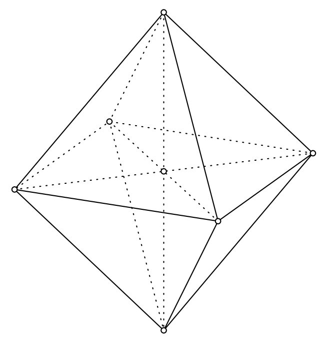
$$V_{ABCMNP} = V_{ABC.A_1B_1C_1} - V_{A.A_1MN} - V_{B.B_1MP} - V_{C.C_1NP} = \frac{V}{2} - \frac{V}{24} - \frac{V}{24} - \frac{V}{24} = \frac{3V}{8} = 27\sqrt{3}.$$

Chọn đáp án A □

Câu 15 (Chuyên Hạ Long -2019). thể tích của bát diện đều cạnh bằng $a\sqrt{3}$ là.

(A) $6a^3$. (B) $\sqrt{6}a^3$. (C) $\dfrac{4}{3}a^3$. (D) a^3.

Lời giải.



Ta có khối bát diện đều cạnh $a\sqrt{3}$ được tạo từ 2 khối chóp tứ giác đều có cạnh đáy và cạnh bên bằng $a\sqrt{3}$.

Chiều cao của khối chóp là: $h = \sqrt{\left(a\sqrt{3}\right)^2 - \left(\dfrac{a\sqrt{6}}{2}\right)^2} = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

Thể tích của khối chóp: $V_{chop} = \dfrac{1}{3}\left(a\sqrt{3}\right)^2 \cdot \dfrac{a\sqrt{6}}{2} = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{2}$ (đvtt).

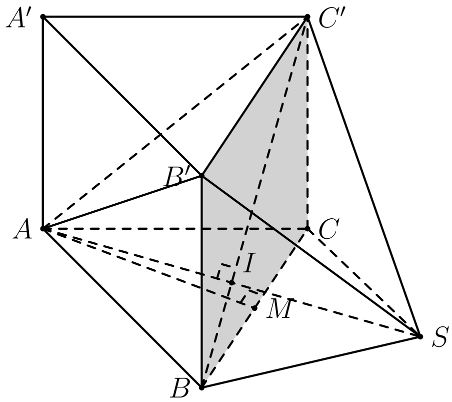
Vậy thể tích khối bát diện là: $V = 2V_{chop} = a^3\sqrt{6}$(đvtt).

Chọn đáp án B □

Câu 16. (Chuyên Lào Cai-2020) Cho lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằnga. Gọi S là điểm đối xứng của A qua BC'. Thể tích khối đa diện $ABCSB'C'$ là

(A) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$. (B) $a^3\sqrt{3}$. (C) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$. (D) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.



Chia khối đa diện $ABCSB'C'$ thành 2 khối là khối chóp $A.BCC'B'$ và khối chóp $S.BCC'B'$

$V_{ABCSB'C'} = V_{ABCC'B'} + V_{S.BCC'B'}$

Gọi M là trung điểm BC.

Ta có: $\left.\begin{array}{l} AM \perp BC \\ AM \perp BB' \end{array}\right\} \Rightarrow AM \perp (BCC'B')$.

Tam giác ABC đều $\Rightarrow AM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Thể tích khối chóp $A.BCC'B'$ là:

$V_{A.BCC'B'} = \dfrac{1}{3}AM.S_{BCC'B'} = \dfrac{1}{3}.\dfrac{a\sqrt{3}}{2}.a^2 = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Thể tích khối chóp $S.BCC'B'$ là:

$$\begin{aligned} \frac{V_{S.BCC'B'}}{V_{A.BCC'B'}} &= \frac{\frac{1}{3}d\left(S;\left(BCC'B'\right)\right).S_{BCC'B'}}{\frac{1}{3}d\left(A;\left(BCC'B'\right)\right).S_{BCC'B'}} \\ &= \frac{d\left(S;\left(BCC'B'\right)\right)}{d\left(A;\left(BCC'B'\right)\right)} = \frac{SI}{AI} = 1. \end{aligned}$$

$\Rightarrow V_{S.BCC'B'} = V_{A.BCC'B'} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$

$\Rightarrow V_{ABCSB'C'} = V_{A.BCC'B'} + V_{S.BCC'B'} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{6} + \dfrac{a^3\sqrt{3}}{6} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$

Chọn đáp án (A) □

Câu 17. (Chuyên Lê Hồng Phong-Nam Định-2020) Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O, cạnh bằng a và $\widehat{BAC} = 60°$. Gọi I, J lần lượt là tâm của các mặt bên $ABB'A', CDD'C'$. Biết $AI = \dfrac{a\sqrt{7}}{2}$, $AA' = 2a$ và góc giữa hai mặt phẳng $\left(ABB'A'\right), \left(A'B'C'D'\right)$ bằng $60°$. Tính theo a thể tích khối tứ diện $AOIJ$.

(A) $\dfrac{3\sqrt{3}a^3}{64}$. (B) $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{48}$. (C) $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{32}$. (D) $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{192}$.

Lời giải.

Ta có $AI^2 = \dfrac{AA'^2 + AB^2}{2} - \dfrac{A'B^2}{4}$

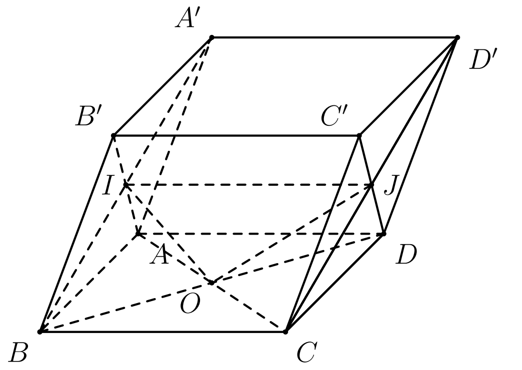
$\Rightarrow A'B^2 = 2\left(AA'^2 + AB^2\right) - 4AI^2 = 3a^2 \Rightarrow A'B = a\sqrt{3}$

Do $A'B^2 + AB^2 = AA'^2$ nên tam giác $A'AB$vuông tại B$\Rightarrow S_{A'AB} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$

Tam giác ABC đều cạnh a nên $S_{ABC} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$

Theo đề góc giữa hai mặt phẳng $(ABB'A'), (A'B'C'D')$ bằng 60°,

nên suy ra $V_{A'ABC} = \dfrac{2S_{A'AB}.S_{ABC}\sin 60^\circ}{3AB} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{8}$

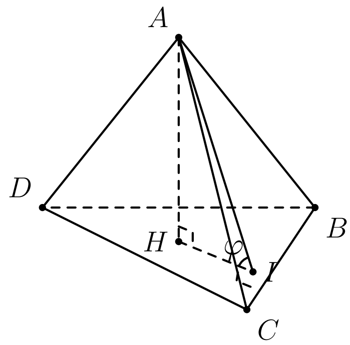


$$\begin{aligned} V_{AOIJ} &= \frac{1}{3}d\left(O;(IAJ)\right).S_{IAJ} \\ &= \frac{1}{3}.\frac{1}{2}d\left(B;(B'AD)\right).\frac{1}{2}S_{B'AD} \\ &= \frac{1}{4}V_{B'ABD} = \frac{1}{4}V_{A'ABC} = \frac{a^3\sqrt{3}}{32} \end{aligned}$$

Bổ sung: *Công thức tính nhanh thể tích tứ diện theo góc giữa hai mặt phẳng*

Cho tứ diện $ABCD$ có diện tích tam giác ABC bằng S_1, diện tích tam giác BCD là S_2và góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (DBC) là φ. Khi đó ta có: $V_{ABCD} = \dfrac{2S_1S_2.\sin\varphi}{3BC}$

Chứng minh: Gọi H là hình chiếu của A lên (BCD), kẻ $HI \perp BC$ tại I thì $AI \perp BC$ và $((ABC);(DBC)) = (AI;HI) = \widehat{AIH} = \varphi$; $AH = AI\sin\varphi$



$$\begin{aligned} V_{ABCD} &= \frac{1}{3}AH.S_{DBC} = \frac{1}{3}AI\sin\varphi \cdot S_2 \\ &= \frac{1}{3}\frac{2S_{ABC}}{BC} \cdot \sin\varphi \cdot S_2 = \frac{2S_1S_2\sin\varphi}{3BC}. \end{aligned}$$

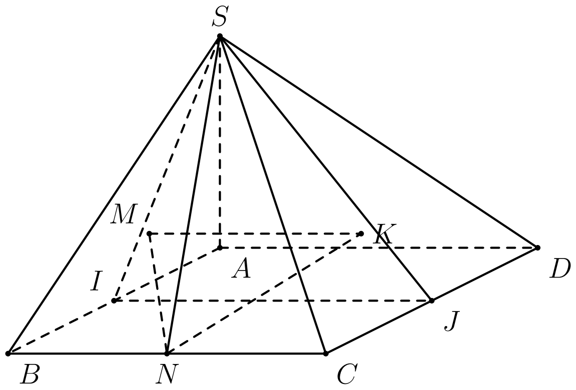
Chọn đáp án C □

Câu 18. (Chuyên Quang Trung-2020) Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, $SA = a$. M, K tương ứng là trọng tâm tam giác SAB, SCD; N là trung điểm BC. Thể tích khối tứ diện $SMNK$ bằng $\dfrac{m}{n}.a^3$với . Giá trị $m + n$ bằng:

A 28. B 12. C 19. D 32.

Lời giải.

Ta có: $V_{S.ABCD}=\dfrac{1}{3}SA.S_{ABCD}=\dfrac{a^3}{3}$.



Gọi I là trung điểm của AB, J là trung điểm của CD.

Ta có: ΔSMN đồng dạng với ΔSIJ theo tỉ số $\dfrac{2}{3}$.

Do đó $V_{SMNK}=V_{P.SMN}=\left(\dfrac{2}{3}\right)^2 V_{P.SIJ}=\dfrac{4}{9}V_{P.SIJ}$.

Mặt khác $S_{\Delta PIJ}=\dfrac{1}{4}S_{ABCD}$.

Do đó $V_{P.SIJ}=V_{S.PIJ}=\dfrac{1}{4}V_{S.ABCD}=\dfrac{a^3}{12}$

Nên $V_{SMNK}=\dfrac{4}{9}.\dfrac{a^3}{12}=\dfrac{a^3}{27}$.

Vậy $m=1, n=27\Rightarrow m+n=28$.

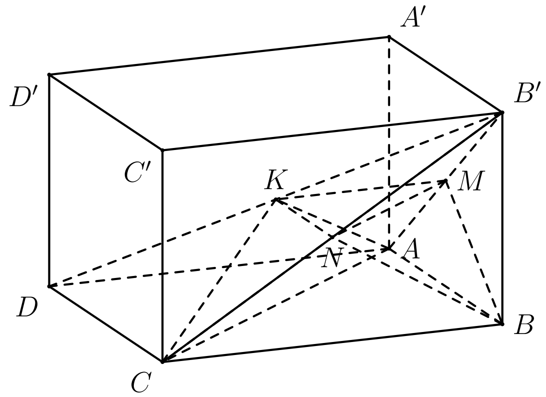
Chọn đáp án (A) □

Câu 19. (Chuyên Quang Trung-2020) Cho hình lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$có đáy là hình thoi có cạnh $4a$, $A'A=8a$, $\widehat{BAD}=120øcirc$. Gọi M,N,K lần lượt là trung điểm cạnh $AB',B'C,BD'$. Thể tích khối da diện lồi có các đỉnh là các điểm A,B,C,M,N,K là:

(A) $12\sqrt{3}\,a^3$. (B) $\dfrac{28\sqrt{3}}{3}a^3$. (C) $16\sqrt{3}\,a^3$. (D) $\dfrac{40\sqrt{3}}{3}a^3$.

Lời giải.

$MN//AC$; $MN=\dfrac{1}{2}AC$, $MNCA$ là hình thang.



$V_{MNKABC}=V_{K.MNCA}+V_{B.MNCA}$

DK cắt $(B'AC)$ tại B', $\dfrac{B'K}{B'D}=\dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow \dfrac{d\left(K;(MNCA)\right)}{d\left(D;(MNCA)\right)}=\dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow V_{K.MNCA}=\dfrac{1}{2}V_{D.MNCA}$

Mà: $V_{B.MNCA}=V_{D.MNCA}$ nên ta có

$V_{MNKABC}=\dfrac{1}{2}V_{B.MNCA}+V_{B.MNCA}=\dfrac{3}{2}V_{B.MNCA}$

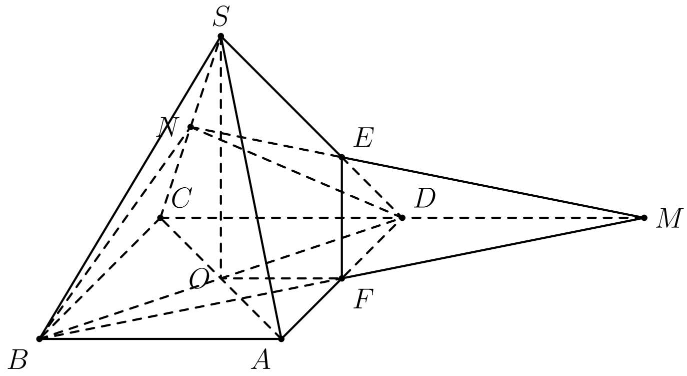
Mặt khác: $S_{MNCA}=\dfrac{3}{4}S_{B'AC}$

$$\begin{aligned}\Rightarrow V_{B.MNCA} &= \frac{3}{4}V_{B.B'AC}=\frac{3}{4}V_{B'.ABC}\\ &= \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{6}V_{ABCD.A'B'C'D'}=8\sqrt{3}a^3\end{aligned}$$

$V_{MNKABC}=\dfrac{3}{2}V_{B.MNCA}=\dfrac{3}{2}8\sqrt{3}\,a^3=12\sqrt{3}\,a^3$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 20. (Chuyên Sơn La-2020) Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a, cạnh bên hợp với đáy một góc $60°$. Gọi M là điểm đối xứng của C qua D, N là trung điểm SC. Mặt phẳng (BMN) chia khối chóp $S.ABCD$ thành hai phần (như hình vẽ bên). Tỉ số thể tích giữa hai phần $\dfrac{V_{SABFEN}}{V_{BFDCNE}}$ bằng



Ⓐ $\dfrac{7}{5}$. Ⓑ $\dfrac{7}{6}$. Ⓒ $\dfrac{7}{3}$. Ⓓ $\dfrac{7}{4}$.

Lời giải.

Ta có N là trung điểm của SO, D là trung điểm của CM nên E là trọng tâm tam giác SCM.

Ký hiệu h, S, V tương ứng là chiều cao, diện tích đáy và thể tích khối chóp $S.ABCD$ ta có

$S_{BCM} = S \Rightarrow V_{N.BCM} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{h}{2}.S = \dfrac{V}{2}$.

Khi đó $\dfrac{V_{M.EDF}}{V_{M.NCB}} = \dfrac{ME}{MN} \cdot \dfrac{MD}{MC} \cdot \dfrac{MF}{MB} = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{6} \Leftrightarrow V_{M.EDF} = \dfrac{V}{2} \cdot \dfrac{1}{6} = \dfrac{V}{12}$.

Như vậy $V_{BFDCNE} = \dfrac{V}{2} - \dfrac{V}{12} = \dfrac{5V}{12} \Rightarrow V_{SABFEN} = \dfrac{7V}{12} \Rightarrow \dfrac{V_{SABFEN}}{V_{BFDCNE}} = \dfrac{7}{5}$.

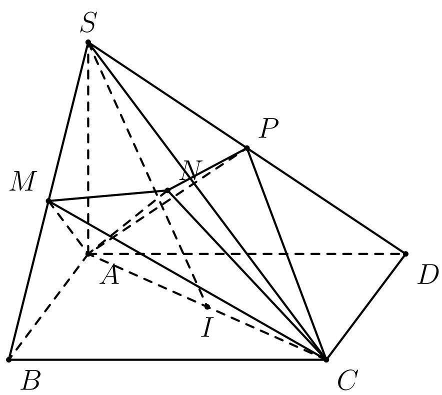
Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 21. (Chuyên Thái Bình-2020) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $2\sqrt{2}$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = 3$. Mặt phẳng (α) qua A và vuông góc với SC cắt các cạnh SB, SC, SD tại M, N, P. Tính thể tích mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $CMNP$

Ⓐ $\dfrac{32\pi}{3}$. Ⓑ $\dfrac{64\sqrt{2}\pi}{3}$. Ⓒ $\dfrac{108\pi}{3}$. Ⓓ $\dfrac{125\pi}{6}$.

Lời giải.

Ta có: $\begin{cases} SA \perp BC \\ AB \perp BC \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp MA.$



Lại có $MA \perp SC \Rightarrow MA \perp (SBC) \Rightarrow MA \perp MC \quad (1)$.

Tương tự: $AP \perp PC \quad (2)$.

Mặt khác $AN \perp NC \quad (3)$.

Gọi I là trung điểm của AC, từ (1) (2) (3) ta có

$IN = IM = IC = IP\,(= IA)$.

Suy ra mặt cầu ngoại tiếp $CMNP$ là mặt cầu tâm I, bán kính IA.

$IA = \dfrac{AC}{2} = \dfrac{\sqrt{\left(2\sqrt{2}\right)^2 + \left(2\sqrt{2}\right)^2}}{2} = 2.$

Thể tích khối cầu ngoại tiếp tứ diện $CMNP$ là:

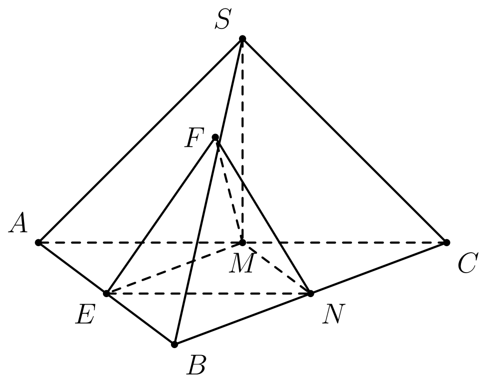
$V = \dfrac{4}{3}\pi 2^3 = \dfrac{32\pi}{3}$.

Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 22. (Chuyên Thái Nguyên-2020) Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân đỉnh B, $AB = 4$, $SA = SB = SC = 12$. Gọi M, N, E lần lượt là trung điểm của AC, BC, AB. Trên cạnh SB lấy điểm F sao cho $\dfrac{BF}{BS} = \dfrac{2}{3}$. Thể tích khối tứ diện $MNEF$ bằng

(A) $\dfrac{8\sqrt{34}}{3}$. (B) $\dfrac{4\sqrt{34}}{3}$. (C) $\dfrac{8\sqrt{34}}{9}$. (D) $\dfrac{16\sqrt{34}}{9}$.

Lời giải.



Vì $SA = SB = SC$ nên hình chiếu của S lên (ABC) là tâm đường tròn ngoại tiếp ABC, suy ra $SM \perp (ABC)$.

Từ $AB = 4 \Rightarrow AC = 4\sqrt{2}$.

Tam giác SAM vuông tại M nên

$SM = \sqrt{SA^2 - AM^2} = \sqrt{12^2 - \left(2\sqrt{2}\right)^2} = 2\sqrt{34}$. Khi đó

$$\begin{aligned} V_{S.ABC} &= \frac{1}{3} \cdot S_{ABC} \cdot SM = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot AB^2 \cdot SM \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4^2 \cdot 2\sqrt{34} = \frac{16\sqrt{34}}{3} \end{aligned}$$

Suy ra thể tích

$$\begin{aligned} V_{MNEF} &= \frac{1}{3} \cdot S_{MNE} \cdot d\left(F, (MNE)\right) \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot S_{ABC} \cdot \frac{2}{3} \cdot SM \\ &= \frac{1}{12} \cdot V_{S.ABC} = \frac{1}{12} \cdot \frac{32\sqrt{34}}{3} = \frac{8\sqrt{34}}{9}. \end{aligned}$$

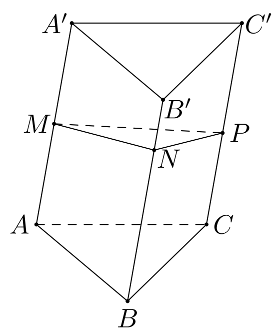
Chọn đáp án (C) □

Câu 23 (Nguyễn Huệ-Phú Yên-2020).

Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có chiều cao 8 và diện tích đáy bằng 11. Gọi M là trung điểm của AA', N là điểm trên cạnh BB' sao cho $BN = 3B'N$ và P là điểm trên cạnh CC' sao cho $6CP = 5C'P$. Mặt phẳng (MNP) cắt cạnh DD' tại Q. Thể tích của khối đa diện lồi có các đỉnh là các điểm A, B, C, D, M, N, P và Q bằng

(A) $\dfrac{88}{3}$. (B) 42. (C) 44. (D) $\dfrac{220}{3}$.

Lời giải.



Cho hình lăng trụ như hình vẽ

$V_{ABC.MNP} = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{AM}{AA'} + \dfrac{BN}{BB'} + \dfrac{CP}{CC'}\right) \cdot V_{ABC.A'B'C'}$.

Chứng minh:

$V_{ABC.MNP} = V_{N.ACB} + V_{N.ACPM}$

$V_{N.ACB} = \dfrac{BN}{BB'} \cdot V_{B'.ACB} = \dfrac{BN}{BB'} \cdot \dfrac{1}{3} \cdot V_{ABC.A'B'C'}$

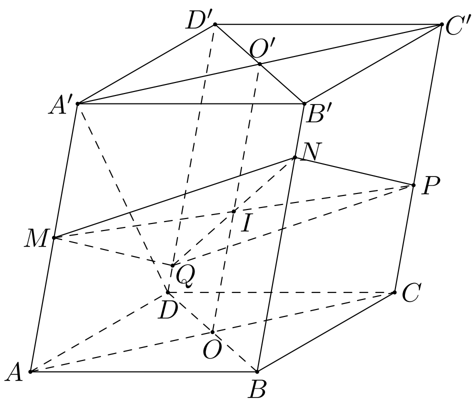
$\dfrac{V_{N.ACPM}}{V_{B'.ACC'A'}} = \dfrac{S_{ACPM}}{S_{ACC'A'}} = \dfrac{\frac{1}{2} \cdot (CP + AM)}{AA'} = \dfrac{1}{2} \cdot \left(\dfrac{CP}{CC'} + \dfrac{AM}{AA'}\right)$.

$\Rightarrow V_{N.ACPM} = \dfrac{1}{2} \cdot \left(\dfrac{CP}{CC'} + \dfrac{AM}{AA'}\right) \cdot \dfrac{2}{3} V_{ABC.A'B'C'}$

Từ đó ta suy ra điều phải chứng minh.

Bây giờ ta áp dụng vào giải bài toán.

Ta có $\begin{cases} (ADD'A') \parallel (BCC'B') \\ MQ \subset (MNP) \cap (ADD'A') \\ NP \subset (MNP) \cap (BCC'B') \end{cases} \Rightarrow NP \parallel MQ.$



Tương tự ta cũng có $MN \parallel PQ$. Do đó $MNPQ$ là hình bình hành.

Ta có OI là đường trung bình của hai hình thang $AMPC$ và $BNQD$ suy ra $2OI = MA + PC = DQ + NB$

$\Rightarrow \dfrac{MA}{AA'} + \dfrac{PC}{CC'} = \dfrac{BN}{BB'} + \dfrac{DQ}{DD'}$

Dựa vào hình vẽ ta chia khối lăng trụ làm hai phần khi cắt bởi mặt phẳng $(BDD'B')$. Do đó $V_{A'D'B'.ADB} = V_{BD'C'.BDC} = 44$.

$$\begin{aligned}
V_{ABCD.MNPQ} &= V_{ABD.MNQ} + V_{BCD.NPQ} \\
&= \frac{1}{3}\left(\frac{MA}{AA'} + \frac{BN}{BB'} + \frac{DQ}{DD'}\right) \cdot V_{ABD.A'B'D'} + \frac{1}{3}\left(\frac{CP}{CC'} + \frac{BN}{BB'} + \frac{DQ}{DD'}\right) \cdot V_{BCD.B'C'D'} \\
&= \frac{1}{3}\left(\frac{MA}{AA'} + \frac{BN}{BB'} + \frac{DQ}{DD'} + \frac{CP}{CC'} + \frac{BN}{BB'} + \frac{DQ}{DD'}\right) \cdot \frac{1}{2} V_{ABC.A'B'C'} \\
&= \frac{1}{3 \cdot 2}\left[3 \cdot \left(\frac{MA}{AA'} + \frac{CP}{CC'}\right)\right] \cdot V_{ABC.A'B'C'} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{MA}{AA'} + \frac{CP}{CC'}\right) \cdot V_{ABC.A'B'C'} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{5}{11}\right) \cdot 88 = 42.
\end{aligned}$$

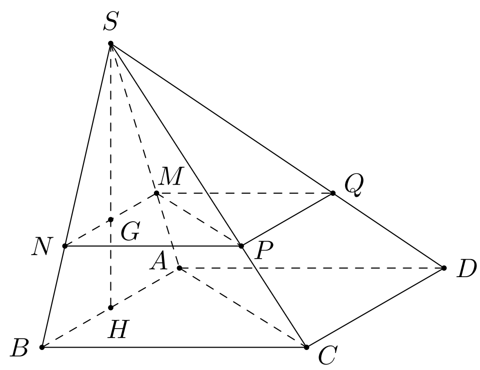
Chọn đáp án B □

Câu 24 (Nguyễn Trãi-Thái Bình-2020).

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông, mặt bên (SAB) là một tam giác đều nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$ và có diện tích bằng $\dfrac{27\sqrt{3}}{4}$ (đvdt). Một mặt phẳng đi qua trọng tâm tam giác SAB và song song với mặt đáy $(ABCD)$ chia khối chóp $S.ABCD$ thành hai phần. Tính thể tích V của phần chứa điểm S.

A $V = 8$. B $V = 24$. C $V = 36$. D $V = 12$.

Lời giải.



Gọi H là trung điểm AB. Do $\triangle SAB$ đều và $(SAB) \perp (ABCD)$ nên $SH \perp (ABCD)$.

Ta có $S_{\triangle SAB} = \dfrac{AB^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{27\sqrt{3}}{4} \Rightarrow AB = 3\sqrt{3} \Rightarrow SH = \dfrac{AB\sqrt{3}}{2} = \dfrac{3\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}{2} = \dfrac{9}{2}$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow V_{S.ABCD} &= \frac{1}{3}\cdot S_{ABCD}\cdot SH = \frac{1}{3}.AB^2\cdot SH \\ &= \frac{1}{3}\left(3\sqrt{3}\right)^2\cdot\frac{9}{2} = \frac{81}{2}\ (\text{đvtt}). \end{aligned}$$

Gọi G là trọng tâm tam giác SAB, qua G kẻ đường thẳng song song với AB, cắt SA và SB lần lượt tại M, N. Qua N kẻ đường thẳng song song với BC cắt SC tại P, qua M kẻ đường thẳng song song với AD cắt SD tại Q. Suy ra $(MNPQ)$ là mặt phẳng đi qua G và song song với $(ABCD)$.

Khi đó $\dfrac{SM}{SA} = \dfrac{SN}{SB} = \dfrac{SP}{SC} = \dfrac{SQ}{SD} = \dfrac{SG}{SH} = \dfrac{2}{3}$.

Có $\dfrac{V_{S.MNP}}{V_{S.ABC}} = \dfrac{SM}{SA}\cdot\dfrac{SN}{SB}\cdot\dfrac{SP}{SC} = \left(\dfrac{2}{3}\right)^3 = \dfrac{8}{27}$

$\Rightarrow V_{S.MNP} = \dfrac{8}{27}V_{S.ABC} = \dfrac{8}{27}\cdot\dfrac{1}{2}V_{S.ABCD} = \dfrac{4}{27}V_{S.ABCD}$.

Có $\dfrac{V_{S.MPQ}}{V_{S.ACD}} = \dfrac{SM}{SA}\cdot\dfrac{SP}{SC}\cdot\dfrac{SQ}{SD} = \left(\dfrac{2}{3}\right)^3 = \dfrac{8}{27}$.

$\Rightarrow V_{S.MPQ} = \dfrac{8}{27}V_{S.ACD} = \dfrac{8}{27}\cdot\dfrac{1}{2}V_{S.ABCD} = \dfrac{4}{27}V_{S.ABCD}$.

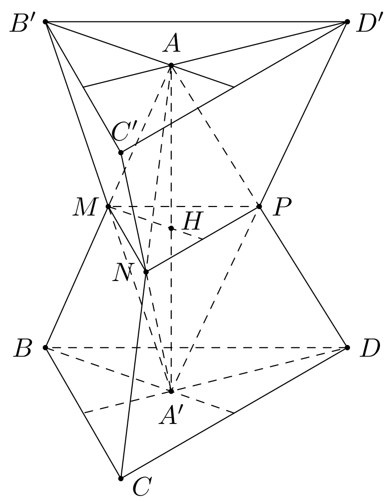
$V_{S.MNPQ} = V_{S.MNP} + V_{S.MPQ} = \dfrac{4}{27}V_{S.ABCD} + \dfrac{4}{27}V_{S.ABCD} = \dfrac{8}{27}V_{S.ABCD} = \dfrac{8}{27}\cdot\dfrac{81}{2} = 12$ (đvtt).

Chọn đáp án D □

Câu 25 (Tiên Du-Bắc Ninh-2020). Cho hai hình chóp tam giác đều có cùng chiều cao. Biết đỉnh của hình chóp này trùng với tâm của đáy hình chóp kia, mỗi cạnh bên của hình chóp này đều cắt một cạnh bên của hình chóp kia. Cạnh bên có độ dài bằng a của hình chóp thứ nhất tạo với đường cao một góc $30°$, cạnh bên của hình chóp thứ hai tạo với đường cao một góc $45°$. Tính thể tích phần chung của hai hình chóp đã cho.

A $\dfrac{3\left(2-\sqrt{3}\right)a^3}{64}$. B $\dfrac{\left(2-\sqrt{3}\right)a^3}{32}$. C $\dfrac{9\left(2-\sqrt{3}\right)a^3}{64}$. D $\dfrac{27\left(2-\sqrt{3}\right)a^3}{64}$.

Lời giải.



Hai hình chóp $A.BCD$ và $A'.B'C'D'$ là hai hình chóp đều, có chung đường cao AA', A là tâm của tam giác $B'C'D'$ và A' là tâm của tam giác BCD.

Ta có $(BCD)\ /\!\!/\ (B'C'D')$; $AB = AC = AD = a$; $\widehat{BAA'} = \alpha$; $\widehat{AA'B'} = \beta$.

Do AB cắt $A'B'$ tại M nên $AB'\ /\!\!/\ A'B$.

Gọi N là giao điểm của AC và $A'C'$; P là giao điểm của AD và $A'D'$.

Tương tự ta có: $AC'\ /\!\!/\ A'C$, $AD'\ /\!\!/\ A'D$.

Từ đó suy ra các cạnh của $\triangle BCD$ và $\triangle B'C'D'$ song song với nhau từng đôi một.

Ta có
$$\begin{cases}\dfrac{MB}{MA} = \dfrac{A'B}{AB'}\\ \dfrac{NC}{NA} = \dfrac{A'C}{AC'}\\ AB' = AC';\ A'B = A'C\end{cases} \Rightarrow \dfrac{MB}{MA} = \dfrac{NC}{NA} \Rightarrow MN\ /\!\!/\ BC.$$

Tương tự ta có $NP\ /\!\!/\ CD$ và $MP\ /\!\!/\ BD$.

Suy ra $\triangle MNP$ là tam giác đều. Gọi H là giao điểm của OO' và (MNP), H là tâm của tam giác MNP.

Trong tam giác $AA'D$ có $AA' = AD \cdot \cos\alpha = a \cdot \cos\alpha$. (1)

Đặt $x = MH$. Hai tam giác AHM và tam giác $A'HM$ vuông tại H cho
$$\begin{cases}AH = MH.\cot\alpha = x\cot\alpha\\ A'H = MH \cdot \cot\beta = x\cot\beta\end{cases} \Rightarrow AA' = x\left(\cot\alpha + \cot\beta\right).\ (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $a.\cos\alpha = x\left(\cot\alpha + \cot\beta\right) \Leftrightarrow x = \dfrac{a.\cos\alpha}{\cot\alpha + \cot\beta}$.

Tam giác MNP đều có cạnh $MN = x\sqrt{3}$ nên
$$S_{\triangle MNP} = \frac{MN^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}x^2}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a^2\cos^2\alpha}{\left(\cot\alpha + \cot\beta\right)^2}.$$

Phần chung của hai hình chóp $A.BCD$ và $A'.B'C'D'$ là hai hình chóp đỉnh A và A' có chung nhau mặt đáy là tam giác MNP. Do đó thể tích của nó là
$$V = \frac{1}{3}S_{\triangle MNP}\left(AH + A'H\right) = \frac{1}{3}S_{\triangle MNP} \cdot AA' = \frac{a^3\sqrt{3}\cos^3\alpha}{4\left(\cot\alpha + \cot\beta\right)^2}.$$

Với $\alpha = 30^\circ$ và $\beta = 45^\circ$ thì $V = \dfrac{9a^3}{32\left(\sqrt{3}+1\right)^2} = \dfrac{9\left(2-\sqrt{3}\right)a^3}{64}$.

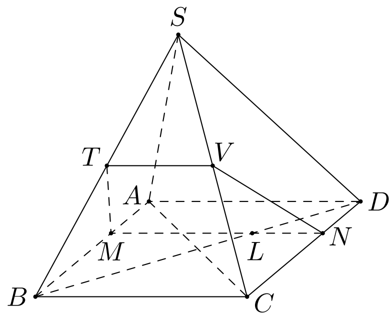
Chọn đáp án C □

Câu 26 (Lương Thế Vinh-Hà Nội-2020).

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành có diện tích bằng $12a^2$; khoảng cách từ S tới mặt phẳng $(ABCD)$ bằng $4a$. Gọi L là trọng tâm tam giác ACD; gọi T và V lần lượt là trung điểm các cạnh SB và SC. Mặt phẳng (LTV) chia hình chóp thành hai khối đa diện, hãy tính thể tích của khối đa diện chứa đỉnh S.

Ⓐ $\dfrac{20a^3}{3}$. Ⓑ $8a^3$. Ⓒ $\dfrac{28a^3}{3}$. Ⓓ $\dfrac{32a^3}{3}$.

Lời giải.



$V = V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}12a^2 \cdot 4a = 16a^3$.

Mặt phẳng (LTV) cắt AB, CD ở M và N sao cho $MN \parallel BC \parallel TV$.

Đặt $V' = V_{S.ADNMTV} = V_{S.ABMN} + V_{S.TVMN}$.

Ta có $V_{S.ADNM} = \dfrac{1}{3}V$.

Xét khối chóp $S.MNCB$ có đáy là hình bình hành

$a = \dfrac{SM}{SM} = 1$; $b = \dfrac{SN}{SN} = 1$; $c = \dfrac{SB}{ST} = 2$; $d = \dfrac{SC}{SV} = 2$.

Khi đó

$\dfrac{V_{S.TVMN}}{V_{S.MNBC}} = \dfrac{a+b+c+d}{4abcd} = \dfrac{3}{8} \Rightarrow V_{S.TVMN} = \dfrac{2}{3}V.\dfrac{3}{8} = \dfrac{1}{4}V$.

Do đó $V' = \dfrac{1}{3}V + \dfrac{1}{4}V = \dfrac{7}{12}V = \dfrac{7}{12} \cdot 16a^3 = \dfrac{28}{3}a^3$.

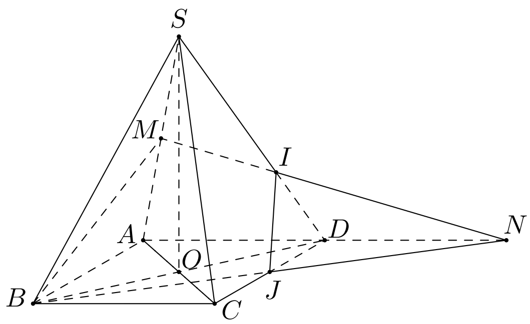
Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 27 (Thanh Chương 1-Nghệ An-2020).

Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có thể tích bằng 1. Gọi M là trung điểm của SA và N là điểm đối xứng của của A qua D . Mặt phẳng (BMN) chia khối chóp thành hai khối đa diện. Gọi (H) là khối đa diện có chứa đỉnh. Thể tích của khối đa diện (H) bằng

Ⓐ $\dfrac{7}{12}$. Ⓑ $\dfrac{4}{7}$. Ⓒ $\dfrac{5}{12}$. Ⓓ $\dfrac{3}{7}$.

Lời giải.



Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$ ta có SO là chiều cao của hình chóp.

Trong mặt phẳng (SAD) gọi I là giao điểm của MN và SD ta suy ra I là trọng tâm của tam giác SAN.

Do đó $\dfrac{SI}{SD} = \dfrac{NI}{NM} = \dfrac{2}{3}$.

Trong mặt phẳng $(ABCD)$ gọi J là giao điểm của BN và CD ta suy ra J là trung điểm của CD và BN.

Ta có $S_{\triangle ABN} = S_{ABCD}$ và $d(M, (ABCD)) = \dfrac{1}{2}SO$ suy ra $V_{MABN} = \dfrac{1}{2}V_{S.ABCD}$. (1)

Từ giả thiết ta có $V_{(H)} = V_{S.ABCD} - V_{ABM.DJI}$. (2)

Xét trong khối chóp $N.ABM$ áp dụng công thức tính tỷ số thể tích ta có

$\dfrac{V_{NDJI}}{V_{NABM}} = \dfrac{NI}{NM} \cdot \dfrac{ND}{NA} \cdot \dfrac{NJ}{NB} = \dfrac{1}{6} \Leftrightarrow V_{NDJI} = \dfrac{1}{6}V_{NABM}$.

Do vậy $V_{ABM.DJI} = \dfrac{5}{6}V_{NABM} = \dfrac{5}{6}V_{MABN}$. (3)

Từ (1), (2) và (3) ta có thể tích của (H) là

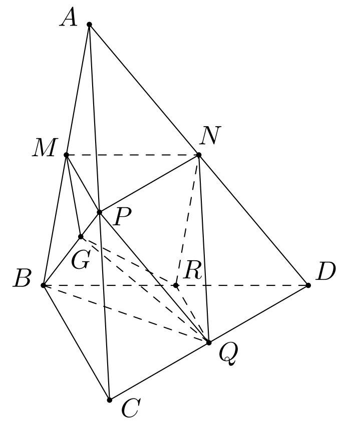
$V_{(H)} = V_{S.ABCD} - \dfrac{5}{6} \cdot \dfrac{1}{2}V_{S.ABCD} = \dfrac{7}{12}$.

Vậy thể tích của khối đa diện (H) bằng $\dfrac{7}{12}$.

Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 28 (Tiên Lãng-Hải Phòng-2020).

Cho tứ diện $ABCD$ có thể tích V. Gọi M, N, P, Q, R lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, AD, AC, DC, BD và G là trọng tâm tam giác ABC (như hình vẽ). Tính thể tích khối đa diện lồi $MNPQRG$ theo V.



(A) $\frac{V}{2}$. (B) $\frac{V}{6}$. (C) $\frac{V}{3}$. (D) $\frac{2V}{5}$.

Lời giải.

Ta có $V_{MNPQRG} = V_{G.MPQR} + V_{N.MPQR}$

$V_{G.MPQR} = \frac{1}{3}V_{B.MPQR} = \frac{2}{3}V_{B.PQR} = \frac{2}{3}V_{P.BQR} = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}V_{A.BQR} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}V_{A.BCD} = \frac{1}{12}V$.

$V_{N.MPQR} = 2V_{N.MPR} = 2\cdot V_{P.MNR} = 2\cdot\frac{1}{2}V_{C.MNR} = \frac{1}{4}V_{C.ABD} = \frac{1}{4}V$.

Vậy $V_{MNPQRG} = \frac{1}{12}V + \frac{1}{4}V = \frac{V}{3}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 29 (Trần Phú-Quảng Ninh-2020).

Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có thể tích bằng 6. Gọi M, N và P là các điểm nằm trên cạnh $A'B'$, $B'C'$ và BC sao cho M là trung điểm của $A'B'$, $B'N = \frac{3}{4}B'C'$ và $BP = \frac{1}{4}BC$. Đường thẳng NP cắt đường thẳng BB' tại E và đường thẳng EM cắt đường thẳng AB tại Q. Thể tích của khối đa diện lồi $AQPCA'MNC'$ bằng

(A) $\frac{23}{3}$. (B) $\frac{23}{6}$. (C) $\frac{59}{12}$. (D) $\frac{19}{6}$.

Lời giải.

Ta có $\frac{EB}{EB'} = \frac{EQ}{EM} = \frac{EP}{EN} = \frac{BP}{B'N} = \frac{1}{3}$.

Suy ra $\mathrm{d}\left(E,(A'B'C')\right) = \frac{3}{2}\mathrm{d}\left(B,(A'B'C')\right)$.

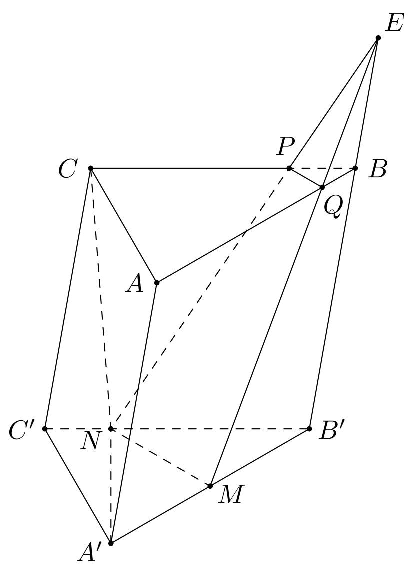
Mà ta lại có $\frac{S_{B'MN}}{S_{A'B'C'}} = \frac{B'N}{B'C'}\cdot\frac{B'M}{B'A'} = \frac{3}{8}$.

$V_{E.MB'N} = \frac{1}{3}\mathrm{d}\left(E,(MB'N)\right)\cdot S_{MB'N} = \frac{3}{16}V_{ABC.A'B'C'} = \frac{9}{8}$.

Ta lại có $\frac{V_{E.QPB}}{V_{E.MNB'}} = \frac{EQ}{EM}\cdot\frac{EP}{EN}\cdot\frac{EB}{EB'} = \left(\frac{EB}{EB'}\right)^3 = \frac{1}{27}$.

Suy ra $V_{BQP.B'MN} = V_{E.MB'N} - V_{EBQP} = \frac{26}{27}V_{E.MB'N}$.

$V_{AQPCA'MNC'} = V_{ABC.A'B'C'} - V_{BQP.B'MN} = 6 - \frac{26}{27}\cdot\frac{9}{8} = \frac{59}{12}$.



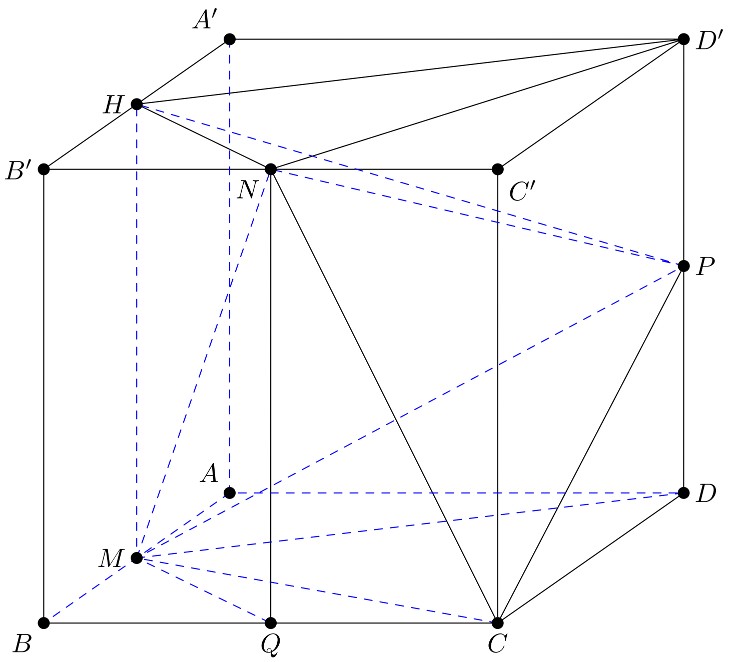
Chọn đáp án (C) □

Câu 30 (Sở Hà Tĩnh - 2021). Cho khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có thể tích bằng V. Gọi M, N, P

lần lượt là trung điểm của AB, $B'C'$, DD'. Gọi thể tích khối tứ diện $CMNP$ là V', khi đó tỉ số $\dfrac{V'}{V}$ bằng

Ⓐ $\dfrac{1}{16}$. Ⓑ $\dfrac{3}{16}$. Ⓒ $\dfrac{1}{64}$. Ⓓ $\dfrac{3}{64}$.

Lời giải.



Ta có

$V = V' + V_{B'HN.BMQ} + V_{A'HD'.AMD} + V_{N.MQC} + V_{P.NCC'} + V_{P.D'C'N} + V_{P.D'HN} + V_{P.HNM} + V_{P.MDC}$.

Gọi S là diện tích đáy và h là chiều cao khối hộp.

Xét: $V_{B'HN.BMQ} = \dfrac{1}{8}Sh$, $V_{A'HD'.AMD} = \dfrac{1}{4}Sh$, $V_{N.MQC} = \dfrac{1}{24}Sh$, $V_{P.NCC'} = \dfrac{1}{12}Sh$,

$V_{P.D'C'N} = \dfrac{1}{24}Sh$, $V_{P.D'HN} = \dfrac{1}{16}Sh$, $V_{P.HNM} = V_{D'.HNM} = V_{M.HND'} = \dfrac{1}{8}Sh$, $V_{P.MDC} = \dfrac{1}{12}Sh$.

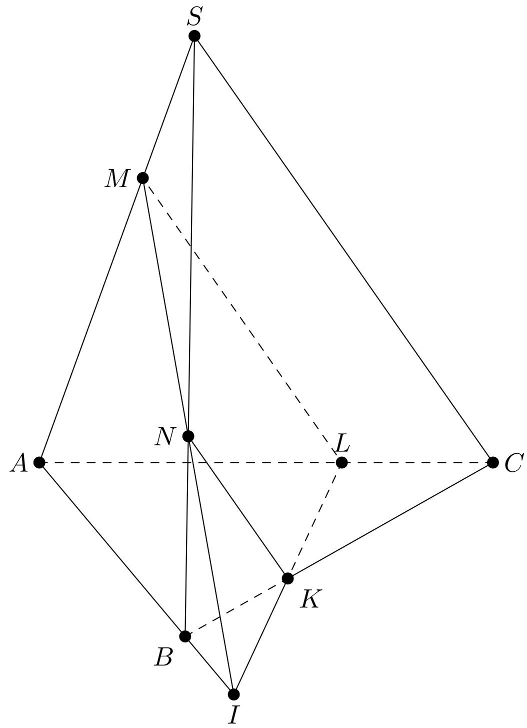
Suy ra: $V = V' + \dfrac{13}{16}V \Leftrightarrow V' = \dfrac{3}{16}V \Leftrightarrow \dfrac{V'}{V} = \dfrac{3}{16}$.

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 31 (Sở Tuyên Quang - 2021). Cho tứ diện $SABC$ và hai điểm M, N lần lượt thuộc các cạnh SA, SB sao cho $\dfrac{SM}{AM} = \dfrac{1}{2}$, $\dfrac{SN}{BN} = 2$. Mặt phẳng (P) đi qua hai điểm M, N và song song với cạnh SC cắt AC, BC lần lượt tại L, K. Gọi V, V' lần lượt là thể tích các khối đa diện $SCMNKL$, $SABC$. Tỉ số $\dfrac{V}{V'}$ bằng

Ⓐ $\dfrac{2}{3}$. Ⓑ $\dfrac{4}{9}$. Ⓒ $\dfrac{1}{4}$. Ⓓ $\dfrac{1}{3}$.

Lời giải.



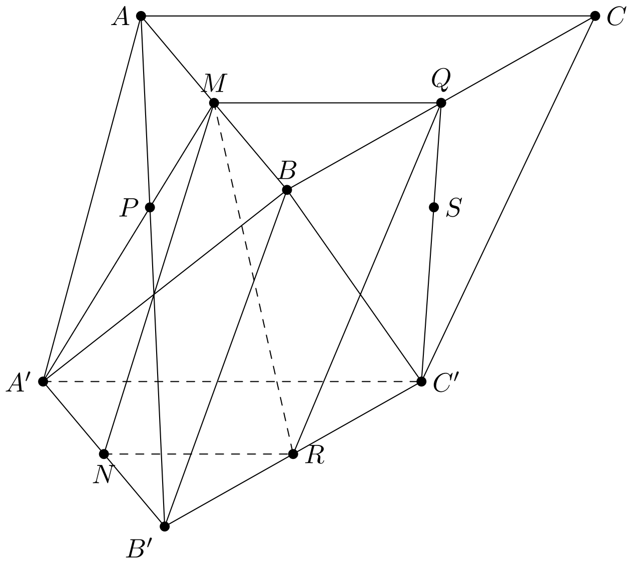
Gọi I là giao điểm của AB, MN, KL.
Do $ML \parallel SC$ và $NK \parallel SC$ nên ta có $\dfrac{AM}{AS} = \dfrac{AL}{AC} = \dfrac{2}{3}$ và $\dfrac{BN}{BS} = \dfrac{BK}{BC} = \dfrac{1}{3}$.
Ta có $\dfrac{MA}{MS} \cdot \dfrac{NS}{NB} \cdot \dfrac{IB}{IA} = 1$ suy ra $\dfrac{IB}{IA} = \dfrac{1}{4}$.
Ta có $\dfrac{CL}{CA} \cdot \dfrac{BA}{BI} \cdot \dfrac{KI}{KL} = 1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{3}{1} \cdot \dfrac{KI}{KL} = 1 \Leftrightarrow KL = KI$
suy ra $MN = NI$ hay $\dfrac{IN}{IM} = \dfrac{IK}{IL} = \dfrac{1}{2}$.
Xét hình chóp $IAML$ ta có $\dfrac{V_{I.BNK}}{V_{I.AML}} = \dfrac{IB \cdot IN \cdot IK}{IA \cdot IM \cdot IL} = \dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{16}$.
Mặt khác ta có $V_{IAML} = \dfrac{1}{3} d(I;(AML)) \cdot S_{\triangle AML} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{4}{3} d(B;(AML)) \cdot \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{2}{3} S_{\triangle SAC} = \dfrac{16}{27} V_{SABC}$.
Suy ra $\dfrac{V_{I.BNK}}{V_{SABC}} = \dfrac{1}{16} \cdot \dfrac{16}{27} = \dfrac{1}{27}$.
Suy ra $V_{I.BNK} = \dfrac{1}{27} \cdot V' \Rightarrow V_{BNKAML} = \dfrac{16}{27} V' - \dfrac{1}{27} \cdot V' = \dfrac{5}{9} V'$.
Ta có $V_{SCMNKL} = V' - V_{BNKAML} = V' - \dfrac{5}{9} V' = \dfrac{4}{9} V'$.
Từ đó ta có $\dfrac{V}{V'} = \dfrac{4}{9}$.
Chọn đáp án B □

Câu 32 (Liên trường Quỳnh Lưu - Hoàng Mai - Nghệ An - 2021).
Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Gọi M, N, Q, R lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, $A'B'$, BC, $B'C'$ và P, S lần lượt là trọng tâm của các tam giác $AA'B$, $CC'B$. Tỉ số thể tích khối đa diện $MNRQPS$ và khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là

A $\dfrac{1}{9}$. B $\dfrac{5}{54}$. C $\dfrac{1}{10}$. D $\dfrac{2}{27}$.

Lời giải.

(*) Cách 1:



☑ Đặt: $V = V_{ABC.A'B'C'}$; $V_{B'.AA'C'C} = \dfrac{1}{3}S_{AA'C'C} \cdot d\left(B', (AA'C'C)\right) = \dfrac{2}{3}V$.

$$\begin{aligned}V_{B'.MNRQ} &= \frac{1}{3} \cdot S_{MNRQ} \cdot d\left(B', (MNRQ)\right)\\ &= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}S_{AA'C'C}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}d\left(B', (AA'C'C)\right)\right)\\ &= \left(\frac{1}{3} \cdot S_{AA'C'C} \cdot d\left(B', (AA'C'C)\right)\right) \cdot \frac{1}{4}\\ &= \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3}V = \frac{1}{6}V.\end{aligned}$$

$V_{P.MNRQ} = \dfrac{1}{3} \cdot V_{A'.MNRQ} = \dfrac{1}{3} \cdot V_{B'.MNRQ} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{6}V = \dfrac{1}{18}V$.

☑ $V_{A.BB'C'C} = \dfrac{1}{3}S_{BB'C'C} \cdot d\left(A, (BB'C'C)\right) = \dfrac{2}{3}V$.

$S_{\triangle QRC'} = \dfrac{1}{2}S_{QRC'C} = \dfrac{1}{4}S_{BB'C'C}$;

$S_{\triangle QRS} = \dfrac{1}{3}S_{QRC'} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{4}S_{BB'C'C} = \dfrac{1}{12}S_{BB'C'C}$.

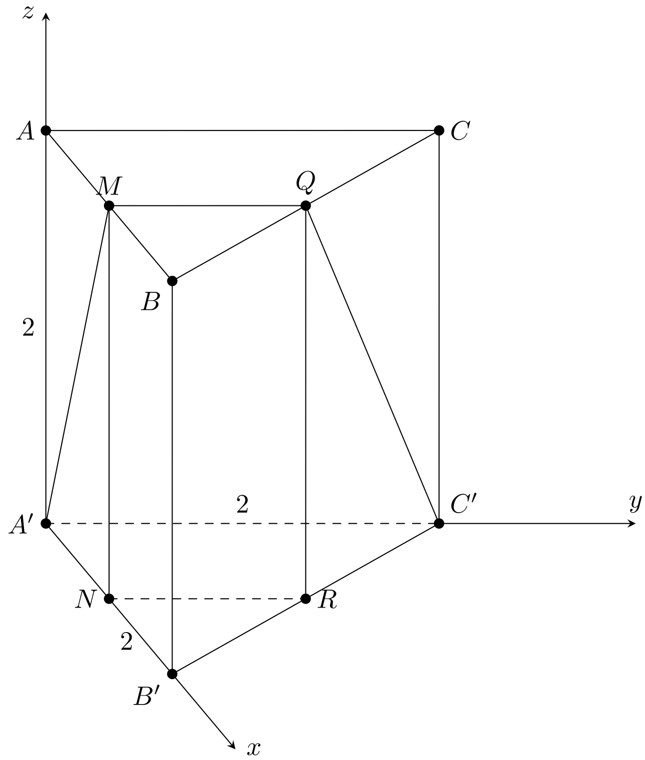
$$\begin{aligned}V_{A.QRS} &= \frac{1}{3}S_{\triangle QRS} \cdot d\left(A, (QRS)\right)\\ &= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{12}S_{BB'C'C}\right) \cdot \left(d\left(A, (BB'C'C)\right)\right)\\ &= \left(\frac{1}{3} \cdot S_{BB'C'C} \cdot d\left(A, (BB'C'C)\right)\right) \cdot \frac{1}{12}\\ &= \frac{1}{12} \cdot \frac{2}{3}V = \frac{1}{18}V.\end{aligned}$$

$V_{P.QRS} = \dfrac{PB'}{AB'} \cdot V_{A.QRS} = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{1}{18}V = \dfrac{1}{27}V$.

$V_{MNRQPS} = V_{P.MNRQ} + V_{P.QRS} = \dfrac{1}{18}V + \dfrac{1}{27}V = \dfrac{5}{54}V$.

Vậy: $\dfrac{V_{MNRQPS}}{V_{ABC.A'B'C'}} = \dfrac{5}{54}$.

(*) Cách 2:



☑ Chuẩn hóa lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là lăng trụ đứng có đáy $\triangle ABC$ vuông tại A và các cạnh $AB = AC = AA' = 2$.

Khi đó: $V_{ABC.A'B'C'} = \left(\dfrac{1}{2}\cdot 2\cdot 2\right)\cdot 2 = 4$.

Đặt khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ vào hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho: $A' \equiv O$ và B', C', A lần lượt nằm trên chiều dương của các trục Ox, Oy, Oz (như hình vẽ).

Ta có $A'(0;0;0)$, $B'(2;0;0)$, $C'(0;2;0)$, $A(0;0;2)$, $B(2;0;2)$, $C(0;2;2)$ $M(1;0;2)$, $N(1;0;0)$, $R(1;1;0)$, $Q(1;1;2)$, $P\left(\dfrac{2}{3};0;\dfrac{4}{3}\right)$, $\overrightarrow{SC'} = -2\overrightarrow{SQ} \Rightarrow S = \left(\dfrac{2}{3};\dfrac{4}{3};\dfrac{4}{3}\right)$.

$\overrightarrow{PM} = \left(\dfrac{1}{3};0;\dfrac{2}{3}\right)$, $\overrightarrow{PR} = \left(\dfrac{1}{3};1;-\dfrac{4}{3}\right)$, $\overrightarrow{PQ} = \left(\dfrac{1}{3};1;\dfrac{2}{3}\right)$, $\overrightarrow{PS} = \left(0;\dfrac{4}{3};0\right)$.

$V_{P.MQR} = \dfrac{1}{6}\cdot\left|\left[\overrightarrow{PM};\overrightarrow{PQ}\right]\right|\cdot\overrightarrow{PR} = \dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{9}$;

$V_{P.MQRN} = 2\cdot V_{P.MQR} = \dfrac{2}{9}$.

$V_{P.QRS} = \dfrac{1}{6}\cdot\left|\left[\overrightarrow{PR};\overrightarrow{PQ}\right]\right|\cdot\overrightarrow{PS} = \dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{8}{9} = \dfrac{4}{27}$.

☑ $V_{MNRQPS} = V_{P.MQRN} + V_{P.QRS} = \dfrac{2}{9} + \dfrac{4}{27} = \dfrac{10}{27}$.

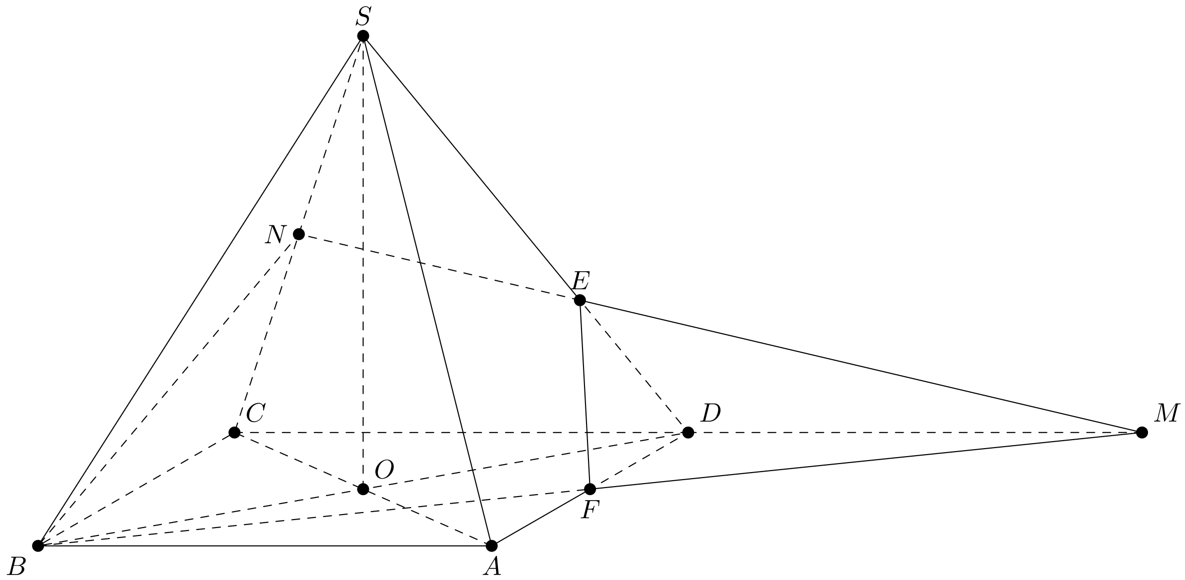
Vậy: $\dfrac{V_{MNRQPS}}{V_{ABC.A'B'C'}} = \dfrac{\frac{10}{27}}{4} = \dfrac{5}{54}$.

Chọn đáp án B □

Câu 33 (Chuyên KHTN - 2021). Cho khối chóp tứ giác $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a và cạnh bên bằng $2a$. Gọi M là điểm đối xứng của C qua D, N là trung điểm của SC. Mặt phẳng (BMN) chia khi chóp đã cho thành 2 phần. Thể tích của phần chứa đỉnh S bằng

A. $\dfrac{3\sqrt{14}a^3}{32}$. B. $\dfrac{5\sqrt{14}a^3}{72}$. C. $\dfrac{7\sqrt{14}a^3}{96}$. D. $\dfrac{7\sqrt{14}a^3}{72}$.

Lời giải.



Giả sử các điểm như hình vẽ. $F = (BMN) \cap AD$; Kẻ $OH \perp SF$.

Gọi $E = SD \cap MN \Rightarrow E$ là trọng tâm $\triangle SCM$, $DF \parallel BC \Rightarrow F$ là trung điểm BM.

Ta có $SO = \sqrt{SD^2 - DO^2} = \sqrt{(2a)^2 - \left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{4a^2 - \dfrac{a^2}{2}} = \dfrac{a\sqrt{14}}{2}$.

$\Rightarrow SF = \sqrt{SO^2 + OF^2} = \sqrt{\left(\dfrac{a\sqrt{14}}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{a}{2}\right)^2} = \dfrac{a\sqrt{15}}{2}$.

- $d(M;(SBC)) = 4 \cdot d(O;(SAD)) = 4OH = 4\dfrac{SO \cdot OF}{SF} = \dfrac{2a\sqrt{210}}{15}$;

  $S_{\triangle SAD} = \dfrac{1}{2} \cdot SF \cdot AD = \dfrac{a^2\sqrt{15}}{4}$.

- $\dfrac{V_{MEFD}}{V_{MNBC}} = \dfrac{ME}{MN} \cdot \dfrac{MF}{MB} \cdot \dfrac{MD}{MC} = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{6} \Rightarrow V_{MEFD} = \dfrac{1}{6} \cdot V_{MNBC}$.

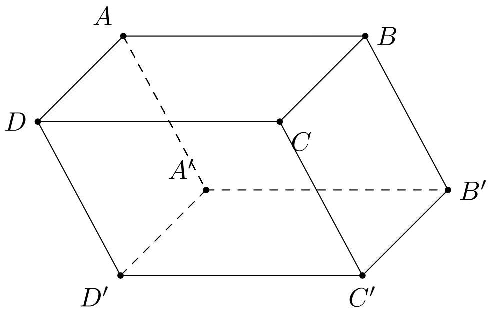
$$\begin{aligned}\Rightarrow V_{BFDCNE} &= \frac{5}{6} \cdot V_{MNBC}\\ &= \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{3} \cdot d(M;(SBC)) \cdot \frac{1}{2} \cdot S_{\triangle SBC}\\ &= \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{3} \cdot 4OH \cdot \frac{1}{2} \cdot S_{\triangle SAD} = \frac{5a^3\sqrt{14}}{72}.\end{aligned}$$

Suy ra $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3} \cdot SO \cdot S_{ABCD} = \dfrac{a^3\sqrt{14}}{6} \Rightarrow V_{SABFEN} = V_{S.ABCD} - V_{BFDCNE} = \dfrac{7a^3\sqrt{14}}{72}$.

Chọn đáp án D □

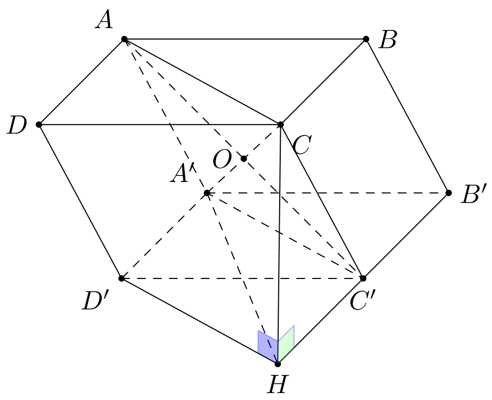
Câu 34 (Chuyên Quang Trung - Bình Phước - 2021).

Cho hình lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ đáy là hình bình hành. Với $AC = BC = a$, $CD = a\sqrt{2}$, $AC' = a\sqrt{3}$, $\widehat{CA'B'} = \widehat{A'D'C} = 90°$. Thể tích khối tứ diện $BCDA'$ là



Ⓐ $\dfrac{a^3}{6}$. Ⓑ a^3. Ⓒ $\dfrac{2a^3}{3}$. Ⓓ $\sqrt{6}a^3$.

Lời giải.



Ta có tam giác ABC vuông cân tại C.

Gọi O là trung điểm của $AC' \Rightarrow OC' = OA = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Gọi H là chân đường cao hạ từ C xuống mặt $(A'B'C'D')$.

Ta có $\begin{cases} A'D' \perp CH \\ A'D' \perp D'C \end{cases} \Rightarrow A'D' \perp HD'$.

Lại có: $\begin{cases} A'B' \perp A'C \\ A'B' \perp CH \end{cases} \Rightarrow A'B' \perp A'H$.

Ta có $A'H \perp A'B' \Rightarrow \widehat{HA'B'} = 90°$; $\widehat{A'D'H} = 90°$. Tam giác $A'D'H$ vuông cân tại D'.

Giả sử $CH = x \Rightarrow CA' = \sqrt{x^2 + 2a^2}$.

$CC'^2 = x^2 + a^2$

$C'O = \dfrac{CC'^2 + C'A'^2}{2} - \dfrac{CA'^2}{4} \Leftrightarrow \dfrac{3a^2}{4} = \dfrac{x^2 + a^2 + a^2}{2} - \dfrac{x^2 + 2a^2}{4} = \dfrac{x^2 + 2a^2}{4}$.

Suy ra $x^2 + 2a^2 = 3a^2 \Rightarrow x = a = CH$.

Vậy $V_{BCDA'} = \dfrac{1}{6} V_{ABCD.A'B'C'D} = \dfrac{1}{6} \cdot CH \cdot S_{ABCD} = \dfrac{a^3}{6}$.

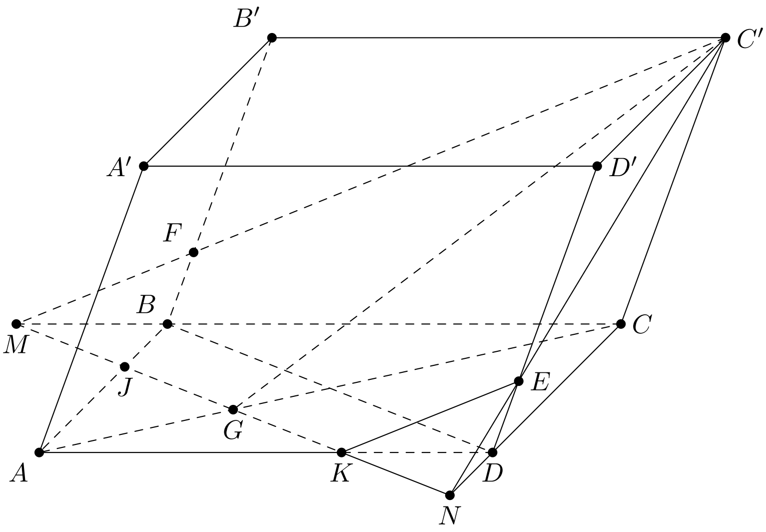
Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 35 (THPT Hoàng Hoa Thám - Đà Nẵng - 2021).

Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABD. Mặt phẳng (P) đi qua hai điểm C', G và song song với đường thẳng BD, chia khối hộp thành hai phần có thể thể tích V_1, V_2 $(V_1 < V_2)$. Tỉ số $\dfrac{V_1}{V_2}$ bằng

Ⓐ $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{1}{2}$. Ⓑ $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{7}{17}$. Ⓒ $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{2}{3}$. Ⓓ $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{31}{77}$.

Lời giải.



- Gọi V là thể tích khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$.
  Dựng $\Delta = (P) \cap (ABCD)$, ta có $\Delta \parallel BD$ (do $(P) \parallel BD$).
  Gọi M, J, K, N lần lượt là giao điểm của Δ với BC, AB, AD, DC và F, E lần lượt là giao điểm của MC' với BB' và NC' với DD'.
- Ta có $\dfrac{CM}{CB} = \dfrac{CN}{CD} = \dfrac{4}{3}$. Suy ra $S_{CMN} = \left(\dfrac{4}{3}\right)^2 \cdot S_{CBD} = \dfrac{16}{9} S_{CBD}$.
  Mặt khác $\dfrac{JB}{JA} = \dfrac{JM}{JK} = \dfrac{1}{2}$. Suy ra $S_{JBM} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 \cdot S_{JAK} = \dfrac{1}{4} S_{JAK}$.
  Mà $\dfrac{AJ}{AB} = \dfrac{AK}{AD} = \dfrac{2}{3}$. Suy ra $S_{AJK} = \left(\dfrac{2}{3}\right)^2 \cdot S_{ABD} = \dfrac{4}{9} S_{ABD}$.
  Suy ra $S_{JBM} = \dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{4}{9} S_{ABD} = \dfrac{1}{9} S_{ABD}$.
- Tương tự $S_{NKD} = \dfrac{1}{9} S_{ABD}$.
- Ta lại có $\dfrac{d\,(C', (ABCD))}{d\,(F, (ABCD))} = \dfrac{MC'}{MF} = 4 \Rightarrow h = d\,(C', (ABCD)) = 4d\,(F, (ABCD))$.
- Tương tự $h = d\,(C', (ABCD)) = 4d\,(E, (ABCD))$.
- Thể tích
$$\begin{aligned} V_1 &= V_{C'.CMN} - V_{F.MBJ} - V_{E.KDN} \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{16}{9} S_{BCD} \cdot h - 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{9} S_{BCD} \cdot \frac{1}{4} h \\ &= \frac{31}{54} S_{BCD} \cdot h \\ &= \frac{31}{108} S_{ABCD} \cdot h \\ &= \frac{31}{108} V \Rightarrow V_2 = \frac{77}{108} V. \end{aligned}$$

Vậy $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{31}{77}$.

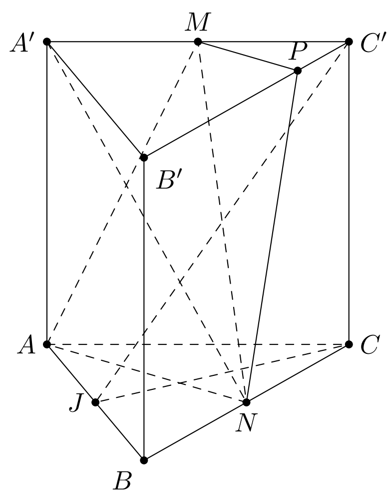
Chọn đáp án (D) □

Câu 36 (THPT Chu Văn An - Thái Nguyên - 2021).

Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy tam giác vuông cân tại C. $BA = 2a$ và góc tạo bởi (ABC') và (ABC) bằng $60°$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của $A'C'$ và BC. Mặt (AMN) chia khối lăng trụ thành hai phần. Tìm thể tích phần nhỏ.

(A) $\dfrac{7\sqrt{3}a^3}{24}$. (B) $\dfrac{7\sqrt{6}a^3}{24}$. (C) $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{3}$. (D) $\dfrac{\sqrt{6}a^3}{6}$.

Lời giải.



Kẻ $MP \parallel A'B'$

Góc tạo bởi (ABC') và (ABC) là góc $\widehat{C'JC} = 60°$ với J là trung điểm AB.

$CC' = CJ \cdot \tan 60° = a\sqrt{3}$.

$S_{ABC} = \dfrac{1}{2}CJ \cdot AB = a^2$.

$S_1 = S_{ACN} = \dfrac{1}{2}S_{ABC} = \dfrac{1}{2}a^2$.

$S_2 = S_{C'MP} = \dfrac{1}{4}S_{ABC} = \dfrac{1}{2}C'M \cdot C'P = \dfrac{1}{8}a^2$.

$V = \dfrac{CC'}{3}(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1S_2}) = \dfrac{7\sqrt{3}a^3}{24}$.

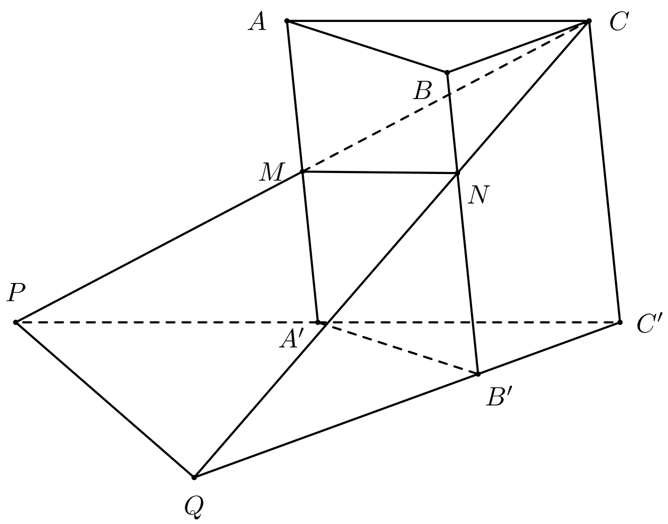
Chọn đáp án (A) □

Câu 37 (THPT Ba Đình - Thanh Hóa - 2021).

Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có thể tích bằng 2. Gọi M, N là các điểm lần lượt nằm trên các cạnh AA', BB' sao cho M là trung điểm của AA' và $BN = \dfrac{1}{2}B'N$. Đường thẳng CM cắt đường thẳng $A'C'$ tại điểm P, đường thẳng CN cắt đường thẳng $A'B'$ tại Q. Tính thể tích của khối đa diện $A'MPB'NQ$ bằng.

(A) $\dfrac{13}{18}$. (B) $\dfrac{23}{9}$. (C) $\dfrac{21}{9}$. (D) $\dfrac{7}{18}$.

Lời giải.



Đặt $S = S_{\triangle A'B'C'}$ và $h = d(C, (A'B'C'))$ ta có $V_{ABC.A'B'C'} = hS = 2$.

Trong mặt phẳng $(AA'C'C)$ ta có $\begin{cases} A'M = \dfrac{1}{2}CC' \\ A'M \subset CC' \end{cases}$ nên ta có A' là trung điểm của PC'.

Tương tự trong mặt mặt phẳng $(BCC'B')$ ta có $C'B' = \dfrac{1}{3}C'Q$.

Từ đây ta có diện tích tam giác $C'PQ$ là $S_{\triangle C'PQ} = 6S$ do vậy thể tích khối tứ diện $CC'PQ$ là $V_{CC'PQ} = \dfrac{1}{3}h \cdot 6S = 2hS = 4$.

Trong khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ ta có

$$\frac{V_{CABMN}}{V_{CAB.C'A'B'}} = \frac{1}{3}\left(\frac{AM}{A'M} + \frac{BN}{B'N} + \frac{CC}{CC'}\right) = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + 0}{3} = \frac{5}{18}.$$

Suy ra $V_{CABMN} = \dfrac{5}{18}.V_{CAB.C'A'B'} = \dfrac{5}{9}$ do đó thể tích khối $A'B'C'MNC$ bằng $2 - \dfrac{5}{9} = \dfrac{13}{9}$.

Do vậy thể tích của khối đa diện $A'MPB'NQ$ bằng $4 - \dfrac{13}{9} = \dfrac{23}{9}$.

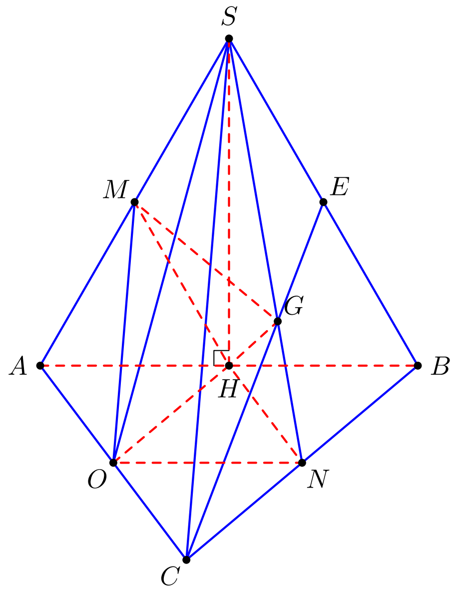
Chọn đáp án B □

Câu 38 (THPT Quốc Oai - Hà Nội - 2021).

Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a, mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi H, M, O lần lượt là trung điểm các cạnh AB, SA, AC và G là trọng tâm tam giác SBC. Thể tích khối tứ diện $GHMO$ bằng

A $\dfrac{3a^3}{64}$. B $\dfrac{3a^3}{128}$. C $\dfrac{a^3}{128}$. D $\dfrac{a^3}{64}$.

Lời giải.



Gọi N, E lần lượt là trung điểm của CB và SB.

Ta có $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}S_{\triangle ABC} \cdot SH = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a^3}{8}$.

$+) S_{OAHN} = \dfrac{1}{2}S_{\triangle ABC} \Rightarrow V_{S.OAHN} = \dfrac{1}{2}V_{S.ABC} = \dfrac{a^3}{16}$, $V_{S.AHN} = V_{S.OAN} = \dfrac{1}{2}V_{S.AHNO} = \dfrac{a^3}{32}$.

$+) \dfrac{V_{S.GMH}}{V_{S.NAH}} = \dfrac{SG}{SN} . \dfrac{SM}{SA} \cdot \dfrac{SH}{SH} = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow V_{S.GMH} = \dfrac{1}{3}V_{S.NAH} = \dfrac{a^3}{96}$.

$+) \dfrac{V_{S.GMO}}{V_{S.NAO}} = \dfrac{SG}{SN} \cdot \dfrac{SM}{SA} \cdot \dfrac{SO}{SO} = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow V_{S.GMO} = \dfrac{1}{3}V_{S.NAO} = \dfrac{a^3}{96}$.

$+) V_{G.ONH} = \dfrac{1}{3}d(G,(ABC)) \cdot S_{\triangle ONH} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{3}SH \cdot \dfrac{1}{4}S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{12} \cdot \dfrac{1}{3}SH \cdot S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{12}V_{S.ABC} = \dfrac{a^3}{96}$.

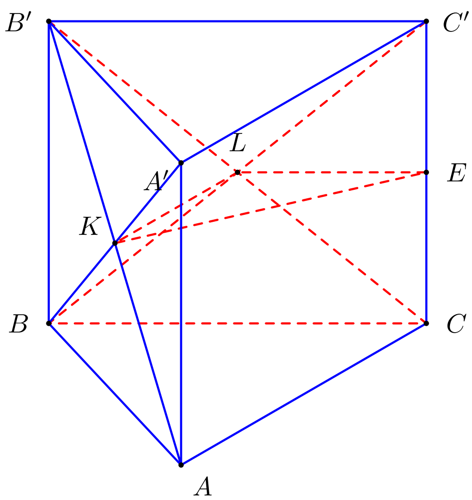
$+) V_{M.OAH} = \dfrac{1}{3}d(M,(ABC)) \cdot S_{\triangle OAH} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{2}SH \cdot \dfrac{1}{4}S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{8} \cdot \dfrac{1}{3}SH \cdot S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{8}V_{S.ABC} = \dfrac{a^3}{64}$.

Vậy $V_{GMOHN} = V_{S.OAHN} - V_{S.GMH} - V_{S.GMO} - V_{G.HNO} - V_{G.HAO} = \dfrac{a^3}{16} - 3 \cdot \dfrac{a^3}{96} - \dfrac{a^3}{64} = \dfrac{a^3}{64}$.

Chọn đáp án D □

Câu 39 (THPT Đồng Quan - Hà Nội - 2021).

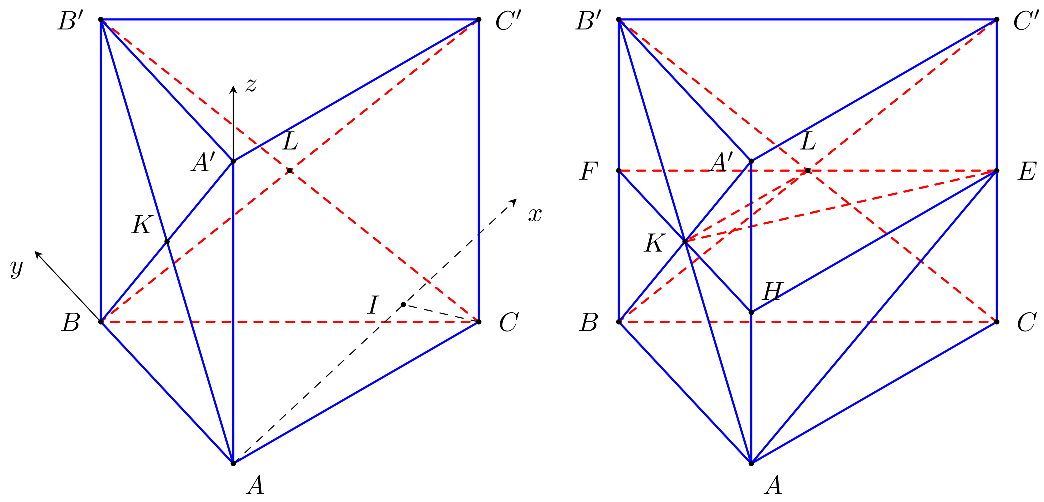
Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $AB = a$, $AC = 2a$, $\widehat{BAC} = 120^\circ$. Gọi L, K lần lượt là tâm của các mặt bên $BCC'B'$, $ABB'A'$ và E là trung điểm của CC' (tham khảo hình vẽ).



Biết hai mặt phẳng (ACB'), (ABC') tạo với nhau một góc α thỏa mãn $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{10}}{5}$. Thể tích khối đa diện lồi có các đỉnh A, B, C, K, E, I là.

(A) $\dfrac{a^3}{2}$. (B) $\dfrac{7a^3}{16}$. (C) $\dfrac{5a^3}{8}$. (D) $\dfrac{9a^3}{16}$.

Lời giải.



Kẻ tia Ax vuông góc với AB trên mặt phẳng (ABC), chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ.

Gọi I là hình chiếu của C trên trục Ax, đặt $AA' = h$.

Vì $\widehat{BAC} = 120^\circ = \widehat{IAB} + \widehat{IAC} = 90^\circ + \widehat{IAC} \Rightarrow \widehat{IAC} = 30^\circ$.

Ta có $\widehat{IAC} = 30^\circ \Rightarrow IC = AC\sin 30^\circ = a$, $IA = AC\cos 30^\circ = a\sqrt{3}$.

Khi đó, trên hệ trục tọa độ đã chọn Ta có

$A(0;0;0)$, $B(0;a;0)$, $C\left(a\sqrt{3};-a;0\right)$, $B'(0;a;h)$, $C'\left(a\sqrt{3};-a;h\right)$.

+) $\overrightarrow{AC} = \left(a\sqrt{3};-a;0\right), \overrightarrow{AB'} = (0;a;h) \Rightarrow \left[\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB'}\right] = \left(-ah;-ah\sqrt{3};a^2\sqrt{3}\right)$.

Mặt phẳng (ACB') có VTPT $\overrightarrow{n_1} = \left(h;h\sqrt{3};-a\sqrt{3}\right)$.

+) $\overrightarrow{AB} = (0;a;0), \overrightarrow{AC'} = \left(a\sqrt{3};-a;h\right) \Rightarrow \left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC'}\right] = \left(ah;0;-a^2\sqrt{3}\right)$.

Mặt phẳng (ABC') có VTPT $\overrightarrow{n_2} = \left(h;0;-a\sqrt{3}\right)$.

Suy ra: $\cos\alpha = \left|\cos\left(\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}\right)\right| \Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{10}}{5} = \dfrac{\left|h^2+3a^2\right|}{\sqrt{4h^2+3a^2}\sqrt{h^2+3a^2}} \Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{10}}{5} = \dfrac{\sqrt{h^2+3a^2}}{\sqrt{4h^2+3a^2}}$

$\Leftrightarrow \dfrac{2}{5} = \dfrac{h^2+3a^2}{4h^2+3a^2} \Leftrightarrow 8h^2+6a^2 = 5h^2+15a^2 \Leftrightarrow h = a\sqrt{3}$.

Gọi V là thể tích khối đa diện lồi có các đỉnh A, B, C, K, E, L. Hai điểm F, H lần lượt là trung điểm của BB' và AA'.

Ta có $\dfrac{V_{B.FKL}}{V_{B.B'A'C'}} = \dfrac{BF}{BB'} \cdot \dfrac{BK}{BA'} \cdot \dfrac{BL}{BC'} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{8}$.

$\Rightarrow V_{B.FKL} = \dfrac{1}{8}V_{B.B'A'C'} = \dfrac{1}{8} \cdot \dfrac{1}{3}V_{ABC.A'B'C'} = \dfrac{1}{24}V_{ABC.A'B'C'}$.

$V_{A.KHE} = \dfrac{1}{3}AH \cdot S_{HKE} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{2}AA' \cdot \dfrac{1}{2}S_{HFE} = \dfrac{1}{12} \cdot AA' \cdot S_{HFE} = \dfrac{1}{12} \cdot V_{ABC.A'B'C'}$.

Vậy

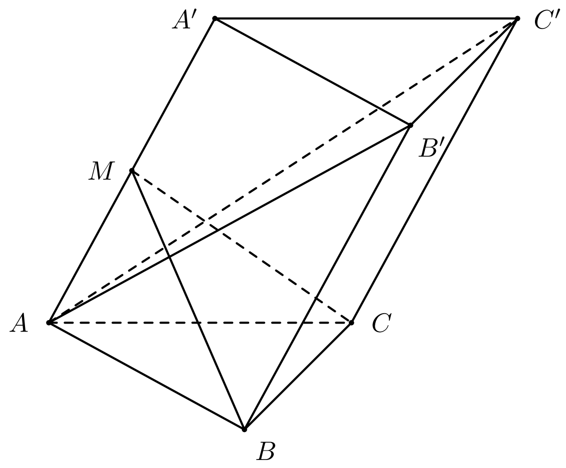
$$\begin{aligned} V &= V_{ABC.HEF} - V_{A.HKE} - V_{B.FKL} = \frac{1}{2}V_{ABC.A'B'C'} - \frac{1}{24}V_{ABC.A'B'C'} - \frac{1}{12}V_{ABC.A'B'C'} \\ &= \frac{3}{8}V_{ABC.A'B'C'} = \frac{3}{8} \cdot AA' \cdot \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC\sin 120^\circ = \frac{3}{8} \cdot h \cdot \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC\sin 120^\circ = \frac{9a^3}{16}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án (D) □

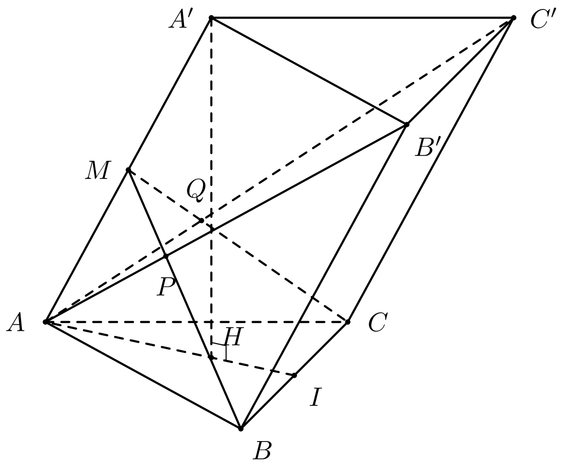
Câu 40 (Trung Tâm Thanh Tường -2021).

Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng 2, $A'A = A'B = A'C = 2$, M là trung điểm của AA'. Tính thể tích phần chung của 2 khối đa diện $A'M.BCC'B'$ và $A.A'B'C'$.

(A) $\dfrac{17\sqrt{2}}{27}$.
(B) $\dfrac{17\sqrt{3}}{18}$.
(C) $\dfrac{17\sqrt{3}}{27}$.
(D) $\dfrac{5\sqrt{2}}{3}$.



Lời giải.



Gọi H là hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng (ABC). Vì $A'A = A'B = A'C$ nên H trùng với tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC cũng là trọng tâm tam giác ABC.

Gọi I là trung điểm BC.

Ta có

$AI = \sqrt{3} \Rightarrow AH = \dfrac{2}{3}AI = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$; $A'H = \sqrt{AA'^2 - AH^2} = \sqrt{4 - \dfrac{12}{9}} = \dfrac{2\sqrt{6}}{3}$;

$V_{ABC.A'B'C'} = A'H \cdot S_{ABC} = \dfrac{2\sqrt{6}}{3} \cdot \sqrt{3} = 2\sqrt{2}$; $V_{A.A'B'C'} = \dfrac{1}{3}V_{ABC.A'B'C'} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$;

Gọi $P = AB' \cap BM$; $Q = AC' \cap CM$.

Khi đó phần chung của 2 khối đa diện $A'M.BCC'B'$ và $A.A'B'C'$ là khối đa diện $MPQ.A'B'C'$.

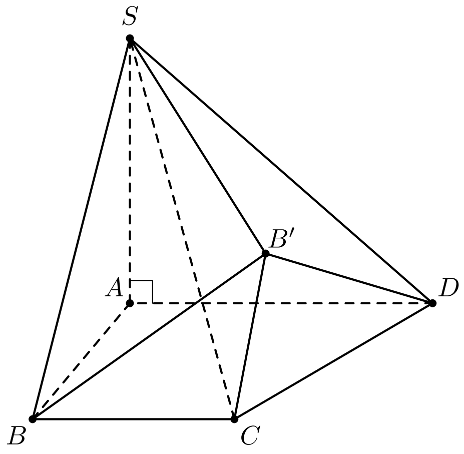
Ta có $\dfrac{V_{A.MPQ}}{V_{A.A'B'C'}} = \dfrac{AM}{AA'} \cdot \dfrac{AP}{AB'} \cdot \dfrac{AQ}{AC'} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{18}$

$\Rightarrow V_{MPQ.A'B'C'} = \dfrac{17}{18}V_{A.A'B'C'} = \dfrac{17}{18} \cdot \dfrac{2\sqrt{2}}{3} = \dfrac{17\sqrt{2}}{27}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 41 (Trung Tâm Thanh Tường - 2021).

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B, $AB = BC = a$, $AD = 2a$, SA vuông góc với đáy, $SA = a\sqrt{2}$. Gọi B' là điểm đối xứng của B qua mặt phẳng (SCD). Tính thể tích khối đa diện $SB'.ABCD$ bằng



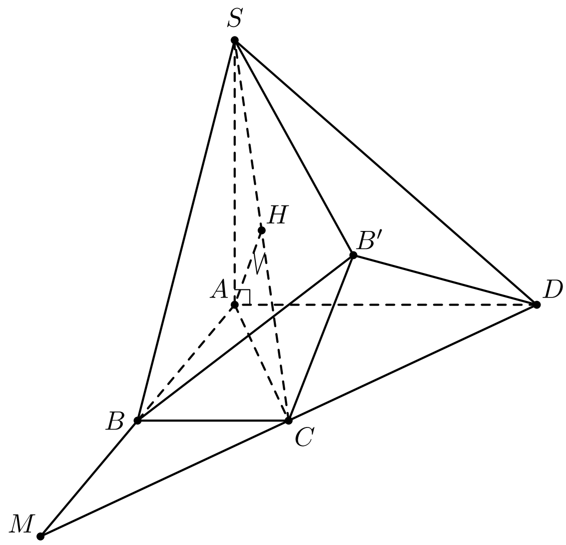
Ⓐ $\dfrac{5\sqrt{2}a^3}{6}$. Ⓑ $\dfrac{7\sqrt{2}a^3}{3}$. Ⓒ $\sqrt{2}a^3$. Ⓓ $\dfrac{2\sqrt{2}a^3}{3}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} V_{SB'.ABCD} &= V_{S.ABCD} + V_{B'SCD} = \frac{1}{3}SA \cdot S_{ABCD} + \frac{1}{3}S_{SCD} \cdot d\left(B', (SCD)\right) \\ &= \frac{1}{3}SA \cdot S_{ABCD} + \frac{1}{3}S_{SCD} \cdot d\left(B, (SCD)\right). \end{aligned}$$

(vì B' là điểm đối xứng của B qua mặt phẳng (SCD)).



+ $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}SA.S_{ABCD} = \dfrac{1}{3}.a\sqrt{2}.\dfrac{(a+2a)\,a}{2} = \dfrac{a^3}{\sqrt{2}}$

+ Gọi M là giao điểm của AB và CD, dễ dàng chứng minh được B là trung điểm của MA.

$\Rightarrow d\left(B, (SCD)\right) = \dfrac{1}{2}d\left(A, (SCD)\right) = \dfrac{1}{2}AH.$

Lại có tam giác SAC vuông cân tại A (vì $SA = AC = a\sqrt{2}$)

$\Rightarrow d\left(B, (SCD)\right) = \dfrac{1}{2}d\left(A, (SCD)\right) = \dfrac{1}{2}AH = \dfrac{1}{4}SC = \dfrac{1}{4} \cdot 2a = \dfrac{a}{2}.$

Ta có $V_{B'.SCD} = \dfrac{1}{3}S_{SCD} \cdot d\left(B', (SCD)\right) = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{2}SC \cdot CD\dfrac{a}{2} = \dfrac{1}{6} \cdot 2a \cdot a\sqrt{2} \cdot \dfrac{a}{2} = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{6} = \dfrac{a^3}{3\sqrt{2}}$

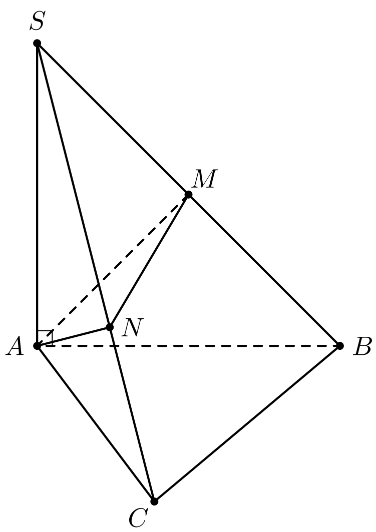
$V_{SB'.ABCD} = V_{S.ABCD} + V_{B'SCD} = \dfrac{a^3}{\sqrt{2}} + \dfrac{a^3}{3\sqrt{2}} = \dfrac{2\sqrt{2}a^3}{3}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 42 (Chuyên Hà Tĩnh - 2021). Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt đáy, $SA = 2BC = 2a\sqrt{3}$, $AC = a$ và $\widehat{BAC} = 120^o$. Hình chiếu vuông góc của A lên các cạnh SB và SC lần lượt là M và N. Thể tích của khối đa diện $AMNCB$ bằng.

(A) $\dfrac{24}{169}a^3$. (B) $\dfrac{25}{338}a^3$. (C) $\dfrac{25}{169}a^3$. (D) $\dfrac{12}{169}a^3$.

Lời giải.



Có $SA = 2BC = 2a\sqrt{3} \Rightarrow SA = 2a\sqrt{3}; BC = a\sqrt{3}$.

Xét $\triangle ABC$ có $\cos A = \dfrac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \cdot AC} \Rightarrow -\dfrac{1}{2} = \dfrac{AB^2 + a^2 - 3a^2}{2AB \cdot a}$.

$\Rightarrow -a.AB = AB^2 - 2a^2 \Leftrightarrow AB^2 + a \cdot AB - 2a^2 = 0 \Leftrightarrow (AB - a)(AB + 2a) = 0$.

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} AB = a \\ AB = -2a < 0\,(KTM) \end{array}\right. \Rightarrow AB = a$.

Có $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}SA \cdot S_{ABC} = \dfrac{1}{6}SA \cdot AB \cdot AC \sin \widehat{BAC} = \dfrac{a^3}{2}$.

$\triangle SAB$ vuông tại A, đường cao AM.

$\Rightarrow SA^2 = SM.SB \Rightarrow SM = \dfrac{SA^2}{SB} = \dfrac{SA^2}{\sqrt{SA^2 + AB^2}} = \dfrac{12a^2}{a\sqrt{13}} = \dfrac{12a}{\sqrt{13}}$.

Tương tự, $SN = \dfrac{SA^2}{\sqrt{SA^2 + AC^2}} = \dfrac{12a}{\sqrt{13}}$.

Và $SB = \sqrt{AB^2 + AS^2} = \sqrt{a^2 + (2a\sqrt{3})^2} = a\sqrt{13}$, $SC = \sqrt{AC^2 + AS^2} = \sqrt{a^2 + (2a\sqrt{3})^2} = a\sqrt{13}$.

Có $\dfrac{V_{SAMN}}{V_{SABC}} = \dfrac{SM}{SB} \cdot \dfrac{SN}{SC} = \dfrac{\frac{12a}{\sqrt{13}}}{a\sqrt{13}} \cdot \dfrac{\frac{12a}{\sqrt{13}}}{a\sqrt{13}} = \dfrac{144}{169} \Rightarrow \dfrac{V_{AMNCB}}{V_{SABC}} = \dfrac{25}{169}$.

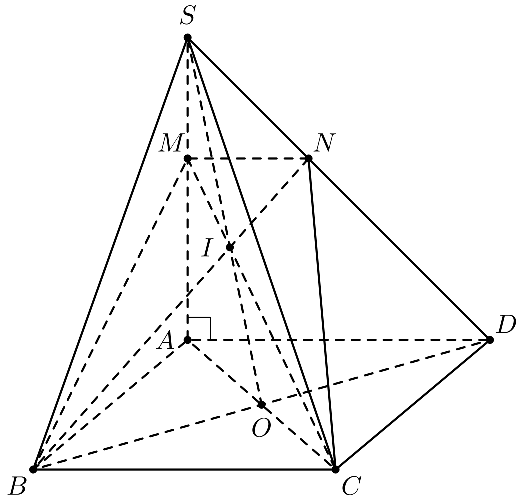
$\Rightarrow V_{AMNCB} = \dfrac{25}{169}V_{SABC} = \dfrac{25}{169} \cdot \dfrac{a^3}{2} = \dfrac{25a^3}{338}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 43 (Chuyên Long An - 2021). Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$ và $SA = a$. Điểm M thuộc cạnh SA sao cho $\dfrac{SM}{SA} = k$, $0 < k < 1$. Tìm giá trị của k để mặt phẳng (BMC) chia khối chóp $S.ABCD$ thành hai phần có thể tích bằng nhau.

Ⓐ $k = \dfrac{-1+\sqrt{2}}{2}$. Ⓑ $k = \dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$. Ⓒ $k = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$. Ⓓ $k = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}$.

Lời giải.



Ta gọi N là giao điểm của SD và mặt phẳng (BMC).

Ta có
$$\begin{cases} (BMC) \cap (SAD) = MN \\ BC \subset (BMC) \\ AD \subset (SAD) \\ AD // BC \end{cases} \Rightarrow (MNAD) \Rightarrow \frac{SM}{SA} = \frac{SN}{SD} = k.$$

Mặt khác: $\dfrac{V_{S.BCM}}{V_{S.BCA}} = \dfrac{SB}{SB} \cdot \dfrac{SC}{SC} \cdot \dfrac{SM}{SA} = k \Rightarrow V_{S.BCM} = k \cdot V_{S.BCA} = V_{S.BCM} = \dfrac{k}{2} V_{S.ABCD}$.

Lại có: $\dfrac{V_{S.MCN}}{V_{S.ACD}} = \dfrac{SM}{SA} \cdot \dfrac{SC}{SC} \cdot \dfrac{SN}{SD} = k^2 \Rightarrow V_{S.MCN} = k^2 \cdot V_{S.ACD} \Rightarrow V_{S.MCN} = \dfrac{k^2}{2} V_{S.ABCD}$.

Do đó, $V_{S.BCNM} = V_{S.BCM} + V_{S.MCN} = \left(\dfrac{k+k^2}{2}\right) V_{S.ABCD}$.

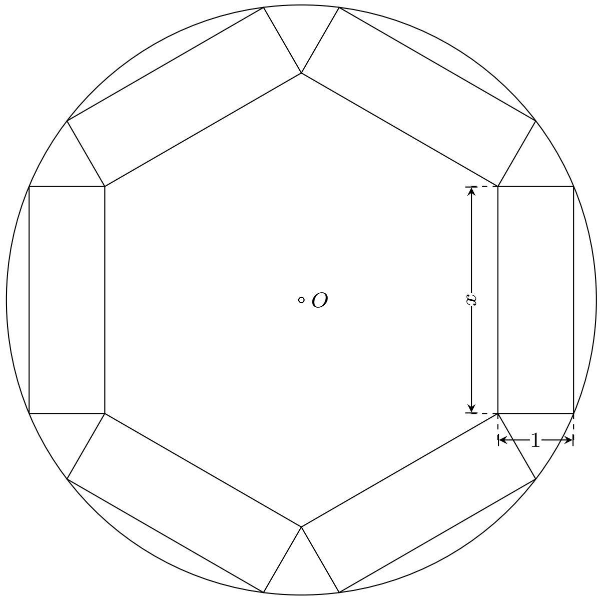
Theo đề bài, (BMC) chia đôi khối chóp $S.ABCD$ thành hai phần có thể tích bằng nhau nên:
$$V_{S.BCNM} = \frac{1}{2} V_{S.ABCD} \Rightarrow \frac{k^2+k}{2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow k^2 + k - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ k = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} \end{array}\right..$$

Mà $0 < k < 1$ nên $k = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ thoả mãn yêu cầu.

Chọn đáp án Ⓒ □

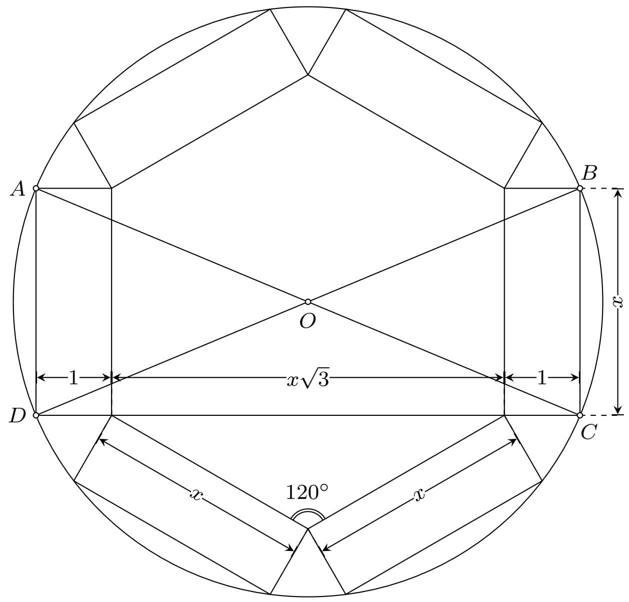
Câu 44 (Chuyên Lương Văn Tụy-Ninh Bình 2022).

Bạn A định làm một cái hộp quà lưu niệm (không nắp) bằng cách cắt từ một tấm bìa hình tròn bán kính 4 cm để tạo thành một khối lăng trụ lục giác đều, biết 6 hình chữ nhật có các kích thước là 1 cm và x cm (tham khảo hình vẽ). Thể tích của hộp quà gần nhất với giá trị nào sau đây?



(A) $24{,}5$ cm^3. (B) 25 cm^3. (C) $25{,}5$ cm^3. (D) 24 cm^3.

Lời giải.

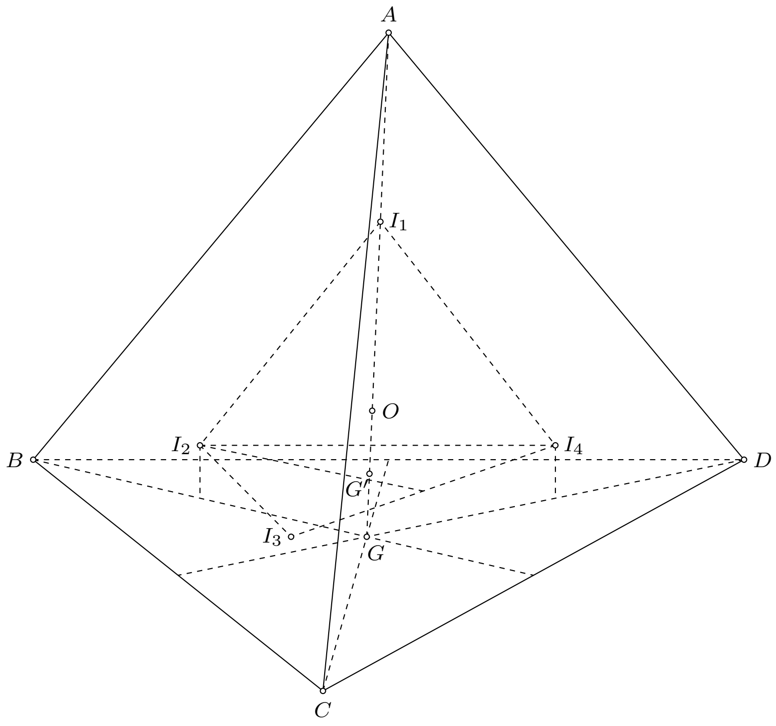


Xét hình chữ nhật $ABCD$ nội tiếp (O), do đó, AC là đường kính của (O). Ta có $AC = 8\ cm$.
Tính được $DC = 1 + x\sqrt{3} + 1 = x\sqrt{3} + 2$.
Áp dụng định lý Py-ta-go vào tam giác ADC ta có
$x^2 + \left(2 + x\sqrt{3}\right)^2 = 8^2 \Leftrightarrow 4x^2 + 4x\sqrt{3} - 60 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{3\sqrt{7} - \sqrt{3}}{2}$.
$V = h \cdot S_d = 1 \cdot 6 \cdot \dfrac{x^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{3}{2}x^2\sqrt{3} = \dfrac{-27\sqrt{7} + 99\sqrt{3}}{4} \approx 25{,}0094$ cm^3.
Chọn đáp án (B) □

Câu 45 (THPT Kinh Môn - Hải Dương - 2022).
Người ta dùng thuỷ tinh trong suốt để làm một cái chặn giấy hình tứ diện đều. Để trang trí cho nó, người thiết kế đặt trong khối tứ diện 4 quả cầu nhựa màu xanh có bán kính bằng nhau là $r = \sqrt{2}$. Biết rằng 4 quả cầu này đôi một tiếp xúc với nhau và mỗi mặt của tứ diện tiếp xúc với 3 quả cầu, đồng thời không cắt quả cầu còn lại. Nếu bỏ qua bề dày của các mặt thì người ta cần dùng bao nhiêu thủy tinh để làm chặn giấy trên (làm tròn đến chữ số thập phân thứ 2).

(A) $195{,}66\ \text{cm}^3$. (B) $62{,}09\ \text{cm}^3$. (C) $30{,}03\ \text{cm}^3$. (D) $65{,}55\ \text{cm}^3$.

Lời giải.

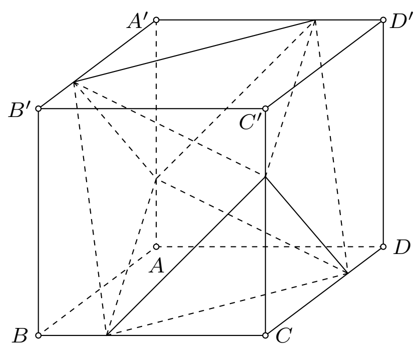


- Goi I_1, I_2, I_3, I_4 lần lượt là tâm của 4 hình cầu đã cho. Khi đó $I_1I_2I_3I_4$ là một tứ diện đều có cạnh bằng $2r = 2\sqrt{2}\,(\text{cm})$ và chiều cao $h = \dfrac{2r\sqrt{6}}{3} = \dfrac{4\sqrt{3}}{3}\,(\text{cm})$. Do đó hai tứ diện $ABCD$ và $I_1I_2I_3I_4$ đồng dạng với nhau theo tỉ số k.
- Gọi O là trọng tâm của tứ diện $ABCD$ thì O cũng là trọng tâm của tứ diện $I_1I_2I_3I_4$. Do đó O là tâm đồng dạng. Giả sử phép đồng dạng tâm O lần lượt biến các đỉnh A, B, C, D thành I_1, I_2, I_3, I_4. Khi đó, hai mặt phẳng (BCD) và $(I_2I_3I_4)$ song song nhau.
- Gọi G, G' lần lượt là trọng tâm các tam giác BCD và $I_2I_3I_4$. Khi đó
$OG' = \dfrac{1}{4}h = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ và $OG = OG' + r = \dfrac{\sqrt{3}}{3} + \sqrt{2}$. Suy ra $k = \dfrac{OG}{OG'} = 1 + \sqrt{6}$.
- Khi đó, thể tích của tứ diện $ABCD$ là
$V_{ABCD} = k^3 \cdot V_{I_1I_2I_3I_4} = (1+\sqrt{6})^3 \cdot \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{(2r)^2\sqrt{3}}{4} \cdot h = \dfrac{8(19+9\sqrt{6})}{3}\,(\text{cm}^3)$.
- Thể tích của mỗi khối cầu là
$V_c = \dfrac{4}{3}\pi \cdot r^3 = \dfrac{8\pi\sqrt{2}}{3}\,(\text{cm}^3)$.
- Vậy lượng thuỷ tinh cần dùng là
$V = V_{ABCD} - 4 \cdot V_c = \dfrac{8(19+9\sqrt{6})}{3} - 4 \cdot \dfrac{8\pi\sqrt{2}}{3} \approx 62{,}06\,(\text{cm}^3)$.

Chọn đáp án (B) □

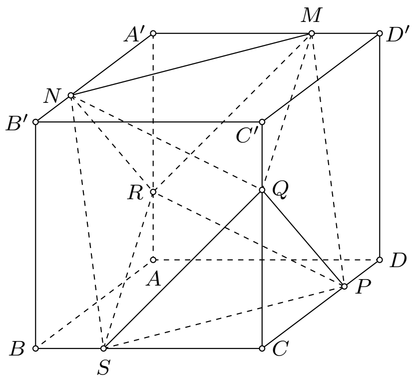
Câu 46 (Sở Hải Dương 2022).

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh bằng 2. Thể tích V của khối bát diện đều có các đỉnh nằm trên các cạnh BC, $A'D'$, $A'B'$, AA', CD, CC' (như hình vẽ) bằng



Ⓐ $\dfrac{9}{2}$. Ⓑ $\dfrac{6\sqrt{2}}{3}$. Ⓒ $\dfrac{9\sqrt{3}}{2}$. Ⓓ 3.

Lời giải.



Do các mặt của bát diện đều là 1 tam giác đều nên chắn các góc đỉnh C và đỉnh A' những đoạn bằng nhau bằng x, đoạn còn lại bằng $2-x$.

Đặt $A'M = x\,(0 < x < 2)$. Gọi M, N, P, Q, R, S lần lượt là các đỉnh của bát diện nằm trên các cạnh $A'D'$, $A'B'$, CD, CC', $A'A$, BC.

Ta có $MN = x\sqrt{2}$, $MQ = \sqrt{2(2-x)^2+4}$.

Do $MN = MQ \Leftrightarrow 2x^2 = 2(2-x)^2 + 4 \Leftrightarrow 4x = 6 \Leftrightarrow x = \dfrac{3}{2}$.

Ta có

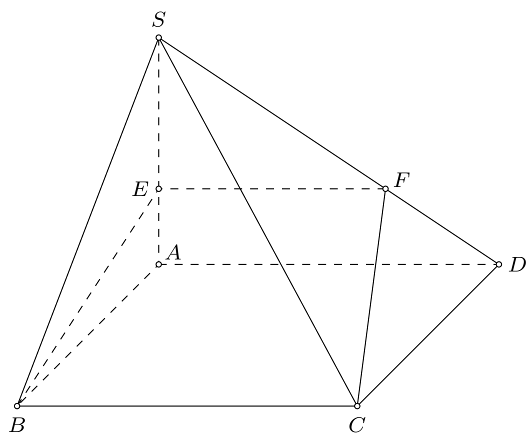
$V_{MNPQRS} = 2V_{MNPQR} = \dfrac{2}{3}\cdot \mathrm{d}\left(M,(NPQR)\right)\cdot (x\sqrt{2})^2 = \dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{x\sqrt{2}}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot 2x^2 = \dfrac{4}{3}x^3 = \dfrac{4}{3}\left(\dfrac{3}{2}\right)^3 = \dfrac{9}{2}$.

Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 47 (Sở Sơn La 2022). Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật $AB = 2$, $AD = 4$, SA vuông góc với mặt đáy, SB tạo với đáy góc 60°, điểm E thuộc cạnh SA và $AE = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$. Mặt phẳng (BCE) cắt SD tại F. Thể tích khối đa diện $ABCDEF$ bằng

Ⓐ $\dfrac{64\sqrt{3}}{9}$. Ⓑ $\dfrac{64\sqrt{3}}{27}$. Ⓒ $\dfrac{80\sqrt{3}}{27}$. Ⓓ $\dfrac{16\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải.



Xét (BEC) và (SAD) có điểm E chung và BC song song AD nên giao tuyến là đường thẳng qua E và song song AD cắt SD tại F.

Góc giữa SB với đáy bằng $60^\circ \Rightarrow \widehat{SBA} = 60^\circ$

$\Rightarrow SA = AB \cdot \tan 60^\circ = 2\sqrt{3}$.

Mặt khác $AE = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ nên $AE = \dfrac{1}{3}SA$

$\Rightarrow SE = \dfrac{2}{3}SA$.

Xét $\triangle SAD$ ta có $\dfrac{SE}{SA} = \dfrac{SF}{SD} = \dfrac{2}{3}$.

Ta có $\dfrac{V_{SBEC}}{V_{SBAC}} = \dfrac{SE}{SA} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow V_{SBEC} = \dfrac{2}{3}V_{SBAC} \Rightarrow V_{SBEC} = \dfrac{1}{3}V_{SABCD}$.

$\dfrac{V_{SEFC}}{V_{SADC}} = \dfrac{SE}{SA} \cdot \dfrac{SF}{SD} = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{2}{3} = \dfrac{4}{9} \Rightarrow V_{SEFC} = \dfrac{4}{9}V_{SADC} \Rightarrow V_{SEFC} = \dfrac{2}{9}V_{SABCD}$.

Khi đó $V_{SBCFE} = V_{SBEC} + V_{SEFC} = \dfrac{1}{3}V_{SABCD} + \dfrac{2}{9}V_{SABCD} = \dfrac{5}{9}V_{SABCD}$.

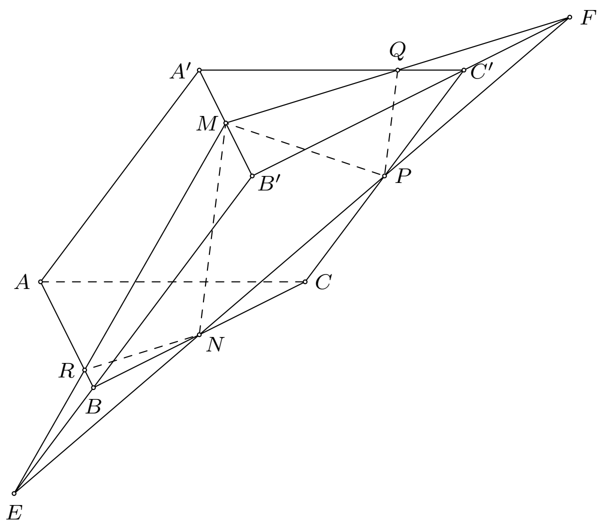
Suy ra $V_{ABCDFE} = \dfrac{4}{9}V_{SABCD} = \dfrac{4}{9} \cdot \dfrac{1}{3} \cdot SA \cdot S_{ABCD} = \dfrac{4}{9} \cdot \dfrac{1}{3} \cdot 2\sqrt{3} \cdot 2 \cdot 4 = \dfrac{64\sqrt{3}}{27}$.

Chọn đáp án B □

Câu 48 (Chuyên Thái Bình 2022). Cho khối lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có thể tích V. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh $A'B'$, BC, CC'. Mặt phẳng MNP chia khối lăng trụ đã cho thành 2 phần, phần chứa điểm B có thể tích là V_1. Tỉ số $\dfrac{V_1}{V}$ bằng

A. $\dfrac{61}{144}$. B. $\dfrac{37}{144}$. C. $\dfrac{49}{144}$. D. $\dfrac{25}{144}$.

Lời giải.



Gọi S và h lần lượt là diện tích đáy và chiều cao của lăng trụ $ABC.A'B'C' \Rightarrow V = Sh$.

Gọi $NP \cap BB' = E$, $NP \cap B'C' = F$, $MF \cap A'C' = Q$, $ME \cap AB = R$.

Suy ra mặt phẳng (MNP) cắt khối lăng trụ theo thiết diện là $MRNPQ$.

Ta có $BEPC'$ là hình bình hành $\Rightarrow BE = PC' = \dfrac{1}{2}CC' = \dfrac{1}{2}BB'$, tương tự ta có $BNFC'$ là hình bình hành $\Rightarrow C'F = BN = \dfrac{1}{2}BC = \dfrac{1}{2}B'C'$.

- $S_{MB'F} = \dfrac{1}{2} \cdot B'M \cdot B'F \cdot \sin \widehat{MB'F} = \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot A'B' \cdot B'C' \cdot \sin \widehat{A'B'C'} = \dfrac{3}{4} S.$
- $\mathrm{d}(E, (A'B'C')) = \dfrac{3}{2} \mathrm{d}(B, (A'B'C')) = \dfrac{3}{2} h.$

$\Rightarrow V_{E.B'MF} = \dfrac{1}{3} \cdot \mathrm{d}(E, (A'B'C')) \cdot S_{B'MF} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{3}{2} h \cdot \dfrac{3}{4} S = \dfrac{3}{8} V.$

Lại có $\dfrac{V_{E.BNR}}{V_{E.B'FM}} = \left(\dfrac{EB}{EB'}\right)^3 = \dfrac{1}{27} \Rightarrow V_{E.BNR} = \dfrac{1}{27} \cdot \dfrac{3}{8} V = \dfrac{1}{72} V.$

Ta cũng có $\dfrac{V_{F.C'PQ}}{V_{F.B'EM}} = \dfrac{FC'}{FB'} \cdot \dfrac{FP}{FE} \cdot \dfrac{FQ}{FM} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{18} \Rightarrow V_{F.C'PQ} = \dfrac{1}{18} \cdot \dfrac{3}{8} V = \dfrac{1}{48} V.$

Suy ra $V_1 = V_{E.B'MF} - (V_{E.BNR} + V_{F.C'PQ}) = \dfrac{49}{144} V.$

Vậy $\dfrac{V_1}{V} = \dfrac{49}{144}.$

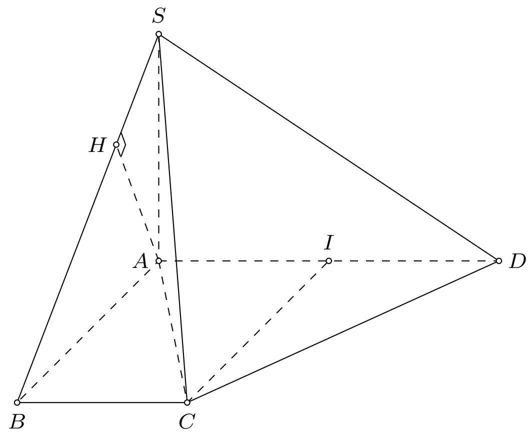
Chọn đáp án C □

Câu 49 (THPT Trần Quốc Tuấn - Quảng Ngãi - 2022).

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B, $BA = BC = a$, $AD = 2a$. Cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a\sqrt{2}$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của điểm A lên SB. Tính thể tích V của khối đa diện $SAHCD$.

(A) $V = \dfrac{4\sqrt{2}a^3}{3}$. (B) $V = \dfrac{4\sqrt{2}a^3}{9}$. (C) $V = \dfrac{2\sqrt{2}a^3}{3}$. (D) $V = \dfrac{2\sqrt{2}a^3}{9}$.

Lời giải.



Gọi I là trung điểm của $AD \Rightarrow$ tứ giác $ABCI$ là hình vuông cạnh $a \Rightarrow CI = a = \dfrac{AD}{2}$.

Do đó tam giác ACD vuông tại C (tính chất đường trung tuyến ứng với cạnh huyền).

Ta có $S_{ABCD} = \dfrac{(BC + AD) \cdot AB}{2} = \dfrac{(a + 2a) \cdot a}{2} = \dfrac{3a^2}{2}$;

$S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{2} AB \cdot BC = \dfrac{1}{2} \cdot a \cdot a = \dfrac{a^2}{2}.$

Suy ra $S_{\triangle ACD} = \dfrac{3a^2}{2} - \dfrac{a^2}{2} = a^2.$

Khi đó $V_{S.ACD} = \dfrac{1}{3} \cdot S_{\triangle ACD} \cdot SA = \dfrac{1}{3} \cdot a^2 \cdot a\sqrt{2} = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}$ và $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3} \cdot S_{\triangle ABC} \cdot SA = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{a^2}{2} \cdot a\sqrt{2} = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}$. Xét $\triangle SAB$ vuông tại A có $\begin{cases} SB = \sqrt{SA^2 + AB^2} = \sqrt{(a\sqrt{2})^2 + a^2} = a\sqrt{3} \\ AH = \dfrac{SA \cdot AB}{\sqrt{SA^2 + AB^2}} = \dfrac{a\sqrt{2} \cdot a}{\sqrt{(a\sqrt{2})^2 + a^2}} = \dfrac{a^2\sqrt{2}}{a\sqrt{3}} = \dfrac{a\sqrt{6}}{3} \cdot \end{cases}$

Xét $\triangle SAH$ vuông tại H có $SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \sqrt{(a\sqrt{2})^2 - \left(\dfrac{a\sqrt{6}}{3}\right)^2} = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \dfrac{SH}{SB} = \dfrac{2}{3}.$

Mặt khác, ta có $\dfrac{V_{S.AHC}}{V_{S.ABC}} = \dfrac{SH}{SB} \Rightarrow V_{S.AHC} = \dfrac{2}{3} V_{S.ABC} = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{a^3\sqrt{2}}{6} = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{9}.$

Vậy $V_{S.AHCD} = V_{S.AHC} + V_{S.ACD} = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{9} + \dfrac{a^3\sqrt{2}}{3} = \dfrac{4a^3\sqrt{2}}{9}.$

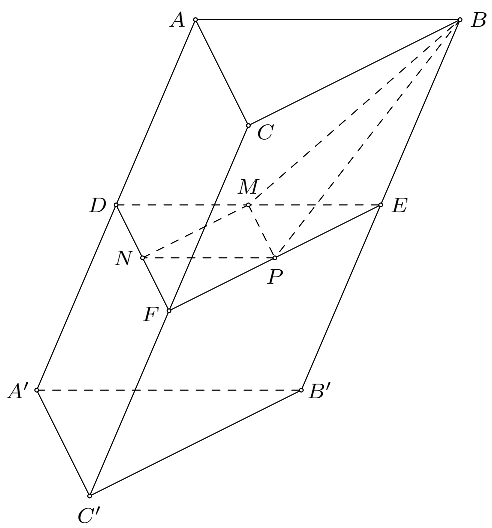
Chọn đáp án B □

Câu 50 (THPT Nguyễn Cảnh Quân - Nghệ An 2022).

Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có chiều cao bằng 6 và đáy là tam giác đều cạnh bằng 4. Gọi M, N, P lần lượt là tâm của các mặt bên $ABB'A'$, $ACC'A'$, $BCC'B'$. Thể tích của khối đa diện lồi có các đỉnh là các điểm A, B, C, M, N, P bằng

Ⓐ $9\sqrt{3}$. Ⓑ $10\sqrt{3}$. Ⓒ $7\sqrt{3}$. Ⓓ $12\sqrt{3}$.

Lời giải.



Gọi D, E, F lần lượt là trung điểm của các cạnh bên AA', BB', CC'.

Khi đó M, N, P lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng DE, DF, FE.

Ta có $V_{MNP.ABC} = V_{DEF.ABC} - 3V_{B.MEP} = \dfrac{1}{2} \cdot V_{ABC.A'B'C'} - 3 \cdot V_{B.MEP}$.

Mà $\dfrac{V_{B.MEP}}{V_{ABC.A'B'C'}} = \dfrac{\dfrac{1}{3} \cdot \mathrm{d}\left(B, (MEP)\right) \cdot S_{MEP}}{\mathrm{d}\left(B, (A'B'C')\right) \cdot S_{ABC}} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{\mathrm{d}\left(B, (MEP)\right)}{\mathrm{d}\left(B, (A'B'C')\right)} \cdot \dfrac{S_{MEP}}{S_{DEF}} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{24}$.

Suy ra $V_{MNP.ABC} = \dfrac{1}{2} \cdot V_{ABC.A'B'C'} - 3 \cdot \dfrac{1}{24} \cdot V_{ABC.A'B'C'} = \dfrac{3}{8} \cdot V_{ABC.A'B'C'} = \dfrac{3}{8} \cdot 6 \cdot \dfrac{4^2\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3}$.

Chọn đáp án Ⓐ □

BẢNG ĐÁP ÁN

1. B	2. A	3. C	4. D	5. B	6. D	7. D	8. C	9. C	10. D
11. B	12. A	13. A	14. A	15. B	16. A	17. C	18. A	19. A	20. A
21. A	22. C	23. B	24. D	25. C	26. C	27. A	28. C	29. C	30. B
31. B	32. B	33. D	34. A	35. D	36. A	37. B	38. D	39. D	40. A
41. D	42. B	43. C	44. B	45. B	46. A	47. B	48. C	49. B	50. A

CHỦ ĐỀ 14

CỰC TRỊ THỂ TÍCH KHỐI ĐA DIỆN

MỨC ĐỘ 3. MỨC ĐỘ 9,10 ĐIỂM

Câu 1. Ông A dự định sử dụng hết 6,7 m^2 kính để làm một bể cá bằng kính có dạng hình hộp chữ nhật không nắp, chiều dài gấp đôi chiều rộng (các mối ghép có kích thước không đáng kể). Bể cá có dung tích lớn nhất bằng bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

(A) 1,23 m^2. (B) 2,48 m^2. (C) 1,57 m^2. (D) 1,11 m^2.

Lời giải.

Gọi x là chiều rộng, ta có chiều dài là $2x$.

Do diện tích đáy và các mặt bên là 6,7 m^2 nên có chiều cao $h = \dfrac{6{,}7 - 2x^2}{6x}$.

Ta có $h > 0$ nên $x < \sqrt{\dfrac{6{,}7}{2}}$.

Thể tích của bể cá là $V(x) = \dfrac{6{,}7x - 2x^3}{3}$ và $V'(x) = \dfrac{6{,}7 - 6x^2}{3} = 0$.

Suy ra $x = \sqrt{\dfrac{6,7}{6}}$.

Bảng biến thiên

x	0		$\sqrt{\dfrac{6{,}7}{6}}$		$\sqrt{\dfrac{6{,}7}{2}}$
$V'(x)$		$+$	0	$-$	
$V(x)$	0	$\nearrow$	$1{,}57$	$\searrow$	0

Bể cá có dung tích lớn nhất bằng 1,57 m^3.

Chọn đáp án (C) □

Câu 2. Ông A dự định sử dụng hết 5,5 m^2 kính để làm một bể cá có dạng hình hộp chữ nhật không nắp, chiều dài gấp đôi chiều rộng (các mối ghép có kích thước không đáng kể). Bể cá có dung tích lớn nhất bằng bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)?

(A) $1,40$ m^3. (B) $1,01$ m^3. (C) $1,51$ m^3. (D) $1,17$ m^3.

Lời giải.

Gọi x, $2x$, h lần lượt là chiều rộng, dài, cao của bể cá.

Ta có $2x^2 + 2(xh + 2xh) = 5,5 \Leftrightarrow h = \dfrac{5,5 - 2x^2}{6x}$. Điều kiện $0 < x < \sqrt{\dfrac{5{,}5}{2}}$.

Thể tích bể cá $V = 2x^2 \cdot \dfrac{5,5 - 2x^2}{6x} = \dfrac{1}{3}(5,5x - 2x^3)$.

$V' = \frac{1}{3}(5,5 - 6x^2) \cdot V' = 0 \Rightarrow x = \sqrt{\frac{5,5}{6}}$.
Ta có bảng biến thiên sau như sau:

x	0		$\sqrt{\frac{5,5}{6}}$		$\sqrt{\frac{5,5}{2}}$
$V'(x)$		$+$	0	$-$	
$V(x)$	0	$\nearrow$	$1{,}17$	$\searrow$	0

Từ bảng bảng biến thiên suy ra $V_{\max} = \frac{11\sqrt{33}}{54} \approx 1,17 \text{ m}^3$.
Chọn đáp án (D) □

Câu 3. Người ta cần xây dựng một bể bơi có dạng hình hộp chữ nhật có thể tích là 125 m^3. Đáy bể bơi là hình chữ nhật có chiều dài gấp ba lần chiều rộng. Tính chiều rộng của đáy bể bơi để khi thi công tiết kiệm nguyên vật liệu nhất (kết quả làm tròn đến hai chữ số thập phân)?

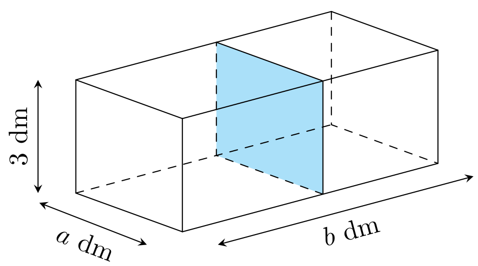
(A) $3,12$ m. (B) $3,82$ m. (C) $3,62$ m. (D) $3,42$ m.

Lời giải.

Gọi chiều rộng hình hộp là a suy ra chiều dài là $3a$, chiều cao là h.
$V = a.3a.h = 3a^2h \Rightarrow h = \frac{V}{3a^2} = \frac{125}{3a^2}$.
Diện tích thi công
$S_{\text{tc}} = a.3a + 2\,(a.h) + 2\,(3a.h) = 3a^2 + 2ah + 6ah = 3a^2 + 2a \cdot \frac{125}{3a^2} + 6a \cdot \frac{125}{3a^2} = 3a^2 + \frac{1000}{3a}$.
Áp dụng BĐT Cosi ta có $3a^2 + \frac{1000}{3a} = 3a^2 + \frac{500}{3a} + \frac{500}{3a} \geq 3\sqrt[3]{3a^2 \cdot \frac{500}{3a} \cdot \frac{500}{3a}} = \sqrt[3]{\frac{750000}{9}}$.
Diện tích thi công nhỏ nhất khi $3a^2 = \frac{500}{3a} = \frac{500}{3a} \Leftrightarrow 9a^3 = 500 \Leftrightarrow a = \sqrt[3]{\frac{500}{9}} \approx 3,82$.
Ghi chú Chúng ta có thể dung Phương pháp hàm số để tìm min của bài toán.
Chọn đáp án (B) □

Câu 4.

Người ta muốn thiết kế một bể cá bằng kính không có nắp với thể tích 72 dm^3, chiều cao là 3 dm. Một vách ngăn (cùng bằng kính) ở giữa, chia bể cá thành hai ngăn, với các kích thước a, b (đơn vị dm) như hình vẽ. Tính a, b để bể cá tốn ít nguyên liệu nhất (tính cả tấm kính ở giữa), coi bề dày các tấm kính như nhau và không ảnh hưởng đến thể tích của bể.



(A) $a = \sqrt{24}$ dm; $b = \sqrt{24}$ dm. (B) $a = 6$ dm; $b = 4$ dm.
(C) $a = 3\sqrt{2}$ dm; $b = 4\sqrt{2}$ dm. (D) $a = 4$ dm; $b = 6$ dm.

Lời giải.

Thể tích của bể cá $V = 3ab = 72 \text{ dm}^3 \Leftrightarrow b = \frac{72}{3a} = \frac{24}{a}$, với $a, b > 0$.
Diện tích kính để làm bể cá như hình vẽ:

$S = 3.3a + 2.3b + ab = 9a + 6 \cdot \dfrac{24}{a} + a \cdot \dfrac{24}{a} = 9a + \dfrac{144}{a} + 24 \geq 2\sqrt{9a \cdot \dfrac{144}{a}} + 24 \Leftrightarrow S \geq 96.$

$S = 96 \Leftrightarrow 9a = \dfrac{144}{a} \Leftrightarrow a = 4 \Rightarrow b = 6.$

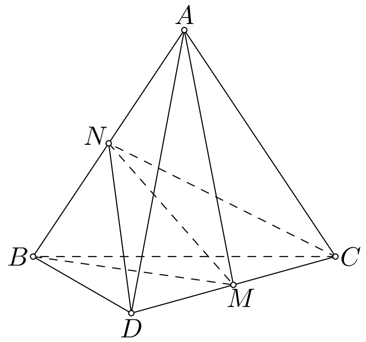
Vậy để bể cá tốn ít nguyên liệu nhất thì $a = 4$ dm; $b = 6$ dm.

Chọn đáp án D □

Câu 5. Xét khối tứ diện $ABCD$ có cạnh $AB = x$ và các cạnh còn lại đều bằng $2\sqrt{3}$. Tìm x để thể tích khối tứ diện $ABCD$ đạt giá trị lớn nhất.

A $x = \sqrt{14}$. B $x = 3\sqrt{2}$. C $x = \sqrt{6}$. D $x = 2\sqrt{3}$.

Lời giải.



Gọi M, N lần lượt là trung điểm của CD và AB.

Ta có $\left.\begin{matrix} CD \perp MB \\ CD \perp MA \end{matrix}\right\} \Rightarrow CD \perp (MAB) \Rightarrow \begin{cases} CD \perp MN \\ CD \perp AB \end{cases}.$

Tam giác MAB cân tại M nên $MN \perp AB$.

$V_{ABCD} = \dfrac{1}{6} AB \cdot CD \cdot d(AB, CD) \cdot \sin(AB, CD) = \dfrac{1}{6} x \cdot 2\sqrt{3} \cdot MN. \cdot \sin 90^\circ$

$= \dfrac{1}{6} x \cdot 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{3^2 - \left(\dfrac{x}{2}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{3}}{6} x \cdot \sqrt{36 - x^2} \leq \dfrac{\sqrt{3}}{6} \cdot \left[\dfrac{x^2 + (36 - x^2)}{2}\right] = 3\sqrt{3}.$

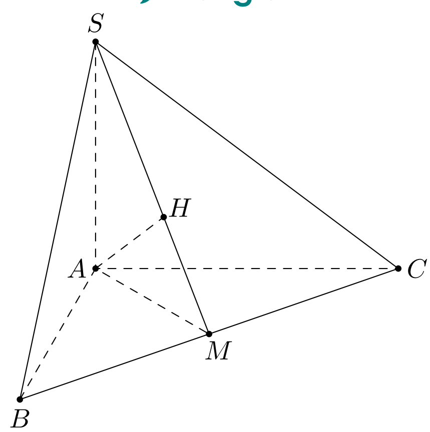
Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = \sqrt{36 - x^2} \Leftrightarrow x = 3\sqrt{2}$.

Chọn đáp án B □

Câu 6. Xét khối chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại A, SA vuông góc với mặt phẳng đáy, khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng 3. Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC), giá trị $\cos\alpha$ khi thể tích khối chóp $S.ABC$ nhỏ nhất là

A $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. B $\dfrac{2}{3}$. C $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. D $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

Lời giải.



Đặt $SA = h$, $AB = AC = a$.

Ta có $d(A;(SBC)) = AH = 3$; $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{SA^2} + \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{AC^2} \Leftrightarrow \dfrac{1}{9} = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{h^2} \geq 3\sqrt[3]{\dfrac{1}{a^4h^2}} \Rightarrow$ $a^2h \geq 6$.

$\widehat{((SBC),(ABC))} = \widehat{SMA} = \alpha$.

$V_{S.ABC} = \dfrac{1}{6}a^2h \geq 1$.

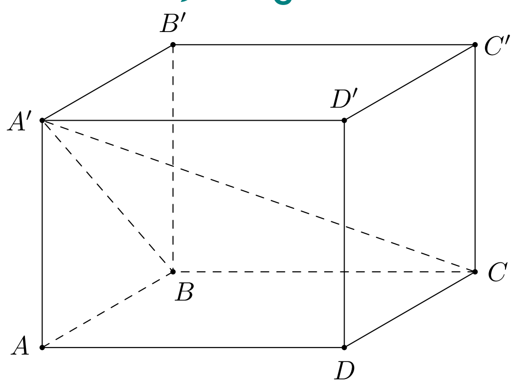
Thể tích nhỏ nhất bằng 1 khi $a = h \Rightarrow SM = a\sqrt{\dfrac{3}{2}} \Rightarrow \cos\alpha = \dfrac{AM}{SM} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{a\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Chọn đáp án C □

Câu 7. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = x$, $AD = 1$. Biết rằng góc giữa đường thẳng $A'C$ và mặt phẳng $(ABB'A')$ bằng $30°$. Tìm giá trị lớn nhất $V_{\max}$ của thể tích khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$.

A $V_{\max} = \dfrac{3\sqrt{3}}{4}$. B $V_{\max} = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$. C $V_{\max} = \dfrac{1}{2}$. D $V_{\max} = \dfrac{3}{2}$.

Lời giải.



Ta có $\left.\begin{matrix} BC \perp BB' \\ BC \perp AB \end{matrix}\right\} \Rightarrow CB \perp (ABB'A') \Rightarrow A'B$ là hình chiếu vuông góc của $A'C$ trên mặt phẳng $(ABB'A') \Rightarrow$ góc giữa đường thẳng $A'C$ và mặt phẳng $(ABB'A')$ là góc $(A'B, A'C) = \widehat{BA'C}$ (vì $\widehat{BA'C}$ nhọn do $\Delta BA'C$ vuông tại B). Vậy $\widehat{BA'C} = 30°$.

Ta có $A'B = \dfrac{BC}{\tan\widehat{BA'C}} = \dfrac{1}{\tan 30°} = \sqrt{3}$; $A'A = \sqrt{A'B^2 - AB^2} = \sqrt{3 - x^2}$.

$V_{ABCD.A'B'C'D'} = AB.AD.AA' = x\sqrt{3 - x^2} \leq \dfrac{x^2 + (3 - x^2)}{2} = \dfrac{3}{2}$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = \sqrt{3 - x^2} \Leftrightarrow x^2 = 3 - x^2 = x = \sqrt{\dfrac{3}{2}}$ (vì $x > 0$).

Vậy $V_{\max} = \dfrac{3}{2}$.

Chọn đáp án D □

Câu 8. Nhân ngày quốc tế Phụ nữ 8 – 3 năm 2019. Ông A đã mua tặng vợ một món quà và đặt nó trong một chiếc hộp chữ nhật có thể tích là 32 (đvtt) có đáy là hình vuông và không nắp. Để món quà trở nên đặc biệt và xứng tầm với giá trị của nó, ông quyết định mạ vàng chiếc hộp, biết rằng độ dày của lớp mạ trên mọi điểm của chiếc hộp là không đổi và như nhau. Gọi chiều cao và cạnh đáy của chiếc hộp lần lượt là h và x. Để lượng vàng trên hộp là nhỏ nhất thì giá trị của h và x là?

A $h = 2$, $x = 4$. B $h = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $x = 4$. C $h = 2$, $x = 1$. D $h = 4$, $x = 2$.

Lời giải.

Ta có thể tích chiếc hộp $V = x^2h = 32$ (đvtt), với $x, h > 0$. Suy ra $h = \dfrac{32}{x^2}$

Phần mạ vàng của chiếc hộp $S = 2x^2 + 8xh = 2x^2 + 8x.\dfrac{32}{x^2} = 2x^2 + \dfrac{256}{x}$.

Cách 1

Ta có $2x^2 + \dfrac{256}{x} = 2x^2 + \dfrac{128}{x} + \dfrac{128}{x} \geq 3\sqrt[3]{2x^2 \cdot \dfrac{128}{x} \cdot \dfrac{128}{x}} = 96$ (BĐT AM-GM).

Đẳng thức xảy ra khi $2x^2 = \dfrac{128}{x}$ hay $x = 4$, khi đó $h = 2$.

Cách 2.

Xét hàm số $f(x) = 2x^2 + \dfrac{256}{x}$ với $x > 0$.

Ta có $f'(x) = 4x - \dfrac{256}{x^2} = \dfrac{4x^3 - 256}{x^2}$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 256 \Leftrightarrow x = 4$; $f(4) = 96$.

Bảng biến thiên

x	0		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	96	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số đạt GTNN tại $x = 4$, khi đó $h = 2$.

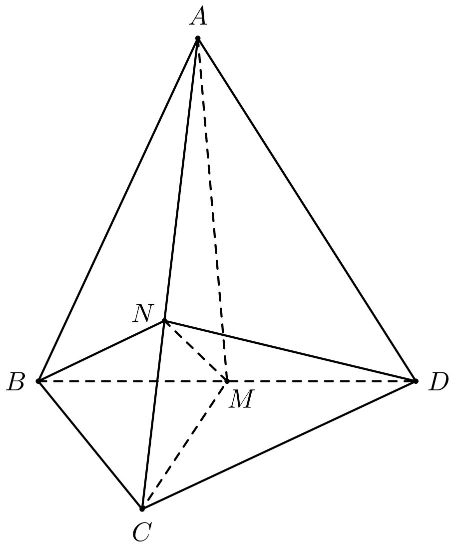
Vậy phương án A đúng.

Chọn đáp án A □

Câu 9. Xét tứ diện $ABCD$ có các cạnh $AB = BC = CD = DA = 1$ và AC, BD thay đổi. Giá trị lớn nhất của thể tích khối tứ diện $ABCD$ bằng

A. $\dfrac{2\sqrt{3}}{27}$. B. $\dfrac{4\sqrt{3}}{27}$. C. $\dfrac{2\sqrt{3}}{9}$. D. $\dfrac{4\sqrt{3}}{9}$.

Lời giải.



Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BD, BD, AC. Đặt $BD = 2x$, $BD = 2x$, $AC = 2y$ $(x, y > 0)$.

Ta có $CM \perp BD, AM \perp BD \Rightarrow BD \perp (AMC)$.

Ta có $MA = MC = \sqrt{1 - x^2}$, $MN = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, $S_{AMC} = \dfrac{1}{2}MN \cdot AC = \dfrac{1}{2}y \cdot \sqrt{1 - x^2 - y^2}$.

$V_{ABCD}=\dfrac{1}{3}\cdot DB\cdot S_{AMC}$

$=\dfrac{1}{3}\cdot 2x\cdot y\sqrt{1-x^2-y^2}=\dfrac{2}{3}\sqrt{x^2\cdot y^2\cdot(1-x^2-y^2)}\leq\dfrac{2}{3}\sqrt{\dfrac{(x^2+y^2+1-x^2-y^2)^3}{27}}.$

$\Rightarrow V_{ABCD}\leq\dfrac{2\sqrt{3}}{27}$. Dấu đẳng thức xảy ra khi $x=y=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

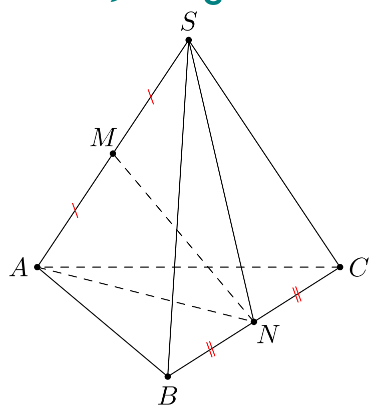
Vậy giá trị lớn nhất của thể tích khối tứ diện $ABCD$ là $\dfrac{2\sqrt{3}}{27}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 10. Cho hình chóp $SABC$ có $SA=x$, $SB=y$, $AB=AC=SB=SC=1$. Thể tích khối chóp $SABC$ đạt giá trị lớn nhất khi tổng $x+y$ bằng

(A) $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$. (B) $\sqrt{3}$. (C) $\dfrac{4}{\sqrt{3}}$. (D) $4\sqrt{3}$.

Lời giải.



Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA, BC và đặt $2a=x$, $2b=y$.

$BC\perp AN, BC\perp SN\Rightarrow BC\perp(SAN)$

$V_{SABC}=V_{BSAN}+V_{CSAN}=2V_{BSAN}=\dfrac{1}{3}BC\cdot S_{SAN}$

$AN^2=\dfrac{AB^2+AC^2}{2}-\dfrac{BC^2}{4}=1-b^2\Rightarrow MN^2=AN^2-MA^2=1-b^2-a^2$

$\Rightarrow S_{SAN}=\dfrac{1}{2}SA\cdot NM=a\sqrt{1-a^2-b^2}$

$\Rightarrow V_{SABC}=\dfrac{1}{3}2ab\sqrt{1-a^2-b^2}\Rightarrow V^2{}_{SABC}=\dfrac{1}{9}\cdot 4a^2\cdot b^2\cdot\left(1-a^2-b^2\right)\leq\dfrac{4}{9}\cdot\left(\dfrac{a^2+b^2+1-a^2-b^2}{3}\right)^3$

$\Rightarrow V^2{}_{SABC}\leq\dfrac{4}{243}$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a^2=b^2=1-a^2-b^2\Leftrightarrow a=b=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\Rightarrow x=y=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\Rightarrow x+y=\dfrac{4}{\sqrt{3}}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 11. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có tổng diện tích tất cả các mặt là 36, độ dài đường chéo AC' bằng 6. Hỏi thể tích của khối hộp lớn nhất là bao nhiêu?

(A) $8\sqrt{2}$. (B) $6\sqrt{6}$. (C) $24\sqrt{3}$. (D) $16\sqrt{2}$.

Lời giải.

Gọi độ dài $AB=a$, $AD=b$ và $AA'=c$.

Ta có tổng diện tích tất cả các mặt là 36 nên $2ab+2bc+2ca=36\Leftrightarrow ab+bc+ca=18(1)$.

Do độ dài đường chéo AC' bằng 6 nên $a^2+b^2+c^2=36(2)$

Thể tích khối hộp là $V = abc$.

Ta có $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca) = 72 \Leftrightarrow a+b+c = 6\sqrt{2}$.

Không mất tính tổng quát, giả sử $c = \min\{a,b,c\}$. Do đó $c < 2\sqrt{2}$. Từ (1) $\Leftrightarrow ab = 18 - c(a+b) = 18 - c\left(6\sqrt{2}-c\right) = c^2 - 6\sqrt{2}c + 18$.

Nên $V = abc = c^3 - 6\sqrt{2}c^2 + 18c = f(c), c \in \left(0; 2\sqrt{2}\right)$

Ta có $f'(c) = 3c^2 - 12\sqrt{2}c + 18 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c = 3\sqrt{2} \\ c = \sqrt{2}. \end{array}\right.$

Lập bảng biến thiên ta được

c	0		$\sqrt{2}$		$2\sqrt{2}$
$f'(c)$		$+$	0	$-$	
$f(c)$	0	$\nearrow$	$8\sqrt{2}$	$\searrow$	$4\sqrt{2}$

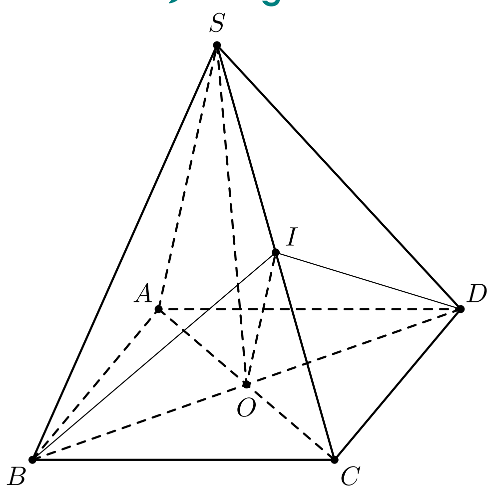
Từ bảng biến thiên, ta thấy $\max\limits_{\left(0;6\sqrt{2}\right)} V = f\left(\sqrt{2}\right) = 8\sqrt{2}$.

Chọn đáp án A ☐

Câu 12. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SC = x$ $\left(0 < x < a\sqrt{3}\right)$, các cạnh còn lại đều bằng a. Biết rằng thể tích khối chóp $S.ABCD$ lớn nhất khi và chỉ khi $x = \dfrac{a\sqrt{m}}{n}$ $(m, n \in \mathbb{N}^*)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $m + 2n = 10$. B. $m^2 - n = 30$. C. $2n^2 - 3m < 15$. D. $4m - n^2 = -20$.

Lời giải.



Gọi I là trung điểm SC, $O = AC \cap BD$.

Ta có $\begin{cases} BI \perp SC \\ DI \perp SC \end{cases} \Rightarrow BD \perp SC$.

Mà $ABCD$ là hình thoi nên $BD \perp AC$.

Khi đó, $BD \perp (SAC)$.

$V_{S.ABCD} = 2V_{S.ABC} = 2V_{B.SAC}$.

$AO^2 = AB^2 - BO^2 = AB^2 - (BI^2 - OI^2) = AB^2 - (SB^2 - SI^2) + OI^2 = \dfrac{x^2 + a^2}{4}$.

$\Rightarrow AC^2 = 4AO^2 = x^2 + a^2 = SA^2 + SC^2 \Rightarrow \Delta SAC$ vuông tại S.

$BO = \sqrt{AB^2 - AO^2} = \dfrac{\sqrt{3a^2 - x^2}}{2}$.

$\Rightarrow V_{S.ABCD} = 2V_{B.SAC} = 2 \cdot \dfrac{1}{3} BO \cdot \dfrac{1}{2} SA \cdot SC = \dfrac{1}{3} \dfrac{\sqrt{3a^2 - x^2}}{2} \cdot a \cdot x = \dfrac{ax\sqrt{3a^2 - x^2}}{6}$.

Ta có $x\sqrt{3a^2 - x^2} = \sqrt{x^2.(3a^2 - x^2)} \leq \dfrac{x^2 + (3a^2 - x^2)}{2} = \dfrac{3a^2}{2}$

$\Rightarrow V_{S.ABCD} \leq \dfrac{a^3}{4}$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x^2 = 3a^2 - x^2 \Leftrightarrow x = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

Vậy, thể tích khối chóp $S.ABCD$ lớn nhất khi và chỉ khi $x = \dfrac{a\sqrt{6}}{2} \Rightarrow m = 6; n = 2$.

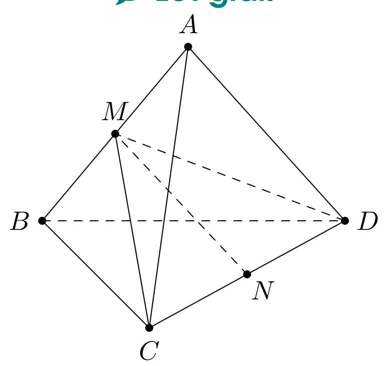
$\Rightarrow m + 2n = 10$.

Chọn đáp án A □

Câu 13. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = x$, $CD = y$, tất cả các cạnh còn lại bằng 2. Khi thể tích tứ diện $ABCD$ là lớn nhất tính xy.

A $\dfrac{2}{3}$. B $\dfrac{4}{3}$. C $\dfrac{16}{3}$. D $\dfrac{1}{3}$.

Lời giải.



Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD.

Tam giác ADB, CAB là hai tam giác cân cạnh đáy AB nên $DM \perp AB$ và $CM \perp AB$. Suy ra $AB \perp (MCD)$.

$V_{ABCD} = V_{B.MCD} + V_{A.MCD} = \dfrac{1}{3} \cdot BM \cdot S_{MCD} + \dfrac{1}{3} \cdot AM \cdot S_{MCD} = \dfrac{x}{3} \cdot S_{MCD}$.

Tam giác $\Delta ABC = \Delta ABD\,(c.c.c)$ nên $CM = DM \Rightarrow MN \perp CD$.

$S_{MCD} = \dfrac{1}{2} \cdot CD \cdot MN = \dfrac{1}{2} y \cdot \sqrt{MC^2 - CN^2} = \dfrac{1}{2} y \cdot \sqrt{(BC^2 - BM^2) - CN^2} = \dfrac{1}{2} y \sqrt{4 - \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{4}} = \dfrac{1}{4} y \sqrt{16 - (x^2 + y^2)}$.

$V_{ABCD} = \dfrac{xy}{12} \sqrt{16 - (x^2 + y^2)} \leq \dfrac{xy}{12} \sqrt{16 - 2xy} = \dfrac{1}{12} \sqrt{xy \cdot xy \cdot (16 - 2xy)} \leq \dfrac{1}{12} \sqrt{\left(\dfrac{xy + xy + (16 - 2xy)}{3}\right)^3} = \dfrac{1}{12} \sqrt{\left(\dfrac{16}{3}\right)^3}$.

Dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases} x = y \\ xy = 16 - 2xy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ xy = \dfrac{16}{3} \end{cases}$.

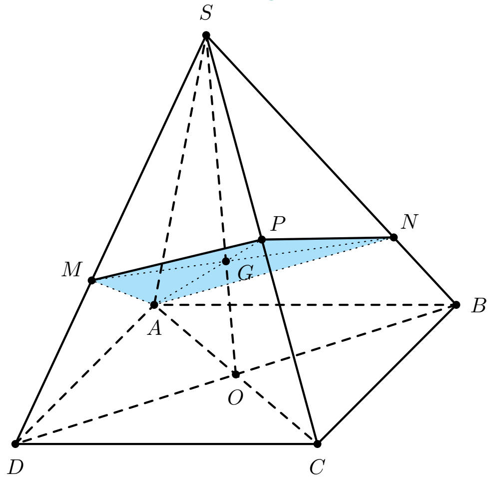
Vậy thể tích $ABCD$ đạt giá trị lớn nhất khi $xy = \dfrac{16}{3}$.

Chọn đáp án C □

Câu 14. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành và có thể tích V. Điểm P là trung điểm của SC, một mặt phẳng qua AP cắt hai cạnh SD và SB lần lượt tại M và N. Gọi V_1 là thể tích khối chóp $S.AMPN$. Giá trị lớn nhất của $\dfrac{V_1}{V}$ thuộc khoảng nào sau đây?

A $\left(0;\dfrac{1}{5}\right)$. B $\left(\dfrac{1}{5};\dfrac{1}{3}\right)$. C $\left(\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{2}\right)$. D $\left(\dfrac{1}{2};1\right)$.

Lời giải.



Gọi $O = AC \cap BD$, $G = AP \cap SO$, suy ra G là trọng tâm tam giác SAC.

Gọi (P) là mặt phẳng qua AP cắt hai cạnh SD và SB lần lượt tại M và N.

Dễ thấy: $\begin{cases}(P)\cap(SBD) = MN\\ (P)\cap(SAC) = AP\\ (SBD)\cap(SAC) = SO\end{cases} \Rightarrow MN,\ AP,\ SO$ đồng quy hay M, N, G thẳng hàng.

Đặt: $x = \dfrac{SM}{SD}$ $(0 < x \le 1)$ và $y = \dfrac{SN}{SB}$ $(0 < y \le 1)$.

$\Rightarrow \dfrac{V_1}{V} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{V_{S.AMP}}{V_{S.ADC}} + \dfrac{V_{S.ANP}}{V_{S.ABP}}\right) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{SA}{SA}\cdot\dfrac{SM}{SD}\cdot\dfrac{SP}{SC} + \dfrac{SA}{SA}\cdot\dfrac{SN}{SB}\cdot\dfrac{SP}{SC}\right) = \dfrac{1}{4}(x+y)$.

Từ tỷ lệ: $\dfrac{S_{\Delta SMN}}{S_{\Delta SBD}} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{S_{\Delta SMG}}{S_{\Delta SDO}} + \dfrac{S_{\Delta SNG}}{S_{\Delta SBO}}\right) \Leftrightarrow \dfrac{SM}{SD}\cdot\dfrac{SN}{SB} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{SM}{SD}\cdot\dfrac{SG}{SO} + \dfrac{SN}{SB}\cdot\dfrac{SG}{SO}\right) = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{SM}{SD} + \dfrac{SN}{SB}\right)$.

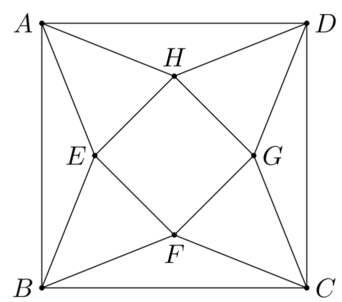
$\Rightarrow xy = \dfrac{1}{3}(x+y)$. Lại có $(x-1)(y-1) \ge 0 \Rightarrow xy - (x+y) + 1 \ge 0$.

Từ đó suy ra: $-\dfrac{2}{3}(x+y) + 1 \ge 0$ hay $x + y \le \dfrac{3}{2}$. Vậy $\dfrac{V_1}{V}$ lớn nhất bằng $\dfrac{3}{8}$.

Chọn đáp án C □

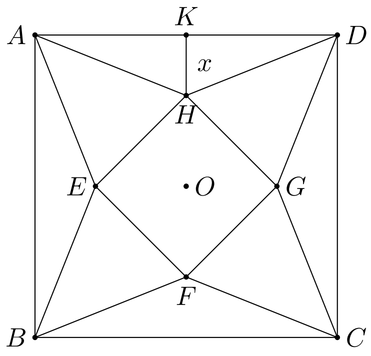
Câu 15.

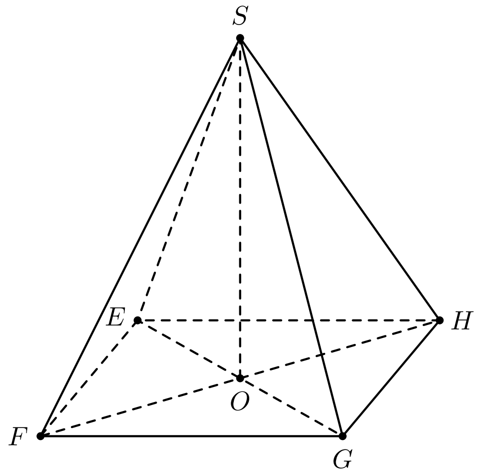
Trong một cuộc thi làm đồ dùng học tập do trường phát động, bạn An nhờ bố làm một hình chóp tứ giác đều bằng cách lấy một mảnh tôn hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng 5 cm (tham khảo hình vẽ). Cắt mảnh tôn theo các tam giác cân AEB, BFC, CGD, DHA và sau đó gò các tam giác AEH, BEF, CFG, DGH sao cho bốn đỉnh A, B, C, D trùng nhau tạo thành khối chóp tứ giác đều. Thể tích lớn nhất của khối chóp tứ giác đều tạo thành bằng



(A) $\dfrac{4\sqrt{10}}{3}$. (B) $\dfrac{4\sqrt{10}}{5}$. (C) $\dfrac{8\sqrt{10}}{3}$. (D) $\dfrac{8\sqrt{10}}{5}$.

Lời giải.





Gọi K là trung điểm AD, đặt $HK = x, 0 < x \leq \dfrac{5}{2}$.

Ta có $EF = FG = GH = HE = \left(\dfrac{5}{2} - x\right)\sqrt{2}; HD = \sqrt{\left(\dfrac{5}{2}\right)^2 + x^2}$.

Suy ra $SO = \sqrt{SH^2 - OH^2} = \sqrt{HD^2 - OH^2} = \sqrt{\left(\dfrac{5}{2}\right)^2 + x^2 - \left(\dfrac{5}{2} - x\right)^2}$.

Ta có $V = \dfrac{1}{3} \cdot 2 \cdot \left(\dfrac{5}{2} - x\right)^2 \sqrt{\left(\dfrac{5}{2}\right)^2 + x^2 - \left(\dfrac{5}{2} - x\right)^2} = \dfrac{2}{3} \cdot \left(\dfrac{5}{2} - x\right)^2 \cdot \sqrt{5x}$.

$\Rightarrow V' = \dfrac{2}{3}\left[-2\left(\dfrac{5}{2} - x\right)\sqrt{5x} + \left(\dfrac{5}{2} - x\right)^2 \dfrac{5}{2\sqrt{5x}}\right], V' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{5}{2} \\ x = \dfrac{1}{2} \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

x	0		$\frac{1}{2}$		$\frac{5}{2}$
V'		$+$	0	$-$	
V		$\nearrow$	$\frac{4\sqrt{10}}{3}$	$\searrow$	

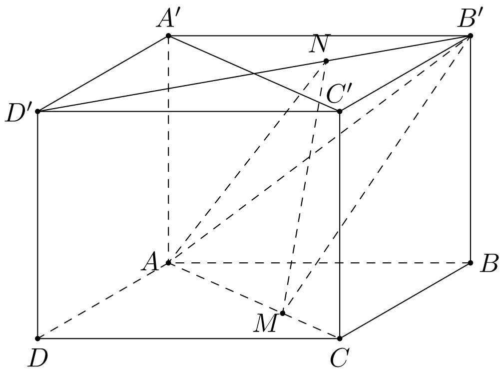
Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy $V_{\max} = \dfrac{4\sqrt{10}}{3}$ khi $x = \dfrac{1}{2}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 16. Cho khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a . Các điểm M, N lần lượt di động trên các tia $AC, B'D'$ sao cho $AM + B'N = a\sqrt{2}$ .Thể tích khối tứ diện $AMNB'$ có giá trị lớn nhất là

(A) $\dfrac{a^3}{12}$. (B) $\dfrac{a^3}{6}$. (C) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$. (D) $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{12}$.

Lời giải.



Ta có $V_{AB'MN} = \dfrac{1}{3}d\left(N, (AB'M)\right).S_{\Delta AB'M}$.

Do $ACB'D'$ là tứ diện đều nên $\sin\left(\widehat{B'D', (AB'M)}\right) = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$, $\sin\widehat{B'AM} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Suy ra $V_{AB'MN} = \dfrac{1}{3}\left(B'N.\sin\left(\widehat{B'D', (AB'M)}\right)\right).\dfrac{1}{2}AB'.AM.\sin\widehat{B'AM} = \dfrac{a}{6}.AM.B'N$

$\leq \dfrac{a}{6}\left(\dfrac{AM + B'N}{2}\right)^2 = \dfrac{a^3}{12}$

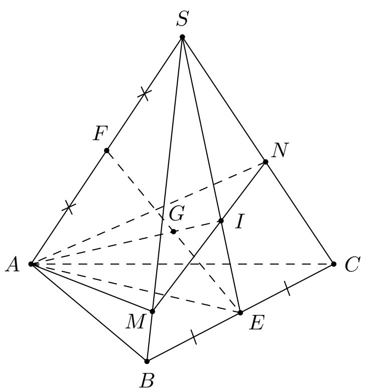
Vậy $(V_{AB'MN})_{\max} = \dfrac{a^3}{12}$.

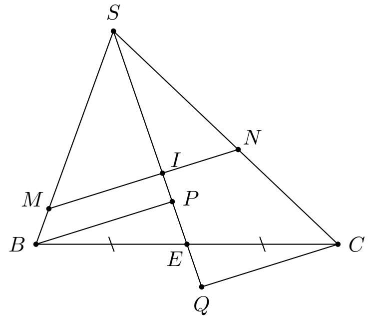
Chọn đáp án (A) □

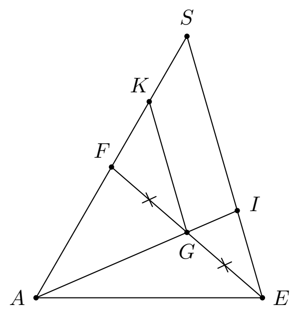
Câu 17. Cho tứ diện $SABC$ có G là trọng tâm tứ diện, mặt phẳng quay quanh AG cắt các cạnh SB, SC lần lượt tại M, N . Giá trị nhỏ nhất của tỉ số $\dfrac{V_{S.AMN}}{V_{S.ABC}}$ là?

(A) $\dfrac{4}{9}$. (B) $\dfrac{3}{8}$. (C) $\dfrac{1}{3}$. (D) $\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.







Gọi E, F, G lần lượt là trung điểm BC, SA, EF suy ra G là trọng tâm tứ diện $SABC$. Điểm I là giao điểm của AG và SE. Qua I dựng đường thẳng cắt các cạnh SB, SC lần lượt tại M, N. Suy ra (AMN) là mặt phẳng quay quanh AG thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Kẻ $GK \parallel SE, (K \in SA)$ suy ra K là trung điểm FS.

$\Rightarrow \dfrac{KG}{SI} = \dfrac{AK}{AS} = \dfrac{3}{4}$. Mà $\dfrac{KG}{SE} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \dfrac{SI}{SE} = \dfrac{2}{3}$.

☑ Cách 1

Kẻ $BP \parallel MN, CQ \parallel MN$; $(P, Q \in SE)$.

Ta có $\dfrac{SM}{SB} = \dfrac{SI}{SP}; \dfrac{SN}{SC} = \dfrac{SI}{SQ}$.

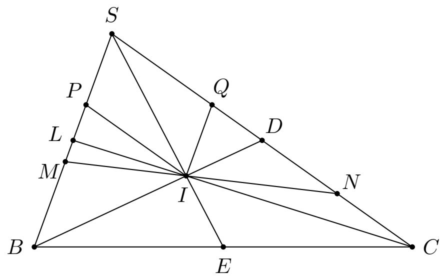
$\Rightarrow \Delta BEP = \Delta CEQ \Rightarrow E$ là trung điểm $PQ \Rightarrow SP + SQ = 2SE$ (đúng cả trong trường hợp $P \equiv Q \equiv E$).

Ta có $\dfrac{V_{S.AMN}}{V_{S.ABC}} = \dfrac{SA}{SA} \cdot \dfrac{SM}{SB} \cdot \dfrac{SN}{SC} = 1 \cdot \dfrac{SI}{SP} \cdot \dfrac{SI}{SQ} \overset{AM-GM}{\geq} \dfrac{SI^2}{\frac{(SP+SQ)^2}{4}} = \dfrac{SI^2}{SE^2} = \left(\dfrac{SI}{SE}\right)^2 = \dfrac{4}{9}$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $SP = SQ = SE$. Hay $P \equiv Q \equiv E \Leftrightarrow MN \parallel BC$.

☑ Cách 2

Ta chứng minh được $\dfrac{SB}{SM} + \dfrac{SC}{SN} = 3$.



Thật vậy, qua I kẻ các đường thẳng lần lượt song song SB, SC cắt SC, SB tương ứng tại D, L.

Ta có $\left.\begin{array}{l} \dfrac{SB}{IQ} = \dfrac{DB}{DI} = 3 \\ \dfrac{IQ}{SM} = \dfrac{NI}{NM} \end{array}\right\} \Rightarrow \dfrac{SB}{IQ} \cdot \dfrac{IQ}{SM} = 3 \cdot \dfrac{NI}{NM} \Leftrightarrow \dfrac{SB}{SM} = \dfrac{3NI}{NM}$, (1).

Lại có $\left.\begin{array}{l} \dfrac{SC}{IP} = \dfrac{LC}{LI} = 3 \\ \dfrac{IP}{SN} = \dfrac{MI}{MN} \end{array}\right\} \Rightarrow \dfrac{SC}{IP} \cdot \dfrac{IP}{SN} = 3 \cdot \dfrac{MI}{MN} \Leftrightarrow \dfrac{SC}{SN} = \dfrac{3MI}{MN}$, (2).

Từ (1) và (2) ta có $\dfrac{SB}{SM} + \dfrac{SC}{SN} = 3\left(\dfrac{NI}{NM} + \dfrac{MI}{MN}\right) = 3$.

Đặt $x = \dfrac{SB}{SM}; y = \dfrac{SC}{SN}$. Suy ra $x + y = 3$.

Ta có $\dfrac{V_{S.AMN}}{V_{S.ABC}} = \dfrac{SA}{SA} \cdot \dfrac{SM}{SB} \cdot \dfrac{SN}{SC} = \dfrac{1}{xy} \overset{AM-GM}{\geq} \dfrac{1}{\frac{(x+y)^2}{4}} = \dfrac{4}{9}$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x = y = \dfrac{3}{2} \Leftrightarrow MN \parallel BC$.

☑ Cách 3

Đặt $\dfrac{SB}{SM} = x$; $\dfrac{SC}{SN} = y$, với $x > 0$, $y > 0$.

Ta có $\overrightarrow{SI} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{SE} = \dfrac{1}{3}(\overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC}) = \dfrac{1}{3}(x\overrightarrow{SM} + y\overrightarrow{SN}) = \dfrac{x}{3}\overrightarrow{SM} + \dfrac{y}{3}\overrightarrow{SN}$.

Do I, M, N thẳng hàng nên $\dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{3} = 1 \Leftrightarrow x + y = 3$.

Ta có $\dfrac{V_{S.AMN}}{V_{S.ABC}} = \dfrac{SM}{SB} \cdot \dfrac{SN}{SC} = \dfrac{1}{x} \cdot \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{xy} \geq \dfrac{1}{(\frac{x+y}{2})^2} = \dfrac{4}{9}$.

Vậy $\dfrac{V_{S.AMN}}{V_{S.ABC}}$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng $\dfrac{4}{9}$ khi $x = y$, hay MN đi qua I và song song với BC.

Chọn đáp án A □

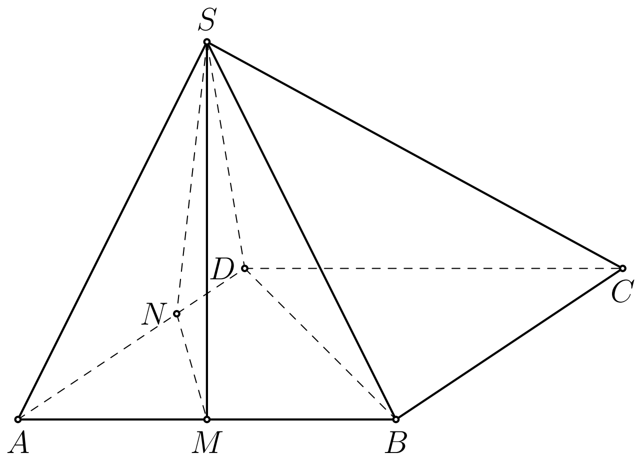
Câu 18 (Chuyên Biên Hòa - Hà Nam - 2020).

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Hai điểm M, N lần lượt thuộc các đoạn thẳng AB và AD (M và N không trùng với A) sao cho $2\dfrac{AB}{AM} + 3\dfrac{AD}{AN} = 8$. Kí hiệu V, V_1

lần lượt là thể tích của các khối chóp $S.ABCD$ và $S.MBCDN$. Tìm giá trị lớn nhất của tỉ số $\dfrac{V_1}{V}$.

(A) $\dfrac{13}{16}$. (B) $\dfrac{11}{12}$. (C) $\dfrac{1}{6}$. (D) $\dfrac{2}{3}$.

Lời giải.



Ta có $\dfrac{V_{SADB}}{V_{SANM}} = \dfrac{AD}{AN} \cdot \dfrac{AB}{AM} \Leftrightarrow \dfrac{2.V_{SADB}}{V_{SANM}} = 2 \cdot \dfrac{AD}{AN} \cdot \dfrac{AB}{AM}$

$\Leftrightarrow \dfrac{V}{V - V_1} = 2 \cdot \dfrac{AD}{AN} \cdot \dfrac{AB}{AM} \Leftrightarrow \dfrac{V - V_1}{V} = \dfrac{1}{2.\dfrac{AD}{AN} \cdot \dfrac{AB}{AM}} \Leftrightarrow \dfrac{V_1}{V} = \dfrac{2 \cdot \dfrac{AD}{AN} \cdot \dfrac{AB}{AM} - 1}{2 \cdot \dfrac{AD}{AN} \cdot \dfrac{AB}{AM}}$

Đặt $x = \dfrac{AD}{AN} \Rightarrow 2\dfrac{AB}{AM} = 8 - 3x, (1 \leq x \leq 2)$. Khi đó $\dfrac{V_1}{V} = \dfrac{x(8 - 3x) - 1}{x(8 - 3x)} = 1 + \dfrac{1}{3x^2 - 8x}$

Đặt $f(x) = 1 + \dfrac{1}{3x^2 - 8x}, (1 \leq x \leq 2)$

Ta có: $f'(x) = -\dfrac{6x - 8}{(3x^2 - 8x)^2} \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow -\dfrac{6x - 8}{(3x^2 - 8x)^2} = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{4}{3} \Rightarrow f\left(\dfrac{4}{3}\right) = \dfrac{13}{16}$

Bảng biến thiên hàm số $y = f(x)$

x	1		$\frac{4}{3}$		2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\frac{4}{5}$	$\nearrow$	$\frac{13}{16}$	$\searrow$	$\frac{3}{4}$

Dựa vào bảng biến thiên ta được hàm số đạt giá trị lớn nhất là $\dfrac{13}{16}$ tại $x = \dfrac{4}{3}$.

Vậy giá trị lớn nhất của tỉ số $\dfrac{V_1}{V}$ là $\dfrac{13}{16}$.

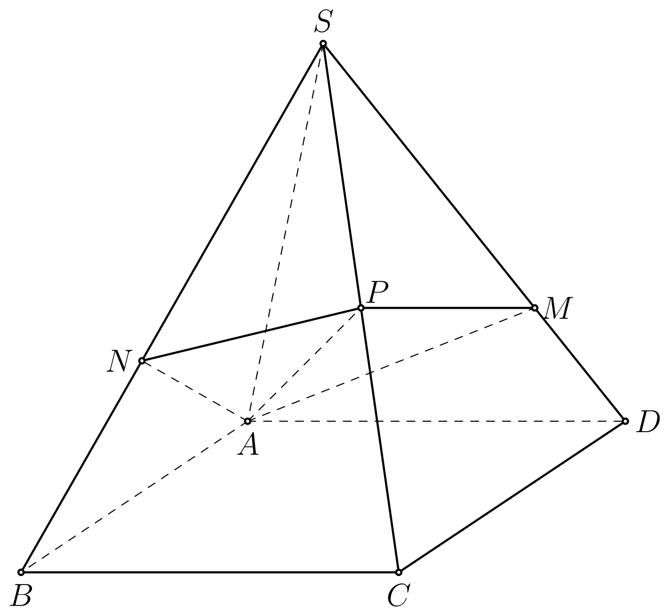
Chọn đáp án (A) □

Câu 19 (Chuyên ĐH Vinh - Nghệ An - 2020).

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành và có thể tích là V. Gọi P là trung điểm của SC. Mặt phẳng (α) chứa AP và cắt hai cạnh SD, SB lần lượt tại M và N. Gọi V' là thể tích của khối chóp $S.AMPN$. Tìm giá trị nhỏ nhất của tỉ số $\dfrac{V'}{V}$.

Ⓐ $\frac{3}{8}$. Ⓑ $\frac{1}{3}$. Ⓒ $\frac{2}{3}$. Ⓓ $\frac{1}{8}$.

Lời giải.



Do (α) đi qua A, P, M, N nên bốn điểm này đồng phẳng.

Áp dụng công thức $\frac{V_{S.AMNP}}{V_{S.ABCD}} = \frac{a+b+c+d}{4.a.b.c.d}$ với $\frac{SA}{SA} = a$, $\frac{SC}{SP} = c$, $\frac{SD}{SM} = d$, $\frac{SB}{SN} = b$ thỏa mãn $a + c = b + d$.

Theo đề bài ta có $\frac{SA}{SA} = 1$, $\frac{SC}{SP} = 2$ và đặt $\frac{SD}{SM} = d > 0$, $\frac{SB}{SN} = b > 0$.

Khi đó: $\frac{V'}{V} = \frac{1+2+b+d}{4.1.2.b.d}$ với $1 + 2 = b + d \Leftrightarrow b + d = 3$.

Vậy ta có: $\frac{V'}{V} = \frac{1+2+b+d}{4.1.2.b.d} \Leftrightarrow \frac{V'}{V} = \frac{1+2+3}{4.2.b.d} \Leftrightarrow \frac{V'}{V} = \frac{3}{4bd}$.

Theo bất đẳng thức cơ bản: $bd \leq \frac{(b+d)^2}{4} = \frac{9}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{bd} \geq \frac{4}{9}$ suy ra $\frac{V'}{V} = \frac{3}{4bd} \geq \frac{3}{4}.\frac{4}{9} = \frac{1}{3}$.

Dấu "=" xảy ra $b = d \Leftrightarrow b = d = \frac{3}{2}$.

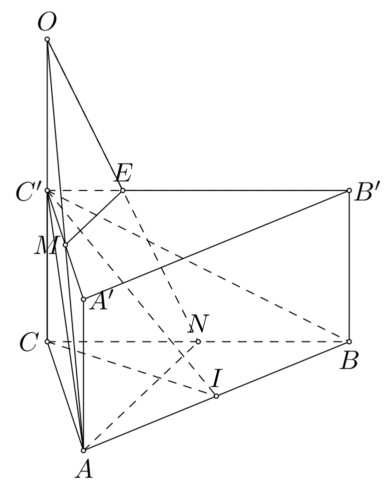
Vậy $\frac{V'}{V}$ có giá trị nhỏ nhất bằng $\frac{1}{3}$.

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 20 (Chuyên KHTN - 2020). Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại C, $AB = 2a$ và góc tạo bởi hai mặt phẳng (ABC') và (ABC) bằng $60°$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của $A'C'$ và BC. Mặt phẳng (AMN) chia khối lăng trụ thành hai phần. Thể tích của phần nhỏ bằng

Ⓐ $\frac{7\sqrt{3}a^3}{24}$. Ⓑ $\frac{\sqrt{6}a^3}{6}$. Ⓒ $\frac{7\sqrt{6}a^3}{24}$. Ⓓ $\frac{\sqrt{3}a^3}{3}$.

Lời giải.



Cách 1:

Gọi I là trung điểm AB, suy ra $AB \perp (CIC')$ nên góc giữa $(C'AB)$ và (ABC) là góc $(CI, C'I)$, suy ra $\widehat{C'IC} = 60^\circ$.

Tam giác $C'IC$ vuông tại C nên $C'C = CI \cdot \tan \widehat{C'IC} = \dfrac{AB}{2} \cdot \tan 60^\circ = a\sqrt{3}$.

Diện tích tam giác ABC là $S_{ABC} = \dfrac{1}{2} \cdot AB \cdot CI = a^2$.

Thể tích khối lăng trụ là $V = CC' \cdot S_{ABC} = a\sqrt{3} \cdot a^2 = a^3\sqrt{3}$.

Trong $(ACC'A')$, kéo dài AM cắt CC' tại O.

Suy ra $C'M$ là đường trung bình của ΔOAC, do đó $OC = 2CC' = 2a\sqrt{3}$.

Thể tích khối chóp $V_{O.ACN} = \dfrac{1}{3} \cdot S_{ACN} \cdot OC = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot S_{ABC} \cdot 2CC' = \dfrac{1}{3}V$.

Thể tích khối chóp $V_{O.C'ME} = \dfrac{1}{3} \cdot S_{C'ME} \cdot OC' = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{8} S_{A'B'C'} \cdot OC' = \dfrac{1}{24}V$.

Do đó $V_{C'EM.CAN} = V_{O.ACN} - V_{O.C'ME} = \dfrac{1}{3}V - \dfrac{1}{24}V = \dfrac{7}{24}V = \dfrac{7}{24} \cdot a^3\sqrt{3} = \dfrac{7\sqrt{3}a^3}{24}$.

Vậy phần thể tích nhỏ hơn là $V_{C'EM.CAN} = \dfrac{7\sqrt{3}a^3}{24}$.

Cách 2:

Kẻ $ME \parallel AN$

Góc tạo bởi (ABC') và (ABC) là góc $\widehat{C'IC} = 60^0$ với I là trung điểm AB.

$CC' = CI.\tan 60^\circ = a\sqrt{3}$

$S_{ABC} = \dfrac{1}{2} CI \cdot AB = a^2$

$S_1 = S_{ACN} = \dfrac{1}{2} S_{ABC} = \dfrac{1}{2} a^2$

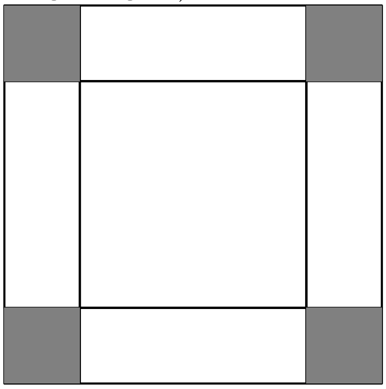
$S_2 = S_{C'ME} = \dfrac{1}{4} S_{ABC} = \dfrac{1}{2} C'M \cdot C'E = \dfrac{1}{8} a^2$

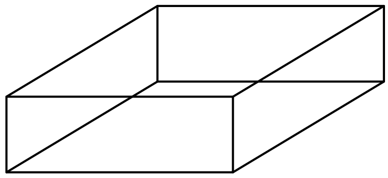
$V = \dfrac{CC'}{3}\left(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1S_2}\right) = \dfrac{7\sqrt{3}a^3}{24}$.

Chọn đáp án A □

Câu 21 (Chuyên Phan Bội Châu - Nghệ An - 2020).

Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh 12 cm. Người ta cắt ở bốn góc của tấm nhôm đó bốn hình vuông bằng nhau, mỗi hình vuông có cạnh bằng x (cm), rồi gập tấm nhôm lại để được một cái hộp không nắp (tham khảo hình vẽ bên). Tìm x để hộp nhận được có thể tích lớn nhất (giả thiết bề dày tấm tôn không đáng kể).



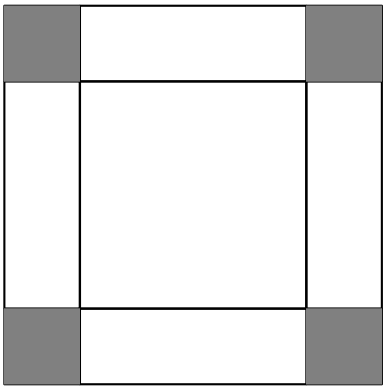


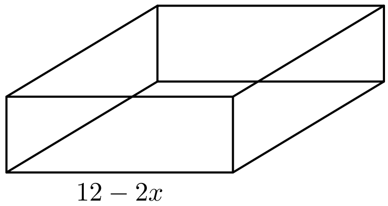
Ⓐ $x = 2$. Ⓑ $x = 3$. Ⓒ $x = 4$. Ⓓ $x = 6$.

Lời giải.

Hình hộp có đáy của là hình vuông cạnh bằng $12 - 2x$, chiều cao bằng x.

Điều kiện $0 < x < 6$





Thể tích khối hộp là $V = (12 - 2x)^2 .x = 4(6 - x)^2 x$.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho 3 số dương $\sqrt[3]{(6-x)(6-x).2x} \leq \dfrac{(6-x)+(6-x)+2x}{3}$

$\Leftrightarrow (6-x)(6-x).2x \leq 4^3 \Leftrightarrow 4(6-x)^2 .x \leq 2.4^3 \Leftrightarrow V \leq 128$ (hằng số).

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow 6 - x = 2x \Leftrightarrow x = 2$.

Vậy thể tích khối hộp lớn nhất khi $x = 2$.

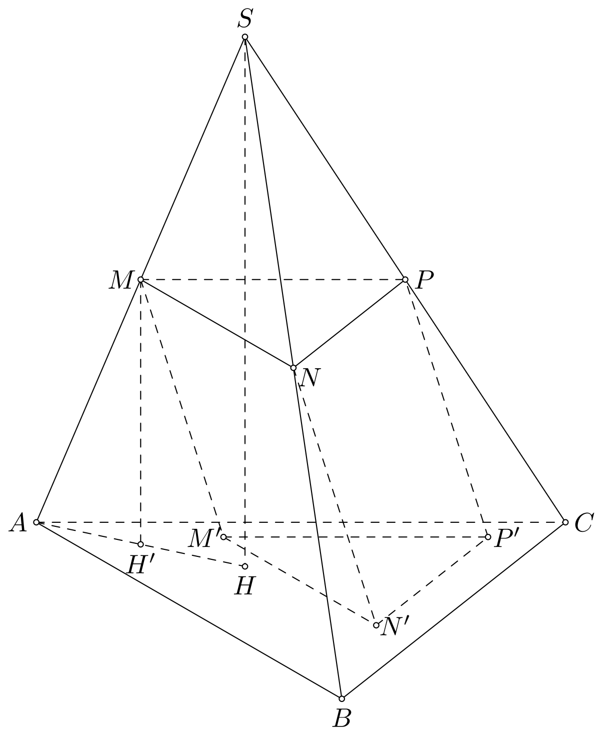
Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 22 (Chuyên Phan Bội Châu - Nghệ An - 2020).

Cho hình chóp $S.ABC$ có thể tích bằng 1. Mặt phẳng (Q) thay đổi song song với mặt phẳng (ABC) lần lượt cắt các cạnh SA, SB, SC tại M, N, P. Qua M, N, P kẻ các đường thẳng song song với nhau lần lượt cắt mặt phẳng (ABC) tại M', N', P'. Tính giá trị lớn nhất của thể tích khối lăng trụ $MNP.M'N'P'$.

Ⓐ $\dfrac{4}{9}$. Ⓑ $\dfrac{1}{3}$. Ⓒ $\dfrac{1}{2}$. Ⓓ $\dfrac{8}{27}$.

Lời giải.



Gọi $\dfrac{SM}{SA} = x\,(0 < x < 1) \Rightarrow \dfrac{SN}{SB} = x = \dfrac{SP}{SC}$

$\Rightarrow \dfrac{S_{\Delta MNP}}{S_{\Delta ABC}} = \dfrac{\frac{1}{2}NM \cdot NP \cdot \sin\widehat{MNP}}{\frac{1}{2}BA \cdot BC \cdot \sin\widehat{ABC}} = \dfrac{NM}{BA} \cdot \dfrac{NP}{BC} = x^2.$

$\Rightarrow S_{\Delta MNP} = x^2.S_{\Delta ABC}.$

Gọi chiều cao của hình chóp là SH, chiều cao của lăng trụ là MH'

$\Rightarrow \dfrac{MH'}{SH} = \dfrac{AM}{AS} = 1 - x \Rightarrow MH' = (1-x)\,SH$

$\Rightarrow V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}SH \cdot S_{\Delta ABC} = 1 \Leftrightarrow SH.S_{\Delta ABC} = 3$

$\Rightarrow V_{MNP.M'N'P'} = MH'.S_{\Delta MNP} = (1-x)\,SH.x^2.S_{\Delta ABC} = x^2.(1-x).SH.S_{\Delta ABC} = x^2.(1-x).3$

Xét hàm số: $f(x) = 3x^2 - 3x^3$ với $x \in (0;1)$

$\Rightarrow f'(x) = 6x - 9x^2 \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \text{ (loại)} \\ x = \dfrac{2}{3} \end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

x	0		$\frac{2}{3}$		1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	$\frac{4}{9}$	$\searrow$	

Vậy: $\max V_{MNP.M'N'P'} = \dfrac{4}{9}$.

Chọn đáp án A □

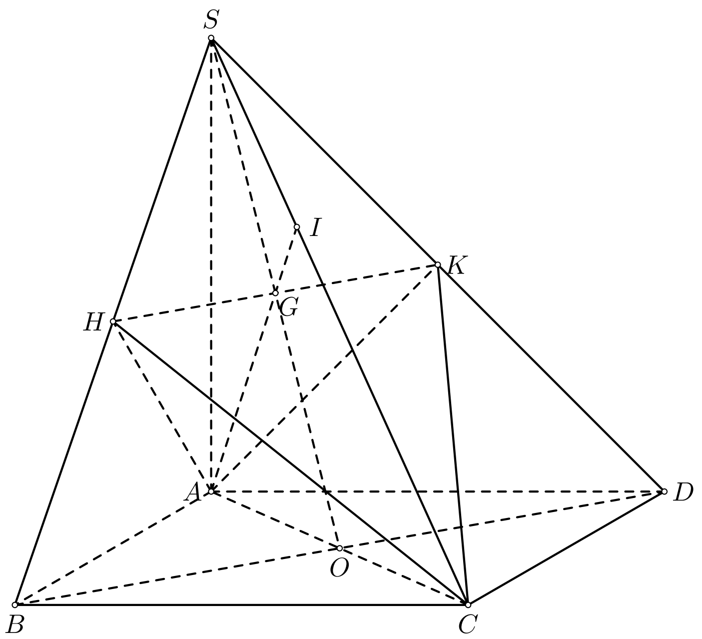
Câu 23 (Chuyên Vĩnh Phúc - 2020).

Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a. Trên đường thẳng vuông góc với $(ABCD)$ tại A lấy điểm S di động không trùng với A. Hình chiếu vuông góc của A lên SB, SD lần lượt tại H, K. Tìm giá trị lớn nhất của thể tích khối tứ diện $ACHK$.

Ⓐ $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{32}$. Ⓑ $\dfrac{a^3}{6}$. Ⓒ $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{16}$. Ⓓ $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{12}$.

Lời giải.

Cách 1



đặt $SA = x > 0$ Ta có $V_{S.ABD} = \dfrac{1}{3}S_{ABD} \cdot SA = \dfrac{a^2x}{6}$.

Lại có $\dfrac{V_{S.AHK}}{V_{S.ABD}} = \dfrac{SH}{SB} \cdot \dfrac{SK}{SD} = \left(\dfrac{SA}{SB}\right)^2 \cdot \left(\dfrac{SA}{SD}\right)^2 = \dfrac{x^4}{(x^2+a^2)^2}$.

$\Rightarrow V_{S.AHK} = \dfrac{x^4}{(x^2+a^2)^2}V_{S.ABD} = \dfrac{a^2x^5}{6\left(x^2+a^2\right)^2}$.

Gọi $O = AC \cap BD, G = SO \cap HK, I = AG \cap SC$.

Ta có $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AH, (AH \subset (SAB))$.

Lại có $\begin{cases} AH \perp SB \\ AH \perp BC \end{cases} \Rightarrow AH \perp (SBC) \Rightarrow AH \perp SC$.

Chứng minh tương tự ta có $AK \perp SC$.

Vì $\begin{cases} SC \perp AK \\ SC \perp AH \end{cases} \Rightarrow SC \perp (AHK), AI \subset (AHK) \Rightarrow SC \perp AI$.

Xét tam giác SAC vuông tại A, và có $AC = a\sqrt{2}, AI \perp SC$.

$\Rightarrow \dfrac{IC}{IS} = \left(\dfrac{AC}{AS}\right)^2 = \dfrac{2a^2}{x^2} \Rightarrow CI = \dfrac{2a^2}{x^2}SI$.

$\Rightarrow V_{ACHK} = \dfrac{1}{3}S_{AHK} \cdot CI = \dfrac{1}{3}S_{AHK} \cdot \dfrac{2a^2}{x^2} \cdot SI = \dfrac{2a^2}{x^2}V_{S.AHK} = \dfrac{a^4}{3} \cdot \dfrac{x^3}{(x^2+a^2)^2}$.

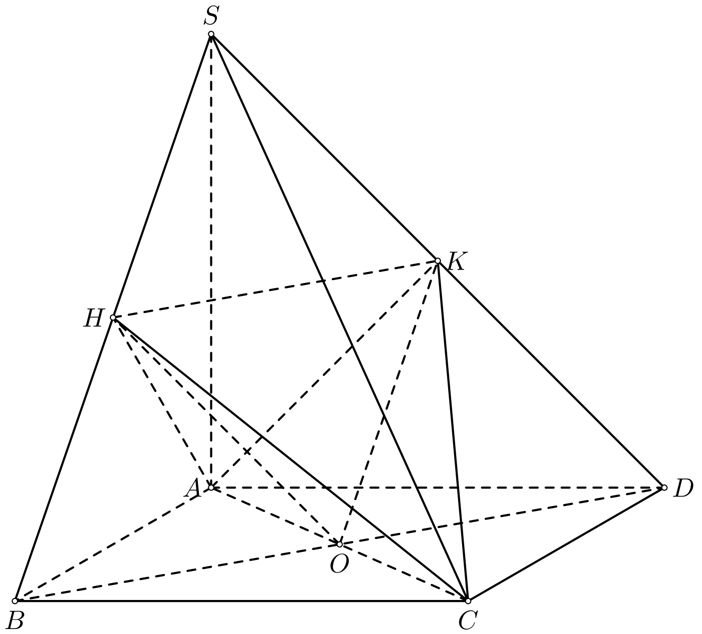
Ta lại có $(x^2+a^2)^2 = \left(\dfrac{x^2}{3} + \dfrac{x^2}{3} + \dfrac{x^2}{3} + a^2\right)^2 \overset{AM-GM}{\geq} 16\dfrac{x^3a}{3\sqrt{3}} \Rightarrow \dfrac{x^3}{(x^2+a^2)^2} \leq \dfrac{3\sqrt{3}}{16a}$

(Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x = a\sqrt{3}$).

Suy ra $V_{ACHK} \leq \dfrac{a^4}{3} \cdot \dfrac{3\sqrt{3}}{16a} \Leftrightarrow V_{ACHK} \leq \dfrac{a^3\sqrt{3}}{16}$.

Vậy giá trị lớn nhất của thể tích khối tứ diện $ACHK$ bằng $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{16}$ khi $x = SA = a\sqrt{3}$.

Cách 2



Đặt $SA = x, x > 0 \Rightarrow V_{S.ABCD} = \dfrac{a^2x}{3} \Rightarrow V_{S.ABD} = \dfrac{1}{2}V_{S.ABCD} = \dfrac{a^2x}{6}$.

Gọi $O = AC \cap BD \Rightarrow O$ là trung điểm của $AC \Rightarrow d(A,(HOK)) = d(C,(HOK))$.

$\Rightarrow V_{AHOK} = V_{CHOK} \Rightarrow V_{ACHK} = 2V_{AHOK}$.

Xét tam giác SAB vuông tại A, có $AH \perp SB \Rightarrow \dfrac{SH}{SB} = \dfrac{SA^2}{SB^2} = \dfrac{x^2}{x^2+a^2}$.

Tương tự trong tam giác SAD ta cũng có $\dfrac{SK}{SD} = \dfrac{x^2}{x^2+a^2}$.

Lại có $\dfrac{V_{S.AHK}}{V_{S.ABD}} = \dfrac{SH}{SB} \cdot \dfrac{SK}{SD} = \dfrac{x^4}{(x^2+a^2)^2} \Rightarrow V_{S.AHK} = \dfrac{x^4}{(x^2+a^2)^2} \cdot V_{S.ABD} = \dfrac{a^2x^5}{6\left(x^2+a^2\right)^2}$.

Mặt khác $\dfrac{d(H,(ABCD))}{d(S,(ABCD))} = \dfrac{BH}{BS} = \dfrac{a^2}{x^2+a^2} \Rightarrow d(H,(ABCD)) = \dfrac{a^2x}{x^2+a^2}$.

Mà $S_{ABO} = \dfrac{1}{2}S_{ABD} = \dfrac{a^2}{4} \Rightarrow V_{H.ABO} = \dfrac{1}{3}S_{ABO} \cdot d(H,(ABO)) = \dfrac{1}{12} \cdot \dfrac{a^4x}{x^2+a^2}$.

Tương tự, ta có $V_{K.ADO} = \dfrac{1}{12} \cdot \dfrac{a^4x}{x^2+a^2}$.

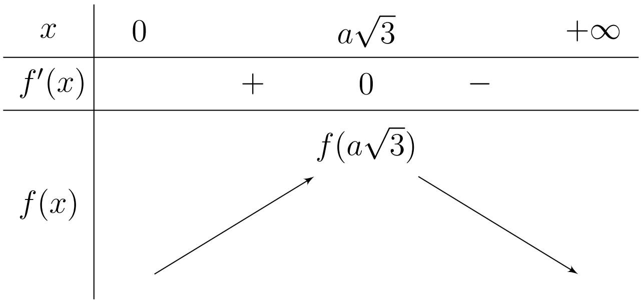
$\Rightarrow V_{ACHK} = 2V_{AOHK} = 2\left(V_{S.ABD} - V_{S.AHK} - V_{HABO} - V_{KADO}\right) = 2\left(\dfrac{a^2x}{6} - \dfrac{a^2x^5}{6\left(x^2+a^2\right)^2} - \dfrac{1}{6} \cdot \dfrac{a^4x}{x^2+a^2}\right)$

$\Leftrightarrow V_{ACHK} = \dfrac{a^4}{3} \cdot \dfrac{x^3}{(x^2+a^2)^2}$.

Xét hàm số $f(x) = \dfrac{x^3}{(x^2+a^2)^2}$ trên khoảng $(0;+\infty)$.

Ta có $f'(x) = \dfrac{x^2\left(3a^2-x^2\right)}{(x^2+a^2)^3}$; $f'(x) = 0 \Rightarrow x = a\sqrt{3}$.

Bảng biến thiên



Quan sát bảng biến thiên, ta thấy $f(x)$ đạt giá trị lớn nhất khi $x = a\sqrt{3}$.

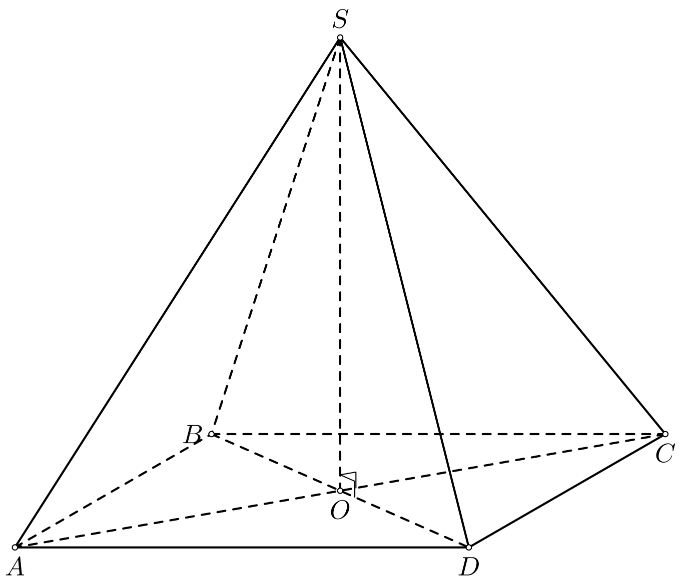
Vậy giá trị lớn nhất của V_{ACHK} bằng $\dfrac{a^4}{3} \cdot \dfrac{(a\sqrt{3})^3}{\left[(a\sqrt{3})^2 + a^2\right]^2} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{16}$ khi $SA = a\sqrt{3}$.

Chọn đáp án C □

Câu 24 (Sở Hưng Yên - 2020). Khối chóp có đáy là hình bình hành, một cạnh đáy bằng a và các cạnh bên đều bằng $a\sqrt{2}$. Thể tích của khối chóp có giá trị lớn nhất là

A $2\sqrt{6}a^3$. B $8a^3$. C $\dfrac{2\sqrt{6}}{3}a^3$. D $\dfrac{7a^3}{12}$.

Lời giải.



Gọi $AC \cap BD = O$.

Ta có $SA = SB = SC = SD = a\sqrt{2} \Rightarrow \begin{cases} SO \perp AC \\ SO \perp BD \end{cases} \Rightarrow SO \perp (ABCD)$.

$\Rightarrow O$ là tâm đường tròn ngoại tiếp hình bình hành $ABCD$

$\Rightarrow ABCD$ là hình chữ nhật.

Không mất tính tổng quát, giả sử $AD = a$ và đặt $AB = x, (x > 0) \Rightarrow OA = \dfrac{1}{2}\sqrt{x^2 + a^2}$.

Xét ΔSOA vuông tại O, ta có $SO = \sqrt{SA^2 - OA^2} = \sqrt{2a^2 - \dfrac{x^2 + a^2}{4}} \Leftrightarrow SO = \dfrac{1}{2}\sqrt{7a^2 - x^2}$.

Lại có $S_{ABCD} = a.x$ nên $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}S_{ABCD} \cdot SO = \dfrac{1}{6}a \cdot x \cdot \sqrt{7a^2 - x^2} \overset{AM-GM}{\leq} \dfrac{a}{6} \cdot \dfrac{x^2 + (7a^2 - x^2)}{2} = \dfrac{7a^3}{12}$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x = \dfrac{a\sqrt{14}}{2}$.

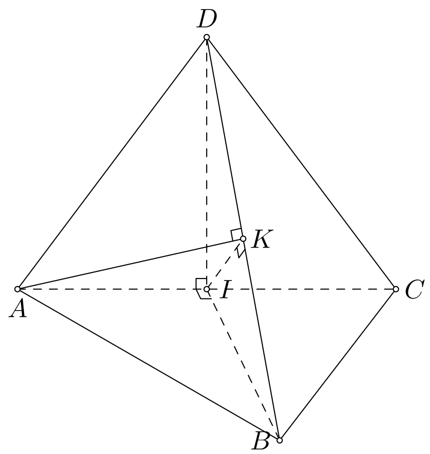
Vậy thể tích lớn nhất của khối chóp đã cho là $\dfrac{7a^3}{12}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 25 (Kim Liên - Hà Nội - 2020). Cho khối tứ diện $ABCD$ có cạnh AC, BD thỏa mãn $AC^2 + BD^2 = 16$ và các cạnh còn lại đều bằng 6. Thể tích khối tứ diện $ABCD$ đạt giá trị lớn nhất bằng

(A) $\dfrac{32\sqrt{2}}{3}$. (B) $\dfrac{16\sqrt{2}}{3}$. (C) $\dfrac{16\sqrt{3}}{3}$. (D) $\dfrac{32\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải.



Gọi I, K lần lượt là trung điểm của AC, BD.

Ta có $AC \perp IB, AC \perp ID \Rightarrow AC \perp (BID) \Rightarrow V_{ABCD} = 2.V_{ABID}$

$V_{ABID} = \dfrac{1}{3}AI \cdot S_{IBD} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{2}AC \cdot \dfrac{1}{2}IK \cdot BD$ (Do $IB = ID$ nên tam giác IBD cân tại I)

$BD = \sqrt{16 - AC^2}$; $0 < AC < 4$

$IK^2 = \dfrac{IB^2 + ID^2}{2} - \dfrac{BD^2}{4} = ID^2 - \dfrac{BD^2}{4} = AD^2 - \dfrac{AC^2}{4} - \dfrac{BD^2}{4} = 32 \Rightarrow IK = 4\sqrt{2}$

$V_{ABCD} = 2 \cdot \dfrac{1}{12} \cdot AC \cdot 4\sqrt{2}\sqrt{16 - AC^2} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3} \cdot AC \cdot \sqrt{16 - AC^2}, (0 < AC < 4)$

Đặt $t = AC$, $(0 < t < 4)$.

Xét $f(t) = t\sqrt{16 - t^2}, (0 < t < 4)$

Ta có

x	0		$2\sqrt{2}$		2
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$		$\nearrow$	8	$\searrow$	

Vậy thể tích khối tứ diện cần tìm đạt giá trị lớn nhất là $\dfrac{16\sqrt{2}}{3}$.

Tìm giá trị lớn nhất của thể tích, ta có thể dùng cách khác như sau:

Áp dụng BĐT Cauchy cho 2 số: AC^2 và $16 - AC^2$

Ta có $AC^2 + 16 - AC^2 \geq 2\sqrt{AC^2\left(16 - AC^2\right)} \Leftrightarrow AC.\sqrt{16 - AC^2} \leq 8$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow AC^2 = 16 - AC^2 \Leftrightarrow AC = 2\sqrt{2}$

Vậy thể tích khối tứ diện cần tìm đạt giá trị lớn nhất là $\dfrac{16\sqrt{2}}{3}$.

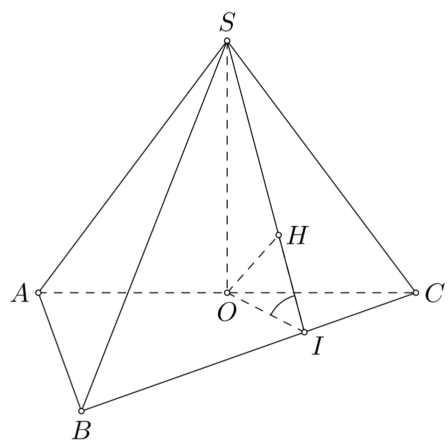
Chọn đáp án B □

Câu 26 (Liên trường Nghệ An - 2020).

Cho hình chóp $S.ABC$, đáy là tam giác ABC có $AB = BC\sqrt{5}$, $AC = 2BC\sqrt{2}$, hình chiếu của S lên (ABC) là trung điểm O của cạnh AC. Khoảng cách từ A đến (SBC) bằng 2. Mặt phẳng (SBC) hợp với mặt phẳng (ABC) một góc α thay đổi. Biết rằng giá trị nhỏ nhất của thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng $\dfrac{\sqrt{a}}{b}$, trong đó $a, b \in \mathbb{N}^*$, a là số nguyên tố. Tổng $a + b$ bằng

A 8. B 7. C 6. D 5.

Lời giải.



Áp dụng định lý Hê-rông trong tam giác ABC ta được diện tích $S_{ABC} = BC^2$.

Từ O kẻ $OI \perp BC$ tại I, suy ra góc tạo bởi (SBC) và (ABC) là $\widehat{SIO} = \alpha$.

Từ O kẻ $OH \perp SI$ tại H thì $d(A, (SBC)) = 2d(O, (SBC)) = OH \Rightarrow OH = 1$.

Tam giác OHI vuông tại H nên $OI = \dfrac{OH}{\sin\alpha} = \dfrac{1}{\sin\alpha}$.

Tam giác SOI vuông tại O nên $SO = OI \cdot \tan\alpha = \dfrac{OH}{\sin\alpha} \cdot \tan\alpha = \dfrac{1}{\cos\alpha}$.

Mà diện tích

$S_{ABC} = BC^2 \Rightarrow 2OI = d(A, BC) = \dfrac{2S_{ABC}}{BC} = 2BC \Rightarrow OI = BC \Rightarrow S_{ABC} = OI^2 = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$.

Thể tích khối chóp là $V = \dfrac{1}{3}S_{ABC} \cdot SO = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{\sin^2\alpha} \cdot \dfrac{1}{\cos\alpha}$.

Xét hàm số $f(x) = (1 - x^2)x = -x^3 + x$ trên $(0; 1)$, $f'(x) = -3x^2 + 1$, $f'(x) = 0 \Rightarrow x = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Bảng biến thiên

x	0		$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$		1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	$\dfrac{2\sqrt{3}}{9}$	$\searrow$	

Suy ra $f(x) \leq \dfrac{2\sqrt{3}}{9}, \forall x \in (0;1)$.

Do đó $(1-\cos^2 x)\cos x \leq \dfrac{2\sqrt{3}}{9} \Rightarrow V = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{1-\cos^2\alpha} \cdot \dfrac{1}{\cos\alpha} \geq \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{9}{2\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Vậy $a = 3, b = 2 \Rightarrow a + b = 5$.

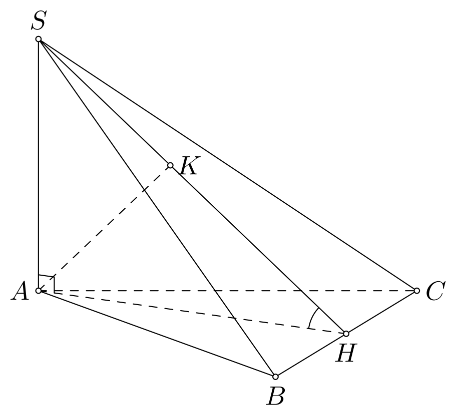
Chọn đáp án D □

Câu 27 (Lý Nhân Tông - Bắc Ninh - 2020).

Xét khối chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại A, SA vuông góc với đáy, khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng 3. Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC), tính $\cos\alpha$ để thể tích khối chóp $S.ABC$ nhỏ nhất.

A $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$. B $\cos\alpha = \dfrac{2}{3}$. C $\cos\alpha = \dfrac{1}{3}$. D $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải.



Gọi H là trung điểm của $BC \Rightarrow AH \perp BC$ (vì tam giác ABC vuông cân tại A).

Ta có $\begin{cases} AH \perp BC \text{ (cmt)} \\ SA \perp BC\,(SA \perp (ABC)) \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAH) \Rightarrow BC \perp SH$.

Ta có $\begin{cases} (ABC) \cap (SBC) = BC \\ AH \perp BC \\ SH \perp BC \end{cases} \Rightarrow ((ABC),(SBC)) = (AH, SH) = \widehat{SHA} = \alpha$.

Kẻ $AK \perp SH$, với $K \in SH$.

Ta có $\begin{cases} AK \perp SH\,(gt) \\ AK \perp BC\,(BC \perp (SAH)) \end{cases} \Rightarrow AK \perp (SBC) \Rightarrow d(A,(SBC)) = AK = 3$.

Tam giác SHK vuông tại K có $AH = \dfrac{AK}{\sin\alpha} = \dfrac{3}{\sin\alpha}$.

Tam giác SAK vuông tại K có $SA = \dfrac{AK}{\sin(90^\circ - \alpha)} = \dfrac{3}{\cos\alpha}$.

Tam giác ABC vuông cân tại A có H là trung điểm của $BC \Rightarrow BC = 2AH = \dfrac{6}{\sin\alpha}$ và $AB = AC = \dfrac{BC}{\sqrt{2}} = \dfrac{6}{\sqrt{2}\sin\alpha}$.

Vậy $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}AB \cdot AC = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{6}{\sqrt{2}\sin\alpha} \cdot \dfrac{6}{\sqrt{2}\sin\alpha} = \dfrac{9}{\sin^2\alpha}$.

$V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}S_{ABC} \cdot SA = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{9}{\sin^2\alpha} \cdot \dfrac{3}{\cos\alpha} = \dfrac{9}{(1-\cos^2\alpha)\cos\alpha}$.

Xét hàm số $y = (1 - \cos^2 \alpha) \cos \alpha$ với $\alpha \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$.

Đặt $t = \cos \alpha \Rightarrow t \in [0; 1] \Rightarrow y = (1 - t^2)\, t = t - t^3$

Suy ra $y' = 1 - 3t^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \in [0; 1] \\ t = -\dfrac{\sqrt{3}}{3} \notin [0; 1] \end{array}\right.$.

Ta có $y(0) = 0, y(1) = 0, y\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right) = \dfrac{2\sqrt{3}}{9}$.

Vậy để thể tích khối chóp nhỏ nhất thì $(1 - \cos^2 \alpha) \cos \alpha$ lớn nhất bằng $\dfrac{2\sqrt{3}}{9}$ khi $\cos \alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

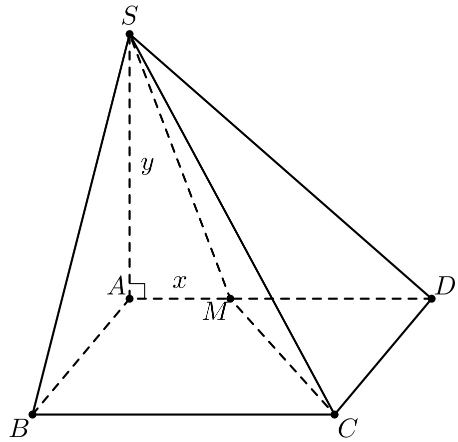
Chọn đáp án (A) □

Câu 28 (Yên Lạc 2 - Vĩnh Phúc - 2020).

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, cạnh bên $SA = y$ $(y > 0)$ và vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$. Trên cạnh AD lấy điểm M và đặt $AM = x$ $(0 < x < a)$. Tính thể tích lớn nhất $V_{\max}$ của khối chóp $S.ABCM$, biết $x^2 + y^2 = a^2$.

(A) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{9}$. (B) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$. (C) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{8}$. (D) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{5}$.

Lời giải.



Ta có $S_{ABCM} = \dfrac{1}{2}(AM + BC) \cdot AB = \dfrac{1}{2}(x + a)\, a$.

Vậy thể tích khối chóp $S.ABCM$ là $V = \dfrac{1}{3} SA \cdot S_{ABCM} = \dfrac{1}{3} y \cdot \dfrac{1}{2}(ax + a^2) = \dfrac{a}{6}(xy + ay)$

$\Leftrightarrow V^2 = \dfrac{a^2}{36} y^2 (x + a)^2 \Leftrightarrow \dfrac{36}{a^2} V^2 = (a^2 - x^2)(x + a)^2$

Xét hàm số $f(x) = (a^2 - x^2)(x + a)^2$ trên khoảng $(0; a)$.

Ta có $f'(x) = -2x(x + a)^2 + 2(a^2 - x^2)(x + a) = 2(x + a)^2 (a - 2x)$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{a}{2}$ (Vì $x > 0$)

Bảng biến thiên

x	0		$\dfrac{a}{2}$		a
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	$f\left(\dfrac{a}{2}\right)$	$\searrow$	

Từ bảng biến thiên suy ra $\max\limits_{(0;a)} f(x) = f\left(\dfrac{a}{2}\right) = \left(a^2 - \dfrac{a^2}{4}\right)\left(\dfrac{a}{2} + a\right)^2 = \dfrac{27a^4}{16}$

Vậy $V_{\max} = \sqrt{\dfrac{a^2}{36} \cdot \max\limits_{(0;a)} f(x)} = \sqrt{\dfrac{a^2}{36} \cdot \dfrac{27a^4}{16}} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{8}$.

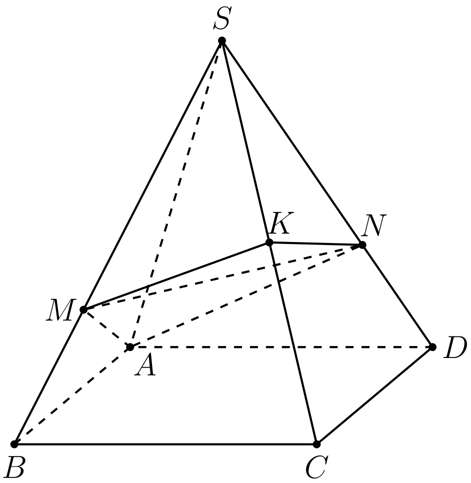
Chọn đáp án C □

Câu 29 (Kim Thành-Hải Dương-2020).

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi K là trung điểm SC. Mặt phẳng chứa AK cắt các cạnh SB, SD lần lượt tại M và N. Gọi V_1, V theo thứ tự là thể tích khối chóp $S.AMKN$ và khối chóp $S.ABCD$. Giá trị nhỏ nhất của tỉ số $\dfrac{V_1}{V}$ bằng

A $\dfrac{3}{8}$. B $\dfrac{1}{2}$. C $\dfrac{1}{3}$. D $\dfrac{2}{3}$.

Lời giải.



Giả sử $x = \dfrac{SM}{SB}$, $y = \dfrac{SN}{SD}$.

Ta có $ABCD$ là hình bình hành nên $V_{S.ABC} = V_{S.ACD} = \dfrac{1}{2}V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{2}V$.

$V_{S.AMKN} = V_{S.AMK} + V_{S.AKN} = \dfrac{SM}{SB} \cdot \dfrac{SK}{SC} \cdot V_{S.ABC} + \dfrac{SK}{SC} \cdot \dfrac{SN}{SD} \cdot V_{S.ACD} = \dfrac{1}{2}x \cdot \dfrac{1}{2}V + \dfrac{1}{2}y \cdot \dfrac{1}{2}V = \dfrac{1}{4}V \cdot (x+y)$

$\Rightarrow \dfrac{V_1}{V} = \dfrac{1}{4}(x+y)$.

Mặt khác, $V_{S.AMKN} = V_{S.AMN} + V_{S.KMN} = \dfrac{SM}{SB} \cdot \dfrac{SN}{SD} \cdot V_{S.ABD} + \dfrac{SK}{SC} \cdot \dfrac{SM}{SB} \cdot \dfrac{SN}{SD} \cdot V_{S.ABC}$

$\Rightarrow V_1 = \dfrac{1}{2}xy \cdot V + \dfrac{1}{2}xy \cdot \dfrac{1}{2}V = \dfrac{3xy}{4}V \Rightarrow \dfrac{V_1}{V} = \dfrac{3xy}{4}$.

Do đó $\dfrac{1}{4}(x+y) = \dfrac{3}{4}xy \Rightarrow x + y = 3xy$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có $3xy = x + y \geq 2\sqrt{xy} \Rightarrow \sqrt{xy} \geq \dfrac{2}{3} \Rightarrow xy \geq \dfrac{4}{9}$

Do đó $\dfrac{V_1}{V} = \dfrac{3}{4}xy \geq \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{4}{9} = \dfrac{1}{3}$

Dấu "= "xảy ra khi $\begin{cases} x + y = 3xy \\ x = y \end{cases} \Rightarrow x = y = \dfrac{2}{3}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của $\dfrac{V_1}{V}$ là $\dfrac{1}{3}$.

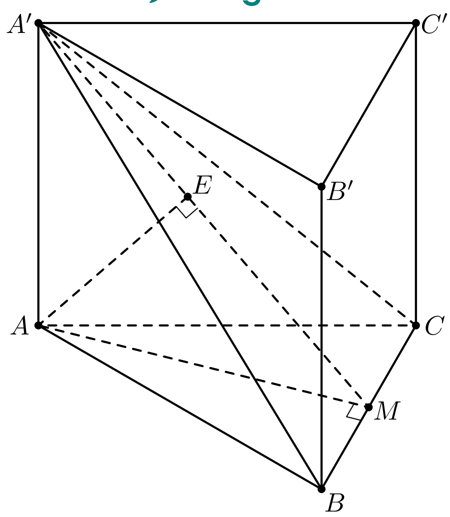
Chọn đáp án C □

Câu 30 (Chuyên Lê Hồng Phong-Nam Định-2020).

Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có độ dài cạnh đáy bằng a. Gọi φ là góc giữa BC' và mặt phẳng $(A'BC)$. Khi $\sin\varphi$ đạt giá trị lớn nhất, tính thể tích khối lăng trụ đã cho?

Ⓐ $\dfrac{\sqrt{6}a^3}{4}$. Ⓑ $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{4}$. Ⓒ $\dfrac{\sqrt[4]{12}a^3}{4\sqrt{3}}$. Ⓓ $\dfrac{\sqrt[4]{27}a^3}{4\sqrt{2}}$.

Lời giải.



Đặt $AA' = x$ $(x > 0)$.

Gọi $h = d\left(A, (A'BC)\right) = d\left(C', (A'BC)\right)$.

Dựng $AM \perp BC$, $AE \perp A'M \Rightarrow h = d\left(A, (A'BC)\right) = d\left(C', (A'BC)\right) = AE = \dfrac{A'A \cdot MA.}{\sqrt{A'A^2 + AM^2}}$.

Khi đó ta có $h = \dfrac{a\sqrt{3}x}{\sqrt{4x^2 + 3a^2}}$ và $BC' = \sqrt{a^2 + x^2}$.

Ta có $\sin\varphi = \dfrac{h}{BC'} = \dfrac{a\sqrt{3}x}{\sqrt{4x^2+3a^2}\sqrt{x^2+a^2}} = \dfrac{a\sqrt{3}}{\sqrt{\dfrac{(4x^2+3a^2)(x^2+a^2)}{x^2}}}$.

Ta có $\sin\varphi$ lớn nhất khi $\dfrac{(4x^2+3a^2)(x^2+a^2)}{x^2}$ nhỏ nhất

Mà $\dfrac{(4x^2+3a^2)(x^2+a^2)}{x^2} = 4x^2 + \dfrac{3a^4}{x^2} + 7a^2 \geq 4a^2\sqrt{3} + 7a^2$ khi

Dấu bằng $4x^2 = \dfrac{3a^4}{x^2} \Rightarrow x = a\sqrt[4]{\dfrac{3}{4}}$, khi đó thể tích khối lăng trụ bằng $\dfrac{\sqrt[4]{27}a^3}{4\sqrt{2}}$.

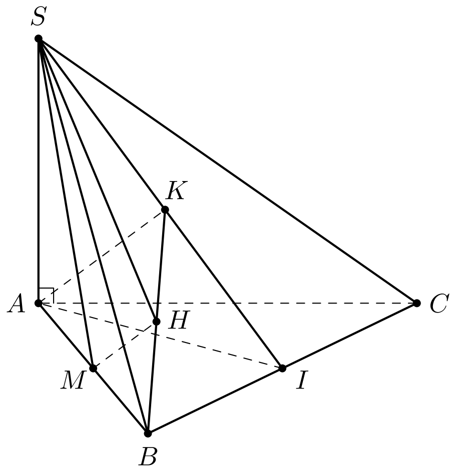
Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 31 (Chuyên Lê Hồng Phong-Nam Định - 2021).

Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh bằng 2. $SA \perp (ABC)$. Gọi M là trung điểm của AB và φ là góc giữa SM và mặt phẳng (SBC). Hãy tính giá trị lớn nhất của thể tích khối chóp $S.ABC$, biết $\sin\varphi = \dfrac{\sqrt{6}}{8}$.

Ⓐ $\sqrt{3}$. Ⓑ $\dfrac{4}{\sqrt{3}}$. Ⓒ 1. Ⓓ $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Lời giải.



Gọi I là trung điểm của BC, K là hình chiếu của A lên SI, H là trung điểm của BK.

Ta có $AK \perp (SBC) \Rightarrow MH \perp (SBC)$ hay $\varphi = \widehat{MSH}$ và $\sin\varphi = \dfrac{MH}{SM} = \dfrac{\sqrt{6}}{8}$.

Đặt $SA = x$ ta có $SM = \sqrt{x^2+1}$, $AI = \sqrt{3}$, $SI = \sqrt{x^2+3}$, $AK = \dfrac{SA.AI}{SI} = \dfrac{x\sqrt{3}}{\sqrt{x^2+3}}$.

$\Rightarrow MH = \dfrac{1}{2}AK = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{x\sqrt{3}}{\sqrt{x^2+3}}$

Do $\sin\varphi = \dfrac{MH}{SM} = \dfrac{\sqrt{6}}{8} \Leftrightarrow \dfrac{\frac{1}{2}\cdot\frac{x\sqrt{3}}{\sqrt{x^2+3}}}{\sqrt{x^2+1}} = \dfrac{\sqrt{6}}{8} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \sqrt{3} \\ x = 1. \end{array}\right.$

Khi $x = \sqrt{3}$ thì thể tích khối chóp $S.ABC$ là $V = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{4\sqrt{3}}{4} \cdot \sqrt{3} = 1$.

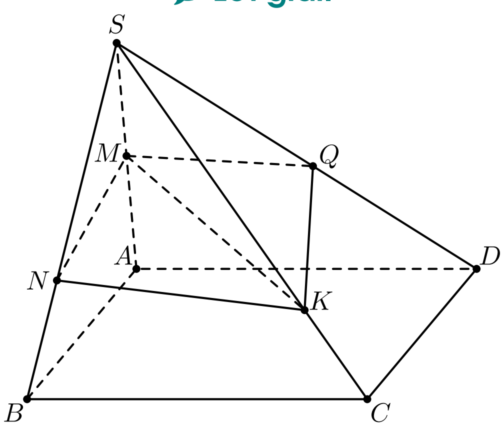
Khi $x = 1$ thì thể tích khối chóp $S.ABC$ là $V = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{4\sqrt{3}}{4} \cdot 1 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Chọn đáp án C □

Câu 32 (Chuyên Thái Bình - 2021). Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình bình hành, có thể tích V. Gọi M là trung điểm của SA, N là điểm trên cạnh SB sao cho $SN = 2NB$. Mặt phẳng (P) thay đổi đi qua các điểm M, N và cắt các cạnh SC, SD lần lượt tại hai điểm phân biệt K và Q. Tính giá trị lớn nhất của thể tích khối chóp $S.MNKQ$.

A $\dfrac{V}{2}$. B $\dfrac{V}{3}$. C $\dfrac{3V}{4}$. D $\dfrac{2V}{3}$.

Lời giải.



Đặt $k = \dfrac{SC}{SK}$; $q = \dfrac{SD}{SQ}$ $(k, q \geq 1)$.

Vì bốn điểm M, N, K, Q đồng phẳng nên ta có $\dfrac{SA}{SM} + \dfrac{SC}{SK} = \dfrac{SB}{SN} + \dfrac{SD}{SQ}$.

Suy ra $2+k=\dfrac{3}{2}+q \Rightarrow q=k+\dfrac{1}{2}$.

Ta có $\dfrac{V_{S.ABC}}{V_{S.MNK}}=\dfrac{SA}{SM}\cdot\dfrac{SB}{SN}\cdot\dfrac{SC}{SK}=2\cdot\dfrac{3}{2}\cdot k=3k \Rightarrow V_{S.MNK}=\dfrac{V}{6k}$.

$\dfrac{V_{S.ADC}}{V_{S.MQK}}=\dfrac{SA}{SM}\cdot\dfrac{SD}{SQ}\cdot\dfrac{SC}{SK}=2.q.k=2qk \Rightarrow V_{S.MQK}=\dfrac{V}{4qk}$.

Do đó $V_{S.MNKQ}=V_{S.MNK}+V_{S.MQK}=\left(\dfrac{1}{6k}+\dfrac{1}{4qk}\right)V=\left(\dfrac{1}{6k}+\dfrac{1}{4\left(k+\dfrac{1}{2}\right)k}\right)V$.

Thể tích $V_{S.MNKQ}$ lớn nhất khi và chỉ khi $f(k)=\dfrac{1}{6k}+\dfrac{1}{4\left(k+\dfrac{1}{2}\right)k}$ đạt giá trị lớn nhất.

Ta có $f'(k)=-\dfrac{1}{6k^2}-\dfrac{2k+\dfrac{1}{2}}{4\left(k+\frac{1}{2}\right)^2k^2}<0, \forall k\geq 1$. Suy ra $Max f(k)=f(1)=\dfrac{1}{3}$.

Vậy $\max V_{S.MNKQ}=\dfrac{1}{3}V$.

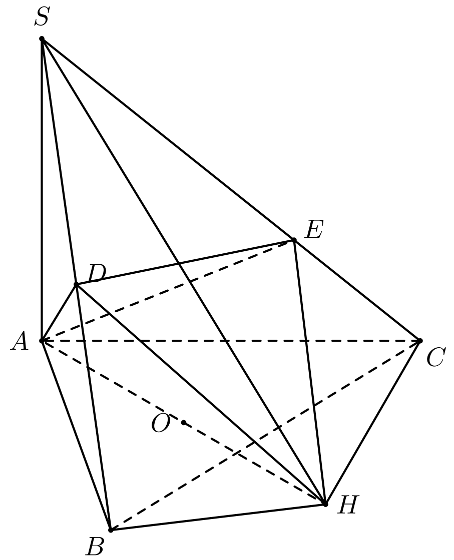
Chọn đáp án B □

Câu 33 (Chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm-Quảng Nam-2021).

Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA=4$, $AB=2$, $AC=1$ và $SA\perp(ABC)$. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Mặt cầu tâm O, đi qua A và cắt các tia SB, SC lần lượt tại D và E. Khi độ dài đoạn thẳng BC thay đổi, giá trị lớn nhất của thể tích khối chóp $S.ADE$ là

A. $\dfrac{64}{85}$. B. $\dfrac{8}{3}$. C. $\dfrac{4}{3}$. D. $\dfrac{256}{225}$.

Lời giải.



Dựng $HB\perp AB$, $HC\perp AC$. Tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là trung điểm của AH.

D, E thuộc mặt cầu tâm O, đường kính AH.

$\Rightarrow \widehat{ADH}=\widehat{AEH}=90^\circ$.

$\begin{cases} HB\perp AB \\ HB\perp SA \end{cases} \Rightarrow HB\perp(SAB)$ mà $AD\subset(SAB)$

Suy ra $AD\perp(SBH)\Rightarrow AD\perp SB$.

Tương tự: $AE\perp SC$.

$\dfrac{V_{SADE}}{V_{SABC}} = \dfrac{SA}{SA} \cdot \dfrac{SD}{SB} \cdot \dfrac{SE}{SC} = \dfrac{SA^2}{SB^2} \cdot \dfrac{SA^2}{SC^2} = \dfrac{64}{85} \Rightarrow V_{SADE} = \dfrac{64}{85} V_{SABC}$.

V_{SADE} lớn nhất khi và chỉ khi V_{SABC} lớn nhất.

V_{SABC} lớn nhất khi và chỉ khi $S_{\Delta ABC}$ lớn nhất.

$S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2} AB \cdot AC \sin A \leq \dfrac{1}{2} AB \cdot AC = 1$.

$\max V_{SABC} = \dfrac{1}{3} \cdot 1 \cdot 4 = \dfrac{4}{3}$.

$\max V_{SADE} = \dfrac{64}{85} \cdot \dfrac{4}{3} = \dfrac{256}{255}$.

Chọn đáp án D □

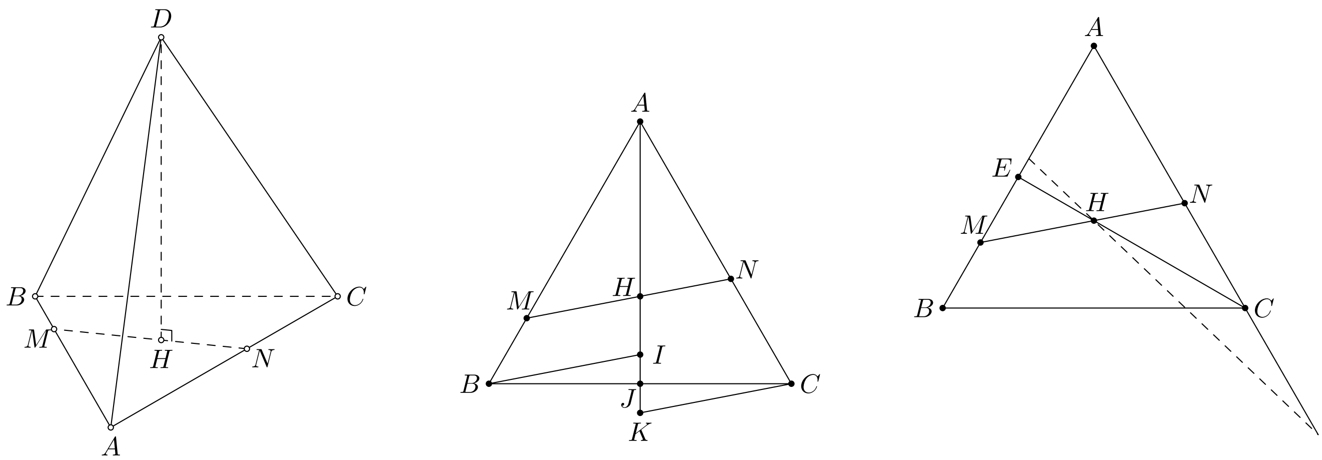
Câu 34 (Sở Sơn La-2021). Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng 3. Gọi M và N lần lượt là các điểm di động trên các cạnh AB, AC sao cho mặt phẳng (DMN) luôn vuông góc với mặt phẳng (ABC). Thể tích của khối tứ diện $DAMN$ có giá trị lớn nhất bằng

(A) $\dfrac{27\sqrt{2}}{16}$. (B) $\dfrac{9\sqrt{2}}{4}$. (C) $\dfrac{9\sqrt{2}}{8}$. (D) $\dfrac{27}{16}$.

Lời giải.

Gọi H là tâm tam giác đều $ABC \Rightarrow DH \perp (ABC)$.

Ta có $\begin{cases} (DMN) \perp (ABC) \\ (DMN) \cap (ABC) = MN \end{cases} \Rightarrow H \in MN$.



Gọi J là trung điểm của BC; Kẻ $BI \parallel MN$; $KC \parallel MN$ với $I, K \in AJ$.

Ta có $\dfrac{AB}{AM} = \dfrac{AI}{AH}$ và $\dfrac{AC}{AN} = \dfrac{AK}{AH}$

Suy ra $\dfrac{AB}{AM} + \dfrac{AC}{AN} = \dfrac{AI + AK}{AH} \Leftrightarrow \dfrac{AB}{AM} + \dfrac{AC}{AN} = \dfrac{2AJ}{AH} \Leftrightarrow \dfrac{AB}{AM} + \dfrac{AC}{AN} = 3 \Leftrightarrow \dfrac{1}{AM} + \dfrac{1}{AN} = 1$.

Gọi E là trung điểm của cạnh AB. Do M, N lần lượt là các điểm di động trên các cạnh AB, AC và $H \in MN$ nên M nằm trên đoạn thẳng EB.

Đặt $AM = x$ với $\dfrac{3}{2} \leq x \leq 3$. Suy ra $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{AN} = 1 \Rightarrow \dfrac{1}{AN} = \dfrac{x-1}{x} \Rightarrow AN = \dfrac{x}{x-1}$.

Thể tích của khối tứ diện $DAMN$ là

$V = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{2} AM \cdot AN \cdot \sin 60^\circ \cdot DH = \dfrac{\sqrt{3}}{12} x \cdot \dfrac{x}{x-1} \cdot \dfrac{3\sqrt{6}}{3} = \dfrac{\sqrt{2}}{4} \cdot \dfrac{x^2}{x-1}$

Ta có $V' = \dfrac{\sqrt{2}}{4} \cdot \dfrac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$; $V' = 0 \Leftrightarrow x = 2$

Bảng biến thiên

x	$\frac{3}{2}$		2		3
V'		$-$	0	$+$	
V	$\frac{9\sqrt{2}}{8}$	$\searrow$	$\sqrt{2}$	$\nearrow$	$\frac{9\sqrt{2}}{8}$

Dựa vào bảng biến thiên $\max\limits_{\left[\frac{3}{2};3\right]} V = \frac{9\sqrt{2}}{8}$, dấu bằng xảy ra khi $AM = \frac{3}{2}$ hoặc $AM = 3$.

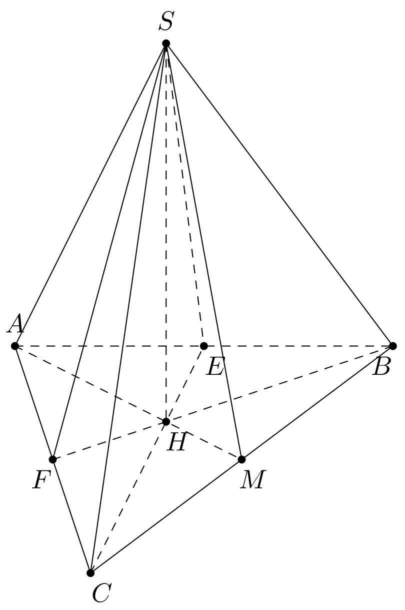
Chọn đáp án C □

Câu 35 (Chuyên Lê Quý Đôn - Điện Biên - 2021).

Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều có cạnh $\sqrt{6}$. Biết rằng các mặt bên của hình chóp có diện tích bằng nhau và một trong các cạnh bên bằng $3\sqrt{2}$. Tính thể tích nhỏ nhất của khối chóp $S.ABC$.

A 4. B 3. C $2\sqrt{2}$. D $2\sqrt{3}$.

Lời giải.



Gọi H là hình chiếu vuông góc của S lên mp(ABC). E, F, M lần lượt là hình chiếu vuông góc của H lên AB, AC, BC khi đó ta có $AB \perp SE$, $AC \perp SF$, $BC \perp SM$.

Vì $S_{\triangle SAB} = S_{\triangle SAC} = S_{\triangle SBC}, AB = AC = BC = \sqrt{6}$ suy ra $SE = SF = SM \Rightarrow \triangle SHE = \triangle SHF = \triangle SHM \Rightarrow HE = HF = HM$ nên H là tâm đường tròn nội tiếp hoặc H là tâm đường tròn bàng tiếp góc A hoặc B, hoặc C của $\triangle ABC$.

Trường hợp 1:

H là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle ABC$. Do $\triangle ABC$ đều nên H cũng là trọng tâm $\triangle ABC$ và $S.ABC$ là hình chóp đều.

Ta có $HA = \frac{2}{3}\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{6} = \sqrt{2}, SH = \sqrt{SA^2 - HA^2} = \sqrt{(3\sqrt{2})^2 - \sqrt{2}^2} = 4. S_{\triangle ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4}\sqrt{6}^2 =$

$\dfrac{3\sqrt{3}}{2} \Rightarrow V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}SH \cdot S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{3}4 \cdot \dfrac{3\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$.

Trường hợp 2:

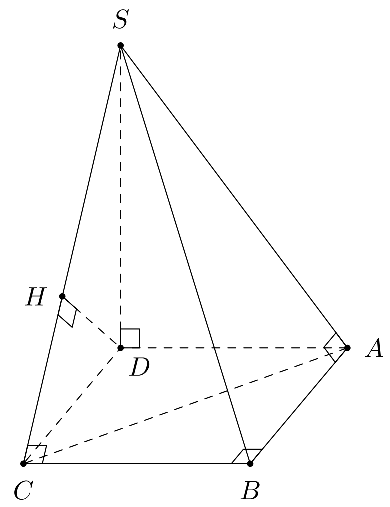
H là tâm đường tròn bàng tiếp $\triangle ABC$. Giả sử H là tâm đường tròn bàng tiếp góc A. Ta có $HBC = 60°, HM = BM\tan 60° = \dfrac{\sqrt{6}}{2} \cdot \sqrt{3} = \dfrac{3\sqrt{2}}{2} \Rightarrow AH = AM + HM = \dfrac{3\sqrt{2}}{2} + \dfrac{3\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$, $HB = \dfrac{BI}{\cos 60°} = \sqrt{6}$. Hình chóp $S.ABC$ có một cạnh bên bằng $3\sqrt{2} \Rightarrow SB = SC = 3\sqrt{2}$ (Vì $SA > AH = 3\sqrt{2}$) suy ra $SH = \sqrt{SB^2 - BH^2} = \sqrt{(3\sqrt{2})^2 - \sqrt{6}^2} = 2\sqrt{3}$, $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}SH \cdot S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{3}2\sqrt{3} \cdot \dfrac{3\sqrt{3}}{2} = 3$. Vậy thể tích khối chóp $S.ABC$ nhỏ nhất bằng 3.

Chọn đáp án B □

Câu 36 (Sở Yên Bái - 2021). Cho khối chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại B. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC) bằng $a\sqrt{2}$. $\widehat{SAB} = \widehat{SCB} = 90^o$. Thể tích khối chóp $S.ABC$ có giá trị nhỏ nhất bằng

A. $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{2}$. B. $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{6}$. C. $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{4}$. D. $a^3\sqrt{6}$.

Lời giải.



Dựng điểm D sao cho $ABCD$ là hình vuông.

Ta có $AB \perp SA, AB \perp AD \Rightarrow AB \perp SD$

$BC \perp SC, BC \perp CD \Rightarrow BC \perp SD$

Suy ra $SD \perp (ABCD)$.

Vì $AD \parallel (SBC) \Rightarrow d(A,(SBC)) = d(D,(SBC))$.

Kẻ $DH \perp SC \Rightarrow DH \perp (SBC) \Rightarrow d(D,(SBC)) = DH = a\sqrt{2}$.

Đặt $AB = x$. $\dfrac{1}{DH^2} = \dfrac{1}{SD^2} + \dfrac{1}{DC^2} \Leftrightarrow \dfrac{1}{SD^2} = \dfrac{1}{DH^2} - \dfrac{1}{DC^2} = \dfrac{1}{2a^2} - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{x^2 - 2a^2}{2a^2x^2} \Rightarrow SD = \dfrac{ax\sqrt{2}}{\sqrt{x^2 - a^2}}$.

$V_{SABC} = \dfrac{1}{3} \cdot SD \cdot S_{ABC} = \dfrac{1}{3}\dfrac{ax\sqrt{2}}{\sqrt{x^2 - a^2}} \cdot \dfrac{1}{2}x^2 = \dfrac{a\sqrt{2}}{6} \cdot \dfrac{x^3}{\sqrt{x^2 - a^2}}$.

Xét hàm số $f(x) = \dfrac{x^3}{\sqrt{x^2 - a^2}}$ với $x > a$.

$f'(x)=\dfrac{2x^4-3x^2a^2}{\left(x^2-a^2\right)\sqrt{\left(x^2-a^2\right)}}$, $f'(x)=0\Leftrightarrow x=\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

x	a		$\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	$\dfrac{3a^2\sqrt{3}}{2}$	$\nearrow$	

Vậy thể tích khối chóp $S.ABC$ có giá trị nhỏ nhất bằng $\dfrac{a\sqrt{2}}{6}\cdot\dfrac{3a^2\sqrt{3}}{2}=\dfrac{a^3\sqrt{6}}{4}$.

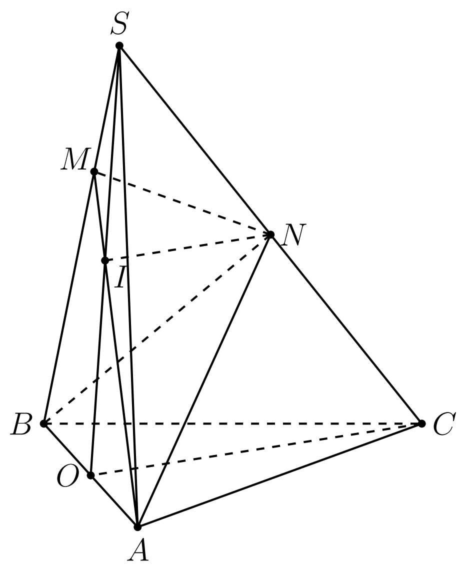
Chọn đáp án C □

Câu 37 (THPT Nguyễn Công Trứ - Hà Tĩnh - 2021).

Cho hình chóp $S.ABC$, O là trung điểm của AB. Điểm M di động trên cạnh SB. Đặt $\dfrac{SM}{SB}=x$. Mặt phẳng qua A, M song song với OC, cắt SC tại N. Thể tích khối chóp $ABMN$ lớn nhất khi

A. $x=\sqrt{3}-1$. B. $x=1$. C. $x=3-\sqrt{5}$. D. $x=-1+\sqrt{2}$.

Lời giải.



Trong mặt phẳng (SAB), gọi I là giao điểm của SO và AM.

Mặt phẳng qua A, M, song song với SO, cắt (SOC) theo giao tuyến là đường thẳng qua I, đường thẳng đó cắt SC tại N.

Áp dụng định lý Menelaus đối với tam giác SOB và bộ ba điểm thẳng hàng A, I, M ta có $\dfrac{SM}{MB}\cdot\dfrac{BA}{AO}\cdot\dfrac{OI}{IS}=1\Rightarrow\dfrac{SI}{OI}=\dfrac{SM}{MB}\cdot\dfrac{BA}{AO}=\dfrac{2x}{1-x}\Rightarrow\dfrac{SN}{CN}=\dfrac{2x}{1-x}\Rightarrow\dfrac{NS}{CS}=\dfrac{2x}{x+1}$.

Thể tích khối chóp $V_{ABMN}=V_{N.ABM}=\dfrac{1}{3}\cdot S_{ABM}\cdot d\left(N,(ABM)\right)=\dfrac{1}{3}\cdot(1-x)\,S_{SAB}\cdot\dfrac{2x}{x+1}d\left(C,(SAB)\right)=(1-x)\dfrac{2x}{x+1}V_{S.ABC}$

$=\left[-2(x+1)-\dfrac{4}{x+1}+6\right]V_{S.ABC}\leq\left[-2\sqrt{2(x+1)\cdot\dfrac{4}{x+1}}+6\right]V_{S.ABC}=\left(6-4\sqrt{2}\right)V_{S.ABC}$

Do đó thể tích khối chóp $ABMN$ lớn nhất bằng $\left(6-4\sqrt{2}\right)V_{S.ABC}$ khi $2\left(x+1\right)=\dfrac{4}{x+1}\Rightarrow x+1=\sqrt{2}\Leftrightarrow x=\sqrt{2}-1$.

Chọn đáp án D □

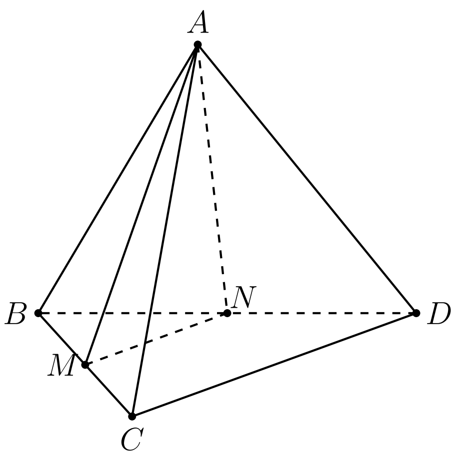
Câu 38 (THPT Lê Lợi - Thanh Hóa - 2021).

Cho tứ diện $ABCD$. Hai điểm M, N lần lượt di động trên hai đoạn thẳng BC và BD sao cho $2.\dfrac{BC}{BM}+3.\dfrac{BD}{BN}=10$. Gọi V_1, V_2 lần lượt là thể tích của các khối tứ diện $ABMN$ và $ABCD$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $\dfrac{V_1}{V_2}$.

Ⓐ $\dfrac{3}{8}$. Ⓑ $\dfrac{2}{7}$. Ⓒ $\dfrac{6}{25}$. Ⓓ $\dfrac{5}{8}$.

Lời giải.

Cách 1



Vì $M\in BC, N\in BD$ nên ta đặt $\dfrac{BD}{BN}=a\,(a>1)$.

Suy ra $1<\dfrac{BC}{BM}=\dfrac{10-3a}{2}=5-\dfrac{3}{2}a\Rightarrow 1<a<\dfrac{8}{3}$.

$\dfrac{V_1}{V_2}=\dfrac{V_{ABMN}}{V_{ABCD}}=\dfrac{BM}{BC}\cdot\dfrac{BN}{BD}=\dfrac{1}{a}\cdot\dfrac{1}{5-\dfrac{3}{2}a}=\dfrac{1}{5a-\dfrac{3}{2}a^2}$.

$\left(\dfrac{V_1}{V_2}\right)_{\min}\Leftrightarrow\left(5a-\dfrac{3}{2}a^2\right)_{\max}$. Tìm $\max\limits_{\left(1;\frac{8}{3}\right)}\left(5a-\dfrac{3}{2}a^2\right)$.

Xét hàm số $f(a)=5a-\dfrac{3}{2}a^2, a\in\left(1;\dfrac{8}{3}\right)$; $f'(a)=5-3a$; $f'(a)=0\Leftrightarrow a=\dfrac{5}{3}$.

a	1		$\frac{5}{3}$		$\frac{8}{3}$
$f'(a)$		$+$	0	$-$	
$f(a)$		$\nearrow$	$\frac{26}{5}$	$\searrow$	

Suy ra $\max\limits_{\left(1;\frac{8}{3}\right)} f(a) = \dfrac{25}{6}$. Vậy $\left(\dfrac{V_1}{V_2}\right)_{\min} = \dfrac{6}{25}$.

Cách 2

$\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{V_{ABMN}}{V_{ABCD}} = \dfrac{S_{BMN}}{S_{BCD}} = \dfrac{\frac{1}{2}\cdot BM\cdot BN\cdot \sin\widehat{B}}{\frac{1}{2}\cdot BC\cdot BD\cdot \sin\widehat{B}} = \dfrac{BM.BN}{BC.BD}$.

$\left(\dfrac{V_1}{V_2}\right)_{\min} \Leftrightarrow \left(\dfrac{BM.BN}{BC.BD}\right)_{\min} \Leftrightarrow \left(\dfrac{BC.BD}{BM.BN}\right)_{max}$.

Theo giả thiết; $10 = \dfrac{2.BC}{BM} + \dfrac{3.BD}{BN} \geq 2.\sqrt{\dfrac{2.BC}{BM}\cdot\dfrac{3.BD}{BN}} = 2\cdot\sqrt{6\cdot\dfrac{BC}{BM}\cdot\dfrac{BD}{BN}}$.

$\Rightarrow 5 \geq \sqrt{6\cdot\dfrac{BC.BD}{BM.BN}} \Leftrightarrow \dfrac{BC.BD}{BM.BN} \leq \dfrac{25}{6}$.

Do đó $\left(\dfrac{V_1}{V_2}\right)_{\min} = \dfrac{6}{25}$.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2.BC}{BM} = \dfrac{3.BD}{BN} \\ 2.\dfrac{BC}{BM} + 3.\dfrac{BD}{BN} = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} BM = \dfrac{2}{5}.BC \\ BN = \dfrac{3}{5}.BD \end{cases}$.

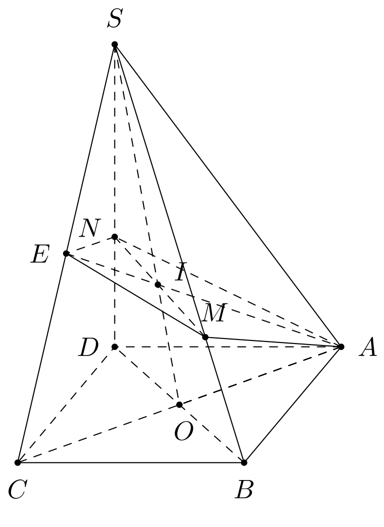
Chọn đáp án C □

Câu 39 (THPT Đoàn Thượng - Hải Dương - 2021).

Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành, có thể tích bằng 24 cm^3. Gọi E là trung điểm SC. Một mặt phẳng chứa AE cắt các cạnh SB và SD lần lượt tại M và N. Tìm giá trị nhỏ nhất của thể tích khối chóp $S.AMEN$.

Ⓐ 9 cm^3. Ⓑ 8 cm^3. Ⓒ 6 cm^3. Ⓓ 7 cm^3.

Lời giải.



Mặt đáy $(ABCD)$ là hình bình hành $\Rightarrow \Delta ADC$ và ΔABC có cùng diện tích

$\Rightarrow V_{S.ADC} = V_{S.ABC}$ (hai khối chóp có cùng chiều cao và có diện tích mặt đáy bằng nhau).

Mà $V_{S.ABCD} = V_{S.ADC} + V_{S.ABC} = 24\text{cm}^3 \Rightarrow V_{S.ADC} = V_{S.ABC} = \dfrac{V_{S.ABCD}}{2} = \dfrac{24}{2} = 12$ (cm^3).

Gọi O là giao điểm của AC và BD; I là giao điểm của SO và $AE \Rightarrow I$ là trọng tâm của ΔSAC và I thuộc MN. Gọi $\dfrac{SM}{SB} = a$ và $\dfrac{SN}{SD} = b$ $(a > 0; b > 0)$.

Ta có $\dfrac{V_{S.ANE}}{V_{S.ADC}} = \dfrac{SA}{SA}\cdot\dfrac{SN}{SD}\cdot\dfrac{SE}{SC} = 1\cdot b\cdot\dfrac{1}{2} = \dfrac{b}{2}$ và $\dfrac{V_{S.AME}}{V_{S.ABC}} = \dfrac{SA}{SA}\cdot\dfrac{SM}{SB}\cdot\dfrac{SE}{SC} = 1\cdot a\cdot\dfrac{1}{2} = \dfrac{a}{2}$

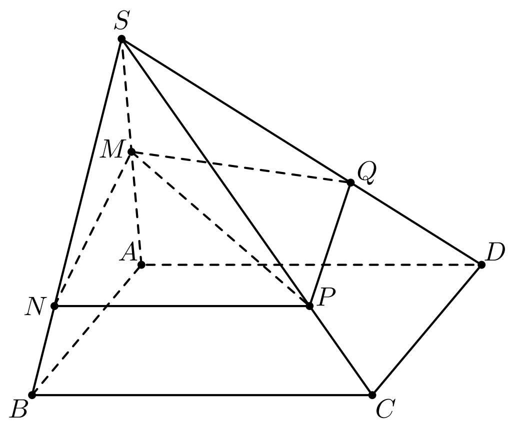
$\Rightarrow \dfrac{V_{S.ANE}}{12} = \dfrac{b}{2}$ và $\dfrac{V_{S.AME}}{12} = \dfrac{a}{2} \Rightarrow V_{S.ANE} = 6b\ (\text{cm}^3)$ và $V_{S.AME} = 6a\ (\text{cm}^3)$.
Do đó: $V_{S.AMEN} = V_{S.AME} + V_{S.ANE} = 6a + 6b = 6(a+b)\ (\text{cm}^3)$.
Mặt khác: ΔISM và ΔISB có chung chiều cao kẻ từ I và có đáy $\dfrac{SM}{SB} = a \Rightarrow a = \dfrac{S_{ISM}}{S_{ISB}}$.
Mà I là trọng tâm của $\Delta SAC \Rightarrow \dfrac{SI}{SO} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow \dfrac{S_{ISB}}{S_{SOB}} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow \dfrac{S_{ISM}}{S_{SOB}} = \dfrac{2a}{3}$.
Chứng minh tương tự ta có $\dfrac{S_{ISN}}{S_{SOD}} = \dfrac{2b}{3}$.
O là trung điểm của $DB \Rightarrow S_{SOB} = S_{SOD} = \dfrac{S_{SDB}}{2}$ hay $S_{SDB} = 2S_{SOB} = 2S_{SOD}$
$\Rightarrow \dfrac{2a}{3} + \dfrac{2b}{3} = \dfrac{S_{ISM}}{S_{SOB}} + \dfrac{S_{ISN}}{S_{SOD}} = \dfrac{2S_{ISM}}{2S_{SOB}} + \dfrac{2S_{ISN}}{2S_{SOD}} = \dfrac{2(S_{ISM} + S_{ISN})}{S_{SDB}} = \dfrac{2S_{SNM}}{S_{SDB}}$
$\Rightarrow a + b = \dfrac{3S_{SNM}}{S_{SDB}} = \dfrac{3SN \cdot SM \cdot \sin\widehat{MSN}}{SD \cdot SB \cdot \sin\widehat{BSD}} = 3 \cdot \dfrac{SN}{SD} \cdot \dfrac{SM}{SB} = 3ab$.
Theo bất đẳng thức AM-GM, ta có $ab \leq \dfrac{(a+b)^2}{4} \Rightarrow a + b = 3ab \leq \dfrac{3(a+b)^2}{4}$
$\Rightarrow 3(a+b) \geq 4$ (do $a + b > 0$) $\Rightarrow a + b \geq \dfrac{4}{3} \Rightarrow 6(a+b) \geq 8$ hay $V_{S.AMEN} \geq 8\ (\text{cm}^3)$.
Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a = b = \dfrac{2}{3} \Leftrightarrow \dfrac{SM}{SB} = \dfrac{SN}{SD} = \dfrac{2}{3} \Leftrightarrow MN$ đi qua I và $MN \parallel BD$.
Vậy giá trị nhỏ nhất của thể tích khối chóp $S.AMEN$ là 8cm^3.
Chọn đáp án B □

Câu 40 (Sở Ninh Bình - 2022). Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, có thể tích là V. Gọi M là trung điểm của cạnh SA, N là điểm trên cạnh SB sao cho $SN = 3NB$. Mặt phẳng (P) thay đổi đi qua các điểm M, N và cắt các cạnh SC, SD lần lượt tại hai điểm phân biệt P, Q. Tìm giá trị lớn nhất của thể tích khối chóp $S.MNPQ$.

A. $\dfrac{V}{3}$. B. $\dfrac{27}{80}V$. C. $\dfrac{27}{40}V$. D. $\dfrac{V}{6}$.

Lời giải.

Đặt $\dfrac{SC}{SP} = x, \dfrac{SD}{SQ} = y$ với $x, y \geq 1$.
Vì hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành.
Nên $\dfrac{SA}{SM} + \dfrac{SC}{SP} = \dfrac{SB}{SN} + \dfrac{SD}{SQ}$.



Suy ra
$2 + \dfrac{SC}{SP} = \dfrac{4}{3} + \dfrac{SD}{SQ} \Rightarrow y = \dfrac{2}{3} + x$

Mặt khác ta có

$$\frac{V_{S.MNPQ}}{V_{S.ABCD}}=\frac{V_{S.MNP}}{2V_{S.ABC}}+\frac{V_{S.MQP}}{2V_{S.ADC}}=\frac{1}{2}\left(\frac{SM}{SA}\cdot\frac{SN}{SB}\cdot\frac{SP}{SC}+\frac{SM}{SA}\cdot\frac{SQ}{SD}\cdot\frac{SP}{SC}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{y}\cdot\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{4x}\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{y}\right)=\frac{1}{4x}\left(\frac{3}{4}+\frac{3}{3x+2}\right)$$

$$=\frac{9(x+2)}{16\left(3x^2+2x\right)}$$

Xét hàm số $f(x)=\dfrac{9(x+2)}{16\left(3x^2+2x\right)}$ với $x\geq 1$. Ta có

$$f\prime(x)=\frac{9}{16}\cdot\frac{-3x^2-12x-4}{\left(3x^2+2x\right)^2}<0,\quad \forall x\geq 1$$

nên hàm số luôn nghịch biến trên nửa khoảng $[1;+\infty)$.

Suy ra $f(x)\leq f(1)=\dfrac{27}{80},\forall x\geq 1$.

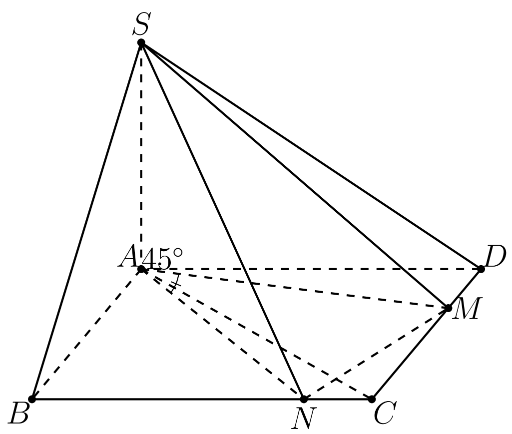
Vậy thể tích khối chóp $S.MNPQ$ đạt giá trị lớn nhất bằng $\dfrac{27}{80}V$, khi $x=1$, tức là khi $P\equiv C$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 41 (Sở Bạc Liêu - 2022). Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, $AB=1$, cạnh bên $SA=1$ và vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$. Kí hiệu M là điểm di động trên đoạn CD và N là điểm di động trên đoạn CB và góc $\widehat{MAN}=45°$. Thể tích nhỏ nhất của khối chóp $S.AMN$ là

(A) $\dfrac{\sqrt{2}-1}{3}$. (B) $\dfrac{\sqrt{2}+1}{9}$. (C) $\dfrac{\sqrt{2}+1}{6}$. (D) $\dfrac{\sqrt{2}-1}{9}$.

Lời giải.



Ta có $V_{S.AMN}=\dfrac{1}{3}SA.S_{\Delta AMN}\Rightarrow V_{S.AMN}$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow S_{\Delta AMN}$ nhỏ nhất.

Đặt $\begin{cases}DM=x\\BN=y\end{cases}$ có $\begin{cases}AM^2=1+x^2\\AN^2=1+y^2\end{cases}$ và $MN^2=MC^2+NC^2=(1-x)^2+(1-y)^2$.

Áp dụng định lí cosin

$MN^2=AN^2+AM^2-2AM.AN.\cos 45°=1+y^2+1+x^2-2\sqrt{\left(1+y^2\right).\left(1+x^2\right)}.\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Nên $(1-x)^2+(1-y)^2=1+x^2+1+y^2-\sqrt{2\left(1+x^2\right).\left(1+y^2\right)}\Leftrightarrow 2(x+y)=\sqrt{2\left(1+x\right)^2.\left(1+y\right)^2}$

$\Leftrightarrow\sqrt{2}(x+y)=\sqrt{\left(1+x^2\right).\left(1+y^2\right)}\Leftrightarrow 2\left(x^2+2xy+y^2\right)=1+x^2+y^2+x^2y^2$

$\Leftrightarrow x^2+2xy+y^2=1-2xy+x^2y^2\Leftrightarrow(x+y)^2=(1-xy)^2\Leftrightarrow x+y=1-xy$ vì $xy\leq 1$.

Theo bất đẳng thức Cosi $2\sqrt{xy}\leq x+y\Leftrightarrow xy\leq\dfrac{(x+y)^2}{4}\Leftrightarrow 1-(x+y)\leq\dfrac{(x+y)^2}{4}$

$\Leftrightarrow (x+y)^2 + 4(x+y) - 4 \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+y \geq -2+2\sqrt{2} \\ x+y \leq -2-2\sqrt{2} \end{array}\right.$.

Vậy $\min(x+y) = -2+2\sqrt{2}$.

Ta có $S_{\Delta AMN} = \dfrac{1}{2}AM \cdot AN \cdot \sin 45^\circ = \dfrac{1}{2}\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{4} \cdot \sqrt{2}(x+y)$

$\Leftrightarrow S_{\Delta AMN} \geq \dfrac{1}{2}\left(2\sqrt{2}-2\right) \Leftrightarrow S_{\Delta AMN} \geq \sqrt{2}-1.$

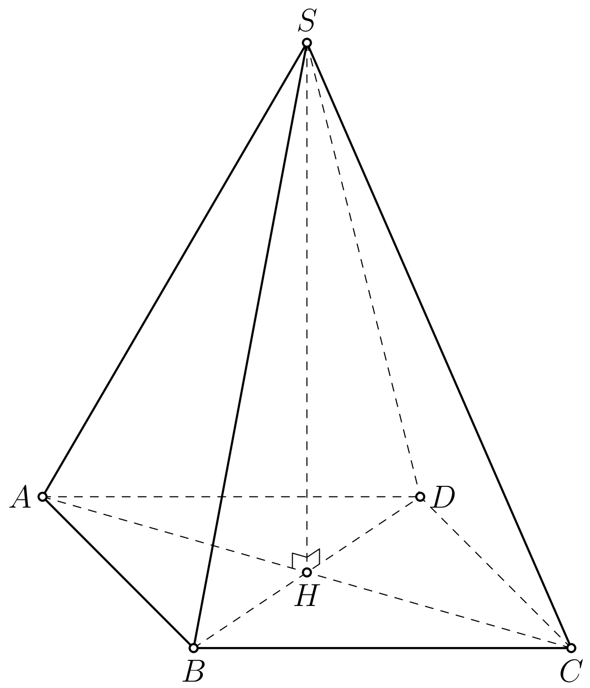
$\min S_{\Delta AMN} = \sqrt{2}-1 \Rightarrow \min V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3} \cdot SA.S_{\Delta AMN} = \dfrac{1}{3} \cdot 1 \cdot \left(\sqrt{2}-1\right) = \dfrac{\sqrt{2}-1}{3}.$

Chọn đáp án A □

Câu 42 (Sở Vĩnh Phúc - 2022). Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật $AB = a\sqrt{3}, SA = SB = SC = SD = 2a$. Giá trị lớn nhất của thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng:

A $\dfrac{13}{12}a^3$. B $\dfrac{13\sqrt{2}}{12}a^3$. C $\dfrac{13\sqrt{6}}{12}a^3$. D $\dfrac{13\sqrt{3}}{12}a^3$.

Lời giải.



Gọi $AD = x\,(x > 0)$.

Ta có $AC = \sqrt{x^2+3a^2} \Rightarrow AH = \dfrac{1}{2}AC = \dfrac{1}{2}\sqrt{x^2+3a^2}$

Khi đó

$SH = \sqrt{4a^2 - \dfrac{x^2+3a^2}{4}} = \sqrt{\dfrac{13}{4}a^2 - \dfrac{x^2}{4}}.$

Thể tích khối chóp $V = \dfrac{1}{3}B \cdot h = \dfrac{1}{3} \cdot a\sqrt{3}x \cdot \sqrt{\dfrac{13}{4}a^2 - \dfrac{x^2}{4}} = \dfrac{2a}{\sqrt{3}} \cdot \dfrac{x}{2} \cdot \sqrt{\dfrac{13a^2}{4} - \dfrac{x^2}{4}}.$

Đặt $f(x) = \dfrac{x}{2} \cdot \sqrt{\dfrac{13a^2}{4} - \dfrac{x^2}{4}} \leq \dfrac{\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{13a^2}{4} - \dfrac{x^2}{4}}{2} = \dfrac{13a^2}{8}$

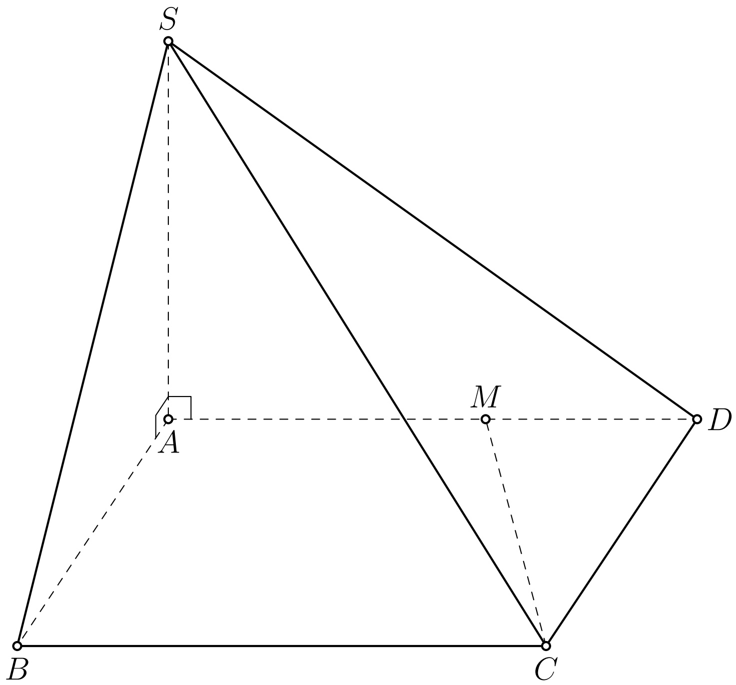
Thể tích lớn nhất của khối chóp $V = \dfrac{2a}{\sqrt{3}} \cdot \dfrac{13a^2}{8} = \dfrac{13\sqrt{3}a^3}{12}.$

Chọn đáp án D □

Câu 43 (Chuyên Lam Sơn - 2022). Trên cạnh AD của hình vuông $ABCD$ cạnh 1, người ta lấy điểm M sao cho $AM = x (0 \le x \le 1)$ và trên nửa đường thẳng Ax vuông góc với mặt phẳng chứa hình vuông, người ta lấy điểm S với $SA = y$ thỏa mãn $y > 0$ và $x^2 + y^2 = 1$. Biết khi M thay đổi trên đoạn AD thì thể tích của khối chóp $S.ABCM$ đạt giá trị lớn nhất bằng $\dfrac{\sqrt{m}}{n}$ với $m, n \in \mathbb{N}^*$ và m, n nguyên tố cùng nhau. Tính $T = m + n$.

(A) 11. (B) 17. (C) 27. (D) 35.

Lời giải.



Ta có $V_{S.ABCM} = \dfrac{1}{3} SA \cdot S_{ABCM} = \dfrac{1}{3} \cdot y \cdot \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{1}{6}(x+1)\sqrt{1-x^2}$.

Xét $f(x) = (x+1)^2(1-x^2) = -x^4 - 2x^3 + 2x + 1$ trên $[0;1]$.

Có $f'(x) = -4x^3 - 6x^2 + 2$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 0.5 \end{array}\right.$.

Lập bảng xét dấu của $f'(x)$ trên $[0;1]$ ta được $\max\limits_{[0;1]} f(x) = f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{27}{16}$.

x	0		$\frac{1}{2}$		1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	1	$\nearrow$	$\frac{27}{16}$	$\searrow$	0

Vậy thể tích lớn nhất của khối $S \cdot ABCM$ là $V_{\max} = \dfrac{1}{6}\sqrt{\dfrac{27}{16}} = \dfrac{\sqrt{3}}{8}$.

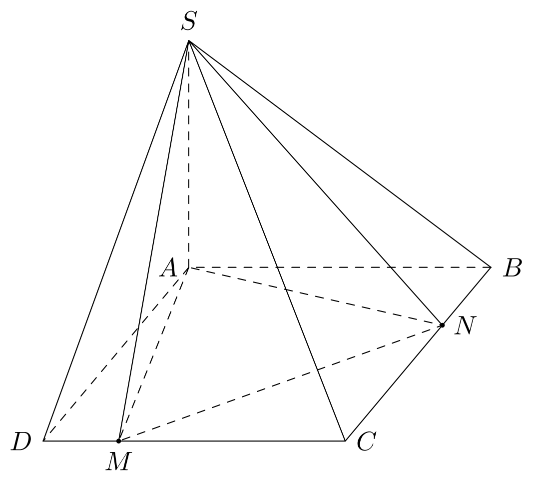
Chọn đáp án (A) □

Câu 44 (Chuyên Lương Văn Tụy – Ninh Bình - 2022).

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, $AB = 1$, cạnh bên $SA = 1$ và vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$. Kí hiệu M là điểm di động trên đoạn CD và N là điểm di động trên đoạn CB sao cho $\widehat{MAN} = 45°$. Thể tích nhỏ nhất của khối chóp $S.AMN$ là

Ⓐ $\dfrac{\sqrt{2}-1}{3}$. Ⓑ $\dfrac{\sqrt{2}+1}{9}$. Ⓒ $\dfrac{\sqrt{2}+1}{6}$. Ⓓ $\dfrac{\sqrt{2}-1}{9}$.

Lời giải.



Đặt $DM = x$; $BN = y$ $(0 < x, y < 1)$.

Ta có $S_{\Delta AMN} = S_{ABCD} - S_{\Delta ABN} - S_{\Delta ADM} - S_{\Delta CMN} = 1 - \dfrac{1}{2}[x + y + (1-x)(1-y)] = \dfrac{1}{2}(1 - xy)$.

Xét tam giác vuông CMN ta có $MN^2 = (1-x)^2 + (1-y)^2$ (1).

Áp dụng định lí cos cho tam giác ΔAMN ta có

$MN^2 = AM^2 + AN^2 - 2 \cdot AM \cdot AN \cdot \cos 45° = 1 + x^2 + 1 + y^2 - \sqrt{2} \cdot \sqrt{x^2+1} \cdot \sqrt{y^2+1}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra

$(1-x)^2 + (1-y)^2 = 1 + x^2 + 1 + y^2 - \sqrt{2} \cdot \sqrt{x^2+1} \cdot \sqrt{y^2+1}$

$\Leftrightarrow 2x + 2y = \sqrt{2\left(x^2+1\right)\left(y^2+1\right)}$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 = x^2y^2 + 1 - 4xy$ (3)

Ta có $x^2 + y^2 \geq 2xy$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra $x^2y^2 + 1 - 4xy \geq 2xy \Leftrightarrow (xy)^2 - 6xy + 1 \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} xy \geq 3 + 2\sqrt{2} \text{ (loại)} \\ xy \leq 3 - 2\sqrt{2}. \end{array}\right.$.

$\Rightarrow S_{\Delta AMN} = \dfrac{1}{2}(1 - xy) \geq \sqrt{2} - 1$

$\Rightarrow V_{S.AMN} = \dfrac{1}{3} \cdot SA \cdot S_{\Delta AMN} \geq \dfrac{\sqrt{2}-1}{3}$

Dấu "=" xảy ra $\begin{cases} x = y \\ xy = 3 - 2\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = y = \sqrt{3 - 2\sqrt{2}}$

Vậy thể tích nhỏ nhất của khối chóp $S.AMN$ bằng $\dfrac{\sqrt{2}-1}{3}$.

Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 45 (THPT Trần Phú – Hà Tĩnh – 2022).

Cho khối chóp $S.ABCD$, có đáy là hình chữ nhật cạnh $AB = 2a\sqrt{5}$ và tất cả các cạnh bên của hình chóp bằng $5a$. Thể tích lớn nhất của khối chóp đã cho bằng

Ⓐ $\dfrac{20a^3\sqrt{5}}{3}$. Ⓑ $\dfrac{8a^3}{3}$. Ⓒ $\dfrac{40\sqrt{5}a^3}{3}$. Ⓓ $15\sqrt{5}a^3$.

Lời giải.

Đặt $AD = x$, $(x > 0)$ khi đó bán kính đường tròn ngoại tiếp đáy là

$$R_d = \frac{\sqrt{AB^2 + AD^2}}{2} = \frac{\sqrt{20a^2 + x^2}}{2}.$$

Chiều cao khối chóp là $h = \sqrt{cb^2 - R_d^2} = \sqrt{25a^2 - \dfrac{20a^2 + x^2}{4}} = \dfrac{1}{2}\sqrt{80a^2 - x^2}$.

Thể tích khối chóp là

$$\begin{aligned} V_{ABCD} &= \frac{1}{3}S_{ABCD} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 2\sqrt{5}a \cdot x \cdot \frac{1}{2}\sqrt{80a^2 - x^2} = \frac{\sqrt{5}a\sqrt{x^2\left(80a^2 - x^2\right)}}{3} \\ &\le \frac{\sqrt{5}a\left(\dfrac{x^2 + 80a^2 - x^2}{2}\right)}{3} = \frac{40\sqrt{5}a^3}{3}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 46 (THPT Yên Lạc - Vĩnh Phúc - 2022).

Một trang tại cần xây dựng một bể chứa nước hình hộp chữ nhật bằng gạch không nắp ở phía trên. Biết bể có chiều dài gấp hai lần chiều rộng và thể tích (phần chứa nước) bằng 8 m^3. Hỏi chiều cao của bể gần nhất với kết quả nào dưới đây để số lượng gạch dùng để xây bể là nhỏ nhất

Ⓐ 1,8 m. Ⓑ 1,3 m. Ⓒ 1,1 m. Ⓓ 1,2 m.

Lời giải.

Chiều rộng bể và chiều dài bể lần lượt là x, $2x$ $(x > 0)$, chiều cao bể là h, đơn vị m.

Khi đó thể tích bể là $x \cdot 2x \cdot h = 8 \Rightarrow h = \dfrac{4}{x^2}$.

Diện tích cần xây dựng cho bể không nắp là

$S = 2x \cdot x + 2 \cdot 2x \cdot h + 2 \cdot x \cdot h = 2x^2 + 6xh = 2x^2 + 6x \cdot \dfrac{4}{x^2} = 2x^2 + \dfrac{24}{x}$.

Để số lượng gạch dùng để xây bể là nhỏ nhất thì diện tích cần xây dựng là nhỏ nhất

Áp dụng bất đẳng thức AM – GM $2x^2 + \dfrac{24}{x} = 2x^2 + \dfrac{12}{x} + \dfrac{12}{x} \ge 3\sqrt[3]{2x^2 \cdot \dfrac{12}{x} \cdot \dfrac{12}{x}} = 2\sqrt[3]{288}$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $2x^2 = \dfrac{12}{x} \Leftrightarrow x^3 = 6 \Rightarrow x = \sqrt[3]{6}$.

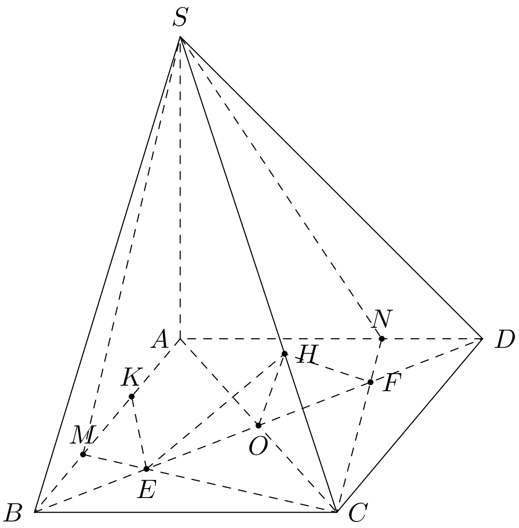
Lúc này $h = \dfrac{4}{x^2} = \dfrac{4}{\sqrt[3]{6}^2} \approx 1{,}21$.

Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 47 (Sở Thái Nguyên - 2022). Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh bằng 1, $SA = 2$ và đường thẳng SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi M, N lần lượt là các điểm thay đổi trên hai cạnh AB, AD sao cho mặt phẳng (SMC) vuông góc với mặt phẳng (SNC). Khi thể tích khối chóp $S.AMCN$ đạt giá trị lớn nhất, giá trị của biểu thức $T = \dfrac{1}{AM^2} + \dfrac{1}{AN^2}$ bằng

Ⓐ $\dfrac{8}{3}$. Ⓑ $\dfrac{23}{16}$. Ⓒ $\dfrac{41}{16}$. Ⓓ $\dfrac{5}{4}$.

Lời giải.



Ta gọi $O = AC \cap BD$, $E = BD \cap CM$, $F = BD \cap CN$.

Đặt $AM = x$, $AN = y$ với mọi $x, y \in [0; 1]$, $x > y$.

Gọi H là hình chiếu của O lên SC. Khi đó ta suy ra $OH = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Tiếp đến ta có $\begin{cases} SC \perp OH \\ SC \perp BD \end{cases} \Rightarrow SC \perp (HBD) \Rightarrow \begin{cases} SC \perp HE \\ SC \perp HF. \end{cases}$

$\Rightarrow (\widehat{(SMC);(SNC)}) = (\widehat{HE;HF}) = \widehat{EHF}$.

Suy ra $HE \perp HF$. Gọi K là trung điểm AM.

Khi đó: $KH // ME$

$\dfrac{OE}{EB} = \dfrac{KM}{MB} = \dfrac{AM}{2(AB - AM)} = \dfrac{x}{2-2x} \Rightarrow \dfrac{OE}{x} = \dfrac{EB}{2-2x} = \dfrac{OE+EB}{2-2x+x} = \dfrac{OB}{2-x} \Rightarrow OE = \dfrac{x\sqrt{2}}{2(2-x)}$ Tương tự ta có $OF = \dfrac{y\sqrt{2}}{2(2-y)}$.

Mà $OE \cdot OF = OH^2$ nên ta có $\dfrac{x\sqrt{2}}{2(2-x)} \cdot \dfrac{y\sqrt{2}}{2(2-y)} = \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow y = \dfrac{8-4x}{x+4} \leq 1 \Rightarrow 0 \leq x \leq \dfrac{4}{5}$.

Suy ra $V_{S.AMCN} = \dfrac{1}{3} SA.\left(S_{AMC} + S_{ANC}\right) = \dfrac{1}{3}(x+y) = \dfrac{1}{3}\left(x + \dfrac{8-4x}{x+4}\right)$.

Xét hàm số $y = f(x) = \dfrac{1}{3}\left(x + \dfrac{8-4x}{x+4}\right)$ trên $\left[0; \dfrac{4}{5}\right]$ có $\max f(x) = f\left(\dfrac{4}{5}\right)$ nên suy ra $x = \dfrac{4}{5}$; $y = 1$.

Suy ra $x = \dfrac{4}{5}$; $y = 1$, tức $T = \dfrac{1}{AM^2} + \dfrac{1}{AN^2} = \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} = \dfrac{25}{16} + 1 = \dfrac{41}{16}$.

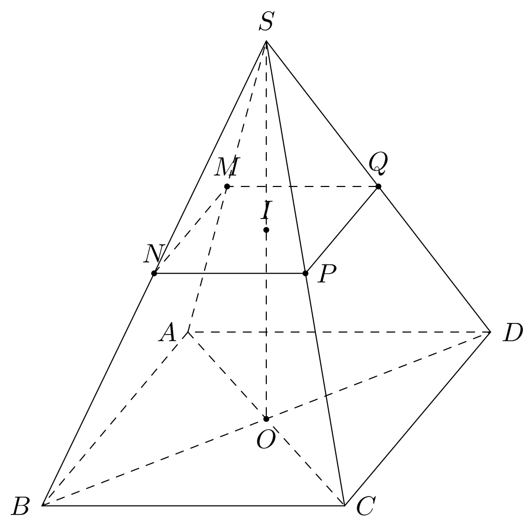
Chọn đáp án C □

Câu 48 (Chuyên Lê Khiết - Quảng Ngãi - 2022).

Cho hình chóp tứ giác đều có tất cả các cạnh đều bằng a. Một mặt phẳng thay đổi, vuông góc với SO, cắt SO, SA, SB, SC, SD lần lượt tại I, M, N, P, Q. Một hình trụ có một đáy nội tiếp tứ giác $MNPQ$ và một đáy nằm trên hình vuông $ABCD$. Khi thể tích khối trụ lớn nhất thì độ dài SI bằng

(A) $\dfrac{3a\sqrt{2}}{2}$. (B) $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. (C) $\dfrac{a\sqrt{2}}{3}$. (D) $\dfrac{a}{3}$.

Lời giải.



Gọi r, h lần lượt là bán kính đáy và chiều cao của hình trụ.

$\Delta SAC = \Delta BAC \Rightarrow SO = BO = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Đặt $SI = x \Rightarrow h = SO - SI = \dfrac{a\sqrt{2}}{2} - x$.

Vì $\dfrac{MN}{AB} = \dfrac{SM}{SA} = \dfrac{SI}{SO} \Rightarrow MN = AB.\dfrac{SI}{SO} = x\sqrt{2} \Rightarrow r = \dfrac{MN}{2} = \dfrac{x\sqrt{2}}{2}$.

$$\begin{aligned} V &= \pi r^2 h = \pi\frac{x^2}{2}\left(\frac{a\sqrt{2}}{2} - x\right) = 2\pi\frac{x}{2}\frac{x}{2}\left(\frac{a\sqrt{2}}{2} - x\right) \\ &\leq 2\pi\left(\frac{\frac{x}{2} + \frac{x}{2} + \frac{a\sqrt{2}}{2} - x}{3}\right)^3 = 2\pi\frac{\frac{a^3\sqrt{2}}{4}}{27} = \pi\frac{a^3\sqrt{2}}{54}. \end{aligned}$$

Vậy thể tích khối trụ lớn nhất khi $\dfrac{x}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2} - x \Leftrightarrow x = \dfrac{a\sqrt{2}}{3} \Rightarrow SI = \dfrac{a\sqrt{2}}{3}$.

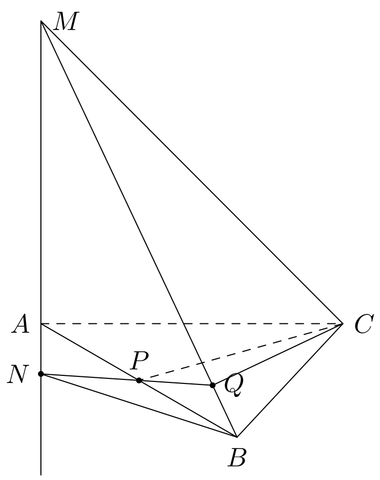
Chọn đáp án C □

Câu 49 (Chuyên ĐHSP Hà Nội - 2022).

Cho tam giác ABC đều cạnh bằng 4. Trên đường thẳng d đi qua A và vuông góc với (ABC) lấy điểm M khác A sao cho $AM = x$. Gọi P, Q lần lượt là hình chiếu vuông góc của C lên AB, MB. Đường thẳng qua P, Q cắt d tại N. Thể tích khối tứ diện $BCMN$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng

(A) $\dfrac{16\sqrt{3}}{3}$. (B) $\dfrac{4\sqrt{6}}{3}$. (C) $\dfrac{8\sqrt{3}}{3}$. (D) $\dfrac{16\sqrt{6}}{3}$.

Lời giải.



Theo giả thiết $x > 0$.

Có $\begin{cases} CP \perp AB \\ CP \perp AM \\ AB, AM \subset (AMB) \end{cases} \Rightarrow CP \perp (AMB) \Rightarrow CP \perp MB.$

$\begin{cases} MB \perp CP \\ MB \perp CQ \\ CP, CQ \subset (CPQ) \end{cases} \Rightarrow MB \perp (CPQ) \Rightarrow MB \perp PQ.$

Dễ tính được $MB = \sqrt{x^2+16}$; $BQ = \dfrac{BP \cdot BA}{BM} = \dfrac{8}{\sqrt{x^2+16}}$;

và $PQ = \sqrt{PB^2 - BQ^2} = \dfrac{2x}{\sqrt{x^2+16}}$.

Từ $\dfrac{AN}{BQ} = \dfrac{AP}{PQ} \Rightarrow AN = \dfrac{BQ \cdot AP}{PQ} = \dfrac{\dfrac{8}{\sqrt{x^2+16}} \cdot 2}{\dfrac{2x}{\sqrt{x^2+16}}} = \dfrac{8}{x}$.

$V_{BCMN} = \dfrac{1}{3} \cdot MN \cdot S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{3}\left(x + \dfrac{8}{x}\right) \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{4} 4^2 = \dfrac{4\sqrt{3}}{3}\left(x + \dfrac{8}{x}\right) \geq \dfrac{4\sqrt{3}}{3} \cdot 2 \cdot \sqrt{x \cdot \dfrac{8}{x}} = \dfrac{16\sqrt{6}}{3}$.

Vậy thể tích khối tứ diện $BCMN$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng $\dfrac{16\sqrt{6}}{3}$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $AM = 2\sqrt{2}$.

Chọn đáp án D □

Câu 50 (Cụm trường Bắc Ninh - 2022).

Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có tổng diện tích tất cả các mặt bằng 36, độ dài đường chéo AC' bằng 6. Thể tích của khối hộp chữ nhật lớn nhất là bao nhiêu?

A $6\sqrt{6}$. B $16\sqrt{2}$. C $24\sqrt{3}$. D $8\sqrt{2}$.

Lời giải.

Gọi a, b, c là 3 kích thước của khối hộp chữ nhật$(a, b, c > 0)$.

Theo đề bài, ta có hệ $\begin{cases} 2(ab + bc + ca) = 36 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ab + bc + ca = 18 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 36 \end{cases}. \Rightarrow a + b + c = 6\sqrt{2}$.

$$ab + bc + ca = 18 \Rightarrow ab + (a+b)c = 18 \Leftrightarrow ab + (a+b)\left(6\sqrt{2} - a - b\right) = 18$$

$$\Leftrightarrow \quad a^2 + \left(b - 6\sqrt{2}\right) a + \left(b - 3\sqrt{2}\right)^2 = 0$$
$$\Rightarrow \quad \left(b - 6\sqrt{2}\right)^2 - 4\left(b - 3\sqrt{2}\right)^2 \geq 0 \Leftrightarrow 0 < b \leq 4\sqrt{2}.$$

Vì a, b, c có vai trò như nhau nên ta được: $a,\ b,\ c \in \left(0;\ 4\sqrt{2}\right]$.
Thể tích khối hộp $V = abc = 18c - c^2\left(a+b\right) = 18c - c^2\left(6\sqrt{2} - c\right) = c^3 - 6\sqrt{2}c^2 + 18c$, với $0 < c \leq 4\sqrt{2}$.

Xét hàm số $y = x^3 - 6\sqrt{2}x^2 + 18x,\ 0 < x \leq 4\sqrt{2} \Rightarrow y' = 3x^2 - 12\sqrt{2}x + 18 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \sqrt{2} \\ x = 3\sqrt{2}. \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	0		$\sqrt{2}$		$3\sqrt{2}$		$4\sqrt{2}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	$8\sqrt{2}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$8\sqrt{2}$

Vậy $V_{\max} = 8\sqrt{2} \Leftrightarrow (a;b;c)$ hoán vị của $\left(\sqrt{2}; \sqrt{2}; 4\sqrt{2}\right)$.

Chọn đáp án D □

BẢNG ĐÁP ÁN

1. C	2. D	3. B	4. D	5. B	6. C	7. D	8. A	9. A	10. C
11. A	12. A	13. C	14. C	15. A	16. A	17. A	18. A	19. B	20. A
21. A	22. A	23. C	24. D	25. B	26. D	27. A	28. C	29. C	30. D
31. C	32. B	33. D	34. C	35. B	36. C	37. D	38. C	39. B	40. B
41. A	42. D	43. A	44. A	45. C	46. D	47. C	48. C	49. D	50. D

CHỦ ĐỀ 15

LŨY THỪA, HÀM SỐ LŨY THỪA

MỨC ĐỘ 1. MỨC ĐỘ 5,6 ĐIỂM

Dạng 1. Rút gọn, biến đổi, tính toán biểu thức lũy thừa

Câu 1 (Đề Minh Họa 2021). Với a là số thực dương tùy ý, $\sqrt{a^3}$ bằng

(A) a^6. (B) $a^{\frac{3}{2}}$. (C) $a^{\frac{2}{3}}$. (D) $a^{\frac{1}{6}}$.

Lời giải.

Với $a > 0$ ta có $\sqrt{a^3} = a^{\frac{3}{2}}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 2 (Nhân Chính Hà Nội 2019). Cho $a > 0$, m, $n \in \mathbb{R}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

(A) $a^m + a^n = a^{m+n}$. (B) $a^m \cdot a^n = a^{m-n}$. (C) $(a^m)^n = (a^n)^m$. (D) $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{n-m}$.

Lời giải.

Tính chất lũy thừa.

Chọn đáp án (C) □

Câu 3 (THPT Minh Khai - 2019). Với $a > 0$, $b > 0$, α, β là các số thực bất kì, đẳng thức nào sau đây sai?

(A) $\dfrac{a^\alpha}{a^\beta} = a^{\alpha-\beta}$. (B) $a^\alpha \cdot a^\beta = a^{\alpha+\beta}$. (C) $\dfrac{a^\alpha}{b^\beta} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^{\alpha-\beta}$. (D) $a^\alpha \cdot b^\alpha = (ab)^\alpha$.

Lời giải.

Chọn đáp án (C) □

Câu 4. Cho x, $y > 0$ và α, $\beta \in \mathbb{R}$. Tìm đẳng thức sai dưới đây.

(A) $(xy)^\alpha = x^\alpha \cdot y^\alpha$. (B) $x^\alpha + y^\alpha = (x+y)^\alpha$.

(C) $(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$. (D) $x^\alpha \cdot x^\beta = x^{\alpha+\beta}$.

Lời giải.

Theo tính chất của lũy thừa thì đẳng thức $x^\alpha + y^\alpha = (x+y)^\alpha$ Sai.

Chọn đáp án (B) □

Câu 5 (Nho Quan A - Ninh Bình - 2019).

Cho các số thực a, b, m, n $(a, b > 0)$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

(A) $\dfrac{a^m}{a^n} = \sqrt[n]{a^m}$. (B) $(a^m)^n = a^{m+n}$.

(C) $(a+b)^m = a^m + b^m$. (D) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.

Lời giải.

Ta có $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 6 (Cụm 8 Trường Chuyên 2019).

Với α là số thực bất kì, mệnh đề nào sau đây sai?

(A) $\sqrt{10^{\alpha}} = \left(\sqrt{10}\right)^{\alpha}$. (B) $\sqrt{10^{\alpha}} = 10^{\frac{\alpha}{2}}$. (C) $(10^{\alpha})^2 = (100)^{\alpha}$. (D) $(10^{\alpha})^2 = (10)^{\alpha^2}$.

Lời giải.

với $\alpha = 1$, ta có $(10^1)^2 = 100 \neq (10)^{1^2} = 10$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 7 (Mã 105 2017). Rút gọn biểu thức $Q = b^{\frac{5}{3}} : \sqrt[3]{b}$ với $b > 0$.

(A) $Q = b^{-\frac{4}{3}}$. (B) $Q = b^{\frac{4}{3}}$. (C) $Q = b^{\frac{5}{9}}$. (D) $Q = b^2$.

Lời giải.

Ta có $Q = b^{\frac{5}{3}} : \sqrt[3]{b} = b^{\frac{5}{3}} : b^{\frac{1}{3}} = b^{\frac{4}{3}}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 8 (Mã 110 2017). Rút gọn biểu thức $P = x^{\frac{1}{3}}.\sqrt[6]{x}$ với $x > 0$.

(A) $P = \sqrt{x}$. (B) $P = x^{\frac{1}{8}}$. (C) $P = x^{\frac{2}{9}}$. (D) $P = x^2$.

Lời giải.

Ta có $P = x^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[6]{x} = x^{\frac{1}{3}} \cdot x^{\frac{1}{6}} = x^{\frac{1}{3}+\frac{1}{6}} = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 9 (SGD Nam Định 2019). Cho a là số thực dương. Giá trị rút gọn của biểu thức $P = a^{\frac{4}{3}}\sqrt{a}$ bằng

(A) $a^{\frac{7}{3}}$. (B) $a^{\frac{5}{6}}$. (C) $a^{\frac{11}{6}}$. (D) $a^{\frac{10}{3}}$.

Lời giải.

Ta có $P = a^{\frac{4}{3}}\sqrt{a} = a^{\frac{4}{3}} \cdot a^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{4}{3}+\frac{1}{2}} = a^{\frac{11}{6}}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 10 (Mã 102 2017). Cho biểu thức $P = \sqrt[4]{x \cdot \sqrt[3]{x^2 \cdot \sqrt{x^3}}}$, với $x > 0$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

(A) $P = x^{\frac{2}{3}}$. (B) $P = x^{\frac{1}{2}}$. (C) $P = x^{\frac{13}{24}}$. (D) $P = x^{\frac{1}{4}}$.

Lời giải.

Ta có, với $x > 0$

$$P = \sqrt[4]{x \cdot \sqrt[3]{x^2 \cdot \sqrt{x^3}}} = \sqrt[4]{x \cdot \sqrt[3]{x^2 \cdot x^{\frac{3}{2}}}} = \sqrt[4]{x \cdot \sqrt[3]{x^{\frac{7}{2}}}} = \sqrt[4]{x \cdot x^{\frac{7}{6}}} = \sqrt[4]{x^{\frac{13}{6}}} = x^{\frac{13}{24}}.$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 11 (THPT Lương Thế Vinh Hà Nội 2019).

Cho biểu thức $P = x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[6]{x}$ với $x > 0$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

(A) $P = x$. (B) $P = x^{\frac{11}{6}}$. (C) $P = x^{\frac{7}{6}}$. (D) $P = x^{\frac{5}{6}}$.

Lời giải.

Ta có $P = x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[6]{x} = x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}} = x$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 12 (THPT Lê Quy Đôn Điện Biên 2019).

Rút gọn biểu thức $P = x^{\frac{1}{6}} \cdot \sqrt[3]{x}$ với $x > 0$.

(A) $P = x^{\frac{1}{8}}$. (B) $P = \sqrt{x}$. (C) $P = x^{\frac{2}{9}}$. (D) $P = x^2$.

Lời giải.

Với $x > 0$, ta có $P = x^{\frac{1}{6}} \cdot x^{\frac{1}{3}} = x^{\frac{1}{6}+\frac{1}{3}} = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 13 (THPT Sơn Tây Hà Nội 2019).

Cho a là số thực dương. Viết và rút gọn biểu thức $a^{\frac{3}{2018}} \cdot \sqrt[2018]{a}$ dưới dạng lũy thừa với số mũ hữu tỉ. Tìm số mũ của biểu thức rút gọn đó.

(A) $\dfrac{2}{1009}$. (B) $\dfrac{1}{1009}$. (C) $\dfrac{3}{1009}$. (D) $\dfrac{3}{2018^2}$.

Lời giải.

Ta có $a^{\frac{3}{2018}}.\sqrt[2018]{a} = a^{\frac{3}{2018}}.a^{\frac{1}{2018}} = a^{\frac{4}{2018}} = a^{\frac{2}{1009}}$.

Vậy số mũ của biểu thức rút gọn bằng $\dfrac{2}{1009}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 14 (Cụm Liên Trường Hải Phòng 2019).

Rút gọn biểu thức $P = \dfrac{a^{\sqrt{3}+1} \cdot a^{2-\sqrt{3}}}{\left(a^{\sqrt{2}-2}\right)^{\sqrt{2}+2}}$ với $a > 0$.

(A) $P = a$. (B) $P = a^3$. (C) $P = a^4$. (D) $P = a^5$.

Lời giải.

ta có $P = \dfrac{a^{\sqrt{3}+1} \cdot a^{2-\sqrt{3}}}{\left(a^{\sqrt{2}-2}\right)^{\sqrt{2}+2}} = \dfrac{a^{\sqrt{3}+1+2-\sqrt{3}}}{a^{\left(\sqrt{2}-2\right)\left(\sqrt{2}+2\right)}} = \dfrac{a^3}{a^{-2}} = a^5$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 15 (THPT Yên Khánh - Ninh Bình 2019).

Biểu thức $P = \sqrt[3]{x\sqrt[5]{x^2\sqrt{x}}} = x^{\alpha}$ (với $x > 0$), giá trị của α là

(A) $\dfrac{1}{2}$. (B) $\dfrac{5}{2}$. (C) $\dfrac{9}{2}$. (D) $\dfrac{3}{2}$.

Lời giải.

Ta có $P = \sqrt[3]{x\sqrt[5]{x^2\sqrt{x}}} = \sqrt[3]{x\sqrt[5]{x^2.x^{\frac{1}{2}}}} = \sqrt[3]{x.\left(x^{\frac{5}{2}}\right)^{\frac{1}{5}}} = \left(x^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} = x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \alpha = \dfrac{1}{2}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 16 (KTNL GV Thuận Thành 2 Bắc Ninh 2019).

Cho a là số thực dương khác 1. Khi đó $\sqrt[4]{a^{\frac{2}{3}}}$ bằng

(A) $\sqrt[3]{a^2}$. (B) $a^{\frac{8}{3}}$. (C) $a^{\frac{3}{8}}$. (D) $\sqrt[6]{a}$.

Lời giải.

Ta có $\sqrt[4]{a^{\frac{2}{3}}} = \left(a^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{4}} = a^{\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}} = a^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{a}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 17 (Cụm Liên Trường Hải Phòng 2019).

Rút gọn biểu thức $P=\dfrac{a^{\sqrt{3}+1}\cdot a^{2-\sqrt{3}}}{\left(a^{\sqrt{2}-2}\right)^{\sqrt{2}+2}}$ với $a>0$

Ⓐ $P=a$. Ⓑ $P=a^3$. Ⓒ $P=a^4$. Ⓓ $P=a^5$.

Lời giải.

Ta có $P=\dfrac{a^{\sqrt{3}+1}.a^{2-\sqrt{3}}}{\left(a^{\sqrt{2}-2}\right)^{\sqrt{2}+2}}=\dfrac{a^3}{a^{2-4}}=a^5$.

Chọn đáp án D □

Câu 18 (THPT Lương Tài Số 2 2019).

Cho biểu thức $P=x^{-\frac{3}{4}}\cdot\sqrt{\sqrt{x^5}}$, $x>0$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

Ⓐ $P=x^{-2}$. Ⓑ $P=x^{-\frac{1}{2}}$. Ⓒ $P=x^{\frac{1}{2}}$. Ⓓ $P=x^2$.

Lời giải.

Ta có $P=x^{-\frac{3}{4}}\cdot\sqrt{\sqrt{x^5}}=x^{-\frac{3}{4}}\cdot x^{\frac{5}{4}}=x^{-\frac{3}{4}+\frac{5}{4}}=x^{\frac{1}{2}}$.

Chọn đáp án C □

Câu 19 (Bỉm Sơn - Thanh Hóa - 2019).

Cho biểu thức $P=\dfrac{a^{\sqrt{5}+1}\cdot a^{2-\sqrt{5}}}{\left(a^{\sqrt{2}-2}\right)^{\sqrt{2}+2}}$. Rút gọn P được kết quả

Ⓐ a^5. Ⓑ a. Ⓒ a^3. Ⓓ a^4.

Lời giải.

Ta có $P=\dfrac{a^{\sqrt{5}+1}\cdot a^{2-\sqrt{5}}}{\left(a^{\sqrt{2}-2}\right)^{\sqrt{2}+2}}=\dfrac{a^{\sqrt{5}+1+2-\sqrt{5}}}{a^{\left(\sqrt{2}-2\right)\left(\sqrt{2}+2\right)}}=\dfrac{a^3}{a^{-2}}=a^5$.

Chọn đáp án A □

Câu 20 (Chuyên Vĩnh Phúc 2019). Cho biểu thức $P=\sqrt[3]{x\cdot\sqrt[4]{x^3\sqrt{x}}}$, với $x>0$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

Ⓐ $P=x^{\frac{1}{2}}$. Ⓑ $P=x^{\frac{7}{12}}$. Ⓒ $P=x^{\frac{5}{8}}$. Ⓓ $P=x^{\frac{7}{24}}$.

Lời giải.

Ta có $P=\sqrt[3]{x\cdot\sqrt[4]{x^3\sqrt{x}}}=x^{\frac{5}{8}}$.

Chọn đáp án C □

Câu 21 (THPT Thiệu Hóa – Thanh Hóa 2019).

Cho hai số thực dương a, b. Rút gọn biểu thức $A=\dfrac{a^{\frac{1}{3}}\sqrt{b}+b^{\frac{1}{3}}\sqrt{a}}{\sqrt[6]{a}+\sqrt[6]{b}}$ ta thu được $A=a^m\cdot b^n$. Tích của $m\cdot n$ là

Ⓐ $\dfrac{1}{8}$. Ⓑ $\dfrac{1}{21}$. Ⓒ $\dfrac{1}{9}$. Ⓓ $\dfrac{1}{18}$.

Lời giải.

Ta có $A=\dfrac{a^{\frac{1}{3}}\sqrt{b}+b^{\frac{1}{3}}\sqrt{a}}{\sqrt[6]{a}+\sqrt[6]{b}}=\dfrac{a^{\frac{1}{3}}\cdot b^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{3}}\cdot a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{6}}+b^{\frac{1}{6}}}=\dfrac{a^{\frac{1}{3}}\cdot b^{\frac{1}{3}}\left(b^{\frac{1}{6}}+a^{\frac{1}{6}}\right)}{a^{\frac{1}{6}}+b^{\frac{1}{6}}}=a^{\frac{1}{3}}\cdot b^{\frac{1}{3}}$.

Suy ra $m=\dfrac{1}{3}$, $n=\dfrac{1}{3}\Rightarrow m\cdot n=\dfrac{1}{9}$.

Chọn đáp án C □

Câu 22 (Sở Quảng Ninh 2019). Rút gọn biểu thức $A = \dfrac{\sqrt[3]{a^7}\cdot a^{\frac{11}{3}}}{a^4\cdot\sqrt[7]{a^{-5}}}$ với $a>0$ ta được kết quả $A = a^{\frac{m}{n}}$ trong đó $m, n \in \mathbb{N}^*$ và $\dfrac{m}{n}$ là phân số tối giản. Khẳng định nào sau đây đúng?

(A) $m^2-n^2=312$. (B) $m^2+n^2=543$. (C) $m^2-n^2=-312$. (D) $m^2+n^2=409$.

Lời giải.

Ta có $A = \dfrac{\sqrt[3]{a^7}\cdot a^{\frac{11}{3}}}{a^4\cdot\sqrt[7]{a^{-5}}} = \dfrac{a^{\frac{7}{3}}\cdot a^{\frac{11}{3}}}{a^4\cdot a^{\frac{-5}{7}}} = \dfrac{a^6}{a^{\frac{23}{7}}} = a^{\frac{19}{7}}$.

Mà $A = a^{\frac{m}{n}}$, $m, n \in N^*$ và $\dfrac{m}{n}$ là phân số tối giản.

Suy ra $m=19$, $n=7 \Rightarrow m^2-n^2=312$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 23 (Sở Vĩnh Phúc 2019). Cho a là số thực dương. Đơn giản biểu thức $P = \dfrac{a^{\frac{4}{3}}\left(a^{\frac{-1}{3}}+a^{\frac{2}{3}}\right)}{a^{\frac{1}{4}}\left(a^{\frac{3}{4}}+a^{\frac{-1}{4}}\right)}$.

(A) $P=a(a+1)$. (B) $P=a-1$. (C) $P=a$. (D) $P=a+1$.

Lời giải.

Ta có $P = \dfrac{a^{\frac{4}{3}}\left(a^{\frac{-1}{3}}+a^{\frac{2}{3}}\right)}{a^{\frac{1}{4}}\left(a^{\frac{3}{4}}+a^{\frac{-1}{4}}\right)} = \dfrac{a^{\frac{4}{3}}\cdot a^{\frac{-1}{3}}+a^{\frac{4}{3}}a^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{1}{4}}\cdot a^{\frac{3}{4}}+a^{\frac{1}{4}}\cdot a^{\frac{-1}{4}}} = \dfrac{a+a^2}{a+1} = \dfrac{a(a+1)}{a+1} = a$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 24. Cho a, b là các số thực dương. Rút gọn $P = \dfrac{a^{\frac{4}{3}}b+ab^{\frac{4}{3}}}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}$ ta được

(A) $P=ab$. (B) $P=a+b$. (C) $P=a^4b+ab^4$. (D) $P=ab(a+b)$.

Lời giải.

Ta có $P = \dfrac{a^{\frac{4}{3}}b+ab^{\frac{4}{3}}}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}} = \dfrac{a\cdot a^{\frac{1}{3}}b+ab\cdot b^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}} = \dfrac{ab\left(a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}\right)}{a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}} = ab$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 25 (KTNL GV THPT Lý Thái Tổ 2019).

Cho biểu thức $\sqrt[5]{8\sqrt{2\sqrt[3]{2}}} = 2^{\frac{m}{n}}$, trong đó $\dfrac{m}{n}$ là phân số tối giản. Gọi $P=m^2+n^2$. Khẳng định nào sau đây đúng?

(A) $P\in(330;340)$. (B) $P\in(350;360)$. (C) $P\in(260;370)$. (D) $P\in(340;350)$.

Lời giải.

Ta có $\sqrt[5]{8\sqrt{2\sqrt[3]{2}}} = \sqrt[5]{2^3\sqrt{2\sqrt[3]{2}}} = 2^{\frac{3}{5}}\cdot 2^{\frac{1}{10}}\cdot 2^{\frac{1}{30}} = 2^{\frac{3}{5}+\frac{1}{10}+\frac{1}{30}} = 2^{\frac{11}{15}}$.

Suy ra $\dfrac{m}{n} = \dfrac{11}{15} \Rightarrow \begin{cases} m=11 \\ n=15 \end{cases} \Rightarrow P=m^2+n^2=11^2+15^2=346$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 26 (Sở Bắc Ninh 2019). Cho $a>0$, $b>0$, giá trị của biểu thức $T = 2(a+b)^{-1}\cdot(ab)^{\frac{1}{2}}\cdot\left[1+\dfrac{1}{4}\left(\sqrt{\dfrac{a}{b}}-\sqrt{\dfrac{b}{a}}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$ bằng

(A) 1. (B) $\dfrac{1}{2}$. (C) $\dfrac{2}{3}$. (D) $\dfrac{1}{3}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}T &= 2\,(a+b)^{-1}\cdot(ab)^{\frac{1}{2}}\cdot\left[1+\frac{1}{4}\left(\sqrt{\frac{a}{b}}-\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}\\ &= 2\,(a+b)^{-1}\cdot(ab)^{\frac{1}{2}}\cdot\left[1+\frac{1}{4}\left(\frac{a-b}{\sqrt{ab}}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}\\ &= 2\,(a+b)^{-1}\cdot(ab)^{\frac{1}{2}}\cdot\left[1+\frac{(a-b)^2}{4ab}\right]^{\frac{1}{2}}\\ &= 2\,(a+b)^{-1}\cdot(ab)^{\frac{1}{2}}\cdot\left[\frac{(a+b)^2}{4ab}\right]^{\frac{1}{2}}\\ &= 2\cdot\frac{1}{a+b}\cdot(ab)^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{(a+b)}{2\,(ab)^{\frac{1}{2}}}=1.\end{aligned}$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 27 (Đề Tham Khảo 2017). Tính giá trị của biểu thức $P=\left(7+4\sqrt{3}\right)^{2017}\cdot\left(4\sqrt{3}-7\right)^{2016}$

(A) $P=\left(7+4\sqrt{3}\right)^{2016}$.
(B) $P=1$.
(C) $P=7-4\sqrt{3}$.
(D) $P=7+4\sqrt{3}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}P &= \left(7+4\sqrt{3}\right)^{2017}\cdot\left(4\sqrt{3}-7\right)^{2016}=\left(7+4\sqrt{3}\right)\cdot\left[\left(7+4\sqrt{3}\right)\left(4\sqrt{3}-7\right)\right]^{2016}\\ &= \left(7+4\sqrt{3}\right)(-1)^{2016}=7+4\sqrt{3}.\end{aligned}$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 28 (Chuyên Lê Quý Đôn Quảng Trị 2019).

Cho biểu thức $P=\sqrt[3]{\frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}}}$. Mệnh đề nào trong các mệnh đề sau là đúng?

(A) $P=\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{8}}$.
(B) $P=\left(\frac{2}{3}\right)^{18}$.
(C) $P=\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{18}}$.
(D) $P=\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$.

Lời giải.

Ta có

$$P=\sqrt[3]{\frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}}}=\sqrt[3]{\frac{2}{3}\sqrt[3]{\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{2}}}}=\sqrt[3]{\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{3}+1}}=\sqrt[3]{\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{2}}}=\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 29 (THPT An Lão Hải Phòng 2019).

Cho hàm số $f(a)=\dfrac{a^{-\frac{1}{3}}\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{a^4}\right)}{a^{\frac{1}{8}}\left(\sqrt[8]{a^3}-\sqrt[8]{a^{-1}}\right)}$, với $a>0$, $a\neq 1$. Tính giá trị $M=f\left(2017^{2016}\right)$.

(A) $M = 2017^{1008} - 1$. (B) $M = -2017^{1008} - 1$.
(C) $M = 2017^{2016} - 1$. (D) $M = 1 - 2017^{2016}$.

Lời giải.

Ta có $f(a) = \dfrac{a^{-\frac{1}{3}}\left(\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{a^4}\right)}{a^{\frac{1}{8}}\left(\sqrt[8]{a^3} - \sqrt[8]{a^{-1}}\right)} = \dfrac{1-a}{\sqrt{a}-1} = -1 - \sqrt{a}$.

Nên $M = f\left(2017^{2016}\right) = -1 - \sqrt{2017^{2016}} = -1 - 2017^{1008}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 30 (THPT Trần Phú 2019). Giá trị của biểu thức $P = \dfrac{2^3 \cdot 2^{-1} + 5^{-3} \cdot 5^4}{10^{-3} : 10^{-2} - (0{,}1)^0}$ là

(A) -9. (B) -10. (C) 10. (D) 9.

Lời giải.

Ta có

$$P = \frac{2^3 \cdot 2^{-1} + 5^{-3} \cdot 5^4}{10^{-3} : 10^{-2} - (0{,}1)^0} = \frac{2^{3-1} + 5^{-3+4}}{10^{-3+2} - 1} = \frac{4+5}{10^{-1} - 1} = \frac{9}{\frac{1}{10} - 1} = -10.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 31 (THPT Ngô Quyền – 2017). Cho hàm số $f(a) = \dfrac{a^{\frac{2}{3}} \cdot \left(\sqrt[3]{a^{-2}} - \sqrt[3]{a}\right)}{a^{\frac{1}{8}} \cdot \left(\sqrt[8]{a^3} - \sqrt[8]{a^{-1}}\right)}$ với $a > 0$, $a \neq 1$. Tính giá trị $M = f\left(2017^{2018}\right)$.

(A) (3). (B) $-2017^{1009} - 1$. (C) 2017^{1009}. (D) $2017^{1009} + 1$.

Lời giải.

Ta có $f(a) = \dfrac{a^{\frac{2}{3}} \cdot \left(a^{-\frac{2}{3}} - a^{\frac{1}{3}}\right)}{a^{\frac{1}{8}} \cdot \left(a^{\frac{3}{8}} - a^{-\frac{1}{8}}\right)} = \dfrac{1-a}{a^{\frac{1}{2}} - 1} = -1 - a^{\frac{1}{2}}$.

Do đó $M = f\left(2017^{2018}\right) = -1 - \left(2017^{2018}\right)^{\frac{1}{2}} = -1 - 2017^{1009}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 32. Cho biểu thức $f(x) = \sqrt[3]{x}\sqrt[4]{x}\sqrt[12]{x^5}$. Khi đó, giá trị của $f(2{,}7)$ bằng

(A) $0{,}027$. (B) 27. (C) $2{,}7$. (D) $0,27$.

Lời giải.

Ta có $f(2{,}7) = \sqrt[3]{2{,}7} \cdot \sqrt[4]{2{,}7} \cdot \sqrt[12]{2{,}7^5} = 2{,}7$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 33. Tính giá trị biểu thức $P = \dfrac{\left(4+2\sqrt{3}\right)^{2018} \cdot \left(1-\sqrt{3}\right)^{2017}}{\left(1+\sqrt{3}\right)^{2019}}$.

(A) $P = -2^{2017}$. (B) -1. (C) -2^{2019}. (D) 2^{2018}.

Lời giải.

Ta có $P = \dfrac{\left(1+\sqrt{3}\right)^{2 \cdot 2018} \cdot \left(1-\sqrt{3}\right)^{2017}}{\left(1+\sqrt{3}\right)^{2019}} = \left[\left(1+\sqrt{3}\right)\left(1-\sqrt{3}\right)\right]^{2017} = -2^{2017}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 34 (Chuyên Nguyễn Du - ĐăkLăk 2019).

Giá trị biểu thức $\left(3+2\sqrt{2}\right)^{2018}\cdot\left(\sqrt{2}-1\right)^{2019}$ bằng

Ⓐ $\left(\sqrt{2}+1\right)^{2019}$. Ⓑ $\left(\sqrt{2}-1\right)^{2017}$. Ⓒ $\left(\sqrt{2}-1\right)^{2019}$. Ⓓ $\left(\sqrt{2}+1\right)^{2017}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}\left(3+2\sqrt{2}\right)^{2018}\cdot\left(\sqrt{2}-1\right)^{2019} &= \left[\left(\sqrt{2}+1\right)^2\right]^{2018}\cdot\left(\sqrt{2}-1\right)^{2019}\\ &= \left(\sqrt{2}+1\right)^{2018}\cdot\left(\sqrt{2}+1\right)^{2018}\cdot\left(\sqrt{2}-1\right)^{2018}\cdot\left(\sqrt{2}-1\right)\\ &= \left(\sqrt{2}+1\right)^{2017}\cdot\left[\left(\sqrt{2}+1\right)\cdot\left(\sqrt{2}-1\right)\right]^{2019}\\ &= \left(\sqrt{2}+1\right)^{2017}.\end{aligned}$$

Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 35. Cho $a>0$, $b>0$ giá trị của biểu thức $T=2\left(a+b\right)^{-1}\left(ab\right)^{\frac{1}{2}}\left[1+\frac{1}{4}\left(\sqrt{\frac{a}{b}}-\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$ bằng

Ⓐ 1. Ⓑ $\frac{1}{3}$. Ⓒ $\frac{2}{3}$. Ⓓ $\frac{1}{2}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}T&=2\left(a+b\right)^{-1}\left(ab\right)^{\frac{1}{2}}\left[1+\frac{1}{4}\left(\sqrt{\frac{a}{b}}-\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}\\ &=2\left(a+b\right)^{-1}\left(ab\right)^{\frac{1}{2}}\left[1+\frac{1}{4}\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-2\right)\right]^{\frac{1}{2}}\\ &=2\left(a+b\right)^{-1}\left(ab\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{a}{4b}+\frac{b}{4a}+\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\\ &=2\left(a+b\right)^{-1}\left(ab\right)^{\frac{1}{2}}\left[\frac{a^2+b^2+2ab}{4ab}\right]^{\frac{1}{2}}\\ &=2\left(a+b\right)^{-1}\left(ab\right)^{\frac{1}{2}}\frac{\left(a+b\right)}{2\left(ab\right)^{\frac{1}{2}}}=1.\end{aligned}$$

Chọn đáp án Ⓐ □

Dạng 2. So sánh các biểu thức chứa lũy thừa

Câu 36 (Mã 103 - 2022). Cho $a=3^{\sqrt{5}}$, $b=3^2$ và $c=3^{\sqrt{6}}$ mệnh đề nào dưới đây đúng

Ⓐ $a<c<b$. Ⓑ $a<b<c$. Ⓒ $b<a<c$. Ⓓ $c<a<b$.

Lời giải.

Ta có $a=3^{\sqrt{5}}$, $b=3^2=3^{\sqrt{4}}$, $c=3^{\sqrt{6}}$ và $\begin{cases}\sqrt{4}<\sqrt{5}<\sqrt{6}\\ 3>1.\end{cases}$

Suy ra $b<a<c$.

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 37 (Mã 104 - 2022). Cho $a = 3^{\sqrt{5}}$, $b = 3^2$ và $c = 3^{\sqrt{6}}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

(A) $a < b < c$. (B) $a < c < b$. (C) $c < a < b$. (D) $b < a < c$.

Lời giải.

Ta có $2 < \sqrt{5} < \sqrt{6}$ mà cơ số $3 > 1$ nên $3^2 < 3^{\sqrt{5}} < 3^{\sqrt{6}}$.

Vậy $b < a < c$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 38 (Bạc Liêu – Ninh Bình 2019).

Cho $\left(\sqrt{2}-1\right)^m < \left(\sqrt{2}-1\right)^n$. Khi đó

(A) $m = n$. (B) $m < n$. (C) $m > n$. (D) $m \neq n$.

Lời giải.

Do $0 < \sqrt{2} - 1 < 1$ nên $\left(\sqrt{2}-1\right)^m < \left(\sqrt{2}-1\right)^n \Leftrightarrow m > n$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 39. Cho $a > 1$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

(A) $a^{-\sqrt{3}} > \dfrac{1}{a^{\sqrt{5}}}$. (B) $a^{\frac{1}{3}} > \sqrt{a}$. (C) $\dfrac{\sqrt[3]{a^2}}{a} > 1$. (D) $\dfrac{1}{a^{2016}} < \dfrac{1}{a^{2017}}$.

Lời giải.

Vì $a > 1$ và $-\sqrt{3} > -\sqrt{5}$ nên $a^{-\sqrt{3}} > a^{-\sqrt{5}} \Leftrightarrow a^{-\sqrt{3}} > \dfrac{1}{a^{\sqrt{5}}}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 40 (THPT Yên Phong Số 1 Bắc Ninh 2019).

Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

(A) $\left(\sqrt{3}-1\right)^{2018} > \left(\sqrt{3}-1\right)^{2017}$. (B) $2^{\sqrt{2}+1} > 2^{\sqrt{3}}$.

(C) $\left(\sqrt{2}-1\right)^{2017} > \left(\sqrt{2}-1\right)^{2018}$. (D) $\left(1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2019} < \left(1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2018}$.

Lời giải.

Vì $0 < \sqrt{3} - 1 < 1$ và $2018 > 2017$.

Suy ra $\left(\sqrt{3}-1\right)^{2018} < \left(\sqrt{3}-1\right)^{2017}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 41 (THPT Sơn Tây Hà Nội 2019).

Khẳng định nào sau đây đúng?

(A) $(\sqrt{5}+2)^{-2017} < (\sqrt{5}+2)^{-2018}$. (B) $(\sqrt{5}+2)^{2018} > (\sqrt{5}+2)^{2019}$.

(C) $(\sqrt{5}-2)^{2018} > (\sqrt{5}-2)^{2019}$. (D) $(\sqrt{5}-2)^{2018} < (\sqrt{5}-2)^{2019}$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} 0 < \sqrt{5} - 2 < 1 \\ 2018 < 2019 \end{cases} \Rightarrow (\sqrt{5}-2)^{2018} > (\sqrt{5}-2)^{2019}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 42 (THPT Lê Quý Đôn Đà Nẵng 2019).

Khẳng định nào dưới đây là đúng?

(A) $\left(\frac{3}{7}\right)^{\sqrt{3}} > \left(\frac{5}{8}\right)^{\sqrt{3}}$.

(B) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-\pi} < \left(\frac{1}{3}\right)^{-\pi}$.

(C) $3^{-\sqrt{2}} < \left(\frac{1}{5}\right)^{\sqrt{2}}$.

(D) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-50} < \left(\sqrt{2}\right)^{100}$.

Lời giải.

Ta có $-\pi < 0$ và $\frac{1}{2} > \frac{1}{3} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{-\pi} < \left(\frac{1}{3}\right)^{-\pi}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 43 (Nam Định-2018). Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sai?

(A) $\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2018} < \left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2017}$.

(B) $\left(\sqrt{2}-1\right)^{2017} > \left(\sqrt{2}-1\right)^{2018}$.

(C) $\left(\sqrt{3}-1\right)^{2018} > \left(\sqrt{3}-1\right)^{2017}$.

(D) $2^{\sqrt{2}+1} > 2^{\sqrt{3}}$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} 0 < \sqrt{3}-1 < 1 \\ 2018 > 2017 \end{cases} \Rightarrow \left(\sqrt{3}-1\right)^{2018} < \left(\sqrt{3}-1\right)^{2017}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 44 (THPT Tiên Lãng 2018). Tìm tập tất cả các giá trị của a để $\sqrt[21]{a^5} > \sqrt[7]{a^2}$?

(A) $a > 0$.

(B) $0 < a < 1$.

(C) $a > 1$.

(D) $\frac{5}{21} < a < \frac{2}{7}$.

Lời giải.

Do $\sqrt[7]{a^2} = \sqrt[21]{a^6}$ nên ta có $\sqrt[21]{a^5} > \sqrt[7]{a^2} \Leftrightarrow \sqrt[21]{a^5} > \sqrt[21]{a^6}$.

Mà $5 < 6$ suy ra $0 < a < 1$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 45 (Đề sát hạch lần 2, Đoàn Thượng, Hải Dương 2018).

Nếu $\left(7+4\sqrt{3}\right)^{a-1} < 7-4\sqrt{3}$ thì

(A) $a < 1$.

(B) $a > 1$.

(C) $a > 0$.

(D) $a < 0$.

Lời giải.

$$\left(7+4\sqrt{3}\right)^{a-1} < 7-4\sqrt{3} \Leftrightarrow \left(7+4\sqrt{3}\right)^{a-1} < \left(7+4\sqrt{3}\right)^{-1}.$$

Mà ta có $7+4\sqrt{3} > 1$ nên $\left(7+4\sqrt{3}\right)^{a-1} < \left(7+4\sqrt{3}\right)^{-1} \Leftrightarrow a-1 < -1 \Leftrightarrow a < 0$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 46 (THPT Cộng Hiền 2019). Cho a, $b > 0$ thỏa mãn $a^{\frac{1}{2}} > a^{\frac{1}{3}}$, $b^{\frac{2}{3}} > b^{\frac{3}{4}}$. Khi đó khẳng định nào đúng?

(A) $0 < a < 1$, $0 < b < 1$.

(B) $0 < a < 1$, $b > 1$.

(C) $a > 1$, $0 < b < 1$.

(D) $a > 1$, $b > 1$.

Lời giải.

Ta có

$$a^{\frac{1}{2}} > a^{\frac{1}{3}} \Leftrightarrow \frac{1}{2}\ln a > \frac{1}{3}\ln a \Leftrightarrow \frac{1}{6}\ln a > 0 \Leftrightarrow a > 1$$
$$b^{\frac{2}{3}} > b^{\frac{3}{4}} \Leftrightarrow \frac{2}{3}\ln b > \frac{3}{4}\ln b \Leftrightarrow 0 > \frac{1}{12}\ln b \Leftrightarrow 0 < b < 1.$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 47. So sánh ba số $a = 1000^{1001}$, $b = 2^{2^{64}}$ và $c = 1^1 + 2^2 + 3^3 + \ldots + 1000^{1000}$?

(A) $c < a < b$. (B) $b < a < c$. (C) $c < b < a$. (D) $a < c < b$.

Lời giải.

Ta có $1^1 < 1000^{1000}; 2^2 < 1000^{1000} \ldots 999^{999} < 1000^{1000}$

$\Rightarrow c = 1^1 + 2^2 + 3^3 + \ldots + 1000^{1000} < 1000.1000^{1000} \Leftrightarrow c < a$

Mặt khác $2^{10} > 1000$

$\Rightarrow 2^{64}.\ln 2 = \dfrac{2^4}{10} \cdot \left(2^{10}\right)^6 \cdot \ln 2^{10} > 1000^6.\ln 1000 > 1001.\ln 1000 \Rightarrow 2^{2^{64}} > 1000^{1001} \Leftrightarrow a < b$

Vậy $c < a < b$.

Chọn đáp án (A) □

Dạng 3. Tìm tập xác định của hàm số lũy thừa

Câu 48 (Đề minh họa 2022). Tập xác định của hàm số $y = x^{\sqrt{2}}$ là

(A) $\mathbb{R}$. (B) $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. (C) $(0; +\infty)$. (D) $(2; +\infty)$.

Lời giải.

Xét hàm số $y = x^{\sqrt{2}}$ với số mũ $\sqrt{2}$ không nguyên nên tập xác định là $\mathscr{D} = (0; +\infty)$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 49 (Mã 123 2017). Tập xác định $\mathscr{D}$ của hàm số $y = (x-1)^{\frac{1}{3}}$ là

(A) $\mathscr{D} = (1; +\infty)$. (B) $\mathscr{D} = \mathbb{R}$. (C) $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. (D) $\mathscr{D} = (-\infty; 1)$.

Lời giải.

Hàm số xác định khi $x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$. Vậy $\mathscr{D} = (1; +\infty)$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 50 (Mã 104 2017). Tìm tập xác định $\mathscr{D}$ của hàm số $y = \left(x^2 - x - 2\right)^{-3}$.

(A) $\mathscr{D} = (-\infty; -1) \cup (2; +\infty)$. (B) $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1; 2\}$.

(C) $\mathscr{D} = \mathbb{R}$. (D) $\mathscr{D} = (0; +\infty)$.

Lời giải.

Vì $-3 \in \mathbb{Z}^-$ nên hàm số xác định khi $x^2 - x - 2 \neq 0 \Rightarrow x \neq -1; x \neq 2$. Vậy $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1; 2\}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 51 (Chuyên Bắc Giang 2019). Tập xác định của hàm số $y = (x-1)^{\frac{1}{5}}$ là

(A) $[1; +\infty)$. (B) $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. (C) $(1; +\infty)$. (D) $(0; +\infty)$.

Lời giải.

Vì $\dfrac{1}{5} \notin \mathbb{Z}$ nên hàm số xác định khi và chỉ khi $x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$

Vậy tập xác định của hàm số $\mathscr{D} = (1; +\infty)$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 52. Tìm tập xác định $\mathscr{D}$ của hàm số $y = \left(x^2 - 3x\right)^{-4}$.

(A) $\mathscr{D} = (0; 3)$. (B) $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{0; 3\}$.

(C) $\mathscr{D} = (-\infty; 0) \cup (3; +\infty)$. (D) $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

Lời giải.

Hàm số $y = (x^2 - 3x)^{-2}$ xác định khi $x^2 - 3x \neq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \neq 0 \\ x \neq 3 \end{array}\right.$.

Vậy tập xác định của hàm số là $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{0; 3\}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 53 (KSCL THPT Nguyễn Khuyến 2019).

Tìm tập xác định của hàm số $y = (4 - x^2)^{\frac{2}{3}}$ là

(A) $\mathscr{D} = (-2; 2)$. (B) $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{2; -2\}$. (C) $\mathscr{D} = R$. (D) $\mathscr{D} = (2; +\infty)$.

Lời giải.

Điều kiện $4 - x^2 > 0 \Leftrightarrow x \in (-2; 2)$. Vậy Tập xác định $\mathscr{D} = (-2; 2)$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 54 (THPT Lương Tài Số 2 2019).

Trong các hàm số sau đây, hàm số nào có tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$?

(A) $y = (2 + \sqrt{x})^{\pi}$. (B) $y = \left(2 + \dfrac{1}{x^2}\right)^{\pi}$. (C) $y = (2 + x^2)^{\pi}$. (D) $y = (2 + x)^{\pi}$.

Lời giải.

Đáp án A Điều kiện $x \geq 0$. Tập xác định $\mathscr{D} = [0; +\infty)$.

Đáp án B Điều kiện $x \neq 0$. Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Đáp án C Điều kiện $2 + x^2 > 0$ (luôn đúng). Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

Đáp án D Điều kiện $2 + x > 0 \Leftrightarrow x > -2$. Tập xác định $\mathscr{D} = (-2; +\infty)$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 55 (Chuyên Vĩnh Phúc 2019).

Tìm tập xác định $\mathscr{D}$ của hàm số $y = (3x^2 - 1)^{\frac{1}{3}}$.

(A) $\mathscr{D} = \left(-\infty; -\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) \cup \left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}; +\infty\right)$. (B) $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

(C) $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right\}$. (D) $\mathscr{D} = \left(-\infty; -\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right] \cup \left[\dfrac{1}{\sqrt{3}}; +\infty\right)$.

Lời giải.

Điều kiện xác định $3x^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < -\dfrac{1}{\sqrt{3}} \\ x > \dfrac{1}{\sqrt{3}} \end{array}\right.$

Tập xác định $\mathscr{D} = \left(-\infty; -\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) \cup \left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}; +\infty\right)$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 56 (THPT An Lão Hải Phòng 2019).

Hàm số nào dưới đây đồng biến trên tập xác định của nó?

(A) $y = \left(\dfrac{1}{\pi}\right)^x$. (B) $y = \left(\dfrac{2}{3}\right)^x$. (C) $y = \left(\sqrt{3}\right)^x$. (D) $y = (0,5)^x$.

Lời giải.

Hàm số $y = a^x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $a > 1$.

Thấy các số $\dfrac{1}{\pi}; \dfrac{2}{3}; 0,5$ nhỏ hơn 1, còn $\sqrt{3}$ lớn hơn 1 nên chọn **C**.

Chọn đáp án C □

Câu 57 (THPT An Lão Hải Phòng 2019).

Tìm tập xác định $\mathscr{D}$ của hàm số $y = (x^2 + 2x - 3)^{\sqrt{2}}$.

A $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

B $\mathscr{D} = (-\infty; -3) \cup (1; +\infty)$.

C $\mathscr{D} = (0; +\infty)$.

D $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{-3; 1\}$.

Lời giải.

Hàm số xác định khi $x^2 + 2x - 3 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 1 \\ x < -3 \end{array}\right.$.

Vậy $\mathscr{D} = (-\infty; -3) \cup (1; +\infty)$.

Chọn đáp án B □

Câu 58 (Chuyên KHTN 2019). Tập xác định của hàm số $y = (x - 1)^{\frac{1}{2}}$ là

A $(0; +\infty)$.

B $[1; +\infty)$.

C $(1; +\infty)$.

D $(-\infty; +\infty)$.

Lời giải.

Điều kiện để hàm số xác định $x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$.

Tập xác định: $\mathscr{D} = (1; +\infty)$.

Chọn đáp án C □

Câu 59 (Liên Trường THPT Tp Vinh Nghệ An 2019).

Tập xác định của hàm số $y = (x^2 - 4x)\dfrac{2019}{2020}$ là

A $(-\infty; 0] \cup [4; +\infty)$.

B $(-\infty; 0) \cup (4; +\infty)$.

C $(0; 4)$.

D $\mathbb{R} \setminus \{0; 4\}$.

Lời giải.

Điều kiện $x^2 - 4x > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < 0 \\ x > 4 \end{array}\right.$.

Chọn đáp án B □

Câu 60 (THPT Gang Thép Thái Nguyên 2019).

Tập xác định của hàm số $y = (-x^2 + 6x - 8)^{\sqrt{2}}$ là

A $\mathscr{D} = (2; 4)$.

B $\mathscr{D} = (-\infty; 2)$.

C $\mathscr{D} = (4; +\infty)$.

D $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

Lời giải.

Hàm số xác định khi và chỉ khi $-x^2 + 6x - 8 > 0 \Leftrightarrow 2 < x < 4$.

Vậy tập xác định của hàm số là $\mathscr{D} = (2; 4)$.

Chọn đáp án A □

Câu 61 (KTNL GV THPT Lý Thái Tổ 2019).

Tập xác định của hàm số $y = (x^2 - 7x + 10)^{-3}$ là

A $\mathbb{R} \setminus \{2; 5\}$.

B $(-\infty; 2) \cup (5; +\infty)$.

Ⓒ $\mathbb{R}$. Ⓓ $(2;5)$.

Lời giải.

Điều kiện xác định là $x^2-7x+10\neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 2\\ x\neq 5\end{cases}$.

Vậy tập xác định $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{2;5\}$.

Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 62 (Chuyên Nguyễn Tất Thành Yên Bái 2019).

Tìm tập xác định $\mathscr{D}$ của hàm số $y=(4x^2-1)^{-3}$.

Ⓐ $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right\}$. Ⓑ $\mathscr{D}=\left(-\infty;\dfrac{-1}{2}\right)\cup\left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)$.

Ⓒ $\mathscr{D}=\mathbb{R}$. Ⓓ $\mathscr{D}=\left(-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right)$.

Lời giải.

Điều kiện xác định của hàm số là $4x^2-1\neq 0\Leftrightarrow x\neq\pm\dfrac{1}{2}$.

Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 63 (Hsg Tỉnh Bắc Ninh 2019). Tập xác định của hàm số $y=(4-3x-x^2)^{-2019}$ là

Ⓐ $\mathbb{R}\setminus\{-4;1\}$. Ⓑ $\mathbb{R}$. Ⓒ $[-4;1]$. Ⓓ $(-4;1)$.

Lời giải.

Vì $y=(4-3x-x^2)^{-2019}$ là hàm số lũy thừa có số mũ nguyên âm nên điều kiện xác định là $4-3x-x^2\neq 0\Leftrightarrow\begin{cases} x\neq 1\\ x\neq -4.\end{cases}$

Vậy tập xác định của hàm số là $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{-4;1\}$.

Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 64 (Chuyên Lê Quý Đôn Điện Biên 2019).

Tìm tập xác định của $y=(x^2-3x+2)^{\frac{-1}{3}}$

Ⓐ $(-\infty;1)\cup(2;+\infty)$. Ⓑ $\mathbb{R}\setminus\{1;2\}$.

Ⓒ $y'=\dfrac{2x}{(x^2+2)\ln 5}$. Ⓓ $\mathbb{R}$.

Lời giải.

Vì $-\dfrac{1}{3}$ không nguyên nên $y=(x^2-3x+2)^{\frac{-1}{3}}$ xác định khi

$x^2-3x+2>0\Leftrightarrow x\in(-\infty;1)\cup(2;+\infty)$.

Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 65 (KTNL GV Thuận Thành 2 Bắc Ninh 2019).

Tập xác định của hàm số $y=(x^2-3x+2)^{\pi}$ là

Ⓐ $(1;2)$. Ⓑ $(-\infty;1)\cup(2;+\infty)$.

Ⓒ $\mathbb{R}\setminus\{1;2\}$. Ⓓ $(-\infty;1]\cup[2;+\infty)$.

Lời giải.

Hàm số $y=(x^2-3x+2)^{\pi}$ xác định $\Leftrightarrow x^2-3x+2>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x<1\\ x>2.\end{array}\right.$

Tập xác định $\mathscr{D} = (-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 66 (Sở Bắc Ninh 2019). Tìm tập xác định $\mathscr{D}$ của hàm số $y = (x^2 - 3x - 4)^{\sqrt{2-\sqrt{3}}}$.

(A) $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1; 4\}$.
(B) $\mathscr{D} = (-\infty; -1] \cup [4; +\infty)$.
(C) $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.
(D) $\mathscr{D} = (-\infty; -1) \cup (4; +\infty)$.

Lời giải.

Hàm số xác định khi $x^2 - 3x - 4 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < -1 \\ x > 4 \end{array}\right.$.

Vậy tập xác định $\mathscr{D}$ của hàm số là $\mathscr{D} = (-\infty; -1) \cup (4; +\infty)$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 67 (Gia Lai 2019). Tìm tập xác định $\mathscr{D}$ của hàm số $y = (x^2 - 6x + 9)^{\frac{\pi}{2}}$.

(A) $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. (B) $\mathscr{D} = (3; +\infty)$. (C) $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{3\}$. (D) $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

Lời giải.

Do $\frac{\pi}{2} \notin \mathbb{Z}$ nên ta có điều kiện $x^2 - 6x + 9 > 0 \Leftrightarrow (x-3)^2 > 0 \Leftrightarrow x \neq 3$

Vậy tập xác định của hàm số là $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{3\}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 68 (Chuyên Hà Tĩnh 2019). Tìm tập xác định của hàm số $y = (x^2 - 3x + 2)^{\frac{1}{3}}$ là

(A) $\mathbb{R} \setminus \{1; 2\}$.
(B) $(-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$.
(C) $(1; 2)$.
(D) $\mathbb{R}$.

Lời giải.

Điều kiện xác định là $x^2 - 3x + 2 > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$.

Vậy tập xác định của hàm số là $\mathscr{D} = (-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 69 (Chu Văn An - Hà Nội - 2019).

Tập xác định $\mathscr{D}$ của hàm số $y = (x^3 - 27)^{\frac{\pi}{2}}$ là

(A) $\mathscr{D} = (3; +\infty)$. (B) $\mathscr{D} = [3; +\infty)$. (C) $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{3\}$. (D) $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

Lời giải.

Điều kiện xác định của hàm số $x^3 - 27 > 0 \Leftrightarrow x > 3$.

Do đó tập xác định của hàm số là $\mathscr{D} = (3; +\infty)$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 70 (Bắc Ninh 2019). Tập xác định của hàm số $y = (x^2 - 3x + 2)^{\frac{3}{5}} + (x-3)^{-2}$ là

(A) $\mathscr{D} = (-\infty; +\infty) \setminus \{3\}$.
(B) $\mathscr{D} = (-\infty; 1) \cup (2; +\infty) \setminus \{3\}$.
(C) $\mathscr{D} = (-\infty; +\infty) \setminus (1; 2)$.
(D) $\mathscr{D} = (-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$.

Lời giải.

Hàm số đã cho xác định khi $\begin{cases} x^2-3x+2>0 \\ x-3\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x<1 \\ x>2 \end{array}\right. \\ x\neq 3 \end{cases}$

Vậy tập xác định của hàm số là $D=(-\infty;1)\cup(2;+\infty)\setminus\{3\}$.

Chọn đáp án B □

Dạng 4. Đạo hàm hàm số lũy thừa

Câu 71 (Mã 101 - 2022). Đạo hàm của hàm số $y=x^{-3}$ là

(A) $y'=-x^{-4}$. (B) $y'=-\frac{1}{2}x^{-2}$. (C) $y'=-\frac{1}{3}x^{-4}$. (D) $y'=-3x^{-4}$.

Lời giải.

Ta có $y'=-3x^{-3-1}=-3x^{-4}$.

Chọn đáp án D □

Câu 72 (Mã 102 - 2022). Đạo hàm của hàm số $y=x^{-3}$ là

(A) $y'=-x^{-4}$. (B) $y'=-3x^{-4}$. (C) $y'=-\frac{1}{3}x^{-4}$. (D) $y'=-\frac{1}{2}x^{-2}$.

Lời giải.

Ta có $y'=-3x^{-4}$.

Chọn đáp án B □

Câu 73 (Mã 101 - 2021 Lần 1). Trên khoảng $(0,+\infty)$, đạo hàm của hàm số $y=x^{\frac{5}{2}}$ là:

(A) $y'=\frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}}$. (B) $y'=\frac{2}{5}x^{\frac{3}{2}}$. (C) $y'=\frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}}$. (D) $y'=\frac{5}{2}x^{-\frac{3}{2}}$.

Lời giải.

Ta có $y=x^{\frac{5}{2}}\Rightarrow y'=\frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}}$.

Chọn đáp án C □

Câu 74 (Mã 102 - 2021 Lần 1). Trên khoảng $(0;+\infty)$, đạo hàm của hàm số $y=x^{\frac{5}{4}}$ là

(A) $\frac{4}{9}x^{\frac{9}{4}}$. (B) $\frac{4}{5}x^{\frac{1}{4}}$. (C) $\frac{5}{4}x^{\frac{1}{4}}$. (D) $\frac{5}{4}x^{-\frac{1}{4}}$.

Lời giải.

$\left(x^{\frac{5}{4}}\right)'=\frac{5}{4}x^{\frac{1}{4}}$.

Chọn đáp án C □

Câu 75 (Mã 104 - 2021 Lần 1). Trên khoảng $(0;+\infty)$, đạo hàm của hàm số $y=x^{\frac{5}{3}}$ là

(A) $y'=\frac{3}{8}x^{\frac{8}{3}}$. (B) $y'=\frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}}$. (C) $y'=\frac{5}{3}x^{-\frac{2}{3}}$. (D) $y'=\frac{3}{5}x^{\frac{2}{3}}$.

Lời giải.

Ta có $y'=\frac{5}{3}x^{\frac{5}{3}-1}=\frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}}$.

Chọn đáp án B □

Câu 76 (Mã 103 - 2021-Lần 1). Trên khoảng $(0;+\infty)$, đạo hàm của hàm số $y=x^{\frac{4}{3}}$ là

(A) $y'=\frac{4}{3}x^{-\frac{1}{3}}$. (B) $y'=\frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}}$. (C) $y'=\frac{3}{7}x^{\frac{7}{3}}$. (D) $y'=\frac{3}{4}x^{\frac{1}{3}}$.

Lời giải.

Ta có $y' = \left(x^{\frac{4}{3}}\right)' = \dfrac{4}{3}x^{\frac{1}{3}}$.

Chọn đáp án B □

Câu 77 (Sở Quảng Trị 2019). Tìm đạo hàm của hàm số: $y = (x^2+1)^{\frac{3}{2}}$

A $\dfrac{3}{2}(2x)^{\frac{1}{2}}$. B $\dfrac{3}{4}x^{-\frac{1}{4}}$. C $3x(x^2+1)^{\frac{1}{2}}$. D $\dfrac{3}{2}(x^2+1)^{\frac{1}{2}}$.

Lời giải.

Áp dụng công thức đạo hàm hợp hàm số lũy thừa: $([u(x)]^{\alpha})' = \alpha.u^{\alpha-1}.[u(x)]'$

Ta có $y' = \left((x^2+1)^{\frac{3}{2}}\right)' = \dfrac{3}{2}\cdot 2x \cdot (x^2+1)^{\frac{1}{2}} = 3x.(x^2+1)^{\frac{1}{2}}$.

Chọn đáp án C □

Câu 78 (Kiểm tra năng lực - ĐH - Quốc Tế - 2019).

Đạo hàm của hàm số $y = (3-x^2)^{\frac{2}{3}}$ tại $x = 1$ là

A $\dfrac{\sqrt[3]{4}}{3}$. B $-\dfrac{2\sqrt[3]{4}}{3}$.

C $-\dfrac{\sqrt[3]{2}}{3}$. D 3 lựa chọn kia đều sai.

Lời giải.

Ta có $y = (3-x^2)^{\frac{2}{3}}$.

$\Rightarrow y' = \dfrac{2}{3}(3-x^2)^{-\frac{1}{3}}(3-x^2)' = \dfrac{2}{3}(3-x^2)^{-\frac{1}{3}}(-2x) = \dfrac{-4x}{3}(3-x^2)^{-\frac{1}{3}}$.

$y'(1) = \dfrac{-4}{3}2^{-\dfrac{1}{3}} = \dfrac{-4}{3.\sqrt[3]{2}} = \dfrac{-2\sqrt[3]{4}}{3}$.

Vậy $y'(1) = \dfrac{-2\sqrt[3]{4}}{3}$.

Chọn đáp án B □

Câu 79 (THPT Lý Nhân Tông – 2017).

Hàm số $y = \sqrt[5]{(x^2+1)^2}$ có đạo hàm là

A $y' = \dfrac{4x}{5\sqrt[5]{(x^2+1)^3}}$. B $y' = 2x\sqrt{x^2+1}$. C $y' = 4x\sqrt[5]{x^2+1}$. D $y' = \dfrac{4}{\sqrt[5]{(x^2+1)^2}}$.

Lời giải.

Vì Áp dụng công thức $(u^n)' = n.u^{n-1}.u'$.

Chọn đáp án A □

Câu 80 (THPT Nguyễn Đăng Đạo – 2017).

Đạo hàm của hàm số $y = (2x+1)^{-\frac{1}{3}}$ trên tập xác định là

A $-\dfrac{1}{3}(2x+1)^{-\frac{4}{3}}$. B $2\,(2x+1)^{-\frac{1}{3}}\ln(2x+1)$.

C $(2x+1)^{-\frac{1}{3}}\ln(2x+1)$. D $-\dfrac{2}{3}(2x+1)^{-\frac{4}{3}}$.

Lời giải.

Ta có $y' = \left[(2x+1)^{-\frac{1}{3}}\right]' = \dfrac{-1}{3}(2x+1)'(2x+1)^{-\frac{1}{3}-1} = \dfrac{-2}{3}(2x+1)^{-\frac{4}{3}}$.

Chọn đáp án D □

Câu 81 (Chuyên Vinh 2018). Đạo hàm của hàm số $y = (x^2+x+1)^{\frac{1}{3}}$ là

(A) $y' = \dfrac{1}{3}(x^2+x+1)^{\frac{8}{3}}$.
(B) $y' = \dfrac{2x+1}{2\sqrt[3]{x^2+x+1}}$.
(C) $y' = \dfrac{2x+1}{3\sqrt[3]{(x^2+x+1)^2}}$.
(D) $y' = \dfrac{1}{3}(x^2+x+1)^{\frac{2}{3}}$.

Lời giải.

Ta có $y' = \dfrac{1}{3}(x^2+x+1)^{\frac{1}{3}-1}(x^2+x+1)' = \dfrac{2x+1}{3\sqrt[3]{(x^2+x+1)^2}}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 82 (THPT Chuyên LHP Nam Định – 2017).

Tính đạo hàm của hàm số $y = (1-\cos 3x)^6$.

(A) $y' = 6\sin 3x(1-\cos 3x)^5$.
(B) $y' = 6\sin 3x(\cos 3x-1)^5$.
(C) $y' = 18\sin 3x(\cos 3x-1)^5$.
(D) $y' = 18\sin 3x(1-\cos 3x)^5$.

Lời giải.

Ta có $y = (1-\cos 3x)^6 \Rightarrow y = 6\left(1-\cos 3x\right)^5.(1-\cos 3x)'$.

$= 6\left(1-\cos 3x\right)^5.3\sin 3x = 18\sin 3x(1-\cos 3x)^5$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 83 (THPT Chuyên LHP – 2017). Tìm đạo hàm của hàm số $y = (x^2+1)^{\frac{\mathrm{e}}{2}}$ trên $\mathbb{R}$.

(A) $y' = 2x(x^2+1)^{\frac{\mathrm{e}}{2}-1}$.
(B) $y' = ex\sqrt{(x^2+1)^{\mathrm{e}-2}}$.
(C) $y' = \dfrac{e}{2}(x^2+1)^{\frac{\mathrm{e}}{2}-1}$.
(D) $y' = (x^2+1)^{\frac{\mathrm{e}}{2}}\ln(x^2+1)$.

Lời giải.

Ta có $y' = \left((x^2+1)^{\frac{\mathrm{e}}{2}}\right)' = \dfrac{\mathrm{e}}{2}.2x(x^2+1)^{\frac{\mathrm{e}}{2}-1} = \mathrm{e}x(x^2+1)^{\frac{\mathrm{e}}{2}-1} = \mathrm{e}x\sqrt{(x^2+1)^{\mathrm{e}-2}}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 84 (THPT Tứ Kỳ-Hải Dương-2018).

Cho hàm số (1), $(x>0)$. Đạo hàm của y là:

(A) $y' = \mathrm{e}^{\frac{15}{16}}.x^{-\frac{31}{32}}$.
(B) $y' = \dfrac{\sqrt{\mathrm{e}\sqrt{e\sqrt{e\sqrt{e}}}}}{32.\sqrt[32]{x^{31}}}$.
(C) $y' = \mathrm{e}^{\frac{15}{16}}.x^{\frac{31}{32}}$.
(D) $y' = \dfrac{\sqrt{\mathrm{e}\sqrt{e\sqrt{e\sqrt{e}}}}}{2\sqrt{x}}$.

Lời giải.

Ta có $y = \sqrt{\mathrm{e}\sqrt{\mathrm{e}\sqrt{\mathrm{e}\sqrt{\mathrm{e}}}}}.x^{\frac{1}{32}} \Rightarrow y' = \dfrac{1}{32}\sqrt{\mathrm{e}\sqrt{\mathrm{e}\sqrt{\mathrm{e}\sqrt{\mathrm{e}}}}}.x^{\frac{1}{32}-1} = \dfrac{1}{32}\sqrt{\mathrm{e}\sqrt{\mathrm{e}\sqrt{\mathrm{e}\sqrt{\mathrm{e}}}}}.x^{-\frac{31}{32}}$

$= \dfrac{\sqrt{\mathrm{e}\sqrt{\mathrm{e}\sqrt{\mathrm{e}\sqrt{\mathrm{e}}}}}}{32.\sqrt[32]{x^{31}}}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 85 (THPT Thuận Thành - Bắc Ninh - 2018).

Đạo hàm của hàm số $y = (2x-1)^{\frac{1}{3}}$ là

(A) $y' = \dfrac{1}{3}(2x-1)^{-\frac{2}{3}}$.
(B) $y' = (2x-1)^{\frac{1}{3}} \cdot \ln|2x-1|$.
(C) $y' = \dfrac{2}{3}(2x-1)^{\frac{4}{3}}$.
(D) $y' = \dfrac{2}{3}(2x-1)^{-\frac{2}{3}}$.

Lời giải.

Ta có $y' = \dfrac{1}{3}(2x-1)^{-\frac{2}{3}} \cdot (2x-1)' = \dfrac{2}{3}(2x-1)^{-\frac{2}{3}}$.

Chọn đáp án D □

Dạng 5. Khảo sát hàm số lũy thừa

Câu 86 (THPT Phan Chu Trinh - Đắc Lắc-2018).

Hàm số nào sau đây nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

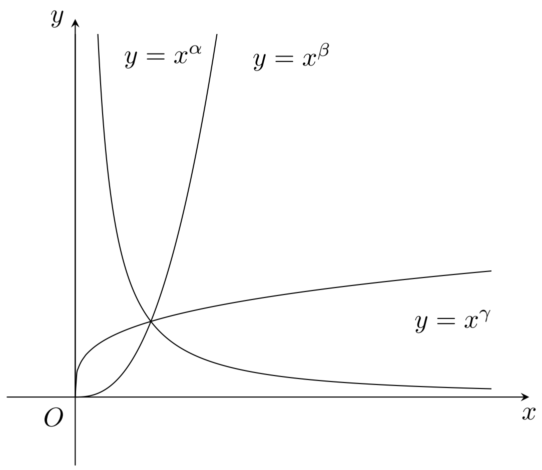
A. $y = 2^x$. B. $y = \left(\dfrac{1}{3}\right)^x$. C. $y = (\sqrt{\pi})^x$. D. $y = e^x$.

Lời giải.

Hàm số $y = a^x$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $0 < a < 1$.

Chọn đáp án B □

Câu 87. Cho các hàm số lũy thừa $y = x^\alpha$, $y = x^\beta$, $y = x^\gamma$ có đồ thị như hình vẽ. Mệnh đề đúng là



A. $\alpha > \beta > \gamma$. B. $\beta > \alpha > \gamma$. C. $\beta > \gamma > \alpha$. D. $\gamma > \beta > \alpha$.

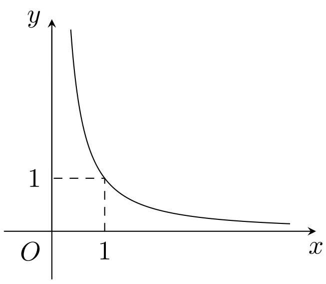
Lời giải.

Dựa vào đồ thị ta có $\alpha < 0$, $\beta > 1$; $0 < \gamma < 1$.

Vậy $\beta > \gamma > \alpha$.

Chọn đáp án C □

Câu 88. Đường cong ở hình vẽ dưới đây là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



A. $y = 2^{1-x}$. B. $y = x^{-\frac{1}{2}}$. C. $y = x^{-1}$. D. $y = \log_2(2x)$.

Lời giải.

Dựa vào đồ thị ta thấy tập xác định của hàm số là $\mathscr{D} = (0; +\infty) \Rightarrow$ loại "$y = 2^{1-x}$", "$y = x^{-1}$". Hàm số nghịch biến trên tập xác định của nó mà hàm số $y = \log_2(2x)$ đồng biến trên tập xác định của nó nên ta loại đáp án "$y = \log_2(2x)$".

Chọn đáp án (B) □

Câu 89 (THPT Quốc Oai-Hà Nội-2017).

Cho hàm số $y = x^{-\sqrt{3}}$ khẳng định nào sau đây đúng?

(A) Đồ thị hàm số cắt trục Ox.

(B) Đồ thị hàm số không có tiệm cận.

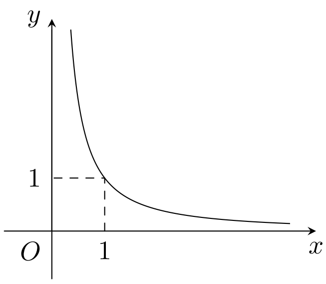
(C) Đồ thị hàm số có một tiệm cận đứng và không có tiệm cận ngang.

(D) Đồ thị hàm số có một tiệm cận đứng và một tiệm cận ngang.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = (0; +\infty)$.

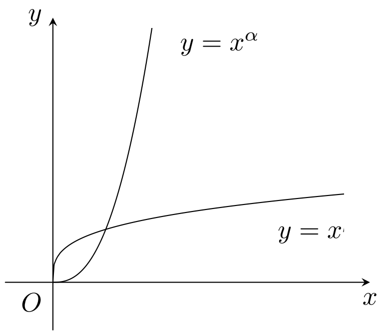
Đồ thị hàm số



Từ đồ thị hàm số ta thấy đồ thị hàm số có một tiệm cận đứng là trục Oy và một tiệm cận ngang là trục Ox.

Chọn đáp án (D) □

Câu 90 (Chuyên Vinh 2017). Cho là các số α, β là các số thực. Đồ thị các hàm số $y = x^{\alpha}$, $y = x^{\beta}$ trên khoảng $(0; +\infty)$ được cho trong hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây là đúng?



(A) $0 < \alpha < 1 < \beta$. (B) $\beta < 0 < 1 < \alpha$. (C) $0 < \beta < 1 < \alpha$. (D) $\alpha < 0 < 1 < \beta$.

Lời giải.

Với $x_0 > 1$ ta có $x_0^{\alpha} > 1 \Rightarrow \alpha > 0$; $x_0^{\beta} > 1 \Rightarrow \beta > 0$.

$x_0^{\alpha} > x_0^{\beta} \Rightarrow \alpha > \beta$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 91 (THPT – THD Nam Định-2017).

Cho hàm số $y = x^{-\sqrt{2}}$. Mệnh đề nào sau đây là **sai**?

(A) Hàm số có tập xác định là $(0; +\infty)$.
(B) Đồ thị hàm số không có tiệm cận.
(C) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty)$.
(D) Đồ thị hàm số không cắt trục hoành.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = (0; +\infty)$, suy ra "Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty)$" đúng.

Do $x > 0$ nên $x^{-\sqrt{2}} > 0$, suy ra "Hàm số có tập xác định là $(0; +\infty)$" đúng.

Ta có $y' = -\sqrt{2}.x^{-\sqrt{2}-1} < 0; \forall x > 0$, suy ra "Đồ thị hàm số không có tiệm cận" đúng.

Ta có $\lim\limits_{x \to 0^+} x^{-\sqrt{2}} = +\infty$ nên đồ thị hàm số nhận Oy làm tiệm cận đứng, đáp án "Đồ thị hàm số không cắt trục hoành" đúng.

Chọn đáp án (B) □

Câu 92 (Chuyên Nguyễn Huệ 2019).

Số cực trị của hàm số $y = \sqrt[5]{x^2} - x$ là

(A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 0.

Lời giải.

Tập xác định $\mathbb{R}$. Xét $y' = \dfrac{2}{5\sqrt[5]{x^3}} - 1$

$y' = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{\left(\dfrac{2}{5}\right)^5}$; y' không xác định khi $x = 0$.

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		$\sqrt[3]{\left(\frac{2}{5}\right)^2}$		$+\infty$
y'		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

y' đổi dấu khi qua $x = 0$ và $x = \sqrt[3]{\left(\dfrac{2}{5}\right)^5}$ nên hàm số có 2 cực trị.

Chọn đáp án (B) □

BẢNG ĐÁP ÁN

1. B	2. C	3. C	4. B	5. D	6. D	7. B	8. A	9. C	10. C
11. A	12. B	13. A	14. D	15. A	16. D	17. D	18. C	19. A	20. C
21. C	22. A	23. C	24. A	25. D	26. A	27. D	28. D	29. B	30. B
31. B	32. C	33. A	34. D	35. A	36. C	37. D	38. C	39. A	40. A
41. C	42. B	43. C	44. B	45. D	46. C	47. A	48. C	49. A	50. B
51. C	52. B	53. A	54. C	55. A	56. C	57. B	58. C	59. B	60. A
61. A	62. A	63. A	64. A	65. B	66. D	67. C	68. B	69. A	70. B
71. D	72. B	73. C	74. C	75. B	76. B	77. C	78. B	79. A	80. D
81. C	82. D	83. B	84. B	85. D	86. B	87. C	88. B	89. D	90. C
				91. B	92. B				

CHỦ ĐỀ 16

CÔNG THỨC, BIẾN ĐỔI LOGARIT

MỨC ĐỘ 1. MỨC ĐỘ 5,6 ĐIỂM

Dạng 1. Câu hỏi lý thuyết

Câu 1 (Đề Minh Họa 2017). Cho hai số thực a và b, với $1 < a < b$. Khẳng định nào dưới đây là khẳng định đúng?

(A) $\log_b a < 1 < \log_a b$.
(B) $1 < \log_a b < \log_b a$.
(C) $\log_b a < \log_a b < 1$.
(D) $\log_a b < 1 < \log_b a$.

Lời giải.

Vì $b > a > 1 \Rightarrow \begin{cases} \log_a b > \log_a a \\ \log_b b > \log_b a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_a b > 1 \\ 1 > \log_b a \end{cases} \Rightarrow \log_b a < 1 < \log_a b.$

Chọn đáp án (A) □

Câu 2 (Mã 110 2017). Cho a là số thực dương khác 1. Mệnh đề nào dưới đây đúng với mọi số dương x, y?

(A) $\log_a \dfrac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$.
(B) $\log_a \dfrac{x}{y} = \log_a (x - y)$.
(C) $\log_a \dfrac{x}{y} = \log_a x + \log_a y$.
(D) $\log_a \dfrac{x}{y} = \dfrac{\log_a x}{\log_a y}$.

Lời giải.

Theo tính chất của logarit.

Chọn đáp án (A) □

Câu 3 (THPT Minh Khai Hà Tĩnh 2019).

Với mọi số thực dương a, b, x, y và $a, b \neq 1$, mệnh đề nào sau đây sai?

(A) $\log_a \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{\log_a x}$.
(B) $\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y$.
(C) $\log_b a . \log_a x = \log_b x$.
(D) $\log_a \dfrac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$.

Lời giải.

Với mọi số thực dương a, b, x, y và $a, b \neq 1$. Ta có $\log_a \dfrac{1}{x} = \log_a x^{-1} \neq \dfrac{1}{\log_a x}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 4 (Chuyên Hạ Long 2019). Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

(A) $\log_a b^\alpha = \alpha \log_a b$ với mọi số a, b dương và $a \neq 1$.
(B) $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$ với mọi số a, b dương và $a \neq 1$.
(C) $\log_a b + \log_a c = \log_a bc$ với mọi số a, b dương và $a \neq 1$.

(D) $\log_a b = \dfrac{\log_c a}{\log_c b}$ với mọi số a, b, c dương và $a \neq 1$.

Lời giải.

Chọn đáp án (A) □

Câu 5 (THPT - Thăng - Long - Hà - Nội - 2019).

Cho a, b là hai số thực dương tùy ý và $b \neq 1$.Tìm kết luận đúng.

(A) $\ln a + \ln b = \ln(a+b)$.
(B) $\ln(a+b) = \ln a . \ln b$.
(C) $\ln a - \ln b = \ln(a-b)$.
(D) $\log_b a = \dfrac{\ln a}{\ln b}$.

Lời giải.

Chọn đáp án (D) □

Câu 6 (THPT Yên Phong Số 1 Bắc Ninh 2019).

Cho hai số dương $a, b\,(a \neq 1)$. Mệnh đề nào dưới đây SAI?

(A) $\log_a a = 2a$.
(B) $\log_a a^\alpha = \alpha$.
(C) $\log_a 1 = 0$.
(D) $a^{\log_a b} = b$.

Lời giải.

Chọn đáp án (A) □

Câu 7 (Sở Thanh Hóa 2019). Với các số thực dương a, b bất kì. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

(A) $\log(ab) = \log a . \log b$.
(B) $\log \dfrac{a}{b} = \dfrac{\log a}{\log b}$.
(C) $\log(ab) = \log a + \log b$.
(D) $\log \dfrac{a}{b} = \mathrm{logb} - \mathrm{loga}$.

Lời giải.

Ta có $\log(ab) = \log a + \log b$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 8 (VTED 03 2019). Với các số thực dương a, b bất kì. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

(A) $\ln(ab) = \ln a + \ln b$.
(B) $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \dfrac{\ln a}{\ln b}$.
(C) $\ln(ab) = \ln a . \ln b$.
(D) $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln b - \ln a$.

Lời giải.

Chọn đáp án (A) □

Câu 9 (Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2019).

Với các số thực dương a, b bất kì. Mệnh đề nào sau đây đúng?

(A) $\log(ab) = \log a . logb$.
(B) $\log \dfrac{a}{b} = \log b - \log a$.
(C) $\log \dfrac{a}{b} = \dfrac{\log a}{\log b}$.
(D) $\log(ab) = \log a + \log b$.

Lời giải.

Theo tính chất logarit

Chọn đáp án (D) □

Câu 10. Cho a, b, $c > 0$, $a \neq 1$ và số $\alpha \in \mathbb{R}$, mệnh đề nào dưới đây sai?

(A) $\log_a a^c = c$.
(B) $\log_a a = 1$.

Ⓒ $\log_a b^\alpha = \alpha \log_a b$.

Ⓓ $\log_a |b-c| = \log_a b - \log_a c$.

Lời giải.

Theo tính chất của logarit, mệnh đề sai là $\log_a |b-c| = \log_a b - \log_a c$.

Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 11 (THPT An Lão Hải Phòng 2019).

Cho a, b, c là các số dương $(a, b \neq 1)$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào là mệnh đề đúng?

Ⓐ $\log_a \left(\frac{b}{a^3}\right) = \frac{1}{3} \log_a b$.

Ⓑ $a^{\log_b a} = b$.

Ⓒ $\log_{a^\alpha} b = \alpha \log_a b \, (\alpha \neq 0)$.

Ⓓ $\log_a c = \log_b c . \log_a b$.

Lời giải.

Chọn đáp án Ⓓ □

Dạng 2. Tính, rút gọn biểu thức chứa logarit

Câu 12 (Đề minh họa 2022). Với mọi số thực a dương, $\log_2 \frac{a}{2}$ bằng

Ⓐ $\frac{1}{2} \log_2 a$.

Ⓑ $\log_2 a + 1$.

Ⓒ $\log_2 a - 1$.

Ⓓ $\log_2 a - 2$.

Lời giải.

Ta có $\log_2 \frac{a}{2} = \log_2 a - \log_2 2 = \log_2 a - 1$.

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 13 (Đề minh họa 2022). Với mọi a, b thỏa mãn $\log_2 a - 3\log_2 b = 2$, khẳng định nào dưới đây đúng?

Ⓐ $a = 4b^3$.

Ⓑ $a = 3b + 4$.

Ⓒ $a = 3b + 2$.

Ⓓ $a = \frac{4}{b^3}$.

Lời giải.

Điều kiện: $a, b > 0$. Ta có

$$\log_2 a - 3\log_2 b = 2 \Leftrightarrow \log_2 a - \log_2 b^3 = 2 \Leftrightarrow \log_2 \frac{a}{b^3} = 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{b^3} = 4 \Leftrightarrow a = 4b^3$$

Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 14 (Mã 101 - 2022). Với a là số thực dương tùy ý, $4\log\sqrt{a}$ bằng

Ⓐ $-2\log a$.

Ⓑ $2\log a$.

Ⓒ $-4\log a$.

Ⓓ $8\log a$.

Lời giải.

Với $a > 0$, ta có $4\log\sqrt{a} = 4\log\left(a^{\frac{1}{2}}\right) = 4.\frac{1}{2}\log a = 2\log a$.

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 15 (Mã 102 - 2022). Với a là số thực dương tùy ý, $4\log\sqrt{a}$ bằng

Ⓐ $-4\log a$.

Ⓑ $8\log a$.

Ⓒ $2\log a$.

Ⓓ $-2\log a$.

Lời giải.

Ta có $4\log\sqrt{a} = 4\log a^{\frac{1}{2}} = 2\log a$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 16 (Mã 103 - 2022). Với a là số thực dương tùy ý, $\log(100a)$ bằng

(A) $1-\log a$. (B) $2+\log a$. (C) $2-\log a$. (D) $1+\log a$.

Lời giải.

$\log(100a)=\log(100)+\log a=2+\log a$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 17 (Mã 103 - 2022). Với a, b là các số thực dương tùy ý và $a\neq 1$, $\log_{\frac{1}{a}}\dfrac{1}{b^3}$ bằng

(A) $3\log_a b$. (B) $\log_a b$. (C) $-3\log_a b$. (D) $\dfrac{1}{3}\log_a b$.

Lời giải.

$\log_{\frac{1}{a}}\dfrac{1}{b^3}=-\log_a b^{-3}=3\log_a b$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 18 (Mã 104 - 2022). Với a là số thực dương tuỳ ý, $\log(100a)$ bằng

(A) $2-\log a$. (B) $2+\log a$. (C) $1-\log a$. (D) $1+\log a$.

Lời giải.

Với $a>0$, ta có $\log(100a)=\log 100+\log a=\log 10^2+\log a=2+\log a$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 19 (Mã 104 - 2022). Với a, b là các số thực dương tùy ý và $a\neq 1$, $\log_{\frac{1}{a}}\dfrac{1}{b^3}$ bằng

(A) $\log_a b$. (B) $-3\log_a b$. (C) $\dfrac{1}{3}\log_a b$. (D) $3\log_a b$.

Lời giải.

Ta có $\log_{\frac{1}{a}}\dfrac{1}{b^3}=\log_{a^{-1}}b^{-3}=3\log_a b$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 20 (Mã 101 - 2021 Lần 1). Cho $a>0$ và $a\neq 1$, khi đó $\log_a\sqrt[4]{a}$ bằng

(A) 4. (B) $\dfrac{1}{4}$. (C) $-\dfrac{1}{4}$. (D) -4.

Lời giải.

Ta có $\log_a\sqrt[4]{a}=\log_a a^{\frac{1}{4}}=\dfrac{1}{4}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 21 (Mã 102 - 2021 Lần 1). Cho $a>0$ và $a\neq 1$ khi đó $\log_a\sqrt[3]{a}$ bằng

(A) -3. (B) $\dfrac{1}{3}$. (C) $-\dfrac{1}{3}$. (D) 3.

Lời giải.

$\log_a\sqrt[3]{a}=\dfrac{1}{3}\log_a a=\dfrac{1}{3}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 22 (Mã 104 - 2021 Lần 1). Cho $a>0$và $a\neq 1$, khi đó $\log_a\sqrt[5]{a}$ bằng

(A) $\dfrac{1}{5}$. (B) $-\dfrac{1}{5}$. (C) 5. (D) -5.

Lời giải.

Ta có $\log_a \sqrt[5]{a} = \log_a a^{\frac{1}{5}} = \dfrac{1}{5}\log_a a = \dfrac{1}{5}$.

Chọn đáp án A □

Câu 23 (Mã 103 - 2021-Lần 1). Cho $a > 0$ và $a \neq 1$, khi đó $\log_a \sqrt{a}$ bằng

A. 2. B. -2. C. $-\dfrac{1}{2}$. D. $\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Với $a > 0$ và $a \neq 1$,ta có $\log_a \sqrt{a} = \log_a a^{\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2}\log_a a = \dfrac{1}{2}$.

Chọn đáp án D □

Câu 24 (Đề Minh Họa 2021). Với a là số thực dương tùy ý, $\log_3(9a)$ bằng

A. $\dfrac{1}{2} + \log_3 a$. B. $2\log_3 a$. C. $(\log_3 a)^2$. D. $2 + \log_3 a$.

Lời giải.

Ta có $\log_3(9a) = \log_3 9 + \log_3 a = \log_3 3^2 + \log_3 a = 2 + \log_3 a$.

Chọn đáp án D □

Câu 25 (Mã 101 - 2020 Lần 1). Với a, b là các số thực dương tùy ý và $a \neq 1$, $\log_{a^5} b$ bằng

A. $5\log_a b$. B. $\dfrac{1}{5} + \log_a b$. C. $5 + \log_a b$. D. $\dfrac{1}{5}\log_a b$.

Lời giải.

Chọn đáp án D □

Câu 26 (Mã 102 - 2020 Lần 1). Với a, b là các số thực dương tùy ý và $a \neq 1$, $\log_{a^2} b$ bằng

A. $\dfrac{1}{2} + \log_a b$. B. $\dfrac{1}{2}\log_a b$. C. $2 + \log_a b$. D. $2\log_a b$.

Lời giải.

Ta có $\log_{a^2} b = \dfrac{1}{2}\log_a b$.

Chọn đáp án B □

Câu 27 (Mã 103 - 2020 Lần 1). Với a, b là các số thực dương tùy ý và $a \neq 1$, $\log_{a^3} b$ bằng

A. $3 + \log_a b$. B. $3\log_a b$. C. $\dfrac{1}{3} + \log_a b$. D. $\dfrac{1}{3}\log_a b$.

Lời giải.

Ta có $\log_{a^3} b = \dfrac{1}{3}\log_a b$.

Chọn đáp án D □

Câu 28 (Mã 102 - 2020 Lần 2). Với a là số thực dương tùy ý, $\log_5(5a)$ bằng

A. $5 + \log_5 a$. B. $5 - \log_5 a$. C. $1 + \log_5 a$. D. $1 - \log_5 a$.

Lời giải.

Ta có $\log_5(5a) = \log_5 5 + \log_5 a = 1 + \log_5 a$.

Chọn đáp án C □

Câu 29 (Mã 103 - 2020 Lần 2). Với a là số thực dương tùy ý, $\log_2 2a$ bằng

A. $1 + \log_2 a$. B. $1 - \log_2 a$. C. $2 - \log_2 a$. D. $2 + \log_2 a$.

Lời giải.

$\log_2 2a = \log_2 2 + \log_2 a = 1 + \log_2 a$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 30 (Đề Minh Họa 2020 Lần 1). Với a là số thực dương tùy ý, $\log_2 a^2$ bằng

(A) $2 + \log_2 a$. (B) $\frac{1}{2} + \log_2 a$. (C) $2\log_2 a$. (D) $\frac{1}{2}\log_2 a$.

Lời giải.

Với $a > 0; b > 0; a \neq 1$. Với mọi α. Ta có công thức $\log_a b^\alpha = \alpha \log_a b$.

Vậy $\log_2 a^2 = 2\log_2 a$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 31 (Đề Tham Khảo 2020 Lần 2).

Với a là hai số thực dương tùy ý, $\log_2 (a^3)$ bằng

(A) $\frac{3}{2}\log_2 a$. (B) $\frac{1}{3}\log_2 a$. (C) $3 + \log_2 a$. (D) $3\log_2 a$.

Lời giải.

Ta có $\log_2 (a^3) = 3\log_2 a$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 32 (Mã 103 2019). Với a là số thực dương tùy ý, $\log_2 a^3$ bằng

(A) $3 + \log_2 a$. (B) $3\log_2 a$. (C) $\frac{1}{3}\log_2 a$. (D) $\frac{1}{3} + \log_2 a$.

Lời giải.

Ta có $\log_2 a^3 = 3\log_2 a$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 33 (Mã 102 2019). Với a là số thực dương tùy ý, $\log_5 a^3$ bằng

(A) $\frac{1}{3}\log_5 a$. (B) $\frac{1}{3} + \log_5 a$. (C) $3 + \log_5 a$. (D) $3\log_5 a$.

Lời giải.

$\log_5 a^3 = 3\log_5 a$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 34 (Mã 104 2017). Cho a là số thực dương tùy ý khác 1. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

(A) $\log_2 a = \log_a 2$. (B) $\log_2 a = \frac{1}{\log_2 a}$. (C) $\log_2 a = \frac{1}{\log_a 2}$. (D) $\log_2 a = -\log_a 2$.

Lời giải.

Áp dụng công thức đổi cơ số.

Chọn đáp án (C) □

Câu 35 (Mã 104 2019). Với a là số thực dương tùy ý, $\log_2 a^2$ bằng

(A) $\frac{1}{2}\log_2 a$. (B) $2 + \log_2 a$. (C) $2\log_2 a$. (D) $\frac{1}{2} + \log_2 a$.

Lời giải.

Vì a là số thực dương tùy ý nên $\log_2 a^2 = 2\log_2 a$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 36 (Đề Tham Khảo 2019). Với a, b là hai số dương tùy ý, $\log\left(ab^2\right)$ bằng

Ⓐ $2\left(\log a+\log b\right)$. Ⓑ $\log a+\dfrac{1}{2}\log b$. Ⓒ $2\log a+\log b$. Ⓓ $\log a+2\log b$.

Lời giải.

Ta có $\log\left(ab^2\right)=\log a+\log b^2=\log a+2\log b$.

Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 37 (Đề Tham Khảo 2017). Cho a là số thực dương $a\neq 1$ và $\log_{\sqrt[3]{a}}a^3$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

Ⓐ $P=\dfrac{1}{3}$. Ⓑ $P=3$. Ⓒ $P=1$. Ⓓ $P=9$.

Lời giải.

$\log_{\sqrt[3]{a}}a^3=\log_{a^{\frac{1}{3}}}a^3=9$.

Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 38 (Mã 101 2019). Với a là số thực dương tùy ý, bằng $\log_5 a^2$.

Ⓐ $\dfrac{1}{2}\log_5 a$. Ⓑ $2+\log_5 a$. Ⓒ $\dfrac{1}{2}+\log_5 a$. Ⓓ $2\log_5 a$.

Lời giải.

Vì a là số thực dương nên ta có $\log_5 a^2=2\log_5 a$.

Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 39 (Mã 103 2018). Với a là số thực dương tùy ý, $\ln\left(7a\right)-\ln\left(3a\right)$ bằng

Ⓐ $\dfrac{\ln 7}{\ln 3}$. Ⓑ $\ln\dfrac{7}{3}$. Ⓒ $\ln\left(4a\right)$. Ⓓ $\dfrac{\ln\left(7a\right)}{\ln\left(3a\right)}$.

Lời giải.

$\ln\left(7a\right)-\ln\left(3a\right)=\ln\left(\dfrac{7a}{3a}\right)=\ln\dfrac{7}{3}$.

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 40 (Mã 101 2018). Với a là số thực dương tùy ý, $\ln\left(5a\right)-\ln\left(3a\right)$ bằng

Ⓐ $\ln\dfrac{5}{3}$. Ⓑ $\dfrac{\ln 5}{\ln 3}$. Ⓒ $\dfrac{\ln\left(5a\right)}{\ln\left(3a\right)}$. Ⓓ $\ln\left(2a\right)$.

Lời giải.

$\ln\left(5a\right)-\ln\left(3a\right)=\ln\dfrac{5}{3}$.

Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 41 (Mã 102 2018). Với a là số thực dương tùy ý, $\log_3\left(3a\right)$ bằng

Ⓐ $1-\log_3 a$. Ⓑ $3\log_3 a$. Ⓒ $3+\log_3 a$. Ⓓ $1+\log_3 a$.

Lời giải.

Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 42. Với các số thực dương a, b bất kì. Mệnh đề nào dưới đây đúng.

Ⓐ $\ln\left(ab\right)=\ln a+\ln b$. Ⓑ $\ln\left(ab\right)=\ln a.\ln b$.

Ⓒ $\ln\dfrac{a}{b}=\dfrac{\ln a}{\ln b}$. Ⓓ $\ln\dfrac{a}{b}=\ln b-\ln a$.

Lời giải.

Theo tính chất của lôgarit $\forall a>0, b>0: \ln(ab)=\ln a+\ln b$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 43 (Mã 123 2017). Cho a là số thực dương khác 1. Tính $I=\log_{\sqrt{a}} a$.

(A) $I=-2$. (B) $I=2$. (C) $I=\dfrac{1}{2}$. (D) $I=0$.

Lời giải.

Với a là số thực dương khác 1 ta được: $I=\log_{\sqrt{a}} a=\log_{a^{\frac{1}{2}}} a=2\log_a a=2$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 44 (Mã 104 2018). Với a là số thực dương tùy ý, $\log_3\left(\dfrac{3}{a}\right)$ bằng

(A) $1-\log_3 a$. (B) $3-\log_3 a$. (C) $\dfrac{1}{\log_3 a}$. (D) $1+\log_3 a$.

Lời giải.

Ta có $\log_3\left(\dfrac{3}{a}\right)=\log_3 3-\log_3 a=1-\log_3 a$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 45. Với các số thực dương a, b bất kì. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

(A) $\log_2\left(\dfrac{2a^3}{b}\right)=1+3\log_2 a+\log_2 b$. (B) $\log_2\left(\dfrac{2a^3}{b}\right)=1+\dfrac{1}{3}\log_2 a+\log_2 b$.

(C) $\log_2\left(\dfrac{2a^3}{b}\right)=1+3\log_2 a-\log_2 b$. (D) $\log_2\left(\dfrac{2a^3}{b}\right)=1+\dfrac{1}{3}\log_2 a-\log_2 b$.

Lời giải.

Ta có $\log_2\left(\dfrac{2a^3}{b}\right)=\log_2\left(2a^3\right)-\log_2(b)=\log_2 2+\log_2 a^3-\log_2 b=1+3\log_2 a-\log_b$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 46 (Mã 110 2017). Cho $\log_a b=2$ và $\log_a c=3$. Tính $P=\log_a\left(b^2c^3\right)$.

(A) $P=13$. (B) $P=31$. (C) $P=30$. (D) $P=108$.

Lời giải.

Ta có $\log_a\left(b^2c^3\right)=2\log_a b+3\log_a c=2.2+3.3=13$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 47 (Mã 102 2019). Cho a và b là hai số thực dương thỏa mãn $a^3b^2=32$. Giá trị của $3\log_2 a+2\log_2 b$ bằng

(A) 4. (B) 5. (C) 2. (D) 32.

Lời giải.

Ta có $\log_2 a^3b^2=\log_2 32\Leftrightarrow 3\log_2 a+2\log_2 b=5$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 48 (Đề Tham Khảo 2017). Cho a, b là các số thực dương thỏa mãn $a\neq 1$, $a\neq\sqrt{b}$ và $\log_a b=\sqrt{3}$. Tính $P=\log_{\frac{\sqrt{b}}{a}}\sqrt{\dfrac{b}{a}}$.

(A) $P=-5+3\sqrt{3}$. (B) $P=-1+\sqrt{3}$. (C) $P=-1-\sqrt{3}$. (D) $P=-5-3\sqrt{3}$.

Lời giải.

$$P=\frac{\log_a\sqrt{\frac{b}{a}}}{\log_a\frac{\sqrt{b}}{a}}=\frac{\frac{1}{2}\left(\log_a b-1\right)}{\log_a\sqrt{b}-1}=\frac{\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}-1\right)}{\frac{1}{2}\log_a b-1}=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}-2}=-1-\sqrt{3}.$$

Chọn đáp án C ☐

Câu 49 (Mã 103 2019). Cho a và b là hai số thực dương thỏa mãn $a^2b^3=16$. Giá trị của $2\log_2 a+3\log_2 b$bằng

A. 2. B. 8. C. 16. D. 4.

Lời giải.

Ta có $2\log_2 a+3\log_2 b=\log_2\left(a^2b^3\right)=\log_2 16=4$.

Chọn đáp án D ☐

Câu 50 (Mã 104 2017). Với các số thực dương x, y tùy ý, đặt $\log_3 x=\alpha$, $\log_3 y=\beta$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\log_{27}\left(\frac{\sqrt{x}}{y}\right)^3=\frac{\alpha}{2}+\beta$.

B. $\log_{27}\left(\frac{\sqrt{x}}{y}\right)^3=9\left(\frac{\alpha}{2}+\beta\right)$.

C. $\log_{27}\left(\frac{\sqrt{x}}{y}\right)^3=\frac{\alpha}{2}-\beta$.

D. $\log_{27}\left(\frac{\sqrt{x}}{y}\right)^3=9\left(\frac{\alpha}{2}-\beta\right)$.

Lời giải.

$$\log_{27}\left(\frac{\sqrt{x}}{y}\right)^3=\frac{3}{2}\log_{27}x-3\log_{27}y=\frac{1}{2}\log_3 x-\log_3 y=\frac{\alpha}{2}-\beta.$$

Chọn đáp án D ☐

Câu 51 (Mã 101 2019). Cho a và b là hai số thực dương thỏa mãn $a^4b=16$. Giá trị của $4\log_2 a+\log_2 b$ bằng

A. 4. B. 2. C. 16. D. 8.

Lời giải.

$4\log_2 a+\log_2 b=\log_2 a^4+\log_2 b=\log_2\left(a^4b\right)=\log_2 16=\log_2 2^4=4$.

Chọn đáp án A ☐

Câu 52 (Đề Minh Họa 2017). Cho các số thực dương a, b với $a\neq 1$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. $\log_{a^2}(ab)=\frac{1}{4}\log_a b$.

B. $\log_{a^2}(ab)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\log_a b$.

C. $\log_{a^2}(ab)=\frac{1}{2}\log_a b$.

D. $\log_{a^2}(ab)=2+2\log_a b$.

Lời giải.

Ta có $\log_{a^2}(ab)=\log_{a^2}a+\log_{a^2}b=\frac{1}{2}\cdot\log_a a+\frac{1}{2}\cdot\log_a b=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\log_a b$.

Chọn đáp án B ☐

Câu 53 (Mã 123 2017). Với a, b là các số thực dương tùy ý và a khác 1, đặt $P=\log_a b^3+\log_{a^2}b^6$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $P=6\log_a b$. B. $P=27\log_a b$. C. $P=15\log_a b$. D. $P=9\log_a b$.

Lời giải.

$P=\log_a b^3+\log_{a^2}b^6=3\log_a b+\frac{6}{2}\log_a b=6\log_a b$.

Chọn đáp án A ☐

Câu 54 (Đề Tham Khảo 2018). Với a là số thực dương bất kì, mệnh đề nào dưới đây đúng?

(A) $\log(3a) = \frac{1}{3}\log a$. (B) $\log(3a) = 3\log a$. (C) $\log a^3 = \frac{1}{3}\log a$. (D) $\log a^3 = 3\log a$.

Lời giải.

Chọn đáp án (D) □

Câu 55 (Mã 105 2017). Cho $\log_3 a = 2$ và $\log_2 b = \frac{1}{2}$. Tính $I = 2\log_3[\log_3(3a)] + \log_{\frac{1}{4}} b^2$.

(A) $I = \frac{5}{4}$. (B) $I = 0$. (C) $I = 4$. (D) $I = \frac{3}{2}$.

Lời giải.

$I = 2\log_3[\log_3(3a)] + \log_{\frac{1}{4}} b^2 = 2\log_3(\log_3 3 + \log_3 a) + 2\log_{2^{-2}} b = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 56 (Mã 105 2017). Cho a là số thực dương khác 2. Tính $I = \log_{\frac{a}{2}}\left(\frac{a^2}{4}\right)$.

(A) $I = 2$. (B) $I = -\frac{1}{2}$. (C) $I = -2$. (D) $I = \frac{1}{2}$.

Lời giải.

$I = \log_{\frac{a}{2}}\left(\frac{a^2}{4}\right) = \log_{\frac{a}{2}}\left(\frac{a}{2}\right)^2 = 2$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 57 (Mã 104 2017). Với mọi a, b, x là các số thực dương thoả mãn $\log_2 x = 5\log_2 a + 3\log_2 b$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

(A) $x = 5a + 3b$. (B) $x = a^5 + b^3$. (C) $x = a^5b^3$. (D) $x = 3a + 5b$.

Lời giải.

Có $\log_2 x = 5\log_2 a + 3\log_2 b = \log_2 a^5 + \log_2 b^3 = \log_2 a^5b^3 \Leftrightarrow x = a^5b^3$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 58 (Mã 104 2019). Cho a và b là hai số thực dương thỏa mãn $ab^3 = 8$. Giá trị của $\log_2 a + 3\log_2 b$ bằng

(A) 6. (B) 2. (C) 3. (D) 8.

Lời giải.

Ta có $\log_2 a + 3\log_2 b = \log_2 a + \log_2 b^3 = \log_2(ab^3) = \log_2 8 = 3$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 59 (Mã 105 2017). Với mọi số thực dương a và b thỏa mãn $a^2 + b^2 = 8ab$, mệnh đề nào dưới đây đúng?

(A) $\log(a+b) = \frac{1}{2}(\log a + \log b)$. (B) $\log(a+b) = \frac{1}{2} + \log a + \log b$.

(C) $\log(a+b) = \frac{1}{2}(1 + \log a + \log b)$. (D) $\log(a+b) = 1 + \log a + \log b$.

Lời giải.

Ta có $a^2 + b^2 = 8ab \Leftrightarrow (a+b)^2 = 10ab$.

Lấy log cơ số 10 hai vế ta được

$$\log(a+b)^2 = \log(10ab) \Leftrightarrow 2\log(a+b) = \log 10 + \log a + \log b$$

Suy ra $\log(a+b)=\dfrac{1}{2}(1+\log a+\log b)$.

Chọn đáp án C □

Câu 60 (Mã 123 2017). Cho $\log_a x=3, \log_b x=4$ với a, b là các số thực lớn hơn 1. Tính $P=\log_{ab} x$.

A $P=12$. B $P=\dfrac{12}{7}$. C $P=\dfrac{7}{12}$. D $P=\dfrac{1}{12}$.

Lời giải.

$P=\log_{ab} x=\dfrac{1}{\log_x ab}=\dfrac{1}{\log_x a+\log_x b}=\dfrac{1}{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}=\dfrac{12}{7}$.

Chọn đáp án B □

Câu 61 (Mã 110 2017). Cho x, y là các số thực lớn hơn 1 thoả mãn $x^2+9y^2=6xy$. Tính $M=\dfrac{1+\log_{12} x+\log_{12} y}{2\log_{12}(x+3y)}$.

A $M=\dfrac{1}{2}$. B $M=\dfrac{1}{3}$. C $M=\dfrac{1}{4}$. D $M=1$.

Lời giải.

Ta có $x^2+9y^2=6xy \Leftrightarrow (x-3y)^2=0 \Leftrightarrow x=3y$.

Khi đó $M=\dfrac{1+\log_{12} x+\log_{12} y}{2\log_{12}(x+3y)}=\dfrac{\log_{12}(12xy)}{\log_{12}(x+3y)^2}=\dfrac{\log_{12}(36y^2)}{\log_{12}(36y^2)}=1$.

Chọn đáp án D □

Câu 62 (Đề Minh Họa 2020 Lần 1). Xét tất cả các số dương a và b thỏa mãn $\log_2 a=\log_8(ab)$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A $a=b^2$. B $a^3=b$. C $a=b$. D $a^2=b$.

Lời giải.

Theo đề ta có

$\log_2 a=\log_8(ab) \Leftrightarrow \log_2 a=\dfrac{1}{3}\log_2(ab) \Leftrightarrow 3\log_2 a=\log_2(ab)$.

$\Leftrightarrow \log_2 a^3=\log_2(ab) \Leftrightarrow a^3=ab \Leftrightarrow a^2=b$

Chọn đáp án D □

Câu 63 (Đề Tham Khảo 2020 Lần 2).

Xét số thực a và b thỏa mãn $\log_3\left(3^a 9^b\right)=\log_9 3$. Mệnh đề nào dưới đây đúng

A $a+2b=2$. B $4a+2b=1$. C $4ab=1$. D $2a+4b=1$.

Lời giải.

Ta có $\log_3\left(3^a 9^b\right)=\log_9 3 \Leftrightarrow \log_3\left(3^a 3^{2b}\right)=\log_{3^2} 3$.

$$\Leftrightarrow \log_3 3^{a+2b}=\log_3 3^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow a+2b=\frac{1}{2} \Leftrightarrow 2a+4b=1$$

Chọn đáp án D □

Câu 64 (Mã 102 - 2020 Lần 1). Cho a và b là các số thực dương thỏa mãn $4^{\log_2(ab)}=3a$. Giá trị của ab^2 bằng

A 3. B 6. C 2. D 12.

Lời giải.

Từ giả thiết ta có $4^{\log_2(ab)} = 3a \Leftrightarrow \log_2(ab)\cdot\log_2 4 = \log_2(3a)$.

$$\Leftrightarrow 2\left(\log_2 a + \log_2 b\right) = \log_2 a + \log_2 3$$

$$\Leftrightarrow \log_2 a + 2\log_2 b = \log_2 3$$

$$\Leftrightarrow \log_2\left(ab^2\right) = \log_2 3$$

$$\Leftrightarrow ab^2 = 3$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 65 (Mã 103 - 2020 Lần 1). Cho a và b là hai số thực dương thỏa mãn $9^{\log_3(ab)} = 4a$. Giá trị của ab^2 bằng

(A) 3. (B) 6. (C) 2. (D) 4.

Lời giải.

Ta có $9^{\log_3(ab)} = 4a \Leftrightarrow 2\log_3(ab) = \log_3(4a) \Leftrightarrow \log_3\left(a^2b^2\right) = \log_3(4a) \Rightarrow a^2b^2 = 4a$

$\Leftrightarrow ab^2 = 4$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 66 (Mã 102 - 2020 Lần 2). Với a, b là các số thực dương tùy ý thỏa mãn $\log_3 a - 2\log_9 b = 2$, mệnh đề nào dưới đây đúng?

(A) $a = 9b^2$. (B) $a = 9b$. (C) $a = 6b$. (D) $a = 9b^2$.

Lời giải.

Ta có $\log_3 a - 2\log_9 b = 2 \Leftrightarrow \log_3 a - \log_3 b = 2 \Leftrightarrow \log_3\left(\dfrac{a}{b}\right) = 2 \Leftrightarrow a = 9b$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 67 (Mã 103 - 2020 Lần 2). Với a, b là các số thực dương tùy ý thỏa mãn $\log_3 a - 2\log_9 b = 3$, mệnh đề nào dưới đây đúng?

(A) $a = 27b$. (B) $a = 9b$. (C) $a = 27b^4$. (D) $a = 27b^2$.

Lời giải.

Ta có $\log_3 a - 2\log_9 b = 3 \Leftrightarrow \log_3 a - \log_3 b = 3 \Leftrightarrow \log_3\dfrac{a}{b} = 3 \Leftrightarrow \dfrac{a}{b} = 27 \Leftrightarrow a = 27b$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 68 (Mã 104 - 2020 Lần 2). Với a, b là các số thực dương tùy ý thỏa mãn $\log_2 a - 2\log_4 b = 4$, mệnh đề nào dưới đây đúng?

(A) $a = 16b^2$. (B) $a = 8b$. (C) $a = 16b$. (D) $a = 16b^4$.

Lời giải.

Ta có $\log_2 a - 2\log_4 b = 4 \Leftrightarrow \log_2 a - 2\log_{2^2} b = 4$.

$$\Leftrightarrow \log_2 a - 2.\frac{1}{2}\log_2 b = 4 \Leftrightarrow \log_2 a - \log_2 b = 4$$

$$\Leftrightarrow \log_2\frac{a}{b} = 4 \Leftrightarrow \frac{a}{b} = 2^4$$

$$\Leftrightarrow a = 16b$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 69 (Mã 101 - 2021 Lần 1). Với mọi a, b thỏa mãn $\log_2 a^3 + \log_2 b = 6$, khẳng định nào dưới đây đúng

(A) $a^3b = 64$. (B) $a^3b = 36$. (C) $a^3 + b = 64$. (D) $a^3 + b = 36$.

Lời giải.

Ta có $\log_2 a^3 + \log_2 b = 6 \Leftrightarrow a^3b = 2^6 \Leftrightarrow a^3b = 64$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 70 (Mã 102 - 2021 Lần 1). Với mọi a, b thỏa mãn $\log_2 a^3 + \log_2 b = 8$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

(A) $a^3 + b = 64$. (B) $a^3b = 256$. (C) $a^3b = 64$. (D) $a^3 + b = 256$.

Lời giải.

Ta có $\log_2 a^3 + \log_2 b = 8 \Rightarrow \log_2 (a^3b) = 8 \Leftrightarrow a^3b = 2^8 = 256$.

Vậy $a^3b = 256$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 71 (Mã 104 - 2021 Lần 1). Với mọi a, b thỏa mãn $\log_2 a^3 + \log_2 b = 5$, khẳng định nào dưới đây là đúng?

(A) $a^3b = 32$. (B) $a^3b = 25$. (C) $a^3 + b = 25$. (D) $a^3 + b = 32$.

Lời giải.

Ta có $\log_2 a^3 + \log_2 b = 5 \Leftrightarrow \log_2 (a^3b) = 5 \Leftrightarrow a^3b = 32$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 72 (Mã 103 - 2021 - Lần 1). Với mọi a, b thỏa mãn $\log_2 a^2 + \log_2 b = 7$, khẳng định nào dưới đây đúng?

(A) $a^2 + b = 49$. (B) $a^2b = 128$. (C) $a^2 + b = 128$. (D) $a^2b = 49$.

Lời giải.

Ta có $\log_2 a^2 + \log_2 b = 7 \Leftrightarrow \log_2 (a^2b) = 7 \Leftrightarrow a^2b = 2^7 = 128$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 73 (Chuyên Bắc Giang 2019). Cho các số thực dương a, b thỏa mãn $\ln a = x; \ln b = y$. Tính $\ln (a^3b^2)$

(A) $P = x^2y^3$. (B) $P = 6xy$. (C) $P = 3x + 2y$. (D) $P = x^2 + y^2$.

Lời giải.

Ta có $\ln (a^3b^2) = \ln a^3 + \ln b^2 = 3\ln a + 2\ln b = 3x + 2y$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 74 (Chuyên Vĩnh Phúc 2019). Giá trị của biểu thức $M = \log_2 2 + \log_2 4 + \log_2 8 + \ldots + \log_2 256$ bằng

(A) 48. (B) 56. (C) 36. (D) $8\log_2 256$.

Lời giải.

Ta có

$$M=\log_2 2+\log_2 4+\log_2 8+\ldots+\log_2 256=\log_2(2.4.8\ldots 256)=\log_2\left(2^1 2^2 2^3\ldots 2^8\right)$$
$$=\log_2\left(2^{1+2+3+\ldots+8}\right)=(1+2+3+\ldots+8)\log_2 2$$
$$=1+2+3+\ldots+8=36$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 75 (THCS - THPT Nguyễn Khuyến 2019).

Cho $\log_8 c=m$ và $\log_{c^3} 2=n$. Khẳng định đúng là

(A) $mn=\frac{1}{9}\log_2 c$. (B) $mn=9$. (C) $mn=9\log_2 c$. (D) $mn=\frac{1}{9}$.

Lời giải.

Ta có $mn=\log_8 c.\log_{c^3} 2=\left(\frac{1}{3}\log_2 c\right).\left(\frac{1}{3}\log_c 2\right)=\frac{1}{9}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 76 (THPT Lương Thế Vinh Hà Nội 2019).

Cho $a>0$, $a\neq 1$ và $\log_a x=-1$, $\log_a y=4$. Tính $P=\log_a\left(x^2y^3\right)$.

(A) $P=18$. (B) $P=6$. (C) $P=14$. (D) $P=10$.

Lời giải.

Ta có $\log_a\left(x^2.y^3\right)=\log_a x^2+\log_a y^3=2\log_a x+3\log_a y=2.(-1)+3.4=10$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 77 (Sở Bình Phước 2019). Với a và b là hai số thực dương tùy ý; $\log_2\left(a^3b^4\right)$ bằng

(A) $\frac{1}{3}\log_2 a+\frac{1}{4}\log_2 b$. (B) $3\log_2 a+4\log_2 b$. (C) $2\left(\log_2 a+\log_4 b\right)$. (D) $4\log_2 a+3\log_2 b$.

Lời giải.

Ta có $\log_2\left(a^3b^4\right)=\log_2 a^3+\log_2 b^4=3\log_2 a+4\log_2 b$ nên B đúng.

Chọn đáp án (B) □

Câu 78 (Chuyên Hạ Long-2019). Cho $P=\sqrt[20]{3\sqrt[7]{27\sqrt[4]{243}}}$. Tính $\log_3 P$?

(A) $\frac{45}{28}$. (B) $\frac{9}{112}$. (C) $\frac{45}{56}$. (D) Đáp án khác.

Lời giải.

Ta có $P=\sqrt[20]{3\sqrt[7]{27\sqrt[4]{243}}}\Rightarrow P=3^{\frac{1}{20}}27^{\frac{1}{20}\cdot\frac{1}{7}}243^{\frac{1}{20}\cdot\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{4}}=3^{\frac{9}{112}}\Rightarrow \log_3 P=\log_3 3^{\frac{9}{112}}=\frac{9}{112}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 79 (THPT Cẩm Giàng 2 2019). Cho các số dương a, b, c, d. Biểu thức $S=\ln\frac{a}{b}+\ln\frac{b}{c}+\ln\frac{c}{d}+\ln\frac{d}{a}$ bằng

(A) 1. (B) 0.

(C) $\ln\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{d}+\frac{d}{a}\right)$. (D) $\ln(abcd)$.

Lời giải.

Ta có $S=\ln\frac{a}{b}+\ln\frac{b}{c}+\ln\frac{c}{d}+\ln\frac{d}{a}=\ln\left(\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{c}\cdot\frac{c}{d}\cdot\frac{d}{a}\right)=\ln 1=0$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 80. Cho x, y là các số thực dương tùy ý, đặt $\log_3 x = a$, $\log_3 y = b$. Chọn mệnh đề đúng.

A. $\log_{\frac{1}{27}}\left(\dfrac{x}{y^3}\right) = \dfrac{1}{3}a - b$.

B. $\log_{\frac{1}{27}}\left(\dfrac{x}{y^3}\right) = \dfrac{1}{3}a + b$.

C. $\log_{\frac{1}{27}}\left(\dfrac{x}{y^3}\right) = -\dfrac{1}{3}a - b$.

D. $\log_{\frac{1}{27}}\left(\dfrac{x}{y^3}\right) = -\dfrac{1}{3}a + b$.

Lời giải.

Do x, y là các số thực dương nên ta có

$$\begin{aligned}\log_{\frac{1}{27}}\left(\frac{x}{y^3}\right) &= -\frac{1}{3}\log_3\left(\frac{x}{y^3}\right) = -\frac{1}{3}\left(\log_3 x - \log_3 y^3\right)\\ &= -\frac{1}{3}\left(\log_3 x - 3\log_3 y\right) = -\frac{1}{3}\log_3 x + \log_3 y = -\frac{1}{3}a + b.\end{aligned}$$

Chọn đáp án D □

Câu 81 (THPT Bạch Đằng Quảng Ninh 2019).

Với a, b là các số thực dương tùy ý và a khác 1, đặt $P = \log_a b^3 + \log_{a^2} b^6$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $P = 27\log_a b$. B. $P = 15\log_a b$. C. $P = 9\log_a b$. D. $P = 6\log_a b$.

Lời giải.

Ta có $P = \log_a b^3 + \log_{a^2} b^6 = 3\log_a b + 6.\dfrac{1}{2}\log_a b = 6\log_a b$.

Chọn đáp án D □

Câu 82 (THPT Quang Trung Đống Đa Hà Nội 2019).

Với các số thực dươnga, b bất kỳ $a \neq 1$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\log_a \dfrac{\sqrt[3]{a}}{b^2} = \dfrac{1}{3} - 2\log_a b$.

B. $\log_a \dfrac{\sqrt[3]{a}}{b^2} = 3 - \dfrac{1}{2}\log_a b$.

C. $\log_a \dfrac{\sqrt[3]{a}}{b^2} = \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{2}\log_a b$.

D. $\log_a \dfrac{\sqrt[3]{a}}{b^2} = 3 - 2\log_a b$.

Lời giải.

Ta có

$$\log_a \frac{\sqrt[3]{a}}{b^2} = \log_a \sqrt[3]{a} - \log_a b^2 = \log_a a^{\frac{1}{3}} - 2\log_a b = \frac{1}{3}\log_a a - 2\log_a b = \frac{1}{3} - 2\log_a b$$

Chọn đáp án A □

Câu 83 (Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2019).

Cho các số thực dương a, b, c với a và b khác 1. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $\log_a b^2 . \log_{\sqrt{b}} c = \log_a c$.

B. $\log_a b^2 . \log_{\sqrt{b}} c = \dfrac{1}{4}\log_a c$.

C. $\log_a b^2 . \log_{\sqrt{b}} c = 4\log_a c$.

D. $\log_a b^2 . \log_{\sqrt{b}} c = 2\log_a c$.

Lời giải.

Ta có $\log_a b^2 . \log_{\sqrt{b}} c = 2\log_a b . \log_{b^{\frac{1}{2}}} c = 2\log_a b . 2\log_b c = 4\log_a b . \log_b c = 4\log_a c$.

Chọn đáp án C □

Câu 84 (Chuyên Bắc Giang-2019).

Giả sử a, b là các số thực dương bất kỳ. Mệnh đề nào sau đây sai?

A. $\log(10ab)^2 = 2 + \log(ab)^2$.

B. $\log(10ab)^2 = (1 + \log a + \log b)^2$.

(C) $\log(10ab)^2 = 2 + 2\log(ab)$. (D) $\log(10ab)^2 = 2(1 + \log a + \log b)$.

Lời giải.

Ta có $\log(10ab)^2 = \log 10^2 + \log(ab)^2 = 2 + 2\log(ab)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 85 (THPT Lương Thế Vinh Hà Nội 2019).

Cho $\log_a b = 3, \log_a c = -2$. Khi đó $\log_a\left(a^3b^2\sqrt{c}\right)$ bằng bao nhiêu?

(A) 13. (B) 5. (C) 8. (D) 10.

Lời giải.

Ta có $\log_a\left(a^3b^2\sqrt{c}\right) = \log_a a^3 + \log_a b^2 + \log_a \sqrt{c} = 3 + 2\log_a b + \dfrac{1}{2}\log_a c = 3 + 2.3 - \dfrac{1}{2}.2 = 8$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 86 (THPT Lê Quy Đôn Điện Biên 2019).

Rút gọn biểu thức $M = 3\log_{\sqrt{3}}\sqrt{x} - 6\log_9(3x) + \log_{\frac{1}{3}}\dfrac{x}{9}$.

(A) $M = -\log_3(3x)$. (B) $M = 2 + \log_3\left(\dfrac{x}{3}\right)$.
(C) $M = -\log_3\left(\dfrac{x}{3}\right)$. (D) $M = 1 + \log_3 x$.

Lời giải.

Điều kiện $x > 0$. Ta có

$$M = 3\log_3 x - 3(1 + \log_3 x) - \log_3 x + 2 = -1 - \log_3 x = -(1 + \log_3 x) = -\log_3(3x).$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 87 (Chuyên Lê Thánh Tông 2019).

Cho $\log_8|x| + \log_4 y^2 = 5$ và $\log_8|y| + \log_4 x^2 = 7$. Tìm giá trị của biểu thức $P = |x| - |y|$.

(A) $P = 56$. (B) $P = 16$. (C) $P = 8$. (D) $P = 64$.

Lời giải.

Điều kiện $x, y \neq 0$

Cộng vế với vế của hai phương trình, ta được

$$\log_8|xy| + \log_4 x^2y^2 = 12 \Leftrightarrow \log_2|xy| = 9 \Leftrightarrow |xy| = 512 \quad (1)$$

Trừ vế với vế của hai phương trình, ta được

$$\log_8\left|\frac{x}{y}\right| + \log_4\frac{y^2}{x^2} = -2 \Leftrightarrow \log_2\left|\frac{x}{y}\right| = 3 \Leftrightarrow \left|\frac{x}{y}\right| = 8 \Leftrightarrow |x| = 8|y| \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $|y| = 8 \Rightarrow |x| = 64 \Leftrightarrow P = 56$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 88 (Hsg Bắc Ninh 2019). Cho hai số thực dương a, b .Nếu viết $\log_2\dfrac{\sqrt[6]{64a^3b^2}}{ab} = 1 + x\log_2 a + y\log_4 b$ $(x, y \in \mathbb{Q})$ thì biểu thức $P = xy$ có giá trị bằng bao nhiêu?

(A) $P = \dfrac{1}{3}$. (B) $P = \dfrac{2}{3}$. (C) $P = -\dfrac{1}{12}$. (D) $P = \dfrac{1}{12}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}\log_2\frac{\sqrt[6]{64a^3b^2}}{ab} &= \log_2 64^{\frac{1}{6}} + \frac{1}{2}\log_2 a + \frac{1}{3}\log_2 b - \log_2 a - \log_2 b\\ &= 1 - \frac{1}{2}\log_2 a - \frac{4}{3}\log_4 b\end{aligned}$$

Khi đó $x = -\frac{1}{2}; y = -\frac{4}{3} \Rightarrow P = xy = \frac{2}{3}$.

Chọn đáp án B □

Câu 89. Cho $\log_{700} 490 = a + \frac{b}{c + \log 7}$ với a, b, c là các số nguyên. Tính tổng $T = a + b + c$.

A $T = 7$. B $T = 3$. C $T = 2$. D $= 1$.

Lời giải.

Ta có $\log_{700} 490 = \frac{\log 490}{\log 700} = \frac{\log 10 + \log 49}{\log 100 + \log 7} = \frac{1 + 2\log 7}{2 + \log 7} = \frac{4 + 2\log 7 - 3}{2 + \log 7} = 2 + \frac{-3}{2 + \log 7}$

Suy ra $a = 2$, $b = -3$, $c = 2$

Vậy $T = 1$.

Chọn đáp án D □

Câu 90. Cho a, b là hai số thực dương thỏa mãn $a^2 + b^2 = 14ab$. Khẳng định nào sau đây sai?

A $2\log_2(a + b) = 4 + \log_2 a + \log_2 b$.

B $\ln\frac{a + b}{4} = \frac{\ln a + \ln b}{2}$.

C $2\log\frac{a + b}{4} = \log a + \log b$.

D $2\log_4(a + b) = 4 + \log_4 a + \log_4 b$.

Lời giải.

Ta có $a^2 + b^2 = 14ab \Leftrightarrow (a + b)^2 = 16ab$.

Suy ra $\log_4(a + b)^2 = \log_4(16ab) \Leftrightarrow 2\log_4(a + b) = 2 + \log_4 a + \log_4 b$.

Chọn đáp án D □

Câu 91. Cho x, y là các số thực dương tùy ý, đặt $\log_3 x = a$, $\log_3 y = b$. Chọn mệnh đề đúng.

A $\log_{\frac{1}{27}}\left(\frac{x}{y^3}\right) = \frac{1}{3}a - b$.

B $\log_{\frac{1}{27}}\left(\frac{x}{y^3}\right) = \frac{1}{3}a + b$.

C $\log_{\frac{1}{27}}\left(\frac{x}{y^3}\right) = -\frac{1}{3}a - b$.

D $\log_{\frac{1}{27}}\left(\frac{x}{y^3}\right) = -\frac{1}{3}a + b$.

Lời giải.

$\log_{\frac{1}{27}}\left(\frac{x}{y^3}\right) = \log_{3^{-3}}\left(\frac{x}{y^3}\right) = -\frac{1}{3}\log_3\left(\frac{x}{y^3}\right) = -\frac{1}{3}\left(\log_3 x - \log_3 y^3\right) = -\frac{1}{3}\log_3 x + \log_3 y = -\frac{1}{3}a + b$.

Chọn đáp án D □

Câu 92 (Sở Vĩnh Phúc 2019). Cho $\alpha = \log_a x$, $\beta = \log_b x$. Khi đó $\log_{ab^2} x^2$ bằng.

A $\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}$. B $\frac{2\alpha\beta}{2\alpha+\beta}$. C $\frac{2}{2\alpha+\beta}$. D $\frac{2(\alpha+\beta)}{\alpha+2\beta}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}\log_{ab^2} x^2 = 2\log_{ab^2} x &= \frac{2}{\log_x ab^2} = \frac{2}{\log_x a + \log_x b^2} = \frac{2}{\frac{1}{\log_a x} + 2.\frac{1}{\log_b x}}\\ &= \frac{2}{\frac{1}{\alpha} + \frac{2}{\beta}} = \frac{2\alpha\beta}{\beta + 2\alpha}.\end{aligned}$$

Chọn đáp án B □

Câu 93 (THPT Bạch Đằng Quảng Ninh 2019).

Tính giá trị biểu thức $P=\log_{a^2}\left(a^{10}b^2\right)+\log_{\sqrt{a}}\left(\dfrac{a}{\sqrt{b}}\right)+\log_{\sqrt[3]{b}}\left(b^{-2}\right)$ (với $0<a\neq 1;0<b\neq 1$).

(A) $\sqrt{3}$. (B) 1. (C) $\sqrt{2}$. (D) 2.

Lời giải.

Ta có $P=\log_{a^2}\left(a^{10}b^2\right)+\log_{\sqrt{a}}\left(\dfrac{a}{\sqrt{b}}\right)+\log_{\sqrt[3]{b}}\left(b^{-2}\right)=5+\log_a b+2-\log_a b-6=1$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 94 (Toán Học Tuổi Trẻ 2019). Đặt $M=\log_6 56$, $N=a+\dfrac{\log_3 7-b}{\log_3 2+c}$ với $a,b,c\in\mathbb{R}$. Bộ số a,b,c nào dưới đây để có $M=N$?

(A) $a=3,\ b=3,\ c=1$. (B) $a=3,\ b=\sqrt{2},\ c=1$.

(C) $a=1,\ b=2,\ c=3$. (D) $a=1,\ b=-3,\ c=2$.

Lời giải.

Ta có
$$\begin{aligned}M=\log_6 56&=\frac{\log_3 56}{\log_3 6}=\frac{\log_3 2^3.7}{1+\log_3 2}=\frac{3\log_3 2+\log_3 7}{1+\log_3 2}\\&=\frac{3\left(1+\log_3 2\right)+\log_3 7-3}{1+\log_3 2}=3+\frac{\log_3 7-3}{\log_3 2+1}\end{aligned}$$

Vậy $M=N\Leftrightarrow\begin{cases}a=3\\b=3\\c=1\end{cases}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 95 (THPT Yên Phong 1 Bắc Ninh 2019).

Tính $T=\log\dfrac{1}{2}+\log\dfrac{2}{3}+\log\dfrac{3}{4}+\ldots+\log\dfrac{98}{99}+\log\dfrac{99}{100}$.

(A) $\dfrac{1}{10}$. (B) -2. (C) $\dfrac{1}{100}$. (D) 2.

Lời giải.

$T=\log\dfrac{1}{2}+\log\dfrac{2}{3}+\log\dfrac{3}{4}+\ldots+\log\dfrac{98}{99}+\log\dfrac{99}{100}=\log\left(\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{3}{4}\cdots\dfrac{98}{99}\cdot\dfrac{99}{100}\right)=\log\dfrac{1}{100}=\log 10^{-2}=-2$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 96. Cho $a,b,x>0;a>b$ và $b,x\neq 1$ thỏa mãn $\log_x\dfrac{a+2b}{3}=\log_x\sqrt{a}+\dfrac{1}{\log_b x^2}$.

Khi đó biểu thức $P=\dfrac{2a^2+3ab+b^2}{(a+2b)^2}$ có giá trị bằng

(A) $P=\dfrac{5}{4}$. (B) $P=\dfrac{2}{3}$. (C) $P=\dfrac{16}{15}$. (D) $P=\dfrac{4}{5}$.

Lời giải.

$\log_x\dfrac{a+2b}{3}=\log_x\sqrt{a}+\dfrac{1}{\log_b x^2}\Leftrightarrow\log_x\dfrac{a+2b}{3}=\log_x\sqrt{a}+\log_x\sqrt{b}$

$\Leftrightarrow a+2b=3\sqrt{ab}\Leftrightarrow a^2-5ab+4b^2=0\Leftrightarrow(a-b)(a-4b)=0\Leftrightarrow a=4b$ (do $a>b$).

$P=\dfrac{2a^2+3ab+b^2}{(a+2b)^2}=\dfrac{32b^2+12b^2+b^2}{36b^2}=\dfrac{5}{4}$.

Chọn đáp án (A) □

BẢNG ĐÁP ÁN

1. A	2. A	3. A	4. A	5. D	6. A	7. C	8. A	9. D	10. D
11. D	12. C	13. A	14. B	15. C	16. B	17. A	18. B	19. D	20. B
21. B	22. A	23. D	24. D	25. D	26. B	27. D	28. C	29. A	30. C
31. D	32. B	33. D	34. C	35. C	36. D	37. D	38. D	39. B	40. A
41. D	42. A	43. B	44. A	45. A	46. A	47. B	48. C	49. D	50. D
51. A	52. B	53. A	54. D	55. D	56. A	57. C	58. C	59. C	60. B
61. D	62. D	63. D	64. A	65. A	66. B	67. A	68. C	69. A	70. B
71. A	72. B	73. C	74. C	75. D	76. D	77. B	78. B	79. B	80. D
81. D	82. A	83. C	84. B	85. C	86. A	87. A	88. B	89. D	90. D
		91. D	92. B	93. B	94. A	95. B	96. A		

MỨC ĐỘ 2. MỨC ĐỘ 7,8 ĐIỂM

Dạng 1. Biểu diễn biểu thức logarit này theo logarit khác

Câu 1 (Đề Tham Khảo 2019). Đặt $\log_3 2 = a$ khi đó $\log_{16} 27$ bằng

A. $\dfrac{3a}{4}$. B. $\dfrac{3}{4a}$. C. $\dfrac{4}{3a}$. D. $\dfrac{4a}{3}$.

Lời giải.

Ta có $\log_{16} 27 = \dfrac{3}{4}\log_2 3 = \dfrac{3}{4.\log_3 2} = \dfrac{3}{4a}$.

Chọn đáp án B □

Câu 2 (Đề Minh Họa 2017). Đặt $a = \log_2 3, b = \log_5 3$. Hãy biểu diễn $\log_6 45$ theo a và b.

A. $\log_6 45 = \dfrac{2a^2 - 2ab}{ab}$. B. $\log_6 45 = \dfrac{a + 2ab}{ab + b}$.

C. $\log_6 45 = \dfrac{2a^2 - 2ab}{ab + b}$. D. $\log_6 45 = \dfrac{a + 2ab}{ab}$.

Lời giải.

$\log_6 45 = \dfrac{\log_2 (3^2.5)}{\log_2 (2.3)} = \dfrac{2\log_2 3 + \log_2 5}{1 + \log_2 3} = \dfrac{2a + \log_2 3.\log_3 5}{1 + a} = \dfrac{2a + \frac{\log_2 3}{\log_5 3}}{1 + a} = \dfrac{2a + \frac{a}{b}}{1 + a} = \dfrac{a + 2ab}{ab + b}$.

Chọn đáp án B □

Câu 3 (Chuyên Đại Học Vinh 2019).

Đặt $a = \log_3 2$, khi đó $\log_6 48$ bằng

A. $\dfrac{3a - 1}{a - 1}$. B. $\dfrac{3a + 1}{a + 1}$. C. $\dfrac{4a - 1}{a - 1}$. D. $\dfrac{4a + 1}{a + 1}$.

Lời giải.

$$\log_6 48 = \log_6(6 \cdot 8) = \log_6 6 + \log_6 8 = 1 + \frac{1}{\log_8 6} = 1 + \frac{1}{\log_{2^3}(2 \cdot 3)} = 1 + \frac{1}{\frac{1}{3}(1 + \log_2 3)}$$

$$= \frac{1 + \log_2 3 + 3}{1 + \log_2 3} = \frac{4 + \frac{1}{a}}{1 + \frac{1}{a}} = \frac{4a + 1}{a + 1}.$$

Chọn đáp án D □

Câu 4 (Chuyên Phan Bội Châu-2019).

Cho $\log_3 5 = a$, $\log_3 6 = b$, $\log_3 22 = c$. Tính $P = \log_3 \left(\frac{90}{11}\right)$ theo a, b, c?

Ⓐ $P = 2a - b + c$. Ⓑ $P = 2a + b + c$. Ⓒ $P = 2a + b - c$. Ⓓ $P = a + 2b - c$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}\log_3 6 = b &\Leftrightarrow \log_3 2 + 1 = b \Leftrightarrow \log_3 2 = b - 1,\\ \log_3 22 = c &\Leftrightarrow \log_3 2 + \log_3 11 = c\\ &\Rightarrow \log_3 11 = c - \log_3 2 = c - b + 1.\end{aligned}$$

Khi đó $P = \log_3 \left(\frac{90}{11}\right) = \log_3 90 - \log_3 11 = 2 + \log_3 2 + \log_3 5 - \log_3 11 = 2b + a - c$.

Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 5 (Lương Thế Vinh Hà Nội 2019).

Với $\log_{27} 5 = a$, $\log_3 7 = b$ và $\log_2 3 = c$, giá trị của $\log_6 35$ bằng

Ⓐ $\frac{(3a+b)c}{1+c}$. Ⓑ $\frac{(3a+b)c}{1+b}$. Ⓒ $\frac{(3a+b)c}{1+a}$. Ⓓ $\frac{(3b+a)c}{1+c}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}&\log_{27} 5 = a \Rightarrow a = \frac{1}{3}\log_3 5 \Rightarrow 3a = \log_3 5 \Rightarrow \log_5 3 = \frac{1}{3a},\\ &\log_3 7 = b \Rightarrow \log_7 3 = \frac{1}{b}.\end{aligned}$$

Khi đó

$$\begin{aligned}bc &= \log_2 3 \cdot \log_3 7 = \log_2 7 \Rightarrow \log_7 2 = \frac{1}{bc},\\ 3ac &= \log_3 5 \cdot \log_2 3 = \log_2 5 \Rightarrow \log_5 2 = \frac{1}{3ac},\\ \log_6 35 &= \log_6 5 + \log_6 7 = \frac{1}{\log_5 6} + \frac{1}{\log_7 6}\\ &= \frac{1}{\log_5 2 + \log_5 3} + \frac{1}{\log_7 3 + \log_7 2} = \frac{1}{\frac{1}{3ac} + \frac{1}{3a}} + \frac{1}{\frac{1}{b} + \frac{1}{bc}} = \frac{(3a+b)c}{c+1}.\end{aligned}$$

Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 6 (THPT Nguyễn Khuyến 2019).

Đặt $a = \log_2 3$; $b = \log_5 3$. Nếu biểu diễn $\log_6 45 = \frac{a(m+nb)}{b(a+p)}$ thì $m + n + p$ bằng

Ⓐ 3. Ⓑ 4. Ⓒ 6. Ⓓ -3.

Lời giải.

Ta có $\log_6 45 = \frac{\log_3 45}{\log_3 6} = \frac{\log_3 9 + \log_3 5}{\log_3 2 + \log_3 3} = \frac{2 + \frac{1}{b}}{\frac{1}{a} + 1} = \frac{a(2b+1)}{b(1+a)}$.

Suy ra $m = 1$, $n = 2$, $p = 1 \Rightarrow m + n + p = 4$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 7 (THPT Thiệu Hóa – Thanh Hóa 2019).

Cho các số thực dương a, b thỏa mãn $\log_3 a = x$, $\log_3 b = y$. Tính $P = \log_3\left(3a^4b^5\right)$.

(A) $P = 3x^4y^5$. (B) $P = 3 + x^4 + y^5$. (C) $P = 60xy$. (D) $P = 1 + 4x + 5y$.

Lời giải.

$P = \log_3\left(3a^4b^5\right) = \log_3 3 + \log_3 a^4 + \log_3 b^5 = 1 + 4\log_3 a + 5\log_3 b = 1 + 4x + 5y$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 8 (THPT An Lão Hải Phòng 2019).

Biết $\log_6 3 = a, \log_6 5 = b$. Tính $\log_3 5$ theo a, b.

(A) $\dfrac{b}{a}$. (B) $\dfrac{b}{1+a}$. (C) $\dfrac{b}{1-a}$. (D) $\dfrac{b}{a-1}$.

Lời giải.

Ta có $\log_3 5 = \dfrac{\log_6 5}{\log_6 3} = \dfrac{b}{a}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 9. Cho $\log_{12} 3 = a$. Tính $\log_{24} 18$ theo a.

(A) $\dfrac{3a-1}{3-a}$. (B) $\dfrac{3a+1}{3-a}$. (C) $\dfrac{3a+1}{3+a}$. (D) $\dfrac{3a-1}{3+a}$.

Lời giải.

Ta có $a = \log_{12} 3 = \dfrac{\log_2 3}{\log_2 12} = \dfrac{\log_2 3}{\log_2\left(2^2\cdot 3\right)} = \dfrac{\log_2 3}{\log_2\left(2^2\right) + \log_2 3} = \dfrac{\log_2 3}{2 + \log_2 3} \Rightarrow \log_2 3 = \dfrac{2a}{1-a}$.

Ta có $\log_{24} 18 = \dfrac{\log_2 18}{\log_2 24} = \dfrac{\log_2\left(2\cdot 3^2\right)}{\log_2\left(2^3\cdot 3\right)} = \dfrac{1 + 2\log_2 3}{3 + \log_2 3} = \dfrac{1 + 2\cdot\dfrac{2a}{1-a}}{3 + \dfrac{2a}{1-a}} = \dfrac{3a+1}{3-a}$.

Vậy $\log_{24} 18 = \dfrac{3a+1}{3-a}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 10 (THPT Gia Lộc Hải Dương 2019).

Đặt $a = \log_2 3$ và $b = \log_5 3$. Hãy biểu diễn $\log_6 45$ theo a và b.

(A) $\log_6 45 = \dfrac{2a^2 - 2ab}{ab}$. (B) $\log_6 45 = \dfrac{a + 2ab}{ab}$.

(C) $\log_6 45 = \dfrac{a + 2ab}{ab + b}$. (D) $\log_6 45 = \dfrac{2a^2 - 2ab}{ab + b}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}\log_6 45 &= \frac{\log_3 45}{\log_3 6} = \frac{\log_3 3^2\cdot 5}{\log_3 2\cdot 3} = \frac{\log_3 3^2 + \log_3 5}{\log_3 2 + \log_3 3}\\ &= \frac{2 + \dfrac{1}{\log_5 3}}{\dfrac{1}{\log_2 3} + 1} = \frac{2 + \dfrac{1}{b}}{\dfrac{1}{a} + 1} = \frac{\left(\dfrac{2b+1}{b}\right)}{\left(\dfrac{a+1}{a}\right)} = \frac{(2b+1)\,a}{b\,(a+1)} = \frac{a+2ab}{b+ab}.\end{aligned}$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 11 (HSG Bắc Ninh 2019). Đặt $a = \ln 2$, $b = \ln 5$, hãy biểu diễn

$$I = \ln\frac{1}{2} + \ln\frac{2}{3} + \ln\frac{3}{4} + \cdots + \ln\frac{98}{99} + \ln\frac{99}{100}$$

theo a và b.

(A) $-2(a+b)$. (B) $-2(a-b)$. (C) $2(a+b)$. (D) $2(a-b)$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} I &= \ln\frac{1}{2} + \ln\frac{2}{3} + \ln\frac{3}{4} + \cdots + \ln\frac{98}{99} + \ln\frac{99}{100} \\ &= \ln\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{98}{99}\cdot\frac{99}{100}\right) = \ln\frac{1}{100} = \ln 10^{-2} \\ &= -2\ln 10 = -2(\ln 2 + \ln 5) = -2(a+b). \end{aligned}$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 12 (Chuyên Bắc Ninh 2019). Đặt $a = \log_2 3$; $b = \log_3 5$ Biểu diễn đúng của $\log_{20} 12$ theo a, b là

(A) $\dfrac{ab+1}{b-2}$. (B) $\dfrac{a+b}{b+2}$. (C) $\dfrac{a+1}{b-2}$. (D) $\dfrac{a+2}{ab+2}$.

Lời giải.

Ta có $\log_{20} 12 = \log_{20} 3 + 2\log_{20} 2 = \dfrac{1}{2\log_3 2 + \log_3 5} + \dfrac{2}{\log_2 5 + 2} = \dfrac{1}{2\cdot\dfrac{1}{a} + b} + \dfrac{2}{ab+2} = \dfrac{a+2}{ab+2}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 13 (Sở Bình Phước 2019). Cho $\log_2 3 = a$, $\log_2 5 = b$, khi đó $\log_{15} 8$ bằng

(A) $\dfrac{a+b}{3}$. (B) $\dfrac{1}{3(a+b)}$. (C) $3(a+b)$. (D) $\dfrac{3}{a+b}$.

Lời giải.

$\log_{15} 8 = 3\log_{15} 2 = \dfrac{3}{\log_2 15} = \dfrac{3}{\log_2 3 + \log_2 5} = \dfrac{3}{a+b}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 14 (Chuyên Lê Quý Đôn Điện Biên 2019).

Giả sử $\log_{27} 5 = a$; $\log_8 7 = b$; $\log_2 3 = c$. Hãy biểu diễn $\log_{12} 35$ theo a, b, c.

(A) $\dfrac{3b+3ac}{c+2}$. (B) $\dfrac{3b+3ac}{c+1}$. (C) $\dfrac{3b+2ac}{c+3}$. (D) $\dfrac{3b+2ac}{c+2}$.

Lời giải.

$\log_{27} 5 = a \Leftrightarrow \dfrac{1}{3}\log_3 5 = a \Leftrightarrow \dfrac{\log_2 5}{\log_2 3} = 3a \Leftrightarrow \log_2 5 = 3ac$.

$\log_8 7 = b \Leftrightarrow \dfrac{1}{3}\log_2 7 = b \Leftrightarrow \log_2 7 = 3b$.

Xét $\log_{12} 35 = \dfrac{\log_2 35}{\log_2 12} = \dfrac{\log_2(5.7)}{\log_2(3.2^2)} = \dfrac{\log_2 5 + \log_2 7}{\log_2 3 + 2} = \dfrac{3ac+3b}{c+2}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 15 (Chuyen Phan Bội Châu Nghệ An 2019).

Cho $\log_3 5 = a$, $\log_3 6 = b$, $\log_3 22 = c$. Tính $P = \log_3\left(\dfrac{90}{11}\right)$ theo a, b, c.

(A) $P = 2a + b - c$. (B) $P = a + 2b - c$. (C) $P = 2a + b + c$. (D) $P = 2a - b + c$.

Lời giải.

Ta có

$$P=\log_3\left(\frac{90}{11}\right)=\log_3\left(\frac{180}{22}\right)=\log_3 180-\log_3 22=\log_3(36\cdot 5)-\log_3 22$$
$$=\log_3 36+\log_3 5-\log_3 22=\log_3\left(6^2\right)+\log_3 5-\log_3 22=2\log_3 6+\log_3 5-\log_3 22$$
$$=a+2b-c.$$

Vậy $P=a+2b-c$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 16 (THPT - Yên Định Thanh Hóa 2019).

Đặt $a=\log_2 3$; $b=\log_3 5$. Biểu diễn $\log_{20} 12$ theo a,b.

(A) $\log_{20} 12=\dfrac{a+b}{b+2}$. (B) $\log_{20} 12=\dfrac{ab+1}{b-2}$. (C) $\log_{20} 12=\dfrac{a+1}{b-2}$. (D) $\log_{20} 12=\dfrac{a+2}{ab+2}$.

Lời giải.

Ta có $\log_{20} 12=\dfrac{\log_2 12}{\log_2 20}=\dfrac{\log_2(4\cdot 3)}{\log_2(4\cdot 5)}=\dfrac{2+\log_2 3}{2+\log_2 5}=\dfrac{2+\log_2 3}{2+\log_2 3\cdot\log_3 5}=\dfrac{a+2}{ab+2}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 17. Nếu $\log_2 3=a$ thì $\log_{72} 108$ bằng

(A) $\dfrac{2+a}{3+a}$. (B) $\dfrac{2+3a}{3+2a}$. (C) $\dfrac{3+a}{2+a}$. (D) $\dfrac{2+3a}{2+2a}$.

Lời giải.

Ta có $\log_{72} 108=\dfrac{\log_2 108}{\log_2 72}=\dfrac{\log_2\left(2^2\cdot 3^3\right)}{\log_2\left(2^3\cdot 3^2\right)}=\dfrac{2+3\log_2 3}{3+2\log_2 3}=\dfrac{2+3a}{3+2a}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 18 (Chuyên Trần Phú Hải Phòng 2019).

Cho $\log_{30} 3=a$; $\log_{30} 5=b$. Tính $\log_{30} 1350$ theo a,b; $\log_{30} 1350$ bằng

(A) $2a+b$. (B) $2a+b+1$. (C) $2a+b-1$. (D) $2a+b-2$.

Lời giải.

Ta có $1350=30\cdot 45=30\cdot 9\cdot 5=30\cdot 3^2\cdot 5$.

Nên $\log_{30} 1350=\log_{30}\left(30\cdot 3^2\cdot 5\right)=\log_{30} 30+\log_{30} 3^2+\log_{30} 5=1+2\log_{30} 3+\log_{30} 5=1+2a+b$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 19 (THPT Quang Trung Đống Đa Hà Nội 2019).

Đặt $m=\log 2$ và $n=\log 7$. Hãy biểu diễn $\log 6125\sqrt{7}$ theo m và n.

(A) $\dfrac{6+6m+5n}{2}$. (B) $\dfrac{1}{2}(6-6n+5m)$. (C) $5m+6n-6$. (D) $\dfrac{6+5n-6m}{2}$.

Lời giải.

Ta có

$$\log 6125\sqrt{7}=\log\left(5^3\cdot 7^{\frac{5}{2}}\right)=3\log 5+\frac{5}{2}\log 7=3\log\frac{10}{2}+\frac{5}{2}\log 7$$
$$=3(1-\log 2)+\frac{5}{2}\log 7=3(1-m)+\frac{5}{2}n=\frac{6+5n-6m}{2}.$$

Vậy $\log 6125\sqrt{7} = \dfrac{6+5n-6m}{2}$.

Chọn đáp án D □

Câu 20 (Lương Thế Vinh Hà Nội 2019).

Cho $\log_{27} 5 = a$, $\log_3 7 = b$, $\log_2 3 = c$. Tính $\log_6 35$ theo a, b và c.

A $\dfrac{(3a+b)\,c}{1+c}$. B $\dfrac{(3a+b)\,c}{1+b}$. C $\dfrac{(3a+b)\,c}{1+a}$. D $\dfrac{(3b+a)\,c}{1+c}$.

Lời giải.

Theo giả thiết, ta có $\log_{27} 5 = a \Leftrightarrow \dfrac{1}{3}\log_3 5 = a \Leftrightarrow \log_3 5 = 3a$.

Ta có $\log_2 5 = \log_2 3 \cdot \log_3 5 = 3ac$ và $\log_2 7 = \log_2 3 \cdot \log_3 7 = bc$.

Vậy $\log_6 35 = \dfrac{\log_2 35}{\log_2 6} = \dfrac{\log_2 5 + \log_2 7}{\log_2 2 + \log_2 3} = \dfrac{3ac+bc}{1+c} = \dfrac{(3a+b)\,c}{1+c}$.

Chọn đáp án D □

Câu 21 (Sở Thanh Hóa 2019).

Cho $a = \log_2 m$ và $A = \log_m 16m$, với $0 < m \neq 1$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A $A = \dfrac{4-a}{a}$. B $A = \dfrac{4+a}{a}$. C $A = (4+a)a$. D $A = (4-a)a$.

Lời giải.

Ta có $A = \log_m 16m = \dfrac{\log_2 16m}{\log_2 m} = \dfrac{\log_2 16 + \log_2 m}{\log_2 m} = \dfrac{4+a}{a}$.

Chọn đáp án B □

Câu 22 (THPT Ngô Sĩ Liên Bắc Giang 2019).

Biết $\log_3 15 = a$, tính $P = \log_{25} 81$ theo a ta được

A $P = 2\,(a+1)$. B $P = 2(a-1)$. C $P = \dfrac{2}{a+1}$. D $\dfrac{2}{a-1}$.

Lời giải.

Ta có $\log_3 15 = a \Rightarrow 1 + \log_3 5 = a \Rightarrow \log_3 5 = a - 1$.

$P = \log_{25} 81 = \dfrac{\log_3 81}{\log_3 25} = \dfrac{4}{2\log_3 5} = \dfrac{4}{2\,(a-1)} = \dfrac{2}{a-1}$.

Chọn đáp án D □

Câu 23 (Chuyên Phan Bội Châu 2019).

Cho $\log_3 5 = a$, $\log_3 6 = b$, $\log_3 22 = c$. Tính $P = \log_3 \dfrac{90}{11}$ theo a, b, c.

A $P = 2a + b - c$. B $P = a + 2b - c$. C $P = 2a + b + c$. D $P = 2a - b + c$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} P &= \log_3 90 - \log_3 11 = \log_3 90 + \log_3 2 - \log_3 11 - \log_3 2 \\ &= \log_3 180 - \log_3 22 = \log_3 (5 \cdot 36) - \log_3 22 = \log_3 5 + 2\log_3 6 - \log_3 22 = a + 2b - c. \end{aligned}$$

Chọn đáp án B □

Câu 24 (Chuyên ĐHSP Hà Nội 2019).

Nếu $\log_3 5 = a$ thì $\log_{45} 75$ bằng

(A) $\dfrac{2+a}{1+2a}$. (B) $\dfrac{1+a}{2+a}$. (C) $\dfrac{1+2a}{2+a}$. (D) $\dfrac{1+2a}{1+a}$.

Lời giải.

Ta có $\log_{45} 75 = 2\log_{45} 5 + \log_{45} 3$ và

$$\log_{45} 5 = \frac{1}{\log_5 45} = \frac{1}{2\log_5 3 + 1} = \frac{1}{\frac{2}{a}+1} = \frac{a}{a+2},$$
$$\log_{45} 3 = \frac{1}{\log_3 45} = \frac{1}{2+\log_3 5} = \frac{1}{a+2}.$$

Do đó $\log_{45} 75 = \dfrac{2a}{a+2} + \dfrac{1}{a+2} = \dfrac{1+2a}{2+a}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 25 (Chuyên Phan Bội Châu Nghệ An 2019).

Cho $\log_3 5 = a$, $\log_3 6 = b$, $\log_3 22 = c$. Tính $P = \log_3\left(\dfrac{90}{11}\right)$ theo a, b, c.

(A) $P = 2a + b - c$. (B) $P = a + 2b - c$. (C) $P = 2a + b + c$. (D) $P = 2a - b + c$.

Lời giải.

Ta có $P = \log_3\left(\dfrac{90}{11}\right) = \log_3\left(\dfrac{180}{22}\right) = \log_3\left(\dfrac{5\cdot 6^2}{22}\right) = \log_3 5 + 2\log_3 6 - \log_3 22 = a + 2b - c$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 26 (Chuyên Nguyễn Tất Thành Yên Bái 2019).

Cho $\log_{12} 3 = a$. Tính $\log_{24} 18$ theo a.

(A) $\dfrac{3a+1}{3-a}$. (B) $\dfrac{3a+1}{3+a}$. (C) $\dfrac{3a-1}{3+a}$. (D) $\dfrac{3a-1}{3-a}$.

Lời giải.

Ta có $a = \log_{12} 3 = \dfrac{1}{\log_3 12} = \dfrac{1}{1+2\log_3 2} \Leftrightarrow \log_2 3 = \dfrac{2a}{1-a}$.

Khi đó $\log_{24} 18 = \dfrac{\log_2(3^2\cdot 2)}{\log_2(2^3\cdot 3)} = \dfrac{1+2\log_2 3}{3+\log_2 3} = \dfrac{1+2\cdot\frac{2a}{1-a}}{3+\frac{2a}{1-a}} = \dfrac{1+3a}{3-a}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 27 (THPT Nghĩa Hưng Nđ-2019).

Đặt $\log_a b = m$, $\log_b c = n$. Khi đó $\log_a(ab^2c^3)$ bằng

(A) $1 + 6mn$. (B) $1 + 2m + 3n$. (C) $6mn$. (D) $1 + 2m + 3mn$.

Lời giải.

$$\begin{aligned}\log_a\left(ab^2c^3\right) &= \log_a a + 2\log_a b + 3\log_a c\\ &= 1 + 2m + 3\frac{\log_b c}{\log_b a} = 1 + 2m + 3\log_a b\cdot\log_b c = 1 + 2m + 3mn.\end{aligned}$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 28 (Cụm Liên Trường Hải Phòng 2019).

Đặt $a = \log_2 3$ và $b = \log_5 3$. Hãy biểu diễn $\log_6 45$ theo a và b.

(A) $\log_6 45 = \dfrac{a+2ab}{ab+b}$.

(B) $\log_6 45 = \dfrac{a+2ab}{ab}$.

(C) $\log_6 45 = \dfrac{2a^2-2ab}{ab}$.

(D) $\log_6 45 = \dfrac{2a^2-2ab}{ab+b}$.

Lời giải.

$\log_6 45 = \dfrac{\log_2(3^2\cdot 5)}{\log_2(2\cdot 3)} = \dfrac{2\log_2 3 + \log_2 3\cdot\log_3 5}{1+\log_2 3} = \dfrac{2a+\dfrac{a}{b}}{1+a} = \dfrac{2ab+a}{ab+b}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 29 (THPT Thiệu Hóa – Thanh Hóa 2019).

Cho $\log_9 5 = a; \log_4 7 = b; \log_2 3 = c$. Biết $\log_{24} 175 = \dfrac{mb+nac}{pc+q}$. Tính $A = m+2n+3p+4q$.

(A) 27. (B) 25. (C) 23. (D) 29.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}\log_{24} 175 &= \log_{24} 7\cdot 5^2 = \log_{24} 7 + 2\log_{24} 5^2 = \frac{1}{\log_7 24} + \frac{2}{\log_5 24}\\ &= \frac{1}{\log_7 3 + \log_7 2^3} + \frac{2}{\log_5 3 + \log_5 2^3} = \frac{1}{\dfrac{1}{\log_3 7} + \dfrac{3}{\log_2 7}} + \frac{2}{\dfrac{1}{\log_3 5} + \dfrac{3}{\log_2 5}}\\ &= \frac{1}{\dfrac{1}{\log_2 7\cdot\log_3 2} + \dfrac{3}{\log_2 7}} + \frac{2}{\dfrac{1}{\log_3 5} + \dfrac{3}{\log_2 3\cdot\log_3 5}} = \frac{1}{\dfrac{1}{2b\cdot\dfrac{1}{c}} + \dfrac{3}{2b}} + \frac{2}{\dfrac{1}{2a} + \dfrac{3}{c\cdot 2a}}\\ &= \frac{1}{\dfrac{c}{2b} + \dfrac{3}{2b}} + \frac{2}{\dfrac{c}{2ac} + \dfrac{3}{2ac}} = \frac{2b}{c+3} + \frac{4ac}{c+3} = \frac{2b+4ac}{c+3}.\end{aligned}$$

Từ đó $A = m+2n+3p+4q = 2+8+3+12 = 25$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 30 (Chuyên KHTN 2019). Với các số $a, b > 0$ thỏa mãn $a^2+b^2 = 6ab$, biểu thức $\log_2(a+b)$ bằng

(A) $\dfrac{1}{2}(3+\log_2 a + \log_2 b)$.

(B) $\dfrac{1}{2}(1+\log_2 a + \log_2 b)$.

(C) $1+\dfrac{1}{2}(\log_2 a + \log_2 b)$.

(D) $2+\dfrac{1}{2}(\log_2 a + \log_2 b)$.

Lời giải.

Ta có $a^2+b^2 = 6ab \Leftrightarrow a^2+b^2+2ab = 6ab+2ab \Leftrightarrow (a+b)^2 = 8ab$. (*)

Do $a, b > 0$ nên $ab > 0$ và $a+b > 0$. Lấy logarit cơ số 2 hai vế của $(*)$ ta được

$$\begin{aligned}&\log_2(a+b)^2 = \log_2(8ab) \Leftrightarrow 2\log_2(a+b) = 3+\log_2 a + \log_2 b\\ \Leftrightarrow\ &\log_2(a+b) = \frac{1}{2}(3+\log_2 a+\log_2 b).\end{aligned}$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 31 (Chuyên Hạ Long - Quảng Ninh - 2021).

Biết $\log_7 12 = a$; $\log_{12} 24 = b$. Giá trị của $\log_{54} 168$ được tính theo a và b là

(A) $\dfrac{ab+1}{a(8-5b)}$. (B) $\dfrac{ab-1}{a(8+5b)}$. (C) $\dfrac{2ab+1}{8a-5b}$. (D) $\dfrac{2ab+1}{8a+5b}$.

Lời giải.

Do $\log_7 12 = a;\ \log_{12} 24 = b \Rightarrow a; b > 0$.

$\log_7 12 = a \Leftrightarrow \log_7(2^2\cdot 3) = a \Leftrightarrow 2\log_7 2 + \log_7 3 = a.$ (1)

$\log_{12} 24 = b \Leftrightarrow \dfrac{\log_7 24}{\log_7 12} = b \Leftrightarrow \dfrac{3\log_7 2 + \log_7 3}{a} = b \Leftrightarrow 3\log_7 2 + \log_7 3 = ab.$ (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình: $\begin{cases} 2\log_7 2 + \log_7 3 = a \\ 3\log_7 2 + \log_7 3 = ab \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_7 2 = ab - a \\ \log_7 3 = 3a - 2ab. \end{cases}$

Mặt khác, $\log_{54} 168 = \dfrac{\log_7 168}{\log_7 54} = \dfrac{\log_7(2^3.3.7)}{\log_7(2.3^3)} = \dfrac{3\log_7 2 + \log_7 3 + 1}{\log_7 2 + 3\log_7 3}$. Do đó

$$\log_{54}168 = \frac{3(ab-a)+3a-2ab+1}{ab-a+3(3a-2ab)} = \frac{3ab-3a+3a-2ab+1}{ab-a+9a-6ab} = \frac{ab+1}{8a-5ab} = \frac{ab+1}{a(8-5b)}.$$

Vậy $\log_{54} 168 = \dfrac{ab+1}{a(8-5b)}$.

Chọn đáp án (A) □

BẢNG ĐÁP ÁN

1. B	2. B	3. D	4. D	5. A	6. B	7. D	8. A	9. B	10. C
11. A	12. D	13. D	14. A	15. B	16. D	17. D	18. B	19. D	20. D
21. B	22. D	23. B	24. C	25. B	26. A	27. D	28. A	29. B	30. A
31. A									

MỨC ĐỘ 3. MỨC ĐỘ 9,10 ĐIỂM

Dạng 1. Một số bài toán khó

Câu 1 (Chuyên Lam Sơn - 2020). Cho các số thực a, b thỏa mãn $a > b > 1$ và $\dfrac{1}{\log_b a} + \dfrac{1}{\log_a b} = \sqrt{2020}$. Giá trị của biểu thức $P = \dfrac{1}{\log_{ab} b} - \dfrac{1}{\log_{ab} a}$ bằng

(A) $\sqrt{2014}$. (B) $\sqrt{2016}$. (C) $\sqrt{2018}$. (D) $\sqrt{2020}$.

Lời giải.

Do $a > b > 1$ nên $\log_a b > 0$, $\log_b a > 0$ và $\log_b a > \log_a b$.

Ta có $\dfrac{1}{\log_b a} + \dfrac{1}{\log_a b} = \sqrt{2020}$

$\Leftrightarrow \log_b a + \log_a b = \sqrt{2020}$

$\Leftrightarrow \log_b^2 a + \log_a^2 b + 2 = 2020$

$\Leftrightarrow \log_b^2 a + \log_a^2 b = 2018$ $(*)$

Khi đó, $P = \log_b ab - \log_a ab = \log_b a + \log_b b - \log_a a - \log_a b = \log_b a - \log_a b$.

Suy ra $P^2 = (\log_b a - \log_a b)^2 = \log_b^2 a + \log_a^2 b - 2 = 2018 - 2 = 2016 \Rightarrow P = \sqrt{2016}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 2 (Liên Trường THPT Tp Vinh Nghệ 2019).

Tìm số nguyên dương n sao cho

$$\log_{2018} 2019 + 2^2 \log_{\sqrt{2018}} 2019 + 3^2 \log_{\sqrt[3]{2018}} 2019 + \cdots + n^2 \log_{\sqrt[n]{2018}} 2019 = 1010^2 2021^2 \log_{2018} 2019.$$

Ⓐ $n = 2021$. Ⓑ $n = 2019$. Ⓒ $n = 2020$. Ⓓ $n = 2018$.

Lời giải.

$\log_{2018} 2019 + 2^2 \log_{\sqrt{2018}} 2019 + 3^2 \log_{\sqrt[3]{2018}} 2019 + \cdots + n^2 \log_{\sqrt[n]{2018}} 2019 = 1010^2 2021^2 \log_{2018} 2019$

$\Leftrightarrow \log_{2018} 2019 + 2^3 \log_{2018} 2019 + 3^3 \log_{2018} 2019 + \cdots + n^3 \log_{2018} 2019 = 1010^2 2021^2 \log_{2018} 2019$

$\Leftrightarrow (1 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3) \log_{2018} 2019 = 1010^2 2021^2 \log_{2018} 2019$

$\Leftrightarrow 1 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = 1010^2 2021^2$

$\Leftrightarrow (1 + 2 + \cdots + n)^2 = 1010^2 2021^2$

$\Leftrightarrow \left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2 = 1010^2 2021^2$

$\Leftrightarrow \dfrac{n(n+1)}{2} = 1010 \cdot 2021$

$\Leftrightarrow n^2 + n - 2020 \cdot 2021 = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n = 2020 \\ n = -2021 \text{ (loại)}. \end{array}\right.$

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 3. Cho hàm số $f(x) = \log_2 \left(x - \dfrac{1}{2} + \sqrt{x^2 - x + \dfrac{17}{4}}\right)$. Tính

$$T = f\left(\frac{1}{2019}\right) + f\left(\frac{2}{2019}\right) + \cdots + f\left(\frac{2018}{2019}\right).$$

Ⓐ $T = \dfrac{2019}{2}$. Ⓑ $T = 2019$. Ⓒ $T = 2018$. Ⓓ $T = 1009$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} f(1-x) &= \log_2 \left(1 - x - \frac{1}{2} + \sqrt{(1-x)^2 - (1-x) + \frac{17}{4}}\right) \\ &= \log_2 \left(\sqrt{x^2 - x + \frac{17}{4}} - \left(x - \frac{1}{2}\right)\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x) + f(1-x) &= \log_2 \left(x - \frac{1}{2} + \sqrt{x^2 - x + \frac{17}{4}}\right) + \log_2 \left(\sqrt{x^2 - x + \frac{17}{4}} - \left(x - \frac{1}{2}\right)\right) \\ &= \log_2 \left[\left(x - \frac{1}{2} + \sqrt{x^2 - x + \frac{17}{4}}\right)\left(\sqrt{x^2 - x + \frac{17}{4}} - \left(x - \frac{1}{2}\right)\right)\right] = \log_2 4 = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow T &= f\left(\frac{1}{2019}\right) + f\left(\frac{2}{2019}\right) + \cdots + f\left(\frac{2018}{2019}\right) \\ &= f\left(\frac{1}{2019}\right) + f\left(\frac{2018}{2019}\right) + f\left(\frac{2}{2019}\right) + f\left(\frac{2017}{2019}\right) + \cdots + f\left(\frac{1009}{2019}\right) + f\left(\frac{1010}{2019}\right) \\ &= 1009 \cdot 2 = 2018. \end{aligned}$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 4 (THPT Nguyễn Khuyến 2019).

Gọi a là giá trị nhỏ nhất của $f(n) = \dfrac{\log_3 2 \cdot \log_3 3 \cdot \log_3 4 \cdot \dots \cdot \log_3 n}{9^n}$ với $n \in \mathbb{N}$ và $n \geq 2$. Hỏi có bao nhiêu giá trị của n để $f(n) = a$.

(A) 2. (B) 4. (C) 1. (D) vô số.

Lời giải.

Với $n \in \mathbb{N}$ và $n \geq 2$ ta có

$$f(n) = \frac{\log_3 2 \cdot \log_3 3 \cdot \log_3 4 \cdot \dots \cdot \log_3 n}{9^n} = \frac{1}{9}\log_{3^9} 2 \cdot \log_{3^9} 3 \cdot \log_{3^9} 4 \cdot \dots \cdot \log_{3^9} n.$$

Ta có

- Nếu $2 \leq n \leq 3^8 \Rightarrow 0 < \log_{3^9} k < 1 \Rightarrow f(n) = \frac{1}{9}\log_{3^9} 2 \cdot \log_{3^9} 3 \cdot \log_{3^9} 4 \cdot \dots \cdot \log_{3^9} n \geq f\left(3^8\right)$.
- Nếu $n = 3^9 \Rightarrow f\left(3^9\right) = f\left(3^8\right) \cdot \log_{3^9} 3^9 = f\left(3^8\right)$.
- Nếu $n > 3^9 \Rightarrow \log_{3^9} n > 1 \Rightarrow f(n) = f\left(3^9\right) \cdot \log_{3^9}\left(3^9 + 1\right) \cdot \dots \cdot \log_{3^9} n > f\left(3^9\right)$.

Từ đó suy ra $\min f(n) = f\left(3^9\right) = f\left(3^8\right)$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 5 (Chuyên Lê Quý Đôn Quảng Trị 2019).

Cho x, y và z là các số thực lớn hơn 1 và gọi w là số thực dương sao cho $\log_x w = 24$, $\log_y w = 40$ và $\log_{xyz} w = 12$. Tính $\log_z w$.

(A) 52. (B) -60. (C) 60. (D) -52.

Lời giải.

Ta có

$$\log_x w = 24 \Rightarrow \log_w x = \frac{1}{24}$$
$$\log_y w = 40 \Rightarrow \log_w y = \frac{1}{40}.$$

Lại do

$$\log_{xyz} w = 12 \Leftrightarrow \frac{1}{\log_w (xyz)} = 12 \Leftrightarrow \frac{1}{\log_w x + \log_w y + \log_w z} = 12$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{\frac{1}{24} + \frac{1}{40} + \log_w z} = 12$$
$$\Leftrightarrow \log_w z = \frac{1}{60} \Rightarrow \log_z w = 60.$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 6. Cho $f(1) = 1$, $f(m+n) = f(m) + f(n) + mn$ với mọi $m, n \in \mathbb{N}^*$. Tính giá trị của biểu thức $T = \log\left[\dfrac{f(96) - f(69) - 241}{2}\right]$.

(A) $T = 9$. (B) $T = 3$. (C) $T = 10$. (D) $T = 4$.

Lời giải.

Vì $f(1) = 1$, $f(m+n) = f(m) + f(n) + mn$ nên

$$\begin{aligned} f(96) &= f(95+1) = f(95) + f(1) + 95 = f(95) + 96 = f(94) + 95 + 96 \\ &= \cdots = f(1) + 2 + \cdots + 95 + 96 \\ &= 1 + 2 + \cdots + 95 + 96 = \frac{96 \cdot 97}{2} = 4\ 656. \end{aligned}$$

Tương tự $f(69) = 1 + 2 + \cdots + 68 + 69 = \dfrac{69 \cdot 70}{2} = 2\ 415$.

Vậy $T = \log\left[\dfrac{f(96) - f(69) - 241}{2}\right] = \log\left(\dfrac{4\ 656 - 2\ 415 - 241}{2}\right) = \log 1\ 000 = 3$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 7 (Chuyên Lê Quý Dôn Quảng Trị 2019).

Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn đồng thời $\dfrac{1}{\log_2 x} + \dfrac{1}{\log_2 y} + \dfrac{1}{\log_2 z} = \dfrac{1}{2020}$ và $\log_2(xyz) = 2020$. Tính $\log_2(xyz(x+y+z) - xy - yz - zx + 1)$.

(A) 4040. (B) 1010. (C) 2020. (D) 2020^2.

Lời giải.

Đặt $a = \log_2 x$; $b = \log_2 y$; $c = \log_2 z$. Ta có $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} = \dfrac{1}{2020}$ và $a + b + c = 2020$

$\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}\right)(a+b+c) = 1 \Leftrightarrow (a+b+c)(ab+ac+bc) = abc$

$\Leftrightarrow a^2b + ab^2 + abc + abc + b^2c + bc^2 + a^2c + ac^2 = 0$

$\Leftrightarrow (a+b)(b+c)(c+a) = 0$.

Vì vai trò a, b, c như nhau nên giả sử $a + b = 0 \Rightarrow c = 2020 \Rightarrow z = 2^{2020}$ và $xy = 1$.

$$\begin{aligned} \log_2(xyz(x+y+z) - xy - yz - zx + 1) &= \log_2(z(x+y+z) - 1 - yz - zx + 1) \\ &= \log_2(z^2) = 2\log_2 z = 4040. \end{aligned}$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 8 (Bạc Liêu – Ninh Bình 2019). Cho ba số thực dương x, y, z theo thứ tự lập thành một cấp số nhân, đồng thời với mỗi số thực dương a $(a \neq 1)$ thì $\log_a x, \log_{\sqrt{a}} y, \log_{\sqrt[3]{a}} z$ theo thứ tự lập thành một cấp số cộng. Tính giá trị của biểu thức $P = \dfrac{1959x}{y} + \dfrac{2019y}{z} + \dfrac{60z}{x}$.

(A) 60. (B) 2019. (C) 4038. (D) $\dfrac{2019}{2}$.

Lời giải.

Ta có x, y, z là ba số thực dương, theo thứ tự lập thành một cấp số nhân nên $y^2 = xz$. (1)

Với mỗi số thực a $(a \neq 1)$, $\log_a x, \log_{\sqrt{a}} y, \log_{\sqrt[3]{a}} z$ theo thứ tự lập thành một cấp số cộng nên

$$2\log_{\sqrt{a}} y = \log_a x + \log_{\sqrt[3]{a}} z \Leftrightarrow 4\log_a y = \log_a x + 3\log_a z. \quad (2)$$

Thay (1) vào (2) ta được $2\log_a xz = \log_a x + 3\log_a z \Leftrightarrow \log_a x = \log_a z \Leftrightarrow x = z$.

Từ (1) ta suy ra $y = x = z$.

Từ đó $P = 1\ 959 + 2\ 019 + 60 = 4\ 038$.

Chọn đáp án C □

Câu 9 (THPT Hai Bà Trưng-Huế-2019).
Cho hàm số $f(x) = \frac{1}{2}\log_2\left(\frac{2x}{1-x}\right)$ và hai số thực m, n thuộc khoảng $(0;1)$ sao cho $m+n=1$. Tính $f(m)+f(n)$.

A. 2. B. 0. C. 1. D. $\frac{1}{2}$.

Lời giải.

$f(m)+f(n) = \frac{1}{2}\log_2\left(\frac{2m}{1-m}\right) + \frac{1}{2}\log_2\left(\frac{2n}{1-n}\right)$

$= \frac{1}{2}\left[\log_2\left(\frac{2m}{1-m}\right) + \log_2\left(\frac{2n}{1-n}\right)\right]$

$= \frac{1}{2}\log_2\left(\frac{2m}{1-m}\cdot\frac{2n}{1-n}\right)$

$= \frac{1}{2}\log_2\left(\frac{4mn}{1-m-n+mn}\right)$, vì $m+n=1$

$= \frac{1}{2}\log_2\left(\frac{4mn}{mn}\right) = \frac{1}{2}\log_2 4 = \frac{1}{2}\cdot 2 = 1.$

Chọn đáp án C □

Câu 10 (Chuyên-Vĩnh Phúc-2019). Gọi n là số nguyên dương sao cho $\frac{1}{\log_3 x}+\frac{1}{\log_{3^2} x}+\frac{1}{\log_{3^3} x}+\cdots+\frac{1}{\log_{3^n} x}=\frac{190}{\log_3 x}$ đúng với mọi x dương, $x \neq 1$. Tìm giá trị của biểu thức $P=2n+3$.

A. $P=32$. B. $P=23$. C. $P=43$. D. $P=41$.

Lời giải.

$\frac{1}{\log_3 x}+\frac{1}{\log_{3^2} x}+\frac{1}{\log_{3^3} x}+\cdots+\frac{1}{\log_{3^n} x}=\frac{190}{\log_3 x}$

$\Leftrightarrow \log_x 3 + 2\log_x 3 + 3\log_x 3 + \cdots + n\log_x 3 = 190\log_x 3$

$\Leftrightarrow \log_x 3\left(1+2+3+\cdots+n\right) = 190\log_x 3$

$\Leftrightarrow 1+2+3+\cdots+n = 190$

$\Leftrightarrow \frac{n(n+1)}{2} = 190$

$\Leftrightarrow n^2+n-380=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n=19 \\ n=-20 \end{array}\right. \Rightarrow n=19$ (do n nguyên dương) $\Rightarrow P=2n+3=41$.

Chọn đáp án D □

Câu 11. Cho x, y, z là ba số thực dương lập thành cấp số nhân; $\log_a x$, $\log_{\sqrt{a}} y$, $\log_{\sqrt[3]{a}} z$ lập thành cấp số cộng, với a là số thực dương khác 1. Giá trị của $p=\frac{9x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{3z}{x}$ là

A. 13. B. 3. C. 12. D. 10.

Lời giải.

x, y, z là ba số thực dương lập thành cấp số nhân nên ta có $xz=y^2$. (1)

$\log_a x$, $\log_{\sqrt{a}} y$, $\log_{\sqrt[3]{a}} z$ lập thành cấp số cộng nên

$$\log_a x + \log_{\sqrt[3]{a}} z = 2\log_{\sqrt{a}} y \Leftrightarrow \log_a x + 3\log_a z = 4\log_a y \Leftrightarrow xz^3 = y^4. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta suy ra $x = y = z$.

Vậy $p = \dfrac{9x}{y} + \dfrac{y}{z} + \dfrac{3z}{x} = 9 + 1 + 3 = 13$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 12 (Chuyên Nguyễn Huệ 2019).

Cho $f(1) = 1$; $f(m+n) = f(m) + f(n) + mn$ với mọi $m, n \in N^*$. Tính giá trị của biểu thức $T = \log\left[\dfrac{f(2019) - f(2009) - 145}{2}\right]$

(A) 3. (B) 4. (C) 5. (D) 10.

Lời giải.

Ta có $f(2019) = f(2009+10) = f(2009) + f(10) + 20090$.

Do đó $f(2019) - f(2009) - 145 = f(10) + 20090 - 145$.

$f(10) = f(9) + f(1) + 9$

$f(9) = f(8) + f(1) + 8$

$\ldots$

$f(3) = f(2) + f(1) + 2$

$f(2) = f(1) + f(1) + 1$

Từ đó cộng vế với vế ta được: $f(10) = 10 \cdot f(1) + 1 + 2 + \cdots + 8 + 9 = 55$.

Vậy $\log\left[\dfrac{f(2019) - f(2009) - 145}{2}\right] = \log\dfrac{20090 - 145 + 55}{2} = \log 10000 = 4$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 13. Có bao nhiêu số nguyên dương n để $\log_n 256$ là một số nguyên dương?

(A) 2. (B) 3. (C) 4. (D) 1.

Lời giải.

$\log_n 256 = 8 \cdot \log_n 2 = \dfrac{8}{\log_2 n}$ là số nguyên dương

$\Leftrightarrow \log_2 n \in \{1; 2; 4; 8\} \Leftrightarrow n \in \{2; 4; 16; 256\}$.

Vậy có 4 số nguyên dương.

Chọn đáp án (C) □

Câu 14. Cho tam giác ABC có $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$. Nếu a, b, c theo thứ tự lập thành một cấp số nhân thì

(A) $\ln\sin A . \ln\sin C = (\ln\sin B)^2$.

(B) $\ln\sin A . \ln\sin C = 2\ln\sin B$.

(C) $\ln\sin A + \ln\sin C = 2\ln\sin B$.

(D) $\ln\sin A + \ln\sin C = \ln(2\sin B)$.

Lời giải.

Theo định lý sin trong tam giác ABC ta có: $\begin{cases} a = 2R\sin A \\ b = 2R\sin B \\ c = 2R\sin C \end{cases}$, với R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Vì a, b, c theo thứ tự lập thành một cấp số nhân nên ta có

$$ac = b^2 \Rightarrow (2R\sin A)(2R\sin C) = (2R\sin B)^2 \Rightarrow \sin A\sin C = (\sin B)^2.$$

Do $0^\circ < \sin A, \sin B, \sin C \leq 180^\circ$ nên $\sin A, \sin B, \sin C > 0$.

Vì thế ta có thể suy ra $\ln(\sin A . \sin C) = \ln\left[(\sin B)^2\right] \Rightarrow \ln\sin A + \ln\sin C = 2\ln\sin B$.

Chọn đáp án C □

Câu 15 (Chuyên Lương Văn Chánh - Phú Yên - 2018).

Cho $x = 2018!$. Tính $A = \dfrac{1}{\log_{2^{2018}} x} + \dfrac{1}{\log_{3^{2018}} x} + \cdots + \dfrac{1}{\log_{2017^{2018}} x} + \dfrac{1}{\log_{2018^{2018}} x}$.

A. $A = \dfrac{1}{2017}$. B. $A = 2018$. C. $A = \dfrac{1}{2018}$. D. $A = 2017$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{\log_{2^{2018}} x} + \frac{1}{\log_{3^{2018}} x} + \cdots + \frac{1}{\log_{2017^{2018}} x} + \frac{1}{\log_{2018^{2018}} x} \\ &= \log_x 2^{2018} + \log_x 3^{2018} + \cdots + \log_x 2017^{2018} + \log_x 2018^{2018} \\ &= 2018\log_x 2 + 2018\log_x 3 + \cdots + 2018\log_x 2017 + 2018\log_x 2018 \\ &= 2018\left(\log_x 2 + \log_x 3 + \cdots + \log_x 2017 + \log_x 2018\right) \\ &= 2018\log_x\left(2\cdot 3\cdot \cdots \cdot 2017\cdot 2018\right). \end{aligned}$$

Chọn đáp án B □

Câu 16 (Chuyên Hùng Vương - Gia Lai - 2018).

Tìm bộ ba số nguyên dương $(a; b; c)$ thỏa mãn

$$\log 1 + \log(1+3) + \log(1+3+5) + \cdots + \log(1+3+5+\cdots+19) - 2\log 5040 = a + b\log 2 + c\log 3$$

A. $(2; 6; 4)$. B. $(1; 3; 2)$. C. $(2; 4; 4)$. D. $(2; 4; 3)$.

Lời giải.

Ta có

$\log 1 + \log(1+3) + \log(1+3+5) + \cdots + \log(1+3+5+\cdots+19) - 2\log 5040 = a + b\log 2 + c\log 3$

$\Leftrightarrow \log 1 + \log 2^2 + \log 3^2 + \cdots + \log 10^2 - 2\log 5040 = a + b\log 2 + c\log 3$

$\Leftrightarrow \log\left(1\cdot 2^2\cdot 3^2\cdot \cdots \cdot 10^2\right) - 2\log 5040 = a + b\log 2 + c\log 3$

$\Leftrightarrow \log\left(1\cdot 2\cdot 3\cdot \cdots \cdot 10\right)^2 - 2\log 5040 = a + b\log 2 + c\log 3$

$\Leftrightarrow 2\log\left(1\cdot 2\cdot 3\cdot \cdots \cdot 10\right) - 2\log 5040 = a + b\log 2 + c\log 3$

$\Leftrightarrow 2\left(\log 10! - \log 7!\right) = a + b\log 2 + c\log 3 \Leftrightarrow 2\log\left(8\cdot 9\cdot 10\right) = a + b\log 2 + c\log 3$

$\Leftrightarrow 2 + 6\log 2 + 4\log 3 = a + b\log 2 + c\log 3$.

Vậy $a = 2,\ b = 6,\ c = 4$.

Chọn đáp án A □

Câu 17 (Phan Đình Phùng - Hà Tĩnh - 2018).

Tổng $S = 1 + 2^2\log_{\sqrt{2}} 2 + 3^2\log_{\sqrt[3]{2}} 2 + \cdots + 2018^2\log_{\sqrt[2018]{2}} 2$ dưới đây.

A. $1008^2 2018^2$. B. $1009^2 2019^2$. C. $1009^2 2018^2$. D. 2019^2.

Lời giải.

Ta có $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\dfrac{(n(n+1))^2}{4}$.

Mặt khác

$$\begin{aligned}S&=1+2^2\log_{\sqrt{2}}2+3^2\log_{\sqrt[3]{2}}2+\cdots+2018^2\log_{\sqrt[2018]{2}}2\\&=1+2^2\log_{2^{\frac{1}{2}}}2+3^2\log_{2^{\frac{1}{3}}}2+\cdots+2018^2\log_{2^{\frac{1}{2018}}}2\\&=1+2^3\log_2 2+3^3\log_2 2+\cdots.+2018^3\log_2 2\\&=1+2^3+3^3+\cdots+2018^3\\&=\left[\dfrac{2018(2018+1)}{2}\right]^2=1009^2 2019^2.\end{aligned}$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 18 (ChuyêN KHTN - 2018). Số $20172018^{20162017}$ có bao nhiêu chữ số?

(A) 147278481. (B) 147278480. (C) 147347190. (D) 147347191.

Lời giải.

Số chữ số của một số tự nhiên x là $[\log x]+1$ ($[\log x]$ là phần nguyên của $\log x$).

Vậy số chữ số của số $20172018^{20162017}$ là

$\left[\log 20172018^{20162017}\right]+1=[20162017\log(20172018)]+1=147278481$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 19 (THPT Quảng Xương 1 - Thanh Hóa - 2021).

Cho các số thực a,b,c thuộc khoảng $(1;+\infty)$ và $\log^2_{\sqrt{a}}b+\log_b c.\log_b\left(\dfrac{c^2}{b}\right)+9\log_a c=4\log_a b$. Giá trị của biểu thức $\log_a b+\log_b c^2$ bằng

(A) 1. (B) $\dfrac{1}{2}$. (C) 2. (D) 3.

Lời giải.

Đặt $\log_a b=x,\log_b c=y\Rightarrow\log_a c=xy$. Điều kiện $x,y>0$.

Bài toán trở thành

Cho $4x^2+y(2y-1)+9xy-4x=0$. Tính $P=x+2y$.

Rút $x=P-2y$ thay vào giả thiết, ta có

$4(P-2y)^2+y(2y-1)+9(P-2y)y-4(P-2y)=0$

$\Leftrightarrow 4P^2-7Py-4P+7y=0.$

$\Leftrightarrow(P-1)(4P-7y)=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}P=1\\4P-7y=0.\end{array}\right.$

Xét trường hợp: $4P-7y=0\Leftrightarrow 4x+y=0$, loại vì $x,y>0$.

Vậy $P=1$.

Chọn đáp án (A) □

BẢNG ĐÁP ÁN

1. B	**2. C**	**3. C**	**4. A**	**5. C**	**6. B**	**7. A**	**8. C**	**9. C**	**10. D**
11. A	**12. B**	**13. C**	**14. C**	**15. B**	**16. A**	**17. B**	**18. A**	**19. A**	

HÁM SỐ MŨ HÀM SỐ LOGARIT

MỨC ĐỘ 1. MỨC ĐỘ 5,6 ĐIỂM

Dạng 1. Tập xác định

Câu 1 (Đề Tham Khảo 2020 Lần 2).

Tập xác định của hàm số $y = \log_2 x$ là

Ⓐ $[0; +\infty)$. Ⓑ $(-\infty; +\infty)$. Ⓒ $(0; +\infty)$. Ⓓ $[2; +\infty)$.

Lời giải.

Điều kiện xác định của hàm số $y = \log_2 x$ là $x > 0$.

Vậy tập xác định của hàm số $y = \log_2 x$ là $\mathscr{D} = (0; +\infty)$.

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 2 (Mã 101 - 2020 Lần 1). Tập xác định của hàm số $y = \log_5 x$ là

Ⓐ $[0; +\infty)$. Ⓑ $(-\infty; 0)$. Ⓒ $(0; +\infty)$. Ⓓ $(-\infty; +\infty)$.

Lời giải.

Điều kiện $x > 0$.

Tập xác định $\mathscr{D} = (0; +\infty)$.

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 3 (Mã 102 - 2020 Lần 1). Tập xác định của hàm số $y = \log_6 x$ là

Ⓐ $[0; +\infty)$. Ⓑ $(0; +\infty)$. Ⓒ $(-\infty; 0)$. Ⓓ $(-\infty; +\infty)$.

Lời giải.

Điều kiện: $x > 0$. Vậy tập xác định của hàm số đã cho là $\mathscr{D} = (0; +\infty)$.

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 4 (Mã 103 - 2020 Lần 1). Tập xác định của hàm số $y = \log_3 x$ là

Ⓐ $(-\infty; 0)$. Ⓑ $(0; +\infty)$. Ⓒ $(-\infty; +\infty)$. Ⓓ $[0; +\infty)$.

Lời giải.

Điều kiện xác định $x > 0$.

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 5 (Mã 104 - 2020 Lần 1). Tập xác định của hàm số $y = \log_4 x$ là

Ⓐ $(-\infty; 0)$. Ⓑ y. Ⓒ $(0; +\infty)$. Ⓓ $(-\infty; +\infty)$.

Lời giải.

Điều kiện $x > 0$.

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 6 (Mã 102 - 2020 Lần 2). Tập xác định của hàm số $y = 5^x$ là

(A) $\mathbb{R}$. (B) $(0; +\infty)$. (C) $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. (D) $[0; +\infty)$.

Lời giải.

Tập xác định của hàm số $y = 5^x$ là $\mathbb{R}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 7 (Mã 103 - 2020 Lần 2). Tập xác định của hàm số $y = 2^x$ là

(A) $\mathbb{R}$. (B) $(0; +\infty)$. (C) $[0; +\infty)$. (D) $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Lời giải.

Hàm số mũ $y = 2^x$ xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$ nên tập xác định là $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 8 (Mã 123 2017). Tìm tập xác định $\mathscr{D}$ của hàm số $y = \log_5 \dfrac{x-3}{x+2}$.

(A) $\mathscr{D} = (-\infty; -2) \cup (3; +\infty)$. (B) $\mathscr{D} = (-2; 3)$.

(C) $\mathscr{D} = (-\infty; -2) \cup [3; +\infty)$. (D) $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

Lời giải.

Tập xác định của là tập các số x để $\dfrac{x-3}{x+2} > 0 \Leftrightarrow (x-3)(x+2) > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 3 \\ x < -2 \end{array}\right.$

Suy ra $\mathscr{D} = (-\infty; -2) \cup (3; +\infty)$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 9 (Đề Minh Họa 2017). Tìm tập xác định $\mathscr{D}$ của hàm số $y = \log_2(x^2 - 2x - 3)$

(A) $\mathscr{D} = (-\infty; -1] \cup [3; +\infty)$. (B) $\mathscr{D} = [-1; 3]$.

(C) $\mathscr{D} = (-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$. (D) $\mathscr{D} = (-1; 3)$.

Lời giải.

Hàm số xác định khi $x^2 - 2x - 3 > 0 \Leftrightarrow x < -1$ hoặc $x > 3$

Vậy tập xác định $\mathscr{D} = (-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 10 (Mã 104 2017). Tìm tập xác định $\mathscr{D}$ của hàm số $y = \log_3(x^2 - 4x + 3)$.

(A) $\mathscr{D} = (1; 3)$. (B) $\mathscr{D} = (-\infty; 1) \cup (3; +\infty)$.

(C) $\mathscr{D} = \left(-\infty; 2 - \sqrt{2}\right) \cup \left(2 + \sqrt{2}; +\infty\right)$. (D) $\mathscr{D} = \left(2 - \sqrt{2}; 1\right) \cup \left(3; 2 + \sqrt{2}\right)$.

Lời giải.

Điều kiện $x^2 - 4x + 3 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < 1 \\ x > 3 \end{array}\right.$. Vậy tập xác định $\mathscr{D} = (-\infty; 1) \cup (3; +\infty)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 11 (THPT Lương Thế Vinh Hà Nội 2019).

Tìm tập xác định của hàm số $y = \log_{2018}(3x - x^2)$.

(A) $\mathscr{D} = \mathbb{R}$. (B) $\mathscr{D} = (0; +\infty)$.

(C) $\mathscr{D} = (-\infty; 0) \cup (3; +\infty)$. (D) $\mathscr{D} = (0; 3)$.

Lời giải.

Hàm số xác định khi $3x - x^2 > 0 \Leftrightarrow 0 < x < 3$.

Vậy $\mathscr{D} = (0; 3)$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 12 (Chuyên Vĩnh Phúc 2019). Tập xác định của $y = \ln\left(-x^2 + 5x - 6\right)$ là

(A) $[2; 3]$.
(B) $(2; 3)$.
(C) $(-\infty; 2] \cup [3; +\infty)$.
(D) $(-\infty; 2) \cup (3; +\infty)$.

Lời giải.

Hàm số xác định khi và chỉ khi $-x^2 + 5x - 6 > 0 \Leftrightarrow 2 < x < 3$.

Vậy tập xác định của hàm số là $\mathscr{D} = (2; 3)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 13 (THPT Lê Quý Đôn Điện Biên 2019).

Tìm tập xác định của hàm số $y = \log_{\sqrt{5}} \dfrac{1}{6 - x}$.

(A) $(-\infty; 6)$.
(B) $\mathbb{R}$.
(C) $(0; +\infty)$.
(D) $(6; +\infty)$.

Lời giải.

Điều kiện $\dfrac{1}{6 - x} > 0 \Leftrightarrow 6 - x > 0 \Leftrightarrow x < 6$. Do đó tập xác định của hàm số là $(-\infty; 6)$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 14 (THPT Lương Thế Vinh Hà Nội 2019).

Tập xác định của hàm số $y = \log_2\left(3 - 2x - x^2\right)$ là

(A) $\mathscr{D} = (-1; 1)$.
(B) $\mathscr{D} = (-1; 3)$.
(C) $\mathscr{D} = (-3; 1)$.
(D) $\mathscr{D} = (0; 1)$.

Lời giải.

Hàm số $y = \log_2\left(3 - 2x - x^2\right)$ xác định khi: $3 - 2x - x^2 > 0 \Leftrightarrow -3 < x < 1$.

Vậy tập xác định của hàm số đã cho là: $\mathscr{D} = (-3; 1)$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 15 (Sở Vĩnh Phúc 2019). Tập xác định của hàm số $y = \log_2\left(x^2 - 2x - 3\right)$ là

(A) $(-1; 3)$.
(B) $[-1; 3]$.
(C) $(-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$.
(D) $(-\infty; -1] \cup [3; +\infty)$.

Lời giải.

Hàm số xác định khi $x^2 - 2x - 3 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < -1 \\ x > 3. \end{array}\right.$

Vậy $\mathscr{D} = (-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 16 (Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2019).

Tìm tập xác định của hàm số: $y = 2^{\sqrt{x}} + \log(3 - x)$.

(A) $[0; +\infty)$.
(B) $(0; 3)$.
(C) $(-\infty; 3)$.
(D) $[0; 3)$.

Lời giải.

Điều kiện xác định

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ 3 - x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x < 3 \end{cases} \Rightarrow \mathscr{D} = [0; 3).$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 17 (Chuyên Nguyễn Trãi Hải Dương 2019).

Tập xác định của hàm số $y = [\ln (x-2)]^{\pi}$ là

(A) $\mathbb{R}$. (B) $(3; +\infty)$. (C) $(0; +\infty)$. (D) $(2; +\infty)$.

Lời giải.

ĐKXĐ $\begin{cases} \ln (x-2) > 0 \\ x - 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 > 1 \\ x - 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x - 2 > 1 \Leftrightarrow x > 3.$

Tập xác định $\mathscr{D} = (3; +\infty)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 18 (THPT Ba Đình 2019). Tìm tập xác định $\mathscr{D}$ của hàm số $y = \log_{2019}(4 - x^2) + (2x-3)^{-2019}$.

(A) $\mathscr{D} = \left[-2; \frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}; 2\right]$. (B) $\mathscr{D} = \left(-2; \frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}; 2\right)$.

(C) $\mathscr{D} = \left(\frac{3}{2}; 2\right)$. (D) $\mathscr{D} = (-2; 2)$.

Lời giải.

Điều kiện có nghĩa của hàm số là $\begin{cases} 4 - x^2 > 0 \\ 2x - 3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < x < 2 \\ x \neq \frac{3}{2}. \end{cases}$

Vậy tập xác định của hàm số là $\mathscr{D} = \left(-2; \frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}; 2\right)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 19. Tìm tập xác định của hàm số $y = \sqrt{(x-2)^0} + \log_2 (9 - x^2)$ là

(A) $\mathscr{D} = (2; 3)$. (B) $\mathscr{D} = (-3; 3) \setminus \{2\}$. (C) $\mathscr{D} = (3; +\infty)$. (D) $\mathscr{D} = (-3; 3)$.

Lời giải.

Điều kiện xác định $\begin{cases} x - 2 \neq 0 \\ 9 - x^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 2 \\ -3 < x < 3. \end{cases}$

Vậy tập xác định của hàm số là: $\mathscr{D} = (-3; 3) \setminus \{2\}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 20 (Mã 101 - 2022). Tập xác định của hàm số $y = \log_3 (x - 4)$ là

(A) $(5; +\infty)$. (B) $(-\infty; +\infty)$. (C) $(4; +\infty)$. (D) $(-\infty; 4)$.

Lời giải.

Điều kiện $x - 4 > 0 \Leftrightarrow x > 4$.

Tập xác định $\mathscr{D} = (4; +\infty)$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 21 (Mã 101 - 2022). Có bao nhiêu giá trị nguyên thuộc tập xác định của hàm số $y = \log [(6 - x)(x + 2)]$?

(A) 7. (B) 8. (C) 9. (D) Vô số.

Lời giải.

Điều kiện xác định $(6-x)(x+2)>0 \Leftrightarrow -x^2+4x+12>0 \Leftrightarrow -2<x<6$.

Vậy có tất cả 7 giá trị nguyên thuộc tập xác định của hàm số $y=\log\left[(6-x)(x+2)\right]$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 22 (Mã 102 - 2022). Tập xác định của hàm số $y=\log_3(x-4)$ là

(A) $(-\infty;4)$. (B) $(4;+\infty)$. (C) $(5;+\infty)$. (D) $(-\infty;+\infty)$.

Lời giải.

Điều kiện xác định là $x-4>0 \Leftrightarrow x>4$.

Vậy tập xác định của hàm số $y=\log_3(x-4)$ là $(4;+\infty)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 23 (Mã 102 - 2022). Có bao nhiêu số nguyên thuộc tập xác định của hàm số $y=\log\left[(6-x)(x+2)\right]$

(A) 7. (B) 8. (C) Vô số. (D) 9.

Lời giải.

Điều kiện xác định là $(6-x)(x+2)>0 \Leftrightarrow -2<x<6$.

Mà $x\in\mathbb{Z} \Rightarrow x\in\{-1;0;1;2;3;4;5\}$.

Vậy có 7 số nguyên thuộc tập xác định của hàm số $y=\log\left[(6-x)(x+2)\right]$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 24 (Mã 103 - 2022). Tập xác định của hàm số $y=\log_2(x-1)$ là

(A) $(2;+\infty)$. (B) $(-\infty;+\infty)$. (C) $(1;+\infty)$. (D) $(-\infty;1)$.

Lời giải.

Hàm số xác định khi $x-1>0 \Leftrightarrow x>1$.

Tập xác định của hàm số là $\mathscr{D}=(1;+\infty)$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 25 (Mã 104 - 2022). Tập xác định của hàm số $y=\log_2(x-1)$ là

(A) $(2;+\infty)$. (B) $(-\infty;+\infty)$. (C) $(-\infty;1)$. (D) $(1;+\infty)$.

Lời giải.

Điều kiện $x-1>0 \Leftrightarrow x>1$.

Vậy tập xác định của hàm số đã cho là $\mathscr{D}=(1;+\infty)$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 26 (Mã 101 - 2021 Lần 1). Tập xác định của hàm số $y=9^x$ là

(A) $\mathbb{R}$. (B) $[0;+\infty)$. (C) $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. (D) $(0;+\infty)$.

Lời giải.

Vì hàm số $y=9^x$ là hàm số mũ nên có tập xác định là tập $\mathbb{R}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 27 (Mã 104 - 2021 Lần 1). Tập xác định của hàm số $y = 8^x$ là

Ⓐ $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Ⓑ $\mathbb{R}$. Ⓒ $[0; +\infty)$. Ⓓ $(0; +\infty)$.

Lời giải.

Tập xác định của hàm số $y = 8^x$ là $\mathbb{R}$.

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 28 (Mã 103 - 2021 - Lần 1). Tập xác định của hàm số $y = 6^x$ là

Ⓐ $[0; +\infty)$. Ⓑ $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Ⓒ $(0; +\infty)$. Ⓓ $\mathbb{R}$.

Lời giải.

Tập xác định của hàm số $y = 6^x$ là $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 29 (Mã 102 - 2021 Lần 1). Tập xác định của hàm số $y = 7^x$ là

Ⓐ $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Ⓑ $[0; +\infty)$. Ⓒ $(0; +\infty)$. Ⓓ $\mathbb{R}$.

Lời giải.

Vì hàm số $y = 7^x$ là hàm số mũ nên có tập xác định là tập $\mathbb{R}$.

Chọn đáp án Ⓓ □

Dạng 2. Tìm đạo hàm

Câu 30 (Đề Minh Họa 2021). Đạo hàm của hàm số $y = 2^x$ là

Ⓐ $y' = 2^x \ln 2$. Ⓑ $y' = 2^x$. Ⓒ $y' = \dfrac{2^x}{\ln 2}$. Ⓓ $y' = x2^{x-1}$.

Lời giải.

Ta có $y' = (2^x)' = 2^x \ln 2$.

Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 31 (Đề Tham Khảo 2017). Tìm đạo hàm của hàm số $y = \log x$.

Ⓐ $y' = \dfrac{\ln 10}{x}$. Ⓑ $y' = \dfrac{1}{x \ln 10}$. Ⓒ $y' = \dfrac{1}{10 \ln x}$. Ⓓ $y' = \dfrac{1}{x}$.

Lời giải.

Áp dụng công thức $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$, ta được $y' = \dfrac{1}{x \ln 10}$.

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 32 (Mã 103 - 2019). Hàm số $y = 2^{x^2 - x}$ có đạo hàm là

Ⓐ $2^{x^2-x} \cdot \ln 2$. Ⓑ $(2x-1)2^{x^2-x} \cdot \ln 2$.

Ⓒ $(x^2 - x)2^{x^2-x-1}$. Ⓓ $(2x-1)2^{x^2-x}$.

Lời giải.

Ta có $y' = (x^2 - x)' 2^{x^2-x} \cdot \ln 2 = (2x-1)2^{x^2-x} \cdot \ln 2$.

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 33 (Mã 104 - 2019). Hàm số $y = 3^{x^2-x}$ có đạo hàm là

Ⓐ $(2x-1)\,3^{x^2-x}$. Ⓑ $(x^2-x)\,3^{x^2-x-1}$.

Ⓒ $(2x-1)\,3^{x^2-x}\cdot\ln 3$. Ⓓ $3^{x^2-x}\cdot\ln 3$.

Lời giải.

Ta có $(a^u)'=u'\cdot a^u\cdot\ln a$ nên $\left(3^{x^2-x}\right)'=(2x-1)\,3^{x^2-x}\cdot\ln 3$.

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 34 (Đề Minh Họa 2017). Tính đạo hàm của hàm số $y=13^x$.

Ⓐ $y'=\dfrac{13^x}{\ln 13}$. Ⓑ $y'=x13^{x-1}$. Ⓒ $y'=13^x\ln 13$. Ⓓ $y'=13^x$.

Lời giải.

Ta có $y'=13^x\ln 13$.

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 35 (Mã 110 2017). Tính đạo hàm của hàm số $y=\log_2(2x+1)$.

Ⓐ $y'=\dfrac{2}{(2x+1)\ln 2}$. Ⓑ $y'=\dfrac{1}{(2x+1)\ln 2}$. Ⓒ $y'=\dfrac{2}{2x+1}$. Ⓓ $y'=\dfrac{1}{2x+1}$.

Lời giải.

Ta có $y'=(\log_2(2x+1))'=\dfrac{(2x+1)'}{(2x+1)\ln 2}=\dfrac{2}{(2x+1)\ln 2}$.

Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 36 (Đề Minh Họa 2017). Tính đạo hàm của hàm số $y=\dfrac{x+1}{4^x}$.

Ⓐ $y'=\dfrac{1-2(x+1)\ln 2}{2^{2x}}$. Ⓑ $y'=\dfrac{1+2(x+1)\ln 2}{2^{2x}}$.

Ⓒ $y'=\dfrac{1-2(x+1)\ln 2}{2^{x^2}}$. Ⓓ $y'=\dfrac{1+2(x+1)\ln 2}{2^{x^2}}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}
y' &= \frac{(x+1)'\,4^x-(x+1)\cdot(4^x)'}{(4^x)^2}\\
&= \frac{4^x-(x+1)\,4^x\cdot\ln 4}{(4^x)^2}\\
&= \frac{4^x\cdot(1-x\cdot\ln 4-\ln 4)}{(4^x)^2}\\
&= \frac{1-x\cdot 2\ln 2-2\ln 2}{4^x}\\
&= \frac{1-2(x+1)\ln 2}{2^{2x}}.
\end{aligned}$$

Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 37 (Đề Tham Khảo 2019). Hàm số $f(x)=\log_2(x^2-2x)$ có đạo hàm

Ⓐ $f'(x)=\dfrac{\ln 2}{x^2-2x}$. Ⓑ $f'(x)=\dfrac{1}{(x^2-2x)\ln 2}$.

Ⓒ $f'(x)=\dfrac{(2x-2)\ln 2}{x^2-2x}$. Ⓓ $f'(x)=\dfrac{2x-2}{(x^2-2x)\ln 2}$.

Lời giải.

$f'(x)=\dfrac{(x^2-2x)'}{(x^2-2x)\ln 2}=\dfrac{2x-2}{(x^2-2x)\ln 2}$.

Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 38 (Mã 101 - 2019). Hàm số $y = 2^{x^2-3x}$ có đạo hàm là

Ⓐ $(2x-3)\,2^{x^2-3x}\ln 2$. Ⓑ $2^{x^2-3x}\ln 2$.

Ⓒ $(2x-3)\,2^{x^2-3x}$. Ⓓ $(x^2-3x)\,2^{x^2-3x+1}$.

Lời giải.

$y' = \left(2^{x^2-3x}\right)' = (2x-3)\,2^{x^2-3x}\ln 2$.

Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 39 (Mã 102 - 2019). Hàm số $y = 3^{x^2-3x}$ có đạo hàm là

Ⓐ $(2x-3)\,3^{x^2-3x}$. Ⓑ $3^{x^2-3x}\cdot\ln 3$.

Ⓒ $(x^2-3x)\,3^{x^2-3x-1}$. Ⓓ $(2x-3)\,3^{x^2-3x}\cdot\ln 3$.

Lời giải.

Ta có $y' = \left(3^{x^2-3x}\right)' = (2x-3)\,3^{x^2-3x}\cdot\ln 3$.

Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 40. Tính đạo hàm của hàm số $y = ln\left(1+\sqrt{x+1}\right)$.

Ⓐ $y' = \dfrac{1}{\sqrt{x+1}\left(1+\sqrt{x+1}\right)}$. Ⓑ $y' = \dfrac{2}{\sqrt{x+1}\left(1+\sqrt{x+1}\right)}$.

Ⓒ $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}\left(1+\sqrt{x+1}\right)}$. Ⓓ $y' = \dfrac{1}{1+\sqrt{x+1}}$.

Lời giải.

Ta có

$$y' = \left(\ln\left(1+\sqrt{x+1}\right)\right)' = \frac{\left(1+\sqrt{x+1}\right)'}{1+\sqrt{x+1}} = \frac{1}{2\sqrt{x+1}\left(1+\sqrt{x+1}\right)}.$$

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 41 (Chuyên Vĩnh Phúc 2019). Đạo hàm của hàm số $y = \mathrm{e}^{1-2x}$ là

Ⓐ $y' = 2\mathrm{e}^{1-2x}$. Ⓑ $y' = -2\mathrm{e}^{1-2x}$. Ⓒ $y' = -\dfrac{\mathrm{e}^{1-2x}}{2}$. Ⓓ $y' = \mathrm{e}^{1-2x}$.

Lời giải.

$y' = \mathrm{e}^{1-2x}\cdot(1-2x)' = -2.\mathrm{e}^{1-2x}$.

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 42 (Chuyên Lam Sơn Thanh Hóa 2019).

Đạo hàm của hàm số $y = \log_3\left(x^2+x+1\right)$ là

Ⓐ $y' = \dfrac{(2x+1)\ln 3}{x^2+x+1}$. Ⓑ $y' = \dfrac{2x+1}{\left(x^2+x+1\right)\ln 3}$.

Ⓒ $y' = \dfrac{2x+1}{x^2+x+1}$. Ⓓ $y' = \dfrac{1}{\left(x^2+x+1\right)\ln 3}$.

Lời giải.

$$y' = \frac{\left(x^2+x+1\right)'}{\left(x^2+x+1\right)\ln 3} = \frac{2x+1}{\left(x^2+x+1\right)\ln 3}.$$

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 43 (THPT Lê Quy Đôn Điện Biên 2019).

Tính đạo hàm của hàm số $y = \mathrm{e}^{x^2+x}$.

Ⓐ $(2x+1)\,\mathrm{e}^{x}$. Ⓑ $(2x+1)\,\mathrm{e}^{x^2+x}$. Ⓒ $(2x+1)\,\mathrm{e}^{2x+1}$. Ⓓ $(x^2+x)\,\mathrm{e}^{2x+1}$.

Lời giải.

$\left(e^{x^2+x}\right)' = e^{x^2+x} \cdot (x^2+x)' = (2x+1)\, e^{x^2+x}$.

Chọn đáp án B □

Câu 44 (THPT Hùng Vương Bình Phước 2019).

Cho hàm số $f(x) = \log_2(x^2+1)$, tính $f'(1)$.

(A) $f'(1) = 1$. (B) $f'(1) = \dfrac{1}{2\ln 2}$. (C) $f'(1) = \dfrac{1}{2}$. (D) $f'(1) = \dfrac{1}{\ln 2}$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

$f'(x) = \dfrac{2x}{(x^2+1)\,.\ln 2} \Rightarrow f'(1) = \dfrac{1}{\ln 2}$.

Chọn đáp án D □

Câu 45 (THPT - Thăng - Long - Hà - Nội - 2019).

Tìm đạo hàm của hàm số $y = \ln(1+e^{2x})$.

(A) $y' = \dfrac{-2e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2}$. (B) $y' = \dfrac{e^{2x}}{e^{2x}+1}$. (C) $y' = \dfrac{1}{e^{2x}+1}$. (D) $y' = \dfrac{2e^{2x}}{e^{2x}+1}$.

Lời giải.

Ta có $y' = [\ln(1+e^{2x})]' = \dfrac{(1+e^{2x})'}{1+e^{2x}} = \dfrac{2e^{2x}}{1+e^{2x}}$.

Chọn đáp án D □

Câu 46 (Chuyên Phan Bội Châu Nghệ An 2019).

Tính đạo hàm của hàm số $y = \dfrac{1-x}{2^x}$.

(A) $y' = \dfrac{2-x}{2^x}$.

(B) $y' = \dfrac{\ln 2 \cdot (x-1) - 1}{(2^x)^2}$.

(C) $y' = \dfrac{x-2}{2^x}$.

(D) $y' = \dfrac{\ln 2 \cdot (x-1) - 1}{2^x}$.

Lời giải.

Ta có $y' = \dfrac{(1-x)'\, 2^x - (2^x)' \cdot (1-x)}{(2^x)^2} = \dfrac{-1 \cdot 2^x - 2^x \cdot \ln 2 \cdot (1-x)}{(2^x)^2} = \dfrac{\ln 2 \cdot (x-1) - 1}{2^x}$.

Chọn đáp án D □

Câu 47 (Chuyên Lê Quý Đôn Quảng Trị 2019).

Tính đạo hàm của hàm số $y = \log_9(x^2+1)$.

(A) $y' = \dfrac{1}{(x^2+1)\ln 9}$. (B) $y' = \dfrac{x}{(x^2+1)\ln 3}$. (C) $y' = \dfrac{2x\ln 9}{x^2+1}$. (D) $y' = \dfrac{2\ln 3}{x^2+1}$.

Lời giải.

Ta có $y' = \dfrac{(x^2+1)'}{(x^2+1)\ln 9} = \dfrac{2x}{(x^2+1)\ln 3^2} = \dfrac{2x}{(x^2+1)\,2\ln 3} = \dfrac{x}{(x^2+1)\ln 3}$.

Chọn đáp án B □

Câu 48 (KTNL GV THPT Lý Thái Tổ 2019).

Tính đạo hàm hàm số $y = e^x \cdot \sin 2x$

(A) $e^x(\sin 2x - \cos 2x)$.

(B) $e^x \cdot \cos 2x$.

(C) $e^x(\sin 2x + \cos 2x)$.

(D) $e^x(\sin 2x + 2\cos 2x)$.

Lời giải.

$y' = (\mathrm{e}^x \cdot \sin 2x)' = (\mathrm{e}^x)' \cdot \sin 2x + \mathrm{e}^x \cdot (\sin 2x)' = \mathrm{e}^x \cdot \sin 2x + 2\mathrm{e}^x \cdot \cos 2x = \mathrm{e}^x (\sin 2x + 2\cos 2x)$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 49 (VTED 2019). Đạo hàm của hàm số $y = \dfrac{x+1}{4^x}$ là

(A) $\dfrac{1-2(x+1)\ln 2}{2^{2x}}$. (B) $\dfrac{1+2(x+1)\ln 2}{2^{2x}}$. (C) $\dfrac{1-2(x+1)\ln 2}{2^{x^2}}$. (D) $\dfrac{1+2(x+1)\ln 2}{2^{x^2}}$.

Lời giải.

$y' = \dfrac{(x+1)' \, 4^x - (x+1)(4^x)'}{(4^x)^2} = \dfrac{1-2(x+1)\ln 2}{2^{2x}}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 50 (Chuyên Hùng Vương Gia Lai 2019).

Cho hàm số $y = \dfrac{1}{x+1+\ln x}$ với $x > 0$. Khi đó $-\dfrac{y'}{y^2}$ bằng

(A) $\dfrac{x}{x+1}$. (B) $1+\dfrac{1}{x}$. (C) $\dfrac{x}{1+x+\ln x}$. (D) $\dfrac{x+1}{1+x+\ln x}$.

Lời giải.

$y = \dfrac{1}{x+1+\ln x} \Rightarrow \dfrac{1}{y} = x+1+\ln x \Rightarrow \left(\dfrac{1}{y}\right)' = (x+1+\ln x)' \Leftrightarrow -\dfrac{y'}{y^2} = 1+\dfrac{1}{x}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 51 (Chuyên Lê Quý Đôn Điện Biên 2019).

Tính đạo hàm của hàm số $y = 2^x \ln x - \dfrac{1}{\mathrm{e}^x}$.

(A) $y' = 2^x\left[\dfrac{1}{x} + \ln 2 \cdot \ln x\right] + \dfrac{1}{\mathrm{e}^x}$.

(B) $y' = 2^x \ln 2 + \dfrac{1}{x} + \mathrm{e}^{-x}$.

(C) $y' = 2^x \dfrac{1}{x} \ln 2 + \dfrac{1}{\mathrm{e}^x}$.

(D) $y' = 2^x \ln 2 + \dfrac{1}{x} - \mathrm{e}^x$.

Lời giải.

Ta có $y' = 2^x \cdot \ln 2 \cdot \ln x + \dfrac{2^x}{x} + \dfrac{1}{\mathrm{e}^x} = 2^x\left[\dfrac{1}{x} + \ln 2 \cdot \ln x\right] + \dfrac{1}{\mathrm{e}^x}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 52 (VTED 2019). Đạo hàm của hàm số $f(x) = \log_2 |x^2 - 2x|$ là

(A) $\dfrac{2x-2}{(x^2-2x)\ln 2}$. (B) $\dfrac{1}{(x^2-2x)\ln 2}$. (C) $\dfrac{(2x-2)ln2}{x^2-2x}$. (D) $\dfrac{2x-2}{|x^2-2x|\ln 2}$.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = \dfrac{(x^2-2x)'}{(x^2-2x)\ln 2} = \dfrac{2x-2}{(x^2-2x)\ln 2}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 53 (Chuyên KHTN 2019). Đạo hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{\ln(\ln x)}$ là

(A) $f'(x) = \dfrac{1}{x\ln x\sqrt{\ln(\ln x)}}$.

(B) $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{\ln(\ln x)}}$.

(C) $f'(x) = \dfrac{1}{2x\,\mathrm{lnx}\,\sqrt{\ln(\ln x)}}$.

(D) $f'(x) = \dfrac{1}{\ln x\sqrt{\ln(\ln x)}}$.

Lời giải.

Áp dụng các công thức $(\ln u)' = \dfrac{u'}{\ln u}$ và $(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$ ta có $f'(x) = \dfrac{1}{2x\ln x\sqrt{\ln(\ln x)}}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 54 (Đề minh họa 2022). Trên khoảng $(0; +\infty)$, đạo hàm của hàm số $y = \log_2 x$ là

(A) $y' = \dfrac{1}{x \ln 2}$. (B) $y' = \dfrac{\ln 2}{x}$. (C) $y' = \dfrac{1}{x}$. (D) $y' = \dfrac{1}{2x}$.

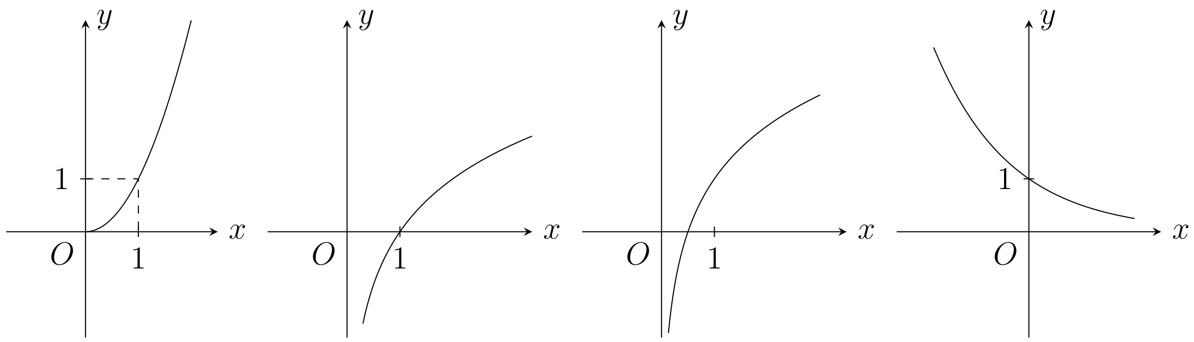
Lời giải.

Áp dụng quy tắc tính đạo hàm hàm logarit ta có: $y' = (\log_2 x)' = \dfrac{1}{x \ln 2}$.

Chọn đáp án (A) □

Dạng 3. Khảo sát hàm số mũ, logarit

Câu 55 (Đề Tham Khảo 2017). Cho hàm số $f(x) = x \ln x$. Một trong bốn đồ thị cho trong bốn phương án A, B, C, D dưới đây là đồ thị của hàm số $y = f'(x)$. Tìm đồ thị đó?



Hình 1 Hình 2 Hình 3 Hình 4

(A) Hình 2. (B) Hình 3. (C) Hình 4. (D) Hình 1.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = (0; +\infty)$.

Ta có $f(x) = x \ln x \Rightarrow f'(x) = g(x) = \ln x + 1$.

Ta có $g(1) = 1$ nên đồ thị hàm số đi qua điểm $(1; 1)$. Loại hai đáp án B và D.

Và $\lim\limits_{x \to 0^+} [g(x)] = \lim\limits_{x \to 0^+} [\ln(x) + 1]$. Đặt $t = \dfrac{1}{x}$. Khi $x \to 0^+$ thì $t \to +\infty$.

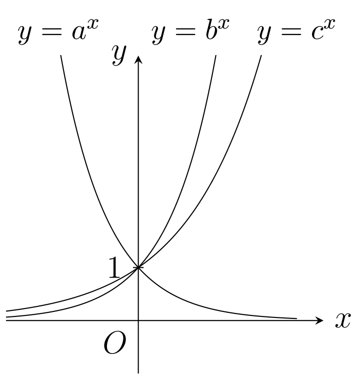
Do đó $\lim\limits_{x \to 0^+} [g(x)] = \lim\limits_{t \to +\infty} \left[\ln\left(\dfrac{1}{t}\right) + 1\right] = -\lim\limits_{t \to +\infty} [\ln t - 1] = -\infty$ nên loại đáp án A.

Chọn đáp án (B) □

Câu 56.

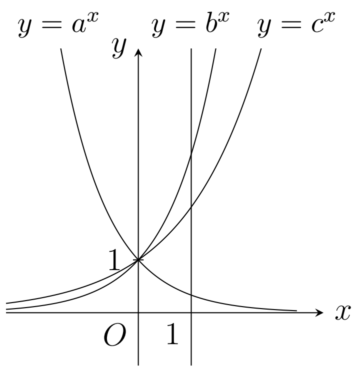
Cho ba số thực dương a, b, c khác 1. Đồ thị các hàm số $y = a^x$, $y = b^x$, $y = c^x$ được cho trong hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

(A) $b < c < a$. (B) $c < a < b$. (C) $a < b < c$. (D) $a < c < b$.



Lời giải.

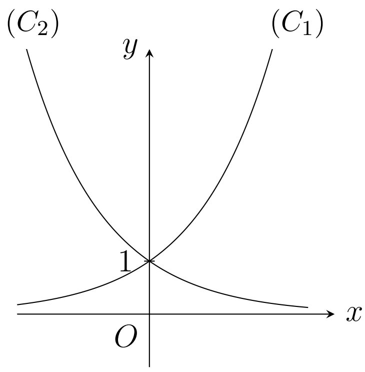
Đường thẳng $x = 1$ đồ thị các hàm số $y = a^x$, $y = b^x$, $y = c^x$ tại các điểm có tung độ lần lượt là $y = a$, $y = b$, $y = c$ như hình vẽ.
Từ đồ thị kết luận $a < c < b$.



Chọn đáp án (D) □

Câu 57 (Mã 105 2017).

Cho hàm số $y = a^x$, $y = b^x$ với a, b là hai số thực dương khác 1, lần lượt có đồ thị là (C_1) và (C_2) như hình bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



(A) $0 < b < 1 < a$. (B) $0 < a < b < 1$.
(C) $0 < b < a < 1$. (D) $0 < a < 1 < b$.

Lời giải.

Theo hình ta thấy hàm $y = a^x$ là hàm đồng biến nên $a > 1$, còn hàm $y = b^x$ là hàm nghịch biến nên $0 < b < 1$. Suy ra $0 < b < 1 < a$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 58 (Chuyên Bắc Giang 2019). Trong các hàm số sau hàm số nào nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

(A) $\log_3 x^2$. (B) $y = \log\left(x^3\right)$. (C) $y = \left(\dfrac{e}{4}\right)^x$. (D) $y = \left(\dfrac{2}{5}\right)^{-x}$.

Lời giải.

Hàm số mũ $y = a^x$ với $0 < a < 1$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Ta có $0 < \dfrac{e}{4} < 1$ nên hàm số $y = \left(\dfrac{e}{4}\right)^x$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 59. Mệnh đề nào trong các mệnh đề dưới đây sai?

(A) Hàm số $y = \left(\dfrac{2018}{\pi}\right)^{x^2+1}$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

(B) Hàm số $y = \log x$ đồng biến trên $(0; +\infty)$.

(C) Hàm số $y = \ln(-x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$.

(D) Hàm số $y = 2^x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Lời giải.

Hàm số $y = \ln(-x)$. Tập xác định $\mathscr{D} = (-\infty; 0)$.

Cơ số $a = e > 1$. Do đó hàm số đồng biết trên $(-\infty; 0)$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 60 (THPT An Lão Hải Phòng 2019).

Hàm số nào dưới đây đồng biến trên tập xác định của nó?

(A) $y = \left(\dfrac{1}{\pi}\right)^x$. (B) $y = \left(\dfrac{2}{3}\right)^x$. (C) $y = \left(\sqrt{3}\right)^x$. (D) $y = (0,5)^x$.

Lời giải.

Hàm số $y = a^x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $a > 1$.

Thấy các số $\dfrac{1}{\pi}; \dfrac{2}{3}; 0,5$ nhỏ hơn 1, còn $\sqrt{3}$ lớn hơn 1 nên chọn C.

Chọn đáp án (C) □

Câu 61 (THPT An Lão Hải Phòng 2019).

Cho hàm số $y = \log_2 x$. Mệnh đề nào dưới đây sai?

(A) Đạo hàm của hàm số là $y' = \dfrac{1}{x \ln 2}$.

(B) Đồ thị hàm số nhận trục Oy làm tiệm cận đứng.

(C) Tập xác định của hàm số là $(-\infty; +\infty)$.

(D) Hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

Lời giải.

Hàm số $y = \log_2 x$ có tập xác định là $\mathscr{D} = (0; +\infty)$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 62 (THPT Lê Quy Đôn Điện Biên 2019).

Trong các hàm số sau, hàm số nào luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$?

(A) $y = \left(\dfrac{2015}{2016}\right)^x$. (B) $y = \left(\dfrac{3}{\sqrt{2016} - \sqrt{2}}\right)^x$.

(C) $y = (0,1)^{2x}$. (D) $y = (2016)^{2x}$.

Lời giải.

$y = (0,1)^{2x} = (0,01)^x$, $y = (2016)^{2x} = 4064256^x$.

Ta có các cơ số $\dfrac{2015}{2016}$; $\dfrac{3}{\sqrt{2016} - \sqrt{2}}$; $0,01$ đều nhỏ hơn 1 nên các hàm số ở A, B, C nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

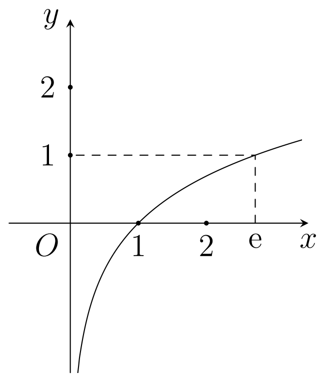
Cơ số $4064256 > 1$ nên hàm số $y = (2016)^{2x}$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 63.

Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?

(A) $y = -e^x$. (B) $y = |\ln x|$. (C) $y = \ln x$. (D) $y = e^x$.



Lời giải.

Đồ thị hàm số đi qua điểm $(e;1)$ và nằm cả trên và dưới trục hoành nên chỉ có hàm số $y = \ln x$ thoả mãn.

Chọn đáp án C □

Câu 64 (Chuyên Lê Thánh Tông 2019).

Hàm số nào sau đây đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A. $f(x) = 3^x$. B. $f(x) = 3^{-x}$. C. $f(x) = \left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^x$. D. $f(x) = \dfrac{3}{3^x}$.

Lời giải.

Hàm số $f(x) = a^x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ nếu $a > 1$ và nghịch biến trên $\mathbb{R}$ nếu $0 < a < 1$.

Vậy hàm số $f(x) = 3^x$ là hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Chọn đáp án A □

Câu 65 (Chuyên Bắc Ninh 2019).

Cho hàm số $y = \log_{\sqrt{5}} x$. Mệnh đề nào dưới đây là mệnh đề sai?

A. Hàm số đã cho đồng biến trên tập xác định.

B. Hàm số đã cho có tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

C. Đồ thị hàm số đã cho có một tiệm cận đứng là trục tung.

D. Đồ thị hàm số đã cho không có tiệm cận ngang.

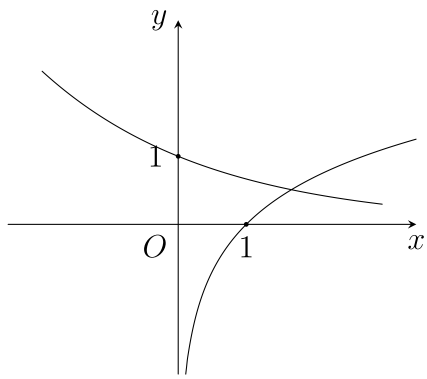
Lời giải.

Ta có tập xác định của hàm số $y = \log_{\sqrt{5}} x$ là $\mathscr{D} = (0; +\infty)$. Do đó đáp án B sai.

Chọn đáp án B □

Câu 66.

Cho đồ thị hàm số $y = a^x$ và $y = \log_b x$ như hình vẽ. Khẳng định nào sau đây đúng?



A. $0 < a < \dfrac{1}{2} < b$. B. $0 < a < 1 < b$.

C. $0 < b < 1 < a$. D. $0 < a < 1,\ 0 < b < \dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Xét hàm số $y = a^x$ đi qua $(0;1)$ suy ra đồ thị hàm số (1) là đồ thị của hàm nghịch biến nên $0 < a < 1$.

Xét đồ thị hàm số $y = \log_b x$ đi qua $(1;0)$ suy ra đồ thị của hàm số (2) là đồ thị của hàm đồng biến suy ra $b > 1$.

Vậy $0 < a < 1 < b$.

Chọn đáp án B □

Câu 67 (Chuyên Lê Quý Đôn Điện Biên 2019).

Trong các hàm số sau, hàm số nào nghịch biến?

(A) $y = \ln x$. (B) $y = \log_{1-\sqrt{\frac{2018}{2019}}} x$. (C) $y = \log_{\pi} x$. (D) $y = \log_{4-\sqrt{3}} x$.

Lời giải.

Xét hàm số $y = \ln x$.

TXĐ $\mathscr{D} = (0; +\infty)$

$e > 1$ suy ra hàm số $y = \ln x$ đồng biến trên $\mathscr{D}$.

Xét hàm số $y = \log_{1-\sqrt{\frac{2018}{2019}}} x$.

TXĐ $\mathscr{D} = (0; +\infty)$

$0 < \sqrt{\dfrac{2018}{2019}} < 1 \Rightarrow 0 < 1 - \sqrt{\dfrac{2018}{2019}} < 1$ suy ra hàm số $y = \log_{1-\sqrt{\frac{2018}{2019}}} x$ là hàm nghịch biến $\mathscr{D}$.

Xét hàm số $y = \log_{\pi} x$.

TXĐ $\mathscr{D} = (0; +\infty)$

$\pi > 1$ suy ra hàm số $y = \log_{\pi} x$ đồng biến trên $\mathscr{D}$.

Xét hàm số $y = \log_{4-\sqrt{3}} x$.

TXĐ $\mathscr{D} = (0; +\infty)$

$4 - \sqrt{3} > 1$ suy ra hàm số $y = \log_{4-\sqrt{3}} x$ đồng biến trên $\mathscr{D}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 68 (Sở Hà Nội 2019). Đồ thị hàm số $y = \ln x$ đi qua điểm

(A) $(1; 0)$. (B) $(2; \mathrm{e}^2)$. (C) $(2\mathrm{e}; 2)$. (D) $(0; 1)$.

Lời giải.

Với $x = 1 \Rightarrow y = \ln 1 = 0$.

Với $x = 2 \Rightarrow y = \ln 2$.

Với $x = 2\mathrm{e} \Rightarrow y = \ln 2\mathrm{e} = \ln 2 + 1$.

Với $x = 0$, hàm số không xác định.

Chọn đáp án (A) □

Câu 69 (Chuyên Lương Thế Vinh Đồng Nai 2019).

Trong các hàm số sau,hàm số nào luôn nghịch biến trên tập xác định của nó?

(A) $y = \left(\dfrac{1}{2}\right)^2$. (B) $y = \log x$. (C) $y = 2^x$. (D) $y = \left(\dfrac{2}{3}\right)^x$.

Lời giải.

Ta thấy hàm số $y = \left(\dfrac{2}{3}\right)^x$ là hàm số mũ có có tập xác định là $\mathbb{R}$ cơ số $a = \dfrac{2}{3} < 1$ nên nghịch biến trên tập xác định của nó.

Ngoài ra ta có thể loại các đáp án khác bằng cách giải thích cụ thể đặc điểm các hàm đó như sau:

Đáp án A loại vì Hàm số $y = \left(\dfrac{1}{2}\right)^2$ là hàm hằng nên không nghịch biến cũng không đồng biến.

Đáp án B loại vì Hàm số $y = \log x$ là hàm số logarit có tập xác định là $\mathscr{D} = (0; +\infty)$ có cơ số $a = 10 > 1$ nên luôn đồng biến trên tập xác định của nó.

Đáp án C loại vì hàm số $y = 2^x$ là hàm số mũ có tập xác định là $\mathbb{R}$có cơ số $a = 2 > 1$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 70 (Chuyên Lương Thế Vinh Đồng Nai 2019).

Chọn khẳng định sai trong các khẳng định sau

A) Hàm số $y = \log_2 x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

B) Hàm số $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ nghịch biến trên tập xác định của nó.

C) Hàm số $y = 2^x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

D) Hàm số $y = x^{\sqrt{2}}$ có tập xác định là $(0; +\infty)$.

Lời giải.

Hàm số $y = \log_2 x$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

Chọn đáp án A □

Câu 71 (KTNL GV Bắc Giang 2019).

Hàm số nào dưới đây đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$?

A) $y = \log_{\sqrt{3}} x$. B) $y = \log_{\frac{\pi}{6}} x$. C) $y = \log_{\frac{e}{3}} x$. D) $y = \log_{\frac{1}{4}} x$.

Lời giải.

Hàm số $y = \log_a x$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty) \Leftrightarrow a > 1 \Rightarrow$ chọn A.

Chọn đáp án A □

Câu 72 (Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2019).

Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A) Đồ thị của hàm số $y = 2^x$ và $y = \log_2 x$ đối xứng với nhau qua đường thẳng $y = -x$.

B) Đồ thị của hai hàm số $y = e^x$ và $y = \ln x$ đối xứng với nhau qua đường thẳng $y = x$.

C) Đồ thị của hai hàm số $y = 2^x$ và hàm số $y = \dfrac{1}{2^x}$ đối xứng với nhau qua trục hoành.

D) Đồ thị của hai hàm số $y = \log_2 x$ và $y = \log_2 \dfrac{1}{x}$ đối xứng với nhau qua trục tung.

Lời giải.

Đồ thị hàm số $y = a^x$ và đồ thị hàm số $y = \log_a x$ đối xứng với nhau qua đường phân giác góc phần tư thứ nhất $(y = x)$, suy ra chọn B.

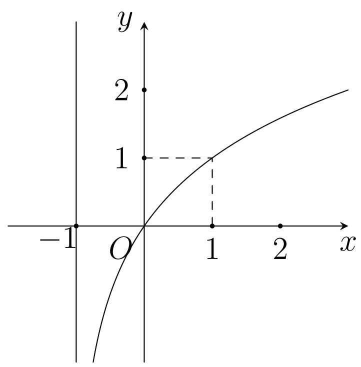
Chọn đáp án B □

Câu 73 (Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2019).

Hàm số nào sau đây có đồ thị như hình bên?

A) $y = \log_3 x$. B) $y = \log_2 x + 1$.

C) $y = \log_2 (x + 1)$. D) $y = \log_3 (x + 1)$.



Lời giải.

Đồ thị hàm số đi qua điểm $(0; 0)$ nên loại đáp án A và B.

Đồ thị hàm số đi qua điểm $(1;1)$ nên loại D.

Vậy đáp án C thỏa mãn.

Chọn đáp án (C) □

Câu 74 (Chuyên Quốc Học Huế 2019).

Trong các hàm số dưới đây, hàm số nào nghịch biến trên tập số thực $\mathbb{R}$.

(A) $y=\left(\dfrac{\pi}{3}\right)^x$. (B) $y=\log_{\frac{\pi}{4}}\left(2x^2+1\right)$.

(C) $y=\left(\dfrac{2}{\mathrm{e}}\right)^x$. (D) $y=\log_{\frac{2}{3}}x$.

Lời giải.

Vì $\dfrac{2}{\mathrm{e}}<1$ nên $y=\left(\dfrac{2}{e}\right)^x$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 75 (Chuyên Vĩnh Phúc 2019). Hàm số nào dưới đây nghịch biến trên tập xác định của nó?

(A) $y=\log_{\sqrt{3}}x$. (B) $y=\log_2\left(\sqrt{x}+1\right)$. (C) $y=\log_{\frac{\pi}{4}}x$. (D) $y=\left(\dfrac{\pi}{3}\right)^x$.

Lời giải.

Xét hàm số $y=\log_{\frac{\pi}{4}}x$ có tập xác định: $\mathscr{D}=(0;+\infty)$.

Nhận thấy cơ số $\dfrac{\pi}{4}<1$ nên $y=\log_{\frac{\pi}{4}}x$ nghịch biến trên tập xác định.

Chọn đáp án (C) □

Câu 76 (Chuyên Bắc Giang - 2019).

Cho hàm số $y=\dfrac{3^x}{\ln 3}-9x+17$. Mệnh đề nào sau đây sai?

(A) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;0)$. (B) Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

(C) Hàm số đạt cực trị tại $x=2$. (D) Hàm số có giá trị cực tiểu là $y=\dfrac{9}{\ln 3}-1$.

Lời giải.

Ta có $y'=\dfrac{3^x\ln 3}{\ln 3}-9=3^x-9$

$y'=0\Leftrightarrow 3^x=9\Leftrightarrow x=2$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y		$\searrow$	$\dfrac{9}{\ln 3}-1$	$\nearrow$	

Chọn đáp án (B) □

Câu 77 (THPT Lê Quy Đôn Điện Biên - 2019).

Đồ thị (L) của hàm số $f(x)=\ln x$ cắt trục hoành tại điểm A, tiếp tuyến của (L) tại A có phương trình là

(A) $y=2x+1$. (B) $y=x-1$. (C) $y=3x$. (D) $y=4x-3$.

Lời giải.

TXĐ $\mathscr{D} = (0; +\infty)$. $f'(x) = \dfrac{1}{x}$

Xét phương trình hoành độ giao điểm $\ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow A\,(1; 0)$

Vậy phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số (L) tại điểm A là

$y = f'(1)\,(x-1) + 0 = x - 1$, chọn B.

Chọn đáp án (B) □

Câu 78 (THCS - THPT Nguyễn Khuyến 2019).

Hàm số $y = x\mathrm{e}^{-3x}$ đạt cực đại tại

(A) $x = \dfrac{1}{3\mathrm{e}}$. (B) $x = \dfrac{1}{3}$. (C) $x = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$. (D) $x = 0$.

Lời giải.

Tập xác định là $\mathbb{R}$.

$y' = \mathrm{e}^{-3x}\,(1 - 3x)$.

Vì $\mathrm{e}^{-3x} > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ nên dấu của y' là dấu của nhị thức $1 - 3x$, suy ra y' đổi dấu từ dương sang âm khi x đi qua $\dfrac{1}{3}$.

Do đó, $x = \dfrac{1}{3}$ là điểm cực đại của hàm số.

Chọn đáp án (B) □

Câu 79 (THPT Gia Lộc Hải Dương 2019).

Hàm số $y = \log_3\left(x^2 - 2x\right)$ nghịch biến trên khoảng nào?

(A) $(2; +\infty)$. (B) $(-\infty; 0)$. (C) $(1; +\infty)$. (D) $(0; 1)$.

Lời giải.

Hàm số $y = \log_3\left(x^2 - 2x\right)$ có tập xác định $\mathscr{D} = (-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$.

Ta có $y' = \dfrac{2x - 2}{\left(x^2 - 2x\right)\ln 3}$. Khi đó $y' = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Bảng biến thiên

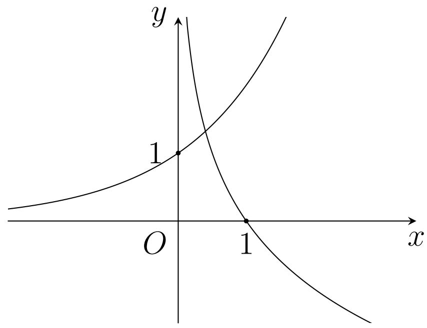
x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$-$	||		||	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$ ||		|| $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta có hàm số y nghịch biến trên $(-\infty; 0)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 80.

Cho đồ thị hàm số $y = a^x$ và $y = \log_b x$ như hình vẽ. Trong các khẳng định sau, đâu là khẳng định đúng.



(A) $0 < a < 1$, $0 < b < 1$.
(B) $a > 1$, $b > 1$.
(C) $0 < b < 1 < a$.
(D) $0 < a < 1 < b$.

Lời giải.

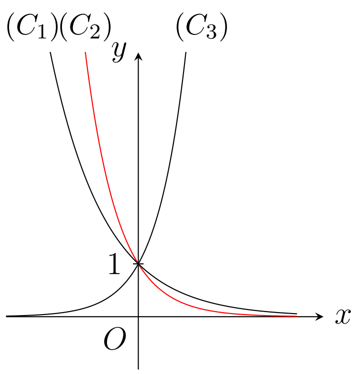
Dựa vào đồ thị ta thấy khi $x \to -\infty \Rightarrow y \Rightarrow 0$ do đó đồ thị hàm số $y = a^x$ có $a > 1$. Nên ta loại đáp án A và D.

Ở đồ thị hàm số $y = \log_b x \Leftrightarrow x = b^y$ ta thấy khi $x \to +\infty \Rightarrow y \Rightarrow -\infty$ do đó ta có $0 < b < 1$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 81.

Hình vẽ bên thể hiện đồ thị của ba trong bốn hàm số $y = 6^x$, $y = 8^x$, $y = \dfrac{1}{5^x}$ và $y = \dfrac{1}{\sqrt{7}^x}$. Hỏi (C_2) là đồ thị hàm số nào?



(A) $y = 6^x$.
(B) $y = \dfrac{1}{\sqrt{7}^x}$.
(C) $y = \dfrac{1}{5^x}$.
(D) $y = 8^x$.

Lời giải.

Hàm số có đồ thị (C_2) là hàm số nghịch biến, do đó loại đáp án A, D. Cho $x = 1$ suy ra $\dfrac{1}{\sqrt{7}} > \dfrac{1}{5}$

Do đó đồ thị hàm số (C_2) là $y = \dfrac{1}{5^x}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 82 (Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2019).

Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \dfrac{\ln x}{x}$ trên đoạn $[2; 3]$ bằng

(A) $\dfrac{\ln 2}{2}$.
(B) $\dfrac{\ln 3}{3}$.
(C) $\dfrac{3}{\mathrm{e}^2}$.
(D) $\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

Lời giải.

Xét $y = f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$. Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[2; 3]$

$y' = \dfrac{1 - \ln x}{x^2}$; $y' = 0 \Leftrightarrow \dfrac{1 - \ln x}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x = e \in [2; 3]$

Có $f(2) = \dfrac{\ln 2}{2} \approx 0,3466$; $f(\mathrm{e}) = \dfrac{1}{\mathrm{e}} \approx 0,3679$; $f(3) = \dfrac{\ln 3}{3} \approx 0,366$.

Suy ra $\min\limits_{x \in [2;3]} f(x) = \dfrac{\ln 2}{2}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \dfrac{\ln x}{x}$ trên đoạn $[2; 3]$ bằng $\dfrac{\ln 2}{2}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 83 (Sở Ninh Bình 2019). Cho hàm số $f(x) = \ln x - x$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

(A) Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;1)$.
(B) Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.
(C) Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;0)$ và $(1;+\infty)$.
(D) Hàm số đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

Lời giải.

Tập xác định của hàm số $f(x)$ $\mathscr{D}=(0;+\infty)$.
Ta có $f'(x)=\dfrac{1}{x}-1=\dfrac{1-x}{x}$.
$f'(x)=0 \Rightarrow x=1$.
Bảng xét dấu $f'(x)$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	

Vậy hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(0;1)$ và nghịch biến trên khoảng $(1;+\infty)$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 84 (HSG Bắc Ninh 2019). Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=(x^2-2)\,\mathrm{e}^{2x}$ trên đoạn $[-1;2]$ bằng

(A) $2\mathrm{e}^4$. (B) $-\mathrm{e}^2$. (C) $2\mathrm{e}^2$. (D) $-2\mathrm{e}^2$.

Lời giải.

Ta có $f'(x)=2(x^2-2)\,\mathrm{e}^{2x}+2x\mathrm{e}^{2x}=2(x^2+x-2)\,\mathrm{e}^{2x}$.
$f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1\in[-1;2] \\ x=-2\notin[-1;2] \end{array}\right.$.
Và $f(-1)=-\mathrm{e}^{-2}$; $f(2)=2\mathrm{e}^4$; $f(1)=-\mathrm{e}^2$.
Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=(x^2-2)\,\mathrm{e}^{2x}$ trên đoạn $[-1;2]$ bằng $-\mathrm{e}^2$ tại $x=1$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 85. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=2^{x+1}-\dfrac{4}{3}\cdot 8^x$ trên $[-1;0]$ bằng

(A) $\dfrac{4}{9}$. (B) $\dfrac{5}{6}$. (C) $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$. (D) $\dfrac{2}{3}$.

Lời giải.

$y'=2^{x+1}\ln 2-\dfrac{4}{3}\cdot 8^x\ln 8=0 \Leftrightarrow 2^x-2\cdot(2^x)^3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2^x=0 \\ 2^x=\dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$.
Xét $y(-1)=\dfrac{5}{6}$; $y(-\dfrac{-1}{2})=0,9428$; $y(0)=\dfrac{2}{3}$. Ta có $y_{\min}=\dfrac{2}{3}$.
Chọn đáp án (D) □

BẢNG ĐÁP ÁN

1. C	2. C	3. B	4. B	5. C	6. A	7. A	8. A	9. C	10. B
11. D	12. B	13. A	14. C	15. C	16. D	17. B	18. B	19. B	20. C
21. A	22. B	23. A	24. C	25. D	26. A	27. B	28. D	29. D	30. A

31. B	32. B	33. C	34. C	35. A	36. A	37. D	38. A	39. D	40. C
41. B	42. B	43. B	44. D	45. D	46. D	47. B	48. D	49. A	50. B
51. A	52. A	53. C	54. A	55. B	56. D	57. A	58. C	59. C	60. C
61. C	62. D	63. C	64. A	65. B	66. B	67. D	68. A	69. D	70. A
71. A	72. B	73. C	74. C	75. C	76. B	77. B	78. B	79. B	80. C
81. C	82. A	83. A	84. B	85. D					

MỨC ĐỘ 2. MỨC ĐỘ 7,8 ĐIỂM

Dạng 1. Tìm tập xác định hàm số mũ - logarit

Câu 1 (Mã 105 2017). Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \log\left(x^2 - 2x - m + 1\right)$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.

(A) $m \leq 2$. (B) $m > 2$. (C) $m \geq 0$. (D) $m < 0$.

Lời giải.

Để hàm số có tập xác định $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $x^2 - 2x - m + 1 > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

$\Leftrightarrow \Delta' < 0 \Leftrightarrow (-1)^2 - 1 \cdot (-m + 1) < 0 \Leftrightarrow m < 0$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 2 (Mã 104 2017). Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \ln\left(x^2 - 2x + m + 1\right)$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.

(A) $0 < m < 3$. (B) $m < -1$ hoặc $m > 0$.

(C) $m > 0$. (D) $m = 0$.

Lời giải.

Hàm số có tập xác định $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi

$$x^2 - 2x + m + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 > 0 \,(\text{luôn đúng}) \\ \Delta' = 1 - (1 + m) < 0 \Leftrightarrow m > 0. \end{cases}$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 3. Hàm số $y = \ln\left(x^2 + mx + 1\right)$ xác định với mọi giá trị của x khi

(A) $\left[\begin{array}{l} m < -2 \\ m > 2 \end{array}\right.$. (B) $m > 2$. (C) $-2 < m < 2$. (D) $m < 2$.

Lời giải.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow x^2 + mx + 1 > 0$, $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow m^2 - 4 < 0 \Leftrightarrow -2 < m < 2$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 4 (THPT Cẩm Giàng 2 2019). Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = \dfrac{1}{m\log_3^2 x - 4\log_3 x + m + 3}$ xác định trên khoảng $(0; +\infty)$.

Ⓐ $m \in (-\infty; -4) \cup (1; +\infty)$.
Ⓑ $m \in (1; +\infty)$.
Ⓒ $m \in (-4; 1)$.
Ⓓ $m \in (1; +\infty)$.

Lời giải.

Cách 1

Điều kiện $x > 0$.

Hàm số xác định khi

$m\log_3^2 x - 4\log_3 x + m + 3 \neq 0 \Leftrightarrow m\left(\log_3^2 x + 1\right) \neq 4\log_3 x - 3 \Leftrightarrow m \neq \dfrac{4\log_3 x - 3}{\log_3^2 x + 1}, \forall x \in (0; +\infty)$.

Để hàm số xác định trên $(0; +\infty)$ thì phương trình $m = \dfrac{4\log_3 x - 3}{\log_3^2 x + 1}$ vô nghiệm $\forall x \in (0; +\infty)$

Xét hàm số $y = \dfrac{4\log_3 x - 3}{\log_3^2 x + 1}$.

Đặt $\log_3 x = t$ khi đó ta có $y = \dfrac{4t - 3}{t^2 + 1}$, $y' = \dfrac{-4t^2 + 6t + 4}{\left(t^2 + 1\right)^2} \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{-1}{2} \\ t = 2 \end{array}\right.$.

Ta có BBT

t	$-\infty$		$-\dfrac{1}{2}$		2		$+\infty$
y'			0	$+$	0		
y	0	$\searrow$	-4	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

Để hàm số xác định trên $(0; +\infty)$ thì $m \in (-\infty; -4) \cup (1; +\infty)$.

Cách 2

Để hàm số xác định trên khoảng $(0; +\infty)$ thì phương trình $m \cdot \log_3^2 x - 4\log_3 x + m + 3 = 0$ vô nghiệm.

Trường hợp 1: $m = 0$ thì PT trở thành $-4\log_3 x + 3 = 0 \Leftrightarrow \log_3 x = \dfrac{3}{4} \Leftrightarrow x = 3^{\frac{3}{4}}$.

Vậy $m = 0$ không thỏa mãn.

Trường hợp 2: $m \neq 0$ thì để PT vô nghiệm

$$\Delta = (-4)^2 - 4m(m+3) < 0 \Leftrightarrow -4m^2 - 12m + 16 < 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < -4 \\ m > 1. \end{array}\right.$$

Để hàm số xác định trên $(0; +\infty)$ thì $m \in (-\infty; -4) \cup (1; +\infty)$.

Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 5. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $y = \ln\left(-x^2 + mx + 2m + 1\right)$ xác định với mọi $x \in (1; 2)$.

Ⓐ $m \geq -\dfrac{1}{3}$.
Ⓑ $m \geq \dfrac{3}{4}$.
Ⓒ $m > \dfrac{3}{4}$.
Ⓓ $m < -\dfrac{1}{3}$.

Lời giải.

Hàm số xác định với mọi $x \in (1;2)$ khi $-x^2 + mx + 2m + 1 > 0$, $\forall x \in (1;2)$.

$\Leftrightarrow f(x) = x^2 - mx - 2m - 1 < 0$, $\forall x \in (1;2)$.

$\Rightarrow f(x) = 0$ có 2 nghiệm thỏa mãn $x_1 \leq 1 < 2 \leq x_2$.

$\Rightarrow \begin{cases} f(1) \leq 0 \\ f(2) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3m \leq 0 \\ -4m + 3 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq \dfrac{3}{4}$.

Chọn đáp án B □

Câu 6 (Chuyên Lê Quý Đôn Điện Biên - 2019).

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \log(x^2 - 4x - m + 1)$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.

Ⓐ $m > -4$. Ⓑ $m < 0$. Ⓒ $m < -4$. Ⓓ $m < -3$.

Lời giải.

Hàm số $y = \log(x^2 - 4x - m + 1)$ có tập xác định là $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi

$$x^2 - 4x - m + 1 > 0 \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta' < 0 \Leftrightarrow 4 + m - 1 < 0 \Leftrightarrow m < -3.$$

Chọn đáp án D □

Câu 7 (Chuyên Vĩnh Phúc 2019). Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m trên $[-2018; 2018]$ để hàm số $y = \ln(x^2 - 2x - m + 1)$ có tập xác định là $\mathbb{R}$?

Ⓐ 2019. Ⓑ 2017. Ⓒ 2018. Ⓓ 1009.

Lời giải.

Hàm số $y = \ln(x^2 - 2x - m + 1)$ có tập xác định là $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi

$$x^2 - 2x - m + 1 > 0 \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta' < 0 \Leftrightarrow 1 + m - 1 < 0 \Leftrightarrow m < 0.$$

Kết hợp với điều kiện m nguyên thuộc $[-2018; 2018]$ ta có 2018 giá trị của m.

Chọn đáp án C □

Câu 8 (THPT Nghĩa Hưng Nđ - 2019).

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \log(x^2 - 2mx + 4)$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.

Ⓐ $-2 \leq m \leq 2$. Ⓑ $m = 2$. Ⓒ $\left[\begin{array}{l} m > 2 \\ m < -2 \end{array}\right.$. Ⓓ $-2 < m < 2$.

Lời giải.

Xét hàm số $y = \log(x^2 - 2mx + 4)$.

Điều kiện xác định của hàm số trên $x^2 - 2mx + 4 > 0$.

Để tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$ thì $\begin{cases} a > 0 \\ \Delta' < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 > 0, \forall m \\ m^2 - 4 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow -2 < m < 2$.

Vậy đáp án đúng là đáp án D.

Chọn đáp án D □

Câu 9. Số các giá trị nguyên của tham số m để hàm số$y = \log(mx - m + 2)$ xác định trên $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$ là

(A) 4. (B) 5. (C) Vô số. (D) 3.

Lời giải.

Điều kiện xác định

$mx - m + 2 > 0 \Leftrightarrow mx > m - 2$ (1)

Trường hợp 1: $m = 0$.

(1) $\Leftrightarrow 2 > 0$ (luôn đúng với $\forall x \in \left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$).

Trường hợp 2: $m > 0$.

(1) $\Leftrightarrow x > \dfrac{m-2}{m}$

Để hàm số$y = \log(mx - m + 2)$ xác định trên $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$ thì $\dfrac{m-2}{m} < \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow 0 < m < 4$.

Vì $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{1; 2; 3\}$.

Trường hợp 3: $m < 0$.

(1) $\Leftrightarrow x < \dfrac{m-2}{m}$.

Suy ra tập xác định của hàm số $y = \log(mx - m + 2)$ là $\mathscr{D} = \left(-\infty; \dfrac{m-2}{m}\right)$.

Do đó $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right) \not\subset \mathscr{D}$. Suy ra không có giá trị $m < 0$ nào thỏa yêu cầu bài toán.

Từ 3 trường hợp trên ta được $m \in \{0; 1; 2; 3\}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 10 (Gia Bình 2019). Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $y = \log_{2018}\left(2018^x - x - \dfrac{x^2}{2} - m\right)$ xác định với mọi giá trị x thuộc $[0; +\infty)$

(A) $m > 9$. (B) $m < 1$. (C) $0 < m < 1$. (D) $m < 2$.

Lời giải.

Hàm số đã cho xác định $\forall x \in [0; +\infty)$.

$\Leftrightarrow 2018^x - x - \dfrac{x^2}{2} - m > 0, \forall x \in [0; +\infty)$.

$\Leftrightarrow 2018^x - x - \dfrac{x^2}{2} > m, \forall x \in [0; +\infty)$.

YCBT $\Leftrightarrow m < \min\limits_{x \in [0; +\infty)} f(x)$.

Đặt $f(x) = 2018^x - x - \dfrac{x^2}{2}, x \in [0; +\infty)$.

$\Rightarrow f'(x) = 2018^x \ln(2018) - 1 - x$.

$\Rightarrow f''(x) = 2018^x (\ln 2018)^2 - 1 > 0, \forall x \in [0; +\infty)$.

Khi đó $f'(x)$ đồng biến trên $x \in [0; +\infty)$ và $f'(0) = \ln(2018) - 1 > 0$.

Suy ra $f(x)$ đồng biến trên $x \in [0; +\infty)$ và $f(0) = 1$.

Vậy $m < 1$ thì thỏa YCBT.

Chọn đáp án (B) □

Câu 11. Hàm số $y = \log_2(4^x - 2^x + m)$ có tập xác định là $\mathbb{R}$ thì

(A) $m \geq \dfrac{1}{4}$. (B) $m > 0$. (C) $m < \dfrac{1}{4}$. (D) $m > \dfrac{1}{4}$.

Lời giải.

Điều kiện xác định $4^x - 2^x + m > 0$

Hàm số đã cho có tập xác định là $\mathbb{R} \Leftrightarrow 4^x - 2^x + m > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow m > -4^x + 2^x, \forall x \in \mathbb{R}$ $(*)$.

Đặt $t = 2^x, (t > 0)$

Khi đó $(*)$ trở thành $m > -t^2 + t, \forall t > 0 \Leftrightarrow m > \max\limits_{(0;+\infty)} f(t)$ với $f(t) = -t^2 + t$, $t > 0$.

Ta có $f'(t) = -2t + 1$, $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{1}{2}$.

Bảng biến thiên của hàm số $f(t) = -t^2 + t, t > 0$.

t	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$	$-\infty$

Từ BBT ta thấy $\max\limits_{(0;+\infty)} f(t) = \dfrac{1}{4}$ đạt được khi $t = \dfrac{1}{2}$

Vậy $m > \max\limits_{(0;+\infty)} f(t) \Leftrightarrow m > \dfrac{1}{4}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 12 (Chuyên Bắc Ninh 2019). Tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = \dfrac{3x+5}{\log_{2018}(x^2 - 2x + m^2 - 4m + 5)}$ xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$ là

(A) $(-\infty; 1) \cup (3; +\infty)$. (B) $(1; 3) \setminus \{2\}$.

(C) $(-\infty; 1]$. (D) $[1; 3] \setminus \{2\}$.

Lời giải.

Xét hàm số $y = \dfrac{3x+5}{\log_{2018}(x^2 - 2x + m^2 - 4m + 5)}$

ĐKXĐ $\begin{cases} x^2 - 2x + m^2 - 4m + 5 > 0 \\ \log_{2018}\left(x^2 - 2x + m^2 - 4m + 5\right) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x + m^2 - 4m + 5 > 0 \\ x^2 - 2x + m^2 - 4m + 5 \neq 1 \end{cases}$.

Nên điều kiện để hàm số xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$ là $\begin{cases} x^2 - 2x + m^2 - 4m + 5 > 0 \\ x^2 - 2x + m^2 - 4m + 4 \neq 0 \end{cases}$ với $\forall x \in \mathbb{R}$.

Điều này xảy ra khi và chỉ khi:

$\begin{cases} \Delta_1' = 1 - \left(m^2 - 4m + 5\right) < 0 \\ \Delta_2' = 1 - \left(m^2 - 4m + 4\right) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -m^2 + 4m - 4 < 0 \\ -m^2 + 4m - 3 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow -m^2 + 4m - 3 < 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < 1 \\ m > 3 \end{array}\right.$.

Vậy $m \in (-\infty; 1) \cup (3; +\infty)$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 13. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \log_{2018}\left(2017^x - x - \dfrac{x^2}{2} - m + 1\right)$ xác định với mọi x thuộc $[0; +\infty)$?

Ⓐ 1. Ⓑ 2. Ⓒ 2018. Ⓓ Vô số.

Lời giải.

Điều kiện $2017^x - x - \dfrac{x^2}{2} - m + 1 > 0, \forall x \in [0; +\infty) \Leftrightarrow 2017^x - x - \dfrac{x^2}{2} > m - 1, \forall x \in [0; +\infty)$.

Xét hàm số $f(x) = 2017^x - x - \dfrac{x^2}{2}, \forall x \in [0; +\infty)$ liên tục có

$f'(x) = 2017^x \ln 2017 - 1 - x, \forall x \in [0; +\infty)$.

$f''(x) = 2017^x \ln^2 2017 - 1 > 0, \forall x \in [0; +\infty)$.

Vậy hàm số $f'(x)$ đồng biến trên $[0; +\infty)$ suy ra $f'(x) \geq f'(0) = \ln 2017 - 1 > 0, \forall x \in [0; +\infty)$.

Vậy hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $[0; +\infty)$ suy ra $\min\limits_{[0;+\infty)} f(x) = f(0) = 1$.

Mặt khác $m - 1 < \min\limits_{[0;+\infty)} f(x) = f(0) = 1 \Leftrightarrow m < 2$.

Vậy có vô số giá trị nguyên m thỏa mãn.

Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 14 (Sở Vĩnh Phúc 2019). Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y = \dfrac{1}{\sqrt{2m + 1 - x}} + \log_3 \sqrt{x - m}$ xác định trên khoảng $(2; 3)$?

Ⓐ 1. Ⓑ 2. Ⓒ 4. Ⓓ 3.

Lời giải.

Hàm số xác định $\Leftrightarrow \begin{cases} 2m + 1 - x > 0 \\ x - m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 2m + 1 \\ x > m \end{cases} \Rightarrow \mathscr{D} = (m; 2m + 1)$.

Hàm số đã cho xác định trên khoảng $(2; 3)$ nên $(2; 3) \subset \mathscr{D} = (m; 2m + 1) \Leftrightarrow m \leq 2 < 3 \leq 2m + 1$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 2 \\ 2m + 1 \geq 3 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leq m \leq 2$.

Vì m nguyên dương nên $m \in \{1; 2\}$.

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 15 (Chuyên Vĩnh Phúc - 2020).

Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = \log_{2020}(mx - m + 2)$ xác định trên $[1; +\infty)$.

Ⓐ $m \leq 0$. Ⓑ $m \geq 0$. Ⓒ $m \geq -1$. Ⓓ $m \leq -1$.

Lời giải.

Cách 1

Điều kiện: $mx - m + 2 > 0 \Leftrightarrow mx > m - 2$ (1)

Trường hợp 1 $m = 0 \Rightarrow$ (1) trở thành $0 > -1$ (luôn thỏa mãn).

Trường hợp 2 $m > 0 \Rightarrow (1) \Leftrightarrow x > \dfrac{m - 2}{m} \Rightarrow$ Tập xác định của hàm số là $\mathscr{D} = \left(\dfrac{m - 2}{m}; +\infty\right)$.

Khi đó, yêu cầu bài toán trở thành $\dfrac{m - 2}{m} < 1 \Leftrightarrow m - 2 < m \Leftrightarrow -2 < 0$ (luôn thỏa mãn).

Trường hợp 3 $m < 0 \Rightarrow (1) \Leftrightarrow x < \dfrac{m - 2}{m} \Rightarrow$ Tập xác định của hàm số là $\mathscr{D} = \left(-\infty; \dfrac{m - 2}{m}\right)$.

Do đó không tồn tại m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Vậy tất cả các giá trị cần tìm là $m \geq 0$.

Cách 2

Điều kiện $mx - m + 2 > 0, \forall x \in [1; +\infty) \Leftrightarrow m(x-1) > -2, \forall x \in [1; +\infty)$ (1).

Với $x = 1$, ta được $0m > -2$, đúng với mọi m.

Với $x > 1$, ta được (1) $\Leftrightarrow m > \dfrac{-2}{x-1}, \forall x \in (1; +\infty)$ (2).

Xét hàm số $g(x) = \dfrac{-2}{x-1}$ với $x > 1$, ta có: $g'(x) = \dfrac{2}{(x-1)^2} > 0, \forall x > 1$.

Bảng biến thiên

x	1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\nearrow$	0

Từ bảng biến thiên, ta được (2) $\Leftrightarrow m \geq 0$.

Vậy, tất cả các giá trị cần tìm của m là $m \geq 0$.

Chọn đáp án B □

Câu 16 (Chuyên Lương Thế Vinh Đồng Nai 2019). Tập xác định của hàm số $y = \log_{2020}\left(\log_{2019}\left(\log_{2018}\left(\log_{2017} x\right)\right)\right)$ là $\mathscr{D} = (a; +\infty)$. Giá trị của a bằng

(A) 2018^{2019}. (B) 2019^{2020}. (C) 2017^{2018}. (D) 0.

Lời giải.

Điều kiện xác định của hàm số đã cho là:

$$\begin{cases} x > 0 \\ \log_{2017} x > 0 \\ \log_{2018}\left(\log_{2017} x\right) > 0 \\ \log_{2019}\left(\log_{2018}\left(\log_{2017} x\right)\right) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \log_{2017} x > 0 \\ \log_{2018}\left(\log_{2017} x\right) > 0 \\ \log_{2018}\left(\log_{2017} x\right) > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \log_{2017} x > 0 \\ \log_{2018}\left(\log_{2017} x\right) > 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \log_{2017} x > 0 \\ \log_{2017} x > 2018 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \log_{2017} x > 2018 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x > 2017^{2018} \end{cases} \Leftrightarrow x > 2017^{2018}.$$

Chọn đáp án C □

Dạng 2. Tính đạo hàm mũ – logarit

Câu 17 (Đề Tham Khảo 2017). Cho hàm số $y = \dfrac{\ln x}{x}$, mệnh đề nào dưới đây đúng?

(A) $2y' + xy'' = -\dfrac{1}{x^2}$. (B) $y' + xy'' = \dfrac{1}{x^2}$. (C) $y' + xy'' = -\dfrac{1}{x^2}$. (D) $2y' + xy'' = \dfrac{1}{x^2}$.

Lời giải.

Cách 1. Ta có $y' = \dfrac{(\ln x)' \cdot x - x' \cdot \ln x}{x^2} = \dfrac{\dfrac{1}{x} \cdot x - \ln x}{x^2} = \dfrac{1 - \ln x}{x^2}$

$$\begin{aligned} y'' &= \frac{(1-\ln x)'\cdot x^2-(x^2)'(1-\ln x)}{x^4}\\ &= \frac{-\dfrac{1}{x}\cdot x^2-2x(1-\ln x)}{x^4}\\ &= \frac{-x-2x(1-\ln x)}{x^4}\\ &= -\frac{1+2(1-\ln x)}{x^3}\\ &= -\frac{3-2\ln x}{x^3}. \end{aligned}$$

Suy ra $2y'+xy''=2\cdot\dfrac{1-\ln x}{x^2}-x\cdot\dfrac{3-2\ln x}{x^3}=\dfrac{2-2\ln x-3+2\ln x}{x^2}=-\dfrac{1}{x^2}$.

Cách 2. Ta có $xy=\ln x$, lấy đạo hàm hai vế, ta được $y+xy'=\dfrac{1}{x}$.

Tiếp tục lấy đạo hàm hai vế của biểu thức trên, ta được $y'+y'+xy''=-\dfrac{1}{x^2}$, hay $2y'+xy''=-\dfrac{1}{x^2}$.

Chọn đáp án A □

Câu 18 (Chuyên Bắc Giang 2019). Cho hàm số $f(x)=\ln 2018+\ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$. Tính $S=f'(1)+f'(2)+f'(3)+\cdots+f'(2017)$.

A $S=\dfrac{4035}{2018}$. B $S=\dfrac{2017}{2018}$. C $S=\dfrac{2016}{2017}$. D $S=2017$.

Lời giải.

Ta có $f(x)=\ln 2018+\ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right)\Rightarrow f'(x)=\dfrac{1}{x(x+1)}=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}$

Do đó $S=\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}+\ldots+\dfrac{1}{2017}-\dfrac{1}{2018}=1-\dfrac{1}{2018}=\dfrac{2017}{2018}$.

Chọn đáp án B □

Câu 19 (Sở Vĩnh Phúc 2019). Cho hàm số $f(x)=\ln\dfrac{2018x}{x+1}$. Tính tổng $S=f'(1)+f'(2)+\ldots+f'(2018)$.

A $\ln 2018$. B 1. C 2018. D $\dfrac{2018}{2019}$.

Lời giải.

Ta có $f'(x)=\left(\ln\dfrac{2018x}{x+1}\right)'=\dfrac{1}{\dfrac{2018x}{x+1}}\cdot\left(\dfrac{2018x}{x+1}\right)'=\dfrac{x+1}{2018x}\cdot\dfrac{2018}{(x+1)^2}=\dfrac{1}{x\cdot(x+1)}$.

Vậy

$$\begin{aligned} S &= f'(1)+f'(2)+\ldots+f'(2018)\\ &= \frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{2018\cdot 2019}\\ &= \frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2018}-\frac{1}{2019}\\ &= 1-\frac{1}{2019}=\frac{2018}{2019}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án D □

Câu 20. Cho hàm $y=x[\cos(\ln x)+\sin(\ln x)]$. Khẳng định nào sau đây đúng?

Ⓐ $x^2y''+xy'-2y+4=0$.
Ⓑ $x^2y''-xy'-2xy=0$.
Ⓒ $2x^2y'+xy''+2y-5=0$.
Ⓓ $x^2y''-xy'+2y=0$.

Lời giải.

Ta có $y=x\left[\cos\left(\ln x\right)+\sin\left(\ln x\right)\right]$

$y'=\cos\left(\ln x\right)+\sin\left(\ln x\right)-\sin\left(\ln x\right)+\cos\left(\ln x\right)=2\cos\left(\ln x\right)$

$y''=-\dfrac{2}{x}\sin\left(\ln x\right)$.

Từ đó kiểm tra thấy đáp án D đúng vì

$x^2y''-xy'+2y=y''=-2x\sin\left(\ln x\right)-2x\cos\left(\ln x\right)+2x\left[\cos\left(\ln x\right)+\sin\left(\ln x\right)\right]=0$.

Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 21 (THPT Bạch Đằng Quảng Ninh 2019).

Tính đạo hàm của hàm số $y=\log_{2019}|x|, \forall x\neq 0$.

Ⓐ $y'=\dfrac{1}{|x|\ln 2019}$.
Ⓑ $y'=\dfrac{1}{|x|}$.
Ⓒ $y'=\dfrac{1}{x\ln 2019}$.
Ⓓ $y'=x\ln 2019$.

Lời giải.

$$y=\log_{2019}|x|=\begin{cases}\log_{2019}x, & \text{khi } x>0\\ \log_{2019}\left(-x\right), & \text{khi } x<0.\end{cases}$$

$$y'=\begin{cases}\dfrac{1}{x\ln 2019}, & \text{khi } x>0\\ \dfrac{-1}{(-x)\ln 2019}, & \text{khi } x<0\end{cases}\Rightarrow y'=\dfrac{1}{x\ln 2019}.$$

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 22 (THPT An Lão Hải Phòng 2019).

Cho hàm số $f(x)=\mathrm{e}^{x-x^2}$. Biết phương trình $f''(x)=0$ có hai nghiệm x_1, x_2. Tính $x_1\cdot x_2$.

Ⓐ $x_1\cdot x_2=-\dfrac{1}{4}$.
Ⓑ $x_1\cdot x_2=1$.
Ⓒ $x_1\cdot x_2=\dfrac{3}{4}$.
Ⓓ $x_1\cdot x_2=0$.

Lời giải.

Ta có $f'(x)=\left(1-2x\right)\mathrm{e}^{x-x^2}$.

$f''(x)=-2\mathrm{e}^{x-x^2}+\left(1-2x\right)\left(1-2x\right)\mathrm{e}^{x-x^2}=\left(-1-4x+4x^2\right)\mathrm{e}^{x-x^2}$

$f''(x)=0\Leftrightarrow\left(-1-4x+4x^2\right)\mathrm{e}^{x-x^2}=0\Leftrightarrow -1-4x+4x^2=0$ khi đó $x_1x_2=\dfrac{c}{a}=-\dfrac{1}{4}$.

Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 23 (Sở Bắc Ninh - 2020). Cho hàm số $f(x)=\ln\left(\dfrac{x}{x+2}\right)$. Tổng $f'(1)+f'(3)+f'(5)+\ldots+f'\left(2021\right)$ bằng

Ⓐ $\dfrac{4035}{2021}$.
Ⓑ $\dfrac{2021}{2022}$.
Ⓒ 2021.
Ⓓ $\dfrac{2022}{2023}$.

Lời giải.

Ta có $f(x)=\ln\left(\dfrac{x}{x+2}\right)\Rightarrow f'(x)=\dfrac{2}{x\left(x+2\right)}=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+2}$.

Vậy

$$\begin{aligned} & f'(1)+f'(3)+f'(5)+\ldots+f'(2021) \\ = & \frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{2021}-\frac{1}{2023} \\ = & 1-\frac{1}{2023}=\frac{2022}{2023}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án D □

Câu 24 (Kiểm tra năng lực - ĐH-Quốc Tế - 2019).
Phương trình $f'(x)=0$ với $f(x)=\ln\left(x^4-4x^3+4x^2-\frac{1}{2}\right)$ có bao nhiêu nghiệm?

A 0 nghiệm. B 1 nghiệm. C 2 nghiệm. D 3 nghiệm.

Lời giải.

Điều kiện $x^4-4x^3+4x^2-\frac{1}{2}>0$.

Ta có $f'(x)=\dfrac{4x^3-12x^2+8x}{x^4-4x^3+4x^2-\frac{1}{2}} \Rightarrow f'(x)=0 \Leftrightarrow 4x^3-12x^2+8x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \\ x=2. \end{array}\right.$

Đối chiếu điều kiện ta được $x=1$.

Vậy phương trình $f'(x)=0$ có 1 nghiệm.

Chọn đáp án B □

Câu 25. Cho hàm số $f(x)=\ln\dfrac{x+1}{x+4}$. Tính giá trị của biểu thức $P=f'(0)+f'(3)+f'(6)+\ldots+f'(2019)$.

A $\dfrac{1}{4}$. B $\dfrac{2024}{2023}$. C $\dfrac{2022}{2023}$. D $\dfrac{2020}{2023}$.

Lời giải.

Với $x\in[0;+\infty)$ta có $x+1>0$ và $x+4>0$ nên $f(x)=\ln\dfrac{x+1}{x+4}=\ln(x+1)-\ln(x+4)$.

Từ đó $f'(x)=\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x+4}$.

Do đó

$$\begin{aligned} P &= f'(0)+f'(3)+f'(6)+\ldots+f'(2019) \\ &= \left(1-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{10}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{2020}-\frac{1}{2023}\right) \\ &= 1-\frac{1}{2023}=\frac{2022}{2023}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án C □

Câu 26 (THPT Minh Khai - 2019). Cho hàm số $y=f(x)=(2m-1)\,\mathrm{e}^x+3$. Giá trị của m để $f'(-\ln 3)=\dfrac{5}{3}$ là

A $m=\dfrac{7}{9}$. B $m=\dfrac{2}{9}$. C $m=3$. D $m=-\dfrac{3}{2}$.

Lời giải.

$f'(x) = (2m-1)\,\mathrm{e}^{x}$.

$\Rightarrow f'(-\ln 3) = (2m-1)\,\mathrm{e}^{-\ln 3} = \dfrac{2m-1}{\mathrm{e}^{\ln 3}} = \dfrac{2m-1}{3}$.

$f'(-\ln 3) = \dfrac{5}{3} \Leftrightarrow \dfrac{2m-1}{3} = \dfrac{5}{3} \Leftrightarrow m = 3$.

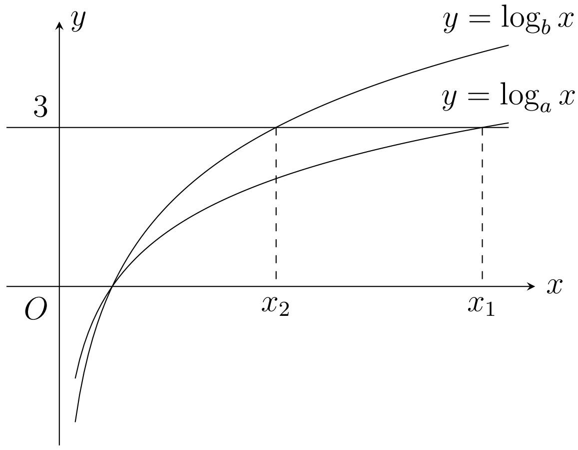
Chọn đáp án C □

Dạng 3. Khảo sát hàm số mũ, logarit

Câu 27 (Mã 103 - 2020 Lần 2).

Hàm số $y = \log_a x$ và $y = \log_b x$ có đồ thị như hình bên. Đường thẳng $y = 3$ cắt hai đồ thị tại các điểm có hoành độ là x_1; x_2. Biết rằng $x_1 = 2x_2$. Giá trị của $\dfrac{a}{b}$ bằng

A. $\dfrac{1}{3}$.　　B. $\sqrt{3}$.　　C. 2.　　D. $\sqrt[3]{2}$.



Lời giải.

Xét phương trình hoành độ giao điểm $\log_a x = 3 \Leftrightarrow x_1 = a^3$, và $\log_b x = 3 \Leftrightarrow x_2 = b^3$.

Ta có $x_1 = 2x_2 \Leftrightarrow a^3 = 2b^3 \Leftrightarrow \left(\dfrac{a}{b}\right)^3 = 2 \Leftrightarrow \dfrac{a}{b} = \sqrt[3]{2}$.

Chọn đáp án D □

Câu 28. Tìm tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \ln(x^2+1) - mx + 1$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.

A. $[1; +\infty)$.　　B. $(-\infty; -1)$.　　C. $[-1; 1]$.　　D. $(-\infty; -1]$.

Lời giải.

Ta có $y' = \dfrac{2x}{x^2+1} - m$.

Hàm số $y = \ln(x^2+1) - mx + 1$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$

$$\Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in (-\infty; +\infty) \Leftrightarrow g(x) = \frac{2x}{x^2+1} \geq m, \forall x \in (-\infty; +\infty).$$

Ta có $g'(x) = \dfrac{-2x^2+2}{(x^2+1)^2} = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	0	↘	-1	↗	1	↘	0

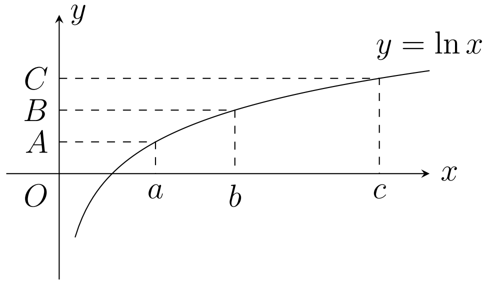
Dựa vào bảng biến thiên ta có: $g(x) = \dfrac{2x}{x^2+1} \geq m, \forall x \in (-\infty; +\infty) \Leftrightarrow m \leq -1$.

Chọn đáp án D □

Câu 29 (Chuyên ĐHSP Hà Nội 2019).

Trong hình dưới đây, điểm B là trung điểm của đoạn thẳng AC. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A $a + c = 2b$.
B $ac = b^2$.
C $ac = 2b^2$.
D $ac = b$.



Lời giải.

Ta có $A\,(0; \ln a)$, $B\,(0; \ln b)$, $C\,(0; \ln c)$ và B là trung điểm của AC nên

$$\ln a + \ln c = 2\ln b \Leftrightarrow \ln(ac) = \ln b^2 \Leftrightarrow ac = b^2.$$

Vậy $ac = b^2$.

Chọn đáp án B □

Câu 30. Cho các số thực a, b sao cho $0 < a$, $b \neq 1$, biết rằng đồ thị các hàm số $y = a^x$ và $y = \log_b x$ cắt nhau tại điểm $M\left(\sqrt{2018}; \sqrt[5]{2019^{-1}}\right)$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A $a > 1, b > 1$.
B $a > 1, 0 < b < 1$.
C $0 < a < 1, b > 1$.
D $0 < a < 1, 0 < b < 1$.

Lời giải.

Vì $M\left(\sqrt{2018}; \sqrt[5]{2019^{-1}}\right)$ thuộc đồ thị hàm số $y = a^x$ nên ta có

$$a^{\sqrt{2018}} = \sqrt[5]{2019^{-1}} = \frac{1}{\sqrt[5]{2019}} < 1 = a^0 \Rightarrow 0 < a < 1.$$

Vì $M\left(\sqrt{2018}; \sqrt[5]{2019^{-1}}\right)$ thuộc đồ thị hàm số $y = \log_b x$ nên ta có

$$\log_b \sqrt{2018} = \sqrt[5]{2019^{-1}} \Rightarrow b^{\frac{1}{\sqrt[5]{2019}}} = \sqrt{2018} > 1 = b^0 \Rightarrow b > 1.$$

Vậy $0 < a < 1$, $b > 1$.

Chọn đáp án C □

Câu 31 (Sở Hà Nội 2019). Tập tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = \ln(x^2+1) - mx + 1$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ là

A $[-1; 1]$.
B $(-\infty; -1)$.
C $(-1; 1)$.
D $(-\infty; -1]$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = \dfrac{2x}{x^2+1} - m = \dfrac{-mx^2 + 2x - m}{x^2+1}$

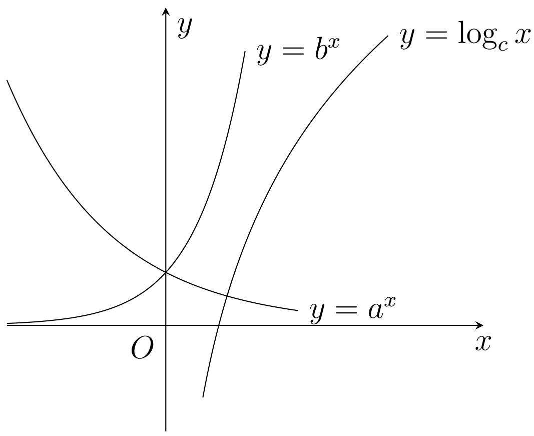
Để hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ điều kiện là

$$y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow -mx^2 + 2x - m \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} -m > 0 \\ \Delta' = 1 - m^2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \in (-\infty; -1].$$

Chọn đáp án D □

Câu 32 (THPT Đông Sơn Thanh Hóa 2019).

Trong hình vẽ bên có đồ thị các hàm số $y = a^x$, $y = b^x$, $y = \log_c x$. Hãy chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau đây?



A. $a < c < b$.
B. $c < a < b$.
C. $a < b = c$.
D. $b < c < a$.

Lời giải.

Dựa vào đồ thị các hàm số $y = a^x$, $y = b^x$, $y = \log_c x$, ta có

Hàm số $y = a^x$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ nên ta có $0 < a < 1$ (1)

Các hàm số $y = b^x$, $y = \log_c x$ đồng biến trên tập xác định của nó nên ta có $\begin{cases} b > 1 \\ c > 1 \end{cases}$ (2)

Từ (1), (2) $\Rightarrow \begin{cases} a < b \\ a < c. \end{cases}$

Nếu $b = c$ thì ta có đồ thị hai hàm số ! đối xứng nhau qua đường thẳng $y = x$.

Tuy nhiên nhìn hình dáng hai đồ thị hàm số $y = b^x$, $y = \log_b x$ không có tính chất đối xứng nhau qua đường thẳng $y = x$.

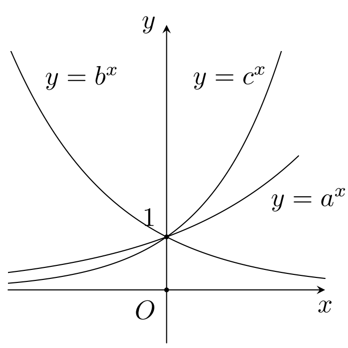
Vậy $a < c < b$.

Chọn đáp án A □

Câu 33 (Lương Thế Vinh Hà Nội 2019).

Cho đồ thị của ba hàm số $y = a^x$, $y = b^x$, $y = c^x$ như hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây đúng?

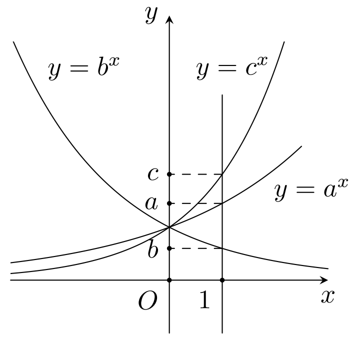
A. $b > a > c$. B. $a > c > b$. C. $c > a > b$. D. $c > b > a$.



Lời giải.

Kẻ đường thẳng $x = 1$, đường thẳng này cắt đồ thị $y = b^x$, $y = a^x$, $y = c^x$ lần lượt tại các điểm có tung độ b, a, c.

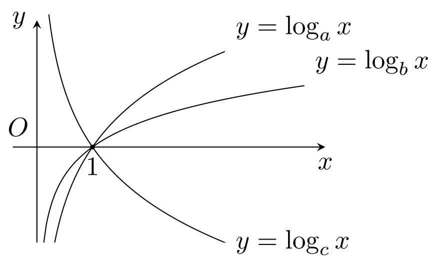
Dựa vào đồ thị ta có $b < a < c$.



Chọn đáp án (C) □

Câu 34 (KTNL GV THPT Lý Thái Tổ 2019).

Cho a, b, c là các số thực dương khác 1. Hình vẽ bên là đồ thị của hàm số $y = \log_a x$, $y = \log_b x$, $y = \log_c x$. Khẳng định nào sau đây đúng?



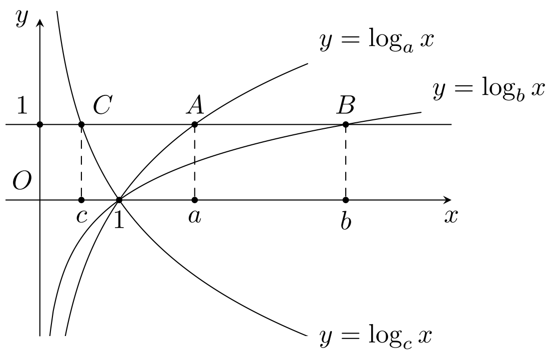
(A) $c < b < a$. (B) $c < a < b$.

(C) $a < c < b$. (D) $a < b < c$.

Lời giải.

Kẻ đường thẳng $y = 1$ cắt đồ thị hàm số $y = \log_a x$, $y = \log_b x$ và $y = \log_c x$ lần lượt tại A, B và C.

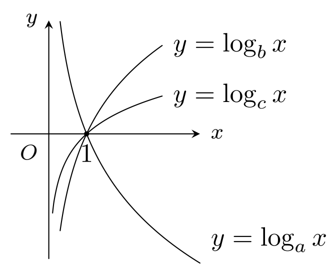
Từ đồ thị, ta thấy $c < a < b$.



Chọn đáp án (B) □

Câu 35 (Chuyên Thái Bình 2019).

Cho a, b, c là các số thực dương khác 1. Hình vẽ bên là đồ thị hàm số $y = \log_a x$, $y = y = \log_b x$, $y = \log_c x$. Khẳng định nào sau đây là đúng?



(A) $a < b < c$. (B) $a < c < b$. (C) $b < a < c$. (D) $b > a > c$.

Lời giải.

Do $y = \log_b x$ và $y = \log_c x$ là hai hàm đồng biến nên b, $c > 1$.

Do $y = \log_a x$ nghịch biến nên $0 < a < 1$.

Mặt khác lấy $y = m$, khi đó tồn tại x_1, $x_2 > 0$ để $\begin{cases} \log_b x_1 = m \\ \log_c x_2 = m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b^m = x_1 \\ c^m = x_2. \end{cases}$

Dễ thấy $x_1 < x_2 \Rightarrow b^m < c^m \Rightarrow b < c$.

Vậy $a < b < c$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 36 (THPT Nguyễn Khuyến 2019).
Cho hàm số $y=\dfrac{\ln x-6}{\ln x-2m}$ với m là tham số. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên dương của m để hàm số đồng biến trên khoảng $(1;e)$. Tìm số phần tử của S.

(A) 3. (B) 1. (C) 2. (D) 4.

Lời giải.

Điều kiện $\ln x \neq 2m \Leftrightarrow x \neq e^{2m}$.

Có $y'=\dfrac{6-2m}{x(\ln x-2m)^2}$

Hàm số đồng biến trên $(1;e) \Leftrightarrow y'>0, \forall x\in(1;e) \Leftrightarrow \dfrac{6-2m}{x(\ln x-2m)^2}>0, \forall x\in(1;e)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6-2m>0 \\ e^{2m}\notin(1;e)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6-2m>0 \\ \left[\begin{array}{l} e^{2m}\leq 1 \\ e^{2m}\geq e\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<3 \\ \left[\begin{array}{l} m\leq 0 \\ m\geq \dfrac{1}{2}\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m\leq 0 \\ \dfrac{1}{2}\leq m<3.\end{array}\right.$$

Do m nguyên dương nên $m\in\{1;2\}$.

Vậy tập S có 2 phần tử.

Chọn đáp án (C) □

Câu 37. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\dfrac{m\log_2 x-2}{\log_2 x-m-1}$ nghịch biến trên $(4;+\infty)$

(A) $m<-2$ hoặc $m>1$. (B) $m\leq -2$ hoặc $m=1$.

(C) $m<-2$ hoặc $m=1$. (D) $m<-2$.

Lời giải.

Đặt $t=\log_2 x$.

Ta có $x\in(4;+\infty)\Leftrightarrow t\in(2;+\infty)$.

Hàm số được viết lại $y=\dfrac{mt-2}{t-m-1}$ (1).

Vì $t=\log_2 x$ đồng biến trên $(0;+\infty)$ nên yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ (1) nghịch biến trên $(2;+\infty)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -m(m+1)+2<0 \\ m+1\leq 2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m<-2 \\ m>1\end{array}\right. \\ m\leq 1\end{cases} \Leftrightarrow m<-2.$$

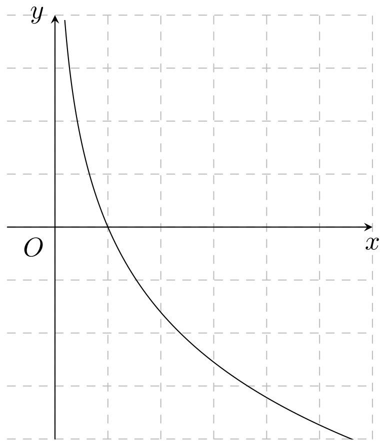
Chọn đáp án (D) □

Câu 38 (HSG Bắc Ninh 2019). Cho hàm số $y=\log_{2018}\left(\dfrac{1}{x}\right)$ có đồ thị (C_1) và hàm số $y=f(x)$ có đồ thị (C_2). Biết (C_1) và (C_2) đối xứng nhanh qua gốc tọa độ. Hỏi hàm số $y=|f(x)|$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

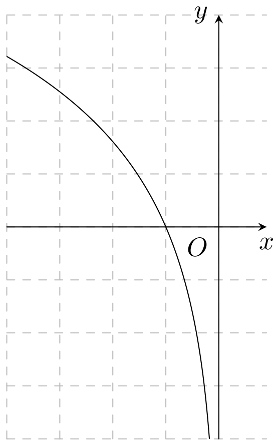
(A) $(0;1)$. (B) $(-1;0)$. (C) $(-\infty;-1)$. (D) $(1;+\infty)$.

Lời giải.

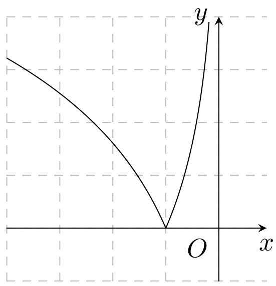
Ta có $y=\log_{2018}\left(\dfrac{1}{x}\right)$ thì $y'=-\dfrac{1}{x^2}\dfrac{1}{x\ln 2018}<0$ hàm số nghịch biến ta vẽ được đồ thị hàm số (C_1) như hình



Do (C_2) đối xứng với (C_1) qua O nên có dạng như hình dưới



Từ đó đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ là



Dựa vào đồ thị trên ta có hàm số $y = |f(x)|$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$.

Chọn đáp án C □

Câu 39 (THPT Bạch Đằng Quảng Ninh 2019).

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-2019; 2019]$ để hàm số $y = \dfrac{\ln x - 6}{\ln x - 3m}$ đồng biến trên khoảng $(1; e^6)$?

A 2020. B 2021. C 2018. D 2019.

Lời giải.

Đặt $t = \ln x$.

Khi đó hàm số $y = \dfrac{\ln x - 6}{\ln x - 3m}$ đồng biến trên khoảng $(1; e^6)$ thì hàm số $y(t) = \dfrac{t - 6}{t - 3m}$ đồng biến trên khoảng $(0; 6)$.

Ta có $y'(t)=\dfrac{-3m+6}{(t-3m)^2}$

Để hàm số $y(t)$ đồng biến trên khoảng $(0;6)$ thì

$$\begin{cases} -3m+6>0 \\ 3m\notin(0;6)\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m<2 \\ \left[\begin{array}{l} m\le 0 \Rightarrow m\le 0 \xrightarrow[m\in[-201;2019]]{m\in\mathbb{Z}} m\in\{-2019;-2018;\ldots;-1;0\}. \\ m\ge 2\end{array}\right.\end{cases}$$

Vậy có tất cả 2020 số nguyên m thoả mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án (A) □

Câu 40 (Chuyên Hưng Yên 2019). Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số thực m thuộc đoạn $[-2018;2018]$ để hàm số $y=f(x)=(x+1)\ln x+(2-m)x$ đồng biến trên khoảng $(0;\mathrm{e}^2)$.

(A) 2016. (B) 2022. (C) 2014. (D) 2023.

Lời giải.

Ta có $y'=f'(x)=\ln x+\dfrac{x+1}{x}+2-m$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow f'(x)=\ln x+\dfrac{1}{x}+3-m\ge 0\Leftrightarrow \ln x+\dfrac{1}{x}+3\ge m;\ \forall x\in(0;\mathrm{e}^2)$.

Xét hàm số $g(x)=\ln x+\dfrac{1}{x}+3$ với $x\in(0;\mathrm{e}^2)$.

Ta có $g'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}=0\Leftrightarrow x=1$.

Bảng biến thiên

x	0		1		e^2
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)$	$\searrow$	4	$\nearrow$	$5+\dfrac{1}{\mathrm{e}^2}$

Dựa vào bảng biến thiên suy ra $g(x)\ge 4$ với mọi $x\in(0;\mathrm{e}^2)$.

Từ đó suy ra $-2018\le m\le 4$.

Vậy có 2023 giá trị của m thỏa mãn.

Chọn đáp án (D) □

Câu 41 (THPT Quang Trung Đống Đa Hà Nội 2019).

Cho $f(x)=a\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)+b\sin x+6$ với $a,\ b\in\mathbb{R}$. Biết rằng $f(\log(\log e))=2$. Tính giá trị của $f(\log(\ln 10))$.

(A) 10. (B) 2. (C) 4. (D) 8.

Lời giải.

Ta có $\log(\log\mathrm{e})+\log(\ln 10)=\log 1=0$.

Mặt khác $f(x)+f(-x)=a\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)+b\sin x+6+a\ln\left(-x+\sqrt{x^2+1}\right)+b\sin(-x)+6$

$=a\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(-x+\sqrt{x^2+1}\right)+b\sin x-b\sin x+12$

$= a\ln 1 + 12 = 12 \forall x \in \mathbb{R}$.

Khi đó suy ra $f(\log(\log e)) + f(\log(\ln 10)) = 12 \Rightarrow f(\log(\ln 10)) = 10$.

Chọn đáp án (A) □

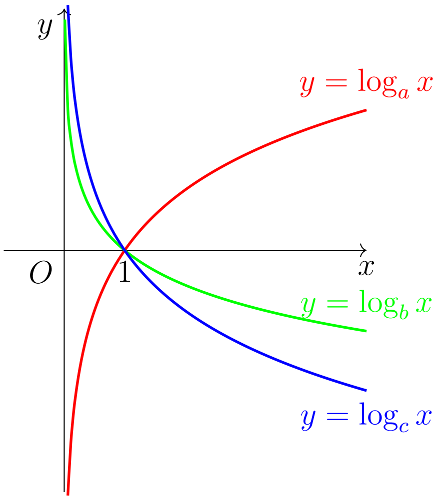
Câu 42 (Sở Bắc Ninh 2019).

Cho a, b, c dương và khác 1. Đồ thị các hàm số $y = \log_a x$, $y = \log_b x$, $y = \log_c x$ như hình vẽ.

Khẳng định nào dưới đây đúng?

(A) $a > c > b$. (B) $a > b > c$.

(C) $c > b > a$. (D) $b > c > a$.



Lời giải.

Dựa vào đồ thị ta thấy đồ thị hàm số $y = \log_a x$ đồng biến trên tập xác định nên $a > 1$.

Đồ thị hàm số $y = \log_b x$ và $y = \log_c x$ nghịch biến trên tập xác định nên $0 < b < 1$, $0 < c < 1$.

Suy ra $a > b$ và $a > c$.

Mặt khác với $x > 1$ ta có $\log_b x > \log_c x \Rightarrow b < c$.

Vậy $a > c > b$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 43. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ đối xứng với đồ thị hàm số $y = a^x$, $(a > 0, a \neq 1)$ qua điểm $I(1;1)$. Giá trị của biểu thức $f\left(2 + \log_a \dfrac{1}{2018}\right)$ bằng

(A) 2016. (B) -2016. (C) 2020. (D) -2020.

Lời giải.

Gọi (C) là đồ thị hàm số $y = a^x$; (C_1) là đồ thị hàm số $y = f(x)$.

$M\left(2 + \log_a \dfrac{1}{2018}; y_M\right) \in (C_1) \Leftrightarrow y_M = f\left(2 + \log_a \dfrac{1}{2018}\right)$.

Gọi N đối xứng với M qua $I(1;1) \Rightarrow N\left(-\log_a \dfrac{1}{2018}; 2 - y_M\right)$.

Do đồ thị (C_1) đối xứng (C) qua $I(1;1)$ nên $N\left(-\log_a \dfrac{1}{2018}; 2 - y_M\right) \in (C)$.

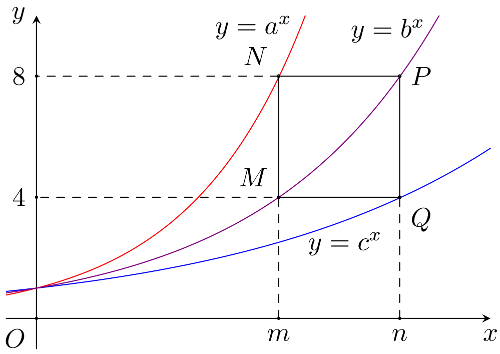
$N \in (C) \Leftrightarrow 2 - y_M = a^{-\log_a \frac{1}{2018}} \Leftrightarrow 2 - y_M = a^{\log_a 2018} \Leftrightarrow 2 - y_M = 2018 \Leftrightarrow y_M = -2016$.

Vậy $f\left(2 + \log_a \dfrac{1}{2018}\right) = -2016$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 44 (Chuyên Hùng Vương - Phú Thọ - 2020).

Trong hình vẽ bên các đường cong $(C_1): y = a^x$, $(C_2): y = b^x$, $(C_3): y = c^x$ và đường thẳng $y = 4$; $y = 8$ tạo thành hình vuông $MNPQ$ có cạnh bằng 4. Biết rằng $abc = 2^{\frac{x}{y}}$ với $x; y \in \mathbb{Z}^+$ và $\dfrac{x}{y}$ tối giản, giá trị của $x + y$ bằng



(A) 34. (B) 5. (C) 43. (D) 19.

Lời giải.

Giả sử hoành độ điểm M là m, ta suy ra $M(m;4); N(m;8); P(m+4;8); Q(m+4;4)$.

Từ giả thiết ta có M, P thuộc đường cong $y = b^x$ nên $\begin{cases} b^m = 4 \\ b^{m+4} = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^m = 4 \\ b^4 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 8 \\ b = 2^{\frac{1}{4}}. \end{cases}$

N, Q lần lượt thuộc đường cong $y = a^x$; $y = c^x$ nên $\begin{cases} a^8 = 8 \\ c^{12} = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^8 = 2^3 \\ c^{12} = 2^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2^{\frac{3}{8}} \\ c = 2^{\frac{1}{6}}. \end{cases}$

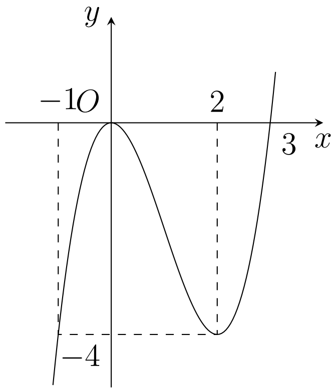
Khi đó $abc = 2^{\frac{3}{8}} 2^{\frac{1}{4}} 2^{\frac{1}{6}} = 2^{\frac{3}{8}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}} = 2^{\frac{19}{24}}$.

Vậy $x = 19$; $y = 24 \Rightarrow x + y = 43$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 45 (Bạc Liêu - Ninh Bình 2019).

Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $y = f(2 + \mathrm{e}^x)$ nghịch biến trên khoảng



(A) $(-1;3)$. (B) $(-2;1)$. (C) $(-\infty;0)$. (D) $(0;+\infty)$.

Lời giải.

Ta có $y' = \mathrm{e}^x f'(2 + \mathrm{e}^x)$.

Hàm số $y = f(2 + e^x)$ nghịch biến khi và chỉ khi

$$y' \le 0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^x f'(2 + e^x) \le 0 \Leftrightarrow f'(2 + \mathrm{e}^x) \le 0 \Leftrightarrow 2 + e^x \le 3 \Leftrightarrow \mathrm{e}^x \le 1 \Leftrightarrow x \le 0$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 46. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-2019; 2019]$ để hàm số $y = \dfrac{\ln x - 6}{\ln x - 3m}$ đồng biến trên khoảng $(1; \mathrm{e}^6)$?

(A) 2020. (B) 2021. (C) 2018. (D) 2019.

Lời giải.

Đặt $t = \ln x$.

Khi đó hàm số $y = \dfrac{\ln x - 6}{\ln x - 3m}$ đồng biến trên khoảng $(1; e^6)$ thì hàm số $y(t) = \dfrac{t-6}{t-3m}$ đồng biến trên khoảng $(0; 6)$.

Ta có $y'(t) = \dfrac{-3m+6}{(t-3m)^2}$

Để hàm số $y(t)$ đồng biến trên khoảng $(0; 6)$ thì

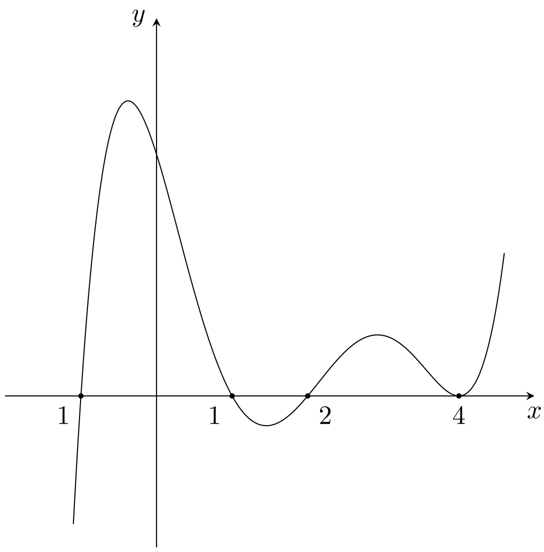
$$\begin{cases} -3m+6>0 \\ 3m \notin (0;6) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m<2 \\ \left[\begin{array}{l} m \le 0 \\ m \ge 2 \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow m \le 0 \xrightarrow[m \in [-2019;2019]]{m \in \mathbb{Z}} \Rightarrow m \in \{-2019; -2018; \ldots -1; 0\}.$$

Vậy có tất cả 2020 số nguyên m thoả mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án (A) □

Câu 47 (Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2019).

Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên dưới



Hàm số $g(x) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{f(1-2x)}$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?

(A) $(-\infty; 0)$. (B) $(0; 1)$. (C) $(-1; 0)$. (D) $(1; +\infty)$.

Lời giải.

Dựa vào đồ thị, suy ra $f'(x) < 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < -1 \\ 1 < x < 2 \end{array}\right.$.

Ta có $g'(x) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{f(1-2x)} f'(1-2x) \cdot (-2) \cdot \ln \dfrac{1}{2}$.

Xét $g'(x) < 0 \Leftrightarrow f'(1-2x) < 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1-2x < -1 \\ 1 < 1-2x < 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 1 \\ -\dfrac{1}{2} < x < 0. \end{array}\right.$

Vậy $g(x)$ nghịch biến trên các khoảng $\left(-\dfrac{1}{2}; 0\right)$ và $(1; +\infty)$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 48 (Kiểm tra năng lực - ĐH - Quốc Tế - 2019).

Xét hàm số $f(x) = (\cos x)^{\sin x}$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

(A) Hàm số f tăng trên khoảng $\left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$. (B) Hàm số f tăng trên khoảng $\left(-\dfrac{\pi}{2}; 0\right)$.

C) Hàm số f giảm trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$. D) 3 lựa chọn kia đều sai.

Lời giải.

Nhận xét $\forall x\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)\Rightarrow\begin{cases}\cos x>0\\ f(x)>0\end{cases}$.

Ta có $f(x)=(\cos x)^{\sin x}\Rightarrow \ln f(x)=\ln(\cos x)^{\sin x}=\sin x\cdot\ln(\cos x)$

$$\Rightarrow[\ln f(x)]'=[\sin x\cdot\ln(\cos x)]'$$

$$\Rightarrow\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{\cos^2 x\cdot\ln\cos x-\sin^2 x}{\cos x}$$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{\cos^2 x\cdot\ln\cos x-\sin^2 x}{\cos x}\cdot f(x).$$

Do $\forall x\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)\Rightarrow\cos x\in(0;1]$.

Mặt khác $\mathrm{e}>1\Rightarrow\ln\cos x\le 0$.

$\Rightarrow\cos^2 x\cdot\ln\cos x-\sin^2 x\le 0,\forall x\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$.

$\Rightarrow f'(x)=\left(\frac{\cos^2 x\cdot\ln\cos x-\sin^2 x}{\cos x}\right)\cdot f(x)\le 0,\forall x\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ (dấu "=" xảy ra khi $x=0$).

Vậy $y=f(x)$ giảm trên $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$.

Chọn đáp án C □

Câu 49. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m trong đoạn $[-2019;2019]$ để hàm số $y=\ln\left(x^2+2\right)-mx+1$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A) 2019. B) 2020. C) 4038. D) 1009.

Lời giải.

Ta có $y'=\frac{2x}{x^2+2}-m$.

Hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}\Leftrightarrow\frac{2x}{x^2+2}-m\ge 0$ với mọi $x\in\mathbb{R}$.

$\Leftrightarrow m\le\frac{2x}{x^2+2}$ với mọi $x\in\mathbb{R}$.

Xét $h(x)=\frac{2x}{x^2+2}$ với $x\in\mathbb{R}$, có $h'(x)=\frac{4-2x^2}{\left(x^2+2\right)^2}$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$h(x)$	0	$\searrow$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\searrow$	0

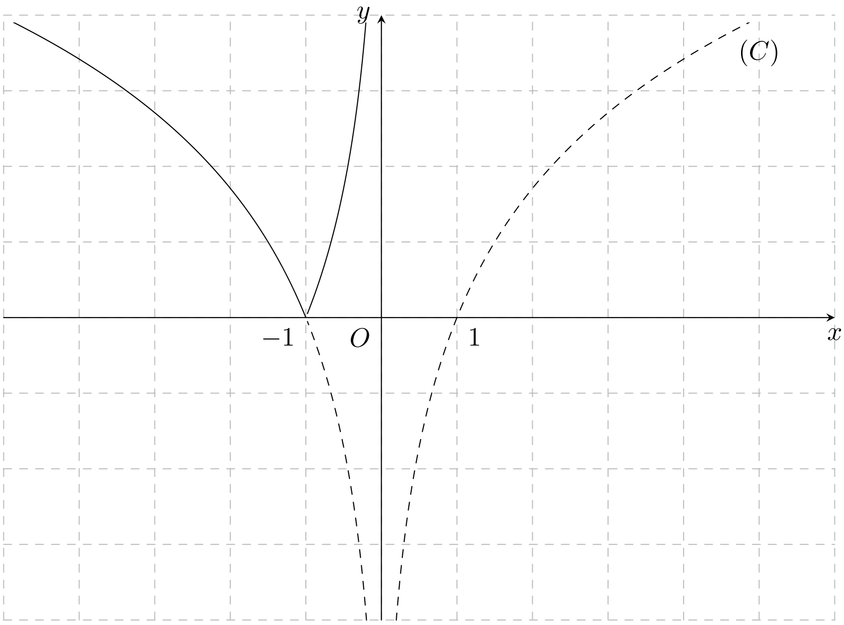
Suy ra $m\le-\frac{\sqrt{2}}{2}$, m là số nguyên trong đoạn $[-2019;2019]$ nên có 2019 số.

Chọn đáp án A □

Câu 50. Gọi (C) là đồ thị của hàm số $y=\log_{2018}x$ và (C') là đồ thị hàm số $y=f(x)$, (C') là đối xứng với (C) qua trục tung. Hàm số $y=|f(x)|$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?

(A) $(0;1)$. (B) $(-\infty;-1)$. (C) $(-1;0)$. (D) $(1;+\infty)$.

Lời giải.



Ta có hàm số $y=\log_{2018}x$ có tập xác định $D=(0;+\infty)$ là hàm số đồng biến trên $(0;+\infty)$.

Vì (C') đối xứng với (C) qua trục tung nên hàm số $y=f(x)$ là hàm số nghịch biến trên $(-\infty;0)$.

Ta có $|f(x)|=\begin{cases} f(x) & \text{khi } f(x)\geq 0 \\ -f(x) & \text{khi } f(x)<0 \end{cases}$ nên suy ra đồ thị hàm số $y=|f(x)|$.

Dựa vào đồ thị $y=|f(x)|$ ta suy ra hàm số $y=|f(x)|$ đồng biến trên $(-1;0)$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 51. Có bao nhiêu giá trị thực m để hàm số $g(x)=\dfrac{2019^x}{\ln 2019}+\dfrac{6^x}{\ln 6}+\dfrac{m}{2}x^2-2x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

(A) Duy nhất. (B) Không tồn tại. (C) 2019. (D) Vô số.

Lời giải.

Ta có $g'(x)=2019^x+6^x+mx-2$.

Hàm số $g(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $g'(x)\geq 0, \forall x\in\mathbb{R}$.

Ta có $g'(0)=0$, $\forall m$.

- Nếu $m\geq 0 \Rightarrow \begin{cases} g'(x)=(2019^x+6^x-2)+mx\geq 0, \forall x\geq 0 \\ g'(x)=(2019^x+6^x-2)+mx<0, \forall x<0 \end{cases}$.
  Suy ra hàm số đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.
  $\Rightarrow m\geq 0$ (loại).
- Nếu $m<0$.
  Xét $g''(x)=2019^x\ln 2019+6^x\ln 6+m$ là hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$
  $\lim\limits_{x\to-\infty}(2019^x\ln 2019+6^x\ln 6)=0\Rightarrow$ phương trình $g''(x)=0$ có nghiệm duy nhất $x=x_0$ khi $m<0$ và $g'(x)$ đạt GTNN tại điểm cực tiểu duy nhất tại $x=x_0$.
  Do đó, để $g'(x)\geq 0, \forall x\in\mathbb{R}$ thì $g'(x_0)\geq 0$.

Mà $g'(0)=0\Rightarrow x_0=0\Rightarrow m=-2019^0\ln 2019-6^0\ln 6$ hay $m=-\ln 2019-\ln 6$.

Do đó có duy nhất một giá trị thực của m thỏa mãn.

Chọn đáp án A □

Câu 52. Tập các giá trị của tham số m để hàm số $y=\ln(3x-1)-\dfrac{m}{x}+2$ đồng biến trên khoảng $\left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)$ là

A $\left[\dfrac{2}{9};+\infty\right)$. B $\left[-\dfrac{4}{3};+\infty\right)$. C $\left[-\dfrac{7}{3};+\infty\right)$. D $\left[-\dfrac{1}{3};+\infty\right)$.

Lời giải.

$y=\ln(3x-1)-\dfrac{m}{x}+2\Rightarrow y'=\dfrac{3}{3x-1}+\dfrac{m}{x^2}$.

Để hàm số đồng biến trên khoảng $\left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)\Leftrightarrow y'\geq 0,\forall x\in\left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)$

$$\dfrac{3}{3x-1}+\dfrac{m}{x^2}\geq 0,\forall x\in\left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)$$
$$\Leftrightarrow m\geq\dfrac{3x^2}{1-3x}=g(x),\forall x\in\left(\dfrac{1}{2};+\infty\right).$$

Xét $g(x)=\dfrac{3x^2}{1-3x},\forall x\in\left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)\Rightarrow g'(x)=\dfrac{6x-9x^2}{(1-3x)^2}$.

Khi đó $g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=\dfrac{2}{3}.\end{array}\right.$

Bảng biến thiên

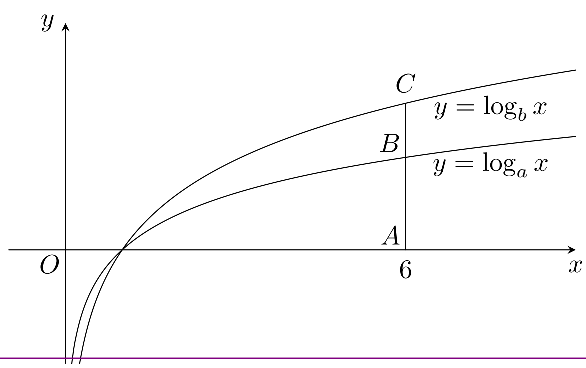
x	$\frac{1}{2}$		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$		$\nearrow$	$-\frac{4}{3}$	$\searrow$	

Vậy $m\geq-\dfrac{4}{3}\Leftrightarrow m\in\left[-\dfrac{4}{3};+\infty\right)$.

Chọn đáp án B □

Câu 53 (Chuyên Lê Quý Đôn Quảng Trị 2019).

Cho các hàm số $y=\log_a x$ và $y=\log_b x$ có đồ thị như hình vẽ bên. Đường thẳng $x=6$ cắt trục hoành, đồ thị hàm số $y=\log_a x$ và $y=\log_b x$ lần lượt tại A, B và C. Nếu $AC=AB\log_2 3$ thì



A $b^3=a^2$. B $\log_2 b=\log_3 a$.

C $b^2=a^3$. D $\log_3 b=\log_2 a$.

Lời giải.

Ta có $A(6;0)$, $B(6;\log_a 6)$ và $C(6;\log_b 6)$, suy ra $AB=\log_a 6$, $AC=\log_b 6$.

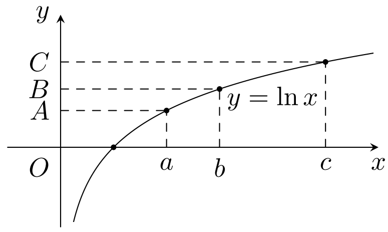
Do đó $AC=AB\log_2 3\Leftrightarrow \log_b 6=\log_a 6\cdot\log_2 3\Leftrightarrow \log_b 6=\log_a b\cdot\log_b 6\cdot\log_2 3$. (1)

Vì $\log_b 6\neq 0$ nên (1) $\Leftrightarrow \log_a b\cdot\log_2 3=1\Leftrightarrow \dfrac{\log_3 b\cdot\log_2 3}{\log_3 a}=1\Leftrightarrow \log_2 b=\log_3 a$.

Chọn đáp án B □

Câu 54.

Trong hình bên, đường cong là đồ thị của hàm số $y=\ln x$, điểm B là trung điểm của đoạn thẳng AC. Khẳng định nào sau đây là đúng?



A. $a+c=2b$.
B. $ac=b$.
C. $ac=2b^2$.
D. $ac=b^2$.

Lời giải.

Ta có $A\,(0;\ln a)$, $B\,(0;\ln b)$, $C\,(0;\ln c)$.

Do B là trung điểm của đoạn thẳng AC nên

$$\ln a+\ln c=2\ln b\Leftrightarrow \ln(ac)=\ln(b^2)\Leftrightarrow ac=b^2.$$

Chọn đáp án D □

Câu 55. Đồ thị hàm số $y=f(x)$ đối xứng với đồ thị hàm số $y=a^x$, $(a>0,a\neq 1)$ qua điểm $I(1;1)$. Giá trị của biểu thức $f\left(2+\log_a\dfrac{1}{2018}\right)$ bằng

A. 2016.
B. -2016.
C. 2020.
D. -2020.

Lời giải.

Gọi (C) là đồ thị hàm số $y=a^x$; (C_1) là đồ thị hàm số $y=f(x)$.

$M\left(2+\log_a\dfrac{1}{2018};y_M\right)\in(C_1)\Leftrightarrow y_M=f\left(2+\log_a\dfrac{1}{2018}\right)$.

Gọi N đối xứng với M qua $I\,(1;1)\Rightarrow N\left(-\log_a\dfrac{1}{2018};2-y_M\right)$.

Do đồ thị (C_1) đối xứng (C) qua $I\,(1;1)$ nên $N\left(-\log_a\dfrac{1}{2018};2-y_M\right)\in(C)$.

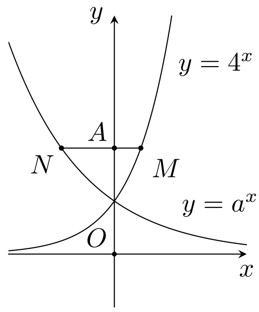
$N\in(C)\Leftrightarrow 2-y_M=a^{-\log_a\frac{1}{2018}}\Leftrightarrow 2-y_M=a^{\log_a 2018}\Leftrightarrow 2-y_M=2018\Leftrightarrow y_M=-2016$.

Vậy $f\left(2+\log_a\dfrac{1}{2018}\right)=-2016$.

Chọn đáp án B □

Câu 56 (Hội 8 trường chuyên ĐBSH - 2019).

Cho số thực dương a khác 1. Biết rằng bất kỳ đường thẳng nào song song với trục Ox mà cắt các đường $y=4^x$, $y=a^x$, trục tung lần lượt tại M, N và A thì $AN=2AM$ (hình vẽ bên). Giá trị của a bằng



Ⓐ $\frac{1}{3}$. Ⓑ $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Ⓒ $\frac{1}{4}$. Ⓓ $\frac{1}{2}$.

Lời giải.

Dựa vào ĐTHS ta thấy hàm số $y=a^x$ nghịch biến nên $0<a<\frac{1}{2}$.

Mọi đường thẳng $y=m$, $m>0$ đều cắt các đường $y=4^x$, $y=a^x$, trục tung lần lượt tại $M\left(\log_4 m;m\right)$, $N\left(\log_a m;m\right)$ và $A=(0;m)$, theo bài ra

$$AN=2AM \Leftrightarrow \left|\log_a m\right|=2\left|\log_4 m\right| \Leftrightarrow \left|\log_a m\right|=\left|\log_2 m\right|$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\log_a m=\log_2 m\\ \log_a m=-\log_2 m\end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\log_m a=\log_m 2\\ \log_m a=\log_m \frac{1}{2}\end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}a=2\\ a=\frac{1}{2}.\end{array}\right.$$

Vậy $a=\frac{1}{2}$.

Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 57 (THPT Ngô Quyền - Ba Vì - Hải Phòng 2019).

Đồ thị hàm số $y=f(x)$ đối xứng với đồ thị hàm số $y=\log_a x$, $(0<a\neq 1)$ qua điểm $I\left(2;1\right)$. Giá trị của biểu thức $f\left(4-a^{2019}\right)$ bằng

Ⓐ 2023. Ⓑ -2023. Ⓒ 2017. Ⓓ -2017.

Lời giải.

Lấy điểm $A\left(4-a^{2019};f\left(4-a^{2019}\right)\right)$ thuộc đồ thị của hàm số $y=f(x)$ và điểm $B\left(x;\log_a x\right)$ thuộc đồ thị của hàm số $y=\log_a x$.

Hai điểm A và B đối xứng nhau qua điểm I khi và chỉ khi

$$\begin{cases}4-a^{2019}+x=4\\ f\left(4-a^{2019}\right)+\log_a x=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=a^{2019}\\ f\left(4-a^{2019}\right)+\log_a a^{2019}=2\end{cases} \Rightarrow f\left(4-a^{2019}\right)=-2017.$$

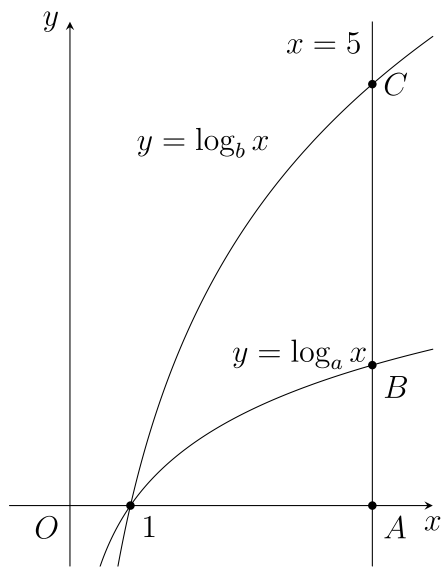
Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 58.

Hàm số $y = \log_a x, y = \log_b x$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Đường thẳng $x = 5$ cắt trục hoành, hai đồ thị $y = \log_a x$, $y = \log_b x$ lần lượt tại các điểm A, B, C. Biết rằng $CB = 2AB$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

(A) $a = b^2$. (B) $a^3 = b$.

(C) $a = b^3$. (D) $a = 5b$.



Lời giải.

$\log_b 5 = 3\log_a 5 \Leftrightarrow \log_5 a = 3\log_5 b$. Vậy $a = b^3$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 59 (THPT Đông Sơn 1 - Thanh Hóa - 2019).

Cho hàm số $f(x) = \dfrac{4^x}{4^x + 2}$. Tính giá trị biểu thức $A = f\left(\dfrac{1}{100}\right) + f\left(\dfrac{2}{100}\right) + \ldots + f\left(\dfrac{100}{100}\right)$?

(A) 50. (B) 49. (C) $\dfrac{149}{3}$. (D) $\dfrac{301}{6}$.

Lời giải.

Xét hai số dương a và b sao cho $a + b = 1$, ta có

$$\begin{aligned} f(a) + f(b) =& \frac{4^a}{4^a + 2} + \frac{4^b}{4^b + 2} \\ =& \frac{4^a\left(4^b + 2\right) + 4^b\left(4^a + 2\right)}{\left(4^a + 2\right)\left(4^b + 2\right)} \\ =& \frac{2\left(4^{a+b} + 4^a + 4^b\right)}{4^{a+b} + 2\left(4^a + 4^b\right) + 4} \\ =& \frac{2\left(4 + 4^a + 4^b\right)}{2\left(4 + 4^a + 4^b\right)} \\ =& 1 \end{aligned}$$

Do đó

$$\begin{aligned} A =& \left[f\left(\frac{1}{100}\right) + f\left(\frac{99}{100}\right)\right] + \ldots + \left[f\left(\frac{49}{100}\right) + f\left(\frac{51}{100}\right)\right] + f\left(\frac{50}{100}\right) + f\left(\frac{100}{100}\right) \\ =& 49 + f\left(\frac{1}{2}\right) + f(1) = \frac{301}{6}. \end{aligned}$$

Vậy $A = \dfrac{301}{6}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 60. Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực m để hàm số $y = \ln\left(x^2 + 1\right) - mx + 1$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Ⓐ $[-1;1]$. Ⓑ $(-1;1)$. Ⓒ $(-\infty;-1]$. Ⓓ $(-\infty;-1)$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D}=\mathbb{R}$. Ta có $y'=\dfrac{2x}{x^2+1}-m$.
Hàm số $y=\ln\left(x^2+1\right)-mx+1$ đồng biến trên R khi $y'\geq 0\forall x\in\mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \frac{2x}{x^2+1}-m\geq 0\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow \frac{2x}{x^2+1}\geq m\forall x\in\mathbb{R}.$$

Xét hàm $f(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$. Ta có $f'(x)=\dfrac{-2x^2+2}{\left(x^2+1\right)^2}$.
$f'(x)=0\Leftrightarrow \dfrac{-2x^2+2}{\left(x^2+1\right)^2}=0\Leftrightarrow x=\pm 1$.
Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

Dựa vào bảng biến thiên suy ra $-1\leq f(x)\leq 1,\forall x\in\mathbb{R}$.
Từ đó suy ra $m\leq -1$.
Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 61. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc khoảng $(-2019;2019)$ để hàm số sau có tập xác định là $\mathscr{D}=\mathbb{R}$?

$$y=x+m+\sqrt{x^2+2\left(m+1\right)x+m^2+2m+4}+\log_2\left(x-m+\sqrt{2x^2+1}\right)$$

Ⓐ 2020. Ⓑ 2021. Ⓒ 2018. Ⓓ 2019.

Lời giải.

Hàm số xác định với mọi $x\in\mathbb{R}$ thì $\begin{cases}x^2+2(m+1)x+m^2+2m+4\geq 0\\ x-m+\sqrt{2x^2+1}>0\end{cases}$ luôn đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$.
Ta có $x^2+2(m+1)x+m^2+2m+4=\left[x+(m+1)\right]^2+3>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$.
Ta có $x-m+\sqrt{2x^2+1}>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$.
$\Leftrightarrow x+\sqrt{2x^2+1}>m,\ \forall x\in\mathbb{R}$.
Xét hàm số $f(x)=x+\sqrt{2x^2+1}$ với $x\in\mathbb{R}$.
$f'(x)=1+\dfrac{2x}{\sqrt{2x^2+1}}$.
$f'(x)=0\Leftrightarrow x=\dfrac{-1}{\sqrt{2}}$.

x	$-\infty$		$\frac{-1}{\sqrt{2}}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta thấy để $x+\sqrt{2x^2+1}>m, \forall x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{2}}{2}>m$.

Kết hợp điều kiện $\begin{cases} m\in\mathbb{Z} \\ m\in(-2019;2019) \end{cases} \Rightarrow m\in\{-2018,-2017,-2016,\ldots,-1,0\}$.

Kết luận có 2019 giá trị của m thỏa mãn bài toán.

Chọn đáp án D □

Câu 62 (THPT Yên Dũng 2 - Bắc Giang 2019). Tập tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=\dfrac{m\ln x-2}{\ln x-m-1}$ nghịch biến trên $(\mathrm{e}^2;+\infty)$ là

A $\left[\begin{array}{l} m\le -2 \\ m=1 \end{array}\right.$.
B $\left[\begin{array}{l} m< -2 \\ m>1 \end{array}\right.$.
C $\left[\begin{array}{l} m< -2 \\ m=1 \end{array}\right.$.
D $m<-2$.

Lời giải.

Điều kiện xác định $\begin{cases} x>0 \\ x\ne \mathrm{e}^{m+1} \end{cases}$.

Ta có $y'=\dfrac{\frac{m}{x}(\ln x-m-1)-\frac{1}{x}(m\ln x-2)}{(\ln x-m-1)^2}=\dfrac{-m^2-m+2}{x(\ln x-m-1)^2}$.

Hàm số nghịch biến trên $(\mathrm{e}^2;+\infty)$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} -m^2-m+2<0 \\ \mathrm{e}^{m+1}\le \mathrm{e}^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m<-2 \\ m>1 \end{array}\right. \\ m+1\le 2 \end{cases} \Leftrightarrow m<-2.$$

Chọn đáp án D □

Câu 63 (Chuyên Bắc Giang 2019). Có bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc khoảng $(-2019;2019)$ để hàm số $y=2019^{x^3-x^2-mx+1}$ nghịch biến trên $[-1;2]$

A 2020.
B 2019.
C 2010.
D 2011.

Lời giải.

$y'=(3x^2-2x-m)\,2019^{x^3-x^2-mx+1}\cdot\ln 2019$.

Hàm số nghịch biến trên $[-1;2] \Leftrightarrow y'\le 0, \forall x\in[-1;2]$.

$\Leftrightarrow 3x^2-2x-m\le 0 \forall x\in[-1;2]$.

$\Leftrightarrow 3x^2-2x\le m \forall x\in[-1;2]$.

Đặt $f(x)=3x^2-2x$; $f'(x)=6x-2$.

Bảng biến thiên

x	-1		$\frac{1}{3}$		2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	5	$\searrow$	$-\frac{1}{3}$	$\nearrow$	8

Từ bảng biến thiên suy ra $f(x)\le 8 \forall x\in[-1;2]$.

Do đó $\Leftrightarrow m\ge 8$.

Vì m nguyên thuộc khoảng $(-2019;2019)$ nên có 2011 giá trị m thỏa mãn.

Chọn đáp án D □

Câu 64 (Hậu Lộc 2 - Thanh Hóa-2019).

Cho a, b là các số thực dương khác 1, đồ thị hàm số $y=\log_a x$ và $y=\log_b x$ lần lượt là (C_1), (C_2) như hình vẽ.

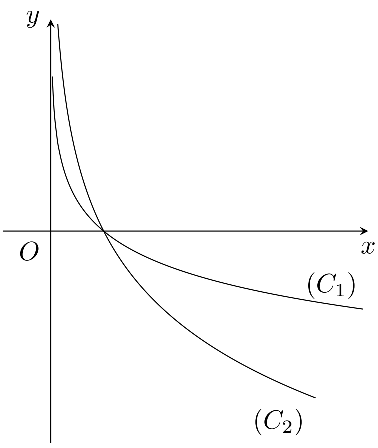
Khẳng định nào sau đây là đúng

A. e.

B. $b\cdot \mathrm{e}^a > a\cdot \mathrm{e}^b$.

C. $b\cdot \mathrm{e}^a = a\cdot \mathrm{e}^b$.

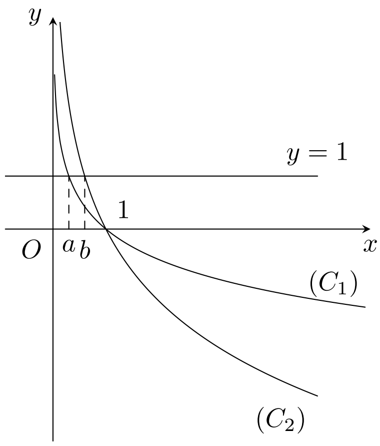
D. $a\cdot \mathrm{e}^a < b\cdot \mathrm{e}^b$.



Lời giải.

Ta có $\log_a x=1\Leftrightarrow x=a$ và $\log_b x=1\Leftrightarrow x=b$.

Nên kẻ đường thẳng $y=1$ cắt đồ thị (C_1), (C_2) lần lượt tại các điểm có tọa độ $(a;1)$ và $(b;1)$.



Nhìn vào đồ thị ta suy ra $a<b$.

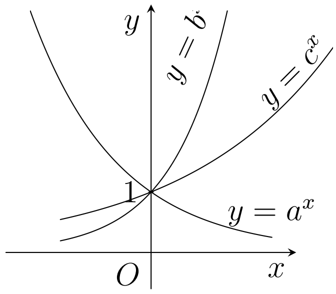
Do a, b, e^a, e^b là các số dương và $\mathrm{e} > 1$ nên từ $a < b$ ta suy ra

$$\begin{cases} \mathrm{e}^a < \mathrm{e}^b \\ a \cdot \mathrm{e}^b < b \cdot \mathrm{e}^b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \cdot \mathrm{e}^a < a \cdot \mathrm{e}^b \\ a \cdot \mathrm{e}^b < b \cdot \mathrm{e}^b \end{cases} \Rightarrow a \cdot \mathrm{e}^a < b \cdot \mathrm{e}^b.$$

Chọn đáp án D □

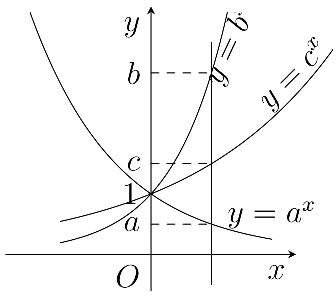
Câu 65 (Liên trường huyện Quảng Xương - Thanh Hóa - 2021).

Cho ba số thực dương a, b, c khác 1.
Đồ thị các hàm số $y = a^x$, $y = b^x$ và $y = c^x$ được cho như hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A $1 < a < b < c$.
B $1 < a < c < b$.
C $0 < a < 1 < b < c$.
D $0 < a < 1 < c < b$.

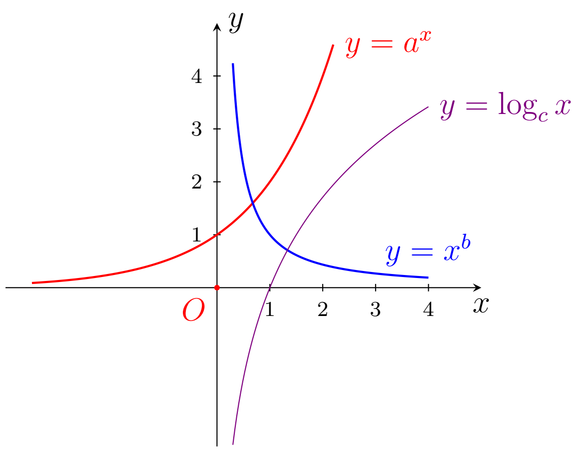
Lời giải.



Kẻ đường thẳng $x = 1$ cắt đồ thị các hàm số tại các điểm tương ứng a, b, c.
Từ đồ thị ta có $0 < a < 1 < c < b$.
Chọn đáp án D □

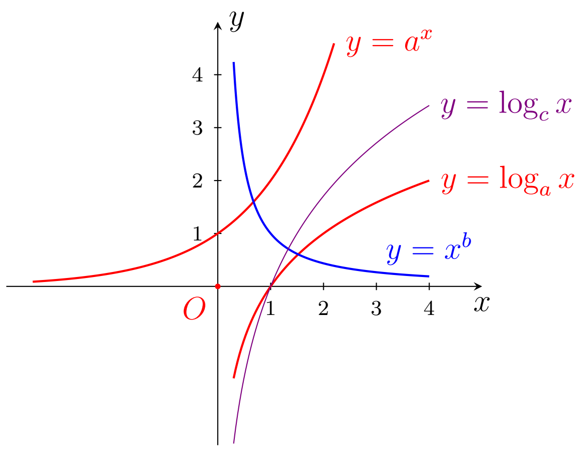
Câu 66 (THPT PTNK Cơ sở 2 - TP.HCM - 2021).

Cho hai số a, c dương và khác 1. Các hàm số $y = a^x$, $y = x^b$, $y = \log_c x$ có đồ thị như hình vẽ.
Khẳng định nào sau đây đúng?



A $c < b < a$.
B $b < a < c$.
C $b < c < a$.
D $a < c < b$.

Lời giải.



Từ đồ thị hàm số $y = x^b$ suy ra $b < 0$.

Ta có đồ thị hàm số $y = \log_a x$ đối xứng với đồ thị hàm số $y = a^x$ qua đường thẳng $y = x$.

Theo đồ thị hàm số $y = \log_a x, y = \log_c x$ ta có $\log_a x < \log_c x$ và $a, c > 1$ suy ra $1 < c < a$.

Vậy $b < c < a$.

Chọn đáp án C □

Câu 67 (Chuyên KHTN - 2021). Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của mđể hàm số $y = x^2 + 8\ln 2x - mx$đồng biến trên $(0; +\infty)$?

A 8. B 6. C 5. D 7.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = (0; +\infty)$.

Ta có $y' = 2x + \dfrac{8}{x} - m$.

Để hàm số đồng biến trên $(0; +\infty)$ khi $y' \geq 0$, $\forall x \in (0; +\infty)$.

$\Leftrightarrow m \leq 2x + \dfrac{8}{x}$, $\forall x \in (0; +\infty)$.

Đặt $f(x) = 2x + \dfrac{8}{x}$, $f'(x) = 2 - \dfrac{8}{x^2} = \dfrac{2x^2 - 8}{x^2}$.

Bảng biến thiên

x	0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	8	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số đồng biến trên $(0; +\infty)$ khi $m \leq 8$.

Vậy $m \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$.

Chọn đáp án A □

Dạng 4. Bài toán thực tế

Câu 68 (Mã 101 - 2020 Lần 1). Trong năm 2019, diện tích rừng trồng mới của tỉnh A là 600 ha. Giả sử diện tích rừng trồng mới của tỉnh A mỗi năm tiếp theo đều tăng 6% so với diện tích rừng trồng mới của năm liền trước. Kể từ sau năm 2019, năm nào dưới đây là năm đầu tiên tỉnh A có diện tích rừng trồng mới trong năm đó đạt trên 1000 (ha)?

(A) Năm 2028. (B) Năm 2047. (C) Năm 2027. (D) Năm 2046.

Lời giải.

Diện tích rừng trồng mới của năm $2019+1$ là $600\left(1+6\%\right)^1$.

Diện tích rừng trồng mới của năm $2019+2$ là $600\left(1+6\%\right)^2$.

Diện tích rừng trồng mới của năm $2019+n$ là $600\left(1+6\%\right)^n$.

Ta có $600\left(1+6\%\right)^n > 1000 \Leftrightarrow \left(1+6\%\right)^n > \dfrac{5}{3} \Leftrightarrow n > \log_{(1+6\%)}\dfrac{5}{3} \approx 8,76$.

Như vậy kể từ năm 2019 thì năm 2028 là năm đầu tiên diện tích rừng trồng mới đạt trên 1000 ha.

Chọn đáp án (A) □

Câu 69 (Mã 102 - 2020 Lần 1). Trong năm 2019, diện tích rừng trồng mới của tỉnh A là 1000 ha. Giả sử diện tích rừng trồng mới của tỉnh A mỗi năm tiếp theo đều tăng 6% so với diện tích rừng trồng mới của năm liền trước. Kể từ sau năm 2019, năm nào dưới đây là năm đầu tiên tỉnh A có diện tích rừng trồng mới trong năm đó đạt trên 1400 ha.

(A) 2043. (B) 2025. (C) 2024. (D) 2042.

Lời giải.

Ta có sau n năm thì diện tích rừng trồng mới của tỉnh A là $1000\left(1+0{,}06\right)^n$

Khi đó, $1000\cdot\left(1+0{,}06\right)^n > 1400 \Rightarrow 1{,}06^n > 1{,}4 \Rightarrow n > 5{,}774$.

Vậy vào năm 2025 thì diện tích rừng trong mới trong năm đó đạt trên 1400 ha.

Chọn đáp án (B) □

Câu 70 (Mã 103 - 2020 Lần 1). Trong năm 2019, diện tích rừng trồng mới của tỉnh A là 900 ha. Giả sử diện tích rừng trồng mới của tỉnh A mỗi năm tiếp theo đều tăng 6% so với diện tích rừng trồng mới của năm liền trước. Kể từ sau năm 2019, năm nào dưới đây là năm đầu tiên của tỉnh A có diện tích rừng trồng mới trong năm đó đạt trên 1700 ha?

(A) Năm 2029. (B) Năm 2051. (C) Năm 2030. (D) Năm 2050.

Lời giải.

Trong năm 2019, diện tích rừng trồng mới của tỉnh A là $A=900$ ha.

Trong năm 2020, diện tích rừng trồng mới của tỉnh A là $A_1 = A + 6\%A = A\left(1+6\%\right)$ ha.

Trong năm 2021, diện tích rừng trồng mới của tỉnh A là

$A_2 = A_1 + 6\%A_1 = A_1\left(1+6\%\right) = A\left(1+6\%\right)\left(1+6\%\right) = A(1+6\%)^2$ ha.

Trong năm 2022, diện tích rừng trồng mới của tỉnh A là

$A_3 = A_2 + 6\%A_2 = A_2\left(1+6\%\right) = A(1+6\%)^2\left(1+6\%\right) = A(1+6\%)^3$ ha.

...

Trong năm $2019+n$, diện tích rừng trồng mới của tỉnh A là $A_n = A(1+6\%)^n$ ha.

Khi đó, diện tích rừng trồng mới đạt trên 1700 ha khi

$A_n > 1700 \Leftrightarrow A(1+6\%)^n > 1700 \Leftrightarrow 900.1,06^n > 1700 \Leftrightarrow 1,06^n > \dfrac{17}{9}$

$\Leftrightarrow n > \log_{1,06}\dfrac{17}{9} \approx 10,9 \Rightarrow n_{\min} = 11$.

Vậy năm 2030 là năm đầu tiên của tỉnh A có diện tích rừng trồng mới trong năm đó đạt trên 1700 ha.

Chọn đáp án C □

Câu 71 (Mã 104 - 2020 Lần 1). Trong năm 2019, diện tích rừng trồng mới của tỉnh A là 800 ha. Giả sử diện tích rừng trồng mới của tỉnh A mỗi năm tiếp theo đều tăng 6% so với diện tích rừng trồng mới của năm liền trước. Kể từ sau năm 2019, năm nào dưới đây là năm đầu tiên tỉnh A có diện tích rừng trồng mới trong năm đó đạt trên 1400 ha?

A. Năm 2029. B. Năm 2028. C. Năm 2048. D. Năm 2049.

Lời giải.

Trong năm 2019, diện tích rừng trồng mới của tỉnh A là 800 ha. Giả sử diện tích rừng trồng mới của tỉnh A mỗi năm tiếp theo đều tăng 6% so với diện tích rừng trồng mới của năm liền trước nên sau n (năm) diện tích rừng trồng mới của tỉnh A là $800.(1+6\%)^n$ với $n \in \mathbb{N}$.

Ta có $800.(1+6\%)^n \geq 1400 \Leftrightarrow 1,06^n \geq \dfrac{7}{4} \Leftrightarrow n \geq \log_{1,06}\dfrac{7}{4} \approx 9,60402$.

Vì $n \in \mathbb{N}$ nên giá trị nhỏ nhất thỏa mãn là $n = 10$.

Vậy: kể từ sau năm 2019, năm đầu tiên tỉnh A có diện tích rừng trồng mới trong năm đó đạt trên 1400 ha là năm 2029.

Chọn đáp án A □

Câu 72 (Mã 102 - 2020 Lần 2). Năm 2020 một hãng xe niêm yết giá bán loại xe X là 750,000,000 đồng và dự định trong 10 năm tiếp theo, mỗi năm giảm 2% giá bán so với giá bán của năm liền trước. Theo dự định đó năm 2025 hãng xe ô tô niêm yết giá bán loại xe X là bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng nghìn)?

A. 677,941,000 đồng. B. 675,000,000 đồng. C. 664,382,000 đồng. D. 691,776,000 đồng.

Lời giải.

Giá xe năm 2020 là A

Giá xe năm 2021 là $A_1 = A - A \cdot r = A(1-r)$.

Giá xe năm 2022 là $A_2 = A_1 - A_1 \cdot r = A(1-r)^2$.

Giá xe năm 2023 là $A_3 = A_2 - A_2 \cdot r = A(1-r)^3$.

Giá xe năm 2024 là $A_4 = A_3 - A_3 \cdot r = A(1-r)^4$.

Giá xe năm 2025 là $A_5 = A_4 - A_4 \cdot r = A(1-r)^5 = 750,000,000\left(1-\dfrac{2}{100}\right)^5 \approx 677,941,000$ đồng.

Chọn đáp án A □

Câu 73 (Mã 103 - 2020 Lần 2). Năm 2020, một hãng xe ô tô niêm yết giá bán loại xe X là 800,000,000 đồng và dự định trong 10 năm tiếp theo, mỗi năm giảm 2% giá bán so với giá bán của năm liền trước. Theo dự định đó, năm 2025 hãng xe ô tô niêm yết giá bán loại xe X là bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng nghìn)?

A. 708,674,000 đồng. B. 737,895,000 đồng. C. 723,137,000 đồng. D. 720,000,000 đồng.

Lời giải.

Giá bán loại xe X năm 2021 là $800{,}000{,}000 - 800{,}000{,}000 \times 2\% = 800{,}000{,}000 \times (1 - 2\%)$.
Giá bán loại xe X năm 2022 là

$$800{,}000{,}000 \times (1-2\%) - 800{,}000{,}000 \times (1-2\%) \times 2\% = 800{,}000{,}000 \times (1-2\%)^2.$$

Tương tự ta có giá bán loại xe X năm 2025 sẽ là $800{,}000{,}000 \times (1-2\%)^5 \approx 723{,}137{,}000$ đồng.
Chọn đáp án C □

Câu 74 (Đề Tham Khảo 2018). Một người gửi 100 triệu đồng vào ngân hàng với lãi suất $0,4\%/$ tháng. Biết rằng nếu không rút tiền ta khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi tháng, số tiền lãi sẽ được lập vào vốn ban đầu để tính lãi cho tháng tiếp theo. Hỏi sau 6 tháng, người đó được lĩnh số tiền (cả vốn ban đầu và lãi) gần nhất với số tiền nào dưới đây, nếu trong khoảng thời gian này người đó không rút tiền ra và lãi xuất không thay đổi?

(A) 102,16,000 đồng. (B) 102,017,000 đồng. (C) 102,424,000 đồng. (D) 102,423,000 đồng.

Lời giải.

Ta có $A_n = A_0\,(1+r)^n = 100{,}000{,}000\left(1 + \dfrac{0,4}{100}\right)^6 = 102{,}424{,}128$.
Chọn đáp án C □

Câu 75 (Mã 104 2018). Một người gửi tiết kiệm vào một ngân hàng với lãi suất 6,1%/năm. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn để tính lãi cho năm tiếp theo. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu năm người đó thu được (cả số tiền gửi ban đầu và lãi) gấp đôi số tiền gửi ban đầu, giả định trong khoảng thời gian này lãi suất không thay đổi và người đó không rút tiền ra?

(A) 11 năm. (B) 12 năm. (C) 13 năm. (D) 10 năm.

Lời giải.

Gọi x số tiền gửi ban đầu.
Theo giả thiết $2x = x\left(1 + \dfrac{6,1}{100}\right)^N \Leftrightarrow 2 = \left(1 + \dfrac{6,1}{100}\right)^N$
$\Leftrightarrow 2 = \left(1 + \dfrac{6,1}{100}\right)^N \Leftrightarrow N = \log_{(1,061)} 2 \approx 11,7$.
Vậy sau ít nhất 12 năm người đó thu được số tiền thỏa yêu cầu.
Chọn đáp án B □

Câu 76. Anh An gửi số tiền 58 triệu đồng vào một ngân hàng theo hình thức lãi kép và ổn định trong 9 tháng thì lĩnh về được 61758000 đồng. Hỏi lãi suất ngân hàng hàng tháng là bao nhiêu? Biết rằng lãi suất không thay đổi trong thời gian gửi.

(A) 0,8%. (B) 0,6%. (C) 0,7%. (D) 0,5%.

Lời giải.

Áp dụng công thức $A_n = A_0\,(1+r)^n$ với n là số kỳ hạn, A_0 là số tiền ban đầu, A_n là số tiền có được sau n kỳ hạn, r là lãi suất.
Suy ra $A_9 = A_0\,(1+r)^9 \Rightarrow r = \sqrt[9]{\dfrac{A_9}{A_0}} - 1 = 0,7\%$.
Chọn đáp án C □

Câu 77 (Chuyên Bắc Giang 2019). Một người gửi 100 triệu đồng vào một ngân hàng với lãi suất 0,6% /tháng. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi tháng, số tiền lãi sẽ được nhập làm vốn ban đầu để tính lãi cho tháng tiếp theo. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu tháng, người đó được lĩnh số tiền không ít hơn 110 triệu đồng (cả vốn ban đầu và lãi), biết rằng trong suốt thời gian gửi tiền người đó không rút tiền và lãi suất không thay đổi?

(A) 18 tháng. (B) 16 tháng. (C) 17 tháng. (D) 15 tháng.

Lời giải.

Sau n tháng, người đó lĩnh được số tiền là $100.\left(1+0{,}6\%\right)^n$ (triệu đồng).

Sau n tháng, người đó được lĩnh số tiền không ít hơn 110 triệu đồng (cả vốn ban đầu và lãi).

$\Rightarrow 100\left(1+0,6\%\right)^n \geq 110 \Leftrightarrow n \geq \log_{1+0{,}6\%}\dfrac{11}{10} \approx 15{,}9$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 78. Một người lần đầu gửi vào ngân hàng 100 triệu đồng theo thể thức lãi kép (tức là tiền lãi của kỳ trước được cộng vào vốn của kỳ kế tiếp) với kì hạn 3 tháng, lãi suất 2% một quý. Sau đúng 6 tháng, người đó gửi thêm 100 triệu đồng với kỳ hạn và lãi suất như trước đó. Tổng số tiền người đó nhận được sau 1 năm gửi tiền vào ngân hàng gần bằng với kết quả nào sau đây? Biết rằng trong suốt thời gian gửi tiền lãi suất ngân hàng không thay đổi và người đó không rút tiền ra.

(A) 212 triệu đồng. (B) 216 triệu đồng. (C) 210 triệu đồng. (D) 220 triệu đồng.

Lời giải.

Ta có $r = 2\% = 0{,}02$

Số tiền 100 triệu đồng gửi lần đầu thì sau 1 năm (4 quý) nhận được cả vốn lẫn lãi là

$T_1 = 100\left(1+0{,}02\right)^4 = 108{,}24$ triệu đồng.

Số tiền 100 triệu đồng gửi lần thứ hai thì sau 6 tháng (2 quý) nhận được cả vốn lẫn lãi là

$T_2 = 100\left(1+0{,}02\right)^2 = 104{,}04$ triệu đồng.

Vậy tổng số tiền nhận được là: $T = T_1 + T_2 = 212{,}28$ triệu đồng.

Chọn đáp án (A) □

Câu 79 (KTNL Gia Bình 2019). Ông An gửi tiết kiệm 50 triệu đồng vào ngân hàng với kỳ hạn 3 tháng, lãi suất $8,4\%$ một năm theo hình thức lãi kép. Ông gửi được đúng 3 kỳ hạn thì ngân hàng thay đổi lãi suất, ông gửi tiếp 12 tháng nữa với kỳ hạn như cũ và lãi suất trong thời gian này là 12% một năm thì ông rút tiền về. Số tiền ông An nhận được cả gốc lẫn lãi là (làm tròn đến chữ số hàng đơn vị)

(A) 62255910 đồng. (B) 59895767 đồng. (C) 59993756 đồng. (D) 63545193 đồng.

Lời giải.

Đợt I, ông An gửi số tiền $P_0 = 50$ triệu, lãi suất $8,4\%$ một năm tức là $2,1\%$ mỗi kỳ hạn. Số tiền cả gốc và lãi ông thu được sau 3 kỳ hạn là: $P_3 = 50000000\left(1{,}021\right)^3$.

Đợt II, do ông không rút ra nên số tiền P_3 được xem là số tiền gửi ban đầu của đợt II, lãi suất đợt II là 3% mỗi kỳ hạn. Ông gửi tiếp 12 tháng bằng 4 kỳ hạn nên số tiền thu được cuối cùng là:

$P = P_3(1.03)^4 = 50000000(1.021)^3 .(1,03)^4 \approx 59895767$ đồng.

Chọn đáp án B □

Câu 80 (THPT An Lão Hải Phòng 2019).

Ngày 01 tháng 01 năm 2017, ông An đem 800 triệu đồng gửi vào một ngân hàng với lãi suất 0,5% một tháng. Từ đó, cứ tròn mỗi tháng, ông đến ngân hàng rút 6 triệu để chi tiêu cho gia đình. Hỏi đến ngày 01 tháng 01 năm 2018, sau khi rút tiền, số tiền tiết kiệm của ông An còn lại là bao nhiêu? Biết rằng lãi suất trong suốt thời gian ông An gửi không thay đổi

(A) $800(1{,}005)^{11} - 72$ (triệu đồng).
(B) $1200 - 400(1{,}005)^{12}$ (triệu đồng).
(C) $800(1{,}005)^{12} - 72$ (triệu đồng).
(D) $1200 - 400(1{,}005)^{11}$ (triệu đồng).

Lời giải.

Gửi ngân hàng số tiền là A đồng với lãi suất $r\%$/tháng.

Mỗi tháng vào ngày ngân hàng tính lãi, rút ra số tiền là X đồng. Số tiền còn lại sau n tháng được tính theo công thức

$S_n = A(1+r)^n - X\dfrac{(1+r)^n - 1}{r} = 775.3288753 = 1200 - 400.(1,005)^{12}$.

Chọn đáp án B □

Câu 81 (Chuyên Lam Sơn - Thanh Hóa - 2021).

Ông A gửi số tiền 100 triệu đồng vào ngân hàng với lãi suất 7%/năm. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm, số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn ban đầu. Sau 10 năm, nếu không rút lãi lần nào thì số tiền mà ông A nhận được gồm cả gốc lẫn lãi tính theo công thức nào dưới đây?

(A) $10^8(1+0{,}7)^{10}$ (đồng).
(B) $10^8(1+0{,}07)^{10}$(đồng).
(C) $10^8 \cdot 0{,}07^{10}$(đồng).
(D) $10^8.(1+0{,}007)^{10}$(đồng).

Lời giải.

Theo công thức tính lãi kép: $N = A(1+r\%)^n$,

trong đó A là số tiền vốn, $r\%$ là lãi suất theo kì hạn, n số kì hạn.

Suy ra, số tiền có được là $N = 10^8(1+0{,}07)^{10}$.

Chọn đáp án B □

Câu 82 (Chuyên Quốc Học Huế - 2021).

Một người gửi ngân hàng 200 triệu đồng với kì hạn 1 tháng theo hình thức lãi kép, lãi suất 0,58% một tháng (kể từ tháng thứ hai trở đi, tiền lãi được tính theo phần trăm của tổng tiền gốc và tiền lãi tháng trước đó). Hỏi sau ít nhất bao nhiêu tháng thì người đó có tối thiểu 225 triệu đồng trong tài khoản tiết kiệm, biết rằng ngân hàng chỉ tính lãi khi đến kì hạn?

(A) 21 tháng. (B) 24 tháng. (C) 22 tháng. (D) 30 tháng.

Lời giải.

Theo hình thức lãi kép, sau n tháng tổng số tiền cả gốc lẫn lãi mà người đó nhận được trong tài khoản là $A = 200(1+0,58\%)^n = 200(1,0058)^n$ (triệu đồng).

Theo bài ra thì $A \geq 225 \Leftrightarrow 200 \cdot 1{,}0058^n \geq 225 \Leftrightarrow 1{,}0058^n \geq \dfrac{9}{8}$.

$\Leftrightarrow n \geq \log_{1,0058} \dfrac{9}{8} \approx 20{,}37$.

Vì ngân hàng chỉ tính lãi khi đến kì hạn nên phải sau ít nhất 21 tháng người đó mới có tối thiểu 225 triệu đồng trong tài khoản.

Chọn đáp án A □

Câu 83 (Chuyên ĐHSP Hà Nội - 2021).

Một người gửi tiết kiệm 200 triệu đồng với lãi suất 5% một năm và lãi hàng năm được nhập vào vốn. Sau ít nhất bao nhiêu năm nhận được số tiền nhiều hơn 300 triệu đồng.

A 8 (năm). B 9 (năm). C 10 (năm). D 11 (năm).

Lời giải.

Số tiền người đó nhận được sau n năm là $A = 200 \cdot 1{,}05^n$ (triệu đồng)

Để nhận được số tiền nhiều hơn 300 triệu đồng $\Rightarrow A = 200 \cdot 1{,}05^n > 300$

$\Rightarrow 1{,}05^n > 1,5 \Leftrightarrow n > \log_{1{,}05} 1,5 \Leftrightarrow n > 8{,}3$ (năm).

Vậy sau ít nhất 9 năm người đó nhận được số tiền nhiều hơn 300 triệu đồng.

Chọn đáp án B □

Câu 84 (THPT Lê Quy Đôn Điện Biên 2019).

Ông An gửi 100 triệu vào tiết kiệm ngân hàng theo thể thức lãi kép trong một thời gian khá lâu mà không rút ra với lãi suất ổn định trong mấy chục năm qua là 10%/1 năm. Tết năm nay do ông kẹt tiền nên rút hết ra để gia đình đón Tết. Sau khi rút cả vốn lẫn lãi, ông trích ra gần 10 triệu để sắm sửa đồ Tết trong nhà thì ông còn 250 triệu. Hỏi ông đã gửi tiết kiệm bao nhiêu lâu?

A 10 năm. B 17 năm. C 15 năm. D 20 năm.

Lời giải.

Số tiền ông An tích lũy được gồm cả vốn và lãi là 260 triệu.

Công thức tính lãi kép $A_n = A(1 + r)^n$.

$\Leftrightarrow 260 \cdot 10^6 = 100 \cdot 10^6 \, (1 + 10\%)^n$.

$\Leftrightarrow n = 10$.

Chọn đáp án A □

Câu 85. Một học sinh A khi 15 tuổi được hưởng tài sản thừa kế 200000000 VNĐ. Số tiền này được bảo quản trong ngân hàng B với kì hạn thanh toán 1 năm và học sinh A chỉ nhận được số tiền này khi 18 tuổi. Biết rằng khi 18 tuổi, số tiền mà học sinh A được nhận sẽ là 231525000 VNĐ. Vậy lãi suất kì hạn một năm của ngân hàng B là bao nhiêu?

A 8%/năm. B 7%/năm. C 6%/ năm. D 5%/năm.

Lời giải.

Ta có số tiền nhận được của gốc và lãi là $200000000 \, (1 + r)^3 = 231525000$.

$\Leftrightarrow r = 5\%/\text{năm}$.

Chọn đáp án D □

Câu 86 (THPT Minh Khai Hà Tĩnh 2019).

Ông Anh gửi vào ngân hàng 60 triệu đồng theo hình thức lãi kép. Lãi suất ngân hàng là 8% trên năm. Sau 5 năm ông An tiếp tục gửi thêm 60 triệu đồng nữa. Hỏi sau 10 năm kể từ lần gửi đầu tiên ông An đến rút toàn bộ tiền gốc và tiền lãi được là bao nhiêu? (Biết lãi suất không thay đổi qua các năm ông gửi tiền).

(A) 231,815 (triệu đồng).
(B) 197,201 (triệu đồng).
(C) 217,695 (triệu đồng).
(D) 190,271 (triệu đồng).

Lời giải.

Số tiền ông An nhận được sau 5 năm đầu là $60\left(1+8\%\right)^5 = 88{,}160$ (triệu đồng)

Số tiền ông An nhận được (toàn bộ tiền gốc và tiền lãi) sau 10 năm là

$(88{,}16+60)\left(1+8\%\right)^5 = 217{,}695$ (triệu đồng).

Chọn đáp án (C) □

Câu 87 (Chuyên Vĩnh Phúc 2019). Một người mỗi tháng đều đặn gửi vào ngân hàng một khoản tiền T theo hình thức lãi kép với lãi suất 0,6% mỗi tháng. Biết sau 15 tháng người đó có số tiền là 10 triệu đồng. Hỏi số tiền T gần với số tiền nào nhất trong các số sau.

(A) 613,000 đồng.
(B) 645,000đồng.
(C) 635,000 đồng.
(D) 535,000 đồng.

Lời giải.

Ta có Số tiền cả lãi lẫn gốc sau 15 tháng gửi $S_{15} = \dfrac{T}{r}(1+r)\left[(1+r)^{15}-1\right]$.

Vậy $10{,}000{,}000 = \dfrac{T}{0{,}006}(1+0{,}006)\left[(1+0{,}006)^{15}-1\right] \Leftrightarrow T \approx 635{,}301$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 88 (Chuyên Hùng Vương Gia Lai 2019).

Anh Nam gửi 100 triệu đồng vào ngân hàng theo thể thức lãi kép kì hạn là một quý với lãi suất 3% một quý. Sau đúng 6 tháng anh Nam gửi thêm 100 triệu đồng với kì hạn và lãi suất như trước đó.Hỏi sau 1 năm số tiền (cả vốn lẫn lãi) anh Nam nhận được là bao nhiêu? (Giả sử lãi suất không thay đổi).

(A) 218,64 triệu đồng.
(B) 208,25 triệu đồng.
(C) 210,45 triệu đồng.
(D) 209,25 triệu đồng.

Lời giải.

Số tiền anh Nam nhận được sau 6 tháng (tức 2 quý) là

$T_1 = 100\left(1+3\%\right)^2 = 106{,}09$ triệu đồng.

Số tiền anh Nam nhận được sau một năm (tức 2 quý còn lại của năm) là

$T_2 = (106{,}09+100)\left(1+3\%\right)^2 \approx 218{,}64$ triệu đồng.

Chọn đáp án (A) □

Câu 89 (Chuyên Sơn La 2019). Ông A gửi vào ngân hàng 50 triệu đồng với lãi suất 0,5%/tháng. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu tháng thì ông A có được số tiền cả gốc lẫn lãi nhiều hơn 60 triệu đồng? Biết rằng trong suốt thời gian gửi, lãi suất ngân hàng không đổi và ông A không rút tiền ra.

(A) 36 tháng.
(B) 38 tháng.
(C) 37 tháng.
(D) 40tháng.

Lời giải.

Gọi A là số tiền gửi vào ngân hàng, r là lãi suất, T là số tiền cả gốc lẫn lãi thu được sau n tháng.
Ta có $T = A(1+r)^n$.
Theo đề $T = 50 \cdot (1{,}005)^n > 60 \Leftrightarrow n > \log_{1{,}005} \dfrac{6}{5} \approx 36{,}6$.
Vậy sau ít nhất 37 tháng thì ông A thu được số tiền cả gốc lẫn lãi hơn 60 triệu.
Chọn đáp án C □

Câu 90 (Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2019).

Một người gửi 300 triệu đồng vào một ngân hàng với lãi suất 7%/năm. Biết rằng nếu không rút tiền khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm số tiền lãi sẽ được nhập vào gốc để tính lãi cho năm tiếp theo. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu năm, người đó nhận được số tiền nhiều hơn 600 triệu đồng bao gồm cả gốc và lãi? Giả định trong suốt thời gian gửi, lãi suất không đổi và người đó không rút tiền ra.

A 9 năm. B 10 năm. C 11 năm. D 12 năm.

Lời giải.

Kí hiệu số tiền gửi ban đầu là A, lãi suất một kì hạn là m thì số tiền cả gốc và lãi có được sau n kì hạn là $A \cdot (1+m)^n$.
Do đó, số tiền cả gốc và lãi người đó nhận được sau n năm là $300 \cdot 1{,}07^n$ triệu đồng.
Số tiền cả gốc và lãi nhận được nhiều hơn 600 triệu đồng $\Leftrightarrow 300 \cdot 1{,}07^n > 600 \Leftrightarrow n > \log_{1{,}07} 2 \approx 10{,}245$.
Vậy sau ít nhất 11 năm thì người đó nhận được số tiền nhiều hơn 600 triệu đồng bao gồm cả gốc và lãi.
Chọn đáp án C □

Câu 91 (THPT Gia Lộc Hải Dương 2019).

Anh Bảo gửi 27 triệu đồng vào ngân hàng theo thể thức lãi kép, kỳ hạn là một quý, với lãi suất 1,85% một quý. Hỏi thời gian tối thiểu bao nhiêu để anh Bảo có được ít nhất 36 triệu đồng tính cả vỗn lẫn lãi?

A 16 quý. B 20 quý. C 19 quý. D 15 quý.

Lời giải.

Bài toán lãi kép
Kí hiệu số tiền gửi ban đầu là A, lãi suất một kì hạn là $r\%$ thì số tiền cả gốc và lãi có được sau n kì hạn là $S_n = A\,(1+r\%)^n$.
Anh Bảo nhận được số tiền ít nhất 36 triệu đồng tính cả vốn và lãi nên ta có
$27\,(1+1{,}85\%)^n \geq 36 \Leftrightarrow n \geq 15{,}693$.
Vậy thời gian tối thiểu để anh Bảo nhận được ít nhất 36 triệu đồng tính cả vốn lẫn lãi là 16 quý.
Chọn đáp án A □

Câu 92 (Sở Bắc Giang 2019). Ông An gửi 100 triệu đồng vào một ngân hàng với lãi suất 0,8%/ tháng. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi tháng số tiền lãi sẽ được nhập vào gốc để tính lãi cho tháng tiếp theo và từ tháng thứ hai trở đi, mỗi tháng ông gửi them vào tài khoản với số tiền 2 triệu đồng. Hỏi sau đúng 2 năm số tiền ông An nhận được cả gốc lẫn lãi là bao nhiêu? Biết rằng trong suốt thời gian gửi lãi suất không thay đổi và ông An không rút tiền ra (kết quả được làm tròn đến hàng nghìn).

(A) 169,871,000 đồng. (B) 171,761,000 đồng. (C) 173,807,000 đồng. (D) 169,675,000 đồng.

Lời giải.

Với 100 triệu ban đầu số tiền cả lãi và gốc thu được sau hai năm là

$T_1 = 100\,(1+0{,}8\%)^{24}\,10^6 = 121074524$

Mỗi tháng tiếp theo gửi 2 triệu thì tổng số tiền cả lãi và gốc là

$T_2 = \dfrac{2}{0{,}008}\left[(1+0{,}008)^{23}-1\right](1+0{,}008)\,10^6 = 50686310$

Vậy tổng số tiền là $T = T_1 + T_2 = 171{,}761{,}000$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 93. Năm 2020, một hãng xe ô tô niêm yết giá bán loại xe X là 900,000,000 đồng và dự định trong 10 năm tiếp theo, mỗi năm giảm 2% giá bán so với giá bán năm trước. Theo dự định đó, năm 2025 hãng xe ô tô niêm yết giá bán loại xe X là bảo nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng nghìn)?

(A) 810,000,000. (B) 813,529,000. (C) 797,258,000. (D) 830,131,000.

Lời giải.

Ta có $A = 900{,}000{,}000$, $r = \dfrac{2}{100}$

Năm 2021 giá xe niêm yết là $T_1 = A - Ar$

Năm 2022 giá xe niêm yết là $T_2 = A - Ar - (A - Ar)\,r = A(1-r)^2$

...

Năm 2025 giá xe niêm yết là $T_5 = T_4 - T_4 r = A(1-r)^5$

$T_5 = 900{,}000{,}000\left(1 - \dfrac{2}{100}\right)^5 \approx 813{,}529{,}000.$

Chọn đáp án (B) □

Câu 94 (Mã 104 - 2020 Lần 2). Năm 2020, một hãng xe ô tô niêm yết giá bán loại xe X là 850,000,000 đồng và dự định trong 10 năm tiếp theo, mỗi năm giảm 2% giá bán của năm liền trước. Theo dự định đó, năm 2025 hãng xe ô tô niêm yết giá bán xe X là bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng nghìn)?

(A) 768,333,000 đồng. (B) 765,000,000 đồng. (C) 752,966,000 đồng. (D) 784,013,000 đồng.

Lời giải.

Giá bán xe năm đầu tiên $A_1 = 850{,}000{,}000$ đồng.

Giá bán xe năm thứ hai $A_2 = A_1 - A_1 \cdot r = A_1\,(1-r)$ đồng, với $r = 2\%$.

Giá bán xe năm thứ ba $A_3 = A_2 - A_2 r = A_2\,(1-r) = A_1\,(1-r)^2$ đồng.

...

Giá bán xe năm thứ n $A_n = A_1\,(1-r)^{n-1}$ đồng.

Vậy giá bán xe năm thứ 6 là $A_6 = A_1\,(1-r)^5 = 850{,}000{,}000\,(1-2\%)^5 \approx 768{,}333{,}000$ đồng.

Chọn đáp án (A) □

Câu 95 (Chuyên Lương Văn Chánh - Phú Yên - 2020).

Một ngân hàng X, quy định về số tiền nhận được của khách hàng sau n năm gửi tiền vào ngân hàng tuân theo công thức $P(n) = A(1 + 8\%)$, trong đó A là số tiền gửi ban đầu của khách hàng. Hỏi số tiền ít nhất mà khách hàng B phải gửi vào ngân hàng X là bao nhiêu để sau ba năm khách hàng đó rút ra được lớn hơn 850 triệu đồng (Kết quả làm tròn đến hàng triệu)?.

(A) 675 triệu đồng. (B) 676 triệu đồng. (C) 677 triệu đồng. (D) 674 triệu đồng.

Lời giải.

Ta có $P(n) = A(1 + 8\%)^n$.

Sau 3 năm số tiền khách hàng rút về lớn hơn 850 triệu đồng là

$$850 < A(1 + 8\%)^3 \Leftrightarrow A > \frac{850}{(1 + 8\%)^3} \approx 674{,}8.$$

Vậy số tiền ít nhất mà khách hàng B phải gửi vào ngân hàng X là 675 triệu đồng.

Chọn đáp án (A) □

Câu 96 (Chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm - Quảng Nam - 2020).

Ông tuấn gửi 100 triệu vào ngân hàng với hình thức lãi kép, kỳ hạn 1 năm với lãi suất 8%. Sau 5 năm ông rút toàn bộ tiền và dùng một nửa để sửa nhà, số tiền còn lại ông tiếp tục gửi ngân hàng với lãi suất như lần trước. Số tiền lãi ông tuấn nhận được sau 10 năm gửi gần nhất với giá trị nào dưới đây?

(A) 46,933 triệu. (B) 34,480 triệu. (C) 81,413 triệu. (D) 107,946 triệu.

Lời giải.

Năm năm đầu ông Tuấn có số tiền cả gốc và lãi là $T_1 = 100\,(1 + 0{,}08)^5 = 146{,}933$

Sau khi sửa nhà số tiền còn lại gửi vào ngân hàng trong 5 năm thì số tiền cả gốc và lãi là

$$T_2 = \frac{146{,}932}{2}(1 + 0{,}08)^5 = 107{,}946.$$

Số tiền lãi trong 10 năm là $L = (146{,}933 - 100) + (107{,}946 - 73{,}466) = 81{,}413$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 97 (Nguyễn Huệ - Phú Yên - 2020).

Dân số thế giới được ước tính theo công thức $S = A \cdot \mathrm{e}^{ni}$, trong đó A là dân số của năm lấy mốc, S là dân số sau n năm, i là tỷ lệ tăng dân số hàng năm. Biết năm 2005 dân số của thành phố Tuy Hòa là khoảng 202,300 người và tỉ lệ tăng dân số là 1,47%. Hỏi với mức tăng dân số không đổi thì đến năm bao nhiêu dân số thành phố Tuy Hòa đạt được 255,000 người?

(A) 2020. (B) 2021. (C) 2023. (D) 2022.

Lời giải.

Lấy năm 2005 làm mốc, khi đó $A = 202{,}300$.

Giả sử sau n năm thì dân số thành phố Tuy Hòa đạt được 255,000 người, tức là ta có

$255{,}000 = 202{,}300 \cdot \mathrm{e}^{\frac{1{,}47n}{100}} \Leftrightarrow n = 100 \cdot \ln \dfrac{255000}{202300} \approx 15{,}75$ năm.

Vậy đến năm 2021 thì dân số thành phố Tuy Hòa đạt được 255.000 người.

Chọn đáp án (B) □

Câu 98 (Tiên Du - Bắc Ninh - 2020).

Số ca nhiễm Covid - 19 trong cộng đồng ở một tỉnh vào ngày thứ x trong một giai đoạn được ước tính theo công thức $f(x) = A \cdot \mathrm{e}^{rx}$ trong đó A là số ca nhiễm ở ngày đầu của giai đoạn, r là tỷ lệ gia tăng số ca nhiễm hàng ngày của giai đoạn đó và trong cùng một giai đoạn thì r không đổi. Giai đoạn thứ nhất tính từ ngày tỉnh đó có 9 ca bệnh đầu tiên và không dùng biện pháp phòng chống lây nhiễm nào thì đến ngày thứ 6 số ca bệnh của tỉnh là 180 ca. Giai đoạn thứ hai (kể từ ngày thứ 7 trở đi) tỉnh đó áp dụng các biện pháp phòng chống lây nhiễm nên tỷ lệ gia tăng số ca nhiễm hàng ngày giảm đi 10 lần so với giai đoạn trước. Đến ngày thứ 6 của giai đoạn hai thì số ca mắc bệnh của tỉnh đó gần nhất với số nào sau đây?

(A) 242. (B) 16. (C) 90. (D) 422.

Lời giải.

Giai đoạn 1. Ta có $180 = 9 \cdot \mathrm{e}^{r6} \Rightarrow r = \dfrac{1}{6} \ln 20$

Giai đoạn 2. Đến ngày thứ 6 số ca mắc bệnh của tỉnh là $f(x) = 180 \cdot \mathrm{e}^{\frac{r}{10} \cdot 6} = 242$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 99 (Kim Thành - Hải Dương - 2020).

Anh Việt vay tiền ngân hàng 500 triệu đồng mua nhà và trả góp hàng tháng. Cuối mỗi tháng bắt đầu từ tháng thứ nhất anh trả 10 triệu đồng và chịu lãi suất là 0,9%/ tháng cho số tiền chưa trả. Với hình thức hoàn nợ như vậy thì sau bao lâu anh Việt sẽ trả hết số nợ ngân hàng?

(A) 65 tháng. (B) 66 tháng. (C) 67 tháng. (D) 68 tháng.

Lời giải.

Gọi A là số tiền vay ngân hàng; r là lãi suất hàng tháng cho số tiền còn nợ; m là số tiền trả nợ hàng tháng; n là thời gian trả hết nợ.

Để trả hết nợ thì $A(1+r)^n - \dfrac{m}{r}\left[(1+r)^n - 1\right] = 0$

$\Leftrightarrow 500\,(1 + 0{,}9\%)^n - \dfrac{10}{0,9\%}\left[(1+0{,}9\%)^n - 1\right] = 0$

$\Leftrightarrow (1 + 0,9\%)^n = \dfrac{20}{11}$

$\Leftrightarrow n = \log_{(1+0{,}9\%)} \dfrac{20}{11} \approx 66{,}72.$

Vậy sau 67 tháng anh Việt trả hết nợ.

Chọn đáp án (C) □

Câu 100 (Thanh Chương 1 - Nghệ An - 2020).

Dân số thế giới được ước tính theo công thức$S = A \cdot \mathrm{e}^{ni}$, trong đó A là dân số của năm lấy làm mốc, S là dân số sau n năm, i là tỉ lệ tăng dân số hằng năm. Dân số Việt Nam năm 2019 là 95,5 triệu người, tỉ lệ tăng dân số hằng năm từ 2009 đến nay là 1,14%. Hỏi dân số Việt Nam năm 2009 gần với số nào nhất trong các số sau?

(A) 94,4 triệu người. (B) 85,2 triệu người. (C) 86,2 triệu người. (D) 83,9 triệu người.

Lời giải.

Áp dụng công thức $S = A \cdot e^{ni}$ trong đó $S = 95{,}5$ triệu người, $n = 10$ năm, $i = 1{,}14\%$

Ta có số dân Việt Nam năm 2009 là $A = \dfrac{S}{e^{ni}} = \dfrac{95{,}5}{e^{10 \cdot 1{,}14\%}} \approx 85{,}2$ triệu người.

Chọn đáp án (B) □

Câu 101 (Tiên Lãng-Hải Phòng - 2020).

Ông An dự định gửi vào ngân hàng một số tiền với lãi suất không đổi là 7% một năm. Biết rằng cứ sau mỗi năm số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn ban đầu để tính lãi cho năm kế tiếp. Tính số tiền tối thiểu x (triệu đồng, $x \in \mathbb{N}$) ông An gửi vào ngân hàng để sau 3 năm số tiền lãi đủ mua một chiếc xe gắn máy giá trị 45 triệu đồng.

(A) 200. (B) 190. (C) 250. (D) 150.

Lời giải.

Áp dụng công thức $P = P_o(1+r)^n$.

Số tiền ông An có được sau 3 năm là $P = x(1+0{,}07)^3$.

Tiền lãi ông An có được sau 3 năm là $P - x = x(1+0{,}07)^3 - x = x\left((1+0,07)^3 - 1\right)$.

Số tiền lãi trên là 45 triệu đồng nên $x\left((1+0{,}07)^3 - 1\right) = 45 \Leftrightarrow x \simeq 199{,}96$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 102 (Đề Minh Họa 2020 Lần 1).

Để dự báo dân số của một quốc gia, người ta sử dụng công thức $S = A \cdot \mathrm{e}^{nr}$, trong đó A là dân số của năm lấy làm mốc tính, S là dân số sau n năm, r là tỉ lệ tăng dân số hàng năm. Năm 2017, dân số Việt nam là 93,671,600 người (Tổng cục Thống kê, Niên giám thống kê 2017, Nhà xuất bản Thống kê, Tr 79). Giả sử tỉ lệ tăng dân số hàng năm không đổi là 0,81%, dự báo dân số Việt nam năm 2035 là bao nhiêu người (kết quả làm tròn đến chữ số hàng trăm)?

(A) 109,256,100. (B) 108,374,700. (C) 107,500,500. (D) 108,311,100.

Lời giải.

Lấy năm 2017 làm mốc, ta có $A = 93{,}671{,}600$; $n = 2035 - 2017 = 18$

Khi đó dân số Việt Nam vào năm 2035 là $S = 93{,}671{,}600.\mathrm{e}^{18 \cdot \frac{0{,}81}{100}} \approx 108{,}374{,}700$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 103 (Đề Tham Khảo 2020 Lần 2).

Để quảng bá cho sản phẩm A, một công ty dự định tổ chức quảng cáo theo hình thức quảng cáo trên truyền hình. Nghiên cứu của công ty cho thấy: nếu sau n lần quảng cáo được phát thì tỉ lệ người xem quảng cáo đó mua sản phẩm A tuân theo công thức $P(n) = \dfrac{1}{1+49\mathrm{e}^{-0{,}015n}}$. Hỏi cần phát ít nhất bao nhiêu lần quảng cáo để tỉ lệ người xem mua sản phẩm đạt trên 30%?

(A) 202. (B) 203. (C) 206. (D) 207.

Lời giải.

Theo bài ra ta có $\dfrac{1}{1+49\mathrm{e}^{-0{,}015n}} > 0,3$

$\Leftrightarrow 1 + 49\mathrm{e}^{-0{,}015n} < \dfrac{10}{3}$

$\Leftrightarrow \mathrm{e}^{-0{,}015n} < \dfrac{7}{147}$

$\Leftrightarrow -0,015n < \ln \dfrac{7}{147}$

$\Leftrightarrow n > -\dfrac{1}{0,015} \ln \dfrac{7}{147} \approx 202,97.$

Vậy ít nhất 203 lần quảng cáo.

Chọn đáp án B □

Câu 104 (Sở Hà Nội 2019). Cường độ ánh sáng đi qua môi trường nước biển giảm dần theo công thức $I = I_0 \mathrm{e}^{-\mu x}$, với I_0 là cường độ ánh sáng lúc ánh sáng bắt đầu đi vào môi trường nước biển và x là độ dày của môi trường đó (x tính theo đơn vị mét). Biết rằng môi trường nước biển có hằng số hấp thụ là $\mu = 1,4$. Hỏi ở độ sâu 30 mét thì cường độ ánh sáng giảm đi bao nhiêu lần so với cường độ ánh sáng lúc ánh sáng bắt đầu đi vào nước biển?

A. e^{-21} lần. B. e^{42} lần. C. e^{21} lần. D. e^{-42} lần.

Lời giải.

Khi mới bắt đầu đi vào môi trường nước biển thì $x = 0 \Rightarrow I_1 = I_0 \cdot \mathrm{e}^0$

Ở độ sâu 30 mét thì $I_2 = I_o \cdot \mathrm{e}^{-\mu.30}$

Vậy ta có $\dfrac{I_2}{I_1} = \dfrac{I_0 \cdot \mathrm{e}^{-\mu \cdot 30}}{I_o \cdot \mathrm{e}^0}$.

Khi đó $I_2 = \mathrm{e}^{-42} \cdot I_1$, vậy I_2 tăng e^{-42} lần so với I_1, nói cách khác, I_2 giảm e^{42} lần so với I_1.

Chọn đáp án B □

Câu 105 (Chuyên Lê Quý Đôn Điện Biên 2019).

Một người thả một lá bèo vào một chậu nước. Sau 12 giờ, bèo sinh sôi phủ kín mặt nước trong chậu. Biết rằng sau mỗi giờ lượng bèo tăng gấp 10 lần lượng bèo trước đó và tốc độ tăng không đổi. Hỏi sau mấy giờ thì bèo phủ kín $\dfrac{1}{5}$ mặt nước trong chậu (kết quả làm tròn đến 1 chữ số phần thập phân).

A. 9,1 giờ. B. 9,7 giờ. C. 10,9 giờ. D. 11,3 giờ.

Lời giải.

Gọi S là diện tích lá bèo thả ban đầu.

Vì sau mỗi giờ, lượng bèo tăng gấp 10 lần lượng bèo trước đó nên sau 12 giờ, tổng diện tích các lá bèo trong chậu là $10^{12}S$.

Theo đề bài Sau 12 giờ, bèo phủ kín mặt nước trong chậu nên diện tích mặt nước trong chậu là $10^{12}S$. Giả sử sau x giờ thì bèo phủ kín $\dfrac{1}{5}$ mặt nước trong chậu.

Ta có $10^x S = \dfrac{1}{5} 10^{12} S \Leftrightarrow 10^{12-x} = 5 \Leftrightarrow x = 12 - \log 5 \simeq 11,3$.

Vậy sau 11,3 giờ thì bèo phủ kín $\dfrac{1}{5}$ mặt nước trong chậu.

Chọn đáp án D □

Câu 106 (KTNL GV Thuận Thành 2 Bắc Ninh 2019).

Cho biết sự tăng dân số được ước tính theo công thức $S = A \cdot \mathrm{e}^{Nr}$ (trong đó A là dân số của năm lấy làm mốc tính, S là dân số sau N năm, r là tỉ lệ tăng dân số hằng năm). Đầu năm 2010 dân số tỉnh Bắc Ninh là 1,038,229 người tính đến đầu năm 2015 dân số của tỉnh là 1,153,600 người. Hỏi nếu tỉ lệ tăng dân số hằng năm giữ nguyên thì đầu năm 2020 dân số của tỉnh nằm trong khoảng nào?

(A) $(1{,}281{,}600; 1{,}281{,}700)$.
(B) $(1{,}281{,}700; 1{,}281{,}800)$.
(C) $(1{,}281{,}800; 1{,}281{,}900)$.
(D) $(1{,}281{,}900; 1{,}282{,}000)$.

Lời giải.

Áp dụng công thức $S = A \cdot \mathrm{e}^{Nr}$ từ đầu năm 2010 đến đầu năm 2015 ta có

$1153600 = 1038229 \cdot \mathrm{e}^{5r} \Leftrightarrow r = \dfrac{1}{5} \ln \dfrac{1153600}{1038229}$.

Đầu năm 2020 dân số của tỉnh Bắc Ninh là $S = 1038229 \cdot \mathrm{e}^{10 \cdot \frac{1}{5} \ln \frac{1153600}{1038229}} \approx 1281792$ người.

Chọn đáp án (B) □

Câu 107 (Chuyên Bắc Ninh - 2020).

Anh Dũng đem gửi tiết kiệm số tiền là 400 triệu đồng ở hai loại kỳ hạn khác nhau. Anh gửi 250 triệu đồng theo kỳ hạn 3 tháng với lãi suất $x\%$ một quý. Số tiền còn lại anh gửi theo kỳ hạn 1 tháng với lãi suất 0,25% một tháng. Biết rằng nếu không rút lãi thì số lãi sẽ được nhập vào số gốc để tính lãi cho kỳ hạn tiếp theo. Sau một năm số tiền cả gốc và lãi của anh là 416,780,000 đồng. Tính x.

(A) 1,2. (B) 0,8. (C) 0,9. (D) 1,5.

Lời giải.

Xét bài toán ông B gửi tiết kiệm số tiền A đồng với lãi suất r cho 1 kỳ hạn. Biết rằng nếu không rút lãi thì số lãi sẽ được nhập vào số gốc để tính lãi cho kỳ hạn tiếp theo. Hỏi sau n kỳ hạn số tiền cả gốc và lãi của ông B là bao nhiêu nếu trong thời gian gửi lãi suất không thay đổi?

- ☑ Sau 1 kì hạn số tiền cả gốc và lãi mà ông B có được là $T_1 = A + A \cdot r = A\,(1 + r)$.
- ☑ Sau 2 kì hạn số tiền cả gốc và lãi mà ông B có được là

$$T_2 = T_1 + T_1 \cdot r = T_1\,(1 + r) = A(1 + r)^2$$

- ☑ Tổng quát ông B có số tiền cả gốc và lãi sau n kì hạn là $T_n = A(1 + r)^n$ (1).

Áp dụng công thức (1) cho bài toán đề cho, gọi S là số tiền cả gốc và lãi anh Dũng có sau một năm gửi, ta có $S = 250\,(1 + x\%)^4 + 150\,(1 + 0{,}25\%)^{12}$ (triệu đồng).

$S = 416{,}78$ (triệu đồng) $\Leftrightarrow 250\,(1 + x\%)^4 + 150\,(1 + 0,25\%)^{12} = 416,78 \Leftrightarrow x \approx 1{,}2$.

Vậy $x \approx 1{,}2$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 108 (Chuyên Lê Quý Đôn – Điện Biên 2019).

Một người thả một lá bèo vào một chậu nước. Sau 12 giờ bèo sinh sôi phủ kín mặt nước trong chậu. Biết rằng sau mỗi giờ lượng bèo tăng gấp 10 lần lượng bèo trước đó và tốc độ tăng không đổi. Hỏi sau mấy giờ thì bèo phủ kín $\dfrac{1}{5}$ mặt nước trong chậu (kết quả làm tròn đến một chữ số phần thập phân)?

Ⓐ 9,1 giờ. Ⓑ 9,7 giờ. Ⓒ 10,9 giờ. Ⓓ 11,3 giờ.

Lời giải.

Sau mỗi giờ, lượng lá bèo phủ trên mặt nước là 10^n $(1 \leq n \leq 12)$.

$\Rightarrow$ Lượng lá bèo phủ kín mặt nước trong chậu (sau 12 giờ) là

$S = 1 + 10 + 10^2 + \ldots + 10^{12} = \dfrac{10^{13} - 1}{9}$.

Do đó, lượng lá bèo cần để phủ $\dfrac{1}{5}$ mặt nước trong chậu là $\dfrac{10^{13} - 1}{45}$.

Giả sử sau t giờ, lá bèo phủ kín được $\dfrac{1}{5}$ mặt nước trong chậu, ta có

$1 + 10 + 10^2 + \ldots + 10^t = \dfrac{10^{t+1} - 1}{9} = \dfrac{10^{13} - 1}{45}$

$10^{t+1} = \dfrac{10^{13} + 4}{5} \Leftrightarrow t \approx 11{,}3$.

Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 109 (Bình Giang - Hải Dương 2019).

Một công ty vừa tung ra thị trường sản phẩm mới và họ tổ chức quảng cáo trên truyền hình mỗi ngày. Một nghiên cứu thị trường cho thấy, nếu sau x lần quảng cáo được phát thì số % người xem mua sản phẩm là $P(x) = \dfrac{100}{1 + 49\mathrm{e}^{-0{,}015x}}$, $x \geq 0$. Hãy tính số lần quảng cáo được phát tối thiểu để số % người xem mua sản phẩm đạt hơn 75%.

Ⓐ 323. Ⓑ 343. Ⓒ 330. Ⓓ 333.

Lời giải.

Theo yêu cầu bài toán ta có

$$\begin{aligned}
P(x) =& \frac{100}{1 + 49\mathrm{e}^{-0.015x}} > 75 \\
\Leftrightarrow& 1 + 49\mathrm{e}^{-0{,}015x} < \frac{4}{3} \\
\Leftrightarrow& \mathrm{e}^{-0{,}015x} < \frac{1}{147} \\
\Leftrightarrow& -0{,}015x < \ln\left(\frac{1}{147}\right) \\
\Leftrightarrow& x > \frac{\ln\left(\frac{1}{147}\right)}{-0{,}015} \approx 332{,}7
\end{aligned}$$

Vậy số lần quảng cáo tối tiểu là 333 lần.

Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 110. Áp suất không khí P (đo bằng milimet thủy ngân, kí hiệu là mmHg) suy giảm mũ so với độ cao x (so với mặt nước biển)(đo bằng mét) theo công thức $P = P_0 \cdot \mathrm{e}^{xi}$, trong đó $P_0 = 760$ mmHg là áp suất ở mực nước biển $(x = 0)$, i là hệ số suy giảm. Biết rằng ở độ cao 1000 m thì áp suất của không khí là 672,71 mmHg. Hỏi áp suất không khí ở độ cao 3343m là bao nhiêu (làm tròn đến hàng phần trăm)?

Ⓐ 505,45 mmHg. Ⓑ 530,23 mmHg. Ⓒ 485,36 mmHg. Ⓓ 495,34 mmHg.

Lời giải.

Ở độ cao $x_1 = 1000$ m thì áp suất không khí $P_1 = 672{,}71$ mmHg.

Suy ra $P_1 = P_0 \cdot \mathrm{e}^{x_1 i} \Leftrightarrow x_1 i = \ln\left(\dfrac{P_1}{P_0}\right) \Leftrightarrow i = \dfrac{\ln\left(\dfrac{P_1}{P_0}\right)}{x_1} = -1{,}22 \cdot 10^{-4}$.

Áp suất không khí P_2 ở độ cao $x_2 = 3343$ m là $P_2 = P_0 \cdot \mathrm{e}^{x_2 i} = 760 \cdot \mathrm{e}^{3343 \cdot (-1{,}22 \cdot 10^{-4})} = 505{,}46$ mmHg.

Chọn đáp án A □

Câu 111. Số lượng loại vi khuẩn A trong một phòng thí nghiệm được tính theo công thức $s(t) = s(0)2^t$, trong đó $s(0)$ là số lượng vi khuẩn A lúc ban đầu, $s(t)$ là số lượng vi khuẩn A có sau t phút. Biết sau 3 phút thì số vi khuẩn A là 625 nghìn con. Hỏi sau bao lâu kể từ lúc ban đầu, số lượng loại vi khuẩn A là 20 triệu con.

A. 7 phút. B. 12 phút. C. 48 phút. D. 8 phút.

Lời giải.

Theo giả thiết ta có $s(3) = 625000 \Leftrightarrow s(0)2^3 = 625000 \Leftrightarrow s(0) = 78125$.

Số lượng loại vi khuẩn A là 20 triệu con khi

$s(t) = 20000000 \Leftrightarrow s(0)2^t = 20000000 \Leftrightarrow 2^t = \dfrac{20000000}{s(0)} = \dfrac{20000000}{78125} = 256 \Leftrightarrow t = 8$.

Vậy sau 8 phút thì số lượng vi khuẩn A là 20 triệu con.

Chọn đáp án D □

Câu 112 (Đề Minh Họa 2017). Ông A vay ngắn hạn ngân hàng 100 triệu đồng, với lãi suất 12%/năm. Ông muốn hoàn nợ cho ngân hàng theo cách: Sau đúng một tháng kể từ ngày vay, ông bắt đầu hoàn nợ; hai lần hoàn nợ liên tiếp cách nhau đúng một tháng, số tiền hoàn nợ ở mỗi lần là như nhau và trả hết tiền nợ sau đúng 3 tháng kể từ ngày vay. Hỏi, theo cách đó, số tiền m mà ông A sẽ phải trả cho ngân hàng trong mỗi lần hoàn nợ là bao nhiêu? Biết rằng, lãi suất ngân hàng không thay đổi trong thời gian ông A hoàn nợ.

A. $m = \dfrac{120 \cdot (1{,}12)^3}{(1{,}12)^3 - 1}$ (triệu đồng). B. $m = \dfrac{100 \cdot (1{,}01)^3}{3}$ (triệu đồng).

C. $m = \dfrac{(1{,}01)^3}{(1{,}01)^3 - 1}$ (triệu đồng). D. $m = \dfrac{100 \cdot 1{,}03}{3}$ (triệu đồng).

Lời giải.

Theo đề ta có ông A trả hết tiền sau 3 tháng vậy ông A hoàn nợ 3 lần

Với lãi suất 12%/năm suy ra lãi suất một tháng là 1%

Hoàn nợ lần 1

Tổng tiền cần trả (gốc và lãi) là $100 \cdot 0{,}01 + 100 = 100 \cdot 1{,}01$ (triệu đồng).

Số tiền dư $100 \cdot 1{,}01 - m$ (triệu đồng).

Hoàn nợ lần 2

Tổng tiền cần trả (gốc và lãi) là $(100 \cdot 1{,}01 - m) \cdot 0{,}01 + (100 \cdot 1{,}01 - m) = 100 \cdot (1{,}01)^2 - 1{,}01.m$ (triệu đồng).

Số tiền dư $100 \cdot (1{,}01)^2 - 1{,}01 \cdot m - m$ (triệu đồng).

Hoàn nợ lần 3

Tổng tiền cần trả (gốc và lãi) là
$\left[100\cdot(1{,}01)^2-1{,}01\cdot m-m\right]\cdot 1{,}01=100\cdot(1{,}01)^3-(1{,}01)^2m-1{,}01m$ (triệu đồng).
Số tiền dư $100\cdot(1{,}01)^3-(1{,}01)^2m-1{,}01m-m$ (triệu đồng).
$\Rightarrow 100\cdot(1{,}01)^3-(1{,}01)^2m-1,01m-m=0\Leftrightarrow m=\dfrac{100\cdot(1{,}01)^3}{(1{,}01)^2+1{,}01+1}$
$\Leftrightarrow m=\dfrac{100\cdot(1{,}01)^3\cdot(1{,}01-1)}{\left[(1{,}01)^2+1{,}01+1\right]\cdot(1{,}01-1)}=\dfrac{(1{,}01)^3}{(1{,}01)^3-1}$ (triệu đồng).
Chọn đáp án C □

Câu 113 (Đề Tham Khảo 2019). Ông A vay ngân hàng 100 triệu đồng với lãi suất 1%/tháng. Ông ta muốn hoàn nợ cho ngân hàng theo cách: Sau đúng một tháng kể từ ngày vay, ông bắt đầu hoàn nợ; hai lần hoàn nợ liên tiếp cách nhau đúng một tháng, số tiền hoàn nợ ở mỗi tháng là như nhau và ông A trả hết nợ sau đúng năm năm kể từ ngày vay. Biết rằng mỗi tháng ngâng hàng chỉ tính lãi trên số dư nợ thực tế của tháng đó. Hỏi số tiền mỗi tháng ông ta cần trả cho ngâng hàng gần nhất với số tiền nào dưới đây?

A 2,20 triệu đồng. B 2,22 triệu đồng. C 3,03 triệu đồng. D 2,25 triệu đồng.

Lời giải.

Ta xây dựng bài toán tổng quát như sau
Gọi số tiền người đó vay ngâng hàng là V_0 triệu đồng
Số tiền hàng tháng người đó phải trả là a triệu đồng
Lãi suất là $r\%$/tháng
Vậy số tiền nợ ngân hàng sau tháng thứ nhất là $V_0\left(1+0{,}0r\right)$
Số tiền người đó còn nợ ngân hàng sau khi trả tiền tháng 1 là $T_1=V_0\left(1+0,0r\right)-a$.
Số tiền người đó còn nợ ngân hàng sau khi trả tiền tháng 2 là

$$\begin{aligned}T_2&=T_1\left(1+0,0r\right)-a\\&=\left[V_0\left(1+0,0r\right)-a\right]\left(1+0,0r\right)-a\\&=V_o(1+0,0r)^2-a\left(1+0,0r\right)-a\end{aligned}$$

Số tiền người đó còn nợ ngâng hàng sau tháng thứ n là

$$T_n=V_o(1+0,0r)^n-a(1+0,0r)^{n-1}-\ldots-a\left(1+0,0r\right)-a$$

Vì sau n tháng thì trả hết tiền nên ta có

$$\begin{aligned}T_n=0&\Leftrightarrow V_o(1+0,0r)^n-a(1+0,0r)^{n-1}-\ldots-a\left(1+0,0r\right)-a=0\\&\Leftrightarrow V_0(1+0,0r)^n=a\left[(1+0,0r)^{n-1}+\ldots+(1+0,0r)+1\right]\\&\Leftrightarrow V_0(1+0,0r)^n=a\frac{(1+0,0r)^n-1}{(1+0,0r)-1}\\&\Leftrightarrow a=\frac{V_o.0,0r.\left(1+0,0r\right)^n}{(1+0,0r)^n-1}\end{aligned}$$

Áp dụng $a = \dfrac{100 \cdot 0{,}01\left(1{,}01^{60}\right)}{1{,}01^{60} - 1} \approx 2{,}224444768$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 114 (Đại Học Hà Tĩnh - 2020). Đầu mỗi tháng anh A gửi vào ngân hàng 3 triệu đồng với lãi suất kép là 0,6% mỗi tháng. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu tháng (khi ngân hàng đã tính lãi) thì anh A có được số tiền cả lãi và gốc nhiều hơn 100 triệu, biết lãi suất không đổi trong qua trình gửi.

(A) 31 tháng. (B) 40 tháng. (C) 35 tháng. (D) 30 tháng.

Lời giải.

Đặt $a = 1 + r$ và M. Trong đó M là số tiền góp vào hàng tháng, r là lãi suất hàng tháng.

Tiền gốc và lãi anh A nhận trong tháng thứ nhất là: $T_1 = M + M \cdot r = M \cdot a$.

Tiền gốc và lãi anh A nhận trong tháng thứ hai là: $T_2 = M \cdot a + M + (M \cdot a + M)\, r = Ma^2 + Ma$.

...

Tương tự tiền gốc và lãi anh A nhận trong tháng thứ n là: $T_n = Ma^n + Ma^{n-1} + \ldots + Ma = Ma\left(a^{n-1} + a^{n-2} + \ldots + 1\right) = Ma.\dfrac{a^n - 1}{a - 1} = \dfrac{M}{r}(1 + r)\left[(1 + r)^n - 1\right]$

Sau tháng thứ n anh A gửi vào ngân hàng 3 triệu đồng với lãi suất kép là 0,6% mỗi tháng và nhận được số tiền nhiều hơn 100 triệu, khi đó ta có

$\dfrac{3}{0{,}6\%}\left[(1 + 0{,}6\%)^n - 1\right](1 + 0{,}6\%) > 100 \Leftrightarrow n > 30{,}3$.

Vậy sau ít nhất 31 tháng thì anh A mới có được số tiền nhiều hơn 100 triệu.

Chọn đáp án (A) □

Câu 115 (Sở Hà Tĩnh - 2020). Một người vay tiền ở một ngân hàng theo hình thức lãi kép với lãi suất 0,7%/tháng với tổng số tiền vay là 1 tỉ đồng. Mỗi tháng người đó đều trả cho ngân hàng một số tiền như nhau để trừ vào tiền gốc và lãi. Biết rằng đúng 25 tháng thì người đó trả hết gốc và lãi cho ngân hàng. Hỏi số tiền của người đó trả cho ngân hàng ở mỗi tháng gần nhất với số nào sau đây?

(A) 43,730,000 đồng. (B) 43,720,000 đồng. (C) 43,750,000 đồng. (D) 43,740,000 đồng.

Lời giải.

Gọi M là số tiền vay ban đầu.

Gọi A là số tiền mà hàng tháng người đó trả cho ngân hàng.

Sau tháng 1 dư nợ còn lại là $M \cdot 1{,}007 - A$

Sau tháng 2 dư nợ còn lại là $(M \cdot 1{,}007 - A) \cdot 1{,}007 - A = M1{,}007^2 - A \cdot 1{,}007 - A$.

Sau tháng 3 dư nợ còn lại là

$\left(M \cdot 1{,}007^2 - A \cdot 1{,}007 - A\right) \cdot 1,007 - A = M1{,}007^3 - A \cdot \left[(1{,}007)^2 + 1{,}007 + 1\right]$.

Sau tháng thứ n dư nợ còn lại là $M \cdot 1{,}007^n - A \cdot \left[(1{,}007)^{n-1} + 1{,}007^{n-2} + \ldots + 1{,}007 + 1\right]$.

Vì đúng 25 tháng thì trả hết nợ nên

$1 \cdot 1{,}007^{25} - A \cdot \left[(1{,}007)^{24} + 1{,}007^{23} + \ldots + 1{,}007 + 1\right] = 0$

$\Leftrightarrow 1{,}007^{25} = A \cdot \left[(1{,}007)^{24} + 1{,}007^{23} + \ldots + 1{,}007 + 1\right] \Leftrightarrow 1{,}007^{25} = A \cdot \dfrac{1{,}007^{25} - 1}{0,007}$.

$\Leftrightarrow A = \dfrac{1{,}007^{25}.0{,}007}{1{,}007^{25}-1} \approx 0{,}04374151341$ tỉ đồng $\approx 43{,}741{,}513$ đồng $\approx 43{,}740{,}000$ đồng.

Chọn đáp án D □

Câu 116 (Sở Bình Phước - 2020). Một sinh viên ra trường đi làm ngày 1/1/2020 với mức lương khởi điểm là a đồng mỗi tháng và cứ sau 2 năm lại được tăng thêm 10% và chi tiêu hàng tháng của anh ta là 40% lương. Anh ta dự định mua một căn hộ chung cư giá rẻ có giá trị tại thời điểm 1/1/2020 là 1 tỷ đồng và cũng sau 2 năm thì giá trị căn hộ tăng thêm 5%. Với a bằng bao nhiêu thì sau đúng 10 năm anh ta mua được căn hộ đó, biết rằng mức lương và mức tăng giá trị ngôi nhà là không đổi (kết quả quy tròn đến hàng nghìn đồng).

(A) 11,487,000 đồng. (B) 14,517,000 đồng. (C) 55,033,000 đồng. (D) 21,776,000 đồng.

Lời giải.

Áp dụng công thức $P = P_o(1+r)^n$.

Ta được giá trị ngôi nhà sau 10 năm là $P = 10^9\,(1+0{,}05)^5 = 10^9.\,(1{,}05)^5$.

Sau khi chi tiêu hàng tháng thì số tiền Người sinh viên còn lại của mỗi tháng là 60% lương. Trong hai năm 2020-2021, Người sinh viên có được số tiền là $24 \times 0,6a$.

Trong hai năm 2022-2023, anh sinh viên có được số tiền là $24 \times 0{,}6a\,(1+0{,}1)$.

Trong hai năm 2024-2025, anh sinh viên có được số tiền là $24 \times 0{,}6a(1+0{,}1)^2$.

Trong hai năm 2026-2027, anh sinh viên có được số tiền là $24 \times 0{,}6a(1+0{,}1)^3$.

Trong hai năm 2028-2029, anh sinh viên có được số tiền là: $24 \times 0{,}6a(1+0{,}1)^4$.

Tổng số tiền anh sinh viên có được sau 10 năm là

$24 \times 0{,}6a + 24 \times 0{,}6a\,(1+0{,}1) + 24 \times 0{,}6a(1+0{,}1)^2 + 24 \times 0{,}6a(1+0{,}1)^3 + 24 \times 0{,}6a(1+0{,}1)^4$

$= 24 \times 0{,}6a\left[1 + (1+0{,}1) + (1+0{,}1)^2 + (1+0{,}1)^3 + (1+0{,}1)^4\right]$

$= 24 \times 0{,}6a \times \dfrac{1-(1+0{,}1)^5}{1-(1+0{,}1)} = 24 \times 0{,}6a\dfrac{0{,}61051}{0{,}1} = 87{,}91344 \times a$

Số tiền trên bằng giá trị của ngôi nhà sau 10 năm

$10^9.\,(1{,}05)^5 = 87{,}91344 \times a \Leftrightarrow a \simeq 14{,}517{,}000$.

Chọn đáp án B □

Câu 117 (Bỉm Sơn - Thanh Hóa - 2020).

Một người vay ngân hàng 100 triệu đồng với lãi suất là 0,7%/ tháng theo thỏa thuận cứ mỗi tháng người đó sẽ trả cho ngân hàng 5 triệu đồng và cứ trả hàng tháng như thế cho đến khi hết nợ (tháng cuối cùng có thể trả dưới 5 triệu). Hỏi sau bao nhiêu tháng thì người đó trả được hết nợ ngân hàng?

(A) 21. (B) 22. (C) 23. (D) 24.

Lời giải.

Gọi số tháng là n $(n \in \mathbb{N}*)$. Đặt $a = 5, q = 1{,}007$. Đến lần nộp tiền thứ n

Khoản tiền a đầu tiên trở thành $a.q^{n-1}$. Khoản tiền a thứ hai trở thành $a \cdot q^{n-2}$.

Giả sử khoản tiền cuối cùng vẫn là a thì tổng số tiền đã trả cả vốn lẫn lãi là $a \cdot \dfrac{q^n-1}{q-1} = 5\dfrac{1,007^n-1}{0{,}007}$.

Số tiền 100 triệu đồng với lãi suất là 0,7%/ tháng, sau n tháng, sẽ trở thành $100.1,007^n$.

Ta có phương trình $5 \cdot \dfrac{1{,}007^n - 1}{0{,}007} = 100 \cdot 1{,}007^n \Leftrightarrow n \approx 21{,}6$.
Theo đề bài, tháng cuối cùng có thể trả dưới 5 triệu đồng nên số tháng phải làm tròn là 22 tháng.
Chọn đáp án (B) □

Câu 118 (Lê Lai - Thanh Hóa - 2020).

COVID19 là một loại bệnh viêm đường hô hấp cấp do chủng mới của virus corona (nCoV) bắt nguồn từ Trung Quốc (đầu tháng 12/2019) gây ra với tốc độ truyền bệnh rất nhanh (tính đến 7/4/2020 đã có 1360039 người nhiễm bệnh). Giả sử ban đầu có 1 người bị nhiễm bệnh và cứ sau 1 ngày sẽ lây sang 4 người khác. Tất cả những người nhiễm bệnh lại tiếp tục lây sang những người khác với tốc độ như trên (1 người lây 4 người). Hỏi sau 7 ngày sẽ có tổng cộng bao nhiêu người nhiễm bệnh? (Biết rằng những người nhiễm bệnh không phát hiện bản thân bị bệnh và không phòng tránh cách li, do trong thời gian ủ bệnh vẫn lây bệnh sang người khác).

(A) 77760 người. (B) 16384 người. (C) 62500 người. (D) 78125 người.

Lời giải.

Sau 1 ngày, tổng số người nhiễm bệnh là $1 + 4 = 5$ người.
Sau 2 ngày, tổng số người nhiễm bệnh là $(1+4) + (1+4) \cdot 4 = (1+4)^2$ người.
Sau 3 ngày, tổng số người nhiễm bệnh là $(1+4)^2 + (1+4)^2 \cdot 4 = (1+4)^3$ người.
$\Rightarrow$ Sau 7 ngày, tổng số người nhiễm bệnh là $(1+4)^7 = 78125$ người.
Ngoài ra chúng ta có thể áp dụng công thức lãi kép để tính nhanh: $S_n = A(1+r)^n = 1 \cdot (1+4)^7 = 78125$, với $A = 1$, $r = 4$, $n = 7$.
Chọn đáp án (D) □

Câu 119 (Liên trường Nghệ An - 2020).

Ông A có số tiền 100000000 đồng gửi tiết kiệm theo thể thức lãi kép, có hai loại kì hạn: loại kì hạn 12 tháng với lãi suất 12%/năm và loại kì hạn 1 tháng với lãi suất 1%/tháng. Ông A muốn gửi 10 năm. Theo anh chị, kết luận nào sau đây đúng (làm tròn đến hàng nghìn)?

(A) Gửi theo kì hạn 1 tháng có kết quả nhiều hơn kì hạn 1 năm là 16186000 đồng sau 10 năm.
(B) Cả hai loại kì hạn đều có cùng số tiền như nhau sau 10 năm.
(C) Gửi theo kì hạn 1 tháng có kết quả nhiều hơn kì hạn 1 năm là 19454000 đồng sau 10 năm.
(D) Gửi theo kì hạn 1 tháng có kết quả nhiều hơn kì hạn 1 năm là 15584000 đồng sau 10 năm.

Lời giải.

Tổng số tiền ông A nhận được sau 10 năm khi gửi theo kì hạn 12 tháng là
$T_1 = T_0 \cdot (1 + r_1)^{n_1} = 10^8 \cdot 1{,}12^{10} \approx 310585000$ (đồng).
Tổng số tiền ông A nhận được sau 10 năm khi gửi theo kì hạn 1 tháng là
$T_2 = T_0 \cdot (1 + r_2)^{n_2} = 10^8 \cdot 1{,}01^{120} \approx 330039000$ (đồng).
Như vậy, sau 10 năm, gửi theo kì hạn 1 tháng có kết quả nhiều hơn kì hạn 1 năm là
$T = T_2 - T_1 = 330039000 - 310585000 = 19454000$ (đồng).
Chọn đáp án (C) □

Câu 120 (Trần Phú-Quảng Ninh - 2020).

Một người vay vốn ở ngân hàng với số tiền 50 triệu đồng, thời hạn 50 tháng với lãi suất 1,15%trên tháng, tính theo dư nợ trả đúng ngày quy định. Hỏi hàng tháng người đó phải trả đều đặn vào ngân hàng một khoản tiền là bao nhiêu để đến cuối tháng thứ 50 thì người đó trả hết cả gốc lẫn lãi cho ngân hàng (làm tròn đến trăm đồng)?

(A) 1,018,500 đồng. (B) 1,320,800 đồng. (C) 1,320,500 đồng. (D) 1,771,300 đồng.

Lời giải.

Gọi N là số tiền vay ban đầu, r là lãi suất theo tháng, A là số tiền phải trả hàng tháng, ta có Giả sử sau n tháng thì dư nợ bằng 0, ta có $A = \dfrac{N(1+r)^n.r}{(1+r)^n - 1}$.

Áp dụng với $N = 50{,}000{,}000$ đồng, $r = 1{,}15\%$ và $n = 50$ tháng ta có $A \approx 1{,}320{,}500$ đồng.

Chọn đáp án (C) □

Câu 121 (Chuyên Lam Sơn Thanh Hóa 2019).

Để đủ tiền mua nhà, anh An vay ngân hàng 500 triệu theo phương thức trả góp với lãi suất 0,85%/tháng. Nếu sau mỗi tháng, kể từ thời điểm vay, anh An trả nợ cho ngân hàng số tiền cố định là 10 triệu đồng bao gồm cả tiền lãi vay và tiền gốc. Biết rằng phương thức trả lãi và gốc không thay đổi trong suốt quá trình anh An trả nợ. Hỏi sau bao nhiêu tháng thì anh trả hết nợ ngân hàng? (Tháng cuối có thể trả dưới 10 triệu đồng).

(A) 68. (B) 66. (C) 65. (D) 67.

Lời giải.

Giả sử anh An vay số tiền là A với lãi suất r trên tháng và trả nợ cho ngân hàng số tiền cố định là x. Anh An sau tháng thứ n còn nợ ngân hàng với số tiền là $A(1+r)^n - x.\dfrac{(1+r)^n - 1}{r}$

Áp dụng công thức ta có $A = 500$; $r = 0{,}0085$; $x = 10$ và sau n tháng trả hết nợ ta có

$500 \cdot (1+0{,}0085)^n - 10 \cdot \dfrac{(1+0{,}0085)^n - 1}{0{,}0085} = 0 \Leftrightarrow n \approx 65,4$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 122 (THPT Đoàn Thượng-Hải Dương 2019).

Ông Chính gửi 200 triệu đồng vào một ngân hàng với lãi suất 7% năm. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm số tiền lãi sẽ được nhập vào gốc để tính lãi cho năm tiếp theo và từ năm thứ 2 trở đi, mỗi năm ông gửi thêm vào tài khoản với số tiền 20 triệu đồng. Hỏi sau 18 năm số tiền ông Chính nhận được cả gốc lẫn lãi là bao nhiêu? Giả định trong suốt thời gian gửi lãi suất không thay đổi và ông Chính không rút tiền ra (kết quả được làm tròn đến hàng nghìn).

(A) 1,686,898,000 VNĐ. (B) 743,585,000 VNĐ.

(C) 739,163,000 VNĐ. (D) 1,335,967,000 VNĐ.

Lời giải.

Gọi $a = 200$ triệu; $b = 20$ triệu; $\alpha = 7\%$.

Số tiền sau 1 năm $a\,(1+\alpha)$.

Số tiền sau 2 năm $a(1+\alpha)^2 + b\,(1+\alpha)$.

Số tiền sau 3 năm $a(1+\alpha)^3 + b(1+\alpha)^2 + b\,(1+\alpha)$.

...

Số tiền sau 18 năm $a(1+\alpha)^{18} + b\left[(1+\alpha)^{17} + (1+\alpha)^{16} + \ldots + (1+\alpha)\right]$

$= a(1+\alpha)^{18} + b\left[(1+\alpha)\,.\dfrac{(1+\alpha)^{17}-1}{\alpha}\right]$

Vậy số tiền ông Chính nhận sau 18 năm là 1,335,967,000 VNĐ.

Chọn đáp án D □

Câu 123 (Chuyên Vĩnh Phúc 2019).

Một người gửi tiết kiệm số tiền 80000000 đồng với lãi suất 6,9%/năm. Biết rằng tiền lãi hàng năm được nhập vào tiền gốc, hỏi sau đúng 5 năm người đó rút được cả tiền gốc lẫn tiền lãi gần với con số nào sau đây?

Ⓐ 105370000 đồng. Ⓑ 111680000đồng. Ⓒ 107667000đồng. Ⓓ 116570000 đồng.

Lời giải.

Gọi P_0 là số tiền gửi ban đầu, r là lãi suất/năm.

Số tiền gốc và lãi sau năm thứ nhất $P_1 = P_0 + P_0.r = P_0\,(1+r)$.

Số tiền gốc và lãi sau năm thứ hai $P_2 = P_1 + P_1.r = P_0\,(1+r)^2$.

...

Số tiền gốc và lãi người đó rút ra được sau 5 năm là $P_5 = P_0 \cdot (1+r)^5 = 80000000 \cdot (1+6{,}9\%)^5 \approx$ 111680799 (đồng).

Chọn đáp án B □

Câu 124 (Chuyên Vĩnh Phúc 2019).

Một người mỗi tháng đều đặn gửi vào ngân hàng một khoản tiền T theo hình thức lãi kép với lãi suất 0,6% mỗi tháng. Biết sau 15 tháng,người đó có số tiền là 10 triệu đồng. Hỏi số tiền T gần với số tiền nào nhất trong các số sau.

Ⓐ 613,000 đồng. Ⓑ 645,000 đồng. Ⓒ 635,000 đồng. Ⓓ 535,000 đồng.

Lời giải.

Số tiền nhận được khi gửi khoản tiền T ở tháng đầu tiên là $T(1+0{,}006)^{15} = T1{,}006^{15}$.

Số tiền nhận được khi gửi khoản tiền T ở tháng thứ 2 là $T(1+0{,}006)^{14} = T1{,}006^{14}$.

Cứ như vậy, số tiền nhận được khi gửi khoản tiền T ở tháng thứ 14 là $T(1+0,006) = T \cdot 1,006$.

Vậy tổng số tiền nhận được sau 15 tháng là

$T(1{,}006^{15} + 1,006^{14} + \ldots + 1{,}006^2 + 1{,}006) = T \cdot 1{,}006.\dfrac{1{,}006^{15}-1}{0{,}006}$.

Theo giả thiết có $10000000 = T \cdot 1{,}006 \cdot \dfrac{1{,}006^{15}-1}{0,006} \Rightarrow T \approx 635301{,}46$.

Chọn đáp án C □

Câu 125. Một người muốn có 1 tỉ tiền tiết kiệm sau 6 năm gửi ngân hàng bằng cách bắt đầu từ ngày 01/01/2019 đến 31/12/2024, vào ngày 01/01 hàng năm người đó gửi vào ngân hàng một số tiền bằng nhau với lãi suất ngân hàng là 7%/1 năm (tính từ ngày 01/01 đến ngày 31/12) và lãi suất hàng năm được nhập vào vốn. Hỏi số tiền mà người đó phải gửi vào ngân hàng hàng năm là bao nhiêu (với giả thiết lãi suất không thay đổi và số tiền được làm tròn đến đơn vị đồng)?

(A) 130650280 (đồng). (B) 130650000 (đồng). (C) 139795799 (đồng). (D) 139795800 (đồng).

Lời giải.

Gọi T_0 là số tiền người đó gửi vào ngân hàng vào ngày 01/01 hàng năm, T_n là tổng số tiền cả vốn lẫn lãi người đó có được ở cuối năm thứ n, với $n \in \mathbb{N}^*$, r là lãi suất ngân hàng mỗi năm.

Ta có $T_n = \dfrac{T_0}{r}.\left[(1+r)^n - 1\right](1+r)$.

Áp dụng vào bài toán, ta có $10^9 = \dfrac{T_0}{0{,}07} \cdot \left[(1+0{,}07)^6 - 1\right](1+0{,}07) \Rightarrow T_0 \approx 130650280$ đồng.

Chọn đáp án (A) □

Câu 126 (THPT Ba Đình 2019). Một người vay ngân hàng 100 triệu đồng với lãi suất là $0,7\%$/tháng theo thỏa thuận cứ mỗi tháng người đó sẽ trả cho ngân hàng 5 triệu đồng và cứ trả hàng tháng như thế cho đến khi hết nợ (tháng cuối cùng có thể trả dưới 5 triệu). Hỏi sau bao nhiêu tháng thì người đó trả được hết nợ ngân hàng.

(A) 22. (B) 23. (C) 24. (D) 21.

Lời giải.

Gọi số tiền vay ban đầu là M, số tiền hoàn nợ mỗi tháng là m, lãi suất một tháng là r.

Hết tháng thứ nhất, số tiền cả vốn lẫn nợ ngân hàng là $M + Mr = M(1+r)$ (triệu đồng).

Sau khi hoàn nợ lần thứ nhất, số tiền còn nợ là $M(1+r) - m$ (triệu đồng).

Sau khi hoàn nợ lần thứ hai, số tiền còn nợ là

$M(1+r) - m + [M(1+r) - m]\,r - m = M(1+r)^2 - m(1+r) - m$ (triệu đồng).

Sau khi hoàn nợ lần thứ ba, số tiền còn nợ là

$M(1+r)^2 - m(1+r) - m + \left[M(1+r)^2 - m(1+r) - m\right]r - m$

$= M(1+r)^3 - m(1+r)^2 - m(1+r) - m$ (triệu đồng).

Lập luận tương tự, sau khi hoàn nợ lần thứ n, số tiền còn nợ là

$M(1+r)^n - m(1+r)^{n-1} - m(1+r)^{n-2} - \ldots - m(1+r) - m = M(1+r)^n - \dfrac{m\left[(1+r)^{n-1} - 1\right]}{r}$.

Sau tháng thứ $n$trả hết nợ thì ta có

$M(1+r)^n - \dfrac{m\left[(1+r)^{n-1} - 1\right]}{r} = 0 \Leftrightarrow m = \dfrac{Mr(1+r)^n}{(1+r)^n - 1}$

$\Leftrightarrow m = (m - Mr)(1+r)^n \Leftrightarrow (1+r)^n = \dfrac{m}{m - Mr} \Leftrightarrow n = \log_{(1+r)}\left(\dfrac{m}{m - Mr}\right)$.

Thay số với $M = 100{,}000{,}000$, $r = 0{,}7\%$, $m = 5{,}000{,}000$ ta tính được $n \approx 21{,}62$ (tháng).

Vậy sau 22 tháng người đó trả hết nợ ngân hàng.

Chọn đáp án (A) □

Câu 127 (HSG Bắc Ninh 2019). Vào ngày 15 hàng tháng ông An đều đến gửi tiết kiệm tại ngân hàng SHB số tiền 5 triệu đồng theo hình thức lãi kép với kì hạn một tháng, lãi suất tiết kiệm không đổi trong suốt quá trình gửi là $7{,}2\%$/ năm. Hỏi sau đúng 3 năm kể từ ngày bắt đầu gửi ông An thu được số tiền cả gốc và lãi là bao nhiêu (làm tròn đến nghìn đồng)?

(A) 195251000 (đồng). (B) 201453000 (đồng). (C) 195252000 (đồng). (D) 201452000 (đồng).

Lời giải.

Gọi T_n là số tiền cả gốc lẫn lãi sau n tháng, a là số tiền gốc, r là lãi xuất, ta có

Cuối tháng thứ 1 ông An có số tiền là $T_1 = a(1+r)$

Đầu tháng thứ 2 ông An có số tiền là $T_2 = a(1+r) + a$

Cuối tháng thứ 2 ông An có số tiền là $T_2 = a(1+r) + a + (a(1+r)+a)r = a(1+r) + a(1+r)^2$

...

Cuối tháng thứ n ông An có số tiền là $T_n = a(1+r) + a(1+r)^2 + \ldots + a(1+r)^n$

$= a\left((1+r) + (1+r)^2 + \ldots + (1+r)^n\right) = a.\dfrac{(1+r)\left((1+r)^n - 1\right)}{1+r-1} = \dfrac{a(1+r)\left((1+r)^n - 1\right)}{r}(1)$.

Với kì hạn một tháng, suy ra 3 năm có 36 kỳ. Lãi xuất của một năm là $7,2\%$, suy ra lãi xuất của 1 tháng là $\dfrac{7,2}{12}\% = 0{,}6\%$.

Áp dụng (1) ta có $a = 5000000$; $r = 0{,}6\% = 0{,}072$; $n = 36$

Suy ra $T_{36} = \dfrac{5000000\,(1+0{,}6\%)\left((1+0{,}6\%)^{36} - 1\right)}{0{,}6\%} \approx 201453000$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 128 (THPT - Thang - Long - Ha - Noi - 2019).

Anh Bình gửi 200 triệu vào ngân hàng VB với kì hạn cố định 12 tháng và hưởng lãi suất 0,65%/ tháng. Tuy nhiên sau khi gửi được tròn 8 tháng anh phải dùng đến 200 triệu trên. Anh đến ngân hàng định rút tiền thì được nhân viên ngân hàng tư vấn: "Nếu rút tiền trước kì hạn, toàn bộ số tiền anh gửi chỉ có lãi suất không kỳ hạn là 0,02%/ thángAnh nên thế chấp sổ tiết kiệm đó tại ngân hàng để vay ngân hàng 200 triệu với lãi suất 0,7%/ tháng. Khi sổ của anh đến kì hạn, anh có thể rút tiền để trả nợ ngân hàng". Nếu làm theo tư vấn của nhân viên ngân hàng anh Bình sẽ đỡ thiệt một số tiền gần nhất với con số nào dưới đây (biết ngân hàng tính lãi theo thể thức lãi kép).

(A) 10,85 triệu đồng. (B) 10,51 triệu đồng. (C) 10,03 triệu đồng. (D) 10,19 triệu đồng.

Lời giải.

Số tiền trả cho ngân hàng nếu vay 200 triệu trong 4 tháng

$N = 200 \cdot (1+0{,}7\%)^4 - 200 \approx 5{,}65907$

Tổng số tiền lãi nếu anh Bình gửi đúng kì hạn là

$L_1 = 200 \cdot (1+0{,}65\%)^{12} - 200 \approx 16{,}16996$

Số tiền lãi nếu anh Bình làm theo tư vấn của nhân viên ngân hàng

$L = 16{,}16996 - 5{,}65907 = 10{,}51089$.

Số tiền lãi nếu gửi 8 tháng theo hình thức lãi suất không kì hạn

$L_2 = 200 \cdot (1+0{,}02\%)^8 - 200 \approx 0{,}32022$.

Số tiền anh Bình đỡ thiệt nếu làm theo tư vấn của nhân viên ngân hàng

$16{,}16996 - 5{,}65907 - 0{,}32022 \approx 10{,}19067$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 129 (Chuyên Lê Quý Đôn Điện Biên 2019).

Một thầy giáo cứ đầu mỗi tháng lại gửi ngân hàng 8 000 000 VNĐ với lãi suất $0,5\%$/ tháng. Hỏi sau bao nhiêu tháng thầy giáo có thể tiết kiệm tiền để mua được một chiếc xe ô tô trị giá 400000000 VNĐ?

(A) 60. (B) 50. (C) 55. (D) 45.

Lời giải.

Đặt $T = 8000000$

Số tiền thầy giáo thu được sau tháng thứ nhất, thứ 2, thứ 3,., thứ n lần lượt là $T_1, T_2, T_3, \ldots, T_n$.

Ta có công thức $T_n = T(1+r) \times \dfrac{(1+r)^n - 1}{r}$

Theo bài ra ta có $T_n = 400000000 \Leftrightarrow T(1+r) \times \dfrac{(1+r)^n - 1}{r} = 400000000$

$\Leftrightarrow (1+r)^n = \dfrac{251}{201} \Leftrightarrow n = \log_{1,005} \dfrac{251}{201} \approx 44,54$

Vậy sau 45 tháng thầy giáo sẽ mua được một chiếc xe ô tô trị giá 400000000 VNĐ.

Chọn đáp án (D) □

Câu 130 (Chuyên Lương Thế Vinh Đồng Nai 2019).

Một người vay ngân hàng số tiền 400 triệu đồng, mỗi tháng trả góp 10 triệu đồng và lãi suất cho số tiền chưa trả là 1% mỗi tháng. Kỳ trả đầu tiên là cuối tháng thứ nhất. Biết lãi suất không đổi trong suốt quá trình gửi, hỏi số tiền còn phải trả ở kỳ cuối là bao nhiêu để người này hết nợ ngân hàng? (làm tròn đến hàng nghìn).

(A) 2,921,000. (B) 3,387,000. (C) 2,944,000. (D) 7,084,000.

Lời giải.

Cuối tháng thứ nhất, tiền gốc và lãi là $400 \cdot 1{,}01$ triệu đồng. Sau khi trả 10 triệu thì số tiền người đó còn nợ ngân hàng là $(400 \cdot 1{,}01 - 10)$ triệu đồng.

Cuối tháng thứ hai, tiền gốc và lãi là $(400 \cdot 1{,}01^2 - 10 \cdot 1{,}01)$ triệu đồng. Sau khi trả 10 triệu thì số tiền người đó còn nợ ngân hàng là $(400 \cdot 1{,}01^2 - 10 \cdot 1{,}01 - 10)$ triệu đồng.

Như vậy ở cuối tháng thứ $n\,(n \geq 1)$ người đó nếu còn nợ thì số tiền nợ là

$(400 \cdot 1{,}01^n - 10 \cdot 1{,}01^{n-1} - 10 \cdot 1{,}01^{n-2} - \ldots - 10)$ triệu đồng.

Xét $400 \cdot 1{,}01^n - 10 \cdot 1{,}01^{n-1} - 10 \cdot 1{,}01^{n-2} - \ldots - 10 = 0$

$\Leftrightarrow 400 \cdot 1{,}01^n - 10 \cdot \dfrac{1{,}01^n - 1}{0,01} = 0 \Leftrightarrow 600 \cdot 1{,}01^n = 1000 \Leftrightarrow n = \log_{1{,}01} \dfrac{5}{3} \approx 51{,}33$

Do vậy kỳ cuối cùng người đó phải trả tiền là tháng thứ 52. Cuối tháng thứ 51, số tiền còn nợ lại là $400 \cdot 1{,}01^{51} - 10 \cdot \dfrac{1{,}01^{51} - 1}{0{,}01} \approx 3{,}3531596$ triệu đồng.

Vậy kỳ cuối người đó phải trả số tiền là $3{,}3531596 \cdot 1{,}01 = 3{,}386647$ triệu đồng ≈ 3387000 đồng.

Chọn đáp án (B) □

Câu 131 (Chuyên Lê Quý Đôn Quảng Trị 2019).

Một người gửi 100 triệu đồng vào ngân hàng với lãi suất $0{,}5\%$/ tháng và ông ta rút đều đặn mỗi tháng một triệu đồng kể từ sau ngày gửi một tháng cho đến khi hết tiền (tháng cuối cùng có thể không còn đủ một triệu đồng). Hỏi ông ta rút hết tiền sau bao nhiêu tháng?

(A) 139. (B) 140. (C) 100. (D) 138.

Lời giải.

Gọi số tiền lúc đầu người đó gửi là A (triệu đồng), lãi suất gửi ngân hàng một tháng là r, S_n là số tiền còn lại sau n tháng.

Giả sử sau n tháng người đó rút hết tiền. Khi đó ta có $n = \log_{(1+r)} \dfrac{1}{1 - Ar}$.

Thay $r = 0{,}5\%$, $A = 100$ thì ta được $n \approx 139$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 132 (THPT Quỳnh Lưu 3 Nghệ An 2019).

Một bà mẹ Việt Nam anh hùng được hưởng số tiền là 4 triệu đồng trên 1 tháng (chuyển vào tài khoản ngân hàng của mẹ ở ngân hàng vào đầu tháng). Từ tháng 1 năm 2019 mẹ không đi rút tiền mà để lại ngân hàng và được tính lãi 1% trên 1 tháng. Đến đầu tháng 12 năm 2019 mẹ đi rút toàn số tiền (gồm số tiền của tháng 12 và số tiền gửi từ tháng 1). Hỏi khi đó mẹ lĩnh về bao nhiêu tiền? (kết quả làm tròn theo đơn vị nghìn đồng).

(A) 50970000 đồng. (B) 50560000 đồng. (C) 50670000 đồng. (D) 50730000 đồng.

Lời giải.

Gọi sô tiền mẹ gửi vào ngân hàng vào đầu tháng hàng tháng là A đồng.

Số tiền mẹ lĩnh vào đầu tháng 12 là T đồng.

Lãi suất hàng tháng mẹ gửi tại ngân hàng là $r\%$.

Vì mẹ rút tiền vào đầu tháng 12 năm 2019 nên thời gian được tính lãi suất là 11 tháng.

Ta có

Đầu tháng 1 mẹ gửi vào A đồng.

$\Rightarrow$ cuối tháng 1 số tiền của mẹ là: $A + Ar = A\,(1 + r)$đồng.

Đầu tháng 2 số tiền của mẹ gửi vào là: $A + A\,(1 + r)$đồng.

$\Rightarrow$ cuối tháng 2 số tiền của mẹ là: $[A{+}A\,(1 + r)]\,(1 + r) = A\,(1 + r) + A(1 + r)^2$ đồng.

+) Đầu tháng 3 số tiền mẹ gửi vào là $A + A\,(1 + r) + A(1 + r)^2$.

$\Rightarrow$ cuối tháng 3 số tiền của mẹ là:$\left[A + A\,(1 + r) + A(1 + r)^2\right](1 + r) = A\,(1 + r) + A(1 + r)^2 + A(1 + r)^3$.

Cứ như vậy đến cuối tháng thứ 11 số tiền của mẹ là $A\,(1 + r) + A(1 + r)^2 + \ldots + A(1 + r)^{11} = A\left[(1 + r) + (1 + r)^2 + \ldots + (1 + r)^{11}\right] = T_1$.

Ta thấy $\left[(1 + r) + (1 + r)^2 + \ldots + (1 + r)^{11}\right]$là tổng của 1 cấp số nhân với $u_1 = 1 + r, n = 11, q = 1 + r$.

$\Rightarrow T_1 = A\dfrac{u_1\,(1 - q^{11})}{1 - q}$. Ta có

$A = 4000000$

$r = 1\% = 0.01$

$\Rightarrow T_1 \approx 46730000$ đồng.

Vì mẹ rút tiền vào đầu tháng 12 năm 2019 $\Rightarrow T = T_1 + 4000000 = 50730000$ đồng.

Chọn đáp án (D) □

Câu 133 (Sở Thanh Hóa 2019). Bạn H trúng tuyển vào trường Đại học Ngoại Thương nhưng vì do không đủ tiền nộp học phí nên H quyết định vay ngân hàng trong bốn năm mỗi năm 4 triệu đồng để nộp học phí với lãi suất ưu đãi 3%/năm (theo thể thức lãi suất kép) biết rằng tiền vay mỗi năm H nhận được từ ngày đầu tiên của năm học và trong suốt bốn năm học H không trả tiền cho ngân hàng. Ngay sau khi tốt nghiệp Đại học (tròn 4 năm kể từ khi bạn H bắt đầu vay ngân hàng) bạn H thực hiện trả góp hàng tháng cho ngân hàng số tiền (không đổi và tiền trả vào ngày cuối của tháng) với lãi suất theo cách tính mới là 0,25%/tháng và lãi suất được tính theo dư nợ thực tế, bạn H trả đúng 5 năm thì hết nợ. Tính số tiền hàng tháng mà bạn H phải trả cho ngân hàng (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).

Ⓐ 323.582 (đồng). Ⓑ 398.402 (đồng). Ⓒ 309.718 (đồng. Ⓓ 312.518 (đồng).

Lời giải.

Xét bài toán 1: Vay nhận vốn định kì lãi suất kép.

Gọi A là số tiền mỗi năm bạn H vay ngân hàng, r_1 là lãi suất theo năm.

Cuối năm thứ nhất, H nợ ngân hàng với số tiền là $A.(1+r_1)$.

Đầu năm thứ hai, H nợ ngân hàng với số tiền là $A + A.(1+r_1)$.

Cuối năm thứ hai, H nợ ngân hàng với số tiền là

$A + A.(1+r_1) + [A + A(1+r_1)]\, r_1 = A(1+r_1) + A(1+r_1)^2$.

Tiếp tục như vậy, cuối năm thứ n số tiền mà H nợ ngân hàng là

$B = A(1+r_1) + A(1+r_1)^2 + \ldots + A(1+r_1)^n = \dfrac{A(1+r_1)\left[(1+r_1)^n - 1\right]}{r_1}$.

Xét bài toán 2: Vay trả góp, lãi suất dư nợ thực tế.

Gọi a là số tiền mà bạn H phải trả hàng tháng sau khi ra trường, r_2 là lãi suất mỗi tháng, số tiền H nợ ngân hàng là B.

Cuối tháng thứ nhất bạn H còn nợ ngân hàng số tiền là:

$B + B.r_2 - a = B.(1+r_2) - a$.

Cuối tháng thứ hai bạn H còn nợ ngân hàng số tiền là:

$B.(1+r_2) - a + [B.(1+r_2) - a]\, r_2 - a = B.(1+r_2)^2 - [a + a(1+r_2)]$.

Cứ tiếp tục như vậy ta có công thức tổng quát.

Cuối tháng thứ m bạn H còn nợ ngân hàng số tiền là

$B.(1+r_2)^m - \left[a + (1+r_2)\, a + (1+r_2)^2 a + \ldots + (1+r_2)^{m-1} a\right]$

$= B.(1+r_2)^m - a\dfrac{(1+r_2)^m - 1}{r_2}$.

Áp dụng 2 bài toán trên vào câu 42, ta có phương trình.

$\dfrac{4.1,03\left[1,03^4 - 1\right]}{0,03} 1,0025^{60} - a.\dfrac{1,0025^{60} - 1}{0,0025} = 0 \Leftrightarrow a \approx 0,309718$ (triệu đồng).

Vậy số tiền mà H cần phải trả hàng tháng là 309.718 triệu đồng.

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 134 (Sở Phú Thọ 2019). Ông A muốn mua một chiếc ôtô trị giá 1 tỉ đồng nhưng vì chưa đủ tiền nên chọn mua bằng hình thức trả góp hàng tháng (số tiền trả góp mỗi tháng như nhau) với lãi suất 12% /năm và trả trước 500 triệu đồng. Hỏi mỗi tháng ông phải trả số tiền gần nhất với số tiền nào dưới đây để sau đúng 2 năm, kể từ ngày mua xe, ông trả hết nợ, biết kì trả nợ đầu tiên sau ngày mua ôtô đúng một tháng và chỉ tính lãi hàng tháng trên số dư nợ thực tế của tháng đó?

(A) 23537000 đồng. (B) 24443000 đồng. (C) 22703000 đồng. (D) 23573000 đồng.

Lời giải.

Gọi a là số tiền trả hàng tháng.

Sau tháng thứ 1, số tiền còn lại: $P_1 = 500\left(1+r\right) - a$.

Sau tháng thứ 2, số tiền còn lại: $P_2 = P_1\left(1+r\right) - a = 500\left(1+r\right)^2 - a\left(1+r\right) - a$.

...

Sau tháng thứ n, số tiền còn lại: $P_n = 500\left(1+r\right)^n - a(1+r)^{n-1} - \ldots - a\left(1+r\right) - a$.

Vậy sau 24 tháng: $500\left(1+r\right)^{24} - a\dfrac{\left(1+r\right)^{24}-1}{r} = 0 \Leftrightarrow a = \dfrac{500\left(1+r\right)^{24}.r}{\left(1+r\right)^{24}-1}$

$\Leftrightarrow a = \dfrac{500\left(1+1\%\right)^{24}.1\%}{\left(1+1\%\right)^{24}-1} \approx 23,537$ triệu đồng.

Chọn đáp án (A) □

Câu 135 (Chuyên Thái Nguyên 2019).

Một người vay ngân hàng 50 triệu đồng, mỗi tháng trả ngân hàng 4 triệu đồng và phải trả lãi suất cho số tiền còn nợ là $1,1\%$ một tháng theo hình thức lãi kép. Giả sử sau n tháng người đó trả hết nợ. Khi đó n gần nhất với số nào sau?

(A) 14. (B) 13. (C) 16. (D) 15.

Lời giải.

Phương pháp: Sử dụng công thức trả góp $P(1+r)^n = \dfrac{M}{r}\left[(1+r)^n - 1\right]$, trong đó:

P: là số tiền phải trả sau n tháng

r: Lãi suất/ tháng

M: số tiền phải trả mỗi tháng

Áp dụng công thức ta có

$P(1+r)^n = \dfrac{M}{r}\left[(1+r)^n - 1\right]$

$\Leftrightarrow 50(1+1,1\%)^n = \dfrac{4}{1,1\%}\left[(1+1,1\%)^n - 1\right]$

$\Leftrightarrow 50(1+1,1\%)^n = \dfrac{4}{1,1\%}(1+1,1\%)^n - \dfrac{4}{1,1\%}$

$\Leftrightarrow \dfrac{4}{1,1\%} = \dfrac{3450}{11}(1+1,1\%)^n$

$\Leftrightarrow (1+1,1\%)^n = \dfrac{80}{69} \Rightarrow n = \log_{1+1,8}\dfrac{80}{69} \approx 13,52.$

Chọn đáp án (A) □

Câu 136. Ông A vay ngân hàng 100 triệu đồng với lãi suất 1%/tháng. Ông ta muốn hoàn nợ cho ngân hàng theo cách: Sau đúng một tháng kể từ ngày vay, ông bắt đầu hoàn nợ; hai lần hoàn nợ liên tiếp cách nhau đúng một tháng, số tiền hoàn nợ ở mỗi tháng là như nhau và sau đúng một năm kể từ ngày vay ông A còn nợ ngân hàng tổng số tiền 50 triệu đồng. Biết rằng mỗi tháng ngân hàng chỉ tính lãi trên số dư nợ thực tế của tháng đó. Hỏi số tiền mỗi tháng ông ta cần trả cho ngân hàng gần nhất với số tiền nào dưới đây?

(A) 4,95 triệu đồng. (B) 4,42 triệu đồng. (C) 4,5 triệu đồng. (D) 4,94 triệu đồng.

Lời giải.

Gọi X là số tiền mỗi tháng ông A trả cho ngân hàng.

Số tiền còn nợ sau n kì hạn là $T_n = T.(1+r)^n - X.\dfrac{(1+r)^n-1}{r}$ (triệu đồng), trong đó $T = 100$ (triệu đồng) là số tiền mà ông A vay.

Sau đúng một năm, số tiền ông còn nợ là 50 triệu đồng nên ta có

$50 = 100.(1+0,01)^{12} - X.\dfrac{(1+0,01)^{12}-1}{0,01} \Leftrightarrow X = \dfrac{(100.1,01^{12}-50).0,01}{1,01^{12}-1} \approx 4,94$ (triệu đồng).

Vậy mỗi tháng ông ta cần trả cho ngân hàng gần nhất với số tiền 4,94 triệu đồng.

Chọn đáp án (D) □

Câu 137 (Chuyên ĐHSP Hà Nội 2019).

Một người nhận hợp đồng dài hạn làm việc cho một công ty với mức lương khởi điểm của mỗi tháng trong ba năm đầu tiên là 6 triệu đồng/ tháng. Tính từ ngày đầu làm việc, cứ sau đúng ba năm liên tiếp thì tăng lương 10% so với mức lương một tháng người đó đang hưởng. Nếu tính theo hợp đồng thì tháng đầu tiên của năm thứ 16 người đó nhận được mức lương là bao nhiêu?

(A) $6.1,1^4$ (triệu đồng). (B) $6.1,1^6$ (triệu đồng).

(C) $6.1,1^5$ (triệu đồng). (D) $6.1,1^{16}$ (triệu đồng).

Lời giải.

Sau 3 năm, bắt đầu từ tháng đầu tiên của năm thứ 4 số tiền lương người đó nhận được sau mỗi tháng là $6 + 6.10\% = 6.1,1$ (triệu đồng).

Sau 6 năm (2.3 năm), bắt đầu từ tháng đầu tiên của năm thứ 7 số tiền lương người đó nhận được sau mỗi tháng là $6.1,1 + 6.1,1.10\% = 6.1,1.(1+10\%) = 6.1,1^2$(triệu đồng).

Tương tự như vậy sau 15 năm (5.3 năm), bắt đầu từ tháng đầu tiên của năm thứ 16 số tiền người đó nhận được sau mỗi tháng là $6.1,1^5$ (triệu đồng).

Vậy tháng đầu tiên của năm thứ 16, người đó nhận được mức lương là $6.1,1^5$ (triệu đồng).

Chọn đáp án (C) □

Câu 138 (Đề Thi Công Bằng KHTN 2019).

Một người gửi 50 triệu đồng vào một ngân hàng với lãi suất 6%/năm. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm số tiền lãi sẽ được nhập vào gốc để tính lãi cho năm tiếp theo. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu năm người đó nhận được số tiền nhiều hơn 100 triệu đồng bao gồm gốc và lãi?

(A) 11 năm. (B) 12 năm. (C) 13 năm. (D) 14 năm.

Lời giải.

Dạng toán lãi kép:

Bài toán tổng quát: gửi a đồng vào ngân hàng với lãi suất $r\%$ (sau mỗi kì hạn không rút tiền lãi ra).

Gọi A_n là số tiền có được sau n năm.

Sau 1 năm: $A_1 = a + r\%.a = a\left(1 + r\%\right)$.

Sau 2 năm: $A_2 = a\left(1 + r\%\right) + a\left(1 + r\%\right).r\% = a(1 + r\%)^2$.

Sau 3 năm: $A_3 = a(1 + r\%)^2 + a(1 + r\%)^2.r\% = a(1 + r\%)^3$.

Sau n năm: $A_n = a(1 + r\%)^n$.

Người đó nhận được số tiền hơn 100 triệu. Suy ra:

$50\left(1 + 6\%\right)^n > 100$

$\Leftrightarrow 50.1,06^n > 100$

$\Leftrightarrow 1,06^n > 2$

$\Leftrightarrow n > \log_{1,06} 2 = 11,9$

Vậy $n = 12$.

Chọn đáp án B □

Câu 139 (THPT Nghĩa Hưng NĐ 2019).

Anh C đi làm với mức lương khởi điểm là x (triệu đồng)/ tháng, và số tiền lương này được nhận vào ngày đầu tháng. Vì làm việc chăm chỉ và có trách nhiệm nên sau 36 tháng kể từ ngày đi làm, anh C được tăng lương thêm 10% . Mỗi tháng, anh ta giữ lại 20% số tiền lương để gửi tiết kiệm ngân hàng với kì hạn 1 tháng và lãi suất là 0,5% /tháng, theo hình thức lãi kép (tức tiền lãi của tháng này được nhập vào vốn để tính lãi cho tháng tiếp theo). Sau 48 tháng kể từ ngày đi làm, anh C nhận được số tiền cả gốc và lãi là 100 triệu đồng. Hỏi mức lương khởi điểm của người đó là bao nhiêu?

A 8.991.504 đồng. B 9.991.504 đồng. C 8.981.504 đồng. D 9.881.505 đồng.

Lời giải.

Gọi số tiền mỗi tháng anh gửi tiết kiệm ngân hàng trong 36 tháng đầu là A; số tiền mỗi tháng anh gửi tiết kiệm sau tháng thứ 36 là B.

Đặt $q = 1 + 0,5\% = 1,005$

Gọi S_n là số tiền sau tháng thứ n ta có

$S_1 = A + A.0,5\% = A.q$

$S_2 = \left(S_1 + A\right) + \left(S_1 + A\right).0,5\% = \left(S_1 + A\right).q = Aq^2 + Aq$.

...

$S_{36} = \left(S_{35} + A\right) + \left(S_{35} + A\right).0,5\% = \left(S_{35} + A\right).q = Aq^{36} + Aq^{35} + \ldots + Aq = Aq.\dfrac{q^{36} - 1}{q - 1}$.

$S_{37} = \left(S_{36} + B\right) + \left(S_{36} + B\right).0,5\% = \left(S_{36} + B\right).q = S_{36}.q + B.q$.

$S_{38} = \left(S_{37} + B\right) + \left(S_{37} + B\right).0,5\% = \left(S_{37} + B\right).q = S_{36}q^2 + Bq^2 + Bq$.

...

$S_{48} = S_{36}.q^{12} + Bq^{12} + Bq^{11} + \ldots + Bq = Aq^{13}.\dfrac{q^{36} - 1}{q - 1} + Bq.\dfrac{q^{12} - 1}{q - 1}$.

Theo giả thiết ta có $A = 20\%x = 0,2x$; $B = 20\%\left(x + 10\%x\right) = 0,22x$; $S_{48} = 10^8$.

Vậy $0,2xq^{13}.\dfrac{q^{36} - 1}{q - 1} + 0,22x.q.\dfrac{q^{12} - 1}{q - 1} = 10^8 \Leftrightarrow x = 10^8 : \left(0,2q^{13}.\dfrac{q^{36} - 1}{q - 1} + 0,22.q.\dfrac{q^{12} - 1}{q - 1}\right)$

$\Leftrightarrow x \approx 8991504$ đồng.

Chọn đáp án A □

Câu 140 (Liên Trường THPT Tp Vinh Nghệ An 2019).

Bạn Nam vừa trúng tuyển đại học, vì hoàn cảnh gia đình khó khăn nên được ngân hàng cho vay vốn trong 4 năm học đại học, mỗi năm 10 triệu đồng vào đầu năm học để nạp học phí với lãi suất $7,8\%$/năm (mỗi lần vay cách nhau đúng 1 năm). Sau khi tốt nghiệp đại học đúng 1 tháng, hàng tháng Nam phải trả góp cho ngân hàng số tiền là m đồng/tháng với lãi suất $0,7\%$/tháng trong vòng 4 năm. Số tiền m mỗi tháng Nam cần trả cho ngân hàng gần nhất với số nào sau đây (ngân hàng tính lãi trên số dư nợ thực tế).

(A) 1.468.000 (đồng). (B) 1.398.000 (đồng). (C) 1.191.000 (đồng). (D) 1.027.000 (đồng).

Lời giải.

Bài toán được chia làm hai giai đoạn

Giai đoạn 1: vay vốn để học đại học trong 4 năm. Đặt $r=\dfrac{7,8}{100}=0,078$

Ở năm thứ nhất: $M_1=10(1+r)^4$ (triệu đồng)

Ở năm thứ hai: $M_2=10(1+r)^3$ (triệu đồng)

Ở năm thứ ba: $M_3=10(1+r)^2$ (triệu đồng)

Ở năm thứ tư: $M_4=10(1+r)^1$ (triệu đồng)

Như vậy tổng số tiền mà Nam đã vay trong 4 năm là $M_0=\sum\limits_{i=1}^{4} M_i\approx 48,4324$ (triệu đồng)

Giai đoạn 2: trả góp cho ngân hàng số tiền đã vay hàng tháng

Sau tháng thứ nhất, người đó còn số nợ là $P_1=M_0\left(1+\dfrac{0,7}{100}\right)-m$. Đặt $y=1+\dfrac{0,7}{100}$

Sau tháng thứ hai người đó còn nợ:

$P_2=P_1y-m=(M_0y-m)\,y-m=M_oy^2-m(y+1)=M_ay^2-m\dfrac{y^2-1}{y-1}$

Sau tháng thứ ba người đó còn nợ:

$P_3=P_2y-m=M_0y^3-m\left(y^2+y+1\right)=M_0y^3-m\dfrac{y^3-1}{y-1}$

Bằng phương pháp quy nạp, sau n tháng số tiền trả hết sẽ là

$M_0y''-m\dfrac{y^n-1}{y-1}=0\Rightarrow m=\dfrac{M_0y^n(y-1)}{y^n-1}$

Đồng thời ta có $n=48$ tháng và $y=1+\dfrac{0,7}{100}=1,007$ suy ra $m\approx 1,914$ (triệu đồng).

Chọn đáp án (C) □

Câu 141 (Chuyên Phan Bội Châu - 2019).

Một anh sinh viên nhập học đại học vào tháng 8 năm 2014. Bắt đầu từ tháng 9 năm 2014, cứ vào ngày mồng một hàng tháng anh vay ngân hàng 3 triệu đồng với lãi suất cố định $0,8\%$/tháng. Lãi tháng trước được cộng vào số nợ để tiếp tục tính lãi cho tháng tiếp theo (lãi kép). Vào ngày mồng một hàng tháng kể từ tháng 9/2016 về sau anh không vay ngân hàng nữa và anh còn trả được cho ngân hàng 2 triệu đồng do việc làm thêm. Hỏi ngay sau khi kết thúc ngày anh ra trường (30/6/2018) anh còn nợ ngân hàng bao nhiêu tiền (làm tròn đến hàng nghìn đồng)?

(A) 49.024.000 đồng. (B) 47.401.000 đồng. (C) 47.024.000 đồng. (D) 45.401.000 đồng.

Lời giải.

Anh sinh viên vay hàng tháng $a=3$ triệu đồng từ 9 / 2014 đến 8/2016, tổng cộng 24 tháng.

Cuối tháng thứ 1: $T_1 = a + ar = a\left(1+r\right)$

Cuối tháng thứ 2: $T_2 = T_1 + a + \left(T_1 + a\right).r = a.\left(1+r\right)^2 + a.\left(1+r\right)$

...

Cuối tháng n: $T_n = a.\left(1+r\right)^n + a.\left(1+r\right)^{n-1} + \ldots + a.\left(1+r\right)$

Suy ra $T_n = a.\left(1+r\right).\dfrac{\left(1+r\right)^n - 1}{r}$

Vậy tổng số tiền vay đến cuối tháng 8/2016 là $T_{24} = 3.\left(1+0,8\%\right).\dfrac{\left(1+0,8\%\right)^{24}-1}{0,8\%} = 79,662$ triệu

Tính từ cuối tháng 8/2016 Anh sinh viên thiếu ngân hàng $A = 79,662$ và bắt đầu trả đầu hàng tháng $m = 2$ triệu từ 9/2016 đến 6/2018, tổng cộng được 22 tháng

Đầu tháng 9/2016: còn nợ $A - m = 79,662 - 2 = 77,662$ triệu

Cuối tháng 9/2016: tiền nợ có lãi đến cuối tháng: $T_1 = 77,662\left(r+1\right)$

Đầu tháng 10/2016 sau khi trả nợ m thì còn nợ $77,662\left(r+1\right) - m$

Cuối tháng 10/2016: còn nợ $T_2 = \left[\left(77,662\right)\left(r+1\right) - m\right]\left(1+r\right) = 77,662\left(1+r\right)^2 - m\left(1+r\right)$

Cuối tháng 11/2016: còn nợ $T_3 = 77,662\left(1+r\right)^3 - m(1+r)^2 - m\left(1+r\right)$

...

Cuối tháng 6/2018 còn nợ

$$\begin{aligned}T_{22} &= 77,662\left(1+r\right)^{22} - m(1+r)^{21} - m(1+r)^{20} - \ldots - m\left(1+r\right)\\ &= 77,662\left(1+r\right)^{22} - m.\left(1+r\right)\dfrac{\left(1+r\right)^{21}-1}{r}\\ &= 77,662.\left(1+0,8\%\right)^{22} - 2.\left(1+0,8\%\right).\dfrac{\left(1+0,8\%\right)^{21}-1}{0,8\%} = 46,64 \text{ triệu đồng}\end{aligned}.$$

Chọn đáp án C □

Câu 142 (Liên trường huyện Quảng Xương - Thanh Hóa - 2021).

Ba em Sơn, Tuấn và Minh cùng vay tiền ở một ngân hàng với lãi suất 0,7%/tháng, tổng số tiền vay của cả ba người là 1 tỷ đồng. Biết rằng mỗi tháng ba người đều trả cho ngân hàng một số tiền như nhau để trừ vào tiền gốc và lãi. Để trả hết gốc và lãi cho ngân hàng thì Sơn cần 10 tháng, Tuấn cần 15tháng và Minh cần 25tháng. Số tiền trả đều đặn cho ngân hàng mỗi tháng gần nhất với số tiền nào dưới đây?

A. 21900000 đồng. B. 21090000 đồng. C. 21422000 đồng. D. 21400000 đồng.

Lời giải.

Bài toán gốc: Một người vay ngân hàng số tiền là Nđồng, lãi suất hàng tháng là r. Số tiền A người đó phải trả hàng tháng để sau n tháng hết nợ.

Sau 1 tháng, người đó nợ $N + Nr = N\left(1+r\right)$, người đó trả được A đồng nên còn nợ $N\left(1+r\right) - A$ đồng

Sau hai tháng số tiền còn nợ là

$\left[N\left(1+r\right) - A\right]\left(1+r\right) - A = N(1+r)^2 - A\left(1+r\right) - A$

Sau ba tháng số tiền còn nợ là

$N(1+r)^3 - A(1+r)^2 - A\left(1+r\right) - A$

Vậy sau n tháng, người đó hết nợ

$N(1+r)^n - \left[A(1+r)^{n-1} + A(1+r)^{n-1} + \ldots + A\right] = 0$

$\Leftrightarrow N(1+r)^n - A\dfrac{(1+r)^n - 1}{1+r-1} = 0 \Leftrightarrow N(1+r)^n = A\dfrac{(1+r)^n - 1}{r} \Leftrightarrow \dfrac{N(1+r)^n.r}{(1+r)^n - 1} = A \Leftrightarrow N = \dfrac{A\left[(1+r)^n - 1\right]}{(1+r)^n.r}$.

Gọi số tiền Sơn, Tuấn, Minh cần trả hàng tháng lần lượt là a(đồng)

Ta có $1.10^9 = \dfrac{a\left[\left(1+\frac{0,7}{100}\right)^{10} - 1\right]}{\left(1+\frac{0,7}{100}\right)^{10}\cdot\frac{0,7}{100}} + \dfrac{a\left[\left(1+\frac{0,7}{100}\right)^{15} - 1\right]}{\left(1+\frac{0,7}{100}\right)^{15}\cdot\frac{0,7}{100}} + \dfrac{a\left[\left(1+\frac{0,7}{100}\right)^{25} - 1\right]}{\left(1+\frac{0,7}{100}\right)^{25}\cdot\frac{0,7}{100}} \Leftrightarrow a \approx 21422719.$

Chọn đáp án C □

Câu 143 (Chuyên Quang Trung - Bình Phước - 2021).

Để lắp đặt hệ thống năng lượng mặt trời $50KWP$, gia đình bạn A vay ngân hàng một số tiền là 600 triệu đồng với lãi suất $0,6\%$/tháng. Sau đúng một tháng kể từ ngày lắp đặt, gia đình bạn A bắt đầu đưa vào vận hành hòa lưới thì mỗi tháng công ty điện lực trả cho gia đình bạn A 16 triệu đồng. Nên sau sau đúng một tháng kể từ khi vay, gia đình bạn A bắt đầu hoàn nợ, hai lần hoàn nợ cách nhau đúng một tháng, mỗi tháng hoàn nợ đúng một số tiền là 16 triệu đồng. Hỏi sau bao nhiêu tháng, gia đình bạn A trả hết nợ.

(A) 43. (B) 42. (C) 41. (D) 44.

Lời giải.

Gọi n là số tháng mà nhà bạn A hoàn trả hết nợ. $(n > 0)$.

Để sau n tháng thì gia đinh bạn A trả hết nợ thì

$600\,(1+0,6\%)^n - \dfrac{16}{0,6\%}\left[(1+0,6\%)^n - 1\right] = 0$

Ta có $600\,(1+0,6\%)^n - \dfrac{16}{0,6\%}\left[(1+0,6\%)^n - 1\right] = 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{6200}{3}(1+0,6\%)^n = \dfrac{8000}{3}$

$\Leftrightarrow (1+0,6\%)^n = \dfrac{40}{31}$

$\Leftrightarrow n = 42,6$

Vậy gia đình An sau 43 tháng thì sẽ trả hết nợ.

Chọn đáp án A □

Câu 144 (THPT Đồng Quan - Hà Nội - 2021).

Ba năm trước, An tốt nghiệp Đại học với tấm bằng loại giỏi và xin được việc làm ngay sau khi ra trường. Sau 3 năm ra trường, An tiết kiệm được khoản tiền 600 triệu đồng. An quyết định vay thêm 400 triệu đồng từ ngân hàng để mở công ty riêng với hợp đồng thỏa thuận là đều đặn hàng tháng sau khi ngân hàng giải ngân cho vay 1 tháng An sẽ bắt đầu trả một khoản tiền cố định hàng tháng cho ngân hàng, mức lãi suất $0,6\%$ tháng (lãi suất không thay đổi trong suốt quá trình vay tiền) và trả hết nợ sau đúng 5 năm (60 tháng). Hỏi số tiền An cần trả hàng tháng cho ngân hàng gần nhất với số tiền nào sau đây?

(A) $7,9018$ triệu đồng. (B) $7,8530$ triệu đồng. (C) $7,9582$ triệu đồng. (D) $7,8030$ triệu đồng.

Lời giải.

An vay số tiền $A = 400$ triệu đồng, lãi suất $r = 0,6\%$. a (triệu đồng) là số tiền mà An trả hàng tháng.

Gọi T_n là số tiền mà An phải trả sau n tháng.

Ta có

$T_1 = 400.(1+0,6\%) - a$.

$T_2 = (400.(1+0,6\%) - a).(1+0,6\%) - a = 400.(1+0,6\%)^2 - a.(1+0,6\%) - a$.

$$T_3 = \left(400.(1+0,6\%)^2 - a.(1+0,6\%) - a\right).(1+0,6\%) - a$$
$$= 400.(1+0,6\%)^3 - a(1+0,6\%)^2 - a(1+0,6\%) - a$$

$\ldots$

$$T_n = 400.(1+0,6\%)^n - a(1+0,6\%)^{n-1} - a(1+0,6\%)^{n-2} - \ldots - a$$
$$= 400.(1+0,6\%)^n - \left(a(1+0,6\%)^{n-1} + a(1+0,6\%)^{n-2} + \ldots + a\right).$$
$$= 400.(1+0,6\%)^n - a\frac{(1+0,6\%)^n - 1}{0,6\%}$$

Theo đề bài $T_{60} = 0 \Leftrightarrow 400.(1+0,6\%)^{60} - a\dfrac{(1+0,6\%)^{60} - 1}{0,6\%}$

$= 0 \Rightarrow a \approx 7,9582$ triệu đồng

Chọn đáp án C □

Câu 145 (Chuyên ĐHSP - 2021). Mùa hè năm 2021, để chuẩn bị cho "học kì quân đội" dành cho các bạn nhỏ, một đơn vị bộ đội chuẩn bị thực phẩm cho các bạn nhỏ, dự kiến đủ dùng trong 45 ngày (năng suất ăn của mỗi ngày là như nhau). Nhưng bắt đầu từ ngày thứ 11, do số lượng thành viên tham gia tăng lên, nên lượng thức ăn tiêu thụ thực phẩm tăng 10% mỗi ngày(ngày sau tăng 10% so với ngày trước đó). Hỏi thực tế lượng thức ăn đó đủ dùng cho bao nhiêu ngày?

A. 24. B. 25. C. 23. D. 26.

Lời giải.

Giả sử lượng thức ăn tiêu thụ mỗi ngày ban đầu là $x\,(x > 0)$, lượng thực phẩm chuẩn bị là $45x$

$\Rightarrow$ lượng thức ăn tiêu thụ trong 10 ngày đầu là: $S_1 = 10x$.

Gọi số ngày mà thức ăn đủ dùng tính từ ngày thứ 11 là n.

Khi đó số lượng thức ăn mỗi ngày tiêu thụ lập thành cấp số nhân với công bội $q = 1,1; u_1 = 1,1x$.

$S_n = u_1.\dfrac{1-q^n}{1-q} = 1,1x.\dfrac{1-1,1^n}{1-1,1} = 35x \Rightarrow n \approx 15$.

Vậy số ngày mà lượng thức ăn đủ dùng là: $15 + 10 = 25$ ngày.

Chọn đáp án B □

Câu 146 (Sở Bình Phước - 2021). Ông Thành vay ngân hàng $2,5$ tỷ đồng và trả góp hàng tháng với lãi suất $0,51\%$. Hàng tháng, ông Thành trả 50 triệu đồng (bắt đầu từ khi vay). Hỏi sau 36 tháng thì số tiền ông Thành còn nợ là bao nhiêu (làm tròn đến hàng triệu)?

A. 1019 triệu đồng. B. 1025 triệu đồng. C. 1016 triệu đồng. D. 1022 triệu đồng.

Lời giải.

Đặt $A = 2500$ (triệu), $r = 0.0051$, $m = 50$ (triệu).

Tiền còn nợ sau 1 tháng là $T_1 = (A - m) \cdot (1 + r) = A \cdot (1 + r) - m \cdot (1 + r)$

Tiền còn nợ sau 2 tháng là $T_2 = (T_1 - m) \cdot (1 + r) = A \cdot (1 + r)^2 - m \cdot \left[(1 + r)^2 + (1 + r)\right] = A \cdot (1 + r)^2 - m \cdot \dfrac{(1 + r)^3 - (1 + r)}{r}$

Tiền còn nợ sau 3 tháng là $T_3 = (T_2 - m) \cdot (1 + r) = A \cdot (1 + r)^3 - m \cdot \left[(1 + r)^3 + (1 + r)^2 + (1 + r)\right] = A \cdot (1 + r)^3 - m \cdot \dfrac{(1 + r)^4 - (1 + r)}{r}$

Do vậy số tiền còn nợ sau 36 tháng là $T_{36} = A \cdot (1 + r)^{36} - m \cdot \dfrac{(1 + r)^{37} - (1 + r)}{r}$

Thay số vào ta được

$T_{36} = 2500 \cdot (1 + 0.0051)^{36} - 50 \cdot \dfrac{(1 + 0.0051)^{37} - (1 + 0.0051)}{0.0051} \approx 1022$ (triệu).

Chọn đáp án D □

Câu 147 (Sở Cần Thơ - 2021). Anh Tâm vay ngân hàng 50 triệu đồng, mỗi tháng trả góp cho ngân hàng 3 triệu đồng và phải chịu lãi suất của số tiền chưa trả là $0,7\%$/ tháng. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu tháng thì anh Tâm trả hết tiền nợ ngân hàng?

A 20 tháng. B 18 tháng. C 17 tháng. D 19 tháng.

Lời giải.

Đặt $A = 50$ triệu đồng; $r = 0,7\%; m = 3$ triệu đồng.

Số tiền anh Tâm còn nợ sau tháng thứ nhất là $T_1 = A(1 + r) - m$.

Số tiền anh Tâm còn nợ sau tháng thứ hai là $T_2 = T_1(1 + r) - m = A(1 + r)^2 - m(1 + r) - m$.

Số tiền anh Tâm còn nợ sau tháng thứ n là

$T_n = A(1 + r)^n - m(1 + r)^{n-1} - \ldots - m(1 + r) - m = A(1 + r)^n - m \cdot \dfrac{(1 + r)^n - 1}{r}$.

Để sau tháng thứ n anh Tâm trả hết tiền nợ ngân hàng thì

$$\begin{aligned} T_n = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad A(1 + r)^n - m \cdot \frac{(1 + r)^n - 1}{r} = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad 50(1 + r)^n = 3 \cdot \frac{(1 + 0,7\%)^n - 1}{0,7\%} \\ &\Rightarrow \quad n \approx 17,78. \end{aligned}$$

Vậy cần ít nhất 18 tháng thì anh Tâm trả hết tiền nợ ngân hàng.

Chọn đáp án B □

BẢNG ĐÁP ÁN

1. D	2. C	3. C	4. A	5. B	6. D	7. C	8. D	9. A	10. B
11. D	12. A	13. D	14. B	15. B	16. C	17. A	18. B	19. D	20. D
21. C	22. A	23. D	24. B	25. C	26. C	27. D	28. D	29. B	30. C
31. D	32. A	33. C	34. B	35. A	36. C	37. D	38. C	39. A	40. D
41. A	42. A	43. B	44. C	45. C	46. A	47. D	48. C	49. A	50. C
51. A	52. B	53. B	54. D	55. B	56. D	57. D	58. C	59. D	60. C
61. D	62. D	63. D	64. D	65. D	66. C	67. A	68. A	69. B	70. C

71. A	72. A	73. C	74. C	75. B	76. C	77. B	78. A	79. B	80. B
81. B	82. A	83. B	84. A	85. D	86. C	87. C	88. A	89. C	90. C
91. A	92. B	93. B	94. A	95. A	96. C	97. B	98. A	99. C	100. B
101. A	102. B	103. B	104. B	105. D	106. B	107. A	108. D	109. D	110. A
111. D	112. C	113. B	114. A	115. D	116. B	117. B	118. D	119. C	120. C
121. B	122. D	123. B	124. C	125. A	126. A	127. B	128. D	129. D	130. B
131. A	132. D	133. C	134. A	135. A	136. D	137. C	138. B	139. A	140. C
141. C	142. C	143. A	144. C	145. B	146. D	147. B			

MỨC ĐỘ 3. MỨC ĐỘ 9,10 ĐIỂM

Dạng 1. Một số bài toán khó

Câu 1 (Chuyên Lam Sơn - 2020). Cho các số thực a, b thỏa mãn $a > b > 1$ và $\dfrac{1}{\log_b a} + \dfrac{1}{\log_a b} = \sqrt{2020}$. Giá trị của biểu thức $P = \dfrac{1}{\log_{ab} b} - \dfrac{1}{\log_{ab} a}$ bằng

A. $\sqrt{2014}$. B. $\sqrt{2016}$. C. $\sqrt{2018}$. D. $\sqrt{2020}$.

Lời giải.

Do $a > b > 1$ nên $\log_a b > 0$, $\log_b a > 0$ và $\log_b a > \log_a b$.

Ta có $\dfrac{1}{\log_b a} + \dfrac{1}{\log_a b} = \sqrt{2020}$

$\Leftrightarrow \log_b a + \log_a b = \sqrt{2020}$

$\Leftrightarrow \log_b^2 a + \log_a^2 b + 2 = 2020$

$\Leftrightarrow \log_b^2 a + \log_a^2 b = 2018$ $(*)$

Khi đó, $P = \log_b ab - \log_a ab = \log_b a + \log_b b - \log_a a - \log_a b = \log_b a - \log_a b$.

Suy ra $P^2 = (\log_b a - \log_a b)^2 = \log_b^2 a + \log_a^2 b - 2 = 2018 - 2 = 2016 \Rightarrow P = \sqrt{2016}$.

Chọn đáp án B □

Câu 2 (Liên Trường THPT Tp Vinh Nghệ 2019).

Tìm số nguyên dương n sao cho

$$\log_{2018} 2019 + 2^2 \log_{\sqrt{2018}} 2019 + 3^2 \log_{\sqrt[3]{2018}} 2019 + \cdots + n^2 \log_{\sqrt[n]{2018}} 2019 = 1010^2 2021^2 \log_{2018} 2019.$$

A. $n = 2021$. B. $n = 2019$. C. $n = 2020$. D. $n = 2018$.

Lời giải.

$\log_{2018} 2019 + 2^2 \log_{\sqrt{2018}} 2019 + 3^2 \log_{\sqrt[3]{2018}} 2019 + \cdots + n^2 \log_{\sqrt[n]{2018}} 2019 = 1010^2 2021^2 \log_{2018} 2019$

$\Leftrightarrow \log_{2018} 2019 + 2^3 \log_{2018} 2019 + 3^3 \log_{2018} 2019 + \cdots + n^3 \log_{2018} 2019 = 1010^2 2021^2 \log_{2018} 2019$

$\Leftrightarrow (1 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3) \log_{2018} 2019 = 1010^2 2021^2 \log_{2018} 2019$

$\Leftrightarrow 1 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = 1010^2 2021^2$

$\Leftrightarrow (1+2+\cdots+n)^2 = 1010^2 2021^2$

$\Leftrightarrow \left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2 = 1010^2 2021^2$

$\Leftrightarrow \dfrac{n(n+1)}{2} = 1010 \cdot 2021$

$\Leftrightarrow n^2 + n - 2020 \cdot 2021 = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n = 2020 \\ n = -2021 \text{ (loại).} \end{array}\right.$

Chọn đáp án C □

Câu 3. Cho hàm số $f(x) = \log_2\left(x - \dfrac{1}{2} + \sqrt{x^2 - x + \dfrac{17}{4}}\right)$. Tính

$$T = f\left(\frac{1}{2019}\right) + f\left(\frac{2}{2019}\right) + \cdots + f\left(\frac{2018}{2019}\right).$$

A $T = \dfrac{2019}{2}$. B $T = 2019$. C $T = 2018$. D $T = 1009$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} f(1-x) &= \log_2\left(1 - x - \frac{1}{2} + \sqrt{(1-x)^2 - (1-x) + \frac{17}{4}}\right) \\ &= \log_2\left(\sqrt{x^2 - x + \frac{17}{4}} - \left(x - \frac{1}{2}\right)\right) \\ f(x) + f(1-x) &= \log_2\left(x - \frac{1}{2} + \sqrt{x^2 - x + \frac{17}{4}}\right) + \log_2\left(\sqrt{x^2 - x + \frac{17}{4}} - \left(x - \frac{1}{2}\right)\right) \\ &= \log_2\left[\left(x - \frac{1}{2} + \sqrt{x^2 - x + \frac{17}{4}}\right)\left(\sqrt{x^2 - x + \frac{17}{4}} - \left(x - \frac{1}{2}\right)\right)\right] = \log_2 4 = 2 \\ \Rightarrow T &= f\left(\frac{1}{2019}\right) + f\left(\frac{2}{2019}\right) + \cdots + f\left(\frac{2018}{2019}\right) \\ &= f\left(\frac{1}{2019}\right) + f\left(\frac{2018}{2019}\right) + f\left(\frac{2}{2019}\right) + f\left(\frac{2017}{2019}\right) + \cdots + f\left(\frac{1009}{2019}\right) + f\left(\frac{1010}{2019}\right) \\ &= 1009 \cdot 2 = 2018. \end{aligned}$$

Chọn đáp án C □

Câu 4 (THPT Nguyễn Khuyến 2019).

Gọi a là giá trị nhỏ nhất của $f(n) = \dfrac{\log_3 2 \cdot \log_3 3 \cdot \log_3 4 \cdot \cdots \cdot \log_3 n}{9^n}$ với $n \in \mathbb{N}$ và $n \geq 2$. Hỏi có bao nhiêu giá trị của n để $f(n) = a$.

A 2. B 4. C 1. D vô số.

Lời giải.

Với $n \in \mathbb{N}$ và $n \geq 2$ ta có

$$f(n) = \frac{\log_3 2 \cdot \log_3 3 \cdot \log_3 4 \cdot \cdots \cdot \log_3 n}{9^n} = \frac{1}{9}\log_{3^9} 2 \cdot \log_{3^9} 3 \cdot \log_{3^9} 4 \cdot \cdots \cdot \log_{3^9} n.$$

Ta có

- Nếu $2 \leq n \leq 3^8 \Rightarrow 0 < \log_{3^9} k < 1 \Rightarrow f(n) = \dfrac{1}{9}\log_{3^9}2 \cdot \log_{3^9} 3 \cdot \log_{3^9} 4 \cdot \dots \cdot \log_{3^9} n \geq f\left(3^8\right)$.
- Nếu $n = 3^9 \Rightarrow f\left(3^9\right) = f\left(3^8\right) \cdot \log_{3^9} 3^9 = f\left(3^8\right)$.
- Nếu $n > 3^9 \Rightarrow \log_{3^9} n > 1 \Rightarrow f(n) = f\left(3^9\right) \cdot \log_{3^9}\left(3^9+1\right) \cdot \dots \cdot \log_{3^9} n > f\left(3^9\right)$.

Từ đó suy ra $\min f(n) = f\left(3^9\right) = f\left(3^8\right)$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 5 (Chuyên Lê Quý Đôn Quảng Trị 2019).

Cho x, y và z là các số thực lớn hơn 1 và gọi w là số thực dương sao cho $\log_x w = 24$, $\log_y w = 40$ và $\log_{xyz} w = 12$. Tính $\log_z w$.

(A) 52. (B) -60. (C) 60. (D) -52.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} \log_x w = 24 &\Rightarrow \log_w x = \frac{1}{24} \\ \log_y w = 40 &\Rightarrow \log_w y = \frac{1}{40}. \end{aligned}$$

Lại do

$$\begin{aligned} \log_{xyz} w = 12 &\Leftrightarrow \frac{1}{\log_w (xyz)} = 12 \Leftrightarrow \frac{1}{\log_w x + \log_w y + \log_w z} = 12 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{\frac{1}{24} + \frac{1}{40} + \log_w z} = 12 \\ &\Leftrightarrow \log_w z = \frac{1}{60} \Rightarrow \log_z w = 60. \end{aligned}$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 6. Cho $f(1) = 1$, $f(m+n) = f(m) + f(n) + mn$ với mọi $m, n \in \mathbb{N}^*$. Tính giá trị của biểu thức $T = \log\left[\dfrac{f(96) - f(69) - 241}{2}\right]$.

(A) $T = 9$. (B) $T = 3$. (C) $T = 10$. (D) $T = 4$.

Lời giải.

Vì $f(1) = 1$, $f(m+n) = f(m) + f(n) + mn$ nên

$$\begin{aligned} f(96) &= f(95+1) = f(95) + f(1) + 95 = f(95) + 96 = f(94) + 95 + 96 \\ &= \cdots = f(1) + 2 + \cdots + 95 + 96 \\ &= 1 + 2 + \cdots + 95 + 96 = \frac{96 \cdot 97}{2} = 4\,656. \end{aligned}$$

Tương tự $f(69) = 1 + 2 + \cdots + 68 + 69 = \dfrac{69 \cdot 70}{2} = 2\,415$.

Vậy $T = \log\left[\dfrac{f(96) - f(69) - 241}{2}\right] = \log\left(\dfrac{4\,656 - 2\,415 - 241}{2}\right) = \log 1\,000 = 3$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 7 (Chuyên Lê Quý Đôn Quảng Trị 2019).

Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn đồng thời $\frac{1}{\log_2 x}+\frac{1}{\log_2 y}+\frac{1}{\log_2 z}=\frac{1}{2020}$ và $\log_2(xyz)=2020$. Tính $\log_2\left(xyz\left(x+y+z\right)-xy-yz-zx+1\right)$.

(A) 4040. (B) 1010. (C) 2020. (D) 2020^2.

Lời giải.

Đặt $a=\log_2 x$; $b=\log_2 y$; $c=\log_2 z$. Ta có $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{2020}$ và $a+b+c=2020$

$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)(a+b+c)=1 \Leftrightarrow (a+b+c)(ab+ac+bc)=abc$

$\Leftrightarrow a^2b+ab^2+abc+abc+b^2c+bc^2+a^2c+ac^2=0$

$\Leftrightarrow (a+b)(b+c)(c+a)=0.$

Vì vai trò a, b, c như nhau nên giả sử $a+b=0 \Rightarrow c=2020 \Rightarrow z=2^{2020}$ và $xy=1$.

$\log_2\left(xyz\left(x+y+z\right)-xy-yz-zx+1\right)=\log_2\left(z(x+y+z)-1-yz-zx+1\right)$

$=\log_2\left(z^2\right)=2\log_2 z=4040.$

Chọn đáp án (A) □

Câu 8 (Bạc Liêu – Ninh Bình 2019). Cho ba số thực dương x, y, z theo thứ tự lập thành một cấp số nhân, đồng thời với mỗi số thực dương a $(a \neq 1)$ thì $\log_a x, \log_{\sqrt{a}} y, \log_{\sqrt[3]{a}} z$ theo thứ tự lập thành một cấp số cộng. Tính giá trị của biểu thức $P=\frac{1959x}{y}+\frac{2019y}{z}+\frac{60z}{x}$.

(A) 60. (B) 2019. (C) 4038. (D) $\frac{2019}{2}$.

Lời giải.

Ta có x, y, z là ba số thực dương, theo thứ tự lập thành một cấp số nhân nên $y^2=xz$. (1)

Với mỗi số thực a $(a \neq 1)$, $\log_a x, \log_{\sqrt{a}} y, \log_{\sqrt[3]{a}} z$ theo thứ tự lập thành một cấp số cộng nên

$$2\log_{\sqrt{a}} y=\log_a x+\log_{\sqrt[3]{a}} z \Leftrightarrow 4\log_a y=\log_a x+3\log_a z. \quad (2)$$

Thay (1) vào (2) ta được $2\log_a xz=\log_a x+3\log_a z \Leftrightarrow \log_a x=\log_a z \Leftrightarrow x=z$.

Từ (1) ta suy ra $y=x=z$.

Từ đó $P=1\,959+2\,019+60=4\,038$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 9 (THPT Hai Bà Trưng-Huế-2019).

Cho hàm số $f(x)=\frac{1}{2}\log_2\left(\frac{2x}{1-x}\right)$ và hai số thực m, n thuộc khoảng $(0;1)$ sao cho $m+n=1$. Tính $f(m)+f(n)$.

(A) 2. (B) 0. (C) 1. (D) $\frac{1}{2}$.

Lời giải.

$f(m)+f(n)=\frac{1}{2}\log_2\left(\frac{2m}{1-m}\right)+\frac{1}{2}\log_2\left(\frac{2n}{1-n}\right)$

$=\frac{1}{2}\left[\log_2\left(\frac{2m}{1-m}\right)+\log_2\left(\frac{2n}{1-n}\right)\right]$

$=\frac{1}{2}\log_2\left(\frac{2m}{1-m}\cdot\frac{2n}{1-n}\right)$

$= \dfrac{1}{2}\log_2\left(\dfrac{4mn}{1-m-n+mn}\right)$, vì $m+n=1$

$= \dfrac{1}{2}\log_2\left(\dfrac{4mn}{mn}\right) = \dfrac{1}{2}\log_2 4 = \dfrac{1}{2}\cdot 2 = 1.$

Chọn đáp án C □

Câu 10 (Chuyên-Vĩnh Phúc-2019). Gọi n là số nguyên dương sao cho $\dfrac{1}{\log_3 x}+\dfrac{1}{\log_{3^2} x}+\dfrac{1}{\log_{3^3} x}+\cdots+\dfrac{1}{\log_{3^n} x}=\dfrac{190}{\log_3 x}$ đúng với mọi x dương, $x\neq 1$. Tìm giá trị của biểu thức $P=2n+3$.

A $P=32$. B $P=23$. C $P=43$. D $P=41$.

Lời giải.

$\dfrac{1}{\log_3 x}+\dfrac{1}{\log_{3^2} x}+\dfrac{1}{\log_{3^3} x}+\cdots+\dfrac{1}{\log_{3^n} x}=\dfrac{190}{\log_3 x}$

$\Leftrightarrow \log_x 3+2\log_x 3+3\log_x 3+\cdots+n\log_x 3=190\log_x 3$

$\Leftrightarrow \log_x 3\,(1+2+3+\cdots+n)=190\log_x 3$

$\Leftrightarrow 1+2+3+\cdots+n=190$

$\Leftrightarrow \dfrac{n(n+1)}{2}=190$

$\Leftrightarrow n^2+n-380=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n=19 \\ n=-20 \end{array}\right. \Rightarrow n=19$ (do n nguyên dương) $\Rightarrow P=2n+3=41.$

Chọn đáp án D □

Câu 11. Cho x, y, z là ba số thực dương lập thành cấp số nhân; $\log_a x$, $\log_{\sqrt{a}} y$, $\log_{\sqrt[3]{a}} z$ lập thành cấp số cộng, với a là số thực dương khác 1. Giá trị của $p=\dfrac{9x}{y}+\dfrac{y}{z}+\dfrac{3z}{x}$ là

A 13. B 3. C 12. D 10.

Lời giải.

x, y, z là ba số thực dương lập thành cấp số nhân nên ta có $xz=y^2$. (1)

$\log_a x$, $\log_{\sqrt{a}} y$, $\log_{\sqrt[3]{a}} z$ lập thành cấp số cộng nên

$$\log_a x+\log_{\sqrt[3]{a}} z=2\log_{\sqrt{a}} y \Leftrightarrow \log_a x+3\log_a z=4\log_a y \Leftrightarrow xz^3=y^4. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta suy ra $x=y=z$.

Vậy $p=\dfrac{9x}{y}+\dfrac{y}{z}+\dfrac{3z}{x}=9+1+3=13.$

Chọn đáp án A □

Câu 12 (Chuyên Nguyễn Huệ 2019).

Cho $f(1)=1$; $f(m+n)=f(m)+f(n)+mn$ với mọi $m,n\in N^*$. Tính giá trị của biểu thức $T=\log\left[\dfrac{f(2019)-f(2009)-145}{2}\right]$

A 3. B 4. C 5. D 10.

Lời giải.

Ta có $f(2019)=f(2009+10)=f(2009)+f(10)+20090.$

Do đó $f(2019)-f(2009)-145=f(10)+20090-145.$

$f(10) = f(9) + f(1) + 9$

$f(9) = f(8) + f(1) + 8$

$\ldots$

$f(3) = f(2) + f(1) + 2$

$f(2) = f(1) + f(1) + 1$

Từ đó cộng vế với vế ta được: $f(10) = 10 \cdot f(1) + 1 + 2 + \cdots + 8 + 9 = 55$.

Vậy $\log\left[\dfrac{f(2019) - f(2009) - 145}{2}\right] = \log\dfrac{20090 - 145 + 55}{2} = \log 10000 = 4$.

Chọn đáp án B □

Câu 13. Có bao nhiêu số nguyên dương n để $\log_n 256$ là một số nguyên dương?

A 2. B 3. C 4. D 1.

Lời giải.

$\log_n 256 = 8 \cdot \log_n 2 = \dfrac{8}{\log_2 n}$ là số nguyên dương

$\Leftrightarrow \log_2 n \in \{1; 2; 4; 8\} \Leftrightarrow n \in \{2; 4; 16; 256\}$.

Vậy có 4 số nguyên dương.

Chọn đáp án C □

Câu 14. Cho tam giác ABC có $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$. Nếu a, b, c theo thứ tự lập thành một cấp số nhân thì

A $\ln\sin A.\ln\sin C = (\ln\sin B)^2$.

B $\ln\sin A.\ln\sin C = 2\ln\sin B$.

C $\ln\sin A + \ln\sin C = 2\ln\sin B$.

D $\ln\sin A + \ln\sin C = \ln(2\sin B)$.

Lời giải.

Theo định lý sin trong tam giác ABC ta có: $\begin{cases} a = 2R\sin A \\ b = 2R\sin B \\ c = 2R\sin C \end{cases}$, với R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Vì a, b, c theo thứ tự lập thành một cấp số nhân nên ta có

$$ac = b^2 \Rightarrow (2R\sin A)(2R\sin C) = (2R\sin B)^2 \Rightarrow \sin A\sin C = (\sin B)^2.$$

Do $0^\circ < \sin A, \sin B, \sin C \leq 180^\circ$ nên $\sin A, \sin B, \sin C > 0$.

Vì thế ta có thể suy ra $\ln(\sin A.\sin C) = \ln\left[(\sin B)^2\right] \Rightarrow \ln\sin A + \ln\sin C = 2\ln\sin B$.

Chọn đáp án C □

Câu 15 (Chuyên Lương Văn Chánh - Phú Yên - 2018).

Cho $x = 2018!$. Tính $A = \dfrac{1}{\log_{2^{2018}} x} + \dfrac{1}{\log_{3^{2018}} x} + \cdots + \dfrac{1}{\log_{2017^{2018}} x} + \dfrac{1}{\log_{2018^{2018}} x}$.

A $A = \dfrac{1}{2017}$. B $A = 2018$. C $A = \dfrac{1}{2018}$. D $A = 2017$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}A &= \frac{1}{\log_{2^{2018}} x} + \frac{1}{\log_{3^{2018}} x} + \cdots + \frac{1}{\log_{2017^{2018}} x} + \frac{1}{\log_{2018^{2018}} x}\\ &= \log_x 2^{2018} + \log_x 3^{2018} + \cdots + \log_x 2017^{2018} + \log_x 2018^{2018}\\ &= 2018\log_x 2 + 2018\log_x 3 + \cdots + 2018\log_x 2017 + 2018\log_x 2018\\ &= 2018\left(\log_x 2 + \log_x 3 + \cdots + \log_x 2017 + \log_x 2018\right)\\ &= 2018\log_x\left(2\cdot 3\cdot\dots\cdot 2017\cdot 2018\right).\end{aligned}$$

Chọn đáp án B □

Câu 16 (Chuyên Hùng Vương - Gia Lai - 2018).

Tìm bộ ba số nguyên dương $(a;b;c)$ thỏa mãn

$$\log 1 + \log(1+3) + \log(1+3+5) + \cdots + \log(1+3+5+\cdots+19) - 2\log 5040 = a + b\log 2 + c\log 3$$

A $(2;6;4)$. B $(1;3;2)$. C $(2;4;4)$. D $(2;4;3)$.

Lời giải.

Ta có

$\log 1 + \log(1+3) + \log(1+3+5) + \cdots + \log(1+3+5+\cdots+19) - 2\log 5040 = a + b\log 2 + c\log 3$

$\Leftrightarrow \log 1 + \log 2^2 + \log 3^2 + \cdots + \log 10^2 - 2\log 5040 = a + b\log 2 + c\log 3$

$\Leftrightarrow \log\left(1\cdot 2^2\cdot 3^2\cdot\dots\cdot 10^2\right) - 2\log 5040 = a + b\log 2 + c\log 3$

$\Leftrightarrow \log\left(1\cdot 2\cdot 3\cdot\dots\cdot 10\right)^2 - 2\log 5040 = a + b\log 2 + c\log 3$

$\Leftrightarrow 2\log\left(1\cdot 2\cdot 3\cdot\dots\cdot 10\right) - 2\log 5040 = a + b\log 2 + c\log 3$

$\Leftrightarrow 2\left(\log 10! - \log 7!\right) = a + b\log 2 + c\log 3 \Leftrightarrow 2\log\left(8\cdot 9\cdot 10\right) = a + b\log 2 + c\log 3$

$\Leftrightarrow 2 + 6\log 2 + 4\log 3 = a + b\log 2 + c\log 3$.

Vậy $a = 2$, $b = 6$, $c = 4$.

Chọn đáp án A □

Câu 17 (Phan Đình Phùng - Hà Tĩnh - 2018).

Tổng $S = 1 + 2^2\log_{\sqrt{2}} 2 + 3^2\log_{\sqrt[3]{2}} 2 + \cdots + 2018^2\log_{\sqrt[2018]{2}} 2$ dưới đây.

A $1008^2 2018^2$. B $1009^2 2019^2$. C $1009^2 2018^2$. D 2019^2.

Lời giải.

Ta có $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \dfrac{\left(n\left(n+1\right)\right)^2}{4}$.

Mặt khác

$$\begin{aligned} S &= 1 + 2^2\log_{\sqrt{2}} 2 + 3^2 \log_{\sqrt[3]{2}} 2 + \cdots + 2018^2 \log_{\sqrt[2018]{2}} 2 \\ &= 1 + 2^2 \log_{2^{\frac{1}{2}}} 2 + 3^2 \log_{2^{\frac{1}{3}}} 2 + \cdots + 2018^2 \log_{2^{\frac{1}{2018}}} 2 \\ &= 1 + 2^3 \log_2 2 + 3^3 \log_2 2 + \cdots . + 2018^3 \log_2 2 \\ &= 1 + 2^3 + 3^3 + \cdots + 2018^3 \\ &= \left[\frac{2018\left(2018+1\right)}{2}\right]^2 = 1009^2 2019^2. \end{aligned}$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 18 (ChuyêN KHTN - 2018). Số $20172018^{20162017}$ có bao nhiêu chữ số?

(A) 147278481. (B) 147278480. (C) 147347190. (D) 147347191.

Lời giải.

Số chữ số của một số tự nhiên x là $[\log x] + 1$ ($[\log x]$ là phần nguyên của $\log x$).

Vậy số chữ số của số $20172018^{20162017}$ là

$[\log 20172018^{20162017}] + 1 = [20162017 \log\left(20172018\right)] + 1 = 147278481.$

Chọn đáp án (A) □

Câu 19 (THPT Quảng Xương 1 - Thanh Hóa - 2021).

Cho các số thực a, b, c thuộc khoảng $(1; +\infty)$ và $\log^2_{\sqrt{a}} b + \log_b c . \log_b \left(\frac{c^2}{b}\right) + 9\log_a c = 4\log_a b$. Giá trị của biểu thức $\log_a b + \log_b c^2$ bằng

(A) 1. (B) $\frac{1}{2}$. (C) 2. (D) 3.

Lời giải.

Đặt $\log_a b = x, \log_b c = y \Rightarrow \log_a c = xy$. Điều kiện $x, y > 0$.

Bài toán trở thành

Cho $4x^2 + y(2y-1) + 9xy - 4x = 0$. Tính $P = x + 2y$.

Rút $x = P - 2y$ thay vào giả thiết, ta có

$4\left(P-2y\right)^2 + y(2y-1) + 9\left(P-2y\right)y - 4\left(P-2y\right) = 0$

$\Leftrightarrow 4P^2 - 7Py - 4P + 7y = 0.$

$\Leftrightarrow \left(P-1\right)\left(4P-7y\right) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} P = 1 \\ 4P - 7y = 0. \end{array}\right.$

Xét trường hợp: $4P - 7y = 0 \Leftrightarrow 4x + y = 0$, loại vì $x, y > 0$.

Vậy $P = 1$.

Chọn đáp án (A) □

BẢNG ĐÁP ÁN

1. B	2. C	3. C	4. A	5. C	6. B	7. A	8. C	9. C	10. D
11. A	12. B	13. C	14. C	15. B	16. A	17. B	18. A	19. A	

CD20

MỨC ĐỘ 1. MỨC ĐỘ 5,6 ĐIỂM

Dạng 1. Bất phương trình logarit

- Nếu $a>1$ thì $\log_a f(x)>\log_a g(x) \Leftrightarrow f(x)>g(x)$)(cùng chiều).
- Nếu $0<a<1$ thì $\log_a f(x)>\log_a g(x) \Leftrightarrow f(x)<g(x)$)(ngược chiều).
- Nếu a chứa ẩn thì $\left[\begin{array}{l}\log_a B>0 \Leftrightarrow (a-1)(B-1)>0 \\ \dfrac{\log_a A}{\log_a B}>0 \Leftrightarrow (A-1)(B-1)>0\end{array}\right.$.

Câu 1 (Đề Tham Khảo 2020 Lần 2).

Tập nghiệm của bất phương trình $\log x \geq 1$ là

(A) $(10;+\infty)$. (B) $(0;+\infty)$. (C) $[10;+\infty)$. (D) $(-\infty;10)$.

Lời giải.

$\log x \geq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ x \geq 10 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 10.$

Vậy bất phương trình đã cho có tập nghiệm là $[10;+\infty)$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 2 (Mã 102 - 2020 Lần 2). Tập nghiệm của bất phương trình $\log_3\left(13-x^2\right) \geq 2$ là

(A) $(-\infty;-2] \cup [2:\ +\infty)$. (B) $(-\infty;2]$.

(C) $(0;2]$. (D) $[-2;2]$.

Lời giải.

Bất phương trình $\log_3\left(13-x^2\right) \geq 2 \Leftrightarrow \begin{cases} 13-x^2>0 \\ 13-x^2 \geq 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2<13 \\ x^2 \leq 4 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -\sqrt{13}<x<\sqrt{13} \\ -2 \leq x \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 2.$

Vậy, tập nghiệm của bất phương trình $\log_3\left(13-x^2\right) \geq 2$ là $[-2;2]$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 3 (Mã 103 - 2020 Lần 2). Tập nghiệm của bất phương trình $\log_3\left(36-x^2\right) \geq 3$ là

(A) $(-\infty;-3] \cup [3;+\infty)$. (B) $(-\infty;3]$.

(C) $[-3;3]$. (D) $(0;3]$.

Lời giải.

Ta có: $\log_3\left(36-x^2\right) \geq 3 \Leftrightarrow 36-x^2 \geq 27 \Leftrightarrow 9-x^2 \geq 0 \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 3$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 4. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_3\left(18-x^2\right)\geq 2$ là

(A) $(-\infty;3]$.
(B) $(0;3]$.
(C) $[-3;3]$.
(D) $(-\infty;-3]\cup[3;+\infty)$.

Lời giải.

Điều kiện: $18-x^2>0\Leftrightarrow x\in\left(-3\sqrt{2};3\sqrt{2}\right)$ (*).

Khi đó ta có: $\log_3\left(18-x^2\right)\geq 2\Leftrightarrow 18-x^2\geq 9\Leftrightarrow -3\leq x\leq 3$.

Kết hợp với điều kiện (*) ta được tập ngiệm của bất phương trình đã cho là $[-3;3]$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 5 (Mã 104 - 2020 Lần 2). Tập nghiệm của bất phương trình $\log_3\left(31-x^2\right)\geq 3$ là

(A) $(-\infty;2]$.
(B) $[-2;2]$.
(C) $(-\infty;-2]\cup[2;+\infty)$.
(D) $(0;2]$.

Lời giải.

$\log_3\left(31-x^2\right)\geq 3\Leftrightarrow 31-x^2\geq 27\Leftrightarrow x^2-4\leq 0\Leftrightarrow x\in[-2;2]$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 6 (Đề Minh Họa 2017). Giải bất phương trình $\log_2(3x-1)>3$.

(A) $x>3$.
(B) $\dfrac{1}{3}<x<3$.
(C) $x<3$.
(D) $x>\dfrac{10}{3}$.

Lời giải.

Điều kiện xác định: $3x-1>0\Leftrightarrow x>\dfrac{1}{3}$.

Bất phương trình $\Leftrightarrow 3x-1>2^3\Leftrightarrow 3x>9\Leftrightarrow x>3$ (thỏa mãn điều kiện).

Vậy bpt có nghiệm $x>3$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 7 (THPT Bạch Đằng Quảng Ninh 2019).

Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\ln x^2<0$.

(A) $S=(-1;1)$.
(B) $S=(-1;0)$.
(C) $S=(-1;1)\setminus\{0\}$.
(D) $S=(0;1)$.

Lời giải.

Ta có $\ln x^2<0\Leftrightarrow 0<x^2<1\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq 0\\ -1<x<1\end{cases}$.

Vậy $S=(-1;1)\setminus\{0\}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 8 (THPT Minh Khai Hà Tĩnh 2019).

Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(x+1)<\log_{\frac{1}{2}}(2x-1)$.

(A) $S=(2;+\infty)$.
(B) $S=(-1;2)$.
(C) $S=(-\infty;2)$.
(D) $S=\left(\dfrac{1}{2};2\right)$.

Lời giải.

Ta có $\log_{\frac{1}{2}}(x+1)<\log_{\frac{1}{2}}(2x-1)\Leftrightarrow\begin{cases}x+1>2x-1\\ 2x-1>0\end{cases}\Leftrightarrow\dfrac{1}{2}<x<2$.

Chọn đáp án D □

Câu 9 (THPT - Yên Định Thanh Hóa 2019).

Tập nghiệm S của bất phương trình $\log_2(2x+3) \geq 0$ là

A $S = (-\infty; -1]$. B $S = [-1; +\infty)$. C $S = (-\infty; -1)$. D $S = (-\infty; 0]$.

Lời giải.

Ta có $\log_2(2x+3) \geq 0 \Leftrightarrow 2x+3 \geq 1 \Leftrightarrow x \geq -1$.

Vậy tập nghiệm bất phương trình $S = [-1; +\infty)$.

Chọn đáp án B □

Câu 10 (THPT Đông Sơn Thanh Hóa 2019).

Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{0.3}(5-2x) > \log_{\frac{3}{10}} 9$ là

A $\left(0; \dfrac{5}{2}\right)$. B $(-\infty; -2)$. C $\left(-2; \dfrac{5}{2}\right)$. D $(-2; +\infty)$.

Lời giải.

$$\log_{0.3}(5-2x) > \log_{\frac{3}{10}} 9 \Leftrightarrow \begin{cases} 5-2x > 0 \\ 5-2x < 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \dfrac{5}{2} \\ x > -2 \end{cases} \Leftrightarrow -2 < x < \dfrac{5}{2.}$$

Vậy bất phương trình có tập nghiệm là $S = \left(-2; \dfrac{5}{2}\right)$.

Chọn đáp án C □

Câu 11 (Chuyên ĐHSP Hà Nội 2019).

Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{0,5}(x-1) > 1$ là

A $\left(-\infty; -\dfrac{3}{2}\right)$. B $\left(1; \dfrac{3}{2}\right)$. C $\left(\dfrac{3}{2}; +\infty\right)$. D $\left[1; \dfrac{3}{2}\right)$.

Lời giải.

Bất phương trình $\Leftrightarrow 0 < x-1 < 0,5 \Leftrightarrow 1 < x < \dfrac{3}{2}$.

Vậy tập nghiệm bất phương trình đã cho là $S = \left(1; \dfrac{3}{2}\right)$.

Chọn đáp án B □

Câu 12 (HSG Bắc Ninh 2019). Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{\pi}{4}}(x+1) > \log_{\frac{\pi}{4}}(2x-5)$ là

A $(-1; 6)$. B $\left(\dfrac{5}{2}; 6\right)$. C $(6; +\infty)$. D $(-\infty; 6)$.

Lời giải.

Do $\dfrac{\pi}{4} < 1$ nên $\log_{\frac{\pi}{4}}(x+1) > \log_{\frac{\pi}{4}}(2x-5) \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 > 0 \\ x+1 < 2x-5 \end{cases} \Leftrightarrow x > 6$.

Chọn đáp án C □

Câu 13 (THPT An Lão Hải Phòng 2019).

Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\log_3(2x+3) < \log_3(1-x)$

A $\left(-\dfrac{2}{3}; +\infty\right)$. B $\left(-\dfrac{3}{2}; -\dfrac{2}{3}\right)$. C $\left(-\dfrac{3}{2}; 1\right)$. D $\left(-\infty; -\dfrac{2}{3}\right)$.

Lời giải.

Điều kiện: $\begin{cases} 2x+3>0 \\ 1-x>0 \end{cases} \Leftrightarrow -\dfrac{3}{2}<x<1.$

$\log_3(2x+3)<\log_3(1-x) \Leftrightarrow 2x+3<1-x \Leftrightarrow x<-\dfrac{2}{3}.$

So với điều kiện, ta được tập nghiệm của bất phương trình là $S=\left(-\dfrac{3}{2};-\dfrac{2}{3}\right)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 14 (THPT Cẩm Giàng 2 2019). Tập nghiệm của bất phương trình $\log_3\left(\log_{\frac{1}{2}} x\right)<1$ là

(A) $(0;1)$. (B) $\left(\dfrac{1}{8};3\right)$. (C) $\left(\dfrac{1}{8};1\right)$. (D) $\left(\dfrac{1}{8};+\infty\right)$.

Lời giải.

Ta có $\log_3\left(\log_{\frac{1}{2}} x\right)<1 \Leftrightarrow 0<\log_{\frac{1}{2}} x<3^1 \Leftrightarrow \left(\dfrac{1}{2}\right)^{\circ}>x>\left(\dfrac{1}{2}\right)^3 \Leftrightarrow 1>x>\dfrac{1}{8}.$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S=\left(\dfrac{1}{8};1\right)$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 15 (Liên Trường THPT Tp Vinh Nghệ An 2019).

Số nghiệm nguyên của bất phương trình $\log_{0,8}(15x+2)>\log_{0,8}(13x+8)$ là

(A) Vô số. (B) 4. (C) 2. (D) 3.

Lời giải.

Điều kiện $x>-\dfrac{2}{15}$.

Khi đó, $\log_{0,8}(15x+2)>\log_{0,8}(13x+8) \Leftrightarrow 15x+2<13x+8 \Leftrightarrow 2x<6 \Leftrightarrow x<3.$

Tập nghiệm bất phương trình là $T=\left(-\dfrac{2}{15};3\right) \Rightarrow x\in\{0;1;2\}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 16 (Sở Vĩnh Phúc 2019). Tập xác định của hàm số $y=\sqrt{\log_2(4-x)-1}$ là

(A) $(-\infty;4)$. (B) $[2;4)$. (C) $(-\infty;2]$. (D) $(-\infty;2)$.

Lời giải.

Hàm số xác định $\Leftrightarrow \log_2(4-x)-1\ge 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2(4-x)\ge 1 \\ 4-x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4-x\ge 2 \\ 4-x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\le 2 \\ x<4 \end{cases} \Leftrightarrow x\le 2.$

Vậy tập xác định của hàm số là $\mathscr{D}=(-\infty;2]$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 17 (Sở Bình Phước 2019). Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2(3x+1)<2$ là

(A) $\left[-\dfrac{1}{3};1\right)$. (B) $\left(-\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{3}\right)$. (C) $\left(-\dfrac{1}{3};1\right)$. (D) $(-\infty;1)$.

Lời giải.

Điều kiện: $x>-\dfrac{1}{3}$.

$\log_2(3x+1)<2 \Leftrightarrow 3x+1<4 \Leftrightarrow x<1.$

Kết hợp với điều kiện ta được nghiệm của bất phương trình là $-\dfrac{1}{3}<x<1$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình $\left(-\dfrac{1}{3};1\right)$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 18 (Chuyên Phan Bội Châu Nghệ An 2019).

Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2(x^2-1) \geq 3$ là

(A) $[-2;2]$. (B) $(-\infty;-3] \cup [3;+\infty)$.

(C) $(-\infty;-2] \cup [2;+\infty)$. (D) $[-3;3]$.

Lời giải.

$\log_2(x^2-1) \geq 3 \Leftrightarrow x^2-1 \geq 8 \Leftrightarrow x^2 \geq 9 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \geq 3 \\ x \leq -3 \end{array}\right.$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 19 (Sở Bắc Giang 2019). Tập nghiệm S của bất phương trình $\log_{0,8}(2x-1) < 0$ là

(A) $S = \left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$. (B) $S = (1;+\infty)$. (C) $S = \left(\frac{1}{2};+\infty\right)$. (D) $S = (-\infty;1)$.

Lời giải.

Bất phương trình $\log_{0,8}(2x-1) < 0 \Leftrightarrow 2x-1 > (0,8)^0 \Leftrightarrow 2x > 2 \Leftrightarrow x > 1$.

Tập nghiệm S của bất phương trình $\log_{0,8}(2x-1) < 0$ là $S = (1;+\infty)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 20 (Sở Bắc Giang 2019). Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{0,5}(5x+14) \leq \log_{0,5}(x^2+6x+8)$ là

(A) $(-2;2]$. (B) $(-\infty;2]$. (C) $\mathbb{R} \setminus \left[-\frac{3}{2};0\right]$. (D) $[-3;2]$.

Lời giải.

Điều kiện: $\begin{cases} 5x+14 > 0 \\ x^2+6x+8 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > -2 \quad (*)$.

Ta có $\log_{0,5}(5x+14) \leq \log_{0,5}(x^2+6x+8) \Leftrightarrow 5x+14 \geq x^2+6x+8 \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 2$.

Kết hợp với điều kiện $(*)$ ta được $-2 < x \leq 2$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $(-2;2]$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 21 (Chuyên Trần Phú Hải Phòng 2019).

Bất phương trình $\log_2(3x-2) > \log_2(6-5x)$ có tập nghiệm là

(A) $(0;+\infty)$. (B) $\left(\frac{1}{2};3\right)$. (C) $(-3;1)$. (D) $\left(1;\frac{6}{5}\right)$.

Lời giải.

Vì $2 > 1$ nên.

$\log_2(3x-2) > \log_2(6-5x) \begin{cases} 3x-2 > 6-5x \\ 6-5x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x < \frac{6}{5} \end{cases} \Leftrightarrow 1 < x < \frac{6}{5}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 22 (KTNL GV THPT Lý Thái Tổ 2019).

Tập hợp nghiệm của bất phương trình $\log_2(x+1) < 3$ là

(A) $S = (-1;8)$. (B) $S = (-\infty;7)$. (C) $S = (-\infty;8)$. (D) $S = (-1;7)$.

Lời giải.

Ta có $\log_2(x+1) < 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1>0 \\ x+1<2^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-1 \\ x<7 \end{cases} \Leftrightarrow -1<x<7.$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S=(-1;7)$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 23 (Sở Thanh Hóa 2019). Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\ln x^2 > \ln(4x-4)$.

(A) $S=(2;+\infty)$.
(B) $S=(1;+\infty)$.
(C) $S=\mathbb{R}\setminus\{2\}$.
(D) $S=(1;+\infty)\setminus\{2\}$.

Lời giải.

$\ln x^2 > \ln(4x-4) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2>4x-4 \\ 4x-4>0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-4x+4>0 \\ x>1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 2 \\ x>1. \end{cases}$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S=(1;+\infty)\setminus\{2\}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 24 (Chuyên Phan Bội Châu 2019).

Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2\left[x^2-1\right]\geq 3$ là

(A) $[-2;2]$.
(B) $(-\infty;-3]\cup[3;+\infty)$.
(C) $(-\infty;-2]\cup[2;+\infty)$.
(D) $[-3;3]$.

Lời giải.

Ta có $\log_2\left[x^2-1\right]\geq 3 \Leftrightarrow x^2-9\geq 0 \Leftrightarrow x\in(-\infty;-3]\cup[3;+\infty)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 25. Tập nghiệm của bất phương trình $\dfrac{\log\left(x^2-9\right)}{\log(3-x)}\leq 1$ là

(A) $(-4;-3)$.
(B) $[-4;-3)$.
(C) $(3;4]$.
(D) ϕ.

Lời giải.

Điều kiện: $\begin{cases} x^2-9>0 \\ 3-x>0 \\ 3-x\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>3 \vee x<-3 \\ x<3 \\ x\neq 2 \end{cases}. \Leftrightarrow x<-3.$

Với $x<-3$ suy ra $\log(3-x)>0$ nên bất phương trình đã cho tương đương với $\log\left(x^2-9\right)\leq \log(3-x) \Leftrightarrow x^2+x-12\leq 0 \Leftrightarrow x\in[-4;3]$.

Kết hợp điều kiện suy ra tập nghiệm của bất phương trình là $[-4;-3)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 26. Có tất cả bao nhiêu giá trị của tham số m để bất phương trình $\log_2\left(x^2+mx+m+2\right)\geq \log_2\left(x^2+2\right)$ nghiệm đúng $\forall x\in\mathbb{R}$?

(A) 2.
(B) 4.
(C) 3.
(D) 1.

Lời giải.

Ta có $\log_2(x^2+mx+m+2) \geq \log_2(x^2+2)$ nghiệm đúng $\forall x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow x^2+mx+m+2 \geq x^2+2, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow mx+m \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow m=0$.

Suy ra có 1 giá trị m thỏa mãn.

Chọn đáp án D □

Câu 27 (Việt Đức Hà Nội 2019). Giải bất phương trình $\log_2(3x-2) > \log_2(6-5x)$ được tập nghiệm là $(a;b)$. Hãy tính tổng $S=a+b$.

(A) $S=\dfrac{26}{5}$. (B) $S=\dfrac{11}{5}$. (C) $S=\dfrac{28}{15}$. (D) $S=\dfrac{8}{3}$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} 3x-2>0 \\ 6-5x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>\dfrac{2}{3} \\ x<\dfrac{6}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{2}{3}<x<\dfrac{6}{5}.$

Ta có

$\log_2(3x-2) > \log_2(6-5x) \Leftrightarrow 3x-2>6-5x \Leftrightarrow 8x>8 \Leftrightarrow x>1$.

Kết hợp với điều kiện, ta được $1<x<\dfrac{6}{5}$.

Vậy, tập nghiệm của bất phương trình là $\left(1;\dfrac{6}{5}\right)$.

Từ đó, $S=a+b=1+\dfrac{6}{5}=\dfrac{11}{5}$.

lời giải ngắn gọn như sau:

$\log_2(3x-2) > \log_2(6-5x) \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-2>6-5x \\ 6-5x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>1 \\ x<\dfrac{6}{5} \end{cases} \Leftrightarrow 1<x<\dfrac{6}{5}.$

Chọn đáp án B □

Câu 28 (Sở Ninh Bình 2019). Bất phương trình $\log_3(x^2-2x)>1$ có tập nghiệm là

(A) $S=(-\infty;-1)\cup(3;+\infty)$. (B) $S=(-1;3)$.

(C) $S=(3;+\infty)$. (D) $S=(-\infty;-1)$.

Lời giải.

$\log_3(x^2-2x)>1 \Leftrightarrow x^2-2x>3 \Leftrightarrow x^2-2x-3>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>3 \\ x<-1. \end{array}\right.$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình $S=(-\infty;-1)\cup(3;+\infty)$.

Chọn đáp án A □

Câu 29 (Hậu Lộc 2 - Thanh Hóa 2019).

Tập nghiệm của bất phương trình $\ln 3x < \ln(2x+6)$ là

(A) $[0;6)$. (B) $(0;6)$. (C) $(6;+\infty)$. (D) $(-\infty;6)$.

Lời giải.

Bất phương trình $\ln 3x < \ln(2x+6) \Leftrightarrow \begin{cases} 3x>0 \\ 3x<2x+6 \end{cases} \Leftrightarrow 0<x<6.$

Chọn đáp án B □

Câu 30 (Hội 8 trường chuyên ĐBSH - 2019).

Tập nghiệm S của bất phương trình $\log_2(x-1)<3$ là

(A) $S=(1;9)$. (B) $S=(1;10)$. (C) $S=(-\infty;9)$. (D) $S=(-\infty;10)$.

Lời giải.

$\log_2(x-1)<3 \Leftrightarrow 0<x-1<2^3 \Leftrightarrow 1<x<9$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 31 (THPT Phan Bội Châu - Nghệ An -2019).

Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2\left(x^2-1\right)\geq 3$ là

(A) $[-2;2]$. (B) $(-\infty;-3]\cup[3;+\infty)$.
(C) $(-\infty;-2]\cup[2;+\infty)$. (D) $[-3;3]$.

Lời giải.

$\log_2\left(x^2-1\right)\geq 3 \Leftrightarrow x^2-1\geq 8 \Leftrightarrow x^2\geq 9 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\geq 3 \\ x\leq -3 \end{array}\right.$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 32 (Bắc Ninh 2019).

Bất phương trình $\log_2(3x-2)>\log_2(6-5x)$ có tập nghiệm là $(a;b)$. Tổng $a+b$ bằng

(A) $\dfrac{8}{3}$. (B) $\dfrac{28}{15}$. (C) $\dfrac{26}{5}$. (D) $\dfrac{11}{5}$.

Lời giải.

Ta có $\log_2(3x-2)>\log_2(6-5x) \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-2>6-5x \\ 6-5x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>1 \\ x<\dfrac{6}{5} \end{cases} \Leftrightarrow 1<x<\dfrac{6}{5}.$

Tập nghiệm của bất phương trình là $(1;\dfrac{6}{5})$.

Vậy $a+b=1+\dfrac{6}{5}=\dfrac{11}{5}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 33 (THPT Hai Bà Trưng - Huế - 2019).

Có tất cả bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}\left[\log_2\left(2-x^2\right)\right]>0$?

(A) Vô số. (B) 1. (C) 0. (D) 2.

Lời giải.

$\log_{\frac{1}{2}}\left[\log_2\left(2-x^2\right)\right]>0$

$\Leftrightarrow 0<\log_2\left(2-x^2\right)<1$

$\Leftrightarrow 1<2-x^2<2$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2-x^2<2 \\ 2-x^2>1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2>0 \\ x^2<1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 0 \\ -1<x<1. \end{cases}$

Kết hợp với giả thiết x là số nguyên ta thấy không có số nguyên x nào thỏa mãn bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}\left[\log_2\left(2-x^2\right)\right]>0$

Chọn đáp án (C) □

Câu 34 (THPT Cẩm Bình 2019).

Nghiệm của bất phương trình $\log_{2-\sqrt{3}}(2x-5)\geq\log_{2-\sqrt{3}}(x-1)$ là

(A) $\dfrac{5}{2}<x\leq 4$. (B) $1<x\leq 4$. (C) $\dfrac{5}{2}\leq x\leq 41$. (D) $x\geq 4$.

Lời giải.

$\log_{2-\sqrt{3}}(2x-5) \geq \log_{2-\sqrt{3}}(x-1) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-5 \leq x-1 \\ 2x-5>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 4 \\ x > \dfrac{5}{2}. \end{cases}$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $\dfrac{5}{2} < x \leq 4$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 35 (THPT Hàm Rồng 2019). Bất phương trình $\log_4(x+7) > \log_2(x+1)$ có bao nhiêu nghiệm nguyên

(A) 3. (B) 1. (C) 4. (D) 2.

Lời giải.

Điều kiện xác định của bất phương trình là $\begin{cases} x+7>0 \\ x+1>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-7 \\ x>-1 \end{cases} \Leftrightarrow x>-1.$

Ta có $\log_4(x+7) > \log_2(x+1) \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\log_2(x+7) > \log_2(x+1) \Leftrightarrow \log_2(x+7) > \log_2(x+1)^2$

$\Leftrightarrow x^2+x-6<0 \Leftrightarrow -3<x<2$.

Kết hợp điều kiện ta được $-1<x<2$.

Vì $x \in \mathbb{Z}$ nên tìm được $x=0, x=1$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 36 (Thi thử cụm Vũng Tàu - 2019).

Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{3}{5}}\left(2x^2-x+1\right)<0$ là

(A) $\left(-1;\dfrac{3}{2}\right)$. (B) $(-\infty;1)\cup\left(\dfrac{3}{2};+\infty\right)$.

(C) $(-\infty;0)\cup\left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)$. (D) $\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$.

Lời giải.

Ta có: $2x^2-x+1>0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Do đó $\log_{\frac{3}{5}}\left(2x^2-x+1\right)<0 \Leftrightarrow 2x^2-x+1>1 \Leftrightarrow 2x^2-x>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<0 \\ x>\dfrac{1}{2}. \end{array}\right.$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S=(-\infty;0)\cup\left(\dfrac{1}{2}:+\infty\right)$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 37 (Bình Phước - 2019). Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2(3x+1)<2$ là

(A) $\left[-\dfrac{1}{3};1\right)$. (B) $\left(-\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{3}\right)$. (C) $\left(-\dfrac{1}{3};1\right)$. (D) $(-\infty;1)$.

Lời giải.

Điều kiện: $x>-\dfrac{1}{3}$.

$\log_2(3x+1)<2 \Leftrightarrow 3x+1<4 \Leftrightarrow x<1$.

Kết hợp với điều kiện ta được nghiệm của bất phương trình là $-\dfrac{1}{3}<x<1$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình $\left(-\dfrac{1}{3};1\right)$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 38 (Ngô Quyền - Hải Phòng -2019).

Số nghiệm nguyên của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}\left(x^2+2x-8\right) \geq -4$ là

(A) 6. (B) Vô số. (C) 4. (D) 5.

Lời giải.

Ta có

$$\log_{\frac{1}{2}}\left(x^2+2x-8\right) \geq -4 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+2x-8>0 \\ x^2+2x-8 \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^{-4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x>2 \\ x<-4 \end{array}\right. \\ x^2+2x-24 \leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x>2 \\ x<-4 \end{array}\right. \\ -6 \leq x \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -6 \leq x < -4 \\ 2 < x \leq 4. \end{array}\right.$$

Do đó các nghiệm nguyên của bất phương trình đã cho là $-6; -5; 3; 4$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 39 (THPT Thuận Thành 3 - Bắc Ninh 2019).

Tập nghiệm S của bất phương trình $\log_6 x^2 < \log_6(x+6)$ là

(A) $S=(-\infty;-2)\cup(3;+\infty)$. (B) $S=(-2;3)$.

(C) $S=(-3;2)\setminus\{0\}$. (D) $S=(-2;3)\setminus\{0\}$.

Lời giải.

Điều kiện: $\begin{cases} x \neq 0 \\ x>-6. \end{cases}$

$\log_6 x^2 < \log_6(x+6) \Leftrightarrow x^2 < x+6 \Leftrightarrow x^2-x-6<0 \Leftrightarrow -2<x<3$.

Kết hợp với điều kiện, suy ra tập nghiệm $S=(-2;3)\setminus\{0\}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 40 (Nho Quan A - Ninh Bình - 2019).

Bất phương trình $\log_2(x-2)<2$ có bao nhiêu nghiệm nguyên?

(A) 4. (B) 2. (C) 5. (D) 3.

Lời giải.

$$\log_2(x-2)<2 \Leftrightarrow \begin{cases} x-2>0 \\ x-2<4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>2 \\ x<6 \end{cases} \Leftrightarrow 2<x<6.$$

Vậy bất phương trình đã cho có 3 nghiệm nguyên.

Chọn đáp án (D) □

Câu 41 (Cần Thơ 2019). Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{0,2}(x-4)+1>0$ là

(A) $(4;+\infty)$. (B) $(4;9)$. (C) $(-\infty;9)$. (D) $(9;+\infty)$.

Lời giải.

Ta có $\log_{0,2}(x-4)+1>0 \Leftrightarrow \log_{0,2}(x-4)>-1 \Leftrightarrow \log_{0,2}(x-4)>\log_{0,2}\left[(0,2)^{-1}\right]$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x-4>0 \\ x-4<5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>4 \\ x<9. \end{cases}$

Vậy bất phương trình có tập nghiệm là $(4;9)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 42 (THPT Cẩm Bình Hà Tỉnh 2019).

Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2(7-x)+\log_{\frac{1}{2}}(x-1) \leq 0$ là

(A) $S=(1;4]$. (B) $S=(-\infty;4]$. (C) $S=[4;+\infty)$. (D) $S=[4;7)$.

Lời giải.

Điều kiện: $1<x<7$.

Ta có:

$\log_2(7-x)+\log_{\frac{1}{2}}(x-1) \leq 0 \Leftrightarrow \log_2(7-x)-\log_2(x-1) \leq 0$

$\Leftrightarrow \log_2 \dfrac{7-x}{x-1} \leq 0 \Leftrightarrow \dfrac{7-x}{x-1} \leq 1 \Leftrightarrow \dfrac{-2x+8}{x-1} \leq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<1 \\ x \geq 4. \end{array}\right.$

Kết hợp với điều kiện ta có tập nghiệm là $[4;7)$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 43 (NK HCM - 2019). Bất phương trình $1+\log_2(x-2)>\log_2\left(x^2-3x+2\right)$ có các nghiệm là

(A) $S=(3;+\infty)$. (B) $S=(1;3)$. (C) $S=(2;+\infty)$. (D) $S=(2;3)$.

Lời giải.

Điều kiện: $x>2$.

$1+\log_2(x-2)>\log_2\left(x^2-3x+2\right) \Leftrightarrow \log_2\left(x^2-3x+2\right)-\log_2(x-2)<1 \Leftrightarrow \log_2(x-1)<1 \Leftrightarrow x<3$.

Đối chiếu điều kiện, ta có tập nghiệm là $S=(2;3)$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 44 (Mã 101 - 2022). Tập nghiệm của bất phương trình $\log_5(x+1)>2$ là

(A) $(9;+\infty)$. (B) $(25;+\infty)$. (C) $(31;+\infty)$. (D) $(24;+\infty)$.

Lời giải.

Điều kiện xác định $x>-1$.

$\log_5(x+1)>2 \Leftrightarrow \log_5(x+1)>\log_5 25 \Leftrightarrow x+1>25 \Leftrightarrow x>24$.

Chọn đáp án (D) □

Dạng 2. Bất phương trình mũ

- ☑ Nếu $a>1$ thì $a^{f(x)}>a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x)>g(x)$ (cùng chiều).
- ☑ Nếu $0<a<1$ thì $a^{f(x)}>a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x)<g(x)$ (ngược chiều).
- ☑ Nếu a chưa ẩn thì $a^{f(x)}>a^{g(x)} \Leftrightarrow (a-1)[f(x)-g(x)]>0$.

Câu 45 (Mã 102 - 2021 Lần 1). Tập nghiệm của bất phương trình $2^x < 5$ là

(A) $(-\infty; \log_2 5)$. (B) $(\log_2 5; +\infty)$. (C) $(-\infty; \log_5 2)$. (D) $(\log_5 2; +\infty)$.

Lời giải.

Ta có $2^x < 5 \Leftrightarrow x < \log_2 5$.

Vậy tập nghiệm $S = (-\infty; \log_2 5)$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 46 (Đề Minh Họa 2021). Tập nghiệm của bất phương trình $3^{4-x^2} \geq 27$ là

(A) $[-1; 1]$. (B) $(-\infty; 1]$. (C) $\left[-\sqrt{7}; \sqrt{7}\right]$. (D) $[1; +\infty)$.

Lời giải.

Ta có $3^{4-x^2} \geq 27 \Leftrightarrow 4 - x^2 \geq 3 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 47 (Mã 101 - 2021 Lần 1). Tập nghiệm của bất phương trình $3^x < 2$ là

(A) $(-\infty; \log_3 2)$. (B) $(\log_3 2; +\infty)$. (C) $(-\infty; \log_2 3)$. (D) $(\log_2 3; +\infty)$.

Lời giải.

Ta có $3^x < 2 \Leftrightarrow x < \log_3 2$.

Vậy $S = (-\infty; \log_3 2)$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 48 (Mã 104 - 2021 Lần 1). Tập nghiệm của bất phương trình $2^x > 5$ là

(A) $(-\infty; \log_2 5)$. (B) $(\log_5 2; +\infty)$. (C) $(-\infty; \log_5 2)$. (D) $(\log_2 5; +\infty)$.

Lời giải.

Ta có $2^x > 5 \Leftrightarrow x > \log_2 5$.

Tập nghiệm của bất phương trình là $(\log_2 5; +\infty)$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 49 (Mã 103 - 2021 - Lần 1). Tập nghiệm của bất phương trình $2^x > 3$ là

(A) $(\log_3 2; +\infty)$. (B) $(-\infty; \log_2 3)$. (C) $(-\infty; \log_3 2)$. (D) $(\log_2 3; +\infty)$.

Lời giải.

Ta có $2^x > 3 \Leftrightarrow x > \log_2 3$.

Tập nghiệm của bất phương trình là $(\log_2 3; +\infty)$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 50 (Đề Minh Họa 2020 Lần 1). Tập nghiệm của bất phương trình $5^{x-1} \geq 5^{x^2-x-9}$ là

(A) $[-2; 4]$. (B) $[-4; 2]$.

(C) $(-\infty; -2] \cup [4; +\infty)$. (D) $(-\infty; -4] \cup [2; +\infty)$.

Lời giải.

$5^{x-1} \geq 5^{x^2-x-9} \Leftrightarrow x - 1 \geq x^2 - x - 9 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 8 \leq 0 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 4$.

Vậy Tập nghiệm của bất phương trình là $[-2; 4]$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 51 (Đề Tham Khảo 2020 Lần 2).

Tập nghiệm của bất phương trình $9^x + 2 \cdot 3^x - 3 > 0$ là

(A) $[0; +\infty)$. (B) $(0; +\infty)$. (C) $(1; +\infty)$. (D) $[1; +\infty)$.

Lời giải.

$9^x + 2 \cdot 3^x - 3 > 0 \Leftrightarrow (3^x - 1)(3^x + 3) > 0 \Leftrightarrow 3^x > 1$ (vì $3^x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$) $\Leftrightarrow x > 0$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $(0; +\infty)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 52 (Mã 101 - 2020 Lần 1). Tập nghiệm của bất phương trình $3^{x^2-13} < 27$ là

(A) $(4; +\infty)$. (B) $(-4; 4)$. (C) $(-\infty; 4)$. (D) $(0; 4)$.

Lời giải.

Ta có: $3^{x^2-13} < 27 \Leftrightarrow 3^{x^2-13} < 3^3 \Leftrightarrow x^2 - 13 < 3 \Leftrightarrow x^2 < 16 \Leftrightarrow |x| < 4 \Leftrightarrow -4 < x < 4$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $S = (-4; 4)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 53 (Mã 102 - 2020 Lần 1). Tập nghiệm của bất phương trình $3^{x^2-23} < 9$ là

(A) $(-5; 5)$. (B) $(-\infty; 5)$. (C) $(5; +\infty)$. (D) $(0; 5)$.

Lời giải.

Ta có $3^{x^2-23} < 9 \Leftrightarrow x^2 - 23 < 2 \Leftrightarrow x^2 < 25 \Leftrightarrow -5 < x < 5$.

Vậy nghiệm của bất phương trình $3^{x^2-23} < 9$ là $(-5; 5)$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 54 (Mã 103 - 2020 Lần 1). Tập nghiệm của bất phương trình $2^{x^2-7} < 4$ là

(A) $(-3; 3)$. (B) $(0; 3)$. (C) $(-\infty; 3)$. (D) $(3; +\infty)$.

Lời giải.

Ta có $2^{x^2-7} < 4 \Leftrightarrow 2^{x^2-7} < 2^2 \Rightarrow x^2 - 7 < 2 \Leftrightarrow x^2 < 9 \Rightarrow x \in (-3; 3)$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 55 (Mã 104 - 2020 Lần 1). Tập nghiệm của bất phương trình $2^{x^2-1} < 8$ là

(A) $(0; 2)$. (B) $(-\infty; 2)$. (C) $(-2; 2)$. (D) $(2; +\infty)$.

Lời giải.

Từ phương trình ta có $x^2 - 1 < 3 \Leftrightarrow -2 < x < 2$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 56 (Đề Tham Khảo 2018). Tập nghiệm của bất phương trình $2^{2x} < 2^{x+6}$ là

(A) $(-\infty; 6)$. (B) $(0; 64)$. (C) $(6; +\infty)$. (D) $(0; 6)$.

Lời giải.

Cách 1: $2^{2x} < 2^{x+6} \Leftrightarrow 2x < x + 6 \Leftrightarrow x < 6$.

Cách 2. Đặt $t = 2^x$, $t > 0$.

Bất phương trình trở thành: $t^2 - 64t < 0 \Leftrightarrow 0 < t < 64 \Leftrightarrow 0 < 2^x < 64 \Leftrightarrow x < 6$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 57 (Đề Tham Khảo 2019). Tập nghiệm của bất phương trình $3^{x^2-2x} < 27$ là

Ⓐ $(3;+\infty)$.
Ⓑ $(-1;3)$.
Ⓒ $(-\infty;-1)\cup(3;+\infty)$.
Ⓓ $(-\infty;-1)$.

Lời giải.

Ta có $3^{x^2-2x} < 27 \Leftrightarrow x^2-2x<3 \Leftrightarrow x^2-2x-3<0 \Leftrightarrow -1<x<3$.

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 58 (Đề Minh Họa 2017). Cho hàm số $f(x)=2^x\cdot 7^{x^2}$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định sai?

Ⓐ $f(x)<1 \Leftrightarrow x+x^2\log_2 7<0$.
Ⓑ $f(x)<1 \Leftrightarrow x\ln 2+x^2\ln 7<0$.
Ⓒ $f(x)<1 \Leftrightarrow x\log_7 2+x^2<0$.
Ⓓ $f(x)<1 \Leftrightarrow 1+x\log_2 7<0$.

Lời giải.

Đáp án A đúng vì $f(x)<1 \Leftrightarrow \log_2 f(x)<\log_2 1 \Leftrightarrow \log_2\left(2^x{\cdot}7^{x^2}\right)<0 \Leftrightarrow \log_2 2^x+\log_2 7^{x^2}<0$
$\Leftrightarrow x+x^2\cdot\log_2 7<0$.

Đáp án B đúng vì $f(x)<1 \Leftrightarrow \ln f(x)<\ln 1 \Leftrightarrow \ln\left(2^x{\cdot}7^{x^2}\right)<0 \Leftrightarrow \ln 2^x+\ln 7^{x^2}<0$
$\Leftrightarrow x\cdot\ln 2+x^2\cdot\ln 7<0$.

Đáp án C đúng vì $f(x)<1 \Leftrightarrow \log_7 f(x)<\log_7 1 \Leftrightarrow \log_7\left(2^x{\cdot}7^{x^2}\right)<0 \Leftrightarrow \log_7 2^x+\log_7 7^{x^2}<0$
$\Leftrightarrow x\cdot\log_7 2+x^2<0$.

Vậy D sai vì $f(x)<1 \Leftrightarrow \log_2 f(x)<\log_2 1 \Leftrightarrow \log_2\left(2^x{\cdot}7^{x^2}\right)<0 \Leftrightarrow \log_2 2^x+\log_2 7^{x^2}<0$
$\Leftrightarrow x+x^2\log_2 7<0$.

Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 59 (Đề Tham Khảo 2017). Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $5^{x+1}-\dfrac{1}{5}>0$.

Ⓐ $S=(-\infty;-2)$.
Ⓑ $S=(1;+\infty)$.
Ⓒ $S=(-1;+\infty)$.
Ⓓ $S=(-2;+\infty)$.

Lời giải.

Bất phương trình tương đương $5^{x+1}>5^{-1} \Leftrightarrow x+1>-1 \Leftrightarrow x>-2$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S=(-2;+\infty)$.

Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 60 (THPT Hoàng Hoa Thám Hưng Yên 2019).

Cho hàm số $y=\mathrm{e}^{x^2+2x-3}-1$. Tập nghiệm của bất phương trình $y'\geq 0$ là

Ⓐ $(-\infty;-1]$.
Ⓑ $(-\infty;-3]\cup[1;+\infty)$.
Ⓒ $[-3;1]$.
Ⓓ $[-1;+\infty)$.

Lời giải.

Ta có $y'=(2x+2)\mathrm{e}^{x^2+2x-3}$.

$y'\geq 0 \Leftrightarrow (2x+2)\mathrm{e}^{x^2+2x-3}\geq 0 \Leftrightarrow 2x+2\geq 0 \Leftrightarrow x\geq -1$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình $y'\geq 0$ là $[-1;+\infty)$.

Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 61 (THPT Hùng Vương Bình Phước 2019).

Tập nghiệm của bất phương trình $\left(\frac{1}{3}\right)^x > 9$ trên tập số thực là

(A) $(2; +\infty)$. (B) $(-\infty; -2)$. (C) $(-\infty; 2)$. (D) $(-2; +\infty)$.

Lời giải.

$\left(\frac{1}{3}\right)^x > 9 \Leftrightarrow 3^{-x} > 3^2 \Leftrightarrow -x > 2 \Leftrightarrow x < -2$.

Vậy tập nghiệm là $S = (-\infty; -2)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 62 (THPT Bạch Đằng Quảng Ninh 2019).

Tập nghiệm của bất phương trình $4^{x+1} \leq 8^{x-2}$ là

(A) $[8; +\infty)$. (B) $\varnothing$. (C) $(0; 8)$. (D) $(-\infty; 8]$.

Lời giải.

Ta có $4^{x+1} \leq 8^{x-2} \Leftrightarrow 2^{2x+2} \leq 2^{3x-6} \Leftrightarrow 2x + 2 \leq 3x - 6 \Leftrightarrow x \geq 8$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = [8; +\infty)$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 63 (THPT Cù Huy Cận 2019). Tập nghiệm của bất phương trình $2^{x^2+2x} \leq 8$ là

(A) $(-\infty; -3]$. (B) $[-3; 1]$. (C) $(-3; 1)$. (D) $(-3; 1]$.

Lời giải.

Ta có $2^{x^2+2x} \leq 8 \Leftrightarrow 2^{x^2+2x} \leq 2^3 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 \leq 0 \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 1$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 64 (Chuyên Vĩnh Phúc 2019). Tập nghiệm S của bất phương trình $5^{x+2} < \left(\frac{1}{25}\right)^{-x}$ là

(A) $S = (-\infty; 2)$. (B) $S = (-\infty; 1)$. (C) $S = (1; +\infty)$. (D) $S = (2; +\infty)$.

Lời giải.

$5^{x+2} < \left(\frac{1}{25}\right)^{-x} \Leftrightarrow 5^{x+2} < 5^{2x} \Leftrightarrow x + 2 < 2x \Leftrightarrow x > 2$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 65 (THPT Gang Thép Thái Nguyên 2019).

Tập nghiệm bất phương trình $2^{x^2-3x} < 16$ là

(A) $(-\infty; -1)$. (B) $(4; +\infty)$.

(C) $(-1; 4)$. (D) $(-\infty; -1) \cup (4; +\infty)$.

Lời giải.

$2^{x^2-3x} < 16 \Leftrightarrow 2^{x^2-3x} < 2^4 \Leftrightarrow x^2 - 3x < 4 \Leftrightarrow -1 < x < 4$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 66 (THPT Gang Thép Thái Nguyên 2019).

Tập nghiệm bất phương trình: $2^x > 8$ là

(A) $(-\infty; 3)$. (B) $[3; +\infty)$. (C) $(3; +\infty)$. (D) $(-\infty; 3]$.

Lời giải.

Ta có $2^x > 8 \Leftrightarrow 2^x > 2^3 \Leftrightarrow x > 3$.

Vậy tập nghiệm bất phương trình là $(3;+\infty)$.

Chọn đáp án C □

Câu 67 (Chuyên Quốc Học Huế 2019).

Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\left(\frac{1}{2}\right)^{-x^2+3x} < \frac{1}{4}$.

(A) $S = [1;2]$. (B) $S = (-\infty;1)$. (C) $S = (1;2)$. (D) $S = (2;+\infty)$.

Lời giải.

$\left(\frac{1}{2}\right)^{-x^2+3x} < \frac{1}{4} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{-x^2+3x} < \left(\frac{1}{2}\right)^2 \Leftrightarrow -x^2+3x > 2 \Leftrightarrow x^2-3x+2 < 0 \Leftrightarrow 1 < x < 2$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trìnhđã cho là $S = (1;2)$.

Chọn đáp án C □

Câu 68 (Đề Tham Khảo 2019). Tập nghiệm của bất phương trình $3^{x^2-2x} < 27$ là

(A) $(-\infty;-1)$.
(B) $(3;+\infty)$.
(C) $(-1;3)$.
(D) $(-\infty;-1) \cup (3;+\infty)$.

Lời giải.

Ta có $3^{x^2-2x} < 27 \Leftrightarrow x^2-2x < 3 \Leftrightarrow x^2-2x-3 < 0 \Leftrightarrow -1 < x < 3$.

Chọn đáp án C □

Câu 69 (Chuyên Vĩnh Phúc 2019). Cho $f(x) = x \cdot \mathrm{e}^{-3x}$. Tập nghiệm của bất phương trình $f'(x) > 0$ là

(A) $\left(-\infty;\frac{1}{3}\right)$. (B) $\left(0;\frac{1}{3}\right)$. (C) $\left(\frac{1}{3};+\infty\right)$. (D) $(0;1)$.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = \mathrm{e}^{-3x} - 3x \cdot \mathrm{e}^{-3x} = \mathrm{e}^{-3x}(1-3x)$.

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{-3x}(1-3x) > 0 \Leftrightarrow 1-3x > 0 \Leftrightarrow x < \frac{1}{3}$.

Chọn đáp án A □

Câu 70 (THPT Ba Đình 2019). Số nghiệm nguyên của bất phương trình $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x^2-3x-7} > 3^{2x-21}$ là

(A) 7. (B) 6. (C) vô số. (D) 8.

Lời giải.

Ta có $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x^2-3x-7} > 3^{2x-21} \Leftrightarrow 3^{-\left(2x^2-3x-7\right)} > 3^{2x-21}$

$\Leftrightarrow -\left(2x^2-3x-7\right) > 2x-21 \Leftrightarrow -2x^2+3x+7 > 2x-21$

$\Leftrightarrow -2x^2+x+28 > 0 \Leftrightarrow -\frac{7}{2} < x < 4$.

Do $x \in \mathbb{Z}$ nên $x \in \{-3;-2;-1;0;1;2;3\}$.

Vậy bất phương trình đã cho có 7 nghiệm nguyên.

Chọn đáp án A □

Câu 71 (THPT Lương Thế Vinh Hà Nội 2019).

Tập nghiệm của bất phương trình $2^{3x} < \left(\frac{1}{2}\right)^{-2x-6}$ là

Ⓐ $(0;6)$. Ⓑ $(-\infty;6)$. Ⓒ $(0;64)$. Ⓓ $(6;+\infty)$.

Lời giải.

Ta có $2^{3x} < \left(\dfrac{1}{2}\right)^{-2x-6} \Leftrightarrow 2^{3x} < 2^{2x+6} \Leftrightarrow 3x < 2x+6 \Leftrightarrow x < 6$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = (-\infty;6)$.

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 72 (Chuyên Hùng Vương Gia Lai 2019).

Bất phương trình $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x^2-2x} \geq \dfrac{1}{8}$ có tập nghiệm là

Ⓐ $[3;+\infty)$. Ⓑ $(-\infty;-1]$. Ⓒ $[-1;3]$. Ⓓ $(-1;3)$.

Lời giải.

Bất phương trình đã cho tương đương với.

$\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x^2-2x} \geq \left(\dfrac{1}{2}\right)^{3} \Leftrightarrow x^2-2x \leq 3 \Leftrightarrow x^2-2x-3 \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 3$.

Vậy, tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $S = [-1;3]$.

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 73 (THPT Yên Phong 1 Bắc Ninh 2019).

Nghiệm nguyên lớn nhất của bất phương trình $4^{x^2-2x} < 64$ là

Ⓐ 2. Ⓑ -1. Ⓒ 3. Ⓓ 0.

Lời giải.

Ta có $4^{x^2-2x} < 64 \Leftrightarrow 4^{x^2-2x} < 4^3 \Leftrightarrow x^2-2x-3 < 0 \Leftrightarrow -1 < x < 3$. Vậy nghiệm nguyên lớn nhất là $x = 2$.

Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 74 (Sở Hà Nội 2019). Tập nghiệm của bất phương trình $\left(\dfrac{3}{4}\right)^{-x^2} > \dfrac{81}{256}$ là

Ⓐ $(-\infty;-2)$. Ⓑ $(-\infty;-2) \cup (2;+\infty)$.

Ⓒ $\mathbb{R}$. Ⓓ $(-2;2)$.

Lời giải.

Ta có $\left(\dfrac{3}{4}\right)^{-x^2} > \dfrac{81}{256} \Leftrightarrow \left(\dfrac{3}{4}\right)^{-x^2} > \left(\dfrac{3}{4}\right)^{4} \Leftrightarrow -x^2 < 4 \Leftrightarrow -x^2-4 < 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$.

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 75 (Chuyên Sơn La 2019). Tập nghiệm của bất phương trình $2^{x^2-2x} > 8$ là

Ⓐ $(-\infty;-1)$. Ⓑ $(-1;3)$.

Ⓒ $(3;+\infty)$. Ⓓ $(-\infty;-1) \cup (3;+\infty)$.

Lời giải.

Bất phương trình $2^{x^2-2x} > 8 \Leftrightarrow 2^{x^2-2x} > 2^3 \Leftrightarrow x^2-2x > 3 \Leftrightarrow x^2-2x-3 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 3 \\ x < -1. \end{array}\right.$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = (-\infty;-1) \cup (3;+\infty)$.

Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 76 (Chuyên ĐHSP Hà Nội 2019).

Tập nghiệm của bất phương trình $\left(\frac{e}{\pi}\right)^x > 1$ là

(A) $\mathbb{R}$. (B) $(-\infty;0)$. (C) $(0;+\infty)$. (D) $[0;+\infty)$.

Lời giải.

Vì $\frac{e}{\pi} < 1$ nên $\left(\frac{e}{\pi}\right)^x > 1 \Leftrightarrow \log_{\frac{e}{\pi}}\left(\frac{e}{\pi}\right)^x < \log_{\frac{e}{\pi}} 1 \Leftrightarrow x < 0$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = (-\infty;0)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 77 (Chuyên Lam Sơn Thanh Hóa 2019).

Số nghiệm nguyên của bất phương trình $2^{x^2+3x} \leq 16$ là số nào sau đây?

(A) 5. (B) 6. (C) 4. (D) 3.

Lời giải.

$2^{x^2+3x} \leq 16 \Leftrightarrow 2^{x^2+3x} \leq 2^4 \Leftrightarrow x^2+3x \leq 4 \Leftrightarrow x \in [-4;1]$.

Các nghiệm nguyên của bất phương trình là $-4;-3;-2;-1;0;1$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 78 (Chuyên Vĩnh Phúc 2019).

Tập nghiệm của bất phương trình $\left(\frac{1}{1+a^2}\right)^{2x+1} > 1$ (với a là tham số, $a \neq 0$) là

(A) $(-\infty;0)$. (B) $\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)$. (C) $(0;+\infty)$. (D) $\left(-\frac{1}{2};+\infty\right)$.

Lời giải.

Ta có $\left(\frac{1}{1+a^2}\right)^{2x+1} > 1 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{1+a^2}\right)^{2x+1} > \left(\frac{1}{1+a^2}\right)^{\circ}$ (1).

Nhận thấy $1+a^2 > 1, \forall a \neq 0$ nên: $\frac{1}{1+a^2} < 1$.

Khi đó bất phương trình (1) tương đương $2x+1 < 0 \Leftrightarrow x < -\frac{1}{2}$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho: $S = \left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 79 (Cụm 8 Trường Chuyên 2019).

Tập nghiệm S của bất phương trình $3^x < e^x$ là

(A) $S = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. (B) $S = (0;+\infty)$. (C) $S = \mathbb{R}$. (D) $S = (-\infty;0)$.

Lời giải.

$3^x < e^x \Leftrightarrow \left(\frac{3}{e}\right)^x < 1 \Leftrightarrow x < 0$. Tập nghiệm của bất phương trình là $S = (-\infty;0)$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 80 (Nguyễn Huệ - Ninh Bình - 2019).

Bất phương trình $2^{x+1} \leq 4$ có tập nghiệm là

(A) $[1;+\infty)$. (B) $(-\infty;1)$. (C) $(1;+\infty)$. (D) $(-\infty;1]$.

Lời giải.

Ta có $2^{x+1} \leq 4 \Leftrightarrow x+1 \leq 2 \Leftrightarrow x \leq 1$. Tập nghiệm của bất phương trình là $(-\infty;1]$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 81 (THPT Minh Khai - 2019). Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $3^x < 9$

Ⓐ $S = (-\infty; 2]$. Ⓑ $S = (2; +\infty)$. Ⓒ $S = (-\infty; 2)$. Ⓓ $S = \{2\}$.

Lời giải.

$3^x < 9 \Leftrightarrow 3^x < 3^2 \Leftrightarrow x < 2$.

Tập nghiệm của bất phương trình là: $S = (-\infty; 2)$.

Chọn đáp án C □

Câu 82 (Lômônôxốp - Hà Nội 2019).

Tập nghiệm của bất phương trình $\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^{\frac{1}{x}} \le \left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^2$ là

Ⓐ $\left(0; \dfrac{1}{2}\right)$. Ⓑ $\left[\dfrac{1}{2}; +\infty\right)$. Ⓒ $\left(0; \dfrac{1}{2}\right]$. Ⓓ $\left(-\infty; \dfrac{1}{2}\right)$.

Lời giải.

Cơ số $a = \dfrac{1}{\sqrt{3}} < 1$ nên bất phương trình: $\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^{\frac{1}{x}} \le \left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 \Leftrightarrow \dfrac{1}{x} \ge 2 \Leftrightarrow \dfrac{1-2x}{x} \ge 0 \Leftrightarrow 0 < x \le \dfrac{1}{2}$.

Chọn đáp án C □

Câu 83 (Đồng Nai - 2019). Tập nghiệm của bất phương trình $3^{x+2} \ge \dfrac{1}{9}$ là

Ⓐ $[-4; +\infty)$. Ⓑ $(-\infty; 4)$. Ⓒ $(-\infty; 0)$. Ⓓ $[0; +\infty)$.

Lời giải.

Bất phương trình $3^{x+2} \ge \dfrac{1}{9} \Leftrightarrow 3^{x+2} \ge 3^{-2} \Leftrightarrow x + 2 \ge -2 \Leftrightarrow x \ge -4$.

Chọn đáp án A □

Câu 84 (Chuyên Long An - 2019). Tìm nghiệm của bất phương trình $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x-1} \ge \dfrac{1}{4}$.

Ⓐ $x \le 3$. Ⓑ $x > 3$. Ⓒ $x \ge 3$. Ⓓ $1 < x \le 3$.

Lời giải.

$\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x-1} \ge \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow \left(\dfrac{1}{2}\right)^{x-1} \ge \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 \Leftrightarrow x - 1 \le 2 \Leftrightarrow x \le 3$.

Chọn đáp án A □

Câu 85 (Chuyên - Vĩnh Phúc - 2019).

Tập nghiệm của bất phương trình $\left(\dfrac{1}{1+a^2}\right)^{2x+1} > 1$ (với a là tham số, $a \ne 0$) là

Ⓐ $\left(-\infty; -\dfrac{1}{2}\right)$. Ⓑ $(0; +\infty)$. Ⓒ $(-\infty; 0)$. Ⓓ $\left(-\dfrac{1}{2}; +\infty\right)$.

Lời giải.

Ta có $0 < \dfrac{1}{1+a^2} < 1, \forall a \ne 0$, nếu $\left(\dfrac{1}{1+a^2}\right)^{2x+1} > 1 \Leftrightarrow 2x+1 < 0 \Leftrightarrow x < -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x \in \left(-\infty; -\dfrac{1}{2}\right)$.

Chọn đáp án A □

Câu 86 (Chuyên Lam Sơn - 2019). Số nghiệm nguyên của bất phương trình $2^{x^2+3x} \le 16$ là

Ⓐ 5. Ⓑ 6. Ⓒ 4. Ⓓ 3.

Lời giải.

Ta có $2^{x^2+3x} \leq 16 \Leftrightarrow 2^{x^2+3x} \leq 2^4 \Leftrightarrow x^2+3x \leq 4 \Leftrightarrow x^2+3x-4 \leq 0 \Leftrightarrow -4 \leq x \leq 1$.

Do đó số nghiệm nguyên của bất phương trình đã cho là 6.

Chọn đáp án B □

Câu 87 (Chuyên Hùng Vương Gia Lai 2019).

Bất phương trình $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-2x} \geq \frac{1}{8}$ có tập nghiệm là

A $[3;+\infty)$. B $(-\infty;-1]$. C $[-1;3]$. D $(-1;3)$.

Lời giải.

Bất phương trình đã cho tương đương với.

$\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-2x} \geq \left(\frac{1}{2}\right)^3 \Leftrightarrow x^2-2x \leq 3 \Leftrightarrow x^2-2x-3 \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 3$.

Vậy, tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $S=[-1;3]$.

Chọn đáp án C □

Câu 88 (Chuyên Hoàng Văn Thụ-Hòa Bình 2019).

Cho bất phương trình $\left(\frac{2}{3}\right)^{x^2-x+1} > \left(\frac{2}{3}\right)^{2x+1}$ có tập nghiệm $S=(a;b)$. Giá trị của $b-a$ bằng

A 3. B 4. C 2. D 1.

Lời giải.

Ta có $\left(\frac{2}{3}\right)^{x^2-x+1} > \left(\frac{2}{3}\right)^{2x+1} \Leftrightarrow x^2-x+1 < 2x+1 \Leftrightarrow x^2-3x < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 3$.

Vậy tập nghiệm $S=(0;3)$, suy ra $b-a=3-0=3$.

Chọn đáp án A □

Câu 89 (SGD Hưng Yên 2019). Tập nghiệm của bất phương trình $\left(\frac{2}{3}\right)^{2x+1} > 1$ là

A $(-\infty;0)$. B $(0;+\infty)$. C $\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)$. D $\left(-\frac{1}{2};+\infty\right)$.

Lời giải.

Ta có $\left(\frac{2}{3}\right)^{2x+1} > 1 \Leftrightarrow 2x+1 < 0 \Leftrightarrow x < -\frac{1}{2}$.

Vậy: Tập nghiệm của bất phương trình là $\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)$.

Chọn đáp án C □

Câu 90 (SGD Điện Biên - 2019). Tập nghiệm của bất phương trình $2^{\sqrt{x}} < 2$ là

A $[0;1)$. B $(-\infty;1)$. C $\mathbb{R}$. D $(1;+\infty)$.

Lời giải.

$2^{\sqrt{x}} < 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ \sqrt{x} < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in [0;1)$.

Chọn đáp án A □

Câu 91 (Ngô Quyền - Ba Vì - Hải Phòng 2019).

Tập nghiệm S của bất phương trình $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-4x} < 8$ là

A $S=(-\infty;3)$. B $S=(1;+\infty)$.

(C) $S=(-\infty;1)\cup(3;+\infty)$. (D) $S=(1;3)$.

Lời giải.

Bất phương trình $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x^2-4x}<8\Leftrightarrow\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x^2-4x}<\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-3}\Leftrightarrow x^2-4x>-3\Leftrightarrow x^2-4x+3>0\Leftrightarrow$
$\left[\begin{array}{l}x>3\\x<1.\end{array}\right.$

Nên tập nghiệm của bất phương trình $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x^2-4x}<8$ là $S=(-\infty;1)\cup(3;+\infty)$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 92 (Cần Thơ - 2019). Nghiệm của bất phương trình $2^{x^2-x}\le 4$ là

(A) $-1\le x\le 2$. (B) $x\le 1$. (C) $x\le 2$. (D) $-2\le x\le 1$.

Lời giải.

$2^{x^2-x}\le 4\Leftrightarrow 2^{x^2-x}\le 2^2\Leftrightarrow x^2-x-2\le 0\Leftrightarrow -1\le x\le 2$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 93 (Chuyên Lê Quý Đôn Điện Biên 2019).

Tìm tập nghiệm của bất phương trình $2^x+2^{x+1}\le 3^x+3^{x-1}$.

(A) $(2;+\infty)$. (B) $(-\infty;2)$. (C) $(-\infty;2]$. (D) $[2;+\infty)$.

Lời giải.

Ta có $2^x+2^{x+1}\le 3^x+3^{x-1}\Leftrightarrow 3\cdot 2^x\le 4\cdot 3^{x-1}\Leftrightarrow 2^{x-2}\le 3^{x-2}$
$\Leftrightarrow\left(\dfrac{2}{3}\right)^{x-2}\le 1\Leftrightarrow x-2\ge 0\Leftrightarrow x\ge 2$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 94 (Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2019).

Cho bất phương trình $4^x-5\cdot 2^{x+1}+16\le 0$ có tập nghiệm là đoạn $[a;b]$. Tính $\log\left(a^2+b^2\right)$

(A) 2. (B) 1. (C) 0. (D) 10.

Lời giải.

Đặt $t=2^x, t>0(*)$.

Khi đó bất phương trình đã cho trở thành: $t^2-10t+16\le 0\Leftrightarrow 2\le t\le 8$ (thỏa mãn (*))

$\Rightarrow 2\le 2^x\le 2^3\Leftrightarrow 1\le x\le 3\Rightarrow\begin{cases}a=1\\b=3\end{cases}\Rightarrow\log\left(a^2+b^2\right)=1$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 95 (Thi thử cụm Vũng Tàu - 2019).

Cho bất phương trình $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{x^2-x+1}>\left(\dfrac{2}{3}\right)^{2x-1}$ có tập nghiệm $S=(a;b)$. Giá trị của $b-a$ bằng

(A) -2. (B) -1. (C) 1. (D) 2.

Lời giải.

$\left(\dfrac{2}{3}\right)^{x^2-x+1}>\left(\dfrac{2}{3}\right)^{2x-1}\Leftrightarrow x^2-x+1<2x-1\Leftrightarrow x^2-3x+2<0\Leftrightarrow 1<x<2\Rightarrow S=(1;2)$.

Vậy $a=1;b=2\Rightarrow b-a=1$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 96 (Chuyên Quốc Học Huế 2019).

Xác định tập nghiệm S của bất phương trình $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-3} \geq 3$.

Ⓐ $S=(-\infty;1]$. Ⓑ $S=(1;+\infty)$. Ⓒ $S=[1;+\infty)$. Ⓓ $S=(-\infty;1)$.

Lời giải.

Ta có $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-3} \geq 3 \Leftrightarrow 3^{3-2x} \geq 3^1 \Leftrightarrow 3-2x \geq 1 \Leftrightarrow x \leq 1$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S=(-\infty;1]$.

Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 97 (Sở Hà Nam - 2019). Tập nghiệm của bất phương trình $(5)^{4+x^2} < \left(\frac{1}{5}\right)^{x^2-6x}$ là

Ⓐ $(-\infty;1)\cup(2;+\infty)$. Ⓑ $(2;+\infty)$.

Ⓒ $(-\infty;1)$. Ⓓ $(1;2)$.

Lời giải.

Ta có $(5)^{4+x^2} < \left(\frac{1}{5}\right)^{x^2-6x} \Leftrightarrow 5^{4+x^2} < 5^{-x^2+6x} \Leftrightarrow -x^2+6x > 4+x^2 \Leftrightarrow 2x^2-6x+4<0$

$\Leftrightarrow 1<x<2$.

Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 98 (Chu Văn An - Hà Nội - 2019).

Bất phương trình $\left(\frac{\pi}{2}\right)^{x-1} \leq \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2x+3}$ có nghiệm là

Ⓐ $x \leq -4$. Ⓑ $x > -4$. Ⓒ $x < -4$. Ⓓ $x \geq -4$.

Lời giải.

Ta có

$\left(\frac{\pi}{2}\right)^{x-1} \leq \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2x+3}$

$\Leftrightarrow x-1 \leq 2x+3 \quad \left(\text{vì } \frac{\pi}{2} > 1\right)$.

$\Leftrightarrow x \geq -4$

Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 99 (Đề minh họa 2022). Tập nghiệm của bất phương trình $2^x > 6$ là

Ⓐ $(\log_2 6;+\infty)$. Ⓑ $(-\infty;3)$. Ⓒ $(3;+\infty)$. Ⓓ $(-\infty;\log_2 6)$.

Lời giải.

$2^x > 6 \Leftrightarrow x > \log_2 6$.

Tập nghiệm của bất phương trình là $S=(\log_2 6;+\infty)$.

Chọn đáp án Ⓐ □

BẢNG ĐÁP ÁN

1. C	2. D	3. C	4. C	5. B	6. A	7. C	8. D	9. B	10. C
11. B	12. C	13. B	14. C	15. D	16. C	17. C	18. B	19. B	20. A
21. D	22. D	23. D	24. B	25. B	26. D	27. B	28. A	29. B	30. A
31. B	32. D	33. C	34. A	35. D	36. C	37. C	38. C	39. D	40. D
41. B	42. D	43. D	44. D	45. A	46. A	47. A	48. D	49. D	50. A

51. B	52. B	53. A	54. A	55. C	56. A	57. B	58. D	59. D	60. D
61. B	62. A	63. B	64. D	65. C	66. C	67. C	68. C	69. A	70. A
71. B	72. C	73. A	74. C	75. D	76. B	77. B	78. B	79. D	80. D
81. C	82. C	83. A	84. A	85. A	86. B	87. C	88. A	89. C	90. A
91. C	92. A	93. D	94. B	95. C	96. A	97. D	98. D	99. A	

MỨC ĐỘ 2. MỨC ĐỘ 7,8 ĐIỂM

Dạng 1. Bất phương trình logarit

Câu 1 (Chuyên Vĩnh Phúc 2019). Tập nghiệm của bất phương trình $2\log_2(x-1) \leq \log_2(5-x)+1$ là

Ⓐ $[3;5]$. Ⓑ $(1;3]$. Ⓒ $[1;3]$. Ⓓ $(1;5)$.

Lời giải.

Điều kiện $1 < x < 5$.

Ta có

$$\begin{aligned} & 2\log_2(x-1) \leq \log_2(5-x)+1 \Leftrightarrow \log_2(x-1)^2 \leq \log_2[2(5-x)] \\ \Leftrightarrow\ & (x-1)^2 \leq 10-2x \\ \Leftrightarrow\ & x^2-9 \leq 0 \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 3 \end{aligned}$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S=(1;3]$.

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 2 (THPT Gia Lộc Hải Dương 2019).

Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $2\log_3(4x-3) \leq \log_3(18x+27)$.

Ⓐ $S=\left[-\frac{3}{8};3\right]$. Ⓑ $S=\left(\frac{3}{4};3\right]$. Ⓒ $S=\left(\frac{3}{4};+\infty\right)$. Ⓓ $S=[3;+\infty)$.

Lời giải.

$2\log_3(4x-3) \leq \log_3(18x+27)(*)$.

Điều kiện $\begin{cases} 4x-3>0 \\ 18x+27>0 \end{cases} \Leftrightarrow x > \frac{3}{4}$.

Với điều kiện trên,

$$\begin{aligned} & (*) \Leftrightarrow \log_3(4x-3)^2 \leq \log_3(18x+27) \\ \Leftrightarrow\ & (4x-3)^2 \leq 18x+27 \\ \Leftrightarrow\ & -\frac{3}{8} \leq x \leq 3. \end{aligned}$$

Kết hợp điều kiện ta được $S=\left(\frac{3}{4};3\right]$.

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 3 (THPT Yên Khánh - Ninh Bình -2019).

Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2^2(2x)+\log_2\dfrac{x}{4}<9$ chứa tập hợp nào sau đây?

Ⓐ $\left(\dfrac{3}{2};6\right)$. Ⓑ $(0;3)$. Ⓒ $(1;5)$. Ⓓ $\left(\dfrac{1}{2};2\right)$.

Lời giải.

Điều kiện $x>0$.

Ta có

$$\begin{aligned}&\log_2^2(2x)+\log_2\frac{x}{4}<9\Leftrightarrow(1+\log_2 x)^2+\log_2 x-2<9\\\Leftrightarrow\ &\log_2^2 x+3\log_2 x-10<0\\\Leftrightarrow\ &-5<\log_2 x<2\Leftrightarrow\frac{1}{2^5}<x<4.\end{aligned}$$

Vậy $x\in\left(\dfrac{1}{2^5};4\right)$ chứa tập $\left(\dfrac{1}{2};2\right)$.

Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 4 (Chuyên Đại Học Vinh 2019).

Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{1}{3}}(x-1)+\log_3(11-2x)\geq 0$ là

Ⓐ $(-\infty;4]$. Ⓑ $(1;4]$. Ⓒ $(1;4)$. Ⓓ $\left[4;\dfrac{11}{2}\right)$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases}x-1>0\\11-2x>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>1\\x<\dfrac{11}{2}\end{cases}\Leftrightarrow x\in\left(1;\dfrac{11}{2}\right)$.

Ta có $\log_{\frac{1}{3}}(x-1)+\log_3(11-2x)\geq 0\Leftrightarrow\log_3\dfrac{11-2x}{x-1}\geq 0\Leftrightarrow\dfrac{11-2x}{x-1}\geq 0\Leftrightarrow x\in\left[1;\dfrac{11}{2}\right]$.

Kết luận: $x\in\left(1;\dfrac{11}{2}\right)$. Vì $x\in\left[4;\dfrac{11}{2}\right)\subset\left(1;\dfrac{11}{2}\right)$.

Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 5 (Sở Phú Thọ 2019). Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{1}{3}}(x-1)+\log_3(11-2x)\geq 0$ là

Ⓐ $(-\infty;4]$. Ⓑ $(1;4]$. Ⓒ $(1;4)$. Ⓓ $\left[4;\dfrac{11}{2}\right)$.

Lời giải.

Điều kiện xác định: $1<x<\dfrac{11}{2}$.

Khi đó ta có

$$\begin{aligned}&\log_{\frac{1}{3}}(x-1)+\log_3(11-2x)\geq 0\Leftrightarrow\log_3(11-2x)\geq\log_3(x-1)\Leftrightarrow 11-2x\geq x-1>0\\\Leftrightarrow\ &\begin{cases}x>1\\x\leq 4\end{cases}\Leftrightarrow x\in(1;4].\end{aligned}$$

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 6 (Sở Bắc Ninh 2019). Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{1}{3}}(x-1)+\log_3(11-2x)\geq 0$ là

Ⓐ $S=(-\infty;4]$. Ⓑ $S=(1;4)$. Ⓒ $S=(1;4]$. Ⓓ $S=\left(3;\dfrac{11}{2}\right)$.

Lời giải.

Ta có

$$\log_{\frac{1}{3}}(x-1)+\log_3(11-2x)\geq 0 \Leftrightarrow \log_3(11-2x)-\log_3(x-1)\geq 0$$

$$\Leftrightarrow \log_3(11-2x)\geq \log_3(x-1) \Leftrightarrow \begin{cases}11-2x\geq x-1\\ x-1>0\end{cases} \Leftrightarrow 1<x\leq 4.$$

Suy ra tập nghiệm của bất phương trình là $S=(1;4]$.

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 7 (THPT Nguyễn Khuyến 2019).

Tổng tất cả các nghiệm nguyên của bất phương trình $2\log_2\sqrt{x+1}\leq 2-\log_2(x-2)$ bằng

Ⓐ 12. Ⓑ 9. Ⓒ 5. Ⓓ 3.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases}x+1>0\\ x-2>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x>-1\\ x>2\end{cases} \Leftrightarrow x>2.$

Khi đó

$$2\log_2\sqrt{x+1}\leq 2-\log_2(x-2)\Leftrightarrow \log_2(x+1)\leq \log_2\frac{4}{(x-2)}\Leftrightarrow x+1\leq \frac{4}{(x-2)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-x-2-4}{x-2}\leq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-x-6}{x-2}\leq 0\Leftrightarrow x\in(-\infty;-2]\cup[2;3].$$

Suy ra nghiệm của bất phương trình là $x\in(2;3]$.

Nghiệm nguyên là $x=3$. Vậy tổng tất cả các nghiệm nguyên là 3.

Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 8 (Mã 123 2017). Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\log_2^2 x-5\log_2 x+4\geq 0$.

Ⓐ $S=(-\infty;1]\cup[4;+\infty)$. Ⓑ $S=[2;16]$.

Ⓒ $S=(0;2]\cup[16;+\infty)$. Ⓓ $(-\infty;2]\cup[16;+\infty)$.

Lời giải.

Điều kiện $x>0$.

Bpt $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\log_2 x\geq 4\\ \log_2 x\leq 1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x\geq 16\\ x\leq 2.\end{array}\right.$

Kết hợp điều kiện ta có $S=(0;2]\cup[16;+\infty)$.

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 9. Tập nghiệm S của bất phương trình $\log_2^2 x-5\log_2 x-6\leq 0$ là

Ⓐ $S=\left[\dfrac{1}{2};64\right]$. Ⓑ $S=\left(0;\dfrac{1}{2}\right]$.

Ⓒ $S=[64;+\infty)$. Ⓓ $S=\left(0;\dfrac{1}{2}\right]\cup[64;+\infty)$.

Lời giải.

$\log_2^2 x - 5\log_2 x - 6 \leq 0. \qquad (1)$

Điều kiện $x > 0(*)$.

Đặt $t = \log_2 x(2)$.

(1) thành $t^2 - 5t - 6 \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq t \leq 6 \overset{(2)}{\Leftrightarrow} -1 \leq \log_2 x \leq 6 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2} \leq x \leq 64$.

So với $(*)$: (1) $\Leftrightarrow \dfrac{1}{2} \leq x \leq 64$.

Vậy $S = \left[\dfrac{1}{2}; 64\right]$.

Chọn đáp án A □

Câu 10 (Chuyên Vĩnh Phúc 2019). Kí hiệu $\max\{a; b\}$ là số lớn nhất trong hai số a, b. Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\max\left\{\log_2 x; \log_{\frac{1}{3}} x\right\} < 1$.

Ⓐ $S = \left(\dfrac{1}{3}; 2\right)$. Ⓑ $S = (0; 2)$. Ⓒ $S = \left(0; \dfrac{1}{3}\right)$. Ⓓ $S = (2; +\infty)$.

Lời giải.

$y = \log_2 x - \log_{\frac{1}{3}} x = \log_2 x + \log_3 x$.

$y' = \dfrac{1}{x\ln 2} + \dfrac{1}{x\ln 3} > 0, \forall x > 0$ nên phương trình $y = 0$ có nghiệm duy nhất.

Mà phương trình $y = 0$ có nghiệm $x = 1$ do đó.

Trường hợp 1: $x < 1$: $\log_2 x < \log_{\frac{1}{3}} x$.

Ta có $\max\left\{\log_2 x; \log_{\frac{1}{3}} x\right\} < 1 \cdot \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{3}} x < 1 \Leftrightarrow x > \dfrac{1}{3}$.

Do đó $\dfrac{1}{3} < x < 1$.

Trường hợp 2: $x \geq 1$: $\log_2 x \geq \log_{\frac{1}{3}} x$.

Ta có $\max\left\{\log_2 x; \log_{\frac{1}{3}} x\right\} < 1 \cdot \Leftrightarrow \log_2 x < 1 \Leftrightarrow x < 2$.

Do đó $1 \leq x < 2$.

Vậy $S = \left(\dfrac{1}{3}; 2\right)$.

$S = \left(\dfrac{1}{3}; 2\right)$.

Chọn đáp án A □

Câu 11 (Sở Bắc Ninh 2019). Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2\left(x\sqrt{x^2+2} + 4 - x^2\right) + 2x + \sqrt{x^2+2} \leq 1$ là $\left(-\sqrt{a}; -\sqrt{b}\right]$.

Khi đó $a.b$ bằng

Ⓐ $\dfrac{15}{16}$. Ⓑ $\dfrac{12}{5}$. Ⓒ $\dfrac{16}{15}$. Ⓓ $\dfrac{5}{12}$.

Lời giải.

Ta có $x\sqrt{x^2+2} - x^2 = x\left(\sqrt{x^2+2} - x\right) = \dfrac{2x}{\sqrt{x^2+2} + x}$.

Ta có

$$\begin{aligned}
&\log_2\left(x\sqrt{x^2+2}+4-x^2\right)+2x+\sqrt{x^2+2}\le 1\\
\Leftrightarrow\ &\log_2\left(x\left(\sqrt{x^2+2}-x\right)+4\right)+2x+\sqrt{x^2+2}\le 1\\
\Leftrightarrow\ &\log_2\left(\frac{2x}{\sqrt{x^2+2}+x}+4\right)+2x+\sqrt{x^2+2}\le 1\\
\Leftrightarrow\ &\log_2\frac{2\left(3x+2\sqrt{x^2+2}\right)}{\sqrt{x^2+2}+x}+2x+\sqrt{x^2+2}\le 1. \qquad (1)
\end{aligned}$$

Ta có $\sqrt{x^2+2}+x>0$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

Điều kiện $3x+2\sqrt{x^2+2}>0\Leftrightarrow 2\sqrt{x^2+2}>-3x\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\ge 0\\ \begin{cases} x<0\\ 4x^2+8>9x^2\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow x>-\sqrt{\frac{8}{5}}.\qquad (*)$

Với điều kiện $(*)$, ta có

$(1)\Leftrightarrow \log_2\left(3x+2\sqrt{x^2+2}\right)+3x+2\sqrt{x^2+2}\le\log_2\left(\sqrt{x^2+2}+x\right)+\sqrt{x^2+2}+x.\qquad (2)$

Xét hàm số $f(t)=\log_2 t+t$ với $t>0$. Có $f'(t)=\dfrac{1}{t\cdot\ln 2}+1>0$, $\forall t\in(0;+\infty)$.

Hàm số $f(t)=\log_2 t+t$ đồng biến trên $(0;+\infty)$, $\left(3x+2\sqrt{x^2+2}\right)\in(0;+\infty)$ và $\left(\sqrt{x^2+2}+x\right)\in(0;+\infty)$.

Nên

$$\begin{aligned}
(2)\ &\Leftrightarrow f\left(3x+2\sqrt{x^2+2}\right)\le f\left(\sqrt{x^2+2}+x\right)\\
&\Leftrightarrow 3x+2\sqrt{x^2+2}\le\sqrt{x^2+2}+x\Leftrightarrow\sqrt{x^2+2}\le -2x\Leftrightarrow\begin{cases}-2x\ge 0\\ x^2+2\le 4x^2\end{cases}\\
&\Leftrightarrow\begin{cases}x\le 0\\ 3x^2\ge 2\end{cases}\Leftrightarrow x\le-\sqrt{\frac{2}{3}}.
\end{aligned}$$

Kết hợp với điều kiện ta có tập nghiệm bất phương trình là $\left(-\sqrt{\frac{8}{5}};-\sqrt{\frac{2}{3}}\right]$ hay $a\cdot b=\dfrac{16}{15}$.

Chọn đáp án C □

Câu 12 (Chuyên Đại học Vinh - 2019).

Bất phương trình $(x^3-9x)\ln(x+5)\le 0$ có bao nhiêu nghiệm nguyên?

A 4. B 7. C 6. D Vô số.

Lời giải.

Điều kiện $x>-5$.

Cho $f(x)=(x^3-9x)\ln(x+5)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^3-9x=0\\ \ln(x+5)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-3\\ x=0\\ x=3\\ x=-4.\end{array}\right.$

Bảng xét dấu

x	-5		-4		-3		0		3		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng xét dấu ta thấy $f(x) \leq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -4 \leq x \leq -3 \\ 0 \leq x \leq 3. \end{array}\right.$

Vì $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \{-4; -3; 0; 1; 2; 3\}$.

Vậy có 6 giá trị nguyên của x thỏa bài toán.

Chọn đáp án C □

Câu 13 (Chuyên Đại học Vinh - 2019).

Tính tổng tất cả các nghiệm nguyên của bất phương trình $\log_2(x^2+3) - \log_2 x + x^2 - 4x + 1 \leq 0$.

A 4. B 6. C 5. D 3.

Lời giải.

Điều kiện $x > 0$.

Ta có

$$\log_2\left(x^2+3\right) - \log_2 x + x^2 - 4x + 1 \leq 0 \Leftrightarrow \log_2\left(x^2+3\right) + x^2 + 3 \leq \log_2 4x + 4x. \quad (*)$$

Xét hàm số $f(t) = \log_2 t + t$ trên $\mathscr{D} = (0; +\infty)$.

Ta có $f'(t) = \dfrac{1}{t\ln 2} + 1 > 0,\ \forall t \in \mathscr{D} \Rightarrow$ hàm số f đồng biến trên D.

Suy ra $(*) \Leftrightarrow f\left(x^2+3\right) \leq f(4x) \Leftrightarrow x^2 + 3 \leq 4x \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 3$.

Vậy tập hợp các nghiệm nguyên của bất phương trình là $\{1; 2; 3\}$.

Nhận xét: Với cách hỏi và đáp án của câu này ta chỉ cần mở MODE 7 của máy tính cầm tay, nhập vế trái của bất phương trình và cho biến chạy từ 1 đến 6 là tìm được đáp án ngay.

Chọn đáp án B □

Câu 14 (HKI - NK HCM - 2019). Biết bất phương trình $\log_2\left(\dfrac{x^2+x+1}{16x+3}\right) + (\sqrt{x}-2)^2 + x \leq 1$ có tập nghiệm là $S = (a; b)$. Hãy tính tổng $T = 20a + 10b$.

A $T = 45 - 10\sqrt{2}$. B $T = 46 - 10\sqrt{2}$. C $T = 46 - 11\sqrt{2}$. D $T = 47 - 11\sqrt{2}$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 0$.

$$\begin{aligned} & \log_2\left(\frac{x^2+x+1}{16x+3}\right) + (\sqrt{x}-2)^2 + x \leq 1 \\ \Leftrightarrow\ & \log_2\left(x^2+x+1\right) - \log_2(16x+3) + 2x - 4\sqrt{x} + 3 \leq 0 \\ \Leftrightarrow\ & \log_2\left(\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right) + 2\left(\left(x+\frac{1}{2}\right) + \frac{3}{4}\right) \leq \log_2\left((2\sqrt{x})^2 + \frac{3}{4}\right) + 2\left(2\sqrt{x} + \frac{3}{4}\right) \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t) = \log_2\left(t^2 + \dfrac{3}{4}\right) + 2\left(t + \dfrac{3}{4}\right)$ với $t \geq 0$ có $f'(t) = \dfrac{2t}{\left(t^2+\dfrac{3}{4}\right)\ln 2} + 2 > 0,\ \forall t \geq 0$.

nên $f(t)$ đồng biến trên khoảng $[0; +\infty)$.

Suy ra

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)+\frac{3}{4}\le 2\sqrt{x}+\frac{3}{4}\Leftrightarrow 2\sqrt{x}\ge x+\frac{1}{2}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 0\\ x^2-3x+\dfrac{1}{4}\le 0\end{cases}\Leftrightarrow \frac{3-2\sqrt{2}}{2}\le x\le\frac{3+2\sqrt{2}}{2}$$
$$\Rightarrow\ a=\frac{3-2\sqrt{2}}{2};b=\frac{3+2\sqrt{2}}{2}\Rightarrow T=20a+10b=45-10\sqrt{2}.$$

Chọn đáp án A □

Câu 15 (Chuyên Phan Bội Châu - Nghệ An - 2018).

Số nghiệm nguyên của bất phương trình $\log_2 x+\log_3 x\ge 1+\log_2 x\cdot\log_3 x$ là

A 1. B 2. C 3. D Vô số.

Lời giải.

Điều kiện xác định: $x>0$.

Ta có

$$\log_2 x+\log_3 x\ge 1+\log_2 x\cdot\log_3 x\Leftrightarrow(\log_2 x-1)(\log_3 x-1)\le 0$$
$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\log_2 x-1\le 0\\ \log_3 x-1\ge 0\end{cases}\\ \begin{cases}\log_2 x-1\ge 0\\ \log_3 x-1\le 0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}0<x\le 2\\ x\ge 3\end{cases}\\ \begin{cases}x\ge 2\\ 0<x\le 3\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow 2\le x\le 3$$

Do đó có 2 nghiệm nguyên thỏa mãn.

Chọn đáp án B □

Câu 16 (THPT Lý Thái Tổ - Bắc Ninh - 2018).

Bất phương trình $\log_2\left(\log_{\frac{1}{3}}\dfrac{3x-7}{x+3}\right)\ge 0$ có tập nghiệm là $(a;b]$. Tính giá trị $P=3a-b$.

A $P=5$. B $P=4$. C $P=10$. D $P=7$.

Lời giải.

Ta có

$$\log_2\left(\log_{\frac{1}{3}}\frac{3x-7}{x+3}\right)\geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{3x-7}{x+3}>0\\ \log_{\frac{1}{3}}\dfrac{3x-7}{x+3}>0\\ \log_{\frac{1}{3}}\dfrac{3x-7}{x+3}\geq 1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{3x-7}{x+3}>0\\ \dfrac{3x-7}{x+3}<1\\ \dfrac{3x-7}{x+3}\leq\dfrac{1}{3}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{3x-7}{x+3}>0\\ \dfrac{3x-7}{x+3}\leq\dfrac{1}{3}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{3x-7}{x+3}>0\\ \dfrac{8(x-3)}{3(x+3)}\leq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\in(-\infty;-3)\cup\left(\dfrac{7}{3};+\infty\right)\\ \dfrac{8(x-3)}{3(x+3)}<0,\ x\in[-3;3]\end{cases} \Leftrightarrow x\in\left(\dfrac{7}{3};3\right].$$

Suy ra $a=\dfrac{7}{3}$; $b=3$. Vậy $P=3a-b=3\cdot\dfrac{7}{3}-3=4$.

Chọn đáp án B □

Câu 17 (THPT Ngô Quyền - Hải Phòng - 2018).

Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{1}{3}}(-\log_2 x)<0$ là

A $(0;5)$. B $(1;2)$. C $\left(\dfrac{1}{4};4\right)$. D $\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$.

Lời giải.

Điều kiện xác định: $\begin{cases}x>0\\ -\log_2 x>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x>0\\ x<1\end{cases} \Rightarrow 0<x<1.$

Ta có

$$\log_{\frac{1}{3}}(-\log_2 x)<0 \Leftrightarrow -\log_2 x>1 \Leftrightarrow \log_2 x<-1 \Leftrightarrow x<\frac{1}{2}.$$

So sánh điều kiện, suy ra $S=\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$.

Chọn đáp án D □

Câu 18 (THPT Nam Trực - Nam Định - 2018).

Tổng các nghiệm nguyên của bất phương trình $\log^2_{\sqrt{5}} x^5-25\log_{\sqrt{5}} x^2-75\leq 0$ là

A 70. B 64. C 62. D 66.

Lời giải.

Điều kiện $x>0$.

Ta có

$$\log^2_{\sqrt{5}} x^5-25\log_{\sqrt{5}} x^2-75\leq 0 \Leftrightarrow 4\log^2_5 x-4\log_5 x-3\leq 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}\leq\log_5 x\leq\frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{5}}\leq x\leq\sqrt{125}.$$

Nghiệm nguyên của bất phương trình là $0;1;2;3;4;5;6;7;8;9;10;11$.

$S=1+2+\cdots+11=\dfrac{11\cdot(11+1)}{2}=66$.

Chọn đáp án D □

Câu 19 (THPT Lương Văn Can - 2018).

Cho bất phương trình $(\log x+1)(4-\log x)>0$. Có bao nhiêu số nguyên x thoả mãn bất phương trình trên.

(A) 10000. (B) 10001. (C) 9998. (D) 9999.

Lời giải.

$(\log x+1)(4-\log x)>0(1)$.

Điều kiện $x>0$.

Khi ấy (1) $\Leftrightarrow -1<\log x<4 \Leftrightarrow \dfrac{1}{10}<x<10000$. Vì $x\in\mathbb{Z}$ nên $x\in\{1;2;3;\ldots;9999\}$.

Vậy có tất cả 9999 số nguyên x thoả mãn bất phương trình trên.

Chọn đáp án (D) □

Câu 20 (Chuyên Vinh – 2022). Số nghiệm nguyên của bất phương trình

$$\sqrt{2\log_2(x+2)}-\sqrt{\log_2\left(2x^2-1\right)}\geq(x+1)(x-5)$$

là

(A) 5. (B) 6. (C) 7. (D) 4.

Lời giải.

Nhận xét $x=-1$ là nghiệm của bất phương trình.

Với $x\geq 1$ ta có

$$\begin{aligned}&\sqrt{2\log_2(x+2)}-\sqrt{\log_2\left(2x^2-1\right)}\geq(x+1)(x-5)\\ \Leftrightarrow\ &\sqrt{\log_2\left(x^2+4x+4\right)}-\sqrt{\log_2\left(2x^2-1\right)}\geq x^2-4x-5. \qquad (2)\end{aligned}$$

Đặt $\begin{cases}a=2x^2-1\\ b=x^2+4x+4\end{cases}(a\geq 1;b\geq 1)$.

Khi đó (2) $\Leftrightarrow b+\sqrt{\log_2 b}\geq a+\sqrt{\log_2 a}.\qquad(3)$

Xét hàm số $f(t)=t+\sqrt{\log_2 t}$ với $t\geq 1$.

$f'(t)=1+\dfrac{1}{2t\sqrt{\log_2 t}\ln 2}>0,\forall t>1$.

Hàm số $f(t)$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$ nên từ (3) ta có

$$b\geq a\Leftrightarrow x^2+4x+4\geq 2x^2-1\Leftrightarrow -x^2+4x+5\geq 0\Leftrightarrow -1\leq x\leq 5.$$

Mà $x\geq 1\Rightarrow 1\leq x\leq 5$.

Vậy có 6 giá trị nguyên của x thỏa mãn.

Chọn đáp án (B) □

Câu 21 (Sở Hà Nam 2022). Có bao nhiêu số nguyên x thoả mãn

$$\sqrt{2\log_3(x+2)}-\sqrt{\log_3\left(2x^2-1\right)}\geq(x+1)(x-5)?$$

Ⓐ 8. Ⓑ 7. Ⓒ 6. Ⓓ 5.

Lời giải.

Điều kiện xác định: $\begin{cases} x+2 \geq 1 \\ 2x^2-1 \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x \leq -1 \vee x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 1 \Rightarrow D = [1;+\infty)$.

Ta có

$$\begin{aligned} & \sqrt{2\log_3(x+2)} - \sqrt{\log_3\left(2x^2-1\right)} \geq (x+1)(x-5) \\ \Leftrightarrow \quad & \sqrt{\log_3\left(x^2+4x+4\right)} + \left(x^2+4x+4\right) \geq \sqrt{\log_3\left(2x^2-1\right)} + \left(2x^2-1\right). \end{aligned}$$

Đặt $f(t) = \sqrt{\log_3 t} + t, \forall t \geq 1 \Rightarrow f'(t) = \dfrac{1}{t \cdot \ln 3} \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{\log_3 t}} + 1 > 0$, $\forall t > 1$.

Suy ra $f(t)$ đồng biến trên $(1;+\infty)$.

Suy ra $f\left(x^2+4x+4\right) \geq f\left(2x^2-1\right) \Leftrightarrow x^2+4x+4 \geq 2x^2-1 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 5$.

Vậy có 7 số nguyên x thoả mãn.

Chọn đáp án Ⓑ □

Dạng 2. Bất phương trình mũ

Câu 22 (THPT Trần Phú - 2019). Tập nghiệm của bất phương trình $\left(3^x+2\right)\left(4^{x+1}-8^{2x+1}\right) \leq 0$.

Ⓐ $\left[-\dfrac{1}{4};+\infty\right)$. Ⓑ $\left(-\infty;-\dfrac{1}{4}\right]$. Ⓒ $(-\infty;4]$. Ⓓ $[4;+\infty)$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} & \left(3^x+2\right)\left(4^{x+1}-8^{2x+1}\right) \leq 0 \Leftrightarrow 4^{x+1}-8^{2x+1} \leq 0 \\ \Leftrightarrow \quad & 4 \cdot 2^{2x} - 8 \cdot \left(2^{2x}\right)^3 \leq 0 \Leftrightarrow -2 \cdot \left(2^{2x}\right)^3 + 2^{2x} \leq 0. \qquad (*) \end{aligned}$$

Đặt $2^{2x} = t$, $t > 0$, suy ra bất phương trình $(*)$ trở thành: $-2 \cdot t^3 + t \leq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \leq t \leq 0 \\ t \geq \dfrac{\sqrt{2}}{2}. \end{array}\right.$

Giao với Đk $t > 0$ ta được: $t \geq \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow 2^{2x} \geq \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow 2^{2x} \geq 2^{-\frac{1}{2}} \Leftrightarrow 2x \geq -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x \geq -\dfrac{1}{4}$.

Vậy tập nghiệm của BPT đã cho là $T = \left[-\dfrac{1}{4};+\infty\right)$.

Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 23 (Lý Nhân Tông - Bắc Ninh 2019).

Bất phương trình $3^{2x+1} - 7 \cdot 3^x + 2 > 0$ có tập nghiệm là

Ⓐ $(-\infty;-1) \cup (\log_2 3;+\infty)$. Ⓑ $(-\infty;-2) \cup (\log_2 3;+\infty)$.

Ⓒ $(-\infty;-1) \cup (\log_3 2;+\infty)$. Ⓓ $(-\infty;-2) \cup (\log_3 2;+\infty)$.

Lời giải.

Ta có $3^{2x+1} - 7 \cdot 3^x + 2 > 0 \Leftrightarrow 3 \cdot (3^x)^2 - 7 \cdot 3^x + 2 > 0$.

Đặt $3^x = t > 0$ ta được $\begin{cases} t > 0 \\ 3t^2 - 7t + 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 < t < \dfrac{1}{3} \\ t > 2. \end{array}\right.$

Suy ra $\left[\begin{array}{l} 0 < 3^x < \dfrac{1}{3} \\ 3^x > 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 < 3^x < 3^{-1} \\ 3^x > 3^{\log_3 2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < -1 \\ x > \log_3 2. \end{array}\right.$

Vậy bất phương trình có tập nghiệm là $(-\infty; -1) \cup (\log_3 2; +\infty)$.

Chọn đáp án C □

Câu 24 (Chuyên ĐH Vinh - 2019). Biết tập nghiệm của bất phương trình $2^x < 3 - \dfrac{2}{2^x}$ là $(a; b)$. Giá trị $a + b$ bằng

A 3. B 2. C 0. D 1.

Lời giải.

Ta có $2^x < 3 - \dfrac{2}{2^x} \Leftrightarrow (2^x)^2 - 3 \cdot (2^x) + 2 < 0 \Leftrightarrow 1 < 2^x < 2 \Leftrightarrow 0 < x < 1$.

Tập nghiệm của bất phương trình là $S = (0; 1)$.

Suy ra $a = 0$ và $b = 1$ nên $a + b = 1$.

Chọn đáp án D □

Câu 25 (Chuyên Bắc Giang 2019). Tập nghiệm của bất phương trình $3^{3x+1} - 9 + 3^{x+1} - 9 \cdot 3^{2x} > 0$ là

A $(-\infty; 1)$. B $(3; +\infty)$. C $(1; +\infty)$. D $(-\infty; 3)$.

Lời giải.

Ta có $3^{3x+1} - 9 + 3^{x+1} - 9 \cdot 3^{2x} > 0 \Leftrightarrow 3 \cdot 3^{3x} - 9 + 3 \cdot 3^x - 9 \cdot 3^{2x} > 0$.

Đặt $3^x = t(t > 0)$.

Ta có bất phương trình

$$\begin{aligned} & 3t^3 - 9 + 3t - 9t^2 > 0 \\ \Leftrightarrow\ & 3t^3 - 9t^2 + 3t - 9 > 0 \\ \Leftrightarrow\ & 3t^2(t-3) + 3(t-3) > 0 \\ \Leftrightarrow\ & \left(3t^2 + 3\right)(t-3) > 0 \\ \Leftrightarrow\ & t - 3 > 0 \\ \Leftrightarrow\ & t > 3. \end{aligned}$$

Khi đó ta có $3^x > 3 \Leftrightarrow x > 1$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = (1; +\infty)$.

Chọn đáp án C □

Câu 26 (THPT Đông Sơn 1 - Thanh Hóa - 2019).

Bất phương trình $6.4^x - 13 \cdot 6^x + 6 \cdot 9^x > 0$ có tập nghiệm là

A $S = (-\infty; -1) \cup [1; +\infty)$. B $S = (-\infty; -2) \cup (1; +\infty)$.

Ⓒ $S = (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$. Ⓓ $S = (-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$.

Lời giải.

Ta có $6.4^x - 13 \cdot 6^x + 6 \cdot 9^x > 0 \Leftrightarrow 6 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{2x} - 13 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^x + 6 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\left(\frac{2}{3}\right)^x > \frac{3}{2}\\ \left(\frac{2}{3}\right)^x < \frac{2}{3}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x < -1\\ x > 1.\end{array}\right.$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$.

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 27 (Kinh Môn - Hải Dương 2019).

Cho bất phương trình: $2.5^{x+2} + 5 \cdot 2^{x+2} - 133 \cdot \sqrt{10^x} \leq 0$ có tập nghiệm là $S = [a; b]$. Biểu thức $A = 1000b - 5a$ có giá trị bằng

Ⓐ 2021. Ⓑ 2020. Ⓒ 2019. Ⓓ 2018.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}
& 2.5^{x+2} + 5 \cdot 2^{x+2} - 133 \cdot \sqrt{10^x} \leq 0 \Leftrightarrow 50 \cdot \left(5^{\frac{x}{2}}\right)^2 - 133 \cdot 5^{\frac{x}{2}} \cdot 2^{\frac{x}{2}} + 20 \cdot \left(2^{\frac{x}{2}}\right)^2 \leq 0\\
\Leftrightarrow\ & \left(2 \cdot 5^{\frac{x}{2}} - 5 \cdot 2^{\frac{x}{2}}\right)\left(25 \cdot 5^{\frac{x}{2}} - 4 \cdot 2^{\frac{x}{2}}\right) \leq 0 \Leftrightarrow \left(2 \cdot 5^{\frac{x}{2}} - 5 \cdot 2^{\frac{x}{2}}\right)\left(5^{\frac{x}{2}+2} - 2^{\frac{x}{2}+2}\right) \leq 0\\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l}\begin{cases}2 \cdot 5^{\frac{x}{2}} - 5 \cdot 2^{\frac{x}{2}} \leq 0\\ 25 \cdot 5^{\frac{x}{2}} - 4 \cdot 2^{\frac{x}{2}} \geq 0\end{cases}\\ \begin{cases}2 \cdot 5^{\frac{x}{2}} - 5 \cdot 2^{\frac{x}{2}} \geq 0\\ 25 \cdot 5^{\frac{x}{2}} - 4 \cdot 2^{\frac{x}{2}} \leq 0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}5^{\frac{x}{2}-1} \leq 2^{\frac{x}{2}-1}\\ 5^{\frac{x}{2}+2} \geq 2^{\frac{x}{2}+2}\end{cases}\\ \begin{cases}5^{\frac{x}{2}-1} \geq 2^{\frac{x}{2}-1}\\ 5^{\frac{x}{2}+2} \leq 2^{\frac{x}{2}+2}\end{cases}\end{array}\right.\\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{x}{2}-1} \leq 1\\ \left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{x}{2}+2} \geq 1\end{cases}\\ \begin{cases}\left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{x}{2}-1} \geq 1\\ \left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{x}{2}+2} \leq 1\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\frac{x}{2} - 1 \leq 0\\ \frac{x}{2} + 2 \geq 0\end{cases}\\ \begin{cases}\frac{x}{2} - 1 \geq 0\\ \frac{x}{2} + 2 \leq 0\end{cases}\end{array}\right.\\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x \leq 2\\ x \geq -4\end{cases}\\ \begin{cases}x \geq 2\\ x \leq -4\end{cases}\end{array}\right.\\
\Leftrightarrow\ & -4 \leq x \leq 2.
\end{aligned}$$

Suy ra $S = [-4; 2]$. Vậy $A = 1000b - 5a = 1000 \cdot 2 - 5 \cdot (-4) = 2020$.

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 28 (Toán Học Tuổi Trẻ Năm 2019).

Số nghiệm nguyên của bất phương trình: $\left(17 - 12\sqrt{2}\right)^x \geq (3 + \sqrt{8})^{x^2}$ là

(A) 3. (B) 1. (C) 2. (D) 4.

Lời giải.

Ta có

$$\left(17-12\sqrt{2}\right)^{x} \geq (3+\sqrt{8})^{x^2} \Leftrightarrow (3-\sqrt{8})^{2x} \geq (3+\sqrt{8})^{x^2}$$
$$\Leftrightarrow \quad (3+\sqrt{8})^{x^2+2x} \leq 1 \Leftrightarrow x^2+2x \leq 0 \Leftrightarrow x \in [-2;0].$$

Vậy bất phương trình đã cho có 3 nghiệm nguyên.

Chọn đáp án (A) □

Câu 29 (Chuyên Lê Quý Dôn Diện Biên 2019).

Tìm tập nghiệm của bất phương trình $2^x + 2^{x+1} \leq 3^x + 3^{x-1}$.

(A) $(2;+\infty)$. (B) $(-\infty;2)$. (C) $(-\infty;2]$. (D) $[2;+\infty)$.

Lời giải.

Ta có

$$2^x + 2^{x+1} \leq 3^x + 3^{x-1} \Leftrightarrow 3\cdot 2^x \leq 4\cdot 3^{x-1} \Leftrightarrow 2^{x-2} \leq 3^{x-2}$$
$$\Leftrightarrow \quad \left(\frac{2}{3}\right)^{x-2} \leq 1 \Leftrightarrow x-2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2.$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 30 (Chuyên Hưng Yên 2019). Cho bất phương trình $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{2}{x}} + 3\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{x}+1} > 12$ có tập nghiệm $S=(a;b)$. Giá trị của biểu thức $P = 3a+10b$ là

(A) 5. (B) -3. (C) -4. (D) 2.

Lời giải.

Đặt $t = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{x}}$ $(t>0)$. Khi đó bất phương trình đã cho trở thành.

$t^2 + t > 12 \Leftrightarrow (t-3)(t+4) > 0 \Leftrightarrow t > 3$ (vì $t>0$).

Từ đó suy ra: $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{x}} > 3 \Leftrightarrow \frac{1}{x} < -1 \Leftrightarrow -1 < x < 0$. Tập nghiệm của bất phương trình là $(-1;0)$.

Vậy $a=-1$ và $b=0$. Suy ra $P = 3a+10b = -3$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 31 (Chuyên Hạ Long 2019). Bất phương trình sau có bao nhiêu nghiệm nguyên dương $9^x - 4\cdot 3^x + 3 < 0$.

(A) 3. (B) 1. (C) 0. (D) 2.

Lời giải.

Đặt $t = 3^x > 0$.

Bất phương trình đã cho trở thành $t^2 - 4\cdot t + 3 < 0 \Leftrightarrow 1 < t < 3 \Leftrightarrow 1 < 3^x < 3 \Leftrightarrow 0 < x < 1$.

Vậy bất phương trình đã cho có tập nghiệm là $S=(0,1)$ nên nó không có nghiệm nguyên dương.

Chọn đáp án (C) □

Câu 32 (THPT Đông Sơn Thanh Hóa 2019).

Bất phương trình $6.4^x - 13 \cdot 6^x + 6 \cdot 9^x > 0$ có tập nghiệm là

Ⓐ $S = (-\infty; -1) \cup [1; +\infty)$. Ⓑ $S = (-\infty; -2) \cup (1; +\infty)$.

Ⓒ $S = (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$. Ⓓ $S = (-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$.

Lời giải.

Ta có $6.4^x - 13 \cdot 6^x + 6 \cdot 9^x > 0 \Leftrightarrow 6 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{2x} - 13 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^x + 6 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left(\frac{2}{3}\right)^x > \frac{3}{2} \\ \left(\frac{2}{3}\right)^x < \frac{2}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < -1 \\ x > 1. \end{array}\right.$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$.

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 33 (THPT Yên Khánh - Ninh Bình - 2019).

Tập nghiệm của bất phương trình $(2 - \sqrt{3})^{x^2+4x-14} \geq 7 + 4\sqrt{3}$ là

Ⓐ $[-6; 2]$. Ⓑ $(-\infty - 6] \cup [2; +\infty)$.

Ⓒ $(-6; 2)$. Ⓓ $(-\infty; -6) \cup (2; +\infty)$.

Lời giải.

Ta có $7+4\sqrt{3} = (2+\sqrt{3})^2$, $(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3}) = 1$ và $2+\sqrt{3} = (2-\sqrt{3})^{-1} \Rightarrow 7+4\sqrt{3} = (2-\sqrt{3})^{-2}$.
Khi đó

$$\begin{aligned} & (2 - \sqrt{3})^{x^2+4x-14} \geq 7 + 4\sqrt{3} \Leftrightarrow (2 - \sqrt{3})^{x^2+4x-14} \geq (2 - \sqrt{3})^{-2} \\ \Leftrightarrow\ & x^2 + 4x - 14 \leq -2 \Leftrightarrow x^2 + 4x - 12 \leq 0 \Leftrightarrow -6 \leq x \leq 2. \end{aligned}$$

Vậy bất phương trình đã cho có tập nghiệm $[-6; 2]$.

Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 34 (Chuyên Bắc Giang 2019). Tìm số nghiệm nguyên của bất phương trình $6^x + 4 \leq 2^{x+1} + 2 \cdot 3^x$

Ⓐ 2. Ⓑ 3. Ⓒ 1. Ⓓ 0.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} & 6^x + 4 \leq 2^{x+1} + 2 \cdot 3^x \Leftrightarrow 6^x + 4 - 2 \cdot 2^x - 2 \cdot 3^x \leq 0 \\ \Leftrightarrow\ & 2^x\left(3^x - 2\right) + 2\left(2 - 3^x\right) \leq 0 \\ \Leftrightarrow\ & \left(3^x - 2\right)\left(2^x - 2\right) \leq 0 \\ \Rightarrow\ & x \in [\log_3 2; 1]. \end{aligned}$$

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 35 (Chuyên Thái Bình 2019). Tập nghiệm của bất phương trình $3^{x^2-9} + (x^2 - 9) \cdot 5^{x+1} < 1$ là khoảng $(a; b)$. Tính $b - a$

Ⓐ 6. Ⓑ 3. Ⓒ 8. Ⓓ 4.

Lời giải.

$3^{x^2-9}+(x^2-9)\cdot 5^{x+1}<1 \quad (1)$. Ta có $5^{x+1}>0\,\forall x$.

- Xét $x^2-9=0$, VT $(1)=3^{\circ}+0=1$ (loại).
- Xét $x^2-9>0 \Rightarrow \begin{cases} 3^{x^2-9}>3^0=1 \\ (x^2-9)\cdot 5^{x+1}>0 \end{cases} \Rightarrow$ VT $(1)>1$ (loại).
- Xét $x^2-9<0 \Rightarrow \begin{cases} 3^{x^2-9}<3^0=1 \\ (x^2-9)\cdot 5^{x+1}<0 \end{cases} \Rightarrow$ VT $(1)<1$ luôn đúng.

Có $x^2-9<0 \Leftrightarrow x\in(-3;3)$. $\Rightarrow$ Tập nghiệm của bất phương trình là $(-3;3) \Rightarrow b-a=6$.

Chọn đáp án A □

Câu 36 (Hsg Bắc Ninh 2019). Bất phương trình $\dfrac{\sqrt{2+3^{2x}}}{\sqrt{2+3^{2x}}-\sqrt{2-3^{2x}}}+\dfrac{3^{4x}+\sqrt{4-3^{4x}}-7}{3^{2x}} \geq \dfrac{3^{2x}-2}{\sqrt{4-3^{4x}}-2+3^{2x}}$ có bao nhiêu nghiệm?

A. Vô số. B. 1. C. 2. D. 3.

Lời giải.

Đặt $t=3^{2x}>0$, bất phương trình đã cho trở thành:

$$\frac{\sqrt{2+t}}{\sqrt{2+t}-\sqrt{2-t}}+\frac{t^2+\sqrt{4-t^2}-7}{t} \geq \frac{t-2}{\sqrt{4-t^2}-2+t} \quad (1).$$

Điều kiện: $0<t<2$.

$$(1) \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2+t}\left(\sqrt{2+t}+\sqrt{2-t}\right)}{2t}+\frac{t^2+\sqrt{4-t^2}-7}{t} \geq \frac{t-2}{\sqrt{4-t^2}-2+t}$$

$$\Leftrightarrow \frac{t+3\sqrt{4-t^2}+2t^2-12}{2t} \geq \frac{t-2}{\sqrt{4-t^2}-2+t} \Leftrightarrow \frac{t+3\sqrt{4-t^2}+2t^2-12}{2t} \geq \frac{(t-2)\left(\sqrt{4-t^2}+2-t\right)}{-2t^2+4t}$$

$$\Leftrightarrow t+3\sqrt{4-t^2}+2t^2-12 \geq -\sqrt{4-t^2}-2+t \Leftrightarrow 4\sqrt{4-t^2}+2t^2-10 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{4-t^2}-1\right)^2 \leq 0 \Leftrightarrow t=\sqrt{3}.\ \text{Với } t=\sqrt{3} \Rightarrow 3^{2x}=\sqrt{3} \Leftrightarrow x=\frac{1}{4}.$$

Vậy bất phương trình có 1 nghiệm duy nhất.

Chọn đáp án B □

Câu 37 (KTNL GV Thpt Lý Thái Tổ 2019).

Số nghiệm nguyên thuộc đoạn $[-20;20]$ của bất phương trình: $2^{2x+1}-9\cdot 2^x+4\sqrt{x^2+2x-3} \geq 0$ là

A. 38. B. 36. C. 37. D. 19.

Lời giải.

Điều kiện: $x^2+2x-3 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -3$ hoặc $x \geq 1$.

Vì x là số nguyên thuộc đoạn $[-20;20]$ nên ta xét các trường hợp sau:

- $3 \leq x \leq 20$, khi đó dễ thấy $2^{2x+1}-9\cdot 2^x=2^x\left(2^{x+1}-9\right)>0$ nên $2^{2x+1}-9\cdot 2^x+4\sqrt{x^2+2x-3} \geq 0$, do đó trên $[3;20]$ bất phương trình có 18 nghiệm nguyên.
- $x=2$ thay trực tiếp vào bất phương trình ta có: $4\sqrt{5}-4 \geq 0$ (đúng). Do đó $x=2$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

- $x = 1$ thay trực tiếp vào bất phương trình ta có: $-10 \geq 0$ (sai). Do đó $x = 1$ không thỏa mãn yêu cầu bài toán.

- $-20 \leq x \leq -4$. Khi đó, xét hàm số: $f(x) = x^2 + 2x - 3$, dễ thấy $\min\limits_{[-20;-4]} f(x) = f(-4) = 5$ nên $4\sqrt{x^2 + 2x - 3} \geq 4\sqrt{5}, \forall x \in [-20; -4]$. (a)
Mặt khác, đặt $t = 2^x$, khi đó $2^{2x+1} - 9 \cdot 2^x = 2t^2 - 9t$, $-20 \leq x \leq -4 \Rightarrow 2^{-20} \leq t \leq 2^{-4}$.
Khi đó xét hàm số $g(t) = 2t^2 - 9t$ với $2^{-20} \leq t \leq 2^{-4}$
Dễ thấy $\min\limits_{[2^{-20};2^{-4}]} g(t) = g\left(2^{-4}\right) = -\dfrac{71}{128}$. (b)
Từ $(a), (b)$ suy ra $\min\limits_{[-20;-4]} \left\{h(x) = 2^{2x+1} - 9 \cdot 2^x + 4\sqrt{x^2 + 2x - 3}\right\} = h(-4) = 4\sqrt{5} - \dfrac{71}{128} > 0$. Do đó bất phương trình đã cho nghiệm đúng với mọi $-20 \leq x \leq -4$, nên trên đoạn $[-20; -4]$ bất phương trình có 17 nghiệm nguyên.

- Trường hợp $x = -3$ thay trực tiếp vào bất phương trình ta thấy không thỏa mãn.

Vậy số nghiệm nguyên của bất phương trình là 36.

Chọn đáp án B □

Câu 38 (Chuyên Thái Nguyên 2019).

Tập hợp tất cả các số thực x không thỏa mãn bất phương trình $9^{x^2-4} + (x^2 - 4) \cdot 2019^{x-2} \geq 1$ là khoảng $(a; b)$. Tính $b - a$.

A. 5. B. 4. C. -5. D. -1.

Lời giải.

Xét hai trường hợp: $x^2 - 4 \geq 0$ và $x^2 - 4 < 0$.

- $x^2 - 4 \geq 0$. Khi đó ta có: $\begin{cases} 9^{x^2-4} \geq 9^\circ = 1 \\ (x^2 - 4) \cdot 2019^{x-2} \geq 0 \end{cases} \Rightarrow 9^{x^2-4} + (x^2 - 4)\, 2019^{x-2} \geq 1$.
Dấu $=$ xảy ra $\Leftrightarrow x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2$.

- $x^2 - 4 < 0 \Leftrightarrow -2 < x < 2$. Khi đó ta có:
$\begin{cases} 9^{x^2-4} < 9^\circ = 1 \\ (x^2 - 4) \cdot 2019^{x-2} < 0 \end{cases} \Rightarrow 9^{x^2-4} + (x^2 - 4)\, 2019^{x-2} < 1 \Rightarrow$ Bất phương trình vô nghiệm.

Vậy tập hợp tất cả các số thực x không thỏa mãn bất phương trình là $(-2; 2)$.

$\Rightarrow a = -2; b = 2 \Rightarrow b - a = 4$.

Chọn đáp án B □

Câu 39 (Chuyên Bắc Ninh - 2020). Có bao nhiêu giá trị nguyên của x trong đoạn $[0; 2020]$ thỏa mãn bất phương trình sau $16^x + 25^x + 36^x \leq 20^x + 24^x + 30^x$.

A. 3. B. 2000. C. 1. D. 1000.

Lời giải.

Ta có: $16^x+25^x+36^x \le 20^x+24^x+30^x \Leftrightarrow 4^{2x}+5^{2x}+6^{2x} \le 4^x\cdot 5^x+4^x\cdot 6^x+5^x\cdot 6^x$

$$\Leftrightarrow (4^x-5^x)^2+(4^x-6^x)^2+(5^x-6^x)^2 \le 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 4^x-5^x=0 \\ 4^x-6^x=0 \\ 5^x-6^x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\dfrac{4}{5}\right)^x=1 \\ \left(\dfrac{4}{6}\right)^x=1 \\ \left(\dfrac{5}{6}\right)^x=1 \end{cases} \Leftrightarrow x=0\in[0;2020].$$

Vậy có 1 giá trị nguyên của x trong đoạn $[0;2020]$ thỏa mãn bất phương trình.

Chọn đáp án C □

Câu 40 (Hải Hậu - Nam Định - 2020).

Tập nghiệm của bất phương trình $(3^{2x}-9)(3^x-\dfrac{1}{27})\sqrt{3^{x+1}-1} \le 0$ chứa bao nhiêu số nguyên?

A 2. B 3. C 4. D 5.

Lời giải.

Điều kiện $3^{x+1}-1 \ge 0 \Leftrightarrow 3^{x+1} \ge 1 \Leftrightarrow x \ge -1$.

Ta có $x=-1$ là một nghiệm của bất phương trình.

Với $x>-1$, bất phương trình tương đương với $(3^{2x}-9)(3^x-\dfrac{1}{27}) \le 0$.

Đặt $t=3^x>0$, ta có $(t^2-9)(t-\dfrac{1}{27}) \le 0 \Leftrightarrow (t-3)(t+3)(t-\dfrac{1}{27}) \le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t \le -3 \\ \dfrac{1}{27} \le t \le 3 \end{array}\right.$.

Kết hợp điều kiện $t=3^x>0$ ta được nghiệm $\dfrac{1}{27} \le t \le 3 \Leftrightarrow \dfrac{1}{27} \le 3^x \le 3 \Leftrightarrow -3 \le x \le 1$.

Kết hợp điều kiện $x>-1$ ta được $-1<x\le 1$ suy ra trường hợp này bất phương trình có 2 nghiệm nguyên.

Vậy bất phương trình đã cho có tất cả 3 nghiệm nguyên.

Chọn đáp án B □

Câu 41 (THPT Lương Văn Tụy - Ninh Bình - 2018).

Tập nghiệm của bất phương trình $9^x-2(x+5)\cdot 3^x+9(2x+1) \ge 0$ là

A $[0;1]\cup[2;+\infty)$. B $(-\infty;1]\cup[2;+\infty)$.

C $[1;2]$. D $(-\infty;0]\cup[2;+\infty)$.

Lời giải.

Đặt $3^x=t$, $t>0$.

Xét phương trình: $t^2-2(x+5)t+9(2x+1)=0$. (1)

Ta có $\Delta'=(x+5)^2-9(2x+1)=x^2-8x+16=(x-4)^2$ nên phương trình (1) luôn có nghiệm.

Nếu $x=4 \Rightarrow \Delta'=0$ thì phương trình (1) có nghiệm kép $t=x+5$.

Do đó bất phương trình đã cho trở thành $3^x \ge x+5$ (luôn đúng khi $x=4$).

Nếu $x\ne 4 \Rightarrow \Delta'>0$ thì phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $\left[\begin{array}{l} t=2x+1 \\ t=9. \end{array}\right.$

Xét các phương trình $3^x=9 \Leftrightarrow x=2$ (1) và $3^x=2x+1 \Leftrightarrow 3^x-2x-1=0$. (2)

Đặt $f(x)=3^x-2x-1$; ta có $f'(x)=3^x\ln 3-2$ là hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Lại có $f(0)=f(1)=0$ và $f'(0)<0$, $f'(1)>0$ nên $f'(x)$ đổi dấu một lần duy nhất trong $[0;1]$.

Vậy phương trình (2) có đúng hai nghiệm $x=0$, $x=1$.

Lập bảng xét dấu cho (1) và (2):

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
3^x-9		$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	
3^x-2x-1		$+$	0	$-$	0	$+$	|	$+$	
VT		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Tập nghiệm của bất phương trình là $S=[0;1]\cup[2;+\infty)$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 42 (Toán Học Tuổi Trẻ Số 6). Tập nghiệm của bất phương trình $2.7^{x+2}+7\cdot 2^{x+2}\leq 351\cdot\sqrt{14^x}$ có dạng là đoạn $S=[a;b]$. Giá trị $b-2a$ thuộc khoảng nào dưới đây?

(A) $\left(3;\sqrt{10}\right)$. (B) $(-4;2)$. (C) $\left(\sqrt{7};4\sqrt{10}\right)$. (D) $\left(\dfrac{2}{9};\dfrac{49}{5}\right)$.

Lời giải.

$2.7^{x+2}+7\cdot 2^{x+2}\leq 351\cdot\sqrt{14^x}\Leftrightarrow 49\cdot 7^x+28\cdot 2^x\leq 351\cdot\sqrt{14^x}\Leftrightarrow 49\cdot\sqrt{\dfrac{7^{2x}}{14^x}}+28\cdot\sqrt{\dfrac{2^{2x}}{14^x}}\leq 351$

$\Leftrightarrow 49\cdot\sqrt{\dfrac{7^x}{2^x}}+28\cdot\sqrt{\dfrac{2^x}{7^x}}\leq 351$. Đặt $t=\sqrt{\dfrac{7^x}{2^x}}, t>0$ thì bpt trở thành $49t+\dfrac{28}{t}\leq 351$

$\Leftrightarrow \dfrac{4}{49}\leq t\leq\dfrac{7}{2}\Rightarrow\dfrac{4}{49}\leq\sqrt{\dfrac{7^x}{2^x}}\leq\dfrac{7}{2}\Leftrightarrow -4\leq x\leq 2$. Khi đó $S=[-4;2]$.

Giá trị $b-2a=10\in\left(\sqrt{7};4\sqrt{10}\right)$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 43 (Chuyên ĐHSPHN - 2018). Cho $f(x)=\dfrac{1}{2}\cdot 5^{2x+1}$; $g(x)=5^x+4x\cdot\ln 5$. Tập nghiệm của bất phương trình $f'(x)>g'(x)$ là

(A) $x<0$. (B) $x>1$. (C) $0<x<1$. (D) $x>0$.

Lời giải.

Ta có $f'(x)=\dfrac{1}{2}\cdot 5^{2x+1}\cdot(2x+1)'\cdot\ln 5=5^{2x+1}\cdot\ln 5$.

Và: $g'(x)=5^x\cdot\ln 5+4\ln 5=(5^x+4)\ln 5$.

Do đó: $f'(x)>g'(x)\Leftrightarrow 5^{2x+1}\cdot\ln 5>(5^x+4)\ln 5\Leftrightarrow 5^{2x+1}>5^x+4\Leftrightarrow 5\cdot 5^{2x}-5^x-4>0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}5^x<-\dfrac{4}{5}(VN)\\5^x>1\end{array}\right.\Leftrightarrow 5^x>1\Leftrightarrow x>0$.

Vậy nghiệm của bất phương trình đã cho là $x>0$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 44 (THPT Kinh Môn - Hải Dương - 2018).

Bất phương trình $2.5^{x+2}+5\cdot 2^{x+2}\leq 133\cdot\sqrt{10^x}$ có tập nghiệm là $S=[a;b]$ thì biểu thức $A=1000b-4a+1$ có giá trị bằng

(A) 3992. (B) 4008. (C) 1004. (D) 2017.

Lời giải.

$2.5^{x+2}+5\cdot 2^{x+2} \leq 133\cdot\sqrt{10^x} \Leftrightarrow 50\cdot 5^x+20\cdot 2^x \leq 133\cdot\sqrt{10^x} \Leftrightarrow 50\cdot\left(\sqrt{\frac{5}{2}}\right)^x+20\cdot\left(\sqrt{\frac{2}{5}}\right)^x-133 \leq 0.$

Đặt $t=\left(\sqrt{\frac{5}{2}}\right)^x$, $t>0$, ta được bất phương trình: $50t^2-133t+20 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{4}{25} \leq t \leq \frac{5}{2}$.

Với $\frac{4}{25} \leq t \leq \frac{5}{2}$, ta có: $\frac{4}{25} \leq \left(\sqrt{\frac{5}{2}}\right)^x \leq \frac{5}{2} \Leftrightarrow -2 \leq \frac{x}{2} \leq 1 \Leftrightarrow -4 \leq x \leq 2$.

Tập nghiệm của bất phương trình là $S=[-4;2] \Rightarrow a=-4$, $b=2$.

$\Rightarrow A=1000b-4a+1=1000\cdot 2-4(-4)+1=2017$.

Chọn đáp án D □

Câu 45 (Chuyên Biên Hòa - Hà Nam 2022).

Tính tổng các nghiệm nguyên thuộc $[-5;10]$ của bất phương trình sau đây: $2^{x^2+x}\left(3x^2-6x+6\right) \geq 7x^2-29x+34$

(A) 54. (B) 40. (C) 55. (D) 41.

Lời giải.

Bất phương trình tương đương với: $2^{x^2+x-2}\left(12x^2-24x+24\right) \geq \left(7x^2-29x+34\right)$. (1)

Ta nhận thấy: $\left(12x^2-24x+24\right)-\left(7x^2-29x+34\right)=5x^2+5x-10=5\left(x^2+x-2\right)$ nên (1) trở thành: $2^{\frac{12x^2-24x+24}{5}}\left(12x^2-24x+24\right) \geq 2^{\frac{7x^2-29x+34}{5}}\left(7x^2-29x+34\right)$.

Xét hàm số $y=f(t)=t\cdot 2^{\frac{t}{5}}$ có $f'(t)=2^{\frac{t}{5}}+\frac{t}{5}2^{\frac{t}{5}}\ln 2>0$ với mọi số thực t nên suy ra hàm số $f(t)$ luôn đồng biến trên tức $12x^2-24x+24 \geq 7x^2-29x+34 \Leftrightarrow x^2+x-2 \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x \geq 1\\ x \leq -2\end{array}\right.$.

Mà $x \in [-5;10]$ nên $x \in [-5;-2] \cup [1;10]$. Suy ra tổng nghiệm nguyên của bất phương trình (1) là $S=\sum\limits_{k=-5}^{-2} X+\sum\limits_{k=1}^{10} X=41$.

Chọn đáp án D □

Dạng 3. Bất phương trình kết hợp mũ - logarit

Câu 46 (Mã 101 - 2021 Lần 1). Có bao nhiêu số nguyên x thảo mãn $\left(3^{x^2}-9^x\right)\left[\log_3(x+25)-3\right] \leq 0$?

(A) 24. (B) Vô số. (C) 26. (D) 25.

Lời giải.

Điều kiện: $x+25>0 \Leftrightarrow x>-25$.

Ta giải các phương trình:

$3^{x^2}=9^x \Leftrightarrow x^2=2x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\ x=2\end{array}\right.$.

$\log_3(x+25)=3 \Leftrightarrow x+25=27 \Leftrightarrow x=2$.

Ta có bảng xét dấu sau:

x	-25		0		2		$+\infty$
$3^{x^2}-9^x$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$\log_3(x+25)-3$		$-$	|	$-$	0	$+$	
VT		$-$	0	$+$	0	$+$	

Dựa vào bảng xét dấu, để $\left(3^{x^2}-9^x\right)[\log_3(x+25)-3]\le 0$ thì ta có
$\left[\begin{array}{l}-25<x\le 0\\ x=2\end{array}\right.\xrightarrow{x\in\mathbb{Z}}\left[\begin{array}{l}-24\le x\le 0\\ x=2\end{array}\right.$ có 26 giá trị nguyên của x thỏa mãn.

Chọn đáp án (C) □

Câu 47 (Mã 102 - 2021 Lần 1). Có bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn $\left(3^{x^2}-9^x\right)[\log_2(x+30)-5]\le 0$?

(A) 30. (B) Vô số. (C) 31. (D) 29.

Lời giải.

Xét hàm số: $f(x)=\left(3^{x^2}-9^x\right)[\log_2(x+30)-5]$, với $x>-30$.

Cho: $f(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3^{x^2}-9^x=0\\ \log_2(x+30)-5=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3^{x^2}=3^{2x}\\ x+30=2^5\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=2\end{array}\right.$.

Ta có bảng xét dấu như sau:

x	-30		0		2		$+\infty$
$3^{x^2}-9^x$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$\log_2(x+30)-5$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	

Suy ra $f(x)\le 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-30<x\le 0\\ x=2\end{array}\right.$.

Mặt khác $x\in\mathbb{Z}$ nên $x\in\{-29;-28;-27;\ldots\cdots;-2;-1;0;2\}$.

Vậy có 31 số nguyên x thỏa mãn.

Chọn đáp án (C) □

Câu 48 (Mã 104 - 2021 Lần 1). Có bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn $\left(2^{x^2}-4^x\right)[\log_3(x+25)-3]\le 0$?

(A) 24. (B) Vô số. (C) 25. (D) 26.

Lời giải.

Điều kiện: $x>-25$.

Xét $2^{x^2}-4^x=0\Leftrightarrow x^2-2x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=2\end{array}\right.$.

Xét $\log_3(x+25)=3\Leftrightarrow x+25=27\Leftrightarrow x=2$.

Ta có bảng xét dấu:

x	-25		0		2		$+\infty$
$2^{x^2}-4^x$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$\log_3(x+25)-3$		$-$	|	$-$	0	$+$	
VT		$-$	0	$+$	0	$+$	

Dựa vào bảng xét dấu ta có: BPT $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-25<x\leq 0\\ x=2\end{array}\right.$.

Vì x nguyên nên có 26 giá trị thỏa mãn bài toán.

Chọn đáp án (D) □

Câu 49 (Mã 103 - 2021 - Lần 1). Có bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn $\left(2^{x^2}-4^x\right)\left[\log_2(x+14)-4\right]\leq 0$?

(A) 14. (B) 13. (C) Vô số. (D) 15.

Lời giải.

Điều kiện: $x>-14$.

Bất phương trình tương đương: $\left(2^{x^2}-2^{2x}\right)\left[\log_2(x+14)-4\right]\leq 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}2^{x^2}-2^{2x}\geq 0\\ \log_2(x+14)-4\leq 0\end{cases}\\ \begin{cases}2^{x^2}-2^{2x}\leq 0\\ \log_2(x+14)-4\geq 0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}2^{x^2}\geq 2^{2x}\\ \log_2(x+14)\leq 4\end{cases}\\ \begin{cases}2^{x^2}\leq 2^{2x}\\ \log_2(x+14)\geq 4\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x^2\geq 2x\\ x+14\leq 16\end{cases}\\ \begin{cases}x^2\leq 2x\\ x+14\geq 16\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=2\\ x\leq 0\end{array}\right..$$

Kết hợp với điều kiện suy ra có 15 giá trị nguyên của x thỏa yêu cầu.

Chọn đáp án (D) □

Câu 50. Có bao nhiêu số nguyên x thoả mãn $\sqrt{3^{x^2+2}-27}\left[-\log_3\left(10-3^{x+1}\right)+1-x\right]\geq 0$?

(A) 4. (B) 3. (C) 2. (D) 1.

Lời giải.

Điều kiện: $\begin{cases}10-3^{x+1}>0\Leftrightarrow 3\cdot 3^x<10\Leftrightarrow x<\log_3\dfrac{10}{3}\\ 3^{2x^2+2}-27\geq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x<\log_3\dfrac{10}{3}\\ \left[\begin{array}{l}x\geq\dfrac{\sqrt{2}}{2}\\ x\leq-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x\leq-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}\leq x<\log_3\dfrac{10}{3}\end{array}\right..$

Trường hợp 1: $3^{2x^2+2}-27=0\Leftrightarrow x=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ không thỏa mãn.

Trường hợp 2: $3^{2x^2+2}-27>0$, bất phương trình tương đương

$10-3^{x+1}\geq 3^{1-x}\Leftrightarrow 3\cdot 3^x+\dfrac{3}{3^x}-10\leq 0\Leftrightarrow -1\leq x\leq 1$

Kết hợp điều kiện $\Rightarrow \left[\begin{array}{l}-1\leq x<-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}<x\leq 1\end{array}\right.$.

Mà $x\in\mathbb{Z}\Rightarrow x\in\{-1;1\}$. Vậy có 2 giá trị thỏa mãn.

Chọn đáp án (C) □

Câu 51. Có bao nhiêu số nguyên dương x thỏa mãn $\left(4^x - 2^{x^3+2}\right) \cdot [\log_3(2x+2) - 2] \geq 0$?

(A) 3. (B) 5. (C) 6. (D) 4.

Lời giải.

Xét bất phương trình: $\left(4^x - 2^{x^3+2}\right) \cdot [\log_3(2x+2) - 2] \geq 0$ (1).

Điều kiện: $2x+2>0 \Leftrightarrow x>-1$.

Ta giải các phương trình:

$$4^x - 2^{x^3+2} = 0 \Leftrightarrow x^3+2 = 2x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} \\ x=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \end{array}\right. \text{(loại do điều kiện).}$$

$\log_3(2x+2) - 2 = 0 \Leftrightarrow 2x+2 = 9 \Leftrightarrow x = \dfrac{7}{2}$.

Ta có bảng xét dấu sau:

x	-1		$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$		1		$\frac{7}{2}$		$+\infty$
$4^x - 2^{x^3+2}$		$-$	0	$+$	0	$-$	|	$-$	
$\log_3(2x+2)-2$		$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	
$VT(1)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Dựa vào bảng xét dấu, để $\left(4^x - 2^{x^3+2}\right) \cdot [\log_3(2x+2) - 2] \geq 0$ thì ta có

$$\left[\begin{array}{l} -1 < x \leq \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ 1 \leq x \leq \dfrac{7}{2} \end{array}\right. \xrightarrow{x\in\mathbb{Z}^+} x=1, x=2, x=3.$$ Vậy có 3 giá trị nguyên dương thỏa mãn.

Chọn đáp án (A) □

Câu 52. Có bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn $\sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(x+3)+2} \cdot \left(3^{x^3} - 3^{-x} \cdot 9^{4-3x}\right) < 0$?

(A) 10. (B) 4. (C) 3. (D) 12.

Lời giải.

$$\sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(x+3)+2} \cdot \left(3^{x^3} - 3^{-x} \cdot 9^{4-3x}\right) < 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_{\frac{1}{2}}(x+3)+2>0 \\ 3^{x^3} - 3^{-x}\cdot 9^{4-3x} < 0 \\ x>-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+3<4 \\ 3^{x^3} < 3^{-x+8-6x} \\ x>-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<1 \\ x^3 < -7x+8 \\ x>-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<1 \\ x^3+7x-8<0 \\ x>-3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x<1 \\ x>-3 \end{cases} \Leftrightarrow -3<x<1.$$

Vậy có 3 giá trị nguyên của x thỏa mãn.

Chọn đáp án (C) □

Câu 53 (THPT Triệu Sơn - Thanh Hóa - 2021).

Có bao nhiêu số nguyên dương y sao cho ứng với mỗi số y có không quá 5 số nguyên x thỏa mãn $\left(3^{2x+1}+2\cdot 3^x-1\right)\left(3^x-y\right)\le 0$

(A) 9. (B) 27. (C) 81. (D) 3.

Lời giải.

Ta có: $\left(3^{2x+1}+2\cdot 3^x-1\right)\left(3^x-y\right)\le 0 \Leftrightarrow \left[3\cdot\left(3^x\right)^2+2\cdot 3^x-1\right]\left(3^x-y\right)\le 0 \Leftrightarrow \left(3^x+1\right)\left(3\cdot 3^x-1\right)\left(3^x-y\right)\le$ $0 \Leftrightarrow \left(3^{x+1}-1\right)\left(3^x-y\right)\le 0$ (do $3^x+1>0,\forall x$).

TH1: $3^{x+1}-1\le 0 \Rightarrow x+1\le 0 \Leftrightarrow x\le -1$ ta có $3^x-y\ge 0\Rightarrow y\le 3^x\le 3^{-1}=\dfrac{1}{3}$ (vô lý vì y là số nguyên dương).

TH2: $3^{x+1}-1\ge 0 \Rightarrow x+1\ge 0 \Leftrightarrow x\ge -1$ ta có $3^x-y\le 0\Rightarrow y\ge 3^x\ge 3^{-1}=\dfrac{1}{3}$ (luôn đúng vì y là số nguyên dương).

Để ứng với mỗi số y có không quá 5 số nguyên x thỏa mãn bất phương trình nên nghiệm x chỉ nằm trong khoảng $\{-1;0;1;2;3\}\Rightarrow y\le 3^4=81$.

Vậy có 81 số nguyên dương y thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Chọn đáp án (C) □

Câu 54 (Cụm Ninh Bình – 2021). Có bao nhiêu số nguyên y sao cho bất phương trình $5^{-\log_3 y}+9x>\left(\dfrac{1}{125}\right)^x+\log_3 y^3$ nghiệm đúng với mọi $x\ge 3$?

(A) 19683. (B) 243. (C) 242. (D) 19682.

Lời giải.

Điều kiện: $y>0$.

$5^{-\log_3 y}+9x>\left(\dfrac{1}{125}\right)^x+\log_3 y^3 \Leftrightarrow 5^{-\log_3 y}+9x>5^{-3x}+3\log_3 y \Leftrightarrow 5^{-\log_3 y}-3\log_3 y>5^{-3x}-3\cdot 3x$.

Xét hàm số $f(t)=5^{-t}-3t$.

Ta có $f'(t)=-5^{-t}\cdot\ln 5-3<0,\forall t\ge 9$ nên hàm số $y=f(t)$ nghịch biến.

Từ giả thiết: $f(\log_3 y)>f(3x)\Leftrightarrow \log_3 y<3x\Leftrightarrow 0<y<27^x$ (*).

Bất phương trình (*) nghiệm đúng với mọi $x\ge 3$ khi $0<y<27^3=19683$.

Vì y nguyên nên $y\in\{1;2;3;\ldots 19682\}$.

Vậy có 19682 số nguyên y thỏa mãn đề bài.

Chọn đáp án (D) □

Câu 55 (THPT Đoàn Thượng - Hải Dương 2019).

Biết rằng bất phương trình $\log_2\left(5^x+2\right)+2\cdot\log_{\left(5^x+2\right)}2>3$ có tập nghiệm là $S=\left(\log_a b;+\infty\right)$, với a, b là các số nguyên dương nhỏ hơn 6 và $a\ne 1$. Tính $P=2a+3b$.

(A) $P=7$. (B) $P=11$. (C) $P=18$. (D) $P=16$.

Lời giải.

Đặt $\log_2(5^x+2)=t$. Do $5^x+2>2$ với mọi x nên $\log_2(5^x+2)>\log_2 2=1$ hay $t>1$.

Bất phương trình đã cho trở thành: $t+\dfrac{2}{t}>3\Leftrightarrow t^2-3t+2>0$ (do $t>1$) $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t<1\\ t>2.\end{array}\right.$

Đối chiếu với $t>1$ ta lấy $t>2$.

Khi đó $\log_2(5^x+2)>2\Leftrightarrow 5^x>2\Leftrightarrow x>\log_5 2$.

Vậy bất phương trình có nghiệm là $S=(\log_5 2;+\infty)$, ta có $a=5, b=2 \Rightarrow 2a+3b=16$.

Chọn đáp án (D) $\square$

Câu 56 (THPT Cẩm Bình Hà Tỉnh 2019).

Tập nghiệm của bất phương trình $\log_3\left(10-3^{x+1}\right) \geq 1-x$ chứa mấy số nguyên.

(A) 3. (B) 5. (C) 4. (D) Vô số.

Lời giải.

Ta có $\log_3\left(10-3^{x+1}\right) \geq 1-x \Leftrightarrow 10-3^{x+1} \geq 3^{1-x} \Leftrightarrow 3\cdot 3^x+\dfrac{3}{3^x}-10 \leq 0$ (*).

Giải (*) ta có $\dfrac{1}{3} \leq 3^x \leq 3 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$. Vậy có 3 số nguyên thuộc tập nghiệm của bất phương trình.

Chọn đáp án (A) $\square$

Câu 57.
Số nghiệm nguyên thuộc khoảng $(0;12)$ của bất phương trình $3^{x+\frac{1}{x}-1}-3^{2+\frac{11}{x}} \leq \log_2\sqrt{\dfrac{2x+11}{x^2+x+1}}$ là

(A) 7. (B) 8. (C) 5. (D) 11.

Lời giải.

Điều kiện $x>-\dfrac{11}{2}$ và $x \neq 0$.

Khi đó $3^{x+\frac{1}{x}-1}-3^{2+\frac{11}{x}} \leq \log_2\sqrt{\dfrac{2x+11}{x^2-x+1}} \Leftrightarrow 3^{x+\frac{1}{x}-1}-3^{2+\frac{11}{x}} \leq \dfrac{1}{2}\log_2\left(\dfrac{2x+11}{x^2-x+1}\right)$

$\Leftrightarrow 3^{x+\frac{1}{x}-1}-3^{2+\frac{11}{x}} \leq \dfrac{1}{2}\log_2\left(\dfrac{2+\dfrac{11}{x}}{x-1+\dfrac{1}{x}}\right) \Leftrightarrow 3^{x+\frac{1}{x}-1}+\dfrac{1}{2}\log_2\left(x-1+\dfrac{1}{x}\right) \leq 3^{2+\frac{11}{x}}+\dfrac{1}{2}\log_2\left(2+\dfrac{11}{x}\right)$.

Xét hàm số $f(t)=3^t+\dfrac{1}{2}\log_2 t$ với $t>0$. Khi đó $f'(t)=3^t\ln 3+\dfrac{1}{2t\ln 2}>0, \forall t>0$ nên hàm số đã cho đồng biến trên $(0;+\infty)$.

Do đó.

$f\left(x-1+\dfrac{1}{x}\right) \leq f\left(2+\dfrac{11}{x}\right) \Leftrightarrow x-1+\dfrac{1}{x} \leq 2+\dfrac{11}{x} \Leftrightarrow \dfrac{x^2-3x-10}{x} \leq 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\dfrac{11}{2};-2\right] \cup (0;5]$.

Vậy trên khoảng $(0;12)$ có 5 nghiệm nguyên thỏa yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án (C) $\square$

Câu 58 (Chuyên Lê Hồng Phong - Nam Định - 2021).

Số nghiệm nguyên của bất phương trình $\left(2^x+2^{4-x}-17\right)\sqrt{10-\log_2 x} \geq 0$ là

(A) 1021. (B) 7. (C) 1020. (D) 6.

Lời giải.

Điều kiện: $10-\log_2 x \geq 0 \Leftrightarrow 0<x \leq 2^{10}$.

Ta có: $\left(2^x+2^{4-x}-17\right)\sqrt{10-\log_2 x} \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{10-\log_2 x}=0\\ \begin{cases}\sqrt{10-\log_2 x}>0\\ 2^x+2^{4-x}-17 \geq 0\end{cases}\end{array}\right.$.

Nếu $10-\log_2 x=0 \Leftrightarrow \log_2 x=10 \Leftrightarrow x=2^{10}$.

Nếu $\begin{cases}\sqrt{10-\log_2 x}>0\\ 2^x+2^{4-x}-17\geq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}0<x<2^{10}\\ 2^{2x}-17\cdot 2^x+16\geq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}0<x<2^{10}\\ \left[\begin{array}{l}2^x\leq 1\\ 2^x\geq 16\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}0<x<2^{10}\\ \left[\begin{array}{l}x\leq 0\\ x\geq 4\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow 4\leq x<2^{10}.$

Do $x\in\mathbb{Z}\Rightarrow x\in\{4;5;6;\ldots;1024\}$. Vậy phương trình đã cho có 1021 nghiệm nguyên.

Chọn đáp án (A) □

Câu 59 (Đề minh họa 2022). Có bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn $(4^x-5\cdot 2^{x+2}+64)\sqrt{2-\log(4x)}\geq 0$?

(A) 22. (B) 25. (C) 23. (D) 24.

Lời giải.

Điều kiện: $\begin{cases}4x>0\\ 2-\log(4x)\geq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x>0\\ \log(4x)\leq 2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x>0\\ x\leq 25\end{cases} \Leftrightarrow 0<x\leq 25.$

Khi đó: $(4^x-5\cdot 2^{x+2}+64)\sqrt{2-\log(4x)}\geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2-\log(4x)=0\\ 4^x-5\cdot 2^{x+2}+64\geq 0\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\log(4x)=2\\ \left[\begin{array}{l}2^x\leq 4\\ 2^x\geq 16\end{array}\right.\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=25\\ x\leq 2\\ x\geq 4\end{array}\right.$. Kết hợp với điều kiện ta có: $\left[\begin{array}{l}0<x\leq 2\\ 4\leq x\leq 25.\end{array}\right.$

Vậy có 24 số nguyên thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Chọn đáp án (D) □

Câu 60 (THPT Lê Thánh Tông - HCM - 2022).

Số nghiệm nguyên của bất phương trình $(3^x+3^{6-x}-246)\sqrt{5-\ln(x+3)}\geq 0$ là

(A) 144. (B) 145. (C) 146. (D) 147.

Lời giải.

Điều kiện: $\begin{cases}x+3>0\\ 5-\ln(x+3)\geq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x>-3\\ \ln(x+3)\leq 5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x>-3\\ x+3\leq \mathrm{e}^5\end{cases} \Leftrightarrow -3<x\leq \mathrm{e}^5-3.$

Ta có: $(3^x+3^{6-x}-246)\sqrt{5-\ln(x+3)}\geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll}5-\ln(x+3)=0 & (1)\\ 3^x+3^{6-x}-246\geq 0 & (2).\end{array}\right.$

(1) $\Leftrightarrow \ln(x+3)=5 \Leftrightarrow x+3=\mathrm{e}^5 \Leftrightarrow x=\mathrm{e}^5-3$ (nhận).

(2) $\Leftrightarrow 3^x+\dfrac{729}{3^x}-246\geq 0 \Leftrightarrow 3^{2x}-246\cdot 3^x+729\geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}3^x\leq 3\\ 3^x\geq 3^5\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x\leq 1\\ x\geq 5.\end{array}\right.$

So với điều kiện, ta có các giá trị nguyên thoả mãn là $x\in\{-2;-1;0;1\}\cup\{5;6;\ldots;145\}$.

Vậy bất phương trình đã cho có 145 nghiệm nguyên.

Chọn đáp án (B) □

Câu 61 (THPT Phù Cừ - Hưng Yên - 2022).

Tổng các nghiệm nguyên của bất phương trình $\dfrac{\log_2(x^3)-\log_2^2(2x)+13}{1+\sqrt{8+(\sqrt{2})^{x-2}}}\geq 0$ là

(A) 16. (B) 8. (C) 36. (D) 136.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} x > 0 \\ 8 + (\sqrt{2})^{x-2} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 0..$

Với điều kiện suy ra bất phương trình: $\dfrac{\log_2(x^3) - \log_2^2(2x) + 13}{1 + \sqrt{8 + (\sqrt{2})^{x-2}}} \geq 0$

$\Leftrightarrow 3\log_2 x - (1 + \log_2 x)^2 + 13 \geq 0 \Leftrightarrow -(\log_2 x)^2 + \log_2 x + 12 \geq 0 \Leftrightarrow -3 \leq \log_2 x \leq 4 \Leftrightarrow \dfrac{1}{8} \leq x \leq 16$ (thoả mãn).

Vì $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \{1; 2; 3; \ldots; 16\}$.

Do đó tổng các nghiệm nguyên của bất phương trình là $1 + 2 + 3 + \ldots + 16 = 136$.

Chọn đáp án D □

Câu 62 (THPT Lương Tài 2 - Bắc Ninh - 2022).

Tập nghiệm của bất phương trình $(4^x - 65 \cdot 2^x + 64)\left[2 - \log_3(x + 3)\right] \geq 0$ có tất cả bao nhiêu số nguyên?

A. 2. B. 3. C. 4. D. Vô số.

Lời giải.

Điều kiện xác định: $x + 3 > 0 \Leftrightarrow x > -3$.

Ta có $(4^x - 65 \cdot 2^x + 64)\left[2 - \log_3(x + 3)\right] \geq 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 4^x - 65 \cdot 2^x + 64 > 0 \\ 2 - \log_3(x+3) > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 4^x - 65 \cdot 2^x + 64 < 0 \\ 2 - \log_3(x+3) < 0 \end{cases} \\ 4^x - 65 \cdot 2^x + 64 = 0 \\ 2 - \log_3(x+3) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \left[\begin{array}{l} 2^x < 1 \\ 2^x > 64 \end{array}\right. \\ \log_3(x+3) < 2 \end{cases} \\ \begin{cases} 1 < 2^x < 64 \\ \log_3(x+3) > 2 \end{cases} \\ \left[\begin{array}{l} 2^x = 1 \\ 2^x = 64 \end{array}\right. \\ \log_3(x+3) = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x < 0 \\ x > 6 \end{array}\right. \\ x < 6 \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < x < 6 \\ x > 6 \end{cases} \\ \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 6 \end{array}\right. \\ x = 6 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < 0 \\ x = 0 \\ x = 6 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \leq 0 \\ x = 6. \end{array}\right.$$

Kết hợp điều kiện ta có tập nghiệm của bất phương trình là $S = (-3; 0] \cup \{6\}$. Do đó có tất cả 4 số nguyên thoả mãn.

Chọn đáp án C □

Câu 63 (Chuyên Thái Bình 2022). Có bao nhiêu số nguyên x thoả mãn $\left[3^{2x} - 4 \cdot 3^{x+1} + 27\right] \cdot \left[\log_3(x + 1) + x - 3\right] \leq 0$?

A. 2. B. 4. C. 1. D. 3.

Lời giải.

Điều kiện: $x + 1 > 0 \Leftrightarrow x > -1$.

Ta có $[3^{2x}-4\cdot 3^{x+1}+27]\cdot[\log_3(x+1)+x-3]\le 0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}3^{2x}-4\cdot 3^{x+1}+27\ge 0\\ \log_3(x+1)+x-3\le 0\end{cases}(1)\\ \begin{cases}3^{2x}-4\cdot 3^{x+1}+27\le 0\\ \log_3(x+1)+x-3\ge 0\end{cases}(2).\end{array}\right.$

Giải hệ (1) ta có $\begin{cases}3^{2x}-4\cdot 3^{x+1}+27\ge 0\\ \log_3(x+1)+x-3\le 0.\end{cases}$

+) $3^{2x}-4\cdot 3^{x+1}+27\ge 0\Leftrightarrow (3^x)^2-12\cdot 3^x+27\ge 0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}3^x\ge 9\\ 3^x\le 3\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x\ge 2\\ x\le 1.\end{array}\right.$

Suy ra tập nghiệm $S_1=(-\infty;1]\cup[2;+\infty)$.

$\log_3(x+1)+x-3\le 0\Leftrightarrow \log_3(x+1)+(x+1)\le 4(3)$.

Xét hàm số $f(t)=\log_3 t+t\Rightarrow f'(t)=\dfrac{1}{t\cdot\ln 3}+1>0,\forall t>0$ nên hàm số $f(t)=\log_3 t+t$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

Từ $(3)\Leftrightarrow f(x+1)\le f(3)\Leftrightarrow x+1\le 3\Leftrightarrow x\le 2$ nên tập nghiệm $S_2=(-1;2]$.

Do đó tập nghiệm của hệ (1) là $S=S_1\cap S_2=(-1;1]\cup\{2\}$.

Giải hệ (2) ta có $\begin{cases}3^{2x}-4\cdot 3^{x+1}+27\le 0\\ \log_3(x+1)+x-3\ge 0.\end{cases}$

$3^{2x}-4\cdot 3^{x+1}+27\le 0\Leftrightarrow (3^x)^2-12\cdot 3^x+27\le 0\Leftrightarrow 3\le 3^x\le 9\Leftrightarrow 1\le x\le 2$.

Suy ra tập nghiệm $S_3=[1;2]$.

+) $\log_3(x+1)+x-3\ge 0\Leftrightarrow \log_3(x+1)+(x+1)\ge 4(4)$.

Xét hàm số $f(t)=\log_3 t+t\Rightarrow f'(t)=\dfrac{1}{t\cdot\ln 3}+1>0,\forall t>0$ nên hàm số $f(t)=\log_3 t+t$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

Từ $(4)\Leftrightarrow f(x+1)\ge f(3)\Leftrightarrow x+1\ge 3\Leftrightarrow x\ge 2$ nên tập nghiệm $S_4=[2;+\infty)$.

Do đó tập nghiệm của hệ (2) là $S=S_3\cap S_4=\{2\}$.

Kết luận: Bất phương trình có tập nghiệm $S=(-1;1]\cup\{2\}$.

Vậy bất phương trình có 3 nghiệm nguyên.

Chọn đáp án D □

Câu 64 (Sở Vĩnh Phúc 2022). Số nghiệm nguyên của bất phương trình $[1-\log_3(x+7)]\sqrt{2\cdot 4^{x+1}-17\cdot 2^x+2}\ge 0$ là

(A) 3. (B) 4. (C) 6. (D) 5.

Lời giải.

Điều kiện: $\begin{cases}x+7>0\\ 2\cdot 4^{x+1}-17\cdot 2^x+2\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}x+7>0\\ 8\cdot 2^{2x}-17\cdot 2^x+2\ge 0\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}x+7>0\\ (2^x-2)(8\cdot 2^x-1)\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-7<x\le -3\\ x\ge 1\end{array}\right.(*)$.

Nếu $2.4^{x+1}-17\cdot 2^x+2=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-3\\ x=1\end{array}\right.$ (thỏa mãn (*)).

Trường hợp này bất phương trình có nghiệm $x \in \{-3; 1\}$.

Nếu $2.4^{x+1} - 17 \cdot 2^x + 2 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < -3 \\ x > 1. \end{array}\right.$

Bất phương trình đã cho $\Leftrightarrow 1 - \log_3(x+7) \geq 0 \Leftrightarrow \log_3(x+7) \leq 1 \Leftrightarrow -7 < x \leq -4$.

Do $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \{-6; -5; -4\}$.

Vậy cả 2 trường hợp ta được: $x \in \{-6; -5; -4; -3; -1\}$.

Chọn đáp án D □

Câu 65 (THPT Đồng Lộc - Hà Tĩnh 2022).

Số nghiệm nguyên của bất phương trình $(4 \cdot 3^x + 2^x - 6^x - 4)\left[\log(x+2) - 2\right] \geq 0$ là

A 97. B 99. C 100. D 2.

Lời giải.

Điều kiện: $x > -2$.

$(4 \cdot 3^x + 2^x - 6^x - 4)\left[\log(x+2) - 2\right] \geq 0$

$\Leftrightarrow \left[4\left(3^x - 1\right) - 2^x\left(3^x - 1\right)\right]\left[\log(x+2) - 2\right] \geq 0$

$\Leftrightarrow \left(3^x - 1\right)\left(4 - 2^x\right)\left[\log(x+2) - 2\right] \geq 0 \quad (1)$

Ta có bảng xét dấu:

x	-2		0		2		98		$+\infty$
$3^x - 1$		$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
$4 - 2^x$		$+$	|	$+$	0	$-$	|	$-$	
$\log(x+2) - 2$		$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	
$VT\,(1)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Từ bảng xét dấu ta có: $\left(3^x - 1\right)\left(4 - 2^x\right)\left[\log(x+2) - 2\right] \geq 0 \Leftrightarrow x \in (-2; 0] \cup [2; 98]$.

Mà $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \{-1; 0; 2; 3; 4; \ldots; 97; 98\}$.

Vậy số nghiệm nguyên của bất phương trình đã cho là 99.

Chọn đáp án B □

Câu 66 (THPT Ninh Bình - Bạc Liêu 2022).

Có bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn $\left[\log_2\left(x^2+1\right) - \log_2(x+31)\right]\left(32 - 2^{x-1}\right) \geq 0$?

A 28. B 27. C Vô số. D 26.

Lời giải.

Điều kiện: $x > -31$.

$$\left[\log_2\left(x^2+1\right) - \log_2(x+31)\right]\left(32 - 2^{x-1}\right) \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \log_2\left(x^2+1\right) - \log_2(x+31) \geq 0 \\ 32 - 2^{x-1} \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} \log_2\left(x^2+1\right) - \log_2(x+31) \leq 0 \\ 32 - 2^{x-1} \leq 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\log_2\left(x^2+1\right)\geq\log_2(x+31)\\ 2^{x-1}\leq 32\end{cases}\\ \begin{cases}\log_2\left(x^2+1\right)\leq\log_2(x+31)\\ 2^{x-1}\geq 32\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x^2+1\geq x+31\\ x-1\leq 5\end{cases}\\ \begin{cases}x^2+1\leq x+31\\ x-1\geq 5\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x\leq -5\\ x\geq 6\end{array}\right.\\ x\leq 6\end{cases}\\ \begin{cases}-5\leq x\leq 6\\ x\geq 6\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}x\leq -5\\ x=6\end{array}\right.\\ x=6\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x\leq -5\\ x=6\end{array}\right..$$

Đối chiếu điều kiện ta được $\left[\begin{array}{l}-31<x\leq -5\\ x=6\end{array}\right.$. Vì $x\in\mathbb{Z}$ nên $x\in\{-30;-29;\ldots;-4;-5;6\}$.

Vậy có 27 số nguyên x thỏa mãn đề bài.

Chọn đáp án B □

Câu 67 (Chuyên Phan Bội Châu – Nghệ An 2022).

Số nghiệm nguyên của bất phương trình $\left(3^{x^2-1}-27^{x+1}\right)(\log_3(x+8)-2)\leq 0$ là

A 11. B 12. C 6. D Vô số.

Lời giải.

Điều kiện: $x+8>0\Leftrightarrow x>-8$.

Ta có: $\left(3^{x^2-1}-27^{x+1}\right)(\log_3(x+8)-2)\leq 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}3^{x^2-1}-27^{x+1}\geq 0\\ log_3(x+8)-2\leq 0\end{cases}\vee\begin{cases}3^{x^2-1}-27^{x+1}\leq 0\\ \log_3(x+8)-2\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3^{x^2-1}\geq 3^{3x+3}\\ log_3(x+8)\leq 2\end{cases}\vee\begin{cases}3^{x^2-1}\leq 3^{3x+3}\\ \log_3(x+8)\geq 2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-1\geq 3x+3\\ x+8\leq 9\\ x+8>0\end{cases}\vee\begin{cases}x^2-1\leq 3x+3\\ x+8\geq 9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-3x-4\geq 0\\ x\leq 1\\ x>-8\end{cases}\vee\begin{cases}x^2-3x-4\leq 0\\ x\geq 1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\leq -1\vee x\geq 4\\ -8<x\leq 1\end{cases}\vee\begin{cases}-1\leq x\leq 4\\ x\geq 1\end{cases}\Leftrightarrow -8<x\leq -1\vee 1\leq x\leq 4.$$

Mà $x\in\mathbb{Z}$. Nên $S=\{-7;-6;\ldots;-1;1;2;3;4\}$.

Bất phương trình có 11 nghiệm nguyên.

Chọn đáp án A □

Câu 68 (THPT Ngũ Hành Sơn - Đà Nẵng 2022).

Tổng các nghiệm nguyên thuộc đoạn $[-10;10]$ của bất phương trình
$\left(1+\sqrt{10}\right)^{\log_3(x+9)}-\dfrac{5}{3}\left(-1+\sqrt{10}\right)^{\log_3(x+9)}\geq -\dfrac{2}{3}x-6$ là

Ⓐ 21. Ⓑ 45. Ⓒ 55. Ⓓ 19.

Lời giải.

Điều kiện: $x+9>0$.

$$\begin{aligned}
BPT \Leftrightarrow\ & \left(1+\sqrt{10}\right)^{\log_3(x+9)}-\frac{5}{3}\left(-1+\sqrt{10}\right)^{\log_3(x+9)} \geq -\frac{2}{3}x-6\\
\Leftrightarrow\ & \left(1+\sqrt{10}\right)^{\log_3(x+9)}-\frac{5}{3}\left(\frac{9}{1+\sqrt{10}}\right)^{\log_3(x+9)} \geq -\frac{2}{3}(x+9)\\
\Leftrightarrow\ & \left(1+\sqrt{10}\right)^{\log_3(x+9)}-\frac{5}{3}\frac{(x+9)^2}{\left(1+\sqrt{10}\right)^{\log_3(x+9)}} \geq -\frac{2}{3}(x+9)\\
\Leftrightarrow\ & 3\left(1+\sqrt{10}\right)^{2\log_3(x+9)}-5(x+9)^2 \geq -2(x+9)\left(1+\sqrt{10}\right)^{\log_3(x+9)}\ \left(do\ \left(1+\sqrt{10}\right)^{\log_3(x+9)}>0\right)\\
\Leftrightarrow\ & 3\left(1+\sqrt{10}\right)^{2\log_3(x+9)}+2(x+9)\left(1+\sqrt{10}\right)^{\log_3(x+9)}-5(x+9)^2 \geq 0.
\end{aligned}$$

Đặt $t=\left(1+\sqrt{10}\right)^{\log_3(x+9)}>0$.

Ta có BPT trở thành $3t^2+2(x+9)t-5(x+9)^2 \geq 0 \Leftrightarrow [t-(x+9)][3t+5(x+9)] \geq 0$

$\Leftrightarrow t-(x+9) \geq 0 \left(\text{Vì: } \begin{cases} t>0 \\ x+9>0 \end{cases}\right)$

$\Leftrightarrow t \geq x+9$.

Khi đó, $t=\left(1+\sqrt{10}\right)^{\log_3(x+9)} \geq x+9 \Leftrightarrow \log_3\left(1+\sqrt{10}\right)\cdot\log_3(x+9) \geq \log_3(x+9)$

$\Leftrightarrow \log_3(x+9)\left[\log_3\left(1+\sqrt{10}\right)-1\right] \geq 0 \Leftrightarrow \log_3(x+9) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -8$ mà $x \in [-10;10], x\in\mathbb{Z}$

$\Rightarrow x \in \{-8;-7;\ldots;0;1;2;\ldots;8,9,10\}$.

Vậy tổng các nghiệm nguyên thuộc đoạn $[-10;10]$ của bất phương trình đã cho là 19.

Chọn đáp án Ⓓ □

BẢNG ĐÁP ÁN

1. B	2. B	3. D	4. D	5. B	6. C	7. D	8. C	9. A	10. A
11. C	12. C	13. B	14. A	15. B	16. B	17. D	18. D	19. D	20. B
21. B	22. A	23. C	24. D	25. C	26. C	27. B	28. A	29. D	30. B
31. C	32. C	33. A	34. C	35. A	36. B	37. B	38. B	39. C	40. B
41. A	42. C	43. D	44. D	45. D	46. C	47. C	48. D	49. D	50. C
51. A	52. C	53. C	54. D	55. D	56. A	57. C	58. A	59. D	60. B
	61. D	62. C	63. D	64. D	65. B	66. B	67. A	68. D	

MỨC ĐỘ 3. MỨC ĐỘ 9,10 ĐIỂM

Dạng 1. Bất phương trình logarit chứa tham số

Câu 1 (Chuyên Lam Sơn Thanh Hóa 2019).

Cho a là số thực dương, $a\neq 1$. Biết bất phương trình $2\log_a x \leq x-1$ nghiệm đúng với mọi $x>0$. Số a thuộc tập hợp nào sau đây?

Ⓐ $(7;8)$. Ⓑ $(3;5]$. Ⓒ $(2;3)$. Ⓓ $(8;+\infty)$.

Lời giải.

Ta có với $x=1$ thì $2\log_a 1 = 0 = 1-1$.

Ta sẽ tìm a để đường thẳng $y=x-1$ nhận làm tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=2\log_a x$ tại điểm $x=1$.

Có $y' = \dfrac{2}{x\ln a} \Rightarrow y'(1) = \dfrac{2}{\ln a}$.

Phương trình tiếp tuyến $y=\dfrac{2}{\ln a}(x-1)$.

Vậy để đường thẳng $y=x-1$ nhận làm tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=2\log_a x$ thì $\dfrac{2}{\ln a}=1 \Leftrightarrow \ln a = 2 \Leftrightarrow a = \mathrm{e}^2$.

Thử lại $a=\mathrm{e}^2$ ta sẽ chứng minh $\begin{aligned}&2\log_{\mathrm{e}^2} x \le x-1 \Leftrightarrow \ln x \le x-1\\ &\Leftrightarrow f(x)=\ln x - x + 1 \le 0 \forall x>0.\end{aligned}$

Có $f'(x) = \dfrac{1}{x} - 1 = \dfrac{1-x}{x} \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Bảng biến thiên

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	0	$\searrow$	

Từ bảng biến thiên suy ra $f(x)\le 0 \Leftrightarrow \ln x \le x-1 \forall x>0$.

Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 2 (THPT Cẩm Giàng 2 2019). Cho a là số nguyên dương lớn nhất thỏa mãn $3\log_3\left(1+\sqrt{a}+\sqrt[3]{a}\right) > 2\log_2\sqrt{a}$. Giá trị của $\log_2(2017a)$ xấp xỉ bằng

Ⓐ 19. Ⓑ 26. Ⓒ 25. Ⓓ 23.

Lời giải.

Từ giả thiết $3\log_3\left(1+\sqrt{a}+\sqrt[3]{a}\right) > 2\log_2\sqrt{a}$.

Đặt $\log_2\sqrt{a} = 3x \Leftrightarrow a = 64^x$.

Ta được bất phương trình: $3\log_3\left(1+8^x+4^x\right) > 6x \Leftrightarrow 1+8^x+4^x > 9^x$

$\Leftrightarrow \left(\dfrac{1}{9}\right)^x + \left(\dfrac{8}{9}\right)^x + \left(\dfrac{4}{9}\right)^x > 1$.

Đặt $f(x) = \left(\dfrac{1}{9}\right)^x + \left(\dfrac{8}{9}\right)^x + \left(\dfrac{4}{9}\right)^x$

$\Rightarrow f'(x) = \left(\dfrac{1}{9}\right)^x \ln\left(\dfrac{1}{9}\right) + \left(\dfrac{8}{9}\right)^x \ln\left(\dfrac{8}{9}\right) + \left(\dfrac{4}{9}\right)^x \ln\left(\dfrac{4}{9}\right) < 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Vậy $f(x)$ là hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$. Và ta lại có $f(2)=1$.

Từ $\left(\dfrac{1}{9}\right)^x + \left(\dfrac{8}{9}\right)^x + \left(\dfrac{4}{9}\right)^x > 1 \Leftrightarrow f(x) > f(2) \Leftrightarrow x < 2$.

Suy ra $a < 64^2 = 4096$ mà a là số nguyên dương lớn nhất thỏa mãn suy ra $a = 4095$.

Vậy $\log_2(2017a) = \log_2(2017\cdot 4095) \approx 22\cdot 97764311 \approx 23$.

Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 3 (Chuyên Hưng Yên 2019). Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $\log_{0,02}\left(\log_2\left(3^x+1\right)\right) > \log_{0,02} m$ có nghiệm với mọi $x \in (-\infty; 0)$

Ⓐ $m \geq 1$. Ⓑ $0 < m < 1$. Ⓒ $m > 1$. Ⓓ $m < 2$.

Lời giải.

Điều kiện:

Ta có $\log_{0,02}\left(\log_2\left(3^x+1\right)\right) > \log_{0,02} m, \forall x \in (-\infty; 0)$

$\Leftrightarrow \log_2\left(3^x+1\right) < m, \forall x \in (-\infty; 0)$

$\Leftrightarrow 3^x + 1 < 2^m, \forall x \in (-\infty; 0)$.

Xét hàm $f(x) = 3^x + 1$ trên $(-\infty; 0)$. Ta có $f'(x) = 3^x \cdot \ln 3 > 0, \forall x \in (-\infty; 0)$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	1	$\nearrow$	2

Để phương trình có nghiệm với mọi $x \in (-\infty; 0)$ ta phải có $2^m \geq 2 \Leftrightarrow m \geq 1$.

Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 4 (KTNL GV Thuận Thành 2 Bắc Ninh 2019).

Gọi S là tổng tất cả các giá trị nguyên của m để bất phương trình $\ln\left(7x^2+7\right) \geq \ln\left(mx^2+4x+m\right)$ nghiệm đúng với mọi x thuộc $\mathbb{R}$. Tính S.

Ⓐ $S = 14$. Ⓑ $S = 0$. Ⓒ $S = 12$. Ⓓ $S = 35$.

Lời giải.

Ta có:

$\ln\left(7x^2+7\right) \geq \ln\left(mx^2+4x+m\right) \Leftrightarrow \begin{cases} 7x^2+7 \geq mx^2+4x+m \\ mx^2+4x+m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (7-m)x^2-4x+7-m \geq 0(1) \\ mx^2+4x+m > 0(2). \end{cases}$

Bất phương trình đã cho đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$ khi và chỉ khi các bất phương trình $(1), (2)$ đúng với mọi.

$x \in \mathbb{R}$.

Xét $(7-m)x^2 - 4x + 7 - m \geq 0(1)$.

Khi $m = 7$ ta có (1) trở thành $-4x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 0$. Do đó $m = 7$ không thỏa mãn.

Khi $m \neq 7$ ta có (1) đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 7-m > 0 \\ \Delta' \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 7 \\ 4-(7-m)^2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 7 \\ m \leq 5 \vee m \geq 9 \end{cases} \Leftrightarrow m \leq 5(*)$.

Xét $mx^2 - 4x + m > 0(2)$.

Khi $m = 0$ ta có (2) trở thành $-4x > 0 \Leftrightarrow x < 0$. Do đó $m = 0$ không thỏa mãn.

Khi $m \neq 0$ ta có (2) đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ \Delta' < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ 4 - m^2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m < -2 \vee m > 2 \end{cases} \Leftrightarrow m > 2 (**)$.

Từ $(*)$ và $(**)$ ta có $2 < m \leq 5$. Do $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{3; 4; 5\}$. Từ đó $S = 3 + 4 + 5 = 12$.

Chọn đáp án C □

Câu 5 (Chuyên Bắc Giang 2019). Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để bất phương trình $\log_2(7x^2 + 7) \geq \log_2(mx^2 + 4x + m)$ nghiệm đúng với mọi x.

A 5. B 4. C 0. D 3.

Lời giải.

Cách 1.

Bất phương trình: $\log_2(7x^2 + 7) \geq \log_2(mx^2 + 4x + m) \Leftrightarrow \begin{cases} 7x^2 + 7 \geq mx^2 + 4x + m \\ mx^2 + 4x + m > 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = (m-7)x^2 + 4x + m - 7 \leq 0 \\ g(x) = mx^2 + 4x + m > 0. \end{cases}$

Bpt đã cho nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R} \\ g(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}. \end{cases}$

Trường hợp 1: $m = 7$.

$\begin{cases} f(x) \leq 0 \\ g(x) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x \leq 0 \\ 7x^2 + 4x + 7 > 0. \end{cases}$

Vậy $m = 7$ không thỏa yêu cầu bài toán.

Trường hợp 2: $m = 0$.

$\begin{cases} f(x) \leq 0 \\ g(x) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -7x^2 + 4x - 7 \leq 0 \\ 4x > 0. \end{cases}$

Vậy $m = 0$ không thỏa yêu cầu bài toán.

Trường hợp 3: $m \neq 0; m \neq 7$.

Khi đó: $\begin{cases} f(x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R} \\ g(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_f < 0 \\ \Delta'_f \leq 0 \\ a_g > 0 \\ \Delta'_g < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m - 7 < 0 \\ 4 - (m-7)^2 \leq 0 \\ m > 0 \\ 4 - m^2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 7 \\ m \leq 5 \vee m \geq 9 \\ m > 0 \\ m < -2 \vee m > 2 \end{cases} \Leftrightarrow 2 <$ $m \leq 5$.

Do $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{3; 4; 5\}$.

Cách 2.

$\log_2(7x^2 + 7) \geq \log_2(mx^2 + 4x + m) \Leftrightarrow \begin{cases} 7x^2 + 7 \geq mx^2 + 4x + m \\ mx^2 + 4x + m > 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (m-7)x^2 + 4x + m - 7 \leq 0 \\ mx^2 + 4x + m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x^2 - 4x + 7 \geq m(x^2 + 1) \\ m(x^2 + 1) > -4x \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{7x^2-4x+7}{x^2+1} \geq m \\ m > \dfrac{-4x}{x^2+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7+\dfrac{-4x}{x^2+1} \geq m \\ m > \dfrac{-4x}{x^2+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m-7 \leq \dfrac{-4x}{x^2+1} \\ m > \dfrac{-4x}{x^2+1} \end{cases} (*).$$

Xét hàm số $g(x) = \dfrac{-4x}{x^2+1}$ trên $\mathbb{R}$.

$g'(x) = \dfrac{-4(x^2+1)+4x(x^2+1)}{(x^2+1)^2} = \dfrac{4x^2-4}{(x^2+1)^2}$.

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=1. \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	0

Vậy đk $(*) \Leftrightarrow \begin{cases} m-7 \leq -2 \\ m > 2 \end{cases} \Leftrightarrow 2 < m \leq 5$.

Do $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{3; 4; 5\}$.

Chọn đáp án D □

Câu 6 (Chuyên Quang Trung Bình Phước 2019).

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(x-1) > \log_{\frac{1}{2}}(x^3+x-m)$ có nghiệm.

A. $m \leq 2$. B. $m \in \mathbb{R}$. C. $m < 2$. D. Không tồn tại m.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} x > 1 \\ x^3+x-m > 0. \end{cases}$

Phương trình tương đương.

$\log_{\frac{1}{2}}(x-1) > \log_{\frac{1}{2}}(x^3+x-m) \Leftrightarrow x-1 < x^3+x-m \Leftrightarrow x^3+1 > m$.

Khi đó ta có

$f(x) = x^3+1 > m, (x>1) \Leftrightarrow m < \min\limits_{(1;+\infty)} f(x)$.

Ta có

$f'(x) = 3x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \notin (1; +\infty)$.

Bảng biến thiên

x	1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	2	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên và đề bài hỏi "có nghiệm" nên ta chọn $m \in \mathbb{R}$.

Chọn đáp án A □

Câu 7 (THPT Chuyên Thái Bình - 2019).

Có tất cả bao nhiêu giá trị của tham số m để bất phương trình $\log_2(x^2+mx+m+2) \geq \log_2(x^2+2)$ nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$.

A 2. B 4. C 3. D 1.

Lời giải.

Ta thấy $x^2+2>0 \forall x \in \mathbb{R}$.

Do đó bất phương trình $\log_2(x^2+mx+m+2) \geq \log_2(x^2+2) \Leftrightarrow x^2+mx+m+2 \geq x^2+2 \Leftrightarrow mx+m \geq 0$.

Bất phương trình $\log_2(x^2+mx+m+2) \geq \log_2(x^2+2)$ nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$ khi và chỉ khi $mx+m \geq 0 \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow m=0$.

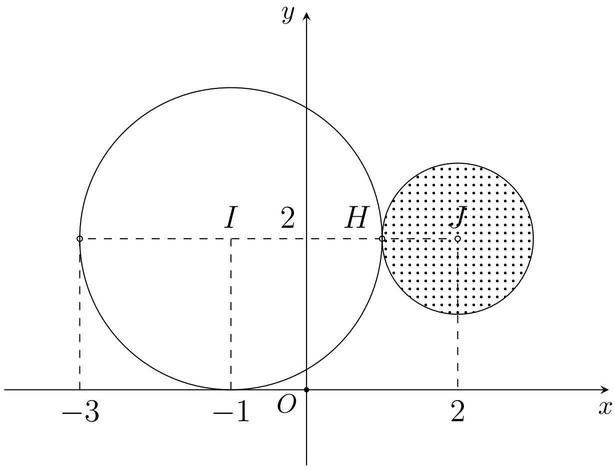
Chọn đáp án D □

Câu 8 (Chuyên Vĩnh Phúc - 2019). Tìm tập S tất cả các giá trị thực của số m để tồn tại duy nhất cặp số $(x;y)$ thỏa mãn $\log_{x^2+y^2+2}(4x+4y-6+m^2) \geq 1$ và $x^2+y^2+2x-4y+1=0$.

A $S=\{-5;-1;1;5\}$. B $S=\{-1;1\}$.

C $S=\{-5;5\}$. D $S=\{-7-5;-1;1;5;7\}$.

Lời giải.



Nhận thấy $x^2+y^2+2>1$ với mọi $x, y \in \mathbb{R}$ nên:

$\log_{x^2+y^2+2}(4x+4y-6+m^2) \geq 1 \Leftrightarrow 4x+4y-6+m^2 \geq x^2+y^2+2 \Leftrightarrow x^2+y^2-4x-4y+8-m^2 \leq 0 \Leftrightarrow (x-2)^2+(y-2)^2 \leq m^2$ (*).

Khi $m=0$ thì (*) $\Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases}$. Cặp $(2;2)$ không là nghiệm của phương trình $x^2+y^2+2x-4y+1=0$.

Khi $m \neq 0$, tập hợp các điểm $(x;y)$ thỏa mãn (*) là hình tròn tâm $J(2;2)$, bán kính là $|m|$. Trường hợp này, yêu cầu bài toán trở thành tìm m để đường tròn tâm $I(-1;2)$, bán kính 2 và hình tròn tâm $J(2;2)$, bán kính $|m|$ có đúng một điểm chung (hình vẽ).

Điều này xảy ra khi $\left[\begin{array}{l} |m|=1 \\ |m|=5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=\pm 1 \\ m=\pm 5 \end{array}\right.$ (thỏa mãn $m \neq 0$).

Vậy $S = \{-5; -1; 1; 5\}$.

Chọn đáp án A □

Câu 9 (Bình Giang-Hải Dương 2019).

Xét bất phương trình $\log_2^2(2x) - 2(m+1)\log_2 x - 2 < 0$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình có nghiệm thuộc khoảng $\left(\sqrt{2}; +\infty\right)$.

A $m \in \left(-\dfrac{3}{4}; 0\right)$.

B $m \in (0; +\infty)$.

C $m \in (-\infty; 0)$.

D $m = \in \left(-\dfrac{3}{4}; +\infty\right)$.

Lời giải.

Bất phương trình $\log_2^2(2x) - 2(m+1)\log_2 x - 2 < 0 \Leftrightarrow \log_2^2 x - 2m\log_2 x - 1 < 0(1)$.

Đặt $t = \log_2 x$, vì $x \in \left(\sqrt{2}; +\infty\right) \Rightarrow t \in \left(\dfrac{1}{2}; +\infty\right)$.

Bất phương trình trở thành $t^2 - 2mt - 1 < 0 \Leftrightarrow 2mt > t^2 - 1 \Leftrightarrow 2m > \dfrac{t^2-1}{t}(2)$.

Đặt $f(t) = \dfrac{t^2-1}{t}$ với $t \in \left(\dfrac{1}{2}; +\infty\right)$.

Bất phương trình (1) có nghiệm thuộc khoảng $\left(\sqrt{2}; +\infty\right)$ khi và chỉ khi bất phương trình (2) có nghiệm thuộc khoảng $\left(\dfrac{1}{2}; +\infty\right)$.

Ta có $f'(t) = 1 + \dfrac{1}{t^2} > 0 \forall t \in \left(\dfrac{1}{2}; +\infty\right)$.

Bảng biến thiên

t	$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(t)$		$+$	
$f(t)$	$-\frac{3}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra bất phương trình đã cho có nghiệm thuộc khoảng $\left(\sqrt{2}; +\infty\right)$ khi và chỉ khi $2m > -\dfrac{3}{2} \Leftrightarrow m > -\dfrac{3}{4}$.

Chọn đáp án D □

Câu 10. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình $m^2\left(x^5 - x^4\right) - m\left(x^4 - x^3\right) + x - \ln x - 1 \geq 0$ thỏa mãn với mọi $x > 0$. Tính tổng các giá trị trong tập hợp S.

A 2. B 0. C 1. D -2.

Lời giải.

Đặt $f(x) = m^2\left(x^5 - x^4\right) - m\left(x^4 - x^3\right) + x - \ln x - 1$. Ta có $f(x)$ liên tục, có đạo hàm trên $(0; +\infty)$ và $f'(x) = m^2\left(5x^4 - 4x^3\right) - m\left(4x^3 - 3x^2\right) + 1 - \dfrac{1}{x}$.

Bất phương trình đã cho viết thành $f(x) \geq 0$. Giả sử $y = f(x)$ có đồ thị là (C).

$f(x) \geq 0$ với mọi $x > 0$ khi và chỉ khi đồ thị (C) không nằm phía dưới trục Ox.

Mặt khác (C) và Ox có điểm chung là $A(1; 0)$. Nên điều kiện cần để đồ thị (C) không nằm phía dưới trục Ox là Ox tiếp xúc với (C) tại $A(1;0)$.

Suy ra, $f'(1)=0 \Leftrightarrow m^2-m \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=1. \end{array}\right.$

Với $m=0$ ta có bất phương trình đã cho trở thành $f(x)=x-\ln x-1\geq 0$.

$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=1$.

Bảng biến thiên của hàm số $f(x)$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

Dựa vào bảng biến thiên ta có $f(x)\geq 0, \forall x>0$. Suy ra $m=0$ thỏa mãn điều kiện.

Với $m=1$ ta có bất phương trình đã cho trở thành $f(x)=x^5-2x^4+x^3-\ln x+x-1\geq 0$.

$f'(x)=5x^4-8x^3+3x^2-\dfrac{1}{x}+1=\dfrac{5x^5-8x^4+3x^3+x-1}{x}=\dfrac{(x-1)\left(5x^4-3x^3+1\right)}{x}$.

Ta có $5x^4-3x^3+1=\left(2x^2-\dfrac{3}{4}x\right)^2+\left(x^2-\dfrac{9}{32}\right)^2+1-\left(\dfrac{9}{32}\right)^2>0$.

Suy ra $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=1$. Bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ như sau

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

Dựa vào bảng biến thiên ta có $f(x)\geq 0, \forall x>0$. Suy ra $m=1$ thỏa mãn điều kiện.

Vậy $S=\{0;1\}$.

Chọn đáp án C □

Câu 11 (Chuyên Thái Bình - 2020). Cho bất phương trình $\log_7\left(x^2+2x+2\right)+1>\log_7\left(x^2+6x+5+m\right.$ Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để bất phương trình có tập nghiệm chứa khoảng $(1;3)$?

A 36. B 34. C 35. D Vô số.

Lời giải.

Ta có

$\log_7\left(x^2+2x+2\right)+1>\log_7\left(x^2+6x+5+m\right), \forall x\in(1;3)$

$\Leftrightarrow \log_7\left(7x^2+14x+14\right)>\log_7\left(x^2+6x+5+m\right), \forall x\in(1;3)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+6x+5+m>0, \forall x\in(1;3) \\ 6x^2+8x+9>m, \forall x\in(1;3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>-\left(x^2+6x+5\right), \forall x\in(1;3)(1) \\ 6x^2+8x+9>m, \forall x\in(1;3)(2). \end{cases}$

Xét $g(x)=-\left(x^2+6x+5\right), x\in(1;3)$, có $g(x)=-(x+3)^2+4<-(1+3)^2+4=-12, \forall x\in(1;3)$.

Do đó (1) $\Leftrightarrow m \geq -12$.

Xét $h(x) = 6x^2 + 8x + 9, x \in (1;3)$, có $h(x) > 6 \cdot 1^2 + 8 \cdot 1 + 9 = 23, \forall x \in (1;3)$.

Do đó (2) $\Leftrightarrow m \leq 23$.

Do $m \in \mathbb{Z}$ và $m \in [-12;23]$ nên ta được tập các giá trị của m là $\{-12;-11;-10;\ldots;23\}$.

Vậy có tổng cộng 36 giá trị của m thỏa yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án A □

Câu 12 (Chuyên Bắc Ninh - 2020). Gọi m_0 là giá trị nhỏ nhất để bất phương trình.
$1 + \log_2(2-x) - 2\log_2\left(m - \frac{x}{2} + 4\left(\sqrt{2-x} + \sqrt{2x+2}\right)\right) \leq -\log_2(x+1)$ có nghiệm. Chọn đáp án đúng trong các khẳng định sau

A $m_0 \in (9;10)$. B $m_0 \in (8;9)$. C $m_0 \in (-10;-9)$. D $m_0 \in (-9;-8)$.

Lời giải.

Điều kiện xác định: $\begin{cases} -1 < x < 2 \\ m - \frac{x}{2} + 4\left(\sqrt{2-x} + \sqrt{2x+2}\right) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x < 2 \\ m > \frac{x}{2} - 4\left(\sqrt{2-x} + \sqrt{2x+2}\right) \end{cases} (*)$.

Với điều kiện trên bất phương trình:

$1 + \log_2(2-x) - 2\log_2\left(m - \frac{x}{2} + 4\left(\sqrt{2-x} + \sqrt{2x+2}\right)\right) \leq -\log_2(x+1)$

$\Leftrightarrow \log_2[2(2-x)(x+1)] \leq \log_2\left[m - \frac{x}{2} + 4\left(\sqrt{2-x} + \sqrt{2x+2}\right)\right]^2$

$\Leftrightarrow \sqrt{(2-x)(2x+2)} \leq m - \frac{x}{2} + 4\left(\sqrt{2-x} + \sqrt{2x+2}\right)$

$\Leftrightarrow m \geq \frac{x}{2} + \sqrt{(2-x)(2x+2)} - 4\left(\sqrt{2-x} + \sqrt{2x+2}\right)$ (1).

Ta thấy các nghiệm của (1) trong khoảng $(-1;2)$ luôn thỏa mãn $(*)$.

Đặt $t = \sqrt{2-x} + \sqrt{2x+2}, (t > 0)$ với $x \in (-1;2)$.

Xét $f(x) = \sqrt{2-x} + \sqrt{2x+2}$ với $x \in (-1;2)$.

$f'(x) = \frac{-1}{2\sqrt{2-x}} + \frac{1}{\sqrt{2x+2}} = \frac{2\sqrt{2-x} - \sqrt{2x+2}}{2\sqrt{(2-x)(2x+2)}}$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{2-x} = \sqrt{2x+2} \Leftrightarrow x = 1$.

Bảng biến thiên:

x	-1		1		2
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	‖
$f(x)$	$\sqrt{3}$	↗	3	↘	$\sqrt{6}$

Suy ra khi $x \in (-1;2)$ thì $t \in (\sqrt{3};3]$.

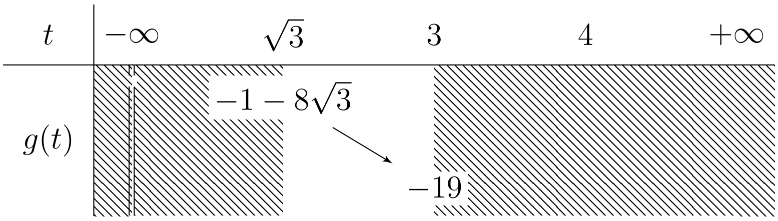
Ta có $t^2 = 4 + x + 2\sqrt{(2-x)(2x+2)} \Leftrightarrow \frac{x}{2} + \sqrt{(2-x)(2x+2)} = \frac{t^2-4}{2}$.

(1) trở thành $m \geq \frac{t^2-4}{2} - 4t \Leftrightarrow 2m \geq t^2 - 8t - 4(2)$.

(1) có nghiệm $x \in (-1;2) \Leftrightarrow$ (2) có nghiệm $t \in (\sqrt{3};3]$.

Xét hàm số $y = g(t) = t^2 - 8t - 4$ trên $(\sqrt{3};3]$.

Bảng biến thiên:



Do đó bất phương trình (2) có nghiệm $t \in (\sqrt{3}; 3]$ khi và chỉ khi $2m \geq -19 \Leftrightarrow m \geq -\dfrac{19}{2}$.

Suy ra $m_0 = -\dfrac{19}{2} \in (-10; -9)$.

Chọn đáp án C □

Câu 13 (Lương Thế Vinh - Hà Nội - 2020).

Gọi S là tập hợp tất cả các điểm $M(x; y)$ trong đó x, y là các số nguyên thoả mãn điều kiện $\log_{x^2+y^2+1}(2x+2y+m) \geq 1$, với m là tham số. Có bao nhiêu số nguyên m thuộc đoạn $[-2020; 2019]$ để tập S có không quá 5 phần tử?

A 1. B 2020. C 2021. D 2019.

Lời giải.

$\log_{x^2+y^2+1}(2x+2y+m) \geq 1 \Leftrightarrow 2x+2y+m \geq x^2+y^2+1$

$\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 \leq m+1$ Để bất phương trình có 5 phần tử thì $\sqrt{m+1} < \sqrt{2} \Leftrightarrow m < 1$.

Vậy có 2021 số nguyên m thuộc đoạn $[-2020; 2019]$ để tập S có không quá 5 phần tử.

Chọn đáp án C □

Câu 14 (Chuyên Thái Bình - Lần 3 - 2020).

Cho bất phương trình $\log_7(x^2+2x+2) + 1 > \log_7(x^2+6x+5+m)$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để bất phương trình trên có tập nghiệm chứa khoảng $(1; 3)$?

A 36. B 35. C 34. D Vô số.

Lời giải.

Điều kiện xác định $x^2+6x+5+m > 0$.

Khi đó $\log_7(x^2+2x+2)+1 > \log_7(x^2+6x+5+m) \Leftrightarrow \log_7(7x^2+14x+14) > \log_7(x^2+6x+5+m)$

$\Leftrightarrow 7x^2+14x+14 > x^2+6x+m+5$

$\Leftrightarrow 6x^2+8x+9-m > 0$.

Khi đó *ycbt* $\Leftrightarrow \begin{cases} 6x^2+8x+9-m > 0 \\ x^2+6x+5+m > 0 \end{cases}, \forall x \in (1; 3) \Leftrightarrow \begin{cases} 6 \cdot 1^2 + 8 + 9 - m \geq 0 \\ 1^2 + 6 + 5 + m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -12 \leq m \leq 23$.

Vậy có 36 giá trị nguyên của m thỏa *ycbt*.

Chọn đáp án A □

Câu 15. Xét bất phương trình $\log_2^2 2x - 2(m+1)\log_2 x - 2 < 0$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình có nghiệm thuộc khoảng $\left(\sqrt{2}; +\infty\right)$.

A $m \in (0; +\infty)$. B $m \in \left(-\dfrac{3}{4}; 0\right)$. C $m \in \left(-\dfrac{3}{4}; +\infty\right)$. D $m \in (-\infty; 0)$.

Lời giải.

Điều kiện: $x > 0$.

$\log_2^2 2x - 2(m+1)\log_2 x - 2 < 0$

$\Leftrightarrow (1+\log_2 x)^2 - 2(m+1)\log_2 x - 2 < 0(1)$.

Đặt $t = \log_2 x$. Vì $x > \sqrt{2}$ nên $\log_2 x > \log_2 \sqrt{2} = \dfrac{1}{2}$. Do đó $t \in \left(\dfrac{1}{2}; +\infty\right)$.

(1) thành $(1+t)^2 - 2(m+1)t - 2 < 0 \Leftrightarrow t^2 - 2mt - 1 < 0(2)$.

Cách 1: Yêu cầu bài toán tương đương tìm m để bpt (2) có nghiệm thuộc $\left(\dfrac{1}{2}; +\infty\right)$.

Xét bất phương trình (2) có: $\Delta' = m^2 + 1 > 0, \forall m \in \mathbb{R}$.

$f(t) = t^2 - 2mt - 1 = 0$ có $ac < 0$ nên (2) luôn có 2 nghiệm phân biệt $t_1 < 0 < t_2$.

Khi đó cần $\dfrac{1}{2} < t_2 \Leftrightarrow m + \sqrt{m^2+1} > \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow m > -\dfrac{3}{4}$.

Cách 2: $t^2 - 2mt - 1 < 0 \Leftrightarrow f(t) = \dfrac{t^2-1}{2t} < m \left(t > \dfrac{1}{2}\right)$.

Khảo sát hàm số $f(t)$ trong $(0; +\infty)$ ta được $m \in \left(-\dfrac{3}{4}; +\infty\right)$.

Chọn đáp án C □

Câu 16 (Chuyên Vinh - 2018). Gọi a là số thực lớn nhất để bất phương trình $x^2 - x + 2 + a\ln(x^2 - x + 1) \geq 0$ nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $a \in (2; 3]$. B. $a \in (8; +\infty)$. C. $a \in (6; 7]$. D. $a \in (-6; -5]$.

Lời giải.

Đặt $t = x^2 - x + 1 = \left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4}$ suy ra $t \geq \dfrac{3}{4}$.

Bất phương trình $x^2 - x + 2 + a\ln(x^2 - x + 1) \geq 0 \Leftrightarrow t + a\ln t + 1 \geq 0 \Leftrightarrow a\ln t \geq -t - 1$.

Trường hợp 1: $t = 1$ khi đó $a\ln t \geq -t - 1$ luôn đúng với mọi a.

Trường hợp 2: $\dfrac{3}{4} \leq t < 1$.

Ta có $a\ln t \geq -t - 1, \forall t \in \left[\dfrac{3}{4}; 1\right) \Leftrightarrow a \leq \dfrac{-t-1}{\ln t}, \forall t \in \left[\dfrac{3}{4}; 1\right)$.

Xét hàm số $f(t) = \dfrac{-t-1}{\ln t} \Rightarrow f'(t) = -\dfrac{\ln t - 1 - \dfrac{1}{t}}{\ln^2 t} \geq 0, \forall t \in \left[\dfrac{3}{4}; 1\right)$ do đó $a \leq \dfrac{-t-1}{\ln t}, \forall t \in \left[\dfrac{3}{4}; 1\right) \Leftrightarrow a \leq \dfrac{-7}{4\ln\dfrac{3}{4}}$.

Trường hợp 3: $t > 1$.

Ta có $a\ln t \geq -t - 1, \forall t \in (1; +\infty) \Leftrightarrow a \geq \dfrac{-t-1}{\ln t}, \forall t \in (1; +\infty)$.

Xét hàm số $f(t) = \dfrac{-t-1}{\ln t} \Rightarrow f'(t) = -\dfrac{\ln t - 1 - \dfrac{1}{t}}{\ln^2 t}, \forall t \in (1; +\infty)$.

Xét hàm số $g(t) = \ln t - 1 - \dfrac{1}{t} \Leftrightarrow g'(t) = \dfrac{1}{t} + \dfrac{1}{t^2} > 0$.

Vậy $g(t) = 0$ có tối đa một nghiệm.

Vì $g(1) = -2; \lim\limits_{t\to+\infty} g(t) = +\infty$ vậy $g(t) = 0$ có duy nhất một nghiệm trên $(1; +\infty)$.

Do đó $f'(t) = 0$ có duy nhất một nghiệm là t_0. Khi đó $\ln t_0 = \dfrac{t_0 + 1}{t_0}$ suy ra $f(t_0) = -t_0$.

Bảng biến thiên

t	1		t_0		$+\infty$
$f'(t)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(t)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	$-t_0$	$\searrow$	$-\infty$

Vậy $a \geq \dfrac{-t-1}{\ln t}, \forall t \in (1;+\infty) \Leftrightarrow a \geq -t_0$.

Vậy $-t_0 \leq a \leq \dfrac{-7}{4\ln\dfrac{3}{4}}$.

Vậy số thực a thỏa mãn yêu cầu bài toán là $a \in (6;7]$.

Chọn đáp án C □

Câu 17 (THPT Lê Xoay - 2018). Giả sử $S=(a,b]$ là tập nghiệm của bất phương trình $5x+\sqrt{6x^2+x^3-x^4}\log_2 x > (x^2-x)\log_2 x+5+5\sqrt{6+x-x^2}$. Khi đó $b-a$ bằng

A $\dfrac{1}{2}$. B $\dfrac{7}{2}$. C $\dfrac{5}{2}$. D 2.

Lời giải.

Điều kiện: $\begin{cases} x>0 \\ 6+x-x^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ -2 \leq x \leq 3. \end{cases}$

$\mathscr{D}=(0;3]$.

$5x+\sqrt{6x^2+x^3-x^4}\log_2 x > (x^2-x)\log_2 x+5+5\sqrt{6+x-x^2}$

$\Leftrightarrow 5x+x\sqrt{6+x-x^2}\log_2 x > x(x-1)\log_2 x+5+5\sqrt{6+x-x^2}$

$\Leftrightarrow (x-1)(5-x\log_2 x)+\sqrt{6+x-x^2}\,(x\log_2 x-5)>0$

$\Leftrightarrow (5-x\log_2 x)\left(x-1-\sqrt{6+x-x^2}\right)>0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 5-x\log_2 x>0 \\ x-1-\sqrt{6+x-x^2}>0 \end{cases} (I) \\ \begin{cases} 5-x\log_2 x<0 \\ x-1-\sqrt{6+x-x^2}<0 \end{cases} (II). \end{array}\right.$$

Giải hệ (I).

$\begin{cases} 5-x\log_2 x>0(1) \\ x-1-\sqrt{6+x-x^2}>0(2). \end{cases}$

Giải $(1) 5-x\log_2 x>0$.

Xét hàm số $f(x)=x\left(\dfrac{5}{x}-\log_2 x\right)=xg(x)$ với $x\in(0;3]$.

Ta có $g'(x)=-\dfrac{5}{x^2}-\dfrac{1}{x\ln 2}<0 \forall x\in(0;3]$.

Lập bảng biến thiên

x	0	3
$g'(x)$	$-$	
$g(x)$	$\searrow$	$\dfrac{5}{3}-\log_2 3$

Vậy $f(x)=x\left(\dfrac{5}{x}-\log_2 x\right)>0\forall x\in(0;3]$.

Xét bất phương trình (2): $\sqrt{6+x-x^2}<x-1 \Leftrightarrow \begin{cases}6+x-x^2<(x-1)^2\\ x>1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2x^2-3x-5>0\\ x>1\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x<-1\\ x>\dfrac{5}{2}\end{array}\right.\\ x>1\end{cases} \Leftrightarrow x>\dfrac{5}{2}.$

Vậy nghiệm của hệ (I) là $\mathscr{D}=\left(\dfrac{5}{2};3\right]$.

Hệ (II) vô nghiệm.

Vậy $S=\left(\dfrac{5}{2},3\right]$.

$b-a=3-\dfrac{5}{2}=\dfrac{1}{2}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 18 (Chuyên Hà Tĩnh - 2018). Cho bất phương trình $\log_7\left(x^2+2x+2\right)+1>\log_7\left(x^2+6x+5+m\right)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để bất phương trình trên có tập ngiệm chứa khoảng $(1;3)$?

(A) 35. (B) 36. (C) 34. (D) 33.

Lời giải.

$bpt \Leftrightarrow \begin{cases}x^2+6x+5+m>0\\ \log_7\left[7\left(x^2+2x+2\right)\right]>\log_7\left(x^2+6x+5+m\right)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m>-x^2-6x-5\\ 6x^2+8x+9>m\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}m>\max\limits_{(1;3)} f(x)\\ m<\min\limits_{(1;3)} g(x)\end{cases}$, với $f(x)=-x^2-6x-5$; $g(x)=6x^2+8x+9$.

Xét sự biến thiên của hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$.

$f'(x)=-2x-6<0, \forall x\in(1;3) \Rightarrow f(x)$ luôn nghịch biến trên khoảng $(1;3)$

$\Rightarrow \max\limits_{(1;3)} f(x)=f(1)=-12$.

$g'(x)=12x+8>0, \forall x\in(1;3)\Rightarrow g(x)$ luôn đồng biến trên khoảng $(1;3)$

$\Rightarrow \min\limits_{(1;3)} g(x)=g(1)=23$.

Khi đó $-12<m<23$.

Mà $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\in\{-11;-10;\ldots;22\}$.

Vậy có tất cả 34 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án (C) □

Câu 19 (Sở Quảng Nam 2018). Có bao nhiêu giá trị nguyên thuộc khoảng $(-9;9)$ của tham số m để bất phương trình $3\log x \leq 2\log\left(m\sqrt{x-x^2}-(1-x)\sqrt{1-x}\right)$ có nghiệm thực?

Ⓐ 6. Ⓑ 7. Ⓒ 10. Ⓓ 11.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases}0<x<1\\ m\sqrt{x-x^2}-(1-x)\sqrt{1-x}>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}0<x<1\\ m\sqrt{x}-(1-x)>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}0<x<1\\ m>\dfrac{(1-x)}{\sqrt{x}}>0.\end{cases}$

Bất phương trình đã cho tương đương.

$\log x^3 \leq \log\left(m\sqrt{x-x^2}-(1-x)\sqrt{1-x}\right)^2$

$\Leftrightarrow x^3 \leq \left(m\sqrt{x-x^2}-(1-x)\sqrt{1-x}\right)^2$

$\Leftrightarrow x\sqrt{x} \leq \left(m\sqrt{x-x^2}-(1-x)\sqrt{1-x}\right)$

$\Leftrightarrow m \geq \dfrac{x\sqrt{x}+(1-x)\sqrt{1-x}}{\sqrt{x-x^2}} = \dfrac{x}{\sqrt{1-x}}+\dfrac{1-x}{\sqrt{x}}.$

Áp dụng bất đẳng thức cô si ta có

$\left(\dfrac{x}{\sqrt{1-x}}+\sqrt{1-x}\right)+\left(\dfrac{1-x}{\sqrt{x}}+\sqrt{x}\right) \geq 2\sqrt{x}+2\sqrt{1-x}.$

Vì vậy $m \geq \sqrt{x}+\sqrt{1-x}$.

Khảo sát hàm số $f(x)=\sqrt{x}+\sqrt{1-x}$ trên $(0;1)$ ta được $f(x)\geq\sqrt{2}\approx 1,414$.

Vậy m có thể nhận được các giá trị $2,3,4,5,6,7,8$.

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 20 (Yên Phong 1 - 2018). Có bao nhiêu số nguyên m sao cho bất phương trình $\ln 5+\ln\left(x^2+1\right)\geq\ln\left(mx^2+4x+m\right)$ có tập nghiệm là $\mathbb{R}$.

Ⓐ 3. Ⓑ 4. Ⓒ 1. Ⓓ 2.

Lời giải.

Ta có bất phương trình $\ln 5+\ln\left(x^2+1\right)\geq\ln\left(mx^2+4x+m\right) \Leftrightarrow \ln\left(5x^2+5\right)\geq\ln\left(mx^2+4x+m\right)$

$\Leftrightarrow \begin{cases}5x^2+5\geq mx^2+4x+m\\ mx^2+4x+m>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}5x^2+5-4x\geq m\left(x^2+1\right)\\ m\left(x^2+1\right)>-4x\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m\leq\dfrac{5x^2+5-4x}{x^2+1}=f(x)\\ m>\dfrac{-4x}{x^2+1}=g(x).\end{cases}$

Hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên:

x	∞		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	5	$\nearrow$	7	$\searrow$	3	$\nearrow$	5

Hàm số $g(x)$ có bảng biến thiên:

x	∞		-1		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	0

Từ bảng biến thiên suy ra để bất phương trình có tập nghiệm là $\mathbb{R}$ khi $2 < m \leq 3$.

Vậy có 1 giá trị nguyên của m.

Chọn đáp án (C) □

Câu 21 (Chuyên Lê Hồng Phong - TPHCM - 2021).

Có bao nhiêu số nguyên $y \in (-20; 20)$ thỏa mãn $2 + \log_{\sqrt{3}}(3x^2 + 1) \leq \log_{\sqrt{3}}(yx^2 - 6x + 2y)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$?

(A) 9. (B) 11. (C) 10. (D) 8.

Lời giải.

Ta có $2 + \log_{\sqrt{3}}(3x^2 + 1) \leq \log_{\sqrt{3}}(yx^2 - 6x + 2y)$ (1) với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Điều kiện xác định: $yx^2 - 6x + 2y > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} y > 0 \\ \Delta' = 9 - 2y^2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow y > \dfrac{3\sqrt{2}}{2.}$

(1) $\Leftrightarrow \log_{\sqrt{3}}\left(3\left(3x^2 + 1\right)\right) \leq \log_{\sqrt{3}}\left(yx^2 - 6x + 2y\right)$

$\Leftrightarrow 3\left(3x^2 + 1\right) \leq yx^2 - 6x + 2y \Leftrightarrow (y - 9)x^2 - 6x + 2y - 3 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a = 0 \\ bx + c \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} a > 0 \\ \Delta' \leq 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = 9 \\ -6x + 15 \geq 0 \forall x \in (Loai) \end{cases} \\ \begin{cases} y > 9 \\ 9 - (y - 9)(2y - 3) \leq 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} y > 9 \\ -2y^2 + 21y - 18 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow y \geq \dfrac{21 + 3\sqrt{33}}{4}.$$

Do $\begin{cases} y \in (-20; 20) \\ y \in \mathbb{Z} \\ y > \dfrac{3\sqrt{2}}{2} \\ y \geq \dfrac{21 + 3\sqrt{33}}{4} \end{cases} \Rightarrow y \in \{10; 11; \ldots; 18; 19\}.$

Vậy có 10 số nguyên y thỏa yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án (C) □

Câu 22 (THPT Nguyễn Tất Thành - Hà Nội - 2021).

Có bao nhiêu số nguyên m thỏa mãn $\dfrac{\ln x}{x + 1} + \dfrac{1}{x} > \dfrac{\ln x}{x - 1} + \dfrac{m}{x}$, $\forall x > 0$, $x \neq 1$?

(A) 2. (B) 1. (C) Vô số. (D) 0.

Lời giải.

Với $x > 0$, $x \neq 1$ ta có:

$\dfrac{\ln x}{x + 1} + \dfrac{1}{x} > \dfrac{\ln x}{x - 1} + \dfrac{m}{x} \Leftrightarrow \dfrac{m}{x} < \ln x\left(\dfrac{1}{x + 1} - \dfrac{1}{x - 1}\right) + \dfrac{1}{x} \Leftrightarrow m < -2\dfrac{x \ln x}{x^2 - 1} + 1 = f(x).$

Xét hàm số: $f(x) = -2\dfrac{x\ln x}{x^2-1} + 1$ với $x > 0$, $x \neq 0$.

Ta có: $f'(x) = 2 \cdot \dfrac{x^2\ln x + \ln x + 1 - x^2}{\left(x^2-1\right)^2}$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2\ln x + \ln x + 1 - x^2 = 0(1)$.

Xét hàm số $g(x) = x^2\ln x + \ln x + 1 - x^2$ với $x > 0$.

Đạo hàm $g'(x) = 2x\ln x + \dfrac{1}{x} - x$.

$g''(x) = 2\ln x + 1 - \dfrac{1}{x^2}$.

$g'''(x) = \dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{x^3} > 0, \forall x > 0 \Rightarrow$ Hàm số $g''(x)$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

Từ đó suy ra phương trình $g''(x) = 0$ nếu có nghiệm thì nghiệm đó là duy nhất.

Lại có $g''(1) = 0$. Suy ra phương trình $g''(x) = 0$ có nghiệm duy nhất $x = 1$.

Bảng biến thiên của hàm số $y = g'(x)$:

x	0		1		$+\infty$
$g''(x)$		$-$	0	$+$	
$g'(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

Từ bảng biến thiên suy ra phương trình $g'(x) = 0$ có nghiệm duy nhất $x = 1$.

Bảng biến thiên của hàm số $y = g(x)$:

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$+$	
$g(x)$		$\nearrow$	0	$\nearrow$	

Từ bảng biến thiên suy ra phương trình $g(x) = 0$ có nghiệm duy nhất $x = 1$.

Giới hạn:

$\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1}\left(1 - 2\cdot\dfrac{\ln x}{x-1}\cdot\dfrac{x}{x+1}\right) = 1 - 2\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{\ln x}{x-1}\cdot\dfrac{x}{x+1}\right) = 1 - 1 = 0.$

Bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$:

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\|$	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	$0 \,\|\, 0$	$\nearrow$	

Bất phương trình $m < f(x)$ nghiệm đúng $\forall x > 0$, $x \neq 1 \Leftrightarrow m \leq 0$.

Vậy có vô số các giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án C □

Câu 23 (Sở Yên Bái - 2021). Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để bất phương trình $\log_3 \dfrac{x^2-4x+m}{x^2+x+2} \leq 2x^2+7x+7-m$ nghiệm đúng với mọi $x \in [1;5]$?

(A) 11. (B) 10. (C) 9. (D) 12.

Lời giải.

Điều kiện: $x^2-4x+m>0 \Leftrightarrow (x-2)^2>4-m$. (1).

Với mọi $x \in [1;5]$, suy ra: $1 \leq x \leq 5 \Leftrightarrow -1 \leq x-2 \leq 3 \Rightarrow 0 \leq (x-2)^2 \leq 9(2)$.

Từ (1) và (2) suy ra: $4-m<0 \Leftrightarrow m>4(*)$.

Ta có $\log_3 \dfrac{x^2-4x+m}{x^2+x+2} \leq 2x^2+7x+7-m$

$\Leftrightarrow \log_3(x^2-4x+m)-\log_3(x^2+x+2) \leq 2x^2+7x+7-m$

$\Leftrightarrow \log_3(x^2-4x+m)+x^2-4x+m \leq \log_3 3(x^2+x+2)+3(x^2+x+2)$. $(**)$.

Xét hàm số $f(t)=t+\log_3 t$ trên $(0;+\infty)$, ta có:

$f'(t)=1+\dfrac{1}{t\ln t}>0 \forall t \in (0;+\infty)$, suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$.

Ta có: $(**) \Leftrightarrow f(x^2-4x+m) \leq f(3x^2+3x+6)$

$\Leftrightarrow x^2-4x+m \leq 3x^2+3x+6$

$\Leftrightarrow 2x^2+7x+6 \geq m(3)$.

Ta tìm điều kiện để bất phương trình (3) nghiệm đúng với mọi $x \in [1;5]$.

Xét hàm số $g(x)=2x^2+7x+6$ là hàm số bậc hai đồng biến trên $\left(-\dfrac{7}{4};+\infty\right)$ nên đồng biến trên đoạn $x \in [1;5]$, suy ra: $g(x) \geq g(1)=15$.

Suy ra (3) nghiệm đúng với mọi $x \in [1;5] \Leftrightarrow m \leq \min\limits_{[1;5]} g(x)=g(1)=15$.

Kết hợp điều kiện $(*)$, suy ra $m \in \{5;6;\ldots;14;15\}$. Có 11 giá trị nguyên của m.

Chọn đáp án (A) □

Câu 24 (THPT Đào Duy Từ - Hà Nội - 2021).

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho khoảng $(2;3)$ thuộc tập nghiệm của bất phương trình $\log_5(x^2+1)>\log_5(x^2+4x+m)-1$

(A) $m \in [-12;13]$. (B) $m \in [-13;12]$. (C) $m \in [-13;-12]$. (D) $m \in [12;13]$.

Lời giải.

$\log_5\left(x^2+1\right)>\log_5\left(x^2+4x+m\right)-1$

$\Leftrightarrow \log_5\left(x^2+1\right)+1>\log_5\left(x^2+4x+m\right)$

$\Leftrightarrow \log_5\left(5x^2+5\right)>\log_5\left(x^2+4x+m\right)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x^2+5>x^2+4x+m \\ x^2+4x+m>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2-4x+5-m>0 \\ x^2+4x+m>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<4x^2-4x+5 \\ m>-x^2-4x \end{cases} (*).$$

Vì khoảng $(2;3)$ thuộc tập nghiệm của bất phương trình nên $(*)$ trở thành.

$$\begin{cases} m<4x^2-4x+5, \forall x \in (2;3)(1) \\ m>-x^2-4x, \forall x \in (2;3)(2). \end{cases}$$

Đặt $f(x)=4x^2-4x+5 \Rightarrow f'(x)=8x-4, f'(x)=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{4}$

x	2	3
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	13	29

Dựa vào bảng biến thiên ta có $(1) \Leftrightarrow m \geq 13$.

Đặt $g(x) = -x^2 - 4x \Rightarrow g'(x) = -2x - 4, f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -2$

x	2	3
$g'(x)$	$-$	
$g(x)$	-12	-21

Dựa vào bảng biến thiên ta có $(2) \Leftrightarrow m \geq -12$.

Vậy $(*) \Leftrightarrow -12 \leq m \leq 13$.

Chọn đáp án A □

Câu 25 (THPT Quốc Oai - Hà Nội - 2021).

Xét bất phương trình $\log^2_{\frac{1}{2}}(2x) - 2(m+1)\log_2 x - 2 < 0$. Tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình có nghiệm thuộc khoảng $(\sqrt{2}; +\infty)$ là $m \in \left(\dfrac{-a}{b}; +\infty\right)$ với a, b là các số tự nhiên và phân số $\dfrac{a}{b}$ là tối giản. Khi đó $P = a + 2b$ bằng

A. $P = 11$. B. $P = 5$. C. $P = 7$. D. $P = 13$.

Lời giải.

$\log^2_{\frac{1}{2}} 2x - 2m + 1 \log_2 x - 2 < 0$

$\Leftrightarrow \log^2_2 x - 2m \cdot \log_2 x - 1 < 0$

Đặt $t = \log_2 x$.

Vì $x \in \sqrt{2}; +\infty \Rightarrow t = \log_2 x \in \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

Bất phương trình trở thành: $t^2 - 2mt - 1 < 0$ với $t \in \left(\dfrac{1}{2}; +\infty\right)$.

$\Leftrightarrow \dfrac{t^2 - 1}{2t} < m$ với mọi $t \in \left(\dfrac{1}{2}; +\infty\right)$.

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{2}t - \frac{1}{2t} < m$ với mọi $t \in \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

Xét hàm số $ft = \dfrac{1}{2}t - \frac{1}{2t}$ với $t \in \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$ $f't = \dfrac{1}{2} + \frac{1}{2t^2} > 0$ với $t \in \left(\dfrac{1}{2}; +\infty\right)$.

$\Rightarrow ft$ đồng biến trên khoảng $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

Do đó để $ft < m$ có nghiệm $t \in \left(\dfrac{1}{2}; +\infty\right) \Leftrightarrow f\left(\dfrac{1}{2}\right) < m \Leftrightarrow m > \dfrac{-3}{4} \Leftrightarrow m \in \left(\dfrac{-3}{4}; +\infty\right) \Rightarrow a = 3, b = 4$.

Do đó $a + 2b = 11$.

Chọn đáp án A □

Câu 26 (Chuyên Long An - 2021). Số giá trị nguyên của tham số $m \in [-20; 10]$ để bất phương trình $9\left(\log_3 \sqrt[3]{x}\right)^2 + \log_3 x + 2m \geq 0$ nghiệm đúng với mọi giá trị $x \in (3; 81)$.

(A) 12. (B) 10. (C) 11. (D) 15.

Lời giải.

Điều kiện $x > 0$: $9\left(\log_3 \sqrt[3]{x}\right)^2 + \log_3 x + 2m \geq 0 \Leftrightarrow \log_3^2 x + \log_3 x + 2m \geq 0 (*)$.

Đặt $t = \log_3 x$, với $x \in (3; 81) \Rightarrow t \in (1; 4)$. $(*)$ trở thành $t^2 + t + 2m \geq 0 \Leftrightarrow \underbrace{t^2 + t}_{f(t)} \geq -2m$.

Bảng biến thiên của $f(t)$:

t	1	4	$+\infty$
$f(t)$	2 ↗	20	↗

Vậy để bất phương trình nghiệm đúng với mọi giá trị $x \in (3; 81) \Leftrightarrow -2m \leq 2 \Leftrightarrow m \geq -1 \Rightarrow m \in \{-1; 0; \ldots; 10\}$ nên có 12 giá trị nguyên của m.

Chọn đáp án (A) □

Câu 27 (Chuyên Hùng Vương - Gia Lai - 2021).

Có bao nhiêu số nguyên dương a thỏa mãn $\left(\sqrt{1 + \ln^2 a} + \ln a\right)\left(\sqrt{1 + (a-3)^2} + a - 3\right) \leq 1$?

(A) 4. (B) 1. (C) 3. (D) 2.

Lời giải.

Điều kiện: $a > 0$.

Vì $\sqrt{1 + \ln^2 a} > |\ln a| \geq \ln a \Rightarrow \sqrt{1 + \ln^2 a} - \ln a > 0$.

Do đó $\left(\sqrt{1 + \ln^2 a} + \ln a\right)\left(\sqrt{1 + (a-3)^2} + a - 3\right) \leq 1 \Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{1 + (a-3)^2} + a - 3}{\sqrt{1 + \ln^2 a} - \ln a} \leq 1$

$\Leftrightarrow \sqrt{1 + (a-3)^2} + a - 3 \leq \sqrt{1 + (-\ln a)^2} + (-\ln a)$. (1).

Xét hàm số $f(t) = t + \sqrt{1 + t^2}, t \in \mathbb{R}$; $f'(t) = 1 + \dfrac{t}{\sqrt{1 + t^2}} = \dfrac{t + \sqrt{1 + t^2}}{\sqrt{1 + t^2}} > 0, \forall t \in \mathbb{R}$. Suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Bất phương trình (1) $\Leftrightarrow f(a - 3) \leq f(-\ln a) \Leftrightarrow a - 3 \leq -\ln a \Leftrightarrow a - 3 + \ln a \leq 0$.

Xét hàm số $g(a) = a - 3 + \ln a, a \in (0; +\infty)$; $g'(a) = 1 + \dfrac{1}{a} > 0, \forall a \in (0; +\infty)$.

Hàm số $g(a)$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$. Do đó phương trình $g(a) = 0$ có không quá 1 nghiệm thuộc khoảng $(0; +\infty)$.

Mặt khác $g(2) \cdot g(3) = (\ln 2 - 1)\ln 3 < 0$, suy ra phương trình $g(a) = 0$ có nghiệm $a \in (2; 3)$ tức là $\exists a_0 \in (2; 3)$ để $g(a_0) = 0$.

Do đó: $g(a) \leq 0 \Leftrightarrow g(a) \leq g(a_0) \Leftrightarrow a \leq a_0 \Rightarrow a \in (0; a_0] \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a = 1 \\ a = 2 \end{array}\right.$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 28 (Chuyên Hà Tĩnh - 2021). Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m để bất phương trình sau có nghiệm duy nhất?

$\log_{\frac{1}{m}}\left(\sqrt{x^2 + mx + 5} + 1\right) \cdot \log_5\left(x^2 + mx + 6\right) + \log_m 3 \geq 0$.

(A) 4. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

Lời giải.

Điều kiện: $0 < m \neq 1$.

Đặt $t = \sqrt{x^2 + mx + 5}$, BPT trở thành:

$\log_{\frac{1}{m}}(t+1) \cdot \log_5(t^2+1) + \log_m 3 \geq 0 \Leftrightarrow \log_m 3 \cdot [1 - \log_3(t+1) \cdot \log_5(t^2+1)] \geq 0$.

Trường hợp 1: $0 < m < 1 \Rightarrow \log_m 3 < 0$, BPT tương đương: $\log_3(t+1) \cdot \log_5(t^2+1) \geq 1$.

Ta có $t = \sqrt{\left(x + \dfrac{m}{2}\right)^2 + 5 - \dfrac{m^2}{4}} \geq \sqrt{5 - \dfrac{m^2}{4}} > 2, \forall x \in \mathbb{R}, 0 < m < 1$.

Suy ra: $\log_3(t+1) \cdot \log_5(t^2+1) > \log_3(2+1) \cdot \log_5(2^2+1)$ (BPT luôn đúng).

Vậy trong TH này tập nghiệm của BPT là $\mathbb{R}$. (không thỏa mãn đề bài).

Trường hợp 2: $m > 1 \Rightarrow \log_m 3 > 0$, BPT tương đương: $\log_3(t+1) \cdot \log_5(t^2+1) \leq 1$.

Nếu $t > 2 \Rightarrow \log_3(t+1) \cdot \log_5(t^2+1) > \log_3(2+1) \cdot \log_5(2^2+1)$ (BPT vô nghiệm).

Nếu $t < 2 \Rightarrow \log_3(t+1) \cdot \log_5(t^2+1) < \log_3(2+1) \cdot \log_5(2^2+1)$ (BPT có tập nghiệm là $\mathbb{R}$. (không thỏa mãn đề bài).

Nếu $t = 2 \Rightarrow BPT \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + mx + 5} = 2 \Leftrightarrow x^2 + mx + 1 = 0$.

BPT có nghiệm duy nhất khi: $\Delta = m^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow m = 2$. Vậy có 1 giá trị của m thỏa mãn.

Chọn đáp án (B) □

Câu 29 (Chuyên ĐHSP - 2021). Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m sao cho với mỗi giá trị của m, bất phương trình $\log_2 \sqrt{x^2 - 2x + m} + 3\sqrt{\log_4(x^2 - 2x + m)} \leq 10$ nghiệm đúng với mọi giá trị của x thuộc đoạn $[0; 3]$?

(A) 13. (B) 12. (C) 253. (D) 252.

Lời giải.

Điều kiện: $x^2 - 2x + m > 0$.

Xét: $\log_2 \sqrt{x^2 - 2x + m} + 3\sqrt{\log_4(x^2 - 2x + m)} \leq 10(1)$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\log_2(x^2 - 2x + m) + 3 \cdot \sqrt{\dfrac{1}{2}\log_2(x^2 - 2x + m)} - 10 \leq 0$.

Đặt $t = \sqrt{\dfrac{1}{2}\log_2(x^2 - 2x + m)}$, với $t \geq 0$, khi đó phương trình trở thành:

$t^2 + 3t - 10 \leq 0 \Leftrightarrow -5 \leq t \leq 2$, kết hợp với điều kiện, ta được: $0 \leq t \leq 2$, tức là

$0 \leq \sqrt{\dfrac{1}{2}\log_2(x^2 - 2x + m)} \leq 2 \Leftrightarrow 0 \leq \dfrac{1}{2}\log_2(x^2 - 2x + m) \leq 4$

$\Leftrightarrow 0 \leq \log_2(x^2 - 2x + m) \leq 8 \Leftrightarrow 1 \leq x^2 - 2x + m \leq 2^8$.

Xét hàm số: $f(x) = x^2 - 2x + m$, $f'(x) = 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Xét: $f(0) = m$, $f(1) = m - 1$, $f(3) = m + 3$.

Suy ra: $\min\limits_{[0;3]} f(x) = m - 1$ và $\max\limits_{[0;3]} f(x) = m + 3$.

Để phương trình (1) có nghiệm đúng với mọi $x \in [0; 3]$ khi $1 \leq \min\limits_{[0;3]} f(x) < \max\limits_{[0;3]} f(x) \leq 2^8$

$\Leftrightarrow 1 \leq m - 1 < m + 3 \leq 256 \Leftrightarrow 2 \leq m \leq 253$.

Kết hợp với điều kiện $m \in \mathbb{Z}$, ta được 252 giá trị m thỏa yêu cầu đề bài.

Chọn đáp án (D) □

Câu 30 (Sở Bình Phước - 2021). Cho bất phương trình $(m-1)\log^2_{\frac{1}{2}}(x-2)^2 + 4(m-5)\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{1}{x-2} +$

$4m-4\geq 0$ (m là tham số thực). Tìm tập hợp tất cả các giá trị của m để bất phương trình nghiệm đúng với mọi x thuộc đoạn $\left[\dfrac{5}{2};4\right]$.

(A) $\left[\dfrac{7}{3};+\infty\right)$. (B) $\left[-3;\dfrac{7}{3}\right]$. (C) $\left(-\infty;\dfrac{7}{3}\right]$. (D) $[-3;+\infty)$.

Lời giải.

Điều kiện: $x>2$.

Ta có $(m-1)\log^2_{\frac{1}{2}}(x-2)^2+4(m-5)\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{1}{x-2}+4m-4\geq 0\Leftrightarrow 4(m-1)\log^2_2(x-2)+4(m-5)\log_2(x-2)+4m-4\geq 0$.

Đặt $t=\log_2(x-2)$.

Với $x\in\left[\dfrac{5}{2};4\right]\Rightarrow t\in[-1;1]$.

Do đó bất phương trình $(m-1)\log^2_{\frac{1}{2}}(x-2)^2+4(m-5)\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{1}{x-2}+4m-4\geq 0$ nghiệm đúng với mọi x thuộc đoạn $\left[\dfrac{5}{2};4\right]$ khi và chỉ khi bất phương trình $4(m-1)t^2+4(m-5)t+4m-4\geq 0(1)$, nghiệm đúng với mọi t thuộc đoạn $[-1;1]$.

Ta có: $4(m-1)t^2+4(m-5)t+4m-4\geq 0\Leftrightarrow m\left(t^2+t+1\right)\geq t^2+5t+1$.

Vì $t^2+t+1=\left(t+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}>0,\forall t\in\mathbb{R}$ nên $m\left(t^2+t+1\right)\geq t^2+5t+1\Leftrightarrow m\geq\dfrac{t^2+5t+1}{t^2+t+1}$.

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{t^2+5t+1}{t^2+t+1}$ trên đoạn $[-1;1]$.

$f'(t)=\dfrac{t^2+5t+1}{\left(t^2+t+1\right)^2}=\dfrac{-4t^2+4}{\left(t^2+t+1\right)^2}$.

$f'(t)=0\Leftrightarrow\dfrac{-4t^2+4}{\left(t^2+t+1\right)^2}=0\Leftrightarrow t=\pm 1$.

$f(-1)=-3$; $f(1)=\dfrac{7}{3}$. Suy ra $\max\limits_{t\in[-1;1]}f(t)=f(1)=\dfrac{7}{3}$; $\min\limits_{t\in[-1;1]}f(t)=f(-1)=-3$.

Vậy $m\geq\dfrac{t^2+5t+1}{t^2+t+1}$ nghiệm đúng với mọi t thuộc đoạn $[-1;1]$ khi $m\in\left[-3;\dfrac{7}{3}\right]$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 31 (Chuyên Bắc Ninh 2019). Tìm tất cả giá trị của tham số m để bất phương trình $\log\left(2x^2+3\right)>\log\left(x^2+mx+1\right)$ có tập nghiệm là $\mathbb{R}$.

(A) $-2<m<2$. (B) $m<2\sqrt{2}$.

(C) $-2\sqrt{2}<m<2\sqrt{2}$. (D) $m<2$.

Lời giải.

Ta có $\log\left(2x^2+3\right)>\log\left(x^2+mx+1\right)$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+mx+1>0\\2x^2+3>x^2+mx+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+mx+1>0\\x^2-mx+2>0\end{cases}(*).$$

Để bất phương trình $\log\left(2x^2+3\right)>\log\left(x^2+mx+1\right)$ có tập nghiệm là $\mathbb{R}$ thì hệ $(*)$ có tập nghiệm là $\mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta_1=m^2-4<0\\\Delta_2=m^2-8<0\end{cases}\Leftrightarrow -2<m<2.$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 32 (Mã 105 2017). Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $\log_2^2 x - 2\log_2 x + 3m - 2 < 0$ có nghiệm thực.

(A) $m < 1$. (B) $m \leq 1$. (C) $m < 0$. (D) $m < \frac{2}{3}$.

Lời giải.

Đặt $t = \log_2 x (x > 0)$, ta có bất phương trình: $t^2 - 2t + 3m - 2 < 0$.

Để BPT luôn có nghiệm thực thì $\Delta' = 3 - 3m > 0 \Leftrightarrow m < 1$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 33 (THPT Nguyễn Tất Thành - Đh - SP - HN - 2022).

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-10; 10]$ để bất phương trình.

$\log_2^2 x - (m+1)\log_2 x - 2m + 3 \geq 0$.

nghiệm đúng với mọi $x \in [1; 32]$

(A) 11. (B) 12. (C) 13. (D) 14.

Lời giải.

Đặt $\log_2 x = t; x \in [1; 32] \Rightarrow t \in [0; 5]$. Khi đó

$\log_2^2 x - (m+1)\log_2 x - 2m + 3 \geq 0, \forall x \in [1; 32] \Leftrightarrow t^2 - (m+1)t - 2m + 3 \geq 0, \forall t \in [0; 5]$

$\Leftrightarrow t^2 - t + 3 \geq (t+2)m, \forall t \in [0; 5] \Leftrightarrow f(t) = \dfrac{t^2 - t + 3}{t + 2} \geq m, \forall t \in [0; 5]$

Khảo sát hàm số ta có $f'(t) = \dfrac{t^2 + 4t - 5}{(t+2)^2} = 0 \Leftrightarrow t \in \{-5; 1\}$.

Trên $[0; 5]$: $f(0) = \dfrac{3}{2}; f(1) = 1; f(5) = \dfrac{23}{7} \Rightarrow \min\limits_{[0;5]} f(t) = \dfrac{3}{2} \Rightarrow m \leq \dfrac{3}{2}$ là điều kiện cần tìm.

Kết hợp giá trị nguyên $m \in [-10; 10]$ ta được 12 giá trị nguyên.

Chọn đáp án (B) □

Câu 34 (Sở Thái Nguyên 2022). Cho bất phương trình $\log_2\left(x - \sqrt{x^2 - 1}\right) \cdot \log_{2022}\left(x - \sqrt{x^2 - 1}\right) \geq \log_m\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên thuộc khoảng $(1; 2022)$ của tham số m sao cho bất phương trình đã cho nghiệm đúng với mọi x thuộc $[5; +\infty)$?

(A) 2022. (B) 2021. (C) 2012. (D) 2010.

Lời giải.

Nhận thấy: Với $x \geq 5$ thì $\sqrt{x^2 - 1} < \sqrt{x^2} = x \Rightarrow x - \sqrt{x^2 - 1} > 0$ và $x + \sqrt{x^2 - 1} > 0$.

Ta có $\log_2\left(x - \sqrt{x^2 - 1}\right) \cdot \log_{2022}\left(x - \sqrt{x^2 - 1}\right) \geq \log_m\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$

$\Leftrightarrow \log_2\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right) \cdot \log_{2022}\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right) \geq \log_m 2 \cdot \log_2\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$

$\Leftrightarrow \log_{2022}\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right) \geq \log_m 2 (1)$ (vì $\log_2\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right) > 0$, $\forall x \geq 5$).

Xét hàm số $f(x) = \log_{2022}\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$ trên $[5; +\infty)$.

Ta có: $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 1} \cdot \ln 2022} \Rightarrow f'(x) > 0, \forall x \geq 5$.

Bảng biến thiên:

x	5	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	$f(5)$ $\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta thấy bất phương trình đã cho nghiệm đúng với mọi x thuộc $[5;+\infty)$
$\Leftrightarrow \log_m 2 \leq f(5) \Leftrightarrow \dfrac{1}{\log_2 m} \leq \log_{2022}\left(5+\sqrt{24}\right) \Leftrightarrow \log_2 m \geq \log_{5+\sqrt{24}} 2022 \Leftrightarrow m \geq 2^{\log_{5+\sqrt{24}} 2022}$.
(do $m>1$) $\Leftrightarrow m \geq 2^{\log_{5+\sqrt{24}} 2022} \approx 9,9$.

Do m nguyên thuộc khoảng $(1;2022)$ nên $m \in \{10;11;\ldots;2021\}$.

Vậy có 2012 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án C □

Câu 35 (THPT Bùi Thị Xuân – Huế - 2022).

Tất cả các giá trị thực của m để bất phương trình $x\sqrt{x}+\sqrt{x+12} \leq m\log_{5-\sqrt{4-x}} 3$ có nghiệm:

A $m>2\sqrt{3}$. B $m>12\log_3 5$. C $m \geq 2\sqrt{3}$. D $2<m<12\log_3 5$.

Lời giải.

Điều kiện xác định: $\begin{cases} x \geq 0 \\ x+12 \geq 0 \\ 4-x \geq 0 \\ 5-\sqrt{4-x}>0 \\ 5-\sqrt{4-x} \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 4$.

Ta có $0 \leq x \leq 4 \Leftrightarrow 0 \leq \sqrt{4-x} \leq 2 \Leftrightarrow 3 \leq 5-\sqrt{4-x} \leq 5 \Rightarrow 0<\log_{5-\sqrt{4-x}} 3 \leq 1$.

Khi đó $x\sqrt{x}+\sqrt{x+12} \leq m\log_{5-\sqrt{4-x}} 3 \Leftrightarrow m \geq \dfrac{x\sqrt{x}+\sqrt{x+12}}{\log_{5-\sqrt{4-x}} 3} = (x\sqrt{x}+\sqrt{x+12})\log_3(5-\sqrt{4-x})$.

Xét hàm số $g(x)=(x\sqrt{x}+\sqrt{x+12})\log_3(5-\sqrt{4-x})$
$\Rightarrow g'(x)=\left(\sqrt{x}+\dfrac{1}{2}\sqrt{x}+\dfrac{1}{2\sqrt{x+12}}\right)\log_3(5-\sqrt{4-x})+(x\sqrt{x}+\sqrt{x+12})\dfrac{1}{2\sqrt{4-x}(5-\sqrt{4-x})\ln 3}$.

Ta có $\begin{cases} \log_3\left(5-\sqrt{4-x}\right)>0 \\ \dfrac{1}{2\sqrt{4-x}\left(5-\sqrt{4-x}\right)\ln 3}>0 \end{cases}, \forall x \in [0;4] \Rightarrow g'(x)>0, \forall x \in [0;4]$
$\Rightarrow g(x)$ đồng biến trên $[0;4]$.

Để phương trình $x\sqrt{x}+\sqrt{x+12} \leq m\log_{5-\sqrt{4-x}} 3$ khi và chỉ khi $m \geq \min_{[0;\,4]} g(x)=g(0)=2\sqrt{3}$.

Chọn đáp án C □

Câu 36 (Chuyên Hạ Long 2022). Cho $0<m\neq 1$. Gọi $(a;b)$ là tập hợp các giá trị của m để bất phương trình $\log_m\left(1-8m^{-x}\right) \geq 2(1-x)$ có hữu hạn nghiệm nguyên. Tính $b-a$

A 1. B $3\sqrt{2}-1$. C $2\sqrt{2}-1$. D $4\sqrt{2}-1$.

Lời giải.

Trường hợp 1: $m>1$.

Ta có: $\log_m(1-8m^{-x}) \geq 2(1-x) \Leftrightarrow 1-8m^{-x} \geq m^{2-2x} \Leftrightarrow m^2 \cdot m^{-2x} + 8m^{-x} - 1 \leq 0$
$\Leftrightarrow 0 < m^{-x} \leq \dfrac{\sqrt{16+m^2}-4}{m^2} \Leftrightarrow -x \leq \log_m\left(\dfrac{\sqrt{16+m^2}-4}{m^2}\right) \Leftrightarrow x \geq -\log_m\left(\dfrac{\sqrt{16+m^2}-4}{m^2}\right)$.
Rỏ ràng trong trường hợp này không thể có hữu hạn nghiệm nguyên.

Trường hợp **2**: $0 < m < 1$.

Ta có: $\log_m(1-8m^{-x}) \geq 2(1-x) \Leftrightarrow \begin{cases} 1-8m^{-x} \leq m^{2-2x} \\ 1-8m^{-x} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 \cdot m^{-2x} + 8m^{-x} - 1 \geq 0 \\ m^{-x} < \dfrac{1}{8} \end{cases}$.

$\begin{cases} m^{-x} \geq \dfrac{\sqrt{16+m^2}-4}{m^2} \\ -x > \log_m \dfrac{1}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x \leq \log_m \dfrac{\sqrt{16+m^2}-4}{m^2} \\ x < \log_m 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\log_m \dfrac{\sqrt{16+m^2}}{m^2} \\ x < \log_m 8 \end{cases}$.

Để bất phương trình có hữu hạn nghiệm nguyên thì:
$\log_m 8 + \log_m \dfrac{\sqrt{16+m^2}-4}{m^2} > 0 \Leftrightarrow \log_m \dfrac{8\sqrt{16+m^2}-32}{m^2} > 0 \Leftrightarrow \dfrac{8\sqrt{16+m^2}-32}{m^2} < 1$
$\Leftrightarrow 8\sqrt{16+m^2} < m^2+32 \Leftrightarrow m^4 > 0, \forall m \in (0;1)$.

Vậy $b-a=1$.

Chọn đáp án A □

Câu 37 (Chuyên Nguyễn Trãi – Hải Dương – 2022).

Gọi S là tập các giá trị của tham số m để bất phương trình $\log_{0.3}[x^2+2(m-3)x+4] \geq \log_{0.3}(3x^2+2x+m)$ thỏa mãn với mọi x thuộc $\mathbb{R}$. Tập S bằng

A. $S=[5;6)$. B. $S=[4;6]$. C. $S=[4;5)$. D. $S=[1;5)$.

Lời giải.

Để bất phương trình thỏa mãn với mọi x thuộc $\mathbb{R}$ thì
$$\begin{cases} x^2+2(m-3)x+4>0, \forall x \in \mathbb{R} \\ 3x^2+2x+m>0, \forall x \in \mathbb{R} \\ x^2+2(m-3)x+4 < 3x^2+2x+m, \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2 < m-3 < 2 \\ m > \dfrac{1}{3} \\ (-m+4)^2-(m-4) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1<m<5 \\ m > \dfrac{1}{3} \\ m^2-9m+20 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1<m<5 \\ 4 \leq m \leq 5 \end{cases} \Leftrightarrow 4 \leq m < 5.$$
Vậy, $S=[4;5)$.

Chọn đáp án C □

Câu 38 (THPT Lương Thế Vinh – Hà Nội – 2022).

Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để bất phương trình $\log_2^2 x - (2m+5)\log_2 x + m^2 + 5m + 4 < 0$ có it nhất một nghiệm nguyên và không quá 1791 nghiệm nguyên?

A. 10. B. 3. C. 9. D. 11.

Lời giải.

Biến đổi bất phương trình: $\log_2^2 x - (2m+5)\log_2 x + m^2 + 5m + 4 < 0 \Leftrightarrow (\log_2 x - (m+1))(\log_2 x - (m+4))$
0

$\Leftrightarrow m+1 < \log_2 x < m+4 \Leftrightarrow 2^{m+1} < x < 2^{m+4} \Rightarrow S_x = (2^{m+1}; 2^{m+4})$.

Nếu $2^{m+4} \leq 1 \Leftrightarrow m \leq -4 \Rightarrow S_x \subset (0;1)$ không chứa số nguyên nào (loại).

Nếu $m=-3 \Rightarrow S_x = (2^{-2};2)$ thoả mãn.

Nếu $m=-2 \Rightarrow S_x = (2^{-1};4)$ thoả mãn.

+ Nếu $2^{m+1} \geq 1 \Leftrightarrow m \geq -1 \Rightarrow 2^{m+1}, 2^{m+4} \in \mathbb{Z}$ nên S_x chứa các số nguyên là $2^{m+1}+1,\ldots,2^{m+4}-1$ $\Rightarrow$ ycbt $\Leftrightarrow 1 \leq (2^{m+4}-1)-(2^{m+1}+1)+1 \leq 1791 \Leftrightarrow \dfrac{1}{7} \leq 2^m \leq 128 \Leftrightarrow -2,8 \approx \log_2\left(\dfrac{1}{7}\right) \leq m \leq 7$.

Vậy $m \in \{-3,\ldots,7\}$.

Chọn đáp án D □

Câu 39 (THPT Kim Liên - Hà Nội - 2022).

Cho bất phương trình $\log_5(x^2-4x+4+m)-1<\log_5(x^2+2x+3)$ với m là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để bất phương trình nghiệm đúng với mọi $x \in (1;3)$?

A 30. B 28. C 29. D Vô số.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} x^2+2x+3>0 \\ x^2-4x+4+m>0 \end{cases} \forall x \in (1;3) \Leftrightarrow x^2-4x+4+m>0,\ \forall x \in (1;3)$

$\Leftrightarrow x^2-4x+4>-m,\ \forall x \in (1;3) \Leftrightarrow \min\limits_{(1;3)}(x-2)^2>-m \Leftrightarrow 0>-m \Leftrightarrow m>0.$

Ta có $\log_5(x^2-4x+4+m)-1<\log_5(x^2+2x+3),\ \forall x \in (1;3)$

$\Leftrightarrow \log_5(x^2-4x+4+m)<\log_5(5x^2+10x+15), \forall x \in (1;3)$

$\Leftrightarrow x^2-4x+4+m<5x^2+10x+15, \forall x \in (1;3) \Leftrightarrow m<4x^2+14x+11, \forall x \in (1;3)$

$\Leftrightarrow m \leq 4\cdot 1^2+14\cdot 1+11=29 \Rightarrow m \in (0;29]$.

Vậy có 29 giá trị.

Chọn đáp án C □

Câu 40 (Sở KonTum 2022). Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để bất phương trình $1+\log_5(x^2+1) \geq \log_5(m\cdot x^2+4x+m)$ nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$.

A 1. B 2. C 0. D Vô số.

Lời giải.

ĐKXĐ: $m.x^2+4x+m>0$.

Ta biến đổi BPT $\log_5(5x^2+5) \geq \log_5(m\cdot x^2+4x+m)$.

BPT nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$ khi và chỉ khi hệ BPT sau nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} 5x^2+5 \geq m\cdot x^2+4x+m \\ m\cdot x^2+4x+m>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (5-m)\cdot x^2-4x+5-m \geq 0(1) \\ m\cdot x^2+4x+m>0(2) \end{cases} (*).$$

Xét $m=0$: hệ (*) không nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Xét $m=5$: hệ (*) không nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Xét $m \neq 0; m \neq 5$.

Hệ (*) nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$ $\begin{cases} 5-m>0 \\ \Delta'_{(1)} \leq 0 \\ m>0 \\ \Delta'_{(2)} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<5 \\ 4-(5-m)^2 \leq 0 \\ m>0 \\ 4-m^2<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<5 \\ \left[\begin{array}{l} m \geq 7 \\ m \leq 3 \end{array}\right. \\ m>0 \\ \left[\begin{array}{l} m<-2 \\ m>2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow 2<$ $m \leq 3$.

Có 1 giá trị nguyên của m là 3.

Chọn đáp án A □

Câu 41 (Chuyên Phan Bội Châu – Nghệ An 2022).

Có bao nhiêu số nguyên dương a thỏa mãn $\left(\sqrt{1+\ln^2 a}+\ln a\right)\left(\sqrt{1+(a-3)^2}+a-3\right) \leq 1$?

A 2. B 1. C 3. D 4.

Lời giải.

Giả thiết tương đương.

$\left(\sqrt{1+\ln^2 a}+\ln a\right)\left(\sqrt{1+(a-3)^2}+a-3\right) \leq 1 \Leftrightarrow \sqrt{1+(a-3)^2}+a-3 \leq \sqrt{1+(-\ln a)^2}-\ln a$ (1).

Xét hàm số $f(t)=\sqrt{1+t^2}+t, \forall t \in \mathbb{R}$.

Có $f'(t)=\dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}+1=\dfrac{\sqrt{1+t^2}+t}{\sqrt{1+t^2}}>0, \forall t \in \mathbb{R}$.

Suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Khi đó (1) $\Leftrightarrow f(a-3) \leq f(-\ln a) \Leftrightarrow a-3 \leq -\ln a \Leftrightarrow \ln a+a-3 \leq 0$.

Đặt $g(a)=\ln a+a-3, a>0$ có $g'(a)=\dfrac{1}{a}+1>0, \forall a>0$.

Do đó hàm số $g(a)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$ mà $g(a_0)=0$ với $a_0 \approx 2,21$.

Suy ra $a \leq 2,21$.

Vậy $a=1$ và $a=2$.

Chọn đáp án A □

Câu 42 (THPT Hoàng Hoa Thám - Quảng Ninh - 2022).

Gọi a là số thực lớn nhất để bất phương trình $x^2-x+2+a\ln\left(x^2-x+1\right) \geq 0$ nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A $a \in (2;3]$. B $a \in (6;7]$. C $a \in (-6;-5]$. D $a \in (8;+\infty)$.

Lời giải.

Đặt $t=x^2-x+1=\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4} \geq \dfrac{3}{4}$. Phương trình trở thành: $t+1+a\ln t \geq 0, \forall t \geq \dfrac{3}{4}$ $(*)$.

Xét hàm số: $f(t)=t+1+a\ln t$ trên $\left[\dfrac{3}{4};+\infty\right)$ có $f'(t)=1+\dfrac{a}{t}=0 \Leftrightarrow t=-a$.

Trường hợp 1: $-a \leq \dfrac{3}{4} \Leftrightarrow a \geq -\dfrac{3}{4}$. Khi đó ta có bảng biến thiên:

t	$\frac{3}{4}$		$+\infty$
$f'(t)$		$+$	
$f(t)$	$f\left(\frac{3}{4}\right)$	$\nearrow$	$+\infty$

$(*) \Leftrightarrow f\left(\dfrac{3}{4}\right) \geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{7}{4} + a\ln\dfrac{3}{4} \geq 0 \Leftrightarrow a \leq \dfrac{-7}{4}\log_{\frac{3}{4}} e$.

Kết hợp với điều kiện, ta được: $\dfrac{-3}{4} \leq a \leq \dfrac{-7}{4}\log_{\frac{3}{4}} e$.

Trường hợp 2: $-a > \dfrac{3}{4} \Leftrightarrow a < -\dfrac{3}{4}$. Khi đó ta có bảng biến thiên:

x	$\frac{3}{4}$		$-a$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$f\left(\frac{3}{4}\right)$	$\searrow$	$f(-a)$	$\nearrow$	$+\infty$

$(*) \Leftrightarrow f(-a) \geq 0 \Leftrightarrow -a + 1 + a\ln(-a) \geq 0 (1)$.

Xét hàm số $g(x) = -x + 1 + x\ln(-x)$ trên $\left(-\infty; -\dfrac{3}{4}\right)$, có $g'(x) = \ln(-x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		$-\frac{3}{4}$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	$g\left(-\frac{3}{4}\right)$

Do đó, $(1) \Leftrightarrow b \leq a < \dfrac{-3}{4}$, với $b \in (-\infty; -1)$.

Vì đề bài hỏi số thực lớn nhất nên ta loại trường hợp hai, từ trường hợp một được một số thực lớn nhất để thoả mãn yêu cầu bài toán thuộc $(6; 7]$.

Chọn đáp án B □

Câu 43 (Sở Nam Định 2022). Cho bất phương trình $1+3x^2+(m+5)x+m+\log_2(x^2+2x+m) > 3x^3 + 2\log_2(4x-2)$ với m là tham số thực. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để bất phương trình đã cho có đúng hai nghiệm nguyên x?

A 9. B 8. C 7. D 10.

Lời giải.

Điều kiện xác định $\begin{cases} x > \dfrac{1}{2} \\ x^2 + 2x + m > 0. \end{cases}$

Ta có

$1+3x^2+(m+5)x+m+\log_2\left(x^2+2x+m\right)>3x^3+2\log_2(4x-2)$

$\Leftrightarrow 1+3x^2+(m+5)x+m-3x^3+\log_2\left(x^2+2x+m\right)-2\left[\log_2 2+\log_2(2x-1)\right]>0$

$\Leftrightarrow -3x^3+3x^2+(m+5)x+m-1+\log_2\left(x^2+2x+m\right)-\log_2(2x-1)^2>0$

$\Leftrightarrow (x+1)\left(-3x^2+6x+m-1\right)+\left[\log_2\left(x^2+2x+m\right)-\log_2(2x-1)^2\right]>0 \Leftrightarrow (x+1)\left[(x^2+2x+m)-(2x-\right.$

$\left[\log_2\left(x^2+2x+m\right)-\log_2(2x-1)^2\right]>0(*)$.

Nhận xét $x+1>0, \forall x>\dfrac{1}{2}$.

Trường hợp 1: $0<x^2+2x+m\leq(2x-1)^2 \Rightarrow \log_2\left(x^2+2x+m\right)\leq\log_2(2x-1)^2$

$\Rightarrow VT_{(*)}\leq 0$ (loại).

Trường hợp 2: $x^2+2x+m>(2x-1)^2>0 \Rightarrow \log_2\left(x^2+2x+m\right)>\log_2(2x-1)^2$

$\Rightarrow (*)$ luôn đúng với mọi $x>\dfrac{1}{2}$.

Khi đó bài toán trở thành, tìm m để hệ sau có đúng hai nghiệm nguyên x:

$\begin{cases} x^2+2x+m>(2x-1)^2(**) \\ x>\dfrac{1}{2}. \end{cases}$

Ta có $\begin{cases} x^2+2x+m>(2x-1)^2(**) \\ x>\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2-6x+1-m<0 \\ x>\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2-6x+1<m \\ x>\dfrac{1}{2}. \end{cases}$

Đặt $g(x)=3x^2-6x+1$

x	$\frac{1}{2}$		1		2		3		$+\infty$
$g(x)$	$g\left(\frac{1}{2}\right)$	$\searrow$		$\nearrow$	$g(2)$	$\nearrow$	$g(3)$	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra bài toán thỏa mãn $\Leftrightarrow g(2)<m\leq g(3) \Leftrightarrow 1<m\leq 10$.

Mà $m\in\mathbb{Z}\Rightarrow m\in\{2;3;\ldots;10\}$. Vậy có 9 giá trị nguyên của tham số m cần tìm.

Chọn đáp án A □

Dạng 2. Bất phương trình mũ chứa tham số

Câu 44. Cho $a>1$. Biết khi $a=a_0$ thì bất phương trình $x^a\leq a^x$ đúng với mọi $x\in(1;+\infty)$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A) $1<a_0<2$. B) $\mathrm{e}<a_0<\mathrm{e}^2$. C) $2<a_0<3$. D) $\mathrm{e}^2<a_0<\mathrm{e}^3$.

Lời giải.

$x^a\leq a^x \Leftrightarrow a\cdot\ln x\leq x\cdot\ln a \Leftrightarrow \dfrac{a}{\ln a}\leq\dfrac{x}{\ln x}$.

Đặt $f(x)=\dfrac{x}{\ln x}, x\in(1;+\infty)$.

$f'(x)=\dfrac{\ln x-1}{\ln^2 x}$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \mathrm{e}$.

Bảng biến thiên

x	1		e		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	e	$\nearrow$	$+\infty$

Bất phương trình nghiệm đúng $\forall x \in (1; +\infty) \Leftrightarrow \dfrac{a}{\ln a} \leq \mathrm{e} \Leftrightarrow a \leq \mathrm{e} \cdot \ln a \Leftrightarrow a - \mathrm{e} \cdot \ln a \leq 0$.

Xét hàm số $g(x) = x - \mathrm{e} \cdot \ln x$;

$g'(x) = 1 - \dfrac{\mathrm{e}}{x} \Leftrightarrow \dfrac{x - \mathrm{e}}{x}$.

Bảng biến thiên của hàm số $g(x)$

x	1		e		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy $a - \mathrm{e} \cdot \ln a \geq 0$.

Theo bảng biến thiên, ta có $a - \mathrm{e} \cdot \ln a \leq 0 \Leftrightarrow a = \mathrm{e}$.

Vậy $a = a_0 = \mathrm{e} \in (2; 3)$.

Chọn đáp án C □

Câu 45. Tìm m để hàm số $y = \sqrt{4^x - (m+1) \cdot 2^x - m}$ xác định trên $\mathbb{R}$.

A. $m \leq -3 + 2\sqrt{2}$.
B. $m > -1$.
C. $m < 0$.
D. $-3 - 2\sqrt{2} \leq m \leq -3 + 2\sqrt{2}$.

Lời giải.

Hàm số $y = \sqrt{4^x - (m+1) \cdot 2^x - m}$ xác định trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $4^x - (m+1) \cdot 2^x - m \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Đặt $t = 2^x (t > 0)$. Khi đó $t^2 - (m+1) \cdot t - m \geq 0$, $\forall t > 0 \Leftrightarrow \dfrac{t^2 - t}{t+1} \geq m$, $\forall t > 0$.

Xét hàm số $f(t) = \dfrac{t^2 - t}{t+1}$ với $t > 0$.

Ta có $f'(t) = \dfrac{t^2 + 2t - 1}{(t+1)^2}$ khi đó: $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t^2 + 2t - 1 = 0 \Rightarrow t = -1 + \sqrt{2}$ do $t > 0$.

Lập bảng biến thiên ta tìm được $\min\limits_{(0;+\infty)} f(t) = f\left(-1 + \sqrt{2}\right) = -3 + 2\sqrt{2}$.

Để bất phương trình $\dfrac{t^2 - t}{t+1} \geq m, \forall t > 0$ thì $m \leq -3 + 2\sqrt{2}$.

Chọn đáp án A □

Câu 46. Bất phương trình $4^x - (m+1)2^{x+1} + m \geq 0$ nghiệm đúng với mọi $x \geq 0$. Tập tất cả các giá trị của m là

A. $(-\infty; 12)$.
B. $(-\infty; -1]$.
C. $(-\infty; 0]$.
D. $(-1; 16]$.

Lời giải.

Đặt $t = 2^x$.

Điều kiện: $t \geq 1$.

Bất phương trình$\Leftrightarrow t^2 - 2(m+1)t + m \geq 0 \Leftrightarrow (2t-1)m \leq t^2 - 2t \Leftrightarrow m \leq \dfrac{t^2-2t}{2t-1} = g(t) \Leftrightarrow m \leq \min g(t)$.

Ta có $g'(t) = \dfrac{2t^2-2t+2}{(2t-1)^2} > 0, \forall t \geq 1 \Rightarrow \min g(t) = g(1) = -1 \Rightarrow m \in (-\infty; -1]$.

Chọn đáp án B □

Câu 47. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình $4^{x-1} - m\left(2^x + 1\right) > 0$ nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$.

A. $m \in (-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$.
B. $m \in (-\infty; 0]$.
C. $m \in (0; +\infty)$.
D. $m \in (0; 1)$.

Lời giải.

Bất phương trình $4^{x-1} - m\left(2^x + 1\right) > 0(1)$.

Đặt $t = 2^x$, $t > 0$.

Bất phương trình (1) trở thành: $\dfrac{1}{4}t^2 - m(t+1) > 0 \Leftrightarrow t^2 - 4mt - 4m > 0$ (2).

Đặt $f(t) = t^2 - 4mt - 4m$.

Đồ thị hàm số $y = f(t)$ có đồ thị là một parabol với hệ số a dương, đỉnh $I\left(2m; -4m^2 - 4m\right)$.

Bất phương trình (1) nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$ Bất phương trình (2) nghiệm đúng với mọi $t > 0$ hay $f(t) > 0, \forall t > 0$.

Trường hợp 1: $m \leq 0 \Rightarrow f(0) = -4m \geq 0 \Rightarrow m \leq 0$ thỏa mãn.

Trường hợp 2: $m > 0 \Rightarrow -4m^2 - 4m < 0$ nên $m > 0$ không thỏa mãn.

Vậy $m \leq 0$.

Chọn đáp án B □

Câu 48. Bất phương trình $4^x - (m+1)2^{x+1} + m \geq 0$ nghiệm đúng với mọi $x \geq 0$. Tập tất cả các giá trị của m là

A. $(-\infty; 12)$.
B. $(-\infty; -1]$.
C. $(-\infty; 0]$.
D. $(-1; 16]$.

Lời giải.

$4^x - (m+1)2^{x+1} + m \geq 0, \forall x \geq 0$

$\Leftrightarrow (2^x)^2 - 2(m+1)2^x + m \geq 0, \forall x \geq 0$ (1).

Đặt $t = 2^x, (t > 0)$.

(1) trở thành $t^2 - 2(m+1)t + m \geq 0, \forall t \geq 1$ (2).

Cách 1.

(2) $\Leftrightarrow m \leq \dfrac{t^2-2t}{2t-1}, \forall t \geq 1$ (3).

Xét hàm số $y = f(t) = \dfrac{t^2-2t}{2t-1}$. Ta có hàm số $y = f(t)$ liên tục trên $[1; +\infty)$.

$f'(t) = \dfrac{(2t-2)(2t-1) - 2\left(t^2-2t\right)}{(2t-1)^2} = \dfrac{2t^2-2t+2}{(2t-1)^2} > 0, \forall t \geq 1$.

Suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên $[1; +\infty) \Rightarrow f(t) \geq f(1) = -1, \forall t \geq 1$.

Do đó (3) $\Leftrightarrow m \le \min\limits_{[1;+\infty)} f(t) \Leftrightarrow m \le -1$.

Cách 2.

$t^2 - 2(m+1)t + m \ge 0$ là một bất phương trình bậc hai.

Tam thức bậc hai ở vế trái luôn có $\Delta' = m^2 + m + 1 > 0, \forall m$ nên tam thức luôn có hai nghiệm là $t = m + 1 - \sqrt{m^2+m+1}$ và $t = m + 1 + \sqrt{m^2+m+1}$.

Suy ra bất phương trình $t^2 - 2(m+1)t + m \ge 0$ có tập nghiệm là $\left(-\infty; m+1-\sqrt{m^2+m+1}\right] \cup \left[m+1+\sqrt{m^2+m+1}; +\infty\right)$.

(2) $\Leftrightarrow m + 1 + \sqrt{m^2+m+1} \le 1 \Leftrightarrow \sqrt{m^2+m+1} \le -m \Leftrightarrow \begin{cases} m \le 0 \\ m^2 + m + 1 \le m^2 \end{cases} \Leftrightarrow m \le -1$.

Chọn đáp án B □

Câu 49. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-10; 10]$ để bất phương trình sau nghiệm đúng với $\forall x \in \mathbb{R}$: $\left(6+2\sqrt{7}\right)^x + (2-m)(3-\sqrt{7})^x - (m+1)2^x \ge 0$?

(A) 10. (B) 9. (C) 12. (D) 11.

Lời giải.

Ta có

$\left(6+2\sqrt{7}\right)^x + (2-m)(3-\sqrt{7})^x - (m+1)2^x \ge 0 \Leftrightarrow 2^x(3+\sqrt{7})^x + (2-m)(3-\sqrt{7})^x > (m+1)2^x$

$\Leftrightarrow (3+\sqrt{7})^x + (2-m)\left(\dfrac{3+\sqrt{7}}{2}\right)^x > m+1$.

Đặt $t = (3+\sqrt{7})^x$, $t > 0 \Rightarrow \left(\dfrac{3-\sqrt{7}}{2}\right)^x = \dfrac{1}{t}$.

Bất phương trình đã cho trở thành $t + (2-m)\cdot\dfrac{1}{t} > m+1 \Leftrightarrow \dfrac{t^2-t+2}{t+1} > m$.

Xét hàm số $f(t) = \dfrac{t^2-t+2}{t+1}$ trên khoảng $(0; +\infty)$.

Ta có $f'(t) = \dfrac{t^2+2t-3}{(t+1)^2}$.

$f'(t) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -3 \\ t = 0 \end{array}\right.$.

Khi đó, ta có bảng biến thiên sau

t	0		1		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	2	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên trên ta suy ra để bất phương trình đã cho nghiệm đúng thì $m < 1$. Suy ra trong đoạn $[-10; 10]$ có tất cả 11 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án D □

Câu 50. Tìm m để bất phương trình $2^x + 3^x + 4^x + 5^x \ge 4 + mx$ có tập nghiệm là $\mathbb{R}$.

(A) $\ln 120$. (B) $\ln 10$. (C) $\ln 30$. (D) $\ln 14$.

Lời giải.

Với $a>1$ ta có $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\mathrm{e}^{x\ln a}-1}{x\ln a}\right)\cdot\ln a=\ln a$.

Với $a>1$ xét hàm số $f(x)=\dfrac{a^x-1}{x}(x\neq 0)$, ta có $f'(x)=\dfrac{xa^x\ln a-a^x+1}{x^2}$.

Xét hàm số $g(x)=xa^x\ln a-a^x+1\Rightarrow g'(x)=a^x\ln a+xa^x\ln^2 a-a^x\ln a=xa^x\ln^2 a$.

Với $x>0$ ta có $g'(x)>0$ suy ra $g(x)>g(0)\Leftrightarrow g(x)>0\Rightarrow f'(x)>0,\forall x>0$.

Với $x<0$ ta có $g'(x)<0$ suy ra $g(x)>g(0)\Leftrightarrow g(x)>0\Rightarrow f'(x)>0,\forall x>0$.

Do đó hàm số $f(x)=\dfrac{a^x-1}{x}(a>1)$ đồng biến trên các khoảng $(-\infty;0)$ và $(0;+\infty)$.

Trở lại bài toán:

Xét $x=0$ bất phương trình thỏa mãn.

Xét $x>0$ ta có: $2^x+3^x+4^x+5^x\geq 4+mx\Leftrightarrow m\leq\dfrac{2^x-1}{x}+\dfrac{3^x-1}{x}+\dfrac{4^x-1}{x}+\dfrac{5^x-1}{x}=h(x)$.

Từ nhận xét trên ta có $h(x)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$.

Do đó yêu cầu của bài toán tương đương với $m\leq\lim\limits_{x\to 0^+}h(x)=\ln 2+\ln 3+\ln 4+\ln 5=\ln 120$.

Xét $x<0$ ta có: $2^x+3^x+4^x+5^x\geq 4+mx\Leftrightarrow m\geq\dfrac{2^x-1}{x}+\dfrac{3^x-1}{x}+\dfrac{4^x-1}{x}+\dfrac{5^x-1}{x}=h(x)$.

Từ nhận xét trên ta có $h(x)$ đồng biến trên $(-\infty;0)$.

Do đó yêu cầu của bài toán tương đương với $m\geq\lim\limits_{x\to 0^+}h(x)=\ln 2+\ln 3+\ln 4+\ln 5=\ln 120$.

Kết hợp lại ta có $m=\ln 120$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 51. Cho hàm số $y=f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	↘		↗	0	↘	
			-3				$-\infty$

Bất phương trình $f(x)<\mathrm{e}^x+m$ đúng với mọi $x\in(-1;1)$ khi và chỉ khi

(A) $m>f(-1)-\dfrac{1}{\mathrm{e}}$. (B) $m\geq f(-1)-\dfrac{1}{\mathrm{e}}$. (C) $m>f(1)-\mathrm{e}$. (D) $m\geq f(1)-\mathrm{e}$.

Lời giải.

Ta có $f(x)<\mathrm{e}^x+m\Leftrightarrow m>f(x)-\mathrm{e}^x$.

Xét hàm số $g(x)=f(x)-\mathrm{e}^x;g'(x)=f'(x)-\mathrm{e}^x<0\forall x\in(-1;1)$.

Suy ra hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(-1;1)$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow m\geq\max g(x)=g(-1)=f(-1)-\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 52. Cho hàm số $y=f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu đạo hàm như sau

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Bất phương trình $f(x) < e^{x^2} + m$ đúng với mọi $x \in (-1;1)$ khi và chỉ khi

(A) $m \geq f(0) - 1$. (B) $m > f(-1) - e$. (C) $m > f(0) - 1$. (D) $m \geq f(-1) - e$.

Lời giải.

$f(x) < e^{x^2} + m \Leftrightarrow f(x) - e^{x^2} < m$.

Xét hàm số: $g(x) = f(x) - e^{x^2}; g'(x) = f'(x) - 2xe^{x^2}$.

Trên khoảng $(-1;0)$ ta có $\begin{cases} f'(x) > 0 \\ -2x > 0 \end{cases} \Rightarrow g'(x) > 0, \forall x \in (-1;0)$.

Trên khoảng $(0;1)$ ta có $\begin{cases} f'(x) < 0 \\ -2x < 0 \end{cases} \Rightarrow g'(x) < 0, \forall x \in (0;1)$.

Tại điểm $x = 0$ ta có $\begin{cases} f'(x) = 0 \\ -2xe^{x^2} = 0 \end{cases} \Rightarrow g'(x) = 0$.

Suy ra bảng biến thiên của $g'(x)$

x	-1		0		1
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$		$\nearrow$	$f(0)-1$	$\searrow$	

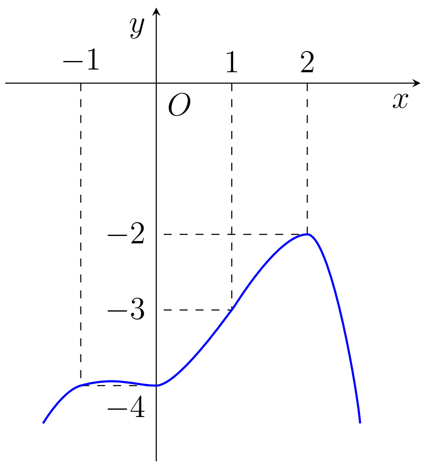
Từ bảng biến thiên ta có: $\max\limits_{(-1;1)} g(x) = f(0) - 1$.

Do đó bất phương trình $m > g(x)$ đúng với mọi $x \in (-1;1)$ khi và chỉ khi

$m > \max\limits_{(-1;1)} g(x) = f(0) - 1$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 53. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ



Tổng tất cả các giá trị nguyên của tham số m để bất phương trình.

$9.6^{f(x)} + (4 - f^2(x)) \cdot 9^{f(x)} \leq (-m^2 + 5m) \cdot 4^{f(x)}$ đúng $\forall x \in \mathbb{R}$ là

(A) 10. (B) 4. (C) 5. (D) 9.

Lời giải.

Ta có
$9.6^{f(x)}+(4-f^2(x))\cdot 9^{f(x)}\le(-m^2+5m)\cdot 4^{f(x)} \Leftrightarrow (4-f^2(x))\cdot\left(\dfrac{3}{2}\right)^{2f(x)}+9;\left(\dfrac{3}{2}\right)^{f(x)}\le -m^2+5m(1)$.

Từ đồ thị hàm số suy ra $f(x)\le -2, \forall x\in\mathbb{R}$.

Do đó $(4-f^2(x))\left(\dfrac{3}{2}\right)^{2f(x)}\le 0, \forall x\in\mathbb{R}$ và $9\cdot\left(\dfrac{3}{2}\right)^{f(x)}\le 9\cdot\left(\dfrac{3}{2}\right)^{-2}=4, \forall x\in\mathbb{R}$.

Suy ra $(4-f^2(x))\cdot\left(\dfrac{3}{2}\right)^{2f(x)}+9\cdot\left(\dfrac{3}{2}\right)^{f(x)}\le 4, \forall x\in\mathbb{R}$.

Để (1) có nghiệm đúng $\forall x\in\mathbb{R}$ thì $4\le -m^2+5m \Leftrightarrow 1\le m\le 4$.

Do m là số nguyên nên $m\in\{1;2;3;4\}$.

Chọn đáp án B □

Câu 54. Cho hàm số $y=f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-3		0		3		$+\infty$
$f'(x)$	4	$\searrow$	1	$\nearrow$	3	$\searrow$	1	$\nearrow$	3

Bất phương trình $f(x)<3\cdot e^{x+2}+m$ có nghiệm $x\in(-2;2)$ khi và chỉ khi

A. $m\ge f(-2)-3$. B. $m>f(-2)-3e^4$. C. $m\ge f(2)-3e^4$. D. $m>f(-2)-3$.

Lời giải.

Bất phương trình tương đương với $m>g(x)=f(x)-3\cdot e^{x+2}$.

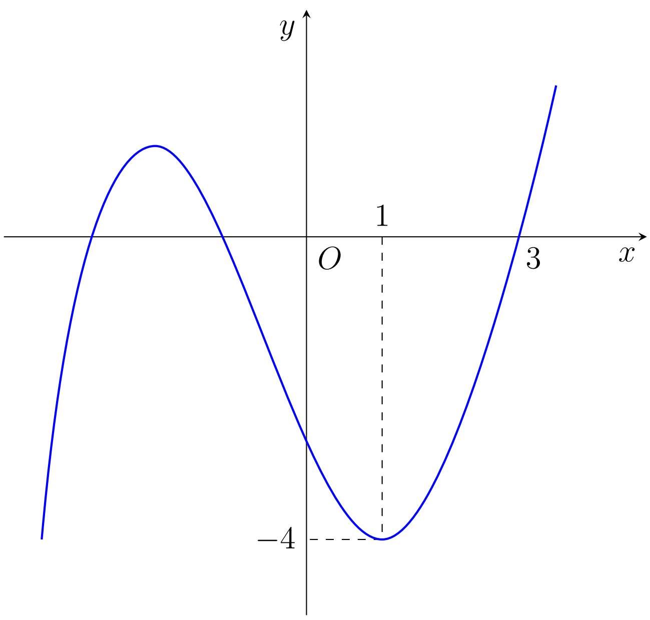
Ta có $g'(x)=f'(x)-3\cdot e^{x+2}<3-3\cdot e^{-2+2}=0, \forall x\in(-2;2)$.

Do đó $g(x)>g(2)=f(2)-3\cdot e^4, \forall x\in(-2;2)$.

Vậy $m>f(2)-3\cdot e^4$ thì phương trình có nghiệm trên khoảng $(-2;2)$.

Chọn đáp án B □

Câu 55. Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Bất phương trình $f(e^x) < m(3e^x + 2019)$ có nghiệm $x \in (0;1)$ khi và chỉ khi

(A) $m > -\dfrac{4}{1011}$. (B) $m \geq -\dfrac{4}{3e+2019}$. (C) $m > -\dfrac{2}{1011}$. (D) $m > \dfrac{f(e)}{3e+2019}$.

Lời giải.

Đặt $t = e^x (t > 0)$.

Bất phương trình có dạng $f(t) < m(3t + 2019) \Leftrightarrow \dfrac{f(t)}{3t+2019} < m$.

Ta có $x \in (0;1) \Leftrightarrow t = e^x \in (1;e)$.

Xét hàm $g(t) = \dfrac{f(t)}{3t+2019}$ có $g'(t) = \dfrac{f'(t)(3t+2019) - 3f(t)}{(3t+2019)^2}$.

Dựa vào đồ thị hàm số $f(x)$, ta thấy $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(1;e)$ và $f(x) < 0$, $\forall x \in (1;e) \Rightarrow$
$\begin{cases} f(x) < 0 \\ f'(x) > 0 \end{cases} \forall x \in (1;e)$

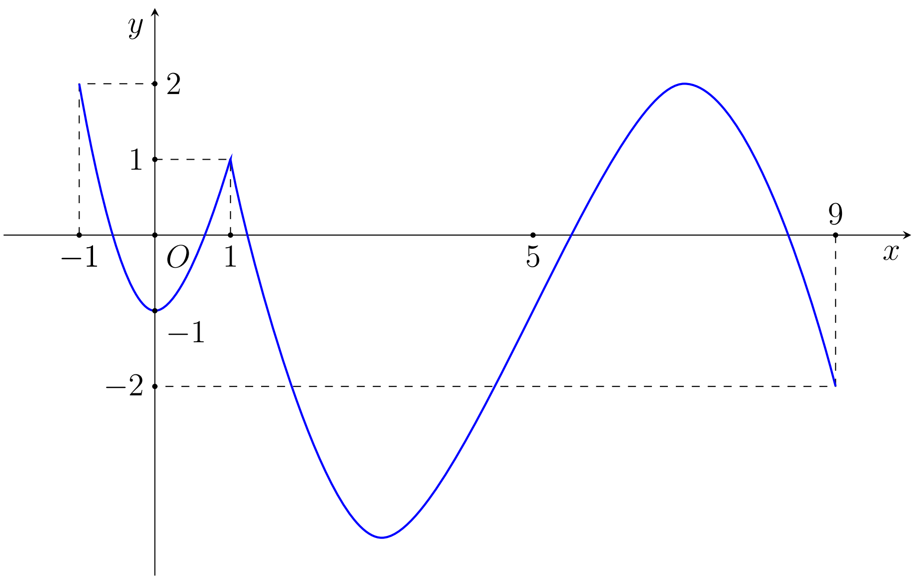
$\Rightarrow g'(t) > 0$, $\forall t \in (1;e) \Rightarrow g(t)$ đồng biến trên khoảng $(1;e) \Rightarrow g(1) < g(t) < g(e)$, $\forall t \in (1;e)$.

Vậy bất phương trình $f(e^x) < m(3e^x + 2019)$ có nghiệm $x \in (0;1)$

$\Leftrightarrow$ Bất phương trình $\Leftrightarrow \dfrac{f(t)}{3t+2019} < m$ có nghiệm $t \in (1;e) \Leftrightarrow m > g(1) = -\dfrac{4}{2022} = -\dfrac{2}{1011}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 56. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1;9]$ và có đồ thị là đường cong trong hình vẽ dưới đây



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để bất phương trình $16 \cdot 3^{f(x)} - [f^2(x) + 2f(x) - 8] \cdot 4^{f(x)} \geq (m^2 - 3m) \cdot 6^{f(x)}$ nghiệm đúng với mọi giá trị thuộc $[-1;9]$?

(A) 32. (B) 31. (C) 5. (D) 6.

Lời giải.

Dễ thấy $-4 \leq f(x) \leq 2, \forall x \in [-1;9]$ (1) nên $-[f(x) + 4] \cdot [f(x) - 2] \geq 0, \forall x \in [-1;9]$.

Do đó $-[f^2(x) + 2f(x) - 8] \geq 0, \forall x \in [-1;9]$ (2).

Ta có $16 \cdot 3^{f(x)} - [f^2(x) + 2f(x) - 8] \cdot 4^{f(x)} \geq (m^2 - 3m) \cdot 6^{f(x)}$ nghiệm đúng với mọi $x \in [-1;9]$

$\Leftrightarrow 16 \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^{f(x)} - [f^2(x) + 2f(x) - 8] \cdot \left(\dfrac{2}{3}\right)^{f(x)} \geq m^2 - 3m$ nghiệm đúng với mọi $x \in [-1;9]$

$\Leftrightarrow \alpha = \min\limits_{x \in [-1;9]} \left\{16 \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^{f(x)} - [f^2(x) + 2f(x) - 8] \cdot \left(\dfrac{2}{3}\right)^{f(x)}\right\} \geq m^2 - 3m$ (3).

Từ (1) và (2) ta có $\left(\frac{1}{2}\right)^{f(x)} \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{2}$ và $-\left[f^2(x)+2f(x)-8\right]\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{f(x)} \geq 0, \forall x \in [-1;9]$.

Suy ra $16\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{f(x)} - \left[f^2(x)+2f(x)-8\right]\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{f(x)} \geq 4, \forall x \in [-1;9]$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $f(x)=2 \Leftrightarrow x=-1 \vee x=a(7<a<8)$.

Do đó $\alpha=4$ và (3) $\Leftrightarrow 4 \geq m^2-3m \Leftrightarrow -1 \leq m \leq 4$. Vì m nguyên nên $m \in \{-1;0;1;2;3;4\}$.

Chọn đáp án D □

Câu 57. Tất cả giá trị của tham số thực m sao cho bất phương trình $9^x-2(m+1)\cdot 3^x-3-2m>0$ có nghiệm đúng với mọi số thực x là

Ⓐ $m \leq -\frac{3}{2}$. Ⓑ $m \neq 2$. Ⓒ $m < -\frac{3}{2}$. Ⓓ $m \in \varnothing$.

Lời giải.

Ta có: $9^x-2(m+1)\cdot 3^x-3-2m>0$

$\Leftrightarrow (3^x)^2-2\cdot 3^x-3>(3^x+1)\cdot 2m$

$\Leftrightarrow (3^x+1)(3^x-3)>(3^x+1)\cdot 2m$

$\Leftrightarrow 3^x-3>2m \Leftrightarrow 3^x>3+2m$.

Vậy để $9^x-2(m+1)\cdot 3^x-3-2m>0$, $\forall x\in\mathbb{R}$ khi $3+2m\leq 0 \Leftrightarrow m \leq -\frac{3}{2}$.

Chọn đáp án A □

Câu 58. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để tập nghiệm của bất phương trình $\left(3^{x+2}-\sqrt{3}\right)(3^x-2m)<0$ chứa không quá 9 số nguyên?

Ⓐ 3281. Ⓑ 3283. Ⓒ 3280. Ⓓ 3279.

Lời giải.

Do m là số nguyên dương nên $2m>1 \Rightarrow \log_3 2m>0$.

$3^{x+2}-\sqrt{3}=0 \Leftrightarrow 3^{x+2}=3^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow x=-\frac{3}{2}$.

$3^x-2m=0 \Leftrightarrow x=\log_3 2m$.

Lập bảng biến thiên, ta kết luận: tập nghiệm bất phương trình này là $\left(-\frac{3}{2};\log_3 2m\right)$.

Suy ra, $\log_3 2m \leq 8 \Leftrightarrow 2m \leq 3^8 \Leftrightarrow m \leq \frac{6561}{2}=3280,5$.

Chọn đáp án C □

Câu 59. Có mấy giá trị nguyên dương của m để bất phương trình $9^{m^2x}+4^{m^2x} \geq m\cdot 5^{m^2x}$ có nghiệm?

Ⓐ 10. Ⓑ Vô số. Ⓒ 9. Ⓓ 1.

Lời giải.

Từ giả thiết, ta chỉ xét $m\in\mathbb{Z}^+$.

Ta có $9^{m^2x}+4^{m^2x} \geq m\cdot 5^{m^2x} \Leftrightarrow \left(\frac{9}{5}\right)^{m^2x}+\left(\frac{4}{5}\right)^{m^2x} \geq m(1)$.

Có $\left(\frac{9}{5}\right)^{m^2x}+\left(\frac{4}{5}\right)^{m^2x} \geq 2\sqrt{\left(\frac{9}{5}\right)^{m^2x}\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^{m^2x}}=2\left(\frac{6}{5}\right)^{m^2x}$.

Do đó nếu có x_0 là nghiệm của bất phương trình $2\left(\frac{6}{5}\right)^{m^2x} \geq m$.

thì x_0 cũng là nghiệm của $\left(\dfrac{9}{5}\right)^{m^2x}+\left(\dfrac{4}{5}\right)^{m^2x}\geq m$.

Ta xét các giá trị $m\in\mathbb{Z}^+$ làm cho bất phương trình $2\left(\dfrac{6}{5}\right)^{m^2x}\geq m(2)$ có nghiệm.

Vì $2\left(\dfrac{6}{5}\right)^{m^2x}\geq m\Leftrightarrow\left(\dfrac{6}{5}\right)^{m^2x}\geq\dfrac{m}{2}$, $m\in\mathbb{Z}^+$

$\Leftrightarrow m^2x\geq\log_{\frac{6}{5}}\left(\dfrac{m}{2}\right)\Leftrightarrow x\geq\dfrac{1}{m^2}\log_{\frac{6}{5}}\left(\dfrac{m}{2}\right)$, với $m\in\mathbb{Z}^+$.

Vậy với $m\in\mathbb{Z}^+$ thì bất phương trình (2) có nghiệm tương ứng là $x\geq\dfrac{1}{m^2}\log_{\frac{6}{5}}\left(\dfrac{m}{2}\right)$.

Suy ra có vô số giá trị $m\in\mathbb{Z}^+$ làm cho bất phương trình (1) có nghiệm.

Chọn đáp án B □

Câu 60. Bất phương trình $4^x-(m+1)2^{x+1}+m\geq0$ nghiệm đúng với mọi $x\geq0$. Tập tất cả cá giá trị của m là

(A) $(-\infty;12)$. (B) $(-\infty;-1]$. (C) $(-\infty;0]$. (D) $(-1;16]$.

Lời giải.

Bất phương trình $4^x-(m+1)2^{x+1}+m\geq0(1)\Leftrightarrow4^x-2(m+1)2^x+m\geq0$.

Đặt $2^x=t$ bất phương trình trở thành $t^2-2(m+1)t+m\geq0(2)$.

Bất phương trình (1) nghiệm đúng với mọi $x\geq0$ khi và chỉ khi bất phương trình (2) nghiệm đúng với mọi $t\geq1$.

$(2)\Leftrightarrow(2t-1)m\leq t^2-2t\Leftrightarrow m\leq\dfrac{t^2-2t}{2t-1}$ (do $t\geq1$).

Đặt $f(t)=\dfrac{t^2-2t}{2t-1}$ với $t\geq1$

$\Rightarrow f'(t)=\dfrac{2t^2-2t+2}{(2t-1)^2}>0,\ \forall t\geq1$.

Bảng biến thiên

t	$-\infty$	$+\infty$
$f'(t)$	+	
$f(t)$	-1	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta có $f(t)\geq m,\ \forall t\in[1;+\infty)\Leftrightarrow m\leq-1$.

Chọn đáp án B □

Câu 61. Cho hàm số $f(x)=\cos2x$. Bất phương trình $f^{(2019)}(x)>m$ đúng với mọi $x\in\left(\dfrac{\pi}{12};\dfrac{3\pi}{8}\right)$ khi và chỉ khi

(A) $m<2^{2018}$. (B) $m\leq2^{2018}$. (C) $m\leq2^{2019}$. (D) $m<2^{2019}$.

Lời giải.

Xét hàm số $f(x)=\cos2x$. Tập xác định: $\mathbb{R}$.

Ta có $f'(x)=-2\sin2x$, $f''(x)=-2^2\cos2x$, $f'''(x)=2^3\sin2x$, $f^{(4)}(x)=2^4\cos2x$.

Suy ra $f^{(2016)}(x)=2^{2016}\cos2x\Rightarrow f^{(2017)}(x)=-2^{2017}\sin2x$

$\Rightarrow f^{(2018)}(x) = -2^{2018}\cos 2x$

$\Rightarrow f^{(2019)}(x) = 2^{2019}\sin 2x$.

Vì $x \in \left(\dfrac{\pi}{12}; \dfrac{3\pi}{8}\right)$ nên $\dfrac{1}{2} < \sin 2x < \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ hay $f^{(2019)}(x) > 2^{2018}, \forall x \in \left(\dfrac{\pi}{12}; \dfrac{3\pi}{8}\right)$.

Vậy $f^{(2019)}(x) > m$ đúng với mọi $x \in \left(\dfrac{\pi}{12}; \dfrac{3\pi}{8}\right)$ khi và chỉ khi $m \le 2^{2018}$.

Chọn đáp án B □

Câu 62. Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

Bất phương trình $f(x) > 2^x + m$ đúng với mọi $x \in (-1; 1)$ khi và chỉ khi

A $m > f(1) - 2$. B $m \le f(1) - 2$. C $m \le f(-1) - \dfrac{1}{2}$. D $m > f(-1) - \dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

$f(x) > 2^x + m, \forall x \in (-1; 1) \Leftrightarrow f(x) - 2^x > m \Leftrightarrow f(x) - 2^x > m$.

Xét hàm số $g(x) = f(x) - 2^x$ trên $(-1; 1)$.

Ta có $g'(x) = f'(x) - 2^x \cdot \ln 2$.

Ta thấy: $\forall x \in (-1; 1)$ thì $f'(x) \le 0$ và $2^x \cdot \ln 2 > 0$.

Do đó $g'(x) = f'(x) - 2^x \cdot \ln 2 < 0, \forall x \in (-1; 1)$.

Bảng biến thiên

x	-1		1
$g'(x)$		$-$	
$g(x)$	$g(-1)$	$\searrow$	$g(1)$

Từ bảng biến thiên ta có: $m \le g(1) \Leftrightarrow m \le f(1) - 2$.

Chọn đáp án B □

Câu 63. Số giá trị nguyên dương của tham số m để bất phương trình

$$9^{\sqrt{x^2-3x+m}} + 2 \cdot 3^{\sqrt{x^2-3x+m}-2+x} < 3^{2x-3}$$

có nghiệm là

A 4. B 8. C 1. D 6.

Lời giải.

Đặt $t = 3^{\sqrt{x^2-3x+m}-x}$ với $t > 0$, bất phương trình đã cho trở thành $t^2 + \dfrac{2}{9}t - \dfrac{1}{27} < 0 \Leftrightarrow -3 < t < \dfrac{1}{9}$.

Do đó $0 < t < \dfrac{1}{9} \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 3x + m} - x < -2 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 3x + m} < x - 2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x^2 - 3x + m \geq 0 \\ x^2 - 3x + m < x^2 - 4x + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x^2 - 3x + m \geq 0 \ (I). \\ x < 4 - m \end{cases}$$

Để bất phương trình đề bài cho có nghiệm thì hệ bất phương trình (I) có nghiệm ta đặt.

$$\begin{cases} x > 2 & (1) \\ x^2 - 3x + m \geq 0 & (2) \\ x < 4 - m & (3) \end{cases}$$

Điều kiện cần: Từ (1) và (3) ta có $4 - m > 2 \Leftrightarrow m < 2$.

Do m là số nguyên dương nên $m = 1$.

Điều kiện đủ: Với $m = 1$, hệ bất phương trình (I) trở thành $\begin{cases} x > 2 \\ x^2 - 3x + 1 \geq 0 \\ x < 3 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 < x < 3 \\ x < \dfrac{3 - \sqrt{5}}{2} \vee x > \dfrac{3 + \sqrt{5}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{3 + \sqrt{5}}{2} < x < 3.$$

Do đó hệ bất phương trình (I) có nghiệm.

Vậy $m = 1$.

Chọn đáp án C □

Câu 64. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình $m^2\left(x^4 - x^3\right) - m\left(x^3 - x^2\right) - x + \mathrm{e}^{x-1} \geq 0$ đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$. Số tập con của S là

A 2. B 4. C 3. D 1.

Lời giải.

Xét hàm số $f(x) = m^2\left(x^4 - x^3\right) - m\left(x^3 - x^2\right) - x + \mathrm{e}^{x-1}$ trên $\mathbb{R}$.

Ta có $f'(x) = m^2\left(4x^3 - 3x^2\right) - m\left(3x^2 - 2x\right) - 1 + \mathrm{e}^{x-1}$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Do $f(1) = 0$ nên từ giả thiết ta có $f(x) \geq f(1), \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \min\limits_{\mathbb{R}} f(x) = f(1)$

$$\Rightarrow f'(1) = 0 \Rightarrow m^2 - m = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = 0 \end{array}\right..$$

Với $m = 0$ ta có $f(x) = \mathrm{e}^{x-1} - x \Rightarrow f'(x) = \mathrm{e}^{x-1} - 1$. Cho $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Bảng biến thiên của $f(x)$:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

Trường hợp $m = 0$, yêu cầu bài toán được thỏa mãn.

Với $m = 1$ ta có $f(x) = x^4 - x^3 - x^3 + x^2 + \mathrm{e}^{x-1} = (x-1)^2x^2 + \mathrm{e}^{x-1} - x \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Trường hợp $m = 1$ yêu cầu bài toán cũng được thỏa mãn.

Chọn đáp án (B) □

Câu 65. Cho bất phương trình $m.3^{x+1}+(3m+2)(4-\sqrt{7})^x+(4+\sqrt{7})^x>0$ với m là tham số thực. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình đã cho nghiệm đúng với mọi $x\in(-\infty;0]$.

(A) $m\ge -\dfrac{2-2\sqrt{3}}{3}$. (B) $m\ge \dfrac{2-2\sqrt{3}}{3}$. (C) $m> \dfrac{2-2\sqrt{3}}{3}$. (D) $m> \dfrac{2+2\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải.

Ta có $m.3^{x+1}+(3m+2)\cdot(4-\sqrt{7})^x+(4+\sqrt{7})^x>0\Leftrightarrow\left(\dfrac{4+\sqrt{7}}{3}\right)^x+(3m+2)\left(\dfrac{4-\sqrt{7}}{3}\right)^x+3m>0$.

Đặt $t=\left(\dfrac{4+\sqrt{7}}{3}\right)^x$.

Ta có $x\in(-\infty;0]\Leftrightarrow 0<t\le 1$.

Ta tìm tham số m sao cho $t^2+3mt+3m+2>0$ đúng với mọi $0<t\le 1$

$\Leftrightarrow m>\dfrac{-t^2-2}{3t+3},\forall t\in(0;1]$.

Xét hàm số $f(t)=-\dfrac{t^2+2}{3t+3}$ trên $(0;1]$.

Ta có $f'(t)=0\Leftrightarrow -\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{t^2+2t-2}{(t+1)^2}=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}t=-1-\sqrt{3}\\ t=-1+\sqrt{3}.\end{array}\right.$

Lập bảng biến thiên

t	0		$-1+\sqrt{3}$		1
$f'(t)$		$+$	0	1	
$f(t)$	$-\frac{2}{3}$	$\nearrow$	$\frac{2-2\sqrt{3}}{3}$	$\searrow$	$-\frac{1}{2}$

Vậy $m>f(t),\forall t\in(0;1]\Leftrightarrow m>\dfrac{2-2\sqrt{3}}{3}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 66. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để tập nghiệm của bất phương trình $\left(3^{x+2}-\sqrt{3}\right)(3^x-2m)<0$ chứa không quá 9 số nguyên?

(A) 1094. (B) 3281. (C) 1093. (D) 3280.

Lời giải.

Đặt $t=3^x,(t>0)$ bất phương trình $\left(3^{x+2}-\sqrt{3}\right)(3^x-2m)<0(1)$ trở thành $\left(9t-\sqrt{3}\right)(t-2m)<0(2)$.

Nếu $2m\le\dfrac{\sqrt{3}}{9}\Leftrightarrow m\le\dfrac{\sqrt{3}}{18}<1$ thì không có số nguyên dương m nào thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Nếu $2m>\dfrac{\sqrt{3}}{9}\Leftrightarrow m>\dfrac{\sqrt{3}}{18}$ thì bất phương trình $(2)\Leftrightarrow\dfrac{\sqrt{3}}{9}<t<2m$.

Khi đó tập nghiệm của bất phương trình (1) là $S=\left(-\dfrac{3}{2};\log_3(2m)\right)$.

Để S chứa không quá 9 số nguyên thì $\log_3(2m)\le 8\Leftrightarrow 0<m\le\dfrac{3^8}{2}$.

Vậy có 3280 số nguyên dương m thỏa mãn.

Chọn đáp án (D) □

Câu 67. Có bao nhiêu m nguyên dương để bất phương trình $3^{2x+2}-3^x\left(3^{m+2}+1\right)+3^m<0$ có không quá 30 nghiệm nguyên?

(A) 28. (B) 29. (C) 30. (D) 31.

Lời giải.

$3^{2x+2}-3^x\left(3^{m+2}+1\right)+3^m<0 \Leftrightarrow 9\cdot 3^{2x}-9\cdot 3^x\cdot 3^m-3^x+3^m<0$

$\Leftrightarrow 9\cdot 3^x\left(3^x-3^m\right)-\left(3^x-3^m\right)<0$

$\Leftrightarrow \left(3^x-3^m\right)\left(9\cdot 3^x-1\right)<0.$

Ta có $3^x-3^m=0 \Leftrightarrow x=m$.

$9.3^x-1=0 \Leftrightarrow x=-2$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		-2		m		$+\infty$
VT		$+$	0	$-$	0	$+$	

Ta có tập nghiệm $S=(-2;m)$.

Tập hợp các nghiệm nguyên là $\{-1;0;1;\ldots;m-1\}$.

Để có không quá 30 nghiệm nguyên thì $m-1\le 28 \Leftrightarrow m\le 29$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 68. Điều kiện của m để hệ bất phương trình $\begin{cases}7^{2x+\sqrt{x+1}}-7^{2+\sqrt{x+1}}+2020x\le 2020\\ x^2-(m+2)x+2m+3\ge 0\end{cases}$ có nghiệm là

(A) $m\ge -3$. (B) $-2\le m\le 1$. (C) $-1\le m\le 2$. (D) $m\ge -2$.

Lời giải.

$7^{2x+\sqrt{x+1}}-7^{2+\sqrt{x+1}}+2020x\le 2020 \Leftrightarrow 7^{2x+\sqrt{x+1}}+1010\cdot\left(2x+\sqrt{x+1}\right)\le 7^{2+\sqrt{x+1}}+1010\cdot\left(2+\sqrt{x+1}\right)$ $(*)$.

Hàm số $f(t)=7^t+1010t$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

$(*) \Leftrightarrow f\left(2x+\sqrt{x+1}\right)\le f\left(2+\sqrt{x+1}\right)$.

Suy ra: $2x+\sqrt{x+1}\le 2+\sqrt{x+1} \Rightarrow -1\le x\le 1$.

Với $x\in[-1;1]$ khi đó $x^2-(m+2)x+2m+3\ge 0 \Leftrightarrow m\ge \dfrac{x^2-2x+3}{x-2}$.

Ycbt $\Leftrightarrow \exists x\in[-1;1]\colon m\ge \dfrac{x^2-2x+3}{x-2}$ $(**)$.

Đặt $f(x)=\dfrac{x^2-2x+3}{x-2}$.

$f'(x)=\dfrac{x^2-4x+1}{(x-2)^2}$;

$f'(x)=0 \Rightarrow x=-2+\sqrt{3}$.

Lập bảng biến thiên

x	-1		$-2+\sqrt{3}$		1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	-2	$\nearrow$	$2-2\sqrt{3}$	$\searrow$	-2

Từ bảng biến thiên ta có $(**) \Leftrightarrow m \geq -2$.

Chọn đáp án D □

Câu 69. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để bất phương trình $\left(3^{x^2-x}-9\right)\left(2^{x^2}-m\right) \leq 0$ có 5 nghiệm nguyên?

A 65021. B 65024. C 65022. D 65023.

Lời giải.

$\left(3^{x^2-x}-9\right)\left(2^{x^2}-m\right) \leq 0$ (1).

Trường hợp 1: Xét $3^{x^2-x}-9=0 \Leftrightarrow x^2-x=2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=2 \end{array}\right.$ là nghiệm của bất phương trình (1).

Trường hợp 2: Xét $3^{x^2-x}-9>0 \Leftrightarrow x^2-x>2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<-1 \\ x>2. \end{array}\right.$

Khi đó, (1) $\Leftrightarrow 2^{x^2} \leq m \Leftrightarrow x^2 \leq \log_2 m(2)$.

Nếu $m<1$ thì (2) vô nghiệm.

Nếu $m \geq 1$ thì (2) $\Leftrightarrow -\sqrt{\log_2 m} \leq x \leq \sqrt{\log_2 m}$.

Do đó, (1) có 5 nghiệm nguyên $\Leftrightarrow ((-\infty;-1) \cup (2;+\infty)) \cap \left[-\sqrt{\log_2 m}; \sqrt{\log_2 m}\right]$ có 3 giá trị nguyên $\sqrt{\log_2 m} \in [3;4) \Leftrightarrow 512 \leq m < 65536$ (thỏa đk $m \geq 1$).

Suy ra có 65024 giá trị m nguyên thỏa mãn.

Trường hợp 3: Xét $3^{x^2-x}-9<0 \Leftrightarrow x^2-x<2 \Leftrightarrow -1<x<2$. Vì $(-1;2)$ chỉ có hai số nguyên nên không có giá trị m nào để bất phương trình (1) có 5 nghiệm nguyên.

Vậy có tất cả 65024 giá trị m nguyên thỏa yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án B □

Câu 70. Cho bất phương trình $m.3^{x+1}+(3m+2)(4-\sqrt{7})^x+(4+\sqrt{7})^x>0$, với m là tham số. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình đã cho nghiệm đúng với mọi $x \in (-\infty;0)$.

A $m>\dfrac{2+2\sqrt{3}}{3}$. B $m>\dfrac{2-2\sqrt{3}}{3}$. C $m \geq \dfrac{2-2\sqrt{3}}{3}$. D $m \geq -\dfrac{2-2\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải.

$m.3^{x+1}+(3m+2)\cdot(4-\sqrt{7})^x+(4+\sqrt{7})^x>0$

$\Leftrightarrow 3m+(3m+2)\cdot\left(\dfrac{4-\sqrt{7}}{3}\right)^x+\left(\dfrac{4+\sqrt{7}}{3}\right)^x>0.$

Đặt $t=\left(\dfrac{4+\sqrt{7}}{3}\right)^x$.

Khi $x<0$ thì $0<t<1$.
BPT trở thành $3m+\dfrac{3m+2}{t}+t>0, \forall t\in(0;1)$
$\Leftrightarrow 3m>\dfrac{-t^2-2}{t+1}, \forall t\in(0;1)$.
Xét $f(t)=\dfrac{-t^2-2}{t+1}, \forall t\in(0;1)$.
$f'(t)=\dfrac{-t^2-2t+2}{t+1}=0\Leftrightarrow t=\sqrt{3}-1$.
Lập bảng biến thiên

t	0		$\sqrt{3}-1$		1
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	-2	$\nearrow$	$\dfrac{2\sqrt{3}-6}{\sqrt{3}}$	$\searrow$	$-\dfrac{3}{2}$

Vậy ycbt $\Leftrightarrow 3m>\dfrac{2\sqrt{3}-6}{\sqrt{3}}\Leftrightarrow m>\dfrac{2-2\sqrt{3}}{3}$.
Chọn đáp án B ☐

Câu 71. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $\sqrt{2^x+3}+\sqrt{5-2^x}\le m$ nghiệm đúng với mọi $x\in(-\infty;\log_2 5)$.

A $m\ge 4$. B $m\ge 2\sqrt{2}$. C $m<4$. D $m<2\sqrt{2}$.

Lời giải.

Đặt $2^x=t$. Vì $x<\log_2 5\Rightarrow 0<2^x<2^{\log_2 5}\Rightarrow 0<t<5$.
Yêu cầu bài toán trở thành $\sqrt{t+3}+\sqrt{5-t}\le m, \forall t\in(0;5)$.
Xét hàm số $f(t)=\sqrt{t+3}+\sqrt{5-t}$ với $t\in(0;5)$.
Có $f'(t)=\dfrac{1}{2\sqrt{t+3}}-\dfrac{1}{2\sqrt{5-t}}$.
$f'(t)=0\Rightarrow\dfrac{1}{2\sqrt{t+3}}-\dfrac{1}{2\sqrt{5-t}}=0\Rightarrow\sqrt{t+3}=\sqrt{5-t}\Rightarrow t+3=5-t\Rightarrow t=1$.
Bảng biến thiên

t	0		1		5
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	$\sqrt{5}+\sqrt{3}$	$\nearrow$	4	$\searrow$	$2\sqrt{2}$

Dựa vào bảng biến thiên ta có: $m\ge 4$.
Chọn đáp án A ☐

Câu 72. Tìm tất cả các giá trị của m để bất phương trình $m.4^{x^2-2x-1}-(1-2m)\cdot 10^{x^2-2x-1}+m\cdot 25^{x^2-2x-1}\le 0$ nghiệm đúng với mọi $x\in\left[\dfrac{1}{2};2\right]$.

Ⓐ $m < 0$. Ⓑ $m \geq \dfrac{100}{841}$. Ⓒ $m \leq \dfrac{1}{4}$. Ⓓ $m \leq \dfrac{100}{841}$.

Lời giải.

$m.4^{x^2-2x-1} - (1-2m)\cdot 10^{x^2-2x-1} + m\cdot 25^{x^2-2x-1} \leq 0$

$\Leftrightarrow m - (1-2m)\cdot\left(\dfrac{5}{2}\right)^{x^2-2x-1} + m\cdot\left(\dfrac{5}{2}\right)^{2\left(x^2-2x-1\right)} \leq 0(1)$.

Đặt $t = \left(\dfrac{5}{2}\right)^{x^2-2x-1}$, Xét $u(x) = x^2 - 2x - 1$, $\forall x \left[\dfrac{1}{2};2\right]$.

$u'(x) = 2x - 2$; $u'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

$u\left(\dfrac{1}{2}\right) = -\dfrac{7}{4}$; $u(1) = -2$; $u(2) = -1 \Rightarrow \min\limits_{\left[\frac{1}{2};2\right]} u(x) = -2,\ \max\limits_{\left[\frac{1}{2};2\right]} u(x) = -1$

$\Rightarrow \dfrac{4}{25} \leq t \leq \dfrac{2}{5}$.

$(1) \Leftrightarrow m - (1-2m)\cdot t + m\cdot t^2 \leq 0$

$\Leftrightarrow mt^2 - (1-2m)t + m \leq 0$

$\Leftrightarrow m\left(t^2 + 2t + 1\right) \leq t$

$\Leftrightarrow m \leq \dfrac{t}{t^2 + 2t + 1}$.

Xét hàm số $f(t) = \dfrac{t}{t^2 + 2t + 1}$, $t \in \left[\dfrac{4}{25};\dfrac{2}{5}\right]$.

$f'(t) = \dfrac{-t^2 + 1}{(t^2 + 2t + 1)}$; $f'(t) = 0 \Leftrightarrow -t^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1(l) \\ t = 1(l). \end{array}\right.$

$f\left(\dfrac{4}{25}\right) = \dfrac{100}{841}$; $f\left(\dfrac{2}{5}\right) = \dfrac{10}{49}$

$\Rightarrow \min\limits_{\left[\frac{4}{25};\frac{2}{5}\right]} f(t) = \dfrac{100}{841}$.

Vậy $m \leq \dfrac{100}{841}$ thì bất phương trình nghiệm đúng với mọi $x \in \left[\dfrac{1}{2};2\right]$.

Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 73. Cho bất phương trình $3^{\frac{2-\sqrt{x^2-2x+m}}{2}} + 3^{\frac{2}{\sqrt{x^2-2x+m}-2}} > \dfrac{10}{3}$ với m là tham số thực. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để bất phương trình nghiệm đúng với mọi $x \in [0;2]$?

Ⓐ 15. Ⓑ 9. Ⓒ 10. Ⓓ 11.

Lời giải.

Xét phương trình $3^{\frac{2-\sqrt{x^2-2x+m}}{2}} + 3^{\frac{2}{\sqrt{x^2-2x+m}-2}} > \dfrac{10}{3}$.

Đặt $t = \dfrac{2 - \sqrt{x^2 - 2x + m}}{2} \Rightarrow \forall t \in (-\infty;1] \setminus \{0\}$, bất phương trình trở thành $3^t + 3^{-\frac{1}{t}} > \dfrac{10}{3}$.

Xét hàm số $f(x) = 3^x + 3^{-\frac{1}{x}}$, $\forall x \in (-\infty;1] \setminus \{0\}$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		1
$f'(x)$		$+$	||	$+$	
$f(x)$	1	$\nearrow$	$+\infty$ || 1	$\nearrow$	$\frac{10}{3}$

Từ bảng biến thiên suy ra

$3^t+3^{-\frac{1}{t}}>\dfrac{10}{3}\Leftrightarrow -1<t<0\Leftrightarrow -1<\dfrac{2-\sqrt{x^2-2x+m}}{2}<0\Leftrightarrow 4-x^2+2x<m<16-x^2+2x\Leftrightarrow$ $\max\limits_{x\in[0;2]}(4-x^2+2x)<m<\min\limits_{x\in[0;2]}(16-x^2+2x)\Leftrightarrow 5<m<16.$

Chọn đáp án C □

Câu 74. Tính tổng tất cả các giá trị nguyên dương của m để bất phương trình $2^{x+3}+2^{m-x}<2^{m+3}+1$ có nhiều nhất 20 nghiệm nguyên.

A 153. B 171. C 190. D 210.

Lời giải.

Ta có BPT đã cho

$\Leftrightarrow 2^{x+3}+\dfrac{2^m}{2^x}<8\cdot 2^m+1\Leftrightarrow 8\cdot 2^{2x}+2^m<8\cdot 2^{m+x}+2^x\Leftrightarrow\left(2^x-2^m\right)\left(2^x-2^{-3}\right)<0.$

Ta có

$2^x=2^m\Leftrightarrow x=m$

$2^x=2^{-3}\Leftrightarrow x=-3.$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		-3		m		$+\infty$
VT		$+$	0	$-$	0	$+$	

Suy ra tập nghiệm của BPT là $(-3;m)$.

Do đó tập các nghiệm nguyên là $\{-2;-1;0;1;\ldots;m-1\}$ YCBT suy ra $m-1\le 17\Leftrightarrow m\le 18$.

Vậy có 18 giá trị nguyên dương của m là $m\in\{1,2,3,\ldots,18\}\Rightarrow S=1+2+3+\ldots+18=(1+18)\cdot\dfrac{18}{2}=171.$

Chọn đáp án B □

Câu 75. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-2022;2022]$ để bất phương trình $(3m+1)12^x+(2-m)6^x+3^x<0$ có nghiệm đúng với $\forall x>0$?

A 2021. B 4044. C 2022. D 2020.

Lời giải.

Ta có $(3m+1)12^x+(2-m)6^x+3^x<0\Leftrightarrow(3m+1)4^x+(2-m)2^x+1<0.$

Đặt $2^x=t$. Vì $x>0\Rightarrow t>1$.

Bất phương trình trở thành: $(3m+1)t^2+(2-m)t+1<0\Leftrightarrow m\left(3t^2-t\right)+t^2+2t+1<0\Leftrightarrow m<-\dfrac{t^2+2t+1}{3t^2-t}$ (Vì $3t^2-t>0,\forall t>1$).

Xét hàm số $f(t)=-\dfrac{t^2+2t+1}{3t^2-t}$ với $t>1$.

Ta có $f'(t)=\dfrac{7t^2+6t-1}{\left(3t^2-t\right)^2}$.

Ta thấy: $f'(t)=\dfrac{7t^2+6t-1}{\left(3t^2-t\right)^2}>0, \forall t>1$ nên $f(t)$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

Do đó $m<-\dfrac{t^2+2t+1}{3t^2-t}, \forall t>1$ khi và chỉ khi $m\leq f(1)=-2$.

Vì $m\in[-2022;2022]$ và m nên $m\in\{-2022;-2021;\ldots;-2\}$.

Vậy có 2021 giá trị thoả mãn.

Chọn đáp án (A) □

Câu 76. Cho bất phương trình: $8^x+3x\cdot 4^x+\left(3x^2+2\right)2^x\leq\left(m^3-1\right)x^3+2(m-1)x$. Số các giá trị nguyên của tham số m để bất phương trình trên có đúng năm nghiệm nguyên dương phân biệt là

(A) 6. (B) 4. (C) 3. (D) 5.

Lời giải.

Đầu tiên ta có bất phương trình tương đương với:

$8^x+3x\cdot(2^x)^2+3x^2\cdot 2^x+x^3+2\left(2^x+x\right)\leq(mx)^3+2(mx)\Leftrightarrow\left(2^x+x\right)^3+2\left(2^x+x\right)\leq(mx)^3+2(mx)$.

Xét hàm đặc trưng $y=f(t)=t^3+2t$ có $f'(t)=3t^2+2>0$ với mọi $t\in\mathbb{R}$ nên $f(t)$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Từ đó ta suy ra $f\left(2^x+x\right)\leq f(mx)\Leftrightarrow 2^x+x\leq mx(*)$.

Với $x\neq 0$ thì bất phương trình (1) tương đương với $m\geq\dfrac{2^x}{x}+1$. Xét hàm số $y=g(x)=\dfrac{2^x}{x}+1, \forall x\in(0;+\infty)$ thì ta có: $g'(x)=0\Leftrightarrow x=x_0\approx 1,44$, cùng với $g"(x_0)>0$ nên suy ra $x=x_0$ là điểm cực tiểu.

Do $g(1)=g(2)=3$ nên để có 5 nghiệm nguyên dương phân biệt thì

Suy ra để thỏa yêu cầu đề bài thì $g(4)<m\leq g(6)\Leftrightarrow 7,4\leq m\leq 11,6\xrightarrow{m\in\mathbb{Z}}m\in\{8;9;10;11\}$ tức có 4 giá trị nguyên m thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Chọn đáp án (B) □

Câu 77. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc đoạn $[0;2022]$ để bất phương trình $\Big[(m-1)4^x-\dfrac{2}{4^x}+2m$
0 nghiệm đúng với mọi x thuộc $[0;1)$?

(A) 2021. (B) 1011. (C) 2022. (D) 1.

Lời giải.

Đầu tiên ta xét $-x+4^{1-x}=\dfrac{x4^x-4}{4^x}<0, \forall x\in[0;1)$, do $x4^x<4, \forall x\in[0;1)$ nên bất phương trình tương đương với: $(m-1)4^x-\dfrac{2}{4^x}+2m+1\leq 0$. Đặt $t=4^x\in[1;4)$, khi đó bất phương trình trở thành:

$(m-1)t-\dfrac{2}{t}+2m+1\leq 0\Leftrightarrow(m-1)t^2+(2m+1)t-2\leq 0, \forall t\in[1;4)\Leftrightarrow m\leq\dfrac{t^2-t+2}{t^2+2t}, \forall t\in[1;4)$.

Xét hàm số $y=f(t)=\dfrac{t^2-t+2}{t^2+2t}, \forall t\in[1;4)$ có $f'(t)=\dfrac{3t^2-4t-4}{\left(t^2+2t\right)^2}=0\Leftrightarrow t=2$.

Mà $\lim\limits_{t\to 1^+}f(t)=\dfrac{2}{3}$; $\lim\limits_{t\to 4^-}f(t)=\dfrac{7}{12}$; $f(2)=\dfrac{1}{2}$ nên ta suy ra được $f(t)\geq\dfrac{1}{2}$ tức $\min f(t)=\dfrac{1}{2}$.

Suy ra để bất phương trình có nghiệm đúng trên tập cho trước thì $m \leq \min f(t) \Leftrightarrow m \leq \dfrac{1}{2}$.

Với $m \in [0; 2022]$ ta thu được $m \in \left[0; \dfrac{1}{2}\right]$ tức có 1 giá trị nguyên m thỏa mãn.

Chọn đáp án D □

Câu 78. Có bao nhiêu giá trị nguyên m để bất phương trình $2^{m^2-14} < 2^{x^2-2x-3} + \dfrac{x^2-2x-m^2+11}{2^{x-3}}$ nghiệm đúng với mọi giá trị thực của x?

A 6. B 9. C 7. D 8.

Lời giải.

Bất phương trình tương đương với $2^{m^2-14} \cdot 2^{x-3} < 2^{x^2-2x-3} \cdot 2^{x-3} + x^2 - 2x - m^2 + 11$

$\Leftrightarrow 2^{m^2+x-17} < 2^{x^2-x-6} + (x^2-2x-m^2+11) \Leftrightarrow 2^{m^2+x-17} + (m^2+x-17) < 2^{x^2-x-6} + (x^2-x-6)$.

Xét hàm đặc trưng $y = f(t) = 2^t + t$ có $f'(t) = 2^t \ln 2 + 1 > 0$ với mọi $t \in \mathbb{R}$.

Suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Từ đó kéo theo: $m^2 + x - 17 < x^2 - x - 6 \Leftrightarrow x^2 - 2x - m^2 + 11 > 0 \Leftrightarrow \Delta' = 1 - (-m^2 + 11) \leq 0 \Leftrightarrow -\sqrt{10} \leq m \leq \sqrt{10}$.

Do $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in [-3; 3]$ tức có 7 giá trị nguyên m thỏa mãn đề bài.

Chọn đáp án C □

Câu 79. Cho bất phương trình $4^x - (m+1)2^{x+1} + m \geq 0$. Tập hợp các giá trị thực của tham số m để bất phương trình nghiệm đúng với mọi $x \geq 0$ là

A $(-1; 16]$. B $(-\infty; -1]$. C $(-\infty; 0]$. D $(-\infty; 12]$.

Lời giải.

$4^x - (m+1)2^{x+1} + m \geq 0$

$\Leftrightarrow (2^x)^2 - 2(m+1)2^x + m \geq 0$. Đặt $2^x = t \geq 1$ vì $x \geq 0$.

Bất phương trình thành: $t^2 - 2(m+1)t + m \geq 0$

$\Leftrightarrow m(1-2t) \geq -t^2 + 2t (*)$.

Trường hớp 1: $1 - 2t = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{1}{2}$. Thay vào bất phương trình ta có: $0 \geq \dfrac{3}{4}$ vô lý.

Trường hợp 2: $1 - 2t > 0 \Rightarrow 0 < t < \dfrac{1}{2}$. Không thỏa mãn $t \geq 1$.

Trường hợp 3: $1 - 2t < 0 \Rightarrow t > \dfrac{1}{2}$. Kết hợp điều kiện ta có: $t \geq 1$.

$(*) \Leftrightarrow m \leq \dfrac{-t^2+2t}{1-2t}, \forall t \in [1; +\infty)$.

Đặt $g(t) = \dfrac{-t^2+2t}{1-2t} \Rightarrow g'(t) = \dfrac{(-2t+2)(1-2t) + 2\left(-t^2+2t\right)}{(1-2t)^2} = \dfrac{2t^2-2t+2}{(1-2t)^2} > 0, \forall t \in [1; +\infty)$.

$(*) \Leftrightarrow m \leq \min\limits_{t \in (1; +\infty)} \dfrac{-t^2+2t}{1-2t}, \forall t \in [1; +\infty)$.

$(*) \Leftrightarrow m \leq g(1) = -1$.

Vậy $m \in (-\infty; -1]$.

Chọn đáp án B □

Câu 80. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m ($|m| \leq 10$) để phương trình $3^{\log_2 x^2} - 2(m+6)3^{\log_2 x} + m^2 - 1 = 0$ (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 \cdot x_2 > 2$?

(A) 8. (B) 9. (C) 16. (D) 10.

Lời giải.

Đặt $3^{\log_2 x} = t (t > 0)$, phương trình (1) thành: $t^2 - 2(m+6)t + m^2 - 1 = 0$ (2).

Pt(1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 khi và chỉ khi pt(2) có hai nghiệm dương phân biệt t_1, t_2.

Điều kiện: $\begin{cases} \Delta' = (m+6)^2 - \left(m^2-1\right) > 0 \\ 2(m+6) > 0 \\ m^2 - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12m + 37 > 0 \\ m > -6 \\ \left[\begin{array}{l} m > 1 \\ m < -1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > 1 \\ \dfrac{-37}{12} < m < -1 \end{array}\right.$ (3).

Khi đó, $\begin{cases} 3^{\log_2 x_1} = t_1 \\ 3^{\log_2 x_2} = t_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2^{\log_3 t_1} \\ x_2 = 2^{\log_3 t_2} \end{cases} \Rightarrow x_1 \cdot x_2 > 2 \Leftrightarrow 2^{\log_3 t_1} \cdot 2^{\log_3 t_2} > 2 \Leftrightarrow \log_3(t_1 t_2) > 1 \Leftrightarrow$ $t_1 t_2 > 3$

$\Leftrightarrow m^2 - 1 > 3 \Leftrightarrow m^2 > 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > 2 \\ m < -2 \end{array}\right.$ (4).

Từ (3) và (4) ta được: $\left[\begin{array}{l} m > 2 \\ \dfrac{-37}{12} < m < -2 \end{array}\right.$, với m nguyên và $|m| \leq 10$ có 9 giá trị của m thỏa mãn.

Chọn đáp án (B) □

Dạng 3. Bất phương trìnhnhiều ẩn

Câu 1. Có bao nhiêu số nguyên x sao cho ứng với mỗi x có không quá 728 số nguyên y thỏa mãn $\log_4\left(x^2 + y\right) \geq \log_3(x+y)$?

(A) 59. (B) 58. (C) 116. (D) 115.

Lời giải.

Với mọi $x \in \mathbb{Z}$ ta có $x^2 \geq x$.

Xét hàm số $f(y) = \log_3(x+y) - \log_4\left(x^2+y\right)$.

Tập xác định $\mathscr{D} = (-x; +\infty)$ (do $y > -x \Rightarrow y > -x^2$).

Ta có

$$f'(y) = \frac{1}{(x+y)\ln 3} - \frac{1}{\left(x^2+y\right)\ln 4} \geq 0, \forall x \in \mathscr{D}$$

Do $x^2 + y \geq x + y > 0$ và $\ln 4 > \ln 3$. Suy ra $f(y)$ tăng trên $\mathscr{D}$.

Ta có $f(-x+1) = \log_3(x - x + 1) - \log_4\left(x^2 - x + 1\right) \leq 0$ có không quá 728 số nguyên y thỏa mãn $f(y) \leq 0$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \quad f(-x+729) > 0 \Leftrightarrow \log_3 729 - \log_4\left(x^2 - x + 729\right) > 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x^2 - x + 729 - 4^6 < 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 3367 < 0 \\ &\Leftrightarrow \quad -57,5 \leq x \leq 58,5 \end{aligned}$$

Mà $x \in \mathbb{Z}$ nên $x \in \{-57, -56, \ldots, 58\}$.

Vậy có $58 - (-57) + 1 = 116$ số nguyên x thỏa.

Chọn đáp án (C) □

Câu 2 (Mã 102 - 2020 Lần 1). Có bao nhiêu số nguyên x sao cho ứng với mỗi x có không quá 242 số nguyên y thỏa mãn $\log_4(x^2+y) \geq \log_3(x+y)$?

(A) 55. (B) 28. (C) 29. (D) 56.

Lời giải.

Điều kiện: $\begin{cases} x^2+y>0 \\ x+y>0. \end{cases}$

Đặt $\log_3(x+y)=t$, ta có $\begin{cases} x^2+y \geq 4^t \\ x+y=3^t \end{cases}$

Nhận xét rằng hàm số $f(t)=4^t-3^t$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$ và $f(t)>0$ với mọi $t>0$.

Gọi $n \in \mathbb{Z}$ thỏa $4^n-3^n=x^2-x$, khi đó

Từ đó, ta có $-x<y=3^t-x \leq 3^n-x$.

Mặt khác, vì có không quá 242 số nguyên y thỏa mãn đề bài nên $3^n \leq 242 \Leftrightarrow n \leq \log_3 242$.

Từ đó, suy ra

Mà $x \in \mathbb{Z}$ nên $x \in \{-27,-26,\ldots,27,28\}$.

Vậy có 56 giá trị nguyên của x thỏa yêu cầu đề bài.

Chọn đáp án (D) □

Câu 3 (Mã 103 - 2020 Lần 1). Có bao nhiêu số nguyên x sao cho ứng với mỗi x có không quá 127 số nguyên y thỏa mãn $\log_3(x^2+y) \geq \log_2(x+y)$?

(A) 89. (B) 46. (C) 45. (D) 90.

Lời giải.

Ta có $\log_3(x^2+y) \geq \log_2(x+y) \quad (1)$.

Đặt $t=x+y \in \mathbb{N}^*$ (do $x,y \in \mathbb{Z}, x+y>0$). Khi đó

$$(1) \Leftrightarrow \log_3\left(x^2-x+t\right) \geq \log_2 t \Leftrightarrow g(t)=\log_2 t-\log_3\left(x^2-x+t\right) \leq 0 \quad (2)$$

Đạo hàm $g'(t)=\dfrac{1}{t\ln 2}-\dfrac{1}{(x^2-x+t)\ln 3}>0$ với mọi y.

Do đó $g(t)$ đồng biến trên $[1;+\infty)$.

Vì mỗi x nguyên có không quá 127 giá trị $t \in \mathbb{N}^*$ nên ta có

$$g(128)>0 \Leftrightarrow \log_{2}128-\log_3\left(x^2-x+128\right)>0$$
$$\Leftrightarrow \quad x^2-x+128<3^7 \Leftrightarrow -44,8 \leq x \leq 45,8$$

Như vậy có 90 giá trị thỏa yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án (D) □

Câu 4 (Mã 104 - 2020 Lần 1). Có bao nhiêu số nguyên x sao cho ứng với mỗi x có không quá 255 số nguyên y thỏa mãn $\log_3(x^2+y) \geq \log_2(x+y)$?

(A) 80. (B) 79. (C) 157. (D) 158.

Lời giải.

Ta có $\log_3(x^2+y) \geq \log_2(x+y) \Leftrightarrow x^2+y \geq 3^{\log_2(x+y)} \Leftrightarrow x^2+y \geq (x+y)^{\log_2 3} \quad (1)$.

Điều kiện: $x+y \geq 1$ (do $x, y \in \mathbb{Z}$, $x+y>0$).

Đặt $t = x+y \geq 1$, nên từ (1) $\Rightarrow x^2 - x \geq t^{\log_2 3} - t(2)$.

Để (1) không có quá 255 nghiệm nguyên y khi và chỉ khi bất phương trình (2) có không quá 255 nghiệm nguyên dương t.

Đặt $M = f(255)$ với $f(t) = t^{\log_2 3} - t$.

Vì f là hàm đồng biến trên $[1, +\infty)$ nên $(2) \Leftrightarrow 1 \leq t \leq f^{-1}(x^2-x)$ khi $x^2 - x \geq 0$.

Vậy (2) có không quá 255 nghiệm nguyên

$$\Leftrightarrow f^{-1}\left(x^2-x\right) \leq 255 \Leftrightarrow x^2 - x \leq 255 \Leftrightarrow -78 \leq x \leq 79 (x \in \mathbb{Z})$$

Vậy có 158 số nguyên x thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án (D) □

Câu 5. Trong các nghiệm $(x; y)$ thỏa mãn bất phương trình $\log_{x^2+2y^2}(2x+y) \geq 1$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $T = 2x+y$ bằng

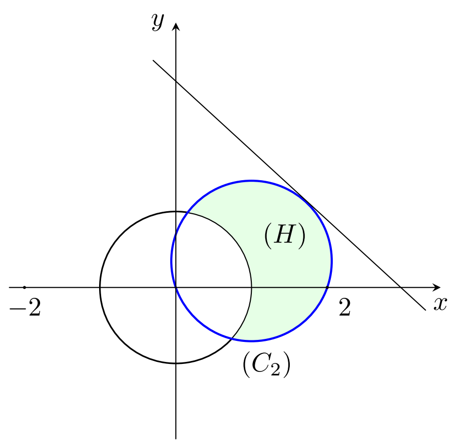
(A) $\frac{9}{4}$. (B) $\frac{9}{2}$. (C) $\frac{9}{8}$. (D) 9.

Lời giải.

Trường hợp 1: $x^2+2y^2>1$. Đặt $\sqrt{2}y = z$. Suy ra $x^2+z^2>1 \quad (1)$. Bất phương trình

$$\begin{aligned}
&\log_{x^2+2y^2}(2x+y) \geq 1\\
\Leftrightarrow\quad & 2x+y \geq x^2+2y^2 \Leftrightarrow 2x + \frac{z}{\sqrt{2}} \geq x^2+z^2\\
\Leftrightarrow\quad & (x-1)^2 + \left(z - \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2 \leq \frac{9}{8} \quad (2)
\end{aligned}$$

Tập hợp các điểm $M(x; z)$ là miền (H) bao gồm miền ngoài của hình tròn $(C_1)\colon x^2+z^2=1$ và miền trong của hình tròn $(C_2)\colon (x-1)^2+\left(z-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{9}{8}$.



Hệ $\begin{cases} T = 2x + \dfrac{z}{\sqrt{2}} \\ (x-1)^2 + \left(z - \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2 \leq \dfrac{9}{8} \\ x^2 + z^2 > 1 \end{cases}$ có nghiệm khi đường thẳng $d\colon 2x + \dfrac{z}{\sqrt{2}} - T = 0$ có điểm chung với miền (H).

Để T đạt giá trị lớn nhất thì đường thẳng $d\colon 2x + \dfrac{z}{\sqrt{2}} - T = 0$ tiếp xúc với đường tròn (C_2)

$\Leftrightarrow \mathrm{d}(I;d) = \dfrac{3}{2\sqrt{2}}$ với $I\left(1;\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right)$ là tâm của đường tròn (C_2)

$$\Leftrightarrow \frac{\left|2+\frac{1}{4}-T\right|}{\sqrt{4+\frac{1}{2}}} = \frac{3}{2\sqrt{2}} \Leftrightarrow \left|T - \frac{9}{4}\right| = \frac{9}{4}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} T = 0 \text{ (loại)} \\ T = \dfrac{9}{2}. \end{array}\right.$$

Trường hợp 2: $0 < x^2 + 2y^2 < 1$.

$$\log_{x^2+2y^2}(2x+y) \geq 1 \Leftrightarrow 2x + y \leq x^2 + 2y^2 \Leftrightarrow T = 2x + y < 1 \text{ (loại)}.$$

Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức $T = 2x + y$ là $\max T = \dfrac{9}{2}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 6. Có bao nhiêu bộ $(x;y)$ với x, y nguyên và $1 \leq x, y \leq 2020$ thỏa mãn $(xy + 2x + 4y + 8)\log_3\left(\dfrac{2y}{y+2}\right) \leq (2x + 3y - xy - 6)\log_2\left(\dfrac{2x+1}{x-3}\right)$?

(A) 2017. (B) 4034. (C) 2. (D) 2017×2020.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} x, y \in \mathbb{N}^*\colon x, y \leq 2020 \\ \dfrac{2x+1}{x-3} > 0, \dfrac{2y}{y+2} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x, y \in \mathbb{N}^*\colon x, y \leq 2020 \\ x > 3, y > 0. \end{cases}$

BPT cho có dạng

$$(x-3)(y-2)\log_2\left(\frac{x+4}{x-3} + 1\right) + (x+4)(y+2)\log_3\left(\frac{y-2}{y+2} + 1\right) \leq 0 \quad (*).$$

Xét $y = 1$ thì $(*)$ trở thành

$$-(x-3)\log_2\left(\frac{x+4}{x-3} + 1\right) + 3(x+4)\log_3\frac{2}{3} \leq 0$$

Bất phương trình này nghiệm đúng với mọi $x > 3$ vì

$$-(x-3) < 0, \log_2\left(\frac{x+4}{x-3} + 1\right) > \log_2(0+1) = 0, 3(x+4) > 0, \log_3\frac{2}{3} < 0$$

Như vậy trường hợp này cho ta đúng 2017 bộ $(x;y) = (x;1)$ với $4 \leq x \leq 2020, x \in \mathbb{N}$.

Xét $y = 2$ thì $(*)$ thành $4(x+4)\log_3 1 \leq 0$, bất phương trình này cũng luôn đúng với mọi x mà $4 \leq x \leq 2020, x \in \mathbb{N}$.

Trường hợp này cho ta 2017 cặp $(x;y)$ nữa.

Với $y > 2, x > 3$ thì $VT(*) > 0$ nên $(*)$ không xảy ra.

Vậy có đúng 4034 bộ số $(x;y)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án B □

Câu 7 (THPT Quỳnh Lưu 3 Nghệ An 2019).

Cho hai số thực $a, b > 0$ thỏa mãn $\log_2(a+1)+\log_2(b+1) \geq 6$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $a+b$ là

A 12. B 14. C 16. D 8.

Lời giải.

Ta có

$$\log_2(a+1)+\log_2(b+1) \geq 6 \Leftrightarrow \log_2[(a+1)(b+1)] \geq 6 \Leftrightarrow (a+1)(b+1) \geq 64.$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số dương $a+1$ và $b+1$, ta được.

$$(a+1)+(b+1) \geq 2\sqrt{(a+1)(b+1)} \geq 2\sqrt{64} = 16 \Leftrightarrow a+b+2 \geq 16 \Leftrightarrow a+b \geq 14.$$

Dấu xảy ra khi $a+1 = b+1 \Leftrightarrow a = b$.

Vậy $\min(a+b) = 14$ khi $a = b = 7$.

Chọn đáp án B □

Câu 8 (Liên Trường THPT Tp Vinh Nghệ An 2019).

Trong các nghiệm $(x;y)$ thỏa mãn bất phương trình $\log_{x^2+2y^2}(2x+y) \geq 1$. Khi đó giá trị lớn nhất của biểu thức $T = 2x+y$ là

A $\dfrac{9}{4}$. B 9. C $\dfrac{9}{2}$. D $\dfrac{9}{8}$.

Lời giải.

Trường hợp 1: $x^2+2y^2 > 1$.

Bất phương trình

$$\log_{x^2+2y^2}(2x+y) \geq 1 \Leftrightarrow 2x+y \geq x^2+2y^2 \Rightarrow 2x+y \geq x^2+2y^2 > 1.$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhia-CopSky ta có

$$\begin{aligned} &\left(2^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\right)(x^2+2y^2) \geq (2x+y)^2 \\ \Leftrightarrow\quad & x^2+2y^2 \geq \frac{2(2x+y)^2}{9} \Rightarrow 2x+y \geq \frac{2(2x+y)^2}{9} \\ \Leftrightarrow\quad & (2x+y)\left(2x+y-\frac{9}{2}\right) \leq 0 \Rightarrow 2x+y \in \left(1;\frac{9}{2}\right] \end{aligned}$$

Giá trị lớn nhất của $T = 2x+y = \dfrac{9}{2}$. Dấu bằng xảy ra khi $x = 2; y = \dfrac{1}{2}$.

Trường hợp 2: $0 < x^2+2y^2 < 1$.

Bất phương trình

$$\log_{x^2+2y^2}(2x+y) \geq 1 \Leftrightarrow 2x+y \leq x^2+2y^2 < 1 < \frac{9}{2}.$$

Vậy giá trị lớn nhất của $T = 2x + y = \dfrac{9}{2}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 9 (Chuyên Vĩnh Phúc 2019). Tìm tập S tất cả các giá trị thực của tham số m để tồn tại duy nhất cặp số $(x; y)$ thỏa mãn $\log_{x^2+y^2+2}\left(4x+4y-6+m^2\right) \geq 1$ và $x^2+y^2+2x-4y+1=0$.

(A) $S = \{-1; 1\}$.
(B) $S = \{-5; -1; 1; 5\}$.
(C) $S = \{-5; 5\}$.
(D) $S = \{-7; -5; -1; 1; 5; 7\}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} & \log_{x^2+y^2+2}\left(4x+4y-6+m^2\right) \geq 1 \\ \Leftrightarrow\ & 4x+4y-6+m^2 \geq x^2+y^2+2 \\ \Leftrightarrow\ & x^2+y^2-4x-4y+8-m^2 \leq 0 \\ \Leftrightarrow\ & (x-2)^2+(y-2)^2 \leq m^2 \end{aligned}$$

là một hình tròn (C_1) tâm $I(2;2)$, bán kính $R_1 = |m|$ với $m \neq 0$ hoặc là điểm $I(2;2)$ với $m = 0$ và $x^2+y^2+2x-4y+1=0 \Leftrightarrow (x+1)^2+(y-2)^2=4$ là một đường tròn (C_2) tâm $J(-1;2)$, bán kính $R_2 = 2$.

Trường hợp 1: Với $m = 0$ ta có: $I(2;2) \notin (C_2)$ suy ra $m = 0$ không thỏa mãn điều kiện bài toán.

Trường hợp 2: Với $m \neq 0$.

Để hệ $\begin{cases} \log_{x^2+y^2+2}\left(4x+4y-6+m^2\right) \geq 1 \\ x^2+y^2+2x-4y+1=0 \end{cases}$ tồn tại duy nhất cặp số $(x;y)$ thì hình tròn (C_1) và đường tròn (C_2) tiếp xúc ngoài với nhau

$$\Leftrightarrow IJ = R_1 + R_2 \Leftrightarrow \sqrt{3^2+0^2} = |m| + 2 \Leftrightarrow |m| = 1 \Leftrightarrow m = \pm 1.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 10. Tìm tham số m để tồn tại duy nhất cặp số $(x;y)$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau $\log_{2019}(x+y) \leq 0$ và $x + y + \sqrt{2xy+m} \geq 1$

(A) $m = -\dfrac{1}{2}$.
(B) $m = 0$.
(C) $m = 2$.
(D) $m = -\dfrac{1}{3}$.

Lời giải.

Xét hệ bất phương trình:

$$\begin{cases} \log_{2019}(x+y) \leq 0(1) \\ x+y+\sqrt{2xy+m} \geq 1(2). \end{cases}$$

Với $(x;y)$ là nghiệm hệ bất phương trình thì $(y;x)$ cũng là nghiệm của hệ bất phương trình. Do đó hệ có nghiệm duy nhất $\Rightarrow x = y$.

Khi đó:

$$(1) \quad \Leftrightarrow 0 < 2x \leq 1 \Leftrightarrow 0 < x \leq \frac{1}{2}.$$

Với $0 < x \leq \dfrac{1}{2}$;

$$\begin{aligned}(2) \quad &\Leftrightarrow \quad 2x + \sqrt{2x^2+m} \geq 1 \Leftrightarrow \sqrt{2x^2+m} \geq 1-2x \\ &\Leftrightarrow \quad 2x^2 + m \geq 1 - 4x + 4x^2 \Leftrightarrow 2x^2 - 4x + 1 \leq m.\end{aligned}$$

Đặt $f(x) = 2x^2 - 4x + 1$.
Ta có $f(x)$ nghịch biến trên $\left(0; \dfrac{1}{2}\right)$ nên $f(x) \geq f\left(\dfrac{1}{2}\right) = -\dfrac{1}{2}$, $\forall x \in \left(0; \dfrac{1}{2}\right]$.
Do đó hệ có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow m = -\dfrac{1}{2}$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 11. Trong tất cả các cặp $(x; y)$ thỏa mãn $\log_{x^2+y^2+2}(4x+4y-4) \geq 1$. Tìm m để tồn tại duy nhất cặp $(x; y)$ sao cho $x^2 + y^2 + 2x - 2y + 2 - m = 0$.

(A) $m = \left(\sqrt{10} - \sqrt{2}\right)^2$.
(B) $m = \sqrt{10} \pm \sqrt{2}$.
(C) $m = \sqrt{10} - \sqrt{2}$.
(D) $m = \left(\sqrt{10} \pm \sqrt{2}\right)^2$.

Lời giải.

Với mọi $x, y \in \mathbb{R}$, ta luôn có $x^2 + y^2 + 2 \geq 2 > 1$ nên BPT

$$\log_{x^2+y^2+2}(4x+4y-4) \geq 1 \Leftrightarrow 4x + 4y - 4 \geq x^2 + y^2 + 2 \Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-2)^2 \leq 2(1).$$

BPT (1) mô tả hình tròn tâm $I(2; 2)$ và bán kính $R_1 = \sqrt{2}$.
Mặt khác, phương trình

$$x^2 + y^2 + 2x - 2y + 2 - m = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 + (y-1)^2 = m \quad (2)$$

Do đó để (2) có nghiệm thì $m \geq 0$.
TH1: $m = 0$. Khi đó, (2) $\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases}$ không thỏa (1) nên loại $m = 0$.
TH2: $m > 0$. Khi đó, (2) là phương trình đường tròn (C_2) tâm $J(-1; 1)$ và bán kính $R_2 = \sqrt{m}$.
Do đó, yêu cầu đề bài $\Leftrightarrow$ Hệ BPT

$$\begin{cases} (x-2)^2 + (y-2)^2 \leq 2 \\ (x+1)^2 + (y-1)^2 = m \end{cases}$$

có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow$ (C_2) tiếp xúc với đường tròn (C_1): $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 2$ cũng có tâm $I(2; 2)$ và bán kính $R_1 = \sqrt{2}$.
Vì $IJ = \sqrt{10} > \sqrt{2} = R_1$ nên (C_1) hoặc tiếp xúc ngoài, hoặc tiếp xúc trong với (C_2).
TH2a: (C_1) tiếp xúc ngoài với (C_2)

$$\begin{aligned}&\Leftrightarrow \quad IJ = R_1 + R_2 \Leftrightarrow \sqrt{10} = \sqrt{2} + \sqrt{m} \\ &\Leftrightarrow \quad \sqrt{m} = \sqrt{10} - \sqrt{2} \Leftrightarrow m = \left(\sqrt{10} - \sqrt{2}\right)^2.\end{aligned}$$

TH2b: (C_1) tiếp xúc trong với (C_2)

$$\begin{aligned}&\Leftrightarrow \quad IJ = R_2 - R_1 \Leftrightarrow \sqrt{10} = \sqrt{m} - \sqrt{2} \\ &\Leftrightarrow \quad \sqrt{m} = \sqrt{2} + \sqrt{10} \Leftrightarrow m = \left(\sqrt{10} + \sqrt{2}\right)^2.\end{aligned}$$

Vậy $m = \left(\sqrt{10} \pm \sqrt{2}\right)^2$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 12. Trong các nghiệm $(x; y)$ thỏa mãn bất phương trình $\log_{x^2+2y^2}(2x+y) \geq 1$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $T = 2x + y$ bằng

(A) $\frac{9}{2}$. (B) $\frac{9}{8}$. (C) 9. (D) $\frac{9}{4}$.

Lời giải.

Trường hợp 1: $x^2 + 2y^2 > 1$, bất phương trình trở thành.

$$\log_{x^2+2y^2}(2x+y) \geq 1 \Leftrightarrow 2x + y \geq x^2 + 2y^2$$
$$\Leftrightarrow (x-1)^2 + \left(y\sqrt{2} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2 \leq \frac{9}{8}.$$

Khi đó

$$T = 2(x-1) + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(y\sqrt{2} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\right) + \frac{9}{4} \leq \sqrt{\left(4 + \frac{1}{2}\right) \cdot \left[(x-1)^2 + \left(y\sqrt{2} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2\right]} + \frac{9}{4}$$
$$\Leftrightarrow T \leq \sqrt{\frac{9}{2} \cdot \frac{9}{8}} + \frac{9}{4} \Leftrightarrow T \leq \frac{9}{2}$$

Vậy $T_{\max} = \frac{9}{2}$ khi $x = 2; y = \frac{1}{2}$.

Trường hợp 2: $x^2 + 2y^2 < 1$, bất phương trình trở thành.

$$\log_{x^2+2y^2}(2x+y) \geq 1 \Leftrightarrow 2x + y \leq x^2 + 2y^2 < 1 \Rightarrow T < 1$$

Suy ra trường hợp này không xảy ra.

Chọn đáp án (A) □

Câu 13 (THPT Trần Phú - Đà Nẵng - 2021).

Có bao nhiêu số nguyên $m \leq 2021$ để có nhiều hơn một cặp số $(x; y)$ thỏa mãn $\log_{x^2+y^2+4}(4x - 2y + m) \geq 1$ và $4x - 3y + 1 = 0$?

(A) 2017. (B) 2020. (C) 2019. (D) 2022.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{cases} \log_{x^2+y^2+4}(4x - 2y + m) \geq 1 \\ 4x - 3y + 1 = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 2y + m \geq x^2 + y^2 + 4 \\ 4x - 3y + 1 = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)^2 + (y+1)^2 \leq m + 1 \quad (1) \\ 4x - 3y + 1 = 0 \quad (2) \end{cases} \quad (*)$$

Xét (1): $(x-2)^2 + (y+1)^2 \leq m + 1$.

Khi $m + 1 < 0 \Rightarrow$ (1) vô nghiệm nên $m < -1$ loại.

Khi $m=-1$ thì

$$(1) \Leftrightarrow (x-2)^2+(y+1)^2 \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases}(x-2)^2=0\\(y+1)^2=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=2\\y=-1\end{cases}.$$

Thay vào (2) không thỏa mãn nên $m=-1$ loại.

Khi $m>-1$ thì nghiệm của bất phương trình (1) là miền trong của đường tròn (C) có tâm $I(2;-1)$ và bán kính $R=\sqrt{m+1}$.

Xét $d\colon 4x-3y+1=0$.

Khoảng cách từ tâm I đén đường thẳng d là

$$\mathrm{d}(I,d)=\frac{|4\cdot 2-3\cdot(-1)+1|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=\frac{12}{5}.$$

Hệ $(*)$ có nhiều hơn một cặp số $(x;y) \Leftrightarrow d$ cắt đường tròn (C) tại 2 điểm phân biệt.

$$\Leftrightarrow \mathrm{d}(I,d)<R \Leftrightarrow \frac{12}{5}<\sqrt{m+1} \Leftrightarrow m>\frac{119}{25}.$$

Mà m nguyên và $m \leq 2021 \Rightarrow m \in \{5;6;\ldots;2021\}$.

Vậy có 2017 số nguyên m thảo mãn.

Chọn đáp án (A) □

Câu 14. Có bao nhiêu số nguyên a, $(2 \leq a \leq 2021)$ để có ít nhất 5 số nguyên $5x$ thỏa mãn. $a^{-x}+\frac{1}{2} \leq 2^{-x}+\frac{1}{a}$

(A) 1892. (B) 125. (C) 127. (D) 1893.

Lời giải.

Nếu $a=2$ bất phương trình đúng với mọi x. Suy ra $a=2$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Nếu $a \geq 3$ bất phương trình tương đương với

$$g(x)=a^{-x}-2^{-x}+\frac{1}{2}-\frac{1}{a} \leq 0 \quad (*).$$

Ta có $g(1)=0$ và

$$g'(x)=-a^{-x}\ln a+2^{-x}\ln 2=0 \Leftrightarrow \left(\frac{a}{2}\right)^{-x}=\frac{\ln 2}{\ln 3} \Leftrightarrow x=x_0=-\log_{\frac{a}{2}}\left(\frac{\ln 2}{\ln a}\right).$$

Suy ra $g'(x)>0 \Leftrightarrow x>x_0$; $g'(x)<0 \Leftrightarrow x<x_0$.

Và $a=3 \Rightarrow x_0>1$; $a=4 \Rightarrow x_0=1$; $a>4 \Rightarrow x_0<1$.

Nếu $a=4 \Rightarrow x_0=1 \Rightarrow g(x) \leq 0 \Leftrightarrow x=1$ chứa đúng một số nguyên $5x$ là số 5. Suy ra $a=4$ không thỏa mãn.

Nếu $a=3 \Rightarrow x_0>1 \Rightarrow g(x) \leq 0 \Leftrightarrow S_x=[1;1,28378] \Leftrightarrow S_{5x}=[5;6,17]$ chứa đúng hai số nguyên $5x$ là các số 5 và 6. Suy ra $a=3$ không thỏa mãn.

Nếu $a>4 \Rightarrow x_0<1$

x	$-\infty$		b		x_0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$g(x_0)$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{2}-\frac{1}{a}$

$y=0$

Suy ra tập nghiệm của bất phương trình $S_x=[b;1] \Rightarrow S_{5x}=[5b;5]$ chứa tối thiểu 5 số nguyên $5x$ là các số 1, 2, 3, 4, 5

$$\Leftrightarrow\quad 5b \leq 1 \Leftrightarrow b \leq \frac{1}{5} \Leftrightarrow g\left(\frac{1}{5}\right) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow\quad a^{-\frac{1}{5}}-2^{-\frac{1}{5}}+\frac{1}{2}-\frac{1}{a} \leq 0 \Rightarrow a \in\{130;\ldots;2021\}$$

Vậy $1+[(2021-130)+1]=1893$ số nguyên a thỏa mãn.

Chọn đáp án D □

Câu 15. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của y sao cho tương ứng với mỗi y luôn tồn tại không quá 63 số nguyên x thỏa mãn điều kiện $\log_{2020}\left(x+y^2\right)+\log_{2021}\left(y^2+y+64\right) \geq \log_4(x-y)$?

A 301. B 2. C 602. D 302.

Lời giải.

Đặt $f(x)=\log_{2020}\left(x+y^2\right)+\log_{2021}\left(y^2+y+64\right)-\log_4(x-y)$ (coi y là tham số).

Điều kiện xác định của $f(x)$ là $\begin{cases}x+y^2>0 \\ x-y>0\end{cases} \Rightarrow x>y \geq -y^2$ (do x, y nguyên).

Do x, y nguyên nên ta xét $f(x)$ trên nữa khoảng $[y+1;+\infty)$. Ta có:

$$f'(x)=\frac{1}{\left(x+y^2\right) \ln 2020}-\frac{1}{(x-y) \ln 4}<0, \forall x \geq y+1.$$

Bảng biến thiên của $f(x)$:

x	$y+1$		$y+64$
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	$f(y+1)$	$\searrow$	$f(y+64)$

Yêu cầu bài toán trở thành:

$$f(y+64)<0 \Leftrightarrow \log_{2020}\left(y^2+y+64\right)+\log_{2021}\left(y^2+y+64\right)<\log_4 64$$

$$\Leftrightarrow\quad \log_{2021}\left(y^2+y+64\right)\left(\log_{2020} 2021+1\right)<3$$

$$\Leftrightarrow\quad y^2+y+64-2021^{\frac{3}{\log_{2020} 2021+1}}<0 \Rightarrow-301,76<y<300,76$$

Vì $y \in \mathbb{Z}$ nên $y \in\{-301;-300;\ldots;299;300\}$. Vậy có 602 giá trị nguyên của y thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án C □

Câu 16 (Chuyên ĐHSP Hà Nội - 2021).

Cho a, b, c là ba số thực dương đôi một phân biệt. Có bao nhiêu bộ $(a;b;c)$ thỏa mãn: $a^{b+2} \leq b^{a+2}$; $b^{c+2} \leq c^{b+2}$; $c^{a+2} \leq a^{c+2}$

(A) 1. (B) 3. (C) 6. (D) 0.

Lời giải.

Xét hàm số $f(x) = \dfrac{\ln x}{x+2}$,

Ta có

$$\begin{aligned} & a^{b+2} \leq b^{a+2} \Leftrightarrow (b+2)\ln a \leq (a+2)\ln b \Leftrightarrow \frac{\ln a}{a+2} \leq \frac{\ln b}{b+2} \Leftrightarrow f(a) \leq f(b) \quad (1) \\ \Leftrightarrow\ & b^{c+2} \leq c^{b+2} \Leftrightarrow (c+2)\ln b \leq (b+2)\ln c \Leftrightarrow \frac{\ln b}{b+2} \leq \frac{\ln c}{c+2} \Leftrightarrow f(b) \leq f(c) \quad (2) \\ \Leftrightarrow\ & c^{a+2} \leq a^{c+2} \Leftrightarrow (a+2)\ln c \leq (c+2)\ln a \Leftrightarrow \frac{\ln c}{c+2} \leq \frac{\ln a}{a+2} \Leftrightarrow f(c) \leq f(a) \quad (3) \end{aligned}$$

Từ (1), (2) và (3) suy ra: $f(a) = f(b) = f(c)$.

Mà a, b, c dương phân biệt nên để tồn tại bộ ba số $(a;b;c)$ thì phải tồn tại số thực m sao cho đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị hàm số $f(x) = \dfrac{\ln x}{x+2}$ tại ba điểm phân biệt hay phương trình $\dfrac{\ln x}{x+2} = m(*)$ có ba nghiệm dương phân biệt.

Ta có:

$$f'(x) = \frac{1 + \frac{2}{x} - \ln x}{(x+2)^2} = \frac{1}{(x+2)^2}\left(1 + \frac{2}{x} - \ln x\right)$$
$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 + \frac{2}{x} - \ln x = 0 \Leftrightarrow 1 + \frac{2}{x} = \ln x(**)$$

Mặt khác trên $(0;+\infty)$ hàm số $g(x) = 1 + \dfrac{2}{x}$ là hàm nghịch biến, $h(x) = \ln x$ đồng biến nên phương trình $(**)$ có không quá một nghiệm.

Suy ra hàm số $f(x)$ có không quá một cực trị suy ra với mọi giá trị của m, đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị hàm số $f(x)$ không quá hai điểm suy ra phương trình $(*)$ có không quá hai nghiệm, hay không tồn tại bộ ba số $(a;b;c)$ thỏa mãn đề bài.

Chọn đáp án (D) □

Câu 17 (THPT Đặng Thúc Hứa - Nghệ An - 2021).

Có bao nhiêu số nguyên $x \in [-2021;2021]$ để ứng với mỗi x có tối thiểu 64 số nguyên y thoả mãn $\log_3 \sqrt{x^4+y} \geq \log_2(x+y)$?

(A) 3990. (B) 3992. (C) 3988. (D) 3989.

Lời giải.

Xét bất phương trình $\log_3 \sqrt{x^4+y} \geq \log_2(x+y) \quad (1)$.

Điều kiện xác định: $\begin{cases} x^4+y>0 \\ x+y>0 \\ x,y \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y \geq 1 \\ x,y \in \mathbb{Z}. \end{cases}$

Đặt $t = x + y$ ta được $t \geq 1$. Bất phương trình (1) trở thành

$$\log_3 \sqrt{x^4 + t - x} \geq \log_2 t \quad (2)$$

Với mỗi $(x \in \mathbb{Z})$ có tối thiểu 64 $(y \in \mathbb{Z})$ thoả (1) nên có tối thiểu 64 số nguyên $t (t \geq 1)$ thoả (2).

Xét hàm số

$$y = f(t) = \log_3 \sqrt{x^4 + t - x} - \log_2 t = \frac{1}{2} \log_3 \left(x^4 + t - x\right) - \log_2 t$$

Vì $f'(t) = \dfrac{1}{2\left(x^4 + t - x\right) \ln 3} - \dfrac{1}{t \ln 2} < 0, \forall x, \forall t \geq 1$ nên $f(t)$ nghịch biến trên $[1; +\infty)$.

Ta nhận thấy $x^4 - x + 1 = x(x-1)\left(x^2 + x + 1\right) + 1 \geq 1$, do đó $\log_3\left(x^4 - x + 1\right) \geq \log_3 1 = 0$.

Do đó phương trình (2) luôn nhận nghiệm $t = 1, \forall x \in \mathbb{Z}$.

Suy ra để mỗi $(x \in \mathbb{Z})$ có tối thiểu 64 $(y \in \mathbb{Z})$ thì

$$f(64) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \log_3 \left(x^4 - x + 64\right) - \log_2 64 \geq 0$$
$$\Leftrightarrow \quad x^4 - x + 64 \geq 3^{12} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \geq 27 \\ x \leq -27 \end{array}\right. \text{(do } x \in \mathbb{Z}\text{)}$$

Kết hợp $x \in [-2021; 2021]$ ta được $x \in [-2021; -27] \cup [27; 2021]$.

Vậy có 3990 số nguyên $x \in [-2021; 2022]$ thoả mãn.

Chọn đáp án (A) □

Câu 18. Có bao nhiêu cặp số nguyên dương $(x; y)$ với $y \leq 2021$ thỏa mãn.
$\log \dfrac{x+1}{2y+1} \leq 4y^4 + 4y^3 - x^2y^2 - 2y^2x$.

(A) $2021(2021-1)$. (B) $2021(2022-1)$. (C) $2022(2022-1)$. (D) $2022(2022+1)$.

Lời giải.

Ta có

$$\log \frac{x+1}{2y+1} \leq 4y^4 + 4y^3 - x^2y^2 - 2y^2x$$
$$\Leftrightarrow \quad \log \frac{xy+y}{2y^2+y} \leq \left(4y^4 + 4y^3 + y^2\right) - \left(x^2y^2 + 2y^2x + y^2\right)$$
$$\Leftrightarrow \quad \log(xy+y) - \log\left(2y^2+y\right) \leq \left(2y^2+y\right)^2 - (xy+y)^2 \quad (1)$$

Xét hàm số $f(t) = \log t + t^2$ với $t \in (0; +\infty)$.

Ta có:

$$f'(t) = \frac{1}{t \ln 10} + 2t > 0; \forall t \in (0; +\infty).$$

Suy ra hàm $f(t)$ đồng biến trên $t \in (0; +\infty)$.

Khi đó:

$$(1) \Leftrightarrow f(xy+y) \leq f\left(2y^2+y\right) \Leftrightarrow xy + y \leq 2y^2 + y \Leftrightarrow x \leq 2y.$$

Vì $y \in \mathbb{Z}^+$ và $y \leq 2021$ nên ta xét các trường hợp sau.

$y = 1 \Rightarrow x \in \{1; 2\}$.

$y = 2 \Rightarrow x \in \{1; 2; 3; 4\}$.

...

$y = 2021 \Rightarrow x \in \{1; 2; 3; \ldots \cdot; 4042\}$.

Vậy số cặp nghiệm thỏa mãn điều kiện bài toán là $2 + 4 + 6 + \cdots + 4042 = 2022 \cdot 2021$.

Chọn đáp án C □

Câu 19 (Chuyên Tuyên Quang - 2021).

Có bao nhiêu cặp số nguyên dương $(x; y)$ thoả mãn $\ln \dfrac{x+1}{5y+1} \leq 25y^4 + 10y^3 - x^2y^2 - 2y^2x$, với $y \leq 2022$?

A 10246500. B 10226265. C 2041220. D 10206050.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} & 25y^4 + 10y^3 - x^2y^2 - 2y^2x = 25y^4 + 10y^3 + y^2 - x^2y^2 - 2y^2x - y^2 \\ = & \left(25y^4 + 10y^3 + y^2\right) - \left(x^2y^2 + 2y^2x + y^2\right) \\ = & y^2\left(25y^2 + 10y + 1\right) - y^2\left(x^2 + 2x + 1\right) \\ = & y^2\left[(5y+1)^2 - (x+1)^2\right] \end{aligned}$$

Do đó:

$$\begin{aligned} & \ln \frac{x+1}{5y+1} \leq 25y^4 + 10y^3 - x^2y^2 - 2y^2x \\ \Leftrightarrow\ & \ln \frac{x+1}{5y+1} \leq y^2\left[(5y+1)^2 - (x+1)^2\right] \end{aligned}$$

Trường hợp 1: $x + 1 > 5y + 1$ thì vế trái dương, vế phải âm (không thoả mãn).

Trường hợp 2: $x + 1 \leq 5y + 1$ thì vế trái không dương, vế phải không âm nên sẽ luôn thoả mãn khi

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+1>0 \\ 5y+1>0 \end{cases} \\ \begin{cases} x+1<0 \\ 5y+1<0 \end{cases} \end{array}\right. \\ x+1 \leq 5y+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x>-1 \\ y>-\dfrac{1}{5} \end{cases} \\ \begin{cases} x<-1 \\ y<-\dfrac{1}{5} \end{cases} \end{array}\right. \\ x \leq 5y. \end{cases}$$

Do x, y là số nguyên dương nên ta có:

$$\begin{cases} \begin{cases} x>-1 \\ y>-\dfrac{1}{5} \end{cases} \\ x \leq 5y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ y \geq 1 \\ x \leq 5y \end{cases} \left(y \leq 2022; x, y \in \mathbb{Z}\right).$$

Vậy $y \in [1; 2022], x \in [1; 10110]$.

Ứng với mỗi y nguyên dương có $5y$ cặp $(x; y)$. Do đó số cặp:

$$5(1 + 2 + 3 + \cdots + 2022) = \frac{5 \cdot 2022 \cdot 2023}{2} = 10226265 \text{ cặp}$$

Chọn đáp án B □

Câu 20 (Sở Nam Định - 2021). Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn đồng thời $2^x + y \leq \log_2(x - y)$ và x, y thuộc đoạn $[-2; 10]$?

A 6. B 7. C 5. D 8.

Lời giải.

Ta có

$$2^x + y \leq \log_2(x-y) \Leftrightarrow 2^x + x \leq \log_2(x-y) + x - y \Leftrightarrow 2^x + x \leq \log_2(x-y) + 2^{\log_2(x-y)} \quad (*).$$

Xét hàm số $f(t) = 2^t + t$ có $f'(t) = 2^t \ln 2 + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$.

Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$, do đó:

$$(*) \Leftrightarrow x \leq \log_2(x-y) \Leftrightarrow 2^x \leq x - y \Leftrightarrow y \leq x - 2^x \quad (**).$$

Xét hàm số $g(x) = x - 2^x$ trên đoạn $[-2; 10]$.

Ta có $g'(x) = 1 - 2^x \ln 2$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \log_2(\log_2 \mathrm{e}).$$

x	2		$\log_2(\log_2 e)$		10
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	$\log_2\left(\frac{\log_2 e}{e}\right)$	↘	

Kết hợp $(**)$ và bảng biến thiên ta có

$$-2 \leq y \leq \log_2\left(\frac{\log_2 \mathrm{e}}{\mathrm{e}}\right).$$

Do $y \in \mathbb{Z}$ nên $y = -2$ hoặc $y = -1$.

Với $y = -2$ ta có: $g(x) \geq -2$. Do $x \in \mathbb{Z}$ nên $\Rightarrow x \in \{-1; 0; 1; 2\}$.

Trường hợp này có 4 cặp số $(x; y)$ thỏa mãn.

Với $y = -1$ ta có: $g(x) \geq -1$. Do $x \in \mathbb{Z}$ nên $\Rightarrow x \in \{0; 1\}$.

Trường hợp này có 2 cặp số $(x; y)$ thỏa mãn.

Vậy có tất cả 6 cặp số $(x; y)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án A □

Câu 21 (THPT Cẩm Bình - Hà Tĩnh - 2021).

Có bao nhiêu bộ $(x; y)$ với x, y nguyên và $2 \leq x, y \leq 2021$ thỏa mãn $(xy + 2x + 4y + 8)\log_3\left(\dfrac{2y}{y+2}\right) \leq (2x + 3y - xy - 6)\log_2\left(\dfrac{2x+1}{x-3}\right)$?

A 2017. B 4036. C 4034. D 2018.

Lời giải.

Bất phương trình: $(xy+2x+4y+8)\log_3\left(\dfrac{2y}{y+2}\right)\le(2x+3y-xy-6)\log_2\left(\dfrac{2x+1}{x-3}\right)$.

Bất phương trình xác định $\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{2y}{y+2}>0\\ \dfrac{2x+1}{x-3}>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y\in(-\infty;-2)\cup(0;+\infty)\\ x\in\left(-\infty;-\dfrac{1}{2}\right)\cup(3;+\infty).\end{cases}$

Yêu cầu bài toán: $x\in\mathbb{Z}$; $y\in\mathbb{Z}$ và $2\le x,y\le 2021$

$\Rightarrow x\in\mathbb{Z}$; $y\in\mathbb{Z}$ và $3<x\le 2021$; $2\le y\le 2021$.

Khi đó, bất phương trình đã cho

$$\Leftrightarrow(x+4)(y+2)\log_3\left(\frac{2y}{y+2}\right)\le(x-3)(2-y)\log_2\left(\frac{2x+1}{x-3}\right).$$

• Nếu $y>2$ thì $\begin{cases}VT=(x+4)(y+2)\log_3\left(\dfrac{2y}{y+2}\right)>0\\ VP=(x-3)(2-y)\log_2\left(\dfrac{2x+1}{x-3}\right)<0\end{cases}$ với $\forall x\in(3;+\infty)$

Suy ra bất phương trình đã cho vô nghiệm.

• Nếu $y=2$ thì $\begin{cases}VT=(x+4)(y+2)\log_3\left(\dfrac{2y}{y+2}\right)=0\\ VP=(x-3)(2-y)\log_2\left(\dfrac{2x+1}{x-3}\right)=0\end{cases}$ với $\forall x\in(3;+\infty)$

Suy ra bất phương trình nghiệm đúng với $\forall x\in(3;+\infty)$.

Có 2018 giá trị $x\in\mathbb{Z}$ và $3<x\le 2021$.

Vậy có 2018 bộ số $(x;y)$ nguyên thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án D □

Câu 22 (THPT Thiệu Hóa - Thanh Hóa - 2021).

Có bao nhiêu số nguyên y sao cho ứng với số nguyên y có tối đa 100 số nguyên x thỏa mãn $3^{y-2x}\ge\log_5\left(x+y^2\right)$.

A 17. B 18. C 13. D 20.

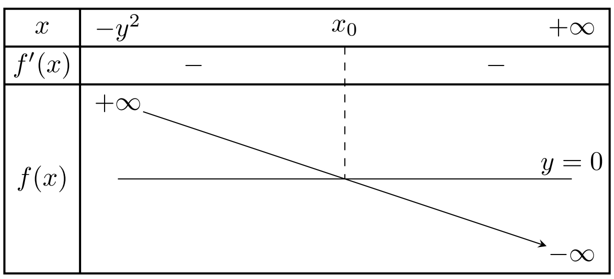
Lời giải.

Điều kiện: $x>-y^2$.

Xét hàm số $f(x)=3^{y-3x}-\log_5\left(x+y^2\right)$ ta có:

$$f'(x)=-2\cdot 3^{y-3x}\cdot\ln 3-\frac{1}{(x+y^2)\cdot\ln 5}<0.$$

Bảng biến thiên



Từ bảng biến thiên trên ta có tập nghiệm của bất phương trình là $(-y^2; x_0]$. Để có tối đa 100 số nguyên x thì

$$f\left(-y^2+101\right)<0 \Leftrightarrow 2y^2+y-202-3^{\log_5 101}<0 \Leftrightarrow -10 \leq y \leq 9.$$

Vậy có 20 giá trị nguyên của y.

Chọn đáp án D □

Câu 23 (THPT Nguyễn Đăng Đạo - Bắc Ninh - 2021).

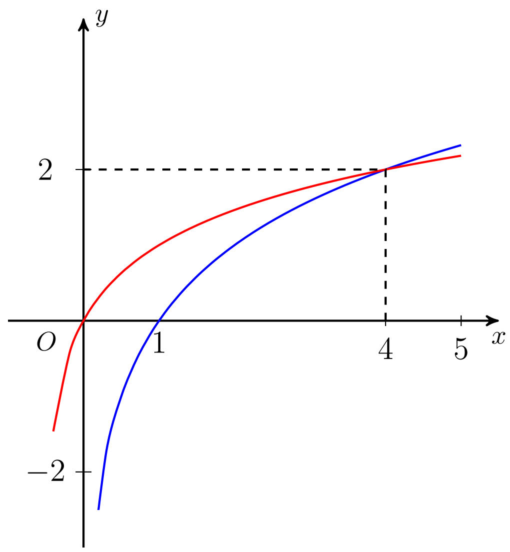
Có bao nhiêu cặp số tự nhiên $(x; y)$ thỏa mãn đồng thời hai điều kiện: $\log_2(x+2y) \leq \log_3(2x+4y+1)$ và $\log_3(x+y) \geq y-2$.

Ⓐ 7. Ⓑ 6. Ⓒ 10. Ⓓ 8.

Lời giải.

Đặt $t = x+2y, t > 0$, khi đó $\log_2(x+2y) \leq \log_3(2x+4y+1)$ trở thành

$$\log_2 t \leq \log_3(2t+1).$$



Dựa vào đồ thị ta thấy

$$\log_2 t \leq \log_3(2t+1) \Leftrightarrow 0 < t \leq 4 \Leftrightarrow 0 < 2x+y \leq 4.$$

Kết hợp với điều kiện $\log_3(x+y) \geq y-2$ ta có các cặp số tự nhiên $(x; y) = \{(0;1), (0;2), (0;3), (1;0), (1;1), (1$

Chọn đáp án B □

Câu 24 (Chuyên Lê Hồng Phong - Nam Định - 2020).

Có bao nhiêu bộ $(x; y)$ với x, y nguyên và $1 \leq x, y \leq 2020$ thỏa mãn $(xy+2x+4y+8)\log_3\left(\dfrac{2y}{y+2}\right) \leq (2x+3y-xy-6)\log_2\left(\dfrac{2x+1}{x-3}\right)$?

Ⓐ 2017. Ⓑ 4034. Ⓒ 2. Ⓓ $2017 \cdot 2020$.

Lời giải.

Từ giả thiết kết hợp ĐKXĐ của bất phương trình ta có:

$$1 \leq y \leq 2020; 4 \leq x \leq 2020; x, y \in \mathbb{Z} \quad (1).$$

Ta có

$$\begin{aligned}&(xy+2x+4y+8)\log_3\left(\frac{2y}{y+2}\right)\le(2x+3y-xy-6)\log_2\left(\frac{2x+1}{x-3}\right)\\ \Leftrightarrow\ &(x+4)(y+2)\log_3\left(\frac{2y}{y+2}\right)+(x-3)(y-2)\log_2\left(\frac{2x+1}{x-3}\right)\le 0.\end{aligned}$$

Xét $f(x)=\log_2\left(\frac{2x+1}{x-3}\right)=\log_2\left(2+\frac{7}{x-3}\right)>0,\forall x\in[4;2020]\quad(2).$

Với $y=1$ thay vào (*) ta được:

$$3(x+4)\log_3\left(\frac{2}{3}\right)-(x-3)\log_2\left(\frac{2x+1}{x-3}\right)\le 0$$

Luôn đúng $\forall x\in[4;2020]$ do (1) và (2). Suy ra có 2017 bộ $(x;y)$.

Với $y=2$ thay vào (*) ta thấy luôn đúng $\forall x\in[4;2020]$. Suy ra có 2017 bộ $(x;y)$.

Với $3\le y\le 2020\Rightarrow y-2>0$. Xét

$$g(y)=\log_3\left(\frac{2y}{y+2}\right)=\log_3\left(\frac{y+y}{y+2}\right)>\log_3\left(\frac{y+2}{y+2}\right)=0,\forall y\ge 3\quad(3).$$

Suy ra (*) vô nghiệm (Do (2) và (3)). Vậy có 4034 bộ $(x;y)$.

Chọn đáp án B □

Câu 25 (Đề Minh Họa 2021). Có bao nhiêu số nguyên dương y sao cho ứng với mỗi y có không quá 10 số nguyên x thỏa mãn $\left(2^{x+1}-\sqrt{2}\right)(2^x-y)<0$?

A 1024. B 1047. C 1022. D 1023.

Lời giải.

Đặt $t=2^x$, ta có bất phương trình

$$(2t-\sqrt{2})(t-y)<0\Leftrightarrow\left(t-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(t-y)<0\quad(*).$$

Vì y là số nguyên dương nên $\frac{\sqrt{2}}{2}<t<y$. Do đó

$$(*)\Leftrightarrow\frac{\sqrt{2}}{2}<2^x<y\Leftrightarrow-\frac{1}{2}<x<\log_2 y.$$

Để với mỗi số y có không quá 10 số nguyên x thỏa mãn thì ta có

$$\log_2 y\le 10\Leftrightarrow y\le 1024.$$

Suy ra $y\in\{1;2;\ldots;2014\}$. Vậy có 1024 số nguyên dương của y thỏa mãn bài toán.

Chọn đáp án A □

Câu 26 (Đề minh họa 2022). Có bao nhiêu số nguyên a sao cho ứng với mỗi a, tồn tại ít nhất bốn số nguyên $b\in(-12;12)$ thỏa mãn $4^{a^2+b}\le 3^{b-a}+65$?

A 4. B 6. C 5. D 7.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} & 4^{a^2+b} \leq 3^{b-a} + 65 \Leftrightarrow 4^{a^2+b} - 3^{b-a} - 65 \leq 0 \\ \Leftrightarrow\ & 4^{a^2} - \frac{3^{b-a}}{4^b} - \frac{65}{4^b} \leq 0 \\ \Leftrightarrow\ & -\left(\frac{3}{4}\right)^b \frac{1}{3^a} - 65\left(\frac{1}{4}\right)^b + 4^{a^2} \leq 0. \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(b) = -\left(\frac{3}{4}\right)^b \frac{1}{3^a} - 65\left(\frac{1}{4}\right)^b + 4^{a^2}$ với $b \in (-12; 12)$.

Suy ra:

$$f'(b) = -\ln\left(\frac{3}{4}\right) \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^b \frac{1}{3^a} - 65\ln\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{4}\right)^b > 0$$

Do đó $f(b)$ đồng biến. Để $f(b) \leq 0$ có ít nhất 4 giá trị nguyên thỏa mãn thì $f(-8) \leq 0$

$$\Leftrightarrow 4^{a^2-8} \leq 3^{-a-8} + 65 \Rightarrow 4^{a^2-8} < 65 \Rightarrow a^2 < 8 + \log_4 65 \approx 11,01.$$

Do $a \in \mathbb{Z} \Rightarrow a \in \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3\}$. Vậy có 7 giá trị nguyên của a.

Chọn đáp án D □

Câu 27 (Mã 101 - 2022). Có bao nhiêu số nguyên dương a sao cho ứng với mỗi a có đúng ba số nguyên b thỏa mãn $\left(3^b - 3\right)\left(a \cdot 2^b - 18\right) < 0$?

A 72. B 73. C 71. D 74.

Lời giải.

Trường hợp 1: $\begin{cases} 3^b - 3 > 0 \\ a \cdot 2^b - 18 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^b > 3 \\ 2^b < \dfrac{18}{a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b > 1 \\ b < \log_2\left(\dfrac{18}{a}\right) \end{cases} \Leftrightarrow 1 < b < \log_2\left(\dfrac{18}{a}\right)$.

Để có đúng ba số nguyên b thì $4 < \log_2\left(\frac{18}{a}\right) \leq 5 \Leftrightarrow 8 < \frac{18}{a} \leq 32 \Leftrightarrow \frac{9}{16} \leq a < \frac{9}{4}$.

Trường hợp này không có giá trị a nguyên thỏa mãn.

Trường hợp 2: $\begin{cases} 3^b - 3 < 0 \\ a \cdot 2^b - 18 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^b < 3 \\ 2^b > \dfrac{18}{a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b < 1 \\ b > \log_2\left(\dfrac{18}{a}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \log_2\left(\dfrac{18}{a}\right) < b < 1$.

Để có đúng ba số nguyên b thì $-3 \leq \log_2\left(\frac{18}{a}\right) < -2 \Leftrightarrow \frac{1}{8} \leq \frac{18}{a} < \frac{1}{4} \Leftrightarrow 72 < a \leq 144$.

Vậy số giá trị nguyên của a là $144 - 72 = 72$.

Chọn đáp án D □

Câu 28 (Mã 102 - 2022). Có bao nhiêu số nguyên dương a sao cho ứng với mỗi a có đúng hai số nguyên b thỏa mãn $\left(5^b - 1\right)\left(a \cdot 2^b - 5\right) < 0$?

A 20. B 21. C 22. D 19.

Lời giải.

Ta có

$$\left(5^b - 1\right)\left(a \cdot 2^b - 5\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5^b - 1 = 0 \\ a \cdot 2^b - 5 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = 0 \\ b = \log_2 \dfrac{5}{a}. \end{array}\right.$$

Trường hợp 1: $\begin{cases}\log_2 \dfrac{5}{a} < 0 \\ a > 0\end{cases} \Leftrightarrow a > 5.$

Vì hàm số $y = a^x \quad (a > 1)$ là hàm đồng biến nên $\left(5^b - 1\right)\left(a{\cdot}2^b - 5\right) < 0 \Leftrightarrow \log_2 \dfrac{5}{a} < b < 0.$

Yêu cầu của bài toán suy ra

$$-3 \leq \log_2 \frac{5}{a} < -2 \Leftrightarrow \frac{1}{8} \leq \frac{5}{a} < \frac{1}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} a \leq 40 \\ a > 20 \end{cases} \xrightarrow{a \in \mathbb{N}^*} a \in \{21, 22, \ldots \cdot 40\}.$$

Trường hợp 2: $\begin{cases}\log_2 \dfrac{5}{a} > 0 \\ a > 0\end{cases} \Leftrightarrow 0 < a < 5.$

Vì hàm số $y = a^x \quad (a > 1)$ là hàm đồng biến nên

$$\left(5^b - 1\right)\left(a{\cdot}2^b - 5\right) < 0 \Leftrightarrow 0 < b < \log_2 \frac{5}{a}.$$

Yêu cầu của bài toán suy ra

$$2 \leq \log_2 \frac{5}{a} < 3 \Leftrightarrow 4 \leq \frac{5}{a} < 8$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \leq \dfrac{5}{4} \\ a > \dfrac{5}{8} \end{cases} \xrightarrow{a \in \mathbb{N}^*} a = 1$$

Vậy có 21 số nguyên a thỏa mãn yêu cầu của bài toán.

Chọn đáp án B □

Câu 29. Có bao nhiêu số nguyên dương a sao cho ứng với mỗi a có đúng hai số nguyên b thỏa mãn $\left(4^b - 1\right)\left(a{\cdot}3^b - 10\right) < 0$?

A. 182. B. 179. C. 180. D. 181.

Lời giải.

Theo đề bài $a \in \mathbb{Z}; a \geq 1$ và $b \in \mathbb{Z}$.

Trường hợp 1.

$$\begin{cases} 4^b - 1 < 0 \\ a3^b - 10 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b < 0 \\ b > \log_3 \dfrac{10}{a}. \end{cases}$$

Vì có đúng hai số nguyên b thỏa mãn nên $b \in \{-2; -1\}$.

Do đó $-2 > \log_3 \dfrac{10}{a} \geq -3 \Leftrightarrow 270 \geq a > 90$ nên $a \in \{91; 92; \ldots; 270\}$. Có 180 giá trị của a thoả mãn trường hợp 1.

Trường hợp 2.

$$\begin{cases} 4^b - 1 > 0 \\ a3^b - 10 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b > 0 \\ b < \log_3 \dfrac{10}{a}. \end{cases}$$

Vì có đúng hai số nguyên b thỏa mãn nên $b \in \{1; 2\}$.

Do đó $3 \geq \log_3 \dfrac{10}{a} > 2 \Leftrightarrow \dfrac{10}{9} > a \geq \dfrac{10}{27}$ nên $a = 1$. Có 1 giá trị của a thoả mãn trường hợp 2.

Vậy có $180 + 1 = 181$ giá trị của a thoả mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án D □

Câu 30 (Mã 104 - 2022). Có bao nhiêu số nguyên dương a sao cho với mỗi a có đúng hai số nguyên b thỏa mãn $\left(3^b - 3\right)\left(a{\cdot}2^b - 16\right) < 0$

A 34. B 32. C 31. D 33.

Lời giải.

Cách 1: Trường hợp 1: $a = 1 \Rightarrow \left(3^b - 3\right)\left(2^b - 16\right) < 0$.

Nếu $b \leq 1$ hoặc $b \geq 4$ không thỏa mãn bpt và $b \in \{2; 3\}$ thỏa mãn.

Vậy $a = 1$ thỏa mãn.

Trường hợp 2: $a = 2 \Rightarrow \left(3^b - 3\right)\left(2 \cdot 2^b - 16\right) < 0 \Leftrightarrow \left(3^b - 3\right)\left(2^{b+1} - 16\right) < 0$.

Nếu $b \leq 1$ hoặc $b \geq 3$ không thỏa mãn bpt và $b = 2$ thỏa mãn.

Vậy $a = 2$ không thỏa mãn.

Trường hợp 3: $a = 3 \Rightarrow \left(3^b - 3\right)\left(3 \cdot 2^b - 16\right) < 0$.

Nếu $b \leq 1$ hoặc $b \geq 3$ không thỏa mãn bpt và $b = 2$ thỏa mãn.

Vậy $a = 3$ không thỏa mãn.

Trường hợp 4: $a > 3$.

Ta cần tìm a để bpt $\left(3^b - 3\right)\left(a{\cdot}2^b - 16\right) < 0$ có 2 nghiệm b.

Nếu $b \geq 3 \Rightarrow \left(3^b - 3\right)\left(a{\cdot}2^b - 16\right) \geq 24 \cdot (3 \cdot 8 - 16) > 0$ không thỏa mãn bpt.

Nếu $b = 2 \Rightarrow \left(3^b - 3\right)\left(a{\cdot}2^b - 16\right) \geq 6(4 \cdot 4 - 16) \geq 0$ không thỏa mãn bpt.

Nếu $b = 1$ không thỏa mãn.

Nếu $b < 1 \Rightarrow \left(3^b - 3\right) < 0$. BPT tương đương $a.2^b - 16 > 0$.

Hay $a > \dfrac{16}{2^b}$ có hai nghiệm b suy ra $33 \leq a \leq 64$.

Kết hợp lại suy ra có tất cả 33 số nguyên dương a thỏa mãn.

Cách 2. Xét $\left(3^b - 3\right)\left(a{\cdot}2^b - 16\right) = 0$. Do $a \in \mathbb{N}^*$ nên $\left[\begin{array}{l} b = 1 \\ b = \log_2 \dfrac{16}{a}. \end{array}\right.$

Trường hợp 1: $\log_2 \dfrac{16}{a} > 1 \Leftrightarrow a < 8$.

BPT có đúng 2 nghiệm nguyên $b \Leftrightarrow 3 < \log_2 \dfrac{16}{a} \leq 4 \Leftrightarrow 1 \leq a < 2 \Rightarrow a = 1$ (thỏa mãn).

Trường hợp 2: $\log_2 \dfrac{16}{a} < 1 \Leftrightarrow a > 8$.

BPT có đúng 2 nghiệm nguyên $b \Leftrightarrow -2 \leq \log_2 \dfrac{16}{a} < -14 \Leftrightarrow 32 < a \leq 64 \Rightarrow$ có 32 giá trị a.

Vậy có 33 giá trị của a thỏa mãn.

Chọn đáp án D □

Câu 31 (Chuyên Vinh – 2022). Có bao nhiêu giá trị nguyên lớn hơn 2 của y sao cho với mỗi y tồn tại đúng 3 sô nguyên dương x thỏa mãn $3^x - y \leq 2\log_2\left(3^x - 2\right)$?.

A 16. B 51. C 68. D 66.

Lời giải.

Ta có $3^x - y \leq 2\log_2(3^x - 2)$.

Điều kiện:

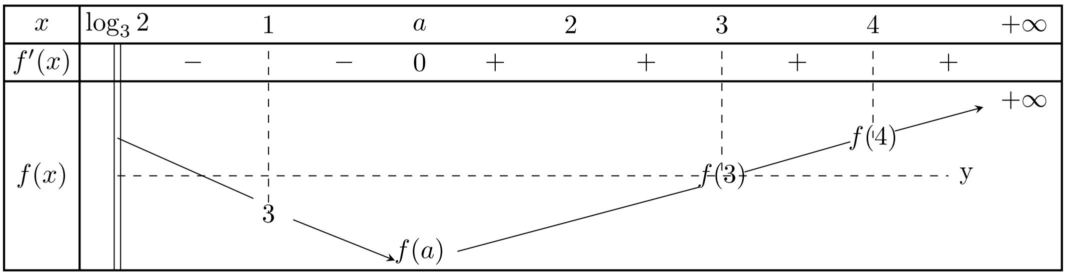
$$3^x - 2 > 0 \Leftrightarrow x > \log_3 2 \Leftrightarrow y \geq 3^x - 2\log_2(3^x - 2).$$

Xét hàm số $f(x) = 3^x - 2\log_2(3^x - 2)$. Ta có

$$f'(x) = 3^x \ln 3 - \frac{2 \cdot 3^x \ln 3}{(3^x - 2)\ln 2} = 3^x \ln 3 \left(1 - \frac{2}{(3^x - 2)\ln 2}\right) = 3^x \ln 3 \left(\frac{(3^x - 2)\ln 2 - 2}{(3^x - 2)\ln 2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3^x - 2 = \frac{2}{\ln 2} \Leftrightarrow x = \log_3\left(\frac{2}{\ln 2} + 2\right) = a$$

Bảng biến thiên:



Yêu cầu bài toán

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(3) \leq y \\ f(4) > y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 27 - 2\log_2 25 \leq y \\ 81 - 2\log_2 79 > y \end{cases} \Leftrightarrow 17,71 \leq y < 68,3$$

Vì $y > 2$ là số nguyên nên $18 \leq y \leq 68 \Rightarrow$ có 51 số.

Chọn đáp án (B) □

Câu 32 (THPT Nho Quan A – Ninh Bình – 2022).

Có bao nhiêu số nguyên x sao cho ứng với mỗi x có không quá 255 số nguyên y thỏa mãn $\log_5(x^2 + y) \geq \log_2(x + y)$?

(A) 1250. (B) 1249. (C) 625. (D) 624.

Lời giải.

Bất phương trình đã cho tương đương

$$\log_2(x + y) - \log_5(x^2 + y) \leq 0 \quad (1).$$

Xét hàm số $f(y) = \log_2(x + y) - \log_5(x^2 + y)$.

Tập xác định $\mathscr{D} = (-x; +\infty)$.

Với mọi $x \in \mathbb{Z}$ ta có $x^2 \geq x$ nên

$$f'(y) = \frac{1}{(x + y)\ln 2} - \frac{1}{(x^2 + y)\ln 5} \geq 0, \forall x \in \mathscr{D}.$$

Suy ra $f(y)$ đồng biến trên khoảng $(-x; +\infty)$.

Do y là số nguyên thuộc $(-x; +\infty)$ nên $y = -x + k, k \in \mathbb{Z}^+$.

Giả sử $y = -x + k$ là nghiệm của bất phương trình (1) thì $f(y) = f(-x + k) \leq 0$.
Mà $-x + 1 < -x + 2 < \ldots < -x + k$ và $f(y)$ đồng biến trên khoảng $(-x; +\infty)$.
Suy ra $f(-x+1) < f(-x+2) < \ldots < f(-x+k) \leq 0$, nên các số nguyên $-x+1, -x+2, \ldots, -x+k$ đều là nghiệm của (1), hay nói cách khác bất phương trình (1) sẽ có k số nguyên y thỏa mãn yêu cầu ứng với mỗi x. Để có không quá 255 số nguyên y thì

$$\begin{aligned} & f(-x + 256) > 0 \Leftrightarrow \log_2 256 - \log_5\left(x^2 - x + 256\right) > 0 \\ \Leftrightarrow \quad & x^2 - x - 390369 < 0 \Leftrightarrow \frac{1 - \sqrt{1561477}}{2} < x < \frac{1 + \sqrt{1561477}}{2} \end{aligned}$$

Mà $x \in \mathbb{Z}$ nên có 1250 số nguyên x thỏa yêu cầu bài toán.
Chọn đáp án (A) □

Câu 33 (Sở Thanh Hóa 2022). Gọi S là tập tất cả các số nguyên y sao cho với mỗi $y \in S$ có đúng 10 số nguyên x thoả mãn $2^{y-x} \geq \log_3\left(x + y^2\right)$. Tổng các phần tử của S bằng

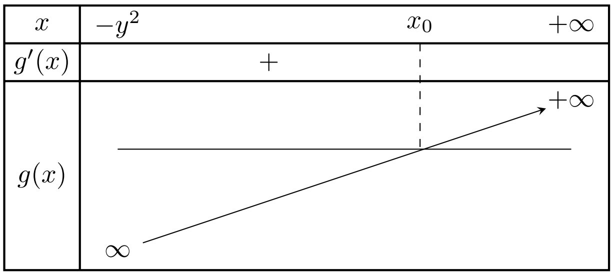
(A) 7. (B) -4. (C) 1. (D) -1.

Lời giải.

Điều kiện: $x > -y^2$. Khi đó bpt

$$\Leftrightarrow g(x) = \log_3\left(x + y^2\right) - 2^{y-x} \leq 0.$$

Ta có $g'(x) = \dfrac{1}{(x + y^2)\ln 3} + 2^{y-x}\ln 2 > 0, (x + y^2 > 0)$.
Bảng biến thiên:



Kẻ thêm $y = 0 \Rightarrow g(x) = 0 \Leftrightarrow x = x_0$ như bảng biến thiên.
Vậy tập nghiệm của bất phương trinh là $S_x = (-y^2; x_0]$ chứa đúng $10s$ nguyên là các số $-y^2 + 1, \ldots, -y^2 + 10$.

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \quad & -y^2 + 10 \leq x_0 < -y^2 + 11 \Leftrightarrow \begin{cases} g\left(-y^2 + 10\right) \leq 0 \\ g\left(-y^2 + 11\right) > 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \quad & \begin{cases} \log_3 10 - 2^{y+y^2-10} \leq 0 \\ \log_3 11 - 2^{y+y^2-11} > 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \quad & \begin{cases} y^2 + y - 10 \geq \log_2(\log_3 10) \\ y^2 + y - 11 < \log_2(\log_3 11) \end{cases} \end{aligned}$$

Suy ra $y \in \{-4, 3\}$.
Chọn đáp án (D) □

Câu 34. Có bao nhiêu số nguyên dương x sao cho ứng với mỗi x có đúng 9 số nguyên y thỏa mãn $\left(2^{y+1}-x^2\right)\left(3^y-x\right)<0$?

(A) 64. (B) 67. (C) 128. (D) 53.

Lời giải.

Trường hợp 1: $\begin{cases}2^{y+1}-x^2>0\\ 3^y-x<0\end{cases} \Leftrightarrow \log_2 x^2-1<y<\log_3 x.$ (1).

Điều kiện cần $\log_2 x^2-1<\log_3 x \Leftrightarrow 2\log_2 x-1<\log$ Vì $x\in\mathbb{Z}^+\Rightarrow x=1$. Thử lại $x=1$ loại.

Trường hợp 2: $\begin{cases}2^{y+1}-x^2<0\\ 3^y-x>0\end{cases} \Leftrightarrow \log_3 x<y<\log_2 x^2-1(2).$

Để có đúng 9 số nguyên y ta phải có

$$\begin{aligned}&y-1\le\log_3 x<y<y+1<\ldots<y+8<\log_2 x^2-1\le y+9\\ \Leftrightarrow &\begin{cases}3^{y-1}\le x<3^y\\ 2^{\frac{y+9}{2}}<x\le 2^{\frac{y+10}{2}}\end{cases}..\end{aligned}$$

Hệ trên vô nghiệm

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2^{\frac{y+10}{2}}<3^{y-1}\\ 3^y\le 2^{\frac{y+9}{2}}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}y>6,06\ldots\\ y\le 4,14\ldots\end{array}\right..$$

Từ đó, y nguyên ta được hệ có nghiệm khi $\left[\begin{array}{l}y=5\\ y=6.\end{array}\right.$

Do đó ta chỉ có hai trường hợp sau thỏa mãn bài toán.

Vì $y\in\{5;6;\ldots;13\}$ nghĩa là $4\le\log_3 x<5;6;\ldots;13<\log_2 x^2-1\le 14$, ta được $x\in\{129;\ldots 181\}$ có 53 số nguyên.

Vì $y\in\{6;\ldots;14\}$ nghĩa là $5\le\log_3 x<6;7;\ldots;14<\log_2 x^2-1\le 15$, ta được $x\in\{243;\ldots 256\}$ có 14 số nguyên.

Chọn đáp án (B) □

Câu 35 (Sở Phú Thọ 2022). Có bao nhiêu số nguyên x sao cho ứng với mỗi x có không quá 20 số nguyên y thỏa mãn $4^{x^2-5y+16}+2^{-x-y}\ge 512$ và $x+y>0$?

(A) 19. (B) 20. (C) 21. (D) 18.

Lời giải.

Từ giả thiết ta có

$$4^{x^2-5y+16}+2^{-x-y}\ge 512 \Leftrightarrow 4^{x^2-5y+16}+2^{-x-y}-512\ge 0.$$

Xét hàm số $f(y)=4^{x^2-5y+16}+2^{-x-y}-512$.

Vì $x+y>0\Leftrightarrow y>-x$ nên ta xét $y\in(-x;+\infty)$.

Ta có

$$f'(y)=-5\cdot 4^{x^2-5y+16}\cdot\ln 4-2^{-x-y}\cdot\ln 2<0,\forall y\in(-x;+\infty).$$

Suy ra hàm số $f(y)$ luôn nghịch biến.

Có $f(-x+1) = 4^{x^2+5x+11} + 2^{-1} - 512 \geq 4^5 + 2^{-1} - 512 > 0, \forall x \in \mathbb{Z}$.

Bảng biến thiên của $f(y)$:

y	$-x$	$+\infty$
$f'(y)$	$-$	
$f(y)$	$\searrow$	

Với mỗi số nguyên x, để có không quá 20 số nguyên y thỏa mãn $f(y) \geq 0$ và $x+y>0$ thì ta phải có

$$
\begin{aligned}
& f(-x+21) < 0 \Leftrightarrow 4^{x^2+5x-89} + 2^{-21} < 512 \Leftrightarrow x^2+5x-89 < \log_4\left(512 - 2^{-21}\right) \\
\Leftrightarrow\ & x^2+5x-89-\log_4\left(512-2^{-21}\right) < 0 \\
\Leftrightarrow\ & \frac{-5-\sqrt{381+4\log_4\left(512-2^{21}\right)}}{2} < x < \frac{-5+\sqrt{381+4\log_4\left(512-2^{21}\right)}}{2}
\end{aligned}
$$

Suy ra $-12,487 < x < 7,487$. Vì $x \in \mathbb{Z}$ nên $x \in \{-12; -11; \ldots; 7\}$. Vậy có 20 số nguyên x thỏa mãn.

Chọn đáp án B □

Câu 36 (Chuyên Hoàng Văn Thụ - Hòa Bình – 2022).

Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của y sao cho tương ứng với mỗi giá trị y luôn tồn tại không quá 15 số nguyên x thỏa mãn điều kiện $\log_{2021}(x+y^2) + \log_{2022}(y^2+y+16) \geq \log_2(x-y)$?

A 2021. B 4042. C 2020. D 4041.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} x+y^2>0 \\ x-y>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y>0 \\ x>y \end{cases}$.

Ta có bất phương trình

$$\log_{2021}\left(x+y^2\right) + \log_{2022}\left(y^2+y+16\right) - \log_2(x-y) \geq 0.$$

Xét $f(x) = \log_{2021}(x+y^2) + \log_{2022}(y^2+y+16) - \log_2(x-y)$ với $x > y, y \in \mathbb{Z}$.

Ta có

$$f'(x) = \frac{1}{(x+y^2)\ln 2021} - \frac{1}{(x-y)\ln 2} = \frac{x(\ln 2 - \ln 2021) - y\ln 2 - y^2\ln 2021}{(x+y^2)\cdot(x-y)\cdot\ln 2021\cdot\ln 2}.$$

Ta có: $x > y \Rightarrow x(\ln 2 - \ln 2021) < y(\ln 2 - \ln 2021)$.

Suy ra

$$x(\ln 2 - \ln 2021) - y\ln 2 - y^2\ln 2021 < \left(-y^2 - y\right)\ln 2021 < 0, \forall y \in \mathbb{Z}.$$

Do đó $f'(x) < 0, \forall x > y, y \in \mathbb{Z}$. Ta có bảng biến thiên của $f(x)$ là

x	y	$y+1$	$y+1$	$\cdots$	$y+15$	$y+16$	$+\infty$
$f'(x)$				$-$			
$f(x)$	$+\infty$			y=0		$f(y+16)$	$-\infty$

Yêu cầu bài toán

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \quad f(y+16)<0\\
&\Leftrightarrow \quad \Leftrightarrow \log_{2021}\left(y^2+y+16\right)+\log_{2022}\left(y^2+y+16\right)<\log_2 16\\
&\Leftrightarrow \quad \log_{2021}\left(y^2+y+16\right)+\frac{\log_{2021}\left(y^2+y+16\right)}{\log_{2021}2022}<4\\
&\Leftrightarrow \quad \log_{2021}\left(y^2+y+16\right)<\frac{4}{1+\log_{2022}2021}\approx 2,00\\
&\Leftrightarrow \quad y^2+y+16<2021^{\frac{4}{1+\log_{0022}2021}} \Leftrightarrow -2021,99\le y\le 2020,99
\end{aligned}$$

Do $y\in\mathbb{Z}$ nên $y\in\{-2021;-2020;\dots;2020\}$.

Vậy có tất cả 4041 giá trị nguyên y thỏa yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án D □

Câu 37 (THPT Lương Thế Vinh – Hà Nội – 2022).

Có bao nhiêu cặp số nguyên $(a;b)$, trong đó $a,b\in[1;2022]$ thỏa mãn $\left(\dfrac{2a}{a+2^b}\right)^{2^b}\ge\left(\dfrac{a+2^b}{2^{b+1}}\right)^a$?

A 5. B 9. C 10. D 11.

Lời giải.

Đặt $x=2^b,(x>0)$ suy ra

$$\left(\frac{2a}{a+x}\right)^x\ge\left(\frac{a+x}{2x}\right)^a\Leftrightarrow\left(\frac{2a}{a+x}\right)^x\left(\frac{2x}{a+x}\right)^a\ge1$$

Nếu $x=a\Rightarrow VT=1$ (thoả mãn).

Nếu $x>a\Rightarrow VT<\left(\dfrac{2a}{a+x}\right)^x\left(\dfrac{2x}{a+x}\right)^x=\left(\dfrac{4ax}{(a+x)^2}\right)^x\le1^x=1$ (không thoả mãn).

Nếu $x<a\Rightarrow VT<\left(\dfrac{2a}{a+x}\right)^a\left(\dfrac{2x}{a+x}\right)^a=\left(\dfrac{4ax}{(a+x)^2}\right)^a\le1^a=1$ (không thoả mãn).

Vậy $x=a\Leftrightarrow a=2^b\in[1;2022]\Rightarrow b\le\log_2 2022\approx10,98\Rightarrow b\in\{1,\dots,10\}$.

Với mỗi số nguyên b tìm được ta có tương ứng một số nguyên $a=2^b$ thoả mãn tức có 10 cặp.

Chọn đáp án C □

Câu 38 (THPT Trần Phú – Hà Tĩnh – 2022).

Có bao nhiêu số tự nhiên x sao cho mỗi giá trị của x tồn tại số thực y thoả mãn $\log_3(x-y)\ge\log_6\left(x^2+2y^2\right)$?

A 1. B 3. C 2. D 6.

Lời giải.

Đặt $\log_3(x-y)=t \Rightarrow \begin{cases} x-y=3^t \\ x^2+2y^2 \leq 6^t. \end{cases}$

Suy ra

$$\begin{aligned} 6^t &\geq x^2+2y^2=\frac{x^2}{1}+\frac{(-y)^2}{\frac{1}{2}} \geq \frac{(x-y)^2}{1+\frac{1}{2}}=\frac{2\cdot 9^t}{3} \\ \Rightarrow &\left(\frac{3}{2}\right)^t \leq \frac{3}{2} \Leftrightarrow t \leq 1 \Rightarrow x^2+2y^2 \leq 6 \\ \Rightarrow &\ x^2 \leq 6 \Rightarrow x \in \{0,1,2\} \end{aligned}$$

Thử lại.

Với $x=0 \Rightarrow \log_3(-y) \geq \log_6\left(2y^2\right) \Rightarrow y=-0,1$ thoả mãn (nhận).

Với $x=1 \Rightarrow \log_3(1-y) \geq \log_6\left(1+2y^2\right) \Rightarrow y=-1$ thoả mãn (nhận).

Với $x=2 \Rightarrow \log_3(2-y) \geq \log_6\left(4+2y^2\right) \Rightarrow y=-1$ thoả mãn (nhận).

Vậy $x \in \{0,1,2\}$ là các số tự nhiên cần tìm.

Chọn đáp án B □

Câu 39 (THPT Võ Nguyên Giáp - Quảng Bình - 2022).

Có bao nhiêu cặp số nguyên (x,y) thỏa mãn $\log_2\left(x^2+2x+3\right)^{y^2+8} \leq 7-y^2+3y$?

A 0. B 1. C 2. D 7.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} &\log_2\left(x^2+2x+3\right)^{y^2+8} \leq 7-y^2+3y \\ \Leftrightarrow\ &\left(y^2+8\right)\log_2\left(x^2+2x+3\right) \leq 7-y^2+3y \\ \Leftrightarrow\ &\log_2\left(x^2+2x+3\right) \leq \frac{7-y^2+3y}{y^2+8} \quad (*) \end{aligned}$$

Xét hàm số

$$f(x)=\log_2\left(x^2+2x+3\right) \Rightarrow f'(x)=\frac{2x+2}{\left(x^2+2x+3\right)\ln 2}$$

Suy ra $f(x)$ nghịch biến trên $(-\infty;-1)$ và đồng biến trên $(-1;+\infty) \Rightarrow \min\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x)=f(-1)=1$.

Xét hàm số

$$g(y)=\frac{7-y^2+3y}{y^2+8} \Rightarrow g'(y)=\frac{-3y^2-30y+24}{\left(y^2+8\right)}.$$

Với $g'(y)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=-5+\sqrt{33} \approx 0,74 \\ y=-5-\sqrt{33}. \end{array}\right.$

Bảng biến thiên của $g(y)$ trên $\mathbb{R}$:

y	$-\infty$		$-5-\sqrt{33}$		$-5+\sqrt{33}$		$+\infty$
$g'(y)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(y)$	-1	$\searrow$	$-\frac{1+3\sqrt{33}}{16}$	$\nearrow$	$\frac{-1+3\sqrt{33}}{16}$	$\searrow$	-1

Ta có $g\left(-5+\sqrt{33}\right) \approx 1,01; g(0) = \dfrac{7}{8}; g(1) = 1 \Rightarrow \max\limits_{y\in\mathbb{Z}} g(y) = y(1) = 1$.

Do đó với $x, y \in \mathbb{Z}$ thì $(*) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 1. \end{cases}$

Vậy chỉ có 1 cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án B □

Câu 40 (Sở Ninh Bình 2022). Biết nửa khoảng $S = [p^m; p^n)$ $(p, m, n \in \mathbb{N}^*)$ là tập hợp tất cả các số thực y sao cho ứng với mỗi y tồn tại đúng 6 số nguyên x thỏa mãn $\left(3^{x^2-2x} - 27\right)\left(5^{x^2} - y\right) \leq 0$. Tổng $m + n + p$ bằng

A $m+n+p = 46$. B $m+n+p = 66$. C $m+n+p = 14$. D $m+n+p = 30$.

Lời giải.

Trường hợp 1: $y < 1$, khi đó ta suy ra $5^{x^2} - y > 0$.

Do đó bất phương trình ban đầu trở thành:

$$\Leftrightarrow 3^{x^2-2x} - 27 \leq 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x \leq 3 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 3$$

Tức có 5 giá trị nguyên x, như vậy không đủ thỏa mãn theo yêu cầu đề bài.

Trường hợp 2: $y = 1$, khi đó ta suy ra $5^{x^2} - y = 5^{x^2} - 1 \geq 0$.

Do đó bất phương trình ban đầu trở thành:

$$\left[\begin{array}{l} 3^{x^2-2x} - 27 \leq 0 \\ 5^{x^2} - 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - 2x \leq 3 \\ x = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 3.$$

Tức có 5 giá trị nguyên x, như vậy không đủ thỏa mãn theo yêu cầu đề bài.

Trường hợp 3: $y > 1$, khi đó ta xét: $3^{x^2-2x} - 27 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 3 \end{array}\right.$ và $5^{x^2} - y = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\log_5 y}$.

Nếu $\sqrt{\log_5 y} \leq 3$ hay $-\sqrt{\log_5 y} \geq -3$ thì tập nghiệm cần tìm chính là $\left[\begin{array}{l} \left[-\sqrt{\log_5 y}; -1\right] \cup \left[\sqrt{\log_5 y}; 3\right] \\ \left[-1; -\sqrt{\log_5 y}\right] \cup \left[\sqrt{\log_5 y}; 3\right] \end{array}\right.$.

Tuy nhiên các cặp nghiệm này không chứa đủ 6 số nguyên nên ta loại.

Nếu $\sqrt{\log_5 y} > 3$ hay $-\sqrt{\log_5 y} < -3$ thì tập nghiệm cần tìm chính là $\left[-\sqrt{\log_5 y}; -1\right] \cup \left[3; \sqrt{\log_5 y}\right]$, và tập này chỉ chứa đúng 6 số nguyên khi và chỉ khi $4 \leq \sqrt{\log_5 y} < 5 \Leftrightarrow 5^{16} \leq y < 5^{25}$.

Từ đó ta suy ra: $S = [5^{16}; 5^{25})$ chính là tập nghiệm cần tìm, tức $m + n + p = 46$.

Chọn đáp án A □

Câu 41 (Thị xã Quảng Trị 2022). Có bao nhiêu số nguyên $a < 11$ sao cho ứng với mỗi a tồn tại ít nhất 6 số nguyên $b \in (0; 8)$ thỏa mãn $\log_4\left(b^2 + 12\right) + \log_3[(b+7)(a-3)] + \log_5(a+19) \geq 7$?

A 6. B 5. C 7. D 4.

Lời giải.

Ta có bất phương trình tương đương với:

$$\log_4\left(b^2 + 12\right) + \log_3[(b+7)(a-3)] + \log_5(a+19) - 7 \geq 0.$$

Xét hàm số $y = f_a(b) = \log_4(b^2+12) + \log_3[(b+7)(a-3)] + \log_5(a+19) - 7$ có.

$$f_a'(b) = \frac{2b}{(b^2+12)\ln 4} + \frac{1}{(b+7)\ln 3} > 0, \forall b \in (0;8).$$

Nên hàm số $f_a(b)$ luôn đồng biến trên $(0;8)$.

Do ứng với mỗi a tồn tại ít nhất 6 số nguyên $b \in (0;8)$ tức $b\colon 7 \to 2$ nên suy ra $f_a(2) \geq 0$. Khi đó

$$\begin{aligned} & \log_4 16 + \log_3[9(a-3)] + \log_5(a+19) - 7 \geq 0, \forall a \in (3;11) \\ \Leftrightarrow\ & \log_3(a-3) + \log_5(a+19) - 3 \geq 0 \Leftrightarrow \log_3(a-3) + \log_5(a+19) \geq 3. \end{aligned}$$

Xét hàm số

$$y = g(a) = \log_3(a-3) + \log_5(a+19)$$

có $g'(a) > 0, \forall a \in (3;11)$ và $g(6) = 3$, suy ra $a \geq 6$. Vậy ta suy ra: $a \in \{6;7;8;9;10\}$ tức có 5 giá trị nguyên a thỏa mãn.

Chọn đáp án B □

Câu 42 (Chuyên Lê Quý Đôn – Đà Nẵng 2022).

Có bao nhiêu số nguyên $a \in (-12;12)$ sao cho ứng với mỗi a, tồn tại ít nhất 4 số nguyên b thỏa mãn $4^{b-a^2} + 2022 \leq 2^{a+b}$?

A 19. B 17. C 16. D 18.

Lời giải.

Ta có bất phương trình tương đương với:

$$4^{b-a^2} - 2^{a+b} + 2022 \leq 0.$$

Xét hàm số $y = f(b) = 4^{b-a^2} - 2^{a+b} + 2022$ có

$$\begin{aligned} & f'(b) = 4^{b-a^2}\ln 4 - 2^{a+b}\ln 2 = 0 \Leftrightarrow 2^{2b-2a^2-a-b} = \frac{\ln 2}{\ln 4} = \frac{1}{2} = 2^{-1} \\ \Leftrightarrow\ & b - 2a^2 - a + 1 = 0 \Leftrightarrow b = b_0 = 2a^2 + a - 1. \end{aligned}$$

Mặt khác $f''(b_0) = 4^{a^2+a-1}\ln^2(4) - 2^{2a^2+2a-1}\ln^2(2) > 0$ nên ta suy ra $b = b_0$ là điểm cực tiểu hàm số $f(b)$.

Suy ra điều kiện cần để tồn tại nghiệm bất phương trình $f(b) \leq 0$ là

$$\begin{aligned} & f\left(2a^2+a-1\right) \leq 0 \Leftrightarrow 4^{a^2+a-1} - 2^{2a^2+2a-1} + 2022 \leq 0 \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} a \leq -4 \\ a \geq 3 \end{array}\right. \overset{a\in(-12;12)}{a} \in [-11;-4] \cup [3;11] \quad (1) \end{aligned}$$

Tiếp đến ta đánh giá như sau:

$$2^{a+b} \geq 4^{b-a^2} + 2022 \geq 2\sqrt{2022\cdot 4^{b-a^2}} = 2^{b-a^2+1}\cdot\sqrt{2022} \Rightarrow 2^{a^2+a-1} \geq 2\sqrt{2022}.$$

Suy ra: $a^2 + a \geq \log_2(\sqrt{2022}) + 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a \geq 3 \\ a \leq -4 \end{array}\right.$ (*). Khi đó ta luôn có $a^2 + a \geq 12$.

Từ đó ta thấy ngay với mọi giá trị của $b \in \{a^2 - 1; a; a^2 + 1; \ldots\}$ thì bất phương trình ban đầu luôn đúng với mọi a thuộc tập (*) (2).

Vậy ta suy ra $a \in \{-11; -10; \ldots; -4; 3; 4; \ldots; 11\}$ tức có 17 giá trị nguyên a thỏa mãn.

Chọn đáp án B □

Câu 43 (Chuyên Biên Hòa – Hà Nam 2022).

Có bao nhiêu số nguyên x sao cho ứng với mỗi x có không quá 255 giá trị nguyên y thỏa mãn $\log_5(x^2 + y) \geq \log_4(x + y)$?

A 37. B 38. C 40. D 36.

Lời giải.

Cách 1: Ta có $\forall x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x^2 \geq x$ nên điều kiện: $y > -x$ mà $x \in \mathbb{Z}$ nên $y \geq -x + 1$ tức $(-x + 1)$ là nghiệm đầu tiên của tham số y (tức y_1).

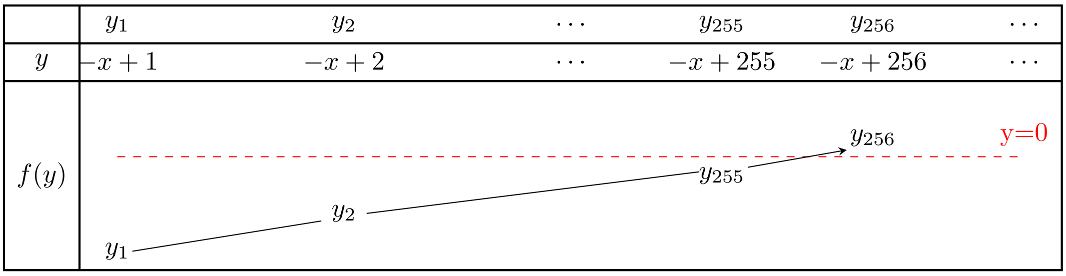
Tiếp theo ta có bất phương trình tương đương với:

$$\log_4(x + y) - \log_5\left(x^2 + y\right) \leq 0.$$

Xét hàm số

$$f_x(y) = \log_4(x + y) - \log_5\left(x^2 + y\right)$$

Có: $f'_x(y) = \dfrac{1}{(x + y)\ln 4} - \dfrac{1}{(x^2 + y)\ln 5} > 0$. Từ đó ta suy ra hàm số $f_x(y)$ luôn đồng biến trên tập xác định. Ta có bảng biến thiên như sau:



Ta có bất phương trình là $f_x(y) \leq 0$.

Do đề bài cần không qua 255 giá trị nguyên y nên ta chỉ nhận đúng 255 giá trị, tức từ y_1 đến y_{255} để $f_x(y) \leq 0$, suy ra tại giá trị y_{256} phải làm cho $f_x(y) > 0$ tức ta có điều kiện cần và đủ để tồn tại nghiệm thỏa là

$$\begin{aligned} & f_x(y_{256}) = f_x(-x + 256) > 0 \Leftrightarrow \log_4 256 - \log_5\left(x^2 - x + 256\right) > 0 \\ \Leftrightarrow\quad & \log_5\left(x^2 - x + 256\right) < \log_4 256 \Leftrightarrow x^2 - x + \left(256 - 5^{\log_4 256}\right) < 0 \\ \Leftrightarrow\quad & -18 \cdot 72 \leq x \leq 19 \cdot 72 \end{aligned}$$

Mà $x \in \mathbb{Z}$ nên ta suy ra $-18 \leq x \leq 19$ tức có $19 - (-18) + 1 = 38$ giá trị nguyên x thỏa mãn.

Cách 2: Đầu tiên, với $x, y \in \mathbb{Z}$ ta luôn có:

$$\log_5\left(x^2 + y\right) \geq \log_4(x + y) \Leftrightarrow x^2 + y \geq 5^{\log_4(x+y)} \Leftrightarrow x^2 - x \geq 5^{\log_4(x+y)} - (x + y) \quad (*)$$

Đặt $t = x+y$. Xét hàm số $y = f(t) = 5^{\log_t t} - t$ có $f'(t) = \dfrac{1}{t\ln 5}5^{\log_4 t} - 1 > 0$ với mọi $t \geq 1\,(t \in \mathbb{Z}^+)$.
Từ đó ta suy ra bất phương trình (*) tương đương với: $1 \leq x+y \leq f^{-1}\left(x^2 - x\right)$.
Ta có nhận xét sau: khi giá trị nguyên của y không quá 255 thì giá trị nguyên của $t = x+y$ cũng không quá 255 giá trị, tức

$$1 \leq x+y \leq f^{-1}\left(x^2-x\right) \leq 256 \Leftrightarrow f^{-1}\left(x^2-x\right) \leq 256 \Leftrightarrow x^2 - x \leq f(256)$$
$$\Leftrightarrow \quad x^2 - x \leq 5^{\log_4 256} - 256 \Leftrightarrow x^2 - x - 5^{\log_4 256} + 256 \leq 0 \Leftrightarrow -18\cdot 72 \leq x \leq 19\cdot 72$$

Mà $x \in \mathbb{Z}$ nên ta suy ra $-18 \leq x \leq 19$ tức có $19 - (-18) + 1 = 38$ giá trị nguyên x thỏa mãn.
Chọn đáp án B □

Câu 44 (Sở Thái Nguyên 2022). Cho các số thực a dương và b không âm thỏa mãn $2^{a+\frac{1}{a}} \leq \log_2[(8-b)\sqrt{b+4}]$. Tổng tất cả các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $a\sin 2x + b\cos 2x = 2m - 1$ có nghiệm là

A 4. B 1. C 2. D 0.

Lời giải.

Ta có hai đánh giá sau:

$$\begin{cases} a + \dfrac{1}{a} \geq 2\sqrt{a\cdot\dfrac{1}{a}} = 2 \to 2^{a+\frac{1}{a}} \geq 2^2 = 4 \\ \log_2[(8-b)\sqrt{b+4}] = \log_2\left[12\sqrt{b+4} - (\sqrt{b+4})^3\right] \leq \log_2 16 = 4. \end{cases}$$

Nhận thấy hai đánh giá trên thuận dấu với bất phương trình ban đầu nên ta suy ra dấu bằng chỉ xảy ra khi $\begin{cases} a = \dfrac{1}{a} \\ \sqrt{b+4} = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \end{cases}$.
Như vậy ta có phương trình sau là $\sin 2x = 2m - 1$. Để phương trình này có nghiệm thì $-1 \leq 2m - 1 \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq m \leq 1$ tức có 2 giá trị nguyên m thỏa mãn.
Chọn đáp án C □

Câu 45 (Chuyên Ngoại Ngữ - Hà Nội 2022).
Có bao nhiêu giá trị nguyên của a sao cho ứng với mỗi a, tồn tại ít nhất năm số nguyên $b \in (-10;10)$ thoả mãn $8^{a^2+b} \leq 4^{b-a} + 3^{b+5} + 15$?

A 5. B 4. C 7. D 6.

Lời giải.

Ta có

$$8^{a^2+b} \leq 4^{b-a} + 3^{b+5} + 15 \Leftrightarrow 8^{a^2} - \frac{4^b}{8^b\cdot 4^a} - \frac{3^b}{8^b}\cdot 3^5 - \frac{15}{8^b} \leq 0$$
$$\Leftrightarrow \quad 8^{a^2} - \left(\frac{1}{2}\right)^b\frac{1}{4^a} - \left(\frac{3}{8}\right)^b\cdot 3^5 - 15\cdot\left(\frac{1}{8}\right)^b \leq 0$$

Đặt $f(b) = 8^{a^2} - \left(\dfrac{1}{2}\right)^b\dfrac{1}{4^a} - \left(\dfrac{3}{8}\right)^b\cdot 3^5 - 15\cdot\left(\dfrac{1}{8}\right)^b$. Suy ra

$$f'(b) = -\ln\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^b\frac{1}{4^a} - \ln\left(\frac{3}{8}\right)\left(\frac{3}{8}\right)^b\cdot 3^5 - 15\cdot\ln\left(\frac{1}{8}\right)\left(\frac{1}{8}\right)^b$$

Suy ra $f'(b) > 0, \forall b \in (-10; 10)$.

Để tồn tại ít nhất năm số nguyên $b \in (-10; 10)$ thì b thoả mãn.

$$f(-5) \leq 0 \Leftrightarrow 8^{a^2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{-5} \frac{1}{4^a} - \left(\frac{3}{8}\right)^{-5} \cdot 3^5 - 15 \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^{-5} \leq 0.$$

Dùng Table-solve suy ra có 5 giá trị nguyên của a.

Chọn đáp án (A) □

Câu 46 (Chuyên Quốc Học Huế 2022).

Số giá trị nguyên của $m \in (-2021; 2022)$ để $5.a^{\sqrt{\log_a b}} - 3 \cdot b^{\sqrt{\log_b a}} > m\sqrt{\log_a b} + 2$ với mọi $a, b \in (1; +\infty)$ là

(A) 2021. (B) 2022. (C) 4044. (D) 2020.

Lời giải.

Đặt $t = \sqrt{\log_a b} > 0 \Rightarrow b = a^{t^2}$.

Lúc đó: $5.a^{\sqrt{\log_a b}} - 3 \cdot b^{\sqrt{\log_b a}} > m\sqrt{\log_a b} + 2$ trở thành

$$5.a^t - 3 \cdot a^t > mt + 2 \Leftrightarrow m < \frac{2a^t - 2}{t}.$$

Xét hàm số $f(t) = \dfrac{2a^t - 2}{t}$ (với $t > 0$) có

$$f'(t) = \frac{2\left(a^t \cdot t \cdot \ln a - a^t + 1\right)}{t^2}.$$

Xét hàm số $g(t) = a^t \cdot t \cdot \ln a - a^t + 1$ có $g'(t) = a^t \cdot t \cdot \ln^2 a > 0, \forall t > 0, a > 1$.

Nên hàm số $g(t)$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$ hay $g(t) > g(0) = 0 \Rightarrow f'(t) > 0, \forall t > 0$.

Do đó, hàm số $f(t)$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

Bảng biến thiên của $f(t)$:

t	0		$+\infty$
$f'(t)$		$+$	
$f(t)$	$2\ln a$	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta có: $m < 2\ln a$ mà bất đẳng thức đúng với mọi $a \in (1; +\infty)$ nên $m \leq 0$.

Vậy có 2021 giá trị nguyên của $m \in (-2021; 2022)$ thỏa mãn.

Chọn đáp án (A) □

Câu 47 (THPT Hoàng Hoa Thám - Đà Nẵng 2022).

Có bao nhiêu cặp số nguyên không âm $(x; y)$ thỏa mãn điều kiện $\log_2 \dfrac{x^2 + y^2 + 6}{4x + 6y + 9} + 1 \geq \log_2 \dfrac{x^2 + y^2 + 5}{2x + 3y + 4}$?

(A) 43. (B) 49. (C) 42. (D) 45.

Lời giải.

Đặt $u = x^2 + y^2 + 5; v = 4x + 6y + 8 > 0$.Ta được

$$\begin{aligned}
&\log_2 \frac{x^2+y^2+6}{4x+6y+9} + 1 \geq \log_2 \frac{x^2+y^2+5}{2x+3y+4} \log_2 \frac{x^2+y^2+6}{4x+6y+9} \geq \log_2 \frac{x^2+y^2+5}{4x+6y+8} \\
\Leftrightarrow\ &\log_2 \frac{u+1}{v+1} \geq \log_2 \frac{u}{v} \Leftrightarrow u \leq v \\
\Leftrightarrow\ &x^2 + y^2 + 5 \leq 4x + 6y + 8 \Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-3)^2 \leq 4^2.
\end{aligned}$$

Suy ra $-4 \leq x - 2 \leq 4 \Rightarrow 0 \leq x \leq 6$ vì $(x; y)$ là những số nguyên nên.

Xét $x = 0$ có 7 cặp.

Xét $x = 1$ có 7 cặp.

Xét $x = 2$ có 8 cặp.

Xét $x = 3$ có 7 cặp.

Xét $x = 4$ có 7 cặp.

Xét $x = 5$ có 5 cặp.

Xét $x = 6$ có 1 cặp.

Vậy có 42 cặp số $(x; y)$ thỏa mãn đề bài.

Chọn đáp án C □

Câu 48 (Sở Bình Phước 2022). Có bao nhiêu số nguyên dương b sao cho ứng với mỗi b, có đúng 3 giá trị nguyên dương của a thỏa mãn $\log_2 \dfrac{2^a + a}{ab} + 2^a \leq a(b-1)$?

A 1. B 2. C 3. D 0.

Lời giải.

Ta có

$$\log_2 \frac{2^a + a}{ab} + 2^a \leq a(b-1) \Leftrightarrow \log_2 (2^a + a) + (2^a + a) \leq \log_2(ab) + ab \quad (1).$$

Xét hàm số $f(t) = \log_2 t + t$ trên khoảng $(0; +\infty)$, vì $f'(t) = \dfrac{1}{t \ln 2} + 1 > 0, \forall t \in (0; +\infty)$ nên $f(t)$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

Do đó $(1) \Leftrightarrow 2^a + a \leq ab \Leftrightarrow \dfrac{2^a}{a} + 1 \leq b$.

Xét hàm số $g(a) = \dfrac{2^a}{a} + 1$ trên khoảng $(0; +\infty)$, ta thấy $g'(a) = \dfrac{2^a \cdot \ln 2 \cdot a - 2^a}{a^2}$; $g'(a) = 0 \Leftrightarrow a = \dfrac{1}{\ln 2}$.

Bảng biến thiên của hàm số $g(a)$:

a	0		$\frac{1}{\ln 2}$		$+\infty$
$g'(a)$		$-$	0	$+$	
$g(a)$	$+\infty$	$\searrow$	$g\left(\frac{1}{\ln 2}\right)$	$\nearrow$	$+\infty$

Mặt khác:

$$g\left(\frac{1}{\ln 2}\right) \approx 2,9; g(1) = 3; g(2) = 3; g(3) = \frac{11}{3} \approx 3,7; g(4) = 5.$$

Do đó chỉ khi $b = 4$ thì có đúng 3 giá trị nguyên dương của a thỏa mãn bất phương trình đã cho.

Vậy có đúng một số nguyên b thỏa mãn.

Chọn đáp án A □

Câu 49 (Sở Quảng Bình 2022). Có bao nhiêu số nguyên dương a sao cho ứng với mỗi a, có không quá 22 số nguyên b thỏa mãn $2^a + 4 \cdot 6^b < 2^{a+b+2} + 3^b$?

A 31. B 32. C 33. D 34.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} & 2^a + 4 \cdot 6^b < 2^{a+b+2} + 3^b \Leftrightarrow 2^a + 4 \cdot 6^b - 2^{a+b+2} - 3^b < 0 \\ \Leftrightarrow\ & 2^a - 3^b - 4 \cdot 2^b \left(2^a - 3^b\right) < 0 \Leftrightarrow \left(1 - 4 \cdot 2^b\right)\left(2^a - 3^b\right) < 0 \\ \Leftrightarrow\ & \left(4 \cdot 2^b - 1\right)\left(3^b - 2^a\right) < 0 \end{aligned}$$

Trường hợp 1: $4.2^b - 1 < 0 \Leftrightarrow b < -2 \xrightarrow{b \in \mathbb{Z}} b \leq -3$.

Xét phương trình

$$\begin{aligned} & 3^b - 2^a = 0 \Leftrightarrow b = \log_3(2^a) \leq -3 \Leftrightarrow 2^a \leq \frac{1}{27} \\ \Leftrightarrow\ & \begin{cases} a \leq \log_2\left(\dfrac{1}{27}\right) \approx -4,75\ldots \\ a \in \mathbb{Z}^+ \end{cases} \Rightarrow a \in \varnothing \end{aligned}$$

Trường hợp 2: $4.2^b - 1 > 0 \Leftrightarrow b > -2 \xrightarrow{b \in \mathbb{Z}} b \geq -1$.

Xét phương trình

$$\begin{aligned} & 3^b - 2^a = 0 \Leftrightarrow b = \log_3(2^a) \geq -1 \Leftrightarrow 2^a \geq \frac{1}{3} \\ \Leftrightarrow\ & \begin{cases} a \geq \log_2\left(\dfrac{1}{3}\right) \approx -1,5 \\ a \in \mathbb{Z}^+ \end{cases} \Rightarrow a > 0 \end{aligned}$$

Mà theo đề ứng với mỗi a, có không quá 22 số nguyên b thỏa mãn nên cùng với $b \geq -1$ ta suy ra

$$\begin{aligned} & b:\ -1 \to 20 \Rightarrow -1 \leq \log_3(2^a) \leq 21 \Rightarrow 2^a \leq 3^{21} \Leftrightarrow a \leq \log_2\left(3^{21}\right) \\ \Leftrightarrow\ & \begin{cases} a \leq 33,284 \\ a \in \mathbb{Z}^+ \end{cases} \Rightarrow a \in \{1; 2; \ldots; 33\} \end{aligned}$$

Tức là có 33 giá trị nguyên a thỏa mãn bài toán.

Chọn đáp án C □

Câu 50 (THPT Phụ Dực - Quảng Bình 2022).

Có bao nhiêu số nguyên $y \in [-2022; 2022]$ sao cho bất phương trình $\mathrm{e}^{2x} + 2(2-y)\mathrm{e}^{x} - 4yx - y^2 \leq -2022$ có nghiệm?

(A) 4016. (B) 1993. (C) 4015. (D) 1994.

Lời giải.

Ta có bất phương trình:

$$\mathrm{e}^{2x} + 2(2-y)\mathrm{e}^{x} - 4yx - y^2 + 2022 \leq 0 \quad (1).$$

Xét hàm số $f_y(x) = \mathrm{e}^{2x} + 2(2-y)\mathrm{e}^{x} - 4yx - y^2 + 2022$ (hàm theo biến x, và y là tham số) có

$$\begin{cases} f'_y(x) = 2\mathrm{e}^{2x} + 2(2-y)\mathrm{e}^{x} - 4y = 0 \\ f''_y(x) = 4\mathrm{e}^{2x} + 2(2-y)\mathrm{e}^{x} \end{cases} \Leftrightarrow \mathrm{e}^{2x} + (2-y)\mathrm{e}^{x} - 2y = 0(*) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \mathrm{e}^{x} = y \\ \mathrm{e}^{x} = -2 \end{array}\right. . \text{ (nghiệm đẹp).}$$

Trường hợp 1: $\mathrm{e}^{x} = y \Leftrightarrow \begin{cases} x = \ln y \\ y > 0(1) \end{cases}$.

Do $\lim\limits_{x \to -\infty} f_y(x) = 0$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f_y(x) = +\infty$ nên $x = \ln y$ là điểm cực tiểu với

$$f''_y(\ln y) = 4\mathrm{e}^{2\ln y} + 2(2-y)\mathrm{e}^{\ln y} = 4y^2 + 2y(2-y) = 2y^2 + 4y > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y > 0 \\ y < -2 \end{cases} \quad (2).$$

Từ (1) và (2) ta rút ra điều kiện cần cho y là $y > 0$.

Cùng với điều kiên đủ là $f_y(\ln y) = y^2 + 2y(2-y) - 4y\ln y - y^2 + 2022 \leq 0$ nên ta có $y \geq 29 \cdot 5$.

Trường hợp 2: phương trình (*) vô nghiệm tức ta luôn tồn tại tập bù của $y > 0$ tức $y \leq 0$ để bất phương trình $f'_y(x) = 2\mathrm{e}^{2x} + 2(2-y)\mathrm{e}^{x} - 4y \geq 0$ có nghĩa $\Delta_{f'} = (y+2)^2 \leq 0 \Leftrightarrow y = -2$.

Xét $y = 0$ ta thấy không thỏa bất phương trình đề bài. Suy ra trường hợp 2 ta thu được $y < 0$.

Vậy tổng hai trường hợp ta thu được

$$\begin{cases} y < 0 \\ y \geq 29 \cdot 5 \xrightarrow{y \in [-2022; 2022]} y \in [-2022; -1] \cup [30; 2022] \end{cases}$$

Tức là có tất cả 4015 giá trị nguyên y thỏa mãn bài toán.

Chọn đáp án (C) □

Câu 51 (THPT Trần Nhân Tông – Quảng Ninh 2022).

Có bao nhiêu số nguyên $x \in (-10; 10)$ sao cho ứng với mỗi x có ít nhất 8 số nguyên y thỏa mãn $2^{70-6y} + 4^{x^2+y} \cdot \log_2(10 - x - y) \leq 65 \cdot 4^{x^2+y}$?

(A) 8. (B) 10. (C) 15. (D) 7.

Lời giải.

Điều kiện $10 - x - y > 0 \Leftrightarrow y < 10 - x$.

Bất phương trình tương đương $4^{-x^2-4y+35} + \log_2(10 - x - y) - 65 \leq 0$.

Xét hàm số $f(y)=4^{-x^2-4y+35}+\log_2(10-x-y)-65, y\in(-\infty;10-x)$.

Ta có

$$f'(y)=-4\cdot 4^{-x^2-4y+35}\ln 4-\frac{1}{(10-x-y)\ln 2}<0, \forall x\in(-\infty;10-x).$$

Do đó hàm số nghịch biến trên $(-\infty;10-x)$.

Nhận xét: $f(-x+9)=4^{-x^2+4x-1}-65<0$.

Do đó $y=-x+9$ là nghiệm nguyên lớn nhất của bất phương trình đã cho.

Do đó yêu cầu bài toán tương đương $f(-x+2)\le 0$.

$$4^{-x^2+4x+27}+\log_2(8)-65\le 0\Leftrightarrow -x^2+4x+27-\log_4(62)<0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\le 2-\sqrt{15-\log_4 62}\\ x\ge 2+\sqrt{15-\log_4 62}\end{array}\right.$$

Do x nguyên và $x\in(-10;10)$ nên $x\in\{-9\ldots\cdots-4,8\ldots 9\}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 52 (Sở Bình Thuận 2022). Có bao nhiêu số nguyên b sao cho: ứng với mỗi b có không quá 10 số nguyên a thỏa mãn $3^{3a+2}+9^{b-1}<3^a\left(3^{a-2}+9^{b+1}\right)$

(A) 18. (B) 23. (C) 20. (D) 22.

Lời giải.

Ta có bất phương trình sau:

$$\begin{aligned}
&3^{3a+2}+9^{b-1}<3^a\left(3^{a-2}+9^{b+1}\right)\quad(*)\\
\Leftrightarrow\ &3^{2a-2}\left(3^{a+4}-1\right)-3^{2b-2}\left(3^{a+4}-1\right)<0\\
\Leftrightarrow\ &\left(3^{2a-2}-3^{2b-2}\right)\left(3^{a+4}-1\right)<0\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l}\begin{cases}3^{a+4}-1<0\\ 3^{2a-2}-3^{2b-2}>0\end{cases}\\ \begin{cases}3^{a+4}-1>0\\ 3^{2a-2}-3^{2b-2}<0\end{cases}\end{array}\right..
\end{aligned}$$

Trường hợp 1: Ta có

$$\begin{cases}3^{a+4}-1<0\\ 3^{2a-2}-3^{2b-2}>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a<-4\\ a>b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a\le -5\\ a\ge b+1\end{cases}.\ (a,b\in\mathbb{Z}\quad(1)).$$

Trường hợp 2: Ta có

$$\begin{cases}3^{a+4}-1>0\\ 3^{2a-2}-3^{2b-2}<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a>-4\\ a<b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a\ge -3\\ a\le b-1\end{cases}.(\text{do } a,b\in\mathbb{Z}\quad(2)).$$

Tiếp theo ta có nhận xét lần lượt như sau:

Khi $b<-15$ thì (*) có tập nghiệm nguyên là $S=\{b+1;b+2;\ldots;-5\}$ tức có nhiều hơn 10 nghiệm nguyên, nên ta loại.

Khi $b > 7$ thì (*) có tập nghiệm nguyên là $S = \{-3; -2; \ldots; b-1\}$ tức có nhiều hơn 10 nghiệm nguyên, nên ta loại.

Khi $-15 \leq b \leq -6$ thì (1) có tập nghiệm chứa từ 1 đến 10 nghiệm thuộc tập $[b+1; -5]$ và (2) vô nghiệm, điều này thỏa mãn với yêu cầu đề bài.

Khi $-6 < b < -2$ thì cả (1) và (2) vô nghiệm tức (*) vô nghiệm, điều này thỏa mãn với yêu cầu đề bài.

Khi $-2 \leq b \leq 7$ thì (2) có tập nghiệm chứa từ 1 đến 10 nghiệm thuộc tập $[-3; b-1]$ và (1) vô nghiệm, điều này thỏa mãn với yêu cầu đề bài.

Vậy ta suy ra tập hợp các giá trị b thỏa yêu cầu là $\{-15; -14; \ldots; 6; 7\}$ tức có 23 giá trị nguyên b thỏa mãn.

Chọn đáp án B □

Câu 53. Có bao nhiêu số nguyên x sao cho ứng với mỗi x có không quá 652 số nguyên y thỏa mãn $\log_4(x^2+y) \geq \log_3(x+y)$?

A 523. B 15. C 108. D 107.

Lời giải.

Với mọi $x \in \mathbb{Z}$ ta có $x^2 \geq x$.

Xét hàm số $f(y) = \log_3(x+y) - \log_4(x^2+y)$.

Tập xác định $\mathscr{D} = (-x; +\infty)$ (do $y > -x \Rightarrow y > -x^2$). Ta có

$$f'(y) = \frac{1}{(x+y)\ln 3} - \frac{1}{(x^2+y)\ln 4} \geq 0, \forall x \in \mathscr{D}$$

Do $x^2 + y \geq x + y > 0, \ln 4 > \ln 3$. Suy ra f đồng biến trên $\mathscr{D}$.

Ta có $f(-x+1) = \log_3(x-x+1) - \log_4(x^2-x+1) \leq 0, \forall x \in \mathbb{Z}$.

Có không quá 652 số nguyên y thỏa mãn $f(y) \leq 0$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \quad f(-x+653) > 0 \Leftrightarrow \log_3 653 - \log_4\left(x^2-x+653\right) > 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x^2 - x + 653 - 4^{\log_3 653} < 0 \Rightarrow -53 \leq x \leq 54 \end{aligned}$$

Mà $x \in \mathbb{Z}$ nên $x \in \{-53, -52, \ldots, 54\}$.

Vậy có $54 - (-53) + 1 = 108$ số nguyên x thỏa mãn.

Chọn đáp án C □

Câu 54 (Sở Hòa Bình 2022). Có bao nhiêu số nguyên dương x sao cho ứng với mỗi giá trị của x có đúng 11 số nguyên y thỏa mãn bất phương trình $(2^y - x^2)(5^y - x - 1) \leq 0$?

A 55. B 34. C 130. D 88.

Lời giải.

Vì x nguyên dương nên ta xét các trường hợp sau:

Với $x = 1$, BPT đã cho

$$\Leftrightarrow (2^y - 1)\cdot(5^y - 2) \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq y \leq \log_5 2, y \in \mathbb{Z} \Rightarrow y = 0 (textLoi).$$

Do đó $x \geq 2$. Khi đó $\begin{cases} 2^y - x^2 = 0 \Leftrightarrow y = \log_2 x^2 \\ 5^y - x - 1 = 0 \Leftrightarrow y = \log_5(x+1). \end{cases}$

Xét hàm số $f(x) = \log_5(x+1) - \log_2 x^2, x \geq 2$ có

$$f'(x) = \frac{1}{(x+1)\ln 5} - \frac{2}{x \cdot \ln 2} = \frac{x \cdot \ln 2 - 2(x+1)\ln 5}{x(x+1)\ln 2 \cdot \ln 5} < 0, \forall x \geq 2.$$

Do đó hàm số nghịch biến trên $[2; +\infty)$, suy ra

$$\log_5(x+1) - \log_2 x^2 \leq f(2) < 0 \Rightarrow \log_5(x+1) \leq \log_2 x^2.$$

BPT đã cho $\Leftrightarrow \log_5(x+1) \leq y \leq \log_2 x^2$.

Để có đúng 11 số nguyên $y \Leftrightarrow [\log_5(x+1); \log_2 x^2]$ chứa đúng 11 số nguyên $\Leftrightarrow x \in \{91; \ldots; 123; 124; 128; \ldots$

Vậy có 88 giá trị thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Chọn đáp án D □

Câu 55 (Sở Cà Mau 2022). Có bao nhiêu số nguyên $y \in [-2022; 2022]$ để bất phương trình $(3x)^{y+\frac{\log_3 x}{10}} \geq 3^{\frac{11}{10}\log_3 x}$ có nghiệm đúng với mọi số thực $x \in (1; 9)$?

A 4044. B 4026. C 2022. D 2023.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}
& (3x)^{y+\frac{\log_3 x}{10}} \geq 3^{\frac{11}{10}\log_3 x} \\
\Leftrightarrow\ & \log_3 (3x)^{y+\frac{\log_3 x}{10}} \geq \log_3 3^{\frac{11}{10}\log_3 x} \\
\Leftrightarrow\ & \left(y + \frac{\log_3 x}{10}\right)(1 + \log_3 x) \geq \frac{11}{10}\log_3 x \\
\Leftrightarrow\ & (10y + \log_3 x)(1 + \log_3 x) \geq 11\log_3 x \\
\Leftrightarrow\ & 10y \geq \frac{11\log_3 x}{1 + \log_3 x} - \log_3 x \\
\Leftrightarrow\ & 10y \geq \frac{10\log_3 x - (\log_3 x)^2}{1 + \log_3 x}
\end{aligned}$$

Đặt $t = \log_3 x$, vì $x \in (1; 9)$ nên $t \in (0; 2)$. Khi đó $10y \geq \dfrac{10t - t^2}{1+t}$.

Xét

$$f(t) = \frac{10t - t^2}{1+t} \Rightarrow f'(t) = \frac{-t^2 - 2t + 10}{(1+t)^2} > 0, \forall t \in (0; 2).$$

Vậy để bất phương trình $(3x)^{y+\frac{\log_3 x}{10}} \geq 3^{\frac{11}{10}\log_3 x}$ có nghiệm đúng với mọi số thực $x \in (1; 9)$ khi và khi bất phương trình $10y \geq \dfrac{10t - t^2}{1+t}$ nghiệm đúng $\forall t \in (0; 2)$

$$\Leftrightarrow 10y \geq f(2) = \frac{16}{3} \Rightarrow y \geq \frac{8}{15}.$$

Vì $y \in \mathbb{Z}; y \in [-2022; 2022] \Rightarrow y \in \{1; 2; \ldots; 2022\}$. Vậy có 2022 giá trị của y thỏa mãn đề bài.

Chọn đáp án C □

Câu 56 (THPT Thanh Miện 2 - Hải Dương 2022).
Có bao nhiêu bộ số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $1 \leq x, y \leq 2020$ và $(xy + 2x + 4y + 8) \log_3 \left(\dfrac{2y}{y+2}\right) \leq (2x + 3y - xy - 6) \log_2 \left(\dfrac{2x+1}{x-3}\right)$?

Ⓐ 4034. Ⓑ 2. Ⓒ 2017. Ⓓ 2017×2020.

Lời giải.

Điều kiện:

$$\begin{cases} x, y \in \mathbb{N}^* : x, y \leq 2020 \\ \dfrac{2x+1}{x-3} > 0, \dfrac{2y}{y+2} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x, y \in \mathbb{N}^* : x, y \leq 2020 \\ x > 3, y > 0. \end{cases}$$

Bất phương trình đã cho trở thành:

$$(x-3)(y-2) \log_2 \left(\frac{x+4}{x-3} + 1\right) + (x+4)(y+2) \log_3 \left(\frac{y-2}{y+2} + 1\right) \leq 0 \quad (*)$$

Với $y = 1$: $(*)$ trở thành

$$-(x-3) \log_2 \left(\frac{x+4}{x-3} + 1\right) + 3(x+4) \log_3 \frac{2}{3} \leq 0.$$

Bất phương trình này nghiệm đúng với mọi $x > 3$ vì $-(x-3) < 0$, $\log_2 \left(\dfrac{x+4}{x-3} + 1\right) > \log_2(0+1) = 0$, $3(x+4) > 0$, $\log_3 \dfrac{2}{3} < 0$.

Khi đó, ta có đúng 2017 cặp $(x; y) = (x; 1)$ với mọi x mà $4 \leq x \leq 2020, x \in \mathbb{N}$.

Với $y = 2$: $(*)$ trở thành $4(x+4) \log_3 1 \leq 0$, bất phương trình này cũng nghiệm đúng với mọi x mà $4 \leq x \leq 2020, x \in \mathbb{N}$. Khi đó, ta lại có đúng 2017 cặp $(x; y)$.

Với $y > 2$, $x > 3$: Vế trái của $(*)$ dương nên không xảy ra.

Vậy có đúng 4034 cặp số $(x; y)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 57 (Sở Gia Lai 2022). Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x; y)$ với x và y nhận giá trị trong đoạn $[0; 2022]$ sao cho $y - x - 2 \geq 0$ và $4.2^x - 2^y + 3(x - y) + 6 \geq 0$?

Ⓐ 2022. Ⓑ 2021. Ⓒ 2020. Ⓓ 2023.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{cases} y - x - 2 \geq 0 \\ 4 \cdot 2^x - 2^y + 3(x-y) + 6 \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y \geq x + 2 \\ 2^{x+2} - 2^y \geq 3(y - x - 2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y \geq x + 2 \\ 2^{x+2} - 2^y \geq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y \geq x + 2 \\ x + 2 \geq y \end{cases} \Rightarrow y = x + 2$$

Do $x, y \in [0; 2022]$ nên $\begin{cases} 0 \leq x \leq 2022 \\ 0 \leq x+2 \leq 2022 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 2020.$

Vậy có 2021 cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa đề.

Chọn đáp án (B) □

Câu 58 (Sở Nam Định 2022). Có bao nhiêu số nguyên dương y sao cho ứng với mỗi số y đó bất phương trình $\dfrac{x^3-3x^2+x-3}{2^x-y} < 0$ có nghiệm nguyên x và số nghiệm nguyên x không vượt quá 5?

(A) 499. (B) 498. (C) 512. (D) 511.

Lời giải.

Ta có

$$\frac{x^3-3x^2+x-3}{2^x-y} < 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \begin{cases} x^3-3x^2+x-3<0 \\ 2^x-y>0 \end{cases} & (1) \\ \begin{cases} x^3-3x^2+x-3>0 \\ 2^x-y<0 \end{cases} & (2) \end{array}\right.$$

Giải (1).

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x^3-3x^2+x-3<0 \\ 2^x-y>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-3)\left(x^2+1\right)<0 \\ 2^x-y>0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x<3 \\ y<2^x \end{cases} \Leftrightarrow \log_2 y < x < 3.$$

Vì số nghiệm nguyên x không vượt quá 5 nên $\log_2 y \geq -3 \Leftrightarrow y \geq 2^{-3} = \dfrac{1}{8}$.

Suy ra $\dfrac{1}{8} \leq y < 2^3 = 8$. Suy ra $y \in \{1; 2; 3; \cdots; 7\}$.

Giải (2).

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} x^3-3x^2+x-3>0 \\ 2^x-y<0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x>3 \\ y>2^x \end{cases} \Leftrightarrow 3 < x < \log_2 y$$

Vì số nghiệm nguyên x không vượt quá 5 nên $\log_2 y \leq 9 \Leftrightarrow 8 < y \leq 2^9 = 512$. Suy ra $y \in \{9; 10; \cdots; 512\}$.

Vậy có 511 giá trị nguyên của y.

Chọn đáp án (D) □

BẢNG ĐÁP ÁN

1. A	2. D	3. A	4. C	5. D	6. A	7. D	8. A	9. D	10. C
11. A	12. C	13. C	14. A	15. C	16. C	17. A	18. C	19. B	20. C

21. C	**22. C**	**23. A**	**24. A**	**25. A**	**26. A**	**27. D**	**28. B**	**29. D**	**30. B**
31. D	**32. A**	**33. B**	**34. C**	**35. C**	**36. A**	**37. C**	**38. D**	**39. C**	**40. A**
41. A	**42. B**	**43. A**	**44. C**	**45. A**	**46. B**	**47. B**	**48. B**	**49. D**	**50. A**
51. B	**52. C**	**53. B**	**54. B**	**55. C**	**56. D**	**57. A**	**58. C**	**59. B**	**60. B**
61. B	**62. B**	**63. C**	**64. B**	**65. C**	**66. D**	**67. B**	**68. D**	**69. B**	**70. B**
71. A	**72. D**	**73. C**	**74. B**	**75. A**	**76. B**	**77. D**	**78. C**	**79. B**	**80. B**
1. C	**2. D**	**3. D**	**4. D**	**5. B**	**6. B**	**7. B**	**8. C**	**9. A**	**10. A**
11. D	**12. A**	**13. A**	**14. D**	**15. C**	**16. D**	**17. A**	**18. C**	**19. B**	**20. A**
21. D	**22. D**	**23. B**	**24. B**	**25. A**	**26. D**	**27. D**	**28. B**	**29. D**	**30. D**
31. B	**32. A**	**33. D**	**34. B**	**35. B**	**36. D**	**37. C**	**38. B**	**39. B**	**40. A**
41. B	**42. B**	**43. B**	**44. C**	**45. A**	**46. A**	**47. C**	**48. A**	**49. C**	**50. C**
	51. B	**52. B**	**53. C**	**54. D**	**55. C**	**56. A**	**57. B**	**58. D**	

KHỐI TRỤ

MỨC ĐỘ 1. MỨC ĐỘ 5,6 ĐIỂM

Dạng 1. Tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần, chiều cao, bán kính đáy. Thiết diện.

Câu 1. Diện tích xung quanh của hình trụ có độ dài đường sinh ℓ và bán kính đáy r bằng

Ⓐ $4\pi r\ell$. Ⓑ $\pi r\ell$. Ⓒ $\frac{1}{3}\pi r\ell$. Ⓓ $2\pi r\ell$.

Lời giải.

Diện tích xung quanh của hình trụ $S = 2\pi r\ell$.

Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 2. Cho hình trụ có bán kính đáy $r = 8$ và độ dài đường sinh $\ell = 3$. Diện tích xung quanh của hình trụ đã cho bằng

Ⓐ 24π. Ⓑ 192π. Ⓒ 48π. Ⓓ 64π.

Lời giải.

Diện tích xung quanh của hình trụ $S = 2\pi r\ell = 48\pi$.

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 3. Cho hình trụ có bán kính đáy $r = 4$ và độ dài đường sinh $\ell = 3$. Diện tích xung quanh của hình trụ đã cho bằng

Ⓐ 48π. Ⓑ 12π. Ⓒ 16π. Ⓓ 24π.

Lời giải.

Diện tích xung quanh của hình trụ $S = 2\pi r\ell = 2\pi.4.3 = 24\pi$.

Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 4. Cho hình trụ có bán kính đáy $r = 5$ và độ dài đường sinh $\ell = 3$. Diện tích xung quanh của hình trụ đã cho bằng

Ⓐ 15π. Ⓑ 25π. Ⓒ 30π. Ⓓ 75π.

Lời giải.

Diện tích xung quanh của hình trụ $S = 2\pi r\ell = 30\pi$.

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 5. Cho hình trụ có bán kính đáy $r = 7$ và độ dài đường sinh $\ell = 3$. Diện tích xung quanh của hình trụ đã cho bằng

Ⓐ 42π. Ⓑ 147π. Ⓒ 49π. Ⓓ 21π.

Lời giải.

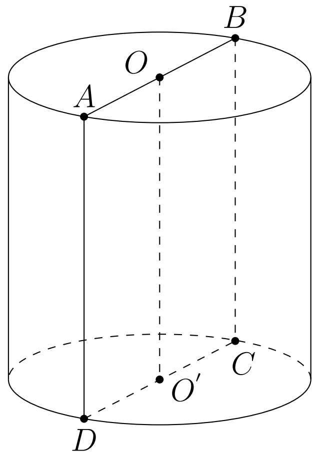
Diện tích xung quanh của hình trụ $S = 2\pi r\ell = 42\pi$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 6. Cho hình trụ có bán kính đáy bằng 3. Biết rằng khi cắt hình trụ đã cho bởi một mặt phẳng qua trục, thiết diện thu được là một hình vuông. Diện tích xung quanh của hình trụ đã cho bằng

(A) 18π. (B) 36π. (C) 54π. (D) 27π.

Lời giải.



Giả sử thiết diện qua trục của hình trụ là hình vuông $ABCD$.

Theo giả thiết ta có bán kính đáy của hình trụ là $r = 3 \Rightarrow h = AD = DC = 2r = 6 = \ell$.

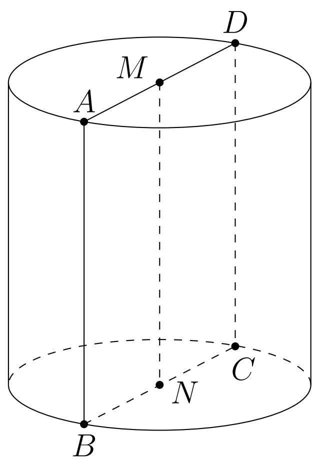
Vậy diện tích xung quanh của hình trụ là: $S_{\text{sq}} = 2\pi r\ell = 2\pi.3.6 = 36\pi$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 7. Trong không gian, cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 1$ và $AD = 2$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD và BC. Quay hình chữ nhật $ABCD$ xung quanh trục MN, ta được một hình trụ. Diện tích toàn phần S_{tp} của hình trụ đã cho bằng

(A) $S_{\text{tp}} = 10\pi$. (B) $S_{\text{tp}} = 2\pi$. (C) $S_{\text{tp}} = 6\pi$. (D) $S_{\text{tp}} = 4\pi$.

Lời giải.



Quay hình chữ nhật $ABCD$ xung quanh MN nên hình trụ có bán kính $r = AM = \dfrac{AD}{2} = 1$.
Vậy diện tích toàn phần của hình trụ $S_{\text{tp}} = 2\pi r.AB + 2\pi r^2 = 2\pi + 2\pi = 4\pi$.
Chọn đáp án D □

Câu 8. Cho hình trụ có diện tích xung quanh bằng 50π và độ dài đường sinh bằng đường kính của đường tròn đáy. Bán kính r của đường tròn đáy đã cho bằng

(A) $r = 5\sqrt{\pi}$. (B) $r = 5$. (C) $r = \dfrac{5\sqrt{2\pi}}{2}$. (D) $r = \dfrac{5\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải.

Diện tích xung quanh của hình trụ là $S_{\text{xq}} = 2\pi r\ell \leftrightarrow 2\pi r\ell = 50\pi \leftrightarrow 2\pi r.2r = 50\pi \leftrightarrow r = \dfrac{5\sqrt{2}}{2}$.
Chọn đáp án D □

Câu 9. Cho khối trụ (T) có bán kính đáy $r = 1$, thể tích $V = 5\pi$. Diện tích toàn phần của hình trụ tương ứng bằng

(A) $S_{\text{tp}} = 12\pi$. (B) $S_{\text{tp}} = 11\pi$. (C) $S_{\text{tp}} = 10\pi$. (D) $S_{\text{tp}} = 7\pi$.

Lời giải.

Ta có $V = S_{\text{đáy}}.h$ với $S_{\text{đáy}} = \pi r^2 = \pi$ nên $h = \dfrac{V}{S_{\text{đáy}}} = 5$.
Diện tích toàn phần của hình trụ tương ứng là $S_{\text{tp}} = 2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi 1.5 + 2\pi 1^2 = 12\pi$.
Chọn đáp án A □

Câu 10. Diện tích xung quanh của hình trụ biết hình trụ có bán kính đáy là a và đường cao là $a\sqrt{3}$ bằng

(A) $2\pi a^2$. (B) πa^2. (C) $\pi a^2\sqrt{3}$. (D) $2\pi a^2\sqrt{3}$.

Lời giải.

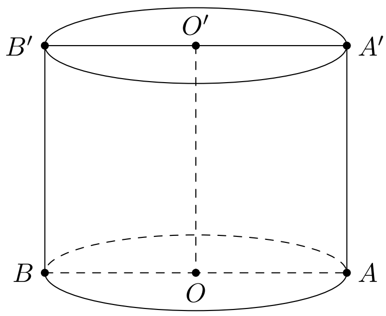
Diện tích xung quanh của hình trụ là $S_{\text{xq}} = 2\pi rh = 2\pi.a.a\sqrt{3} = 2\pi a^2\sqrt{3}$.
Chọn đáp án D □

Câu 11. Cắt một khối trụ bởi một mặt phẳng qua trục của nó ta được thiết diện là một hình vuông có cạnh bằng $3a$. Tính diện tích toàn phần của khối trụ.

(A) $S_{tp} = \dfrac{13\pi a^2}{6}$. (B) $S_{tp} = \sqrt{3}\pi a^2$. (C) $S_{tp} = \dfrac{\sqrt{3}\pi a^2}{2}$. (D) $S_{tp} = \dfrac{27\pi a^2}{2}$.

Lời giải.

Thiết diện qua trục là một hình vuông có cạnh bằng $3a$ nên ta có độ dài đường sinh $\ell = 3a$ và bán kính đường tròn đáy là $\dfrac{3a}{2}$.
Từ đó ta tính được $S_{tp} = 2\pi r\ell + 2\pi r^2 = \dfrac{27\pi a^2}{2}$.



Chọn đáp án D □

Câu 12. Một hình trụ có diện tích xung quanh bằng $4\pi a^2$ và bán kính đáy là a. Tính độ dài đường cao của hình trụ đó.

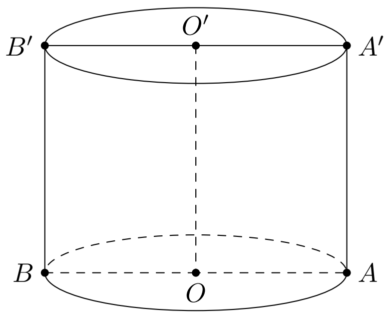
(A) a. (B) $2a$. (C) $3a$. (D) $4a$.

Lời giải.

Diện tích xung quanh của hình trụ có bán kính đáy a và chiều cao h là

$$S_{xq} = 2\pi ah \Leftrightarrow h = \frac{S_{xq}}{2\pi a} = 2a.$$

Vậy độ dài đường cao của hình trụ đó là $h = 2a$.



Chọn đáp án (B) □

Câu 13. Một hình trụ có bán kính đáy bằng 2 cm và có thiết diện qua trục là một hình vuông. Diện tích xung quanh của hình trụ là

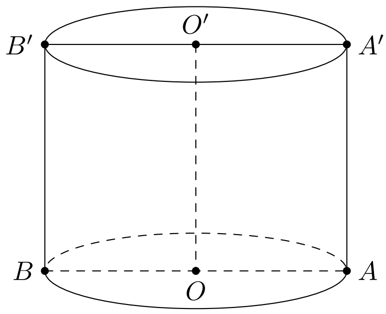
(A) $8\pi\ \text{cm}^2$. (B) $4\pi\ \text{cm}^2$. (C) $32\pi\ \text{cm}^2$. (D) $16\pi\ \text{cm}^2$.

Lời giải.

Vì thiết diện qua trục là hình vuông nên ta có $h = 2r = 4$ cm.

Công thức tính diện tích xung quanh hình trụ có bán kính đáy r, chiều cao h là

$$S_{xq} = 2\pi rh = 16\pi\ \text{cm}^2$$



Chọn đáp án (D) □

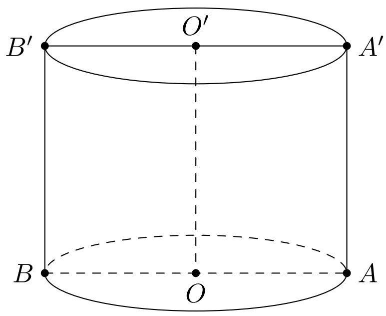
Câu 14. Cắt một hình trụ bởi một mặt phẳng qua trục của nó, ta được thiết diện là một hình vuông có cạnh bằng $3a$. Tính diện tích toàn phần của hình trụ đã cho.

(A) $S_{tp} = \dfrac{13\pi a^2}{2}$. (B) $S_{tp} = \dfrac{27\pi a^2}{2}$. (C) $S_{tp} = 9\pi a^2$. (D) $S_{tp} = \dfrac{9\pi a^2}{2}$.

Lời giải.

Thiết diện qua trục là một hình vuông có cạnh bằng $3a$ nên ta có độ dài đường sinh $\ell = 3a$ và bán kính đường tròn đáy là $\dfrac{3a}{2}$.

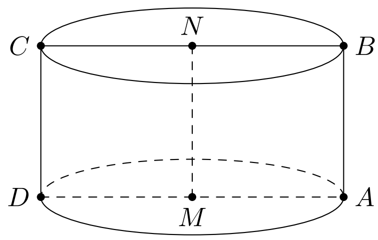
Từ đó ta tính được $S_{tp} = 2\pi r\ell + 2\pi r^2 = \dfrac{27\pi a^2}{2}$.



Chọn đáp án (B) □

Câu 15.

Trong không gian cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 1$, $AD = 2$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD và BC. Quay hình chữ nhật đó xung quanh trục MN ta được một hình trụ. Tính diện tích toàn phần S_{tp} của hình trụ đó.



(A) $S_{tp} = 4\pi$. (B) $S_{tp} = 6\pi$. (C) $S_{tp} = 2\pi$. (D) $S_{tp} = 10\pi$.

Lời giải.

Hình trụ đã cho có chiều cao là AB và đáy là hình tròn tâm N bán kính BN.

Do đó $S_{tp} = S_{xq} + 2S_{\text{đáy}} = AB \cdot 2\pi \cdot BN + 2\pi \cdot BN^2 = 4\pi$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 16. Hình trụ có bán kính đáy bằng a và chiều cao bằng $a\sqrt{3}$. Khi đó diện tích toàn phần của hình trụ bằng

(A) $2\pi a^2\left(\sqrt{3}-1\right)$. (B) $\pi a^2\left(\sqrt{3}+1\right)$. (C) $\pi a^2\sqrt{3}$. (D) $2\pi a^2\left(\sqrt{3}+1\right)$.

Lời giải.

Ta có $S_{tp} = S_{xq} + 2S_{\text{đáy}} = 2\pi \cdot a \cdot a\sqrt{3} + 2\pi \cdot a^2 = 2\pi a^2\left(\sqrt{3}+1\right)$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 17. Cho lập phương có cạnh bằng a và một hình trụ có hai đáy là hai hình tròn nội tiếp hai mặt đối diện của hình lập phương. Gọi S_1 là diện tích 6 mặt của hình lập phương, S_2 là diện tích xung quanh của hình trụ. Hãy tính tỉ số $\dfrac{S_2}{S_1}$.

(A) $\dfrac{S_2}{S_1} = \dfrac{1}{2}$. (B) $\dfrac{S_2}{S_1} = \dfrac{\pi}{2}$. (C) $\dfrac{S_2}{S_1} = \pi$. (D) $\dfrac{S_2}{S_1} = \dfrac{\pi}{6}$.

Lời giải.

Ta có $S_1 = 6a^2$; $S_2 = 2\pi rh = \pi a^2$.

Do đó $\dfrac{S_2}{S_1} = \dfrac{\pi a^2}{6a^2} = \dfrac{\pi}{6}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 18. Một hình trụ có bán kính đáy $r = 5$ cm, chiều cao $h = 7$ cm. Tính diện tích xung quanh của hình trụ.

(A) $S_{xq} = 35\pi\ (\text{cm})^2$. (B) $S_{xq} = 70\pi\ (\text{cm})^2$. (C) $S_{xq} = \dfrac{70}{3}\pi\ (\text{cm})^2$. (D) $S_{xq} = \dfrac{35}{3}\pi\ (\text{cm})^2$.

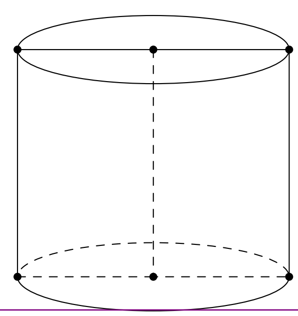
Lời giải.

Theo công thức tính diện tích xung quanh ta có $S_{xq} = 2\pi rh = 2\pi \cdot 5 \cdot 7 = 70\pi$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 19.

Cắt một hình trụ bằng một mặt phẳng qua trục của nó, ta được thiết diện là một hình vuông cạnh $2a$. Diện tích xung quanh của hình trụ bằng



(A) $2\pi a^2$. (B) $8\pi a^2$. (C) $4\pi a^2$. (D) $16\pi a^2$.

Lời giải.

Dựa vào hình vẽ ta có bán kính và chiều cao của hình trụ lần lượt là a và $2a$.

Do đó $S_{xq} = 2\pi rh = 2\pi \cdot a \cdot 2a = 4\pi a^2$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 20. Tính diện tích xung quanh của một hình trụ có chiều cao 20 m, chu vi đáy bằng 5 m.

(A) $S_{xq} = 50\ \text{m}^2$.　(B) $S_{xq} = 50\pi\ \text{m}^2$.　(C) $S_{xq} = 100\pi\ \text{m}^2$.　(D) $S_{xq} = 100\ \text{m}^2$.

Lời giải.

Ta có chu vi đáy $C = 2\pi r = 5$.

Diện tích xung quanh của hình trụ là $S_{xq} = 2\pi rh = 5 \cdot 20 = 100$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 21. Cho hình trụ có diện tích xung quanh bằng $8\pi a^2$ và bán kính đáy bằng a. Độ dài đường sinh của hình trụ bằng

(A) $4a$.　(B) $8a$.　(C) $2a$.　(D) $6a$.

Lời giải.

Ta có $S_{xq} = 2\pi Rl \Rightarrow l = \dfrac{S_{xq}}{2\pi R} = \dfrac{8\pi a^2}{2\pi a} = 4a$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 22. Tính diện tích toàn phần của hình trụ có bán kính đáy a và đường cao $a\sqrt{3}$.

(A) $2\pi a^2\left(\sqrt{3}-1\right)$.　(B) $\pi a^2\sqrt{3}$.　(C) $\pi a^2\left(\sqrt{3}+1\right)$.　(D) $2\pi a^2\left(\sqrt{3}+1\right)$.

Lời giải.

Diện tích toàn phần của hình trụ là

$$S_{tp} = S_{xq} + 2S_{\text{đáy}} = 2\pi Rh + 2\pi R^2 = 2\pi a^2\sqrt{3} + 2\pi a^2 = 2\pi a^2\left(\sqrt{3}+1\right).$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 23. Một hình trụ có bán kính đáy a, có thiết diện qua trục là một hình vuông. Tính theo a diện tích xung quanh của hình trụ.

(A) πa^2.　(B) $2\pi a^2$.　(C) $3\pi a^2$.　(D) $4\pi a^2$.

Lời giải.

Vì hình trụ có bán kính đáy a, có thiết diện qua trục là một hình vuông nên có chiều cao $h = 2a$.

Vậy diện tích xung quanh của hình trụ là $S_{xq} = 2\pi rh = 2\pi.a.2a = 4\pi a^2$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 24. Cho hình trụ có thiết diện qua trục là một hình vuông, diện tích mỗi mặt đáy bằng $S = 9\pi$. Tính diện tích xung quanh hình trụ đó.

(A) $S_{xq} = 36\pi$.　(B) $S_{xq} = 18\pi$.　(C) $S_{xq} = 72\pi$.　(D) $S_{xq} = 9\pi$.

Lời giải.

Thiết diện qua trục là một hình vuông nên $h = 2r$.

Ta có $S = r^2\pi \Leftrightarrow r^2\pi = 9\pi \Rightarrow r = 3 \Rightarrow h = 6$.

Vậy diện tích xung quanh $S_{xq} = 2\pi rh = 36\pi$.

Chọn đáp án A □

Câu 25. Cho hình trụ có diện tích xung quanh bằng $16\pi a^2$ và độ dài đường sinh bằng $2a$. Tính bán kính r của đường tròn đáy của hình trụ đã cho.

A $r = 4a$. B $r = 6a$. C $r = 4\pi$. D $r = 8a$.

Lời giải.

Ta có $S_{xq} = 2\pi rl \Rightarrow r = \dfrac{S_{xq}}{2\pi l} = \dfrac{16\pi a^2}{2\pi.2a} = 4a$.

Chọn đáp án A □

Câu 26. Xét hình trụ T có thiết diện qua trục của hình trụ là hình vuông có cạnh bằng a. Tính diện tích toàn phần S của hình trụ.

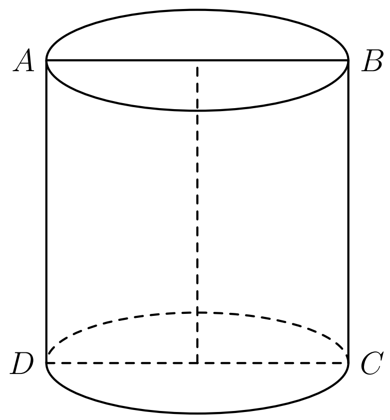
A $S = \dfrac{3\pi a^2}{2}$. B $S = \dfrac{\pi a^2}{2}$. C $S = \pi a^2$. D $S = 4\pi a^2$.

Lời giải.

Theo đề bài ta có $ABCD$ là hình vuông có cạnh là a. Do đó hình trụ T có bán kính $R = \dfrac{a}{2}$, chiều cao $h = a$.

Diện tích toàn phần của hình trụ là

$$S = 2\pi Rh + 2\pi R^2 = 2\pi \cdot \frac{a}{2} \cdot a + 2\pi \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{3\pi a^2}{2}.$$



Chọn đáp án A □

Câu 27. Trong không gian cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = a$ và $AD = 2a$. Gọi H, K lần lượt là trung điểm của AD và BC. Quay hình chữ nhật đó quanh trục HK, ta được một hình trụ. Diện tích toàn phần của hình trụ là

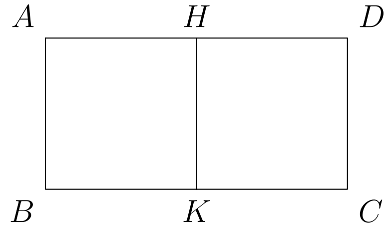
A 8π. B $8a^2\pi$. C $4a^2\pi$. D 4π.

Lời giải.

Khi quay hình chữ nhật $ABCD$ quanh trục HK ta được hình trụ có bán kính đáy $R = HD = a$, chiều cao $h = HK = a$.

Diện tích toàn phần của hình trụ là

$$S_{tp} = 2\pi Rh + 2\pi R^2 = 4\pi a^2.$$



Chọn đáp án C □

Câu 28. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = a$, $AD = 2a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh BC và AD. Khi quay hình chữ nhật trên (kể cả các điểm bên trong của nó) quanh đường thẳng MN ta nhận được một khối tròn xoay (T). Tính thể tích của (T) theo a.

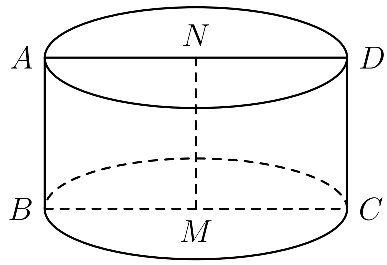
Ⓐ $\dfrac{4\pi a^3}{3}$. Ⓑ $\dfrac{\pi a^3}{3}$. Ⓒ πa^3. Ⓓ $4\pi a^3$.

Lời giải.

Khối tròn xoay nhận được là khối trụ có bán kính đáy $r = MC = a$, chiều cao $h = MN = a$.

Thể tích khối tròn xoay (T) là

$$V = \pi r^2 h = \pi a^2 . a = \pi a^3.$$



Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 29. Cho hình trụ có bán kính đáy bằng R, chiều cao bằng h. Biết rằng hình trụ đó có diện tích toàn phần gấp đôi diện tích xung quanh. Mệnh đề nào sau đây đúng?

Ⓐ $R = h$. Ⓑ $R = 2h$. Ⓒ $h = 2R$. Ⓓ $h = \sqrt{2}R$.

Lời giải.

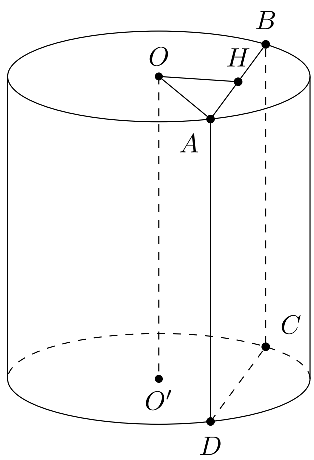
Ta có $S_{tp} = 2S_{xq} \Leftrightarrow 2\pi R^2 + 2\pi Rh = 2.2\pi Rh \Leftrightarrow R = h$.

Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 30. Cho hình trụ có bán kính đáy bằng R và chiều cao bằng $\dfrac{3R}{2}$. Mặt phẳng (α) song song với trục của hình trụ và cách trục một khoảng bằng $\dfrac{R}{2}$. Tính thiết diện của hình trụ cắt bởi mặt phẳng (α).

Ⓐ $\dfrac{2R^2\sqrt{3}}{3}$. Ⓑ $\dfrac{3R^2\sqrt{3}}{2}$. Ⓒ $\dfrac{3R^2\sqrt{2}}{2}$. Ⓓ $\dfrac{2R^2\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải.



Thiết diện của hình trụ cắt bởi mặt phẳng (α) là hình chữ nhật $ABCD$ với $BC\dfrac{3R}{2}$.

Gọi H là trung điểm AB, ta có $OH = \dfrac{R}{2} \Rightarrow AB = 2HA = 2\sqrt{R^2 - OH^2} = R\sqrt{3}$.

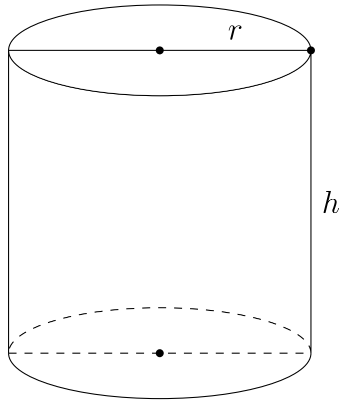
Vậy diện tích thiết diện là: $S = AB \cdot BC = R\sqrt{3} \cdot \dfrac{3R}{2} = \dfrac{3R^2\sqrt{3}}{2}$.

Chọn đáp án (B) ☐

Câu 31. Cắt hình trụ (T) bằng một mặt phẳng đi qua trục được thiết diện là một hình chữ nhật có diện tích bằng 20 cm^2 và chu vi bằng 18 cm. Biết chiều dài của hình chữ nhật lớn hơn đường kính mặt đáy của hình trụ (T). Diện tích toàn phần của hình trụ là:

(A) $30\pi \text{ cm}^2$. (B) $28\pi \text{ cm}^2$. (C) $24\pi \text{ cm}^2$. (D) $26\pi \text{ cm}^2$.

Lời giải.



Gọi h và r là chiều cao và bán kính của hình trụ $h > 2r$.

Ta có $\begin{cases} 2rh = 20 \\ 2r + h = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} h = 5 \\ r = 2 \end{cases}$.

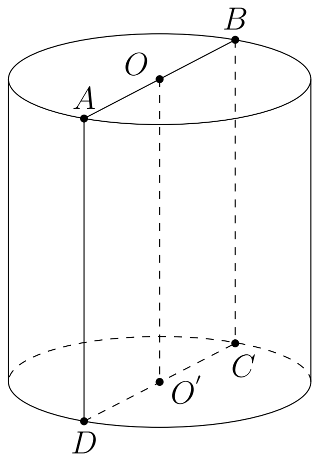
$S_{tp} = 2\pi rh + 2r^2\pi = 20\pi + 8\pi = 28\pi$.

Chọn đáp án (B) ☐

Câu 32. Cắt hình trụ (T) bởi một mặt phẳng qua trục của nó, ta được thiết diện là một hình vuông cạnh bằng 1. Diện tích xung quanh của (T) bằng.

(A) π. (B) $\dfrac{\pi}{2}$. (C) 2π. (D) $\dfrac{\pi}{4}$.

Lời giải.



Thiết diện qua trục là hình vuông $ABCD$ cạnh a.

Do đó hình trụ có đường cao $h = 1$ và bán kính đáy $r = \dfrac{CD}{2} = \dfrac{1}{2}$.

Diện tích xung quanh hình trụ: $S_{xq} = 2\pi rh = 2\pi \cdot 1 \cdot \dfrac{1}{2} = \pi$

Chọn đáp án (A) ☐

Câu 33. Cắt hình trụ (T) bởi mặt phẳng qua trục của nó, ta được thiết diện là một hình vuông cạnh bằng 3. Diện tích xung quanh của (T) bằng

Ⓐ $\dfrac{9\pi}{4}$. Ⓑ 18π. Ⓒ 9π. Ⓓ $\dfrac{9\pi}{2}$.

Lời giải.

Vì thiết diện qua trục của hình trụ (T) là một hình vuông cạnh bằng 3 nên hình trụ (T) có đường sinh $l = 3$, bán kính $r = \dfrac{l}{2} = \dfrac{3}{2}$.

Diện tích xung quanh của hình trụ (T) là $S_{xq} = 2\pi rl = 2\pi \cdot \dfrac{3}{2} \cdot 3 = 9\pi$.

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 34. Cắt hình trụ (T) bởi một mặt phẳng qua trục của nó ta được thiết diện là một hình vuông cạnh bằng 7. Diện tích xung quanh của (T) bằng

Ⓐ $\dfrac{49\pi}{4}$. Ⓑ $\dfrac{49\pi}{2}$. Ⓒ 49π. Ⓓ 98π.

Lời giải.

Bán kính đáy của hình trụ là $r = \dfrac{7}{2}$. Đường cao của hình trụ là $h = 7$.

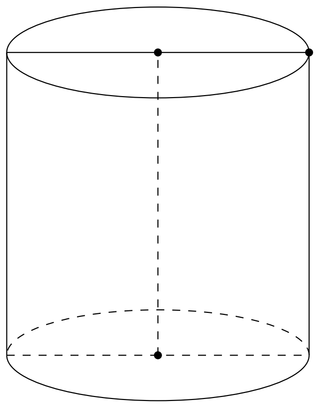
Diện tích xung quanh của hình trụ là $S = 2\pi rh = 2\pi \cdot \dfrac{7}{2} \cdot 7 = 49\pi$.

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 35. Cắt hình trụ (T) bởi một mặt phẳng qua trục của nó, ta được thiết diện là một hình vuông cạnh bằng 5. Diện tích xung quanh của (T) bằng

Ⓐ $\dfrac{25\pi}{2}$. Ⓑ 25π. Ⓒ 50π. Ⓓ $\dfrac{25\pi}{4}$.

Lời giải.



Bán kính của hình trụ (T) bằng $\dfrac{5}{2}$, độ dài đường sinh $l = 5$.

Diện tích xung quanh của (T): $S_{xq} = 2\pi r \cdot l = 2\pi \cdot \dfrac{5}{2} \cdot 5 = 25\pi$.

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 36. Một hình trụ có bán kính đáy $r = 4$ cm và có độ dài đường sinh $l = 3$ cm. Diện tích xung quanh của hình trụ đó bằng

Ⓐ $12\pi\ \text{cm}^2$. Ⓑ $48\pi\ \text{cm}^2$. Ⓒ $24\pi\ \text{cm}^2$. Ⓓ $36\pi\ \text{cm}^2$.

Lời giải.

Diện tích xung quanh của hình trụ là $S_{xq} = 2\pi rl = 2\pi 4 \cdot 3 = 24\ \text{cm}^2$.

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 37. Cho hình trụ có bán kính đáy r và độ dài đường sinh l. Diện tích xung quanh S của hình trụ đã cho được tính theo công thức nào dưới đây?

(A) $S_{xq} = 4\pi rl$. (B) $S_{xq} = 2\pi rl$. (C) $S_{xq} = 3\pi rl$. (D) $S_{xq} = \pi rl$.

Lời giải.

Công thức tính diện tích xung quanh của hình trụ là $S_{xq} = 2\pi rl$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 38. Cho hình trụ có chiều cao $h = 1$ và bán kính $r = 2$. Diện tích xung quanh của hình trụ đã cho bằng

(A) 4π. (B) 2π. (C) 3π. (D) 6π.

Lời giải.

Ta có $S_{xq} = 2\pi rh = 4\pi$.

Chọn đáp án (A) □

Dạng 2. Tính thể tích khối trụ, khối nón.

Câu 39. Cho khối trụ có bán kính đáy $r = 6$ và chiều cao $h = 3$. Thể tích của khối trụ đã cho bằng

(A) 108π. (B) 36π. (C) 18π. (D) 54π.

Lời giải.

Thể tích của khối trụ đã cho là $V = \pi r^2 h = \pi.6^2.3 = 108\pi$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 40. Cho khối trụ có bán kính $r = 2$ và chiều cao $h = 3$.Thể tích khối trụ đã cho bằng

(A) 12π. (B) 18π. (C) 6π. (D) 4π.

Lời giải.

Thể tích khối trụ: $V = \pi r^2 h = \pi.2^2.3 = 12\pi$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 41. Cho khối trụ có bán kính đáy $r = 4$ và chiều cao $h = 3$. Thể tích của khối trụ đã cho bằng

(A) 48π. (B) 4π. (C) 16π. (D) 24π.

Lời giải.

Thể tích khối trụ là $V = \pi r^2 h = \pi.4^2.3 = 48\pi$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 42. Cho khối trụ có bán kính đáy bằng $r = 5$ và chiều cao $h = 3$. Thể tích của khối trụ đã cho bằng

(A) 5π. (B) 30π. (C) 25π. (D) 75π.

Lời giải.

Thể tích khối trụ là $V = \pi r^2.h = 75\pi$.

Chọn đáp án D ☐

Câu 43. Cho khối trụ có bán kính $r = 3$ và chiều cao $h = 4$. Thể tích khối trụ đã cho bằng

A 4π. B 12π. C 36π. D 24π.

Lời giải.

Ta có: $V = \pi r^2 h = \pi.3^2.4 = 36\pi$.

Chọn đáp án C ☐

Câu 44. Cho khối trụ có bán kính đáy $r = 3$ và chiều cao $h = 5$. Thể tích của khối trụ đã cho bằng

A 45π. B 5π. C 15π. D 30π.

Lời giải.

Thể tích của khối trụ đã cho là: $V = Bh = \pi r^2 h = \pi.3^2.5 = 45\pi$.

Chọn đáp án A ☐

Câu 45. Thể tích của khối trụ tròn xoay có bán kính đáy r và chiều cao h bằng

A $\frac{4}{3}\pi r^2 h$. B $\pi r^2 h$. C $\frac{1}{3}\pi r^2 h$. D $2\pi r h$.

Lời giải.

$\bar{V}_{tru} = \pi r^2 h$.

Chọn đáp án B ☐

Câu 46. Tính thể tích V của khối trụ có bán kính $r = 4$ và chiều cao $h = 4\sqrt{2}$.

A $V = 32\pi$. B $V = 64\sqrt{2}\pi$. C $V = 128\pi$. D $V = 32\sqrt{2}\pi$.

Lời giải.

$V = \pi r^2 h = 16.4\sqrt{2}\pi = 64\sqrt{2}\pi$.

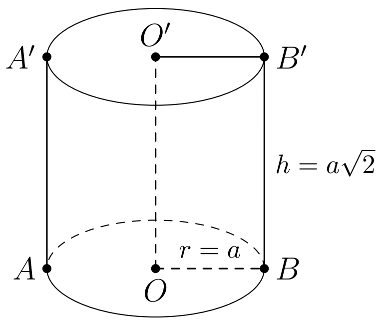
Chọn đáp án B ☐

Câu 47. Thể tích khối trụ có bán kính đáy $r = a$ và chiều cao $h = a\sqrt{2}$ bằng

A $4\pi a^3\sqrt{2}$. B $\pi a^3\sqrt{2}$. C $2\pi a^3$. D $\frac{\pi a^3\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải.

Thể tích khối trụ là: $V = \pi r^2 h = \pi.a^2.a\sqrt{2} = \pi a^3\sqrt{2}$.



Chọn đáp án B ☐

Câu 48. Thiết diện qua trục của một hình trụ là một hình vuông có cạnh bằng $2a$. Tính theo a thể tích khối trụ đó

A πa^3. B $2\pi a^3$. C $4\pi a^3$. D $\frac{2}{3}\pi a^3$.

Lời giải.

Gọi chiều cao và bán kính đáy của hình trụ lần lượt là h, r.

Thiết diện qua trục của hình trụ là một hình vuông có cạnh bằng $2a$ nên $h = 2a, r = a$.

Thể tích của khối trụ đó là $V = \pi r^2 h = \pi a^2.2a = 2\pi a^3$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 49. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 2, BC = 2a$. Tính thể tích khối tròn xoay khi quay hình phẳng $ABCD$ quanh trục AD.

(A) $4\pi a^3$. (B) $2\pi a^3$. (C) $8\pi a^3$. (D) πa^3.

Lời giải.

Khối tròn xoay tạo thành là khối trụ có bán kính đáy là $AB = 2a$ và đường cao $AD = BC = a$ có thể tích bằng $V = \pi AB^2 AD = 4\pi a^3$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 50. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 2BC = 2a$. Tính thể tích khối tròn xoay khi quay hình phẳng $ABCD$ quanh trục AD.

(A) $4\pi a^3$. (B) $2\pi a^3$. (C) $8\pi a^3$. (D) πa^3.

Lời giải.

Khối tròn xoay tạo thành là khối trụ có bán kính đáy là AB có $a = 2$ và đường cao $AD = BC = a$ có thể tích bằng $V = \pi AB^2.AD = 4\pi a^3$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 51. Cho hình trụ có diện tích toàn phần là 4π và có thiết diện cắt bởi mặt phẳng qua trục là hình vuông. Tính thể tích khối trụ?

(A) $\frac{\pi\sqrt{6}}{12}$. (B) $\frac{\pi\sqrt{6}}{9}$. (C) $\frac{4\pi}{9}$. (D) $\frac{4\pi\sqrt{6}}{12}$.

Lời giải.

Hình trụ có thiết diện cắt bởi mặt phẳng qua trục là hình vuông suy ra $l = h = 2r$

Hình trụ có diện tích toàn phần là 4π suy ra

$S_{tp} = 2\pi rl + 2\pi r^2 = 2\pi.2r^2 + 2\pi r^2 = 4\pi r^2 = 4\pi$

Nên $r = \frac{\sqrt{6}}{3}, l = h = \frac{2\sqrt{6}}{3}$

Thể tích khối trụ $V = \pi r^2 h = \frac{4\pi\sqrt{6}}{12}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 52. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = a, AD = 2a$. Tính thể tích khối trụ tạo thành khi quay hình chữ nhật $ABCD$ quanh cạnh AB.

(A) $4\pi a^3$. (B) πa^3. (C) $3a^3$. (D) a^3.

Lời giải.

Áp dụng công thức tính thể tích khối trụ tròn xoay ta có

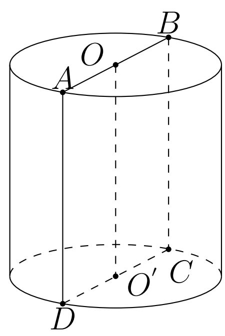
$V = \pi r^2 h = \pi(2a)^2.a = \pi a^3$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 53. Trong không gian, cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 1, AD = 2$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm AB, CD. Quay hình chữ nhật đó xung quanh trục MN ,ta được một hình trụ. Tính thể tích V của khối trụ tạo bởi hình trụ đó

Ⓐ $\frac{\pi}{2}$. Ⓑ π. Ⓒ 2π. Ⓓ 4π.

Lời giải.



Quay hình chữ nhật xung quanh trục MN ta được hình trụ có bán kính đáy $r = AM = \frac{1}{2}$, chiều cao $h = AD = 2$. Thể tích khối trụ tương ứng bằng $V = \pi r^2 h = \pi \left(\frac{1}{2}\right)^2 .2 = \frac{\pi}{2}$.

Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 54. Cho khối trụ có chu vi đáy bằng $4\pi a$ và độ dài đường cao bằng a. Thể tích của khối trụ đã cho bằng

Ⓐ πa^3. Ⓑ $\frac{4}{3}\pi a^3$. Ⓒ $4\pi a^3$. Ⓓ $16\pi a^3$.

Lời giải.

Gọi chu vi đáy là $P = 2\pi R \Leftrightarrow 4\pi a = 2\pi R \Leftrightarrow R = 2a$.

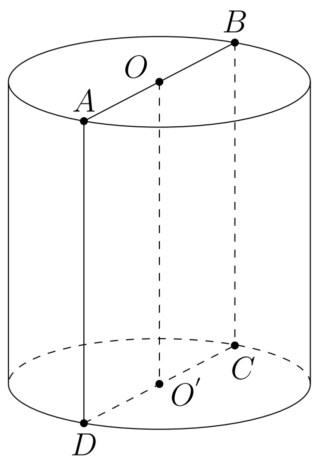
Khi đó, thể tích của khối trụ $V = \pi R^2 h = \pi (2\pi)^2.2 = 4\pi a^3$.

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 55. Cho một khối trụ có diện tích xung quanh của khối trụ bằng 80π. Tính thể tích của khối trụ biết khoảng các hai đáy bằng 10.

Ⓐ πa^2. Ⓑ $\frac{4}{3}\pi a^3$. Ⓒ $4\pi a^2$. Ⓓ $16\pi a^3$.

Lời giải.



Ta có khoảng cách giữa hai đáy bằng 10 nên $h = l = 10$.

$S_{xq} = 80\pi \Leftrightarrow 2\pi rl = 20\pi \Leftrightarrow r = 4$.

Vậy thể tích của khối trụ bằng $V = \pi 4^2.10 = 160\pi$.

Chọn đáp án C □

Câu 56. Cho khối trụ có bán kính hình tròn đáy bằng r và chiều cao bằng h . Hỏi nếu tăng chiều cao lên 2 lần và tăng bán kính đáy lên 3 lần thì thể tích của khối trụ mới sẽ tăng lên bao nhiêu lần?

A 18 lần. B 6 lần. C 36 lần. D 12 lần.

Lời giải.

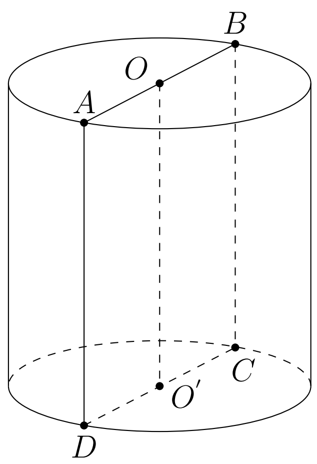
$V_1 = 2h\pi(3r)^2 = 18\left(h\pi r^2\right) = 18V$.

Chọn đáp án A □

Câu 57. Mặt phẳng đi qua trục hình trụ, cắt hình trụ theo thiết diện là hình vuông cạnh a . Thể tích khối trụ đó bằng

A πa^3. B $\frac{\pi a^3}{2}$. C $\frac{\pi a^3}{2}$. D $16\pi a^3$.

Lời giải.



Ta có bán kính đáy $r = \frac{a}{2}$ và chiều cao $h = 1$ nên thể tích khối trụ là

$V = 2\pi r^2 h = 2\pi \frac{a^2}{4} a = \frac{\pi a^3}{2}$

Chọn đáp án B □

Câu 58. Thiết diện qua trục của một hình trụ là hình vuông có cạnh là $2a$ .Thể tích khối trụ được tạo nên bởi hình trụ này là:

A $2\pi a^3$. B $\frac{2\pi a^3}{3}$. C $8\pi a^3$. D $\frac{8\pi a^3}{3}$.

Lời giải.

Ta có $R = a, h = 2a$, nên thể tích khối trụ được tạo nên bởi hình trụ này là

$V = \pi R^2 h = \pi a^2.2a = 2\pi a^3$.

Chọn đáp án A □

Câu 59. Cho một khối trụ (S) có bán kính đáy là a. Biết thiết diện của hình trụ qua trục là hình vuông có chu vi là 8. Thể tích của khối trụ sẽ bằng

(A) 8π. (B) 4π. (C) 2π. (D) 16π.

Lời giải.

Ta có chiều cao của khối trụ $h = 2r = 2a$.

Theo giả thiết ta có $4.2a = 8 \Leftrightarrow a = 1$.

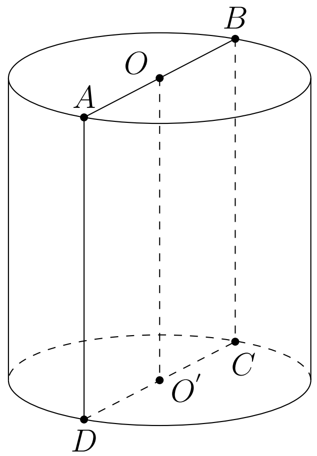
Thể tích khối trụ $V = \pi r^2 h = \pi a^2.2a = 2\pi$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 60. Cắt một khối trụ bởi một mặt phẳng qua trục ta được thiết diện là hình chữ nhật $ABCD$ có AB và CD thuộc hai đáy của khối trụ. Biết $AB = 4a, AC = 5a$. Tính thể tích của khối trụ:

(A) $12\pi a^3$. (B) $16\pi a^3$. (C) $4\pi a^3$. (D) $8\pi a^3$.

Lời giải.



Ta có bán kính hình khối trụ $R = \frac{AB}{2} = 2a$.

Xét ΔADC vuông tại D: $AD = \sqrt{AC^2 - DC^2} = \sqrt{(5a)^2 - (4a)^2} = 3a$.

Thể tích khối trụ là $V = \pi R^2 h = \pi(2a)^2.3a = 12\pi a^3$.

Chọn đáp án (A) □

BẢNG ĐÁP ÁN

1. D	2. C	3. D	4. C	5. A	6. B	7. D	8. D	9. A	10. D
11. D	12. B	13. D	14. B	15. A	16. D	17. D	18. B	19. C	20. D
21. A	22. D	23. D	24. A	25. A	26. A	27. C	28. C	29. A	30. B
31. B	32. A	33. C	34. C	35. B	36. C	37. B	38. A	39. A	40. A
41. A	42. D	43. C	44. A	45. B	46. B	47. B	48. B	49. A	50. A
51. D	52. A	53. A	54. C	55. C	56. A	57. B	58. A	59. C	60. A

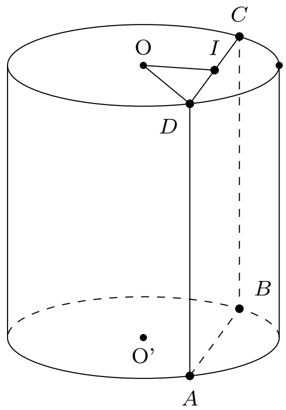
MỨC ĐỘ 2. MỨC ĐỘ 7,8 ĐIỂM

Dạng 1. Tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần, chiều cao, bán kính đáy. Thiết diện.

Câu 1. Cắt hình trụ (T) bởi mặt phẳng song song với trục và cách trục một khoảng bằng $2a$, ta được thiết diện là một hình vuông có diện tích bằng $36a^2$. Diện tích xung quanh của (T) bằng

Ⓐ $4\sqrt{13}\pi a^2$. Ⓑ $12\sqrt{13}\pi a^2$. Ⓒ $6\sqrt{13}\pi a^2$. Ⓓ $8\sqrt{13}\pi a^2$.

Lời giải.



Cắt hình trụ (T) bởi mặt phẳng song song với trục OO' ta được thiết diện là một hình vuông $ABCD$ có diện tích bằng $36a^2$. Suy ra $S_{ABCD} = CD^2 = 36a^2 \Rightarrow CD = AD = 6a$.

Gọi I là trung điểm của CD, ta có:

$$\begin{cases} OI \perp CD \\ OI \perp AD \end{cases} \Rightarrow OI \perp (ABCD) \Rightarrow OI = d\left(O,(ABCD)\right) = d\left(OO',(ABCD)\right) = 2a.$$

ΔOIDvuông tại I có $ID = \dfrac{CD}{2} = 3a; OI = 2a \Rightarrow OD^2 = OI^2 + ID^2 = 13a^2 \Rightarrow OD = a\sqrt{13}$.

Suy ra $r = OD = a\sqrt{13}$.

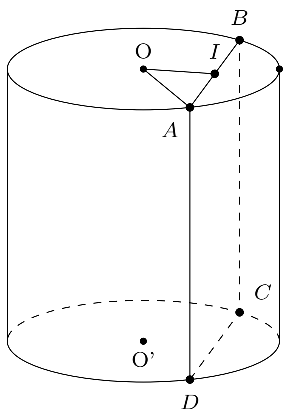
Diện tích xung quanh của hình trụ (T) là $S_{xq} = 2\pi rl = 2\pi.a\sqrt{13}.6a = 12\sqrt{13}\pi a^2$.

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 2. Cắt hình trụ (T) bởi mặt phẳng song song với trục và cách trục một khoảng bằng $3a$, ta được thiết diện là một hình vuông có diện tích bằng $16a^2$. Diện tích xung quanh của (T) bằng

Ⓐ $\dfrac{16\sqrt{13}}{3}\pi a^2$. Ⓑ $4\sqrt{13}\pi a^2$. Ⓒ $\dfrac{8\sqrt{13}}{3}\pi a^2$. Ⓓ $8\sqrt{13}\pi a^2$.

Lời giải.



Gọi (P) là mặt phẳng song song với trục OO'.

Theo giả thiết: Mặt phẳng (P) cắt hình trụ (T) theo thiết diện là hình vuông $ABCD$.

Khi đó, diện tích của hình vuông $S_{ABCD} = 16a^2 \Rightarrow AB = CD = 4a$.

Gọi Ilà trung điểm $AB \Rightarrow \begin{cases} OI \perp AB \\ OI \perp AD \end{cases} \Rightarrow OI \perp (ABCD)$. Do đó $OI = 3a$.

Lại có: $r = OA = \sqrt{OI^2 + IA^2} = \sqrt{9a^2 + 4a^2} = a\sqrt{13}$.

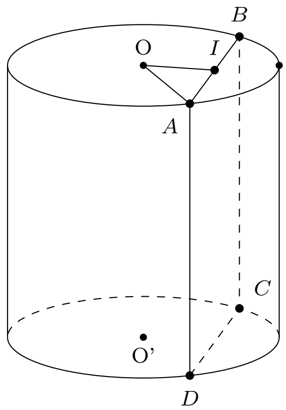
Diện tích xung quanh của hình trụ (T) bằng: $S_{xq} = 2\pi OA.AD = 2\pi a\sqrt{13}.4a = 8\sqrt{13}\pi a^2$.

Chọn đáp án D □

Câu 3. Cắt hình trụ (T) bởi mặt phẳng song song với trục và cách trục một khoảng bằng $2a$, ta được thiết diện là một hình vuông có diện tích bằng $16a^2$. Diện tích xung quanh của (T) bằng

A $8\sqrt{2}\pi a^2$. B $16\sqrt{2}\pi a^2$. C $\dfrac{16\sqrt{2}}{3}\pi a^2$. D $\dfrac{32\sqrt{2}}{3}\pi a^2$.

Lời giải.



Gọi thiết diện là hình vuông $ABB'A'$; O, O' lần lượt là tâm của hai đáy, I là trung điểm AB.

Theo bài ra ta có: $OI = 2a$ và $S_{ABB'A'} = AB^2 = 16a^2 \Leftrightarrow AB = 4a \Rightarrow IA = \dfrac{1}{2}AB = 2a$ và $OO' = AA' = AB = 4a$.

Khi đó $R = OA = \sqrt{AI^2 + OI^2} = 2\sqrt{2}a$.

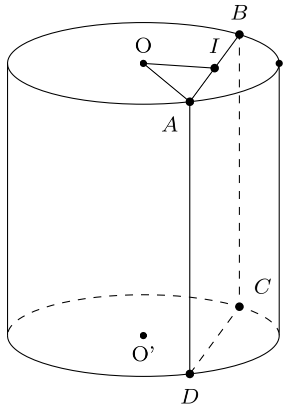
Vậy $S_{xq} = 2\pi.R.h = 2\pi.2\sqrt{2}a.4a = 16\sqrt{2}\pi a^2$.

Chọn đáp án B □

Câu 4. Cắt hình trụ (T) bởi mặt phẳng song song với trục và cách trục một khoảng bằng $3a$, ta được thiết diện là một hình vuông có diện tích bằng $36a^2$. Diện tích xung quanh của (T) bằng

A $24\sqrt{2}\pi a^2$. B $18\sqrt{2}\pi a^2$. C $12\sqrt{2}\pi a^2$. D $36\sqrt{2}\pi a^2$.

Lời giải.



Gọi O, O' lần lượt là tâm hai mặt đáy của hình trụ, mặt phẳng cắt hình trụ theo thiết diện là hình vuông $ABCD$.

Diện tích hình vuông $ABCD$ bằng $36a^2$ nên $AB^2 = AD^2 = 36a^2 \Rightarrow AB = AD = 6a$.

Gọi I là trung điểm của AB.

Mặt phẳng song song với trục cách trục một khoảng bằng $3a$ nên $OI = 3a$.

Tam giác AIO vuông tại I nên $OA = \sqrt{OI^2 + IA^2} = \sqrt{OI^2 + \left(\dfrac{AB}{2}\right)^2} = \sqrt{(3a)^3 + (3a)^3} = 3a\sqrt{2}$.

Mặt phẳng thiết diện song song với trục nên $AD = OO' = 6a$.

Diện tích xung quanh của hình trụ (T) là $S_{xq} = 2.\pi.OAOO' = 2.\pi.3a\sqrt{2}.6a = 36\sqrt{2}\pi a^2$.

Chọn đáp án D □

Câu 5. Cho hình trụ có chiều cao bằng $3\sqrt{2}$. Cắt hình trụ đã cho bởi mặt phẳng song song với trục và cách trục một khoảng bằng 1, thiết diện thu được có diện tích bằng $12\sqrt{2}$. Diện tích xung quanh của hình trụ đã cho bằng

Ⓐ $6\sqrt{10}\pi$. Ⓑ $6\sqrt{34}\pi$. Ⓒ $3\sqrt{10}\pi$. Ⓓ $3\sqrt{34}\pi$.

Lời giải.

Ta có:

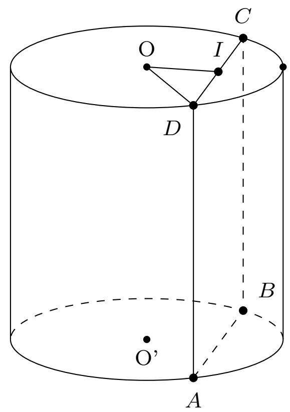
$S_{ABCD} = 12\sqrt{2} = 3\sqrt{2}.CD$

$\Rightarrow CD = 4$

$\Rightarrow CI = 2$.

$\Rightarrow CO = \sqrt{CI^2 + IO^2} = \sqrt{5} = r$

$S_{xq} = 2\pi rl = 6\sqrt{10}\pi$

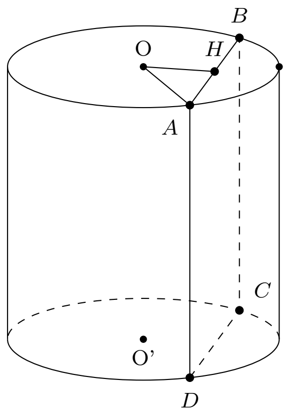


Chọn đáp án A □

Câu 6. Cho hình trụ có chiều cao bằng $5\sqrt{3}$. Cắt hình trụ đã cho bởi mặt phẳng song song với trục và cách trục một khoảng bằng 1, thiết diện thu được có diện tích bằng 30. Diện tích xung quanh của hình trụ đã cho bằng

Ⓐ $10\sqrt{3}\pi$. Ⓑ $5\sqrt{39}\pi$. Ⓒ $20\sqrt{3}\pi$. Ⓓ $10\sqrt{39}\pi$.

Lời giải.



Gọi O, O' lần lượt là tâm của hai đáy và $ABCD$ là thiết diện song song với trục với $A, B \in (O)$; $C, D \in (O')$. Gọi H là trung điểm của $AB \Rightarrow OH = d\left(OO', (ABCD)\right) = 1$.

Vì $S_{ABCD} = 30 \Leftrightarrow AB.BC = 30 \Rightarrow AB = \dfrac{30}{5\sqrt{3}} = 2\sqrt{3} \Rightarrow HA = HB = \sqrt{3}$.

Bán kính của đáy là $r = \sqrt{OH^2 + HA^2} = \sqrt{3+1} = 2$.

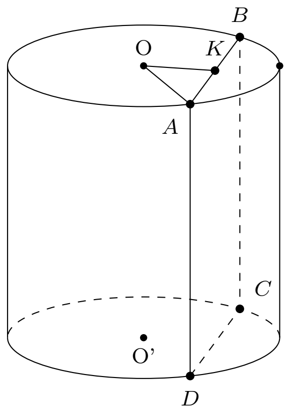
Diện tích xung quanh của hình trụ bằng $S_{xq} = 2\pi rh = 2\pi.2.5\sqrt{3} = 20\sqrt{3}\pi$.

Chọn đáp án C □

Câu 7. Cho hình trụ có chiều cao bằng $4\sqrt{2}$. Cắt hình trụ đã cho bởi một mặt phẳng song song với trục và cách trục một khoảng bằng$\sqrt{2}$, thiết diện thu được có diện tích bằng 16. Diện tích xung quanh của hình trụ đã cho bằng

A $16\sqrt{2}\pi$. B $8\sqrt{2}\pi$. C $12\sqrt{2}\pi$. D $24\sqrt{2}\pi$.

Lời giải.



Cắt hình trụ đã cho bởi một mặt phẳng song song với trục, ta được thiết diện là hình chữ nhật $ABCD$ (với AB là dây cung của hình tròn đáy tâm O).

Do hình trụ có chiều cao là $h = OO' = 4\sqrt{2} \Rightarrow$ hình trụ có độ dài đường sinh $l = AD = 4\sqrt{2}$.

Diện tích hình chữ nhật $ABCD$ bằng $AB.CD = 16 \Rightarrow AB = \dfrac{16}{AD} = \dfrac{16}{4\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$.

Gọi K là trung điểm đoạn AB thì $OK \perp AB$, lại có$mp(ABCD)$vuông góc với mặt phẳng đáy của hình trụ $\Rightarrow OK \perp mp(ABCD) \Rightarrow$ khoảng cách giữa OO' và $mp(ABCD)$ là $OK = \sqrt{2}$.

Xét tam giác vuông $AOKR = OA = \sqrt{OK^2 + AK^2} = \sqrt{OK^2 + \left(\dfrac{AB}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2} = 2$.

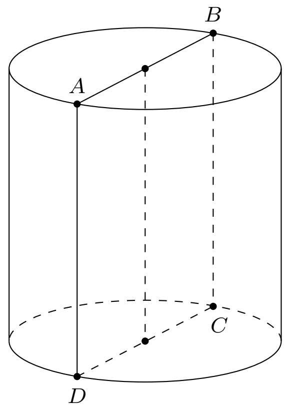
Diện tích xung quanh của hình trụ là $S = 2\pi R.l = 2\pi.2.4\sqrt{2} = 16\pi\sqrt{2}$.

Chọn đáp án A □

Câu 8. Cắt hình trụ (T) bằng một mặt phẳng đi qua trục được thiết diện là một hình chữ nhật có diện tích bằng 30cm^2 và chu vi bằng 26cm. Biết chiều dài của hình chữ nhật lớn hơn đường kính mặt đáy của hình trụ (T). Diện tích toàn phần của (T) là:

A $23\pi\,(\text{cm}^2)$. B $\dfrac{23\pi}{2}\,(\text{cm}^2)$. C $\dfrac{69\pi}{2}\,(\text{cm}^2)$. D $69\pi\,(\text{cm}^2)$.

Lời giải.



Gọi h, r lần lượt là đường cao và bán kính đáy của hình trụ (T). Thiết diện của mặt phẳng và hình trụ (T) là hình chữ nhật $ABCD$. Khi đó theo giả thiết ta có

$$\begin{cases} h > 2r \\ S_{ABCD} = h.2r = 30 \\ C_{ABCD} = 2(h+2r) = 26 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} h > 2r \\ hr = 15 \\ h + 2r = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} h > 2r \\ h = 13 - 2r \\ -2r^2 + 15r - 15 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} h > 2r \\ h = 13 - 2r \\ \left[\begin{array}{l} r = 5 \Rightarrow h = 3(l) \\ r = \dfrac{3}{2} \Rightarrow h = 10(TM) \end{array}\right. \end{cases}$$

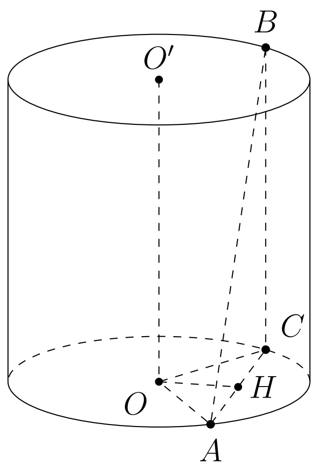
Vậy $S_{TP} = S_{XQ} + 2S_{=}2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi.\dfrac{3}{2}.10 + 2\pi\left(\dfrac{3}{2}\right)^2 = \dfrac{69\pi}{2}\,(\text{cm}^2)$.

Chọn đáp án C □

Câu 9. Một hình trụ có bán kính đáy bằng 50 cm và có chiều cao là 50 cm. Một đoạn thẳng AB có chiều dài là 100 cm và có hai đầu mút nằm trên hai đường tròn đáy. Tính khoảng cách d từ đoạn thẳng đó đến trục hình trụ.

A $d = 50$ cm. B $d = 50\sqrt{3}$ cm. C $d = 25$ cm. D $d = 25\sqrt{3}$ cm.

Lời giải.



Qua B kẻ đường thẳng song song với OO' cắt đường tròn đáy tại C.

$OO' \,//\, BC \Rightarrow OO' \,//\, (ABC) \Rightarrow d\,(OO', AB) = d\,(OO', (ABC)) = d\,(O, (ABC)) = OH = d$. ($H$ là trung điểm của đoạn thẳng AC).

$AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = 50\sqrt{3}\text{cm}$.

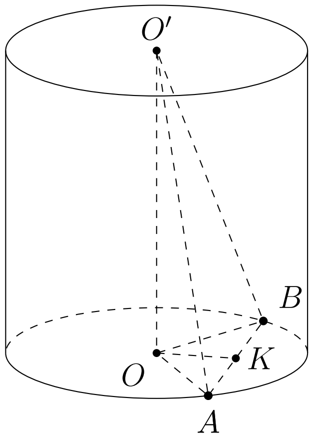
Vậy $d = OH = \sqrt{OC^2 - HC^2} = 25\text{cm}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 10. Một hình trụ tròn xoay có hai đáy là hai đường tròn (O, R) và (O', R). Biết rằng tồn tại dây cung AB của đường tròn (O, R)sao cho tam giác $O'AB$ đều và góc giữa hai mặt phẳng $(O'AB)$ và mặt phẳng chứa đường tròn (O, R) bằng $60°$. Tính diện tích xung quanh của hình trụ đã cho.

(A) $4\pi R^2$. (B) $2\sqrt{3}\pi R^2$. (C) $\dfrac{3\sqrt{7}}{7}\pi R^2$. (D) $\dfrac{6\sqrt{7}}{7}\pi R^2$.

Lời giải.



Gọi K là trung điểm AB, đặt $AB = 2a$.

Ta có : $AB \perp OK$ và $AB \perp OO'$ nên $\widehat{OKO'} = 60° \Rightarrow O'K = 2OK \Rightarrow O'K^2 = 4OK^2 \Rightarrow 3a^2 = 4\left(R^2 - a^2\right) \Rightarrow a^2 = \dfrac{4R^2}{7}$

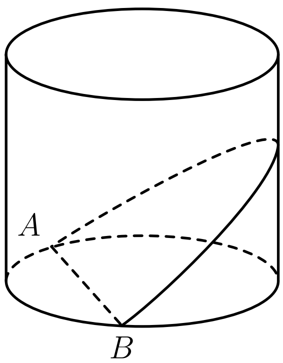
Mặt khác : $OO'^2 = O'B^2 - OB^2 = 4a^2 - R^2 = 4.\dfrac{4R^2}{7} - R^2 = \dfrac{9R^2}{7} \Rightarrow O'O = \dfrac{6\sqrt{7}\pi R}{7}$

Vậy diện tích xung quanh hình trụ đã cho là : $S_{xq} = 2\pi Rl = \dfrac{6\sqrt{7}\pi R^2}{7}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 11.

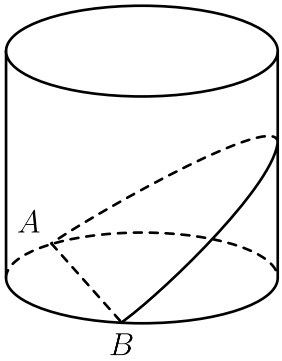
Cho khối trụ có bán kính đáy bằng $4\,(cm)$ và chiều cao $5\,(cm)$. Gọi AB là một dây cung đáy dưới sao cho $AB = 4\sqrt{3}\ (cm)$. Người ta dựng mặt phẳng (P) đi qua hai điểm A, B và tạo với mặt phẳng đáy hình trụ một góc $60°$ như hình vẽ. Tính diện tích thiết diện của hình trụ cắt bởi mặt phẳng (P).



(A) $\dfrac{8\left(4\pi - 3\sqrt{3}\right)}{3}\ (cm^2)$. (B) $\dfrac{4\left(4\pi - \sqrt{3}\right)}{3}\ (cm^2)$.

(C) $\dfrac{4\left(4\pi - 3\sqrt{3}\right)}{3}\ (cm^2)$. (D) $\dfrac{8\left(4\pi - \sqrt{3}\right)}{3}\ (cm^2)$.

Lời giải.



Gọi S là diện tích thiết diện, S' là diện tích hình chiếu của thiết diện lên mặt phẳng đáy. Khi đó $S' = S.\cos 60°$.

Ta có $AB = 4\sqrt{3} \Rightarrow \cos\widehat{AOB} = \dfrac{OA^2 + OB^2 - AB^2}{2.OA.OB} = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow \widehat{AOB} = 120°$

$$\begin{cases} S_{OAB} = \dfrac{1}{2}OA.OB.\sin 120° = 4\sqrt{3} \\ S_{OAmB} = \dfrac{1}{3}\pi.OA^2 = \dfrac{16\pi}{3} \end{cases} \Rightarrow S' = S_{OAmB} - S_{OAB} = \dfrac{4\left(4\pi - 3\sqrt{3}\right)}{3}$$

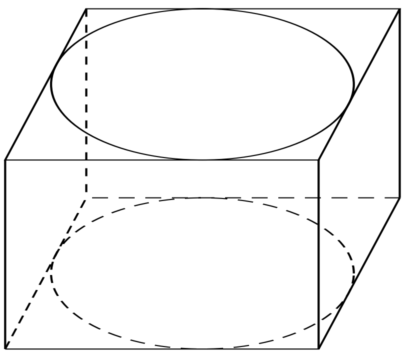
$S = \dfrac{S'}{\cos 60°} = \dfrac{8\left(4\pi - 3\sqrt{3}\right)}{3}$.

Chọn đáp án A □

Câu 12. Cho hình lập phương có cạnh bằng 40 cm và một hình trụ có hai đáy là hai hình tròn nội tiếp hai mặt đối diện của hình lập phương. Gọi S_1, S_2 lần lượt là diện tích toàn phần của hình lập phương và diện tích toàn phần của hình trụ. Tính $S = S_1 + S_2$ (cm^2).

A $S = 4(2400 + \pi)$.
B $S = 2400(4 + \pi)$.
C $S = 2400(4 + 3\pi)$.
D $S = 4(2400 + 3\pi)$.

Lời giải.



Ta có: $S_1 = 6.40^2 = 9600$.

Bán kính đường tròn nội tiếp hai mặt đối diện của hình lập phương là: $r = 20$cm; hình trụ có đường sinh $h = 40$cm

Diện tích toàn phần của hình trụ là: $S_2 = 2.\pi 20^2 + 2\pi.20.40 = 2400\pi$.

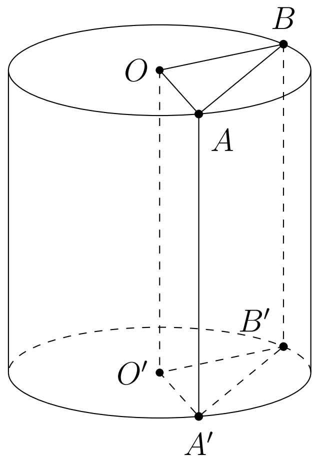
Vậy: $S = S_1 + S_2 = 9600 + 2400\pi = 2400(4 + \pi)$.

Chọn đáp án B □

Câu 13. Một hình trụ có diện tích xung quanh bằng 4π, thiết diện qua trục là hình vuông. Một mặt phẳng (α) song song với trục, cắt hình trụ theo thiết diện là tứ giác $ABB'A'$, biết một cạnh của thiết diện là một dây cung của đường tròn đáy của hình trụ và căng một cung 120°. Tính diện tích thiết diện $ABB'A'$.

(A) $3\sqrt{2}$. (B) $\sqrt{3}$. (C) $2\sqrt{3}$. (D) $2\sqrt{2}$.

Lời giải.



Gọi R, h, l lần lượt là bán kính, chiều cao, đường sinh của hình trụ.

Ta có $S_{xq} = 4\pi \Leftrightarrow 2\pi.R.l = 4\pi \Leftrightarrow R.l = 2$.

Giả sử AB là một dây cung của đường tròn đáy của hình trụ và căng một cung 120°.

Ta có $ABB'A'$ là hình chữ nhật có $AA' = h = l$.

Xét tam giác OAB cân tại O, $OA = OB = R$, $\widehat{AOB} = 120^\circ \Rightarrow AB = R\sqrt{3}$.

$S_{ABB'A'} = AB.AA' = R\sqrt{3}.l = R.l\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 14. Ba chiếc bình hình trụ cùng chứa 1 lượng nước như nhau, độ cao mực nước trong bình II gấp đôi bình I và trong bình III gấp đôi bình II. Chọn nhận xét đúng về bán kính đáy r_1, r_2, r_3 của ba bình I, II, III.

(A) r_1, r_2, r_3 theo thứ tự lập thành cấp số nhân công bội 2.

(B) r_1, r_2, r_3 theo thứ tự lập thành cấp số nhân công bội $\frac{1}{2}$.

(C) r_1, r_2, r_3 theo thứ tự lập thành cấp số nhân công bội $\sqrt{2}$.

(D) r_1, r_2, r_3 theo thứ tự lập thành cấp số nhân công bội $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Lời giải.

Gọi V_1, V_2, V_3 lần lượt là thể tích của bình I, II, III.

Ta có

$V_1 = V_2 \Leftrightarrow \pi {r_1}^2 h_1 = \pi {r_2}^2 h_2 \Leftrightarrow {r_1}^2 h_1 = r_2^2 2h_1 \Rightarrow r_2 = \dfrac{r_1}{\sqrt{2}}$ (1) .

$V_2 = V_3 \Leftrightarrow \pi {r_2}^2 h_2 = \pi {r_3}^2 h_3 \Leftrightarrow {r_2}^2 h_2 = r_3^2 2h_2 \Rightarrow r_3 = \dfrac{r_2}{\sqrt{2}}$ (2) .

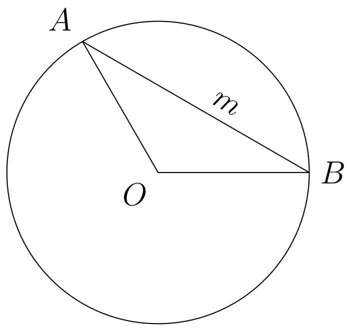
Từ (1) và (2) ta có r_1, r_2, r_3 theo thứ tự lập thành cấp số nhân công bội $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 15. Cho hình trụ có bán kính đáy bằng R và chiều cao bằng $\dfrac{3R}{2}$. Mặt phẳng (α) song song với trục của hình trụ và cách trục một khoảng bằng $\dfrac{R}{2}$. Tính diện tích thiết diện của hình trụ cắt bởi mặt phẳng (α).

(A) $\dfrac{2R^2\sqrt{3}}{3}$. (B) $\dfrac{3R^2\sqrt{3}}{2}$. (C) $\dfrac{3R^2\sqrt{2}}{2}$. (D) $\dfrac{2R^2\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải.



Thiết diện của hình trụ cắt bởi mặt phẳng (α) là hình chữ nhật $ABCD$ với $BC = \dfrac{3R}{2}$.

Gọi H là trung điểm AB, ta có $AH = \dfrac{R}{2} \Rightarrow AB = 2HB = 2\sqrt{R^2 - AH^2} = R\sqrt{3}$.

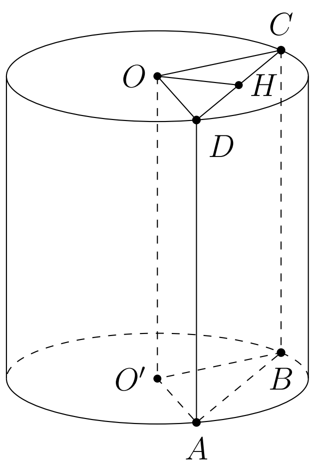
Vậy diện tích thiết diện là: $S = AB.CD = R\sqrt{3}.\dfrac{3R}{2} = \dfrac{3R^2\sqrt{3}}{2}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 16. Cho hình trụ có bán kính đáy bằng $5\,\text{cm}$ và khoảng cách giữa hai đáy là $7\,\text{cm}$. Cắt khối trụ bởi một mặt phẳng song song với trục và cách trục $3\,\text{cm}$. Tính diện tích S của thiết diện được tạo thành.

(A) $55\,\text{cm}^2$. (B) $56\,\text{cm}^2$. (C) $53\,\text{cm}^2$. (D) $46\,\text{cm}^2$.

Lời giải.



Gọi thiết diện là hình chữ nhật $ABCD$, H là trung điểm CD .

Ta có: $\begin{cases} OH \perp CD \\ OH \perp BC \end{cases} \Rightarrow OH \perp (ABCD) \Rightarrow d\left(OO'; (ABCD)\right) = d\left(O; (ABCD)\right) = OH = 3\,cm$.

$\Rightarrow HC = HD = \sqrt{OC^2 - OH^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4\,\text{cm}$.

$\Rightarrow AB = CD = 8\,\text{cm}$.

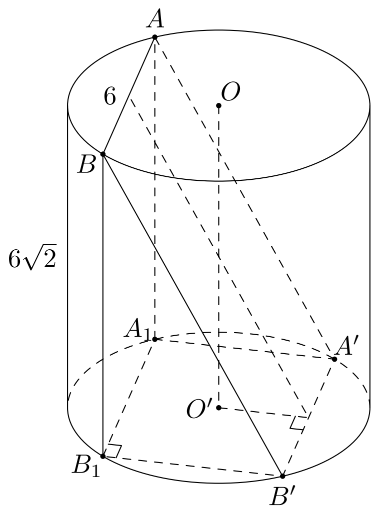
$\Rightarrow S_{ABCD} = AB.BC = 8.7 = 56\,\text{cm}^2$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 17. Cho hình trụ có chiều cao bằng $6\sqrt{2}\,cm$. Biết rằng một mặt phẳng không vuông góc với đáy và cắt hai mặt đáy theo hai dây cung song song AB , $A'B'$ mà $AB = A'B' = 6\,cm$, diện tích tứ giác $ABB'A'$ bằng $60\,cm^2$. Tính bán kính đáy của hình trụ.

(A) $5\,cm.$ (B) $3\sqrt{2}\,cm.$ (C) $4\,cm.$ (D) $5\sqrt{2}\,cm.$

Lời giải.



Gọi O, O' là tâm các đáy hình trụ (hình vẽ).

Vì $AB = A'B'$ nên $(ABB'A')$ đi qua trung điểm của đoạn OO' và $ABB'A'$ là hình chữ nhật.

Ta có $S_{ABB'A'} = AB.AA' \Leftrightarrow 60 = 6.AA' \Rightarrow AA' = 10\,(cm)$.

Gọi A_1, B_1 lần lượt là hình chiếu của A, B trên mặt đáy chứa A' và B'

$\Rightarrow A'B'B_1A_1$ là hình chữ nhật có $A'B' = 6\,(cm)$,

$B_1B' = \sqrt{BB'^2 - BB_1{}^2} = \sqrt{10^2 - \left(6\sqrt{2}\right)^2} = 2\sqrt{7}\,(cm)$

Gọi R là bán kính đáy của hình trụ, ta có $2R = A'B_1 = \sqrt{B_1B'^2 + A'B'^2} = 8 \Rightarrow R = 4\,(cm)$.

Chọn đáp án (C) □

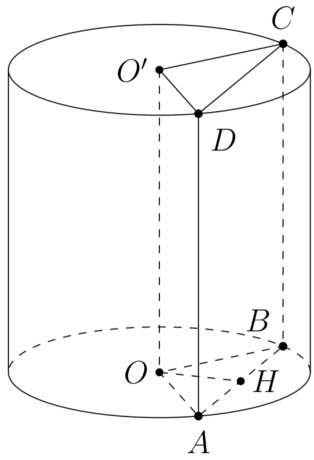
Câu 18. Một hình trụ có bán kính đáy $r = 5\,\text{cm}$ và khoảng cách giữa hai đáy $h = 7\,\text{cm}$. Cắt khối trụ bởi một mặt phẳng song song với trục và cách trục $3\,\text{cm}$. Diện tích của thiết diện được tạo thành là:

(A) $S = 56\,(\text{cm}^2)$. (B) $S = 55\,(\text{cm}^2)$. (C) $S = 53\,(\text{cm}^2)$. (D) $S = 46\,(\text{cm}^2)$.

Lời giải.

Gọi O, O' là tâm của hai đáy của hình trụ và (P) là mặt phẳng song song với trục và cách trục OO' một khoảng 3cm.

Mp(P) cắt hai hình tròn đáy $(O), (O')$ theo hai dây cung lần lượt là AB, CD và cắt mặt xung quanh theo hai đường sinh là AD, BC . Khi đó $ABCD$ là hình chữ nhật.



Gọi H là trung điểm của AB. Ta có $OH \perp AB; OH \perp AD \Rightarrow OH \perp (ABCD)$

$\Rightarrow d(OO', (P)) = d(O, (ABCD)) = OH = 3\text{cm}$.

Khi đó: $AB = 2AH = 2\sqrt{OA^2 - OH^2} = 2\sqrt{5^2 - 3^2} = 8$; $AD = OO' = h = 7\text{cm}$.

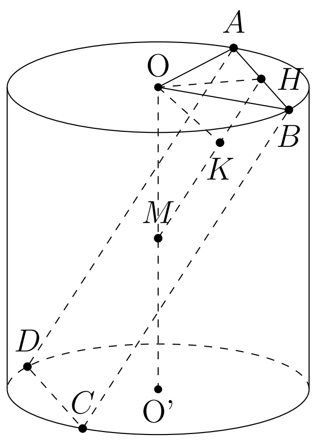
Diện tích hình chữ nhật $ABCD$ là: $S_{ABCD} = AB.AD = 56\,(cm^2)$.

Chọn đáp án A □

Câu 19. Cho hình trụ có hai đáy là hai hình tròn (O) và (O'), chiều cao $2R$ và bán kính đáy R. Một mặt phẳng (α) đi qua trung điểm của OO' và tạo với OO' một góc $30°$. Hỏi (α) cắt đường tròn đáy theo một dây cung có độ dài bằng bao nhiêu?

A $\dfrac{2R\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$. B $\dfrac{4R}{3\sqrt{3}}$. C $\dfrac{2R}{3}$. D $\dfrac{2R}{\sqrt{3}}$.

Lời giải.



Gọi M là trung điểm của OO'. Gọi A, B là giao điểm của mặt phẳng (α) và đường tròn (O) và H là hình chiếu của O trên $AB \Rightarrow AB \perp (MHO)$.

Trong mặt phẳng (MHO) kẻ $OK \perp MH$, $(K \in MH)$ khi đó góc giữa OO' và mặt phẳng (α) là góc $\widehat{OMK} = 30°$.

Xét tam giác vuông MHO ta có $HO = OM \tan 30° = R \tan 30° = \dfrac{R\sqrt{3}}{3}$.

Xét tam giác vuông AHO ta có $AH = \sqrt{OA^2 - OH^2} = \sqrt{R^2 - \dfrac{R^2}{3}} = \dfrac{R\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

Do H là trung điểm của AB nên $AB = \dfrac{2R\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

Chọn đáp án A □

Câu 20. Một cốc nước hình trụ có chiều cao 9cm, đường kính 6cm. Mặt đáy phẳng dày 1cm, thành cốc dày 0,2 cm. Đổ vào cốc 120 ml nước sau đó thả vào cốc 5 viên bi có đường kính 2cm. Mặt nước cách mép cốc gần nhất với giá trị bằng

(A) 3,67 (cm). (B) 3,08 (cm). (C) 2, 28 (cm). (D) 2, 62 (cm).

Lời giải.

Thể tích của cốc nước là: $V = \pi \cdot (2,8)^2 \cdot 8 = 62,72\pi\,(\mathrm{cm}^3)$.

Thể tích của 5 viên bi là: $V_1 = 5 \cdot \dfrac{4}{3} \cdot \pi 1^3 = \dfrac{20}{3} \cdot \pi\,(\mathrm{cm}^3)$.

Thể tích còn lại sau khi đổ vào cốc 120 ml nước và thả vào cốc 5 viên bi là: $V_2 = V - V_1 - 120$ $= 62,72\pi - \dfrac{20}{3} \cdot \pi - 120 \approx 56,10\,(\mathrm{cm}^3)$.

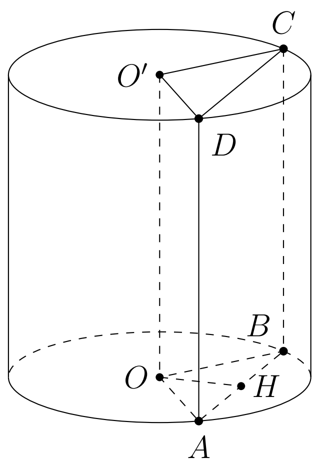
Chiều cao phần còn lại là: $h = \dfrac{V_2}{\pi \cdot (2,8)^2} \approx \dfrac{56,10}{\pi \cdot (2,8)^2} \approx 2,28\,(\mathrm{cm})$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 21. Cho hình trụ có bán kính đáy bằng R và chiều cao bằng $\dfrac{3R}{2}$. Mặt phẳng (α) song song với trục của hình trụ và cách trục một khoảng bằng $\dfrac{R}{2}$. Diện tích thiết diện của hình trụ cắt bởi mặt phẳng (α) là:

(A) $\dfrac{3\sqrt{2}R^2}{2}$. (B) $\dfrac{3\sqrt{3}R^2}{2}$. (C) $\dfrac{2\sqrt{3}R^2}{3}$. (D) $\dfrac{2\sqrt{2}R^2}{3}$.

Lời giải.



Giả sử thiết diện là hình chữ nhật $ABCD$ như hình vẽ.

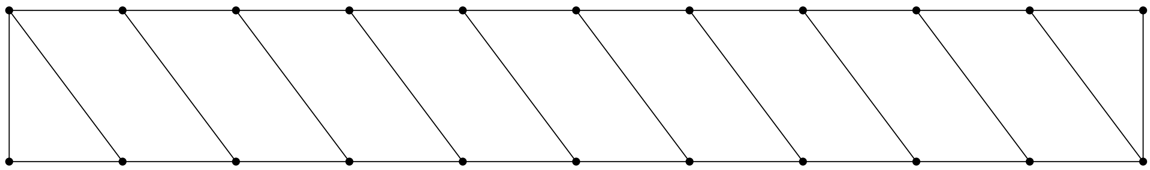
Gọi H là trung điểm của AB suy ra $OH \perp AB$ suy ra $\mathrm{d}\,(O; AB) = \dfrac{R}{2}$.

Khi đó $AB = 2HA = 2\sqrt{OA^2 - OH^2} = 2\sqrt{R^2 - \left(\dfrac{R}{2}\right)^2} = R\sqrt{3}$.

Suy ra $S_{ABCD} = AB.BC = R\sqrt{3}.\dfrac{3R}{2} = \dfrac{3\sqrt{3}R^2}{2}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 22. Một sợi dây (không co giản) được quấn đối xứng đúng 10 vòng quanh một ống trụ tròn đều có bán kính $R = \dfrac{2}{\pi}$ cm (Như hình vẽ)

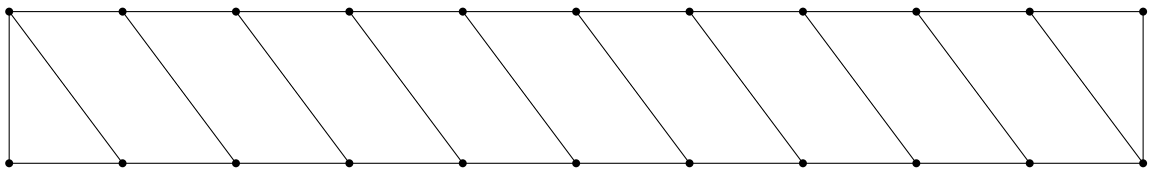


Biết rằng sợi dây dài 50 cm. Hãy tính diện tích xung quanh của ống trụ đó.

Ⓐ 80 cm^2. Ⓑ 100 cm^2. Ⓒ 60 cm^2. Ⓓ 120 cm^2.

Lời giải.

Khi trải phẳng ống trụ tròn đều ta được một hình chữ nhật có chiều rộng là chu vi của mặt đáy còn chiều dài là chiều dài của trụ, mỗi vòng quấn của dây dài 5 cm là đường chéo của hình chữ nhật có kích thước lần lượt bằng chu vi đáy trụ và $\dfrac{1}{10}$ chiều dài trụ (hình vẽ).

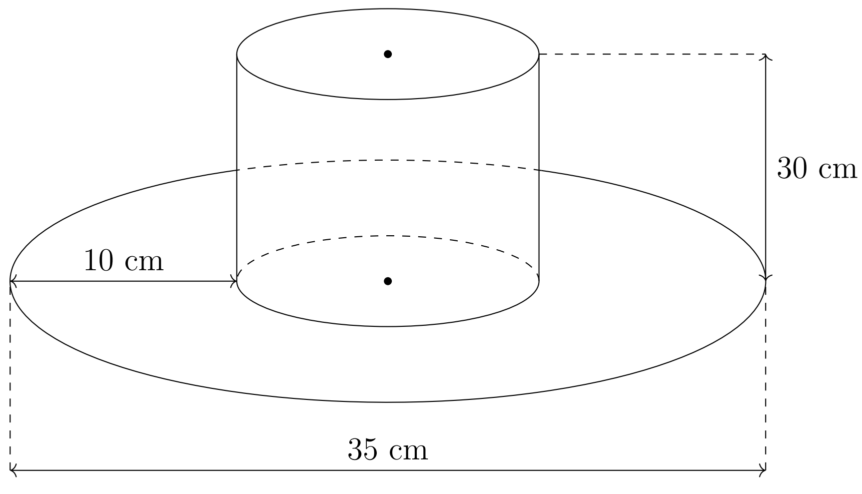


Gọi chiều dài trụ là $l\,(cm)$,theo định lí Pytago ta có $\sqrt{5^2-\left(2\cdot\dfrac{2}{\pi}\pi\right)^2}=\dfrac{l}{10}\Leftrightarrow l=30(\text{cm})$.

Vậy diện tích xung quanh của trụ là: $S_{xq}=2\cdot\dfrac{2}{\pi}\cdot\pi\cdot 30=120\ (\text{cm}^2)$.

Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 23. Một cái mũ bằng vải của nhà ảo thuật với kích thước như hình vẽ. Hãy tính tổng diện tích vải cần có để làm nên cái mũ đó (không tính viền, mép, phần thừa).



Ⓐ $750,25\pi\text{ cm}^2$. Ⓑ $756,25\pi\text{ cm}^2$. Ⓒ $700\pi\text{ cm}^2$. Ⓓ $700\pi\text{ cm}^2$.

Lời giải.

Bán kính hình trụ của cái mũ là $r=\dfrac{35-10-10}{2}=\dfrac{15}{2}$ (cm).

Đường cao hình trụ của cái mũ là 30 cm.

Diện tích xung hình trụ là: $S_{xq}=2\pi r\ell=2\cdot\pi\cdot\dfrac{15}{2}\cdot 30=450\pi\ (\text{cm}^2)$.

Diện tích vành mũ là: $S_v=\pi\left(\dfrac{35}{2}\right)^2-S_d\ (\text{cm}^2)$.

Vậy tổng diện tích vải cần có để làm nên cái mũ đó (không tính viền, mép, phần thừa) là:

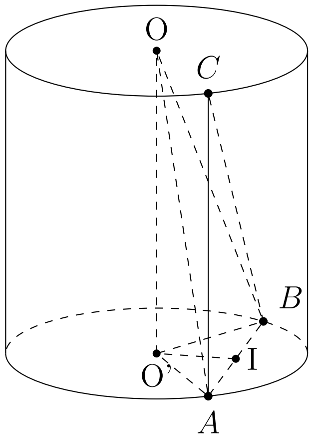
$S=S_{xq}+S_d+S_v=450\pi+\left(\dfrac{35}{2}\right)^2\pi=756,25\cdot\pi\ (\text{cm}^2)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 24. Một khối trụ có bán kính đáy $r = 2a$. O, O' lần lượt là tâm đường tròn đáy. Một mặt phẳng song song với trục và cách trục $\dfrac{a\sqrt{15}}{2}$, cắt đường tròn (O') tại hai điểm A, B. Biết thể tích của khối tứ diện $OO'AB$ bằng $\dfrac{a^3\sqrt{15}}{4}$. Độ dài đường cao của hình trụ bằng

(A) a. (B) $6a$. (C) $3a$. (D) $2a$.

Lời giải.



Vẽ đường sinh AC, khi đó mặt phẳng (ABC) song song với OO' và cách OO' một khoảng $\dfrac{a\sqrt{15}}{2}$.

Gọi I là trung điểm AB , ta có $d\left(OO',(ABC)\right) = \mathrm{d}\left(O',(ABC)\right) = O'I = \dfrac{a\sqrt{15}}{2}$.

Bán kính $O'A = 2a$ suy ra $BA = 2IA = 2\sqrt{O'A^2 - O'I^2} = 2\sqrt{4a^2 - \dfrac{15a^2}{4}} = a$.

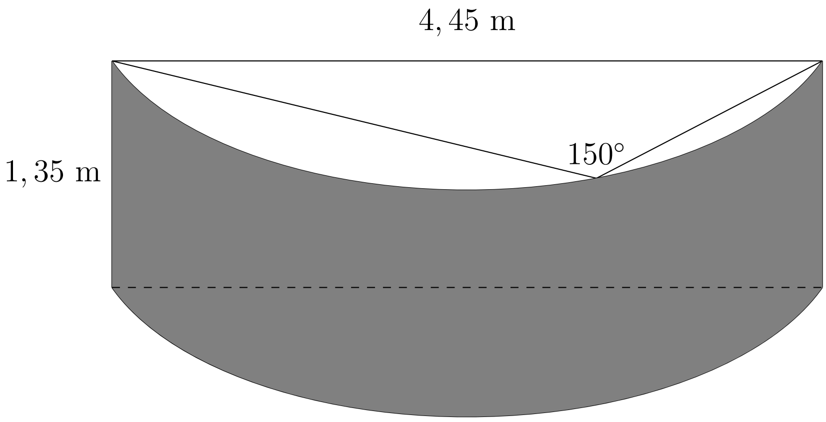
Thể tích tứ diện $OO'AB$ bằng $\dfrac{a^3\sqrt{15}}{4}$ nên ta có:

$\dfrac{1}{6} \cdot OO' \cdot IO' \cdot AB = \dfrac{a^3\sqrt{15}}{4} \Leftrightarrow \dfrac{1}{6} \cdot OO' \cdot \dfrac{a\sqrt{15}}{2} \cdot a = \dfrac{a^3\sqrt{15}}{4} \Leftrightarrow OO' = 3a$.

Vậy hình trụ có chiều cao $OO' = 3a$.

Chọn đáp án (C) □

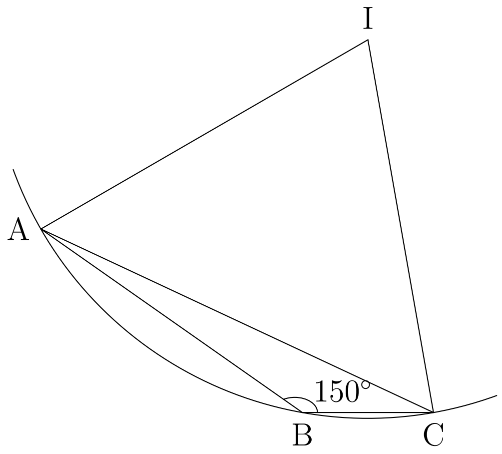
Câu 25. Ông Bình làm lan can ban công ngôi nhà của mình bằng tấm cường lực. Tấm kính đó là một phần của mặt xung quanh của một hình trụ như hình bên.



Biết giá tiền của 1 m^2 kính như trên là 1.500.000 đồng. Hỏi số tiền (làm tròn đến hàng nghìn) mà ông Bình mua tấm kính trên là bao nhiêu?

(A) 23.591.000 đồng. (B) 36.173.000 đồng. (C) 9.437.000 đồng. (D) 4.718.000 đồng.

Lời giải.



Giả sử mặt đáy trên của hình trụ là đường tròn tâm I, bán kính R đi qua ba điểm A, B, C như hình vẽ.

Khi đó $2R = \dfrac{AC}{\sin\widehat{ABC}} = \dfrac{4,45}{\sin 150^\circ} \Rightarrow R = 4,45$ m.

Thế nên ΔIAC là tam giác đều.

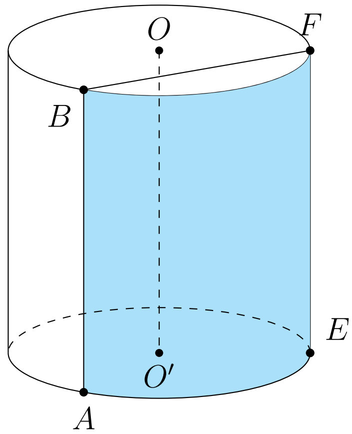
Do đó độ dài dây cung AC là $l = \alpha R = \dfrac{\pi}{3}.R = \dfrac{89}{60}\pi$.

Tấm kính khi trải phẳng ra là một hình chữ nhật có chiều rộng là $1,35$ m và chiều dài $\dfrac{89}{60}\pi$ m.

Thế nên số tiền ông Bình mua tấm kính trên là $1500000 \cdot 1,35 \cdot \dfrac{89}{60}\pi \approx 9.437.000$ đồng.

Chọn đáp án (C) □

Câu 26. Một công ty sản xuất bồn đựng nước hình trụ có thể tích thực 1 m^3 với chiều cao bằng 1 m. Biết bề mặt xung quanh bồn được sơn bởi loại sơn màu xanh tô như hình vẽ và màu trắng là phần còn lại của mặt xung quanh; với mỗi mét vuông bề mặt lượng sơn tiêu hao $0,5$ lít sơn. Công ty cần sơn 10000 bồn thì dư kiến cần bao nhiêu lít sơn màu xanh gần với số nào nhất, biết khi đo được dây cung $BF = 1$ m.



(A) 6150. (B) 6250. (C) 1230. (D) 1250.

Lời giải.

Gọi r là bán kính đường tròn đáy,

Ta có: $V = \pi r^2.h \Leftrightarrow r = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}$

Xét tam giác $O'BF$ ta có $\cos(BO'F) = \dfrac{2r^2 - BF^2}{2r^2} = 1 - \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow \widehat{BO'F} \approx 2,178271695$ (rad)

Vậy độ dài cung BF: $l = r \cdot \alpha \approx 1,2289582$ (m)

Tổng số lít sơn màu xanh cho mỗi bồn nước là: $T = l \cdot 0,5 = 0,6144791001$ (lít)

Vậy tổng số sơn cần cho 10000 bồn $S \approx 6145$ (lít)

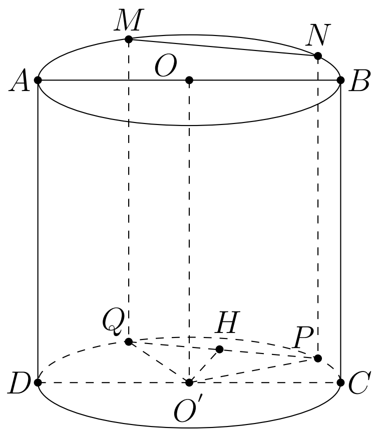
Chọn đáp án (A) □

Dạng 2. Thể tích

Câu 27. Cho hình trụ có chiều cao bằng $6a$. Biết rằng khi cắt hình trụ đã cho bởi một mặt phẳng song song với trục và cách trục một khoảng bằng $3a$, thiết diện thu được là một hình vuông. Thể tích của khối trụ được giới hạn bởi hình trụ đã cho bằng

(A) $216\pi a^3$. (B) $150\pi a^3$. (C) $54\pi a^3$. (D) $108\pi a^3$.

Lời giải.



Lấy 2 điểm M, N lần lượt nằm trên đường tròn tâm O sao cho $MN = 6a$.

Từ M, N lần lượt kẻ các đường thẳng song song với trục OO', cắt đường tròn tâm O' tại Q và P.

Thiết diện thu được là hình vuông $MNPQ$ có cạnh bằng $6a$.

Gọi H là trung điểm của PQ. Suy ra $OH \perp PQ$.

Vì $OO' \parallel (MNPQ)$ nên ta có $\mathrm{d}(OO', (MNPQ)) = \mathrm{d}(O', (MNPQ)) = O'H$.

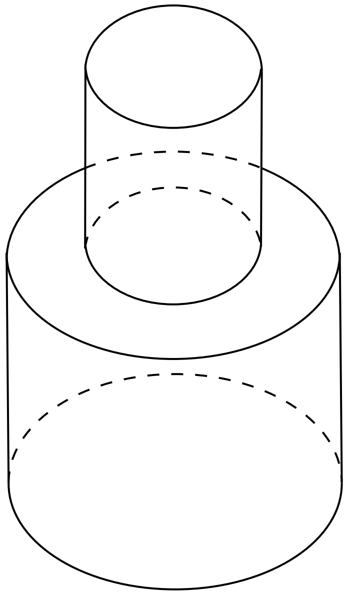
Từ giả thiết, ta có $O'H = 3a$. Do đó $\Delta O'HP$ là tam giác vuông cân tại H.

Suy ra bán kính đường tròn đáy của hình trụ là $O'P = \sqrt{O'H^2 + HP^2} = 3a\sqrt{2}$.

Vậy thể tích khối trụ cần tìm là $V = 6a\pi\left(3a\sqrt{2}\right)^2 = 108\pi a^3$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 28. Một khối đồ chơi gồm hai khối trụ $(H_1), (H_2)$ xếp chồng lên nhau, lần lượt có bán kính đáy và chiều cao tương ứng là r_1, h_1, r_2, h_2 thỏa mãn $r_2 = \dfrac{1}{2}r_1, h_2 = 2h_1$ (tham khảo hình vẽ). Biết rằng thể tích của toàn bộ khối đồ chơi bằng 30cm^3, thể tích khối trụ (H_1) bằng



Ⓐ 24cm^3. Ⓑ 15cm^3. Ⓒ 20cm^3. Ⓓ 10cm^3.

Lời giải.

Gọi V_1, V_2 lần lượt là thể tích khối trụ $(H_1), (H_2)$.

Ta có: $V_2 = \pi r_2^2 h_2 = \pi \left(\frac{1}{2} r_1\right)^2 2h_1 = \frac{V_1}{2}$.

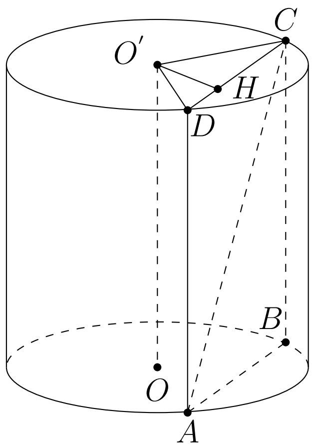
$\Rightarrow V_1 = 2V_2$ mà $V_1 + V_2 = 30 \Rightarrow V_1 = 20$.

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 29. Cho hình trụ có chiều cao bằng $8a$. Biết hai điểm A, C lần lượt nằm trên hai đáy thỏa $AC = 10a$, khoảng cách giữa AC và trục của hình trụ bằng $4a$. Thể tích khối trụ đã cho là

Ⓐ $128\pi a^3$. Ⓑ $320\pi a^3$. Ⓒ $80\pi a^3$. Ⓓ $200\pi a^3$.

Lời giải.



Gọi $(O), (O')$ lần lượt là hai đường tròn đáy. $A \in (O), C \in (O')$.

Dựng AD, CB lần lượt song song với $OO'(D \in (O'), B \in (O))$. Dễ dàng có $ABCD$ là hình chữ nhật.

Do $AC = 10a, AD = 8a \Rightarrow DC = 6a$.

Gọi H là trung điểm của DC.

$\begin{cases} O'H \perp DC \\ O'H \perp AD \end{cases} \Rightarrow O'H \perp (ABCD)$.

Ta có $OO' \parallel (ABCD) \Rightarrow d(OO', AC) = d(OO', (ABCD)) = O'H = 4a$.

$O'H = 4a, CH = 3a \Rightarrow R = O'C = 5a$.

Vậy thể tích của khối trụ là $V = \pi R^2 h = \pi (5a)^2 8a = 200\pi a^3$.

Chọn đáp án D □

Câu 30. Hỏi nếu tăng chiều cao của khối trụ lên 2 lần, bán kính của nó lên 3 lần thì thể tích của khối trụ mới sẽ tăng bao nhiêu lần so với khối trụ ban đầu?

A 36. B 6. C 18. D 12.

Lời giải.

Giả sử ban đầu khối trụ có chiều cao h_1 và bán kính r_1.

Khi đó, khối trụ có thể tích là $V_1 = \pi r_1^2 h$.

Sau khi tăng chiều cao của khối trụ lên 2 lần, bán kính của nó lên 3 lần thì khối trụ có chiều cao $2h_1$ và bán kính $3r_1$.

Khi đó, khối trụ mới có thể tích là $V_2 = \pi (3r_1)^2 \cdot 2h_1 = 18\pi r_1 h_1$.

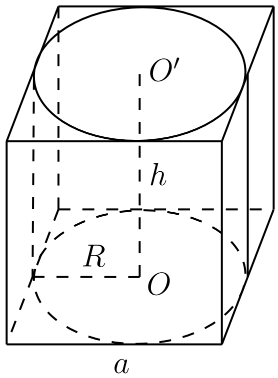
Do vậy $\dfrac{V_2}{V_1} = 18$.

Chọn đáp án C □

Câu 31. Cần đẽo thanh gỗ hình hộp có đáy là hình vuông thành hình trụ có cùng chiều cao. Tỉ lệ thể tích gỗ cần phải đẽo đi ít nhất (tính gần đúng) là

A 30%. B 50%. C 21%. D 11%.

Lời giải.



Để gỗ bị đẽo ít nhất thì hình hộp đó phải là hình hộp đứng.

Gọi h là chiều cao của hình hộp chữ nhật và R là bán kính đáy của hình trụ.

Do hình hộp chữ nhật và hình trụ có cùng chiều cao nên thể tích gỗ đẽo đi ít nhất khi và chỉ khi diện tích đáy của hình trụ lớn nhất (thể tích khối trụ lớn nhất). Suy ra $R = \dfrac{a}{2}$.

Gọi V_1 và V_2 lần lượt là thể tích của khối hộp và thể tích của khối trụ có đáy lớn nhất.

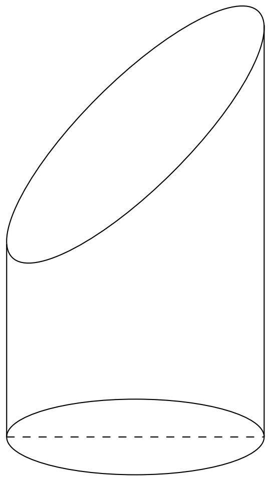
Ta có: $V_1 = a^2 \cdot h$ và $V_2 = \pi R^2 \cdot h = \pi \cdot \dfrac{a^2}{4} \cdot h$.

Suy ra: $\dfrac{V_2}{V_1} = \dfrac{\pi \cdot \dfrac{a^2}{4} \cdot h}{a^2 \cdot h} = \dfrac{\pi}{4} \approx 78{,}54\%$.

Vậy thể tích gỗ ít nhất cần đẽo đi là khoảng 21,46%.

Chọn đáp án (C) □

Câu 32. Một khối gỗ hình trụ có đường kính 0,5m và chiều cao 1m. Người ta đã cắt khối gỗ, phần còn lại như hình vẽ bên có thể tích là V. Tính V.



(A) $\dfrac{3\pi}{16}(\mathrm{m}^3)$. (B) $\dfrac{5\pi}{64}(\mathrm{m}^3)$. (C) $\dfrac{3\pi}{64}(\mathrm{m}^3)$. (D) $\dfrac{\pi}{16}(\mathrm{m}^3)$.

Lời giải.

Gọi V_1, V_2 lần lượt là thể tích khối gỗ ban đầu và thể tích khối gỗ bị cắt.

Thể tích của khối gỗ ban đầu là $V_1 = \pi\left(\dfrac{0{,}5}{2}\right)^2 \cdot 1 = \dfrac{\pi}{16}(\mathrm{m}^3)$.

Thể tích phần gỗ đã bị cắt đi là $V_2 = \dfrac{1}{2}\pi\left(\dfrac{0{,}5}{2}\right)^2 \cdot 0{,}5 = \dfrac{\pi}{64}(\mathrm{m}^3)$.

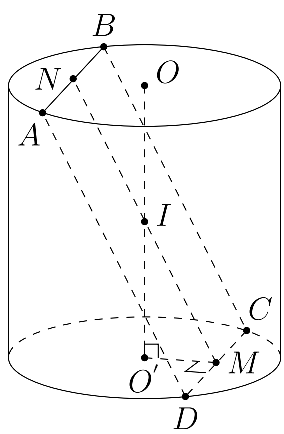
Thể tích khối gỗ còn lại và $V = V_1 - V_2 = \dfrac{\pi}{16} - \dfrac{\pi}{64} = \dfrac{3\pi}{64}(\mathrm{m}^3)$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 33. Cho hình trụ có O, O' là tâm hai đáy. Xét hình chữ nhật $ABCD$ có A, B cùng thuộc (O) và C, D cùng thuộc (O') sao cho $AB = a\sqrt{3}$, $BC = 2a$ đồng thời $(ABCD)$ tạo với mặt phẳng đáy hình trụ góc 60°. Thể tích khối trụ bằng

(A) $\pi a^3\sqrt{3}$. (B) $\dfrac{\pi a^3\sqrt{3}}{9}$. (C) $\dfrac{\pi a^3\sqrt{3}}{3}$. (D) $2\pi a^3\sqrt{3}$.

Lời giải.



Gọi M, N lần lượt là trung điểm của CD, AB và I là trung điểm của OO' .

Suy ra góc giữa mặt phẳng $(ABCD)$ và mặt phẳng đáy là $\widehat{IMO'} = 60^\circ$.

Ta có $IM = \frac{1}{2}MN = \frac{1}{2}BC = a$.

Xét $\Delta IO'M$ vuông tại O, ta có $IO' = IM \cdot \sin\widehat{IMO'} = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow h = OO' = 2IO' = a\sqrt{3}$;
$O'M = IM \cdot \cos\widehat{IMO'} = \frac{a}{2}$.

Xét $\Delta O'MD$ vuông tại M, có $O'M = \frac{a}{2}$, $MD = \frac{1}{2}CD = \frac{1}{2}AB = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

$\Rightarrow r = O'D = \sqrt{O'M^2 + MD^2} = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} \Rightarrow r = a$.

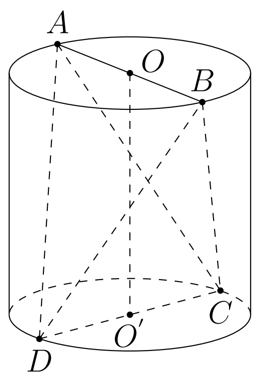
Vậy $V = \pi r^2 h = \pi a^3\sqrt{3}$.

Chọn đáp án A □

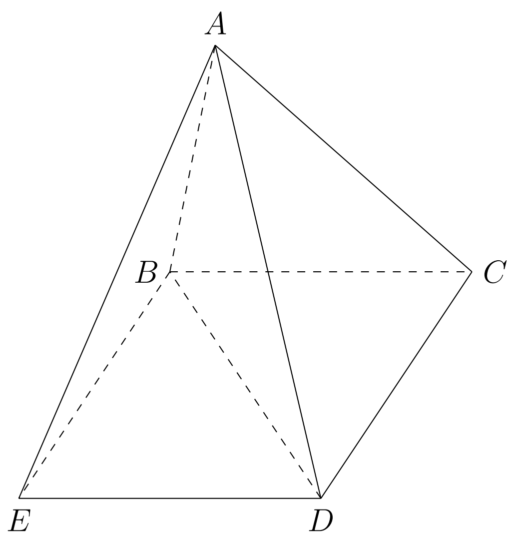
Câu 34. Cho khối trụ có hai đáy là (O) và (O'). AB, CD lần lượt là hai đường kính của (O) và (O'), góc giữa AB và CD bằng $30°$, $AB = 6$. Thể tích khối tứ diện $ABCD$ bằng 30. Thể tích khối trụ đã cho bằng

A) 180π. B) 90π. C) 30π. D) 45π.

Lời giải.



Ta chứng minh: $V_{ABCD} = \frac{1}{6}AB \cdot CD \cdot \mathrm{d}(AB, CD) \cdot \sin(AB, CD)$.



Lấy điểm E sao cho tứ giác $BCDE$ là hình bình hành.

Khi đó $(AB, CD) = (AB, BE) \Rightarrow \sin(AB, CD) = \sin(AB, BE)$.

$\mathrm{d}(D, (ABE)) = \mathrm{d}(AB, CD)$.

$V_{ABCD} = V_{ABDE} = \dfrac{1}{3} \cdot \mathrm{d}\left(D, (ABE)\right) \cdot S_{ABE} = \dfrac{1}{6} AB \cdot CD \cdot \mathrm{d}\left(AB, CD\right) \cdot \sin\left(AB, CD\right)$

$V_{ABCD} = \dfrac{1}{6} AB \cdot CD \cdot \mathrm{d}\left(AB, CD\right) \cdot \sin\left(AB, CD\right) \Rightarrow \mathrm{d}\left(AB, CD\right) = \dfrac{6V_{ABCD}}{ABCD \cdot \sin 30^\circ} = \dfrac{180}{6 \cdot 6 \cdot \dfrac{1}{2}} = 10.$

Chiều cao của lăng trụ bằng $h = d\left(AB, CD\right) = 10$.

Thể tích lăng trụ: $V = S \cdot h = \pi 3^2 \cdot 10 = 90\pi$.

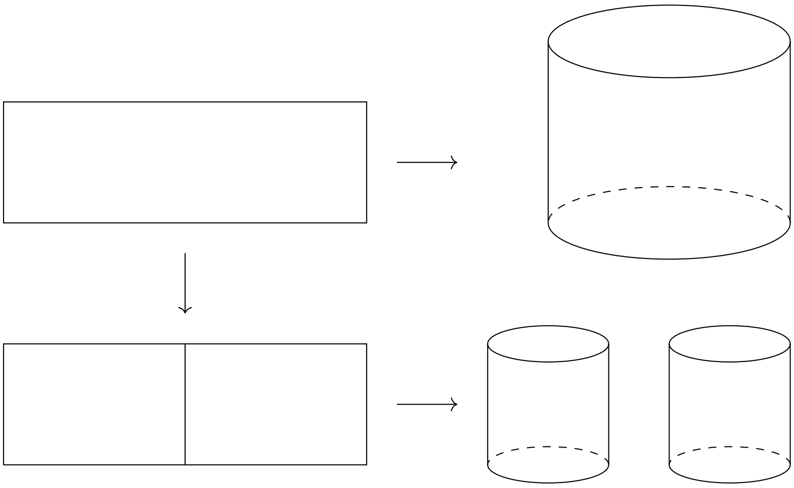
Chọn đáp án B □

Câu 35. Từ một tấm tôn hình chữ nhật có kích thước $50\text{cm} \times 240\text{cm}$, người ta làm các thùng đựng nước hình trụ có chiều cao bằng 50cm, theo hai cách sau (xem hình minh họa dưới đây):

Cách 1: Gò tấm tôn ban đầu thành mặt xung quanh thùng.

Cách 2: Cắt tấm tôn ban đầu thành hai tấm bằng nhau, rồi gò mỗi tấm đó thành mặt xung quanh của một thùng.

Kí hiệu V_1 là thể tích của thùng được gò theo cách 1 và V_2 là tổng thể tích của hai thùng được gò theo cách 2. Tính tỉ số $\dfrac{V_1}{V_2}$.



A $\dfrac{V_1}{V_2} = 1$. B $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{1}{2}$. C $\dfrac{V_1}{V_2} = 2$. D $\dfrac{V_1}{V_2} = 4$.

Lời giải.

Ở cách 1, thùng hình trụ có chiều cao $h = 50\,\text{cm}$, chu vi đáy $C_1 = 240\text{cm}$ nên bán kính đáy $R_1 = \dfrac{C_1}{2\pi} = \dfrac{120}{\pi}\text{cm}$. Do đó thể tích của thùng là $V_1 = \pi R_1^2 h$.

Ở cách 2, hai thùng đều có có chiều cao $h = 50\text{cm}$, chu vi đáy $C_2 = 120\text{cm}$ nên bán kính đáy $R_1 = \dfrac{C_2}{2\pi} = \dfrac{60}{\pi}\text{cm}$. Do đó tổng thể tích của hai thùng là $V_2 = 2\pi R_2^2 h$.

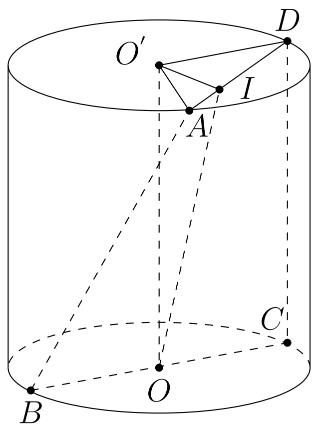
Vậy $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{\pi R_1^2 h}{2\pi R_2^2 h} = \dfrac{1}{2} \cdot \left(\dfrac{R_1}{R_2}\right)^2 = \dfrac{1}{2} \cdot \left(\dfrac{\dfrac{120}{\pi}}{\dfrac{60}{\pi}}\right)^2 = 2.$

Chọn đáp án C □

Câu 36. Cho hình trụ có hai đáy là hình tròn tâm O và O', chiều cao $h = a\sqrt{3}$. Mặt phẳng đi qua tâm O và tạo với OO' một góc 30°, cắt hai đường tròn tâm O và O' tại bốn điểm là bốn đỉnh của một hình thang có đáy lớn gấp đôi đáy nhỏ và diện tích bằng $3a^2$. Thể tích của khối trụ được giới hạn bởi hình trụ đã cho bằng

(A) $\dfrac{\sqrt{3}\pi a^3}{3}$. (B) $\sqrt{3}\pi a^3$. (C) $\dfrac{\sqrt{3}\pi a^3}{12}$. (D) $\dfrac{\sqrt{3}\pi a^3}{4}$.

Lời giải.



Giả sử $ABCD$ là hình thang mà đề bài đề cập (BC là đáy lớn, AD là đáy nhỏ) và r là bán kính đáy của hình trụ.

Theo đề: $\begin{cases} BC = 2r \\ BC = 2AD \end{cases} \Rightarrow AD = r$.

Kẻ $O'I \perp AD \Rightarrow AD \perp (OO'I) \Rightarrow (ABCD) \perp (OO'J)$.

Suy ra góc giữa OO' và $(ABCD)$ là góc $\widehat{O'OI}$. Theo đề $\widehat{O'OI} = 30°$.

$$\cos\widehat{O'OI} = \frac{OO'}{OI} \Leftrightarrow OI = \frac{OO'}{\cos 30°} = \frac{a\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2a.$$

Ta có: $S_{ABCD} = \dfrac{(AD+BC)\cdot IO}{2} \Leftrightarrow 3a^2 = \dfrac{(r+2r)\cdot 2a}{2} \Leftrightarrow r = a$.

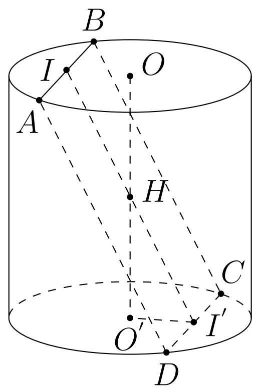
Thể tích của khối trụ là $V = \pi r^2 h = \pi a^2 \cdot a\sqrt{3} = \pi a^3\sqrt{3}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 37. Cho hình trụ và hình vuông $ABCD$ có cạnh a. Hai đỉnh liên tiếp A, B nằm trên đường tròn đáy thứ nhất và hai đỉnh còn lại nằm trên đường tròn đáy thức hai, mặt phẳng $(ABCD)$ tạo với đáy một góc $45°$. Khi đó thể tích khối trụ là

(A) $\dfrac{\pi a^3\sqrt{2}}{8}$. (B) $\dfrac{3\pi a^3\sqrt{2}}{8}$. (C) $\dfrac{\pi a^3\sqrt{2}}{16}$. (D) $\dfrac{3\pi a^3\sqrt{2}}{16}$.

Lời giải.



Gọi I, I' lần lượt là trung điểm của AB, CD; O, O' lần lượt là tâm đường tròn đáy của hình trụ (như hình vẽ); H là trung điểm của II'.

Khi đó H là trung điểm của OO' và góc giữa $(ABCD)$ tạo với đáy là $\widehat{HI'O} = 45°$.

Do $I'H = \dfrac{a}{2} \Rightarrow O'H = O'I' = \dfrac{a\sqrt{2}}{4}$. Khi đó $h = OO' = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Ta có: $r = O'C = \sqrt{O'I'^2 + I'C^2} = \dfrac{a\sqrt{6}}{4}$.

Thể tích khối trụ là $V = \pi r^2 h = \dfrac{3\pi a^3\sqrt{2}}{16}$.

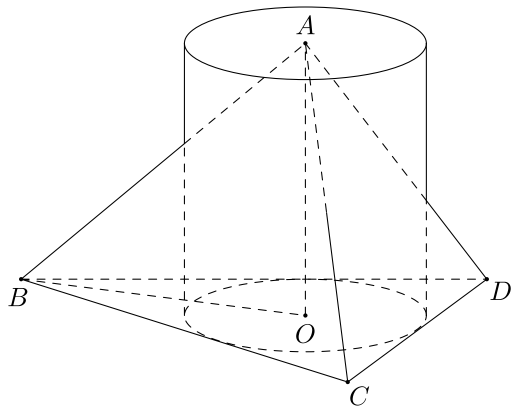
Chọn đáp án D □

Dạng 3. Khối tròn xoay nội, ngoại tiếp khối đa diện

Câu 38. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng 4. Tính diện tích xung quanh S_{xq} của hình trụ có một đường tròn đáy là đường tròn nội tiếp tam giác BCD và chiều cao bằng chiều cao của tứ diện $ABCD$.

A $S_{xq} = 8\sqrt{3}\pi$. B $S_{xq} = 8\sqrt{2}\pi$. C $S_{xq} = \dfrac{16\sqrt{3}\pi}{3}$. D $S_{xq} = \dfrac{16\sqrt{2}\pi}{3}$.

Lời giải.



Bán kính hình trụ bằng $\dfrac{1}{3}$ đường cao tam giác BCD nên $r = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{4\sqrt{3}}{2} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

Chiều cao hình trụ bằng chiều cao hình chóp

$$h = \sqrt{4^2 - \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{4\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{16 - \frac{16 \cdot 3}{9}} = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.$$

Vậy $S_{xq} = 2\pi r h = 2\pi \cdot \dfrac{2\sqrt{3}}{3} \cdot \dfrac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \dfrac{16\sqrt{2}\pi}{3}$.

Chọn đáp án D □

Câu 39. Tính thể tích V của khối trụ ngoại tiếp hình lập phương có cạnh bằng a.

A $V = \dfrac{\pi a^3}{6}$. B $V = \dfrac{\pi a^3}{2}$. C $V = \dfrac{\pi a^3}{4}$. D $V = \pi a^3$.

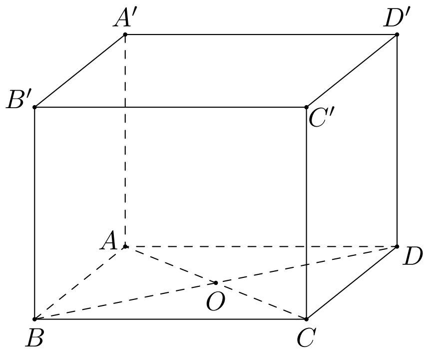
Lời giải.

Bán kính đường tròn đáy là $R = \dfrac{AC}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Chiều cao $h = AA' = a$.

Vậy thể tích khối trụ là

$$V = \pi R^2 h = \pi \cdot \frac{a^2}{2} \cdot a = \frac{\pi a^3}{2}.$$



Chọn đáp án (B) □

Câu 40. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có độ dài cạnh đáy bằng a và chiều cao bằng h. Tính thể tích V của khối trụ ngoại tiếp lăng trụ đã cho.

(A) $V = 3\pi a^2 h$. (B) $V = \pi a^2 h$. (C) $V = \dfrac{\pi a^2 h}{9}$. (D) $V = \dfrac{\pi a^2 h}{3}$.

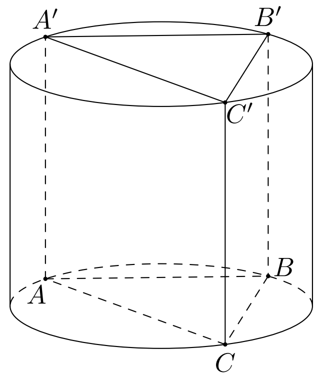
Lời giải.

Khối trụ ngoại tiếp lăng trụ tam giác đều có hình tròn đáy là hình tròn ngoại tiếp tam giác đáy của lăng trụ, và chiều cao bằng chiều cao lăng trụ.

Tam giác đều cạnh a có bán kính đường tròn ngoại tiếp bằng $\dfrac{\sqrt{3}a}{3}$.

Vậy thể tích của khối trụ cần tìm là

$$V = h \cdot S = h \cdot \pi \cdot \left(\frac{\sqrt{3}a}{3}\right)^2 = \frac{\pi a^2 h}{3} \text{ (đvtt)}.$$



Chọn đáp án (D) □

Câu 41. Một hình trụ có thiết diện qua trục là hình vuông, diện tích xung quanh bằng $36\pi a^2$. Tính thể tích V của lăng trụ lục giác đều nội tiếp hình trụ.

(A) $27\sqrt{3}a^3$. (B) $24\sqrt{3}a^3$. (C) $36\sqrt{3}a^3$. (D) $81\sqrt{3}a^3$.

Lời giải.

Ta có $S_{xq} = 36\pi a^2 = 2\pi Rh$.

Do thiết diện qua trục là hình vuông nên ta có $2R = h$.

Khi đó $h^2 = 36a^2$ hay $h = 6a$; $R = 3a$.

Diện tích của mặt đáy hình lăng trụ lục giác đều nội tiếp hình trụ là $B = 6 \cdot \dfrac{R^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{27a^2\sqrt{3}}{2}$.

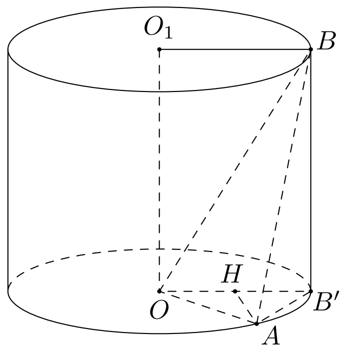
Thể tích V của lăng trụ lục giác đều nội tiếp hình trụ là $V = B \cdot h = 81a^3\sqrt{3}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 42. Cho hình trụ (T) chiều cao bằng $2a$, hai đường tròn đáy của (T) có tâm lần lượt là O và O_1, bán kính bằng a. Trên đường tròn đáy tâm O lấy điểm A, trên đường tròn đáy tâm O_1 lấy điểm B sao cho $AB = \sqrt{5}a$. Thể tích khối tứ diện OO_1AB bằng

(A) $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{12}$. (B) $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{4}$. (C) $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{6}$. (D) $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{3}$.

Lời giải.



Kẻ đường sinh BB' và gọi H là trung điểm OB'.

Trong tam giác vuông ABB' có $BB' = OO_1 = 2a$ và $AB = a\sqrt{5}$ nên $AB' = \sqrt{AB^2 - BB'^2} = a$.

Tam giác OAB' có $OB' = OA = AB' = a$ nên OAB' là tam giác đều $\Rightarrow AH \perp OB'$, $AH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Ta có $\begin{cases} AH \perp OB' \\ AH \perp OO_1 \end{cases} \Rightarrow AH \perp (O_1OB) \Rightarrow$ Thể tích khối tứ diện $A.O_1OB$ là

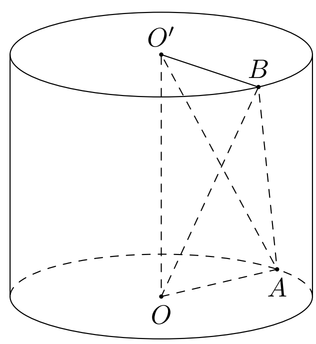
$$V_{O_1OAB} = \frac{1}{3} \cdot AH \cdot S_{O_1OB} = \frac{1}{6} AH \cdot O_1O \cdot O_1B = \frac{1}{6} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot 2a \cdot a = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}.$$

Chọn đáp án C □

Câu 43. Cho khối trụ có đáy là các đường tròn tâm (O), (O') có bán kính là R và chiều cao $h = R\sqrt{2}$. Gọi A, B lần lượt là các điểm thuộc (O) và (O') sao cho OA vuông góc với $O'B$. Tỉ số thể tích của khối tứ diện $OO'AB$ với thể tích khối trụ là

A. $\dfrac{2}{3\pi}$. B. $\dfrac{1}{3\pi}$. C. $\dfrac{1}{6\pi}$. D. $\dfrac{1}{4\pi}$.

Lời giải.



Thể tích khối trụ $V_1 = \pi R^2 \cdot h = \pi R^2 \cdot R\sqrt{2} = \pi R^3\sqrt{2}$.

Khối tứ diện $BO'OA$ có BO' là đường cao, đáy là $\triangle O'OA$ vuông.

Do đó thể tích khối tứ diện là

$$V_2 = \frac{1}{3} S_{O'OA} \cdot O'B = \frac{\sqrt{2}}{6} R^3.$$

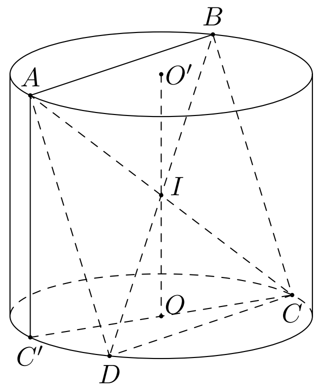
Vậy $\dfrac{V_2}{V_1} = \dfrac{R^3\sqrt{2}}{6} \cdot \dfrac{1}{\pi R^3\sqrt{2}} = \dfrac{1}{6\pi}$.

Chọn đáp án C □

Câu 44. Một hình trụ có bán kính đáy bằng chiều cao và bằng a. Một hình vuông $ABCD$ có đáy AB, CD là hai dây cung của hai đường tròn đáy và $(ABCD)$ không vuông góc với đáy. Diện tích hình vuông đó bằng

A. $\dfrac{5a^2}{4}$. B. $5a^2$. C. $\dfrac{5a^2\sqrt{2}}{2}$. D. $\dfrac{5a^2}{2}$.

Lời giải.



Gọi O, O' là tâm của 2 đường tròn đáy, I là trung điểm của OO'.

Do tính đối xứng nên I là trung điểm của AC, BD.

Kẻ đường kính $CC' \Rightarrow AC' = a$; $CC' = 2a$

$$\Rightarrow AC = \sqrt{C'A^2 + C'C^2} = a\sqrt{5}.$$

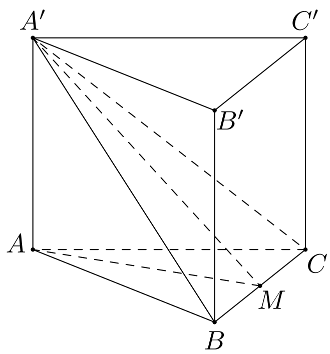
Do đó $S_{ABCD} = \dfrac{1}{2}AC^2 = \dfrac{5a^2}{2}$.

Chọn đáp án D □

Câu 45. Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$, biết góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC)$ và (ABC) bằng $45°$, diện tích tam giác $A'BC$ bằng $a^2\sqrt{6}$. Tính diện tích xung quanh của hình trụ ngoại tiếp hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A $\dfrac{4\pi a^2\sqrt{3}}{3}$. B $2\pi a^2$. C $4\pi a^2$. D $\dfrac{8\pi a^2\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải.



Gọi M là trung điểm BC, khi đó $\begin{cases} BC \perp AM \\ BC \perp AA' \end{cases} \Rightarrow BC \perp A'M$, do đó góc giữa $(A'BC)$ và (ABC) là $\widehat{A'MA} = 45°$.

Tam giác $A'AM$ vuông cân tại A nên

$$A'M = AM\sqrt{2} = \frac{BC\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{2} = \frac{BC\sqrt{6}}{2}.$$

Diện tích $S_{A'BC} = \dfrac{1}{2}A'M \cdot BC = \dfrac{1}{2}\dfrac{BC\sqrt{6}}{2} \cdot BC = \dfrac{BC^2\sqrt{6}}{4}$.

Theo đề $\dfrac{BC^2\sqrt{6}}{4} = a^2\sqrt{6} \Rightarrow BC = 2a$.

Hình trụ có đáy là đường tròn ngoại tiếp ABC có bán kính $r = \dfrac{BC\sqrt{3}}{3} = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$, đường cao $h = AA' = AM = \dfrac{BC\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$.

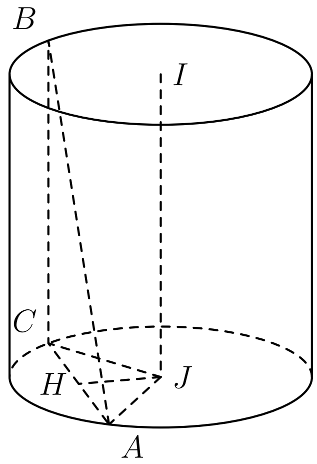
Diện tích xung quanh $S = 2\pi rh = 2\pi\dfrac{2a\sqrt{3}}{3} \cdot a\sqrt{3} = 4\pi a^2$.

Chọn đáp án C □

Câu 46. Cho hình trụ có bán kính R và chiều cao $\sqrt{3}R$. Hai điểm A, B lần lượt nằm trên hai đường tròn đáy sao cho góc giữa AB và trục d của hình trụ bằng $30°$. Tính khoảng cách giữa AB và trục của hình trụ:

A $d(AB, d) = \dfrac{R\sqrt{3}}{2}$. B $d(AB, d) = R$. C $d(AB, d) = R\sqrt{3}$. D $d(AB, d) = \dfrac{R}{2}$.

Lời giải.



Gọi I, J là tâm của hai đáy (hình vẽ).

Từ B kẻ đường thẳng song song với trục d của hình trụ, cắt đường tròn đáy kia tại C.

Khi đó $(AB, d) = (AB, BC) = \widehat{ABC}$. Suy ra $\widehat{ABC} = 30°$.

Xét tam giác ABC vuông tại C, ta có $\tan\widehat{ABC} = \dfrac{AC}{CB}$

$\Rightarrow AC = CB.\tan\widehat{ABC} = R\sqrt{3}.\tan 30° = R\sqrt{3}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{3}} = R$.

Vì $d \parallel (ABC)$ và $(ABC) \supset AB$ nên

$$d\,(d, AB) = d\,(d, (ABC)) = d\,(J, (ABC))\,.$$

Kẻ $JH \perp AC$, $H \in AC$. Vì $BC \perp JH$ nên $JH \perp (ABC)$.

Suy ra $d\,(J, (ABC)) = JH$.

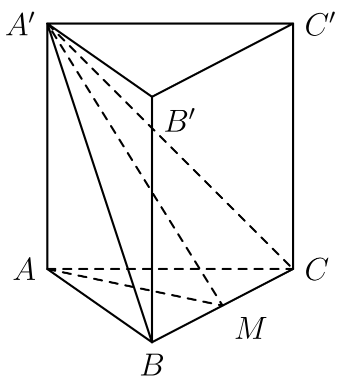
Xét tam giác JAC ta thấy $JA = JC = AC = R$ nên JAC là tam giác đều cạnh R. Khi đó chiều cao là $JH = \dfrac{R\sqrt{3}}{2}$. Vậy $d\,(d, AB) = \dfrac{R\sqrt{3}}{2}$.

Chọn đáp án A □

Câu 47. Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$, biết góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC)$ và (ABC) bằng $45°$, diện tích tam giác $A'BC$ bằng $a^2\sqrt{6}$. Tính diện tích xung quanh của hình trụ ngoại tiếp hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A $\dfrac{4\pi a^2\sqrt{3}}{3}$. B $2\pi a^2$. C $4\pi a^2$. D $\dfrac{8\pi a^2\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải.



Gọi M là trung điểm BC. Khi đó ta có $BC \perp AM$, $BC \perp A'M$.

Từ đó suy ra $BC \perp (A'AM)$.

Do đó $((A'BC), (ABC)) = \widehat{A'MA} = 45° \Rightarrow A'A = AM$.

Gọi O là trọng tâm tam giác ABC.

Đặt $BC = x$, $x > 0$. Ta có $AM = A'A = \dfrac{x\sqrt{3}}{2} \Rightarrow A'M = \dfrac{x\sqrt{6}}{2}$.

Nên $S_{\triangle A'BC} = \dfrac{1}{2}\cdot A'M\cdot BC = \dfrac{x^2\sqrt{6}}{4} = a^2\sqrt{6} \Rightarrow x = 2a$.

Khi đó $AO = \dfrac{2}{3}AM = \dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{2a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$ và $A'A = a\sqrt{3}$.

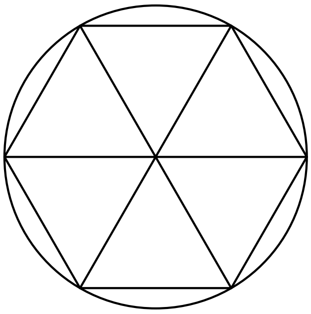
Diện tích xung quanh hình trụ là $S_{xq} = 2\pi\cdot OA\cdot A'A = 2\pi\cdot\dfrac{2a\sqrt{3}}{3}\cdot a\sqrt{3} = 4\pi a^2$.

Chọn đáp án C □

Câu 48. Một hình trụ có thiết diện qua trục là hình vuông, diện tích xung quanh bằng $36\pi a^2$. Tính thể tích V của lăng trụ lục giác đều nội tiếp hình trụ.

A $V = 27\sqrt{3}a^3$. B $V = 81\sqrt{3}a^3$. C $V = 24\sqrt{3}a^3$. D $V = 36\sqrt{3}a^3$.

Lời giải.



Vì thiết diện qua trục của hình trụ là hình vuông nên $l = 2r$.

Diện tích xung quanh hình trụ $S_{xq} = 2\pi rl = 2\pi r.2r = 36\pi a^2 \Rightarrow r = 3a$

Lăng trụ lục giác đều có đường cao $h = l = 6a$

Lục giác đều nội tiếp đường tròn có cạnh bằng bán kính của đường tròn.

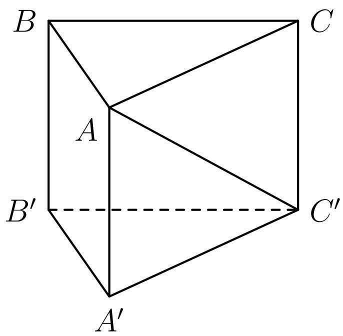
Suy ra diện tích lục giác đều $S = 6 \cdot \dfrac{(3a)^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{27a^2\sqrt{3}}{2}$.

Vậy thể tích của lăng trụ lục giác đều là $V = Sh = 81\sqrt{3}a^3$.

Chọn đáp án B □

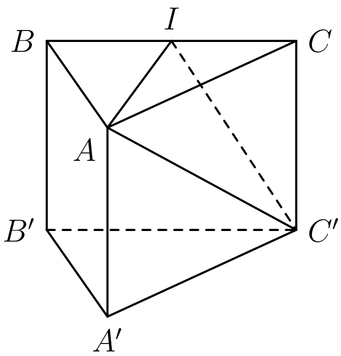
Câu 49.

Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có độ dài cạnh bên bằng $2a$, đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, góc giữa AC' và mặt phẳng $(BCC'B')$ bằng 30° (tham khảo hình vẽ). Thể tích của khối trụ ngoại tiếp lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng



A πa^3. B $2\pi a^3$. C $4\pi a^3$. D $3\pi a^3$.

Lời giải.



Gọi bán kính của hình trụ là R. Gọi I là trung điểm của BC. Khi đó I là bán kính một mặt đáy của khối trụ ngoại tiếp lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

Ta có $CC' \perp (ABC) \Rightarrow CC' \perp AI$.

Lại có tam giác ABC là tam giác vuông cân tại A nên $AI \perp BC$. Do đó $AI \perp (BCC'B')$, suy ra $(AC', (BCC'B')) = \widehat{IC'A} = 30^\circ$.

Xét tam giác vuông AIC' ta có $IC' = \dfrac{AI}{\tan \widehat{IC'A}} = R\sqrt{3}$.

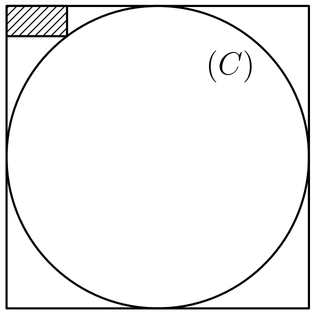
Xét tam giác vuông CIC' ta có $C'I^2 = IC^2 + C'C^2 \Leftrightarrow 3R^2 = R^2 + 4a^2 \Rightarrow R = a\sqrt{2}$.

Thể tích khối trụ ngoại tiếp lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là $V = \pi R^2 h = 4\pi a^3$.

Chọn đáp án C □

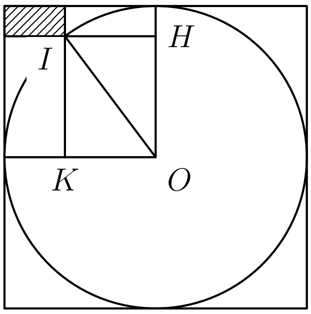
Câu 50.

Cho hình trụ (T) có (C) và (C') là hai đường tròn đáy nội tiếp hai mặt đối diện của một hình lập phương. Biết rằng, trong tam giác cong tạo bởi đường tròn (C) và hình vuông ngoại tiếp của (C) có một hình chữ nhật kích thước $a \times 2a$ (như hình vẽ). Tính thể tích V của khối trụ (T) theo a.



A $\dfrac{100\pi a^3}{3}$. B $250\pi a^3$. C $\dfrac{250\pi a^3}{3}$. D $100\pi a^3$.

Lời giải.



Gọi r là bán kính đường tròn (C), điều kiện: $r > 2a$.

Ký hiệu O, I, H, K là các điểm có vị trí như hình vẽ.

Dễ thấy $OH = r - a$, $OK = r - 2a$, $IO = r$. Theo định lý Pitago ta có

$$\begin{aligned}&(r-a)^2 + (r-2a)^2 = r^2\\ \Leftrightarrow\ & r^2 - 6ar + 5a^2 = 0\\ \Leftrightarrow\ & (r-a)(r-5a) = 0\\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{ll} r = a & (\text{loại vì } r > 2a)\\ r = 5a. \end{array}\right.\end{aligned}$$

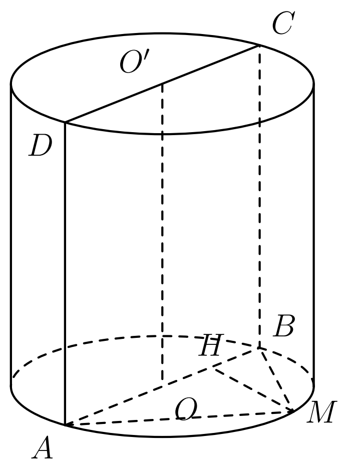
Khi đó khối trụ (T) có bán kính đáy $r = 5a$, chiều cao $2r = 10a$ nên có thể tích $V = \pi r^2.2r = 250\pi a^3$.

Chọn đáp án B □

Câu 51. Cho hình trụ có thiết diện qua trục là hình vuông $ABCD$ cạnh bằng $2\sqrt{3}$ (cm) với AB là đường kính của đường tròn đáy tâm O. Gọi M là điểm thuộc cung $\overset{\frown}{AB}$ của đường tròn đáy sao cho $\widehat{ABM} = 60^\circ$. Thể tích của khối tứ diện $ACDM$ là:

A $V = 3$ (cm^3). B $V = 4$ (cm^3). C $V = 6$ (cm^3). D $V = 7$ (cm^3).

Lời giải.

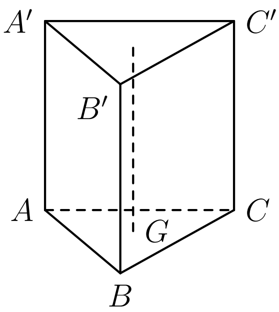


Ta có $\triangle MAB$ vuông tại M có $\widehat{B} = 60^\circ$ nên $MB = \sqrt{3}$, $MA = 3$.
Gọi H là hình chiếu của M lên AB, suy ra $MH \perp (ACD)$ và $MH = \dfrac{MB.MA}{AB} = \dfrac{3}{2}$.
Vậy $V_{M.ACD} = \dfrac{1}{3}MH \cdot S_{\triangle ACD} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{3}{2} \cdot 6 = 3\ (\text{cm}^3)$.
Chọn đáp án A □

Câu 52. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có độ dài cạnh đáy bằng a, chiều cao là h. Tính thể tích V của khối trụ ngoại tiếp hình lăng trụ.

Ⓐ $V = \dfrac{\pi a^2 h}{9}$. Ⓑ $V = \dfrac{\pi a^2 h}{3}$. Ⓒ $V = 3\pi a^2 h$. Ⓓ $V = \pi a^2 h$.

Lời giải.

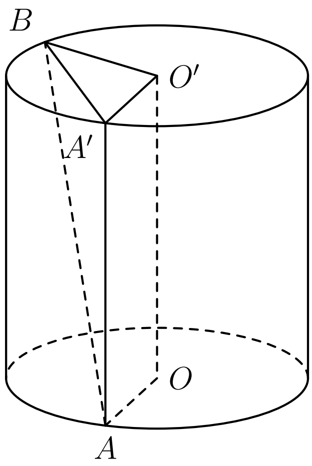


Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC. Do ABC là tam giác đều nên G là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Hơn nữa $AG = \dfrac{2}{3}AM = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.
Vậy thể tích của khối trụ ngoại tiếp hình lăng trụ là $V = \pi R^2 h = \dfrac{\pi a^2 h}{3}$.
Chọn đáp án B □

Câu 53. Cho hình trụ có hai đáy là các hình tròn (O), (O') bán kính bằng a, chiều cao hình trụ gấp hai lần bán kính đáy. Các điểm A, B tương ứng nằm trên hai đường tròn (O), (O') sao cho $AB = a\sqrt{6}$. Tính thể tích khối tứ diện $ABOO'$ theo a.

Ⓐ $\dfrac{a^3}{3}$. Ⓑ $\dfrac{a^3\sqrt{5}}{3}$. Ⓒ $\dfrac{2a^3}{3}$. Ⓓ $\dfrac{2a^3\sqrt{5}}{3}$.

Lời giải.



Ta có $OO' = 2a$, $A'B = \sqrt{AB^2 - AA'^2} = \sqrt{6a^2 - 4a^2} = a\sqrt{2}$.

Do đó $A'B^2 = O'B^2 + O'A'^2 = 2a^2$ nên tam giác $O'A'B$ vuông cân tại O' hay $O'A' \perp O'B \Rightarrow OA \perp O'B$.

Khi đó $V_{OO'AB} = \dfrac{1}{6} OA \cdot O'B \cdot d\left(OA, O'B\right) \cdot \sin\left(OA, O'B\right) = \dfrac{1}{6} a \cdot a \cdot 2a \cdot \sin 90^\circ = \dfrac{a^3}{3}$.

Chọn đáp án A □

BẢNG ĐÁP ÁN

1. B	2. D	3. B	4. D	5. A	6. C	7. A	8. C	9. C	10. D
11. A	12. B	13. C	14. D	15. B	16. B	17. C	18. A	19. A	20. C
21. B	22. D	23. B	24. C	25. C	26. A	27. D	28. C	29. D	30. C
31. C	32. C	33. A	34. B	35. C	36. B	37. D	38. D	39. B	40. D
41. D	42. C	43. C	44. D	45. C	46. A	47. C	48. B	49. C	50. B
51. A	52. B	53. A							

MỨC ĐỘ 3. MỨC ĐỘ 9,10 ĐIỂM

Dạng 1. Các bài toán thực tế - cực trị

Câu 1. Một cơ sở sản xuất có hai bể nước hình trụ có chiều cao bằng nhau, bán kính đáy lần lượt bằng 1 m và $1,5$ m. Chủ cơ sở dự định làm một bể nước mới, hình trụ, có cùng chiều cao và thể tích bằng tổng thể tích của hai bể nước trên. Bán kính đáy của bể nước dự định làm gần nhất với kết quả nào dưới đây?

A. $1,8m$. B. $2,1m$. C. $1,6m$. D. $2,5m$.

Lời giải.

Gọi h là chiều cao của các bể nước và r là bán kính đáy của bể nước dự định làm.

Theo giả thiết, ta có $\pi r^2 h = \pi 1^2 h + \pi.\left(1,5\right)^2 h \Leftrightarrow r^2 = 1 + \dfrac{9}{4} = \dfrac{13}{4}$.

Suy ra $r = \dfrac{\sqrt{13}}{2} \approx 1,8$.

Chọn đáp án A □

Câu 2. Một cơ sở sản xuất có hai bể nước hình trụ có chiều cao bằng nhau, bán kính đáy lần lượt bằng 1 m và $1,2$ m. Chủ cơ sở dự định làm một bể nước mới, hình trụ, có cùng chiều cao và có thể tích bằng tổng thể tích của hai bể nước trên. Bán kính đáy của bể nước dự định làm gần nhất với kết quả nào dưới đây?

Ⓐ $2,2m$. Ⓑ $1,6\,m$. Ⓒ $1,8\,m$. Ⓓ $1,4\,m$.

Lời giải.

Gọi $R_1; R_2; R$ lần lượt là bán kính của trụ thứ nhất, thứ hai và h là chiều cao của các bể nước.

Ta có

$V = V_1 + V_2 = \pi R^2 h = \pi {R_1}^2 h + \pi {R_2}^2 h \Leftrightarrow R^2 = R_1^2 + R_2^2$.

$\Rightarrow R = \sqrt{R_1^2 + R_2^2} = \sqrt{1^2 + (1,2)^2} \approx 1,56(m)$.

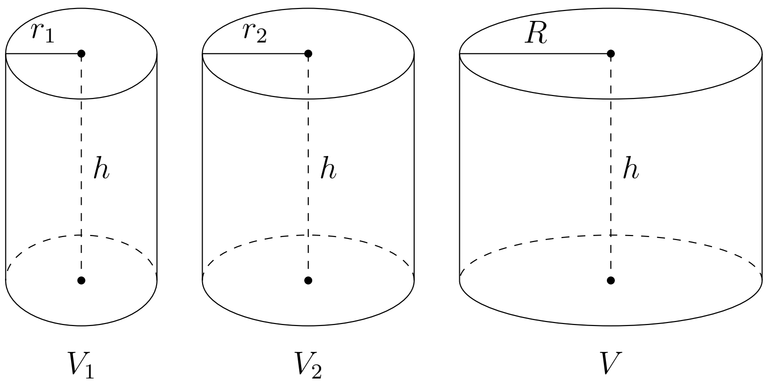
Vậy giá trị cần tìm là $1,56m$.

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 3. Một cơ sở sản xuất có hai bể nước hình trụ có chiều cao bằng nhau, bán kính đáy lần lượt bằng 1 m và $1,4$ m. Chủ cơ sở dự định làm một bể nước mới, hình trụ, có cùng chiều cao và có thể tích bằng tổng thể tích của hai bể nước trên. Bán kính đáy của bể nước dự định làm gần nhất với kết quả nào dưới đây?

Ⓐ $1,7$ m. Ⓑ $1,5$ m. Ⓒ $1,9$ m. Ⓓ $2,4$ m.

Lời giải.



Gọi $r_1; r_2; R$ lần lượt là bán kính của trụ thứ nhất, thứ hai và h là chiều cao của các bể nước.

Ta có: $V = V_1 + V_2 \Leftrightarrow h\pi R^2 = h\pi {r_1}^2 + h\pi {r_2}^2$.

$\Rightarrow R = \sqrt{r_1^2 + r_2^2} \approx 1,72\,m$.

Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 4. Một cơ sở sản xuất có hai bể nước hình trụ có chiều cao bằng nhau, bán kính đáy lần lượt bằng 1 m và $1,8$ m. Chủ cơ sở dự định làm một bể nước mới, hình trụ, có cùng chiều cao và có thể tích bằng tổng thể tích của hai bể nước trên. Bán kính đáy của bể nước dự định làm gần nhất với kết quả nào dưới đây?

Ⓐ $2,8m$. Ⓑ $2,6m$. Ⓒ $2,1m$. Ⓓ $2,3m$.

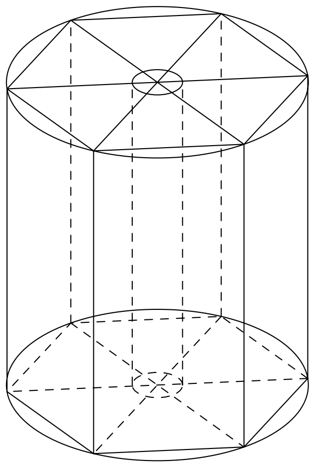
Lời giải.

Gọi hai bể nước hình trụ ban đầu lần lượt có chiều cao là h, bán kính r_1, r_2 và thể tích là V_1, V_2.
Ta có một bể nước mới có chiều cao h.
Ta có
$V = V_1 + V_2$.
$\Rightarrow \pi r^2 h = \pi {r_1}^2 h + \pi {r_2}^2 h \Rightarrow \pi r^2 h = \pi 1^2 h + \pi 1,8^2 h \Leftrightarrow r = \sqrt{\dfrac{106}{25}} \approx 2,1m$.
Chọn đáp án C □

Câu 5. Một chiếc bút chì có dạng khối trụ lục giác đều có cạnh đáy 3 (mm) và chiều cao bằng 200 (mm). Thân bút chì được làm bằng gỗ và phần lõi được làm bằng than chì. Phần lõi có dạng khối trụ có chiều cao bằng chiều cao bằng chiều dài của bút và đáy là hình tròn có bán kính 1 (mm). Giả định 1 m^3 gỗ có giá a triệu đồng, 1 m^3 than chì có giá $6a$ triệu đồng. Khi đó giá nguyên vật liệu làm một chiếc bút chì như trên gần nhất với kết quả nào dưới đây?

A. $8,45a$ đồng. B. $7,82a$ đồng. C. $84,5a$ đồng. D. $78,2a$ đồng.

Lời giải.



1 m^3 gỗ có giá a triệu đồng suy ra một mm^3 gỗ có giá $\dfrac{a}{1000}$ đồng.
1 m^3 than chì có giá $6a$ triệu đồng suy ra 1 mm^3 than chì có giá $\dfrac{6a}{1000}$ đồng.
Phần chì của cái bút có thể tích bằng $V_1 = 200 \cdot \pi \cdot 1^2 = 200\pi\,(mm^3)$.
Phần gỗ của của bút chì có thể tích bằng $V_2 = 200 \cdot 6 \cdot \dfrac{3^2\sqrt{3}}{4} - 200\pi = 2700\sqrt{3} - 200\pi\,(mm^3)$.
Số tiền làm một chiếc bút chì là $\dfrac{6aV_1 + aV_2}{1000} \approx 7,82a$ đồng.
Chọn đáp án B □

Câu 6. Một chiếc bút chì có dạng khối lăng trụ lục giác đều có cạnh đáy $3mm$ và chiều cao bằng $200mm$. Thân bút chì được làm bằng gỗ và phần lõi được làm bằng than chì. Phần lõi có dạng khối trụ có chiều cao bằng chiều dài của bút và đáy là hình tròn có bán kính đáy $1mm$. Giả định 1 m^3 gỗ có giá a (triệu đồng), 1 m^3 than chì có giá $8a$ (triệu đồng). Khi đó giá nguyên liệu làm một chiếc bút chì như trên gần nhất với kết quả nào dưới đây?

A. $9,07a$ (đồng). B. $97,03a$ (đồng). C. $90,7a$ (đồng). D. $9,7a$ (đồng).

Lời giải.

Diện tích của khối lăng trụ lục giác đều là $S = 6 \cdot \left((3.10^{-3})^2 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)\ (m^2)$.

Thể tích của chiếc bút chì là: $V = S \cdot h = 6 \cdot \left((3.10^{-3})^2 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{4}\right) 200 \cdot 10^{-3} = 27\sqrt{3}10^{-7}\ (m^3)$.

Thể tích của phần lõi bút chì là $\Delta\ (m^3)$.

Suy ra thể tích phần thân bút chì là $V_2 = V - V_1 = \left(27\sqrt{3} - 2\pi\right) 10^{-7}\ (m^3)$.

Giá nguyên liệu làm một chiếc bút chì như trên là:

$V_2 \cdot a10^6 + V_1 \cdot 8a10^6 = \left(27\sqrt{3} - 2\pi\right) 10^{-7} \cdot a10^6 + 2\pi 10^{-7} \cdot 8a10^6 = \left(2,7\sqrt{3} + 1,4\pi\right) a \simeq 9,07a$ (đồng).

Chọn đáp án D □

Câu 7. Một chiếc bút chì có dạng khối lăng trụ lục giác đều có cạnh đáy $3mm$ và chiều cao $200mm$. Thân bút chì được làm bằng gỗ và phần lõi được làm bằng than chì. Phần lõi có dạng khối trụ có chiều cao bằng chiều cao của bút và đáy là hình tròn có bán kính 1 mm. Giả định $1m^3$ gỗ có giá a (triệu đồng), $1m^3$ than chì có giá $7a$ (triệu đồng). Khi đó giá nguyên vật liệu làm một chiếc bút chì như trên gần nhất với kết quả nào dưới đây?

A. $85,5.a$ (đồng). B. $9,07.a$ (đồng). C. $8,45.a$ (đồng). D. $90,07.a$ (đồng).

Lời giải.

Thể tích phần lõi than chì: $V_1 = \pi \cdot 0,001^2 \cdot 0,2 = 2\pi 10^{-7}(m^3)$.

Số tiền làm lõi than chì: $T_1 = (2\pi 10^{-7}) \cdot 7 \cdot a10^6 = 1,4\pi \cdot a$ (đồng).

Thể tích phần thân bằng gỗ của bút:

$V_2 = 6 \cdot \dfrac{(0,003)^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot 0,2 - 2\pi 10^{-7} = \left[\sqrt{3} \cdot 27 \cdot 10^{-7} - 2\pi 10^{-7}\right] (m^3)$.

Số tiền làm phần thân bằng gỗ của bút

$T_2 = \left[27\sqrt{3} \cdot 10^{-7} - \pi 2 \cdot 10^{-7}\right] \cdot a \cdot 10^6 = \left[2,7\sqrt{3} - \pi \cdot 0,2\right] \cdot a$ (đồng).

Vậy giá vật liệu làm bút chì là: $T = T_1 + T_2 \approx 8,45a$ (đồng).

Chọn đáp án C □

Câu 8. Một chiếc bút chì có dạng khối lăng trụ lục giác đều có cạnh đáy bằng $3mm$ và chiều cao bằng $200mm$. Thân bút chì được làm bằng gỗ và phần lõi có dạng khối trụ có chiều cao bằng chiều dài của bút và đáy là hình tròn có bán kính bằng $1mm$. Giả định $1m^3$ gỗ có giá a (triệu đồng), $1m^3$ than chì có giá $9a$ (triệu đồng). Khi đó giá nguyên vật liệu làm một chiếc bút chì như trên gần nhất với kết quả nào dưới đây?

A. $103,3a$ đồng. B. $97,03a$ đồng. C. $10,33a$ đồng. D. $9,7a$ đồng.

Lời giải.

$3mm = 0,003m$; $200mm = 0,2m$; $1mm = 0,001m$

Diện tích đáy của phần than chì: $S_1 = \pi r^2 = \pi \cdot 10^{-6}(m^2)$.

Diện tích đáy phần bút bằng gỗ:

$S_2 = 6S_{OAB} - S_1 = \left(6 \cdot \dfrac{3^2\sqrt{3}}{4} - \pi\right) 10^{-6} = \left(\dfrac{27\sqrt{3}}{2} - \pi\right) \cdot 10^{-6}(m^2)$.

Thể tích than chì cần dùng: $V_1 = S_1 \cdot h = \pi \cdot r^2 \cdot 0,2 = 0,2 \cdot \pi \cdot 10^{-6}(m^3)$.

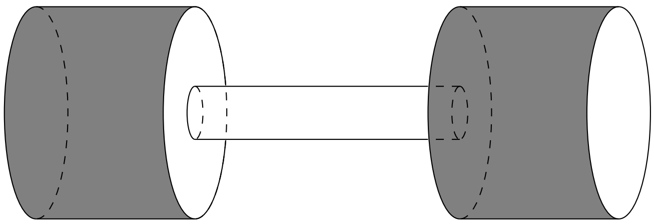
Thể tích gỗ làm bút chì: $V_2 = S_2 \cdot h = \left(\dfrac{27\sqrt{3}}{2} - \pi\right) 0,2 \cdot 10^{-6} (m^3)$.

Tiền làm một cây bút:

$V_1 \cdot 9a + V_2 \cdot a = (9V_1 + V_2)\, a = \left(9 \cdot 0,2\pi 10^{-6} + \left(\dfrac{27\sqrt{3}}{2} - \pi\right) 0,2 \cdot 10^{-6}\right) a = 9,7a$ (đồng).

Chọn đáp án D

Câu 9. Người ta làm tạ tập cơ tay như hình vẽ với hai đầu là hai khối trụ bằng nhau và tay cầm cũng là khối trụ. Biết hai đầu là hai khối trụ đường kính đáy bằng 12, chiều cao bằng 6, chiều dài tạ bằng 30 và bán kính tay cầm là 2. Hãy tính thể tích vật liệu làm nên tạ tay đó.



A 108π. B 6480π. C 502π. D 504π.

Lời giải.

Gọi h_1, R_1, V_1 lần lượt là chiều cao, bán kính đáy, thể tích khối trụ nhỏ mỗi đầu.

$V_1 = h_1 \cdot \pi \cdot R_1^2 = 6 \cdot \pi \cdot 6^2 = 216\pi$.

Gọi h_2, R_2, V_2 lần lượt là chiều cao, bán kính đáy, thể tích của tay cầm.

$V_2 = h_2 \cdot \pi \cdot R_2^2 = (30 - 2 \cdot 6) \cdot \pi \cdot 2^2 = 72\pi$.

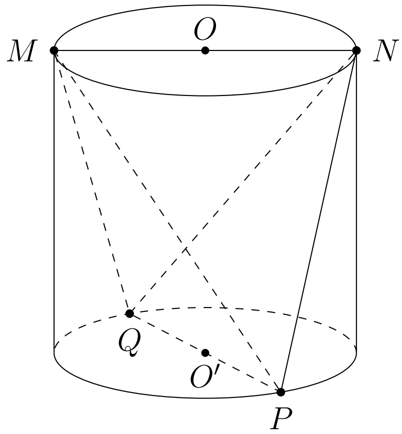
Thể tích vật liệu làm nên tạ tay bằng $V = 2V_1 + V_2 = 504\pi$.

Chọn đáp án D

Câu 10. Một người thợ có một khối đá hình trụ. Kẻ hai đường kính MN, PQ của hai đáy sao cho $MN \perp PQ$. Người thợ đó cắt khối đá theo các mặt đi qua 3 trong 4 điểm M, N, P, Q để khối đá có hình tứ diện $MNPQ$. Biết $MN = 60$ cm và thể tích khối tứ diện $MNPQ = 30$ dm^3. Hãy tính thể tích lượng đá cắt bỏ (làm tròn đến một chữ số thập phân sau dấu phẩy).

A $101,3\text{dm}^3$. B $111,4\text{dm}^3$. C $121,3\text{dm}^3$. D $141,3\text{dm}^3$.

Lời giải.



Gọi O và O' lần lượt là trung điểm MN và PQ.

Khi đó OO' là trục của hình trụ và $OO' \perp MN \Rightarrow MN \perp (OPQ)$.

$V_{MNPQ} = \dfrac{1}{3} MN \cdot S_{OPQ} = \dfrac{OO' \cdot 6^2}{6} = 6 \cdot OO'$ (dm^3).

Theo bài ra ta có $V_{MNPQ} = 30$ dm^3 $\Rightarrow OO' = 5$ dm.

Thể tích khối trụ là $V_{\text{trụ}} = \pi \cdot 3^2 \cdot 5 \approx 141,4$ dm^3.

Vậy thể tích lượng đá cắt bỏ $V = V_{\text{trụ}} - V_{MNPQ} \approx 111,4$ dm^3.

Chọn đáp án B □

Câu 11. Công ty X định làm một téc nước hình trụ bằng inox (gồm cả nắp) có dung tích 1 m^3. Để tiết kiệm chi phí công ty X chọn loại téc nước có diện tích toàn phần nhỏ nhất. Hỏi diện tích toàn phần của téc nước nhỏ nhất bằng bao nhiêu (kết quả làm tròn đến 2 chữ số sau dấu phẩy)?

A. $5,59$ m^2. B. $5,54$ m^2. C. $5,57$ m^2. D. $5,52$ m^2.

Lời giải.

Ta có: $V = \pi R^2 h = 1 \Rightarrow \begin{cases} \pi R h = \dfrac{1}{R} \\ \pi R^2 = \dfrac{1}{h} \end{cases}$

Diện tích toàn phần của téc nước: $S_{tp} = 2\pi Rh + 2\pi R^2 = \dfrac{2}{R} + 2\pi R^2$.

Xét $S' = 4\pi R - \dfrac{2}{R^2} = 0 \Leftrightarrow R = \sqrt[3]{\dfrac{1}{2\pi}}$.

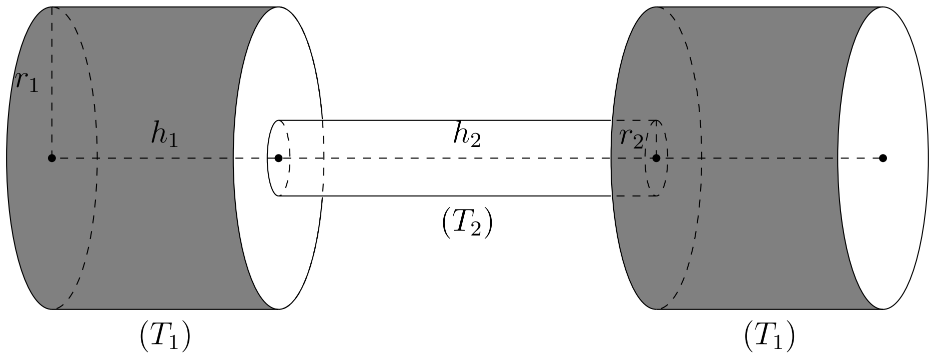
R	0	$\sqrt[3]{\dfrac{1}{2\pi}}$	$+\infty$
S'	$-$	0	$+$
S_{tp}	$+\infty \searrow$	$-\dfrac{\Delta}{4a}$	$\nearrow +\infty$

Từ bảng biến thiên ta có S_{tp} đạt giá trị nhỏ nhất tại $R = \sqrt[3]{\dfrac{1}{2\pi}}$.

$\Rightarrow S_{(tp)\min} = 2\sqrt[3]{2\pi} + \dfrac{2\pi}{\sqrt[3]{4\pi^2}} \approx 5,54$.

Chọn đáp án B □

Câu 12. Một chiếc tạ tay có hình dạng gồm 3 khối trụ, trong đó hai khối trụ ở hai đầu bằng nhau và khối trụ làm tay cầm ở giữa. Gọi khối trụ làm đầu tạ là (T_1) và khối trụ làm tay cầm là (T_2) lần lượt có bán kính và chiều cao tương ứng là r_1, h_1, r_2, h_2 thỏa mãn $r_1 = 4r_2$, $h_1 = \dfrac{1}{2}h_2$ (tham khảo hình vẽ).



Biết rằng thể tích của khối trụ tay cầm (T_2) bằng 30 (cm^3) và chiếc tạ làm bằng inox có khối lượng riêng là $D = 7,7$ g/cm^3. Khối lượng của chiếc tạ tay bằng

Ⓐ $3,927$ kg. Ⓑ $2,927$ kg. Ⓒ $3,279$ kg. Ⓓ $2,279$ kg.

Lời giải.

Thể tích của hai khối trụ làm đầu tạ (T_1) : $V_1 = 2\pi r_1^2 h_1 = 2\pi(4r_2)^2 \dfrac{1}{2} h_2 = 16\pi r_2^2 h_2 = 16 \cdot 30 = 480$ (cm^3).

Tổng thể tích của chiếc tạ tay là $V = V_1 + V_2 = 480 + 30 = 510$ (cm^3).

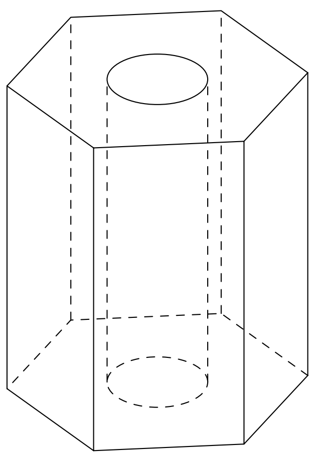
Khối lượng của chiếc tạ là $m = D \cdot V = 7,7 \cdot 510 = 3927$ (g) $= 3,927$ (kg).

Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 13. Một công ty sản xuất bút chì có dạng hình lăng trụ lục giác đều có chiều cao 18 cm và đáy là hình lục giác nội tiếp đường tròn đường kính 1 cm. Bút chì được cấu tạo từ hai thành phần chính là than chì và bột gỗ ép, than chì là một khối trụ ở trung tâm có đường kính $\dfrac{1}{4}$ cm, giá thành 540 đồng/cm^3. Bột gỗ ép xung quanh có giá thành 100 đồng/cm^3. Tính giá của một cái bút chì được công ty bán ra biết giá nguyên vật liệu chiếm $15,58\%$ giá thành sản phẩm.

Ⓐ 10000 đồng. Ⓑ 8000 đồng. Ⓒ 5000 đồng. Ⓓ 3000 đồng.

Lời giải.



Gọi R và r lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp lục giác đều và bán kính của lõi than chì.

Ta có $R = \dfrac{1}{2}$ cm và $r = \dfrac{1}{8}$ cm.

Suy ra diện tích của lục giác đều là $S = 6 \cdot R^2 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{4} = 6 \cdot \dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{4} = \dfrac{3\sqrt{3}}{8}$.

Gọi V là thể tích của khối lăng trụ lục giác đều. V_1, V_2 lần lượt là thể tích của khối than chì và bột gỗ dùng để làm ra một cây bút chì.

Ta có $V = S \cdot h = \dfrac{3\sqrt{3}}{8} \cdot 18 = \dfrac{27\sqrt{3}}{4}$ (cm^3); $V_1 = \pi r^2 h = \pi \cdot \dfrac{1}{8^2} \cdot 18 = \dfrac{9\pi}{32}$ (cm^3).

$\Rightarrow V_2 = V - V_1 = \dfrac{27\sqrt{3}}{4} - \dfrac{9\pi}{32}$ (cm^3).

Do đó, giá nguyên vật liệu dùng để làm một cây bút chì là $540V_1 + 100V_2$ (đồng).

Vậy giá bán ra của cây bút chì là

$(540V_1 + 100V_2) \cdot \dfrac{100}{15,58} = \left[540 \cdot \dfrac{9\pi}{32} + 100\left(\dfrac{27\sqrt{3}}{4} - \dfrac{9\pi}{32}\right)\right] \cdot \dfrac{100}{15,58} \approx 10000$ (đồng).

Chọn đáp án A □

Câu 14. Một cuộn đề can hình trụ có đường kính $44,9$ cm. Trong thời gian diễn ra AFF cup 2018, người ta đã sử dụng để in các băng rôn, khẩu hiệu cổ vũ cho đội tuyển Việt Nam, do đó đường kính của cuộn đề can còn lại là $12,5$ cm. Biết độ dày của tấm đề can là $0,06$ cm, hãy tính chiều dài L của tấm đề can đã sử dụng? (Làm tròn đến hàng đơn vị).

A. $L = 24344$ cm. B. $L = 97377$ cm. C. $L = 848$ cm. D. $L = 7749$ cm.

Lời giải.

Ta có mỗi lần bán đi một vòng đề can thì bán kính của cuộn đề can giảm đi số cm là: $0,06$ cm.

Bán kính lúc đầu là $22,45$ cm, bán kính lúc sau là $6,25$ cm. Số vòng đề can đã bán đi là:

$(22,45 - 6,25) : 0,06 = 270$.

Chu vi một vòng đề can bán kính r là chiều dài của vòng đề can đó. Nó bằng $L_r = 2\pi r$.

Chiều dài L của tấm đề can đã bán bằng $L = L_1 + L_2 + ... + L_{270}$ với L_1 là độ dài vòng đầu tiên của cuộn đề can, bán kính là $r_1 = 22,45$ cm. L_1 cũng chính là chu vi của đường tròn bán kính $r_1 = 22,45$ cm $\Rightarrow L_1 = 2\pi \cdot r_1$. Vòng thứ 2, bán kính giảm đi $0,06$ cm do đó nó sẽ có bán kính bằng $r_2 = 22,45 - 0,06 = 22,39$ cm, L_2 cũng chính là chu vi của đường tròn bán kính $r_2 = 22,39$ cm $\Rightarrow L_1 = 2\pi \cdot r_1$.

Suy ra $L = 2\pi r_1 + 2\pi r_2 + ... + 2\pi r_{270} = 2\pi\left(r_1 + r_2 + ... + r_{270}\right)$.

Trong đó r_1, r_2, $\ldots$, r_{270} là một cấp số cộng có $u_1 = 22,45$; $d = -0,06$.

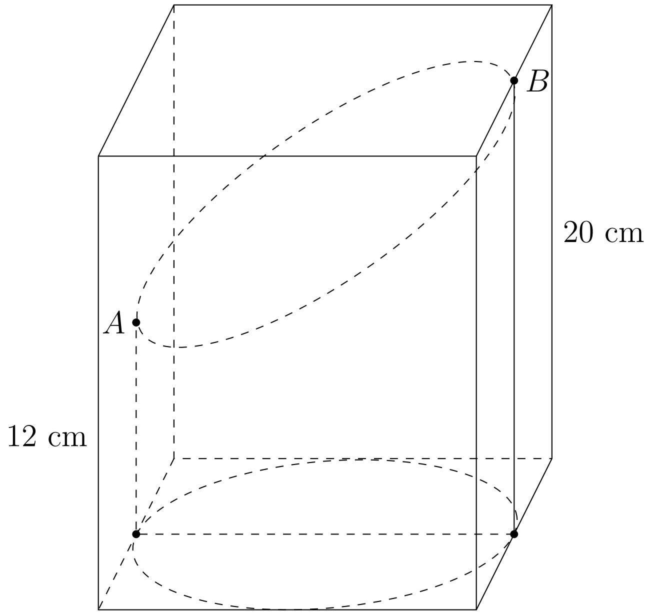
Suy ra $u_{270} = u_1 + 269d = 22,45 - 269 \cdot 0,06 = 6,25 + 0,06 = 6,31$ (cm).

Tổng $r_1 + r_2 + \ldots + r_{270} = \dfrac{(r_1 + r_{270}) \cdot 270}{2} = \dfrac{(22,45 + 6,31)\,270}{2} = 3882,6$ (cm).

Suy ra $L = 2\pi \cdot 3882,6 \approx 24382$ (cm).

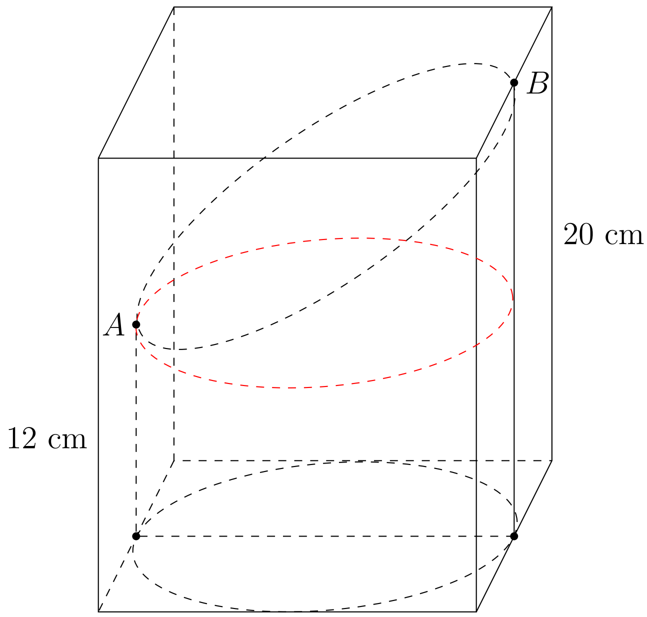
Chọn đáp án A □

Câu 15. Một khúc gỗ hình trụ có bán kính R bị cắt bởi một mặt phẳng không song song với đáy ta được thiết diện là một hình elip. Khoảng cách từ điểm A đến mặt đáy là 12 cm, khoảng cách từ điểm B đến mặt đáy là 20 cm. Đặt khúc gỗ đó vào trong hình hộp chữ nhật có chiều cao bằng 20 cm chứa đầy nước sao cho đường tròn đáy của khúc gỗ tiếp xúc với các cạnh đáy của hình hộp chữ nhật. Sau đó, người ta đo lượng nước còn lại trong hình hộp chữ nhật là 2 lít. Tính bán kính của khúc gỗ (giả sử khúc gỗ không thấm nước và kết quả làm tròn đến phần hàng chục).



(A) $R = 5,2$ cm. (B) $R = 4,8$ cm. (C) $R = 6,4$ cm. (D) $R = 8,2$ cm.

Lời giải.



Gọi bán kính đáy hình trụ là R.

Gọi V_1, V_2 lần lượt là thể tích hình hộp chữ nhật và khối gỗ.

Ta có $V_1 = B \cdot h = 4R^2 \cdot 20 = 80R^2$.

Chia khối gỗ làm hai phần bằng một mặt phẳng qua A và song song đáy.

Ta có $V_2 = \pi R^2 \cdot h_1 + \dfrac{1}{2}\pi R^2 \cdot (h - h_1) = 16\pi R^2$.

h_1 là khoảng cách từ điểm A đến mặt đáy, h khoảng cách từ điểm B đến mặt đáy.

Thể tích nước còn lại là

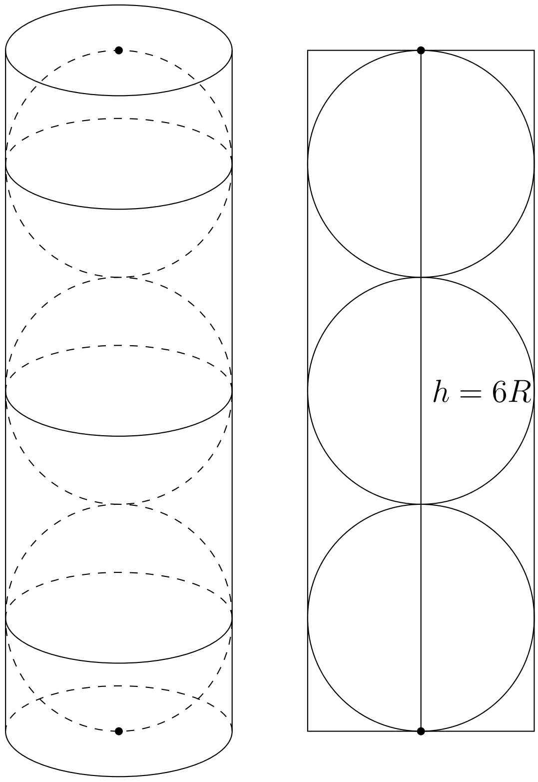
$V = V_1 - V_2 = 16R^2 (5 - \pi) = 2000 \Rightarrow R \approx 8,2$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 16. Một hộp đựng bóng tennis có dạng hình trụ. Biết rằng hộp chứa vừa khít ba quả bóng tennis được xếp theo chiều dọc, các quả bóng tennis có kích thước như nhau. Thể tích phần không gian còn trống chiếm tỉ lệ $a\%$ so với hộp đựng bóng tennis. Số a gần đúng với số nào sau đây?

(A) 50. (B) 66. (C) 30. (D) 33.

Lời giải.



Đặt h, R lần lượt là đường cao và bán kính hình tròn đáy của hộp đựng bóng tennis.

Dễ thấy mỗi quả bóng tennis có cùng bán kính R với hình tròn đáy của hộp đựng bóng tennis và $h = 6R$.

Tổng thể tích của ba quả bóng là $V_1 = 3 \cdot \dfrac{4}{3}\pi R^3 = 4\pi R^3$.

Thể tích của hình trụ (hộp đựng bóng) là $V_0 = \pi R^2 h = 6\pi R^3$.

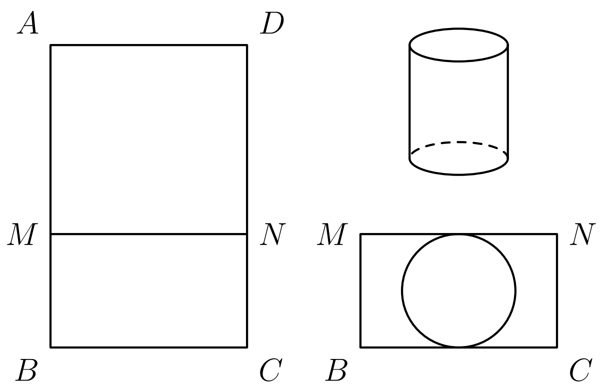
Thể tích phần còn trống của hộp đựng bóng là $V_2 = V_0 - V_1 = 2\pi R^3$.

Khi đó tỉ lệ phần không gian còn trống so với hộp đựng bóng là $\dfrac{V_2}{V_0} = \dfrac{1}{3} \approx 0,33$.

Suy ra $a \approx 33$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 17. Sử dụng mảnh inox hình chữ nhật $ABCD$ có diện tích bằng $1\,\mathrm{m}^2$ và cạnh $BC = x\,(\mathrm{m})$ để làm một thùng đựng nước có đáy, không có nắp theo quy trình như sau: Chia hình chữ nhật $ABCD$ thành hai hình chữ nhật $ADNM$ và $BCNM$, trong đó phần hình chữ nhật $ADNM$ được gò thành phần xung quanh hình trụ có chiều cao bằng AM; phần hình chữ nhật $BCNM$ được cắt ra một hình tròn để làm đáy của hình trụ trên (phần inox còn thừa được bỏ đi). Tính gần đúng giá trị x để thùng nước trên có thể tích lớn nhất (coi như các mép nối không đáng kể).



(A) 1,37 m. (B) 1,02 m. (C) 0,97 m. (D) 1 m.

Lời giải.

Ta có $AB \cdot BC = 1 \Rightarrow AB = \dfrac{1}{BC} = \dfrac{1}{x}$.

Gọi R là bán kính đáy hình trụ inox gò được, ta có chu vi hình tròn đáy bằng $BC = x$.

Do đó $2\pi R = x \Leftrightarrow R = \dfrac{x}{2\pi}$; $BM = 2R = \dfrac{x}{\pi} \Rightarrow AM = AB - BM = \dfrac{1}{x} - \dfrac{x}{\pi}$.

Thể khối trụ inox gò được là $V = \pi R^2 h = \pi \left(\dfrac{x}{2\pi}\right)^2 \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{x}{\pi}\right) = \dfrac{1}{4\pi^2} x\left(\pi - x^2\right)$.

Xét hàm số $f(x) = x\left(\pi - x^2\right), x > 0$. Ta có $f'(x) = \pi - 3x^2$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \sqrt{\dfrac{\pi}{3}} \\ x = -\sqrt{\dfrac{\pi}{3}} \text{ (loại)} \end{array}\right.$.

Ta có bảng biến thiên

x	0		$\sqrt{\dfrac{\pi}{3}}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	$\dfrac{2\pi\sqrt{3\pi}}{9}$	$\searrow$	

Từ bảng biến thiên ta suy ra $\max\limits_{(0;+\infty)} f(x) = f\left(\sqrt{\dfrac{\pi}{3}}\right) = \dfrac{2\pi\sqrt{3\pi}}{9}$.

Từ đó ta có thể tích V lớn nhất khi và chỉ khi $f(x)$ lớn nhất, khi đó $x = \sqrt{\dfrac{\pi}{3}} \approx 1{,}02$ (m).

Chọn đáp án (B) □

Câu 18. Một đại lý xăng dầu cần làm một cái bồn dầu hình trụ bằng tôn có thể tích $16\pi\ (\mathrm{m}^3)$. Tìm bán kính đáy r của hình trụ sao cho hình trụ được làm ra ít tốn nguyên vật liệu nhất.

(A) 0,8 m. (B) 1,2 m. (C) 2 m. (D) 2,4 m.

Lời giải.

Để ít tốn nguyên vật liệu nhất thì diện tích toàn phần S_{tp} phải nhỏ nhất.

Gọi h $(h > 0)$ là chiều cao của bồn dầu. Ta có $S_{\text{tp}} = 2\pi r^2 + 2\pi r h$.

Mặt khác, theo giả thiết $V = 16\pi \Leftrightarrow \pi r^2 h = 16\pi \Leftrightarrow h = \dfrac{16}{r^2}$.

Khi đó $S_{\text{tp}} = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot \dfrac{16}{r^2} = 2\pi\left(r^2 + \dfrac{16}{r}\right) = 2\pi\left(r^2 + \dfrac{8}{r} + \dfrac{8}{r}\right)$.

Áp dụng BĐT Cauchy cho 3 số dương $r^2, \frac{8}{r}, \frac{8}{r}$ ta được $r^2 + \frac{8}{r} + \frac{8}{r} \geq 3\sqrt[3]{r^2 \cdot \frac{8}{r} \cdot \frac{8}{r}} = 12$.

Do đó $S_{\text{tp}} \geq 24\pi$. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow r^2 = \frac{8}{r} \Leftrightarrow r^3 = 8 \Leftrightarrow r = 2$.

Vậy để ít tốn nguyên vật liệu nhất thì $r = 2\,(\text{m})$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 19. Anh H dự định làm một cái thùng đựng dầu hình trụ bằng sắt có nắp đậy thể tích $12\,\text{m}^3$. Chi phí làm mỗi m^2 đáy là 400 ngàn đồng, mỗi m^2 nắp là 200 ngàn đồng, mỗi m^2 mặt xung quanh là 300 ngàn đồng. Để chi phí làm thùng là ít nhất thì anh H cần chọn chiều cao của thùng gần nhất với số nào sau đây? (Xem độ dày của tấm sắt làm thùng là không đáng kể).

(A) 1,24 m. (B) 1,25 m. (C) 2,50 m. (D) 2,48 m.

Lời giải.

Gọi bán kính đáy của hình trụ là R. Ta có $V = \pi R^2 h \Rightarrow h = \frac{12}{\pi R^2}$.

Suy ra chi phí (đơn vị ngàn đồng) làm thùng

$$\begin{aligned} C &= \pi R^2 \cdot 400 + \pi R^2 \cdot 200 + 2\pi R h \cdot 300 \\ &= 600\left(\pi R^2 + \frac{12}{R}\right) = 600\left(\pi R^2 + \frac{6}{R} + \frac{6}{R}\right) \\ &\geq 600.3\sqrt[3]{\pi R^2 . \frac{6}{R} . \frac{6}{R}} = 1800\sqrt[3]{36\pi}. \end{aligned}$$

Dẫn đến giá trị nhỏ nhất của C là $1800\sqrt[3]{36\pi}$, đạt được khi và chỉ khi $R^2 = \frac{6}{R} \Leftrightarrow R = \sqrt[3]{\frac{6}{\pi}}$.

Vậy để chi phí nhỏ nhất thì chiều cao của hình trụ là $h = \frac{12}{\sqrt[3]{36\pi}} \approx 2{,}48\,\text{m}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 20. Người ta cần làm một cái bồn chứa dạng hình trụ có thể tích 1000 lít bằng inox để chứa nước, tính bán kính R của hình trụ đó sao cho diện tích toàn phần của bồn chứa có giá trị nhỏ nhất.

(A) $R = \sqrt[3]{\frac{2}{\pi}}$. (B) $R = \sqrt[3]{\frac{1}{\pi}}$. (C) $R = \sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}$. (D) $R = \sqrt[3]{\frac{3}{2\pi}}$.

Lời giải.

Ta có 1000 lít $= 1\,\text{m}^3$.

Gọi h là chiều cao của hình trụ ta có $V = \pi R^2 h = 1 \Rightarrow h = \frac{1}{\pi R^2}$.

Diện tích toàn phần là

$$\begin{aligned} S_{\text{tp}} &= 2\pi R^2 + 2\pi R h = 2\pi R^2 + 2\pi R \cdot \frac{1}{\pi R^2} = 2\pi R^2 + \frac{2}{R} \\ &= 2\left(\pi R^2 + \frac{1}{2R} + \frac{1}{2R}\right) \geq 2.3\sqrt[3]{\pi R^2 . \frac{1}{2R} . \frac{1}{2R}} = 6\sqrt[3]{\frac{\pi}{4}} \end{aligned}$$

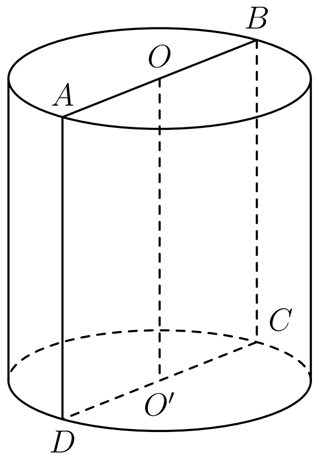
Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\pi R^2 = \frac{1}{2R} \Leftrightarrow R = \sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 21. Thiết diện của hình trụ và mặt phẳng chứa trục của hình trụ là hình chữ nhật có chu vi bằng 12. Giá trị lớn nhất của thể tích khối trụ là

(A) 16π. (B) 32π. (C) 8π. (D) 64π.

Lời giải.



Từ hình vẽ ta có $ABCD$ là hình chữ nhật, gọi chiều cao của hình trụ là h và bán kính đáy của hình trụ là r, theo giả thiết ta có $2(h+2r)=12 \Leftrightarrow h+2r=6$.

Thể tích của khối trụ tương ứng là $V=\pi r^2 h$.

Theo bất đẳng thức Cauchy ta có $r+r+h \geq 3\sqrt[3]{r^2.h} \Rightarrow V=\pi r^2 h \leq \pi \cdot \left(\dfrac{2r+h}{3}\right)^3 = 8\pi$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $r=h=2$.

Vậy giá trị lớn nhất của thể tích khối trụ là 8π.

Chọn đáp án (C) □

Câu 22. Cần sản xuất một vỏ hộp sữa hình trụ có thể tích V cho trước. Để tiết kiệm vật liệu nhất thì bán kính đáy phải bằng

(A) $\sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$. (B) $\sqrt[3]{\dfrac{V}{2}}$. (C) $\sqrt[3]{\dfrac{V}{\pi}}$. (D) $\sqrt[3]{\dfrac{V}{3\pi}}$.

Lời giải.

Gọi h, r là chiều cao và bán kính đường tròn đáy của hình trụ. Ta có $V=\pi r^2 h \Leftrightarrow h=\dfrac{V}{\pi r^2}$.

Để tiết kiệm vật liệu nhất thì diện tích toàn phần nhỏ nhất.

Ta có $S_{\text{tp}}=2\pi r^2+2\pi rh=2\pi r^2+2\pi r\dfrac{V}{\pi r^2}=2\pi r^2+\dfrac{2V}{r}=2\pi r^2+\dfrac{V}{r}+\dfrac{V}{r}$.

Áp dụng BĐT AM - GM cho ba số $2\pi r^2, \dfrac{V}{r}, \dfrac{V}{r}$ ta có $S_{tp} \geq 3\sqrt[3]{2\pi r^2 \cdot \dfrac{V}{r} \cdot \dfrac{V}{r}} = 3\sqrt[3]{\dfrac{2\pi V^2}{r}}$ không đổi.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $2\pi r^2=\dfrac{V}{r} \Leftrightarrow r=\sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 23. Trong các hình trụ có diện tích toàn phần bằng $1000\,\text{cm}^2$ thì hình trụ có thể tích lớn nhất là bao nhiêu cm^3?

(A) 2428. (B) 2532. (C) 2612. (D) 2740.

Lời giải.

Đặt $S = 1000$ là diện tích toàn phần của hình trụ. Ta có $S = 2\pi Rh + 2\pi R^2 \Rightarrow Rh + R^2 = \dfrac{S}{2\pi}$.

Vậy thể tích khối trụ là $V = \pi R^2 h = \pi R\left(\dfrac{S}{2\pi} - R^2\right) = \dfrac{S}{2}R - \pi R^3$.

Xét hàm số $f(R) = \dfrac{S}{2}R - \pi R^3, R > 0$. Ta có $f'(R) = \dfrac{S}{2} - 3\pi R^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} R = \sqrt{\dfrac{S}{6\pi}} \\ R = -\sqrt{\dfrac{S}{6\pi}} \text{ (loại)} \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:

R	0		$\sqrt{\dfrac{S}{6\pi}}$		$+\infty$
$f'(R)$		$+$	0	$-$	
$f(R)$		$\nearrow$	$f\left(\sqrt{\dfrac{S}{6\pi}}\right)$	$\searrow$	

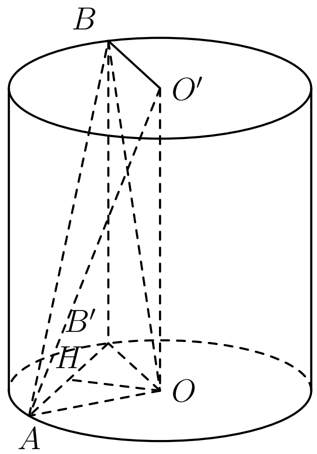
Từ bảng biến thiên ta có $V_{\max} = \dfrac{S}{2}R - \pi R^3 = \dfrac{1000}{2}\sqrt{\dfrac{1000}{6\pi}} - \pi\sqrt{\dfrac{1000}{6\pi}}^3 \approx 2428$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 24. Cho hình trụ có đáy là hai đường tròn tâm O và O', bán kính đáy bằng chiều cao và bằng $2a$. Trên đường tròn đáy có tâm O lấy điểm A, trên đường tròn tâm O' lấy điểm B. Đặt α là góc giữa AB và đáy. Biết rằng thể tích khối tứ diện $OO'AB$ đạt giá trị lớn nhất. Khẳng định nào sau đây đúng?

(A) $\tan\alpha = \sqrt{2}$.
(B) $\tan\alpha = 1$.
(C) $\tan\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.
(D) $\tan\alpha = \dfrac{1}{2}$.

Lời giải.



Gọi B' là hình chiếu của B trên mặt phẳng chứa đường tròn (O) , khi đó AB' là hình chiếu của AB trên mặt phẳng chứa đường tròn (O) .

Suy ra $\left(\widehat{AB, (OAB')}\right) = \left(\widehat{AB, AB'}\right) = \widehat{BAB'} = \alpha$, $\alpha \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Xét tam giác vuông ABB' vuông tại B' có $\tan\widehat{BAB'} = \dfrac{BB'}{AB'} \Rightarrow AB' = \dfrac{BB'}{\tan\alpha} = \dfrac{2a}{\tan\alpha}$.

Gọi H là trung điểm AB' , khi đó $OH \perp AB'$ và

$$OH=\sqrt{OA^2-AH^2}=\sqrt{R^2-\frac{AB'^2}{4}}=\sqrt{4a^2-\frac{a^2}{\tan^2\alpha}}=a\sqrt{4-\frac{1}{\tan^2\alpha}}.$$

Lại có $S_{\triangle OAB'}=\frac{1}{2}OH.AB'=\frac{1}{2}.OB'.\mathrm{d}\left(A,OB'\right)$. Suy ra

$$d\left(A,OB'\right)=\frac{OH.AB'}{OB'}=\frac{a\sqrt{4-\frac{1}{\tan^2\alpha}}\cdot\frac{2a}{\tan\alpha}}{2a}=\frac{a}{\tan\alpha}\sqrt{4-\frac{1}{\tan^2\alpha}}=\mathrm{d}\left(A,\left(OO'BB'\right)\right).$$

Vậy nên

$$\begin{aligned}V_{A.OO'B}&=\frac{1}{3}\mathrm{d}\left(A,\left(OO'BB'\right)\right).S_{\triangle OO'B}\\&=\frac{1}{3}\cdot\frac{a}{\tan\alpha}\sqrt{4-\frac{1}{\tan^2\alpha}}\cdot\frac{1}{2}\cdot 2a\cdot 2a=\frac{2a^3}{3}\cdot\frac{1}{\tan\alpha}\sqrt{4-\frac{1}{\tan^2\alpha}}.\end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$\frac{1}{\tan\alpha}\sqrt{4-\frac{1}{\tan^2\alpha}}\le\frac{\frac{1}{\tan^2\alpha}+4-\frac{1}{\tan^2\alpha}}{2}=2.$$

Do đó $V_{A.OO'B}\le\frac{2a^3}{3}\cdot 2=\frac{4a^3}{3}$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\frac{1}{\tan\alpha}=\sqrt{4-\frac{1}{\tan^2\alpha}}\Leftrightarrow\frac{1}{\tan^2\alpha}=4-\frac{1}{\tan^2\alpha}\Leftrightarrow\tan^2\alpha=\frac{1}{2}$.

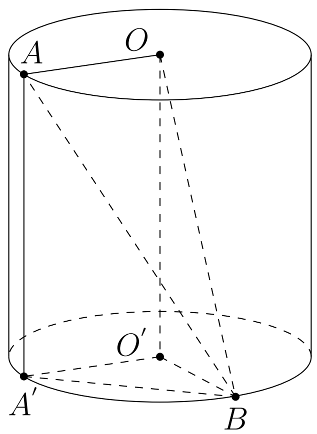
Vì $\alpha\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ nên $\tan\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}}$ do $\alpha\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$.

Chọn đáp án C □

Câu 25. Cho hình trụ có đáy là hai đường tròn tâm O và O', bán kính đáy bằng chiều cao và bằng $2a$. Trên đường tròn đáy có tâm O lấy điểm A, trên đường tròn tâm O' lấy điểm B. Đặt α là góc giữa AB và đáy. Tính $\tan\alpha$ khi thể tích khối tứ diện $OO'AB$ đạt giá trị lớn nhất.

A $\tan\alpha=\frac{1}{2}$. B $\tan\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}}$. C $\tan\alpha=1$. D $\tan\alpha=\sqrt{2}$.

Lời giải.



Gọi A' là hình chiếu của A trên đường tròn tâm O' khi đó ta có

$V_{OO'AB}=\frac{1}{2}V_{B.OO'A'A}=\frac{1}{6}\cdot S_{OO'A'A}\cdot\mathrm{d}\left(B,\left(OO'A'A\right)\right)$ với $\mathrm{d}\left(B,\left(OO'A'A\right)\right)=OB\cdot\sin\widehat{BO'A'}$.

Do $S_{OO'A'A}$ là hằng số nên để thể tích khối tứ diện $OO'AB$ đạt giá trị lớn nhất thì $\mathrm{d}\left(B,(OO'A'A)\right)$ là lớn nhất hay $\widehat{BO'A'} = 90^0$.

Khi đó ta có $\tan\alpha = \tan\widehat{ABA'} = \dfrac{AA'}{A'B} = \dfrac{2a}{2a\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Chọn đáp án B □

Câu 26. Một xí nghiệp chế biến sữa bò muốn sản xuất lon đựng sữa có dạng hình trụ bằng thiếc có thể tích không đổi. Để giảm giá một lon sữa khi bán ra thị trường người ta cần chế tạo lon sữa có kích thước sao cho ít tốn kém vật liệu. Để thỏa mãn yêu cầu đặt ra (diện tích toàn phần bé nhất), người ta phải thiết kế lon sữa thỏa mãn điều kiện nào trong các điều kiện sau:

A. Chiều cao bằng đường kính của đáy.
B. Chiều cao bằng bán kính của đáy.
C. Chiều cao bằng 3 lần bán kính của đáy.
D. Chiều cao bằng bình phương bán kính của đáy.

Lời giải.

Gọi V , r , h , ℓ lần lượt là thể tích, bán kính đáy, đường cao, đường sinh của lon sữa.

Ta có: $V = \pi.r^2.h \Rightarrow h = \dfrac{V}{\pi.r^2}$ và $h = \ell$.

Mặt khác: $V = \pi.r^2.h \Rightarrow h = \dfrac{V}{\pi.r^2}$.

$S_{tp} = 2\pi r\ell + 2\pi r^2 = 2\pi r \cdot \dfrac{V}{\pi.r^2} + 2\pi r^2 = \dfrac{2V}{r} + 2\pi r^2 = \dfrac{V}{r} + \dfrac{V}{r} + 2\pi r^2$.

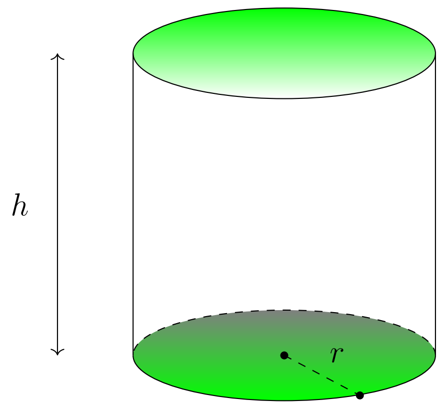
Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho 3 số dương ta được:

$S_{tp} \geq 3\sqrt[3]{\dfrac{V}{r}\cdot\dfrac{V}{r}\cdot 2\pi r^2} = 3\sqrt[3]{2\pi V^2}$.

Đẳng thức xảy ra khi $\dfrac{V}{r} = 2\pi r^2 \Leftrightarrow \dfrac{V}{\pi} = 2r^3$. Do $h = \dfrac{V}{\pi.r^2}$ nên $2r = h$.

Chọn đáp án A □

Câu 27. Người ta thiết kế một thùng chứa hình trụ (như hình vẽ) có thể tích V nhất định. Biết rằng giá của vật liệu làm mặt đáy và nắp của thùng bằng nhau và đắt gấp ba lần so với giá vật liệu để làm mặt xung quanh của thùng (chi phí cho mỗi đơn vị diện tích). Gọi chiều cao của thùng là h và bán kính đáy là r. Tính tỉ số $\dfrac{h}{r}$ sao cho chi phí vật liệu sản xuất thùng là nhỏ nhất?



A. $\dfrac{h}{r} = \sqrt{2}$. B. $\dfrac{h}{r} = 2$. C. $\dfrac{h}{r} = 6$. D. $\dfrac{h}{r} = 3\sqrt{2}$.

Lời giải.

Gọi x là giá vật liệu làm mặt xung quanh (cho mỗi đơn vị diện tích).

Thể tích của thùng $V = \pi r^2.h$ không đổi. Suy ra $h = \dfrac{V}{\pi r^2}$. (*)

Khi đó, chi phí để làm thùng bằng $P = S_{xq}.x + 2S_{\text{đáy}}.3x = 2\pi rh.x + 2\pi r^2.3x = 2\pi x\left(3r^2 + rh\right)$.

$\Rightarrow P = 2\pi x\left(3r^2 + \dfrac{V}{\pi r}\right) = 2\pi x\left(3r^2 + \dfrac{V}{2\pi r} + \dfrac{V}{2\pi r}\right) \geq 6\pi x.\sqrt[3]{\dfrac{3V^2}{4\pi^2}}$.

$P = 6\pi x.\sqrt[3]{\dfrac{3V^2}{4\pi^2}} \Leftrightarrow 3r^2 = \dfrac{V}{2\pi r} \Leftrightarrow r^3 = \dfrac{V}{6\pi}$.

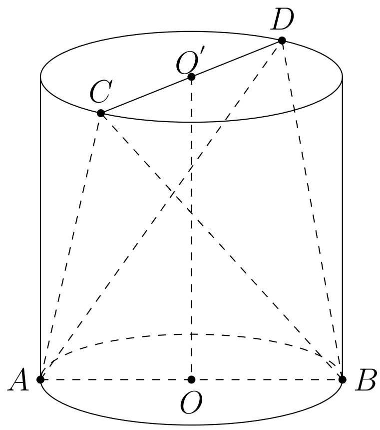
Từ (*) suy ra $\dfrac{h}{r} = \dfrac{V}{\pi r^3} = \dfrac{V}{\pi\dfrac{V}{6\pi}} = 6$.

Chọn đáp án C ☐

Câu 28. Một hình trụ có độ dài đường cao bằng 3, các đường tròn đáy lần lượt là $(O; 1)$ và $(O'; 1)$. Giả sử AB là đường kính cố định của $(O; 1)$ và CD là đường kính thay đổi trên $(O'; 1)$. Tìm giá trị lớn nhất $V_{\max}$ của thể tích khối tứ diện $ABCD$.

Ⓐ $V_{\max} = 2$. Ⓑ $V_{\max} = 6$. Ⓒ $V_{\max} = \dfrac{1}{2}$. Ⓓ $V_{\max} = 1$.

Lời giải.



Gọi α là số đo góc giữa AB và CD.

Ta có $V_{ABCD} = \dfrac{1}{6}AB.CD.\mathrm{d}\left(AB, CD\right).\sin\alpha = \dfrac{1}{6}.2.2.3.\sin\alpha = 2\sin\alpha \leq 2$.

Do đó V_{ABCD} đạt giá trị lớn nhất là 2, đạt được khi $AB \perp CD$.

Chọn đáp án A ☐

Câu 29. Cần sản xuất một vỏ hộp sữa hình trụ có thể tích V cho trước. Để tiết kiệm vật liệu nhất thì bán kính đáy phải bằng

Ⓐ $\sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$. Ⓑ $\sqrt[3]{\dfrac{V}{2}}$. Ⓒ $\sqrt[3]{\dfrac{V}{\pi}}$. Ⓓ $\sqrt[3]{\dfrac{V}{3\pi}}$.

Lời giải.

Giả sử vỏ hộp sữa có bán kính đáy là R, chiều cao là h $(R, h > 0)$.

Vì thể tích vỏ hộp là V nên ta có $V = \pi R^2 h \Rightarrow h = \dfrac{V}{\pi R^2}$.

Để tiết kiệm vật liệu nhất thì hình trụ vỏ hộp sữa phải có diện tích toàn phần

$S_{tp} = 2\pi Rh + 2\pi R^2 = \dfrac{2V}{R} + 2\pi R^2$ nhỏ nhất.

Cách 1:

Ta có $S_{tp}=\dfrac{2V}{R}+2\pi R^2=\dfrac{V}{R}+\dfrac{V}{R}+2\pi R^2\geq 3\sqrt[3]{2\pi V^2}$.

S_{tp} đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi $\dfrac{V}{R}=2\pi R^2\Leftrightarrow R=\sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$.

Cách 2:

Xét hàm số $f(R)=\dfrac{2V}{R}+2\pi R^2$ trên khoảng $(0;+\infty)$.

Ta có $f'(R)=-\dfrac{2V}{R^2}+4\pi R=\dfrac{4\pi R^3-2V}{R^2}$. $f'(R)=0\Leftrightarrow R=\sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$.

Bảng biến thiên:

R	0		$\sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$		$+\infty$
$f'(R)$		$-$	0	$+$	
$f(R)$		$\searrow$		$\nearrow$	

Từ BBT ta thấy $f(R)$ đạt nhỏ nhất khi $R=\sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$.

Vậy để tiết kiệm vật liệu nhất thì bán kính đáy vỏ hộp phải bằng $\sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$.

Chọn đáp án A □

Câu 30. Thiết diện của hình trụ và mặt phẳng chứa trục của hình trụ là hình chữ nhật có chu vi là 12cm. Giá trị lớn nhất của thể tích khối trụ là

A. $64\pi\,\text{cm}^3$. B. $16\pi\,\text{cm}^3$. C. $8\pi\,\text{cm}^3$. D. $32\pi\,\text{cm}^3$.

Lời giải.

Gọi chiều cao và bán kính đáy của hình trụ lần lượt là x,y $(x,\ y>0)$.

Khi đó ta có thiết diện của hình trụ và mặt phẳng chứa trục của hình trụ là hình chữ nhật có kích thước lần lượt là x , $2y$.

Theo giả thiết ta có $2.(x+2y)=12\Leftrightarrow x+2y=6$.

Cách 1.

Thể tích khối trụ: $V=\pi y^2.x=\pi y^2(6-2y)=2\pi\left(-y^3+3y^2\right)$.

Vì $x+2y=6\Rightarrow 0<2y<6\Leftrightarrow 0<y<3$.

Xét hàm số $f(y)=-y^3+3y^2$ trên khoảng $(0;3)$

Ta có $f'(y)=-3y^2+6y\Rightarrow f'(y)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=0\\y=2\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:

y	0		2		3
$f'(y)$		$+$	0	$-$	
$f(y)$		$\nearrow$	4	$\searrow$	

Suy ra $\max\limits_{(0;3)} f(y) = f(2) = 4$.

Vậy giá trị lớn nhất của thể tích khối trụ bằng $2\pi.4 = 8\pi \text{ cm}^3$.

Cách 2.

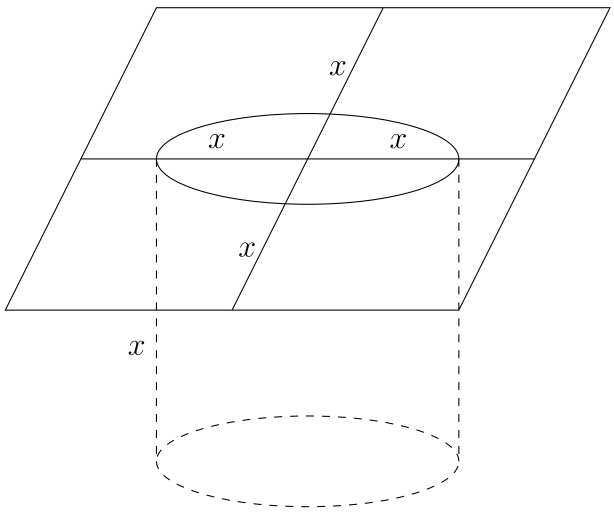
Thể tích khối trụ: $V = \pi y^2 x = \pi.x.y.y \leq \pi\left(\dfrac{x+y+y}{3}\right)^3 = \pi\left(\dfrac{x+2y}{3}\right)^3 = \pi\left(\dfrac{6}{3}\right)^3 = 8\pi$.

Dấu "=" xảy ra khi $x = y = 2$.

Vậy giá trị lớn nhất của thể tích khối trụ bằng $V = 8\pi \text{ cm}^3$.

Chọn đáp án C □

Câu 31. Trên một mảnh đất hình vuông có diện tích 81m^2 người ta đào một cái ao nuôi cá hình trụ (như hình vẽ) sao cho tâm của hình tròn đáy trùng với tâm của mảnh đất. Ở giữa mép ao và mép mảnh đất người ta để lại một khoảng đất trống để đi lại, biết khoảng cách nhỏ nhất giữa mép ao và mép mảnh đất là x(m). Giả sử chiều sâu của ao cũng là x(m). Tính thể tích lớn nhất V của ao.



(A) $V = 13,5\pi\ (m^3)$. (B) $V = 27\pi\ (m^3)$. (C) $V = 36\pi\ (m^3)$. (D) $V = 72\pi\ (m^3)$.

Lời giải.

Ta có: Đường kính đáy của hình trụ là $9 - 2x \Rightarrow$ Bán kính đáy hình trụ là $\dfrac{9-2x}{2}$.

Khi đó ta có thể tích ao là $V = \pi\left(\dfrac{9-2x}{2}\right)^2 x = \dfrac{\pi}{4}(9-2x)^2 x = \dfrac{\pi}{4}f(x)$

Xét hàm số $f(x) = (9-2x)^2 x = 4x^3 - 36x^2 + 81x$ với $0 < x < \dfrac{9}{2}$ ta có:

$f'(x) = 12x^2 - 72x + 81 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{9}{2} \\ x = \dfrac{3}{2} \end{array}\right.$

BBT:

x	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{9}{2}$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$0 \nearrow$	54	$\searrow 0$

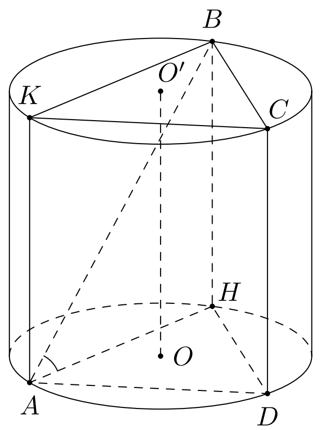
Dựa vào BBT ta thấy $f(x)_{\max} = 54 \Leftrightarrow x = \dfrac{3}{2}$. Khi đó $V_{\max} = \dfrac{\pi}{4}.54 = \dfrac{27\pi}{2} = 13,5\pi\,(\mathrm{m}^3)$.

Chọn đáp án A □

Câu 32. Cho hình trụ có đáy là hai đường tròn tâm O và O', bán kính đáy bằng chiều cao và bằng $2a$. Trên đường tròn đáy có tâm O lấy điểm A, D sao cho $AD = 2\sqrt{3}a$; gọi C là hình chiếu vuông góc của D lên mặt phẳng chứa đường tròn (O'); trên đường tròn tâm O' lấy điểm B (AB chéo với CD). Đặt α là góc giữa AB và đáy. Tính $\tan\alpha$ khi thể tích khối tứ diện $CDAB$ đạt giá trị lớn nhất.

A $\tan\alpha = \sqrt{3}$. B $\tan\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. C $\tan\alpha = 1$. D $\tan\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải.



Gọi H là hình chiếu vuông góc của B lên mặt phẳng chứa đường tròn (O) .

Gọi K là hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng chứa đường tròn (O') .

Ta có $HAD.BKC$ là một hình lăng trụ đứng.

Ta có thể tích của tứ diện $CDAB$ là

$V_{ABCD} = \dfrac{1}{3}V_{HAD.BKC} = \dfrac{1}{3}\cdot 2a \cdot S_{\Delta HAD} = \dfrac{1}{3}\cdot 2a\cdot\dfrac{1}{2}\cdot AD\cdot(H;AD) = \dfrac{1}{3}\cdot 2a\cdot\dfrac{1}{2}\cdot 2a\sqrt{3}\cdot d\,(H;AD)$.

$(V_{ABCD})_{\max} \Leftrightarrow (d\,(H;AD))_{\max} \Leftrightarrow H$ là điểm chính giữa cung lớn $\overset{\frown}{AD}$ của đường tròn (O) (1).

Theo định lý sin ta có $\dfrac{AD}{\sin\widehat{AHD}} = 2\cdot 2a \Leftrightarrow \sin\widehat{AHD} = \dfrac{AD}{4a} = \dfrac{2\sqrt{3}a}{4a} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ nên $\widehat{AHD} = 60^\circ$.

Do đó (1) xảy ra khi ΔAHD đều $\Leftrightarrow AH = AD = 2\sqrt{3}a$.

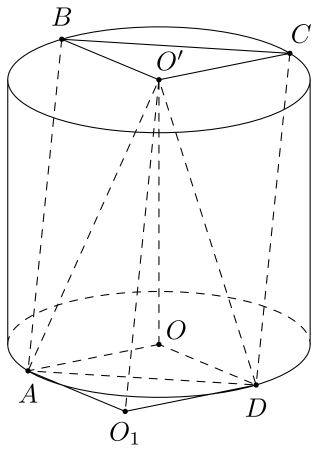
Suy ra $\tan\alpha = \tan\widehat{BAH} = \dfrac{BH}{AH} = \dfrac{2a}{2a\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Chọn đáp án D □

Câu 33. Cho hình trụ có đáy là hai đường tròn tâm O và O', bán kính đáy bằng chiều cao và bằng $2a$. Trên đường tròn đáy có tâm O lấy điểm A, D trên đường tròn tâm O' lấy điểm B, C sao cho $AB \parallel CD$ và AB không cắt OO'. Tính AD để thể tích khối chóp $O'.ABCD$ đạt giá trị lớn nhất.

A) $AD = 2\sqrt{2}a$. B) $AD = 4a$. C) $AD = \dfrac{4\sqrt{3}}{3}a$. D) $AD = \sqrt{2}a$.

Lời giải.



Kẻ đường thẳng qua O' song song với AB cắt mặt phẳng chứa đường tròn (O) tại O_1.

Lúc đó $AO_1D.BO'C$ là một hình lăng trụ chiều cao bằng $2a$.

Vì $AD = BC$ nên $S_{\Delta BO'C} = S_{\Delta OAD}$

Ta có thể tích của khối chóp $O'.ABCD$:

$V_{O'ABCD} = \dfrac{1}{3}V_{AO_1D.BO'C} = \dfrac{2}{3}\cdot 2a\cdot S_{\Delta BO'C} = \dfrac{2}{3}\cdot 2a\cdot S_{\Delta OAD} = \dfrac{2}{3}\cdot 2a\cdot\dfrac{1}{2}\cdot 2a\cdot 2a\cdot\sin\widehat{AOD} \le \dfrac{8a^3}{3}$.

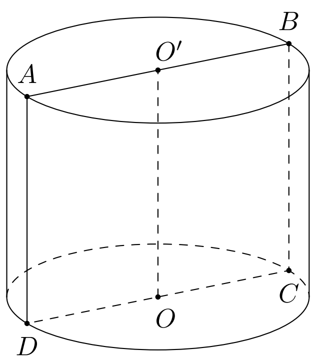
Vậy $V_{O'ABCD}$ đạt giá trị lớn nhất khi $\widehat{AOD} = 90^\circ \Leftrightarrow AD = 2\sqrt{2}a$.

Chọn đáp án A □

Câu 34. Một hình trụ có thiết diện qua trục là hình chữ nhật có chu vi bằng 12cm. Thể tích lớn nhất mà hình trụ có thể nhận được là

A) $16\pi\ (cm^3)$. B) $64\pi\ (cm^3)$. C) $32\pi\ (cm^3)$. D) $8\pi\ (cm^3)$.

Lời giải.



Giả sử hình trụ có bán kính đáy là a và chiều cao $h\,(a,h>0)$.

Thiết diện qua trục là hình chữ nhật $ABCD$ (như hình vẽ).

Theo giả thiết ta có $2\,(2a+h)=12 \Leftrightarrow h=6-2a \Rightarrow 0<a<3$ (vì $h>0$).

Thể tích khối trụ là: $V=\pi a^2 h=\pi a^2\,(6-2a)=2\pi a^2\,(3-a)$.

Xét hàm số: $f(a)=a^2\,(3-a) \Leftrightarrow f(a)=-a^3+3a^2,\ a\in(0;3)$.

Có $f'(a)=-3a^2+6a$; $f'(a)=0 \Leftrightarrow a=0$ hoặc $a=2$.

Bảng biến thiên

a	0		2		3
$f'(a)$		+	0	−	
$f(a)$	0	$\nearrow$	4	$\searrow$	0

Suy ra $\max\limits_{(0;3)} f(a)=f(2)=4$.

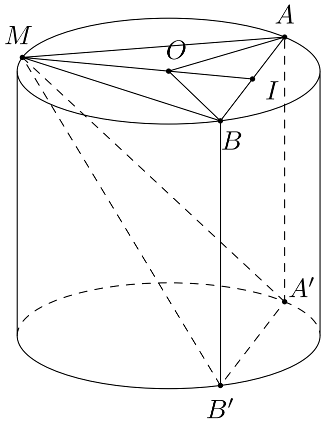
Vậy $V_{\max}=2\pi\cdot 4=8\pi\,(cm^3)$.

Chọn đáp án D □

Câu 35. Cho hình trụ (T) có bán kính đáy và chiều cao đều bằng R, hai đáy là hai hình tròn (O) và (O'). Gọi AA' và BB' là hai đường sinh bất kì của (T) và M là một điểm di động trên đường tròn (O). Thể tích lớn nhất của khối chóp $M.AA'B'B$ bằng bao nhiêu?

A. $\dfrac{3R^3\sqrt{3}}{4}$. B. $\dfrac{R^3\sqrt{3}}{4}$. C. $\dfrac{R^3\sqrt{3}}{3}$. D. $\dfrac{R^3\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.



Để tìm giá trị lớn nhất của thể tích của các khối chóp $M.AA'B'B$ ta chỉ cần xét các loại hình chóp $M.AA'B'B$ trong đó M là giao điểm của đường tròn (O) và đường trung trực của đoạn AB. Khi đó O thuộc đoạn MI (với I là trung điểm của AB).

Đặt $OI=x\ \ (0<x<R)$.

Khi đó $MI=R+x$ và $\begin{cases} MI\perp AB \\ MI\perp AA' \end{cases} \Rightarrow MI\perp(AA'B'B)$.

Ta có $AB = 2AI = 2\sqrt{OA^2 - OI^2} = 2\sqrt{R^2 - x^2}$.

Suy ra thể tích của khối chóp $M.AA'B'B$ là

$V_{M.AA'B'B} = \dfrac{1}{3} \cdot S_{AA'B'B} \cdot MI = \dfrac{1}{3}.AA' \cdot AB \cdot MI = \dfrac{2}{3}R\,(R+x)\sqrt{R^2 - x^2}$.

$\Rightarrow V^2_{M.AA'B'B} = \dfrac{4}{9}R^2(R+x)^2\left(R^2 - x^2\right)$.

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$(R+x)^2\left(R^2 - x^2\right) = \dfrac{1}{3}(R+x)(R+x)(R+x)(3R-3x)$

$\le \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{R+x+R+x+R+x+3R-3x}{4}\right)^4 = \dfrac{27R^4}{16}$.

Dấu "$=$" xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} R+x = 3R-3x \\ x \in (0;R) \end{cases} \Leftrightarrow x = \dfrac{R}{2}$.

Vậy $\max V = \dfrac{2}{3}R\left(R + \dfrac{R}{2}\right)\sqrt{R^2 - \left(\dfrac{R}{2}\right)^2} = \dfrac{R^3\sqrt{3}}{2}$.

Chọn đáp án D □

Câu 36. Một nhà máy sản xuất các hộp hình trụ kín cả hai đầu có thể tích V cho trước. Mối quan hệ giữa bán kính đáy R và chiều cao h của hình trụ để diện tích toàn phần của hình trụ nhỏ nhất là

A $h = R$. B $h = 3R$. C $h = 2R$. D $R = 2h$.

Lời giải.

Đặt $R = x$, điều kiện $x > 0$.

$V = \pi x^2 h \Rightarrow h = \dfrac{V}{\pi x^2} \Rightarrow \dfrac{h}{R} = \dfrac{V}{\pi x^3}$.

$S_{TP} = 2\pi R\,(h+R) = 2\pi x\left(\dfrac{V}{\pi x^2} + x\right) = \dfrac{2V}{x} + 2\pi x^2$.

Xét hàm số: $f(x) = \dfrac{2V}{x} + 2\pi x^2$ với $x > 0$.

Ta có: $f'(x) = -\dfrac{2V}{x^2} + 4\pi x = \dfrac{4\pi x^3 - 2V}{x^2}$.

Khi đó: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$.

Ta có bảng biến thiên

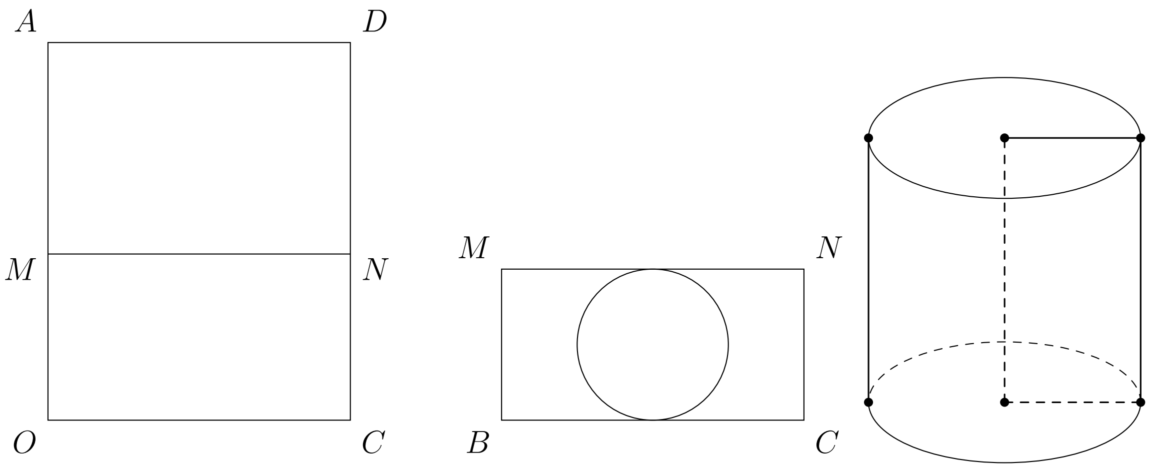
x	0		$\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f\left(\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}\right)$	$\nearrow$	$+\infty$

Từ BBT trên ta thấy S_{TP} nhỏ nhất khi $x = \sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$.

Khi đó, $\dfrac{h}{R} = \dfrac{V}{\pi\dfrac{V}{2\pi}} = 2 \Leftrightarrow h = 2R$.

Chọn đáp án D □

Câu 37. Sử dụng mảnh inox hình chữ nhật $ABCD$ có diện tích bằng $1\,\mathrm{m}^2$ và cạnh $BC = x\,(\mathrm{m})$ để làm một thùng đựng nước có đáy, không có nắp theo quy trình như sau: Chia hình chữ nhật $ABCD$ thành 2 hình chữ nhật $ADNM$ và $BCNM$, trong đó phần hình chữ nhật $ADNM$ được gò thành phần xung quanh hình trụ có chiều cao bằng AM ; phần hình chữ nhật $BCNM$ được cắt ra một hình tròn để làm đáy của hình trụ trên (phần inox thừa được bỏ đi) Tính gần đúng giá trị x để thùng nước trên có thể tích lớn nhất (coi như các mép nối không đáng kể).

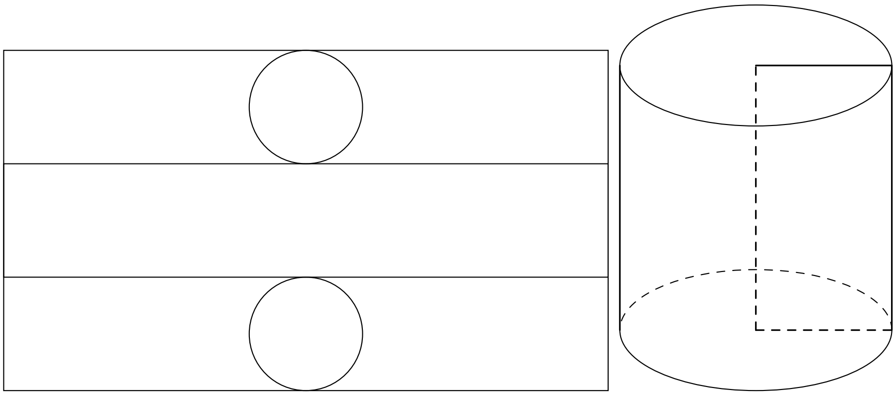


Ⓐ 0,97m. Ⓑ 1,37m. Ⓒ 1,12m. Ⓓ 1,02m.

Lời giải.

Ta có $AB.BC = 1 \Rightarrow AB = \dfrac{1}{BC} = \dfrac{1}{x}\,(\mathrm{m})$.
Gọi $r\,(\mathrm{m})$ là bán kính đáy hình trụ inox gò được, ta có chu vi hình tròn đáy bằng $BC = x\,(\mathrm{m})$.
Do đó $2\pi r = x \Leftrightarrow r = \dfrac{x}{2\pi}\,(\mathrm{m})$.
Như vậy $BM = 2r = \dfrac{x}{\pi} \Rightarrow AM = AB - BM = \dfrac{1}{x} - \dfrac{x}{\pi}\,(\mathrm{m})$.
Thể tích khối trụ inox gò được là $V = \pi r^2 h = \pi.\left(\dfrac{x}{2\pi}\right)^2.\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{x}{\pi}\right) = \dfrac{1}{4\pi^2}x\left(\pi - x^2\right)$.
Xét hàm số $f(x) = x\left(\pi - x^2\right)$ với $x > 0$.
$f'(x) = \pi - 3x^2$; $f'(x) = 0 \Rightarrow x = \sqrt{\dfrac{\pi}{3}}$;
$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \left(0; \sqrt{\dfrac{\pi}{3}}\right)$ và $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in \left(\sqrt{\dfrac{\pi}{3}}; +\infty\right)$.
Bởi vậy $f(x)$ đồng biến trên khoảng $\left(0; \sqrt{\dfrac{\pi}{3}}\right)$ và nghịch biến trên khoảng $\left(\sqrt{\dfrac{\pi}{3}}; +\infty\right)$.
Suy ra $\max\limits_{(0;+\infty)} f(x) = f\left(\sqrt{\dfrac{\pi}{3}}\right) = \dfrac{2\pi\sqrt{3\pi}}{9} \Rightarrow V_{\max} \Leftrightarrow f(x)_{\max} \Leftrightarrow x = \sqrt{\dfrac{\pi}{3}} \approx 1,02\,(\mathrm{m})$.
Chọn đáp án D □

Câu 38. Từ một tấm thép phẳng hình chữ nhật, người ta muốn làm một chiếc thùng đựng dầu hình trụ bằng cách cắt ra hai hình tròn bằng nhau và một hình chữ nhật (phần tô đậm) sau đó hàn kín lại, như trong hình vẽ dưới đây. Hai hình tròn làm hai mặt đáy, hình chữ nhật làm thành mặt xung quanh của thùng đựng dầu (vừa đủ). Biết rằng đường tròn đáy ngoại tiếp một tam giác có kích thước là $50cm$, $70cm$, $80cm$ (các mối ghép nối khi gò hàn chiếm diện tích không đáng kể. Lấy $\pi = 3{,}14$). Diện tích của tấm thép hình chữ nhật ban đầu gần nhất với số liệu nào sau đây?



(A) 6,8 (m^2). (B) 24,6 (m^2). (C) 6,15 (m^2). (D) 3,08 (m^2).

Lời giải.

Đổi: $50cm = 0{,}5m; 70cm = 0{,}7m; 80cm = 0{,}8m$.

Xét tam giác nội tiếp đường tròn đáy có kích thước lần lượt là $0,5m$; $0,7m$; $0,8m$ nên bán kính đường tròn đáy của thùng đựng dầu là

$R = \dfrac{0,5\cdot 0,7\cdot 0,8}{4\sqrt{1\left(1-0,5\right)\left(1-0,7\right)\left(1-0,8\right)}} = \dfrac{7\sqrt{3}}{30}$.

Ta có $h = 2R$

Diện tích hình chữ nhật ban đầu gấp 3 lần diện tích xung quanh của hình trụ.

Vậy $S = 3\cdot 2\pi Rh = 6\cdot 3,14\cdot 2.R^2 = 6\cdot 3,14\cdot 2\left(\dfrac{7\sqrt{3}}{30}\right)^2 = \dfrac{7693}{1250} = 6,1544\ (\mathrm{m}^2)$.

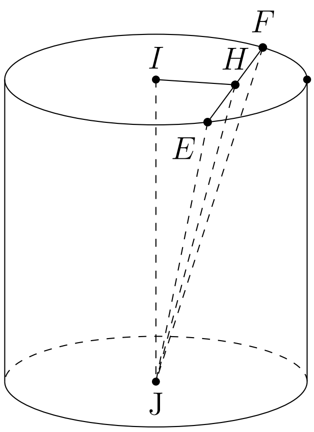
Chọn đáp án (D) □

Câu 39 (THPT Lê Thánh Tông-HCM-2022).

Cho hình trụ tròn xoay có hai đáy là hai hình tròn $\left(I;\sqrt{7}\right)$ và $\left(J;\sqrt{7}\right)$. Biết rằng tồn tại dây cung EF của đường tròn $\left(I;\sqrt{7}\right)$ sao cho tam giác JEF là tam giác đều và mặt phẳng (JEF) hợp với mặt đáy của hình trụ một góc bằng $60°$. Thể tích V của khối trụ đã cho là

(A) $V = 21\pi$. (B) $V = 7\sqrt{6}\pi$. (C) $V = 14\pi$. (D) $V = 28\pi$.

Lời giải.



Gọi H là trung điểm EF, có $\widehat{IHJ} = 60^\circ$.

Đặt $IJ = h$, tam giác vuông JIH có $\tan \widehat{JIH} = \dfrac{IJ}{IH} \Leftrightarrow IH = \dfrac{h}{\tan 60^\circ} = \dfrac{h\sqrt{3}}{3}$., và $\sin \widehat{JHI} = \dfrac{IJ}{JH} \Leftrightarrow JH = \dfrac{h}{\sin 60^\circ} = \dfrac{2h\sqrt{3}}{3}$.

Tam giác đều JEF có $JH = \dfrac{EF\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow EF = \dfrac{2JH}{\sqrt{3}} = 2.\dfrac{2h\sqrt{3}}{3\sqrt{3}} = \dfrac{4h}{3}$.

Tam giác vuông IHE có $IH^2 + HE^2 = IE^2 \Leftrightarrow \dfrac{h^2}{3} + \dfrac{4h^2}{9} = 7 \Leftrightarrow h = 3$.

Vậy $V_{(T)} = r^2 \cdot \pi \cdot h = 7\pi \cdot 3 = 21\pi$.

Chọn đáp án A □

Câu 40. Cho hình trụ có bán kính đáy bằng $a\sqrt{3}$. Cắt hình trụ bởi một mặt phẳng song song với trục, cách trục một khoảng bằng a ta được thiết diện là một hình vuông. Thể tích khối trụ đó bằng

(A) $2\pi a^3\sqrt{2}$. (B) $4\pi a^3\sqrt{2}$. (C) $6\pi a^3\sqrt{2}$. (D) $3\pi a^3\sqrt{2}$.

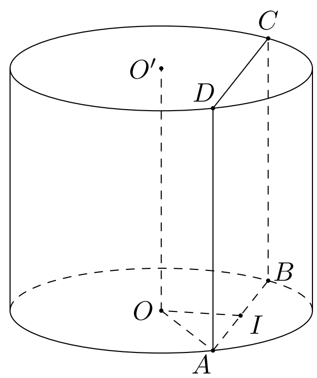
Lời giải.

Dựng $OI \perp AB$ khi đó I là trung điểm AB.

Ta có $IA = \sqrt{OA^2 - IO^2} = \sqrt{3a^2 - a^2} = a\sqrt{2}$.

Vì $ABCD$ là hình vuông nên $AB = 2a\sqrt{2}$.

Thể tích hình trụ $V = \pi R^2 h = 6\pi a^3\sqrt{2}$ (đvtt).

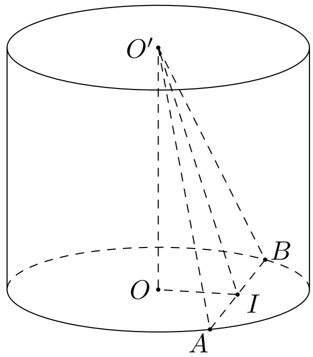


Chọn đáp án C □

Câu 41. Cho hình trụ tròn xoay có hai đáy là hai hình tròn $(O; R)$ và $(O'; R)$. Tồn tại dây cung AB thuộc đường tròn (O) sao cho $\Delta O'AB$ là tam giác đều và mặt phẳng $(O'AB)$ hợp với mặt phẳng chứa đường tròn (O) một góc 60°. Khi đó diện tích xung quanh S_{xq} hình trụ là

(A) $S_{xq} = \dfrac{4\pi R^2}{7}$. (B) $S_{xq} = \dfrac{3\pi R^2}{\sqrt{7}}$. (C) $S_{xq} = \dfrac{3\pi R^2\sqrt{7}}{7}$. (D) $S_{xq} = \dfrac{6\pi R^2\sqrt{7}}{7}$.

Lời giải.



Gọi I là trung điểm AB. Khi đó $OI \perp AB$.

Xét tam giác $O'OI$ vuông tại O có

$$OI = \frac{O'O}{\tan 60^\circ} = \frac{O'O}{\sqrt{3}} \text{ và } O'I = \frac{O'O}{\sin 60^\circ} = \frac{2O'O}{\sqrt{3}}.$$

Mặt khác xét $\triangle OIA$ vuông tại I có

$$AI^2 = R^2 - OI^2 = R^2 - \frac{OO'^2}{3} \Rightarrow AB^2 = 4\left(R^2 - \frac{O'O^2}{3}\right).$$

Vì $\triangle O'AB$ đều nên $O'I = AB\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\Leftrightarrow O'I^2 = \frac{3}{4}AB^2 \Leftrightarrow \frac{4}{3}O'O^2 = 3R^2 - O'O^2 \Leftrightarrow O'O = \frac{3R}{\sqrt{7}}.$$

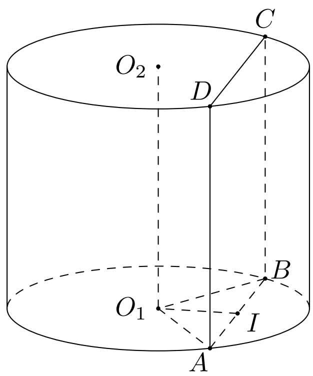
Diện tích xung quanh hình trụ $S_{xq} = 2\pi R \cdot O'O = \dfrac{6\pi R^2\sqrt{7}}{7}$.

Chọn đáp án D □

Câu 42. Cắt hình trụ (T) có bán kính R bởi một mặt phẳng song song với trục và cách trục một khoảng bằng a $(0 < a < R)$ ta được thiết diện là một hình vuông có diện tích $16a^2$. Diện tích xung quanh của hình trụ (T) bằng

(A) $4\pi a^2\sqrt{5}$. (B) $\pi a^2\sqrt{5}$. (C) $8\pi a^2\sqrt{5}$. (D) $16\pi a^2\sqrt{5}$.

Lời giải.



Hình trụ có hai tâm của hai đường tròn đáy là O_1, O_2. Mặt phẳng thiết diện là hình vuông $ABCD$.

Hình vuông $ABCD$ có diện tích là $16a^2$ nên cạnh $AB = BC = 4a$.

Gọi I là trung điểm của AB, suy ra $IB = \dfrac{AB}{2} = 2a$.

Mặt khác, khoảng cách từ O_1O_2 đến $(ABCD)$ là a nên $O_1I = a$.

Tam giác O_1IB vuông tại I nên

$$R = O_1B = \sqrt{O_1I^2 + IB^2} = \sqrt{a^2 + (2a)^2} = a\sqrt{5}.$$

Diện tích xung quanh hình trụ (T) là

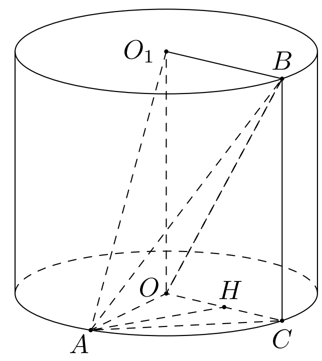
$$S_{xq} = 2\pi Rh = 2\pi \cdot R \cdot BC = 2\pi \cdot a\sqrt{5} \cdot 4a = 8a^2\pi\sqrt{5}.$$

Chọn đáp án C □

Câu 43. Cho hình trụ (T) chiều cao bằng $2a$, hai đường tròn đáy của (T) có tâm lần lượt là O và O_1, bán kính bằng a. Trên đường tròn đáy tâm O lấy điểm A, trên đường tròn đáy tâm O_1 lấy điểm B sao cho $AB = \sqrt{5}a$. Thể tích khối tứ diện OO_1AB bằng

(A) $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{12}$. (B) $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{3}$. (C) $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{4}$. (D) $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{6}$.

Lời giải.



Gọi C là điểm trên đường tròn tâm O sao cho $BC \parallel OO_1$. Khi đó tứ giác $OCBO_1$ là hình chữ nhật và có diện tích là $S_{OCBO_1} = 2a^2$.
Xét $\triangle ABC$ vuông, có $AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = a$ nên $\triangle OAC$ đều.
Gọi H là trung điểm của OC, ta có $AH \perp OC$ và $AH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.
Mặt khác $(ACO) \perp (OCBO_1)$ nên $AH \perp (OCBO_1)$.
Thể tích khối chóp $A.OCBO_1$ là

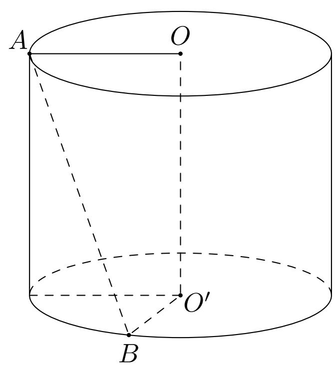
$$V_{A.OCBO_1} = \frac{1}{3} AH \cdot S_{O.ACBO_1} = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}.$$

Thể tích khối tứ diện OO_1AB bằng thể tích khối chóp $A.OBO_1$

$$\Rightarrow V_{AOBO_1} = \frac{1}{2} V_{A.OCBO_1} = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}.$$

Chọn đáp án D □

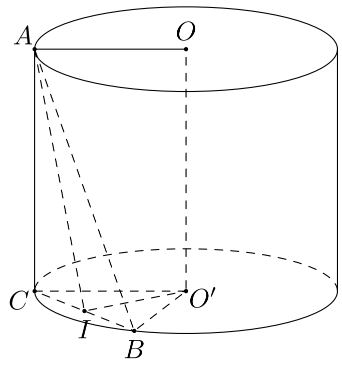
Câu 44.



Cho hình trụ (T) có hai đáy là hai hình tròn $(O); (O')$ và thiết diện qua trục của hình trụ là hình vuông. Điểm A thuộc đường tròn (O), điểm B thuộc đường tròn (O') sao cho $AB = 2$ và khoảng cách giữa AB và OO' bằng $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (thao khảo hình bên). Khối trụ (T) có thể tích bằng

A. $\dfrac{7\sqrt{14}}{8}\pi$. B. $\dfrac{7\sqrt{14}}{2}\pi$. C. $\dfrac{28\sqrt{14}}{27}\pi$. D. $\dfrac{7\sqrt{14}}{16}\pi$.

Lời giải.



Dựng $AC \parallel OO'$, $O'I \perp CB$.

Ta có $\begin{cases} O'I \perp CB \\ O'I \perp AC \end{cases} \Rightarrow O'I \perp (ACB)$

$$\Rightarrow d\left(OO', AB\right) = d\left(O', (ABC)\right) = O'I = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Gọi $OO' = 2x$, $(x > 0)$.

Khi đó $IB = \sqrt{O'B^2 - O'I^2} = \sqrt{x^2 - \frac{3}{4}}$

$$\Rightarrow CB = 2IB = 2\sqrt{x^2 - \frac{3}{4}}.$$

Mà $AC = OO' = 2x \Rightarrow AC = \sqrt{4 - 4\left(x^2 - \frac{3}{4}\right)} = 2x$

$$\Leftrightarrow 4x^2 = 7 - 4x^2 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{7}{8}} \text{ vì } x > 0 \text{ nên } x = \sqrt{\frac{7}{8}}.$$

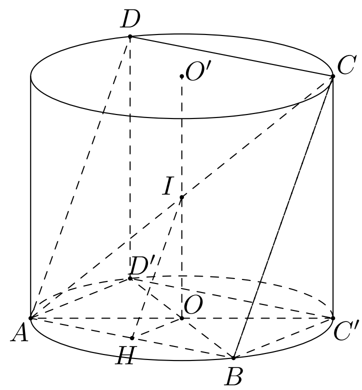
Thể tích khối lăng trụ $V = \pi r^2 \cdot h = \pi \cdot \frac{7}{8} \cdot 2\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{8}} = \frac{7\sqrt{14}\pi}{16}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 45. Cho hình trụ có đường kính đáy bằng $\sqrt{5}$. Hình vuông $ABCD$ nội tiếp hình trụ với hai điểm A, B thuộc đường tròn là đáy trên và C, D thuộc đường tròn đáy dưới của hình trụ và $AB < 3$. Biết diện tích hình chiếu của hình vuông $ABCD$ trên mặt đáy bằng 2 (đơn vị diện tích). Tính thể tích của khối trụ đó.

(A) $\frac{5\pi\sqrt{3}}{12}$. (B) $\frac{5\pi\sqrt{6}}{6}$. (C) $\frac{5\pi\sqrt{6}}{2}$. (D) $\frac{5\pi\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải.



Ta kẻ lần lượt các đường sinh CC' và DD' với $C', D' \in \left(O; \frac{\sqrt{5}}{2}\right)$ sao cho $S_{ABC'D'} = 2$.

Khi đó $ABC'D'$ là hình chữ nhật, ta có $S_{ABC'D'} = AB \cdot BC' = 2$.

Mà $AB^2 + BC'^2 = (2R)^2 = 5$ nên ta có hệ phương trình sau

$$\begin{cases} AB \cdot BC' = 2 \\ AB^2 + BC'^2 = 5. \end{cases}$$

Do $AB < 3$ nên hệ phương trình có nghiệm

$$\begin{cases} AB = BC = 1 \\ BC' = 2 \end{cases} \text{hoặc} \begin{cases} AB = BC = 2 \\ BC' = 1. \end{cases}$$

Trường hợp 1: $\begin{cases} AB = BC = 1 \\ BC' = 2 \end{cases} \Rightarrow CC' = h = \sqrt{BC^2 - BC'^2}$ không tồn tại nên loại.

Trường hợp 2: $\begin{cases} AB = BC = 2 \\ BC' = 1 \end{cases} \Rightarrow CC' = h = \sqrt{BC^2 - BC'^2} = \sqrt{3}.$

Vậy ta suy ra thể tích khối trụ là $V = \pi R^2 h = \pi \left(\dfrac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 \sqrt{3} = \dfrac{5\pi\sqrt{3}}{4}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 46. Ống thép mạ kẽm (độ dày ống thép là hiệu số bán kính mặt ngoài và bán kính mặt bên trong của ống thép). Nhà máy quy định giá bán cho các ống thép dựa trên cân nặng của các ống thép đó. Biết rằng thép ống có giá 24700 đồng/kg và khối lượng riêng của thép là 7850 kg/m^3. Một đại lý thép mua về 1000 ống loại có đường kính ống ngoài là 108 mm, độ dày là 3 mm và có chiều dài 6 m. Hãy tính số tiền mà đại lí bỏ ra để mua 1000 ống thép nói trên (làm tròn đến ngàn đồng).

(A) 1151273000. (B) 1113789000. (C) 1223867000. (D) 1124980000.

Lời giải.

Vì độ dày ống thép là hiệu số bán kính mặt ngoài và bán kính mặt bên trong của ống thép nên ta có thể tích thép của mỗi ống bằng

$$\begin{aligned} \pi\left(r_1^2 - r_2^2\right)\cdot h &= \pi\left(0{,}054^2 - 0{,}051^2\right)\cdot 6 \ \left(m^3\right) \\ &= \pi \cdot 1{,}89 \cdot 10^{-3} \ \left(m^3\right). \end{aligned}$$

Trong đó r_1, r_2 lần lượt là bán kính ống ngoài và trong).

Vậy số tiền phải trả để mua 1000 ống thép nói trên là

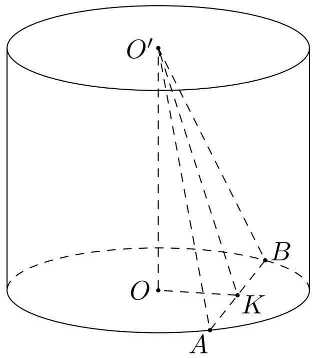
$$\pi \cdot 1{,}89 \cdot 10^{-3} \cdot 1000 \cdot 7850 \cdot 24700 \approx 1151272913 \approx 1151273000 \text{ (đồng)}.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 47. Cho hình trụ có hai đáy là hai hình tròn $(O; R)$ và $(O'; R)$. Gọi AB là một dây cung của đường tròn $(O; R)$ sao cho tam giác $O'AB$ là tam giác đều và mặt phẳng $(O'AB)$ tạo với mặt phẳng chứa đường tròn $(O; R)$ một góc $60°$. Tính theo R thể tích V của khối trụ đã cho

(A) $V = \dfrac{3\pi\sqrt{5}R^3}{5}$. (B) $V = \dfrac{\pi\sqrt{7}R^3}{7}$. (C) $V = \dfrac{3\pi\sqrt{7}R^3}{7}$. (D) $V = \dfrac{\pi\sqrt{5}R^3}{5}$.

Lời giải.



Gọi K là trung điểm AB, đặt $AB = 2a$.

Ta có $AB \perp OK$ và $AB \perp OO'$ nên

$$\begin{aligned} \widehat{OKO'} = 60° &\Rightarrow O'K = 2OK \\ &\Rightarrow O'K^2 = 4OK^2 \\ &\Rightarrow 3a^2 = 4\left(R^2 - a^2\right) \\ &\Rightarrow a^2 = \frac{4R^2}{7}. \end{aligned}$$

Mặt khác $OO'^2 = O'B^2 - OB^2 = 4a^2 - R^2 = 4 \cdot \dfrac{4R^2}{7} - R^2 = \dfrac{9R^2}{7} \Rightarrow O'O = \dfrac{3\sqrt{7}R}{7}$.

Vậy thể tích khối trụ là $V = \pi R^2 h = \dfrac{3\pi\sqrt{7}R^3}{7}$.

Chọn đáp án C □

BẢNG ĐÁP ÁN

1. A	2. B	3. A	4. C	5. B	6. D	7. C	8. D	9. D	10. B
11. B	12. A	13. A	14. A	15. D	16. D	17. B	18. C	19. D	20. C
21. C	22. A	23. A	24. C	25. B	26. A	27. C	28. A	29. A	30. C
31. A	32. D	33. A	34. D	35. D	36. D	37. D	38. D	39. A	40. C
41. D	42. C	43. D	44. D	45. D	46. A	47. C			