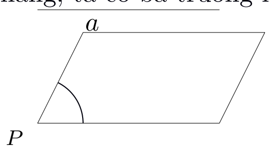
Bài 12. ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG SONG SONG

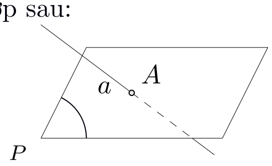
A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG

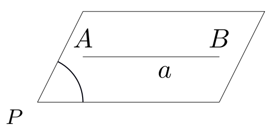
Cho đường thẳng a và mặt phẳng (P). Căn cứ vào số điểm chung của đường thẳng và mặt phẳng, ta có ba trường hợp sau:



$a \parallel (P)$



$a \cap (P) = A$

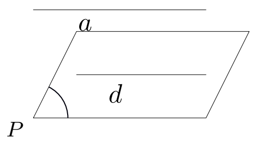


$a \subset (P)$

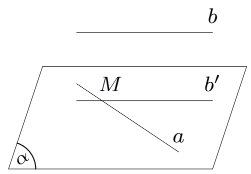
2. CÁC ĐỊNH LÝ VÀ HỆ QUẢ CẦN NHỚ

Định lý 1: Nếu đường thẳng a không nằm trong mặt phẳng (P) và song song với một đường thẳng nào đó trong (P) thì a song song với (P), hay

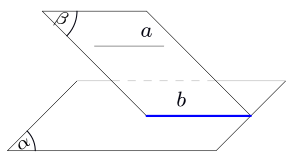
$$a \not\subset (P) \text{ và } \begin{cases} a \parallel d \\ d \subset (P) \end{cases} \Rightarrow a \parallel (P)$$



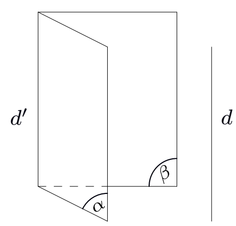
Định lý 2: Cho hai đường thẳng chéo nhau. Có duy nhất một mặt phẳng chứa đường thẳng này và song song với đường thẳng kia.



Định lý 3: Nếu đường thẳng a song song với mặt phẳng (α). Nếu mặt phẳng (β) chứa a và cắt (α) theo giao tuyến b thì b song song với a.



Nếu hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với một đường thẳng thì giao tuyến của chúng (nếu có) cũng song song với đường thẳng đó.



B. PHÂN LOẠI, PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

ĐIỂM:

"It's not how much time you have, it's how you use it."

QUICK NOTE

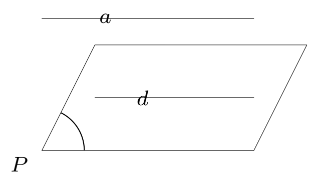
QUICK NOTE

1 Chứng minh đường thẳng song song với mặt phẳng

Phương pháp giải: Để chứng minh đường thẳng a song song với mặt phẳng (P), ta cần chứng tỏ các ý sau đây

- a không nằm trên (P);
- a song song với một đường thẳng b nằm trong (P).
  Suy ra $a \parallel (P)$.

Tóm lại $\boxed{\begin{cases} a \not\subset (P) \\ a \parallel b \\ b \subset (P) \end{cases} \Rightarrow a \parallel (P)}$



VÍ DỤ 1. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M và N lần lượt là trọng tâm của các tam giác ACD và BCD. Chứng minh rằng MN song song với các mặt phẳng (ABC) và (ABD).

VÍ DỤ 2. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G là trọng tâm tam giác ABD, điểm I nằm trên cạnh BC sao cho $BI = 2IC$. Chứng minh rằng IG song song (ACD).

VÍ DỤ 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Lấy M nằm trên cạnh AD sao cho $AD = 3AM$. Gọi G, N lần lượt là trọng tâm của tam giác SAB và ABC.

a) Tìm giao tuyến của (SAB) và (SCD).

b) Chứng minh MN song song (SCD) và NG song song (SAC).

VÍ DỤ 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và CD.

a) Chứng minh MN song song với các mặt phẳng (SBC) và (SAD).

b) Gọi E là trung điểm của SA. Chứng minh SB và SC đều song song với mặt phẳng (MNE).

VÍ DỤ 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. Gọi G là trọng tâm tam giác SAD và E là điểm trên cạnh DC sao cho $DC = 3DE$, I là trung điểm AD.

a) Chứng minh OI song song với các mặt phẳng (SAB) và (SCD).

b) Tìm giao điểm P của IE và (SBC). Chứng minh $GE \parallel (SBC)$.

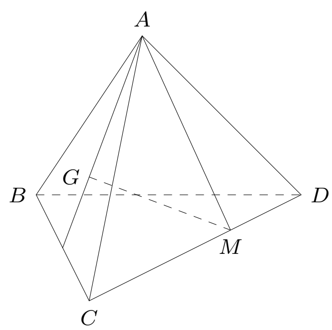
2 Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng cắt nhau

Ngoài các phương pháp đã học ở bài trước, ta có thêm 2 cách nữa là áp dụng định lí 3 ở trên.

VÍ DỤ 1.
Cho tứ diện $ABCD$ có G là trọng tâm $\triangle ABC$, $M \in CD$ với $MC = 2MD$.

a) Chứng minh MG song song với (ABD).

b) Tìm giao tuyến của (ABD) với (BGM).



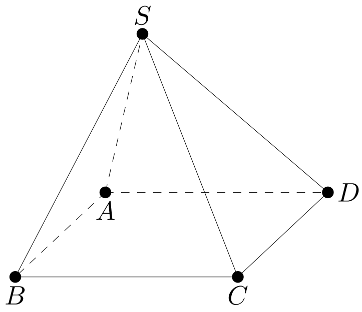
VÍ DỤ 2.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi I, K lần lượt là trung điểm của BC và CD.

a) Tìm giao tuyến của (SIK) và (SAC), (SIK) và (SBD).

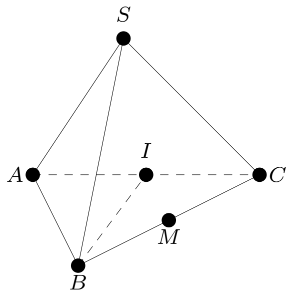
b) Gọi M là trung điểm của SB. Chứng minh $SD \parallel (ACM)$.

c) Tìm giao điểm F của DM và (SIK). Tính tỉ số $\dfrac{MF}{MD}$.

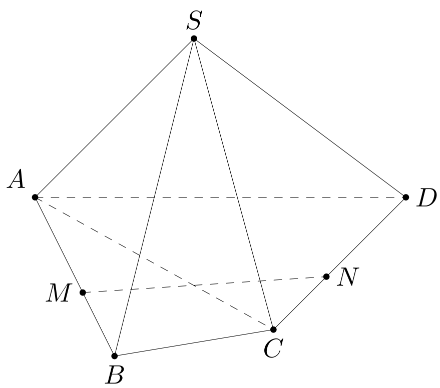


VÍ DỤ 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang, đáy lớn AD. Gọi I là trung điểm của SB. Gọi (P) là mặt phẳng qua I, song song với SD và AC. Tìm giao tuyến của (P) với các mặt (SBD) và $(ABCD)$.

VÍ DỤ 4.
Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, I lần lượt là trung điểm của BC, AC. Mặt phẳng (P) đi qua điểm M, song song với BI và SC. Xác định trên hình vẽ các giao điểm H, K, N của (P) với các cạnh AC, SA, SB. Tứ giác $MNKH$ là hình gì?



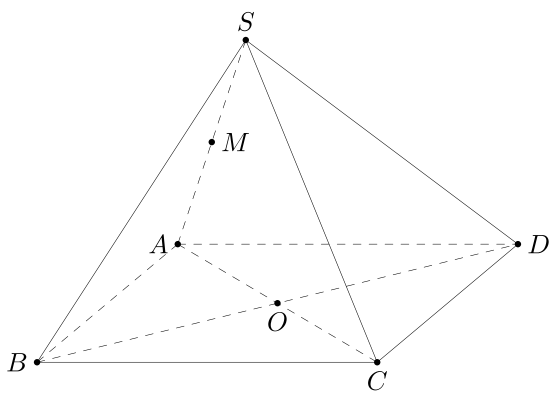
VÍ DỤ 5.
Cho hình chóp $S.ABCD$. Gọi M, N thuộc cạnh AB, CD. Gọi (α) là mặt phẳng qua MN và song song với SA. Tìm giao tuyến của (α) với các mặt của hình chóp.



VÍ DỤ 6.
Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành, O là giao điểm của AC và BD, M là trung điểm của SA.

a) Chứng minh $OM \parallel (SCD)$.

b) Gọi (α) là mặt phẳng đi qua M, đồng thời song song với SC và AD. Tìm giao tuyến của mặt phẳng (α) với các mặt của hình chóp $S.ABCD$. Hình tạo bởi các giao tuyến là hình gì?



VÍ DỤ 7. Cho tứ diện $ABCD$ và điểm M thuộc cạnh AB. Gọi (α) là mặt phẳng đi qua M, song song với đường thẳng BC và AD. Gọi N, P, Q lần lượt là giao điểm của (α) với các cạnh AC, CD và DB .

a) Chứng minh $MNPQ$ là hình bình hành.

b) Trong trường hợp nào thì $MNPQ$ là hình thoi.

QUICK NOTE

QUICK NOTE

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

BÀI 1. Cho tứ diện $ABCD$ có G là trọng tâm tam giác ABD. Trên đoạn BC lấy điểm M sao cho $MB = 2MC$. Chứng minh rằng đường thẳng MG song song với mặt phẳng (ACD).

BÀI 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh SD, CD, BC.

a) Chứng minh đường thẳng OM song song với các mặt phẳng (SAB), (SBC).

b) Chứng minh đường thẳng SP song song với mặt phẳng (OMN).

BÀI 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang đáy lớn AB, với $AB = 2CD$. Gọi O là giao điểm của AC và BD, I là trung điểm của SA, G là trọng tâm của tam giác SBC và E là một điểm trên cạnh SD sao cho $3SE = 2SD$. Chứng minh:

a) $DI \parallel (SBC)$. b) $GO \parallel (SCD)$. c) $SB \parallel (ACE)$.

BÀI 4. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB và CD, M là một điểm trên đoạn IJ. Gọi (P) là mặt phẳng qua M và song song với AB và CD.

a) Tìm giao tuyến của mặt phẳng (P) và (ICD).

b) Xác định giao tuyến của mặt phẳng (P) với các mặt của tứ diện. Hình tạo bởi các giao tuyến là hình gì?

BÀI 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Gọi K và J lần lượt là trọng tâm của các tam giác ABC và SBC.

a) Chứng minh $KJ \parallel (SAB)$.

b) Gọi (P) là mặt phẳng chứa KJ và song song với AD. Xác định giao tuyến của mặt phẳng (P) với các mặt của hình chóp. Hình tạo bởi các giao tuyến là hình gì?

BÀI 6. Cho tứ diện $ABCD$. Lấy điểm M trên cạnh AB sau cho $AM = 2MB$. Gọi G là trọng tâm $\triangle BCD$ và I là trung điểm CD, H là điểm đối xứng của G qua I.

a) Chứng minh $GD \parallel (MCH)$.

b) Tìm giao điểm K của MG với (ACD). Tính tỉ số $\dfrac{GK}{GM}$.

BÀI 7. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm O, M là trung điểm của SA. Gọi (P) là mặt phẳng qua O, song song với BM và SD. Tìm giao tuyến của (P) và (SAD).

D. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

CÂU 1. Trong không gian cho mặt phẳng (α) và A không thuộc (α). Qua điểm A có thể dựng được bao nhiêu đường thẳng song song với (α)?

(A) Duy nhất. (B) Vô số . (C) 2. (D) 4.

CÂU 2. Trong không gian cho đường thẳng Δ và điểm O không nằm trong Δ. Qua điểm O cho trước, có bao nhiêu mặt phẳng song song với đường thẳng Δ?

(A) Vô số. (B) 3. (C) 1. (D) 2.

CÂU 3. Có bao nhiêu mặt phẳng song song với cả hai đường thẳng chéo nhau?

(A) Vô số. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

CÂU 4. Cho hai đường thẳng phân biệt a, b và mặt phẳng (α). Giả sử $a \parallel (\alpha), b \subset (\alpha)$. Khi đó

(A) $a \parallel b$. (B) a, b chéo nhau.
(C) a, b cắt nhau. (D) $a \parallel b$ hoặc a, b chéo nhau.

CÂU 5. Cho hai đường thẳng phân biệt a, b và mặt phẳng (α). Giả sử $a \parallel b$ và $b \parallel (\alpha)$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

(A) $a \parallel (\alpha)$. (B) $a \subset (\alpha)$.
(C) $a \parallel (\alpha)$ hoặc $a \subset (\alpha)$. (D) a cắt (α).

CÂU 6. Cho đường thẳng a nằm trong mặt phẳng (α) và đường thẳng b không thuộc (α). Mệnh đề nào sau đây đúng?

(A) Nếu $b \parallel (\alpha)$ thì $b \parallel a$.

(B) Nếu $b \parallel a$ thì $b \parallel (\alpha)$.

(C) Nếu b cắt (α) và (β) chứa b thì giao tuyến của (α) và (β) là đường thẳng cắt cả a và b. .

(D) Nếu b cắt (α) thì b cắt a.

CÂU 7. Cho hai đường thẳng chéo nhau a và b. Khẳng định nào sau đây **sai**?

(A) Có duy nhất một mặt phẳng song song với a và b.

(B) Có vô số đường thẳng song song với a và cắt b.

(C) Có duy nhất một mặt phẳng qua a và song song với b.

(D) Có duy nhất một mặt phẳng qua điểm M, song song với a và b (với M là điểm cho trước).

CÂU 8. Cho $d \parallel (\alpha)$, mặt phẳng (β) qua d cắt (α) theo giao tuyến d'. Khẳng định nào sau đây là đúng?

(A) d cắt d'. (B) $d \parallel d'$.

(C) d và d' chéo nhau. (D) $d \equiv d'$.

CÂU 9. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của SA và SC. Khẳng định nào sau đây đúng?

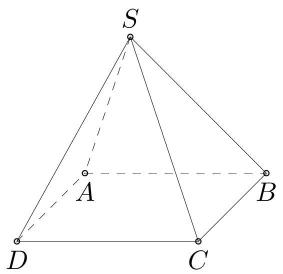
(A) $MN \parallel (ABCD)$. (B) $MN \parallel (SAB)$. (C) $MN \parallel (SCD)$. (D) $MN \parallel (SBC)$.

CÂU 10. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, M và N là hai điểm trên SA, SB sao cho $\dfrac{SM}{SA} = \dfrac{SN}{SB} = \dfrac{1}{3}$. Vị trí tương đối giữa MN và $(ABCD)$ là

(A) MN và $(ABCD)$ chéo nhau. (B) MN song song $(ABCD)$.

(C) MN nằm trong $(ABCD)$. (D) MN cắt $(ABCD)$.

CÂU 11. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC).



(A) Là đường thẳng đi qua đỉnh S và song song với đường thẳng BD.

(B) Là đường thẳng đi qua đỉnh S và tâm O của đáy.

(C) Là đường thẳng đi qua đỉnh S và song song với đường thẳng BC.

(D) Là đường thẳng đi qua đỉnh S và song song với đường thẳng AB.

CÂU 12. Cho tứ diện $ABCD$ có I, J lần lượt là trung điểm của BC, BD. Giao tuyến của mặt phẳng (AIJ) và (ACD) là

(A) đường thẳng d đi qua A và song song với BC.

(B) đường thẳng d đi qua A và song song với BD.

(C) đường thẳng d đi qua A và song song với CD.

(D) đường thẳng AB.

CÂU 13. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABD, Q thuộc cạnh AB sao cho $AQ = 2QB$, P là trung điểm của AB, M là trung điểm của BD. Khẳng định nào sau đây đúng?

(A) $Q \in (CDP)$. (B) QG cắt (BCD). (C) $MP \parallel (BCD)$. (D) $GQ \parallel (BCD)$.

CÂU 14. Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$ không cùng nằm trong một mặt phẳng. Gọi O, O_1 lần lượt là tâm của $ABCD$, $ABEF$; M là trung điểm của CD. Khẳng định nào sau đây **sai**?

(A) $OO_1 \parallel (BEC)$. (B) $OO_1 \parallel (EFM)$.

(C) MO_1 cắt (BEC). (D) $OO_1 \parallel (AFD)$.

CÂU 15. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mặt phẳng đi qua trung điểm M của cạnh AB và song song với BD, SA là hình gì?

(A) Ngũ giác. (B) Hình thang. (C) Tam giác. (D) Hình bình hành.

QUICK NOTE

QUICK NOTE

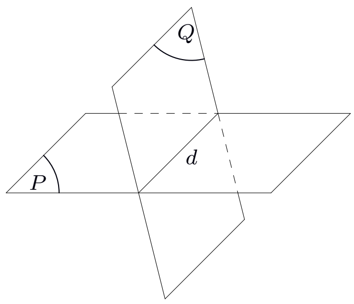
Bài 13. HAI MẶT PHẲNG SONG SONG

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA HAI MẶT PHẲNG

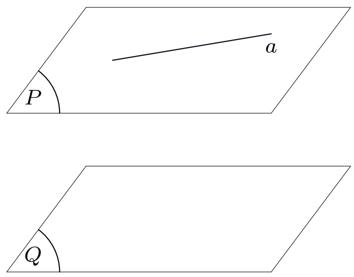
Cho hai mặt phẳng (P) và (Q). Các trường hợp có thể xảy ra:

- **Trường hợp 1:** (P) và (Q) trùng nhau.
- **Trường hợp 2:** (P) và (Q) có một điểm chung. Khi đó chúng sẽ có điểm chung khác nữa. Tập hợp tất cả các điểm chung đó gọi là giao tuyến của hai mặt phẳng (P) và (Q) (**Hình 1**).
- **Trường hợp 3:** (P) và (Q) không có điểm chung. Khi đó ta nói (P) song song (Q) (**Hình 2**).
  - Kí hiệu $(P) \parallel (Q)$;
  - Khi $(P) \parallel (Q)$ và $a \subset (P)$ thì $a \parallel (Q)$.



Hình 1.

(P), (Q) cắt nhau: $(P) \cap (Q) = d$



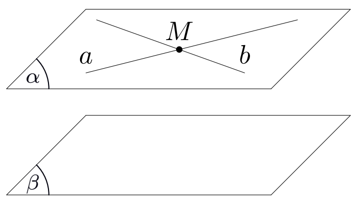
Hình 2.

(P), (Q) không có điểm chung: $(P) \parallel (Q)$

2. CÁC ĐỊNH LÝ CƠ BẢN

Định lý 1:

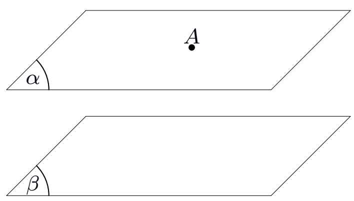
Nếu mặt phẳng (α) chứa hai đường thẳng cắt nhau a, b và a, b cùng song song với mặt phẳng (β) thì (α) song song với (β).



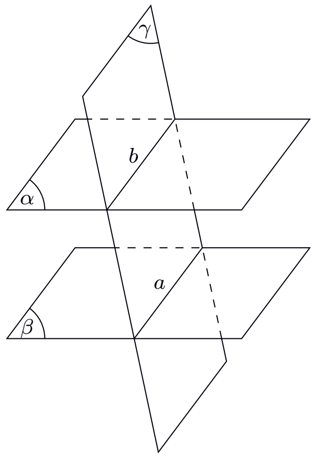
- *Muốn chứng minh hai mặt phẳng song song, ta phải chứng minh có hai đường thẳng cắt nhau thuộc mặt phẳng này lần lượt song song với mặt phẳng kia.*
- *Muốn chứng minh đường thẳng $a \parallel (Q)$, ta chứng minh đường thẳng a nằm trong mặt phẳng (P) và $(P) \parallel (Q)$.*

Định lý 2:

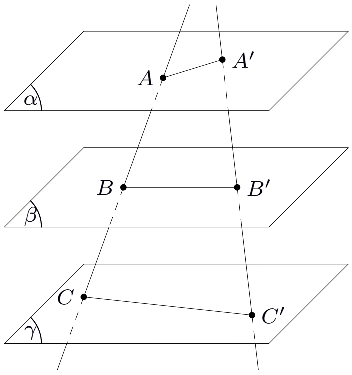
Qua một điểm nằm ngoài một mặt phẳng cho trước có một và chỉ một mặt phẳng song song với mặt phẳng đã cho.



Định lý 3: Cho hai mặt phẳng song song. Nếu một mặt phẳng cắt mặt phẳng này thì cũng cắt mặt phẳng kia và hai giao tuyến song song với nhau.

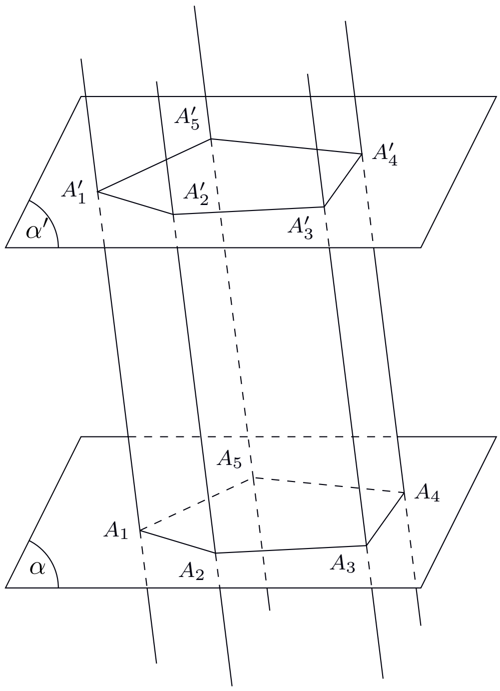


Định lý 4: (*Định lí Thales*) Ba mặt phẳng đôi một song song chắn trên hai cát tuyến bất kì những đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ.



3. HÌNH LĂNG TRỤ VÀ HÌNH HỘP

Định nghĩa: Cho hai mặt phẳng (α) // (α'). Trong (α) cho đa giác lồi $A_1A_2\ldots A_n$. Qua các điểm $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ta dựng các đường song song với nhau và cắt (α') tại $A_1', A_2', \ldots, A_n'$.
Hình tạo thành bởi hai đa giác $A_1A_2\ldots A_n$, $A_1'A_2'\ldots A_n'$ cùng với các hình bình hành $A_1A_2A_2'A_1'$, $A_2A_3A_3'A_2'$, $\ldots$, $A_nA_1A_1'A_n'$ được gọi là *hình lăng trụ* và được ký hiệu bởi $A_1A_2\ldots A_n.A_1'A_2'\ldots A_n'$.



- Hai đa giác $A_1A_2\ldots A_n$, $A_1'A_2'\ldots A_n'$ được gọi là hai *mặt đáy* (bằng nhau) của hình lăng trụ.
- Các đoạn thẳng A_1A_1', A_2A_2',..., A_nA_n' gọi là các *cạnh bên* của hình lăng trụ.
- Các hình bình hành $A_1A_2A_2'A_1'$, $A_2A_3A_3'A_2'$,..., $A_nA_1A_1'A_n'$ gọi là các *mặt bên* của hình lăng trụ.
- Các đỉnh của hai đa giác đáy gọi là các *đỉnh* của hình lăng trụ.

Tính chất:

- Các cạnh bên của hình lăng trụ thì song song và bằng nhau.
- Các mặt bên của hình lăng trụ đều là hình bình hành.
- Hai đáy của hình lăng trụ là hai đa giác bằng nhau.

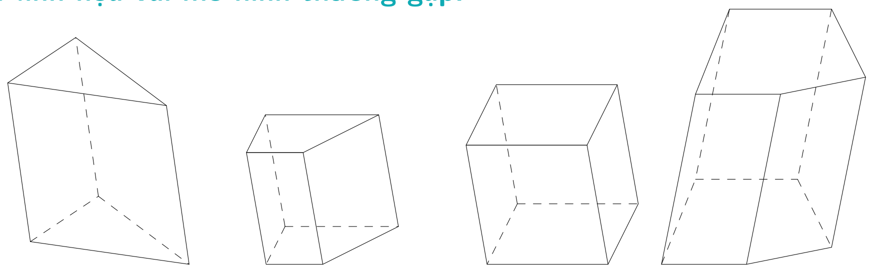
QUICK NOTE

QUICK NOTE

Hình lăng trụ có đáy là hình bình hành gọi là *hình hộp*.

- Các mặt của hình hộp là hình bình hành.
- Hai mặt phẳng lần lượt chứa hai mặt đối diện của hình hộp thì song song nhau.

Minh họa vài mô hình thường gặp:



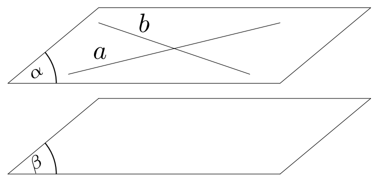
* Lăng trụ tam giác * Lăng trụ tứ giác * Hình hộp * Lăng trụ ngũ giác

B. PHÂN LOẠI, PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

1 Chứng minh hai mặt phẳng song song

Phương pháp:

Chứng minh trên mặt phẳng này có hai đường thẳng cắt nhau cùng song song với mặt phẳng còn lại.



$$\begin{cases} a \text{ cắt } b \\ a \subset (\alpha),\ b \subset (\alpha) \\ a \parallel (\beta),\ b \parallel (\beta) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \parallel (\beta).$$

Chú ý: Hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với mặt phẳng thứ ba thì song song nhau.

VÍ DỤ 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm O. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của SA, SD và SB.

a) Chứng minh rằng $(MNP) \parallel (ABCD)$.

b) Chứng minh rằng $(OMN) \parallel (SBC)$.

VÍ DỤ 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ với đáy $ABCD$ là hình thang mà $AD \parallel BC$ và $AD = 2BC$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA và AD. Chứng minh: $(BMN) \parallel (SCD)$.

VÍ DỤ 3. Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$ có chung cạnh AB và không đồng phẳng. Gọi I, J, K lần lượt là trung điểm AB, CD, EF. Chứng minh

a) $(ADF) \parallel (BCE)$. b) $(DIK) \parallel (JBE)$.

VÍ DỤ 4. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Gọi I, J, K lần lượt là trọng tâm các tam giác ABC, ACC', $A'B'C'$. Chứng minh rằng $(IJK) \parallel (BCC'B')$ và $(A'JK) \parallel (AIB')$.

VÍ DỤ 5. Cho hai hình vuông $ABCD$ và $ABEF$ ở trong hai mặt phẳng phân biệt. Trên các đường chéo AC và BF lần lượt lấy các điểm M, N sao cho $AM = BN$. Các đường thẳng song song với AB vẽ từ M, N lần lượt cắt AD và AF tại M' và N'.

a) Chứng minh rằng $(ADF) \parallel (BCE)$. b) Chứng minh rằng $(CDF) \parallel (MM'N'N)$.

2 Chứng minh đường thẳng song song với mặt phẳng

Để chứng minh a song song (P), ta thường sử dụng một trong hai cách sau

Cách 1: (*Đã xét ở bài học trước*) Ta cần chứng tỏ các ý sau:

- a không nằm trên (P);
- a song song với một đường thẳng b nằm trong (P). Suy ra $a \parallel (P)$ hay

$$\begin{cases} a \not\subset (P) \\ a \parallel b \\ b \subset (P) \end{cases} \Rightarrow a \parallel (P)$$

Cách 2: Ta chứng minh đường thẳng a nằm trong mặt phẳng (Q) và $(Q) \parallel (P)$ thì $a \parallel (P)$.

VÍ DỤ 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi G_1, G_2, G_3 lần lượt là trọng tâm các tam giác SAB, ABC, SBD. Gọi M là một điểm thuộc đường thẳng G_2G_3. Chứng minh $G_1M \parallel (SBC)$.

VÍ DỤ 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm O. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA và CD.

a) Chứng minh hai mặt phẳng (OMN) và (SBC) song song với nhau.

b) Gọi I là trung điểm của SD, J là một điểm trên $(ABCD)$ và cách đều AB, CD. Chứng minh IJ song song với (SAB).

3 Định lý Thales

Định lí Thales: Ba mặt phẳng đôi một song song chắn trên hai cát tuyến bất kì những đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ.

VÍ DỤ 1. Cho ba mặt phẳng $(P),(Q),(R)$ đôi một song song với nhau. Đường thẳng a cắt các mặt phẳng $(P),(Q),(R)$ lần lượt tại A,B,C sao cho $\dfrac{AB}{BC}=\dfrac{2}{3}$ và đường thẳng b cắt các mặt phẳng $(P),(Q),(R)$ lần lượt tại A',B',C' . Tính tỉ số $\dfrac{A'B'}{B'C'}$.

VÍ DỤ 2. Cho ba mặt phẳng $(P),(Q),(R)$ đôi một song song với nhau. Đường thẳng a cắt các mặt phẳng $(P),(Q),(R)$ lần lượt tại A,B,C sao cho $\dfrac{AB}{BC}=\dfrac{1}{3}$ và đường thẳng b cắt các mặt phẳng $(P),(Q),(R)$ lần lượt tại D,E,F .Tính tỉ số $\dfrac{ED}{DF}$.

VÍ DỤ 3. Cho hình tứ diện $S.ABC$. Trên cạnh SA lấy các điểm A_1,A_2 sao cho $2AA_1=2A_1A_2=A_2S$. Gọi (P) và (Q) là hai mặt phẳng song song với mặt phẳng (ABC) và lần lượt đi qua A_1, A_2 . Mặt phẳng (P) cắt các cạnh SB, SC lần lượt tại B_1, C_1 . Mặt phẳng (Q) cắt các cạnh SB, SC lần lượt tại B_2, C_2 . Chứng minh $2BB_1=2B_1B_2=B_2S$ và $2CC_1=2C_1C_2=C_2S$.

VÍ DỤ 4. Một kệ để đồ bằng gỗ có mâm tầng dưới $(ABCD)$ và mâm tầng trên $(EFGH)$ song song với nhau. Bác thợ mộc đo được $AE=80$ cm, $CG=90$ cm và muốn đóng thêm một mâm tầng giữa $(IJKL)$ song song với hai mâm tầng trên và dưới sao cho khoảng cách $EI=36$ cm (tham khảo hình vẽ). Hãy giúp bác thợ mộc tính độ dài GK để đặt mâm tầng giữa cho kệ để đồ đúng vị trí.

VÍ DỤ 5. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA=9, SB=12, SC=15$. Trên cạnh SA lấy các điểm M,N sao cho $SM=4, MN=3, NA=2$. Vẽ hai mặt phẳng song song với (ABC) lần lượt đi qua M,N , cắt SB theo thứ tự M',N' và cắt SC theo thứ tự M'',N''. Tính độ dài các đoạn thẳng $SM',M'N',M''N'',N''C$.

4 Hình hộp, hình lăng trụ

VÍ DỤ 1. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ và một mặt phẳng (α) cắt các mặt của hình hộp theo các giao tuyến MN,NP,PQ,QR,RS,SM như hình vẽ. Chứng minh các cặp cạnh đối của lục giác $MNPQRS$ song song nhau.

VÍ DỤ 2. Cho hình lăng trụ tứ giác $ABCD.A'B'C'D'$ với đáy là hình thang $AB \parallel CD$. Một mặt phẳng song song với mặt phẳng $(AA'B'B)$ cắt các cạnh $AD,BC,B'C',A'D'$ lần lượt tại E,F,M,H . Hỏi hình tạo bởi các điểm E,F,M,H,D,D',C',C là hình gì?

QUICK NOTE

QUICK NOTE

VÍ DỤ 3. Cho lăng trụ tam giác $ABC \cdot A'B'C'$. Gọi M, N, P lần lượt là các điểm trên cạnh AA', BB', CC' sao cho: $\dfrac{AM}{MA'} = \dfrac{BN}{NB'} = \dfrac{CP}{PC'} = \dfrac{1}{2}$. Hỏi hình tạo bởi các điểm M, N, P, A', B', C' là hình gì?

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

BÀI 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA và CD. Chứng minh hai mặt phẳng (MNO) và (SBC) song song.

BÀI 2. Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình thang có $AB \parallel CD$ và $AB = 2CD$, I là giao điểm của AC và BD. Gọi M là trung điểm của SD, E là trung điểm đoạn CM và G là điểm đối xứng của E qua M, SE cắt CD tại K. Chứng minh $(IKE) \parallel (ADG)$.

BÀI 3. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G_1, G_2, G_3 lần lượt là trọng tâm của các tam giác ABC, ACD, ADB. Chứng minh $(G_1G_2G_3) \parallel (BCD)$.

BÀI 4. Cho hình chóp $SABC$ có G là trọng tâm tam giác ABC. Trên đoạn SA lấy hai điểm M, N sao cho $SM = MN = NA$.

a) Chứng minh rằng $GM \parallel (SBC)$.

b) Gọi D là điểm đối xứng với A qua G. Chứng minh rằng $(MCD) \parallel (NBG)$.

BÀI 5. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Một mặt phẳng song song với mặt đáy $(ABCD)$ của hình hộp và cắt các cạnh AA', BB', CC', DD' lần lượt tại M, N, M', N' . Chứng minh rằng $ABCD.MNM'N'$ là hình hộp.

D. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

CÂU 1. Cho đường thẳng d song song với mặt phẳng (α). Có bao nhiêu mặt phẳng đi qua d và song song với (α)?

(A) 1. (B) 0. (C) 2. (D) Vô số.

CÂU 2. Trong các điều kiện sau, điều kiện nào kết luận mặt phẳng (α) song song với mặt phẳng (β)?

(A) $(\alpha) \parallel (\gamma)$ và $(\beta) \parallel (\gamma)$ (với (γ) là mặt phẳng nào đó).

(B) $(\alpha) \parallel a$ và $(\alpha) \parallel b$ với a, b là hai đường thẳng phân biệt thuộc (β).

(C) $(\alpha) \parallel a$ và $(\alpha) \parallel b$ với a, b là hai đường thẳng phân biệt cùng song song với (β).

(D) $(\alpha) \parallel a$ và $(\alpha) \parallel b$ với a, b là hai đường thẳng cắt nhau thuộc (β).

CÂU 3. Cho các mệnh đề sau:

① Hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với một đường thẳng thì chúng song song với nhau.

② Hai mặt phẳng cùng song song với một mặt phẳng thứ ba thì chúng song song với nhau.

③ Bất kì đường thẳng nào cắt một trong hai mặt phẳng song song thì nó cũng cắt mặt phẳng còn lại.

Số mệnh đề **sai** là

(A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

CÂU 4. Trong các mệnh đề sau. Mệnh đề **sai** là

(A) Hai mặt phẳng song song với nhau thì mọi đường thẳng nằm trong mặt phẳng này đều song song với mặt phẳng kia.

(B) Hai mặt phẳng cùng song song với một mặt phẳng thì song song với nhau.

(C) Một mặt phẳng cắt hai mặt phẳng song song cho trước theo hai giao tuyến thì hai giao tuyến song song với nhau.

(D) Hai mặt phẳng song song thì không có điểm chung.

CÂU 5. Cho mặt phẳng (R) cắt hai mặt phẳng song song (P) và (Q) theo hai giao tuyến a và b. Mệnh đề nào sau đây đúng?

(A) a và b vuông góc nhau. (B) a và b chéo nhau.

(C) a và b cắt nhau. (D) a và b song song.

CÂU 6. Cho đường thẳng a thuộc mặt phẳng (P) và đường thẳng b thuộc mặt phẳng (Q). Mệnh đề nào sau đây đúng?

(A) $(P) \parallel (Q) \Rightarrow a \parallel (Q)$ và $b \parallel (P)$.
(B) a và b chéo nhau.
(C) $(P) \parallel (Q) \Rightarrow a \parallel b$.
(D) $a \parallel b \Rightarrow (P) \parallel (Q)$.

CÂU 7. Hình lăng trụ tam giác có tất cả bao nhiêu cạnh?

(A) 6. (B) 9. (C) 12. (D) 3.

CÂU 8. Đặc điểm nào sau đây là đúng với hình lăng trụ?

(A) Đáy của hình lăng trụ là hình bình hành.
(B) Hình lăng trụ có tất cả các mặt song song với nhau.
(C) Hình lăng trụ có tất cả các mặt bên là hình bình hành.
(D) Hình lăng trụ có tất cả các mặt là hình bình hành.

CÂU 9. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Mặt phẳng $(AB'D')$ song song với mặt phẳng nào sau đây?

(A) (BCA'). (B) (BDA'). (C) (BDC'). (D) $(A'C'C)$.

CÂU 10. Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$ không thuộc cùng một mặt phẳng, có cạnh chung AB. Kết quả nào sau đây đúng?

(A) $BC \parallel (AEF)$.
(B) $FD \parallel (BEF)$.
(C) $(CEF) \parallel (ABD)$.
(D) $(AFD) \parallel (BCE)$.

CÂU 11. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang ($AB \parallel CD$) và $AB = 2CD$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm SB và AB. Mặt phẳng nào song song với mặt phẳng (SAD)?

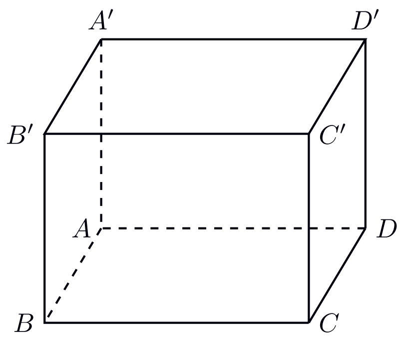
(A) (SJC). (B) (ICB). (C) (IJB). (D) (IJC).

CÂU 12. Trong mặt phẳng (P) cho hình bình hành $ABCD$, qua A, B, C, D lần lượt vẽ bốn đường thẳng a, b, c, d đôi một song song với nhau và không nằm trên (P). Mặt phẳng song song với mặt phẳng (b, c) là

(A) (a, b). (B) (a, c). (C) (a, d). (D) (d, b).

CÂU 13. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Mệnh đề nào sau đây là **sai**?

(A) $(ABCD) \parallel (A'B'C'D')$.
(B) $(ABB'A') \parallel (CDD'C')$.
(C) $(AA'D'D) \parallel (BCC'B')$.
(D) $(BDD'B') \parallel (ACC'A')$.



CÂU 14. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là một hình bình hành. Gọi A', B', C', D' lần lượt là trung điểm của các cạnh SA, SB, SC, SD. Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau.

(A) $A'C' \parallel BD$.
(B) $A'B' \parallel (SAD)$.
(C) $(A'C'D') \parallel (ABC)$.
(D) $A'B' \parallel (SBD)$.

CÂU 15. Cho hình chóp $S.ABCD$, có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Gọi M, N lần lượt là trung điểm SA, SD. Mặt phẳng (OMN) song song với mặt phẳng nào sau đây?

(A) $(ABCD)$. (B) (SCD). (C) (SBC). (D) (SAB).

Bài 14. PHÉP CHIẾU PHẲNG SONG SONG

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

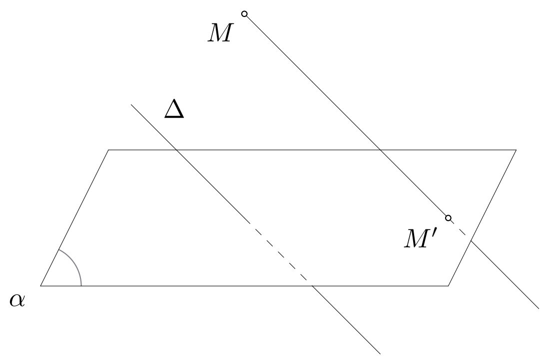
1. ĐỊNH NGHĨA

Cho mặt phẳng (α) và đường thẳng Δ cắt (α). Với mỗi điểm M trong không gian ta xác định điểm M' như sau:

QUICK NOTE

QUICK NOTE

- Nếu M thuộc Δ thì M' là giao điểm của Δ và (α).
- Nếu M không thuộc Δ thì M' là giao điểm của (α) và đường thẳng qua M song song Δ.
- Điểm M' gọi là hình chiếu song song của M trên (α) theo phương Δ.
- Phép đặt tương ứng mỗi điểm M với hình chiếu M' của nó được gọi là **phép chiếu song song** lên (α) theo phương Δ.
- Mặt phẳng (α) gọi là mặt phẳng chiếu; phương Δ gọi là **phương chiếu.**



2. TÍNH CHẤT

Phép chiếu song song có các tính chất sau:

① Biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng.

② Biến đường thẳng thành đường thẳng , biến tia thành tia, đoạn thẳng thành đoạn thẳng.

③ Biến hai đường thẳng song song thành hai đường thẳng song song hoặc trùng nhau.

④ Giữ nguyên tỉ số độ dài của hai đoạn thẳng cùng nằm trên một đường thẳng hoặc nằm trên hai đường thẳng song song.

3. HÌNH BIỂU DIỄN CỦA MỘT HÌNH KHÔNG GIAN

① Hình biểu diễn của hình trong không gian là hình chiếu song song của hình đó trên một mặt phẳng theo một phương chiếu nào đó hoặc hình đồng dạng với hình chiếu đó.

② Hình biểu diễn của một hình không gian (trong trường hợp hình phẳng nằm trong mặt phẳng không song song với phương chiếu) có các tính chất sau:

- Hình biểu diễn của một tam giác là một tam giác.
- Hình biểu diễn của hình chữ nhật, hình vuông, hình thoi, hình bình hành là hình bình hành.
- Hình biểu diễn của hình thang $ABCD$ với $AB \parallel CD$ là một hình thang $A'B'C'D'$ với $A'B' \parallel C'D'$ thoả mãn $\dfrac{AB}{CD} = \dfrac{A'B'}{C'D'}$.
- Hình biểu diễn của hình tròn là hình elip.

B. PHÂN LOẠI, PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

1 Xác định ảnh của một hình qua phép chiếu song song

VÍ DỤ 1. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$.

a) Xác định ảnh của các điểm A', B', C', D' qua phép chiếu song song lên mặt phẳng $(ABCD)$ theo phương AA'.

b) Xác định ảnh của tam giác $A'C'D'$ qua phép chiếu song song lên mặt phẳng $(ABCD)$ theo phương $A'B$.

VÍ DỤ 2. Phép chiếu song song biến hình bình hành $ABCD$ thành hình bình hành $A'B'C'D'$. Chứng minh rằng phép chiếu đó biến tâm của hình bình hành $ABCD$ thành tâm của hình bình hành $A'B'C'D'$.

VÍ DỤ 3. Phép chiếu song song biến tam giác ABC thành tam giác $A'B'C'$. Chứng minh rằng phép chiếu đó biến đường trung bình của tam giác ABC thành đường trung bình của tam giác $A'B'C'$.

2 Vẽ hình biểu diễn của một số hình khối đơn giản

QUICK NOTE

VÍ DỤ 1. Vẽ hình biểu diễn của các hình sau

a) Hình lục giác đều.

b) Hình vuông nội tiếp trong hình tròn.

VÍ DỤ 2. Vẽ hình biểu diễn của hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang $ABCD$ với AB song song CD; $AB = 2$ cm, $CD = 6$ cm.

VÍ DỤ 3. Vẽ hình biểu diễn của các hình sau

a) Hình lăng trụ có đáy là tam giác đều.

b) Hình lăng trụ có đáy là lục giác đều.

c) Hình hộp.

d) Hình chóp tam giác $S.ABC$ đặt trên một hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$.

C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

CÂU 1. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M, M' lần lượt là trung điểm của các cạnh $BC, B'C'$ Hình chiếu của $\Delta B'DM$ qua phép chiếu song song trên $(A'B'C'D')$ theo phương chiếu AA' là

Ⓐ $\Delta B'A'M'$. Ⓑ $\Delta C'D'M'$. Ⓒ $\Delta DMM'$. Ⓓ $\Delta B'D'M'$.

CÂU 2. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M, M' lần lượt là trung điểm của các cạnh $BC, B'C'$ Hình chiếu của $\Delta D'CM$ qua phép chiếu song song trên $(A'B'C'D')$ theo phương chiếu BB' là

Ⓐ $\Delta B'CM'$. Ⓑ $\Delta C'D'M'$. Ⓒ $\Delta DMM'$. Ⓓ $\Delta B'D'M'$.

CÂU 3. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M, M' lần lượt là trung điểm của các cạnh $AD, A'D'$; N, N' lần lượ là trung điểm của các cạnh $CD, C'D'$; P là trung điểm của DD'. Hình chiếu của ΔMNP qua phép chiếu song song trên $(A'B'C'D')$ theo phương chiếu BB' là

Ⓐ $\Delta B'N'M'$. Ⓑ $\Delta D'M'N'$. Ⓒ $\Delta PM'N'$. Ⓓ $\Delta PD'M'$.

CÂU 4. Trong các mệnh đề sau, có bao nhiêu mệnh đề đúng?

a) Một đường thẳng có thể song song với hình chiếu của nó.

b) Một đường thẳng có thể trùng với hình chiếu của nó.

c) Hình chiếu song song của hai đường thẳng chéo nhau có thể song song với nhau.

d) Hình chiếu song song của hai đường thẳng chéo nhau có thể trung nhau.

Ⓐ 1. Ⓑ 2. Ⓒ 3. Ⓓ 4.

CÂU 5. Trong các mệnh đề sau, có bao nhiêu mệnh đề đúng?

a) Phép chiếu song song biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng.

b) Phép chiếu song song biến hai đường thẳng song song thành hai đường thẳng cắt nhau.

c) Phép chiếu song song biến tam giác đều thành tam giác cân.

d) Phép chiếu song song biến hình vuông thành hình bình hành.

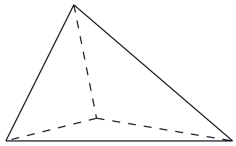
Ⓐ 1. Ⓑ 2. Ⓒ 3. Ⓓ 4.

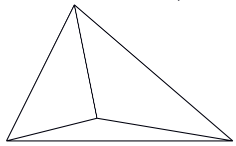
CÂU 6. Hình chiếu của tứ diện $ABCD$ lên một mặt phẳng (P) theo phương chiếu AB (AB không song song với (P) là

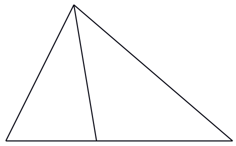
Ⓐ hình tam giác. Ⓑ hình tứ giác. Ⓒ đoạn thẳng. Ⓓ hình thang.

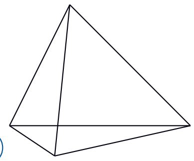
QUICK NOTE

CÂU 7. Hình nào dưới đây **không phải** là hình biểu diễn của một tứ diện?

(A) 

(B) 

(C) 

(D) 

CÂU 8. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Gọi M, M' lần lượt là trung điểm của các cạnh $BC, B'C'$ và I là giao điểm của đường thẳng $A'M$ và $(AB'C')$. Tìm hình chiếu song song của I trên $(A'B'C')$ theo phương BB'.

(A) Trung điểm của đoạn thẳng $A'M'$.
(B) Trọng tâm của tam giác $A'B'C'$.
(C) Điểm A'.
(D) Điểm M'.

CÂU 9. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AC, BC, trên cạnh BD lấy điểm P sao cho $BP = 2PD$. Mặt phẳng (MNP) cắt mặt phẳng (ACD) theo giao tuyến d. Tìm hình chiếu song song của đường thẳng d trên (BCD) theo phương AD.

(A) Đường thẳng DN.
(B) Đường thẳng CD.
(C) Đường thẳng BD.
(D) Điểm M.

CÂU 10. Cho tứ diện $ABCD$ và M là điểm bất kì thuộc miền trong của tam giác BCD. Gọi B', C', D' lần lượt là hình chiếu song song của M theo các phương AB, AC, AD lên các mặt (ACD), (ABD), (ABC). Tính $\dfrac{MB'}{AB} + \dfrac{MC'}{AC} + \dfrac{MD'}{AD}$.

(A) 1.
(B) $\dfrac{1}{9}$.
(C) $\dfrac{1}{3}$.
(D) 3.

—HẾT—

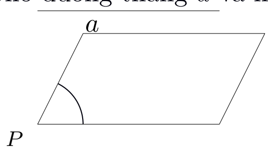
LỜI GIẢI CHI TIẾT

Bài 12. ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG SONG SONG

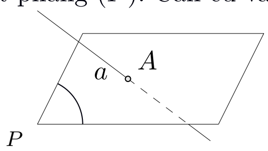
A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG

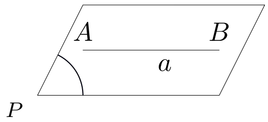
Cho đường thẳng a và mặt phẳng (P). Căn cứ vào số điểm chung của đường thẳng và mặt phẳng, ta có ba trường hợp sau:



$a \parallel (P)$



$a \cap (P) = A$

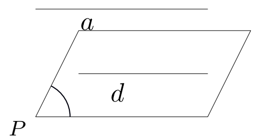


$a \subset (P)$

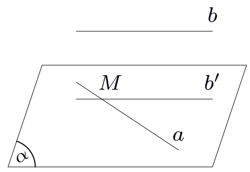
2. CÁC ĐỊNH LÝ VÀ HỆ QUẢ CẦN NHỚ

Định lý 1: Nếu đường thẳng a không nằm trong mặt phẳng (P) và song song với một đường thẳng nào đó trong (P) thì a song song với (P), hay

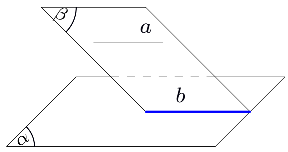
$$a \not\subset (P) \text{ và } \begin{cases} a \parallel d \\ d \subset (P) \end{cases} \Rightarrow a \parallel (P)$$



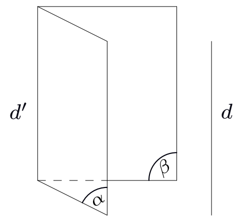
Định lý 2: Cho hai đường thẳng chéo nhau. Có duy nhất một mặt phẳng chứa đường thẳng này và song song với đường thẳng kia.



Định lý 3: Nếu đường thẳng a song song với mặt phẳng (α). Nếu mặt phẳng (β) chứa a và cắt (α) theo giao tuyến b thì b song song với a.



Nếu hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với một đường thẳng thì giao tuyến của chúng (nếu có) cũng song song với đường thẳng đó.



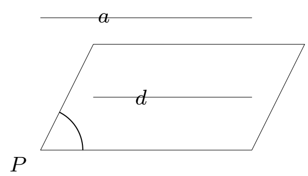
B. PHÂN LOẠI, PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

1 Chứng minh đường thẳng song song với mặt phẳng

Phương pháp giải: Để chứng minh đường thẳng a song song với mặt phẳng (P), ta cần chứng tỏ các ý sau đây

- a không nằm trên (P);
- a song song với một đường thẳng b nằm trong (P). Suy ra $a \parallel (P)$.

Tóm lại $\boxed{\begin{cases} a \not\subset (P) \\ a \parallel b \\ b \subset (P) \end{cases} \Rightarrow a \parallel (P)}$



VÍ DỤ 1. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M và N lần lượt là trọng tâm của các tam giác ACD và BCD. Chứng minh rằng MN song song với các mặt phẳng (ABC) và (ABD).

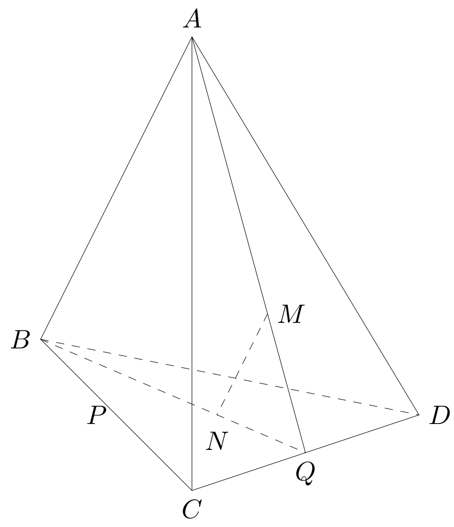
Lời giải.

Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của BC và CD.

Khi đó, ta có $\dfrac{QM}{MA} = \dfrac{QN}{NB} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow MN \parallel AB$.

Vì $\begin{cases} MN \not\subset (ABC) \\ AB \subset (ABC) \\ MN \parallel AB \end{cases}$ nên $MN \parallel (ABC)$.

Tương tự, ta có $\begin{cases} MN \not\subset (ABD) \\ AB \subset (ABD) \\ MN \parallel AB \end{cases}$ nên $MN \parallel (ABD)$.



VÍ DỤ 2. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G là trọng tâm tam giác ABD, điểm I nằm trên cạnh BC sao cho $BI = 2IC$. Chứng minh rằng IG song song (ACD).

VÍ DỤ 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Lấy M nằm trên cạnh AD sao cho $AD = 3AM$. Gọi G, N lần lượt là trọng tâm của tam giác SAB và ABC.

a) Tìm giao tuyến của (SAB) và (SCD).

b) Chứng minh MN song song (SCD) và NG song song (SAC).

VÍ DỤ 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và CD.

a) Chứng minh MN song song với các mặt phẳng (SBC) và (SAD).

b) Gọi E là trung điểm của SA. Chứng minh SB và SC đều song song với mặt phẳng (MNE).

Lời giải.

a) Từ giả thiết, ta suy ra $MN \parallel BC$ và $MN \parallel AD$.

Vì $\begin{cases} MN \not\subset (SBC) \\ BC \subset (SBC) \\ MN \parallel BC \end{cases}$ nên $MN \parallel (SBC)$.

Tương tự, ta có $\begin{cases} MN \not\subset (SAD) \\ AD \subset (SAD) \\ MN \parallel AD \end{cases}$ nên $MN \parallel (SAD)$.

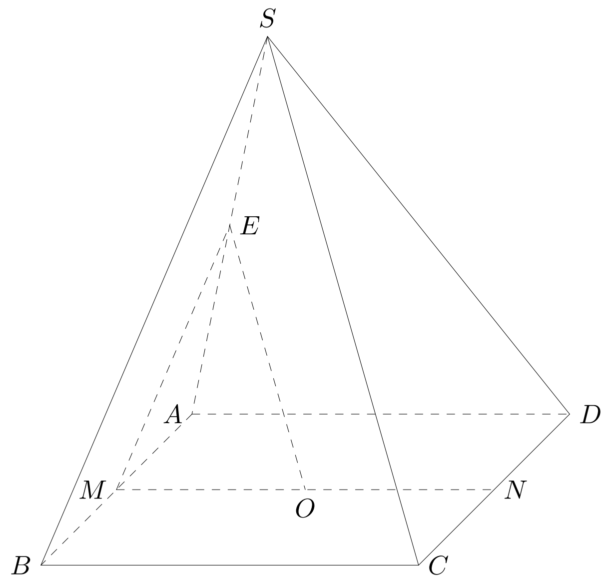
b) Từ giả thiết, ta có $\dfrac{AE}{AS} = \dfrac{AM}{AB} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow ME \parallel SB$.

Vì $\begin{cases} SB \not\subset (MNE) \\ ME \subset (MNE) \\ ME \parallel SB \end{cases}$ nên $SB \parallel (MNE)$.

Tương tự, gọi O là tâm của hình bình hành.

Khi đó $\dfrac{AO}{AC} = \dfrac{AE}{AS} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow EO \parallel SC$.

Vì $\begin{cases} SC \not\subset (MNE) \\ EO \subset (MNE) \\ EO \parallel SC \end{cases}$ nên $SC \parallel (MNE)$.

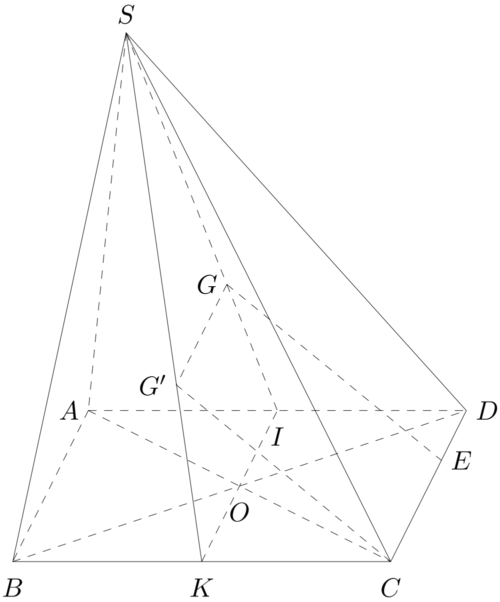


VÍ DỤ 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. Gọi G là trọng tâm tam giác SAD và E là điểm trên cạnh DC sao cho $DC = 3DE$, I là trung điểm AD.

a) Chứng minh OI song song với các mặt phẳng (SAB) và (SCD).

b) Tìm giao điểm P của IE và (SBC). Chứng minh $GE \parallel (SBC)$.

Lời giải.



a) Ta có $\begin{cases} OI \parallel AB \\ AB \subset (SAB) \\ OI \not\subset (SAB) \end{cases} \Rightarrow OI \parallel (SAB)$.

Tương tự, $\begin{cases} OI \parallel CD \\ CD \subset (SCD) \\ OI \not\subset (SCD) \end{cases} \Rightarrow OI \parallel (SCD)$.

b) Vì $\dfrac{DI}{DA} = \dfrac{1}{2} \neq \dfrac{1}{3} = \dfrac{DE}{DC}$ nên IE không song song với AC. Trong hình chữ nhật $ABCD$, gọi $P = IE \cap BC \Rightarrow P = IE \cap (SBC)$.
Gọi K là trung điểm của BC, G' là trọng tâm tam giác SBC.
Khi đó $\dfrac{SG'}{SK} = \dfrac{SG}{SI} = \dfrac{G'G}{KI} = \dfrac{2}{3}$,suy ra $G'G \parallel KI \parallel CE$ và $\Rightarrow G'G = \dfrac{2}{3}KI = \dfrac{2}{3}CD = CE$. Do đó tứ giác $G'GEC$ là hình bình hành, suy ra $CG' \parallel CE \Rightarrow CG \parallel (SBC)$.

2 Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng cắt nhau

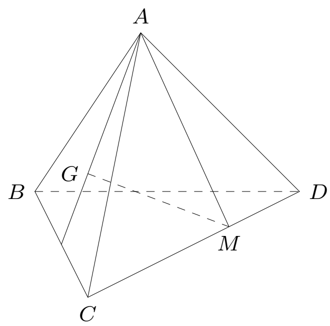
Ngoài các phương pháp đã học ở bài trước, ta có thêm 2 cách nữa là áp dụng định lí 3 ở trên.

VÍ DỤ 1.

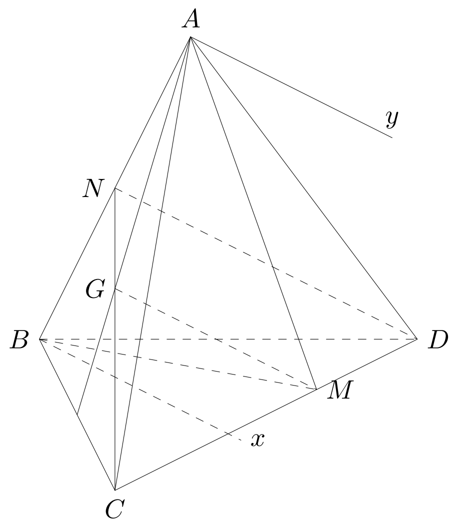
Cho tứ diện $ABCD$ có G là trọng tâm $\triangle ABC$, $M \in CD$ với $MC = 2MD$.

a) Chứng minh MG song song với (ABD).

b) Tìm giao tuyến của (ABD) với (BGM).



Lời giải.



a) Gọi N là trung điểm của AB. Trong tam giác CDN, ta có $\dfrac{CM}{CD} = \dfrac{CG}{CN} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow GM \parallel ND$. Vì $ND \subset (ABD)$, $GM \not\subset (ABD)$ nên $GM \parallel (ABD)$.

b) Vì $\begin{cases} GM \parallel (ABD) \\ B \in (ABD) \cap (BGM) \end{cases} \Rightarrow (ABD) \cap (BGM) = Bx \parallel GM \parallel ND$.

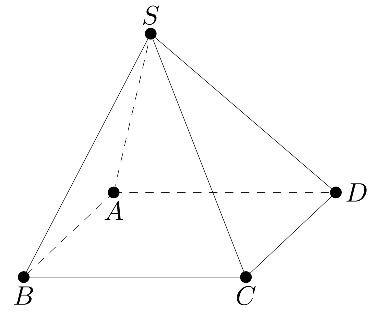
VÍ DỤ 2.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi I, K lần lượt là trung điểm của BC và CD.

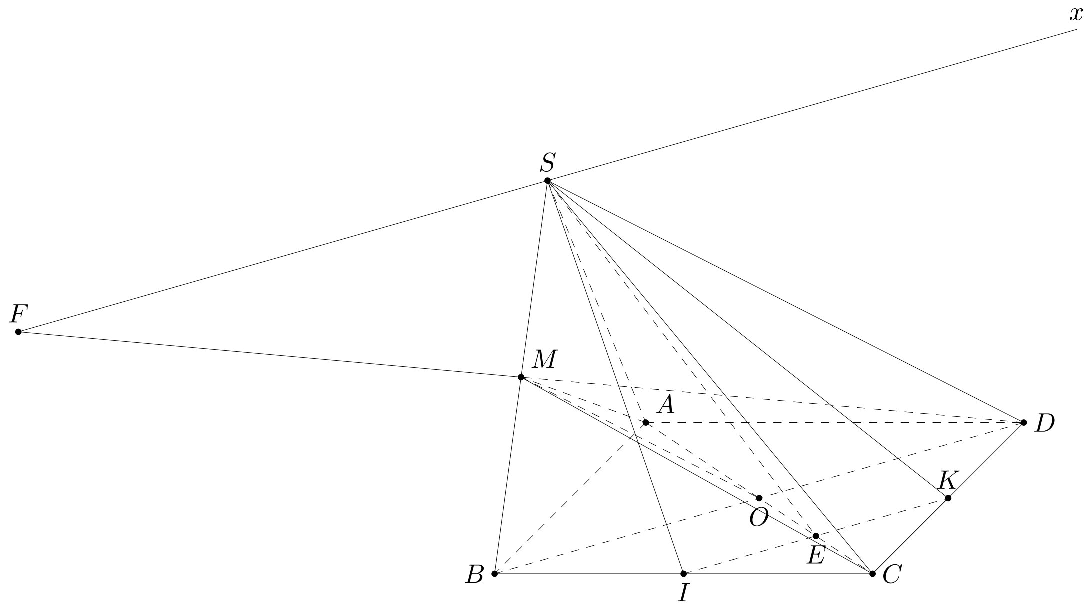
a) Tìm giao tuyến của (SIK) và (SAC), (SIK) và (SBD).

b) Gọi M là trung điểm của SB. Chứng minh $SD \parallel (ACM)$.

c) Tìm giao điểm F của DM và (SIK). Tính tỉ số $\dfrac{MF}{MD}$.



Lời giải.



a) Ta có $S \in (SIK) \cap (SAC)$.

Trong mp$(ABCD)$, gọi $E = IK \cap AC \Rightarrow \begin{cases} E \in IK \subset (SIK) \\ E \in AC \subset (SAC) \end{cases} \Rightarrow E \in (SIK) \cap (SAC)$.

Suy ra $SE = (SIK) \cap (SAC)$.

Ta có $\begin{cases} S \in (SIK) \cap (SBD) \\ BD \in (SBD), IK \in (SIK), BD \parallel IK \end{cases} \Rightarrow (SIK) \cap (SBD) = Sx$, (với $Sx \parallel BD \parallel IK$).

b) Trong mp$(ABCD)$, gọi $O = AC \cap BD$, ta có $SD \parallel MO$. Mà $MO \subset (ACM)$, suy ra $SD \parallel (ACM)$.

c) Trong mp(SBD), gọi $F = Sx \cap DM \Rightarrow \begin{cases} S \in DM \\ S \in Sx \subset (SIK) \end{cases} \Rightarrow F = DM \cap (SIK)$.

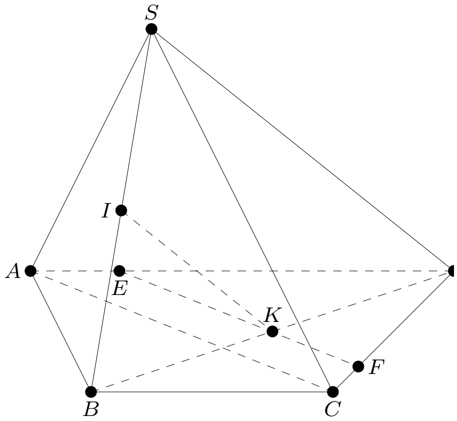
Ta có $SF \parallel BD \Rightarrow \dfrac{MF}{MD} = \dfrac{MS}{MB} = 1$.

VÍ DỤ 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang, đáy lớn AD. Gọi I là trung điểm của SB. Gọi (P) là mặt phẳng qua I, song song với SD và AC. Tìm giao tuyến của (P) với các mặt (SBD) và $(ABCD)$.

Lời giải.

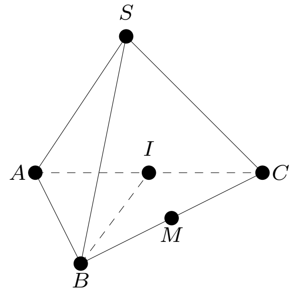
a) Ta có: $\begin{cases} I \in (P) \cap (SBD) \\ (P) \parallel SD \\ SD \subset (SBD) \end{cases}$
$\Rightarrow (P) \cap (SBD) = Ix$ trong đó $Ix \parallel SD$.
Gọi $Ix \cap BD = K \Rightarrow (P) \cap (SBD) = IK$.

b) Ta có: $\begin{cases} K \in (P) \cap (ABCD) \\ (P) \parallel AC \\ AC \subset (ABCD) \end{cases}$
$\Rightarrow (P) \cap (SBD) = Ky$ trong đó $Ky \parallel AC$.
Gọi $Ky \cap AD = E, Ky \cap CD = F$
$\Rightarrow (P) \cap (SBD) = EF$.



VÍ DỤ 4.

Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, I lần lượt là trung điểm của BC, AC. Mặt phẳng (P) đi qua điểm M, song song với BI và SC. Xác định trên hình vẽ các giao điểm H, K, N của (P) với các cạnh AC, SA, SB. Tứ giác $MNKH$ là hình gì?

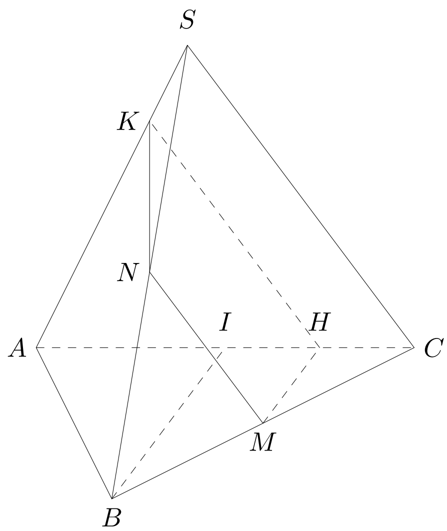


Lời giải.

Vì $\begin{cases} (P) \parallel SC \\ M \in (P) \cap (SBC) \end{cases} \Rightarrow (P) \cap (SBC) = MN \parallel SC,\, N \in SB \qquad (1)$

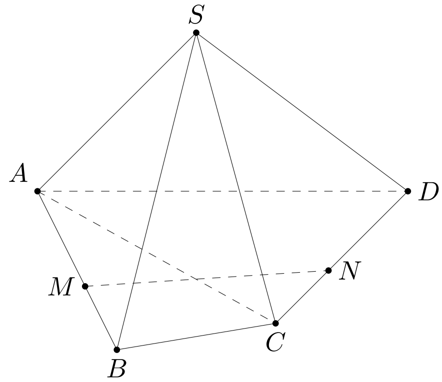
Tương tự, $\begin{cases} (P) \parallel BI \\ M \in (P) \cap (ABC) \end{cases} \Rightarrow (P) \cap (ABC) = MH \parallel BI,\, H \in AC \qquad (2)$

Mặt khác, $\begin{cases} (P) \parallel (SC) \\ N \in (P) cap (SAC) \end{cases} \Rightarrow (P) \cap (SAC) = HK \parallel SC,\, K \in SA$ (3) Từ (1), (2) và (3) ta có thiết diện của (P) với tư diện $ABCD$ là tứ giác $MNKH$.



VÍ DỤ 5.

Cho hình chóp $S.ABCD$. Gọi M, N thuộc cạnh AB, CD. Gọi (α) là mặt phẳng qua MN và song song với SA. Tìm giao tuyến của (α) với các mặt của hình chóp.



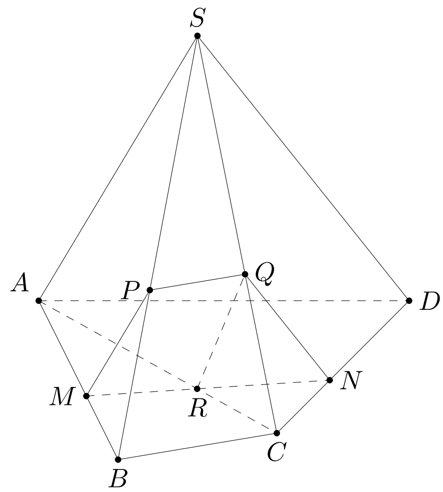
Lời giải.

Ta có $\begin{cases} M \in (\alpha) \cap (SAB) \\ SA \parallel (\alpha) \\ SA \subset (SAB) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (SAB) = MP$, với $MP \parallel SA$.

Trong mặt phẳng $(ABCD)$, gọi $R = MN \cap AC$.

Ta có $\begin{cases} R \in (\alpha) \cap (SAC) \\ SA \parallel (\alpha) \\ SA \subset (SAC) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (SAC) = RQ$, với $RQ \parallel SA$.

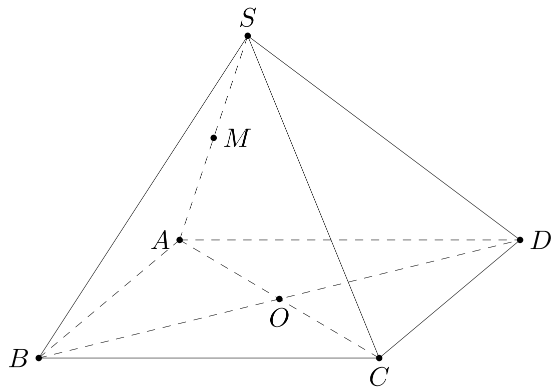
Ta có $(\alpha) \cap (SCD) = QN$. Vậy thiết diện là tứ giác $MNQP$.



VÍ DỤ 6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành, O là giao điểm của AC và BD, M là trung điểm của SA.

a) Chứng minh $OM \parallel (SCD)$.

b) Gọi (α) là mặt phẳng đi qua M, đồng thời song song với SC và AD. Tìm giao tuyến của mặt phẳng (α) với các mặt của hình chóp $S.ABCD$. Hình tạo bởi các giao tuyến là hình gì?



Lời giải.

a)

Ta có M, O là trung điểm của SA và AC, suy ra $MO \parallel SC$.
Mà $SC \subset (SCD) \Rightarrow OM \parallel (SCD)$.

b) Vì $MO \parallel SC \Rightarrow O \in (\alpha)$.

Ta có $\begin{cases} O \in (\alpha) \cap (ABCD) \\ AD \parallel (\alpha) \\ AD \subset (ABCD) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (ABCD) = PQ$.

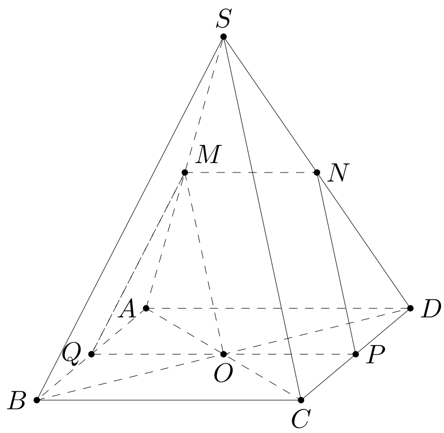
Với $PQ \parallel AD, O \in PQ, Q \in AB, P \in CD$.

Lại có $\begin{cases} P \in (\alpha) \cap (SCD) \\ SC \parallel (\alpha) \\ SC \subset (SCD) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (SCD) = PN$, với $PN \parallel SC$.

Có $(\alpha) \cap (SAD) = MN, (\alpha) \cap (SAB) = MQ$.

Nhận thấy P, Q là trung điểm của CD và AB. Suy ra N là trung điểm của SD.

Suy ra $MN \parallel PQ$. Vậy thiết diện là hình thang $MNPQ$.



VÍ DỤ 7. Cho tứ diện $ABCD$ và điểm M thuộc cạnh AB. Gọi (α) là mặt phẳng đi qua M, song song với đường thẳng BC và AD. Gọi N, P, Q lần lượt là giao điểm của (α) với các cạnh AC, CD và DB .

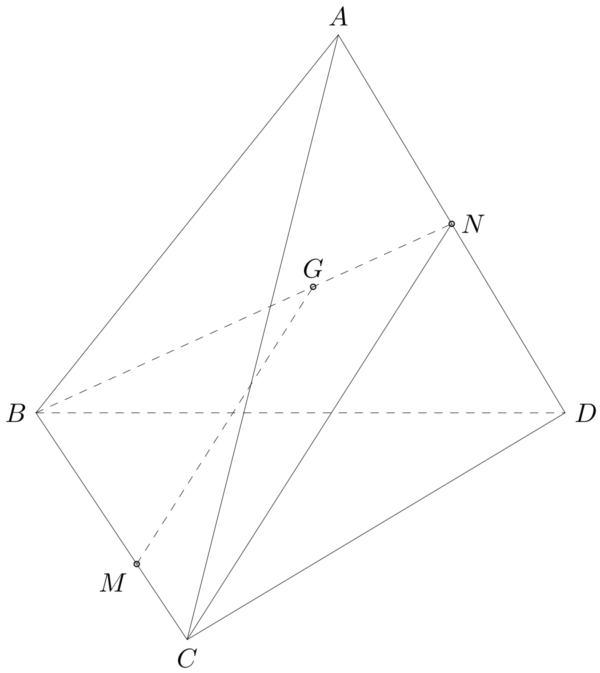
a) Chứng minh $MNPQ$ là hình bình hành.

b) Trong trường hợp nào thì $MNPQ$ là hình thoi.

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

BÀI 1. Cho tứ diện $ABCD$ có G là trọng tâm tam giác ABD. Trên đoạn BC lấy điểm M sao cho $MB = 2MC$. Chứng minh rằng đường thẳng MG song song với mặt phẳng (ACD).

Lời giải.



Gọi N là trung điểm của AD. Ta có: $\dfrac{BG}{BN} = \dfrac{2}{3}$ (Vì G là trọng tâm tam giác ABD).

Theo giả thiết, ta có: $MB = 2MC \Rightarrow \dfrac{BM}{BC} = \dfrac{2}{3}$.

Tam giác BCN có $\dfrac{BG}{BN} = \dfrac{BM}{BC} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow MG \parallel CN$.

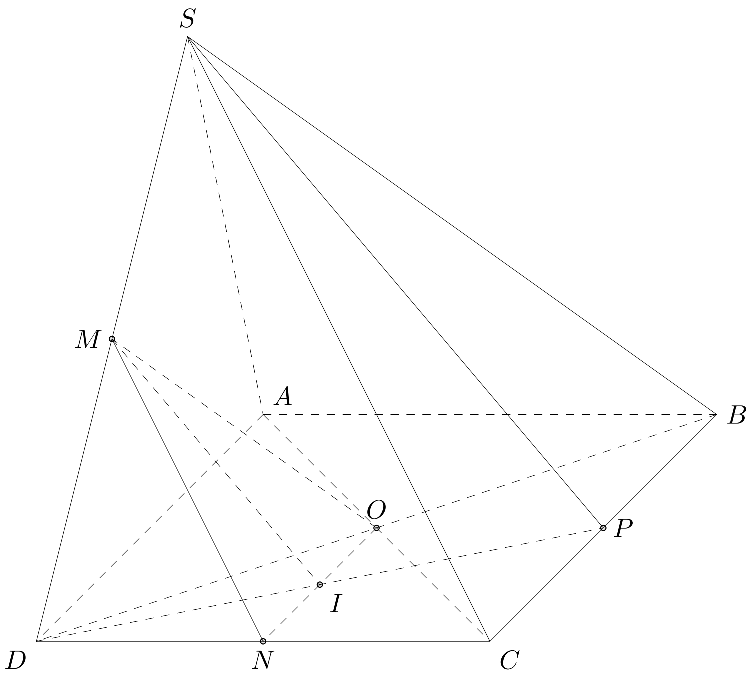
Mà $MG \not\subset (ACD)$, $CN \subset (ACD) \Rightarrow MG \parallel (ACD)$.

BÀI 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh SD, CD, BC.

a) Chứng minh đường thẳng OM song song với các mặt phẳng (SAB), (SBC).

b) Chứng minh đường thẳng SP song song với mặt phẳng (OMN).

Lời giải.



a) Tam giác SBD có $OB = OD$ và $MS = MD$ nên OM là đường trung bình của tam giác $SBD \Rightarrow OM \parallel SB$.
Mà OM không chứa trong các mặt phẳng (SAB) và (SBC) nên $OM \parallel (SAB)$ và $OM \parallel (SBC)$.

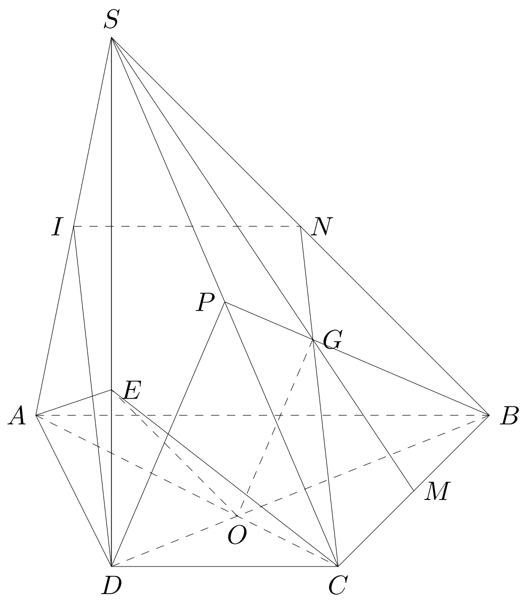
b) Trong mặt phẳng $(ABCD)$, gọi I là giao điểm của ON và DP.
Tam giác BCD có $OB = OD$ và $NC = ND$ nên ON là đường trung bình của tam giác $BCD \Rightarrow I$ là trung điểm của

DP.
Tam giác SDP có $MS = MD$ và $IP = ID$ nên IM là đường trung bình của tam giác $SDP \Rightarrow IM \parallel SP$.
Mà $SP \not\subset (OMN)$, $IM \subset (OMN) \Rightarrow SP \parallel (OMN)$.

BÀI 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang đáy lớn AB, với $AB = 2CD$. Gọi O là giao điểm của AC và BD, I là trung điểm của SA, G là trọng tâm của tam giác SBC và E là một điểm trên cạnh SD sao cho $3SE = 2SD$. Chứng minh:

a) $DI \parallel (SBC)$. b) $GO \parallel (SCD)$. c) $SB \parallel (ACE)$.

Lời giải.



a) Gọi N là trung điểm SB, khi đó $IN \parallel AB$ và $IN = \dfrac{1}{2}AB$. Suy ra $IN \parallel CD$, $IN = DC$ suy ra tứ giác $INCD$ là hình bình hành, do đó $ID \parallel NC$. Vậy $ID \parallel (SBC)$.

b) $GO \parallel (SCD)$
Gọi P là trung điểm của SC, khi đó $GO \parallel PD$, suy ra $GO \parallel (SCD)$.

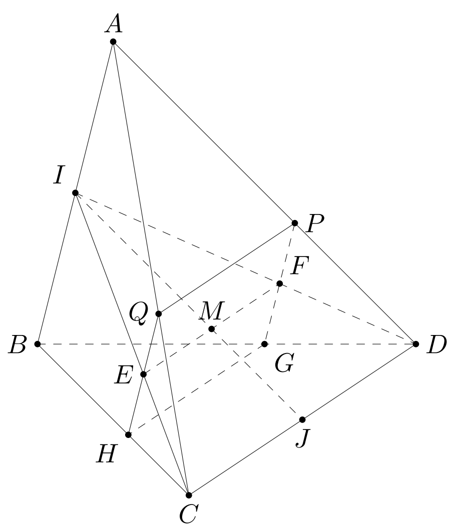
c) Ta có $EO \parallel SB$, suy ra $SB \parallel (ACE)$.

BÀI 4. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB và CD, M là một điểm trên đoạn IJ. Gọi (P) là mặt phẳng qua M và song song với AB và CD.

a) Tìm giao tuyến của mặt phẳng (P) và (ICD).

b) Xác định giao tuyến của mặt phẳng (P) với các mặt của tứ diện. Hình tạo bởi các giao tuyến là hình gì?

Lời giải.



a) Gọi $\Delta_1 = (P) \cap (ICD)$, ta có
$\begin{cases} M \in (P) \\ M \in IJ,\ IJ \subset (ICD) \end{cases} \Rightarrow M \in \Delta_1.$
$\begin{cases} (P) \parallel CD \\ CD \subset (ICD) \\ (P) \cap (ICD) = \Delta_1 \end{cases} \Rightarrow \Delta_1 \parallel CD.$
Vậy Δ_1 là đường thẳng qua M và song song với CD.
Gọi $E = \Delta_1 \cap IC, F = \Delta_1 \cap TD$, ta được $(P) \cap (ICD) = EF$.

b) Gọi $\Delta_2 = (P) \cap (ABD)$, ta có
$\begin{cases} F \in (P) \\ F \in ID,\ ID \subset (ABD) \end{cases} \Rightarrow F \in \Delta_2.$
$\begin{cases} (P) \parallel AB \\ AB \subset (ABD) \\ (P) \cap (ABD) = \Delta_2 \end{cases} \Rightarrow \Delta_2 \parallel AB.$
Vậy Δ_2 là đường thẳng qua F và song song với AB.
Gọi $G = \Delta_2 \cap BD, P = \Delta_2 \cap AD$, ta được $(P) \cap (ICD) = GP$.
Gọi $\Delta_3 = (P) \cap (ABC)$, ta có

$$\begin{cases} E \in (P) \\ E \in IC,\ IC \subset (ABC) \end{cases} \Rightarrow E \in \Delta_3.$$

Ta có

$$\begin{cases} (P) \parallel AB \\ AB \subset (ABC) \\ (P) \cap (ABC) = \Delta_3 \end{cases} \Rightarrow \Delta_3 \parallel AB.$$

Vậy Δ_3 là đường thẳng qua E và song song với AB.
Gọi $H = \Delta_3 \cap BC, Q = \Delta_3 \cap AC$, ta được $(P) \cap (ABC) = HQ$.
Giao tuyến của (P) với các mặt phẳng (BCD), (ABD), (ACD), (ABC) lần lượt là GH, GP, PQ, QH. Do đó thiết diện của tứ diện với mặt phẳng (P) là tứ giác $HGPQ$.
Ta có

$$\begin{cases} (P) \parallel CD \\ CD \subset (ACD) \\ (P) \cap (ACD) = PQ \end{cases} \Rightarrow PQ \parallel CD$$

và

$$\begin{cases} (P) \parallel CD \\ CD \subset (BCD) \\ (P) \cap (BCD) = HG \end{cases} \Rightarrow HG \parallel CD.$$

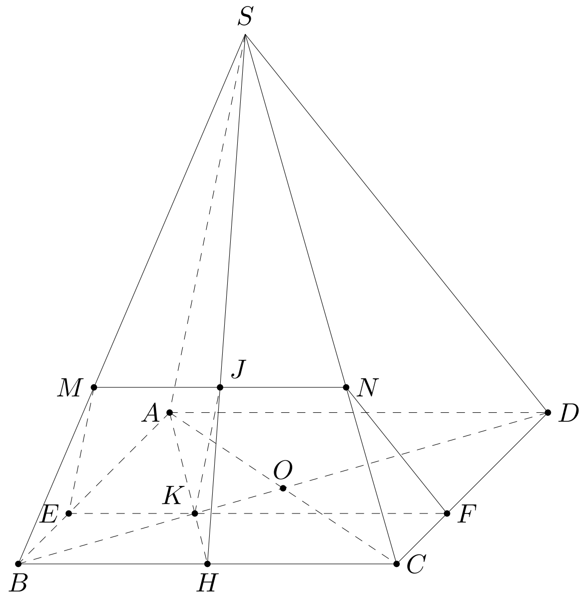
Ta có $\begin{cases} HG \parallel PQ \,(\text{cùng song song với}\, CD) \\ HQ \parallel PG \,(\text{cùng song song với}\, AB) \end{cases} \Rightarrow$ tứ giác $HGPQ$ là hình bình hành.

BÀI 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Gọi K và J lần lượt là trọng tâm của các tam giác ABC và SBC.

a) Chứng minh $KJ \parallel (SAB)$.

b) Gọi (P) là mặt phẳng chứa KJ và song song với AD. Xác định giao tuyến của mặt phẳng (P) với các mặt của hình chóp. Hình tạo bởi các giao tuyến là hình gì?

Lời giải.



a) Gọi H là trung điểm BC, theo tính chất trọng tâm ta có $\dfrac{HK}{HA} = \dfrac{HJ}{HS} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow KJ \parallel SA$ (Định lý Ta-lét đảo). Ta có $\begin{cases} KJ \parallel SA \\ SA \subset (SAB) \\ KJ \not\subset (SAB) \end{cases} \Rightarrow KJ \parallel (SAB)$.

b) Gọi $\Delta_1 = (P) \cap (ABCD)$, ta có
$\begin{cases} K \in KJ,\, KJ \subset (P) \\ K \in (ABCD) \end{cases} \Rightarrow K \in \Delta_1.$
$\begin{cases} (P) \parallel AD \\ AD \subset (ABCD) \\ (P) \cap (ABCD) = \Delta_1 \end{cases} \Rightarrow \Delta_1 \parallel AD.$
Vậy Δ_1 là đường thẳng qua K và song song với AD.
Gọi $E = \Delta_1 \cap AB, F = \Delta_1 \cap CD$, ta được$(P) \cap (ABCD) = EF$.

Gọi $\Delta_2 = (P) \cap (SBC)$, ta có

$$\begin{cases} J \in KJ,\, KJ \subset (P) \\ J \in (SBC) \end{cases} \Rightarrow K \in \Delta_2.$$

Và

$$\begin{cases} (P) \parallel AD \parallel BC \\ BC \subset (ABCD) \\ (P) \cap (ABCD) = \Delta_2 \end{cases} \Rightarrow \Delta_2 \parallel BC.$$

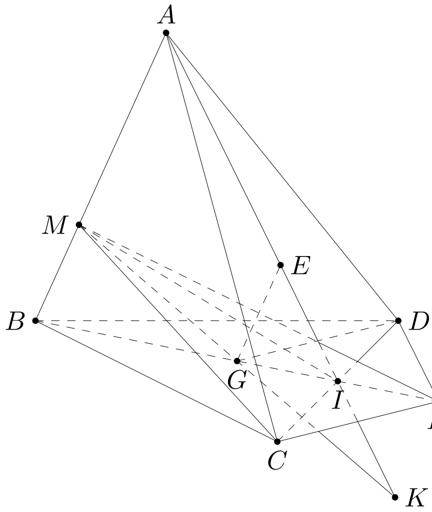
Vậy Δ_2 là đường thẳng qua J và song song với BC.
Gọi $M = \Delta_2 \cap SB, N = \Delta_2 \cap SD$, ta được $(P) \cap (SBC) = MN$.
Ta có giao tuyến của (P) với các mặt phẳng $(ABCD)$, (SCD), (SBC), (SAB) lần lượt là EF, FN, NM, NE, do đó thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (P) là tứ giác $MNFE$.

BÀI 6. Cho tứ diện $ABCD$. Lấy điểm M trên cạnh AB sau cho $AM = 2MB$. Gọi G là trọng tâm $\triangle BCD$ và I là trung điểm CD, H là điểm đối xứng của G qua I.

a) Chứng minh $GD \parallel (MCH)$.

b) Tìm giao điểm K của MG với (ACD). Tính tỉ số $\dfrac{GK}{GM}$.

Lời giải.

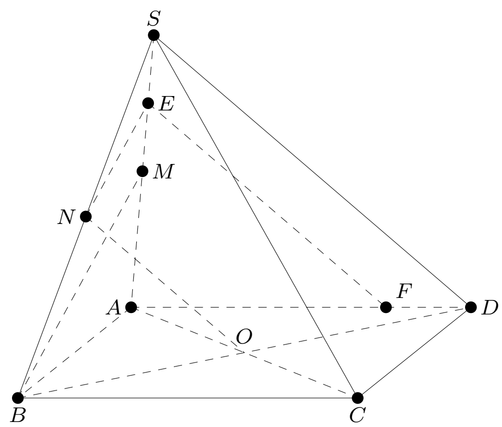


a) Ta có $IC = ID$ và $IG = IH$ nên $GDHC$ là hình bình hành.
Do đó $GD \parallel CH$
mà $CH \subset (MCH)$ nên $GD \parallel (MCH)$.

b) Trong mp(ABI), gọi $K = AI \cap MG$, ta có $\begin{cases} K \in AI \subset (ACD) \\ K \in MG \end{cases}$
$\Rightarrow K = MG \cap (ACD)$.
Trong mp(ABI), kẻ $GE \parallel AB$, $(E \in AI)$.
Xét tam giác ABI, có $GE \parallel AB$, suy ra $\dfrac{GE}{AB} = \dfrac{IG}{IB} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow \dfrac{GE}{AM} = \dfrac{1}{2}$.
Xét tam giác AKM, có $GE \parallel AM$, suy ra $\dfrac{KG}{KM} = \dfrac{GE}{AM} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \dfrac{GK}{GM} = 1$.

BÀI 7. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm O, M là trung điểm của SA. Gọi (P) là mặt phẳng qua O, song song với BM và SD. Tìm giao tuyến của (P) và (SAD).

Lời giải.



- Tìm giao tuyến của (P) và (SBD).
Ta có: $\begin{cases} O \in (P) \cap (SBD) \\ (P) \parallel SD \\ SD \subset (SBD) \end{cases}$
$\Rightarrow (P) \cap (SBD) = Ox$ trong đó $Ox \parallel SD$.
Gọi $Ox \cap SB = N \Rightarrow (P) \cap (SBD) = ON$.

- Tìm giao tuyến của (P) và (SAB).
Ta có: $\begin{cases} N \in (P) \cap (SAB) \\ (P) \parallel BM \\ BM \subset (SAB) \end{cases}$
$\Rightarrow (P) \cap (SAB) = Ny$ trong đó $Ny \parallel BM$.
Gọi $Ny \cap SA = E \Rightarrow (P) \cap (SAB) = NE$.

- Tìm giao tuyến của (P) và (SAD).
Ta có: $\begin{cases} E \in (P) \cap (SAD) \\ (P) \parallel SD \\ SD \subset (SAD) \end{cases}$
$\Rightarrow (P) \cap (SAD) = Ez$ trong đó $Ez \parallel SD$.
Gọi $Ez \cap AD = F \Rightarrow (P) \cap (SAD) = EF$.

D. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

CÂU 1. Trong không gian cho mặt phẳng (α) và A không thuộc (α). Qua điểm A có thể dựng được bao nhiêu đường thẳng song song với (α)?

A. Duy nhất. B. Vô số . C. 2. D. 4.

Lời giải.

Chọn đáp án B .... □

CÂU 2. Trong không gian cho đường thẳng Δ và điểm O không nằm trong Δ. Qua điểm O cho trước, có bao nhiêu mặt phẳng song song với đường thẳng Δ?

(A) Vô số. (B) 3. (C) 1. (D) 2.

Lời giải.

Gọi d là đường thẳng qua O và song song với Δ. Khi đó có vô số mặt phẳng chứa d và không chứa Δ. Vậy có vô số mặt phẳng qua O và song song với Δ.

Chọn đáp án (A) ☐

CÂU 3. Có bao nhiêu mặt phẳng song song với cả hai đường thẳng chéo nhau?

(A) Vô số. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

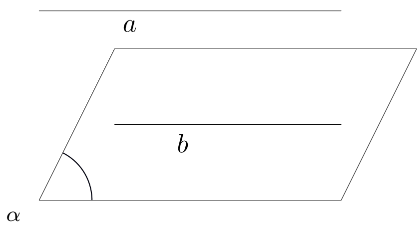
Lời giải.

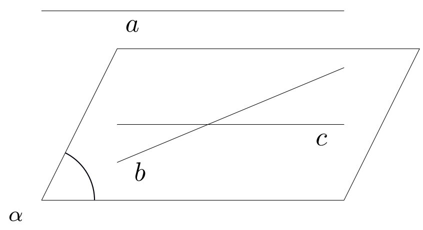
Chọn đáp án (A) ☐

CÂU 4. Cho hai đường thẳng phân biệt a, b và mặt phẳng (α). Giả sử $a \parallel (\alpha)$, $b \subset (\alpha)$. Khi đó

(A) $a \parallel b$. (B) a, b chéo nhau. (C) a, b cắt nhau. (D) $a \parallel b$ hoặc a, b chéo nhau.

Lời giải.





Vì $a \parallel (\alpha)$ nên tồn tại đường thẳng $c \subset (\alpha)$ thỏa mãn $a \parallel c$. Suy ra b, c đồng phẳng và xảy ra các trường hợp sau:

- Nếu b song song hoặc trùng với c thì $a \parallel b$.
- Nếu b cắt c thì b cắt $(\beta) \equiv (a, c)$ nên a, b không đồng phẳng. Do đó a, b chéo nhau.

Chọn đáp án (D) ☐

CÂU 5. Cho hai đường thẳng phân biệt a, b và mặt phẳng (α). Giả sử $a \parallel b$ và $b \parallel (\alpha)$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

(A) $a \parallel (\alpha)$. (B) $a \subset (\alpha)$. (C) $a \parallel (\alpha)$ hoặc $a \subset (\alpha)$. (D) a cắt (α).

Lời giải.

Chọn đáp án (C) ☐

CÂU 6. Cho đường thẳng a nằm trong mặt phẳng (α) và đường thẳng b không thuộc (α). Mệnh đề nào sau đây đúng?

(A) Nếu $b \parallel (\alpha)$ thì $b \parallel a$.

(B) Nếu $b \parallel a$ thì $b \parallel (\alpha)$.

(C) Nếu b cắt (α) và (β) chứa b thì giao tuyến của (α) và (β) là đường thẳng cắt cả a và b. .

(D) Nếu b cắt (α) thì b cắt a.

Lời giải.

- A sai. Nếu $b \parallel (\alpha)$ thì $b \parallel a$ hoặc a, b chéo nhau.
- B sai. Nếu b cắt (α) thì b cắt a hoặc a, b chéo nhau.
- D sai. Nếu b cắt (α) và (β) chứa b thì giao tuyến của (α) và (β) là đường thẳng cắt a hoặc song song với a.

Chọn đáp án (B) ☐

CÂU 7. Cho hai đường thẳng chéo nhau a và b. Khẳng định nào sau đây **sai**?

(A) Có duy nhất một mặt phẳng song song với a và b.

(B) Có vô số đường thẳng song song với a và cắt b.

(C) Có duy nhất một mặt phẳng qua a và song song với b.

(D) Có duy nhất một mặt phẳng qua điểm M, song song với a và b (với M là điểm cho trước).

Lời giải.

Có có vô số mặt phẳng song song với 2 đường thẳng chéo nhau.

Chọn đáp án (A) ☐

CÂU 8. Cho $d \parallel (\alpha)$, mặt phẳng (β) qua d cắt (α) theo giao tuyến d'. Khẳng định nào sau đây là đúng?

(A) d cắt d'. (B) $d \parallel d'$. (C) d và d' chéo nhau. (D) $d \equiv d'$.

Lời giải.

Ta có $d' = (\alpha) \cap (\beta)$. Do d và d' cùng thuộc (β) nên d cắt d' hoặc $d \parallel d'$. Nếu d cắt d'. Khi đó, d cắt (α) (mâu thuẫn với giả thiết). Vậy $d \parallel d'$.

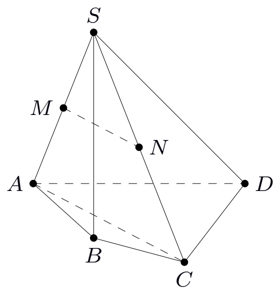
Chọn đáp án (B) .... □

CÂU 9. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của SA và SC. Khẳng định nào sau đây đúng?

(A) $MN \parallel (ABCD)$. (B) $MN \parallel (SAB)$. (C) $MN \parallel (SCD)$. (D) $MN \parallel (SBC)$.

Lời giải.

Xét tam giác SAC có M, N lần lượt là trung điểm của SA, SC.
Suy ra $MN \parallel AC$ nên $MN \parallel (ABCD)$.



Chọn đáp án (A) .... □

CÂU 10. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, M và N là hai điểm trên SA, SB sao cho $\dfrac{SM}{SA} = \dfrac{SN}{SB} = \dfrac{1}{3}$. Vị trí tương đối giữa MN và $(ABCD)$ là

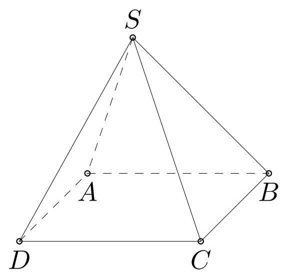
(A) MN và $(ABCD)$ chéo nhau.
(B) MN song song $(ABCD)$.
(C) MN nằm trong $(ABCD)$.
(D) MN cắt $(ABCD)$.

Lời giải.

Theo định lí Talet, ta có $\dfrac{SM}{SA} = \dfrac{SN}{SB}$ suy ra MN song song với AB.
Mà AB nằm trong mặt phẳng $(ABCD)$ suy ra $MN \parallel (ABCD)$.
Chọn đáp án (B) .... □

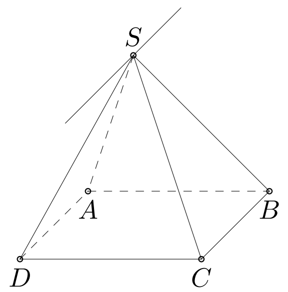
CÂU 11. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC).

(A) Là đường thẳng đi qua đỉnh S và song song với đường thẳng BD.
(B) Là đường thẳng đi qua đỉnh S và tâm O của đáy.
(C) Là đường thẳng đi qua đỉnh S và song song với đường thẳng BC.
(D) Là đường thẳng đi qua đỉnh S và song song với đường thẳng AB.



Lời giải.

Do hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) có chung điểm S và có hai đường thẳng AD, BC song song với nhau nên giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) là đường thẳng đi qua đỉnh S và song song với đường thẳng BC.



Chọn đáp án (C) .... □

CÂU 12. Cho tứ diện $ABCD$ có I, J lần lượt là trung điểm của BC, BD. Giao tuyến của mặt phẳng (AIJ) và (ACD) là

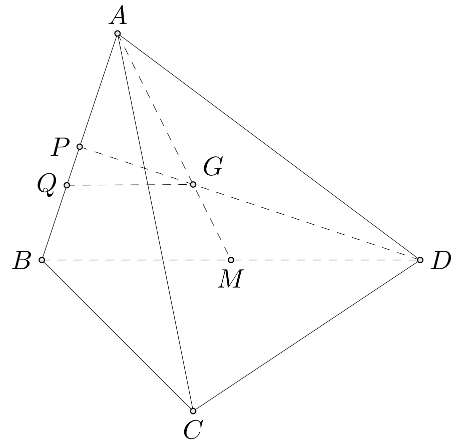
(A) đường thẳng d đi qua A và song song với BC.
(B) đường thẳng d đi qua A và song song với BD.
(C) đường thẳng d đi qua A và song song với CD.
(D) đường thẳng AB.

CÂU 13. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABD, Q thuộc cạnh AB sao cho $AQ = 2QB$, P là trung điểm của AB, M là trung điểm của BD. Khẳng định nào sau đây đúng?

(A) $Q \in (CDP)$. (B) QG cắt (BCD). (C) $MP \parallel (BCD)$. (D) $GQ \parallel (BCD)$.

Lời giải.

Vì G là trọng tâm tam giác $ABD \Rightarrow \dfrac{AG}{AM} = \dfrac{2}{3}$.
Điểm $Q \in AB$ sao cho $AQ = 2QB \Leftrightarrow \dfrac{AQ}{AB} = \dfrac{2}{3}$. Suy ra $\dfrac{AG}{AM} = \dfrac{AQ}{AB} \to GQ \parallel BD$.
Mặt khác BD nằm trong mặt phẳng (BCD) suy ra $GQ \parallel (BCD)$.



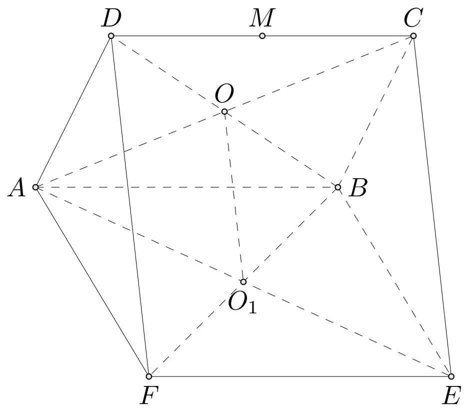
Chọn đáp án (D) .... □

CÂU 14. Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$ không cùng nằm trong một mặt phẳng. Gọi O, O_1 lần lượt là tâm của $ABCD$, $ABEF$; M là trung điểm của CD. Khẳng định nào sau đây **sai**?

(A) $OO_1 \parallel (BEC)$. (B) $OO_1 \parallel (EFM)$. (C) MO_1 cắt (BEC). (D) $OO_1 \parallel (AFD)$.

Lời giải.

Xét tam giác ACE có O, O_1 lần lượt là trung điểm của AC, AE.
Suy ra OO_1 là đường trung bình trong tam giác $ACE \Rightarrow OO_1 \parallel EC$.
Tương tự, OO_1 là đường trung bình của tam giác BFD nên $OO_1 \parallel FD$.
Vậy $OO_1 \parallel (BEC), OO_1 \parallel (AFD)$ và $OO_1 \parallel (EFC)$. Chú ý rằng: $(EFC) \equiv (EFM)$.



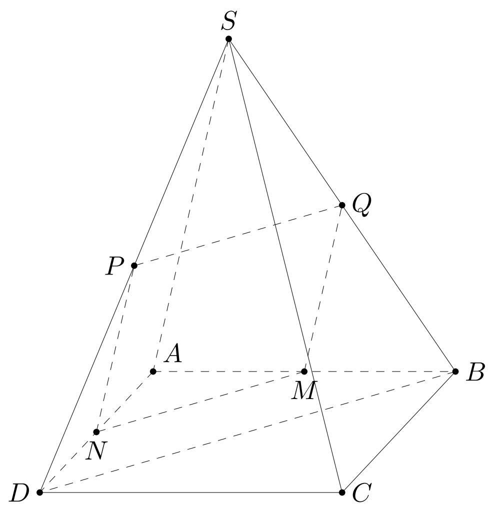
Chọn đáp án (C) .... □

CÂU 15. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mặt phẳng đi qua trung điểm M của cạnh AB và song song với BD, SA là hình gì?

(A) Ngũ giác. (B) Hình thang. (C) Tam giác. (D) Hình bình hành.

Lời giải.

Gọi (α) là mặt phẳng đi qua M và song song với BD, SA. Ta có $BD \parallel (\alpha), BD \subset (ABCD), (\alpha) \cap (ABCD) = Mx \Rightarrow Mx \parallel BD \Rightarrow Mx$ cắt AD tại N trong $(ABCD)$. $SA \parallel (\alpha), SA \subset (SAD), (\alpha) \cap (SAD) = Ny \Rightarrow Ny \parallel SA \Rightarrow Ny$ cắt SD tại P trong (SAD). $SA \parallel (\alpha), SA \subset (SAB), (\alpha) \cap (SAB) = Mt \Rightarrow Mt \parallel SA \Rightarrow Mt$ cắt SB tại Q trong (SAB). Vậy thiết diện là hình bình hành $MNPQ$.



Chọn đáp án (D) .... □

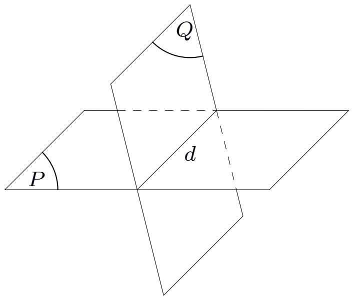
Bài 13. HAI MẶT PHẲNG SONG SONG

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA HAI MẶT PHẲNG

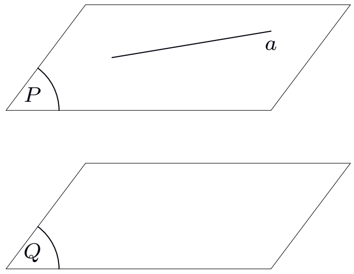
Cho hai mặt phẳng (P) và (Q). Các trường hợp có thể xảy ra:

- **Trường hợp 1:** (P) và (Q) trùng nhau.
- **Trường hợp 2:** (P) và (Q) có một điểm chung. Khi đó chúng sẽ có điểm chung khác nữa. Tập hợp tất cả các điểm chung đó gọi là giao tuyến của hai mặt phẳng (P) và (Q) (**Hình 1**).
- **Trường hợp 3:** (P) và (Q) không có điểm chung. Khi đó ta nói (P) song song (Q) (**Hình 2**).
  - Kí hiệu $(P) \parallel (Q)$;
  - Khi $(P) \parallel (Q)$ và $a \subset (P)$ thì $a \parallel (Q)$.



Hình 1.

(P), (Q) cắt nhau: $(P) \cap (Q) = d$



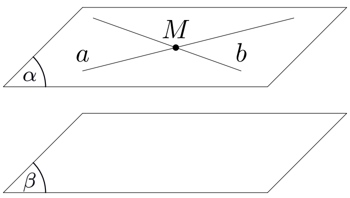
Hình 2.

(P), (Q) không có điểm chung: $(P) \parallel (Q)$

2. CÁC ĐỊNH LÝ CƠ BẢN

Định lý 1:

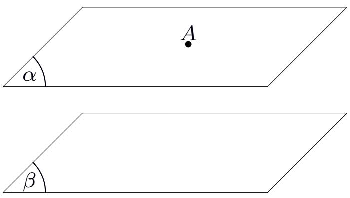
Nếu mặt phẳng (α) chứa hai đường thẳng cắt nhau a, b và a, b cùng song song với mặt phẳng (β) thì (α) song song với (β).



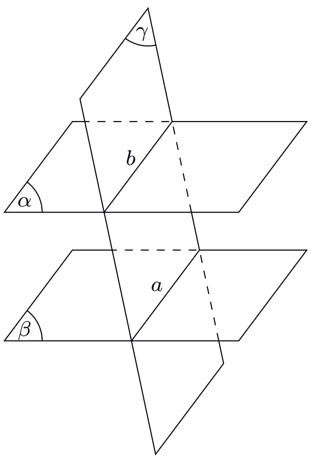
- *Muốn chứng minh hai mặt phẳng song song, ta phải chứng minh có hai đường thẳng cắt nhau thuộc mặt phẳng này lần lượt song song với mặt phẳng kia.*
- *Muốn chứng minh đường thẳng $a \parallel (Q)$, ta chứng minh đường thẳng a nằm trong mặt phẳng (P) và $(P) \parallel (Q)$.*

Định lý 2:

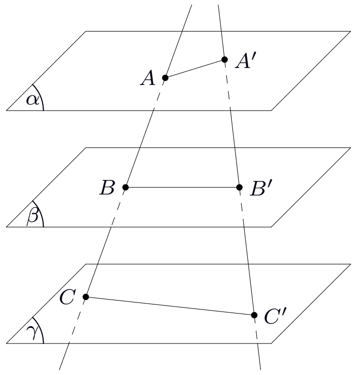
Qua một điểm nằm ngoài một mặt phẳng cho trước có một và chỉ một mặt phẳng song song với mặt phẳng đã cho.



Định lý 3: Cho hai mặt phẳng song song. Nếu một mặt phẳng cắt mặt phẳng này thì cũng cắt mặt phẳng kia và hai giao tuyến song song với nhau.



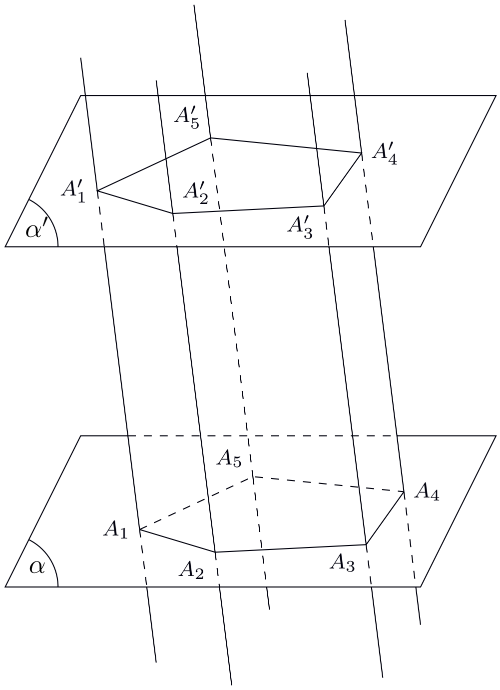
Định lý 4: (*Định lí Thales*) Ba mặt phẳng đôi một song song chắn trên hai cát tuyến bất kì những đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ.



3. HÌNH LĂNG TRỤ VÀ HÌNH HỘP

Định nghĩa: Cho hai mặt phẳng (α) // (α'). Trong (α) cho đa giác lồi $A_1A_2\ldots A_n$. Qua các điểm $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ta dựng các đường song song với nhau và cắt (α') tại $A'_1, A'_2, \ldots, A'_n$.
Hình tạo thành bởi hai đa giác $A_1A_2\ldots A_n$, $A'_1A'_2\ldots A'_n$ cùng với các hình bình hành $A_1A_2A'_2A'_1$, $A_2A_3A'_3A'_2$, $\ldots$, $A_nA_1A'_1A'_n$ được gọi là *hình lăng trụ* và được ký hiệu bởi $A_1A_2\ldots A_n.A'_1A'_2\ldots A'_n$.

- Hai đa giác $A_1A_2\ldots A_n$, $A'_1A'_2\ldots A'_n$ được gọi là hai *mặt đáy* (bằng nhau) của hình lăng trụ.
- Các đoạn thẳng $A_1A'_1$, $A_2A'_2$,$\ldots$, $A_nA'_n$ gọi là các *cạnh bên* của hình lăng trụ.
- Các hình bình hành $A_1A_2A'_2A'_1$, $A_2A_3A'_3A'_2$,$\ldots$, $A_nA_1A'_1A'_n$ gọi là các *mặt bên* của hình lăng trụ.
- Các đỉnh của hai đa giác đáy gọi là các *đỉnh* của hình lăng trụ.

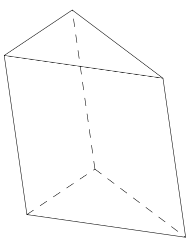


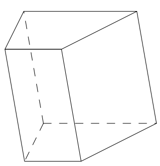
Tính chất:

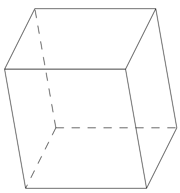
- Các cạnh bên của hình lăng trụ thì song song và bằng nhau.
- Các mặt bên của hình lăng trụ đều là hình bình hành.
- Hai đáy của hình lăng trụ là hai đa giác bằng nhau.

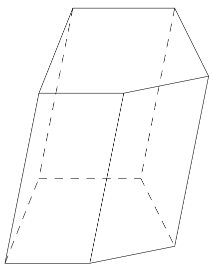
> Hình lăng trụ có đáy là hình bình hành gọi là *hình hộp*.
> - Các mặt của hình hộp là hình bình hành.
> - Hai mặt phẳng lần lượt chứa hai mặt đối diện của hình hộp thì song song nhau.

Minh họa vài mô hình thường gặp:


* Lăng trụ tam giác


* Lăng trụ tứ giác


* Hình hộp

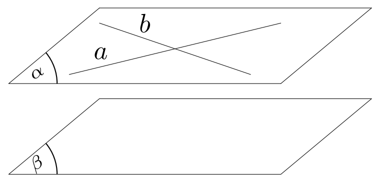

* Lăng trụ ngũ giác

B. PHÂN LOẠI, PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

1 Chứng minh hai mặt phẳng song song

Phương pháp:

Chứng minh trên mặt phẳng này có hai đường thẳng cắt nhau cùng song song với mặt phẳng còn lại.



$$\begin{cases} a \text{ cắt } b \\ a \subset (\alpha),\, b \subset (\alpha) \\ a \parallel (\beta),\, b \parallel (\beta) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \parallel (\beta).$$

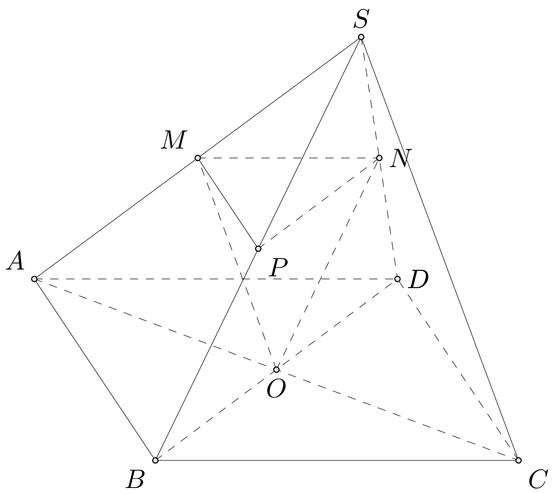
Chú ý: Hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với mặt phẳng thứ ba thì song song nhau.

VÍ DỤ 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm O. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của SA, SD và SB.

a) Chứng minh rằng $(MNP) \parallel (ABCD)$.

b) Chứng minh rằng $(OMN) \parallel (SBC)$.

Lời giải.



a) Chứng minh $(MNP) \parallel (ABCD)$.

Ta có

$\begin{cases} MN \parallel AD, \text{ (do } MN \text{ là đường trung bình của } \Delta SAD) \\ AD \subset (ABCD). \end{cases}$ Suy ra $MN \parallel (ABCD)$.

Ta lại có

$\begin{cases} NP \parallel AB, \text{ (do } NP \text{ là đường trung bình của } \Delta SAB) \\ AB \subset (ABCD). \end{cases}$ Suy ra $NP \parallel (ABCD)$.

Mặt khác, $MN, NP \subset (ABCD)$.

Vậy $(MNP) \parallel (ABCD)$.

b) Chứng minh $(OMN) \parallel (SBC)$.

Ta có $MN \parallel AD$, (MN là đường trung bình của ΔSAD) và $AD \parallel BC$, (do $ABCD$ là hình bình hành) nên $MN \parallel BC$.

Mà $BC \subset (SBC)$ nên $MN \parallel (SBC)$.

Ta lại có $OM \parallel SC$, (do OM là đường trung bình của ΔSAC).

Mà $SC \subset (SBC)$ nên $OM \parallel (SBC)$.

Mặt khác $(MN, OM \subset (OMN)$.

Vậy $(OMN) \parallel (SBC)$.

VÍ DỤ 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ với đáy $ABCD$ là hình thang mà $AD \parallel BC$ và $AD = 2BC$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA và AD. Chứng minh: $(BMN) \parallel (SCD)$.

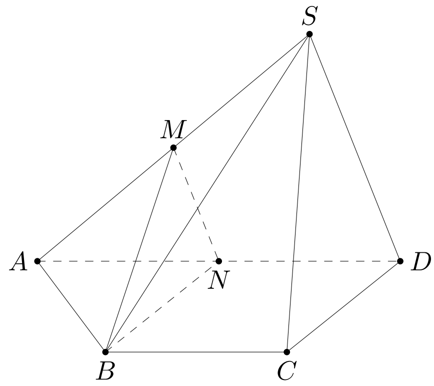
Lời giải.

Vì N là trung điểm của AD nên $NA = ND = \dfrac{AD}{2} = BC$.

Tứ giác $NBCD$ có $ND = BC$ và $ND \parallel BC$ nên $NBCD$ là hình bình hành, suy ra $NB \parallel CD \Rightarrow NB \parallel (SCD)$.

Tam giác SAD có M, N lần lượt là trung điểm của AS và AD nên MN là đường trung bình của $\triangle ADS$, suy ra $MN \parallel SD \Rightarrow MN \parallel (SCD)$.

Từ $\begin{cases} MN \parallel (SCD),\ MN \subset (BMN) \\ BN \parallel (SCD),\ BN \subset (BMN) \end{cases} \Rightarrow (BMN) \parallel (SCD)$.



VÍ DỤ 3. Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$ có chung cạnh AB và không đồng phẳng. Gọi I, J, K lần lượt là trung điểm AB, CD, EF. Chứng minh

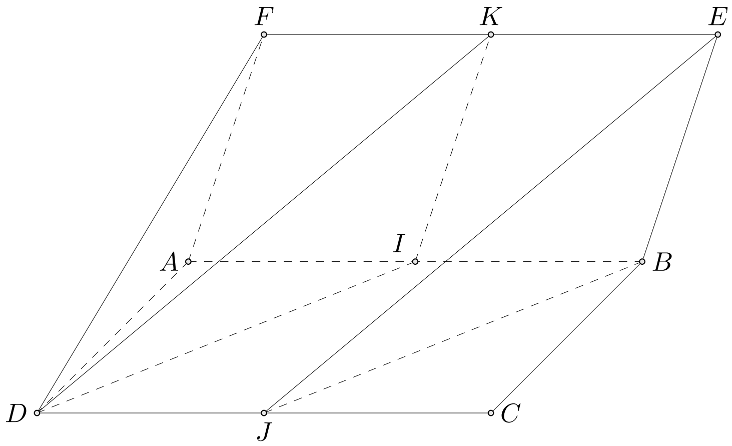
a) $(ADF) \parallel (BCE)$.

b) $(DIK) \parallel (JBE)$.

Lời giải.

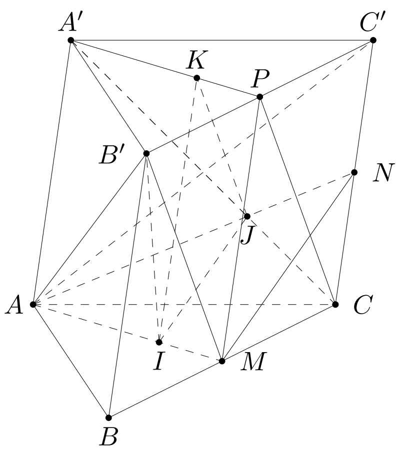
a) Ta có $AD \parallel BC$, suy ra $AD \parallel (BCE)$. Tương tự $AF \parallel (BCE)$.
Khi đó $(ADF) \parallel (BCE)$.

b) Trong hình bình hành $ABCD$ có I, J lần lượt là trung điểm của AB và CD nên $BI = DJ$. Do đó $IBJD$ là hình bình hành. Suy ra $DI \parallel BJ$ nên $DI \parallel (JBE)$.
Trong hình bình hành $ABEF$ có I, K lần lượt là trung điểm của AB và EF nên $IK \parallel EF$, suy ra $IK \parallel (JBE)$.
Vậy $(DIK) \parallel (JBE)$.



VÍ DỤ 4. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Gọi I, J, K lần lượt là trọng tâm các tam giác ABC, ACC', $A'B'C'$. Chứng minh rằng $(IJK) \parallel (BCC'B')$ và $(A'JK) \parallel (AIB')$.

Lời giải.



a) Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CC' và $B'C'$. Theo tính chất của trọng tâm tam giác ta có

$$\frac{AI}{AM} = \frac{AJ}{AN} \Rightarrow IJ \parallel MN.$$

Tứ giác $AMPA'$ là hình bình hành và có $\dfrac{AI}{AM} = \dfrac{AK}{AP} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow IK \parallel MP$.

Vậy $(IJK) \parallel (BCC'B')$.

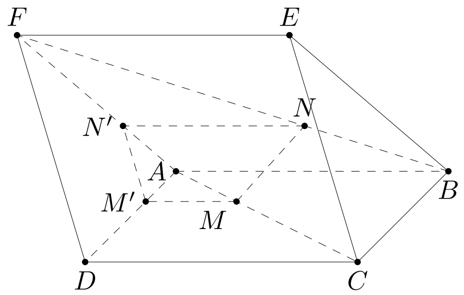
b) Chú ý rằng mặt phẳng (AIB') chính là mặt phẳng (AMB'). Mặt phẳng $(A'JK)$ chính là mặt phẳng $(A'CP)$.
Vì $AM \parallel A'P$, $MB' \parallel CP$ (do tứ giác $B'MCP$ là hình bình hành). Vậy ta có $(A'JK) \parallel (AIB')$.

VÍ DỤ 5. Cho hai hình vuông $ABCD$ và $ABEF$ ở trong hai mặt phẳng phân biệt. Trên các đường chéo AC và BF lần lượt lấy các điểm M, N sao cho $AM = BN$. Các đường thẳng song song với AB vẽ từ M, N lần lượt cắt AD và AF tại M' và N'.

a) Chứng minh rằng $(ADF) \parallel (BCE)$.

b) Chứng minh rằng $(CDF) \parallel (MM'N'N)$.

Lời giải.



a) Ta có $\begin{cases} AD \parallel BC \\ AF \parallel BE \\ AD \cap AF = A \end{cases} \Rightarrow (ADE) \parallel (BCF)$.

b) Ta có

$$MM' \parallel CD \Rightarrow \frac{AM}{AC} = \frac{AM'}{AD} \quad (1)$$

Ta cũng có

$$NN' \parallel AB \Rightarrow \frac{BN}{BF} = \frac{AN'}{AF} \quad (2)$$

Mà từ giả thiết ta có

$$\frac{AM}{AC} = \frac{BN}{BF} \Rightarrow \frac{AM'}{AD} = \frac{AN'}{AF} \quad (3)$$

Từ (3) suy ra $M'N' \parallel DF$. Ta cũng có $MM' \parallel NN' \parallel DC \parallel FE$.
Vậy $(CDF) \parallel (MM'N'N)$.

2 Chứng minh đường thẳng song song với mặt phẳng

Để chứng minh a song song (P), ta thường sử dụng một trong hai cách sau

Cách 1: (*Đã xét ở bài học trước*) Ta cần chứng tỏ các ý sau:

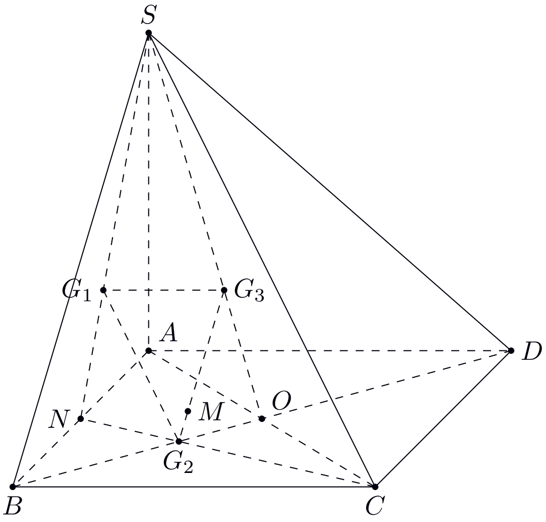
- a không nằm trên (P);
- a song song với một đường thẳng b nằm trong (P). Suy ra $a \parallel (P)$ hay

$$\begin{cases} a \not\subset (P) \\ a \parallel b \\ b \subset (P) \end{cases} \Rightarrow a \parallel (P)$$

Cách 2: Ta chứng minh đường thẳng a nằm trong mặt phẳng (Q) và $(Q) \parallel (P)$ thì $a \parallel (P)$.

VÍ DỤ 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi G_1, G_2, G_3 lần lượt là trọng tâm các tam giác SAB, ABC, SBD. Gọi M là một điểm thuộc đường thẳng G_2G_3. Chứng minh $G_1M \parallel (SBC)$.

Lời giải.



Gọi O là tâm hình bình hành $ABCD$ và N là trung điểm AB, suy ra $G_1 \in SN$, $G_2 \in CM$, $G_3 \in SO$.
Do G_1, G_2 lần lượt là trọng tâm tam giác SAB, ABC nên ta có:

$$\begin{cases} \dfrac{NG_1}{MS} = \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{NG_2}{MC} = \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

$\Rightarrow G_1G_2 \parallel SC$ (Định lý Ta-lét trong ΔNSC)
$\Rightarrow G_1G_2 \parallel (SBC)$.
Do G_2, G_3 lần lượt là trọng tâm tam giác ABC, SBD nên ta có:

$$\begin{cases} \dfrac{OG_2}{OB} = \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{OG_3}{OS} = \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

$\Rightarrow G_2G_3 \parallel SB$ (Định lý Ta-lét trong ΔSOB).
$\Rightarrow G_2G_3 \parallel (SBC)$.
Ta đã có: $\begin{cases} G_1G_2 \parallel (SBC) \\ G_2G_3 \parallel (SBC) \end{cases} \Rightarrow (G_1G_2G_3) \parallel (SBC)$
Mà $G_1M \subset (G_1G_2G_3) \Rightarrow G_1M \parallel (SBC)$.

VÍ DỤ 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm O. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA và CD.

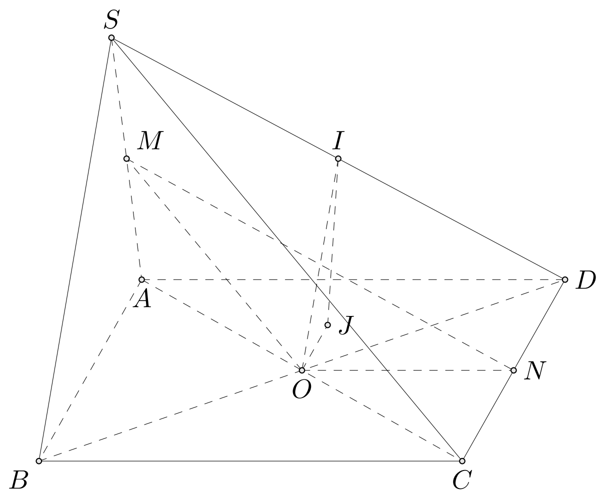
a) Chứng minh hai mặt phẳng (OMN) và (SBC) song song với nhau.

b) Gọi I là trung điểm của SD, J là một điểm trên $(ABCD)$ và cách đều AB, CD. Chứng minh IJ song song với (SAB).

Lời giải.

a) Chứng minh $(OMN) \parallel (SBC)$.
Do ON, OM theo thứ tự là đường trung bình của các tam giác BCD và SAC nên $OM \parallel BC$, $ON \parallel SC$.
Hơn nữa, ON, OM không chứa trong (SBC). Do đó $ON \parallel (SBC)$, $OM \parallel (SBC)$.
Mặt khác, $OM \cap ON = O$ nên $(OMN) \parallel (SBC)$.

b) Chứng minh $IJ \parallel (SAB)$.
Trong mặt phẳng $(ABCD)$, O và J cách đều hai đường thẳng song song AB và CD nên $OJ \parallel AB \parallel CD$. Hơn nữa, OJ không chứa trong (SAB). Do đó, $OJ \parallel (SAB)$.



Mặt khác, OI là đường trung bình trong tam giác SBD nên $OI \parallel SB$. Do đó, $OJ \parallel (SAB)$.

Mặt phẳng (OIJ) chứa hai đường thẳng cắt nhau và cùng song song với (SAB) nên $(OIJ) \parallel (SAB)$. Hơn nữa, $IJ \subset (OIJ)$. Vì vậy, $IJ \parallel (SAB)$.

3 Định lý Thales

Định lí Thales: Ba mặt phẳng đôi một song song chắn trên hai cát tuyến bất kì những đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ.

VÍ DỤ 1. Cho ba mặt phẳng $(P),(Q),(R)$ đôi một song song với nhau. Đường thẳng a cắt các mặt phẳng $(P),(Q),(R)$ lần lượt tại A,B,C sao cho $\dfrac{AB}{BC}=\dfrac{2}{3}$ và đường thẳng b cắt các mặt phẳng $(P),(Q),(R)$ lần lượt tại A',B',C' . Tính tỉ số $\dfrac{A'B'}{B'C'}$.

Lời giải.

Vì ba mặt phẳng $(P),(Q),(R)$ đôi một song song với nhau, áp dụng định lý Ta – lét trong không gian, ta có

$$\frac{AB}{BC}=\frac{A'B'}{B'C'}=\frac{2}{3}.$$

VÍ DỤ 2. Cho ba mặt phẳng $(P),(Q),(R)$ đôi một song song với nhau. Đường thẳng a cắt các mặt phẳng $(P),(Q),(R)$ lần lượt tại A,B,C sao cho $\dfrac{AB}{BC}=\dfrac{1}{3}$ và đường thẳng b cắt các mặt phẳng $(P),(Q),(R)$ lần lượt tại D,E,F .Tính tỉ số $\dfrac{ED}{DF}$.

Lời giải.

Vì ba mặt phẳng $(P),(Q),(R)$ đôi một song song với nhau, áp dụng định lý Ta – lét trong không gian, ta có

$$\frac{AB}{BC}=\frac{DE}{EF}=\frac{1}{3}$$

Suy ra

$$EF=3DE \Rightarrow DF=EF+DE=4DE \Rightarrow \frac{DE}{DF}=\frac{1}{4}.$$

VÍ DỤ 3. Cho hình tứ diện $S.ABC$. Trên cạnh SA lấy các điểm A_1, A_2 sao cho $2AA_1=2A_1A_2=A_2S$. Gọi (P) và (Q) là hai mặt phẳng song song với mặt phẳng (ABC) và lần lượt đi qua A_1, A_2 . Mặt phẳng (P) cắt các cạnh SB, SC lần lượt tại B_1, C_1 . Mặt phẳng (Q) cắt các cạnh SB, SC lần lượt tại B_2, C_2 . Chứng minh $2BB_1=2B_1B_2=B_2S$ và $2CC_1=2C_1C_2=C_2S$.

Lời giải.

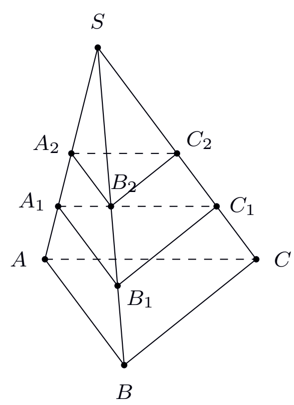
Theo giả thiết thì $A_2A_1=A_1A$ và $A_2S=2A_2A_1$.

Vì mặt phẳng (P) qua A_1 song song với mặt phẳng (ABC) nên

$$\begin{cases}(P)\cap(SAB)=A_1B_1, \text{ với } A_1B_1 \parallel AB\\(P)\cap(SBC)=B_1C_1, \text{ với } B_1C_1 \parallel BC\end{cases}$$

Vì mặt phẳng (Q) qua A_2 song song với mặt phẳng (ABC) nên

$$\begin{cases}(Q)\cap(SAB)=A_2B_2, \text{ với } A_2B_2 \parallel AB\\(Q)\cap(SBC)=B_2C_2, \text{ với } B_2C_2 \parallel BC\end{cases}$$



Các mặt phẳng (ABC), $(A_1B_1C_1)$ và $(A_2B_2C_2)$ đôi một song song nhau nên theo định lí Ta let ta có

- $\dfrac{A_2A_1}{A_1A}=\dfrac{B_2B_1}{B_1B}=\dfrac{C_2C_1}{C_1C}=1 \Rightarrow B_2B1=B_1B$ và $C_2C1=C_1C$ (1);
- $\dfrac{SA_2}{A_2A_1}=\dfrac{SB_2}{B_2B_1}=\dfrac{SC_2}{C_2C_1}=2 \Rightarrow SB_2=2B_2B_1$ và $SC_2=2C_2C_1$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra Nên $2BB_1=2B_1B_2=B_2S$ và $2CC_1=2C_1C_2=C_2S$.

VÍ DỤ 4. Một kệ để đồ bằng gỗ có mâm tầng dưới $(ABCD)$ và mâm tầng trên $(EFGH)$ song song với nhau. Bác thợ mộc đo được $AE=80$ cm, $CG=90$ cm và muốn đóng thêm một mâm tầng giữa $(IJKL)$ song song với hai mâm tầng trên và dưới sao cho khoảng cách $EI=36$ cm (tham khảo hình vẽ). Hãy giúp bác thợ mộc tính độ dài GK để đặt mâm tầng giữa cho kệ để đồ đúng vị trí.

Lời giải.

Theo định lý Thales ta có $\dfrac{EI}{GK}=\dfrac{AE}{CG}=\dfrac{80}{90}=\dfrac{8}{9}$. Suy ra $GK=40,5$ cm.

VÍ DỤ 5. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA=9, SB=12, SC=15$. Trên cạnh SA lấy các điểm M,N sao cho $SM=4, MN=3, NA=2$. Vẽ hai mặt phẳng song song với (ABC) lần lượt đi qua M,N , cắt SB theo thứ tự M',N' và cắt SC theo thứ tự M'',N''. Tính độ dài các đoạn thẳng $SM',M'N',M''N'',N''C$.

4 Hình hộp, hình lăng trụ

VÍ DỤ 1. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ và một mặt phẳng (α) cắt các mặt của hình hộp theo các giao tuyến $MN, NP, PQ, QR, RS,$ như hình vẽ. Chứng minh các cặp cạnh đối của lục giác $MNPQRS$ song song nhau.

VÍ DỤ 2. Cho hình lăng trụ tứ giác $ABCD.A'B'C'D'$ với đáy là hình thang $AB \parallel CD$. Một mặt phẳng song song với mặt phẳng $(AA'B'B)$ cắt các cạnh $AD, BC, B'C', A'D'$ lần lượt tại E, F, M, H . Hỏi hình tạo bởi các điểm E, F, M, H, D, D', C', C là hình gì?

Lời giải.

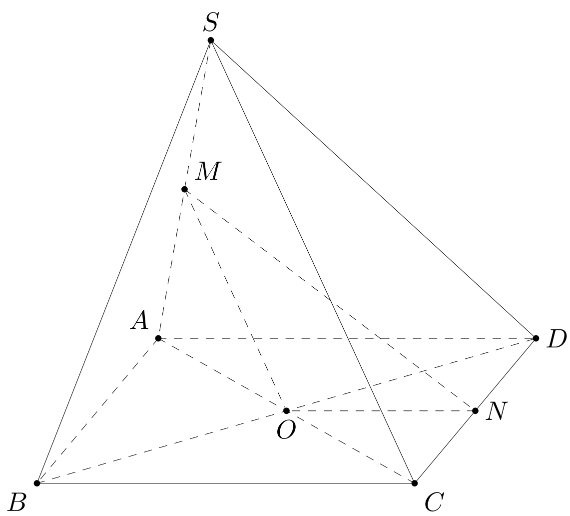
VÍ DỤ 3. Cho lăng trụ tam giác $ABC \cdot A'B'C'$. Gọi M, N, P lần lượt là các điểm trên cạnh AA', BB', CC' sao cho: $\dfrac{AM}{MA'} = \dfrac{BN}{NB'} = \dfrac{CP}{PC'} = \dfrac{1}{2}$. Hỏi hình tạo bởi các điểm M, N, P, A', B', C' là hình gì?

Lời giải.

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

BÀI 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA và CD. Chứng minh hai mặt phẳng (MNO) và (SBC) song song.

Lời giải.

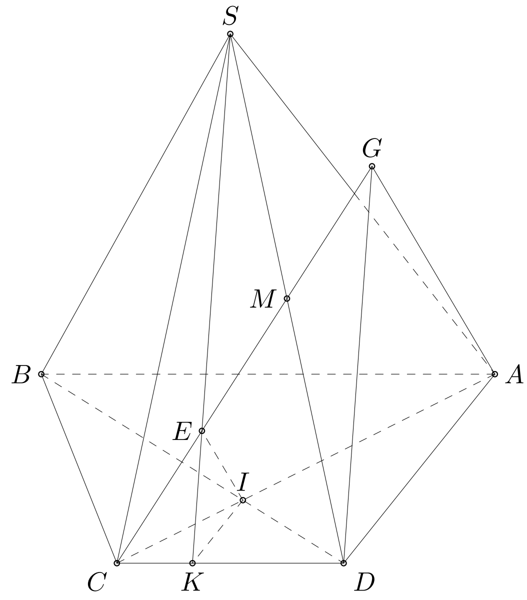


Ta có M là trung điểm SA, O là trung điểm AC
$\Rightarrow MO$ là đường trung bình $\triangle SAC$
$\Rightarrow MO \parallel SC$.
Tương tự $ON \parallel BC$.
Do đó $(OMN) \parallel (SBC)$.

BÀI 2. Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình thang có $AB \parallel CD$ và $AB = 2CD$, I là giao điểm của AC và BD. Gọi M là trung điểm của SD, E là trung điểm đoạn CM và G là điểm đối xứng của E qua M, SE cắt CD tại K. Chứng minh $(IKE) \parallel (ADG)$.

Lời giải.

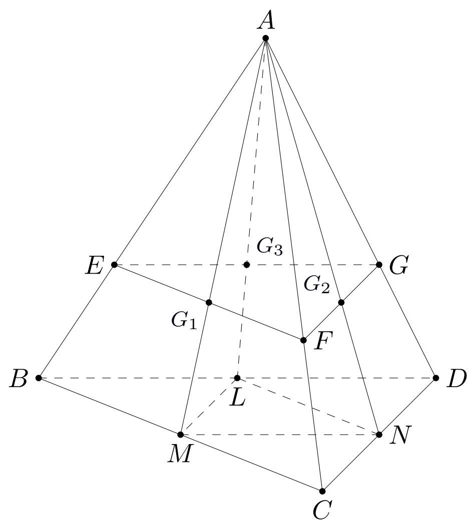
Do $CE = ME = MG$ nên
$$CE = \frac{1}{3}CG. \quad (1)$$
Mặt khác
$$\begin{cases} \widehat{BAI} &= \widehat{DCI}, \text{ (so le trong)}, \\ \widehat{AIB} &= \widehat{CID}, \text{ (đối đỉnh)}. \end{cases}$$
Do đó $\triangle ABI \backsim \triangle CDI$, (g-g). Khi đó
$$\frac{CI}{IA} = \frac{CD}{AB} = \frac{1}{2} \text{ hay } \frac{CI}{CA} = \frac{1}{3}. \quad (2)$$
Từ (1) và (2) suy ra
$$EI \parallel GA. \quad (\star)$$



Hơn nữa, tứ giác $SGDE$ có $SM = MD$ và $EM = MG$, nên tứ giác $SGDE$ là hình bình hành. Do đó
$$SE \parallel GD \text{ hay } EK \parallel GD. \quad (\star\star)$$
Từ $(\star)$ và $(\star\star)$ suy ra $(IEK) \parallel (ADG)$.

BÀI 3. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G_1, G_2, G_3 lần lượt là trọng tâm của các tam giác ABC, ACD, ADB. Chứng minh $(G_1G_2G_3) \parallel (BCD)$.

Lời giải.



Chứng minh $(G_1G_2G_3) \parallel (BCD)$

Gọi M, N, L lần lượt là trung điểm các cạnh BC, CD và BD. Trong tam giác AMN, ta có
$$\frac{AG_1}{AM} = \frac{AG_2}{AN} = \frac{G_1G_2}{MN} = \frac{2}{3}\text{(tính chất trọng tâm)}$$
Theo định lý Ta-lét đảo, suy ra $G_1G_2 \parallel MN$.

Chứng minh tương tự, ta cũng có $G_2G_3 \parallel NL$ và $G_3G_1 \parallel LM$.

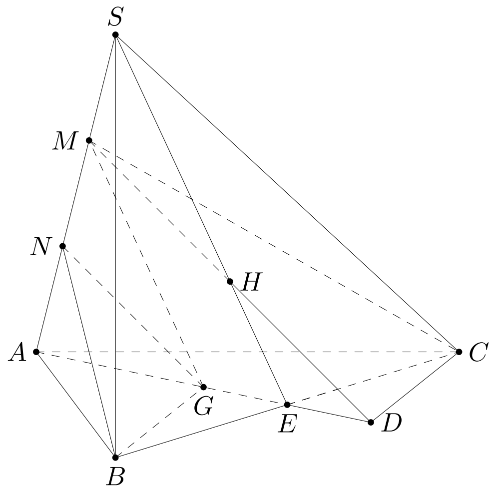
Từ đó suy ra
$$\begin{cases} G_1G_2 \parallel MN, G_2G_3 \parallel NL \\ MN, NL \subset (BCD) \\ G_1G_2, G_2G_3 \subset (G_1G_2G_3). \end{cases}$$
$\Rightarrow (G_1G_2G_3) \parallel (BCD)$.

BÀI 4. Cho hình chóp $SABC$ có G là trọng tâm tam giác ABC. Trên đoạn SA lấy hai điểm M, N sao cho $SM = MN = NA$.

a) Chứng minh rằng $GM \parallel (SBC)$.

b) Gọi D là điểm đối xứng với A qua G. Chứng minh rằng $(MCD) \parallel (NBG)$.

Lời giải.



a) Gọi E là trung điểm của BC. Khi đó ta có $\dfrac{AG}{AE} = \dfrac{AM}{AS} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow GM \parallel SE$. Vậy $GM \parallel (SBC)$.

b) Từ giả thiết ta suy ra G, N lần lượt là trung điểm của AD và AM. Do đó $NG \parallel MD$ (1) (1)
Từ giác $BDCG$ có E là trung điểm của hai đường chéo nên đó là hình bình hành. Suy ra $BG \parallel CD$ (2)
Từ (1) và (2) suy ra $(MCD) \parallel (NBG)$.

BÀI 5. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Một mặt phẳng song song với mặt đáy $(ABCD)$ của hình hộp và cắt các cạnh AA', BB', CC', DD' lần lượt tại M, N, M', N' . Chứng minh rằng $ABCD.MNM'N'$ là hình hộp.

Lời giải.

D. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

CÂU 1. Cho đường thẳng d song song với mặt phẳng (α). Có bao nhiêu mặt phẳng đi qua d và song song với (α)?

A 1. B 0. C 2. D Vô số.

Lời giải.

Chọn đáp án A ....□

CÂU 2. Trong các điều kiện sau, điều kiện nào kết luận mặt phẳng (α) song song với mặt phẳng (β)?

A $(\alpha) \parallel (\gamma)$ và $(\beta) \parallel (\gamma)$ (với (γ) là mặt phẳng nào đó).

B $(\alpha) \parallel a$ và $(\alpha) \parallel b$ với a, b là hai đường thẳng phân biệt thuộc (β).

C $(\alpha) \parallel a$ và $(\alpha) \parallel b$ với a, b là hai đường thẳng phân biệt cùng song song với (β).

D $(\alpha) \parallel a$ và $(\alpha) \parallel b$ với a, b là hai đường thẳng cắt nhau thuộc (β).

CÂU 3. Cho các mệnh đề sau:

① Hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với một đường thẳng thì chúng song song với nhau.

② Hai mặt phẳng cùng song song với một mặt phẳng thứ ba thì chúng song song với nhau.

③ Bất kì đường thẳng nào cắt một trong hai mặt phẳng song song thì nó cũng cắt mặt phẳng còn lại.

Số mệnh đề **sai** là

A 0. B 1. C 2. D 3.

Lời giải.

Mệnh đề đúng là (3). Mệnh đề (2) **sai** vì hai mặt phẳng đó có thể trùng nhau.

Chọn đáp án C ....□

CÂU 4. Trong các mệnh đề sau. Mệnh đề **sai** là

A Hai mặt phẳng song song với nhau thì mọi đường thẳng nằm trong mặt phẳng này đều song song với mặt phẳng kia.

B Hai mặt phẳng cùng song song với một mặt phẳng thì song song với nhau.

C Một mặt phẳng cắt hai mặt phẳng song song cho trước theo hai giao tuyến thì hai giao tuyến song song với nhau.

D Hai mặt phẳng song song thì không có điểm chung.

Lời giải.

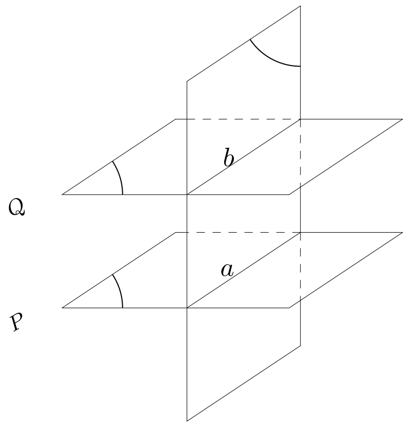
Hai mặt phẳng *phân biệt* cùng song song với một mặt phẳng thì song song với nhau.

Chọn đáp án B ....□

CÂU 5. Cho mặt phẳng (R) cắt hai mặt phẳng song song (P) và (Q) theo hai giao tuyến a và b. Mệnh đề nào sau đây đúng?

Ⓐ a và b vuông góc nhau. Ⓑ a và b chéo nhau. Ⓒ a và b cắt nhau. Ⓓ a và b song song.

Lời giải.



Chọn đáp án Ⓓ

CÂU 6. Cho đường thẳng a thuộc mặt phẳng (P) và đường thẳng b thuộc mặt phẳng (Q). Mệnh đề nào sau đây đúng?

Ⓐ $(P) /\!/ (Q) \Rightarrow a /\!/ (Q)$ và $b /\!/ (P)$. Ⓑ a và b chéo nhau.

Ⓒ $(P) /\!/ (Q) \Rightarrow a /\!/ b$. Ⓓ $a /\!/ b \Rightarrow (P) /\!/ (Q)$.

Lời giải.

$(P) /\!/ (Q)$ suy ra (P) và (Q) không có điểm chung. Mặt khác $a \in (P)$ nên a và (Q) cũng không có điểm chung. Suy ra $a /\!/ (Q)$. Tương tự ta cũng có $b /\!/ (P)$.

Chọn đáp án Ⓐ

CÂU 7. Hình lăng trụ tam giác có tất cả bao nhiêu cạnh?

Ⓐ 6. Ⓑ 9. Ⓒ 12. Ⓓ 3.

Lời giải.

- Lăng trụ tam giác, có hai đáy. Mỗi mặt đáy có ba cạnh, suy ra có 6 cạnh
- Mặt khác, chúng có 3 cạnh bên.

Vậy, có tất cả là 9 cạnh.

Chọn đáp án Ⓑ

CÂU 8. Đặc điểm nào sau đây là đúng với hình lăng trụ?

Ⓐ Đáy của hình lăng trụ là hình bình hành. Ⓑ Hình lăng trụ có tất cả các mặt song song với nhau.

Ⓒ Hình lăng trụ có tất cả các mặt bên là hình bình hành. Ⓓ Hình lăng trụ có tất cả các mặt là hình bình hành.

Lời giải.

Chọn đáp án Ⓒ

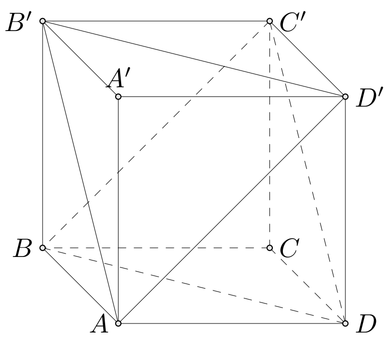
CÂU 9. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Mặt phẳng $(AB'D')$ song song với mặt phẳng nào sau đây?

Ⓐ (BCA'). Ⓑ (BDA'). Ⓒ (BDC'). Ⓓ $(A'C'C)$.

Lời giải.

Mặt phẳng $(AB'D')$ song song với mặt phẳng (BDC').

Thật vậy, ta có $AB' /\!/ DC'$ và $AD' /\!/ BC'$, có điều cần chứng minh.



Chọn đáp án Ⓒ

CÂU 10. Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$ không thuộc cùng một mặt phẳng, có cạnh chung AB. Kết quả nào sau đây đúng?

A) $BC \parallel (AEF)$. B) $FD \parallel (BEF)$. C) $(CEF) \parallel (ABD)$. D) $(AFD) \parallel (BCE)$.

CÂU 11. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang ($AB \parallel CD$) và $AB = 2CD$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm SB và AB. Mặt phẳng nào song song với mặt phẳng (SAD)?

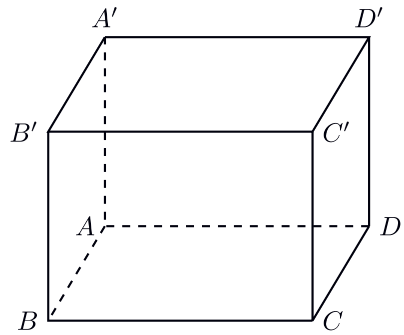
A) (SJC). B) (ICB). C) (IJB). D) (IJC).

CÂU 12. Trong mặt phẳng (P) cho hình bình hành $ABCD$, qua A, B, C, D lần lượt vẽ bốn đường thẳng a, b, c, d đôi một song song với nhau và không nằm trên (P). Mặt phẳng song song với mặt phẳng (b, c) là

A) (a, b). B) (a, c). C) (a, d). D) (d, b).

CÂU 13. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Mệnh đề nào sau đây là **sai**?

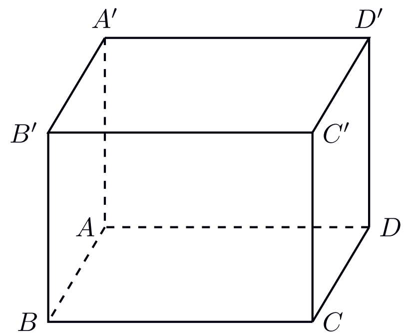
A) $(ABCD) \parallel (A'B'C'D')$. B) $(ABB'A') \parallel (CDD'C')$.
C) $(AA'D'D) \parallel (BCC'B')$. D) $(BDD'B') \parallel (ACC'A')$.



Lời giải.

Ta thấy $\begin{cases} (ABCD) \parallel (A'B'C'D') \\ (AA'D'D) \parallel (BCC'B') \\ (ABB'A') \parallel (CDD'C') \end{cases}$ luôn đúng.

và hai mặt phẳng $(BDD'B')$, $(ACC'A')$ là cắt nhau.



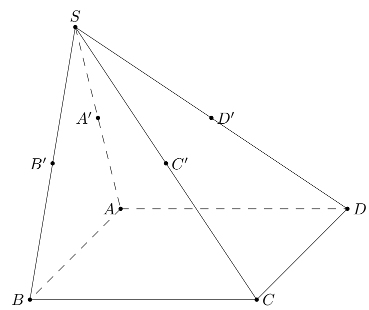
Chọn đáp án D .... □

CÂU 14. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là một hình bình hành. Gọi A', B', C', D' lần lượt là trung điểm của các cạnh SA, SB, SC, SD. Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau.

A) $A'C' \parallel BD$. B) $A'B' \parallel (SAD)$. C) $(A'C'D') \parallel (ABC)$. D) $A'B' \parallel (SBD)$.

Lời giải.

Ta có $A'C' \parallel AC \Rightarrow (A'C'D') \parallel (ABC)$.



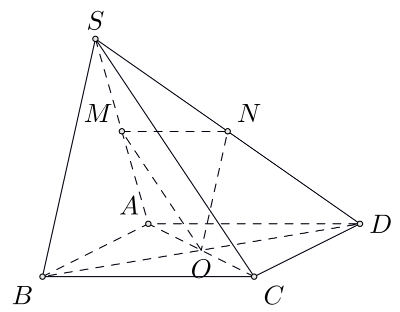
Chọn đáp án C .... □

CÂU 15. Cho hình chóp $S.ABCD$, có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Gọi M, N lần lượt là trung điểm SA, SD. Mặt phẳng (OMN) song song với mặt phẳng nào sau đây?

A) $(ABCD)$. B) (SCD). C) (SBC). D) (SAB).

Lời giải.

Vì $ABCD$ là hình bình hành nên O là trung điểm AC, BD.
Do đó $MO \parallel SC \Rightarrow MO \parallel (SBC)$
Và $NO \parallel SB \Rightarrow NO \parallel (SBC)$
Suy ra $(OMN) \parallel (SBC)$.



Chọn đáp án (C) .... □

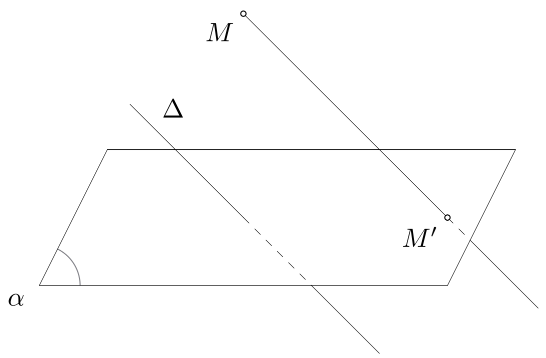
Bài 14. PHÉP CHIẾU PHẲNG SONG SONG

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. ĐỊNH NGHĨA

Cho mặt phẳng (α) và đường thẳng Δ cắt (α). Với mỗi điểm M trong không gian ta xác định điểm M' như sau:

- Nếu M thuộc Δ thì M' là giao điểm của Δ và (α).
- Nếu M không thuộc Δ thì M' là giao điểm của (α) và đường thẳng qua M song song Δ.
- Điểm M' gọi là hình chiếu song song của M trên (α) theo phương Δ.
- Phép đặt tương ứng mỗi điểm M với hình chiếu M' của nó được gọi là **phép chiếu song song** lên (α) theo phương Δ.
- Mặt phẳng (α) gọi là mặt phẳng chiếu; phương Δ gọi là **phương chiếu.**



2. TÍNH CHẤT

Phép chiếu song song có các tính chất sau:

① Biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng.

② Biến đường thẳng thành đường thẳng , biến tia thành tia, đoạn thẳng thành đoạn thẳng.

③ Biến hai đường thẳng song song thành hai đường thẳng song song hoặc trùng nhau.

④ Giữ nguyên tỉ số độ dài của hai đoạn thẳng cùng nằm trên một đường thẳng hoặc nằm trên hai đường thẳng song song.

3. HÌNH BIỂU DIỄN CỦA MỘT HÌNH KHÔNG GIAN

① Hình biểu diễn của hình trong không gian là hình chiếu song song của hình đó trên một mặt phẳng theo một phương chiếu nào đó hoặc hình đồng dạng với hình chiếu đó.

② Hình biểu diễn của một hình không gian (trong trường hợp hình phẳng nằm trong mặt phẳng không song song với phương chiếu) có các tính chất sau:

— Hình biểu diễn của một tam giác là một tam giác.

— Hình biểu diễn của hình chữ nhật, hình vuông, hình thoi, hình bình hành là hình bình hành.

— Hình biểu diễn của hình thang $ABCD$ với $AB \parallel CD$ là một hình thang $A'B'C'D'$ với $A'B' \parallel C'D'$ thoả mãn $\dfrac{AB}{CD} = \dfrac{A'B'}{C'D'}$.

— Hình biểu diễn của hình tròn là hình elip.

B. PHÂN LOẠI, PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

1 Xác định ảnh của một hình qua phép chiếu song song

VÍ DỤ 1. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$.

a) Xác định ảnh của các điểm A', B', C', D' qua phép chiếu song song lên mặt phẳng $(ABCD)$ theo phương AA'.

b) Xác định ảnh của tam giác $A'C'D'$ qua phép chiếu song song lên mặt phẳng $(ABCD)$ theo phương $A'B$.

Lời giải.

- Vì các cạnh AA', BB', CC', DD' song song nhau nên A, B, C, D là hình chiếu của A', B', C', D'.
-

VÍ DỤ 2. Phép chiếu song song biến hình bình hành $ABCD$ thành hình bình hành $A'B'C'D'$. Chứng minh rằng phép chiếu đó biến tâm của hình bình hành $ABCD$ thành tâm của hình bình hành $A'B'C'D'$.

Lời giải.

Gọi O là tâm hình bình hành $ABCD$, suy ra O là trung điểm của AC.
Phép chiếu song song biến O thành O'.
Ta có A, O, C thẳng hàng theo thứ tự đó và $\dfrac{OA}{OC} = 1$ nên ba điểm A', O', C' thẳng hàng theo thứ tự đó và $\dfrac{O'A'}{O'C'} = 1$. Suy ra O' là trung điểm của $A'C'$.
Vậy O' là tâm của hình bình hành $A'B'C'D'$.

VÍ DỤ 3. Phép chiếu song song biến tam giác ABC thành tam giác $A'B'C'$. Chứng minh rằng phép chiếu đó biến đường trung bình của tam giác ABC thành đường trung bình của tam giác $A'B'C'$.

Lời giải.

Gọi M, N lần lượt là trung điểm AB, AC nên MN là đường trung bình của tam giác ABC.
Phép chiếu song song biến M thành M' , biến N thành N' .
Ta có ba điểm A, M, B thẳng hàng theo thứ tự đó và $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{1}{2}$ nên ba điểm A', M', B' thẳng hàng theo thứ tự đó và $\dfrac{A'M'}{A'B'} = \dfrac{1}{2}$. Suy ra M' là trung điểm $A'B'$.
Tương tự N' là trung điểm $A'C'$.
Vậy $M'N'$ là đường trung bình của tam giác $A'B'C'$.

2 Vẽ hình biểu diễn của một số hình khối đơn giản

VÍ DỤ 1. Vẽ hình biểu diễn của các hình sau

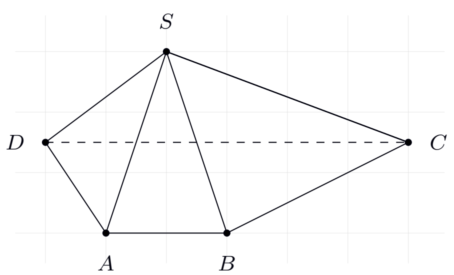
a) Hình lục giác đều.

b) Hình vuông nội tiếp trong hình tròn.

VÍ DỤ 2. Vẽ hình biểu diễn của hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang $ABCD$ với AB song song CD; $AB = 2$ cm, $CD = 6$ cm.

Lời giải.

Vì hình chóp $S.ABCD$ có $AB \parallel CD$ và $AB = 2$ cm, $CD = 6$ cm nên hình biểu diễn của hình chóp cũng có đáy $AB \parallel CD$ và $\dfrac{AB}{CD} = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$.
Do đó, ta vẽ hình thang $ABCD$ có $AB \parallel CD$ và $AB = \dfrac{1}{3}CD$, vẽ điểm S và nối SA, SB, SC, SD.



VÍ DỤ 3. Vẽ hình biểu diễn của các hình sau

a) Hình lăng trụ có đáy là tam giác đều.

b) Hình lăng trụ có đáy là lục giác đều.

c) Hình hộp.

d) Hình chóp tam giác $S.ABC$ đặt trên một hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$.

C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

CÂU 1. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M, M' lần lượt là trung điểm của các cạnh $BC, B'C'$ Hình chiếu của $\Delta B'DM$ qua phép chiếu song song trên $(A'B'C'D')$ theo phương chiếu AA' là

(A) $\Delta B'A'M'$. (B) $\Delta C'D'M'$. (C) $\Delta DMM'$. (D) $\Delta B'D'M'$.

CÂU 2. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M, M' lần lượt là trung điểm của các cạnh $BC, B'C'$ Hình chiếu của $\Delta D'CM$ qua phép chiếu song song trên $(A'B'C'D')$ theo phương chiếu BB' là

(A) $\Delta B'CM'$. (B) $\Delta C'D'M'$. (C) $\Delta DMM'$. (D) $\Delta B'D'M'$.

CÂU 3. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M, M' lần lượt là trung điểm của các cạnh $AD, A'D'$; N, N' lần lừơ là trung điểm của các cạnh $CD, C'D'$; P là trung điểm của DD'. Hình chiếu của ΔMNP qua phép chiếu song song trên $(A'B'C'D')$ theo phương chiếu BB' là

(A) $\Delta B'N'M'$. (B) $\Delta D'M'N'$. (C) $\Delta PM'N'$. (D) $\Delta PD'M'$.

CÂU 4. Trong các mệnh đề sau, có bao nhiêu mệnh đề đúng?

a) Một đường thẳng có thể song song với hình chiếu của nó.

b) Một đường thẳng có thể trùng với hình chiếu của nó.

c) Hình chiếu song song của hai đường thẳng chéo nhau có thể song song với nhau.

d) Hình chiếu song song của hai đường thẳng chéo nhau có thể trung nhau.

(A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4.

CÂU 5. Trong các mệnh đề sau, có bao nhiêu mệnh đề đúng?

a) Phép chiếu song song biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng.

b) Phép chiếu song song biến hai đường thẳng song song thành hai đường thẳng cắt nhau.

c) Phép chiếu song song biến tam giác đều thành tam giác cân.

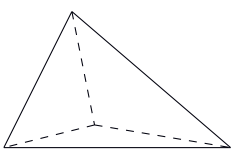
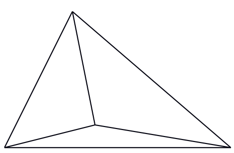
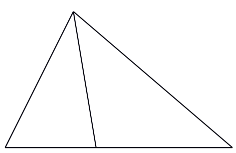
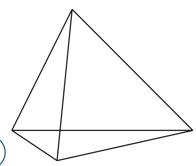
d) Phép chiếu song song biến hình vuông thành hình bình hành.

(A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4.

CÂU 6. Hình chiếu của tứ diện $ABCD$ lên một mặt phẳng (P) theo phương chiếu AB (AB không song song với (P) là

(A) hình tam giác. (B) hình tứ giác. (C) đoạn thẳng. (D) hình thang.

CÂU 7. Hình nào dưới đây **không phải** là hình biểu diễn của một tứ diện?

(A) 
(B) 
(C) 
(D) 

CÂU 8. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Gọi M, M' lần lượt là trung điểm của các cạnh $BC, B'C'$ và I là giao điểm của đường thẳng $A'M$ và $(AB'C')$. Tìm hình chiếu song song của I trên $(A'B'C')$ theo phương BB'.

(A) Trung điểm của đoạn thẳng $A'M'$. (B) Trọng tâm của tam giác $A'B'C'$.

(C) Điểm A'. (D) Điểm M'.

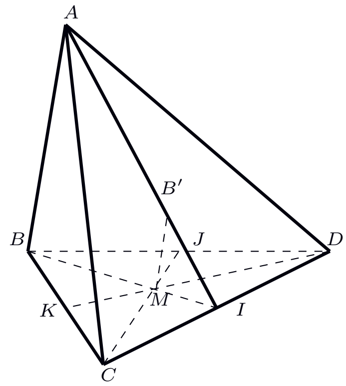
CÂU 9. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AC, BC, trên cạnh BD lấy điểm P sao cho $BP = 2PD$. Mặt phẳng (MNP) cắt mặt phẳng (ACD) theo giao tuyến d. Tìm hình chiếu song song của đường thẳng d trên (BCD) theo phương AD.

(A) Đường thẳng DN. (B) Đường thẳng CD. (C) Đường thẳng BD. (D) Điểm M.

CÂU 10. Cho tứ diện $ABCD$ và M là điểm bất kì thuộc miền trong của tam giác BCD. Gọi B', C', D' lần lượt là hình chiếu song song của M theo các phương AB, AC, AD lên các mặt (ACD), (ABD), (ABC). Tính $\dfrac{MB'}{AB} + \dfrac{MC'}{AC} + \dfrac{MD'}{AD}$.

(A) 1. (B) $\dfrac{1}{9}$. (C) $\dfrac{1}{3}$. (D) 3.

Lời giải.



Trong tam giác ABI ta có $\dfrac{MB'}{AB} = \dfrac{MI}{BI}$.
Tương tự ta cũng có $\dfrac{MC'}{AC} = \dfrac{MJ}{CJ}$ và $\dfrac{MD'}{AD} = \dfrac{MK}{DK}$.
Dễ thấy rằng $\dfrac{S_{MBD}}{S_{CBD}} = \dfrac{MJ}{CJ}$, $\dfrac{S_{MCD}}{S_{BCD}} = \dfrac{MI}{BI}$, $\dfrac{S_{MBC}}{S_{DBC}} = \dfrac{MK}{DK}$.
Cộng các đẳng thức với nhau vế theo vế ta được

$$\frac{MB'}{AB} + \frac{MC'}{AC} + \frac{MD'}{AD} = 1$$

Chọn đáp án A .... □

—HẾT—

MỤC LỤC