QUICK NOTE

# Bài 2. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG

## 1 Xác định vectơ chỉ phương của ĐT, điểm thuộc ĐT

- Vectơ chỉ phương $\vec{u}$ của đường thẳng $\Delta$ là vectơ có giá song song hoặc trùng với đường thẳng $\Delta$.
  Nếu $\Delta$ có một vectơ chỉ phương là $\vec{u}$ thì $k.\vec{u}$ cũng là một vectơ chỉ phương của $\Delta$.
- Nếu có hai vectơ $\vec{n}_1$ và $\vec{n}_2$ cùng vuông góc với $\Delta$ thì $\Delta$ có một vectơ chỉ phương là $\vec{u} = [\vec{n}_1, \vec{n}_2]$.
- PTĐT $\Delta$ dạng: $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$ thì có vectơ chỉ phương là $\vec{u} = (a; b; c)$.
- PTĐT $\Delta$ dạng: $\dfrac{x - x_0}{a} = \dfrac{y - y_0}{b} = \dfrac{z - z_0}{c}$ $(a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0)$ thì có vectơ chỉ phương là $\vec{u} = (a; b; c)$.

*Chú ý:*

- *Trục $Ox$ có vectơ chỉ phương là* $\vec{i} = (1; 0; 0)$.
- *Trục $Oy$ có vectơ chỉ phương là* $\vec{j} = (0; 1; 0)$.
- *Trục $Oz$ có vectơ chỉ phương là* $\vec{k} = (0; 0; 1)$.

- Cho điểm $M(x_M; y_M; z_M)$ và đường thẳng $\Delta$ có phương trình

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}.$$

Khi đó

$$M \in \Delta \Leftrightarrow \frac{x_M - x_0}{a} = \frac{x_M - y_0}{b} = \frac{x_M - z_0}{c};$$

$$M \notin \Delta \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{x_M - x_0}{a} \neq \dfrac{x_M - y_0}{b} \\ \dfrac{x_M - y_0}{b} \neq \dfrac{x_M - z_0}{c}. \end{array}\right.$$

- Cho điểm $M(x_M; y_M; z_M)$ và đường thẳng $\Delta$ có phương trình

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct. \end{cases}$$

Khi đó

$$M \in \Delta \Leftrightarrow t = \frac{x_M - x_0}{a} = \frac{x_M - y_0}{b} = \frac{x_M - z_0}{c}; M \notin \Delta \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{x_M - x_0}{a} \neq \dfrac{x_M - y_0}{b} \\ t = \dfrac{x_M - y_0}{b} \neq \dfrac{x_M - z_0}{c}. \end{array}\right.$$

**Phần I. Mỗi câu hỏi học sinh chọn một trong bốn phương án A, B, C, D.**

**CÂU 1.** Trong KG $Oxyz$, cho đường thẳng $d$: $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - 2t \\ z = -1 + 3t \end{cases}$. Vectơ nào dưới đây là một vectơ chỉ phương của $d$?

Ⓐ $\vec{u}_1 = (2; 1; -1)$. Ⓑ $\vec{u}_2 = (1; 2; 3)$. Ⓒ $\vec{u}_3 = (1; -2; 3)$. Ⓓ $\vec{u}_4 = (2; 1; 1)$.

**CÂU 2.** Trong KG $Oxyz$, cho đường thẳng $d : \dfrac{x - 3}{2} = \dfrac{y - 4}{-5} = \dfrac{z + 1}{3}$. Vectơ nào dưới đây là một vectơ chỉ phương của $d$?

QUICK NOTE

(A) $\vec{u}_2=(2;4;-1)$. (B) $\vec{u}_1=(2;-5;3)$. (C) $\vec{u}_3=(2;5;3)$. (D) $\vec{u}_4=(3;4;1)$.

**CÂU 3.** Trong KG $Oxyz$, đường thẳng $d:\dfrac{x+3}{1}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-5}{2}$ có một vectơ chỉ phương là

(A) $\vec{u}_1=(3;-1;5)$. (B) $\vec{u}_4=(-1;1;-2)$. (C) $\vec{u}_2=(-3;1;5)$. (D) $\vec{u}_1=(1;-1;-2)$.

**CÂU 4.** Trong KG $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\dfrac{x}{-1}=\dfrac{y-4}{2}=\dfrac{z-3}{3}$. Hỏi trong các vectơ sau, đâu không phải là vectơ chỉ phương của $d$?

(A) $\vec{u}_1=(-1;2;3)$. (B) $\vec{u}_2=(3;-6;-9)$. (C) $\vec{u}_3=(1;-2;-3)$. (D) $\vec{u}_4=(-2;4;3)$.

**CÂU 5.** Trong KG $Oxyz$, đường thẳng nào sau đây nhận vectơ pháp tuyến của mặt phẳng $(P)\colon 2x-y+2z+5=0$ làm một vectơ chỉ phương?

(A) $(Q)\colon x-y+2=0$. (B) $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-2}{-1}$.

(C) $\dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z}{-1}$. (D) $\dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z+1}{1}$.

**CÂU 6.** Trong KG $Oxyz$, đường thẳng nào sau đây nhận $\vec{u}=(-2;4;5)$ là một vectơ chỉ phương?

(A) $\begin{cases}x=-2+3t\\y=4-t\\z=5+4t\end{cases}$. (B) $\begin{cases}x=3+2t\\y=-1+4t\\z=4+5t\end{cases}$. (C) $\begin{cases}x=3+2t\\y=1+4t\\z=4+5t\end{cases}$. (D) $\begin{cases}x=3+2t\\y=-1-4t\\z=4-5t\end{cases}$.

**CÂU 7.** Trong KG $Oxyz$, đường thẳng nào sau đây nhận $\vec{u}=(-2;4;5)$ là một vectơ chỉ phương?

(A) $\begin{cases}x=-2+3t\\y=4-t\\z=5+4t\end{cases}$. (B) $\begin{cases}x=3+2t\\y=-1+4t\\z=4+5t\end{cases}$. (C) $\begin{cases}x=3+2t\\y=1+4t\\z=4+5t\end{cases}$. (D) $\begin{cases}x=3+2t\\y=-1-4t\\z=4-5t\end{cases}$.

**CÂU 8.** Trong KG $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;1;0)$ và $B(0;1;2)$. Vectơ nào dưới đây là một vectơ chỉ phương của đường thẳng $AB$.

(A) $\vec{d}=(-1;1;2)$. (B) $\vec{a}=(-1;0;-2)$. (C) $\vec{b}=(-1;0;2)$. (D) $\vec{c}=(1;2;2)$.

**CÂU 9.** Trong KG $Oxyz$, cho điểm $M(1;2;3)$. Gọi $M_1$, $M_2$ lần lượt là hình chiếu vuông góc của $M$ lên các trục $Ox$, $Oy$. Vectơ nào dưới đây là một vectơ chỉ phương của đường thẳng $M_1M_2$?

(A) $\vec{u_4}=(-1;2;0)$. (B) $\vec{u_1}=(0;2;0)$. (C) $\vec{u_2}=(1;2;0)$. (D) $\vec{u_3}=(1;0;0)$.

**CÂU 10.** Trong KG $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z+1}{3}$. Điểm nào dưới đây thuộc $d$?

(A) $Q(2;1;1)$. (B) $M(1;2;3$. (C) $P(2;1;-1)$. (D) $N(1;-2;3)$.

**CÂU 11.** Trong KG $Oxyz$, điểm nào dưới đây thuộc đường thẳng $d\colon\dfrac{x+1}{-1}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z-1}{3}$?

(A) $P(-1\,2;1)$. (B) $Q(1;-2;-1)$. (C) $N(-1;3;2)$. (D) $M(1;2;1)$.

**CÂU 12.** Trong KG $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon\dfrac{x-4}{2}=\dfrac{z-2}{-5}=\dfrac{z+1}{1}$. Điểm nào sau đây thuộc $d$?

(A) $N(4;2;-1)$. (B) $Q(2;5;1)$. (C) $M(4;2;1)$. (D) $P(2;-5;1)$.

**CÂU 13.** Trong KG $Oxyz$, điểm nào dưới đây thuộc đường thẳng $d\colon\begin{cases}x=1-t\\y=5+t\\z=2+3t.\end{cases}$

(A) $N(1;5;2)$. (B) $Q(-1;1;3)$. (C) $M(1;1;3)$. (D) $P(1;2;5)$.

**CÂU 14.** Trong KG $Oxyz$. Đường thẳng $d\colon\begin{cases}x=t\\y=1-t\\z=2+t\end{cases}$ đi qua điểm nào sau sau đây?

(A) $K(1;-1;1)$. (B) $E(1;1;2)$. (C) $H(1;2;0)$. (D) $F(0;1;2)$.

**CÂU 15.** Trong KG $Oxyz$, điểm nào dưới đây thuộc đường thẳng $d\colon \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 5 + t \\ z = 2 + 3t \end{cases}$ ?

(A) $Q(-1;1;3)$. (B) $P(1;2;5)$. (C) $N(1;5;2)$. (D) $M(1;1;3)$.

**Phần II. Trong mỗi ý a), b), c) và d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.**

**CÂU 16.** Trong KG $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y+5}{4} = \dfrac{z-1}{-1}$. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

| Mệnh đề | Đ | S |
|---|---|---|
| **a)** Đường thẳng $d$ nhận $\vec{u} = (3;4;1)$ là một vectơ chỉ phương. | | |
| **b)** Đường thẳng $d$ nhận $\vec{u} = (-3;-4;1)$ là một vectơ chỉ phương. | | |
| **c)** Đường thẳng $d$ nhận $\vec{u} = (3;4;-1)$ là một vectơ chỉ phương. | | |
| **d)** Đường thẳng $d$ nhận $\vec{u} = (-6;-8;2)$ là một vectơ chỉ phương. | | |

**CÂU 17.** Trong KG $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \begin{cases} x = 3 + 4t \\ y = -1 - 2t \\ z = -2 + 3t \end{cases}, (t \in \mathbb{R})$. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

| Mệnh đề | Đ | S |
|---|---|---|
| **a)** Điểm $M(7;-3;-1)$ thuộc đường thẳng $d$. | | |
| **b)** Điểm $N(-1;1;-5)$ thuộc đường thẳng $d$. | | |
| **c)** Đường thẳng $d$ nhận $\vec{u} = (4;-2;3)$ là một vectơ chỉ phương. | | |
| **d)** Đường thẳng $d$ nhận $\vec{u} = -(-4;2;-3)$ là một vectơ chỉ phương. | | |

**CÂU 18.** Trong KG $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{-1} = \dfrac{z-3}{2}$. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

| Mệnh đề | Đ | S |
|---|---|---|
| **a)** Điểm $Q(2;-1;2)$ thuộc đường thẳng $d$. | | |
| **b)** Điểm $P(1;2;3)$ thuộc đường thẳng $d$. | | |
| **c)** Điểm $M(-1;-2;-3)$ thuộc đường thẳng $d$. | | |
| **d)** Điểm $N(-2;1;-2)$ thuộc đường thẳng $d$. | | |

**CÂU 19.** Trong KG $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3 - t \\ z = 1 - t \end{cases}$. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

| Mệnh đề | Đ | S |
|---|---|---|
| **a)** Điểm $M(-3;5;3)$ không thuộc đường thẳng $d$. | | |
| **b)** Điểm $N(1;3;-1)$ không thuộc đường thẳng $d$. | | |
| **c)** Điểm $P(3;5;3)$ không thuộc đường thẳng $d$. | | |
| **d)** Điểm $Q(1;2;-3)$ không thuộc đường thẳng $d$. | | |

**CÂU 20.** Trong KG $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;2;0)$,$B(1;1;2)$ và $C(2;3;1)$. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

| Mệnh đề | Đ | S |
|---|---|---|

QUICK NOTE

QUICK NOTE

| Mệnh đề | Đ | S |
|---|---|---|
| a) Đường thẳng đi qua $A$ và song song với $BC$ có phương trình là $\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z}{-1}$. | | |
| b) Đường thẳng đi qua hai điểm $B$, $C$ có phương trình là $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-2}{-1}$. | | |
| c) Điểm $M(2;3;1)$ không thuộc đường thẳng $BC$. | | |
| d) Điểm $N(3;5;0)$ không thuộc đường thẳng $BC$. | | |

**CÂU 21.** Trong KG $Oxyz$, cho điểm $M(1;2;-1)$ và mặt phẳng $(P)\colon 2x+y-3z+1=0$. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

| Mệnh đề | Đ | S |
|---|---|---|
| a) Đường thẳng đi qua $M$ và vuông góc với $(P)$ có phương trình là $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z+1}{1}$. | | |
| b) Đường thẳng đi qua $M$ và vuông góc với $(P)$ có phương trình là $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z+1}{-3}$. | | |
| c) Đường thẳng đi qua $M$ và vuông góc với $(P)$ có phương trình là $\frac{x-1}{-2}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+1}{3}$. | | |
| d) Đường thẳng đi qua $M$ và vuông góc với $(P)$ có phương trình là $\frac{x+1}{2}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-1}{-3}$. | | |

**Phần III. Học sinh điền kết quả vào ô trống.**

**CÂU 22.** Trong KG $Oxyz$, cho hai điểm $M(1;-2;1)$, $N(0;1;3)$. Một vectơ chỉ phương của đường thẳng qua hai điểm $M$, $N$ có dạng $\vec{u}=(a;b;2)$. Tìm $a+b$.

KQ: | | | | |

**CÂU 23.** Trong KG $Oxyz$, cho ba điểm $B(1;1;1)$, $C(3;4;0)$. Tìm vectơchỉ phương của đường thẳng $\Delta$ song song với $BC$ có dạng $(a;b;-1)$. Tìm $a+b$.

KQ: | | | | |

**CÂU 24.** Trong KG $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon x-3y+2z+1=0$. Một vectơ chỉ phương của đường thẳng $\Delta$ vuông góc với mặt phẳng $(P)$ có dạng $(a;b;2)$. Tìm $a+b$.

KQ: | | | | |

**CÂU 25.** Trong KG $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P)\colon 3x-2y-z+2024=0$ và $(Q)\colon x-2y+2025=0$. Một vectơ chỉ phương của đường thẳng $\Delta$ song song với hai mặt phẳng $(P)$ và $(Q)$ có dạng $(a;1;c)$. Tìm $a+c$.

KQ: | | | | |

**CÂU 26.** Trong KG $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon x+3y-2z-2024=0$ và $\vec{a}=(1;1;0)$. Một vectơ chỉ phương của đường thẳng $\Delta$ song song với mặt phẳng $(P)$ và song song vectơ $\vec{a}$ có dạng $(a;1;c)$. Tìm $a+c$.

KQ: | | | | |

## 2 Xét vị trí tương đối hai ĐT

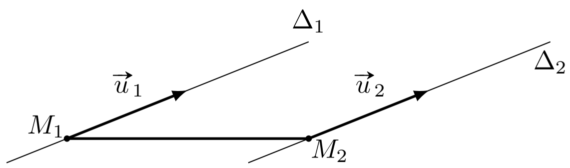
Trong không gian, hai vectơ được gọi là cùng phương khi giá của chúng cùng song song với một đường thẳng.
Trong không gian, ba vectơ được gọi là đồng phẳng khi giá của chúng cùng song song với một mặt phẳng.
Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba vectơ $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$, $\vec{b}=(b_1;b_2;b_3)$, $\vec{c}=(c_1;c_2;c_3)$

QUICK NOTE

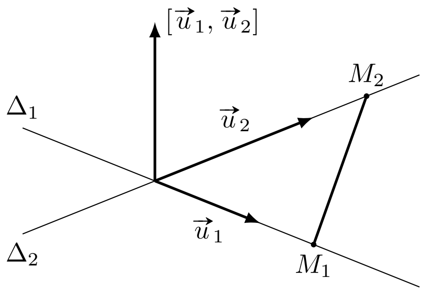
- Hai $\vec{a}$, $\vec{b}$ cùng phương $\Leftrightarrow \left[\vec{a}, \vec{b}\right] = \vec{0}$.
- Hai $\vec{a}$, $\vec{b}$ không cùng phương $\Leftrightarrow \left[\vec{a}, \vec{b}\right] \neq \vec{0}$.
- Ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ đồng phẳng $\Leftrightarrow \left[\vec{a}, \vec{b}\right] . \vec{c} = 0$.
- Ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ không đồng phẳng $\Leftrightarrow \left[\vec{a}, \vec{b}\right] . \vec{c} \neq 0$.

Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $\Delta_1, \Delta_2$ lần lượt đi qua các điểm $M_1, M_2$ và tương ứng có $\vec{u}_1 = (a_1; b_1; c_1)$, $\vec{u}_2 = (a_2; b_2; c_2)$ là hai vectơ chỉ phương. Khi đó, ta có

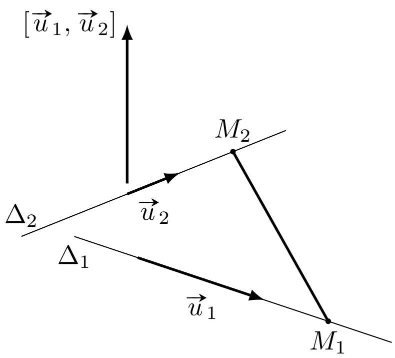
- $\Delta_1 \equiv \Delta_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{u}_1, \vec{u}_2 \text{ cùng phương} \\ \vec{u}_1, \overrightarrow{M_1M_2} \text{ cùng phương} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} [\vec{u}_1, \vec{u}_2] = \vec{0} \\ \left[\vec{u}_1, \overrightarrow{M_1M_2}\right] = \vec{0}. \end{cases}$
- $\Delta_1 \,/\!/\, \Delta_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{u}_1, \vec{u}_2 \text{ cùng phương} \\ \vec{u}_1, \overrightarrow{M_1M_2} \text{ không cùng phương} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} [\vec{u}_1, \vec{u}_2] = \vec{0} \\ \left[\vec{u}_1, \overrightarrow{M_1M_2}\right] \neq \vec{0}. \end{cases}$




- $\Delta_1$ cắt $\Delta_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{u}_1, \vec{u}_2 \text{ không cùng phương} \\ \vec{u}_1, \vec{u}_2, \overrightarrow{M_1M_2} \text{ đồng phẳng} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} [\vec{u}_1, \vec{u}_2] \neq \vec{0} \\ [\vec{u}_1, \vec{u}_2] \cdot \overrightarrow{M_1M_2} \neq 0. \end{cases}$




- $\Delta_1$ và $\Delta_2$ chéo nhau $\Leftrightarrow [\vec{u}_1, \vec{u}_2] \cdot \overrightarrow{M_1M_2} \neq 0$.




*Chú ý: Để xét vị trí tương đối giữa hai đường thẳng, ta cũng có thể dựa vào các vectơ chỉ phương và phương trình của hai đường thẳng đó.*

Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $\Delta_1, \Delta_2$ tương ứng có $\vec{u}_1 = (a_1; b_1; c_1)$, $\vec{u}_2 = (a_2; b_2; c_2)$ là hai vectơ chỉ phương và có PTTS:

$$\Delta_1 : \begin{cases} x = x_1 + a_1 t_1 \\ y = y_1 + b_1 t_1 \\ z = z_1 + c_1 t_1 \end{cases} \quad (t_1 \in \mathbb{R}), \quad \Delta_2 : \begin{cases} x = x_2 + a_2 t_2 \\ y = y_2 + b_2 t_2 \\ z = z_2 + c_2 t_2 \end{cases} \quad (t_2 \in \mathbb{R})$$

QUICK NOTE

Xét hệ phương trình hai ẩn $t_1, t_2$: $\begin{cases} x_1 + a_1t_1 = x_2 + a_2t_2 \\ y_1 + b_1t_1 = y_2 + b_2t_2 \\ z_1 + c_1t_1 = z_2 + c_2t_2 \end{cases}$ $(*)$.

Khi đó

- $\Delta_1 \equiv \Delta_2 \Leftrightarrow \vec{u}_1$ cùng phương với $\vec{u}_2$ và hệ $(*)$ vô nghiệm.
- $\Delta_1 \parallel \Delta_2 \Leftrightarrow$ Hệ $(*)$ có vô số nghiệm.
- $\Delta_1$ cắt $\Delta_2 \Leftrightarrow$ Hệ $(*)$ có nghiệm duy nhất.
- $\Delta_1$ và $\Delta_2$ chéo nhau $\Leftrightarrow \vec{u}_1$ không cùng phương với $\vec{u}_2$ và hệ $(*)$ vô nghiệm.

*Điều kiện để hai đường thẳng vuông góc*

Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $\Delta_1, \Delta_2$ tương ứng có $\vec{u}_1 = (a_1; b_1; c_1)$, $\vec{u}_2 = (a_2; b_2; c_2)$ là hai vectơ chỉ phương. Khi đó

$$\Delta_1 \perp \Delta_2 \Leftrightarrow \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = 0 \Leftrightarrow a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$$

**Phần I. Mỗi câu hỏi học sinh chọn một trong bốn phương án A, B, C, D.**

**CÂU 1.** Trong KG $Oxyz$, hai đường thẳng $d$: $\begin{cases} x = -1 + 12t \\ y = 2 + 6t \\ z = 3 + 3t \end{cases}$ và $d'$: $\begin{cases} x = 7 + 8t \\ y = 6 + 4t \\ z = 5 + 2t \end{cases}$ có vị trí tương đối là

Ⓐ trùng nhau. Ⓑ song song. Ⓒ chéo nhau. Ⓓ cắt nhau.

**CÂU 2.** Trong KG $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d$: $\dfrac{x-1}{-2} = \dfrac{y+2}{1} = \dfrac{z-4}{3}$ và $d'$: $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -t \\ z = -2 + 3t \end{cases}$ có vị trí tương đối là

Ⓐ trùng nhau. Ⓑ song song. Ⓒ chéo nhau. Ⓓ cắt nhau.

**CÂU 3.** Trong KG $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d$: $\dfrac{x-2}{4} = \dfrac{y}{-6} = \dfrac{z+1}{-8}$ và $d'$: $\dfrac{x-7}{-6} = \dfrac{y-2}{9} = \dfrac{z}{12}$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng khi nói về vị trí tương đối của hai đường thẳng trên?

Ⓐ song song. Ⓑ trùng nhau. Ⓒ c. Ⓓ héo nhau. Ⓔ cắt nhau.

**CÂU 4.** Hai đường thẳng $d$: $\begin{cases} x = -1 + 12t \\ y = 2 + 6t \\ z = 3 + 3t \end{cases}$ và $d'$: $\begin{cases} x = 7 + 8t \\ y = 6 + 4t \\ z = 5 + 2t \end{cases}$ có vị trí tương đối là

Ⓐ trùng nhau. Ⓑ song song. Ⓒ chéo nhau. Ⓓ cắt nhau.

**CÂU 5.** Trong không gian $ABCD.A'B'C'D'$, hai đường thẳng $A$ và $B(a; 0; 0)$ có vị trí tương đối là

Ⓐ trùng nhau. Ⓑ song song. Ⓒ chéo nhau. Ⓓ cắt nhau.

**Phần II. Trong mỗi ý a), b), c) và d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.**

**CÂU 6.** Trong KG $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d$: $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-7}{1} = \dfrac{z-3}{4}$ và $d'$: $\dfrac{x-6}{3} = \dfrac{y+1}{-2} = \dfrac{z+2}{1}$. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

| Mệnh đề | Đ | S |
|---|---|---|
| a) Đường thẳng $d$ song song đường thẳng $d'$. | | |
| b) Đường thẳng $d$ trùng đường thẳng $d'$. | | |
| c) Đường thẳng $d$ cắt đường thẳng $d'$. | | |
| d) Đường thẳng $d$ chéo đường thẳng $d'$. | | |

QUICK NOTE

**CÂU 7.** Trong KG $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z-4}{3}$ và $d'\colon \begin{cases} x=-1+t \\ y=-t \\ z=-2+3t \end{cases}$.

Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

| Mệnh đề | Đ | S |
|---|---|---|
| **a)** Tọa độ giao điểm của $d$ và $d'$ là $I(1;-2;4)$. | | |
| **b)** Tọa độ giao điểm của $d$ và $d'$ là $I(1;2;4)$. | | |
| **c)** Đường thẳng $d$ cắt đường thẳng $d'$. | | |
| **d)** Đường thẳng $d$ chéo đường thẳng $d'$. | | |

**CÂU 8.** Trong KG $Oxyz$, cho bốn đường thẳng $d_1\colon \dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z+1}{1}$, $d_2\colon \dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{-2}=\dfrac{z-1}{1}$, $d_3\colon \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-1}{1}$ và $d_4\colon \dfrac{x}{1}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-1}{1}$. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

| Mệnh đề | Đ | S |
|---|---|---|
| **a)** Hai đường thẳng $d_1$ và $d_2$ song song với nhau. | | |
| **b)** Đường thẳng $d_3$ cắt đường thẳng $d_2$. | | |
| **c)** Đường thẳng $d_4$ không cắt đường thẳng $d_1$. | | |
| **d)** Đường thẳng $d_3$ cắt đường thẳng $d_1$. | | |

**Phần III. Học sinh điền kết quả vào ô trống.**

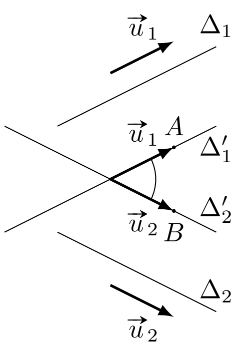
**CÂU 9.** Trong KG $Oxyz$, gọi $I(a;b;c)$ là tọa độ giao điểm của hai đường thẳng $\Delta_1\colon \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z}{3}$ và $\Delta_2\colon \begin{cases} x=3-t \\ y=3-2t \\ z=-2+t \end{cases}$. Tìm $a+b+c$.

KQ: | | | | |

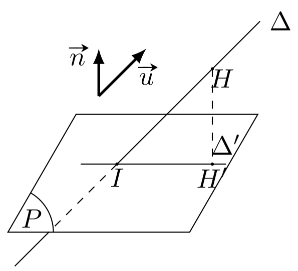
**CÂU 10.** Trong KG $Oxyz$, biết hai đường thẳng $d_1\colon \dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{-2}=\dfrac{z-1}{1}$ và $d_2\colon \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-1}{1}$ cắt nhau tại $I(a;b;c)$. Tính giá trị $a+b+c$.

KQ: | | | | |

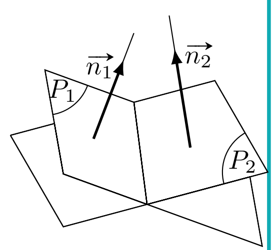
## 3 Góc giữa hai đường thẳng. Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng. Góc giữa hai mặt phẳng.




$$\cos(\Delta_1,\Delta_2)=|\cos(\vec{u}_1,\vec{u}_2)| = \dfrac{|\vec{u}_1\cdot\vec{u}_2|}{|\vec{u}_1|\cdot|\vec{u}_2|}$$




$$\sin(\Delta,(P))=|\cos(\vec{u},\vec{n})| = \dfrac{|\vec{u}\cdot\vec{n}|}{|\vec{u}|\cdot|\vec{n}|}$$




$$\cos((P_1),(P_2))=|\cos(\vec{n}_1,\vec{n}_2)| = \dfrac{|\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2|}{|\vec{n}_1|\cdot|\vec{n}_2|}$$

**Chú ý :**

- $\Delta_1\perp\Delta_2 \Leftrightarrow \vec{u_1}\cdot\vec{u_2}=0 \Leftrightarrow a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2=0$.
- Hai đường thẳng song song hoặc trùng với nhau thì góc giữa chúng là $0^\circ$.
- Đường thẳng song song hoặc trùng với mặt phẳng thì góc giữa chúng là $0^0$.

QUICK NOTE

- Hai mặt phẳng song song hoặc trùng với nhau thì góc giữa chúng là $0°$.

**Phần I. Mỗi câu hỏi học sinh chọn một trong bốn phương án A, B, C, D.**

**CÂU 1.** Gọi $\alpha$ là góc giữa hai đường thẳng $AB$, $CD$. Khẳng định nào sau đây đúng?

(A) $\cos\alpha = \dfrac{\left|\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}\right|}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{CD}\right|}$.
(B) $\cos\alpha = \dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{CD}\right|}$.
(C) $\cos\alpha = \dfrac{\left|\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\right]\right|}$.
(D) $\cos\alpha = \dfrac{\left|\left[\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}\right]\right|}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{CD}\right|}$.

**CÂU 2.** Cho hai đường thẳng $d_1\colon \begin{cases} x = 2+t \\ y = -1+t \\ z = 3 \end{cases}$ và $d_2\colon \begin{cases} x = 1-t \\ y = 2 \\ z = -2+t \end{cases}$. Góc giữa hai đường thẳng $d_1$ và $d_2$ là

(A) $30°$. (B) $120°$. (C) $150°$. (D) $60°$.

**CÂU 3.** Cho đường thẳng $\Delta\colon \dfrac{x}{1} = \dfrac{y}{-2} = \dfrac{z}{1}$ và mặt phẳng $(P)\colon 5x+11y+2z-4=0$. Góc giữa đường thẳng $\Delta$ và mặt phẳng $(P)$ là

(A) $60°$. (B) $-30°$. (C) $30°$. (D) $-60°$.

**CÂU 4.** Trong KG $Oxyz$ cho đường thẳng $d\colon \begin{cases} x = 1-t \\ y = 2+2t \\ z = 3+t \end{cases}$ và mặt phẳng $(P)\colon x-y+3=0$. Tính số đo góc giữa đường thẳng $d$ và mặt phẳng (P).

(A) $60°$. (B) $30°$. (C) $120°$. (D) $45°$.

**CÂU 5.** Trong KG $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon -\sqrt{3}x+y+1=0$. Tính góc tạo bởi $(P)$ với trục $Ox$.

(A) $60°$. (B) $30°$. (C) $120°$. (D) $150°$.

**CÂU 6.** Cho mặt phẳng $(P)\colon 3x+4y+5z+2=0$ và đường thẳng $d$ là giao tuyến của hai mặt phẳng $(\alpha)\colon x-2y+1=0$, $(\beta)\colon x-2z-3=0$. Gọi $\varphi$ là góc giữa đường thẳng $d$ và mặt phẳng $(P)$. Khi đó

(A) $60°$. (B) $45°$. (C) $30°$. (D) $90°$.

**CÂU 7.** Cho hai mặt phẳng $(\alpha)\colon 2x-y+2z-1=0$ và $(\beta)\colon x+2y-2z-3=0$. Cosin góc giữa mặt phẳng $(\alpha)$ và mặt phẳng $(\beta)$ bằng

(A) $\dfrac{4}{9}$. (B) $-\dfrac{4}{9}$. (C) $\dfrac{4}{3\sqrt{3}}$. (D) $-\dfrac{4}{3\sqrt{3}}$.

**CÂU 8.** Hai mặt phẳng nào dưới đây tạo với nhau một góc $60°$?

(A) $(P)\colon 2x+11y-5z+3=0$ và $(Q)\colon x+2y-z-2=0$.
(B) $(P)\colon 2x+11y-5z+3=0$ và $(Q)\colon -x+2y+z-5=0$.
(C) $(P)\colon 2x-11y+5z-21=0$ và $(Q)\colon 2x+y+z-2=0$.
(D) $(P)\colon 2x-5y+11z-6=0$ và $(Q)\colon -x+2y+z-5=0$.

**CÂU 9.** Tính tổng các giá trị tham số $m$ để mặt phẳng $(P)\colon (m+2)x+2my-mz+5=0$ và $(Q)\colon mx+(m-3)y+2z-3=0$ hợp với nhau một góc $\alpha=90°$.

(A) 6. (B) 4. (C) 8. (D) $-4$.

**Phần II. Trong mỗi ý a), b), c) và d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.**

**CÂU 10.** Trong KG $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P)\colon 2x-y+2z+5=0$ và $(Q)\colon x-y+2=0$. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

| Mệnh đề | Đ | S |
|---|---|---|
| a) Góc giữa hai mặt phẳng $(P)$ và $(Q)$ bằng $135°$. | | |
| b) Góc giữa hai mặt phẳng $(P)$ và $(Q)$ bằng $45°$. | | |

| Mệnh đề | Đ | S |
|---|---|---|
| **c)** Hai mặt phẳng $(P)$ và $(Q)$ song song với nhau. | | |
| **d)** Điểm $M(0;5;0)$ thuộc mặt phẳng $(P)$. | | |

**CÂU 11.** Trong KG $Oxyz$, cho mặt phẳng $(Q)\colon x-y-5=0$, và biết hình chiếu của $O$ lên mặt phẳng $(P)$ là $H(2;-1;-2)$. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

| Mệnh đề | Đ | S |
|---|---|---|
| **a)** Góc giữa hai mặt phẳng $(P)$ và $(Q)$ bằng $135°$. | | |
| **b)** Góc giữa hai mặt phẳng $(P)$ và $(Q)$ bằng $45°$. | | |
| **c)** Góc giữa hai mặt phẳng $(P)$ và $(Q)$ bằng $60°$. | | |
| **d)** Góc giữa hai mặt phẳng $(P)$ và $(Q)$ bằng $120°$. | | |

**CÂU 12.** Trong KG $Oxyz$, cho ba mặt phẳng $(P)\colon 2x-y+2z+3=0$, $(Q)\colon x-y-z-2=1$, $(R)\colon x+2y+2z-2=0$. Gọi $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3$ lần lượt là góc giữa hai mặt phẳng $(P)$ và $(Q)$, $(Q)$ và $(R)$, $(R)$ và $(P)$. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

| Mệnh đề | Đ | S |
|---|---|---|
| **a)** $\alpha_1>\alpha_3>\alpha_2$. | | |
| **b)** $\alpha_2>\alpha_3>\alpha_1$. | | |

| Mệnh đề | Đ | S |
|---|---|---|
| **c)** $\alpha_3>\alpha_2>\alpha_1$. | | |
| **d)** $\alpha_1>\alpha_2>\alpha_3$. | | |

**Phần III. Học sinh điền kết quả vào ô trống.**

**CÂU 13.** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $H(2;1;2)$, $H$ là hình chiếu vuông góc của gốc tọa độ $O$ xuống mặt phẳng $(P)$. Tính số đo góc giữa mặt phẳng $(P)$ và mặt phẳng $(Q)\colon x+y-11=0$.

KQ:

**CÂU 14.** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)$ có phương trình $x-2y+2z-5=0$. Xét mặt phẳng $(Q): x+(2m-1)z+7=0$, với $m$ là tham số thực. Tính tổng tất cả giá trị của $m$ để $(P)$ tạo với $(Q)$ góc $\dfrac{\pi}{4}$.

KQ:

**CÂU 15.** Biết mặt phẳng $(\alpha): (2m-1)x-3my+2z+3=0$ và $(\beta): mx+(m-1)y+4z-5=0$ vuông góc với nhau. Tính tích tất cả các giá trị tìm được của tham số $m$.

KQ:

## 4 Lập PTĐT khi biết điểm và VTCP

**Phần I. Mỗi câu hỏi học sinh chọn một trong bốn phương án A, B, C, D.**

**CÂU 1.** Trong KG $Oxyz$, cho đường thẳng $d$ đi qua điểm $M(2;2;1)$ và có một véc-tơ chỉ phương $\vec{u}=(5;2;-3)$. Phương trình của $d$ là

Ⓐ $\begin{cases}x=2+5t\\y=2+2t\\z=-1-3t\end{cases}$. Ⓑ $\begin{cases}x=2+5t\\y=2+2t\\z=1+3t\end{cases}$. Ⓒ $\begin{cases}x=2+5t\\y=2+2t\\z=1-3t\end{cases}$. Ⓓ $\begin{cases}x=5+2t\\y=2+2t\\z=-3+t\end{cases}$.

**CÂU 2.** Trong KG $Oxyz$, cho hai điểm $M(1;0;1)$ và $N(3;2;-1)$. Đường thẳng $MN$ có PTTS là

Ⓐ $\begin{cases}x=1+2t\\y=2t\\z=1+t\end{cases}$. Ⓑ $\begin{cases}x=1+t\\y=t\\z=1+t\end{cases}$. Ⓒ $\begin{cases}x=1-t\\y=t\\z=1+t\end{cases}$. Ⓓ $\begin{cases}x=1+t\\y=t\\z=1-t\end{cases}$.

**CÂU 3.** Trong không gian tọa độ $Oxyz$, phương trình nào dưới đây là PTCT của đường thẳng $d\colon \begin{cases}x=1+2t\\y=3t\\z=-2+t\end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$?



QUICK NOTE

QUICK NOTE

(A) $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z-2}{1}$.
(B) $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z+2}{-2}$.
(C) $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z-2}{-2}$.
(D) $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z+2}{1}$.

**CÂU 4.** Trong KG $Oxyz$, đường thẳng $Oy$ có PTTS là

(A) $\begin{cases}x=t\\y=t\\z=t\end{cases}(t\in\mathbb{R})$.
(B) $\begin{cases}x=0\\y=2+t\\z=0\end{cases}(t\in\mathbb{R})$.
(C) $\begin{cases}x=0\\y=0\\z=t\end{cases}(t\in\mathbb{R})$.
(D) $\begin{cases}x=t\\y=0\\z=0\end{cases}(t\in\mathbb{R})$.

**CÂU 5.** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, PTTS trục $Oz$ là

(A) $z=0$.
(B) $\begin{cases}x=0\\y=t\\z=0\end{cases}$.
(C) $\begin{cases}x=t\\y=0\\z=0\end{cases}$.
(D) $\begin{cases}x=0\\y=0\\z=t\end{cases}$.

**CÂU 6.** Trong KG $Oxyz$, trục $Ox$ có PTTS

(A) $x=0$.
(B) $y+z=0$.
(C) $\begin{cases}x=0\\y=0\\z=t\end{cases}$.
(D) $\begin{cases}x=t\\y=0\\z=0\end{cases}$.

**CÂU 7.** Trong KG $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-2}{-1}$. Đường thẳng đi qua điểm $M(2;1;-1)$ và song song với đường thẳng $d$ có phương trình là

(A) $\dfrac{x+2}{-1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-1}{-1}$.
(B) $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-5}{-2}=\dfrac{z+3}{1}$.
(C) $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z+1}{-1}$.
(D) $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z+1}{2}$.

**CÂU 8.** Trong KG $Oxyz$, cho điểm $M(2;-2;1)$ và mặt phẳng $(P)\colon 2x-3y-z+1=0$. Đường thẳng đi qua $M$ và vuông góc với $(P)$ có phương trình là

(A) $\begin{cases}x=2+2t\\y=2-3t\\z=1-t\end{cases}$.
(B) $\begin{cases}x=2+2t\\y=-2-3t\\z=1-t\end{cases}$.
(C) $\begin{cases}x=2+2t\\y=-2+3t\\z=1+t\end{cases}$.
(D) $\begin{cases}x=2+2t\\y=-3-2t\\z=-1+t\end{cases}$.

**CÂU 9.** Trong KG $Oxyz$, đường thẳng đi qua điểm $A(1;1;1)$ và vuông góc với mặt phẳng tọa độ $(Oxy)$ có PTTS là

(A) $\begin{cases}x=1+t\\y=1\\z=1\end{cases}$.
(B) $\begin{cases}x=1\\y=1\\z=1+t\end{cases}$.
(C) $\begin{cases}x=1+t\\y=1\\z=1\end{cases}$.
(D) $\begin{cases}x=1+t\\y=1+t\\z=1\end{cases}$.

**CÂU 10.** Trong KG $Oxyz$, cho điểm $M(3;2;-1)$ và mặt phẳng $(P)\colon x+z-2=0$. Đường thẳng đi qua $M$ và vuông góc với $(P)$ có phương trình là

(A) $\begin{cases}x=3+t\\y=2\\z=-1+t\end{cases}$.
(B) $\begin{cases}x=3+t\\y=2+t\\z=-1\end{cases}$.
(C) $\begin{cases}x=3+t\\y=2t\\z=1-t\end{cases}$.
(D) $\begin{cases}x=3+t\\y=1+2t\\z=-t\end{cases}$.

**CÂU 11.** Trong KG $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;2;-1)$, $B(3;0;1)$ và $C(2;2;-2)$. Đường thẳng đi qua $A$ và vuông góc với mặt phẳng $(ABC)$ có phương trình là

(A) $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{-2}=\dfrac{z+1}{3}$.
(B) $\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z-1}{1}$.
(C) $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-1}{-1}$.
(D) $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z+1}{1}$.

**CÂU 12.** Trong KG $Oxyz$ cho $A(0;0;2)$, $B(2;1;0)$, $C(1;2;-1)$ và $D(2;0;-2)$. Đường thẳng đi qua $A$ và vuông góc với $(BCD)$ có phương trình là

(A) $\begin{cases}x=3\\y=2\\z=-1+2t\end{cases}$.
(B) $\begin{cases}x=3+3t\\y=2+2t\\z=1-t\end{cases}$.
(C) $\begin{cases}x=3t\\y=2t\\z=2+t\end{cases}$.
(D) $\begin{cases}x=3+3t\\y=-2+2t\\z=1-t\end{cases}$.

**CÂU 13.** Đường thẳng $\Delta$ là giao tuyến của 2 mặt phẳng $x+z-5=0$ và $x-2y-z+3=0$ thì có phương trình là

(A) $\dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{z}{-1}$. (B) $\dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z}{-1}$.

(C) $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-3}{-1}$. (D) $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-3}{-1}$.

**Phần II. Trong mỗi ý a), b), c) và d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.**

**CÂU 14.** Trong KG $Oxyz$, cho đường thẳng $d$ đi qua điểm $M(3;-1;4)$ và có một vectơ chỉ phương $\vec{u}=(-2;4;5)$.

| Mệnh đề | Đ | S |
|---|---|---|
| a) PTTS của đường thẳng $d$ là $\begin{cases}x=-2+3t\\y=4-t\\z=5+4t\end{cases}$. | | |
| b) PTTS của đường thẳng $d$ là $\begin{cases}x=3+2t\\y=-1+4t\\z=4+5t\end{cases}$. | | |
| c) PTTS của đường thẳng $d$ là $\begin{cases}x=3-2t\\y=1+4t\\z=4+5t\end{cases}$. | | |
| d) PTTS của đường thẳng $d$ là $\begin{cases}x=3-2t\\y=-1+4t\\z=4+5t\end{cases}$. | | |

**CÂU 15.** Trong KG $Oxyz$, cho hai điểm $M(1;-2;1)$, $N(0;1;3)$.

| Mệnh đề | Đ | S |
|---|---|---|
| a) PTĐT qua hai điểm $M$, $N$ là $\dfrac{x+1}{-1}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z+1}{2}$. | | |
| b) PTĐT qua hai điểm $M$, $N$ là $\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-3}{-2}=\dfrac{z-2}{1}$. | | |
| c) PTĐT qua hai điểm $M$, $N$ là $\dfrac{x}{-1}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z-3}{2}$. | | |
| d) PTĐT qua hai điểm $M$, $N$ là $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-1}{-3}=\dfrac{z-3}{-2}$. | | |

**CÂU 16.** Trong KG $Oxyz$, đường thẳng có PTTS là $(d)\colon \begin{cases}x=1+2t\\y=2-t\\z=-3+t\end{cases}$.

| Mệnh đề | Đ | S |
|---|---|---|
| a) PTCT của đường thẳng $d$ là $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z+3}{1}$. | | |
| b) PTCT của đường thẳng $d$ là $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z-3}{1}$. | | |
| c) PTCT của đường thẳng $d$ là $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z+3}{1}$. | | |
| d) PTCT của đường thẳng $d$ là $\dfrac{1-x}{-2}=\dfrac{2-y}{1}=\dfrac{-z-3}{-1}$. | | |

**CÂU 17.** Trong KG $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;3)$ và đường thẳng $d\colon \dfrac{x+4}{-2}=\dfrac{y+3}{-3}=\dfrac{z-3}{1}$. Khi đó

| Mệnh đề | Đ | S |
|---|---|---|
| a) Đường thẳng $\Delta$ đi qua điểm $A$ và song song với đường thẳng $d$ có phương trình là $\begin{cases}x=1-2t\\y=2-3t\\z=3+t\end{cases}$. | | |



QUICK NOTE

QUICK NOTE

| Mệnh đề | Đ | S |
|---|---|---|
| b) Đường thẳng $\Delta$ đi qua điểm $A$ và song song với đường thẳng $d$ có phương trình là $\begin{cases} x=1+2t \\ y=2+3t \\ z=3-t \end{cases}$. | | |
| c) Đường thẳng $\Delta$ đi qua điểm $A$ và song song với đường thẳng $d$ có phương trình là $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z-3}{-1}$. | | |
| d) Đường thẳng $\Delta$ đi qua điểm $A$ và song song với đường thẳng $d$ có phương trình là $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y+2}{3}=\dfrac{z+3}{-1}$. | | |

**CÂU 18.** Trong KG $Oxyz$, cho ba điểm $A(2;-2;3)$, $B(1;3;4)$ và $C(3;-1;5)$.

| Mệnh đề | Đ | S |
|---|---|---|
| a) Đường thẳng đi qua $A$ và song song với $BC$ có phương trình là $\begin{cases} x=2-2t \\ y=-2+4t \\ z=3-t \end{cases}$. | | |
| b) Đường thẳng đi qua $A$ và song song với $BC$ có phương trình là $\dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y-2}{-4}=\dfrac{z+3}{1}$. | | |
| c) Đường thẳng đi qua $A$ và song song với $BC$ có phương trình là $\dfrac{x-2}{4}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z-3}{9}$. | | |
| d) Đường thẳng đi qua $A$ và song song với $BC$ có phương trình là $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y+2}{-4}=\dfrac{z-3}{1}$. | | |

## 5 Lập PTĐT liên quan đến song song

**Phần I. Mỗi câu hỏi học sinh chọn một trong bốn phương án A, B, C, D.**

**CÂU 1.** Trong KG $Oxyz$, cho điểm $A(-4;-3;3)$ và mặt phẳng $(P)\colon x+y+z=0$. Đường thẳng đi qua $A$, cắt trục $Oz$ và song song với $(P)$ có phương trình là

Ⓐ $\dfrac{x-4}{4}=\dfrac{y-3}{3}=\dfrac{z-3}{-7}$.

Ⓑ $\dfrac{x+4}{4}=\dfrac{y+3}{3}=\dfrac{z-3}{1}$.

Ⓒ $\dfrac{x+4}{-4}=\dfrac{y+3}{3}=\dfrac{z-3}{1}$.

Ⓓ $\dfrac{x+8}{4}=\dfrac{y+6}{3}=\dfrac{z-10}{-7}$.

**CÂU 2.** Trong KG $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon x+y-z+9=0$, đường thẳng $d\colon \dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y-3}{3}=\dfrac{z}{2}$ và điểm $A(1;2;-1)$. Viết PTĐT $\Delta$ đi qua điểm $A$ cắt $d$ và song song với mặt phẳng $(P)$.

Ⓐ $\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z+1}{1}$.

Ⓑ $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z+1}{-1}$.

Ⓒ $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z+1}{1}$.

Ⓓ $\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z+1}{-1}$.

**CÂU 3.** Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho điểm $M(1;-3;4)$, đường thẳng $d\colon \dfrac{x+2}{3}=\dfrac{y-5}{-5}=\dfrac{z-2}{-1}$ và mặt phẳng $(P)\colon 2x+z-2=0$. Viết PTĐT $\Delta$ qua $M$ vuông góc với $d$ và song song với $(P)$.

Ⓐ $\Delta\colon \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+3}{-1}=\dfrac{z-4}{-2}$.

Ⓑ $\Delta\colon \dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y+3}{-1}=\dfrac{z-4}{-2}$.

Ⓒ $\Delta\colon \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+3}{1}=\dfrac{z-4}{-2}$.

Ⓓ $\Delta\colon \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+3}{-1}=\dfrac{z+4}{2}$.

**CÂU 4.** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(\alpha)\colon x-2y+z-1=0$, $(\beta)\colon 2x+y-z=0$ và điểm $A(1;2;-1)$. Đường thẳng $\Delta$ đi qua điểm $A$ và song song với cả hai mặt phẳng $(\alpha)$, $(\beta)$ có phương trình là

**A** $\dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{y-2}{4}=\dfrac{z+1}{-2}$.
**B** $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z+1}{5}$.
**C** $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{-2}=\dfrac{z+1}{-1}$.
**D** $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z-3}{1}$.

**CÂU 5.** Trong KG $Oxyz$, cho điểm $A(2;0;-1)$ và mặt phẳng $(P)\colon x+y-1=0$. Đường thẳng đi qua $A$ đồng thời song song với $(P)$ và mặt phẳng $Oxy$ có phương trình là

**A** $\begin{cases}x=3+t\\y=2t\\z=1-t\end{cases}$.
**B** $\begin{cases}x=2+t\\y=-t\\z=-1\end{cases}$.
**C** $\begin{cases}x=1+2t\\y=-1\\z=-t\end{cases}$.
**D** $\begin{cases}x=3+t\\y=1+2t\\z=-t\end{cases}$.

**CÂU 6.** Trong không gian tọa độ $Oxyz$, viết phương trình chính tắc của đường thẳng đi qua điểm $A(3;-1;5)$ và cùng song song với hai mặt phẳng $(P)\colon x-y+z-4=0$, $(Q)\colon 2x+y+z+4=0$.

**A** $\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-5}{-3}$.
**B** $\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z-5}{-3}$.
**C** $\dfrac{x+3}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z+5}{-3}$.
**D** $\dfrac{x+3}{2}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z+5}{-3}$.

**CÂU 7.** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(\alpha): x-2y+z-1=0$, $(\beta): 2x+y-z=0$ và điểm $A(1;2;-1)$. Đường thẳng $\Delta$ đi qua điểm $A$ và song song với cả hai mặt phẳng $(\alpha), (\beta)$ có phương trình là

**A** $\dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{y-2}{4}=\dfrac{z+1}{-2}$.
**B** $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z+1}{5}$.
**C** $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{-2}=\dfrac{z+1}{-1}$.
**D** $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z-3}{1}$.

**CÂU 8.** Trong không gian $Oxyz$, cho ba đường thẳng $d_1\colon \dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-2}{-2}$; $d_2\colon \dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y}{-2}=\dfrac{z+4}{-1}$; $d_3\colon \dfrac{x+3}{4}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z}{6}$. Đường thẳng song song với $d_3$, cắt $d_1$ và $d_2$ có phương trình là

**A** $\dfrac{x-3}{4}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-2}{6}$.
**B** $\dfrac{x-3}{-4}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-2}{-6}$.
**C** $\dfrac{x+1}{4}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z-4}{6}$.
**D** $\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z+4}{6}$.

**CÂU 9.** Trong không gian $Oxyz$, cho ba đường thẳng $d\colon \dfrac{x}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z+2}{2}$, mặt phẳng $(P)\colon 2x+y+2z-5=0$ và điểm $A(1;1;-2)$. Phương trình chính tắc của đường thẳng $\Delta$ đi qua điểm $A$ song song với mặt phẳng $(P)$ và vuông góc với $d$ là

**A** $\Delta\colon \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z+2}{-2}$.
**B** $\Delta\colon \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z+2}{-2}$.
**C** $\Delta\colon \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z+2}{-3}$.
**D** $\Delta\colon \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z+2}{2}$.

**CÂU 10.** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon 2x-y+2z+3=0$ và hai đường thẳng $d_1\colon \dfrac{x}{3}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z+1}{1}$, $d_2\colon \dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z+3}{1}$. Xét các điểm $A, B$ lần lượt di động trên $d_1$ và $d_2$ sao cho $AB$ song song với mặt phẳng $(P)$. Tập hợp trung điểm của đoạn thẳng $AB$ là

**A** Một đường thẳng có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}=(-9;8;-5)$ .
**B** Một đường thẳng có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}=(-5;8;-5)$ .
**C** Một đường thẳng có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}=(1;-2;-5)$ .
**D** Một đường thẳng có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}=(1;5;-2)$ .

**CÂU 11.** Trong KG $Oxyz$ cho hai đường thẳng $d\colon \begin{cases}x=2-t\\y=1+2t\\z=4-2t\end{cases}$ và $d'\colon \dfrac{x-4}{1}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z}{2}$.

Phương trình nào dưới đây là PTĐT thuộc mặt phẳng chứa $d$ và $d'$ đồng thời cách đều hai đường thẳng đó.

QUICK NOTE

QUICK NOTE

**A** $\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-4}{-2}$.
**B** $\dfrac{x+3}{1}=\dfrac{y+2}{-2}=\dfrac{z+2}{2}$.
**C** $\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y}{-2}=\dfrac{z-2}{2}$.
**D** $\dfrac{x+3}{-1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z+2}{-2}$.

**CÂU 12.** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d$ và mặt phẳng $(P)$ lần lượt có phương trình $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-2}{1}$ và $x+y-2z+8=0$, điểm $A(2;-1;3)$. PTĐT $\Delta$ cắt $d$ và $(P)$ lần lượt tại $M$và $N$ sao cho $A$ là trung điểm của đoạn thẳng $MN$ là

**A** $\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y+5}{4}=\dfrac{z-5}{2}$.
**B** $\dfrac{x-2}{6}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-3}{2}$.
**C** $\dfrac{x-5}{6}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z-5}{2}$.
**D** $\dfrac{x-5}{3}=\dfrac{y-3}{4}=\dfrac{z-5}{2}$.

**CÂU 13.** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A$ và mặt phẳng $(P)\colon 3x-2y-3z-7=0$, đường thẳng $d\colon \dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+4}{-2}=\dfrac{z-1}{2}$. Phương trình nào sau đây là PTĐT $\Delta$ đi qua $A$, song song $(P)$ và cắt đường thẳng $d$?

**A** $\begin{cases}x=3+11t\\y=2-54t\\z=-4+47t\end{cases}$.
**B** $\begin{cases}x=3+54t\\y=2+11t\\z=-4-47t\end{cases}$.
**C** $\begin{cases}x=3+47t\\y=2+54t\\z=-4+11t\end{cases}$.
**D** $\begin{cases}x=3-11t\\y=2-47t\\z=-4+54t\end{cases}$.

**CÂU 14.** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha)\colon x-2z-6=0$, đường thẳng $d\colon \begin{cases}x=1+t\\y=3+t\\z=-1-t\end{cases}$. Viết PTĐT $\Delta$ nằm trong mặt phẳng $(\alpha)$ cắt đồng thời vuông góc với $d$.

**A** $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-4}{1}=\dfrac{z+2}{1}$.
**B** $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-4}{-1}=\dfrac{z+2}{1}$.
**C** $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-3}{-1}=\dfrac{z+2}{1}$.
**D** $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-4}{-1}=\dfrac{z-2}{1}$.

**CÂU 15.** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;-2;3)$ và hai mặt phẳng $(P)\colon x+y+z+1=0, (Q)\colon x-y+z-2=0$. Phương trình nào dưới đây là PTĐT đi qua $A$, song song với $(P)$ và $(Q)$?

**A** $\begin{cases}x=1+1t\\y=-2\\z=3-t\end{cases}$.
**B** $\begin{cases}x=-1+1t\\y=2\\z=-3-t\end{cases}$.
**C** $\begin{cases}x=1+2t\\y=-2\\z=3+2t\end{cases}$.
**D** $\begin{cases}x=1\\y=-2\\z=3-2t\end{cases}$.

**CÂU 16.** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho các đường thẳng $d_1\colon \dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-2}{2}$, $d_2\colon \begin{cases}x=-1+3t\\y=-2t\\z=-4-t\end{cases}$, $d_3\colon \dfrac{x+3}{4}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z}{6}$. Đường thẳng song song với $d_3$ và cắt đồng thời $d_1$ và $d_2$ có phương trình là

**A** $\dfrac{x+1}{4}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z-4}{6}$.
**B** $\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z+4}{6}$.
**C** $\dfrac{x-3}{4}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-2}{6}$.
**D** $\dfrac{x-3}{-4}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-2}{-6}$.

**CÂU 17.** Trong không gian, cho mặt phẳng $(P)\colon x+y-z-4=0$ và điểm $A(2;-1;3)$. Gọi $\Delta$ là đường thẳng đi qua $A$ và song song với $(P)$, biết $\Delta$ có một véc-tơ chỉ phương là $\vec{u}=(a;b;c)$, đồng thời $\Delta$ đồng phẳng và không song song với $Oz$. Tính $\dfrac{a}{c}$.

**A** $\dfrac{a}{c}=2$.
**B** $\dfrac{a}{c}=-2$.
**C** $\dfrac{a}{c}=-\dfrac{1}{2}$.
**D** $\dfrac{a}{c}=\dfrac{1}{2}$.

**CÂU 18.** Trong KG $Oxyz$, viết PTTS của đường thẳng đi qua điểm $M(1;3;-2)$, đồng thời song song với giao tuyến của hai mặt phẳng $(P)\colon x+y-3=0$ và $(Q)\colon 2x-y+z-3=0$.

**A** $\begin{cases}x=1+3t\\y=3-t\\z=-2+t\end{cases}$.
**B** $\begin{cases}x=1-3t\\y=3+t\\z=-2+t\end{cases}$.
**C** $\begin{cases}x=1+t\\y=3-t\\z=-2-3t\end{cases}$.
**D** $\begin{cases}x=1+t\\y=3+t\\z=-2-3t\end{cases}$.

QUICK NOTE

**CÂU 19.** Trong KG $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d\colon \begin{cases} x=2+3t \\ y=-3+t \\ z=4-2t \end{cases}$ và $d'\colon \dfrac{x-4}{3}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z}{-2}$. Phương trình nào dưới đây là PTĐT thuộc mặt phẳng chứa $d$ và $d'$, đồng thời cách đều hai đường thẳng đó.

Ⓐ $\dfrac{x-3}{3}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z-2}{-2}$.

Ⓑ $\dfrac{x+3}{3}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z+2}{-2}$.

Ⓒ $\dfrac{x-3}{3}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z-2}{-2}$.

Ⓓ $\dfrac{x+3}{3}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z+2}{-2}$.

**CÂU 20.** Trong KG $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x-y+z-10=0$, điểm $A(1;3;2)$ và đường thẳng $d\colon \begin{cases} x=-2+2t \\ y=1+t \\ z=1-t \end{cases}$. Tìm PTĐT $\Delta$ cắt $(P)$ và $d$ lần lượt tại hai điểm $M$ và $N$ sao cho $A$ là trung điểm của đoạn $MN$.

Ⓐ $\dfrac{x+6}{7}=\dfrac{y+1}{4}=\dfrac{z-3}{-1}$.

Ⓑ $\dfrac{x-6}{7}=\dfrac{y-1}{4}=\dfrac{z+3}{-1}$.

Ⓒ $\dfrac{x-6}{7}=\dfrac{y-1}{-4}=\dfrac{z+3}{-1}$.

Ⓓ $\dfrac{x+6}{7}=\dfrac{y+1}{-4}=\dfrac{z-3}{-1}$.

**CÂU 21.** Trong KG $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-2}{1}$, mặt phẳng $(P): x+y-2z+5=0$ và $A(1;-1;2)$. Đường thẳng $\Delta$ cắt $d$ và $(P)$ lần lượt tại $M$ và $N$ sao cho $A$ là trung điểm của đoạn thẳng $MN$. Một véc-tơ chỉ phương của $\Delta$ là

Ⓐ $\vec{u}=(4;5;-13)$. Ⓑ $\vec{u}=(2;3;2)$. Ⓒ $\vec{u}=(1;-1;2)$. Ⓓ $\vec{u}=(-3;5;1)$.

**CÂU 22.** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho hai đường thẳng $d_1\colon \begin{cases} x=4+t \\ y=-4-t; \\ z=6+2t \end{cases}$ $d_2\colon \dfrac{x-5}{2}=\dfrac{y-11}{4}=\dfrac{z-5}{2}$. Đường thẳng $d$ đi qua $A(5;-3;5)$ cắt $d_1$ ; $d_2$ lần lượt ở $B$, $C$. Tính tỉ số $\dfrac{AB}{AC}$.

Ⓐ 2. Ⓑ 3. Ⓒ $\dfrac{1}{2}$. Ⓓ $\dfrac{1}{3}$.

## 6 Lập PTĐT liên quan đến vuông góc

**CÂU 1.** Trong KG $Oxyz$, cho điểm $M(1;0;1)$ và đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-3}{3}$. Đường thẳng đi qua $M$, vuông góc với $d$ và cắt $Oz$ có phương trình là

Ⓐ $\begin{cases} x=1-3t \\ y=0 \\ z=1+t \end{cases}$. Ⓑ $\begin{cases} x=1-3t \\ y=0 \\ z=1-t \end{cases}$. Ⓒ $\begin{cases} x=1-3t \\ y=t \\ z=1+t \end{cases}$. Ⓓ $\begin{cases} x=1+3t \\ y=0 \\ z=1+t \end{cases}$.

**CÂU 2.** Trong KG $Oxyz$, cho điểm $A(2;1;3)$ và đường thẳng $d\colon \dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z-2}{2}$. Đường thẳng đi qua $A$, vuông góc với $d$ và cắt trục $Oy$ có phương trình là

Ⓐ $\begin{cases} x=2t \\ y=-3+4t \\ z=3t \end{cases}$. Ⓑ $\begin{cases} x=2+2t \\ y=1+t \\ z=3+3t \end{cases}$. Ⓒ $\begin{cases} x=2+2t \\ y=1+3t \\ z=3+2t \end{cases}$. Ⓓ $\begin{cases} x=2t \\ y=-3+3t \\ z=2t \end{cases}$.

**CÂU 3.** Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$ cho điểm $A(1;0;2)$ và đường thẳng $d$ có phương trình : $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+1}{2}$. Viết PTĐT $\Delta$ đi qua $A$, vuông góc và cắt $d$.

Ⓐ $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z-2}{1}$.

Ⓑ $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{-3}=\dfrac{z-2}{1}$.

Ⓒ $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-2}{1}$.

Ⓓ $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-2}{-1}$.

**CÂU 4.** Trong không gian Oxyz, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z+2}{2}$ và mặt phẳng

QUICK NOTE

$(P)\colon x+y-z+1=0$. Đường thẳng nằm trong mặt phẳng $(P)$ đồng thời cắt và vuông góc với $d$ có phương trình là

**A** $\begin{cases}x=-1+t\\y=-4t\\z=-3t\end{cases}$. **B** $\begin{cases}x=3+t\\y=-2+4t\\z=2+t\end{cases}$. **C** $\begin{cases}x=3+t\\y=-2-4t\\z=2-3t\end{cases}$. **D** $\begin{cases}x=3+2t\\y=-2+6t\\z=2+t\end{cases}$.

**CÂU 5.** Trong KG $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1\colon \dfrac{x-3}{-1}=\dfrac{y-3}{-2}=\dfrac{z+2}{1}$; $d_2\colon \dfrac{x-5}{-3}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-2}{1}$ và mặt phẳng $(P): x+2y+3z-5=0$. Đường thẳng vuông góc với $(P)$, cắt $d_1$ và $d_2$ có phương trình là

**A** $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z}{1}$. **B** $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z-1}{3}$.

**C** $\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z+2}{3}$. **D** $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z}{3}$.

**CÂU 6.** Trong KG $Oxyz$ cho đường thẳng $\Delta\colon \dfrac{x}{1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-1}{1}$ và mặt phẳng $(P): x-2y-z+3=0$. Đường thẳng nằm trong $(P)$ đồng thời cắt và vuông góc với $\Delta$ có phương trình là

**A** $\begin{cases}x=1+2t\\y=1-t\\z=2\end{cases}$. **B** $\begin{cases}x=-3\\y=-t\\z=2t\end{cases}$. **C** $\begin{cases}x=1+t\\y=1-2t\\z=2+3t\end{cases}$. **D** $\begin{cases}x=1\\y=1-t\\z=2+2t\end{cases}$.

**CÂU 7.** Trong KG $Oxyz$ cho $A(1;-1;3)$ và hai đường thẳng $d_1\colon \dfrac{x-4}{1}=\dfrac{y+2}{4}=\dfrac{z-1}{-2}$, $d_2\colon \dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z-1}{1}$. PTĐT qua $A$, vuông góc với $d_1$ và cắt $d_2$ là

**A** $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-3}{3}$. **B** $\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-3}{4}$.

**C** $\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-3}{3}$. **D** $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z-3}{-1}$.

**CÂU 8.** Trong KG $Oxyz$ cho điểm $A(1;-1;3)$ và hai đường thẳng $d_1\colon \dfrac{x-3}{3}=\dfrac{y+2}{3}=\dfrac{z-1}{-1}$. PTĐT $d$ đi qua $A$, vuông góc với đường thẳng $d_1$ và cắt thẳng $d_2$.

**A** $\dfrac{x-1}{5}=\dfrac{y+1}{-4}=\dfrac{z-3}{2}$. **B** $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z-3}{3}$.

**C** $\dfrac{x-1}{6}=\dfrac{y+1}{-5}=\dfrac{z-3}{3}$. **D** $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z-3}{3}$.

**CÂU 9.** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1;-1;2)$ và hai đường thẳng $d\colon \begin{cases}x=t\\y=-1-4t\\z=6+6t\end{cases}$, $d'\colon \dfrac{x}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z+2}{-5}$. Phương trình nào dưới đây là PTĐT đi qua $M$, vuông góc với $d$ và $d'$?

**A** $\dfrac{x-1}{17}=\dfrac{y+1}{14}=\dfrac{z-2}{9}$. **B** $\dfrac{x-1}{14}=\dfrac{y+1}{17}=\dfrac{z+2}{9}$.

**C** $\dfrac{x-1}{17}=\dfrac{y+1}{9}=\dfrac{z-2}{14}$. **D** $\dfrac{x-1}{14}=\dfrac{y+1}{17}=\dfrac{z-2}{9}$.

**CÂU 10.** Trong KG $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 3x+y+z=0$ và đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{-2}=\dfrac{z+3}{2}$. Gọi $\Delta$ là đường thẳng nằm trong $(P)$, cắt và vuông góc với $d$. Phương trình nào sau đây là PTTS của $\Delta$?

**A** $\begin{cases}x=-2+4t\\y=3-5t\\z=3-7t\end{cases}$. **B** $\begin{cases}x=-3+4t\\y=5-5t\\z=4-7t\end{cases}$. **C** $\begin{cases}x=1+4t\\y=1-5t\\z=-4-7t\end{cases}$. **D** $\begin{cases}x=-3+4t\\y=7-5t\\z=2-7t\end{cases}$.

**CÂU 11.** Trong KG $Oxyz$, cho điểm $A(1;-1;3)$ và hai đường thẳng $d_1\colon \dfrac{x-4}{1}=\dfrac{y+2}{4}=\dfrac{z-1}{-2}$, $d_2\colon \dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z-1}{1}$. Viết PTĐT $d$ đi qua $A$, vuông góc với đường thẳng $d_1$ và cắt đường thẳng $d_2$.

QUICK NOTE

Ⓐ $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z-3}{-1}$.
Ⓑ $\dfrac{x-1}{6}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-3}{5}$.
Ⓒ $\dfrac{x-1}{6}=\dfrac{y+1}{-4}=\dfrac{z-3}{-1}$.
Ⓓ $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-3}{3}$.

**CÂU 12.** Trong KG $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon x+2y+3z-7=0$ và hai đường thẳng $d_1\colon \dfrac{x+3}{2}=\dfrac{y+2}{-1}=\dfrac{z+2}{-4}$; $d_2\colon \dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-2}{3}$. Đường thẳng vuông góc mặt phẳng $(P)$ và cắt cả hai đường thẳng $d_1$; $d_2$ có phương trình là

Ⓐ $\dfrac{x+7}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z-6}{3}$.
Ⓑ $\dfrac{x+5}{1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-2}{3}$.
Ⓒ $\dfrac{x+4}{1}=\dfrac{y+3}{2}=\dfrac{z+1}{3}$.
Ⓓ $\dfrac{x+3}{1}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z+2}{3}$.

**CÂU 13.** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $(\Delta)$ đi qua điểm $M(0;1;1)$, vuông góc với đường thẳng $(d_1)\colon \begin{cases}x=t\\y=1-t\ (t\in\mathbb{R})\\z=-1\end{cases}$ và cắt đường thẳng $(d_2)\colon \dfrac{x}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z}{1}$. Phương trình của $(\Delta)$ là?

Ⓐ $\begin{cases}x=0\\y=t\\z=1+t\end{cases}$.
Ⓑ $\begin{cases}x=0\\y=1\\z=1+t\end{cases}$.
Ⓒ $\begin{cases}x=0\\y=1+t\\z=1\end{cases}$.
Ⓓ $\begin{cases}x=0\\y=0\\z=1+t\end{cases}$.

**CÂU 14.** Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$ cho điểm $A(1;0;2)$ và đường thẳng $d$ có phương trình $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+1}{2}$. Viết PTĐT $\Delta$ đi qua $A$, vuông góc và cắt $d$.

Ⓐ $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-2}{1}$.
Ⓑ $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-2}{-1}$.
Ⓒ $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z-2}{1}$.
Ⓓ $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{-3}=\dfrac{z-2}{1}$.

**CÂU 15.** Trong KG $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon x+2y+z-4=0$ và đường thẳng $d\colon \dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+2}{3}$. Phương trình đường thằng $\Delta$ nằm trong mặt phẳng $(P)$, đồng thời cắt và vuông góc với đường thẳng $d$ là

Ⓐ $\dfrac{x-1}{5}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z-2}{2}$.
Ⓑ $\dfrac{x+1}{5}=\dfrac{y+3}{-1}=\dfrac{z-1}{3}$.
Ⓒ $\dfrac{x-1}{5}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-1}{-3}$.
Ⓓ $\dfrac{x-1}{5}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-1}{-3}$.

**CÂU 16.** Trong KG $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x+3}{2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z}{-1}$ và mặt phẳng $(P)\colon x+y-3z-2=0$. Gọi $d'$ là đường thẳng nằm trong mặt phẳng $(P)$, cắt và vuông góc với $d$. Đường thẳng $d'$ có phương trình là

Ⓐ $\dfrac{x+1}{-2}=\dfrac{y}{-5}=\dfrac{z+1}{1}$.
Ⓑ $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y}{5}=\dfrac{z+1}{1}$.
Ⓒ $\dfrac{x+1}{-2}=\dfrac{y}{5}=\dfrac{z+1}{1}$.
Ⓓ $\dfrac{x+1}{-2}=\dfrac{y}{5}=\dfrac{z+1}{-1}$.

**CÂU 17.** Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, đường vuông góc chung của hai đường thẳng $d_1\colon \dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-3}{3}=\dfrac{z+4}{-5}$ và $d_2\colon \dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-4}{-2}=\dfrac{z-4}{-1}$ có phương trình

Ⓐ $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y+2}{3}=\dfrac{z-3}{4}$.
Ⓑ $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z-3}{-1}$.
Ⓒ $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z-3}{2}$.
Ⓓ $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{1}$.

**CÂU 18.** Cho hai đường thẳng $(d_1)\colon \begin{cases}x=2+t\\y=1+t\\z=1+t\end{cases}$ và $(d_2)\colon \dfrac{x}{1}=\dfrac{y-7}{-3}=\dfrac{z}{-1}$. Đường thẳng $(\Delta)$ là đường vuông góc chung của $(d_1)$ và $(d_2)$. Phương trình nào sau đây là phương trình của $(\Delta)$?

Ⓐ $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z+2}{-2}$.
Ⓑ $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-1}{-2}$.

QUICK NOTE

Ⓒ $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-4}{1}=\dfrac{z+1}{-2}$.
Ⓓ $\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y+2}{-1}=\dfrac{z+3}{-2}$.

**CÂU 19.** Trong KG $Oxyz$, gọi $(\alpha)$ là mặt phẳng chứa đường thẳng $(d)\colon \dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z}{2}$ và vuông góc với mặt phẳng $(\beta)\colon x+y-2z+1=0$. Hỏi giao tuyến của $(\alpha)$ và $(\beta)$ đi qua điểm nào?

Ⓐ $(0;1;3)$. Ⓑ $(2;3;3)$. Ⓒ $(5;6;8)$. Ⓓ $(1;-2;0)$.

**CÂU 20.** Trong KG $Oxyz$ cho điểm $A(1;2;3)$ và đường thẳng $d\colon \dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z+7}{-2}$. Đường thẳng đi qua $A$, vuông góc với $d$ và cắt trục $Ox$ có phương trình là

Ⓐ $\begin{cases}x=-1+2t\\y=-2t\\z=t\end{cases}$. Ⓑ $\begin{cases}x=1+t\\y=2+2t\\z=3+3t\end{cases}$. Ⓒ $\begin{cases}x=-1+2t\\y=2t\\z=3t\end{cases}$. Ⓓ $\begin{cases}x=1+t\\y=2+2t\\z=3+2t\end{cases}$.

**CÂU 21.** Trong KG $Oxyz$, cho điểm $A(1;0;2)$ và đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+1}{2}$. Đường thẳng $\Delta$ đi qua $A$, vuông góc và cắt $d$ có phương trình là

Ⓐ $\Delta\colon \dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-1}{-1}$.
Ⓑ $\Delta\colon \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-2}{1}$.
Ⓒ $\Delta\colon \dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-1}{1}$.
Ⓓ $\Delta\colon \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{-3}=\dfrac{z-2}{1}$.

**CÂU 22.** Trong KG $Oxyz$, cho điểm $M(-1;1;3)$ và hai đường thẳng $\Delta\colon \dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+3}{2}=\dfrac{z-1}{1}$, $\Delta'\colon \dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z}{-2}$. Phương trình nào dưới đây là PTĐT đi qua $M$, vuông góc với $\Delta$ và $\Delta'$?

Ⓐ $\begin{cases}x=-1-t\\y=1+t\\z=1+3t\end{cases}$. Ⓑ $\begin{cases}x=-t\\y=1+t\\z=3+t\end{cases}$. Ⓒ $\begin{cases}x=-1-t\\y=1-t\\z=3+t\end{cases}$. Ⓓ $\begin{cases}x=-1-t\\y=1+t\\z=3+t\end{cases}$.

**CÂU 23.** Trong KG $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1\colon \begin{cases}x=1+3t\\y=-2+t\\z=2\end{cases}$, $d_2\colon \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{-1}=\dfrac{z}{2}$ và mặt phẳng $(P)\colon 2x+2y-3z=0$. Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt phẳng đi qua giao điểm của $d_1$ và $(P)$, đồng thời vuông góc với $d_2$?

Ⓐ $2x-y+2z+13=0$.
Ⓑ $2x+y+2z-22=0$.
Ⓒ $2x-y+2z-13=0$.
Ⓓ $2x-y+2z+22=0$.

**CÂU 24.** Trong KG $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;2;1)$, $B\left(-\dfrac{8}{3};\dfrac{4}{3};\dfrac{8}{3}\right)$. Đường thẳng qua tâm đường tròn nội tiếp tam giác $OAB$ và vuông góc với mặt phẳng $OAB$ có phương trình là

Ⓐ $\dfrac{x+\frac{2}{9}}{1}=\dfrac{y-\frac{2}{9}}{-2}=\dfrac{z+\frac{5}{9}}{2}$.
Ⓑ $\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-8}{-2}=\dfrac{z-4}{2}$.
Ⓒ $\dfrac{x+\frac{1}{3}}{1}=\dfrac{y-\frac{5}{3}}{-2}=\dfrac{z-\frac{11}{6}}{2}$.
Ⓓ $\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-3}{-2}=\dfrac{z+1}{2}$.

**CÂU 25.** Trong KG $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x}{2}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z-2}{-3}$ và mặt phẳng $(P)\colon x-y+2z-6=0$. Đường thẳng nằm trong $(P)$ cắt và vuông góc với $d$ có phương trình là

Ⓐ $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+2}{7}=\dfrac{z+5}{3}$.
Ⓑ $\dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y-2}{7}=\dfrac{z-5}{3}$.
Ⓒ $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-4}{7}=\dfrac{z+1}{3}$.
Ⓓ $\dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y+4}{7}=\dfrac{z-1}{3}$.

**CÂU 26.** Trong KG $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1\colon \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z}{1}$ và $d_2\colon \begin{cases}x=-1+t\\y=-1\\z=-t\end{cases}$ và mặt phẳng $(P)\colon x+y+z-1=0$. Đường thẳng vuông góc với $(P)$ cắt $d_1$ và $d_2$ có phương trình là

Ⓐ $\dfrac{x+\frac{13}{5}}{1}=\dfrac{y-\frac{9}{5}}{1}=\dfrac{z-\frac{4}{5}}{1}$.
Ⓑ $\dfrac{x-\frac{1}{5}}{1}=\dfrac{y+\frac{3}{5}}{1}=\dfrac{z+\frac{2}{5}}{1}$.

QUICK NOTE

(C) $\dfrac{x-\frac{7}{5}}{1}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-\frac{2}{5}}{1}$.  (D) $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{1}$.

**CÂU 27.** Trong KG $Oxyz$, cho điểm $M(1;0;1)$ và đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-3}{3}$. Đường thẳng đi qua $M$, vuông góc với $d$ và cắt $Oz$ có phương trình là

(A) $\begin{cases} x=1-3t \\ y=0 \\ z=1+t \end{cases}$.  (B) $\begin{cases} x=1-3t \\ y=0 \\ z=1-t \end{cases}$.  (C) $\begin{cases} x=1-3t \\ y=t \\ z=1+t \end{cases}$.  (D) $\begin{cases} x=1+3t \\ y=0 \\ z=1+t \end{cases}$.

**CÂU 28.** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon 2x+y-2z+9=0$ và đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y+3}{2}=\dfrac{z-3}{1}$. PTTS của đường thẳng $\Delta$ đi qua $A(0;-1;4)$, vuông góc với $d$ và nằm trong $(P)$ là

(A) $\Delta\colon \begin{cases} x=5t \\ y=-1+t \\ z=4+5t \end{cases}$.  (B) $\Delta\colon \begin{cases} x=2t \\ y=t \\ z=4-2t \end{cases}$.

(C) $\Delta\colon \begin{cases} x=t \\ y=-1 \\ z=4+t \end{cases}$.  (D) $\Delta\colon \begin{cases} x=-t \\ y=-1+2t \\ z=4+t \end{cases}$.

**CÂU 29.** Trong KG $Oxyz$, cho hai đường thẳng $\Delta_1\colon \dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z-1}{1}$ và $\Delta_2\colon \dfrac{x+2}{-4}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z+2}{-1}$. Đường thẳng chứa đoạn vuông góc chung của $\Delta_1$ và $\Delta_2$ đi qua điểm nào sau đây?

(A) $M(0;-2;-5)$.  (B) $N(1;-1;-4)$.  (C) $P(2;0;1)$.  (D) $Q(3;1;-4)$.

**CÂU 30.** Trong KG $Oxyz$ cho hai đường thẳng $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-4}{1}=\dfrac{z}{-2}$ và $\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z+2}{-1}$. Gọi $M$ là trung điểm đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng trên. Tính đoạn $OM$.

(A) $OM=\dfrac{\sqrt{14}}{2}$.  (B) $OM=\sqrt{5}$.  (C) $OM=2\sqrt{35}$.  (D) $OM=\sqrt{35}$.

**CÂU 31.** Trong KG $Oxyz$, gọi $d$ là đường thẳng qua $A(1;0;2)$, cắt và vuông góc với đường thẳng $d_1\colon \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-5}{-2}$. Điểm nào dưới đây thuộc $d$?

(A) $P(2;-1;1)$.  (B) $Q(0;-1;1)$.  (C) $N(0;-1;2)$.  (D) $M(-1;-1;1)$.

**CÂU 32.** Trong KG $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;-1)$, đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-2}{-1}$ và mặt phẳng $(P)\colon x+y+2z+1=0$. Điểm $B$ thuộc mặt phẳng $(P)$ thỏa mãn đường thẳng $AB$ vuông góc và cắt đường thẳng $d$. Tọa độ điểm $B$ là

(A) $(6;-7;0)$.  (B) $(3;-2;-1)$.  (C) $(-3;8;-3)$.  (D) $(0;3;-2)$.

**CÂU 33.** Trong KG $Oxyz$, cho $(P)\colon x-2y+z=0$ và đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+2}{-1}$. Đường thẳng $d$ cắt $(P)$ tại điểm $A$. Điểm $M(a;b;c)$ thuộc đường thẳng $d$ và có hoành độ dương sao cho $AM=\sqrt{6}$. Khi đó tổng $S=2016a+b-c$ là

(A) 2018.  (B) 2019.  (C) 2017.  (D) 2020.

**CÂU 34.** Trong KG $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1\colon \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z}{2}$; $d_2\colon \dfrac{x}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z}{1}$. Đường thẳng $d$ đi qua $A(5;-3;5)$ lần lượt cắt $d_1$ và $d_2$ tại $B$ và $C$. Độ dài $BC$ là

(A) $\sqrt{19}$.  (B) 19.  (C) $3\sqrt{2}$.  (D) $2\sqrt{5}$.

**CÂU 35.** Trong KG $Oxyz$, cho điểm $M(3;3;-2)$ và hai đường thẳng $d_1\colon \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z}{1}$; $d_2\colon \dfrac{x+1}{-1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-2}{4}$. Đường thẳng $d$ đi qua $M$ cắt $d_1$, $d_2$ lần lượt tại $A$ và $B$. Độ dài đoạn thẳng $AB$ bằng

(A) 3.  (B) $\sqrt{6}$.  (C) 4.  (D) 2.

QUICK NOTE

**CÂU 36.** Cho ba điểm $A(1;1;1)$, $B(0;0;2)$, $C(2;3;-2)$ và đường thẳng $\Delta\colon \begin{cases} x = 2+t \\ y = 1-t \\ z = t. \end{cases}$

Biết điểm $M(a;b;c)$ với $a>0$ thuộc mặt phẳng $(ABC)$ sao cho $AM \perp \Delta$ và $AM = \sqrt{14}$. Tính giá trị của biểu thức $T = a+b+c$.

Ⓐ $-1$. Ⓑ $5$. Ⓒ $7$. Ⓓ $-6$.

**CÂU 37.** Trong KG $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;-1)$, đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z-2}{-1}$ và mặt phẳng $(P): x+y+2z+1=0$. Điểm $B$ thuộc mặt phẳng $(P)$ thỏa mãn đường thẳng $AB$ vuông góc và cắt đường thẳng $d$. Tọa độ điểm $B$ là

Ⓐ $(3;-2;-1)$. Ⓑ $(-3;8;-3)$. Ⓒ $(0;3;-2)$. Ⓓ $(6;-7;0)$.

**CÂU 38.** Trong KG $Oxyz$, cho đường thẳng $d_1: \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-2}{-2} = \dfrac{z-3}{1}$ và điểm $A(1;0;-1)$. Gọi $d_2$ là đường thẳng đi qua điểm $A$ và có vectơ chỉ phương $\vec{v} = (a;1;2)$. Giá trị của $a$ sao cho đường thẳng $d_1$ cắt đường thẳng $d_2$ là

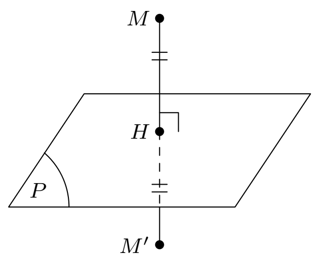
Ⓐ $a=-1$. Ⓑ $a=2$. Ⓒ $a=0$. Ⓓ $a=1$.

## 7 PTĐT liên quan điểm đối xứng và hình chiếu

**1. Tìm hình chiếu $H$ của điểm $M$ lên mặt phẳng** $(P)\colon ax+by+cz+d=0$

Viết PTĐT $MH$ qua $M$ và vuông góc với $(P)$, khi đó: $H = d \cap (P)$ thỏa

$$\begin{cases} x = x_0 + a_1 t \\ y = y_0 + a_2 t \\ z = z_0 + a_3 t \\ ax+by+cz+d=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = ? \\ y = ? \Rightarrow H \\ z = ? \end{cases}$$

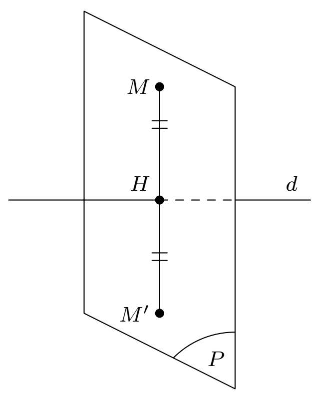



**Lưu ý:** Để tìm điểm đối xứng $M'$ của điểm $M$ qua $(P) \Rightarrow H$ là trung điểm của $MM'$.

**2. Tìm hình chiếu $H$ của điểm $M$ lên đường thẳng $d$**

Viết phương trình mặt phẳng $(P)$ qua $M$ và vuông góc với $d$, khi đó $H = d \cap (P)$ thỏa

$$\begin{cases} x = x_0 + a_1 t \\ y = y_0 + a_2 t \\ z = z_0 + a_3 t \\ ax+by+cz+d=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = ? \\ y = ? \Rightarrow H \\ z = ? \end{cases}$$




**Lưu ý:** Để tìm điểm đối xứng $M'$ của điểm $M$ qua $d \Rightarrow H$ là trung điểm của $MM'$.

QUICK NOTE

**CÂU 1.** Trong KG $Oxyz$, khoảng cách từ điểm $M\left(2;-4;-1\right)$ tới đường thẳng $\Delta\colon \begin{cases} x=t \\ y=2-t \\ z=3+2t \end{cases}$ bằng

Ⓐ $\sqrt{14}$. Ⓑ $\sqrt{6}$. Ⓒ $2\sqrt{14}$. Ⓓ $2\sqrt{6}$.

**CÂU 2.** Trong KG $Oxyz$, tọa độ hình chiếu vuông góc của $M\left(1;0;1\right)$ lên đường thẳng $(\Delta):\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{3}$ là

Ⓐ $(2;4;6)$. Ⓑ $\left(1;\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{3}\right)$. Ⓒ $(0;0;0)$. Ⓓ $\left(\dfrac{2}{7};\dfrac{4}{7};\dfrac{6}{7}\right)$.

**CÂU 3.** Trong KG $Oxyz$, cho điểm $M(-4;0;0)$ và đường thẳng $\Delta\colon \begin{cases} x=1-t \\ y=-2+3t \\ z=-2t \end{cases}$. Gọi $H(a;b;c)$ là hình chiếu của $M$ lên $\Delta$. Tính $a+b+c$.

Ⓐ $5$. Ⓑ $-1$. Ⓒ $-3$. Ⓓ $7$.

**CÂU 4.** Trong KG $Oxyz$, tọa độ hình chiếu vuông góc của điểm $A\left(3;2;-1\right)$ lên mặt phẳng $(\alpha):x+y+z=0$ là

Ⓐ $(-2;1;1)$. Ⓑ $\left(\dfrac{5}{3};\dfrac{2}{3};-\dfrac{7}{3}\right)$. Ⓒ $(1;1;-2)$. Ⓓ $\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{4};\dfrac{1}{4}\right)$.

**CÂU 5.** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, hình chiếu của điểm $M\left(-1;0;3\right)$ theo phương vectơ $\vec{v}=(1;-2;1)$ trên mặt phẳng $(P):x-y+z+2=0$ có tọa độ là

Ⓐ $(2;-2;-2)$. Ⓑ $(-1;0;1)$. Ⓒ $(-2;2;2)$. Ⓓ $(1;0;-1)$.

**CÂU 6.** Trong KG $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):6x-2y+z-35=0$ và điểm $A\left(-1;3;6\right)$. Gọi $A'$ là điểm đối xứng với $A$ qua $(P)$, tính $OA'$.

Ⓐ $OA'=5\sqrt{3}$. Ⓑ $OA'=\sqrt{46}$. Ⓒ $OA'=\sqrt{186}$. Ⓓ $OA'=3\sqrt{26}$.

**CÂU 7.** Trong KG $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-2}{-1}$ và mặt phẳng $(P)\colon 2x+y+2z-1=0$. Gọi $d'$ là hình chiếu của đường thẳng $d$ lên mặt phẳng $(P)$, véc-tơ chỉ phương của đường thẳng $d'$ là

Ⓐ $\vec{u}_3=(5;-6;-13)$. Ⓑ $\vec{u}_2=(5;-4;-3)$.

Ⓒ $\vec{u}_4=(5;16;13)$. Ⓓ $\vec{u}_1=(5;16;-13)$.

**CÂU 8.** Trong KG $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha)\colon 2x+y+z-3=0$ và đường thẳng $d\colon \dfrac{x+4}{3}=\dfrac{y-3}{-6}=\dfrac{z-2}{-1}$. Viết PTĐT $d'$ đối xứng với đường thẳng $d$ qua mặt phẳng $(\alpha)$.

Ⓐ $\dfrac{x}{11}=\dfrac{y+5}{-17}=\dfrac{z-4}{-2}$. Ⓑ $\dfrac{x}{11}=\dfrac{y-5}{-17}=\dfrac{z+4}{-2}$.

Ⓒ $\dfrac{x}{11}=\dfrac{y-5}{-17}=\dfrac{z-4}{-2}$. Ⓓ $\dfrac{x}{11}=\dfrac{y-5}{-17}=\dfrac{z-4}{2}$.

**CÂU 9.** Trong KG $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+5}{-1}=\dfrac{z-3}{4}$. Phương trình nào dưới đây là phương trình hình chiếu vuông góc của $d$ trên mặt phẳng $x+3=0$?

Ⓐ $\begin{cases} x=-3 \\ y=-5+2t \\ z=3-t \end{cases}$. Ⓑ $\begin{cases} x=-3 \\ y=-6-t \\ z=7+4t \end{cases}$. Ⓒ $\begin{cases} x=-3 \\ y=-5-t \\ z=-3+4t \end{cases}$. Ⓓ $\begin{cases} x=-3 \\ y=-5+t \\ z=3+4t \end{cases}$.

**CÂU 10.** Trong KG $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon x+y+z-3=0$ và đường thẳng $d\colon \dfrac{x}{1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-2}{-1}$. Hình chiếu vuông góc của $d$ trên $(P)$ có phương trình là

Ⓐ $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{4}=\dfrac{z-1}{-5}$. Ⓑ $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{4}=\dfrac{z+5}{1}$.

Ⓒ $\dfrac{x+1}{-1}=\dfrac{y+1}{-4}=\dfrac{z+1}{5}$. Ⓓ $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z-1}{-1}$.

**CÂU 11.** Trong KG $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon x+y-z-1=0$ và đường thẳng $d\colon \dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y-4}{-2}=\dfrac{z+1}{1}$. Viết PTĐT $d'$ là hình chiếu vuông góc của $d$ lên $(P)$.

QUICK NOTE

Ⓐ $d'\colon \dfrac{x+2}{7}=\dfrac{y}{-5}=\dfrac{z+1}{2}$. Ⓑ $d'\colon \dfrac{x-2}{7}=\dfrac{y}{-5}=\dfrac{z-1}{2}$.
Ⓒ $d'\colon \dfrac{x+2}{7}=\dfrac{y}{5}=\dfrac{z+1}{2}$. Ⓓ $d'\colon \dfrac{x-2}{7}=\dfrac{y}{5}=\dfrac{z-1}{2}$.

**CÂU 12.** Trong KG $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon x+y-z-1=0$ và đường thẳng $d\colon \dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y-4}{-2}=\dfrac{z+1}{1}$. Viết PTĐT $d'$ là hình chiếu vuông góc của $d$ trên $(P)$.

Ⓐ $d'\colon \dfrac{x+2}{7}=\dfrac{y}{-5}=\dfrac{z+1}{2}$. Ⓑ $d'\colon \dfrac{x-2}{7}=\dfrac{y}{-5}=\dfrac{z-1}{2}$.
Ⓒ $d'\colon \dfrac{x+2}{7}=\dfrac{y}{5}=\dfrac{z+1}{2}$. Ⓓ $d'\colon \dfrac{x-2}{7}=\dfrac{y}{5}=\dfrac{z-1}{2}$.

**CÂU 13.** Trong KG $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha)\colon x+y-z+6=0$ và đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+4}{3}=\dfrac{z}{5}$. Hình chiếu vuông góc của $d$ trên $(\alpha)$ có phương trình là

Ⓐ $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y+4}{3}=\dfrac{z-1}{5}$. Ⓑ $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y+5}{3}=\dfrac{z-1}{5}$.
Ⓒ $\dfrac{x+5}{2}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z-1}{5}$. Ⓓ $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y-5}{3}=\dfrac{z-1}{5}$.

**CÂU 14.** Trong KG $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon x+y+z-3=0$ và đường thẳng $d\colon \dfrac{x}{1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-2}{-1}$. Hình chiếu của $d$ trên $(P)$ có phương trình là đường thẳng $d'$. Trong các điểm sau điểm nào thuộc đường thẳng $d'$?

Ⓐ $M(2;5;-4)$. Ⓑ $P(1;3;-1)$. Ⓒ $N(1;-1;3)$. Ⓓ $Q(2;7;-6)$.

**CÂU 15.** Trong KG $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z+1}{3}$ và mặt phẳng $(P)\colon x+y+z-3=0$. Đường thẳng $d'$ là hình chiếu của $d$ theo phương $Ox$ lên $(P)$, $d'$ nhận $\vec{u}=(a;b;2019)$ làm một vectơ chỉ phương. Xác định tổng $a+b$.

Ⓐ 2019. Ⓑ $-2019$. Ⓒ 2018. Ⓓ $-2020$.

**CÂU 16.** Trong KG $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d\colon \begin{cases} x=-2\\ y=t\\ z=2+2t\end{cases}$, $(t\in\mathbb{R})$, $\Delta\colon \dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-4}{1}$ và mặt phẳng $(P)\colon x+y-z+2=0$. Gọi $d'$ và $\Delta'$ lần lượt là hình chiếu của $d$ và $\Delta$ lên mặt phẳng $(P)$. Gọi $M(a;b;c)$ là giao điểm của hai đường thẳng $d'$ và $\Delta'$. Biểu thức $a+b\cdot c$ bằng

Ⓐ 4. Ⓑ 5. Ⓒ 3. Ⓓ 6.

**CÂU 17.** Trong KG $Oxyz$, cho điểm $A(1;1;1)$ và đường thẳng $d\colon \begin{cases} x=1+t\\ y=1+t\\ z=t\end{cases}$. Tìm tọa độ điểm $H$ là hình chiếu của $A$ lên đường thẳng $\Delta$.

Ⓐ $H\left(\dfrac{4}{3};\dfrac{4}{3};\dfrac{1}{3}\right)$. Ⓑ $H(1;1;1)$. Ⓒ $H(0;0;-1)$. Ⓓ $H(1;1;0)$.

**CÂU 18.** Trong KG $Oxyz$, cho điểm $A(1;1;1)$ và đường thẳng $(d)\colon \begin{cases} x=6-4t\\ y=-2-t\\ z=-1+2t\end{cases}$. Tìm tọa độ hình chiếu $A'$ của $A$ trên $(d)$.

Ⓐ $A'(2;3;1)$. Ⓑ $A'(-2;3;1)$. Ⓒ $A'(2;-3;1)$. Ⓓ $A'(2;-3;-1)$.

**CÂU 19.** Trong KG $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y+3}{2}=\dfrac{z+2}{2}$ và điểm $A(3;2;0)$. Điểm đối xứng của điểm $A$ qua đường thẳng $d$ có tọa độ là

Ⓐ $(-1;0;4)$. Ⓑ $(7;1;-1)$. Ⓒ $(2;1;-2)$. Ⓓ $(0;2;-5)$.

**CÂU 20.** Trong KG $Oxyz$, xác định tọa độ điểm $M'$ là hình chiếu vuông góc của điểm $M(2;3;1)$ lên mặt phẳng $(\alpha)\colon x-2y+z=0$.

Ⓐ $M'\left(2;\dfrac{5}{2};3\right)$. Ⓑ $M'(1;3;5)$. Ⓒ $M'\left(\dfrac{5}{2};2;\dfrac{3}{2}\right)$. Ⓓ $M'(3;1;2)$.

QUICK NOTE

**CÂU 21.** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, điểm $M'$ đối xứng với điểm $M(1;2;4)$ qua mặt phẳng $(\alpha)\colon 2x+y+2z-3=0$ có tọa độ là

Ⓐ $(-3;0;0)$. Ⓑ $(-1;1;2)$. Ⓒ $(-1;-2;-4)$. Ⓓ $(2;1;2)$.

**CÂU 22.** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon x+y+z-3=0$ và đường thẳng $d\colon \dfrac{x}{1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-2}{-1}$. Đường thẳng $d'$ đối xứng với $d$ qua mặt phẳng $(P)$ có phương trình là

Ⓐ $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z-1}{7}$. Ⓑ $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-1}{7}$.

Ⓒ $\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z+1}{7}$. Ⓓ $\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z+1}{7}$.

**CÂU 23.** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon x+y+z-3=0$ và đường thẳng $d\colon \dfrac{x}{1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-2}{-1}$. Hình chiếu vuông góc của $d$ trên $(P)$ có phương trình là

Ⓐ $\dfrac{x+1}{-1}=\dfrac{y+1}{-4}=\dfrac{z+1}{5}$. Ⓑ $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z-1}{-1}$.

Ⓒ $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{4}=\dfrac{z-1}{-5}$. Ⓓ $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+4}{1}=\dfrac{z+5}{1}$.

**CÂU 24.** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta$ có phương trình là $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z+2}{3}$. Biết điểm $M(a;b;c)$ thuộc $\Delta$ và $M$ có tung độ âm và cách mặt phẳng $(Oyz)$ một khoảng bằng 2. Xác định giá trị $T=a+b+c$.

Ⓐ $T=-1$. Ⓑ $T=11$. Ⓒ $T=-13$. Ⓓ $T=1$.

**CÂU 25.** Trong KG $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;-1;2)$, $B(-1;2;3)$ và đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z-1}{2}$. Tìm điểm $M(a;b;c)$ thuộc $d$ sao cho $MA^2+MB^2=28$, biết $c<0$.

Ⓐ $M\left(\dfrac{1}{6};\dfrac{7}{6};-\dfrac{2}{3}\right)$. Ⓑ $M\left(-\dfrac{1}{6};-\dfrac{7}{6};-\dfrac{2}{3}\right)$.

Ⓒ $M(-1;0;-3)$. Ⓓ $M(2;3;3)$.

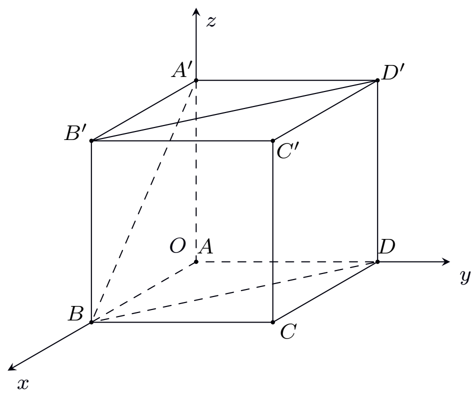
## 8 Ứng dụng của đường thẳng trong không gian

**Phần I. Mỗi câu hỏi học sinh chọn một trong bốn phương án A, B, C, D.**

**CÂU 1.**
Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng $a$, gọi $\alpha$ là góc giữa đường thẳng $A'B$ và mặt phẳng $(BB'D'D)$. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ, tính $\sin\alpha$.

Ⓐ $\dfrac{\sqrt{3}}{5}$. Ⓑ $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Ⓒ $\dfrac{1}{2}$. Ⓓ $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

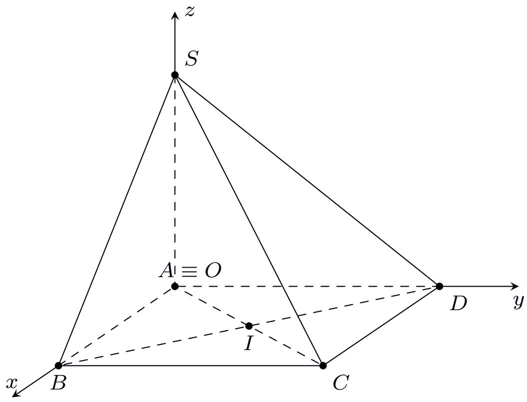



**CÂU 2.**

QUICK NOTE

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm $I$ có độ dài đường chéo bằng $a\sqrt{2}$ và $SA$ vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi $\alpha$ là góc giữa hai mặt phẳng $(SBD)$ và $(ABCD)$. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ. Nếu $\tan\alpha = \sqrt{2}$ thì góc giữa hai mặt phẳng $(SAC)$ và $(SBC)$ bằng

**A** $30°$. **B** $60°$. **C** $45°$. **D** $90°$.




**CÂU 3.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $a$, cạnh bên $SA = 2a$ và vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi $M$ là trung điểm cạnh $SD$. Tính tan của góc tạo bởi hai mặt phẳng $(AMC)$ và $(SBC)$.

**A** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **B** $\dfrac{2\sqrt{3}}{2}$. **C** $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$. **D** $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

**CÂU 4.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình vuông cạnh $a$, $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a$. Gọi $E$ và $F$ lần lượt là trung điểm của $SB$ và $SD$. Tính cô-sin của góc hợp bởi hai mặt phẳng $(AEF)$ và $(ABC)$.

**A** $\dfrac{1}{2}$. **B** $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **C** $\sqrt{3}$. **D** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

**CÂU 5.** Cho hình chóp $O.ABC$ có ba cạnh $OA$, $OB$, $OC$ đôi một vuông góc và $OA = OB = OC = a$. Gọi $M$ là trung điểm cạnh $AB$. Góc tạo bởi hai véc-tơ $\overrightarrow{BC}$ và $\overrightarrow{OM}$ bằng

**A** $135°$. **B** $150°$. **C** $120°$. **D** $60°$.

**CÂU 6.** Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có $AB = a$, $SA = a\sqrt{2}$. Gọi $G$ là trọng tâm tam giác $SCD$. Góc giữa đường thẳng $BG$ với đường thẳng $SA$ bằng

**A** $\arccos\dfrac{\sqrt{3}}{5}$. **B** $\arccos\dfrac{\sqrt{5}}{5}$. **C** $\arccos\dfrac{\sqrt{5}}{3}$. **D** $\arccos\dfrac{\sqrt{15}}{5}$.

**CÂU 7.** Cho hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình thoi, tam giác $ABD$ đều. Gọi $M, N$ lần lượt là trung điểm của $BC$ và $C'D'$, biết rằng $MN \perp B'D$. Gọi $\alpha$ là góc tạo bởi đường thẳng $MN$ và mặt đáy $(ABCD)$, khi đó $\cos\alpha$ bằng

**A** $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$. **B** $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **C** $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$. **D** $\cos\alpha = \dfrac{1}{2}$.

**CÂU 8.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $a$, mặt bên $(SAB)$ là tam giác đều và vuông góc với $(ABCD)$. Tính $\cos\varphi$ với $\varphi$ là góc tạp bởi $(SAC)$ và $(SCD)$.

**A** $\dfrac{\sqrt{3}}{7}$. **B** $\dfrac{\sqrt{6}}{7}$. **C** $\dfrac{5}{7}$. **D** $\dfrac{\sqrt{2}}{7}$.

**CÂU 9.** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh $a$. Góc giữa hai mặt phẳng $(A'B'CD)$ và $(ACC'A')$ bằng

**A** $60°$. **B** $30°$. **C** $45°$. **D** $75°$.

**CÂU 10.** Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $a$, tâm $O$. Gọi $M$ và $N$ lần lượt là trung điểm của hai cạnh $SA$ và $BC$, biết $MN = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$. Khi đó giá trị sin của góc giữa đường thẳng $MN$ và mặt phẳng $(SBD)$ bằng

**A** $\dfrac{\sqrt{2}}{5}$. **B** $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **C** $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$. **D** $\sqrt{3}$.

**CÂU 11.** Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có $A'.ABC$ là tứ diện đều cạnh $a$. Gọi $M, N$ lần lượt là trung điểm của $AA'$ và $BB'$. Tính tan của góc giữa hai mặt phẳng $(ABC)$ và $(CMN)$.

**A** $\dfrac{\sqrt{2}}{5}$. **B** $\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$. **C** $\dfrac{2\sqrt{2}}{5}$. **D** $\dfrac{4\sqrt{2}}{13}$.

**CÂU 12.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$ cạnh bên $SA = a$ và vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi $M$ là trung điểm cạnh $SD$. Tan của góc tạo bởi hai mặt phẳng $(AMC)$ và $(SBC)$ bằng

**A** $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$. **B** $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$. **C** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **D** $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

**QUICK NOTE**

**CÂU 13.** Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy là hình thang vuông tại $A$ và $B$, $AB = BC = a$, $AD = 2a$. Biết $SA \perp (ABCD)$, $SA = a$. Gọi $M$ và $N$ lần lượt là trung điểm của $SB$ và $CD$. Tính sin góc giữa đường thẳng $MN$ và mặt phẳng $(SAC)$.

**A** $\dfrac{3\sqrt{5}}{10}$. **B** $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$. **C** $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$. **D** $\dfrac{\sqrt{55}}{10}$.

**CÂU 14.** Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $a$ tâm $O$. Gọi $M$ và $N$ lần lượt là trung điểm của $SA$ và $BC$. Biết rằng góc giữa $MN$ và $(ABCD)$ bằng $60°$. Côsin của góc giữa đường thẳng $MN$ và mặt phẳng $(SBD)$ bằng

**A** $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$. **B** $\dfrac{\sqrt{41}}{41}$. **C** $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$. **D** $\dfrac{2\sqrt{41}}{41}$.

**CÂU 15.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy hình vuông. Cho tam giác $SAB$ vuông tại $S$ và góc $SBA$ bằng $30°$. Mặt phẳng $(SAB)$ vuông góc mặt phẳng đáy. Gọi $M$, $N$ là trung điểm $AB$, $BC$. Tìm cô-sin góc tạo bởi hai đường thẳng $(SM, DN)$.

**A** $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$. **B** $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$. **C** $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. **D** $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

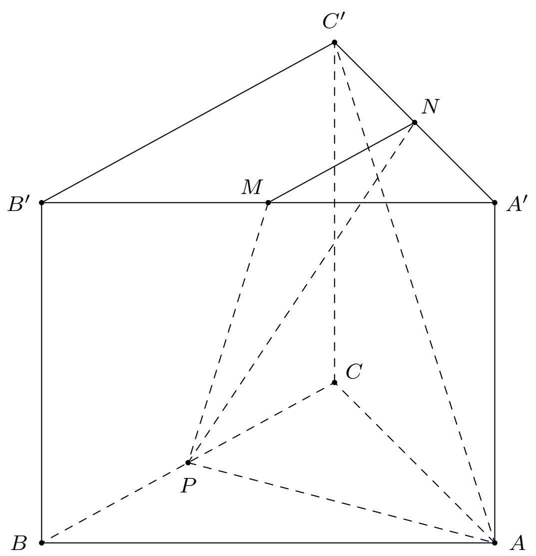
**CÂU 16.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $a$ cạnh bên $SA$ vuông góc với mặt phẳng đáy, $SA = a\sqrt{2}$. Gọi $M$, $N$ lần lượt là hình chiếu vuông góc của điểm $A$ trên các cạnh $SB$, $SD$. Góc giữa mặt phẳng $(AMN)$ và đường thẳng $SB$ bằng

**A** $45°$. **B** $90°$. **C** $120°$. **D** $60°$.

**CÂU 17.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a$, $BC = a\sqrt{3}$, $SA = a$ và $SA$ vuông góc với đáy $ABCD$. Tính $\sin\alpha$ với $\alpha$ là góc tạo bởi giữa đường thẳng $BD$ và mặt phẳng $(SBC)$.

**A** $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{7}}{8}$. **B** $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **C** $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$. **D** $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{5}$.

**CÂU 18.** Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = 2\sqrt{3}$ và $AA' = 2$. Gọi $M$, $N$, $P$ lần lượt là trung điểm các cạnh $A'B'$, $A'C'$ và $BC$ (tham khảo hình vẽ bên). Cô-sin của góc tạo bởi hai mặt phẳng $(AB'C')$ và $(MNP)$ bằng




**A** $\dfrac{17\sqrt{13}}{65}$. **B** $\dfrac{18\sqrt{13}}{65}$. **C** $\dfrac{6\sqrt{13}}{65}$. **D** $\dfrac{\sqrt{13}}{65}$.

**CÂU 19.** Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $AB = AC = a$, góc $\widehat{BAC} = 120°$, $AA' = a$. Gọi $M$, $N$ lần lượt là trung điểm của $B'C'$ và $CC'$. Số đo góc giữa mặt phẳng $(AMN)$ và mặt phẳng $(ABC)$ bằng

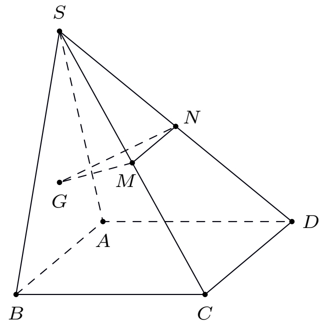
**A** $60°$. **B** $30°$. **C** $\arcsin\dfrac{\sqrt{3}}{4}$. **D** $\arccos\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

**CÂU 20.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $a$ cạnh bên $SA = 2a$ và vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi $M$ là trung điểm cạnh $SD$. Tan của góc tạo bởi hai mặt phẳng $(AMC)$ và $(SBC)$ bằng

**A** $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$. **B** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **C** $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$. **D** $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

QUICK NOTE

**CÂU 21.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $a$ mặt bên $SAB$ là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi $G$ là trọng tâm của tam giác $SAB$ và $M, N$ lần lượt là trung điểm của $SC, SD$ (tham khảo hình vẽ bên). Tính cô-sin của góc giữa hai mặt phẳng $(GMN)$ và $(ABCD)$.



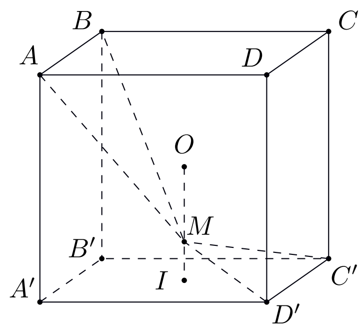

**A** $\dfrac{2\sqrt{39}}{39}$. **B** $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$. **C** $\dfrac{2\sqrt{39}}{13}$. **D** $\dfrac{\sqrt{13}}{13}$.

**CÂU 22.** Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy $ABC$ là tam giác cân với $AB = AC = a$ và góc $\widehat{BAC} = 120^\circ$ và cạnh bên $BB' = a$. Gọi $I$ là trung điểm của $CC'$. Tính cô-sin góc giữa hai mặt phẳng $(ABC)$ và $(AB'I)$.

**A** $\dfrac{\sqrt{3}}{10}$. **B** $\dfrac{\sqrt{30}}{10}$. **C** $\dfrac{\sqrt{30}}{30}$. **D** $\dfrac{\sqrt{10}}{30}$.

**Phần III. Học sinh điền kết quả vào ô trống.**

**CÂU 23.** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có tâm $O$. Gọi $I$ là tâm của hình vuông $A'B'C'D'$ và điểm $M$ thuộc đoạn $OI$ sao cho $MO = 2MI$ (tham khảo hình vẽ).




Tính sin của góc tạo bởi hai mặt phẳng $(MC'D')$ và $(MAB)$ (kết quả viết ở dạng thập phân làm tròn đến hàng phần trăm).

KQ: | | | | |

**CÂU 24.** Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy $ABC$ là tam giác vuông tại $A$, $AB = a$, $AC = a\sqrt{3}$. Hình chiếu vuông góc của $A'$ lên mặt phẳng $(ABC)$ là trung điểm $H$ của $BC$, $A'H = a\sqrt{5}$. Gọi $\varphi$ là góc giữa hai đường thẳng $A'B$ và $B'C$. Tính $\cos\varphi$. Kết quả viết ở dạng thập phân làm tròn đến hàng phần trăm.

KQ: | | | | |

**CÂU 25.** Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$, có $AB = a$, $AD = a\sqrt{2}$, góc giữa $A'C$ và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng $30^\circ$. Gọi $H$ là hình chiếu vuông góc của $A$ trên $A'B$ và $K$ là hình chiếu vuông góc của $A$ trên $A'D$. Góc giữa hai mặt phẳng $(AHK)$ và $(ABB'A')$ bằng bao nhiêu độ?

KQ: | | | | |

**CÂU 26.** Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $AB = AC = a$, $BAC = 120^\circ$. Gọi $M$, $N$ lần lượt là trung điểm của $B'C'$ và $CC'$. Biết thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{4}$. Gọi $\alpha$ là góc giữa mặt phẳng $(AMN)$ và mặt phẳng $(ABC)$, tính $\cos\alpha$. Kết quả viết ở dạng thập phân làm tròn đến hàng phần trăm.

KQ: | | | | |

**CÂU 27.** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy $ABC$ là tam giác vuông cân tại $B$, $AC = 2a$, tam giác $SAB$ và tam giác $SCB$ lần lượt vuông tại $A$, $C$. Khoảng cách từ $S$ đến mặt phẳng $(ABC)$ bằng $2a$. Tính côsin của góc giữa hai mặt phẳng $(SAB)$ và $(SCB)$. Kết quả viết ở dạng thập phân làm tròn đến hàng phần trăm.

KQ: | | | | |

**CÂU 28.** Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác cân đỉnh $A$. Biết $BC = a\sqrt{3}$ và $\widehat{ABC} = 30^\circ$, cạnh bên $AA' = a$. Gọi $M$ là điểm thỏa mãn $2\overrightarrow{CM} = 3\overrightarrow{CC'}$. Gọi $\alpha$ là góc tạo bởi hai mặt phẳng $(ABC)$ và $(AB'M)$, khi đó tính $\sin\alpha$. Kết quả viết ở dạng thập phân làm tròn đến hàng phần trăm.

KQ: | | | | |

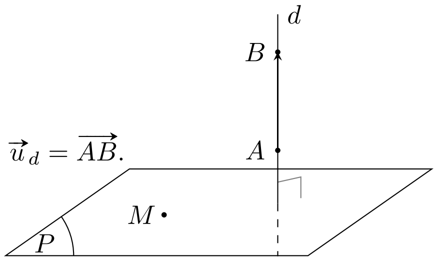
**CÂU 29.** Cho khối tứ diện $ABCD$ có $BC = 3$, $CD = 4$, $\widehat{ABC} = \widehat{ADC} = \widehat{BCD} = 90^\circ$. Góc giữa đường thẳng $AD$ và $BC$ bằng $60^\circ$. Tính côsin góc giữa hai mặt phẳng $(ABC)$ và $(ACD)$. Kết quả viết ở dạng thập phân làm tròn đến hàng phần trăm.

KQ: | | | | |

## 9 Viết PTMP biết vị trí tương đối với đường thẳng

- Viết phương trình mặt phẳng $(P)$ qua $M$ và vuông góc với đường thẳng $d$ (hoặc vuông góc với đường thẳng $AB$)

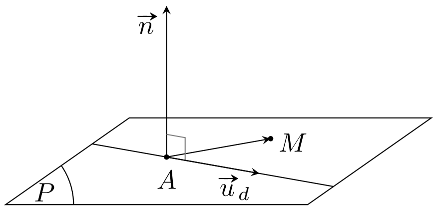
**Phương pháp**: $(P)\colon \begin{cases} \text{Qua } M(x_0; y_0; z_0) \\ \text{Vectơ pháp tuyến } \vec{n}_{(P)} = \vec{u}_d = \overrightarrow{AB}. \end{cases}$




- Viết phương trình mặt phẳng qua $M$ và chứa đường thẳng $d$ với $M \notin d$.

**Phương pháp**:

- Chọn điểm $A \in d$ và một vectơ chỉ phương $\vec{u_d}$. Tính $\left[\overrightarrow{AM}, \vec{u_d}\right]$.
- Phương trình mặt phẳng $(P)\colon \begin{cases} \text{Đi qua } M \\ \text{có vectơ pháp tuyến } \vec{n} = \left[\overrightarrow{AM}, \vec{u_d}\right]. \end{cases}$




**Phần I. Mỗi câu hỏi học sinh chọn một trong bốn phương án A, B, C, D.**

**CÂU 1.** Trong KG $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-2}{-2} = \dfrac{z+2}{1}$. Mặt phẳng nào sau đây vuông góc với đường thẳng $d$?

**A** $(T)\colon x + y + 2z + 1 = 0$.
**B** $(P)\colon x - 2y + z + 1 = 0$.
**C** $(Q)\colon x - 2y - z + 1 = 0$.
**D** $(R)\colon x + y + z + 1 = 0$.

**CÂU 2.** Trong KG $Oxyz$, phương trình mặt phẳng đi qua gốc tọa độ và vuông góc với đường thẳng $d\colon \dfrac{x}{1} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z}{1}$ là

**A** $x + y + z + 1 = 0$.
**B** $x - y - z = 1$.
**C** $x + y + z = 1$.
**D** $x + y + z = 0$.

**CÂU 3.** Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho điểm $A(0;0;3)$ và đường thẳng $d$ có phương trình $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = t \end{cases}$. Phương trình mặt phẳng đi qua điểm $A$ và vuông góc với đường thẳng $d$ là

**A** $2x - y + z - 3 = 0$.
**B** $2x - y + 2z - 6 = 0$.
**C** $2x - y + z + 3 = 0$.
**D** $2x - y - z + 3 = 0$.

**CÂU 4.** Trong KG $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta$ có phương trình $\dfrac{x-10}{5} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z+2}{1}$. Xét mặt phẳng $(P)\colon 10x + 2y + mz + 11 = 0$, với $m$ là tham số thực. Tìm tất cả các giá trị của $m$ để mặt phẳng $(P)$ vuông góc với đường thẳng $\Delta$.

**A** $m = 2$.
**B** $m = -52$.
**C** $m = 52$.
**D** $m = -2$.

**CÂU 5.** Trong KG $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta\colon \dfrac{x+1}{-1} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z}{-3}$ và mặt phẳng $(P)\colon x -$

QUICK NOTE

QUICK NOTE

$y + z - 3 = 0$. Phương trình mặt phẳng $(\alpha)$ đi qua $O$, song song với $\Delta$ và vuông góc với mặt phẳng $(P)$ là

Ⓐ $x + 2y + z = 0$. Ⓑ $x - 2y + z = 0$.
Ⓒ $x + 2y + z - 4 = 0$. Ⓓ $x - 2y + z + 4 = 0$.

**CÂU 6.** Trong KG $Oxyz$, cho đường thẳng $d_1$ có véc-tơ chỉ phương $\vec{u} = (1; 0; -2)$ và đi qua điểm $M(1; -3; 2)$, $d_2\colon \dfrac{x+3}{1} = \dfrac{y-1}{-2} = \dfrac{z+4}{3}$. Phương trình mặt phẳng $(P)$ cách đều hai đường thẳng $d_1$ và $d_2$ có dạng $ax + by + cz + 11 = 0$. Giá trị $a + 2b + 3c$ bằng

Ⓐ $-42$. Ⓑ $-32$. Ⓒ $11$. Ⓓ $20$.

**CÂU 7.** Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng chứa hai đường thẳng cắt nhau $\dfrac{x-1}{-2} = \dfrac{y+2}{1} = \dfrac{z-4}{3}$ và $\dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y}{-1} = \dfrac{z+2}{3}$ có phương trình là

Ⓐ $-2x - y + 9z - 36 = 0$. Ⓑ $2x - y - z = 0$.
Ⓒ $6x + 9y + z + 8 = 0$. Ⓓ $6x + 9y + z - 8 = 0$.

**CÂU 8.** Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(0; 1; 0)$, mặt phẳng $(Q)\colon x + y - 4z - 6 = 0$ và đường thẳng $d\colon \begin{cases} x = 3 \\ y = 3 + t \\ z = 5 - t \end{cases}$. Phương trình mặt phẳng $(P)$ qua $A$, song song với $d$ và vuông góc với $(Q)$ là

Ⓐ $3x + y + z - 1 = 0$. Ⓑ $3x - y - z + 1 = 0$.
Ⓒ $x + 3y + z - 3 = 0$. Ⓓ $x + y + z - 1 = 0$.

**CÂU 9.** Trong KG $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1\colon \dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y-6}{-2} = \dfrac{z+2}{1}$ và $d_2\colon \dfrac{x-4}{1} = \dfrac{y+1}{3} = \dfrac{z+2}{-2}$ chéo nhau. Phương trình mặt phẳng $(P)$ chứa $d_1$ và $(P)$ song song với đường thẳng $d_2$ là

Ⓐ $(P)\colon x + 5y + 8z - 16 = 0$. Ⓑ $(P)\colon x + 5y + 8z + 16 = 0$.
Ⓒ $(P)\colon x + 4y + 6z - 12 = 0$. Ⓓ $(P)\colon 2x + y - 6 = 0$.

**CÂU 10.** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ , cho hai điểm $A(1; 1; 0)$, $B(0; -1; 2)$. Biết rằng có hai mặt phẳng cùng đi qua hai điểm $A$, $O$ và cùng cách $B$ một khoảng bằng $\sqrt{3}$. Véc-tơ nào trong các véc-tơ dưới đây là một véc-tơ pháp tuyến của một trong hai mặt phẳng đó?

Ⓐ $\vec{n} = (1; -1; -1)$. Ⓑ $\vec{n} = (1; -1; -3)$. Ⓒ $\vec{n} = (1; -1; 5)$. Ⓓ $\vec{n} = (1; -1; -5)$.

**CÂU 11.** Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1; 0; 0)$ và đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+2}{1} = \dfrac{z-1}{2}$. Phương trình mặt phẳng chứa điểm $A$ và đường thẳng $d$ là

Ⓐ $(P)\colon 5x + 2y + 4z - 5 = 0$. Ⓑ $(P)\colon 2x + 1y + 2z - 1 = 0$.
Ⓒ $(P)\colon 5x - 2y - 4z - 5 = 0$. Ⓓ $(P)\colon 2x + 1y + 2z - 2 = 0$.

**CÂU 12.** Trong KG $Oxyz$ , cho hai đường thẳng $d_1\colon \dfrac{x-2}{-1} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z}{1}$ và $d_2\colon \dfrac{x}{-2} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z-2}{1}$. Phương trình mặt phẳng $(P)$ song song và cách đều hai đường thẳng $d_1$, $d_2$ là

Ⓐ $2y - 2z + 1 = 0$. Ⓑ $2y - 2z - 1 = 0$. Ⓒ $2x - 2z + 1 = 0$. Ⓓ $2x - 2z - 1 = 0$.

**Phần III. Học sinh điền kết quả vào ô trống.**

**CÂU 13.** Trong KG $Oxyz$, cho điểm $M(2; -2; 3)$ và đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y+2}{2} = \dfrac{z-3}{-1}$. Phương trình mặt phẳng đi qua điểm $M$ và vuông góc với đường thẳng $d$ có dạng $3x + by + cz + d = 0$. Tính $b^2 + cd$.

KQ: | | | | |

**CÂU 14.** Trong KG $Oxyz$, phương trình mặt phẳng đi qua điểm $A(0; 1; 0)$ và chứa đường thẳng $\Delta\colon \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z-3}{1}$ có dạng $3x + ay + bz - c$. Tính $a + b + c$.

KQ: | | | | |

QUICK NOTE

**CÂU 15.** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(-1;3;2)$ và đường thẳng $d$ có phương trình $\begin{cases} x = 1-4t \\ y = t \\ z = 2+t \end{cases}$. Phương trình mặt phẳng $(P)$ chứa điểm $A$ và vuông góc đường thẳng $d$ có dạng $ax+by+10z+c=0$. Tính $c$.

KQ: | | | | |

**CÂU 16.** Trong KG $Oxyz$, phương trình mặt phẳng $(P)$ song song và cách đều hai đường thẳng $d_1\colon \dfrac{x-2}{-1} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z}{1}$ và $d_2\colon \dfrac{x}{2} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z-2}{-1}$ có dạng $ax+by+cz+1=0$. Tính $a^2+b^2+c^2$.

KQ: | | | | |

**CÂU 17.** Trong KG $Oxyz$, phương trình mặt phẳng chứa hai đường thẳng $d\colon \begin{cases} x = t+2 \\ y = 3t-1 \\ z = 2t+1 \end{cases}$ và $\Delta\colon \begin{cases} x = m+3 \\ y = 3m-2 \\ z = 2m+1 \end{cases}$ có dạng $x+ay+bz+c=0$. Tính $P = a+2b+3c$.

KQ: | | | | |

**CÂU 18.** Trong KG $Oxyz$, cho hai đường thẳng cắt nhau

$$d\colon \frac{x-1}{-2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-4}{3} \text{ và } d'\colon \begin{cases} x = -1+t \\ y = -t \\ z = -2+3t. \end{cases}$$

Phương trình mặt phẳng $(P)$ chứa $d$ và $d'$ có dạng $ax+by+cz+8=0$. Tính $T = a-b+3c$.

KQ: | | | | |

**CÂU 19.** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(3;1;7)$, $B(5;5;1)$ và mặt phẳng $(P)\colon 2x-y-z+4=0$. Điểm $M$ thuộc $(P)$ sao cho $MA = MB = \sqrt{35}$. Biết $M$ có hoành độ nguyên, tính $OM$.(Kết quả làm tròn đến hàng phần mười).

KQ: | | | | |

**CÂU 20.** Trong KG $Oxyz$, cho ba đường thẳng $d\colon \dfrac{x}{1} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z+1}{-2}$, $\Delta_1\colon \dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z-1}{1}$, $\Delta_2\colon \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z}{1}$. Đường thẳng $\Delta$ vuông góc với $d$ đồng thời cắt $\Delta_1$, $\Delta_2$ tương ứng tại $H$, $K$ sao cho độ dài $HK$ nhỏ nhất. Biết rằng $\Delta$ có một véc-tơ chỉ phương $\vec{u} = (h;k;1)$. Tính giá trị $h-k$.

KQ: | | | | |

**CÂU 21.** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(3;1;2)$, $B(-3;-1;0)$ và mặt phẳng $(P)\colon x+y+3z-14=0$. Điểm $M$ thuộc mặt phẳng $(P)$ sao cho $\Delta MAB$ vuông tại $M$. Tính khoảng cách từ điểm $M$ đến mặt phẳng $(Oxy)$.

KQ: | | | | |

**CÂU 22.** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x-5}{2} = \dfrac{y+7}{2} = \dfrac{z-12}{-1}$ và mặt phẳng $(\alpha)\colon x+2y-3z-3=0$. Gọi $M$ là giao điểm của $d$ và $(\alpha)$, $A$ thuộc $d$ sao cho $AM = \sqrt{14}$. Tính khoảng cách từ $A$ đến mặt phẳng $(\alpha)$.

KQ: | | | | |

## 10 Lập PTMP liên quan đến góc

**Phần I. Mỗi câu hỏi học sinh chọn một trong bốn phương án A, B, C, D.**

QUICK NOTE

**CÂU 1.** Trong KG $Oxyz$, cho điểm $A(-2;0;1)$, đường thẳng $d$ qua điểm $A$ và tạo với trục $Oy$ góc $45°$. PTĐT $d$ là

(A) $\left[\begin{array}{l}\dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y}{\sqrt{5}}=\dfrac{z-1}{-1}\\ \dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y}{-\sqrt{5}}=\dfrac{z-1}{-1}\end{array}\right.$.

(B) $\left[\begin{array}{l}\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y}{\sqrt{5}}=\dfrac{z+1}{-1}\\ \dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y}{-\sqrt{5}}=\dfrac{z+1}{-1}\end{array}\right.$.

(C) $\left[\begin{array}{l}\dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y}{\sqrt{5}}=\dfrac{z-1}{-1}\\ \dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y}{\sqrt{5}}=\dfrac{z+1}{-1}\end{array}\right.$.

(D) $\left[\begin{array}{l}\dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y}{-\sqrt{5}}=\dfrac{z-1}{-1}\\ \dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y}{\sqrt{5}}=\dfrac{z+1}{-1}\end{array}\right.$.

**CÂU 2.** Trong KG $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon 4x-7y+z+25=0$ và đường thẳng $d_1\colon \dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z-1}{-1}$. Gọi $d_1'$ là hình chiếu vuông góc của $d_1$ lên mặt phẳng $(P)$. Đường thẳng $d_2$ nằm trong $(P)$ tạo với $d_1$, $d_1'$ các góc bằng nhau, $d_2$ có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}_2=(a;b;c)$. Tính $\dfrac{a+2b}{c}$.

(A) $\dfrac{a+2b}{c}=\dfrac{2}{3}$. (B) $\dfrac{a+2b}{c}=0$. (C) $\dfrac{a+2b}{c}=\dfrac{1}{3}$. (D) $\dfrac{a+2b}{c}=1$.

**CÂU 3.** Trong KG $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1\colon \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{-2}=\dfrac{z+1}{-1}$, $d_2\colon \begin{cases}x=t\\y=0\\z=-t\end{cases}$.
Mặt phẳng $(P)$ qua $d_1$ tạo với $d_2$ một góc $45°$ và nhận véc-tơ $\vec{n}=(1;b;c)$ làm một véc-tơ pháp tuyến. Xác định tích $b\cdot c$.

(A) $-4$ hoặc 0. (B) 4 hoặc 0. (C) $-4$. (D) 4.

**CÂU 4.** Trong KG $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \begin{cases}x=0\\y=3-t\\z=t\end{cases}$. Gọi $(P)$ là mặt phẳng chứa đường thẳng $d$ và tạo với mặt phẳng $(Oxy)$ một góc $45°$. Điểm nào sau đây thuộc mặt phẳng $(P)$?

(A) $M(3;2;1)$. (B) $N(3;2;-1)$. (C) $P(3;-1;2)$. (D) $M(3;-1;-2)$.

**CÂU 5.** Trong KG $Oxyz$, cho tam giác $ABC$ vuông tại $A$, $\widehat{ABC}=30°$, $BC=3\sqrt{2}$, đường thẳng $BC$ có phương trình $\dfrac{x-4}{1}=\dfrac{y-5}{1}=\dfrac{z+7}{-4}$, đường thẳng $AB$ nằm trong mặt phẳng $(\alpha)\colon x+z-3=0$. Biết đỉnh $C$ có cao độ âm. Tính hoành độ đỉnh $A$.

(A) $\dfrac{3}{2}$. (B) 3. (C) $\dfrac{9}{2}$. (D) $\dfrac{5}{2}$.

**CÂU 6.** Trong KG $Oxyz$, mặt phẳng nào dưới đây đi qua $A(2;1;-1)$ tạo với trục $Oz$ một góc $30°$?

(A) $\sqrt{2}(x-2)+(y-1)-(z-2)-3=0$. (B) $(x-2)+\sqrt{2}(y-1)-(z+1)-2=0$.
(C) $2(x-2)+(y-1)-(z-2)=0$. (D) $2(x-2)+(y-1)-(z-1)-2=0$.

**CÂU 7.** Cho mặt phẳng $(\alpha)\colon 3x-2y+2z-5=0$ và điểm $A(1;-2;2)$. Có bao nhiêu mặt phẳng đi qua $A$ và tạo với mặt phẳng $(\alpha)$ một góc $45°$.

(A) Vô số. (B) 1. (C) 2. (D) 4.

**Phần III. Học sinh điền kết quả vào ô trống.**

**CÂU 8.** Số các mặt phẳng $(\alpha)$ chứa đường thẳng $d\colon \dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z}{-3}$ và tạo với mặt phẳng $(P)\colon 2x-z+1=0$ góc $45°$ bằng

KQ: | | | | |

**CÂU 9.** Trong KG $Oxyz$, cho điểm $A(3;-1;0)$ và đường thẳng $d\colon \dfrac{x-2}{-1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-1}{1}$. Phương trình mặt phẳng $(\alpha)$ chứa $d$ sao cho khoảng cách từ $A$ đến $(\alpha)$ lớn nhất có dạng $ax+by+cz=0$. Khi đó $\dfrac{a}{b}$ bằng

KQ: | | | | |

**CÂU 10.** Trong KG $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P)\colon x+2y-2z+1=0$, $(Q)\colon x+my+(m-1)z+2024=0$. Khi hai mặt phẳng $(P)$, $(Q)$ tạo với nhau một góc nhỏ nhất thì giá trị của $m$ bằng bao nhiêu?

KQ: | | | |

**CÂU 11.** Cho hai điểm $A(1;-1;1); B(2;-2;4)$. Có bao nhiêu mặt phẳng chứa $A$, $B$ và tạo với mặt phẳng $(\alpha)\colon x-2y+z-7=0$ một góc $60^\circ$?

KQ: | | | |

**CÂU 12.** Trong KG $Oxyz$, cho hai điểm $A(3;0;1)$, $B(6;-2;1)$. Phương trình mặt phẳng $(P)$ đi qua $A$, $B$ và tạo với mặt phẳng $(Oyz)$ một góc $\alpha$ thỏa mãn $\cos\alpha=\dfrac{2}{7}$ có dạng $ax+by+cz+d=0$ với $d\neq 0$. Khi đó $\dfrac{d}{a}$ bằng

KQ: | | | |

**CÂU 13.** Trong KG $Oxyz$, biết mặt phẳng $(P)\colon ax+by+cz+d=0$ với $c<0$ đi qua hai điểm $A(0;1;0)$, $B(1;0;0)$ và tạo với mặt phẳng $(yOz)$ một góc $60^\circ$. Tính giá trị $a+b+c$. (Kết quả lấy đến hàng phần chục)

KQ: | | | |

## 11 Khoảng cách

a) Khoảng cách từ một điểm đến đường thẳng

- Khoảng cách từ điểm $M$ đến một đường thẳng $d$ qua điểm $M_0$ có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}_d$ được xác định bởi công thức $\mathrm{d}(M,d)=\dfrac{\left|\left[\overrightarrow{M_0M},\vec{u}_d\right]\right|}{|\vec{u}_d|}$.
- Khoảng cách giữa hai đường thẳng song song là khoảng cách từ một điểm thuộc đường thẳng này đến đường thẳng kia.

b) Khoảng cách giữa hai đường thẳng

- Khoảng cách giữa hai đường thẳng song song là khoảng cách từ một điểm thuộc đường thẳng này đến đường thẳng kia.
- Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau: $d$ đi qua điểm $M$ và có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}$ và $d'$ đi qua điểm $M'$ và có véc-tơ chỉ phương $\vec{u'}$ là $\mathrm{d}\left(d,d'\right)=\dfrac{\left|\left[\vec{u},\vec{u'}\right]\cdot\overrightarrow{M'M}\right|}{\left|\left[\vec{u},\vec{u'}\right]\right|}$.

**Phần I. Mỗi câu hỏi học sinh chọn một trong bốn phương án A, B, C, D.**

**CÂU 1.** Trong KG $Oxyz$, khoảng cách từ điểm $M(2;-4;-1)$ tới đường thẳng $\Delta\colon\begin{cases}x=t\\y=2-t\\z=3+2t\end{cases}$ bằng

**A** $\sqrt{14}$. **B** $\sqrt{6}$. **C** $2\sqrt{14}$. **D** $2\sqrt{6}$.

**CÂU 2.** Trong KG $Oxyz$, cho đường thẳng d: $\dfrac{x-3}{-2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z-1}{1}$ và điểm $A(2;-1;0)$. Khoảng cách từ điểm $A$ đến đường thẳng $d$ bằng

**A** $\sqrt{7}$. **B** $\dfrac{\sqrt{7}}{2}$. **C** $\dfrac{\sqrt{21}}{3}$. **D** $\dfrac{\sqrt{7}}{3}$.

**CÂU 3.** Khoảng cách từ điểm $H(1;0;3)$ đến đường thẳng $\mathrm{d}_1\colon\begin{cases}x=1+t\\y=2t\\z=3+t\end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$ và mặt phẳng $(P)\colon z-3=0$ lần lượt là $\mathrm{d}(H,d_1)$ và $\mathrm{d}(H,(P))$. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau:

**A** $\mathrm{d}(H,d_1)>\mathrm{d}(H,(P))$. **B** $\mathrm{d}(H,(P))>\mathrm{d}(H,d_1)$.

**C** $\mathrm{d}(H,d_1)=6\cdot\mathrm{d}(H,(P))$. **D** $\mathrm{d}(H,(P))=1$.

QUICK NOTE

QUICK NOTE

**CÂU 4.** Tính khoảng cách giữa mặt phẳng $(\alpha)\colon 2x-y-2z-4=0$ và đường thẳng d: $\begin{cases} x=1+t \\ y=2+4t \\ z=-t \end{cases}$.

Ⓐ $\dfrac{1}{3}$. Ⓑ $\dfrac{4}{3}$. Ⓒ $0$. Ⓓ $2$.

**CÂU 5.** Trong KG $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon 2x-2y-z+1=0$ và đường thẳng $\Delta\colon \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z-1}{2}$. Tính khoảng cách d giữa $\Delta$ và $(P)$.

Ⓐ $d=2$. Ⓑ $d=\dfrac{5}{3}$. Ⓒ $d=\dfrac{2}{3}$. Ⓓ $d=\dfrac{1}{3}$.

**CÂU 6.** Trong KG $Oxyz$, khoảng cách giữa đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{-2}$ và mặt phẳng $(P): x+y+z+2=0$ bằng

Ⓐ $2\sqrt{3}$. Ⓑ $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. Ⓒ $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$. Ⓓ $\sqrt{3}$.

**CÂU 7.** Trong KG $Oxyz$, khoảng cách giữa đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z-2}{1}$ và mặt phẳng $(P)\colon x-2y+2z+4=0$ bằng

Ⓐ 1. Ⓑ 0. Ⓒ 3. Ⓓ 2.

**CÂU 8.** Trong KG $Oxyz$, cho điểm $A(3;-2;4)$ và đường thẳng $d\colon \dfrac{x-5}{2}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z-2}{-2}$. Điểm $M$ thuộc đường thẳng $d$ sao cho $M$ cách $A$ một khoảng bằng $\sqrt{17}$. Tọa độ điểm $M$ là

Ⓐ $(5;1;2)$ và $(6;9;2)$. Ⓑ $(5;1;2)$ và $(-1;-8;-4)$.

Ⓒ $(5;-1;2)$ và $(1;-5;6)$. Ⓓ $(5;1;2)$ và $(1;-5;6)$.

**CÂU 9.** Trong KG $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1\colon \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{3}$ và $d_2\colon \begin{cases} x=1+t \\ y=2+t \\ z=m \end{cases}$. Gọi $S$ là tập tất cả các số $m$ sao cho $d_1$ và $d_2$ chéo nhau và khoảng cách giữa chúng bằng $\dfrac{5}{\sqrt{19}}$. Tính tổng các phần tử của $S$.

Ⓐ $-11$. Ⓑ $12$. Ⓒ $-12$. Ⓓ $11$.

**CÂU 10.** Trong KG $Oxyz$, tính khoảng cách giữa hai đường thẳng $d_1\colon \dfrac{x}{1}=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z-2}{1}$ và $d_2\colon \dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z-2}{1}$.

Ⓐ $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$. Ⓑ $\dfrac{12}{5}$. Ⓒ $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$. Ⓓ $3$.

**CÂU 11.** Trong KG $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d\colon \begin{cases} x=1+t \\ y=-3-t \\ z=2+2t \end{cases}$ và $d'\colon \dfrac{x}{3}=\dfrac{y-3}{-1}=\dfrac{z-1}{1}$. Khi đó khoảng cách giữa $d$ và $d'$ bằng

Ⓐ $\dfrac{13\sqrt{30}}{30}$. Ⓑ $\dfrac{\sqrt{30}}{3}$. Ⓒ $\dfrac{9\sqrt{30}}{10}$. Ⓓ $0$.

**CÂU 12.** Trong KG $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1\colon \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{-1}=\dfrac{z}{1}$ và $d_2\colon \begin{cases} x=1+4t \\ y=-1-2t \\ z=2+2t \end{cases}$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng đã cho bằng

Ⓐ $\dfrac{\sqrt{87}}{6}$. Ⓑ $\dfrac{\sqrt{174}}{6}$. Ⓒ $\dfrac{\sqrt{174}}{3}$. Ⓓ $\dfrac{\sqrt{87}}{3}$.

**CÂU 13.** Trong KG $Oxyz$, tính khoảng cách từ giao điểm của hai đường thẳng $d_1$ và $d_2$ tới mặt phẳng $(P)$. Với $d_1\colon \dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z-1}{3}$; $d_2\colon \dfrac{-x+1}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{1}$ và $(P)\colon 2x+4y-4z-3=0$.

Ⓐ $\dfrac{4}{3}$. Ⓑ $\dfrac{7}{6}$. Ⓒ $\dfrac{13}{6}$. Ⓓ $\dfrac{5}{3}$.

QUICK NOTE

**CÂU 14.** Trong KG $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon 2x-y+2z-3=0$ và đường thẳng $\Delta\colon \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{x-1}{-1}$. Khoảng cách giữa đường thẳng $\Delta$ và mặt phẳng $(P)$ bằng

Ⓐ $\dfrac{2}{3}$. Ⓑ $\dfrac{8}{3}$. Ⓒ $\dfrac{2}{9}$. Ⓓ $1$.

**CÂU 15.** Trong KG $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z+1}{-1}$, mặt phẳng $(P)\colon x+y+z+2=0$. Gọi $M$ là giao điểm của $d$ và $(P)$, $\Delta$ là đường thẳng nằm trong mặt phẳng $(P)$ vuông góc với $d$ và cách $M$ một khoảng bằng $\sqrt{42}$. PTĐT $\Delta$ là

Ⓐ $\dfrac{x-5}{2}=\dfrac{y+2}{-3}=\dfrac{z+4}{1}$. Ⓑ $\dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{y+1}{-3}=\dfrac{z+1}{1}$.

Ⓒ $\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y+4}{-3}=\dfrac{z+5}{1}$. Ⓓ $\dfrac{x+3}{2}=\dfrac{y+4}{-3}=\dfrac{z-5}{1}$.

**CÂU 16.** Trong KG $Oxyz$, cho 4 điểm $A(2;0;0)$, $B(0;3;0)$, $C(0;0;6)$ và $D(1;1;1)$. Gọi $\Delta$ là đường thẳng qua $D$ và thỏa mãn tổng khoảng cách từ các điểm $A,B,C$ đến $\Delta$ là lớn nhất. Khi đó $\Delta$ đi qua điểm nào dưới đây?

Ⓐ $(4;3;7)$. Ⓑ $(-1;-2;1)$. Ⓒ $(7;5;3)$. Ⓓ $(3;4;3)$.

**CÂU 17.** Trong KG $Oxyz$, gọi $d$ là đường thẳng đi qua $O$ thuộc mặt phẳng $(Oyz)$ và cách điểm $M(1;-2;1)$ một khoảng nhỏ nhất. Côsin của góc giữa $d$ và trục tung bằng

Ⓐ $\dfrac{2}{5}$. Ⓑ $\dfrac{1}{5}$. Ⓒ $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$. Ⓓ $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$.

**CÂU 18.** Trong KG $Oxyz$, cho điểm $A(2;1;1)$, mặt phẳng $(P)\colon x-z-1=0$ và đường thẳng $d\colon \begin{cases}x=1-t\\y=2\\z=-2+t\end{cases}$. Gọi $d_1;d_2$ là các đường thẳng đi qua $A$, nằm trong $(P)$ và đều có khoảng cách đến đường thẳng $d$ bằng $\sqrt{6}$. Côsin của góc giữa $d_1$ và $d_2$ bằng

Ⓐ $\dfrac{1}{3}$. Ⓑ $\dfrac{2}{3}$. Ⓒ $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. Ⓓ $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$.

**CÂU 19.** Trong KG $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y-3}{3}=\dfrac{z}{2}$, mặt phẳng $(P)\colon x+y-z+3=0$ và điểm $A(1;2;-1)$. Đường thẳng $\Delta$ đi qua $A$, cắt $d$ và song song với mặt phẳng $(P)$. Tính khoảng cách từ gốc tọa độ $O$ đến $\Delta$.

Ⓐ $\sqrt{3}$. Ⓑ $\dfrac{16}{3}$. Ⓒ $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$. Ⓓ $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$.

**CÂU 20.** Trong KG $Oxyz$, đường thẳng $d\colon \begin{cases}x=t\\y=-1+2t\\z=2-t\end{cases}, t\in\mathbb{R}$ cắt mặt phẳng $(P)\colon x+y+z-3=0$ tại điểm $I$. Gọi $\Delta$ là đường thẳng nằm trong mặt phẳng $(P)$ sao cho $\Delta\perp d$ và khoảng cách từ điểm $I$ đến đường thẳng $\Delta$ bằng $\sqrt{42}$. Tìm tọa độ hình chiếu $M(a;b;c)$ (với $a+b>c$) của điểm $I$ trên đường thẳng $\Delta$.

Ⓐ $M(2;5;-4)$. Ⓑ $M(6;-3;0)$. Ⓒ $M(5;2;-4)$. Ⓓ $M(-3;6;0)$.

**CÂU 21.** Trong KG $Oxyz$, cho hai điểm $A(3;3;1)$, $B(0;2;1)$ và mặt phẳng $(P)\colon x+y+z-7=0$. Đường thẳng $d$ nằm trong $(P)$ sao cho mọi điểm của $d$ cách đều hai điểm $A,B$ có phương trình là

Ⓐ $\begin{cases}x=2t\\y=7-3t\\z=t\end{cases}$. Ⓑ $\begin{cases}x=t\\y=7+3t\\z=2t\end{cases}$. Ⓒ $\begin{cases}x=t\\y=7-3t\\z=2t\end{cases}$. Ⓓ $\begin{cases}x=-t\\y=7-3t\\z=4t\end{cases}$.

**CÂU 22.** Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1\colon \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z-1}{2}$ và $d_2\colon \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z+2}{1}$. Mặt phẳng $(P)\colon x+ay+bz+c=0\ (c>0)$ song song với $d_1$, $d_2$ và khoảng cách từ $d_1$ đến $(P)$ bằng hai lần khoảng cách từ $d_2$ đến $(P)$. Giá trị của $a+b+c$ bằng

Ⓐ $14$. Ⓑ $6$. Ⓒ $-4$. Ⓓ $-6$.

## 12 VTTĐ của ĐT và MP

QUICK NOTE

**CÂU 1.** Trong KG $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta : \dfrac{x-2}{-3} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z+1}{2}$. Gọi $M$ là giao điểm của $\Delta$ với mặt phẳng $(P) : x + 2y - 3z + 2 = 0$. Tọa độ điểm $M$ là

(A) $M(2; 0; -1)$. (B) $M(5; -1; -3)$. (C) $M(1; 0; 1)$. (D) $M(-1; 1; 1)$.

**CÂU 2.** Trong KG $Oxyz$, giao điểm của mặt phẳng $(P) : 3x + 5y - z - 2 = 0$ và đường thẳng $\Delta : \dfrac{x-12}{4} = \dfrac{y-9}{3} = \dfrac{z-1}{1}$ là điểm $M(x_0; y_0; z_0)$. Giá trị tổng $x_0 + y_0 + z_0$ bằng

(A) 1. (B) 2. (C) 5. (D) $-2$.

**CÂU 3.** Trong KG $Oxyz$, cho 3 điểm $A(1; 0; 0)$, $B(0; 2; 0)$, $C(0; 0; 3)$ và $d$: $\begin{cases} x = -t \\ y = 2 + t \\ z = 3 + t \end{cases}$. Gọi $M(a; b; c)$ là tọa độ giao điểm của đường thẳng $d$ và mặt phẳng $(ABC)$. Tổng $S = a + b + c$ là

(A) $-7$. (B) 11. (C) 5. (D) 6.

**CÂU 4.** Trong KG $Oxyz$, cho đường thẳng $d : \dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y}{-3} = \dfrac{z-5}{-1}$ và mặt phẳng $(P) : 3x - 3y + 2z + 6 = 0$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

(A) $d$ cắt và không vuông góc với $(P)$. (B) $d$ vuông góc với $(P)$.

(C) $d$ song song với $(P)$. (D) $d$ nằm trong $(P)$.

**CÂU 5.** Trong KG $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P) : 3x + 5y - z - 2 = 0$ và đường thẳng $d : \dfrac{x-12}{4} = \dfrac{y-9}{3} = \dfrac{z-1}{1}$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

(A) $d \subset (Q)$. (B) $d \parallel (Q)$. (C) $d$ cắt $(Q)$. (D) $d \perp (Q)$.

**CÂU 6.** Trong KG $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P) : 3x - 3y + 2z - 5 = 0$ và đường thẳng $d : \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 3 + 4t \\ z = 3t \end{cases}$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

(A) $d \parallel (P)$. (B) $d \subset (P)$. (C) $d$ cắt $(P)$. (D) $d \perp (P)$.

**CÂU 7.** Trong KG $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P) : x + y + z - 4 = 0$ và đường thẳng $d : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + 2t \\ z = 2 - 3t \end{cases}$. Số giao điểm của đường thẳng $d$ và mặt phẳng $(P)$ là

(A) Vô số. (B) 1. (C) Không có. (D) 2.

**CÂU 8.** Trong KG $Oxyz$, tọa độ giao điểm $M$ của đường thẳng $d : \dfrac{x-12}{4} = \dfrac{y-9}{3} = \dfrac{z-1}{1}$ và mặt phẳng $(P) : 3x + 5y - z - 2 = 0$ là

(A) $M(0; 2; 3)$. (B) $M(0; 0; -2)$. (C) $M(0; 0; 2)$. (D) $M(0; -2; -3)$.

**CÂU 9.** Giao điểm của mặt phẳng $(P) : x + y - z - 2 = 0$ và đường thẳng $d : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -t \\ z = 3 + 3t \end{cases}$ là

(A) $(1; 1; 0)$. (B) $(0; 2; 4)$. (C) $(0; 4; 2)$. (D) $(2; 0; 3)$.

**CÂU 10.** Trong không gian$Oxyz$, cho đường thẳng $d : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3 - t \\ z = 1 - t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ và mặt phẳng $(P) : x + 2y - 3z + 2 = 0$. Tìm tọa độ của điểm $A$ là giao điểm của đường thẳng $d$ và mặt phẳng $(P)$.

(A) $A(3; 5; 3)$. (B) $A(1; 3; 1)$. (C) $A(-3; 5; 3)$. (D) $A(1; 2; -3)$.

**CÂU 11.** Trong KG $Oxyz$, giao điểm của mặt phẳng $(P) : 3x + 5y - z - 2 = 0$ và đường thẳng $\Delta : \dfrac{x-12}{4} = \dfrac{y-9}{3} = \dfrac{z-1}{1}$ là điểm $M(x_0; y_0; z_0)$. Giá trị tổng $x_0 + y_0 + z_0$ bằng

(A) 1. (B) 2. (C) 5. (D) $-2$.

QUICK NOTE

**CÂU 12.** Trong KG $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = 4 - 2t \\ y = -3 + t \\ z = 1 - t \end{cases}$, giao điểm của $d$ với mặt phẳng $(Oxy)$ có tọa độ là

Ⓐ $(4; -3; 0)$. Ⓑ $(2; -2; 0)$. Ⓒ $(0; -1; -1)$. Ⓓ $(-2; 0; -2)$.

**CÂU 13.** Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho 3 điểm $A(1; 0; 0)$, $B(0; 2; 0)$, $C(0; 0; 3)$ và đường thẳng $d: \begin{cases} x = -t \\ y = 2 + t \\ z = 3 + t \end{cases}$. Gọi $M(a; b; c)$ là toạ độ giao điểm của đường thẳng $d$ với mặt phẳng $(ABC)$. Tính tổng $S = a + b - c$.

Ⓐ 6. Ⓑ 5. Ⓒ $-7$. Ⓓ 11.

**CÂU 14.** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $M(-4; 5; 2)$ lên mặt phẳng $(P): y + 1 = 0$ là điểm có tọa độ

Ⓐ $(-4; -1; 2)$. Ⓑ $(-4; 1; 2)$. Ⓒ $(0; -1; 0)$. Ⓓ $(0; 1; 0)$.

**CÂU 15.** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \dfrac{x - 12}{4} = \dfrac{y - 9}{3} = \dfrac{z - 1}{1}$ và mặt phẳng $(P): 3x + 5y - z - 2 = 0$. Tìm tọa độ giao điểm của $d$ và $(P)$.

Ⓐ $(1; 0; 1)$. Ⓑ $(0; 0; -2)$. Ⓒ $(1; 1; 6)$. Ⓓ $(12; 9; 1)$.

**CÂU 16.** Trong KG $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \dfrac{x}{-2} = \dfrac{y - 2}{1} = \dfrac{z + 1}{3}$ và mặt phẳng $(P): 11x + my + nz - 16 = 0$. Biết $\Delta \subset (P)$, tính giá trị của $T = m + n$.

Ⓐ $T = 2$. Ⓑ $T = -2$. Ⓒ $T = 14$. Ⓓ $T = -14$.

**CÂU 17.** Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \dfrac{x - 1}{1} = \dfrac{y - 2}{3} = \dfrac{z - 9}{-1}$ và mặt phẳng $(\alpha)$ có phương trình $m^2x - my - 2z + 19 = 0$ với $m$ là tham số. Tập hợp các giá trị $m$ thỏa mãn $d \parallel (\alpha)$ là

Ⓐ $\{1\}$. Ⓑ $\emptyset$. Ⓒ $\{1; 2\}$. Ⓓ $\{2\}$.

**CÂU 18.** Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$, tìm tất cả các giá trị của tham số $m$ để đường thẳng $d: \dfrac{x - 1}{1} = \dfrac{y + 1}{-1} = \dfrac{z - 2}{1}$ song song với mặt phẳng $(P): 2x + y - m^2z + m = 0$

Ⓐ $m = 1$. Ⓑ $m \in \emptyset$. Ⓒ $m \in \{-1; 1\}$. Ⓓ $m = -1$.

**CÂU 19.** Trong KG $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x - 2y + 3z + -4 = 0$ và đường thẳng $d: \dfrac{x - m}{1} = \dfrac{y + 2m}{3} = \dfrac{z}{2}$. Với giá trị nào của $m$ thì giao điểm của đường thẳng $d$ và mặt phẳng $(P)$ thuộc mặt phẳng $(Oyz)$.

Ⓐ $m = \dfrac{4}{5}$. Ⓑ $m = -1$. Ⓒ $m = 1$. Ⓓ $m = \dfrac{12}{17}$.

**CÂU 20.** Trong KG $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x + my - 3z + m - 2 = 0$ và đường thẳng $d: \begin{cases} x = 2 + 4t \\ y = 1 - t \\ z = 1 + 3t \end{cases}$. Với giá trị nào của $m$ thì $d$ cắt $(P)$

Ⓐ $m \neq \dfrac{1}{2}$. Ⓑ $m = -1$. Ⓒ $m = \dfrac{1}{2}$. Ⓓ $m \neq -1$.

**CÂU 21.** Trong không gian $(P)$, cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = 2 - t \\ y = -3 + t \\ z = 1 + t \end{cases}$ và mặt phẳng $(P): m^2x - 2my + (6 - 3m)z - 5 = 0$. Tìm $m$ để $d \parallel (P)$.

Ⓐ $\left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = -6 \end{array}\right.$. Ⓑ $\left[\begin{array}{l} m = -1 \\ m = 6 \end{array}\right.$. Ⓒ $\left[\begin{array}{l} m = -1 \\ m = -6 \end{array}\right.$. Ⓓ $\emptyset$.

**CÂU 22.** Gọi $m, n$ là hai giá trị thực thỏa mãn giao tuyến của hai mặt phẳng $(P_m): mx + 2y + nz + 1 = 0$ và $(Q_m): x - my + nz + 2 = 0$ vuông góc với mặt phẳng $(\alpha): 4x - y - 6z + 3 = 0$.

Ⓐ $m + n = 0$. Ⓑ $m + n = 2$. Ⓒ $m + n = 1$. Ⓓ $m + n = 3$.

QUICK NOTE

# Bài 3. PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU

## 13 XÁC ĐỊNH CÁC YẾU TỐ CƠ BẢN MẶT CẦU

- Phương trình mặt cầu $(S)$ có dạng $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$ thì mặt cầu có tâm $I(a;b;c)$ và có bán kính $R$.
- Phương trình mặt cầu $(S)$ có dạng $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$ với $a^2+b^2+c^2-d>0$ thì để xác định tọa độ tâm $I(a;b;c)$ và bán kính $R$ ta thức hiện như sau:

— Xác định tọa độ tâm $I$: $\begin{cases}-2a=\ldots\\-2b=\ldots\\-2c=\ldots\end{cases}$

— Xác định bán kính: $R=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}$.

**Chú ý:**

- *Có thể xác định tọa độ tâm $I(a;b;c)$ và bán kính $R$ của phương trình mặt cầu $(S)$ có dạng $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$ bằng cách nhóm nhân tử để đưa về dạng $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$.*
- *Để một phương trình là một phương trình mặt cầu, cần thỏa mãn hai điều kiện: Hệ số trước $x^2$, $y^2$, $z^2$ phải bằng 1 và $a^2+b^2+c^2-d>0$.*
- *Nếu $IM=R$ thì $M$ nằm trên mặt cầu.*
- *Nếu $IM<R$ thì $M$ nằm trong mặt cầu.*
- *Nếu $IM>R$ thì $M$ nằm ngoài mặt cầu.*

**Phần I. Mỗi câu hỏi học sinh chọn một trong bốn phương án A, B, C, D.**

**CÂU 1.** Cho điểm $M$ nằm ngoài mặt cầu $S(O;R)$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

(A) $OM<R$. (B) $OM=R$. (C) $OM>R$. (D) $OM\le R$.

**CÂU 2.** Trong KG $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon x^2+(y-2)^2+(z+1)^2=6$. Đường kính của $(S)$ bằng

(A) $\sqrt{6}$. (B) 12. (C) $2\sqrt{6}$. (D) 3.

**CÂU 3.** Mặt cầu $(S)\colon 3x^2+3y^2+3z^2-6x+12y+2=0$ có bán kính bằng

(A) $\dfrac{\sqrt{7}}{3}$. (B) $\dfrac{2\sqrt{7}}{3}$. (C) $\dfrac{\sqrt{21}}{3}$. (D) $\sqrt{\dfrac{13}{3}}$.

**CÂU 4.** Trong KG $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon (x-2)^2+(y+1)^2+(z-3)^2=4$. Tâm của $(S)$ có tọa độ là

(A) $(-2;1;-3)$. (B) $(-4;2;-6)$. (C) $(4;-2;6)$. (D) $(2;-1;3)$.

**CÂU 5.** Trong KG $Oxyz$, mặt cầu $(S)\colon (x+1)^2+(y-2)^2+z^2=9$ có bán kính bằng

(A) 3. (B) 81. (C) 9. (D) 6.

**CÂU 6.** Trong KG $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)$ có tâm $I(1;-4;0)$ và bán kính bằng 3. Phương trình của $(S)$ là

(A) $(x+1)^2+(y-4)^2+z^2=9$. (B) $(x-1)^2+(y+4)^2+z^2=9$.
(C) $(x-1)^2+(y+4)^2+z^2=9$. (D) $(x+1)^2+(y-4)^2+z^2=3$.

**CÂU 7.** Trong KG $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+(z-1)^2=16$. Bán kính của $(S)$ là

(A) 32. (B) 8. (C) 4. (D) 16.

**CÂU 8.** Trong KG $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon (x+1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=9$. Tâm của $(S)$ có tọa độ là

(A) $(-2;-4;6)$. (B) $(2;4;-6)$. (C) $(-1;-2;3)$. (D) $(1;2;-3)$.

**CÂU 9.** Trong KG $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2-8x+10y-6z+49=0$. Tính bán kính $R$ của mặt cầu $(S)$.

**QUICK NOTE**

(A) $R = 1$. (B) $R = 7$. (C) $R = \sqrt{151}$. (D) $R = \sqrt{99}$.

**CÂU 10.** Trong KG $Oxyz$, cho mặt cầu có phương trình $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=4$. Tìm tọa độ tâm $I$ và bán kính $R$ của mặt cầu đó.

(A) $I(-1;2;-3)$; $R=2$. (B) $I(-1;2;-3)$; $R=4$.

(C) $I(1;-2;3)$; $R=2$. (D) $I(1;-2;3)$; $R=4$.

**CÂU 11.** Trong KG $Oxyz$, trong các mặt cầu dưới đây, mặt cầu nào có bán kính $R=2$?

(A) $(S)\colon x^2+y^2+z^2-4x+2y+2z-3=0$.

(B) $(S)\colon x^2+y^2+z^2-4x+2y+2z-10=0$.

(C) $(S)\colon x^2+y^2+z^2-4x+2y+2z+2=0$.

(D) $(S)\colon x^2+y^2+z^2-4x+2y+2z+5=0$.

**CÂU 12.** Cho các phương trình sau

a) $(x-1)^2+y^2+z^2=1$; b) $x^2+(2y-1)^2+z^2=4$;

c) $x^2+y^2+z^2+1=0$; d) $(2x+1)^2+(2y-1)^2+4z^2=16$.

Số phương trình là phương trình mặt cầu là

(A) 4. (B) 3. (C) 2. (D) 1.

**CÂU 13.** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, gọi $I$ là tâm mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+(z-2)^2=4$. Độ dài $\left|\overrightarrow{OI}\right|$ bằng

(A) 2. (B) 4. (C) 1. (D) $\sqrt{2}$.

**CÂU 14.** Trong KG $Oxyz$ có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên $m$ để phương trình $x^2+y^2+z^2+4mx+2my-2mz+9m^2-28=0$ là phương trình mặt cầu?

(A) 7. (B) 8. (C) 9. (D) 6.

**CÂU 15.** Trong KG $Oxyz$, có tất cả bao nhiêu giá nguyên của $m$ để $x^2+y^2+z^2+2(m+2)x-2(m-1)z+3m^2-5=0$ là phương trình một mặt cầu?

(A) 4. (B) 6. (C) 5. (D) 7.

**CÂU 16.** Cho phương trình $x^2+y^2+z^2-4x+2my+3m^2-2m=0$ với $m$ là tham số. Tính tổng tất cả các giá trị nguyên của $m$ để phương trình đã cho là phương trình mặt cầu.

(A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

**Phần II. Trong mỗi ý a), b), c) và d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.**

**CÂU 17.** Trong KG $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+(z+2)^2=9$ có tâm $I$ và bán kính $R$. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

| Mệnh đề | Đ | S |
|---|---|---|
| **a)** Tọa độ tâm mặt cầu $(S)$ là $I(0;0;2)$. | | |
| **b)** Bán kính mặt cầu $(S)$ là $R=9$. | | |
| **c)** Khoảng cách từ tâm mặt cầu đến mặt phẳng $(P)\colon x+y+z=0$ bằng $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$. | | |
| **d)** Diện tích mặt cầu $(S)$ bằng $36\pi$. | | |

**CÂU 18.** Trong KG $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon (x+3)^2+y^2+(z-2)^2=16$ có tâm $I$ và bán kính $R$. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

| Mệnh đề | Đ | S |
|---|---|---|
| **a)** Điểm $M(-1;0;3)$ nằm trong mặt cầu $(S)$. | | |
| **b)** Bán kính mặt cầu $(S)$ là $R=4$. | | |
| **c)** Tọa độ tâm mặt cầu $(S)$ là $I(-3;0;2)$. | | |
| **d)** Thể tích mặt cầu $(S)$ là $V=\dfrac{16384\pi}{3}$. | | |

QUICK NOTE

**CÂU 19.** Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho điểm $M(2;0;2)$ và mặt cầu $(S)\colon x^2+(y+2)^2+(z-2)^2=8$. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

| Mệnh đề | Đ | S |
|---|---|---|
| **a)** Điểm $M(2;0;2)$ thuộc mặt cầu $(S)$. | | |
| **b)** Bán kính mặt cầu $(S)$ là $R=2\sqrt{2}$. | | |
| **c)** Tọa độ tâm mặt cầu $(S)$ là $I(0;-2;2)$. | | |
| **d)** Hình chiếu của tâm mặt cầu lên trục $Ox$ là điểm có tọa độ $(0;0;2)$. | | |

**CÂU 20.** Trong KG $Oxyz$, mặt cầu $(S)\colon (x-1)^2+(y+2)^2+(z-4)^2=20$. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

| Mệnh đề | Đ | S |
|---|---|---|
| **a)** Bán kính mặt cầu $(S)$ là 20. | | |
| **b)** Diện tích mặt cầu $(S)$ là $1600\pi$. | | |
| **c)** Tọa độ tâm mặt cầu $(S)$ là $I(-1;2;-4)$. | | |
| **d)** Điểm đối xứng của tâm mặt cầu $(S)$ qua mặt phẳng $(Oyz)$ là $I(-1;-2;4)$. | | |

**CÂU 21.** Trong KG $Oxyz$, cho các phương trình sau

a) $(S_1)\colon x^2+y^2+z^2+x-2y+4z-3=0$,

b) $(S_2)\colon 2x^2+2y^2+2z^2-x-y-z=0$,

c) $(S_3)\colon 2x^2+2y^2+2z^2+4x+8y+6z+3=0$,

d) $(S_4)\colon x^2+y^2+z^2-2x+4y-4z+10=0$.

Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

| Mệnh đề | Đ | S |
|---|---|---|
| **a)** $(S_1)$ là phương trình của một mặt cầu. | | |
| **b)** $(S_2)$ là phương trình của một mặt cầu. | | |
| **c)** $(S_3)$ không phải là phương trình của một mặt cầu. | | |
| **d)** $(S_4)$ không phải là phương trình của một mặt cầu. | | |

**CÂU 22.** Trong KG $Oxyz$, cho các phương trình sau

a) $(S_1)\colon x^2+y^2+z^2-2x=0$,

b) $(S_2)\colon x^2+y^2-z^2+2x-y+1=0$,

c) $(S_3)\colon 2x^2+2y^2=(x+y)^2-z^2+2x-1$,

d) $(S_4)\colon (x+y)^2=2xy-z^2-1$.

Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

| Mệnh đề | Đ | S |
|---|---|---|
| **a)** $(S_1)$ là phương trình của một mặt cầu. | | |
| **b)** $(S_2)$ là phương trình của một mặt cầu. | | |
| **c)** $(S_3)$ là phương trình của một mặt cầu. | | |
| **d)** $(S_4)$ không phải là phương trình của một mặt cầu. | | |

**CÂU 23.** Trong KG $Oxyz$, cho các phương trình sau

a) $(S_1)\colon x^2+y^2+z^2-2x=0$,

b) $(S_2)\colon 2x^2+2y^2=(x+y)^2-z^2+2x-1$,

c) $(S_3)\colon x^2+y^2+z^2+2x-2y+1=0$,

d) $(S_4)\colon (x+y)^2=2xy-z^2+1-4x$.

QUICK NOTE

Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

| Mệnh đề | Đ | S |
|---|---|---|
| **a)** $(S_1)$ là phương trình của một mặt cầu. | | |
| **b)** $(S_2)$ là phương trình của một mặt cầu. | | |
| **c)** $(S_3)$ là phương trình của một mặt cầu. | | |
| **d)** $(S_4)$ là phương trình của một mặt cầu. | | |

**CÂU 24.** Trong KG $Oxyz$, cho các phương trình sau

a) $(S_1)\colon (x-1)^2+(2y-1)^2+(z-1)^2=6$, b) $(S_2)\colon (x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=6$,

c) $(S_3)\colon (2x-1)^2+(2y-1)^2+(2z+1)^2=6$, d) $(S_4)\colon (x+y)^2=2xy-z^2+3-6x$.

Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

| Mệnh đề | Đ | S |
|---|---|---|
| **a)** $(S_1)$ không phải là phương trình của một mặt cầu. | | |
| **b)** $(S_2)$ không phải là phương trình của một mặt cầu. | | |
| **c)** $(S_3)$ không phải là phương trình của một mặt cầu. | | |
| **d)** $(S_4)$ không phải là phương trình của một mặt cầu. | | |

**CÂU 25.** Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho phương trình $(S)\colon x^2+y^2+z^2-2(m+2)x+4my-2mz+5m^2+9=0$. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

| Mệnh đề | Đ | S |
|---|---|---|
| **a)** Với $m=0$ thì $(S)$ là phương trình của một mặt cầu. | | |
| **b)** Với $m=1$ thì $(S)$ là phương trình của một mặt cầu có tâm $I(3;-2;1)$. | | |
| **c)** Với $m=3$ thì $(S)$ là phương trình của một mặt cầu có bán kính là $R=4$. | | |
| **d)** Với $m<-5$ hoặc $m>1$ thì $(S)$ là phương trình của một mặt cầu. | | |

**Phần III. Học sinh điền kết quả vào ô trống.**

**CÂU 26.** Trong KG $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon (x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=16$. Tọa độ tâm của mặt cầu $(S)$ là $(a;b;c)$. Khi đó $a+b+c$ bằng bao nhiêu?

KQ: | | | | |

**CÂU 27.** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, tất cả các giá trị của $m$ để phương trình $x^2+y^2+z^2-2(m+2)x+4my+19m-6=0$ là phương trình mặt cầu là $S=(-\infty;a)\cup(b;+\infty)$. Giá trị $a+b$ bằng

KQ: | | | | |

**CÂU 28.** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, có bao nhiêu giá trị nguyên của $m$ để phương trình $x^2+y^2+z^2+2x-4y+2(m+1)z+2m^2+6=0$ là phương trình mặt cầu.

KQ: | | | | |

**CÂU 29.** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, có bao nhiêu giá trị nguyên dương của $m$ để phương trình $x^2+y^2+z^2-2(m+2)x+4my-2mz+5m^2+9=0$ không phải là phương trình mặt cầu.

KQ: | | | | |

**CÂU 30.** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, có bao nhiêu giá trị nguyên của $m$ để phương trình $x^2+y^2+z^2-2(3-m)x-2(m+1)y-2mz+2m^2+7=0$ không phải là phương trình mặt cầu.

KQ: | | | | |

QUICK NOTE

**CÂU 31.** Trong KG $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;1)$, $B(3;1;-2)$. Tập hợp điểm $M(x;y;z)$ sao cho thỏa mãn $MA^2+MB^2=30$ là phương trình mặt cầu tâm $I(a;b;c)$. Giá trị $a+b+c$ bằng

KQ: | | | |

**CÂU 32.** Trong KG $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;1)$, $B(3;1;-2)$. Tập hợp điểm $M(x;y;z)$ sao cho thỏa mãn $\dfrac{MB}{MA}=2$ là phương trình mặt cầu tâm $I(a;b;c)$. Giá trị $a+b+c$ gần bằng

KQ: | | | |

**CÂU 33.** Trong KG $Oxyz$, cho hai điểm $A(-1;2;0)$, $B(0;1;-2)$. Tập hợp điểm $M(x;y;z)$ sao cho thỏa mãn $MA=MB$ là mặt phẳng có phương trình $x+ay+bz+c=0$. Giá trị $a+b+c$ bằng

KQ: | | | |

**CÂU 34.** Trong KG $Oxyz$, cho hai điểm $A(-1;0;1)$, $B(1;-1;2)$. Tập hợp điểm $M(x;y;z)$ sao cho thỏa mãn $\widehat{AMB}=90^\circ$ là mặt cầu tâm $I(a;b;c)$ và bán kính $R=\sqrt{d}$. Giá trị $a+b+c+d$ bằng

KQ: | | | |

## 14 LẬP PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU DẠNG CƠ BẢN

Mặt cầu tâm $I(a;b;c)$ và có bán kính $R$ có phương trình

$$(S)\colon (x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2.$$

Phương trình $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$ với $a^2+b^2+c^2-d>0$ là phương trình của mặt cầu tâm $I(a;b;c)$ và bán kính $R=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}$.

**Phần I. Mỗi câu hỏi học sinh chọn một trong bốn phương án A, B, C, D.**

**CÂU 1.** Trong KG $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)$ có tâm $I(-1;3;0)$ và bán kính bằng 2. Phương trình của mặt cầu $(S)$ là

(A) $(x-1)^2+(y+3)^2+z^2=2$.
(B) $(x-1)^2+(y+3)^2+z^2=4$.
(C) $(x+1)^2+(y-3)^2+z^2=4$.
(D) $(x+1)^2+(y-3)^2+z^2=2$.

**CÂU 2.** Trong KG $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)$ có tâm $I(0;0;-3)$ và đi qua điểm $M(4;0;0)$. Phương trình của $(S)$ là

(A) $x^2+y^2+(z+3)^2=25$.
(B) $x^2+y^2+(z+3)^2=5$.
(C) $x^2+y^2+(z-3)^2=25$.
(D) $x^2+y^2+(z-3)^2=5$.

**CÂU 3.** Trong KG $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;-2;7)$, $B(-3;8;-1)$. Mặt cầu đường kính $AB$ có phương trình là

(A) $(x+1)^2+(y-3)^2+(z-3)^2=\sqrt{45}$.
(B) $(x-1)^2+(y+3)^2+(z+3)^2=45$.
(C) $(x-1)^2+(y-3)^2+(z+3)^2=\sqrt{45}$.
(D) $(x+1)^2+(y-3)^2+(z-3)^2=45$.

**CÂU 4.** Phương trình nào sau đây là phương trình mặt cầu $(S)$ tâm $A(2;1;0)$, đi qua điểm $B(0;1;2)$?

(A) $(S)\colon (x+2)^2+(y+1)^2+z^2=8$.
(B) $(S)\colon (x-2)^2+(y-1)^2+z^2=8$.
(C) $(S)\colon (x-2)^2+(y-1)^2+z^2=64$.
(D) $(S)\colon (x+2)^2+(y+1)^2+z^2=64$.

**CÂU 5.** Trong KG $Oxyz$ cho điểm $I(2;3;4)$ và $A(1;2;3)$. Phương trình mặt cầu tâm $I$ và đi qua $A$ có phương trình là

(A) $(x+2)^2+(y+3)^2+(z+4)^2=3$.
(B) $(x+2)^2+(y+3)^2+(z+4)^2=9$.
(C) $(x-2)^2+(y-3)^2+(z-4)^2=45$.
(D) $(x-2)^2+(y-3)^2+(z-4)^2=3$.

**CÂU 6.** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;3)$, $B(5;4;-1)$. Phương trình mặt cầu đường kính $AB$ là

(A) $(x-3)^2+(y-3)^2+(z-1)^2=9$.
(B) $(x-3)^2+(y-3)^2+(z-1)^2=6$.
(C) $(x+3)^2+(y+3)^2+(z+1)^2=9$.
(D) $(x-3)^2+(y-3)^2+(z-1)^2=36$.

**CÂU 7.** Trong KG $Oxyz$, cho hai điểm $M(3;-2;5)$, $N(-1;6;-3)$. Mặt cầu đường kính $MN$ có phương trình là

(A) $(x+1)^2+(y+2)^2+(z+1)^2=6$. (B) $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=6$.

(C) $(x+1)^2+(y+2)^2+(z+1)^2=36$. (D) $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=36$.

**CÂU 8.** Cho hai điểm $A$, $B$ cố định trong không gian có độ dài $AB$ là 4. Biết rằng tập hợp các điểm $M$ trong không gian sao cho $MA=3MB$ là một mặt cầu. Bán kính mặt cầu đó bằng

(A) 3. (B) $\dfrac{9}{2}$. (C) 1. (D) $\dfrac{3}{2}$.

**CÂU 9.** Trong KG $Oxyz$, mặt cầu $(S)$ qua bốn điểm $A(3;3;0)$, $B(3;0;3)$, $C(0;3;3)$, $D(3;3;3)$. Phương trình mặt cầu $(S)$ là

(A) $\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2+\left(y-\dfrac{3}{2}\right)^2+\left(z-\dfrac{3}{2}\right)^2=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

(B) $\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2+\left(y+\dfrac{3}{2}\right)^2+\left(z-\dfrac{3}{2}\right)^2=\dfrac{27}{4}$.

(C) $\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2+\left(y-\dfrac{3}{2}\right)^2+\left(z+\dfrac{3}{2}\right)^2=\dfrac{27}{4}$.

(D) $\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2+\left(y-\dfrac{3}{2}\right)^2+\left(z-\dfrac{3}{2}\right)^2=\dfrac{27}{4}$.

**CÂU 10.** Trong KG $Oxyz$, cho tứ diện đều $ABCD$ có $A(0;1;2)$ và hình chiếu vuông góc của $A$ trên mặt phẳng $(BCD)$ là $H(4;-3;-2)$. Tìm tọa độ tâm $I$ của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.

(A) $I(3;-2;-1)$. (B) $I(2;-1;0)$. (C) $I(3;-2;1)$. (D) $I(-3;-2;1)$.

**CÂU 11.** Trong không gian tọa độ $Oxyz$, mặt cầu $(S)$ đi qua điểm $O$ và cắt các tia $Ox$, $Oy$, $Oz$ lần lượt tại các điểm $A$, $B$, $C$ khác $O$ thỏa mãn tam giác $ABC$ có trọng tâm là điểm $G(-6;-12;18)$. Tọa độ tâm của mặt cầu $(S)$ là

(A) $(9;18;-27)$. (B) $(-3;-6;9)$. (C) $(3;6;-9)$. (D) $(-9;-18;27)$.

**CÂU 12.** Trong hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu

$$(S)\colon (x-\cos\alpha)^2+(y-\cos\beta)^2+(z-\cos\gamma)^2=4$$

với $\alpha$, $\beta$ và $\gamma$ lần lượt là ba góc tạo bởi tia $Ot$ bất kì với 3 tia $Ox$, $Oy$ và $Oz$. Biết rằng mặt cầu $(S)$ luôn tiếp xúc với hai mặt cầu cố định. Tổng diện tích của hai mặt cầu cố định đó bằng

(A) $40\pi$. (B) $4\pi$. (C) $20\pi$. (D) $36\pi$.

**CÂU 13.** Trong KG $Oxyz$, cho điểm $M(1;-2;3)$. Gọi $I$ là hình chiếu vuông góc của $M$ trên trục $Ox$. Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt cầu tâm $I$ bán kính $IM$?

(A) $(x-1)^2+y^2+z^2=13$. (B) $(x+1)^2+y^2+z^2=17$.

(C) $(x+1)^2+y^2+z^2=13$. (D) $(x-1)^2+y^2+z^2=\sqrt{13}$.

**CÂU 14.** Trong KG $Oxyz$, cho điểm $I(1;-2;3)$. Viết phương trình mặt cầu tâm $I$, cắt trục $Ox$ tại hai điểm $A$ và $B$ sao cho $AB=2\sqrt{3}$

(A) $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=16$. (B) $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=20$.

(C) $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=25$. (D) $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=9$.

**CÂU 15.** Trong KG $Oxyz$, cho điểm $M(1;-2;3)$. Gọi $I$ là hình chiếu vuông góc của $M$ trên trục $Ox$. Phương trình nào sau đây là phương trình mặt cầu tâm $I$ bán kính $IM$?

(A) $(x-1)^2+y^2+z^2=\sqrt{13}$. (B) $(x-1)^2+y^2+z^2=13$.

(C) $(x+1)^2+y^2+z^2=13$. (D) $(x+1)^2+y^2+z^2=17$.

**CÂU 16.** Trong KG $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ có tọa độ đỉnh $A(2;0;0)$, $B(0;4;0)$, $C(0;0;6)$, $A(2;4;6)$. Gọi $(S)$ là mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$. Viết phương trình mặt cầu $(S')$ có tâm trùng với tâm của mặt cầu $(S)$ và có bán kính gấp 2 lần bán kính của mặt cầu $(S)$.

(A) $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=56$. (B) $x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z=0$.

(C) $(x+1)^2+(y+2)^2+(z+3)^2=14$. (D) $x^2+y^2+z^2-2x+4y+6z-12=0$.

QUICK NOTE

QUICK NOTE

**CÂU 17.** Trong KG $Oxyz$, mặt cầu tâm $I(2;1;-3)$ và tiếp xúc với trục $Oy$ có phương trình là

(A) $(x-2)^2+(y-1)^2+(z+3)^2=4$.
(B) $(x-2)^2+(y-1)^2+(z+3)^2=13$.
(C) $(x-2)^2+(y-1)^2+(z+3)^2=9$.
(D) $(x-2)^2+(y-1)^2+(z+3)^2=10$.

**CÂU 18.** Trong KG $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon (x-1)^2+(y-1)^2+z^2=4$. Một mặt cầu $(S')$ có tâm $I'(9;1;6)$ và tiếp xúc ngoài với mặt cầu $(S)$. Phương trình mặt cầu $(S')$ là

(A) $(x-9)^2+(y-1)^2+(z-6)^2=64$.
(B) $(x-9)^2+(y-1)^2+(z-6)^2=144$.
(C) $(x-9)^2+(y-1)^2+(z-6)^2=36$.
(D) $(x+9)^2+(y+1)^2+(z+6)^2=25$.

**CÂU 19.** Trong KG $Oxyz$, cho điểm $H(1;2;-2)$. Mặt phẳng $(\alpha)$ đi qua $H$ và cắt các trục $Ox$, $Oy$, $Oz$ tại $A$, $B$, $C$ sao cho $H$ là trực tâm tam giác $ABC$. Viết phương trình mặt cầu tâm $O$ và tiếp xúc với mặt phẳng $(\alpha)$.

(A) $x^2+y^2+z^2=81$.
(B) $x^2+y^2+z^2=1$.
(C) $x^2+y^2+z^2=9$.
(D) $x^2+y^2+z^2=25$.

**Phần II. Trong mỗi ý a), b), c) và d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.**

**CÂU 20.** Trong KG $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)$ có tâm $I(0;-2;1)$, bán kính bằng 2. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

| Mệnh đề | Đ | S |
|---|---|---|
| **a)** Phương trình của mặt cầu $(S)$ là $x^2+(y+2)^2+(z-1)^2=2$. | | |
| **b)** Phương trình của mặt cầu $(S)$ là $x^2+(y-2)^2+(z+1)^2=2$. | | |
| **c)** Phương trình của mặt cầu $(S)$ là $x^2+(y-2)^2+(z+1)^2=4$. | | |
| **d)** Phương trình của mặt cầu $(S)$ là $x^2+(y+2)^2+(z-1)^2=4$. | | |

**CÂU 21.** Trong KG $Oxyz$, cho hai điểm $I(1;1;1)$ và $A(1;2;3)$. Gọi $(S)$ là mặt cầu tâm $I$ và đi qua điểm $A$. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

| Mệnh đề | Đ | S |
|---|---|---|
| **a)** Phương trình mặt cầu $(S)$ là $(x+1)^2+(y+1)^2+(z+1)^2=5$. | | |
| **b)** Phương trình mặt cầu $(S)$ là $(x+1)^2+(y+1)^2+(z+1)^2=29$. | | |
| **c)** Phương trình mặt cầu $(S)$ là $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=5$. | | |
| **d)** Phương trình mặt cầu $(S)$ là $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=25$. | | |

**CÂU 22.** Trong KG $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;-1;-3)$; $B(0;3;-1)$. Gọi $(S)$ là mặt cầu đường kính $AB$. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

| Mệnh đề | Đ | S |
|---|---|---|
| **a)** Phương trình của mặt cầu $(S)$ là $(x-1)^2+(y-1)^2+(z+2)^2=6$. | | |
| **b)** Phương trình của mặt cầu $(S)$ là $(x-1)^2+(y-1)^2+(z+2)^2=24$. | | |
| **c)** Phương trình của mặt cầu $(S)$ là $(x+1)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=24$. | | |
| **d)** Phương trình của mặt cầu có tâm là trung điểm $AB$ và đi qua hai điểm $A$, $B$ là $(x-1)^2+(y-1)^2+(z+2)^2=6$. | | |

**CÂU 23.** Gọi $(S)$ là mặt cầu đi qua bốn điểm $A(2;0;0)$, $B(1;3;0)$, $C(-1;0;3)$, $D(1;2;3)$. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

| Mệnh đề | Đ | S |
|---|---|---|
| **a)** Mặt cầu $(S)$ có tọa độ tâm là $(1;-1;1)$. | | |
| **b)** Mặt cầu $(S)$ có tọa độ tâm là $(0;1;1)$. | | |
| **c)** Bán kính $R$ của mặt cầu $(S)$ là $R=6$. | | |
| **d)** Bán kính $R$ của mặt cầu $(S)$ là $R=\sqrt{6}$. | | |

**CÂU 24.** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)$ có tâm nằm trên mặt phẳng $(Oxy)$ và đi qua ba điểm $A(1;2;-4)$, $B(1;-3;1)$, $C(2;2;3)$. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

| Mệnh đề | Đ | S |
|---|---|---|
| **a)** Tọa độ tâm $(I)$ của mặt cầu $(S)$ là $(2;-1;0)$. | | |
| **b)** Tọa độ tâm $(I)$ của mặt cầu $(S)$ là $(-2;1;0)$. | | |
| **c)** Bán kính $R$ của mặt cầu $(S)$ là $R=\sqrt{26}$. | | |
| **d)** Bán kính $R$ của mặt cầu $(S)$ là $R=26$. | | |

**CÂU 25.** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;1;2)$, $B(3;2;-3)$. Mặt cầu $(S)$ có tâm $I$ thuộc $Ox$ và đi qua hai điểm $A$, $B$. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

| Mệnh đề | Đ | S |
|---|---|---|
| **a)** Tọa độ tâm $(I)$ của mặt cầu $(S)$ là $I(4;0;0)$. | | |
| **b)** Bán kính $R$ của mặt cầu $(S)$ là $R=14$. | | |
| **c)** Mặt cầu $(S)$ có phương trình $x^2+y^2+z^2-8x+2=0$. | | |
| **d)** Mặt cầu $(S)$ có phương trình $x^2+y^2+z^2-8x-2=0$. | | |

**CÂU 26.** Trong KG $Oxyz$, mặt cầu $(S)$ đi qua điểm $A(1;-1;4)$ và tiếp xúc với các mặt phẳng tọa độ. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

| Mệnh đề | Đ | S |
|---|---|---|
| **a)** Mặt cầu $(S)$ có phương trình $(x-3)^2+(y+3)^2+(z+3)^2=16$. | | |
| **b)** Mặt cầu $(S)$ có phương trình $(x-3)^2+(y+3)^2+(z-3)^2=9$. | | |
| **c)** Mặt cầu $(S)$ có phương trình $(x+3)^2+(y-3)^2+(z+3)^2=36$. | | |
| **d)** Mặt cầu $(S)$ có phương trình $(x+3)^2+(y-3)^2+(z-3)^2=49$. | | |

**Phần III. Học sinh điền kết quả vào ô trống.**

**CÂU 27.** Trong KG $Oxyz$, mặt cầu $(S)$ có tâm $I(0;1;-2)$ và bán kính bằng 3. Phương trình của $(S)$ có dạng $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$. Tìm $d$.

KQ:

**CÂU 28.** Trong KG $Oxyz$, cho mặt cầu có tâm $I(1;-4;3)$ và đi qua điểm $A(5;-3;2)$. Tính bán kính của mặt cầu đã cho (làm tròn kết quả đến hàng phần nghìn).

KQ:

**CÂU 29.** Trong KG $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;1;1)$ và $B(1;-1;3)$. Phương trình mặt cầu có đường kính $AB$ có dạng $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$. Tính tổng $S=a+b+c+d$.

KQ:

**CÂU 30.** Trong KG $Oxyz$, cho $A(-1;0;0)$, $B(0;0;2)$, $C(0;-3;0)$. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$ (làm tròn đến hàng phần nghìn).

KQ:

**CÂU 31.** Trong KG $Oxyz$, gọi $I(a;b;c)$ là tâm mặt cầu đi qua điểm $A(1;-1;4)$ và tiếp xúc với tất cả các mặt phẳng tọa độ. Tính $P=a-b+c$.

KQ:

**CÂU 32.** Trong không gian $Oxyz$, tìm giá trị dương của $m$ (làm tròn đến hàng phần nghìn) sao cho mặt phẳng $(Oxy)$ tiếp xúc với mặt cầu $(x-3)^2+y^2(z-2)^2=m^2+1$.

KQ:

**CÂU 33.** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;2;-4)$, $B(1;-3;1)$, $C(2;2;3)$. Tính đường kính của mặt cầu $(S)$ đi qua ba điểm trên và có tâm nằm trên mặt phẳng $(Oxy)$ (Làm tròn kết quả đến hàng phần chục).

KQ:

QUICK NOTE

QUICK NOTE

**CÂU 34.** Trong không gian $Oxyz$, gọi $(S)$ là mặt cầu đi qua điểm $D(0;1;2)$ và tiếp xúc với các trục $Ox, Oy, Oz$ tại các điểm $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$ trong đó $a, b, c \in \mathbb{R}\backslash\{0;1\}$. Tính bán kính của $(S)$ (làm tròn kết quả đến hàng phần chục).

KQ:

**CÂU 35.** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;0;0), C(0;0;3), B(0;2;0)$. Tập hợp các điểm $M$ thỏa mãn $MA^2 = MB^2 + MC^2$ là mặt cầu có bán kính là bao nhiêu? (làm tròn kết quả đến hàng phần nghìn).

KQ:

**CÂU 36.** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, xét mặt cầu $(S)$ có phương trình dạng $x^2+y^2+z^2-4x+2y-2az+10a=0$. Có tất cả bao nhiêu giá trị thực của $a$ để $(S)$ có chu vi đường tròn lớn bằng $8\pi$.

KQ:

**CÂU 37.** Trong KG $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon (x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=25$ và hình nón $(H)$ có đỉnh $A(3;2;-2)$ và nhận $AI$ làm trục đối xứng với $I$ là tâm mặt cầu. Một đường sinh của hình nón $(H)$ cắt mặt cầu tại $M, N$ sao cho $AM = 3AN$. Tìm bán kính của mặt cầu đồng tâm với mặt cầu $(S)$ và tiếp xúc với các đường sinh của hình nón $(H)$ (làm tròn kết quả đến hàng phần nghìn).

KQ:

**CÂU 38.** Trong KG $Oxyz$, cho bốn điểm $A(0;-1;2)$, $B(2;-3;0)$, $C(-2;1;1)$, $D(0;-1;3)$. Gọi $(L)$ là tập hợp tất cả các điểm $M$ trong không gian thỏa mãn đẳng thức $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{MD} = 1$. Biết rằng $(L)$ là một đường tròn, đường tròn đó có bán kính $r$ bằng bao nhiêu? (Làm tròn kết quả đến hàng phần nghìn).

KQ:

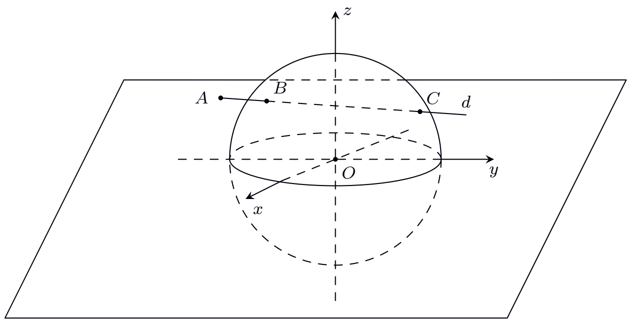
## 15 ỨNG DỤNG MẶT CẦU TRONG KHÔNG GIAN

**BÀI 1.** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục là kilômét) một trạm phát sóng rađa của Nga được đặt trên bán đảo Crimea ở vị trí $I(-2;1;-1)$ và được thiết kế phát hiện máy bay của địch ở khoảng cách tối đa 500 km.

a) Sử dụng phương trình mặt cầu để mô tả ranh giới bên ngoài vùng phát sóng của rađa trong không gian.

b) Hai chiếc máy bay do thám của Mỹ và Anh đang bay ở vị trí có tọa độ lần lượt là $M(-200;100;-250)$ và $N(350;-100;300)$. Hỏi rađa của Nga có thể phát hiện ra hai chiếc máy bay do thám của Mỹ và Anh không?

**BÀI 2.** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục là kilômét), đài kiểm soát không lưu sân bay Cam Ranh - Khánh Hòa ở vị trí $O(0;0;0)$ và được thiết kế phát hiện máy bay ở khoảng cách tối đa 600 km. Một máy bay của hãng Việt Nam Airlines đang ở vị trí $A(-1\,000;-200;10)$, chuyển động theo đường thẳng $d$ có phương trình $\begin{cases} x=-1000+100t \\ y=-200+80t \\ z=10 \end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$ và hướng về đài kiểm soát không lưu (như hình vẽ).



a) Sử dụng phương trình mặt cầu để mô tả ranh giới bên ngoài vùng phát sóng của đài kiểm soát không lưu trong không gian.

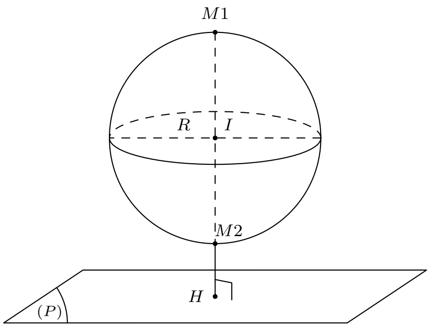
b) Xác định tọa độ vị trí sớm nhất mà máy bay xuất hiện trên màn hình ra đa và tọa độ vị trí mà máy bay bay ra khỏi màn hình ra đa.

c) Tính khoảng cách ngắn nhất giữa máy bay với đài kiểm soát không lưu.

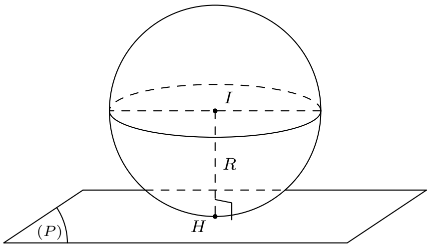
## 16 Vị trí tương đối giữa mặt phẳng với mặt cầu

Cho mặt cầu $S(I;R)$ và mặt phẳng $(P)$. Gọi $H$ là hình chiếu vuông góc của $I$ lên $(P)$ và có $d = IH$ là khoảng cách từ $I$ đến mặt phẳng $(P)$. Khi đó:

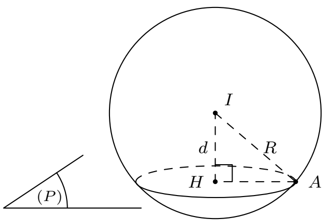
- Nếu $d > R$: Mặt cầu và mặt phẳng không có điểm chung.




- Nếu $d = R$: Mặt phẳng tiếp xúc mặt cầu. Lúc đó $(P)$ là mặt phẳng tiếp diện của $(S)$ và $H$ là tiếp điểm.




- Nếu $d < R$: mặt phẳng $(P)$ cắt mặt cầu theo thiết diện là đường tròn có tâm $H$ và bán kính $r = \sqrt{R^2 - IH^2}$.




**Phần I. Mỗi câu hỏi học sinh chọn một trong bốn phương án A, B, C, D.**

**CÂU 1.** Trong KG $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z - 22 = 0$ và mặt phẳng $(P)\colon 3x - 2y + 6z + 14 = 0$. Khoảng cách từ tâm $I$ của mặt cầu $(S)$ đến mặt phẳng $(P)$ bằng

(A) 2. (B) 4. (C) 3. (D) 1.

**CÂU 2.** Trong KG $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon x^2 + y^2 + z^2 = 1$ và mặt phẳng $(P)\colon x + 2y - 2z + 1 = 0$. Tìm bán kính $r$ đường tròn giao tuyến của $(S)$ và $(P)$.

(A) $r = \dfrac{1}{3}$. (B) $r = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$. (C) $r = \dfrac{1}{2}$. (D) $r = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

**CÂU 3.** Trong KG $Oxyz$ cho mặt cầu $(S)\colon x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z = 0$. Đường tròn giao tuyến của $(S)$ với mặt phẳng $(Oxy)$ có bán kính là

(A) $r = 3$. (B) $r = \sqrt{5}$. (C) $r = \sqrt{6}$. (D) $r = \sqrt{14}$.

QUICK NOTE

QUICK NOTE

**CÂU 4.** Trong KG $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)$ tâm $I(a;b;c)$ bán kính bằng 1, tiếp xúc mặt phẳng $(Oxz)$. Khẳng định nào sau đây luôn đúng?

(A) $|a|=1$. (B) $a+b+c=1$. (C) $|b|=1$. (D) $|c|=1$.

**CÂU 5.** Trong KG $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon (x-2)^2+(y+1)^2+(z+2)^2=4$ và mặt phẳng $(P)\colon 4x-3y-m=0$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số $m$ để mặt phẳng $(P)$ và mặt cầu $(S)$ có đúng 1 điểm chung.

(A) $m=1$. (B) $m=-1$ hoặc $m=-21$.

(C) $m=1$ hoặc $m=21$. (D) $m=-9$ hoặc $m=31$.

**CÂU 6.** Trong KG $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2-2x+4y+2z-3=0$. Viết phương trình mặt phẳng $(Q)$ chứa trục $Ox$ và cắt $(S)$ theo một đường tròn bán kính bằng 3.

(A) $(Q)\colon y+3z=0$. (B) $(Q)\colon x+y-2z=0$.

(C) $(Q)\colon y-z=0$. (D) $(Q)\colon y-2z=0$.

**CÂU 7.** Trong KG $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon (x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=45$ và mặt phẳng $(P)\colon x+y-z-13=0$. Mặt cầu $(S)$ cắt mặt phẳng $(P)$ theo giao tuyến là đường tròn có tâm $I(a;b;c)$ thì giá trị của $a+b+c$ bằng

(A) $-11$. (B) 5. (C) 2. (D) 1.

**CÂU 8.** Trong KG $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2-2x-2z-7=0$, mặt phẳng $(P)\colon 4x+3y+m=0$. Tìm tất cả các giá trị của $m$ để mặt phẳng $(P)$ cắt mặt cầu $(S)$.

(A) $\left[\begin{array}{l} m>11 \\ m<-19 \end{array}\right.$. (B) $-19<m<11$. (C) $-12<m<4$. (D) $\left[\begin{array}{l} m>4 \\ m<-12 \end{array}\right.$.

**CÂU 9.** Trong KG $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon (x-a)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=9$ và mặt phẳng $(P)\colon 2x+y+2z=1$. Tìm tất cả các giá trị của $a$ để $(P)$ cắt mặt cầu $(S)$ theo giao tuyến là đường tròn $(C)$.

(A) $-\dfrac{17}{2}\le a\le\dfrac{1}{2}$. (B) $-\dfrac{17}{2}<a<\dfrac{1}{2}$. (C) $-8<a<1$. (D) $-8\le a\le 1$.

**CÂU 10.** Trong KG $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2-4x+2y+2z-10=0$, mặt phẳng $(P)\colon x+2y-2z+10=0$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

(A) $(P)$ tiếp xúc với $(S)$.

(B) $(P)$ cắt $(S)$ theo giao tuyến là đường tròn khác đường tròn lớn.

(C) $(P)$ và $(S)$ không có điểm chung.

(D) $(P)$ cắt $(S)$ theo giao tuyến là đường tròn lớn.

**CÂU 11.** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon mx+2y-z+1=0$ ($m$ là tham số). Mặt phẳng $(P)$ cắt mặt cầu $(S)\colon (x-2)^2+(y-1)^2+z^2=9$ theo một đường tròn có bán kính bằng 2. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số $m$.

(A) $m=\pm1$. (B) $m=\pm2+\sqrt{5}$. (C) $m=\pm4$. (D) $m=6\pm2\sqrt{5}$.

**CÂU 12.** Trong KG $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon 2x+3y+z-11=0$. Mặt cầu $(S)$ có tâm $I(1;-2;1)$ và tiếp xúc với mặt phẳng $(P)$ tại điểm $H$, khi đó $H$ có tọa độ là

(A) $H(-3;-1;-2)$. (B) $H(-1;-5;0)$. (C) $H(1;5;0)$. (D) $H(3;1;2)$.

**CÂU 13.** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho mặt phẳng $(\alpha)$ có phương trình $2x+y-z-1=0$ và mặt cầu $(S)$ có phương trình $(x-1)^2+(y-1)^2+(z+2)^2=4$. Xác định bán kính $r$ của đường tròn giao tuyến của mặt phẳng $(\alpha)$ và mặt cầu $(S)$.

(A) $r=\dfrac{2\sqrt{42}}{3}$. (B) $r=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$. (C) $r=\dfrac{2\sqrt{15}}{3}$. (D) $r=\dfrac{2\sqrt{7}}{3}$.

**Phần III. Học sinh điền kết quả vào ô trống.**

**CÂU 14.** Cho mặt cầu $(S)$ có phương trình $(S)\colon (x-3)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=100$ và mặt phẳng $(\alpha)$ có phương trình $2x-2y-z+9=0$. Tính bán kính của đường tròn là giao tuyến của mặt phẳng $(\alpha)$ và mặt cầu $(S)$.

KQ: | | | | |

**CÂU 15.** Trong KG $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon 2x-y-2z-1=0$ và điểm $M(1;-2;0)$. Mặt cầu tâm $M$, bán kính bằng $\sqrt{3}$ cắt mặt phẳng $(P)$ theo giao tuyến là đường tròn có bán kính bằng bao nhiêu? (*Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm*).

KQ: | | | | |

**CÂU 16.** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)$: $2x+2y+z-m^2-3m=0$ và mặt cầu $(S)$: $(x-1)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=9$. Gọi $T$ là tập hợp tất cả các giá trị của $m$ để $(P)$ tiếp xúc với $(S)$. Tính tổng các phần tử của $T$.

KQ: | | | |

**CÂU 17.** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-2)^2+(y-4)^2+(z-1)^2=4$ và mặt phẳng $(P):x+my+z-3m-1=0$. Gọi $T$ là tập hợp tất cả các giá trị của $m$ để mặt phẳng $(P)$ cắt mặt cầu $(S)$ theo giao tuyến là đường tròn có đường kính bằng 2. Tính tổng các phần tử của $T$.

KQ: | | | |

**CÂU 18.** Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$, cho mặt cầu có phương trình $(S):x^2+y^2+z^2+2x-4y-6z+m-3=0$. Gọi $T$ là tập hợp tất cả các giá trị của $m$ để mặt phẳng $(\beta):2x-y+2z-8=0$ cắt $(S)$ theo một đường tròn có chu vi bằng $8\pi$. Tính tổng các phần tử của $T$.

KQ: | | | |

**CÂU 19.** Trong KG $Oxyz$ cho hai mặt phẳng $(P):2x-y+z-2=0$ và $(Q):2x-y+z+1=0$. Hỏi có bao nhiêu mặt cầu đi qua $A(1;-2;1)$ và tiếp xúc với hai mặt phẳng $(P)$, $(Q)$?

KQ: | | | |

**CÂU 20.** Trong KG $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-1)^2+z^2=4$ và một điểm $M(2;3;1)$. Từ $M$ kẻ được vô số các tiếp tuyến tới $(S)$, biết tập hợp các tiếp điểm là đường tròn $(C)$. Tính bán kính $r$ của đường tròn $(C)$. (*Kết quả làm tròn tới hàng phần trăm*).

KQ: | | | |

**CÂU 21.** Trong KG $Oxyz$, xét các điểm $A(0;0;1)$, $B(m;0;0)$, $C(0;n;0)$, $D(1;1;1)$ với $m>0$; $n>0$ và $m+n=1$. Biết rằng khi $m$, $n$ thay đổi, tồn tại một mặt cầu cố định tiếp xúc với mặt phẳng $(ABC)$ và đi qua $D$. Tính bán kính $R$ của mặt cầu đó.

KQ: | | | |

## 17 LẬP PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU LIÊN QUAN ĐẾN MẶT PHẲNG

**Phần I. Mỗi câu hỏi học sinh chọn một trong bốn phương án A, B, C, D.**

**CÂU 1.** Trong KG $Oxyz$, viết phương trình mặt cầu có tâm $I(2;1;-4)$ và tiếp xúc với mặt phẳng $(\alpha):x-2y+2z-7=0$.

(A) $x^2+y^2+z^2+4x+2y-8z-4=0$.
(B) $x^2+y^2+z^2+4x-2y+8z-4=0$.
(C) $x^2+y^2+z^2-4x-2y+8z-4=0$.
(D) $x^2+y^2+z^2-4x-2y-8z-4=0$.

**CÂU 2.** Trong KG $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)$ có tâm $I(3;2;-1)$ và đi qua điểm $A(2;1;2)$. Mặt phẳng nào dưới đây tiếp xúc với $(S)$ tại $A$?

(A) $x+y+3z-9=0$.
(B) $x+y-3z+3=0$.
(C) $x+y-3z-8=0$.
(D) $x-y-3z+3=0$.

**CÂU 3.** Trong KG $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):x-2y+2z-2=0$ và điểm $I(-1;2;-1)$. Viết phương trình mặt cầu $(S)$ có tâm $I$ và cắt mặt phẳng $(P)$ theo giao tuyến là đường tròn có bán kính bằng 5.

(A) $(S):(x+1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=25$.
(B) $(S):(x+1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=16$.
(C) $(S):(x-1)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=34$.
(D) $(S):(x+1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=34$.

**CÂU 4.** Trong KG $Oxyz$, mặt cầu $(S)$ có tâm $I(-1;2;1)$ và tiếp xúc với mặt phẳng $(P):x-2y-2z-2=0$ có phương trình là

(A) $(x+1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=3$.
(B) $(x-1)^2+(y+2)^2+(z+1)^2=9$.
(C) $(x+1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=9$.
(D) $(x+1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=3$.

QUICK NOTE

QUICK NOTE

**CÂU 5.** Trong KG $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)$ có tâm $I(1;2;1)$ và cắt mặt phẳng $(P): 2x - y + 2z + 7 = 0$ theo một đường tròn có đường kính bằng 8. Phương trình mặt cầu $(S)$ là

A. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 81$.
B. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 5$.
C. $(x+1)^2 + (y+2)^2 + (z+1)^2 = 9$.
D. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 25$.

**CÂU 6.** Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$, phương trình nào dưới đây là phương trình của mặt cầu có tâm $I(3;1;0)$ và tiếp xúc với mặt phẳng $(P): 2x + 2y - z + 1 = 0$?

A. $(x+3)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 3$.
B. $(x+3)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 9$.
C. $(x-3)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 3$.
D. $(x-3)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 9$.

**CÂU 7.** Trong KG $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)$ có tâm $I(2;1;1)$ và mặt phẳng $(P): 2x + y + 2z + 2 = 0$. Biết mặt phẳng $(P)$ cắt mặt cầu $(S)$ theo giao tuyến là một đường tròn có bán kính bằng 1. Viết phương trình của mặt cầu $(S)$.

A. $(S): (x+2)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 8$.
B. $(S): (x+2)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 10$.
C. $(S): (x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 8$.
D. $(S): (x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 10$.

**CÂU 8.** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, phương trình nào dưới đây là phương trình mặt cầu đi qua ba điểm $M(2;3;3)$, $N(2;-1;-1)$, $P(-2;-1;3)$ và có tâm thuộc mặt phẳng $(\alpha): 2x + 3y - z + 2 = 0$?

A. $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y + 6z + 2 = 0$.
B. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 2z - 2 = 0$.
C. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 2z - 10 = 0$.
D. $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 6z - 2 = 0$.

**CÂU 9.** Trong KG $Oxyz$, cho điểm $I(-3;0;1)$. Mặt cầu $(S)$ có tâm $I$ và cắt mặt phẳng $(P)$: $x - 2y - 2z - 1 = 0$ theo một thiết diện là một hình tròn. Diện tích của hình tròn này bằng $\pi$. Phương trình mặt cầu $(S)$ là

A. $(x+3)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 4$.
B. $(x+3)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 25$.
C. $(x+3)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 5$.
D. $(x+3)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 2$.

**CÂU 10.** Trong KG $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x - 2y + 2z - 2 = 0$ và điểm $I(-1;\ 2;\ -1)$. Viết phương trình mặt cầu $(S)$ có tâm $I$ và cắt mặt phẳng $(P)$ theo giao tuyến là đường tròn có bán kính bằng 5.

A. $(S): (x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 25$.
B. $(S): (x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 16$.
C. $(S): (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 34$.
D. $(S): (x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 34$.

**Phần III. Học sinh điền kết quả vào ô trống.**

**CÂU 11.** Trong KG $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;3)$. Tính bán kính của mặt cầu tâm $A$ và tiếp xúc với mặt phẳng $x - 2y + 2z + 3 = 0$.

KQ: | | | |

**CÂU 12.** Trong KG $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)$: $x + 2y - 2z + 3 = 0$ và mặt cầu $(S)$ có tâm $I(0;-2;1)$. Biết mặt phẳng $(P)$ cắt mặt cầu $(S)$ theo giao tuyến là một đường tròn có diện tích $2\pi$. Tính bán kính mặt cầu (*kết quả làm tròn đến hàng phần trăm*).

KQ: | | | |

**CÂU 13.** Trong không gian, cho bốn mặt cầu có bán kính lần lượt là 2, 3, 3, 2 (đơn vị độ dài) tiếp xúc ngoài với nhau. Mặt cầu nhỏ nhất tiếp xúc ngoài với cả bốn mặt cầu nói trên có bán kính bằng bao nhiêu? (*kết quả làm tròn đến hàng phần trăm*).

KQ: | | | |

**CÂU 14.** Trong KG $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)$: $x^2 + y^2 + (z - \sqrt{2})^2 = 3$. Có tất cả bao nhiêu điểm $A(a;b;c)$, ($a, b, c$ là các số nguyên) thuộc mặt phẳng $(Oxy)$ sao cho có ít nhất hai tiếp tuyến của $(S)$ đi qua $A$ và hai tiếp tuyến đó vuông góc với nhau?

KQ: | | | |

**CÂU 15.** Trong KG $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+(z-1)^2=5$. Có tất cả bao nhiêu điểm $A(a,b,c)$ ($a,b,c$ là các số nguyên) thuộc mặt phẳng $(Oxy)$ sao cho có ít nhất hai tiếp tuyến của $(S)$ đi qua $A$ và hai tiếp tuyến đó vuông góc với nhau?

KQ: | | | | |

**CÂU 16.** Trong KG $Oxyz$, cho điểm $H(1;2;-2)$. Mặt phẳng $(\alpha)$ đi qua $H$ và cắt các trục $Ox$, $Oy$, $Oz$ lần lượt tại các điểm $A$, $B$, $C$ sao cho $H$ là trực tâm của tam giác $ABC$. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$ (*làm tròn kết quả đến hàng phần trăm*).

KQ: | | | | |

**CÂU 17.** Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu $(S)$ đi qua điểm $A(2;-2;5)$ và tiếp xúc với ba mặt phẳng $(P)\colon x=1$, $(Q)\colon y=-1$ và $(R)\colon z=1$ có bán kính bằng bao nhiêu?

KQ: | | | | |

**CÂU 18.** Trong KG $Oxyz$, xét số thực $m\in(0;1)$ và hai mặt phẳng $(\alpha)\colon 2x-y+2z+10=0$ và $(\beta)\colon \dfrac{x}{m}+\dfrac{y}{1-m}+\dfrac{z}{1}=1$. Biết rằng, khi $m$ thay đổi có hai mặt cầu cố định tiếp xúc đồng thời với cả hai mặt phẳng $(\alpha)$, $(\beta)$. Tổng bán kính của hai mặt cầu đó bằng bao nhiêu?

KQ: | | | | |

**CÂU 19.** Trong KG $Oxyz$, cho điểm $A(2;11;-5)$ và mặt phẳng $(P)\colon 2mx+\left(m^2+1\right)y+\left(m^2-1\right)z-10=0$. Biết rằng khi $m$ thay đổi, tồn tại hai mặt cầu cố định tiếp xúc với mặt phẳng $(P)$ và cùng đi qua $A$. Tổng bán kính của hai mặt cầu đó bằng bao nhiêu? (*kết quả làm tròn đến hàng phần chục*).

KQ: | | | | |

**CÂU 20.** Trong KG $Oxyz$ cho $A(-3;1;1)$, $B(1;-1;5)$ và mặt phẳng $(P)\colon 2x-y+2z+11=0$. Mặt cầu $(S)$ đi qua hai điểm $A$, $B$ và tiếp xúc với $(P)$ tại điểm $C$. Biết $C$ luôn thuộc một đường tròn $(T)$ cố định. Tính bán kính $r$ của đường tròn $(T)$.

KQ: | | | | |

**CÂU 21.** Trong KG $Oxyz$, cho các điểm $M(2;1;4)$, $N(5;0;0)$, $P(1;-3;1)$. Gọi $I(a;b;c)$ là tâm của mặt cầu tiếp xúc với mặt phẳng $(Oyz)$ đồng thời đi qua các điểm $M$, $N$, $P$. Tìm $c$ biết rằng $a+b+c<5$.

KQ: | | | | |

## 18 LẬP PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẲNG LIÊN QUAN ĐẾN MẶT PHẲNG, MẶT CẦU

**Phần I. Mỗi câu hỏi học sinh chọn một trong bốn phương án A, B, C, D.**

**CÂU 1.** Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)$ có đường kính $AB$ với $A(6;2;-5)$, $B(-4;0;7)$. Viết phương trình mặt phẳng $(P)$ tiếp xúc với mặt cầu $(S)$ tại $A$.

Ⓐ $(P)\colon 5x+y-6z+62=0$.
Ⓑ $(P)\colon 5x+y-6z-62=0$.
Ⓒ $(P)\colon 5x-y-6z-62=0$.
Ⓓ $(P)\colon 5x+y+6z+62=0$.

**CÂU 2.** Trong KG $Oxyz$, cho mặt phẳng $(Q)$ song song với mặt phẳng $(P)\colon 2x-2y+z+7=0$. Biết mp$(Q)$ cắt mặt cầu $(S)\colon x^2+(y+2)^2+(z-1)^2=25$ theo một đường tròn có bán kính $r=3$. Khi đó mặt phẳng $(Q)$ có phương trình là

Ⓐ $x-y+2z-7=0$.
Ⓑ $2x-2y+z+17=0$.
Ⓒ $2x-2y+z+7=0$.
Ⓓ $2x-2y+z-17=0$.

**CÂU 3.** Trong KG $Oxyz$ cho mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2+2x-4y-6z+5=0$. Mặt phẳng tiếp xúc với $(S)$ và song song với mặt phẳng $(P)\colon 2x-y+2z-11=0$ có phương trình là

Ⓐ $2x-y+2z-7=0$.
Ⓑ $2x-y+2z+9=0$.
Ⓒ $2x-y+2z+7=0$.
Ⓓ $2x-y+2z-9=0$.

**CÂU 4.** Trong KG $Oxyz$, mặt phẳng $(P)$ chứa trục $Ox$ và cắt mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2-2x+4y+2z-3=0$ theo giao tuyến là đường tròn có bán kính bằng 3 có phương trình là

QUICK NOTE

QUICK NOTE

(A) $y-2z=0$. (B) $y+2z=0$. (C) $y+3z=0$. (D) $y-3z=0$.

**CÂU 5.** Trong KG $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2+2z-2=0$ và điểm $K(2;2;0)$. Viết phương trình mặt phẳng chứa tất cả các tiếp điểm của các tiếp tuyến vẽ từ $K$ đến mặt cầu $(S)$.

(A) $2x+2y+z-4=0$. (B) $6x+6y+3z-8=0$.
(C) $2x+2y+z+2=0$. (D) $6x+6y+3z-3=0$.

**CÂU 6.** Trong KG $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2-2x+6y-4z-2=0$ và mặt phẳng $(\alpha)\colon x+4y+z-11=0$. Viết phương trình mặt phẳng $(P)$, biết $(P)$ song song với giá của véc-tơ $\vec{v}=(1;6;2)$, vuông góc với $(\alpha)$ và tiếp xúc với $(S)$.

(A) $\left[\begin{array}{l}x-2y+z+3=0\\x-2y+z-21=0\end{array}\right.$. (B) $\left[\begin{array}{l}3x+y+4z+1=0\\3x+y+4z-2=0\end{array}\right.$.
(C) $\left[\begin{array}{l}4x-3y-z+5=0\\4x-3y-z-27=0\end{array}\right.$. (D) $\left[\begin{array}{l}2x-y+2z+3=0\\2x-y+2z-21=0\end{array}\right.$.

**CÂU 7.** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)$ có phương trình $x-2y-2z-5=0$ và mặt cầu $(S)$ có phương trình $(x-1)^2+(y+2)^2+(z+3)^2=4$. Tìm phương trình mặt phẳng song song với mặt phẳng $(P)$ đồng thời tiếp xúc với mặt cầu $(S)$.

(A) $x-2y-2z+1=0$. (B) $-x+2y+2z+5=0$.
(C) $x-2y-2z-23=0$. (D) $-x+2y+2z+17=0$.

**CÂU 8.** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2-2x+6y-4z-2=0$, mặt phẳng $(\alpha)\colon x+4y+z-11=0$. Gọi $(P)$ là mặt phẳng vuông góc với $(\alpha)$, $(P)$ song song với giá của véc-tơ $\vec{v}=(1;6;2)$ và $(P)$ tiếp xúc với $(S)$. Lập phương trình mặt phẳng $(P)$.

(A) $2x-y+2z-2=0$ và $x-2y+z-21=0$.
(B) $x-2y+2z+3=0$ và $x-2y+z-21=0$.
(C) $2x-y+2z+3=0$ và $2x-y+2z-21=0$.
(D) $2x-y+2z+5=0$ và $2x-y+2z-2=0$.

**CÂU 9.** Trong KG $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu $(x-1)^2+y^2+(z+2)^2=6$ đồng thời song song với hai đường thẳng $d_1\colon \dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z}{-1}$, $d_2\colon \dfrac{x}{1}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z-2}{-1}$.

(A) $\left[\begin{array}{l}x-y+2z-3=0\\x-y+2z+9=0\end{array}\right.$. (B) $\left[\begin{array}{l}x+y+2z-3=0\\x+y+2z+9=0\end{array}\right.$.
(C) $x+y+2z+9=0$. (D) $x-y+2z+9=0$.

**CÂU 10.** Trong KG $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)$ chứa đường thẳng $d\colon \dfrac{x-4}{3}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+4}{-4}$ và tiếp xúc với mặt cầu $(S)\colon (x-3)^2+(y+3)^2+(z-1)^2=9$. Khi đó $(P)$ song song với mặt phẳng nào sau đây?

(A) $3x-y+2z=0$. (B) $-2x+2y-z+4=0$.
(C) $x+y+z=0$. (D) Đáp án khác.

**CÂU 11.** Trong KG $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon (x+1)^2+(y-1)^2+(z+2)^2=2$ và hai đường thẳng $d\colon \dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z-1}{-1}$; $\Delta\colon \dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{-1}$. Phương trình nào dưới đây là phương trình của một mặt phẳng tiếp xúc với $(S)$, song song với $d$ và $\Delta$?

(A) $y+z+3=0$. (B) $x+z+1=0$. (C) $x+y+1=0$. (D) $x+z-1=0$.

**CÂU 12.** Trong KG $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon (x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=1$, đường thẳng $\Delta\colon \dfrac{x-6}{-3}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-2}{2}$ và điểm $M(4;3;1)$. Trong các mặt phẳng sau mặt phẳng nào đi qua $M$, song song với $\Delta$ và tiếp xúc với mặt cầu $(S)$?

(A) $2x-2y+5z-22=0$. (B) $2x+y+2z-13=0$.
(C) $2x+y-2z-1=0$. (D) $2x-y+2z-7=0$.

**CÂU 13.** Trong KG $Oxyz$ cho mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z-2=0$ và mặt phẳng $(\alpha)\colon 4x+3y-12z+10=0$. Lập phương trình mặt phẳng $(\beta)$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện: Tiếp xúc với $(S)$; song song với $(\alpha)$ và cắt trục $Oz$ ở điểm có cao độ dương.

- **A** $4x+3y-12z-78=0$.
- **B** $4x+3y-12z-26=0$.
- **C** $4x+3y-12z+78=0$.
- **D** $4x+3y-12z+26=0$.

**CÂU 14.** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2-2x+2z+1=0$ và đường thẳng $d\colon \dfrac{x}{1}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z}{-1}$. Hai mặt phẳng $(P)$, $(P')$ chứa $d$ và tiếp xúc với $(S)$ tại $T$, $T'$. Tìm tọa độ trung điểm $H$ của $TT'$.

- **A** $H\left(-\dfrac{7}{6};\dfrac{1}{3};\dfrac{7}{6}\right)$.
- **B** $H\left(\dfrac{5}{6};\dfrac{2}{3};-\dfrac{7}{6}\right)$.
- **C** $H\left(\dfrac{5}{6};\dfrac{1}{3};-\dfrac{5}{6}\right)$.
- **D** $H\left(-\dfrac{5}{6};\dfrac{1}{3};\dfrac{5}{6}\right)$.

**CÂU 15.** Trong KG $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;0;0)$, $B(0;0;2)$ và mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2-2x-2y+1=0$. Số mặt phẳng chứa hai điểm $A$, $B$ và tiếp xúc với mặt cầu $(S)$ là

- **A** 1 mặt phẳng.
- **B** 2 mặt phẳng.
- **C** 0 mặt phẳng.
- **D** vô số mặt phẳng.

**Phần III. Học sinh điền kết quả vào ô trống.**

**CÂU 16.** Trong KG $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon x-2y+z+7=0$ và mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2-2x+4z-10=0$. Gọi $(Q)$ là mặt phẳng song song với mặt phẳng $(P)$ và cắt mặt cầu $(S)$ theo một giao tuyến là đường tròn có chu vi bằng $6\pi$. Biết phương trình của $(Q)$ có dạng $ax+by+cz+d=0$, giá trị của $a+b+c+d$ là

KQ: | | | |

**CÂU 17.** Trong KG $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z-2=0$ và mặt phẳng $(\alpha)\colon 4x+3y-12z+10=0$. Lập phương trình mặt phẳng $(\beta)$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện: tiếp xúc với $(S)$; song song với $(\alpha)$ và cắt trục $Oz$ ở điểm có cao độ dương. Biết $(\beta)$ có dạng $ax+by+cz+d=0$, giá trị của $a+b+c+d$ là

KQ: | | | |

**CÂU 18.** Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$ cho mặt phẳng $(Q)$ có phương trình $x-2y+z-5=0$ và mặt cầu $S$ có phương trình $(x-1)^2+y^2+(z+2)^2=15$. Mặt phẳng $(P)$ song song với mặt phẳng $(Q)$ và cắt mặt cầu $(S)$ theo giao tuyến là một đường tròn có chu vi bằng $6\pi$. Gọi phương trình của mặt phẳng $(Q)$ có dạng $x+by+cz+d=0$, tính giá trị $V=a+b+c+d$.

KQ: | | | |

**CÂU 19.** Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$ cho mặt cầu $(S)$ có phương trình $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=1$ và điểm $A(2;3;4)$. Biết tập hợp điểm $M$ thuộc $(S)$ sao cho đường thẳng $AM$ tiếp xúc với $(S)$ là mặt phẳng có phương trình $x+by+cz+d=0$. Tính giá trị $V=a\cdot b\cdot c\cdot d$.

KQ: | | | |

**CÂU 20.** Trong không gian với hệ trục $Oxyz$ cho điểm $A(2;-2;2)$ và mặt cầu $(S)$ có phương trình $x^2+y^2+(z+2)^2=1$. Điểm $M$ di chuyển trên mặt cầu $(S)$ đồng thời thoả mãn $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{AM}=6$. Biết tập hợp điểm $M$ thoả mãn điều kiện là mặt phẳng có phương trình $x+by+cz+d=0$. Tính giá trị $V=1+b+c+d$.

KQ: | | | |

**CÂU 21.** Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$ cho mặt cầu $(S)$ có phương trình $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=1$ và điểm $A(2;2;2)$. Xét các điểm $M$ thuộc mặt cầu $S$ sao cho đường thẳng $AM$ luôn tiếp xúc với $(S)$. Gọi tập hợp điểm $M$ thoả mãn điều kiện là mặt phẳng có phương trình $2x+by+cz+d=0$. Tính giá trị $V=2-b+c-3d$.

KQ: | | | |

**CÂU 22.** Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$ với $a,b,c>0$. Biết rằng $(ABC)$ đi qua điểm $M\left(\dfrac{1}{7};\dfrac{2}{7};\dfrac{3}{7}\right)$ và tiếp xúc với mặt cầu $(S)$ có phương trình $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=\dfrac{72}{7}$. Tính $\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}$, *(làm tròn kết quả đến hàng phần chục)*.

QUICK NOTE

QUICK NOTE

KQ:

**CÂU 23.** Trong không gian với hệ trục $Oxyz$ cho các điểm $M(2;1;4)$, $N(5;0;0)$, $P(1;-3;1)$. Gọi $I(a,b,c)$ là tâm của mặt cầu tiếp xúc với mặt phẳng $Oxyz$ đồng thời đi qua các điểm $M$, $N$, $P$. Tìm $c$, biết rằng $a+b+c<5$.

KQ:

**CÂU 24.** Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+(z-1)^2=4$ và điểm $A(2;2;2)$. Từ $A$ kẻ ba tiếp tuyến $AB$, $AC$, $AD$ với $B$, $C$, $D$ là các tiếp điểm. Gọi phương trình mặt phẳng $(BCD)$ là phương trình có dạng $2x+by+cz+d=0$. Tính giá trị $V=2+b+c+d$.

KQ:

**CÂU 25.** Trong KG $Oxyz$, cho hai mặt cầu $(S)$ và $(S')$ có phương trình lần lượt là $x^2+y^2+(z-1)^2=25$ và $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=1$. Mặt phẳng $(P)$ tiếp xúc $(S')$ và cắt $(S)$ theo giao tuyến là một đường tròn có chu vi $6\pi$. Viết khoảng cách từ $O$ đến $(P)$ dưới dạng số thập phân, lấy 2 chữ số sau dấu phẩy.

KQ:

**CÂU 26.** Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$ cho mặt cầu $(S)$ có phương trình $x^2+y^2+z^2+2(a+4b)x+2(a-b+c)y+2(b-c)z+d=0$, tâm $I$ nằm trên mặt phẳng $(\alpha)$ cố định. Biết rằng $4a+b-2c=4$. Khoảng cách từ điểm $D(1;2;-2)$ đến mặt phẳng $(\alpha)$ có dạng $\dfrac{1}{\sqrt{R}}$. Tìm $R$.

KQ:

**CÂU 27.** Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;2;1)$, $B(3;-1;1)$ và $C(-1;-1;1)$. Gọi $(S_1)$ là mặt cầu có tâm $A$, bán kính bằng 2, $(S_2)$ và $(S_3)$ là hai mặt cầu có tâm lần lượt là $B$ và $C$ và có bán kính đều bằng 1. Hỏi có bao nhiêu mặt phẳng tiếp xúc với cả ba mặt cầu $(S_1)$, $(S_2)$, $(S_3)$?

KQ:

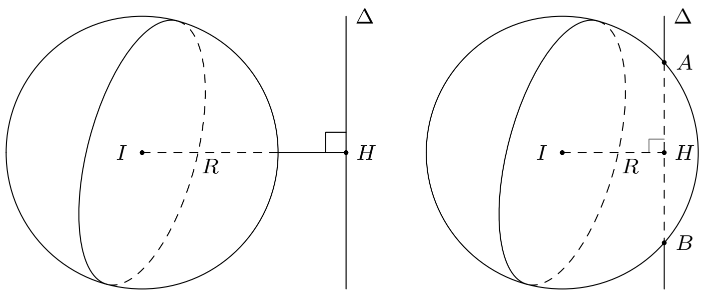
**CÂU 28.** Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho hai điểm $A\left(\dfrac{5+\sqrt{3}}{2};\dfrac{7-\sqrt{3}}{2};3\right)$ và $B\left(\dfrac{5-\sqrt{3}}{2};\dfrac{7+\sqrt{3}}{2};3\right)$ và mặt cầu $(S)$ có phương trình $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=6$. Xét mặt phẳng $(P)$ có phương trình $ax+by+cz+d=0$ $(a,\ b,\ c,\ d\in\mathbb{Z};\ d<-5)$ là mặt phẳng thay đổi luôn đi qua hai điểm $A$ và $B$. Gọi $(N)$ là hình nón có đỉnh là tâm của mặt cầu $(S)$ và đường tròn đáy là đường tròn giao tuyến của $(P)$ và $(S)$. Tính giá trị của $|a+b+c+d|$ khi thiết diện qua trục của hình nón $(N)$ có diện tích lớn nhất.

KQ:

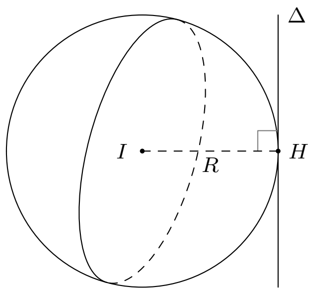
**CÂU 29.** Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho ba mặt cầu $(S_1)\colon (x+3)^2+(y-2)^2+(z-4)^2=1$; $(S_2):x^2+(y-2)^2+(z-4)^2=4$; $(S_3):x^2+y^2+z^2+4x-4y-1=0$. Hỏi có bao nhiêu mặt phẳng tiếp xúc với cả ba mặt cầu $(S_1)$, $(S_2)$, $(S_3)$?

KQ:

## 19 Vị trí tương đối của đường thẳng với mặt cầu



QUICK NOTE




Cho mặt cầu $(S)$ có tâm $I$, bán kính $R$ và đường thẳng $\Delta$. Để xét vị trí tương đối giữa $\Delta$ và $(S)$ ta tính $\mathrm{d}(I, \Delta)$ rồi so sánh với bán kính $R$.

- Nếu $\mathrm{d}(I, \Delta) > R$ thì $\Delta$ không cắt $(S)$.
- Nếu $\mathrm{d}(I, \Delta) = R$ thì $\Delta$ tiếp xúc với $(S)$ tại $H$.
- Nếu $\mathrm{d}(I, \Delta) < R$ thì $\Delta$ cắt $(S)$ tại hai điểm phần biệt $A$, $B$.

*Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho $(P)\colon A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ và $(Q)\colon A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$, $(A_2, B_2, C_2, D_2 \neq 0)$. Lúc đó*

- $(P) \equiv (Q) \Leftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2} = \dfrac{D_1}{D_2}$.
- $(P) \perp (Q) \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$.

**Phần I. Mỗi câu hỏi học sinh chọn một trong bốn phương án A, B, C, D.**

**CÂU 1.** Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta\colon \dfrac{x+2}{-1} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z-3}{-1}$ và và mặt cầu $(S)\colon x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 6z - 67 = 0$. Số điểm chung của $\Delta$ và $(S)$ là

**A** 3. **B** 0. **C** 1. **D** 2.

**CÂU 2.** Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta\colon \dfrac{x}{2} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z-2}{-1}$ và và mặt cầu $(S)\colon x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4z + 1 = 0$. Số điểm chung của $\Delta$ và $(S)$ là

**A** 0. **B** 1. **C** 2. **D** 3.

**CÂU 3.** Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta\colon \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + mt \\ z = -2t \end{cases}$ và mặt cầu $(S)\colon (x-1)^2 + (y+3)^2 + (z-2)^2 = 1$. Tìm tất cả các giá trị thực của $m$ để đường thẳng $\Delta$ không cắt mặt cầu $(S)$.

**A** $m > \dfrac{15}{2}$ hoặc $m < \dfrac{5}{2}$. **B** $m = \dfrac{15}{2}$ hoặc $m = \dfrac{5}{2}$.

**C** $\dfrac{5}{2} < m < \dfrac{15}{2}$. **D** $m \in \mathbb{R}$.

**CÂU 4.** Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta\colon \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + mt \\ z = -2t \end{cases}$ và mặt cầu $(S)\colon (x-1)^2 + (y+3)^2 + (z-2)^2 = 1$. Tìm tất cả các giá trị thực của $m$ để đường thẳng $\Delta$ tiếp xúc mặt cầu $(S)$.

**A** $m > \dfrac{15}{2}$ hoặc $m < \dfrac{5}{2}$. **B** $m = \dfrac{15}{2}$ hoặc $m = \dfrac{5}{2}$.

**C** $\dfrac{5}{2} < m < \dfrac{15}{2}$. **D** $m \in \mathbb{R}$.

**CÂU 5.** Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta\colon \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + mt \\ z = -2t \end{cases}$ và mặt cầu $(S)\colon (x-1)^2 + (y+3)^2 + (z-2)^2 = 1$. Giá trị của $m$ để đường thẳng $\Delta$ cắt mặt cầu $(S)$ tại hai điểm phân biệt là

QUICK NOTE

**A** $m \in \mathbb{R}$.
**B** $m > \dfrac{15}{2}$ hoặc $m < \dfrac{5}{2}$.
**C** $m = \dfrac{15}{2}$ hoặc $m = \dfrac{5}{2}$.
**D** $\dfrac{5}{2} < m < \dfrac{15}{2}$.

## 20 Lập phương trình mặt cầu liên quan đến đường thẳng

**Phần I. Mỗi câu hỏi học sinh chọn một trong bốn phương án A, B, C, D.**

**CÂU 1.** Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho điểm $I(1;-2;3)$. Phương trình mặt cầu tâm $I$ và tiếp xúc với trục $Oy$ là

**A** $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=9$.
**B** $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=\sqrt{10}$.
**C** $(x+1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=10$.
**D** $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=10$.

**CÂU 2.** Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, phương trình mặt cầu tâm $I(2;3;-1)$ sao cho mặt cầu cắt đường thẳng $d$ có phương trình $\begin{cases} x=11+2t \\ y=t \\ z=-25-2t \end{cases}$ tại hai điểm $A$, $B$ sao cho $AB=16$ là

**A** $(x-2)^2+(y-3)^2+(z+1)^2=280$.
**B** $(x+2)^2+(y+3)^2+(z-1)^2=289$.
**C** $(x-2)^2+(y-3)^2+(z+1)^2=17$.
**D** $(x-2)^2+(y-3)^2+(z+1)^2=289$.

**CÂU 3.** Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, biết mặt cầu $(S)$ có tâm $O$ và tiếp xúc với mặt phẳng $(P)\colon x-2y+2z+9=0$ tại điểm $H(a;b;c)$. Giá trị của tổng $a+b+c$ bằng

**A** $2$.
**B** $-1$.
**C** $1$.
**D** $-2$.

**CÂU 4.** Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z}{1}$ và điểm $I(1;0;2)$. Gọi $(S)$ là mặt cầu có tâm $I$, tiếp xúc với đường thẳng $d$. Bán kính của $(S)$ bằng

**A** $\dfrac{5}{3}$.
**B** $\dfrac{2\sqrt{5}}{3}$.
**C** $\dfrac{\sqrt{30}}{3}$.
**D** $\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$.

**CÂU 5.** Trong KG $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z+2}{1}$. Gọi $(S)$ là mặt cầu có bán kính $R=5$, có tâm $I$ thuộc đường thẳng $d$ và tiếp xúc với trục $Oy$. Biết rằng $I$ có tung độ dương. Điểm nào sau đây thuộc mặt cầu $(S)$?

**A** $M(-1;-2;1)$.
**B** $N(1;2;-1)$.
**C** $P(-5;2;-7)$.
**D** $Q(5;-2;7)$.

**CÂU 6.** Trong KG $Oxyz$, cho hai điểm $A(4;6;2)$, $B(2;-2;0)$ và mặt phẳng $(P)\colon x+y+z=0$. Xét đường thẳng $d$ thay đổi thuộc $(P)$ và đi qua $B$, gọi $H$ là hình chiếu vuông góc của $A$ trên $d$. Biết rằng khi $d$ thay đổi thì $H$ thuộc một đường tròn cố định. Tính bán kính $R$ của đường tròn đó.

**A** $R=\sqrt{3}$.
**B** $R=2$.
**C** $R=1$.
**D** $R=\sqrt{6}$.

**CÂU 7.** Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, mặt phẳng $(P)\colon 2x+6y+z-3=0$ cắt trục $Oz$ và đường thẳng $d\colon \dfrac{x-5}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z-6}{-1}$ lần lượt tại $A$ và $B$. Phương trình mặt cầu đường kính $AB$ là

**A** $(x+2)^2+(y-1)^2+(z+5)^2=36$.
**B** $(x-2)^2+(y+1)^2+(z-5)^2=9$.
**C** $(x+2)^2+(y-1)^2+(z+5)^2=9$.
**D** $(x-2)^2+(y+1)^2+(z-5)^2=36$.

**CÂU 8.** Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x}{2}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z-2}{1}$ và hai mặt phẳng $(P)\colon x-2y+2z=0$, $(Q)\colon x-2y+3z-5=0$. Mặt cầu $(S)$ có tâm $I$ là giao điểm của đường thẳng $(d)$ và mặt phẳng $(P)$. Mặt phẳng $(Q)$ tiếp xúc với mặt cầu $(S)$. Mặt cầu $(S)$ có phương trình là

**A** $(S)\colon (x+2)^2+(y+4)^2+(z+3)^2=1$.
**B** $(S)\colon (x-2)^2+(y-4)^2+(z-3)^2=6$.
**C** $(S)\colon (x-2)^2+(y-4)^2+(z-3)^2=\dfrac{2}{7}$.
**D** $(S)\colon (x-2)^2+(y+4)^2+(z+4)^2=8$.

**CÂU 9.** Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z+2}{1}$ và điểm $I(1;0;0)$. Phương trình mặt cầu $(S)$ có tâm $I$ và cắt đường thẳng $d$ tại hai điểm $A$, $B$ sao cho tam giác $IAB$ đều là

Ⓐ $(x+1)^2+y^2+z^2=\dfrac{20}{3}$.
Ⓑ $(x-1)^2+y^2+z^2=\dfrac{20}{3}$.
Ⓒ $(x-1)^2+y^2+z^2=\dfrac{16}{4}$.
Ⓓ $(x-1)^2+y^2+z^2=\dfrac{5}{3}$.

**Phần III. Học sinh điền kết quả vào ô trống.**

**CÂU 10.** Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho điểm $I(1;-2;3)$ và đường thẳng $d$ có phương trình $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z+3}{-1}$. Phương trình mặt cầu tâm $A$, tiếp xúc với $d$ có dạng $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=d$. Tính $a+b+c-d$.

KQ: | | | | |

**CÂU 11.** Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x+5}{2}=\dfrac{y-7}{-2}=\dfrac{z}{1}$ và điểm $M(4;1;6)$. Đường thẳng $d$ cắt mặt cầu $(S)$ có tâm $M$, tại hai điểm $A$, $B$ sao cho $AB=6$. Phương trình của mặt cầu $(S)$ có dạng có dạng $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=d$. Tính $a\cdot b+c\cdot d$.

KQ: | | | | |

**CÂU 12.** Trong KG $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon 2x-2y-z-4=0$ và điểm $I(1;2;3)$. Mặt cầu tâm $I$ tiếp xúc với $(P)$ tại điểm $H(a;b;c)$. Tính $a+b+c$.

KQ: | | | | |

**CÂU 13.** Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho hai mặt cầu $(S_1)$, $(S_2)$ có phương trình lần lượt là $(S_1): x^2+y^2+z^2=25$ và $(S_2): x^2+y^2+(z-1)^2=4$. Một đường thẳng $d$ vuông góc với vectơ $\vec{u}=(1;-1;0)$ tiếp xúc với mặt cầu $(S_2)$ và cắt mặt cầu $(S_1)$ theo một đoạn thẳng có độ dài bằng 8. Một vectơ chỉ phương của $d$ có tọa độ là $(1;a;b)$. Tính $a\cdot b$.

KQ: | | | | |

**CÂU 14.** Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2+4x-6y+m=0$ ($m$ là tham số) và đường thẳng $\Delta\colon \begin{cases} x=4+2t\\ y=3+t\\ z=3+2t\end{cases}$. Biết đường thẳng $\Delta$ cắt mặt cầu $(S)$ tại hai điểm phân biệt $A$, $B$ sao cho $AB=8$. Tìm giá trị của $m$.

KQ: | | | | |

**CÂU 15.** Trong KG $Oxyz$ cho mặt phẳng $(P)\colon z+2=0$, điểm $K(0;0;-2)$ và đường thẳng $d\colon \dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{1}$. Phương trình mặt cầu tâm thuộc đường thẳng $d$ và cắt mặt phẳng $(P)$ theo thiết diện là đường tròn tâm $K$, bán kính $r=\sqrt{5}$ có dạng $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=d$. Tính $a+b+c+d$.

KQ: | | | | |

**CÂU 16.** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(-2;0;0)$, $B(0;-2;0)$, $C(0;0;-2)$. Gọi $D$ là điểm khác $O$ sao cho $DA, DB, DC$ đôi một vuông góc nhau và $I(a;b;c)$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$. Tính $S=a+b+c$.

KQ: | | | | |

**CÂU 17.** Trong không gian $Oxyz$, cho $(P)\colon 2x+y+2z-1=0$, $A(0;0;4)$, $B(3;1;2)$. Một mặt cầu $(S)$ luôn đi qua $A, B$ và tiếp xúc với $(P)$ tại $C$. Biết rằng, $C$ luôn thuộc một đường tròn cố định bán kính $r$. Bán kính $r$ của đường tròn đó có dạng $\dfrac{a\sqrt{5}}{3}$, tính giá trị $a+b$.

KQ: | | | | |

**CÂU 18.** Trong không gian cho mặt phẳng $(P)\colon x-z+6=0$ và hai mặt cầu $(S_1): x^2+y^2+z^2=25$, $(S_2): x^2+y^2+z^2+4x-4z+7=0$. Biết rằng tập hợp tâm $I$ các mặt cầu tiếp xúc với cả hai mặt cầu $(S_1)$, $(S_2)$ và tâm $I$ nằm trên $(P)$ là một đường cong. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cong đó bằng $\dfrac{a}{b}\pi$, tính tổng $S=a+b$.

QUICK NOTE

QUICK NOTE

KQ: | | | | |

**CÂU 19.** Trong KG $Oxyz$, mặt cầu $(S)$ có tâm thuộc mặt $(P)\colon x+2y+z-7=0$ và đi qua hai điểm $A(1;2;1)$ và $B(2;5;3)$. Bán kính nhỏ nhất của mặt cầu $(S)$ bằng (*kết quả làm tròn đến hàng phần trăm*).

KQ: | | | | |

## 21 Lập PTĐT liên quan đến mặt cầu

**Phần I. Mỗi câu hỏi học sinh chọn một trong bốn phương án A, B, C, D.**

**CÂU 1.** Trong KG $Oxyz$, cho điểm $A(3;1;1)$, $d_1\colon \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z}{2}$, $d_2\colon \begin{cases} x=1 \\ y=t \\ z=0 \end{cases}$. Mặt cầu $(S)$ đi qua $A$, có tâm $I$ nằm trên $d_1$, biết rằng $(S)$ cắt $d_2$ tại hai điểm $B$, $C$ sao cho $\widehat{BAC}=90^\circ$. Tìm tọa độ điểm $I$.

**A** $I(2;3;2)$. **B** $I(3;4;4)$. **C** $I(1;2;0)$. **D** $I(0;0;2)$.

**CÂU 2.** Trong KG $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2=4$ và đường thẳng $d\colon \dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z}{1}$. Hai mặt phẳng $(P)$, $(P')$ chứa $d$ và tiếp xúc với $(S)$ tại $A$ và $B$. Đường thẳng $AB$ đi qua điểm có tọa độ là

**A** $\left(\dfrac{1}{3};-\dfrac{1}{3};-\dfrac{4}{3}\right)$. **B** $\left(1;1;-\dfrac{4}{3}\right)$. **C** $\left(1;\dfrac{1}{3};-\dfrac{4}{3}\right)$. **D** $\left(\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{3};-\dfrac{4}{3}\right)$.

**CÂU 3.** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $E(1;1;1)$, mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2=4$ và mặt phẳng $(P)\colon x-3y+5z-3=0$. Gọi $\Delta$ là đường thẳng đi qua $E$, nằm trong $(P)$ và cắt mặt cầu $(S)$ tại hai điểm $A, B$ sao cho tam giác $OAB$ là tam giác đều. Phương trình của đường thẳng $\Delta$ là

**A** $\dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-1}{-1}$. **B** $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-1}{-1}$.

**C** $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-1}{1}$. **D** $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-1}{-1}$.

**CÂU 4.** Trong không gian hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;1;1), B(2;2;1)$ và mặt phẳng $(P)\colon x+y+2z=0$. Mặt cầu $(S)$ thay đổi qua $A, B$ và tiếp xúc với $(P)$ tại $H$. Biết $H$ chạy trên 1 đường tròn cố định. Tìm bán kính của đường tròn đó.

**A** $3\sqrt{2}$. **B** $2\sqrt{3}$. **C** $\sqrt{3}$. **D** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

**CÂU 5.** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2-2x+2z+1=0$ và đường thẳng $d\colon \dfrac{x}{1}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z}{-1}$. Hai mặt phẳng $(P),(P')$ chứa $d$ và tiếp xúc với $(S)$ tại $T, T'$. Tìm tọa độ trung điểm $H$ của $TT'$.

**A** $H\left(-\dfrac{7}{6};\dfrac{1}{3};\dfrac{7}{6}\right)$. **B** $H\left(\dfrac{5}{6};\dfrac{2}{3};-\dfrac{7}{6}\right)$. **C** $H\left(\dfrac{5}{6};\dfrac{1}{3};-\dfrac{5}{6}\right)$. **D** $H\left(-\dfrac{5}{6};\dfrac{1}{3};\dfrac{5}{6}\right)$.

**CÂU 6.** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $E(1;1;1)$, mặt phẳng $(P)\colon x-3y+5z-3=0$ và mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2=4$. Gọi $\Delta$ là đường thẳng qua $E$, nằm trong mặt phẳng $(P)$ và cắt $(S)$ tại 2 điểm phân biệt $A, B$ sao cho $AB=2$. PTĐT $\Delta$ là

**A** $\begin{cases} x=1-2t \\ y=2-t \\ z=1-t \end{cases}$. **B** $\begin{cases} x=1+2t \\ y=1+t \\ z=1+t \end{cases}$. **C** $\begin{cases} x=1-2t \\ y=-3+t \\ z=5+t \end{cases}$. **D** $\begin{cases} x=1+2t \\ y=1-t \\ z=1-t \end{cases}$.

**CÂU 7.** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon 2x-2y+z+3=0$ và mặt cầu $(S)\colon (x-1)^2+(y+3)^2+z^2=9$ và đường thẳng $d\colon \dfrac{x}{-2}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z+1}{2}$. Cho các phát biểu sau đây:

I. Đường thẳng $d$ cắt mặt cầu $(S)$ tại 2 điểm phân biệt.

II. Mặt phẳng $(P)$ tiếp xúc với mặt cầu $(S)$.

III. Mặt phẳng $(P)$ và mặt cầu $(S)$ không có điểm chung.

QUICK NOTE

IV. Đường thẳng $d$ cắt mặt phẳng $(P)$ tại một điểm.

Số phát biểu đúng là

(A) 4. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

**CÂU 8.** Trong KG $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon (x-2)^2+(y-3)^2+(z-4)^2=14$ và mặt phẳng $(\alpha)\colon x+3y+2z-5=0$. Biết đường thẳng $\Delta$ nằm trong $(\alpha)$, cắt trục $Ox$ và tiếp xúc với $(S)$. Vec-tơ nào sau đây là vec-tơ chỉ phương của $\Delta$ ?

(A) $\vec{u}=(4;-2;1)$. (B) $\vec{v}=(2;0;-1)$. (C) $\vec{m}=(-3;1;0)$. (D) $\vec{n}=(1;-1;1)$.

**CÂU 9.** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon 2x-2y-z+9=0$ và mặt cầu $(S)\colon (x-3)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=100$. Mặt phẳng $(P)$ cắt mặt cầu $(S)$ theo một đường tròn $(C)$. Tìm tọa độ tâm $K$ và bán kính $r$ của đường tròn $(C)$ là

(A) $K(3;-2;1)$, $r=10$. (B) $K(-1;2;3)$, $r=8$.

(C) $K(1;-2;3)$, $r=8$. (D) $K(1;2;3)$, $r=6$.

**CÂU 10.** Trong KG $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon x-2y+2z-3=0$ và mặt cầu $(S)$ tâm $I(5;-3;5)$, bán kính $R=2\sqrt{5}$. Từ một điểm $A$ thuộc mặt phẳng $(P)$ kẻ một đường thẳng tiếp xúc với mặt cầu $(S)$ tại $B$. Tính $OA$ biết $AB=4$.

(A) $OA=\sqrt{11}$. (B) $OA=5$. (C) $OA=3$. (D) $OA=\sqrt{6}$.

**CÂU 11.** Trong KG $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2=9$ và điểm $M\left(x_0;y_0;z_0\right)$ thuộc $d\colon \begin{cases} x=1+t \\ y=1+2t \\ z=2-3t \end{cases}$. Ba điểm $A$, $B$, $C$ phân biệt cùng thuộc mặt cầu sao cho $MA$, $MB$, $MC$ là tiếp tuyến của mặt cầu. Biết rằng mặt phẳng $(ABC)$ đi qua điểm $D(1;1;2)$. Tổng $T=x_0^2+y_0^2+z_0^2$ bằng

(A) 30. (B) 26. (C) 20. (D) 21.

**CÂU 12.** Trong KG $Oxyz$ cho hai điểm $A(0;0;3)$, $B(-2;0;1)$ và mặt phẳng $(\alpha)\colon 2x-y+2z+8=0$. Hỏi có bao nhiêu điểm $C$ trên mặt phẳng $(\alpha)$ sao cho tam giác $ABC$ đều?

(A) 2. (B) 1. (C) 0. (D) Vô số.

**CÂU 13.** Trong KG $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)$ tâm $I(1;3;9)$ bán kính bằng 3. Gọi $M$, $N$ là hai điểm lần lượt thuộc hai trục $Ox$, $Oz$ sao cho đường thẳng $MN$ tiếp xúc với $(S)$, đồng thời mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OIMN$ có bán kính bằng $\dfrac{13}{2}$. Gọi $A$ là tiếp điểm của $MN$ và $(S)$, giá trị $AM\cdot AN$ bằng

(A) 39. (B) $12\sqrt{3}$. (C) 18. (D) $28\sqrt{3}$.

**CÂU 14.** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)$ tâm $I(4;1;2)$ bán kính bằng 2. Gọi $M$; $N$ là hai điểm lần lượt thuộc hai trục $Ox$; $Oy$ sao cho đường thẳng $MN$ tiếp xúc với $(S)$, đồng thời mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OIMN$ có bán kính bằng $\dfrac{7}{2}$. Gọi $A$ là tiếp điểm của $MN$ và $(S)$, giá trị $AM\cdot AN$ bằng

(A) $6\sqrt{2}$. (B) 14. (C) 8. (D) $9\sqrt{2}$.

**Phần III. Học sinh điền kết quả vào ô trống.**

**CÂU 15.** Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2-2x-4y+6z-13=0$ và đường thẳng $d\colon \dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z-1}{1}$. Điểm $M(a;b;c)$, $(a>0)$ nằm trên đường thẳng $d$ sao cho từ $M$ kẻ được ba tiếp tuyến $MA$, $MB$, $MC$ đến mặt cầu $(S)$ ($A$, $B$, $C$ là các tiếp điểm) và $\widehat{AMB}=60^\circ$, $\widehat{BMC}=60^\circ$, $\widehat{CMA}=120^\circ$. Biết $a^3+b^3+c^3=\dfrac{m}{n}$, tính $m+n$.

KQ: | | | | |

**CÂU 16.** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)$ tâm $I(1;4;2)$, bán kính bằng 2. Gọi $M$, $N$ là hai điểm lần lượt thuộc hai trục $Ox$, $Oy$ sao cho đường thẳng $MN$ tiếp xúc với $(S)$, đồng thời mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OIMN$ có bán kính bằng $\dfrac{7}{2}$. Gọi $A$ là tiếp điểm của $MN$ và $(S)$, tính giá trị $AM\cdot AN$ (làm tròn đến hàng phần trăm).

KQ: | | | | |

QUICK NOTE

**CÂU 17.** Trong KG $Oxyz$ cho mặt cầu $(S)$ tâm $I(9;3;1)$ bán kính bằng 3. Gọi $M, N$ là hai điểm lần lượt thuộc 2 trục $Ox, Oz$ sao cho đường thẳng $MN$ tiếp xúc với $(S)$, đồng thời mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OIMN$ có bán kính bằng $\frac{13}{2}$. Gọi $A$ là tiếp điểm của $MN$ và $(S)$. Tính giá trị $AM \cdot AN$ (làm tròn đến hàng phần chục).

KQ: | | | | |

**CÂU 18.** Trong KG $Oxyz$, cho phương trình mặt cầu $(S_m): x^2+y^2+z^2+(m+2)x+2my-2mz-m-3=0$. Biết rằng với mọi số thực $m$ thì $(S_m)$ luôn chứa một đường tròn cố định. Tính bán kính $r$ của đường tròn đó (làm tròn đến hàng phần trăm).

KQ: | | | | |

**CÂU 19.** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta\colon \begin{cases} x = 3+t \\ y = -1-t, \\ z = -2+t \end{cases}$, $(t \in \mathbb{R})$, điểm $M(1;2;-1)$ và mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2-4x+10y+14z+64=0$. Gọi $\Delta'$ là đường thẳng đi qua $M$ cắt đường thẳng $\Delta$ tại $A$, cắt mặt cầu tại $B$ sao cho $\frac{AM}{AB}=\frac{1}{3}$ và điểm $B$ có hoành độ là số nguyên. Phương trình mặt phẳng trung trực đoạn $AB$ có dạng $2x+by+cz+d=0$. Khi đó $b+c+d$ bằng

KQ: | | | | |

**CÂU 20.** Một doanh nghiệp dự kiến lợi nhuận khi sản xuất $x$ sản phẩm $(0 \le x \le 300)$ được cho bởi hàm số $y=-x^3+300x^2$ (đơn vị: đồng).

a) Nêu ra các khoảng số lượng sản phẩm mà doanh nghiệp luôn có lợi nhuận?

b) Nêu ra các khoảng số lượng sản phẩm mà doanh nghiệp luôn thiệt hại?

c) So sánh lợi nhuận khi sản xuất 100 sản phẩm, 200 sản phẩm và 300 sản phẩm?

d) Doanh nghiệp cần sản xuất bao nhiêu sản phẩm để đạt lợi nhuận lớn nhất? Lợi nhuận lớn nhất đó là bao nhiêu?

e) Nếu doanh nghiệp muốn duy trì lợi nhuận không dưới 2.000.000 đồng, họ nên sản xuất ít nhất bao nhiêu sản phẩm và không vượt quá bao nhiêu sản phẩm?

**CÂU 21.** Trong KG $Oxyz$, cho phương trình mặt cầu $(S_m)\colon x^2+y^2+z^2+(m+2)x+2my-2mz-m-3=0$. Biết rằng với mọi số thực $m$ thì $(S_m)$ luôn chứa một đường tròn cố định. Tính bán kính $r$ của đường tròn đó (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

KQ: | | | | |

**CÂU 22.** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta\colon \begin{cases} x = 3+t \\ y = -1-t, \\ z = -2+t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$, điểm $M(1;2;-1)$ và mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2-4x+10y+14z+64=0$. Gọi $\Delta'$ là đường thẳng đi qua $M$ cắt đường thẳng $\Delta$ tại $A$, cắt mặt cầu tại $B$ sao cho $\frac{AM}{AB}=\frac{1}{3}$ và điểm $B$ có hoành độ là số nguyên. Biết phương trình mặt phẳng trung trực đoạn $AB$ có dạng $ax+by+cz+d=0$. Tính $2a+b-12c+d$.

KQ: | | | | |

**CÂU 23.** Trong KG $Oxyz$, cho $(S)\colon (x+3)^2+(y-2)^2+(z-5)^2=36$, điểm $M(7;1;3)$. Gọi $\Delta$ là đường thẳng di động luôn đi qua $M$ và tiếp xúc với mặt cầu $(S)$ tại $N$. Tiếp điểm $N$ di động trên đường tròn $(T)$ có tâm $J(a;b;c)$. Gọi $k=2a-5b+10c$, tính giá trị của $k$.

KQ: | | | | |

**CÂU 24.** Trong KG $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2-4x+4y-2z-7=0$ và đường thẳng $d_m$ là giao tuyến của hai mặt phẳng $x+(1-2m)y+4mz-4=0$ và $2x+my-(2m+1)z-8=0$. Khi đó $m$ thay đổi các giao điểm của $d_m$ và $(S)$ nằm trên một đường tròn cố định. Tính bán kính $r$ của đường tròn đó (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

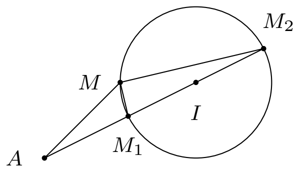
KQ: | | | | |

QUICK NOTE

## 22 GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT LIÊN QUAN ĐẾN MẶT CẦU

*Bài toán:* Cho điểm $A$ và mặt cầu $(S)$ có tâm $I$, bán kính $R$, $M$ là điểm di động trên $(S)$. Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của $AM$.

**Lời giải:**




Xét $A$ nằm ngoài mặt cầu $(S)$.
Gọi $M_1$, $M_2$ lần lượt là giao điểm của đường thẳng $AI$ với mặt cầu $(S)\,(AM_1 < AM_2)$ và $(\alpha)$ là mặt phẳng đi qua $M$ và đường thẳng $AI$.
Khi đó $(\alpha)$ cắt $(S)$ theo một đường tròn lớn $(C)$.
Ta có $\widehat{M_1MM_2} = 90^\circ$, nên $\widehat{AMM_2}$ và $\widehat{AM_1M}$ là các góc tù.
Nên trong các tam giác $AMM_1$ và $AMM_2$.
Ta có $AI - R = AM_1 \le AM \le AM_2 = AI + R$.
Tương tự với $A$ nằm trong mặt cầu ta có $R - AI \le AM \le R + AI$.
Vậy $\min AM = |AI - R|$, $\max AM = R + AI$.

**Phần I. Mỗi câu hỏi học sinh chọn một trong bốn phương án A, B, C, D.**

**CÂU 1.** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(0;-1;3)$, $B(-2;-8;-4)$, $C(2;-1;1)$ và mặt cầu $(S)\colon (x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=14$. Gọi $M\,(x_M;y_M;z_M)$ là điểm trên $(S)$ sao cho biểu thức $|3\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính $P=x_M+y_M$.

Ⓐ $P=0$. Ⓑ $P=6$. Ⓒ $P=\sqrt{14}$. Ⓓ $P=3\sqrt{14}$.

**CÂU 2.** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho ba điểm $A(8;5;-11)$, $B(5;3;-4)$, $C(1;2;-6)$ và mặt cầu $(S)\colon (x-2)^2+(y-4)^2+(z+1)^2=9$. Gọi điểm $M(a;b;c)$ là điểm trên $(S)$ sao cho $|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Hãy tìm $a+b$.

Ⓐ 6. Ⓑ 2. Ⓒ 4. Ⓓ 9.

**CÂU 3.** Cho mặt cầu $(S)\colon (x-2)^2+(y-1)^2+(z-3)^2=9$ và hai điểm $A(1;1;3)$, $B(21;9;-13)$. Điểm $M(a;b;c)$ thuộc mặt cầu $(S)$ sao cho $3MA^2+MB^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó giá trị của biểu thức $T=abc$ bằng

Ⓐ 3. Ⓑ 8. Ⓒ 6. Ⓓ $-18$.

**CÂU 4.** Trong không gian $Oxyz$ cho $A(0;0;2)$, $B(1;1;0)$ và mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+(z-1)^2=\dfrac{1}{4}$. Xét điểm $M$ thay đổi thuộc $(S)$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $MA^2+2MB^2$ bằng

Ⓐ $\dfrac{1}{2}$. Ⓑ $\dfrac{3}{4}$. Ⓒ $\dfrac{19}{4}$. Ⓓ $\dfrac{21}{4}$.

**CÂU 5.** Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho 2 điểm $A$, $B$ thay đổi trên mặt cầu $x^2+y^2+(z-1)^2=25$ thỏa mãn $AB=6$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $OA^2-OB^2$ là

Ⓐ 12. Ⓑ 6. Ⓒ 10. Ⓓ 24.

**CÂU 6.** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon (x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=9$ và hai điểm $A(4;3;1)$, $B(3;1;3)$; $M$ là điểm thay đổi trên $(S)$. Gọi $m$, $n$ là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=2MA^2-MB^2$. Xác định $m-n$.

Ⓐ 64. Ⓑ 68. Ⓒ 60. Ⓓ 48.

**CÂU 7.** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác $ABC$ với $A(2;1;3)$, $B(1;-1;2)$, $C(3;-6;0)$, $D(2;-2;-1)$. Điểm $M(x;y;z)$ thuộc mặt phẳng $(P)\colon x-y+z+2=0$ sao cho $S=MA^2+MB^2+MC^2+MD^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính giá trị của biểu thức $P=x^2+y^2+z^2$.

Ⓐ 6. Ⓑ 2. Ⓒ 0. Ⓓ $-2$.

**CÂU 8.** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon (x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=9$ và hai điểm $A(4;3;1)$, $B(3;1;3)$; $M$ là điểm thay đổi trên $(S)$. Gọi $m, n$ lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P^2=2MA^2-MB^2$. Xác định $(m-n)$.

Ⓐ 64. Ⓑ 68. Ⓒ 60. Ⓓ 48.

**CÂU 9.** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;-2;4)$, $B(-3;3;-1)$ và mặt cầu $(S)\colon (x-1)^2+(y-3)^2+(z-3)^2=3$. Xét điểm $M$ thay đổi thuộc mặt cầu $(S)$,

QUICK NOTE

giá trị nhỏ nhất của $2MA^2 + 3MB^2$ bằng

(A) 103. (B) 108. (C) 105. (D) 100.

**CÂU 10.** Trong KG $Oxyz$, cho bốn điểm $A(1;0;0)$, $B(2;1;3)$, $C(0;2;-3)$, $D(2;0;\sqrt{7})$. Gọi $M$ là điểm thuộc mặt cầu $(S)\colon (x+2)^2+(y-4)^2+z^2 = 39$ thỏa mãn $MA^2+2\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC} = 8$. Biết rằng đoạn thẳng $MD$ đạt giá trị lớn nhất. Tìm giá trị lớn nhất đó.

(A) $\sqrt{7}$. (B) $2\sqrt{7}$. (C) $3\sqrt{7}$. (D) $4\sqrt{7}$.

**CÂU 11.** Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho 5 điểm $A(1;0;0)$, $B(-1;1;0)$, $C(0;-1;0)$, $D(0;1;0)$, $E(0;3;0)$. $M$ là điểm thay đổi trên mặt cầu $(S)\colon x^2+(y-1)^2+z^2 = 1$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = 2\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right| + 3\left|\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{ME}\right|$ là

(A) 12. (B) $12\sqrt{2}$. (C) 24. (D) $24\sqrt{2}$.

**CÂU 12.** Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon (x+1)^2+(y-4)^2+z^2 = 8$ và điểm $A(3;0;0); B(4;2;1)$. Điểm $M$ thay đổi nằm trên mặt cầu, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = MA + 2MB$.

(A) $P = 2\sqrt{2}$. (B) $P = 3\sqrt{2}$. (C) $P = 4\sqrt{2}$. (D) $P = 6\sqrt{2}$.

**CÂU 13.** Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon (x+1)^2+(y-4)^2+z^2 = 8$ và điểm $A(3;0;0)$, $B(4;2;1)$. Điểm $M$ thay đổi nằm trên mặt cầu, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = MA + 2MB$.

(A) $P = 2\sqrt{2}$. (B) $P = 3\sqrt{2}$. (C) $P = 4\sqrt{2}$. (D) $P = 6\sqrt{2}$.

**CÂU 14.** Trong KG $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon (x-1)^2+y^2+(z-2)^2 = 10$ và hai điểm $A(1;2;-4)$ và $B(1;2;14)$. Điểm $M$ thay đổi trên mặt cầu $(S)$. Giá trị nhỏ nhất của $(MA + 2MB)$ bằng

(A) $2\sqrt{82}$. (B) $3\sqrt{79}$. (C) $5\sqrt{79}$. (D) $3\sqrt{82}$.

**CÂU 15.** Trong KG $Oxyz$, cho hai điểm $A(-1;0;0)$ và $B(2;3;4)$. Gọi $(P)$ là mặt phẳng chứa đường tròn giao tuyến của hai mặt cầu $(S_1)\colon (x-1)^2+(y+1)^2+z^2 = 4$ và $(S_2)\colon x^2+y^2+z^2+2y-2 = 0$. Xét $M$, $N$ là hai điểm bất kỳ thuộc mặt phẳng $(P)$ sao cho $MN = 1$. Giá trị nhỏ nhất của $AM + BN$ bằng

(A) 5. (B) 3. (C) 6. (D) 4.

**CÂU 16.** Trong KG $Oxyz$, cho các điểm $A(0;0;2)$ và $B(3;4;1)$. Gọi $(P)$ là mặt phẳng chứa đường tròn giao tuyến của hai mặt cầu $(S_1)\colon (x-1)^2+(y-1)^2+(z+3)^2 = 25$ với $(S_2)\colon x^2+y^2+z^2-2x-2y-14 = 0$. $M$, $N$ là hai điểm thuộc $(P)$ sao cho $MN = 1$. Giá trị nhỏ nhất của $AM + BN$ là

(A) $\sqrt{34}-1$. (B) 5. (C) $\sqrt{34}$. (D) 3.

**CÂU 17.** Trong KG $Oxyz$ cho mặt cầu $(S)$ có phương trình $x^2+y^2+z^2-4x+2y-2z-3 = 0$ và điểm $A(5;3;-2)$. Một đường thẳng $d$ thay đổi luôn đi qua $A$ và luôn cắt mặt cầu tại hai điểm phân biệt $M, N$. Tính giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = AM + 4AN$.

(A) $S_{\min} = 30$. (B) $S_{\min} = 20$.

(C) $S_{\min} = \sqrt{34}-3$. (D) $S_{\min} = 5\sqrt{34}-9$.

**CÂU 18.** Trong KG $Oxyz$ cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{3} = \dfrac{z-3}{4}$ và mặt cầu $(S)\colon (x+3)^2+(y+4)^2+(z+5)^2 = 729$. Cho biết điểm $A(-2;-2;-7)$, điểm $B$ thuộc giao tuyến của mặt cầu $(S)$ và mặt phẳng $(P)\colon 2x+3y+4z-107 = 0$. Khi điểm $M$ di động trên đường thẳng $d$ giá trị nhỏ nhất của biểu thức $MA + MB$ bằng

(A) $5\sqrt{30}$. (B) 27. (C) $5\sqrt{29}$. (D) $\sqrt{742}$.

**CÂU 19.** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt cầu $(S_1)\colon x^2+y^2+z^2 = 1$, $(S_2)\colon x^2+(y-4)^2+z^2 = 4$ và các điểm $A(4;0;0)$, $B\left(\dfrac{1}{4};0;0\right)$, $C(1;4;0)$, $D(4;4;0)$. Gọi $M$ là điểm thay đổi trên $(S_1)$, $N$ là điểm thay đổi trên $(S_2)$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $Q = MA + 2ND + 4MN + 4BC$ là

(A) $2\sqrt{265}$. (B) $\sqrt{265}$. (C) $3\sqrt{265}$. (D) $4\sqrt{265}$.

**CÂU 20.** Trong KG $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2-2x-4y-4 = 0$ và hai điểm $A(4;2;4)$, $B(1;4;2)$. $MN$ là dây cung của mặt cầu thỏa mãn $\overrightarrow{MN}$ cùng hướng với $\vec{u} = (0;1;1)$ và $MN = 4\sqrt{2}$. Tính giá trị lớn nhất của $|AM - BN|$.

(A) $\sqrt{41}$. (B) $4\sqrt{2}$. (C) 7. (D) $\sqrt{17}$.

QUICK NOTE

**CÂU 21.** Trong KG $Oxyz$, gọi điểm $M(a;b;c)$ (với $a$, $b$, $c$ là các phân số tối giản) thuộc mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2-2x-4y-4z-7=0$ sao cho biểu thức $T=2a+3b+6c$ đạt giá trị lớn nhất. Khi đó giá trị biểu thức $P=2a-b+c$ bằng

Ⓐ $\dfrac{12}{7}$. Ⓑ 8. Ⓒ 6. Ⓓ $\dfrac{51}{7}$.

**CÂU 22.** Cho $x$, $y$, $z$, $a$, $b$, $c$ là các số thực thay đổi thỏa mãn $(x+1)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=1$ và $a+b+c=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P=(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2$.

Ⓐ $\sqrt{3}-1$. Ⓑ $\sqrt{3}+1$. Ⓒ $4-2\sqrt{3}$. Ⓓ $4+2\sqrt{3}$.

**CÂU 23.** Trong KG $Oxyz$, cho hai điểm $A(-2;2;-2)$; $B(3;-3;3)$. Điểm $M$ trong không gian thỏa mãn $\dfrac{MA}{MB}=\dfrac{2}{3}$. Khi đó độ dài $OM$ lớn nhất bằng

Ⓐ $6\sqrt{3}$. Ⓑ $12\sqrt{3}$. Ⓒ $\dfrac{5\sqrt{3}}{2}$. Ⓓ $5\sqrt{3}$.

**CÂU 24.** Trong KG $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2+2x-4y-2z+\dfrac{9}{2}=0$ và hai điểm $A(0;2;0)$, $B(2;-6;-2)$. Điểm $M(a;b;c)$ thuộc $(S)$ thỏa mãn $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}$ có giá trị nhỏ nhất. Tổng $a+b+c$ bằng

Ⓐ $-1$. Ⓑ 1. Ⓒ 3. Ⓓ 2.

**CÂU 25.** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2=3$. Một mặt phẳng $(\alpha)$ tiếp xúc với mặt cầu $(S)$ và cắt các tia $Ox$, $Oy$, $Oz$ lần lượt tại $A$, $B$, $C$ thỏa mãn $OA^2+OB^2+OC^2=27$. Phương trình mặt phẳng $(\alpha)$ là

Ⓐ $x+y+z+3=0$. Ⓑ $x+y+z-3=0$.

Ⓒ $x+2y+3z-3=0$. Ⓓ $x+2y+3z+3=0$.

**CÂU 26.** Trong KG $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon x+y+z-1=0$, đường thẳng $d\colon \dfrac{x-15}{1}=\dfrac{y-22}{2}=\dfrac{z-37}{2}$ và mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2-8x-6y+4z+4=0$. Một đường thẳng $(\Delta)$ thay đổi cắt mặt cầu $(S)$ tại hai điểm $A,B$ sao cho $AB=8$. Gọi $A'$, $B'$ là hai điểm lần lượt thuộc mặt phẳng $(P)$ sao cho $AA'$, $BB'$ cùng song song với $d$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $AA'+BB'$ là

Ⓐ $\dfrac{8+30\sqrt{3}}{9}$. Ⓑ $\dfrac{24+18\sqrt{3}}{5}$. Ⓒ $\dfrac{12+9\sqrt{3}}{5}$. Ⓓ $\dfrac{16+60\sqrt{3}}{9}$.

**CÂU 27.** Trong KG $Oxyz$ cho mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2=1$. Điểm $M\in(S)$ có tọa độ dương; mặt phẳng $(P)$ tiếp xúc với $(S)$ tại $M$ cắt các tia $Ox$; $Oy$; $Oz$ tại các điểm $A$, $B$, $C$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=\left(1+OA^2\right)\left(1+OB^2\right)\left(1+OC^2\right)$ là

Ⓐ 24. Ⓑ 27. Ⓒ 64. Ⓓ 8.

**CÂU 28.** Cho $a$, $b$, $c$, $d$, $e$, $f$ là các số thực thỏa mãn $\begin{cases}(d-1)^2+(e-2)^2+(f-3)^2=1\\(a+3)^2+(b-2)^2+c^2=9.\end{cases}$

Gọi giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $F=\sqrt{(a-d)^2+(b-e)^2+(c-f)^2}$ lần lượt là $M$, $m$. Khi đó, $M-m$ bằng

Ⓐ 10. Ⓑ $\sqrt{10}$. Ⓒ 8. Ⓓ $2\sqrt{2}$.

**CÂU 29.** Trong KG $Oxyz$, Cho điểm $A(2t;2t;0)$, $B(0;0;t)$ (với $t>0$). Điểm $P$ di động thỏa mãn $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=3$. Biết rằng có giá trị $t=\dfrac{a}{b}$ với $a,b$ nguyên dương và $\dfrac{a}{b}$ tối giản sao cho $OP$ đạt giá trị lớn nhất bằng 3. Khi đó giá trị của $Q=2a+b$ bằng

Ⓐ 5. Ⓑ 13. Ⓒ 11. Ⓓ 9.

## 23 GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT LIÊN QUAN ĐẾN GÓC VÀ KHOẢNG CÁCH

**Phần I. Mỗi câu hỏi học sinh chọn một trong bốn phương án A, B, C, D.**

**CÂU 1.** Cho $x$, $y$, $z$ là ba số thực thỏa $x^2+y^2+z^2-4x+6y-2z-11=0$. Tìm giá trị lớn nhất của $P=2x+2y-z$.

Ⓐ $\max P=20$. Ⓑ $\max P=-18$. Ⓒ $\max P=18$. Ⓓ $\max P=12$.

QUICK NOTE

**CÂU 2.** Trong KG $Oxyz$, cho $d\colon \begin{cases} x=2 \\ y=t \\ z=1-t \end{cases}$ và mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2-2x-4y+2z+5=0$. Tọa độ điểm $M$ trên $(S)$ sao cho $\mathrm{d}(M,d)$ đạt giá trị lớn nhất là

**A** $(1;2;-1)$. **B** $(2;2;-1)$. **C** $(0;2;-1)$. **D** $(-3;-2;1)$.

**CÂU 3.** Trong KG $Oxyz$, cho điểm $A(-3;3;-3)$ thuộc mặt phẳng $(\alpha)\colon 2x-2y+z+15=0$ và mặt cầu $(S)\colon (x-2)^2+(y-3)^2+(z-5)^2=100$. Đường thẳng $\Delta$ qua $A$, nằm trên mặt phẳng $(\alpha)$ cắt $(S)$ tại $A$, $B$. Để độ dài $AB$ lớn nhất thì PTĐT $\Delta$ là

**A** $\dfrac{x+3}{1}=\dfrac{y-3}{4}=\dfrac{z+3}{6}$.

**B** $\dfrac{x+3}{16}=\dfrac{y-3}{11}=\dfrac{z+3}{-10}$.

**C** $\begin{cases} x=-3+5t \\ y=3 \\ z=-3+8t \end{cases}$.

**D** $\dfrac{x+3}{1}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z+3}{3}$.

**CÂU 4.** Trong KG $Oxyz$, cho điểm $A(-3;3;-3)$ thuộc mặt phẳng $(\alpha)\colon 2x2y+z+15=0$và mặt cầu $(S)\colon (x-2)^2+(y-3)^2+(z-5)^2=100$. Đường thẳng $\Delta$ qua $A$, nằm trên mặt phẳng $(\alpha)$ cắt $(S)$ tại $A$, $B$. Để độ dài $AB$ nhỏ nhất thì PTĐT $\Delta$ là

**A** $\dfrac{x+3}{16}=\dfrac{y-3}{11}=\dfrac{z+3}{-10}$.

**B** $\dfrac{x+3}{1}=\dfrac{y-3}{4}=\dfrac{z+3}{6}$.

**C** $\begin{cases} x=-3+5t \\ y=3 \\ z=-3+8t \end{cases}$.

**D** $\dfrac{x+3}{16}=\dfrac{y-3}{-11}=\dfrac{z+3}{10}$.

**CÂU 5.** Trong KG $Oxyz$, cho hai điểm $A(3;0;2)$, $B(3;0;2)$ và mặt cầu $x^2+(y+2)^2+(z-1)^2=25$. Phương trình mặt phẳng $(\alpha)$ đi qua hai điểm $A$, $B$ và cắt mặt cầu $(S)$ theo một đường tròn bán kính nhỏ nhất là

**A** $x-4y-5z+17=0$.

**B** $3x-2y+z-7=0$.

**C** $x-4y+5z-13=0$.

**D** $3x+2y+z-11=0$.

**CÂU 6.** Trong KG $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon x-2y+2z-3=0$ và mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2+2x-4y-2z+5=0$. Giả sử $M\in(P)$ và $N\in(S)$ sao cho $\overrightarrow{MN}$ cùng phương với vectơ $\vec{u}=(1;0;1)$ và khoảng cách giữa $M$ và $N$ lớn nhất. Tính $MN$.

**A** $MN=3$. **B** $MN=1+2\sqrt{2}$. **C** $MN=3\sqrt{2}$. **D** $MN=14$.

**CÂU 7.** Cho $A(0;8;2)$ và mặt cầu $(S)\colon (x-5)^2+(y+3)^2+(z-7)^2=72$ và điểm $A(9;-7;23)$. Viết phương trình mặt phẳng $(P)$ đi qua $A$ và tiếp xúc với mặt cầu $(S)$ sao cho khoảng cách từ $B$ đến mặt phẳng $(P)$ là lớn nhất. Giả sử $\vec{n}=(1;m;n)$ là một vectơ pháp tuyến của $(P)$. Lúc đó

**A** $m\cdot n=4$. **B** $m\cdot n=2$. **C** $m\cdot n=-4$. **D** $m\cdot n=-2$.

## 24 GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT LIÊN QUAN ĐẾN BÁN KÍNH MẶT CẦU, ĐƯỜNG TRÒN

**Phần I. Mỗi câu hỏi học sinh chọn một trong bốn phương án A, B, C, D.**

**CÂU 1.** Trong KG $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon (x-3)^2+(y-1)^2+z^2=4$ và đường thẳng $d\colon \begin{cases} x=1+2t \\ y=-1+t \\ z=-t \end{cases}, (t\in\mathbb{R})$. Mặt phẳng chứa $d$ và cắt $(S)$ theo một đường tròn có bán kính nhỏ nhất có phương trình là

**A** $y+z+1=0$.

**B** $x+3y+5z+2=0$.

**C** $x-2y-3=0$.

**D** $3x-2y-4z-8=0$.

**CÂU 2.** Trong KG $Oxyz$, cho hai điểm $A(3;-2;6)$, $B(0;1;0)$ và mặt cầu $(S)\colon (x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=25$. Mặt phẳng $(P)\colon ax+by+cz-2=0$ đi qua $A$, $B$ và cắt $(S)$ theo giao tuyến là đường tròn có bán kính nhỏ nhất. Tính $T=a+b+c$.

**A** $T=3$. **B** $T=4$. **C** $T=5$. **D** $T=2$.

QUICK NOTE

**CÂU 3.** Trong KG $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;4)$, $B(0;0;1)$ và mặt cầu $(S)\colon (x+1)^2+(y-1)^2+z^2=4$. Mặt phẳng $(P)\colon ax+by+cz-4=0$ đi qua $A$, $B$ và cắt $(S)$ theo giao tuyến là một đường tròn có bán kính nhỏ nhất. Tính $T=a+b+c$?

(A) $T=\dfrac{1}{5}$. (B) $T=\dfrac{3}{4}$. (C) $T=1$. (D) $T=-2$.

**CÂU 4.** Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon (x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=9$, điểm $A(0;0;2)$. Mặt phẳng $(P)$ qua $A$ và cắt mặt cầu $(S)$ theo thiết diện là hình tròn $(C)$ có diện tích nhỏ nhất, phương trình $(P)$ là

(A) $(P)\colon x-2y+3z-6=0$. (B) $(P)\colon x+2y+3z-6=0$.

(C) $(P)\colon 3x+2y+2z-4=0$. (D) $(P)\colon x+2y+z-2=0$.

**CÂU 5.** Trong KG $Oxyz$ cho mặt cầu $(S)\colon (x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=27$. Gọi $(\alpha)$ là mặt phẳng đi qua 2 điểm $A(0;0;-4)$, $B(2;0;0)$ và cắt $(S)$ theo giao tuyến là đường tròn $(C)$ sao cho khối nón có đỉnh là tâm của $(S)$, là hình tròn $(C)$ có thể tích lớn nhất. Biết mặt phẳng $(\alpha)$ có phương trình dạng $ax+by-z+c=0$, khi đó $a-b+c$ bằng

(A) 8. (B) 0. (C) 2. (D) $-4$.

**CÂU 6.** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)$ có phương trình là $x^2+y^2+z^2-2x-2y-6z+7=0$. Cho ba điểm $A$, $M$, $B$ nằm trên mặt cầu $(S)$ sao cho $AMB=90^\circ$. Diện tích tam giác $AMB$ có giá trị lớn nhất bằng?

(A) 4. (B) 2. (C) $4\pi$. (D) Không tồn tại.

**CÂU 7.** Trong KG $Oxyz$, cho điểm $M\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{\sqrt{3}}{2};0\right)$ và mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2=8$. Đường thẳng $d$ thay đổi, đi qua điểm $M$, cắt mặt cầu $(S)$ tại hai điểm phân biệt $A$, $B$. Tính diện tích lớn nhất $S$ của tam giác $OAB$.

(A) $S=\sqrt{7}$. (B) $S=4$. (C) $S=2\sqrt{7}$. (D) $S=2\sqrt{2}$.

**CÂU 8.** Trong không gian với hệ trục $Oxyz$ cho hai đường thẳng $\Delta_1\colon \dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z+1}{2}$ và $\Delta_2\colon \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-1}{1}$. Tính diện tích mặt cầu có bán kính nhỏ nhất, đồng thời tiếp xúc với cả hai đường thẳng $\Delta_1$ và $\Delta_2$.

(A) $R=\dfrac{\sqrt{17}}{2}$. (B) $R=\dfrac{\sqrt{17}}{3}$. (C) $R=\dfrac{\sqrt{17}}{6}$. (D) $R=\dfrac{\sqrt{17}}{17}$.

**CÂU 9.** Trong KG $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1\colon \begin{cases} x=2t\\ y=t\\ z=4\end{cases}$ và $d_2\colon \begin{cases} x=3-t'\\ y=t'\\ z=0\end{cases}$. Viết phương trình mặt cầu có bán kính nhỏ nhất tiếp xúc với cả hai đường thẳng $d_1$ và $d_2$.

(A) $(S)\colon (x+2)^2+(y+1)^2+(z+2)^2=4$. (B) $(S)\colon (x-2)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=16$.

(C) $(S)\colon (x-2)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=4$. (D) $(S)\colon (x+2)^2+(y+1)^2+(z+2)^2=16$.

**CÂU 10.** Trong KG $Oxyz$ cho hai đường thẳng chéo nhau $d_1\colon \begin{cases} x=4-2t\\ y=t\\ z=3\end{cases}$ và $d_2\colon \begin{cases} x=1\\ y=t'\\ z=-t'\end{cases}$ $(t,\ t'\in\mathbb{R})$. Phương trình mặt cầu có bán kính nhỏ nhất tiếp xúc với cả hai đường thẳng $(d_1)$, $(d_2)$ là

(A) $\left(x+\dfrac{3}{2}\right)^2+y^2+(z+2)^2=\dfrac{9}{4}$. (B) $\left(x+\dfrac{3}{2}\right)^2+y^2+(z+2)^2=\dfrac{3}{2}$.

(C) $\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2+y^2+(z-2)^2=\dfrac{9}{4}$. (D) $\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2+y^2+(z-2)^2=\dfrac{3}{2}$.

**CÂU 11.** Trong KG $Oxyz$, cho hai đường thẳng $\Delta_1\colon \dfrac{x-4}{3}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z+5}{-2}$ và $\Delta_2\colon \dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+3}{3}=\dfrac{z}{1}$. Trong tất cả mặt cầu tiếp xúc với cả hai đường thẳng $\Delta_1$ và $\Delta_2$. Gọi $(S)$ là mặt cầu có bán kính nhỏ nhất. Bán kính của mặt cầu $(S)$ là

(A) $\sqrt{12}$. (B) $\sqrt{6}$. (C) $\sqrt{24}$. (D) $\sqrt{3}$.

**CÂU 12.** Trong KG $Oxyz$ cho mặt cầu $(x-3)^2+(y-1)^2+z^2=4$ và đường thẳng

QUICK NOTE

$d\colon \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + t \\ z = -t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$. Mặt phẳng chứa $d$ và cắt $(S)$ theo một đường tròn có bán kính nhỏ nhất có phương trình là

Ⓐ $y + z + 1 = 0$.
Ⓑ $x + 3y + 5z + 2 = 0$.
Ⓒ $x - 2y - 3 = 0$.
Ⓓ $3x - 2y - 4z - 8 = 0$.

**CÂU 13.** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon 2x - y + 2z + 2 = 0$ và mặt cầu $(S)\colon (x-1)^2 + (y+2)^2 + z^2 = 4$ có tâm $I$. Gọi tọa độ điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ thuộc $(P)$ sao cho đoạn $IM$ ngắn nhất. Tổng $T = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2$ bằng

Ⓐ $\dfrac{7}{3}$.
Ⓑ $\dfrac{11}{3}$.
Ⓒ $14$.
Ⓓ $\dfrac{16}{3}$.

**CÂU 14.** Trong KG $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)$ tâm $I(1; -2; 1)$; bán kính $R = 4$ và đường thẳng $d\colon \dfrac{x}{2} = \dfrac{y-1}{-2} = \dfrac{z+1}{-1}$. Mặt phẳng $(P)$ chứa $d$ và cắt mặt cầu $(S)$ theo một đường tròn có diện tích nhỏ nhất. Hỏi trong các điểm sau điểm nào có khoảng cách đến mặt phẳng $(P)$ lớn nhất?

Ⓐ $O(0; 0; 0)$.
Ⓑ $A\left(1; \dfrac{3}{5}; -\dfrac{1}{4}\right)$.
Ⓒ $B(-1; -2; -3)$ .
Ⓓ $C(2; 1; 0)$.

# LỜI GIẢI CHI TIẾT

# Bài 2. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG

## 1 Xác định vectơ chỉ phương của ĐT, điểm thuộc ĐT

- Vectơ chỉ phương $\vec{u}$ của đường thẳng $\Delta$ là vectơ có giá song song hoặc trùng với đường thẳng $\Delta$.
  Nếu $\Delta$ có một vectơ chỉ phương là $\vec{u}$ thì $k.\vec{u}$ cũng là một vectơ chỉ phương của $\Delta$.
- Nếu có hai vectơ $\vec{n}_1$ và $\vec{n}_2$ cùng vuông góc với $\Delta$ thì $\Delta$ có một vectơ chỉ phương là $\vec{u} = [\vec{n}_1, \vec{n}_2]$.
- PTĐT $\Delta$ dạng: $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$ thì có vectơ chỉ phương là $\vec{u} = (a; b; c)$.
- PTĐT $\Delta$ dạng: $\dfrac{x - x_0}{a} = \dfrac{y - y_0}{b} = \dfrac{z - z_0}{c}$ $(a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0)$ thì có vectơ chỉ phương là $\vec{u} = (a; b; c)$.

*Chú ý:*

- *Trục $Ox$ có vectơ chỉ phương là* $\vec{i} = (1; 0; 0)$.
- *Trục $Oy$ có vectơ chỉ phương là* $\vec{j} = (0; 1; 0)$.
- *Trục $Oz$ có vectơ chỉ phương là* $\vec{k} = (0; 0; 1)$.

- Cho điểm $M(x_M; y_M; z_M)$ và đường thẳng $\Delta$ có phương trình

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}.$$

Khi đó

$$M \in \Delta \Leftrightarrow \frac{x_M - x_0}{a} = \frac{x_M - y_0}{b} = \frac{x_M - z_0}{c};$$
$$M \notin \Delta \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{x_M - x_0}{a} \neq \dfrac{x_M - y_0}{b} \\ \dfrac{x_M - y_0}{b} \neq \dfrac{x_M - z_0}{c}. \end{array}\right.$$

- Cho điểm $M(x_M; y_M; z_M)$ và đường thẳng $\Delta$ có phương trình

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct. \end{cases}$$

Khi đó

$$M \in \Delta \Leftrightarrow t = \frac{x_M - x_0}{a} = \frac{x_M - y_0}{b} = \frac{x_M - z_0}{c}; M \notin \Delta \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{x_M - x_0}{a} \neq \dfrac{x_M - y_0}{b} \\ t = \dfrac{x_M - y_0}{b} \neq \dfrac{x_M - z_0}{c}. \end{array}\right.$$

**Phần I. Mỗi câu hỏi học sinh chọn một trong bốn phương án A, B, C, D.**

**CÂU 1.** Trong KG $Oxyz$, cho đường thẳng $d$: $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - 2t \\ z = -1 + 3t \end{cases}$. Vectơ nào dưới đây là một vectơ chỉ phương của $d$?

(A) $\vec{u}_1 = (2; 1; -1)$. (B) $\vec{u}_2 = (1; 2; 3)$. (C) $\vec{u}_3 = (1; -2; 3)$. (D) $\vec{u}_4 = (2; 1; 1)$.

**Lời giải.**

Từ PTĐT $d$ ta thấy vectơ $\vec{u}_3 = (1; -2; 3)$ là một véctơ chỉ phương của $d$.

Chọn đáp án (C) ............................................................ □

**CÂU 2.** Trong KG $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \dfrac{x - 3}{2} = \dfrac{y - 4}{-5} = \dfrac{z + 1}{3}$. Vectơ nào dưới đây là một vectơ chỉ phương của $d$?

(A) $\vec{u}_2 = (2; 4; -1)$. (B) $\vec{u}_1 = (2; -5; 3)$. (C) $\vec{u}_3 = (2; 5; 3)$. (D) $\vec{u}_4 = (3; 4; 1)$.

**Lời giải.**

Đường thẳng $d: \dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y-4}{-5} = \dfrac{z+1}{3}$ có một vectơ chỉ phương là $\vec{u}_1\,(2;-5;3)$.

Chọn đáp án (B) ............................................ □

**CÂU 3.** Trong KG $Oxyz$, đường thẳng $d: \dfrac{x+3}{1} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z-5}{2}$ có một vectơ chỉ phương là

(A) $\vec{u}_1 = (3;-1;5)$. (B) $\vec{u}_4 = (-1;1;-2)$. (C) $\vec{u}_2 = (-3;1;5)$. (D) $\vec{u}_1 = (1;-1;-2)$.

**Lời giải.**

Đường thẳng $(P)$ có một vectơ chỉ phương là $\vec{u}_4 = (1;-1;2) = -1\,(-1;1;-2) \Rightarrow \vec{u}_4 = (-1;1;-2)$.

Chọn đáp án (B) ............................................ □

**CÂU 4.** Trong KG $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \dfrac{x}{-1} = \dfrac{y-4}{2} = \dfrac{z-3}{3}$. Hỏi trong các vectơ sau, đâu không phải là vectơ chỉ phương của $d$?

(A) $\vec{u}_1 = (-1;2;3)$. (B) $\vec{u}_2 = (3;-6;-9)$. (C) $\vec{u}_3 = (1;-2;-3)$. (D) $\vec{u}_4 = (-2;4;3)$.

**Lời giải.**

Ta có một vectơ chỉ phương của $d$ là $\vec{u}_1 = (-1;2;3)$.
$\vec{u}_2 = -3\vec{u}_1$, $\vec{u}_3 = -\vec{u}_1 \Rightarrow$ các vectơ $\vec{u}_2, \vec{u}_3$ cũng là vectơ chỉ phương của $d$.
Không tồn tại số $k$ để $\vec{u}_4 = k.\vec{u_1}$ nên $\vec{u}_4 = (-2;4;3)$ không phải là vectơ chỉ phương của $d$.

Chọn đáp án (D) ............................................ □

**CÂU 5.** Trong KG $Oxyz$, đường thẳng nào sau đây nhận vectơ pháp tuyến của mặt phẳng $(P)\colon 2x - y + 2z + 5 = 0$ làm một vectơ chỉ phương?

(A) $(Q)\colon x - y + 2 = 0$. (B) $\dfrac{x}{2} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z-2}{-1}$. (C) $\dfrac{x-1}{-2} = \dfrac{y+1}{-1} = \dfrac{z}{-1}$. (D) $\dfrac{x+2}{2} = \dfrac{y+1}{-1} = \dfrac{z+1}{1}$.

**Lời giải.**

Xét đường thẳng $\dfrac{x-1}{-2} = \dfrac{y+1}{-1} = \dfrac{z}{-1}$, có một vectơ chỉ phương là $(-2;-1;-1) = -\,(2;1;1)$(thỏa đề bài).

Chọn đáp án (C) ............................................ □

**CÂU 6.** Trong KG $Oxyz$, đường thẳng nào sau đây nhận $\vec{u} = (-2;4;5)$ là một vectơ chỉ phương?

(A) $\begin{cases} x = -2+3t \\ y = 4-t \\ z = 5+4t \end{cases}$. (B) $\begin{cases} x = 3+2t \\ y = -1+4t \\ z = 4+5t \end{cases}$. (C) $\begin{cases} x = 3+2t \\ y = 1+4t \\ z = 4+5t \end{cases}$. (D) $\begin{cases} x = 3+2t \\ y = -1-4t \\ z = 4-5t \end{cases}$.

**Lời giải.**

Xét đường thẳng $\begin{cases} x = 3+2t \\ y = -1-4t \\ z = 4-5t \end{cases}$, có một vectơ chỉ phương là $\vec{u} = (2;-4;-5) = -(-2;4;5)$ (thỏa đề bài).

Chọn đáp án (D) ............................................ □

**CÂU 7.** Trong KG $Oxyz$, đường thẳng nào sau đây nhận $\vec{u} = (-2;4;5)$ là một vectơ chỉ phương?

(A) $\begin{cases} x = -2+3t \\ y = 4-t \\ z = 5+4t \end{cases}$. (B) $\begin{cases} x = 3+2t \\ y = -1+4t \\ z = 4+5t \end{cases}$. (C) $\begin{cases} x = 3+2t \\ y = 1+4t \\ z = 4+5t \end{cases}$. (D) $\begin{cases} x = 3+2t \\ y = -1-4t \\ z = 4-5t \end{cases}$.

**Lời giải.**

Ta có đường thẳng $\begin{cases} x = 3+2t \\ y = -1-4t \\ z = 4-5t \end{cases}$, có một vectơ chỉ phương là $\vec{u} = (2;-4;-5) = -(-2;4;5)$ (thỏa đề bài).

Chọn đáp án (D) ............................................ □

**CÂU 8.** Trong KG $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;1;0)$ và $B(0;1;2)$. Vectơ nào dưới đây là một vectơ chỉ phương của đường thẳng $AB$.

(A) $\vec{d} = (-1;1;2)$. (B) $\vec{a} = (-1;0;-2)$. (C) $\vec{b} = (-1;0;2)$. (D) $\vec{c} = (1;2;2)$.

**Lời giải.**

Ta có $\overrightarrow{AB} = (-1;0;2)$ suy ra đường thẳng $AB$ có vectơ chỉ phương là $\vec{b} = (-1;0;2)$.

Chọn đáp án (C) ............................................ □

**CÂU 9.** Trong KG $Oxyz$, cho điểm $M(1;2;3)$. Gọi $M_1$, $M_2$ lần lượt là hình chiếu vuông góc của $M$ lên các trục $Ox$, $Oy$. Vectơ nào dưới đây là một vectơ chỉ phương của đường thẳng $M_1M_2$?

**A** $\overrightarrow{u_4}=(-1;2;0)$. **B** $\overrightarrow{u_1}=(0;2;0)$. **C** $\overrightarrow{u_2}=(1;2;0)$. **D** $\overrightarrow{u_3}=(1;0;0)$.

**Lời giải.**

Ta có $M_1$ là hình chiếu của $M$ lên trục $Ox \Rightarrow M_1(1;0;0)$.
$M_2$ là hình chiếu của $M$ lên trục $Oy \Rightarrow M_2(0;2;0)$.
Khi đó $\overrightarrow{M_1M_2}=(-1;2;0)$ là một vectơ chỉ phương của đường thẳng $M_1M_2$.

Chọn đáp án A ........................................ □

**CÂU 10.** Trong KG $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z+1}{3}$. Điểm nào dưới đây thuộc $d$?

**A** $Q(2;1;1)$. **B** $M(1;2;3$. **C** $P(2;1;-1)$. **D** $N(1;-2;3)$.

**Lời giải.**

Cho $\begin{cases}x-2=0\\y-1=0\\z+1=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=2\\y=1\\z=-1.\end{cases}$ Vậy $P(2;1;-1)\in d$.

Chọn đáp án C ........................................ □

**CÂU 11.** Trong KG $Oxyz$, điểm nào dưới đây thuộc đường thẳng $d\colon \dfrac{x+1}{-1}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z-1}{3}$?

**A** $P(-1\,2;1)$. **B** $Q(1;-2;-1)$. **C** $N(-1;3;2)$. **D** $M(1;2;1)$.

**Lời giải.**

Thay tọa độ các điểm vào PTĐT ta thấy điểm $P(-1;2;1)$ thỏa $\dfrac{-1+1}{-1}=\dfrac{2-2}{3}=\dfrac{1-1}{3}=0$. Vậy điểm $P(-1;2;1)$ thuộc đường thẳng $d$.

Chọn đáp án A ........................................ □

**CÂU 12.** Trong KG $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x-4}{2}=\dfrac{z-2}{-5}=\dfrac{z+1}{1}$. Điểm nào sau đây thuộc $d$?

**A** $N(4;2;-1)$. **B** $Q(2;5;1)$. **C** $M(4;2;1)$. **D** $P(2;-5;1)$.

**Lời giải.**

Ta có điểm $N(4;2;-1)$ thỏa mãn phương trình $d$.

Chọn đáp án A ........................................ □

**CÂU 13.** Trong KG $Oxyz$, điểm nào dưới đây thuộc đường thẳng $d\colon \begin{cases}x=1-t\\y=5+t\\z=2+3t.\end{cases}$

**A** $N(1;5;2)$. **B** $Q(-1;1;3)$. **C** $M(1;1;3)$. **D** $P(1;2;5)$.

**Lời giải.**

Ta có $N(1;5;2)$ thuộc $d$.

Chọn đáp án A ........................................ □

**CÂU 14.** Trong KG $Oxyz$. Đường thẳng $d\colon \begin{cases}x=t\\y=1-t\\z=2+t\end{cases}$ đi qua điểm nào sau sau đây?

**A** $K\,(1;-1;1)$. **B** $E\,(1;1;2)$. **C** $H\,(1;2;0)$. **D** $F\,(0;1;2)$.

**Lời giải.**

Thay tọa độ của $K\,(1;-1;1)$ vào PTTS của $d$ ta được

$$\begin{cases}1=t\\-1=1-t\\1=2+t\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=1\\t=2\\t=-1.\end{cases}$$

Vậy không tồn tại $t$ hay $K\notin d$.
Tương tự, thay $E\,(1;1;2)$ vào PTTS của $d$ ta được

$$\begin{cases}1=t\\1=1-t\\2=2+t\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=1\\t=0\\t=0.\end{cases}$$

Vậy không tồn tại $t$ hay $E \notin d$.
Thay tọa độ của $H(1;2;0)$ vào PTTS của $d$ ta được

$$\begin{cases} 1 = t \\ 2 = 1 - t \\ 0 = 2 + t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -1 \\ t = -2. \end{cases}$$

Vậy không tồn tại $t$ hay $H \notin d$.
Thay tọa độ của $F(0;1;2)$ vào PTTS của $d$ ta được

$$\begin{cases} 0 = t \\ 1 = 1 - t \\ 2 = 2 + t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = 0 \\ t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow t = 0.$$

Vậy $F \in d$.

Chọn đáp án D ............................................................................... □

**CÂU 15.** Trong KG $Oxyz$, điểm nào dưới đây thuộc đường thẳng $d\colon \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 5 + t \\ z = 2 + 3t \end{cases}$?

**A** $Q(-1;1;3)$. **B** $P(1;2;5)$. **C** $N(1;5;2)$. **D** $M(1;1;3)$.

**Lời giải.**

Với $t = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 5 \\ z = 2 \end{cases} \Rightarrow N(1;5;2) \in d$.

Chọn đáp án C ............................................................................... □

**Phần II. Trong mỗi ý a), b), c) và d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.**

**CÂU 16.** Trong KG $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y+5}{4} = \dfrac{z-1}{-1}$. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

| Mệnh đề | Đ | S |
|---|---|---|
| **a)** Đường thẳng $d$ nhận $\vec{u} = (3;4;1)$ là một vectơ chỉ phương. | | X |
| **b)** Đường thẳng $d$ nhận $\vec{u} = (-3;-4;1)$ là một vectơ chỉ phương. | X | |
| **c)** Đường thẳng $d$ nhận $\vec{u} = (3;4;-1)$ là một vectơ chỉ phương. | X | |
| **d)** Đường thẳng $d$ nhận $\vec{u} = (-6;-8;2)$ là một vectơ chỉ phương. | X | |

**Lời giải.**

Đường thẳng $d\colon \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y+5}{4} = \dfrac{z-1}{-1}$ có một vectơ chỉ phương là $\vec{u}_d = (3;4;-1)$.

**a)** S Sai. Vì $\vec{u} \neq \vec{u}_d$.

**b)** Đ Đúng. Vì $\vec{u} = (-3;-4;1) = -(3;4;-1) = -\vec{u}_d$.

**c)** Đ Đúng.Vì $\vec{u} = \vec{u}_d$.

**d)** Đ Đúng.Vì $\vec{u} = (-6;-8;2) = -2(3;4;-1) = -2\vec{u}_d$.

Chọn đáp án | a sai | b đúng | c đúng | d đúng | ............................................ □

**CÂU 17.** Trong KG $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \begin{cases} x = 3 + 4t \\ y = -1 - 2t \\ z = -2 + 3t \end{cases}, (t \in \mathbb{R})$. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

| Mệnh đề | Đ | S |
|---|---|---|
| **a)** Điểm $M(7;-3;-1)$ thuộc đường thẳng $d$. | | X |
| **b)** Điểm $N(-1;1;-5)$ thuộc đường thẳng $d$. | X | |

| Mệnh đề | Đ | S |
|---|---|---|
| **c)** Đường thẳng $d$ nhận $\vec{u} = (4; -2; 3)$ là một vectơ chỉ phương. | X | |
| **d)** Đường thẳng $d$ nhận $\vec{u} = -(-4; 2; -3)$ là một vectơ chỉ phương. | X | |

**Lời giải.**

**a)** S Sai. Thay $M(7; -3; -1)$ vào đường thẳng $d$, ta có

$$\begin{cases} 7 = 3 + 4t \\ -3 = -1 - 2t \\ -1 = -2 + 3t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 1 \\ t = \dfrac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow M(7; -3; -1) \notin d.$$

**b)** Đ Đúng. Thay $N(-1; 1; -5)$ vào đường thẳng $d$, ta có

$$\begin{cases} -1 = 3 + 4t \\ 1 = -1 - 2t \\ -5 = -2 + 3t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = -1 \\ t = -1 \end{cases} \Rightarrow M(7; -3; -1) \in d.$$

**c)** Đ Đúng. Vì một vectơ chỉ phương của đường thẳng $d$ là $\vec{u} = (4; -2; 3)$.

**d)** Đ Đúng.Vì $\vec{u} = (-4; 2; -3) = -(4; -2; 3)$.

Chọn đáp án | a sai | b đúng | c đúng | d đúng | ................................ □

**CÂU 18.** Trong KG $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{-1} = \dfrac{z-3}{2}$. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

| Mệnh đề | Đ | S |
|---|---|---|
| **a)** Điểm $Q(2; -1; 2)$ thuộc đường thẳng $d$. | | X |
| **b)** Điểm $P(1; 2; 3)$ thuộc đường thẳng $d$. | X | |
| **c)** Điểm $M(-1; -2; -3)$ thuộc đường thẳng $d$. | | X |
| **d)** Điểm $N(-2; 1; -2)$ thuộc đường thẳng $d$. | | X |

**Lời giải.**

**a)** S Sai. Vì tọa độ $Q$ không thỏa phương trình $d$.

**b)** Đ Đúng. Vì tọa độ $P$ thỏa phương trình $d$.

**c)** S Sai. Vì tọa độ $M$ không thỏa phương trình $d$.

**d)** S Sai. Vì tọa độ $N$ không thỏa phương trình $d$.

Chọn đáp án | a sai | b đúng | c sai | d sai | ................................ □

**CÂU 19.** Trong KG $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3 - t \\ z = 1 - t \end{cases}$. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

| Mệnh đề | Đ | S |
|---|---|---|
| **a)** Điểm $M(-3; 5; 3)$ không thuộc đường thẳng $d$. | | X |
| **b)** Điểm $N(1; 3; -1)$ không thuộc đường thẳng $d$. | X | |
| **c)** Điểm $P(3; 5; 3)$ không thuộc đường thẳng $d$. | X | |
| **d)** Điểm $Q(1; 2; -3)$ không thuộc đường thẳng $d$. | X | |

**Lời giải.**

**a)** S Sai. Vì tọa độ $M$ thỏa phương trình $d$.

**b)** Đ Đúng. Vì tọa độ $N$ không thỏa phương trình $d$.

c) Đ Đúng. Vì tọa độ $P$ không thỏa phương trình $d$.

d) Đ Đúng. Vì tọa độ $Q$ không thỏa phương trình $d$.

Chọn đáp án | a sai | b đúng | c đúng | d đúng | ..........

**CÂU 20.** Trong KG $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;2;0)$,$B(1;1;2)$ và $C(2;3;1)$. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

| Mệnh đề | Đ | S |
|---|---|---|
| a) Đường thẳng đi qua $A$ và song song với $BC$ có phương trình là $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z}{-1}$. | X | |
| b) Đường thẳng đi qua hai điểm $B$, $C$ có phương trình là $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-2}{-1}$. | X | |
| c) Điểm $M(2;3;1)$ không thuộc đường thẳng $BC$. | | X |
| d) Điểm $N(3;5;0)$ không thuộc đường thẳng $BC$. | X | |

**Lời giải.**

a) Đ Đúng. Gọi $d$ là PTĐT qua $A(1;2;0)$ và song song với $BC$.
Ta có $\overrightarrow{BC}=(1;2;-1) \Rightarrow d\colon \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z}{-1}$.

b) Đ Đúng. Đường thẳng đi $B$ có vecto chỉ phương $\overrightarrow{BC}=(1;2;-1)$ có phương trình chính tắc là $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-2}{-1}$.

c) S Sai. Vì tọa độ $M$ thỏa phương trình $BC$.

d) Đ Sai. Vì tọa độ $N$ thỏa phương trình $BC$.

Chọn đáp án | a đúng | b đúng | c sai | d đúng | ..........

**CÂU 21.** Trong KG $Oxyz$, cho điểm $M(1;2;-1)$ và mặt phẳng $(P)\colon 2x+y-3z+1=0$. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

| Mệnh đề | Đ | S |
|---|---|---|
| a) Đường thẳng đi qua $M$ và vuông góc với $(P)$ có phương trình là $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z+1}{1}$. | | X |
| b) Đường thẳng đi qua $M$ và vuông góc với $(P)$ có phương trình là $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z+1}{-3}$. | X | |
| c) Đường thẳng đi qua $M$ và vuông góc với $(P)$ có phương trình là $\dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z+1}{3}$. | X | |
| d) Đường thẳng đi qua $M$ và vuông góc với $(P)$ có phương trình là $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z-1}{-3}$. | | X |

**Lời giải.**

a) S Sai. Gọi $(\Delta)$ là đường thẳng cần tìm. Vì đường thẳng $(\Delta)$ vuông góc với mặt phẳng $(P)$ nên vectơ chỉ phương của $(\Delta)$ là $\overrightarrow{u_\Delta}=\overrightarrow{n_P}=(2;1;-3)$.

b) Đ Đúng. Phương trình chính tắc của đường thẳng $(\Delta)$ đi qua điểm $M(1;2;-1)$ và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_\Delta}=(2;1;-3)$ là $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z+1}{-3}$.

c) Đ Đúng. Vì $\overrightarrow{u_\Delta}=\overrightarrow{n_P}=(2;1;-3)=-(-2;-1;3)$.

d) S Sai. Vì đường thẳng đi qua $M$ và vuông góc với $(P)$ có phương trình là $\dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z+1}{3}$.

Chọn đáp án | a sai | b đúng | c đúng | d sai | ..........

**Phần III. Học sinh điền kết quả vào ô trống.**

**CÂU 22.** Trong KG $Oxyz$, cho hai điểm $M(1;-2;1)$, $N(0;1;3)$. Một vectơ chỉ phương của đường thẳng qua hai điểm $M$, $N$ có dạng $\vec{u}=(a;b;2)$. Tìm $a+b$.

Đáp án: | 2 | | | |

**Lời giải.**

Ta có $\overrightarrow{MN}=(-1;3;2)$. Vectơ chỉ phương của đường thẳng qua hai điểm $M$, $N$ là $\overrightarrow{MN}=(-1;3;2)$.
Suy ra $a+b=2$.
Đáp án: $\boxed{2}$ ..........

**CÂU 23.** Trong KG $Oxyz$, cho ba điểm $B(1;1;1)$, $C(3;4;0)$. Tìm vectơchỉ phương của đường thẳng $\Delta$ song song với $BC$ có dạng $(a;b;-1)$. Tìm $a+b$.

Đáp án: | 5 | | | |

**Lời giải.**

Ta có $\overrightarrow{BC}=(2;3;-1)$, đường thẳng $\Delta$ song song với $BC$ nên có vectơ chỉ phương cùng phương với $\overrightarrow{BC}$.

Suy ra $a+b=5$.

Đáp án: $\boxed{5}$ ............ □

**CÂU 24.** Trong KG $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon x-3y+2z+1=0$. Một vectơ chỉ phương của đường thẳng $\Delta$ vuông góc với mặt phẳng $(P)$ có dạng $(a;b;2)$. Tìm $a+b$.

Đáp án: | − | 2 | | |

**Lời giải.**

Đường thẳng $\Delta$ vuông góc với $(P)$ nên có vectơ chỉ phương $\vec{u}=\vec{n}_P=(1;-3;2)$.

Suy ra $a+b=-2$.

Đáp án: $\boxed{-2}$ ............ □

**CÂU 25.** Trong KG $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P)\colon 3x-2y-z+2024=0$ và $(Q)\colon x-2y+2025=0$. Một vectơ chỉ phương của đường thẳng $\Delta$ song song với hai mặt phẳng $(P)$ và $(Q)$ có dạng $(a;1;c)$. Tìm $a+c$.

Đáp án: | − | 6 | | |

**Lời giải.**

Đường thẳng $\Delta$ song song với hai mặt phẳng $(P)$ và $(Q)$ nên có vectơ chỉ phương

$$\vec{u}=[\vec{n}_P,\vec{n}_Q]=(-2;1;-4).$$

Suy ra $a+c=-6$.

Đáp án: $\boxed{-6}$ ............ □

**CÂU 26.** Trong KG $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon x+3y-2z-2024=0$ và $\vec{a}=(1;1;0)$. Một vectơ chỉ phương của đường thẳng $\Delta$ song song với mặt phẳng $(P)$ và song song vectơ $\vec{a}$ có dạng $(a;1;c)$. Tìm $a+c$.

Đáp án: | 0 | | | |

**Lời giải.**

Đường thẳng $\Delta$ song song với mặt phẳng $(P)$ và song song vectơ $\vec{a}$ nên có vectơ chỉ phương

$$\vec{u}=[\vec{n}_P,\vec{a}]=(2;2;-2)=2(1;1;-1).$$

Suy ra $a+c=0$.

Đáp án: $\boxed{0}$ ............ □

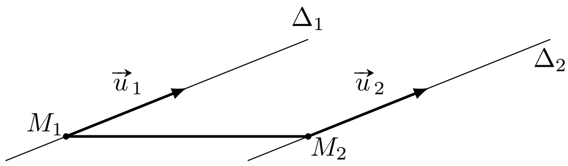
## 2 Xét vị trí tương đối hai ĐT

Trong không gian, hai vectơ được gọi là cùng phương khi giá của chúng cùng song song với một đường thẳng.
Trong không gian, ba vectơ được gọi là đồng phẳng khi giá của chúng cùng song song với một mặt phẳng.
Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba vectơ $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$, $\vec{b}=(b_1;b_2;b_3)$, $\vec{c}=(c_1;c_2;c_3)$

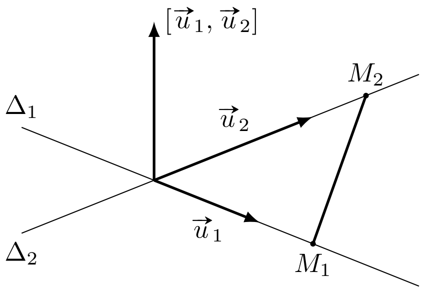
- Hai $\vec{a}$, $\vec{b}$ cùng phương $\Leftrightarrow \left[\vec{a},\vec{b}\right]=\vec{0}$.
- Hai $\vec{a}$, $\vec{b}$ không cùng phương $\Leftrightarrow \left[\vec{a},\vec{b}\right]\neq\vec{0}$.
- Ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ đồng phẳng $\Leftrightarrow \left[\vec{a},\vec{b}\right].\vec{c}=0$.
- Ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ không đồng phẳng $\Leftrightarrow \left[\vec{a},\vec{b}\right].\vec{c}\neq 0$.

Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $\Delta_1,\Delta_2$ lần lượt đi qua các điểm $M_1,M_2$ và tương ứng có $\vec{u}_1=(a_1;b_1;c_1)$, $\vec{u}_2=(a_2;b_2;c_2)$ là hai vectơ chỉ phương. Khi đó, ta có

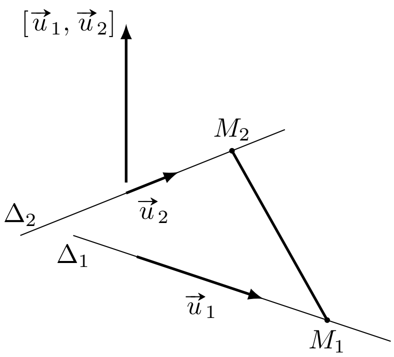
- $\Delta_1\equiv\Delta_2 \Leftrightarrow \begin{cases}\vec{u}_1,\vec{u}_2 \text{ cùng phương}\\ \vec{u}_1,\overrightarrow{M_1M_2} \text{ cùng phương}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}[\vec{u}_1,\vec{u}_2]=\vec{0}\\ \left[\vec{u}_1,\overrightarrow{M_1M_2}\right]=\vec{0}.\end{cases}$
- $\Delta_1 \parallel \Delta_2 \Leftrightarrow \begin{cases}\vec{u}_1,\vec{u}_2 \text{ cùng phương}\\ \vec{u}_1,\overrightarrow{M_1M_2} \text{ không cùng phương}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}[\vec{u}_1,\vec{u}_2]=\vec{0}\\ \left[\vec{u}_1,\overrightarrow{M_1M_2}\right]\neq\vec{0}.\end{cases}$




- $\Delta_1$ cắt $\Delta_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{u}_1, \vec{u}_2 \text{ không cùng phương} \\ \vec{u}_1, \vec{u}_2, \overrightarrow{M_1M_2} \text{ đồng phẳng} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} [\vec{u}_1, \vec{u}_2] \neq \vec{0} \\ [\vec{u}_1, \vec{u}_2] \cdot \overrightarrow{M_1M_2} \neq 0. \end{cases}$




- $\Delta_1$ và $\Delta_2$ chéo nhau $\Leftrightarrow [\vec{u}_1, \vec{u}_2] \cdot \overrightarrow{M_1M_2} \neq 0$.




*Chú ý: Để xét vị trí tương đối giữa hai đường thẳng, ta cũng có thể dựa vào các vectơ chỉ phương và phương trình của hai đường thẳng đó.*

Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $\Delta_1, \Delta_2$ tương ứng có $\vec{u}_1 = (a_1; b_1; c_1)$, $\vec{u}_2 = (a_2; b_2; c_2)$ là hai vectơ chỉ phương và có PTTS:

$$\Delta_1 : \begin{cases} x = x_1 + a_1t_1 \\ y = y_1 + b_1t_1 \\ z = z_1 + c_1t_1 \end{cases} \quad (t_1 \in \mathbb{R}), \quad \Delta_2 : \begin{cases} x = x_2 + a_2t_2 \\ y = y_2 + b_2t_2 \\ z = z_2 + c_2t_2 \end{cases} \quad (t_2 \in \mathbb{R})$$

Xét hệ phương trình hai ẩn $t_1, t_2$: $\begin{cases} x_1 + a_1t_1 = x_2 + a_2t_2 \\ y_1 + b_1t_1 = y_2 + b_2t_2 \\ z_1 + c_1t_1 = z_2 + c_2t_2 \end{cases} \quad (*)$.

Khi đó

- $\Delta_1 \equiv \Delta_2 \Leftrightarrow \vec{u}_1$ cùng phương với $\vec{u}_2$ và hệ $(*)$ vô nghiệm.
- $\Delta_1 \parallel \Delta_2 \Leftrightarrow$ Hệ $(*)$ có vô số nghiệm.
- $\Delta_1$ cắt $\Delta_2 \Leftrightarrow$ Hệ $(*)$ có nghiệm duy nhất.
- $\Delta_1$ và $\Delta_2$ chéo nhau $\Leftrightarrow \vec{u}_1$ không cùng phương với $\vec{u}_2$ và hệ $(*)$ vô nghiệm.

*Điều kiện để hai đường thẳng vuông góc*

Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $\Delta_1, \Delta_2$ tương ứng có $\vec{u}_1 = (a_1; b_1; c_1)$, $\vec{u}_2 = (a_2; b_2; c_2)$ là hai vectơ chỉ phương. Khi đó

$$\Delta_1 \perp \Delta_2 \Leftrightarrow \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = 0 \Leftrightarrow a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$$

**Phần I. Mỗi câu hỏi học sinh chọn một trong bốn phương án A, B, C, D.**

**CÂU 1.** Trong KG $Oxyz$, hai đường thẳng $d\colon \begin{cases} x=-1+12t \\ y=2+6t \\ z=3+3t \end{cases}$ và $d'\colon \begin{cases} x=7+8t \\ y=6+4t \\ z=5+2t \end{cases}$ có vị trí tương đối là

(A) trùng nhau. (B) song song. (C) chéo nhau. (D) cắt nhau.

**Lời giải.**

Đường thẳng $d$ có vectơ chỉ phương là $\vec{u}=(12;6;3)$ và đi qua điểm $M(-1;2;3)$.
Và đường thẳng $d'$ có vectơ chỉ phương là $\vec{u'}=(8;4;2)$ và đi qua điểm $M'(7;6;5)$.
Từ đó ta có $\overrightarrow{MM'}=(8;4;2)=\vec{u'}$ nên $d$ trùng với $d'$.

Chọn đáp án (A) ☐

**CÂU 2.** Trong KG $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z-4}{3}$ và $d'\colon \begin{cases} x=1+t \\ y=-t \\ z=-2+3t \end{cases}$ có vị trí tương đối là

(A) trùng nhau. (B) song song. (C) chéo nhau. (D) cắt nhau.

**Lời giải.**

Ta có $d$ có vectơ chỉ phương là $\vec{u}=(-2;1;3)$ và đi qua điểm $M(1;-2;4)$.
Và $d'$ có vectơ chỉ phương là $\vec{u'}=(1;-1;3)$ và đi qua điểm $M'(1;0;-2)$.
Từ đó ta có $\overrightarrow{MM'}=(-2;2;-6)$ và $\left[\vec{u},\vec{u'}\right]=(6;9;1)\neq\vec{0}$.
Ta cũng tính được $\overrightarrow{MM'}\cdot\left[\vec{u},\vec{u'}\right]=0$. Do đó $d$ và $d'$ cắt nhau.

Chọn đáp án (D) ☐

**CÂU 3.** Trong KG $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d\colon \dfrac{x-2}{4}=\dfrac{y}{-6}=\dfrac{z+1}{-8}$ và $d'\colon \dfrac{x-7}{-6}=\dfrac{y-2}{9}=\dfrac{z}{12}$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng khi nói về vị trí tương đối của hai đường thẳng trên?

(A) song song. (B) trùng nhau. (C) c. (D) héo nhau. (E) cắt nhau.

**Lời giải.**

$d$ có VTCP $\vec{u}=(4;-6;-8)$ và đi qua $M(2;0;-1)$.
$d'$ có VTCP $\vec{u'}=(-6;9;12)$ và đi qua $M'(7;2;0)$.
Từ đó ta có $\overrightarrow{MM'}=(5;2;1)$ và $\left[\vec{u},\vec{u'}\right]=\vec{0}$.
Lại có $\left[\vec{u},\overrightarrow{MM'}\right]=\vec{0}$.
Suy ra $d$ song song với $d'$.
Chọn đáp án (A) ☐

**CÂU 4.** Hai đường thẳng $d\colon \begin{cases} x=-1+12t \\ y=2+6t \\ z=3+3t \end{cases}$ và $d'\colon \begin{cases} x=7+8t \\ y=6+4t \\ z=5+2t \end{cases}$ có vị trí tương đối là

(A) trùng nhau. (B) song song. (C) chéo nhau. (D) cắt nhau.

**Lời giải.**

$d$ có VTCP $\vec{u}=(12;6;3)$ và đi qua $M(-1;2;3)$.
$d'$ có VTCP $\vec{u'}=(8;4;2)$ và đi qua $M'(7;6;5)$.
Từ đó ta có $\overrightarrow{MM'}=(8;4;2)$ Suy ra $\left[\vec{u},\overrightarrow{MM'}\right]=\vec{0}$ và $\left[\vec{u},\vec{u'}\right]=\vec{0}$.
Suy ra $d$ trùng với $d'$.
Chọn đáp án (A) ☐

**CÂU 5.** Trong không gian $ABCD.A'B'C'D'$, hai đường thẳng $A$ và $B(a;0;0)$ có vị trí tương đối là

(A) trùng nhau. (B) song song. (C) chéo nhau. (D) cắt nhau.

**Lời giải.**

$D(0;a;0)$ có VTCP $A'(0;0;b)$ và đi qua $(a>0,b>0)$ $M$ có VTCP $CC'$ và đi qua $\dfrac{a}{b}$ Từ đó ta có $(A'BD)$ $(MBD)$ và $\dfrac{1}{2}$ Suy ra $-1$ cắt $\dfrac{1}{3}$.

Chọn đáp án (D) ☐

**Phần II. Trong mỗi ý a), b), c) và d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.**

**CÂU 6.** Trong KG $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-7}{1}=\dfrac{z-3}{4}$ và $d'\colon \dfrac{x-6}{3}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z+2}{1}$. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

| Mệnh đề | Đ | S |
|---|---|---|
| **a)** Đường thẳng $d$ song song đường thẳng $d'$. | | X |
| **b)** Đường thẳng $d$ trùng đường thẳng $d'$. | | X |
| **c)** Đường thẳng $d$ cắt đường thẳng $d'$. | X | |
| **d)** Đường thẳng $d$ chéo đường thẳng $d'$. | | X |

**Lời giải.**

Ta có $d$ có vectơ chỉ phương là $\vec{u}=(2;1;4)$ và đi qua điểm $M(1;7;3)$.
Và $d'$ có vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{u'}=(3;-2;1)$ và đi qua điểm $M'(6;-1;-2)$.
Từ đó ta có $\overrightarrow{MM'}=(5;-8;-5)$ và $\left[\vec{u},\overrightarrow{u'}\right]=(9;10;-7)\neq\vec{0}$.
Ta cũng tính được $\overrightarrow{MM'}\cdot\left[\vec{u},\overrightarrow{u'}\right]=0$. Do đó $d$ và $d'$ cắt nhau.

Chọn đáp án | a sai | b sai | c đúng | d sai | ☐

**CÂU 7.** Trong KG $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z-4}{3}$ và $d'\colon \begin{cases}x=-1+t\\ y=-t\\ z=-2+3t\end{cases}$. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

| Mệnh đề | Đ | S |
|---|---|---|
| **a)** Tọa độ giao điểm của $d$ và $d'$ là $I(1;-2;4)$. | X | |
| **b)** Tọa độ giao điểm của $d$ và $d'$ là $I(1;2;4)$. | | X |
| **c)** Đường thẳng $d$ cắt đường thẳng $d'$. | X | |
| **d)** Đường thẳng $d$ chéo đường thẳng $d'$. | | X |

**Lời giải.**

Thay phương trình $d'$ và phương trình $d$, ta được

$$\frac{-1+t-1}{-2}=\frac{-t+2}{1}=\frac{-2+3t-4}{3}\Leftrightarrow t=2.$$

Suy ra giao điểm của $d$ và $d'$ là $I(1;-2;4)$.

Chọn đáp án | a đúng | b sai | c đúng | d sai | ☐

**CÂU 8.** Trong KG $Oxyz$, cho bốn đường thẳng $d_1\colon \dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z+1}{1}$, $d_2\colon \dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{-2}=\dfrac{z-1}{1}$, $d_3\colon \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-1}{1}$ và $d_4\colon \dfrac{x}{1}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-1}{1}$. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

| Mệnh đề | Đ | S |
|---|---|---|
| **a)** Hai đường thẳng $d_1$ và $d_2$ song song với nhau. | X | |
| **b)** Đường thẳng $d_3$ cắt đường thẳng $d_2$. | | X |
| **c)** Đường thẳng $d_4$ không cắt đường thẳng $d_1$. | | X |
| **d)** Đường thẳng $d_3$ cắt đường thẳng $d_1$. | | X |

**Lời giải.**

Ta có $d_1$ có vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{u_1}=(1;-2;1)$ và đi qua điểm $M_1(3;-1;-1)$.
Và $d_2$ có vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{u_2}=(1;-2;1)$ và đi qua điểm $M_2(0;0;1)$.
Do $\overrightarrow{u_1}=\overrightarrow{u_2}$ và $M_1\notin d_2$ nên hai đường thẳng $d_1$ và $d_2$ song song với nhau.
Ta có $\overrightarrow{M_1M_2}=(-3;1;2)$ và $\left[\overrightarrow{M_1M_2},\overrightarrow{u_1}\right]=(5;5;5)=5(1;1;1)$.
Gọi $(\alpha)$ là mặt phẳng chứa $d_1$ và $d_2$, khi đó $(\alpha)$ có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(1;1;1)$.
Phương trình mặt phẳng $(\alpha)$ là $x+y+z-1=0$.
Gọi $A=d_3\cap(\alpha)$ thì $A(1;-1;1)$, điểm $A$ không thuộc cả $d_1$ và $d_2$ nên $d_3$ không cắt cả hai đường thẳng $d_1$ và $d_2$.
Gọi $B=d_4\cap(\alpha)$ thì $B(-1;2;0)\notin d_1$ nên $d_4$ không cắt $d_1$.

Chọn đáp án | a đúng | b sai | c sai | d sai | ☐

**Phần III. Học sinh điền kết quả vào ô trống.**

**CÂU 9.** Trong KG $Oxyz$, gọi $I(a;b;c)$ là tọa độ giao điểm của hai đường thẳng $\Delta_1\colon \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z}{3}$ và $\Delta_2\colon \begin{cases}x=3-t\\ y=3-2t\\ z=-2+t\end{cases}$.

Tìm $a+b+c$.

Đáp án: 0

**Lời giải.**

Giao điểm của $\Delta_1$ và $\Delta_2$ thỏa mãn

$$\begin{cases}x=3-t\\ y=3-2t\\ z=-2+t\\ \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=3-t\\ y=3-2t\\ z=-2+t\\ \dfrac{3-t-1}{2}=\dfrac{3-2t+1}{2}=\dfrac{-2+t}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\ y=-1\\ z=0\\ t=2.\end{cases}$$

Suy ra $a+b+c=0$.

Đáp án: $\boxed{0}$ ........................................................................................................

**CÂU 10.** Trong KG $Oxyz$, biết hai đường thẳng $d_1\colon \dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{-2}=\dfrac{z-1}{1}$ và $d_2\colon \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-1}{1}$ cắt nhau tại $I(a;b;c)$. Tính giá trị $a+b+c$.

Đáp án: 1

**Lời giải.**

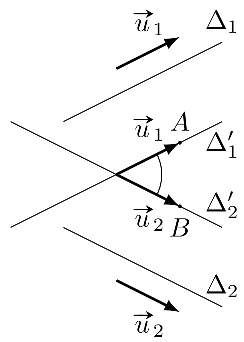
Giao điểm của $d_1$ và $d_2$ thỏa hệ

$$\begin{cases}\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{-2}=\dfrac{z-1}{1}\\ \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-1}{1}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-2x-y=0\\ x-z=0\\ x-2y=0\\ x-2z=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-\dfrac{1}{5}\\ y=\dfrac{2}{5}\\ z=\dfrac{4}{5}.\end{cases}$$

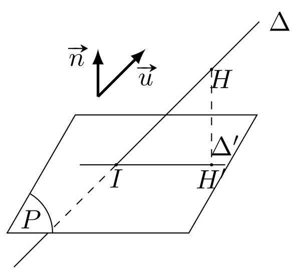
Vậy $a+b+c=1$.

Đáp án: $\boxed{1}$ ........................................................................................................

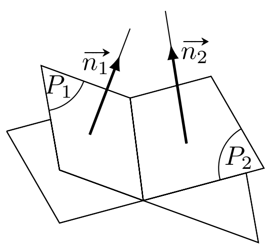
## 3 Góc giữa hai đường thẳng. Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng. Góc giữa hai mặt phẳng.




$$\cos(\Delta_1,\Delta_2)=|\cos(\vec{u}_1,\vec{u}_2)|=\frac{|\vec{u}_1\cdot\vec{u}_2|}{|\vec{u}_1|\cdot|\vec{u}_2|}$$




$$\sin(\Delta,(P))=|\cos(\vec{u},\vec{n})|=\frac{|\vec{u}\cdot\vec{n}|}{|\vec{u}|\cdot|\vec{n}|}$$




$$\cos((P_1),(P_2))=|\cos(\vec{n}_1,\vec{n}_2)|=\frac{|\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2|}{|\vec{n}_1|\cdot|\vec{n}_2|}$$

**Chú ý :**

- $\Delta_1\perp\Delta_2\Leftrightarrow\vec{u_1}\cdot\vec{u_2}=0\Leftrightarrow a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2=0.$
- Hai đường thẳng song song hoặc trùng với nhau thì góc giữa chúng là $0^\circ$.
- Đường thẳng song song hoặc trùng với mặt phẳng thì góc giữa chúng là $0^0$.
- Hai mặt phẳng song song hoặc trùng với nhau thì góc giữa chúng là $0^\circ$.

**Phần I. Mỗi câu hỏi học sinh chọn một trong bốn phương án A, B, C, D.**

**CÂU 1.** Gọi $\alpha$ là góc giữa hai đường thẳng $AB$, $CD$. Khẳng định nào sau đây đúng?

Ⓐ $\cos\alpha=\dfrac{\left|\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}\right|}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{CD}\right|}$.
Ⓑ $\cos\alpha=\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{CD}\right|}$.
Ⓒ $\cos\alpha=\dfrac{\left|\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\right]\right|}$.
Ⓓ $\cos\alpha=\dfrac{\left|\left[\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}\right]\right|}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{CD}\right|}$.

**Lời giải.**

Ta có $\cos\alpha = \dfrac{\left|\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}\right|}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{CD}\right|}$.

Chọn đáp án (A) ................................................................................ □

**CÂU 2.** Cho hai đường thẳng $d_1\colon \begin{cases} x = 2+t \\ y = -1+t \\ z = 3 \end{cases}$ và $d_2\colon \begin{cases} x = 1-t \\ y = 2 \\ z = -2+t \end{cases}$. Góc giữa hai đường thẳng $d_1$ và $d_2$ là

(A) $30^\circ$. (B) $120^\circ$. (C) $150^\circ$. (D) $60^\circ$.

**Lời giải.**

Gọi $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$ lần lượt là vectơ chỉ phương của đường thẳng $d_1$ và $d_2$.
Ta có $\overrightarrow{u_1} = (1;1;0)$; $\overrightarrow{u_2} = (-1;0;1)$.
Áp dụng công thức ta có

$$\cos(d_1,d_2) = \left|\cos\left(\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\right)\right| = \frac{\left|\overrightarrow{u_1}\cdot\overrightarrow{u_2}\right|}{\left|\overrightarrow{u_1}\right|\cdot\left|\overrightarrow{u_2}\right|} = \frac{|-1|}{\sqrt{1+1}\cdot\sqrt{1+1}} = \frac{1}{2}.$$

$\Rightarrow (d_1,d_2) = 60^\circ$.

Chọn đáp án (D) ................................................................................ □

**CÂU 3.** Cho đường thẳng $\Delta\colon \dfrac{x}{1} = \dfrac{y}{-2} = \dfrac{z}{1}$ và mặt phẳng $(P)\colon 5x+11y+2z-4=0$. Góc giữa đường thẳng $\Delta$ và mặt phẳng $(P)$ là

(A) $60^\circ$. (B) $-30^\circ$. (C) $30^\circ$. (D) $-60^\circ$.

**Lời giải.**

Gọi $\vec{u}$, $\vec{n}$ lần lượt là vectơ chỉ phương, pháp tuyến của đường thẳng $\Delta$ và mặt phẳng $(P)$ thì $\vec{u} = (1;-2;1)$, $\vec{n} = (5;11;2)$.
Áp dụng công thức ta có

$$\sin(\Delta,(P)) = |\cos(\vec{u},\vec{n})| = \frac{|\vec{u}\cdot\vec{n}|}{|\vec{u}|\cdot|\vec{n}|} = \frac{|1\cdot5-11\cdot2+1\cdot2|}{\sqrt{5^2+11^2+2^2}\cdot\sqrt{1^2+2^2+1^2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow (\Delta,(P)) = 30^\circ.$$

Chọn đáp án (C) ................................................................................ □

**CÂU 4.** Trong KG $Oxyz$ cho đường thẳng $d\colon \begin{cases} x = 1-t \\ y = 2+2t \\ z = 3+t \end{cases}$ và mặt phẳng $(P)\colon x-y+3=0$. Tính số đo góc giữa đường thẳng $d$ và mặt phẳng (P).

(A) $60^\circ$. (B) $30^\circ$. (C) $120^\circ$. (D) $45^\circ$.

**Lời giải.**

Đường thẳng $d$ có véc tơ chỉ phương là $\vec{u} = (-1;2;1)$.
Mặt phẳng $(P)$ có véc tơ pháp tuyến là $\vec{n} = (1;-1;0)$.
Gọi $\alpha$ là góc giữa đường thẳng $d$ và mặt phẳng $(P)$. Khi đó ta có

$$\sin\alpha = \frac{|\vec{u}\cdot\vec{n}|}{|\vec{u}|\cdot|\vec{n}|} = \frac{|-1\cdot1+2\cdot(-1)+1\cdot0|}{\sqrt{(-1)^2+2^2+1^2}\cdot\sqrt{1^2+(-1)^2+0^2}} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Do đó $\alpha = 60^\circ$.

Chọn đáp án (A) ................................................................................ □

**CÂU 5.** Trong KG $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon -\sqrt{3}x+y+1=0$. Tính góc tạo bởi $(P)$ với trục $Ox$.

(A) $60^\circ$. (B) $30^\circ$. (C) $120^\circ$. (D) $150^\circ$.

**Lời giải.**

Mặt phẳng $(P)$ có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (-\sqrt{3};1;0)$.
Trục $Ox$ có vectơ chỉ phương $\vec{i} = (1;0;0)$.
Góc tạo bởi $(P)$ với trục $Ox$ là

$$\sin((P),Ox) = |\cos((P),Ox)| = \frac{\left|\vec{n}\cdot\vec{i}\right|}{|\vec{n}|\cdot\left|\vec{i}\right|} = \frac{\left|-\sqrt{3}\cdot1+1\cdot0+0\cdot0\right|}{\sqrt{3+1}\cdot\sqrt{1}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Vậy góc tạo bởi $(P)$ với trục $Ox$ bằng $60^\circ$.

Chọn đáp án (A) ................................................................................ □

**CÂU 6.** Cho mặt phẳng $(P)\colon 3x+4y+5z+2=0$ và đường thẳng $d$ là giao tuyến của hai mặt phẳng $(\alpha)\colon x-2y+1=0$, $(\beta)\colon x-2z-3=0$. Gọi $\varphi$ là góc giữa đường thẳng $d$ và mặt phẳng $(P)$. Khi đó

(A) $60^\circ$. (B) $45^\circ$. (C) $30^\circ$. (D) $90^\circ$.

**Lời giải.**

Đường thẳng d có phương trình: $\begin{cases} x=2t \\ y=\dfrac{1}{2}+t \\ z=-\dfrac{3}{2}+t \end{cases}, t\in R.$

Suy ra vectơ chỉ phương của $d$ là $\overrightarrow{u_d}=(2;1;1)$.

Ta có $\sin(d,(P))=|\cos(\overrightarrow{u_d},\overrightarrow{n})|=\dfrac{|\overrightarrow{u_d}\cdot\overrightarrow{n}|}{|\overrightarrow{u_d}|\cdot|\overrightarrow{n}|}=\dfrac{|2\cdot 3+1\cdot 4+1\cdot 5|}{\sqrt{2^2+1^2+1^2}\cdot\sqrt{3^2+4^2+5^2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

$\Rightarrow (d,(P))=60^\circ$.

Chọn đáp án (A) ............................................................ □

**CÂU 7.** Cho hai mặt phẳng $(\alpha)\colon 2x-y+2z-1=0$ và $(\beta)\colon x+2y-2z-3=0$. Cosin góc giữa mặt phẳng $(\alpha)$ và mặt phẳng $(\beta)$ bằng

(A) $\dfrac{4}{9}$. (B) $-\dfrac{4}{9}$. (C) $\dfrac{4}{3\sqrt{3}}$. (D) $-\dfrac{4}{3\sqrt{3}}$.

**Lời giải.**

Gọi $\overrightarrow{n_\alpha}$, $\overrightarrow{n_\beta}$ lần lượt là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng $(\alpha)$ và $(\beta)$ thì $\overrightarrow{n_\alpha}=(2;-1;2)$, $\overrightarrow{n_\beta}=(1;2;-2)$.

Áp dụng công thức:

$$\cos((\alpha),(\beta))=|\cos(\overrightarrow{n_\alpha},\overrightarrow{n_\beta})|=\frac{|\overrightarrow{n_\alpha}\cdot\overrightarrow{n_\beta}|}{|\overrightarrow{n_\alpha}|\cdot|\overrightarrow{n_\beta}|}=\frac{|2\cdot 1-1\cdot 2-2\cdot 2|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}\cdot\sqrt{(1^2+2^2+(-2)^2}}=\frac{4}{9}.$$

Chọn đáp án (A) ............................................................ □

**CÂU 8.** Hai mặt phẳng nào dưới đây tạo với nhau một góc $60^\circ$?

(A) $(P)\colon 2x+11y-5z+3=0$ và $(Q)\colon x+2y-z-2=0$.

(B) $(P)\colon 2x+11y-5z+3=0$ và $(Q)\colon -x+2y+z-5=0$.

(C) $(P)\colon 2x-11y+5z-21=0$ và $(Q)\colon 2x+y+z-2=0$.

(D) $(P)\colon 2x-5y+11z-6=0$ và $(Q)\colon -x+2y+z-5=0$.

**Lời giải.**

Áp dụng công thức tính góc giữa hai mặt phẳng.

$$\cos((P),(Q))=\frac{|\overrightarrow{n_P}\cdot\overrightarrow{n_Q}|}{|\overrightarrow{n_P}|\cdot|\overrightarrow{n_Q}|}=\cos 60^\circ=\frac{1}{2}.$$

Chọn đáp án (B) ............................................................ □

**CÂU 9.** Tính tổng các giá trị tham số $m$ để mặt phẳng $(P)\colon (m+2)x+2my-mz+5=0$ và $(Q)\colon mx+(m-3)y+2z-3=0$ hợp với nhau một góc $\alpha=90^\circ$.

(A) 6. (B) 4. (C) 8. (D) $-4$.

**Lời giải.**

Phhương pháp giải: Xác định các vectơ pháp tuyến của mặt phẳng $(P)$ và $(Q)$. Thay các giá trị vào biểu thức để tìm giá trị đúng. Dùng chức năng CALC trong máy tính bỏ túi để hỗ trợ việc tính toán nhanh nhất.
Mặt phẳng $(P)$, $(Q)$ có vectơ pháp tuyến lần lượt là $\overrightarrow{n_P}=(m+2;2m;-m)$, $\overrightarrow{n_Q}=(m;m-3;2)$.
Ta có $(P)\perp(Q)$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \overrightarrow{n_P}\cdot\overrightarrow{n_Q}=0\\
&\Leftrightarrow (m+2)m+2m(m-3)-2m=0\\
&\Leftrightarrow 3m^2-6m=0\\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0\\ m=6.\end{array}\right.
\end{aligned}$$

Chọn đáp án (A) ............................................................ □

**Phần II. Trong mỗi ý a), b), c) và d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.**

**CÂU 10.** Trong KG $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P)\colon 2x - y + 2z + 5 = 0$ và $(Q)\colon x - y + 2 = 0$. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

| Mệnh đề | Đ | S |
|---|---|---|
| **a)** Góc giữa hai mặt phẳng $(P)$ và $(Q)$ bằng $135°$. | | X |
| **b)** Góc giữa hai mặt phẳng $(P)$ và $(Q)$ bằng $45°$. | X | |
| **c)** Hai mặt phẳng $(P)$ và $(Q)$ song song với nhau. | | X |
| **d)** Điểm $M(0;5;0)$ thuộc mặt phẳng $(P)$. | X | |

**Lời giải.**

Gọi $\alpha$ là góc giữa hai mặt phẳng $(P)$ và $(Q)$.

$$\cos\alpha = \frac{|2\cdot 1 - 1\cdot(-1) + 2\cdot 0|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}\cdot\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 0^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$\Rightarrow \alpha = 45°$.

Thay $M(0;5;0)$ vào mặt phẳng $(P)$ ta có $2\cdot 0 - 5 + 2\cdot 0 + 5 = 0 \Rightarrow M \in (P)$.

Chọn đáp án | a sai | b đúng | c sai | d đúng | ..........□

**CÂU 11.** Trong KG $Oxyz$, cho mặt phẳng $(Q)\colon x - y - 5 = 0$, và biết hình chiếu của $O$ lên mặt phẳng $(P)$ là $H(2;-1;-2)$. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

| Mệnh đề | Đ | S |
|---|---|---|
| **a)** Góc giữa hai mặt phẳng $(P)$ và $(Q)$ bằng $135°$. | | X |
| **b)** Góc giữa hai mặt phẳng $(P)$ và $(Q)$ bằng $45°$. | X | |
| **c)** Góc giữa hai mặt phẳng $(P)$ và $(Q)$ bằng $60°$. | | X |
| **d)** Góc giữa hai mặt phẳng $(P)$ và $(Q)$ bằng $120°$. | | X |

**Lời giải.**

Mặt phẳng $(Q)$ có một vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n_Q} = (1;-1;0)$.

Hình chiếu của $O$ lên mặt phẳng $(P)$ là $H(2;-1;-2)$.

Suy ra mặt phẳng $(P)$ qua $H$ và nhận $\overrightarrow{OH} = (2;-1;-2)$ làm vectơ pháp tuyến.

Gọi $\varphi$ là góc giữa hai mặt phẳng $(P)$ và $(Q)$. Ta có

$$\cos\varphi = \left|\cos\left(\overrightarrow{OH}, \overrightarrow{n_Q}\right)\right| = \frac{|2+1+0|}{\sqrt{4+1+4}\cdot\sqrt{1+1+0}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \varphi = 45°.$$

Chọn đáp án | a sai | b đúng | c sai | d sai | ..........□

**CÂU 12.** Trong KG $Oxyz$, cho ba mặt phẳng $(P)\colon 2x - y + 2z + 3 = 0$, $(Q)\colon x - y - z - 2 = 1$, $(R)\colon x + 2y + 2z - 2 = 0$. Gọi $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3$ lần lượt là góc giữa hai mặt phẳng $(P)$ và $(Q)$, $(Q)$ và $(R)$, $(R)$ và $(P)$. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

| Mệnh đề | Đ | S |
|---|---|---|
| **a)** $\alpha_1 > \alpha_3 > \alpha_2$. | X | |
| **b)** $\alpha_2 > \alpha_3 > \alpha_1$. | | X |
| **c)** $\alpha_3 > \alpha_2 > \alpha_1$. | | X |
| **d)** $\alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3$. | | X |

**Lời giải.**

Áp dụng công thức tính góc giữa hai mặt phẳng. Sử dụng máy tính bỏ túi để tính góc rồi so sánh các giá trị đó với nhau.

Chọn đáp án | a đúng | b sai | c sai | d sai | ..........□

**Phần III. Học sinh điền kết quả vào ô trống.**

**CÂU 13.** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $H(2;1;2)$, $H$ là hình chiếu vuông góc của gốc tọa độ $O$ xuống mặt phẳng $(P)$. Tính số đo góc giữa mặt phẳng $(P)$ và mặt phẳng $(Q)\colon x + y - 11 = 0$.

Đáp án: $45°$

**Lời giải.**

Mặt phẳng $(P)$ qua $O$ và nhận $\overrightarrow{OH} = (2;1;2)$ làm vectơ pháp tuyến.

Mặt phẳng $(Q)\colon x - y - 11 = 0$ có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (1;1;0)$.

Ta có

$$\cos\left(\widehat{(P),(Q)}\right)=\frac{\left|\overrightarrow{OH}\cdot\vec{n}\right|}{OH\cdot|\vec{n}|}=\frac{1}{\sqrt{2}}\Rightarrow\widehat{((P),(Q))}=45^\circ.$$

Đáp án: $\boxed{45^\circ}$

**CÂU 14.** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)$ có phương trình $x-2y+2z-5=0$. Xét mặt phẳng $(Q): x+(2m-1)z+7=0$, với $m$ là tham số thực. Tính tổng tất cả giá trị của $m$ để $(P)$ tạo với $(Q)$ góc $\frac{\pi}{4}$.

Đáp án: | 5 | | | |

**Lời giải.**
Mặt phẳng $(P),(Q)$ có vectơ pháp tuyến lần lượt là $\overrightarrow{n_p}=(1;-2;2), \overrightarrow{n_Q}=(1;0;2m-1)$.
Vì $(P)$ tạo với $(Q)$ góc $\frac{\pi}{4}$ nên

$$\begin{aligned}\cos\frac{\pi}{4}=\left|\cos\left(\overrightarrow{n_p};\overrightarrow{n_Q}\right)\right| &\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{|1+2(2m-1)|}{3\cdot\sqrt{1+(2m-1)^2}}\\ &\Leftrightarrow 2(4m-1)^2=9\left(4m^2-4m+2\right)\\ &\Leftrightarrow 4m^2-20m+16=0\\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m=1\\ m=4.\end{array}\right.\end{aligned}$$

Do đó tổng các giá trị cần tìm là $4+1=5$.
Đáp án: $\boxed{5}$

**CÂU 15.** Biết mặt phẳng $(\alpha):(2m-1)x-3my+2z+3=0$ và $(\beta): mx+(m-1)y+4z-5=0$ vuông góc với nhau. Tính tích tất cả các giá trị tìm được của tham số $m$.

Đáp án: | − | 8 | | |

**Lời giải.**

$$(\alpha)\perp(\beta)\Leftrightarrow(2m-1)\cdot m+(-3m)\cdot(m-1)+2\cdot 4=0\Leftrightarrow -m^2+2m+8=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=4\\ m=-2.\end{array}\right.$$

Do đó tích các giá trị cần tìm là $4\cdot(-2)=-8$.
Đáp án: $\boxed{-8}$

## 4 Lập PTĐT khi biết điểm và VTCP

**Phần I. Mỗi câu hỏi học sinh chọn một trong bốn phương án A, B, C, D.**

**CÂU 1.** Trong KG $Oxyz$, cho đường thẳng $d$ đi qua điểm $M(2;2;1)$ và có một véc-tơ chỉ phương $\vec{u}=(5;2;-3)$. Phương trình của $d$ là

Ⓐ $\begin{cases}x=2+5t\\ y=2+2t\\ z=-1-3t\end{cases}$.
Ⓑ $\begin{cases}x=2+5t\\ y=2+2t\\ z=1+3t\end{cases}$.
Ⓒ $\begin{cases}x=2+5t\\ y=2+2t\\ z=1-3t\end{cases}$.
Ⓓ $\begin{cases}x=5+2t\\ y=2+2t\\ z=-3+t\end{cases}$.

**Lời giải.**

Đường thẳng $d$ đi qua điểm $M(2;2;1)$ và có một véc-tơ chỉ phương $\vec{u}=(5;2;-3)$, phương trình của $d$ là $\begin{cases}x=2+5t\\ y=2+2t\\ z=1-3t.\end{cases}$

Chọn đáp án C

**CÂU 2.** Trong KG $Oxyz$, cho hai điểm $M(1;0;1)$ và $N(3;2;-1)$. Đường thẳng $MN$ có PTTS là

Ⓐ $\begin{cases}x=1+2t\\ y=2t\\ z=1+t\end{cases}$.
Ⓑ $\begin{cases}x=1+t\\ y=t\\ z=1+t\end{cases}$.
Ⓒ $\begin{cases}x=1-t\\ y=t\\ z=1+t\end{cases}$.
Ⓓ $\begin{cases}x=1+t\\ y=t\\ z=1-t\end{cases}$.

**Lời giải.**
Đường thẳng $MN$ nhận $\overrightarrow{MN}=(2;2;-2)$ hoặc $\vec{u}=(1;1;-1)$ là véc-tơ chỉ phương.
Thay tọa độ điểm $M(1;0;1)$ vào phương trình $\begin{cases}x=1+t\\ y=t\\ z=1-t\end{cases}$ ta thấy thỏa mãn.

Chọn đáp án (D) ........................................................................ □

**CÂU 3.** Trong không gian tọa độ $Oxyz$, phương trình nào dưới đây là PTCT của đường thẳng $d$: $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3t \\ z = -2 + t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$?

(A) $\dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z-2}{1}$. (B) $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z+2}{-2}$. (C) $\dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z-2}{-2}$. (D) $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z+2}{1}$.

**Lời giải.**

Do đường thẳng $d$ đi qua điểm $M(1;0;-2)$ và có véc-tơ chỉ phương $\overrightarrow{u} = (2;3;1)$ nên có PTCT là $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z+2}{1}$.

Chọn đáp án (D) ........................................................................ □

**CÂU 4.** Trong KG $Oxyz$, đường thẳng $Oy$ có PTTS là

(A) $\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$. (B) $\begin{cases} x = 0 \\ y = 2 + t \\ z = 0 \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$. (C) $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$. (D) $\begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$.

**Lời giải.**

Đường thẳng $Oy$ đi qua điểm $A(0;2;0)$ và nhận véc-tơ đơn vị $\overrightarrow{j} = (0;1;0)$ làm véc-tơ chỉ phương nên có PTTS là $\begin{cases} x = 0 \\ y = 2 + t \\ z = 0 \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$.

Chọn đáp án (B) ........................................................................ □

**CÂU 5.** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, PTTS trục $Oz$ là

(A) $z = 0$. (B) $\begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = 0 \end{cases}$. (C) $\begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$. (D) $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = t \end{cases}$.

**Lời giải.**

Trục $Oz$ đi qua gốc tọa độ $O(0;0;0)$ và nhận véc-tơ đơn vị $\overrightarrow{k} = (0;0;1)$ làm véc-tơ chỉ phương nên có PTTS $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = t. \end{cases}$

Chọn đáp án (D) ........................................................................ □

**CÂU 6.** Trong KG $Oxyz$, trục $Ox$ có PTTS

(A) $x = 0$. (B) $y + z = 0$. (C) $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = t \end{cases}$. (D) $\begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$.

**Lời giải.**

Trục $Ox$ đi qua $O(0;0;0)$ và có véctơ chỉ phương $\overrightarrow{i} = (1;0;0)$ nên có PTTS là $\begin{cases} x = 0 + 1 \cdot t \\ y = 0 + 0t \\ z = 0 + 0t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 0. \end{cases}$

Chọn đáp án (D) ........................................................................ □

**CÂU 7.** Trong KG $Oxyz$, cho đường thẳng $d$: $\dfrac{x-1}{-1} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z-2}{-1}$. Đường thẳng đi qua điểm $M(2;1;-1)$ và song song với đường thẳng $d$ có phương trình là

(A) $\dfrac{x+2}{-1} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z-1}{-1}$. (B) $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y-5}{-2} = \dfrac{z+3}{1}$. (C) $\dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z+1}{-1}$. (D) $\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z+1}{2}$.

**Lời giải.**

Vì đường thẳng song song với đường thẳng $d$ nên nó có véc-tơ chỉ phương là $\overrightarrow{u} = (-1;2;-1)$ hoặc $\overrightarrow{u} = (1;-2;1)$.

Lại có điểm $M(2;1;-1)$ thuộc đường thẳng $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y-5}{-2} = \dfrac{z+3}{1}$.

Vậy phương trình của đường thẳng là $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y-5}{-2} = \dfrac{z+3}{1}$.

Chọn đáp án (B) ........................................................................ □

**CÂU 8.** Trong KG $Oxyz$, cho điểm $M(2;-2;1)$ và mặt phẳng $(P)$: $2x - 3y - z + 1 = 0$. Đường thẳng đi qua $M$ và vuông góc với $(P)$ có phương trình là

Ⓐ $\begin{cases}x=2+2t\\y=2-3t\\z=1-t\end{cases}$. Ⓑ $\begin{cases}x=2+2t\\y=-2-3t\\z=1-t\end{cases}$. Ⓒ $\begin{cases}x=2+2t\\y=-2+3t\\z=1+t\end{cases}$. Ⓓ $\begin{cases}x=2+2t\\y=-3-2t\\z=-1+t\end{cases}$.

**Lời giải.**

Gọi $d$ là đường thẳng đi qua $M$ và vuông góc với $(P)$.
Do $d$ vuông góc với $(P)$ nên $d$ có một véc-tơ chỉ phương là $\vec{u}=(2;-3;-1)$.

Vậy phương trình của đường thẳng $d$ là $\begin{cases}x=2+2t\\y=-2-3t\\z=1-t.\end{cases}$

Chọn đáp án Ⓑ ................................................................ □

**CÂU 9.** Trong KG $Oxyz$, đường thẳng đi qua điểm $A(1;1;1)$ và vuông góc với mặt phẳng tọa độ $(Oxy)$ có PTTS là

Ⓐ $\begin{cases}x=1+t\\y=1\\z=1\end{cases}$. Ⓑ $\begin{cases}x=1\\y=1\\z=1+t\end{cases}$. Ⓒ $\begin{cases}x=1+t\\y=1\\z=1\end{cases}$. Ⓓ $\begin{cases}x=1+t\\y=1+t\\z=1\end{cases}$.

**Lời giải.**

Đường thẳng $d$ vuông góc với mặt phẳng tọa độ $(Oxy)$ nên nhận $\vec{k}=(0;0;1)$ làm véc-tơ chỉ phương.

Mặt khác $d$ đi qua $A(1;1;1)$ nên đường thẳng $d$ có phương trình là $\begin{cases}x=1\\y=1\\z=1+t.\end{cases}$

Chọn đáp án Ⓑ ................................................................ □

**CÂU 10.** Trong KG $Oxyz$, cho điểm $M(3;2;-1)$ và mặt phẳng $(P)\colon x+z-2=0$. Đường thẳng đi qua $M$ và vuông góc với $(P)$ có phương trình là

Ⓐ $\begin{cases}x=3+t\\y=2\\z=-1+t\end{cases}$. Ⓑ $\begin{cases}x=3+t\\y=2+t\\z=-1\end{cases}$. Ⓒ $\begin{cases}x=3+t\\y=2t\\z=1-t\end{cases}$. Ⓓ $\begin{cases}x=3+t\\y=1+2t\\z=-t\end{cases}$.

**Lời giải.**

Ta có mặt phẳng $(P)\colon x+z-2=0$, mặt phẳng $(P)$ có véc tơ pháp tuyến là $\vec{n}_{(P)}=(1;0;1)$.
Gọi đường thẳng cần tìm là $\Delta$.
Vì đường thẳng $\Delta$ vuông góc với $(P)$ nên véc tơ pháp tuyến của mặt phẳng $(P)$ là véc tơ chỉ phương của đường thẳng $\Delta$ $\Rightarrow \vec{u}_{\Delta}=\vec{n}_{(P)}=(1;0;1)$.
PTĐT $\Delta$ đi qua $M(3;2;-1)$ và có véc tơ chỉ phương $\vec{u}_{\Delta}=(1;0;1)$ là

$$\begin{cases}x=3+t\\y=2\\z=-1+t.\end{cases}$$

Chọn đáp án Ⓐ ................................................................ □

**CÂU 11.** Trong KG $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;2;-1)$, $B(3;0;1)$ và $C(2;2;-2)$. Đường thẳng đi qua $A$ và vuông góc với mặt phẳng $(ABC)$ có phương trình là

Ⓐ $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{-2}=\dfrac{z+1}{3}$. Ⓑ $\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z-1}{1}$. Ⓒ $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-1}{-1}$. Ⓓ $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z+1}{1}$.

**Lời giải.**

Ta có $\overrightarrow{AB}=(2;-2;2)$, $\overrightarrow{AC}=(1;0;-1)$.
Mặt phẳng $(ABC)$ có một véctơ pháp tuyến là $\vec{n}=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(2;4;2)$.
Đường thẳng vuông góc với mặt phẳng $(ABC)$ có một véctơ chỉ phương là $\vec{u}=(1;2;1)$.
Đường thẳng đi qua $A$ và vuông góc với mặt phẳng $(ABC)$ có phương trình là

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z+1}{1}.$$

Chọn đáp án Ⓓ ................................................................ □

**CÂU 12.** Trong KG $Oxyz$ cho $A(0;0;2)$, $B(2;1;0)$, $C(1;2;-1)$ và $D(2;0;-2)$. Đường thẳng đi qua $A$ và vuông góc với $(BCD)$ có phương trình là

Ⓐ $\begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \\ z = -1 + 2t \end{cases}$. Ⓑ $\begin{cases} x = 3 + 3t \\ y = 2 + 2t \\ z = 1 - t \end{cases}$. Ⓒ $\begin{cases} x = 3t \\ y = 2t \\ z = 2 + t \end{cases}$. Ⓓ $\begin{cases} x = 3 + 3t \\ y = -2 + 2t \\ z = 1 - t \end{cases}$.

**Lời giải.**

Gọi $d$ là đường thẳng đi qua $A$ và vuông góc với $(BCD)$.
Ta có $\overrightarrow{BC} = (-1; 1; -1)$, $\overrightarrow{BD} = (0; -1; -2)$.
Mặt phẳng $(BCD)$ có vec tơ pháp tuyến là $\vec{n}_{(BCD)} = \left[\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BC}\right] = (3; 2; -1)$.
Gọi $\vec{u}_d$ là vec tơ chỉ phương của đường thẳng $d$.
Vì $d \perp (BCD)$ nên $\vec{u}_d = \vec{n}_{(BCD)} = (3; 2; -1)$.
PTĐT $d$: $\dfrac{x}{3} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z-2}{-1}$.

Do $M(3; 2; 1)$ thuộc $d$ nên $d$: $\begin{cases} x = 3 + 3t \\ y = 2 + 2t \\ z = 1 - t. \end{cases}$

Chọn đáp án B ............ □

**CÂU 13.** Đường thẳng $\Delta$ là giao tuyến của 2 mặt phẳng $x + z - 5 = 0$ và $x - 2y - z + 3 = 0$ thì có phương trình là

Ⓐ $\dfrac{x+2}{1} = \dfrac{y+1}{3} = \dfrac{z}{-1}$. Ⓑ $\dfrac{x+2}{1} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z}{-1}$. Ⓒ $\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z-3}{-1}$. Ⓓ $\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z-3}{-1}$.

**Lời giải.**

Ta có $(P)$: $x + z - 5 = 0$ có một vectơ pháp tuyến $\vec{n_1} = (1; 0; 1)$ và $(Q)$: $x - 2y - z + 3 = 0$ có một vectơ pháp tuyến $\vec{n_2} = (1; -2; -1)$.
$\vec{u} = [\vec{n}_1, \vec{n}_2] = (2; 2; -2) = 2(1; 1; 1)$. Suy ra $\Delta$ có một vectơ chỉ phương là $\vec{u}_1 = (1; 1; 1)$. Do đó đường thẳng $\Delta$ là giao tuyến của 2 mặt phẳng $x + z - 5 = 0$ và $x - 2y - z + 3 = 0$ thì có phương trình là

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-3}{-1}.$$

Do $M(3; 2; 1)$ thuộc $d$ nên $d$: $\begin{cases} x = 3 + 3t \\ y = 2 + 2t \\ z = 1 - t. \end{cases}$

Chọn đáp án C ............ □

**Phần II. Trong mỗi ý a), b), c) và d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.**

**CÂU 14.** Trong KG $Oxyz$, cho đường thẳng $d$ đi qua điểm $M(3; -1; 4)$ và có một vectơ chỉ phương $\vec{u} = (-2; 4; 5)$.

| Mệnh đề | Đ | S |
|---|---|---|
| a) PTTS của đường thẳng $d$ là $\begin{cases} x = -2 + 3t \\ y = 4 - t \\ z = 5 + 4t \end{cases}$. | | X |
| b) PTTS của đường thẳng $d$ là $\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = -1 + 4t \\ z = 4 + 5t \end{cases}$. | | X |
| c) PTTS của đường thẳng $d$ là $\begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = 1 + 4t \\ z = 4 + 5t \end{cases}$. | | X |
| d) PTTS của đường thẳng $d$ là $\begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = -1 + 4t \\ z = 4 + 5t \end{cases}$. | X | |

**Lời giải.**

a) S **Sai.**

Đường thẳng $d$: $\begin{cases} x = -2 + 3t \\ y = 4 - t \\ z = 5 + 4t \end{cases}$ có véc-tơ chỉ phương $\vec{u} = (3; -1; 4)$.

b) S **Sai.**

Đường thẳng $\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = -1 + 4t \\ z = 4 + 5t \end{cases}$ có véc-tơ chỉ phương $\vec{u} = (2; 4; 5)$.

c) S **Sai.**

Đường thẳng $\begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = 1 + 4t \\ z = 4 + 5t \end{cases}$ không đi qua $M$.

d) Đ **Đúng.**

Đường thẳng $d$ đi qua điểm $M(3; -1; 4)$ và có một vectơ chỉ phương $\vec{u} = (-2; 4; 5)$. Phương trình của $d$ là $\begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = -1 + 4t \\ z = 4 + 5t. \end{cases}$

Chọn đáp án | a sai | b sai | c sai | d đúng | ..............□

**CÂU 15.** Trong KG $Oxyz$, cho hai điểm $M(1; -2; 1)$, $N(0; 1; 3)$.

| Mệnh đề | Đ | S |
|---|---|---|
| **a)** PTĐT qua hai điểm $M$, $N$ là $\dfrac{x+1}{-1} = \dfrac{y-2}{3} = \dfrac{z+1}{2}$. | | X |
| **b)** PTĐT qua hai điểm $M$, $N$ là $\dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y-3}{-2} = \dfrac{z-2}{1}$. | | X |
| **c)** PTĐT qua hai điểm $M$, $N$ là $\dfrac{x}{-1} = \dfrac{y-1}{3} = \dfrac{z-3}{2}$. | X | |
| **d)** PTĐT qua hai điểm $M$, $N$ là $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y-1}{-3} = \dfrac{z-3}{-2}$. | X | |

**Lời giải.**

Ta có $\overrightarrow{MN} = (-1; 3; 2)$, $\overrightarrow{MN} = (1; -3; -2)$.

a) S **Sai.**

Đường thẳng $d$: $\dfrac{x+1}{-1} = \dfrac{y-2}{3} = \dfrac{z+1}{2}$ không qua $M$.

b) S **Sai.**

Đường thẳng $d$: $\dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y-3}{-2} = \dfrac{z-2}{1}$ không qua $M$.

c) Đ **Đúng.**

Đường thẳng $MN$ qua $N$ nhận $\overrightarrow{MN} = (-1; 3; 2)$ làm vectơ chỉ phương có phương trình là $\dfrac{x}{-1} = \dfrac{y-1}{3} = \dfrac{z-3}{2}$.

d) Đ **Đúng.**

Đường thẳng $MN$ qua $N$ nhận $\overrightarrow{NM} = (1; -3; -2)$ làm vectơ chỉ phương có phương trình là $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y-1}{-3} = \dfrac{z-3}{-2}$.

Chọn đáp án | a sai | b sai | c đúng | d đúng | ..............□

**CÂU 16.** Trong KG $Oxyz$, đường thẳng có PTTS là $(d)$: $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = -3 + t \end{cases}$.

| Mệnh đề | Đ | S |
|---|---|---|
| **a)** PTCT của đường thẳng $d$ là $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{-1} = \dfrac{z+3}{1}$. | X | |
| **b)** PTCT của đường thẳng $d$ là $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{-1} = \dfrac{z-3}{1}$ . | | X |
| **c)** PTCT của đường thẳng $d$ là $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z+3}{1}$. | | X |
| **d)** PTCT của đường thẳng $d$ là $\dfrac{1-x}{-2} = \dfrac{2-y}{1} = \dfrac{-z-3}{-1}$. | X | |

**Lời giải.**

Đường thẳng $d$ đi qua điểm $M(1; 2; -3)$ có véc tơ chỉ phương $\vec{u} = (2; -1; 1)$.

a) Đ **Đúng.**
Đường thẳng $d$ đi qua điểm $M(1;2;-3)$ nhận véc tơ $\vec{u}=(2;-1;1)$ làm véc-tơ chỉ phương nên có phương trình dạng chính tắc là $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z+3}{1}$.

b) S **Sai.**
Đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z-3}{1}$ không qua $M$.

c) S **Sai.**
Đường thẳng $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z+3}{1}$ có véc tơ chỉ phương $\vec{u}=(2;1;1)$.

d) Đ **Đúng.**
Ta có $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z+3}{1}\Leftrightarrow\dfrac{1-x}{-2}=\dfrac{2-y}{1}=\dfrac{-z-3}{-1}$.

Chọn đáp án | a đúng | b sai | c sai | d đúng | ..........□

**CÂU 17.** Trong KG $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;3)$ và đường thẳng $d\colon \dfrac{x+4}{-2}=\dfrac{y+3}{-3}=\dfrac{z-3}{1}$. Khi đó

| Mệnh đề | Đ | S |
|---|---|---|
| a) Đường thẳng $\Delta$ đi qua điểm $A$ và song song với đường thẳng $d$ có phương trình là $\begin{cases}x=1-2t\\y=2-3t\\z=3+t\end{cases}$. | X | |
| b) Đường thẳng $\Delta$ đi qua điểm $A$ và song song với đường thẳng $d$ có phương trình là $\begin{cases}x=1+2t\\y=2+3t\\z=3-t\end{cases}$. | X | |
| c) Đường thẳng $\Delta$ đi qua điểm $A$ và song song với đường thẳng $d$ có phương trình là $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z-3}{-1}$. | X | |
| d) Đường thẳng $\Delta$ đi qua điểm $A$ và song song với đường thẳng $d$ có phương trình là $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y+2}{3}=\dfrac{z+3}{-1}$. | | X |

**Lời giải.**
Ta có đường thẳng $\Delta$ song song với đường thẳng $d$ nên có vectơ chỉ phương là
$\vec{u}_\Delta=\vec{u}_d=(-2;-3;1)=-(2;3;-1)$.

a) Đ **Đúng.**

Đường thẳng $d$ đi qua điểm $A(1;2;3)$ nhận véc tơ chỉ phương $\vec{u}=(-2;-3;1)$ có phương trình là $\begin{cases}x=1-2t\\y=2-3t\\z=3+t\end{cases}$.

b) Đ **Đúng.**

Đường thẳng $d$ đi qua điểm $A(1;2;3)$ nhận véc tơ chỉ phương $\vec{u}=(2;3;-1)$ có phương trình là $\begin{cases}x=1+2t\\y=2+3t\\z=3-t\end{cases}$.

c) Đ **Đúng.**
Đường thẳng $d$ đi qua điểm $A(1;2;3)$ nhận véc tơ chỉ phương $\vec{u}=(2;3;-1)$ có phương trình là $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z-3}{-1}$.

d) S **Sai.**
Đường thẳng $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y+2}{3}=\dfrac{z+3}{-1}$ không qua $A(1;2;3)$.

Chọn đáp án | a đúng | b đúng | c đúng | d sai | ..........□

**CÂU 18.** Trong KG $Oxyz$, cho ba điểm $A(2;-2;3)$, $B(1;3;4)$ và $C(3;-1;5)$.

| Mệnh đề | Đ | S |
|---|---|---|

| Mệnh đề | Đ | S |
|---|---|---|
| **a)** Đường thẳng đi qua $A$ và song song với $BC$ có phương trình là $\begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = -2 + 4t \\ z = 3 - t \end{cases}$. | X | |
| **b)** Đường thẳng đi qua $A$ và song song với $BC$ có phương trình là $\dfrac{x+2}{2} = \dfrac{y-2}{-4} = \dfrac{z+3}{1}$. | | X |
| **c)** Đường thẳng đi qua $A$ và song song với $BC$ có phương trình là $\dfrac{x-2}{4} = \dfrac{y+2}{2} = \dfrac{z-3}{9}$. | | X |
| **d)** Đường thẳng đi qua $A$ và song song với $BC$ có phương trình là $\dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y+2}{-4} = \dfrac{z-3}{1}$. | X | |

**Lời giải.**

Véctơ chỉ phương của đường thẳng cần tìm là $\overrightarrow{BC} = (2; -4; 1) = -(-2; 4; -1)$.

a) Đ **Đúng.**
Đường thẳng đi qua $A(2; -2; 3)$ và song song với $BC$ nhận véc-tơ chỉ phương $\vec{u} = (-2; 4; -1)$ có phương trình là $\begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = -2 + 4t \\ z = 3 - t. \end{cases}$

b) S **Sai.**
Đường thẳng $d: \dfrac{x+2}{2} = \dfrac{y-2}{-4} = \dfrac{z+3}{1}$ không đi qua $A(2; -2; 3)$.

c) S **Sai.**
Đường thẳng $d$: $\dfrac{x-2}{4} = \dfrac{y+2}{2} = \dfrac{z-3}{9}$ có véc-tơ chỉ phương $\vec{u} = (4; 2; 9)$.

d) Đ **Đúng.**
Đường thẳng $\dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y+2}{3} = \dfrac{z+3}{-1}$ không qua $A(1; 2; 3)$.

Chọn đáp án | a đúng | b sai | c sai | d đúng | ☐

## 5 Lập PTĐT liên quan đến song song

**Phần I. Mỗi câu hỏi học sinh chọn một trong bốn phương án A, B, C, D.**

**CÂU 1.** Trong KG $Oxyz$, cho điểm $A(-4; -3; 3)$ và mặt phẳng $(P)$: $x + y + z = 0$. Đường thẳng đi qua $A$, cắt trục $Oz$ và song song với $(P)$ có phương trình là

Ⓐ $\dfrac{x-4}{4} = \dfrac{y-3}{3} = \dfrac{z-3}{-7}$. Ⓑ $\dfrac{x+4}{4} = \dfrac{y+3}{3} = \dfrac{z-3}{1}$. Ⓒ $\dfrac{x+4}{-4} = \dfrac{y+3}{3} = \dfrac{z-3}{1}$. Ⓓ $\dfrac{x+8}{4} = \dfrac{y+6}{3} = \dfrac{z-10}{-7}$.

**Lời giải.**

Gọi $\Delta$ là đường thẳng cần lập.
Mặt phẳng $(P)$ có một VTPT $\vec{n} = (1; 1; 1)$.
Theo đề, ta có $\Delta \cap Oz = B(0; 0; c) \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (4; 3; c - 3)$ là một véc-tơ của $\Delta$.
Khi đó

$$\overrightarrow{AB} \perp \vec{n} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow 4 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + (c - 3) \cdot 1 = 0 \Leftrightarrow c - 3 = -7.$$

Suy ra $\overrightarrow{AB} = (4; 3; -7)$.
Vậy $\Delta$: $\dfrac{x+4}{4} = \dfrac{y+3}{3} = \dfrac{z-3}{-7}$ hay $\Delta$: $\dfrac{x+8}{4} = \dfrac{y+6}{3} = \dfrac{z-10}{-7}$.

Chọn đáp án D ☐

**CÂU 2.** Trong KG $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)$: $x + y - z + 9 = 0$, đường thẳng $d$: $\dfrac{x-3}{1} = \dfrac{y-3}{3} = \dfrac{z}{2}$ và điểm $A(1; 2; -1)$. Viết PTĐT $\Delta$ đi qua điểm $A$ cắt $d$ và song song với mặt phẳng $(P)$.

Ⓐ $\dfrac{x-1}{-1} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z+1}{1}$. Ⓑ $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z+1}{-1}$. Ⓒ $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z+1}{1}$. Ⓓ $\dfrac{x-1}{-1} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z+1}{-1}$.

**Lời giải.**

$(P)$ có véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n} = (1; 1; -1)$.
$d$ có véc-tơ chỉ phương là $\vec{u} = (1; 3; 2)$ và $B(3; 3; 0) \in d$.
$\Delta$ có véc-tơ chỉ phương là $\vec{u}_\Delta = (a; b; c)$ và $A(1; 2; -1) \in \Delta$ (trong đó $a^2 + b^2 + c^2 > 0$).
$\Rightarrow \overrightarrow{AB} = (2; 1; 1); d \parallel (P) \Leftrightarrow \vec{u}_\Delta \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow a + b - c = 0 \Leftrightarrow c = a + b \Rightarrow \vec{u}_\Delta = (a; b; a + b)$.
Do $d$ cắt $\Delta \Leftrightarrow \left[\overrightarrow{AB}, \vec{u}\right] \cdot \vec{u}_\Delta = 0 \Leftrightarrow 2a + b = 0 \Leftrightarrow b = -2a$.

Chọn $a = -1 \Rightarrow b = 2 \Rightarrow c = 1 \Rightarrow \vec{u}_\Delta = (-1; 2; 1) \Rightarrow \Delta\colon \dfrac{x-1}{-1} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z+1}{1}$.

Vậy $\Delta\colon \dfrac{x-1}{-1} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z+1}{1}$.

Chọn đáp án A ..................................................... □

**CÂU 3.** Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho điểm $M(1; -3; 4)$, đường thẳng $d\colon \dfrac{x+2}{3} = \dfrac{y-5}{-5} = \dfrac{z-2}{-1}$ và mặt phẳng $(P)\colon 2x + z - 2 = 0$. Viết PTĐT $\Delta$ qua $M$ vuông góc với $d$ và song song với $(P)$.

**A** $\Delta\colon \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+3}{-1} = \dfrac{z-4}{-2}$.

**B** $\Delta\colon \dfrac{x-1}{-1} = \dfrac{y+3}{-1} = \dfrac{z-4}{-2}$.

**C** $\Delta\colon \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+3}{1} = \dfrac{z-4}{-2}$.

**D** $\Delta\colon \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+3}{-1} = \dfrac{z+4}{2}$.

**Lời giải.**

Ta có $\vec{u}_d = (3; -5; -1)$ là véc-tơ chỉ phương của $d$.
$\vec{n}_{(P)} = (2; 0; 1)$ là véc-tơ pháp tuyến của $(P)$.
$\left[\vec{u}_d, \vec{n}_{(P)}\right] = (-5; -5; 10) = -5(1; 1; -2)$.
Do $\Delta$ vuông góc với $d$ và song song với $(P)$ nên $\vec{u} = (1; 1; -2)$ là véc-tơ chỉ phương của $\Delta$.
Khi đó, phương trình của $\Delta$ là $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+3}{1} = \dfrac{z-4}{-2}$.

Chọn đáp án C ..................................................... □

**CÂU 4.** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(\alpha)\colon x - 2y + z - 1 = 0$, $(\beta)\colon 2x + y - z = 0$ và điểm $A(1; 2; -1)$. Đường thẳng $\Delta$ đi qua điểm $A$ và song song với cả hai mặt phẳng $(\alpha)$, $(\beta)$ có phương trình là

**A** $\dfrac{x-1}{-2} = \dfrac{y-2}{4} = \dfrac{z+1}{-2}$. **B** $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-2}{3} = \dfrac{z+1}{5}$. **C** $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-2}{-2} = \dfrac{z+1}{-1}$. **D** $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y+2}{2} = \dfrac{z-3}{1}$.

**Lời giải.**

$(\alpha)$ có véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}_1 = (1; -2; 1)$, $(\beta)$ có véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}_2 = (2; 1; -1)$.
Đường thẳng $\Delta$ có véc-tơ chỉ phương là $\vec{u} = [\vec{n}_1, \vec{n}_2] = (1; 3; 5)$.
Phương trình của đường thẳng $\Delta\colon \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-2}{3} = \dfrac{z+1}{5}$.

Chọn đáp án B ..................................................... □

**CÂU 5.** Trong KG $Oxyz$, cho điểm $A(2; 0; -1)$ và mặt phẳng $(P)\colon x + y - 1 = 0$. Đường thẳng đi qua $A$ đồng thời song song với $(P)$ và mặt phẳng $Oxy$ có phương trình là

**A** $\begin{cases} x = 3 + t \\ y = 2t \\ z = 1 - t \end{cases}$. **B** $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -t \\ z = -1 \end{cases}$. **C** $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 \\ z = -t \end{cases}$. **D** $\begin{cases} x = 3 + t \\ y = 1 + 2t \\ z = -t \end{cases}$.

**Lời giải.**

Ta có $\vec{n}_{(P)} = (1; 1; 0)$, $\vec{n}_{(Oxy)} = (0; 0; 1)$.
Gọi $d$ là đường thẳng đi qua $A$ đồng thời song song với $(P)$ và mặt phẳng $(Oxy)$. Khi đó

$$\begin{cases} \vec{n}_d \perp \vec{n}_{(P)} \\ \vec{n}_d \perp \vec{n}_{(Oxy)} \end{cases} \Rightarrow \vec{n}_d = \left[\vec{n}_{(P)}, \vec{n}_{(Oxy)}\right] = (1; -1; 0).$$

Vậy $d\colon \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -t \\ z = -1. \end{cases}$

Chọn đáp án B ..................................................... □

**CÂU 6.** Trong không gian tọa độ $Oxyz$, viết phương trình chính tắc của đường thẳng đi qua điểm $A(3; -1; 5)$ và cùng song song với hai mặt phẳng $(P)\colon x - y + z - 4 = 0$, $(Q)\colon 2x + y + z + 4 = 0$.

**A** $\dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z-5}{-3}$. **B** $\dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y+1}{-1} = \dfrac{z-5}{-3}$. **C** $\dfrac{x+3}{2} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z+5}{-3}$. **D** $\dfrac{x+3}{2} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z+5}{-3}$.

**Lời giải.**

Mặt phẳng $(P)$ có một véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}_P=(1;-1;1)$; mặt phẳng $(Q)$ có một véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}_Q=(2;1;1)$.
Nhận thấy $A\notin(P), A\notin(Q)$.
Gọi đường thẳng cần lập là $d$ và $\vec{u}$ là một véc-tơ chỉ phương của nó.
Ta chọn $\vec{u}=[\vec{n}_P,\vec{n}_Q]=(2;-1;-3)$.
Mặt khác, $d$ qua $A(3;-1;5)$ nên có phương trình chính tắc là $\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z-5}{-3}$.

Chọn đáp án B ........................................ □

**CÂU 7.** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(\alpha): x-2y+z-1=0$, $(\beta): 2x+y-z=0$ và điểm $A(1;2;-1)$. Đường thẳng $\Delta$ đi qua điểm $A$ và song song với cả hai mặt phẳng $(\alpha),(\beta)$ có phương trình là

**A** $\dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{y-2}{4}=\dfrac{z+1}{-2}$. **B** $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z+1}{5}$. **C** $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{-2}=\dfrac{z+1}{-1}$. **D** $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z-3}{1}$.

**Lời giải.**

$(\alpha)$ có véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}_1=(1;-2;1)$, $(\beta)$ có véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}_2=(2;1;-1)$.
Đường thẳng $\Delta$ có véc-tơ chỉ phương là $\vec{u}=[\vec{n}_1,\vec{n}_2]=(1;3;5)$.
Phương trình của đường thẳng là $\Delta\colon \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z+1}{5}$.

Chọn đáp án B ........................................ □

**CÂU 8.** Trong không gian $Oxyz$, cho ba đường thẳng $d_1\colon \dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-2}{-2}$; $d_2\colon \dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y}{-2}=\dfrac{z+4}{-1}$; $d_3\colon \dfrac{x+3}{4}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z}{6}$. Đường thẳng song song với $d_3$, cắt $d_1$ và $d_2$ có phương trình là

**A** $\dfrac{x-3}{4}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-2}{6}$. **B** $\dfrac{x-3}{-4}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-2}{-6}$. **C** $\dfrac{x+1}{4}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z-4}{6}$. **D** $\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z+4}{6}$.

**Lời giải.**

Từ $d_1\colon \dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-2}{-2}\Rightarrow d_1\colon \begin{cases}x=3+2t\\ y=-1+t\\ z=2-2t.\end{cases}$
Véc-tơ chỉ phương của $d_2$ là $\vec{u}_2=(3;-2;-1)$.
Véc-tơ chỉ phương của $d_3$ là $\vec{u}_3=(4;-1;6)=-(-4;1;-6)$.
Gọi $(P)$ là mặt phẳng chứa $d_2$ và song song với $d_3$, suy ra véc-tơ chỉ phương của $(P)$ là $\vec{n}_P=[\vec{u}_2;\vec{u}_3]=(-13;-22;5)$ và $A(-1;0;-4)\in(P)$.
$\Rightarrow (P)\colon -13(x+1)-22(y-0)+5(z+4)=0\Leftrightarrow (P)\colon 13x+22y-5z-7=0$.
Gọi $B$ là giao điểm của $(P)$ và $d_1$. Đường thẳng đi qua $B$ và song song với $d_3$ chính là đường thẳng cần tìm.
Gọi $B(3+2t;-1+t;2-2t)$. Thay tọa độ $B$ vào $(P)\colon 13(3+2t)+22(-1+t)-5(2-2t)-7=0\Rightarrow t=0\Rightarrow B(3;-1;2)$.
Vậy PTĐT cần tìm là $\dfrac{x-3}{-4}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-2}{-6}$.

Chọn đáp án B ........................................ □

**CÂU 9.** Trong không gian $Oxyz$, cho ba đường thẳng $d\colon \dfrac{x}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z+2}{2}$, mặt phẳng $(P)\colon 2x+y+2z-5=0$ và điểm $A(1;1;-2)$. Phương trình chính tắc của đường thẳng $\Delta$ đi qua điểm $A$ song song với mặt phẳng $(P)$ và vuông góc với $d$ là

**A** $\Delta\colon \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z+2}{-2}$. **B** $\Delta\colon \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z+2}{-2}$.

**C** $\Delta\colon \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z+2}{-3}$. **D** $\Delta\colon \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z+2}{2}$.

**Lời giải.**

$d$ có véc-tơ chỉ phương là $\vec{u}=(1;2;2)$.
$(P)$ có một véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}=(2;1;2)$.
Đường thẳng $\Delta$ song song với mặt phẳng $(P)$ và vuông góc với $d$.
$\Rightarrow \Delta$ có một véc-tơ chỉ phương là $\vec{v}=[\vec{u},\vec{n}]=(2;2;-3)$, và $\Delta$ đi qua điểm $A(1;1;-2)$.
Vậy phương trình của $\Delta$ là $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z+2}{-3}$.

Chọn đáp án C ........................................ □

**CÂU 10.** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon 2x-y+2z+3=0$ và hai đường thẳng $d_1\colon \dfrac{x}{3}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z+1}{1}$, $d_2\colon \dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z+3}{1}$. Xét các điểm $A,B$ lần lượt di động trên $d_1$ và $d_2$ sao cho $AB$ song song với mặt phẳng $(P)$. Tập hợp trung điểm của đoạn thẳng $AB$ là

**A** Một đường thẳng có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}=(-9;8;-5)$ .

(B) Một đường thẳng có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}=(-5;8;-5)$ .

(C) Một đường thẳng có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}=(1;-2;-5)$ .

(D) Một đường thẳng có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}=(1;5;-2)$ .

**Lời giải.**

$A\in d_1\Rightarrow A(3a;1-a;-1+a)$; $B\in d_2\Rightarrow B(2+b;1-2b;-1+b)$.
$\overrightarrow{AB}=(2+b-3b;-2b+a;b-2-a)$; $n_P=(2;-1;2)$.
Do $AB \parallel (P)$ nên $\overrightarrow{AB}\cdot\vec{n}_P=0\Leftrightarrow a=\dfrac{2}{3}b$.

Tọa độ trung điểm của đoạn thẳng $AB$ là $I\left(1+\dfrac{2}{3}b;1-\dfrac{8}{6}b;-2+\dfrac{5}{6}b\right)$.

Suy ra tập hợp điểm $I$ là một đường thẳng $\begin{cases}x=1+\dfrac{2}{3}b\\ y=1-\dfrac{8}{6}b\\ z=-2+\dfrac{5}{6}b.\end{cases}$

Suy ra tập hợp trung điểm của đoạn thẳng $AB$ là một đường thẳng có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}=(-9;8;-5)$.

Chọn đáp án (A) ................................................................ □

**CÂU 11.** Trong KG $Oxyz$ cho hai đường thẳng $d\colon\begin{cases}x=2-t\\ y=1+2t\\ z=4-2t\end{cases}$ và $d'\colon\dfrac{x-4}{1}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z}{2}$. Phương trình nào dưới đây là PTĐT thuộc mặt phẳng chứa $d$ và $d'$ đồng thời cách đều hai đường thẳng đó.

(A) $\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-4}{-2}$. (B) $\dfrac{x+3}{1}=\dfrac{y+2}{-2}=\dfrac{z+2}{2}$. (C) $\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y}{-2}=\dfrac{z-2}{2}$. (D) $\dfrac{x+3}{-1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z+2}{-2}$.

**Lời giải.**

$d$ đi qua $A\,(2;1;4)$và có véc-tơ chỉ phương $\vec{u_1}=(-1;2;-2)$.
$d'$ đi qua $B(4;-1;0)$ có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}_2=(1;-2;2)$.
Ta có $\vec{u_1}=-\vec{u}_2$ và $\dfrac{2-4}{1}\neq\dfrac{1+1}{-2}\neq\dfrac{4}{2}$ nên $d\parallel d'$.

Đường thẳng $\Delta$ thuộc mặt phẳng chứa $d$ và $d'$ đồng thời cách đều hai đường thẳng đó khi và chỉ khi $\begin{cases}\Delta\parallel d\parallel d'\\ \mathrm{d}\,(\Delta,d)=\mathrm{d}\,(\Delta,d')\end{cases}$ hay $\Delta$ qua trung điểm $I(3;0;2)$ và có một véc-tơ chỉ phương là $\vec{u}=(1;-2;2)$. Khi đó phương trình của $\Delta$ là $\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y}{-2}=\dfrac{z-2}{2}$.

Chọn đáp án (C) ................................................................ □

**CÂU 12.** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d$ và mặt phẳng $(P)$ lần lượt có phương trình $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-2}{1}$ và $x+y-2z+8=0$, điểm $A(2;-1;3)$. PTĐT $\Delta$ cắt $d$ và $(P)$ lần lượt tại $M$và $N$ sao cho $A$ là trung điểm của đoạn thẳng $MN$ là

(A) $\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y+5}{4}=\dfrac{z-5}{2}$. (B) $\dfrac{x-2}{6}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-3}{2}$. (C) $\dfrac{x-5}{6}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z-5}{2}$. (D) $\dfrac{x-5}{3}=\dfrac{y-3}{4}=\dfrac{z-5}{2}$.

**Lời giải.**

Đường thẳng $d$ có PTTS $\begin{cases}x=-1+2t\\ y=t\\ z=2+t.\end{cases}$

Điểm $M$ thuộc đường thẳng $d$ nên $M(-1+2t;t;2+t)$.

Điểm $A$ là trung điểm của $MN$ nên $\begin{cases}x_N=2x_A-x_M=5-2t\\ y_N=2y_A-y_M=-2-t\\ z_N=2z_A-z_M=4-t\end{cases}\Rightarrow N(5-2t;-2-t;4-t)$. Mặt khác điểm $N\in(P)$ nên $5-2t-2-t-8+2t+8=0\Leftrightarrow t=3$.
Suy ra $M(5;3;5)$.
Đường thẳng $\Delta$ có véc-tơ chỉ phương $\overrightarrow{AM}=(3;4;2)$ và đi qua điểm $M(5;3;5)$ nên có phương trình là $\dfrac{x-5}{3}=\dfrac{y-3}{4}=\dfrac{z-5}{2}$.

Chọn đáp án (D) ................................................................ □

**CÂU 13.** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A$ và mặt phẳng $(P)\colon 3x-2y-3z-7=0$, đường thẳng $d\colon\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+4}{-2}=\dfrac{z-1}{2}$. Phương trình nào sau đây là PTĐT $\Delta$ đi qua $A$, song song $(P)$ và cắt đường thẳng $d$?

Ⓐ $\begin{cases} x = 3 + 11t \\ y = 2 - 54t \\ z = -4 + 47t \end{cases}$. Ⓑ $\begin{cases} x = 3 + 54t \\ y = 2 + 11t \\ z = -4 - 47t \end{cases}$. Ⓒ $\begin{cases} x = 3 + 47t \\ y = 2 + 54t \\ z = -4 + 11t \end{cases}$. Ⓓ $\begin{cases} x = 3 - 11t \\ y = 2 - 47t \\ z = -4 + 54t \end{cases}$.

**Lời giải.**

Ta có $\vec{n}_{(P)} = (3; -2; -3)$ là véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng $(P)$.
Đường thẳng $d$ đi qua điểm $M(2; -4; 1)$ và có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}_d = (3; -2; 2)$.
Giả sử $\Delta \cap d = M$ nên $M(2 + 3t; -4 - 2t; 1 + 2t)$ khi đó véc-tơ chỉ phương của đường thẳng $\Delta$ là $\vec{u_\Delta} = \overrightarrow{AM} = (3t - 1; -2t - 6; 2t + 5)$.
$\overrightarrow{AM} \perp \vec{n}_P \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n}_P = 0$ nên $3(3t - 1) - 2(-2t - 6) - 3(2t + 5) = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{6}{7}$.
Suy ra $\overrightarrow{AM} = (\dfrac{11}{7}; -\dfrac{54}{7}; \dfrac{47}{7}) = \dfrac{1}{7}(11; -54; 47)$.
Vậy PTĐT $\Delta$ là $\begin{cases} x = 3 + 11t \\ y = 2 - 54t \\ z = -4 + 47t. \end{cases}$

Chọn đáp án A ........................................................................ □

**CÂU 14.** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha)\colon x - 2z - 6 = 0$, đường thẳng $d\colon \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 3 + t \\ z = -1 - t \end{cases}$. Viết PTĐT $\Delta$ nằm trong mặt phẳng $(\alpha)$ cắt đồng thời vuông góc với $d$.

Ⓐ $\dfrac{x - 2}{2} = \dfrac{y - 4}{1} = \dfrac{z + 2}{1}$. Ⓑ $\dfrac{x - 2}{2} = \dfrac{y - 4}{-1} = \dfrac{z + 2}{1}$. Ⓒ $\dfrac{x - 2}{2} = \dfrac{y - 3}{-1} = \dfrac{z + 2}{1}$. Ⓓ $\dfrac{x - 2}{2} = \dfrac{y - 4}{-1} = \dfrac{z - 2}{1}$.

**Lời giải.**

Giao điểm $I$ của $d$ và $\alpha$ là nghiệm của hệ $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 3 + t \\ z = -1 - t \\ x - 2z - 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow I(2; 4; -2)$.
Mặt phẳng $(\alpha)$ có một véc-tơ pháp tuyến $\vec{n} = (1; 0; -2)$ đường thẳng $d$ có một véc-tơ chỉ phương $\vec{u} = (1; 1; -1)$.
Khi đó đường thẳng $\Delta$ có một véc-tơ chỉ phương là $[\vec{n}, \vec{u}] = (2; -1; 1)$.
Đường thẳng $\Delta$ qua điểm $I$ và có một véc-tơ chỉ phương $[\vec{n}, \vec{u}] = (2; -1; 1)$ nên có phương trình là $\dfrac{x - 2}{2} = \dfrac{y - 4}{-1} = \dfrac{z + 2}{1}$.

Chọn đáp án B ........................................................................ □

**CÂU 15.** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1; -2; 3)$ và hai mặt phẳng $(P)\colon x + y + z + 1 = 0$, $(Q)\colon x - y + z - 2 = 0$. Phương trình nào dưới đây là PTĐT đi qua $A$, song song với $(P)$ và $(Q)$?

Ⓐ $\begin{cases} x = 1 + 1t \\ y = -2 \\ z = 3 - t \end{cases}$. Ⓑ $\begin{cases} x = -1 + 1t \\ y = 2 \\ z = -3 - t \end{cases}$. Ⓒ $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 \\ z = 3 + 2t \end{cases}$. Ⓓ $\begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \\ z = 3 - 2t \end{cases}$.

**Lời giải.**

Mặt phẳng $(P)$ có một véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}_P = (1; 1; 1)$, mặt phẳng $(Q)$ có một véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}_Q = (1; -1; 1)$.
Vì đường thẳng $d$ song song với hai mặt phẳng $(P)$ và $(Q)$ , nên có véc-tơ chỉ phương là $[\vec{n}_P, \vec{n}_Q] = (2; 0; -2) = 2(1; 0; -1)$.
Vậy phương trình $d$ là $\begin{cases} x = 1 + 1t \\ y = -2 \\ z = 3 - t. \end{cases}$

Chọn đáp án A ........................................................................ □

**CÂU 16.** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho các đường thẳng $d_1\colon \dfrac{x - 3}{2} = \dfrac{y + 1}{1} = \dfrac{z - 2}{2}$, $d_2\colon \begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = -2t \\ z = -4 - t \end{cases}$, $d_3\colon \dfrac{x + 3}{4} = \dfrac{y - 2}{-1} = \dfrac{z}{6}$. Đường thẳng song song với $d_3$ và cắt đồng thời $d_1$ và $d_2$ có phương trình là

Ⓐ $\dfrac{x + 1}{4} = \dfrac{y}{-1} = \dfrac{z - 4}{6}$. Ⓑ $\dfrac{x - 1}{4} = \dfrac{y}{-1} = \dfrac{z + 4}{6}$. Ⓒ $\dfrac{x - 3}{4} = \dfrac{y + 1}{1} = \dfrac{z - 2}{6}$. Ⓓ $\dfrac{x - 3}{-4} = \dfrac{y + 1}{1} = \dfrac{z - 2}{-6}$.

**Lời giải.**

Gọi $\Delta$ đường thẳng song song với $d_3$ và cắt $d_1$ và $d_2$.
$\vec{u}_\Delta, \vec{u}_3$ lần lượt là véc-tơ chỉ phương của $\Delta$ và $d_3$.

Ta có $\Delta \cap d_1 = A \Rightarrow A(2x+3; x-1; -2x+2)$; $\Delta \cap d_2 = B \Rightarrow B(-1+3y; -2y; -4-y)$.
$\overrightarrow{AB} = (3y-2x-4; -2y-x+1; -y+2x-6)$.
Vì $\Delta \parallel d_3 \Rightarrow \vec{u}_\Delta = k\vec{u}_3 \Rightarrow \dfrac{3y-2x-4}{4} = \dfrac{-2y-x+1}{-1} = \dfrac{-y+2x-6}{6}$.
Suy ra

$$\begin{cases} 2x-3y+4 = -8y-4x+4 \\ -12y-6x+6 = y-2x+6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x+5y=0 \\ -13y+4x=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=0.$$

Từ đó suy ra $A(3;-1;2); B(-1;0;-4) \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (-4;1;-6)$ là véc-tơ chỉ phương của $\Delta$. Vậy phương trình của $\Delta$ là $\dfrac{x-3}{-4} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z-2}{-6}$.

Chọn đáp án D ........................................................ □

**CÂU 17.** Trong không gian, cho mặt phẳng $(P)\colon x+y-z-4=0$ và điểm $A(2;-1;3)$. Gọi $\Delta$ là đường thẳng đi qua $A$ và song song với $(P)$, biết $\Delta$ có một véc-tơ chỉ phương là $\vec{u} = (a;b;c)$, đồng thời $\Delta$ đồng phẳng và không song song với $Oz$. Tính $\dfrac{a}{c}$.

**A** $\dfrac{a}{c} = 2$. **B** $\dfrac{a}{c} = -2$. **C** $\dfrac{a}{c} = -\dfrac{1}{2}$. **D** $\dfrac{a}{c} = \dfrac{1}{2}$.

**Lời giải.**

$(P)$ có một véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n} = (1;1;-1)$.
$\Delta$ đi qua điểm $A(2;-1;3)$ và có một véc-tơ chỉ phương là $\vec{u} = (a;b;c)$.
$Oz$ đi qua điểm $O(0;0;0)$ và có một véc-tơ chỉ phương là $\vec{k} = (0;0;1)$.
$\Delta$ không song song với $Oz \Leftrightarrow a:b:c \neq 0:0:1$.
$\Delta$ đồng phẳng với $Oz \Leftrightarrow$ Ba véc-tơ $\vec{u}$; $\vec{k}$; $\overrightarrow{OA}$ đồng phẳng. khi đó ta có

$$\left[\vec{k}, \overrightarrow{OA}\right]\vec{u} = 0 \Leftrightarrow a+2b=0 \Leftrightarrow a=-2b.$$

Do $\Delta \parallel (P) \Rightarrow \vec{u} \perp \vec{n} \Leftrightarrow \vec{u}\cdot\vec{n} = \vec{0} \Leftrightarrow a+b-c=0 \Rightarrow c=-b$.
Suy ra $\dfrac{a}{c} = 2$.

Chọn đáp án A ........................................................ □

**CÂU 18.** Trong KG $Oxyz$, viết PTTS của đường thẳng đi qua điểm $M(1;3;-2)$, đồng thời song song với giao tuyến của hai mặt phẳng $(P)\colon x+y-3=0$ và $(Q)\colon 2x-y+z-3=0$.

**A** $\begin{cases} x=1+3t \\ y=3-t \\ z=-2+t \end{cases}$. **B** $\begin{cases} x=1-3t \\ y=3+t \\ z=-2+t \end{cases}$. **C** $\begin{cases} x=1+t \\ y=3-t \\ z=-2-3t \end{cases}$. **D** $\begin{cases} x=1+t \\ y=3+t \\ z=-2-3t \end{cases}$.

**Lời giải.**

Hai mặt phẳng $(P)\colon x+y-3=0$ và $(Q)\colon 2x-y+z-3=0$ có véc-tơ pháp tuyến lần lượt là $\vec{n}_P = (1;1;0)$; $\vec{n}_Q = (2;-1;1)$.
Giao tuyến của hai mặt phẳng $(P)$ và $(Q)$ có véc-tơ chỉ phương là $\vec{u} = [\vec{n}_P, \vec{n}_Q] = (1;-1;-3)$.
Đường thẳng đi qua điểm $M(1;3;-2)$, đồng thời song song với giao tuyến của hai mặt phẳng $(P)\colon x+y-3=0$ và $(Q)\colon 2x-y+z-3=0$ nhận véc-tơ $\vec{u}$ làm véc-tơ chỉ phương có PTTS là $\begin{cases} x=1+t \\ y=3-t \\ z=-2-3t. \end{cases}$

Chọn đáp án C ........................................................ □

**CÂU 19.** Trong KG $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d\colon \begin{cases} x=2+3t \\ y=-3+t \\ z=4-2t \end{cases}$ và $d'\colon \dfrac{x-4}{3} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z}{-2}$. Phương trình nào dưới đây là PTĐT thuộc mặt phẳng chứa $d$ và $d'$, đồng thời cách đều hai đường thẳng đó.

**A** $\dfrac{x-3}{3} = \dfrac{y+2}{1} = \dfrac{z-2}{-2}$. **B** $\dfrac{x+3}{3} = \dfrac{y+2}{1} = \dfrac{z+2}{-2}$. **C** $\dfrac{x-3}{3} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z-2}{-2}$. **D** $\dfrac{x+3}{3} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z+2}{-2}$.

**Lời giải.**

Ta thấy hai đường thẳng $d$ và $d'$ có cùng véc-tơ chỉ phương hay $d \parallel d'$.
Vậy đường thẳng cần tìm có véc-tơ chỉ phương là $\vec{u} = (3;1;-2)$ và đi qua trung điểm $I(3;-2;2)$ của $AB$ với $A(2;-3;4) \in d$ và $B(4;-1;0) \in d'$.
Vậy PTĐT cần tìm là $\dfrac{x-3}{3} = \dfrac{y+2}{1} = \dfrac{z-2}{-2}$.

Chọn đáp án A ........................................................ □

**CÂU 20.** Trong KG $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x-y+z-10=0$, điểm $A(1;3;2)$ và đường thẳng $d\colon \begin{cases} x=-2+2t \\ y=1+t \\ z=1-t \end{cases}$. Tìm PTĐT $\Delta$ cắt $(P)$ và $d$ lần lượt tại hai điểm $M$ và $N$ sao cho $A$ là trung điểm của đoạn $MN$.

**A** $\dfrac{x+6}{7}=\dfrac{y+1}{4}=\dfrac{z-3}{-1}$. **B** $\dfrac{x-6}{7}=\dfrac{y-1}{4}=\dfrac{z+3}{-1}$. **C** $\dfrac{x-6}{7}=\dfrac{y-1}{-4}=\dfrac{z+3}{-1}$. **D** $\dfrac{x+6}{7}=\dfrac{y+1}{-4}=\dfrac{z-3}{-1}$.

**Lời giải.**

Theo giả thiết $N\in d\Rightarrow N(2t-2;t+1;1-t)$.
Mà $A$ là trung điểm $MN\Rightarrow M(4-2t;5-t;3+t)$.
Mặt khác, $M\in(P)\Leftrightarrow 2(4-2t)-(5-t)+(3+t)-10=0\Leftrightarrow t=-2$.
$\Rightarrow N(-6;-1;3)\Rightarrow \overrightarrow{NA}=(7;4;-1)$.
Đường thẳng $\Delta$ đi qua $N(-6;-1;3)$ và có một véc-tơ chỉ phương là $\vec{u}=\overrightarrow{NA}=(7;4;-1)$ nên có phương trình chính tắc là $\dfrac{x+6}{7}=\dfrac{y+1}{4}=\dfrac{z-3}{-1}$.

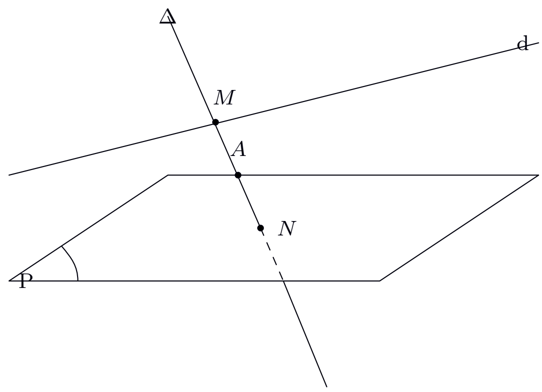
Chọn đáp án A ...... □

**CÂU 21.** Trong KG $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-2}{1}$, mặt phẳng $(P): x+y-2z+5=0$ và $A(1;-1;2)$. Đường thẳng $\Delta$ cắt $d$ và $(P)$ lần lượt tại $M$ và $N$ sao cho $A$ là trung điểm của đoạn thẳng $MN$. Một véc-tơ chỉ phương của $\Delta$ là

**A** $\vec{u}=(4;5;-13)$. **B** $\vec{u}=(2;3;2)$. **C** $\vec{u}=(1;-1;2)$. **D** $\vec{u}=(-3;5;1)$.

**Lời giải.**

Ta có $d\colon \dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-2}{1}\Rightarrow \begin{cases} x=-1+2t \\ y=t \\ z=2+t. \end{cases}$
Do đó $M\in d\Rightarrow M(-1+2t;t;2+t)$.
Vì $A(1;-1;2)$ là trung điểm $MN$.
Suy ra $N(3-2t;-2-t;2-t)$.
Mặt khác $N\in(P)\Rightarrow 3-2t-2-t-2(2-t)+5=0\Leftrightarrow t=2$.
$\Rightarrow M(3;2;4)\Rightarrow \overrightarrow{AM}=(2;3;2)$ là một vec-tơ chỉ phương của $\Delta$.




Chọn đáp án B ...... □

**CÂU 22.** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho hai đường thẳng $d_1\colon \begin{cases} x=4+t \\ y=-4-t \\ z=6+2t \end{cases}$; $d_2\colon \dfrac{x-5}{2}=\dfrac{y-11}{4}=\dfrac{z-5}{2}$. Đường thẳng $d$ đi qua $A(5;-3;5)$ cắt $d_1$ ; $d_2$ lần lượt ở $B$, $C$. Tính tỉ số $\dfrac{AB}{AC}$.

**A** 2. **B** 3. **C** $\dfrac{1}{2}$. **D** $\dfrac{1}{3}$.

**Lời giải.**

$B\in d_1\Rightarrow B(4+t;-4-t;6+2t)$. PTTS của $d_2\colon \begin{cases} x=5+2s \\ y=11+4s \\ z=5+2s \end{cases}$.
$C\in d_2\Rightarrow C(5+2s;11+4s;5+2s)$.
Khi đó $\overrightarrow{AB}=(1-t;-1-t;2t+1)$; $\overrightarrow{AC}=(2s;4s+14;2s)$.
Do $A$, $B$, $C$ thẳng hàng $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ cùng phương.

$$\Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{R}\colon \overrightarrow{AB}=k\cdot\overrightarrow{AC}\Leftrightarrow \begin{cases} t-1=2ks \\ -t-1=4ks+14k \\ 2t+1=2ks \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} t=-2 \\ s=-3 \\ k=\dfrac{1}{2} \end{cases}. \text{ Do đó } \overrightarrow{AB}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}.$$

Suy ra $\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{1}{2}$.

Chọn đáp án C ...... □

## 6 Lập PTĐT liên quan đến vuông góc

**CÂU 1.** Trong KG $Oxyz$, cho điểm $M(1;0;1)$ và đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-3}{3}$. Đường thẳng đi qua $M$, vuông góc với $d$ và cắt $Oz$ có phương trình là

(A) $\begin{cases}x=1-3t\\y=0\\z=1+t\end{cases}$. (B) $\begin{cases}x=1-3t\\y=0\\z=1-t\end{cases}$. (C) $\begin{cases}x=1-3t\\y=t\\z=1+t\end{cases}$. (D) $\begin{cases}x=1+3t\\y=0\\z=1+t\end{cases}$.

**Lời giải.**

Đường thẳng $d$ có một véc-tơ chỉ phương là $\vec{u}=(1;2;3)$.
Gọi $\Delta$ là đường thẳng đi qua $M$, vuông góc với $d$ và cắt $Oz$.
Gọi $N(0;0;t)=\Delta\cap Oz\Rightarrow \overrightarrow{MN}=(-1;0;t-1)$.
$\Delta\perp d\Leftrightarrow \overrightarrow{MN}\cdot\vec{u}=0\Leftrightarrow t=\dfrac{4}{3}\Rightarrow \overrightarrow{MN}=\left(-1;0;\dfrac{1}{3}\right)$.
Khi đó $\overrightarrow{MN}$ cùng phương với $\overrightarrow{u_1}=(-3;0;1)$.
Đường thẳng $\Delta$ đi qua điểm $M(1;0;1)$ và có một véc-tơ chỉ phương $(-3;0;1)$ nên có phương trình là $\begin{cases}x=1-3t\\y=0\\z=1+t.\end{cases}$

Chọn đáp án (A) ............ □

**CÂU 2.** Trong KG $Oxyz$, cho điểm $A(2;1;3)$ và đường thẳng $d\colon \dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z-2}{2}$. Đường thẳng đi qua $A$, vuông góc với $d$ và cắt trục $Oy$ có phương trình là

(A) $\begin{cases}x=2t\\y=-3+4t\\z=3t\end{cases}$. (B) $\begin{cases}x=2+2t\\y=1+t\\z=3+3t\end{cases}$. (C) $\begin{cases}x=2+2t\\y=1+3t\\z=3+2t\end{cases}$. (D) $\begin{cases}x=2t\\y=-3+3t\\z=2t\end{cases}$.

**Lời giải.**

Gọi đường thẳng cần tìm là $\Delta$.
$d\colon \dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z-2}{2}$ có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}=(1;-2;2)$.
Gọi $M(0;m;0)\in Oy$, ta có $\overrightarrow{AM}=(-2;m-1;-3)$.
Do $\Delta\perp d\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\cdot\vec{u}=0\Leftrightarrow -2-2(m-1)-6=0\Leftrightarrow m=-3$. Ta có $\Delta$ có véc-tơ chỉ phương $\overrightarrow{AM}=(-2;-4;-3)$ nên có phương trình $\begin{cases}x=2t\\y=-3+4t\\z=3t.\end{cases}$

Chọn đáp án (A) ............ □

**CÂU 3.** Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$ cho điểm $A(1;0;2)$ và đường thẳng $d$ có phương trình : $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+1}{2}$. Viết PTĐT $\Delta$ đi qua $A$, vuông góc và cắt $d$.

(A) $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z-2}{1}$. (B) $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{-3}=\dfrac{z-2}{1}$. (C) $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-2}{1}$. (D) $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-2}{-1}$.

**Lời giải.**

**Cách 1**
Đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+1}{2}$ có vec-tơ chỉ phương $\vec{u}=(1;1;2)$.
Gọi $(P)$ là mặt phẳng qua điểm $A$ và vuông góc với đường thẳng $d$, nên nhận vec-tơ chỉ phương của $d$ là vec-tơ pháp tuyến $(P)\colon 1(x-1)+y+2(z-2)=0\Leftrightarrow x+y+2z-5=0$.
Gọi $B$ là giao điểm của mặt phẳng $(P)$ đường thẳng $d\Rightarrow B(1+t;t;-1+2t)$.
Vì $B\in(P)\Leftrightarrow (1+t)+t+2(-1+2t)-5=0\Leftrightarrow t=1\Rightarrow B(2;1;1)$.
Ta có đường thẳng $\Delta$ đi qua $A$ và nhận vec-tơ $\overrightarrow{AB}=(1;1;-1)$ là vec-tơ chỉ phương có dạng $\Delta\colon \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-2}{-1}$.

**Cách 2**
Gọi $d\cap\Delta=B\Rightarrow B(1+t;t;-1+2t)$.
$\overrightarrow{AB}=(t;t;-3+2t)$, đường thẳng $d$ có véc-tơ chỉ phương là $\overrightarrow{u_d}=(1;1;2)$.
Vì $d\perp\Delta$ nên $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{u_d}\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{u_d}=0\Leftrightarrow t+t+2(-3+2t)=0\Leftrightarrow t=1$.
Suy ra $\overrightarrow{AB}=(1;1;-1)$. Ta có đường thẳng $\Delta$ đi qua $A(1;0;2)$ và nhận véc-tơ $\overrightarrow{AB}=(1;1;-1)$ là véc-tơ chỉ phương có dạng

$\Delta\colon \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-2}{-1}$.

Chọn đáp án D ..........

**CÂU 4.** Trong không gian Oxyz, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z+2}{2}$ và mặt phẳng $(P)\colon x+y-z+1=0$. Đường thẳng nằm trong mặt phẳng $(P)$ đồng thời cắt và vuông góc với $d$ có phương trình là

**A** $\begin{cases}x=-1+t\\y=-4t\\z=-3t\end{cases}$.
**B** $\begin{cases}x=3+t\\y=-2+4t\\z=2+t\end{cases}$.
**C** $\begin{cases}x=3+t\\y=-2-4t\\z=2-3t\end{cases}$.
**D** $\begin{cases}x=3+2t\\y=-2+6t\\z=2+t\end{cases}$.

**Lời giải.**

$d\colon \begin{cases}x=-1+2t\\y=-t\\z=-2+2t\end{cases}$.

Gọi $\Delta$ là đường thẳng nằm trong $(P)$ vuông góc với $d$ $\overrightarrow{u_\Delta}=[\overrightarrow{u_d};\overrightarrow{n_P}]=(-1;4;3)$.
Gọi $A$ là giao điểm của $d$ và $(P)$. Tọa độ $A$ là nghiệm của phương trình
$(-1+2t)+(-t)-(-2+2t)+1=0\Leftrightarrow t=2\Rightarrow A(3;-2;2)$.

Phương trình $\Delta$ qua $A(3;-2;2)$ có véc-tơ chỉ phương $\overrightarrow{u_\Delta}=(-1;4;3)$ có dạng $\begin{cases}x=3+t\\y=-2-4t\\z=2-3t.\end{cases}$

Chọn đáp án C ..........

**CÂU 5.** Trong KG $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1\colon \dfrac{x-3}{-1}=\dfrac{y-3}{-2}=\dfrac{z+2}{1}$; $d_2\colon \dfrac{x-5}{-3}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-2}{1}$ và mặt phẳng $(P): x+2y+3z-5=0$. Đường thẳng vuông góc với $(P)$, cắt $d_1$ và $d_2$ có phương trình là

**A** $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z}{1}$.
**B** $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z-1}{3}$.
**C** $\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z+2}{3}$.
**D** $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z}{3}$.

**Lời giải.**

Phương trình $d_1\colon \begin{cases}x=3-t_1\\y=3-2t_1\\z=-2+t_1\end{cases}$ và $d_2\colon \begin{cases}x=5-3t_2\\y=-1+2t_2\\z=2+t_2.\end{cases}$

Gọi đường thẳng cần tìm là $\Delta$.
Giả sử đường thẳng $\Delta$ cắt đường thẳng $d_1$ và $d_2$ lần lượt tại $A$, $B$.
Gọi $A\,(3-t_1;3-2t_1;-2+t_1)$, $B\,(5-3t_2;-1+2t_2;2+t_2)$.
$\overrightarrow{AB}=(2-3t_2+t_1;-4+2t_2+2t_1;4+t_2-t_1)$.
véc-tơ pháp tuyến của $(P)$ là $\vec{n}=(1;2;3)$.
Do $\overrightarrow{AB}$ và $\vec{n}$ cùng phương nên $\dfrac{2-3t_2+t_1}{1}=\dfrac{-4+2t_2+2t_1}{2}=\dfrac{4+t_2-t_1}{3}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{2-3t_2+t_1}{1}=\dfrac{-4+2t_2+2t_1}{2}\\ \dfrac{-4+2t_2+2t_1}{2}=\dfrac{4+t_2-t_1}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t_1=2.\\t_2=1\end{cases}$ Do đó $A\,(1;-1;0)$, $B\,(2;-1;3)$.

PTĐT $\Delta$ đi qua $A\,(1;-1;0)$ và có véc-tơ chỉ phương $\vec{n}=(1;2;3)$ là $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z}{3}$.

Chọn đáp án D ..........

**CÂU 6.** Trong KG $Oxyz$ cho đường thẳng $\Delta\colon \dfrac{x}{1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-1}{1}$ và mặt phẳng $(P): x-2y-z+3=0$. Đường thẳng nằm trong $(P)$ đồng thời cắt và vuông góc với $\Delta$ có phương trình là

**A** $\begin{cases}x=1+2t\\y=1-t\\z=2\end{cases}$.
**B** $\begin{cases}x=-3\\y=-t\\z=2t\end{cases}$.
**C** $\begin{cases}x=1+t\\y=1-2t\\z=2+3t\end{cases}$.
**D** $\begin{cases}x=1\\y=1-t\\z=2+2t\end{cases}$.

**Lời giải.**

Ta có $\Delta\colon \dfrac{x}{1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-1}{1}\Rightarrow \Delta\colon \begin{cases}x=t\\y=-1+2t\\z=1+t.\end{cases}$

Gọi $M=\Delta\cap(P)\Rightarrow M\in\Delta\Rightarrow M\,(t;2t-1;t+1)$ $M\in(P)\Rightarrow t-2\,(2t-1)-(t+1)+3=0\Leftrightarrow 4-4t=0\Leftrightarrow t=1\Rightarrow M\,(1;1;2)$.
Véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng $(P)$ là $\vec{n}=(1;-2;-1)$.
Véc-tơ chỉ phương của đường thẳng $\Delta$ là $\vec{u}=(1;2;1)$.

Đường thẳng $d$ nằm trong mặt phẳng $(P)$ đồng thời cắt và vuông góc với $\Delta$.

$\Rightarrow$ đường thẳng $d$ nhận $\dfrac{1}{2}[\vec{n}, \vec{u}] = (0; -1; 2)$ làm véc-tơ chỉ phương và $M(1; 1; 2) \in d$.

$\Rightarrow$ PTĐT $d$: $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 - t \\ z = 2 + 2t. \end{cases}$

Chọn đáp án D ............ □

**CÂU 7.** Trong KG $Oxyz$ cho $A(1; -1; 3)$ và hai đường thẳng $d_1\colon \dfrac{x-4}{1} = \dfrac{y+2}{4} = \dfrac{z-1}{-2}$, $d_2\colon \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y+1}{-1} = \dfrac{z-1}{1}$. PTĐT qua $A$, vuông góc với $d_1$ và cắt $d_2$ là

**A** $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z-3}{3}$. **B** $\dfrac{x-1}{4} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z-3}{4}$. **C** $\dfrac{x-1}{-1} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z-3}{3}$. **D** $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{-1} = \dfrac{z-3}{-1}$.

**Lời giải.**

Gọi $d$ là đường thẳng qua $A$ và $d$ cắt $d_2$ tại $K$. Khi đó $K(2+t; -1-t; 1+t)$.
Ta có $\overrightarrow{AK} = (1+t; -t; t-2)$. Đường $AK \perp d_1 \Leftrightarrow \overrightarrow{AK} \cdot \overrightarrow{u_1} = 0$, với $\overrightarrow{u_1} = (1; 4; -2)$ là một véc-tơ chỉ phương của $d_1$.
Do đó $1 + t - 4t - 2t + 4 = 0 \Leftrightarrow t = 1$, suy ra $\overrightarrow{AK} = (2; -1; -1)$.
Vậy PTĐT $d$: $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{-1} = \dfrac{z-3}{-1}$.

Chọn đáp án D ............ □

**CÂU 8.** Trong KG $Oxyz$ cho điểm $A(1; -1; 3)$ và hai đường thẳng $d_1\colon \dfrac{x-3}{3} = \dfrac{y+2}{3} = \dfrac{z-1}{-1}$. PTĐT $d$ đi qua $A$, vuông góc với đường thẳng $d_1$ và cắt thẳng $d_2$.

**A** $\dfrac{x-1}{5} = \dfrac{y+1}{-4} = \dfrac{z-3}{2}$. **B** $\dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y+1}{-2} = \dfrac{z-3}{3}$. **C** $\dfrac{x-1}{6} = \dfrac{y+1}{-5} = \dfrac{z-3}{3}$. **D** $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{-1} = \dfrac{z-3}{3}$.

**Lời giải.**

Gọi $M(2+t; -1-t; 1+t) = d \cap d_2$ với $t \in \mathbb{R}$.
Ta có $\overrightarrow{AM} = (1+t; -t\_; -2+t)$ và $\overrightarrow{u_1} = (3; 3; -1)$ là véc-tơ chỉ phương của $d_1$.
Mặt khác $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{u_1} = 0$ nên $3 \cdot (1+t) + 3 \cdot (-t) - 1 \cdot (-2+t) = 0 \Leftrightarrow t = 5$.
$\Rightarrow \overrightarrow{AM} = (6; -5; 3)$ là một véc-tơ chỉ phương của $d$.
Vậy PTĐT có dạng $d$: $\dfrac{x-1}{6} = \dfrac{y+1}{-5} = \dfrac{z-3}{3}$.

Chọn đáp án C ............ □

**CÂU 9.** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1; -1; 2)$ và hai đường thẳng $d$: $\begin{cases} x = t \\ y = -1 - 4t \\ z = 6 + 6t \end{cases}$, $d'\colon \dfrac{x}{2} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z+2}{-5}$.

Phương trình nào dưới đây là PTĐT đi qua $M$, vuông góc với $d$ và $d'$?

**A** $\dfrac{x-1}{17} = \dfrac{y+1}{14} = \dfrac{z-2}{9}$. **B** $\dfrac{x-1}{14} = \dfrac{y+1}{17} = \dfrac{z+2}{9}$. **C** $\dfrac{x-1}{17} = \dfrac{y+1}{9} = \dfrac{z-2}{14}$. **D** $\dfrac{x-1}{14} = \dfrac{y+1}{17} = \dfrac{z-2}{9}$.

**Lời giải.**

Đường thẳng $d$ có một véc-tơ chỉ phương $\vec{u} = (1; -4; 6)$.
Đường thẳng $d'$ có một véc-tơ chỉ phương $\vec{u'} = (2; 1; -5)$.
Gọi $\Delta$ là đường thẳng qua $M$, vuông góc với $d$ và $d'$ nên có một véc-tơ chỉ phương là $\vec{u}_\Delta = \left[\vec{u}, \vec{u'}\right] = (14; 17; 9)$.
Vậy PTĐT $\Delta$: $\dfrac{x-1}{14} = \dfrac{y+1}{17} = \dfrac{z-2}{9}$.

Chọn đáp án D ............ □

**CÂU 10.** Trong KG $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 3x + y + z = 0$ và đường thẳng $d$: $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y}{-2} = \dfrac{z+3}{2}$. Gọi $\Delta$ là đường thẳng nằm trong $(P)$, cắt và vuông góc với $d$. Phương trình nào sau đây là PTTS của $\Delta$?

**A** $\begin{cases} x = -2 + 4t \\ y = 3 - 5t \\ z = 3 - 7t \end{cases}$. **B** $\begin{cases} x = -3 + 4t \\ y = 5 - 5t \\ z = 4 - 7t \end{cases}$. **C** $\begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = 1 - 5t \\ z = -4 - 7t \end{cases}$. **D** $\begin{cases} x = -3 + 4t \\ y = 7 - 5t \\ z = 2 - 7t \end{cases}$.

**Lời giải.**

Do $\Delta$ nằm trong nằm trong $(P)$ và vuông góc với $d$ nên $\Delta$ có véc-tơ chỉ phương là

$$\overrightarrow{u_\Delta} = \left[\overrightarrow{n_{(P)}}, \overrightarrow{u_d}\right] = (4; -5; -7).$$

Gọi $A = \Delta \cap d$ thì $A = (P) \cap d \Rightarrow A(1; 0; -3)$.

Vậy PTTS của $\Delta$ là $\begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = 0 - 5t \\ z = -3 - 7t \end{cases}$ hay $\begin{cases} x = -3 + 4t \\ y = 5 - 5t \\ z = 4 - 7t. \end{cases}$

Chọn đáp án B ........................................................................................... □

**CÂU 11.** Trong KG $Oxyz$, cho điểm $A(1;-1;3)$ và hai đường thẳng $d_1\colon \dfrac{x-4}{1} = \dfrac{y+2}{4} = \dfrac{z-1}{-2}$, $d_2\colon \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y+1}{-1} = \dfrac{z-1}{1}$. Viết PTĐT $d$ đi qua $A$, vuông góc với đường thẳng $d_1$ và cắt đường thẳng $d_2$.

A $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{-1} = \dfrac{z-3}{-1}$. B $\dfrac{x-1}{6} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z-3}{5}$. C $\dfrac{x-1}{6} = \dfrac{y+1}{-4} = \dfrac{z-3}{-1}$. D $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z-3}{3}$.

**Lời giải.**

Ta có $\overrightarrow{u_{d_1}} = (1;4;-2)$.

$d_2\colon \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y+1}{-1} = \dfrac{z-1}{1}$ nên PTTS của $d_2\colon \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 - t (t \in \mathbb{R}) \\ z = 1 + t \end{cases}$.

Gọi đường thẳng $d$ cắt đường thẳng $d_2$ tại $M\,(2+t;-1-t;1+t)$.
Ta có $\overrightarrow{AM} = (1+t;-t;t-2)$.
Đường thẳng $d$ đi qua $A$, $M$ nên véc-tơ chỉ phương $\overrightarrow{u_d} = (1+t;-t;t-2)$.
Theo đề bài $d$ vuông góc $d_1 \Leftrightarrow \overrightarrow{u_d} \perp \overrightarrow{u_{d_1}} \Leftrightarrow \overrightarrow{u_d} \cdot \overrightarrow{u_{d_1}} = 0 \Leftrightarrow 1\cdot(1+t) + 4\cdot(-t) - 2\cdot(t-2) = 0 \Leftrightarrow t = 1$.
$\Rightarrow \overrightarrow{u_d} = (2;-1;-1)$.
PTĐT $d$ đi qua $A(1;-1;3)$ và có $\overrightarrow{u_d} = (2;-1;-1)$ có dạng

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-3}{-1}.$$

Chọn đáp án A ........................................................................................... □

**CÂU 12.** Trong KG $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon x + 2y + 3z - 7 = 0$ và hai đường thẳng $d_1\colon \dfrac{x+3}{2} = \dfrac{y+2}{-1} = \dfrac{z+2}{-4}$; $d_2\colon \dfrac{x+1}{3} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z-2}{3}$. Đường thẳng vuông góc mặt phẳng $(P)$ và cắt cả hai đường thẳng $d_1$; $d_2$ có phương trình là

A $\dfrac{x+7}{1} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z-6}{3}$. B $\dfrac{x+5}{1} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z-2}{3}$. C $\dfrac{x+4}{1} = \dfrac{y+3}{2} = \dfrac{z+1}{3}$. D $\dfrac{x+3}{1} = \dfrac{y+2}{2} = \dfrac{z+2}{3}$.

**Lời giải.**

Gọi $\Delta$ là đường thẳng cần tìm.
$\Delta \cap d_1 = M$ nên $M(-3+2t;-2-t;-2-4t)$.
$\Delta \cap d_2 = N$ nên $N(-1+3u;-1=2u;2+3u)$.
$\overrightarrow{MN} = (2+3u-2t;1+2u+t;4+3u+4t)$.
Ta có $\overrightarrow{MN}$ cùng phương với $\overrightarrow{n_{(p)}}$ nên ta có
$\dfrac{2+3u-2t}{1} = \dfrac{1+2u+t}{2} = \dfrac{4+3u+4t}{3}$. Giải hệ phương trìng tìm được $\begin{cases} u = -2 \\ t = -1. \end{cases}$
Khi đó toạ độ điểm $M(-5;-1;2)$ và véc-tơ chỉ phương $\overrightarrow{MN} = (-2;-4;-6) = -2(1;2;3)$.
PTTS $\Delta$ là $\dfrac{x+5}{1} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z-2}{3}$.

Chọn đáp án B ........................................................................................... □

**CÂU 13.** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $(\Delta)$ đi qua điểm $M\,(0;1;1)$, vuông góc với đường thẳng $(d_1)\colon \begin{cases} x = t \\ y = 1 - t\ (t \in \mathbb{R}) \\ z = -1 \end{cases}$ và cắt đường thẳng $(d_2)\colon \dfrac{x}{2} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z}{1}$. Phương trình của $(\Delta)$ là?

A $\begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = 1 + t \end{cases}$. B $\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \\ z = 1 + t \end{cases}$. C $\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 + t \\ z = 1 \end{cases}$. D $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 1 + t \end{cases}$.

**Lời giải.**

Gọi $A\,(2t';1+t';t') \in (d_2)$ là giao điểm giữa đường thẳng $(\Delta)$ và đường thẳng $(d_2)$.
Ta có vecto chỉ phương $\overrightarrow{u_{d_1}} = (1;-1;0)$, $\overrightarrow{MA} = (2t';t';t'-1)$.
Theo đề bài $\overrightarrow{u_{d_1}} \cdot \overrightarrow{MA} = 0 \Leftrightarrow 2t' - t' = 0 \Leftrightarrow t' = 0$.
Suy ra $A\,(0;1;0)$.
Khi đó vecto chỉ phương của đường thẳng $(\Delta)$ là $\overrightarrow{u_\Delta} = \overrightarrow{AM} = (0;0;1)$.

PTĐT $(\Delta)$ qua $M(0;1;1)$ có vecto chỉ phương $\overrightarrow{u_\Delta}=(0;0;1)$ có dạng $\begin{cases}x=0\\y=1\\z=1+t.\end{cases}$

Chọn đáp án (B) ☐

**CÂU 14.** Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$ cho điểm $A(1;0;2)$ và đường thẳng $d$ có phương trình $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+1}{2}$. Viết PTĐT $\Delta$ đi qua $A$, vuông góc và cắt $d$.

(A) $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-2}{1}$. (B) $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-2}{-1}$. (C) $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z-2}{1}$. (D) $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{-3}=\dfrac{z-2}{1}$.

**Lời giải.**

Đường thẳng $d$: $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+1}{2}$ có vec-tơ chỉ phương $\vec{u}=(1;1;2)$.
Gọi $(P)$ là mặt phẳng qua điểm $A$ và vuông góc với đường thẳng $d$, nên nhận vec-tơ chỉ phương của $d$ là vec-tơ pháp tuyến $(P): 1(x-1)+y+2(z-2)=0 \Leftrightarrow x+y+2z-5=0$.
Gọi $B$ là giao điểm của mặt phẳng $(P)$ và đường thẳng $d \Rightarrow B(1+t;t;-1+2t)$.
Vì $B\in(P) \Leftrightarrow (1+t)+t+2(-1+2t)-5=0 \Leftrightarrow t=1 \Rightarrow B(2;1;1)$.
Ta có đường thẳng $\Delta$ đi qua $A$ và nhận vec-tơ $\overrightarrow{AB}=(1;1;-1)$ là vec-tơ chỉ phương có dạng $\Delta$: $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-2}{-1}$.

Chọn đáp án (B) ☐

**CÂU 15.** Trong KG $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)$: $x+2y+z-4=0$ và đường thẳng $d$: $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+2}{3}$. Phương trình đường thẳng $\Delta$ nằm trong mặt phẳng $(P)$, đồng thời cắt và vuông góc với đường thẳng $d$ là

(A) $\dfrac{x-1}{5}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z-2}{2}$. (B) $\dfrac{x+1}{5}=\dfrac{y+3}{-1}=\dfrac{z-1}{3}$. (C) $\dfrac{x-1}{5}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-1}{-3}$. (D) $\dfrac{x-1}{5}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-1}{-3}$.

**Lời giải.**

Gọi $d\cap\Delta=M$, mà $\Delta\subset(P)$ nên $M\in(P)$.

Vì $M\in d$: $\begin{cases}x=-1+2t\\y=t\\z=-2+3t\end{cases}$ nên $M(-1+2t;t;-2+3t)$.

Mà $M\in(P)$ nên ta có $-1+2t+2t+-2+3t-4=0 \Leftrightarrow t=1$, do đó $M(1;1;1)$.

Vì $\begin{cases}\Delta\perp d\\\Delta\subset(P)\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\vec{u}_\Delta\perp\vec{u}_d\\\vec{u}_\Delta\perp\vec{n}_P\end{cases}$ nên chọn $\vec{u}_\Delta=[\vec{u}_d,\vec{n}_P]=(5;-1;-3)$.

Vậy $\Delta$: $\dfrac{x-1}{5}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-1}{-3}$.

Chọn đáp án (D) ☐

**CÂU 16.** Trong KG $Oxyz$, cho đường thẳng $d$: $\dfrac{x+3}{2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z}{-1}$ và mặt phẳng $(P)$: $x+y-3z-2=0$. Gọi $d'$ là đường thẳng nằm trong mặt phẳng $(P)$, cắt và vuông góc với $d$. Đường thẳng $d'$ có phương trình là

(A) $\dfrac{x+1}{-2}=\dfrac{y}{-5}=\dfrac{z+1}{1}$. (B) $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y}{5}=\dfrac{z+1}{1}$. (C) $\dfrac{x+1}{-2}=\dfrac{y}{5}=\dfrac{z+1}{1}$. (D) $\dfrac{x+1}{-2}=\dfrac{y}{5}=\dfrac{z+1}{-1}$.

**Lời giải.**

Gọi $d\cap d'=M$, mà $d'\subset(P)$ nên $M\in(P)$.

Vì $M\in d$: $\begin{cases}x=-3+2t\\y=-1+t\\z=-t\end{cases}$ nên $M(-3+2t;-1+t;-t)$.

Mà $M\in(P)$ nên ta có $-3+2t-1+t-3(-t)-2=0 \Leftrightarrow t=1$, do đó $M(-1;0;-1)$.

Vì $\begin{cases}d'\perp d\\d'\subset(P)\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\vec{u}_{d'}\perp\vec{u}_d\\\vec{u}_{d'}\perp\vec{n}_P\end{cases}$ nên chọn $\vec{u}_{d'}=[\vec{u}_d,\vec{n}_P]=(-2;5;1)$.

Vậy $d'$: $\dfrac{x+1}{-2}=\dfrac{y}{5}=\dfrac{z+1}{1}$.

Chọn đáp án (C) ☐

**CÂU 17.** Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, đường vuông góc chung của hai đường thẳng $d_1$: $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-3}{3}=\dfrac{z+4}{-5}$ và $d_2$: $\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-4}{-2}=\dfrac{z-4}{-1}$ có phương trình

(A) $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y+2}{3}=\dfrac{z-3}{4}$. (B) $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z-3}{-1}$. (C) $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z-3}{2}$. (D) $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{1}$.

**Lời giải.**

Gọi $\Delta$ là đường vuông góc chung của $d_1$ và $d_2$, $\Delta \cap d_1 = A$, $\Delta \cap d_2 = B$.
Ta có $A(2+2a; 3+3a; -4-5a)$, $B(-1+3b; 4-2b; 4-b)$ nên $\overrightarrow{AB} = (3b-2a-3; -2b-3a+1; -b+5a+8)$.

Vì $\begin{cases} AB \perp d_1 \\ AB \perp d_2 \end{cases}$ nên $\begin{cases} \overrightarrow{AB} \cdot \vec{u}_{d_1} = 0 \\ \overrightarrow{AB} \cdot \vec{u}_{d_2} = 0. \end{cases}$

Suy ra $\begin{cases} 2(3b-2a-3)+3(-2b-3a+1)-5(-b+5a+8) = 0 \\ 3(3b-2a-3)-2(-2b-3a+1)-(-b+5a+8) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB} = (2; 2; 2) \\ A(0; 0; 1). \end{cases}$

Vậy $\Delta \colon \dfrac{x}{1} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z-1}{1}$.

Chọn đáp án D ..................................................................................... □

**CÂU 18.** Cho hai đường thẳng $(d_1)\colon \begin{cases} x = 2+t \\ y = 1+t \\ z = 1+t \end{cases}$ và $(d_2)\colon \dfrac{x}{1} = \dfrac{y-7}{-3} = \dfrac{z}{-1}$. Đường thẳng $(\Delta)$ là đường vuông góc chung của $(d_1)$ và $(d_2)$. Phương trình nào sau đây là phương trình của $(\Delta)$?

**A** $\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z+2}{-2}$. **B** $\dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z-1}{-2}$. **C** $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-4}{1} = \dfrac{z+1}{-2}$. **D** $\dfrac{x-3}{1} = \dfrac{y+2}{-1} = \dfrac{z+3}{-2}$.

**Lời giải.**

Gọi $\Delta \cap d_1 = A$, $\Delta \cap d_2 = B$.
Ta có $A(2+a; 1+a; 1+a)$, $B(b; 7-3b; -b)$ nên $\overrightarrow{AB}(b-a-2; -3b-a+6; -b-a-1)$.

Vì $\begin{cases} AB \perp d_1 \\ AB \perp d_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB} \cdot \vec{u}_{d_1} = 0 \\ \overrightarrow{AB} \cdot \vec{u}_{d_2} = 0. \end{cases}$

Suy ra $\begin{cases} b-a-2-3b-a+6-b-a-1 = 0 \\ b-a-2-3(-3b-a+6)-(-b-a-1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB} = (1; 1; -2) \\ B(2; 1; -2). \end{cases}$

Vậy $\Delta \colon \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z+2}{-2}$.

Chọn đáp án A ..................................................................................... □

**CÂU 19.** Trong KG $Oxyz$, gọi $(\alpha)$ là mặt phẳng chứa đường thẳng $(d)\colon \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-3}{1} = \dfrac{z}{2}$ và vuông góc với mặt phẳng $(\beta)\colon x+y-2z+1 = 0$. Hỏi giao tuyến của $(\alpha)$ và $(\beta)$ đi qua điểm nào?

**A** $(0; 1; 3)$. **B** $(2; 3; 3)$. **C** $(5; 6; 8)$. **D** $(1; -2; 0)$.

**Lời giải.**

Ta có $A(2; 3; 0) \in d$ nên $A \in (\alpha)$.

Vì $\begin{cases} (\alpha) \perp (\beta) \\ d \subset (\alpha) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{n}_\alpha \perp \vec{n}_\beta \\ \vec{n}_\alpha \perp \vec{u}_d \end{cases}$ nên chọn $\vec{u}_\Delta = [\vec{u}_d, \vec{n}_\alpha] = (-4; 4; 0)$.

Ta có $(\alpha)\colon -4(x-2)+4(y-3) = 0 \Leftrightarrow x-y+1 = 0$.

Gọi $M \in (\alpha) \cap (\beta)$ thì tọa độ $M$ thỏa mãn $\begin{cases} x+y-2z+1 = 0 \\ x-y+1 = 0 \end{cases}$ nên ta có $(2; 3; 3)$ thỏa mãn.

Chọn đáp án B ..................................................................................... □

**CÂU 20.** Trong KG $Oxyz$ cho điểm $A(1; 2; 3)$ và đường thẳng $d\colon \dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z+7}{-2}$. Đường thẳng đi qua $A$, vuông góc với $d$ và cắt trục $Ox$ có phương trình là

**A** $\begin{cases} x = -1+2t \\ y = -2t \\ z = t \end{cases}$. **B** $\begin{cases} x = 1+t \\ y = 2+2t \\ z = 3+3t \end{cases}$. **C** $\begin{cases} x = -1+2t \\ y = 2t \\ z = 3t \end{cases}$. **D** $\begin{cases} x = 1+t \\ y = 2+2t \\ z = 3+2t \end{cases}$.

**Lời giải.**

Gọi đường thẳng cần tìm là $\Delta$, $\Delta \cap Ox = M(a, 0, 0)$.
Ta có $\overrightarrow{AM} = (a-1; -2; -3)$.
Vì $\Delta \perp d$ nên $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{u}_d = 0 \Leftrightarrow 2(a-1)-2+6 = 0 \Leftrightarrow a = -1 \Rightarrow \overrightarrow{AM} = (-2; -2; -3)$.

Vậy $\Delta \begin{cases} x = -1+2t \\ y = 2t \\ z = 3t. \end{cases}$

Chọn đáp án C ..................................................................................... □

**CÂU 21.** Trong KG $Oxyz$, cho điểm $A(1; 0; 2)$ và đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z+1}{2}$. Đường thẳng $\Delta$ đi qua $A$, vuông góc và cắt $d$ có phương trình là

Ⓐ $\Delta\colon \dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-1}{-1}$.

Ⓑ $\Delta\colon \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-2}{1}$.

Ⓒ $\Delta\colon \dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-1}{1}$.

Ⓓ $\Delta\colon \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{-3}=\dfrac{z-2}{1}$.

**Lời giải.**

Gọi $d\cap\Delta=M(1+t;t;-1+2t)$, $\overrightarrow{AM}=(t;t;2t-3)$.

Ta có $\Delta\perp d$ nên $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{u}_d=0\Leftrightarrow t+t+2(2t-3)=0\Leftrightarrow t=1\Leftrightarrow\begin{cases}\overrightarrow{AM}=(1;1;-1)\\ M(2;1;1).\end{cases}$

Vậy $\Delta\colon \dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-1}{-1}$.

Chọn đáp án A ............ □

**CÂU 22.** Trong KG $Oxyz$, cho điểm $M(-1;1;3)$ và hai đường thẳng $\Delta\colon \dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+3}{2}=\dfrac{z-1}{1}$, $\Delta'\colon \dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z}{-2}$. Phương trình nào dưới đây là PTĐT đi qua $M$, vuông góc với $\Delta$ và $\Delta'$?

Ⓐ $\begin{cases}x=-1-t\\ y=1+t\\ z=1+3t\end{cases}$.

Ⓑ $\begin{cases}x=-t\\ y=1+t\\ z=3+t\end{cases}$.

Ⓒ $\begin{cases}x=-1-t\\ y=1-t\\ z=3+t\end{cases}$.

Ⓓ $\begin{cases}x=-1-t\\ y=1+t\\ z=3+t\end{cases}$.

**Lời giải.**

Gọi $d$ là đường thẳng cần tìm.

Ta có $\vec{u}_\Delta=(3;2;1)$, $\vec{u}_{\Delta'}=(1;3;-2)$, $[\vec{u}_\Delta,\vec{u}_{\Delta'}]=(-7;7;7)$ nên chọn $\vec{u}_d=(-1;1;1)$.

Vậy $d\colon\begin{cases}x=-1-t\\ y=1+t\\ z=3+t.\end{cases}$

Chọn đáp án D ............ □

**CÂU 23.** Trong KG $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1\colon\begin{cases}x=1+3t\\ y=-2+t\\ z=2\end{cases}$, $d_2\colon \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{-1}=\dfrac{z}{2}$ và mặt phẳng $(P)\colon 2x+2y-3z=0$. Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt phẳng đi qua giao điểm của $d_1$ và $(P)$, đồng thời vuông góc với $d_2$?

Ⓐ $2x-y+2z+13=0$.

Ⓑ $2x+y+2z-22=0$.

Ⓒ $2x-y+2z-13=0$.

Ⓓ $2x-y+2z+22=0$.

**Lời giải.**

Gọi $d_1\cap(P)=M(1+3t;-2+t;2)$.

Vì $M\in(P)$ nên $2(1+3t)+2(-2+t)-6=0\Leftrightarrow t=1\Leftrightarrow M(4;-1;2)$.

Mà $d_2\perp(P)$ nên chọn $\vec{n}_P=(2;-1;2)$.

Vậy $(P)\colon 2x-y+2z-13=0$.

Chọn đáp án C ............ □

**CÂU 24.** Trong KG $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;2;1)$, $B\left(-\dfrac{8}{3};\dfrac{4}{3};\dfrac{8}{3}\right)$. Đường thẳng qua tâm đường tròn nội tiếp tam giác $OAB$ và vuông góc với mặt phẳng $OAB$ có phương trình là

Ⓐ $\dfrac{x+\frac{2}{9}}{1}=\dfrac{y-\frac{2}{9}}{-2}=\dfrac{z+\frac{5}{9}}{2}$.

Ⓑ $\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-8}{-2}=\dfrac{z-4}{2}$.

Ⓒ $\dfrac{x+\frac{1}{3}}{1}=\dfrac{y-\frac{5}{3}}{-2}=\dfrac{z-\frac{11}{6}}{2}$.

Ⓓ $\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-3}{-2}=\dfrac{z+1}{2}$.

**Lời giải.**

Gọi $d$ là đường thẳng cần tìm.

Ta có $\left[\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right]=(4;-8;8)$ nên chọn $\vec{u}_d=(1;-2;2)$.

Ta có $OA=3$, $OB=4$, $AB=5$.

Gọi $I(x;y;z)$ là tâm đường tròn nội tiếp tam giác $OAB$.

Áp dụng hệ thức $OB\cdot\overrightarrow{IA}+OA\cdot\overrightarrow{IB}+AB\cdot\overrightarrow{IA}=\vec{0}$, ta có

$$4\left(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OI}\right)+3\left(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OI}\right)+5\overrightarrow{OI}\Leftrightarrow\overrightarrow{OI}=\frac{1}{12}\left(4\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}\right)\Leftrightarrow I(0;1;1).$$

Suy ra $d\colon \begin{cases} x = t \\ y = 1 - 2t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$, cho $t = -1$ ta có điểm $M(-1;3;-1) \in d$.

Vậy $d\colon \dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y-3}{-2} = \dfrac{z+1}{2}$.

Chọn đáp án D ..........

**CÂU 25.** Trong KG $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x}{2} = \dfrac{y-3}{1} = \dfrac{z-2}{-3}$ và mặt phẳng $(P)\colon x - y + 2z - 6 = 0$. Đường thẳng nằm trong $(P)$ cắt và vuông góc với $d$ có phương trình là

**A** $\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y+2}{7} = \dfrac{z+5}{3}$. **B** $\dfrac{x+2}{1} = \dfrac{y-2}{7} = \dfrac{z-5}{3}$. **C** $\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-4}{7} = \dfrac{z+1}{3}$. **D** $\dfrac{x+2}{1} = \dfrac{y+4}{7} = \dfrac{z-1}{3}$.

**Lời giải.**

Ta có $\vec{n}_{(P)} = (1;-1;2)$; $\vec{u}_d = (2;1;-3)$.
Gọi $I = d \cap (P)$.
Vì $I \in d \Rightarrow I(2t;3+t;2-3t)$.
Mặt khác $I \in (P) \Rightarrow 2t - (3+t) + 2(2-3t) - 6 = 0 \Leftrightarrow t = -1 \Rightarrow I(-2;2;5)$.
Gọi $\Delta$ là đường thẳng cần tìm.
Theo giả thiết $\begin{cases} \vec{u}_\Delta \perp \vec{u}_d \\ \vec{u}_\Delta \perp \vec{n}_P \end{cases} \Rightarrow \vec{u}_\Delta = [\vec{n}_P, \vec{u}_d] = (1;7;3)$.
Mà đường thẳng $\Delta$ đi qua điểm $I$.
Vậy $\Delta\colon \dfrac{x+2}{1} = \dfrac{y-2}{7} = \dfrac{z-5}{3}$.

Chọn đáp án B ..........

**CÂU 26.** Trong KG $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{-1} = \dfrac{z}{1}$ và $d_2: \begin{cases} x = -1 + t \\ y = -1 \\ z = -t \end{cases}$ và mặt phẳng $(P)\colon x+y+z-1 = 0$. Đường thẳng vuông góc với $(P)$ cắt $d_1$ và $d_2$ có phương trình là

**A** $\dfrac{x+\frac{13}{5}}{1} = \dfrac{y-\frac{9}{5}}{1} = \dfrac{z-\frac{4}{5}}{1}$. **B** $\dfrac{x-\frac{1}{5}}{1} = \dfrac{y+\frac{3}{5}}{1} = \dfrac{z+\frac{2}{5}}{1}$.

**C** $\dfrac{x-\frac{7}{5}}{1} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z-\frac{2}{5}}{1}$. **D** $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z}{1}$.

**Lời giải.**

Giả sử đường thẳng $d$ vuông góc với $(P)$ cắt $d_1$ và $d_2$ tại $M$ và $N$.
Ta có $M(1+2a;-1-a;a)$; $N(-1+t;-1;-t)$; $\overrightarrow{NM} = (2a-t+2;-a;a+t)$.
Mặt phẳng $(P)$ có véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n} = (1;1;1)$.
Vì $MN$ vuông góc với mặt phẳng $(P)$ nên $\overrightarrow{NM}$ cùng phương $\vec{n}$.

Khi đó $\dfrac{2a-t}{1} = \dfrac{-a}{1} = \dfrac{a+t}{1} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{2}{5} \\ t = \dfrac{4}{5} \end{cases} \Rightarrow M\left(\dfrac{1}{5};-\dfrac{3}{5};-\dfrac{2}{5}\right)$.

Đường thẳng $d$ qua điểm $M$ nhận $\vec{n}$ làm véc-tơ chỉ phương.

Phương trình $d\colon \dfrac{x-\frac{1}{5}}{1} = \dfrac{y+\frac{3}{5}}{1} = \dfrac{z+\frac{2}{5}}{1}$.

Chọn đáp án B ..........

**CÂU 27.** Trong KG $Oxyz$, cho điểm $M(1;0;1)$ và đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z-3}{3}$. Đường thẳng đi qua $M$, vuông góc với $d$ và cắt $Oz$ có phương trình là

**A** $\begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = 0 \\ z = 1 + t \end{cases}$. **B** $\begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = 0 \\ z = 1 - t \end{cases}$. **C** $\begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = t \\ z = 1 + t \end{cases}$. **D** $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 0 \\ z = 1 + t \end{cases}$.

**Lời giải.**

Gọi $\Delta$ là đường thẳng cần tìm và $N = \Delta \cap Oz$.
Ta có $N(0;0;c)$.
Vì $\Delta$ qua $M$, $N$ và $M \notin Oz$ nên $\overrightarrow{MN} = (-1;0;c-1)$ là véc-tơ chỉ phương của $\Delta$.

Ta có $d$ có một véc-tơ chỉ phương $\vec{u}=(1;2;3)$ và $\Delta\perp d$ nên

$$\overrightarrow{MN}\cdot\vec{u}=0\Leftrightarrow -1+3(c-1)=0\Leftrightarrow c=\frac{4}{3}\Rightarrow\overrightarrow{MN}\left(-1;0;\frac{1}{3}\right)$$

Chọn $\vec{v}=(-3;0;1)$ là một véc-tơ chỉ phương của $\Delta$, PTTS của đường thẳng $\Delta$ là $\begin{cases}x=1-3t\\y=0\\z=1+t.\end{cases}$

Chọn đáp án A ........ □

**CÂU 28.** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon 2x+y-2z+9=0$ và đường thẳng $d\colon\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y+3}{2}=\dfrac{z-3}{1}$. PTTS của đường thẳng $\Delta$ đi qua $A(0;-1;4)$, vuông góc với $d$ và nằm trong $(P)$ là

**A** $\Delta\colon\begin{cases}x=5t\\y=-1+t\\z=4+5t\end{cases}$. **B** $\Delta\colon\begin{cases}x=2t\\y=t\\z=4-2t\end{cases}$. **C** $\Delta\colon\begin{cases}x=t\\y=-1\\z=4+t\end{cases}$. **D** $\Delta\colon\begin{cases}x=-t\\y=-1+2t\\z=4+t\end{cases}$.

**Lời giải.**

Ta có $\begin{cases}\Delta\perp d\\\Delta\subset(P)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\vec{u}_\Delta\perp\vec{u}_d\\\vec{u}_\Delta\perp\vec{n}_{(P)}.\end{cases}$

Ta có $\left[\vec{u}_d,\vec{n}_{(P)}\right]=(5;0;5)$.

Do đó một véc-tơ chỉ phương của đường thẳng $\Delta$ là $\vec{u}_\Delta=(1;0;1)\Rightarrow\Delta\colon\begin{cases}x=t\\y=-1\\z=4+t.\end{cases}$

Chọn đáp án C ........ □

**CÂU 29.** Trong KG $Oxyz$, cho hai đường thẳng $\Delta_1\colon\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z-1}{1}$ và $\Delta_2\colon\dfrac{x+2}{-4}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z+2}{-1}$. Đường thẳng chứa đoạn vuông góc chung của $\Delta_1$ và $\Delta_2$ đi qua điểm nào sau đây?

**A** $M(0;-2;-5)$. **B** $N(1;-1;-4)$. **C** $P(2;0;1)$. **D** $Q(3;1;-4)$.

**Lời giải.**

Gọi $A(-1+2t;-2+t;1+t)$ và $B(-2-4t';1+t';-2-t')$ là hai điểm lần lượt thuộc $\Delta_1$ và $\Delta_2$.
Ta có $\overrightarrow{AB}=(-1-2t-4t';3-t+t';-3-t-t')$; $\Delta_1$ có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}=(2;1;1)$; $\Delta_2$ có véc-tơ chỉ phương $\vec{u'}=(-4;1;-1)$.
Vì $AB$ là đoạn vuông góc chung của $\Delta_1$ và $\Delta_2$ nên

$$\begin{aligned}&\begin{cases}\overrightarrow{AB}\cdot\vec{u}=0\\\overrightarrow{AB}\cdot\vec{u'}=0\end{cases}\\\Leftrightarrow&\begin{cases}2(-1-2t-4t')+(3-t+t')+(-3-t-t')=0\\-4(-1-2t-4t')+(3-t+t')-(-3-t-t')=0\end{cases}\\\Leftrightarrow&\begin{cases}-6t-8t'=2\\8t+18t'=-10\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=1\\t'=-1.\end{cases}\end{aligned}$$

Suy ra $A(1;-1;2)$ và $\overrightarrow{AB}=(1;1;-3)$.

PTĐT chứa đoạn vuông góc chung của $\Delta_1$ và $\Delta_2$ là $\begin{cases}x=1+t_1\\y=-1+t_1\\z=2-3t_1.\end{cases}$

Chỉ có $Q(3;1;-4)$ có tọa độ thỏa mãn phương trình.

Chọn đáp án D ........ □

**CÂU 30.** Trong KG $Oxyz$ cho hai đường thẳng $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-4}{1}=\dfrac{z}{-2}$ và $\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z+2}{-1}$. Gọi $M$ là trung điểm đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng trên. Tính đoạn $OM$.

**A** $OM=\dfrac{\sqrt{14}}{2}$. **B** $OM=\sqrt{5}$. **C** $OM=2\sqrt{35}$. **D** $OM=\sqrt{35}$.

**Lời giải.**

Đường thẳng $d\colon\begin{cases}x=2+t\\y=4+t\\z=-2t\end{cases}$ nhận véc-tơ $\vec{u}=(1;1;-2)$ làm véc-tơ chỉ phương.

Đường thẳng $d'\colon \begin{cases} x=3+2m \\ y=-1-m \\ z=-2-m \end{cases}$ nhận véc-tơ $\vec{v}=(2;-1;-1)$ làm véc-tơ chỉ phương.

Gọi $AB$ là đoạn vuông góc chung với $A\in d$ và $B\in d'$.
Khi đó $A(2+t;4+t;-2t)$ và $B(3+2m;-1-m;-2-m)$.
Suy ra $\overrightarrow{AB}=(2m-t+1;-m-t-5;-m+2t-2)$.
Ta có $\begin{cases} \overrightarrow{AB}\perp\vec{u} \\ \overrightarrow{AB}\perp\vec{v} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB}\cdot\vec{u}=0 \\ \overrightarrow{AB}\cdot\vec{v}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3m-6t=0 \\ 6m-3t=-9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=-2 \\ t=-1 \end{cases}$.
Suy ra $A(1;3;2)$ và $B(-1;1;0)$.
Suy ra trung điểm của $AB$ là $M(0;2;1)$.
Vậy $OM=\sqrt{5}$.

Chọn đáp án B ..................................................... □

**CÂU 31.** Trong KG $Oxyz$, gọi $d$ là đường thẳng qua $A(1;0;2)$, cắt và vuông góc với đường thẳng $d_1\colon \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-5}{-2}$. Điểm nào dưới đây thuộc $d$?

Ⓐ $P(2;-1;1)$. Ⓑ $Q(0;-1;1)$. Ⓒ $N(0;-1;2)$. Ⓓ $M(-1;-1;1)$.

**Lời giải.**

Đường thẳng $d_1$ có véc-tơ chỉ phương là $\vec{u}=(1;1;-2)$.
Gọi $H$ là giao điểm của đường thẳng $d$ và đường thẳng $d_1$.
Vì $H\in d_1\Rightarrow H(1+t;t;5-2t)$.
Ta có $\overrightarrow{AH}=(t;t;3-2t)$.
Vì $d\perp d_1$ nên $\vec{u}\cdot\overrightarrow{AH}=0\Leftrightarrow t+t-2(3-2t)=0\Leftrightarrow 6t=6\Leftrightarrow t=1\Rightarrow \overrightarrow{AH}=(1;1;1)$.
Suy ra $d\colon \begin{cases} x=1+t \\ y=t \\ z=2+t. \end{cases}$
Vậy $Q(0;-1;1)\in d$.

Chọn đáp án B ..................................................... □

**CÂU 32.** Trong KG $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;-1)$, đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-2}{-1}$ và mặt phẳng $(P)\colon x+y+2z+1=0$. Điểm $B$ thuộc mặt phẳng $(P)$ thỏa mãn đường thẳng $AB$ vuông góc và cắt đường thẳng $d$. Tọa độ điểm $B$ là

Ⓐ $(6;-7;0)$. Ⓑ $(3;-2;-1)$. Ⓒ $(-3;8;-3)$. Ⓓ $(0;3;-2)$.

**Lời giải.**

Ta gọi $AB$ cắt $d$ tại điểm $M(1+2m;-1+m;2-m)\in d$.
Khi đó $\overrightarrow{AM}=(2m;m-3;3-m)$, mà $AB\perp d$ nên

$$\overrightarrow{AM}\cdot\vec{u}_d=0\Rightarrow 2\cdot 2m+m-3=0\Rightarrow m=1\Rightarrow\overrightarrow{AM}=(2;-2;2)$$

Đường thẳng $AB$ đi qua $A$ nhận $\vec{u}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AM}=(1;-1;1)$ là véc-tơ chỉ phương, ta có phương trình $AB$ là $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z+1}{1}$.
Gọi $B(1+t;2-t;-1+t)\in AB$.
Mà $B\in(P)\Rightarrow 1+t+2-t+2(-1+t)+1=0\Rightarrow t=-1$.
Vậy $B(0;3;-2)$.

Chọn đáp án D ..................................................... □

**CÂU 33.** Trong KG $Oxyz$, cho $(P)\colon x-2y+z=0$ và đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+2}{-1}$. Đường thẳng $d$ cắt $(P)$ tại điểm $A$. Điểm $M(a;b;c)$ thuộc đường thẳng $d$ và có hoành độ dương sao cho $AM=\sqrt{6}$. Khi đó tổng $S=2016a+b-c$ là

Ⓐ 2018. Ⓑ 2019. Ⓒ 2017. Ⓓ 2020.

**Lời giải.**

Vì $d\cap(P)=A$ nên tọa độ điểm $A$ là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} x-2y+z=0 \\ \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+2}{-1} \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x-2y+z=0 \\ x-2y=1 \\ y+z=-2 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x=-1 \\ y=-1 \\ z=-1 \end{cases}\Rightarrow A(-1;-1;-1).$$

Vì $M\in d\Rightarrow M(1+2t;t;-2-t)$.
Suy ra $AM=\sqrt{6t^2+12t+6}$.

Mà $AM=\sqrt{6}\Rightarrow\sqrt{6t^2+12t+6}=\sqrt{6}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=0\\t=-2.\end{array}\right.$

Mà $M$ có hoành độ dương nên $1+2t>0\Leftrightarrow t>-\dfrac{1}{2}$.

Suy ra $t=0\Rightarrow M(1;0;-2)$.

Vậy $S=2018$.

Chọn đáp án A

**CÂU 34.** Trong KG $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1\colon\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z}{2}$; $d_2\colon\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z}{1}$. Đường thẳng $d$ đi qua $A(5;-3;5)$ lần lượt cắt $d_1$ và $d_2$ tại $B$ và $C$. Độ dài $BC$ là

A. $\sqrt{19}$. B. $19$. C. $3\sqrt{2}$. D. $2\sqrt{5}$.

**Lời giải.**

Ta có $d\cap d_1=B\Rightarrow B(1+t_1;-1-t_1;2t_1)$.

Lại có $d\cap d_2=C\Rightarrow C(t_2;1+2t_2;t_2)$.

Khi đó $\overrightarrow{AB}=(t_1-4;-t_1+2;2t_1-5)$ và $\overrightarrow{AC}=(t_2-5;2t_2+4;t_2-5)$.

Vì $A\notin d_2\Rightarrow\overrightarrow{AC}\neq\vec{0}$.

Ba điểm $A$, $B$, $C$ cùng thuộc đường thẳng $d\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ cùng phương.

Khi đó $\exists k\in\mathbb{R}\colon\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{AC}\Leftrightarrow\begin{cases}t_1-4=k(t_2-5)\\-t_1+2=k(2t_2+4)\\2t_1-5=k(t_2-5)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t_1=1\\t_2=-1\\k=\dfrac{1}{2}.\end{cases}$

Do đó $B(2;-2;2)$; $C(-1;-1;-1)$; $\Rightarrow\overrightarrow{BC}=(-3;1;-3)$.

Vậy $BC=\sqrt{19}$.

Chọn đáp án A

**CÂU 35.** Trong KG $Oxyz$, cho điểm $M(3;3;-2)$ và hai đường thẳng $d_1\colon\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z}{1}$; $d_2\colon\dfrac{x+1}{-1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-2}{4}$. Đường thẳng $d$ đi qua $M$ cắt $d_1$, $d_2$ lần lượt tại $A$ và $B$. Độ dài đoạn thẳng $AB$ bằng

A. 3. B. $\sqrt{6}$. C. 4. D. 2.

**Lời giải.**

Ta có

- PTTS của $d_1\colon\begin{cases}x=1+t_1\\y=2+3t_1\\z=t_1\end{cases}$; $t_1\in\mathbb{R}$, $A\in d_1\Rightarrow A(1+t_1;2+3t_1;t_1)$.
- PTTS của $d_2\colon\begin{cases}x=-1-t_2\\y=1+2t_2\\z=2+4t_2\end{cases}$; $t_2\in\mathbb{R}$, $B\in d_2\Rightarrow B(-1-t_2;1+2t_2;2+4t_2)$; $\overrightarrow{MA}=(t_1-2;3t_1-1;t_1+2)$; $\overrightarrow{MB}=(-4-t_2;-2+2t_2;4+4t_2)$.

Vì $A$, $B$, $M$ thẳng hàng nên $\overrightarrow{MA}=k\overrightarrow{MB}$, $k\in\mathbb{R}$.

$\Leftrightarrow\begin{cases}t_1-2=-4k-kt_2\\3t_1-1=-2k+2kt_2\\t_1+2=4k+4kt_2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t_1+4k+kt_2=2\\3t_1+2k-2kt_2=1\\t_1-4k-4kt_2=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t_1=0\\k=\dfrac{1}{2}\\kt_2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t_1=0\\k=\dfrac{1}{2}\\t_2=0.\end{cases}$

Vậy $A(1;2;0)$ và $B(-1;1;2)\Rightarrow\overrightarrow{AB}=(-2;-1;2)$.

Độ dài đoạn thẳng $AB=\left|\overrightarrow{AB}\right|=3$.

Chọn đáp án A

**CÂU 36.** Cho ba điểm $A(1;1;1)$, $B(0;0;2)$, $C(2;3;-2)$ và đường thẳng $\Delta\colon\begin{cases}x=2+t\\y=1-t\\z=t.\end{cases}$

Biết điểm $M(a;b;c)$ với $a>0$ thuộc mặt phẳng $(ABC)$ sao cho $AM\perp\Delta$ và $AM=\sqrt{14}$. Tính giá trị của biểu thức $T=a+b+c$.

A. $-1$. B. 5. C. 7. D. $-6$.

**Lời giải.**

Ta có $\Delta$ có một vectơ chỉ phương là $\vec{u}_\Delta=(1;-1;1)$.
$\overrightarrow{AB}=(-1;-1;1)$, $\overrightarrow{AC}=(1;2;-3)\Rightarrow\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(1;-2;-1)$.
Mặt phẳng $(ABC)$ nhận vectơ $\vec{n}_{(ABC)}=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(1;-2;-1)$ làm vectơ pháp tuyến.
Gọi $(Q)$ là mặt phẳng qua $A$ và vuông góc với đường thẳng $\Delta$.
$\Rightarrow$ mặt phẳng $(Q)$ nhận vectơ $\vec{n}_Q=\vec{u}_\Delta=(1;-1;1)$ làm vectơ pháp tuyến.
Khi đó $AM\perp\Delta\Leftrightarrow AM\subset(Q)\Rightarrow M\in(Q)$.
Mặt khác theo giả thiết $M\in(ABC)\Rightarrow M\in$ giao tuyến $d$ của hai mặt phẳng $(ABC)$ và $(Q)$.
Đường thẳng $d$ nhận vectơ $\left[\vec{n}_Q,\vec{n}_{(ABC)}\right]=(3;2;-1)$ làm vectơ chỉ phương, đồng thời đi qua $A$.
$\Rightarrow$ PTĐT $d:\begin{cases}x=1+3t\\y=1+2t\\z=1-t.\end{cases}$
Ta có $M\in d\Rightarrow M=(1+3t;1+2t;1-t)$.
Theo giả thiết $AM^2=14\Leftrightarrow(3t)^2+(2t)^2+(-t)^2=14\Leftrightarrow 14t^2=14\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-1\\t=1.\end{array}\right.$
Với $t=-1\Rightarrow M=(-2;-1;2)$ (loại).
Với $t=1\Rightarrow M=(4;3;0)$ (nhận).
Khi đó $a=4;b=3;c=0$.
Vậy $a+b+c=7$.
Chọn đáp án C ............ □

**CÂU 37.** Trong KG $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;-1)$, đường thẳng $d$: $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-2}{-1}$ và mặt phẳng $(P):x+y+2z+1=0$. Điểm $B$ thuộc mặt phẳng $(P)$ thỏa mãn đường thẳng $AB$ vuông góc và cắt đường thẳng $d$. Tọa độ điểm $B$ là

**A** $(3;-2;-1)$. **B** $(-3;8;-3)$. **C** $(0;3;-2)$. **D** $(6;-7;0)$.

**Lời giải.**

Đường thẳng $d$ có một VTCP là $\vec{u}_d=(2;1;-1)$.
Gọi $M=AB\cap d\Rightarrow M(1+2t;-1+t;2-t)\Rightarrow\overrightarrow{AM}=(2t;t-3;3-t)$.
$AB\perp d\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}\cdot\vec{u}_d=0\Leftrightarrow 4t+t-3-3+t=0\Leftrightarrow t=1\Rightarrow\overrightarrow{AM}=(2;-2;2)=2(1;-1;1)$.
Đường thẳng $AB$ đi qua điểm $A(1;2;-1)$, có một VTCP là $\vec{u}=(1;-1;1)$.
$\Rightarrow AB:\begin{cases}x=1+t\\y=2-t\quad(t\in\mathbb{R}).\\z=-1+t\end{cases}$
Ta có $B=AB\cap(P)$ nên tọa độ của $B$ là nghiệm của hệ $\begin{cases}x=1+t\\y=2-t\\z=-1+t\\x+y+2z+1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=-1\\x=0\\y=3\\z=-2.\end{cases}$
$\Rightarrow B(0;3;-2)$.
Chọn đáp án C ............ □

**CÂU 38.** Trong KG $Oxyz$, cho đường thẳng $d_1$: $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{-2}=\dfrac{z-3}{1}$ và điểm $A(1;0;-1)$. Gọi $d_2$ là đường thẳng đi qua điểm $A$ và có vectơ chỉ phương $\vec{v}=(a;1;2)$. Giá trị của $a$ sao cho đường thẳng $d_1$ cắt đường thẳng $d_2$ là

**A** $a=-1$. **B** $a=2$. **C** $a=0$. **D** $a=1$.

**Lời giải.**

PTTS của đường thẳng $d_1$ là: $\begin{cases}x=1+t\\y=2-2t\\z=3+t.\end{cases}$
PTTS đường thẳng $d_2$ qua điểm $A$ và có vectơ chỉ phương $\vec{v}=(a;1;2)$ là $d_2:\begin{cases}x=1+at'\\y=0+t'\\z=-1+2t'.\end{cases}$
Đường thẳng $d_1$ nhận $\vec{u}=(1;-2;1)$ làm vectơ chỉ phương và $d_2$ nhận $\vec{v}=(a;1;2)$ làm vectơ chỉ phương. Đường thẳng $d_1$ cắt đường thẳng $d_2$ khi và chỉ khi hệ phương trình $\begin{cases}1+t=1+at'\\2-2t=0+t'\\3+t=-1+2t'\end{cases}$ có đúng một nghiệm.
Ta có $\begin{cases}1+t=1+at'\\2-2t=0+t'\\3+t=-1+2t'\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t-at'=0\\-2t-t'=-2\\t-2t'=-4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=0\\t'=2\\0-a\cdot2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=0\\t'=2\\a=0.\end{cases}$

Vậy $a=0$.

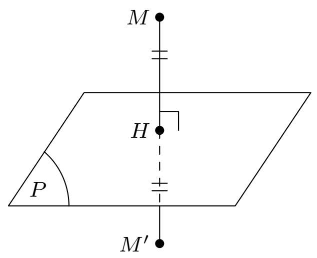
Chọn đáp án (C) ........................................ □

## 7 PTĐT liên quan điểm đối xứng và hình chiếu

**1. Tìm hình chiếu $H$ của điểm $M$ lên mặt phẳng** $(P)\colon ax+by+cz+d=0$

Viết PTĐT $MH$ qua $M$ và vuông góc với $(P)$, khi đó: $H=d\cap(P)$ thỏa

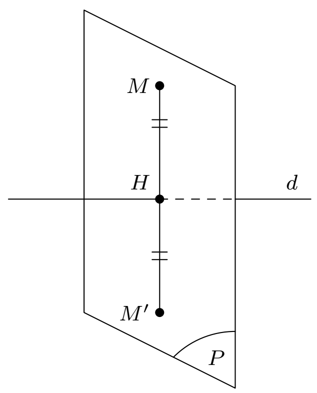
$$\begin{cases} x=x_0+a_1t\\ y=y_0+a_2t\\ z=z_0+a_3t\\ ax+by+cz+d=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=?\\ y=? \Rightarrow H\\ z=?\end{cases}$$




**Lưu ý:** Để tìm điểm đối xứng $M'$ của điểm $M$ qua $(P)\Rightarrow H$ là trung điểm của $MM'$. **2. Tìm hình chiếu $H$ của điểm $M$ lên đường thẳng $d$**

Viết phương trình mặt phẳng $(P)$ qua $M$ và vuông góc với $d$, khi đó $H=d\cap(P)$ thỏa

$$\begin{cases} x=x_0+a_1t\\ y=y_0+a_2t\\ z=z_0+a_3t\\ ax+by+cz+d=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=?\\ y=? \Rightarrow H\\ z=?\end{cases}$$




**Lưu ý:** Để tìm điểm đối xứng $M'$ của điểm $M$ qua $d\Rightarrow H$ là trung điểm của $MM'$.

**CÂU 1.** Trong KG $Oxyz$, khoảng cách từ điểm $M(2;-4;-1)$ tới đường thẳng $\Delta\colon \begin{cases} x=t\\ y=2-t\\ z=3+2t\end{cases}$ bằng

(A) $\sqrt{14}$. (B) $\sqrt{6}$. (C) $2\sqrt{14}$. (D) $2\sqrt{6}$.

**Lời giải.**

Đường thẳng $\Delta$ đi qua $N(0;2;3)$, có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}=(1;-1;2)$.

$\overrightarrow{MN}=(-2;6;4)$; $\left[\overrightarrow{MN},\vec{u}\right]=(16;8;-4)$.

$$\mathrm{d}(M,\Delta)=\frac{\left|\left[\overrightarrow{MN},\vec{u}\right]\right|}{|\vec{u}|}=\frac{\sqrt{336}}{\sqrt{6}}=2\sqrt{14}.$$

Chọn đáp án (C) ........................................ □

**CÂU 2.** Trong KG $Oxyz$, tọa độ hình chiếu vuông góc của $M(1;0;1)$ lên đường thẳng $(\Delta)\colon \dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{3}$ là

Ⓐ $(2;4;6)$. Ⓑ $\left(1;\frac{1}{2};\frac{1}{3}\right)$. Ⓒ $(0;0;0)$. Ⓓ $\left(\frac{2}{7};\frac{4}{7};\frac{6}{7}\right)$.

**Lời giải.**

Đường thẳng $\Delta$ có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}=(1;2;3)$ và có PTTS là $\begin{cases}x=t\\y=2t\\z=3t\end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$.

Gọi $N(t;2t;3t)\in\Delta$ là hình chiếu vuông góc của $M$ lên $\Delta$, khi đó
$\overrightarrow{MN}\cdot\vec{u}=0\Leftrightarrow(t-1)+(2t-0)\cdot2+(3t-1)\cdot3=0\Leftrightarrow14t-4=0\Leftrightarrow t=\frac{2}{7}\Rightarrow N\left(\frac{2}{7};\frac{4}{7};\frac{6}{7}\right)$.

Chọn đáp án D ............................................................ □

**CÂU 3.** Trong KG $Oxyz$, cho điểm $M(-4;0;0)$ và đường thẳng $\Delta$: $\begin{cases}x=1-t\\y=-2+3t\\z=-2t\end{cases}$. Gọi $H(a;b;c)$ là hình chiếu của $M$ lên $\Delta$. Tính $a+b+c$.

Ⓐ 5. Ⓑ $-1$. Ⓒ $-3$. Ⓓ 7.

**Lời giải.**

Gọi $H$ là hình chiếu của $M$ lên $\Delta$ nên tọa độ của $H$ có dạng $H(1-t;-2+3t;-2t)$ và $\overrightarrow{MH}\perp\vec{u}_\Delta$.
$\Rightarrow\overrightarrow{MH}\cdot\vec{u}_\Delta=0\Leftrightarrow14t-11=0\Leftrightarrow t=\frac{11}{14}\Rightarrow H\left(\frac{3}{14};\frac{5}{14};\frac{-22}{14}\right)\Rightarrow a+b+c=-1$.

Chọn đáp án B ............................................................ □

**CÂU 4.** Trong KG $Oxyz$, tọa độ hình chiếu vuông góc của điểm $A(3;2;-1)$ lên mặt phẳng $(\alpha):x+y+z=0$ là

Ⓐ $(-2;1;1)$. Ⓑ $\left(\frac{5}{3};\frac{2}{3};-\frac{7}{3}\right)$. Ⓒ $(1;1;-2)$. Ⓓ $\left(\frac{1}{2};\frac{1}{4};\frac{1}{4}\right)$.

**Lời giải.**

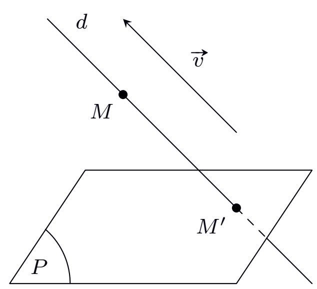
Gọi $H$ là hình chiếu của $A(3;2;-1)$ lên mặt phẳng $(\alpha):x+y+z=0$. Khi đó $AH$ nhận $\vec{n}=(1;1;1)$ là vectơ chỉ phương.
Suy ra phương trình $AH$: $\frac{x-3}{1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z+1}{1}$.
Do $H\in AH\Rightarrow H(3+t;2+t;-1+t)$.
Do $H\in(\alpha)\Rightarrow3+t+2+t-1+t=0\Leftrightarrow t=-\frac{4}{3}\Rightarrow H\left(\frac{5}{3};\frac{2}{3};-\frac{7}{3}\right)$.

Chọn đáp án B ............................................................ □

**CÂU 5.** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, hình chiếu của điểm $M(-1;0;3)$ theo phương vectơ $\vec{v}=(1;-2;1)$ trên mặt phẳng $(P):x-y+z+2=0$ có tọa độ là

Ⓐ $(2;-2;-2)$. Ⓑ $(-1;0;1)$. Ⓒ $(-2;2;2)$. Ⓓ $(1;0;-1)$.

**Lời giải.**




Đường thẳng $d$ đi qua $M(-1;0;3)$, có véc-tơ chỉ phương $\vec{v}=(1;-2;1)$ có PTTS là $\begin{cases}x=-1+t\\y=-2t\\z=3+t.\end{cases}$

Gọi $M'$ là hình chiếu của điểm $M(-1;0;3)$ theo phương véc-tơ $\vec{v}=(1;-2;1)$ trên mặt phẳng $(P):x-y+z+2=0$.
$\Rightarrow M'=d\cap(P)\Rightarrow$ tọa độ $M'$ là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases}x=-1+t\\y=-2t\\z=3+t\\x-y+z+2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-1+t\\y=-2t\\z=3+t\\-1+t+2t+3+t+2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-2\\y=2\\z=2\\t=-1\end{cases}\Rightarrow M'(-2;2;2).$$

Chọn đáp án C ............................................................ □

**CÂU 6.** Trong KG $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 6x-2y+z-35=0$ và điểm $A(-1;3;6)$. Gọi $A'$ là điểm đối xứng với $A$ qua $(P)$, tính $OA'$.

(A) $OA'=5\sqrt{3}$. (B) $OA'=\sqrt{46}$. (C) $OA'=\sqrt{186}$. (D) $OA'=3\sqrt{26}$.

**Lời giải.**

$A'$ đối xứng với $A$ qua $(P)$ nên $AA'$ vuông góc với $(P)$.

Suy ra PTĐT $AA'$: $\begin{cases} x=-1+6t \\ y=3-2t \\ z=6+t. \end{cases}$

Gọi $H$ là giao điểm của $AA'$ và mặt phẳng $(P) \Rightarrow H(-1+6t;3-2t;6+t)$.
Do $H$ thuộc $(P) \Rightarrow 6(-1+6t)-2(3-2t)+1(6+t)-35=0$.
$\Leftrightarrow 41t-41=0 \Leftrightarrow t=1 \Rightarrow H(5;1;7)$.
$A'$ đối xứng với $A$ qua $(P)$ nên $H$ là trung điểm của $AA' \Rightarrow A'(11;-1;8) \Rightarrow OA'=\sqrt{11^2+(-1)^2+8^2}=\sqrt{186}$.

Chọn đáp án (C) ☐

**CÂU 7.** Trong KG $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-2}{-1}$ và mặt phẳng $(P)\colon 2x+y+2z-1=0$. Gọi $d'$ là hình chiếu của đường thẳng $d$ lên mặt phẳng $(P)$, véc-tơ chỉ phương của đường thẳng $d'$ là

(A) $\vec{u}_3=(5;-6;-13)$. (B) $\vec{u}_2=(5;-4;-3)$. (C) $\vec{u}_4=(5;16;13)$. (D) $\vec{u}_1=(5;16;-13)$.

**Lời giải.**

Đường thẳng $d$ đi qua điểm $A(1;1;2)$ và có một véc-tơ chỉ phương $\vec{u}_d=(1;2;-1)$.
Mặt phẳng $(P)$ có một véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}_{(P)}=(2;1;2)$.
Gọi $\vec{u}_{d'}$ là một véc-tơ chỉ phương của đường thẳng $d'$.
Gọi $(Q)$ là mặt phẳng chứa đường thẳng $d$ và vuông góc với mặt phẳng $(P)$. Khi đó, $(Q)$ đi qua điểm $A(1;1;2)$ và có một véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}_{(Q)}=\left[\vec{u}_d,\vec{u}_{(P)}\right]=(5;-4;-3)$.

Đường thẳng $d'$ là hình chiếu của đường thẳng $d$ trên mặt phẳng $(P) \Leftrightarrow d'=(P)\cap(Q)$ nên $\begin{cases} \vec{u}_{d'}\perp\vec{n}_{(P)} \\ \vec{u}_{d'}\perp\vec{n}_{(Q)}. \end{cases}$

Véc-tơ chỉ phương của đường thẳng $d'$ là $\vec{u}_{d'}=\left[\vec{n}_{(P)},\vec{n}_{(Q)}\right]=(5;16;-13)$.

Chọn đáp án (D) ☐

**CÂU 8.** Trong KG $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha)\colon 2x+y+z-3=0$ và đường thẳng $d\colon \dfrac{x+4}{3}=\dfrac{y-3}{-6}=\dfrac{z-2}{-1}$. Viết PTĐT $d'$ đối xứng với đường thẳng $d$ qua mặt phẳng $(\alpha)$.

(A) $\dfrac{x}{11}=\dfrac{y+5}{-17}=\dfrac{z-4}{-2}$. (B) $\dfrac{x}{11}=\dfrac{y-5}{-17}=\dfrac{z+4}{-2}$. (C) $\dfrac{x}{11}=\dfrac{y-5}{-17}=\dfrac{z-4}{-2}$. (D) $\dfrac{x}{11}=\dfrac{y-5}{-17}=\dfrac{z-4}{2}$.

**Lời giải.**

Mặt phẳng $(\alpha)\colon 2x+y+z-3=0$ có véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}=(2;1;1)$.
Gọi tọa độ giao điểm của $d$ và $(\alpha)$ là $I$ thì $I(-22;39;8)$.
Lấy $A(-4;3;2)\in d$. Gọi $\Delta$ là đường thẳng đi qua $A$ và vuông góc với $(\alpha)$.

Suy ra PTĐT $\Delta$: $\begin{cases} x=-4+2t \\ y=3+t \\ z=2+t. \end{cases}$

Gọi $H$ là hình chiếu của $A$ lên $(\alpha)$ thì $H=\Delta\cap(\alpha) \Rightarrow H(-2;4;3)$.
$A'$ đối xứng với $A$ qua $(\alpha) \Leftrightarrow H$ là trung điểm của $AA'$, $d'$ có véc-tơ chỉ phương $\overrightarrow{A'I}=(22;-34;-4)=2(11;-17;-2)$ có phương trình là $\dfrac{x}{11}=\dfrac{y-5}{-17}=\dfrac{z-4}{-2}$.

Chọn đáp án (C) ☐

**CÂU 9.** Trong KG $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+5}{-1}=\dfrac{z-3}{4}$. Phương trình nào dưới đây là phương trình hình chiếu vuông góc của $d$ trên mặt phẳng $x+3=0$?

(A) $\begin{cases} x=-3 \\ y=-5+2t \\ z=3-t \end{cases}$. (B) $\begin{cases} x=-3 \\ y=-6-t \\ z=7+4t \end{cases}$. (C) $\begin{cases} x=-3 \\ y=-5-t \\ z=-3+4t \end{cases}$. (D) $\begin{cases} x=-3 \\ y=-5+t \\ z=3+4t \end{cases}$.

**Lời giải.**

Đường thẳng $d$ đi qua điểm $M_0(1;-5;3)$ và có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}_d=(2;-1;4)$.
Gọi $(Q)$ là mặt phẳng chứa $d$ và vuông góc với $(P)\colon x+3=0$.
Suy ra mặt phẳng $(Q)$ đi qua điểm $M_0(1;-5;3)$ và có véc-tơ pháp tuyến là $\left[\vec{n}_{(P)};\vec{u}_d\right]=(0;4;1)$.
$\Rightarrow (Q)\colon 4y+z+17=0$.

Phương trình hình chiếu của $d$ lên mặt phẳng $(P)$ là

$$\begin{cases}4y+z+17=0\\x+3=0\end{cases} \text{hay} \begin{cases}x=-3\\y=-6-t\\z=7+4t.\end{cases}$$

Chọn đáp án B ..................

**CÂU 10.** Trong KG $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon x+y+z-3=0$ và đường thẳng $d\colon \dfrac{x}{1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-2}{-1}$. Hình chiếu vuông góc của $d$ trên $(P)$ có phương trình là

A $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{4}=\dfrac{z-1}{-5}$. B $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{4}=\dfrac{z+5}{1}$. C $\dfrac{x+1}{-1}=\dfrac{y+1}{-4}=\dfrac{z+1}{5}$. D $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z-1}{-1}$.

**Lời giải.**

Gọi $M$ là giao điểm của $d$ và $(P)$.
Tọa độ của $M$ là nghiệm của hệ

$$\begin{cases}x+y+z-3=0\\\dfrac{x}{1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-2}{-1}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y+z=3\\2x-y=1\\x+z=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=1\\z=1\end{cases}\Rightarrow M(1;1;1).$$

Lấy điểm $N(0;-1;2)\in d$.
Một véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng $(P)$ là $\vec{n}=(1;1;1)$.
Gọi $\Delta$ là đường thẳng đi qua $N$ và nhận $\vec{n}=(1;1;1)$ làm véc-tơ chỉ phương.
PTĐT $\Delta\colon \dfrac{x}{1}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-2}{1}$.
Gọi $N'$ là giao điểm của $\Delta$ với $(P)$.
Tọa độ của $N'$ là nghiệm của hệ

$$\begin{cases}x+y+z-3=0\\\dfrac{x}{1}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-2}{1}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y+z=3\\x-y=1\\x-z=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{2}{3}\\y=-\dfrac{1}{3}\\z=\dfrac{8}{3}\end{cases}\Rightarrow N'\left(\dfrac{2}{3};-\dfrac{1}{8};\dfrac{8}{3}\right).$$

$\overrightarrow{MN'}=\left(-\dfrac{1}{3};-\dfrac{4}{3};\dfrac{5}{3}\right)=-\dfrac{1}{3}(1;4;-5)$.

Đường thẳng cần tìm đi qua điểm $M(1;1;1)$ và nhận $\vec{u}=(1;4;-5)$ làm véc-tơ chỉ phương nên có phương trình $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{4}=\dfrac{z-1}{-5}$.

Chọn đáp án A ..................

**CÂU 11.** Trong KG $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon x+y-z-1=0$ và đường thẳng $d\colon \dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y-4}{-2}=\dfrac{z+1}{1}$. Viết PTĐT $d'$ là hình chiếu vuông góc của $d$ lên $(P)$.

A $d'\colon \dfrac{x+2}{7}=\dfrac{y}{-5}=\dfrac{z+1}{2}$. B $d'\colon \dfrac{x-2}{7}=\dfrac{y}{-5}=\dfrac{z-1}{2}$. C $d'\colon \dfrac{x+2}{7}=\dfrac{y}{5}=\dfrac{z+1}{2}$. D $d'\colon \dfrac{x-2}{7}=\dfrac{y}{5}=\dfrac{z-1}{2}$.

**Lời giải.**

PTTS của $d$: $\begin{cases}x=-2+2t\\y=4-2t\\z=-1+t\end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$.

Gọi $M=(-2+2t;4-2t;-1+t)$ là giao điểm của $d$ và $(P)$.
$\Rightarrow(-2+2t)+(4-2t)-(-1+t)-1=0\Leftrightarrow t=2\Rightarrow M=(2;0;1)$.
Mặt phẳng $(P)$ có một véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}_{(P)}=(1;1;-1)$. Điểm $N=(0;2;0)\in d$.
Gọi $\Delta$ là đường thẳng đi qua $N(0;2;0)$ và vuông góc với mặt phẳng $(P)\Rightarrow\Delta$ nhận $\vec{n}_{(P)}=(1;1;-1)$ làm véc-tơ chỉ phương.
Suy ra phương trình của $\Delta$ là

$$\Delta\colon \dfrac{x-0}{1}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z-0}{-1}\Leftrightarrow\Delta\colon\begin{cases}x=c\\y=2+c\,,\ c\in\mathbb{R}.\\z=-c\end{cases}$$

Gọi $M' = (c; 2+c; -c)$ là giao điểm của $\Delta$ với mặt phẳng $(P) \Rightarrow c + (2+c) - (-c) - 1 = 0 \Leftrightarrow c = -\dfrac{1}{3} \Rightarrow M'\left(-\dfrac{1}{3}; \dfrac{5}{3}; \dfrac{1}{3}\right)$.
$\overrightarrow{MM'} = \left(-\dfrac{7}{3}; \dfrac{5}{3}; -\dfrac{2}{3}\right)$, đường thẳng $d'$ là hình chiếu vuông góc của $d$ trên mặt phẳng $(P)$ nên $d'$ chính là đường thẳng $MM'$, suy ra $d'$ đi qua $M(2;0;1)$ và nhận véc-tơ $\vec{u} = -3\overrightarrow{MM'} = (7;-5;2)$ làm véc-tơ chỉ phương nên phương trình của $d'$ là $d'\colon \dfrac{x-2}{7} = \dfrac{y}{-5} = \dfrac{z-1}{2}$.

Chọn đáp án B ............................................................ □

**CÂU 12.** Trong KG $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon x + y - z - 1 = 0$ và đường thẳng $d\colon \dfrac{x+2}{2} = \dfrac{y-4}{-2} = \dfrac{z+1}{1}$. Viết PTĐT $d'$ là hình chiếu vuông góc của $d$ trên $(P)$.

**A** $d'\colon \dfrac{x+2}{7} = \dfrac{y}{-5} = \dfrac{z+1}{2}$. **B** $d'\colon \dfrac{x-2}{7} = \dfrac{y}{-5} = \dfrac{z-1}{2}$. **C** $d'\colon \dfrac{x+2}{7} = \dfrac{y}{5} = \dfrac{z+1}{2}$. **D** $d'\colon \dfrac{x-2}{7} = \dfrac{y}{5} = \dfrac{z-1}{2}$.

**Lời giải.**

$(\Delta)\colon \dfrac{x-0}{1} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z-0}{-1} \Leftrightarrow (\Delta)\colon \begin{cases} x = c \\ y = 2 + c,\ c \in \mathbb{R}. \\ z = -c \end{cases}$

Gọi $M' = (c; 2+c; -c)$ là giao điểm của $\Delta$ với mặt phẳng $(P)$. Lúc đó

$$c + (2+c) - (-c) - 1 = 0 \Leftrightarrow c = -\frac{1}{3}.$$

Suy ra $M'\left(-\dfrac{1}{3}; \dfrac{5}{3}; \dfrac{1}{3}\right)$, $\overrightarrow{MM'} = \left(-\dfrac{7}{3}; \dfrac{5}{3}; -\dfrac{2}{3}\right)$.
Đường thẳng $d'$ là hình chiếu vuông góc của $d$ trên mặt phẳng $(P)$ nên $d'$ chính là đường thẳng $MM'$.
Vậy $d'$ đi qua $M(2;0;1)$ và nhận vectơ $\vec{u} = -3\overrightarrow{MM'} = (7;-5;2)$ làm vectơ chỉ phương nên phương trình của $d'$ là $d'\colon \dfrac{x-2}{7} = \dfrac{y}{-5} = \dfrac{z-1}{2}$.

Chọn đáp án B ............................................................ □

**CÂU 13.** Trong KG $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha)\colon x + y - z + 6 = 0$ và đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+4}{3} = \dfrac{z}{5}$. Hình chiếu vuông góc của $d$ trên $(\alpha)$ có phương trình là

**A** $\dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y+4}{3} = \dfrac{z-1}{5}$. **B** $\dfrac{x}{2} = \dfrac{y+5}{3} = \dfrac{z-1}{5}$. **C** $\dfrac{x+5}{2} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z-1}{5}$. **D** $\dfrac{x}{2} = \dfrac{y-5}{3} = \dfrac{z-1}{5}$.

**Lời giải.**

Mặt phẳng $(\alpha)\colon x + y - z + 1 = 0$ có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (1;1;-1)$.
Đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+4}{3} = \dfrac{z}{5}$ có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (2;3;5)$.
Vì $\vec{n} \cdot \vec{u} = 1 \cdot 2 + 1.3 + (-1) \cdot 5 = 0$ nên $d \parallel (\alpha)$.
Gọi $d'$ là hình chiếu vuông góc của $d$ trên $(\alpha)$. Lúc đó $d' \parallel d$.

Lấy $A(1;-4;0) \in d$. Gọi $\Delta$ là đường thẳng đi qua $A$ và vuông góc với $(\alpha)$. Suy ra PTĐT $\Delta$ là $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -4 + t \\ z = -t. \end{cases}$

Gọi $A'$ là hình chiếu của $A$ lên $(\alpha)$ thì $A' = \Delta \cap (\alpha) \Rightarrow A'(0;-5;1)$.
Đường thẳng $d'$ là đường thẳng đi qua $A'(0;-5;1)$, có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (2;3;5)$ có phương trình là $\dfrac{x}{2} = \dfrac{y+5}{3} = \dfrac{z-1}{5}$.

Chọn đáp án B ............................................................ □

**CÂU 14.** Trong KG $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon x + y + z - 3 = 0$ và đường thẳng $d\colon \dfrac{x}{1} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z-2}{-1}$. Hình chiếu của $d$ trên $(P)$ có phương trình là đường thẳng $d'$. Trong các điểm sau điểm nào thuộc đường thẳng $d'$?

**A** $M(2;5;-4)$. **B** $P(1;3;-1)$. **C** $N(1;-1;3)$. **D** $Q(2;7;-6)$.

**Lời giải.**

Gọi $A = d \cap (P)$. Vì $A \in d$: $\begin{cases} x = t \\ y = -1 + 2t \\ z = 2 - t \end{cases} \Rightarrow A(t; -1+2t; 2-t)$.

Mặt khác $A \in (P) \Rightarrow t - 1 + 2t + 2 - t - 3 = 0 \Leftrightarrow t = 1$. Vậy $A(1;1;1)$.

Lấy $B(0;-1;2) \in d$. Gọi $\Delta$ là đường thẳng qua $B$ và vuông góc $(P)$ thì $\Delta\colon \begin{cases} x = t' \\ y = -1 + t' \\ z = 2 + t'. \end{cases}$

Gọi $C$ là hình chiếu của $B$ lên $(P)$. Ta có $C \in \Delta \Rightarrow C(t'; -1+t'; 2+t')$.

Mặt khác $C \in (P) \Rightarrow t' - 1 + t' + 2 + t' - 3 = 0 \Leftrightarrow t' = \dfrac{2}{3}$.

Vậy $C\left(\dfrac{2}{3}; \dfrac{-1}{3}; \dfrac{8}{3}\right)$.

Lúc này $d'$ qua $A(1;1;1)$ và có một vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{AC} = \left(-\dfrac{1}{3}; -\dfrac{4}{3}; \dfrac{5}{3}\right)$. Hay $d'$ nhận $\vec{u} = (1;4;-5)$ làm một vectơ chỉ phương.

Suy ra $d'\colon \begin{cases} x = 1 + s \\ y = 1 + 4s \\ z = 1 - 5s. \end{cases}$

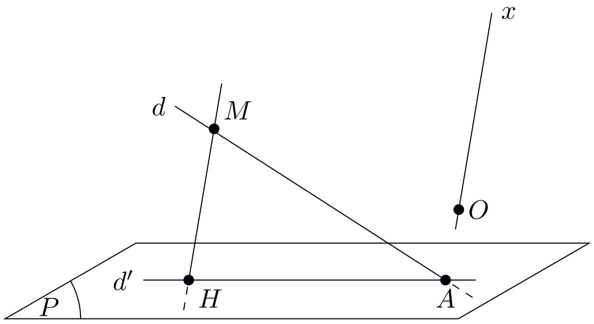
Vậy điểm thuộc đường thẳng $d'$ là $M(2;5;-4)$.

Chọn đáp án (A) ..........

**CÂU 15.** Trong KG $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z+1}{3}$ và mặt phẳng $(P)\colon x + y + z - 3 = 0$. Đường thẳng $d'$ là hình chiếu của $d$ theo phương $Ox$ lên $(P)$, $d'$ nhận $\vec{u} = (a; b; 2019)$ làm một vectơ chỉ phương. Xác định tổng $a + b$.

(A) 2019. (B) $-2019$. (C) 2018. (D) $-2020$.

**Lời giải.**




Mặt phẳng $(P)$ có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_{(P)} = (1;1;1)$, đường thẳng $d$ có vectơ chỉ phương là $\vec{u}_d = (2;1;3)$, đường thẳng chứa trục $Ox$ có vectơ chỉ phương $\vec{i} = (1;0;0)$.

Gọi $(Q)$ là mặt phẳng chứa đường thẳng $d$ và song song (hoặc chứa) trục $Ox$. Khi đó $(Q)$ có vectơ pháp tuyến $\vec{n}_{(Q)} = \left[\vec{u}_d, \vec{i}\right] = (0;3;-1)$.

Đường thẳng $d'$ chính là giao tuyến của $(P)$ và $(Q)$. Từ đó có vectơ chỉ phương của $d'$ là $\vec{u}_1 = \left[\vec{n}_{(P)}, \vec{n}_{(Q)}\right] = (-4;1;3)$.

Suy ra $\vec{u} = (-2692; 673; 2019)$ cũng là vectơ chỉ phương của $d'$.

Ta có $a + b = -2692 + 673 = -2019$.

Chọn đáp án (B) ..........

**CÂU 16.** Trong KG $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d\colon \begin{cases} x = -2 \\ y = t \\ z = 2 + 2t \end{cases}$, $(t \in \mathbb{R})$, $\Delta\colon \dfrac{x-3}{1} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z-4}{1}$ và mặt phẳng $(P)\colon x + y - z + 2 = 0$. Gọi $d'$ và $\Delta'$ lần lượt là hình chiếu của $d$ và $\Delta$ lên mặt phẳng $(P)$. Gọi $M(a;b;c)$ là giao điểm của hai đường thẳng $d'$ và $\Delta'$. Biểu thức $a + b \cdot c$ bằng

(A) 4. (B) 5. (C) 3. (D) 6.

**Lời giải.**

Do $d'$ là hình chiếu của $d$ lên mặt phẳng $(P)$ nên $d'$ là giao tuyến của mặt phẳng $(P)$ và mặt phẳng $(\alpha)$ chứa $d$ và vuông góc với mặt phẳng $(P)$. Suy ra một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng $(\alpha)$ là $\vec{n}_{(\alpha)} = [\vec{u_d}, \vec{n}_P] = (-3;2;-1)$.

Mặt phẳng $(\alpha)$ đi qua $A(-2;0;2)$ và có một vectơ pháp tuyến $\vec{n}_{(\alpha)} = (-3;2;-1)$ có phương trình là

$$3x - 2y + z + 4 = 0.$$

Do $\Delta'$ là hình chiếu của $\Delta$ lên mặt phẳng $(P)$ khi đó $\Delta'$ là giao tuyến của mặt phẳng $(P)$ và mặt phẳng $(\beta)$ chứa $\Delta$ và vuông góc với mặt phẳng $(P)$. Suy ra một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng $(\beta)$ là $\vec{n}_{(\beta)} = [\vec{u}_\Delta, \vec{n}_P] = (0;-2;-2)$.

Mặt phẳng $(\beta)$ đi qua $B(3;1;4)$ và có một vectơ pháp tuyến $\vec{n}_{(\beta)} = (0;-2;-2)$ có phương trình là

$$y + z - 5 = 0.$$

Tọa độ điểm $M$ là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} x + y - z + 2 = 0 \\ 3x - 2y + z + 4 = 0 \\ y + z - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \\ z = 3. \end{cases}$

Vậy $M(-1;2;3) \Rightarrow a + b \cdot c = -1 + 2 \cdot 3 = 5$.

Chọn đáp án (B) ........................................................................................................ □

**CÂU 17.** Trong KG $Oxyz$, cho điểm $A(1;1;1)$ và đường thẳng $d\colon \begin{cases} x = 1+t \\ y = 1+t \\ z = t \end{cases}$. Tìm tọa độ điểm $H$ là hình chiếu của $A$ lên đường thẳng $\Delta$.

(A) $H\left(\frac{4}{3};\frac{4}{3};\frac{1}{3}\right)$. (B) $H(1;1;1)$. (C) $H(0;0;-1)$. (D) $H(1;1;0)$.

**Lời giải.**

Đường thẳng $d$ có vectơ chỉ phương là $\vec{u} = (1;1;1)$.
Do $H \in d \Rightarrow H(1+t;1+t;t) \Rightarrow \overrightarrow{AH} = (t;t;t-1)$.
Do $H$ là hình chiếu của điểm $A$ lên đường thẳng $d$ nên suy ra

$$\overrightarrow{AH} \perp \vec{u} \Leftrightarrow \overrightarrow{AH}\cdot\vec{u} = 0 \Leftrightarrow t+t+t-1 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{3} \Rightarrow H\left(\frac{4}{3};\frac{4}{3};1\right).$$

Chọn đáp án (A) ........................................................................................................ □

**CÂU 18.** Trong KG $Oxyz$, cho điểm $A(1;1;1)$ và đường thẳng $(d)\colon \begin{cases} x = 6-4t \\ y = -2-t \\ z = -1+2t \end{cases}$. Tìm tọa độ hình chiếu $A'$ của $A$ trên $(d)$.

(A) $A'(2;3;1)$. (B) $A'(-2;3;1)$. (C) $A'(2;-3;1)$. (D) $A'(2;-3;-1)$.

**Lời giải.**

Ta có $A' \in (d)$ nên gọi $A'(6-4t;-2-t;-1+2t)$, suy ra $\overrightarrow{AA'} = (5-4t;-3-t;-2+2t)$.
Đường thẳng $(d)$ có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (-4;-1;2)$.
Vì $AA' \perp (d) \Leftrightarrow \overrightarrow{AA'}\cdot\vec{u} = 0 \Leftrightarrow (5-4t)\cdot(-4)+(-3-t)\cdot(-1)+(-2+2t)\cdot 2 = 0 \Leftrightarrow t = 1$. Vậy $A'(2;-3;1)$.

Chọn đáp án (C) ........................................................................................................ □

**CÂU 19.** Trong KG $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \frac{x+1}{1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z+2}{2}$ và điểm $A(3;2;0)$. Điểm đối xứng của điểm $A$ qua đường thẳng $d$ có tọa độ là

(A) $(-1;0;4)$. (B) $(7;1;-1)$. (C) $(2;1;-2)$. (D) $(0;2;-5)$.

**Lời giải.**

Gọi $(P)$ là mặt phẳng đi qua $A$ và vuông góc với đường thẳng $d$. Phương trình của mặt phẳng $(P)$ là $1(x-3)+2(y-2)+2(z-0) = 0 \Leftrightarrow x+2y+2z-7 = 0$.
Gọi $H$ là hình chiếu của $A$ lên đường thẳng $d$, khi đó $H = d \cap (P)$.
Vì $H \in d$ nên $H(-1+t;-3+2t;-2+2t)$.
Mặt khác $H \in (P)$ nên $-1+t-6+4t-4+4t-7 = 0 \Rightarrow t = 2$.
Vậy $H(1;1;2)$.
Gọi $A'$ là điểm đối xứng với $A$ qua đường thẳng $d$, khi đó $H$ là trung điểm của $AA'$.
Suy ra $A'(-1;0;4)$.

Chọn đáp án (A) ........................................................................................................ □

**CÂU 20.** Trong KG $Oxyz$, xác định tọa độ điểm $M'$ là hình chiếu vuông góc của điểm $M(2;3;1)$ lên mặt phẳng $(\alpha)\colon x-2y+z = 0$.

(A) $M'\left(2;\frac{5}{2};3\right)$. (B) $M'(1;3;5)$. (C) $M'\left(\frac{5}{2};2;\frac{3}{2}\right)$. (D) $M'(3;1;2)$.

**Lời giải.**

Gọi $\Delta$ là đường thẳng qua $M$ và vuông góc với $(\alpha)$.

PTTS của $\Delta$ là $\begin{cases} x = 2+t \\ y = 3-2t \\ z = 1+t \end{cases}$. Ta có $M' = \Delta \cap (\alpha)$.

Xét phương trình $2+t-2(3-2t)+1+t = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}$.

Vậy $M'\left(\frac{5}{2};2;\frac{3}{2}\right)$.

Chọn đáp án (C) ........................................................................................................ □

**CÂU 21.** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, điểm $M'$ đối xứng với điểm $M(1;2;4)$ qua mặt phẳng $(\alpha)\colon 2x+y+2z-3 = 0$ có tọa độ là

**A** $(-3;0;0)$. **B** $(-1;1;2)$. **C** $(-1;-2;-4)$. **D** $(2;1;2)$.

**Lời giải.**

Mặt phẳng $(\alpha)$ có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(2;1;2)$.
Vì $MM'$ vuông góc với mặt phẳng $(\alpha)$ nên đường thẳng $MM'$ nhận $\vec{n}=(2;1;2)$ làm vectơ chỉ phương.
Lúc đó đường thẳng $MM'$ có phương trình là $\begin{cases}x=1+2t\\y=2+t\\z=4+2t.\end{cases}$
Gọi $H$ là giao điểm của đường thẳng $MM'$ và mặt phẳng $(\alpha)$.
Lúc đó vì $H\in MM'$ nên $H(1+2t;2+t;4+2t)$.
Mặt khác $H\in(\alpha)$ nên $2(1+2t)+2+t+2(4+2t)-3=0\Leftrightarrow 9t+9=0\Leftrightarrow t=-1$.
Vậy $H(-1;1;2)$.
$M'$ đối xứng với điểm $M$ qua mặt phẳng $(\alpha)$ nên $H$ là trung điểm của $MM'$.
Suy ra $M'(-3;0;0)$.

Chọn đáp án A

**CÂU 22.** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon x+y+z-3=0$ và đường thẳng $d\colon \dfrac{x}{1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-2}{-1}$. Đường thẳng $d'$ đối xứng với $d$ qua mặt phẳng $(P)$ có phương trình là

**A** $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z-1}{7}$. **B** $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-1}{7}$. **C** $\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z+1}{7}$. **D** $\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z+1}{7}$.

**Lời giải.**

Ta có $d$ không vuông góc với $(P)$. PTTS của đường thẳng $d\colon \begin{cases}x=t\\y=-1+2t\\z=2-t.\end{cases}$
Tọa độ giao điểm $I$ của $d$ và mặt phẳng $(P)$ là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases}x=t\\y=-1+2t\\z=2-t\\x+y+z-3=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=1\\y=1\\z=1\end{cases}\Rightarrow I(1;1;1).$$

Lấy điểm $M(0;-1;2)\in d$.
Đường thẳng $\Delta$ qua $M$ và vuông góc với $(P)$ có phương trình $\begin{cases}x=t\\y=-1+t\\z=2+t.\end{cases}$
Ta có $\Delta\cap(P)=H\Rightarrow H\left(\dfrac{2}{3};-\dfrac{1}{3};\dfrac{8}{3}\right)$.
Vì $M'$ đối xứng với $M$ qua $(P)$ nên $H$ là trung điểm của $MM'$. Suy ra $M'\left(\dfrac{4}{3};\dfrac{1}{3};\dfrac{10}{3}\right)$.
Đường thẳng $d'$ đối xứng với $d$ qua mặt phẳng $(P)$ suy ra $d'$ đi qua $I(1;1;1)$ và $M'\left(\dfrac{4}{3};\dfrac{1}{3};\dfrac{10}{3}\right)$ có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{IM'}=\left(\dfrac{1}{3};-\dfrac{2}{3};\dfrac{7}{3}\right)=\dfrac{1}{3}(1;-2;7)$.
Phương trình $d'$ là $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z-1}{7}$.

Chọn đáp án A

**CÂU 23.** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon x+y+z-3=0$ và đường thẳng $d\colon \dfrac{x}{1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-2}{-1}$. Hình chiếu vuông góc của $d$ trên $(P)$ có phương trình là

**A** $\dfrac{x+1}{-1}=\dfrac{y+1}{-4}=\dfrac{z+1}{5}$. **B** $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z-1}{-1}$. **C** $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{4}=\dfrac{z-1}{-5}$. **D** $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+4}{1}=\dfrac{z+5}{1}$.

**Lời giải.**

- **Cách 1:**
  Đường thẳng $d$ đi qua điểm $M(0;-1;2)$ và có một vectơ chỉ phương là $\vec{u}_d=(1;2;-1)$.
  Gọi $(Q)$ là mặt phẳng chứa $d$ và vuông góc với $(P)$. Lúc đó $(Q)$ đi qua điểm $M(0;-1;2)$ và có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_Q=[\vec{u}_d,\vec{n}_P]=(3;-2;-1)$.
  Suy ra $(Q)$ có phương trình là $3x-2y-z=0$.

Gọi $\Delta$ là hình chiếu vuông góc của $d$ trên $(P)$, khi đó tập hợp các điểm thuộc $\Delta$ là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} 3x-2y-z=0 \\ x+y+z-3=0. \end{cases} \quad (I)$$

Trong hệ $(I)$ cho $z=1$, ta được $x=1$, $y=1$. Vậy điểm $A(1;1;1)$ thuộc $\Delta$.
Suy ra $\Delta$ là đường thẳng đi qua điểm $A(1;1;1)$ và có một vectơ chỉ phương $\vec{u}_\Delta = [\vec{n}_P, \vec{n}_Q] = (1;4;-5)$.
Vậy $\Delta$ có phương trình chính tắc là $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{4}=\dfrac{z-1}{-5}$.

**Cách 2:**
Gọi $A=d\cap(P)$. Vì $A\in d$ nên $A(t;-1+2t;2-t)$.
Vì $A\in(P)$ nên $t+(-1+2t)+(2-t)-3=0\Rightarrow 2t-2=0\Rightarrow t=1$. Vậy $A(1;1;1)$.
Lấy điểm $M(0;-1;2)\in d$. Gọi $\Delta$ là đường thẳng đi qua $M$ và vuông góc với $(P)$. Khi đó $\Delta$ có PTTS là $\begin{cases} x=t \\ y=-1+t \\ z=2+t. \end{cases}$
Gọi $B=\Delta\cap(P)$. Lúc đó $B\in\Delta\Rightarrow B(t;-1+t;2+t)$.
Vì $B\in(P)\Rightarrow t+(-1+t)+(2+t)-3=0\Rightarrow 3t-2=0\Rightarrow t=\dfrac{2}{3}\Rightarrow B\left(\dfrac{2}{3};-\dfrac{1}{3};\dfrac{8}{3}\right)$.
Phương trình hình chiếu vuông góc của $d$ trên mặt phẳng $(P)$ là đường thẳng $AB$ đi qua điểm $A(1;1;1)$ và có một vectơ chỉ phương là

$$\vec{u}=-3\overrightarrow{AB}=-3\cdot\left(-\frac{1}{3};-\frac{4}{3};\frac{5}{3}\right)=(1;4;-5).$$

Vậy $\Delta$ có phương trình chính tắc là $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{4}=\dfrac{z-1}{-5}$.

Chọn đáp án C ........................................................................................ □

**CÂU 24.** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta$ có phương trình là $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z+2}{3}$. Biết điểm $M(a;b;c)$ thuộc $\Delta$ và $M$ có tung độ âm và cách mặt phẳng $(Oyz)$ một khoảng bằng 2. Xác định giá trị $T=a+b+c$.

A $T=-1$. B $T=11$. C $T=-13$. D $T=1$.

**Lời giải.**

$M\in\Delta\Rightarrow M(t;1+2t;-2+3t)$. Theo giả thiết thì $d\left(M;(Oyz)\right)=|t|=2\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=2 \\ t=-2. \end{array}\right.$
Với $t=2$, tung độ $M$ là $1+2t=5>0$ (không thỏa mãn giả thiết).
Với $t=-2$, tung độ $M$ là $1+2t=-3<0$ (thỏa mãn giả thiết). Lúc đó ta có $M(-2;-3;-8)$.
Vậy $a=-2$, $b=-3$, $c=-8$. Suy ra $T=a+b+c=-13$.
Chọn đáp án C ........................................................................................ □

**CÂU 25.** Trong KG $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;-1;2)$, $B(-1;2;3)$ và đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z-1}{2}$. Tìm điểm $M(a;b;c)$ thuộc $d$ sao cho $MA^2+MB^2=28$, biết $c<0$.

A $M\left(\dfrac{1}{6};\dfrac{7}{6};-\dfrac{2}{3}\right)$. B $M\left(-\dfrac{1}{6};-\dfrac{7}{6};-\dfrac{2}{3}\right)$. C $M(-1;0;-3)$. D $M(2;3;3)$.

**Lời giải.**

Ta có $M\in d$ nên $\exists t\in\mathbb{R}$ sao cho $M(1+t;2+t;1+2t)$.
Do $c=1+2t<0$ suy ra $t<-\dfrac{1}{2}$.
Ta có

$$\begin{aligned} MA^2+MB^2=28 &\Leftrightarrow (-t)^2+(-3-t)^2+(1-2t)^2+(-2-t)^2+(-t)^2+(2-2t)^2=28 \\ &\Leftrightarrow 12t^2-2t-10=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \text{ (loại)} \\ t=-\dfrac{5}{6} \text{ (thỏa mãn).} \end{array}\right. \end{aligned}$$

Với $t=-\dfrac{5}{6}$, ta có $M\left(\dfrac{1}{6};\dfrac{7}{6};-\dfrac{2}{3}\right)$.

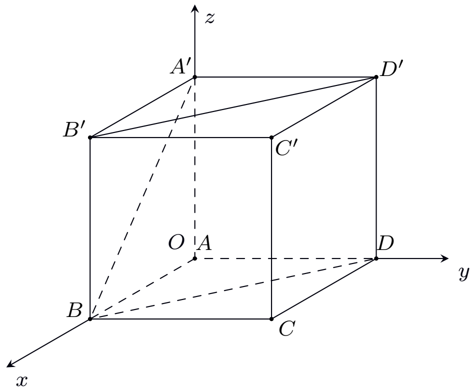
Chọn đáp án A ........................................................................................ □

## 8 Ứng dụng của đường thẳng trong không gian

**Phần I. Mỗi câu hỏi học sinh chọn một trong bốn phương án A, B, C, D.**

**CÂU 1.**

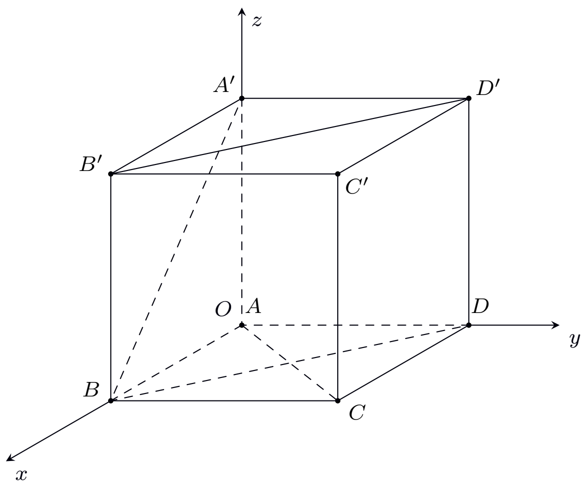
Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng $a$, gọi $\alpha$ là góc giữa đường thẳng $A'B$ và mặt phẳng $(BB'D'D)$. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ, tính $\sin\alpha$.




(A) $\dfrac{\sqrt{3}}{5}$. (B) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

(C) $\dfrac{1}{2}$. (D) $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

**Lời giải.**




Ta chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ với $A \equiv O(0;0;0)$, $B(a;0;0)$, $C(a;a;0)$, $D(0;a;0)$, $A'(0;0;a)$, $B'(a;0;a)$, $C'(a;a;a)$, $D'(0;a;a)$.

Ta thấy $OC \perp (BB'D'D)$ và $\overrightarrow{OC} = (a;a;0)$ nên suy ra mặt phẳng $(BB'D'D)$ có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (1;1;0)$.

Đường thẳng $A'B$ có vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{A'B} = (a;0;-a)$ ta chọn $\vec{u} = (1;0;-1)$.

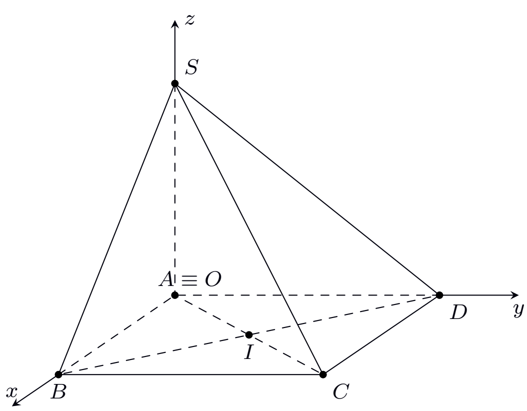
Ta có

$$\sin\alpha = \frac{|\vec{n}\cdot\vec{u}|}{|\vec{n}|\cdot|\vec{u}|} = \frac{|1\cdot 1 + 1\cdot 0 + 0\cdot(-1)|}{\sqrt{1^2+1^2+0^2}\cdot\sqrt{1^2+0^2+(-1)^2}} = \frac{1}{2}.$$

Chọn đáp án (C) ............................................................ □

**CÂU 2.**

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm $I$ có độ dài đường chéo bằng $a\sqrt{2}$ và $SA$ vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi $\alpha$ là góc giữa hai mặt phẳng $(SBD)$ và $(ABCD)$. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ. Nếu $\tan\alpha = \sqrt{2}$ thì góc giữa hai mặt phẳng $(SAC)$ và $(SBC)$ bằng




(A) $30^\circ$. (B) $60^\circ$. (C) $45^\circ$. (D) $90^\circ$.

**Lời giải.**

Ta có $((SBD);(ABCD)) = (SI, AI) = \widehat{SIA}$.

Do đó $\tan\alpha = \tan\widehat{SIA} = \dfrac{SA}{AI} \Rightarrow SA = a$.

Với hệ trục tọa độ như hình vẽ thì ta có $A(0;0;0)$, $B(a;0;0)$, $C(a;a;0)$, $S(0;0;a)$.
Suy ra $\overrightarrow{SA}=(0;0;-a)$, $\overrightarrow{SC}=(a;a;-a)$, $\overrightarrow{SB}=(a;0;-a)$.
Mặt phẳng $(SAC)$ có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}_1=(-1;1;0)$.
Mặt phẳng $(SBC)$ có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}_2=(1;0;1)$.
Suy ra

$$\cos\left((SAC),(SBC)\right)=\frac{|\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2|}{|\vec{n}_1|\cdot|\vec{n}_2|}=\frac{1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\frac{1}{2}.$$

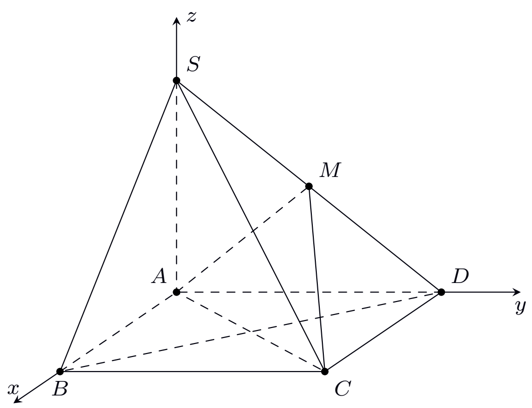
Vậy $\left((SAC),(SBC)\right)=60^\circ$.

Chọn đáp án B ..........□

**CÂU 3.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $a$, cạnh bên $SA=2a$ và vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi $M$ là trung điểm cạnh $SD$. Tính tan của góc tạo bởi hai mặt phẳng $(AMC)$ và $(SBC)$.

A $\frac{\sqrt{3}}{2}$.
B $\frac{2\sqrt{3}}{2}$.
C $\frac{\sqrt{5}}{5}$.
D $\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

**Lời giải.**




Gắn trục tọa độ như hình vẽ. Không mất tính tổng quát, ta đặt $a=1$.
Ta có $A(0;0;0)$, $B(1;0;0)$, $D(0;1;0)$, $C(1;1;0)$, $S(0;0;2)$.
Do $M$ là trung điểm của $SD$ nên $M\left(0;\frac{1}{2};1\right)$.
Khi đó

- $\overrightarrow{BC}=(0;1;0)$, $\overrightarrow{SB}=(1;0;-2)\Rightarrow\left[\overrightarrow{BC},\overrightarrow{SB}\right]=(2;0;1)$.
  Một véc-tơ pháp tuyến của $(SBC)$ là $\vec{n}_1=(2;0;1)$.

- $\overrightarrow{MA}=\left(0;\frac{1}{2};1\right)$, $\overrightarrow{AC}=(1;1;0)\Rightarrow\left[\overrightarrow{MA},\overrightarrow{AC}\right]=\left(-1;1;-\frac{1}{2}\right)$.
  Một véc-tơ pháp tuyến của $(AMC)$ là $\vec{n}_2=(2;-2;1)$.

Suy ra

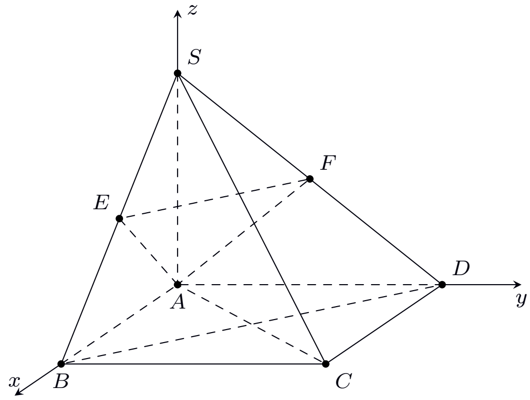
$$\cos\left((SBC),(AMC)\right)=\frac{\sqrt{5}}{3}\Rightarrow\tan\left((SBC),(AMC)\right)=\frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

Chọn đáp án D ..........□

**CÂU 4.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình vuông cạnh $a$, $SA\perp(ABCD)$ và $SA=a$. Gọi $E$ và $F$ lần lượt là trung điểm của $SB$ và $SD$. Tính cô-sin của góc hợp bởi hai mặt phẳng $(AEF)$ và $(ABC)$.

A $\frac{1}{2}$.
B $\frac{\sqrt{3}}{3}$.
C $\sqrt{3}$.
D $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

**Lời giải.**




Gắn trục tọa độ như hình vẽ. Không mất tính tổng quát, ta đặt $a=1$.
Ta có $A(0;0;0)$, $B(1;0;0)$, $D(0;1;0)$, $S(0;0;1)$. Khi đó $E\left(\frac{1}{2};0;\frac{1}{2}\right)$ và $F\left(0;\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$.
Ta có $\overrightarrow{AE}=\left(\frac{1}{2};0;\frac{1}{2}\right)$, $\overrightarrow{AF}=\left(0;\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$.
Một vec-tơ pháp tuyến của $(AEF)$ là $\overrightarrow{n_1}=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AF}\right]=\left(\frac{-1}{4};\frac{-1}{4};\frac{1}{4}\right)=-\frac{1}{4}(1;1;-1)$.
Một vec-tơ pháp tuyến của $(ABCD)$ là $\overrightarrow{n_2}=\overrightarrow{AS}=(0;0;1)$.
Vậy cô-sin góc giữa 2 mặt phẳng $(AEF)$ và $(ABCD)$ là

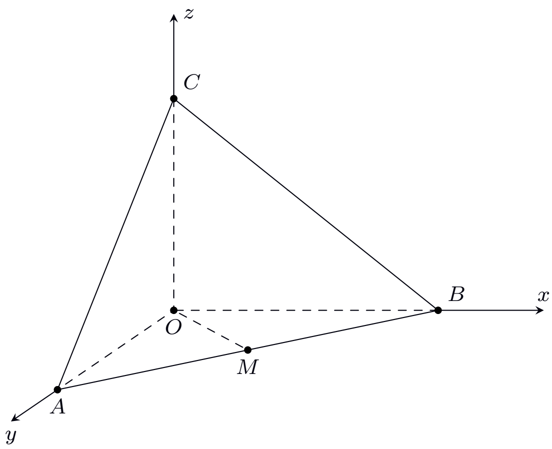
$$\cos((AEF),(ABCD))=\frac{|\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2|}{|\vec{n}_1|\cdot|\vec{n}_2|}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Chọn đáp án B ............................................................ □

**CÂU 5.** Cho hình chóp $O.ABC$ có ba cạnh $OA$, $OB$, $OC$ đôi một vuông góc và $OA=OB=OC=a$. Gọi $M$ là trung điểm cạnh $AB$. Góc tạo bởi hai véc-tơ $\overrightarrow{BC}$ và $\overrightarrow{OM}$ bằng

**A** $135^\circ$. **B** $150^\circ$. **C** $120^\circ$. **D** $60^\circ$.

**Lời giải.**




Gắn trục tọa độ như hình vẽ.
Ta có $O(0;0;0)$, $A(0;a;0)$, $B(a;0;0)$, $C(0;0;a)$, $M\left(\frac{a}{2};\frac{a}{2};0\right)$.
Khi đó ta có $\overrightarrow{BC}=(-a;0;a)$, $\overrightarrow{OM}=\left(\frac{a}{2};\frac{a}{2};0\right)$. Suy ra

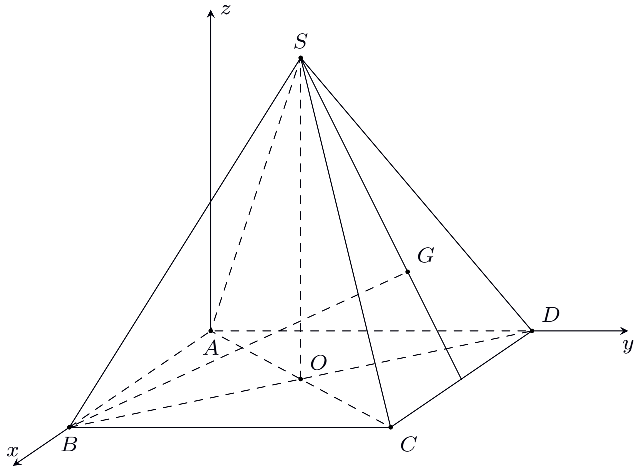
$$\cos\left(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{OM}\right)=\frac{\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{OM}}{BC\cdot OM}=\frac{-\frac{a^2}{2}}{a\sqrt{2}\cdot\frac{a\sqrt{2}}{2}}=-\frac{1}{2}\Rightarrow\left(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{OM}\right)=120^\circ.$$

Chọn đáp án C ............................................................ □

**CÂU 6.** Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có $AB=a$, $SA=a\sqrt{2}$. Gọi $G$ là trọng tâm tam giác $SCD$. Góc giữa đường thẳng $BG$ với đường thẳng $SA$ bằng

**A** $\arccos\frac{\sqrt{3}}{5}$. **B** $\arccos\frac{\sqrt{5}}{5}$. **C** $\arccos\frac{\sqrt{5}}{3}$. **D** $\arccos\frac{\sqrt{15}}{5}$.

**Lời giải.**




Gọi $O$ là giao điểm của $AC$ và $BD$. Trong $\triangle SAO$ vuông tại $O$ ta có $SO = \sqrt{SA^2 - OA^2} = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.
Gắn trục tọa độ như hình vẽ.
Ta có $A(0;0;0)$, $B(a;0;0)$, $C(a;a;0)$, $D(0;a;0)$, $O\left(\dfrac{a}{2};\dfrac{a}{2};0\right)$, $S\left(\dfrac{a}{2};\dfrac{a}{2};\dfrac{a\sqrt{6}}{2}\right)$.
Vì $G$ là trọng tâm tam giác $SCD$ nên $G\left(\dfrac{a}{2};\dfrac{5a}{6};\dfrac{a\sqrt{6}}{6}\right)$.
Ta có $\overrightarrow{AS} = \left(\dfrac{a}{2};\dfrac{a}{2};\dfrac{a\sqrt{6}}{2}\right) = \dfrac{a}{2}(1;1;\sqrt{6})$, $\overrightarrow{BG} = \left(\dfrac{-a}{2};\dfrac{5a}{6};\dfrac{a\sqrt{6}}{6}\right) = \dfrac{a}{6}(-3;5;\sqrt{6})$.
Góc giữa đường thẳng $BG$ với đường thẳng $SA$ bằng

$$\cos(BG;SA) = \frac{|\overrightarrow{BG}\cdot\overrightarrow{AS}|}{BG\cdot AS} = \frac{|-3+5+6|}{\sqrt{40}\cdot\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

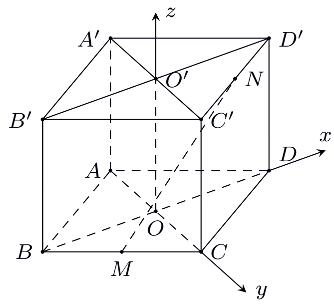
Chọn đáp án (B) ........................................................ □

**CÂU 7.** Cho hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình thoi, tam giác $ABD$ đều. Gọi $M, N$ lần lượt là trung điểm của $BC$ và $C'D'$, biết rằng $MN \perp B'D$. Gọi $\alpha$ là góc tạo bởi đường thẳng $MN$ và mặt đáy $(ABCD)$, khi đó $\cos\alpha$ bằng

(A) $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$. (B) $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. (C) $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$. (D) $\cos\alpha = \dfrac{1}{2}$.

**Lời giải.**

Chọn $AB = 2 \Rightarrow BD = 2; AC = 2\sqrt{3}$, đặt $AA' = h$.
Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ ta có
$D(1;0;0), B(-1;0;0), C(0;\sqrt{3};0)$,
$D'(1;0;h)$, $C'(0;\sqrt{3};h), B'(-1;0;h)$.
Suy ra $M\left(-\dfrac{1}{2};\dfrac{\sqrt{3}}{2};0\right), N\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{\sqrt{3}}{2};h\right)$,
$\overrightarrow{MN} = (1;0;h), \overrightarrow{B'D} = (2;0;-h)$.




Do $MN \perp B'D \Rightarrow \overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{B'D} = 0 \Leftrightarrow 2 - h^2 = 0 \Rightarrow h = \sqrt{2} \Rightarrow \overrightarrow{MN} = (1;0;\sqrt{2})$.
Ta có $MN \parallel \vec{u} = \overrightarrow{MN} = (1;0;\sqrt{2})$, mặt phẳng $(ABCD) \perp \vec{n} = \vec{j} = (0;0;1)$.
Do $\alpha$ là góc tạo bởi đường thẳng $MN$ và mặt đáy $(ABCD)$ nên ta có

$$\sin\alpha = |\cos(\vec{u};\vec{n})| = \frac{|\vec{u}\cdot\vec{n}|}{|\vec{u}|\cdot|\vec{n}|} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \Rightarrow \cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Chọn đáp án (A) ........................................................ □

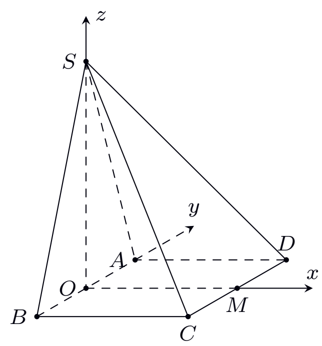
**CÂU 8.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $a$, mặt bên $(SAB)$ là tam giác đều và vuông góc với $(ABCD)$. Tính $\cos\varphi$ với $\varphi$ là góc tạp bởi $(SAC)$ và $(SCD)$.

(A) $\dfrac{\sqrt{3}}{7}$. (B) $\dfrac{\sqrt{6}}{7}$. (C) $\dfrac{5}{7}$. (D) $\dfrac{\sqrt{2}}{7}$.

**Lời giải.**

Gọi $O, M$ lần lượt là trung điểm của $AB, CD$.
Vì mặt bên $(SAB)$ là tam giác đều và vuông góc với $(ABCD)$ nên $SO \perp (ABCD)$.

Xét hệ trục $Oxyz$ có $O(0;0;0)$, $M(1;0;0)$, $A\left(0;\dfrac{1}{2};0\right)$,
$S\left(0;0;\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $C\left(1;\dfrac{-1}{2};0\right)$, $D\left(1;\dfrac{1}{2};0\right)$.
Suy ra $\overrightarrow{SA}=\left(0;\dfrac{1}{2};\dfrac{-\sqrt{3}}{2}\right)$, $\overrightarrow{AC}(1;-1;0)$
và $\overrightarrow{SC}=\left(1;\dfrac{-1}{2};\dfrac{-\sqrt{3}}{2}\right)$, $\overrightarrow{CD}=(0;1;0)$.




Mặt phẳng $(SAC)$ có véc tơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_1}=[\overrightarrow{SA},\overrightarrow{AC}]=\left(\dfrac{-\sqrt{3}}{2};\dfrac{-\sqrt{3}}{2};\dfrac{-1}{2}\right)$.

Mặt phẳng $(SAD)$ có véc tơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_1}=[\overrightarrow{SC},\overrightarrow{CD}]=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2};0;1\right)$.

Vậy $\cos\varphi=\dfrac{|\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}|}{|\overrightarrow{n_1}|\cdot|\overrightarrow{n_2}|}=\dfrac{5}{7}$.

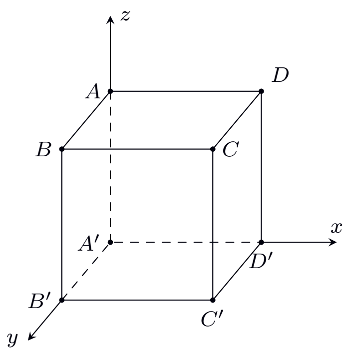
Chọn đáp án C ............................................................................................ □

**CÂU 9.** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh $a$. Góc giữa hai mặt phẳng $(A'B'CD)$ và $(ACC'A')$ bằng

**A** $60^\circ$. **B** $30^\circ$. **C** $45^\circ$. **D** $75^\circ$.

**Lời giải.**

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho $O\equiv A'$, $Ox\equiv A'D'$, $Oy\equiv A'B'$, $Oz\equiv A'A$.
Ta có $A'(0;0;0), D'(a;0;0), B'(0;a;0), C'(a;a;0)$
và $A(0;0;a), D(a;0;a), B(0;a;a), C(a;a;a)$.
Suy ra $\overrightarrow{A'B'}=(0;a;0)$, $\overrightarrow{A'D}=(a;0;a)$, $\overrightarrow{A'A}=(0;0;a)$
và $\overrightarrow{A'C'}=(a;a;0)$. Ta có $\left[\overrightarrow{A'B'},\overrightarrow{A'D}\right]=\left(a^2;0;-a^2\right)$.




Chọn $\overrightarrow{n_1}=(1;0;-1)$ là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng $(A'B'CD)$.
Suy ra $\left[\overrightarrow{A'A},\overrightarrow{A'C}\right]=\left(-a^2;a^2;0\right)$.
Chọn $\overrightarrow{n_2}=(-1;1;0)$ là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng $(ACC'A')$.
Góc giữa hai mặt phẳng $(A'B'CD)$ và $(ACC'A')$ là

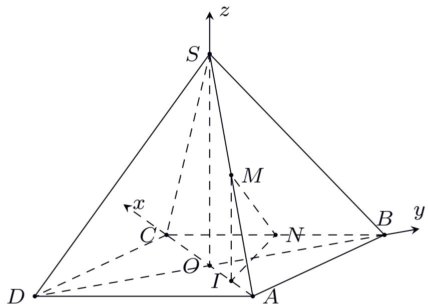
$$\cos\alpha=|\cos(\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2})|=\frac{|-1|}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\frac{1}{2}\Rightarrow\alpha=60^\circ.$$

Chọn đáp án A ............................................................................................ □

**CÂU 10.** Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $a$, tâm $O$. Gọi $M$ và $N$ lần lượt là trung điểm của hai cạnh $SA$ và $BC$, biết $MN=\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$. Khi đó giá trị sin của góc giữa đường thẳng $MN$ và mặt phẳng $(SBD)$ bằng

**A** $\dfrac{\sqrt{2}}{5}$. **B** $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **C** $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$. **D** $\sqrt{3}$.

**Lời giải.**




Gọi $I$ hình chiếu của $M$ lên $(ABCD)$, suy ra $I$ là trung điểm của $AO$ suy ra $CI = \dfrac{3}{4}AC = \dfrac{3a\sqrt{2}}{4}$.

Xét $\triangle CNI$ có $CN = \dfrac{a}{2}, \widehat{NCI} = 45°$.

Áp dụng định lý cosin ta có

$NI = \sqrt{CN^2 + CI^2 - 2CN \cdot CI \cdot \cos 45°} = \dfrac{a\sqrt{10}}{4}$.

Xét $\triangle MIN$ vuông tại $I$ ta có

$MI = \sqrt{MN^2 - NI^2} = \dfrac{a\sqrt{14}}{4}$.

Mà $MI \parallel SO, MI = \dfrac{1}{2}SO \Rightarrow SO = \dfrac{a\sqrt{14}}{2}$.

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ ta có

$O(0;0;0), B\left(0;\dfrac{\sqrt{2}}{2};0\right), D\left(0;-\dfrac{\sqrt{2}}{2};0\right), C\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2};0;0\right)$,

$N\left(\dfrac{\sqrt{2}}{4};\dfrac{\sqrt{2}}{4};0\right), A\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2};0;0\right), S\left(0;0;\dfrac{\sqrt{14}}{4}\right), M\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{4};0;\frac{\sqrt{14}}{4}\right)$.

Khi đó $\overrightarrow{MN} = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2};\dfrac{\sqrt{2}}{4};-\dfrac{\sqrt{14}}{4}\right), \overrightarrow{SB} = \left(0;\dfrac{\sqrt{2}}{2};-\dfrac{\sqrt{14}}{2}\right), \overrightarrow{SD} = \left(0;-\dfrac{\sqrt{2}}{2};-\dfrac{\sqrt{14}}{2}\right)$.

Vectơ pháp tuyến mặt phẳng $(SBD)\vec{n} = \overrightarrow{SB} \wedge \overrightarrow{SD} = (-\sqrt{7};0;0)$.

Suy ra $\sin(MN,(SBD)) = \dfrac{|\overrightarrow{MN} \cdot \vec{n}|}{|\overrightarrow{MN}| \cdot |\vec{n}|} = \dfrac{\left|-\sqrt{7} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right|}{\sqrt{7} \cdot \frac{\sqrt{6}}{2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Chọn đáp án (B) ............................................................ □

**CÂU 11.** Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có $A'.ABC$ là tứ diện đều cạnh $a$. Gọi $M, N$ lần lượt là trung điểm của $AA'$ và $BB'$. Tính tan của góc giữa hai mặt phẳng $(ABC)$ và $(CMN)$.

(A) $\dfrac{\sqrt{2}}{5}$.  (B) $\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$.  (C) $\dfrac{2\sqrt{2}}{5}$.  (D) $\dfrac{4\sqrt{2}}{13}$.

**Lời giải.**

Gọi $O, H$ lần lượt là trung điểm của $AB$ và trọng tâm tam giác $ABC$.

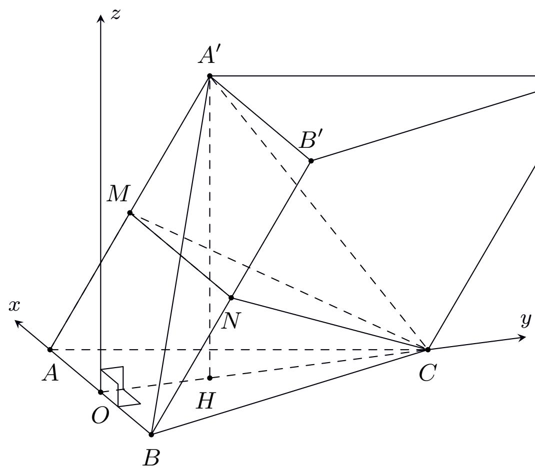
Vì $A'.ABC$ là tứ diện đều cạnh $a$ nên $A'H \perp (ABC)$.

Qua $O$ kẻ tia $Oz \parallel A'H$ và chọn hệ trục tọa độ sao cho $O(0;0;0), A\left(\dfrac{1}{2};0;0\right), B\left(-\dfrac{1}{2};0;0\right), C\left(0;\dfrac{\sqrt{3}}{2};0\right)$,

$H\left(0;\dfrac{\sqrt{3}}{6};0\right), A'H = \dfrac{a\sqrt{6}}{3} \Rightarrow A'\left(0;\dfrac{\sqrt{3}}{6};\dfrac{\sqrt{6}}{3}\right)$

và $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'} \Rightarrow B'\left(-1;\dfrac{\sqrt{3}}{6};\dfrac{\sqrt{6}}{3}\right)$.

Dễ thấy $(ABC)$ có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n_1} = (0;0;1)$.




Gọi $M$ là trung điểm $AA' \Rightarrow M\left(\dfrac{1}{4};\dfrac{\sqrt{3}}{12};\dfrac{\sqrt{6}}{6}\right)$, $N$ là trung điểm $BB' \Rightarrow N\left(\dfrac{-3}{4};\dfrac{\sqrt{3}}{12};\dfrac{\sqrt{6}}{6}\right)$.

Ta có $\overrightarrow{MN} = (-1;0;0), \overrightarrow{CM} = \left(\dfrac{1}{4};\dfrac{-5\sqrt{3}}{12};\dfrac{\sqrt{6}}{6}\right)$.

Mặt phẳng $(CMN)$ có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n_2} = \left(0;\dfrac{\sqrt{6}}{6};\dfrac{5\sqrt{3}}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{12}(0;2\sqrt{2};5)$

$$\cos\varphi = \frac{5}{\sqrt{33}} \Rightarrow \tan\varphi = \sqrt{\frac{1}{\cos^2\varphi} - 1} = \frac{2\sqrt{2}}{5}$$

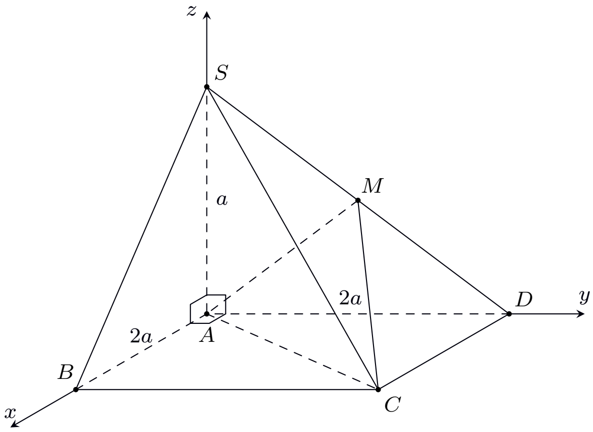
Chọn đáp án (C) ............................................................ □

**CÂU 12.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$ cạnh bên $SA = a$ và vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi $M$ là trung điểm cạnh $SD$. Tan của góc tạo bởi hai mặt phẳng $(AMC)$ và $(SBC)$ bằng

Ⓐ $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$. Ⓑ $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$. Ⓒ $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Ⓓ $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

**Lời giải.**

Chọn hệ trục tọa độ sao cho $A \equiv O$ như hình vẽ




Ta có $\quad A(0;0;0), B(2a;0;0), D(0;2a;0), C(2a;2a;0), S(0;0;a), M\left(0;a;\dfrac{a}{2}\right)$.

$$\Rightarrow \overrightarrow{SB} = (2a;0;-a), \overrightarrow{SC} = (2a;2a;-a), \overrightarrow{MA} = \left(0;-a;-\frac{a}{2}\right), \overrightarrow{MC} = \left(2a;a;-\frac{a}{2}\right).$$

$$\vec{n}_1 = \left[\overrightarrow{SB}, \overrightarrow{SC}\right] = \left(\begin{vmatrix} 0 & -a \\ 2a & -a \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -a & 2a \\ -a & 2a \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 2a & 0 \\ 2a & 2a \end{vmatrix}\right) = 2a^2(1;0;2),$$

$$\vec{n}_2 = \left[\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MC}\right] = \left(\begin{vmatrix} -a & -\frac{a}{2} \\ a & -\frac{a}{2} \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -\frac{a}{2} & 0 \\ -\frac{a}{2} & 2a \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 0 & -a \\ 2a & a \end{vmatrix}\right) = a^2(1;-1;2).$$

Mặt phẳng $(SBC)$ có một véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}_1$, mặt phẳng $(AMC)$ có một véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}_2$.
Gọi $\alpha$ $(0^\circ \le \alpha \le 90^\circ)$ là góc tạo bởi hai mặt phẳng $(AMC)$ và $(SBC)$.

Ta có $\cos\alpha = |\cos(\vec{n}_1, \vec{n}_2)| = \dfrac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \dfrac{2a^2 \cdot a^2 \cdot 5}{2a^2\sqrt{5} \cdot a^2\sqrt{6}} = \dfrac{5}{\sqrt{30}}$.

Mà $\tan^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha} - 1 = \left(\dfrac{\sqrt{30}}{5}\right)^2 - 1 = \dfrac{5}{25}$.

Suy ra $\tan\alpha = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

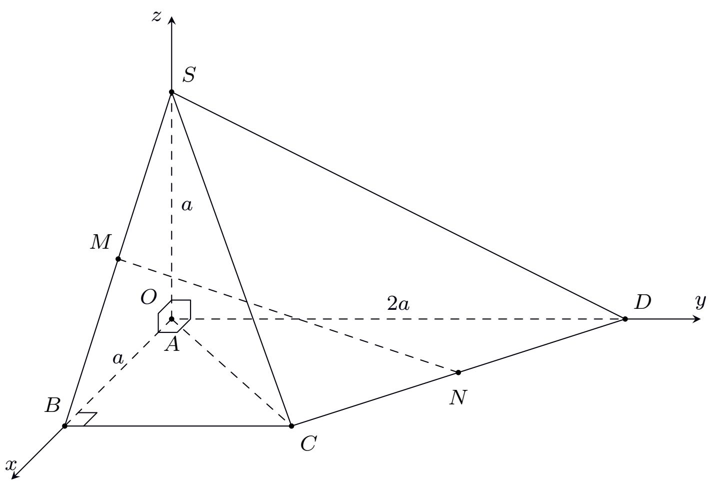
Chọn đáp án A ........................................................................................ □

**CÂU 13.** Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy là hình thang vuông tại $A$ và $B$, $AB = BC = a$, $AD = 2a$. Biết $SA \perp (ABCD)$, $SA = a$. Gọi $M$ và $N$ lần lượt là trung điểm của $SB$ và $CD$. Tính sin góc giữa đường thẳng $MN$ và mặt phẳng $(SAC)$.

Ⓐ $\dfrac{3\sqrt{5}}{10}$. Ⓑ $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$. Ⓒ $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$. Ⓓ $\dfrac{\sqrt{55}}{10}$.

**Lời giải.**

Trong KG $Oxyz$ chọn $A \equiv O(0;0;0), AB \equiv Ox, AD \equiv Oy, AS \equiv Oz$.



Ta có $S(0;0;a), B(a;0;0), D(0;2a;0), C(a;a;0), M\left(\dfrac{a}{2};0;\dfrac{a}{2}\right), N\left(\dfrac{a}{2};\dfrac{3a}{2};0\right)$.

$\Rightarrow \overrightarrow{MN}=\left(0;\dfrac{3a}{2};\dfrac{-a}{2}\right), \overrightarrow{AS}=(0;0;a); \overrightarrow{AC}=(a;a;0)$.

$\vec{n}_{(SAC)}=\left[\overrightarrow{AS},\overrightarrow{AC}\right]=\left(\begin{vmatrix}0 & a\\ a & 0\end{vmatrix};\begin{vmatrix}a & 0\\ a & a\end{vmatrix};\begin{vmatrix}0 & 0\\ a & 0\end{vmatrix}\right)=(-a^2;a^2;0)=a^2(-1;1;0)$.

Mặt phẳng $(SAC)$ có một véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}_{(SAC)}$.

Ta có $\sin(MN,(SAC))=\dfrac{\overrightarrow{MN}\cdot\vec{n}_{(SAC)}}{\left|\overrightarrow{MN}\right|\left|\vec{n}_{(SAC)}\right|}=\dfrac{\dfrac{3a^3}{2}}{\dfrac{a}{2}\cdot\sqrt{10}\cdot a^2\sqrt{2}}=\dfrac{3\sqrt{5}}{10}$.

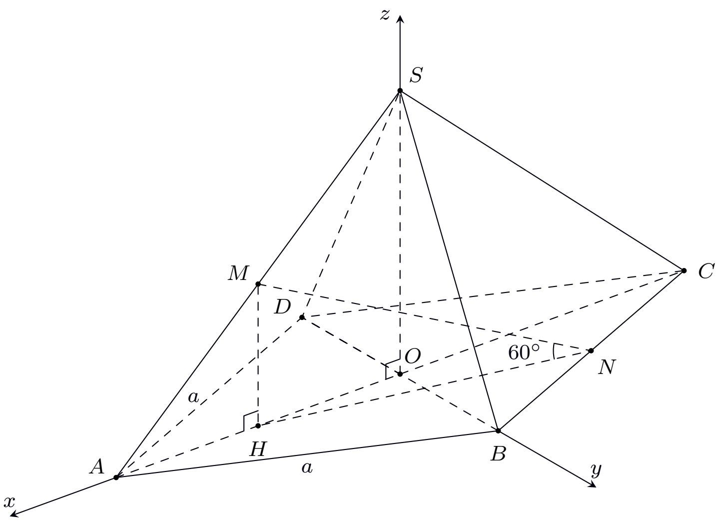
Chọn đáp án A ..................................................□

**CÂU 14.** Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $a$ tâm $O$. Gọi $M$ và $N$ lần lượt là trung điểm của $SA$ và $BC$. Biết rằng góc giữa $MN$ và $(ABCD)$ bằng $60^\circ$. Côsin của góc giữa đường thẳng $MN$ và mặt phẳng $(SBD)$ bằng

**A** $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$. **B** $\dfrac{\sqrt{41}}{41}$. **C** $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$. **D** $\dfrac{2\sqrt{41}}{41}$.

**Lời giải.**

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ.




Đặt $SO=m, (m>0)$.

Ta có $A\left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2};0;0\right), S(0;0;m), N\left(-\dfrac{a\sqrt{2}}{4};\dfrac{a\sqrt{2}}{4};0\right), M\left(\dfrac{a\sqrt{2}}{4};0;\dfrac{m}{2}\right)$.

$\Rightarrow \overrightarrow{MN}=\left(-\dfrac{a\sqrt{2}}{2};\dfrac{a\sqrt{2}}{4};-\dfrac{m}{2}\right)$.

Mặt phẳng $(ABCD)$ có véc tơ pháp tuyến $\vec{k}=(0;0;1)$.

Ta có $\sin((MN,(ABCD))=\dfrac{\left|\overrightarrow{MN}\cdot\vec{k}\right|}{\left|\overrightarrow{MN}\right|\left|\vec{k}\right|}=\dfrac{\dfrac{m}{2}}{\sqrt{\dfrac{5a^2}{8}+\dfrac{m^2}{4}}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow m^2=\dfrac{15a^2}{8}+\dfrac{3m^2}{4}$.

Suy ra $2m^2=15a^2\Rightarrow m=\dfrac{a\sqrt{30}}{2}$

Do đó $\overrightarrow{MN}=\left(-\dfrac{a\sqrt{2}}{2};\dfrac{a\sqrt{2}}{4};-\dfrac{a\sqrt{30}}{4}\right)$.

Mặt phẳng $(SBD)$ có véc tơ pháp tuyến là $\vec{i}=(1;0;0)$.

Ta lại có $\sin(MN,(SBD))=\dfrac{\left|\overrightarrow{MN}\cdot\vec{i}\right|}{\left|\overrightarrow{MN}\right|\left|\vec{i}\right|}=\dfrac{\dfrac{a\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{\dfrac{a^2}{2}+\dfrac{a^2}{8}+\dfrac{30a^2}{16}}}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

Suy ra $\cos(MN,(SBD))=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

Chọn đáp án C ..................................................□

**CÂU 15.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy hình vuông. Cho tam giác $SAB$ vuông tại $S$ và góc $SBA$ bằng $30^\circ$. Mặt phẳng $(SAB)$ vuông góc mặt phẳng đáy. Gọi $M$, $N$ là trung điểm $AB$, $BC$. Tìm cô-sin góc tạo bởi hai đường thẳng $(SM, DN)$.

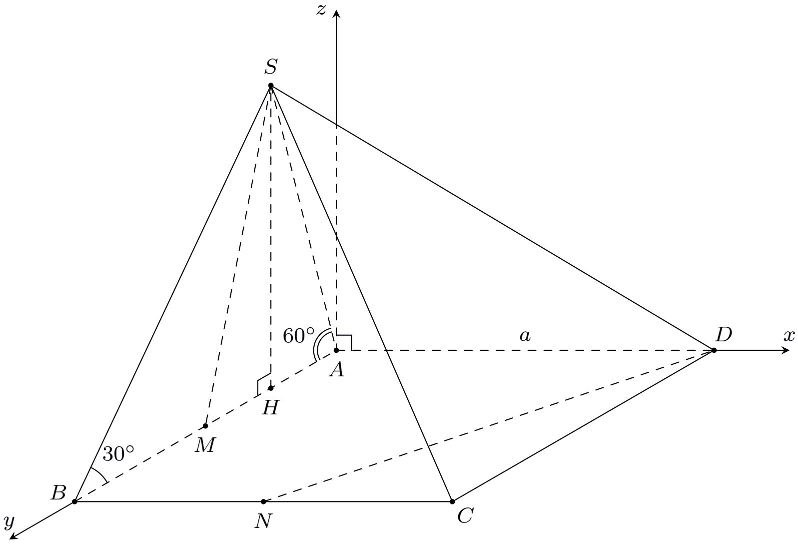
(A) $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$.
(B) $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$.
(C) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.
(D) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

**Lời giải.**

Trong $(SAB)$ kẻ $SH \perp AB$ tại $H$.

Ta có $\begin{cases}(SAB) \perp (ABCD) \\ (SAB) \cap (ABCD) = AB \\ SH \subset (SAB),\ SH \perp AB\end{cases} \Rightarrow SH \perp (ABCD)$.

Kẻ tia $Az \parallel SH$ và chọn hệ trục tọa độ $Axyz$ như hình vẽ sau đây.




Trong tam giác $SAB$ vuông tại $S$, $SB = AB \cdot \cos\widehat{SBA} = a \cdot \cos 30^\circ = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Trong tam giác $SBH$ vuông tại $H$, $BH = SB \cdot \cos\widehat{SBH} = \dfrac{3a}{4}$ và $SH = BH \cdot \sin\widehat{SBA} = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

$AH = AB - BH = a - \dfrac{3a}{4} = \dfrac{a}{4} \Rightarrow H\left(0; \dfrac{a}{4}; 0\right) \Rightarrow S\left(0; \dfrac{a}{4}; \dfrac{a\sqrt{3}}{4}\right)$.

Có các điểm $M\left(0; \dfrac{a}{2}; 0\right)$, $D(a; 0; 0)$, $N\left(\dfrac{a}{2}; a; 0\right)$.

Ta có $\overrightarrow{SM} = \left(0; \dfrac{a}{4}; -\dfrac{a\sqrt{3}}{4}\right)$, $\overrightarrow{DN} = \left(-\dfrac{a}{2}; a; 0\right)$.

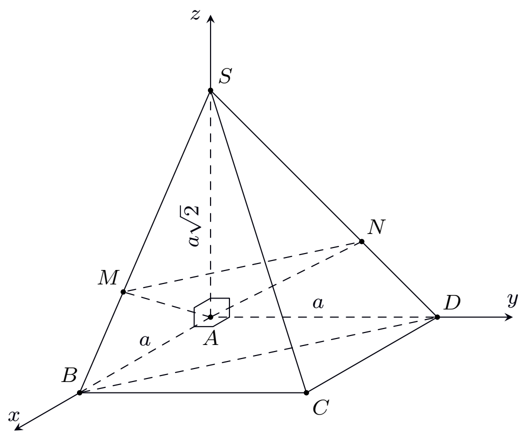
Suy ra $\cos(SM, DN) = \dfrac{\left|\overrightarrow{SM} \cdot \overrightarrow{DN}\right|}{SM \cdot DN} = \dfrac{\dfrac{a^2}{4}}{\dfrac{a}{2} \cdot \dfrac{a\sqrt{5}}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

Chọn đáp án (B) ............................................................................................ □

**CÂU 16.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $a$ cạnh bên $SA$ vuông góc với mặt phẳng đáy, $SA = a\sqrt{2}$. Gọi $M$, $N$ lần lượt là hình chiếu vuông góc của điểm $A$ trên các cạnh $SB$, $SD$. Góc giữa mặt phẳng $(AMN)$ và đường thẳng $SB$ bằng

(A) $45^\circ$.
(B) $90^\circ$.
(C) $120^\circ$.
(D) $60^\circ$.

**Lời giải.**



Ta có $BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AM \Rightarrow AM \perp (SBC) \Rightarrow AM \perp SC$.
Tương tự ta cũng có $AN \perp SC \Rightarrow (AMN) \perp SC$.
Gọi $\varphi$ là góc giữa đường thẳng $SB$ và $(AMN)$.
Chọn $a = 1$ (đơn vị độ dài) và hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho $O \equiv A(0;0;0)$, $B(1;0;0)$, $D(0;1;0)$, $S(0;0;\sqrt{2})$, $C(1;1;0)$.
Có các véc-tơ $\overrightarrow{SC} = (1;1;-\sqrt{2})$, $\overrightarrow{SB} = (1;0;-\sqrt{2})$.
Do $(AMN) \perp SC$ nên mặt phẳng $(AMN)$ có một véc-tơ pháp tuyến là $\overrightarrow{SC}$.

Cho nên $\sin\varphi = \left|\cos\left(\overrightarrow{SC}, \overrightarrow{SB}\right)\right| = \dfrac{\left|1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + (-\sqrt{2}) \cdot (-\sqrt{2})\right|}{2 \cdot \sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \varphi = 60^\circ$.

Vậy góc giữa mặt phẳng $(AMN)$ và đường thẳng $SB$ bằng $60^\circ$.

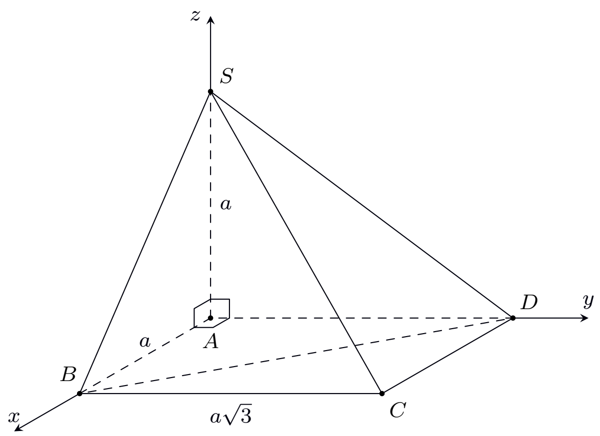
Chọn đáp án D ..........□

**CÂU 17.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a$, $BC = a\sqrt{3}$, $SA = a$ và $SA$ vuông góc với đáy $ABCD$. Tính $\sin\alpha$ với $\alpha$ là góc tạo bởi giữa đường thẳng $BD$ và mặt phẳng $(SBC)$.

**A** $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{7}}{8}$. **B** $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **C** $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$. **D** $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{5}$.

**Lời giải.**

Đặt hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ.




Khi đó, ta có $A(0;0;0)$, $B(a;0;0)$, $D\left(0;a\sqrt{3};0\right)$, $S(0;0;a)$.
Nên đường thẳng $BD$ có một véc-tơ chỉ phương là $\vec{u} = \left(-1;\sqrt{3};0\right)$.

Ta có $\overrightarrow{BD} = \left(-a;a\sqrt{3};0\right) = a\left(-1;\sqrt{3};0\right)$,

$\overrightarrow{SB} = (a;0;-a)$,

$\overrightarrow{BC} = \left(0;a\sqrt{3};0\right)$,

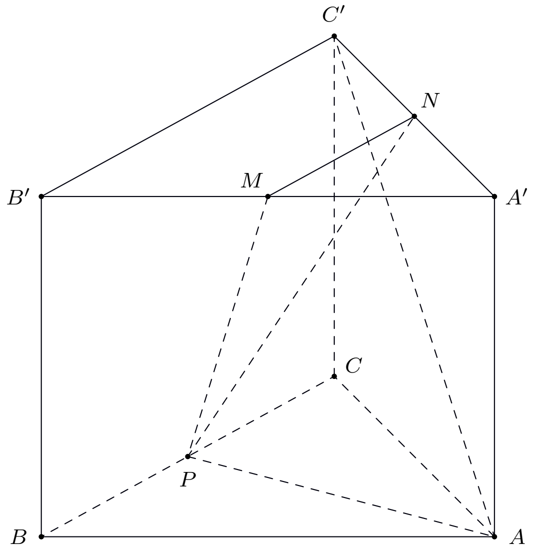
$\Rightarrow \left[\overrightarrow{SB}, \overrightarrow{BC}\right] = \left(a^2\sqrt{3};0;a^2\sqrt{3}\right) = a^2\sqrt{3}\,(1;0;1)$.

Như vậy, mặt phẳng $(SBC)$ có một véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n} = (1;0;1)$.
Do đó, $\alpha$ là góc tạo bởi giữa đường thẳng $BD$ và mặt phẳng $(SBC)$

thì $\sin\alpha = \dfrac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{n}|} = \dfrac{\left|(-1) \cdot 1 + \sqrt{3} \cdot 0 + 0 \cdot 1\right|}{\sqrt{(-1)^2 + \sqrt{3}^2 + 0^2} \cdot \sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

Chọn đáp án C ..........□

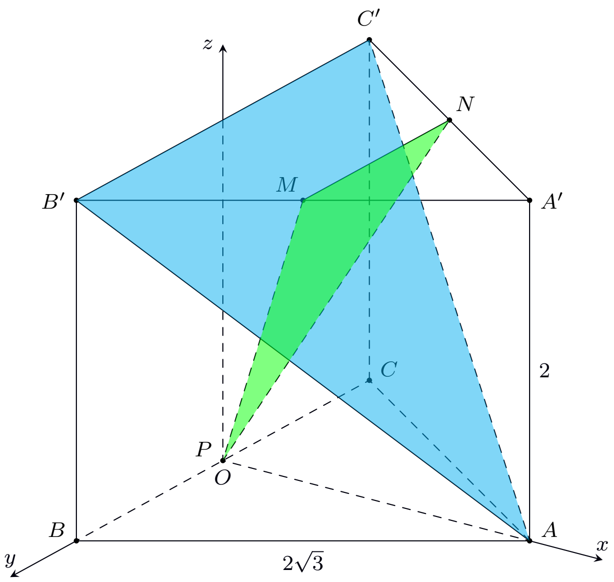
**CÂU 18.** Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = 2\sqrt{3}$ và $AA' = 2$. Gọi $M$, $N$, $P$ lần lượt là trung điểm các cạnh $A'B'$, $A'C'$ và $BC$ (tham khảo hình vẽ bên). Cô-sin của góc tạo bởi hai mặt phẳng $(AB'C')$ và $(MNP)$ bằng




Ⓐ $\dfrac{17\sqrt{13}}{65}$. Ⓑ $\dfrac{18\sqrt{13}}{65}$. Ⓒ $\dfrac{6\sqrt{13}}{65}$. Ⓓ $\dfrac{\sqrt{13}}{65}$.

**Lời giải.**

Gắn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ.




Ta có $P(0;0;0), A(3;0;0), B(0;\sqrt{3};0), C(0;-\sqrt{3};0), A'(3;0;2), B'(0;\sqrt{3};2), C'(0;-\sqrt{3};2)$,

$M\left(\dfrac{3}{2};\dfrac{\sqrt{3}}{2};2\right), N\left(\dfrac{3}{2};-\dfrac{\sqrt{3}}{2};2\right)$.

$\Rightarrow \overrightarrow{AB'}=(-3;\sqrt{3};2), \overrightarrow{AC'}=(-3;-\sqrt{3};2), \overrightarrow{PM}=\left(\dfrac{3}{2};\dfrac{\sqrt{3}}{2};2\right), \overrightarrow{PN}=\left(\dfrac{3}{2};-\dfrac{\sqrt{3}}{2};2\right)$.

$\vec{n}_1=\left[\overrightarrow{AB'},\overrightarrow{AC'}\right]=2\sqrt{3}(2;0;3), \vec{n}_2=\left[\overrightarrow{PM},\overrightarrow{PN}\right]=\dfrac{\sqrt{3}}{2}(4;0;-3)$

Ta có véc-tơ pháp tuyến của $(AB'C')$ là $\vec{n}_1$ và véc-tơ pháp tuyến của $(MNP)$ là $\vec{n}_2$.

Gọi $\varphi$ là góc giữa hai mặt phẳng $(AB'C')$ và $(MNP)$.

Suy ra $\cos\varphi=|\cos(\vec{n}_1,\vec{n}_2)|=\dfrac{|8-9|}{\sqrt{13}\sqrt{25}}=\dfrac{\sqrt{13}}{65}$.

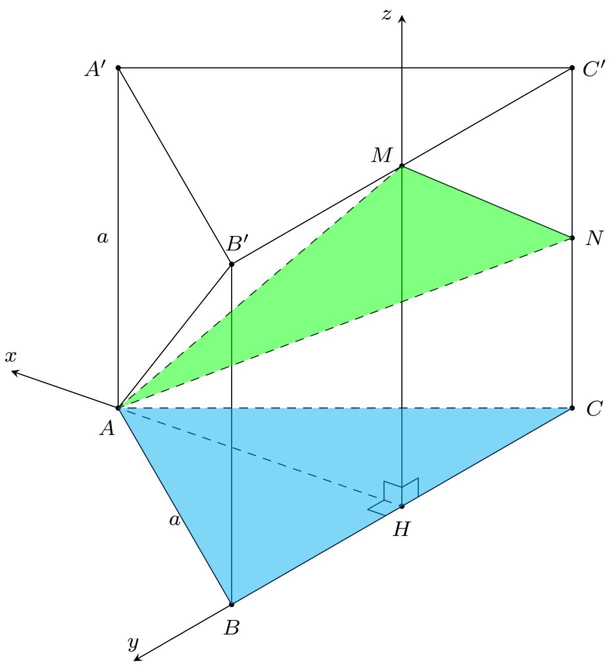
Chọn đáp án D ........................................................................................ □

**CÂU 19.** Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $AB=AC=a$, góc $\widehat{BAC}=120^\circ$, $AA'=a$. Gọi $M$, $N$ lần lượt là trung điểm của $B'C'$ và $CC'$. Số đo góc giữa mặt phẳng $(AMN)$ và mặt phẳng $(ABC)$ bằng

Ⓐ $60^\circ$. Ⓑ $30^\circ$. Ⓒ $\arcsin\dfrac{\sqrt{3}}{4}$. Ⓓ $\arccos\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

**Lời giải.**

Gọi $H$ là trung điểm $BC$, $BC = a\sqrt{3}$, $AH = \dfrac{a}{2}$.




Chọn hệ trục tọa độ theo hình vẽ.

Ta có $H(0;0;0), A\left(\dfrac{a}{2};0;0\right), B\left(0;\dfrac{a\sqrt{3}}{2};0\right), C\left(0;-\dfrac{a\sqrt{3}}{2};0\right), M(0;0;a), N\left(0;-\dfrac{a\sqrt{3}}{2};\dfrac{a}{2}\right)$.

$$\Rightarrow \overrightarrow{AM} = \left(-\dfrac{a}{2};0;a\right), \overrightarrow{AN} = \left(0;-\dfrac{a\sqrt{3}}{2};\dfrac{a}{2}\right).$$

$$\vec{n} = \left[\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AN}\right] = \dfrac{a^2}{4}(2\sqrt{3};-1;\sqrt{3}).$$

Gọi $\varphi$ là góc giữa mặt phẳng $(AMN)$ và mặt phẳng $(ABC)$.
Mặt phẳng $(AMN)$ có một véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}$.
Mặt phẳng $(ABC)$ có một véc-tơ pháp tuyến $\overrightarrow{HM} = (0;0;1)$.

Từ đó $\cos\varphi = \dfrac{\left|\vec{n}\cdot\overrightarrow{HM}\right|}{|\vec{n}|\cdot\left|\overrightarrow{HM}\right|} = \dfrac{\sqrt{3}}{4\cdot 1} = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

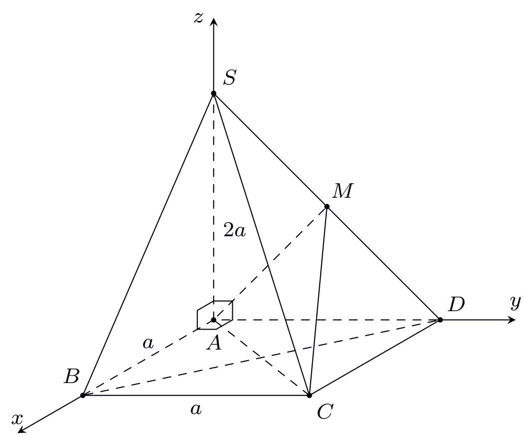
Chọn đáp án D ........................................................ □

**CÂU 20.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $a$ cạnh bên $SA = 2a$ và vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi $M$ là trung điểm cạnh $SD$. Tan của góc tạo bởi hai mặt phẳng $(AMC)$ và $(SBC)$ bằng

**A** $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$. **B** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **C** $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$. **D** $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

**Lời giải.**

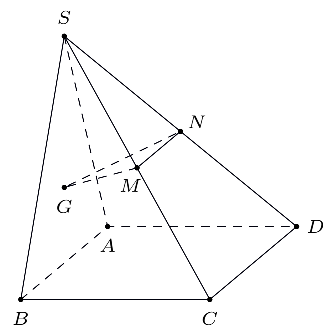
Chọn hệ trục toạ độ theo hình vẽ.




Ta có $A(0;0;0)$, $B(a;0;0)$, $C(a;a;0)$, $D(0;a;0)$, $S(0;0;2a)$.

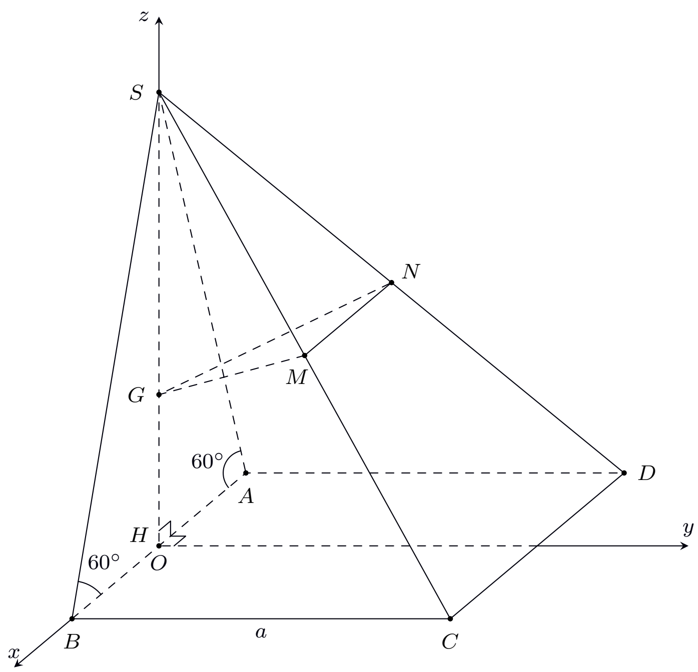
Ta có $M$ là trung điểm $SD \Rightarrow M\left(0;\dfrac{a}{2};a\right)$.
$\overrightarrow{AM}=\left(0;\dfrac{a}{2};a\right)$, $\overrightarrow{AC}=(a;a;0)$.
$\left[\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AC}\right]=\dfrac{a^2}{2}(-2;1;-1)\Rightarrow(AMC)$ có một véc-tơ pháp tuyến $\overrightarrow{n}=(-2;2;-1)$.
$\overrightarrow{SB}=(a;0;-2a)$, $\overrightarrow{SC}=(a;a;-2a)$.
$\left[\overrightarrow{SB},\overrightarrow{SC}\right]=a^2(2;0;1)\Rightarrow(SBC)$ có một véc-tơ pháp tuyến $\overrightarrow{k}=(2;0;1)$.
Gọi $\alpha$ là góc giữa hai mặt phẳng $(AMC)$ và $(SBC)$.
Ta có $\cos\alpha=\dfrac{\left|\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{k}\right|}{|\overrightarrow{n}|\cdot\left|\overrightarrow{k}\right|}=\dfrac{5}{3\cdot\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$.
Do $\tan\alpha>0$ nên $\tan\alpha=\sqrt{\dfrac{1}{\cos^2\alpha}-1}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.
Chọn đáp án C ..........

**CÂU 21.**
Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $a$ mặt bên $SAB$ là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi $G$ là trọng tâm của tam giác $SAB$ và $M,N$ lần lượt là trung điểm của $SC,SD$ (tham khảo hình vẽ bên). Tính cô-sin của góc giữa hai mặt phẳng $(GMN)$ và $(ABCD)$.




Ⓐ $\dfrac{2\sqrt{39}}{39}$. Ⓑ $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$. Ⓒ $\dfrac{2\sqrt{39}}{13}$. Ⓓ $\dfrac{\sqrt{13}}{13}$.

**Lời giải.**
Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ.




Khi đó $S\left(0;0;\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)$, $A\left(-\dfrac{a}{2};0;0\right)$, $B\left(\dfrac{a}{2};0;0\right)$, $C\left(\dfrac{a}{2};a;0\right)$, $D\left(-\dfrac{a}{2};a;0\right)$.
Suy ra $G\left(0;0;\dfrac{a\sqrt{3}}{6}\right)$, $M\left(\dfrac{a}{4};\dfrac{a}{2};\dfrac{a\sqrt{3}}{4}\right)$, $N\left(-\dfrac{a}{4};\dfrac{a}{2};\dfrac{a\sqrt{3}}{4}\right)$.
Ta có mặt phẳng $(ABCD)$ có vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{k}=(0;0;1)$.
Mặt phẳng $(GMN)$ có cặp véc-tơ chỉ phương $\begin{cases}\overrightarrow{GM}=\dfrac{a}{12}\left(3;6;\sqrt{3}\right),\\ \overrightarrow{GN}=\dfrac{a}{12}\left(-3;6;\sqrt{3}\right).\end{cases}$
Suy ra véc-tơ pháp tuyến $\overrightarrow{n}=\left[\overrightarrow{GM};\overrightarrow{GN}\right]=\dfrac{a^2}{144}\left(\begin{vmatrix}6&\sqrt{3}\\6&\sqrt{3}\end{vmatrix};\begin{vmatrix}\sqrt{3}&3\\\sqrt{3}&-3\end{vmatrix};\begin{vmatrix}3&6\\-3&6\end{vmatrix}\right)=\dfrac{a^2}{24}\left(0;-\sqrt{3};6\right)$.

Gọi $\alpha$ là góc giữa hai mặt phẳng $(GMN)$ và $(ABCD)$.

Ta có $\cos\alpha = \dfrac{\left|\vec{n}\cdot\vec{k}\right|}{|\vec{n}|\cdot\left|\vec{k}\right|} = \dfrac{6}{\sqrt{39}} = \dfrac{2\sqrt{39}}{13}$.

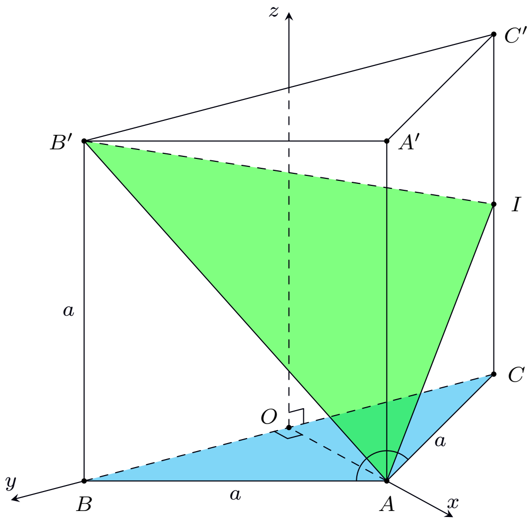
Chọn đáp án (C) ........................................................................................ □

**CÂU 22.** Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy $ABC$ là tam giác cân với $AB = AC = a$ và góc $\widehat{BAC} = 120^\circ$ và cạnh bên $BB' = a$. Gọi $I$ là trung điểm của $CC'$. Tính cô-sin góc giữa hai mặt phẳng $(ABC)$ và $(AB'I)$.

(A) $\dfrac{\sqrt{3}}{10}$. (B) $\dfrac{\sqrt{30}}{10}$. (C) $\dfrac{\sqrt{30}}{30}$. (D) $\dfrac{\sqrt{10}}{30}$.

**Lời giải.**

Gọi $O$ là trung điểm của $BC$.
Gắn hệ trục tọa độ như hình vẽ.




Ta có $OB = AB\sin 60^\circ = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ ; $OA = AB\cos 60^\circ = \dfrac{a}{2}$.

Suy ra $A\left(\dfrac{a}{2};0;0\right)$, $B\left(0;\dfrac{a\sqrt{3}}{2};0\right)$, $C\left(0;-\dfrac{a\sqrt{3}}{2};0\right)$, $I\left(0;-\dfrac{\sqrt{3}}{2};\dfrac{a}{2}\right)$, $B'\left(0;\dfrac{a\sqrt{3}}{2};a\right)$.

Mặt phẳng $(ABC)$ có cặp véc-tơ chỉ phương $\begin{cases}\overrightarrow{AB} = \left(-\dfrac{a}{2};\dfrac{a\sqrt{3}}{2};\dfrac{a}{2}\right),\\ \overrightarrow{AC} = \left(-\dfrac{a}{2};-\dfrac{a\sqrt{3}}{2};\dfrac{a}{2}\right).\end{cases}$

Suy ra véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}_1 = \left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right] = \left(\begin{vmatrix}\dfrac{a\sqrt{3}}{2} & 0\\ -\dfrac{a\sqrt{3}}{2} & 0\end{vmatrix};\begin{vmatrix}0 & -\dfrac{a}{2}\\ 0 & -\dfrac{a}{2}\end{vmatrix};\begin{vmatrix}-\dfrac{a}{2} & \dfrac{a\sqrt{3}}{2}\\ -\dfrac{a}{2} & -\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\end{vmatrix}\right)$

$= \left(0;0;\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}\right)$.

Mặt phẳng $AB'I$ có cặp véc-tơ chỉ phương $\begin{cases}\overrightarrow{AB'} = \left(-\dfrac{a}{2};\dfrac{a\sqrt{3}}{2};a\right),\\ \overrightarrow{AI} = \left(-\dfrac{a}{2};-\dfrac{a\sqrt{3}}{2};\dfrac{a}{2}\right).\end{cases}$

Suy ra véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}_2 = \left[\overrightarrow{AB'},\overrightarrow{AI}\right] = \left(\begin{vmatrix}\dfrac{a\sqrt{3}}{2} & a\\ -\dfrac{a\sqrt{3}}{2} & \dfrac{a}{2}\end{vmatrix};\begin{vmatrix}a & -\dfrac{a}{2}\\ \dfrac{a}{2} & -\dfrac{a}{2}\end{vmatrix};\begin{vmatrix}-\dfrac{a}{2} & \dfrac{a\sqrt{3}}{2}\\ -\dfrac{a}{2} & -\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\end{vmatrix}\right)$

$= \left(\dfrac{3a^2\sqrt{3}}{4};-\dfrac{a^2}{4};\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}\right)$.

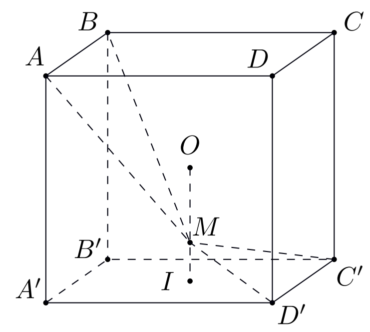
Gọi $\alpha$ là góc giữa hai mặt phẳng $(ABC)$ và $(AB'I)$.

Ta có $\cos\alpha = \dfrac{|\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2|}{|\vec{n}_1|\cdot|\vec{n}_2|} = \dfrac{\dfrac{3}{4}}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{10}}{2}} = \sqrt{\dfrac{3}{10}} = \dfrac{\sqrt{30}}{10}$.

Chọn đáp án (B) .......................................................................................................................................... □

**Phần III. Học sinh điền kết quả vào ô trống.**

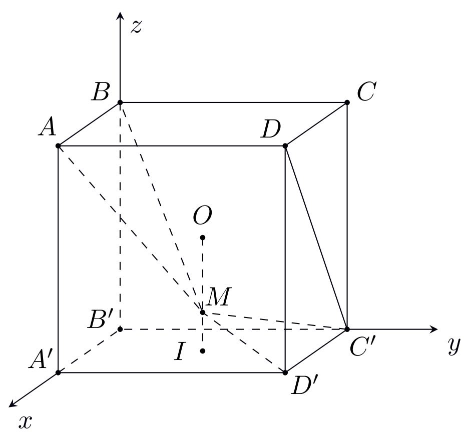
**CÂU 23.** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có tâm $O$. Gọi $I$ là tâm của hình vuông $A'B'C'D'$ và điểm $M$ thuộc đoạn $OI$ sao cho $MO = 2MI$ (tham khảo hình vẽ).




Tính sin của góc tạo bởi hai mặt phẳng $(MC'D')$ và $(MAB)$ (kết quả viết ở dạng thập phân làm tròn đến hàng phần trăm).

Đáp án: | 0 | , | 6 | 5 |

**Lời giải.**




Gắn hệ trục tọa độ như hình vẽ, cạnh hình lập phương là 6, ta được tọa độ các điểm như sau $C'(0;6;0)$, $D'(6;6;0)$, $A(6;0;6)$, $B(0;0;6)$, $O\,(3;3;3)$, $I\,(3;3;0)$ và $M\,(3;3;1)$.
Lúc đó $\overrightarrow{MC'} = (-3;3;-1)$, $\overrightarrow{MD'} = (3;3;-1)$, $\overrightarrow{MA} = (3;-3;5)$ và $\overrightarrow{MB} = (-3;-3;5)$.
Ta có $\left[\overrightarrow{MC'}, \overrightarrow{MD'}\right] = -6\,(0;1;3)$. Suy ra mặt phẳng $(MC'D')$ có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_{(MC'D')} = (0;1;3)$.
Lại có $\left[\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right] = -6\,(0;5;3)$. Suy ra mặt phẳng $(MAB)$ có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_{(MAB)} = (0;5;3)$.

Suy ra $\cos\left(\widehat{(MAB),(MC'D')}\right) = \dfrac{|5\cdot 1 + 3\cdot 3|}{\sqrt{5^2+3^2}\cdot\sqrt{1^2+3^2}} = \dfrac{7\sqrt{85}}{85}$.

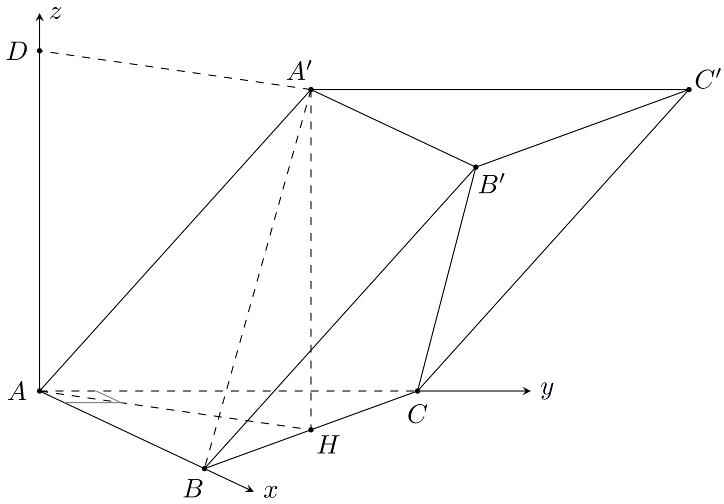
Từ đó có $\sin\left(\widehat{(MAB),(MC'D')}\right) = \sqrt{1-\left(\dfrac{7\sqrt{85}}{85}\right)^2} = \dfrac{6\sqrt{85}}{85}$.

Đáp án: 0,65 .......................................................................................................................................... □

**CÂU 24.** Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy $ABC$ là tam giác vuông tại $A$, $AB = a$, $AC = a\sqrt{3}$. Hình chiếu vuông góc của $A'$ lên mặt phẳng $(ABC)$ là trung điểm $H$ của $BC$, $A'H = a\sqrt{5}$. Gọi $\varphi$ là góc giữa hai đường thẳng $A'B$ và $B'C$. Tính $\cos\varphi$. Kết quả viết ở dạng thập phân làm tròn đến hàng phần trăm.

Đáp án: | 0 | , | 5 | 1 |

**Lời giải.**




Ta chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ với $O \equiv A$ như hình vẽ, chọn $a = 1$ đơn vị, khi đó ta có tọa độ điểm $B(1;0;0)$, $C(0;\sqrt{3};0)$, suy ra trung điểm của $BC$ là $H\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{\sqrt{3}}{2};0\right)$.

Vì $H$ là hình chiếu của $A'$ nên suy ra tọa độ của $A'\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{\sqrt{3}}{2};\sqrt{5}\right)$.

Ta tìm tọa độ $B'$.

Gọi tọa độ $B'(x;y;z)$ khi đó ta có $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{OB}$ nên tọa độ $B'\left(\dfrac{3}{2};\dfrac{\sqrt{3}}{2};\sqrt{5}\right)$.

Ta cũng có $\overrightarrow{B'C} = \left(-\dfrac{3}{2};\dfrac{\sqrt{3}}{2};-\sqrt{5}\right)$ và $\overrightarrow{A'B} = \left(\dfrac{1}{2};-\dfrac{\sqrt{3}}{2};-\sqrt{5}\right)$.

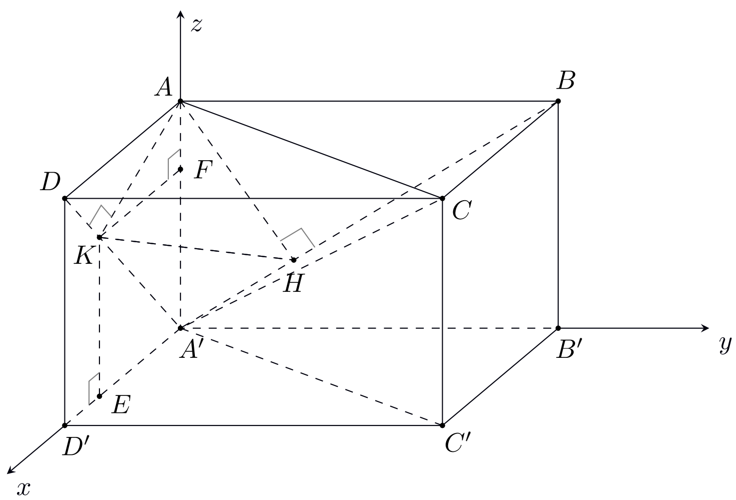
Từ đó ta có $\cos\varphi = \dfrac{\left|\overrightarrow{A'B}\cdot\overrightarrow{B'C}\right|}{\left|\overrightarrow{A'B}\right|\cdot\left|\overrightarrow{B'C}\right|} = \dfrac{7}{2\cdot\sqrt{6}\cdot\sqrt{8}} = \dfrac{7\sqrt{3}}{24}$.

Đáp án: 0,51 ........................................................................ □

**CÂU 25.** Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$, có $AB = a$, $AD = a\sqrt{2}$, góc giữa $A'C$ và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng $30°$. Gọi $H$ là hình chiếu vuông góc của $A$ trên $A'B$ và $K$ là hình chiếu vuông góc của $A$ trên $A'D$. Góc giữa hai mặt phẳng $(AHK)$ và $(ABB'A')$ bằng bao nhiêu độ?

Đáp án: | 4 | 5 | | |

**Lời giải.**




Do $ABCD.A'B'C'D'$ là hình hộp chữ nhật nên $A'C'$ là hình chiếu vuông góc của $A'C$ trên $(ABCD)$. Suy ra

$$(A'C,(ABCD)) = (A'C,A'C') = \widehat{CA'C'} = 30°.$$

Ta có $AC = \sqrt{AB^2 + AD^2} = a\sqrt{3}$ và $\tan\widehat{CA'C'} = \dfrac{CC'}{A'C'} \Rightarrow CC' = a$.

Kết hợp với giả thiết ta được $ABB'A'$ là hình vuông và có $H$ là tâm.

Gọi $E$, $F$ lần lượt là hình chiếu vuông góc của $K$ trên $A'D'$ và $A'A$. Ta có

$$\frac{1}{AK^2} = \frac{1}{A'A^2} + \frac{1}{AD^2} \Rightarrow AK = \frac{a\sqrt{6}}{3}, A'K = \sqrt{A'A^2 - AK^2} = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

và

$$\frac{1}{KF^2} = \frac{1}{KA^2} + \frac{1}{A'K^2} \Rightarrow KF = \frac{a\sqrt{2}}{3}, KE = \sqrt{A'K^2 - KF^2} \Rightarrow KE = \frac{a}{3}.$$

Ta chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ thỏa mãn $O \equiv A'$ còn $D'$, $B'$, $A$ theo thứ tự thuộc các tia $Ox$, $Oy$, $Oz$.
Khi đó ta có tọa độ các điểm lần lượt là $A(0;0;a)$, $B'(0;a;0)$, $H\left(0;\frac{a}{2};\frac{a}{2}\right)$, $K\left(\frac{a\sqrt{2}}{3};0;\frac{a}{3}\right)$, $E\left(\frac{a\sqrt{2}}{3};0;0\right)$, $F\left(0;0;\frac{a\sqrt{2}}{3}\right)$.
Mặt phẳng $(ABB'A')$ là mặt phẳng $(Oyz)$ nên có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_1 = (1;0;0)$.
Ta có $\left[\overrightarrow{AK}, \overrightarrow{AH}\right] = \frac{a^2}{6}\vec{n}_2$, với $\vec{n}_2(2;\sqrt{2};\sqrt{2})$.
Mặt phẳng $(AKH)$ có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_2 = (2;\sqrt{2};\sqrt{2})$.
Gọi $\alpha$ là góc giữa hai mặt phẳng $(AHK)$ và $(ABB'A')$. Ta có

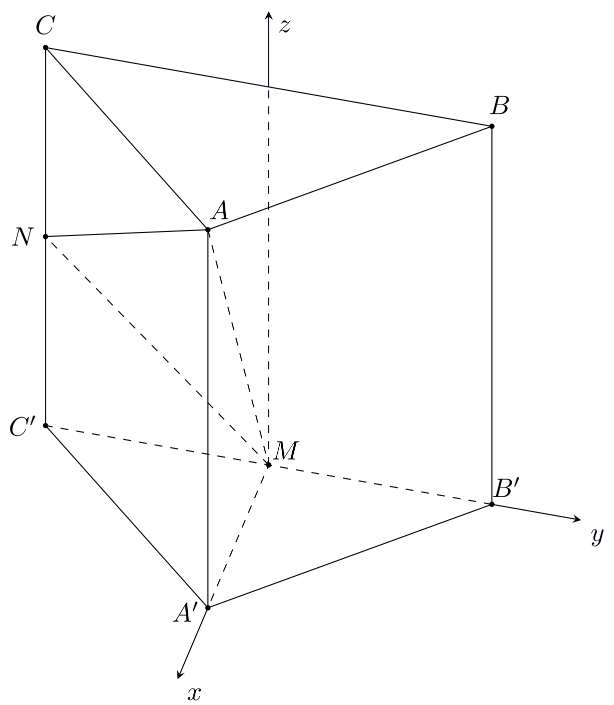
$$\cos\alpha = \left|\cos\left(\vec{n}_1, \vec{n}_2\right)\right| = \frac{\left|1\cdot 2 + 0\cdot\sqrt{2} + 0\cdot\sqrt{2}\right|}{\sqrt{1^2+0^2+0^2}\cdot\sqrt{2^2+\sqrt{2}^2+\sqrt{2}^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \alpha = 45^\circ.$$

Đáp án: $\boxed{45}$ ........................................................................................ □

**CÂU 26.** Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $AB = AC = a$, $BAC = 120^\circ$. Gọi $M$, $N$ lần lượt là trung điểm của $B'C'$ và $CC'$. Biết thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng $\frac{\sqrt{3}a^3}{4}$. Gọi $\alpha$ là góc giữa mặt phẳng $(AMN)$ và mặt phẳng $(ABC)$, tính $\cos\alpha$. Kết quả viết ở dạng thập phân làm tròn đến hàng phần trăm.

Đáp án: | 0 | , | 4 | 3 |

**Lời giải.**




Lấy $H$ là trung điểm của $BC$.
Ta có $V_{ABC.A'BC'} = CC' \cdot S_{\triangle ABC} = \frac{\sqrt{3}a^3}{4} \Rightarrow CC' = a$ vì $S_{\triangle ABC} = \frac{\sqrt{3}a^2}{4}$.
Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ. Ta có $M \equiv O$, $M(0;0;0)$, $A'\left(\frac{a}{2};0;0\right)$, $B'\left(0;\frac{\sqrt{3}a}{2};0\right)$, $C'\left(0;-\frac{\sqrt{3}a}{2};0\right)$, $A\left(\frac{a}{2};0;a\right)$, $N\left(0;-\frac{\sqrt{3}a}{2};\frac{a}{2}\right)$.
Ta có $(ABC) \perp Oz$ nên $(ABC)$ có một vectơ pháp tuyến là $\vec{k} = (0;0;1)$.
Lại có $\overrightarrow{MA} = \left(\frac{a}{2};0;a\right)$, $\overrightarrow{MN} = \left(0;-\frac{\sqrt{3}a}{2};\frac{a}{2}\right)$.

Gọi $\vec{v_1} = \dfrac{2}{a}\overrightarrow{MA} \Rightarrow \vec{v_1} = (1;0;2)$, $\vec{v}_2 = \dfrac{2}{a}\overrightarrow{MN} \Rightarrow \vec{v}_2 = (0;-\sqrt{3};1)$. Khi đó mặt phẳng $(AMN)$ song song hoặc chứa giá của hai vectơ không cùng phương là $\vec{v_1}$ và $\vec{v_2}$ nên có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = [\vec{v_1}, \vec{v_2}] = (2\sqrt{3};-1;-\sqrt{3})$.

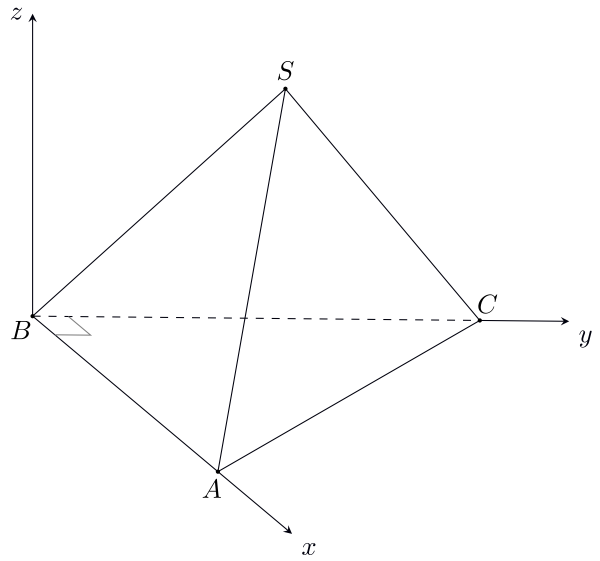
Vậy $\cos\alpha = \left|\cos(\vec{k}, \vec{n})\right| = \dfrac{\left|\vec{k}\cdot\vec{n}\right|}{\left|\vec{k}\right|\left|\vec{n}\right|} = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

Đáp án: $\boxed{0{,}43}$ ............................................................ □

**CÂU 27.** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy $ABC$ là tam giác vuông cân tại $B$, $AC = 2a$, tam giác $SAB$ và tam giác $SCB$ lần lượt vuông tại $A$, $C$. Khoảng cách từ $S$ đến mặt phẳng $(ABC)$ bằng $2a$. Tính côsin của góc giữa hai mặt phẳng $(SAB)$ và $(SCB)$. Kết quả viết ở dạng thập phân làm tròn đến hàng phần trăm.

Đáp án: | 0 | , | 3 | 3 |

**Lời giải.**




Chọn hệ trục tọa độ sao cho $B(0;0;0)$, $A(a\sqrt{2};0;0)$, $C(0;a\sqrt{2};0)$, $S(x;y;z)$.
Ta có phương trình mặt phẳng $(ABC)$ là $z = 0$, $\overrightarrow{AS} = (x - a\sqrt{2};y;z)$, $\overrightarrow{CS} = (x;y - a\sqrt{2};z)$.
Do $\overrightarrow{AS}\cdot\overrightarrow{AB} = 0 \Rightarrow (x - a\sqrt{2})a\sqrt{2} = 0 \Rightarrow x = a\sqrt{2}$.
Mặt khác $\mathrm{d}(S,(ABC)) = 2a \Rightarrow z = 2a (z > 0)$.
Lại có $\overrightarrow{CS}\cdot\overrightarrow{CB} = 0 \Rightarrow (y - a\sqrt{2})a\sqrt{2} = 0 \Rightarrow y = a\sqrt{2}$.
Vậy $S\left(a\sqrt{2};a\sqrt{2};2a\right)$.
Ta có $\overrightarrow{AS} = \left(0;a\sqrt{2};2a\right)$, $\overrightarrow{CS} = \left(a\sqrt{2};0;2a\right)$, $\overrightarrow{BS} = \left(a\sqrt{2};a\sqrt{2};2a\right)$. Lúc đó
$\left[\overrightarrow{AS}, \overrightarrow{BS}\right] = \left(0;2a^2\sqrt{2};-a^2\sqrt{a}\right) = 2a^2\left(0;\sqrt{2};1\right)$,
$\left[\overrightarrow{CS}, \overrightarrow{BS}\right] = \left(-2a^2\sqrt{2};0;2a^2\right) = 2a^2\left(-\sqrt{2};0;1\right)$.
Vậy $(SBC)$ có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = \left(-\sqrt{2};0;1\right)$ và $(SAB)$ có một vectơ pháp tuyến $\vec{m} = \left(0;\sqrt{2};-1\right)$. Suy ra

$$\cos\varphi = \frac{|\vec{n}\cdot\vec{m}|}{|\vec{n}|\cdot|\vec{m}|} = \frac{\left|-\sqrt{2}\cdot 0 + 0\cdot\sqrt{2} + 1\cdot(-1)\right|}{\sqrt{\left(-\sqrt{2}\right)^2 + 0^2 + 1^2}\cdot\sqrt{0^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2 + (-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = \frac{1}{3}.$$

Đáp án: $\boxed{0{,}33}$ ............................................................ □

**CÂU 28.** Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác cân đỉnh $A$. Biết $BC = a\sqrt{3}$ và $\widehat{ABC} = 30^\circ$, cạnh bên $AA' = a$. Gọi $M$ là điểm thỏa mãn $2\overrightarrow{CM} = 3\overrightarrow{CC'}$. Gọi $\alpha$ là góc tạo bởi hai mặt phẳng $(ABC)$ và $(AB'M)$, khi đó tính $\sin\alpha$. Kết quả viết ở dạng thập phân làm tròn đến hàng phần trăm.

Đáp án: | 0 | , | 9 | 3 |

**Lời giải.**
Gọi $O$ là trung điểm $BC$. Lúc đó

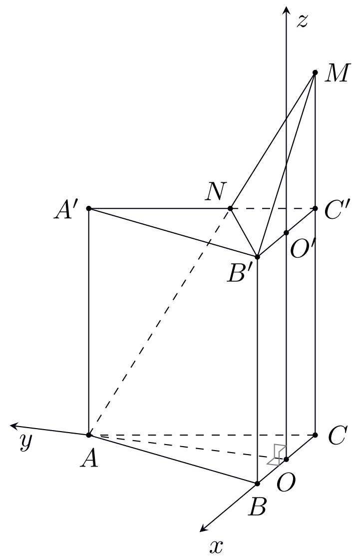
$$BO = AB\cdot\cos 30^\circ \Leftrightarrow AB = \frac{BO}{\cos 30^\circ} = \frac{a\sqrt{3}}{2\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}} = a = AC$$

và

$$AO = AB \cdot \sin 30^\circ = \frac{a}{2}.$$

Theo đề bài ta có

$$2\overrightarrow{CM} = 3\overrightarrow{CC'} \Leftrightarrow \overrightarrow{CM} = \frac{3}{2}\overrightarrow{CC'} \Leftrightarrow \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{C'M} = \frac{3}{2}\overrightarrow{CC'} \Leftrightarrow \overrightarrow{C'M} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CC'} \Rightarrow C'M = \frac{a}{2}.$$




Coi $a = 1$. Gắn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ với $O(0;0;0)$, $A\left(0;\frac{1}{2};0\right)$, $B\left(\frac{\sqrt{3}}{2};0;0\right)$, $C\left(-\frac{\sqrt{3}}{2};0;0\right)$, $B'\left(\frac{\sqrt{3}}{2};0;1\right)$, $C'\left(-\frac{\sqrt{3}}{2};0;\frac{3}{2}\right)$.

Khi đó $(ABC) \equiv (Oxy)\colon z = 0 \Rightarrow (ABC)$ có một vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{k} = (0;0;1)$.

Ta có $\overrightarrow{AB'} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2};1\right)$, $\overrightarrow{AM} = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$ suy ra

$$\overrightarrow{n}_{(AB'M)} = 4\left[\overrightarrow{AB'}, \overrightarrow{AM}\right] = \left(1;5\sqrt{3};2\sqrt{3}\right).$$

Gọi $\alpha$ là góc giữa hai mặt phẳng $(ABC)$ và $(AB'M)$.
Ta có

$$\cos\alpha = \frac{\left|\overrightarrow{k} \cdot \overrightarrow{n}_{(AB'M)}\right|}{\left|\overrightarrow{k}\right| \cdot \left|\overrightarrow{n}_{(AB'M)}\right|} = \frac{|2\sqrt{3}|}{1 \cdot 2\sqrt{22}} = \sqrt{\frac{3}{22}}.$$

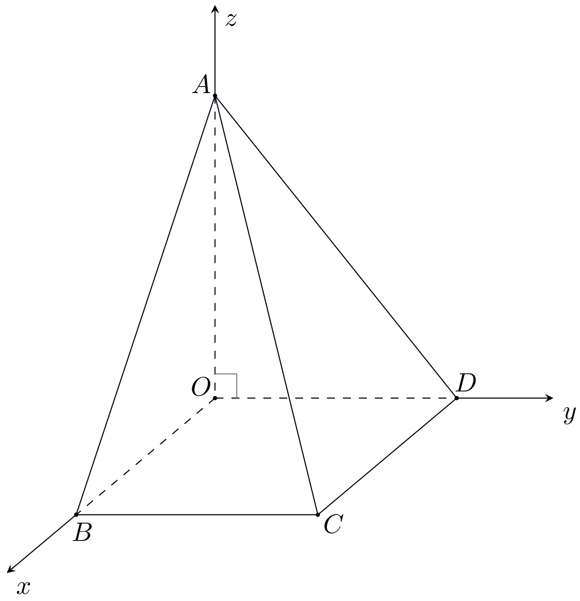
Suy ra $\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{\frac{19}{22}} = \frac{\sqrt{418}}{22}$.

Đáp án: $\boxed{0{,}93}$ ........................................................................................ □

**CÂU 29.** Cho khối tứ diện $ABCD$ có $BC = 3$, $CD = 4$, $\widehat{ABC} = \widehat{ADC} = \widehat{BCD} = 90^\circ$. Góc giữa đường thẳng $AD$ và $BC$ bằng $60^\circ$. Tính côsin góc giữa hai mặt phẳng $(ABC)$ và $(ACD)$. Kết quả viết ở dạng thập phân làm tròn đến hàng phần trăm.

Đáp án: | 0 | , | 3 | |

**Lời giải.**

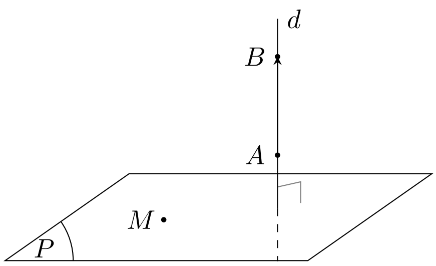



Dựng $AO \perp (BCD)$ khi đó $O$ là đỉnh thứ tư của hình chữ nhật $BCDO$.
Góc giữa đường thẳng $AD$ và $BC$ là góc giữa đường thẳng $AD$ và $OD$ và bằng $\widehat{ADO} = 60^\circ$.
Xét tam giác $ADO$ vuông tại $O$ ta có $\tan 60^\circ = \dfrac{OA}{OD} \Rightarrow OA = 3\sqrt{3}$.
Gắn hệ tọa độ $Oxyz$ vào hình chóp như hình vẽ.
Ta có $O(0;0;0)$, $B(4;0;0)$, $D(0;3;0)$, $C(4;3;0)$, $A(0;0;3\sqrt{3})$.
Suy ra $\overrightarrow{AB} = (4;0;-3\sqrt{3})$, $\overrightarrow{BC} = (0;3;0)$, $\overrightarrow{AD} = (0;3;-3\sqrt{3})$, $\overrightarrow{CD} = (-4;0;0)$.
Mặt phẳng $(ABC)$ nhận vectơ $\overrightarrow{n_1} = \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}\right] = (9\sqrt{3};0;12)$ làm vectơ pháp tuyến.
Mặt phẳng $(ADC)$ nhận vectơ $\overrightarrow{n_2} = \left[\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{CD}\right] = \left(0;12\sqrt{3};12\right)$ làm vectơ pháp tuyến.
Nên $\cos\left((ABC);(ADC)\right) = \dfrac{|\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2}|}{|\overrightarrow{n_1}| \cdot |\overrightarrow{n_2}|} = \dfrac{144}{72\sqrt{43}} = \dfrac{2\sqrt{43}}{43}$.
Đáp án: 0,3 ........................................................ □

## 9 Viết PTMP biết vị trí tương đối với đường thẳng

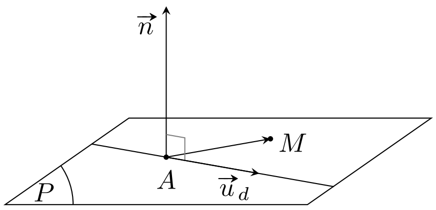
✪ Viết phương trình mặt phẳng $(P)$ qua $M$ và vuông góc với đường thẳng $d$ (hoặc vuông góc với đường thẳng $AB$)

**Phương pháp**: $(P)\colon \begin{cases} \text{Qua } M\,(x_0;y_0;z_0) \\ \text{Vectơ pháp tuyến } \vec{n}_{(P)} = \vec{u}_d = \overrightarrow{AB}. \end{cases}$




✪ Viết phương trình mặt phẳng qua $M$ và chứa đường thẳng $d$ với $M \notin d$.
**Phương pháp**:

- ✪ Chọn điểm $A \in d$ và một vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_d}$. Tính $\left[\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{u_d}\right]$.
- ✪ Phương trình mặt phẳng $(P)$: $\begin{cases} \text{Đi qua } M \\ \text{có vectơ pháp tuyến } \vec{n} = \left[\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{u_d}\right]. \end{cases}$




**Phần I. Mỗi câu hỏi học sinh chọn một trong bốn phương án A, B, C, D.**

**CÂU 1.** Trong KG $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-2}{-2} = \dfrac{z+2}{1}$. Mặt phẳng nào sau đây vuông góc với đường thẳng $d$?

Ⓐ $(T)\colon x+y+2z+1=0$. Ⓑ $(P)\colon x-2y+z+1=0$. Ⓒ $(Q)\colon x-2y-z+1=0$. Ⓓ $(R)\colon x+y+z+1=0$.

**Lời giải.**

Đường thẳng vuông góc với mặt phẳng nếu vectơ chỉ phương của đường thẳng cùng phương với vectơ pháp tuyến của mặt phẳng.
Đường thẳng $d$ có một vectơ chỉ phương là $\vec{u} = (1;-2;1)$.
Mặt phẳng $(T)$ có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_{(T)} = (1;1;2)$.

Do $\frac{1}{1} \neq \frac{-2}{1} \neq \frac{1}{2}$ nên $\vec{u}$ không cùng phương với $\vec{n}_{(T)}$. Do đó $d$ không vuông góc với $(T)$.
Mặt phẳng $(P)$ có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_{(P)} = (1; -2; 1)$.
Do $\frac{1}{1} = \frac{-2}{-2} = \frac{1}{1}$ nên $\vec{u}$ cùng phương với $\vec{n}_{(P)}$. Do đó $d$ vuông góc với $(P)$.
Mặt phẳng $(Q)$ có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_{(Q)} = (1; -2; -1)$.
Do $\frac{1}{1} = \frac{-2}{-2} \neq \frac{1}{-1}$ nên $\vec{u}$ không cùng phương với $\vec{n}_{(Q)}$. Do đó $d$ không vuông góc với $(Q)$.
Mặt phẳng $(R)$ có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_{(R)} = (1; 1; 1)$.
Do $\frac{1}{1} \neq \frac{-2}{1} \neq \frac{1}{1}$ nên $\vec{u}$ không cùng phương với $\vec{n}_{(R)}$. Do đó $d$ không vuông góc với $(R)$.

Chọn đáp án B ............ □

**CÂU 2.** Trong KG $Oxyz$, phương trình mặt phẳng đi qua gốc tọa độ và vuông góc với đường thẳng $d\colon \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1}$ là

A $x + y + z + 1 = 0$. B $x - y - z = 1$. C $x + y + z = 1$. D $x + y + z = 0$.

**Lời giải.**

Mặt phẳng $(P)$ vuông góc với đường thẳng $(d)\colon \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1}$ nên nhận vectơ chỉ phương $\vec{u}_d = (1; 1; 1)$ làm vectơ pháp tuyến.
Suy ra phương trình mặt phẳng $(P)$ có dạng $x + y + z + D = 0$.
Mặt khác $(P)$ đi qua gốc tọa độ nên $D = 0$.
Vậy phương trình $(P)$ là $x + y + z = 0$.

Chọn đáp án D ............ □

**CÂU 3.** Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho điểm $A(0; 0; 3)$ và đường thẳng $d$ có phương trình $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = t \end{cases}$. Phương trình mặt phẳng đi qua điểm $A$ và vuông góc với đường thẳng $d$ là

A $2x - y + z - 3 = 0$. B $2x - y + 2z - 6 = 0$. C $2x - y + z + 3 = 0$. D $2x - y - z + 3 = 0$.

**Lời giải.**

Mặt phẳng cần tìm đi qua điểm $A(0; 0; 3)$ và vuông góc với đường thẳng $d$ nên nhận vectơ chỉ phương của đường thẳng $d$ là $\vec{u} = (2; -1; 1)$ làm vectơ pháp tuyến. Do đó phương trình mặt phẳng cần tìm là $2x - y + z - 3 = 0$.

Chọn đáp án A ............ □

**CÂU 4.** Trong KG $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta$ có phương trình $\frac{x - 10}{5} = \frac{y - 2}{1} = \frac{z + 2}{1}$. Xét mặt phẳng $(P)\colon 10x + 2y + mz + 11 = 0$, với $m$ là tham số thực. Tìm tất cả các giá trị của $m$ để mặt phẳng $(P)$ vuông góc với đường thẳng $\Delta$.

A $m = 2$. B $m = -52$. C $m = 52$. D $m = -2$.

**Lời giải.**

Đường thẳng $\Delta\colon \frac{x - 10}{5} = \frac{y - 2}{1} = \frac{z + 2}{1}$ có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (5; 1; 1)$.
Mặt phẳng $(P)\colon 10x + 2y + mz + 11 = 0$ có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (10; 2; m)$.
Để mặt phẳng $(P)$ vuông góc với đường thẳng $\Delta$ thì $\vec{u}$ phải cùng phương với $\vec{n}$, tức là cần

$$\frac{10}{2} = \frac{2}{1} = \frac{m}{1} \Leftrightarrow m = 2.$$

Chọn đáp án A ............ □

**CÂU 5.** Trong KG $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta\colon \frac{x + 1}{-1} = \frac{y - 2}{2} = \frac{z}{-3}$ và mặt phẳng $(P)\colon x - y + z - 3 = 0$. Phương trình mặt phẳng $(\alpha)$ đi qua $O$, song song với $\Delta$ và vuông góc với mặt phẳng $(P)$ là

A $x + 2y + z = 0$. B $x - 2y + z = 0$. C $x + 2y + z - 4 = 0$. D $x - 2y + z + 4 = 0$.

**Lời giải.**

$\Delta$ có vectơ chỉ phương là $\vec{u} = (-1; 2; -3)$ và $(P)$ có vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (1; -1; 1)$.
Mặt phẳng $(\alpha)$ qua $O$ và nhận vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n'} = -[\vec{u}, \vec{n}] = (1; 2; 1)$.
Suy ra $(\alpha)\colon x + 2y + z = 0$.

Chọn đáp án A ............ □

**CÂU 6.** Trong KG $Oxyz$, cho đường thẳng $d_1$ có véc-tơ chỉ phương $\vec{u} = (1; 0; -2)$ và đi qua điểm $M(1; -3; 2)$, $d_2\colon \frac{x + 3}{1} = \frac{y - 1}{-2} = \frac{z + 4}{3}$. Phương trình mặt phẳng $(P)$ cách đều hai đường thẳng $d_1$ và $d_2$ có dạng $ax + by + cz + 11 = 0$. Giá trị $a + 2b + 3c$ bằng

Ⓐ $-42$. Ⓑ $-32$. Ⓒ $11$. Ⓓ $20$.

**Lời giải.**

Đường thẳng $d_2$ có véc-tơ chỉ phương $\vec{v}=(1;-2;3)$ và đi qua điểm $N(-3;1;-4)$.
Ta có $[\vec{v},\vec{u}]=(4;5;2)\neq\vec{0}$; $\overrightarrow{MN}=(-4;4;-6)$; $[\vec{v},\vec{u}]\cdot\overrightarrow{MN}=-16+20-12=-8\neq 0$
$\Rightarrow d_1$ và $d_2$ chéo nhau.
Mặt phẳng $(P)$ cách đều hai đường thẳng $d_1$ và $d_2$ nên $(P)$ nhận $[\vec{v},\vec{u}]=(4;5;2)$ làm một véc-tơ pháp tuyến và đi qua trung điểm $I(-1;-1;-1)$ của đoạn $MN$.
Do đó $(P)\colon 4(x+1)+5(y+1)+2(z+1)=0\Leftrightarrow 4x+5y+2z+11=0$.
Suy ra $a=4$, $b=5$, $c=2\Rightarrow a+2b+3c=20$.

Chọn đáp án D ........ □

**CÂU 7.** Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng chứa hai đường thẳng cắt nhau $\dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z-4}{3}$ và $\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z+2}{3}$ có phương trình là

Ⓐ $-2x-y+9z-36=0$. Ⓑ $2x-y-z=0$. Ⓒ $6x+9y+z+8=0$. Ⓓ $6x+9y+z-8=0$.

**Lời giải.**

Đường thẳng $d_1\colon \dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z-4}{3}$ đi qua điểm $M(1;-2;4)$, có một véc-tơ chỉ phương là $\vec{u}_1=(-2;1;3)$.
Đường thẳng $d_2\colon \dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z+2}{3}$ có một véc-tơ chỉ phương là $\vec{u}_2=(1;-1;3)$.
Mặt phẳng $(P)$ chứa hai đường thẳng cắt nhau $d_1$, $d_2$ suy ra $(P)$ qua điểm $M(1;-2;4)$, có một véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}=[\vec{u}_1,\vec{u}_2]=(6;9;1)$.
Phương trình mặt phẳng $(P)$ là

$$(P)\colon 6(x-1)+9(y+2)+(z-4)=0\Leftrightarrow 6x+9y+z+8=0.$$

Chọn đáp án C ........ □

**CÂU 8.** Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(0;1;0)$, mặt phẳng $(Q)\colon x+y-4z-6=0$ và đường thẳng $d\colon \begin{cases}x=3\\y=3+t\\z=5-t\end{cases}$. Phương trình mặt phẳng $(P)$ qua $A$, song song với $d$ và vuông góc với $(Q)$ là

Ⓐ $3x+y+z-1=0$. Ⓑ $3x-y-z+1=0$. Ⓒ $x+3y+z-3=0$. Ⓓ $x+y+z-1=0$.

**Lời giải.**

Mặt phẳng $(Q)$ có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}_Q=(1;1;-4)$.
Đường thẳng $d$ có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}_d=(0;1;-1)$.
Gọi véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng $(P)$ là $\vec{n}_P$.
Ta có $\vec{n}_P\perp\vec{n}_Q$ và $\vec{n}_P\perp\vec{u}_d$ nên chọn $\vec{n}_P=[\vec{n}_Q,\vec{u}_d]=(3;1;1)$.
$(P)$ đi qua điểm $A(0;1;0)$, nhận véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}_P=(3;1;1)$ có phương trình là

$$3x+y+z-1=0.$$

Chọn đáp án A ........ □

**CÂU 9.** Trong KG $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1\colon \dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-6}{-2}=\dfrac{z+2}{1}$ và $d_2\colon \dfrac{x-4}{1}=\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{z+2}{-2}$ chéo nhau. Phương trình mặt phẳng $(P)$ chứa $d_1$ và $(P)$ song song với đường thẳng $d_2$ là

Ⓐ $(P)\colon x+5y+8z-16=0$. Ⓑ $(P)\colon x+5y+8z+16=0$.
Ⓒ $(P)\colon x+4y+6z-12=0$. Ⓓ $(P)\colon 2x+y-6=0$.

**Lời giải.**

Đường thẳng $d_1$ đi qua $A(2;6;-2)$ và có một véc-tơ chỉ phương $\vec{u}_1=(2;-2;1)$.
Đường thẳng $d_2$ có một véc-tơ chỉ phương $\vec{u}_2=(1;3;-2)$.
Gọi $\vec{n}$ là một véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng $(P)$. Do mặt phẳng $(P)$ chứa $d_1$ và $(P)$ song song với đường thẳng $d_2$ nên $\vec{n}_P=[\vec{u}_1,\vec{u}_2]=(1;5;8)$.
Vậy phương trình mặt phẳng $(P)$ đi qua $A(2;6;-2)$ nhận véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}_P=(1;5;8)$ là $x+5y+8z-16=0$.

Chọn đáp án A ........ □

**CÂU 10.** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ , cho hai điểm $A(1;1;0)$, $B(0;-1;2)$. Biết rằng có hai mặt phẳng cùng đi qua hai điểm $A$, $O$ và cùng cách $B$ một khoảng bằng $\sqrt{3}$. Véc-tơ nào trong các véc-tơ dưới đây là một véc-tơ pháp tuyến của một trong hai mặt phẳng đó?

(A) $\vec{n}=(1;-1;-1)$. (B) $\vec{n}=(1;-1;-3)$. (C) $\vec{n}=(1;-1;5)$. (D) $\vec{n}=(1;-1;-5)$.

**Lời giải.**

PTĐT qua hai điểm $A$, $O$ có dạng $\begin{cases}x=t\\y=t\\z=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-y=0\\z=0.\end{cases}$

Gọi $(P)$ là mặt phẳng cùng đi qua hai điểm $A$, $O$ nên $(P)\colon m(x-y)+nz=0$, $m^2+n^2>0$. Khi đó véc-tơ pháp tuyến của $(P)$ có dạng $\vec{n}=(m;-m;n)$.

Ta có $\mathrm{d}(B,(P))=\sqrt{3}\Leftrightarrow\dfrac{|m+2n|}{\sqrt{m^2+m^2+n^2}}=\sqrt{3}\Leftrightarrow 2m^2-4mn-n^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\dfrac{m}{n}=1\\\dfrac{m}{n}=\dfrac{1}{5}.\end{array}\right.$

Vậy một véc-tơ pháp tuyến của một trong hai mặt phẳng đó là

$$\vec{n}_P=\left(\frac{1}{5}n;\frac{-1}{5}n;n\right)=\frac{n}{5}(1;-1;5).$$

Do đó $\vec{n}=(1;-1;-5)$ cũng là một véc-tơ pháp tuyến của một trong hai mặt phẳng đó.

Chọn đáp án (C) ..........

**CÂU 11.** Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;0;0)$ và đường thẳng $d\colon\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z-1}{2}$. Phương trình mặt phẳng chứa điểm $A$ và đường thẳng $d$ là

(A) $(P)\colon 5x+2y+4z-5=0$. (B) $(P)\colon 2x+1y+2z-1=0$.

(C) $(P)\colon 5x-2y-4z-5=0$. (D) $(P)\colon 2x+1y+2z-2=0$.

**Lời giải.**

Véc-tơ chỉ phương của $d$ là $\vec{a}=(2;1;2)$ và $B(1;-2;1)\in d$.
Khi đó $\overrightarrow{AB}=(0;-2;1)$.
Do đó véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng là $\vec{n}=\left[\overrightarrow{AB},\vec{a}\right]=(5,-2;-4)$.
Từ đó suy ra phương trình mặt phẳng cần tìm là

$$5\cdot(x-1)-2\cdot(y-0)-4\cdot(z-0)=0\Rightarrow 5x-2y-4z-5=0.$$

Chọn đáp án (C) ..........

**CÂU 12.** Trong KG $Oxyz$ , cho hai đường thẳng $d_1\colon\dfrac{x-2}{-1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{1}$ và $d_2\colon\dfrac{x}{-2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-2}{1}$. Phương trình mặt phẳng $(P)$ song song và cách đều hai đường thẳng $d_1$, $d_2$ là

(A) $2y-2z+1=0$. (B) $2y-2z-1=0$. (C) $2x-2z+1=0$. (D) $2x-2z-1=0$.

**Lời giải.**

Ta có đường thẳng $d_1$ đi qua điểm $A(2;0;0)$ có véc-tơ chỉ phương là $\vec{u}_1=(-1;1;1)$ và đường thẳng $d_2$ đi qua điểm $A(0;1;2)$ có véc-tơ chỉ phương là $\vec{u}_1=(-2;1;1)$.
Mặt phẳng $(P)$ song song $d_1$, $d_2$ nên $(P)$ có véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}=[\vec{u}_1,\vec{u}_2]=(0;-1;1)$.
Do đó mặt phẳng $(P)$ có dạng $y-z+m=0$.
Mặt khác $(P)$ cách đều hai đường thẳng $d_1$, $d_2$ nên

$$\mathrm{d}(d_1,(P))=\mathrm{d}(d_2,(P))\Leftrightarrow\mathrm{d}(A,(P))=d(B;(P))\Leftrightarrow|m|=|m-1|\Leftrightarrow m=\frac{1}{2}.$$

Vậy $(P)\colon y-z+\dfrac{1}{2}=0\Leftrightarrow 2y-2z+1=0$.

Chọn đáp án (A) ..........

**Phần III. Học sinh điền kết quả vào ô trống.**

**CÂU 13.** Trong KG $Oxyz$, cho điểm $M(2;-2;3)$ và đường thẳng $d\colon\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z-3}{-1}$. Phương trình mặt phẳng đi qua điểm $M$ và vuông góc với đường thẳng $d$ có dạng $3x+by+cz+d=0$. Tính $b^2+cd$.

Đáp án: 3

**Lời giải.**

Gọi $(P)$ là mặt phẳng đi qua $M$ và vuông góc với đường thẳng $d$.
Ta có $\vec{n}_p=\vec{u}_d=(3;2;-1)$ là một véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng $(P)$.
Phương trình mặt phẳng $(P)$ là

$$3(x-2)+2(y+2)-1(z-3)=0\Leftrightarrow 3x+2y-z+1=0.$$

Vậy $b^2+cd=2^2+(-1)\cdot 1=3$.
Đáp án: $\boxed{3}$ ................................................................................................ □

**CÂU 14.** Trong KG $Oxyz$, phương trình mặt phẳng đi qua điểm $A(0;1;0)$ và chứa đường thẳng $\Delta\colon \dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-3}{1}$ có dạng $3x+ay+bz-c$. Tính $a+b+c$.

Đáp án: | 0 | | | |

**Lời giải.**

Ta lấy điểm $M(2;1;3)\in(\Delta)\Rightarrow\begin{cases}\overrightarrow{AM}=(2;0;3)\\ \text{véc-tơ chỉ phương } \vec{u}_\Delta=(1;-1;1).\end{cases}$
Suy ra $\vec{n}=\left[\overrightarrow{AM},\vec{u}_\Delta\right]=(3;1;-2)$.
Mặt phẳng cần tìm qua $A(0;1;0)$ và nhận $\vec{n}=(3;1;-2)$ làm véc-tơ pháp tuyến có phương trình là

$$3\cdot(x-0)+1\cdot(y-1)-2\cdot(z-0)=0\Leftrightarrow 3x+y-2z-1=0.$$

Suy ra $a=1$, $b=-2$, $c=1$. Vậy $a+b+c=0$.
Đáp án: $\boxed{0}$ ................................................................................................ □

**CÂU 15.** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(-1;3;2)$ và đường thẳng $d$ có phương trình $\begin{cases}x=1-4t\\y=t\\z=2+t\end{cases}$. Phương trình mặt phẳng $(P)$ chứa điểm $A$ và vuông góc đường thẳng $d$ có dạng $ax+by+10z+c=0$. Tính $c$.

Đáp án: | − | 2 | 3 | |

**Lời giải.**
Đường thẳng $d$ đi qua điểm $M(1;0;2)$ và có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}=(-4;1;1)$.
Ta có $\overrightarrow{AM}=(2;-3;0)$, $[\vec{u},\overrightarrow{AM}]=(3;2;10)$.
Mặt phẳng $(P)$ chứa điểm $A$ và đường thẳng $d$ có véc-tơ pháp tuyến $[\vec{u},\overrightarrow{AM}]=(3;2;10)$.
Do đó phương trình mặt phẳng $(P)$ là

$$3(x+1)+2(y-3)+10(z-2)=0\Leftrightarrow 3x+2y+10z-23=0.$$

Vậy $c=-23$.
Đáp án: $\boxed{-23}$ ................................................................................................ □

**CÂU 16.** Trong KG $Oxyz$, phương trình mặt phẳng $(P)$ song song và cách đều hai đường thẳng $d_1\colon \dfrac{x-2}{-1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{1}$ và $d_2\colon \dfrac{x}{2}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-2}{-1}$ có dạng $ax+by+cz+1=0$. Tính $a^2+b^2+c^2$.

Đáp án: | 8 | | | |

**Lời giải.**
Ta có $d_1$ đi qua điểm $A(2;0;0)$ và có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}_1=(-1;1;1)$, $d_2$ đi qua điểm $B(0;1;2)$ và có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}_2=(2;-1;-1)$.
Vì $(P)$ song song với hai đường thẳng $d_1$ và $d_2$ nên véc-tơ pháp tuyến của $(P)$ là $\vec{n}=[\vec{u}_1,\vec{u}_2]=(0;1;-1)$.
Vì $(P)$ cách đều $d_1$ và $d_2$ nên $(P)$ đi qua trung điểm $M\left(0;\dfrac{1}{2};1\right)$ của $AB$ nên $(P)\colon 2y-2z+1=0$.
Suy ra $a=0$, $b=2$, $c=-2$. Vậy $a^2+b^2+c^2=8$.
Đáp án: $\boxed{8}$ ................................................................................................ □

**CÂU 17.** Trong KG $Oxyz$, phương trình mặt phẳng chứa hai đường thẳng $d\colon\begin{cases}x=t+2\\y=3t-1\\z=2t+1\end{cases}$ và $\Delta\colon\begin{cases}x=m+3\\y=3m-2\\z=2m+1\end{cases}$ có dạng $x+ay+bz+c=0$. Tính $P=a+2b+3c$.

Đáp án: | 0 | | | |

**Lời giải.**
Ta có $d\parallel\Delta$.
Chọn $A(2;-1;1)\in d$, $B(3;-2;1)\in\Delta$ suy ra $\overrightarrow{AB}=(1;-1;0)$.
Ta có $\left[\overrightarrow{AB},\vec{u}_d\right]=(-2;-2;4)$.
Phương trình mặt phẳng chứa hai đường thẳng $d$ và $\Delta$ qua $A(2;-1;1)$ và có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}=-\dfrac{1}{2}\left[\overrightarrow{AB},\vec{u}_d\right]=(1;1;-2)$

là

$$1\cdot(x-2)+1\cdot(y+1)-2\cdot(z-1)=0 \Leftrightarrow x+y-2z+1=0.$$

Vậy $P=a+2b+3c=1-2\cdot2+3\cdot1=0$.

Đáp án: $\boxed{0}$ ..........

**CÂU 18.** Trong KG $Oxyz$, cho hai đường thẳng cắt nhau

$$d\colon \frac{x-1}{-2}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-4}{3} \text{ và } d'\colon \begin{cases} x=-1+t\\ y=-t\\ z=-2+3t.\end{cases}$$

Phương trình mặt phẳng $(P)$ chứa $d$ và $d'$ có dạng $ax+by+cz+8=0$. Tính $T=a-b+3c$.

| Đáp án: | 0 | | | |
|---|---|---|---|---|

**Lời giải.**

Ta có $d$ có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}=(-2;1;3)$ và đi qua $M(1;-2;4)$,
$d'$ có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}'=(1;-1;3)$ và đi qua $M'(-1;0;-2)$.
Từ đó $\overrightarrow{MM'}=(-2;2;-6)$, $[\vec{u},\vec{u'}]=(6;9;1)\neq\vec{0}$ và $[\vec{u},\vec{u}']\cdot\overrightarrow{MM'}=0$.
Suy ra $d$ cắt $d'$.
Mặt phẳng $(P)$ chứa $d$ và $d'$ đi qua giao điểm của $d$ và $d'$ có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}=[\vec{u},\vec{u'}]$
Gọi $I=d\cap d'$, giả sử $I(-1+t;-t;-2+3t)\in d'$ mà $I\in d$ do đó

$$\begin{aligned}&\frac{-1+t-1}{-2}=\frac{-t+2}{1}=\frac{-2+3t-4}{3}\\ \Leftrightarrow&\frac{-2+t}{-2}=\frac{-t+2}{1}=\frac{-6+3t}{3}\\ \Leftrightarrow& t=2.\end{aligned}$$

Vậy $I(1;-2;4)$.
Khi đó ta có $(P)$ đi qua $I(1;-2;4)$ và có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}=[\vec{u},\vec{u'}]=(6;9;1)$
Phương trình mặt phẳng $(P)$ là

$$6\cdot(x-1)+9\cdot(y+2)+(z-4)=0 \Leftrightarrow 6x+9y+z+8=0.$$

Suy ra $\begin{cases} a=6\\ b=9\\ c=1\end{cases} \Rightarrow T=a-b+3c=6-9+3\cdot1=0.$

Đáp án: $\boxed{0}$ ..........

**CÂU 19.** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(3;1;7)$, $B(5;5;1)$ và mặt phẳng $(P)\colon 2x-y-z+4=0$. Điểm $M$ thuộc $(P)$ sao cho $MA=MB=\sqrt{35}$. Biết $M$ có hoành độ nguyên, tính $OM$.(Kết quả làm tròn đến hàng phần mười).

| Đáp án: | 2 | , | 8 | |
|---|---|---|---|---|

**Lời giải.**

Ta có $\overrightarrow{AB}=(2;4;-6)=2(1;2;-3)$.
Gọi $I(4;3;4)$ là trung điểm của $AB$
Phương trình mặt phẳng trung trực $(Q)$ của $AB$ là

$$(x-4)+2(y-3)-3(z-4)=0 \Leftrightarrow x+2y-3z+2=0.$$

Gọi $d=(P)\cap(Q)$. Đường thẳng $d$ có 1 véc-tơ chỉ phương là $\vec{u}=\left[\overrightarrow{n_{(P)}},\overrightarrow{n_{(Q)}}\right]=(1;1;1)$ và đi qua điểm $N(-2;0;0)$, có phương trình là $d\colon \begin{cases} x=-2+t\\ y=t\\ z=t.\end{cases}$

Gọi $M\in(P)\colon MA=MB$. Khi đó $M\in d$ và $M(-2+t;t;t)$.
Theo giả thiết, ta có

$$\begin{aligned}MA=\sqrt{35}&\Leftrightarrow\sqrt{(t-5)^2+(t-1)^2+(t-7)^2}=\sqrt{35}\\ &\Leftrightarrow 3t^2-26t+40=0\\ &\Leftrightarrow \left[\begin{aligned}&t=\frac{20}{3}\\ &t=2.\end{aligned}\right.\end{aligned}$$

Vì $M$ có hoành độ nguyên nên $t=2$ suy ra $M=(0;2;2)$.
Vậy $OM=2\sqrt{2}\approx 2{,}8$.
Đáp án: $\boxed{2{,}8}$

**CÂU 20.** Trong KG $Oxyz$, cho ba đường thẳng $d\colon \dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+1}{-2}$, $\Delta_1\colon \dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{1}$, $\Delta_2\colon \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z}{1}$. Đường thẳng $\Delta$ vuông góc với $d$ đồng thời cắt $\Delta_1$, $\Delta_2$ tương ứng tại $H$, $K$ sao cho độ dài $HK$ nhỏ nhất. Biết rằng $\Delta$ có một véc-tơ chỉ phương $\vec{u}=(h;k;1)$. Tính giá trị $h-k$.

Đáp án: 0

**Lời giải.**
Vì $H\in\Delta_1\Leftrightarrow H(3+2t;t;1+t)$, $K\in\Delta_2\Leftrightarrow K(1+m;2+2m;m)$.
Ta có $\overrightarrow{HK}=(m-2t-2;2m-t+2;m-t-1)$.
Đường thẳng $d$ có một véc-tơ chỉ phương là $\vec{u}_d=(1;1;-2)$.
$\Delta\perp d\Leftrightarrow \vec{u}_d\cdot\overrightarrow{HK}=0\Leftrightarrow m-t+2=0\Leftrightarrow m=t-2\Rightarrow \overrightarrow{HK}=(-t-4;t-2;-3)$.
Ta có $HK^2=(-t-4)^2+(t-2)^2+(-3)^2=2(t+1)^2+27\geq 27$, $\forall t\in\mathbb{R}$.
Suy ra $\min HK=\sqrt{27}$, đạt được khi $t=-1$.
Khi đó ta có $\overrightarrow{HK}=(-3;-3;-3)$, suy ra $\vec{u}=(1;1;1)\Rightarrow h=k=1\Rightarrow h-k=0$.
Đáp án: $\boxed{0}$

**CÂU 21.** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(3;1;2)$, $B(-3;-1;0)$ và mặt phẳng $(P)\colon x+y+3z-14=0$. Điểm $M$ thuộc mặt phẳng $(P)$ sao cho $\Delta MAB$ vuông tại $M$. Tính khoảng cách từ điểm $M$ đến mặt phẳng $(Oxy)$.

Đáp án: 4

**Lời giải.**
Gọi $M(x;y;z)$ là điểm cần tìm.
Suy ra $\overrightarrow{AM}=(x-3;y-1;z-2)$, $\overrightarrow{BM}=(x+3;y+1;z)$.
Vì $\Delta MAB$ vuông tại $M$ nên $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BM}=0$. Suy ra

$$\begin{aligned}&(x-3)(x+3)+(y-1)(y+1)+z(z-2)=0\\ \Leftrightarrow&x^2-9+y^2-1+z^2-2z=0\\ \Leftrightarrow&x^2+y^2+(z-1)^2=11.\end{aligned}$$

Do đó $M$ thuộc mặt cầu $(S)$ có tâm $I(0;0;1)$ và bán kính $R=\sqrt{11}$.
Nhận xét thấy $\mathrm{d}(I,(P))=\dfrac{|0+0+3\cdot 1-14|}{\sqrt{1^2+1^2+3^3}}=\sqrt{11}=R$.
$\Rightarrow (P)$ tiếp xúc với $(S)$ tại $M$
$\Rightarrow M$ là hình chiếu vuông góc của $I$ trên $(P)$

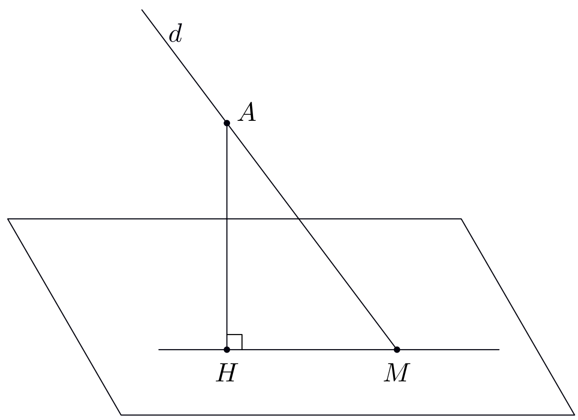
$$\Rightarrow\begin{cases}M\in(P)\\ \overrightarrow{IM}\text{ cùng phương với }\overrightarrow{n_{(P)}}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x+y+3z=14\\ \dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{3}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=1\\ y=1\\ z=4\end{cases}\Rightarrow M(1;1;4).$$

Vậy $d(M,(Oxy))=|4|=4$.
Đáp án: $\boxed{4}$

**CÂU 22.** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x-5}{2}=\dfrac{y+7}{2}=\dfrac{z-12}{-1}$ và mặt phẳng $(\alpha)\colon x+2y-3z-3=0$. Gọi $M$ là giao điểm của $d$ và $(\alpha)$, $A$ thuộc $d$ sao cho $AM=\sqrt{14}$. Tính khoảng cách từ $A$ đến mặt phẳng $(\alpha)$.

Đáp án: 3

**Lời giải.**



Đường thẳng $d\colon \dfrac{x-5}{2}=\dfrac{y+7}{2}=\dfrac{z-12}{-1}$ có một véc-tơ chỉ phương là $\vec{u}=(2;2;-1)$.
Mặt phẳng $(\alpha)\colon x+2y-3z-3=0$ có một véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}=(1;2;-3)$.
Ta có $\sin(d,(\alpha))=\dfrac{|\vec{u}_d\cdot\vec{n}_\alpha|}{|\vec{u}_d|\cdot|\vec{n}_\alpha|}=\dfrac{3\sqrt{14}}{14}$.
Gọi $H$ là hình chiếu vuông góc của $A$ lên mặt phẳng $(\alpha)$.
Khi đó tam giác $\Delta MAH$ vuông tại $H$ nên $\sin(d,(\alpha))=\sin\widehat{AMH}=\dfrac{AH}{AM}$.
$\Rightarrow AH=AM\cdot\sin(d,(\alpha))=3$.
Vậy khoảng cách từ $A$ đến mặt phẳng $(\alpha)$ bằng 3.
Đáp án: $\boxed{3}$ ................................................................ □

## 10 Lập PTMP liên quan đến góc

**Phần I. Mỗi câu hỏi học sinh chọn một trong bốn phương án A, B, C, D.**

**CÂU 1.** Trong KG $Oxyz$, cho điểm $A(-2;0;1)$, đường thẳng $d$ qua điểm $A$ và tạo với trục $Oy$ góc $45^\circ$. PTĐT $d$ là

Ⓐ $\left[\begin{array}{l}\dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y}{\sqrt5}=\dfrac{z-1}{-1}\\ \dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y}{-\sqrt5}=\dfrac{z-1}{-1}\end{array}\right.$. Ⓑ $\left[\begin{array}{l}\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y}{\sqrt5}=\dfrac{z+1}{-1}\\ \dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y}{-\sqrt5}=\dfrac{z+1}{-1}\end{array}\right.$. Ⓒ $\left[\begin{array}{l}\dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y}{\sqrt5}=\dfrac{z-1}{-1}\\ \dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y}{\sqrt5}=\dfrac{z+1}{-1}\end{array}\right.$. Ⓓ $\left[\begin{array}{l}\dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y}{-\sqrt5}=\dfrac{z-1}{-1}\\ \dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y}{\sqrt5}=\dfrac{z+1}{-1}\end{array}\right.$.

**Lời giải.**

- Cách 1: Điểm $M(0;m;0)\in Oy$, $\vec{j}=(0;1;0)$ là véc-tơ chỉ phương của trục $Oy$.
$\overrightarrow{AM}=(2;-m;-1)\Rightarrow\left|\cos\left(\overrightarrow{AM},\vec{j}\right)\right|=\cos45^\circ\Leftrightarrow\dfrac{|m|}{\sqrt{m^2+5}}=\dfrac{1}{\sqrt2}\Leftrightarrow m=\pm\sqrt5$
nên có 2 đường thẳng $\dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y}{\sqrt5}=\dfrac{z-1}{-1}$ và $\dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y}{-\sqrt5}=\dfrac{z-1}{-1}$.

- Cách 2: $\vec{u_1}=\left(2;\sqrt5;-1\right)\Rightarrow\left|\cos\left(\vec{u_1},\vec{j}\right)\right|=\dfrac{1}{\sqrt2}$;
$\vec{u_2}=\left(2;-\sqrt5;-1\right)\Rightarrow\left|\cos\left(\vec{u_2},\vec{j}\right)\right|=\dfrac{1}{\sqrt2}$.
Đường thẳng $d$ đi qua điểm $A(-2;0;1)$ nên đường thẳng $d$ có phương trình là
$$\dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y}{\sqrt5}=\dfrac{z-1}{-1}\text{ hoặc }\dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y}{-\sqrt5}=\dfrac{z-1}{-1}.$$

Chọn đáp án A ................................................................ □

**CÂU 2.** Trong KG $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon 4x-7y+z+25=0$ và đường thẳng $d_1\colon \dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z-1}{-1}$. Gọi $d_1'$ là hình chiếu vuông góc của $d_1$ lên mặt phẳng $(P)$. Đường thẳng $d_2$ nằm trong $(P)$ tạo với $d_1$, $d_1'$ các góc bằng nhau, $d_2$ có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}_2=(a;b;c)$. Tính $\dfrac{a+2b}{c}$.

Ⓐ $\dfrac{a+2b}{c}=\dfrac{2}{3}$. Ⓑ $\dfrac{a+2b}{c}=0$. Ⓒ $\dfrac{a+2b}{c}=\dfrac{1}{3}$. Ⓓ $\dfrac{a+2b}{c}=1$.

**Lời giải.**

Véc-tơ chỉ phương của $d_1$ là $\vec{u}_1=(1;2;-1)$, véc-tơ pháp tuyến của $(P)$ là $\vec{n}_P=(4;-7;1)$.

- Cách 1: Gọi $(Q)=(d_1,d_1')$ khi đó $(Q)$ có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}_Q=[\vec{n}_P,\vec{u}_1]=(5;5;15)$.
Đường thẳng $d_1'$ có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}_1'=[\vec{n}_P,\vec{u}_1]=(22;11;-11)$ hay một véc-tơ chỉ phương khác $\vec{u}=(2;1;-1)$.
Vì $\vec{n}_P\cdot\vec{u}_2=0\Rightarrow 4a-7b+c=0\Rightarrow c=7b-4a\Rightarrow\vec{u}_2=(a;b;7b-4a)$.
Ta lại có
$$\begin{aligned}(d_1;d_2)=(d_1';d_2)&\Leftrightarrow|\cos(\vec{u}_1,\vec{u_2})|=|\cos(\vec{u}_1',\vec{u}_2)|\\&\Leftrightarrow|a+2b+4a-7b|=|2a+b+4a-7b|\\&\Leftrightarrow|5a-5b|=|6a-6b|\\&\Leftrightarrow|a-b|=0\Leftrightarrow a=b.\end{aligned}$$
Chọn $a=1\Rightarrow b=1,\ c=3\Rightarrow\dfrac{a+2b}{c}=1$.

- Cách 2: Gọi $(Q)=(d_1,d_1')$, khi đó $(P)\perp(Q)$.
Các đường thẳng nằm trong $(P)$ mà vuông góc với $(Q)$ thì vuông góc với tất cả các đường thẳng trong $(Q)$ hay chúng

cùng tạo với $d_1, d_1'$ các góc $90°$.

Do đó, các đường thẳng này thỏa mãn yêu đề bài và có véc-tơ chỉ phương $\vec{u} = \vec{n}_Q = (1;1;3) \Rightarrow \dfrac{a+2b}{c} = 1$.

Chọn đáp án D ..................................................

**CÂU 3.** Trong KG $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1\colon \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{-2} = \dfrac{z+1}{-1}$, $d_2\colon \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = -t \end{cases}$. Mặt phẳng $(P)$ qua $d_1$ tạo với $d_2$ một góc $45°$ và nhận véc-tơ $\vec{n} = (1;b;c)$ làm một véc-tơ pháp tuyến. Xác định tích $b \cdot c$.

**A** $-4$ hoặc 0. **B** 4 hoặc 0. **C** $-4$. **D** 4.

**Lời giải.**

Ta có véc-tơ chỉ phương của $d_1$, $d_2$ lần lượt là $\vec{u}_1 = (2;-2;-1)$ và $\vec{u}_2 = (1;0;-1)$.
Mặt phẳng $(P)$ qua $d_1$ nên $\vec{n} \cdot \vec{u}_1 = 0 \Leftrightarrow 2 - 2b - c = 0$. (1)
Ta có

$$\begin{aligned} & \sin(d_2,(P)) = \frac{|\vec{u}_2 \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}_2| \cdot |\vec{n}|} = \sin 45° \\ \Leftrightarrow\ & \frac{|1-c|}{\sqrt{b^2+c^2+1} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \Leftrightarrow\ & |1-c| = \sqrt{b^2+c^2+1} \\ \Leftrightarrow\ & b^2 + 2c = 0. \qquad (2) \end{aligned}$$

Từ (1) và (2) suy ra $\begin{cases} b = 2 \\ c = -2 \end{cases} \Rightarrow b \cdot c = -4$.

Chọn đáp án C ..................................................

**CÂU 4.** Trong KG $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \begin{cases} x = 0 \\ y = 3 - t \\ z = t \end{cases}$. Gọi $(P)$ là mặt phẳng chứa đường thẳng $d$ và tạo với mặt phẳng $(Oxy)$ một góc $45°$. Điểm nào sau đây thuộc mặt phẳng $(P)$?

**A** $M(3;2;1)$. **B** $N(3;2;-1)$. **C** $P(3;-1;2)$. **D** $M(3;-1;-2)$.

**Lời giải.**

Ta viết PTĐT $d\colon \begin{cases} x = 0 \\ y + z - 3 = 0. \end{cases}$
Mặt phẳng $(P)$ chứa đường thẳng $d$ nên có dạng $mx + n(y + z - 3) = 0$, $m^2 + n^2 \neq 0$ hay $mx + ny + nz - 3n = 0$ nên $(P)$ có một véc-tơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n_P} = (m;n;n)$.
Mặt phẳng $(Oxy)$ có một véc-tơ pháp tuyến là $\vec{k} = (0;0;1)$.
Ta có

$$\begin{aligned} & \cos((P);(Oxy)) = \left|\cos(\overrightarrow{n_P}; \vec{k})\right| \\ \Leftrightarrow\ & \cos 45° = \frac{\left|\overrightarrow{n_P}.\vec{k}\right|}{\left|\overrightarrow{n_P}\right|.\left|\vec{k}\right|} \\ \Leftrightarrow\ & \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{|n|}{\sqrt{m^2+n^2+n^2}} \\ \Leftrightarrow\ & \sqrt{m^2+2n^2} = \sqrt{2}\,|n| \\ \Leftrightarrow\ & m^2 = 0 \Leftrightarrow m = 0. \end{aligned}$$

Chọn $n = 1 \Rightarrow (P)\colon y + z - 3 = 0$.
Do đó $M(3;2;1) \in (P)$.
**Bình luận:** Đối với những bài toán viết phương trình mặt phẳng chứa đường thẳng cho trước ta nên sử dụng khái niệm chùm mặt phẳng như sau: Mặt phẳng $(\alpha)$ qua giao tuyến của hai mặt phẳng $(P)\colon a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ và $(Q)\colon a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ có phương trình dạng $m(a_1x + b_1y + c_1z + d_1) + n(a_2x + b_2y + c_2z + d_2) = 0$, $m^2 + n^2 \neq 0$.

Chọn đáp án A ..................................................

**CÂU 5.** Trong KG $Oxyz$, cho tam giác $ABC$ vuông tại $A$, $\widehat{ABC} = 30°$, $BC = 3\sqrt{2}$, đường thẳng $BC$ có phương trình $\dfrac{x-4}{1} = \dfrac{y-5}{1} = \dfrac{z+7}{-4}$, đường thẳng $AB$ nằm trong mặt phẳng $(\alpha)\colon x + z - 3 = 0$. Biết đỉnh $C$ có cao độ âm. Tính hoành độ đỉnh $A$.

(A) $\frac{3}{2}$. (B) 3. (C) $\frac{9}{2}$. (D) $\frac{5}{2}$.

**Lời giải.**

Vì $C \in BC$ nên $C(4+t;5+t;-7-4t)$.
$BC$ có véc tơ chỉ phương $\vec{u}=(1;1;-4)$. Mặt phẳng $(\alpha)$ có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}=(1;0;1)$.

Gọi $\varphi$ là góc giữa $BC$ và $(\alpha)$. Ta có $\sin\varphi = |\cos(\vec{u};\vec{n})| = \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi = 30^\circ$. Tức là $A$ là hình chiếu của $C$ lên $(\alpha)$.

Vậy

$$\begin{aligned} & \frac{3\sqrt{2}}{2} = CA = \mathrm{d}(C;(\alpha)) = \frac{|4+t-7-4t-3|}{\sqrt{2}} \\ \Leftrightarrow & \left[\begin{array}{l} t=-1 \\ t=-3 \end{array}\right. \\ \Leftrightarrow & \left[\begin{array}{l} C(3;4;-3) \\ C(1;2;5). \end{array}\right. \end{aligned}$$

Mà $C$ có cao độ âm, suy ra $C(3;4;-3)$.
Lúc này $AC$ qua $C(3;4;-3)$ và có véc-tơ chỉ phương $\vec{n}=(1;0;1)$.

Phương trình $AC$ là $\begin{cases} x=3+t \\ y=4 \\ z=-3+t \end{cases}$. Vì $A \in AC$ nên $A(3+t;4;-3+t)$.

Mặt khác $A$ nằm trong mặt phẳng $(\alpha)\colon x+z-3=0 \Rightarrow t=\frac{3}{2}$.

Do đó, hoành độ đỉnh $A$ là $x_A=\frac{9}{2}$.

Chọn đáp án (C) ..................................................... □

**CÂU 6.** Trong KG $Oxyz$, mặt phẳng nào dưới đây đi qua $A(2;1;-1)$ tạo với trục $Oz$ một góc $30^\circ$?

(A) $\sqrt{2}(x-2)+(y-1)-(z-2)-3=0$.
(B) $(x-2)+\sqrt{2}(y-1)-(z+1)-2=0$.
(C) $2(x-2)+(y-1)-(z-2)=0$.
(D) $2(x-2)+(y-1)-(z-1)-2=0$.

**Lời giải.**

Gọi phương trình mặt phẳng $(\alpha)$ có dạng $A(x-2)+B(y-1)+C(z+1)=0$, $\vec{n}=(A;B;C)$ là véc-tơ pháp tuyến.
Ta có $Oz$ có véc-tơ chỉ phương là $\vec{k}=(0;0;1)$.

Áp dụng công thức

$$\begin{aligned} & \sin((\alpha),Oz) = \frac{\left|\vec{n}\cdot\vec{k}\right|}{|\vec{n}|\cdot|\vec{k}|} = \sin 30^\circ \\ \Leftrightarrow\ & \frac{|A\cdot 0+B\cdot 0+C\cdot 1|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{0^2+0^2+1^2}} = \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow\ & \frac{|C|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow\ & 3C^2 = A^2+B^2. \qquad (1) \end{aligned}$$

Chọn $A=\sqrt{2}$, $B=1$, $C=-1$ thỏa mãn (1). Khi đó $(\alpha)\colon \sqrt{2}(x-2)+(y-1)-(z+1)=0$ hay $(\alpha)\colon \sqrt{2}(x-2)+(y-1)-(z-2)-3=0$.

Chọn đáp án (A) ..................................................... □

**CÂU 7.** Cho mặt phẳng $(\alpha)\colon 3x-2y+2z-5=0$ và điểm $A(1;-2;2)$. Có bao nhiêu mặt phẳng đi qua $A$ và tạo với mặt phẳng $(\alpha)$ một góc $45^\circ$.

(A) Vô số. (B) 1. (C) 2. (D) 4.

**Lời giải.**

Gọi $\overrightarrow{n_\beta}=(a;b;c)$ là véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng $(\beta)$ cần lập. Ta có

$$\begin{aligned} & \cos((\alpha),(\beta)) = |\cos(\overrightarrow{n_\alpha},\overrightarrow{n_\beta})| \\ \Leftrightarrow\ & \frac{|\overrightarrow{n_\alpha}\cdot\overrightarrow{n_\beta}|}{|\overrightarrow{n_\alpha}|\cdot|\overrightarrow{n_\beta}|} = \frac{|3\cdot a-2\cdot b+2\cdot c|}{\sqrt{3^2+(-2)^2+2^2}\cdot\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \Leftrightarrow\ & 2(3a-2b+2c)^2 = 17(a^2+b^2+c^2) \\ \Leftrightarrow\ & 2a^2-9b^2-9c^2-24ab-16bc+24ac=0. \end{aligned}$$

Phương trình trên có vô số nghiệm. Nên có vô số véc-tơ $\overrightarrow{n_\beta} = (a; b; c)$ là véc-tơ pháp tuyến của $(\beta)$.
Suy ra có vô số mặt phẳng $(\beta)$ thỏa mãn điều kiện bài toán.

Chọn đáp án A ............................................................................................ □

**Phần III. Học sinh điền kết quả vào ô trống.**

**CÂU 8.** Số các mặt phẳng $(\alpha)$ chứa đường thẳng $d\colon \dfrac{x}{1} = \dfrac{y}{-1} = \dfrac{z}{-3}$ và tạo với mặt phẳng $(P)\colon 2x - z + 1 = 0$ góc $45^\circ$ bằng

Đáp án: | 2 | | | |

**Lời giải.**

Đường thẳng $d$ đi qua điểm $O(0; 0; 0)$ có véc-tơ chỉ phương $\overrightarrow{u} = (1; -1; -3)$.
Ta có $(\alpha)$ qua $O$ có véc-tơ pháp tuyến $\overrightarrow{n} = (a; b; c)$ có dạng $ax + by + cz = 0$.
Vì $\overrightarrow{n} \perp \overrightarrow{u}$ nên $\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{u} = 0$. Do đó $a - b - 3c = 0$.
Mặt phẳng $(P)\colon 2x - z + 1 = 0$ có véc-tơ pháp tuyến $\overrightarrow{k} = (2; 0; -1)$.
Ta có

$$\begin{aligned}
& \cos 45^\circ = \frac{\left|\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{k}\right|}{\left|\overrightarrow{n}\right| \cdot \left|\overrightarrow{k}\right|} \\
\Leftrightarrow\ & \frac{|2a - c|}{\sqrt{5(a^2 + b^2 + c^2)}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\
\Leftrightarrow\ & 10(a^2 + b^2 + c^2) = (4a - 2c)^2 \\
\Leftrightarrow\ & 10(b^2 + 6bc + 9c^2 + b^2 + c^2) = (4b + 12c - 2c)^2 \\
\Leftrightarrow\ & 10(2b^2 + 6bc + 10c^2) = (4b + 10c)^2 \\
\Leftrightarrow\ & 4b^2 - 20bc = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} b = 0 \\ b = 5c. \end{array}\right.
\end{aligned}$$

Xét

- $b = 0 \Rightarrow a = 3c$ nên $(\alpha)\colon x + 3z = 0$.
- $b = 5c$, chọn $c = 1 \Rightarrow b = 5$, $a = 8$ nên $(\alpha)\colon 8x + 5y + z = 0$.

Đáp án: $\boxed{2}$ ............................................................................................ □

**CÂU 9.** Trong KG $Oxyz$, cho điểm $A(3; -1; 0)$ và đường thẳng $d\colon \dfrac{x-2}{-1} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z-1}{1}$. Phương trình mặt phẳng $(\alpha)$ chứa $d$ sao cho khoảng cách từ $A$ đến $(\alpha)$ lớn nhất có dạng $ax + by + cz = 0$. Khi đó $\dfrac{a}{b}$ bằng

Đáp án: | 1 | | | |

**Lời giải.**

Gọi $H$ là hình chiếu của $A$ lên $d$.
Khi đó $H(2 - t; -1 + 2t; 1 + t) \Rightarrow \overrightarrow{AH} = (-1 - t; 2t; 1 + t)$.
Do $AH \perp d$ nên $-(-1 - t) + 2 \cdot 2t + 1 + t = 0 \Leftrightarrow t = -\dfrac{1}{3}$. Khi đó $\overrightarrow{AH} = \left(-\dfrac{2}{3}; -\dfrac{2}{3}; \dfrac{2}{3}\right)$.
Mặt phẳng $(\alpha)$ chứa $d$ sao cho khoảng cách từ $A$ đến $(\alpha)$ lớn nhất khi $AH \perp (\alpha)$.
Do đó $(\alpha)$ có véc-tơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n} = (1; 1; -1)$.
Vậy $(\alpha)\colon 1(x - 2) + 1(y + 1) - 1(z - 1) = 0 \Leftrightarrow x + y - z = 0$.
Do đó $a = 1$, $b = 1$, $c = -1$ và $\dfrac{a}{b} = 1$.

Đáp án: $\boxed{1}$ ............................................................................................ □

**CÂU 10.** Trong KG $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P)\colon x + 2y - 2z + 1 = 0$, $(Q)\colon x + my + (m - 1)z + 2024 = 0$. Khi hai mặt phẳng $(P)$, $(Q)$ tạo với nhau một góc nhỏ nhất thì giá trị của $m$ bằng bao nhiêu?

Đáp án: | 0 | , | 5 | |

**Lời giải.**

Gọi $\varphi$ là góc giữa hai mặt phẳng $(P)$ và $(Q)$.

Khi đó

$$\begin{aligned} & \cos\varphi = \frac{|1\cdot 1+2\cdot m-2\cdot(m-1)|}{\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}\cdot\sqrt{1^2+m^2+(m-1)^2}} \\ \Leftrightarrow\ & \cos\varphi = \frac{3}{3\sqrt{2m^2-2m+2}} = \frac{1}{\sqrt{2(m-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{2}}} \\ \Leftrightarrow\ & \cos\varphi \le \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{2}}}. \end{aligned}$$

Góc $\varphi$ nhỏ nhất khi và chỉ khi $\cos\varphi$ lớn nhất $\Leftrightarrow m=\dfrac{1}{2}=0{,}5$.

Đáp án: $\boxed{0{,}5}$ ................................................................ □

**CÂU 11.** Cho hai điểm $A(1;-1;1)$; $B(2;-2;4)$. Có bao nhiêu mặt phẳng chứa $A$, $B$ và tạo với mặt phẳng $(\alpha)\colon x-2y+z-7=0$ một góc $60^\circ$?

Đáp án: | 2 | | | |

**Lời giải.**

Ta có $\overrightarrow{AB}=(1;-1;3)$, $\overrightarrow{n_\alpha}=(1;-2;1)$. Gọi $\overrightarrow{n_\beta}=(a;b;c)$ là véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng $(\beta)$ cần lập. Ta có

$$\begin{aligned} & \cos((\alpha),(\beta)) = |\cos(\overrightarrow{n_\alpha},\overrightarrow{n_\beta})| = \frac{|\overrightarrow{n_\alpha}\cdot\overrightarrow{n_\beta}|}{|\overrightarrow{n_\alpha}|\cdot|\overrightarrow{n_\beta}|} \\ \Leftrightarrow\ & \frac{|1\cdot a-2\cdot b+1\cdot c|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+1^2}\cdot\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow\ & 2(a-2b+c)^2 = 3(a^2+b^2+c^2). \qquad (1) \end{aligned}$$

Mặt khác vì mặt phẳng $(\beta)$ chứa $A$, $B$ nên

$$\overrightarrow{n_\beta}\cdot\overrightarrow{AB}=0 \Leftrightarrow a-b+3c=0 \Leftrightarrow a=b-3c.$$

Thế vào (1) ta được $2b^2-13bc+11c^2=0$ (2).
Phương trình (2) có 2 nghiệm phân biệt. Suy ra có 2 véc-tơ $\overrightarrow{n_\beta}=(a;b;c)$ thỏa mãn.
Suy ra có 2 mặt phẳng.
Đáp án: $\boxed{2}$ ................................................................ □

**CÂU 12.** Trong KG $Oxyz$, cho hai điểm $A(3;0;1)$, $B(6;-2;1)$. Phương trình mặt phẳng $(P)$ đi qua $A$, $B$ và tạo với mặt phẳng $(Oyz)$ một góc $\alpha$ thỏa mãn $\cos\alpha=\dfrac{2}{7}$ có dạng $ax+by+cz+d=0$ với $d\neq 0$. Khi đó $\dfrac{d}{a}$ bằng

Đáp án: | − | 6 | | |

**Lời giải.**

Giả sử $(P)$ có véc-tơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_1}=(a;b;c)$, $(P)$ có véc-tơ chỉ phương $\overrightarrow{AB}=(3;-2;0)$.
Suy ra

$$\overrightarrow{n_1}\perp\overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{AB}=0 \Leftrightarrow 3a+b(-2)+0\cdot c=0 \Rightarrow 3a-2b=0 \Rightarrow a=\frac{2}{3}b. \qquad (1)$$

$(Oyz)$ có phương trình $x=0$ nên có véc-tơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_2}=(1;0;0)$. Mà

$$\begin{aligned} & \cos\alpha = \frac{2}{7} \\ \Leftrightarrow\ & \frac{|\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}|}{|\overrightarrow{n_1}|\cdot|\overrightarrow{n_2}|} = \frac{2}{7} \\ \Leftrightarrow\ & \frac{|a\cdot 1+b\cdot 0+c\cdot 0|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\cdot\sqrt{1^2+0^2+0^2}} = \frac{2}{7} \\ \Leftrightarrow\ & \frac{|a|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{2}{7} \\ \Leftrightarrow\ & 7|a| = 2\sqrt{a^2+b^2+c^2} \\ \Leftrightarrow\ & 45a^2-4b^2-4c^2=0. \qquad (2) \end{aligned}$$

Thay (1) vào (2) ta được $4b^2-c^2=0$.

Chọn $c=2$ ta có $4b^2-2^2=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} b=1 \\ b=-1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a=\dfrac{2}{3} \\ a=-\dfrac{2}{3} \end{array}\right.$

- $a=\dfrac{2}{3}$ thì $\vec{n}=\left(\dfrac{2}{3};1;2\right)$ hay $\vec{n}=(2;3;6)$. Do đó $(P)\colon 2x+3y-6z=0$.
- $a=-\dfrac{2}{3}$ thì $\vec{n}=\left(-\dfrac{2}{3};-1;2\right)$ hay $\vec{n}=(2;3;-6)$. Do đó $(P)\colon 2x+3y+6z-12=0$.

Vậy $(P)\colon 2x+3y-6z=0$ hoặc $2x+3y+6z-12=0$.
Vì $(P)$ có dạng $ax+by+cz+d=0$, $d\neq 0$ nên $(P)\colon 2x+3y+6z-12=0$ và $a=2$, $d=-12$. Do đó $\dfrac{d}{a}=-6$.
Đáp án: $\boxed{-6}$ ..........

**CÂU 13.** Trong KG $Oxyz$, biết mặt phẳng $(P)\colon ax+by+cz+d=0$ với $c<0$ đi qua hai điểm $A(0;1;0)$, $B(1;0;0)$ và tạo với mặt phẳng $(yOz)$ một góc $60^\circ$. Tính giá trị $a+b+c$. (Kết quả lấy đến hàng phần chục)

Đáp án: | 0 | , | 6 | |

**Lời giải.**

Ta có $A,B\in(P)$ nên $\begin{cases}b+d=0\\a+d=0.\end{cases}$
Suy ra $(P)$ có dạng $ax+ay+cz-a=0$ có véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}=(a;a;c)$.
Mặt phẳng $(yOz)$ có véc-tơ pháp tuyến là $\vec{i}=(1;0;0)$.
Ta có

$$\begin{aligned}&\cos 60^\circ=\dfrac{\left|\vec{n}\cdot\vec{i}\right|}{|\vec{n}|\cdot\left|\vec{i}\right|}\\ \Leftrightarrow\ &\dfrac{1}{2}=\dfrac{|a|}{\sqrt{2a^2+c^2}\cdot 1}\\ \Leftrightarrow\ &2a^2+c^2=4a^2\Leftrightarrow 2a^2-c^2=0.\end{aligned}$$

Chọn $a=1$, ta có $c^2=2\Rightarrow c=-\sqrt{2}$ do $c<0$.
Ta có $a+b+c=a+a+c=1+1-\sqrt{2}=2-\sqrt{2}\approx 0{,}6$.
Đáp án: $\boxed{0{,}6}$ ..........

## 11 Khoảng cách

a) Khoảng cách từ một điểm đến đường thẳng

- Khoảng cách từ điểm $M$ đến một đường thẳng $d$ qua điểm $M_0$ có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}_d$ được xác định bởi công thức $\mathrm{d}(M,d)=\dfrac{\left|\left[\overrightarrow{M_0M},\vec{u}_d\right]\right|}{|\vec{u}_d|}$.
- Khoảng cách giữa hai đường thẳng song song là khoảng cách từ một điểm thuộc đường thẳng này đến đường thẳng kia.

b) Khoảng cách giữa hai đường thẳng

- Khoảng cách giữa hai đường thẳng song song là khoảng cách từ một điểm thuộc đường thẳng này đến đường thẳng kia.
- Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau: $d$ đi qua điểm $M$ và có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}$ và $d'$ đi qua điểm $M'$ và có véc-tơ chỉ phương $\vec{u'}$ là $\mathrm{d}\left(d,d'\right)=\dfrac{\left|\left[\vec{u},\vec{u'}\right]\cdot\overrightarrow{M'M}\right|}{\left|\left[\vec{u},\vec{u'}\right]\right|}$.

**Phần I. Mỗi câu hỏi học sinh chọn một trong bốn phương án A, B, C, D.**

**CÂU 1.** Trong KG $Oxyz$, khoảng cách từ điểm $M(2;-4;-1)$ tới đường thẳng $\Delta\colon\begin{cases}x=t\\y=2-t\\z=3+2t\end{cases}$ bằng

(A) $\sqrt{14}$. (B) $\sqrt{6}$. (C) $2\sqrt{14}$. (D) $2\sqrt{6}$.

**Lời giải.**

Đường thẳng $\Delta$ đi qua $N(0;2;3)$, có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}=(1;-1;2)$.
Ta có $\overrightarrow{MN}=(-2;6;4)$; $\left[\overrightarrow{MN},\vec{u}\right]=(16;8;-4)$.

Do đó $\mathrm{d}(M,\Delta)=\dfrac{\left|\left[\overrightarrow{MN},\vec{u}\right]\right|}{|\vec{u}|}=\dfrac{\sqrt{336}}{\sqrt{6}}=2\sqrt{14}$.

Chọn đáp án C

**CÂU 2.** Trong KG $Oxyz$, cho đường thẳng d: $\dfrac{x-3}{-2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z-1}{1}$ và điểm $A(2;-1;0)$. Khoảng cách từ điểm $A$ đến đường thẳng $d$ bằng

A $\sqrt{7}$.  B $\dfrac{\sqrt{7}}{2}$.  C $\dfrac{\sqrt{21}}{3}$.  D $\dfrac{\sqrt{7}}{3}$.

**Lời giải.**

Gọi $M(3;0;1)\in d$.

Ta có $\overrightarrow{AM}=(1;1;1)$, $\overrightarrow{u_d}=(-2;-1;1)$ nên $\left[\overrightarrow{AM},\overrightarrow{u_d}\right]=(2;-3;1)$ và $\left|\left[\overrightarrow{AM},\overrightarrow{u_d}\right]\right|=\sqrt{14}$.

Vậy khoảng cách từ điểm $A$ đến đường thẳng $d$ bằng

$$\mathrm{d}(A,d)=\frac{\left|\left[\overrightarrow{AM};\overrightarrow{u_d}\right]\right|}{|\overrightarrow{u_d}|}=\frac{\sqrt{14}}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{21}}{3}.$$

Chọn đáp án C

**CÂU 3.** Khoảng cách từ điểm $H(1;0;3)$ đến đường thẳng $\mathrm{d}_1$: $\begin{cases}x=1+t\\y=2t\\z=3+t\end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$ và mặt phẳng $(P)$: $z-3=0$ lần lượt là $\mathrm{d}(H,d_1)$ và $\mathrm{d}(H,(P))$. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau:

A $\mathrm{d}(H,d_1)>\mathrm{d}(H,(P))$.  B $\mathrm{d}(H,(P))>\mathrm{d}(H,d_1)$.  C $\mathrm{d}(H,d_1)=6\cdot\mathrm{d}(H,(P))$.  D $\mathrm{d}(H,(P))=1$.

**Lời giải.**

Vì $H$ thuộc đường thẳng $\mathrm{d}_1$ và $H$ thuộc mặt phẳng $(P)$ nên khoảng cách từ điểm $H$ đến đường thẳng $\mathrm{d}_1$ bằng 0 và khoảng cách từ điểm $H$ đến mặt phẳng $(P)$ bằng 0.

Chọn đáp án C

**CÂU 4.** Tính khoảng cách giữa mặt phẳng $(\alpha)$: $2x-y-2z-4=0$ và đường thẳng d: $\begin{cases}x=1+t\\y=2+4t\\z=-t\end{cases}$.

A $\dfrac{1}{3}$.  B $\dfrac{4}{3}$.  C 0.  D 2.

**Lời giải.**

Mặt phẳng $(\alpha)$ có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}=(2;-1;-2)$, đường thẳng d có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}=(1;4;-1)$.

Ta có $\vec{n}\cdot\vec{u}=0$ và $H(1;2;0)\in d$ nhưng $H\notin(\alpha)$ nên đường thẳng d song song với mặt phẳng $(\alpha)$.

Khoảng cách giữa đường thẳng và mặt phẳng song song bằng khoảng cách từ một điểm bất kỳ của đường thẳng đến mặt phẳng.

Khi đó $\mathrm{d}(d,(\alpha))=\mathrm{d}(H,(\alpha))=\dfrac{|2\cdot1-1\cdot2-2\cdot0-4|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+(-2)^2}}=\dfrac{4}{3}$.

Chọn đáp án B

**CÂU 5.** Trong KG $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)$: $2x-2y-z+1=0$ và đường thẳng $\Delta$: $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z-1}{2}$. Tính khoảng cách d giữa $\Delta$ và $(P)$.

A $\mathrm{d}=2$.  B $\mathrm{d}=\dfrac{5}{3}$.  C $\mathrm{d}=\dfrac{2}{3}$.  D $\mathrm{d}=\dfrac{1}{3}$.

**Lời giải.**

$(P)$ có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}=(2;-2;-1)$ và đường thẳng $\Delta$ có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}=(2;1;2)$ thỏa mãn $\vec{n}\cdot\vec{u}=0$ nên $\Delta\parallel(P)$ hoặc $\Delta\subset(P)$.

Lấy $A(1;-2;1)\in\Delta$, ta có $\mathrm{d}(\Delta,(P))=\mathrm{d}(A,(P))=\dfrac{|2\cdot1-2\cdot(-2)-1+1|}{\sqrt{4+4+1}}=2$.

Chọn đáp án A

**CÂU 6.** Trong KG $Oxyz$, khoảng cách giữa đường thẳng $d$: $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{-2}$ và mặt phẳng $(P): x+y+z+2=0$ bằng

A $2\sqrt{3}$.  B $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.  C $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.  D $\sqrt{3}$.

**Lời giải.**

Đường thẳng $d$ qua $M(1;0;0)$ và có véctơ chỉ phương $\vec{a}=(1;1;-2)$.
Mặt phẳng $(P)$ có véctơ pháp tuyến $\vec{n}=(1;1;1)$.

Ta có $\begin{cases}\vec{a}\cdot\vec{n}=1\cdot 1+1\cdot 1-2\cdot 1=0\\ M\notin(P)\end{cases}\Rightarrow d\parallel(P)$.

Do đó $\mathrm{d}(d,(P))=\mathrm{d}(M,(P))=\dfrac{|1+0+0+2|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\sqrt{3}$.

Chọn đáp án D

**CÂU 7.** Trong KG $Oxyz$, khoảng cách giữa đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z-2}{1}$ và mặt phẳng $(P)\colon x-2y+2z+4=0$ bằng

(A) 1. (B) 0. (C) 3. (D) 2.

**Lời giải.**

Đường thẳng $d$ qua $M(1;3;2)$ và có véctơ chỉ phương $\vec{a}=(2;2;1)$.
Mặt phẳng $(P)$ có véctơ pháp tuyến $\vec{n}=(1;-2;2)$.

Ta có $\begin{cases}\vec{a}\cdot\vec{n}=2\cdot 1+2\cdot(-2)+1\cdot 2=0\\ M\notin(P)\end{cases}\Rightarrow d\parallel(P)$.

Do đó $\mathrm{d}(d;(P))=\mathrm{d}(M;(P))=\dfrac{|1-6+4+4|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}}=1$.

Chọn đáp án A

**CÂU 8.** Trong KG $Oxyz$, cho điểm $A(3;-2;4)$ và đường thẳng $d\colon \dfrac{x-5}{2}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z-2}{-2}$. Điểm $M$ thuộc đường thẳng $d$ sao cho $M$ cách $A$ một khoảng bằng $\sqrt{17}$. Tọa độ điểm $M$ là

(A) $(5;1;2)$ và $(6;9;2)$. (B) $(5;1;2)$ và $(-1;-8;-4)$. (C) $(5;-1;2)$ và $(1;-5;6)$. (D) $(5;1;2)$ và $(1;-5;6)$.

**Lời giải.**

Gọi $M(5+2t;1+3t;2-2t)\in d$. Ta có $\overrightarrow{AM}=(2+2t;3+3t;-2-2t)$.

Với $AM=\sqrt{17}\Leftrightarrow 17(1+t)^2=17\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t=0\Rightarrow M(5;1;2)\\ t=-2\Rightarrow M(1;-5;6).\end{array}\right.$

Chọn đáp án D

**CÂU 9.** Trong KG $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1\colon \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{3}$ và $d_2\colon \begin{cases}x=1+t\\ y=2+t\\ z=m\end{cases}$. Gọi $S$ là tập tất cả các số $m$ sao cho $d_1$ và $d_2$ chéo nhau và khoảng cách giữa chúng bằng $\dfrac{5}{\sqrt{19}}$. Tính tổng các phần tử của $S$.

(A) $-11$. (B) 12. (C) $-12$. (D) 11.

**Lời giải.**

Đường thẳng $d_1$ đi qua điểm $M(1;0;0)$, có véctơ chỉ phương $\vec{u}_1=(2;1;3)$.
Đường thẳng $d_2$ đi qua điểm $N(1;2;m)$, có véctơ chỉ phương $\vec{u}_2=(1;1;0)$.
Ta có $[\vec{u}_1,\vec{u}_2]=(-3;3;1)$ và $\overrightarrow{MN}=(0;2;m)$.
Hai đường thẳng $d_1$ và $d_2$ chéo nhau khi và chỉ khi $[\vec{u}_1,\vec{u}_2]\cdot\overrightarrow{MN}\neq 0\Leftrightarrow m\neq -6$.

Mặt khác $\mathrm{d}(d_1,d_2)=\dfrac{5}{\sqrt{19}}\Leftrightarrow \dfrac{\left|[\vec{u}_1,\vec{u}_2]\cdot\overrightarrow{MN}\right|}{|[\vec{u}_1,\vec{u}_2]|}=\dfrac{5}{\sqrt{19}}$

$$\Leftrightarrow \frac{|m+6|}{\sqrt{19}}=\frac{5}{\sqrt{19}}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m=-1\\ m=-11.\end{array}\right.$$

Khi đó tổng các phần tử của $m$ là $-12$.

Chọn đáp án C

**CÂU 10.** Trong KG $Oxyz$, tính khoảng cách giữa hai đường thẳng $d_1\colon \dfrac{x}{1}=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z-2}{1}$ và $d_2\colon \dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z-2}{1}$.

(A) $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$. (B) $\dfrac{12}{5}$. (C) $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$. (D) 3.

**Lời giải.**

Đường thẳng $d_1$ qua $M(0;3;2)$ và có véctơ chỉ phương $\vec{u}=(1;2;1)$.
Đường thẳng $d_2$ qua $N(3;-1;2)$ và có véctơ chỉ phương $\vec{v}=(1;-2;1)$.
Ta có $[\vec{u},\vec{v}]=(4;0;-4)$ và $\overrightarrow{MN}=(3;-4;0)$.

Khi đó $\mathrm{d}\left(d_1, d_2\right)=\dfrac{\left|[\vec{u}, \vec{v}] \cdot \overrightarrow{MN}\right|}{|[\vec{u}, \vec{v}]|}=\dfrac{12}{4\sqrt{2}}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

Chọn đáp án C ..........

**CÂU 11.** Trong KG $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d\colon \begin{cases} x=1+t \\ y=-3-t \\ z=2+2t \end{cases}$ và $d'\colon \dfrac{x}{3}=\dfrac{y-3}{-1}=\dfrac{z-1}{1}$. Khi đó khoảng cách giữa $d$ và $d'$ bằng

Ⓐ $\dfrac{13\sqrt{30}}{30}$. Ⓑ $\dfrac{\sqrt{30}}{3}$. Ⓒ $\dfrac{9\sqrt{30}}{10}$. Ⓓ 0.

**Lời giải.**

Đường thẳng $d$ qua $A\left(1;-3;2\right)$ và có véctơ chỉ phương $\vec{u}=(1;-1;2)$.
Đường thẳng $d'$ qua $B\left(0;3;1\right)$ và có véctơ chỉ phương $\overrightarrow{u'}=(3;-1;1)$.

Khi đó $\mathrm{d}\left(d, d'\right)=\dfrac{\left|\left[\vec{u}, \overrightarrow{u'}\right] \cdot \overrightarrow{AB}\right|}{\left|\left[\vec{u}, \overrightarrow{u'}\right]\right|}=\dfrac{27}{\sqrt{30}}=\dfrac{9\sqrt{30}}{10}$.

Chọn đáp án C ..........

**CÂU 12.** Trong KG $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1\colon \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{-1}=\dfrac{z}{1}$ và $d_2\colon \begin{cases} x=1+4t \\ y=-1-2t \\ z=2+2t \end{cases}$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng đã cho bằng

Ⓐ $\dfrac{\sqrt{87}}{6}$. Ⓑ $\dfrac{\sqrt{174}}{6}$. Ⓒ $\dfrac{\sqrt{174}}{3}$. Ⓓ $\dfrac{\sqrt{87}}{3}$.

**Lời giải.**

Đường thẳng $d_1$ đi qua điểm $M(1;-2;0)$ và có véctơ chỉ phương $\overrightarrow{u_1}=(2;-1;1)$.
Đường thẳng $d_2$ đi qua điểm $N(1;-1;2)$ và có véctơ chỉ phương $\overrightarrow{u_2}=(4;-2;2)$.

Ta có $\begin{cases} \overrightarrow{u_2}=2\cdot\overrightarrow{u_1} \\ M\left(1;-2;0\right)\notin d_2 \end{cases} \Rightarrow d_1 \parallel d_2$.

Ta có $\overrightarrow{MN}=(0;1;2) \Rightarrow \left[\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{u_2}\right]=(6;8;-4)$.

Suy ra $\mathrm{d}\left(d_1, d_2\right)=\mathrm{d}\left(M; d_2\right)=\dfrac{\left|\left[\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{u_2}\right]\right|}{\left|\overrightarrow{u_2}\right|}=\dfrac{\sqrt{6^2+8^2+(-4)^2}}{\sqrt{4^2+(-2)^2+2^2}}=\dfrac{\sqrt{174}}{6}$.

Chọn đáp án B ..........

**CÂU 13.** Trong KG $Oxyz$, tính khoảng cách từ giao điểm của hai đường thẳng $d_1$ và $d_2$ tới mặt phẳng $(P)$. Với $d_1\colon \dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z-1}{3}$; $d_2\colon \dfrac{-x+1}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{1}$ và $(P)\colon 2x+4y-4z-3=0$.

Ⓐ $\dfrac{4}{3}$. Ⓑ $\dfrac{7}{6}$. Ⓒ $\dfrac{13}{6}$. Ⓓ $\dfrac{5}{3}$.

**Lời giải.**

PTTS của hai đường thẳng $d_1, d_2$ là $d_1\colon \begin{cases} x=-1+2t \\ y=3t \\ z=1+3t \end{cases}$; $d_2\colon \begin{cases} x=1-2t' \\ y=t' \\ z=1+t' \end{cases}$.

Xét hệ phương trình: $\begin{cases} -1+2t=1-2t' \\ 3t=t' \\ 1+3t=1+t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2t+2t'=2 \\ 3t-t'=0 \\ 3t-t'=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=\dfrac{1}{4} \\ t'=\dfrac{3}{4}. \end{cases}$

Suy ra giao điểm của $d_1, d_2$ là $A\left(-\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{4};\dfrac{7}{4}\right)$.

Khoảng cách từ $A$ đến mặt phẳng $(P)$ là

$$\mathrm{d}\left(A;(P)\right)=\dfrac{\left|2\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)+4\cdot\left(\dfrac{3}{4}\right)-4\cdot\left(\dfrac{7}{4}\right)-3\right|}{\sqrt{2^2+4^2+(-4)^2}}=\dfrac{4}{3}.$$

Chọn đáp án A ..........

**CÂU 14.** Trong KG $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon 2x-y+2z-3=0$ và đường thẳng $\Delta\colon \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{x-1}{-1}$. Khoảng cách giữa đường thẳng $\Delta$ và mặt phẳng $(P)$ bằng

**A** $\dfrac{2}{3}$. **B** $\dfrac{8}{3}$. **C** $\dfrac{2}{9}$. **D** 1.

**Lời giải.**

Mặt phẳng $(P)$ có véctơ pháp tuyến là $\vec{n}=(2;-1;2)$.
Đường thẳng $\Delta$ đi qua điểm $M=(1;-1;1)$ và có véctơ chỉ phương là $\vec{u}=(2;2;-1)$.

Ta có $\begin{cases}\vec{n}\cdot\vec{u}=2\cdot 2+(-1)\cdot 2+2\cdot(-1)=0\\ M\notin(P)\end{cases}\Rightarrow \Delta /\!/ (P)$.

Khi đó $\mathrm{d}(\Delta,(P))=\mathrm{d}(M,(P))=\dfrac{|2+1+2-3|}{\sqrt{2^2+2^2+(-1)^2}}=\dfrac{2}{3}$.

Chọn đáp án A ..........

**CÂU 15.** Trong KG $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z+1}{-1}$, mặt phẳng $(P)\colon x+y+z+2=0$. Gọi $M$ là giao điểm của $d$ và $(P)$, $\Delta$ là đường thẳng nằm trong mặt phẳng $(P)$ vuông góc với $d$ và cách $M$ một khoảng bằng $\sqrt{42}$. PTĐT $\Delta$ là

**A** $\dfrac{x-5}{2}=\dfrac{y+2}{-3}=\dfrac{z+4}{1}$. **B** $\dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{y+1}{-3}=\dfrac{z+1}{1}$. **C** $\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y+4}{-3}=\dfrac{z+5}{1}$. **D** $\dfrac{x+3}{2}=\dfrac{y+4}{-3}=\dfrac{z-5}{1}$.

**Lời giải.**

Ta có $M=d\cap(P)$.
Suy ra $M\in d\Rightarrow M(3+2t;-2+t;-1-t)$ và $M\in(P)\Rightarrow t=-1\Rightarrow M(1;-3;0)$.
Mặt phẳng $(P)$ có véctơ pháp tuyến là $\vec{n}_P=(1;1;1)$.
Đường thẳng $d$ có véctơ chỉ phương $\vec{a}_d=(2;1;-1)$.
Đường thẳng $\Delta$ có véctơ chỉ phương $\vec{a}_\Delta=[\vec{a}_d,\vec{n}_P]=(2;-3;1)$.
Gọi $N(x;y;z)$ là hình chiếu vuông góc của $M$ trên $\Delta$, khi đó $\overrightarrow{MN}=(x-1;y+3;z)$.

Ta có $\begin{cases}\overrightarrow{MN}\perp\overrightarrow{a_\Delta}\\ N\in(P)\\ MN=\sqrt{42}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x-3y+z-11=0\\ x+y+z+2=0\\ (x-1)^2+(y+3)^2+z^2=42.\end{cases}$

Giải hệ ta tìm được $N(5;-2;-5)$ hoặc $N(-3;-4;5)$.

Với $N(5;-2;-5)$, ta có $\Delta:\dfrac{x-5}{2}=\dfrac{y+2}{-3}=\dfrac{z+5}{1}$.

Với $N(-3;-4;5)$, ta có $\Delta:\dfrac{x+3}{2}=\dfrac{y+4}{-3}=\dfrac{z-5}{1}$.

Chọn đáp án D ..........

**CÂU 16.** Trong KG $Oxyz$, cho 4 điểm $A(2;0;0)$, $B(0;3;0)$, $C(0;0;6)$ và $D(1;1;1)$. Gọi $\Delta$ là đường thẳng qua $D$ và thỏa mãn tổng khoảng cách từ các điểm $A,B,C$ đến $\Delta$ là lớn nhất. Khi đó $\Delta$ đi qua điểm nào dưới đây?

**A** $(4;3;7)$. **B** $(-1;-2;1)$. **C** $(7;5;3)$. **D** $(3;4;3)$.

**Lời giải.**

Phương trình mặt phẳng $(ABC)\colon \dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}+\dfrac{z}{6}=1\Leftrightarrow 3x+2y+z-6=0$.

Dễ thấy $D\in(ABC)$.
Ta có $P=\mathrm{d}(A,\Delta)+\mathrm{d}(B,\Delta)+\mathrm{d}(C,\Delta)\le AD+BD+CD$.
Vậy $P$ lớn nhất khi và chỉ khi các hình chiếu vuông góc của các điểm $A,B,C$ trên $\Delta$ trùng $D$ hay $\Delta\perp(ABC)$ tại $D$.

PTĐT $\Delta$ là $\begin{cases}x=1+3t\\ y=1+2t\\ z=1+t\end{cases}$, ta thấy $\Delta$ đi qua điểm có tọa độ $(7;5;3)$.

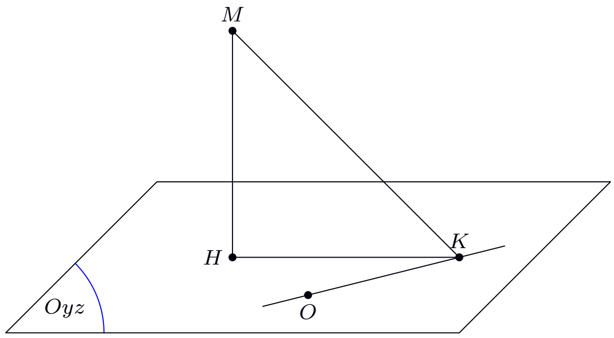
Chọn đáp án C ..........

**CÂU 17.** Trong KG $Oxyz$, gọi $d$ là đường thẳng đi qua $O$ thuộc mặt phẳng $(Oyz)$ và cách điểm $M(1;-2;1)$ một khoảng nhỏ nhất. Côsin của góc giữa $d$ và trục tung bằng

**A** $\dfrac{2}{5}$. **B** $\dfrac{1}{5}$. **C** $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$. **D** $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$.

**Lời giải.**

Gọi $H, K$ lần lượt là hình chiếu của $M$ trên mặt phẳng $(Oyz)$ và trên đường thẳng $d$.
Ta có $d(M, d) = MK \geq MH = 1$ với $H(0; -2; 1)$.
Suy ra $\mathrm{d}(M, d)_{min} \Leftrightarrow K \equiv H$.
Khi đó $d$ có một véctơ chỉ phương là $\overrightarrow{OH} = (0; -2; 1)$.



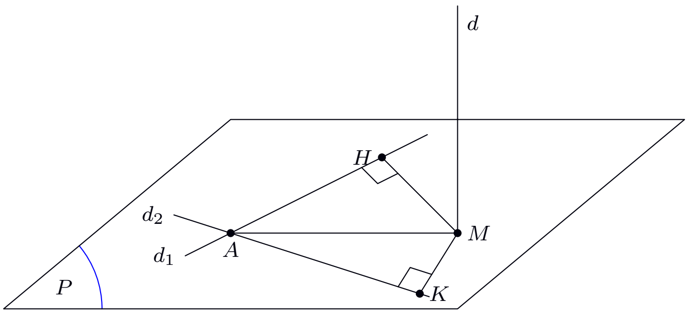

Vậy $\cos(d, Oy) = \dfrac{\left|\overrightarrow{OH} \cdot \vec{j}\right|}{\left|\overrightarrow{OH}\right| \cdot \left|\vec{j}\right|} = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$.

Chọn đáp án D ..................................................................... □

**CÂU 18.** Trong KG $Oxyz$, cho điểm $A(2; 1; 1)$, mặt phẳng $(P)\colon x - z - 1 = 0$ và đường thẳng $d\colon \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 \\ z = -2 + t \end{cases}$. Gọi $d_1; d_2$ là các đường thẳng đi qua $A$, nằm trong $(P)$ và đều có khoảng cách đến đường thẳng $d$ bằng $\sqrt{6}$. Côsin của góc giữa $d_1$ và $d_2$ bằng

(A) $\dfrac{1}{3}$. (B) $\dfrac{2}{3}$. (C) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. (D) $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$.

**Lời giải.**




- Ta có $\vec{n}_P = (1; 0; -1)$, $\vec{u}_d = (-1; 0; 1) \Rightarrow d \perp (P)$ và $d \cap (P) = M(0; 2; -1)$.
  Suy ra $\overrightarrow{MA} = (2; -1; 2) \Rightarrow MA = 3$.
- Gọi $H; K$ lần lượt là hình chiếu vuông góc của $M$ lên $d_1$ và $d_2$, ta có:
  $\begin{cases} \mathrm{d}(d_1; d) = \mathrm{d}(M; d_1) = MH \\ \mathrm{d}(d_2; d) = \mathrm{d}(M; d_2) = MK \end{cases} \Rightarrow MH = MK = \sqrt{6}$.
  $\Rightarrow \sin\widehat{MAK} = \sin\widehat{MAH} = \dfrac{HM}{AM} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$.
  $\Rightarrow \cos(d_1; d_2) = \left|\cos\left(2.\widehat{MAH}\right)\right| = \left|1 - 2\sin^2\widehat{MAH}\right| = \left|1 - \dfrac{4}{3}\right| = \dfrac{1}{3}$.

Chọn đáp án A ..................................................................... □

**CÂU 19.** Trong KG $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x-3}{1} = \dfrac{y-3}{3} = \dfrac{z}{2}$, mặt phẳng $(P)\colon x + y - z + 3 = 0$ và điểm $A(1; 2; -1)$. Đường thẳng $\Delta$ đi qua $A$, cắt $d$ và song song với mặt phẳng $(P)$. Tính khoảng cách từ gốc tọa độ $O$ đến $\Delta$.

(A) $\sqrt{3}$. (B) $\dfrac{16}{3}$. (C) $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$. (D) $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$.

**Lời giải.**

Gọi $M = \Delta \cap d \Rightarrow M(t + 3; 3t + 3; 2t)$ $(t \in \mathbb{R}) \Rightarrow \overrightarrow{AM} = (t + 2; 3t + 1; 2t + 1)$.
Gọi $\vec{n} = (1; 1; -1)$ là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng $(P)$.
Ta có $\Delta \parallel (P) \Rightarrow \overrightarrow{AM} \perp \vec{n} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$

$\Leftrightarrow t + 2 + 3t + 1 - 2t - 1 = 0$

$\Leftrightarrow t = -1 \Rightarrow \overrightarrow{AM} = (1; -2; -1)$.

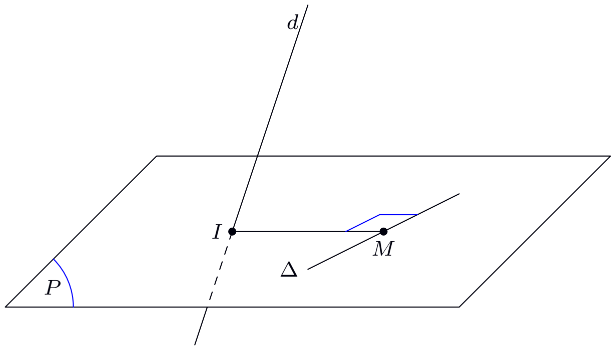
Khi đó $\mathrm{d}(O; \Delta) = \dfrac{\left|\left[\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{OA}\right]\right|}{\left|\overrightarrow{AM}\right|} = \dfrac{4\sqrt{3}}{3}$.

Chọn đáp án (D) ..............................................................................................□

**CÂU 20.** Trong KG $Oxyz$, đường thẳng $d\colon \begin{cases} x = t \\ y = -1 + 2t \\ z = 2 - t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ cắt mặt phẳng $(P)\colon x + y + z - 3 = 0$ tại điểm $I$. Gọi $\Delta$ là đường thẳng nằm trong mặt phẳng $(P)$ sao cho $\Delta \perp d$ và khoảng cách từ điểm $I$ đến đường thẳng $\Delta$ bằng $\sqrt{42}$. Tìm tọa độ hình chiếu $M(a;b;c)$ (với $a + b > c$) của điểm $I$ trên đường thẳng $\Delta$.

(A) $M\,(2;5;-4)$. (B) $M\,(6;-3;0)$. (C) $M\,(5;2;-4)$. (D) $M\,(-3;6;0)$.

**Lời giải.**




**Cách 1.**

$(P)$ có véctơ pháp tuyến $\vec{n} = (1;1;1)$ và $d$ có véctơ chỉ phương $\vec{u} = (1;2;-1)$.

$I = d \cap (P) \Rightarrow I(1;1;1)$.

Vì $\Delta \subset (P)$ và $\Delta \perp d \Rightarrow \Delta$ có véctơ chỉ phương $\vec{u}_\Delta = [\vec{n}, \vec{u}] = (-3;2;1)$.

$M$ là hình chiếu của $I$ trên $\Delta$ nên $M$ thuộc mặt phẳng $(Q)$ đi qua $I$ và vuông góc với $\Delta$.

Mặt phẳng $(Q)$ nhận $\vec{u}_\Delta = (-3;2;1)$ làm véctơ pháp tuyến nên ta có phương trình của $(Q)\colon -3(x-1) + 2(y-1) + 1(z-1) = 0 \Leftrightarrow 3x - 2y - z = 0$.

Gọi $d_1 = (P) \cap (Q) \Rightarrow d_1$ có véctơ chỉ phương $\vec{v} = [\vec{u}_\Delta, \vec{n}] = (1;4;-5)$ và $d_1$ đi qua $I$, phương trình của $d_1\colon \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + 4t \\ z = 1 - 5t. \end{cases}$

Mặt khác $M \in \Delta \Rightarrow M \in (P) \Rightarrow M \in d_1$.

Giả sử $M(1+t; 1+4t; 1-5t) \Rightarrow \overrightarrow{IM} = (t; 4t; -5t)$.

Ta có $IM = \sqrt{42} \Leftrightarrow \sqrt{t^2 + 16t^2 + 25t^2} = \sqrt{42} \Leftrightarrow t = \pm 1$.

+) Với $t = 1 \Rightarrow M(2;5;-4)$.

+) Với $t = -1 \Rightarrow M(0;-3;6)$.

Vì $M(a;b;c)$ (với $a + b > c$) nên $M(2;5;-4)$.

**Cách 2.**

Vì $M(a;b;c)$ là hình chiếu vuông góc của $I$ lên $\Delta$. Khi đó ta có

$$\begin{cases} M \in (P) \\ \overrightarrow{IM} \perp \vec{u}_\Delta \\ IM = \sqrt{42} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b + c - 3 = 0 \\ -3\,(a-1) + 2\,(b-1) + (c-1) = 0 \\ (a-1)^2 + (b-1)^2 + (c-1)^2 = 42 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + b + c - 3 = 0 \\ -3a + 2b + c = 0 \\ (a-1)^2 + (b-1)^2 + (c-1)^2 = 42 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4a - b = 3 \\ a + b + c - 3 = 0 \\ (a-1)^2 + (b-1)^2 + (c-1)^2 = 42 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = 4a - 3 \\ c = -5a + 6 \\ (a-1)^2 + (b-1)^2 + (c-1)^2 = 42 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = -3 \\ c = 6 \end{cases} \text{hoặc} \begin{cases} a = 2 \\ b = 5 \\ c = -4. \end{cases}$$

Vì $M(a;b;c)$ (với $a+b>c$) nên $M(2;5;-4)$.

Chọn đáp án (A) ..........

**CÂU 21.** Trong KG $Oxyz$, cho hai điểm $A(3;3;1)$, $B(0;2;1)$ và mặt phẳng $(P)\colon x+y+z-7=0$. Đường thẳng $d$ nằm trong $(P)$ sao cho mọi điểm của $d$ cách đều hai điểm $A, B$ có phương trình là

(A) $\begin{cases} x=2t \\ y=7-3t \\ z=t \end{cases}$. (B) $\begin{cases} x=t \\ y=7+3t \\ z=2t \end{cases}$. (C) $\begin{cases} x=t \\ y=7-3t \\ z=2t \end{cases}$. (D) $\begin{cases} x=-t \\ y=7-3t \\ z=4t \end{cases}$.

**Lời giải.**

- Các điểm cách đều hai điểm $A, B$ thì nằm trên mặt phẳng $(\alpha)$ là mặt phẳng trung trực của đoạn $AB$.
- Gọi $I$ là trung điểm của $AB \Rightarrow I\left(\dfrac{3}{2};\dfrac{5}{2};1\right)$.
- Phương trình mặt phẳng $(\alpha)$ là $3x+y-7=0$.

Do đó đường thẳng $d$ là giao tuyến của 2 mặt phẳng $(P)$ và $(\alpha)$.

PTĐT $d$ đi qua điểm $M(0;7;0)=(P)\cap(\alpha)$ và nhận $\vec{u}=\left[\vec{n}_{(\alpha)},\vec{n}_{(P)}\right]=(1;-3;2)$ làm một véctơ chỉ phương là $\begin{cases} x=t \\ y=7-3t \\ z=2t. \end{cases}$

Chọn đáp án (C) ..........

**CÂU 22.** Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1\colon \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z-1}{2}$ và $d_2\colon \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z+2}{1}$. Mặt phẳng $(P)\colon x+ay+bz+c=0\,(c>0)$ song song với $d_1$, $d_2$ và khoảng cách từ $d_1$ đến $(P)$ bằng hai lần khoảng cách từ $d_2$ đến $(P)$. Giá trị của $a+b+c$ bằng

(A) 14. (B) 6. (C) $-4$. (D) $-6$.

**Lời giải.**

Gọi $\vec{u}_1=(1;1;2)$, $\vec{u}_2=(2;1;1)$ lần lượt là một véctơ chỉ phương của $d_1$, $d_2$.
Gọi $\vec{n}_1=[\vec{u}_1,\vec{u}_2]=(-1;3;-1)$. Ta có $\vec{n}_2=(1;-3;1)$ cùng phương $\vec{n}_1$.
$\vec{n}=(1;a;b)$ là một véctơ chỉ phương của $(P)$.
Do $(P)$ song song với $d_1$, $d_2$ nên có véctơ pháp tuyến là $\vec{n}=(1;-3;1)$.
Suy ra phương trình mặt phẳng $(P)$ có dạng: $x-3y+z+c=0$.
Lấy $M_1(1;-2;1)\in d_1$, $M_2(1;1;-2)\in d_2$.
Ta có $\mathrm{d}(d_1;(P))=2\mathrm{d}(d_2;(P))\Leftrightarrow \mathrm{d}(M_1;(P))=2\mathrm{d}(M_2;(P))$

$$\Leftrightarrow \frac{|1-3(-2)+1+c|}{\sqrt{11}}=2\frac{|1-3-2+c|}{\sqrt{11}}$$
$$\Leftrightarrow |8+c|=2|-4+c|$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 8+c=2(-4+c) \\ 8+c=2(4-c) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c=16\ (\text{nhận}) \\ c=0.\ (\text{loại}) \end{array}\right.$$

Nên $(P)\colon x-3y+z+16=0$, suy ra $a=-3$, $b=1$, $c=16$.
Vậy $a+b+c=14$.

Chọn đáp án (A) ..........

## 12 VTTĐ của ĐT và MP

**CÂU 1.** Trong KG $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta:\dfrac{x-2}{-3}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+1}{2}$. Gọi $M$ là giao điểm của $\Delta$ với mặt phẳng $(P)$ : $x+2y-3z+2=0$. Tọa độ điểm $M$ là

(A) $M(2;0;-1)$. (B) $M(5;-1;-3)$. (C) $M(1;0;1)$. (D) $M(-1;1;1)$.

**Lời giải.**

Tọa độ của điểm $M$ là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} \dfrac{x-2}{-3}=\dfrac{y}{1} \\ \dfrac{y}{1}=\dfrac{z+1}{2} \\ x+2y-3z+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+3y=2 \\ 2y-z=1 \\ x+2y-3z=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=1 \\ z=1. \end{cases}$$

Vậy $M(-1;1;1)$.

Chọn đáp án D ..............................................................................................□

**CÂU 2.** Trong KG $Oxyz$, giao điểm của mặt phẳng $(P): 3x+5y-z-2=0$ và đường thẳng $\Delta: \dfrac{x-12}{4}=\dfrac{y-9}{3}=\dfrac{z-1}{1}$ là điểm $M(x_0;y_0;z_0)$. Giá trị tổng $x_0+y_0+z_0$ bằng

A. 1. B. 2. C. 5. D. $-2$.

**Lời giải.**

Ta có $M\in\Delta \Rightarrow M(12+4t;9+3t;1+t)$.
$M\in(P)\Leftrightarrow 3(12+4t)+5(9+3t)-(1+t)-2=0\Leftrightarrow t=-3$.
$M(0;0;-2)\Rightarrow x_0+y_0+z_0=-2$.

Chọn đáp án D ..............................................................................................□

**CÂU 3.** Trong KG $Oxyz$, cho 3 điểm $A(1;0;0)$, $B(0;2;0)$, $C(0;0;3)$ và $d$: $\begin{cases}x=-t\\y=2+t\\z=3+t\end{cases}$. Gọi $M(a;b;c)$ là tọa độ giao điểm của đường thẳng $d$ và mặt phẳng $(ABC)$. Tổng $S=a+b+c$ là

A. $-7$. B. 11. C. 5. D. 6.

**Lời giải.**

Mặt phẳng $(ABC)$ qua các điểm $A(1;0;0)$, $B(0;2;0)$, $C(0;0;3)$ nằm trên các trục $Ox, Oy, Oz$ có phương trình là $\dfrac{x}{1}+\dfrac{y}{2}+\dfrac{z}{3}=1$.
Điểm $M(a;b;c)$ là tọa độ giao điểm của của $d$ và mặt phẳng.

Suy ra $\dfrac{-t}{1}+\dfrac{2+t}{2}+\dfrac{3+t}{3}=1\Leftrightarrow t=6$ suy ra $\begin{cases}a=-6\\b=8\\c=9.\end{cases}$

Vậy $S=-6+8+9=11$.

Chọn đáp án B ..............................................................................................□

**CÂU 4.** Trong KG $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y}{-3}=\dfrac{z-5}{-1}$ và mặt phẳng $(P): 3x-3y+2z+6=0$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $d$ cắt và không vuông góc với $(P)$.
B. $d$ vuông góc với $(P)$.
C. $d$ song song với $(P)$.
D. $d$ nằm trong $(P)$.

**Lời giải.**

Đường thẳng $d$ có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}=(1;-3;-1)$.
Mặt phẳng $(P)$ có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}=(3;-3;2)$.
Ta có $\vec{u}\cdot\vec{n}=3+9-2=10\neq 0$ nên loại trường hợp $d\parallel(P)$ và $d\subset(P)$.
Lại có $\vec{u}$ và $\vec{n}$ không cùng phương nên loại trường hợp $d\perp(P)$.
Vậy $d$ cắt và không vuông góc với $(P)$.

Chọn đáp án A ..............................................................................................□

**CÂU 5.** Trong KG $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 3x+5y-z-2=0$ và đường thẳng $d: \dfrac{x-12}{4}=\dfrac{y-9}{3}=\dfrac{z-1}{1}$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. $d\subset(Q)$. B. $d\parallel(Q)$. C. $d$ cắt $(Q)$. D. $d\perp(Q)$.

**Lời giải.**

$(P): 3x+5y-z-2=0$ có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}=(3;5;-1)$.
$d: \dfrac{x-12}{4}=\dfrac{y-9}{3}=\dfrac{z-1}{1}$ có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}=(4;3;1)$.
$\vec{n}\cdot\vec{u}=26\neq 0$ nên $d$ không song song với $(P)$ và $d\not\subset(P)$.
$[\vec{n},\vec{u}]\neq 0$ suy ra $d$ không vuông góc $(P)$.
Vậy $d$ cắt $(P)$.

Chọn đáp án C ..............................................................................................□

**CÂU 6.** Trong KG $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 3x-3y+2z-5=0$ và đường thẳng $d: \begin{cases}x=-1+2t\\y=3+4t\\z=3t\end{cases}$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. $d\parallel(P)$. B. $d\subset(P)$. C. $d$ cắt $(P)$. D. $d\perp(P)$.

**Lời giải.**

$(P): 3x-3y+2z-5=0$ có véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}=(3;-3;2)$.
$d$ có véc-tơ chỉ phương là $\vec{u}=(2;4;3)$.

Ta có $\begin{cases}\vec{n}\cdot\vec{u}=0\\ A(-1;3;3)\in d\\ A\notin(P)\end{cases}\Leftrightarrow d\parallel(P)$.

Chọn đáp án A

**CÂU 7.** Trong KG $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x+y+z-4=0$ và đường thẳng $d: \begin{cases}x=1+t\\ y=1+2t\\ z=2-3t\end{cases}$. Số giao điểm của đường thẳng $d$ và mặt phẳng $(P)$ là

A. Vô số. B. 1. C. Không có. D. 2.

**Lời giải.**

$(P)$ có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}=(1;1;1)$.
$d$ có véc-tơ chỉ phương là $\vec{u}=(1;2;-3)$.

Ta có $\begin{cases}\vec{n}\cdot\vec{u}=0\\ A(1;1;2)\in d\\ A\in(P)\end{cases}\Leftrightarrow d\subset(P)$.

Vậy $d$ và $(P)$ có vô số giao điểm.

Chọn đáp án A

**CÂU 8.** Trong KG $Oxyz$, tọa độ giao điểm $M$ của đường thẳng $d: \dfrac{x-12}{4}=\dfrac{y-9}{3}=\dfrac{z-1}{1}$ và mặt phẳng $(P): 3x+5y-z-2=0$ là

A. $M(0;2;3)$. B. $M(0;0;-2)$. C. $M(0;0;2)$. D. $M(0;-2;-3)$.

**Lời giải.**

Giải hệ $\begin{cases}x=12+4t\\ y=9+3t\\ z=1+t\\ 3x+5y-z-2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\ y=0\\ z=-2\\ t=-3.\end{cases}$

Vậy $M(0;0;-2)$.

Chọn đáp án B

**CÂU 9.** Giao điểm của mặt phẳng $(P): x+y-z-2=0$ và đường thẳng $d: \begin{cases}x=2+t\\ y=-t\\ z=3+3t\end{cases}$ là

A. $(1;1;0)$. B. $(0;2;4)$. C. $(0;4;2)$. D. $(2;0;3)$.

**Lời giải.**

Gọi $A(x;y;z)$ là giao điểm của đường thẳng $d$ và mặt phẳng $(P)$.
Ta có $2+t-t-(3+3t)-2=0\Leftrightarrow -3t-3=0\Leftrightarrow t=-1$.

$\Rightarrow\begin{cases}x=1\\ y=1\\ z=0\end{cases}\Rightarrow A(1;1;0)$.

Chọn đáp án A

**CÂU 10.** Trong không gian$Oxyz$, cho đường thẳng $d: \begin{cases}x=1+2t\\ y=3-t\\ z=1-t\end{cases}, t\in\mathbb{R}$ và mặt phẳng $(P): x+2y-3z+2=0$. Tìm tọa độ của điểm $A$ là giao điểm của đường thẳng $d$ và mặt phẳng $(P)$.

A. $A(3;5;3)$. B. $A(1;3;1)$. C. $A(-3;5;3)$. D. $A(1;2;-3)$.

**Lời giải.**

Vì $A$ là giao điểm của đường thẳng $d$ và mặt phẳng $(P)$ nên

- $A\in d\Rightarrow A(1+2t;3-t;1-t)$.
- $A\in(P)\Rightarrow(1+2t)+2(3-t)-3(1-t)+2=0\Rightarrow t=-2$.

Vậy tọa độ điểm $A(-3;5;3)$.

Chọn đáp án (C) ☐

**CÂU 11.** Trong KG $Oxyz$, giao điểm của mặt phẳng $(P): 3x+5y-z-2=0$ và đường thẳng $\Delta: \dfrac{x-12}{4}=\dfrac{y-9}{3}=\dfrac{z-1}{1}$ là điểm $M(x_0;y_0;z_0)$. Giá trị tổng $x_0+y_0+z_0$ bằng

(A) 1. (B) 2. (C) 5. (D) $-2$.

**Lời giải.**

$M\in\Delta \Rightarrow M(12+4t;9+3t;1+t)$.
$M\in(P) \Leftrightarrow 3(12+4t)+5(9+3t)-(1+t)-2=0 \Leftrightarrow t=-3$.
$M(0;0;-2) \Rightarrow x_0+y_0+z_0=-2$.

Chọn đáp án (D) ☐

**CÂU 12.** Trong KG $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \begin{cases} x=4-2t \\ y=-3+t \\ z=1-t \end{cases}$, giao điểm của $d$ với mặt phẳng $(Oxy)$ có tọa độ là

(A) $(4;-3;0)$. (B) $(2;-2;0)$. (C) $(0;-1;-1)$. (D) $(-2;0;-2)$.

**Lời giải.**

Mặt phẳng $(Oxy)$ có phương trình $z=0$.
Gọi $M(4-2m;-3+m;1-m)$ là giao điểm của $d$ với mặt phẳng $(Oxy)$ thì ta có

$$1-m=0 \Leftrightarrow m=1.$$

Vậy $M(2;-2;0)$.

Chọn đáp án (B) ☐

**CÂU 13.** Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho 3 điểm $A(1;0;0)$, $B(0;2;0)$, $C(0;0;3)$ và đường thẳng $d: \begin{cases} x=-t \\ y=2+t \\ z=3+t \end{cases}$.
Gọi $M(a;b;c)$ là toạ độ giao điểm của đường thẳng $d$ với mặt phẳng $(ABC)$. Tính tổng $S=a+b-c$.

(A) 6. (B) 5. (C) $-7$. (D) 11.

**Lời giải.**

Phương trình mặt phẳng $(ABC)$ có dạng $\dfrac{x}{1}+\dfrac{y}{2}+\dfrac{z}{3}=1 \Leftrightarrow 6x+3y+2z-6=0$.
Điểm $M\in d \Rightarrow M(-t;2+t;3+t)$. Lại vì $M=d\cap(ABC)$ nên ta có

$$6(-t)+3(2+t)+2(3+t)-6=0 \Leftrightarrow -t=-6 \Leftrightarrow t=6 \Rightarrow M(-6;8;9).$$

Vậy ta có $S=a+b-c=-6+8-9=-7$.

Chọn đáp án (C) ☐

**CÂU 14.** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $M(-4;5;2)$ lên mặt phẳng $(P): y+1=0$ là điểm có tọa độ

(A) $(-4;-1;2)$. (B) $(-4;1;2)$. (C) $(0;-1;0)$. (D) $(0;1;0)$.

**Lời giải.**

Gọi $H$ là hình chiếu vuông góc của $M$ lên $(P) \Rightarrow MH: \begin{cases} x=-4 \\ y=5+t \\ z=2. \end{cases}$

$H\in MH \Rightarrow H(-4;5+t;2)$.
$H\in(P) \Leftrightarrow 5+t+1=0 \Leftrightarrow t=-6 \Rightarrow H(-4;-1;2)$.

Chọn đáp án (A) ☐

**CÂU 15.** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \dfrac{x-12}{4}=\dfrac{y-9}{3}=\dfrac{z-1}{1}$ và mặt phẳng $(P): 3x+5y-z-2=0$. Tìm tọa độ giao điểm của $d$ và $(P)$.

(A) $(1;0;1)$. (B) $(0;0;-2)$. (C) $(1;1;6)$. (D) $(12;9;1)$.

**Lời giải.**

Ta có $d: \dfrac{x-12}{4}=\dfrac{y-9}{3}=\dfrac{z-1}{1} \Rightarrow d: \begin{cases} x=12+4t \\ y=9+3t \\ z=1+t \end{cases}, t\in\mathbb{R}$.

Thay $x=12+4t,\ y=9+3t,\ z=1+t$ vào $(P): 3x+5y-z-2=0$, ta được

$$3(12+4t)+5(9+3t)-(1+t)-2=0 \Leftrightarrow t=-3.$$

Với $t=-3 \Rightarrow x=0,\ y=0,\ z=-2$.
Vậy tọa độ giao điểm của $d$ và $(P)$ là $(0;0;-2)$.

Chọn đáp án B ........ □

**CÂU 16.** Trong KG $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \dfrac{x}{-2}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z+1}{3}$ và mặt phẳng $(P): 11x+my+nz-16=0$. Biết $\Delta \subset (P)$, tính giá trị của $T=m+n$.

Ⓐ $T=2$. Ⓑ $T=-2$. Ⓒ $T=14$. Ⓓ $T=-14$.

**Lời giải.**

- Cách 1: Lấy $\begin{cases} A(0;2;-1)\in\Delta \\ B(-2;3;2)\in\Delta. \end{cases}$
  Mà $\Delta\subset(P) \Rightarrow \begin{cases} A\in(P) \\ B\in(P) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m-n-16=0 \\ 11\cdot(-2)+3m+2n-16=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=10 \\ n=4. \end{cases}$
  $\Rightarrow T=m+n=14$.
- Cách 2: Đường thẳng $\Delta$ đi qua $A(0;2;-1)$ có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}=(-2;1;3)$.
  Mặt phẳng $(P)$ có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}=(11;m;n)$.
  $\Delta\subset(P) \Rightarrow \begin{cases} A\in(P) \\ \vec{n}\cdot\vec{u}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m-n-16=0 \\ -22+m+3n=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=10 \\ n=4. \end{cases}$
  $\Rightarrow T=m+n=14$.

Chọn đáp án C ........ □

**CÂU 17.** Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z-9}{-1}$ và mặt phẳng $(\alpha)$ có phương trình $m^2x-my-2z+19=0$ với $m$ là tham số. Tập hợp các giá trị $m$ thỏa mãn $d\parallel(\alpha)$ là

Ⓐ $\{1\}$. Ⓑ $\emptyset$. Ⓒ $\{1;2\}$. Ⓓ $\{2\}$.

**Lời giải.**

Đường thẳng $d$ có vectơ chỉ phương là $\vec{u}=(1;3;-1)$.
Mặt phẳng $(\alpha)$ có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=\left(m^2;-m;-2\right)$.

Để $d\parallel(\alpha)$ thì $\begin{cases} \vec{u}\cdot\vec{n}=0 \\ M(1;2;9)\notin(\alpha) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2-3m+2=0 \\ m^2-2m-18+19\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=2 \end{array}\right. \\ m\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow m=2.$

Chọn đáp án D ........ □

**CÂU 18.** Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$, tìm tất cả các giá trị của tham số $m$ để đường thẳng $d: \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z-2}{1}$ song song với mặt phẳng $(P): 2x+y-m^2z+m=0$

Ⓐ $m=1$. Ⓑ $m\in\emptyset$. Ⓒ $m\in\{-1;1\}$. Ⓓ $m=-1$.

**Lời giải.**

Một véc-tơ chỉ phương của $d$ là $\vec{u}=(1;-1;1)$; $A(1;-1;2)\in d$.
Một véc-tơ pháp tuyến của $(P)$ là $\vec{n}=\left(2;1;-m^2\right)$.

$$\begin{aligned} d\parallel(P) &\Leftrightarrow \begin{cases} \vec{u}\perp\vec{n} \\ A\notin(P) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1\cdot2-1\cdot1-1\cdot m^2=0 \\ 2\cdot1-1-2m^2+m\neq 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 1-m^2=0 \\ 1-2m^2+m\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=\pm1 \\ 1-2m^2+m\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m=-1. \end{aligned}$$

Chọn đáp án D ........ □

**CÂU 19.** Trong KG $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x-2y+3z+-4=0$ và đường thẳng $d: \dfrac{x-m}{1}=\dfrac{y+2m}{3}=\dfrac{z}{2}$. Với giá trị nào của $m$ thì giao điểm của đường thẳng $d$ và mặt phẳng $(P)$ thuộc mặt phẳng $(Oyz)$.

Ⓐ $m=\dfrac{4}{5}$. Ⓑ $m=-1$. Ⓒ $m=1$. Ⓓ $m=\dfrac{12}{17}$.

**Lời giải.**

Ta có $d \cap (P) = A \in (Oyz) \Rightarrow A\left(0; \dfrac{3}{2}a - 2; a\right)$.

$A \in d \Rightarrow 0 - m = \dfrac{\frac{3}{2}a - 2 + 2m}{3} = \dfrac{a}{2} \Rightarrow \begin{cases} a = -2m \\ \dfrac{3}{2}a - 2 + 2m = -3m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -2 \\ m = 1. \end{cases}$

Chọn đáp án (C) ............ □

**CÂU 20.** Trong KG $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P) : 2x + my - 3z + m - 2 = 0$ và đường thẳng $d : \begin{cases} x = 2 + 4t \\ y = 1 - t \\ z = 1 + 3t \end{cases}$. Với giá trị nào của $m$ thì $d$ cắt $(P)$

(A) $m \neq \dfrac{1}{2}$. (B) $m = -1$. (C) $m = \dfrac{1}{2}$. (D) $m \neq -1$.

**Lời giải.**

$(P)$ có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n} = (2; m; -3)$.
$d$ có véc-tơ chỉ phương là $\vec{u} = (4; -1; 3)$.
Ta có $d$ cắt $(P) \Leftrightarrow \vec{n} \cdot \vec{u} \neq 0 \Leftrightarrow 2 \cdot 4 + m \cdot (-1) + (-3) \cdot (-3) \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -1$.

Chọn đáp án (D) ............ □

**CÂU 21.** Trong không gian $(P)$, cho đường thẳng $d : \begin{cases} x = 2 - t \\ y = -3 + t \\ z = 1 + t \end{cases}$ và mặt phẳng $(P) : m^2x - 2my + (6 - 3m)z - 5 = 0$. Tìm $m$ để $d \parallel (P)$.

(A) $\left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = -6 \end{array}\right.$. (B) $\left[\begin{array}{l} m = -1 \\ m = 6 \end{array}\right.$. (C) $\left[\begin{array}{l} m = -1 \\ m = -6 \end{array}\right.$. (D) $\emptyset$.

**Lời giải.**

Ta có $d$ đi qua $M(2; -3; 1)$và có véc-tơ chỉ phương $\vec{u} = (-1; 1; 1)$.
Và $(P)$ có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n} = (m^2; -2m; 6 - 3m)$.
Để $d$ song song với $(P)$ thì

$$\begin{cases} \vec{u} \perp \vec{n} \\ M \notin (P) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{u} \cdot \vec{n} = 0 \\ M \notin (P) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \cdot m^2 + 1 \cdot (-2m) + 1 \cdot (6 - 3m) = 0 \\ 2m^2 - 2 \cdot (-3)m + 6 - 3m - 5 \neq 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} -m^2 - 5m + 6 = 0 \\ 2m^2 + 3m + 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = -6. \end{array}\right.$$

Chọn đáp án (A) ............ □

**CÂU 22.** Gọi $m, n$ là hai giá trị thực thỏa mãn giao tuyến của hai mặt phẳng $(P_m) : mx + 2y + nz + 1 = 0$ và $(Q_m) : x - my + nz + 2 = 0$ vuông góc với mặt phẳng $(\alpha) : 4x - y - 6z + 3 = 0$.

(A) $m + n = 0$. (B) $m + n = 2$. (C) $m + n = 1$. (D) $m + n = 3$.

**Lời giải.**

Ta có $(P_m) : mx + 2y + nz + 1 = 0$ có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}_P = (m; 2; n)$.
$(Q_m) : x - my + nz + 2 = 0$ có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}_Q = (1; -m; n)$.
$(\alpha) : 4x - y - 6z + 3 = 0$ có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}_\alpha = (4; -1; -6)$.
Do giao tuyến của $(P_m)$ và $(Q_n)$ vuông góc với $(\alpha)$ nên

$$\begin{cases} (P_m) \perp (\alpha) \\ (Q_n) \perp (\alpha) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{n}_P \perp \vec{n}_\alpha \\ \vec{n}_Q \perp \vec{n}_\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4m - 2 - 6n = 0 \\ 4 + m - 6n = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4m - 6n = 2 \\ m - 6n = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 2 \\ n = 1. \end{cases}$$

Vậy $m + n = 3$.

Chọn đáp án (D) ............ □

# Bài 3. PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU

## 13 XÁC ĐỊNH CÁC YẾU TỐ CƠ BẢN MẶT CẦU

- Phương trình mặt cầu $(S)$ có dạng $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$ thì mặt cầu có tâm $I(a;b;c)$ và có bán kính $R$.
- Phương trình mặt cầu $(S)$ có dạng $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$ với $a^2+b^2+c^2-d>0$ thì để xác định tọa độ tâm $I(a;b;c)$ và bán kính $R$ ta thức hiện như sau:

— Xác định tọa độ tâm $I$: $\begin{cases} -2a=\ldots \\ -2b=\ldots \\ -2c=\ldots \end{cases}$

— Xác định bán kính: $R=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}$.

***Chú ý:***

- *Có thể xác định tọa độ tâm $I(a;b;c)$ và bán kính $R$ của phương trình mặt cầu $(S)$ có dạng $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$ bằng cách nhóm nhân tử để đưa về dạng $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$.*
- *Để một phương trình là một phương trình mặt cầu, cần thỏa mãn hai điều kiện: Hệ số trước $x^2$, $y^2$, $z^2$ phải bằng 1 và $a^2+b^2+c^2-d>0$.*
- *Nếu $IM=R$ thì $M$ nằm trên mặt cầu.*
- *Nếu $IM<R$ thì $M$ nằm trong mặt cầu.*
- *Nếu $IM>R$ thì $M$ nằm ngoài mặt cầu.*

**Phần I. Mỗi câu hỏi học sinh chọn một trong bốn phương án A, B, C, D.**

**CÂU 1.** Cho điểm $M$ nằm ngoài mặt cầu $S(O;R)$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $OM<R$. B. $OM=R$. C. $OM>R$. D. $OM\leq R$.

**Lời giải.**

$M$ nằm ngoài mặt cầu $S(O;R)\Rightarrow OM>R$.

Chọn đáp án C

**CÂU 2.** Trong KG $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon x^2+(y-2)^2+(z+1)^2=6$. Đường kính của $(S)$ bằng

A. $\sqrt{6}$. B. 12. C. $2\sqrt{6}$. D. 3.

**Lời giải.**

Ta có bán kính của $(S)$ là $\sqrt{6}$ nên đường kính của $(S)$ bằng $2\sqrt{6}$.

Chọn đáp án C

**CÂU 3.** Mặt cầu $(S)\colon 3x^2+3y^2+3z^2-6x+12y+2=0$ có bán kính bằng

A. $\dfrac{\sqrt{7}}{3}$. B. $\dfrac{2\sqrt{7}}{3}$. C. $\dfrac{\sqrt{21}}{3}$. D. $\sqrt{\dfrac{13}{3}}$.

**Lời giải.**

Ta có $3x^2+3y^2+3z^2-6x+12y+2=0\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-2x+4y+\dfrac{2}{3}=0$.

Do đó mặt cầu $(S)$ có tâm $I\left(1;-2;0\right)$, bán kính $R=\sqrt{\dfrac{13}{3}}$.

Chọn đáp án D

**CÂU 4.** Trong KG $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon (x-2)^2+(y+1)^2+(z-3)^2=4$. Tâm của $(S)$ có tọa độ là

A. $(-2;1;-3)$. B. $(-4;2;-6)$. C. $(4;-2;6)$. D. $(2;-1;3)$.

**Lời giải.**

Mặt cầu $(S)\colon (x-2)^2+(y+1)^2+(z-3)^2=4$ có tâm $I(2;-1;3)$.

Chọn đáp án D

**CÂU 5.** Trong KG $Oxyz$, mặt cầu $(S)\colon (x+1)^2+(y-2)^2+z^2=9$ có bán kính bằng

A 3. B 81. C 9. D 6.

**Lời giải.**

Mặt cầu $(S)$ có bán kính $R=3$.

Chọn đáp án A

**CÂU 6.** Trong KG $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)$ có tâm $I(1;-4;0)$ và bán kính bằng 3. Phương trình của $(S)$ là

A $(x+1)^2+(y-4)^2+z^2=9$.
B $(x-1)^2+(y+4)^2+z^2=9$.
C $(x-1)^2+(y+4)^2+z^2=9$.
D $(x+1)^2+(y-4)^2+z^2=3$.

**Lời giải.**

Mặt cầu $(S)$ có tâm $I(1;-4;0)$ có bán kính 3 có phương trình là $(x-1)^2+(y+4)^2+z^2=9$.

Chọn đáp án C

**CÂU 7.** Trong KG $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+(z-1)^2=16$. Bán kính của $(S)$ là

A 32. B 8. C 4. D 16.

**Lời giải.**

Từ phương trình mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+(z-1)^2=16 \Rightarrow$ bán kính $R=\sqrt{16}=4$.

**CÂU 8.** Trong KG $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon (x+1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=9$. Tâm của $(S)$ có tọa độ là

A $(-2;-4;6)$. B $(2;4;-6)$. C $(-1;-2;3)$. D $(1;2;-3)$.

**Lời giải.**

Tâm của $(S)$ có tọa độ là $(-1;-2;3)$.

Chọn đáp án C

**CÂU 9.** Trong KG $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2-8x+10y-6z+49=0$. Tính bán kính $R$ của mặt cầu $(S)$.

A $R=1$. B $R=7$. C $R=\sqrt{151}$. D $R=\sqrt{99}$.

**Lời giải.**

Ta có $a=4$, $b=-5$, $c=3$, $d=49$. Do đó $R=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}=1$.

Chọn đáp án A

**CÂU 10.** Trong KG $Oxyz$, cho mặt cầu có phương trình $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=4$. Tìm tọa độ tâm $I$ và bán kính $R$ của mặt cầu đó.

A $I(-1;2;-3)$; $R=2$. B $I(-1;2;-3)$; $R=4$. C $I(1;-2;3)$; $R=2$. D $I(1;-2;3)$; $R=4$.

**Lời giải.**

Mặt cầu đã cho có tâm $I\,(1;-2;3)$ và bán kính $R=2$.

Chọn đáp án C

**CÂU 11.** Trong KG $Oxyz$, trong các mặt cầu dưới đây, mặt cầu nào có bán kính $R=2$?

A $(S)\colon x^2+y^2+z^2-4x+2y+2z-3=0$.
B $(S)\colon x^2+y^2+z^2-4x+2y+2z-10=0$.
C $(S)\colon x^2+y^2+z^2-4x+2y+2z+2=0$.
D $(S)\colon x^2+y^2+z^2-4x+2y+2z+5=0$.

**Lời giải.**

Ta có mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$ có bán kính là $R=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}$.

Với $(S)\colon x^2+y^2+z^2-4x+2y+2z+2=0$, ta có $\begin{cases}a=2\\ b=-1\\ c=-1\\ d=2.\end{cases}$

Suy ra $R=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}=\sqrt{4}=2$.

Chọn đáp án C

**CÂU 12.** Cho các phương trình sau

a) $(x-1)^2+y^2+z^2=1$;
b) $x^2+(2y-1)^2+z^2=4$;
c) $x^2+y^2+z^2+1=0$;
d) $(2x+1)^2+(2y-1)^2+4z^2=16$.

Số phương trình là phương trình mặt cầu là

A 4. B 3. C 2. D 1.

**Lời giải.**

Ta có $(2x+1)^2+(2y-1)^2+4z^2=16 \Leftrightarrow \left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(y-\dfrac{1}{2}\right)^2+z^2=4$ là phương trình mặt cầu.
$(x-1)^2+y^2+z^2=1$ là phương trình của một mặt cầu.
Chọn đáp án C ........................................ □

**CÂU 13.** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, gọi $I$ là tâm mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+(z-2)^2=4$. Độ dài $\left|\overrightarrow{OI}\right|$ bằng

A 2. B 4. C 1. D $\sqrt{2}$.

**Lời giải.**

Mặt cầu $(S)$ có tâm $I(0;0;2) \Rightarrow \overrightarrow{OI}=(0;0;2) \Rightarrow \left|\overrightarrow{OI}\right|=2$.

Chọn đáp án A ........................................ □

**CÂU 14.** Trong KG $Oxyz$ có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên $m$ để phương trình $x^2+y^2+z^2+4mx+2my-2mz+9m^2-28=0$ là phương trình mặt cầu?

A 7. B 8. C 9. D 6.

**Lời giải.**

Ta có
$$x^2+y^2+z^2+4mx+2my-2mz+9m^2-28=0$$
$$\Leftrightarrow (x+2m)^2+(y+m)^2+(z-m)^2=28-3m^2. \quad (1)$$

(1) là phương trình mặt cầu $\Leftrightarrow 28-3m^2>0 \Leftrightarrow -\sqrt{\dfrac{28}{3}}<m<\sqrt{\dfrac{28}{3}}$.
Do $m$ nguyên nên $m\in\{-3;-2;-1;0;1;2;3\}$.
Vậy có 7 giá trị của $m$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.
Chọn đáp án A ........................................ □

**CÂU 15.** Trong KG $Oxyz$, có tất cả bao nhiêu giá nguyên của $m$ để $x^2+y^2+z^2+2(m+2)x-2(m-1)z+3m^2-5=0$ là phương trình một mặt cầu?

A 4. B 6. C 5. D 7.

**Lời giải.**

Phương trình đã cho là phương trình mặt cầu khi và chỉ khi
$$(m+2)^2+(m-1)^2-3m^2+5>0 \Leftrightarrow m^2-2m-10<0$$
$$\Leftrightarrow -1-\sqrt{11}<m<1+\sqrt{11}.$$

Vì $m\in\mathbb{Z} \Rightarrow m=\{-2;-1;0;1;2;3;4\} \Rightarrow$ có 7 giá trị của $m$ nguyên thỏa mãn bài toán.
Chọn đáp án D ........................................ □

**CÂU 16.** Cho phương trình $x^2+y^2+z^2-4x+2my+3m^2-2m=0$ với $m$ là tham số. Tính tổng tất cả các giá trị nguyên của $m$ để phương trình đã cho là phương trình mặt cầu.

A 0. B 1. C 2. D 3.

**Lời giải.**

Giả sử $x^2+y^2+z^2-4x+2my+3m^2-2m=0$ là phương trình mặt cầu.
Khi đó tâm mặt cầu là $I(2;-m;0)$, và bán kính
$$R=\sqrt{4+m^2-(3m^2-2m)}=\sqrt{-2m^2+2m+4} \text{ với } -2m^2+2m+4>0 \Leftrightarrow m\in(-1;2).$$

Do $m\in\mathbb{Z}\Rightarrow m\in\{0;1\}$.
Vậy tổng tất cả các giá trị nguyên của $m$ bằng 1.
Chọn đáp án B ........................................ □

**Phần II. Trong mỗi ý a), b), c) và d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.**

**CÂU 17.** Trong KG $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+(z+2)^2=9$ có tâm $I$ và bán kính $R$. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

| Mệnh đề | Đ | S |
|---|---|---|
| **a)** Tọa độ tâm mặt cầu $(S)$ là $I(0;0;2)$. | | X |
| **b)** Bán kính mặt cầu $(S)$ là $R=9$. | | X |

| Mệnh đề | Đ | S |
|---|---|---|
| **c)** Khoảng cách từ tâm mặt cầu đến mặt phẳng $(P)\colon x+y+z=0$ bằng $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$. | X | |
| **d)** Diện tích mặt cầu $(S)$ bằng $36\pi$. | X | |

**Lời giải.**

**a)** (S) **Sai.** Tọa độ tâm mặt cầu là $I\,(0;0;-2)$.

**b)** (S) **Sai.** Bán kính của mặt cầu là $R=3$.

**c)** (Đ) **Đúng.** Ta có $\mathrm{d}(I,(P))=\dfrac{|0+0+2|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

**d)** (Đ) **Đúng.** Diện tích mặt cầu $S=4\pi R^2=4\pi\cdot 3^2=36\pi$.

Chọn đáp án | a sai | b sai | c đúng | d đúng | ........ □

**CÂU 18.** Trong KG $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon (x+3)^2+y^2+(z-2)^2=16$ có tâm $I$ và bán kính $R$. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

| Mệnh đề | Đ | S |
|---|---|---|
| **a)** Điểm $M(-1;0;3)$ nằm trong mặt cầu $(S)$. | X | |
| **b)** Bán kính mặt cầu $(S)$ là $R=4$. | X | |
| **c)** Tọa độ tâm mặt cầu $(S)$ là $I(-3;0;2)$. | X | |
| **d)** Thể tích mặt cầu $(S)$ là $V=\dfrac{16384\pi}{3}$. | | X |

**Lời giải.**

**a)** (Đ) **Đúng.** Thay tọa độ điểm $M$ vào vế trái của phương trình $(S)$ ta có

$$(-1+3)^2+0^2+(3-2)^2=5<16.$$

Suy ra $M$ nằm trong mặt cầu $(S)$.

**b)** (Đ) **Đúng.** Bán kính mặt cầu là $R=4$.

**c)** (Đ) **Đúng.** Tọa độ tâm mặt cầu là $I(-3;0;2)$.

**d)** (S) **Sai.** Thể tích mặt cầu $(S)$ là $V=\dfrac{256\pi}{3}$.

Chọn đáp án | a đúng | b đúng | c đúng | d sai | ........ □

**CÂU 19.** Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho điểm $M(2;0;2)$ và mặt cầu $(S)\colon x^2+(y+2)^2+(z-2)^2=8$. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

| Mệnh đề | Đ | S |
|---|---|---|
| **a)** Điểm $M\,(2;0;2)$ thuộc mặt cầu $(S)$. | X | |
| **b)** Bán kính mặt cầu $(S)$ là $R=2\sqrt{2}$. | X | |
| **c)** Tọa độ tâm mặt cầu $(S)$ là $I\,(0;-2;2)$. | X | |
| **d)** Hình chiếu của tâm mặt cầu lên trục $Ox$ là điểm có tọa độ $(0;0;2)$. | | X |

**Lời giải.**

**a)** (Đ) **Đúng.** Thay tọa độ điểm $M\,(2;0;2)$ vào mặt cầu, ta có $2^2+2^2+(2-2)^2=8\Rightarrow M(2;0;2)\in(S)$.

**b)** (Đ) **Đúng.** Mặt cầu $(S)$ có bán kính $R=2\sqrt{2}$.

**c)** (Đ) **Đúng.** Mặt cầu $(S)$ có tâm $I(0;-2;2)$.

**d)** (S) **Sai.** Hình chiếu của tâm mặt cầu lên trục $Ox$ là $O(0;0;0)$.

Chọn đáp án | a đúng | b đúng | c đúng | d sai | ........ □

**CÂU 20.** Trong KG $Oxyz$, mặt cầu $(S)\colon (x-1)^2+(y+2)^2+(z-4)^2=20$. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

| Mệnh đề | Đ | S |
|---|---|---|
| **a)** Bán kính mặt cầu $(S)$ là 20. | | X |
| **b)** Diện tích mặt cầu $(S)$ là $1600\pi$. | | X |
| **c)** Tọa độ tâm mặt cầu $(S)$ là $I(-1;2;-4)$. | | X |
| **d)** Điểm đối xứng của tâm mặt cầu $(S)$ qua mặt phẳng $(Oyz)$ là $I(-1;-2;4)$. | X | |

**Lời giải.**

**a)** S **Sai.** Mặt cầu $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-4)^2=20$ có bán kính là $R=2\sqrt{5}$.

**b)** S **Sai.** Diện tích mặt cầu $(S)$ bằng $S=4\pi R^2=4\pi\left(2\sqrt{5}\right)^2=80\pi$.

**c)** S **Sai.** Mặt cầu $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-4)^2=20$ có tâm là $I(1;-2;4)$.

**d)** Đ **Đúng.** Điểm đối xứng của tâm $I(1;-2;4)$ của mặt cầu $(S)$ qua mặt phẳng $(Oyz)$ là $I(-1;-2;4)$.

Chọn đáp án | a sai | b sai | c sai | d đúng | ........ □

**CÂU 21.** Trong KG $Oxyz$, cho các phương trình sau

a) $(S_1)\colon x^2+y^2+z^2+x-2y+4z-3=0$,

b) $(S_2)\colon 2x^2+2y^2+2z^2-x-y-z=0$,

c) $(S_3)\colon 2x^2+2y^2+2z^2+4x+8y+6z+3=0$,

d) $(S_4)\colon x^2+y^2+z^2-2x+4y-4z+10=0$.

Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

| Mệnh đề | Đ | S |
|---|---|---|
| **a)** $(S_1)$ là phương trình của một mặt cầu. | X | |
| **b)** $(S_2)$ là phương trình của một mặt cầu. | X | |
| **c)** $(S_3)$ không phải là phương trình của một mặt cầu. | | X |
| **d)** $(S_4)$ không phải là phương trình của một mặt cầu. | X | |

**Lời giải.**

Phương trình $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$ là phương trình của một mặt cầu nếu $a^2+b^2+c^2-d>0$.

**a)** Đ **Đúng.** $(S_1)\colon x^2+y^2+z^2+x-2y+4z-3=0 \Rightarrow \begin{cases} a=-\dfrac{1}{2}\\ b=1\\ c=-2\\ d=-1\end{cases} \Rightarrow a^2+b^2+c^2-d>0.$

**b)** Đ **Đúng.** $(S_2)\colon 2x^2+2y^2+2z^2-x-y-z=0 \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{2}y-\dfrac{1}{2}z=0.$

Suy ra $\begin{cases} a=\dfrac{1}{4}\\ b=\dfrac{1}{4}\\ c=\dfrac{1}{4}\\ d=0\end{cases} \Rightarrow a^2+b^2+c^2-d>0.$

**c)** S **Sai.** $(S_3)\colon 2x^2+2y^2+2z^2+4x+8y+6z+3=0 \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2+2x+4y+3z+\dfrac{3}{2}=0.$

Suy ra $\begin{cases} a=-1\\ b=-2\\ c=-\dfrac{3}{2}\\ d=\dfrac{3}{2}\end{cases} \Rightarrow a^2+b^2+c^2-d>0.$

d) Đ **Đúng.** $(S_4)\colon x^2+y^2+z^2-2x+4y-4z+10=0 \Rightarrow \begin{cases} a=1\\ b=-2\\ c=2\\ d=10\end{cases} \Rightarrow a^2+b^2+c^2-d<0.$

Chọn đáp án | a đúng | b đúng | c sai | d đúng | ............ □

**CÂU 22.** Trong KG $Oxyz$, cho các phương trình sau

a) $(S_1)\colon x^2+y^2+z^2-2x=0$,

b) $(S_2)\colon x^2+y^2-z^2+2x-y+1=0$,

c) $(S_3)\colon 2x^2+2y^2=(x+y)^2-z^2+2x-1$,

d) $(S_4)\colon (x+y)^2=2xy-z^2-1$.

Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

| Mệnh đề | Đ | S |
|---|---|---|
| **a)** $(S_1)$ là phương trình của một mặt cầu. | X | |
| **b)** $(S_2)$ là phương trình của một mặt cầu. | | X |
| **c)** $(S_3)$ là phương trình của một mặt cầu. | | X |
| **d)** $(S_4)$ không phải là phương trình của một mặt cầu. | X | |

**Lời giải.**

Phương trình mặt cầu $(S)$ có hai dạng là
(1) $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$;
(2) $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$ với $a^2+b^2+c^2-d>0$.

a) Đ **Đúng.** Ta có $(S_1)\colon x^2+y^2+z^2-2x=0 \Leftrightarrow (x-1)^2+y^2+z^2=1$.
Do đó $(S_1)$ là phương trình mặt cầu.

b) S **Sai.** Ta có $(S_2)$ không là phương trình mặt cầu vì các hệ số của $x^2$, $y^2$, $z^2$ không bằng nhau.

c) S **Sai.** Ta có $(S_3)\colon 2x^2+2y^2=(x+y)^2-z^2+2x-1 \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-2xy-2x+1=0$.
Vì phương trình có chứa $xy$ nên $(S_3)$ không phải phương trình mặt cầu.

d) Đ **Đúng.** Ta có $(S_4)\colon (x+y)^2=2xy-z^2-1 \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2=1$.
Do đó $(S_4)$ là phương trình mặt cầu.

Chọn đáp án | a đúng | b sai | c sai | d đúng | ............ □

**CÂU 23.** Trong KG $Oxyz$, cho các phương trình sau

a) $(S_1)\colon x^2+y^2+z^2-2x=0$,

b) $(S_2)\colon 2x^2+2y^2=(x+y)^2-z^2+2x-1$,

c) $(S_3)\colon x^2+y^2+z^2+2x-2y+1=0$,

d) $(S_4)\colon (x+y)^2=2xy-z^2+1-4x$.

Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

| Mệnh đề | Đ | S |
|---|---|---|
| **a)** $(S_1)$ là phương trình của một mặt cầu. | X | |
| **b)** $(S_2)$ là phương trình của một mặt cầu. | | X |
| **c)** $(S_3)$ là phương trình của một mặt cầu. | X | |
| **d)** $(S_4)$ là phương trình của một mặt cầu. | X | |

**Lời giải.**

Phương trình mặt cầu $(S)$ có hai dạng là
(1) $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$;
(2) $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$ với $a^2+b^2+c^2-d>0$.

a) Đ **Đúng.** Ta có $(S_1)\colon x^2+y^2+z^2-2x=0 \Leftrightarrow (x-1)^2+y^2+z^2=1$.
Do đó $(S_1)$ là phương trình mặt cầu.

b) S **Sai.** Ta có $(S_2)\colon 2x^2+2y^2=(x+y)^2-z^2+2x-1 \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-2xy-2x+1=0$.
Vì phương trình có chứa $xy$ nên $(S_2)$ không phải phương trình mặt cầu.

c) Đ **Đúng.** Ta có $(S_3)\colon x^2+y^2+z^2+2x-2y+1=0 \Leftrightarrow (x+1)^2+(y-1)^2+z^2=1$.
Do đó $(S_3)$ là phương trình mặt cầu.

d) Đ **Đúng.** Ta có $(S_4)\colon (x+y)^2=2xy-z^2+1-4x \Leftrightarrow (x+2)^2+y^2+z^2=5$.
Do đó $(S_4)$ là phương trình mặt cầu.

Chọn đáp án | a đúng | b sai | c đúng | d đúng | ................................

**CÂU 24.** Trong KG $Oxyz$, cho các phương trình sau

a) $(S_1)\colon (x-1)^2+(2y-1)^2+(z-1)^2=6$,

b) $(S_2)\colon (x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=6$,

c) $(S_3)\colon (2x-1)^2+(2y-1)^2+(2z+1)^2=6$,

d) $(S_4)\colon (x+y)^2=2xy-z^2+3-6x$.

Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

| Mệnh đề | Đ | S |
|---|---|---|
| **a)** $(S_1)$ không phải là phương trình của một mặt cầu. | X | |
| **b)** $(S_2)$ không phải là phương trình của một mặt cầu. | | X |
| **c)** $(S_3)$ không phải là phương trình của một mặt cầu. | | X |
| **d)** $(S_4)$ không phải là phương trình của một mặt cầu. | | X |

**Lời giải.**

Phương trình mặt cầu $(S)$ có hai dạng là
(1) $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$;
(2) $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$ với $a^2+b^2+c^2-d>0$.

a) Đ **Đúng.** Ta có hệ số của $x$, $y$, $z$ trong phương trình không bằng nhau nên $(S_1)$ không phải là phương trình của một mặt cầu.

b) S **Sai.** Vì $(S_2)\colon (x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=6$ là phương trình mặt cầu.

c) S **Sai.** Vì

$$(S_3)\colon (2x-1)^2+(2y-1)^2+(2z+1)^2=6 \Leftrightarrow \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2+\left(z+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{2}.$$

Do đó $(S_3)$ là phương trình mặt cầu.

d) S **Sai.** $(S_4)\colon (x+y)^2=2xy-z^2+3-6x \Leftrightarrow (x+3)^2+y^2+z^2=12$.
Do đó $(S_4)$ là phương trình mặt cầu.

Chọn đáp án | a đúng | b sai | c sai | d sai | ................................

**CÂU 25.** Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho phương trình $(S)\colon x^2+y^2+z^2-2(m+2)x+4my-2mz+5m^2+9=0$. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

| Mệnh đề | Đ | S |
|---|---|---|
| **a)** Với $m=0$ thì $(S)$ là phương trình của một mặt cầu. | | X |
| **b)** Với $m=1$ thì $(S)$ là phương trình của một mặt cầu có tâm $I(3;-2;1)$. | | X |
| **c)** Với $m=3$ thì $(S)$ là phương trình của một mặt cầu có bán kính là $R=4$. | X | |
| **d)** Với $m<-5$ hoặc $m>1$ thì $(S)$ là phương trình của một mặt cầu. | X | |

**Lời giải.**

a) S **Sai.** Với $m=0$, ta có $\begin{cases} a=2 \\ b=0 \\ c=0 \\ d=9 \end{cases}$. Khi đó $a^2+b^2+c^2-d=-5<0$.
Suy ra $(S)$ không là phương trình mặt cầu.

b) S **Sai.** Với $m=1$, ta có $\begin{cases} a=3 \\ b=-2 \\ c=1 \\ d=14 \end{cases}$. Khi đó $a^2+b^2+c^2-d=0$.

Suy ra $(S)$ không là phương trình mặt cầu.

c) Đ **Đúng.** Với $m=3$, ta có $\begin{cases} a=5 \\ b=-6 \\ c=3 \\ d=54 \end{cases}$. Khi đó $a^2+b^2+c^2-d=16>0$.

Suy ra $(S)$ là phương trình mặt cầu có bán kính $R=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}=4$.

d) Đ **Đúng.** Ta có điều kiện xác định mặt cầu là $a^2+b^2+c^2-d>0$, khi đó

$$(m+2)^2+4m^2+m^2-5m^2-9>0 \Leftrightarrow m^2+4m-5>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m<-5 \\ m>1. \end{array}\right.$$

Chọn đáp án | a sai | b sai | c đúng | d đúng | ☐

**Phần III. Học sinh điền kết quả vào ô trống.**

**CÂU 26.** Trong KG $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon (x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=16$. Tọa độ tâm của mặt cầu $(S)$ là $(a;b;c)$. Khi đó $a+b+c$ bằng bao nhiêu?

Đáp án: 2

**Lời giải.**

Mặt cầu $(S)\colon (x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=16$ có tâm là $I(1;-2;3)$.
Suy ra $a=1$, $b=-2$, $c=3$. Khi đó $a+b+c=2$.
Đáp án: 2 ☐

**CÂU 27.** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, tất cả các giá trị của $m$ để phương trình $x^2+y^2+z^2-2(m+2)x+4my+19m-6=0$ là phương trình mặt cầu là $S=(-\infty;a)\cup(b;+\infty)$. Giá trị $a+b$ bằng

Đáp án: 3

**Lời giải.**

Điều kiện để phương trình $x^2+y^2+z^2-2(m+2)x+4my+19m-6=0$ là phương trình mặt cầu là $(m+2)^2+4m^2-19m+6>0 \Leftrightarrow 5m^2-15m+10>0 \Leftrightarrow m<1$ hoặc $m>2$.
Vậy $a=1$ và $b=2$ nên $a+b=3$.
Đáp án: 3 ☐

**CÂU 28.** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, có bao nhiêu giá trị nguyên của $m$ để phương trình $x^2+y^2+z^2+2x-4y+2(m+1)z+2m^2+6=0$ là phương trình mặt cầu.

Đáp án: 1

**Lời giải.**

Điều kiện để phương trình $x^2+y^2+z^2+2x-4y+2(m+1)z+2m^2+6=0$ là phương trình mặt cầu là $1^2+(-2)^2+(m+1)^2-2m^2-6>0 \Leftrightarrow -m^2+2m>0 \Leftrightarrow -2<m<0$.
Vậy có 1 giá trị nguyên của $m$ thỏa yêu cầu bài toán.
Đáp án: 1 ☐

**CÂU 29.** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, có bao nhiêu giá trị nguyên dương của $m$ để phương trình $x^2+y^2+z^2-2(m+2)x+4my-2mz+5m^2+9=0$ không phải là phương trình mặt cầu.

Đáp án: 1

**Lời giải.**

Điều kiện để phương trình $x^2+y^2+z^2-2(m+2)x+4my-2mz+5m^2+9=0$ không là phương trình mặt cầu là

$$(m+2)^2+4m^2+m^2-5m^2-9\le 0 \Leftrightarrow m^2+4m-5\le 0 \Leftrightarrow -5\le m\le 1.$$

Vậy có 1 giá trị nguyên dương $m$ thỏa yêu cầu.
Đáp án: 1 ☐

**CÂU 30.** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, có bao nhiêu giá trị nguyên của $m$ để phương trình $x^2+y^2+z^2-2(3-m)x-2(m+1)y-2mz+2m^2+7=0$ không phải là phương trình mặt cầu.

Đáp án: 3

**Lời giải.**

Điều kiện để phương trình $x^2+y^2+z^2-2(3-m)x-2(m+1)y-2mz+2m^2+7=0$ không là phương trình mặt cầu là

$$(3-m)^2+(m+1)^2+m^2-2m^2-7\le 0 \Leftrightarrow m^2-4m+3\le 0 \Leftrightarrow 1\le m\le 3.$$

Vậy có 3 giá trị nguyên $m$ thỏa yêu cầu.
Đáp án: $\boxed{3}$ ................................................................................ □

**CÂU 31.** Trong KG $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;1)$, $B(3;1;-2)$. Tập hợp điểm $M(x;y;z)$ sao cho thỏa mãn $MA^2+MB^2=30$ là phương trình mặt cầu tâm $I(a;b;c)$. Giá trị $a+b+c$ bằng

Đáp án: | 3 | | | |

**Lời giải.**
Ta có

$$\begin{aligned} MA^2+MB^2=30 &\Leftrightarrow (x-1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2+(x-3)^2+(y-1)^2+(z+2)^2=30\\ &\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-4x-3y+z-5=0.\end{aligned}$$

Do đó $I\left(2;\dfrac{3}{2};-\dfrac{1}{2}\right)$ suy ra $a+b+c=3$.
Đáp án: $\boxed{3}$ ................................................................................ □

**CÂU 32.** Trong KG $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;1)$, $B(3;1;-2)$. Tập hợp điểm $M(x;y;z)$ sao cho thỏa mãn $\dfrac{MB}{MA}=2$ là phương trình mặt cầu tâm $I(a;b;c)$. Giá trị $a+b+c$ gần bằng

Đáp án: | 4 | , | 6 | 7 |

**Lời giải.**
Ta có

$$\begin{aligned} \frac{MB}{MA}=2 &\Leftrightarrow 4MA^2=MB^2\\ &\Leftrightarrow 4(x-1)^2+4(y-2)^2+4(z-1)^2=(x-3)^2+(y-1)^2+(z+2)^2\\ &\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-\frac{2}{3}x-\frac{14}{3}y-4z+\frac{10}{3}=0.\end{aligned}$$

Suy ra tâm $I\left(\dfrac{1}{3};\dfrac{7}{3};2\right)$.
Vậy $a+b+c=\dfrac{14}{3}\approx 4{,}67$.
Đáp án: $\boxed{4{,}67}$ ................................................................................ □

**CÂU 33.** Trong KG $Oxyz$, cho hai điểm $A(-1;2;0)$, $B(0;1;-2)$. Tập hợp điểm $M(x;y;z)$ sao cho thỏa mãn $MA=MB$ là mặt phẳng có phương trình $x+ay+bz+c=0$. Giá trị $a+b+c$ bằng

Đáp án: | − | 3 | | |

**Lời giải.**
Ta có

$$\begin{aligned} MA=MB &\Leftrightarrow (x+1)^2+(y-2)^2+z^2=x^2+(y-1)^2+(z+2)^2\\ &\Leftrightarrow x-y-2z=0.\end{aligned}$$

Vậy $a=-1$, $b=-2$, $c=0$ suy ra $a+b+c=-3$.
Đáp án: $\boxed{-3}$ ................................................................................ □

**CÂU 34.** Trong KG $Oxyz$, cho hai điểm $A(-1;0;1)$, $B(1;-1;2)$. Tập hợp điểm $M(x;y;z)$ sao cho thỏa mãn $\widehat{AMB}=90^\circ$ là mặt cầu tâm $I(a;b;c)$ và bán kính $R=\sqrt{d}$. Giá trị $a+b+c+d$ bằng

Đáp án: | 2 | , | 5 | |

**Lời giải.**
Tập hợp điểm $M(x;y;z)$ sao cho thỏa mãn $\widehat{AMB}=90^\circ$ là mặt cầu đường kính $AB$.
Gọi $I$ là trung điểm $AB$ suy ra $I\left(0;-\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{2}\right)$ là tâm mặt cầu.
Mặt khác $R=IA=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ suy ra phương trình mặt cầu $x^2+\left(y+\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(z-\dfrac{3}{2}\right)^2=\dfrac{3}{2}$.
Do đó $a=0$; $b=-\dfrac{1}{2}$; $c=\dfrac{3}{2}$ và $d=\dfrac{3}{2}$.
Vậy $a+b+c+d=2{,}5$.

Đáp án: $\boxed{2{,}5}$ ................................................................................ □

## 14 LẬP PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU DẠNG CƠ BẢN

Mặt cầu tâm $I(a;b;c)$ và có bán kính $R$ có phương trình

$$(S)\colon (x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2.$$

Phương trình $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$ với $a^2+b^2+c^2-d>0$ là phương trình của mặt cầu tâm $I(a;b;c)$ và bán kính $R=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}$.

**Phần I. Mỗi câu hỏi học sinh chọn một trong bốn phương án A, B, C, D.**

**CÂU 1.** Trong KG $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)$ có tâm $I(-1;3;0)$ và bán kính bằng 2. Phương trình của mặt cầu $(S)$ là

A. $(x-1)^2+(y+3)^2+z^2=2$.
B. $(x-1)^2+(y+3)^2+z^2=4$.
C. $(x+1)^2+(y-3)^2+z^2=4$.
D. $(x+1)^2+(y-3)^2+z^2=2$.

**Lời giải.**

Phương trình mặt cầu $(S)$ có tâm $I(-1;3;0)$ và bán kính bằng $R=2$ có dạng

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2 \Leftrightarrow (x+1)^2+(y-3)^2+z^2=4.$$

Chọn đáp án C □

**CÂU 2.** Trong KG $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)$ có tâm $I(0;0;-3)$ và đi qua điểm $M(4;0;0)$. Phương trình của $(S)$ là

A. $x^2+y^2+(z+3)^2=25$. B. $x^2+y^2+(z+3)^2=5$. C. $x^2+y^2+(z-3)^2=25$. D. $x^2+y^2+(z-3)^2=5$.

**Lời giải.**

Phương trình mặt cầu $(S)$ có tâm $I(0;0;-3)$ và bán kính $R$ là $x^2+y^2+(z+3)^2=R^2$.
Ta có $M\in(S)$ nên $4^2+0^2+(0+3)^2=R^2 \Leftrightarrow R^2=25$.
Vậy phương trình cần tìm là $x^2+y^2+(z+3)^2=25$.

Chọn đáp án A □

**CÂU 3.** Trong KG $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;-2;7)$, $B(-3;8;-1)$. Mặt cầu đường kính $AB$ có phương trình là

A. $(x+1)^2+(y-3)^2+(z-3)^2=\sqrt{45}$.
B. $(x-1)^2+(y+3)^2+(z+3)^2=45$.
C. $(x-1)^2+(y-3)^2+(z+3)^2=\sqrt{45}$.
D. $(x+1)^2+(y-3)^2+(z-3)^2=45$.

**Lời giải.**

Gọi $I$ là trung điểm $AB$ ta có $I(-1;3;3)$ là tâm mặt cầu.
Bán kính $R=IA=\sqrt{(1+1)^2+(-2-3)^2+(7-3)^2}=\sqrt{45}$.
Vậy phương trình mặt cầu cần tìm là $(x+1)^2+(y-3)^2+(z-3)^2=45$.

Chọn đáp án D □

**CÂU 4.** Phương trình nào sau đây là phương trình mặt cầu $(S)$ tâm $A(2;1;0)$, đi qua điểm $B(0;1;2)$?

A. $(S)\colon (x+2)^2+(y+1)^2+z^2=8$.
B. $(S)\colon (x-2)^2+(y-1)^2+z^2=8$.
C. $(S)\colon (x-2)^2+(y-1)^2+z^2=64$.
D. $(S)\colon (x+2)^2+(y+1)^2+z^2=64$.

**Lời giải.**

Vì mặt cầu $(S)$ có tâm $A(2;1;0)$, đi qua điểm $B(0;1;2)$ nên mặt cầu $(S)$ có tâm $A(2;1;0)$ và nhận độ dài đoạn thẳng $AB$ là bán kính.
Ta có $\overrightarrow{AB}=(-2\colon 0;2)$. $AB=\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{(-2)^2+0^2+2^2}=2\sqrt{2}$.
Suy ra $R=2\sqrt{2}$.
Vậy $(S)\colon (x-2)^2+(y-1)^2+z^2=8$.

Chọn đáp án B □

**CÂU 5.** Trong KG $Oxyz$ cho điểm $I(2;3;4)$ và $A(1;2;3)$. Phương trình mặt cầu tâm $I$ và đi qua $A$ có phương trình là

A. $(x+2)^2+(y+3)^2+(z+4)^2=3$.
B. $(x+2)^2+(y+3)^2+(z+4)^2=9$.
C. $(x-2)^2+(y-3)^2+(z-4)^2=45$.
D. $(x-2)^2+(y-3)^2+(z-4)^2=3$.

**Lời giải.**

Bán kính mặt cầu là $R=IA=\sqrt{3}$.
Phương trình mặt cầu tâm $I(2;3;4)$ và $R=IA=\sqrt{3}$ là $(x-2)^2+(y-3)^2+(z-4)^2=3$.

Chọn đáp án D □

**CÂU 6.** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;3)$, $B(5;4;-1)$. Phương trình mặt cầu đường kính $AB$ là

(A) $(x-3)^2+(y-3)^2+(z-1)^2=9$.

(B) $(x-3)^2+(y-3)^2+(z-1)^2=6$.

(C) $(x+3)^2+(y+3)^2+(z+1)^2=9$.

(D) $(x-3)^2+(y-3)^2+(z-1)^2=36$.

**Lời giải.**

Gọi $I$ là trung điểm của $AB \Rightarrow I(3;3;1)$.
$\overrightarrow{AB}(4;2;-4) \Rightarrow AB=\sqrt{16+4+16}=6$.
Mặt cầu đường kính $AB$ có tâm $I(3;3;1)$, bán kính $R=\dfrac{AB}{2}=3$ có phương trình là $(x-3)^2+(y-3)^2+(z-1)^2=9$.

Chọn đáp án (A) ........................................................ □

**CÂU 7.** Trong KG $Oxyz$, cho hai điểm $M(3;-2;5)$, $N(-1;6;-3)$. Mặt cầu đường kính $MN$ có phương trình là

(A) $(x+1)^2+(y+2)^2+(z+1)^2=6$.

(B) $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=6$.

(C) $(x+1)^2+(y+2)^2+(z+1)^2=36$.

(D) $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=36$.

**Lời giải.**

Tâm $I$ của mặt cầu là trung điểm đoạn $MN \Rightarrow I(1;2;1)$.
Bán kính mặt cầu $R=\dfrac{MN}{2}=\dfrac{\sqrt{(-1-3)^2+(6+2)^2+(-3-5)^2}}{2}=6$.
Vậy phương trình mặt cầu là $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=36$.

Chọn đáp án (D) ........................................................ □

**CÂU 8.** Cho hai điểm $A$, $B$ cố định trong không gian có độ dài $AB$ là 4. Biết rằng tập hợp các điểm $M$ trong không gian sao cho $MA=3MB$ là một mặt cầu. Bán kính mặt cầu đó bằng

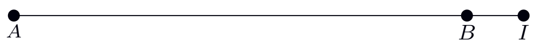
(A) 3.

(B) $\dfrac{9}{2}$.

(C) 1.

(D) $\dfrac{3}{2}$.

**Lời giải.**




Ta có

$$\begin{aligned} & MA=3MB \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}^2=9\overrightarrow{MB}^2 \\ \Leftrightarrow\ & \left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)^2=9\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)^2 \\ \Leftrightarrow\ & IA^2-9IB^2+2\overrightarrow{MI}\left(\overrightarrow{IA}-9\overrightarrow{IB}\right)=8MI^2. \quad (1) \end{aligned}$$

Gọi $I$ thỏa mãn $\overrightarrow{IA}-9\overrightarrow{IB}=\overrightarrow{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{BI}=\dfrac{1}{8}\overrightarrow{AB}$ nên $IB=\dfrac{1}{2}; IA=\dfrac{9}{2}$.
Từ (1) suy ra $8MI^2=18 \Leftrightarrow MI=\dfrac{3}{2}$ suy ra $M \in S\left(I;\dfrac{3}{2}\right)$.

Chọn đáp án (D) ........................................................ □

**CÂU 9.** Trong KG $Oxyz$, mặt cầu $(S)$ qua bốn điểm $A(3;3;0)$, $B(3;0;3)$, $C(0;3;3)$, $D(3;3;3)$. Phương trình mặt cầu $(S)$ là

(A) $\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2+\left(y-\dfrac{3}{2}\right)^2+\left(z-\dfrac{3}{2}\right)^2=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

(B) $\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2+\left(y+\dfrac{3}{2}\right)^2+\left(z-\dfrac{3}{2}\right)^2=\dfrac{27}{4}$.

(C) $\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2+\left(y-\dfrac{3}{2}\right)^2+\left(z+\dfrac{3}{2}\right)^2=\dfrac{27}{4}$.

(D) $\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2+\left(y-\dfrac{3}{2}\right)^2+\left(z-\dfrac{3}{2}\right)^2=\dfrac{27}{4}$.

**Lời giải.**

Gọi phương trình mặt cầu $(S)$: $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$ $(a^2+b^2+c^2-d>0)$.

Vì mặt cầu đi qua 4 điểm nên

$$\begin{cases}18-6a-6b+d=0\\18-6a-6c+d=0\\18-6b-6c+d=0\\27-6a-6b-6c+d=0\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}-6a-6b+d=-18\\-6a-6c+d=-18\\-6b-6c+d=-18\\-6a-6b-6c+d=-27\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}a=\dfrac{3}{2}\\b=\dfrac{3}{2}\\c=\dfrac{3}{2}\\d=0.\end{cases}$$

Suy ra tâm $I\left(\frac{3}{2};\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right)$ bán kính $R=\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Vậy phương trình mặt cầu $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2+\left(z-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{27}{4}$.

Chọn đáp án D ..................... □

**CÂU 10.** Trong KG $Oxyz$, cho tứ diện đều $ABCD$ có $A(0;1;2)$ và hình chiếu vuông góc của $A$ trên mặt phẳng $(BCD)$ là $H(4;-3;-2)$. Tìm tọa độ tâm $I$ của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.

**A** $I(3;-2;-1)$. **B** $I(2;-1;0)$. **C** $I(3;-2;1)$. **D** $I(-3;-2;1)$.

**Lời giải.**

Gọi $I(a;b;c)\Rightarrow\overrightarrow{IA}=(-a;1-b;2-c);\overrightarrow{IH}=(4-a;-3-b;-2-c)$.

$ABCD$ là tứ diện đều nên tâm $I$ của mặt cầu ngoại tiếp trùng với trọng tâm tứ diện $\Rightarrow\overrightarrow{IA}=-3\overrightarrow{IH}\Rightarrow\begin{cases}-a=-3(4-a)\\1-b=-3(-3-b)\\2-c=-3(-2-c)\end{cases}\Rightarrow$
$$\begin{cases}a=3\\b=-2\\c=-1.\end{cases}$$
Vậy $I(3;-2;-1)$.

Chọn đáp án A ..................... □

**CÂU 11.** Trong không gian tọa độ $Oxyz$, mặt cầu $(S)$ đi qua điểm $O$ và cắt các tia $Ox$, $Oy$, $Oz$ lần lượt tại các điểm $A$, $B$, $C$ khác $O$ thỏa mãn tam giác $ABC$ có trọng tâm là điểm $G(-6;-12;18)$. Tọa độ tâm của mặt cầu $(S)$ là

**A** $(9;18;-27)$. **B** $(-3;-6;9)$. **C** $(3;6;-9)$. **D** $(-9;-18;27)$.

**Lời giải.**

Gọi tọa độ các điểm trên ba tia $Ox$, $Oy$, $Oz$ lần lượt là $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$ với $a$, $b$, $c>0$.

Vì $G$ là trọng tâm tam giác $ABC$ nên $\begin{cases}\dfrac{a}{3}=-6\\\dfrac{b}{3}=-12\\\dfrac{c}{3}=18\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-18\\b=-36\\c=54.\end{cases}$

Gọi phương trình mặt cầu $(S)$ cần tìm là $x^2+y^2+z^2-2mx-2ny-2pz+q=0$.

Vì $(S)$ qua các điểm $O$, $A$, $B$, $C$ nên ta có hệ: $\begin{cases}q=0\\36m+q=-18^2\\72n+q=-36^2\\-108p+q=-54^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=-9\\n=-18\\p=27\\q=0.\end{cases}$

Vậy tọa độ tâm mặt cầu $(S)$ là $(-9;-18;27)$.

Chọn đáp án D ..................... □

**CÂU 12.** Trong hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu

$$(S)\colon (x-\cos\alpha)^2+(y-\cos\beta)^2+(z-\cos\gamma)^2=4$$

với $\alpha$, $\beta$ và $\gamma$ lần lượt là ba góc tạo bởi tia $Ot$ bất kì với 3 tia $Ox$, $Oy$ và $Oz$. Biết rằng mặt cầu $(S)$ luôn tiếp xúc với hai mặt cầu cố định. Tổng diện tích của hai mặt cầu cố định đó bằng

(A) $40\pi$. (B) $4\pi$. (C) $20\pi$. (D) $36\pi$.

**Lời giải.**

Ta dễ dàng chứng minh được: $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$.
Mặt cầu $(S)$ có tâm $I(\cos\alpha;\cos\beta;\cos\gamma)$.
Suy ra tâm $I$ thuộc mặt cầu $(S')$ có tâm $O(0;0;0)$, $R=\sqrt{\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma}=1$.
Mặt cầu $(S)$ luôn tiếp xúc với hai mặt cầu $(S_1)$, $(S_2)$.
Mặt cầu $(S_1)$ có tâm là $O$, bán kính $R_1=|OI-R|=|1-2|=1$.
Mặt cầu $(S_2)$ có tâm là $O$, bán kính $R_2=OI+R=1+2=3$.
Vậy tổng diện tích hai mặt cầu bằng $4\pi(R_1^2+R_2^2)=4\pi(1^2+3^2)=40\pi$.

Chọn đáp án (A) ........................................................................................ □

**CÂU 13.** Trong KG $Oxyz$, cho điểm $M(1;-2;3)$. Gọi $I$ là hình chiếu vuông góc của $M$ trên trục $Ox$. Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt cầu tâm $I$ bán kính $IM$?

(A) $(x-1)^2+y^2+z^2=13$. (B) $(x+1)^2+y^2+z^2=17$.

(C) $(x+1)^2+y^2+z^2=13$. (D) $(x-1)^2+y^2+z^2=\sqrt{13}$.

**Lời giải.**

Hình chiếu vuông góc của $M$ trên trục $Ox$ là $I(1;0;0)\Rightarrow IM=\sqrt{13}$.
Suy ra phương trình mặt cầu tâm $I$ bán kính $IM$ là $(x-1)^2+y^2+z^2=13$.

Chọn đáp án (A) ........................................................................................ □

**CÂU 14.** Trong KG $Oxyz$, cho điểm $I(1;-2;3)$. Viết phương trình mặt cầu tâm $I$, cắt trục $Ox$ tại hai điểm $A$ và $B$ sao cho $AB=2\sqrt{3}$

(A) $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=16$. (B) $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=20$.

(C) $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=25$. (D) $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=9$.

**Lời giải.**

Gọi $H$ là trung điểm $AB$ suy ra $H$ là hình chiếu vuông góc của $I$ lên $Ox$ nên $H(1;0;0)$.
$IH=\sqrt{13}\Rightarrow R=IA=\sqrt{IH^2+AH^2}=4$.
Phương trình mặt cầu là $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=16$

Chọn đáp án (A) ........................................................................................ □

**CÂU 15.** Trong KG $Oxyz$, cho điểm $M(1;-2;3)$. Gọi $I$ là hình chiếu vuông góc của $M$ trên trục $Ox$. Phương trình nào sau đây là phương trình mặt cầu tâm $I$ bán kính $IM$?

(A) $(x-1)^2+y^2+z^2=\sqrt{13}$. (B) $(x-1)^2+y^2+z^2=13$.

(C) $(x+1)^2+y^2+z^2=13$. (D) $(x+1)^2+y^2+z^2=17$.

**Lời giải.**

Với điểm $M(1;-2;3)$ thì hình chiếu vuông góc của $M$ trên trục $Ox$ là $I(1;0;0)$ suy ra $IM=\sqrt{13}$.
Vậy phương trình mặt cầu tâm $I(1;0;0)$ bán kính $IM$ là $(x-1)^2+y^2+z^2=13$.

Chọn đáp án (B) ........................................................................................ □

**CÂU 16.** Trong KG $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ có tọa độ đỉnh $A(2;0;0)$, $B(0;4;0)$, $C(0;0;6)$, $A(2;4;6)$. Gọi $(S)$ là mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$. Viết phương trình mặt cầu $(S')$ có tâm trùng với tâm của mặt cầu $(S)$ và có bán kính gấp 2 lần bán kính của mặt cầu $(S)$.

(A) $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=56$. (B) $x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z=0$.

(C) $(x+1)^2+(y+2)^2+(z+3)^2=14$. (D) $x^2+y^2+z^2-2x+4y+6z-12=0$.

**Lời giải.**

Gọi phương trình mặt cầu $(S)$ có dạng $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$.

Vì $(S)$ là mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ nên ta có

$$\begin{cases} 2^2+0^2+0^2-2\cdot a\cdot 2-2\cdot b\cdot 0-2\cdot c\cdot 0+d=0\\ 0^2+4^2+0^2-2\cdot a\cdot 0-2\cdot b\cdot 4-2\cdot c\cdot 0+d=0\\ 0^2+0^2+6^2-2\cdot a\cdot 0-2\cdot b\cdot 0-2\cdot c\cdot 6+d=0\\ 2^2+4^2+6^2-2\cdot a\cdot 2-2\cdot b\cdot 4-2\cdot c\cdot 6+d=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -4a+d=-4\\ -8b+d=-16\\ -12c+d=-36\\ -4a-8b-12c+d=-56\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=1\\ b=2\\ c=3\\ d=0.\end{cases}$$

Suy ra $x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z=0 \Rightarrow I(1;2;3)$ và $R=\sqrt{14} \Rightarrow R'=2\sqrt{14}$.
Vậy mặt cầu $(S')$ có tâm $I(1;2;3)$ và $R'=2\sqrt{14}$ có phương trình

$$(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=56.$$

Chọn đáp án (A) ........................................ □

**CÂU 17.** Trong KG $Oxyz$, mặt cầu tâm $I(2;1;-3)$ và tiếp xúc với trục $Oy$ có phương trình là

(A) $(x-2)^2+(y-1)^2+(z+3)^2=4$.
(B) $(x-2)^2+(y-1)^2+(z+3)^2=13$.
(C) $(x-2)^2+(y-1)^2+(z+3)^2=9$.
(D) $(x-2)^2+(y-1)^2+(z+3)^2=10$.

**Lời giải.**

Gọi $M$ là hình chiếu của $I$ trên $Oy \Rightarrow M(0;1;0)$ Mặt cầu $(S)$ tâm $I(2;1;-3)$ và tiếp xúc với trục $Oy$ có bán kính $IM=\sqrt{13}$.
Vậy $(S)$ có phương trình $(x-2)^2+(y-1)^2+(z+3)^2=13$.

Chọn đáp án (B) ........................................ □

**CÂU 18.** Trong KG $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon (x-1)^2+(y-1)^2+z^2=4$. Một mặt cầu $(S')$ có tâm $I'(9;1;6)$ và tiếp xúc ngoài với mặt cầu $(S)$. Phương trình mặt cầu $(S')$ là

(A) $(x-9)^2+(y-1)^2+(z-6)^2=64$.
(B) $(x-9)^2+(y-1)^2+(z-6)^2=144$.
(C) $(x-9)^2+(y-1)^2+(z-6)^2=36$.
(D) $(x+9)^2+(y+1)^2+(z+6)^2=25$.

**Lời giải.**

Gọi $I(1;1;0)$, $R=2$. $II'=10$.
Gọi $R'$ là bán kính của mặt cầu $(S')$.
Theo giả thiết, ta có $R'+R=II' \Leftrightarrow R'=II'-R=8$.
Khi đó phương trình mặt cầu $(S')\colon (x-9)^2+(y-1)^2+(z-6)^2=64$.

Chọn đáp án (A) ........................................ □

**CÂU 19.** Trong KG $Oxyz$, cho điểm $H(1;2;-2)$. Mặt phẳng $(\alpha)$ đi qua $H$ và cắt các trục $Ox$, $Oy$, $Oz$ tại $A$, $B$, $C$ sao cho $H$ là trực tâm tam giác $ABC$. Viết phương trình mặt cầu tâm $O$ và tiếp xúc với mặt phẳng $(\alpha)$.

(A) $x^2+y^2+z^2=81$.
(B) $x^2+y^2+z^2=1$.
(C) $x^2+y^2+z^2=9$.
(D) $x^2+y^2+z^2=25$.

**Lời giải.**

Ta có $H$ là trực tâm tam giác $ABC \Rightarrow OH\perp(ABC)$.
Thật vậy $\begin{cases} OC\perp OA\\ OC\perp OB\end{cases} \Rightarrow OC\perp AB$. (1)
Mà $CH\perp AB$ (vì $H$ là trực tâm tam giác $ABC$). (2)
Từ (1) và (2) suy ra $AB\perp(OHC) \Rightarrow AB\perp OH$. (*)
Tương tự $BC\perp(OAH) \Rightarrow BC\perp OH$. (**)
Từ (*) và (**) suy ra $OH\perp(ABC)$.
Khi đó mặt cầu tâm $O$ tiếp xúc mặt phẳng $(ABC)$ có bán kính $R=OH=3$.
Vậy mặt cầu tâm $O$ và tiếp xúc với mặt phẳng $(\alpha)$ là $(S)\colon x^2+y^2+z^2=9$.

Chọn đáp án (C) ........................................ □

**Phần II. Trong mỗi ý a), b), c) và d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.**

**CÂU 20.** Trong KG $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)$ có tâm $I(0;-2;1)$, bán kính bằng 2. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

| Mệnh đề | Đ | S |
|---|---|---|
| **a)** Phương trình của mặt cầu $(S)$ là $x^2+(y+2)^2+(z-1)^2=2$. | | X |
| **b)** Phương trình của mặt cầu $(S)$ là $x^2+(y-2)^2+(z+1)^2=2$. | | X |
| **c)** Phương trình của mặt cầu $(S)$ là $x^2+(y-2)^2+(z+1)^2=4$. | | X |
| **d)** Phương trình của mặt cầu $(S)$ là $x^2+(y+2)^2+(z-1)^2=4$. | X | |

**Lời giải.**
Vì phương trình mặt cầu tâm $I(a;b;c)$ và bán kính bằng $R$ là

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2.$$

Vậy phương trình mặt cầu $(S)$ có tâm $I(0;-2;1)$ và bán kính bằng 2 là

$$x^2+(y+2)^2+(z-1)^2=4.$$

a) S Sai.

b) S Sai.

c) S Sai.

d) Đ Đúng.

Chọn đáp án | a sai | b sai | c sai | d đúng | ..............................□

**CÂU 21.** Trong KG $Oxyz$, cho hai điểm $I(1;1;1)$ và $A(1;2;3)$. Gọi $(S)$ là mặt cầu tâm $I$ và đi qua điểm $A$. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

| Mệnh đề | Đ | S |
|---|---|---|
| **a)** Phương trình mặt cầu $(S)$ là $(x+1)^2+(y+1)^2+(z+1)^2=5$. | | X |
| **b)** Phương trình mặt cầu $(S)$ là $(x+1)^2+(y+1)^2+(z+1)^2=29$. | | X |
| **c)** Phương trình mặt cầu $(S)$ là $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=5$. | X | |
| **d)** Phương trình mặt cầu $(S)$ là $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=25$. | | X |

**Lời giải.**
Vì $R=IA=\sqrt{(1-1)^2+(2-1)^2+(3-1)^2}=\sqrt{5}$.
Vậy phương trình mặt cầu tâm $I$ và đi qua điểm $A$ có phương trình là
$(x-x_I)^2+(y-y_I)^2+(z-z_I)^2=R^2 \Rightarrow (x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=5$.

a) S Sai.

b) S Sai.

c) Đ Đúng.

d) S Sai.

Chọn đáp án | a sai | b sai | c đúng | d sai | ..............................□

**CÂU 22.** Trong KG $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;-1;-3)$; $B(0;3;-1)$. Gọi $(S)$ là mặt cầu đường kính $AB$. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

| Mệnh đề | Đ | S |
|---|---|---|
| **a)** Phương trình của mặt cầu $(S)$ là $(x-1)^2+(y-1)^2+(z+2)^2=6$. | X | |
| **b)** Phương trình của mặt cầu $(S)$ là $(x-1)^2+(y-1)^2+(z+2)^2=24$. | | X |
| **c)** Phương trình của mặt cầu $(S)$ là $(x+1)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=24$. | | X |
| **d)** Phương trình của mặt cầu có tâm là trung điểm $AB$ và đi qua hai điểm $A$, $B$ là $(x-1)^2+(y-1)^2+(z+2)^2=6$. | X | |

**Lời giải.**

Vì tâm $I$ của mặt cầu $(S)$ là trung điểm của $AB$ suy ra $I(1;1;-2)$ và bán kính $R=\dfrac{1}{2}AB=\dfrac{1}{2}\sqrt{4+16+4}=\dfrac{1}{2}\sqrt{24}$.
Vậy phương trình của mặt cầu đường kính $AB$ là

$$(x-1)^2+(y-1)^2+(z+2)^2=6.$$

a) Đ Đúng.

b) S Sai.

c) S Sai.

d) Đ Đúng. Vì mặt cầu có tâm là trung điểm $AB$ và đi qua hai điểm $A$, $B$ là mặt cầu đường kính $AB$.

Chọn đáp án | a đúng | b sai | c sai | d đúng | ........ □

**CÂU 23.** Gọi $(S)$ là mặt cầu đi qua bốn điểm $A(2;0;0)$, $B(1;3;0)$, $C(-1;0;3)$, $D(1;2;3)$. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

| Mệnh đề | Đ | S |
|---|---|---|
| **a)** Mặt cầu $(S)$ có tọa độ tâm là $(1;-1;1)$. | | X |
| **b)** Mặt cầu $(S)$ có tọa độ tâm là $(0;1;1)$. | X | |
| **c)** Bán kính $R$ của mặt cầu $(S)$ là $R=6$. | | X |
| **d)** Bán kính $R$ của mặt cầu $(S)$ là $R=\sqrt{6}$. | X | |

**Lời giải.**

Vì giả sử $I(a;b;c)$ là tâm mặt cầu đi qua bốn điểm $A$, $B$, $C$, $D$. Khi đó

$$\begin{aligned}&\begin{cases}AI^2=BI^2\\AI^2=CI^2\\AI^2=DI^2\end{cases}\\
\Leftrightarrow&\begin{cases}(a-2)^2+b^2+c^2=(a-1)^2+(b-3)^2+c^2\\(a-2)^2+b^2+c^2=(a+1)^2+b^2+(c-3)^2\\(a-2)^2+b^2+c^2=(a-1)^2+(b-2)^2+(c-3)^2\end{cases}\\
\Leftrightarrow&\begin{cases}a-3b=-3\\a-c=-1\\a-2b-3c=-5\end{cases}\\
\Leftrightarrow&\begin{cases}a=0\\b=1\\c=1.\end{cases}\end{aligned}$$

Vậy $I(0;1;1)$; bán kính $R=IA=\sqrt{2^2+1^2+1^2}=\sqrt{6}$.

a) S Sai.

b) Đ Đúng.

c) S Sai.

d) Đ Đúng.

Chọn đáp án | a sai | b đúng | c sai | d đúng | ........ □

**CÂU 24.** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)$ có tâm nằm trên mặt phẳng $(Oxy)$ và đi qua ba điểm $A(1;2;-4)$, $B(1;-3;1)$, $C(2;2;3)$. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

| Mệnh đề | Đ | S |
|---|---|---|

| Mệnh đề | Đ | S |
|---|---|---|
| **a)** Tọa độ tâm $(I)$ của mặt cầu $(S)$ là $(2;-1;0)$. | | X |
| **b)** Tọa độ tâm $(I)$ của mặt cầu $(S)$ là $(-2;1;0)$. | X | |
| **c)** Bán kính $R$ của mặt cầu $(S)$ là $R=\sqrt{26}$. | X | |
| **d)** Bán kính $R$ của mặt cầu $(S)$ là $R=26$. | | X |

**Lời giải.**

Vì giả sử tâm $I(a;b;c)$ và phương trình mặt cầu $(S)$ là

$$x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0.$$

Do $I\in(Oxy)\Leftrightarrow c=0\Leftrightarrow (S)\colon x^2+y^2+z^2-2ax-2by+d=0$.

Ta có $\begin{cases}A\in(S)\\B\in(S)\\C\in(S)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2a+4b-d=21\\2a-6b-d=11\\4a+4b-d=17\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-2\\b=1\\d=-21.\end{cases}$

Vậy $I(-2;1;0)$ và $R=\sqrt{26}$.

**a)** S Sai.

**b)** Đ Đúng.

**c)** Đ Đúng.

**d)** S Sai.

Chọn đáp án | a sai | b đúng | c đúng | d sai | ....................□

**CÂU 25.** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;1;2)$, $B(3;2;-3)$. Mặt cầu $(S)$ có tâm $I$ thuộc $Ox$ và đi qua hai điểm $A$, $B$. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

| Mệnh đề | Đ | S |
|---|---|---|
| **a)** Tọa độ tâm $(I)$ của mặt cầu $(S)$ là $I(4;0;0)$. | X | |
| **b)** Bán kính $R$ của mặt cầu $(S)$ là $R=14$. | | X |
| **c)** Mặt cầu $(S)$ có phương trình $x^2+y^2+z^2-8x+2=0$. | X | |
| **d)** Mặt cầu $(S)$ có phương trình $x^2+y^2+z^2-8x-2=0$. | | X |

**Lời giải.**

Vì giả sử $I(a;0;0)\in Ox\Rightarrow\overrightarrow{IA}(1-a;1;2)$; $\overrightarrow{IB}(3-a;2;-3)$.

Do $(S)$ đi qua hai điểm $A$, $B$ nên

$$\begin{aligned}&IA=IB\\\Leftrightarrow\ &\sqrt{(1-a)^2+5}=\sqrt{(3-a)^2+13}\\\Leftrightarrow\ &4a=16\\\Leftrightarrow\ &a=4.\end{aligned}$$

Suy ra mặt cầu $(S)$ có tâm $I(4;0;0)$, bán kính $R=IA=\sqrt{14}$.

Vậy $(S)$ là $(x-4)^2+y^2+z^2=14\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-8x+2=0$.

**a)** Đ Đúng.

**b)** S Sai.

**c)** Đ Đúng.

**d)** S Sai.

Chọn đáp án | a đúng | b sai | c đúng | d sai | ....................□

**CÂU 26.** Trong KG $Oxyz$, mặt cầu $(S)$ đi qua điểm $A(1;-1;4)$ và tiếp xúc với các mặt phẳng tọa độ. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

| Mệnh đề | Đ | S |
|---|---|---|
| **a)** Mặt cầu $(S)$ có phương trình $(x-3)^2+(y+3)^2+(z+3)^2=16$. | | X |
| **b)** Mặt cầu $(S)$ có phương trình $(x-3)^2+(y+3)^2+(z-3)^2=9$. | X | |
| **c)** Mặt cầu $(S)$ có phương trình $(x+3)^2+(y-3)^2+(z+3)^2=36$. | | X |
| **d)** Mặt cầu $(S)$ có phương trình $(x+3)^2+(y-3)^2+(z-3)^2=49$. | | X |

**Lời giải.**

Vì giả sử $I(a;b;c)$ là tâm của mặt cầu $(S)$. Mặt cầu $(S)$ tiếp xúc với các mặt phẳng tọa độ $\mathrm{d}\big(I,(Oxy)\big)=\mathrm{d}\big(I,(Oyz)\big)=\mathrm{d}\big(I,(Oxz)\big)\Leftrightarrow |a|=|b|=|c|=R$.
Mặt cầu $(S)$ đi qua $A(1;-1;4)$. Ta có

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \begin{cases} IA=R\\ a>0;c>0;b<0\end{cases}\\
&\Leftrightarrow \begin{cases} IA^2=R^2\\ a>0;c>0;b<0\end{cases}\\
&\Leftrightarrow \begin{cases} (a-1)^2+(b+1)^2+(c-4)^2=R^2\\ a=c=-b=R>0\end{cases}\\
&\Leftrightarrow \begin{cases} (a-1)^2+(-a+1)^2+(a-4)^2=a^2\\ a=c=-b=R>0\end{cases}\\
&\Leftrightarrow \begin{cases} 2a^2-12a+18=0\\ a=c=-b=R>0\end{cases}\\
&\Leftrightarrow \begin{cases} a=c=3\\ b=-3\\ R=3.\end{cases}
\end{aligned}$$

Vậy $(S)\colon (x-3)^2+(y+3)^2+(z-3)^2=9$.

**a)** S Sai.

**b)** Đ Đúng.

**c)** S Sai.

**d)** S Sai.

Chọn đáp án | a sai | b đúng | c sai | d sai | ☐

**Phần III. Học sinh điền kết quả vào ô trống.**

**CÂU 27.** Trong KG $Oxyz$, mặt cầu $(S)$ có tâm $I(0;1;-2)$ và bán kính bằng 3. Phương trình của $(S)$ có dạng $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$. Tìm $d$.

Đáp án: | − | 4 | | |

**Lời giải.**

Phương trình mặt cầu tâm $I(a;b;c)$ và bán kính bằng $R$ là $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$.
Ta có mặt cầu tâm $I(0;1;-2)$, bán kính bằng 3 có phương trình là

$$x^2+(y-1)^2+(z+2)^2=9\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-2y+4z-4=0.$$

Đáp án: $-4$ ☐

**CÂU 28.** Trong KG $Oxyz$, cho mặt cầu có tâm $I(1;-4;3)$ và đi qua điểm $A(5;-3;2)$. Tính bán kính của mặt cầu đã cho (làm tròn kết quả đến hàng phần nghìn).

Đáp án: | 4 | , | 2 | 4 |

**Lời giải.**

Mặt cầu tâm $I(1;-4;3)$ và đi qua điểm $A(5;-3;2)$ nên bán kính $R=IA=3\sqrt{2}\approx 4{,}24$.
Đáp án: 4,24 ☐

**CÂU 29.** Trong KG $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;1;1)$ và $B(1;-1;3)$. Phương trình mặt cầu có đường kính $AB$ có dạng $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$. Tính tổng $S=a+b+c+d$.

Đáp án: | 6 | | | |

**Lời giải.**

Gọi $I$ là tâm của mặt cầu đường kính $AB$.
Khi đó $I$ là trung điểm của đoạn $AB \Rightarrow I(1;0;2)$.
Bán kính của mặt cầu là $R=\dfrac{1}{2}AB=\dfrac{1}{2}\sqrt{(1-1)^2+(-1-1)^2+(3-1)^2}=\sqrt{2}$.
Suy ra phương trình mặt cầu là $(x-1)^2+y^2+(z-2)^2=2 \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-2x-4z+3=0$.
Vậy $S=a+b+c+d=1+2+3=6$.
Đáp án: $\boxed{6}$ ............ □

**CÂU 30.** Trong KG $Oxyz$, cho $A(-1;0;0)$, $B(0;0;2)$, $C(0;-3;0)$. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$ (làm tròn đến hàng phần nghìn).

Đáp án: | 1 | , | 8 | 7 |

**Lời giải.**

Gọi $(S)$ là mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$.
Phương trình mặt cầu $(S)$ có dạng $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$.

Vì $O$, $A$, $B$, $C$ thuộc $(S)$ nên ta có $\begin{cases} d=0 \\ 1+2a+d=0 \\ 4-4c+d=0 \\ 9+6b+d=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-\dfrac{1}{2} \\ b=-\dfrac{3}{2} \\ c=1 \\ d=0. \end{cases}$

Vậy bán kính mặt cầu $(S)$ là $R=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}=\sqrt{\dfrac{1}{4}+\dfrac{9}{4}+1}=\dfrac{\sqrt{14}}{2}\approx 1{,}87$.

Đáp án: $\boxed{1{,}87}$ ............ □

**CÂU 31.** Trong KG $Oxyz$, gọi $I(a;b;c)$ là tâm mặt cầu đi qua điểm $A(1;-1;4)$ và tiếp xúc với tất cả các mặt phẳng tọa độ. Tính $P=a-b+c$.

Đáp án: | 9 | | | |

**Lời giải.**

Vì mặt cầu tâm $I$ tiếp xúc với các mặt phẳng tọa độ nên

$\mathrm{d}\big(I,(Oxy)\big)=\mathrm{d}\big(I,(Oyz)\big)=\mathrm{d}\big(I,(Oxz)\big) \Leftrightarrow |a|=|b|=|c| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=b=c \\ a=b=-c \\ a=-b=c \\ a=-b=-c. \end{array}\right.$

Nhận thấy chỉ có trường hợp $a=-b=c$ thì phương trình $AI=\mathrm{d}\big(I,(Oxy)\big)$ có nghiệm, các trường hợp còn lại vô nghiệm.
Thật vậy, với $a=-b=c$ thì $I(a;-a;a)$.
$AI=\mathrm{d}\big(I,(Oxy)\big) \Leftrightarrow (a-1)^2+(a-1)^2+(a-4)^2=a^2 \Leftrightarrow a^2-6a+9=0 \Leftrightarrow a=3$.
Khi đó $P=a-b+c=9$.
Đáp án: $\boxed{9}$ ............ □

**CÂU 32.** Trong không gian $Oxyz$, tìm giá trị dương của $m$ (làm tròn đến hàng phần nghìn) sao cho mặt phẳng $(Oxy)$ tiếp xúc với mặt cầu $(x-3)^2+y^2(z-2)^2=m^2+1$.

Đáp án: | 1 | , | 7 | 3 |

**Lời giải.**

Mặt cầu $(S)$: $(x-3)^2+y^2(z-2)^2=m^2+1$ có tâm $I(3;0;2)$, bán kính $R=\sqrt{m^2+1}$.
$(S)$ tiếp xúc với $(Oxy) \Leftrightarrow \mathrm{d}\left(I,(Oxy)\right)=R \Leftrightarrow 2=\sqrt{m^2+1} \Leftrightarrow m^2=3 \Leftrightarrow m=\sqrt{3}\approx 1{,}73$ (do $m>0$).
Đáp án: $\boxed{1{,}73}$ ............ □

**CÂU 33.** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;2;-4)$, $B(1;-3;1)$, $C(2;2;3)$. Tính đường kính của mặt cầu $(S)$ đi qua ba điểm trên và có tâm nằm trên mặt phẳng $(Oxy)$ (Làm tròn kết quả đến hàng phần chục).

Đáp án: | 1 | 0 | , | 2 |

**Lời giải.**

Gọi tâm mặt cầu là $I(x;y;0)$. Ta có

$$\begin{aligned}&\begin{cases}IA=IB\\IA=IC\end{cases}\\ \Leftrightarrow\ &\begin{cases}\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2+4^2}=\sqrt{(x-1)^2+(y+3)^2+1^2}\\ \sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2+4^2}=\sqrt{(x-2)^2+(y-2)^2+3^2}\end{cases}\\ \Leftrightarrow\ &\begin{cases}(y-2)^2+4^2=(y+3)^2+1^2\\ x^2-2x+1+16=x^2-4x+4+9\end{cases}\\ \Leftrightarrow\ &\begin{cases}10y=10\\2x=-4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-2\\y=1.\end{cases}\end{aligned}$$

$\Rightarrow l=2R=2\sqrt{(-3)^2+(-1)^2+4^2}=2\sqrt{26}\approx 10{,}2$.

Đáp án: $\boxed{10{,}2}$ ..........

**CÂU 34.** Trong không gian $Oxyz$, gọi $(S)$ là mặt cầu đi qua điểm $D(0;1;2)$ và tiếp xúc với các trục $Ox, Oy, Oz$ tại các điểm $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$ trong đó $a,b,c\in\mathbb{R}\backslash\{0;1\}$. Tính bán kính của $(S)$ (làm tròn kết quả đến hàng phần chục).

Đáp án: | 7 | , | 1 | |

**Lời giải.**

Gọi $I$ là tâm của mặt cầu $(S)$.

Vì $(S)$ tiếp xúc với các trục $Ox, Oy, Oz$ tại các điểm $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$ nên ta có $IA\perp Ox, IB\perp Oy, IC\perp Oz$ hay $A, B, C$ tương ứng là hình chiếu của $I$ trên $Ox, Oy, Oz \Rightarrow I(a;b;c)$.

$\Rightarrow$ Mặt cầu $(S)$ có phương trình $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$ với $a^2+b^2+c^2-d>0$.

Vì $(S)$ đi qua $A$, $B$, $C$, $D$ nên ta có $\begin{cases}a^2=b^2=c^2=d\\5-2b-4c+d=0.\end{cases}$

Vì $a,b,c\in\mathbb{R}\backslash\{0;1\}$ nên $0<d\neq 1$.

Mặt khác, từ (1) $\Rightarrow R=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}=\sqrt{2d}$.

- TH1. Từ (1) $\Rightarrow b=c=\sqrt{d}$. Thay vào $(*)$ ta có $5-6\sqrt{d}+d=0\Leftrightarrow d=25$ (nhận). $\Rightarrow R=\sqrt{2.25}=5\sqrt{2}$.
- TH2. Từ (1) $\Rightarrow b=c=-\sqrt{d}$. Thay vào $(*)$ ta có $5+6\sqrt{d}+d=0$ (vô nghiệm).
- TH3. Từ (1) $\Rightarrow b=\sqrt{d}, c=-\sqrt{d}$. Thay vào $(*)$ ta có $5+2\sqrt{d}+d=0$ (vô nghiệm).
- TH4. Từ (1) $\Rightarrow b=-\sqrt{d}, c=\sqrt{d}$. Thay vào $(*)$ ta có $5-2\sqrt{d}+d=0$ (vô nghiệm).

Vậy mặt cầu $(S)$ có bán kính $R=5\sqrt{2}\approx 7{,}1$.

Đáp án: $\boxed{7{,}1}$ ..........

**CÂU 35.** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;0;0), C(0;0;3), B(0;2;0)$. Tập hợp các điểm $M$ thỏa mãn $MA^2=MB^2+MC^2$ là mặt cầu có bán kính là bao nhiêu? (làm tròn kết quả đến hàng phần nghìn).

Đáp án: | 1 | , | 4 | 1 |

**Lời giải.**

Giả sử $M(x;y;z)$.

Ta có $MA^2=(x-1)^2+y^2+z^2$; $MB^2=x^2+(y-2)^2+z^2$; $MC^2=x^2+y^2+(z-3)^2$.

$$\begin{aligned}&MA^2=MB^2+MC^2\\ \Leftrightarrow\ &(x-1)^2+y^2+z^2=x^2+(y-2)^2+z^2+x^2+y^2+(z-3)^2\\ \Leftrightarrow\ &-2x+1=(y-2)^2+x^2+(z-3)^2\\ \Leftrightarrow\ &(x+1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=2.\end{aligned}$$

Vậy tập hợp các điểm $M$ thỏa mãn $MA^2=MB^2+MC^2$ là mặt cầu có bán kính là $R=\sqrt{2}\approx 1{,}41$.

Đáp án: $\boxed{1{,}41}$ ..........

**CÂU 36.** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, xét mặt cầu $(S)$ có phương trình dạng $x^2+y^2+z^2-4x+2y-2az+10a=0$. Có tất cả bao nhiêu giá trị thực của $a$ để $(S)$ có chu vi đường tròn lớn bằng $8\pi$.

Đáp án: | 2 | | | |

**Lời giải.**

Đường tròn lớn có chu vi bằng $8\pi$ nên bán kính của $(S)$ là $\dfrac{8\pi}{2\pi}=4$.

Từ phương trình của $(S)$ suy ra bán kính của $(S)$ là $\sqrt{2^2+1^2+a^2-10a}$.

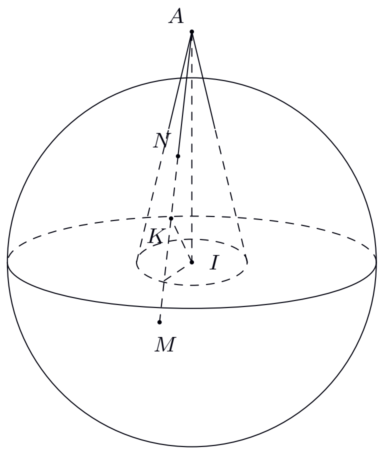
Do đó $\sqrt{2^2+1^2+a^2-10a}=4\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=-1\\a=11.\end{array}\right.$

Đáp án: $\boxed{2}$ ..........

**CÂU 37.** Trong KG $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)$: $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=25$ và hình nón $(H)$ có đỉnh $A(3;2;-2)$ và nhận $AI$ làm trục đối xứng với $I$ là tâm mặt cầu. Một đường sinh của hình nón $(H)$ cắt mặt cầu tại $M, N$ sao cho $AM=3AN$. Tìm bán kính của mặt cầu đồng tâm với mặt cầu $(S)$ và tiếp xúc với các đường sinh của hình nón $(H)$ (làm tròn kết quả đến hàng phần nghìn).

Đáp án: | 4 | , | 8 | 6 |

**Lời giải.**




Gọi hình chiếu vuông góc của $I$ trên $MN$ là $K$.
Dễ thấy $AN=NK=\frac{1}{3}AM$, mặt cầu $(S)$ có tâm $I(1;2;3)$ và bán kính $R=5$.
Ta có $AM\cdot AN=AI^2-R^2=4\Rightarrow AN^2=\frac{4}{3}\Rightarrow KN=AN=\frac{2\sqrt{3}}{3}$
$\Rightarrow IK=\sqrt{IN^2-KN^2}=\frac{\sqrt{213}}{3}$.
Nhận thấy mặt cầu đồng tâm với mặt cầu $(S)$ và tiếp xúc với các đường sinh của hình nón $(H)$ chính là mặt cầu tâm $I(1;2;3)$ có bán kính $IK=\frac{\sqrt{213}}{3}\approx 4{,}86$.

Đáp án: 4,86 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . □

**CÂU 38.** Trong KG $Oxyz$, cho bốn điểm $A(0;-1;2)$, $B(2;-3;0)$, $C(-2;1;1)$, $D(0;-1;3)$. Gọi $(L)$ là tập hợp tất cả các điểm $M$ trong không gian thỏa mãn đẳng thức $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{MD}=1$. Biết rằng $(L)$ là một đường tròn, đường tròn đó có bán kính $r$ bằng bao nhiêu? (Làm tròn kết quả đến hàng phần nghìn).

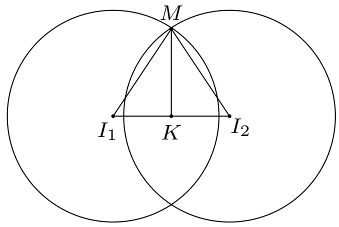
Đáp án: | 1 | , | 6 | 6 |

**Lời giải.**

Gọi $M(x;y;z)$ là tập hợp các điểm thỏa mãn yêu cầu bài toán. Ta có
$\overrightarrow{AM}=(x;y+1;z-2)$, $\overrightarrow{BM}=(x-2;y+3;z)$, $\overrightarrow{CM}=(x+2;y-1;z-1)$, $\overrightarrow{DM}=(x;y+1;z-3)$.
Từ giả thiết

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{MD}=1\\
\Leftrightarrow&\begin{cases}\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=1\\ \overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{MD}=1\end{cases}\\
\Leftrightarrow&\begin{cases}x(x-2)+(y+1)(y+3)+z(z-2)=1\\ x(x+2)+(y+1)(y-1)+(z-1)(z-3)=1\end{cases}\\
\Leftrightarrow&\begin{cases}x^2+y^2+z^2-2x+4y-2z+2=0\\ x^2+y^2+z^2+2x-4z+1=0.\end{cases}
\end{aligned}$$

Suy ra quỹ tích điểm $M$ là đường tròn giao tuyến của mặt cầu tâm $I_1(1;-2;1), R_1=2$ và mặt cầu tâm $I_2(-1;0;2), R_2=2$.




Ta có $I_1I_2 = \sqrt{5}$.
Dễ thấy $r = \sqrt{R_1^2 - \left(\dfrac{I_1I_2}{2}\right)^2} = \sqrt{4 - \dfrac{5}{4}} = \dfrac{\sqrt{11}}{2}$.
Đáp án: $\boxed{1{,}66}$ ............ □

## 15 ỨNG DỤNG MẶT CẦU TRONG KHÔNG GIAN

**BÀI 1.** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục là kilômét) một trạm phát sóng rađa của Nga được đặt trên bán đảo Crimea ở vị trí $I(-2; 1; -1)$ và được thiết kế phát hiện máy bay của địch ở khoảng cách tối đa 500 km.

a) Sử dụng phương trình mặt cầu để mô tả ranh giới bên ngoài vùng phát sóng của rađa trong không gian.

b) Hai chiếc máy bay do thám của Mỹ và Anh đang bay ở vị trí có tọa độ lần lượt là $M(-200; 100; -250)$ và $N(350; -100; 300)$. Hỏi rađa của Nga có thể phát hiện ra hai chiếc máy bay do thám của Mỹ và Anh không?

**Lời giải.**

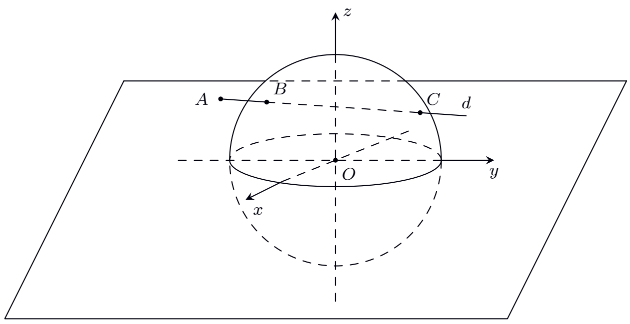
a) Phương trình mặt cầu để mô tả ranh giới bên ngoài vùng phát sóng của rađa trong không gian là

$$(x+2)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2 = 250\,000.$$

b)

- Ta có $IM = \sqrt{(-200+2)^2 + (100-1)^2 + (-250+1)^2} \approx 335{,}6 < 500$.
  Vì $IM < R$ nên điểm $M$ nằm trong mặt cầu.
  Vậy chiếc máy bay do thám của Mỹ có thể bị phát hiện bởi trạm rađa này.
- Ta có $IN = \sqrt{(350+2)^2 + (-100-1)^2 + (300+1)^2} \approx 474 < 500$.
  Vì $IN < R$ nên điểm $N$ nằm trong mặt cầu.
  Vậy chiếc máy bay do thám của Anh có thể bị phát hiện bởi trạm rađa này.

**BÀI 2.** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục là kilômét), đài kiểm soát không lưu sân bay Cam Ranh - Khánh Hòa ở vị trí $O(0; 0; 0)$ và được thiết kế phát hiện máy bay ở khoảng cách tối đa 600 km. Một máy bay của hãng Việt Nam Airlines đang ở vị trí $A(-1\,000; -200; 10)$, chuyển động theo đường thẳng $d$ có phương trình $\begin{cases} x = -1000 + 100t \\ y = -200 + 80t \\ z = 10 \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$ và hướng về đài kiểm soát không lưu (như hình vẽ).




a) Sử dụng phương trình mặt cầu để mô tả ranh giới bên ngoài vùng phát sóng của đài kiểm soát không lưu trong không gian.

b) Xác định tọa độ vị trí sớm nhất mà máy bay xuất hiện trên màn hình ra đa và tọa độ vị trí mà máy bay bay ra khỏi màn hình ra đa.

c) Tính khoảng cách ngắn nhất giữa máy bay với đài kiểm soát không lưu.

**Lời giải.**

a) Ranh giới bên ngoài vùng phát sóng của đài kiểm soát không lưu trong không gian là mặt cầu tâm $O$ bán kính $R = 600$. Vậy phương trình của mặt cầu là $x^2 + y^2 + z^2 = 360\,000$.

b) Gọi $B$ là vị trí sớm nhất mà máy bay xuất hiện trên màn hình ra đa.
Vì $B \in d$ nên $B(-1\,000 + 100t; -200 + 80t; 10)$.
$B$ là vị trí sớm nhất mà máy bay xuất hiện trên màn hình ra đa khi $OB = 600$, tức là

$$\begin{aligned} & (-1\,000 + 100t)^2 + (-200 + 80t)^2 + 10^2 = 600^2 \\ \Leftrightarrow\ & 16\,400t^2 - 232\,000t + 680\,100 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} t \approx 4{,}15 \\ t \approx 10. \end{array}\right. \end{aligned}$$

- Với $t = 4{,}15$, ta có $B(-585; 132; 10)$.
  Khi đó $AB \approx 531{,}46$.
- Với $t = 10$, ta có $B(0; 600; 10)$.
  Khi đó $AB \approx 1\,077{,}03$.

Vì $531{,}46 < 1\,077{,}03$ nên tọa độ vị trí sớm nhất mà máy bay xuất hiện trên màn hình ra đa là $(-585; 132; 10)$.
Suy ra, tọa độ vị trí mà máy bay bay ra khỏi màn hình ra đa là $(0; 600; 10)$.

c) Ta có vectơ chỉ phương của đường thẳng $d$ là $\vec{u} = (100; 80; 0)$.
Gọi $H$ là vị trí mà máy bay bay gần đài kiểm soát không lưu nhất.
Khi đó, khoảng $OH$ phải ngắn nhất, điều này xảy ra khi và chỉ khi $OH \perp d$.
Vì $H \in d$ nên $H(-1\,000 + 100t; -200 + 80t; 10)$.
Ta có $\overrightarrow{OH} = (-1\,000 + 100t; -200 + 80t; 10)$.
Khi đó

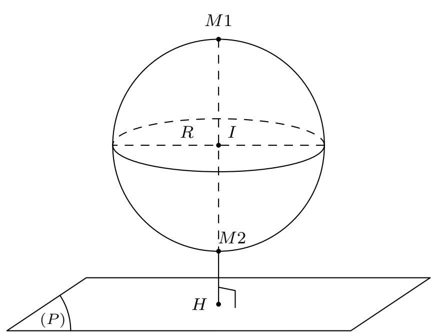
$$\begin{aligned} OH \perp d \quad & \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{OH} \cdot \vec{u} = 0 \\ & \Leftrightarrow \quad (-1\,000 + 100t) \cdot 100 + (-200 + 80t) \cdot 80 + 10 \cdot 0 = 0 \\ & \Leftrightarrow \quad 16\,400t - 116\,000 = 0 \\ & \Leftrightarrow \quad t = \frac{116\,000}{16\,400} \approx 7{,}07. \end{aligned}$$

Suy ra $OH = \sqrt{(-293)^2 + (365{,}6)^2 + 10^2} \approx 468{,}63$.
Vậy khoảng cách ngắn nhất giữa máy bay với đài kiểm soát không lưu là $468{,}63\,\text{km}$.

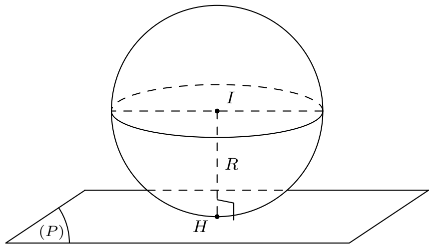
## 16 Vị trí tương đối giữa mặt phẳng với mặt cầu

Cho mặt cầu $S(I; R)$ và mặt phẳng $(P)$. Gọi $H$ là hình chiếu vuông góc của $I$ lên $(P)$ và có $d = IH$ là khoảng cách từ $I$ đến mặt phẳng $(P)$. Khi đó:

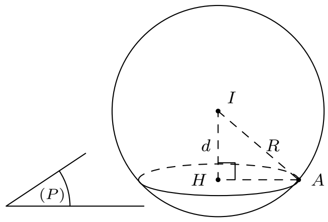
- Nếu $d > R$: Mặt cầu và mặt phẳng không có điểm chung.




- Nếu $d = R$: Mặt phẳng tiếp xúc mặt cầu. Lúc đó $(P)$ là mặt phẳng tiếp diện của $(S)$ và $H$ là tiếp điểm.




- Nếu $d < R$: mặt phẳng $(P)$ cắt mặt cầu theo thiết diện là đường tròn có tâm $H$ và bán kính $r = \sqrt{R^2 - IH^2}$.




**Phần I. Mỗi câu hỏi học sinh chọn một trong bốn phương án A, B, C, D.**

**CÂU 1.** Trong KG $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z - 22 = 0$ và mặt phẳng $(P)\colon 3x - 2y + 6z + 14 = 0$. Khoảng cách từ tâm $I$ của mặt cầu $(S)$ đến mặt phẳng $(P)$ bằng

Ⓐ 2. Ⓑ 4. Ⓒ 3. Ⓓ 1.

**Lời giải.**

Mặt cầu $(S)$ có tâm $I(1;1;1)$.

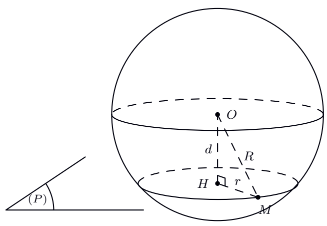
Vậy $\mathrm{d}\big(I,(P)\big) = \dfrac{|3 - 2 + 6 + 14|}{\sqrt{9 + 4 + 36}} = 3$.

Chọn đáp án C ..........□

**CÂU 2.** Trong KG $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon x^2 + y^2 + z^2 = 1$ và mặt phẳng $(P)\colon x + 2y - 2z + 1 = 0$. Tìm bán kính $r$ đường tròn giao tuyến của $(S)$ và $(P)$.

Ⓐ $r = \dfrac{1}{3}$. Ⓑ $r = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$. Ⓒ $r = \dfrac{1}{2}$. Ⓓ $r = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

**Lời giải.**




Mặt cầu có tâm $O(0;0;0)$, bán kính $R = 1$.

Khoảng cách $\mathrm{d}\big(O,(P)\big) = \dfrac{1}{3}$.

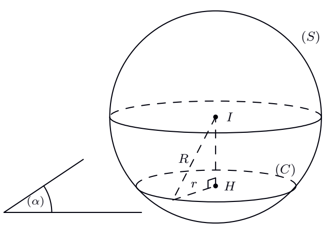
Bán kính đường tròn giao tuyến là $r = \sqrt{R^2 - d^2} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

Chọn đáp án B ..........□

**CÂU 3.** Trong KG $Oxyz$ cho mặt cầu $(S)\colon x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z = 0$. Đường tròn giao tuyến của $(S)$ với mặt phẳng $(Oxy)$ có bán kính là

Ⓐ $r = 3$. Ⓑ $r = \sqrt{5}$. Ⓒ $r = \sqrt{6}$. Ⓓ $r = \sqrt{14}$.

**Lời giải.**



Mặt cầu $(S)$ có tâm $I(1;2;3)$ và bán kính $R=\sqrt{1^2+2^2+3^2}=\sqrt{14}$.
Khoảng cách từ tâm $I$ đến mặt phẳng $(Oxy)$ là $d=3$, suy ra bán kính đường tròn giao tuyến cần tìm là $r=\sqrt{R^2-d^2}=\sqrt{5}$.

Chọn đáp án B ☐

**CÂU 4.** Trong KG $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)$ tâm $I(a;b;c)$ bán kính bằng 1, tiếp xúc mặt phẳng $(Oxz)$. Khẳng định nào sau đây luôn đúng?

**A** $|a|=1$. **B** $a+b+c=1$. **C** $|b|=1$. **D** $|c|=1$.

**Lời giải.**

Phương trình mặt phẳng $(Oxz)$: $y=0$.
Vì mặt cầu $(S)$ tâm $I(a;b;c)$ bán kính bằng 1 tiếp xúc với $(Oxz)$ nên ta có
$\mathrm{d}\big(I,(Oxz)\big)=1\Leftrightarrow|b|=1$.

Chọn đáp án C ☐

**CÂU 5.** Trong KG $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)$: $(x-2)^2+(y+1)^2+(z+2)^2=4$ và mặt phẳng $(P)$: $4x-3y-m=0$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số $m$ để mặt phẳng $(P)$ và mặt cầu $(S)$ có đúng 1 điểm chung.

**A** $m=1$. **B** $m=-1$ hoặc $m=-21$. **C** $m=1$ hoặc $m=21$. **D** $m=-9$ hoặc $m=31$.

**Lời giải.**

Ta có mặt cầu $(S)$: $(x-2)^2+(y+1)^2+(z+2)^2=4$ có tâm $I(2;-1;-2)$, bán kính $R=2$.
Mặt phẳng $(P)$ và mặt cầu $(S)$ có đúng 1 điểm chung khi và chỉ khi mặt phẳng $(P)$ tiếp xúc với mặt cầu $(S)$ hay:

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\big(I,(P)\big)=R &\Leftrightarrow \frac{|4\cdot 2-3\cdot(-1)-m|}{\sqrt{4^2+3^2}}=2\\ &\Leftrightarrow |11-m|=10\\ &\Leftrightarrow \left[\begin{aligned}&m=1\\&m=21.\end{aligned}\right.\end{aligned}$$

Chọn đáp án C ☐

**CÂU 6.** Trong KG $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)$: $x^2+y^2+z^2-2x+4y+2z-3=0$. Viết phương trình mặt phẳng $(Q)$ chứa trục $Ox$ và cắt $(S)$ theo một đường tròn bán kính bằng 3.

**A** $(Q)$: $y+3z=0$. **B** $(Q)$: $x+y-2z=0$. **C** $(Q)$: $y-z=0$. **D** $(Q)$: $y-2z=0$.

**Lời giải.**

$(Q)$ chứa trục $Ox$ nên có dạng $By+Cz=0$ $\left(B^2+C^2\neq 0\right)$.
$(S)$ có tâm $I(1;-2;-1)$ và bán kính $R=3$.
Bán kính đường tròn giao tuyến $r=3$.
Vì $R=r$ nên $I\in(Q)$.
Suy ra $-2B-C=0$ vì $B$, $C$ không đồng thời bằng 0 nên chọn $B=1\Rightarrow C=-2$.
Vậy $(Q)$: $y-2z=0$.

Chọn đáp án D ☐

**CÂU 7.** Trong KG $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)$: $(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=45$ và mặt phẳng $(P)$: $x+y-z-13=0$. Mặt cầu $(S)$ cắt mặt phẳng $(P)$ theo giao tuyến là đường tròn có tâm $I(a;b;c)$ thì giá trị của $a+b+c$ bằng

**A** $-11$. **B** $5$. **C** $2$. **D** $1$.

**Lời giải.**

Mặt cầu $(S)$ có tâm $A(1;2;-1)$ và bán kính $R=3\sqrt{5}$.
Mặt cầu $(S)$ cắt mặt phẳng $(P)$ theo giao tuyến là đường tròn có tâm $I(a;b;c)$.
Suy ra $I$ là hình chiếu của $A$ lên $mp(P)$ khi và chỉ khi

$$\begin{aligned}\begin{cases}I\in(P)\\ \overrightarrow{IA}=k\vec{n}_P\end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases}a+b-c-13=0\\1-a=k\\2-b=k\\-1-c=-k\end{cases}\\ &\Rightarrow (1-k)+(2-k)-(-1+k)-13=0\\ &\Leftrightarrow k=-3.\end{aligned}$$

Suy ra $I(4;5;-4)$.
Vậy $a+b+c=5$.

Chọn đáp án B ☐

**CÂU 8.** Trong KG $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2-2x-2z-7=0$, mặt phẳng $(P)\colon 4x+3y+m=0$. Tìm tất cả các giá trị của $m$ để mặt phẳng $(P)$ cắt mặt cầu $(S)$.

Ⓐ $\left[\begin{array}{l} m>11 \\ m<-19 \end{array}\right.$.   Ⓑ $-19<m<11$.   Ⓒ $-12<m<4$.   Ⓓ $\left[\begin{array}{l} m>4 \\ m<-12 \end{array}\right.$.

**Lời giải.**

$(S)\colon x^2+y^2+z^2-2x-2z-7=0$ có tâm $I(1;0;1)$ và bán kính $R=3$.
Suy ra, $(P)$ cắt mặt cầu $(S)$ khi và chỉ khi

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\big(I;(P)\big)<R &\Leftrightarrow \frac{|4\cdot 1+3\cdot 0+m|}{\sqrt{4^2+3^2}}<3 \\ &\Leftrightarrow |m+4|<15 \\ &\Leftrightarrow -19<m<11. \end{aligned}$$

Chọn đáp án (B) .................................................... □

**CÂU 9.** Trong KG $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon (x-a)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=9$ và mặt phẳng $(P)\colon 2x+y+2z=1$. Tìm tất cả các giá trị của $a$ để $(P)$ cắt mặt cầu $(S)$ theo giao tuyến là đường tròn $(C)$.

Ⓐ $-\dfrac{17}{2}\le a\le\dfrac{1}{2}$.   Ⓑ $-\dfrac{17}{2}<a<\dfrac{1}{2}$.   Ⓒ $-8<a<1$.   Ⓓ $-8\le a\le 1$.

**Lời giải.**

$(S)\colon (x-a)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=9$ có tâm $I(a;2;3)$ và có bán kính $R=3$.
Do $(P)$ cắt mặt cầu $(S)$ theo đường tròn $(C)$ nên ta suy ra

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\big(I;(P)\big)<R &\Leftrightarrow \frac{|2\cdot a+2+2\cdot 3-1|}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}}<3 \\ &\Leftrightarrow |2a+7|<9 \\ &\Leftrightarrow -8<a<1. \end{aligned}$$

Chọn đáp án (C) .................................................... □

**CÂU 10.** Trong KG $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2-4x+2y+2z-10=0$, mặt phẳng $(P)\colon x+2y-2z+10=0$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

Ⓐ $(P)$ tiếp xúc với $(S)$.

Ⓑ $(P)$ cắt $(S)$ theo giao tuyến là đường tròn khác đường tròn lớn.

Ⓒ $(P)$ và $(S)$ không có điểm chung.

Ⓓ $(P)$ cắt $(S)$ theo giao tuyến là đường tròn lớn.

**Lời giải.**

Mặt cầu $(S)$ có tâm $I=(2;-1;-1)$, bán kính $R=\sqrt{4+1+1-(-10)}=\sqrt{16}=4$.
Khoảng cách từ tâm $I$ đến mặt phẳng $(P)$ là

$$\mathrm{d}\big(I,(P)\big)=\frac{|2+2\cdot(-1)-2(-1)+10|}{\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}}=\frac{12}{3}=4.$$

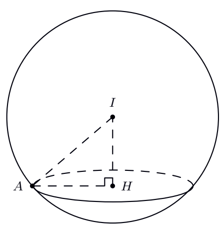
Ta thấy $\mathrm{d}\big(I,(P)\big)=R$, vậy $(P)$ tiếp xúc với $(S)$.

Chọn đáp án (A) .................................................... □

**CÂU 11.** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon mx+2y-z+1=0$ ($m$ là tham số). Mặt phẳng $(P)$ cắt mặt cầu $(S)\colon (x-2)^2+(y-1)^2+z^2=9$ theo một đường tròn có bán kính bằng 2. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số $m$.

Ⓐ $m=\pm 1$.   Ⓑ $m=\pm 2+\sqrt{5}$.   Ⓒ $m=\pm 4$.   Ⓓ $m=6\pm 2\sqrt{5}$.

**Lời giải.**



Từ $(S)$: $(x-2)^2+(y-1)^2+z^2=9$ ta có tâm $I=(2;1;0)$ bán kính $R=3$.
Gọi $H$ là hình chiếu vuông góc của $I$ trên $(P)$ và $(P)\cap(S)=C(H;r)$ với $r=2$.
Ta có $IH=\mathrm{d}\big(I;(P)\big)\Leftrightarrow IH=\dfrac{|2m+2-0+1|}{\sqrt{m^2+4+1}}=\dfrac{|2m+3|}{\sqrt{m^2+5}}$.
Theo yêu cầu bài toán ta có $R^2=IH^2+r^2\Leftrightarrow 9=\dfrac{(2m+3)^2}{m^2+5}+4$.
Suy ra $m^2-12m+16=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m=6-2\sqrt{5}\\ m=6+2\sqrt{5}.\end{array}\right.$
Chọn đáp án D

**CÂU 12.** Trong KG $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon 2x+3y+z-11=0$. Mặt cầu $(S)$ có tâm $I(1;-2;1)$ và tiếp xúc với mặt phẳng $(P)$ tại điểm $H$, khi đó $H$ có tọa độ là

A $H(-3;-1;-2)$. B $H(-1;-5;0)$. C $H(1;5;0)$. D $H(3;1;2)$.

**Lời giải.**
$(S)$ có tâm $I(1;-2;1)$ và tiếp xúc với mặt phẳng $(P)$ tại điểm $H\Rightarrow H$ là hình chiếu của $I$ lên $(P)$.
Đường thẳng đi qua $I(1;-2;1)$ và vuông góc với $(P)$ là $d\colon \begin{cases}x=1+2t\\ y=-2+3t\\ z=1+t\end{cases}\quad (t\in R)$.
Suy ra $H(1+2t;3t-2;1+t)\in d$.
Mặt khác, $H\in(P)\Leftrightarrow 2(1+2t)+3(3t-2)+(1+t)-11=0\Leftrightarrow t=1$.
Suy ra $H(3;1;2)$.
Chọn đáp án D

**CÂU 13.** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho mặt phẳng $(\alpha)$ có phương trình $2x+y-z-1=0$ và mặt cầu $(S)$ có phương trình $(x-1)^2+(y-1)^2+(z+2)^2=4$. Xác định bán kính $r$ của đường tròn giao tuyến của mặt phẳng $(\alpha)$ và mặt cầu $(S)$.

A $r=\dfrac{2\sqrt{42}}{3}$. B $r=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$. C $r=\dfrac{2\sqrt{15}}{3}$. D $r=\dfrac{2\sqrt{7}}{3}$.

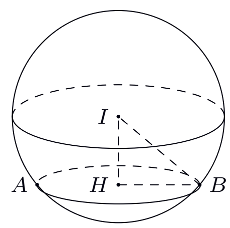
**Lời giải.**
Mặt cầu $(S)$ có tâm $I(1;1;-2)$ và bán kính $R=2$. Gọi $d$ là khoảng cách từ tâm $I$ đến mặt phẳng $(\alpha)$.
Ta có $d=\mathrm{d}\big(I,(\alpha)\big)=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$.
Khi đó ta có $r=\sqrt{R^2-d^2}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.
Chọn đáp án B

**Phần III. Học sinh điền kết quả vào ô trống.**

**CÂU 14.** Cho mặt cầu $(S)$ có phương trình $(S)\colon (x-3)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=100$ và mặt phẳng $(\alpha)$ có phương trình $2x-2y-z+9=0$. Tính bán kính của đường tròn là giao tuyến của mặt phẳng $(\alpha)$ và mặt cầu $(S)$.

Đáp án: | 8 | | | |

**Lời giải.**
Gọi $I$ là tâm mặt cầu $(S)$, $H$ là hình chiếu vuông góc của $I$ lên mặt phẳng $(\alpha)$ và $AB$ là một đường kính của đường tròn $(C)$.
Dễ thấy $I(3;-2;1)$, $IA=10$, I $H=\mathrm{d}(I,(\alpha))=6$.
Suy ra $HA=\sqrt{IA^2-IH^2}=8$.
Vậy bán kính đường tròn $(C)$ bằng 8.




Đáp án: 8

**CÂU 15.** Trong KG $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):2x-y-2z-1=0$ và điểm $M(1;-2;0)$. Mặt cầu tâm $M$, bán kính bằng $\sqrt{3}$ cắt mặt phẳng $(P)$ theo giao tuyến là đường tròn có bán kính bằng bao nhiêu? (*Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm*).

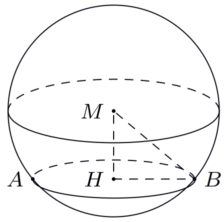
Đáp án: | 1 | , | 4 | 1 |

**Lời giải.**

Mặt cầu tâm tâm $M$, bán kính bằng $R = \sqrt{3}$ cắt phẳng $(P)$ theo giao tuyến là đường tròn tâm $H$, bán kính $r$ suy ra $r = \sqrt{R^2 - MH^2}$.

Với $MH = \mathrm{d}\left(M, (P)\right) = \dfrac{|2 \cdot 1 - (-2) - 2 \cdot 0 - 1|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2}} = 1$.

Suy ra $r = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 - 1^2} = \sqrt{2} \approx 1{,}41$.




Đáp án: $\boxed{1{,}41}$ ........................................ □

**CÂU 16.** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon 2x + 2y + z - m^2 - 3m = 0$ và mặt cầu $(S)\colon (x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 = 9$. Gọi $T$ là tập hợp tất cả các giá trị của $m$ để $(P)$ tiếp xúc với $(S)$. Tính tổng các phần tử của $T$.

Đáp án:

| | | | |
|---|---|---|---|
| – | 3 | | |

**Lời giải.**

Ta có $(S)\colon \begin{cases} I\left(1; -1; 1\right) \\ R = 3 \end{cases}$.

$(P)$ tiếp xúc với $(S)$ khi và chỉ khi

$$\begin{aligned} & d\left(I; (P)\right) = R \\ \Leftrightarrow\ & \dfrac{\left|1 - m^2 - 3m\right|}{3} = 3 \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} m^2 + 3m - 10 = 0 \\ m^2 + 3m + 8 = 0 \end{array}\right. \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} m = 2 \\ m = -5 \end{array}\right. \end{aligned}$$

Vậy tổng các phần tử của $T$ là $-3$.

Đáp án: $\boxed{-3}$ ........................................ □

**CÂU 17.** Trong không gian O$xyz$, cho mặt cầu $(S): (x-2)^2 + (y-4)^2 + (z-1)^2 = 4$ và mặt phẳng $(P): x + my + z - 3m - 1 = 0$. Gọi $T$ là tập hợp tất cả các giá trị của $m$ để mặt phẳng $(P)$ cắt mặt cầu $(S)$ theo giao tuyến là đường tròn có đường kính bằng 2. Tính tổng các phần tử của $T$.

Đáp án:

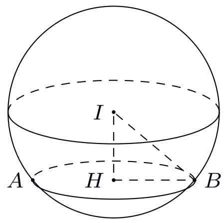
| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | | | |

**Lời giải.**

Mặt cầu $(S): (x-2)^2 + (y-4)^2 + (z-1)^2 = 4$ có tâm $I\left(2; 4; 1\right)$, bán kính $R = 2$.

Ta có $\mathrm{d}\left(I, (P)\right) = \dfrac{|2 + 4m + 1 - 3m - 1|}{\sqrt{1 + m^2 + 1}} = \dfrac{|m+2|}{\sqrt{m^2+2}}$

Mặt phẳng $(P)$ cắt mặt cầu $(S)$ theo giao tuyến là đường tròn có đường kính bằng 2 nên bán kính đường tròn giao tuyến là $r = 1$.




Ta có

$$\begin{aligned} & R^2 = d^2\left(I, (P)\right) + r^2 \\ \Leftrightarrow\ & 4 = \dfrac{(m+2)^2}{m^2+2} + 1 \\ \Leftrightarrow\ & m^2 + 4m + 4 = 3\left(m^2 + 2\right) \\ \Leftrightarrow\ & 2m^2 - 4m + 2 = 0 \Leftrightarrow m = 1. \end{aligned}$$

Đáp án: $\boxed{1}$ ........................................ □

**CÂU 18.** Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$, cho mặt cầu có phương trình $(S): x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 6z + m - 3 = 0$. Gọi $T$ là tập hợp tất cả các giá trị của $m$ để mặt phẳng $(\beta): 2x - y + 2z - 8 = 0$ cắt $(S)$ theo một đường tròn có chu vi bằng $8\pi$. Tính tổng các phần tử của $T$.

Đáp án:

| | | | |
|---|---|---|---|
| – | 1 | | |

**Lời giải.**

Ta có $(S): x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 6z + m - 3 = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 17 - m$.

$(S)$ là phương trình của mặt cầu thì $17 - m > 0 \Leftrightarrow m < 17$.

Khi đó $I\left(-1; 2; 3\right)$; $R = \sqrt{17 - m}$ lần lượt là tâm và bán kính của $(S)$.

Để mặt phẳng $(\beta): 2x - y + 2z - 8 = 0$ cắt $(S)$ theo thiết diện là một đường tròn có chu vi bằng $8\pi$ thì đường tròn đó có bán kính $r = 4$.

Ta có $R^2 = d^2\left(I, (\beta)\right) + r^2 \Leftrightarrow 17 - m = 16 + 2 \Leftrightarrow m = -1$ (TMĐK).

Đáp án: $\boxed{-1}$ ..........

**CÂU 19.** Trong KG $Oxyz$ cho hai mặt phẳng $(P): 2x-y+z-2=0$ và $(Q): 2x-y+z+1=0$. Hỏi có bao nhiêu mặt cầu đi qua $A(1;-2;1)$ và tiếp xúc với hai mặt phẳng $(P)$, $(Q)$?

Đáp án: | 0 | | | |

**Lời giải.**

Ta có $(P) \parallel (Q)$, $M(0;0;2) \in (P) \Rightarrow \mathrm{d}((P),(Q)) = \mathrm{d}(M,(Q)) = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$

$\mathrm{d}(A,(P)) = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$; $\mathrm{d}(A,(Q)) = \sqrt{6} \Rightarrow \mathrm{d}(A,(Q)) = \mathrm{d}(A,(P)) + \mathrm{d}((Q),(P))$.

Vậy không có mặt cầu thỏa yêu cầu bài toán.

Đáp án: $\boxed{0}$ ..........

**CÂU 20.** Trong KG $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2+(y-1)^2+z^2=4$ và một điểm $M(2;3;1)$. Từ $M$ kẻ được vô số các tiếp tuyến tới $(S)$, biết tập hợp các tiếp điểm là đường tròn $(C)$. Tính bán kính $r$ của đường tròn $(C)$. (*Kết quả làm tròn tới hàng phần trăm*).

Đáp án: | 1 | , | 1 | 5 |

**Lời giải.**

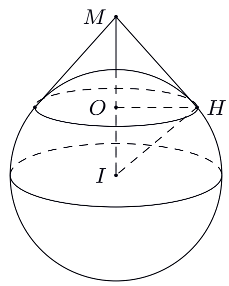
Mặt cầu $(S)$ có tâm $I(1;1;0)$ và bán kính $R=2$.

Ta có $\overrightarrow{IM} = (1;2;1)$ và $IM = \sqrt{6}$.

Gọi $H$ là một tiếp điểm tùy ý khi kẻ tiếp tuyến từ $M$ đến mặt cầu, khi đó $MH = \sqrt{IM^2 - R^2} = \sqrt{2}$.

Gọi $O$ là tâm của đường tròn $(C)$ khi đó $IM \perp HO$ và $HO = r$.

Ta có $HI \cdot HM = HO \cdot IM \Rightarrow r = \dfrac{HI \cdot HM}{IM} = \dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.




Đáp án: $\boxed{1{,}15}$ ..........

**CÂU 21.** Trong KG $Oxyz$, xét các điểm $A(0;0;1)$, $B(m;0;0)$, $C(0;n;0)$, $D(1;1;1)$ với $m>0$; $n>0$ và $m+n=1$. Biết rằng khi $m$, $n$ thay đổi, tồn tại một mặt cầu cố định tiếp xúc với mặt phẳng $(ABC)$ và đi qua $D$. Tính bán kính $R$ của mặt cầu đó.

Đáp án: | 1 | | | |

**Lời giải.**

Gọi $I(1;1;0)$ là hình chiếu vuông góc của $D$ lên mặt phẳng $(Oxy)$.

Ta có phương trình theo đoạn chắn của mặt phẳng $(ABC)$ là $\dfrac{x}{m} + \dfrac{y}{n} + z = 1$.

Suy ra phương trình tổng quát của $(ABC)$ là $nx + my + mnz - mn = 0$.

Mặt khác $\mathrm{d}(I;(ABC)) = \dfrac{|1-mn|}{\sqrt{m^2+n^2+m^2n^2}} = 1$ (vì $m+n=1$)

và $ID = 1 = d((I,(ABC)))$.

Nên tồn tại mặt cầu tâm $I$ (là hình chiếu vuông góc của $D$ lên mặt phẳng $Oxy$) tiếp xúc với $(ABC)$ và đi qua $D$. Khi đó $R=1$.

Đáp án: $\boxed{1}$ ..........

## 17 LẬP PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU LIÊN QUAN ĐẾN MẶT PHẲNG

**Phần I. Mỗi câu hỏi học sinh chọn một trong bốn phương án A, B, C, D.**

**CÂU 1.** Trong KG $Oxyz$, viết phương trình mặt cầu có tâm $I(2;1;-4)$ và tiếp xúc với mặt phẳng $(\alpha): x-2y+2z-7=0$.

Ⓐ $x^2+y^2+z^2+4x+2y-8z-4=0$.
Ⓑ $x^2+y^2+z^2+4x-2y+8z-4=0$.
Ⓒ $x^2+y^2+z^2-4x-2y+8z-4=0$.
Ⓓ $x^2+y^2+z^2-4x-2y-8z-4=0$.

**Lời giải.**

Mặt cầu cần tìm có bán kính $R = \mathrm{d}(I,(\alpha)) = \dfrac{|2-2\cdot 1+2\cdot(-4)-7|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}} = 5$.

Phương trình mặt cầu cần tìm là $(x-2)^2+(y-1)^2+(z+4)^2=25$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-4x-2y+8z-4=0$.

Chọn đáp án Ⓒ ..........

**CÂU 2.** Trong KG $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)$ có tâm $I(3;2;-1)$ và đi qua điểm $A(2;1;2)$. Mặt phẳng nào dưới đây tiếp xúc với $(S)$ tại $A$?

**A** $x+y+3z-9=0$. **B** $x+y-3z+3=0$. **C** $x+y-3z-8=0$. **D** $x-y-3z+3=0$.

**Lời giải.**

Gọi $(P)$ là mặt phẳng cần tìm. Khi đó, $(P)$ tiếp xúc với $(S)$ tại $A$ khi chỉ khi $(P)$ đi qua $A(2;1;2)$ và nhận vectơ $\overrightarrow{IA}=(-1;-1;3)$ làm vectơ pháp tuyến. Phương trình mặt phẳng $(P)$ là $-x-y+3z-3=0 \Leftrightarrow x+y-3z+3=0$.

Chọn đáp án B ............ □

**CÂU 3.** Trong KG $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x-2y+2z-2=0$ và điểm $I(-1;\,2;\,-1)$. Viết phương trình mặt cầu $(S)$ có tâm $I$ và cắt mặt phẳng $(P)$ theo giao tuyến là đường tròn có bán kính bằng 5.

**A** $(S):\ (x+1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=25$. **B** $(S):\ (x+1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=16$.

**C** $(S):\ (x-1)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=34$. **D** $(S):\ (x+1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=34$.

**Lời giải.**

Gọi $h$ là khoảng cách từ tâm $I$ đến mặt phẳng $(P)$ ta có:

$$h=\mathrm{d}\left(I;(P)\right)=\frac{|-1-4-2-2|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}}=3.$$

Bán kính mặt cầu $(S)$ là $R=\sqrt{r^2+h^2}=\sqrt{5^2+3^2}=\sqrt{34}$.

Phương trình mặt cầu $(S)$ là $(x+1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=34$.

Chọn đáp án D ............ □

**CÂU 4.** Trong KG $Oxyz$, mặt cầu $(S)$ có tâm $I(-1;\,2;\,1)$ và tiếp xúc với mặt phẳng $(P): x-2y-2z-2=0$ có phương trình là

**A** $(x+1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=3$. **B** $(x-1)^2+(y+2)^2+(z+1)^2=9$.

**C** $(x+1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=9$. **D** $(x+1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=3$.

**Lời giải.**

Vì mặt cầu tâm $I(-1;\,2;\,1)$ tiếp xúc với mặt phẳng $(P): x-2y-2z-2=0$ nên bán kính

$$R=\mathrm{d}\left(I,\,(P)\right)=\frac{|-1-2\cdot 2-2\cdot 1-2|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+(-2)^2}}=3 \Rightarrow (S):\ (x+1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=9.$$

Chọn đáp án C ............ □

**CÂU 5.** Trong KG $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)$ có tâm $I(1;2;1)$ và cắt mặt phẳng $(P): 2x-y+2z+7=0$ theo một đường tròn có đường kính bằng 8. Phương trình mặt cầu $(S)$ là

**A** $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=81$. **B** $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=5$.

**C** $(x+1)^2+(y+2)^2+(z+1)^2=9$. **D** $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=25$.

**Lời giải.**

Khoảng cách từ tâm $I$ đến mặt phẳng $(P)$ là

$$d=\mathrm{d}\left(I,(P)\right)=\frac{|2\cdot 1-2+2\cdot 1+7|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}}=3.$$

Đường tròn giao tuyến có đường kính bằng 8 nên bán kính đường tròn là $r=4$.

Bán kính của mặt cầu $(S)$là $R=\sqrt{d^2+r^2}=\sqrt{3^2+4^2}=5$.

Vậy phương trình mặt cầu $(S)$ là $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=25$.

Chọn đáp án D ............ □

**CÂU 6.** Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$, phương trình nào dưới đây là phương trình của mặt cầu có tâm $I(3;1;0)$ và tiếp xúc với mặt phẳng $(P): 2x+2y-z+1=0$?

**A** $(x+3)^2+(y+1)^2+z^2=3$. **B** $(x+3)^2+(y+1)^2+z^2=9$.

**C** $(x-3)^2+(y-1)^2+z^2=3$. **D** $(x-3)^2+(y-1)^2+z^2=9$.

**Lời giải.**

Gọi $(S)$ là mặt cầu có tâm $I$và tiếp xúc với $(P)$ có $R$ là bán kính.

Khi đó ta có $\mathrm{d}\left(I,(P)\right)=R \Rightarrow R=\dfrac{|2\cdot 3+2\cdot 1-0+1|}{\sqrt{2^2+2^2+(-1)^2}} \Leftrightarrow R=3$.

Vậy phương trình của $(S)$ là $(x-3)^2+(y-1)^2+z^2=9$.

Chọn đáp án D ............ □

**CÂU 7.** Trong KG $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)$ có tâm $I(2;1;1)$ và mặt phẳng $(P): 2x+y+2z+2=0$. Biết mặt phẳng $(P)$ cắt mặt cầu $(S)$ theo giao tuyến là một đường tròn có bán kính bằng 1. Viết phương trình của mặt cầu $(S)$.

**A** $(S):\ (x+2)^2+(y+1)^2+(z+1)^2=8$.

**B** $(S):\ (x+2)^2+(y+1)^2+(z+1)^2=10$.

**C** $(S):\ (x-2)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=8$.

**D** $(S):\ (x-2)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=10$.

**Lời giải.**

Gọi $R$, $r$ lần lượt là bán kính của mặt cầu $(S)$ và đường tròn giao tuyến

Ta có $R^2=r^2+(\mathrm{d}(I,(P)))^2=1+\left(\dfrac{|2\cdot 2+1\cdot 1+2\cdot 1+2|}{\sqrt{2^2+1+2^2}}\right)^2=10$.

Mặt cầu $(S)$ tâm $I(2;1;1)$ bán kính $R=\sqrt{10}$ là $(x-2)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=10$

Chọn đáp án D ..........

**CÂU 8.** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, phương trình nào dưới đây là phương trình mặt cầu đi qua ba điểm $M(2;3;3)$, $N(2;-1;-1)$, $P(-2;-1;3)$ và có tâm thuộc mặt phẳng $(\alpha): 2x+3y-z+2=0$?

**A** $x^2+y^2+z^2+4x-2y+6z+2=0$.

**B** $x^2+y^2+z^2-2x+2y-2z-2=0$.

**C** $x^2+y^2+z^2-2x+2y-2z-10=0$.

**D** $x^2+y^2+z^2-4x+2y-6z-2=0$.

**Lời giải.**

Giả sử phương trình mặt cầu $(S)$ có dạng $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$.

Điều kiện: $a^2+b^2+c^2-d>0$ (*)

Vì mặt cầu $(S)$ đi qua 3 điểm $M(2;3;3)$, $N(2;-1;-1)$, $P(-2;-1;3)$ và có tâm $I$ thuộc $mp\,(P)$ nên ta có hệ phương trình

$$\begin{cases}4a+6b+6c-d=22\\4a-2b-2c-d=6\\4a+2b-6c+d=-14\\2a+3b-c=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2\\b=-1\\c=3\\d=-2\end{cases}\text{(thỏa mãn }(*))$$

Vậy phương trình mặt cầu là $x^2+y^2+z^2-4x+2y-6z-2=0$.

Chọn đáp án D ..........

**CÂU 9.** Trong KG $Oxyz$, cho điểm $I(-3;0;1)$. Mặt cầu $(S)$ có tâm $I$ và cắt mặt phẳng $(P)$: $x-2y-2z-1=0$ theo một thiết diện là một hình tròn. Diện tích của hình tròn này bằng $\pi$. Phương trình mặt cầu $(S)$ là

**A** $(x+3)^2+y^2+(z-1)^2=4$.

**B** $(x+3)^2+y^2+(z-1)^2=25$.

**C** $(x+3)^2+y^2+(z-1)^2=5$.

**D** $(x+3)^2+y^2+(z-1)^2=2$.

**Lời giải.**

Gọi $S$, $r$ lần lượt là diện tích hình tròn và bán kính hình tròn.

Ta có $S=\pi r^2=\pi\Rightarrow r=1$.

$\mathrm{d}(I,(P))=\dfrac{|-3-2\cdot 0-2\cdot 1-1|}{\sqrt{1+4+4}}=2$.

$(S)$ có tâm $I(-3;0;1)$ và bán kính $R=\sqrt{(\mathrm{d}(I,(P)))^2+r^2}=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$.

Phương trình mặt cầu $(S)$ là $(x+3)^2+y^2+(z-1)^2=5$.

Chọn đáp án C ..........

**CÂU 10.** Trong KG $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x-2y+2z-2=0$ và điểm $I(-1;\ 2;\ -1)$. Viết phương trình mặt cầu $(S)$ có tâm $I$ và cắt mặt phẳng $(P)$ theo giao tuyến là đường tròn có bán kính bằng 5.

**A** $(S):\ (x+1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=25$.

**B** $(S):\ (x+1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=16$.

**C** $(S):\ (x-1)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=34$.

**D** $(S):\ (x+1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=34$.

**Lời giải.**

Gọi $M$ là điểm nằm trên đường tròn giao tuyến của $(S)$ và $(P)$. Ta có $IM=R$. Áp dụng công thức tính bán kính mặt cầu trong trường hợp mặt cầu $(S)$ giao với mặt phẳng $(P)$ theo giao tuyến là đường tròn có bán kính $r$ là

$IM^2=R^2=d^2(I,(P))+r^2$ (*)

Ta có $\mathrm{d}(I,(P))=\dfrac{|-1-2\cdot 2+2\cdot(-1)-2|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}}=3=IH$.

Từ $(*)\Rightarrow R^2=3^2+5^2=34$.

Vậy phương trình mặt cầu $(S)$ thỏa mãn yêu cầu đề bài là

$(x+1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=34$.

Chọn đáp án D ..........

**Phần III. Học sinh điền kết quả vào ô trống.**

**CÂU 11.** Trong KG $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;3)$. Tính bán kính của mặt cầu tâm $A$ và tiếp xúc với mặt phẳng $x-2y+2z+3=0$.

Đáp án: 2

**Lời giải.**

$(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=4$

Mặt cầu tâm $A$ tiếp xúc với mặt phẳng đã cho có bán kính $R=\dfrac{|1-2\cdot 2+2\cdot 3+3|}{\sqrt{1+4+4}}=2$.

Đáp án: $\boxed{2}$

**CÂU 12.** Trong KG $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon x+2y-2z+3=0$ và mặt cầu $(S)$ có tâm $I(0;-2;1)$. Biết mặt phẳng $(P)$ cắt mặt cầu $(S)$ theo giao tuyến là một đường tròn có diện tích $2\pi$. Tính bán kính mặt cầu (*kết quả làm tròn đến hàng phần trăm*).

Đáp án: 1 , 7 3

**Lời giải.**

Gọi $R$, $r$ lần lượt là bán kính của mặt cầu và đường tròn giao tuyến. Theo giải thiết ta có

$$\pi r^2=2\pi \Leftrightarrow r^2=2.$$

Mặt khác $\mathrm{d}(I,(P))=\dfrac{|2\cdot(-2)-2\cdot 1+3|}{\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}}=1$ nên $R^2=r^2+[\mathrm{d}(I,(P))]^2=3$.

Vậy $R=\sqrt{3}\approx 1{,}73$.

Đáp án: $\boxed{1{,}73}$

**CÂU 13.** Trong không gian, cho bốn mặt cầu có bán kính lần lượt là 2, 3, 3, 2 (đơn vị độ dài) tiếp xúc ngoài với nhau. Mặt cầu nhỏ nhất tiếp xúc ngoài với cả bốn mặt cầu nói trên có bán kính bằng bao nhiêu? (*kết quả làm tròn đến hàng phần trăm*).

Đáp án: 0 , 5 5

**Lời giải.**

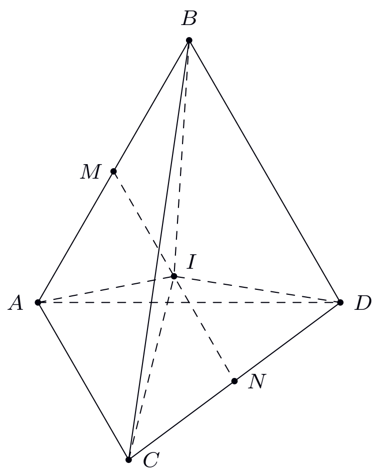
Gọi $A$, $B$, $C$, $D$ là tâm bốn mặt cầu.

Do các mặt cầu tiếp xúc ngoài với nhau nên không mất tính tổng quát ta giả sử $AB=4$, $AC=BD=AD=BC=5$.

Gọi $M,N$ lần lượt là trung điểm của $AB,CD$. Dễ dàng tính được $MN=2\sqrt{3}$.

Gọi $I$ là tâm mặt cầu nhỏ nhất với bán kính $r$ tiếp xúc với bốn mặt cầu trên. Vì $IA=IB,IC=ID$ nên $I$ nằm trên đoạn $MN$.

Đặt $IN=x$, ta có $IC=\sqrt{3^2+x^2}=3+r$, $IA=\sqrt{2^2+(2\sqrt{3}-x)^2}=2+r$.




Từ đó suy ra $\sqrt{3^2+x^2}-\sqrt{2^2+(2\sqrt{2}-x)^2}=1\Leftrightarrow x=\dfrac{12\sqrt{3}}{11}$.

Suy ra $r=\sqrt{3^2+\left(\dfrac{12\sqrt{3}}{11}\right)^2}-3=\dfrac{6}{11}\approx 0{,}55$.

Đáp án: $\boxed{0{,}55}$

**CÂU 14.** Trong KG $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+(z-\sqrt{2})^2=3$. Có tất cả bao nhiêu điểm $A(a;b;c)$, ($a,b,c$ là các số nguyên) thuộc mặt phẳng $(Oxy)$ sao cho có ít nhất hai tiếp tuyến của $(S)$ đi qua $A$ và hai tiếp tuyến đó vuông góc với nhau?

Đáp án: 1 2

**Lời giải.**

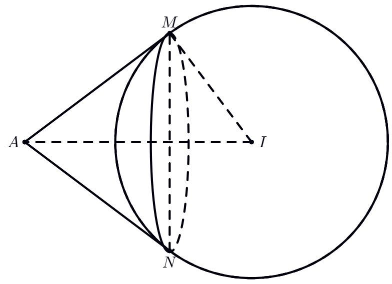
Mặt cầu $(S)$ có tâm $I\left(0;0;\sqrt{2}\right)$ và bán kính $R=\sqrt{3}$.

Do $A\in(Oxy)\Rightarrow A(a;b;0)$.

- Xét trường hợp $A\in(S)$, ta có $a^2+b^2=1$.
  Lúc này các tiếp tuyến của $(S)$ thuộc tiếp diện của $(S)$ tại $A$ nên có vô số các tiếp tuyến vuông góc nhau.
  Trường hợp này ta có 4 cặp giá trị của $(a;b)$ là $(0;1)$; $(0;-1)$; $(-1;0)$; $(1;0)$.

- Xét trường hợp $A$ ở ngoài $(S)$. Khi đó, các tiếp tuyến của $(S)$ đi qua $A$ thuộc mặt nón đỉnh $A$. Nên các tiếp tuyến này chỉ có thể vuông góc với nhau tại $A$.

Giả sử $AN; AM$ là các tiếp tuyến của $(S)$ thỏa mãn $A$, $M$, $N$, $I$ đồng phẳng ($N$, $M$ là các tiếp điểm).
Điều kiện để $AM \perp AN$ là góc ở đỉnh của mặt nón lớn hơn hoặc bằng $90^\circ$ hay $\widehat{MAN} \geq 90^\circ$.




$$\Leftrightarrow \begin{cases} IA > R \\ 90^\circ \geq \widehat{MAI} \geq 45^\circ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} IA > \sqrt{3} \\ \sin \widehat{MAI} = \dfrac{R}{IA} \geq \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} IA > \sqrt{3} \\ IA \leq \sqrt{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 > 1 \\ a^2 + b^2 \leq 4 \end{cases}$$

Vì $a, b$ là các số nguyên nên ta có các cặp nghiệm $(a; b)$ là $(0; 2)$, $(0; -2)$, $(2; 0)$, $(-2; 0)$, $(1; 1)$, $(-1; -1)$, $(-1; 1)$, $(1; -1)$.

Vậy có 12 điểm $A$ thỏa mãn yêu cầu.
Đáp án: 12 ............................................................ □

**CÂU 15.** Trong KG $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 5$. Có tất cả bao nhiêu điểm $A(a, b, c)$ ($a, b, c$ là các số nguyên) thuộc mặt phẳng $(Oxy)$ sao cho có ít nhất hai tiếp tuyến của $(S)$ đi qua $A$ và hai tiếp tuyến đó vuông góc với nhau?

Đáp án: | 2 | 0 | | |

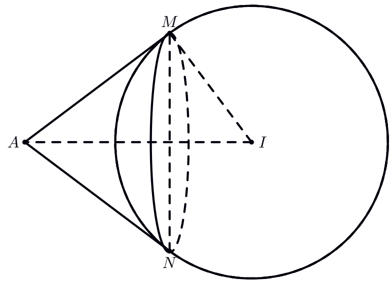
**Lời giải.**

Mặt cầu có tâm $I(0; 0; 1)$, bán kính $R = \sqrt{5}$.
Do $A \in (Oxy) \Rightarrow A(a; b; 0)$.

- Xét trường hợp $A \in (S)$, ta có $a^2 + b^2 = 4$.
Lúc này các tiếp tuyến của $(S)$ thuộc tiếp diện của $(S)$ tại $A$ nên có vô số các tiếp tuyến vuông góc nhau.
Trường hợp này ta có 4 cặp giá trị của $(a; b)$ là $(0; 2)$; $(0; -2)$; $(-2; 0)$; $(2; 0)$.

- Xét trường hợp $A$ ở ngoài $(S)$. Khi đó, các tiếp tuyến của $(S)$ đi qua $A$ thuộc mặt nón đỉnh $A$. Nên các tiếp tuyến này chỉ có thể vuông góc với nhau tại $A$.

Giả sử $AN; AM$ là các tiếp tuyến của $(S)$ thỏa mãn $A$, $M$, $N$, $I$ đồng phẳng ($N; M$ là các tiếp điểm).
Điều kiện để $AM \perp AN$ là góc ở đỉnh của mặt nón lớn hơn hoặc bằng $90^\circ$ hay $\widehat{MAN} \geq 90^\circ$.




$$\Leftrightarrow \begin{cases} IA > R \\ 90^\circ \geq \widehat{MAI} \geq 45^\circ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} IA > \sqrt{3} \\ \sin \widehat{MAI} = \dfrac{R}{IA} \geq \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} IA > \sqrt{5} \\ IA \leq \sqrt{10} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 > 4 \\ a^2 + b^2 \leq 9. \end{cases}$$

Vì $a, b$ là các số nguyên nên ta có các cặp nghiệm $(a; b)$ là $(0; \pm 3)$, $(\pm 1; \pm 2)$, $(\pm 2; \pm 2)$, $(\pm 2; \pm 1)$, $(\pm 3; 0)$.

Vậy có 20 bộ số thỏa mãn yêu cầu.
Đáp án: 20 ............................................................ □

**CÂU 16.** Trong KG $Oxyz$, cho điểm $H(1; 2; -2)$. Mặt phẳng $(\alpha)$ đi qua $H$ và cắt các trục $Ox$, $Oy$, $Oz$ lần lượt tại các điểm $A$, $B$, $C$ sao cho $H$ là trực tâm của tam giác $ABC$. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$ (*làm tròn kết quả đến hàng phần trăm*).

Đáp án: | 5 | , | 5 | 1 |

**Lời giải.**

Mặt phẳng $(\alpha)$ cắt các trục $Ox$, $Oy$, $Oz$ lần lượt tại các điểm $A(a; 0; 0)$, $B(0; b; 0)$, $C(0; 0; c)$. Do $H$ là trực tâm tam giác $ABC$ nên $a, b, c \neq 0$ và $OH \perp (ABC)$.

Khi đó $(\alpha)$: $\begin{cases} \text{qua } H(1; 2; -2) \\ \text{một véc-tơ pháp tuyến } \overrightarrow{OH} = (1; 2; -2) \end{cases}$ có phương trình

$$x + 2x - 2z - 9 = 0.$$

Suy ra $A(9;0;0)$, $B\left(0;\dfrac{9}{2};0\right)$, $C\left(0;0;-\dfrac{9}{2}\right)$.
Khi đó, giả sử mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$ có phương trình là:

$$x^2+y^2+z^2-2a'x-2b'y-2c'z+d=0$$

Với $(a')^2+(b')^2+(c')^2-d>0$.
Vì 4 điểm $O$, $A$, $B$, $C$ thuộc mặt cầu nên ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} d=0 \\ -18a'+d=-81 \\ -9b'+d=-\dfrac{81}{4} \\ 9c'+d=-\dfrac{81}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d=0 \\ a'=\dfrac{9}{2} \\ b'=\dfrac{9}{4} \\ c'=-\dfrac{9}{4}. \end{cases}$$

Vậy bán kính của mặt cầu là $R=\sqrt{\left(\dfrac{9}{2}\right)^2+\left(\dfrac{9}{4}\right)^2+\left(\dfrac{9}{4}\right)^2-0}=\dfrac{9\sqrt{6}}{4}\approx 5{,}51$.

Đáp án: $\boxed{5{,}51}$ .................................................. □

**CÂU 17.** Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu $(S)$ đi qua điểm $A(2;-2;5)$ và tiếp xúc với ba mặt phẳng $(P)\colon x=1$, $(Q)\colon y=-1$ và $(R)\colon z=1$ có bán kính bằng bao nhiêu?

Đáp án: | 3 | | | |

**Lời giải.**
Gọi $I(a;b;c)$ và $R$ là tâm và bán kính của $(S)$. Khi đó ta có

$$R=IA=\mathrm{d}(I;(P))=\mathrm{d}(I;(Q))=\mathrm{d}(I;(R))\Leftrightarrow R=|a-1|=|b+1|=|c-1| \quad (*).$$

Lại do mặt cầu đi qua $A(2;-2;5)$ nên ta suy ra $a>1$, $b<-1$ và $c>1$.
Do đó $(*)\Leftrightarrow \begin{cases} a-1=-b-1 \\ a-1=c-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-a \\ c=a. \end{cases}$
Suy ra $(S)\colon (x-a)^2+(y+a)^2+(z-a)^2=(a-1)^2$.
Mà $A(2;-2;5)\in(S)$ nên $(2-a)^2+(-2+a)^2+(5-a)^2=(a-1)^2\Leftrightarrow a=4$.
Vậy $R=|a-1|=3$.
Đáp án: $\boxed{3}$ .................................................. □

**CÂU 18.** Trong KG $Oxyz$, xét số thực $m\in(0;1)$ và hai mặt phẳng $(\alpha)\colon 2x-y+2z+10=0$ và $(\beta)\colon \dfrac{x}{m}+\dfrac{y}{1-m}+\dfrac{z}{1}=1$. Biết rằng, khi $m$ thay đổi có hai mặt cầu cố định tiếp xúc đồng thời với cả hai mặt phẳng $(\alpha)$, $(\beta)$. Tổng bán kính của hai mặt cầu đó bằng bao nhiêu?

Đáp án: | 9 | | | |

**Lời giải.**
Gọi $I(a;b;c)$ là tâm mặt cầu.
Ta có $(\beta)\colon \dfrac{x}{m}+\dfrac{y}{1-m}+z=1\Leftrightarrow (1-m)x+my+(m-m^2)z+m^2-m=0$.
Theo giả thiết

$$\begin{aligned} R=\mathrm{d}(I,(\beta)) &= \frac{\left|(1-m)a+mb+(m-m^2)c+m^2-m\right|}{\sqrt{(1-m)^2+m^2+(m-m^2)^2}} \\ &= \frac{\left|(1-m)a+mb+(m-m^2)c+m^2-m\right|}{m^2-m+1}. \end{aligned}$$

Do $R$ cố định với mọi $m$ nên tồn tại hằng số $k$ thỏa mãn

$$\begin{aligned} & (1-m)a+mb+(m-m^2)c+m^2-m=k\cdot(m^2-m+1),\ \forall m \\ \Leftrightarrow\ & (1-c)m^2+(-a+b+c-1)m+a=km^2-mk+k,\ \forall m \\ \Leftrightarrow\ & \begin{cases} 1-c=k \\ -a+b+c-1=-m \\ a=k \end{cases} \\ \Leftrightarrow\ & \begin{cases} a=k \\ b=k \\ c=1-k. \end{cases} \end{aligned}$$

Suy ra $I(k;k;1-k)$.
Mặt khác $R=\mathrm{d}(I,(\alpha))$ nên

$$R=\frac{|2k-k+2(1-k)+10|}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}}=\frac{|-k+12|}{3}.$$

Khi đó $\dfrac{|-k+2|}{3}=k \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} k=-6 & \Rightarrow R=6 \\ k=3 & \Rightarrow R=3. \end{array}\right.$

Vậy $6+3=9$.
Đáp án: $\boxed{9}$ ............................................................................................. □

**CÂU 19.** Trong KG $Oxyz$, cho điểm $A(2;11;-5)$ và mặt phẳng $(P)\colon 2mx+\left(m^2+1\right)y+\left(m^2-1\right)z-10=0$. Biết rằng khi $m$ thay đổi, tồn tại hai mặt cầu cố định tiếp xúc với mặt phẳng $(P)$ và cùng đi qua $A$. Tổng bán kính của hai mặt cầu đó bằng bao nhiêu? (*kết quả làm tròn đến hàng phần chục*).

| Đáp án: | 1 | 7 | | |
|---|---|---|---|---|

**Lời giải.**
Gọi $I\left(x_0;y_0;z_0\right)$ là tâm của mặt cầu $(S)$ cố định và $R$ là bán kính của mặt cầu $(S)$.
Ta có

$$\begin{aligned} R=\mathrm{d}(I,(P)) &=\frac{\left|2mx_0+\left(m^2+1\right)y_0+\left(m^2-1\right)z_0-10\right|}{\sqrt{4m^2+\left(m^2+1\right)^2+\left(m^2-1\right)^2}} \\ &=\frac{\left|2mx_0+\left(m^2+1\right)y_0+\left(m^2-1\right)z_0-10\right|}{\sqrt{2}\cdot\left(m^2+1\right)} \end{aligned}$$

Do tại hai mặt cầu cố định tiếp xúc với $(P)$ nên tồn tại số thực $k$ thỏa mãn

$$\begin{aligned} & 2mx_0+(m^2+1)y_0+(m^2-1)z_0-10=k\cdot(m^2+1)\,\forall m \\ \Leftrightarrow\ & (y_0+z_0)m^2+2x_0m+y_0-z_0-10=km^2+k\,\forall m \\ \Leftrightarrow\ & \begin{cases} y_0+z_0=k \\ 2x_0=0 \\ y_0-z_0-10=k \end{cases} \\ \Leftrightarrow\ & \begin{cases} x_0=0 \\ y_0=5+k \\ z_0=-5. \end{cases} \end{aligned}$$

Suy ra $I\left(0;5+k;-5\right)$ và $R=\dfrac{|k|}{\sqrt{2}}$.
Mặt khác

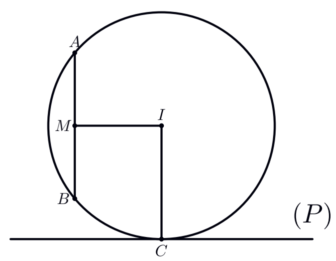
$$\begin{aligned} R=IA \ &\Leftrightarrow \frac{|k|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2^2+(6-k)^2} \\ &\Leftrightarrow k^2=2\cdot\left(40+k^2-12k\right) \\ &\Leftrightarrow k^2-24k+80=0 \\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} k=4 & \Rightarrow R=2\sqrt{2} \\ k=20 & \Rightarrow R=10\sqrt{2}. \end{array}\right. \end{aligned}$$

Vậy tổng hai bán kính của hai mặt cầu là $12\sqrt{2}\approx 17$.
Đáp án: $\boxed{17}$ ............................................................................................. □

**CÂU 20.** Trong KG $Oxyz$ cho $A(-3;1;1)$, $B(1;-1;5)$ và mặt phẳng $(P)\colon 2x-y+2z+11=0$. Mặt cầu $(S)$ đi qua hai điểm $A$, $B$ và tiếp xúc với $(P)$ tại điểm $C$. Biết $C$ luôn thuộc một đường tròn $(T)$ cố định. Tính bán kính $r$ của đường tròn $(T)$.

| Đáp án: | 4 | | | |
|---|---|---|---|---|

**Lời giải.**




Ta có $\overrightarrow{AB}=(4;-2;4)$ và $(P)$ có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}=(2;-1;2)$. Do $\overrightarrow{AB}=2\cdot\vec{n}$ nên $AB$ vuông góc với $(P)$.
Gọi $M$ là trung điểm $AB$. Do $A$, $B\in(S)$ nên $IM\perp AB$ hay $I$ thuộc mặt phẳng trung trực $(Q)$ của đoạn thẳng $AB$.
Ta có $M(-1;0;3)$ và $(Q)\colon 2x-y+2z-4=0$.

Suy ra $R = \mathrm{d}((P),(Q)) = \dfrac{|11+4|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}} = 3$.

Do $(S)$ tiếp xúc $(P)$ tại $C$ nên $\mathrm{d}(I, AB) = \mathrm{d}(C, AB) \Leftrightarrow \mathrm{d}(C, AB) = \sqrt{R^2 - \dfrac{AB^2}{4}} = 4$.

Vậy $C$ luôn thuộc một đường tròn $(T)$ cố định có bán kính $r = 4$.

Đáp án: $\boxed{4}$ ..................................................

**CÂU 21.** Trong KG $Oxyz$, cho các điểm $M(2;1;4)$, $N(5;0;0)$, $P(1;-3;1)$. Gọi $I(a;b;c)$ là tâm của mặt cầu tiếp xúc với mặt phẳng $(Oyz)$ đồng thời đi qua các điểm $M$, $N$, $P$. Tìm $c$ biết rằng $a+b+c<5$.

Đáp án: | 2 | | | |

**Lời giải.**

Phương trình mặt cầu $(S)$ tâm $I(a;b;c)$.
Do $(S)$ tiếp xúc với $(Oyz)$ nên $R = |a|$.
Suy ra $(S)\colon (x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2 = a^2$.
Mặt khác, $M$, $N$, $P \in (S)$ nên

$$\begin{cases} (2-a)^2+(1-b)^2+(4-c)^2 = a^2 \\ (5-a)^2+b^2+c^2 = a^2 \\ (1-a)^2+(3+b)^2+(1-c)^2 = a^2 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} b^2+c^2-2b-8c-4a = -21 \\ b^2+c^2-10a = -25 \\ b^2+c^2+6b-2c-2a = -11 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6a-2b-8c = 4 \\ 8a+6b-2c = 14 \\ b^2+c^2-10a = -25 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} c = a-1 \\ b = 2-a \\ (2-a)^2+(a-1)^2-10 = -25 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a = 3 \\ b = -1 \\ c = 2 \end{cases} \\ \begin{cases} a = 5 \\ b = -3 \\ c = 4. \end{cases} \end{array}\right.$$

Do $a+b+c<5$ nên $\begin{cases} a = 3 \\ b = -1 \\ c = 2. \end{cases}$

Đáp án: $\boxed{2}$ ..................................................

## 18 LẬP PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẲNG LIÊN QUAN ĐẾN MẶT PHẲNG, MẶT CẦU

**Phần I. Mỗi câu hỏi học sinh chọn một trong bốn phương án A, B, C, D.**

**CÂU 1.** Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)$ có đường kính $AB$ với $A(6;2;-5)$, $B(-4;0;7)$. Viết phương trình mặt phẳng $(P)$ tiếp xúc với mặt cầu $(S)$ tại $A$.

**A** $(P)\colon 5x+y-6z+62=0$.
**B** $(P)\colon 5x+y-6z-62=0$.
**C** $(P)\colon 5x-y-6z-62=0$.
**D** $(P)\colon 5x+y+6z+62=0$.

**Lời giải.**

Gọi $I$ là trung điểm của $AB \Rightarrow I(1;1;1)$.
Mặt cầu $(S)$ có đường kính $AB$ nên có tâm là điểm $I$.
Mặt phẳng $(P)$ tiếp xúc với mặt cầu $(S)$ tại $A$ nên mặt phẳng $(P)$ đi qua $A$ và nhận $\overrightarrow{IA} = (5;1;-6)$ là véc-tơ pháp tuyến.
Phương trình mặt phẳng $(P)\colon 5(x-6)+1(y-2)-6(z+5)=0 \Leftrightarrow 5x+y-6z-62=0$.

Chọn đáp án B ..................................................

**CÂU 2.** Trong KG $Oxyz$, cho mặt phẳng $(Q)$ song song với mặt phẳng $(P)\colon 2x-2y+z+7=0$. Biết mp$(Q)$ cắt mặt cầu $(S)\colon x^2+(y+2)^2+(z-1)^2=25$ theo một đường tròn có bán kính $r=3$. Khi đó mặt phẳng $(Q)$ có phương trình là

**A** $x-y+2z-7=0$. **B** $2x-2y+z+17=0$. **C** $2x-2y+z+7=0$. **D** $2x-2y+z-17=0$.

**Lời giải.**

$(S)$ có tâm $I(0;-2;1)$ và bán kính $R=5$.
Gọi $M$ là hình chiếu vuông góc của $I$ lên $(Q)$.
$(Q)$ cắt mặt cầu $(S)$ theo một đường tròn có bán kính $r=3$.
$\Rightarrow IM=\sqrt{R^2-r^2}=\sqrt{5^2-3^2}=4$.
$(Q)\parallel(P)\colon 2x-2y+z+7=0\Rightarrow(Q)\colon 2x-2y+z+m=0\quad(m\neq 7)$.

$$\begin{aligned}\mathrm{d}(I,(Q)) &= \frac{|2\cdot 0-2\cdot(-2)+1\cdot 1+m|}{\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}}=IM=4.\\ &\Leftrightarrow |m+5|=12\Leftrightarrow\left[\begin{aligned}&m=7\\&m=-17.\end{aligned}\right.\end{aligned}$$

Vậy phương trình của $(Q)$ là $2x-2y+z-17=0$.

Chọn đáp án D ............ □

**CÂU 3.** Trong KG $Oxyz$ cho mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2+2x-4y-6z+5=0$. Mặt phẳng tiếp xúc với $(S)$ và song song với mặt phẳng $(P)\colon 2x-y+2z-11=0$ có phương trình là

**A** $2x-y+2z-7=0$. **B** $2x-y+2z+9=0$. **C** $2x-y+2z+7=0$. **D** $2x-y+2z-9=0$.

**Lời giải.**

Ta gọi phương trình mặt phẳng song song với mặt phẳng $(P)\colon 2x-y+2z-11=0$ có dạng là $(Q)\colon 2x-y+2z+D=0\quad(D\neq -11)$.
Mặt cầu $(S)$ có tâm $I(-1;2;3)$, bán kính $R=\sqrt{(-1)^2+2^2+3^2-5}=3$.
Vì mặt phẳng tiếp xúc với $(S)$ nên ta có:

$$\begin{aligned}\mathrm{d}(I,(Q))=R &\Leftrightarrow \frac{|2\cdot(-1)-2+2\cdot 3+D|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}}=3\\ &\Leftrightarrow \frac{|2+D|}{3}=3\Leftrightarrow\left[\begin{aligned}&2+D=9\\&2+D=-9\end{aligned}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{aligned}&D=7\\&D=-11.\end{aligned}\right.\end{aligned}$$

Do $D\neq -11\Rightarrow D=7$.
Vậy mặt phẳng cần tìm là $2x-y+2z+7=0$.

Chọn đáp án C ............ □

**CÂU 4.** Trong KG $Oxyz$, mặt phẳng $(P)$ chứa trục $Ox$ và cắt mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2-2x+4y+2z-3=0$ theo giao tuyến là đường tròn có bán kính bằng 3 có phương trình là

**A** $y-2z=0$. **B** $y+2z=0$. **C** $y+3z=0$. **D** $y-3z=0$.

**Lời giải.**

$(S)\colon x^2+y^2+z^2-2x+4y+2z-3=0$ có tâm $I(1;-2;-1)$ và bán kính $R=3$.
$(P)$ cắt mặt cầu $(S)$ theo giao tuyến là đường tròn có bán kính $r=3=R$.
$\Rightarrow I\in(P)$.
Chọn điểm $M(1;0;0)\in Ox\Rightarrow\overrightarrow{IM}=(0;2;1)$.
$\vec{n}=\left[\vec{i},\overrightarrow{IM}\right]=(0;-1;2)$.
$(P)$ qua $O(0;0;0)$ và có VTPT $\vec{n}=(0;-1;2)\Rightarrow(P)\colon y-2z=0$.

Chọn đáp án A ............ □

**CÂU 5.** Trong KG $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2+2z-2=0$ và điểm $K(2;2;0)$. Viết phương trình mặt phẳng chứa tất cả các tiếp điểm của các tiếp tuyến vẽ từ $K$ đến mặt cầu $(S)$.

**A** $2x+2y+z-4=0$. **B** $6x+6y+3z-8=0$. **C** $2x+2y+z+2=0$. **D** $6x+6y+3z-3=0$.

**Lời giải.**

$(S)\colon x^2+y^2+(z+1)^2=3\Rightarrow$ mặt cầu tâm $I(0;0;-1)$, $R=\sqrt{3}$.
Do $\overrightarrow{IK}=(2;2;1)$, $IK=3>R\Rightarrow K$ nằm ngoài mặt cầu. Suy ra từ $K$ vẽ được vô số tiếp tuyến đến mặt cầu và khoảng cách từ $K$ đến các tiếp điểm bằng nhau.
Gọi $E$ là 1 tiếp điểm $\Rightarrow IE\perp EK\Rightarrow\triangle IKE$ vuông tại $E\Rightarrow KE=\sqrt{IK^2-IE^2}=\sqrt{6}\Rightarrow E$ thuộc mặt cầu tâm $K$ bán kính $R'=\sqrt{6}$.
Tọa độ điểm $E$ thỏa mãn hệ

$\begin{cases} x^2+y^2+z^2+2z-2=0 \\ (x-2)^2+(y-2)^2+z^2=6 \end{cases} \Rightarrow x^2+y^2+z^2+2z-2=(x-2)^2+(y-2)^2+z^2=6.$

$\Leftrightarrow 4x+4y+2z+4=0 \Leftrightarrow 2x+2y+z+2=0.$

Chọn đáp án C ..........

**CÂU 6.** Trong KG $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2-2x+6y-4z-2=0$ và mặt phẳng $(\alpha)\colon x+4y+z-11=0$. Viết phương trình mặt phẳng $(P)$, biết $(P)$ song song với giá của véc-tơ $\vec{v}=(1;6;2)$, vuông góc với $(\alpha)$ và tiếp xúc với $(S)$.

(A) $\left[\begin{array}{l} x-2y+z+3=0 \\ x-2y+z-21=0 \end{array}\right.$. (B) $\left[\begin{array}{l} 3x+y+4z+1=0 \\ 3x+y+4z-2=0 \end{array}\right.$. (C) $\left[\begin{array}{l} 4x-3y-z+5=0 \\ 4x-3y-z-27=0 \end{array}\right.$. (D) $\left[\begin{array}{l} 2x-y+2z+3=0 \\ 2x-y+2z-21=0 \end{array}\right.$.

**Lời giải.**

Mặt cầu $(S)$ có tâm $I(1;-3;2)$ và bán kính $R=4$.
Vì mặt phẳng $(P)$ song song với giá của véc-tơ $\vec{v}=(1;6;2)$, vuông góc với $(\alpha)$ nên có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}=\left[\vec{n}_{(\alpha)},\vec{v}\right]=(2;-1;2)$.
Mặt phẳng $(P)\colon 2x-y+2z+D=0$.
Vì $(P)$ tiếp xúc với mặt cầu $(S)$ nên ta có:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(I,(P))=R \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{|2\cdot 1+3+2\cdot 2+D|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}}=4 \\ &\Leftrightarrow \quad |D+9|=12 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} D=-21 \\ D=3. \end{array}\right. \end{aligned}$$

Vậy phương trình mặt phẳng $(P)$ là $\left[\begin{array}{l} 2x-y+2z+3=0 \\ 2x-y+2z-21=0. \end{array}\right.$

Chọn đáp án D ..........

**CÂU 7.** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)$ có phương trình $x-2y-2z-5=0$ và mặt cầu $(S)$ có phương trình $(x-1)^2+(y+2)^2+(z+3)^2=4$. Tìm phương trình mặt phẳng song song với mặt phẳng $(P)$ đồng thời tiếp xúc với mặt cầu $(S)$.

(A) $x-2y-2z+1=0$. (B) $-x+2y+2z+5=0$. (C) $x-2y-2z-23=0$. (D) $-x+2y+2z+17=0$.

**Lời giải.**

Mặt cầu $(S)$ có tâm $I(1;-2;-3)$ và bán kính $R=2$.
Gọi $(Q)$ là mặt phẳng song song với mặt phẳng $(P)$ đồng thời tiếp xúc với mặt cầu $(S)$.
Phương trình $(Q)$ có dạng: $x-2y-2z+D=0 \quad (D\neq -5)$.
$(Q)$ tiếp xúc với $(S)$ khi và chỉ khi

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(I,(Q))=R \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{|1-2\cdot(-2)-2\cdot(-3)+D|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}=2 \\ &\Leftrightarrow \quad |D+11|=6 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} D+11=6 \\ D+11=-6 \end{array}\right. \\ &\Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} D=-5 \\ D=-17. \end{array}\right. \end{aligned}$$

Đối chiếu điều kiện suy ra $D=-17$.
Vậy phương trình của $(Q)$ là $x-2y-2z-17=0 \Leftrightarrow -x+2y+2z+17=0$.

Chọn đáp án D ..........

**CÂU 8.** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2-2x+6y-4z-2=0$, mặt phẳng $(\alpha)\colon x+4y+z-11=0$. Gọi $(P)$ là mặt phẳng vuông góc với $(\alpha)$, $(P)$ song song với giá của véc-tơ $\vec{v}=(1;6;2)$ và $(P)$ tiếp xúc với $(S)$. Lập phương trình mặt phẳng $(P)$.

(A) $2x-y+2z-2=0$ và $x-2y+z-21=0$.
(B) $x-2y+2z+3=0$ và $x-2y+z-21=0$.
(C) $2x-y+2z+3=0$ và $2x-y+2z-21=0$.
(D) $2x-y+2z+5=0$ và $2x-y+2z-2=0$.

**Lời giải.**

$(S)$ có tâm $I(1;-3;2)$ và bán kính $R=4$. Véc-tơ pháp tuyến của $(\alpha)$ là $\vec{n}_\alpha=(1;4;1)$.
Suy ra VTPT của $(P)$ là $\vec{n}_P=[\vec{n}_\alpha,\vec{v}]=(2;-1;2)$.
Do đó $(P)$ có dạng: $2x-y+2z+d=0$.
Mặt khác $(P)$ tiếp xúc với $(S)$ nên $\mathrm{d}(I,(P))=4$.
Hay $\dfrac{|2+3+4+d|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}}=4 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} d=-21 \\ d=3. \end{array}\right.$

Chọn đáp án C ..........

**CÂU 9.** Trong KG $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu $(x-1)^2+y^2+(z+2)^2=6$ đồng thời song song với hai đường thẳng $d_1\colon \dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z}{-1}$, $d_2\colon \dfrac{x}{1}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z-2}{-1}$.

**A** $\left[\begin{array}{l}x-y+2z-3=0\\x-y+2z+9=0\end{array}\right.$. **B** $\left[\begin{array}{l}x+y+2z-3=0\\x+y+2z+9=0\end{array}\right.$. **C** $x+y+2z+9=0$. **D** $x-y+2z+9=0$.

**Lời giải.**

Đường thẳng $d_1$ có vtcp $\vec{u}_1(3;-1;-1)$, đường thẳng $d_2$ có vtcp $\vec{u}_2(1;1;-1)$. Gọi $\vec{n}$ là vtpt của mặt phẳng $(\alpha)$ cần tìm. Do $(\alpha)$ song song với hai đường thẳng $d_1$, $d_2$ nên $\vec{n}\perp\vec{u}_1$ và $\vec{n}\perp\vec{u}_2$, từ đó ta chọn $\vec{n}=[\vec{u}_1,\vec{u}_2]=(2;2;4)$. Suy ra $(\alpha)\colon x+y+2z+c=0$.
Mặt cầu $(S)$ có tâm $I(1;0;-2)$, bán kính $R=\sqrt{6}$.
$(\alpha)$ tiếp xúc với $(S)\Leftrightarrow \mathrm{d}(I,(\alpha))=\sqrt{6}\Leftrightarrow \dfrac{|c-3|}{\sqrt{6}}=\sqrt{6}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}c-3=6\\c-3=-6\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}c=9\\c=-3.\end{array}\right.$

Chọn đáp án B

**CÂU 10.** Trong KG $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)$ chứa đường thẳng $d\colon \dfrac{x-4}{3}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+4}{-4}$ và tiếp xúc với mặt cầu $(S)\colon (x-3)^2+(y+3)^2+(z-1)^2=9$. Khi đó $(P)$ song song với mặt phẳng nào sau đây?

**A** $3x-y+2z=0$. **B** $-2x+2y-z+4=0$. **C** $x+y+z=0$. **D** Đáp án khác.

**Lời giải.**

Véc-tơ chỉ phương của $d$ là $\vec{u}=(3;1;-4)$, véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng $(P)$ là $\vec{n}$.
Mặt cầu $(S)$ có tâm $I(3;-3;1)$ và bán kính $R=3$.
Vì $(P)$ chứa $d$ nên $\vec{u}\cdot\vec{n}=0$ và $(P)$ tiếp xúc với $(S)$ nên $\mathrm{d}(I,(P))=3$.
Ta chỉ xét phương trình $\vec{u}\cdot\vec{n}=0$. Lấy hai điểm nằm trên đường thẳng $d$ là $M(4;0;-4)$ và $N(1;-1;0)$.
Ta nhận thấy: $M(4;0;-4)$ và $N(1;-1;0)$ không thỏa mãn đáp án $A$, $B$, $C$.

Chọn đáp án D

**CÂU 11.** Trong KG $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon (x+1)^2+(y-1)^2+(z+2)^2=2$ và hai đường thẳng $d\colon \dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z-1}{-1}$; $\Delta\colon \dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{-1}$. Phương trình nào dưới đây là phương trình của một mặt phẳng tiếp xúc với $(S)$, song song với $d$ và $\Delta$?

**A** $y+z+3=0$. **B** $x+z+1=0$. **C** $x+y+1=0$. **D** $x+z-1=0$.

**Lời giải.**

Mặt cầu $(S)$ có tâm $I(-1;1;-2)$; $R=\sqrt{2}$.
Véc-tơ chỉ phương của $d$: $\vec{u}_d=(1;2;-1)$. Véc-tơ chỉ phương của $\Delta$ là $\vec{u}_\Delta=(1;1;-1)$.
Gọi $(P)$ là mặt phẳng cần viết phương trình.
Ta có $[\vec{u}_d,\vec{u}_\Delta]=(-1;0;-1)$ nên chọn một véc-tơ pháp tuyến của $(P)$ là $\vec{n}=(1;0;1)$.
Mặt phẳng $(P)$ có phương trình tổng quát dạng: $x+z+D=0$.
Do $(P)$ tiếp xúc với $(S)$ nên

$$\begin{aligned}\mathrm{d}(I,(P))=R &\Leftrightarrow \dfrac{|-1-2+D|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}\\ &\Leftrightarrow |D-3|=2\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}D=5\\D=1.\end{array}\right.\end{aligned}$$

Vậy phương trình của $(P)$ là $x+z+1=0$.

Chọn đáp án B

**CÂU 12.** Trong KG $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon (x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=1$, đường thẳng $\Delta\colon \dfrac{x-6}{-3}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-2}{2}$ và điểm $M(4;3;1)$. Trong các mặt phẳng sau mặt phẳng nào đi qua $M$, song song với $\Delta$ và tiếp xúc với mặt cầu $(S)$?

**A** $2x-2y+5z-22=0$. **B** $2x+y+2z-13=0$. **C** $2x+y-2z-1=0$. **D** $2x-y+2z-7=0$.

**Lời giải.**

**Cách 1:**
Gọi $\vec{n}=(2a;b;c)$ là véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng $(P)$ cần lập, $a^2+b^2+c^2\neq 0$.
Đường thẳng $\Delta$ có véc-tơ chỉ phương là $\vec{u}=(-3;2;2)$.
Mặt phẳng $(P)$ song song với $\Delta$ nên ta có $\vec{n}\cdot\vec{u}=0\Leftrightarrow -6a+2b+2c=0\Leftrightarrow c=3a-b$.
Mặt phẳng $(P)$ đi qua $M$ và có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}$ nên phương trình có dạng:
$2a(x-4)+b(y-3)+(3a-b)(z-1)=0\Leftrightarrow 2ax+by+(3a-b)z-11a-2b=0\quad(*)$
Mặt cầu $(S)$ có tâm $I(1;2;3)$ và bán kính $R=1$.

Mặt phẳng $(P)$ tiếp xúc với mặt cầu $(S)$ nên

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}(I,(P))=1 &\Leftrightarrow \frac{3|b|}{\sqrt{4a^2+b^2+(3a-b)^2}}=1\\
&\Leftrightarrow \frac{3|b|}{\sqrt{13a^2+2b^2-6ab}}=1\\
&\Leftrightarrow 3|b|=\sqrt{13a^2+2b^2-6ab}\\
&\Leftrightarrow 9b^2=13a^2+2b^2-6ab\\
&\Leftrightarrow 13a^2-6ab-7b^2=0\\
&\Leftrightarrow (a-b)(13a+7b)=0\\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=b\\ 13a=-7b.\end{array}\right.
\end{aligned}$$

Với $a=b$, chọn $a=1$, $b=1$ thay vào $(*)$ ta được pt $(P_1)\colon 2x+y+2z-13=0$.
Ta có $N(6;2;2)\in\Delta$. Dễ thấy $N\notin(P_1)$, suy ra $(P_1)\colon 2x+y+2z-13=0$ song song với $\Delta$.
Với $13a=-7b$, chọn $a=7$, $b=-13$ thay vào $(*)$ ta được pt$(P_2)\colon 14x-13y+34z-51=0$.
Ta có $N(6;2;2)\in\Delta$, dễ thấy $N\notin(P_2)$, suy ra $(P_2)\colon 14x-13y+34z-51=0$ song song với $\Delta$.
**Cách 2:** (Trắc nghiệm)
Gọi $(P)$ là mặt phẳng thỏa mãn yêu cầu bài toán và có véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}$.
Vì $(P)$ đi qua $M(4;3;1)$ nên phương án $A$, $C$ bị loại.
Đường thẳng $\Delta$ có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}=(-3;2;2)$. $(P)$ song song với đường thẳng $\Delta$ nên $\vec{n}\cdot\vec{u}=0$. Do đó phương án $D$ bị loại.
Vậy phương án $B$ là phương án thỏa mãn yêu cầu bài toán.
Chọn đáp án B ........................................................................................ □

**CÂU 13.** Trong KG $Oxyz$ cho mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z-2=0$ và mặt phẳng $(\alpha)\colon 4x+3y-12z+10=0$. Lập phương trình mặt phẳng $(\beta)$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện: Tiếp xúc với $(S)$; song song với $(\alpha)$ và cắt trục $Oz$ ở điểm có cao độ dương.

A. $4x+3y-12z-78=0$. B. $4x+3y-12z-26=0$. C. $4x+3y-12z+78=0$. D. $4x+3y-12z+26=0$.

**Lời giải.**

Mặt cầu $(S)$ có tâm $I(1;2;3)$, bán kính $R=4$.
Mặt phẳng $(\beta)$ song song với $(\alpha)$ nên có phương trình dạng $4x+3y-12z+c=0\quad(c\neq 10)$.
$(\beta)$ tiếp xúc với $(S)$ nên

$$\begin{aligned}
\Leftrightarrow \mathrm{d}(I,(\beta))=R &\Leftrightarrow \frac{|4\cdot1+3\cdot2-12\cdot3+c|}{\sqrt{4^2+3^2+12^2}}=4\\
&\Leftrightarrow \frac{|-26+c|}{13}=4\\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -26+c=52\\ -26+c=-52\end{array}\right.\\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c=78\\ c=-26.\end{array}\right.
\end{aligned}$$

Nếu $c=78$ thì $(\beta)\colon 4x+3y-12z+78=0$. Mặt phẳng $(\beta)$ cắt trục $Oz$ ở điểm $M\left(0;0;\dfrac{13}{2}\right)$ có cao độ dương.

Nếu $c=-26$ thì $(\beta)\colon 4x+3y-12z-26=0$. Mặt phẳng $(\beta)$ cắt trục $Oz$ ở điểm $M\left(0;0;-\dfrac{13}{6}\right)$ có cao độ âm.

Vậy phương trình của $(\beta)$ là $4x+3y-12z+78=0$.

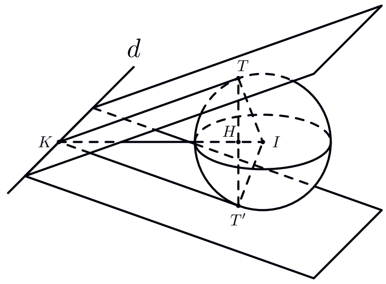
Chọn đáp án C ........................................................................................ □

**CÂU 14.** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2-2x+2z+1=0$ và đường thẳng $d\colon \dfrac{x}{1}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z}{-1}$. Hai mặt phẳng $(P)$, $(P')$ chứa $d$ và tiếp xúc với $(S)$ tại $T$, $T'$. Tìm tọa độ trung điểm $H$ của $TT'$.

A. $H\left(-\dfrac{7}{6};\dfrac{1}{3};\dfrac{7}{6}\right)$. B. $H\left(\dfrac{5}{6};\dfrac{2}{3};-\dfrac{7}{6}\right)$. C. $H\left(\dfrac{5}{6};\dfrac{1}{3};-\dfrac{5}{6}\right)$. D. $H\left(-\dfrac{5}{6};\dfrac{1}{3};\dfrac{5}{6}\right)$.

**Lời giải.**

Mặt cầu $(S)$ tâm $I(1;0;-1)$, bán kính
$R=\sqrt{1^2+0^2+(-1)^2-1}=1$.
Gọi $K$ là hình chiếu vuông góc của $I$ lên $d$.
$K\in d$ nên ta có thể giả sử $K(t;2+t;-t)$.
$\overrightarrow{IK}=(t-1;2+t;-t+1)$, $\vec{u}_d=(1;1;-1)$ là một véc-tơ chỉ phương của đường thẳng $d$.
$IK\perp d \Leftrightarrow \overrightarrow{IK}\cdot\vec{u}_d=0$
$\Leftrightarrow t-1+2+t+t-1=0\Leftrightarrow t=0\Rightarrow K(0;2;0)$.




$\triangle ITK$ vuông tại $T$ có $TH$ là đường cao nên $IT^2=IH\cdot IK$. $\Leftrightarrow IH=\dfrac{1}{\sqrt6}(IK=\sqrt6)$

$\Rightarrow \overrightarrow{IH}=\dfrac16\overrightarrow{IK}$. Giả sử $H(x;y;z)$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x-1=\dfrac16\cdot(-1)\\ y-0=\dfrac16\cdot 2\\ z+1=\dfrac16\cdot 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac56\\ y=\dfrac13\\ z=\dfrac{-5}{6}.\end{cases}$$

Vậy $H\left(\dfrac56;\dfrac13;\dfrac{-5}{6}\right)$.

Chọn đáp án C ..................................................□

**CÂU 15.** Trong KG $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;0;0)$, $B(0;0;2)$ và mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2-2x-2y+1=0$. Số mặt phẳng chứa hai điểm $A$, $B$ và tiếp xúc với mặt cầu $(S)$ là

A 1 mặt phẳng. B 2 mặt phẳng. C 0 mặt phẳng. D vô số mặt phẳng.

**Lời giải.**

Gọi phương trình mặt phẳng là $(P)\colon Ax+By+Cz+D=0\quad (A^2+B^2+C^2\neq 0)$.
Theo đề bài, mặt phẳng qua $A$, $B$ nên ta có:
$$\begin{cases}A+D=0\\2C+D=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=2C\\D=-2C.\end{cases}$$
Vậy mặt phẳng $(P)$ có dạng $2Cx+By+Cz-2C=0$.
$(S)$ có tâm $I(1;1;0)$ và $R=1$.
Vì $(P)$ tiếp xúc với $(S)$ nên
$\mathrm{d}(I,(P))=R\Leftrightarrow \dfrac{2C+B-2C}{\sqrt{5C^2+B^2}}=1\Leftrightarrow B^2=5C^2+B^2\Leftrightarrow C=0$.
Suy ra $A=D=0$.
Vậy phương trình của $(P)$ là $y=0$.

Chọn đáp án A ..................................................□

**Phần III. Học sinh điền kết quả vào ô trống.**

**CÂU 16.** Trong KG $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon x-2y+z+7=0$ và mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2-2x+4z-10=0$. Gọi $(Q)$ là mặt phẳng song song với mặt phẳng $(P)$ và cắt mặt cầu $(S)$ theo một giao tuyến là đường tròn có chu vi bằng $6\pi$. Biết phương trình của $(Q)$ có dạng $ax+by+cz+d=0$, giá trị của $a+b+c+d$ là

Đáp án:

| - | 5 | | |
|---|---|---|---|

**Lời giải.**

Mặt cầu $(S)$ có tâm $I(1;0;-2)$, bán kính $R=\sqrt{15}$.
Gọi $r$ là bán kính của đường tròn giao tuyến. Ta có $2\pi r=6\pi\Leftrightarrow r=3$.
Do $(Q)\parallel(P)\Rightarrow(Q)\colon x-2y+z+d=0\quad(d\neq7)$.
Ta có: $\mathrm{d}(I,(Q))=\sqrt{R^2-r^2}=\sqrt6\Leftrightarrow\dfrac{|d-1|}{\sqrt6}=\sqrt6\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}d=7\\d=-5.\end{array}\right.$
Suy ra $(Q)\colon x-2y+z-5=0$.
Vậy $a+b+c+d=-5$.
Đáp án: $-5$ ..................................................□

**CÂU 17.** Trong KG $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z-2=0$ và mặt phẳng $(\alpha)\colon 4x+3y-12z+10=0$.

Lập phương trình mặt phẳng $(\beta)$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện: tiếp xúc với $(S)$; song song với $(\alpha)$ và cắt trục $Oz$ ở điểm có cao độ dương. Biết $(\beta)$ có dạng $ax+by+cz+d=0$, giá trị của $a+b+c+d$ là

Đáp án: | 7 | 3 | | |

**Lời giải.**

Mặt cầu $(S)$ có tâm $I(1;2;3)$, bán kính $R=\sqrt{1^2+2^2+3^2+2}=4$.
Vì $(\alpha) /\!/ (\beta)$ nên phương trình mp $(\beta)$ có dạng: $4x+3y-12z+d=0 \quad (d\neq 10)$.
Vì $(\beta)$ tiếp xúc mặt cầu $(S)$ nên

$$\mathrm{d}(I,(\beta))=R \Leftrightarrow \frac{|4\cdot 1+3\cdot 2-12\cdot 3+d|}{\sqrt{4^2+3^2+(-12)^2}}=4 \Leftrightarrow |d-26|=52 \Leftrightarrow \left[\begin{aligned}&d=-26\\&d=78.\end{aligned}\right.$$

Do $(\beta)$ cắt trục $Oz$ ở điểm có cao độ dương nên $d=78$.
Suy ra mp $(\beta)$: $4x+3y-12z+78=0$.
Vậy $a+b+c+d=73$.
Đáp án: $\boxed{73}$ ............ □

**CÂU 18.** Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$ cho mặt phẳng $(Q)$ có phương trình $x-2y+z-5=0$ và mặt cầu $S$ có phương trình $(x-1)^2+y^2+(z+2)^2=15$. Mặt phẳng $(P)$ song song với mặt phẳng $(Q)$ và cắt mặt cầu $(S)$ theo giao tuyến là một đường tròn có chu vi bằng $6\pi$. Gọi phương trình của mặt phẳng $(Q)$ có dạng $x+by+cz+d=0$, tính giá trị $V=a+b+c+d$.

Đáp án: | 7 | | | |

**Lời giải.**

Mặt cầu $(S)$ có tâm $I(1;0;-2)$ và bán kính $R=\sqrt{15}$.
Đường tròn có chu vi bằng $6\pi$ nên có bán kính là $r=\dfrac{6\pi}{2\pi}=3$.
Mặt phẳng $(P)$ song song với mặt phẳng $(Q)$ nên phương trình mặt phẳng $(P)$ có dạng: $x-2y+z+d=0$ $(d\neq -5)$.

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\left(I;(P)\right)=\sqrt{R^2-r^2} &\Leftrightarrow \mathrm{d}\left(I;(P)\right)=\sqrt{6}\\ &\Leftrightarrow \frac{|1-2.0-2+d|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+1^2}}=\sqrt{6}\\ &\Leftrightarrow |d-1|=6\\ &\Leftrightarrow \left[\begin{aligned}&d-1=6\\&d-1=-6.\end{aligned}\right.\\ &\Leftrightarrow \left[\begin{aligned}&d=7\\&d=-5.\end{aligned}\right.\end{aligned}$$

Đối chiếu điều kiện, ta tìm được $d=7$. Vậy $(P)$ có phương trình là $x-2y+z+7=0$. Suy ra $V=1-2+1+7=7$.
Đáp án: $\boxed{7}$ ............ □

**CÂU 19.** Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$ cho mặt cầu $(S)$ có phương trình $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=1$ và điểm $A(2;3;4)$. Biết tập hợp điểm $M$ thuộc $(S)$ sao cho đường thẳng $AM$ tiếp xúc với $(S)$ là mặt phẳng có phương trình $x+by+cz+d=0$. Tính giá trị $V=a\cdot b\cdot c\cdot d$.

Đáp án: | – | 7 | | |

**Lời giải.**

Mặt cầu $(S)$ có tâm là $I(1;2;3)$ và bán kính là 1. Dễ thấy điểm $A$ nằm ngoài mặt cầu $(S)$.
Đường thẳng $AM$ tiếp xúc với $(S)$ khi và chỉ khi $AM\perp IM \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{IM}=0$.

$$\begin{aligned}&\Leftrightarrow (x-2)(x-1)+(y-3)(y-2)+(z-4)(z-3)=0\\&\Leftrightarrow (x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2-(x+y+z-7)=0.\end{aligned}$$

Mà $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=0$ nên $x+y+z-7=0$.
Đáp án: $\boxed{-7}$ ............ □

**CÂU 20.** Trong không gian với hệ trục $Oxyz$ cho điểm $A(2;-2;2)$ và mặt cầu $(S)$ có phương trình $x^2+y^2+(z+2)^2=1$. Điểm $M$ di chuyển trên mặt cầu $(S)$ đồng thời thoả mãn $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{AM}=6$. Biết tập hợp điểm $M$ thoả mãn điều kiện là mặt phẳng có phương trình $x+by+cz+d=0$. Tính giá trị $V=1+b+c+d$.

Đáp án: | 1 | 5 | | |

**Lời giải.**

Gọi điểm $M(x;y;z)\in(S)$ là điểm cần tìm.
Khi đó ta có

$$\begin{aligned}&x^2+y^2+z^2+4z+4=1\\ \Leftrightarrow\ &x^2+y^2+z^2=-4z-3. \qquad (1)\end{aligned}$$

Mặt khác, ta có $\overrightarrow{OM} = (x; y; z)$ và $\overrightarrow{AM} = (x-2; y+2; z-2)$.
Theo đề bài ta có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{AM} = 6 &\Leftrightarrow x(x-2) + y(y+2) + z(z-2) = 6 \\ &\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 2z = 6 \qquad (2)\end{aligned}$$

Thay (1) vào (2) ta được

$$-4z - 3 - 2x + 2y - 2z - 6 = 0 \Leftrightarrow 2x - 2y + 6z + 9 = 0.$$

Vậy $V = 2 - 2 + 6 + 9 = 15$.
Đáp án: $\boxed{15}$ ........................................................ □

**CÂU 21.** Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$ cho mặt cầu $(S)$ có phương trình $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 1$ và điểm $A(2; 2; 2)$. Xét các điểm $M$ thuộc mặt cầu $S$ sao cho đường thẳng $AM$ luôn tiếp xúc với $(S)$. Gọi tập hợp điểm $M$ thoả mãn điều kiện là mặt phẳng có phương trình $2x + by + cz + d = 0$. Tính giá trị $V = 2 - b + c - 3d$.

Đáp án: | 2 | 6 | | |

**Lời giải.**
Mặt cầu $(S)$ có tâm $I(1; 1; 1)$, bán kính $R = 1$.
Vì $AM$ luôn tiếp xúc với $(S)$ nên ta luôn có $\widehat{AMI} = 90^\circ$, suy ra $M$ luôn thuộc mặt cầu $(S_1)$ tâm $E$ là trung điểm của $AI$ đường kính $AI$.
Với $E\left(\frac{3}{2}; \frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right)$, bán kính $R_1 = IE = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
Phương trình mặt cầu $(S_1)$ là

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 3x - 3y - 3z + 6 = 0.$$

Vậy điểm $M$ có toạ độ thoả mãn hệ phương trình

$$\begin{cases}(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 1 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 3x - 3y - 3z + 6 = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z + 2 = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 3x - 3y - 3z + 6 = 0.\end{cases}$$

Trừ theo vế hai phương trình cho nhau ta được $x + y + z - 4 = 0 \Leftrightarrow 2x + 2y + 2z - 8 = 0$.
Vậy $V = 2 - 2 + 2 - 3.(-8) = 26$.
Đáp án: $\boxed{26}$ ........................................................ □

**CÂU 22.** Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(a; 0; 0)$, $B(0; b; 0)$, $C(0; 0; c)$ với $a, b, c > 0$. Biết rằng $(ABC)$ đi qua điểm $M\left(\frac{1}{7}; \frac{2}{7}; \frac{3}{7}\right)$ và tiếp xúc với mặt cầu $(S)$ có phương trình $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = \frac{72}{7}$. Tính $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$, *(làm tròn kết quả đến hàng phần chục)*.

Đáp án: | 3 | , | 5 | |

**Lời giải.**
Phương trình đoạn chắn của $(ABC)$ là $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$.
Vì điểm $M\left(\frac{1}{7}; \frac{2}{7}; \frac{3}{7}\right)$ thuộc mặt phẳng $(ABC)$ nên

$$\begin{aligned}&\frac{\left(\frac{1}{7}\right)}{a} + \frac{\left(\frac{2}{7}\right)}{b} + \frac{\left(\frac{3}{7}\right)}{c} = 1 \\ \Rightarrow &\frac{1}{7a} + \frac{2}{7b} + \frac{3}{7c} = 1 \\ \Rightarrow &\frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c} = 7.\end{aligned}$$

Mặt khác, mặt phẳng $(ABC)$ tiếp xúc với $(S)\colon (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = \frac{72}{7}$, nên khoảng từ tâm $I(1, 2, 3)$ đến mặt phẳng $(ABC)$ là $\sqrt{\frac{72}{7}}$.
Từ đó ta có $\mathrm{d}\left(I, (ABC)\right) = \dfrac{\left|\frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c} - 1\right|}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}}} = \sqrt{\frac{72}{7}}$, mà $\frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c} = 7$, nên

$$\mathrm{d}\left(I,(ABC)\right)=\frac{|7-1|}{\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}}=\sqrt{\frac{72}{7}}\Rightarrow\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{7}{2}.$$

Đáp án: $\boxed{3{,}5}$ ..........

**CÂU 23.** Trong không gian với hệ trục $Oxyz$ cho các điểm $M(2;1;4)$, $N(5;0;0)$, $P(1;-3;1)$. Gọi $I(a,b,c)$ là tâm của mặt cầu tiếp xúc với mặt phẳng $Oxyz$ đồng thời đi qua các điểm $M$, $N$, $P$. Tìm $c$, biết rằng $a+b+c<5$.

Đáp án: | 2 | | | |

**Lời giải.**

Giả sử mặt cầu $(S)$ đã cho có phương trình dạng

$$x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0.$$

Theo đề bài ta có

$$M(2;1;4)\in(S)\Leftrightarrow -4a-2b-8c+d=-21 \quad (3)$$
$$N(5;0;0)\in(S)\Leftrightarrow -10a+d=-25 \quad (4)$$
$$P(1;-3;1)\in(S)\Leftrightarrow -2a+6b-2c+d=-11 \quad (5)$$

Hình chiếu của điểm $I(a;b;c)$ lên mặt phẳng $(Oyz)$ là $H(0;b;c)$ nên

$$\overrightarrow{HI}=(a;0;0)\Rightarrow HI=|a| \quad (6)$$

Từ (3), (4), (5) ta có

$$\begin{cases}b=2-a\\ c=a-1\\ d=10a-25.\end{cases}$$

Thế vào phương trình (6) ta có

$$a^2-8a+15=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=5\\ a=3.\end{array}\right.$$

- Trường hợp 1: $a=5\Rightarrow b=-3$, $c=4\Rightarrow a+b+c=6>5$ (loại).
- Trường hợp 2: $a=3\Rightarrow b=-1$, $c=2\Rightarrow a+b+c=4<5$ (nhận).

Vậy $c=2$.
Đáp án: $\boxed{2}$ ..........

**CÂU 24.** Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+(z-1)^2=4$ và điểm $A(2;2;2)$. Từ $A$ kẻ ba tiếp tuyến $AB$, $AC$, $AD$ với $B$, $C$, $D$ là các tiếp điểm. Gọi phương trình mặt phẳng $(BCD)$ là phương trình có dạng $2x+by+cz+d=0$. Tính giá trị $V=2+b+c+d$.

Đáp án: | 0 | | | |

**Lời giải.**

Mặt cầu $(S)$ có tâm $I(0;0;1)$, bán kính $R=2$.
Có $\overrightarrow{IA}=(2;2;1)\Rightarrow|IA|=3$.
Tam giác $ABI$ vuông tại $B$ nên ta có $AB=\sqrt{IA^2-IB^2}=\sqrt{5}$.
Gọi $H(x;y;z)$ là chân đường vuông góc kẻ từ $B$ của tam giác $ABI$.
Ta có $IB^2=IH\cdot IA\Rightarrow IH=\dfrac{IB^2}{IA}=\dfrac{4}{3}\Rightarrow IH=\dfrac{4}{9}IA$.

Từ đó ta suy ra $\overrightarrow{IH}=\dfrac{4}{9}\overrightarrow{IA}\Rightarrow\begin{cases}x-0=\frac{4}{9}\cdot 2\\ y-0=\frac{4}{9}\cdot 2\\ z-1=\frac{4}{9}\cdot 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{8}{9}\\ y=\frac{8}{9}\\ z=\frac{13}{9}\end{cases}\Rightarrow H\left(\frac{8}{9};\frac{8}{9};\frac{13}{9}\right)$.

Mặt phẳng $(BCD)$ vuông góc với $IA$ nên nhận $\overrightarrow{IA}$ làm véc-tơ pháp tuyến. Ngoài ra $(BCD)$ cũng đi qua điểm $H$, vậy phương trình của mặt phẳng $(BCD)$ là

$$2\cdot\left(x-\frac{8}{9}\right)+2\cdot\left(y-\frac{8}{9}\right)+1\cdot\left(z-\frac{13}{9}\right)=0$$
$$\Leftrightarrow 2x+2y+z-5=0$$

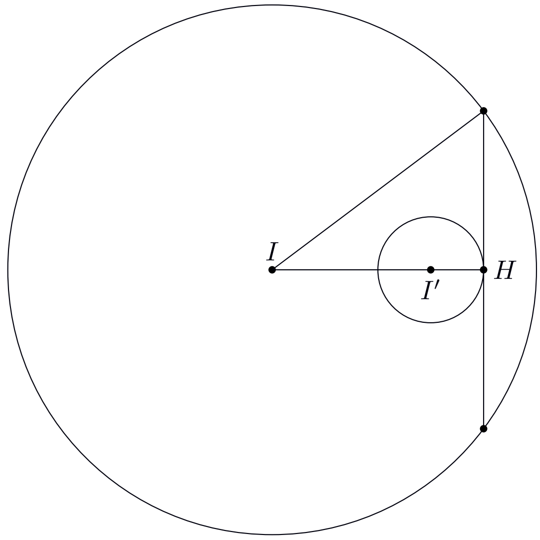
Vậy $V=2+b+c+d=2+2+1-5=0$.
Đáp án: $\boxed{0}$ ..........

**CÂU 25.** Trong KG $Oxyz$, cho hai mặt cầu $(S)$ và $(S')$ có phương trình lần lượt là $x^2+y^2+(z-1)^2=25$ và $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=1$. Mặt phẳng $(P)$ tiếp xúc $(S')$ và cắt $(S)$ theo giao tuyến là một đường tròn có chu vi $6\pi$. Viết khoảng cách từ $O$ đến $(P)$ dưới dạng số thập phân, lấy 2 chữ số sau dấu phẩy.

Đáp án: | 4 | , | 6 | 7 |

**Lời giải.**

Mặt cầu $(S)$ có tâm $I(0;0;1)$, bán kính $R=5$, mặt cầu $(S')$ có tâm $I'(1;2;3)$, bán kính $R'=1$.
Vì $II'=3<R-R'=4$ nên mặt cầu $(S')$ nằm trong mặt cầu $(S)$.
Mặt phẳng $(P)$ tiếp xúc với $(S')\Rightarrow d(I',(P))=R'=1$; $(P)$ cắt $(S)$ theo giao tuyến là một đường tròn có chu vi bằng $6\pi$ (suy ra bán kính đường tròn là $r=3$) nên $\mathrm{d}(I,(P))=\sqrt{R^2-r^2}=4$.
Nhận thấy $d(I,(P))-d(I',(P))=II'$ nên tiếp điểm $H$ của $(P)$ và $(S')$ cũng là tâm đường tròn của $(P)$ và $(S)$.




Khi đó, $(P)$ là một mặt phẳng đi qua $H$, nhận $\overrightarrow{II'}=(1;2;2)$ làm véc-tơ pháp tuyến.

Ta có $\overrightarrow{IH}=\dfrac{4}{3}\overrightarrow{II'}\Leftrightarrow\begin{cases}x_H=\dfrac{4}{3}\\ y_H=\dfrac{8}{3}\\ z_H=\dfrac{11}{3}\end{cases}\Rightarrow H\left(\dfrac{4}{3};\dfrac{8}{3};\dfrac{11}{3}\right)$.

Từ đó ta có phương trình của mặt phẳng $(P)$ là $x-\dfrac{4}{3}+2\left(y-\dfrac{8}{3}\right)+2\left(z-\dfrac{11}{3}\right)=0\Leftrightarrow x+2y+2z-14=0$.

Khoảng cách từ $O$ đến $(P)$ là $\mathrm{d}(O,(P))=\dfrac{14}{3}$.

Đáp án: $\boxed{4{,}67}$ ........................................................................ □

**CÂU 26.** Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$ cho mặt cầu $(S)$ có phương trình $x^2+y^2+z^2+2(a+4b)x+2(a-b+c)y+2(b-c)z+d=0$, tâm $I$ nằm trên mặt phẳng $(\alpha)$ cố định. Biết rằng $4a+b-2c=4$. Khoảng cách từ điểm $D(1;2;-2)$ đến mặt phẳng $(\alpha)$ có dạng $\dfrac{1}{\sqrt{R}}$. Tìm $R$.

Đáp án: | 9 | 1 | 5 | |

**Lời giải.**

Mặt cầu $(S)$ có tâm $I(a+4b;-a+b-c;-b+c)$.
Giả sử mặt phẳng $(\alpha)$ có phương trình $Ax+By+Cz+D=0$
Vì $I\in(\alpha)$ nên ta có

$$\begin{aligned}&A(a+4b)+B(-a+b-c)+C(-b+c)+D=0\\ \Leftrightarrow\ &(A-B)a+(4A+B-C)b+(-B+C)c=-D.\end{aligned}\tag{7}$$

Theo đề bài, ta lại có

$$4a+b-2c=4.\tag{8}$$

Đồng nhất (7) và (8) ta có hệ phương trình

$$\begin{cases}A-B=4\\ 4A+B-C=1\\ -B+C=-2\\ D=-4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=-0{,}25\\ B=-4{,}25\\ C=-6{,}25\\ D=-4.\end{cases}$$

Suy ra $(\alpha)$ có phương trình $x+17y+25z+16=0$.
Vậy khoảng cách từ điểm $D(1;2;-2)$ đến $(\alpha)$ bằng

$$\mathrm{d}(D,(\alpha))=\frac{|1+17\cdot2+25\cdot(-2)+16|}{\sqrt{1^2+17^2+25^2}}=\frac{1}{\sqrt{915}}.$$

Vậy $R = 915$.
Đáp án: $\boxed{915}$ ..............................................................................................

**CÂU 27.** Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;2;1)$, $B(3;-1;1)$ và $C(-1;-1;1)$. Gọi $(S_1)$ là mặt cầu có tâm $A$, bán kính bằng 2, $(S_2)$ và $(S_3)$ là hai mặt cầu có tâm lần lượt là $B$ và $C$ và có bán kính đều bằng 1. Hỏi có bao nhiêu mặt phẳng tiếp xúc với cả ba mặt cầu $(S_1)$, $(S_2)$, $(S_3)$?

Đáp án: | 7 | | | |

**Lời giải.**
Gọi phương trình mặt phẳng $(P)$ tiếp xúc với cả ba mặt cầu đã cho có phương trình là $ax + by + cz + d = 0$ (điều kiện $a^2 + b^2 + c^2 > 0$).
Khi đó ta có hệ điều kiện sau:

$$\begin{cases} \mathrm{d}\left(A;(P)\right) = 2 \\ \mathrm{d}\left(B;(P)\right) = 1 \\ \mathrm{d}\left(C;(P)\right) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{|a+2b+c+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = 2 \\ \dfrac{|3a-b+c+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = 1 \\ \dfrac{|-a-b+c+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |a+2b+c+d| = 2\sqrt{a^2+b^2+c^2} \\ |3a-b+c+d| = \sqrt{a^2+b^2+c^2} \\ |-a-b+c+d| = \sqrt{a^2+b^2+c^2} \end{cases}$$

Khi đó ta có

$$|3a-b+c+d| = |-a-b+c+d| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3a-b+c+d = -a-b+c+d \\ 3a-b+c+d = a+b-c-d \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a-b+c+d = 0. \end{cases}$$

Với $a = 0$ thì ta có

$$\begin{cases} |2b+c+d| = 2\sqrt{b^2+c^2} \\ |2b+c+d| = 2\,|-b+c+d| \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |2b+c+d| = 2\sqrt{b^2+c^2} \\ \left[\begin{array}{l} 4b-c-d = 0 \\ c+d = 0 \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c+d = 0 \Rightarrow c = d = 0, b \neq 0 \\ c+d = 4b, c = \pm 2\sqrt{2}b. \end{array}\right.$$

Do đó có 3 mặt phẳng.
Với $a - b + c + d = 0$ thì ta có

$$\begin{cases} |3b| = 2\sqrt{a^2+b^2+c^2} \\ |2a| = \sqrt{a^2+b^2+c^2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |3b| = 4\,|a| \\ |2a| = \sqrt{a^2+b^2+c^2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |b| = \dfrac{4}{3}\,|a| \\ |c| = \dfrac{\sqrt{11}}{3}\,|a| \end{cases}$$

Do đó có 4 mặt phẳng thoả mãn. Vậy có tổng cộng 7 mặt phẳng thoả mãn yêu cầu đề bài.
Đáp án: $\boxed{7}$ ..............................................................................................

**CÂU 28.** Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho hai điểm $A\left(\dfrac{5+\sqrt{3}}{2};\dfrac{7-\sqrt{3}}{2};3\right)$ và $B\left(\dfrac{5-\sqrt{3}}{2};\dfrac{7+\sqrt{3}}{2};3\right)$ và mặt cầu $(S)$ có phương trình $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 6$. Xét mặt phẳng $(P)$ có phương trình $ax + by + cz + d = 0$ ($a$, $b$, $c$, $d \in \mathbb{Z}$; $d < -5$) là mặt phẳng thay đổi luôn đi qua hai điểm $A$ và $B$. Gọi $(N)$ là hình nón có đỉnh là tâm của mặt cầu $(S)$

và đường tròn đáy là đường tròn giao tuyến của $(P)$ và $(S)$. Tính giá trị của $|a+b+c+d|$ khi thiết diện qua trục của hình nón $(N)$ có diện tích lớn nhất.

Đáp án: 6

**Lời giải.**

Mặt cầu $(S)$ có tâm $I(1;2;3)$, bán kính $R=\sqrt{6}$.
Có $IA=IB=\sqrt{6}$ nên $A$, $B$ thuộc mặt cầu $(S)$.
Có $\overrightarrow{IA}=\left(-\sqrt{3};\sqrt{3};0\right)=-\sqrt{3}\,(1;-1;0)=-\sqrt{3}\,\vec{a}$, $M\left(\dfrac{5}{2};\dfrac{7}{2};3\right)$ là trung điểm của $AB$.
Gọi $\vec{a}=(1;-1;0)$ và $\vec{n}=(a;b;c)$ với $a^2+b^2+c^2>0$ là véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng $(P)$.
Vì $A$, $B\in(P)$ nên ta có

$$\begin{aligned}&\begin{cases}I\in(P)\\ \vec{a}\cdot\vec{n}=0\end{cases}\\ \Leftrightarrow&\begin{cases}\dfrac{5}{2}a+\dfrac{7}{2}b+3c+d=0\\ a-b=0\end{cases}\\ \Leftrightarrow&\begin{cases}d=-6a-3c\\ a=b\end{cases}\end{aligned}$$

Gọi $h=\mathrm{d}\,(I,(P))$, $(C)=(P)\cap(S)$, $r$ là bán kính đường tròn $(C)$. Ta có $r=\sqrt{R^2-h^2}=\sqrt{6-h^2}$.
Diện tích thiết diện qua trục của hình nón $(N)$ là

$$S=\frac{1}{2}\cdot h\cdot 2r=h\cdot\sqrt{6-h^2}\leq\frac{h^2+6-h^2}{2}=3.$$

$\max S=3$ khi $h^2=6-h^2\Rightarrow h=\sqrt{3}$

$$\begin{aligned}h=\mathrm{d}\,(I,(P))\Leftrightarrow\sqrt{3}&=\frac{|a+2b+3c+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\\ \Leftrightarrow a^2=c^2&\Leftrightarrow\begin{cases}a=c\\ a=-c.\end{cases}\end{aligned}$$

Nếu $a=c$ thì $b=a$, $d=-9a$ và $(P)\colon ax+ay+az-9a=0\Leftrightarrow x+y+z-9=0$ (nhận).
Nếu $a=-c$ thì $b=a$; $d=-3a$ và $(P)\colon ax+ay-az-3a=0\Leftrightarrow x+y-z-3=0$ (loại).
Vậy $T=|a+b+c+d|=6$.

Đáp án: $\boxed{6}$ ..................................................................................................... □

**CÂU 29.** Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho ba mặt cầu $(S_1)\colon(x+3)^2+(y-2)^2+(z-4)^2=1$; $(S_2): x^2+(y-2)^2+(z-4)^2=4$; $(S_3): x^2+y^2+z^2+4x-4y-1=0$. Hỏi có bao nhiêu mặt phẳng tiếp xúc với cả ba mặt cầu $(S_1)$, $(S_2)$, $(S_3)$?

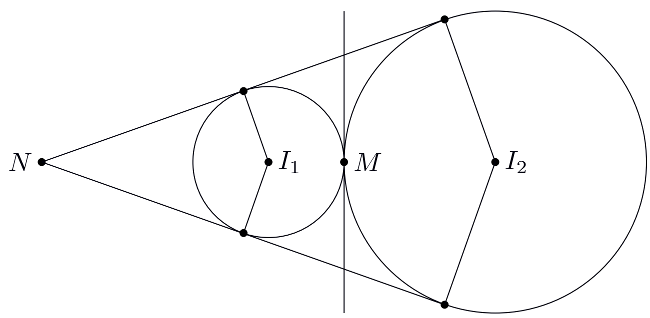
Đáp án: 2

**Lời giải.**

Ta có $(S_1):\begin{cases}I_1\,(-3;\,2;\,4)\\ R_1=1\end{cases}$; $(S_2):\begin{cases}I_2\,(0;\,2;\,4)\\ R_2=2\end{cases}$; $(S_3):\begin{cases}I_3\,(-2;\,2;\,0)\\ R_2=3\end{cases}$.
Mặt khác ta có $I_1I_2=3=R_1+R_2$ nên $(S_1)$ và $(S_2)$ tiếp xúc với nhau tại $M$.
Tiếp tục, ta có $\overrightarrow{MI_2}=2\overrightarrow{I_1M}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{I_1I_2}$ nên điểm $M$ có toạ độ $(-2;2;4)$.
Cắt hai mặt cầu $(S_1)$, $(S_2)$ theo phương chứa đường nối tâm của hai mặt cầu ấy, chúng ta có thiết diện là hai đường tròn lớn $(C_1)$ có tâm $I_1$ và $(C_2)$ có tâm $I_2$.

**Trường hợp 1:** Mặt phẳng qua $M$ vuông góc với $I_1I_2$ có phương trình là $(\alpha)\colon x+2=0$, mà $d\,(I_3;(\alpha))=0$ nên $(\alpha)$ không tiếp xúc với $(S_3)$. Vậy trường hợp này **loại**.

**Trường hợp 2**: $N$ là tâm vị tự ngoài của $(C_1)$, $(C_2)$, suy ra $\overrightarrow{NI_2}=2\overrightarrow{NI_1}=2\overrightarrow{I_1I_2}\Rightarrow N\,(-6;\,2;\,4)$.




Gọi $(P)$ là mặt phẳng tiếp xúc cả ba mặt cầu. $(P)$ đi qua $N$ và có véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}=(1;a;b)$.

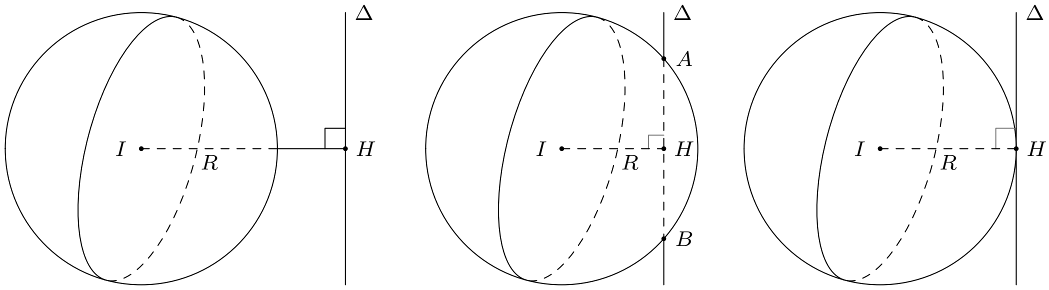
$$\begin{aligned}&\Rightarrow\ (P): x+6+a\,(y-2)+b\,(z-4)=0\\ &\Leftrightarrow\ (P): x+ay+bz-2a-4b+6=0\end{aligned}$$

Tiếp tục, ta có

$$\begin{cases} d\left(I_1;(P)\right)=1\\ d\left(I_2;(P)\right)=2\\ d\left(I_3;(P)\right)=3\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3=\sqrt{1+a^2+b^2}\\ 6=2\sqrt{1+a^2+b^2}\\ |4b-4|=3\sqrt{1+a^2+b^2}\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{aligned} b&=\frac{13}{4}\\ b&=-\frac{5}{4}\end{aligned}\right.$$

Với $b=\frac{13}{4}\Rightarrow a^2=-\frac{41}{16}$ (loại).
Với $b=-\frac{5}{4}\Rightarrow a^2=\frac{103}{16}\Rightarrow a=\pm\frac{\sqrt{103}}{4}$.
Vậy có 2 mặt phẳng thoả mãn yêu cầu đề bài.
Đáp án: $\boxed{2}$ ..............................................................................................

## 19 Vị trí tương đối của đường thẳng với mặt cầu




Cho mặt cầu $(S)$ có tâm $I$, bán kính $R$ và đường thẳng $\Delta$. Để xét vị trí tương đối giữa $\Delta$ và $(S)$ ta tính $\mathrm{d}\left(I,\Delta\right)$ rồi so sánh với bán kính $R$.

- Nếu $\mathrm{d}\left(I,\Delta\right)>R$ thì $\Delta$ không cắt $(S)$.
- Nếu $\mathrm{d}\left(I,\Delta\right)=R$ thì $\Delta$ tiếp xúc với $(S)$ tại $H$.
- Nếu $\mathrm{d}\left(I,\Delta\right)<R$ thì $\Delta$ cắt $(S)$ tại hai điểm phân biệt $A$, $B$.

*Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho $(P)\colon A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ và $(Q)\colon A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$, $(A_2,B_2,C_2,D_2\neq 0)$. Lúc đó*

- $(P)\equiv(Q)\Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}=\frac{D_1}{D_2}$.
- $(P)\perp(Q)\Leftrightarrow A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$.

**Phần I. Mỗi câu hỏi học sinh chọn một trong bốn phương án A, B, C, D.**

**CÂU 1.** Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta\colon \frac{x+2}{-1}=\frac{y}{1}=\frac{z-3}{-1}$ và và mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2-2x-4y+6z-67=0$. Số điểm chung của $\Delta$ và $(S)$ là

**A** 3. **B** 0. **C** 1. **D** 2.

**Lời giải.**

Đường thẳng $\Delta$ đi qua $M(-2;0;3)$ và có một vectơ chỉ phương là $\vec{u}=(-1;1;-1)$.
Mặt cầu $(S)$ có tâm $I(1;2;-3)$ và bán kính $R=9$.
Ta có $\overrightarrow{MI}=(3;2;-6)$ và $\left[\vec{u},\overrightarrow{MI}\right]=(-4;-9;-5)$.
Suy ra

$$\mathrm{d}(I,\Delta)=\frac{\left|\left[\vec{u},\overrightarrow{MI}\right]\right|}{|\vec{u}|}=\frac{\sqrt{366}}{3}.$$

Vì $\mathrm{d}(I,\Delta)<R$ nên $\Delta$ cắt mặt cầu $(S)$ tại hai điểm phân biệt.

Chọn đáp án (D) ..............................................................................................□

**CÂU 2.** Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta\colon \dfrac{x}{2} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z-2}{-1}$ và và mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2-2x+4z+1=0$. Số điểm chung của $\Delta$ và $(S)$ là

(A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

**Lời giải.**

Đường thẳng $\Delta$ đi qua $M(0;1;2)$ và có một vectơ chỉ phương là $\vec{u}=(2;1;-1)$.
Mặt cầu $(S)$ có tâm $I(1;0;-2)$ và bán kính $R=2$.
Ta có $\overrightarrow{MI}=(1;-1;-4)$ và $\left[\vec{u},\overrightarrow{MI}\right]=(-5;7;-3)$.
Suy ra

$$\mathrm{d}(I,\Delta)=\frac{\left|\left[\vec{u},\overrightarrow{MI}\right]\right|}{|\vec{u}|}=\frac{\sqrt{498}}{6}.$$

Vì $\mathrm{d}(I,\Delta)>R$ nên $\Delta$ không cắt mặt cầu $(S)$.

Chọn đáp án (A) ..............................................................................................□

**CÂU 3.** Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta\colon \begin{cases} x=2+t \\ y=1+mt \\ z=-2t \end{cases}$ và mặt cầu $(S)\colon (x-1)^2+(y+3)^2+(z-2)^2=1$. Tìm tất cả các giá trị thực của $m$ để đường thẳng $\Delta$ không cắt mặt cầu $(S)$.

(A) $m>\dfrac{15}{2}$ hoặc $m<\dfrac{5}{2}$. (B) $m=\dfrac{15}{2}$ hoặc $m=\dfrac{5}{2}$. (C) $\dfrac{5}{2}<m<\dfrac{15}{2}$. (D) $m\in\mathbb{R}$.

**Lời giải.**

Từ PTĐT $\Delta$ và mặt cầu $(S)$, ta có

$$\begin{aligned} &(2+t-1)^2+(1+mt+3)^2+(-2t-2)^2=1 \\ \Leftrightarrow&(1+t)^2+(4+mt)^2+(-2t-2)^2=1 \\ \Leftrightarrow&\left(m^2+5\right)t^2+2(5+4m)t+20=0. \end{aligned} \tag{1}$$

Để $\Delta$ không cắt mặt cầu $(S)$ thì (1) vô nghiệm, hay (1) có $\Delta'<0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} m>\dfrac{15}{2} \\ m<\dfrac{5}{2}. \end{array}\right.$

Chọn đáp án (A) ..............................................................................................□

**CÂU 4.** Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta\colon \begin{cases} x=2+t \\ y=1+mt \\ z=-2t \end{cases}$ và mặt cầu $(S)\colon (x-1)^2+(y+3)^2+(z-2)^2=1$. Tìm tất cả các giá trị thực của $m$ để đường thẳng $\Delta$ tiếp xúc mặt cầu $(S)$.

(A) $m>\dfrac{15}{2}$ hoặc $m<\dfrac{5}{2}$. (B) $m=\dfrac{15}{2}$ hoặc $m=\dfrac{5}{2}$. (C) $\dfrac{5}{2}<m<\dfrac{15}{2}$. (D) $m\in\mathbb{R}$.

**Lời giải.**

Từ PTĐT $\Delta$ và mặt cầu $(S)$, ta có

$$\begin{aligned} &(2+t-1)^2+(1+mt+3)^2+(-2t-2)^2=1 \\ \Leftrightarrow&(1+t)^2+(4+mt)^2+(-2t-2)^2=1 \\ \Leftrightarrow&\left(m^2+5\right)t^2+2(5+4m)t+20=0. \end{aligned} \tag{1}$$

Để $\Delta$ tiếp xúc mặt cầu $(S)$ thì (1) có nghiệm kép, hay (1) có $\begin{cases} a\neq 0 \\ \Delta'=0 \end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} m=\dfrac{15}{2} \\ m=\dfrac{5}{2}. \end{array}\right.$

Chọn đáp án (B) ..............................................................................................□

**CÂU 5.** Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta\colon \begin{cases} x=2+t \\ y=1+mt \\ z=-2t \end{cases}$ và mặt cầu $(S)\colon (x-1)^2+(y+3)^2+(z-2)^2=1$. Giá trị của $m$ để đường thẳng $\Delta$ cắt mặt cầu $(S)$ tại hai điểm phân biệt là

(A) $m\in\mathbb{R}$. (B) $m>\dfrac{15}{2}$ hoặc $m<\dfrac{5}{2}$. (C) $m=\dfrac{15}{2}$ hoặc $m=\dfrac{5}{2}$. (D) $\dfrac{5}{2}<m<\dfrac{15}{2}$.

**Lời giải.**

Từ PTĐT $\Delta$ và mặt cầu $(S)$, ta có

$$\begin{aligned}&(2+t-1)^2+(1+mt+3)^2+(-2t-2)^2=1\\ \Leftrightarrow&(1+t)^2+(4+mt)^2+(-2t-2)^2=1\\ \Leftrightarrow&\left(m^2+5\right)t^2+2(5+4m)t+20=0. \qquad (1)\end{aligned}$$

Để $\Delta$ cắt mặt cầu $(S)$ tại hai điểm phân biệt thì (1) có hai nghiệm phân biệt, hay (1) có

$$\Delta'>0\Leftrightarrow\frac{5}{2}<m<\frac{15}{2}.$$

Chọn đáp án (D) ..................... □

## 20 Lập phương trình mặt cầu liên quan đến đường thẳng

**Phần I. Mỗi câu hỏi học sinh chọn một trong bốn phương án A, B, C, D.**

**CÂU 1.** Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho điểm $I(1;-2;3)$. Phương trình mặt cầu tâm $I$ và tiếp xúc với trục $Oy$ là

(A) $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=9$.
(B) $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=\sqrt{10}$.
(C) $(x+1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=10$.
(D) $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=10$.

**Lời giải.**

Gọi $M$ là hình chiếu của $I(1;-2;3)$ lên $Oy$, suy ra $M(0;-2;0)$.
Lúc đó $\overrightarrow{IM}=(-1;0;-3)\Rightarrow R=\mathrm{d}(I,Oy)=IM=\sqrt{10}$ là bán kính mặt cầu cần tìm.
Phương trình mặt cầu là $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=10$.

Chọn đáp án (D) ..................... □

**CÂU 2.** Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, phương trình mặt cầu tâm $I(2;3;-1)$ sao cho mặt cầu cắt đường thẳng $d$ có phương trình $\begin{cases}x=11+2t\\ y=t\\ z=-25-2t\end{cases}$ tại hai điểm $A$, $B$ sao cho $AB=16$ là

(A) $(x-2)^2+(y-3)^2+(z+1)^2=280$.
(B) $(x+2)^2+(y+3)^2+(z-1)^2=289$.
(C) $(x-2)^2+(y-3)^2+(z+1)^2=17$.
(D) $(x-2)^2+(y-3)^2+(z+1)^2=289$.

**Lời giải.**

Đường thẳng $d$ đi qua $M(11;0;-25)$ và có một vectơ chỉ phương là $\vec{u}=(2;1;-2)$.
Gọi $H$ là hình chiếu của $I$ trên $d$. Lúc đó

$$IH=\mathrm{d}(I,AB)=\frac{\left|\left[\vec{u},\overrightarrow{MI}\right]\right|}{|\vec{u}|}=15\Rightarrow R=\sqrt{IH^2+\left(\frac{AB}{2}\right)^2}=17.$$

Vậy phương trình mặt cầu là $(x-2)^2+(y-3)^2+(z+1)^2=289$.

Chọn đáp án (D) ..................... □

**CÂU 3.** Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, biết mặt cầu $(S)$ có tâm $O$ và tiếp xúc với mặt phẳng $(P)\colon x-2y+2z+9=0$ tại điểm $H(a;b;c)$. Giá trị của tổng $a+b+c$ bằng

(A) 2. (B) $-1$. (C) 1. (D) $-2$.

**Lời giải.**

Ta có $\vec{n}_{(P)}=(1;-2;2)$ là một vectơ chỉ phương của đường thẳng $OH$.

Suy ra $OH\colon\begin{cases}x=t\\ y=-2t\\ z=2t\end{cases}\Rightarrow H(t;-2t;2t)$.

Vì $H\in(P)$ nên $t-2\cdot(-2t)+2\cdot 2t+9=0\Leftrightarrow t=-1$.
Vậy $H(-1;2;-2)\Rightarrow a+b+c=-1$.

Chọn đáp án (B) ..................... □

**CÂU 4.** Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z}{1}$ và điểm $I(1;0;2)$. Gọi $(S)$ là mặt cầu có tâm $I$, tiếp xúc với đường thẳng $d$. Bán kính của $(S)$ bằng

(A) $\dfrac{5}{3}$. (B) $\dfrac{2\sqrt{5}}{3}$. (C) $\dfrac{\sqrt{30}}{3}$. (D) $\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$.

**Lời giải.**

Gọi $H(1+2t;-t;t)$ là hình chiếu của $I$ trên đường thẳng $d$.
Lúc đó ta có $\overrightarrow{IH}=(2t;-t;t-2)$ và $d$ có một vectơ chỉ phương là $\vec{u}=(2;-1;1)$.
Vì $H$ là hình chiếu vuông góc của $I$ trên $d$ nên $\overrightarrow{IH}\perp\vec{u}\Leftrightarrow\overrightarrow{IH}\cdot\vec{u}=0$.

$$\Leftrightarrow 2t\cdot 2+(-t)\cdot(-1)+(t-2)\cdot 1=0\Leftrightarrow t=\frac{1}{3}\Rightarrow\overrightarrow{IH}=\left(\frac{2}{3};-\frac{1}{3};-\frac{5}{3}\right)\Rightarrow IH=\frac{\sqrt{30}}{3}.$$

Bán kính của mặt cầu $(S)$ là $R=IH=\dfrac{\sqrt{30}}{3}$.

Chọn đáp án (C)

**CÂU 5.** Trong KG $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z+2}{1}$. Gọi $(S)$ là mặt cầu có bán kính $R=5$, có tâm $I$ thuộc đường thẳng $d$ và tiếp xúc với trục $Oy$. Biết rằng $I$ có tung độ dương. Điểm nào sau đây thuộc mặt cầu $(S)$?

(A) $M(-1;-2;1)$. (B) $N(1;2;-1)$. (C) $P(-5;2;-7)$. (D) $Q(5;-2;7)$.

**Lời giải.**

Điểm $I$ thuộc đường thẳng $d$ nên có tọa độ dạng $I(1+2t;-t;-2+t)$.
Vì mặt cầu $(S)$ tiếp xúc với trục $Oy$ nên

$$\mathrm{d}(I,Oy)=R\Leftrightarrow\sqrt{(1+2t)^2+(-2+t)^2}=5\Leftrightarrow\sqrt{5t^2+5}=5\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=2\\t=-2.\end{array}\right.$$

Với $t=2$ ta có $I(5;-2;0)$ (không thỏa mãn).
Với $t=-2$ ta có $I(-3;2;-4)$ (thỏa mãn).
Suy ra mặt cầu $(S)$ có phương trình là $(x+3)^2+(y-2)^2+(z+4)^2=25$.
Thay tọa độ các điểm vào phương trình mặt cầu ta thấy điểm $N(1;2;-1)$ thuộc mặt cầu $(S)$.

Chọn đáp án (B)

**CÂU 6.** Trong KG $Oxyz$, cho hai điểm $A(4;6;2)$, $B(2;-2;0)$ và mặt phẳng $(P)\colon x+y+z=0$. Xét đường thẳng $d$ thay đổi thuộc $(P)$ và đi qua $B$, gọi $H$ là hình chiếu vuông góc của $A$ trên $d$. Biết rằng khi $d$ thay đổi thì $H$ thuộc một đường tròn cố định. Tính bán kính $R$ của đường tròn đó.

(A) $R=\sqrt{3}$. (B) $R=2$. (C) $R=1$. (D) $R=\sqrt{6}$.

**Lời giải.**

Gọi $I$ là trung điểm của $AB$, ta có $I(3;2;1)$. Lúc đó

$$\mathrm{d}\left(I;(P)\right)=\frac{|3+2+1|}{\sqrt{3}}=2\sqrt{3}.$$

Gọi $(S)$ là mặt cầu có tâm $I(3;2;1)$ và bán kính $R'=\dfrac{AB}{2}=3\sqrt{2}$.
Ta có $H\in(S)$. Mặt khác $H\in(P)$ nên $H\in(C)=(S)\cap(P)$.
Bán kính của đường tròn $(C)$ là $R=\sqrt{(R')^2-\mathrm{d}^2\left(I;(P)\right)}=\sqrt{\left(3\sqrt{2}\right)^2-\left(2\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{6}$.

Chọn đáp án (D)

**CÂU 7.** Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, mặt phẳng $(P)\colon 2x+6y+z-3=0$ cắt trục $Oz$ và đường thẳng $d\colon\dfrac{x-5}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z-6}{-1}$ lần lượt tại $A$ và $B$. Phương trình mặt cầu đường kính $AB$ là

(A) $(x+2)^2+(y-1)^2+(z+5)^2=36$. (B) $(x-2)^2+(y+1)^2+(z-5)^2=9$.
(C) $(x+2)^2+(y-1)^2+(z+5)^2=9$. (D) $(x-2)^2+(y+1)^2+(z-5)^2=36$.

**Lời giải.**

Ta có $(P)\cap Oz=A(0;0;3)$.
Tọa độ của $B$ là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases}2x+6y+z-3=0\\\dfrac{x-5}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z-6}{-1}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x+6y+z-3=0\\2x-y-10=0\\y+2z-12=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=4\\y=-2\\z=7\end{cases}\Rightarrow B(4;-2;7).$$

Gọi $I$ là trung điểm của $AB$, suy ra $I(2;-1;5) \Rightarrow IA = \sqrt{4+1+4} = 3$.
Phương trình mặt cầu đường kính $AB$ là $(x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-5)^2 = 9$.

Chọn đáp án (B) ........................................................................................ □

**CÂU 8.** Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x}{2} = \dfrac{y-3}{1} = \dfrac{z-2}{1}$ và hai mặt phẳng $(P)\colon x-2y+2z=0$, $(Q)\colon x-2y+3z-5=0$. Mặt cầu $(S)$ có tâm $I$ là giao điểm của đường thẳng $(d)$ và mặt phẳng $(P)$. Mặt phẳng $(Q)$ tiếp xúc với mặt cầu $(S)$. Mặt cầu $(S)$ có phương trình là

**A** $(S)\colon (x+2)^2 + (y+4)^2 + (z+3)^2 = 1$.

**B** $(S)\colon (x-2)^2 + (y-4)^2 + (z-3)^2 = 6$.

**C** $(S)\colon (x-2)^2 + (y-4)^2 + (z-3)^2 = \dfrac{2}{7}$.

**D** $(S)\colon (x-2)^2 + (y+4)^2 + (z+4)^2 = 8$.

**Lời giải.**

Ta có $I \in (d) \Rightarrow I(2t; 3+t; 2+t)$.
Lại có $I \in (P) \Rightarrow 2t - 2(3+t) + 2(2+t) = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow I(2;4;3)$.

Vì $(Q)$ tiếp xúc với $(S)$ nên $R = \mathrm{d}\left(I, (Q)\right) = \sqrt{\dfrac{2}{7}}$.

Vậy $(S)\colon (x-2)^2 + (y-4)^2 + (z-3)^2 = \dfrac{2}{7}$.

Chọn đáp án (C) ........................................................................................ □

**CÂU 9.** Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z+2}{1}$ và điểm $I(1;0;0)$. Phương trình mặt cầu $(S)$ có tâm $I$ và cắt đường thẳng $d$ tại hai điểm $A$, $B$ sao cho tam giác $IAB$ đều là

**A** $(x+1)^2 + y^2 + z^2 = \dfrac{20}{3}$. **B** $(x-1)^2 + y^2 + z^2 = \dfrac{20}{3}$. **C** $(x-1)^2 + y^2 + z^2 = \dfrac{16}{4}$. **D** $(x-1)^2 + y^2 + z^2 = \dfrac{5}{3}$.

**Lời giải.**

Đường thẳng $\Delta$ đi qua $M(1;1;-2)$ và có một vectơ chỉ phương là $\vec{u} = (1;2;1)$.
Ta có $\overrightarrow{MI} = (0;-1;2)$ và $\left[\vec{u}, \overrightarrow{MI}\right] = (5;-2;-1)$.

Gọi $H$ là hình chiếu của $I$ trên $d$. Lúc đó $IH = \mathrm{d}(I, AB) = \dfrac{\left|\left[\vec{u}, \overrightarrow{MI}\right]\right|}{|\vec{u}|} = \sqrt{5}$.

Xét tam giác $IAB$ ta có $IH = R \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow R = \dfrac{2 \cdot IH}{\sqrt{3}} = \dfrac{2\sqrt{15}}{3}$.

Vậy phương trình mặt cầu là $(x+1)^2 + y^2 + z^2 = \dfrac{20}{3}$.

Chọn đáp án (A) ........................................................................................ □

**Phần III. Học sinh điền kết quả vào ô trống.**

**CÂU 10.** Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho điểm $I(1;-2;3)$ và đường thẳng $d$ có phương trình $\dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z+3}{-1}$. Phương trình mặt cầu tâm $A$, tiếp xúc với $d$ có dạng $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = d$. Tính $a+b+c-d$.

Đáp án: | − | 4 | 8 | |

**Lời giải.**

Đường thẳng $(d)$ đi qua $I(-1;2;-3)$ và có một vectơ chỉ phương là $\vec{u} = (2;1;-1)$.
Suy ra

$$\mathrm{d}(A, d) = \frac{\left|\left[\vec{u}, \overrightarrow{AM}\right]\right|}{|\vec{u}|} = 5\sqrt{2}.$$

Phương trình mặt cầu là $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 50$.
Suy ra $a = 1$, $b = -2$, $c = 3$, $d = 50$. Vậy $a+b+c-d = 1 + (-2) + 3 - 50 = -48$.
Đáp án: $\boxed{-48}$ ........................................................................................ □

**CÂU 11.** Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x+5}{2} = \dfrac{y-7}{-2} = \dfrac{z}{1}$ và điểm $M(4;1;6)$. Đường thẳng $d$ cắt mặt cầu $(S)$ có tâm $M$, tại hai điểm $A$, $B$ sao cho $AB = 6$. Phương trình của mặt cầu $(S)$ có dạng có dạng $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = d$. Tính $a \cdot b + c \cdot d$.

Đáp án: | 1 | 1 | 2 | |

**Lời giải.**

Ta có $d$ đi qua $N(-5;7;0)$ và có một vectơ chỉ phương là $\vec{u} = (2;-2;1)$.
Lúc đó có $\overrightarrow{MN} = (-9;6;-6)$.
Gọi $H$ là chân đường vuông góc vẽ từ $M$ đến đường thẳng $d \Rightarrow MH = \mathrm{d}(M, d) = 3$.

Bán kính mặt cầu $(S)$ là $R^2 = MH^2 + \left(\dfrac{AB}{2}\right)^2 = 18$.
Suy ra phương trình mặt cầu $(S)$ là $(S)\colon (x-4)^2 + (y-1)^2 + (z-6)^2 = 18$.
Từ đó có $a = 4$, $b = 1$, $c = 6$, $d = 18$. Vậy $a \cdot b + c \cdot d = 4 \cdot 1 + 6 \cdot 18 = 112$.
Đáp án: $\boxed{112}$ ..........

**CÂU 12.** Trong KG $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon 2x - 2y - z - 4 = 0$ và điểm $I(1;2;3)$. Mặt cầu tâm $I$ tiếp xúc với $(P)$ tại điểm $H(a;b;c)$. Tính $a+b+c$.

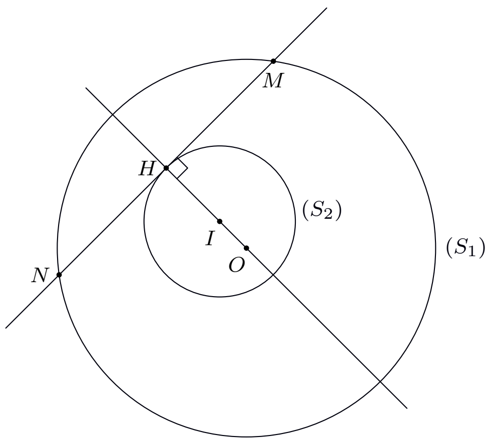
Đáp án: | 5 | | | |

**Lời giải.**
Tọa độ điểm $H$ là hình chiếu của điểm $I$ trên mặt phẳng $(P)$.
PTĐT $d$ qua $I$ và vuông góc với mặt phẳng $(P)$ là $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - 2t \\ z = 3 - t. \end{cases}$
Lúc đó điểm $H$ là giao điểm của $d$ và $(P)$.
Xét phương trình $2(1+2t) - 2(2-2t) - (3-t) - 4 = 0 \Leftrightarrow t = 1$.
Suy ra $H(3;0;2)$.
Từ đó có $a = 3$, $b = 0$, $c = 2$. Vậy $a + b + c = 3 + 0 + 2 = 5$.
Đáp án: $\boxed{5}$ ..........

**CÂU 13.** Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho hai mặt cầu $(S_1)$, $(S_2)$ có phương trình lần lượt là $(S_1): x^2 + y^2 + z^2 = 25$ và $(S_2): x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 4$. Một đường thẳng $d$ vuông góc với vectơ $\vec{u} = (1;-1;0)$ tiếp xúc với mặt cầu $(S_2)$ và cắt mặt cầu $(S_1)$ theo một đoạn thẳng có độ dài bằng 8. Một vectơ chỉ phương của $d$ có tọa độ là $(1;a;b)$. Tính $a \cdot b$.

Đáp án: | 0 | | | |

**Lời giải.**

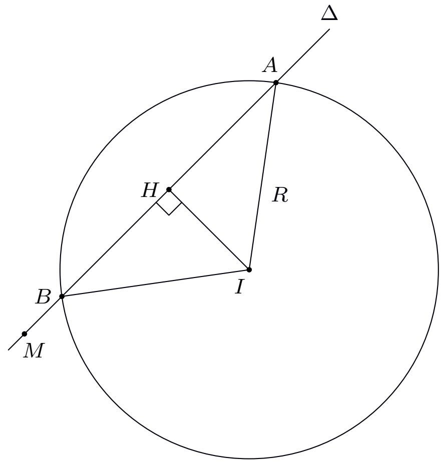



Mặt cầu $(S_1)$ có tâm $O(0;0;0)$, bán kính $R_1 = 5$.
Mặt cầu $(S_2)$ có tâm $I(0;0;1)$, bán kính $R_2 = 2$.
Ta có $OI = 1 < R_1 - R_2$ nên $(S_2)$ nằm trong mặt cầu $(S_1)$.
Giả sử $d$ tiếp xúc với $(S_2)$ tại $H$ và cắt mặt cầu $(S_1)$ tại $M$, $N$. Gọi $K$ là trung điểm $MN$. Khi đó $IH = R_2 = 2$ và $OH \geq OK$.
Theo giả thiết $MN = 8 \Rightarrow MK = 4 \Rightarrow OK = \sqrt{R_1^2 - MK^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$.
Lại có $OI = 1$, $IH = 2$, suy ra $OK = OI + IH \geq OH \geq OK$. Do đó $OH = OK$, suy ra $H \equiv K$, tức $d$ vuông góc với đường thẳng $OI$.
Đường thẳng $d$ cần tìm vuông góc với vectơ $\vec{u} = (1;-1;0)$ và vuông góc với $\overrightarrow{OI} = (0;0;1)$ nên có vectơ chỉ phương $\vec{u}_3 = \left[\overrightarrow{OI}, \vec{u}\right] = (1;1;0)$.
Vậy $a = 1$, $b = 0$, $a \cdot b = 1 \cdot 0 = 0$.
Đáp án: $\boxed{0}$ ..........

**CÂU 14.** Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 6y + m = 0$ ($m$ là tham số) và đường thẳng $\Delta\colon \begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = 3 + t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$. Biết đường thẳng $\Delta$ cắt mặt cầu $(S)$ tại hai điểm phân biệt $A$, $B$ sao cho $AB = 8$. Tìm giá trị của $m$.

Đáp án: | − | 1 | 2 | |

**Lời giải.**




Gọi $H$ là trung điểm đoạn thẳng $AB$ suy ra $IH \perp AB$ và $HA = 4$.
Mặt cầu $(S)$ có tâm $I(-2;3;0)$, bán kính $R = \sqrt{13-m}\,(m<13)$.
Đường thẳng $\Delta$ đi qua $M(4;3;3)$ và có một vectơ chỉ phương là $\vec{u} = (2;1;2)$.
Ta có

$$\overrightarrow{IM} = (6;0;3) \Rightarrow \left[\overrightarrow{IM}, \vec{u}\right] = (-3;-6;6) \Rightarrow IH = \mathrm{d}(I,\Delta) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{IM}, \vec{u}\right]\right|}{|\vec{u}|} = 3.$$

Lúc đó $R^2 = IH^2 + HA^2 \Leftrightarrow 13 - m = 3^2 + 4^2 \Leftrightarrow m = -12$.

Đáp án: $\boxed{-12}$ . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . □

**CÂU 15.** Trong KG $Oxyz$ cho mặt phẳng $(P)\colon z+2=0$, điểm $K(0;0;-2)$ và đường thẳng $d\colon \dfrac{x}{1} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z}{1}$. Phương trình mặt cầu tâm thuộc đường thẳng $d$ và cắt mặt phẳng $(P)$ theo thiết diện là đường tròn tâm $K$, bán kính $r = \sqrt{5}$ có dạng $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = d$. Tính $a+b+c+d$.

Đáp án: | 9 | | | |

**Lời giải.**

Ta có $(P)$ có vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (0;0;1)$.

Viết lại phương trình của đường thẳng $d$ dưới dạng tham số là $\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t. \end{cases}$

Gọi $I$ là tâm của mặt cầu cần lập. Vì $I \in d$ nên giả sử $I(t;t;t)$.
Lúc đó $\overrightarrow{IK} = (-t;-t;-2-t)$.
Thiết diện của mặt cầu và mặt phẳng $(P)$ là đường tròn tâm $K$ nên ta có $IK \perp (P)$. Suy ra $\overrightarrow{IK}$ và $\vec{n} = (0;0;1)$ cùng phương. Do đó tồn tại số thực $k$ để

$$\overrightarrow{IK} = k\vec{n} \Leftrightarrow \begin{cases} -t = k\cdot 0 \\ -t = k \cdot 0 \\ -2-t = k\cdot 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ k = -2. \end{cases}$$

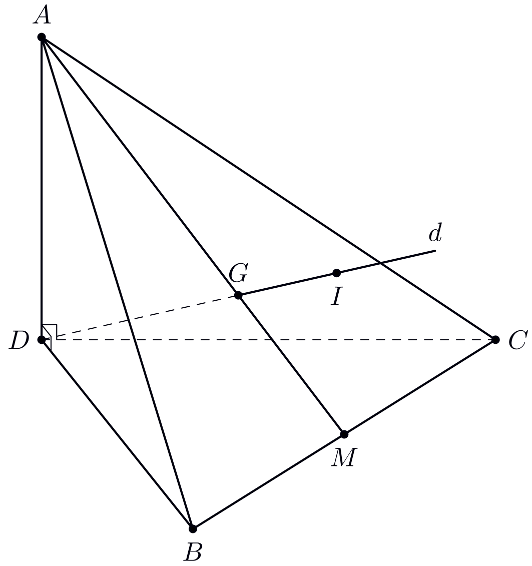
Suy ra $I(0;0;0)$. Từ đó tính được $\mathrm{d}\left(I,(P)\right) = 2$.
Gọi $R$ là bán kính mặt cầu. Ta có $R = \sqrt{r^2 + \left[\mathrm{d}\left(I,(P)\right)\right]^2} = 3$.
Suy ra mặt cầu cần tìm có phương trình là $x^2+y^2+z^2 = 9$.
Từ đó có $a=0$, $b=0$, $c=0$, $d=9$. Vậy $a+b+c+d = 0+0+0+9 = 9$.

Đáp án: $\boxed{9}$ . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . □

**CÂU 16.** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(-2;0;0), B(0;-2;0), C(0;0;-2)$. Gọi $D$ là điểm khác $O$ sao cho $DA, DB, DC$ đôi một vuông góc nhau và $I(a;b;c)$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$. Tính $S = a+b+c$.

Đáp án: | − | 1 | | |

**Lời giải.**




Gọi $d$ là trục của $\triangle ABC$, ta có $(ABC)\colon x+y+z+2=0$.

Do $\triangle ABC$ đều nên $d$ đi qua trọng tâm $G\left(-\frac{2}{3};-\frac{2}{3};-\frac{2}{3}\right)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(1;1;1)$.

Suy ra $d\colon \begin{cases} x=-\frac{2}{3}+t \\ y=-\frac{2}{3}+t \\ z=-\frac{2}{3}+t. \end{cases}$

Ta thấy $\triangle DAB=\triangle DBC=\triangle DCA$, suy ra $DA=DB=DC\Rightarrow D\in d$.

Suy ra tọa độ $D$ có dạng $D\left(-\frac{2}{3}+t;-\frac{2}{3}+t;-\frac{2}{3}+t\right)$.

Ta có

$$\overrightarrow{AD}=\left(\frac{4}{3}+t;-\frac{2}{3}+t;-\frac{2}{3}+t\right);\overrightarrow{BD}=\left(-\frac{2}{3}+t;\frac{4}{3}+t;-\frac{2}{3}+t\right);\overrightarrow{CD}=\left(-\frac{2}{3}+t;-\frac{2}{3}+t;\frac{4}{3}+t\right).$$

Có $\begin{cases} \overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BD}=0 \\ \overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{CD}=0 \end{cases}\Rightarrow \left[\begin{array}{l} t=-\frac{2}{3}\Rightarrow D\left(-\frac{4}{3};-\frac{4}{3};-\frac{4}{3}\right) \\ t=\frac{2}{3}\Rightarrow D(0;0;0)\ \text{(loại)}. \end{array}\right.$

Ta có $I\in d\Rightarrow I\left(-\frac{2}{3}+t;-\frac{2}{3}+t;-\frac{2}{3}+t\right)$.

Do tứ diện $ABCD$ nội tiếp mặt cầu tâm $I$ nên

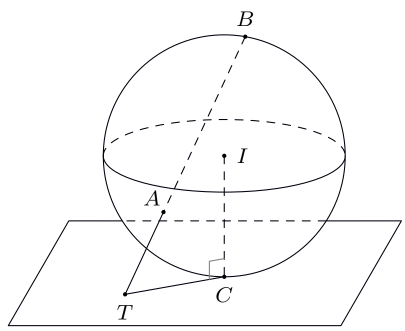
$$IA=ID\Rightarrow t=\frac{1}{3}\Rightarrow I\left(-\frac{1}{3};-\frac{1}{3};-\frac{1}{3}\right)\Rightarrow S=-1.$$

Đáp án: $\boxed{-1}$ ........................................................................................ □

**CÂU 17.** Trong không gian $Oxyz$, cho $(P)\colon 2x+y+2z-1=0, A(0;0;4), B(3;1;2)$. Một mặt cầu $(S)$ luôn đi qua $A, B$ và tiếp xúc với $(P)$ tại $C$. Biết rằng, $C$ luôn thuộc một đường tròn cố định bán kính $r$. Bán kính $r$ của đường tròn đó có dạng $\frac{a\sqrt{5}}{3}$, tính giá trị $a+b$.

Đáp án: | 1 | 7 | | |

**Lời giải.**



**Cách 1.** Ta có $\overrightarrow{AB} = (3;1;-2)$ là véctơ chỉ phương của đường thẳng $AB$.

PTTS của đường thẳng AB là $\begin{cases} x = 3t \\ y = t \\ z = 4 - 2t. \end{cases}$

Giả sử $AB$ cắt $(P)$ tại $T(3t;t;4-2t)$.

Do $T \in (P)\colon 2x + y + 2z - 1 = 0 \Rightarrow t = \dfrac{-7}{3}$.

Khi đó

$$T\left(-7; \frac{-7}{3}; \frac{26}{3}\right); \overrightarrow{TA}\left(7; \frac{7}{3}; \frac{-14}{3}\right) \Rightarrow TA = \frac{7\sqrt{14}}{3};$$
$$\overrightarrow{TB}\left(10; \frac{10}{3}; \frac{-20}{3}\right) \Rightarrow TB = \frac{10\sqrt{14}}{3}.$$

Ta có $TC^2 = TA \cdot TB = \dfrac{980}{9} \Rightarrow TC = \dfrac{14\sqrt{5}}{3}$.

Điểm $C$ thuộc mặt phẳng $(P)$ và cách điểm $T$ cố định một khoảng $\dfrac{14\sqrt{5}}{3}$.

Suy ra $C$ luôn thuộc một đường tròn cố định bán kính $r = \dfrac{14\sqrt{5}}{3}$.

Vậy $a = 14$ và $b = 3$ nên $a + b = 17$.

**Cách 2.** Ta có $\dfrac{TA}{TB} = \dfrac{d(A,(P))}{d(B,(P))} = \dfrac{7}{10}; AB = \sqrt{14}$.

Giả sử $AB$ cắt $(P)$ tại $T$. Suy ra A nằm giữa B và $T$ (vì $A, B$ cùng phía so với $(P)$).

Khi đó, ta có

$$\begin{cases} TB - TA = \sqrt{14} \\ TA = \dfrac{7}{10} \cdot TB \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} TA = \dfrac{7\sqrt{14}}{3} \\ TB = \dfrac{10\sqrt{14}}{3} \end{cases} \Rightarrow TC^2 = TA \cdot TB = \frac{980}{9} \Rightarrow TC = \frac{14\sqrt{5}}{3}.$$

Vậy $a = 14$ và $b = 3$ nên $a + b = 17$.

Đáp án: $\boxed{17}$ ..........

**CÂU 18.** Trong không gian cho mặt phẳng $(P)\colon x - z + 6 = 0$ và hai mặt cầu $(S_1): x^2 + y^2 + z^2 = 25$, $(S_2): x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 4z + 7 = 0$. Biết rằng tập hợp tâm $I$ các mặt cầu tiếp xúc với cả hai mặt cầu $(S_1), (S_2)$ và tâm $I$ nằm trên $(P)$ là một đường cong. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cong đó bằng $\dfrac{a}{b}\pi$, tính tổng $S = a + b$.

Đáp án: | 1 | 6 | | |

**Lời giải.**

Mặt cầu $(S_1)$ có tâm $O(0;0;0)$ và bán kính $R_1 = 5$.

Mặt cầu $(S)$ có tâm $E(-2;0;2)$ bán kính $R_2 = 1$.

Ta có

$$\mathrm{d}(O,(P)) = \frac{6}{\sqrt{2}} < R_1 \text{ và } \mathrm{d}(E,(P)) = \sqrt{2} > R_2, OE = 2\sqrt{2}, OE + R_2 < R_1$$

nên mặt cầu $(S_2)$ nằm trong mặt cầu $(S_1)$.

Như vậy mặt cầu $(S)$ tâm $I$ tiếp xúc với cả $(S_1)$ và $(S_2)$ thì $(S)$ tiếp xúc trong mặt cầu $(S_1)$ và tiếp xúc ngoài với $(S_2)$.

Gọi $R$ là bán kính của $(S)$, khi đó ta có hệ

$$\begin{cases} OI + R = R_1 \\ EI - R = R_2 \end{cases} \Rightarrow OI + EI = R_1 + R_2 \Rightarrow OI + EI = 6.$$

Nhận xét: $\overrightarrow{OE} = (-2;0;2)$ nên $OE$ vuông góc với $(P)\colon x - z + 6 = 0$.

Gọi $H$ là hình chiếu vuông góc của $O$ lên $(P)$, đặt $IH = x$, điều kiện $x > 0$. Khi đó, ta có

$$\begin{aligned} OI + EI = 6 &\Leftrightarrow \sqrt{OH^2 + HI^2} + \sqrt{EH^2 + HI^2} = 6 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{18 + x^2} + \sqrt{2 + x^2} = 6 \\ &\Leftrightarrow x^2 = \frac{7}{9} \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{7}}{3}. \end{aligned}$$

Điểm $I$ thuộc đường tròn tâm $H$ bán kính $r = \dfrac{\sqrt{7}}{3}$. Nên diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường tròn là $S = \pi r^2 = \dfrac{7\pi}{9}$.

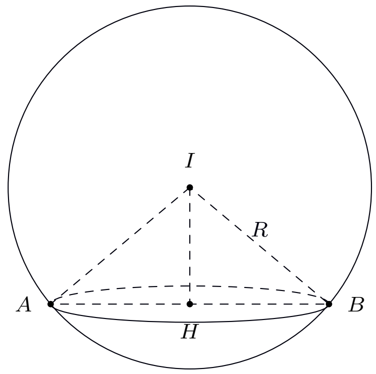
Vậy $a = 7$ và $b = 9$, nên $S = a + b = 16$.

Đáp án: $\boxed{16}$ ..........

**CÂU 19.** Trong KG $Oxyz$, mặt cầu $(S)$ có tâm thuộc mặt $(P)\colon x+2y+z-7=0$ và đi qua hai điểm $A(1;2;1)$ và $B(2;5;3)$. Bán kính nhỏ nhất của mặt cầu $(S)$ bằng (*kết quả làm tròn đến hàng phần trăm*).

Đáp án: | 2 | , | 3 | 5 |

**Lời giải.**




Ta có $AB=\sqrt{1+9+4}=\sqrt{14}$.
Gọi $H$ là trung điểm $AB$ khi đó điểm $H$ có tọa độ là $\left(\frac{3}{2};\frac{7}{2};2\right)$.
Bán kính mặt cầu

$$R=IB=\sqrt{IH^2+HB^2}=\sqrt{IH^2+\frac{AB^2}{4}}=\sqrt{IH^2+\frac{7}{2}}.$$

Do đó, bán kính mặt cầu nhỏ nhất $\Leftrightarrow IH$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow I$ là hình chiếu của $H$ lên $(P)$.

Khi đó $IH_{\min}=d(H;(P))=\dfrac{\left|\frac{3}{2}+7+2-7\right|}{\sqrt{1+4+1}}=\dfrac{7\sqrt{6}}{12}$.

Bán kính mặt cầu nhỏ nhất $R_{\min}=\sqrt{\frac{49}{24}+\frac{7}{2}}=\frac{\sqrt{798}}{12}\approx 2{,}35$.

Đáp án: $\boxed{2{,}35}$ ............................................................ □

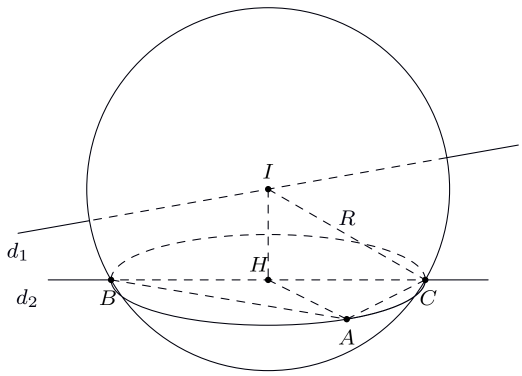
## 21 Lập PTĐT liên quan đến mặt cầu

**Phần I. Mỗi câu hỏi học sinh chọn một trong bốn phương án A, B, C, D.**

**CÂU 1.** Trong KG $Oxyz$, cho điểm $A(3;1;1)$, $d_1\colon \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z}{2}$, $d_2\colon \begin{cases}x=1\\ y=t\\ z=0\end{cases}$. Mặt cầu $(S)$ đi qua $A$, có tâm $I$ nằm trên $d_1$, biết rằng $(S)$ cắt $d_2$ tại hai điểm $B$, $C$ sao cho $\widehat{BAC}=90^\circ$. Tìm tọa độ điểm $I$.

**(A)** $I(2;3;2)$. **(B)** $I(3;4;4)$. **(C)** $I(1;2;0)$. **(D)** $I(0;0;2)$.

**Lời giải.**




Ta có $A\in(S)$ và $\widehat{BAC}=90^\circ$ nên ba điểm $A$, $B$, $C$ thuộc đường tròn đường kính $BC$ là giao tuyến của $(ABC)$ và $(S)$.
Gọi $I(1+s;2+2s;2s)\in d_1$; $H(1;t;0)\in d_2$.
Đường thẳng $d_2$ có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}_2=(0;1;0)$.
$\overrightarrow{HI}=(s;2+2s-t;2s)$, $\overrightarrow{AH}=(-2;t-1;-1)$.

Ta có

$$\begin{cases} IH \perp d_2 \\ IH \perp HA \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{HI} \cdot \overrightarrow{u_2} = 0 \\ \overrightarrow{HI} \cdot \overrightarrow{AH} = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 + 2s - t = 0 \\ -2s + (2+2s-t)(t-1) - 2s = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2s - t = -2 \\ -4s = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s = 0 \\ t = 2. \end{cases}$$

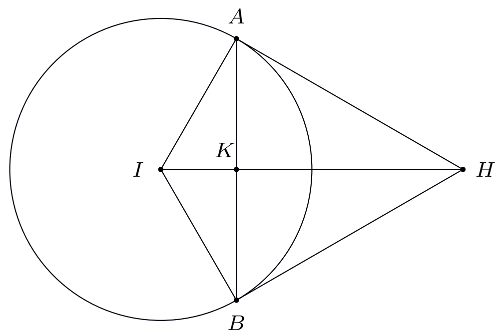
Suy ra $I(1;2;0)$.

Chọn đáp án C ....... □

**CÂU 2.** Trong KG $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2=4$ và đường thẳng $d\colon \dfrac{x-3}{1} = \dfrac{y-3}{1} = \dfrac{z}{1}$. Hai mặt phẳng $(P)$, $(P')$ chứa $d$ và tiếp xúc với $(S)$ tại $A$ và $B$. Đường thẳng $AB$ đi qua điểm có tọa độ là

Ⓐ $\left(\dfrac{1}{3};-\dfrac{1}{3};-\dfrac{4}{3}\right)$. Ⓑ $\left(1;1;-\dfrac{4}{3}\right)$. Ⓒ $\left(1;\dfrac{1}{3};-\dfrac{4}{3}\right)$. Ⓓ $\left(\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{3};-\dfrac{4}{3}\right)$.

**Lời giải.**




Mặt cầu $(S)$ có tâm $I(0;0;0)$, $R=2$.
Gọi $H$ là hình chiếu của $I$ trên $d \Rightarrow H(3+t;3+t;t)$.
$\overrightarrow{IH} = (3+t;3+t;t) \perp \overrightarrow{u}_d = (1;1;1)$
$\Leftrightarrow 3t = -6 \Leftrightarrow t = -2 \Rightarrow H(1;1;-2) \Rightarrow IH = \sqrt{6}$.
Gọi $K$ là trung điểm của $AB$

$$\Rightarrow K \in IH.IK \cdot IH = IA^2 = R^2 = 4 \Leftrightarrow \frac{IK}{IH} = \frac{4}{IH^2} = \frac{2}{3}$$
$$\Rightarrow \overrightarrow{IK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{IH} = \frac{2}{3}(1;1;-2)$$
$$\Rightarrow K\left(\frac{2}{3};\frac{2}{3};\frac{-4}{3}\right).$$

Mà $\begin{cases} AB \perp d \\ AB \perp IH \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{u}_{AB} = \left[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{IH}\right] = 3(1;-1;0)$.

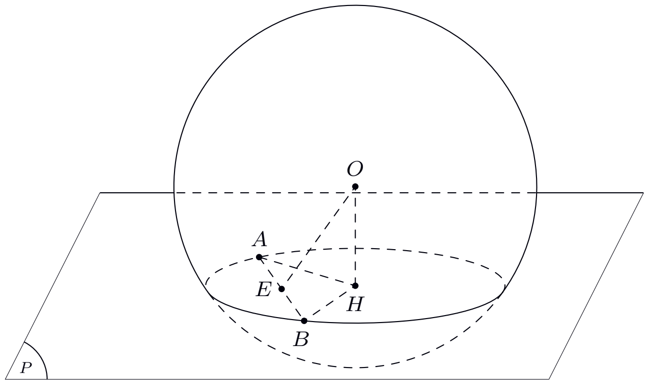
Suy ra đường thẳng $AB\colon \begin{cases} x = \dfrac{2}{3} + t \\ y = \dfrac{2}{3} - t \\ z = -\dfrac{4}{3} \end{cases}$ đi qua điểm $\left(1;\dfrac{1}{3};-\dfrac{4}{3}\right)$.

Chọn đáp án D ....... □

**CÂU 3.** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $E(1;1;1)$, mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2=4$ và mặt phẳng $(P)\colon x - 3y + 5z - 3 = 0$. Gọi $\Delta$ là đường thẳng đi qua $E$, nằm trong $(P)$ và cắt mặt cầu $(S)$ tại hai điểm $A, B$ sao cho tam giác $OAB$ là tam giác đều. Phương trình của đường thẳng $\Delta$ là

Ⓐ $\dfrac{x-1}{-2} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z-1}{-1}$. Ⓑ $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z-1}{-1}$. Ⓒ $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z-1}{1}$. Ⓓ $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z-1}{-1}$.

**Lời giải.**




Mặt cầu $(S)$ có tâm $O(0;0;0)$ bán kính $R=2$. Tam giác $OAB$ là tam giác đều có cạnh bằng 2.
Gọi $M$ là trung điểm $AB$ ta có $OM=\dfrac{2\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$.
Mặt khác $\overrightarrow{OE}=(1;1;1)\Rightarrow OE=\sqrt{3}$.
Suy ra điểm $M$ trùng điểm $E$.
Gọi $\vec{u}$ là vectơ chỉ phương của $\Delta$ ta có $\vec{u}\perp\overrightarrow{OE}$ và $\vec{u}\perp\vec{n}$ (với $\vec{n}=(1;-3;5)$ là vectơ pháp tuyến của $(P)$ vì $\Delta\subset(P)$).
$[\vec{n},\overrightarrow{OE}]=(-8;4;4)$, chọn $\vec{u}=-\dfrac{1}{4}[\vec{n},\overrightarrow{OE}]=(2;-1;-1)$.
Vậy đường thẳng $\Delta$ đi qua $E$, có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(2;-1;-1)$ có phương trình là

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-1}{-1}.$$

Chọn đáp án D ........................................................ □

**CÂU 4.** Trong không gian hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;1;1), B(2;2;1)$ và mặt phẳng $(P)\colon x+y+2z=0$. Mặt cầu $(S)$ thay đổi qua $A,B$ và tiếp xúc với $(P)$ tại $H$. Biết $H$ chạy trên 1 đường tròn cố định. Tìm bán kính của đường tròn đó.

**A** $3\sqrt{2}$. **B** $2\sqrt{3}$. **C** $\sqrt{3}$. **D** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

**Lời giải.**

Có $A(1;1;1), B(2;2;1)\Rightarrow$ phương trình $AB\colon \begin{cases}x=1+t\\ y=1+t\\ z=1.\end{cases}$

Gọi $K$ là giao điểm của $AB$ và $(P)\Rightarrow K(-1;-1;1)$.
Có mặt cầu $(S)$ tiếp xúc với $(P)$ tại $H\Rightarrow HK$ là tiếp tuyến của $(S)$

$$\Rightarrow KH^2=\overrightarrow{KA}\cdot\overrightarrow{KB}=12\Rightarrow KH=2\sqrt{3}\text{ không đổi.}$$

Suy ra $H$ chạy trên 1 đường tròn bán kính $2\sqrt{3}$ không đổi.
Chọn đáp án B ........................................................ □

**CÂU 5.** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2-2x+2z+1=0$ và đường thẳng $d\colon \dfrac{x}{1}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z}{-1}$. Hai mặt phẳng $(P),(P')$ chứa $d$ và tiếp xúc với $(S)$ tại $T,T'$. Tìm tọa độ trung điểm $H$ của $TT'$.

**A** $H\left(-\dfrac{7}{6};\dfrac{1}{3};\dfrac{7}{6}\right)$. **B** $H\left(\dfrac{5}{6};\dfrac{2}{3};-\dfrac{7}{6}\right)$. **C** $H\left(\dfrac{5}{6};\dfrac{1}{3};-\dfrac{5}{6}\right)$. **D** $H\left(-\dfrac{5}{6};\dfrac{1}{3};\dfrac{5}{6}\right)$.

**Lời giải.**

Mặt cầu $(S)$ có tâm $I(1;0;-1)$, bán kính $R=1$.
Đường thẳng $d$ có vectơ chỉ phương $\vec{u_d}=(1;1;-1)$.
Gọi $K$ là hình chiếu của $I$ trên $d$, ta có $K(t;2+t;-t)\Rightarrow\overrightarrow{IK}=(t-1;2+t;-t+1)$.
Vì $IK\perp d$ nên $\vec{u_d}\cdot\overrightarrow{IK}=0\Leftrightarrow t-1+2+t-(-t+1)=0\Leftrightarrow t=0\Rightarrow\overrightarrow{IK}(-1;2;1)$.

PTTS của đường thẳng $IK$ là $\begin{cases}x=1-t'\\ y=2t'\\ z=-1+t'.\end{cases}$

Khi đó, trung điểm $H$ của $TT'$ nằm trên $IK$ nên $H(1-t';2t';-1+t')\Rightarrow\overrightarrow{IH}=(-t';2t';t')$.
Mặt khác, ta có

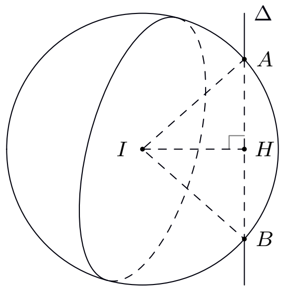
$$\overrightarrow{IH}\cdot\overrightarrow{IK}=IT^2\Leftrightarrow\overrightarrow{IH}\cdot\overrightarrow{IK}=1\Leftrightarrow t'+4t'+t'=1\Leftrightarrow t'=\frac{1}{6}\Rightarrow H\left(\frac{5}{6};\frac{1}{3};-\frac{5}{6}\right).$$

Chọn đáp án C ........................................................ □

**CÂU 6.** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $E(1;1;1)$, mặt phẳng $(P)\colon x-3y+5z-3=0$ và mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2=4$. Gọi $\Delta$ là đường thẳng qua $E$, nằm trong mặt phẳng $(P)$ và cắt $(S)$ tại 2 điểm phân biệt $A, B$ sao cho $AB=2$. PTĐT $\Delta$ là

**A** $\begin{cases} x=1-2t \\ y=2-t \\ z=1-t \end{cases}$. **B** $\begin{cases} x=1+2t \\ y=1+t \\ z=1+t \end{cases}$. **C** $\begin{cases} x=1-2t \\ y=-3+t \\ z=5+t \end{cases}$. **D** $\begin{cases} x=1+2t \\ y=1-t \\ z=1-t \end{cases}$.

**Lời giải.**




Mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2=4$ có âm $I(0;0;0)$; bán kính $R=2$.
Mặt phẳng $(P)\colon x-3y+5z-3=0$ có véctơ pháp tuyến $\vec{n}_P=(1;-3;5)$.
Gọi $H$ là hình chiếu của $I$ lên $\Delta \Rightarrow AH=BH=\dfrac{AB}{2}=1$.
Xét $\triangle IAH$ vuông tại $H \Rightarrow IH=\sqrt{IA^2-AH^2}=\sqrt{4-1}=\sqrt{3}$.
Mặt khác ta có $\overrightarrow{IE}=(1;1;1) \Rightarrow IE=\sqrt{3}=IH \Rightarrow H\equiv E \Rightarrow IE\perp\Delta$.
Đường thẳng $\Delta$ đi qua $E(1;1;1)$ vuông góc với $IE$ và chứa trong $(P)$ nên véctơ chỉ phương của $\Delta$ xác định bởi

$$\vec{u}_\Delta=\left[\vec{n}_P,\overrightarrow{IE}\right]=(-8;4;4)=-4(2;-1;-1).$$

PTĐT $\Delta$ là

$$\begin{cases} x=1+2t \\ y=1-t \\ z=1-t. \end{cases}$$

Chọn đáp án (D) .......................................................... □

**CÂU 7.** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon 2x-2y+z+3=0$ và mặt cầu $(S)\colon (x-1)^2+(y+3)^2+z^2=9$ và đường thẳng $d\colon \dfrac{x}{-2}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z+1}{2}$. Cho các phát biểu sau đây:

I. Đường thẳng $d$ cắt mặt cầu $(S)$ tại 2 điểm phân biệt.

II. Mặt phẳng $(P)$ tiếp xúc với mặt cầu $(S)$.

III. Mặt phẳng $(P)$ và mặt cầu $(S)$ không có điểm chung.

IV. Đường thẳng $d$ cắt mặt phẳng $(P)$ tại một điểm.

Số phát biểu đúng là

**A** 4. **B** 1. **C** 2. **D** 3.

**Lời giải.**

Mặt cầu $(S)$ có tâm $I(1;-3;0)$, bán kính $R=3$.

PTTS của đường thẳng $d$: $\begin{cases} x=-2t \\ y=-2+t \\ z=-1+2t. \end{cases}$

Xét hệ phương trình $\begin{cases} x=-2t \\ y=-2+t \\ z=-1+2t \\ (x-1)^2+(y+3)^2+z^2=9 \end{cases} \Rightarrow 9t^2+2t-6=0.$ (1)

Phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt nên $d$ cắt $(S)$ tại 2 điểm phân biệt.

$$\mathrm{d}(I,(P))=\dfrac{|2\cdot 1-2\cdot(-3)+0+3|}{3}=\dfrac{11}{3}>R \Rightarrow (P) \text{ và } (S) \text{ không có điểm chung.}$$

Xét hệ phương trình $\begin{cases} x=-2t \\ y=-2+t \\ z=-1+2t \\ 2x-2y+z+3=0 \end{cases} \Rightarrow t=\dfrac{3}{2} \Rightarrow d$ cắt $(P)$ tại một điểm.

Vậy có 3 phát biểu đúng.

Chọn đáp án D ............ □

**CÂU 8.** Trong KG $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon (x-2)^2+(y-3)^2+(z-4)^2=14$ và mặt phẳng $(\alpha)\colon x+3y+2z-5=0$. Biết đường thẳng $\Delta$ nằm trong $(\alpha)$, cắt trục $Ox$ và tiếp xúc với $(S)$. Vec-tơ nào sau đây là vec-tơ chỉ phương của $\Delta$ ?

**A** $\vec{u}=(4;-2;1)$. **B** $\vec{v}=(2;0;-1)$. **C** $\vec{m}=(-3;1;0)$. **D** $\vec{n}=(1;-1;1)$.

**Lời giải.**

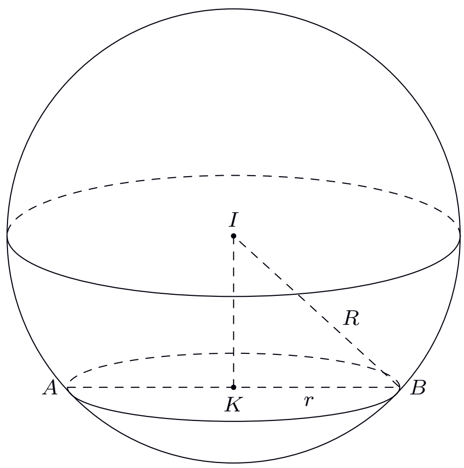
Mặt cầu $(S)$ có tâm $I(2;3;4)$ và bán kính $R=\sqrt{14}$.
Ta có $\mathrm{d}(I,(\alpha))=\sqrt{14}=R \Rightarrow (\alpha)$ tiếp xúc với $(S)$.
Gọi $H$ là hình chiếu vuông góc của $I$ lên $(\alpha) \Rightarrow H(1;0;2)$.
Gọi $A=\Delta\cap Ox \Rightarrow A(a;0;0)$ và $\overrightarrow{AH}=(a-1;0;-2)$.
Đường thẳng $\Delta$ nằm trong $(\alpha)$, cắt trục $Ox$ và tiếp xúc với $(S)$ nên $\overrightarrow{AH}\perp\vec{n}_\alpha$.
Tức là $a-1+0-4=0 \Leftrightarrow a=5 \Rightarrow \overrightarrow{AH}=(4;0;-2)$ cùng phương với $\vec{v}=(2;0;-1)$.

Chọn đáp án B ............ □

**CÂU 9.** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon 2x-2y-z+9=0$ và mặt cầu $(S)\colon (x-3)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=100$. Mặt phẳng $(P)$ cắt mặt cầu $(S)$ theo một đường tròn $(C)$. Tìm tọa độ tâm $K$ và bán kính $r$ của đường tròn $(C)$ là

**A** $K(3;-2;1)$, $r=10$. **B** $K(-1;2;3)$, $r=8$. **C** $K(1;-2;3)$, $r=8$. **D** $K(1;2;3)$, $r=6$.

**Lời giải.**




- Mặt cầu $(S)$ có tâm $I(3;-2;1)$; $R=10$.
- Khoảng cách từ $I$ đến $(P)$ là $IK=\mathrm{d}(I;(P))=\dfrac{|6+4-1+9|}{3}=6$.
- Đường thẳng qua $I(3;-2;1)$ vuông góc với $(P)$ có PTTS là $\begin{cases} x=3+2t \\ y=-2-2t \\ z=1-t. \end{cases}$

  Khi đó, tọa độ tâm $K$ là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} x=3+2t \\ y=-2-2t \\ z=1-t \\ 2x-2y-z+9=0 \end{cases} \Rightarrow K(-1;2;3).$$

- Bán kính $r=\sqrt{R^2-IK^2}=\sqrt{100-36}=8$.

Chọn đáp án B ............ □

**CÂU 10.** Trong KG $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon x-2y+2z-3=0$ và mặt cầu $(S)$ tâm $I(5;-3;5)$, bán kính $R=2\sqrt{5}$. Từ một điểm $A$ thuộc mặt phẳng $(P)$ kẻ một đường thẳng tiếp xúc với mặt cầu $(S)$ tại $B$. Tính $OA$ biết $AB=4$.

A. $OA=\sqrt{11}$. B. $OA=5$. C. $OA=3$. D. $OA=\sqrt{6}$.

**Lời giải.**

Khoảng cách từ điểm $I$ đến mặt phẳng $(P)$ là $\mathrm{d}(I;(P))=\dfrac{|5-2\cdot(-3)+2\cdot 5-3|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}}=6$.

Ta có $AB$ tiếp xúc với $(S)$ tại $B$ nên tam giác $AIB$ vuông tại $B$, do đó ta có
$IA=\sqrt{IB^2+AB^2}=\sqrt{R^2+AB^2}=\sqrt{(2\sqrt{5})^2+4^2}=6=d(I;(P))\Rightarrow A$ là hình chiếu của $I$ lên $(P)$.

Đường thẳng $IA$ đi qua điểm $I(5;-3;5)$ có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}=\vec{n}_(P)=(1;-2;2)$ có phương trình $\begin{cases}x=5+t\\y=-3-2t\\z=5+2t.\end{cases}$

Ta có $A=IA\cap(P)\Rightarrow 5+t-2(-3-2t)+2(5+2t)-3=0\Rightarrow t=-2\Rightarrow A(3;1;1)\Rightarrow OA=\sqrt{11}$.

Chọn đáp án A ..........

**CÂU 11.** Trong KG $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2=9$ và điểm $M\left(x_0;y_0;z_0\right)$ thuộc $d\colon \begin{cases}x=1+t\\y=1+2t\\z=2-3t\end{cases}$. Ba điểm $A$, $B$, $C$ phân biệt cùng thuộc mặt cầu sao cho $MA$, $MB$, $MC$ là tiếp tuyến của mặt cầu. Biết rằng mặt phẳng $(ABC)$ đi qua điểm $D(1;1;2)$. Tổng $T=x_0^2+y_0^2+z_0^2$ bằng

A. 30. B. 26. C. 20. D. 21.

**Lời giải.**

Mặt cầu $(S)$ có tâm $O(0;0;0)$ và bán kính $R=3$. Gọi $M\left(1+t_0;1+2t_0;2-3t_0\right)\in d$.
Giả sử $T(x;y;z)\in(S)$ là một tiếp điểm của tiếp tuyến $MT$ với mặt cầu $(S)$. Khi đó

$$\begin{aligned}&OT^2+MT^2=OM^2\\&\Leftrightarrow 9+\left[x-\left(1+t_0\right)\right]^2+\left[y-\left(1+2t_0\right)\right]^2+\left(z-\left(2-3t_0\right)\right)^2=\left(1+t_0\right)^2+\left(1+2t_0\right)^2+\left(2-3t_0\right)^2\\&\Leftrightarrow \left(1+t_0\right)x+\left(1+2t_0\right)+\left(2-3t_0\right)z-9=0.\end{aligned}$$

Suy ra phương trình mặt phẳng $(ABC)$ có dạng $\left(1+t_0\right)x+\left(1+2t_0\right)y+\left(2-3t_0\right)z-9=0$. Do $D(1;1;2)\in(ABC)$ nên $1+t_0+1+2t_0+2.(2-3t)-9=0\Leftrightarrow t_0=-1\Rightarrow M(0;-1;5)$.
Vậy $T=0^2+(-1)^2+5^2=26$.

Chọn đáp án B ..........

**CÂU 12.** Trong KG $Oxyz$ cho hai điểm $A(0;0;3)$, $B(-2;0;1)$ và mặt phẳng $(\alpha)\colon 2x-y+2z+8=0$. Hỏi có bao nhiêu điểm $C$ trên mặt phẳng $(\alpha)$ sao cho tam giác $ABC$ đều?

A. 2. B. 1. C. 0. D. Vô số.

**Lời giải.**

Gọi $(P)$ mặt phẳng trung trực của $AB$, khi đó phương trình của $(P)$ là $x+z-1=0$.
Ta có $\vec{n}_P=(1;0;1)$, $\vec{n}_\alpha=(2;-1;2)$ nên $[\vec{n}_P,\vec{n}_\alpha]=(1;0;-1)$.
Gọi $d$ là giao tuyến của mặt phẳng $(P)$ với mặt phẳng $(\alpha)$. Chọn $\vec{u}_d=(1;0;-1)$ và điểm $M(1;10;0)\in d$ nên PTTS của $d$ là $\begin{cases}x=1+t\\y=10\\z=-t.\end{cases}$
Do tam giác $ABC$ đều nên $CA=CB$ hay $C$ thuộc mặt phẳng trung trực của $AB$, mà $C\in(\alpha)$ nên $C\in(P)\cap(\alpha)=d$ suy ra tọa độ $C$ có dạng $C(1+t;10;-t)$.
Do $\triangle ABC$ đều nên $AC=AB$, thay tọa độ các điểm ta có

$$\begin{aligned}&\sqrt{(1+t-0)^2+(10-0)^2+(-t-3)^2}=\sqrt{(-2-0)^2+(0-0)^2+(1-3)^2}\\\Leftrightarrow\ &t^2+4t+51=0\,(*)\end{aligned}$$

Do phương trình $(*)$ vô nghiệm nên không tồn tại điểm $C$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án C ..........

**CÂU 13.** Trong KG $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)$ tâm $I(1;3;9)$ bán kính bằng 3. Gọi $M$, $N$ là hai điểm lần lượt thuộc hai trục $Ox$, $Oz$ sao cho đường thẳng $MN$ tiếp xúc với $(S)$, đồng thời mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OIMN$ có bán kính bằng $\dfrac{13}{2}$. Gọi $A$ là tiếp điểm của $MN$ và $(S)$, giá trị $AM\cdot AN$ bằng

Ⓐ 39. Ⓑ $12\sqrt{3}$. Ⓒ 18. Ⓓ $28\sqrt{3}$.

**Lời giải.**

- Đặt $M(a;0;0)$ và $N(0;0;b)$.
Nhận xét: $(S)$ tiếp xúc $(Oxz)$ mà $MN \subset (Oxz)$ tiếp xúc $(S)$ nên $MN$ tiếp xúc $(S)$ tại tiếp điểm của $(S)$ và $(Oxz) \Rightarrow A(1;0;9)$.

- $\begin{cases} \overrightarrow{AM} = (a-1;0;-9) \\ \overrightarrow{AN} = (-1;0;b-9) \end{cases} \Rightarrow \dfrac{a-1}{-1} = \dfrac{-9}{b-9} \Rightarrow (a-1)(b-9) = 9.$

- Khi đó $OIMN$ có $\triangle OMN$ vuông tại $O$, $(IMN) \perp (OMN)$ (do $IA \subset (IMN)$, $IA \perp (OMN)$), suy ra bán kính mặt cầu ngoại tiếp $OIMN$ bằng bán kính đường tròn ngoại tiếp $\triangle IMN$ bằng $\dfrac{13}{2}$.
Suy ra $\dfrac{1}{2} \cdot 3 \cdot MN = \dfrac{IM \cdot IN \cdot MN}{4 \cdot \dfrac{13}{2}} \Leftrightarrow IM \cdot IN = 39.$ (1)
Mà
$$\begin{aligned} IM &= \sqrt{(a-1)^2 + 3^2 + 9^2} = \sqrt{(a-1)^2 + 90}. \\ IN &= \sqrt{1^2 + 3^2 + (b-9)^2} = \sqrt{10 + \dfrac{81}{(a-1)^2}}. \end{aligned}$$
Thay vào (1) ta được
$$\left[(a-1)^2 + 90\right]\left[10 + \dfrac{81}{(a-1)^2}\right] = 1521 \Leftrightarrow (a-1)^2 = 27.$$
Ta có $\begin{cases} AM = \sqrt{(a-1)^2 + 81} = \sqrt{108} = 6\sqrt{3} \\ AN = \sqrt{1 + (b-9)^2} = \sqrt{1+3} = 2 \end{cases} \Rightarrow AM \cdot AN = 12\sqrt{3}.$

Chọn đáp án B ............................................................ □

**CÂU 14.** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)$ tâm $I(4;1;2)$ bán kính bằng 2. Gọi $M$; $N$ là hai điểm lần lượt thuộc hai trục $Ox$; $Oy$ sao cho đường thẳng $MN$ tiếp xúc với $(S)$, đồng thời mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OIMN$ có bán kính bằng $\dfrac{7}{2}$. Gọi $A$ là tiếp điểm của $MN$ và $(S)$, giá trị $AM \cdot AN$ bằng

Ⓐ $6\sqrt{2}$. Ⓑ 14. Ⓒ 8. Ⓓ $9\sqrt{2}$.

**Lời giải.**

- **Cách 1:**
Ta có $\mathrm{d}(I,(Oxy)) = 2$ nên mặt cầu $(S)$ tiếp xúc với mặt phẳng $(Oxy)$ tại điểm $A(4;1;0)$, đồng thời đường thẳng $MN$ tiếp xúc với $(S)$ cũng tại điểm $A(4;1;0)$ do $MN \subset (Oxy)$.
Gọi $M(m;0;0)$; $N(0;n;0)$, $m$, $n > 0$.
Do $A \in MN$ nên
$$\begin{aligned} AM = k\overrightarrow{AN} \quad &\Rightarrow \begin{cases} m-4 = -4k \\ -1 = k(n-1) \end{cases} \Rightarrow (m-4)(n-1) = 4 \\ &\Leftrightarrow \quad m = \dfrac{4n}{n-1}, n-1 \neq 0. \end{aligned}$$
Phương trình mặt phẳng trung trực đoạn $OI$: $4x + y + 2z - \dfrac{21}{2} = 0$.
Phương trình mặt phẳng trung trực đoạn $OM$: $x = \dfrac{m}{2}$.
Phương trình mặt phẳng trung trực đoạn $ON$: $y = \dfrac{n}{2}$.
Do đó tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OIMN$ là $J\left(\dfrac{m}{2};\dfrac{n}{2};\dfrac{-n^2+6n-21}{4n-4}\right)$.
Theo giả thuyết cầu ngoại tiếp tứ diện $OIMN$ có bán kính bằng $\dfrac{7}{2}$ nên $OJ = \dfrac{7}{2}$
$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \quad OJ^2 = \dfrac{49}{4} \\ &\Leftrightarrow \quad \dfrac{4n^2}{(n-1)^2} + \dfrac{n^2}{4} + \dfrac{\left(n^2-6n+21\right)^2}{16(n-1)^2} = \dfrac{49}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\Leftrightarrow\quad n^4-4n^3-10n^2+28n+49=0\\&\Leftrightarrow\quad n=1\pm2\sqrt{2}.\end{aligned}$$

Vì $n>0$ nên chọn $n=1+2\sqrt{2}$, suy ra $m=4+\sqrt{2}$.
Khi đó $AM\cdot AN=6\sqrt{2}$.

**Cách 2:**
Dễ thấy mặt cầu $(S)$ tiếp xúc với mặt phẳng $(Oxy)$ tại điểm $A(4;1;0)$, đồng thời đường thẳng $MN$ tiếp xúc với $(S)$ cũng tại điểm $A(1;4;0)$ do $MN\subset(Oxy)$.
Gọi $M(a;0;0)$; $N(0;b;0)$.
Do $A\in MN$ nên $\overrightarrow{AM}=k\overrightarrow{AN}\Rightarrow\begin{cases}a-4=-4k\\-1=k(b-1)\end{cases}\Rightarrow\dfrac{1}{b}+\dfrac{4}{a}=1.$

Gọi $J$ là trung điểm $MN\Rightarrow J\left(\dfrac{a}{2};\dfrac{b}{2};0\right)$ và $I(4;1;2)$ thuộc đường thẳng $\Delta$ vuông góc với $(Oxy)$ tại điểm $J$. Phương trình $\Delta$ là $\begin{cases}x=\dfrac{a}{2}\\y=\dfrac{b}{2}\\z=t.\end{cases}$

Suy ra tâm của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OIMN$ là điểm $K\left(\dfrac{a}{2};\dfrac{b}{2};t\right)$.

Theo giả thiết ta có hệ

$$\begin{cases}\dfrac{1}{b}+\dfrac{4}{a}=1\\OK=\dfrac{7}{2}\\IK=\dfrac{7}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{1}{b}+\dfrac{4}{a}=1\\\dfrac{a^2}{4}+\dfrac{b^2}{4}+t^2=\dfrac{49}{4}\\\left(\dfrac{a}{2}-4\right)^2+\left(\dfrac{b}{2}-1\right)^2+(t-2)^2=\dfrac{49}{4}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a=\dfrac{4b}{b-1}\\4a+b+4t-21=0\\\dfrac{a^2}{4}+\dfrac{b^2}{4}+t^2=\dfrac{49}{4}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\dfrac{4b}{b-1}\\t=\dfrac{b^2-6b+21}{4(b-1)}\\\dfrac{a^2}{4}+\dfrac{b^2}{4}+t^2=\dfrac{49}{4}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\quad\frac{b^2}{4}+\frac{4b^2}{(b-1)^2}+\frac{\left(b^2-6b+21\right)^2}{16(b-1)^2}=\frac{49}{4}$$

$$\Leftrightarrow\quad4b^2+64\left(1+\frac{1}{b-1}\right)^2+\left(b-5+\frac{16}{b-1}\right)^2=196$$

$$\Leftrightarrow\quad4b^2+64+\frac{128}{b-1}+\frac{64}{(b-1)^2}+(b-5)^2+32(b-5)\cdot\frac{1}{b-1}+\frac{256}{(b-1)^2}=196$$

$$\Leftrightarrow\quad5b^2-10b+25+\frac{320}{(b-1)^2}+32(b-5+4)\cdot\frac{1}{b-1}=132$$

$$\Leftrightarrow\quad(b-1)^2+\frac{64}{(b-1)^2}=16\Leftrightarrow\left[(b-1)^2-8\right]^2=0\Leftrightarrow(b-1)^2=8$$

$$\Leftrightarrow\quad\left[\begin{array}{l}b=1-2\sqrt{2}\\b=1+2\sqrt{2}.\end{array}\right.$$

— Với $b=1-2\sqrt{2}$ ta được $a=4-\sqrt{2}\Rightarrow AM\cdot AN=6\sqrt{2}$.
— Với $b=1+2\sqrt{2}$ ta được $a=4+\sqrt{2}\Rightarrow AM\cdot AN=6\sqrt{2}$.

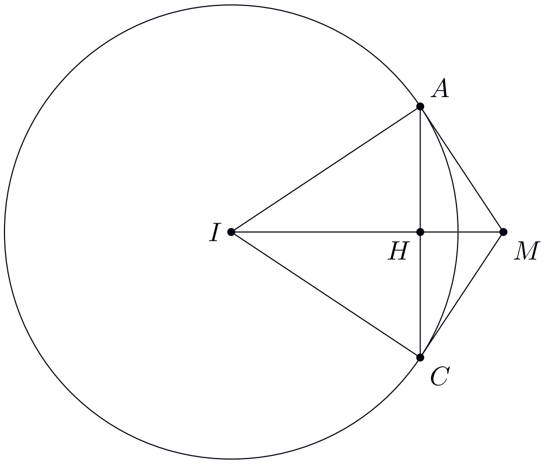
Chọn đáp án A .................................................................................................. □

**Phần III. Học sinh điền kết quả vào ô trống.**

**CÂU 15.** Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2-2x-4y+6z-13=0$ và đường thẳng $d\colon\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z-1}{1}$. Điểm $M(a;b;c)$, $(a>0)$ nằm trên đường thẳng $d$ sao cho từ $M$ kẻ được ba tiếp tuyến $MA$, $MB$, $MC$ đến mặt cầu $(S)$ ($A$, $B$, $C$ là các tiếp điểm) và $\widehat{AMB}=60^\circ$, $\widehat{BMC}=60^\circ$, $\widehat{CMA}=120^\circ$. Biết $a^3+b^3+c^3=\dfrac{m}{n}$, tính $m+n$.

Đáp án: | 1 | 2 | 1 | |

**Lời giải.**




Mặt cầu $(S)$ có tâm $I(1;2;-3)$ và bán kính $R=\sqrt{1^2+2^2+(-3)^2+13}=3\sqrt{3}$.
Gọi $(C)$ là đường tròn giao tuyến của mặt phẳng $(ABC)$ và mặt cầu $(S)$.
Đặt $MA=MB=MC=x$ khi đó $AB=x$; $BC=x\sqrt{2}$; $CA=x\sqrt{3}$ do đó tam giác $ABC$ vuông tại $B$ nên trung điểm $H$ của $AC$ là tâm đường tròn $(C)$ và $H$, $I$, $M$ thẳng hàng.
Vì $\widehat{AMC}=120^\circ$ nên tam giác $AIC$ đều do đó $x\sqrt{3}=R\Leftrightarrow x=3$ suy ra $IM=2AM=2x=6$.
Lại có $M\in d$ nên $M(-1+t;-2+t;1+t)$, $(t>1)$ mà $IM=6$ nên

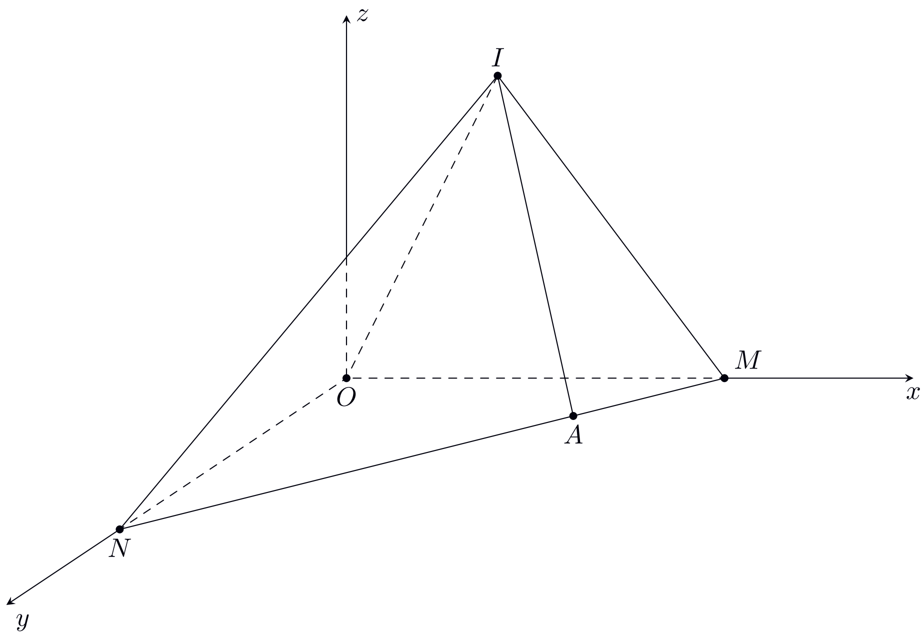
$$(t-2)^2+(t-4)^2+(t+4)^2=36\Leftrightarrow 3t^2-4t=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=0\\ t=\dfrac{4}{3}.\end{array}\right.$$

Mà $a>0$ nên $t=\dfrac{4}{3}$ suy ra $H\left(\dfrac{1}{3};-\dfrac{2}{3};\dfrac{7}{3}\right)$. Vậy $a^3+b^3+c^3=\dfrac{112}{9}=\dfrac{m}{n}$.
Khi đó $m+n=121$.
Đáp án: $\boxed{121}$ ..........

**CÂU 16.** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)$ tâm $I(1;4;2)$, bán kính bằng 2. Gọi $M$, $N$ là hai điểm lần lượt thuộc hai trục $Ox$, $Oy$ sao cho đường thẳng $MN$ tiếp xúc với $(S)$, đồng thời mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OIMN$ có bán kính bằng $\dfrac{7}{2}$. Gọi $A$ là tiếp điểm của $MN$ và $(S)$, tính giá trị $AM\cdot AN$ (làm tròn đến hàng phần trăm).

Đáp án: | 8 | , | 4 | 8 |

**Lời giải.**




Gọi $M(a;0;0)\in Ox$, $N(0;b;0)\in Oy$.
Ta có $\mathrm{d}(I;(Oxy))=2=R$ nên $(S)$ tiếp xúc với mặt phẳng $(Oxy)$ tại điểm $A(1;4;0)$ và $MN$ cũng đi qua $A$.
Lại có $\overrightarrow{AM}=(a-1;-4;0)$, $\overrightarrow{AN}=(-1;b-4;0)$ và 3 điểm $A$, $M$, $N$ thẳng hàng nên ta được $\dfrac{a-1}{-1}=\dfrac{-4}{b-4}\Leftrightarrow(a-1)(b-4)=4$.
Tứ diện $OIMN$ có $IA\perp(OMN)$ và $\triangle OMN$ vuông tại $O$ nên nếu gọi $J$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OIMN$ thì

$J \in (IMN)$.
Suy ra bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OIMN$ bằng bán kính đường tròn ngoại tiếp $\triangle IMN$.
Ta có $S_{\triangle IMN} = \dfrac{IM \cdot IN \cdot MN}{4r}$ (với $r = \dfrac{7}{2}$ bán kính đường tròn ngoại tiếp $\triangle IMN$ ).

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2} IA \cdot MN = \frac{IM \cdot IN \cdot MN}{4 \cdot \frac{7}{2}} \Leftrightarrow IM \cdot IN = 7 \cdot IA$$
$$\Leftrightarrow \quad IM \cdot IN = 14 \Leftrightarrow \left[(a-1)^2 + 20\right]\left[(b-4)^2 + 5\right] = 196. \quad (2)$$

Đặt $\begin{cases} m = a - 1 \\ n = b - 4. \end{cases}$ Từ (1) và (2) ta có hệ

$$\begin{cases} mn = 4 \\ \left(m^2 + 20\right)\left(n^2 + 5\right) = 196 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = \dfrac{4}{m} & (3) \\ \left(m^2 + 20\right)\left(\dfrac{16}{m^2} + 5\right) = 196 & (4). \end{cases}$$

Từ (4) ta được

$$\begin{aligned} & \left(m^2 + 20\right)\left(16 + 5m^2\right) = 196m^2 \\ \Leftrightarrow \quad & 5m^4 - 80m^2 + 320 = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & m^2 = 8 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 2\sqrt{2} \\ m = -2\sqrt{2} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} n = \sqrt{2} \\ n = -\sqrt{2}. \end{array}\right. \end{aligned}$$

Suy ra $\left[\begin{array}{l} a = 1 + 2\sqrt{2},\ b = 4 + \sqrt{2} \\ a = 1 - 2\sqrt{2},\ b = 4 - \sqrt{2}. \end{array}\right.$ Vậy $AM \cdot AN = 6\sqrt{2} \approx 8{,}48$.

Đáp án: $\boxed{8{,}48}$ ........................................................................................ □

**CÂU 17.** Trong KG $Oxyz$ cho mặt cầu $(S)$ tâm $I(9;3;1)$ bán kính bằng 3. Gọi $M, N$ là hai điểm lần lượt thuộc 2 trục $Ox, Oz$ sao cho đường thẳng $MN$ tiếp xúc với $(S)$, đồng thời mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OIMN$ có bán kính bằng $\dfrac{13}{2}$. Gọi $A$ là tiếp điểm của $MN$ và $(S)$. Tính giá trị $AM \cdot AN$ (làm tròn đến hàng phần chục).

Đáp án: | 2 | 0 | , | 8 |

**Lời giải.**

Ta có $\mathrm{d}(I;(Oxz)) = 3 = R \Rightarrow (S)$ tiếp xúc với $(Oxz)$.
Gọi $M(a;0;0) \in Ox$, $N(0;0;b) \in Oz$.
Ta có $MN$ tiếp xúc với $(S)$ tại $A$ nên $A$ là hình chiếu của $I$ lên $(Oxz)$.Suy ra $A(9;0;1)$.
Gọi $K$ là trung điểm $MN \Rightarrow K\left(\dfrac{a}{2};0;\dfrac{b}{2}\right)$.
Gọi $H$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OIMN \Rightarrow OH = \dfrac{13}{2} \Rightarrow HK \perp MN$.
Gọi $T$ là trung điểm $OM \Rightarrow \left.\begin{array}{l} OM \perp KT \\ OM \perp HT \end{array}\right\} \Rightarrow OM \perp (KHT) \Rightarrow OM \perp HK \Rightarrow HK \perp (OMN)$.
Mà $IA \perp (OMN) \Rightarrow HK \parallel IA$.
Ta có $\overrightarrow{AI} = (0;3;0)$, $\overrightarrow{KH} = \left(x_H - \dfrac{a}{2}; y_H - 0; z_H - \dfrac{b}{2}\right)$.

$\overrightarrow{AI}$ cùng phương $\overrightarrow{KH}$ nên $\begin{cases} x_H = \dfrac{a}{2} \\ y_H = c\ (c \neq 0) \\ z_H = \dfrac{b}{2} \end{cases} \Rightarrow H\left(\dfrac{a}{2};c;\dfrac{b}{2}\right)$.

$OH = \dfrac{13}{2} \Rightarrow \dfrac{a^2}{4} + c^2 + \dfrac{b^2}{4} = \dfrac{169}{4} \quad (1)$.

$HI = OH = \dfrac{13}{2} \Rightarrow \left(\dfrac{a}{2} - 9\right)^2 + (c-3)^2 + \left(\dfrac{b}{2} - 1\right)^2 = \dfrac{169}{4} \quad (2)$.

Từ (1) và (2) suy ra $\dfrac{a^2}{4} + c^2 + \dfrac{b^2}{4} = \left(\dfrac{a}{2} - 9\right)^2 + (c-3)^2 + \left(\dfrac{b}{2} - 1\right)^2$
$\Rightarrow 9a + b + 6c = 91 \quad (3)$.
$\overrightarrow{AM} = (a-9;0;-1)$, $\overrightarrow{AN} = (-9;0;b-1)$.

Mặt khác $A, M, N$ thẳng hàng

$$\begin{aligned}&\Rightarrow \frac{a-9}{-9}=\frac{-1}{b-1}\\&\Leftrightarrow (a-2)(b-1)=9\\&\Leftrightarrow ab-a-9b+9=9\\&\Leftrightarrow ab-a-9b=0\\&\Leftrightarrow a(b-1)=ab\\&\Leftrightarrow a=\frac{9b}{b-1}.\end{aligned}$$

Từ (3) $\Rightarrow 9\cdot\dfrac{9b}{b-1}+b+6c=91 \Leftrightarrow \dfrac{81b}{b-1}+b+6c=91$

$\Leftrightarrow \dfrac{b^2+80b}{b-1}+6c=91 \Leftrightarrow 6c=91-\dfrac{b^2+80b}{b-1}=\dfrac{-b^2+11b-91}{b-1}$

$\Leftrightarrow c=\dfrac{-b^2+11b-91}{6(b-1)}$.

Ta có $a^2+4c^2+b^2=169$

$\Leftrightarrow \left(\dfrac{9b}{b-1}\right)^2+4\left(\dfrac{-b^2+11b-91}{6(b-1)}\right)^2+b^2=169$

$\Leftrightarrow 9.81b^2+\left(b^4+121b^2+8281-22b^3+182b^2-2002b\right)+9b^2(b-1)^2=169.9.(b-1)^2$

$\Leftrightarrow 729b^2+b^4+121b^2+8281-22b^3+182b^2-2002b+9b^4-18b^3+9b^2=1521b^2-3042b+1521$

$\Leftrightarrow 10b^4-40b^3-480b^2+1040b+6760=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=1+3\sqrt{3}\Rightarrow a=\dfrac{9(1+3\sqrt{3})}{3\sqrt{3}}=9+\sqrt{3}\\ b=1-3\sqrt{3}\Rightarrow a=\dfrac{9(1-3\sqrt{3})}{-3\sqrt{3}}=9-\sqrt{3}.\end{array}\right.$

- Trường hợp 1: $a=9+\sqrt{3}; b=1+3\sqrt{3}\Rightarrow \overrightarrow{AM}=(\sqrt{3};0;-1)\Rightarrow AM=2$.

$\Rightarrow \overrightarrow{AN}=(-9;0;3\sqrt{3})\Rightarrow AN=\sqrt{108}$.

Vậy $AM\cdot AN=2\cdot\sqrt{108}=12\sqrt{3}$.

- Trường hợp 2: $a=9-\sqrt{3}; b=1-3\sqrt{3}\Rightarrow \overrightarrow{AM}=(-\sqrt{3};0;-1)\Rightarrow AM=2$.

$\Rightarrow \overrightarrow{AN}=(-9;0;-3\sqrt{3})Vy\Rightarrow AN=\sqrt{108}$.

$AM\cdot AN=2\cdot\sqrt{108}=12\sqrt{3}$.

Đáp án: 20,8 ..........

**CÂU 18.** Trong KG $Oxyz$, cho phương trình mặt cầu $(S_m): x^2+y^2+z^2+(m+2)x+2my-2mz-m-3=0$. Biết rằng với mọi số thực $m$ thì $(S_m)$ luôn chứa một đường tròn cố định. Tính bán kính $r$ của đường tròn đó (làm tròn đến hàng phần trăm).

Đáp án: | 1 | , | 8 | 9 |

**Lời giải.**

Mặt cầu $(S_m)$ có tâm $I\left(-\dfrac{m+2}{2};-m;m\right)$ và bán kính $R=\dfrac{\sqrt{9m^2+8m+16}}{2}$.

Với $m_1, m_2$ tùy ý và khác nhau, ta được hai phương trình mặt cầu tương ứng

$\begin{cases}x^2+y^2+z^2+(m_1+2)x+2m_1y-2m_1z-m_1-3=0 & (1)\\ x^2+y^2+z^2+(m_2+2)x+2m_2y-2m_2z-m_2-3=0 & (2).\end{cases}$

Lấy (1) trừ (2) theo vế, ta được

$(m_1-m_2)x+2(m_1-m_2)y-2(m_1-m_2)z-(m_1-m_2)=0$

$\Leftrightarrow (m_1-m_2)\cdot(x+2y-2z-1)=0$

$\Leftrightarrow x+2y-2z-1=0 \quad (3)$.

Dễ thấy (3) là phương trình tổng quát của mặt phẳng. Suy ra họ mặt cầu $(S_m)$ có giao tuyến là đường tròn nằm trên mặt phẳng $(P)$ cố định có phương trình $x+2y-2z-1=0$.

Mặt khác, đặt $d=d[I,(P)]=\dfrac{\left|-\dfrac{m+2}{2}-2m-2m-1\right|}{\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}}=\dfrac{|-9m-4|}{6}$.

$\Rightarrow r^2=R^2-d^2=\dfrac{9m^2+8m+16}{4}-\dfrac{(-9m-4)^2}{36}=\dfrac{32}{9}\forall m\in\mathbb{R}$.

Vậy $r=\dfrac{4\sqrt{2}}{3}\approx 1{,}89$.

Đáp án: 1,89 ..........

**CÂU 19.** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta\colon \begin{cases} x = 3+t \\ y = -1-t, \\ z = -2+t \end{cases}, (t \in \mathbb{R})$, điểm $M(1;2;-1)$ và mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2-4x+10y+14z+64=0$. Gọi $\Delta'$ là đường thẳng đi qua $M$ cắt đường thẳng $\Delta$ tại $A$, cắt mặt cầu tại $B$ sao cho $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{1}{3}$ và điểm $B$ có hoành độ là số nguyên. Phương trình mặt phẳng trung trực đoạn $AB$ có dạng $2x+by+cz+d=0$. Khi đó $b+c+d$ bằng

Đáp án: | – | 5 | 1 | |

**Lời giải.**

$\Delta'$ là đường thẳng đi qua $M$ cắt đường thẳng $\Delta$ tại $A$ suy ra tọa độ $A(3+a;-1-a;-2+a)$.

Ta có $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{AM} = \pm\overrightarrow{AB}$.

- **Trường hợp 1:**

$3\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \begin{cases} 3(-2-a) = x-3-a \\ 3(3+a) = y+1+a \\ 3(1-a) = z+2-a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3-2a \\ y = 8+2a \\ z = 1-2a \end{cases}.$

Suy ra $B(-3-2a;8+2a;1-2a)$.

Do $B \in (S)$ nên

$(-3-2a)^2+(8+2a)^2+(1-2a)^2-4(-3-2a)+10(8+2a)+14(1-2a)+64=0 \Leftrightarrow 12a^2+40a+244=0$, phương trình vô nghiệm.

- **Trường hợp 2:**

$3\overrightarrow{AM} = -\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \begin{cases} 3(-2-a) = -(x-3-a) \\ 3(3+a) = -(y+1+a) \\ 3(1-a) = -(z+2-a) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 9+4a \\ y = -10-4a \\ z = -5+4a \end{cases}$

Suy ra $B(9+4a;-10-4a;-5+4a)$.

Do $B \in (S)$ nên

$(9+4a)^2+(-10-4a)^2+(-5+4a)^2-4(9+4a)+10(-10-4a)+14(-5+4a)+64=0 \Leftrightarrow 48a^2+112a+64=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=-1 \\ a=-\dfrac{4}{3} \end{array}\right.$.

Điểm $B$ có hoành độ là số nguyên nên $B(5;-6;-9)$; $A(2;0;-3)$.

Mặt phẳng trung trực đoạn $AB$ đi qua trung điểm $I\left(\dfrac{7}{2};-3;-6\right)$ và có một véc-tơ pháp tuyến $\overrightarrow{n} = (-1;2;2)$ nên có phương trình

$$\left(x-\dfrac{7}{2}\right) - 2(y+3) - 2(z+6) = 0 \Leftrightarrow 2x-4y-4z-43=0.$$

Khi đó $b+c+d=-51$.

Đáp án: $\boxed{-51}$ .................................................. □

**CÂU 20.** Một doanh nghiệp dự kiến lợi nhuận khi sản xuất $x$ sản phẩm $(0 \le x \le 300)$ được cho bởi hàm số $y = -x^3+300x^2$ (đơn vị: đồng).

a) Nêu ra các khoảng số lượng sản phẩm mà doanh nghiệp luôn có lợi nhuận?

b) Nêu ra các khoảng số lượng sản phẩm mà doanh nghiệp luôn thiệt hại?

c) So sánh lợi nhuận khi sản xuất 100 sản phẩm, 200 sản phẩm và 300 sản phẩm?

d) Doanh nghiệp cần sản xuất bao nhiêu sản phẩm để đạt lợi nhuận lớn nhất? Lợi nhuận lớn nhất đó là bao nhiêu?

e) Nếu doanh nghiệp muốn duy trì lợi nhuận không dưới 2.000.000 đồng, họ nên sản xuất ít nhất bao nhiêu sản phẩm và không vượt quá bao nhiêu sản phẩm?

**Lời giải.**

a) Ta có $y' = -3x^2+600x$.
Cho $y'=0 \Leftrightarrow -3x^2+600x=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=200$.

| $x$ | $0$ | | $200$ | | $300$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $y$ | $f(0)$ | $\nearrow$ | $f(200)$ | $\searrow$ | $f(300)$ |

Như vậy doanh nghiệp luôn có lợi nhuận khi số lượng sản phẩm sản xuất ra nằm trong khoảng $(0; 200)$.

b) Như vậy doanh nghiệp luôn thiệt hại khi số lượng sản phẩm sản xuất ra nằm trong khoảng $(0; 200)$.

c) Ta có

- Lợi nhuận khi sản xuất 100 sản phẩm $y(100) = 2.000.000$ đồng.
- Lợi nhuận khi sản xuất 200 sản phẩm $y(200) = 4.000.000$ đồng.
- Lợi nhuận khi sản xuất 300 sản phẩm $y(300) = 0$ đồng.

Như vậy lợi nhuận khi sản xuất 200 sản phẩm là lớn nhất. Lợi nhuận khi sản xuất 100 sản phẩm lớn hơn lợi nhuận khi sản xuất 300 sản phẩm.

d) Lợi nhuận khi sản xuất 200 sản phẩm là lớn nhất. Lợi nhuận lớn nhất đó bằng 4.000.000 đồng.

e) Để doanh nghiệp có lợi nhuận không dưới 2.000.000 đồng, ta cần giải bất phương trình $y(x) \geq 2.000.000 \Leftrightarrow -x^3 + 300x^2 - 2.000.000 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -73{,}2 \vee 100 \leq x \leq 273{,}2$.
Như vậy để doanh nghiệp có lợi nhuận không dưới 2.000.000 đồng thì họ nên sản xuất ít nhất 100 sản phẩm và không vượt quá 273 sản phẩm.

**CÂU 21.** Trong KG $Oxyz$, cho phương trình mặt cầu $(S_m)\colon x^2 + y^2 + z^2 + (m+2)x + 2my - 2mz - m - 3 = 0$. Biết rằng với mọi số thực $m$ thì $(S_m)$ luôn chứa một đường tròn cố định. Tính bán kính $r$ của đường tròn đó (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

Đáp án: | 1 | , | 9 | |

**Lời giải.**

Mặt cầu $(S_m)$ có tâm $I\left(-\dfrac{m+2}{2}; -m; m\right)$ và bán kính $R = \dfrac{\sqrt{9m^2 + 8m + 16}}{2}$.
Với $m_1$, $m_2$ tùy ý và khác nhau, ta được hai phương trình mặt cầu tương ứng:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 + (m_1 + 2)\, x + 2m_1 y - 2m_1 z - m_1 - 3 = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 + (m_2 + 2)\, x + 2m_2 y - 2m_2 z - m_2 - 3 = 0. \end{cases}$$

Lấy (1) trừ (2) theo vế, ta được

$$\begin{aligned} & (m_1 - m_2)\, x + 2\,(m_1 - m_2)\, y - 2\,(m_1 - m_2)\, z - (m_1 - m_2) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & (m_1 - m_2) \cdot (x + 2y - 2z - 1) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & x + 2y - 2z - 1 = 0. \qquad (3) \end{aligned}$$

Dễ thấy (3) là phương trình tổng quát của mặt phẳng.
Suy ra họ mặt cầu $(S_m)$ có giao tuyến là đường tròn nằm trên mặt phẳng $(P)\colon x + 2y - 2z - 1 = 0$ cố định.

Mặt khác, đặt $d = \mathrm{d}\,[I, (P)] = \dfrac{\left|-\dfrac{m+2}{2} - 2m - 2m - 1\right|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2}} = \dfrac{|-9m - 4|}{6}$.

$\Rightarrow r^2 = R^2 - d^2 = \dfrac{9m^2 + 8m + 16}{4} - \dfrac{(-9m - 4)^2}{36} = \dfrac{32}{9} \quad \forall m \in \mathbb{R}$.

Vậy $r = \dfrac{4\sqrt{2}}{3} \approx 1{,}9$.

Đáp án: $\boxed{1{,}9}$ ........................................................................................ □

**CÂU 22.** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta\colon \begin{cases} x = 3 + t \\ y = -1 - t, \ (t \in \mathbb{R}) \\ z = -2 + t \end{cases}$, điểm $M(1; 2; -1)$ và mặt cầu $(S)\colon x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 10y + 14z + 64 = 0$. Gọi $\Delta'$ là đường thẳng đi qua $M$ cắt đường thẳng $\Delta$ tại $A$, cắt mặt cầu tại $B$ sao cho $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{1}{3}$ và điểm $B$ có hoành độ là số nguyên. Biết phương trình mặt phẳng trung trực đoạn $AB$ có dạng $ax + by + cz + d = 0$. Tính $2a + b - 12c + d$.

Đáp án: | 5 | | | |

**Lời giải.**

$\Delta'$ là đường thẳng đi qua $M$ cắt đường thẳng $\Delta$ tại $A$ suy ra tọa độ $A(3+a;-1-a;-2+a)$.

$\dfrac{AM}{AB}=\dfrac{1}{3}\Leftrightarrow 3\overrightarrow{AM}=\pm\overrightarrow{AB}$.

- Trường hợp 1:

$$3\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow\begin{cases}3(-2-a)=x-3-a\\3(3+a)=y+1+a\\3(1-a)=z+2-a\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-3-2a\\y=8+2a\\z=1-2a.\end{cases}$$

Suy ra $B(-3-2a;8+2a;1-2a)$.

Do $B\in(S)$ nên

$$\begin{aligned}&(-3-2a)^2+(8+2a)^2+(1-2a)^2-4(-3-2a)+10(8+2a)+14(1-2a)+64=0\\\Leftrightarrow\ &12a^2+40a+244=0,\ \text{phương trình vô nghiệm}\end{aligned}$$

- Trường hợp 2:

$$3\overrightarrow{AM}=-\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow\begin{cases}3(-2-a)=-(x-3-a)\\3(3+a)=-(y+1+a)\\3(1-a)=-(z+2-a)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=9+4a\\y=-10-4a\\z=-5+4a.\end{cases}$$

Suy ra $B(9+4a;-10-4a;-5+4a)$.

Do $B\in(S)$ nên

$$\begin{aligned}&(9+4a)^2+(-10-4a)^2+(-5+4a)^2-4(9+4a)+10(-10-4a)+14(-5+4a)+64=0\\\Leftrightarrow\ &48a^2+112a+64=0\\\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l}a=-1\\a=-\dfrac{4}{3}.\end{array}\right.\end{aligned}$$

Điểm $B$ có hoành độ là số nguyên nên $B(5;-6;-9)$; $A(2;0;-3)$.

Mặt phẳng trung trực đoạn $AB$ đi qua trung điểm $I\left(\dfrac{7}{2};-3;-6\right)$ và có một véc-tơ pháp tuyến $\overrightarrow{n}=(-1;2;2)$ nên có phương trình

$$\left(x-\frac{7}{2}\right)-2(y+3)-2(z+6)=0\Leftrightarrow 2x-4y-4z-43=0.$$

Suy ra $a=2$, $b=-4$, $c=-4$, $d=-43$.

Vậy $2a+b-12c+d=2\cdot2+(-4)-12\cdot(-4)+(-43)=5$.

Đáp án: $\boxed{5}$ ........................................................................................ □

**CÂU 23.** Trong KG $Oxyz$, cho $(S)\colon(x+3)^2+(y-2)^2+(z-5)^2=36$, điểm $M(7;1;3)$. Gọi $\Delta$ là đường thẳng di động luôn đi qua $M$ và tiếp xúc với mặt cầu $(S)$ tại $N$. Tiếp điểm $N$ di động trên đường tròn $(T)$ có tâm $J(a;b;c)$. Gọi $k=2a-5b+10c$, tính giá trị của $k$.

Đáp án: | 5 | 0 | | |

**Lời giải.**

Mặt cầu $(S)\colon(x+3)^2+(y-2)^2+(z-5)^2=36$ có tâm $I(-3;2;5)$, bán kính $R=6$.

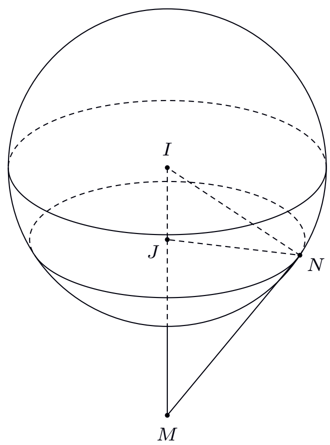
Có $IM=\sqrt{25+16+4}=3\sqrt{5}>6=R$, nên $M$ thuộc miền ngoài của mặt cầu $(S)$.

Có $MN$ tiếp xúc mặt cầu $(S)$ tại $N$, nên $MN\perp IN$ tại $N$.

Gọi $J$ là điểm chiếu của $N$ lên $MI$.

Có $IN^2=IJ\cdot IM$. Suy ra $IJ=\dfrac{IN^2}{IM}=\dfrac{36}{3\sqrt5}=\dfrac{12\sqrt5}{5}$ (không đổi), $I$ cố định.

Suy ra $N$ thuộc $(P)$ cố định và mặt cầu $(S)$, nên $N$ thuộc đường tròn $(C)$ tâm $J$.




Gọi $N(x;y;z)$, có $\overrightarrow{IJ}=\dfrac{IJ}{IM}\cdot\overrightarrow{IM}=\dfrac{12\sqrt5}{5}\cdot\dfrac{1}{3\sqrt5}\overrightarrow{IM}=\dfrac{4}{5}\overrightarrow{IM}\Leftrightarrow\begin{cases}x+3=8\\y-2=-\dfrac{4}{5}\\z-5=-\dfrac{2}{5}.\end{cases}$

Suy ra $N\left(5;\dfrac{6}{5};\dfrac{23}{5}\right)$, $k=2a-5b+10c=50$.

Vậy $k=50$.

Đáp án: $\boxed{50}$

**CÂU 24.** Trong KG $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2-4x+4y-2z-7=0$ và đường thẳng $d_m$ là giao tuyến của hai mặt phẳng $x+(1-2m)y+4mz-4=0$ và $2x+my-(2m+1)z-8=0$. Khi đó $m$ thay đổi các giao điểm của $d_m$ và $(S)$ nằm trên một đường tròn cố định. Tính bán kính $r$ của đường tròn đó (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

Đáp án: | 3 | , | 1 | |

**Lời giải.**

Giả sử đường thẳng $d_m$ cắt mặt cầu tại hai điểm $A$, $B$.

Mặt cầu $(S)$ có tâm $I(2;-2;1)$, bán kính $R=4$.

Đường thẳng $M(x;y)\in d_m$ thỏa $\begin{cases}x+(1-2m)y+4mz-4=0\\2x+my-(2m+1)z-8=0\end{cases}\Rightarrow 5x+y-2z-20=0$ nên các giao điểm của $(S)$ và $d_m$ thuộc đường tròn giao tuyến giữa $(S)$ và $(P)\colon 5x+y-2z-20=0$.

$\mathrm{d}\left(I,(P)\right)=\dfrac{14}{\sqrt{30}}$ nên $r=\sqrt{R^2-\mathrm{d}^2(I,(P))}=\sqrt{4^2-\dfrac{14^2}{30}}=\sqrt{\dfrac{142}{15}}\approx 3{,}1$.

Đáp án: $\boxed{3{,}1}$

## 22 GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT LIÊN QUAN ĐẾN MẶT CẦU

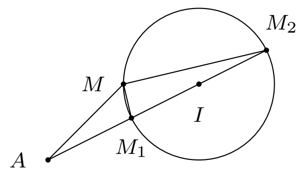
*Bài toán:* Cho điểm $A$ và mặt cầu $(S)$ có tâm $I$, bán kính $R$, $M$ là điểm di động trên $(S)$. Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của $AM$.

**Lời giải:**

Xét $A$ nằm ngoài mặt cầu $(S)$.

Gọi $M_1$, $M_2$ lần lượt là giao điểm của đường thẳng $AI$ với mặt cầu $(S)$ $(AM_1<AM_2)$ và $(\alpha)$ là mặt phẳng đi qua $M$ và đường thẳng $AI$.

Khi đó $(\alpha)$ cắt $(S)$ theo một đường tròn lớn $(C)$.




Ta có $\widehat{M_1MM_2}=90^\circ$, nên $\widehat{AMM_2}$ và $\widehat{AM_1M}$ là các góc tù.

Nên trong các tam giác $AMM_1$ và $AMM_2$.

Ta có $AI-R=AM_1\le AM\le AM_2=AI+R$.

Tương tự với $A$ nằm trong mặt cầu ta có $R-AI\le AM\le R+AI$.

Vậy $\min AM=|AI-R|$, $\max AM=R+AI$.

**Phần I. Mỗi câu hỏi học sinh chọn một trong bốn phương án A, B, C, D.**

**CÂU 1.** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(0;-1;3)$, $B(-2;-8;-4)$, $C(2;-1;1)$ và mặt cầu $(S)\colon (x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=14$. Gọi $M\left(x_M;y_M;z_M\right)$ là điểm trên $(S)$ sao cho biểu thức $|3\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính $P=x_M+y_M$.

(A) $P=0$. (B) $P=6$. (C) $P=\sqrt{14}$. (D) $P=3\sqrt{14}$.

**Lời giải.**

Gọi $J$ là điểm thỏa mãn

$$\begin{aligned}&3\overrightarrow{JA}-2\overrightarrow{JB}+\overrightarrow{JC}=\vec{0}\\ \Leftrightarrow\ &2\overrightarrow{JO}+3\overrightarrow{OA}-2\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}\\ \Leftrightarrow\ &2\overrightarrow{OJ}=3\overrightarrow{OA}-2\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\Rightarrow J(3;6;9).\end{aligned}$$

Mà $3\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{MJ}+(3\overrightarrow{JA}-2\overrightarrow{JB}+\overrightarrow{JC})$ nên $|3\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}|=|2\overrightarrow{MJ}|$.

Do đó $|3\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}|_{\min}\Leftrightarrow|2\overrightarrow{MJ}|_{\min}$.

Mặt khác $(S)$ có tâm $I(1;2;3)$, bán kính $R=\sqrt{14}$ và $IJ=2\sqrt{14}>R\Rightarrow$ điểm $J$ nằm ngoài mặt cầu nên $IJ$ cắt mặt cầu $(S)$ tại hai điểm $M_1$, $M_2$.

Xét hệ phương trình $\begin{cases}x=1+2t\\y=2+4t\\z=3+6t\\(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=14\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{aligned}&t_1=\dfrac{1}{2}\\&t_2=-\dfrac{1}{2}.\end{aligned}\right.$

Suy ra $M_1(2;4;6)$, $M_2(0;0;0)$, $M_1J=\sqrt{14}$; $M_2J=3\sqrt{14}$.

Vậy $|3\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}|_{\min}\Leftrightarrow|2\overrightarrow{MJ}|_{\min}\Leftrightarrow M\equiv M_1$.

Khi đó ta có

$$P=x_M+y_M=2+4=6.$$

Chọn đáp án B ..........

**CÂU 2.** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho ba điểm $A(8;5;-11)$, $B(5;3;-4)$, $C(1;2;-6)$ và mặt cầu $(S)\colon (x-2)^2+(y-4)^2+(z+1)^2=9$. Gọi điểm $M(a;b;c)$ là điểm trên $(S)$ sao cho $|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Hãy tìm $a+b$.

A. 6. B. 2. C. 4. D. 9.

**Lời giải.**

Gọi $N$ là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{NA}-\overrightarrow{NB}-\overrightarrow{NC}=\vec{0}$, suy ra $N(-2;0;1)$.
Khi đó

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}| &= |(\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NA})-(\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NB})-(\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NC})|\\ &= |(\overrightarrow{NA}-\overrightarrow{NB}-\overrightarrow{NC})-\overrightarrow{MN}| = MN.\end{aligned}$$

Suy ra $|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}|$ nhỏ nhất khi $MN$ nhỏ nhất.
Mặt cầu $(S)$ có tâm $I(2;4;-1)$, suy ra $\overrightarrow{NI}=(4;4;-2)=(2;2;-1)$.

Phương trình $NI$ là $\begin{cases}x=2+2t\\ y=4+2t\\ z=-1-t.\end{cases}$

Thay phương trình $NI$ vào phương trình $(S)$, ta được

$$(2t)^2+(2t)^2+(-t)^2=9 \Leftrightarrow t^2=1 \Leftrightarrow \begin{cases}t=1\\ t=-1.\end{cases}$$

Suy ra $NI$ cắt $(S)$ tại hai điểm phân biệt $N_1(3;6;-2)$, $N_2(0;2;0)$.
Vì $NN_1>NN_2$ nên $MN$ nhỏ nhất khi và chỉ khi $M\equiv N_2$.
Vậy $M(0;2;0)$ là điểm cần tìm. Suy ra $a+b=2$.

Chọn đáp án B ..........

**CÂU 3.** Cho mặt cầu $(S)\colon (x-2)^2+(y-1)^2+(z-3)^2=9$ và hai điểm $A(1;1;3)$, $B(21;9;-13)$. Điểm $M(a;b;c)$ thuộc mặt cầu $(S)$ sao cho $3MA^2+MB^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó giá trị của biểu thức $T=abc$ bằng

A. 3. B. 8. C. 6. D. $-18$.

**Lời giải.**

Gọi điểm $I$ thỏa mãn $3\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}\Rightarrow I(6;3;-1)$.
Khi đó

$$\begin{aligned}3MA^2+MB^2 &= 3(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA})^2+(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB})^2\\ &= 4MI^2+3IA^2+IB^2+2\overrightarrow{MI}\cdot(3\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB})\\ &= 4MI^2+3IA^2+IB^2\end{aligned}$$

Do $3IA^2+IB^2$ không đổi vì ba điểm $A$; $B$; $I$ cố định nên $3MA^2+MB^2$ đạt giá trị nhỏ nhất khi $MI$ nhỏ nhất.
Khi đó $M$ là giao điểm của đường thẳng $IJ$ với mặt cầu $(S)$ ($J(2;1;3)$ là tâm của mặt cầu $(S)$).

Ta có PTĐT $IJ$ là $\begin{cases}x=2+2t\\ y=1+t\\ z=3-2t\end{cases} \Rightarrow IJ\cap(S)=\left[\begin{array}{l}M_1(4;2;1)\\ M_2(0;0;5).\end{array}\right.$

Kiểm tra $IM_1<IM_2$ $(3<9)$ nên $M_1(4;2;1)$ là điểm cần tìm.
Vậy $T=abc=8$.

Chọn đáp án B ..........

**CÂU 4.** Trong không gian $Oxyz$ cho $A(0;0;2)$, $B(1;1;0)$ và mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+(z-1)^2=\dfrac{1}{4}$. Xét điểm $M$ thay đổi thuộc $(S)$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $MA^2+2MB^2$ bằng

A. $\dfrac{1}{2}$. B. $\dfrac{3}{4}$. C. $\dfrac{19}{4}$. D. $\dfrac{21}{4}$.

**Lời giải.**

Mặt cầu $(S)$ có tâm $I(0;0;1)$, bán kính $R=\dfrac{1}{2}$.

Gọi $K$ là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{KA}+2\overrightarrow{KB}=\vec{0}\Rightarrow K\left(\dfrac{2}{3};\dfrac{2}{3};\dfrac{2}{3}\right)$.

Ta có

$$\begin{aligned}MA^2+2MB^2 &= (\overrightarrow{MK}+\overrightarrow{KA})^2+2(\overrightarrow{MK}+\overrightarrow{KB})^2\\ &= 3MK^2+KA^2+2KB^2+2\overrightarrow{MK}(\overrightarrow{KA}+2\overrightarrow{KB})\\ &= 3MK^2+KA^2+2KB^2.\end{aligned}$$

Biểu thức $MA^2 + 2MB^2$ đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi $MK$ đạt giá trị nhỏ nhất.
Với $M$ thay đổi thuộc $(S)$ ta có $MK_{\min} = |KI - R| = \left|1 - \dfrac{1}{2}\right| = \dfrac{1}{2}$.
Vậy $\left(MA^2 + 2MB^2\right)_{\min} = 3MK_{\min}^2 + KA^2 + 2KB^2 = \dfrac{3}{4} + \dfrac{8}{3} + \dfrac{4}{3} = \dfrac{19}{4}$.

Chọn đáp án C ................................................................................................ □

**CÂU 5.** Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho 2 điểm $A$, $B$ thay đổi trên mặt cầu $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 25$ thỏa mãn $AB = 6$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $OA^2 - OB^2$ là

A 12. B 6. C 10. D 24.

**Lời giải.**

Mặt cầu $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 25$ có tâm $I(0;0;1)$.
Vì $A, B$ cùng thuộc mặt cầu tâm $I$ nên $IA = IB$.

$$\begin{aligned}
OA^2 - OB^2 &= \left(\overrightarrow{OA}\right)^2 - \left(\overrightarrow{OB}\right)^2\\
&= \left(\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IA}\right)^2 - \left(\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IB}\right)^2\\
&= 2\overrightarrow{OI}\left(\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IB}\right)\\
&= 2\overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{BA}\\
&= 2OI \cdot BA \cdot \cos\varphi, \text{ với } \varphi = \left(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{BA}\right).
\end{aligned}$$

Suy ra biểu thức $OA^2 - OB^2$ đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi $\varphi = 0$.
Vậy $\max\left(OA^2 - OB^2\right) = 2 \cdot 1 \cdot 6 \cdot \cos 0 = 12$.

Chọn đáp án A ................................................................................................ □

**CÂU 6.** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 9$ và hai điểm $A(4;3;1)$, $B(3;1;3)$; $M$ là điểm thay đổi trên $(S)$. Gọi $m$, $n$ là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 2MA^2 - MB^2$. Xác định $m - n$.

A 64. B 68. C 60. D 48.

**Lời giải.**

Xét điểm $I$ sao cho $2\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{0}$.
Giả sử $I(x;y;z)$, ta có $\overrightarrow{IA}(4-x;3-y;1-z)$, $\overrightarrow{IB}(3-x;1-y;3-z)$.

Do đó $2\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(4-x) = 3-x\\ 2(3-y) = 1-y\\ 2(1-z) = 3-z \end{cases} \Leftrightarrow I(5;5;-1)$.

Do đó

$$\begin{aligned}
P &= 2MA^2 - MB^2\\
&= 2(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 - (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2\\
&= 2\overrightarrow{MI}^2 + 2\overrightarrow{IA}^2 + 4\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IA} - \left(\overrightarrow{MI}^2 + \overrightarrow{IB}^2 + 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IB}\right)\\
&= \overrightarrow{MI}^2 + 2\overrightarrow{IA}^2 - \overrightarrow{IB}^2 + 2\overrightarrow{MI}(2\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IB})\\
&= MI^2 + 2IA^2 - IB^2 + 2\overrightarrow{MI}(2\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IB})\\
&= MI^2 + 2IA^2 - IB^2.
\end{aligned}$$

Do $I$ cố định nên $IA^2$, $IB^2$ không đổi.
Vậy $P$ lớn nhất (nhỏ nhất) $\Leftrightarrow MI^2$ lớn nhất (nhỏ nhất) $\Leftrightarrow MI$ lớn nhất (nhỏ nhất) $\Leftrightarrow M$ là giao điểm của đường thẳng $IK$ (với $K(1;2;-1)$ là tâm của mặt cầu $(S)$) với mặt cầu $(S)$.
Ta có $MI$ đi qua $I(5;5;-1)$ và có véc-tơ chỉ phương là $\overrightarrow{KI}(4;3;0)$.

Phương trình của $MI$ là $\begin{cases} x = 1 + 4t\\ y = 2 + 3t\\ z = -1. \end{cases}$

Tọa độ điểm $M$ cần tìm ứng với giá trị $t$ là nghiệm của phương trình

$$(1 + 4t - 1)^2 + (2 + 3t - 2)^2 + (-1 + 1)^2 = 9 \Leftrightarrow 25t^2 = 9 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{3}{5}\\ t = -\dfrac{3}{5}. \end{array}\right.$$

Với $t = \dfrac{3}{5} \Rightarrow M_1\left(\dfrac{17}{5}; \dfrac{19}{5}; -1\right) \Rightarrow M_1I = 2$ là giá trị nhỏ nhất của $MI$.

Với $t=-\dfrac{3}{5} \Rightarrow M_1\left(-\dfrac{7}{5};\dfrac{1}{5};-1\right) \Rightarrow M_2I=8$ là giá trị lớn nhất của $MI$.

Vậy $\begin{cases} m=P_{\max}=48 \\ n=P_{\min}=-12 \end{cases} \Rightarrow m-n=60.$

Chọn đáp án C

**CÂU 7.** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác $ABC$ với $A(2;1;3)$, $B(1;-1;2)$, $C(3;-6;0)$, $D(2;-2;-1)$. Điểm $M(x;y;z)$ thuộc mặt phẳng $(P)\colon x-y+z+2=0$ sao cho $S=MA^2+MB^2+MC^2+MD^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính giá trị của biểu thức $P=x^2+y^2+z^2$.

A 6. B 2. C 0. D $-2$.

**Lời giải.**

Với mọi điểm $I$ ta có

$$\begin{aligned} S &= 2NA^2+NB^2+NC^2 \\ &= 2(\overrightarrow{NI}+\overrightarrow{IA})^2+(\overrightarrow{NI}+\overrightarrow{IB})^2+(\overrightarrow{NI}+\overrightarrow{IC})^2 \\ &= 4NI^2+2\overrightarrow{NI}(2\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC})+2IA^2+IB^2+IC^2. \end{aligned}$$

Chọn điểm $I$ sao cho $2\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}=\vec{0} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}=\vec{0} \Leftrightarrow 4\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\vec{0}$.
Suy ra tọa độ điểm $I$ là $I(0;1;2)$.
Khi đó $S=4NI^2+2IA^2+IB^2+IC^2$, do đó $S$ nhỏ nhất khi $N$ là hình chiếu của $I$ lên mặt phẳng $(P)$.

PTĐT đi qua $I$ và vuông góc với mặt phẳng $(P)$ là $\begin{cases} x=0+t \\ y=1-t \\ z=2+t. \end{cases}$

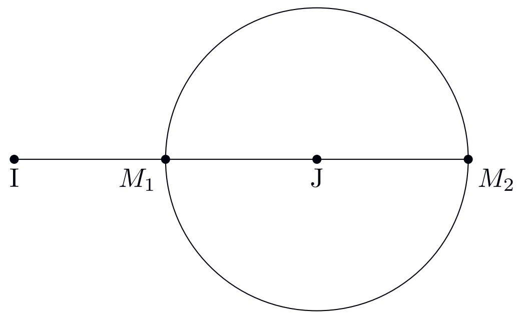
Tọa độ điểm $N(t;1-t;2+t)\in(P) \Rightarrow t-1+t+2+t+2=0 \Leftrightarrow t=-1 \Rightarrow N(-1;2;1)$.

Chọn đáp án A

**CÂU 8.** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon (x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=9$ và hai điểm $A(4;3;1)$, $B(3;1;3)$; $M$ là điểm thay đổi trên $(S)$. Gọi $m,n$ lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P^2=2MA^2-MB^2$. Xác định $(m-n)$.

A 64. B 68. C 60. D 48.

**Lời giải.**



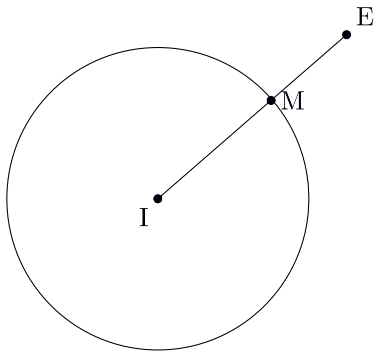

Gọi $I$ là điểm thỏa mãn $2\overrightarrow{IA}-\overrightarrow{IB}=\vec{0} \Rightarrow I(2x_A-x_B;2y_A-y_B;2z_A-z_B) \Rightarrow I(5;5;-1)$.
Suy ra $I$ là điểm cố định. Vậy $P$ đạt giá trị nhỏ nhất khi $MI$ đạt giá trị nhỏ nhất, $P$ đạt giá trị lớn nhất khi $MI$ đạt giá trị lớn nhất.
$\Rightarrow (S)\colon (x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=9$ có tâm $J(1;2;-1)$ và bán kính $R=3$.
Ta có $IJ=5$ và $M$ là điểm thay đổi trên $(S)$. Do đó
$\min MI=IM_1=IJ-R=5-3=2$ và $\max MI=IM_2=IJ+R=5+3=8 \Rightarrow m-n=8^2-2^2=60$.

Chọn đáp án C

**CÂU 9.** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;-2;4)$, $B(-3;3;-1)$ và mặt cầu $(S)\colon (x-1)^2+(y-3)^2+(z-3)^2=3$. Xét điểm $M$ thay đổi thuộc mặt cầu $(S)$, giá trị nhỏ nhất của $2MA^2+3MB^2$ bằng

A 103. B 108. C 105. D 100.

**Lời giải.**

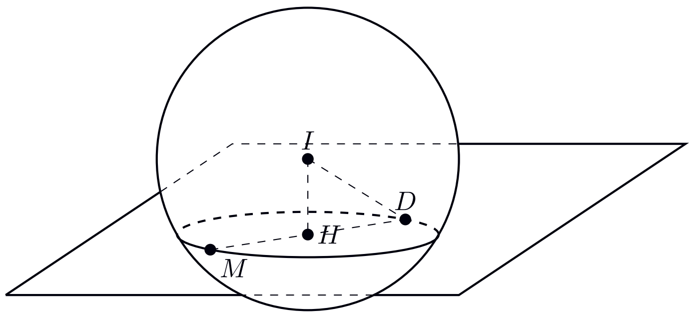



Mặt cầu $(S)$ có tâm $I(1;3;3)$ bán kính $R=\sqrt{3}$.
Gọi $E$ là điểm thỏa mãn: $2\overrightarrow{EA}+3\overrightarrow{EB}=\vec{0}$. Suy ra $E(-1;1;1)$.
Xét $P=2MA^2+3MB^2=2(\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{EA})^2+3(\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{EB})^2=5ME^2+2EA^2+3EB^2$.
$P$ đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi $ME$ đạt giá trị nhỏ nhất và $IE=2\sqrt{3}>R$.
Suy ra điểm $E$ nằm ngoài mặt cầu nên $ME$ nhỏ nhất bằng
$IE-R=2\sqrt{3}-\sqrt{3}=\sqrt{3}$.
Vậy $P=2MA^2+3MB^2=5ME^2+2EA^2+3EB^2=105$.
Chọn đáp án C ............................................................ □

**CÂU 10.** Trong KG $Oxyz$, cho bốn điểm $A(1;0;0)$, $B(2;1;3)$, $C(0;2;-3)$, $D(2;0;\sqrt{7})$. Gọi $M$ là điểm thuộc mặt cầu $(S)\colon (x+2)^2+(y-4)^2+z^2=39$ thỏa mãn $MA^2+2\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC}=8$. Biết rằng đoạn thẳng $MD$ đạt giá trị lớn nhất. Tìm giá trị lớn nhất đó.

Ⓐ $\sqrt{7}$. Ⓑ $2\sqrt{7}$. Ⓒ $3\sqrt{7}$. Ⓓ $4\sqrt{7}$.

**Lời giải.**




Mặt cầu $(S)\colon (x+2)^2+(y-4)^2+z^2=39$ có tâm là $I(-2;4;0)$, bán kính $R=\sqrt{39}$.
Gọi $M(x;y;z)\in(S)$. Ta có: $x^2+y^2+z^2=19-4x+8y$.
$MA^2=(x-1)^2+y^2+z^2=20-6x+8y$.
$\overrightarrow{MB}=(2-x;1-y;3-z)$; $\overrightarrow{MC}=(-x;2-y;-3-z)$.
$\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MC}=-2x+x^2+2-3y+y^2-9+z^2=19-4x+8y-2x-3y-7=-6x+5y+12$.
Suy ra $MA^2+2\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MC}=-18x+18y+44$.
Theo giả thiết $MA^2+2\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MC}=8\Leftrightarrow -18x+18y+44=8\Leftrightarrow -x+y+2=0$. Do đó $M\in(P):-x+y+2=0$.
Ta có $\mathrm{d}(I;(P))=\dfrac{|8|}{\sqrt{2}}=\sqrt{32}<\sqrt{39}$ nên mặt phẳng $(P)$ cắt mặt cầu $(S)$ theo giao tuyến là đường tròn $(C)$có bán kính $R_1$ với $R_1=\sqrt{R^2-d^2}=\sqrt{39-32}=\sqrt{7}$.
Mặt khác ta có $\begin{cases} D,M\in(P)\\ D,M\in(S)\end{cases}\Rightarrow D,M\in(C)$.
Do đó độ dài $MD$ lớn nhất bằng $2R_1=2\sqrt{7}$.
Chọn đáp án B ............................................................ □

**CÂU 11.** Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho 5 điểm $A(1;0;0)$, $B(-1;1;0)$, $C(0;-1;0)$, $D(0;1;0)$, $E(0;3;0)$. $M$ là điểm thay đổi trên mặt cầu $(S)\colon x^2+(y-1)^2+z^2=1$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P=2\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|+3\left|\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{ME}\right|$ là

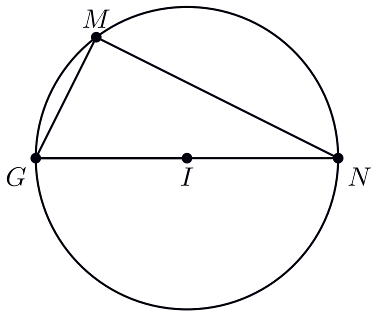
Ⓐ 12. Ⓑ $12\sqrt{2}$. Ⓒ 24. Ⓓ $24\sqrt{2}$.

**Lời giải.**

Mặt cầu $(S)$ có tâm $I(0;1;0)$ bán kính $R=1$.
Gọi trọng tâm tam giác $ABC$ là $G(0;0;0)$, trung điểm $DE$ là $N(0;2;0)$.

do $G, N$ đều nằm trên $(S)$ và $I$ là trung điểm $GN$ nên $GN$ là đường kính của $(S)$.

$$\begin{aligned} P &= 2\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|+3\left|\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{ME}\right| \\ &= 2\left|3\overrightarrow{MG}\right|+3\left|\overrightarrow{MN}\right| \\ &= 6MG+6MN=6(MG+MN) \end{aligned}$$

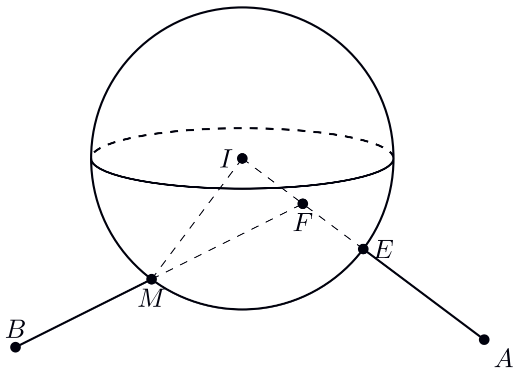



Ta có: $(MG+MN)^2 \leq 2(MG^2+MN^2)=2GN^2=8$. Suy ra $MG+MN \leq 2\sqrt{2}$.
Vậy giá trị lớn nhất của $P$ là $12\sqrt{2}$.
Chọn đáp án B ........................................................................................ □

**CÂU 12.** Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon (x+1)^2+(y-4)^2+z^2=8$ và điểm $A(3;0;0); B(4;2;1)$. Điểm $M$ thay đổi nằm trên mặt cầu, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=MA+2MB$.

**A** $P=2\sqrt{2}$. **B** $P=3\sqrt{2}$. **C** $P=4\sqrt{2}$. **D** $P=6\sqrt{2}$.

**Lời giải.**




Nhận xét: điểm $A, B$ nằm ngoài mặt cầu $(S)$. Mặt cầu $(S)$ có tâm $I(-1;4;0), R=2\sqrt{2}$.
Ta có: $IA=4\sqrt{2}=2R, E=IA\cap(S) \Rightarrow E(1;2;0)$.
Gọi $F$ là trung điểm của $IE \Rightarrow F(0;3;0)$. Tam giác $IFM$ và $IMA$ có $\widehat{AIM}$ chung và $\dfrac{IF}{IM}=\dfrac{1}{2}=\dfrac{IM}{IA} \Rightarrow \Delta AIM \sim \Delta MIF$.
Suy ra $\dfrac{MA}{FM}=\dfrac{AI}{MI}=2 \Rightarrow MA=2MF$.
Ta có: $MA+2MB=2(MF+MB)\geq 2FB=6\sqrt{2}$.
Vì $F$ nằm trong $(S)$ và $B$ nằm ngoài $(S)$ nên dấu $''=''$ xảy ra khi $M=BF\cap(S)$.
Vậy giá trị nhỏ nhất là $P=6\sqrt{2}$.
Chọn đáp án D ........................................................................................ □

**CÂU 13.** Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon (x+1)^2+(y-4)^2+z^2=8$ và điểm $A(3;0;0)$, $B(4;2;1)$. Điểm $M$ thay đổi nằm trên mặt cầu, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=MA+2MB$.

**A** $P=2\sqrt{2}$. **B** $P=3\sqrt{2}$. **C** $P=4\sqrt{2}$. **D** $P=6\sqrt{2}$.

**Lời giải.**

Giả sử $M(x;y;z)$. Ta có: $\overrightarrow{AM}=(x-3;y;z)$, $\overrightarrow{BM}=(x-4;y-2;z-1)$.
Và $(x+1)^2+(y-4)^2+z^2=8 \Leftrightarrow 3\left[(x+1)^2+(y-4)^2+z^2-8\right]=0$.

Ta có:

$$\begin{aligned}
P &= MA + 2MB\\
P &= \sqrt{(x-3)^2+y^2+z^2} + 2\sqrt{(x-4)^2+(y-2)^2+(z-1)^2}\\
P &= \sqrt{(x-3)^2+y^2+z^2} + 3\left[(x+1)^2+(y-4)^2+z^2-8\right] + 2\sqrt{(x-4)^2+(y-2)^2+(z-1)^2}\\
P &= \sqrt{4x^2+4y^2-24y+4z^2+36} + 2\sqrt{(x-4)^2+(y-2)^2+(z-1)^2}\\
P &= 2\left[\sqrt{x^2+(y-3)^2+z^2} + \sqrt{(x-4)^2+(y-2)^2+(z-1)^2}\right]\\
P &= 2\left[\sqrt{x^2+(y-3)^2+z^2} + \sqrt{(4-x)^2+(2-y)^2+(1-z)^2}\right]
\end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức Minkowxki:
$\sqrt{a^2+b^2+c^2} + \sqrt{d^2+e^2+f^2} \geq \sqrt{(a+d)^2+(b+e)^2+(c+f)^2}$.
Dấu bằng xảy ra khi: $\dfrac{a}{d} = \dfrac{b}{e} = \dfrac{a}{f} > 0$.
$\Rightarrow P \geq 2\sqrt{(x+4-x)^2+(y-3+2-y)^2+(z+1-z)^2} = 2\sqrt{4^2+(-1)^2+(1)^2} = 6\sqrt{2}$.
Dấu bằng xảy ra khi: $\begin{cases}\dfrac{4}{4-x} = \dfrac{y-3}{2-y} = \dfrac{z}{1-z} = t > 0\\ (x+1)^2+(y-4)^2+z^2 = 8\end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{4t}{t+1}\\ y = \dfrac{2t+3}{t+1}\\ z = \dfrac{t}{t+1}\\ \left(\dfrac{5t+1}{t+1}\right)^2 + \left(\dfrac{-2t-1}{t+1}\right)^2 + \left(\dfrac{t}{t+1}\right)^2 = 8\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{4t}{t+1}\\ y = \dfrac{2t+3}{t+1}\\ z = \dfrac{t}{t+1}\\ 22t^2-2t-6 = 0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{4+4\sqrt{133}}{23+\sqrt{133}}\\ y = \dfrac{34+\sqrt{133}}{23+\sqrt{133}}\\ z = \dfrac{1+\sqrt{133}}{23+\sqrt{133}}\\ t = \dfrac{1+\sqrt{133}}{22}\end{cases}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức là $6\sqrt{2}$.

Chọn đáp án D ........................................................................................ □

**CÂU 14.** Trong KG $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon (x-1)^2+y^2+(z-2)^2 = 10$ và hai điểm $A(1;2;-4)$ và $B(1;2;14)$. Điểm $M$ thay đổi trên mặt cầu $(S)$. Giá trị nhỏ nhất của $(MA+2MB)$ bằng

Ⓐ $2\sqrt{82}$. Ⓑ $3\sqrt{79}$. Ⓒ $5\sqrt{79}$. Ⓓ $3\sqrt{82}$.

**Lời giải.**

$(S)$ có tâm $I(1;0;2)$ và bán kính $R = \sqrt{10}$.
Ta có $IA = 2\sqrt{10} = 2R$ nên tồn tại điểm $C$ cố định sao cho $MA = 2MC$ $\forall M \in (S)$ (1).
Thật vậy, gọi $(a;b;c)$ là tọa độ điểm $C$. Khi đó, với mọi điểm $M(x;y;z) \in (S)$
$\Rightarrow x^2+y^2+z^2 = 2x+4z+5$, ta có:
$\bullet MA^2 = (x-1)^2+(y-2)^2+(z+4)^2 = x^2+y^2+z^2-2x-4y+8z+21$
$= 2x+4z+5-2x-4y+8z+21 = -4y+12z+26$
$\bullet MC^2 = (x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2 = x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+a^2+b^2+c^2$.
$= 2x+4z+5-2ax-2by-2cz+a^2+b^2+c^2 = (2-2a)x-2by+(4-2c)z+a^2+b^2+c^2+5$.
Nên (1) $\Leftrightarrow MA^2 = 4MC^2$ $\forall M \in (S)$
$\Leftrightarrow -4y+12z+26 = 4\left[(2-2a)x-2by+(4-2c)z+a^2+b^2+c^2+5\right], \forall x,y,z$

$$\begin{cases}4(2-2a) = 0\\ 4(-2b)4\\ 4(4-2c) = 12\\ 4(a^2+b^2+c^2+5) = 26\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1\\ b = \dfrac{1}{2}\\ c = \dfrac{1}{2}\end{cases} \Rightarrow C\left(1;\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right).$$

Lúc này, $IC = \dfrac{\sqrt{10}}{2} < R < IB = 2\sqrt{37}$ nên $C$ nằm trong $(S)$ còn $B$ nằm ngoài $(S)$ và

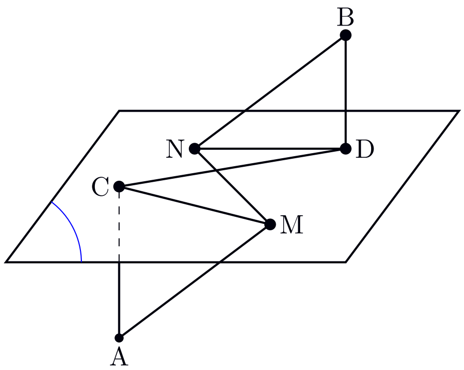
$MA + 2MB = 2MC + 2MB = 2(MC + MB) \geq 2BC = 3\sqrt{82}$.
Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow M$ là giao điểm của đoạn $BC$ và mặt cầu $(S)$.
Vậy $\min(MA + 2MB) = 3\sqrt{82}$.

Chọn đáp án D

**CÂU 15.** Trong KG $Oxyz$, cho hai điểm $A(-1;0;0)$ và $B(2;3;4)$. Gọi $(P)$ là mặt phẳng chứa đường tròn giao tuyến của hai mặt cầu $(S_1)\colon (x-1)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 4$ và $(S_2)\colon x^2 + y^2 + z^2 + 2y - 2 = 0$. Xét $M$, $N$ là hai điểm bất kỳ thuộc mặt phẳng $(P)$ sao cho $MN = 1$. Giá trị nhỏ nhất của $AM + BN$ bằng

A 5. B 3. C 6. D 4.

**Lời giải.**




Xét hệ $\begin{cases}(x-1)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 4 \\ x^2 + y^2 + z^2 + 2y - 2 = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 2 = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 + 2y - 2 = 0\end{cases} \Rightarrow x = 0$.
Vậy $(P) : x = 0$ ((P) chính là mặt phẳng $(Oyz)$).
Gọi $C(0;0;0)$ và $D(0;3;4)$ lần lượt là hình chiếu vuông góc của $A(-1;0;0)$ và $B(2;3;4)$trên mặt phẳng $(P)$. Suy ra $AC = 1$, $BD = 2$, $CD = 5$.
Áp dụng bất đẳng thức $\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{c^2 + d^2} \geq \sqrt{(a+c)^2 + (b+d)^2}$, ta được

$$\begin{aligned} AM + BN &= \sqrt{AC^2 + CM^2} + \sqrt{BD^2 + DN^2} \\ &\geq \sqrt{(AC + BD)^2 + (CM + DN)^2} \\ &\geq \sqrt{9 + (CM + DN)^2} \end{aligned}$$

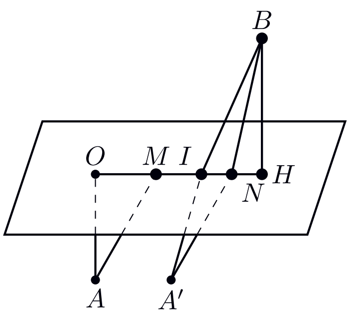
Lại có $CM + MN + ND \geq CD = 5$ nên suy ra $CM + ND \geq 4$. Do đó $AM + BN \geq 5$.
Đẳng thức xảy ra khi $C$, $M$, $N$, $D$ thẳng hàng theo thứ tự đó và $\dfrac{AC}{CM} = \dfrac{BD}{DN}$
Tức là $M\left(0; \dfrac{4}{5}; \dfrac{16}{15}\right)$ và $N\left(0; \dfrac{7}{5}; \dfrac{28}{15}\right)$.
Vậy giá trị nhỏ nhất của $AM + BN$ là 5.

Chọn đáp án A

**CÂU 16.** Trong KG $Oxyz$, cho các điểm $A(0;0;2)$ và $B(3;4;1)$. Gọi $(P)$ là mặt phẳng chứa đường tròn giao tuyến của hai mặt cầu $(S_1)\colon (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z+3)^2 = 25$ với $(S_2)\colon x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 14 = 0$. $M$, $N$ là hai điểm thuộc $(P)$ sao cho $MN = 1$. Giá trị nhỏ nhất của $AM + BN$ là

A $\sqrt{34} - 1$. B 5. C $\sqrt{34}$. D 3.

**Lời giải.**



Từ $\begin{cases}(S_1)\colon (x-1)^2+(y-1)^2+(z+3)^2=25(1)\\(S_2)\colon x^2+y^2+z^2-2x-2y-14=0(2)\end{cases}$

Lấy (1) trừ (2), ta được $6z=0$ hay $(P)\colon z=0 \Rightarrow (P)\equiv(Oxy)$.

Dễ thấy $A$, $B$ nằm khác phía đối với $(P)$, hình chiếu của $A$ trên $(P)$ là $O$, hình chiếu của $B$ trên $(P)$ là $H(3;4;0)$.

Lấy $A'$ sao cho $\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{MN}$.

Khi đó $AM+BN=A'N+BN\geq A'B$ và cực trị chỉ xảy ra khi $\overrightarrow{MN}$ cùng phương $\overrightarrow{OH}$.

Lấy $\overrightarrow{MN}=\dfrac{\overrightarrow{OH}}{\left|\overrightarrow{OH}\right|}=\left(\dfrac{3}{5};\dfrac{4}{5};0\right)$.

Khi đó vì $\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{MN}$ nên $A'\left(\dfrac{3}{5};\dfrac{4}{5};0\right)$. Do đó $AM+BN=A'N+BN\geq A'B=5$.

Chọn đáp án B ........................................ □

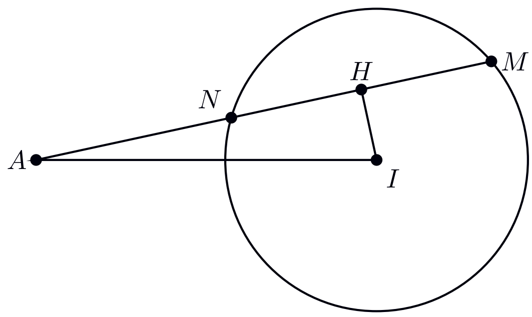
**CÂU 17.** Trong KG $Oxyz$ cho mặt cầu $(S)$ có phương trình $x^2+y^2+z^2-4x+2y-2z-3=0$ và điểm $A(5;3;-2)$. Một đường thẳng $d$ thay đổi luôn đi qua $A$ và luôn cắt mặt cầu tại hai điểm phân biệt $M,N$. Tính giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S=AM+4AN$.

**A** $S_{\min}=30$. **B** $S_{\min}=20$. **C** $S_{\min}=\sqrt{34}-3$. **D** $S_{\min}=5\sqrt{34}-9$.

**Lời giải.**

Mặt cầu $(S)$ có tâm $I(2;-1;1)$, bán kính $R=3$.

$AI=\sqrt{34}>R\Rightarrow A$ nằm ngoài mặt cầu $(S)$.




Do hai điểm $M,N$ nằm ở vị trí hai đầu một dây cung nên để $S_{\min}$ thì $N$ nằm giữa $A$ và $M$. Gọi $H$ là trung điểm $MN\Rightarrow IH\perp MN, NH=\dfrac{1}{2}MN$.

$S=4(AH-NH)+AH+NH=5AH-3NH$

$S=5\sqrt{AI^2-IH^2}-3\sqrt{R^2-IH^2}=5\sqrt{34-x^2}-3\sqrt{9-x^2}, x=IH$

Xét hàm số $f(x)=5\sqrt{34-x^2}-3\sqrt{9-x^2}, (0\leq x<3)$

$f'(x)=\dfrac{-5x}{\sqrt{34-x^2}}+\dfrac{3x}{\sqrt{9-x^2}}=x\left(\dfrac{-5}{\sqrt{34-x^2}}+\dfrac{3}{\sqrt{9-x^2}}\right)$

Xét $\left(\dfrac{-5}{\sqrt{34-x^2}}+\dfrac{3}{\sqrt{9-x^2}}\right)>0$

$\Leftrightarrow 5\sqrt{9-x^2}<3\sqrt{34-x^2}\Leftrightarrow 225-25x^2<9\cdot 34-9x^2\Leftrightarrow 16x^2+81>0$ (luôn đúng).

Suy ra $f'(x)\geq 0, \forall x\in[0;3), f'(x)=0\Leftrightarrow x=0\Rightarrow f(x)$ đồng biến trên $[0;3)$

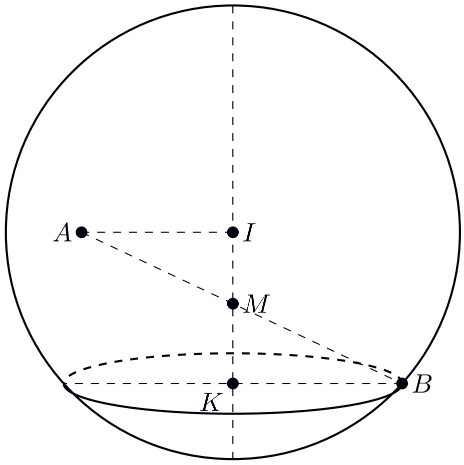
Suy ra $\min\limits_{[0;3)} f(x)=f(0)=5\sqrt{34}-9$.

Chọn đáp án D ........................................ □

**CÂU 18.** Trong KG $Oxyz$ cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z-3}{4}$ và mặt cầu $(S)\colon (x+3)^2+(y+4)^2+(z+5)^2=729$. Cho biết điểm $A(-2;-2;-7)$, điểm $B$ thuộc giao tuyến của mặt cầu $(S)$ và mặt phẳng $(P)\colon 2x+3y+4z-107=0$. Khi điểm $M$ di động trên đường thẳng $d$ giá trị nhỏ nhất của biểu thức $MA+MB$ bằng

**A** $5\sqrt{30}$. **B** 27. **C** $5\sqrt{29}$. **D** $\sqrt{742}$.

**Lời giải.**

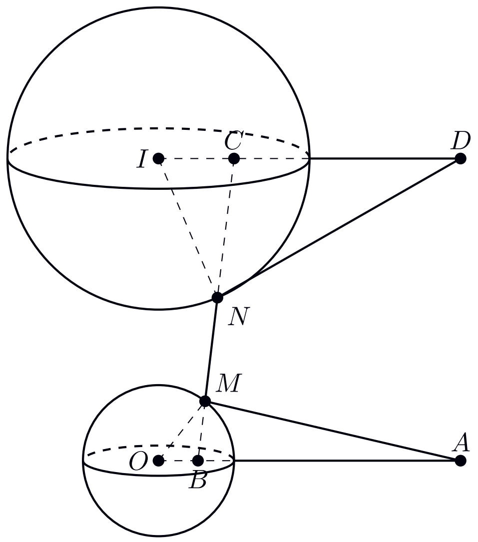



Mặt cầu $(S)$ có tâm $I(-3;-4;-5)$ và bán kính $R=27$.
Đường thẳng $d$ có 1 véc-tơ chỉ phương là $\vec{u}=(2;3;4) \Rightarrow d \perp (P)$.
Gọi $K$ là giao điểm của mặt phẳng $(P)$ và đường thẳng $d$. Vì $I \in d$ nên $K$ là tâm của đường tròn giao tuyến và $KB \perp d$.
Ta có $\overrightarrow{IA}=(1;2;-2) \Rightarrow IA=3$ và $\overrightarrow{IA}.\vec{u}=0 \Rightarrow IA \perp d$.
Ta tính được $IK=\mathrm{d(I,(P))}=\dfrac{|2\cdot(-3)+3\cdot(-4)+4(-5)-107|}{\sqrt{2^2+3^2+4^2}}=5\sqrt{29}$
Và $KB=\sqrt{R^2-IK^2}=2$.
Do $M$ di động trên đường thẳng $d$ (trục của đường tròn giao tuyến) và $B$ thuộc đường tròn giao tuyến nên biểu thức $MA+MB$ nhỏ nhất khi và chỉ khi $M=AB\cap d$.
Khi đó, ta có $\dfrac{MI}{MK}=\dfrac{IA}{KB}=\dfrac{3}{2}$ và $MI+MK=IK=5\sqrt{29}$.
Suy ra $MI=3\sqrt{29}$, $MK=2\sqrt{29}$.
Ta có $AM=\sqrt{IA^2+MI^2}=3\sqrt{30} \Rightarrow BM=\dfrac{2}{3}AM=2\sqrt{30}$.
Vậy giá trị nhỏ nhất của $MA+MB$ là $AM+BM=3\sqrt{30}+2\sqrt{30}=5\sqrt{30}$.
Cách 2: Ta có $(S)$ có tâm $I(-3;-4;-5)$, bán kính $R=27$.
Dễ thấy $d$ đi qua $I(-3;-4;-5)$và vuông góc với $(P)$.
$(P)$ cắt $(S)$ theo đường tròn có bán kính $r=2$. $M\in d \Leftrightarrow M(1+2t;2+3t;3+4t)$.
Ta có $T=MA+MB=MA+\sqrt{MH^2+r^2}$.
Lại có $MH=d(M;(P))=\dfrac{|29t-87|}{\sqrt{29}}=\left|\sqrt{29}t-3\sqrt{29}\right|$.
Suy ra
$T=\sqrt{29t^2+116t+125}+\sqrt{29(t-3)^2+4}$
$T=\sqrt{29}\sqrt{(t+2)^2+\dfrac{9}{29}}+\sqrt{29}\sqrt{(t-3)^2+\dfrac{4}{29}}$.
Xét $\vec{u}=\left(t+2;\dfrac{3}{\sqrt{29}}\right)$, $\vec{v}=\left(3-t;\dfrac{2}{\sqrt{29}}\right) \Rightarrow \vec{u}+\vec{v}=\left(5;\dfrac{5}{\sqrt{29}}\right)$.
Do đó $T=\sqrt{29}(|\vec{u}|+|\vec{v}|)\geq\sqrt{29}\,|\vec{u}+\vec{v}|=5\sqrt{50}$.
Chọn đáp án A ..................................................... □

**CÂU 19.** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt cầu $(S_1)\colon x^2+y^2+z^2=1$, $(S_2)\colon x^2+(y-4)^2+z^2=4$ và các điểm $A(4;0;0)$, $B\left(\dfrac{1}{4};0;0\right)$, $C(1;4;0)$, $D(4;4;0)$. Gọi $M$ là điểm thay đổi trên $(S_1)$, $N$ là điểm thay đổi trên $(S_2)$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $Q=MA+2ND+4MN+4BC$ là

**A** $2\sqrt{265}$. **B** $\sqrt{265}$. **C** $3\sqrt{265}$. **D** $4\sqrt{265}$.

**Lời giải.**

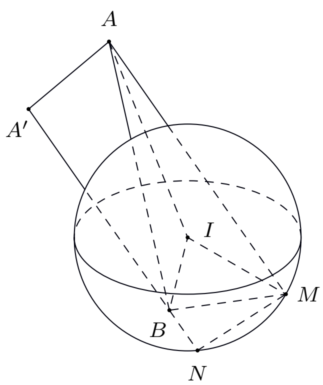



$(S_1): x^2+y^2+z^2=1$ nên $(S_1)$ có tâm $O(0;0;0)$ và bán kính $R_1=1$.
$(S_2): x^2+(y-4)^2+z^2=4$ nên $(S_2)$ có tâm $I(0;4;0)$ và bán kính $R_2=2$.
Vậy các điểm $A(4;0;0)$, $B\left(\dfrac{1}{4};0;0\right)$, $C(1;4;0)$, $D(4;4;0)$, $O(0;0;0)$ và $I(0;4;0)$ cùng thuộc $(Oxy)$.
Nhận thấy $OB\cdot OA=OM^2$ suy ra $OM$ là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác $MAB$.
Do đó $\Delta MOB$ đồng dạng $\Delta AOM$.
$\Rightarrow \dfrac{MA}{MB}=\dfrac{OA}{OM}=4\Rightarrow MA=4MB$.
Hoàn toàn tương tự $\dfrac{ND}{NC}=\dfrac{DI}{NI}=2\Rightarrow ND=2NC$.
Xét:
$Q=MA+2ND+4MN+4BC$
$Q=4(MB+NC+MN)+4BC\geq 4BC+4BC=8BC=2\sqrt{265}$.
Chọn đáp án A ............................................................................................ □

**CÂU 20.** Trong KG $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)$: $x^2+y^2+z^2-2x-4y-4=0$ và hai điểm $A(4;2;4)$, $B(1;4;2)$. $MN$ là dây cung của mặt cầu thỏa mãn $\overrightarrow{MN}$ cùng hướng với $\vec{u}=(0;1;1)$ và $MN=4\sqrt{2}$. Tính giá trị lớn nhất của $|AM-BN|$.

Ⓐ $\sqrt{41}$. Ⓑ $4\sqrt{2}$. Ⓒ $7$. Ⓓ $\sqrt{17}$.

**Lời giải.**




Tâm $I(1;2;0)$, bán kính $R=3$.
Ta có $\overrightarrow{IA}=(3;0;4)\Rightarrow IA=5$, $\overrightarrow{IB}=(0;2;2)\Rightarrow IB=2\sqrt{2}$ nên điểm $A(4;2;4)$nằm ngoài mặt cầu $(S)$ và điểm $B(1;4;2)$ nằm trong mặt cầu $(S)$.
Do $\overrightarrow{MN}$ cùng hướng với $\vec{u}=(0;1;1)$ suy ra $\overrightarrow{MN}=(0;k;k)$ , $k>0$ do $MN=4\sqrt{2}$ suy ra $\overrightarrow{MN}=(0;4;4)$.
Gọi $A'=T_{\overrightarrow{MN}}(A)$, suy ra $A'=(4;6;8)$.
Khi đó $AMNA'$ là hình bình hành nên $AM=A'N$
Ta có $|AM-BN|=|A'N-BN|\leq A'B$.
Dấu "="xảy ra khi $A'$, $N$, $B$ thẳng hàng $\Leftrightarrow$ $N$ là giao điểm của mặt cầu với đường thẳng $A'B$. (Điểm $N$ luôn tồn tại).
$\overrightarrow{A'B}=(-3;-2;-6)$ suy ra $A'B=\sqrt{(-3)^2+(-2)^2+(-6)^2}=7$.
Vậy $|AM-BN|_{\min}=A'B=7$.
Chọn đáp án C ............................................................................................ □

**CÂU 21.** Trong KG $Oxyz$, gọi điểm $M(a;b;c)$ (với $a$, $b$, $c$ là các phân số tối giản) thuộc mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2-2x-4y-4z-7=0$ sao cho biểu thức $T=2a+3b+6c$ đạt giá trị lớn nhất. Khi đó giá trị biểu thức $P=2a-b+c$ bằng

**A** $\dfrac{12}{7}$. **B** $8$. **C** $6$. **D** $\dfrac{51}{7}$.

**Lời giải.**

$x^2+y^2+z^2-2x-4y-4z-7=0 \Leftrightarrow (x-1)^2+(y-2)^2+(z-2)^2=16$.
$M(a;b;c)\in(S) \Leftrightarrow (a-1)^2+(b-2)^2+(c-2)^2=16$.
Ta có $|2(a-1)+3(b-2)+6(c-2)| \le \sqrt{(2^2+3^2+6^2)\cdot[(a-1)^2+(b-2)^2+(c-2)^2]}$.
$\Leftrightarrow |2a+3b+6c-20| \le 28 \Rightarrow 2a+3b+6c-20\le 28 \Rightarrow 2a+3b+6c\le 48$.

Dấu "="xảy ra khi $\begin{cases}2a+3b+6c=48\\ \dfrac{a-1}{2}=\dfrac{b-2}{3}\\ \dfrac{a-1}{2}=\dfrac{c-2}{6}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2a+3b+6c=48\\ 3a-2b=-1\\ 3a-c=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=\dfrac{15}{7}\\ b=\dfrac{26}{7}\\ c=\dfrac{38}{7}.\end{cases}$

Vậy $P=2a-b+c=2\cdot\dfrac{15}{7}-\dfrac{26}{7}+\dfrac{38}{7}=6$.

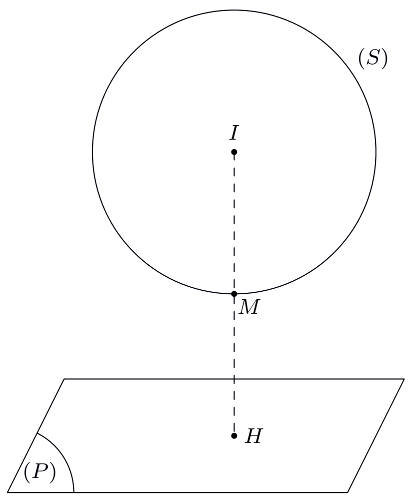
Chọn đáp án C ................................................................ □

**CÂU 22.** Cho $x$, $y$, $z$, $a$, $b$, $c$ là các số thực thay đổi thỏa mãn $(x+1)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=1$ và $a+b+c=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P=(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2$.

**A** $\sqrt{3}-1$. **B** $\sqrt{3}+1$. **C** $4-2\sqrt{3}$. **D** $4+2\sqrt{3}$.

**Lời giải.**

Gọi $M(x;y;z) \Rightarrow M$ thuộc mặt cầu $(S)$tâm $I(-1;-1;2)$ bán kính $R=1$.
Gọi $H(a;b;c) \Rightarrow H$ thuộc mặt phẳng $(P)\colon x+y+z-3=0$
Ta có $\mathrm{d}(I,(P))=\dfrac{|-1-1+2-3|}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}>R \Rightarrow (P)$và $(S)$ không có điểm chung.
$P=(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=MH^2$ đạt giá trị nhỏ nhất khi vị trí của $M$ và $H$ như hình vẽ
Khi đó $HI=\mathrm{d}(I,(P))=\sqrt{3} \Rightarrow HM=HI-R=\sqrt{3}-1$
Do đó $P_{\min}=\left(\sqrt{3}-1\right)^2=4-2\sqrt{3}$.




Chọn đáp án C ................................................................ □

**CÂU 23.** Trong KG $Oxyz$, cho hai điểm $A(-2;2;-2)$; $B(3;-3;3)$. Điểm $M$ trong không gian thỏa mãn $\dfrac{MA}{MB}=\dfrac{2}{3}$. Khi đó độ dài $OM$ lớn nhất bằng

**A** $6\sqrt{3}$. **B** $12\sqrt{3}$. **C** $\dfrac{5\sqrt{3}}{2}$. **D** $5\sqrt{3}$.

**Lời giải.**

Gọi $M(x;y;z)$. Ta có

$$\begin{aligned}\frac{MA}{MB}=\frac{2}{3} &\Leftrightarrow 9MA^2=4MB^2\\ &\Leftrightarrow 9\left[(x+2)^2+(y-2)^2+(z+2)^2\right]=4\left[(x-3)^2+(y+3)^2+(z-3)^2\right]\\ &\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2+12x-12y+12z=0\\ &\Leftrightarrow (x+6)^2+(y-6)^2+(z+6)^2=108.\end{aligned}$$

Như vậy, điểm $M$ thuộc mặt cầu $(S)$ tâm $I(-6;6;-6)$ và bán kính $R=\sqrt{108}=6\sqrt{3}$.
Do đó $OM$ lớn nhất bằng $OI+R=\sqrt{(-6)^2+6^2+(-6)^2}+6\sqrt{3}=12\sqrt{3}$.

Chọn đáp án B ................................................................ □

**CÂU 24.** Trong KG $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2+2x-4y-2z+\dfrac{9}{2}=0$ và hai điểm $A(0;2;0)$, $B(2;-6;-2)$. Điểm $M(a;b;c)$ thuộc $(S)$ thỏa mãn $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}$ có giá trị nhỏ nhất. Tổng $a+b+c$ bằng

(A) $-1$. (B) $1$. (C) $3$. (D) $2$.

**Lời giải.**

$(x^2+y^2+z^2+2x-4y-2z+\dfrac{9}{2}=0 \Leftrightarrow (x+1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=\dfrac{3}{2}$.

Mặt cầu $(S)$ có tâm $I(-1;2;1)$, bán kính $R=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

Vì $IA=\sqrt{2}>R$ và $IB=\sqrt{82}>R$ nên hai điểm $A$, $B$ nằm ngoài mặt cầu $(S)$.

Gọi $K$ là trung điểm đoạn thẳng $AB$ thì $K(1;-2;-1)$ và $K$ nằm ngoài mặt cầu $(S)$.

Ta có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} &= \left(\overrightarrow{MK}+\overrightarrow{KA}\right)\cdot\left(\overrightarrow{MK}+\overrightarrow{KB}\right)\\ &= MK^2+\overrightarrow{MK}\cdot\left(\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{KB}\right)+\overrightarrow{KA}\cdot\overrightarrow{KB}\\ &= MK^2-KA^2.\end{aligned}$$

Suy ra $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}$ nhỏ nhất khi $MK^2$ nhỏ nhất, tức là $MK$ nhỏ nhất.

$IM+MK\ge IK \Rightarrow R+MK\ge IK \Rightarrow MK\ge IK-R$.

Suy ra $MK$ nhỏ nhất bằng $IK-R$, xảy ra khi $I$, $M$, $K$ thẳng hàng và $M$ nằm giữa hai điểm $I$, $K$. Như vậy $M$ là giao điểm của đoạn thẳng $IK$ và mặt cầu $(S)$.

Có $\overrightarrow{IK}=(2;-4;-2)$, $IK=\sqrt{2^2+(-4)^2+(-2)^2}=2\sqrt{6}=4R=4IM$.

Suy ra $\overrightarrow{IK}=4\overrightarrow{IM} \Leftrightarrow \begin{cases}2=4(a+1)\\ -4=4(b-2)\\ -2=4(c-1)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=-\dfrac{1}{2}\\ b=1\\ c=\dfrac{1}{2}.\end{cases}$

Vậy $a+b+c=1$.

Chọn đáp án (B) ............................................................ □

**CÂU 25.** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2=3$. Một mặt phẳng $(\alpha)$ tiếp xúc với mặt cầu $(S)$ và cắt các tia $Ox$, $Oy$, $Oz$ lần lượt tại $A$, $B$, $C$ thỏa mãn $OA^2+OB^2+OC^2=27$. Phương trình mặt phẳng $(\alpha)$ là

(A) $x+y+z+3=0$. (B) $x+y+z-3=0$. (C) $x+2y+3z-3=0$. (D) $x+2y+3z+3=0$.

**Lời giải.**

Gọi $H(a;b;c)$ là tiếp điểm của mặt phẳng $(\alpha)$ và mặt cầu $(S)$.

Từ giả thiết ta có $a$, $b$, $c$ là các số dương.

Mặt khác, $H\in(S)$ nên $a^2+b^2+c^2=3$ hay $OH^2=3\Leftrightarrow OH=\sqrt{3}$. (1)

Mặt phẳng $(\alpha)$ đi qua điểm $H$ và vuông góc với đường thẳng $OH$ nên nhận $\overrightarrow{OH}=(a;b;c)$ làm véctơ pháp tuyến. Do đó, mặt phẳng $(\alpha)$ có phương trình là

$$a(x-a)+b(y-b)+c(z-c)=0\Leftrightarrow ax+by+cz-\left(a^2+b^2+c^2\right)=0\Leftrightarrow ax+by+cz-3=0.$$

Suy ra $A\left(\dfrac{3}{a};0;0\right)$, $B\left(0;\dfrac{3}{b};0\right)$, $C\left(0;0;\dfrac{3}{c}\right)$.

Theo đề $OA^2+OB^2+OC^2=27\Leftrightarrow \dfrac{9}{a^2}+\dfrac{9}{b^2}+\dfrac{9}{c^2}=27\Leftrightarrow \dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}=3$. (2)

Từ (1) và (2) ta có $\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}\right)=9$.

Mặt khác, ta có $\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}\right)\ge 9$ và dấu "="xảy ra khi $a=b=c=1$.

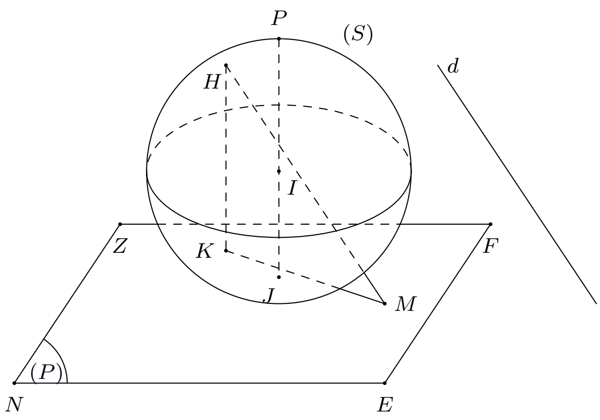
Suy ra phương trình mặt phẳng $(\alpha)$ là $x+y+z-3=0$.

Chọn đáp án (B) ............................................................ □

**CÂU 26.** Trong KG $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon x+y+z-1=0$, đường thẳng $d\colon \dfrac{x-15}{1}=\dfrac{y-22}{2}=\dfrac{z-37}{2}$ và mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2-8x-6y+4z+4=0$. Một đường thẳng $(\Delta)$ thay đổi cắt mặt cầu $(S)$ tại hai điểm $A, B$ sao cho $AB=8$. Gọi $A'$, $B'$ là hai điểm lần lượt thuộc mặt phẳng $(P)$ sao cho $AA'$, $BB'$ cùng song song với $d$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $AA'+BB'$ là

(A) $\dfrac{8+30\sqrt{3}}{9}$. (B) $\dfrac{24+18\sqrt{3}}{5}$. (C) $\dfrac{12+9\sqrt{3}}{5}$. (D) $\dfrac{16+60\sqrt{3}}{9}$.

**Lời giải.**




Mặt cầu $(S)$ có tâm $I(4;3;-2)$ và bán kính $R=5$.
Gọi $H$ là trung điểm của $AB$ thì $IH\perp AB$ và $IH=3$ nên $H$ thuộc mặt cầu $(S')$ tâm $I$ bán kính $R'=3$.
Gọi $M$ là trung điểm của $A'B'$ thì $AA'+BB'=2HM$, $M$ nằm trên mặt phẳng $(P)$.
Mặt khác ta có $\mathrm{d}(I;(P))=\dfrac{4}{\sqrt{3}}<R$ nên $(P)$ cắt mặt cầu $(S)$ và $\sin(d;(P))=\sin\alpha=\dfrac{5}{3\sqrt{3}}$. Gọi $K$ là hình chiếu của $H$ lên $(P)$ thì $HK=HM.\sin\alpha$.
Vậy để $AA'+BB'$ lớn nhất thì $HK$ lớn nhất
$\Leftrightarrow HK$ đi qua $I$ nên $HK_{\max}=R'+\mathrm{d}(I;(P))=3+\dfrac{4}{\sqrt{3}}=\dfrac{4+3\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$.
Vậy $AA'+BB'$ lớn nhất bằng $2\left(\dfrac{4+3\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right)\cdot\dfrac{3\sqrt{3}}{5}=\dfrac{24+18\sqrt{3}}{5}$.
Chọn đáp án B ..........

**CÂU 27.** Trong KG $Oxyz$ cho mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2=1$. Điểm $M\in(S)$ có tọa độ dương; mặt phẳng $(P)$ tiếp xúc với $(S)$ tại $M$ cắt các tia $Ox$; $Oy$; $Oz$ tại các điểm $A$, $B$, $C$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=\left(1+OA^2\right)\left(1+OB^2\right)\left(1+OC^2\right)$ là

Ⓐ 24. Ⓑ 27. Ⓒ 64. Ⓓ 8.

**Lời giải.**

$(S)$ có tâm $(O)$ và bán kính $R=1$.
Theo đề bài ta có $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$, $(a;b;c>0)$ khi đó phương trình mặt phẳng $(P)$ là $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$.
$(P)$ tiếp xúc với $(S)$ tại $M\in(S)$ khi

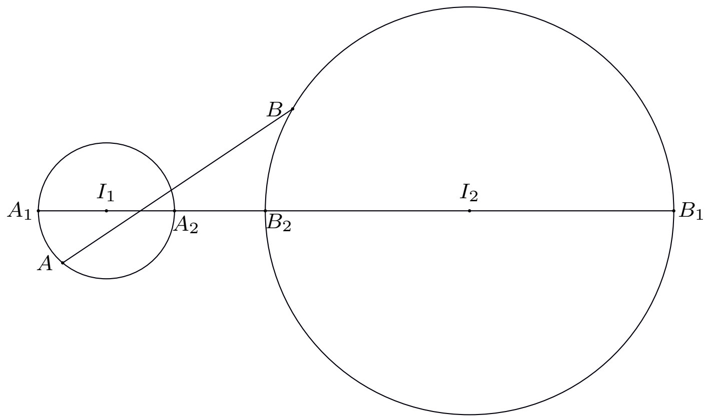
$$\begin{aligned}\mathrm{d}(O;(P))=1\quad&\Leftrightarrow\quad \frac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}}}=1\\&\Leftrightarrow\quad abc=\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}\geq\sqrt{3\sqrt[3]{a^4b^4c^4}}\\&\Leftrightarrow\quad abc\geq 3\sqrt{3}\ (\text{do } a;b;c>0)\quad(1)\end{aligned}$$

Khi đó $T=\left(1+OA^2\right)\left(1+OB^2\right)\left(1+OC^2\right)=\left(1+a^2\right)\left(1+b^2\right)\left(1+c^2\right)$
$\Rightarrow T=1+a^2+b^2+c^2+a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2c^2=1+a^2+b^2+c^2+2a^2b^2c^2$.
Mặt khác $1+a^2+b^2+c^2+2a^2b^2c^2\geq 1+3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}+2a^2b^2c^2\geq 64\quad(2)$
$\Rightarrow T\geq 64$.
Vậy giá trị nhỏ nhất của $T$ là 64 khi (1) và (2) xảy ra dấu "="$\Leftrightarrow a=b=c=\sqrt{3}$.
Chọn đáp án C ..........

**CÂU 28.** Cho $a$, $b$, $c$, $d$, $e$, $f$ là các số thực thỏa mãn $\begin{cases}(d-1)^2+(e-2)^2+(f-3)^2=1\\(a+3)^2+(b-2)^2+c^2=9.\end{cases}$ Gọi giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $F=\sqrt{(a-d)^2+(b-e)^2+(c-f)^2}$ lần lượt là $M$, $m$. Khi đó, $M-m$ bằng

Ⓐ 10. Ⓑ $\sqrt{10}$. Ⓒ 8. Ⓓ $2\sqrt{2}$.

**Lời giải.**




Gọi $A(d,e,f)$ thì $A$ thuộc mặt cầu $(S_1)$: $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=1$ có tâm $I_1(1;2;3)$, bán kính $R_1=1$, $B(a;b;c)$ thì $B$ thuộc mặt cầu $(S_2)$: $(x+3)^2+(y-2)^2+z^2=9$ có tâm $I_2(-3;2;0)$, bán kính $R_2=3$.
Ta có $I_1I_2=5>R_1+R_2 \Rightarrow (S_1)$ và $(S_2)$ không cắt nhau và ở ngoài nhau.
Dễ thấy $F=AB$, $AB$ đạt giá trị lớn nhất khi khi $A\equiv A_1, B\equiv B_1$
$\Rightarrow$ Giá trị lớn nhất bằng $I_1I_2+R_1+R_2=9$.
$AB$ đạt giá trị nhỏ nhất khi $A\equiv A_2, B\equiv B_2$
$\Rightarrow$ Giá trị nhỏ nhất bằng $I_1I_2-R_1-R_2=1$.
Vậy $M-m=8$
Chọn đáp án C ........................................................................................ □

**CÂU 29.** Trong KG $Oxyz$, Cho điểm $A(2t;2t;0)$, $B(0;0;t)$ (với $t>0$). Điểm $P$ di động thỏa mãn $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=3$. Biết rằng có giá trị $t=\dfrac{a}{b}$ với $a,b$ nguyên dương và $\dfrac{a}{b}$ tối giản sao cho $OP$ đạt giá trị lớn nhất bằng 3. Khi đó giá trị của $Q=2a+b$ bằng

**A** 5. **B** 13. **C** 11. **D** 9.

**Lời giải.**

Gọi $P(x;y;z)$, ta có $\overrightarrow{OP}=(x;y;z)$, $\overrightarrow{AP}=(x-2t;y-2t;z)$, $\overrightarrow{BP}=(x;y;z-t)$.
Ta có

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=3\\
\Leftrightarrow\ &3x^2+3y^2+3z^2-4tx-4ty-2tz-3=0\\
\Leftrightarrow\ &x^2+y^2+z^2-\frac{4}{3}tx-\frac{4}{3}ty-\frac{2}{3}tz-1=0
\end{aligned}$$

Nên $P$ thuộc mặt cầu tâm $I\left(\dfrac{2t}{3};\dfrac{2t}{3};\dfrac{t}{3}\right)$, $R=\sqrt{t^2+1}$.
Ta có $OI=t<R$ nên $O$ thuộc phần không gian phía trong mặt cầu.
Để $OP_{\max}$ thì $P$, $I$, $O$ thẳng hàng và $OP=OI+R$.
Suy ra $OP_{\max}=OI+R\Leftrightarrow 3=t+\sqrt{t^2+1}\Leftrightarrow t=\dfrac{4}{3}$.
Suy ra $a=4, b=3$.
Vậy, $Q=2a+b=11$.
Chọn đáp án C ........................................................................................ □

## 23 GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT LIÊN QUAN ĐẾN GÓC VÀ KHOẢNG CÁCH

**Phần I. Mỗi câu hỏi học sinh chọn một trong bốn phương án A, B, C, D.**

**CÂU 1.** Cho $x$, $y$, $z$ là ba số thực thỏa $x^2+y^2+z^2-4x+6y-2z-11=0$. Tìm giá trị lớn nhất của $P=2x+2y-z$.

**A** $\max P=20$. **B** $\max P=-18$. **C** $\max P=18$. **D** $\max P=12$.

**Lời giải.**

Ta có $P=2x+2y-z\Leftrightarrow 2x+2y-z-P=0$. (1)
Lại có $x^2+y^2+z^2-4x+6y-2z-11=0\Leftrightarrow(x-2)^2+(y+3)^2+(z-1)^2=25$. (2)
Xét trong hệ trục tọa độ $Oxyz$, ta thấy (1) là phương trình của một mặt phẳng, gọi là $(\alpha)$ và (2) là phương trình của một mặt cầu $(S)$ tâm $I(2;-3;1)$, bán kính $R=5$.
Giá trị lớn nhất của $P=2x+2y-z$ là giá trị lớn nhất của $P$ để $(\alpha)$ và $(S)$ có điểm chung, điều này tương đương với

$$\mathrm{d}\left(I,(\alpha)\right)\le R\Leftrightarrow\frac{|2\cdot2+2\cdot(-3)-1\cdot1-P|}{\sqrt{2^2+2^2+(-1)^2}}\le5\Leftrightarrow|P+3|\le15\Leftrightarrow-18\le P\le12.$$

Vậy $\max P = 12$.

Chọn đáp án (D) ...

**CÂU 2.** Trong KG $Oxyz$, cho $d\colon \begin{cases} x = 2 \\ y = t \\ z = 1 - t \end{cases}$ và mặt cầu $(S)\colon x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 2z + 5 = 0$. Tọa độ điểm $M$ trên $(S)$ sao cho $\mathrm{d}(M, d)$ đạt giá trị lớn nhất là

(A) $(1; 2; -1)$. (B) $(2; 2; -1)$. (C) $(0; 2; -1)$. (D) $(-3; -2; 1)$.

**Lời giải.**

Ta có $\mathrm{d}(I, d) = 1 = R$ suy ra $(S)$ tiếp xúc với $d$ và tiếp điểm là $H(2; 2; -1)$
Suy ra $H$ là hình chiếu vuông góc của tâm $I$ trên $d$.

Đường thẳng $IH$ có phương trình $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 \\ z = -1 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.

Tọa độ giao điểm của $IH$ và $(S)$ là $A(0; 2; -1)$ và $B \equiv H(2; 2; -1)$.
Ta có $d(A, (d)) = AH = 2 \geq d(B, (P)) = BH = 0$.
$\Rightarrow d(A, (d)) = 2 \geq d(M, (d)) \geq d(B, (d)) = 0$.
Vậy $M(0; 2; -1)$.

Chọn đáp án (C) ...

**CÂU 3.** Trong KG $Oxyz$, cho điểm $A(-3; 3; -3)$ thuộc mặt phẳng $(\alpha)\colon 2x - 2y + z + 15 = 0$ và mặt cầu $(S)\colon (x-2)^2 + (y-3)^2 + (z-5)^2 = 100$. Đường thẳng $\Delta$ qua $A$, nằm trên mặt phẳng $(\alpha)$ cắt $(S)$ tại $A$, $B$. Để độ dài $AB$ lớn nhất thì PTĐT $\Delta$ là

(A) $\dfrac{x+3}{1} = \dfrac{y-3}{4} = \dfrac{z+3}{6}$. (B) $\dfrac{x+3}{16} = \dfrac{y-3}{11} = \dfrac{z+3}{-10}$. (C) $\begin{cases} x = -3 + 5t \\ y = 3 \\ z = -3 + 8t \end{cases}$. (D) $\dfrac{x+3}{1} = \dfrac{y-3}{1} = \dfrac{z+3}{3}$.

**Lời giải.**

Mặt cầu $(S)$ có tâm $I(2; 3; 5)$, bán kính $R = 10$. Do $d(I, (\alpha)) < R$ nên $\Delta$ luôn cắt $(S)$ tại $A$, $B$.
Khi đó $AB = \sqrt{R^2 - (\mathrm{d}(I, \Delta))^2}$. Do đó, $AB$ lớn nhất thì $\mathrm{d}(I, (\Delta))$ nhỏ nhất nên $\Delta$ qua $H$, với $H$ là hình chiếu vuông góc của $I$ lên $(\alpha)$. Phương trình $BH\colon \begin{cases} x = 2 + 2 \\ y = 3 - 2t \\ z = 5 + t. \end{cases}$ $H \in (\alpha) \Rightarrow 2(2 + 2t) - 2(3 - 2t) + 5 + t + 15 = 0 \Leftrightarrow t = -2 \Rightarrow H(-2; 7; 3)$.
Do vậy $\overrightarrow{AH} = (1; 4; 6)$ là véc tơ chỉ phương của $\Delta$.
Phương trình của $\Delta$ là $\dfrac{x+3}{1} = \dfrac{y-3}{4} = \dfrac{z+3}{6}$.

Chọn đáp án (A) ...

**CÂU 4.** Trong KG $Oxyz$, cho điểm $A(-3; 3; -3)$ thuộc mặt phẳng $(\alpha)\colon 2x2y + z + 15 = 0$và mặt cầu $(S)\colon (x-2)^2 + (y-3)^2 + (z-5)^2 = 100$. Đường thẳng $\Delta$ qua $A$, nằm trên mặt phẳng $(\alpha)$ cắt $(S)$ tại $A$, $B$. Để độ dài $AB$ nhỏ nhất thì PTĐT $\Delta$ là

(A) $\dfrac{x+3}{16} = \dfrac{y-3}{11} = \dfrac{z+3}{-10}$. (B) $\dfrac{x+3}{1} = \dfrac{y-3}{4} = \dfrac{z+3}{6}$. (C) $\begin{cases} x = -3 + 5t \\ y = 3 \\ z = -3 + 8t \end{cases}$. (D) $\dfrac{x+3}{16} = \dfrac{y-3}{-11} = \dfrac{z+3}{10}$.

**Lời giải.**

Mặt cầu $(S)$ có tâm $I(2; 3; 5)$, bán kính $R = 10$. Do $d(I, (\alpha)) < R$ nên $\Delta$ luôn cắt $(S)$ tại $A$, $B$.
Khi đó $AB = \sqrt{R^2 - (\mathrm{d}(I, \Delta))^2}$. Do đó, $AB$ nhỏ nhất thì $\mathrm{d}(I, \Delta)$ lớn nhất nên $\Delta$ là đường thẳng nằm trong $(\alpha)$, qua $A$ và vuông góc với $AI$. Do đó $\Delta$ có véctơ chỉ phương $\overrightarrow{u_\Delta} = \left[\overrightarrow{AI}, \vec{n}_\alpha\right] = (16; 11; -10)$.
Vậy, phương trình của $\Delta$ là $\dfrac{x+3}{16} = \dfrac{y-3}{11} = \dfrac{z+3}{-10}$.

Chọn đáp án (A) ...

**CÂU 5.** Trong KG $Oxyz$, cho hai điểm $A(3; 0; 2)$, $B(3; 0; 2)$ và mặt cầu $x^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 25$. Phương trình mặt phẳng $(\alpha)$ đi qua hai điểm $A$, $B$ và cắt mặt cầu $(S)$ theo một đường tròn bán kính nhỏ nhất là

(A) $x - 4y - 5z + 17 = 0$. (B) $3x - 2y + z - 7 = 0$. (C) $x - 4y + 5z - 13 = 0$. (D) $3x + 2y + z - 11 = 0$.

**Lời giải.**

Mặt cầu $(S)$ có tâm $I(0; -2; 1)$, bán kính $R = 5$. Do $IA = \sqrt{17} < R$ nên $AB$ luôn cắt $(S)$. Do đó $(\alpha)$ luôn cắt $(S)$ theo đường tròn $(C)$ có bán kính $r = \sqrt{R^2 - (d(I, (\alpha)))^2}$. Đề bán kính $r$nhỏ nhất $\Leftrightarrow d(I, (P))$ lớn nhất.

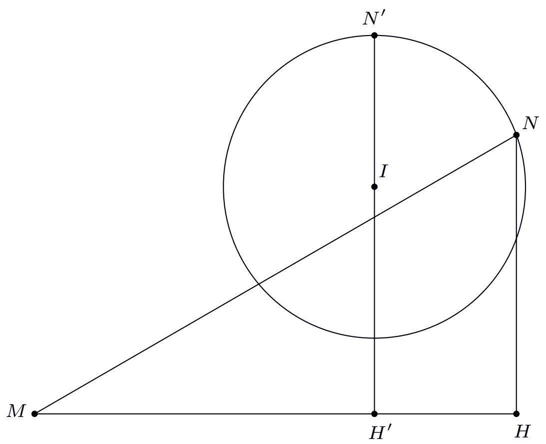
Mặt phẳng $(\alpha)$ đi qua hai điểm $A$, $B$ và vuông góc với mp $(ABC)$.
Ta có $\overrightarrow{AB}=(1;-1;-1)$, $\overrightarrow{AC}=(-2;-3;-2)$ suy ra mặt phẳng $(ABC)$ có véctơ pháp tuyến $\vec{n}=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(-1;4;-5)$.
$(\alpha)$ có véctơ pháp tuyến $\vec{n}_\alpha=\left[\vec{n},\overrightarrow{AB}\right]=(-9-6;-3)=-3(3;2;1)$.
Phương trình $(\alpha)$: $3(x-2)+2(y-1)+1(z-3)=0 \Leftrightarrow 3x+2y+z-11=0$.

Chọn đáp án D ..........

**CÂU 6.** Trong KG $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon x-2y+2z-3=0$ và mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2+2x-4y-2z+5=0$. Giả sử $M\in(P)$ và $N\in(S)$ sao cho $\overrightarrow{MN}$ cùng phương với vectơ $\vec{u}=(1;0;1)$ và khoảng cách giữa $M$ và $N$ lớn nhất. Tính $MN$.

(A) $MN=3$. (B) $MN=1+2\sqrt{2}$. (C) $MN=3\sqrt{2}$. (D) $MN=14$.

**Lời giải.**




Mặt phẳng $(P)$ có vtpt $\vec{n}=(1;-2;2)$.
Mặt cầu $(S)$ có tâm $I(-1;2;1)$ và bán kính $r=1$.
Nhận thấy rằng góc giữa $\vec{u}$ và $\vec{n}$ bằng $45^\circ$.
Vì $d(I,(P))=2>1=r$ nên $(P)$ không cắt $(S)$.
Gọi $H$ là hình chiếu của $N$ lên $(P)$ thì $\widehat{NMH}=45^\circ$ và $MN=\dfrac{NH}{\sin 45^\circ}=NH\sqrt{2}$ nên $MN$ lớn nhất khi và chỉ khi $NH$ lớn nhất. Điều này xảy ra khi $N\equiv N'$ và $H\equiv H'$ với $N'$ là giao điểm của đường thẳng $d$ qua $I$, vuông góc $(P)$ và $H'$ là hình chiếu của $I$ lên $(P)$.
Lúc đó $NH_{\max}=N'H'=r+d(I,(P))=3$ và $MN_{\max}=\dfrac{NH_{\max}}{\sin 45^\circ}=3\sqrt{2}$.

Chọn đáp án C ..........

**CÂU 7.** Cho $A(0;8;2)$ và mặt cầu $(S)\colon (x-5)^2+(y+3)^2+(z-7)^2=72$ và điểm $A(9;-7;23)$. Viết phương trình mặt phẳng $(P)$ đi qua $A$ và tiếp xúc với mặt cầu $(S)$ sao cho khoảng cách từ $B$ đến mặt phẳng $(P)$ là lớn nhất. Giả sử $\vec{n}=(1;m;n)$ là một vectơ pháp tuyến của $(P)$. Lúc đó

(A) $m\cdot n=4$. (B) $m\cdot n=2$. (C) $m\cdot n=-4$. (D) $m\cdot n=-2$.

**Lời giải.**

$(P)$ đi qua điểm $A(0;8;2)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(1;m;n)\Rightarrow(P)\colon x+my+nz-8m-2n=0$.
$(P)$ tiếp xúc với mặt cầu $(S)\Rightarrow \dfrac{|5-11m+5n|}{\sqrt{1+m^2+n^2}}=6\sqrt{2}$.
$\mathrm{d}=\mathrm{d}(B;(P))=\dfrac{|9-15m+21n|}{\sqrt{1+m^2+n^2}}=\dfrac{|5-11m+5n+4-4m+16n|}{\sqrt{1+m^2+n^2}}$
$\leq \dfrac{|5-11m+5n|}{\sqrt{1+m^2+n^2}}+4\dfrac{|1-m+4n|}{\sqrt{1+m^2+n^2}}$.
$\leq 6\sqrt{2}+4\dfrac{\sqrt{1^2+(-1)^2+4^2}\cdot\sqrt{1+m^2+n^2}}{\sqrt{1+m^2+n^2}}$ (Buinhiacôpxki).
$=18\sqrt{2}$.
$\Rightarrow \mathrm{d}_{\max}=18\sqrt{2}\Leftrightarrow \dfrac{1}{1}=\dfrac{-1}{m}=\dfrac{4}{n}\Rightarrow\begin{cases}m=-1\\n=4\end{cases}\Rightarrow m\cdot n=-4$.

Chọn đáp án C ..........

## 24 GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT LIÊN QUAN ĐẾN BÁN KÍNH MẶT CẦU, ĐƯỜNG TRÒN

**Phần I. Mỗi câu hỏi học sinh chọn một trong bốn phương án A, B, C, D.**

**CÂU 1.** Trong KG $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon (x-3)^2+(y-1)^2+z^2=4$ và đường thẳng $d\colon \begin{cases} x=1+2t \\ y=-1+t \\ z=-t \end{cases}, (t\in\mathbb{R})$. Mặt phẳng chứa $d$ và cắt $(S)$ theo một đường tròn có bán kính nhỏ nhất có phương trình là

(A) $y+z+1=0$. (B) $x+3y+5z+2=0$. (C) $x-2y-3=0$. (D) $3x-2y-4z-8=0$.

**Lời giải.**

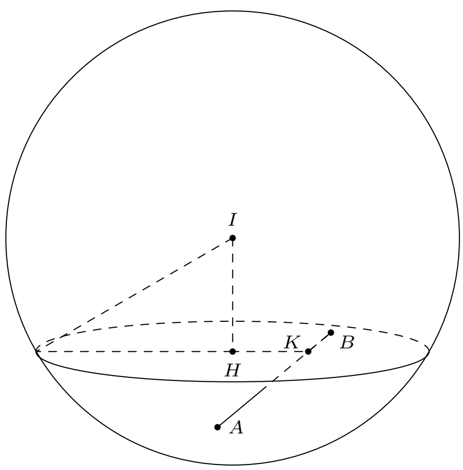
Mặt cầu $(S)$ có tâm $I(3;1;0)$ và bán kính $R=2$.
Gọi $H$ là hình chiếu của $I$ trên $d$.
$H\in d \Leftrightarrow H(1+2t;-1+t;-t)$; $\overrightarrow{IH}=(-2+2t;-2+t;-t)$.
Véctơ chỉ phương của $d$ là $\vec{u}_d=(2;1;-1)$.
$\overrightarrow{IH}\cdot\vec{u}_d=0\Leftrightarrow 2(-2+2t)+1(-2+t)+t=0\Leftrightarrow t=1$.
Do đó $H(3;0;-1)\Rightarrow IH=\sqrt{2}$.
Gọi $(P)$ là mặt phẳng chứa đường thẳng $d$ và cắt mặt cầu $(S)$ theo đường tròn có bán kính $r$. Ta có $r=\sqrt{R^2-[\mathrm{d}(I,(P))]^2}=\sqrt{4-[\mathrm{d}(I,(P))]^2}$.
Mà $\mathrm{d}(I,(P))\le IH=\sqrt{2}$ nên $r=\sqrt{4-[\mathrm{d}(I,(P))]^2}\ge\sqrt{4-IH^2}=\sqrt{4-(\sqrt{2})^2}=\sqrt{2}$.
Suy ra $\min r=\sqrt{2}$, đạt được khi $IH\perp(P)$.
Khi đó mặt phẳng $(P)$ đi qua $H(3;0;-1)$ nhận $\overrightarrow{IH}=(0;-1;-1)$ làm một véctơ pháp tuyến.
Phương trình mặt phẳng $(P)$ là $0(x-3)-1(y-0)-1(z+1)=0\Leftrightarrow y+z+1=0$.

Chọn đáp án (A) . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . □

**CÂU 2.** Trong KG $Oxyz$, cho hai điểm $A(3;-2;6)$, $B(0;1;0)$ và mặt cầu $(S)\colon (x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=25$. Mặt phẳng $(P)\colon ax+by+cz-2=0$ đi qua $A$, $B$ và cắt $(S)$ theo giao tuyến là đường tròn có bán kính nhỏ nhất. Tính $T=a+b+c$.

(A) $T=3$. (B) $T=4$. (C) $T=5$. (D) $T=2$.

**Lời giải.**




Mặt cầu $(S)$ có tâm $I(1;2;3)$ và bán kính $R=5$.
Ta có $\begin{cases} A\in(P) \\ B\in(P) \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} 3a-2b+6c-2=0 \\ b-2=0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} a=2-2c \\ b=2 \end{cases}$.
Bán kính của đường tròn giao tuyến là $r=\sqrt{R^2-[\mathrm{d}(I,(P))]^2}=\sqrt{25-[\mathrm{d}(I,(P))]^2}$.
Bán kính của đường tròn giao tuyến nhỏ nhất khi và chỉ khi $\mathrm{d}(I;(P))$ lớn nhất.

Ta có $\mathrm{d}(I,(P))=\dfrac{|a+2b+3c-2|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\dfrac{|2-2c+4+3c-2|}{\sqrt{(2-2c)^2+2^2+c^2}}=\sqrt{\dfrac{(c+4)^2}{5c^2-8c+8}}$.

Xét $f(c)=\sqrt{\dfrac{(c+4)^2}{5c^2-8c+8}}\Rightarrow f'(c)=\dfrac{-48c^2-144c+192}{(5c^2-8c+8)^2\sqrt{\dfrac{(c+4)^2}{5c^2-8c+8}}}$.

$f'(c)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} c=1 \\ c=-4. \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

| $c$ | $-\infty$ | | $-4$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(c)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(c)$ | $\frac{1}{\sqrt{5}}$ | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $\sqrt{5}$ | $\searrow$ | $\frac{1}{\sqrt{5}}$ |

Vậy $\mathrm{d}(I,(P))$ lớn nhất bằng $\sqrt{5}$ khi và chỉ khi $c=1 \Rightarrow a=0$, $b=2 \Rightarrow a+b+c=3$.

Chọn đáp án A ............................................................................................ □

**CÂU 3.** Trong KG $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;4)$, $B(0;0;1)$ và mặt cầu $(S)\colon (x+1)^2+(y-1)^2+z^2=4$. Mặt phẳng $(P)\colon ax+by+cz-4=0$ đi qua $A$, $B$ và cắt $(S)$ theo giao tuyến là một đường tròn có bán kính nhỏ nhất. Tính $T=a+b+c$?

(A) $T=\dfrac{1}{5}$. (B) $T=\dfrac{3}{4}$. (C) $T=1$. (D) $T=-2$.

**Lời giải.**

Ta có $(S)$ có tâm $I(-1;1;0)$ và bán kính $R=2$.

Do $A,B\in(P) \Leftrightarrow \begin{cases} a+2b+4c-4=0 \\ c-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-2b-12 \\ c=4. \end{cases}$

$\Rightarrow (P)\colon -2(b+6)x+by+4z-4=0$.

Gọi $r$ là bán kính của đường tròn là giao tuyến của $(P)$ và $(S) \Rightarrow r=\sqrt{R^2-\mathrm{d}^2(I,(P))}$, để $r$ đạt giá trị nhỏ nhất $\Leftrightarrow \mathrm{d}(I,(P))$ đạt giá trị lớn nhất.

Mà $\mathrm{d}(I,(P))=\dfrac{|3b+8|}{\sqrt{5b^2+48b+160}}$.

Xét hàm số $f(x)=\dfrac{3x+8}{\sqrt{5x^2+48x+160}}$.

$f'(x)=\dfrac{32x+288}{\left(\sqrt{5x^2+48x+160}\right)^3}$.

$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=-9$.

Bảng xét biến thiên

| $x$ | $-\infty$ | | $-9$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $-1{,}34$ | $\searrow$ | $f(-9)\approx -1{,}66$ | $\nearrow$ | $1{,}34$ |

Từ đó ta suy ra bảng biến thiên của hàm số $y=|f(x)|$

| $x$ | $-\infty$ | | $-9$ | | $-\frac{8}{3}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $1{,}34$ | $\nearrow$ | $1{,}66$ | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $1{,}34$ |

Dựa vào bảng biến thiên, ta có $x=-9 \Rightarrow b=-9 \Rightarrow a=6 \Rightarrow T=1$.

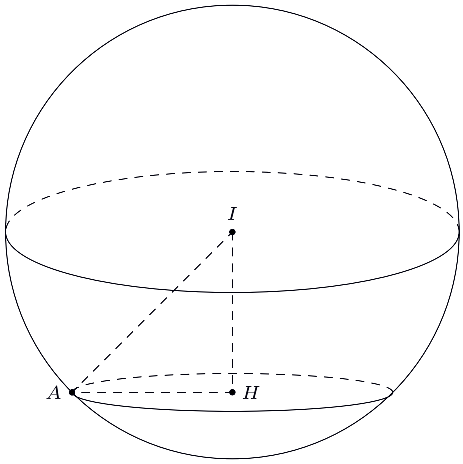
Chọn đáp án C ............................................................................................ □

**CÂU 4.** Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon (x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=9$, điểm $A(0;0;2)$. Mặt phẳng $(P)$ qua $A$ và cắt mặt cầu $(S)$ theo thiết diện là hình tròn $(C)$ có diện tích nhỏ nhất, phương trình $(P)$ là

(A) $(P)\colon x-2y+3z-6=0$. (B) $(P)\colon x+2y+3z-6=0$.

(C) $(P)\colon 3x+2y+2z-4=0$. (D) $(P)\colon x+2y+z-2=0$.

**Lời giải.**




Mặt cầu $(S)$ có tâm $I(1;2;3)$, bán kính $R=3$.
Ta có $IA=\sqrt{6}<R \Rightarrow A$ nằm trong mặt cầu $(S)$.
Do đó mặt phẳng $(P)$ qua $A$ luôn cắt mặt cầu $(S)$ theo thiết diện là hình tròn $(C)$ có bán kính $r=\sqrt{R^2-IH^2}$ (với $H$ là hình chiếu của $I(1;2;3)$ trên $(P)$).
Ta luôn có $IA \geq IH \Rightarrow \sqrt{R^2-IH^2} \geq \sqrt{R^2-IA^2} \Rightarrow r \geq \sqrt{R^2-IA^2}$.
Diện tích của hình tròn $(C)$ nhỏ nhất khi bán kính $r$ nhỏ nhất, tức là $r=\sqrt{R^2-IA^2} \Leftrightarrow H \equiv A$.
Khi đó $IA \perp (P) \Rightarrow$ mặt phẳng $(P)$ nhận $IA=(-1;-2;-1)$ làm một véctơ pháp tuyến.
Vậy phương trình mặt phẳng $(P)$: $-x-2y-(z-2)=0 \Leftrightarrow x+2y+z-2=0$.

Chọn đáp án D ................................................................................................ □

**CÂU 5.** Trong KG $Oxyz$ cho mặt cầu $(S)\colon (x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=27$. Gọi $(\alpha)$ là mặt phẳng đi qua 2 điểm $A(0;0;-4)$, $B(2;0;0)$ và cắt $(S)$ theo giao tuyến là đường tròn $(C)$ sao cho khối nón có đỉnh là tâm của $(S)$, là hình tròn $(C)$ có thể tích lớn nhất. Biết mặt phẳng $(\alpha)$ có phương trình dạng $ax+by-z+c=0$, khi đó $a-b+c$ bằng

**A** 8. **B** 0. **C** 2. **D** $-4$.

**Lời giải.**

- Vì $(\alpha)$ qua $A$ ta có $-(-4)+c=0 \Rightarrow c=-4$.
- Vì $(\alpha)$ qua $B$ ta có $2a+c=0 \Rightarrow a=2$.

$\Rightarrow (\alpha)\colon 2x+by-z-4=0$.

- Mặt cầu $(S)$ có tâm $I(1;-2;3)$, $R=3\sqrt{3}$.
- Chiều cao khối nón $h=d_{(I,\alpha)}=\dfrac{|2-2b-3-4|}{\sqrt{4+b^2+1}}=\dfrac{|2b+5|}{\sqrt{b^2+5}}$.
- Bán kính đường tròn $r=\sqrt{R^2-h^2}=\sqrt{27-\left(\dfrac{|2b+5|}{\sqrt{b^2+5}}\right)^2}=\sqrt{27-\dfrac{(2b+5)^2}{b^2+5}}$.
- Thể tích khối nón $V=\dfrac{1}{3}\pi r^2 h=\dfrac{1}{3}\pi\left(27-\dfrac{(2b+5)^2}{b^2+5}\right)\dfrac{|2b+5|}{\sqrt{b^2+5}}$.
- Tới đây ta có thể thử các trường hợp đáp án. Hoặc ta làm tự luận như sau

Đặt $t=\dfrac{|2b+5|}{\sqrt{b^2+5}}$ và xét hàm số $f(t)=\left(27-t^2\right)t$ trên đoạn $[0;3\sqrt{3}]$.
Ta có $f'(t)=27-3t^2$.
$f'(t)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=3 \\ t=-3 \text{ (loại)}. \end{array}\right.$
Ta có bảng biến thiên

| $x$ | $0$ | | $3$ | | $3\sqrt{3}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $0$ | $\nearrow$ | $54$ | $\searrow$ | $0$ |

Do đó thể tích khối nón lớn nhất khi và chỉ khi
$t=3 \Leftrightarrow \left(\dfrac{|2b+5|}{\sqrt{b^2+5}}\right)^2=3^2 \Leftrightarrow 4b^2+20b+25=9b^2+45 \Leftrightarrow 5b^2-20b+20=0 \Leftrightarrow b=2$.

Vậy $a-b+c=-4$.

Chọn đáp án D ☐

**CÂU 6.** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)$ có phương trình là $x^2+y^2+z^2-2x-2y-6z+7=0$. Cho ba điểm $A$, $M$, $B$ nằm trên mặt cầu $(S)$ sao cho $AMB=90^\circ$. Diện tích tam giác $AMB$ có giá trị lớn nhất bằng?

A 4. B 2. C $4\pi$. D Không tồn tại.

**Lời giải.**

Ta có $(S)\colon (x-1)^2+(y-1)^2+(z-3)^2=4 \Rightarrow (S)$ có tâm $I(1;1;3)$ và bán kính $R=2$.
Từ $A$, $M$, $B$ nằm trên mặt cầu $(S)$ và $\widehat{AMB}=90^\circ \Rightarrow AB$ qua $I \Rightarrow AB=2R=4$.
Ta có $S_{AMB}=\dfrac{1}{2}\cdot MA\cdot MB\le \dfrac{MA^2+MB^2}{4}=\dfrac{AB^2}{4}=4$.
Dấu "="xảy ra khi $MA=MB=\dfrac{AB}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$ và $AB=4$.
Do đó diện tích tam giác $AMB$ có giá trị lớn nhất bằng 4.

Chọn đáp án A ☐

**CÂU 7.** Trong KG $Oxyz$, cho điểm $M\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{\sqrt{3}}{2};0\right)$ và mặt cầu $(S)\colon x^2+y^2+z^2=8$. Đường thẳng $d$ thay đổi, đi qua điểm $M$, cắt mặt cầu $(S)$ tại hai điểm phân biệt $A$, $B$. Tính diện tích lớn nhất $S$ của tam giác $OAB$.

A $S=\sqrt{7}$. B $S=4$. C $S=2\sqrt{7}$. D $S=2\sqrt{2}$.

**Lời giải.**

Mặt cầu $(S)$ có tâm $O=(0;0;0)$, bán kính $R=2\sqrt{2}$.
Ta có $OM=1\Rightarrow M$ nằm trong mặt cầu.
Gọi $I$ là trung điểm $AB\Rightarrow OI\perp AB$.
Đặt $x=OI\le OM\Rightarrow 0<x\le 1$.
Khi đó $S_{\triangle OAB}=\dfrac{1}{2}\cdot OI\cdot AB=OI\sqrt{R^2-OI^2}=x\sqrt{8-x^2}=f(x)$.
$\Rightarrow f'(x)=\dfrac{2\left(4-x^2\right)}{\sqrt{8-x^2}}(0<x\le 1)$.
Bảng biến thiên

| $x$ | $0$ | $1$ |
|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $0$ ↗ | $\sqrt{7}$ |

Vậy $\max S_{\triangle OAB}=\sqrt{7}$ khi $OI=1$ hay $I\equiv M$.

Chọn đáp án A ☐

**CÂU 8.** Trong không gian với hệ trục $Oxyz$ cho hai đường thẳng $\Delta_1\colon \dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z+1}{2}$ và $\Delta_2\colon \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-1}{1}$. Tính diện tích mặt cầu có bán kính nhỏ nhất, đồng thời tiếp xúc với cả hai đường thẳng $\Delta_1$ và $\Delta_2$.

A $R=\dfrac{\sqrt{17}}{2}$. B $R=\dfrac{\sqrt{17}}{3}$. C $R=\dfrac{\sqrt{17}}{6}$. D $R=\dfrac{\sqrt{17}}{17}$.

**Lời giải.**

Gọi $A$, $B$ là hai điểm thuộc lần lượt $\Delta_1$ và $\Delta_2$ sao cho $AB$ là đoạn thẳng vuông góc chung giữa 2 đường.
Gọi $M$ là trung điểm $AB$. Dễ có mặt cầu tâm $M$ bán kính $R=\dfrac{AB}{2}$ tiếp xúc với hai đường thẳng $\Delta_1$ và $\Delta_2$ là mặt cầu có bán kính bé nhất.
Ta có tọa độ theo tham số của $A$, $B$ lần lượt là $A\left(2t_1-1;t_1-1;2t_1-1\right)$ và $B\left(2t_2+1;2t_2+1;t_2+1\right)$
$\Rightarrow \overrightarrow{AB}\left(2t_2-2t_1+2;2t_2-t_1+2;t_2-2t_1+2\right)$.
Có $\overrightarrow{u_1}(2;1;2)$ và $\overrightarrow{u_2}(2;2;1)$ lần lượt là 2 vectơ chỉ phương của $\Delta_1$ và $\Delta_2$ nên $\begin{cases}\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{u_1}\\ \overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{u_2}.\end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(2t_2-2t_1+2)\cdot 2+(2t_2-t_1+2)\cdot 1+(t_2-2t_1+2)\cdot 2=0\\ (2t_2-2t_1+2)\cdot 2+(2t_2-t_1+2)\cdot 2+(t_2-2t_1+2)\cdot 1=0\end{cases}$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 8t_2 - 9t_1 + 10 = 0 \\ 9t_2 - 8t_1 + 10 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = \dfrac{10}{17} \\ t_2 = \dfrac{-10}{17}. \end{cases}$

$\Rightarrow A\left(\dfrac{3}{17}; \dfrac{-7}{17}; \dfrac{3}{17}\right); B\left(\dfrac{-3}{17}; \dfrac{-3}{17}; \dfrac{7}{17}\right); \overrightarrow{AB}\left(\dfrac{-6}{17}; \dfrac{4}{17}; \dfrac{4}{17}\right).$

$R = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{(-6)^2 + 4^2 + 4^2}}{17} = \dfrac{\sqrt{17}}{17}.$

Bán kính mặt cầu cần tính là $R = \dfrac{\sqrt{17}}{17}$.

Chọn đáp án D ................................................................ □

**CÂU 9.** Trong KG $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1\colon \begin{cases} x = 2t \\ y = t \\ z = 4 \end{cases}$ và $d_2\colon \begin{cases} x = 3 - t' \\ y = t' \\ z = 0 \end{cases}$. Viết phương trình mặt cầu có bán kính nhỏ nhất tiếp xúc với cả hai đường thẳng $d_1$ và $d_2$.

**A** $(S)\colon (x+2)^2 + (y+1)^2 + (z+2)^2 = 4$.

**B** $(S)\colon (x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 16$.

**C** $(S)\colon (x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 4$.

**D** $(S)\colon (x+2)^2 + (y+1)^2 + (z+2)^2 = 16$.

**Lời giải.**

Đường thẳng $d_1$ có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}_1 = (2; 1; 0)$.
Đường thẳng $d_2$ có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}_2 = (1; -1; 0)$.
Để phương trình mặt cầu $(S)$ có bán kính nhỏ nhất và đồng thời tiếp xúc với cả hai đường thẳng $d_1$ và $d_2$ khi và chỉ khi tâm mặt cầu $(S)$ nằm trên đoạn thẳng vuông góc chung của 2 đường thẳng $d_1$ và $d_2$, đồng thời là trung điểm của đoạn thẳng vuông góc chung.
Gọi điểm $M(2t; t; 4)$ thuộc $d_1$;
Gọi $N(3 - t'; t'; 0)$ điểm thuộc $d_2$ với $MN$ là đoạn vuông góc chung của $d_1$ và $d_2$.
Ta có $\overrightarrow{MN} = (3 - t' - 2t; t' - t; -4)$.
$MN$ là đoạn thẳng vuông góc chung

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{MN} \cdot \vec{u}_1 = 0 \\ \overrightarrow{MN} \cdot \vec{u}_2 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2 \cdot (3 - t' - 2t) + t' - t = 0 \\ (-1) \cdot (3 - t' - 2t) + t' - t = 0) \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} t' + 5t = 0 \\ 2t' + t = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t' = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M(2; 1; 4) \\ N(2; 1; 0). \end{cases} \end{aligned}$$

Gọi điểm $I$ là tâm mặt cầu $(S)$, do đó điểm $I$ là trung điểm $MN$.
Suy ra mặt cầu $(S)\colon (x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 4$.

Chọn đáp án C ................................................................ □

**CÂU 10.** Trong KG $Oxyz$ cho hai đường thẳng chéo nhau $d_1\colon \begin{cases} x = 4 - 2t \\ y = t \\ z = 3 \end{cases}$ và $d_2\colon \begin{cases} x = 1 \\ y = t' \\ z = -t' \end{cases}$ $(t, t' \in \mathbb{R})$. Phương trình mặt cầu có bán kính nhỏ nhất tiếp xúc với cả hai đường thẳng $(d_1)$, $(d_2)$ là

**A** $\left(x + \dfrac{3}{2}\right)^2 + y^2 + (z+2)^2 = \dfrac{9}{4}$.

**B** $\left(x + \dfrac{3}{2}\right)^2 + y^2 + (z+2)^2 = \dfrac{3}{2}$.

**C** $\left(x - \dfrac{3}{2}\right)^2 + y^2 + (z-2)^2 = \dfrac{9}{4}$.

**D** $\left(x - \dfrac{3}{2}\right)^2 + y^2 + (z-2)^2 = \dfrac{3}{2}$.

**Lời giải.**

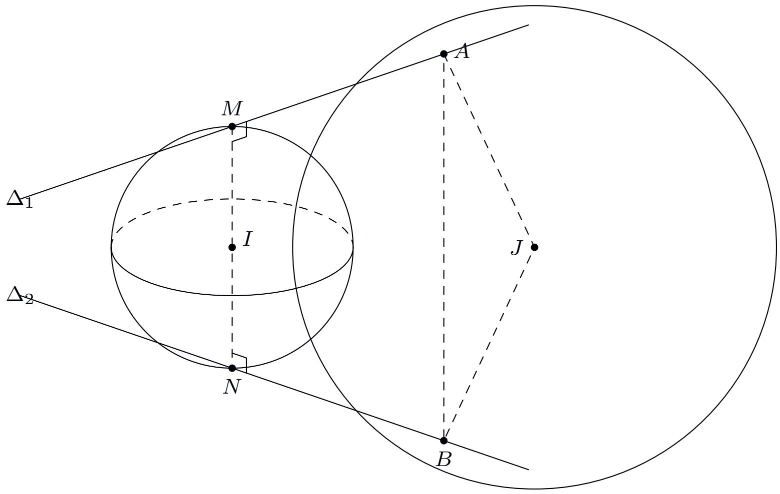
Mặt cầu có bán kính nhỏ nhất tiếp xúc với $(d_1)$, $(d_2)$ là mặt cầu có đường kính là đoạn vuông góc chung của $(d_1)$, $(d_2)$.
Lấy $A(4 - 2t; t; 3) \in d_1$; $B(1; t'; -t') \in d_2$.
$AB$ là đoạn vuông góc chung khi và chỉ khi
$\begin{cases} \overrightarrow{AB} \cdot \vec{u}_{d_1} = 0 \\ \overrightarrow{AB} \cdot \vec{u}_{d_2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5t + t' = -6 \\ -t + 2t' = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t' = -1. \end{cases}$
Khi đó $A(2; 1; 3)$; $B(1; -1; 1)$. Suy ra tâm $I\left(\dfrac{3}{2}; 0; 2\right)$, bán kính $R = \dfrac{3}{2}$.

Chọn đáp án C ................................................................ □

**CÂU 11.** Trong KG $Oxyz$, cho hai đường thẳng $\Delta_1\colon \dfrac{x-4}{3}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z+5}{-2}$ và $\Delta_2\colon \dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+3}{3}=\dfrac{z}{1}$. Trong tất cả mặt cầu tiếp xúc với cả hai đường thẳng $\Delta_1$ và $\Delta_2$. Gọi $(S)$ là mặt cầu có bán kính nhỏ nhất. Bán kính của mặt cầu $(S)$ là

Ⓐ $\sqrt{12}$. Ⓑ $\sqrt{6}$. Ⓒ $\sqrt{24}$. Ⓓ $\sqrt{3}$.

**Lời giải.**




Ta có $\Delta_1\colon \begin{cases} x=4+3t_1 \\ y=1-t_1 \\ z=-5-2t_1 \end{cases}$, $\Delta_2\colon \begin{cases} x=2+t_2 \\ y=-3+3t_2 \\ z=t_2 \end{cases}$ $(t_1,\, t_2\in\mathbb{R})$.

Gọi $\vec{u}_1=(3;-1;-2)$, $\vec{u}_2=(1;3;1)$ lần lượt là véc-tơ chỉ phương của hai đường thẳng.

Gọi $M\in\Delta_1\Rightarrow M\left(4+3t_1;1-t_1;-5-2t_1\right)$; $N\in\Delta_2\Rightarrow N\left(2+t_2;3t_2-3;t_2\right)$.

Suy $\overrightarrow{MN}=\left(t_2-3t_1-2;3t_2+t_1-4;t_2+2t_1+5\right)$.

$MN$ là đoạn vuông góc chung khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \overrightarrow{MN}\cdot\vec{u}_1=0 \\ \overrightarrow{MN}\cdot\vec{u}_2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7t_1+t_2=-6 \\ 2t_1+11t_2=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1=-1 \\ t_2=1. \end{cases}$$

$\overrightarrow{MN}=(2;-2;4)\Rightarrow MN=\sqrt{6}$.

Giả sử $(S)$ là mặt cầu tâm $J$ đường kính $d$ tiếp xúc với lần lượt $\Delta_1$, $\Delta_2$ tại $A$, $B$.

Khi đó $JA+JB\geq AB$, hay $d\geq AB\geq MN\Rightarrow d\geq MN$.

Vậy đường kính $d$ nhỏ nhất khi $d=MN$.

Suy ra mặt cầu $(S)$ có bán kính nhỏ nhất $r=\dfrac{MN}{2}=\sqrt{6}$.

Chọn đáp án (B) ........................................................................................ □

**CÂU 12.** Trong KG $Oxyz$ cho mặt cầu $(x-3)^2+(y-1)^2+z^2=4$ và đường thẳng $d\colon \begin{cases} x=1+2t \\ y=-1+t\,,\, t\in\mathrm{R}. \\ z=-t \end{cases}$ Mặt phẳng chứa $d$ và cắt $(S)$ theo một đường tròn có bán kính nhỏ nhất có phương trình là

Ⓐ $y+z+1=0$. Ⓑ $x+3y+5z+2=0$. Ⓒ $x-2y-3=0$. Ⓓ $3x-2y-4z-8=0$.

**Lời giải.**

Gọi $H$ là hình chiếu vuông góc của tâm mặt cầu $I(3;1;0)$ lên $d$, từ đó ta tìm được $H(3;0;-1)$. Thấy $IH\leq R$ nên $d$ cắt $(S)$. Vậy mặt phẳng cần tìm nhận $\overrightarrow{IH}=(0;-1;-1)$ làm véc-tơ pháp tuyến nên phương trình mặt phẳng là $y+z+1=0$.

Chọn đáp án (A) ........................................................................................ □

**CÂU 13.** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon 2x-y+2z+2=0$ và mặt cầu $(S)\colon (x-1)^2+(y+2)^2+z^2=4$ có tâm $I$. Gọi tọa độ điểm $M\left(x_0;y_0;z_0\right)$ thuộc $(P)$ sao cho đoạn $IM$ ngắn nhất. Tổng $T=x_0^2+y_0^2+z_0^2$ bằng

Ⓐ $\dfrac{7}{3}$. Ⓑ $\dfrac{11}{3}$. Ⓒ $14$. Ⓓ $\dfrac{16}{3}$.

**Lời giải.**

Ta có tâm $I(1;-2;0)$ và bán kính $R=2$. Khoảng cách từ $I$ đến mặt phẳng $(P)$ ngắn nhất khi $M$ là hình chiếu của $I$ lên mặt phẳng $(P)$.

Đường thẳng đi qua $I$ và vuông góc với mặt phẳng $(P)$ có PTTS là $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 - t \\ z = 2t. \end{cases}$

Khi đó tọa độ của $M$ là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 - t \\ z = 2t \\ 2x - y + 2z + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 - t \\ z = 2t \\ 2(1 + 2t) - (-2 - t) + 2(2t) + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{1}{3} \\ y = -\dfrac{4}{3} \\ z = -\dfrac{4}{3} \\ t = -\dfrac{2}{3} \end{cases}.$$

Tổng $T = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = \dfrac{11}{3}$.

Chọn đáp án B ........................................................................................ □

**CÂU 14.** Trong KG $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)$ tâm $I(1; -2; 1)$; bán kính $R = 4$ và đường thẳng $d\colon \dfrac{x}{2} = \dfrac{y-1}{-2} = \dfrac{z+1}{-1}$. Mặt phẳng $(P)$ chứa $d$ và cắt mặt cầu $(S)$ theo một đường tròn có diện tích nhỏ nhất. Hỏi trong các điểm sau điểm nào có khoảng cách đến mặt phẳng $(P)$ lớn nhất?

**A** $O(0; 0; 0)$. **B** $A\left(1; \dfrac{3}{5}; -\dfrac{1}{4}\right)$. **C** $B(-1; -2; -3)$ . **D** $C(2; 1; 0)$.

**Lời giải.**

Gọi $H(2t; 1 - 2t; -1 - t)$ là hình chiếu của $I$ lên đường thẳng $d$.
Ta có $\overrightarrow{IH} \cdot \vec{u}_d = 0 \Rightarrow 2(2t - 1) - 2(3 - 2t) - (-2 - t) = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{2}{3} \Rightarrow H\left(\dfrac{4}{3}; -\dfrac{1}{3}; -\dfrac{5}{3}\right)$.
Vì $IH = \sqrt{10} < 4 = R \Rightarrow d$ cắt mặt cầu $(S)$ tại 2 điểm phân biệt.
Mặt phẳng $(Q)$ bất kì chứa $d$ luôn cắt $(S)$ theo một đường tròn bán kính $r$.
Khi đó $r^2 = R^2 - \mathrm{d}^2\big(I, (Q)\big) \geq R^2 - \mathrm{d}^2\big(I, d\big) = 16 - 10 = 6$.
Do vậy mặt phẳng $(P)$ chứa $d$ cắt mặt cầu theo một đường tròn có diện tích nhỏ nhất khi và chỉ khi $d(I, (P)) = d(I, d)$ hay mặt phẳng $(P)$ đi qua $H$ nhận $\overrightarrow{IH} = \left(\dfrac{1}{3}; \dfrac{5}{3}; -\dfrac{8}{3}\right)$ làm véc-tơ pháp tuyến, do đó $(P)$ có phương trình $x + 5y - 8z - 13 = 0$.
Khi đó điểm $O(0; 0; 0)$ có khoảng cách đến $(P)$ lớn nhất.

Chọn đáp án A ........................................................................................ □