Bài 3. HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Hàm số chẵn, hàm số lẻ

- 7 Định nghĩa 3.1. Cho hàm số y = f(x) có tập xác định là \mathcal{D} .
 - \odot Hàm số f(x) được gọi là **hàm số chẵn** nếu $\forall x \in \mathcal{D}$ thì $-x \in \mathcal{D}$ và f(-x) = f(x). Đồ thị của một hàm số chẵn nhận trục tung là trục đối xứng.
 - \odot Hàm số f(x) được gọi là **hàm số lẻ** nếu $\forall x \in \mathcal{D}$ thì $-x \in \mathcal{D}$ và f(-x) = -f(x). Đồ thi của một hàm số lẻ nhân gốc toa độ là tâm đối xứng.

2. Hàm số tuần hoàn

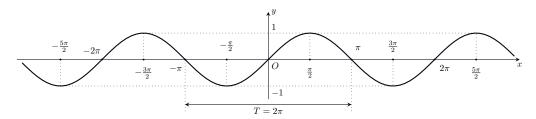
- 7 Định Nghĩa 3.2. Hàm số y = f(x) có tập xác định $\mathscr D$ được gọi là hàm số tuần hoàn nếu tồn tại số $T \neq 0$ sao cho với mọi $x \in \mathscr D$ ta có:
 - i) $x + T \in \mathscr{D}$ và $x T \in \mathscr{D}$;
 - ii) f(x+T) = f(x).
- Số T dương nhỏ nhất thỏa mãn các điều kiện trên (nếu có) được gọi là **chu kì** của hàm số tuần hoàn đó.

7 NHÂN XÉT.

- $m{\Theta}$ Các hàm số $y=\sin x$ và $y=\cos x$ tuần hoàn với chu kì 2π . Các hàm số $y=\tan x$ và $y=\cot x$ tuần hoàn với chu kì π .

3. Đồ thị và tính chất của hàm số $y = \sin x$

- 7 TÍNH CHẤT 3.1. Hàm số $y = \sin x$:
 - \bigcirc Có tập xác định là \mathbb{R} và tập giá trị là [-1;1];
 - \odot Là hàm số lẻ và tuần hoàn với chu kì 2π ;
 - $m{\Theta}$ Đồng biến trên mỗi khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}+k2\pi;\frac{\pi}{2}+k2\pi\right)$ và nghịch biến trên mỗi khoảng $\left(\frac{\pi}{2}+k2\pi;\frac{3\pi}{2}+k2\pi\right)$, $k\in\mathbb{Z}$;
 - ❷ Có đồ thị đối xứng qua gốc toạ độ và gọi là một đường hình sin.



4. Đồ thi và tính chất của hàm số $y = \cos x$

- 7 TÍNH CHẤT 3.2. Hàm số $y = \cos x$:
 - \odot Có tập xác định là \mathbb{R} và tập giá trị là [-1;1];
 - \odot Là hàm số chẵn và tuần hoàn với chu kì 2π ;
 - ⊘ Đồng biến trên mỗi khoảng $(-\pi + k2\pi; k2\pi)$ và nghịch biến trên mỗi khoảng $(k2\pi; \pi + k2\pi), k \in \mathbb{Z}$;



ĐIỂM:

"It's not how much time you have, it's how you use it."

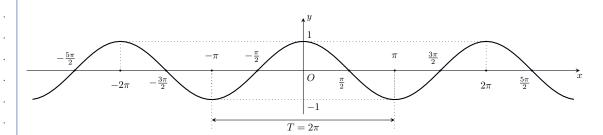
QUICK NOTE

	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
	٠	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•						•	•		•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•		
	٠	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•						•	•		•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•		
	•						•	•	•	•	•							•	٠				•	•	•	•	•	٠	٠	٠	٠	٠	٠	
	•						•	•	•	•	•							•	٠				•	•	•	•	•	٠	٠	٠	٠	٠	٠	
	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	٠	٠	٠	٠	٠	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	

•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•

QUICK NOTE

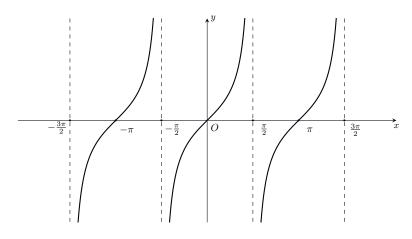
❷ Có đồ thị là một đường hình sin đối xứng qua trục tung.



5. Đồ thị và tính chất của hàm số $y = \tan x$

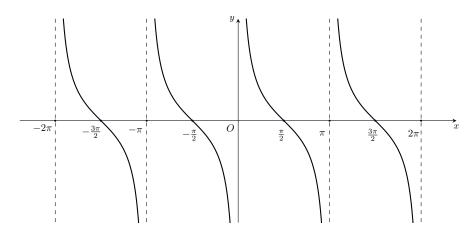
7 TÍNH CHẤT 3.3. Hàm số $y = \tan x$:

- $m{\Theta}$ Có tập xác định là $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \middle| k \in \mathbb{Z} \right\}$ và tập giá trị là \mathbb{R} ;
- \odot Là hàm số lẻ và tuần hoàn với chu kì π ;
- $\mbox{\Large \textcircled{O}}$ Đồng biến trên mỗi khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi;\frac{\pi}{2}+k\pi\right),\,k\in\mathbb{Z};$
- ❷ Có đồ thị đối xứng qua gốc toạ độ.



6. Đồ thị và tính chất của hàm số $y = \cot x$

- 7 TÍNH CHẤT 3.4. Hàm số $y = \cot x$:
 - \odot Có tập xác định là $\mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ và tập giá trị là \mathbb{R} ;
 - \odot Là hàm số lẻ và tuần hoàn với chu kì π ;
 - \bigcirc Nghịch biến trên mỗi khoảng $(k\pi; \pi + k\pi), k \in \mathbb{Z}$;



B. CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP



Tìm tập xác định của hàm số lượng giác

Để tìm tập xác định của hàm số lượng giác ta cần nhớ

 \bigcirc Với $k \in \mathbb{Z}$, ta cần nhớ những trường hợp đặc biệt:

a)
$$\begin{vmatrix} +\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi. \\ +\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi. \\ +\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi. \end{vmatrix}$$
 b)
$$\begin{vmatrix} +\cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi. \\ +\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi. \\ +\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi. \end{vmatrix}$$

c)
$$\tan x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi$$
.

d)
$$\cot x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$$
.

1. Ví du minh hoa

VÍ DU 1. Tìm tập xác định của các hàm số sau đây:

a)
$$y = \frac{2\sin x + 3}{\cos x}$$

b)
$$y = \frac{1 + \cos x}{1 - \cos x}$$

$$c) y = \frac{\sin x - 3}{\cos x + 1}$$

a)
$$y = \frac{2\sin x + 3}{\cos x}$$
b)
$$y = \frac{1 + \cos x}{1 - \cos x}$$
c)
$$y = \frac{\sin x - 3}{\cos x + 1}$$
d)
$$y = \frac{2 + 3\cos 2x}{\sin x}$$
e)
$$y = \frac{1 + \cos x}{1 + \sin x}$$

$$e) \ \ y = \frac{1 + \cos x}{1 + \sin x}$$

$$f) \quad y = \frac{2\sin x + 3}{\sin x - 1}$$

g)
$$y = \frac{2\sin x - 1}{2\sin x + 3}$$

h) $y = \frac{2\sin x + 3}{\cos x + 2}$

$$h) y = \frac{2\sin x + 3}{\cos x + 2}$$

$$i) \quad y = \sqrt{3 - 2\cos x}.$$

VÍ DU 2. Tìm tập xác định của các hàm số sau đây:

a)
$$y = 2 \tan x + 3$$

b)
$$y = 2\tan 2x - 4\sin x$$

c)
$$y = \cot\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + 1$$

2. Bài tấp tư luân

BÀI 1. Tìm tập xác định của các hàm số sau đây:

a)
$$y = \frac{\tan 2x}{\cos x + 1} + \sin x.$$

c)
$$y = \frac{\cos x + 1}{\sin 2x - 5}$$
.

$$e) \ \ y = \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x}.$$

g)
$$y = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin x}}$$
.

i)
$$y = \sqrt{4\pi^2 - x^2} + \cot 2x$$
.

k)
$$y = \frac{\sqrt{\pi^2 - x^2}}{\sin 2x + 1}$$
.

b)
$$y = \frac{\cos 3x}{1 - \sin x} + \tan x.$$

d)
$$y = \frac{3}{\cos^2 x - \sin^2 x} + \tan x$$
.

f)
$$y = \sqrt{\frac{2 - \sin x}{\cos x + 1}}.$$
h)
$$y = \sqrt{\frac{\cos x + 4}{\sin x + 1}}.$$

h)
$$y = \sqrt{\frac{\cos x + 4}{\cos x + 4}}$$

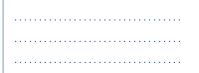
j)
$$y = \sqrt{\pi^2 - x^2} + \cot 2x$$
.

1)
$$y = \frac{\sqrt{4\pi^2 - x^2}}{\cos 2x + 1}$$

QUICK NOTE

 	 	 ٠.	 	 	 	
 	 	 ٠.	 	 	 	
 	 	 ٠.	 	 	 	





•	•	•	•	•			•			•	•	•	•	•	•	•	•	•	•			•	•	

QUICK NOTE

2

Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số lượng giác

Dựa vào tập giá trị của hàm số lượng giác, chẳng hạn:

$$\Theta -1 \leq \sin x \leq 1 \Rightarrow \begin{vmatrix} 0 \leq |\sin x| \leq 1 \\ 0 \leq \sin^2 x \leq 1 \end{vmatrix} \text{ hoặc } -1 \leq \cos x \leq 1 \Rightarrow \begin{vmatrix} 0 \leq |\cos x| \leq 1 \\ 0 \leq \cos^2 x \leq 1. \end{vmatrix}$$

 \odot Biến đổi về dạng: $m \leq y \leq M$

Kết luận: $\max y = M$ và $\min y = m$.

Trong trường hợp hàm số có dạng bậc hai theo một hàm số lượng giác, ta có thể dụng phương pháp đặt ẩn phụ để đưa về hàm bậc hai, sau đó khảo sát hàm này và kết luận.



Trong trường hợp đề bài yêu cầu tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số lượng giác trên đoạn cho trước, ta sẽ sử dụng đường tròn lượng giác để giới hạn miền của sin hoặc cos. Sau đó thêm bớt giống phương pháp 1 hoặc bậc 2 thì sử dụng parabol.

1. Ví dụ minh hoạ

VÍ DU 1. Tìm tập giá trị của các hàm số sau

a)
$$y = 2\sin x + 3$$

b)
$$y = \frac{1 - 2\sin^2 x}{3}$$

c)
$$y = \sqrt{2 + \cos x} - 1$$

d)
$$y = 4 \sin x \cos x + 1$$
;

e)
$$y = 4 - 3\sin^2 2x$$
.

f)
$$y = (3 - \sin x)^2 + 1$$

VÍ DỤ 2. Tìm x để hàm số $y = (\sin x + 3)^2 - 1$ đạt giá trị nhỏ nhất.

VÍ DỤ 3. Tìm x để hàm số $y = 1 - 3\sqrt{1 - \cos^2 x}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

VÍ DU 4. Tìm tập giá tri của các hàm số sau

a)
$$y = 2\sin^2 x - 3\sin x + 1$$

b)
$$y = 2\cos^2 x + 3\cos x - 2$$

c)
$$y = \cos 2x - \sin x + 3$$

2. Bài tập tự luận

BÀI 1. Tìm tập giá trị của các hàm số sau

a)
$$y = 5 - 3\cos 4x$$
;

b)
$$y = 2 + 3\cos x;$$

c)
$$y = 3 - 2\sin 2x$$
;

d)
$$y = 3 - 2|\sin 2x|$$
;

e)
$$y = \frac{1 + 4\cos^2 x}{3}$$
;

f)
$$y = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x$$
;

g)
$$y = \sin x + \sin(x + \frac{2\pi}{3});$$

h)
$$y = \cos x + \cos(x + \frac{\pi}{3});$$

i)
$$y = \frac{4}{2 - \sin x}$$
;

j)
$$y = \frac{8}{3 - \cos^2 x};$$

k)
$$y = \frac{3}{3 - \sqrt{1 - \cos x}}$$

1)
$$y = \frac{1}{\sqrt{2 - \sin^2 3x}};$$

$$m) y = \sin x + \sqrt{3}\cos x + 12;$$

n)
$$y = \sqrt{3}\sin x - \cos x + 5$$
;

o)
$$y = \cos 3x - \sqrt{3}\sin 3x + 4$$
;

p)
$$y = 4\sin^2 x - 4\sin x + 3$$
;

q)
$$y = \cos^2 x + 2\sin x + 2;$$

r)
$$y = \cos^4 x - 2\sin^2 x + 1$$
;

s)
$$y = \sqrt{5 - 4\sin x + \sin^2 x};$$

t)
$$y = \sqrt{\cos^2 x + 6\cos x + 14}$$
;

BÀI 2. Tìm GTLN, GTNN của các hàm số sau

QUICK NOTE

- a) $y = 3 \sin 2x \text{ trên } [0; \frac{\pi}{2}];$
- b) $y = \sin 2x + 2 \text{ trên } [0; \frac{\pi}{2}];$
- c) $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \text{ trên } [0; \pi];$
- d) $y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{2} \operatorname{trên}\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right];$
- e) $y = \sin^4 x + \cos^4 x \text{ trên } [0; \frac{\pi}{6}];$
- f) $y = \sin^6 x + \cos^6 x \text{ trên } \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right];$
- g) $y = \sqrt{3}\sin 2x + 2\cos^2 x + 3$ trên $\left[-\frac{5\pi}{6}; \frac{\pi}{4}\right];$
- h) $y = \sin 2x + \cos 2x + 3$ trên $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4} \right]$.

Xét tính chẵn lẻ của hàm số lượng giác

- **Bước 1.** Tìm tập xác định $\mathscr D$ của hàm số lượng giác. Nếu $\forall x \in \mathscr D$ thì $-x \in \mathscr D$, suy ra $\mathscr D$ là tập đối xứng và chuyển sang bước tiếp theo.
- **Bước 2.** Tính f(-x), nghĩa là ta sẽ thay x bằng -x, sẽ có hai kết quả thường gặp sau:
 - \odot Nếu f(-x) = f(x) thì f(x) là hàm số chẵn.
 - \odot Nếu f(-x) = -f(x) thì f(x) là hàm số lẻ.
- ⚠
 Ø Nếu 𝒯 không là tập đối xứng (∃ $x \in 𝒯 \Rightarrow -x \notin 𝒯$) hoặc ($f(-x) \neq f(x)$ và $f(-x) \neq -f(x)$) ta sẽ kết luận hàm số f(x) không chẵn, không lẻ.
 - ❷ Đồ thị của hàm số chẵn nhận trực tung làm trực đối xứng, đồ thị hàm số lẻ nhận gốc tọa độ O làm tâm đối xứng.
- **BÀI 1.** Xét tính chẵn, lẻ của hàm số $f(x) = \sin^2 2x + \cos 3x$.
- **BÀI 2.** Xét tính chẵn, lẻ của hàm số $f(x) = \cos^2 3x + \cos x$.
- **BÀI 3.** Xét tính chẵn, lẻ của hàm số $f(x) = \frac{\sin^2 x \cos x}{\sin 3x}$.
- **BÀI 4.** Xét tính chẵn, lẻ của hàm số $f(x) = 1 + \cos x \cdot \sin \left(\frac{3\pi}{2} 2x\right)$.
- **BÀI 5.** Xét tính chẵn, lẻ của hàm số $f(x) = \tan x + \cot x$.
- **BÀI 6.** Xét tính chẵn, lẻ của hàm số $f(x) = \left| \sin x \frac{1}{2} \right| + \left| \sin x + \frac{1}{2} \right|$.
- **BÀI 7.** Xét tính chẵn, lẻ của hàm số $f(x) = \frac{\sqrt{\cos x + 2} + \cot^2 x}{\sin 4x}$

Tìm chu kỳ của hàm số lượng giác

Suy ra hàm số $y = \sin(ax + b)$ và $y = \cos(ax + b)$ tuần hoàn với chu kỳ $T_0 = \frac{2\pi}{|a|}$

 $oldsymbol{\Theta}$ Hàm số $y = \tan x, \ y = \cot x$ tuần hoàn với chu kỳ $T_0 = \pi$. Suy ra hàm số $y = \tan(ax + b)$ và $y = \cot(ax + b)$ tuần hoàn với chu kỳ $T_0 = \frac{\pi}{|a|}$

Giả sử hàm số $f(x) = g(x) \pm h(x)$ có hàm g(x) tuần hoàn với chu kỳ T_1 và hàm h(x) tuần hoàn với chu kỳ T_2 . Khi đó hàm số f(x) sẽ tuần hoàn với chu kỳ T_0 là bội chung nhỏ nhất của hai chu kỳ T_1 và T_2 .

	NIC	
பா	NIC) I E

CÂU 1. Hàm số $y = \sin 2x$ tuần hoàn với chu kỳ chu kỳ là

$$\bigcirc T_0 = 2\pi$$

(A)
$$T_0 = 2\pi$$
. **(B)** $T_0 = \frac{\pi}{2}$. **(C)** $T_0 = \pi$.

$$\bigcirc T_0 = \pi.$$

$$(\mathbf{D}) T_0 = 4\pi.$$

CÂU 2. Hàm số $y = \tan 2x$ tuần hoàn với chu kỳ chu kỳ là

A
$$T_0 = \frac{\pi}{3}$$
.

B
$$T_0 = \frac{\pi}{2}$$
.

$$(c) T_0 = 2\pi.$$

CÂU 3. Hàm số $y = 3 \sin \frac{x}{2}$ tuần hoàn với chu kỳ chu kỳ là

$$A T_0 = 0.$$

B
$$T_0 = \frac{\pi}{2}$$
.

$$T_0 = 2\pi.$$

$$(D) T_0 = 4\pi.$$

CÂU 4. Hàm số $f(x) = \sin \frac{x}{2} + 2\cos \frac{3x}{2}$ tuần hoàn với chu kỳ chu kỳ là

$$\bigcirc$$
 5π .

$$\frac{2}{2}$$
.

$$\bigcirc$$
 3π .

$$\bigcirc$$
 4π .

CÂU 5. Tìm m để hàm số $y = \cos mx$ tuần hoàn với chu kỳ $T_0 = \pi$.

$$\bigcirc m = \pm \frac{\pi}{2}.$$

$$\bigcirc m = \pm \pi.$$

Sư biến thiên của hàm số lượng giác

- igoplus Hàm số $y = \sin x$ đồng biến trên mỗi khoảng $\left(-\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{\pi}{2} + k2\pi\right)$ $(k \in \mathbb{Z})$ và nghịch biến trên mỗi khoảng $\left(\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{3\pi}{2} + k2\pi\right)$ $(k \in \mathbb{Z})$.
- Θ Hàm số $y = \cos x$ đồng biến trên mỗi khoảng $(-\pi + k2\pi; k2\pi)$ $(k \in \mathbb{Z})$ và nghịch biến trên mỗi khoảng $(k2\pi; \pi + k2\pi)$ $(k \in \mathbb{Z})$.
- igoplus Hàm số $y = \tan x$ đồng biến trên mỗi khoảng $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$ $(k \in \mathbb{Z})$.
- \bullet Hàm số $y = \cot x$ nghịch biến trên mỗi khoảng $(k\pi; \pi + k\pi)$ $(k \in \mathbb{Z})$.

1. Ví du minh hoa

VÍ DU 1. Xét sự biến thiên của mỗi hàm số sau trên các khoảng tương ứng:

a)
$$y = \sin x$$
 trên khoảng $\left(-\frac{9\pi}{2}; -\frac{7\pi}{2}\right), \left(\frac{21\pi}{2}; \frac{23\pi}{2}\right);$

b) $y = \cos x \text{ trên khoảng } (-20\pi; -19\pi), (-9\pi; -8\pi).$

VÍ DỤ 2. Một dao động điều hoà có phương trình li độ dao động là: $x = A\cos(\omega t + \varphi)$, trong đó t là thời gian tính bằng giây, A là biên độ dao động và x là lị độ dao động đều được tính bằng centimét, $\omega>0$. Khi đó, chu kì T của dao động là $T=\frac{2\pi}{\omega}$. Xác định giá trị của li độ khi $t=0,\;t=\frac{T}{4},\;t=\frac{T}{2},\;t=\frac{3T}{4},\;t=T$ và vẽ đồ thị biểu diễn li độ của dao động điều hoà trên đoạn [0; 2T] trong các trường hợp:

a)
$$A = 3cm, \ \varphi = 0;$$

a)
$$A = 3cm, \ \varphi = 0;$$
 b) $A = 3cm, \ \varphi = -\frac{\pi}{2};$ c) $A = 3cm, \ \varphi = \frac{\pi}{2}.$

c)
$$A = 3cm, \ \varphi = \frac{\pi}{2}$$

2. Bài tập trắc nghiệm

CÂU 1. Hàm số $y = \sin x$

- ${\color{red} {\color{black} \blacktriangle}}$ đồng biến trên mỗi khoảng $\left(\frac{\pi}{2}+k2\pi;\pi+k2\pi\right)$ và nghịch biến trên mỗi khoảng $(\pi+k2\pi;k2\pi)$ với $k\in\mathbb{Z}.$
- $\mbox{\@bellet}$ đồng biến trên mỗi khoảng $\left(-\frac{3\pi}{2}+k2\pi;\frac{5\pi}{2}+k2\pi\right)$ và nghịch biến trên mỗi khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}+k2\pi;\frac{\pi}{2}+k2\pi\right)$ với $k\in\mathbb{Z}$.
- \bigcirc đồng biến trên mỗi khoảng $\left(\frac{\pi}{2}+k2\pi;\frac{3\pi}{2}+k2\pi\right)$ và nghịch biến trên mỗi khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}+k2\pi;\frac{\pi}{2}+k2\pi\right)$ với $k\in\mathbb{Z}.$

QUICK NOTE

D đồng biến trên mỗi khoảng	$\left(-\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{\pi}{2} + k2\pi\right)$	và nghịch biế	ến trên mỗi khoảng
$\left(\frac{\pi}{2}+k2\pi;\frac{3\pi}{2}+k2\pi\right)$ với k	$\in \mathbb{Z}$.		

CÂU 2. Hàm số $y = \cos x$

- igappa đồng biến trên mỗi khoảng $\left(\frac{\pi}{2}+k2\pi;\pi+k2\pi\right)$ và nghịch biến trên mỗi khoảng $(\pi + k2\pi; k2\pi)$ với $k \in \mathbb{Z}$.
- **B** đồng biến trên mỗi khoảng $(-\pi + k2\pi; k2\pi)$ và nghịch biến trên mỗi khoảng $(k2\pi; \pi + k2\pi)$ với $k \in \mathbb{Z}$.
- \bigcirc đồng biến trên mỗi khoảng $\left(\frac{\pi}{2}+k2\pi;\frac{3\pi}{2}+k2\pi\right)$ và nghịch biến trên mỗi khoảng $\left(-\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{\pi}{2} + k2\pi\right) \text{ với } k \in \mathbb{Z}.$
- \bigcirc đồng biến trên mỗi khoảng $(k2\pi;\pi+k2\pi)$ và nghịch biến trên mỗi khoảng $(\pi + k2\pi; 3\pi + k2\pi)$ với $k \in \mathbb{Z}$.

CÂU 3. Hàm số $y = \tan x$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?

- $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$.
- **B** $(0;\pi)$.
- $\left(\mathbf{c} \right) \left(\frac{\pi}{2}; 2\pi \right).$
- $\bigcirc \left(\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right).$

CÂU 4. Hàm số $y = \cot x$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây?

- **A** $(0; 2\pi)$.
- $igorplus \left(\frac{\pi}{2}; 2\pi\right).$
- $(-\pi;0).$
- $\bigcirc \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right).$

CÂU 5. Hàm số $y = \sqrt{3} + 2\cos x$ tăng trên khoảng

- $(\mathbf{A}) \left(-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2} \right). \qquad (\mathbf{B}) \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} \right). \qquad (\mathbf{C}) \left(\frac{7\pi}{6}; 2\pi \right).$
- $\bigcirc \left(\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}\right).$

CÂU 6. Hàm số nào đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{6}\right)$?

- \mathbf{A} $y = \cos x$.

- $(\mathbf{D}) y = \cos 2x.$

C. BÀI TẬP TRẮC NGHIÊM CUỐI BÀI

Phần I. Mỗi câu hỏi học sinh chọn một trong bốn phương án A, B, C, D.

CÂU 1. Tập giá trị của hàm số $y = \cos x$ là tập hợp nào sau đây?

- (B) $(-\infty; 0]$.
- (c) $[0; +\infty]$.
- $(\mathbf{D})[-1;1].$

CÂU 2. Tập giá trị của hàm số $y = \sin 2x$ là

- (A) [-2; 2].
- **(B)** [0; 2].
- $(\mathbf{C})[-1;1].$
- $(\mathbf{D})[0;1].$

CÂU 3. Mệnh đề nào dưới đây sai?

- (A) Hàm số $y = \tan x$ tuần hoàn với chu kì π .
- **(B)** Hàm số $y = \cos x$ tuần hoàn với chu kì π .
- (c) Hàm số $y = \cot x$ tuần hoàn với chu kì π .
- \bigcirc Hàm số $y = \sin 2x$ tuần hoàn với chu kì π .

CÂU 4. Hàm số $y = \sin 2x$ có chu kỳ tuần hoàn là

- \mathbf{B} $T=\frac{\pi}{2}$.
- \mathbf{C} $T=\pi$.
- \mathbf{D} $T=4\pi$.

CÂU 5. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- (A) Hàm số $y = \sin x$ là hàm số chẵn.
- (B) Hàm số $y = \cos x$ là hàm số chẵn.
- (c) Hàm số $y = \tan x$ là hàm số chẵn.
- (**D**) Hàm số $y = \cot x$ là hàm số chẵn.

CÂU 6. Tìm hàm số lẻ trong các hàm số sau:

- \mathbf{A} $y = \sin^2 x$.
- (B) $y = x \cos 2x$.
- $(\mathbf{c}) y = x \sin x.$
- $(\mathbf{D}) y = \cos x.$

CÂU 7. Hàm số nào trong các hàm số dưới đây là hàm số chẵn?

 $(\mathbf{c}) y = \sin 2x.$

 $(\mathbf{D}) y = \tan x - \sin 2x.$

CÂU 8. Tìm tập xác định của hàm số $y = \cot x$.

QUICK NOTE

CÂU 9. Điều kiện xác định của hàm số $y = \frac{1-3\cos x}{\sin x}$ là

 (\mathbf{B}) $x \neq k2\pi, \ k \in \mathbb{Z}.$

 $\bigcirc x \neq \frac{k\pi}{2}, \ k \in \mathbb{Z}.$

 $(\mathbf{D}) x \neq k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$

CÂU 10. Với ký hiệu $k \in \mathbb{Z}$, điều kiện xác định của hàm số $y = \frac{2\sin x + 1}{1 - \cos x}$ là

- (A) $x \neq k2\pi$.

- **©** $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$. **D** $x \neq \frac{\pi}{2} + k2\pi$.

CÂU 11. Với ký hiệu $k \in \mathbb{Z}$, điều kiện xác định của hàm số $y = \tan\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$ là

- (A) $x \neq \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2}$. (B) $x \neq \frac{5\pi}{12} + k\pi$. (C) $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$.

CÂU 12. Tìm điều kiện xác định của hàm số $y = \tan x + \cot x$.

 $(A) x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

 \mathbf{c} $x \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$

 \bigcirc $x \in \mathbb{R}$.

CÂU 13. Tập xác định của hàm số $y = \frac{2\cos 3x - 1}{\cos x + 1}$ là

- \mathfrak{C} $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\}.$

CÂU 14. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số sau $y = 1 + 3\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$.

- (A) $\min y = -2, \max y = 4.$
- **(B)** min y = 2, max y = 4.
- (c) $\min y = -2, \max y = 3.$
- $(\mathbf{D}) \min y = -1, \max y = 4.$

CÂU 15. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số sau $y = 3 - 2\cos^2 3x$.

- (A) $\min y = 1, \max y = 2.$
- **(B)** $\min y = 1, \max y = 3.$
- (c) $\min y = 2, \max y = 3.$
- $(\mathbf{D}) \min y = -1, \max y = 3.$

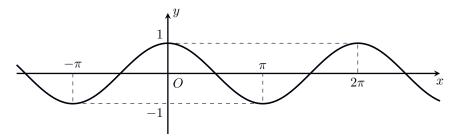
CÂU 16. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số sau $y = \sqrt{2\sin x + 3}$.

- **B**) $\max y = \sqrt{5}, \min y = 2\sqrt{5}.$
- $\bigcirc \max y = \sqrt{5}, \min y = 2.$
- **(D)** $\max y = \sqrt{5}, \min y = 3.$

CÂU 17. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số sau $y = \frac{4}{1 + 2\sin^2 x}$.

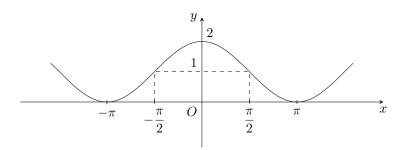
- (A) $\min y = \frac{4}{3}, \max y = 4.$
- **B** $\min y = \frac{4}{3}, \max y = 3.$
- \bigcirc min $y = \frac{4}{3}$, max y = 2.
- $\mathbf{D} \min y = \frac{1}{2}, \max y = 4.$

CÂU 18. Đường cong trong hình dưới đây là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A,B,C,D. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?



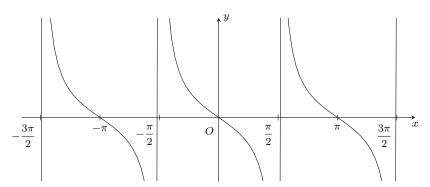
- **(A)** $y = 1 + \sin x$.
- **(B)** $y = 1 \sin x$.
- $(\mathbf{D}) y = \cos x.$

CÂU 19. Đường cong trong hình vẽ bên dưới là đồ thị của một trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D. Hỏi đó là hàm số nào?



- $\bigcirc y = 2\cos x.$
- $\mathbf{D} y = \cos^2 x + 1.$

CÂU 20. Hàm số nào trong các hàm số sau có đồ thị ở hình vẽ dưới đây?

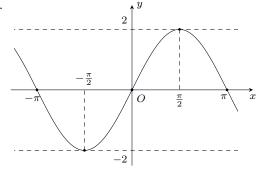


- $\bigcirc y = \tan x.$
- \bigcirc $y = -\cot x$.

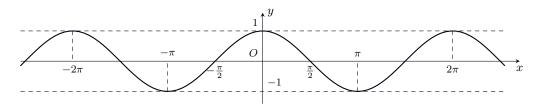
Phần II. Trong mỗi ý a), b), c) và d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai. **CÂU 21.**

Cho hàm số $y = 2 \sin x$ có đồ thị như hình bên. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

	Mệnh đề	Đ	S
a)	Tập xác định của hàm số là \mathbb{R} .		
b)	Tập giá trị của hàm số là $[-1;1]$.		
c)	Hàm số đồng biến trên khoảng $(-2; 2)$.		
d)	Dồ thị hàm số cắt đường thẳng $y = -1$ tại đúng 2 điểm phân biệt.		



CÂU 22. Cho đồ thị hàm số $y = \cos x$ trên đoạn $[-2\pi; 2\pi]$ như hình bên dưới



Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

Mệnh đề	Ð	S
a) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\pi;\pi)$.		
b) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-2\pi; -\pi)$.		
c) Trên đoạn $[-2\pi; 2\pi]$, hàm số có giá trị lớn nhất bằng 1.		
d) Trên đoạn $[-2\pi; 2\pi]$, có đúng 3 giá trị của x để hàm số nhận giá trị bằng 0.		

	NOT
ш к	\mathbf{n}

Ì	ľ	Ì	Ì	Ì	Ì	Ì	Ì	i	Ì	Ì	Ì	Ì	Ì	ĺ	Ì	Ì	Ì	Ì	Ì	Ì	Ì	Ì	Ì	Ì	Ì	Ì	Ì	Ì	Ì	Ì	Ì	

•	•	•	•	•	•	•	•	•	•			•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	٠

•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	
		•				•	•	•	•	•			•									•	•	•	•	•			•	•	•	•	

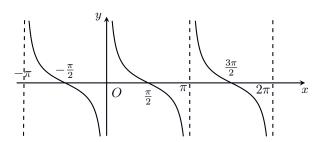
•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•

•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•

i	i	Ì	i	Ī	Ī	Ī	Ī	Ī	i	i	i	i	i	i	i	i	i	i	i	Ī	Ī	Ī	Ī	Ī	i	i	i	i	i
•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•

$\overline{}$	 CK			
<i>1</i> 1		- 17	_	1 1-
$\overline{}$	 V - IV		•	ΙГ

CÂU 23. Cho hàm số $y = \cot x$ có đồ thị như hình bên dưới.



Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

Mệnh đề	Ð	S
a) Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$		
b) Hàm số nghịch biến trên $(-\pi; pi)$.		
c) Trên $[-\pi;\pi]$ có đúng ba giá trị của x để $\cot x = 0$.		
d) Trên $[0; \pi]$, $\cot x < 1$ khi và chỉ khi $x \in \left(\frac{\pi}{4}; \pi\right)$.		

CÂU 24. Cho hàm số $y = f(x) = 2\sin^2 x - 5$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

Mệnh đề	Ð	S
a) Hàm số tuần hoàn với chu kì 2π .		
b) Hàm số là một hàm số chẵn.		
c) Giá trị lớn nhất của hàm số đạt được khi $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$, với $k\in\mathbb{Z}$.		
d) Giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng -3 .		

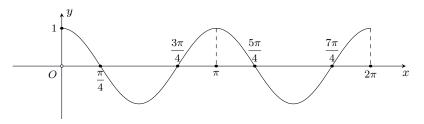
CÂU 25. Huyết áp là áp lực máu cần thiết tác động lên thành động mạch nhằm đưa máu đi nuôi dưỡng các mô trong cơ thể. Nhờ lực co bóp của tim và sức cản của động mạch mà huyết áp được tạo ra. Giả sử huyết áp của một người thay đổi theo thời gian được cho bởi công thức: $p(t) = 120 + 15\cos 150\pi t$, trong đó p(t) là huyết áp tính theo đơn vị mmHg (milimét thủy ngân) và thời gian t tính theo đơn vị phút. Xét tính đúng sai của các khẳng đinh sau:

Mệnh đề	Ð	S
a) Hàm số $p(t)$ tuần hoàn với chu kì $\frac{\pi}{75}$.		
b) Thời điểm $t=0$, huyết áp của người này là 120 mmHg.		
c) Huyết áp tâm thu (huyết áp cao nhất) của người này là 135 mmHg.		
d) Huyết áp tâm tương (huyết áp thấp nhất) của người này là 105 mmHg.		

Phần III. Học sinh điền kết quả vào ô trống.

CÂU 26. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = \sqrt{5} - \sqrt{3}\cos 2x$. (Kết quả làm tròn đến hai chữ số thập phân)

CÂU 27. Xét hàm số $f(x) = \cos 2x$ trên $[0; 2\pi]$ có đồ thị như hình vẽ.



Gọi T là tập hợp tất cả các giá trị của $x \in [0; 2\pi]$ để $\cos 2x = 0$. Tính tổng tất cả các phần tử của T (làm tròn đến hàng phần chục).



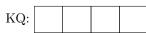
CÂU 28. Hằng ngày, Mặt Trời chiếu sáng, bóng của một tòa chung cư cao $40\,(\mathrm{m})$ in trên mặt đất, độ dài bóng của tòa nhà này được tính bằng công thức $S\,(t) = 40\,\left|\cot\frac{\pi}{12}t\right|$, ở đó S được tính bằng mét, còn t là số giờ tính từ 6 giờ sáng. Tìm độ dài bóng của tòa nhà tại các thời điểm 8 giờ sáng (làm tròn đến hàng phần chục).

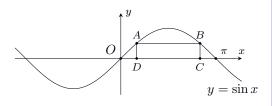


CÂU 29. Giả sử khi một cơn sóng biển đi qua một cái cọc ở ngoài khơi, chiều cao của nước được mô hình hoá bởi hàm số $h(t) = 90\cos\left(\frac{\pi}{10}t\right)$, trong đó h(t) là độ cao tính bằng centimét trên mực nước biển trung bình tại thời điểm t giây. Tìm chiều cao của sóng (cm) (là khoảng cách theo phương thẳng đứng giữa đáy và đính của sóng).

KQ:

CÂU 30. Cho hai điểm A, B thuộc đồ thị hàm số $y = \sin x$ trên đoạn $[0; \pi]$, các điểm C, D thuộc trục Ox thỏa mãn ABCD là hình chữ nhật và $CD = \frac{2\pi}{3}$. Tính độ dài đoạn BC.





9	VNPmath	- 0962940819 🗣
	QUICK	NOTE
	QUICK	NOIL
• • • • •		
• • • • •		
• • • • •		

LỜI GIẢI CHI TIẾT

Bài 3. HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Hàm số chẵn, hàm số lẻ

- 7 Định Nghĩa 3.1. Cho hàm số y = f(x) có tập xác định là \mathscr{D} .
 - $m{\Theta}$ Hàm số f(x) được gọi là **hàm số chẵn** nếu $\forall x \in \mathcal{D}$ thì $-x \in \mathcal{D}$ và f(-x) = f(x). Đồ thị của một hàm số chẵn nhận trục tung là trục đối xứng.
 - $oldsymbol{\Theta}$ Hàm số f(x) được gọi là **hàm số lẻ** nếu $\forall x \in \mathscr{D}$ thì $-x \in \mathscr{D}$ và f(-x) = -f(x). Đồ thị của một hàm số lẻ nhận gốc tọa đô là tâm đối xứng.

2. Hàm số tuần hoàn

THỊNH NGHĨA 3.2. Hàm số y = f(x) có tập xác định $\mathcal D$ được gọi là **hàm số tuần hoàn** nếu tồn tại số $T \neq 0$ sao cho với mọi $x \in \mathcal D$ ta có:

- i) $x + T \in \mathcal{D}$ và $x T \in \mathcal{D}$;
- ii) f(x+T) = f(x).

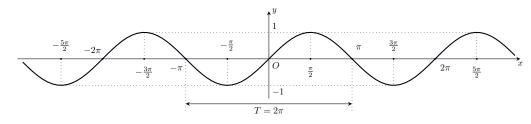
Số T dương nhỏ nhất thỏa mãn các điều kiện trên (nếu có) được gọi là **chu kì** của hàm số tuần hoàn đó.

7 NHẬN XÉT.

- \odot Các hàm số $y = \sin x$ và $y = \cos x$ tuần hoàn với chu kì 2π . Các hàm số $y = \tan x$ và $y = \cot x$ tuần hoàn với chu kì π .

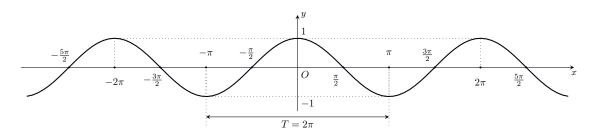
3. Đồ thị và tính chất của hàm số $y = \sin x$

- 7 TÍNH CHẤT 3.1. Hàm số $y = \sin x$:
 - \odot Có tập xác định là \mathbb{R} và tập giá trị là [-1;1];
 - \odot Là hàm số lẻ và tuần hoàn với chu kì 2π ;
 - **⊘** Đồng biến trên mỗi khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}+k2\pi;\frac{\pi}{2}+k2\pi\right)$ và nghịch biến trên mỗi khoảng $\left(\frac{\pi}{2}+k2\pi;\frac{3\pi}{2}+k2\pi\right)$, $k\in\mathbb{Z}$;
 - ❷ Có đồ thị đối xứng qua gốc toạ độ và gọi là một đường hình sin.



4. Đồ thi và tính chất của hàm số $y = \cos x$

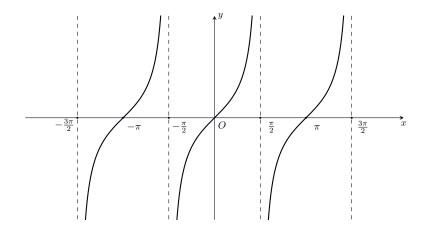
- **7** TÍNH CHẤT 3.2. Hàm số $y = \cos x$:
 - \odot Có tập xác định là \mathbb{R} và tập giá trị là [-1;1];
 - \odot Là hàm số chẵn và tuần hoàn với chu kì 2π ;
 - \odot Dồng biến trên mỗi khoảng $(-\pi + k2\pi; k2\pi)$ và nghịch biến trên mỗi khoảng $(k2\pi; \pi + k2\pi), k \in \mathbb{Z}$;
 - **②** Có đồ thị là một đường hình sin đối xứng qua trục tung.



5. Đồ thị và tính chất của hàm số $y = \tan x$

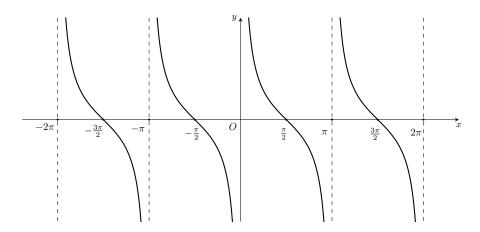
- 7 TÍNH CHẤT 3.3. Hàm số $y = \tan x$:

 - \odot Là hàm số lẻ và tuần hoàn với chu kì π ;
 - $\mbox{\Large \ \ }$ Đồng biến trên mỗi khoảng $\Bigl(-\frac{\pi}{2}+k\pi;\frac{\pi}{2}+k\pi\Bigr),\,k\in\mathbb{Z};$
 - ❷ Có đồ thị đối xứng qua gốc toạ độ.



6. Đồ thị và tính chất của hàm số $y = \cot x$

- 7 TÍNH CHẤT 3.4. Hàm số $y = \cot x$:
 - $oldsymbol{\odot}$ Có tập xác định là $\mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ và tập giá trị là \mathbb{R} ;
 - \odot Là hàm số lẻ và tuần hoàn với chu kì π ;
 - \odot Nghịch biến trên mỗi khoảng $(k\pi; \pi + k\pi), k \in \mathbb{Z}$;
 - ❷ Có đồ thị đối xứng qua gốc toạ độ.



B. CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

Tìm tập xác định của hàm số lương giác

Để tìm tập xác định của hàm số lượng giác ta cần nhớ

 \bigcirc Với $k \in \mathbb{Z}$, ta cần nhớ những trường hợp đặc biệt:

a)
$$\begin{vmatrix} +\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi. \\ +\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi. \\ +\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi. \end{vmatrix}$$

c)
$$\tan x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi$$
.

b)
$$\begin{vmatrix} +\cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi. \\ +\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi. \\ +\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi. \end{vmatrix}$$

d)
$$\cot x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$$
.

1. Ví du minh hoa

VÍ DU 1. Tìm tập xác định của các hàm số sau đây:

a)
$$y = \frac{2\sin x + 3}{\cos x}$$

b)
$$y = \frac{1 + \cos x}{1 - \cos x}$$

$$b) y = \frac{1 + \cos x}{1 - \cos x}$$

$$c) y = \frac{\sin x - 3}{\cos x + 1}$$

d)
$$y = \frac{2 + 3\cos 2x}{\sin x}$$
e)
$$y = \frac{1 + \cos x}{1 + \sin x}$$

$$e) \ \ y = \frac{1 + \cos x}{1 + \sin x}$$

f)
$$y = \frac{2\sin x + 3}{\sin x - 1}$$

g) $y = \frac{2\sin x - 3}{2\sin x + 3}$

g)
$$y = \frac{2\sin x - 3}{2\sin x + 3}$$

$$h) y = \frac{2\sin x + 3}{\cos x + 2}$$

$$i) \quad y = \sqrt{3 - 2\cos x}.$$

VÍ DU 2. Tìm tập xác định của các hàm số sau đây:

a)
$$y = 2 \tan x + 3$$

b)
$$y = 2 \tan 2x - 4 \sin x$$

c)
$$y = \cot\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + 1$$

2. Bài tấp tư luân

BÀI 1. Tìm tập xác định của các hàm số sau đây:

a)
$$y = \frac{\tan 2x}{\cos x + 1} + \sin x.$$

c)
$$y = \frac{2\tan 2x - 5}{\sin 2x + 1}$$
.

$$e) \ \ y = \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x}.$$

$$g) \ \ y = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin x}}.$$

i)
$$y = \sqrt{4\pi^2 - x^2} + \cot 2x$$
.

k)
$$y = \frac{\sqrt{\pi^2 - x^2}}{\sin 2x + 1}$$
.

b)
$$y = \frac{\cos 3x}{1 - \sin x} + \tan x.$$

d)
$$y = \frac{3}{\cos^2 x - \sin^2 x} + \tan x$$
.

f)
$$y = \sqrt{\frac{2 - \sin x}{\cos x + 1}}$$
h)
$$y = \sqrt{\frac{\cos x + 4}{\sin x + 1}}$$

h)
$$y = \sqrt{\frac{\cos x + 4}{\sin x + 1}}$$
.

j)
$$y = \sqrt{\pi^2 - x^2} + \cot 2x$$
.

1)
$$y = \frac{\sqrt{4\pi^2 - x^2}}{\cos 2x + 1}$$

🗭 Lời giải.

a) $y = \frac{\tan 2x}{\cos x + 1} + \sin x$. Hàm số đã cho xác định khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \cos x + 1 \neq 0 \\ \cos 2x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x \neq -1 \\ \cos 2x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \pi + k2\pi \\ 2x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \pi + k2\pi \\ x \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \end{cases}.$$

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \pi + k2\pi; \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$

b) $y = \frac{\cos 3x}{1 - \sin x} + \tan x$. Hàm số đã cho xác định khi và chỉ khi

$$\begin{cases} 1 - \sin x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \neq 1 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases} \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi.$$

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, \ k \in \mathbb{Z} \right\}.$

c) $y = \frac{2\tan 2x - 5}{\sin 2x + 1}$. Hàm số đã cho xác định khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \sin 2x + 1 \\ \sin 2x + 1 \neq 0 \\ \cos 2x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2x \neq -1 \\ \cos 2x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x \neq -\frac{\pi}{2} + k2\pi \\ 2x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -\frac{\pi}{4} + k\pi \\ x \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}.$$

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + k \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$

d) $y = \frac{3}{\cos^2 x - \sin^2 x} + \tan x$. Ta có $\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$ nên hàm số đã cho xác định khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \cos 2x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ 2x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \right\}$

e)
$$y = \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x}$$
. Hàm số đã cho xác định khi và chỉ khi
$$\begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \sin x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq k\pi \\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases} \Leftrightarrow x \neq k\frac{\pi}{2}.$$

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{ k \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

f) $y = \sqrt{\frac{2 - \sin x}{\cos x + 1}}$. Hàm số đã cho xác định khi và chỉ khi $\frac{2 - \sin x}{\cos x + 1} \ge 0$.

Với mọi $x \in \mathbb{R}$, ta có

$$-1 \le \sin x \le 1 \Leftrightarrow 1 \le 2 - \sin x \le 3;$$

$$-1 \le \cos x \le 1 \Leftrightarrow 0 \le \cos x + 1 \le 2$$

Do đó $\frac{2-\sin x}{\cos x+1} \ge 0 \Leftrightarrow \cos x+1 \ne 0 \Leftrightarrow \cos x \ne -1 \Leftrightarrow x \ne \pi+k2\pi$

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{\pi + k2\pi\}$

g) $y = \frac{1}{\sqrt{1-\sin x}}$. Hàm số đã cho xác định khi và chỉ khi

$$1 - \sin x > 0 \Leftrightarrow \sin x < 1 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k2\pi.$$

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$

h) $y = \sqrt{\frac{\cos x + 4}{\sin x + 1}}$. Hàm số đã cho xác định khi và chỉ khi $\frac{\cos x + 4}{\sin x + 1} \ge 0$.

$$-1 \le \sin x \le 1 \Leftrightarrow 0 \le \sin x + 1 \le 2;$$

$$-1 \le \cos x \le 1 \Leftrightarrow 3 \le \cos x + 4 \le 5.$$

Do đó
$$\frac{\cos x + 4}{\sin x + 1} \ge 0 \Leftrightarrow \sin x + 1 \ne 0 \Leftrightarrow \sin x \ne -1 \Leftrightarrow x \ne -\frac{\pi}{2} + k2\pi$$
. Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{\pi}{2} + k2\pi, \, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

i) $y = \sqrt{4\pi^2 - x^2} + \cot 2x$. Hàm số đã cho xác định khi và chỉ khi $\begin{cases} 4\pi^2 - x^2 \ge 0 \\ \sin 2x \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2\pi \le x \le 2\pi \\ 2x \ne k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2\pi \le x \le 2\pi \\ x \ne k\frac{\pi}{2}. \end{cases}$

Ta có
$$-2\pi \le k \frac{\pi}{2} \le 2\pi \Leftrightarrow -4 \le k \le 4$$
.

Tập xác định
$$\mathscr{D} = (-2\pi; 2\pi) \setminus \left\{ \pm \frac{3\pi}{2}; \pm \pi; \pm \frac{\pi}{2}; 0 \right\}.$$

j) $y = \sqrt{\pi^2 - x^2} + \cot 2x$. Hàm số đã cho xác định khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \pi^2 - x^2 \ge 0 \\ \sin 2x \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\pi \le x \le \pi \\ 2x \ne k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\pi \le x \le \pi \\ x \ne k\frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Ta có
$$-\pi \le k \frac{\pi}{2} \le \pi \Leftrightarrow -2 \le k \le 2$$

Tập xác định
$$\mathscr{D} = (-\pi; \pi) \setminus \left\{ \pm \frac{\pi}{2}; 0 \right\}.$$

k) $y = \frac{\sqrt{\pi^2 - x^2}}{\sin 2x + 1}$. Hàm số đã cho xác định khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \pi^2 - x^2 \ge 0 \\ \sin 2x + 1 \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \pi^2 - x^2 \ge 0 \\ \sin 2x \ne -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\pi \le x \le \pi \\ 2x \ne -\frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\pi \le x \le \pi \\ x \ne -\frac{\pi}{4} + k\pi. \end{cases}$$

Ta có
$$-\pi \le -\frac{\pi}{4} + k\pi \le \pi \Leftrightarrow -\frac{3}{4} \le k \le \frac{5}{4}$$
.

Tập xác định
$$\mathscr{D} = [-\pi; \pi] \setminus \left\{ \frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4} \right\}.$$

l) $y = \frac{\sqrt{4\pi^2 - x^2}}{\cos 2x + 1}$. Hàm số đã cho xác định khi và chỉ khi

$$\begin{cases} 4\pi^2 - x^2 \ge 0 \\ \cos 2x + 1 \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4\pi^2 - x^2 \ge 0 \\ \cos 2x \ne -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2\pi \le x \le 2\pi \\ 2x \ne \pi + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2\pi \le x \le 2\pi \\ x \ne \frac{\pi}{2} + k\pi. \end{cases}$$

Ta có
$$-2\pi \le \frac{\pi}{2} + k\pi \le 2\pi \Leftrightarrow -\frac{5}{2} \le k \le \frac{3}{2}$$
.

Tập xác định
$$\mathscr{D} = [-2\pi; 2\pi] \setminus \left\{ \pm \frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right\}.$$

Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số lượng giác

Dựa vào tập giá trị của hàm số lượng giác, chẳng hạn:

$$\odot$$
 Biến đổi về dạng: $m \leq y \leq M$.

Kết luận: $\max y = M$ và $\min y = m$.

Trong trường hợp hàm số có dạng bậc hai theo một hàm số lượng giác, ta có thể dụng phương pháp đặt ẩn phụ để đưa về hàm bậc hai, sau đó khảo sát hàm này và kết luận.



Trong trường hợp đề bài yêu cầu tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số lượng giác trên đoạn cho trước, ta sẽ sử dụng đường tròn lượng giác để giới hạn miền của sin hoặc cos. Sau đó thêm bớt giống phương pháp 1 hoặc bậc 2 thì sử dụng parabol.

1. Ví dụ minh hoạ

VÍ DỤ 1. Tìm tập giá trị của các hàm số sau

a)
$$y = 2\sin x + 3$$

b)
$$y = \frac{1 - 2\sin^2 x}{3}$$

c)
$$y = \sqrt{2 + \cos x} - 1$$

$$d) y = 4\sin x \cos x + 1;$$

e)
$$y = 4 - 3\sin^2 2x$$
.

f)
$$y = (3 - \sin x)^2 + 1$$

VÍ DỤ 2. Tìm x để hàm số $y = (\sin x + 3)^2 - 1$ đạt giá trị nhỏ nhất.

VÍ DU 3. Tìm x để hàm số $y = 1 - 3\sqrt{1 - \cos^2 x}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

VÍ DU 4. Tìm tập giá trị của các hàm số sau

a)
$$y = 2\sin^2 x - 3\sin x + 1$$

b)
$$y = 2\cos^2 x + 3\cos x - 2$$

c)
$$y = \cos 2x - \sin x + 3$$

2. Bài tấp tư luân

BÀI 1. Tìm tập giá trị của các hàm số sau

a)
$$y = 5 - 3\cos 4x$$
;

c)
$$y = 3 - 2\sin 2x$$
;

e)
$$y = \frac{1 + 4\cos^2 x}{3}$$
;

g)
$$y = \sin x + \sin(x + \frac{2\pi}{3});$$

i)
$$y = \frac{4}{2 - \sin x}$$
;

k)
$$y = \frac{3}{3 - \sqrt{1 - \cos x}}$$
;

m)
$$y = \sin x + \sqrt{3}\cos x + 12$$
;

o)
$$y = \cos 3x - \sqrt{3}\sin 3x + 4$$
;

q)
$$y = \cos^2 x + 2\sin x + 2$$
;

s)
$$y = \sqrt{5 - 4\sin x + \sin^2 x}$$
;

b)
$$y = 2 + 3\cos x$$
;

d)
$$y = 3 - 2|\sin 2x|$$
;

f)
$$y = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x$$
;

h)
$$y = \cos x + \cos(x + \frac{\pi}{3});$$

j)
$$y = \frac{8}{3 - \cos^2 x};$$

1)
$$y = \frac{1}{\sqrt{2 - \sin^2 3x}};$$

n)
$$y = \sqrt{3}\sin x - \cos x + 5$$
;

p)
$$y = 4\sin^2 x - 4\sin x + 3$$
;

r)
$$y = \cos^4 x - 2\sin^2 x + 1$$
:

t)
$$y = \sqrt{\cos^2 x + 6\cos x + 14}$$
;

🗭 Lời giải.

a) $y = 5 - 3\cos 4x$ có tập xác định: $\mathcal{D} = \mathbb{R}$. $\forall x \in \mathbb{R}$, ta có

$$-1 \le \cos 4x \le 1$$

$$\Leftrightarrow$$
 $-3 \ge -3\cos 4x \ge -3$

$$\Leftrightarrow$$
 $5+3 \ge 5-3\cos 4x \ge 5-3$

$$\Leftrightarrow 2 \le y \le 8.$$

Vậy tập giá trị của hàm số là [2; 8].

b) $y = 2 + 3\cos x$ có tập xác định: $\mathcal{D} = \mathbb{R}$. $\forall x \in \mathbb{R}$, ta có

$$-1 \le \cos x \le 1$$

$$\Leftrightarrow$$
 $-3 \ge 3\cos x \ge -3$

$$\Leftrightarrow 2 - 3 \ge 2 + 3\cos x \ge 2 + 3$$

$$\Leftrightarrow$$
 $-1 \le y \le 5$.

Vậy tập giá trị của hàm số là [-1; 5].

c) $y = 3 - 2\sin 2x$ có tập xác định: $\mathscr{D} = \mathbb{R}$. $\forall x \in \mathbb{R}$, ta có

$$-1 \le \sin 2x \le 1$$

$$\Leftrightarrow -2 \ge -2 \sin 2x \ge -2$$

$$\Leftrightarrow 3 + 2 \ge 3 - 2 \sin 2x \ge 3 - 2$$

$$\Leftrightarrow 1 \le y \le 5.$$

Vậy tập giá trị của hàm số là [1; 5].

d) $y = 3 - 2|\sin 2x|$ có tập xác định: $\mathscr{D} = \mathbb{R}$. $\forall x \in \mathbb{R}$, ta có

$$\begin{aligned} 0 &\leq |\sin 2x| \leq 1 \\ \Leftrightarrow &-2 \leq -2|\sin 2x| \leq 0 \\ \Leftrightarrow &1 \leq 3-2|\sin 2x| \leq 3 \\ \Leftrightarrow &1 \leq y \leq 3. \end{aligned}$$

Vậy tập giá trị của hàm số là [1; 3].

e) $y = \frac{1+4\cos^2 x}{3}$ có tập xác định: $\mathscr{D} = \mathbb{R}$. $\forall x \in \mathbb{R}$, ta có

$$0 \le \cos^2 x \le 1$$

$$\Leftrightarrow 0 \le 4 \cos^2 x \le 4$$

$$\Leftrightarrow 1 + 0 \le 1 + 4 \cos^2 x \le 1 + 4$$

$$\Leftrightarrow 1 \le 1 + 4 \cos^2 x \le 5$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3} \le y \le \frac{5}{3}.$$

Vậy tập giá trị của hàm số là $\left[\frac{1}{3}; \frac{5}{3}\right]$.

f) $y = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x$ có tập xác định: $\mathscr{D} = \mathbb{R}$. $\forall x \in \mathbb{R}$, ta có

$$\begin{aligned} &0 \leq \sin^2 2x \leq 1 \\ \Leftrightarrow &0 \leq -\frac{1}{2}\sin^2 2x \leq -\frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow &1 + 0 \geq 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x \geq 1 - \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow &1 \geq y \geq \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Vậy tập giá trị của hàm số là $\left[\frac{1}{2};1\right]$.

g) $y = \sin x + \sin(x + \frac{2\pi}{3})$ có tập xác định: $\mathscr{D} = \mathbb{R}$. Ta có $y = \sin x + \sin(x + \frac{2\pi}{3}) = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$. $\forall x \in \mathbb{R}$, ta có $-1 \le \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \le 1$

Vậy tập giá trị của hàm số là [-1;1].

h) $y = \cos x + \cos(x + \frac{\pi}{3})$ có tập xác định: $\mathscr{D} = \mathbb{R}$. Ta có $y = \cos x + \cos(x + \frac{\pi}{3}) = 2\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$. $\forall x \in \mathbb{R}$, ta có $-1 \le \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \le 1$ $\Leftrightarrow -\sqrt{3} \le \sqrt{3}\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \le \sqrt{3}$

Vậy tập giá trị của hàm số là $\left[-\sqrt{3};\sqrt{3}\right]$.

i)
$$y = \frac{4}{2 - \sin x}$$
 có tập xác định: $\mathscr{D} = \mathbb{R}$. $\forall x \in \mathbb{R}$, ta có

$$-1 \le \sin x \le 1$$

$$\Leftrightarrow 1 \le 2 - \sin x \le 3$$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{3} \le \frac{4}{2 - \sin x} \le 4.$$

Vậy tập giá trị của hàm số là $\left[\frac{4}{3};4\right]$.

j)
$$y = \frac{8}{3 - \cos^2 x}$$
 có tập xác định: $\mathscr{D} = \mathbb{R}$. $\forall x \in \mathbb{R}$, ta có

$$0 \le \cos^2 x \le 1$$

$$\Leftrightarrow 2 \le 3 - \cos^2 x \le 3$$

$$\Leftrightarrow \frac{8}{3} \le \frac{8}{3 - \cos^2 x} \le 4.$$

Vậy tập giá trị của hàm số là $\left[\frac{8}{3};4\right]$.

k)
$$y = \frac{3}{3 - \sqrt{1 - \cos x}}$$
 có tập xác định: $\mathscr{D} = \mathbb{R}$. $\forall x \in \mathbb{R}$, ta có

$$-1 \le \cos x \le 1$$

$$\Leftrightarrow -1 \le -\cos x \le 1$$

$$\Leftrightarrow 0 \le \sqrt{1 - \cos x} \le \sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow -\sqrt{2} \le -\sqrt{1 - \cos x} \le 0$$

$$\Leftrightarrow 3 - \sqrt{2} \le 3 - \sqrt{1 - \cos x} \le 3$$

$$\Leftrightarrow 1 \le \frac{3}{3 - \sqrt{1 - \cos x}} \le \frac{3}{3 - \sqrt{2}} = \frac{9 + 3\sqrt{2}}{7}.$$

Vậy tập giá trị của hàm số là $\left[1; \frac{9+3\sqrt{2}}{7}\right]$.

l)
$$y = \frac{1}{\sqrt{2-\sin^2 3x}}$$
 có tập xác định: $\mathscr{D} = \mathbb{R}$. $\forall x \in \mathbb{R}$, ta có

$$0 \le \sin^2 3x \le 1$$

$$\Leftrightarrow -1 \le -\sin^2 3x \le 0$$

$$\Leftrightarrow 1 \le 2 - \sin^2 3x \le 2$$

$$\Leftrightarrow 1 \le \sqrt{2 - \sin^2 3x} \le \sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \le \frac{1}{\sqrt{2 - \sin^2 3x}} \le 1.$$

Vậy tập giá trị của hàm số là $\left[\frac{1}{\sqrt{2}};1\right]$.

m)
$$y = \sin x + \sqrt{3}\cos x + 12$$
 có tập xác định: $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.
Ta có $y = \sqrt{(\sin x)^2 + (\sqrt{3}\cos x)^2}\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + 12 = \sqrt{1+3}\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + 12 = 2\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + 12$. $\forall x \in \mathbb{R}$, ta có $-1 \le \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \le 1$
 $\Leftrightarrow -2 \le 2\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \le 2$
 $\Leftrightarrow 10 \le 2\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + 12 \le 14$.

Vậy tập giá trị của hàm số là [10; 14].

n)
$$y = \sqrt{3}\sin x - \cos x + 5$$
 có tập xác định: $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.
Ta có $y = \sqrt{(\sqrt{3}\sin x)^2 + (-\cos x)^2}\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + 5 = \sqrt{3+1}\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + 5 = 2\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + 5$. $\forall x \in \mathbb{R}$, ta có
$$-1 \le \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \le 1$$

$$\Leftrightarrow -2 \le 2\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \le 2$$

$$\Leftrightarrow 3 \le 2\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + 5 \le 7.$$

Vậy tập giá trị của hàm số là [3; 7].

o)
$$y = \cos 3x - \sqrt{3} \sin 3x + 4$$
 có tập xác định: $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.
Ta có $y = \sqrt{(\cos 3x)^2 + (-\sqrt{3} \sin 3x)^2} \cos \left(3x + \frac{\pi}{6}\right) + 4 = \sqrt{1+3} \cos \left(3x + \frac{\pi}{6}\right) + 4 = 2\cos \left(3x + \frac{\pi}{6}\right) + 4$. $\forall x \in \mathbb{R}$, ta có

$$-1 \le \cos\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) \le 1$$

$$\Leftrightarrow -2 \le 2\cos\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) \le 2$$

$$\Leftrightarrow 2 \le 2\cos\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) + 4 \le 6.$$

Vậy tập giá trị của hàm số là [2; 6].

p)
$$y=4\sin^2x-4\sin x+3$$
 có tập xác định: $\mathscr{D}=\mathbb{R}$. $y=4\sin^2x-4\sin x+3=\left(2\sin x+1\right)^2+2$. Với mọi $x\in\mathbb{R}$ ta có

$$-1 \le \sin x \le 1$$

$$\Leftrightarrow -1 \le 2\sin x + 1 \le 3$$

$$\Leftrightarrow 0 \le (2\sin x + 1)^2 \le 9$$

$$\Leftrightarrow 2 \le (2\sin x + 1)^2 + 2 \le 11.$$

Vậy tập giá trị của hàm số là [2;11].

q)
$$y=\cos^2x+2\sin x+2$$
 có tập xác định: $\mathscr{D}=\mathbb{R}$. $y=\cos^2x+2\sin x+2=-\sin^2x+2\sin x+3=-\left(\sin x-1\right)^2+4$. Với mọi $x\in\mathbb{R}$ ta có

$$-1 \le \sin x \le 1$$

$$\Leftrightarrow -2 \le \sin x - 1 \le 0$$

$$\Leftrightarrow 0 \le (\sin x - 1)^2 \le 4$$

$$\Leftrightarrow -4 \le -(\sin x - 1)^2 \le 0$$

$$\Leftrightarrow 0 \le -(\sin x - 1)^2 + 4 \le 4.$$

Vậy tập giá trị của hàm số là [0; 4].

r)
$$y = \cos^4 x - 2\sin^2 x + 1$$
 có tập xác định: $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.
 $y = \cos^4 x - 2\sin^2 x + 1 = \cos^4 x - 2\left(1 - \cos^2 x\right) + 1 = \cos^4 x + 2\cos^2 x - 1 = \left(\cos^2 x + 1\right)^2 - 2$.
Với moi $x \in \mathbb{R}$ ta có

$$0 \le \cos^2 x \le 1$$

$$\Leftrightarrow 1 \le \cos^2 x + 1 \le 2$$

$$\Leftrightarrow 1 \le (\cos^2 x + 1)^2 \le 4$$

$$\Leftrightarrow -1 \le (\cos^2 x + 1)^2 - 2 \le 2.$$

Vậy tập giá trị của hàm số là [-1; 2].

s)
$$y = \sqrt{5 - 4\sin x + \sin^2 x}$$
 có tập xác định: $\mathcal{D} = \mathbb{R}$. $g(x) = 5 - 4\sin x + \sin^2 x = (\sin x - 2)^2 + 1$ Với mọi $x \in \mathbb{R}$ ta có

$$-1 \le \sin x \le 1$$

$$\Leftrightarrow$$
 $-3 \le \sin x - 2 \le -1$

$$\Leftrightarrow 1 \le (\sin x - 2)^2 \le 9$$

$$\Leftrightarrow 2 \le (\sin x - 2)^2 + 1 \le 10.$$

Suy ra: $2 \le g(x) \le 10 \Rightarrow \sqrt{2} \le y \le \sqrt{10}$. Vậy tập giá trị của hàm số là $\left\lceil \sqrt{2}; \sqrt{10} \right\rceil$.

t) $y = \sqrt{\cos^2 x + 6\cos x + 14}$ có tập xác định: $\mathcal{D} = \mathbb{R}$. $g(x) = \cos^2 x + 6\cos x + 14 = (\cos x + 3)^2 + 5$ Với mọi $x \in \mathbb{R}$ ta có

$$-1 \le \cos x \le 1$$

$$\Leftrightarrow 2 < \cos x + 3 < 4$$

$$\Leftrightarrow$$
 $4 \le (\cos x + 3)^2 \le 16$

$$\Leftrightarrow$$
 9 \leq $(\cos x + 3)^2 + 5 \leq 21$.

Suy ra: $9 \le g(x) \le 21 \Rightarrow 3 \le y \le \sqrt{21}$. Vậy tập giá trị của hàm số là $\left[3; \sqrt{21}\right]$.

BÀI 2. Tìm GTLN, GTNN của các hàm số sau

a)
$$y = 3 - \sin 2x \text{ trên } [0; \frac{\pi}{2}];$$

b)
$$y = \sin 2x + 2 \text{ trên } [0; \frac{\pi}{2}];$$

c)
$$y = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$$
 trên $[0; \pi]$;

d)
$$y = \sin(2x + \frac{\pi}{4}) + \frac{1}{2} \operatorname{trên}\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right];$$

e)
$$y = \sin^4 x + \cos^4 x \text{ trên } [0; \frac{\pi}{6}];$$

f)
$$y = \sin^6 x + \cos^6 x \text{ trên } \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right];$$

g)
$$y = \sqrt{3}\sin 2x + 2\cos^2 x + 3 \text{ trên } \left[-\frac{5\pi}{6}; \frac{\pi}{4} \right];$$

h)
$$y = \sin 2x + \cos 2x + 3$$
 trên $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4} \right]$.

🗭 Lời giải.

a)
$$y = 3 - \sin 2x \operatorname{trên}\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$$

Ta có
$$x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow 2x \in [0; \pi].$$

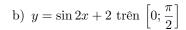
Với mọi $2x \in [0; \pi]$ ta có

$$0 \le \sin 2x \le 1$$

$$\Leftrightarrow -1 \le -\sin 2x \le 0$$

$$\Leftrightarrow 2 \le 3 - \sin 2x \le 3.$$

Vậy
$$\max_{x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]} y = 3$$
 khi $x = 0$ và $\min_{x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]} y = 2$ khi $x = \frac{\pi}{4}$.



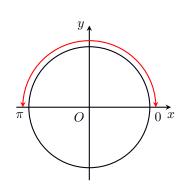
Ta có
$$x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow 2x \in [0; \pi].$$

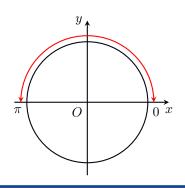
Với mọi $2x \in [0; \pi]$ ta có

$$0 \le \sin 2x \le 1$$

$$\Leftrightarrow 2 \le \sin 2x + 2 \le 3.$$

Vậy
$$\max_{x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]}y=3$$
 khi $x=\frac{\pi}{4}$ và $\min_{x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]}y=2$ khi $x=0.$



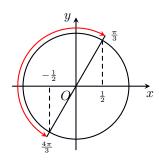


c)
$$y = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \text{ trên } [0; \pi]$$

Ta có
$$x \in [0; \pi] \Rightarrow x + \frac{\pi}{3} \in \left[\frac{\pi}{3}; \frac{4\pi}{3}\right].$$

Do đó:
$$-1 \le \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \le \frac{1}{2}$$
.

Vậy
$$\max_{x \in [0;\pi]} y = \frac{1}{2} \text{ khi } x = 0 \text{ và } \min_{x \in [0;\pi]} y = -1 \text{ khi } x = \frac{2\pi}{3}.$$



d)
$$y = \sin(2x + \frac{\pi}{4}) + \frac{1}{2} \operatorname{trên} \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4} \right]$$

Ta có
$$x \in \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4} \right] \Rightarrow 2x + \frac{\pi}{4} \in \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4} \right].$$

Do đó:

$$\begin{split} &-\frac{\sqrt{2}}{2} \leq \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) \leq 1 \\ \Rightarrow & \frac{1 - \sqrt{2}}{2} \leq \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{2} \leq \frac{3}{2}. \end{split}$$

Vậy
$$\max_{x \in \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]} y = \frac{3}{2}$$
 và $\min_{x \in \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]} y = \frac{1 - \sqrt{2}}{2}$.

e)
$$y = \sin^4 x + \cos^4 x \text{ trên } [0; \frac{\pi}{6}]$$

Ta có

$$\sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cdot \cos^2 x = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x$$
$$= 1 - \frac{1 - \cos 4x}{4} = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cos 4x.$$

Suy ra:
$$y = \sin^4 x + \cos^4 x - 1 = \frac{1}{4}\cos 4x - \frac{1}{4}$$
.

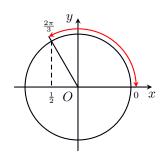
Do
$$x \in \left[0; \frac{\pi}{6}\right] \Rightarrow 4x \in \left[0; \frac{2\pi}{3}\right].$$

Do đó:

$$-\frac{1}{2} \le \cos 4x \le 1$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{8} \le \frac{1}{4} \cos 4x \le \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{3}{8} \le \frac{1}{4} \cos 4x - \frac{1}{4} \le 0.$$



Vậy
$$\max_{x \in \left[0; \frac{\pi}{6}\right]} y = 0$$
 và $\min_{x \in \left[0; \frac{\pi}{6}\right]} y = -\frac{3}{8}$.

f)
$$y = \sin^6 x + \cos^6 x \text{ trên } \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right]$$

Ta có

$$\sin^6 x + \cos^6 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^3 - 3\sin^2 x \cdot \cos^2 x (\sin^2 x + \cos^2 x) = 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x$$
$$= 1 - \frac{3}{4} \cdot \frac{1 - \cos 4x}{2} = \frac{5}{8} + \frac{3}{8}\cos 4x.$$

Suy ra:
$$y = \sin^6 x + \cos^6 x = \frac{5}{8} + \frac{3}{8}\cos 4x$$
.

Do
$$x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right] \Rightarrow 4x \in \left[-2\pi; 2\pi \right]$$
 nên

$$-1 \le \cos 4x \le 1$$

$$\Leftrightarrow -\frac{3}{8} \le \frac{3}{8} \cos 4x \le \frac{3}{8}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{4} \le \frac{5}{8} + \frac{3}{8} \cos 4x \le 1.$$

Vậy
$$\max_{x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]} y = 1$$
 và $\min_{x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]} y = \frac{1}{4}$.

g)
$$y=\sqrt{3}\sin 2x+2\cos^2 x+3$$
 trên $\left[-\frac{5\pi}{6};\frac{\pi}{4}\right]$. Ta có

$$y = \sqrt{3}\sin 2x + 2\cos^2 x + 3$$

$$= \sqrt{3}\sin 2x + 2 \cdot \frac{1 + \cos 2x}{2} + 3$$

$$= \sqrt{3}\sin 2x + \cos 2x + 4 = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) + 4.$$

Do
$$x \in \left[-\frac{5\pi}{6}; \frac{\pi}{4}\right] \Rightarrow 2x \in \left[-\frac{5\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow 2x + \frac{\pi}{6} \in \left[-\frac{3\pi}{2}; \frac{2\pi}{3}\right]$$
. Do đó:

$$-1 \le \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) \le 1$$

$$\Leftrightarrow -2 \le 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) \le 2$$

$$\Leftrightarrow 2 \le 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) + 4 \le 6.$$

Vậy
$$\max_{x\in\left[-\frac{5\pi}{6};\frac{\pi}{4}\right]}y=6 \text{ và } \min_{x\in\left[-\frac{5\pi}{6};\frac{\pi}{4}\right]}y=2.$$

h)
$$y = \sin 2x + \cos 2x + 3 \text{ trên } \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4} \right].$$

Ta có $y = \sin 2x + \cos 2x + 3 = \sqrt{2} \sin \left(2x + \frac{\pi}{4} \right) + 3.$

Do
$$x \in \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right] \Rightarrow 2x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow 2x + \frac{\pi}{4} \in \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$$
.

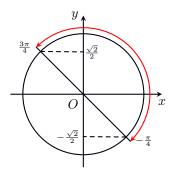
Do đó:

$$-\frac{\sqrt{2}}{2} \le \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) \le 1$$

$$\Leftrightarrow -1 \le \sqrt{2}\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) \le \sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow 2 \le \sqrt{2}\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + 3 \le 3 + \sqrt{2}.$$

Vậy $\max_{x \in \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]} y = 3 + \sqrt{2} \text{ và } \min_{x \in \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]} y = 2.$



Xét tính chẳn lẻ của hàm số lượng giác

- **Bước 1.** Tìm tập xác định \mathscr{D} của hàm số lượng giác. Nếu $\forall x \in \mathscr{D}$ thì $-x \in \mathscr{D}$, suy ra \mathscr{D} là tập đối xứng và chuyển sang bước tiếp theo.
- **Bước 2.** Tính f(-x), nghĩa là ta sẽ thay x bằng -x, sẽ có hai kết quả thường gặp sau:
 - $oldsymbol{\Theta}$ Nếu f(-x)=f(x) thì f(x) là hàm số chẵn.
 - \odot Nếu f(-x) = -f(x) thì f(x) là hàm số lẻ.
 - **②** Nếu \mathscr{D} không là tập đối xứng (∃x ∈ $\mathscr{D} \Rightarrow -x \notin \mathscr{D}$) hoặc $(f(-x) \neq f(x) \text{ và } f(-x) \neq -f(x))$ ta sẽ kết luận hàm số f(x) không chẵn, không lẻ.
 - ② Đồ thị của hàm số chẵn nhận trục tung làm trục đối xứng, đồ thị hàm số lẻ nhận gốc tọa độ O làm tâm đối xứng.

BÀI 1. Xét tính chẵn, lẻ của hàm số $f(x) = \sin^2 2x + \cos 3x$.

🗭 Lời giải.

Tập xác định của hàm số $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Với mọi $x \in \mathcal{D}$ thì $-x \in \mathcal{D}$ nên \mathcal{D} là tập đối xứng.

Ta có $f(-x) = \sin^2(-2x) + \cos(-3x) = \sin^2 2x + \cos 3x = f(x), \forall x \in \mathcal{D}.$ Do đó hàm số f(x) đã cho là hàm số chẵn.

BÁI 2. Xét tính chẵn, lẻ của hàm số $f(x) = \cos^2 3x + \cos x$.

Lời giải.

Tập xác định của hàm số $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Với mọi $x \in \mathcal{D}$ thì $-x \in \mathcal{D}$ nên \mathcal{D} là tập đối xứng.

Ta có $f(-x) = \cos^2(-3x) + \cos(-x) = \cos^2 3x + \cos x = f(x), \forall x \in \mathcal{D}.$

Do đó hàm số f(x) đã cho là hàm số chẵn.

BÀI 3. Xét tính chẵn, lẻ của hàm số $f(x) = \frac{\sin^2 x - \cos x}{\sin^3 x}$.

🗭 Lời giải.

Điều kiện xác định $\sin 3x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}.$

Tập xác định của hàm số $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{k\pi}{2},\,k\in\mathbb{Z}\right\}.$

Với mọi
$$x \in \mathcal{D}$$
 thì $-x \in \mathcal{D}$ nên \mathcal{D} là tập đối xứng. Ta có $f(-x) = \frac{\sin^2(-x) - \cos(-x)}{\sin(-3x)} = \frac{\sin^2 x - \cos x}{-\sin 3x} = -f(x), \forall x \in \mathcal{D}.$

Do đó hàm số f(x) đã cho là hàm số le

BÀI 4. Xét tính chẵn, lẻ của hàm số $f(x) = 1 + \cos x \cdot \sin \left(\frac{3\pi}{2} - 2x\right)$.

🗭 Lời giải.

Tập xác định của hàm số $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Với mọi $x \in \mathcal{D}$ thì $-x \in \mathcal{D}$ nên \mathcal{D} là tập đối xứng.

Ta có
$$f(x) = 1 + \cos x \cdot \sin\left(\frac{3\pi}{2} - 2x\right) = 1 - \cos x \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = 1 - \cos x \cdot \cos 2x$$
.

Khi đó $f(-x) = 1 - \cos(-x) \cdot \cos(-2x) = 1 - \cos x \cdot \cos 2x = f(x), \forall x \in \mathcal{D}$

Do đó hàm số f(x) đã cho là hàm số chẵn.

BÀI 5. Xét tính chẵn, lẻ của hàm số $f(x) = \tan x + \cot x$.

🗩 Lời giải.

Diều kiện xác định của hàm số là $\begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \neq \frac{k\pi}{2}, \ k \in \mathbb{Z}.$

Tập xác định của hàm số $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

Với mọi $x \in \mathcal{D}$ thì $-x \in \mathcal{D}$ nên \mathcal{D} là tập đối xứng.

Ta có
$$f(-x) = \tan(-x) + \cot(-x) = -\tan x - \cot x = -f(x), \forall x \in \mathcal{D}.$$

Do đó hàm số f(x) đã cho là hàm số lẻ.

BÀI 6. Xét tính chẵn, lẻ của hàm số $f(x) = \left| \sin x - \frac{1}{2} \right| + \left| \sin x + \frac{1}{2} \right|$.

Lời giải.

Tập xác định của hàm số $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Với mọi $x \in \mathcal{D}$ thì $-x \in \mathcal{D}$ nên \mathcal{D} là tập đối xứng. Ta có

$$f(-x) = \left| \sin(-x) - \frac{1}{2} \right| + \left| \sin(-x) + \frac{1}{2} \right| = \left| -\sin x - \frac{1}{2} \right| + \left| -\sin x + \frac{1}{2} \right|$$
$$= \left| \sin x + \frac{1}{2} \right| + \left| \sin x - \frac{1}{2} \right| = f(x), \forall x \in \mathcal{D}.$$

Do đó hàm số f(x) đã cho là hàm số chẵn.

BÀI 7. Xét tính chẵn, lẻ của hàm số $f(x) = \frac{\sqrt{\cos x + 2 + \cot^2 x}}{\sin 4x}$.

🗭 Lời giải.

Diều kiện xác định
$$\begin{cases} \cos x + 2 \ge 0 \\ \sin x \ne 0 \\ \sin 4x \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x \ge -2 \\ \sin 4x \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow 4x \ne k\pi \Leftrightarrow x \ne \frac{k\pi}{4}, \ k \in \mathbb{Z}.$$

Tập xác định của hàm số $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{k\pi}{4}, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

Với mọi $x \in \mathcal{D}$ thì $-x \in \mathcal{D}$ nên \mathcal{D} là tập đối xứng.

Ta có $f(-x) = \frac{\sqrt{\cos(-x) + 2 + \cot^2(-x)}}{\sin(-4x)} = \frac{\sqrt{\cos x + 2 + \cot^2 x}}{-\sin 4x} = -f(x), \forall x \in \mathscr{D}.$

Do đó hàm số f(x) đã cho là hàm số lẻ.

Tìm chu kỳ của hàm số lượng giác

- $oldsymbol{\Theta}$ Hàm số $y=\sin x,\,y=\cos x$ tuần hoàn với chu kỳ $T_0=2\pi,\,$ nghĩa là $\sin(x+k2\pi)=\sin x$ và $\cos(x+k2\pi)=\cos x.$ Suy ra hàm số $y=\sin(ax+b)$ và $y=\cos(ax+b)$ tuần hoàn với chu kỳ $T_0=\frac{2\pi}{|a|}.$
- $oldsymbol{\Theta}$ Hàm số $y = \tan x$, $y = \cot x$ tuần hoàn với chu kỳ $T_0 = \pi$. Suy ra hàm số $y = \tan(ax + b)$ và $y = \cot(ax + b)$ tuần hoàn với chu kỳ $T_0 = \frac{\pi}{|a|}$.
- Giả sử hàm số $f(x) = g(x) \pm h(x)$ có hàm g(x) tuần hoàn với chu kỳ T_1 và hàm h(x) tuần hoàn với chu kỳ T_2 . Khi đó hàm số f(x) sẽ tuần hoàn với chu kỳ T_0 là bội chung nhỏ nhất của hai chu kỳ T_1 và T_2 .

CÂU 1. Hàm số $y = \sin 2x$ tuần hoàn với chu kỳ chu kỳ là

$$(A) T_0 = 2\pi.$$

$$T_0 = \pi$$
.

🗭 Lời giải.

Ta có hàm số $y = \sin 2x$ tuần hoàn với chu kỳ $T_0 = \frac{2\pi}{2} = \pi$.

Chọn đáp án \bigcirc

CÂU 2. Hàm số $y = \tan 2x$ tuần hoàn với chu kỳ chu kỳ là

B
$$T_0 = \frac{\pi}{2}$$
.

$$(c) T_0 = 2\pi.$$

🗭 Lời giải.

Ta có hàm số $y = \tan 2x$ tuần hoàn với chu kỳ $T = \frac{\pi}{2}$.

Chọn đáp án B....

CÂU 3. Hàm số $y=3\sin\frac{x}{2}$ tuần hoàn với chu kỳ chu kỳ là

B
$$T_0 = \frac{\pi}{2}$$
.

$$C$$
 $T_0 = 2\pi$.

🗭 Lời giải.

Ta có hàm số $y=3\sin\frac{x}{2}$ tuần hoàn với chu kỳ $T=\frac{2\pi}{\frac{1}{2}}=4\pi.$

Chọn đáp án \bigcirc D....

CÂU 4. Hàm số $f(x) = \sin \frac{x}{2} + 2\cos \frac{3x}{2}$ tuần hoàn với chu kỳ chu kỳ là

$$\bigcirc$$
 5π .

$$\bigcirc B \frac{\pi}{2}$$
.

$$\bigcirc$$
 3π .

$$\bigcirc$$
 4π .

🗭 Lời giải.

Ta có hàm số sin $\frac{x}{2}$ tuần hoàn với chu kỳ $T_1 = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$, hàm số $\cos \frac{3x}{2}$ tuần hoàn với chu kỳ $T_2 = \frac{2\pi}{\frac{3}{2}} = \frac{4\pi}{3}$.

Do đó hàm số f(x) tuần hoàn với chu kỳ T_0 là bội chung nhỏ nhất của T_1 và T_2 .

Do T_1 là bội của $T_2\left(\frac{T_1}{T_2}=3\right)$ nên $T_0=T_1$.

Vậy hàm số f(x) đã cho tuần hoàn với chu kỳ $T_0 = 4\pi$.

Chọn đáp án \fbox{D}

CÂU 5. Tìm m để hàm số $y = \cos mx$ tuần hoàn với chu kỳ $T_0 = \pi$.

$$\bigcirc m = \pm 2.$$

$$\bigcirc m = \pm \frac{\pi}{2}.$$

$$\bigcirc m = \pm \pi.$$

🗭 Lời giải.

Ta có hàm số $y = \cos mx$ tuần hoàn với chu kỳ $T = \frac{2\pi}{|m|}$.

Để hàm số tuần hoàn với chu kỳ $T_0 = \pi$ thì $T = T_0 \Leftrightarrow \frac{2\pi}{|m|} = \pi \Leftrightarrow |m| = 2 \Leftrightarrow m = \pm 2.$

Chọn đáp án B.....

Sự biến thiên của hàm số lượng giác

- $m{\Theta}$ Hàm số $y=\sin x$ đồng biến trên mỗi khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}+k2\pi;\frac{\pi}{2}+k2\pi\right)$ $(k\in\mathbb{Z})$ và nghịch biến trên mỗi khoảng $\left(\frac{\pi}{2}+k2\pi;\frac{3\pi}{2}+k2\pi\right)$ $(k\in\mathbb{Z})$.
- $oldsymbol{\Theta}$ Hàm số $y=\cos x$ đồng biến trên mỗi khoảng $(-\pi+k2\pi;k2\pi)$ $(k\in\mathbb{Z})$ và nghịch biến trên mỗi khoảng $(k2\pi;\pi+k2\pi)$ $(k\in\mathbb{Z})$.
- $oldsymbol{\Theta}$ Hàm số $y=\tan x$ đồng biến trên mỗi khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi;\frac{\pi}{2}+k\pi\right)$ $(k\in\mathbb{Z}).$
- \odot Hàm số $y = \cot x$ nghịch biến trên mỗi khoảng $(k\pi; \pi + k\pi)$ $(k \in \mathbb{Z})$.

1. Ví du minh hoa

VÍ DU 1. Xét sự biến thiên của mỗi hàm số sau trên các khoảng tương ứng:

- a) $y = \sin x$ trên khoảng $\left(-\frac{9\pi}{2}; -\frac{7\pi}{2}\right), \left(\frac{21\pi}{2}; \frac{23\pi}{2}\right);$
- b) $y = \cos x \text{ trên khoảng } (-20\pi; -19\pi), (-9\pi; -8\pi).$

🗭 Lời giải.

- a) Ta có
 - $\Theta\left(-\frac{9\pi}{2}; -\frac{7\pi}{2}\right) = \left(-\frac{\pi}{2} 4\pi; \frac{\pi}{2} 4\pi\right).$

Do hàm số $y = \sin x$ đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ nên hàm số đó cũng đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{9\pi}{2}; -\frac{7\pi}{2}\right)$.

Do hàm số $y=\sin x$ nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right)$ nên hàm số đó cũng nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{21\pi}{2};\frac{23\pi}{2}\right)$.

- b) Ta có
 - $\Theta(-20\pi; -19\pi) = (0 20\pi; \pi 20\pi).$

Do hàm số $y = \cos x$ nghịch biến trên khoảng $(0; \pi)$ nên hàm số đó cũng nghịch biến trên khoảng $(-20\pi; -19\pi)$

 Θ $(-9\pi; -8\pi) = (-\pi - 8\pi; 0 - 8\pi).$

Do hàm số $y = \cos x$ đồng biến trên khoảng $(-\pi; 0)$ nên hàm số đó cũng đồng biến trên khoảng $(-9\pi; -8\pi)$

a)
$$A = 3cm$$
, $\varphi = 0$;

b)
$$A = 3cm, \ \varphi = -\frac{\pi}{2};$$

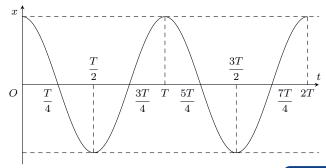
c)
$$A = 3cm, \ \varphi = \frac{\pi}{2}$$
.

🗩 Lời giải.

a) Khi $A=3cm,\ \varphi=0,$ ta có: $x=3\cos\left(\omega\,t\right)=3\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right).$

Ta có bảng xác định giá trị li độ tại một số thời điểm và đồ thị cần vẽ ở Hình 9:

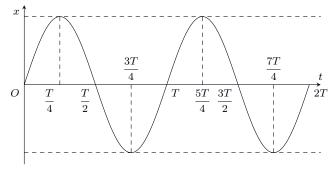
can v	COI	шш э.			
t	0	$\frac{T}{4}$	$\frac{T}{2}$	$\frac{3T}{4}$	T
x	3	0	-3	0	3



b) Khi A = 3cm, $\varphi = -\frac{\pi}{2}$, ta có: $x = 3\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = 3\cos\left(\frac{2\pi}{T}t - \frac{\pi}{2}\right)$.

Ta có bảng xác định giá trị li độ tại một số thời điểm và đồ thị cần vẽ ở Hình 10:

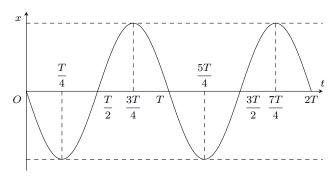
•					
t	0	$\frac{T}{4}$	$\frac{T}{2}$	$\frac{3T}{4}$	T
x	0	3	0	-3	0



c) Khi A = 3cm, $\varphi = \frac{\pi}{2}$, ta có: $x = 3\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = 3\cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \frac{\pi}{2}\right)$.

Ta có bảng xác định giá trị li độ tại một số thời điểm và đồ thị cần vẽ ở Hình 11.

can v	601	шш 11.			
t	0	$\frac{T}{4}$	$\frac{T}{2}$	$\frac{3T}{4}$	T
x	0	-3	0	3	0



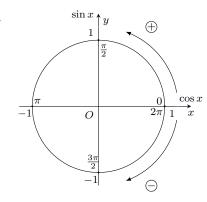
2. Bài tâp trắc nghiêm

CÂU 1. Hàm số $y = \sin x$

- igapha đồng biến trên mỗi khoảng $\left(\frac{\pi}{2}+k2\pi;\pi+k2\pi\right)$ và nghịch biến trên mỗi khoảng $(\pi+k2\pi;k2\pi)$ với $k\in\mathbb{Z}$.
- \bigcirc đồng biến trên mỗi khoảng $\left(\frac{\pi}{2}+k2\pi;\frac{3\pi}{2}+k2\pi\right)$ và nghịch biến trên mỗi khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}+k2\pi;\frac{\pi}{2}+k2\pi\right)$ với $k\in\mathbb{Z}$.
- lacktriangle đồng biến trên mỗi khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}+k2\pi;\frac{\pi}{2}+k2\pi\right)$ và nghịch biến trên mỗi khoảng $\left(\frac{\pi}{2}+k2\pi;\frac{3\pi}{2}+k2\pi\right)$ với $k\in\mathbb{Z}$.

🗭 Lời giải.

 Hàm số $y=\sin x$ đồng biến trên mỗi khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}+k2\pi;\frac{\pi}{2}+k2\pi\right)$ và nghịch biến trên mỗi khoảng $\left(\frac{\pi}{2}+k2\pi;\frac{3\pi}{2}+k2\pi\right)$ với $k\in\mathbb{Z}.$



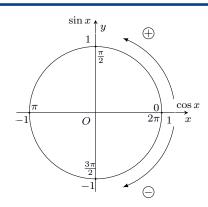
CÂU 2. Hàm số $y = \cos x$

Chọn đáp án (D)....

- igap A đồng biến trên mỗi khoảng $\left(\frac{\pi}{2}+k2\pi;\pi+k2\pi\right)$ và nghịch biến trên mỗi khoảng $(\pi+k2\pi;k2\pi)$ với $k\in\mathbb{Z}$.
- ullet đồng biến trên mỗi khoảng $(-\pi+k2\pi;k2\pi)$ và nghịch biến trên mỗi khoảng $(k2\pi;\pi+k2\pi)$ với $k\in\mathbb{Z}$.
- \bigcirc đồng biến trên mỗi khoảng $\left(\frac{\pi}{2}+k2\pi;\frac{3\pi}{2}+k2\pi\right)$ và nghịch biến trên mỗi khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}+k2\pi;\frac{\pi}{2}+k2\pi\right)$ với $k\in\mathbb{Z}$.
- lacktriangle đồng biến trên mỗi khoảng $(k2\pi;\pi+k2\pi)$ và nghịch biến trên mỗi khoảng $(\pi+k2\pi;3\pi+k2\pi)$ với $k\in\mathbb{Z}$.

🗭 Lời giải.

Hàm số $y=\cos x$ đồng biến trên mỗi khoảng $(-\pi+k2\pi;k2\pi)$ và nghịch biến trên mỗi khoảng $(k2\pi;\pi+k2\pi)$ với $k\in\mathbb{Z}.$



Chon đáp án B

CÂU 3. Hàm số $y = \tan x$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?

- **B** $(0; \pi)$.
- $\left(\mathbf{c}\right) \left(\frac{\pi}{2}; 2\pi \right).$
- $\bigcirc \left(\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right).$

🗩 Lời giải.

Hàm số $y = \tan x$ luôn đồng biến trên các khoảng xác định, vậy nó đồng biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Chọn đáp án A

CÂU 4. Hàm số $y = \cot x$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây?

- **A** $(0; 2\pi)$.
- \bigcirc $\left(\frac{\pi}{2}; 2\pi\right).$
- $(-\pi;0).$
- $\bigcirc \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right).$

🗭 Lời giải.

Hàm số $y = \cot x$ luôn nghịch biến trên các khoảng xác định.

Vậy hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; \pi)$.

Chọn đáp án \bigcirc

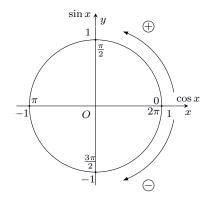
CÂU 5. Hàm số $y = \sqrt{3} + 2\cos x$ tăng trên khoảng

$$\bigcirc$$
 $\left(\frac{7\pi}{6}; 2\pi\right)$.

🗭 Lời giải

Vì hàm số $y=\cos x$ đồng biến trên mỗi khoảng $(-\pi+k2\pi;k2\pi),\ k\in\mathbb{Z}$ nên hàm số $y=\sqrt{3}+2\cos x$ cũng đồng biến trên mỗi khoảng $(-\pi+k2\pi;k2\pi),\ k\in\mathbb{Z}.$

 $\text{Vì } \left(\frac{7\pi}{6}; 2\pi\right) \subset (\pi; 2\pi) \text{ (với } k=1) \text{ nên hàm số đồng biến trên khoảng } \left(\frac{7\pi}{6}; 2\pi\right).$



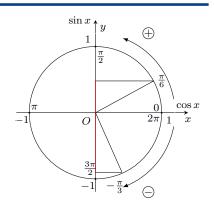
Chọn đáp án \bigcirc

CÂU 6. Hàm số nào đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{6}\right)$?

- $\bigcirc y = \sin x.$

🗭 Lời giải.

Quan sát trên đường tròn lượng giác, ta thấy trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{6}\right)$ hàm số $y = \sin x$ tăng dần (tăng từ $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ đến $\frac{1}{2}$).



C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM CUỐI BÀI

Phần I. Mỗi câu hỏi học sinh chọn một trong bốn phương án A, B, C, D.

- **CÂU 1.** Tập giá trị của hàm số $y = \cos x$ là tập hợp nào sau đây?
 - $lack {\bf A}$ $\Bbb R$.

- $(\mathbf{B})(-\infty;0].$
- (c) $[0; +\infty].$
- \bigcirc [-1; 1].

🗭 Lời giải.

Với mọi $x \in \mathbb{R}$ thì $-1 \le \cos x \le 1$.

Chọn đáp án \bigcirc

CÂU 2. Tập giá trị của hàm số $y = \sin 2x$ là

- (-2;2].
- **B**) [0; 2].

- (c) [-1;1].
- \bigcirc [0; 1].

🗭 Lời giải.

Tập giá trị của hàm số $y = \sin 2x$ là [-1; 1]

Chọn đáp án C

CÂU 3. Mệnh đề nào dưới đây sai?

- (A) Hàm số $y = \tan x$ tuần hoàn với chu kì π .
- **B** Hàm số $y = \cos x$ tuần hoàn với chu kì π .
- **C** Hàm số $y = \cot x$ tuần hoàn với chu kì π .
- \bigcirc Hàm số $y = \sin 2x$ tuần hoàn với chu kì π .

🗭 Lời giải.

Hàm số $y = \cos x$ tuần hoàn với chu kì 2π , các hàm số $y = \tan x, y = \cot x, y = \sin 2x$ tuần hoàn với chu kì π .

Chọn đáp án \fbox{B}

CÂU 4. Hàm số $y = \sin 2x$ có chu kỳ tuần hoàn là

- \mathbf{C} $T=\pi$.
- $\mathbf{D} T = 4\pi.$

🗭 Lời giải.

Chú ý với k là số nguyên dương hàm số $y = \sin kx$ có chu kỳ $T = \frac{2\pi}{k}$.

Chọn đáp án \bigcirc

CÂU 5. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

(A) Hàm số $y = \sin x$ là hàm số chẵn.

(B) Hàm số $y = \cos x$ là hàm số chẵn.

 \bigcirc Hàm số $y = \tan x$ là hàm số chẵn.

(**D**) Hàm số $y = \cot x$ là hàm số chẵn.

🗭 Lời giải.

Theo định nghĩa thì trong bốn hàm số đã cho, chỉ có hàm số $y=\cos x$ là hàm số chẵn.

CÂU 6. Tìm hàm số lẻ trong các hàm số sau:

- $\bigcirc y = x \sin x.$

🗭 Lời giải.

Tất cả các hàm ở 4 đáp án đều có tập xác định là \mathbb{R} , nên để kiểm tra tính lẻ, ta chỉ cần kiểm tra tính chất f(-x) có bằng với $f(x), \forall x \in \mathbb{R}$ và hàm đó là $y = x \cos 2x$.

Chọn đáp án B

CÂU 7. Hàm số nào trong các hàm số dưới đây là hàm số chẵn?

$$\bigcirc y = \sin 2x.$$

🗭 Lời giải.

Xét $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ có tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

Mặt khác $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$ nên là hàm chẵn.

Chọn đáp án (A).....

CÂU 8. Tìm tập xác định của hàm số $y = \cot x$.

Lời giải.

Hàm số xác định khi và chỉ khi $\sin x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Vậy $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{k\pi | k \in \mathbb{Z}\}.$

Chọn đáp án (B).....

CÂU 9. Điều kiện xác định của hàm số $y = \frac{1 - 3\cos x}{\sin x}$ là

$$\mathbf{C}$$
 $x \neq \frac{k\pi}{2}, \ k \in \mathbb{Z}.$

Lời giải.

Điều kiện xác đinh của hàm số đã cho là $\sin x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Chon đáp án (D).....

CÂU 10. Với ký hiệu $k \in \mathbb{Z}$, điều kiện xác định của hàm số $y = \frac{2\sin x + 1}{1 - \cos x}$ là

$$\bigcirc$$
 $x \neq k\pi$.

$$\bigcirc x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi.$$

Lời giải.

Hàm số xác định $\Leftrightarrow 1 - \cos x \neq 0 \Leftrightarrow \cos x \neq 1 \Leftrightarrow x \neq k2\pi \ (k \in \mathbb{Z}).$

Vậy điều kiện xác định của hàm số đã cho là $x \neq k2\pi \ (k \in \mathbb{Z})$.

CÂU 11. Với ký hiệu $k \in \mathbb{Z}$, điều kiện xác định của hàm số $y = \tan\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$ là

B
$$x \neq \frac{5\pi}{12} + k\pi$$
. **C** $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$. **D** $x \neq \frac{5\pi}{12} + k\frac{\pi}{2}$.

🗭 Lời giải.

Hàm số xác định $\Leftrightarrow \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) \neq 0 \Leftrightarrow 2x - \frac{\pi}{3} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x \neq \frac{5\pi}{12} + k\frac{\pi}{2} \ (k \in \mathbb{Z}).$

Vậy điều kiện xác định của hàm số đã cho là $x \neq \frac{5\pi}{12} + k\frac{\pi}{2}$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Chọn đáp án (D).....

CÂU 12. Tìm điều kiện xác định của hàm số $y = \tan x + \cot x$.

$$\bigcirc x \in \mathbb{R}.$$

🗩 Lời giải.

Hàm số xác định $\Leftrightarrow \sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$

Chọn đáp án \bigcirc

CÂU 13. Tập xác định của hàm số $y = \frac{2\cos 3x - 1}{\cos x + \frac{1}{2}}$ là

🗭 Lời giải.

Hàm số xác định khi và chỉ khi $\cos x + 1 \neq 0 \Leftrightarrow \cos x \neq -1 \Leftrightarrow x \neq \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$. Vậy hàm số có tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{\pi + k2\pi; k \in \mathbb{Z}\}.$

Chọn đáp án (D).....

(**D**) $\min y = -1, \max y = 4.$

CÂU 14. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số sau $y = 1 + 3\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$.

(A) $\min y = -2$, $\max y = 4$. (B) $\min y = 2$, $\max y = 4$. $(\mathbf{c}) \min y = -2, \max y = 3.$

🗭 Lời giải.

Ta có: $-1 \le \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) \le 1 \Rightarrow -2 \le y \le 4$.

- $\mathbf{\Theta} \ y = -2 \Leftrightarrow \sin\left(2x \frac{\pi}{4}\right) = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{8} + k\pi \Rightarrow \min y = -2.$
- $y = 4 \Leftrightarrow \sin\left(2x \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{8} + k\pi \Rightarrow \max y = 4.$

CÂU 15. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số sau $y = 3 - 2\cos^2 3x$.

- $(\mathbf{A}) \min y = 1, \max y = 2.$
- **(B)** $\min y = 1$, $\max y = 3$. **(C)** $\min y = 2$, $\max y = 3$.
- (**D**) $\min y = -1, \max y = 3.$

🗭 Lời giải.

Ta có: $0 \le \cos^2 3x \le 1 \Rightarrow 1 \le y \le 3$.

- $\bigcirc y = 1 \Leftrightarrow \cos^2 3x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{3} \Rightarrow \min y = 1.$
- $\bigcirc y = 3 \Leftrightarrow \cos^2 3x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3} \Rightarrow \max y = 3.$

CÂU 16. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số sau $y = \sqrt{2\sin x + 3}$.

 $(\textbf{A}) \max y = \sqrt{5}, \min y = 1.$

B) $\max y = \sqrt{5}, \min y = 2\sqrt{5}.$

(c) $\max y = \sqrt{5}, \min y = 2.$

 $(\mathbf{D}) \max y = \sqrt{5}, \min y = 3.$

🗭 Lời giải.

Ta có $1 \le 2\sin x + 3 \le 5 \Rightarrow 1 \le y \le \sqrt{5}$. Vậy $\max y = \sqrt{5}$ khi $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$ và $\min y = 1$ khi $x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$.

CÂU 17. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số sau $y = \frac{4}{1 + 2\sin^2 x}$.

- (A) $\min y = \frac{4}{3}$, $\max y = 4$. (B) $\min y = \frac{4}{3}$, $\max y = 3$. (C) $\min y = \frac{4}{3}$, $\max y = 2$. (D) $\min y = \frac{1}{2}$, $\max y = 4$.

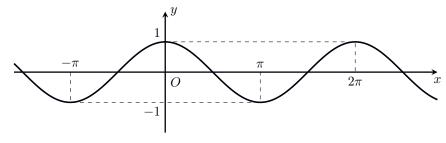
🗭 Lời giải.

Ta có: $0 \le \sin^2 x \le 1 \Rightarrow \frac{4}{3} \le y \le 4$.

- Θ $y = \frac{4}{3} \Leftrightarrow \sin^2 x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow \min y = \frac{4}{3}$.
- $y = 4 \Leftrightarrow \sin^2 x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi \Rightarrow \max y = 4.$

.....

CÂU 18. Đường cong trong hình dưới đây là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A,B,C,D. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?



$$(A) y = 1 + \sin x.$$

$$\mathbf{B}) y = 1 - \sin x.$$

$$\bigcirc$$
 $y = \sin x$.

$$\bigcirc y = \cos x.$$

🗩 Lời giải.

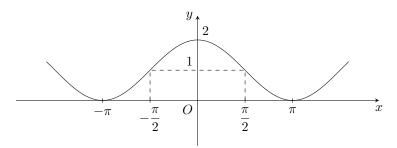
Ta thấy y(0) = 1, do đó loại đáp án C.

Hàm số không đạt giá trị bằng 2 tại $x=\frac{\pi}{2}$ hay $x=-\frac{\pi}{2}$, loại đáp án A và B.

Do đó, hàm số cần tìm phải là $y = \cos x$.

Chọn đáp án $\boxed{\mathbb{D}}$ \square

CÂU 19. Đường cong trong hình vẽ bên dưới là đồ thị của một trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D. Hỏi đó là hàm số nào?



$$\mathbf{B} y = 2 - \sin x.$$

$$\mathbf{C}$$
 $y = 2\cos x$.

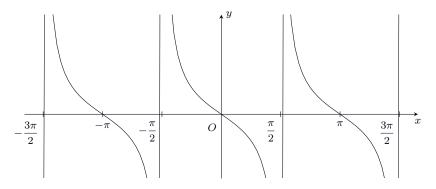
$$(\mathbf{D}) y = \cos^2 x + 1.$$

🗭 Lời giải.

Đồ thị hàm số đã cho đi qua điểm $(0,\pi)$. Trong các hàm số đã cho chỉ có hàm số $y=\cos x+1$ thỏa mãn.

Chọn đáp án \bigcirc

CÂU 20. Hàm số nào trong các hàm số sau có đồ thị ở hình vẽ dưới đây?



$$\bigcirc$$
 $y = \cot x$.

$$\bigcirc y = \tan x.$$

🗭 Lời giải.

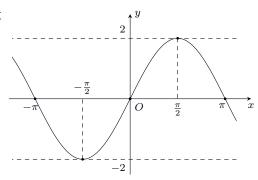
Từ đồ thị hàm số $y = \tan x$ ta suy ra đồ thị trên của hàm số $y = -\tan x$.

Chon đáp án (A).

Phần II. Trong mỗi ý a), b), c) và d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.

Cho hàm số $y=2\sin x$ có đồ thị như hình bên. Xét tính đúng sai của các khẳng đinh sau:

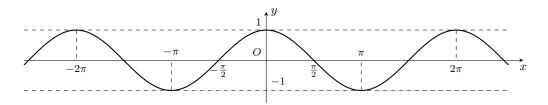
Mệnh đề	Đ	$ \mathbf{S} $
a) Tập xác định của hàm số là \mathbb{R} .	X	
b) Tập giá trị của hàm số là $[-1;1]$.		X
c) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-2; 2)$.		X
d) Đồ thị hàm số cắt đường thẳng $y = -1$ tại đúng 2 điểm phân biệt.		X



🗭 Lời giải.

Chọn đáp án a đúng b sai c sai d sai

CÂU 22. Cho đồ thị hàm số $y = \cos x$ trên đoạn $[-2\pi; 2\pi]$ như hình bên dưới

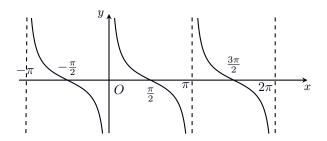


Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

Mệnh đề	Ð	S
a) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\pi;\pi)$.		X
b) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-2\pi; -\pi)$.	X	
c) Trên đoạn $[-2\pi; 2\pi]$, hàm số có giá trị lớn nhất bằng 1.	X	
d) Trên đoạn $[-2\pi; 2\pi]$, có đúng 3 giá trị của x để hàm số nhận giá trị bằng 0.	X	

🗭 Lời giải.

CÂU 23. Cho hàm số $y = \cot x$ có đồ thị như hình bên dưới.



Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

Mệnh đề	Ð	S
a) Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$	X	
b) Hàm số nghịch biến trên $(-\pi; pi)$.		X
c) Trên $[-\pi; \pi]$ có đúng ba giá trị của x để $\cot x = 0$.		X
d) Trên $[0; \pi]$, $\cot x < 1$ khi và chỉ khi $x \in \left(\frac{\pi}{4}; \pi\right)$.	X	

🗭 Lời giải.

Chọn đáp án a đúng b sai c sai d đúng ...

CÂU 24. Cho hàm số $y = f(x) = 2\sin^2 x - 5$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

Mệnh đề	Ð	S
a) Hàm số tuần hoàn với chu kì 2π .		X
b) Hàm số là một hàm số chẵn.	X	
c) Giá trị lớn nhất của hàm số đạt được khi $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, với $k \in \mathbb{Z}$.	X	
d) Giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng -3 .		X

🗭 Lời giải.

- a) (S) Hàm số tuần hoàn với chu kì π .
- b) \bigcirc Với mỗi $x \in \mathbb{R}$ thì $f(-x) = 2\sin^2(-x) 5 = 2\sin^2 x 5$ nên hàm số đã cho là hàm số chẵn.
- c) D Ta có $0 \le \sin^2 x \le 1 \Rightarrow = -5 \le 2 \sin^2 x 5 \le -3$. Suy ra, giá trị lớn nhất của hàm số bằng -3, đạt được khi $\sin^2 x = 1 \Leftrightarrow \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, với $k \in \mathbb{Z}$.
- d) S Ta có $0 \le \sin^2 x \le 1 \Rightarrow = -5 \le 2 \sin^2 x 5 \le -3$. Suy ra, giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng -5

Chọn đáp án a sai b đúng c đúng d sai

CÂU 25. Huyết áp là áp lực máu cần thiết tác động lên thành động mạch nhằm đưa máu đi nuôi dưỡng các mô trong cơ thể. Nhờ lực co bóp của tim và sức cản của động mạch mà huyết áp được tạo ra. Giả sử huyết áp của một người thay đổi theo thời gian được cho bởi công thức: $p(t) = 120 + 15\cos 150\pi t$, trong đó p(t) là huyết áp tính theo đơn vị mmHg (milimét thủy ngân) và thời gian t tính theo đơn vị phút. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

Mệnh đề	Ð	S
a) Hàm số $p(t)$ tuần hoàn với chu kì $\frac{\pi}{75}$.		X
b) Thời điểm $t=0$, huyết áp của người này là 120 mmHg.		X
c) Huyết áp tâm thu (huyết áp cao nhất) của người này là 135 mmHg.	X	
d) Huyết áp tâm tương (huyết áp thấp nhất) của người này là 105 mmHg.	X	

🗩 Lời giải.

- a) S Ghi nhớ: Hàm số $y = \cos at$ tuần hoàn với chu kì $\frac{2\pi}{a}$ Suy ra hàm số này tuần hoàn với chu kì $\frac{2\pi}{150\pi} = \frac{1}{75}$.
- **b)** S Với t = 0, ta có $p = 120 + 15\cos 0 = 135$ mmHg.
- c) D Vì $-1 \le \cos 150\pi t \le 1$ với mọi $t \in \mathbb{R}$ nên $105 \le p(t) \le 135$ với mọi $t \in \mathbb{R}$ nên huyết áp tâm thu (huyết áp cao nhất) là 135 mmHg.
- d) D Huyết áp tâm tương (huyết áp thấp nhất) của người này là 105 mmHg.

Chọn đáp án a sai b sai c đúng d đúng

Phần III. Học sinh điền kết quả vào ô trống.

CÂU 26. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = \sqrt{5} - \sqrt{3}\cos 2x$. (Kết quả làm tròn đến hai chữ số thập phân)

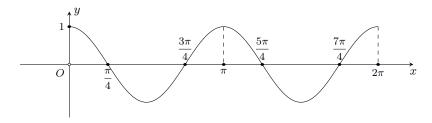
Đáp án: $\boxed{3}$, $\boxed{9}$ $\boxed{7}$

🗭 Lời giải.

Ta có $-1 \le \cos 2x \le 1 \Rightarrow \sqrt{3} \ge -\sqrt{3}\cos 2x \ge -\sqrt{3} \Rightarrow \sqrt{5} + \sqrt{3} \ge \sqrt{5} - \sqrt{3}\cos 2x \ge \sqrt{5} - \sqrt{3}$. Suy ra giá trị lớn nhất của hàm số là $\sqrt{5} + \sqrt{4} \approx 3,97$.

Đáp án: $\boxed{3,97}$

CÂU 27. Xét hàm số $f(x) = \cos 2x$ trên $[0; 2\pi]$ có đồ thị như hình vẽ.



Gọi T là tập hợp tất cả các giá trị của $x \in [0; 2\pi]$ để $\cos 2x = 0$. Tính tổng tất cả các phần tử của T (làm tròn đến hàng phần chục).

Đáp án: 1 2 , 6

Lời giải.

Dựa vào đồ thị $T = \left\{ \frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}; \frac{7\pi}{4} \right\}$. Suy ra, tổng các phần tử trong tập hợp T là

$$\frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} + \frac{5\pi}{4} + \frac{7\pi}{4} \approx 12, 6.$$

Đáp án: 12,6

CÂU 28. Hằng ngày, Mặt Trời chiếu sáng, bóng của một tòa chung cư cao $40\,(\mathrm{m})$ in trên mặt đất, độ dài bóng của tòa nhà này được tính bằng công thức $S\,(t)=40\,\left|\cot\frac{\pi}{12}t\right|$, ở đó S được tính bằng mét, còn t là số giờ tính từ 6 giờ sáng. Tìm độ dài bóng của tòa nhà tại các thời điểm 8 giờ sáng (làm tròn đến hàng phần chục).

Đáp án: 169, 3

🗭 Lời giải.

Tại thời điểm 8 giờ sáng ta có t = 8 - 6 = 2.

Vậy độ dài bóng của tòa nhà tại thời điểm 8 giờ sáng là $S(2) = 40 \left| \cot \left(\frac{\pi}{12} \cdot 2 \right) \right| = 40\sqrt{3} \, (\text{m})$

Đáp án: 169,3

CÂU 29. Giả sử khi một cơn sóng biển đi qua một cái cọc ở ngoài khơi, chiều cao của nước được mô hình hoá bởi hàm số $h(t) = 90\cos\left(\frac{\pi}{10}t\right)$, trong đó h(t) là độ cao tính bằng centimét trên mực nước biển trung bình tại thời điểm t giây. Tìm chiều cao của sóng (cm) (là khoảng cách theo phương thẳng đứng giữa đáy và đỉnh của sóng).

Đáp án: 1 8 0

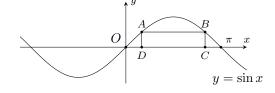
🗭 Lời giải.

Ta có $-90 \le 90 \cos\left(\frac{\pi}{10}t\right) \le 90$, suy ra chiều cao của sóng là 90 - (-90) = 180 (cm).

Đáp án: 180

Đáp án: | 0 |

CÂU 30. Cho hai điểm A, B thuộc đồ thị hàm số $y = \sin x$ trên đoạn $[0; \pi]$, các điểm C, D thuộc trực Ox thỏa mãn ABCD là hình chữ nhật và $CD = \frac{2\pi}{3}$. Tính độ dài đoạn BC.



🗭 Lời giải.

Theo hình vẽ thì $OD = CK \Rightarrow 2OD = \pi - CD = \frac{\pi}{3} \Rightarrow OD = \frac{\pi}{6} \Rightarrow x_D = \frac{\pi}{6}$

Tung độ điểm D là $y_D = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} = AD = BC.$

Đáp án: 0.5

Bài 3.	Hàm số lượng giác	1
A	Tóm tắt lý thuyết	1
B	Các dạng toán thường gặp	2
	🗁 Dạng 1. Tìm tập xác định của hàm số lượng giác	3
	🗁 Dạng 2. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số lượng giác	4
	🗁 Dạng 3. Xét tính chẵn lẻ của hàm số lượng giác	
	Dạng 4. Tìm chu kỳ của hàm số lượng giác	5
	🗁 Dạng 5. Sự biến thiên của hàm số lượng giác	6
	Bài tập trắc nghiệm cuối bài	7
LỜI GIẢI CHI TIẾT		12
Bài 3.	Hàm số lượng giác	12
A	Tóm tắt lý thuyết	12
B	Các dạng toán thường gặp	13
	🗁 Dạng 1. Tìm tập xác định của hàm số lượng giác	14
	🗁 Dạng 2. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số lượng giác	16
	Dạng 3. Xét tính chẵn lẻ của hàm số lượng giác	23
	🗁 Dạng 4. Tìm chu kỳ của hàm số lượng giác	25
	🗁 Dạng 5. Sự biến thiên của hàm số lượng giác	26
	Bài tập trắc nghiệm cuối bài	29

