Bài 3. GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ

QUICK NOTE

A. KIẾN THỨC CẦN NẮM

1. Định nghĩa

Định nghĩa 3.1. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập K. Khi đó:

$$M = \max_K f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \le M, \forall x \in K \\ \exists x_0 \in K \colon f(x_0) = M. \end{cases} \quad m = \min_K f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \ge m, \forall x \in K \\ \exists x_0 \in K \colon f(x_0) = m. \end{cases}$$

2. Định lí

Định lí 3.1. *Mọi hàm số liên tục trên một đoạn đều có giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất trên đoạn đó.*

3. Các phương pháp tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số

***Bài toán.* *Tìm GTLN GTNN của hàm số* $\mathbf{y = f(x)}$ *trên đoạn* $\mathbf{K = [a; b]}$.**

Bước 1. Hàm số đã cho xác định và liên tục trên đoạn $[a; b]$. Tính $f'(x)$ và tìm những điểm x_i sao cho tại đó có đạo hàm bằng 0 hoặc liên tục nhưng không có đạo hàm.

Bước 2. Tính $f(a), f(b), f(x_i)$.

Bước 3. Kết luận: $\begin{cases} \max\limits_{[a;b]} f(x) = \max\{f(a); f(b); f(x_i)\} \\ \min\limits_{[a;b]} f(x) = \min\{f(a); f(b); f(x_i)\} \end{cases}$.

Nếu $K = (a; b)$ thì ở bước 2 ta không xét $f(a)$ và $f(b)$. Khi đó hàm số $f(x)$ có thể sẽ không có GTLN, GTNN trên $(a; b)$.
Nếu $y = f(x)$ đồng biến trên $[a; b]$ thì $\min\limits_{[a;b]} f(x) = f(a)$ và $\max\limits_{[a;b]} f(x) = f(b)$.
Nếu $y = f(x)$ nghịch biến trên $[a; b]$ thì $\min\limits_{[a;b]} f(x) = f(b)$ và $\max\limits_{[a;b]} f(x) = f(a)$.

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1. Tìm GTLN – GTNN trên một đoạn, khoảng

Phương pháp: Thực hiện theo các bước ở trên.

1. Các ví dụ

VÍ DỤ 1. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 2$ trên $[-2; 2]$.

Lời giải.

Ta có: $y' = 3x^2 - 6x - 9 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \in (-2; 2) \\ x = 3 \notin (-2; 2). \end{array}\right.$

$y(-2) = 0; y(2) = -20; y(-1) = 7$.

Suy ra $\max\limits_{[-2;2]} y = 7$; $\min\limits_{[-2;2]} y = -20$. □

VÍ DỤ 2. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \dfrac{3x - 1}{x - 3}$ trên $[0; 2]$.

Lời giải.

Hàm số đã cho xác định và liên tục trên đoạn $[0; 2]$ Ta có $y' = \dfrac{-8}{(x - 3)^2} < 0, \forall x \in [0; 2]$.

Tính $y(0) = \dfrac{1}{3}; y(2) = -5$.

Suy ra $\max\limits_{[0;2]} y = \dfrac{1}{3}$ khi $x = 0$, $\min\limits_{[0;2]} y = -5$ khi $x = 2$. □

QUICK NOTE

VÍ DỤ 3. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \dfrac{x^2+3}{x-1}$ trên đoạn $[2;4]$.

Lời giải.

Hàm số $y = \dfrac{x^2+3}{x-1}$ liên tục trên đoạn $[2;4]$.

Ta có $y'(x) = \dfrac{x^2-2x-3}{(x-1)^2} \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \notin (2;4) \\ x = 3 \in (2;4). \end{array}\right.$

Tính $y'(2) = 7; y'(4) = \dfrac{19}{3}; y'(3) = 6$.

Suy ra $\max\limits_{[2;4]} y = 7$ khi $x = 2$, $\min\limits_{[2;4]} y = 6$ khi $x = 3$. □

VÍ DỤ 4. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y = x + \sqrt{4-x^2}$. Hãy tính $P = M + m$?

Lời giải.

Tập xác định: $\mathscr{D} = [-2;2]$. Ta có: $y' = 1 - \dfrac{x}{\sqrt{4-x^2}} = \dfrac{\sqrt{4-x^2}-x}{\sqrt{4-x^2}}$.

$y' = 0 \Leftrightarrow \sqrt{4-x^2} = x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x = \pm\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = \sqrt{2}$.

$y(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}, y(2) = 2, y(-2) = -2$.

Vậy $M = 2\sqrt{2}, m = -2 \Rightarrow P = 2\sqrt{2} - 2 = 2(\sqrt{2}-1)$. □

VÍ DỤ 5. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = (x-6)\sqrt{x^2+4}$ trên đoạn $[0;3]$.

Lời giải.

Hàm số đã cho xác định và liên tục trên đoạn $[0;3]$.

Ta có: $y' = \dfrac{2x^2-6x+4}{\sqrt{x^2+4}}, x \in [0;3]$.

$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 2. \end{array}\right.$

Tính $y(1) = -5\sqrt{5}; y(0) = -12; y(2) = -8\sqrt{2}; y(3) = -3\sqrt{13}$.

Suy ra $\max\limits_{[0;3]} y = -3\sqrt{13}$ khi $x = 3$, $\min\limits_{[0;3]} y = -12$ khi $x = 0$.

Sử dụng Casio.

Nhập MODE 7, $f(X) = (x-6)\sqrt{x^2+4}$.

Start? 0 End? 3 Step? $\dfrac{1}{6}$. Kết luận. □

VÍ DỤ 6. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sqrt{-x^2+5x+6}$ trên đoạn $[-1;6]$.

Lời giải.

Hàm số đã cho xác định và liên tục trên đoạn $[-1;6]$.

Ta có: $y' = \dfrac{-2x+5}{2\sqrt{-x^2+5x+6}}$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{5}{2} \in [-1;6]$.

$y(-1) = y(6) = 0, y\left(\dfrac{5}{2}\right) = \dfrac{7}{2}$.

Vậy $\max\limits_{[-1;6]} y = \dfrac{7}{2}$ khi $x = \dfrac{5}{2}$ và $\min\limits_{[-1;6]} y = 0$ khi $x = -1, x = 6$. □

VÍ DỤ 7. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x - \sin 2x$ trên đoạn $\left[-\dfrac{\pi}{2};\pi\right]$.

Lời giải.

$y' = 1 - 2\cos 2x = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = \dfrac{1}{2} = \cos\dfrac{\pi}{3} \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{\pi}{6} + k\pi$.

Xét $x \in \left[\dfrac{-\pi}{2};\pi\right]$ ta được $x = \pm\dfrac{\pi}{6}; x = \dfrac{5\pi}{6}$.

$f\left(\dfrac{-\pi}{2}\right) = -\dfrac{\pi}{2}; f(\pi) = \pi; f\left(\dfrac{-\pi}{6}\right) = -\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}; f\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{\pi}{6} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}; f\left(\dfrac{5\pi}{6}\right) =$

$\dfrac{5\pi}{6}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Suy ra $\max\limits_{\left[-\frac{\pi}{2};\pi\right]} y=\dfrac{5\pi+3\sqrt{3}}{6}$; $\min\limits_{\left[-\frac{\pi}{2};\pi\right]} y=\dfrac{-\pi}{2}$.

Sử dụng Casio.

Chuyển chế độ sang Rad: Shift MODE 4. Nhập MODE 7, $f(X)=x-\sin 2x$.

Start? $-\dfrac{\pi}{2}$ End? π Step? $\dfrac{3\pi}{2}$. Kết luận. □

VÍ DỤ 8. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\left|x^3-9x^2+24x-68\right|$ trên đoạn $[-1;4]$.

Lời giải.

Bảng biến thiên của hàm số $y=x^3-9x^2+24x-68$ trên $[-1;4]$

x	-1		2		4
y'		$+$	0	$-$	
y	-102	$\nearrow$	-48	$\searrow$	-52

Suy ra BBT của hàm số $y=\left|x^3-9x^2+24x-68\right|$ trên đoạn $[-1;4]$ là

x	-1		2		4
y'		$-$	0	$+$	
y	102	$\searrow$	48	$\nearrow$	52

Vậy GTNN của hàm số $y=\left|x^3-9x^2+24x-68\right|$ trên đoạn $[-1;4]$ bằng 48.

Sử dụng Casio.

Nhập MODE 7, $f(X)=\left|x^3-9x^2+24x-68\right|$.

Start? -1 End? 4 Step? $\dfrac{5}{18}$. Kết luận. □

VÍ DỤ 9. Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số $y=x-5+\dfrac{1}{x}$ trên khoảng $(0;+\infty)$.

Lời giải.

Ta có: $y'=1-\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{x^2-1}{x^2}$ trên khoảng $(0;+\infty)$.

$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\in(0;+\infty)\\x=-1\notin(0;+\infty).\end{array}\right.$

Dựa vào BBT:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	-7	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

Trên khoảng $(0;+\infty)$, không có $GTLN$; $GTNN=-3$. □

QUICK NOTE

QUICK NOTE

VÍ DỤ 10. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^2 + \dfrac{2}{x}$ trên khoảng $(0; +\infty)$.

Lời giải.

Ta có: $\lim\limits_{x \to 0^+} y = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} y = +\infty$.

$y' = 2x - \dfrac{2}{x^2}$.

$y' = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Bảng biến thiên

x	0		1		$+\infty$
y'	$\|$	$-$	0	$+$	
y	$\|$ $+\infty$		-3		$+\infty$

Vậy không tồn tại giá trị lớn nhất, $\min\limits_{(0;+\infty)} y = 3$. □

VÍ DỤ 11. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \dfrac{3x^2 + 2x + 3}{x^2 + 1}$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = \dfrac{-2x^2 + 2}{(x^2 + 1)^2}$, $y' = 0 \Leftrightarrow -2x^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -1. \end{array}\right.$

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} y = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{3x^2 + 2x + 3}{x^2 + 1} = 3 \Rightarrow y = 3$ là tiệm cận ngang.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	3		2		4		3

Suy ra $\max\limits_{\mathbb{R}} y = 4$ khi $x = 1$, $\min\limits_{\mathbb{R}} y = 2$ khi $x = -1$. □

2. Câu hỏi trắc nghiệm

CÂU 1. Giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = x^3 + 6x^2 - 3$ trên đoạn $[-2; 2]$ là

A. $m = 29$. **B.** $m = 13$. **C.** $m = -3$. **D.** $m = -4$.

CÂU 2. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \dfrac{1}{3}x^3 - 4x + 2$ trên đoạn $[-1; 3]$ là

A. $y(-1)$. **B.** $y(2)$. **C.** $y(3)$. **D.** $y(0)$.

CÂU 3. Tìm giá trị nhỏ nhất M của hàm số $y = x^3 - 3x^2$ trên đoạn $[-1; 1]$

A. $M = -2$. **B.** $M = 0$. **C.** $M = -4$. **D.** $M = 2$.

CÂU 4. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = x^3 - 3x + 3$ trên đoạn $\left[-3; \dfrac{3}{2}\right]$ là

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

CÂU 5. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = x^3 - 2x^2 - 4x + 5$ trên đoạn $[1; 3]$ bằng

A. -3. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 3.

CÂU 6. Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = x^4 - x^2 + 13$ trên đoạn $[-2; 3]$.

A. $m = \dfrac{51}{2}$. **B.** $m = 13$. **C.** $m = \dfrac{51}{4}$. **D.** $m = \dfrac{49}{4}$.

QUICK NOTE

CÂU 7. Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 3$ trên đoạn $[0; \sqrt{3}]$
A. $M = 9$. **B.** $M = 8\sqrt{3}$. **C.** $M = 6$. **D.** $M = 1$.

CÂU 8. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 3$ trên đoạn $[-3; 2]$?
A. 11. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 2.

CÂU 9. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = \dfrac{x-2}{x+1}$ trên đoạn $[0; 2]$
A. Không tồn tại. **B.** 0. **C.** -2. **D.** 2.

CÂU 10. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \dfrac{1-x}{2x-3}$ trên $[0; 1]$.
A. $\min\limits_{[0;1]} y = 0$. **B.** $\min\limits_{[0;1]} y = -\dfrac{1}{3}$. **C.** $\min\limits_{[0;1]} y = -1$. **D.** $\min\limits_{[0;1]} y = -2$.

CÂU 11. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = \dfrac{3x-1}{x-3}$ trên đoạn $[0; 2]$.
A. $\dfrac{1}{3}$. **B.** 5. **C.** $-\dfrac{1}{3}$. **D.** -5.

CÂU 12. Cho hàm số $y = \dfrac{x+1}{x-2}$. Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[-4, 0]$.
A. $y(-3)$. **B.** $y(0)$. **C.** $y(-1)$. **D.** $y(-4)$.

CÂU 13. Hàm số $y = -x^3 + 3x - 2$ trên đoạn $[-3; 0]$ có giá trị lớn nhất M, giá trị nhỏ nhất m. Tính giá trị của $M + m$.
A. -6. **B.** 12. **C.** 14. **D.** 16.

CÂU 14. Tính tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 1$ trên đoạn $[-4; 0]$.
A. 24. **B.** 21. **C.** 22. **D.** 29.

CÂU 15. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 2$ trên đoạn $[-1; 2]$ đạt tại $x = x_0$. Giá trị x_0 bằng
A. 1. **B.** 2. **C.** -2. **D.** -1.

CÂU 16. Trên đoạn $[-2; 2]$, hàm số nào sau đây có giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất trùng với giá trị cực đại và giá trị cực tiểu của nó?
A. $y = x^3 + 2x - 7$. **B.** $y = x^3 - 6x - 1$.
C. $y = x^3 - 2x^2 + 5x - 10$. **D.** $y = 5x^3$.

CÂU 17. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \left(x^2 - 2x + 3\right)^2 - 7$.
A. Không tồn tại giá trị nhỏ nhất của hàm số.
B. $\min\limits_{\mathbb{R}} y = -5$.
C. $\min\limits_{\mathbb{R}} y = -7$.
D. $\min\limits_{\mathbb{R}} y = -3$.

CÂU 18. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^3 - 3x + 1$ trên khoảng $(0; 2)$ là
A. 3. **B.** 1. **C.** -1. **D.** 0.

CÂU 19. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^2 + \dfrac{2}{x}$ trên đoạn $[2; 3]$.
A. $\dfrac{15}{2}$. **B.** $\dfrac{29}{3}$. **C.** 3. **D.** 5.

CÂU 20. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x + \dfrac{4}{x}$ trên đoạn $[1; 4]$.
A. 4. **B.** $2\sqrt{3}$. **C.** 5. **D.** $3\sqrt{2}$.

CÂU 21. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \dfrac{x^2+3}{x-1}$ trên $[2; 4]$.
A. $\min\limits_{[2;4]} y = -2$. **B.** $\min\limits_{[2;4]} y = 6$. **C.** $\min\limits_{[2;4]} y = -3$. **D.** $\min\limits_{[2;4]} y = \dfrac{19}{3}$.

CÂU 22. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^2 + \dfrac{2}{x}$ trên đoạn $[2; 3]$.
A. $\dfrac{15}{2}$. **B.** $\dfrac{29}{3}$. **C.** 3. **D.** 5.

QUICK NOTE

CÂU 23. Tích của giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = x + \dfrac{4}{x}$ trên $[1;3]$ bằng

A. $\dfrac{52}{3}$. **B.** 20. **C.** 6. **D.** $\dfrac{65}{3}$.

CÂU 24. Cho hàm số $f(x) = \dfrac{x^2-4x+7}{x-1}$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[2;4]$. Tính $M+m$?

A. $M+m=7$. **B.** $M+m=\dfrac{16}{3}$. **C.** $M+m=\dfrac{13}{3}$. **D.** $M+m=5$.

CÂU 25. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \dfrac{2x^2+5x+4}{x+2}$ trên đoạn $[0;1]$ là

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

CÂU 26. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \dfrac{2x^2+5x+8}{x+8}$ trên đoạn $[0;8]$ là

A. 12. **B.** 11. **C.** 10. **D.** 9.

CÂU 27. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x + \dfrac{1}{x}$ trên khoảng $(0;+\infty)$ là

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

CÂU 28. GTNN của hàm số $f(x) = 2\sin 2x - 5x + 1$ trên đoạn $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$ bằng

A. $3-\dfrac{5\pi}{4}$. **B.** 0. **C.** 1. **D.** $1-\dfrac{5\pi}{2}$.

CÂU 29. Gọi M và m theo thứ tự là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y = x + \cos^2 x$ trên đoạn $\left[0;\dfrac{\pi}{4}\right]$. Khi đó tổng $(M+m)$ bằng

A. $-\dfrac{1}{2}$. **B.** $\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{3}{2}$. **C.** $\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{6}$. **D.** $\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{3}{4}$.

CÂU 30. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = \sqrt{x-2} + \sqrt{4-x}$.

A. $\sqrt{2}$. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 3.

CÂU 31. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \sqrt{4-x^2}$

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

CÂU 32. Gọi M, m lần lượt là GTLN, GTNN của hàm số $y = \sqrt{x-1} + \sqrt{7-x}$. Khi đó có bao nhiêu số nguyên nằm giữa M, m?

A. 1. **B.** 2. **C.** Vô số. **D.** 0.

CÂU 33. Cho hàm số $f(x) = \sqrt{2+x} + \sqrt{2-x}$. Khẳng định nào sau đây **đúng**?

A. Giá trị lớn nhất của hàm số bằng $2\sqrt{2}$.

B. Hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x=0$.

C. Giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng 0.

D. Hàm số đạt giá trị lớn nhất tại $x=2$.

CÂU 34. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = x + \sqrt{2-x}$ trên đoạn $[-2;1]$

A. 0. **B.** 2. **C.** $\dfrac{9}{4}$. **D.** $\sqrt{2}$.

CÂU 35. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}$?

A. 1. **B.** 2. **C.** $\sqrt{2}$. **D.** Không tồn tại.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathscr{D} = \mathbb{R}$ $f'(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+1} - (x+1)\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} = \dfrac{x^2+1-x^2-x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} = \dfrac{1-x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$ $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$, $f(1) = \sqrt{2}$.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$\sqrt{2}$	$\searrow$	$-\infty$

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}$ là $f(1)=\sqrt{2}$.

Chọn đáp án C □

CÂU 36. Giá trị lớn nhất của hàm số $y=\dfrac{x+\sqrt{1+9x^2}}{8x^2+1}, x>0$.

A. $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$. **C.** $\sqrt{2}$. **D.** $\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$.

Lời giải.

Hàm số đã cho xác định và liên tục trên khoảng $(0:+\infty)$ $y=\dfrac{x+\sqrt{1+9x^2}}{8x^2+1}=\dfrac{9x^2+1-x^2}{(8x^2+1)\left(\sqrt{9x^2+1}-x\right)}=\dfrac{1}{\sqrt{9x^2+1}-x}$.

Hàm số đạt giá trị lớn nhất trên khoảng $(0:+\infty)$ khi hàm số.

$f(x)=\sqrt{9x^2+1}-x$ đạt giá trị nhỏ nhất trên khoảng $(0:+\infty)$.

$f'(x)=\dfrac{9x}{\sqrt{9x^2+1}}-1$.

$f'(x)=0\Leftrightarrow\sqrt{9x^2+1}=9x\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\72x^2=1\end{cases}\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{6\sqrt{2}}$.

Vậy $\max\limits_{x>0}y=\dfrac{1}{\dfrac{2\sqrt{2}}{3}}=\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$ khi $x=\dfrac{1}{6\sqrt{2}}$.

Chọn đáp án D □

CÂU 37. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=-x+3-\dfrac{1}{x+2}$ trên nửa khoảng $[-4;-2)$.

A. $\min\limits_{[-4;2)}y=4$. **B.** $\min\limits_{[-4;2)}y=5$. **C.** $\min\limits_{[-4;2)}y=\dfrac{15}{2}$. **D.** $\min\limits_{[-4;2)}y=7$.

Lời giải.

TXĐ: $\mathscr{D}=[-4;-2)$; $y'=-1+\dfrac{1}{(x+2)^2}$; $y'=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\notin[-4;-2)\\x=-3\in[-4;-2).\end{array}\right.$

Ta có

x	-4		3		2
y'		$-$	0	$+$	
y	$\dfrac{15}{2}$	$\searrow$	7	$\nearrow$	$+\infty$

$y(-4)=\dfrac{15}{2}; y(-3)=7;\lim\limits_{x\to-2^-}y=+\infty$.

Vậy $\min\limits_{[-4;2)}y=7$.

Chọn đáp án D □

CÂU 38. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x+2+\dfrac{1}{x-1}$ trên khoảng $(1;+\infty)$ là

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

QUICK NOTE

QUICK NOTE

Lời giải.

TXĐ: $\mathscr{D} = (1;+\infty)$; $y' = 1 - \dfrac{1}{(x-1)^2}$; $y' = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \notin [(1;+\infty) \\ x = 2 \in (1;+\infty). \end{array}\right.$

Ta có

x	1		2		$+\infty$
y'	‖	$-$	0	$+$	
y	‖ $+\infty$	$\searrow$	5	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy $\min\limits_{(1;+\infty)} y = 5$.

Chọn đáp án D

CÂU 39. Tổng giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y = f(x) = |x| + 3$ trên $[-1;1]$ là

A. 3. **B.** 7. **C.** 0. **D.** 4.

Lời giải.

Ta có $y = f(x) = |x| + 3 = \left[\begin{array}{l} x + 3 khi x \in [0;1] \\ -x + 3 khi x \in [-1;0) \end{array}\right.$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} y' = 1 khi x \in [0;1] \\ y' = -1 khi x \in [-1;0). \end{array}\right.$

Ta có bảng biến thiên của hàm số đã cho

x	-1		0		1
y'		$-$	‖	$+$	
y	4	$\searrow$	3	$\nearrow$	4

Vậy $\max\limits_{[-1;1]} y + \min\limits_{[-1;1]} y = 7$.

Chọn đáp án B

CÂU 40. Tìm câu sai trong các mệnh đề sau về GTLN và GTNN của hàm số $y = \left|x^3 - 3x + 1\right|, x \in [0;3]$

A. $\min y = 1$.

B. $\max y = 19$.

C. Hàm số có GTLN và GTNN.

D. Hàm số đạt GTLN khi $x = 3$.

Lời giải.

$\max y = 19$.

Chọn đáp án A

CÂU 41. Gọi M, N lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = |x-3|\sqrt{x+1}$ trên đoạn $[0;4]$. Tính $M + 2N$.

A. $\dfrac{16\sqrt{3}}{9}$. **B.** $3 + \sqrt{5}$. **C.** $\dfrac{16\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\sqrt{5}$.

Lời giải.

$f(x) = |x-3|\sqrt{x+1} = \sqrt{(x-3)^2(x+1)}$. Xét hàm số $g(x) = (x-3)^2(x+1), x \in [0;4]$.

$g'(x) = 2(x-3)(x+1) + (x-3)^2 = (x-3)(2(x+1) + x - 3) = (x-3)(3x-1)$.

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \in (0;4) \\ x = \dfrac{1}{3} \in (0;4) \end{array}\right.$; $g(0) = 9$; $g\left(\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{256}{27}$; $g(3) = 0$; $g(4) = 5$;

$\max\limits_{[0;4]} g(x) = \dfrac{256}{27}$; $\min\limits_{[0;4]} g(x) = 0$; $M = \dfrac{16\sqrt{3}}{9}$; $N = 0$.

Vậy $M + 2N = \dfrac{16\sqrt{3}}{9}$.

Chọn đáp án A

QUICK NOTE

Dạng 2. Tìm GTLN – GTNN bằng phương pháp đổi biến

Cơ sở lý thuyết: Cho hàm số $y = f[u(x)]$ xác định trên K và có GTLN, GTLNN là M, m. Đặt $t = u(x)$. Vì $x \in K \Rightarrow t \in K_t$. Khi đó GTLN, GTNN của hàm số $f(t)$ trên K_t cũng tương ứng bằng M, m.
Tóm tắt: Việc đổi biến không làm thay đổi tập giá trị của hàm số.

1. Các ví dụ

VÍ DỤ 1. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = x^6 + 4\left(1 - x^2\right)^3$ trên đoạn $[-1; 1]$.

Lời giải.

Giải theo tự luận:
Đặt $t = x^2, (0 \le t \le 1)$, hàm số đã cho trở thành $y = t^3 + 4(1-t)^3$ $y' = 3t^2 - 12(1-t)^2; y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{2}{3} \\ t = 2(loai). \end{array}\right.$

Ta có: $y(0) = 4; y(1) = 1; y\left(\dfrac{2}{3}\right) = \dfrac{4}{9}$. Vậy $\max\limits_{[-1;1]} y = 4$

Giải theo Casio:
Nhập biểu thức $f(X) = 4 + 4\left(1 - X^2\right)^3$
Nhập các giá trị: Start?-1 End 1 Step?0.1
Kết quả.

VÍ DỤ 2. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sqrt{3 + 2x - x^2} + (x-1)^2 - 5$.

Lời giải.

Giải theo tự luận:
Đk: $3 + 2x - x^2 \ge 0 \Leftrightarrow -1 \le x \le 3$.
Đặt $t = \sqrt{3 + 2x - x^2} = \sqrt{4 - (x-1)^2} \Rightarrow 0 \le t \le 2$.
Hàm số đã cho trở thành: $y = -t^2 + t - 1$.
$y' = -2t + 1; y' = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{1}{2}$.

Ta có: $y(0) = -1; y(2) = -3; y\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{-3}{4}$. Vậy $\max\limits_{[-1;3]} y = -\dfrac{3}{4}$; $\min\limits_{[-1;3]} = -3$.

Giải theo Casio:
Đk: $3 + 2x - x^2 \ge 0 \Leftrightarrow -1 \le x \le 3$.
Nhập biểu thức $f(x)$ vào máy.
Lần 1: ấn "=" sau đó nhập giá trị $start = -1; end = 3; step = 0 \cdot 2$.
Lần 2: ấn "=" sau đó nhập giá trị $start = 2 \cdot 6; end = 3; step = 0 \cdot 02$.

VÍ DỤ 3. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = cos^2 2x - \sin x \cdot \cos x + 4$ bằng

Lời giải.

Giải theo tự luận:
Ta có: $y = \left(1 - \sin^2 2x\right) - \dfrac{1}{2}\sin 2x + 4$.

Đặt $t = \sin 2x, (-1 \le t \le 1)$, hàm số đã cho trở thành $y = -t^2 - \dfrac{1}{2}t + 5$.

$y' = -2t - \dfrac{1}{2}; y' = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{-1}{4}$.

$y(-1) = \dfrac{9}{2}; y(1) = \dfrac{7}{2}; y\left(-\dfrac{1}{4}\right) = \dfrac{81}{6}$

$\Rightarrow \min\limits_{\mathbb{R}} = \dfrac{7}{2}$ tại $x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

QUICK NOTE

VÍ DỤ 4. Gọi M, m theo thứ tự là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\sqrt{2-x}+2\sqrt{2+x}+4\sqrt{4-x^2}+3x+1$. Tính $P=M+m$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D}=[-2;2]$.

Đặt $t=\sqrt{2-x}+2\sqrt{2+x}\Rightarrow t'=-\dfrac{1}{2\sqrt{2-x}}+\dfrac{1}{\sqrt{2+x}}\xrightarrow{t'=0}x=\dfrac{6}{5}$.

Ta có $\begin{cases}t(-2)=2\\ t(2)=4\\ t\left(\dfrac{6}{5}\right)=2\sqrt{5}\end{cases}\Rightarrow \min\limits_{[-2;2]}t\le t\le\max\limits_{[-2;2]}t\Leftrightarrow 2\le t\le 2\sqrt{5}\Rightarrow t\in\left[2;2\sqrt{5}\right]$.

Lại có $t^2=3x+10+4\sqrt{4-x^2}\Rightarrow 3x+\sqrt{4-x^2}=t^2-10$.

Từ đó, $y=t+t^2-9\Rightarrow y'=2t+1>0,\forall t\in\left[2;2\sqrt{5}\right]$.

suy ra $\begin{cases}M=y(2\sqrt{5})=11+2\sqrt{5}\\ m=y(2)=-3\end{cases}\Rightarrow P=8+2\sqrt{5}$. □

VÍ DỤ 5. Tìm GTLN của hàm số $y=\sin\dfrac{2x}{x^2+1}+cos\dfrac{4x}{x^2+1}+1$.

Lời giải.

Đặt $t=\sin\dfrac{2x}{x^2+1}\in[-1;1]$ suy ra $cos\dfrac{4x}{x^2+1}=cos2\left(\dfrac{2x}{x^2+1}\right)=1-\sin^2\dfrac{2x}{x^2+1}$.

Khi đó $y=\sin t+\cos 2t+1=2+\sin t-2\sin^2 t=\dfrac{17}{8}-2\left(t-\dfrac{1}{4}\right)^2\le\dfrac{17}{8}\Rightarrow y_{\max}=\dfrac{17}{8}$.

□

2. Câu hỏi trắc nghiệm

CÂU 1. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=2\cos^3x-\dfrac{9}{2}cos^2x+3\cos x+\dfrac{1}{2}$ là

A. 1. **B.** -24. **C.** -12. **D.** -9.

CÂU 2. Giá trị lớn nhất của hàm số $y=2\sin^2x+2\sin x-1$ bằng

A. 3 tại $x=\dfrac{\pi}{4}+k2\pi,k\in\mathbb{Z}$. **B.** 2 tại $x=\dfrac{\pi}{4}+k2\pi,k\in\mathbb{Z}$.

C. 3 tại $x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi,k\in\mathbb{Z}$. **D.** 2 tại $x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi,k\in\mathbb{Z}$.

CÂU 3. Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\sin^3x-3\sin x+1$ trên đoạn $[0;\pi]$ là

A. $\max\limits_{[0;\pi]}y=3;\min\limits_{[0;\pi]}=-1$. **B.** $\max\limits_{[0;\pi]}y=3;\min\limits_{[0;\pi]}=1$.

C. $\max\limits_{[0;\pi]}y=1;\min\limits_{[0;\pi]}=-1$. **D.** $\max\limits_{[0;\pi]}y=1;\min\limits_{[0;\pi]}=-3$.

CÂU 4. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{2\cos x-1}{\cos x+2}$.

A. $\dfrac{1}{3}$. **B.** 1. **C.** -3. **D.** -1.

CÂU 5. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{\sin x+1}{\sin^2x+\sin x+1}$ là

A. $-\dfrac{1}{3}$. **B.** 0. **C.** $\dfrac{2}{3}$. **D.** $\dfrac{3}{2}$.

CÂU 6. Giá trị lớn nhất của hàm số $y=2x+1+\dfrac{1}{2x+1}$ trên đoạn $[1;2]$ là

A. $\dfrac{26}{5}$. **B.** $\dfrac{10}{3}$. **C.** $\dfrac{14}{3}$. **D.** $\dfrac{24}{3}$.

CÂU 7. Giá trị lớn nhất của hàm số $y=3\sin x-4\sin^3x$ trên khoảng $\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$ là

A. 7. **B.** 3. **C.** 1. **D.** -1.

CÂU 8. Giá trị lớn nhất của hàm số $y=2\sin x-\dfrac{4}{3}\sin^3x$ trên đoạn $[0;\pi]$ là

A. $\dfrac{2}{3}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$. **C.** $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

CÂU 9. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = cos^4 x - 6\cos^2 x + 5$ là

A. 5. **B.** -5. **C.** 0. **D.** 1.

CÂU 10. Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 2\sin^2 x - \cos x + 1$ là

A. $\max\limits_{\mathbb{R}} y = \frac{25}{8}; \min\limits_{\mathbb{R}} = 0$.

B. $\max\limits_{\mathbb{R}} y = 4; \min\limits_{\mathbb{R}} = 2$.

C. $\max\limits_{\mathbb{R}} y = \frac{25}{8}; \min\limits_{\mathbb{R}} = 2$.

D. $\max\limits_{\mathbb{R}} y = 0; \min\limits_{\mathbb{R}} = -2$.

CÂU 11. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sin^3 x - cos2x + \sin x + 2$ trên đoạn $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

A. $\frac{23}{27}$. **B.** $\frac{1}{27}$. **C.** 5. **D.** 1.

CÂU 12. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sin^6 x + cos^6 x$.

A. $\min\limits_{\mathbb{R}} y = \frac{1}{4}$. **B.** $\min\limits_{\mathbb{R}} y = \frac{1}{2}$. **C.** $\min\limits_{\mathbb{R}} y = \frac{3}{4}$. **D.** $\min\limits_{\mathbb{R}} y = 1$.

CÂU 13. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \sin^4 x + cos^2 x + 2$ là

A. -3. **B.** 3. **C.** $-\frac{11}{4}$. **D.** $\frac{11}{4}$.

CÂU 14. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 2\sin^8 x + cos^4 2x$ là

A. 1. **B.** 3. **C.** $-\frac{1}{27}$. **D.** $\frac{1}{27}$.

CÂU 15. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = cos2x + 3\sin^2 x + 2\sin x$ là

A. 4. **B.** 6. **C.** 5. **D.** 2.

CÂU 16. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{3 - 2\sin^2 x}{2\cos^2 x - 3}$.

A. -4. **B.** -3. **C.** 0. **D.** -1.

CÂU 17. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = x + 1 + \sqrt{9 + 6x - 3x^2}$.

A. 4. **B.** 3. **C.** 0. **D.** Số khác.

CÂU 18. Hàm số $y = x^3 + \frac{1}{x^3} + \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 2\left(x + \frac{1}{x}\right)$ với $x > 0$ đạt GTNN bằng

A. 0. **B.** -4. **C.** 2. **D.** -1.

CÂU 19. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{\sin^4 x - 2\cos^2 x + 4}{2\sin^2 x + cos^2 x}$ là

A. -2. **B.** 2. **C.** $\frac{5}{2}$. **D.** $-\frac{5}{2}$.

CÂU 20. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = \sin^6 x + cos^6 x + 2\cos 4x + \sin 2x - 5$.

A. $\max\limits_{\mathbb{R}} y = -\frac{37}{19}$. **B.** $\max\limits_{\mathbb{R}} y = -\frac{31}{4}$. **C.** $\max\limits_{[-1;1]} y = -\frac{37}{19}$. **D.** $\max\limits_{[-1;1]} y = -\frac{31}{4}$.

Lời giải.

Ta có: $\sin^6 x + cos^6 x = 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x; cos4x = 1 - 2\sin^2 2x$

$\Rightarrow y = -\frac{19}{4}\sin^2 2x + \sin 2x - 2$ Đặt $t = \sin 2x; t \in [-1; 1]$ Hàm số đã cho trở thành $y = -\frac{19}{4}t^2 + t - 2$ Tìm GTLN, GTNN của hàm số trên đoạn $[-1; 1]$ ta được $\min\limits_{\mathbb{R}} y = -\frac{31}{4}; \max\limits_{\mathbb{R}} y = -\frac{37}{19}$.

Chọn đáp án C □

CÂU 21. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{x^3 + x^2 + x}{(x^2 + 1)^2}$.

A. $\max\limits_{\mathbb{R}} y = \frac{3}{4}; \min\limits_{\mathbb{R}} = \frac{1}{4}$.

B. $\max\limits_{\mathbb{R}} y = \frac{1}{2}; \min\limits_{\mathbb{R}} = -\frac{1}{2}$.

C. $\max\limits_{\mathbb{R}} y = \frac{3}{4}; \min\limits_{\mathbb{R}} = -\frac{1}{2}$.

D. $\max\limits_{\mathbb{R}} y = \frac{3}{4}; \min\limits_{\mathbb{R}} y = -\frac{1}{4}$.

QUICK NOTE

QUICK NOTE

Lời giải.

Ta có: $y=\dfrac{\left(x^2+1\right)x+x}{\left(x^2+1\right)^2}=\dfrac{x}{x^2+1}+\left(\dfrac{x}{x^2+1}\right)^2$.

Đặt $t=\dfrac{x}{x^2+1}\Rightarrow t\in\left[\dfrac{-1}{2};\dfrac{1}{2}\right]$;(dùng bảng biến thiên để tìm miền giá trị của t).

Hàm số đã cho trở thành $y=t^2+t$.

Tìm GTLN, GTNN của hàm số trên đoạn $\left[\dfrac{-1}{2};\dfrac{1}{2}\right]$ ta được $\min\limits_{\mathbb{R}} y=-\dfrac{1}{4};\max\limits_{\mathbb{R}} y=\dfrac{3}{4}$.

Chọn đáp án (D) □

CÂU 22. Tìm GTLN, GTNN của hàm số $y=\sqrt{x+4}+\sqrt{4-x}-4\sqrt{(x+4)\cdot(4-x)}+5$.

A. $\max\limits_{[-4;4]} y=4;\ \min\limits_{[-4;4]}=2\sqrt{2}$.
B. $\max\limits_{[-4;4]} y=5+2\sqrt{2};\ \min\limits_{[-4;4]}=-7$.
C. $\max\limits_{[-4;4]} y=4;\ \min\limits_{[-4;4]}=-2\sqrt{2}$.
D. $\max\limits_{[-4;4]} y=4;\ \min\limits_{[-4;4]}=-7$.

Lời giải.

Điều kiện: $-4\le x\le 4$.

Đặt $t=\sqrt{x+4}+\sqrt{4-x}\Rightarrow t^2=8+2\sqrt{(x+4)(4-x)}\Rightarrow\sqrt{(x+4)(4-x)}=\dfrac{t^2-8}{2}$.

Hàm số đã cho trở thành $y=t-4\left(\dfrac{t^2-8}{2}\right)+5=-2t^2+t+21$.

Tìm điều kiện của t: tìm max,min của hàm số: $g(x)=\sqrt{x+4}+\sqrt{4-x}, x\in[-4;4]$
$\Rightarrow t\in\left[2\sqrt{2};4\right]$.

Tìm GTLN, GTNN của hàm số trên đoạn $\left[2\sqrt{2};4\right]$ ta được $\min\limits_{\mathbb{R}} y=-7;\max\limits_{\mathbb{R}} y=5+2\sqrt{2}$.

Chọn đáp án (B) □

CÂU 23. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x(x+2)(x+4)(x+6)+5$ với $x\ge -4$ là

A. -9.
B. -11.
C. -3.
D. -12.

Lời giải.

Ta có: $y=\left(x^2+6x\right)\left(x^2+6x+8\right)+5$.
Đặt $t=x^2+6x\Rightarrow t\in[-9;+\infty)$.
Hàm số đã cho trở thành $y=t^2+8t+5$.
Tìm GTLN, GTNN của hàm số trên nửa khoảng $[-9;+\infty)$ ta được $\min\limits_{[-4;+\infty)} y=-11$.

Chọn đáp án (B) □

CÂU 24. Hàm số $y=4\sqrt{x^2-2x+3}+2x-x^2$ đạt GTLN tại hai giá trị x mà tích của chúng là

A. 2.
B. 7.
C. 0.
D. -1.

Lời giải.

Ta có: $y=4\sqrt{(x-1)^2+2}-(x-1)^2+1$.
Đặt $t=\sqrt{(x-1)^2+2}; t>0\Rightarrow(x-1)^2=t^2-2$.
Hàm số đã cho trở thành $y=-t^2+4t+3$.
Tìm GTLN, GTNN của hàm số trên khoảng $(0;+\infty)$ ta được $\max\limits_{(0;+\infty)} y=7$ tại

$$t=2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_1=1-\sqrt{2}\\x_2=1+\sqrt{2}\end{array}\right.\Rightarrow x_1x_2=-1.$$

Chọn đáp án (B) □

Dạng 3. Tìm GTLN – GTNN từ BBT, đồ thị

Bài toán: Từ BBT, đồ thị hàm số tìm GTLN – GTNN.

- Dựa vào đồ thị, BBT để xác định giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất.

Dựa vào đồ thị của đạo hàm để lập BBT, từ đó xác định giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất.

1. Các ví dụ

VÍ DỤ 1. Giá trị nhỏ nhất của hàm số có bảng biến thiên sau trên đoạn $[-2;3]$ là

x	-2		-1		1		3
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	-3	$\nearrow$	7

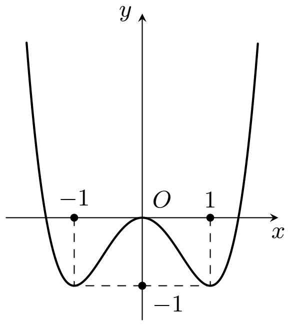
A. $\min\limits_{[-2;3]} y = 0$. **B.** $\min\limits_{[-2;3]} y = -3$. **C.** $\min\limits_{[-2;3]} y = 1$. **D.** $\min\limits_{[-2;3]} y = 7$.

Lời giải.

Chọn đáp án B

VÍ DỤ 2.
Giá trị nhỏ nhất trên tập xác định của hàm số có đồ thị sau là

A. $\min\limits_{y} = -1$. **B.** $\min\limits_{y} = 1$.
C. $\min\limits_{y} = 0$. **D.** $\min\limits_{y} = -2$.

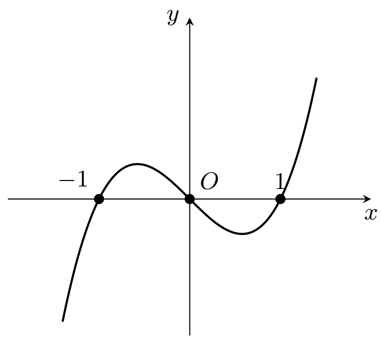


Lời giải.

Chọn đáp án A

VÍ DỤ 3.
Cho đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ. Hàm số $y = f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[0;2]$ tại x bằng bao nhiêu?

A. $x = \dfrac{2}{3}$. **B.** $x = 0$. **C.** $x = 1$. **D.** $x = 2$.



Lời giải.

Dựa vào đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ ta có BBT như sau:

x	$-\infty$		-1		$f(0)$		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y		$\searrow$	$f(-1)$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$f(1)$	$\nearrow$	

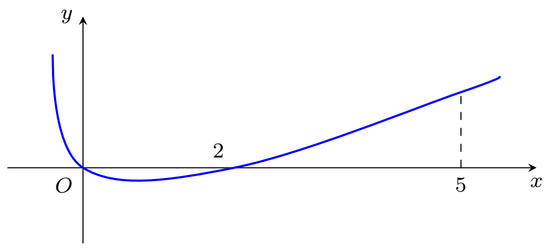
Dựa vào BBT suy ra hàm số $y = f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[0;2]$ tại $x = 1$.
Chọn đáp án C

QUICK NOTE

QUICK NOTE

VÍ DỤ 4.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ được cho như hình vẽ bên. Biết $f(0) + f(3) = f(2) + f(5)$. Giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của $y = f(x)$ trên đoạn $[0;5]$ lần lượt là



A. $f(2), f(5)$. **B.** $f(0), f(5)$.
C. $f(0), f(2)$. **D.** $f(1), f(5)$.

Lời giải.

Từ đồ thị $y = f'(x)$ trên đoạn $[0;5]$ ta có bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$:

x	0		2		5
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$f(0)$	$\searrow$	$f(2)$	$\nearrow$	$f(5)$

Suy ra $\min\limits_{[0;5]} f(x) = f(2)$.

Từ giả thiết, ta có: $f(0) + f(3) = f(2) + f(5) \Rightarrow f(5) - f(3) = f(0) - f(2)$.

Hàm số $f(x)$ đồng biến trên $[2;5]$

$\Rightarrow f(3) > f(2) \Rightarrow f(5) - f(2) > f(5) - f(3) = f(0) - f(2)$ nên $f(5) > f(0)$.

Suy ra, $\max\limits_{[0;5]} f(x) = f(5)$.

Chọn đáp án A □

2. Câu hỏi trắc nghiệm

CÂU 1. Giá trị lớn nhất của hàm số có bảng biến thiên sau trên tập xác định là

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	1	$\nearrow$	9	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1

A. $\max\limits_{\mathbb{R}} y = -1$. **B.** $\max\limits_{\mathbb{R}} y = 1$. **C.** $\max\limits_{\mathbb{R}} y = 9$. **D.** $\max\limits_{\mathbb{R}} y = 10$.

CÂU 2. Giá trị nhỏ nhất của hàm số có bảng biến thiên sau trên $[-4;+\infty)$ là

x	$-\infty$	-4		-3		$+\infty$
y'			$-$	0	$+$	
y		-8	$\searrow$	-9	$\nearrow$	$+\infty$

A. $\min\limits_{[-4;+\infty)} y = -8$. **B.** $\min\limits_{[-4;+\infty)} y = -11$.
C. $\min\limits_{[-4;+\infty)} y = -17$. **D.** $\min\limits_{[-4;+\infty)} y = -9$.

CÂU 3. Giá trị lớn nhất của hàm số có bảng biến thiên sau trên khoảng $\left(\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right)$ là

x	$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$
y'		$+$	‖	$-$	
y	‖ $-\infty$	↗	-1	↘	$-\infty$ ‖

A. Không tồn tại. **B.** 1. **C.** π. **D.** ˘1.

CÂU 4. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \dfrac{1}{\sin x}$ có bảng biến thiên sau trên khoảng $(0;\pi)$ là

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
y'		$+$	‖	$-$	
y	‖ $+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$ ‖

A. -1. **B.** 1. **C.** $\dfrac{\pi}{2}$. **D.** Không tồn tại.

CÂU 5. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x + \sqrt{2x^2+1}$ có bảng biến thiên sau bằng

x	$-\infty$		$-\frac{1}{\sqrt{2}}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	↗	$+\infty$

A. $\min\limits_{\mathbb{R}} y = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. **B.** $\min\limits_{\mathbb{R}} y = 0$. **C.** $\min\limits_{\mathbb{R}} y = 1$. **D.** $\min\limits_{\mathbb{R}} y = \sqrt{2}$.

CÂU 6. Cho hàm số $y = \sqrt{x+1}$ có bảng biến thiên sau. Khẳng định nào sau đây đúng?

x	-1		$+\infty$
y'	‖	$+$	
y	0	↗	$+\infty$

A. Hàm số không có giá trị nhỏ nhất.
B. Hàm số có giá trị lớn nhất.
C. Hàm số có giá trị nhỏ nhất bằng -1.
D. Hàm số có giá trị nhỏ nhất bằng 0.

CÂU 7. Hàm số $y = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{x+2}$ có bảng biến thiên sau đạt giá trị lớn nhất trên đoạn $[-5;-3]$ bằng

QUICK NOTE

QUICK NOTE

x	-5		-3
y'		$-$	
y	$-\dfrac{47}{60}$	$\searrow$	$-\dfrac{11}{6}$

A. $-\dfrac{13}{12}$. **B.** $\dfrac{11}{6}$. **C.** $-\dfrac{47}{60}$. **D.** $-\dfrac{11}{6}$.

CÂU 8. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên sau. Khẳng định nào sau đây đúng?

x	2		$\dfrac{5}{2}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	-6	$\searrow$	$-\dfrac{25}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

A. $\max\limits_{[2;+\infty]} y = -6$.

B. $\max\limits_{[2;+\infty]} y = -\dfrac{25}{4}$.

C. $\max\limits_{[2;+\infty]} y = 2$.

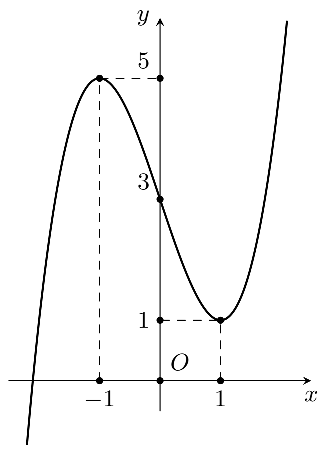
D. $\min\limits_{[2;+\infty]} y = -\dfrac{25}{4}$.

CÂU 9.

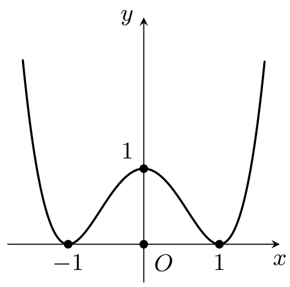
Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^3 - 3x + 5$ có đồ thị sau trên đoạn $[0; 2]$ là

A. $\min\limits_{[0;2]} y = 0$. **B.** $\min\limits_{[0;2]} y = 1$.

C. $\min\limits_{[0;2]} y = 3$. **D.** $\min\limits_{[0;2]} y = 5$.



CÂU 10. Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$ có đồ thị sau trên đoạn $[-1; 1]$ là



A. $\max\limits_{[-1;1]} f(x) = 0$.

B. $\max\limits_{[-1;1]} f(x) = 2$.

C. $\max\limits_{[-1;1]} f(x) = -1$.

D. $\max\limits_{[-1;1]} f(x) = 1$.

CÂU 11. Cho hàm số $y = x - \sqrt{x-1}$ có bảng biến thiên sau. Khẳng định nào sau đây đúng?

x	1		$\frac{5}{4}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	1	$\searrow$	$\frac{3}{4}$	$\nearrow$	0

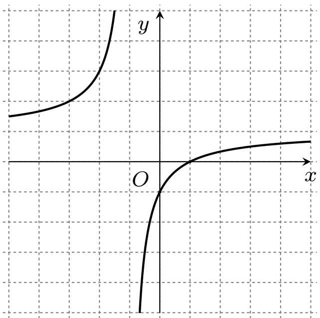
A. Hàm số có giá trị nhỏ nhất bằng $\frac{3}{4}$ và không có giá trị lớn nhất.

B. Hàm số có giá trị nhỏ nhất bằng $\frac{3}{4}$ và giá trị lớn nhất bằng 1.

C. Hàm số không có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất.

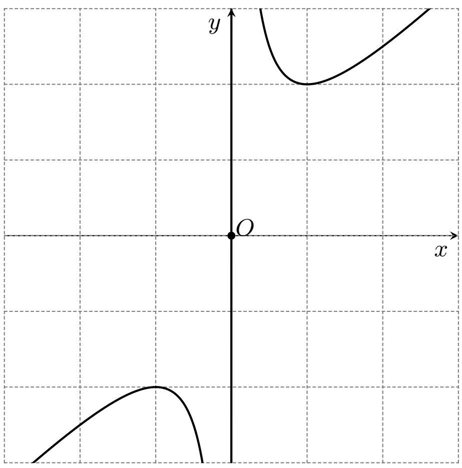
D. Hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm có hoành độ $x = 1$ và giá trị nhỏ nhất bằng 1.

CÂU 12. Cho hàm số $y = \frac{x-1}{x+1}$ có đồ thị sau. Chọn khẳng định đúng?



A. $\max\limits_{[0;3]} y = -3$. **B.** $\min\limits_{[-1;3]} y = 3$. **C.** $\min\limits_{[0;3]} y = -1$. **D.** $\max\limits_{[0;4]} y = -3$.

CÂU 13. Cho hàm số $y = x + \frac{1}{x}$ có đồ thị sau. Chọn phát biểu đúng?



A. $\min\limits_{[0;2]} y + \max\limits_{[-2;0]} y = 0$.

B. $\min\limits_{[0;2]} y + \max\limits_{[-2;0]} y = 4$.

C. $\min\limits_{[0;2]} y + \max\limits_{[-2;0]} y = -4$.

D. $\min\limits_{[0;2]} y + \max\limits_{[-2;0]} y = 2$.

Lời giải.

Dựa vào đồ thị, ta thấy $\min\limits_{[0;2]} = 2$, $\max\limits_{[-2;0]} y = -2$ nên $\min\limits_{[0;2]} y + \max\limits_{[-2;0]} y = 0$.

Chọn đáp án A □

QUICK NOTE

QUICK NOTE

CÂU 14. Gọi $y_1; y_2$ lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x-2}$ có bảng biến thiên sau trên đoạn $[3;4]$. Khi đó tích $y_1 \cdot y_2$ là bao nhiêu?

x	3		4
y'		$-$	
y	$\dfrac{3}{2}$		$\dfrac{5}{6}$

A. $\dfrac{3}{2}$. **B.** $\dfrac{5}{6}$. **C.** $\dfrac{5}{4}$. **D.** $\dfrac{7}{3}$.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy $y_1 = \dfrac{3}{2}$, $y_2 = \dfrac{5}{6}$.

Chọn đáp án C □

CÂU 15. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên sau. Hàm số đạt giá trị lớn nhất là $f(x_0)$ tại x_0. Khi đó tích $x_0 \cdot f(x_0)$ bằng

x	0		4		8
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0		16		0

A. 64. **B.** 4. **C.** 0. **D.** 20.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy, hàm số đạt giá trị lớn nhất là 16 tại $x = 4$ nên $x_0 \cdot f(x_0) = 64$.

Chọn đáp án A □

CÂU 16. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên sau. Hàm số đạt giá trị nhỏ nhất là $f(x_0)$ tại x_0. Khi đó $x_0 + f(x_0)$ bằng

x	0		$4\sqrt{3}$		48
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$f(0)$		$16\sqrt{3}$		$f(48)$

A. $16\sqrt{3}$. **B.** $20\sqrt{3}$. **C.** 20. **D.** $8\sqrt{3}$.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy, hàm số đạt giá trị nhỏ nhất là $16\sqrt{3}$ tại $4\sqrt{3}$ nên $x_0 + f(x_0) = 20\sqrt{3}$.

Chọn đáp án B □

CÂU 17. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên sau. Hàm số đạt giá trị nhỏ nhất là $f(x_0)$ tại x_0. Khi đó $x_0^2 + f(x_0)$ bằng

x	$-\infty$		$-\dfrac{13}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\dfrac{169}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

A. $-\dfrac{169}{2}$. **B.** $-\dfrac{169}{4}$. **C.** 0. **D.** $\dfrac{169}{2}$.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy, hàm số đạt giá trị nhỏ nhất là $-\dfrac{169}{4}$ tại $-\dfrac{13}{2}$ nên $x_0^2+f(x_0)=0$.

Chọn đáp án C □

CÂU 18. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên sau. Tìm a để hàm số có giá trị lớn nhất trên đoạn $[0;10]$ là $2\sqrt{3}$.

x	0		$\dfrac{a}{3}$		10
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$f(0)$	$\nearrow$	$\dfrac{a^2}{6\sqrt{3}}$	$\searrow$	$f(10)$

A. $6\sqrt{3}$. **B.** 36. **C.** $36\sqrt{3}$. **D.** 6.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy, hàm số đạt giá trị lớn nhất trên đoạn $[0;10]$ là $\dfrac{a^2}{6\sqrt{3}}$.

$\dfrac{a^2}{6\sqrt{3}}=2\sqrt{3}\Leftrightarrow a^2=36\Leftrightarrow \left[a=6\ a=-6\right.$.

Chọn đáp án D □

CÂU 19. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên sau. Tìm a để hàm số có giá trị lớn nhất trên đoạn $[0;20]$ là 8.

x	0		$\dfrac{a}{4}$		20
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$f(0)$	$\nearrow$	$\dfrac{a^2}{8}$	$\searrow$	$f(20)$

A. 4. **B.** 16. **C.** 8. **D.** $4\sqrt{2}$.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy, hàm số đạt giá trị lớn nhất trên đoạn $[0;20]$ là $\dfrac{a^2}{8}$.

$\dfrac{a^2}{8}=8\Leftrightarrow a^2=64\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}a=8\\a=-8.\end{array}\right.$

QUICK NOTE

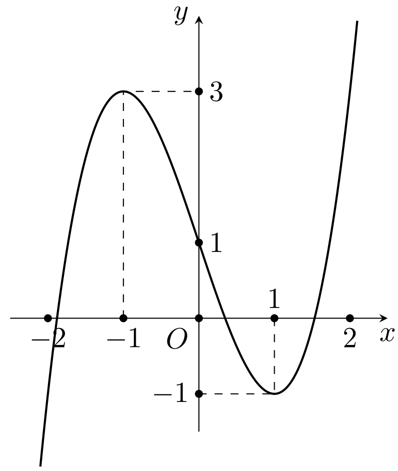
QUICK NOTE

Chọn đáp án (C)

CÂU 20.

Hàm số $y = x^3 - 3x + 1$ có đồ thị như hình vẽ đạt giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên đoạn $\left[-\dfrac{3}{2}; \dfrac{3}{2}\right]$ tại điểm có hoành độ lần lượt là $x_1; x_2$. Khi đó tổng $x_1 + x_2$ bằng

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 0.



Lời giải.

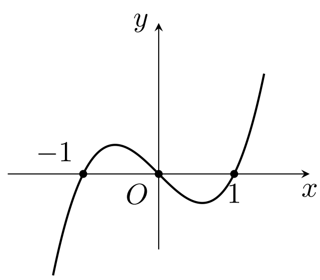
Dựa vào đồ thị, ta thấy $x_1 = -1$, $x_2 = 1$ tổng $x_1 + x_2 = 0$.

Chọn đáp án (D)

CÂU 21.

Cho đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ. Hàm số $y = f(x)$ đạt giá trị lớn nhất trên đoạn $[-1; 1]$ tại x bằng bao nhiêu?

A. $x = \dfrac{2}{3}$. **B.** $x = 0$. **C.** $x = 1$. **D.** $x = 2$.



Lời giải.

Dựa vào đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ ta có BBT như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$f(-1)$	↗	0	↘	$f(1)$	↗	$+\infty$

Dựa vào BBT suy ra hàm số $y = f(x)$ đạt giá trị lớn nhất trên đoạn $[-1; 1]$ tại $x = 0$.

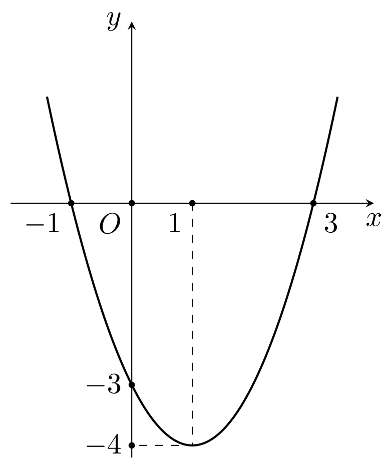
Chọn đáp án (B)

CÂU 22.

Cho đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ. Hàm số $y = f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[-1; 4]$ tại x bằng bao nhiêu?

A. $x = 3$. **B.** $x = 0$.

C. $x = 4$. **D.** $x = -1$.



QUICK NOTE

Lời giải.

Dựa vào đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ ta có BBT như sau:

x	-1		3		4
y'	0	$-$	0	$+$	
y	$f(-1)$	$\searrow$	$f(3)$	$\nearrow$	$f(4)$

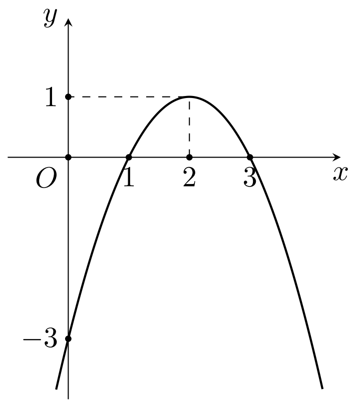
Dựa vào BBT suy ra hàm số $y = f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[-1;4]$ tại $x = 3$.

Chọn đáp án A □

CÂU 23.

Cho đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ. Hàm số $y = f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[0;3]$ tại x bằng bao nhiêu?

A. $x = 3$. **B.** $x = 0$. **C.** $x = 2$. **D.** $x = 1$.



Lời giải.

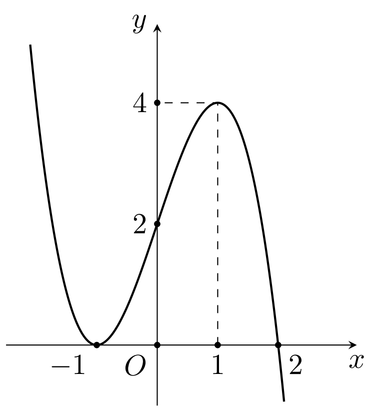
Dựa vào đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ ta có BBT như sau:

x	0		1		3
y'		$-$	0	$+$	0
y	$f(0)$	$\searrow$	$f(1)$	$\nearrow$	$f(3)$

Dựa vào BBT suy ra hàm số $y = f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[0;3]$ tại $x = 1$.

Chọn đáp án D □

CÂU 24. Cho đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ.



Hàm số $y = f(x)$ đạt giá trị lớn nhất trên đoạn $[-2;2]$ tại x bằng bao nhiêu?

A. $x = 2$. **B.** $x = 0$. **C.** $x = -2$. **D.** $x = 1$.

Lời giải.

Dựa vào đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ ta có BBT như sau:

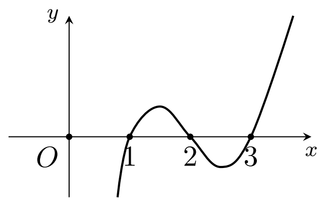
QUICK NOTE

x	-2		-1		2
y'		$+$	0	$+$	0
y	$f(-2)$	$\nearrow$			$f(2)$

Dựa vào BBT suy ra hàm số $y = f(x)$ đạt giá trị lớn nhất trên đoạn $[-2; 2]$ tại $x = 2$.

Chọn đáp án A □

CÂU 25. Cho đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ.



Hàm số $y = f(x)$ đạt giá trị lớn nhất trên đoạn $[1; 3]$ tại x_0. Khi đó giá trị của $x_0^2 - 2x_0 + 2018$ bằng bao nhiêu?

A. 2018. **B.** 2017. **C.** 2021. **D.** 2026.

Lời giải.

Dựa vào đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ ta có BBT như sau:

x	1		2		3
y'	0	$+$	0	$-$	0
y	$f(1)$	$\nearrow$	$f(2)$	$\searrow$	$f(3)$

Dựa vào BBT suy ra hàm số $y = f(x)$ đạt giá trị lớn nhất trên đoạn $[1; 3]$ tại $x_0 = 2$.
Nên $x_0^2 - 2x_0 + 2018 = 2018$.

Chọn đáp án A □

Dạng 4. Bài toán tham số về Max - Min

1. Các ví dụ

VÍ DỤ 1. Tìm giá trị thực của tham số a để hàm số $f(x) = -x^3 - 3x^2 + a$ có giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[-1; 1]$ bằng 0.

Lời giải.

Đạo hàm $f'(x) = -3x^2 - 6x \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \in [-1; 1] \\ x = -2 \notin [-1; 1]. \end{array}\right.$

Ta có $\begin{cases} f(-1) = a - 2 \\ f(0) = a \\ f(1) = a - 4 \end{cases} \Rightarrow \min\limits_{[-1;1]} f(x) = f(1) = a - 4.$

Theo bài ra: $\min\limits_{[-1;1]} f(x) = 0 \Leftrightarrow a - 4 = 0 \Leftrightarrow a = 4.$ □

VÍ DỤ 2. Cho hàm số $f(x) = \dfrac{x - m^2 + m}{x + 1}$ với m là tham số thực. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số có giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[0; 1]$ bằng -2.

Lời giải.

QUICK NOTE

Đạo hàm $f'(x) = \dfrac{m^2 - m + 1}{(x+1)^2} > 0, \forall x \in [0;1]$.
Suy ra hàm số $f(x)$ đồng biến trên $[0;1] \Rightarrow \min\limits_{[0;1]} f(x) = f(0) = -m^2 + m$.

Theo bài ra: $\min\limits_{[0;1]} f(x) = -2 \Leftrightarrow -m^2 + m = -2 \Leftrightarrow m^2 - m - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -1 \\ m = 2. \end{array}\right.$ □

VÍ DỤ 3. Tìm tất cả giá trị của m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \dfrac{2x + m - 1}{x + 1}$ trên đoạn $[1;2]$ bằng 1.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = \dfrac{3 - m}{(x+1)^2}$.

Nếu $m < 3$: $f'(x) = \dfrac{3-m}{(x+1)^2} > 0$ nên hàm số đồng biến trên $[1;2] \Rightarrow \min\limits_{[1;2]} f(x) = f(1) = 1$.

Vậy $\min\limits_{[1;2]} f(x) = 1 \Leftrightarrow f(1) = 1 \Leftrightarrow \dfrac{m+1}{2} = 1 \Leftrightarrow m = 1$ (nhận).

Nếu $m > 3$: $f'(x) = \dfrac{3-m}{(x+1)^2} < 0$ nên hàm số nghịch biến trên $[1;2] \Rightarrow \min\limits_{[1;2]} f(x) = f(2) = 1$.

Vậy $\min\limits_{[1;2]} f(x) = 1 \Leftrightarrow f(2) = 1 \Leftrightarrow \dfrac{3+m}{3} = 1 \Leftrightarrow m = 0$ (loại).

Kết luận: $m = 1$. □

VÍ DỤ 4. Tìm các giá trị của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y = \left|x^2 - 2x + m\right|$ trên đoạn $[-1;2]$ bằng 5.

Lời giải.

Xét hàm số $f(x) = x^2 - 2x + m$ trên đoạn $[-1;2]$, ta có $f'(x) = 2(x-1)$ và $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Vậy $\max\limits_{[-1;2]} y = \max\limits_{[-1;2]} |f(x)| = \max\{|f(-1)|;|f(1)|;|f(2)|\} = \max\{|3+m|;|m-1|;|m|\}$.

TH1. Với $\max\limits_{[-1;2]} y = |m-1|$, ta có $\begin{cases} |m-1| \geq |m+3| \\ |m-1| \geq |m| \\ |m-1| = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |m-1| \geq |m+3| \\ |m-1| \geq |m| \\ m = -4 \vee m = 6 \end{cases} \Leftrightarrow m = -4$.

TH2. Với $\max\limits_{[-1;2]} y = |m+3|$, ta được $\begin{cases} |m+3| \geq |m-1| \\ |m+3| \geq |m| \\ |m+3| = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |m+3| \geq |m-1| \\ |m+3| \geq |m| \\ m = 2 \vee m = -8 \end{cases} \Leftrightarrow m = 2$.

TH3. Với $\max\limits_{[-1;2]} y = |m|$, ta được $\begin{cases} |m| \geq |m-1| \\ |m| \geq |m+3| \\ |m| = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |m| \geq |m-1| \\ |m| \geq |m+3| \\ m = 5 \vee m = -5 \end{cases}$ (vô nghiệm).

Kết luận: $m \in \{-4, 2\}$. □

2. Câu hỏi trắc nghiệm

CÂU 1. Cho hàm số $f(x) = x^3 + \left(m^2 + 1\right)x + m^2 - 2$ với m là tham số thực. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số có giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[0;2]$ bằng 7.

A. $m = \pm 1$. **B.** $m = \pm\sqrt{7}$. **C.** $m = \pm\sqrt{2}$. **D.** $m = \pm 3$.

Lời giải.

Đạo hàm $f'(x) = 3x^2 + m^2 + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.
Suy ra hàm số $f(x)$ đồng biến trên $[0;2] \Rightarrow \min\limits_{[0;2]} f(x) = f(0) = m^2 - 2$.

Theo bài ra: $\min\limits_{[0;2]} f(x) = 7 \Leftrightarrow m^2 - 2 = 7 \Leftrightarrow m = \pm 3$.

Chọn đáp án D □

CÂU 2. Cho hàm số $f(x) = \dfrac{x - m^2}{x + 8}$ với m là tham số thực. Tìm giá trị lớn nhất

QUICK NOTE

của m để hàm số có giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[0;3]$ bằng -2.

A. $m=4$. **B.** $m=5$. **C.** $m=-4$. **D.** $m=1$.

Lời giải.

Đạo hàm $y'=\dfrac{8+m^2}{(x+8)^2}>0, \forall x\in[0;3]$.

Suy ra hàm số $f(x)$ đồng biến trên đoạn $[0;3] \Rightarrow \min\limits_{[0;3]} f(x)=f(0)=-\dfrac{m^2}{8}$.

Theo bài ra: $\min\limits_{[0;3]} f(x)=-2 \Leftrightarrow -\dfrac{m^2}{8}=-2 \Leftrightarrow m=\pm 4$.

Do đó giá trị m lớn nhất là $m=4$.

Chọn đáp án (A) □

CÂU 3. Cho hàm số $y=\dfrac{x+m}{x+1}$. Với tham số m bằng bao nhiêu thì thỏa mãn $\min\limits_{[1;2]} y+\max\limits_{[1;2]} y=\dfrac{16}{3}$.

A. $m=0$. **B.** $m=2$. **C.** $m=4$. **D.** $m=5$.

Lời giải.

Đạo hàm $f'(x)=\dfrac{1-m}{(x+1)^2}$.

Suy ra hàm số $f(x)$ là hàm số đơn điệu trên đoạn $[1;2]$ với mọi $m\neq 1$.

Khi đó $\min\limits_{[1;2]} y+\max\limits_{[1;2]} y=f(1)+f(2)=\dfrac{m+1}{2}+\dfrac{m+2}{3}=\dfrac{16}{3} \Leftrightarrow \dfrac{5m}{6}=\dfrac{25}{6} \Leftrightarrow m=5$.

Chọn đáp án (D) □

CÂU 4. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{2\sqrt{x}+m}{\sqrt{x+1}}$ với m là tham số thực. Tìm tất cả các giá trị của $m>1$ để hàm số có giá trị lớn nhất trên đoạn $[0;4]$ nhỏ hơn 3.

A. $m\in(1;3)$. **B.** $m\in\left(1;3\sqrt{5}-4\right)$.

C. $m\in(1;\sqrt{5})$. **D.** $m\in(1;3]$.

Lời giải.

Đạo hàm $f'(x)=\dfrac{2-m\sqrt{x}}{2(x+1)\sqrt{x(x+1)}}$, $f'(x)=0 \Leftrightarrow \sqrt{x}=\dfrac{2}{m} \Leftrightarrow x=\dfrac{4}{m^2}\in[0;4], \forall m>1$.

Bảng biến thiên

x	0		$\dfrac{4}{m^2}$		4
f'		$+$	0	$-$	
f	$f(0)$	$\nearrow$	$\sqrt{m^2+4}$	$\searrow$	$f(4)$

Suy ra $\max\limits_{[0;4]} f(x)=f\left(\dfrac{4}{m^2}\right)=\sqrt{m^2+4}$.

Vậy ta cần có $\sqrt{m^2+4}<3 \Leftrightarrow m<\sqrt{5} \xrightarrow{m>1} m\in(1;\sqrt{5})$.

Chọn đáp án (C) □

CÂU 5. Cho hàm số $y=x^3-3x+1$. Tìm tìm tập hợp tất cả giá trị $m>0$, để giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $\mathscr{D}=[m+1;m+2]$ luôn bé hơn 3 là

A. $(0;1)$. **B.** $\left(\dfrac{1}{2};1\right)$.

C. $(-\infty;1)\setminus\{-2\}$. **D.** $(0;2)$.

Lời giải.

Ta có: $y'=3x^2-3$, $y'=0 \Leftrightarrow x=\pm 1$. Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Suy ra hàm số đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$.
Trên $D = [m+1; m+2]$ với $m > 0$, ta có

$$\min_{[m+1;m+2]} y = y(m+1) = (m+1)^3 - 3(m+1) + 1 = m^3 + 3m^2 - 1.$$

$$\min_{[m+1;m+2]} y < 3 \Leftrightarrow m^3 + 3m^2 - 4 < 0 \Leftrightarrow (m-1)(m+2)^2 < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m < 1 \\ m \neq -2. \end{cases}$$

Kết hợp điều kiện, suy ra $m \in (0;1)$.
Chọn đáp án A □

CÂU 6. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $f(x) = \dfrac{mx+1}{x-m}$ có giá trị lớn nhất trên $[1;2]$ bằng -2.

A. $m = -3$. **B.** $m = 2$. **C.** $m = 4$. **D.** $m = 3$.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{m\} \Rightarrow m \notin [1;2]$.

$f'(x) = \dfrac{-m^2-1}{(x-m)^2} < 0, \forall x \neq m \Rightarrow \max\limits_{[1;2]} f(x) = f(1) = \dfrac{m+1}{1-m}$.

Theo đề bài $\max\limits_{[1;2]} f(x) = -2 \Leftrightarrow \dfrac{m+1}{1-m} = -2 \Leftrightarrow m+1 = 2m-2 \Leftrightarrow m = 3$.

Chọn đáp án D □

CÂU 7. Cho hàm số $y = f(x) = x + mx - 1$. Với tham số m bằng bao nhiêu thì $\min\limits_{[2;4]} y = 3$?

A. $m = 1$. **B.** $m = 3$. **C.** $m = 5$. **D.** $m = -1$.

Lời giải.

Đạo hàm $f'(x) = -\dfrac{m+1}{(x-1)^2}$.

TH1. Với $m > -1$ suy ra $f'(x) = -\dfrac{m+1}{(x-1)^2} < 0, \forall x \neq 1$ nên hàm số $f(x)$ nghịch biến trên mỗi khoảng xác định. Khi đó $\min\limits_{[2;4]} y = f(4) = \dfrac{m+4}{3} = 3 \Leftrightarrow m = 5$ (chọn).

TH2. Với $m < -1$ suy ra $f'(x) = -\dfrac{m+1}{(x-1)^2} > 0, \forall x \neq 1$ nên hàm số $f(x)$ đồng biến trên mỗi khoảng xác định. Khi đó $\min\limits_{[2;4]} y = f(2) = m + 2 = 3 \Leftrightarrow m = 1$ (loại).

Chọn đáp án C □

CÂU 8. Cho hàm số $f(x) = \dfrac{x+m}{\sqrt{x^2+1}}$. Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để hàm số đạt giá trị lớn nhất tại điểm $x = 1$.

A. $m = 2$. **B.** $m = 1$.
C. Không có giá trị m. **D.** $m = -3$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{1-mx}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$.

Vì hàm số liên tục và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ nên để hàm số đạt giá trị lớn nhất tại $x = 1$, điều kiện cần là $f'(1) = 0 \Leftrightarrow 1 - m = 0 \Leftrightarrow m = 1$.

Với $m = 1$, ta có $f(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}$, suy ra $f'(x) = \dfrac{1-x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow$

QUICK NOTE

QUICK NOTE

$x = 1$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	
y	-1	$\nearrow$	$\sqrt{2}$	$\searrow$	1

Vậy hàm số đạt giá trị lớn nhất tại $x = 1$ khi $m = 1$.

Chọn đáp án B

CÂU 9. Tìm tất cả các giá trị thực khác 0 của tham số m để hàm số $y = \dfrac{mx}{x^2+1}$ đạt giá trị lớn nhất tại $x = 1$ trên đoạn $[-2; 2]$?

A. $m = -2$. **B.** $m < 0$. **C.** $m > 0$. **D.** $m = 2$.

Lời giải.

Ta có $y' = \dfrac{m\left(1-x^2\right)}{\left(x^2+1\right)^2}$.

Do $m \neq 0$ nên $y' = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1 \in [-2; 2]$.

Vì hàm số đã cho liên tục và xác định nên hàm số đạt giá trị lớn nhất tại $x = 1$ trên đoạn $[-2; 2]$ khi và chỉ khi $\begin{cases} y(1) \geq y(-2) \\ y(1) \geq y(2) \\ y(1) \geq y(-1) \end{cases} \Leftrightarrow m \geq 0$.

Vậy $m > 0$ (do $m \neq 0$).

Chọn đáp án C

CÂU 10. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \dfrac{x^2+mx+1}{x+m}$ liên tục và đạt giá trị nhỏ nhất trên $[0; 2]$ tại một điểm $x_0 \in (0; 2)$.

A. $0 < m < 1$. **B.** $m > 1$. **C.** $m > 2$. **D.** $-1 < m < 1$.

Lời giải.

Điều kiện: $x \neq -m$. Ta có: $y' = \dfrac{x^2+2mx+m^2-1}{(x+m)^2} = \dfrac{(x+m)^2-1}{(x+m)^2}$.

$y' = 0 \Leftrightarrow (x+m)^2 = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1-m > -m \\ x = -1-m < -m. \end{array}\right.$

Do hệ số x^2 là số dương và theo yêu cầu đề bài ta có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		$-1-m$		$-m$		$1-m$	
y'		$+$	0	$-$	||	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	$\nearrow$	y_1	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	y_2	$\nearrow$

Hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x_0 = 1-m \in (0; 2)$ nên $0 < -m+1 < 2 \Leftrightarrow -1 < m < 1$.

Kết hợp điều kiện để hàm số liên tục trên $[0; 2]$ thì $-m \notin [0; 2] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -m < 0 \\ -m > 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > 0 \\ m < -2. \end{array}\right.$

Vậy $0 < m < 1$.

Chọn đáp án (A) □

QUICK NOTE

Dạng 5. Bài toán thực tế

.

1. Các ví dụ

VÍ DỤ 1. Hình chữ nhật có chu vi không đổi là 8 m. Tính diện tích lớn nhất của hình chữ nhật đó.

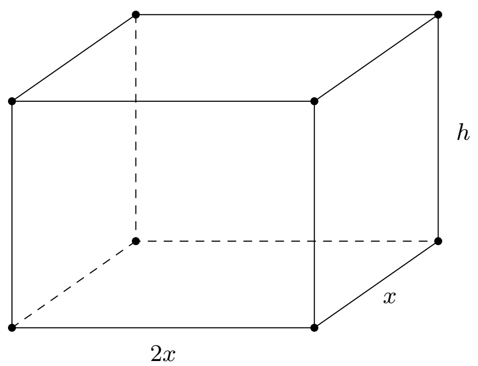
Lời giải.

Gọi 2 kích thước của hình chữ nhật là a, b (m).
Chu vi hình chữ nhật là 8 m nên $a+b=4$.
Diện tích hình chữ nhật là $S=ab$.
Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có $S=ab\leq\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2=4$.
Vậy diện tích lớn nhất của hình chữ nhật bằng 4 (m^2). □

VÍ DỤ 2. Ông A dự định sử dụng hết 6,5 m^2 kính để làm một bể cá bằng kính có dạng hình hộp chữ nhật không nắp, chiều dài gấp đôi chiều rộng (các mối ghép có kích thước không đáng kể). Bể cá có dung tích lớn nhất bằng bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)?

Lời giải.

Giả sử bể cá có kích thước như hình vẽ.
Ta có: $2x^2+2xh+4xh=6{,}5\Leftrightarrow h=\dfrac{6{,}5-2x^2}{6x}$.
Do $h>0$, $x>0$ nên $6{,}5-2x^2>0\Leftrightarrow 0<x<\dfrac{\sqrt{13}}{2}$.
Lại có $V=2x^2h=\dfrac{6{,}5x-2x^3}{3}=f(x)$, với $x\in\left(0;\dfrac{\sqrt{3}}{12}\right)$.
$f'(x)=\dfrac{13}{6}-2x^2$, $f'(x)=0\Leftrightarrow x=\pm\dfrac{\sqrt{39}}{6}$.
Bảng biến thiên

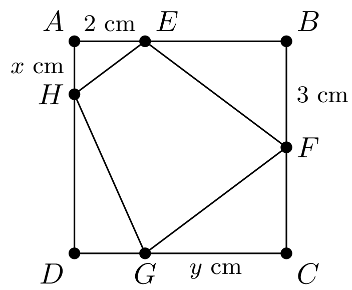


x	0		$\dfrac{\sqrt{39}}{6}$		$\dfrac{\sqrt{13}}{2}$
f'		$+$	0	$-$	
f		↗	$\dfrac{13\sqrt{39}}{54}$	↘	

Vậy $V\leq f\left(\dfrac{\sqrt{39}}{6}\right)=\dfrac{13\sqrt{39}}{54}\approx 1{,}50\ \mathrm{m}^3$. □

VÍ DỤ 3. Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh 6 cm. Người ta muốn cắt một hình thang như hình vẽ. Tìm tổng $x+y$ để diện tích hình thang $EFGH$ đạt giá trị nhỏ nhất.

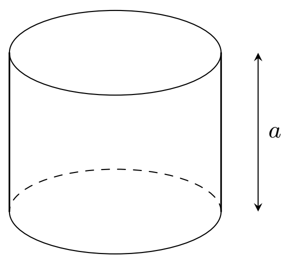
QUICK NOTE



Lời giải.

Ta có S_{EFGH} nhỏ nhất $\Leftrightarrow S = S_{AEH} + S_{CGF} + S_{DGH}$ lớn nhất.
Tính được $2S = 2x + 3y + (6-x)(6-y) = xy - 4x - 3y + 36 \quad (1)$.
Mặt khác $\triangle AEH$ đồng dạng $\triangle CGF$ nên $\dfrac{AE}{CG} = \dfrac{AH}{CF} \Rightarrow xy = 6 \quad (2)$.
Từ (1) và (2) suy ra $2S = 42 - \left(4x + \dfrac{18}{x}\right) \leq 42 - 12\sqrt{2}$.
Ta có $2S$ lớn nhất khi và chỉ khi $4x + \dfrac{18}{x}$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow 4x = \dfrac{18}{x} \Rightarrow x = \dfrac{3\sqrt{2}}{2} \Rightarrow y = 2\sqrt{2}$.
Vậy $x + y = \dfrac{3\sqrt{2}}{2} + 2\sqrt{2}$. □

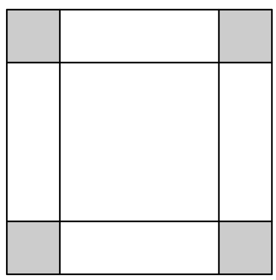
VÍ DỤ 4. Một người muốn làm một bồn chứa 1000 lít hình trụ có nắp đậy. Tìm chiều cao h (dm) của bồn là để ít tốn vật liệu nhất.

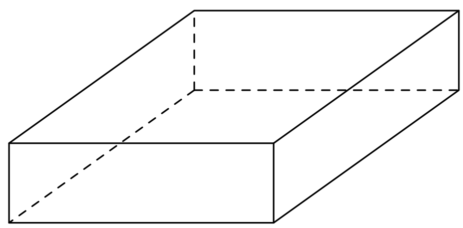


Lời giải.

Để ít tốn vật liệu nhất thì diện tích toàn phần bồn nước phải nhỏ nhất.
Tức là $S_{tp} = 2\pi R^2 + 2\pi Rh$ nhỏ nhất (với R là bán kính đường tròn đáy).
Thể tích bồn nước $V = \pi R^2 h = 1000 \Rightarrow R = \sqrt{\dfrac{1000}{\pi h}}$.
Khi đó $S_{tp} = 2\pi \cdot \dfrac{1000}{\pi h} + 2\pi\sqrt{\dfrac{1000}{\pi h}}h = \dfrac{2000}{h} + \sqrt{4000\pi h}$.
$\Rightarrow S'_{tp} = -\dfrac{2000}{h^2} + \dfrac{2000\pi}{\sqrt{4000\pi h}}, S'_{tp} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{4000\pi h} = \pi h^2 \Leftrightarrow h = \sqrt[3]{\dfrac{4000}{\pi}}$.
Sử dụng bảng biến thiên, ta tìm được S_{tp} nhỏ nhất khi $h = \sqrt[3]{\dfrac{4000}{\pi}}$. □

VÍ DỤ 5. Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh 18 cm. Người ta cắt ở bốn góc của tấm nhôm đó bốn hình vuông bằng nhau, mỗi hình vuông có cạnh bằng x cm, rồi gấp tấm nhôm lại như hình vẽ dưới đây để được một cái hộp không nắp. Tìm x để hộp nhận được có thể tích lớn nhất.





Lời giải.

Khối hộp có đáy là hình vuông với độ dài cạnh là $18-2x$ và độ dài chiều cao là x nên có thể tích là

$$V=x(18-2x)^2=\frac{1}{4}\cdot 4x(18-2x)(18-2x)\le\frac{1}{4}\left(\frac{4x+18-2x+18-2x}{3}\right)^3=432.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=18-2x\Leftrightarrow x=6$.
Vậy hình hộp có thể tích lớn nhất khi $x=6$. □

VÍ DỤ 6. Sau khi phát hiện một bệnh dịch, các chuyên gia y tế ước tính số người nhiễm bệnh kể từ ngày xuất hiện bệnh nhân đầu tiên đến ngày thứ t là $f(t)=45t^2-t^3$. Nếu xem $f'(t)$ là tốc độ truyền bệnh (người/ngày) tại thời điểm t. Hỏi tốc độ truyền bệnh sẽ lớn nhất vào ngày thứ mấy?

Lời giải.

Ta có $f'(t)=90t-3t^2$. Cần tính giá trị lớn nhất của hàm số $g(t)=f'(t)$.
Khi đó: $g'(t)=f''(t)=90-6t$; $g'(t)=0\Leftrightarrow t=15$.
Bảng biến thiên.

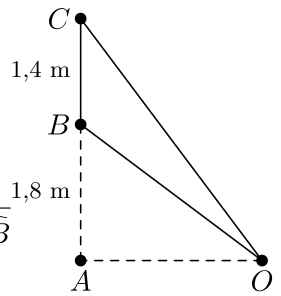
t	0		15		$+\infty$
$g'(t)$		$+$	0	$-$	
$g(t)$	0	$\nearrow$	675	$\searrow$	0

Vậy tốc độ truyền bệnh lớn nhất vào ngày thứ 15. □

VÍ DỤ 7. Một màn ảnh chữ nhật cao 1,4 m được đặt ở độ cao 1,8 m so với tầm mắt (tính từ đầu mép dưới của màn hình). Để nhìn rõ nhất phải xác định vị trí đứng O sao cho góc nhìn lớn nhất. Hãy xác định vị trí điểm O ($\widehat{BOC}$ gọi là góc nhìn)

Lời giải.

Với bài toán này ta cần xác định OA để góc $\widehat{BOC}$ lớn nhất.
Điều này xảy ra khi và chỉ khi $\tan\widehat{BOC}$ lớn nhất.
Đặt $OA=x$ (m) với $x>0$, ta có



$$\begin{aligned}\tan\widehat{BOC}&=\tan(\widehat{AOC}-\widehat{AOB})=\frac{\tan\widehat{AOC}-\tan\widehat{AOB}}{1+\tan\widehat{AOC}\cdot\tan\widehat{AOB}}\\&=\frac{\dfrac{AC}{OA}-\dfrac{AB}{OA}}{1+\dfrac{AC\cdot AB}{OA^2}}=\frac{\dfrac{1{,}4}{x}}{1+\dfrac{3{,}2\cdot 1{,}8}{x^2}}=\frac{1{,}4x}{x^2+5{,}76}.\end{aligned}$$

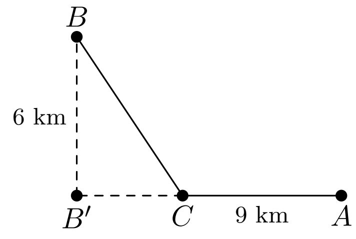
Xét hàm số $f(x)=\dfrac{1{,}4x}{x^2+5{,}76}$.
Bài toán trở thành tìm $x>0$ để $f(x)$ đạt giá trị lớn nhất.
Ta có $f'(x)=\dfrac{-1{,}4x^2+1{,}4\cdot 5{,}76}{(x^2+5{,}76)^2}$, $f'(x)=0\Leftrightarrow x=\pm 2{,}4$.
Ta có bảng biến thiên.

x	0		$2{,}4$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\dfrac{84}{193}$	$\searrow$	0

QUICK NOTE

Vậy vị trí đứng cho góc nhìn lớn nhất là cách màn ảnh 2,4 m. □

VÍ DỤ 8.
Một công ty muốn làm một đường ống dẫn từ một điểm A trên bờ đến một điểm B trên một hòn đảo. Hòn đảo cách bờ biển 6 km. Giá để xây đường ống trên bờ là 50.000 USD mỗi km, và 130.000 USD mỗi km để xây dưới nước. Gọi B' là điểm trên bờ biển sao cho BB' vuông góc với bờ biển. Khoảng cách từ A đến B' là 9 km. Vị trí C trên đoạn AB' sao cho khi nối ống theo ACB thì số tiền ít nhất. Khi đó khoảng cách từ C đến A là bao nhiêu?



Lời giải.
Đặt $B'C = x$ (km), $x \in [0;9]$.
$BC = \sqrt{x^2+6^2}$; $AC = 9 - x$.
Chi phí xây dựng đường ống là $f(x) = 130.000\sqrt{x^2+6^2} + 50.000(9-x)$ (USD).
Ta tìm $x \in [0;9]$ sao cho $f(x)$ nhỏ nhất.
Ta có $f'(x) = 10000 \cdot \left(\dfrac{13x}{\sqrt{x^2+36}} - 5\right)$.
$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 13x = 5\sqrt{x^2+36} \Leftrightarrow 169x^2 = 25\left(x^2+36\right) \Leftrightarrow x^2 = \dfrac{25}{4} \Leftrightarrow x = \dfrac{5}{2}$.
$f(0) = 1.230.000$; $f\left(\dfrac{5}{2}\right) = 1.170.000$; $f(9) \approx 1.406.165$.
Vậy chi phí thấp nhất khi $x = 2{,}5$. Vậy C cần cách A một khoảng 6,5 km. □

VÍ DỤ 9. Một công ty bất động sản có 50 căn hộ cho thuê. Biết rằng nếu cho thuê mỗi căn hộ với giá 2000000 đồng một tháng thì mọi căn hộ đều có người thuê và cứ mỗi lần tăng giá cho thuê mỗi căn hộ thêm 50000 đồng một tháng thì có thêm một căn hộ bị bỏ trống. Công ty đã tìm ra phương án cho thuê đạt lợi nhuận lớn nhất. Hỏi thu nhập nhiều nhất công ty có thể đạt được trong một tháng là bao nhiêu?

Lời giải.
Gọi n là số lần tăng giá (n là số tự nhiên). Khi đó số căn hộ bị bỏ trống cũng là n. Do đó số tiền thu được khi cho thuê $50-n$ căn hộ là $A = \left(2\cdot 10^6 + 5\cdot 10^4\cdot n\right)(50-n) = -5\cdot 10^4 n^2 + 5\cdot 10^5 n + 10^8$, với $n < 50$.
Xét hàm số $f(x) = -5\cdot 10^4 x^2 + 5\cdot 10^5 x + 10^8$, với $0 \le x < 50$.
Ta có $f'(x) = -10^5 x + 5\cdot 10^5$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 5$.
Bảng biến thiên

x	0		5		50
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$f(0)$	$\nearrow$	$f(5)$	$\searrow$	$f(50)$

Vậy $\max\limits_{[0;50]} f(x) = f(5) = 101250000$.
Vậy thu nhập cao nhất công ty có thể đạt được trong một tháng là 101250000 đồng.
□

2. Câu hỏi trắc nghiệm

CÂU 1. Cho hình chữ nhật có diện tích bằng 100 (cm^2). Hỏi mỗi kích thước của nó bằng bao nhiêu để chu vi của nó nhỏ nhất?

A. 10 cm × 10 cm.
B. 20 cm × 5 cm.
C. 25 cm × 4 cm.
D. Đáp án khác.

Lời giải.
Gọi chiều dài và chiều rộng của hình chữ nhật lần lượt là x (cm) và y (cm) $(x, y > 0)$.
Chu vi hình chữ nhật là $P = 2(x+y) = 2x + 2y$.

Diện tích hình chữ nhật là 100 (cm^2) nên $xy = 100$ hay $y = \dfrac{100}{x}$.
Do đó $P = 2x + \dfrac{200}{x}$ với $x > 0$.
Ta có $P'(x) = 2 - \dfrac{200}{x^2} = \dfrac{2x^2 - 200}{x^2}$; $P'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 100 \Leftrightarrow x = 10$.
Lập bảng biến thiên ta được $P_{\min} = 40$ khi $x = 10 \Rightarrow y = 10$.
Vậy kích thước của hình chữ nhật là $10cm \times 10cm$.
Chọn đáp án A □

CÂU 2. Khi xây nhà, chủ nhà cần làm một bồn nước bằng gạch và xi măng có dạng hình hộp đứng đáy là hình chữ nhật có chiều rộng là x (m), chiều dài gấp 2 lần chiều rộng và không nắp, có chiều cao là h (m), có thể tích là $\dfrac{4}{3}$ m^3. Tìm chiều rộng của đáy hình chữ nhật để chi phí xây dựng là thấp nhất.

A. 1,5 (m). **B.** 2 (m). **C.** 1 (m). **D.** 2,5 (m).

Lời giải.

Thể tích của bồn nước là $\dfrac{4}{3}$ m^3 nên $2x^2h = \dfrac{4}{3} \Leftrightarrow h = \dfrac{2}{3x^2}$.
Diện tích xung quanh của bồn nước (không nắp) là

$$S = 2(xh + 2xh) + 2x^2 = 6xh + 2x^2 = \frac{4}{x} + 2x^2.$$

Ta có $S'(x) = -\dfrac{4}{x^2} + 4x$; $S'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$.
Bảng biến thiên

x	0		1		$+\infty$
$S'(x)$		$-$	0	$+$	
$S(x)$	$+\infty$	$\searrow$	6	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy với chiều rộng là 1 (m) thì chi phí xây dựng là thấp nhất.
Chọn đáp án C □

CÂU 3. Một đoàn tàu chuyển động thẳng khởi hành từ một nhà ga. Quãng đường S (mét) đi được của đoàn tàu là một hàm số của thời gian t (giây), hàm số đó là $S = 6t^2 - t^3$. Thời điểm t (giây) mà tại đó vận tốc v (m/s) của chuyện động đạt giá trị lớn nhất là

A. $t = 4$ s. **B.** $t = 2$ s. **C.** $t = 6$ s. **D.** $t = 8$ s.

Lời giải.

Ta có: $v(t) = S'(t) = 12t - 3t^2$.
$v'(t) = 12 - 6t$; $v'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 2$.
Bảng biến thiên của $v(t)$

t	0		2		$+\infty$
$v'(t)$		$+$	0	$-$	
$v(t)$		$\nearrow$	12	$\searrow$	

Vậy tại thời điểm 2 (giây) thì vận tốc của chuyển động là lớn nhất.
Chọn đáp án B □

QUICK NOTE

QUICK NOTE

CÂU 4. Độ giảm huyết áp của một bệnh nhân được xác định bởi công thức $g(x) = 0{,}024x^2(30-x)$, trong đó x là liều lượng thuốc tiêm cho bệnh nhân cao huyết áp (x được tính bằng mg). Tìm lượng thuốc để tiêm cho bệnh nhân cao huyết áp để huyết áp giảm nhiều nhất.

A. 20 mg. **B.** 0,5 mg. **C.** 2,8 mg. **D.** 15 mg.

Lời giải.

Ta có $g'(x) = 0,024(60x - 3x^2)$; $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 20. \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

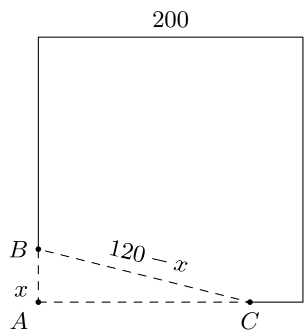
x	0		20		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	0	$\nearrow$	$g(20)$	$\searrow$	$-\infty$

Vậy với liều lượng thuốc tiêm cho bệnh nhân là 20 mg thì huyết áp giảm nhiều nhất.

Chọn đáp án (A) □

CÂU 5.

Cho một tấm gỗ hình vuông cạnh 200 cm. Người ta cắt một tấm gỗ có hình một tam giác vuông ABC từ tấm gỗ hình vuông đã cho như hình vẽ bên. Biết $AB = x$ ($0 < x < 60$ cm) là một cạnh góc vuông của tam giác ABC và tổng độ dài cạnh góc vuông AB với cạnh huyền BC bằng 120 cm. Tìm x để tam giác ABC có diện tích lớn nhất.



A. $x = 40$ cm. **B.** $x = 50$ cm. **C.** $x = 30$ cm. **D.** $x = 20$ cm.

Lời giải.

Độ dài cạnh huyền BC là $120 - x$.

Khi đó độ dài cạnh $AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = \sqrt{(120-x)^2 - x^2} = \sqrt{14400 - 240x}$.

Diện tích tam giác ABC là $S = \dfrac{1}{2}AB \cdot AC = \dfrac{1}{2}x\sqrt{14400 - 240x}$.

Xét hàm số $f(x) = x\sqrt{14400 - 240x}$ với $0 < x < 60$.

Ta có: $f'(x) = \sqrt{14400 - 240x} - \dfrac{120x}{\sqrt{14400 - 240x}} = \dfrac{14400 - 360x}{\sqrt{14400 - 240x}}$;

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 40 \in (0; 60)$.

Bảng biến thiên

x	0		40		60
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

Vậy tam giác ABC có diện tích lớn nhất khi $AB = 40$ cm.

Chọn đáp án (A) □

CÂU 6. Ông An dự định làm một cái bể chứa nước hình trụ bằng inox có nắp đậy với thể tích là k m^3 ($k > 0$). Chi phí mỗi m^2 đáy là 600 nghìn đồng, mỗi m^2 nắp là 200 nghìn đồng và mỗi m^2 mặt bên là 400 nghìn đồng. Hỏi ông An cần chọn bán kính đáy của bể là bao nhiêu để chi phí làm bể là ít nhất? (Biết bề dày vỏ inox không đáng kể)

A. $\sqrt[3]{\dfrac{k}{\pi}}$. **B.** $\sqrt[3]{\dfrac{2\pi}{k}}$. **C.** $\sqrt[3]{\dfrac{k}{2\pi}}$. **D.** $\sqrt[3]{\dfrac{k}{2}}$.

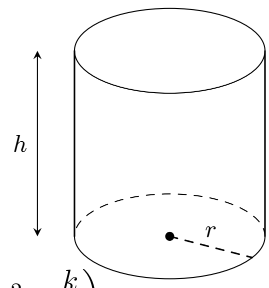
Lời giải.

Gọi r, h $(r, h > 0)$ lần lượt là bán kính đáy và chiều cao của hình trụ.

Thể tích khối trụ $V = \pi r^2 h = k \Rightarrow h = \dfrac{k}{\pi r^2}$.

Diện tích đáy và nắp là $S_d = S_n = \pi r^2$; diện tích xung quanh là $S_{xq} = 2\pi r h$.

Khi đó chi phí làm bể là



$$C = (600+200)\pi r^2 + 400\cdot 2\pi r h = 800\pi r^2 + 800\pi r\frac{k}{\pi r^2} = 800\left(\pi r^2 + \frac{k}{r}\right).$$

Đặt $f(r) = \pi r^2 + \dfrac{k}{r}$, $r > 0 \Rightarrow f'(r) = 2\pi r - \dfrac{k}{r^2} = \dfrac{2\pi r^3 - k}{r^2}$;

Ta có $f'(r) = 0 \Leftrightarrow r = \sqrt[3]{\dfrac{k}{2\pi}}$, $(k > 0)$.

Lập bảng biến thiên, ta thấy $f(r)$ đạt giá trị nhỏ nhất khi $r = \sqrt[3]{\dfrac{k}{2\pi}}$.

Vậy với bán kính đáy là $r = \sqrt[3]{\dfrac{k}{2\pi}}$ thì chi phí làm bể là ít nhất.

Chọn đáp án C □

CÂU 7. Tìm diện tích lớn nhất của hình chữ nhật nội tiếp trong nửa đường tròn bán kính 10 cm, biết một cạnh của hình chữ nhật nằm dọc trên đường kính của đường tròn.

A. 80 cm^2. **B.** 100 cm^2. **C.** 160 cm^2. **D.** 200 cm^2.

Lời giải.

Gọi x (cm) là độ dài cạnh hình chữ nhật không nằm dọc theo đường kính đường tròn $(0 < x < 10)$.

Khi đó độ dài cạnh hình chữ nhật nằm dọc trên đường tròn là $2\sqrt{10^2 - x^2}$ (cm).

Diện tích hình chữ nhật là $S = 2x\sqrt{10^2 - x^2}$.

Ta có $S' = 2\sqrt{10^2 - x^2} - \dfrac{2x^2}{\sqrt{10^2 - x^2}} = \dfrac{200 - 4x^2}{\sqrt{10^2 - x^2}}$;

$$S' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{10\sqrt{2}}{2} \\ x = -\dfrac{10\sqrt{2}}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow x = \frac{10\sqrt{2}}{2} \text{ (do } 0 < x < 10).$$

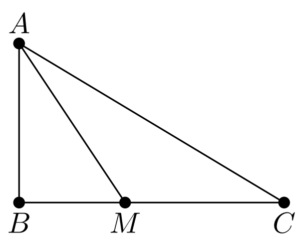
Lập bảng biến thiên ta có $S(x)$ lớn nhất khi $x = \dfrac{10\sqrt{2}}{2}$.

Vậy diện tích lớn nhất của hìn chữ nhật là $S = 2\cdot\dfrac{10\sqrt{2}}{2}\sqrt{10^2 - \dfrac{10^2}{2}} = 100$ cm^2.

Chọn đáp án B □

CÂU 8.

Nhà của 3 bạn A, B, C nằm ở 3 vị trí tạo thành một tam giác vuông tại B (như hình vẽ), $AB = 10$ km, $BC = 25$ km và 3 bạn tổ chức họp mặt ở nhà bạn C. Bạn B hẹn chở bạn A tại vị trí M trên đoạn đường BC. Từ nhà, bạn A đi xe buýt đến điểm hẹn M với tốc độ 30 km/h và từ M hai bạn A, B di chuyển đến nhà bạn C bằng xe máy với tốc độ 50 km/h. Hỏi điểm hẹn M cách nhà bạn B bao nhiêu km để bạn A đến nhà bạn C nhanh nhất?



A. 5 km. **B.** 7,5 km. **C.** 10 km. **D.** 12,5 km.

Lời giải.

QUICK NOTE

Đặt $BM = x$ (km) với $x \geq 0$.
Độ dài đoạn AM là $\sqrt{10^2 + x^2}$, độ dài đoạn MC là $25 - x$.

Thời gian để bạn A di chuyển từ A đến M rồi đến nhà C là $t(x) = \dfrac{\sqrt{10^2 + x^2}}{30} + \dfrac{25 - x}{50}$.

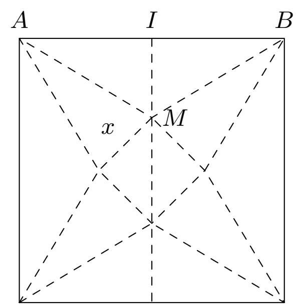
Lập bảng biến thiên, ta tìm được giá trị nhỏ nhất của $t(x)$ là $\dfrac{23}{30}$ khi $x = \dfrac{15}{2}$.

Chọn đáp án B □

CÂU 9. Cho một tấm bìa hình vuông cạnh 5 dm. Để làm một mô hình kim tự tháp Ai Cập, người ta cắt bỏ bốn tam giác cân bằng nhau có cạnh đáy chính là cạnh của hình vuông rồi gấp lên, ghép lại thành một hình chóp tứ giác đều. Để mô hình có thể tích lớn nhất thì cạnh đáy của mô hình là

A. $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\dfrac{5}{2}$. **C.** $\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$. **D.** $2\sqrt{2}$.

Lời giải.



Gọi x là chiều dài cạnh đáy $\left(0 < x < 5\sqrt{2}\right)$, ta có $MI = \dfrac{5 - x\sqrt{2}}{2}$.

Lại có $AM^2 = AI^2 + IM^2 = \dfrac{25}{4} + \dfrac{25 - 10\sqrt{2}x + 2x^2}{4} = \dfrac{25 - 5\sqrt{2}x + x^2}{2}$.

Đường cao hình chóp là $h = \sqrt{\dfrac{25 - 5\sqrt{2}x + x^2}{2} - \dfrac{x^2}{2}} = \sqrt{\dfrac{25 - 5\sqrt{2}x}{2}}$.

Thể tích của khối chóp là $V = \dfrac{1}{3}x^2\sqrt{\dfrac{25 - 5\sqrt{2}x}{2}} \Rightarrow V^2 = \dfrac{1}{18}\left(25x^4 - 5\sqrt{2}x^5\right)$.

Xét hàm số $y = 25x^4 - 5\sqrt{2}x^5$ trên khoảng $\left(0; 5\sqrt{2}\right)$.

Ta có $y' = 25 \cdot 4x^3 - 25\sqrt{2}x^4 = 25x^3\left(4 - \sqrt{2}x\right)$;

Suy ra $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2\sqrt{2}. \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	0		$2\sqrt{2}$		$5\sqrt{2}$
y'		$+$	0	$-$	
y		$\nearrow$	320	$\searrow$	

Vậy $\max\limits_{[0;5\sqrt{2}]} y = 320$ tại $x = 2\sqrt{2}$.

Vậy mô hình có thể tích lớn nhất khi cạnh đáy bằng $2\sqrt{2}$.

Chọn đáp án D □

CÂU 10. Một trang chữ của một quyển sách tham khảo Văn học cần diện tích 384 cm^2. Biết rằng trang giấy được canh lề trái là 2 cm, lề phải là 2 cm, lề trên 3 cm và lề dưới là 3 cm. Tìm chiều dài và chiều rộng của trang sách để trang sách có diện tích nhỏ nhất.

A. Chiều dài bằng 32 cm và chiều rộng bằng 12 cm.

B. Chiều dài bằng 24 cm và chiều rộng bằng 16 cm.

C. Chiều dài bằng 40 cm và chiều rộng bằng 20 cm.
D. Chiều dài bằng 30 cm và chiều rộng bằng 20 cm.

Lời giải.

Gọi x, y là chiều dài và chiều rộng của trang chữ.
Theo đề bài ta có $xy = 384$. Ta cần tìm x, y sao cho $(x+4)(y+6)$ đạt giá trị nhỏ nhất.
Ta có hàm $f(x) = xy + 6x + 4y + 24 = 408 + 6x + 4 \cdot \dfrac{384}{x} = 6x + \dfrac{1536}{x} + 408 \geq 2 \cdot \sqrt{6 \cdot 1536} = 192$.
Đẳng thức xảy ra khi $6x = \dfrac{1536}{x} \Leftrightarrow x = 16 \Rightarrow y = 24$.
Vậy với chiều dài là 24 cm và chiều rộng là 16 cm thì trang sách có diện tích nhỏ nhất.
Chọn đáp án B □

QUICK NOTE