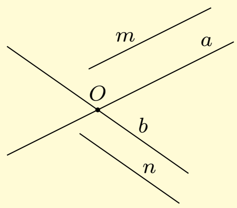
Bài 22. HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC

A. TRỌNG TÂM KIẾN THỨC

1. Góc giữa hai đường thẳng

Góc giữa hai đường thẳng m và n trong không gian, kí hiệu (m, n), là góc giữa hai đường thẳng a và b cùng đi qua một điểm và tương ứng song song với m và n.



- *Để xác định góc giữa hai đường thẳng chéo nhau a và b, ta có thể lấy một điểm O thuộc đường thẳng a và qua đó kẻ đường thẳng b' song song với b. Khi đó $(a, b) = (a, b')$.*
- *Với hai đường thẳng a, b bất kì $0^\circ \leq (a, b) \leq 90^\circ$.*
- *Nếu a song song hoặc trùng với a' và b song song hoặc trùng với b' thì $(a, b) = (a', b')$.*

2. Hai đường thẳng vuông góc

Hai đường thẳng a, b được gọi là vuông góc với nhau, kí hiệu $a \perp b$, nếu góc giữa chúng bằng 90°.

Nếu đường thẳng a vuông góc với đường thẳng b thì a có vuông góc với các đường thẳng song song với b.

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP

Dạng 1. Xác định góc giữa hai đường thẳng trong không gian

1. Ví dụ minh hoạ

VÍ DỤ 1. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có các mặt là các hình vuông. Tính các góc (AA', CD), $(A'C', BD)$, (AC, DC').

VÍ DỤ 2. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh là a. Tính góc giữa các cặp đường thẳng sau đây

a) AB và $A'D'$. b) AD và $A'C'$. c) BC' và $B'D'$.

VÍ DỤ 3. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC = AB = AC = a\sqrt{2}$ và $BC = 2a$. Tính góc giữa hai đường thẳng AC và SB.

2. Bài tập áp dụng

BÀI 1. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh là $2a$, tam giác SBC vuông cân tại S, $SA = 2a$.

a) Tính góc giữa hai đường thẳng SB và AC.

b) Gọi G là trọng tâm của tam giác SBC. Tính góc tạo bởi AG và SC.

BÀI 2. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a. Gọi M là điểm trên cạnh AB sao cho $BM = 3AM$. Tính góc tạo bởi hai đường thẳng CM và BD.

BÀI 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a, các tam giác SAB và SAD cùng vuông góc tại A. Biết rằng $SA = a\sqrt{2}$, gọi M là trung điểm của cạnh SB.

ĐIỂM:

"It's not how much time you have, it's how you use it."

QUICK NOTE

QUICK NOTE

a) Tính góc tạo bởi hai vec-tơ $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{SD}$.

b) Tính góc tạo bởi hai đường thẳng AM và SC.

BÀI 4. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a, gọi M là trung điểm của AB, N là điểm trên cạnh $B'C'$ sao cho $B'N = 2C'N$. Tính cos của góc tạo bởi hai đường thẳng DM và AN.

Dạng 2. Sử dụng tính chất vuông góc trong mặt phẳng.

Để chứng minh hai đường thẳng Δ và Δ' vuông góc với nhau ta có thể sử dụng tính chất vuông góc trong mặt phẳng, cụ thể:

- Tam giác ABC vuông tại A khi và chỉ khi $\widehat{BAC} = 90^\circ \Leftrightarrow \widehat{ABC} + \widehat{ACB} = 90^\circ$.
- Tam giác ABC vuông tại A khi và chỉ khi $AB^2 + AC^2 = BC^2$.
- Tam giác ABC vuông tại A khi và chỉ khi trung tuyến xuất phát từ A có độ dài bằng nửa cạnh BC.
- Nếu tam giác ABC cân tại A thì đường trung tuyến xuất phát từ A cũng là đường cao của tam giác.

Ngoài ra, chúng ta cũng sử dụng tính chất: Nếu $d \perp \Delta$ và $\Delta' \parallel d$ thì Δ' cũng vuông góc với đường thẳng Δ.

1. Ví dụ minh hoạ

VÍ DỤ 1. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = AC = AD$, $\widehat{BAC} = \widehat{BAD} = 60^\circ$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và CD, chứng minh rằng MN là đường vuông góc chung của các đường thẳng AB và CD.

VÍ DỤ 2. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$.

a) Xác định vị trí tương đối của hai đường thẳng AC và $B'D'$.

b) Chứng minh rằng AC và $B'D'$ vuông góc với nhau khi và chỉ khi $ABCD$ là một hình thoi.

VÍ DỤ 3. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC = a$, $\widehat{ASB} = 60^\circ, \widehat{BSC} = 90^\circ, \widehat{CSA} = 120^\circ$. Cho H là trung điểm AC. Chứng minh rằng:

a) $SH \perp AC$.

b) $AB \perp BC$.

VÍ DỤ 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA = x$ và tất cả các cạnh còn lại đều bằng 1. Chứng minh rằng $SA \perp SC$.

2. Bài tập áp dụng

BÀI 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O và $SA = SB = SC = SD$. Chứng minh rằng $SO \perp AB$ và $SO \perp AD$.

BÀI 2. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có M, N lần lượt là trung điểm $BC, C'D'$. Chứng minh rằng $AM \perp B'N$.

BÀI 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông và có tất cả các cạnh đều bằng a. Cho M và N lần lượt là trung điểm của AD và SD, chứng minh rằng $MN \perp SC$.

BÀI 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $2a$, tam giác SAB đều và $SC = 2a\sqrt{2}$. Gọi H, K lần lượt là trung điểm của AB, CD. Chứng minh rằng $SH \perp AK$.

BÀI 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B, $AD = 2a, AB = BC = a$. $SA \perp AD$ và $SA \perp AC$. Chứng minh rằng $SC \perp DC$.

BÀI 6. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = x$, tất cả các cạnh còn lại có độ dài bằng a. K là trung điểm AB và I là điểm bất kỳ trên cạnh CD, chứng minh rằng $IK \perp AB$.

Dạng 3. Hai đường thẳng song song cùng vuông góc với một đường thẳng thứ ba

Để chứng minh đường thẳng $a \perp b$, ta chứng minh $a \parallel a'$, ở đó $a' \perp b$.

1. Ví dụ minh hoạ

VÍ DỤ 1. Cho hình chóp $S.ABC$ có $AB = AC$. Lấy M, N và P lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, SB và SC. Chứng minh rằng AM vuông góc với NP.

VÍ DỤ 2. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều. Lấy M là trung điểm của cạnh BC. Chứng minh rằng AM vuông góc với $B'C'$.

VÍ DỤ 3. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Các điểm M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC. Trên cạnh $B'C'$ lấy điểm P sao cho $C'P = x$ $(0 < x < a)$. Trên cạnh $C'D'$ lấy điểm Q sao cho $C'Q = x$. Chứng minh rằng MN vuông góc với PQ.

2. Bài tập áp dụng

BÀI 1. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$. Gọi G, G' lần lượt là trọng tâm hai đáy. Chứng minh rằng GG' vuông góc với BC.

BÀI 2. Cho tứ diện đều $ABCD$. Gọi M, N, P và Q lần lượt là trung điểm các cạnh AB, CD, AD và AC. Chứng minh rằng MN vuông góc với PQ.

BÀI 3. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = CD = 2a$ $(a > 0)$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh BC, AD. Biết rằng $MN = a\sqrt{2}$. Chứng minh rằng AB vuông góc với CD.

BÀI 4. Cho tứ diện $ABCD$, có $AB = CD$. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABD, M thuộc cạnh AC sao cho $AC = 3AM$, các điểm N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh AD, BC. Chứng minh rằng MG vuông góc với NP.

Bài 23. ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC VỚI MẶT PHẲNG

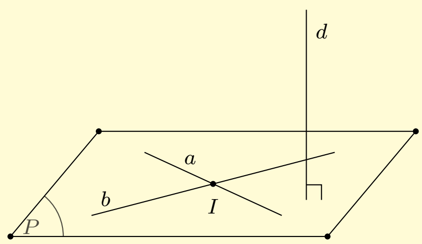
A. TRỌNG TÂM KIẾN THỨC

1. Đường thẳng vuông góc với mặt phẳng

Đường thẳng Δ được gọi là vuông góc với mặt phẳng (P) nếu Δ vuông góc với mọi đường thẳng nằm trong (P).

- *Khi Δ vuông góc với (P), ta còn nói (P) vuông góc với Δ hoặc Δ và (P) vuông góc với nhau, kí hiệu $\Delta \perp (P)$.*
- *Nếu đường thẳng Δ và mặt phẳng (P) vuông góc với nhau thì chúng cắt nhau.*

Nếu đường thẳng vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau thuộc cùng một mặt phẳng thì nó vuông góc với mặt phẳng đó.

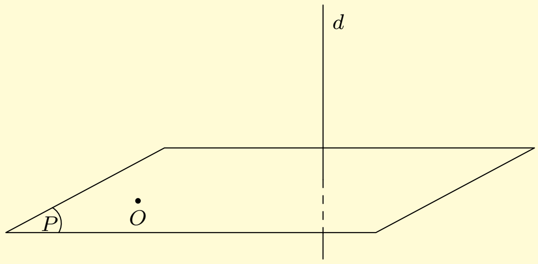


Nếu một đường thẳng vuông góc với hai cạnh của một tam giác thì vuông góc với cạnh thứ ba.

2. Tính chất

QUICK NOTE

Có duy nhất một mặt phẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một đường thẳng cho trước.



Nhận xét. Nếu ba đường thẳng đôi một phân biệt a, b, c cùng đi qua một điểm O và cùng vuông góc với một đường thẳng Δ thì ba đường thẳng đó cùng nằm trong mặt phẳng đi qua O và vuông góc với Δ.

Mặt phẳng đi qua trung điểm của đoạn thẳng AB và vuông góc với đường thẳng AB được gọi là mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB. Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB là tập hợp các điểm cách đều hai điểm A, B.

Có duy nhất một đường thẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một mặt phẳng cho trước.

3. Liên hệ giữa quan hệ song song và quan hệ vuông góc của đường thẳng và mặt phẳng

- Nếu đường thẳng a vuông góc với mặt phẳng (P) thì các đường thẳng song song với a cũng vuông góc với (P).
- Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.

- Nếu đường thẳng Δ vuông góc với mặt phẳng (P) thì Δ cũng vuông góc với các mặt phẳng song song với (P).
- Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.

- Nếu đường thẳng Δ vuông góc với mặt phẳng (P) thì Δ vuông góc với mọi đường thẳng song song với (P).
- Nếu đường thẳng a và mặt phẳng (P) cùng vuông góc với một đường thẳng Δ thì a nằm trong (P) hoặc song song với (P).

4. Phép chiếu vuông góc

Phép chiếu song song lên mặt phẳng (P) theo phương Δ vuông góc với (P) được gọi là *phép chiếu vuông góc* lên mặt phẳng (P).

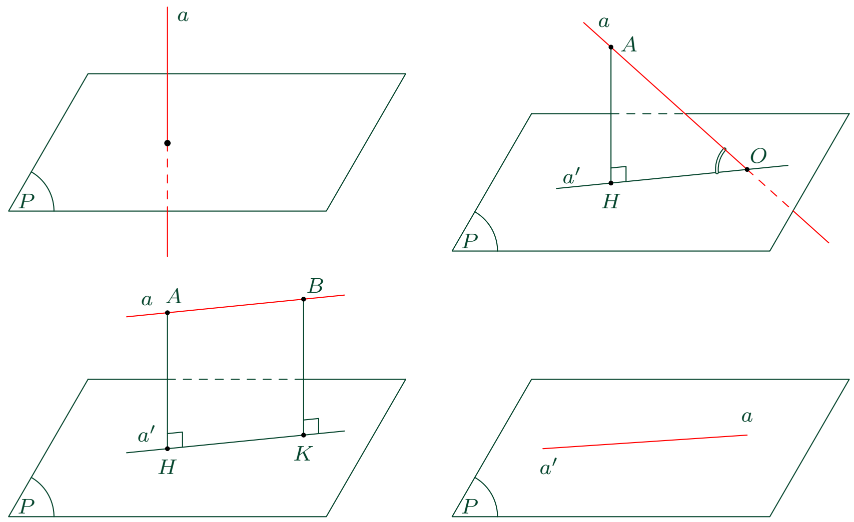
- *Vì phép chiếu vuông góc lên một mặt phẳng là một trường hợp đặc biệt của phép chiếu song song nên nó có mọi tính chất của phép chiếu song song.*
- *Phép chiếu vuông góc lên mặt phẳng (P) còn được gọi đơn giản là phép chiếu lên mặt phẳng (P). Hình chiếu vuông góc $\mathscr{H}'$ của hình $\mathscr{H}$ trên mặt phẳng (P) còn được gọi là* hình chiếu *của $\mathscr{H}$ trên mặt phẳng (P).*

Cho đường thẳng a và mặt phẳng (P) không vuông góc với nhau. Khi đó, một đường thẳng b nằm trong mặt phẳng (P) vuông góc với đường thẳng a khi và chỉ khi b vuông góc với hình chiếu vuông góc a' của a trên (P).

QUICK NOTE

5. Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

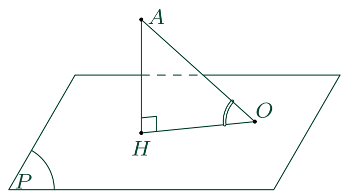
Nếu đường thẳng a vuông góc với mặt phẳng (P) thì ta nói rằng góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) bằng 90°.
Nếu đường thẳng a không vuông góc với mặt phẳng (P) thì góc giữa a và hình chiếu a' của nó trên (P) được gọi là góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P).



Chú ý: Nếu α là góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) thì $0 \leq \alpha \leq 90^\circ$.

NHẬN XÉT.

Cho điểm A có hình chiếu H trên mặt phẳng (P). Lấy điểm O thuộc mặt phẳng (P), O không trùng H. Khi đó góc giữa đường thẳng AO và mặt phẳng (P) bằng góc AOH



B. CÁC DẠNG BÀI TẬP

Dạng 1. Chứng minh đường thẳng vuông góc đường thẳng, mặt phẳng

1. Ví dụ minh hoạ

VÍ DỤ 1. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC vuông tại B và cạnh SA vuông góc với các cạnh AB, AC. Chứng minh rằng $BC \perp (SAB)$.

VÍ DỤ 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là một hình vuông, $SA \perp (ABCD)$. Kẻ AH vuông góc với SC (H thuộc SC), BM vuông góc với SC (M thuộc SC). Chứng minh rằng $SC \perp (MBD)$ và $AH \parallel (MBD)$.

VÍ DỤ 3. Cho tứ diện $OABC$ có các cạnh OA, OB, OC tương ứng vuông góc với nhau. Gọi M, N tương ứng là trọng tâm của các tam giác ABC, OBC. Chứng minh rằng đường thẳng MN vuông góc với mặt phẳng (OBC).

VÍ DỤ 4. Cho hình chóp $S.ABC$. Các điểm M, N, P tương ứng là trung điểm của SA, SB, SC. Đường thẳng qua S vuông góc với mặt phẳng (ABC) và cắt mặt phẳng đó tại H. Chứng minh rằng $SH \perp (MNP)$.

VÍ DỤ 5. Cho tứ diện $ABCD$ có ABD và DBC là những tam giác cân tại A và D. Gọi I là trung điểm của BC và AH là đường cao của tam giác ADI.

a) Chứng minh $BC \perp AD$.

b) Chứng minh $AH \perp (BCD)$.

VÍ DỤ 6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O và $SA \perp (ABCD)$. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của A trên SB và SD.

QUICK NOTE

a) Chứng minh $BC \perp SB$ và $CD \perp SD$.

b) Chứng minh $BD \perp (SAC)$.

c) Chứng minh $HK \perp (SAC)$.

d) Chứng minh $AH \perp (SBC)$.

e) Chứng minh $AK \perp (SCD)$.

f) Gọi I là hình chiếu của A lên SC. Chứng minh AH, AI, AK đồng phẳng.

2. Bài tập áp dụng

BÀI 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi, $SA \perp (ABCD)$. Chứng minh rằng $BD \perp (SAC)$.

BÀI 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$, đáy $ABCD$ là hình bình hành có AC cắt BD tại O. Gọi M là trung điểm của SC. Chứng minh rằng $OM \perp (ABCD)$.

BÀI 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi, tâm O. Biết $SA = SC$ và $SB = SD$.

a) Chứng minh: $SO \perp (ABCD)$.

b) Gọi I, K lần lượt là trung điểm của BA và BC. Chứng minh: $IK \perp SD$.

BÀI 4. Cho hình chóp $S.ABC$ có tam giác ABC vuông tại B và $SA \perp (ABC)$. Gọi AH, AK lần lượt là các đường cao trong tam giác SAB và SAC.

a) Chứng minh tam giác SBC vuông.

b) Chứng minh tam giác AHK vuông.

c) Chứng minh $SC \perp (AHK)$.

d) Chứng minh tam giác SHK vuông.

e) Gọi $I = HK \cap BC$. Chứng minh $IA \perp (SAC)$.

BÀI 5. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, tam giác ABC vuông cân tại B. Gọi G là trọng tâm của tam giác SAC và N là điểm thuộc cạnh SB sao cho $SN = 2NB$.

a) Chứng minh $BC \perp (SAB)$.

b) Chứng minh $NG \perp (SAC)$.

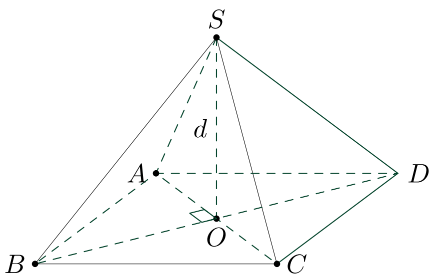
Dạng 2. Một số bài toán liên hệ giữa quan hệ song song và quan hệ vuông góc khác

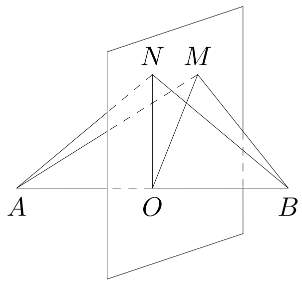
1. Ví dụ minh hoạ

VÍ DỤ 1. Cho mặt phẳng (P) và ba điểm A, B, C thỏa mãn $(P) \perp AB$ và $(P) \perp BC$. Chứng minh rằng $(P) \perp AC$.

VÍ DỤ 2. a) Cho hình chóp $S.ABCD$ có các cạnh bên bằng nhau, đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O (Hình bên trái). Gọi d là đường thẳng đi qua S và vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Chứng minh d đi qua O.

b) Cho đoạn thẳng AB có O là trung điểm. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua O và vuông góc với AB; M, N là hai điểm cách đều hai đầu của đoạn thẳng AB sao cho M, N, O không thẳng hàng (Hình bên phải). Chứng minh M và N thuộc mặt phẳng (P).

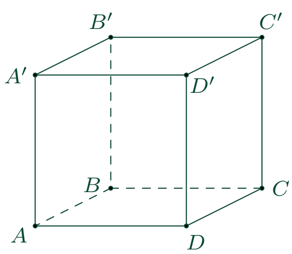




VÍ DỤ 3.
Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $AA' \perp (ABCD)$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và BC.

a) Qua M vẽ đường thẳng a song song với AA'. Chứng minh $a \perp (ABCD)$.

b) Qua N vẽ đường thẳng b vuông góc với $(ABCD)$. Chứng minh $b \parallel AA'$.

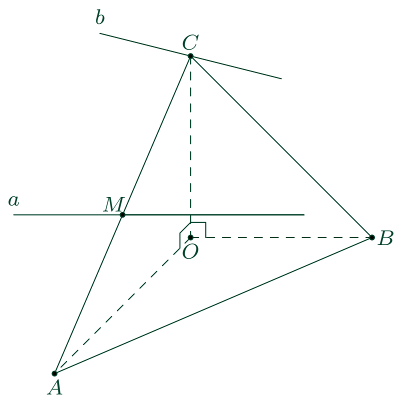


VÍ DỤ 4. Cho mặt phẳng (P) và đường thẳng a cắt (P) tại O sao cho $a \perp (P)$. Giả sử b là đường thẳng đi qua điểm O và $b \perp a$. Chứng minh rằng $b \subset (P)$.

VÍ DỤ 5.
Cho ba đoạn thẳng OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau.

a) Cho M là trung điểm của CA và a là đường thẳng tùy ý đi qua M và song song với mặt phẳng (OAB). Chứng minh $a \perp OC$.

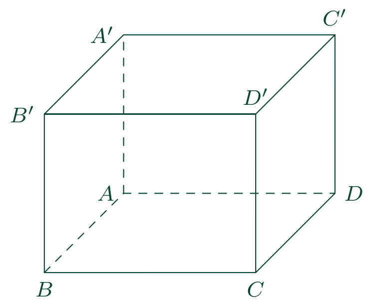
b) Gọi b là một đường thẳng tuỳ ý đi qua C và b vuông góc với OC. Chứng minh $b \parallel (OAB)$.



2. Bài tập áp dụng

BÀI 1. Giả sử $ABCD$ và $ABMN$ là hai hình chữ nhật không cùng nằm trong một mặt phẳng. Chứng minh rằng $(ADN) \parallel (BCM)$.

BÀI 2.
Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $AA' \perp (ABCD)$. Chứng minh rằng $AA' \perp (A'B'C'D')$.



BÀI 3. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$. Mặt phẳng (P) khác mặt phẳng (ABC), vuông góc với đường thẳng SA và lần lượt cắt các đường thẳng SB, SC tại B', C'. Chứng minh rằng $B'C' \parallel BC$.

BÀI 4. Cho mặt phẳng (P) và đường thẳng a cắt nhau tại điểm O, $a \perp (P)$. Giả sử điểm M thỏa mãn $OM \perp (P)$. Chứng minh rằng $M \in a$.

BÀI 5. Cho đường thẳng d và mặt phẳng (P) cắt nhau tại O. Lấy các điểm A, B thuộc d và khác O; các điểm A', B' thuộc (P) thỏa mãn $AA' \perp (P)$, $BB' \perp (P)$. Chứng minh rằng $\dfrac{AA'}{BB'} = \dfrac{OA}{OB}$.

Dạng 3. Phép chiếu vuông góc

1. Ví dụ minh hoạ

VÍ DỤ 1. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC$. Gọi O là hình chiếu của S trên mặt phẳng (ABC).

a) Chứng minh rằng O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

b) Xác định hình chiếu của đường thẳng SA trên mặt phẳng (ABC).

c) Chứng minh rằng nếu $AO \perp BC$ thì $SA \perp BC$.

d) Xác định hình chiếu của các tam giác SBC, SCA, SAB trên mặt phẳng (ABC).

2. Bài tập áp dụng

BÀI 1. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, tam giác ABC vuông tại B.

a) Xác định hình chiếu của điểm S trên mặt phẳng (ABC).

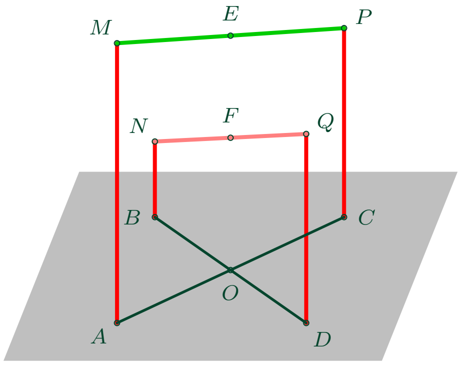
b) Xác định hình chiếu của tam giác SBC trên mặt phẳng (ABC).

QUICK NOTE

QUICK NOTE

c) Xác định hình chiếu của tam giác SBC trên mặt phẳng (SAB).

BÀI 2.
Trên một sân phẳng nằm ngang, tại các điểm A, B, C, D người ta dựng các cột thẳng đứng AM, BN, CP, DQ và nối các sợi dây thẳng giữa M và P, N và Q như hình bên.



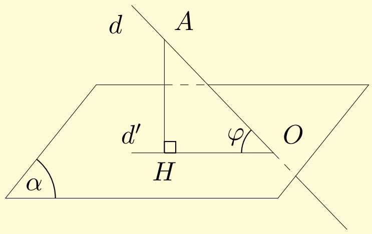
a) Hãy chỉ ra hình chiếu của các dây MP và NQ trên sân.

b) Chứng minh rằng nếu $BD \perp AC$ thì $BD \perp MP$.

c) Chứng minh rằng nếu $ABCD$ là một hình bình hành thì các trung điểm E, F tương ứng của các đoạn thẳng MP và NQ có cùng hình chiếu trên sân.

Dạng 4. Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

Cho đường thẳng d và mặt phẳng (P) cắt nhau.
Nếu $d \perp (P)$ thì $(d, (P)) = 90°$.



Nếu $d \not\perp (P)$ thì để xác định góc giữa d và (P), ta thường làm như sau

a) Xác định giao điểm O của d và (P).

b) Lấy một điểm A trên d (A khác O). Xác định hình chiếu vuông góc (vuông góc) H của A lên (P). Lúc đó $(d, (P)) = (d, d') = \widehat{AOH}$.

1. Ví dụ minh hoạ

VÍ DỤ 1. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, $SA = a$, $CA = CB = a\sqrt{7}$, $AB = 2a$.

a) Gọi α là góc giữa SB và (ABC). Tính $\tan\alpha$.

b) Tính góc giữa SC và (SAB).

VÍ DỤ 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, $SA = a\sqrt{6}$ và SA vuông góc $(ABCD)$. Hãy xác định các góc giữa

a) SC và $(ABCD)$.

b) SC và (SAB).

c) SB và (SAC).

d) AC và (SBC).

VÍ DỤ 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, tâm O, SO vuông góc $(ABCD)$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm SA, BC. Biết rằng góc giữa MN và $(ABCD)$ bằng $60°$. Tính góc giữa MN và (SBD).

2. Bài tập áp dụng

BÀI 1. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, $SA = 2a$ và SA vuông góc với đáy. Tính góc giữa

a) SC và (ABC).

b) SC và (SAB).

BÀI 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O, cạnh a, SO vuông góc $(ABCD)$ và $SO = a\sqrt{6}$.

a) Tính góc giữa cạnh bên SC và mặt đáy.

b) Tính góc giữa SO và (SAD).

c) Gọi I là trung điểm BC. Tính góc giữa SI và (SAD).

BÀI 3. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, $BC = a$, $SA = SB = SC = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Tính góc giữa SA và (ABC).

BÀI 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và B, $AB = BC = a$, $AD = 2a$. Cạnh bên $SA = a\sqrt{2}$ và vuông góc với đáy. Tính góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (SAC).

BÀI 5. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a và AA' vuông góc (ABC). Đường chéo BC' của mặt bên $(BCC'B')$ hợp với $(ABB'A')$ một góc 30°.

a) Tính AA'.

b) Gọi M, N lần lượt là trung điểm AC và BB'. Tính góc giữa MN và $(ACC'A')$.

C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

CÂU 1. Khẳng định nào sau đây đúng?

A) Hai mặt phẳng cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.

B) Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.

C) Hai mặt phẳng song song khi và chỉ khi góc giữa chúng bằng 0°.

D) Hai đường thẳng trong không gian cắt nhau khi và chỉ khi góc giữa chúng lớn hơn 0° và nhỏ hơn 90°.

CÂU 2. Cho hai đường thẳng phân biệt a, b và mặt phẳng (P), trong đó $a \perp (P)$. Chọn mệnh đề **sai** trong các mệnh đề dưới đây.

A) Nếu $b \parallel a$ thì $b \perp (P)$. B) Nếu $b \perp (P)$ thì $a \parallel b$.

C) Nếu $a \perp b$ thì $b \parallel (P)$. D) Nếu $b \subset (P)$ thì $b \perp a$.

CÂU 3. Cho hai đường thẳng phân biệt a, b và mặt phẳng (α). Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **đúng**?

A) Nếu $a \parallel (\alpha)$ và $b \parallel (\alpha)$ thì $b \parallel a$. B) Nếu $a \perp (\alpha)$ và $b \perp (\alpha)$ thì $b \parallel (\alpha)$.

C) Nếu $a \parallel (\alpha)$ và $b \perp (\alpha)$ thì $a \perp b$. D) Nếu $a \parallel (\alpha)$ và $b \perp a$ thì $b \perp (\alpha)$.

CÂU 4. Trong không gian cho đường thẳng Δ và điểm O. Qua O có bao nhiêu đường thẳng vuông góc với Δ?

A) Vô số. B) 3. C) 2. D) 1.

CÂU 5. Trong không gian, số mặt phẳng đi qua điểm M và vuông góc với đường thẳng a là

A) 1. B) 2. C) 0. D) vô số.

CÂU 6. Trong không gian cho các đường thẳng a, b, c và mặt phẳng (P). Mệnh đề nào sau đây là **sai**?

A) Nếu $a \perp (P)$ và $b \parallel (P)$ thì $a \perp b$.

B) Nếu $a \perp b$, $c \perp b$ và a cắt c thì b vuông góc với mặt phẳng chứa a và c.

C) Nếu $a \parallel b$ và $b \perp c$ thì $c \perp a$.

D) Nếu $a \perp b$ và $b \perp c$ thì $a \parallel c$.

CÂU 7. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau

A) Nếu $a \parallel (\alpha)$ và $b \perp a$ thì $b \parallel (\alpha)$. B) Nếu $a \parallel (\alpha)$ và $b \perp a$ thì $b \perp (\alpha)$.

C) Nếu $a \parallel (\alpha)$ và $b \perp (\alpha)$ thì $a \perp b$. D) Nếu $a \parallel (\alpha)$ và $b \parallel a$ thì $b \parallel (\alpha)$.

CÂU 8. Trong không gian cho đường thẳng a và điểm M. Có bao nhiêu đường thẳng đi qua M và vuông góc với đường thẳng a?

A) Không có. B) Có hai.

C) Có vô số. D) Có một và chỉ một.

CÂU 9. Trong không gian, cho hai đường thẳng phân biệt a, b và mặt phẳng (P), trong đó $a \perp (P)$. Trong các mệnh đề sau, có bao nhiêu mệnh đề đúng?

QUICK NOTE

QUICK NOTE

(I) Nếu $b \parallel a$ thì $b \perp (P)$.

(II) Nếu $b \perp (P)$ thì $b \parallel a$.

(III) Nếu $b \perp a$ thì $b \parallel (P)$.

(IV) Nếu $b \parallel (P)$ thì $b \perp a$.

(A) 1. (B) 2. (C) 4. (D) 3.

CÂU 10. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông, $SA \perp (ABCD)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

(A) $AB \perp (SAD)$. (B) $AB \perp (SAC)$. (C) $AB \perp (SBC)$. (D) $AB \perp (SCD)$.

CÂU 11. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều, biết $SA \perp (ABC)$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định **đúng**?

(A) $AB \perp BC$. (B) $SA \perp BC$. (C) $SB \perp AB$. (D) $SC \perp BC$.

CÂU 12. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O. Biết rằng $SA = SC$, $SB = SD$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

(A) $CD \perp (SBD)$. (B) $AB \perp (SAC)$. (C) $SO \perp (ABCD)$. (D) $CD \perp AC$.

CÂU 13. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi H là trực tâm của tam giác BCD và AH vuông góc với mặt phẳng đáy. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

(A) $AB \perp CD$. (B) $AB = CD$. (C) $AC = BD$. (D) $CD \perp BD$.

CÂU 14. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$ và đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O. Gọi I là trung điểm của SC. Xét các khẳng định sau

1. $OI \perp (ABCD)$.
2. $BD \perp SC$.
3. (SAC) là mặt phẳng trung trực của đoạn BD.
4. $SB = SC = SD$.

Trong bốn khẳng định trên, số khẳng định **sai** là?

(A) 1. (B) 4. (C) 2. (D) 3.

CÂU 15. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi AE, AF lần lượt là đường cao của tam giác SAB và tam giác SAD. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

(A) $SC \perp (AEF)$. (B) $SC \perp (AED)$. (C) $SC \perp (AFB)$. (D) $SC \perp (AEC)$.

CÂU 16. Cho hình chóp $S.ABCD$ với đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D, có $AD = CD = a$, $AB = 2a$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy $(ABCD)$, E là trung điểm của AB. Chỉ ra mệnh đề **sai** trong các mệnh đề dưới đây.

(A) $CE \perp (SAB)$. (B) $CE \perp (SDC)$.

(C) $CB \perp (SAC)$. (D) Tam giác SDC vuông tại D.

CÂU 17. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, cạnh bên SA vuông góc với đáy. Gọi H là chân đường cao kẻ từ A của tam giác SAB. Khẳng định nào dưới đây là **sai**?

(A) $AH \perp BC$. (B) $AH \perp AC$. (C) $AH \perp SC$. (D) $SA \perp BC$.

CÂU 18. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác cân tại C. Cạnh bên SA vuông góc với đáy. Gọi H, K lần lượt là trung điểm của AB và SB. Khẳng định nào dưới đây **sai**?

(A) $CH \perp AK$. (B) $AK \perp SB$. (C) $CH \perp SB$. (D) $CH \perp SA$.

CÂU 19. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$, SA vuông góc với đáy. Kẻ AH vuông góc với SB ($H \in SB$). Chọn mệnh đề đúng.

(A) $AH \perp SC$. (B) $AH \perp (SBD)$. (C) $AH \perp (SCD)$. (D) $AH \perp SD$.

CÂU 20. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành, hai đường chéo AC, BD cắt nhau tại O và $SA = SB = SC = SD$. Khi đó, khẳng định nào sau đây là **sai**?

(A) $AC \perp BD$. (B) $SO \perp BD$. (C) $SO \perp AC$. (D) $SO \perp (ABCD)$.

CÂU 21. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Có bao nhiêu phát biểu đúng trong các phát biểu sau

a) $AC \perp B'D'$ b) $AC \perp B'C'$ c) $AC \perp DD'$ d) $AC' \perp BD$

A 4. B 3. C 2. D 1.

CÂU 22. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = AC$, $DB = DC$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A $AB \perp BC$. B $CD \perp (ABD)$. C $BC \perp AD$. D $AB \perp (ABC)$.

CÂU 23. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông, cạnh bên SA vuông góc với đáy $(ABCD)$.
Khẳng định nào sau đây **sai**?

A $CD \perp (SBC)$. B $SA \perp (ABC)$. C $BC \perp (SAB)$. D $BD \perp (SAC)$.

CÂU 24. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, SA vuông góc với $(ABCD)$. Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

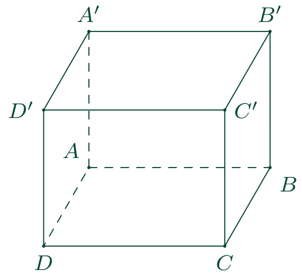
A $SA \perp BD$. B $CD \perp SD$. C $SD \perp AC$. D $BC \perp SB$.

CÂU 25. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = AC = 2$, $DB = DC = 3$. Khẳng định nào sau đây **đúng**?

A $BC \perp AD$. B $AC \perp BD$. C $AB \perp (BCD)$. D $DC \perp (ABC)$.

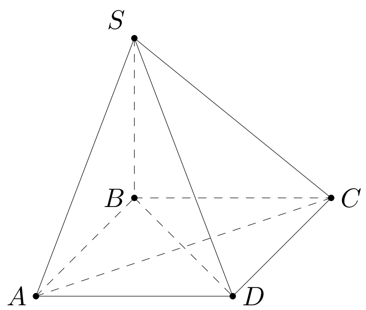
CÂU 26.
Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Tính góc giữa AC' và BD.

A $90°$. B $45°$. C $60°$. D $120°$.



CÂU 27.
Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông và SB vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ (tham khảo hình vẽ). Khẳng định nào sau đây đúng?

A $AC \perp (SCD)$. B $AC \perp (SBD)$.
C $AC \perp (SBC)$. D $AC \perp (SAB)$.

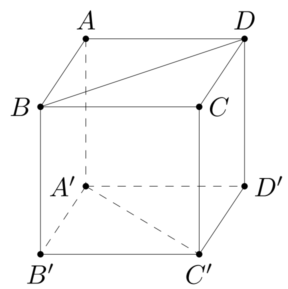


CÂU 28. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC vuông tại B, SA vuông góc với đáy ABC. Khẳng định nào dưới đây là **sai**?

A $SB \perp BC$. B $SA \perp AB$. C $SB \perp AC$. D $SA \perp BC$.

CÂU 29.
Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Khi đó góc giữa hai đường thẳng BD và $A'C'$ bằng

A $90°$. B $30°$. C $60°$. D $45°$.



CÂU 30. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$ và $\triangle ABC$ vuông ở B. Gọi AH là đường cao của $\triangle SAB$. Khẳng định nào sau đây là **sai?**

A $SA \perp BC$. B $AH \perp AC$. C $AH \perp BC$. D $AH \perp SC$.

CÂU 31. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$ và $\triangle ABC$ vuông ở C, AH là đường cao của $\triangle SAC$ .Khẳng định nào sau đây đúng?

A $SA \perp SC$. B $AH \perp BC$. C $SA \perp AH$. D $AH \perp AC$.

CÂU 32. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC$ và tam giác ABC vuông tại A. Vẽ $SH \perp (ABC), H \in (ABC)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

QUICK NOTE

QUICK NOTE

(A) H trùng với trung điểm của BC.
(B) H trùng với trực tâm tam giác ABC.
(C) H trùng với trọng tâm tam giác ABC.
(D) H trùng với trung điểm của AC.

CÂU 33. Cho tứ diện $ABCD$ có $AC = AD$ và $BC = BD$. Khẳng định nào sau đây đúng?

(A) $AB \perp (ABC)$. (B) $BC \perp CD$. (C) $AB \perp CD$. (D) $CD \perp (ABC)$.

CÂU 34. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O. Biết $SA = SC$ và $SB = SD$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

(A) $BD \perp (SAC)$. (B) $AB \perp (SBC)$. (C) $SO \perp (ABCD)$. (D) $AC \perp (SBD)$.

CÂU 35. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ với O là tâm đa giác đáy $ABCD$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

(A) $BD \perp (SAC)$. (B) $BC \perp (SAB)$. (C) $AC \perp (SBD)$. (D) $OS \perp (ABCD)$.

CÂU 36. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều, cạnh bên SA vuông góc với đáy, M là trung điểm BC, J là trung điểm BM. Khẳng định nào sau đây đúng ?

(A) $BC \perp (SAM)$. (B) $BC \perp (SAC)$. (C) $BC \perp (SAJ)$. (D) $BC \perp (SAB)$.

CÂU 37. Cho tứ diện đều $ABCD$ có điểm M là trung điểm của cạnh CD. Chọn mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau.

(A) $BM \perp AD$. (B) $BM \perp CD$. (C) $AM \perp CD$. (D) $AB \perp CD$.

CÂU 38. Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$, đường thẳng AC_1 vuông góc với mặt phẳng nào sau đây?

(A) (A_1DC_1). (B) (A_1BD). (C) (A_1CD_1). (D) (A_1B_1CD).

CÂU 39. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật và SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi AE, AF lần lượt là các đường cao của tam giác SAB và SAD. Mệnh đề nào sau đây đúng?

(A) $SC \perp (AED)$. (B) $SC \perp (ACE)$. (C) $SC \perp (AFB)$. (D) $SC \perp (AEF)$.

CÂU 40. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O. Biết $SA = SC, SB = SD$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

(A) $AC \perp (SBD)$. (B) $AC \perp SO$. (C) $AC \perp SB$. (D) $SC \perp AD$.

CÂU 41. Trong hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các cạnh đều bằng nhau. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

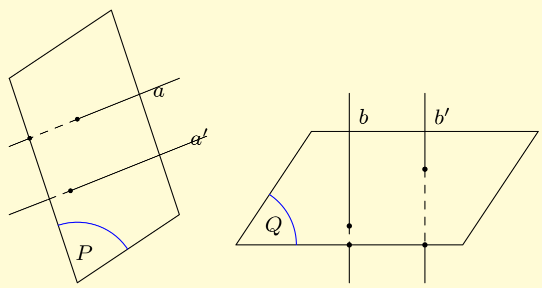
(A) $BB' \perp BD$. (B) $A'C' \perp BD$. (C) $A'B \perp DC'$. (D) $BC' \perp A'D$.

Bài 24. HAI MẶT PHẲNG VUÔNG GÓC

A. TRỌNG TÂM KIẾN THỨC

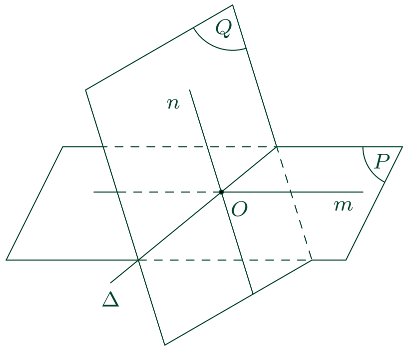
1. Góc giữa hai mặt phẳng, hai mặt phẳng vuông góc

- Cho hai mặt phẳng (P) và (Q). Lấy các đường thẳng a, b tương ứng vuông góc với $(P), (Q)$. Khi đó, góc giữa a và b không phụ thuộc vào vị trí của a, b và được gọi là góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q).
- Hai mặt phẳng (P) và (Q) được gọi là vuông góc với nhau nếu góc giữa chúng bằng $90°$.



Chú ý. *Nếu φ là góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) thì $0° \leq \varphi \leq 90°$.*

Nhận xét.
Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) cắt nhau theo giao tuyến Δ. Lấy hai đường thẳng m, n tương ứng thuộc (P), (Q) cùng vuông góc với Δ tại một điểm O (nói cách khác, lấy một mặt phẳng vuông góc với Δ, cắt (P), (Q) tương ứng theo các giao tuyến m, n). Khi đó góc giữa (P) và (Q) bằng góc giữa m và n. Đặc biệt, (P) vuông góc với (Q) khi và chỉ khi m vuông góc với n.

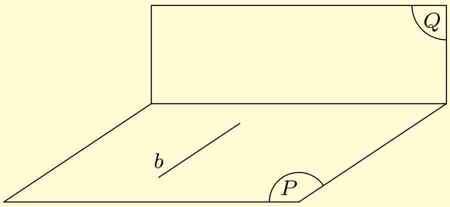


QUICK NOTE

2. Điều kiện hai mặt phẳng vuông góc

Hai mặt phẳng vuông góc với nhau nếu mặt phẳng này chứa một đường thẳng vuông góc với mặt phẳng kia.
Kí hiệu

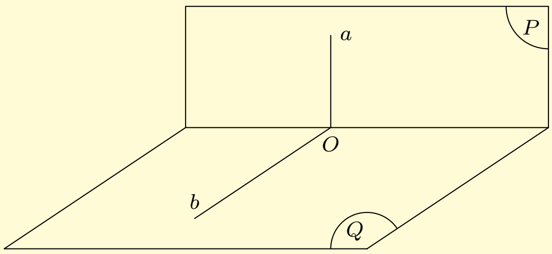
$$\begin{cases} b \subset (P) \\ b \perp (P) \end{cases} \Rightarrow (P) \perp (Q).$$



3. Tính chất hai mặt phẳng vuông góc

Với hai mặt phẳng vuông góc với nhau, bất kì đường thẳng nào nằm trong mặt phẳng này mà vuông góc với giao tuyến cũng vuông góc với mặt phẳng kia.
Kí hiệu

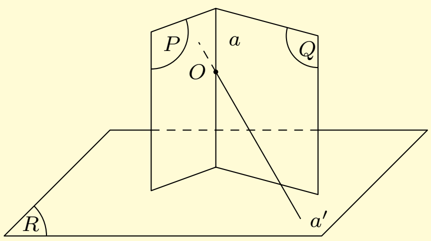
$$\begin{cases} (P) \perp (Q) \\ (P) \cap (Q) = c \\ a \subset (P), a \perp c \end{cases} \Rightarrow a \perp (Q).$$



Nhận xét. Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau. Mỗi đường thẳng qua điểm O thuộc (P) và vuông góc với mặt phẳng (Q) thì đường thẳng đó thuộc mặt phẳng (P).

Nếu hai mặt phẳng cắt nhau và cùng vuông góc với một mặt phẳng thứ ba thì giao tuyến của chúng vuông góc với mặt phẳng thứ ba đó.
Kí hiệu

$$\begin{cases} (P) \cap (Q) = a,\ (P) \perp (Q) \\ (P) \perp (R),\ (Q) \perp (R) \end{cases} \Rightarrow a \perp (R)$$

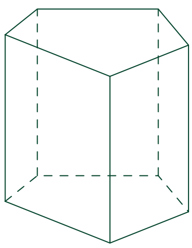


4. Một số hình lăng trụ đặc biệt

4.1. Hình lăng trụ đứng

Hình lăng trụ đứng là hình lăng trụ có các cạnh bên vuông góc với mặt đáy.

Hình lăng trụ đứng có các mặt bên là các hình chữ nhật và vuông góc với mặt đáy.

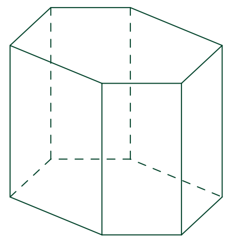


4.2. Hình lăng trụ đều

QUICK NOTE

Hình lăng trụ đều là hình lăng trụ đứng có đáy là đa giác đều.

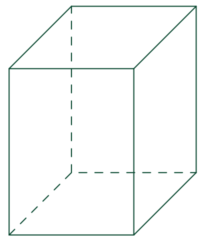
Hình lăng trụ đều có các mặt bên là các hình chữ nhật có cùng kích thước.



4.3. Hình hộp đứng

Hình hộp đứng là hình lăng trụ đứng có đáy là hình bình hành.

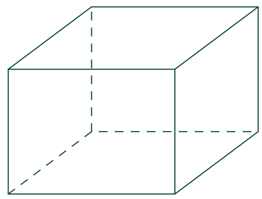
Hình hộp đứng có các mặt bên là các hình chữ nhật.



4.4. Hình hộp chữ nhật

Hình hộp chữ nhật là hình hộp đứng có đáy là hình chữ nhật.

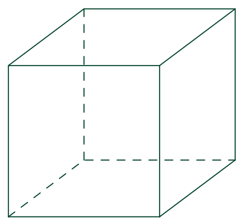
Hình hộp chữ nhật có các mặt bên là hình chữ nhật. Các đường chéo của hình hộp chữ nhật có độ dài bằng nhau và chúng cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường.



4.5. Hình lập phương

Hình lập phương là hình hộp chữ nhật có tất cả các cạnh bằng nhau.

Hình lập phương có các mặt là các hình vuông.

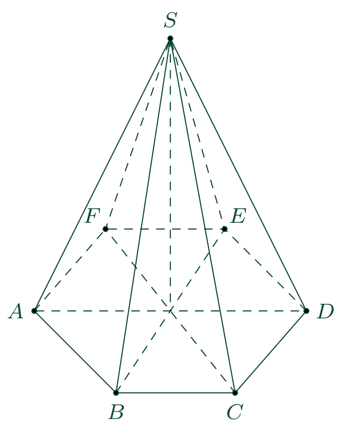


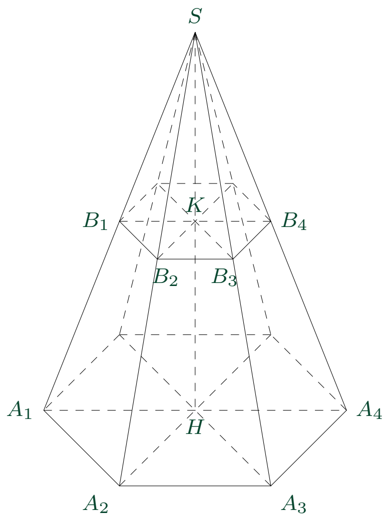
5. Hình chóp đều và hình chóp cụt đều

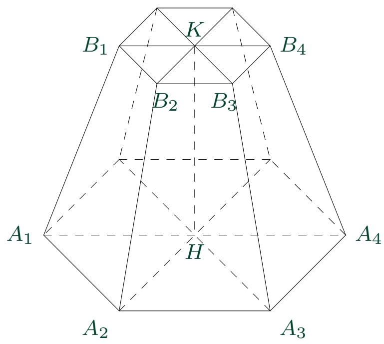
Hình chóp đều là hình chóp có đáy là đa giác đều và các cạnh bên bằng nhau.

Tương tự như đối với hình chóp, khi đáy của hình chóp đều là tam giác đều, hình vuông, ngũ giác đều, … đôi khi ta cũng gọi rõ chúng tương ứng là chóp tam giác đều, tứ giác đều, ngũ giác đều, …

Một hình chóp là đều khi và chỉ khi đáy của nó là một hình đa giác đều và hình chiếu của đỉnh trên mặt phẳng đáy là tâm của mặt đáy.







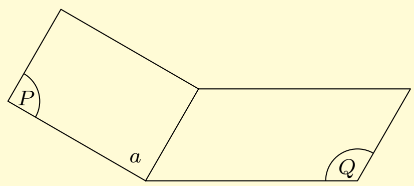
Cho hình chóp đều $S.A_1A_2\ldots A_n$. Một mặt phẳng không đi qua S và song song với mặt phẳng đáy, cắt các cạnh $SA_1, SA_2, \ldots SA_n$ tương ứng tại $B_1, B_2, \ldots, B_n$. Khi đó

- $S.B_1B_2\ldots B_n$ là một hình chóp đều.
- Gọi H là tâm của đa giác $A_1A_2\ldots A_n$ thì đường thẳng SH đi qua tâm K của đa giác đều $B_1B_2\ldots B_n$ và HK vuông góc với các mặt phẳng $(A_1A_2\ldots A_n)$, $(B_1B_2\ldots B_n)$.

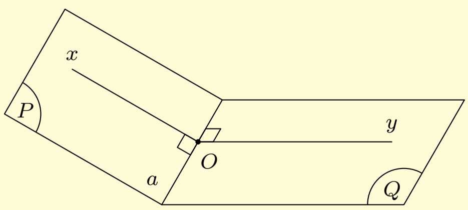
- Hình gồm các đa giác đều $A_1A_2\ldots A_n$, $B_1B_2\ldots B_n$ và các hình thang cân $A_1A_2B_2B_1$, $A_2A_3B_3B_2, \ldots, A_nA_1B_1B_n$ được tạo thành như trên được gọi là một *hình chóp cụt đều* (nói đơn giản là hình chóp cụt được tạo thành từ hình chóp đều $S.A_1A_2\ldots A_n$ sau khi cắt đi chóp đều $S.B_1B_2\ldots B_n$), kí hiệu là $A_1A_2\ldots A_n.B_1B_2\ldots B_n$.
- Các đa giác $A_1A_2\ldots A_n$ và $B_1B_2\ldots B_n$ được gọi là hai *mặt đáy*, các hình thang $A_1A_2B_2B_1$, $A_2A_3B_3B_2, \ldots, A_nA_1B_1B_n$ được gọi là các *mặt bên* của hình chóp cụt. Các đoạn thẳng A_1B_1, $A_2B_2, \ldots, A_nB_n$ được gọi là các *cạnh bên*; các cạnh của mặt đáy được gọi là các *cạnh đáy* của hình chóp cụt.
- Đoạn thẳng HK nối hai tâm của đáy được gọi là *đường cao* của hình chóp cụt đều. Độ dài của đường cao được gọi là *chiều cao* của hình chóp cụt.

6. Góc nhị diện

Hình gồm hai nửa mặt phẳng (P), (Q) có chung bờ a được gọi là một góc nhị diện, kí hiệu là $[P, a, Q]$. Đường thẳng a và các nửa mặt phẳng (P), (Q) tương ứng được gọi là các mặt phẳng của góc nhị diện đó.



Từ một điểm O bất kì thuộc cạnh a của góc nhị diện $[P, a, Q]$, vẽ các tia Ox, Oy tương ứng thuộc (P), (Q) và vuông góc với a. Góc xOy được gọi là một góc phẳng của góc nhị diện $[P, a, Q]$ (gọi tắt là góc phẳng nhị diện). Số đo của góc xOy không phụ thuộc vào vị trí của O trên a, được gọi là số đo của góc nhị diện $[P, a, Q]$.



- *Số đo của góc nhị diện có thể nhận từ 0° đến 180°. Góc nhị diện được gọi là vuông, nhọn, tù nếu nó có số đo tương ứng bằng, nhỏ hơn, lớn hơn 90°.*
- *Đối với hai điểm M, N không thuộc đường thẳng a, ta kí hiệu $[M, a, N]$ là góc nhị diện có cạnh a và các mặt phẳng tương ứng chứa M, N.*
- *Hai mặt phẳng cắt nhau tạo thành bốn góc nhị diện. Nếu một trong bốn góc nhị*

QUICK NOTE

QUICK NOTE

diện đó là góc nhị diện vuông thì các góc nhị diện còn lại cũng là góc nhị diện vuông.

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP

Dạng 1. Chứng minh hai mặt phẳng vuông góc

1. Ví dụ minh hoạ

VÍ DỤ 1. Cho tứ diện $OABC$ có $OA \perp OB$ và $OA \perp OC$. Chứng minh $(OAB) \perp (OBC)$, $(OAC) \perp (OBC)$.

VÍ DỤ 2. Cho hình chóp $S.ABC$ có SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng (ABC). Gọi M là trung điểm của AB. Chứng minh $SM \perp (ABC)$.

VÍ DỤ 3. Cho hình chóp $S.ABC$ có tam giác ABC vuông tại A, $SA \perp (ABC)$. Gọi H và K lần lượt là hình chiếu của B trên các đường thẳng SA và SC. Chứng minh rằng:

a) $(SAC) \perp (SAB)$.

b) $(SAC) \perp (BHK)$.

VÍ DỤ 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật và $SA \perp (ABCD)$. Gọi B', C', D' tương ứng là hình chiếu của A trên SB, SC, SD. Chứng minh rằng

a) $(SBC) \perp (SAB)$, $AB' \perp (SBC)$, $AD' \perp (SCD)$.

b) Các điểm A, B', C', D' cùng thuộc một mặt phẳng.

VÍ DỤ 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, $SA \perp (ABCD)$. Chứng minh rằng:

a) $(SAC) \perp (SBD)$.

b) $(SAB) \perp (SBC)$.

VÍ DỤ 6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, $SA \perp (ABCD)$. Gọi M và N lần lượt là hình chiếu của A lên SB và SD. Chứng minh rằng $(SAC) \perp (AMN)$.

VÍ DỤ 7. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O với $AB = a$, $AC = \dfrac{2a\sqrt{6}}{3}$, $SO \perp (ABCD)$, $SB = a$. Chứng minh rằng $(SAB) \perp (SAD)$.

2. Bài tập áp dụng

BÀI 1. Cho tứ diện $ABCD$ có AB, AC, AD đôi một vuông góc với nhau. Chứng minh rằng các mặt phẳng $(ABC), (BAD), (CAD)$ đôi một vuông góc với nhau.

BÀI 2. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, $SA = 2a$, $SA \perp (ABC)$. Gọi I là trung điểm của BC. Chứng minh rằng $(SAI) \perp (SBC)$.

BÀI 3. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$. Gọi H và K lần lượt là trực tâm các tam giác ABC và SBC. Chứng minh rằng $(SBC) \perp (CHK)$.

BÀI 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi và $SA = SB = SC$. Chứng minh rằng $(SBD) \perp (ABCD)$.

BÀI 5. Trong mặt phẳng (P) cho hình vuông $ABCD$. Gọi S là một điểm không thuộc (P) sao cho SAB là tam giác đều và $(SAB) \perp (ABCD)$. Chứng minh rằng $(SAD) \perp (SAB)$.

BÀI 6. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $AB = AC = a$, $AC = a\sqrt{2}$. Gọi M là trung điểm của AC. Chứng minh rằng $(BC'M) \perp (ACC'A')$.

BÀI 7. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a$, $AD = a\sqrt{2}$ và $SA \perp (ABCD)$. Gọi M là trung điểm AD. Chứng minh rằng $(SAC) \perp (SMB)$.

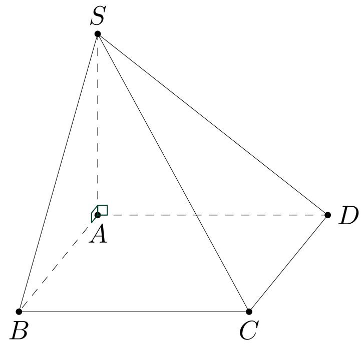
BÀI 8. Cho hình vuông $ABCD$ và tam giác đều SAB cạnh a nằm trong hai mặt phẳng vuông góc nhau. Gọi I và F lần lượt là trung điểm AB và AD. Chứng minh rằng $(SID) \perp (SFC)$.

BÀI 9.

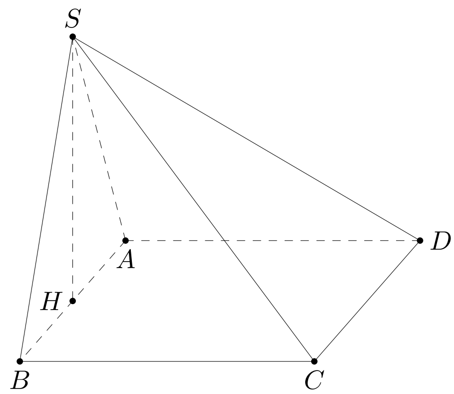
Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$, đáy $ABCD$ là hình chữ nhật (Hình bên). Chứng minh rằng:

a) $(SAB) \perp (ABCD)$;

b) $(SAB) \perp (SAD)$.



BÀI 10.
Cho hình chóp $S.ABCD$ có $(SAB) \perp (ABCD)$, đáy $ABCD$ là hình chữ nhật (Hình bên). Chứng minh rằng: $(SBC) \perp (SAB)$



Dạng 2. Tính góc giữa hai mặt phẳng

1. Ví dụ minh hoạ

VÍ DỤ 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính góc giữa hai mặt phẳng

a) (SAC) và (SAD).

b) (SAB) và (SAD).

VÍ DỤ 2. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh $a, SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{3}$. Tính số đo của góc giữa các mặt phẳng sau:

a) $((SBC),(ABC)) = ?$

b) $((SBD),(ABD)) = ?$

c) $((SAB),(SCD)) = ?$

VÍ DỤ 3. Cho tứ diện $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, $SA \perp (ABC)$ và $SA = \dfrac{3a}{2}$. Tính góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC).

2. Bài tập rèn luyện

BÀI 1. Cho tứ diện $S.ABC$ có $\widehat{ABC} = 90^\circ, AB = 2a; BC = a\sqrt{3}, SA \perp (ABC); SA = 2a$. Gọi M là trung điểm AB. Hãy tính:

a) $\left(\widehat{(SBC),(ABC)}\right)$.

b) Đường cao AH của $\triangle AMC$.

c) $\varphi = \left(\widehat{(SMC),(ABC)}\right)$.

BÀI 2. Trong mặt phẳng (P) cho một $\triangle ABC$ vuông cân, cạnh huyền $BC = a$. Trên nửa đường thẳng vuông góc với (P) tại A lấy điểm S.

a) Tính góc giữa hai mặt phẳng $((SAB),(CAB))$ và $((SAC),(BAC))$ và $((CSA),(BSA))$.

b) Tính SA để góc giữa hai mặt phẳng $((SBC),(ABC))$ có số đo 30°.

QUICK NOTE

QUICK NOTE

BÀI 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a, AD = a\sqrt{3}$, $SA \perp (ABCD)$.

a) Tính góc giữa hai mặt phẳng (SCD) và $(ABCD)$ với $SA = a$.

b) Tìm $x = SA$ để góc giữa hai mặt phẳng (SCD) và $(ABCD)$ bằng $60°$.

BÀI 4. Cho tam giác vuông ABC có cạnh huyền BC nằm trên mặt phẳng (P). Gọi α, β lần lượt là góc hợp bởi hai đường thẳng AB, AC và mặt phẳng (P). Gọi φ là hợp bởi (ABC) và (P). Chứng minh rằng $\sin^2\varphi = \sin^2\alpha + \sin^2\beta$.

Dạng 3. Một số bài toán khác về hình lăng trụ đặc biệt, hình chóp đều, chóp cụt đều

1. Ví dụ minh hoạ

VÍ DỤ 1. Cho hình lăng trụ đều $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh đáy $AB = a$ và cạnh bên $AA' = h$. Tính đường chéo $A'C$ theo a và h.

VÍ DỤ 2. Cho hình chóp cụt tứ giác đều $ABCD.A'B'C'D'$, đáy lớn $ABCD$ có cạnh bằng a, đáy nhỏ $A'B'C'D'$ có cạnh bằng b, chiều cao $OO' = h$ với O, O' lần lượt là tâm của hai đáy. Tính độ dài cạnh bên CC' của hình chóp cụt đó.

VÍ DỤ 3. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$. Chứng minh rằng $AA'C'C$ là một hình chữ nhật.

VÍ DỤ 4. Cho hình chóp đều $S.ABC$ có cạnh đáy $AB = a$ và cạnh bên $SA = b$. Tính độ dài đường cao SO theo a, b.

2. Bài tập áp dụng

BÀI 1. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Chứng minh rằng $A'BD$ là tam giác đều.

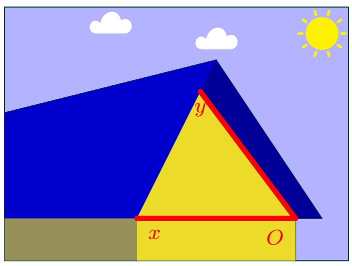
BÀI 2. Chứng minh rằng một hình chóp là đều khi và chỉ khi đáy của nó là một đa giác đều và các cạnh bên tạo với mặt phẳng đáy các góc bằng nhau.

BÀI 3. Cho hình chóp cụt đều $ABC.A'B'C'$ có chiều cao bằng h, các đáy là các tam giác đều ABC, $A'B'C'$ có cạnh tương ứng là a, a' $(a > a')$. Tính độ dài các cạnh bên của hình chóp cụt.

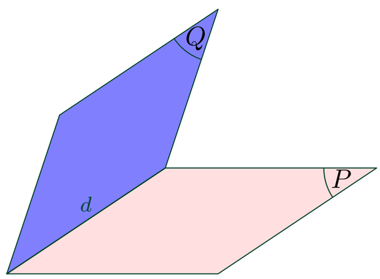
Dạng 4. Tính góc giữa hai mặt phẳng, góc nhị diện

1. Ví dụ minh hoạ

VÍ DỤ 1. Trong các công trình xây dựng nhà ở, độ dốc mái được hiểu là độ nghiêng của mái khi hoàn thiện so với mặt phẳng nằm ngang. Khi thi công, mái nhà cần một độ nghiêng nhất định để đảm bảo thoát nước tốt tránh gây ra tình trạng đọng nước hay thấm dột. Quan sát hình dưới và cho biết góc nhị diện nào phản ánh độ dốc của mái.



a)



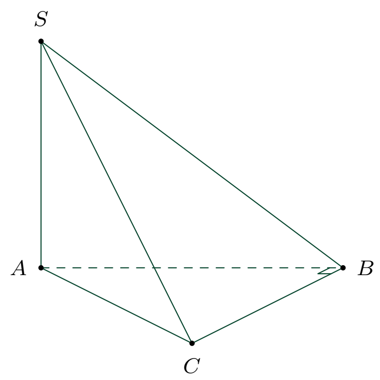
b)

VÍ DỤ 2.

Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, $AB = a$, $SA \perp (ABC)$, $SA = a\sqrt{3}$ (Hình bên). Tính số đo theo đơn vị độ của mỗi góc nhị diện sau:

a) $[B, SA, C]$;

b) $[A, BC, S]$.



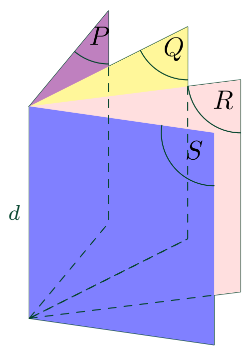
VÍ DỤ 3. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$. Gọi H là hình chiếu của A trên BC.

a) Chứng minh rằng $(ASB) \perp (ABC)$ và $(SAH) \perp (SBC)$.

b) Giả sử tam giác ABC vuông tại A, $\widehat{ABC} = 30^\circ$, $AC = a$, $SA = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Tính số đo của góc nhị diện $[S, BC, A]$.

2. Bài tập rèn luyện

BÀI 1.
Trong không gian cho bốn nửa mặt phẳng (P), (Q), (R), (S) cắt nhau theo giao tuyến d (Hình bên). Hãy chỉ ra ba góc nhị diện có cạnh của góc nhị diện là đường thẳng d.



BÀI 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$, đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a và $AC = a$.

a) Tính số đo của góc nhị diện $[B, SA, C]$.

b) Tính số đo của góc nhị diện $[B, SA, D]$.

c) Biết $SA = a$, tính số đo của góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$.

BÀI 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$, đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh bằng a, $AC = a$, $SA = \dfrac{1}{2}a$. Gọi O là giao điểm của hai đường chéo hình thoi $ABCD$ và H là hình chiếu của O trên SC.

a) Tính số đo của các góc nhị diện $[B, SA, D]$; $[S, BD, A]$; $[S, BD, C]$.

b) Chứng minh rằng $\widehat{BHD}$ là một góc phẳng của góc nhị diện $[B, SC, D]$.

BÀI 4. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a.

a) Tính độ dài đường chéo của hình lập phương.

b) Chứng minh rằng $(ACC'A') \perp (BDD'B')$.

c) Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$. Chứng minh rằng $\widehat{COC'}$ là một góc phẳng của góc nhị diện $[C, BD, C']$. Tính (gần đúng) số đo của các góc nhị diện $[C, BD, C]$, $[A, BD, C']$.

QUICK NOTE

C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

CÂU 1. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

(A) Nếu hình hộp có bốn đường chéo bằng nhau thì nó là hình lập phương.
(B) Nếu hình hộp có sau mặt bằng nhau thì nó là hình lập phương.
(C) Nếu hình hộp có hai mặt là hình vuông thì nó là hình lập phương.
(D) Nếu hình hộp có ba mặt chung một đỉnh là hình vuông thì nó là hình lập phương.

CÂU 2. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sau đây là đúng?

(A) Hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì mọi đường thẳng nằm trong mặt phẳng này và vuông góc với giao tuyến của hai mặt phẳng sẽ vuông góc với mặt phẳng kia.
(B) Hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì mọi đường thẳng nằm trong mặt phẳng này sẽ vuông góc với mặt phẳng kia.
(C) Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì vuông góc với nhau.
(D) Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.

CÂU 3. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

(A) Qua một đường thẳng có duy nhất một mặt phẳng vuông góc với một đường thẳng cho trước.
(B) Qua một điểm có duy nhất một mặt phẳng vuông góc với một mặt phẳng cho trước.
(C) Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.
(D) Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.

CÂU 4. Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) song song với nhau và một điểm M không thuộc (P) và (Q). Qua M có bao nhiêu mặt phẳng vuông góc với (P) và (Q)?

(A) 1. (B) 2. (C) Vô số. (D) 3.

CÂU 5. Cho tam giác đều ABC cạnh a. Gọi D là điểm đối xứng với A qua BC. Trên đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (ABC) tại D lấy điểm S sao cho $SD = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$. Gọi I là trung điểm BC, kẻ IH vuông góc $SA\,(H \in SA)$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

(A) $(SDB) \perp (SDC)$. (B) $(SAB) \perp (SAC)$.
(C) $BH \perp HC$. (D) $SA \perp BH$.

CÂU 6. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $\widehat{ABC} = 60^\circ$, tam giác SBC là tam giác đều có bằng cạnh $2a$ và nằm trong mặt phẳng vuông với đáy. Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (ABC). Mệnh đề nào sau đây đúng?

(A) $\tan\varphi = \dfrac{\sqrt{3}}{6}$. (B) $\tan\varphi = \dfrac{1}{2}$. (C) $\varphi = 60^\circ$. (D) $\tan\varphi = 2\sqrt{3}$.

CÂU 7. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại C. Gọi H là trung điểm AB. Biết rằng SH vuông góc với mặt phẳng (ABC) và $AB = SH = a$. Tính cosin của góc α tọa bởi hai mặt phẳng (SAB) và (SAC).

(A) $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{3}$. (B) $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$. (C) $\cos\alpha = \dfrac{2}{3}$. (D) $\cos\alpha = \dfrac{1}{3}$.

CÂU 8. Trong không gian cho tam giác đều SAB và hình vuông $ABCD$ cạnh a nằm trên hai mặt phẳng vuông góc. Gọi H, K lần lượt là trung điểm của AB, CD. Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SCD). Mệnh đề nào sau đây đúng?

(A) $\tan\varphi = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$. (B) $\tan\varphi = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$. (C) $\tan\varphi = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. (D) $\tan\varphi = \dfrac{\sqrt{2}}{3}$.

CÂU 9. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, cạnh bên SA vuông góc với đáy. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và AC. Góc giữa hai mặt phẳng (SEF) và (SBC) là

(A) $\widehat{BSE}$. (B) $\widehat{CSF}$. (C) $\widehat{BSF}$. (D) $\widehat{CSE}$.

CÂU 10. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại C, mặt bên SAC là tam giác đều và mằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi I là trung điểm của SC. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

(A) $AI \perp SC$. (B) $(ABI) \perp (SBC)$.
(C) $(SBC) \perp (SAC)$. (D) $AI \perp BC$.

QUICK NOTE

CÂU 11. Cho hình chóp đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a, góc giữa mặt bên và mặt đáy bằng $60°$. Tính độ dài đường cao SH của khối chóp.

(A) $SH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. (B) $SH = \dfrac{a\sqrt{2}}{3}$. (C) $SH = \dfrac{a}{2}$. (D) $SH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

CÂU 12. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm I, cạnh a, góc $\widehat{BAD} = 60°$,

$SA = SB = SD = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và $(ABCD)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

(A) $\tan\varphi = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$. (B) $\tan\varphi = \sqrt{5}$. (C) $\varphi = 45°$. (D) $\tan\varphi = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

CÂU 13. Cho tứ diện $SABC$ có SBC và ABC nằm trong hai mặt phẳng vuông góc với nhau. Tam giác SBC đều, tam giác ABC vuông tại A. Gọi H, I lần lượt là trung điểm của BC và AB. Khẳng định nào sau đây **sai**?

(A) $HI \perp AB$. (B) $(SHI) \perp (SAB)$.
(C) $SH \perp AB$. (D) $(SAB) \perp (SAC)$.

CÂU 14. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng a. Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và (SCD). Mệnh đề nào sau đây đúng?

(A) $\tan\varphi = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. (B) $\tan\varphi = \sqrt{2}$. (C) $\tan\varphi = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. (D) $\tan\varphi = \sqrt{6}$.

CÂU 15. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, SA vuông góc với đáy. Gọi M là trung điểm AC. Khẳng định nào sau đây **sai**?

(A) $BM \perp AC$. (B) $(SAB) \perp (SAC)$.
(C) $(SAB) \perp (SBC)$. (D) $(SBM) \perp (SAC)$.

CÂU 16. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O, cạnh a. Đường thẳng SO vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$ và $SO = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Tính góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$.

(A) $30°$. (B) $60°$. (C) $90°$. (D) $45°$.

CÂU 17. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Cạnh bên $SA = a\sqrt{3}$ và vuông góc với mặt đáy (ABC). Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC). Mệnh đề nào sau đây đúng?

(A) $\varphi = 60°$. (B) $\sin\varphi = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$. (C) $\sin\varphi = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$. (D) $\varphi = 30°$.

CÂU 18. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Cạnh bên $SA = x$ và vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Xác định x để hai mặt phẳng (SBC) và (SCD) tạo với nhau một góc $60°$.

(A) $x = \dfrac{3a}{2}$. (B) $x = a$. (C) $x = 2a$. (D) $x = \dfrac{a}{2}$.

CÂU 19. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông $ABCD$ vuông tại A và D, $AB = 2a$, $AD = CD = a$. Cạnh bên $SA = a$ và vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

(A) $\tan\varphi = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. (B) $\varphi = 30°$. (C) $\varphi = 45°$. (D) $\varphi = 60°$.

CÂU 20. Cho hai tam giác ACD và BCD nằm trên hai mặt phẳng vuông góc với nhau và $AC = AD = BC = BD = a, CD = 2x$. Với giá trị nào của x thì hai mặt phẳng (ABC) và (ABD) vuông góc.

(A) $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. (B) $\dfrac{a}{2}$. (C) $\dfrac{a}{3}$. (D) $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

CÂU 21. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng a. Gọi M là trung điểm SC. Tính góc φ giữa hai mặt phẳng (MBD) và $(ABCD)$.

(A) $\varphi = 45°$. (B) $\varphi = 90°$. (C) $\varphi = 30°$. (D) $\varphi = 60°$.

CÂU 22. Cho hình lăng trụ tứ giác đều $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy cạnh bằng a, góc giữa hai mặt phẳng $(ABCD)$ và (ABC') có số đo bằng $60°$. Độ dài cạnh bên của hình lăng trụ bằng

(A) $2a$. (B) $a\sqrt{2}$. (C) $3a$. (D) $a\sqrt{3}$.

QUICK NOTE

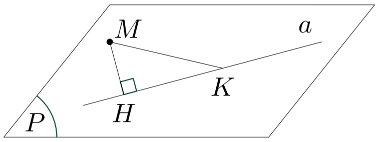
CÂU 23. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật tâm O với $AB = a$, $AD = 2a$. Cạnh bên $SA = a$ và vuông góc với đáy. Gọi (α) là mặt phẳng qua SO và vuông góc với (SAD). Tính diện tích S của thiết diện tạo bởi (α) và hình chóp đã cho.

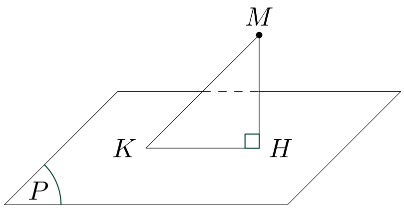
Ⓐ $S = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$. Ⓑ $S = a^2$. Ⓒ $S = \dfrac{a^2\sqrt{2}}{2}$. Ⓓ $S = \dfrac{a^2}{2}$.

Bài 25. KHOẢNG CÁCH TRONG KHÔNG GIAN

A. TRỌNG TÂM KIẾN THỨC

1. Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng, đến một mặt phẳng





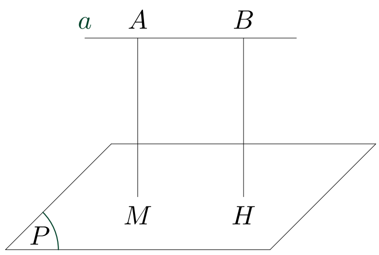
- Khoảng cách từ một điểm M đến một đường thẳng a, kí hiệu $\mathrm{d}(M, a)$, là khoảng cách giữa M và hình chiếu H của M trên a.
- Khoảng cách từ một điểm M đến một mặt phẳng (P), kí hiệu $\mathrm{d}(M, (P))$, là khoảng cách giữa M và hình chiếu H của M trên (P).

$\mathrm{d}(M, a) = 0$ khi và chỉ khi $M \in a$; $\mathrm{d}(M, (P)) = 0$ khi và chỉ khi $M \in (P)$.

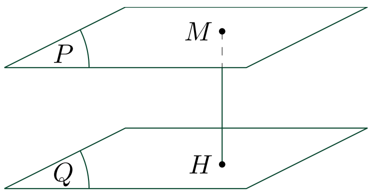
NHẬN XÉT. Khoảng cách từ M đến đường thẳng a (mặt phẳng (P)) là khoảng cách nhỏ nhất giữa M và một điểm thuộc a (thuộc (P)).

Khoảng cách từ đỉnh đến mặt phẳng chứa mặt đáy của một hình chóp được gọi là chiều cao của hình chóp đó.

2. Khoảng cách giữa các đường thẳng và mặt phẳng song song, giữa hai mặt phẳng song song



Khoảng cách giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) song song với a, kí hiệu $\mathrm{d}(a, (P))$, là khoảng cách từ một điểm bất kì trên a đến (P).

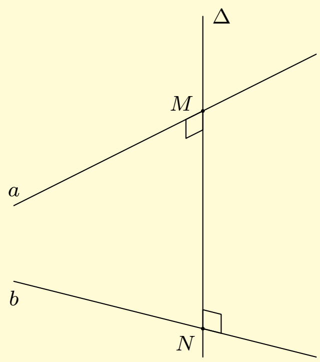


- Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song (P) và (Q), kí hiệu $\mathrm{d}((P), (Q))$, là khoảng cách từ một điểm bất kì thuộc mặt phẳng này đến mặt phẳng kia.
- Khoảng cách giữa hai đường thẳng song song m và n, kí hiệu $\mathrm{d}(m, n)$, là khoảng cách từ một điểm thuộc đường thẳng này đến đường thẳng kia.

Khoảng cách giữa hai đáy của một hình lăng trụ được gọi là chiều cao của hình lăng trụ đó.

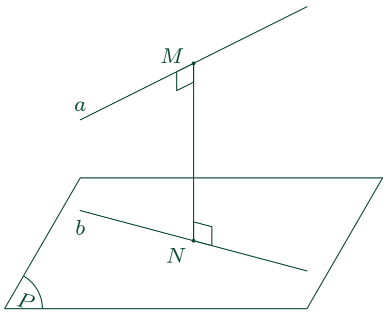
3. Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau

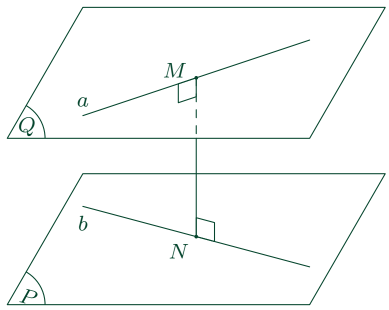
Đường thẳng Δ cắt hai đường thẳng chớ nhau a, b và vuông góc với cả hai đường thẳng đó được gọi là đường vuông góc chung của a và b.
Nếu đường vuông góc chung Δ cắt a, b tương ứng tại M, N thì độ dài đoạn MN được gọi là khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau a, b.



Nhận xét

- Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau bằng khoảng cách giữa một trong hai đường thẳng đó đến mặt phẳng song song với nó và chứa đường thẳng còn lại.
- Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau bằng khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song tương ứng chứa hai đường thẳng đó.



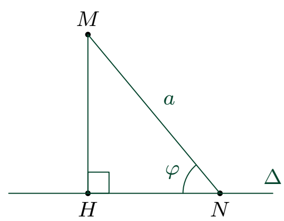


B. CÁC DẠNG BÀI TẬP

Dạng 1. Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng, đến một mặt phẳng

1. Ví dụ minh hoạ

VÍ DỤ 1.
Cho đoạn thẳng MN có độ dài a và đường thẳng Δ đi qua N thoả mãn góc giữa hai đường thẳng MN và Δ là φ $(0^\circ < \varphi < 90^\circ)$. Tính khoảng cách từ M đến Δ theo a, φ.



VÍ DỤ 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, tâm O, $SA = a$ và vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi I, M theo thứ tự là trung điểm của SC, AB.

a) Chứng minh $OI \perp (ABCD)$.

b) Tính khoảng cách từ I đến CM, từ đó suy ra khoảng cách từ S tới CM.

VÍ DỤ 3.

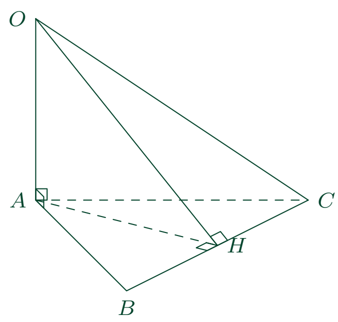
QUICK NOTE

QUICK NOTE

Cho hình chóp $O.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a và $OA \perp (ABC)$. Cho biết $OA = a$.

a) Tính khoảng cách từ điểm O đến (ABC).

b) Tính khoảng cách từ điểm O đến đường thẳng BC.



VÍ DỤ 4. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = a\sqrt{3}$, $SA \perp (ABC)$, tam giác ABC vuông tại B và $AB = a$. Tính khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC).

VÍ DỤ 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với $(ABCD)$, tứ giác $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Gọi H là trung điểm của AB. Tính khoảng cách từ điểm H đến mặt phẳng (SCD).

VÍ DỤ 6. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $AB = 1, AC = \sqrt{3}$. Tam giác SBC đều và nằm trong mặt phẳng vuông với đáy. Tính khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SAC).

VÍ DỤ 7. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh bên là $2a$ và diện tích đáy là $4a^2$. Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC).

VÍ DỤ 8. Cho hình chóp $S.ABC$ có cạnh $SA = SB = SC = a$ và SA, SB, SC đôi một vuông góc với nhau. Tính theo a khoảng cách h từ điểm S đến mặt phẳng (ABC).

VÍ DỤ 9. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng 1. Tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy $(ABCD)$. Tính khoảng cách từ A đến (SCD).

2. Bài tập áp dụng

BÀI 1. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Chứng minh rằng khoảng cách từ điểm B, C, D, A', B', D' đến đường chéo AC' đều bằng nhau. Tính khoảng cách đó.

BÀI 2. Cho hình chóp đều $S.ABC$. Biết độ dài cạnh đáy, cạnh bên tương ứng bằng a, b $(a < b\sqrt{3})$. Tính chiều cao của hình chóp.

BÀI 3. Cho tứ diện $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh $a\sqrt{3}$. Cạnh $SA = 2a$ là vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính khoảng cách d từ điểm A đến mặt phẳng (SBC).

BÀI 4. Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ có $AB = BC = 2a$ và $\widehat{ABC} = 120°$. Cạnh $SA = 3a$ và vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính khoảng cách d cách từ A đến mặt phẳng (SBC).

BÀI 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật có $AB = a\sqrt{2}$. Cạnh bên $SA = 2a$ và vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$. Tính khoảng cách từ D đến mặt phẳng (SBC).

BÀI 6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a; SA vuông góc với đáy; SB hợp với đáy góc $45°$. Tính khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng (SBD).

BÀI 7. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là một tam giác đều cạnh a, cạnh SA vuông góc với (ABC) và $SA = h$, góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) bằng $60°$. Tính khoảng cách từ A đến (SBC) theo a và h.

BÀI 8. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các mặt đều là hình thoi cạnh a, các góc $\widehat{BAA'} = \widehat{BAD} = \widehat{DAA'} = 60°$. Tính khoảng cách từ A' đến $(ABCD)$.

Dạng 2. Khoảng cách giữa đường thẳng và mặt phẳng song song, giữa hai mặt phẳng song song

1. Ví dụ minh hoạ

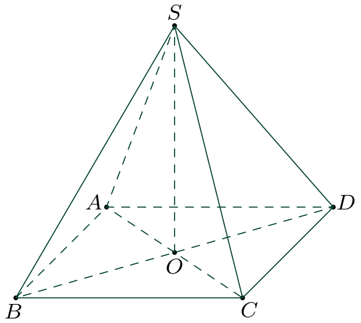
VÍ DỤ 1. Cho một hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$, đáy là các hình thoi có cạnh bằng a, $\widehat{BAD} = 120°$, $AA' = h$. Tính các khoảng cách giữa $A'C'$ và $(ABCD)$, AA' và $(BDD'B')$.

QUICK NOTE

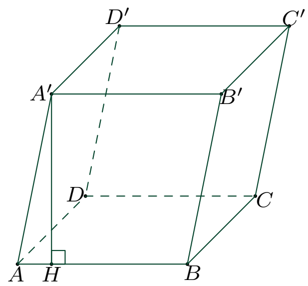
VÍ DỤ 2.
Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, O là giao điểm của AC và BD, $SO \perp (ABCD)$, $SO = a$. Tính

a) Khoảng cách từ điểm S đến mặt phẳng $(ABCD)$;

b) Khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (SAC).



VÍ DỤ 3.
Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $AA' = a$, góc giữa hai đường thẳng AB và DD' bằng $60°$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và $A'B'$.



VÍ DỤ 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA = a\sqrt{6}$ và vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, đáy $(ABCD)$ là nửa lục giác đều nội tiếp trong đường tròn đường kính $AD = 2a$.

a) Tính khoảng cách từ A, B đến mặt phẳng (SCD).

b) Tính khoảng cách từ đường thẳng AD đến mặt phẳng (SBC).

c) Tính diện tích thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ với mặt phẳng (α) song song với mặt phẳng (SAD) và cách (SAD) một khoảng bằng $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

VÍ DỤ 5. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có các cạnh đều bằng a và $\widehat{BAD} = \widehat{BAA'} = \widehat{DAA'} = 60°$. Tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng đáy $(ABCD)$ và $A'B'C'D'$.

VÍ DỤ 6. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng a, mặt bên (SBC) vuông góc với đáy. Gọi M, N, P theo thứ tự là trung điểm AB, SA, AC. Tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng (MNP) và (SBC).

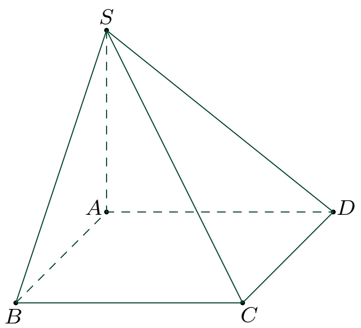
2. Bài tập áp dụng

BÀI 1. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Tính theo a:

a) Khoảng cách giữa đường thẳng DD' và $(AA'C'C)$.

b) Khoảng cách giữa hai mặt phẳng $(AA'D'D)$ và $(BB'C'C)$.

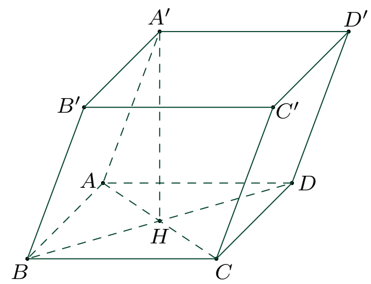
BÀI 2.
Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, $SA \perp (ABCD)$. Chứng minh $CD \parallel (SAB)$ và tính khoảng cách giữa CD và mặt phẳng (SAB).



BÀI 3.

QUICK NOTE

Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các cạnh bằng a và đáy là hình vuông. Hình chiếu của A' trên mặt phẳng $(ABCD)$ là giao điểm H của AC và BD. Tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng $(ABCD)$ và $(A'B'C'D')$.



BÀI 4. Hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a và cạnh bên bằng $a\sqrt{2}$.

a) Tính khoảng cách từ S tới $(ABCD)$.

b) Tính khoảng cách giữa đường thẳng AB và mặt (SCD).

BÀI 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, $SA \perp (ABCD)$ và $SA = 2a$.

a) Tính khoảng cách từ A tới (SBC) và khoảng cách từ C tới (SBD).

b) M, N lần lượt là trung điểm của AB và AD. Tính khoảng cách từ MN tới (SBD).

c) Mặt phẳng (P) qua BC cắt SA, SD theo thứ tự tại E, F. Cho biết AD cách (P) một khoảng là $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$, tính khoảng cách từ S tới (P) và diện tích tứ giác $BCFE$.

BÀI 6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA = 2a$ và vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B, $AB = BC = a, AD = 2a$.

a) Tính khoảng cách từ A, B tới mặt phẳng (SCD).

b) Tính khoảng cách giữa đường thẳng AD và mặt phẳng (SBC).

c) Tính diện tích của thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ với mặt phẳng song song với (SAD) và cách một khoảng bằng $\dfrac{a}{3}$.

Dạng 3. Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau

VÍ DỤ 1. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, $AB = a$, $\widehat{ABC} = 60^\circ$.
Xác định đường vuông góc chung và tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC.

VÍ DỤ 2. **Luyện tập 3.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, $SA \perp (ABCD)$, $SA = a\sqrt{2}$.

a) Tính khoảng cách từ A đến SC.

b) Chứng minh rằng $BD \perp (SAC)$.

c) Xác định đường vuông góc chung và tính khoảng cách giữa BD và SC.

VÍ DỤ 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ cạnh a, có cạnh $SA = h$ và vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Dựng và tính độ dài đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau:

a) SB và CD. b) SC và BD. c) SC và AB.

VÍ DỤ 4. Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC vuông góc với nhau đôi một và $OA = OB = OC = a$. Gọi I là trung điểm của BC. Hãy dựng và tính độ dài đoạn vuông góc chung của các cặp đường thẳng chéo nhau:

a) OA và BC. b) AI và OC.

VÍ DỤ 5. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A với $AB = a$, $AC = 2a$; cạnh bên $AA' = 2a$. Hãy dựng và tính độ dài đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng BC' và AA'.

VÍ DỤ 6. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a. $SA = 2a$ và vuông góc với mặt đáy. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và AC.

VÍ DỤ 7. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh bằng a, SA vuông góc với đáy và $SA = a$. M là trung điểm của SB. Tính khoảng cách giữa các đường thẳng:

a) SC và BD.　　b) AC và SD.　　c) SD và AM.

1. Bài tập áp dụng

VÍ DỤ 8. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ cạnh a, cạnh $SA = a$ và vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng:

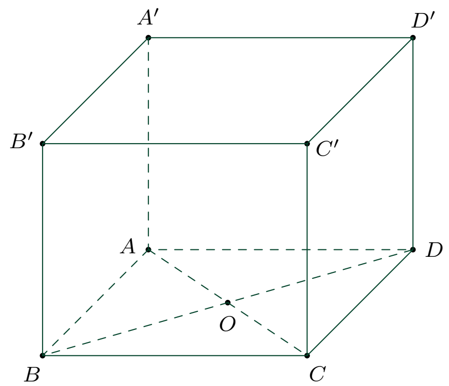
a) SB và CD.

b) AB và SC.

VÍ DỤ 9.
Cho lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$, O là giao điểm của AC và BD, $AA' = a$, AA' vuông góc với mặt phẳng chứa đáy. Tính

a) $\mathrm{d}\left(AC, A'B'\right)$;

b) $\mathrm{d}\left(CC', BD\right)$.



VÍ DỤ 10. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh bằng a; SA vuông góc với đáy và $SA = a$; M, N lần lượt là trung điểm của AB và SC. Chứng minh rằng MN là đoạn vuông góc chung của AB và SC. Tính khoảng cách giữa AB và SC.

VÍ DỤ 11. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Xác định đường vuông góc chung của hai đường thẳng BD và $B'C$.

VÍ DỤ 12. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O cạnh a, SO vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$ và $SO = a$. Tính Khoảng cách giữa hai đường thẳng SC và AB.

VÍ DỤ 13. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy, mặt bên SBC tạo với đáy một góc $60°$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng:

a) SA và BC.　　b) SB và AC.

VÍ DỤ 14. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng BC' và CD'.

C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

CÂU 1. Cho hình chóp $S.ACBD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B. Cạnh bên SA vuông góc với đáy, $SA = AB = BC = 1$, $AD = 2$. Tính khoảng cách d từ điểm A đến mặt phẳng (SBD).

A $d = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.　**B** $d = 1$.　**C** $d = \dfrac{2a}{3}$.　**D** $d = \dfrac{2}{3}$.

CÂU 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D với $AB = 2a$, $AD = DC = a$. Hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với đáy. Góc giữa SC và mặt đáy bằng $60°$. Tính khoảng cách d giữa hai đường thẳng AC và SB.

A $d = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.　**B** $d = a\sqrt{2}$.　**C** $d = \dfrac{2a\sqrt{15}}{5}$.　**D** $d = 2a$.

CÂU 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, tam giác SAD đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính khoảng cách d giữa hai đường thẳng SA và BD.

A $d = \dfrac{a\sqrt{21}}{7}$.　**B** $d = a$.　**C** $d = \dfrac{a\sqrt{21}}{14}$.　**D** $d = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

CÂU 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B với $AB = BC = a, AD = 2a$. Cạnh bên $SA = a$ và vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Tính khoảng cách d từ điểm A đến mặt phẳng (SCD).

A $d = \dfrac{2a}{\sqrt{5}}$.　**B** $d = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.　**C** $d = a\sqrt{2}$.　**D** $d = 2a$.

QUICK NOTE

QUICK NOTE

CÂU 5. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a và cạnh bên bằng $\dfrac{a\sqrt{21}}{6}$. Tính khoảng cách d từ đỉnh A đến mặt phẳng (SBC).

(A) $d=\dfrac{a}{4}$. (B) $d=\dfrac{3}{4}$. (C) $d=\dfrac{3a}{4}$. (D) $d=\dfrac{a\sqrt{3}}{6}$.

CÂU 6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O, cạnh a. Cạnh bên $SA=\dfrac{a\sqrt{15}}{2}$ và vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$. Tính khoảng cách d từ O đến mặt phẳng (SBC).

(A) $d=\dfrac{\sqrt{285}}{38}$. (B) $d=\dfrac{a\sqrt{285}}{38}$. (C) $d=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. (D) $d=\dfrac{a\sqrt{285}}{19}$.

CÂU 7. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $AB=3a$, $BC=4a$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy. Góc tạo bởi giữa SC và đáy bằng 60°. Gọi M là trung điểm của AC, tính khoảng cách d giữa hai đường thẳng AB và SM.

(A) $d=\dfrac{5a}{2}$. (B) $d=\dfrac{10a\sqrt{3}}{\sqrt{79}}$. (C) $d=a\sqrt{3}$. (D) $d=5a\sqrt{3}$.

CÂU 8. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng 1, cạnh bên hợp với mặt đáy một góc 60°. Tính khoảng cách d từ O đến mặt phẳng (SBC).

(A) $d=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. (B) $d=\dfrac{1}{2}$. (C) $d=\dfrac{\sqrt{7}}{2}$. (D) $d=\dfrac{\sqrt{42}}{14}$.

CÂU 9. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O, cạnh a. Cạnh bên SA vuông góc với đáy, góc $\widehat{SBD}=60^\circ$. Tính khoảng cách d giữa hai đường thẳng AB và SO.

(A) $d=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. (B) $d=\dfrac{a\sqrt{6}}{4}$. (C) $d=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. (D) $d=\dfrac{a\sqrt{5}}{5}$.

CÂU 10. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh có độ dài bằng $2a$. Hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trung điểm H của BC. Tính khoảng cách d giữa hai đường thẳng BB' và $A'H$.

(A) $d=a$. (B) $d=2a$. (C) $d=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. (D) $d=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

CÂU 11. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật có $AB=a\sqrt{2}$. Cạnh bên $SA=2a$ và vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$. Tính khoảng cách d từ D đến mặt phẳng (SBC).

(A) $d=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. (B) $d=\dfrac{a\sqrt{10}}{2}$. (C) $d=\dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$. (D) $d=a\sqrt{2}$.

CÂU 12. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, các cạnh bên của hình chóp bằng nhau và bằng $2a$. Tính khoảng cách d từ A đến mặt phẳng (SCD).

(A) $d=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. (B) $d=\dfrac{a}{2}$. (C) $d=\dfrac{2a\sqrt{7}}{\sqrt{30}}$. (D) $d=\dfrac{a\sqrt{7}}{\sqrt{30}}$.

CÂU 13. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng 1. Tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy $(ABCD)$. Tính khoảng cách d từ A đến (SCD).

(A) $d=1$. (B) $d=\dfrac{\sqrt{21}}{7}$. (C) $d=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$. (D) $d=\sqrt{2}$.

CÂU 14. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a. Tam giác ABC đều, hình chiếu vuông góc H của đỉnh S trên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với trọng tâm của tam giác ABC. Đường thẳng SD hợp với mặt phẳng $(ABCD)$ góc 30°. Tính khoảng cách d từ B đến mặt phẳng (SCD) theo a.

(A) $d=a$. (B) $d=\dfrac{2a\sqrt{21}}{21}$. (C) $d=a\sqrt{3}$. (D) $d=\dfrac{a\sqrt{21}}{7}$.

CÂU 15. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB=a, AD=2a$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy, góc giữa SD với đáy bằng 60°. Tính khoảng cách d từ điểm C đến mặt phẳng (SBD) theo a.

(A) $d=\dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$. (B) $d=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. (C) $d=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. (D) $d=\dfrac{a\sqrt{5}}{2}$.

CÂU 16. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, tâm O. Cạnh bên $SA=2a$ và vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$. Gọi H và K lần lượt là trung điểm của cạnh BC và CD. Tính khoảng cách d giữa hai đường thẳng HK và SD.

Ⓐ $d=2a$. Ⓑ $d=\frac{a}{2}$. Ⓒ $d=\frac{2a}{3}$. Ⓓ $d=\frac{a}{3}$.

CÂU 17. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B, $AD = 2BC$,
$AB = BC = a\sqrt{3}$. Đường thẳng SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi E là trung điểm của cạnh SC. Tính khoảng cách d từ điểm E đến mặt phẳng (SAD).

Ⓐ $d=\sqrt{3}$. Ⓑ $d=\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Ⓒ $d=a\sqrt{3}$. Ⓓ $d=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

CÂU 18. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Cạnh bên $SA = a\sqrt{3}$ và vuông góc với mặt đáy (ABC). Tính khoảng cách d từ A đến mặt phẳng (SBC).

Ⓐ $d=\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Ⓑ $d=a$. Ⓒ $d=\frac{a\sqrt{15}}{5}$. Ⓓ $d=\frac{a\sqrt{5}}{5}$.

CÂU 19. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng 1. Tính khoảng cách d từ điểm A đến mặt phẳng (BDA').

Ⓐ $d=\frac{\sqrt{6}}{4}$. Ⓑ $d=\frac{\sqrt{2}}{2}$. Ⓒ $d=\sqrt{3}$. Ⓓ $d=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

CÂU 20. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O, cạnh bằng $4a$. Cạnh bên $SA = 2a$. Hình chiếu vuông góc của đỉnh S trên mặt phẳng $(ABCD)$ là trung điểm của H của đoạn thẳng AO. Tính khoảng cách d giữa các đường thẳng SD và AB.

Ⓐ $d=\frac{4a\sqrt{22}}{11}$. Ⓑ $d=2a$. Ⓒ $d=4a$. Ⓓ $d=\frac{3a\sqrt{2}}{\sqrt{11}}$.

CÂU 21. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AD = 2AB = 2a$. Cạnh bên $SA = 2a$ và vuông góc với đáy. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SB và SD. Tính khoảng cách d từ S đến mặt phẳng (AMN).

Ⓐ $d=a\sqrt{5}$. Ⓑ $d=2a$. Ⓒ $d=\frac{a\sqrt{6}}{3}$. Ⓓ $d=\frac{3a}{2}$.

CÂU 22. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AC = 2a, BC = a$. Đỉnh S cách đều các điểm A, B, C. Tính khoảng cách d từ trung điểm M của SC đến mặt phẳng (SBD).

Ⓐ $d=a$. Ⓑ $d=\frac{a\sqrt{3}}{4}$. Ⓒ $d=a\sqrt{5}$. Ⓓ $d=\frac{a\sqrt{5}}{2}$.

CÂU 23. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a. Cạnh bên SA vuông góc với đáy, SB hợp với mặt đáy một góc $60°$. Tính khoảng cách d từ điểm D đến mặt phẳng (SBC).

Ⓐ $d=\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Ⓑ $d=a$. Ⓒ $d=a\sqrt{3}$. Ⓓ $d=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

CÂU 24. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O, cạnh bằng 2. Đường thẳng SO vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$ và $SO = \sqrt{3}$. Tính khoảng cách d giữa hai đường thẳng SA và BD.

Ⓐ $d=\sqrt{2}$. Ⓑ $d=2$. Ⓒ $d=\frac{\sqrt{30}}{5}$. Ⓓ $d=2\sqrt{2}$.

CÂU 25. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $AB = a, AC = a\sqrt{3}$. Tam giác SBC đều và nằm trong mặt phẳng vuông với đáy. Tính khoảng cách d từ B đến mặt phẳng (SAC).

Ⓐ $d=\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Ⓑ $d=\frac{a\sqrt{39}}{13}$. Ⓒ $d=a$. Ⓓ $d=\frac{2a\sqrt{39}}{13}$.

CÂU 26. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $a\sqrt{2}$, $AA' = 2a$. Tính khoảng cách d giữa hai đường thẳng BD và CD'.

Ⓐ $d=a\sqrt{2}$. Ⓑ $d=\frac{a\sqrt{5}}{5}$. Ⓒ $d=\frac{2a\sqrt{5}}{5}$. Ⓓ $d=2a$.

CÂU 27. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng 10. Cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SC = 10\sqrt{5}$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA và CD. Tính khoảng cách d giữa BD và MN.

Ⓐ $d=\sqrt{5}$. Ⓑ $d=10$. Ⓒ $d=3\sqrt{5}$. Ⓓ $d=5$.

CÂU 28. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, SA vuông góc với mặt phẳng (ABC); góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (ABC) bằng $60°$. Gọi M là trung điểm của cạnh AB. Tính khoảng cách d từ B đến mặt phẳng (SMC).

QUICK NOTE

QUICK NOTE

(A) $d = a\sqrt{3}$. (B) $d = \dfrac{a}{2}$. (C) $d = a$. (D) $d = \dfrac{a\sqrt{39}}{13}$.

CÂU 29. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông với $AC = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy, SB hợp với đáy góc 60°. Tính khoảng cách d giữa hai đường thẳng AD và SC.

(A) $d = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$. (B) $d = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. (C) $d = \dfrac{a}{2}$. (D) $d = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

CÂU 30. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O cạnh a. Cạnh bên $SA = a\sqrt{2}$ và vuông góc với đáy $(ABCD)$. Tính khoảng cách d từ điểm B đến mặt phẳng (SCD).

(A) $d = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. (B) $d = a\sqrt{3}$. (C) $d = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. (D) $d = a$.

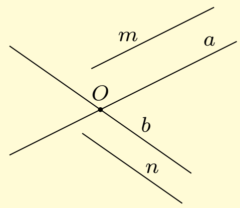
LỜI GIẢI CHI TIẾT

Bài 22. HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC

A. TRỌNG TÂM KIẾN THỨC

1. Góc giữa hai đường thẳng

Góc giữa hai đường thẳng m và n trong không gian, kí hiệu (m, n), là góc giữa hai đường thẳng a và b cùng đi qua một điểm và tương ứng song song với m và n.



- *Để xác định góc giữa hai đường thẳng chéo nhau a và b, ta có thể lấy một điểm O thuộc đường thẳng a và qua đó kẻ đường thẳng b' song song với b. Khi đó $(a, b) = (a, b')$.*
- *Với hai đường thẳng a, b bất kì $0^\circ \leq (a, b) \leq 90^\circ$.*
- *Nếu a song song hoặc trùng với a' và b song song hoặc trùng với b' thì $(a, b) = (a', b')$.*

2. Hai đường thẳng vuông góc

Hai đường thẳng a, b được gọi là vuông góc với nhau, kí hiệu $a \perp b$, nếu góc giữa chúng bằng 90°.

Nếu đường thẳng a vuông góc với đường thẳng b thì a có vuông góc với các đường thẳng song song với b.

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP

Dạng 1. Xác định góc giữa hai đường thẳng trong không gian

1. Ví dụ minh hoạ

VÍ DỤ 1. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có các mặt là các hình vuông. Tính các góc (AA', CD), $(A'C', BD)$, (AC, DC').

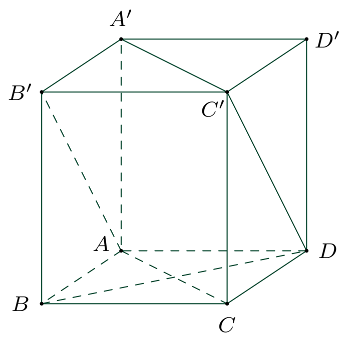
Lời giải.

Vì $CD \parallel AB$ nên $(AA', CD) = (AA', AB) = 90^\circ$.

Tứ giác $ACC'A'$ có các cặp cạnh đối bằng nhau nên nó là một hình bình hành. Do đó, $A'C' \parallel AC$. Vậy $(A'C', BD) = (AC, BD) = 90^\circ$.

Tương tự, $DC' \parallel AB'$. Vậy $(AC, DC') = (AC, AB')$.

Tam giác $AB'C$ có ba cạnh bằng nhau (vì là các đường chéo của các hình vuông có độ dài cạnh bằng nhau) nên nó là một tam giác đều. Từ đó ta có, $(AC, DC') = (AC, AB') = 60^\circ$.

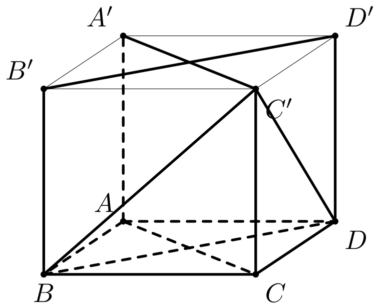


□

VÍ DỤ 2. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh là a. Tính góc giữa các cặp đường thẳng sau đây

a) AB và $A'D'$. b) AD và $A'C'$. c) BC' và $B'D'$.

Lời giải.



a) Ta có $A'D' \parallel AD$ nên $(AB, A'D') = (AB, AD) = \widehat{BAD} = 90^\circ$.

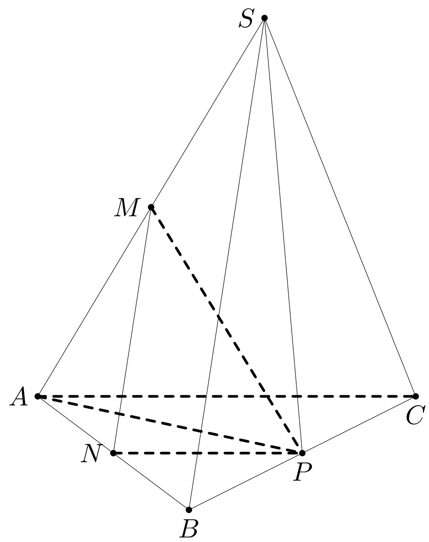
b) Ta có $A'C' \parallel AC$ nên $(AD, A'C') = (AD, AC) = \widehat{DAC} = 45^\circ$.

c) Ta có $B'D' \parallel BD$ nên $(BC', B'D') = (BC', BD) = \widehat{DBC'}$.
Ta có $BD = BC' = C'D = AB\sqrt{2}$ nên $\triangle BDC'$ đều, suy ra $\widehat{DBC'} = 60^\circ$.
Vậy $(BC', B'D') = 60^\circ$.

□

VÍ DỤ 3. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC = AB = AC = a\sqrt{2}$ và $BC = 2a$. Tính góc giữa hai đường thẳng AC và SB.

Lời giải.



Ta có SAB và SAC là tam giác đều, ABC và SBC là tam giác vuông cân cạnh huyền BC.
Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của SA, AB, BC, ta có $MN \parallel SB$, $NP \parallel AC$ nên $(AC, SB) = (NP, MN)$.

$MN = \dfrac{SB}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$, $NP = \dfrac{AC}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

$AP = SP = \dfrac{BC}{2} = a$, $SA = a\sqrt{2}$

Nên $\triangle SAP$ vuông cân tại $P \Rightarrow MP = \dfrac{SA}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Vậy $\triangle MNP$ đều $\Rightarrow (AC, SB) = (NP, NM) = \widehat{MNP} = 60^\circ$.

Cách khác:

$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{SB} = (\overrightarrow{SC} - \overrightarrow{SA}) \cdot \overrightarrow{SB} = \overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{SB} - \overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SB}$

$= 0 - SA \cdot SB \cdot \cos \widehat{ASB} = -a^2$.

$\cos(AC, SB) = \dfrac{|\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{SB}|}{AC \cdot SB} = \dfrac{a^2}{a\sqrt{2} \cdot a\sqrt{2}} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow (AC, SB) = 60^\circ$.

□

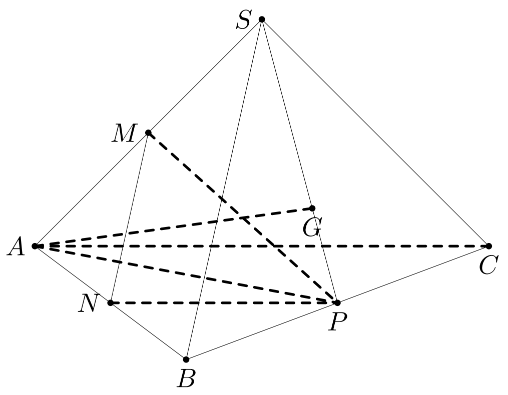
2. Bài tập áp dụng

BÀI 1. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh là $2a$, tam giác SBC vuông cân tại S, $SA = 2a$.

a) Tính góc giữa hai đường thẳng SB và AC.

b) Gọi G là trọng tâm của tam giác SBC. Tính góc tạo bởi AG và SC.

Lời giải.



a) Gọi M, N, P là trung điểm của SA, AB, BC, ta có $MN \parallel SB$, $NP \parallel AC$ nên $(SB, AC) = (MN, NP)$.
$\triangle ABC$ đều nên $AP = \dfrac{AB\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$, $\triangle SBC$ vuông cân tại S nên $SP = \dfrac{BC}{2} = a$, mặt khác có $SA = 2a = \sqrt{SP^2 + AP^2}$ nên $\triangle SAP$ vuông tại P.
$MN = \dfrac{SB}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$, $NP = \dfrac{AC}{2} = a$, $MP = \dfrac{SA}{2} = a$.
$\cos\widehat{MNP} = \dfrac{MN^2 + NP^2 - MP^2}{2MN \cdot NP} = \dfrac{\sqrt{2}}{4} \Rightarrow (SB, AC) = (MN, NP) = \widehat{MNP} \approx 69^\circ 17'$.

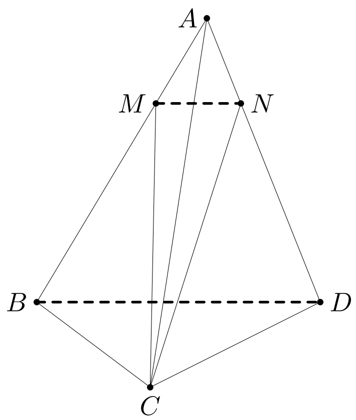
b) Ta có $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{SC} = (\overrightarrow{PG} - \overrightarrow{PA})(\overrightarrow{PC} - \overrightarrow{PS})$
$= \overrightarrow{PG} \cdot \overrightarrow{PC} - \overrightarrow{PG} \cdot \overrightarrow{PS} - \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PS} = 0 - \dfrac{PS^2}{3} - 0 + 0 = \dfrac{a^2}{3}$.
Có $SC = a\sqrt{2}$, $AG = \sqrt{AP^2 + PG^2} = \dfrac{2a\sqrt{7}}{3}$.
$\cos(SC, AG) = \dfrac{|\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{SC}|}{SC \cdot AG} = \dfrac{\dfrac{a^2}{3}}{a\sqrt{2} \cdot \dfrac{2a\sqrt{7}}{3}} = \dfrac{1}{2\sqrt{14}} \Rightarrow (SC, AG) \approx 82^\circ 19'$.

□

BÀI 2. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a. Gọi M là điểm trên cạnh AB sao cho $BM = 3AM$. Tính góc tạo bởi hai đường thẳng CM và BD.

Lời giải.

Kẻ $MN \parallel BD$, $N \in AD$, ta có $(CM, BD) = (CM, MN)$.
Do $ABCD$ là tứ diện đều nên ta có
$CM = CN = \sqrt{BM^2 + BC^2 - 2 \cdot BM \cdot BC \cdot \cos 60^\circ} = \dfrac{a\sqrt{13}}{4}$
$MN = \dfrac{BD}{4} = \dfrac{a}{4}$.
$\cos\widehat{CMN} = \dfrac{MC^2 + MN^2 - CN^2}{2 \cdot MC \cdot MN} = \dfrac{1}{2\sqrt{13}}$
$\Rightarrow (CM, BD) = (CM, MN) = \widehat{CMN} \approx 82^\circ 1'$.



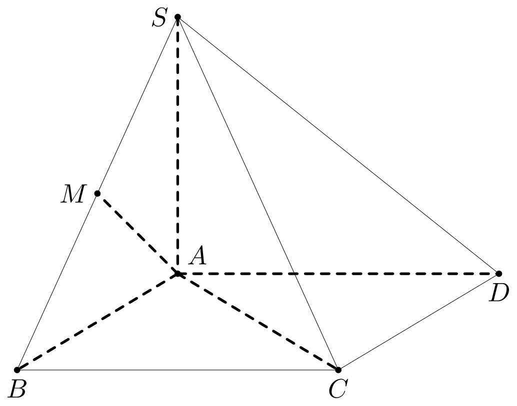
□

BÀI 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a, các tam giác SAB và SAD cùng vuông góc tại A. Biết rằng $SA = a\sqrt{2}$, gọi M là trung điểm của cạnh SB.

a) Tính góc tạo bởi hai vec-tơ $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{SD}$.

b) Tính góc tạo bởi hai đường thẳng AM và SC.

Lời giải.



a) Có $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{SD}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})\cdot(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AS})=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AS}+\overrightarrow{AD}^2-\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AS}=a^2$
Do $ABCD$ là hình vuông nên $AC=AB\sqrt{2}=a\sqrt{2}$, $SD=\sqrt{SA^2+AD^2}=a\sqrt{3}$.
Vậy $\cos(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{SD})=\dfrac{\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{SD}}{AC\cdot SD}=\dfrac{a^2}{a\sqrt{2}\cdot a\sqrt{3}}=\dfrac{1}{\sqrt{6}}\Rightarrow(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{SD})\approx 65^\circ54'$.

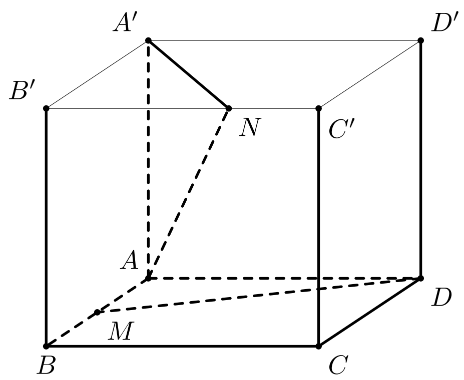
b) $\triangle SAB$ vuông tại A nên $AM=\dfrac{SB}{2}=\dfrac{\sqrt{AB^2+SA^2}}{2}=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.
Có $\overrightarrow{SA}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{SA}\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})=\overrightarrow{SA}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{SA}\cdot\overrightarrow{AD}=0$
Nên $SA\perp AC\Rightarrow SC=\sqrt{SA^2+AC^2}=2a$.
$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{SC}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AS})\cdot(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AS})=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AS}+\overrightarrow{AS}\cdot\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AS}^2)$
$=\dfrac{1}{2}\left(a\cdot a\sqrt{2}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}-0+0-2a^2\right)=-\dfrac{a^2}{2}$

$$\cos(AM,SC)=\frac{|\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{SC}|}{AM\cdot SC}=\frac{\frac{a^2}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}\cdot 2a}=\frac{1}{2\sqrt{3}}\Rightarrow(AM,SC)\approx 73^\circ13'.$$

□

BÀI 4. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a, gọi M là trung điểm của AB, N là điểm trên cạnh $B'C'$ sao cho $B'N=2C'N$. Tính cos của góc tạo bởi hai đường thẳng DM và AN.

Lời giải.



Ta có $\overrightarrow{AA'}\cdot\overrightarrow{A'N}=\overrightarrow{AA'}\cdot(\overrightarrow{A'B'}+\overrightarrow{B'N})=\overrightarrow{AA'}\cdot\overrightarrow{A'B'}+\overrightarrow{AA'}\cdot\overrightarrow{B'N}=0+\overrightarrow{BB'}\cdot\overrightarrow{B'N}=0$

Vậy $AA'\perp A'N$ nên $AN=\sqrt{AA'^2+A'N^2}=\sqrt{AA'^2+A'B'^2+B'N^2}=\dfrac{a\sqrt{22}}{3}$.

$DM=\sqrt{AM^2+AD^2}=\dfrac{a\sqrt{5}}{2}$.
$\overrightarrow{AN}\cdot\overrightarrow{DM}=(\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{A'B'}+\overrightarrow{B'N})\cdot(\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AD})=\overrightarrow{AA'}\cdot\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{A'B'}\cdot\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{B'N}\cdot\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AA'}\cdot\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{A'B'}\cdot\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{B'N}\cdot\overrightarrow{AD}=$

$0+\dfrac{AB^2}{2}+0-0-0-\dfrac{2AD^2}{3}=\dfrac{a^2}{2}-\dfrac{2a^2}{3}=-\dfrac{a^2}{6}$

Có $\cos(AN,DM)=\dfrac{|\overrightarrow{AN}\cdot\overrightarrow{DM}|}{AN\cdot DM}=\dfrac{\dfrac{a^2}{6}}{\dfrac{a\sqrt{22}}{3}\cdot\dfrac{a\sqrt{5}}{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{110}}$ □

Dạng 2. Sử dụng tính chất vuông góc trong mặt phẳng.

Để chứng minh hai đường thẳng Δ và Δ' vuông góc với nhau ta có thể sử dụng tính chất vuông góc trong mặt phẳng, cụ thể:

- Tam giác ABC vuông tại A khi và chỉ khi $\widehat{BAC}=90^\circ \Leftrightarrow \widehat{ABC}+\widehat{ACB}=90^\circ$.
- Tam giác ABC vuông tại A khi và chỉ khi $AB^2+AC^2=BC^2$.
- Tam giác ABC vuông tại A khi và chỉ khi trung tuyến xuất phát từ A có độ dài bằng nửa cạnh BC.
- Nếu tam giác ABC cân tại A thì đường trung tuyến xuất phát từ A cũng là đường cao của tam giác.

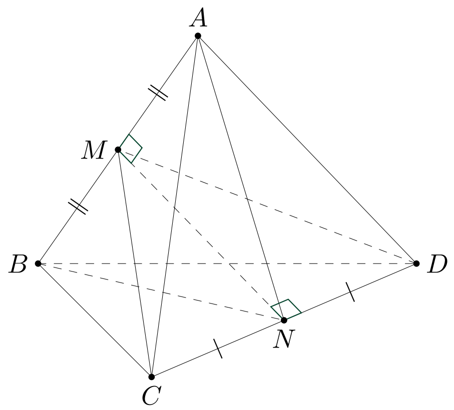
Ngoài ra, chúng ta cũng sử dụng tính chất: Nếu $d\perp\Delta$ và $\Delta' \parallel d$ thì Δ' cũng vuông góc với đường thẳng Δ.

1. Ví dụ minh hoạ

VÍ DỤ 1. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB=AC=AD$, $\widehat{BAC}=\widehat{BAD}=60^\circ$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và CD, chứng minh rằng MN là đường vuông góc chung của các đường thẳng AB và CD.

Lời giải.

Từ giả thiết suy ra các tam giác ABC, ABD đều nên $DM=CM$, do đó ΔMCD cân tại M.
Từ đó suy ra $MN\perp CD$.
Mặt khác $\Delta BCD=\Delta ACD$ nên $BN=AN$, do đó ΔNAB cân tại N.
Từ đó suy ra $NM\perp AB$.
Vậy MN là đường vuông góc chung của AB và CD.



□

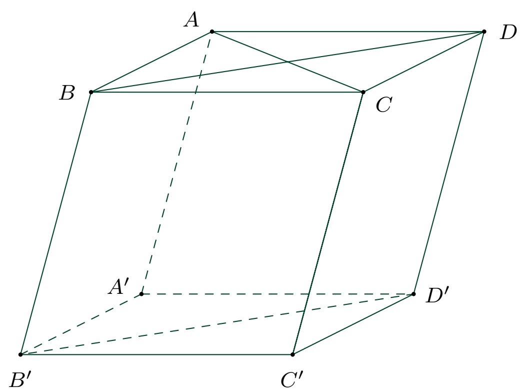
VÍ DỤ 2. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$.

a) Xác định vị trí tương đối của hai đường thẳng AC và $B'D'$.

b) Chứng minh rằng AC và $B'D'$ vuông góc với nhau khi và chỉ khi $ABCD$ là một hình thoi.

Lời giải.

a) Hai đường thẳng AC và $B'D'$ lần lượt thuộc hai mặt phẳng song song $(ABCD)$ và $(A'B'C'D')$ nên chúng không có điểm chung, tức là chúng không thể trùng nhau hoặc cắt nhau.
Tứ giác $BDD'B'$ có hai cạnh đối BB' và DD' song song và bằng nhau nên nó là một hình bình hành. Do đó $B'D'$ song song với BD. Mặt khác, BD không song song với AC nên $B'D'$ không song song với AC. Từ những điều trên suy ra AC và $B'D'$ chéo nhau.



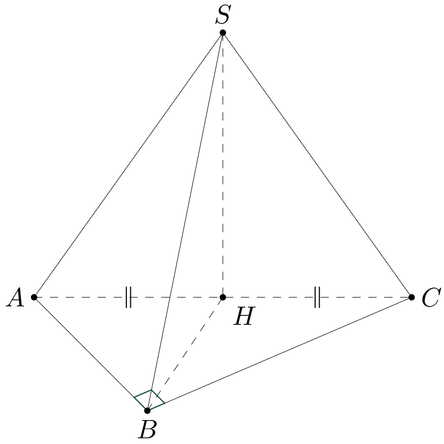
b) Do $B'D'$ song song với BD nên $(AC,B'D')=(AC,BD)$. Do đó, AC và $B'D'$ vuông góc với nhau khi và chỉ khi AC và BD vuông góc với nhau. Do $ABCD$ là hình bình hành nên AC vuông góc với BD khi và chỉ khi $ABCD$ là hình thoi.

VÍ DỤ 3. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC = a$, $\widehat{ASB} = 60^\circ, \widehat{BSC} = 90^\circ, \widehat{CSA} = 120^\circ$. Cho H là trung điểm AC. Chứng minh rằng:

a) $SH \perp AC$.

b) $AB \perp BC$.

Lời giải.



a) Do tam giác SAC cân tại S và H là trung điểm AC nên $SH \perp AC$.

b) Do $SA = SB = a$ và $\widehat{ASB} = 60^\circ$ nên ΔSAB đều. Từ đó suy ra $AB = a$. (1)

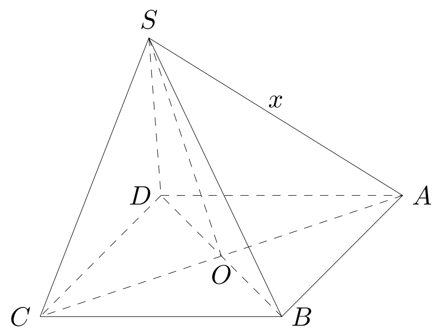
Áp dụng định lý hàm số cos cho các tam giác SAC ta có
$AC^2 = SA^2 + SC^2 - 2SA.SC.\cos\widehat{ASC} = 2a^2 - 2a^2.\cos 120^\circ = 3a^2$. (2)

Áp dụng định lý Pitago cho tam giác SBC, ta có $BC^2 = SB^2 + SC^2 = 2a^2$. (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra $AC^2 = AB^2 + BC^2 \Rightarrow AB \perp BC$.

VÍ DỤ 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA = x$ và tất cả các cạnh còn lại đều bằng 1. Chứng minh rằng $SA \perp SC$.

Lời giải.



Ta có $ABCD$ là hình thoi, gọi O là giao điểm của AC và BD suy ra O là trung điểm của AC, BD.

Xét các tam giác SBD và CBD, ta có:

$$\begin{cases} SB = CB \\ SD = CD \\ BD \text{ chung} \end{cases} \Rightarrow \Delta SBD = \Delta CBD.$$

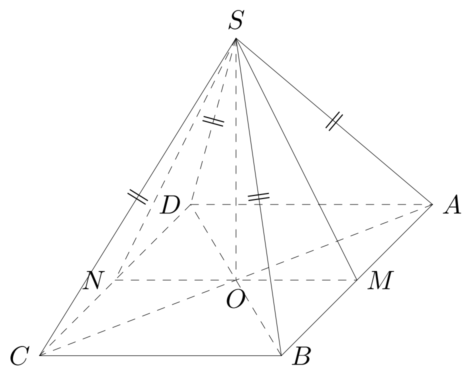
Từ đó suy ra $SO = CO = \dfrac{1}{2}AC$.

Vậy tam giác SAC vuông tại S hay $SA \perp SC$.

2. Bài tập áp dụng

BÀI 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O và $SA = SB = SC = SD$. Chứng minh rằng $SO \perp AB$ và $SO \perp AD$.

Lời giải.



Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD. Do $\Delta SAB = \Delta SCD$ nên ta suy ra $SM = SN$.

Xét tam giác cân SMN có O là trung điểm MN, suy ra $SO \perp MN$.

Mặt khác $AD \parallel MN$ nên $AD \perp SO$.

Tương tự ta chứng minh được $AB \perp SO$.

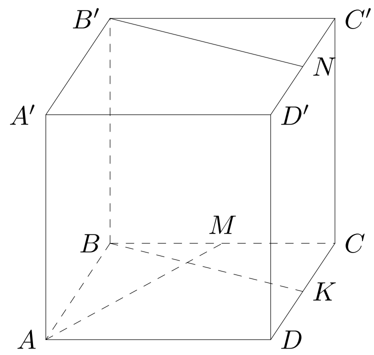
BÀI 2. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có M, N lần lượt là trung điểm $BC, C'D'$. Chứng minh rằng $AM \perp B'N$.

Lời giải.

Gọi K là trung điểm CD, khi đó $BK \parallel B'N$. Ta sẽ chứng minh $BK \perp AM$.
Gọi I là giao điểm của BK và AM. Do $\Delta ABM = \Delta BCK$ nên:

$$\widehat{BAI} + \widehat{ABI} = \widehat{IBC} + \widehat{ABI} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{AIB} = 90^\circ.$$

Do đó $BK \perp AM$ tại I.



□

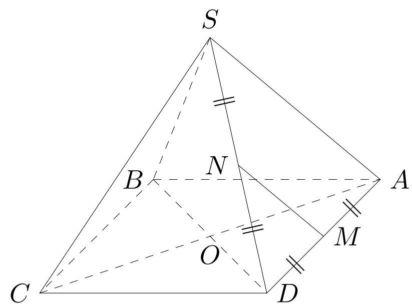
BÀI 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông và có tất cả các cạnh đều bằng a. Cho M và N lần lượt là trung điểm của AD và SD, chứng minh rằng $MN \perp SC$.

Lời giải.

Từ giả thiết ta có

$$\Delta SAC = \Delta DAC \Rightarrow \widehat{ASC} = \widehat{ADC} = 90^\circ \Rightarrow SA \perp SC.$$

Mặt khác $MN \parallel SA \Rightarrow MN \perp SC$.

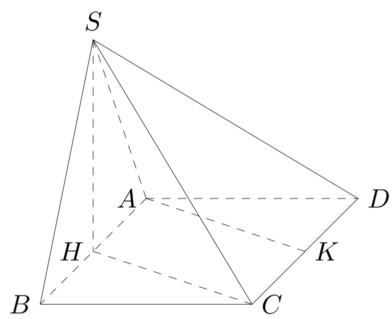


□

BÀI 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $2a$, tam giác SAB đều và $SC = 2a\sqrt{2}$. Gọi H, K lần lượt là trung điểm của AB, CD. Chứng minh rằng $SH \perp AK$.

Lời giải.

Ta có $AK \parallel HC$, do đó chỉ cần chứng minh $SH \perp HC$.
Do ΔSAB đều cạnh $2a$ nên $SH = \dfrac{AB\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$.
Ta có $HC^2 = HB^2 + BC^2 = a^2 + 4a^2 = 5a^2$.
Từ đó suy ra $SH^2 + HC^2 = 3a^2 + 5a^2 = 8a^2 = SC^2$.
Theo định lý Pitago ta có $SH \perp HC$.



□

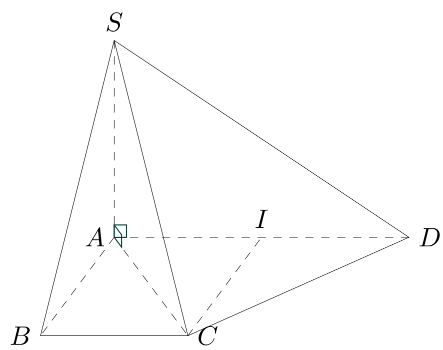
BÀI 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B, $AD = 2a, AB = BC = a$. $SA \perp AD$ và $SA \perp AC$. Chứng minh rằng $SC \perp DC$.

Lời giải.

Gọi I là trung điểm $AD \Rightarrow ABCI$ là hình vuông cạnh a, do đó ΔCID vuông cân tại I. Từ đó ta có $CD^2 = 2a^2$. (1)

Áp dụng định lý Pitago cho các tam giác SAC, SAD ta có:
$SD^2 = SA^2 + AD^2 = SA^2 + 4a^2$; (2)
$SC^2 = SA^2 + AC^2 = SA^2 + 2a^2$. (3)
Từ (1), (2) và (3) ta suy ra

$$SD^2 = SC^2 + CD^2 \Rightarrow SC \perp CD.$$



□

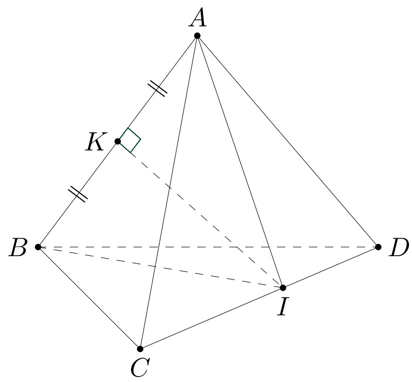
BÀI 6. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = x$, tất cả các cạnh còn lại có độ dài bằng a. K là trung điểm AB và I là điểm bất kỳ trên cạnh CD, chứng minh rằng $IK \perp AB$.

Lời giải.

Xét các tam giác ACI và BCI, ta có:

$$\begin{cases} BC = AC \\ CI \text{ chung} \\ \widehat{BCI} = \widehat{ACI} = 60^\circ \end{cases}.$$

Từ đó suy ra $\Delta ACI = \Delta BCI \Rightarrow IB = IC$.
Xét tam giác cân IAB, ta có K là trung điểm AB nên $IK \perp AB$.



□

Dạng 3. Hai đường thẳng song song cùng vuông góc với một đường thẳng thứ ba

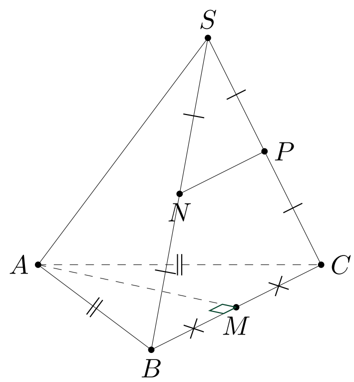
Để chứng minh đường thẳng $a \perp b$, ta chứng minh $a \,/\!/\, a'$, ở đó $a' \perp b$.

1. Ví dụ minh hoạ

VÍ DỤ 1. Cho hình chóp $S.ABC$ có $AB = AC$. Lấy M, N và P lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, SB và SC. Chứng minh rằng AM vuông góc với NP.

Lời giải.

Do N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh SB và SC nên NP là đường trung bình của tam giác SBC, từ đó suy ra $NP \,/\!/\, BC$. (1)
Mặt khác, do tam giác ABC cân tại A, suy ra trung tuyến $AM \perp BC$. (2)
Từ (1)(2) suy ra $AM \perp NP$.

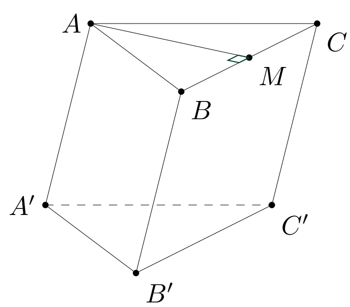


□

VÍ DỤ 2. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều. Lấy M là trung điểm của cạnh BC. Chứng minh rằng AM vuông góc với $B'C'$.

Lời giải.

Do tứ giác $BB'C'C$ là hình bình hành nên $BC \,/\!/\, B'C'$. (1)
Mặt khác, do tam giác ABC đều nên $AM \perp BC$. (2)
Từ (1)(2) suy ra $AM \perp B'C'$.

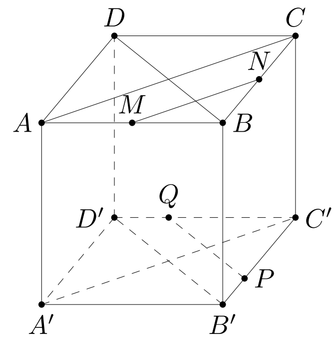


□

VÍ DỤ 3. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Các điểm M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC. Trên cạnh $B'C'$ lấy điểm P sao cho $C'P = x$ $(0 < x < a)$. Trên cạnh $C'D'$ lấy điểm Q sao cho $C'Q = x$. Chứng minh rằng MN vuông góc với PQ.

Lời giải.

Do tứ giác $BB'D'D$ là hình chữ nhật, suy ra $BD \parallel B'D'$. (1)
Do $ABCD$ là hình vuông, suy ra $BD \perp AC$. (2)
Từ (1)(2) suy ra $B'D' \perp AC$. (3)
Theo bài ra ta có MN là đường trung bình của tam giác ABC, suy ra $MN \parallel AC$. (4)
Mặt khác, ta có $\dfrac{C'P}{C'B} = \dfrac{C'Q}{C'D'} = \dfrac{x}{a}$, suy ra $PQ \parallel B'D'$. (5)
Từ (3)(4)(5) ta có $MN \perp PQ$.



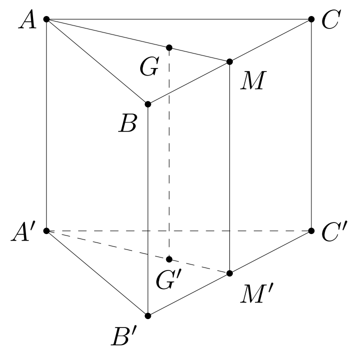
□

2. Bài tập áp dụng

BÀI 1. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$. Gọi G, G' lần lượt là trọng tâm hai đáy. Chứng minh rằng GG' vuông góc với BC.

Lời giải.

Dễ dàng chứng minh được $GG' \parallel MM'$ và $MM' \perp BC$. Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

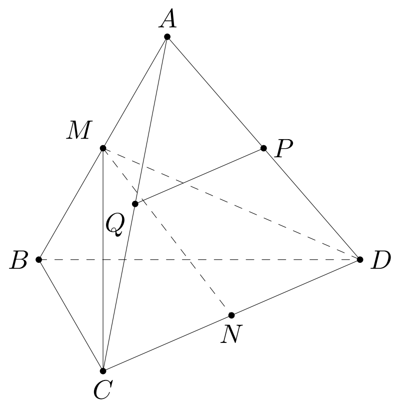


□

BÀI 2. Cho tứ diện đều $ABCD$. Gọi M, N, P và Q lần lượt là trung điểm các cạnh AB, CD, AD và AC. Chứng minh rằng MN vuông góc với PQ.

Lời giải.

Theo giả thiết ta có $\triangle ABC = \triangle ABD$, từ đó ta có $MC = MD$, suy ra $\triangle MCD$ cân tại M, suy ra $MN \perp CD$. (1)
Cũng theo giả thiết ta có PQ là đường trung bình của tam giác ACD, suy ra $PQ \parallel CD$. (2)
Từ (1)(2) suy ra điều phải chứng minh.

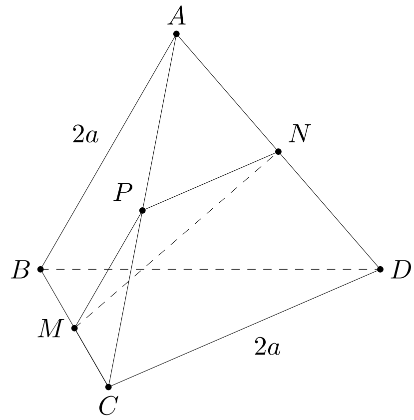


□

BÀI 3. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = CD = 2a$ $(a > 0)$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh BC, AD. Biết rằng $MN = a\sqrt{2}$. Chứng minh rằng AB vuông góc với CD.

Lời giải.

Lấy P là trung điểm của AC.
Theo tính chất đường trung bình ta có $PN \mathbin{/\!\!/\!\!=} \frac{1}{2}CD = a$ và $PM \mathbin{/\!\!/\!\!=} \frac{1}{2}AB = a.(*)$
Từ đó ta có $MP^2 + NP^2 = 2a^2 = MN^2$, vậy tam giác MNP vuông tại P suy ra $MP \perp NP$. $(**)$
Từ $(*)(**)$ ta có $AB \perp CD$.



BÀI 4. Cho tứ diện $ABCD$, có $AB = CD$. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABD, M thuộc cạnh AC sao cho $AC = 3AM$, các điểm N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh AD, BC. Chứng minh rằng MG vuông góc với NP.

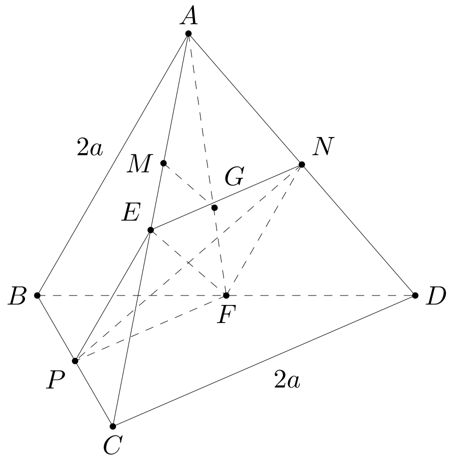
Lời giải.

Lấy E, F lần lượt là trung điểm của AC, BD.
Ta có $\frac{AM}{AE} = \frac{AG}{AF} = \frac{2}{3}$, suy ra $MG \parallel EF$. (1)
Mặt khác theo tính chất đường trung bình ta có

$$EN \mathbin{/\!\!/\!\!=} FP = \frac{1}{2}CD = a$$

$$EP \mathbin{/\!\!/\!\!=} FN = \frac{1}{2}AB = a.$$

Từ đó suy ra tứ giác $ENFP$ là hình thoi, suy ra $EF \perp NP$. (2)
Từ (1) và (2) suy ra $MG \perp NP$.



Bài 23. ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC VỚI MẶT PHẲNG

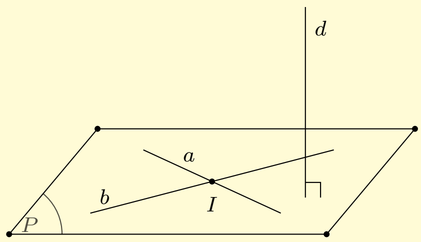
A. TRỌNG TÂM KIẾN THỨC

1. Đường thẳng vuông góc với mặt phẳng

Đường thẳng Δ được gọi là vuông góc với mặt phẳng (P) nếu Δ vuông góc với mọi đường thẳng nằm trong (P).

- *Khi Δ vuông góc với (P), ta còn nói (P) vuông góc với Δ hoặc Δ và (P) vuông góc với nhau, kí hiệu $\Delta \perp (P)$.*
- *Nếu đường thẳng Δ và mặt phẳng (P) vuông góc với nhau thì chúng cắt nhau.*

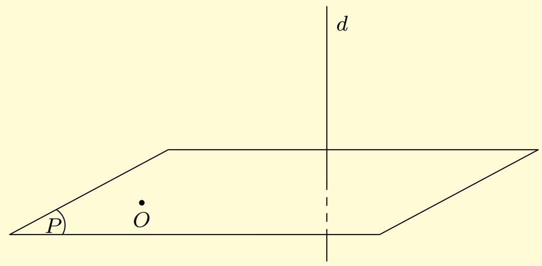
Nếu đường thẳng vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau thuộc cùng một mặt phẳng thì nó vuông góc với mặt phẳng đó.



Nếu một đường thẳng vuông góc với hai cạnh của một tam giác thì vuông góc với cạnh thứ ba.

2. Tính chất

Có duy nhất một mặt phẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một đường thẳng cho trước.



Nhận xét. Nếu ba đường thẳng đôi một phân biệt a, b, c cùng đi qua một điểm O và cùng vuông góc với một đường thẳng Δ thì ba đường thẳng đó cùng nằm trong mặt phẳng đi qua O và vuông góc với Δ.

Mặt phẳng đi qua trung điểm của đoạn thẳng AB và vuông góc với đường thẳng AB được gọi là mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB. Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB là tập hợp các điểm cách đều hai điểm A, B.

Có duy nhất một đường thẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một mặt phẳng cho trước.

3. Liên hệ giữa quan hệ song song và quan hệ vuông góc của đường thẳng và mặt phẳng

- Nếu đường thẳng a vuông góc với mặt phẳng (P) thì các đường thẳng song song với a cũng vuông góc với (P).
- Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.

- Nếu đường thẳng Δ vuông góc với mặt phẳng (P) thì Δ cũng vuông góc với các mặt phẳng song song với (P).
- Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.

- Nếu đường thẳng Δ vuông góc với mặt phẳng (P) thì Δ vuông góc với mọi đường thẳng song song với (P).
- Nếu đường thẳng a và mặt phẳng (P) cùng vuông góc với một đường thẳng Δ thì a nằm trong (P) hoặc song song với (P).

4. Phép chiếu vuông góc

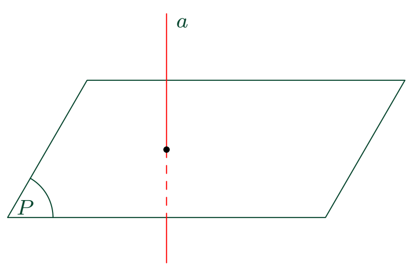
Phép chiếu song song lên mặt phẳng (P) theo phương Δ vuông góc với (P) được gọi là *phép chiếu vuông góc* lên mặt phẳng (P).

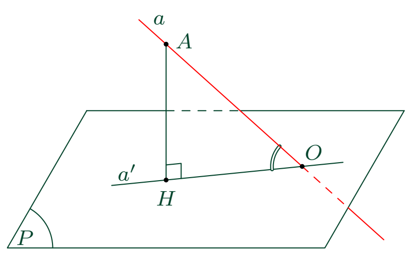
- *Vì phép chiếu vuông góc lên một mặt phẳng là một trường hợp đặc biệt của phép chiếu song song nên nó có mọi tính chất của phép chiếu song song.*
- *Phép chiếu vuông góc lên mặt phẳng (P) còn được gọi đơn giản là phép chiếu lên mặt phẳng (P).* Hình chiếu vuông góc *$\mathscr{H}'$ của hình $\mathscr{H}$ trên mặt phẳng (P) còn được gọi là* hình chiếu *của $\mathscr{H}$ trên mặt phẳng (P).*

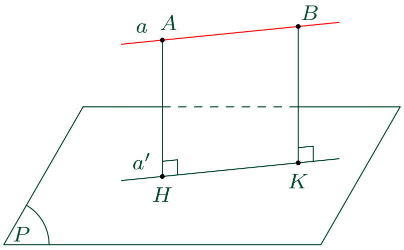
Cho đường thẳng a và mặt phẳng (P) không vuông góc với nhau. Khi đó, một đường thẳng b nằm trong mặt phẳng (P) vuông góc với đường thẳng a khi và chỉ khi b vuông góc với hình chiếu vuông góc a' của a trên (P).

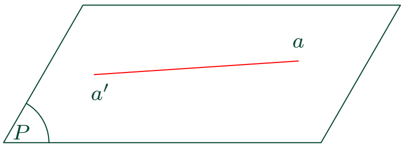
5. Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

Nếu đường thẳng a vuông góc với mặt phẳng (P) thì ta nói rằng góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) bằng 90°. Nếu đường thẳng a không vuông góc với mặt phẳng (P) thì góc giữa a và hình chiếu a' của nó trên (P) được gọi là góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P).





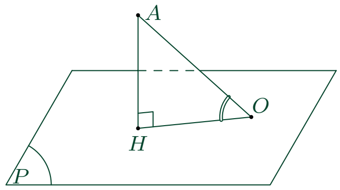




Chú ý: Nếu α là góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) thì $0 \leq \alpha \leq 90°$.

NHẬN XÉT.

Cho điểm A có hình chiếu H trên mặt phẳng (P). Lấy điểm O thuộc mặt phẳng (P), O không trùng H. Khi đó góc giữa đường thẳng AO và mặt phẳng (P) bằng góc AOH



B. CÁC DẠNG BÀI TẬP

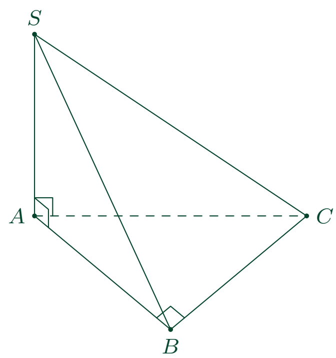
Dạng 1. Chứng minh đường thẳng vuông góc đường thẳng, mặt phẳng

1. Ví dụ minh hoạ

VÍ DỤ 1. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC vuông tại B và cạnh SA vuông góc với các cạnh AB, AC. Chứng minh rằng $BC \perp (SAB)$.

Lời giải.

Vì SA vuông góc với hai đường thẳng AB và AC nên $SA \perp (ABC)$. Suy ra $SA \perp BC$. Tam giác ABC vuông tại B nên $BC \perp BA$. Vì BC vuông góc với hai đường thẳng SA và BA nên $BC \perp (SAB)$.

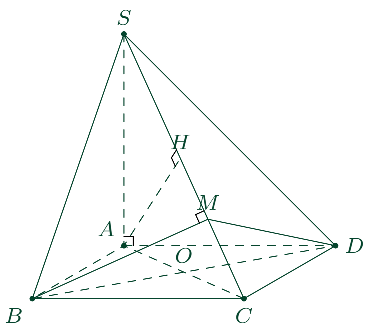


□

VÍ DỤ 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là một hình vuông, $SA \perp (ABCD)$. Kẻ AH vuông góc với SC (H thuộc SC), BM vuông góc với SC (M thuộc SC). Chứng minh rằng $SC \perp (MBD)$ và $AH \parallel (MBD)$.

Lời giải.

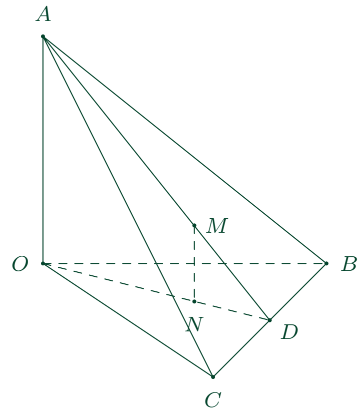
- Vì $SA \perp (ABCD)$ nên $SA \perp BD$.
  Ta có $\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp SA \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp SC$. Mà $BM \perp SC$ nên $SC \perp (BMD)$.
- Ta có $\begin{cases} SC \perp (MBD) \\ SC \perp AH \end{cases} \Rightarrow AH \parallel (MBD)$.



□

VÍ DỤ 3. Cho tứ diện $OABC$ có các cạnh OA, OB, OC tương ứng vuông góc với nhau. Gọi M, N tương ứng là trọng tâm của các tam giác ABC, OBC. Chứng minh rằng đường thẳng MN vuông góc với mặt phẳng (OBC).

Lời giải.

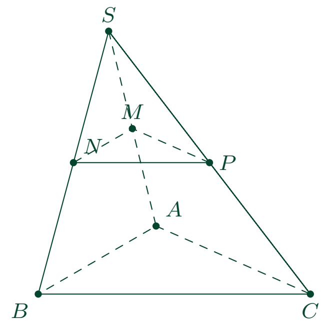


Vì AO vuông góc với các đường thẳng OB, OC nên $AO \perp (OBC)$.
Kẻ các đường trung tuyến AD, OD tương ứng của các tam giác ABC, OBC.
Ta có $\dfrac{MA}{MD} = 2 = \dfrac{NO}{ND}$. Do đó MN song song với AO.
Mặt khác $AO \perp (OBC)$ nên $MN \perp (OBC)$.

□

VÍ DỤ 4. Cho hình chóp $S.ABC$. Các điểm M, N, P tương ứng là trung điểm của SA, SB, SC. Đường thẳng qua S vuông góc với mặt phẳng (ABC) và cắt mặt phẳng đó tại H. Chứng minh rằng $SH \perp (MNP)$.

Lời giải.



Do $\begin{cases} MN \parallel AB \\ MP \parallel AC \end{cases}$ nên $(MNP) \parallel (ABC)$.
Mặt khác $SH \perp (ABC)$. Do đó $SH \perp (MNP)$.

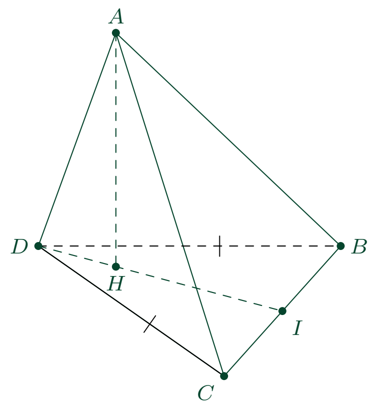
□

VÍ DỤ 5. Cho tứ diện $ABCD$ có ABD và DBC là những tam giác cân tại A và D. Gọi I là trung điểm của BC và AH là đường cao của tam giác ADI.

a) Chứng minh $BC \perp AD$.

b) Chứng minh $AH \perp (BCD)$.

Lời giải.



a) Chứng minh $BC \perp AD$.
AI là trung tuyến $\triangle ACB$ cân tại $A \Rightarrow AI \perp BC$.
DI là trung tuyến $\triangle DCB$ cân tại $D \Rightarrow DI \perp BC$.
Ta có $\begin{cases} BC \perp AI & \text{(cmt)} \\ BC \perp DI & \text{(cmt)} \\ AI \cap DI = I \\ AI, DI \subset (ADI). \end{cases}$
$\Rightarrow BC \perp (ADI)$.
Mà $AD \subset (ADI) \Rightarrow BC \perp AD$.

b) Chứng minh $AH \perp (BCD)$.
Ta có $\begin{cases} AH \perp DI & \text{(giả thiết)} \\ AH \perp BC & (\text{do } BC \perp (ADI), AH \subset (ADI)) \\ DI \cap BC = I \\ DI, BC \subset (BCD). \end{cases}$
$\Rightarrow AH \perp (BCD)$.

□

VÍ DỤ 6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O và $SA \perp (ABCD)$. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của A trên SB và SD.

a) Chứng minh $BC \perp SB$ và $CD \perp SD$.

b) Chứng minh $BD \perp (SAC)$.

c) Chứng minh $HK \perp (SAC)$.

d) Chứng minh $AH \perp (SBC)$.

e) Chứng minh $AK \perp (SCD)$.

f) Gọi I là hình chiếu của A lên SC. Chứng minh AH, AI, AK đồng phẳng.

Lời giải.

a) Chứng minh $BC \perp SB$ và $CD \perp SD$.

Ta có $\begin{cases} BC \perp AB & (\text{do } ABCD \text{ là hình vuông}) \\ BC \perp SA & (\text{do } SA \perp (ABCD), BC \subset (ABCD)) \\ AB \cap SA = A \\ AB, SA \subset (SAB). \end{cases}$

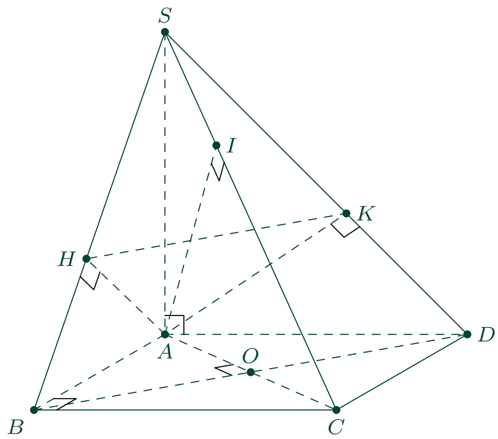
$\Rightarrow BC \perp (SAB)$.

Mà $SB \subset (SAB) \Rightarrow BC \perp SB$.

Tương tự $\begin{cases} CD \perp AD & (\text{do } ABCD) \text{ là hình vuông} \\ CD \perp SA & (\text{do } SA \perp (ABCD), CD \subset (ABCD)) \\ AD \cap SA = A \\ AD, SA \subset (SAD). \end{cases}$

$\Rightarrow CD \perp (SAD)$.

Mà $SD \subset (SAD) \Rightarrow CD \perp SD$.



b) Chứng minh $BD \perp (SAC)$.

Ta có $\begin{cases} BD \perp AC & (\text{do } AC, BD \text{ là hai đường chéo hình vuông}) \\ BD \perp SA & (\text{do } SA \perp (ABCD), BD \subset (ABCD)) \\ SA \cap AC = A \\ SA, AC \subset (SAC). \end{cases}$

$\Rightarrow BD \perp (SAC)$.

c) Chứng minh $HK \perp (SAC)$.

Xét $\triangle SAB$ vuông tại A, đường cao AH, ta có $SH \cdot SB = SA^2$. (1)

Xét $\triangle SAD$ vuông tại A, đường cao AK, ta có $SK \cdot SD = SA^2$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $SH = SK \Rightarrow \dfrac{SH}{SB} = \dfrac{SK}{SD} \Rightarrow HK \parallel BD$.

Mặt khác, $BD \perp (SAC)$ nên $HK \perp (SAC)$.

d) Chứng minh $AH \perp (SBC)$.

Ta có $\begin{cases} AH \perp SB & (H \text{ là hình chiếu của } A \text{ lên } SB) \\ AH \perp BC & (\text{do } BC \perp (SAB), AH \subset (SAB)) \\ SB \cap BC = B \\ SB, BC \subset (SBC). \end{cases}$

$\Rightarrow AH \perp (SBC)$.

e) Chứng minh $AK \perp (SCD)$.

Ta có $\begin{cases} AK \perp SD & (K \text{ là hình chiếu của } A \text{ lên } SD) \\ AK \perp CD & (\text{do } CD \perp (SAD), AK \subset (SAD)) \\ SD \cap CD = D \\ SD, CD \subset (SCD). \end{cases}$

$\Rightarrow AK \perp (SCD)$.

f) Gọi I là hình chiếu của A lên SC. Chứng minh AH, AI, AK đồng phẳng.

Ta có $\begin{cases} AH \perp (SBC) \Rightarrow AH \perp SC \\ AK \perp (SCD) \Rightarrow AK \perp SC. \end{cases}$

Mặt khác do $AI \perp SC$ nên AH, AI, AK đồng phẳng.

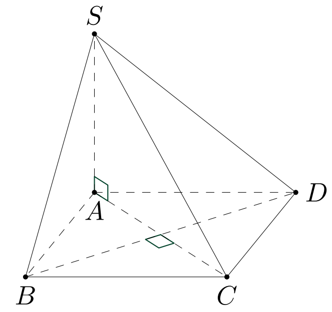
□

2. Bài tập áp dụng

BÀI 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi, $SA \perp (ABCD)$. Chứng minh rằng $BD \perp (SAC)$.

Lời giải.

Ta có $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp BD$. (1)
Lại có $BD \perp AC$ (vì $ABCD$ là hình thoi). (2)
$AC, SA \subset (SAC)$, AC cắt SA tại A. (3)
Từ (1), (2), (3) ta suy ta $BD \perp (SAC)$.

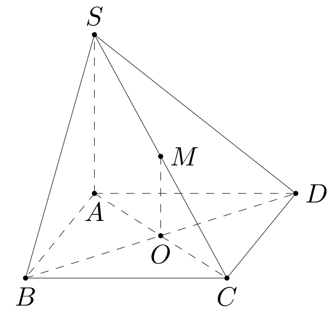


□

BÀI 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$, đáy $ABCD$ là hình bình hành có AC cắt BD tại O. Gọi M là trung điểm của SC. Chứng minh rằng $OM \perp (ABCD)$.

Lời giải.

Vì $ABCD$ là hình bình hành nên $OA = OC$. Ta có OM là đường trung bình của tam giác SAC nên $OM \parallel SA$. Mà $SA \perp (ABCD)$ nên $OM \perp (ABCD)$.



□

BÀI 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi, tâm O. Biết $SA = SC$ và $SB = SD$.

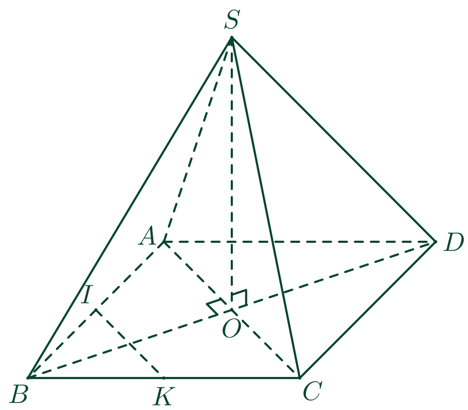
a) Chứng minh: $SO \perp (ABCD)$.

b) Gọi I, K lần lượt là trung điểm của BA và BC. Chứng minh: $IK \perp SD$.

Lời giải.

a) Ta có $\begin{cases} SO \perp AC \ \ (\text{vì } \triangle SAC \text{ cân tại } S) \\ SO \perp BD \ \ (\text{vì } \triangle SBD \text{ cân tại } S) \\ AC, BD \subset (ABCD) \\ AC \cap BD = O \end{cases}$
$\Rightarrow SO \perp (ABCD)$.

b) Ta có $\begin{cases} AC \perp BD \ \ (\text{tính chất hình thoi}) \\ AC \perp SO \ \ (\text{vì } SO \perp (ABCD)) \\ BD, SO \subset (SBD) \\ BD \cap SO = O \end{cases}$
$\Rightarrow AC \perp (SBD) \Rightarrow AC \perp SD$.
Ta có IK là đường trung bình của $\triangle ABC$ nên $IK \parallel AC$.
Mà $AC \perp SD$ nên $IK \perp SD$.



□

BÀI 4. Cho hình chóp $S.ABC$ có tam giác ABC vuông tại B và $SA \perp (ABC)$. Gọi AH, AK lần lượt là các đường cao trong tam giác SAB và SAC.

a) Chứng minh tam giác SBC vuông.

b) Chứng minh tam giác AHK vuông.

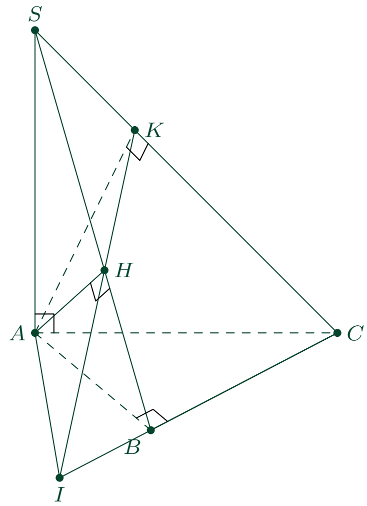
c) Chứng minh $SC \perp (AHK)$.

d) Chứng minh tam giác SHK vuông.

e) Gọi $I = HK \cap BC$. Chứng minh $IA \perp (SAC)$.

Lời giải.

a) Chứng minh tam giác SBC vuông.



Ta có $\begin{cases} BC \perp AB & (\triangle ABC \text{ vuông tại } B) \\ BC \perp SA & (\text{do } SA \perp (ABC), BC \subset (ABC)) \\ AB \cap SA = A \\ AB, SA \subset (SAB). \end{cases}$

$\Rightarrow BC \perp (SAB)$.

Mà $SB \subset (SAB)$ nên $BC \perp SB$.

Vậy tam giác SBC vuông tại B.

b) Chứng minh tam giác AHK vuông.

Ta có $\begin{cases} AH \perp SB & (\text{giả thiết}) \\ AH \perp BC & (\text{do } BC \perp (SAB), AH \subset (SAB)) \\ SB \cap BC = B \\ SB, BC \subset (SBC). \end{cases}$

$\Rightarrow AH \perp (SBC)$.

Mà $HK \subset (SBC)$ nên $AH \perp HK$.

Vậy tam giác AHK vuông tại H.

c) Chứng minh $SC \perp (AHK)$.

Ta có $\begin{cases} SC \perp AK & (\text{giả thiết}) \\ SC \perp AH & (\text{do } AH \perp (SBC), SC \subset (SBC)) \\ AK \cap AH = A \\ AK, AH \subset (AHK). \end{cases}$

$\Rightarrow SC \perp (AHK)$.

d) Chứng minh tam giác SHK vuông.

Ta có $SC \perp (AHK)$. Mà $HK \subset (AHK) \Rightarrow SC \perp HK$.

Vậy tam giác SHK vuông tại K.

e) Gọi $I = HK \cap BC$. Chứng minh $IA \perp (SAC)$.

Ta có $\begin{cases} IA \perp SA & (\text{do } SA \perp (ABC)) \\ IA \perp SC & (\text{do } SC \perp (AHK), IA \subset (AHK)) \\ SA \cap SC = A \\ SA, SC \subset (SAC). \end{cases}$

$\Rightarrow IA \perp (SAC)$.

□

BÀI 5. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, tam giác ABC vuông cân tại B. Gọi G là trọng tâm của tam giác SAC và N là điểm thuộc cạnh SB sao cho $SN = 2NB$.

a) Chứng minh $BC \perp (SAB)$.

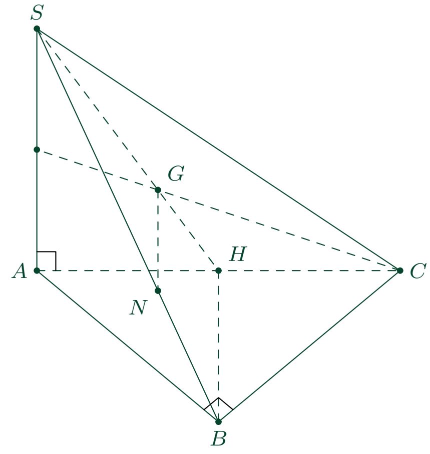
b) Chứng minh $NG \perp (SAC)$.

Lời giải.

a) Chứng minh $BC \perp (SAB)$.

Ta có $\begin{cases} BC \perp AB & (\triangle ABC \text{ vuông cân tại } B) \\ BC \perp SA & (\text{do } SA \perp (ABC), BC \subset (ABC)) \\ AB \cap SA = A \\ AB, SA \subset (SAB). \end{cases}$

$\Rightarrow BC \perp (SAB)$.



b) Chứng minh $NG \perp (SAC)$.

Ta có $\begin{cases} BH \perp AC & (BH \text{ là trung tuyến } \triangle ABC) \\ BH \perp SA & (\text{do } SA \perp (ABC), BH \subset (ABC)) \\ AC \cap SA = A \\ AC, SA \subset (SAC). \end{cases}$

$\Rightarrow BH \perp (SAC) \quad (*)$

Ta có G là trọng tâm $\triangle SAC \Rightarrow \dfrac{SG}{GH} = 2$.

Lại có $\dfrac{SN}{NB} = 2$.

Nên theo Thales đảo trong $\triangle SBH$, ta có $NG \parallel BH$.

Vậy từ $(*) \Rightarrow NG \perp (SAC)$.

□

Dạng 2. Một số bài toán liên hệ giữa quan hệ song song và quan hệ vuông góc khác

1. Ví dụ minh hoạ

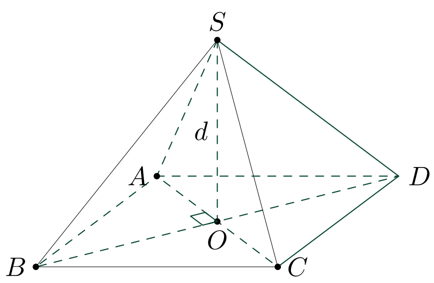
VÍ DỤ 1. Cho mặt phẳng (P) và ba điểm A, B, C thỏa mãn $(P) \perp AB$ và $(P) \perp BC$. Chứng minh rằng $(P) \perp AC$.

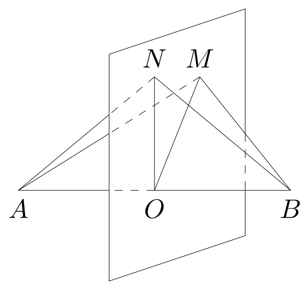
Lời giải.

Vì hai đường thẳng AB và AC cùng đi qua điểm B và vuông góc với mặt phẳng (P) nên hai đường thẳng này trùng nhau. Suy ra A, B, C là ba điểm thẳng hàng và $(P) \perp AC$. □

VÍ DỤ 2. a) Cho hình chóp $S.ABCD$ có các cạnh bên bằng nhau, đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O (Hình bên trái). Gọi d là đường thẳng đi qua S và vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Chứng minh d đi qua O.

b) Cho đoạn thẳng AB có O là trung điểm. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua O và vuông góc với AB; M, N là hai điểm cách đều hai đầu của đoạn thẳng AB sao cho M, N, O không thẳng hàng (Hình bên phải). Chứng minh M và N thuộc mặt phẳng (P).





Lời giải.

a) Ta có $SA = SC$ suy ra $SO \perp AC$; $SB = SD$ suy ra $SO \perp BD$. Suy ra $SO \perp (ABCD)$.
Theo giả thiết, ta có đường thẳng d đi qua S và vuông góc với $(ABCD)$.
Do qua điểm S chỉ có duy nhất một đường thẳng vuông góc với $(ABCD)$ nên d phải trùng với đường thẳng SO, suy ra d đi qua O.

b) Ta có $MA = MB$ suy ra $OM \perp AB$; $NA = NB$ suy ra $ON \perp AB$. Suy ra $AB \perp (OMN)$.
Theo giả thiết, ta có (P) là mặt phẳng đi qua O và vuông góc với AB.
Do qua điểm O chỉ có duy nhất một mặt phẳng vuông góc với AB nên (P) phải trùng với (OMN), suy ra M và N thuộc (P).

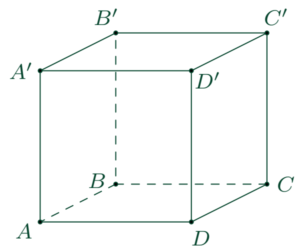
□

VÍ DỤ 3.

Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $AA' \perp (ABCD)$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và BC.

a) Qua M vẽ đường thẳng a song song với AA'. Chứng minh $a \perp (ABCD)$.

b) Qua N vẽ đường thẳng b vuông góc với $(ABCD)$. Chứng minh $b \parallel AA'$.



Lời giải.

a) Theo đề bài ta có $a \parallel AA'$ và $AA' \perp (ABCD)$, suy ra $a \perp (ABCD)$.

b) Theo đề bài ta có $b \perp (ABCD)$ và $AA' \perp (ABCD)$, suy ra $b \parallel AA'$.

□

VÍ DỤ 4. Cho mặt phẳng (P) và đường thẳng a cắt (P) tại O sao cho $a \perp (P)$. Giả sử b là đường thẳng đi qua điểm O và $b \perp a$. Chứng minh rằng $b \subset (P)$.

Lời giải.

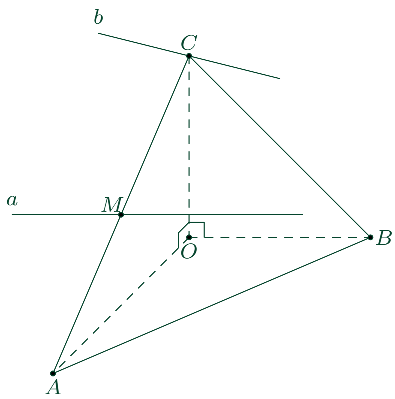
Ta lấy điểm M trong mặt phẳng (P), M khác O. Nếu $M \in b$ thì $b \subset (P)$. Xét $M \notin b$. Gọi c là đường thẳng đi qua O, M và (Q) là mặt phẳng đi qua b, c. Do $a \perp b$, $a \perp c$ nên $a \perp (Q)$. Qua điểm O có hai mặt phẳng (P) và (Q) cùng vuông góc với đường thẳng a, suy ra hai mặt phẳng đó trùng nhau theo Tính chất 1. Vậy $b \subset (P)$. □

VÍ DỤ 5.

Cho ba đoạn thẳng OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau.

a) Cho M là trung điểm của CA và a là đường thẳng tùy ý đi qua M và song song với mặt phẳng (OAB). Chứng minh $a \perp OC$.

b) Gọi b là một đường thẳng tuỳ ý đi qua C và b vuông góc với OC. Chứng minh $b \parallel (OAB)$.



Lời giải.

a) Ta có $OC \perp OA$ và $OC \perp OB$, suy ra $OC \perp (OAB)$ (1).
Ta có $a \parallel (OAB)$ (2).
Từ (1) và (2) suy ra $a \perp OC$.

b) Ta có $b \perp OC$ (3).
Từ (1) và (3), suy ra $b \parallel (OAB)$.

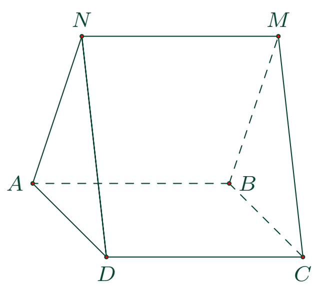
□

2. Bài tập áp dụng

BÀI 1. Giả sử $ABCD$ và $ABMN$ là hai hình chữ nhật không cùng nằm trong một mặt phẳng. Chứng minh rằng $(ADN) \parallel (BCM)$.

Lời giải.

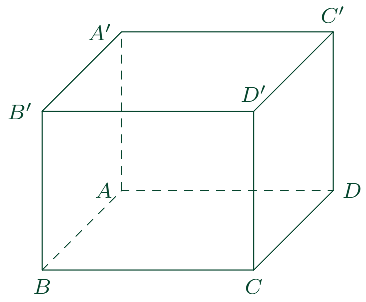
Vì hai đường thẳng AD, AN cắt nhau trong mặt phẳng (ADN), $AB \perp AD$, $AB \perp AN$ nên $AB \perp (ADN)$. Do hai đường thẳng BC, BM cắt nhau trong mặt phẳng (BCM), $AB \perp BC$, $AB \perp BM$ nên $AB \perp (BCM)$.
Vì hai mặt phẳng (ADN) và (BCM) cùng vuông góc với AB nên $(ADN) \parallel (BCM)$.



□

BÀI 2.

Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $AA' \perp (ABCD)$. Chứng minh rằng $AA' \perp (A'B'C'D')$.



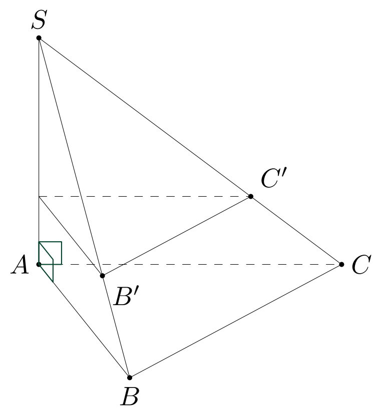
Lời giải.

Ta có $AA' \perp (ABCD)$ và $(A'B'C'D') \parallel (ABCD)$ nên $AA' \perp (A'B'C'D')$. □

BÀI 3. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$. Mặt phẳng (P) khác mặt phẳng (ABC), vuông góc với đường thẳng SA và lần lượt cắt các đường thẳng SB, SC tại B', C'. Chứng minh rằng $B'C' \parallel BC$.

Lời giải.

Ta có hai mặt phẳng (ABC) và (P) cùng vuông góc với SA nên chúng song song với nhau.
Hơn nữa, BC và $B'C'$ lần lượt là giao tuyến của mặt phẳng (SBC) với hai mặt phẳng song song trên nên chúng song song với nhau.



□

BÀI 4. Cho mặt phẳng (P) và đường thẳng a cắt nhau tại điểm O, $a \perp (P)$. Giả sử điểm M thỏa mãn $OM \perp (P)$. Chứng minh rằng $M \in a$.

Lời giải.

Vì hai đường thẳng a và OM cùng đi qua O và vuông góc với mặt phẳng (P) nên hai đường thẳng này trùng nhau. Suy ra $M \in a$. □

BÀI 5. Cho đường thẳng d và mặt phẳng (P) cắt nhau tại O. Lấy các điểm A, B thuộc d và khác O; các điểm A', B' thuộc (P) thỏa mãn $AA' \perp (P)$, $BB' \perp (P)$. Chứng minh rằng $\dfrac{AA'}{BB'} = \dfrac{OA}{OB}$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} AA' \perp (P) \\ BB' \perp (P) \end{cases} \Rightarrow AA' \parallel BB'$.

Xét tam giác OAA' có $BB' \parallel AA'$ nên theo định lí Talet ta có $\dfrac{OA}{OB} = \dfrac{AA'}{BB'}$. □

Dạng 3. Phép chiếu vuông góc

1. Ví dụ minh hoạ

VÍ DỤ 1. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC$. Gọi O là hình chiếu của S trên mặt phẳng (ABC).

a) Chứng minh rằng O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

b) Xác định hình chiếu của đường thẳng SA trên mặt phẳng (ABC).

c) Chứng minh rằng nếu $AO \perp BC$ thì $SA \perp BC$.

d) Xác định hình chiếu của các tam giác SBC, SCA, SAB trên mặt phẳng (ABC).

Lời giải.

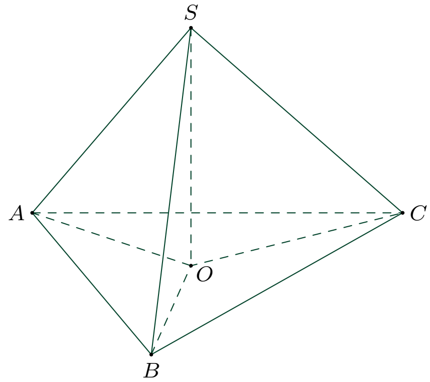
a) Chứng minh rằng O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.
Tam giác SOA, SOB, SOC bằng nhau (c-g-c). Suy ra $OA = OB = OC$. Do đó O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC

b) Xác định hình chiếu của đường thẳng SA trên mặt phẳng (ABC).

Vì O là hình chiếu của S lên mặt phẳng (ABC) nên AO là hình chiếu của SA lên mặt phẳng (ABC)

c) Chứng minh rằng nếu $AO \perp BC$ thì $SA \perp BC$.
Ta có $AO \perp BC$, $SO \perp BC$. Suy ra $BC \perp (SAO) \Rightarrow SA \perp BC$.

d) Xác định hình chiếu của các tam giác SBC, SCA, SAB trên mặt phẳng (ABC).
Hình chiếu của tam giác SBC trên mặt phẳng (ABC) là tam giác OBC.
Hình chiếu của tam giác SAB trên mặt phẳng (ABC) là tam giác OAB.
Hình chiếu của tam giác SAC trên mặt phẳng (ABC) là tam giác OAC.



□

2. Bài tập áp dụng

BÀI 1. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, tam giác ABC vuông tại B.

a) Xác định hình chiếu của điểm S trên mặt phẳng (ABC).

b) Xác định hình chiếu của tam giác SBC trên mặt phẳng (ABC).

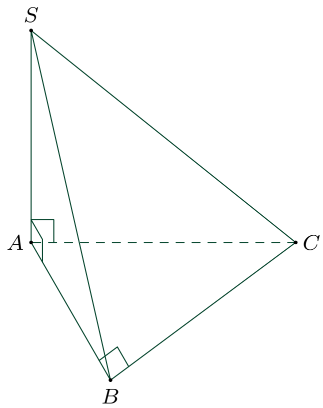
c) Xác định hình chiếu của tam giác SBC trên mặt phẳng (SAB).

Lời giải.

a) Do $SA \perp (ABC)$. Suy ra A là hình chiếu của điểm S lên mặt phẳng (ABC).

b) Hình chiếu của tam giác SBC lên mặt phẳng (ABC) là tam giác ABC.

c) Ta có $BC \perp (SAB)$ nên B là hình chiếu của điểm C lên mặt phẳng (SAB). Do đó hình chiếu của tam giác SBC lên mặt phẳng (SAB) là tam giác SAB.



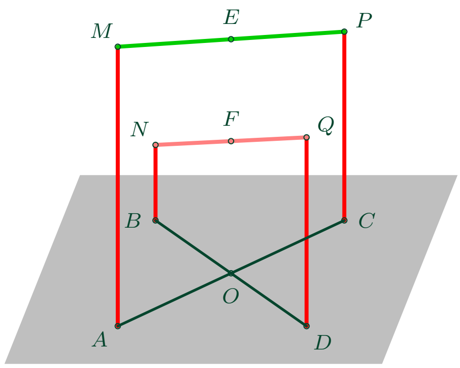
□

BÀI 2.
Trên một sân phẳng nằm ngang, tại các điểm A, B, C, D người ta dựng các cột thẳng đứng AM, BN, CP, DQ và nối các sợi dây thẳng giữa M và P, N và Q như hình bên.

a) Hãy chỉ ra hình chiếu của các dây MP và NQ trên sân.

b) Chứng minh rằng nếu $BD \perp AC$ thì $BD \perp MP$.

c) Chứng minh rằng nếu $ABCD$ là một hình bình hành thì các trung điểm E, F tương ứng của các đoạn thẳng MP và NQ có cùng hình chiếu trên sân.



Lời giải.

a) Do các cột có phương thẳng đứng và sân thuộc mặt phẳng nằm ngang nên các cột vuông góc với sân. Vậy A, B, C, D tương ứng là hình chiếu của M, N, P, Q trên sân. Do đó AC, BD tương ứng là hình chiếu của MP, NQ trên sân.

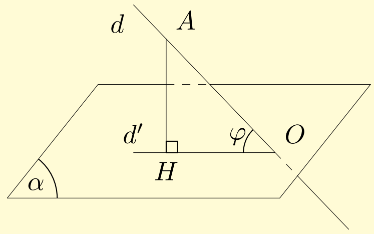
b) Nếu $BD \perp AC$, mà AC là hình chiếu của MP trên sân và BD thuộc sân nên theo định lý ba đường vuông góc ta có $BD \perp MP$.

c) Nếu $ABCD$ là một hình bình hành thì các đoạn thẳng AC, BD có chung trung điểm O. Do EO là đường trung bình của hình thang $ACPM$ nên $EO \parallel MA$. Mặt khác, MA vuông góc với sân nên EO cũng vuông góc với sân. Vậy O là hình chiếu của E trên sân. Tương tự, O cũng là hình chiếu của F trên sân. Vậy E và F có cùng hình chiếu trên sân.

□

Dạng 4. Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

Cho đường thẳng d và mặt phẳng (P) cắt nhau.
Nếu $d \perp (P)$ thì $(d,(P)) = 90^\circ$.



Nếu $d \not\perp (P)$ thì để xác định góc giữa d và (P), ta thường làm như sau

a) Xác định giao điểm O của d và (P).

b) Lấy một điểm A trên d (A khác O). Xác định hình chiếu vuông góc (vuông góc) H của A lên (P). Lúc đó $(d,(P)) = (d,d') = \widehat{AOH}$.

1. Ví dụ minh hoạ

VÍ DỤ 1. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, $SA = a$, $CA = CB = a\sqrt{7}$, $AB = 2a$.

a) Gọi α là góc giữa SB và (ABC). Tính $\tan\alpha$.

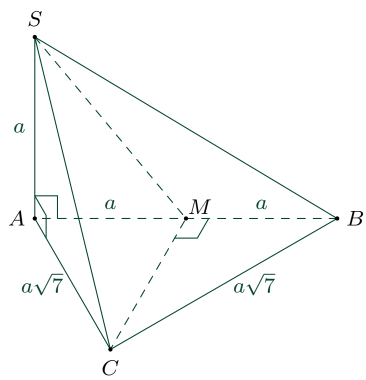
b) Tính góc giữa SC và (SAB).

Lời giải.

a)

Do $SA \perp (ABC)$ nên $\alpha = \widehat{SBA}$. Tam giác SAB vuông tại A nên

$$\tan\alpha = \tan\widehat{SBA} = \frac{SA}{AB} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}.$$



b) Gọi M là trung điểm của AB. Tam giác ABC cân tại C nên $CM \perp AB$.
Mặt khác, từ $SA \perp (ABC)$ ta có $CM \perp SA$. Do đó $CM \perp (SAB)$. Vậy góc giữa SC và (SAB) bằng $\widehat{CSM}$.
Tam giác SAC vuông tại A nên $SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = \sqrt{a^2 + 7a^2} = a\sqrt{8}$.
Ta có $AM = \frac{1}{2}AB = a$. Do đó, tam giác SAM vuông cân tại A và $SM = a\sqrt{2}$.
Tam giác CMS vuông tại M và $\cos\widehat{CSM} = \frac{SM}{SC} = \frac{a\sqrt{2}}{a\sqrt{8}} = \frac{1}{2}$.
Vậy $\widehat{CSM} = 60^\circ$ và do đó góc giữa SC và (SAB) bằng 60°.

□

VÍ DỤ 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, $SA = a\sqrt{6}$ và SA vuông góc $(ABCD)$. Hãy xác định các góc giữa

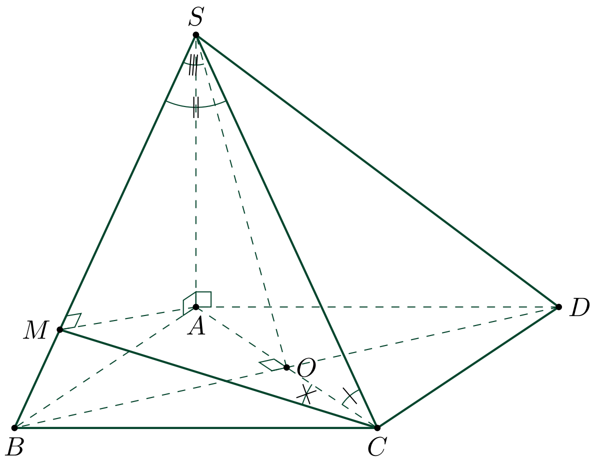
a) SC và $(ABCD)$.

b) SC và (SAB).

c) SB và (SAC).

d) AC và (SBC).

Lời giải.



a) Vì AC là hình chiếu vuông góc của SC lên $(ABCD)$ nên góc giữa SC và $(ABCD)$ là $\widehat{SCA}$.
Trong tam giác SCA, ta có $\tan\widehat{SCA} = \dfrac{SA}{SC} = \sqrt{3}$ nên $(SC,(ABCD)) = \widehat{SCA} = 60^\circ$.

b) Vì $BC \perp (SAB)$ tại B nên SB là hình chiếu vuông góc của SC lên (SAB).
Do đó $(SC,(SAB)) = (SC,SB) = \widehat{CSB}$.
Trong tam giác SCB, ta có $\tan\widehat{CSB} = \dfrac{BC}{SB} = \dfrac{a}{a\sqrt{7}}$ nên $(SC,(SAB)) = \arctan\dfrac{1}{\sqrt{7}}$.

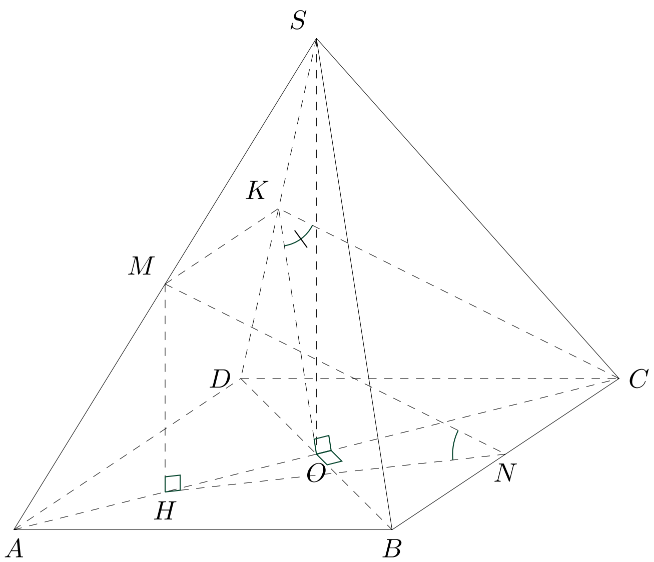
c) Vì $BO \perp (SAC)$ tại O nên SO là hình chiếu vuông góc của SB lên (SAC).
Do đó $(SB,(SAC)) = (SB,SO) = \widehat{BSO}$.
Trong tam giác SBO, ta có $\sin\widehat{BSO} = \dfrac{BO}{SB} = \dfrac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{a\sqrt{7}} = \dfrac{1}{\sqrt{14}}$ nên $(SB,(SAC)) = \arcsin\dfrac{1}{\sqrt{14}}$.

d) Gọi M là hình chiếu vuông góc của A lên SB. Lúc đó $AM \perp SB$ và $AM \perp BC$ (vì $BC \perp (SAB)$ và $AM \subset (SAB)$) nên $AM \perp (SBC)$ tại M. Do đó MC là hình chiếu vuông góc của AC lên (SBC).
Suy ra $(AC,(SBC)) = (AC,MC) = \widehat{ACM}$.
Trong tam giác SAB, ta có $AM = \dfrac{SA.AB}{SB} = \dfrac{a\sqrt{6}}{\sqrt{7}}$ và trong tam giác ACM, ta có $\sin\widehat{ACM} = \dfrac{MA}{AC} = \dfrac{\sqrt{21}}{7}$ nên $(AC,(SBC)) = \arcsin\dfrac{\sqrt{21}}{7}$.

□

VÍ DỤ 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, tâm O, SO vuông góc $(ABCD)$. Gọi M,N lần lượt là trung điểm SA, BC. Biết rằng góc giữa MN và $(ABCD)$ bằng 60°. Tính góc giữa MN và (SBD).

Lời giải.



Gọi H là trung điểm AO. Ta có $MH \parallel SO$ nên $MH \perp (ABCD)$, suy ra HN là hình chiếu vuông góc của MN lên $(ABCD)$.
Do đó $(MN,(ABCD)) = (MN,KN) = \widehat{MNK} = 60^\circ$.

Trong tam giác HCN, ta có $HN^2 = HC^2 + CN^2 - 2HC.CN.\cos\widehat{HCN}$, suy ra $HN = \dfrac{a\sqrt{10}}{4}$.
Mà trong tam giác MNH, ta có $\sqrt{3} = \tan\widehat{MNH} = \dfrac{MH}{HN}$ nên $MH = \dfrac{a\sqrt{30}}{4}$, suy ra $SO = 2MH = \dfrac{a\sqrt{30}}{2}$.
Gọi K là trung điểm SD.
Ta có $MKCN$ là hình bình hành nên MN song song KC. Do đó $(MN,(SBD)) = (KC,(SBD))$.
Mà $CO \perp (SBD)$ tại O (do $CO \perp DO$ và $CO \perp SO$) nên KO là hình chiếu vuông góc của KC lên (SBD). Suy ra $(KC,(SBD)) = (KC,KO) = \widehat{CKO}$.
Ta có $OK = \dfrac{1}{2}SD = \dfrac{1}{2}\sqrt{OD^2 + OS^2} = a\sqrt{2}$.
Mặt khác, trong tam giác COK, ta có $\tan\widehat{CKO} = \dfrac{OC}{OK} = \dfrac{1}{2}$, suy ra $(KC,(SBD)) = \arctan\widehat{CKO} = \arctan\dfrac{1}{2} \approx 26°33'$. □

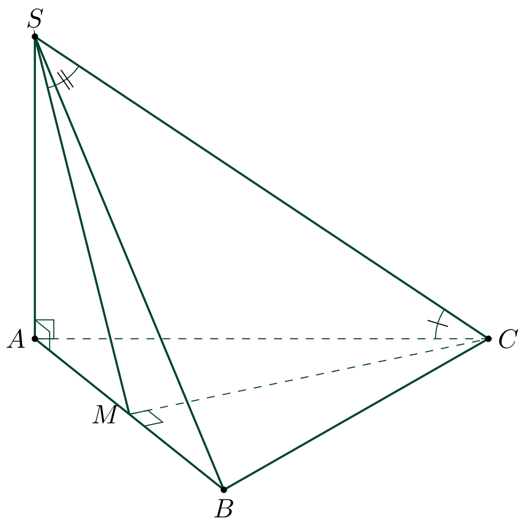
2. Bài tập áp dụng

BÀI 1. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, $SA = 2a$ và SA vuông góc với đáy. Tính góc giữa

a) SC và (ABC).

b) SC và (SAB).

Lời giải.



a) Vì AC là hình chiếu vuông góc của SC lên (ABC) nên $(SC,(ABC)) = (SC,AC) = \widehat{SCA}$.
Ta có $\tan\widehat{SCA} = \dfrac{SA}{AC} = 2$ nên $(SC,(ABC)) = \arctan 2 \approx 63°$.

b) Gọi M là trung điểm AB. Vì $\begin{cases} CM \perp AB \\ CM \perp SA \text{ (vì } SA \perp (ABC)) \end{cases}$ nên $CM \perp (SAB)$ tại M.
Suy ra SM là hình chiếu vuông góc của SC lên (SAB).
Do đó $(SC,(SAB)) = (SC,SM) = \widehat{CSM}$.

Trong tam giác SMC, ta có $\tan\widehat{CSM} = \dfrac{MC}{SM} = \dfrac{MC}{\sqrt{SA^2 + AM^2}} = \dfrac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{4a^2 + \frac{a^2}{4}}} = \dfrac{\sqrt{51}}{17}$.

Vậy $(SC,(SAB)) = \arctan\dfrac{\sqrt{51}}{17} \approx 23°$.

□

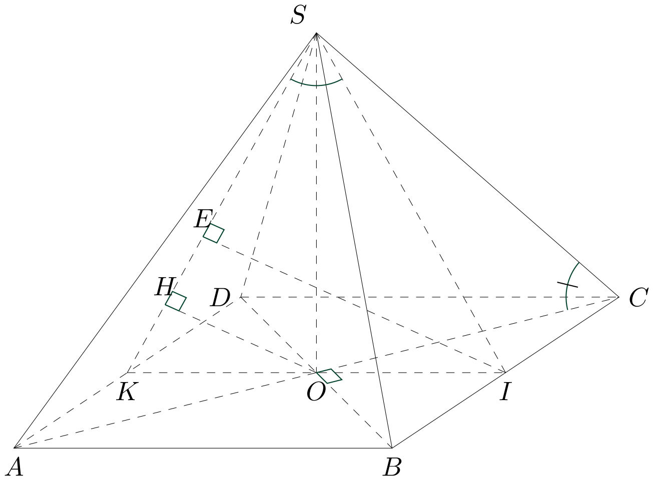
BÀI 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O, cạnh a, SO vuông góc $(ABCD)$ và $SO = a\sqrt{6}$.

a) Tính góc giữa cạnh bên SC và mặt đáy.

b) Tính góc giữa SO và (SAD).

c) Gọi I là trung điểm BC. Tính góc giữa SI và (SAD).

Lời giải.



a) Vì OC là hình chiếu vuông góc của SC lên $(ABCD)$ nên $(SC,(ABCD)) = (SC,OC) = \widehat{SCO}$.
Trong tam giác SOC, ta có $\tan\widehat{SCO} = \dfrac{SO}{OC} = 2\sqrt{3}$, do đó $(SC,(ABCD)) = \arctan 2\sqrt{3} \approx 74^\circ$.

b) Gọi K là trung điểm AD và H là hình chiếu vuông góc của O lên SK. Ta có $OH \perp SK$ và $OH \perp AD$ (vì $AD \perp (SKO)$) nên $OH \perp (SAD)$, do đó H là hình chiếu vuông góc của O lên (SAD), suy ra SH là hình chiếu vuông góc của SO lên (SAD).
Do đó $(SO,(SAD)) = (SO,SH) = \widehat{HSO}$.
Trong tam giác SOK, ta có $\tan\widehat{HSO} = \tan\widehat{KSO} = \dfrac{OK}{OS} = \dfrac{\sqrt{3}}{6}$. Suy ra $(SO,(SAD)) = \arctan\dfrac{\sqrt{6}}{12} \approx 12^\circ$.

c) Trong tam giác SKI, kẻ IE vuông góc SK tại E. Lúc đó $IE \perp (SAD)$ (do $IE \parallel OH$). Suy ra SE là hình chiếu vuông góc của SI lên (SAD).
Do đó $(SI,(SAD)) = (SI,SE) = \widehat{ISE} = 2\widehat{HSO} \approx 24^\circ$.

□

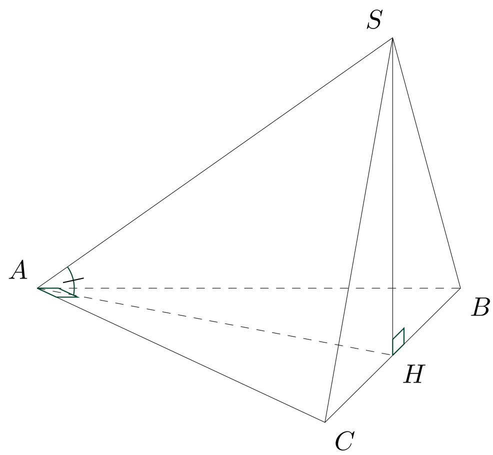
BÀI 3. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, $BC = a$, $SA = SB = SC = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Tính góc giữa SA và (ABC).

Lời giải.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của S lên (ABC). Lúc đó ba tam giác SAH, SBH và SCH bằng nhau (vì chúng là 3 tam giác vuông có chung cạnh SH và có ba cạnh SA, SB, SC bằng nhau).
Suy ra $HA = HB = HC$ nên H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác vuông ABC, suy ra H là trung điểm BC.
Do đó HA là hình chiếu vuông góc của SA lên (ABC), suy ra $(SA,(ABC)) = (SA,AH) = \widehat{SAH}$.

Ta có $\cos SAH = \dfrac{AH}{SA} = \dfrac{\frac{BC}{2}}{SA} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$,

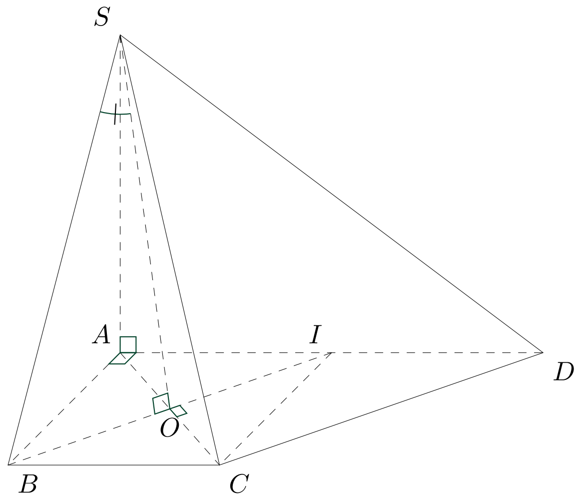
suy ra $(SA,(ABC)) = \arccos\dfrac{\sqrt{3}}{3} \approx 55^\circ$.



□

BÀI 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và B, $AB = BC = a$, $AD = 2a$. Cạnh bên $SA = a\sqrt{2}$ và vuông góc với đáy. Tính góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (SAC).

Lời giải.



Gọi I là trung điểm AD. Lúc đó $ABCI$ là hình vuông, suy ra $BI \perp AC$ (tại O).
Mà $SA \perp (ABCD)$ nên $BI \perp SA$. Do đó $BI \perp (SAC)$ tại O nên SO là hình chiếu vuông góc của SB lên (SAC), suy ra $(SB, (SAC)) = (SB, SO) = \widehat{BSO}$.

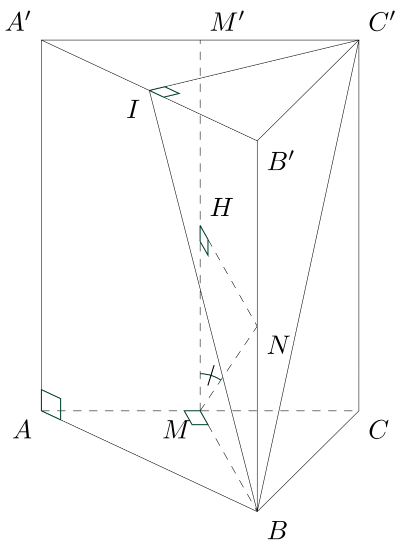
Trong tam giác SBO, ta có $\sin \widehat{BSO} = \dfrac{BO}{SB} = \dfrac{\frac{BI}{2}}{\sqrt{SA^2 + AB^2}} = \dfrac{\sqrt{6}}{6}$, suy ra $(SB, (SAC)) = \arcsin \dfrac{\sqrt{6}}{6} \approx 24°$. □

BÀI 5. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a và AA' vuông góc (ABC). Đường chéo BC' của mặt bên $(BCC'B')$ hợp với $(ABB'A')$ một góc $30°$.

a) Tính AA'.

b) Gọi M, N lần lượt là trung điểm AC và BB'. Tính góc giữa MN và $(ACC'A')$.

Lời giải.



a) Gọi I là trung điểm $A'B'$. Ta có $C'I \perp A'B'$ và $C'I \perp BB'$ nên $C'I \perp (ABB'A')$ tại I. Do đó IB là hình chiếu vuông góc của $C'B$ lên $(ABB'A')$. Suy ra $(BC', (ABB'A')) = \widehat{C'BI} = 30°$.
Trong tam giác $C'IB$, ta có $\tan \widehat{C'BI} = \dfrac{IC'}{IB}$, suy ra $IB = \dfrac{3a}{2}$. Khi đó $AA' = BB' = \sqrt{IB^2 - IB'^2} = a\sqrt{2}$.

b) Gọi M' là trung điểm $A'C'$ và H là trung điểm MM'.
Ta có $BM \perp (ACC'A')$ (vì $BM \perp AC$ và $BM \perp AA'$) mà $HN \parallel BM$ nên $HN \perp (ACC'A')$ tại H. Suy ra MH là hình chiếu vuông góc của MN lên $(ACC'A')$.
Do đó $(MN, (ACC'A')) = (MN, MH) = \widehat{NMH}$. Mà trong tam giác NMH, ta có $\tan \widehat{NMH} = \dfrac{HN}{MH} = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$.
Vậy $(MN, (ACC'A')) = \arctan \dfrac{\sqrt{6}}{2} \approx 51°$.

□

C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

CÂU 1. Khẳng định nào sau đây đúng?

(A) Hai mặt phẳng cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.
(B) Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.
(C) Hai mặt phẳng song song khi và chỉ khi góc giữa chúng bằng 0°.
(D) Hai đường thẳng trong không gian cắt nhau khi và chỉ khi góc giữa chúng lớn hơn 0° và nhỏ hơn 90°.

Lời giải.

"Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau".
Chọn đáp án (B) □

CÂU 2. Cho hai đường thẳng phân biệt a, b và mặt phẳng (P), trong đó $a \perp (P)$. Chọn mệnh đề **sai** trong các mệnh đề dưới đây.

(A) Nếu $b \parallel a$ thì $b \perp (P)$. (B) Nếu $b \perp (P)$ thì $a \parallel b$. (C) Nếu $a \perp b$ thì $b \parallel (P)$. (D) Nếu $b \subset (P)$ thì $b \perp a$.

Lời giải.

Mệnh đề sai là "Nếu $a \perp b$ thì $b \parallel (P)$", vì b có thể nằm trong (P).
Chọn đáp án (C) □

CÂU 3. Cho hai đường thẳng phân biệt a, b và mặt phẳng (α). Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **đúng**?

(A) Nếu $a \parallel (\alpha)$ và $b \parallel (\alpha)$ thì $b \parallel a$.
(B) Nếu $a \perp (\alpha)$ và $b \perp (\alpha)$ thì $b \parallel (\alpha)$.
(C) Nếu $a \parallel (\alpha)$ và $b \perp (\alpha)$ thì $a \perp b$.
(D) Nếu $a \parallel (\alpha)$ và $b \perp a$ thì $b \perp (\alpha)$.

Lời giải.

- Nếu $a \parallel (\alpha)$ và $b \parallel (\alpha)$ thì $b \parallel a$. Sai vì a và b có thể chéo nhau.
- Nếu $a \perp (\alpha)$ và $b \perp (\alpha)$ thì $b \parallel (\alpha)$. Sai vì nếu $a \perp (\alpha)$ và $b \perp (\alpha)$ thì $b \parallel a$.
- Nếu $a \parallel (\alpha)$ và $b \perp (\alpha)$ thì $a \perp b$. Đúng.
- Nếu $a \parallel (\alpha)$ và $b \perp a$ thì $b \perp (\alpha)$. Sai, ví dụ $b \subset (\alpha)$ và $b \perp a$ nhưng $b \not\perp (\alpha)$.

Chọn đáp án (C) □

CÂU 4. Trong không gian cho đường thẳng Δ và điểm O. Qua O có bao nhiêu đường thẳng vuông góc với Δ?

(A) Vô số. (B) 3. (C) 2. (D) 1.

Lời giải.

Trong không gian cho đường thẳng Δ và điểm O. Qua O có vô số đường thẳng vuông góc với Δ, nằm trên mặt phẳng đi qua O và vuông góc với Δ.
Chọn đáp án (A) □

CÂU 5. Trong không gian, số mặt phẳng đi qua điểm M và vuông góc với đường thẳng a là

(A) 1. (B) 2. (C) 0. (D) vô số.

Lời giải.

Trong không gian, có một và chỉ một mặt phẳng đi qua điểm M và vuông góc với đường thẳng a.
Chọn đáp án (A) □

CÂU 6. Trong không gian cho các đường thẳng a, b, c và mặt phẳng (P). Mệnh đề nào sau đây là **sai**?

(A) Nếu $a \perp (P)$ và $b \parallel (P)$ thì $a \perp b$.
(B) Nếu $a \perp b$, $c \perp b$ và a cắt c thì b vuông góc với mặt phẳng chứa a và c.
(C) Nếu $a \parallel b$ và $b \perp c$ thì $c \perp a$.
(D) Nếu $a \perp b$ và $b \perp c$ thì $a \parallel c$.

Lời giải.

Xét hình tứ diện $OABC$ vuông đỉnh O. Khi đó OB vuông góc với OA và OC nhưng OA và OC không song song. Mệnh đề "Nếu $a \perp b$ và $b \perp c$ thì $a \parallel c$" sai.
Chọn đáp án (D) □

CÂU 7. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau

(A) Nếu $a \parallel (\alpha)$ và $b \perp a$ thì $b \parallel (\alpha)$.
(B) Nếu $a \parallel (\alpha)$ và $b \perp a$ thì $b \perp (\alpha)$.
(C) Nếu $a \parallel (\alpha)$ và $b \perp (\alpha)$ thì $a \perp b$.
(D) Nếu $a \parallel (\alpha)$ và $b \parallel a$ thì $b \parallel (\alpha)$.

Lời giải.

Nếu $a \parallel (\alpha)$ và $b \perp (\alpha)$ thì $a \perp b$.
Chọn đáp án (C) □

CÂU 8. Trong không gian cho đường thẳng a và điểm M. Có bao nhiêu đường thẳng đi qua M và vuông góc với đường thẳng a?

(A) Không có. (B) Có hai. (C) Có vô số. (D) Có một và chỉ một.

Lời giải.

Có vô số đường thẳng đi qua điểm M và vuông góc với đường thẳng a. Các đường thẳng này thuộc mặt phẳng đi qua M và vuông góc với đường thẳng a.

Chọn đáp án (C) □

CÂU 9. Trong không gian, cho hai đường thẳng phân biệt a, b và mặt phẳng (P), trong đó $a \perp (P)$. Trong các mệnh đề sau, có bao nhiêu mệnh đề đúng?

(I) Nếu $b \parallel a$ thì $b \perp (P)$.

(II) Nếu $b \perp (P)$ thì $b \parallel a$.

(III) Nếu $b \perp a$ thì $b \parallel (P)$.

(IV) Nếu $b \parallel (P)$ thì $b \perp a$.

(A) 1. (B) 2. (C) 4. (D) 3.

Lời giải.

Mệnh đề (I), (II) và (IV) đều đúng (do có trong phần lý thuyết ở Sách giáo khoa). Mệnh đề (III) sai vì kết luận thiếu trường hợp b có thể nằm trong (P).

Chọn đáp án (D) □

CÂU 10. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông, $SA \perp (ABCD)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

(A) $AB \perp (SAD)$. (B) $AB \perp (SAC)$. (C) $AB \perp (SBC)$. (D) $AB \perp (SCD)$.

Lời giải.

Ta có $SA \perp (ABCD)$ nên $SA \perp AB$, mà $AB \perp AD$ nên $AB \perp (SAD)$.

Chọn đáp án (A) □

CÂU 11. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều, biết $SA \perp (ABC)$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định **đúng**?

(A) $AB \perp BC$. (B) $SA \perp BC$. (C) $SB \perp AB$. (D) $SC \perp BC$.

Lời giải.

Vì $SA \perp (ABC)$ nên $SA \perp AB$, $SA \perp BC$ và $SA \perp AC$.

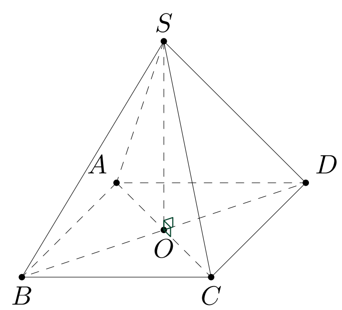
Chọn đáp án (B) □

CÂU 12. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O. Biết rằng $SA = SC$, $SB = SD$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

(A) $CD \perp (SBD)$. (B) $AB \perp (SAC)$. (C) $SO \perp (ABCD)$. (D) $CD \perp AC$.

Lời giải.

Vì $SA = SC$ nên $\triangle SAC$ cân tại S.
Mà O là trung điểm AC nên $SO \perp AC$.
Tương tự, ta cũng có $SO \perp BD$.
Mà $AC \cap BD = O \subset (ABCD) \Rightarrow SO \perp (ABCD)$.



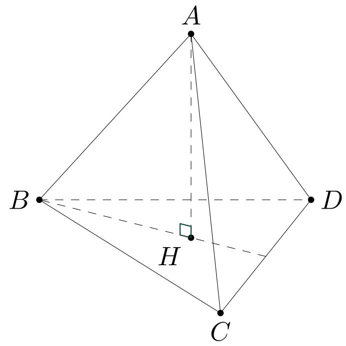
Chọn đáp án (C) □

CÂU 13. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi H là trực tâm của tam giác BCD và AH vuông góc với mặt phẳng đáy. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

(A) $AB \perp CD$. (B) $AB = CD$. (C) $AC = BD$. (D) $CD \perp BD$.

Lời giải.

Vì AH vuông góc với (BCD) nên $AH \perp CD$. (1)
Do H là trực tâm của tam giác BCD nên $BH \perp CD$. (2)
Từ $(1),(2)$ suy ra $\begin{cases} CD \perp AH \\ CD \perp BH \end{cases} \Rightarrow CD \perp (ABH) \Rightarrow CD \perp AB$.



Chọn đáp án (A) □

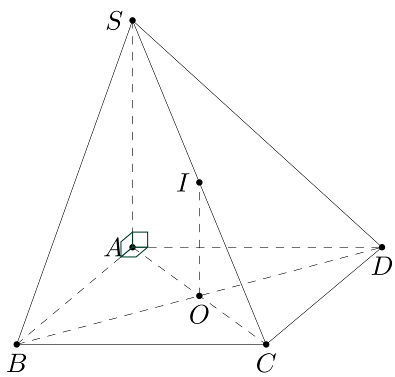
CÂU 14. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$ và đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O. Gọi I là trung điểm của SC. Xét các khẳng định sau

1. $OI \perp (ABCD)$.
2. $BD \perp SC$.
3. (SAC) là mặt phẳng trung trực của đoạn BD.
4. $SB = SC = SD$.

Trong bốn khẳng định trên, số khẳng định **sai** là?

(A) 1. (B) 4. (C) 2. (D) 3.

Lời giải.



- Ta có $OI \parallel SA \Rightarrow OI \perp (ABCD)$.
- Ta có $\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp SA \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp SC$.
- Ta có (SAC) đi qua trung điểm và vuông góc với đoạn BD nên (SAC) là mặt phẳng trung trực của đoạn BD.
- Ta có $SB = SD < SC$ do $(AB < AC)$.

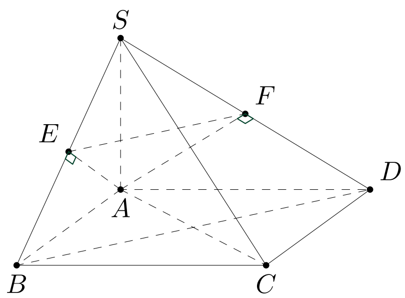
Chọn đáp án (A) □

CÂU 15. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi AE, AF lần lượt là đường cao của tam giác SAB và tam giác SAD. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

(A) $SC \perp (AEF)$. (B) $SC \perp (AED)$. (C) $SC \perp (AFB)$. (D) $SC \perp (AEC)$.

Lời giải.

Vì SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ nên $SA \perp BC$.
Mà $AB \perp BC$ nên suy ra $BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AE \subset (SAB)$.
Tam giác SAB có đường cao $AE \Rightarrow AE \perp SB$.
Mà $AE \perp BC \Rightarrow AE \perp (SBC) \Rightarrow AE \perp SC$.
Tương tự, ta chứng minh được $AF \perp SC$. Do đó $SC \perp (AEF)$.



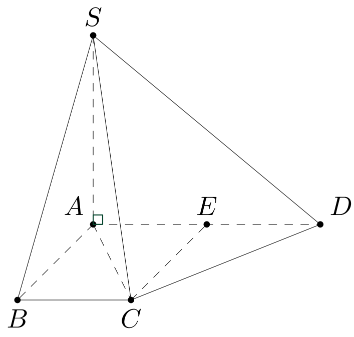
Chọn đáp án (A) □

CÂU 16. Cho hình chóp $S.ABCD$ với đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D, có $AD = CD = a$, $AB = 2a$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy $(ABCD)$, E là trung điểm của AB. Chỉ ra mệnh đề **sai** trong các mệnh đề dưới đây.

(A) $CE \perp (SAB)$. (B) $CE \perp (SDC)$.
(C) $CB \perp (SAC)$. (D) Tam giác SDC vuông tại D.

Lời giải.

Từ giả thết suy ra $ADCE$ là hình vuông $\Rightarrow \begin{cases} CE \perp AB \\ CE = AD = a. \end{cases}$



Ta có $\begin{cases} CE \perp AB \\ CE \perp SA \text{ (do} SA \perp (ABCD)) \end{cases} \Rightarrow CE \perp (SAB)$.

Do đó $CE \perp (SAB)$ đúng.

Vì $CE = AD = a$ nên $CE = \dfrac{1}{2}AB$.

$\Rightarrow \triangle ABC$ vuông tại $C \Rightarrow CB \perp AB$.

Kết hợp với $CB \perp SA$ (do $SA \perp (ABCD)$) suy ra $CB \perp (SAC)$.

Do đó $CB \perp (SAC)$ đúng.

Ta có $\begin{cases} CD \perp AD \\ CD \perp SA \text{ (do} SA \perp (ABCD)) \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAD) \Rightarrow CD \perp SD$. Do đó Tam giác SDC vuông tại D là đúng.

Dùng phương pháp loại trừ, suy ra Tam giác SDC vuông tại D là phương án sai.

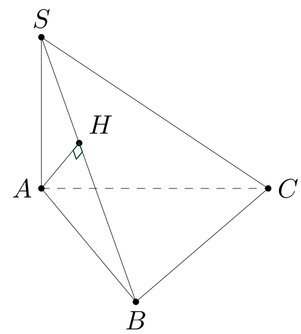
Chọn đáp án B □

CÂU 17. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, cạnh bên SA vuông góc với đáy. Gọi H là chân đường cao kẻ từ A của tam giác SAB. Khẳng định nào dưới đây là **sai**?

A $AH \perp BC$. **B** $AH \perp AC$. **C** $AH \perp SC$. **D** $SA \perp BC$.

Lời giải.

Theo bài ra, ta có $SA \perp (ABC)$ mà $BC \subset (ABC) \Rightarrow SA \perp BC$.



Tam giác ABC vuông tại B, có $AB \perp BC$.

$\Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AH$.

Khi đó $\begin{cases} AH \perp SB \\ AH \perp BC \end{cases} \Rightarrow AH \perp (SBC) \Rightarrow AH \perp SC$.

Nếu có $AH \perp AC$, trong khi $SA \perp AC$ thì $AC \perp (SAH)$

$\Rightarrow AC \perp AB$ (vô lý).

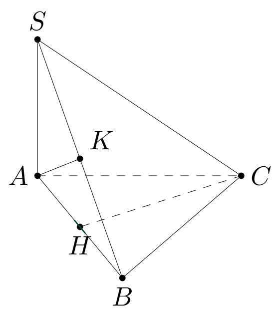
Chọn đáp án B □

CÂU 18. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác cân tại C. Cạnh bên SA vuông góc với đáy. Gọi H, K lần lượt là trung điểm của AB và SB. Khẳng định nào dưới đây **sai**?

A $CH \perp AK$. **B** $AK \perp SB$. **C** $CH \perp SB$. **D** $CH \perp SA$.

Lời giải.

Vì H là trung điểm của AB, tam giác ABC cân suy ra $CH \perp AB$.



Ta có $SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp CH$.

Mà $CH \perp AB$ suy ra $CH \perp (SAB)$.

Mặt khác $AK \subset (SAB)$.

Nên CH vuông góc với các đường thẳng SA, SB, AK.

Và $AK \perp SB$ chỉ xảy ra khi và chỉ khi tam giác SAB cân tại S.

Chọn đáp án B □

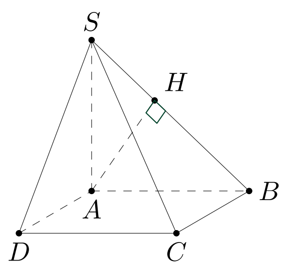
CÂU 19. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$, SA vuông góc với đáy. Kẻ AH vuông góc với SB ($H \in SB$). Chọn mệnh đề đúng.

A $AH \perp SC$. **B** $AH \perp (SBD)$. **C** $AH \perp (SCD)$. **D** $AH \perp SD$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} SA \perp BC \\ AB \perp BC \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AH$.

Mà $AH \perp SB$ nên $AH \perp (SBC) \Rightarrow AH \perp SC$.



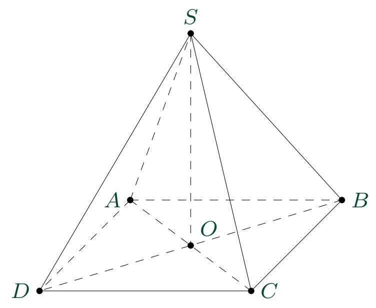
Chọn đáp án (A) □

CÂU 20. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành, hai đường chéo AC, BD cắt nhau tại O và $SA = SB = SC = SD$. Khi đó, khẳng định nào sau đây là **sai**?

(A) $AC \perp BD$. (B) $SO \perp BD$. (C) $SO \perp AC$. (D) $SO \perp (ABCD)$.

Lời giải.

- Vì $ABCD$ là hình bình hành nên khẳng định $AC \perp BD$ là sai.
- Ta có $\triangle SAC$, $\triangle SBD$ cân tại O có SO là trung tuyến nên SO đồng thời là đường cao $\Rightarrow SO \perp AC$, $SO \perp BD$.
- Vì $SO \perp AC$, $SO \perp BD$ nên $SO \perp (ABCD)$.



Chọn đáp án (A) □

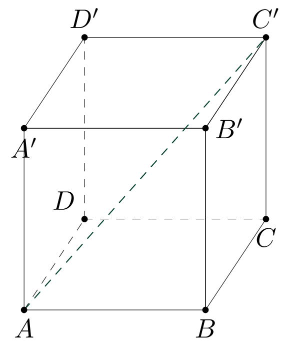
CÂU 21. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Có bao nhiêu phát biểu đúng trong các phát biểu sau

a) $AC \perp B'D'$ b) $AC \perp B'C'$ c) $AC \perp DD'$ d) $AC' \perp BD$

(A) 4. (B) 3. (C) 2. (D) 1.

Lời giải.

Ta có $AC \perp (BDD'B') \Rightarrow AC \perp B'D'$.
Do $BC \parallel B'C'$ và $(BC, AC) = 45^\circ \Rightarrow (B'C', AC) = 45^\circ$.
Mà $DD' \perp (ABCD) \Rightarrow DD' \perp AC$
$BD \perp (ACC'A') \Rightarrow BD \perp AC'$.



.

Chọn đáp án (B) □

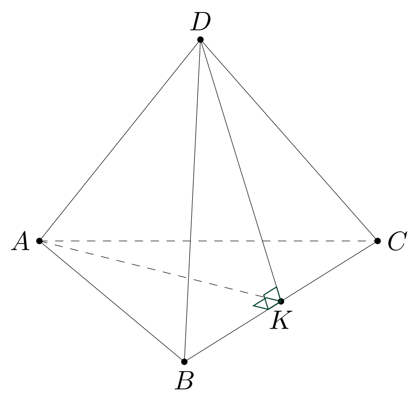
CÂU 22. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = AC$, $DB = DC$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

(A) $AB \perp BC$. (B) $CD \perp (ABD)$. (C) $BC \perp AD$. (D) $AB \perp (ABC)$.

Lời giải.

Gọi K là trung điểm BC.

Ta có: $\begin{cases} AK \perp BC \\ DK \perp BC \end{cases} \Rightarrow BC \perp (ADK) \Rightarrow BC \perp AD$.



Chọn đáp án (C) □

CÂU 23. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông, cạnh bên SA vuông góc với đáy $(ABCD)$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

(A) $CD \perp (SBC)$. (B) $SA \perp (ABC)$. (C) $BC \perp (SAB)$. (D) $BD \perp (SAC)$.

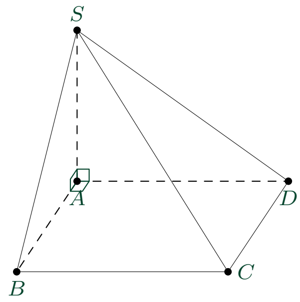
Lời giải.

Từ giả thiết, ta có : $SA \perp (ABC)$.

Ta có : $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB)$.

Ta có: $\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp SA \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC)$.

Do đó: $CD \perp (SBC)$ sai.



Chọn đáp án (A) □

CÂU 24. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, SA vuông góc với $(ABCD)$. Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

(A) $SA \perp BD$. (B) $CD \perp SD$. (C) $SD \perp AC$. (D) $BC \perp SB$.

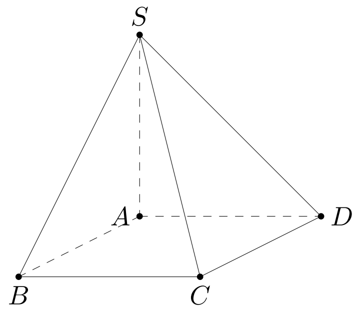
Lời giải.

$SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp BD$

$\begin{cases} CD \perp AD \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAD) \Rightarrow CD \perp SD$

$\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SB$

Mệnh đề $SD \perp AC$ là sai.



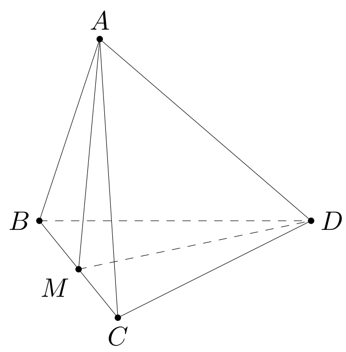
Chọn đáp án (C) □

CÂU 25. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = AC = 2$, $DB = DC = 3$. Khẳng định nào sau đây **đúng**?

(A) $BC \perp AD$. (B) $AC \perp BD$. (C) $AB \perp (BCD)$. (D) $DC \perp (ABC)$.

Lời giải.

Gọi M là trung điểm của BC.
Do ΔABC cân tại A $(AB = AC)$
$\Rightarrow AM \perp BC$ (1).
Tương tự, do ΔBCD cân tại D $(DB = DC)$
$\Rightarrow DM \perp BC$ (2).
Từ (1) và (2) suy ra $BC \perp (AMD)$.
$\Rightarrow BC \perp AD$.

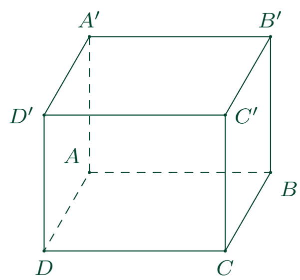


Chọn đáp án (A) □

CÂU 26.

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Tính góc giữa AC' và BD.

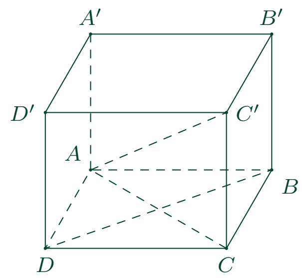
(A) $90°$. (B) $45°$. (C) $60°$. (D) $120°$.



Lời giải.

Ta có $\begin{cases} BD \perp AC (\text{do } ABCD \text{ là hình vuông}) \\ BD \perp CC' \end{cases} \Rightarrow BD \perp AC'$.

Do đó góc giữa AC' và BD bằng 90°.

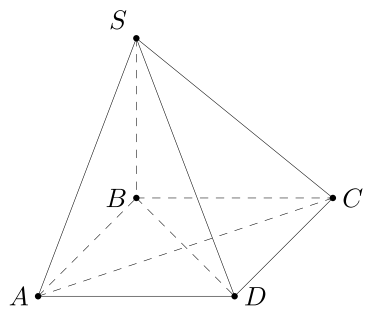


Chọn đáp án (A) □

CÂU 27.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông và SB vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ (tham khảo hình vẽ). Khẳng định nào sau đây đúng?

(A) $AC \perp (SCD)$. (B) $AC \perp (SBD)$. (C) $AC \perp (SBC)$. (D) $AC \perp (SAB)$.



Lời giải.

Từ giả thiết $ABCD$ là hình vuông và SB vuông góc với đáy.

Ta có $\begin{cases} AC \perp BD \\ AC \perp SB \end{cases} \Rightarrow AC \perp (SBD)$.

Chọn đáp án (B) □

CÂU 28. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC vuông tại B, SA vuông góc với đáy ABC. Khẳng định nào dưới đây là **sai**?

(A) $SB \perp BC$. (B) $SA \perp AB$. (C) $SB \perp AC$. (D) $SA \perp BC$.

Lời giải.

Ta có $SA \perp (ABC)$ nên $SA \perp AB$ và $SA \perp BC$.

Mặt khác ta có $\begin{cases} SA \perp BC \\ AB \perp BC \end{cases}$ nên $BC \perp (SAB)$, suy ra $SB \perp BC$.

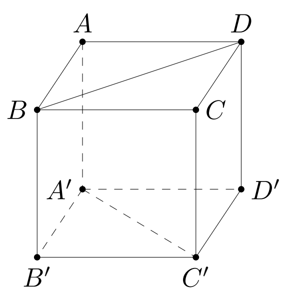
Vậy khẳng định sai là "$SB \perp AC$".

Chọn đáp án (C) □

CÂU 29.

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Khi đó góc giữa hai đường thẳng BD và $A'C'$ bằng

(A) 90°. (B) 30°. (C) 60°. (D) 45°.



Lời giải.

Ta có $\begin{cases} A'C' \perp B'D' \\ A'C' \perp BB' \end{cases} \Rightarrow A'C' \perp (BDD'B') \Rightarrow A'C' \perp BD$.

Vậy góc giữa hai đường thẳng BD và $A'C'$ bằng 90°.

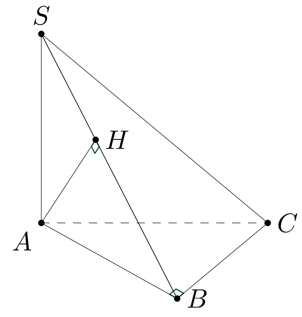
Chọn đáp án (A) □

CÂU 30. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$ và $\triangle ABC$ vuông ở B. Gọi AH là đường cao của $\triangle SAB$. Khẳng định nào sau đây là **sai?**

(A) $SA \perp BC$. (B) $AH \perp AC$. (C) $AH \perp BC$. (D) $AH \perp SC$.

Lời giải.

Ta có $AH \perp (SBC) \Rightarrow AH \perp BC$ và $AH \perp SC$.
Ta có $SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp BC$.
Vậy khẳng định **sai** là $AH \perp AC$.



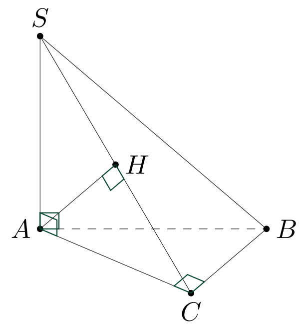
Chọn đáp án (B) □

CÂU 31. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$ và $\triangle ABC$ vuông ở C, AH là đường cao của $\triangle SAC$ .Khẳng định nào sau đây đúng?

(A) $SA \perp SC$.
(B) $AH \perp BC$.
(C) $SA \perp AH$.
(D) $AH \perp AC$.

Lời giải.

Vì $SA \perp (ABC)$ nên $BC \perp SA$, kết hợp với $BC \perp AC$ suy ra $BC \perp (SAC)$, do đó $BC \perp AH$.



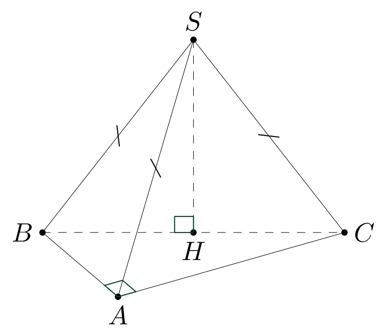
Chọn đáp án (B) □

CÂU 32. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC$ và tam giác ABC vuông tại A. Vẽ $SH \perp (ABC), H \in (ABC)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

(A) H trùng với trung điểm của BC.
(B) H trùng với trực tâm tam giác ABC.
(C) H trùng với trọng tâm tam giác ABC.
(D) H trùng với trung điểm của AC.

Lời giải.

Do $SA = SB = SC$ nên H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, suy ra H là trung điểm của BC.



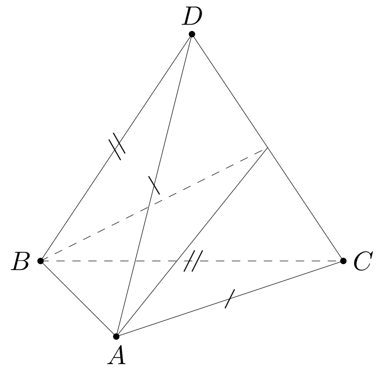
Chọn đáp án (A) □

CÂU 33. Cho tứ diện $ABCD$ có $AC = AD$ và $BC = BD$. Khẳng định nào sau đây đúng?

(A) $AB \perp (ABC)$.
(B) $BC \perp CD$.
(C) $AB \perp CD$.
(D) $CD \perp (ABC)$.

Lời giải.

Theo giả thiết thì A và B cách đều C, D nên A, B nằm trên mặt phẳng trung trực của CD. Vậy $AB \perp CD$.



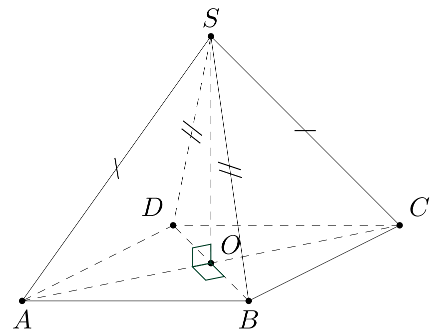
Chọn đáp án (C) □

CÂU 34. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O. Biết $SA = SC$ và $SB = SD$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

(A) $BD \perp (SAC)$. (B) $AB \perp (SBC)$. (C) $SO \perp (ABCD)$. (D) $AC \perp (SBD)$.

Lời giải.

Theo giả thiết AC, BD, SO đôi một vuông góc, do đó $SO \perp (ABCD), BD \perp (SAC), AC \perp (SBD)$, do AB có thể không vuông góc với BC nên "$AB \perp (SBC)$" là **sai**.



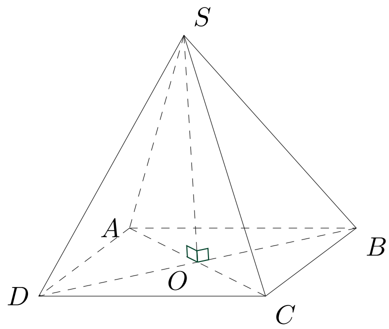
Chọn đáp án (B) □

CÂU 35. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ với O là tâm đa giác đáy $ABCD$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

(A) $BD \perp (SAC)$. (B) $BC \perp (SAB)$. (C) $AC \perp (SBD)$. (D) $OS \perp (ABCD)$.

Lời giải.

Vì $S.ABCD$ là hình chóp đều nên $OS \perp (ABCD)$ nên phương án D đúng.
Mặt khác $AC \perp BD$ suy ra $BD \perp (SAC)$ và $AC \perp (SBD)$ nên phương án A và C đúng.
Từ đó suy ra không thể có $BC \perp (SAB)$.



Chọn đáp án (B) □

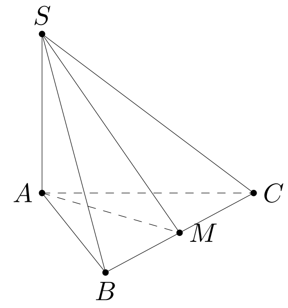
CÂU 36. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều, cạnh bên SA vuông góc với đáy, M là trung điểm BC, J là trung điểm BM. Khẳng định nào sau đây đúng ?

(A) $BC \perp (SAM)$. (B) $BC \perp (SAC)$. (C) $BC \perp (SAJ)$. (D) $BC \perp (SAB)$.

Lời giải.

Vì tam giác ABC đều và M là trung điểm BC nên $BC \perp AM$.

Khi đó $\begin{cases} BC \perp AM \\ BC \perp SA\,(SA \perp (ABC)) \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAM)$.



Chọn đáp án (A) □

CÂU 37. Cho tứ diện đều $ABCD$ có điểm M là trung điểm của cạnh CD. Chọn mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau.

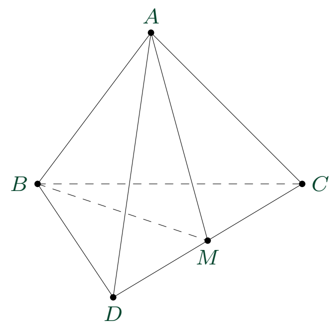
A $BM \perp AD$. **B** $BM \perp CD$. **C** $AM \perp CD$. **D** $AB \perp CD$.

Lời giải.

Ta có

- $BM \perp CD$ (vì tam giác BCD đều).
- $AM \perp CD$ (vì tam giác ACD đều).
- $DC \perp (ABM) \Rightarrow DC \perp AB$.

Vậy khẳng định "$BM \perp AD$" là mệnh đề sai.



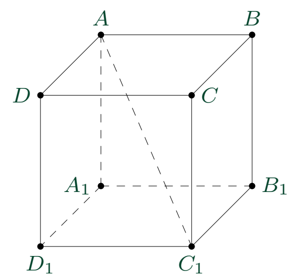
Chọn đáp án (A) □

CÂU 38. Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$, đường thẳng AC_1 vuông góc với mặt phẳng nào sau đây?

A (A_1DC_1). **B** (A_1BD). **C** (A_1CD_1). **D** (A_1B_1CD).

Lời giải.

Ta có $CC_1 \perp (ABCD)$ nên $CC_1 \perp BD$.
Lại có $AC \perp BD$ (do $ABCD$ là hình vuông), suy ra $BD \perp (ACC_1)$, suy ra $AC_1 \perp BD$.
Chứng minh tương tự ta cũng có $AC_1 \perp A_1D$.
Từ đây ta được $AC_1 \perp (A_1BD)$.



Chọn đáp án (B) □

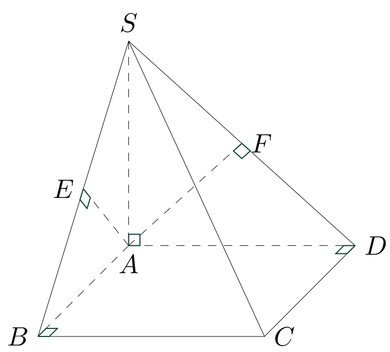
CÂU 39. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật và SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi AE, AF lần lượt là các đường cao của tam giác SAB và SAD. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A $SC \perp (AED)$. **B** $SC \perp (ACE)$. **C** $SC \perp (AFB)$. **D** $SC \perp (AEF)$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AE$ (1).

Mặt khác ta có $AE \perp SB$ (2).
Từ (1) và (2) ta có $AE \perp (SBC) \Rightarrow AE \perp SC$ (*).
Chứng minh tương tự ta cũng có $AF \perp (SDC)$
$\Rightarrow AF \perp SC$ (**).
Từ (*) và (**) ta có $SC \perp (AEF)$.



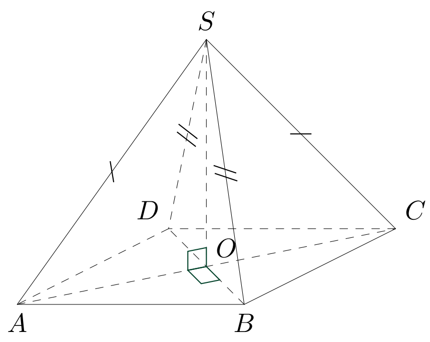
Chọn đáp án (D) □

CÂU 40. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O. Biết $SA = SC, SB = SD$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A $AC \perp (SBD)$. **B** $AC \perp SO$. **C** $AC \perp SB$. **D** $SC \perp AD$.

Lời giải.

Do $SA = SC$ nên $AC \perp SO$, mặt khác do $ABCD$ là hình thoi nên $AC \perp BD$. Từ đó nhận được $AC \perp (SBD)$. Hiển nhiên $AC \perp SB$.
Giả sử $SC \perp AD$, do $AD \parallel BC$ nên $SC \perp BC$, theo định lí "Ba đường vuông góc" thì $OC \perp BC$, điều này là vô lí.
Vậy khẳng định **sai** là "$SC \perp AD$".



Chọn đáp án (D) □

CÂU 41. Trong hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các cạnh đều bằng nhau. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

(A) $BB' \perp BD$. (B) $A'C' \perp BD$. (C) $A'B \perp DC'$. (D) $BC' \perp A'D$.

Lời giải.

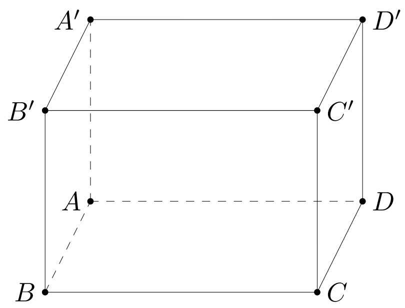
Do $ABCD$, $A'B'BA$, $BB'C'C$ là các hình thoi nên

$\begin{cases} AC \perp BD \\ B'D' \parallel BD \end{cases} \Rightarrow A'C' \perp BD.$

$\begin{cases} A'B \perp AB' \\ DC' \parallel AB' \end{cases} \Rightarrow A'B \perp DC'.$

$\begin{cases} BC' \perp B'C \\ A'D \parallel B'C \end{cases} \Rightarrow BC' \perp A'D.$

Nếu hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ không phải là hình hộp đứng thì ta không có $BB' \perp BD$.



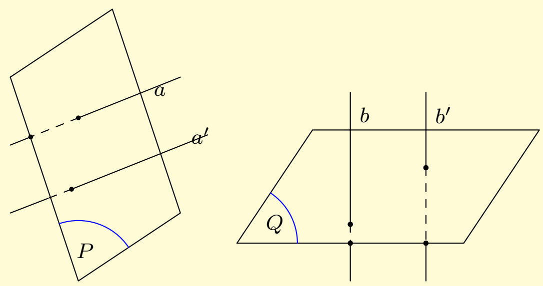
Chọn đáp án (A) □

Bài 24. HAI MẶT PHẲNG VUÔNG GÓC

A. TRỌNG TÂM KIẾN THỨC

1. Góc giữa hai mặt phẳng, hai mặt phẳng vuông góc

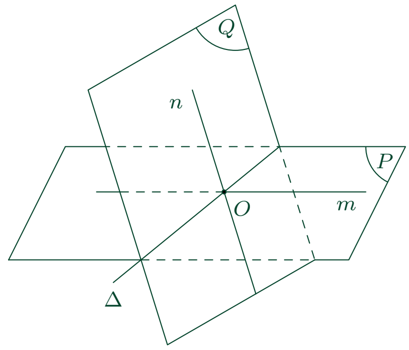
- Cho hai mặt phẳng (P) và (Q). Lấy các đường thẳng a, b tương ứng vuông góc với $(P), (Q)$. Khi đó, góc giữa a và b không phụ thuộc vào vị trí của a, b và được gọi là góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q).
- Hai mặt phẳng (P) và (Q) được gọi là vuông góc với nhau nếu góc giữa chúng bằng 90°.



Chú ý. *Nếu φ là góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) thì $0^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ$.*

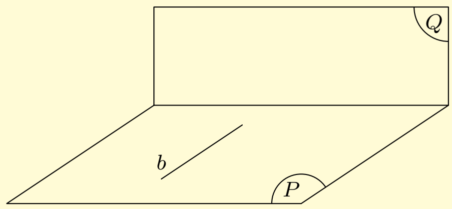
NHẬN XÉT.

Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) cắt nhau theo giao tuyến Δ. Lấy hai đường thẳng m, n tương ứng thuộc (P), (Q) cùng vuông góc với Δ tại một điểm O (nói cách khác, lấy một mặt phẳng vuông góc với Δ, cắt (P), (Q) tương ứng theo các giao tuyến m, n). Khi đó góc giữa (P) và (Q) bằng góc giữa m và n. Đặc biệt, (P) vuông góc với (Q) khi và chỉ khi m vuông góc với n.



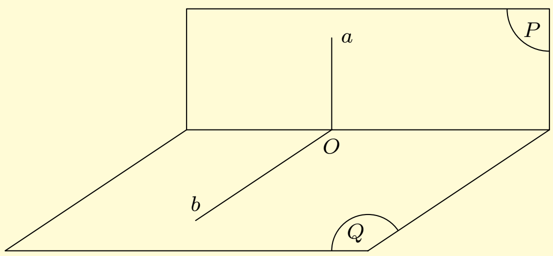
2. Điều kiện hai mặt phẳng vuông góc

Hai mặt phẳng vuông góc với nhau nếu mặt phẳng này chứa một đường thẳng vuông góc với mặt phẳng kia.
Kí hiệu
$$\begin{cases} b \subset (P) \\ b \perp (P) \end{cases} \Rightarrow (P) \perp (Q).$$



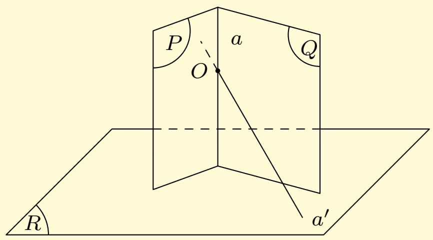
3. Tính chất hai mặt phẳng vuông góc

Với hai mặt phẳng vuông góc với nhau, bất kì đường thẳng nào nằm trong mặt phẳng này mà vuông góc với giao tuyến cũng vuông góc với mặt phẳng kia.
Kí hiệu
$$\begin{cases} (P) \perp (Q) \\ (P) \cap (Q) = c \\ a \subset (P), a \perp c \end{cases} \Rightarrow a \perp (Q).$$



Nhận xét. Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau. Mỗi đường thẳng qua điểm O thuộc (P) và vuông góc với mặt phẳng (Q) thì đường thẳng đó thuộc mặt phẳng (P).

Nếu hai mặt phẳng cắt nhau và cùng vuông góc với một mặt phẳng thứ ba thì giao tuyến của chúng vuông góc với mặt phẳng thứ ba đó.
Kí hiệu
$$\begin{cases} (P) \cap (Q) = a,\ (P) \perp (Q) \\ (P) \perp (R),\ (Q) \perp (R) \end{cases} \Rightarrow a \perp (R)$$

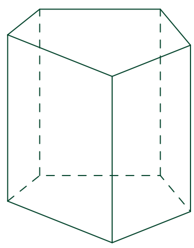


4. Một số hình lăng trụ đặc biệt

4.1. Hình lăng trụ đứng

Hình lăng trụ đứng là hình lăng trụ có các cạnh bên vuông góc với mặt đáy.

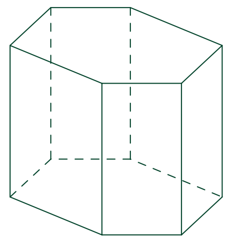
Hình lăng trụ đứng có các mặt bên là các hình chữ nhật và vuông góc với mặt đáy.



4.2. Hình lăng trụ đều

Hình lăng trụ đều là hình lăng trụ đứng có đáy là đa giác đều.

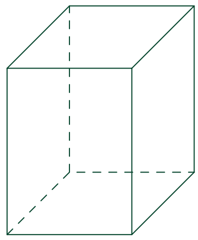
Hình lăng trụ đều có các mặt bên là các hình chữ nhật có cùng kích thước.



4.3. Hình hộp đứng

Hình hộp đứng là hình lăng trụ đứng có đáy là hình bình hành.

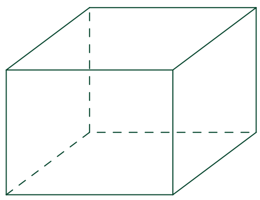
Hình hộp đứng có các mặt bên là các hình chữ nhật.



4.4. Hình hộp chữ nhật

Hình hộp chữ nhật là hình hộp đứng có đáy là hình chữ nhật.

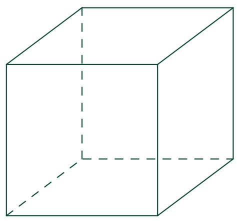
Hình hộp chữ nhật có các mặt bên là hình chữ nhật. Các đường chéo của hình hộp chữ nhật có độ dài bằng nhau và chúng cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường.



4.5. Hình lập phương

Hình lập phương là hình hộp chữ nhật có tất cả các cạnh bằng nhau.

Hình lập phương có các mặt là các hình vuông.

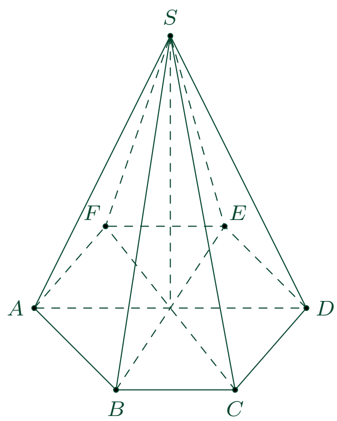


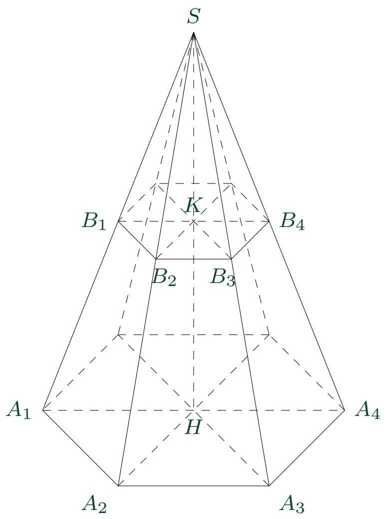
5. Hình chóp đều và hình chóp cụt đều

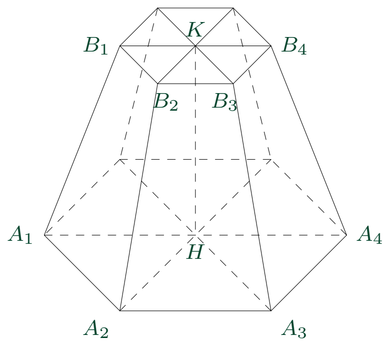
Hình chóp đều là hình chóp có đáy là đa giác đều và các cạnh bên bằng nhau.

Tương tự như đối với hình chóp, khi đáy của hình chóp đều là tam giác đều, hình vuông, ngũ giác đều, ... đôi khi ta cũng gọi rõ chúng tương ứng là chóp tam giác đều, tứ giác đều, ngũ giác đều, ...

Một hình chóp là đều khi và chỉ khi đáy của nó là một hình đa giác đều và hình chiếu của đỉnh trên mặt phẳng đáy là tâm của mặt đáy.







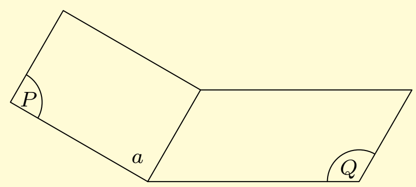
Cho hình chóp đều $S.A_1A_2\ldots A_n$. Một mặt phẳng không đi qua S và song song với mặt phẳng đáy, cắt các cạnh $SA_1, SA_2, \ldots SA_n$ tương ứng tại $B_1, B_2, \ldots, B_n$. Khi đó

- $S.B_1B_2\ldots B_n$ là một hình chóp đều.
- Gọi H là tâm của đa giác $A_1A_2\ldots A_n$ thì đường thẳng SH đi qua tâm K của đa giác đều $B_1B_2\ldots B_n$ và HK vuông góc với các mặt phẳng $(A_1A_2\ldots A_n)$, $(B_1B_2\ldots B_n)$.

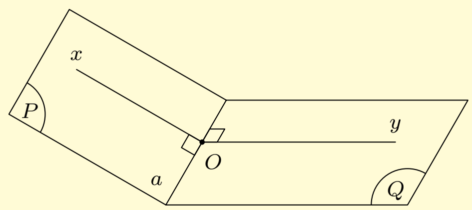
- Hình gồm các đa giác đều $A_1A_2\ldots A_n$, $B_1B_2\ldots B_n$ và các hình thang cân $A_1A_2B_2B_1$, $A_2A_3B_3B_2, \ldots, A_nA_1B_1B_n$ được tạo thành như trên được gọi là một *hình chóp cụt đều* (nói đơn giản là hình chóp cụt được tạo thành từ hình chóp đều $S.A_1A_2\ldots A_n$ sau khi cắt đi chóp đều $S.B_1B_2\ldots B_n$), kí hiệu là $A_1A_2\ldots A_n.B_1B_2\ldots B_n$.
- Các đa giác $A_1A_2\ldots A_n$ và $B_1B_2\ldots B_n$ được gọi là hai *mặt đáy*, các hình thang $A_1A_2B_2B_1$, $A_2A_3B_3B_2, \ldots, A_nA_1B_1B_n$ được gọi là các *mặt bên* của hình chóp cụt. Các đoạn thẳng A_1B_1, $A_2B_2, \ldots, A_nB_n$ được gọi là các *cạnh bên*; các cạnh của mặt đáy được gọi là các *cạnh đáy* của hình chóp cụt.
- Đoạn thẳng HK nối hai tâm của đáy được gọi là *đường cao* của hình chóp cụt đều. Độ dài của đường cao được gọi là *chiều cao* của hình chóp cụt.

6. Góc nhị diện

Hình gồm hai nửa mặt phẳng (P), (Q) có chung bờ a được gọi là một góc nhị diện, kí hiệu là $[P, a, Q]$. Đường thẳng a và các nửa mặt phẳng (P), (Q) tương ứng được gọi là các mặt phẳng của góc nhị diện đó.



Từ một điểm O bất kì thuộc cạnh a của góc nhị diện $[P, a, Q]$, vẽ các tia Ox, Oy tương ứng thuộc (P), (Q) và vuông góc với a. Góc xOy được gọi là một góc phẳng của góc nhị diện $[P, a, Q]$ (gọi tắt là góc phẳng nhị diện). Số đo của góc xOy không phụ thuộc vào vị trí của O trên a, được gọi là số đo của góc nhị diện $[P, a, Q]$.



- *Số đo của góc nhị diện có thể nhận từ 0° đến 180°. Góc nhị diện được gọi là vuông, nhọn, tù nếu nó có số đo tương ứng bằng, nhỏ hơn, lớn hơn 90°.*
- *Đối với hai điểm M, N không thuộc đường thẳng a, ta kí hiệu $[M, a, N]$ là góc nhị diện có cạnh a và các mặt phẳng tương ứng chứa M, N.*
- *Hai mặt phẳng cắt nhau tạo thành bốn góc nhị diện. Nếu một trong bốn góc nhị diện đó là góc nhị diện vuông thì các góc nhị diện còn lại cũng là góc nhị diện vuông.*

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP

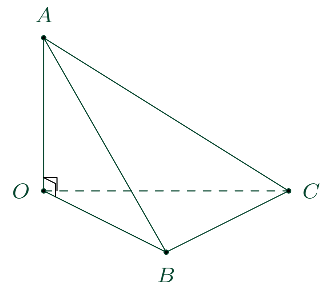
Dạng 1. Chứng minh hai mặt phẳng vuông góc

1. Ví dụ minh hoạ

VÍ DỤ 1. Cho tứ diện $OABC$ có $OA \perp OB$ và $OA \perp OC$. Chứng minh $(OAB) \perp (OBC)$, $(OAC) \perp (OBC)$.

Lời giải.

Do OA vuông góc với OB và OC nên $OA \perp (OBC)$. Mặt khác, các mặt phẳng (OAB), (OAC) chứa OA. Do đó chúng cùng vuông góc với mặt phẳng (OBC).

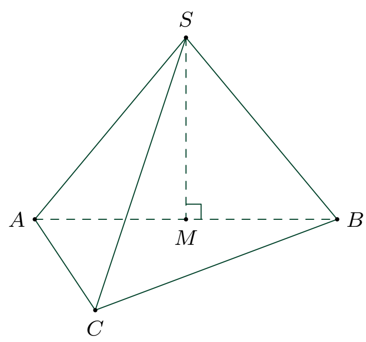


□

VÍ DỤ 2. Cho hình chóp $S.ABC$ có SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng (ABC). Gọi M là trung điểm của AB. Chứng minh $SM \perp (ABC)$.

Lời giải.

Theo đề bài ta có $(SAB) \perp (ABC)$. Ta có tam giác SAB đều và M là trung điểm của AB, suy ra $SM \perp AB$. Đường thẳng SM nằm trong (SAB) và vuông góc với giao tuyến AB của hai mặt phẳng (SAB) và (ABC). Từ đó suy ra $SM \perp (ABC)$.



□

VÍ DỤ 3. Cho hình chóp $S.ABC$ có tam giác ABC vuông tại A, $SA \perp (ABC)$. Gọi H và K lần lượt là hình chiếu của B trên các đường thẳng SA và SC. Chứng minh rằng:

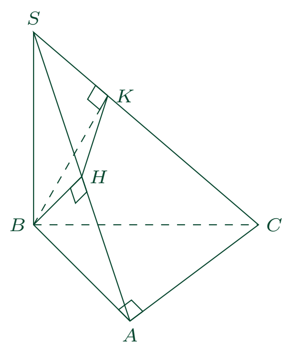
a) $(SAC) \perp (SAB)$.

b) $(SAC) \perp (BHK)$.

Lời giải.

a) Ta có $AC \perp AB$, $AC \perp SA$ (vì $SA \perp (ABC)$). Do đó $AC \perp (SAB)$. Vì vậy $(SAC) \perp (SAB)$.

b) Ta có $SC \perp BK$. Mặt khác $BH \perp SA$ và $BH \perp AC$ (vì $AC \perp (SAB)$). Do đó $BH \perp (SAC)$, suy ra $SC \perp BH$. Từ đó $SC \perp (BHK)$. Vì vậy $(SAC) \perp (BHK)$.



□

VÍ DỤ 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật và $SA \perp (ABCD)$. Gọi B', C', D' tương ứng là hình chiếu của A trên SB, SC, SD. Chứng minh rằng

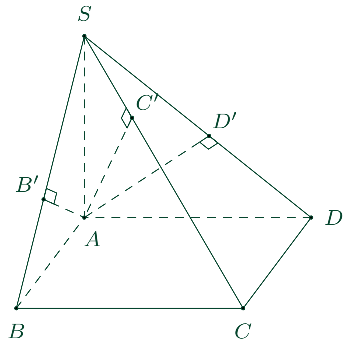
a) $(SBC) \perp (SAB)$, $AB' \perp (SBC)$, $AD' \perp (SCD)$.

b) Các điểm A, B', C', D' cùng thuộc một mặt phẳng.

Lời giải.

a) Vì $BC \perp SA$ và $BC \perp AB$ nên $BC \perp (SAB)$. Do đó, $(SBC) \perp (SAB)$. Đường thẳng AB' thuộc (SAB) và vuông góc với SB nên $AB' \perp (SBC)$. Tương tự $AD' \perp (SCD)$.

b) Từ câu a) ta có $AB' \perp SC$, $AD' \perp SC$. Các đường thẳng AB', AC', AD' cùng đi qua A và vuông góc với SC nên cùng thuộc một mặt phẳng. Do đó bốn điểm A, B', C', D' cùng thuộc một mặt phẳng.



$\square$

VÍ DỤ 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, $SA \perp (ABCD)$. Chứng minh rằng:

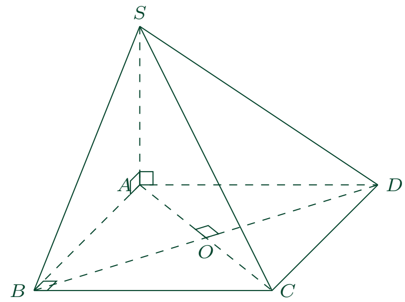
a) $(SAC) \perp (SBD)$.

b) $(SAB) \perp (SBC)$.

Lời giải.

a) Ta có $AC \perp BD$, $AC \perp SA$ (vì $SA \perp (ABCD)$).
Do đó $AC \perp (SBD)$. Vì vậy $(SAC) \perp (SBD)$.

b) Ta có $BC \perp AB$, $BC \perp SA$ (vì $SA \perp (ABCD)$).
Do đó $BC \perp (SBD)$. Vì vậy $(SBC) \perp (SAB)$.

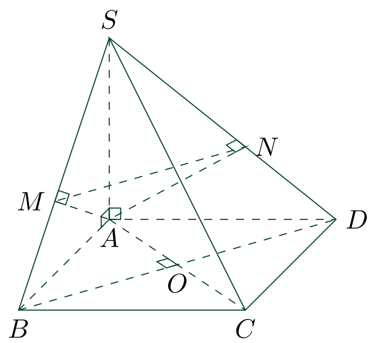


$\square$

VÍ DỤ 6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, $SA \perp (ABCD)$. Gọi M và N lần lượt là hình chiếu của A lên SB và SD. Chứng minh rằng $(SAC) \perp (AMN)$.

Lời giải.

Ta có $BD \perp AC$, $BD \perp SA$ (vì $SA \perp (ABCD)$).
Do đó $BD \perp (SAC)$.
Mà $MN \parallel BD$ (do $\dfrac{SM}{SB} = \dfrac{SN}{SD}$) nên $MN \perp (SAC)$.
Vì vậy $(SAC) \perp (AMN)$.

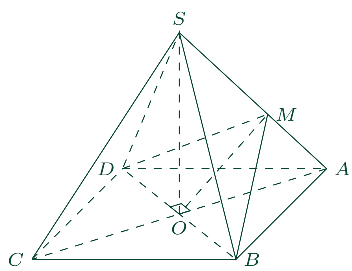


$\square$

VÍ DỤ 7. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O với $AB = a$, $AC = \dfrac{2a\sqrt{6}}{3}$, $SO \perp (ABCD)$, $SB = a$. Chứng minh rằng $(SAB) \perp (SAD)$.

Lời giải.

Gọi M là hình chiếu của O lên SA.
Khi đó $SA \perp (MBD)$. Do đó góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) chính là góc giữa hai đường thẳng MB và MD.
Ta có $BD = \dfrac{2a}{\sqrt{3}}$, $SO = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. Suy ra $OM = \dfrac{a}{\sqrt{3}} = \dfrac{1}{2}BD$.
Vì thế tam giác MBD vuông cân tại M,
từ đó $\widehat{BMD} = 90^\circ$ hay $(SAB) \perp (SAD)$.



$\square$

2. Bài tập áp dụng

BÀI 1. Cho tứ diện $ABCD$ có AB, AC, AD đôi một vuông góc với nhau. Chứng minh rằng các mặt phẳng $(ABC), (BAD), (CAD)$ đôi một vuông góc với nhau.

Lời giải.

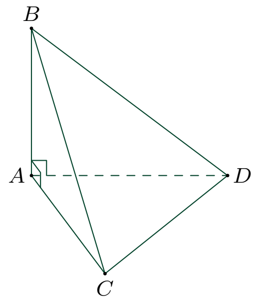
Ta có $AB \perp AC, AB \perp AD \Rightarrow AB \perp (CAD)$

$$\Rightarrow (ABC) \perp (CAD), (BAD) \perp (CAD).$$

Tương tự ta cũng có $CA \perp AB, CA \perp AD$

$$\Rightarrow CA \perp (BAD) \Rightarrow (CAD) \perp (BAD).$$

Vậy các mặt phẳng $(ABC), (BAD), (CAD)$ từng đôi một vuông góc với nhau.

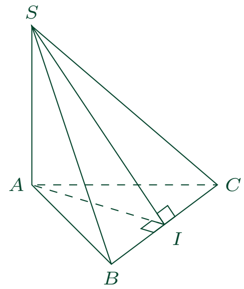


□

BÀI 2. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, $SA = 2a$, $SA \perp (ABC)$. Gọi I là trung điểm của BC. Chứng minh rằng $(SAI) \perp (SBC)$.

Lời giải.

Ta có $SA \perp (ABC)$ nên $BC \perp SA$.
Vì $AB = AC$ nên $BC \perp AI$.
Do đó $BC \perp (SAI)$. Vì vậy $(SBC) \perp (SAI)$.

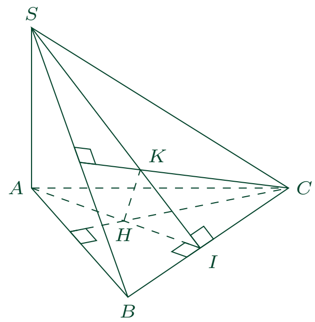


□

BÀI 3. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$. Gọi H và K lần lượt là trực tâm các tam giác ABC và SBC. Chứng minh rằng $(SBC) \perp (CHK)$.

Lời giải.

Gọi $I = AH \cap BC$. Khi đó $BC \perp (SAI)$,
suy ra $BC \perp SI$. Do đó S, K, I thẳng hàng.
Ta có $SB \perp CK$.
Mặt khác $CH \perp AB$, $CH \perp SA$ suy ra $CS \perp (SAB)$.
Từ đó $SB \perp SH$.
Do đó $SB \perp (CHK)$. Vì vậy $(SBC) \perp (CHK)$.

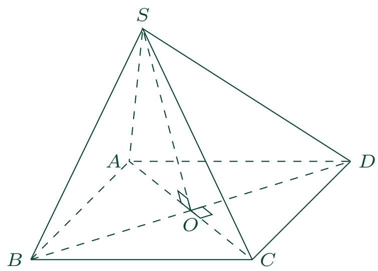


□

BÀI 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi và $SA = SB = SC$. Chứng minh rằng $(SBD) \perp (ABCD)$.

Lời giải.

Ta có $AC \perp BD$.
Gọi O là tâm hình thoi $ABCD$.
Vì $SA = SC$ nên $AC \perp SO$.
Do đó $AC \perp (SBD)$. Vì vậy $(ABCD) \perp (SBD)$.

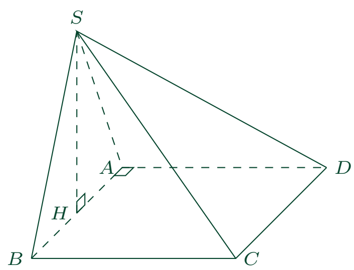


□

BÀI 5. Trong mặt phẳng (P) cho hình vuông $ABCD$. Gọi S là một điểm không thuộc (P) sao cho SAB là tam giác đều và $(SAB) \perp (ABCD)$. Chứng minh rằng $(SAD) \perp (SAB)$.

Lời giải.

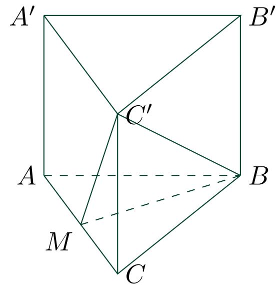
Gọi H là trung điểm AB.
Ta có SAB là tam giác đều nên $SH \perp AB$.
Mà $(SAB) \perp (ABCD)$ nên $SH \perp (ABCD)$,
suy ra $AD \perp SH$.
Mặt khác $AD \perp AB$. Do đó $AD \perp (SAB)$.
Từ đó $(SAD) \perp (SAB)$.



BÀI 6. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $AB = AC = a$, $AC = a\sqrt{2}$. Gọi M là trung điểm của AC. Chứng minh rằng $(BC'M) \perp (ACC'A')$.

Lời giải.

Vì $AB = AC$ nên $BM \perp AC$.
$ABC.A'B'C'$ là lăng trụ đứng nên $BM \perp AA'$.
Do đó $BM \perp (ACC'A')$.
Vì vậy $(BC'M) \perp (ACC'A')$.

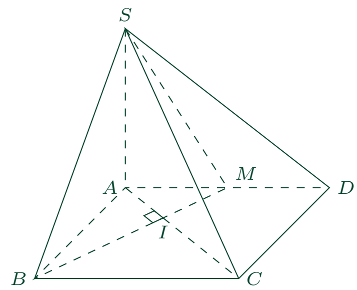


□

BÀI 7. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a$, $AD = a\sqrt{2}$ và $SA \perp (ABCD)$. Gọi M là trung điểm AD. Chứng minh rằng $(SAC) \perp (SMB)$.

Lời giải.

Gọi $I = AC \cap BM$.
Vì $SA \perp (ABCD)$ nên $BM \perp SA$.
Theo giả thiết ta suy ra $AC^2 = 3a^2$, $AI^2 = \dfrac{a^2}{3}$.
$MI^2 = \dfrac{1}{9}MB^2 = \dfrac{a^2}{6}$ Do đó $AI^2 + MI^2 = MA^2$.
Từ đó $BM \perp AC$.
Suy ra $BM \perp (SAC)$. Vì vậy $(SBM) \perp (SAC)$.

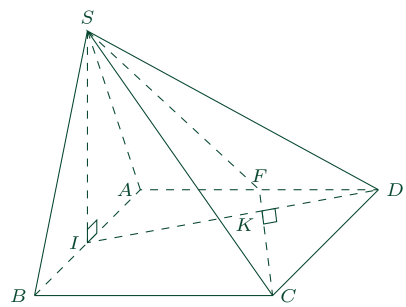


□

BÀI 8. Cho hình vuông $ABCD$ và tam giác đều SAB cạnh a nằm trong hai mặt phẳng vuông góc nhau. Gọi I và F lần lượt là trung điểm AB và AD. Chứng minh rằng $(SID) \perp (SFC)$.

Lời giải.

Gọi $K = CF \cap ID$.
Tam giác SAB đều nên $SI \perp AB$.
Mà $(SAB) \perp (ABCD)$ nên $SI \perp (ABCD)$,
suy ra $CF \perp SI$.
Mặt khác $\widehat{KFD} + \widehat{KDF} = \widehat{KFD} + \widehat{KCD} = 90^\circ$.
Suy ra $CF \perp ID$. Do đó $CF \perp (SID)$.
Vì vậy $(SFC) \perp (SID)$.



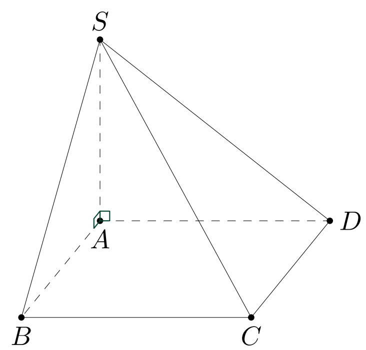
□

BÀI 9.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$, đáy $ABCD$ là hình chữ nhật (Hình bên). Chứng minh rằng:

a) $(SAB) \perp (ABCD)$;

b) $(SAB) \perp (SAD)$.



Lời giải.

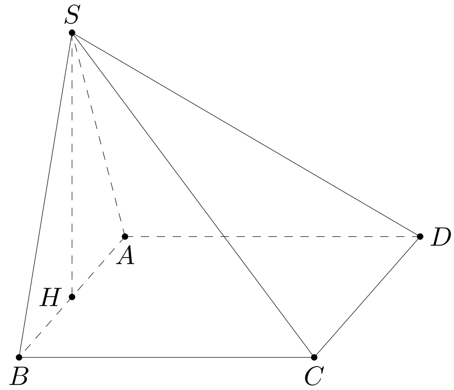
a) Do $SA \perp (ABCD), SA \subset (SAB)$ nên $(SAB) \perp (ABCD)$.

b) Vì $SA \perp (ABCD), AB \subset (ABCD)$ nên $SA \perp AB$.
Do AB vuông góc với hai đường thẳng SA và AD cắt nhau trong mặt phẳng (SAD) nên $AB \perp (SAD)$.
Ta có: $AB \perp (SAD), AB \subset (SAB)$ nên $(SAB) \perp (SAD)$.

□

BÀI 10.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có $(SAB) \perp (ABCD)$, đáy $ABCD$ là hình chữ nhật (Hình bên). Chứng minh rằng: $(SBC) \perp (SAB)$



Lời giải.

Do $(SAB) \perp (ABCD), (SAB) \cap (ABCD) = AB, BC \subset (ABCD)$ và $BC \perp AB$ nên $BC \perp (SAB)$.
Ta có $BC \subset (SBC)$ và $BC \perp (SAB)$, suy ra $(SBC) \perp (SAB)$. □

Dạng 2. Tính góc giữa hai mặt phẳng

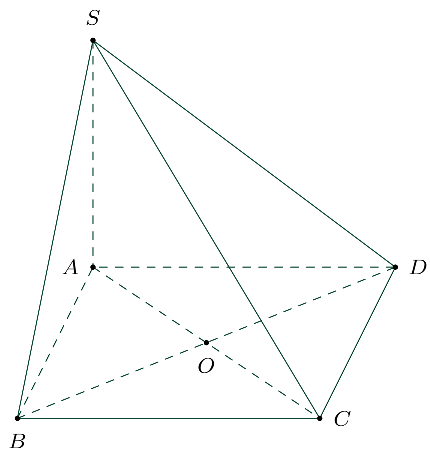
1. Ví dụ minh hoạ

VÍ DỤ 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính góc giữa hai mặt phẳng

a) (SAC) và (SAD).

b) (SAB) và (SAD).

Lời giải.



a) Ta có $BO \perp SA$ và $BO \perp AC$, suy ra $BO \perp (SAC)$.
$BA \perp SA$ và $BA \perp AD$, suy ra $BA \perp (SAD)$.
Do đó, nếu gọi góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (SAD) là α thì

$$\alpha = (BO, BA) = \widehat{ABO} = 45^\circ.$$

b) Ta có $CB \perp SA$ và $CB \perp AB$, suy ra $CB \perp (SAB)$.
$CD \perp SA$ và $CD \perp AD$, suy ra $CD \perp (SAD)$.
Do đó, nếu gọi góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) là β thì

$$\beta = (CB, CD) = \widehat{BCD} = 90^\circ.$$

□

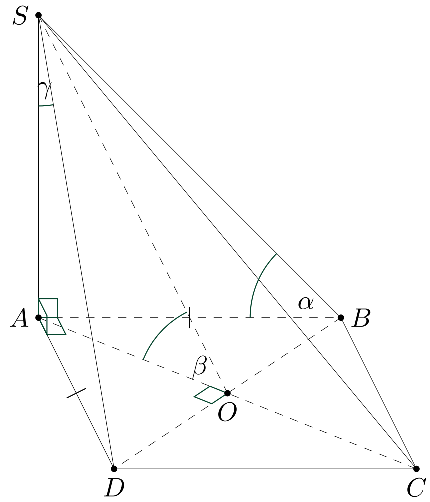
VÍ DỤ 2. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh $a, SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{3}$. Tính số đo của góc giữa các mặt phẳng sau:

a) $((SBC), (ABC)) =?$

b) $((SBD), (ABD)) =?$

c) $((SAB), (SCD)) =?$

Lời giải.



a) Gọi $\alpha = (S, BC, A)$. Khi đó ta có $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp SB$.

Suy ra $\alpha = \widehat{SBA}$.

Trong $\triangle SAB$ có $\tan\alpha = \dfrac{SA}{AB} = \dfrac{a\sqrt{3}}{a} = \sqrt{3} \Rightarrow \alpha = 60°$.

b) Gọi $\beta = (S, BD, A)$ và $AC \cap BD = O$, ta có $\begin{cases} AO \perp BD \\ SO \perp BD (\text{ Do } BD \perp (SAC)) \end{cases} \Rightarrow \beta = \widehat{SOA}$.

Mà $AO = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$, suy ra $\tan\beta = \dfrac{SA}{AO} = \dfrac{2a\sqrt{3}}{a\sqrt{2}} = \sqrt{6} \Rightarrow \beta = \arctan(\sqrt{6})$.

c) Gọi $\gamma = ((SAB), (SCD))$.

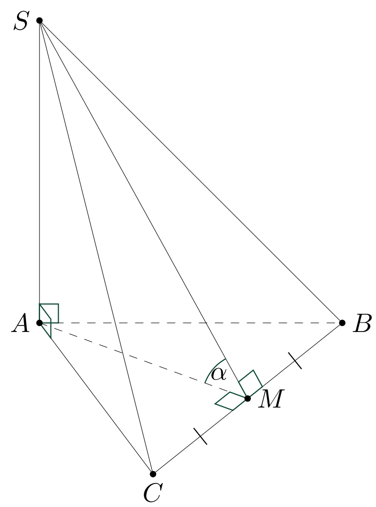
Khi đó ta có $\gamma = \widehat{ASD}$ và $\tan\gamma = \dfrac{AD}{SA} = \dfrac{a}{a\sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$\Rightarrow \gamma = 30°$.

□

VÍ DỤ 3. Cho tứ diện $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, $SA \perp (ABC)$ và $SA = \dfrac{3a}{2}$. Tính góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC).

Lời giải.



Gọi góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) là α.

Gọi M là trung điểm của BC. Do $\triangle ABC$ đều nên $AM \perp BC$. (1)

Theo giả thiết $SA \perp (ABC)$, suy ra theo (1) ta có $SM \perp BC$. (2)

Lại có $(SBC) \cap (ABC) = BC$. (3)

Từ (1), (2) và (3) ta có $\alpha = \widehat{SMA}$.

Ta có $AM = \sqrt{AC^2 - CM^2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Xét tam giác SAM vuông tại A, ta có: $\tan\alpha = \dfrac{SA}{AM} = \dfrac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$, suy ra $\alpha = 60°$.

□

2. Bài tập rèn luyện

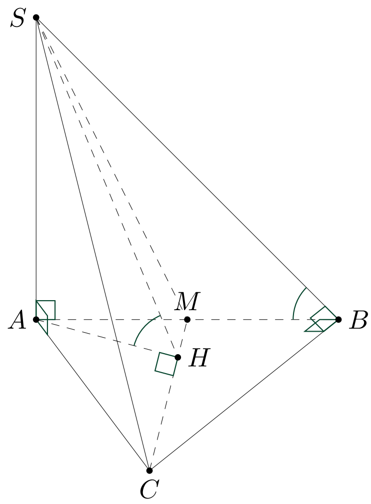
BÀI 1. Cho tứ diện $S.ABC$ có $\widehat{ABC} = 90°, AB = 2a; BC = a\sqrt{3}, SA \perp (ABC); SA = 2a$. Gọi M là trung điểm AB. Hãy tính:

a) $\left(\widehat{(SBC), (ABC)}\right)$.

b) Đường cao AH của $\triangle AMC$.

c) $\varphi = \left(\widehat{(SMC), (ABC)}\right)$.

Lời giải.



a) Gọi $\alpha = \left(\widehat{(SBC),(ABC)}\right)$
Trong tam giác ABC ta có $AB \perp BC$ và $SB \perp BC$, suy ra $\alpha = \widehat{SBA}$.
Ta có $AB = SA = 2a$ nên suy ra $\alpha = 45^\circ$.

b) Đường cao AH của ΔAMC.
Ta có $CM = \sqrt{MB^2 + BC^2} = 2a$ và
$S_{AMC} = \dfrac{1}{2}AB \cdot BC - \dfrac{1}{2}MB \cdot BC = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$.
Do đó $AH = \dfrac{2S_{AMC}}{MC} = \dfrac{2 \cdot \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}}{2a} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

c) Gọi $\varphi = \left(\widehat{(SMC),(ABC)}\right)$?
Do $\begin{cases} AH \perp CM \\ SH \perp CM \end{cases} \Rightarrow \varphi = \widehat{SHA}$.
Trong $\triangle SHA$ có $\tan\varphi = \dfrac{SA}{AH} = \dfrac{4a}{a\sqrt{3}} = \dfrac{4\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \varphi = \arctan\left(\dfrac{4\sqrt{3}}{3}\right)$.

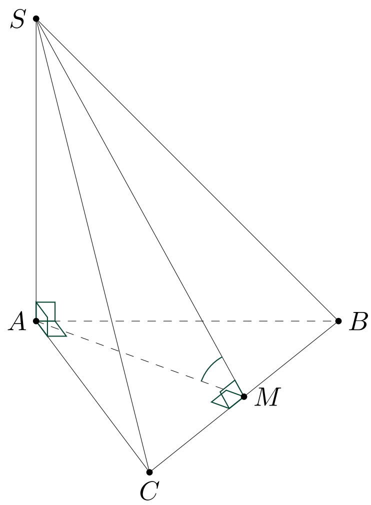
□

BÀI 2. Trong mặt phẳng (P) cho một $\triangle ABC$ vuông cân, cạnh huyền $BC = a$. Trên nửa đường thẳng vuông góc với (P) tại A lấy điểm S.

a) Tính góc giữa hai mặt phẳng $((SAB),(CAB))$ và $((SAC),(BAC))$ và $((CSA),(BSA))$.

b) Tính SA để góc giữa hai mặt phẳng $((SBC),(ABC))$ có số đo 30°.

Lời giải.



a) Dễ thấy $(SAB) \perp (ABC), (SAB) \perp (SAC), (ABC) \perp (SAC)$, do đó các góc giữa các mặt phẳng $((SAB),(CAB))$ và $((SAC),(BAC))$ và $((CSA),(BSA))$ đều bằng 90°.

b) Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng $((SBC),(ABC))$.
Gọi M là trung điểm cạnh BC, khi đó ta có
$\begin{cases} AM \perp BC \\ SM \perp BC \end{cases} \Rightarrow \alpha = \widehat{SMA}$.
Ta có $AM = \dfrac{a}{2}$, theo đề thì $\tan 30^\circ = \dfrac{SA}{AM}$
$\Rightarrow SA = AM \cdot \tan 30^\circ \Rightarrow SA = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$.

□

BÀI 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a, AD = a\sqrt{3}$, $SA \perp (ABCD)$.

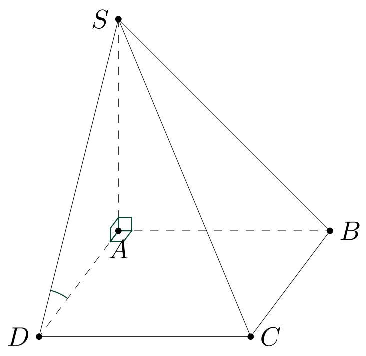
a) Tính góc giữa hai mặt phẳng (SCD) và $(ABCD)$ với $SA = a$.

b) Tìm $x = SA$ để góc giữa hai mặt phẳng (SCD) và $(ABCD)$ bằng 60°.

Lời giải.

a) Vì $SA \perp (ABCD) \Rightarrow CD \perp SA$, theo giả thiết $CD \perp AD$ và $(SCD) \cap (ABCD) = CD$, suy ra $\Rightarrow \alpha = ((SCD),(ABCD)) = \widehat{SDA}$.
Xét tam giác SAD vuông tại A ta có: $\tan\alpha = \dfrac{SA}{AD} = \dfrac{a}{a\sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \alpha = 30^\circ$.

b) Theo kết quả câu a ta có: $\tan 60^\circ = \dfrac{x}{a\sqrt{3}} \Leftrightarrow x = a\sqrt{3}\tan 60^\circ = 3a$.



□

BÀI 4. Cho tam giác vuông ABC có cạnh huyền BC nằm trên mặt phẳng (P). Gọi α, β lần lượt là góc hợp bởi hai đường thẳng AB, AC và mặt phẳng (P). Gọi φ là hợp bởi (ABC) và (P). Chứng minh rằng $\sin^2\varphi = \sin^2\alpha + \sin^2\beta$.

Lời giải.

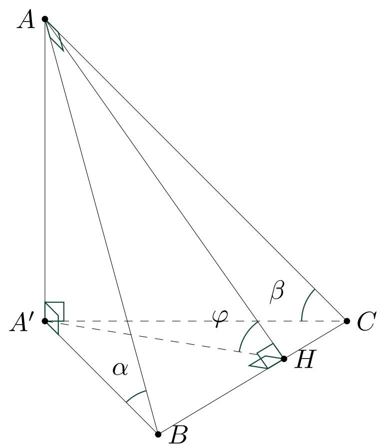
Gọi A' là hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng (P), AH là đường cao của tam giác ABC.

Suy ra $A'B$ và $A'C$ lần lượt là hình chiếu của AB và AC lên mặt phẳng (P). Do đó $\alpha = \widehat{ABA'}$ và $\beta = \widehat{ACA'}$.

Lại có $\begin{cases} BC \perp AH \\ BC \perp HA' \\ (ABC) \cap (P) = BC \end{cases} \Rightarrow \varphi = \widehat{AHA'}$.

Xét tam giác ABC vuông tại A, ta có: $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{AC^2}$

$\Leftrightarrow \dfrac{AA'^2}{AH^2} = \dfrac{AA'^2}{AB^2} + \dfrac{AA'^2}{AC^2} \Leftrightarrow \sin^2\varphi = \sin^2\alpha + \sin^2\beta$.



□

Dạng 3. Một số bài toán khác về hình lăng trụ đặc biệt, hình chóp đều, chóp cụt đều

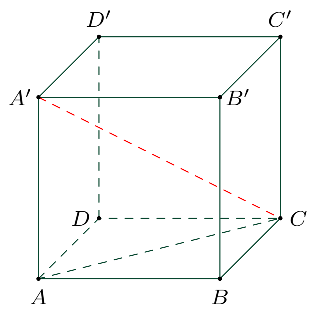
1. Ví dụ minh hoạ

VÍ DỤ 1. Cho hình lăng trụ đều $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh đáy $AB = a$ và cạnh bên $AA' = h$. Tính đường chéo $A'C$ theo a và h.

Lời giải.

Đáy $ABCD$ của lăng trụ đều phải là tứ giác đều, suy ra $ABCD$ là hình vuông, vậy $AC = a\sqrt{2}$. Lăng trụ đều có cạnh bên vuông góc với đáy, suy ra $AA' \perp (ABCD)$, vậy $AA' \perp AC$. Trong tam giác $A'AC$ vuông tại A ta có

$$A'C = \sqrt{A'A^2 + AC^2} = \sqrt{h^2 + 2a^2}.$$



□

VÍ DỤ 2. Cho hình chóp cụt tứ giác đều $ABCD.A'B'C'D'$, đáy lớn $ABCD$ có cạnh bằng a, đáy nhỏ $A'B'C'D'$ có cạnh bằng b, chiều cao $OO' = h$ với O, O' lần lượt là tâm của hai đáy. Tính độ dài cạnh bên CC' của hình chóp cụt đó.

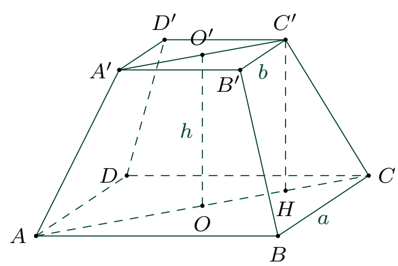
Lời giải.

Trong hình thang vuông $OO'C'C$, vẽ đường cao $C'H$ $(H \in OC')$.

Ta có $OC = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}, O'C' = \dfrac{b\sqrt{2}}{2}$, suy ra $HC = \dfrac{(a-b)\sqrt{2}}{2}$.

Trong tam giác vuông $CC'H$, ta có

$$CC' = \sqrt{C'H^2 + HC^2} = \sqrt{h^2 + \frac{(a-b)^2}{2}}.$$

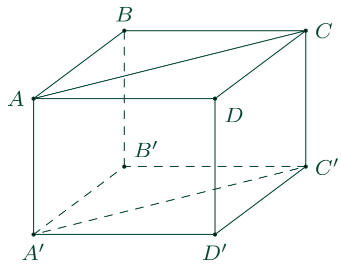


□

VÍ DỤ 3. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$. Chứng minh rằng $AA'C'C$ là một hình chữ nhật.

Lời giải.

Ta có $AA' = CC'$ và $AA' \parallel CC'$ (vì AA', CC' cùng bằng và cùng song song với DD').
Do đó $AA'C'C$ là hình bình hành.
Mặt khác $AA' \perp (A'B'C'D')$ nên $AA' \perp A'C'$. Do đó $AA'C'C$ là một hình chữ nhật.



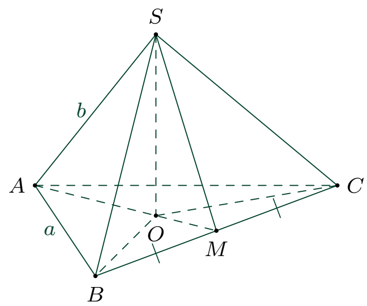
□

VÍ DỤ 4. Cho hình chóp đều $S.ABC$ có cạnh đáy $AB = a$ và cạnh bên $SA = b$. Tính độ dài đường cao SO theo a, b.

Lời giải.

Ta có O là trọng tâm của tam giác đều ABC, suy ra $AO = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.
Trong tam giác SOA vuông tại O, ta có

$$SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \sqrt{b^2 - \frac{3a^2}{9}} = \frac{\sqrt{9b^2 - 3a^2}}{3}.$$



□

2. Bài tập áp dụng

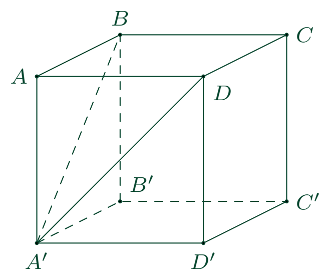
BÀI 1. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Chứng minh rằng $A'BD$ là tam giác đều.

Lời giải.

Gọi a là độ dài các cạnh của hình lập phương. Do các mặt của hình lập phương là hình vuông nên

$$A'D = \sqrt{AA'^2 + AD^2} = a\sqrt{2}.$$
$$BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = a\sqrt{2}.$$
$$A'B = \sqrt{AA'^2 + AB^2} = a\sqrt{2}.$$

Tam giác $A'BD$ có ba cạnh bằng nhau nên là tam giác đều.

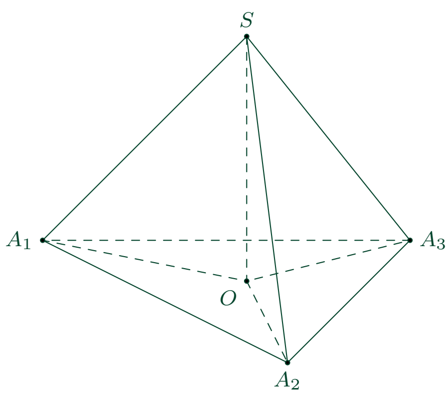


□

BÀI 2. Chứng minh rằng một hình chóp là đều khi và chỉ khi đáy của nó là một đa giác đều và các cạnh bên tạo với mặt phẳng đáy các góc bằng nhau.

Lời giải.

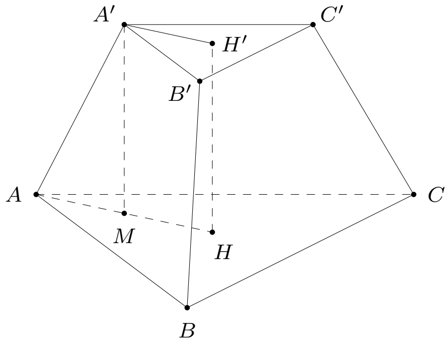
Xét hình chóp $S.A_1A_2\ldots A_n$. Gọi O là hình chiếu của S trên mặt phẳng đáy.
Giả sử hình chóp là đều, khi đó O là tâm của đa giác đều $A_1A_2\ldots A_n$. Các tam giác SOA_1, SOA_2, $\ldots$, SOA_n đều vuông tại O, có chung cạnh SO và có các cạnh OA_1, OA_2, $\ldots$, OA_n bằng nhau. Do đó chúng bằng nhau. Vậy $\widehat{SA_1O} = \widehat{SA_2O} = \ldots = \widehat{SA_nO}$, tức là các cạnh bên của hình chóp tạo với mặt phẳng đáy các góc bằng nhau.
Ngược lại, giả sử hình chóp có đáy là đa giác đều và các cạnh bên tạo với mặt phẳng đáy các góc bằng nhau. Khi đó $\widehat{SA_1O} = \widehat{SA_2O} = \ldots = \widehat{SA_nO}$. Từ đó suy ra các tam giác vuông SOA_1, SOA_2, $\ldots$, SOA_n bằng nhau. Do đó $SA_1 = SA_2 = \ldots = SA_n$. Mặt khác $A_1A_2\ldots A_n$ là đa giác đều. Do đó $S.A_1A_2\ldots A_n$ là hình chóp đều.



□

BÀI 3. Cho hình chóp cụt đều $ABC.A'B'C'$ có chiều cao bằng h, các đáy là các tam giác đều ABC, $A'B'C'$ có cạnh tương ứng là a, a' $(a > a')$. Tính độ dài các cạnh bên của hình chóp cụt.

Lời giải.



Gọi H, H' tương ứng là tâm của các tam giác ABC, $A'B'C'$. Khi đó, HH' vuông góc với hai đáy của hình chóp cụt.
Trong tam giác đều ABC, ta có $HA = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$.
Trong tam giác đều $A'B'C'$, ta có $H'A' = \dfrac{a'}{\sqrt{3}}$.
Hình thang $AHH'A'$ vuông tại H và H'.
Kẻ $A'M \perp HA$ ($M \in HA$).
Ta có

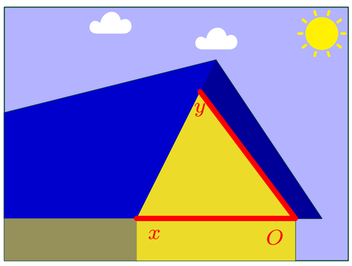
$$\begin{aligned} AA' = \sqrt{A'M^2 + MA^2} &= \sqrt{H'H^2 + (HA - H'A')^2} \\ &= \sqrt{h^2 + \left(\frac{a}{\sqrt{3}} - \frac{a'}{\sqrt{3}}\right)^2} \\ &= \sqrt{h^2 + \frac{(a-a')^2}{3}}. \end{aligned}$$

Vậy các cạnh bên của chóp cụt có độ dài bằng $\sqrt{h^2 + \dfrac{(a-a')^2}{3}}$. □

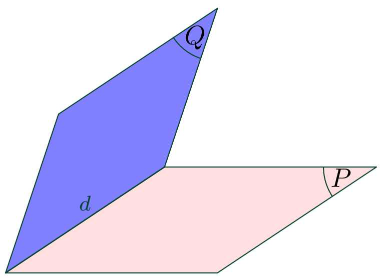
Dạng 4. Tính góc giữa hai mặt phẳng, góc nhị diện

1. Ví dụ minh hoạ

VÍ DỤ 1. Trong các công trình xây dựng nhà ở, độ dốc mái được hiểu là độ nghiêng của mái khi hoàn thiện so với mặt phẳng nằm ngang. Khi thi công, mái nhà cần một độ nghiêng nhất định để đảm bảo thoát nước tốt tránh gây ra tình trạng đọng nước hay thấm dột. Quan sát hình dưới và cho biết góc nhị diện nào phản ánh độ dốc của mái.



a)



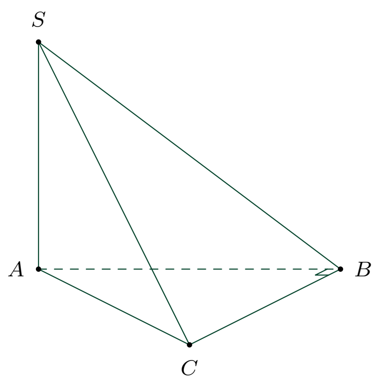
b)

Lời giải.
Giả sử nửa mặt phẳng (P) (minh hoạ mặt phẳng nằm ngang) và nửa mặt phẳng (Q) (minh hoạ mái nhà) cắt nhau theo giao tuyến d (Hình b). Khi đó góc nhị diện có cạnh là đường thẳng d, hai mặt lần lượt là (P) và (Q) phản ánh độ dốc của mái. Độ dốc đó cũng được phản ánh bởi góc phẳng nhị diện xOy của góc nhị diện trên (Hình a). □

VÍ DỤ 2.
Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, $AB = a$, $SA \perp (ABC)$, $SA = a\sqrt{3}$ (Hình bên). Tính số đo theo đơn vị độ của mỗi góc nhị diện sau:

a) $[B, SA, C]$;

b) $[A, BC, S]$.



Lời giải.

a) Vì $SA \perp (ABC)$ nên $SA \perp AB$, $SA \perp AC$. Do đó, góc BAC là góc phẳng nhị diện của góc nhị diện $[B, SA, C]$. Do tam giác ABC vuông cân tại B nên $\widehat{BAC} = 45^\circ$. Vậy số đo của góc nhị diện $[B, SA, C]$ bằng 45°.

b) Vì $SA \perp (ABC)$ nên $SA \perp BC$. Như vậy BC vuông góc với hai đường thẳng AB và SB, suy ra góc SBA là góc phẳng nhị diện của góc nhị diện $[A, BC, S]$.
Trong tam giác vuông SAB, ta có
$$\tan \widehat{SBA} = \frac{SA}{AB} = \frac{a\sqrt{3}}{a} = \sqrt{3}.$$
Suy ra $\widehat{SBA} = 60^\circ$. Vậy số đo của góc nhị diện $[A, BC, S]$ bằng 60°.

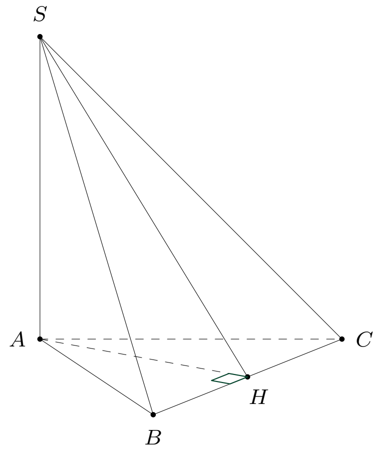
□

VÍ DỤ 3. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$. Gọi H là hình chiếu của A trên BC.

a) Chứng minh rằng $(ASB) \perp (ABC)$ và $(SAH) \perp (SBC)$.

b) Giả sử tam giác ABC vuông tại A, $\widehat{ABC} = 30^\circ$, $AC = a$, $SA = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.
Tính số đo của góc nhị diện $[S, BC, A]$.

Lời giải.



a) Vì $SA \perp (ABC)$ và $SA \subset (ASB)$ nên $(ASB) \perp (ABC)$.
Ta có $\begin{cases} BC \perp AH \\ BC \perp SA \text{ (do } SA \perp (ABC)\text{)} \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAH))$.
Lại có $BC \subset (SBC)$ nên $(SAH) \perp (SBC)$.

b) Theo chứng minh trên, $BC \perp (SAH)) \Rightarrow BC \perp SH$.
Kết hợp với $BC \perp AH$, ta có góc $\widehat{SHA}$ là một góc phẳng của góc nhị diện $[S, BC, A]$.
Vì tam giác ABC vuông tại A và $\widehat{ABC} = 30^\circ$ nên $\widehat{ACB} = 60^\circ$.

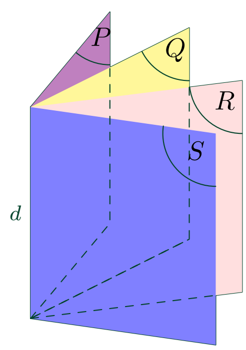
Ta có $AH = AC \cdot \sin \widehat{ACB} = a \cdot \sin 60^\circ = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Tam giác SAH vuông tại A có $\tan \widehat{SHA} = \dfrac{SA}{AH} = \dfrac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = 1 \Rightarrow \widehat{SHA} = 45^\circ$.

Vậy số đo của góc nhị diện $[S, BC, A]$ là 45°. □

2. Bài tập rèn luyện

BÀI 1.
Trong không gian cho bốn nửa mặt phẳng (P), (Q), (R), (S) cắt nhau theo giao tuyến d (Hình bên). Hãy chỉ ra ba góc nhị diện có cạnh của góc nhị diện là đường thẳng d.



Lời giải.
Ba góc nhị diện có cạnh của góc nhị diện là đường thẳng d, hai mặt lần lượt là (P) và (Q); (Q) và (R); (R) và (S). □

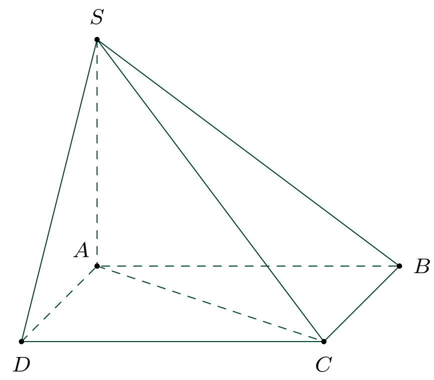
BÀI 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$, đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a và $AC = a$.

a) Tính số đo của góc nhị diện $[B, SA, C]$.

b) Tính số đo của góc nhị diện $[B, SA, D]$.

c) Biết $SA = a$, tính số đo của góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$.

Lời giải.



a) Vì $SA \perp (ABCD)$ nên $SA \perp AB$ và $SA \perp AC$.
Suy ra số đo của góc nhị diện $[B, SA, C]$ bằng số đo của góc $\widehat{BAC}$.
Vì tứ giác $ABCD$ là hình thoi cạnh a và $AC = a$ nên các tam giác ABC, ACD là các tam giác đều, suy ra $\widehat{BAC} = 60^\circ$.
Vậy góc nhị diện $[B, SA, C]$ có số đo bằng 60°.

b) Vì $SA \perp (ABCD)$ nên $SA \perp AB$ và $SA \perp AD$.
Suy ra số đo của góc nhị diện $[B, SA, D]$ bằng số đo của góc $\widehat{BAD}$.
Mà $\widehat{BAD} = 2\widehat{BAC} = 120^\circ$.
Vậy góc nhị diện $[B, SA, D]$ có số đo bằng 120°.

c) Vì $SA \perp (ABCD)$ nên hình chiếu của SC trên $(ABCD)$ là AC.
Suy ra góc giữa SC và $(ABCD)$ bằng góc giữa SC và AC, bằng góc $\widehat{SCA}$.
Ta có $\tan \widehat{SCA} = \dfrac{SA}{AC} = 1 \Rightarrow \widehat{SCA} = 45^\circ$.
Vậy góc giữa SC và $(ABCD)$ bằng 45°.

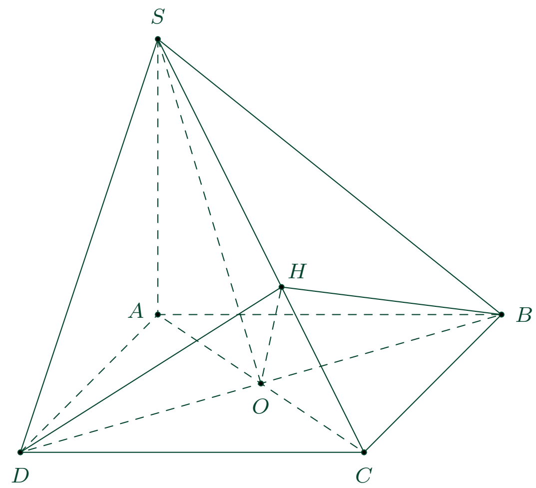
□

BÀI 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$, đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh bằng a, $AC = a$, $SA = \dfrac{1}{2}a$. Gọi O là giao điểm của hai đường chéo hình thoi $ABCD$ và H là hình chiếu của O trên SC.

a) Tính số đo của các góc nhị diện $[B, SA, D]$; $[S, BD, A]$; $[S, BD, C]$.

b) Chứng minh rằng $\widehat{BHD}$ là một góc phẳng của góc nhị diện $[B, SC, D]$.

Lời giải.



a) Vì $SA \perp (ABCD)$ nên AB và AD vuông góc với SA. Vậy $\widehat{BAD}$ là một góc phẳng của góc nhị diện $[B, SA, D]$. Hình thoi $ABCD$ có cạnh bằng a và $AC = a$ nên các tam giác ABC, ABD đều. Do đó $\widehat{BAD} = 120^\circ$. Vậy số đo của góc nhị diện $[B, SA, D]$ bằng 120°.
Vì $BD \perp AC$ và $BD \perp SA$ nên $BD \perp (SAC)$. Vậy AC và SO vuông góc với BD. Suy ra $\widehat{AOS}$ là một góc phẳng của góc nhị diện $[S, BD, A]$ và $\widehat{COS}$ là một góc phẳng của góc nhị diện $[S, BD, C]$.
Tam giác SAO vuông tại A và có $SA = \dfrac{1}{2}a = AO$ nên $\widehat{AOS} = 45^\circ$.
Suy ra $\widehat{COS} = 180^\circ - \widehat{AOS} = 135^\circ$.

b) Theo chứng minh trên, $BD \perp (SAC)$ nên $BD \perp SC$. Mặt khác, $OH \perp SC$ nên $SC \perp (BHD)$. Do đó $\widehat{BHD}$ là một góc phẳng của góc nhị diện $[B, SC, D]$.

□

BÀI 4. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a.

a) Tính độ dài đường chéo của hình lập phương.

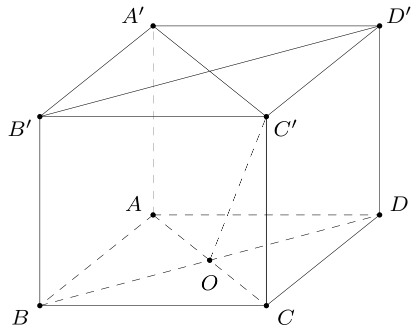
b) Chứng minh rằng $(ACC'A') \perp (BDD'B')$.

c) Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$. Chứng minh rằng $\widehat{COC'}$ là một góc phẳng của góc nhị diện $[C, BD, C']$. Tính (gần đúng) số đo của các góc nhị diện $[C, BD, C]$, $[A, BD, C']$.

Lời giải.

a) Độ dài đường chéo AC'

$$\begin{aligned} AC' &= \sqrt{AC^2 + AA'^2} \\ &= \sqrt{AB^2 + AD^2 + AA'^2} \\ &= \sqrt{a^2 + a^2 + a^2} \\ &= a\sqrt{3}. \end{aligned}$$



b) Ta có $\begin{cases} AC \perp BD & \text{(do } ABCD \text{ là hình vuông)} \\ AC \perp BB' & \text{(tính chất của hình lập phương)} \end{cases}$ nên $AC \perp (BDD'B')$.
Suy ra $(ACC'A') \perp (BDD'B')$.

c) Ta có $\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp CC' \end{cases} \Rightarrow BD \perp (ACC'A') \Rightarrow BD \perp C'O$.
Vì $\begin{cases} BD \perp CO \\ BD \perp C'O \end{cases}$ nên $\widehat{COC'}$ là một góc phẳng của góc nhị diện $[C, BD, C']$.
Tam giác COC' vuông tại C có $CC' = a$ và $OC = \dfrac{AC}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$ nên

$$\tan \widehat{COC'} = \frac{CC'}{CO} = \frac{a}{\frac{a\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2} \Rightarrow \widehat{COC'} \approx 54{,}7^\circ.$$

Ta thấy $\widehat{AOC'}$ là một góc phẳng của góc nhị diện $[A, BD, C']$ và

$$\widehat{AOC'} = 180^\circ - \widehat{COC'} \approx 180^\circ - 54{,}7^\circ = 125{,}3^\circ.$$

Vậy số đo các góc nhị diện $[C, BD, C]$ và $[A, BD, C']$ tương ứng là $54{,}7^\circ$ và $125{,}3^\circ$.

□

C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

CÂU 1. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A) Nếu hình hộp có bốn đường chéo bằng nhau thì nó là hình lập phương.
B) Nếu hình hộp có sau mặt bằng nhau thì nó là hình lập phương.
C) Nếu hình hộp có hai mặt là hình vuông thì nó là hình lập phương.
D) Nếu hình hộp có ba mặt chung một đỉnh là hình vuông thì nó là hình lập phương.

Lời giải.

Nếu hình hộp có ba mặt chung một đỉnh là hình vuông thì nó là hình lập phương.
Chọn đáp án D □

CÂU 2. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sau đây là đúng?

A) Hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì mọi đường thẳng nằm trong mặt phẳng này và vuông góc với giao tuyến của hai mặt phẳng sẽ vuông góc với mặt phẳng kia.
B) Hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì mọi đường thẳng nằm trong mặt phẳng này sẽ vuông góc với mặt phẳng kia.
C) Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì vuông góc với nhau.
D) Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.

Lời giải.

Mệnh đề "Hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì mọi đường thẳng nằm trong mặt phẳng này sẽ vuông góc với mặt phẳng kia" là sai. Hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì đường thẳng nằm trong mặt phẳng này, vuông góc với giao tuyến thì vuông góc với mặt phẳng kia.
Mệnh đề "Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì vuông góc với nhau" và "Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau" là sai. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau hoặc cắt nhau (giao truyến vuông góc với mặt phẳng kia).
Chọn đáp án A □

CÂU 3. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A) Qua một đường thẳng có duy nhất một mặt phẳng vuông góc với một đường thẳng cho trước.

B Qua một điểm có duy nhất một mặt phẳng vuông góc với một mặt phẳng cho trước.

C Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.

D Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.

Lời giải.

Mệnh đề "Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau" là sai. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau hoặc cắt nhau (giao tuyến vuông góc với mặt phẳng thứ 3).

Mệnh đề "Qua một đường thẳng có duy nhất một mặt phẳng vuông góc với một đường thẳng cho trước" là sai. Qua một đường thẳng vô số mặt phẳng vuông góc với một đường thẳng cho trước.

Mệnh đề "Qua một điểm có duy nhất một mặt phẳng vuông góc với một mặt phẳng cho trước" là sai. Qua một điểm có vô số mặt phẳng vuông góc với một mặt phẳng cho trước.

Chọn đáp án D □

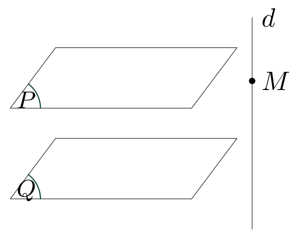
CÂU 4. Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) song song với nhau và một điểm M không thuộc (P) và (Q). Qua M có bao nhiêu mặt phẳng vuông góc với (P) và (Q)?

A 1. **B** 2. **C** Vô số. **D** 3.

Lời giải.

Gọi d là đường thẳng qua M và vuông góc với (P), do $(P) \parallel (Q) \Rightarrow d \perp (Q)$. Giả sử (R) là mặt phẳng chứa d. Mà $\begin{cases} d \perp (P) \\ d \perp (Q) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (R) \perp (P) \\ (R) \perp (P) \end{cases}$.

Có vô số mặt phẳng (R) chứa d. Do đó có vô số mặt phẳng qua M, vuông góc với (P) và (Q).



Chọn đáp án C □

CÂU 5. Cho tam giác đều ABC cạnh a. Gọi D là điểm đối xứng với A qua BC. Trên đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (ABC) tại D lấy điểm S sao cho $SD = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$. Gọi I là trung điểm BC, kẻ IH vuông góc $SA\,(H \in SA)$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A $(SDB) \perp (SDC)$. **B** $(SAB) \perp (SAC)$. **C** $BH \perp HC$. **D** $SA \perp BH$.

Lời giải.

Từ giả thiết suy ra $ABDC$ là hình thoi nên $BC \perp AD$.

Ta có $\begin{cases} BC \perp AD \\ BC \perp SD \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAD) \Rightarrow BC \perp SA$.

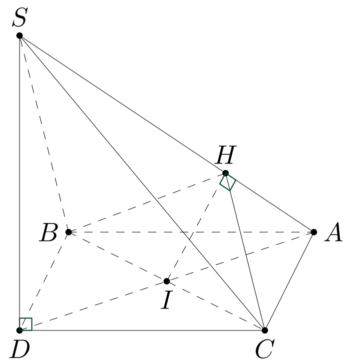
Lại có theo giả thiết $IH \perp SA$. Từ đó suy ra $SA \perp (HCB) \Rightarrow SA \perp BH$.

Tính được: $AI = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, $AD = 2AI = a\sqrt{3}$ và $SA = \sqrt{AD^2 + SD^2} = \dfrac{3a\sqrt{2}}{2}$.

Ta có $\triangle AHI \backsim \triangle ADS \Rightarrow \dfrac{IH}{SD} = \dfrac{AI}{AS} \Rightarrow IH = \dfrac{AI \cdot SD}{AS} = \dfrac{a}{2} = \dfrac{BC}{2} \Rightarrow$ tam giác HBC có trung tuyến IH bằng nửa cạnh đáy BC nên $\widehat{BHC} = 90^0$ hay $BH \perp HC$.

Từ đó suy ra $(SAB) \perp (SAC)$.

Dùng phương pháp loại trừ thì khẳng định "$(SDB) \perp (SDC)$" là **sai**.



Chọn đáp án A □

CÂU 6. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $\widehat{ABC} = 60°$, tam giác SBC là tam giác đều có bằng cạnh $2a$ và nằm trong mặt phẳng vuông với đáy. Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (ABC). Mệnh đề nào sau đây đúng?

A $\tan\varphi = \dfrac{\sqrt{3}}{6}$. **B** $\tan\varphi = \dfrac{1}{2}$. **C** $\varphi = 60°$. **D** $\tan\varphi = 2\sqrt{3}$.

Lời giải.

Gọi H là trung điểm của BC, suy ra $SH \perp BC \Rightarrow SH \perp (ABC)$.

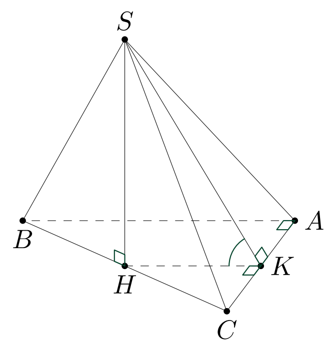
Gọi K là trung điểm AC, suy ra $HK \parallel AB$ nên $HK \perp AC$.

Ta có $\begin{cases} AC \perp HK \\ AC \perp SH \end{cases} \Rightarrow AC \perp (SHK) \Rightarrow AC \perp SK$.

Do đó $((SAC), (ABC)) = (SK, HK) = \widehat{SKH}$.

Tam giác vuông ABC, có $AB = BC \cdot \cos\widehat{ABC} = a \Rightarrow HK = \dfrac{1}{2}AB = \dfrac{a}{2}$.

Tam giác vuông SHK, có $\tan\widehat{SKH} = \dfrac{SH}{HK} = 2\sqrt{3}$.



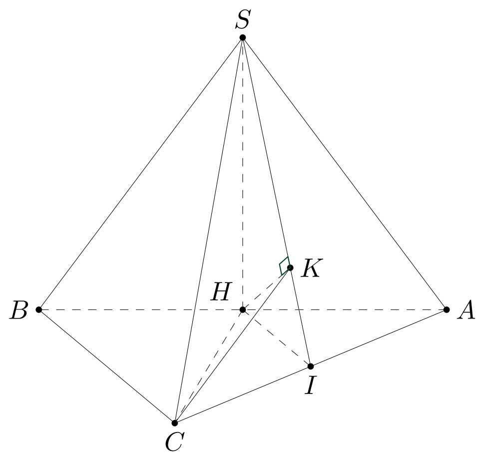
Chọn đáp án (D) □

CÂU 7. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại C. Gọi H là trung điểm AB. Biết rằng SH vuông góc với mặt phẳng (ABC) và $AB = SH = a$. Tính cosin của góc α tọa bởi hai mặt phẳng (SAB) và (SAC).

A $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{3}$. **B** $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **C** $\cos\alpha = \dfrac{2}{3}$. **D** $\cos\alpha = \dfrac{1}{3}$.

Lời giải.

Ta có $SH \perp (ABC) \Rightarrow SH \perp CH$. (1)
Tam giác ABC cân tại C nên $CH \perp AB$. (2)
Từ (1) và (2), suy ra $CH \perp (SAB)$.
Gọi I là trung điểm $AC \Rightarrow HI \parallel BC \Rightarrow HI \perp AC$. (3)
Mặt khác $AC \perp SH$ (do $SH \perp (ABC)$). (4)
Từ (3) và (4), suy ra $AC \perp (SHI)$.
Kẻ $HK \perp SI\,(K \in SI)$. (5)
Từ $AC \perp (SHI) \Rightarrow AC \perp HK$. (6)
Từ (5) và (6), suy ra $HK \perp (SAC)$.
Vì $\begin{cases} HK \perp (SAC) \\ HC \perp (SAB) \end{cases}$ nên góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (SAB) bằng góc giữa hai đường thẳng HK và HC.



Xét tam giác CHK vuông tại K, có $CH = \dfrac{1}{2}AB = \dfrac{a}{2}$; $\dfrac{1}{HK^2} = \dfrac{1}{SH^2} + \dfrac{1}{HI^2} \Rightarrow HK = \dfrac{a}{3}$.

Do đó $\cos\widehat{CHK} = \dfrac{HK}{CH} = \dfrac{2}{3}$.

Chọn đáp án (C) □

CÂU 8. Trong không gian cho tam giác đều SAB và hình vuông $ABCD$ cạnh a nằm trên hai mặt phẳng vuông góc. Gọi H, K lần lượt là trung điểm của AB, CD. Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SCD). Mệnh đề nào sau đây đúng?

A $\tan\varphi = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$. **B** $\tan\varphi = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **C** $\tan\varphi = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **D** $\tan\varphi = \dfrac{\sqrt{2}}{3}$.

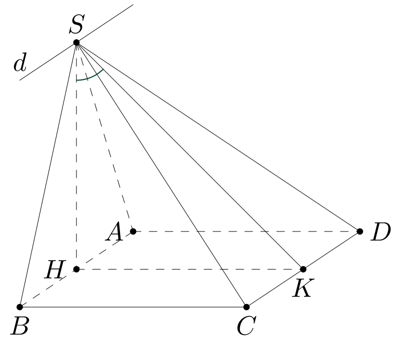
Lời giải.

Dễ dàng xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) là đường thẳng d đi qua S và song song với AB.
Trong mặt phẳng (SAB) có $SH \perp AB \Rightarrow SH \perp d$.
Ta có

$$\begin{cases} CD \perp HK \\ CD \perp SH \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SHK) \Rightarrow CD \perp SK \Rightarrow d \perp SK.$$

Từ đó suy ra $((SAB), (SCD)) = (SH, SK) = \widehat{HSK}$.

Trong tam giác vuông SHK, có $\tan\widehat{HSK} = \dfrac{HK}{SH} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.



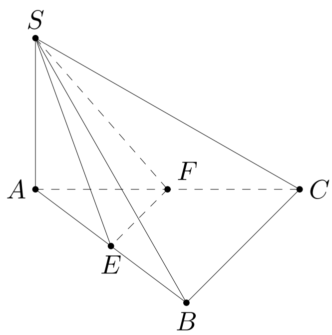
Chọn đáp án (A) □

CÂU 9. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, cạnh bên SA vuông góc với đáy. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và AC. Góc giữa hai mặt phẳng (SEF) và (SBC) là

A $\widehat{BSE}$. **B** $\widehat{CSF}$. **C** $\widehat{BSF}$. **D** $\widehat{CSE}$.

Lời giải.

Gọi d là đường thẳng đi qua S và song song với EF.
Vì EF là đường trung bình tam giác ABC suy ra $EF \parallel BC$.
Khi đó $d \parallel EF \parallel BC \Rightarrow (SEF) \cap (SBC) = d$. (1)
Ta có $\begin{cases} SA \perp BC \\ AB \perp BC \end{cases}$ suy ra $BC \perp (SAB) \Rightarrow \begin{cases} BC \perp SE \\ BC \perp SB \end{cases}$. (2)
Từ (1), (2) suy ra $\begin{cases} d \perp SE \\ d \perp SB \end{cases}$.
Dẫn tới $((SEF);(SBC)) = (SE; SB) = \widehat{BSE}$.



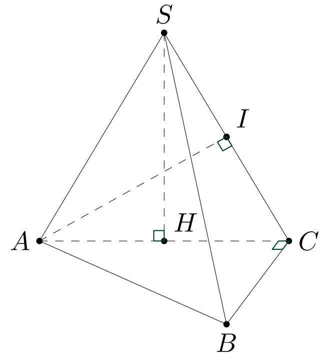
Chọn đáp án (A) □

CÂU 10. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại C, mặt bên SAC là tam giác đều và mằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi I là trung điểm của SC. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A $AI \perp SC$. **B** $(ABI) \perp (SBC)$. **C** $(SBC) \perp (SAC)$. **D** $AI \perp BC$.

Lời giải.

Tam giác SAC đều có I là trung điểm của SC nên $AI \perp SC$.
Gọi H là trung điểm AC suy ra $SH \perp AC$.
Mà $(SAC) \perp (ABC)$ theo giao tuyến AC nên $SH \perp (ABC)$ do đó $SH \perp BC$.
Hơn nữa theo giả thiết tam giác ABC vuông tại C nên $BC \perp AC$.
Từ đó suy ra $BC \perp (SAC) \Rightarrow BC \perp AI$.
Từ đó suy ra $(ABI) \perp (SBC)$.
Dùng phương pháp loại trừ thì khẳng định "$(SBC) \perp (SAC)$" là **sai**.



Chọn đáp án (C) □

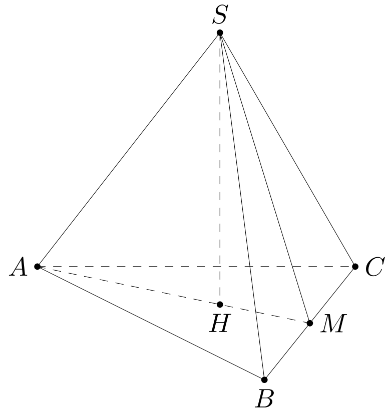
CÂU 11. Cho hình chóp đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a, góc giữa mặt bên và mặt đáy bằng $60°$. Tính độ dài đường cao SH của khối chóp.

A $SH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **B** $SH = \dfrac{a\sqrt{2}}{3}$. **C** $SH = \dfrac{a}{2}$. **D** $SH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.

Gọi H là chân đường cao kẻ từ đỉnh S xuống mặt phẳng $(ABCD)$.
Vì $S.ABC$ là hình chóp đều có $SA = SB = SC$ nên suy ra H chính là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.
Gọi M là trung điểm của BC, ta có

$$\begin{cases} BC \perp AM \\ BC \perp SH \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAM).$$



Khi đó $((SBC);(ABC)) = (SM;AM) = \widehat{SMA} = 60°$.
Tam giác ABC đều có

$$AM = \sqrt{AB^2 - MB^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow HM = \frac{AM}{3} = \frac{a\sqrt{3}}{6}.$$

Tam giác AHM vuông tại H, có $\tan\widehat{SMA} = \dfrac{SH}{HM} \Rightarrow SH = \tan 60° \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{6} = \dfrac{a}{2}$.

Vậy độ dài đường cao $SH = \dfrac{a}{2}$.

Chọn đáp án (C) □

CÂU 12. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm I, cạnh a, góc $\widehat{BAD} = 60°$, $SA = SB = SD = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và $(ABCD)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A $\tan\varphi = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$. **B** $\tan\varphi = \sqrt{5}$. **C** $\varphi = 45°$. **D** $\tan\varphi = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

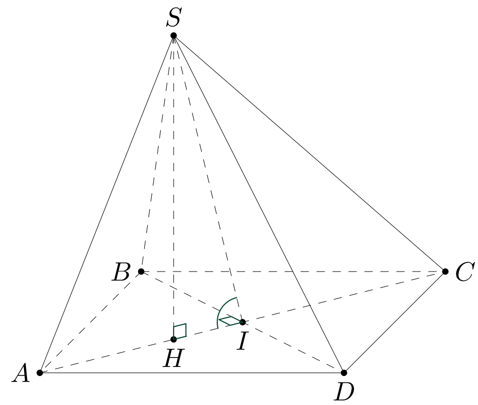
Lời giải.

Từ giả thiết suy ra tam giác ABD đều cạnh a.
Gọi H là hình chiếu của S trên mặt phẳng $(ABCD)$. Do $SA = SB = SD$ nên suy ra H cách đều các đỉnh của tam giác ABD hay H là tâm của tam giác đều ABD.

Suy ra $HI = \dfrac{1}{3}AI = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$; $SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \dfrac{a\sqrt{15}}{6}$.

Vì $ABCD$ là hình thoi nên $HI \perp BD$. Tam giác SBD cân tại S nên $SI \perp BD$.
Do đó $((SBD),(ABCD)) = (SI, AI) = \widehat{SIH}$.

Trong tam vuông SHI, có $\tan\widehat{SIH} = \dfrac{SH}{HI} = \sqrt{5}$.



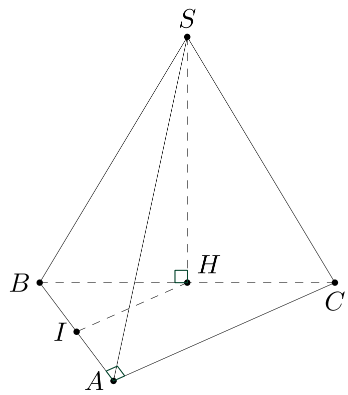
Chọn đáp án (B) □

CÂU 13. Cho tứ diện $SABC$ có SBC và ABC nằm trong hai mặt phẳng vuông góc với nhau. Tam giác SBC đều, tam giác ABC vuông tại A. Gọi H, I lần lượt là trung điểm của BC và AB. Khẳng định nào sau đây **sai**?

Ⓐ $HI \perp AB$. Ⓑ $(SHI) \perp (SAB)$. Ⓒ $SH \perp AB$. Ⓓ $(SAB) \perp (SAC)$.

Lời giải.

Do SBC là tam giác đều có H là trung điểm BC nên $SH \perp BC$.
Mà ta có $(SBC) \perp (ABC)$ theo giao tuyến $BC \Rightarrow SH \perp (ABC) \Rightarrow SH \perp AB$.
Vì HI là đường trung bình của $\triangle ABC$ nên $HI \parallel AC \Rightarrow HI \perp AB$.
Ta có $\begin{cases} SH \perp AB \\ HI \perp AB \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SHI) \Rightarrow (SAB) \perp (SHI)$.
Dùng phương pháp loại trừ thì khẳng định "$(SAB) \perp (SAC)$" là **sai**.



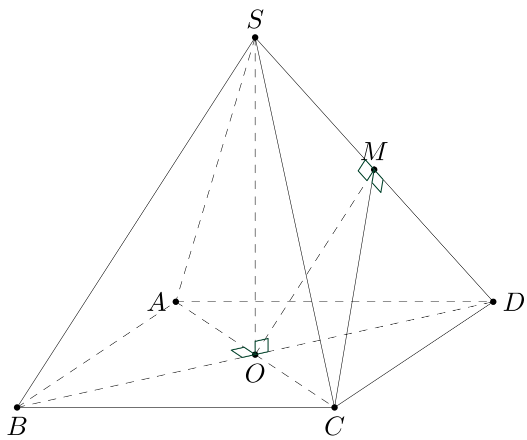
Chọn đáp án Ⓓ □

CÂU 14. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng a. Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và (SCD). Mệnh đề nào sau đây đúng?

Ⓐ $\tan\varphi = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Ⓑ $\tan\varphi = \sqrt{2}$. Ⓒ $\tan\varphi = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Ⓓ $\tan\varphi = \sqrt{6}$.

Lời giải.

Gọi $O = AC \cap BD$. Do hình chóp $S.ABCD$ đều nên $SO \perp (ABCD)$.
Gọi M là trung điểm của SD. Tam giác SCD đều nên $CM \perp SD$.
Tam giác SBD có $SB = SD = a$, $BD = a\sqrt{2}$ nên vuông tại $S \Rightarrow SB \perp SD \Rightarrow OM \perp SD$.
Do đó $((SBD), (SCD)) = (OM, CM) = \widehat{OMC}$.
Ta có $\begin{cases} OC \perp BD \\ OC \perp SO \end{cases} \Rightarrow OC \perp (SBD) \Rightarrow OC \perp OM$.
Tam giác vuông MOC, có $\tan\widehat{CMO} = \dfrac{OC}{OM} = \sqrt{2}$.



Chọn đáp án Ⓑ □

CÂU 15. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, SA vuông góc với đáy. Gọi M là trung điểm AC. Khẳng định nào sau đây **sai**?

Ⓐ $BM \perp AC$. Ⓑ $(SAB) \perp (SAC)$. Ⓒ $(SAB) \perp (SBC)$. Ⓓ $(SBM) \perp (SAC)$.

Lời giải.

Tam giác ABC cân tại B có M là trung điểm $AC \Rightarrow BM \perp AC$.
Ta có $\begin{cases} BM \perp AC \\ BM \perp SA \end{cases}$ (do $SA \perp (ABC)$) $\Rightarrow BM \perp (SAC) \Rightarrow (SBM) \perp (SAC)$.
Ta có $\begin{cases} BC \perp BA \\ BC \perp SA \end{cases}$ (do $SA \perp (ABC)$) $\Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow (SBC) \perp (SAB)$.
Dùng phương pháp loại trừ thì khẳng định "$(SAB) \perp (SAC)$" là **sai**.
Chọn đáp án Ⓑ □

CÂU 16. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O, cạnh a. Đường thẳng SO vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$ và $SO = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Tính góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$.

Ⓐ 30°. Ⓑ 60°. Ⓒ 90°. Ⓓ 45°.

Lời giải.

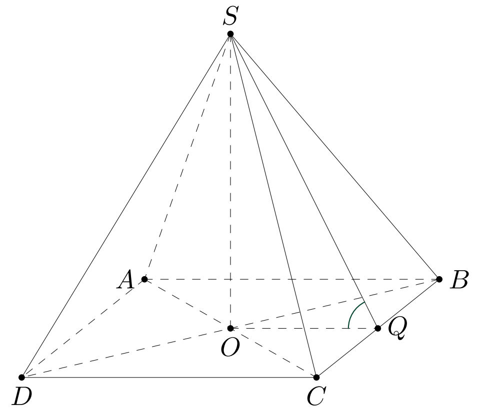
Gọi Q là trung điểm BC, suy ra $OQ \perp BC$.

Ta có $\begin{cases} BC \perp OQ \\ BC \perp SO \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SOQ) \Rightarrow BC \perp SQ$.

Do đó $((SBC),(ABCD)) = (SQ, OQ) = \widehat{SQO}$.

Tam giác vuông SOQ, có $\tan\widehat{SQO} = \dfrac{SO}{OQ} = \sqrt{3}$.

Vậy mặt phẳng (SBC) hợp với mặt đáy $(ABCD)$ một góc $60°$.



Chọn đáp án (B) □

CÂU 17. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Cạnh bên $SA = a\sqrt{3}$ và vuông góc với mặt đáy (ABC). Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC). Mệnh đề nào sau đây đúng?

A $\varphi = 60°$. **B** $\sin\varphi = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$. **C** $\sin\varphi = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$. **D** $\varphi = 30°$.

Lời giải.

Gọi M là trung điểm của BC, suy ra $AM \perp BC$.

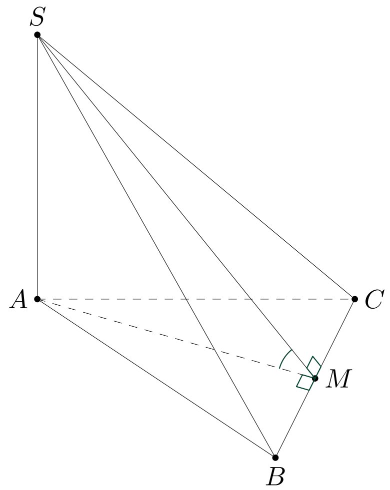
Ta có $\begin{cases} AM \perp BC \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAM) \Rightarrow BC \perp SM$.

Do đó $((SBC),(ABC)) = (SM, AM) = \widehat{SMA}$.

Tam giác ABC đều cạnh a, suy ra trung tuyến $AM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Tam giác vuông SAM, có

$$\sin\widehat{SMA} = \frac{SA}{SM} = \frac{SA}{\sqrt{SA^2 + AM^2}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$



Chọn đáp án (B) □

CÂU 18. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Cạnh bên $SA = x$ và vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Xác định x để hai mặt phẳng (SBC) và (SCD) tạo với nhau một góc $60°$.

A $x = \dfrac{3a}{2}$. **B** $x = a$. **C** $x = 2a$. **D** $x = \dfrac{a}{2}$.

Lời giải.

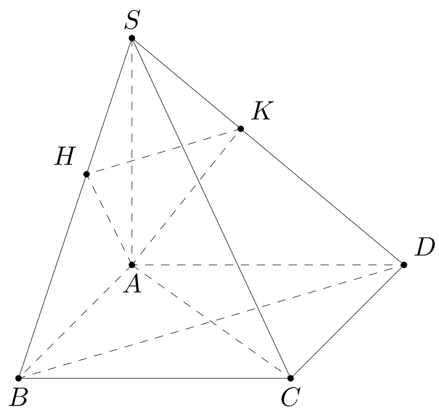
Từ A kẻ AH vuông góc với $SB\,(H \in SB)$.

Ta có $\begin{cases} SA \perp BC \\ AB \perp BC \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AH$ mà $AH \perp SB$ suy ra $AH \perp (SBC)$.

Từ A kẻ AK vuông góc với $SD\,(K \in SD)$, tương tự, chứng minh được $AK \perp (SCD)$.

Khi đó $SC \perp (AHK)$ suy ra $((SBC);(SCD)) = (AH; AK) = \widehat{HAK} = 60°$.

Lại có $\triangle SAB = \triangle SAD \Rightarrow AH = AK$ mà $\widehat{HAK} = 60^0$ suy ra tam giác AHK đều.



Tam giác SAB vuông tại S, có $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{SA^2} + \dfrac{1}{AB^2} \Rightarrow AH = \dfrac{xa}{\sqrt{x^2 + a^2}}$.

Suy ra $SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2 + a^2}} \Rightarrow \dfrac{SH}{SB} = \dfrac{x^2}{x^2 + a^2}$.

Vì $HK \parallel BD$ suy ra $\dfrac{SH}{SB} = \dfrac{HK}{BD} \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{x^2 + a^2} = \dfrac{xa}{\sqrt{x^2 + a^2} \cdot a\sqrt{2}} \Leftrightarrow \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow x = a$.

Chọn đáp án (B) □

CÂU 19. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông $ABCD$ vuông tại A và D, $AB = 2a$, $AD = CD = a$. Cạnh bên $SA = a$ và vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

(A) $\tan\varphi = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. (B) $\varphi = 30^\circ$. (C) $\varphi = 45^\circ$. (D) $\varphi = 60^\circ$.

Lời giải.

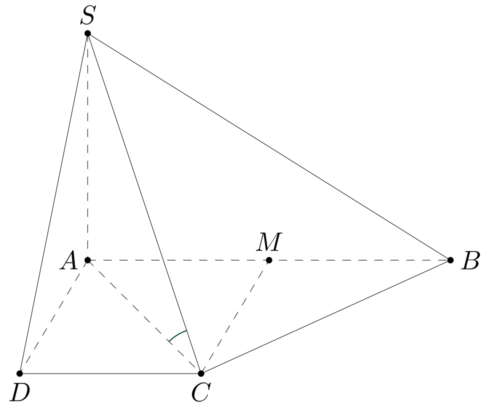
Gọi M là trung điểm $AB \Rightarrow ADCM$ là hình vuông nên $CM = AD = a = \dfrac{AB}{2}$.

Suy ra tam giác ACB có trung tuyến bằng nửa cạnh đáy nên vuông tại C.

Ta có $\begin{cases} BC \perp SA \\ BC \perp AC \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAC) \Rightarrow BC \perp SC$.

Do đó $((SBC),(ABCD)) = (SC, AC) = \widehat{SCA}$.

Tam giác SAC vuông tại $A \Rightarrow \tan\varphi = \dfrac{SA}{AC} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.



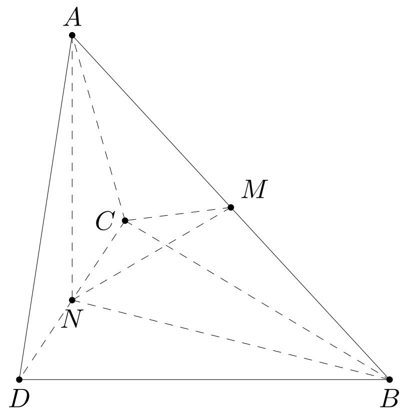
Chọn đáp án (A) □

CÂU 20. Cho hai tam giác ACD và BCD nằm trên hai mặt phẳng vuông góc với nhau và $AC = AD = BC = BD = a, CD = 2x$. Với giá trị nào của x thì hai mặt phẳng (ABC) và (ABD) vuông góc.

(A) $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. (B) $\dfrac{a}{2}$. (C) $\dfrac{a}{3}$. (D) $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải.

Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD.
Ta có $AN \perp CD$ mà $(ACD) \perp (BCD)$ suy ra $AN \perp (BCD) \Rightarrow AN \perp BN$.
Tam giác ABC cân tại C, có M là trung điểm của AB suy ra $CM \perp AB$.
Giả sử $(ABC) \perp (BCD)$ mà $CM \perp AB$ suy ra $CM \perp (ABD) \Rightarrow CM \perp DM$.
Khi đó, tam giác MCD vuông cân tại $M \Rightarrow MN = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{CD}{2} \Rightarrow AB = CD = 2x$.
Lại có $AN = BN = \sqrt{AC^2 - AN^2} = \sqrt{a^2 - x^2}$, mà $AB^2 = AN^2 + BN^2$.
Suy ra $2\left(a^2 - x^2\right) = 4x^2 \Leftrightarrow a^2 = 3x^2 \Leftrightarrow x = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.



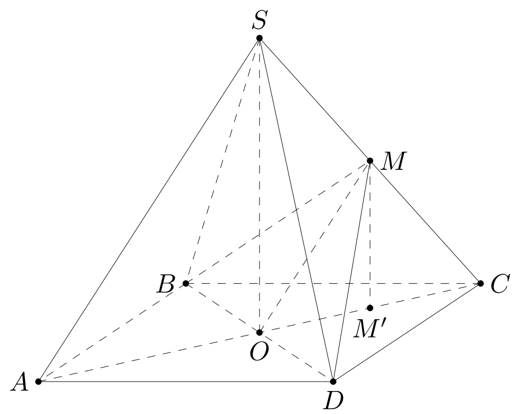
Chọn đáp án (D) □

CÂU 21. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng a. Gọi M là trung điểm SC. Tính góc φ giữa hai mặt phẳng (MBD) và $(ABCD)$.

(A) $\varphi = 45^\circ$. (B) $\varphi = 90^\circ$. (C) $\varphi = 30^\circ$. (D) $\varphi = 60^\circ$.

Lời giải.

Gọi M' là trung điểm OC.
Khi đó $MM' \parallel SO \Rightarrow MM' \perp (ABCD)$.
Theo công thức diện tích hình chiếu, ta có:
$S_{M'BD} = \cos\varphi \cdot S_{MBD}$
$\Rightarrow \cos\varphi = \dfrac{S_{M'BD}}{S_{MBD}} = \dfrac{BD \cdot MO}{BD \cdot M'O} = \dfrac{MO}{M'O} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \varphi = 45^\circ$.

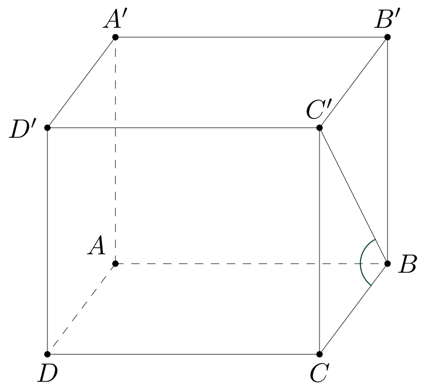


Chọn đáp án (A) □

CÂU 22. Cho hình lăng trụ tứ giác đều $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy cạnh bằng a, góc giữa hai mặt phẳng $(ABCD)$ và (ABC') có số đo bằng 60°. Độ dài cạnh bên của hình lăng trụ bằng

Ⓐ $2a$. Ⓑ $a\sqrt{2}$. Ⓒ $3a$. Ⓓ $a\sqrt{3}$.

Lời giải.



Vì $ABCD.A'B'C'D'$ là lăng trụ tứ giác đều $\Rightarrow \begin{cases} AB \perp BB' \\ AB \perp BC \end{cases} \Rightarrow AB \perp (BB'C'B)$.

Khi đó $\begin{cases} (ABC') \cap (BB'C'B) = BC' \\ (ABCD) \cap (BB'C'B) = BC \\ (ABC') \cap (ABCD) = AB \end{cases}$ suy ra

$((ABC');(ABCD)) = (BC';BC) = \widehat{C'BC} = 60^\circ$.

Đặt $AA' = x$, tam giác BCC' vuông tại C, có

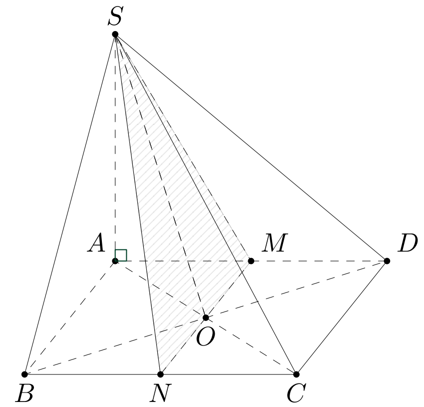
$$\tan\widehat{C'BC} = \frac{CC'}{BC} \Rightarrow x = \tan 60^0 \cdot a = a\sqrt{3}.$$

Chọn đáp án Ⓓ □

CÂU 23. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật tâm O với $AB = a, AD = 2a$. Cạnh bên $SA = a$ và vuông góc với đáy. Gọi (α) là mặt phẳng qua SO và vuông góc với (SAD). Tính diện tích S của thiết diện tạo bởi (α) và hình chóp đã cho.

Ⓐ $S = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$. Ⓑ $S = a^2$. Ⓒ $S = \dfrac{a^2\sqrt{2}}{2}$. Ⓓ $S = \dfrac{a^2}{2}$.

Lời giải.



Gọi M, N lần lượt là trung điểm AD, BC. Khi đó:

MN đi qua O và $\begin{cases} MN \perp AD \\ MN \perp SA \end{cases} \Rightarrow MN \perp (SAD)$.

Từ đó suy ra $(\alpha) \equiv (SMN)$ và thiết diện cần tìm là tam giác SMN.

Tam giác SMN vuông tại M nên

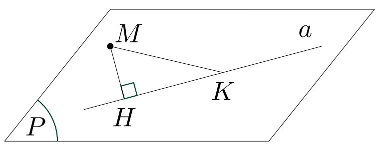
$$S_{\triangle SMN} = \frac{1}{2}SM \cdot MN = \frac{1}{2}AB\sqrt{SA^2 + \left(\frac{AD}{2}\right)^2} = \frac{a^2\sqrt{2}}{2}.$$

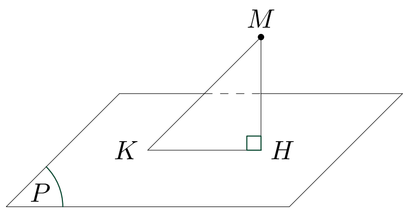
Chọn đáp án Ⓒ □

Bài 25. KHOẢNG CÁCH TRONG KHÔNG GIAN

A. TRỌNG TÂM KIẾN THỨC

1. Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng, đến một mặt phẳng





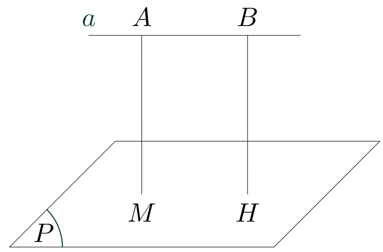
- Khoảng cách từ một điểm M đến một đường thẳng a, kí hiệu $\mathrm{d}(M, a)$, là khoảng cách giữa M và hình chiếu H của M trên a.
- Khoảng cách từ một điểm M đến một mặt phẳng (P), kí hiệu $\mathrm{d}(M,(P))$, là khoảng cách giữa M và hình chiếu H của M trên (P).

$\mathrm{d}(M, a) = 0$ khi và chỉ khi $M \in a$; $\mathrm{d}(M,(P)) = 0$ khi và chỉ khi $M \in (P)$.

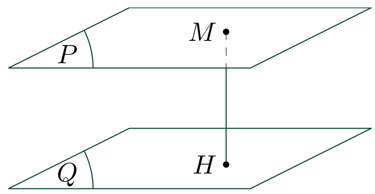
Nhận xét. Khoảng cách từ M đến đường thẳng a (mặt phẳng (P)) là khoảng cách nhỏ nhất giữa M và một điểm thuộc a (thuộc (P)).

Khoảng cách từ đỉnh đến mặt phẳng chứa mặt đáy của một hình chóp được gọi là chiều cao của hình chóp đó.

2. Khoảng cách giữa các đường thẳng và mặt phẳng song song, giữa hai mặt phẳng song song



Khoảng cách giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) song song với a, kí hiệu $\mathrm{d}(\mathrm{a},(P))$, là khoảng cách từ một điểm bất kì trên a đến (P).

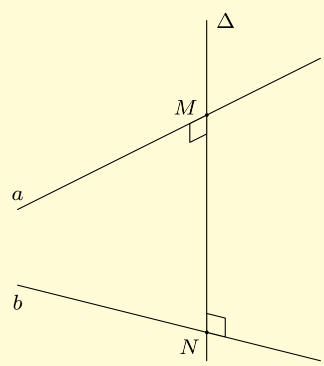


- Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song (P) và (Q), kí hiệu $\mathrm{d}((P),(Q))$, là khoảng cách từ một điểm bất kì thuộc mặt phẳng này đến mặt phẳng kia.
- Khoảng cách giữa hai đường thẳng song song m và n, kí hiệu $\mathrm{d}(m,n)$, là khoảng cách từ một điểm thuộc đường thẳng này đến đường thẳng kia.

Khoảng cách giữa hai đáy của một hình lăng trụ được gọi là chiều cao của hình lăng trụ đó.

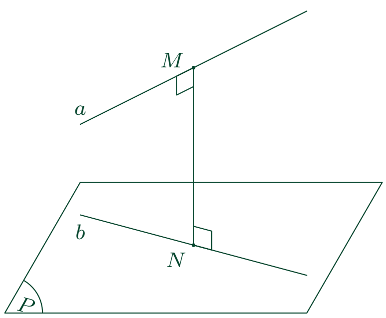
3. Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau

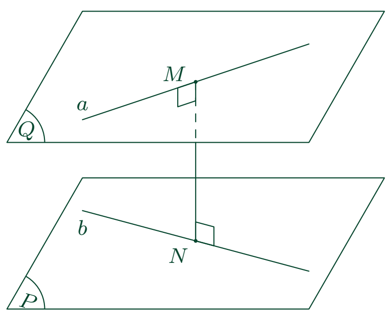
Đường thẳng Δ cắt hai đường thẳng chớ nhau a, b và vuông góc với cả hai đường thẳng đó được gọi là đường vuông góc chung của a và b.
Nếu đường vuông góc chung Δ cắt a, b tương ứng tại M, N thì độ dài đoạn MN được gọi là khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau a, b.



Nhận xét

- Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau bằng khoảng cách giữa một trong hai đường thẳng đó đến mặt phẳng song song với nó và chứa đường thẳng còn lại.
- Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau bằng khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song tương ứng chứa hai đường thẳng đó.



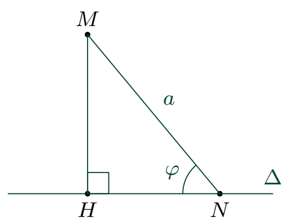


B. CÁC DẠNG BÀI TẬP

Dạng 1. Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng, đến một mặt phẳng

1. Ví dụ minh hoạ

VÍ DỤ 1.
Cho đoạn thẳng MN có độ dài a và đường thẳng Δ đi qua N thoả mãn góc giữa hai đường thẳng MN và Δ là φ $(0^\circ < \varphi < 90^\circ)$. Tính khoảng cách từ M đến Δ theo a, φ.



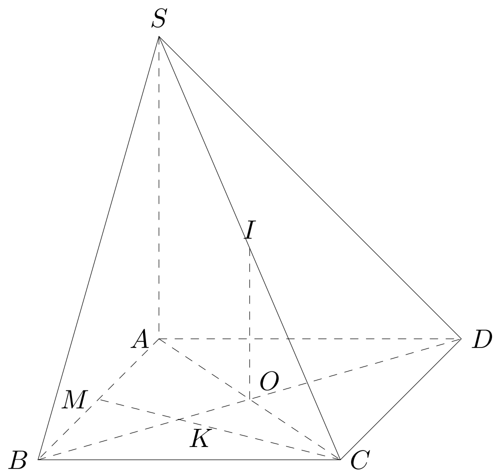
Lời giải.
Gọi H là hình chiếu của M trên đường thẳng Δ. Khi đó $\mathrm{d}(M,\Delta)=MH$.
Vì góc giữa hai đường thẳng MN và Δ là φ nên $\widehat{MNH}=\varphi$.
Suy ra $MH=MN\cdot\sin\varphi=a\sin\varphi$. Vậy $\mathrm{d}(M,\Delta)=a\sin\varphi$. □

VÍ DỤ 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, tâm O, $SA=a$ và vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi I,M theo thứ tự là trung điểm của SC,AB.

a) Chứng minh $OI\perp(ABCD)$.

b) Tính khoảng cách từ I đến CM, từ đó suy ra khoảng cách từ S tới CM.

Lời giải.



a) Trong $\triangle SAC$, OI là đường trung bình nên $OI\parallel SA\Rightarrow OI\perp(ABCD)$.

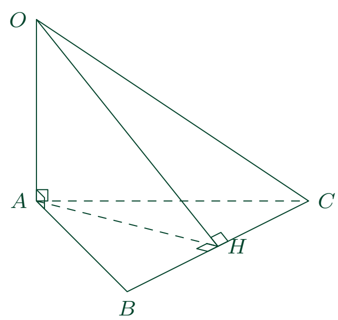
b) Hạ $IH\perp CM$ tại H. Ta có $CM\perp(IOH)$ suy ra $CM\perp OH$.
Gọi K là trọng tâm tam giác ABC, ta có $OB=\dfrac{AC}{2}=\dfrac{a\sqrt2}{2};OK=\dfrac{OB}{3}=\dfrac{a\sqrt2}{6}$.
Trong $\triangle OCK:\dfrac{1}{OH^2}=\dfrac{1}{OK^2}+\dfrac{1}{OC^2}\Rightarrow OH=\dfrac{a}{\sqrt{20}}$.
Trong $\triangle OIH: IH^2=OI^2+OH^2\Rightarrow IH=\dfrac{a\sqrt{30}}{10}$.
Ta có $SI\cap CM=C$ suy ra $\dfrac{\mathrm{d}(S,CM)}{\mathrm{d}(I,CM)}=\dfrac{SC}{IC}=2\Rightarrow \mathrm{d}(S,CM)=\dfrac{a\sqrt{30}}{5}$

□

VÍ DỤ 3.
Cho hình chóp $O.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a và $OA\perp(ABC)$. Cho biết $OA=a$.

a) Tính khoảng cách từ điểm O đến (ABC).

b) Tính khoảng cách từ điểm O đến đường thẳng BC.



Lời giải.

a) Ta có $OA\perp(ABC)$, suy ra $\mathrm{d}(O,(ABC))=OA=a$.

b) Vẽ $AH\perp BC$, ta có $OH\perp BC$ (định lý ba đường vuông góc), suy ra $\mathrm{d}(O,BC)=OH$.
Tam giác ABC đều có cạnh bằng a suy ra $AH=\dfrac{a\sqrt3}{2}$.

Trong tam giác vuông OAH, ta có $OH = \sqrt{OA^2 + AH^2} = \sqrt{a^2 + \dfrac{3a^2}{4}} = \dfrac{a\sqrt{7}}{2}$.

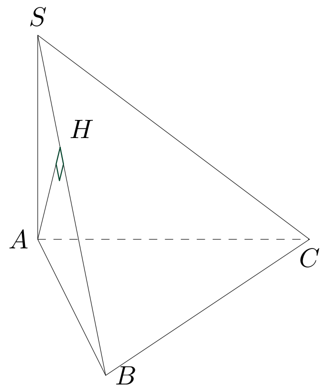
Vậy ta có $\mathrm{d}(O, BC) = \dfrac{a\sqrt{7}}{2}$.

□

VÍ DỤ 4. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = a\sqrt{3}$, $SA \perp (ABC)$, tam giác ABC vuông tại B và $AB = a$. Tính khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC).

Lời giải.

Do $SA \perp (ABC)$ và $SA \subset (SAB)$ nên $(SAB) \perp (ABC)$. Mà $(SAB) \cap (ABC) = AB$ và $AB \perp BC$ nên $BC \perp (SAB)$. Do $BC \subset (SBC)$ nên $(SBC) \perp (SAB)$. Kẻ $AH \perp SB$ với $H \in SB$. Do $(SAB) \cap (SBC) = SB$ nên $AH \perp (SBC) \Rightarrow d(A, (SBC)) = AH$. Do $SA \perp (ABC)$ nên $SA \perp AB$ nên $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{SA^2} + \dfrac{1}{AB^2} = \dfrac{1}{3a^2} + \dfrac{1}{a^2} = \dfrac{4}{3a^2}$. Vậy $d(A, (SBC)) = \dfrac{\sqrt{3}a}{2}$.

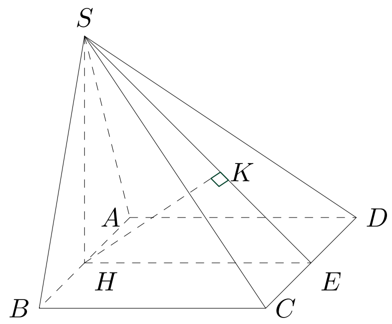


□

VÍ DỤ 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với $(ABCD)$, tứ giác $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Gọi H là trung điểm của AB. Tính khoảng cách từ điểm H đến mặt phẳng (SCD).

Lời giải.

Do tam giác SAB đều và H là trung điểm của AB nên $SH \perp AB$. Mà $(SAB) \perp (ABCD)$. Nên $SH \perp (ABCD) \Rightarrow SH \perp CD$. Do $ABCD$ là hình vuông nên gọi E là trung điểm của CD nên $HE \perp CD$. Vậy $CD \perp (SHE)$. Mà $CD \subset (SCD)$ nên $(SCD) \perp (SHE)$. Ta có $(SCD) \cap (SHE) = SE$. Kẻ $HK \perp SE$ với $K \in SE$ nên $HK \perp (SCD)$. Khi đó $d(H, (SCD)) = HK$. Vì $AB = a$ nên $SH = \dfrac{\sqrt{3}a}{2}$. Do $ABCD$ là hình vuông nên $HE = a$. Vì $SH \perp (ABCD)$ nên $SH \perp HE$.

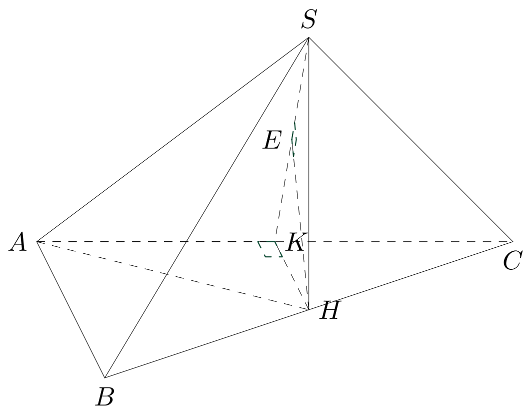


Khi đó $\dfrac{1}{HK^2} = \dfrac{1}{SH^2} + \dfrac{1}{HE^2} = \dfrac{7}{3a^2}$. Nên $HK = \dfrac{\sqrt{21}a}{7}$. Vậy $d(H, (SCD)) = \dfrac{\sqrt{21}a}{7}$. □

VÍ DỤ 6. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $AB = 1, AC = \sqrt{3}$. Tam giác SBC đều và nằm trong mặt phẳng vuông với đáy. Tính khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SAC).

Lời giải.

Gọi H là trung điểm của BC,
suy ra $SH \perp BC \Rightarrow SH \perp (ABC)$. Gọi K là trung điểm AC, suy ra $HK \perp AC$. Kẻ $HE \perp SK\ (E \in SK)$. Khi đó $d(B, (SAC)) = 2d(H, (SAC))$
$= 2HE = 2.\dfrac{SH.HK}{\sqrt{SH^2 + HK^2}} = \dfrac{2\sqrt{39}}{13}$.

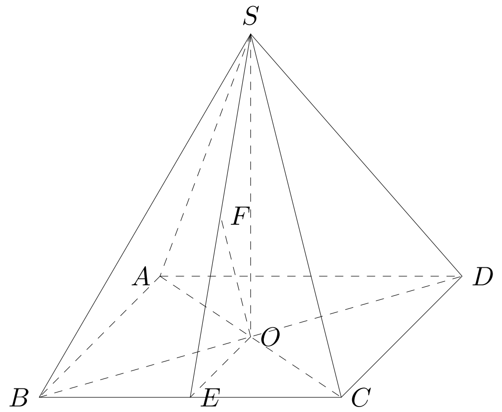


□

VÍ DỤ 7. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh bên là $2a$ và diện tích đáy là $4a^2$. Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC).

Lời giải.

Gọi $O = AC \cap BD \Rightarrow SO \perp (ABCD)$. Ta có $d\left(A, (SBC)\right) = 2d\left[O, (SBC)\right]$.
Kẻ $OE \perp BC, OF \perp SE$ ta có $\begin{cases} BC \perp OE \\ BC \perp SO \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SOE)\,. \Rightarrow BC \perp OF$
mà $OF \perp SE \Rightarrow OF \perp (SBC)$. Ta có $S_{ABCD} = AB^2 = 4a^2 \Rightarrow AB = 2a \Rightarrow$ $OE = a$. Ta có $AC = 2a\sqrt{2} \Rightarrow OA = a\sqrt{2} \Rightarrow SO = \sqrt{SA^2 - OA^2} = a\sqrt{2}$. Ta có $\dfrac{1}{OF^2} = \dfrac{1}{OS^2} + \dfrac{1}{OE^2} = \dfrac{3}{2a^2} \Rightarrow OF = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}. \Rightarrow d\left(O, (SBC)\right) = \dfrac{a\sqrt{6}}{3} \Rightarrow$ $d\left(A, (SBC)\right) = \dfrac{2a\sqrt{6}}{3}$.

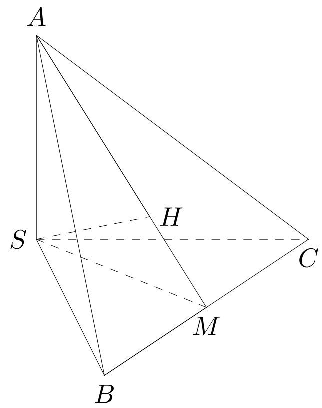


$\square$

VÍ DỤ 8. Cho hình chóp $S.ABC$ có cạnh $SA = SB = SC = a$ và SA, SB, SC đôi một vuông góc với nhau. Tính theo a khoảng cách h từ điểm S đến mặt phẳng (ABC).

Lời giải.

Gọi H là chân đường cao hạ từ S xuống (ABC) và $M = AH \cap BC$. Ta có $SH \perp (ABC) \Rightarrow$ $SH \perp BC \Rightarrow BC \perp SH$. Lại có $\begin{cases} SA \perp SB \\ SA \perp SC \end{cases} \Rightarrow SA \perp (SBC) \Rightarrow SA \perp BC \Rightarrow BC \perp SA$.
Như vậy $\begin{cases} BC \perp SH \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAM) \Rightarrow BC \perp SM$. Từ $SA \perp (SBC) \Rightarrow SA \perp SM$ Do đó $\dfrac{1}{SH^2} = \dfrac{1}{SA^2} + \dfrac{1}{SM^2} = \dfrac{1}{SA^2} + \dfrac{1}{SB^2} + \dfrac{1}{SC^2} = \dfrac{3}{a^2} \Rightarrow h = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$.

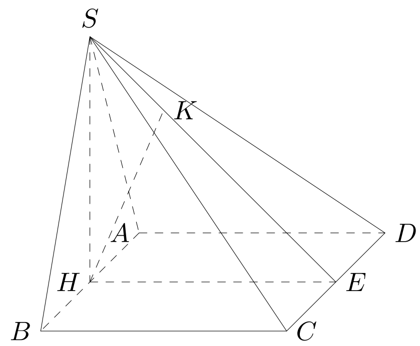


$\square$

VÍ DỤ 9. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng 1. Tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy $(ABCD)$. Tính khoảng cách từ A đến (SCD).

Lời giải.

Gọi H là trung điểm AB, suy ra $SH \perp AB$. Do đó $SH \perp (ABCD)$. Do $AH \parallel CD$ nên $d\left(A, (SCD)\right) = d\left(H, (SCD)\right)$. Gọi E là trung điểm CD; K là hình chiếu vuông góc của H trên SE. Khi đó $d\left(H, (SCD)\right) = HK = \dfrac{SH.HE}{\sqrt{SH^2 + HE^2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$.
Vậy $d\left(A, (SCD)\right) = HK = \dfrac{\sqrt{21}}{7}$.



$\square$

2. Bài tập áp dụng

BÀI 1. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Chứng minh rằng khoảng cách từ điểm B, C, D, A', B', D' đến đường chéo AC' đều bằng nhau. Tính khoảng cách đó.

Lời giải.

Ta có $\triangle BAC' = \triangle CA'A = \triangle DAC' = \triangle A'AC = \triangle B'C'A = \triangle D'C'A$ chung đáy AC' nên khoảng cách từ B, C, D, A', B', D' đến đường chéo AC' đều bằng nhau.
Hạ $CH \perp AC'$, ta được $\dfrac{1}{CH^2} = \dfrac{1}{AC^2} + \dfrac{1}{C'C^2} \Rightarrow CH = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. $\square$

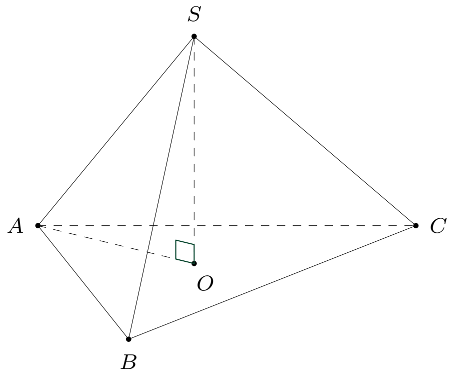
BÀI 2. Cho hình chóp đều $S.ABC$. Biết độ dài cạnh đáy, cạnh bên tương ứng bằng a, b $(a < b\sqrt{3})$. Tính chiều cao của hình chóp.

Lời giải.

Hình chiếu của S trên mặt phẳng (ABC) là tâm O của tam giác đều ABC.
Trong tam giác đều ABC, ta có $OA = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$.
Trong tam giác vuông SOA, ta có

$$SO = \sqrt{SA^2 - OA^2} = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{3}}.$$

Vậy chiều cao của hình chóp là $SO = \sqrt{b^2 - \dfrac{a^2}{3}}$.

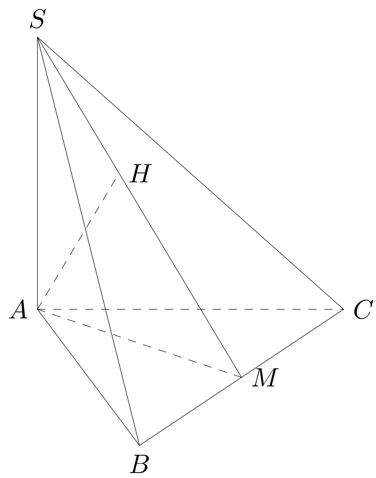


□

BÀI 3. Cho tứ diện $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh $a\sqrt{3}$. Cạnh $SA = 2a$ là vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính khoảng cách d từ điểm A đến mặt phẳng (SBC).

Lời giải.

Tam giác ABC đều, kẻ $AM \perp BC\,(M \in BC) \Rightarrow M$ là trung điểm của cạnh BC. Ta có $\begin{cases} BC \perp AM \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAM)$. Khi đó kẻ $AH \perp SM\,(H \in SM) \Rightarrow BC \perp AH$. Như vậy $\begin{cases} AH \perp SM \\ AH \perp BC \end{cases} \Rightarrow AH \perp (SBC) \Rightarrow d = d\,(A;(SBC)) = AH$. Ta có $AM = \dfrac{AB\sqrt{3}}{2} = \dfrac{3a}{2} \Rightarrow \dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{SA^2} + \dfrac{1}{AM^2} = \dfrac{1}{4a^2} + \dfrac{1}{\left(\dfrac{3a}{2}\right)^2} = \dfrac{25}{36a^2} \Rightarrow AH = \dfrac{6}{5}a \Rightarrow d = \dfrac{6}{5}a.$

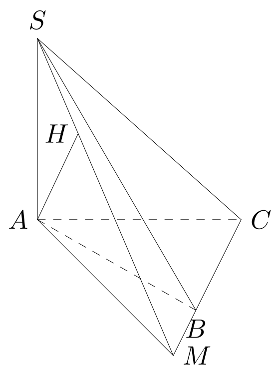


□

BÀI 4. Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ có $AB = BC = 2a$ và $\widehat{ABC} = 120^\circ$. Cạnh $SA = 3a$ và vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính khoảng cách d cách từ A đến mặt phẳng (SBC).

Lời giải.

Kẻ $AM \perp BC\,(M \in BC)$, ta có $\begin{cases} CM \perp SA \\ CM \perp AM \end{cases} \Rightarrow CM \perp (SAM) \Rightarrow CM \perp AM$. Ta có $AM = 2a\sin 60^\circ = a\sqrt{3}$ Xét $\triangle SAM$ ta có $\dfrac{1}{d^2} = \dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{SA^2} + \dfrac{1}{AM^2} \Rightarrow d = \dfrac{3a}{2}$

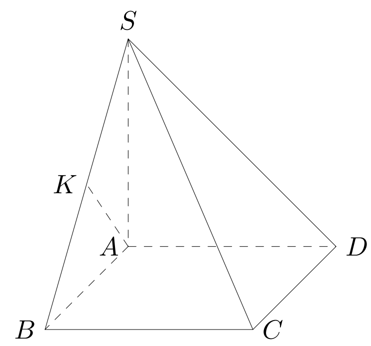


□

BÀI 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật có $AB = a\sqrt{2}$. Cạnh bên $SA = 2a$ và vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$. Tính khoảng cách từ D đến mặt phẳng (SBC).

Lời giải.

Do $AD \parallel BC$ nên $d(D,(SBC)) = d(A,(SBC))$. Gọi K là hình chiếu của A trên SB, suy ra $AK \perp SB$. Khi $d[A,(SBC)] = AK = \dfrac{SA.AB}{\sqrt{SA^2+AB^2}} = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$.

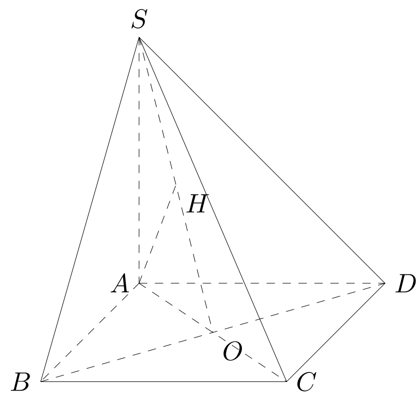


□

BÀI 6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a; SA vuông góc với đáy; SB hợp với đáy góc 45°. Tính khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng (SBD).

Lời giải.

Ta có $45^\circ = \widehat{SB,(ABCD)} = \widehat{SBA} \Rightarrow SA = AB = a$. Gọi O là giao điểm của AC với BD. Ta có $d(C,(SBD)) = d(A,(SBD))$. Kẻ $AH \perp SO$ ta có $\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp SA \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp AH$ mà $AH \perp SO \Rightarrow AH \perp (SBD)$. Ta có $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AO^2} + \dfrac{1}{AS^2} = \dfrac{3}{a^2} \Rightarrow AH = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$. $\Rightarrow d(C,(SBD)) = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$.

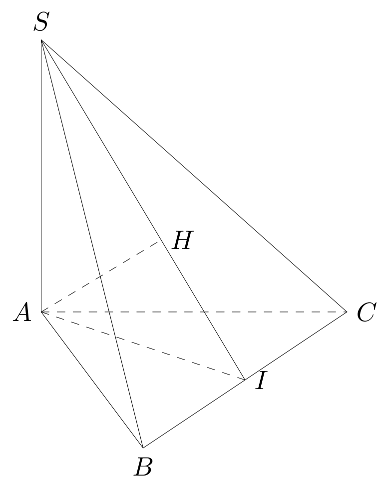


□

BÀI 7. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là một tam giác đều cạnh a, cạnh SA vuông góc với (ABC) và $SA = h$, góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) bằng 60°. Tính khoảng cách từ A đến (SBC) theo a và h.

Lời giải.

Gọi I là trung điểm của BC, ta có $\begin{cases} AI \perp BC \\ SA \perp BC \end{cases} \Rightarrow (SAI) \perp BC$ Vậy $\widehat{AIS}$ chính là góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và $(ABC) \Rightarrow \widehat{AIS} = 60^\circ$. Trong (SBC)kẻ $AH \perp SI$. Ta có $\begin{cases} BC \perp (SAI) \\ AH \subset (SAI) \end{cases} \Rightarrow AH \perp BC$. Vậy $\begin{cases} AH \perp BC \\ AH \perp SI \end{cases} \Rightarrow AH \perp (SBC) \Rightarrow d(A,(SBC)) = AH$. Tam giác ABC đều cạnh a nên $AI = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ Trong tam giác AIS ta có $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AI^2} + \dfrac{1}{AS^2} = \dfrac{1}{\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} + \dfrac{1}{h^2} = \dfrac{4h^2+3a^2}{3a^2h^2}$



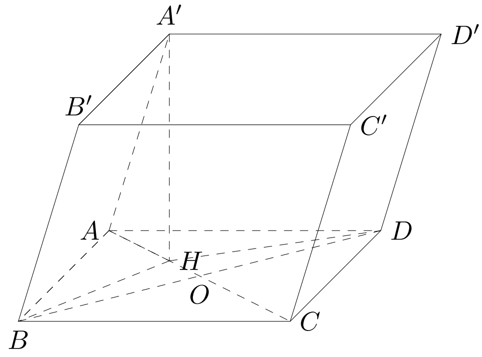
$\Rightarrow AH = \dfrac{ah\sqrt{3}}{\sqrt{4h^2+3a^2}}$.

Hay $d(A,(SBC)) = \dfrac{ah\sqrt{3}}{\sqrt{4h^2+3a^2}}$. □

BÀI 8. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các mặt đều là hình thoi cạnh a, các góc $\widehat{BAA'} = \widehat{BAD} = \widehat{DAA'} = 60^\circ$. Tính khoảng cách từ A' đến $(ABCD)$.

Lời giải.

Do $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các mặt đều là hình thoi cạnh a và $\widehat{BAA'} = \widehat{BAD} = \widehat{DAA'} = 60^\circ$ nên các tam giác ABA', ABD, ADA' đều là các tam giác đều cạnh $a \Rightarrow A'A = A'B = A'D$ (A' cách đều ba đỉnh của $\triangle ABD$).



Gọi H là hình chiếu của A' trên $(ABCD)$ thì các tam giác vuông $A'HA, A'HB, A'HD$ bằng nhau nên

$$HA = HB = HD.$$

Do đó H là tâm của đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABD$. Gọi O giao điểm của AC và BD, ta có $AH = \dfrac{2}{3}AO = \dfrac{2}{3}.\dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

$$\begin{aligned} A'H &= \sqrt{AA'^2 - AH^2} \\ &= \sqrt{a^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} \\ &= a\sqrt{\frac{2}{3}}. \end{aligned}$$

Vậy $d\left(A', (ABCD)\right) = A'H = a\sqrt{\dfrac{2}{3}}$. □

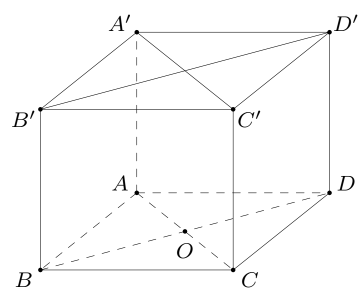
Dạng 2. Khoảng cách giữa đường thẳng và mặt phẳng song song, giữa hai mặt phẳng song song

1. Ví dụ minh hoạ

VÍ DỤ 1. Cho một hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$, đáy là các hình thoi có cạnh bằng a, $\widehat{BAD} = 120^\circ$, $AA' = h$. Tính các khoảng cách giữa $A'C'$ và $(ABCD)$, AA' và $(BDD'B')$.

Lời giải.

Đường thẳng $A'C'$ thuộc mặt phẳng $(A'B'C'D')$ nên nó song song với mặt phẳng $(ABCD)$. Do $ABCD.A'B'C'D'$ là hình hộp đứng nên $A'A \perp (ABCD)$.
Vậy $\mathrm{d}\left(A'C', (ABCD)\right) = \mathrm{d}(A', (ABCD)) = A'A = h$.
Do AA' song song với BB' nên AA' song song với $(BDD'B')$.



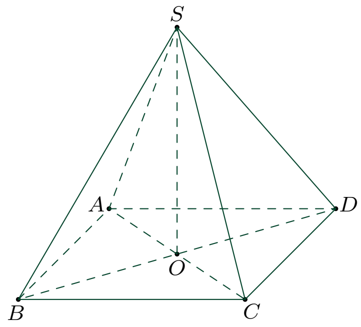
Gọi O là tâm của hình thoi $ABCD$. Do $AO \perp BD$ và $AO \perp BB'$ nên $AO \perp (BDD'B')$. Vậy khoảng cách giữa AA' và $(BDD'B')$ bằng độ dài đoạn thẳng AO.
Tam giác BAD cân tại A và có $\widehat{BAD} = 120^\circ$ nên $\widehat{ABO} = 30^\circ$.
Do đó, trong tam giác vuông AOB, ta có $AO = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{a}{2}$.
Vậy khoảng cách giữa AA' và $(BDD'B')$ bằng $\dfrac{a}{2}$. □

VÍ DỤ 2.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, O là giao điểm của AC và BD, $SO \perp (ABCD)$, $SO = a$. Tính

a) Khoảng cách từ điểm S đến mặt phẳng $(ABCD)$;

b) Khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (SAC).



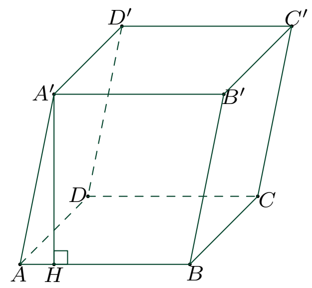
Lời giải.

a) Ta có $O \in (ABCD)$, $SO \perp (ABCD)$. Suy ra khoảng cách từ điểm S đến mặt phẳng $(ABCD)$ là $SO = a$.

b) Do $SO \perp (ABCD)$, $BO \subset (ABCD)$ nên $SO \perp BO$. Vì BO vuông góc với hai đường thẳng AC và SO cắt nhau trong (SAC) nên $BO \perp (SAC)$. Do $O \in (SAC)$, $BO \perp (SAC)$ nên khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SAC) là $BO = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

□

VÍ DỤ 3.
Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $AA' = a$, góc giữa hai đường thẳng AB và DD' bằng $60°$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và $A'B'$.



Lời giải.
Gọi H là hình chiếu vuông góc của A' trên AB. Do $AB \parallel A'B'$ nên $\mathrm{d}\left(AB, A'B'\right) = A'H$.
Vì $AA' \parallel DD'$ nên góc giữa đường thẳng AB và AA' bằng góc giữa đường thẳng AB và DD'.
Suy ra $\widehat{A'AH} = 60°$.

Trong tam giác vuông HAA' có $A'H = AA' \cdot \sin \widehat{A'AH} = a \sin 60° = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Vậy $\mathrm{d}\left(AB, A'B'\right) = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

□

VÍ DỤ 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA = a\sqrt{6}$ và vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, đáy $(ABCD)$ là nửa lục giác đều nội tiếp trong đường tròn đường kính $AD = 2a$.

a) Tính khoảng cách từ A, B đến mặt phẳng (SCD).

b) Tính khoảng cách từ đường thẳng AD đến mặt phẳng (SBC).

c) Tính diện tích thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ với mặt phẳng (α) song song với mặt phẳng (SAD) và cách (SAD) một khoảng bằng $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải.

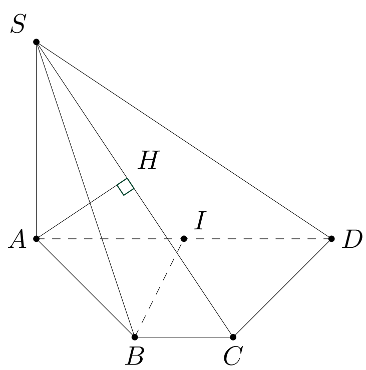
a)

Ta có $(SCD) \perp (SAC)$. Hạ $AH \perp SC \Rightarrow AH \perp (SCD)$. Suy ra AH là khoảng cách từ A tới (SCD).
Xét $\triangle SAB : \dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AC^2} + \dfrac{1}{SA^2} \Rightarrow AH = a\sqrt{2}$.
Gọi I là trung điểm của AD, suy ra

$$BI \parallel CD \Rightarrow BI \parallel (SCD) \Rightarrow \mathrm{d}(B,(SCD)) = \mathrm{d}(I,(SCD)).$$

Mặt khác, $AI \cap (SCD) = D$, nên $\dfrac{\mathrm{d}(I,(SCD))}{\mathrm{d}(A,(SCD))} = \dfrac{ID}{AD} = \dfrac{1}{2}$.

Suy ra $\mathrm{d}(I,(SCD)) = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.



b) Ta có $AD \parallel CD \Rightarrow AD \parallel (SBC) \Rightarrow \mathrm{d}(AD,(SBC)) = \mathrm{d}(A,(SBC))$.
Hạ $AK \perp BC$, ta có $BC \perp (SAK) \Rightarrow (SBC) \perp (SAK)$ và $(SBC) \perp (SAK) = AK$.
Hạ $AG \perp SK$, suy ra $AG \perp (SBC)$.
Xét $\triangle SAK$, ta có

$$\frac{1}{AG^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AK^2} \Rightarrow AG = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

c) Ta có $AK \perp (SAD)$. Giả sử $(\alpha) \parallel (SAD)$ cắt AK tại E, khi đó

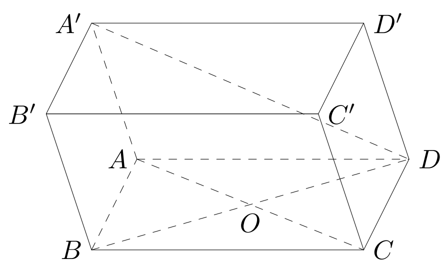
$$\mathrm{d}((\alpha),(SAD)) = AE = \frac{a\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{2}AK.$$

Suy ra E là trung điểm của AK. Ta xác định thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (α) qua E và song song với (SAD).
Thiết diện là hình thang vuông $MNPQ$ với M,N,Q,P là trung điểm của AB,CD,SB,SC. Ta tính được $\mathcal{S}_{MNPQ} = \dfrac{a^2\sqrt{6}}{2}$.

□

VÍ DỤ 5. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có các cạnh đều bằng a và $\widehat{BAD} = \widehat{BAA'} = \widehat{DAA'} = 60^\circ$. Tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng đáy $(ABCD)$ và $A'B'C'D'$.

Lời giải.



Hạ $A'H \perp AC$. Ta có $BD \perp (OAA')$ suy ra $BD \perp A'H \Rightarrow A'H \perp (ABCD)$. Do $(ABCD) \parallel (A'B'C'D)$ nên $A'H$ là khoảng cách giữa hai mặt đáy.

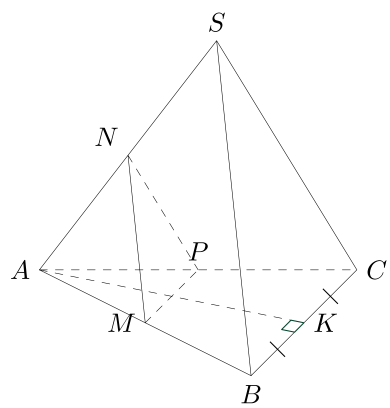
$A'.ABD$ là hình chóp đều nên $AH = \dfrac{2}{3}AO = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

$$A'H^2 = A'A^2 - AH^2 = \frac{2a^2}{3} \Rightarrow A'H = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

□

VÍ DỤ 6. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng a, mặt bên (SBC) vuông góc với đáy. Gọi M,N,P theo thứ tự là trung điểm AB,SA,AC. Tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng (MNP) và (SBC).

Lời giải.



Ta chứng minh được $(MNP) \parallel (SBC)$.
Suy ra $\mathrm{d}((MNP);(SBC)) = \mathrm{d}(P;(SBC))$.
$AP \cap (SBC) = C$ suy ra $\mathrm{d}(P;(SBC)) = \dfrac{AP}{AC}\mathrm{d}(A;(SBC)) = \dfrac{1}{2}\mathrm{d}(A;(SBC))$.
Gọi K là trung điểm của BC. Tam giác ABC đều suy ra $AK \perp BC$.
Do $(ABC) \perp (SBC)$ theo giao tuyến BC nên $AK \perp (SBC)$.
Do đó, $\mathrm{d}(A;(SBC)) = AK = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.
Vậy $\mathrm{d}((MNP);(SBC)) = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

□

2. Bài tập áp dụng

BÀI 1. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Tính theo a:

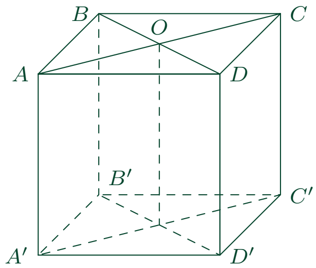
a) Khoảng cách giữa đường thẳng DD' và $(AA'C'C)$.

b) Khoảng cách giữa hai mặt phẳng $(AA'D'D)$ và $(BB'C'C)$.

Lời giải.

a) Ta có $DD' \parallel AA'$,

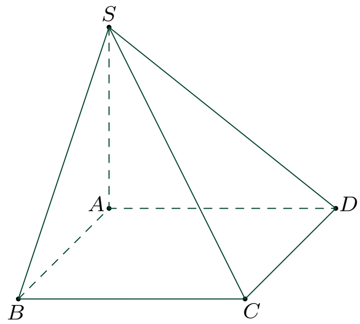
suy ra $\mathrm{d}(DD', (AA'C'C)) = \mathrm{d}(D, (AA'C'C))$.
Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$.
Ta có $\begin{cases} DO \perp AC \\ DO \perp AA' \end{cases} \Rightarrow DO \perp (AA'C'C)$.
Vậy $\mathrm{d}(DD', (AA'C'C)) = \mathrm{d}(D, (AA'C'C))$
$$= DO = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$



b) Ta có $(AA'D'D) \parallel (BB'C'C)$ suy ra
$\mathrm{d}((AA'D'D), (BB'C'C)) = \mathrm{d}(A, (BB'C'C))$.
Do $AB \perp BB'$ và $AB \perp BC$, suy ra $AB \perp (BB'C'C)$.
Vậy $\mathrm{d}((AA'D'D), (BB'C'C)) = AB = a$.

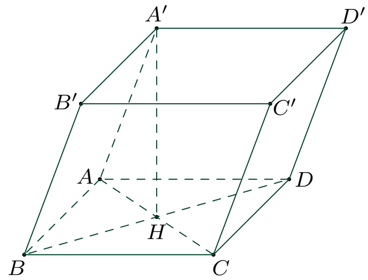
□

BÀI 2.
Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, $SA \perp (ABCD)$. Chứng minh $CD \parallel (SAB)$ và tính khoảng cách giữa CD và mặt phẳng (SAB).



Lời giải.
Do $CD \parallel AB$, $AB \subset (SAB)$, $CD \not\subset (SAB)$ nên $CD \parallel (SAB)$.
Vì $D \in CD$ nên $\mathrm{d}(CD, (SAB)) = \mathrm{d}(D, (SAB))$.
Do $SA \perp (ABCD)$, $DA \subset (ABCD)$ nên $SA \perp DA$.
Vì DA vuông góc với hai đường thẳng AB, SA cắt nhau trong (SAB) nên $DA \perp (SAB)$.
Do đó $\mathrm{d}(D, (SAB)) = DA = a$. Vậy $\mathrm{d}(CD, (SAB)) = a$. □

BÀI 3.
Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các cạnh bằng a và đáy là hình vuông. Hình chiếu của A' trên mặt phẳng $(ABCD)$ là giao điểm H của AC và BD. Tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng $(ABCD)$ và $(A'B'C'D')$.



Lời giải.

Vì H là trung điểm của AC nên $AH = \dfrac{AC}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.
Do $A'H \perp (ABCD)$ và $AH \subset (ABCD)$ nên $A'H \perp AH$.
Xét tam giác $AA'H$ vuông tại H có $A'H^2 = A'A^2 - AH^2 = a^2 - \left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \dfrac{a^2}{2}$.
Suy ra $A'H = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.
Vậy khoảng cách giữa hai mặt phẳng $(ABCD)$ và $(A'B'C'D')$ bằng $A'H = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. □

BÀI 4. Hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a và cạnh bên bằng $a\sqrt{2}$.

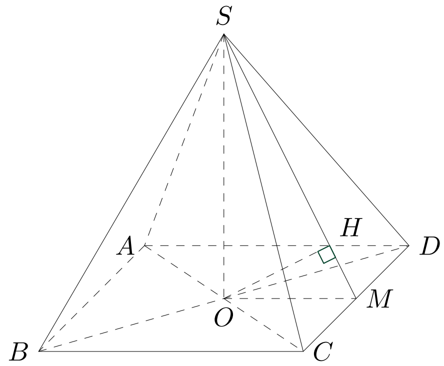
a) Tính khoảng cách từ S tới $(ABCD)$.

b) Tính khoảng cách giữa đường thẳng AB và mặt (SCD).

Lời giải.

a) Gọi $AC \cap BD = O$ suy ra $SO \perp (ABCD)$.
Ta có $\mathrm{d}(S;(ABCD)) = SO = \sqrt{SA^2 - OA^2}$.
Vậy $SO = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

b) Ta có $\mathrm{d}(AB;(SCD)) = \mathrm{d}(A;(SCD)) = 2\mathrm{d}(O;(SCD)) = OH$. Tính được $OH = \dfrac{a\sqrt{42}}{14}$.



□

BÀI 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, $SA \perp (ABCD)$ và $SA = 2a$.

a) Tính khoảng cách từ A tới (SBC) và khoảng cách từ C tới (SBD).

b) M, N lần lượt là trung điểm của AB và AD. Tính khoảng cách từ MN tới (SBD).

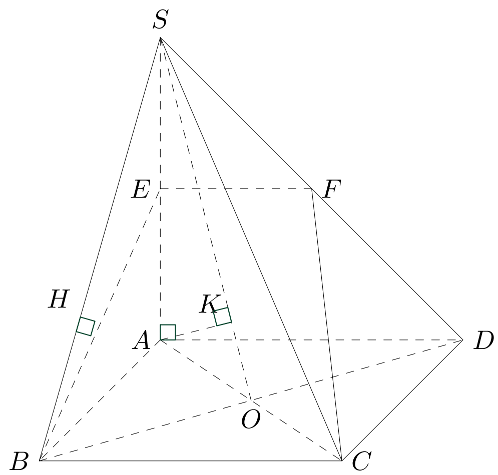
c) Mặt phẳng (P) qua BC cắt SA, SD theo thứ tự tại E, F. Cho biết AD cách (P) một khoảng là $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$, tính khoảng cách từ S tới (P) và diện tích tứ giác $BCFE$.

Lời giải.

a) Hạ $AH \perp SB$ suy ra $AH \perp (SBC)$. Ta có $\mathrm{d}(A;(SBC)) = AH = \dfrac{2a}{\sqrt{5}}$.

b) $AC \cap BD = O$ suy ra $BD \perp (SAC)$. Hạ $AK \perp SO$ thì $AK \perp (SBD)$.
Ta có $\mathrm{d}(C;(SBD)) = \mathrm{d}(A;(SBD)) = AK = \dfrac{2a}{3}$.

c) Hạ $AQ \perp BE$ suy ra $AQ \perp (P)$.
Ta có $\dfrac{1}{AQ^2} = \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{AE^2}$ suy ra $AE = a$.
Do đó E là trung điểm của SA. $EF \parallel AD$ nên F là trung điểm SD.
$\mathrm{d}(S;(P)) = \mathrm{d}(A;(P)) = \mathrm{d}(AD;(P)) = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.
$BCFE$ là hình thang vuông tại E, B; $\mathcal{S}_{BCFE} = \dfrac{3a^2\sqrt{2}}{4}$.



□

BÀI 6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA = 2a$ và vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B, $AB = BC = a$, $AD = 2a$.

a) Tính khoảng cách từ A, B tới mặt phẳng (SCD).

b) Tính khoảng cách giữa đường thẳng AD và mặt phẳng (SBC).

c) Tính diện tích của thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ với mặt phẳng song song với (SAD) và cách một khoảng bằng $\dfrac{a}{3}$.

Lời giải.

a) $d(A;(SCD)) = \dfrac{2a}{\sqrt{3}}$; $d(B;(SCD)) = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$.

b) $d(AD;(SBC)) = \dfrac{2a}{\sqrt{5}}$.

c) $\mathcal{S}_{EFGH} = \dfrac{4a^2}{3}$.

□

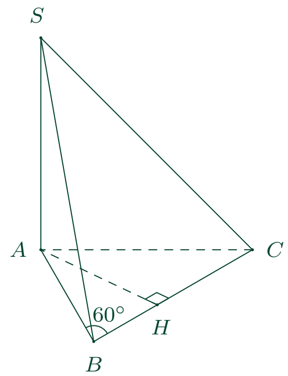
Dạng 3. Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau

VÍ DỤ 1. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, $AB = a$, $\widehat{ABC} = 60^\circ$.
Xác định đường vuông góc chung và tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC.

Lời giải.

Gọi H là hình chiếu của A trên BC. Tam giác ABH vuông tại H và có $AB = a$, $\widehat{ABH} = 60^\circ$ nên $BH = \dfrac{a}{2}$.
Do SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) nên AH là đường vuông góc chung của SA và BC (H thuộc tia BC và $BH = \dfrac{a}{2}$).

Khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BD là $\mathrm{d}(SA, BC) = AH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.



□

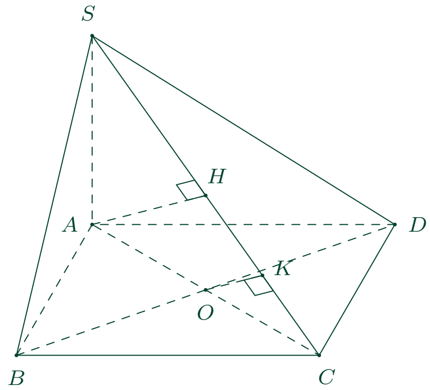
VÍ DỤ 2. **Luyện tập 3.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, $SA \perp (ABCD)$, $SA = a\sqrt{2}$.

a) Tính khoảng cách từ A đến SC.

b) Chứng minh rằng $BD \perp (SAC)$.

c) Xác định đường vuông góc chung và tính khoảng cách giữa BD và SC.

Lời giải.



a) Tính khoảng cách từ A đến SC.
Gọi H là trung điểm SC. Ta có $AC = SA = a\sqrt{2}$, suy ra tam giác SAC vuông cân tại A nên $AH \perp SC$.
Vậy $\mathrm{d}(A, SC) = AH = a$.

b) Chứng minh rằng $BD \perp (SAC)$.
Do $\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp SA \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SHC)$.

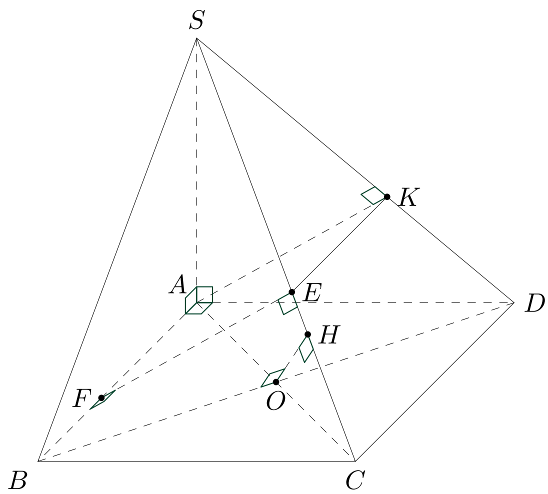
c) Xác định đường vuông góc chung và tính khoảng cách giữa BD và SC.
Gọi $O = AC \cap BD$. Kẻ $OK \perp SC$ tại K.
Do $BD \perp (SAC)$ nên $OK \perp BD$.
Vậy OK là đường vuông góc chung giữa BD và SC.
Xét $\triangle SAC \backsim \triangle OKC \Rightarrow \dfrac{OK}{SA} = \dfrac{OC}{SC} \Rightarrow OK = \dfrac{OC \cdot SA}{SC} = \dfrac{a\sqrt{2} \cdot a\sqrt{2}}{2 \cdot 2a} = \dfrac{a}{2}$.

□

VÍ DỤ 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ cạnh a, có cạnh $SA = h$ và vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Dựng và tính độ dài đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau:

a) SB và CD.
b) SC và BD.
c) SC và AB.

Lời giải.



a) Ta có: $\begin{cases} BC \perp SA \\ BC \perp AB \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SB$.
Mặt khác $BC \perp CD$. Vậy BC là đoạn vuông góc chung của SB và CD.
Suy ra $d(SB, CD) = BC = a$.

b) Gọi O là giao điểm của AC và BD. Ta có: $\begin{cases} BD \perp SA \\ BD \perp AC \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC)$ tại O.

Trong mặt phẳng (SAC), kẻ $OH \perp SC$ tại H, ta có $OH \perp SC$ và $OH \perp BD$ (vì $BD \perp (SAC)$).
Vậy OH là đoạn vuông góc chung của BD và SC.

Ta có $\dfrac{OH}{OC} = \dfrac{SA}{SC} = \sin\widehat{ACS} \Rightarrow OH = \dfrac{OC.SA}{SC} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \dfrac{h}{\sqrt{h^2+2a^2}}$.

Vậy $d(SC,BD) = OH = \dfrac{ah\sqrt{2}}{2\sqrt{h^2+2a^2}}$.

c) Ta có $AB \parallel CD \Rightarrow AB \parallel (SCD)$.

Ta có: $\begin{cases} CD \perp SA \\ CD \perp AD \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAD) \Rightarrow (SCD) \perp (SAD)$ theo giao tuyến SD.

Trong mặt phẳng (SAD), kẻ $AK \perp SD$ tại K, ta có: $AK \perp (SCD) \Rightarrow AK \perp SC$.
Trong mặt phẳng (SCD), kẻ $KE \parallel CD$ $(E \in SC)$.
Trong mặt phẳng (AB, KE), kẻ $EF \parallel AK$ $(F \in AB) \Rightarrow EF \perp SC$.
Lại có $AB \parallel CD$ và $CD \perp (SAD) \Rightarrow AB \perp (SAD) \Rightarrow AB \perp AK \Rightarrow AB \perp EF$.
Do đó EF là đoạn vuông góc chung của SC và AB.

Ta có $EF = AK = \dfrac{SA.AD}{SD} = \dfrac{ah}{\sqrt{a^2+h^2}}$.

Vậy $d(SC,AB) = \dfrac{ah}{\sqrt{a^2+h^2}}$.

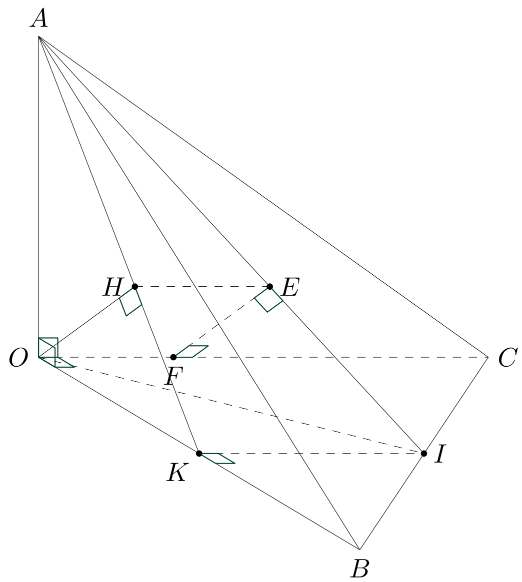
□

VÍ DỤ 4. Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC vuông góc với nhau đôi một và $OA = OB = OC = a$. Gọi I là trung điểm của BC. Hãy dựng và tính độ dài đoạn vuông góc chung của các cặp đường thẳng chéo nhau:

a) OA và BC.

b) AI và OC.

Lời giải.



a) Ta có $\begin{cases} OA \perp OI \\ BC \perp OI \end{cases} \Rightarrow OI$ là đoạn vuông góc chung của OA và BC.

Tam giác OBC vuông cân tại O nên $OI = \dfrac{BC}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Vậy $d(OA,BC) = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

b) Gọi K là trung điểm của OB, ta có $IK \parallel OC \Rightarrow OC \parallel (AIK)$.

Ta có $\begin{cases} IK \perp OB \\ IK \perp OA \end{cases} \Rightarrow IK \perp (OAB) \Rightarrow (AIK) \perp (OAB)$ theo giao tuyến AK.

Trong mặt phẳng (OAB), kẻ $OH \perp AK$ tại H, ta có: $OH \perp (AIK) \Rightarrow OH \perp AI$.
Trong mặt phẳng (AIK), kẻ $HE \parallel IK$ $(E \in SI)$.
Trong mặt phẳng (HE, OC), kẻ $EF \parallel OH$ $(F \in OC) \Rightarrow EF \perp AI$.

Lại có $OC \perp (OAB) \Rightarrow OC \perp AH \Rightarrow OC \perp EF$.
Do đó EF là đoạn vuông góc chung của OC và AI.

Trong tam giác vuông OAK ta có: $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OA^2} + \dfrac{1}{OK^2} = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{4}{a^2} = \dfrac{5}{a^2}$.

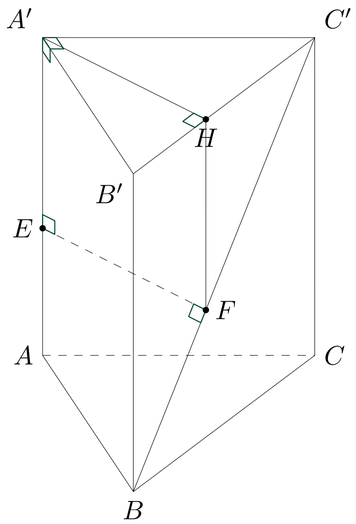
Suy ra $EF = OH = \dfrac{a\sqrt{5}}{5}$.

Vậy $d(AI, OC) = \dfrac{a\sqrt{5}}{5}$.

□

VÍ DỤ 5. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A với $AB = a$, $AC = 2a$; cạnh bên $AA' = 2a$. Hãy dựng và tính độ dài đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng BC' và AA'.

Lời giải.



Ta có $AA' \parallel BB' \Rightarrow AA' \parallel (BB'C'C)$.
Vì $(A'B'C') \perp (BB'C'C)$ theo giao tuyến $B'C'$ nên trong mặt phẳng $(A'B'C')$, kẻ $A'H \perp B'C'$ tại H, ta có: $A'H \perp (BB'C'C) \Rightarrow A'H \perp BC'$.
Trong mặt phẳng $(BB'C'C)$, kẻ $HF \parallel AA'$ $(F \in BC')$. Trong mặt phẳng (HF, AA'), kẻ $FE \parallel A'H$ $(E \in AA') \Rightarrow FE \perp BC'$.
Ta có $AA' \perp (A'B'C') \Rightarrow AA' \perp A'H \Rightarrow AA' \perp FE$.
Do đó EF là đoạn vuông góc chung của AA' và BC'.

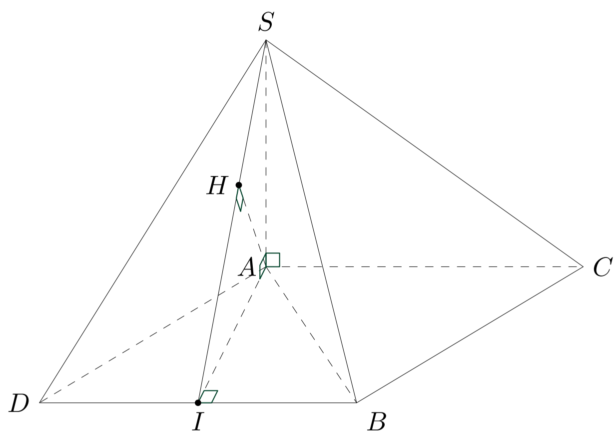
Trong tam giác vuông $A'B'C'$ ta có: $\dfrac{1}{A'H^2} = \dfrac{1}{A'B'^2} + \dfrac{1}{A'C'^2} = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{4a^2} = \dfrac{5}{4a^2}$.

Suy ra $EF = A'H = \dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$.

Vậy $d(AA', BC') = \dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$. □

VÍ DỤ 6. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a. $SA = 2a$ và vuông góc với mặt đáy. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và AC.

Lời giải.



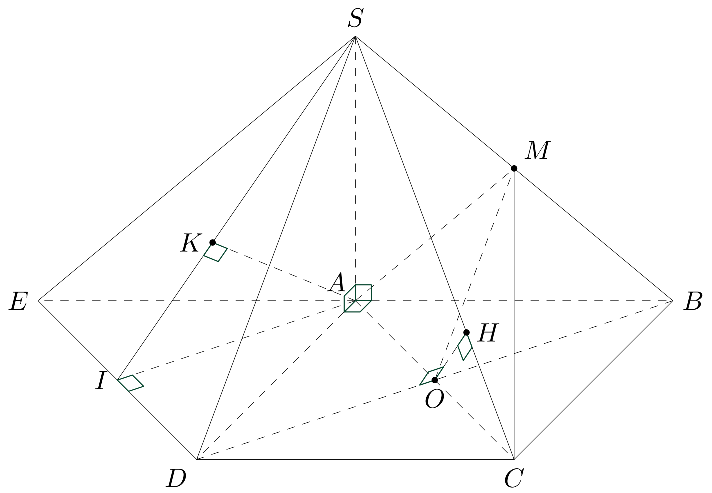
Trong mặt phẳng (ABC), dựng hình thoi $ACBD$, ta có: $BD \parallel AC \Rightarrow AC \parallel (SBD)$.
$\Rightarrow d(AC, SB) = d(AC, (SBD)) = d(A, (SBD))$.

Gọi I là trung điểm của BD, ta có: $BD \perp AI$ và $BD \perp SA \Rightarrow BD \perp (SAI)$.
$\Rightarrow (SBD) \perp (SAI)$ theo giao tuyến SI.
Trong mặt phẳng (SAI), kẻ $AH \perp SI$ tại H, ta có: $AH \perp (SBD) \Rightarrow AH = d(A, (SBD))$.
Tam giác SAI vuông tại A có đường cao AH.
$\Rightarrow \dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{SA^2} + \dfrac{1}{AI^2} = \dfrac{1}{4a^2} + \dfrac{4}{3a^2} = \dfrac{19}{12a^2}$.
$\Rightarrow AH^2 = \dfrac{12a^2}{19}$ hay $AH = \dfrac{2a\sqrt{57}}{19}$.
Vậy $d(SB, AC) = \dfrac{2a\sqrt{57}}{19}$. □

VÍ DỤ 7. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh bằng a, SA vuông góc với đáy và $SA = a$. M là trung điểm của SB. Tính khoảng cách giữa các đường thẳng:

a) SC và BD. b) AC và SD. c) SD và AM.

Lời giải.



a) Gọi O là giao điểm của AC và BD. Ta có: $\begin{cases} BD \perp SA \\ BD \perp AC \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC)$ tại O.

Trong mặt phẳng (SAC), kẻ $OH \perp SC$ tại H, ta có $OH \perp SC$ và $OH \perp BD$ (vì $BD \perp (SAC)$).
Vậy OH là đoạn vuông góc chung của BD và SC.

Ta có $\dfrac{OH}{OC} = \dfrac{SA}{SC} = \sin \widehat{ACS} \Rightarrow OH = \dfrac{OC.SA}{SC} = \dfrac{\frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot a}{a\sqrt{3}} = \dfrac{a\sqrt{6}}{6}$.

Vậy $d(SC, BD) = OH = \dfrac{a\sqrt{6}}{6}$.

b) Dựng hình bình hành $ACDE$, ta có: $AC \parallel DE \Rightarrow AC \parallel (SDE)$.
$\Rightarrow d(AC, SD) = d(AC, (SDE)) = d(A, (SDE))$.

Trong mặt phẳng $(ABCD)$, kẻ $AI \perp DE$ tại I, ta có $\begin{cases} DE \perp AI \\ DE \perp SA \end{cases} \Rightarrow DE \perp (SAI)$.

$\Rightarrow (SDE) \perp (SAI)$ theo giao tuyến SI.
Trong mặt phẳng (SAI), kẻ $AK \perp SI$ tại K, ta có: $AK \perp (SDE) \Rightarrow AK = d(A, (SDE))$.

Ta có $AIDO$ là hình bình hành nên $AI = OD = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Trong tam giác vuông SAI ta có: $\dfrac{1}{AK^2} = \dfrac{1}{AI^2} + \dfrac{1}{SA^2} = \dfrac{2}{a^2} + \dfrac{1}{a^2} = \dfrac{3}{a^2}$.

Suy ra $AK = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Vậy $d(AC, SD) = d(A, (SDE)) = AK = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

c) Ta có $OM \parallel SD$ và $AC \parallel DE$ nên $(AMC) \parallel (SDE)$.

Suy ra $d(SD, AM) = d((AMC), (SDE)) = d(A, (SDE)) = AK = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

□

1. Bài tập áp dụng

VÍ DỤ 8. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ cạnh a, cạnh $SA = a$ và vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng:

a) SB và CD.

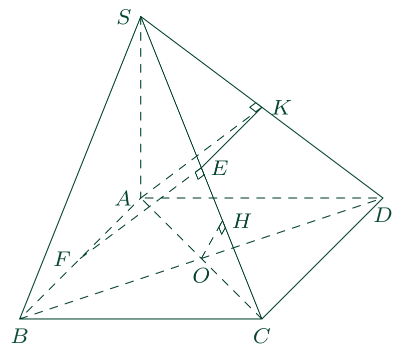
b) AB và SC.

Lời giải.

a) Ta có $BC \perp SA$ và $BC \perp AB$, suy ra $BC \perp SB$.
Mặt khác $BC \perp CD$, suy ra BC là đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng SB và CD. Ta có $\mathrm{d}(SB, CD) = BC = a$.

b)

Cách 1. Ta có $AB \perp (SAD)$ và SD là hình chiếu vuông góc của SC lên (SAD).
Vẽ $AK \perp SD$, $KE \parallel AB$, $EF \parallel AK$.
Ta có $AB \perp AK$, $AK \perp SD$, suy ra $AK \perp SC$. Do $EF \parallel AK$, suy ra ta cũng có $EF \perp AB$ và EF cắt AB tại F, $EF \perp SC$ và EF cắt SC tại E.
Các kết quả trên chứng tỏ EF là đoạn vuông góc chung của AB và SC.



Trong tam giác SAD vuông cân tại A có $AK = \dfrac{SD}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.
Vậy $\mathrm{d}(AB, SC) = EF = AK = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.
Cách 2. Ta có mặt phẳng (SCD) chứa SC và song song với AB, suy ra

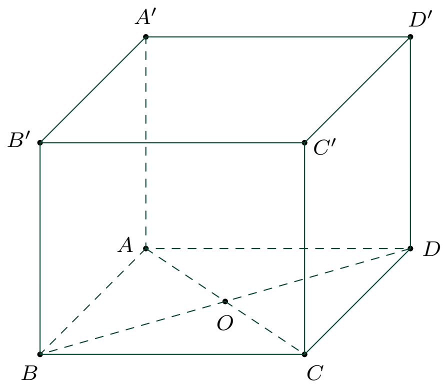
$$\mathrm{d}(AB, SC) = \mathrm{d}(AB, (SCD)) = \mathrm{d}(A, (SCD)) = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

□

VÍ DỤ 9.
Cho lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$, O là giao điểm của AC và BD, $AA' = a$, AA' vuông góc với mặt phẳng chứa đáy. Tính

a) $\mathrm{d}(AC, A'B')$;

b) $\mathrm{d}(CC', BD)$.



Lời giải.

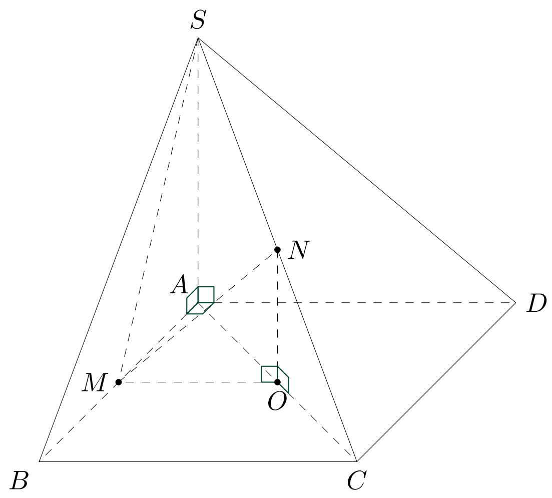
a) Vì AA' vuông góc với cả hai mặt phẳng $(ABCD)$ và $(A'B'C'D')$ nên $AA' \perp AC$, $AA' \perp A'B'$.
Suy ra đoạn thẳng AA' là đoạn vuông góc chung của AC và $A'B'$. Vậy $\mathrm{d}(AC, A'B') = AA' = a$.

b) Vì CC' vuông góc với $(ABCD)$ nên $CC' \perp OC$. Do đáy $ABCD$ là hình vuông có O là giao điểm của AC và BD nên $BD \perp OC$. Suy ra đoạn thẳng OC là đoạn vuông góc chung của CC' và BD. Vậy $\mathrm{d}(CC', BD) = OC = a\sqrt{2}$.

□

VÍ DỤ 10. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh bằng a; SA vuông góc với đáy và $SA = a$; M, N lần lượt là trung điểm của AB và SC. Chứng minh rằng MN là đoạn vuông góc chung của AB và SC. Tính khoảng cách giữa AB và SC.

Lời giải.



Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$, ta có ON là đường trung bình của tam giác $SAC \Rightarrow ON \parallel SA \Rightarrow ON \perp (ABCD)$.
Suy ra MO là hình chiếu của MN trên mặt phẳng $(ABCD)$.
Mà $MO \perp AB$ nên $MN \perp AB$ (định lí ba đường vuông góc.

Tam giác MON vuông tại $O \Rightarrow MN^2 = MO^2 + ON^2 = \dfrac{a^2}{4} + \dfrac{a^2}{4} = \dfrac{2a^2}{4}$.

Tam giác SAM vuông tại $M \Rightarrow SM^2 = SA^2 + AM^2 = a^2 + \dfrac{a^2}{4} = \dfrac{5a^2}{4}$.

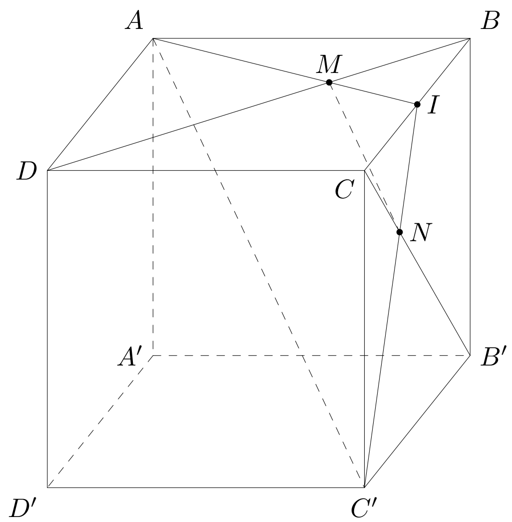
Ta có $SN^2 = \left(\dfrac{SC}{2}\right)^2 = \dfrac{SA^2 + AC^2}{4} = \dfrac{a^2 + 2a^2}{4} = \dfrac{3a^2}{4}$.

Suy ra $SM^2 = SN^2 + MN^2$ hay tam giác SMN vuông tại $N \Rightarrow MN \perp SC$.
Do đó MN là đoạn vuông góc chung của AB và SC.

Vậy $d(AB, SC) = MN = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. □

VÍ DỤ 11. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Xác định đường vuông góc chung của hai đường thẳng BD và $B'C$.

Lời giải.



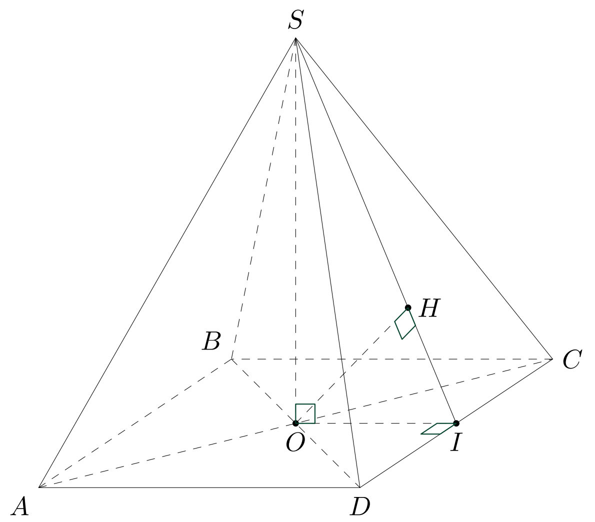
Ta có $BD \perp (ACC'A")\Rightarrow BD \perp AC'$.
Lại có $B'C \perp (ABC') \Rightarrow B'C \perp AC'$.
Vậy ta có đường thẳng AC' vuông góc với cả hai đường thẳng $B'C$ và BD.
Lấy điểm I thuộc BC. Gọi M là giao điểm của AI và BD; N là giao điểm của IC' và $B'C$.
Ta cần tìm vị trí của I để $MN \parallel AC'$.

Ta có $MN \parallel AC' \Leftrightarrow \dfrac{IM}{MA} = \dfrac{IN}{NC'} \Leftrightarrow \dfrac{IB}{AD} = \dfrac{IC}{B'C'} \Leftrightarrow IB = IC$.

Vậy khi I là trung điểm của BC thì MN là đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng BD và $B'C$ với M là giao điểm của AI và BD; N là giao điểm của IC' và $B'C$. □

VÍ DỤ 12. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O cạnh a, SO vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$ và $SO = a$. Tính Khoảng cách giữa hai đường thẳng SC và AB.

Lời giải.



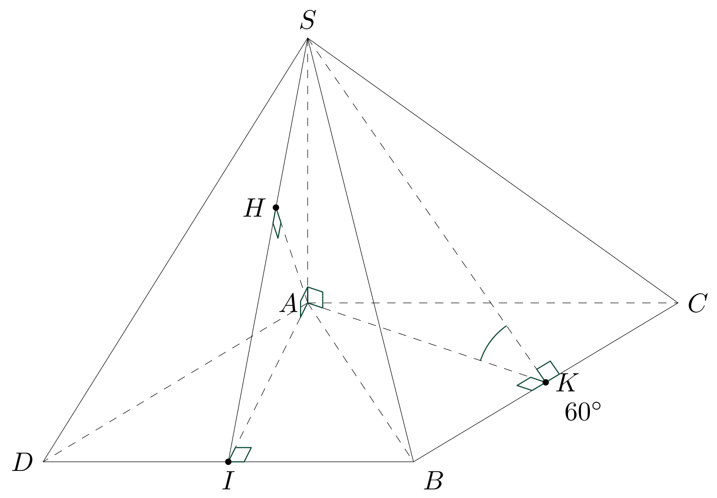
Ta có: $DC \parallel AB \Rightarrow AB \parallel (SCD) \Rightarrow d\,(AB, SC) = d\,(AB; (SCD)) = d\,(A; (SCD))$.
Gọi I là trung điểm của CD, ta có $CD \perp OI$.
Mà $CD \perp SO \Rightarrow CD \perp (SOI) \Rightarrow (SCD) \perp (SOI)$ theo giao tuyến SI.
Trong mặt phẳng (SOI), kẻ $OH \perp SI$ tại H, ta có $OH \perp (SOI)$.
Trong tam giác vuông SOI ta có $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OI^2} + \dfrac{1}{SO^2} = \dfrac{4}{a^2} + \dfrac{1}{a^2} = \dfrac{5}{a^2}$.
Suy ra $d\,(O; (SCD)) = OH = \dfrac{a\sqrt{5}}{5}$.
Vậy $d\,(AB; (SCD)) = d\,(A; (SCD)) = 2d\,(O; (SCD)) = \dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$. □

VÍ DỤ 13. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy, mặt bên SBC tạo với đáy một góc $60°$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng:

a) SA và BC.

b) SB và AC.

Lời giải.



a) Gọi K là trung điểm của BC, ta có $\begin{cases} AK \perp BC \\ AK \perp SA \end{cases}$.

Do đó AK là đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng SA và BC.

Vậy $d(SA, BC) = AK = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

b) Ta có $\begin{cases} (SBC) \cap (ABC) = BC \\ SA \perp (ABC) \\ AK \perp BC. \end{cases}$

$\Rightarrow SK \perp BC \Rightarrow \widehat{SKA}$ là góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC). Do đó $\widehat{SKA} = 60°$.

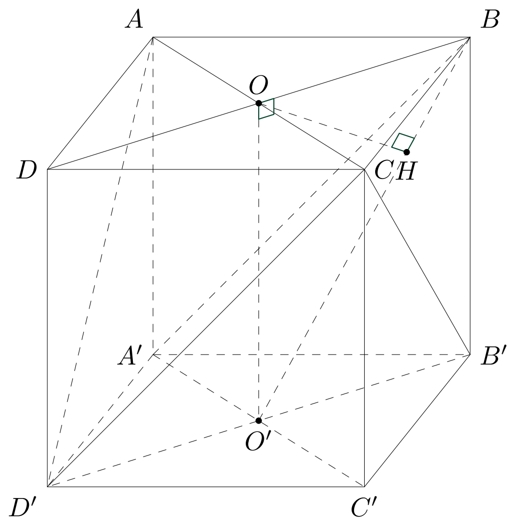
Tam giác SAK vuông tại A có $\widehat{SKA} = 60° \Rightarrow SA = AK.\tan 60° = \dfrac{3a}{2}$.

Trong mặt phẳng (ABC), dựng hình thoi $ACBD$, ta có: $BD \parallel AC \Rightarrow AC \parallel (SBD)$.
$\Rightarrow d(AC, SB) = d(AC, (SBD)) = d(A, (SBD))$.
Gọi I là trung điểm của BD, ta có: $BD \perp AI$ và $BD \perp SA \Rightarrow BD \perp (SAI)$.
$\Rightarrow (SBD) \perp (SAI)$ theo giao tuyến SI.
Trong mặt phẳng (SAI), kẻ $AH \perp SI$ tại H, ta có: $AH \perp (SBD) \Rightarrow AH = d(A, (SBD))$.
Tam giác SAI vuông tại A có đường cao AH.
$\Rightarrow \dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{SA^2} + \dfrac{1}{AI^2} = \dfrac{4}{9a^2} + \dfrac{4}{3a^2} = \dfrac{16}{9a^2}$.
$\Rightarrow AH^2 = \dfrac{9a^2}{16}$ hay $AH = \dfrac{3a}{4}$.
Vậy $d(SB, AC) = \dfrac{3a}{4}$.

□

VÍ DỤ 14. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng BC' và CD'.

Lời giải.



Gọi O, O' lần lượt là tâm của hai hình vuông $ABCD$ và $A'B'C'D'$.
Ta có $(ACD') \parallel (BA'C') \Rightarrow d(BC', CD') = d((ACD'), (BA'C')) = d(O, (BA'C'))$.
Ta có $A'C' \perp (OBB'O') \Rightarrow (BA'C') \perp (OBB'O')$ theo giao tuyến BO'.
Trong mặt phẳng $(OBB'O')$, kẻ $OH \perp BO'$ tại H, ta có $OH \perp (BA'C') \Rightarrow d(O, (BA'C')) = OH$.
Tam giác OBO' vuông tại O có OH là đường cao.
$\Rightarrow \dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OB^2} + \dfrac{1}{OO'^2} = \dfrac{2}{a^2} + \dfrac{1}{a^2} = \dfrac{3}{a^2}$.
$\Rightarrow OH^2 = \dfrac{a^2}{3}$ hay $OH = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.
Vậy $d(BC', CD') = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. □

C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

CÂU 1. Cho hình chóp $S.ACBD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B. Cạnh bên SA vuông góc với đáy, $SA = AB = BC = 1$, $AD = 2$. Tính khoảng cách d từ điểm A đến mặt phẳng (SBD).

A $d = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$. **B** $d = 1$. **C** $d = \dfrac{2a}{3}$. **D** $d = \dfrac{2}{3}$.

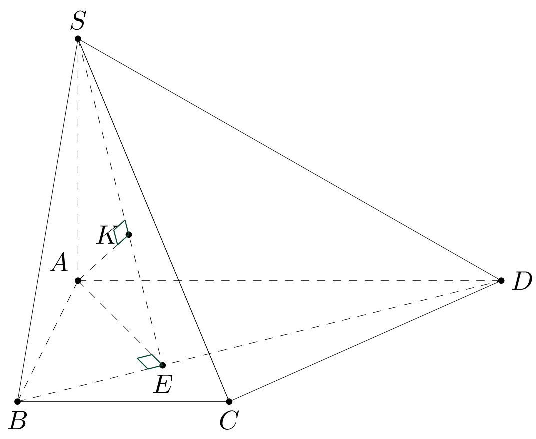
Lời giải.

Kẻ $AE \perp BD$, kẻ $AK \perp SE$. Khi đó $\mathrm{d}(A,(SBD)) = AK$.

Tam giác vuông ABD, có $AE = \dfrac{AB \cdot AD}{\sqrt{AB^2 + AD^2}} = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

Tam giác vuông SAE, có $AK = \dfrac{SA \cdot AE}{\sqrt{SA^2 + AE^2}} = \dfrac{2}{3}$.

Vậy $\mathrm{d}(A,(SBD)) = AK = \dfrac{2}{3}$.



Chọn đáp án (D) □

CÂU 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D với $AB = 2a$, $AD = DC = a$. Hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với đáy. Góc giữa SC và mặt đáy bằng 60°. Tính khoảng cách d giữa hai đường thẳng AC và SB.

(A) $d = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$. (B) $d = a\sqrt{2}$. (C) $d = \dfrac{2a\sqrt{15}}{5}$. (D) $d = 2a$.

Lời giải.

Xác định $60^\circ = (SC,(ABCD)) = (SC,AC) = \widehat{SCA}$ và $SA = AC\tan\widehat{SCA} = a\sqrt{6}$.

Gọi M là trung điểm AB, suy ra $ADCM$ là hình vuông nên $CM = AD = a$.

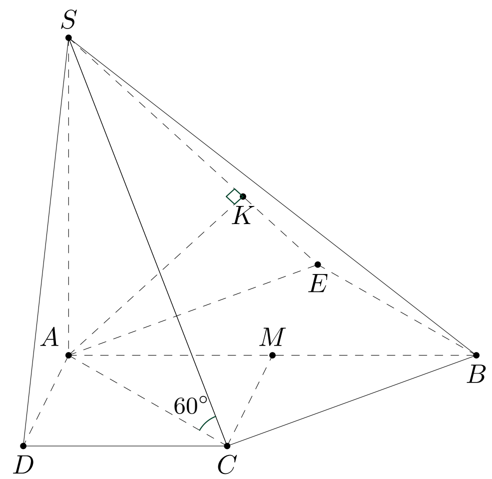
Xét tam giác ACB, ta có trung tuyến $CM = a = \dfrac{1}{2}AB$ nên tam giác ACB vuông tại C.

Lấy điểm E sao cho $ACBE$ là hình chữ nhật, suy ra $AC \parallel BE$.

Do đó $\mathrm{d}(AC,SB) = \mathrm{d}(AC,(SBE)) = \mathrm{d}(A,(SBE))$.

Kẻ $AK \perp SE$. Khi đó

$$\mathrm{d}(A,(SBE)) = AK = \frac{SA \cdot AE}{\sqrt{SA^2 + AE^2}} = \frac{a\sqrt{6}}{2}.$$



Chọn đáp án (A) □

CÂU 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, tam giác SAD đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính khoảng cách d giữa hai đường thẳng SA và BD.

(A) $d = \dfrac{a\sqrt{21}}{7}$. (B) $d = a$. (C) $d = \dfrac{a\sqrt{21}}{14}$. (D) $d = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải.

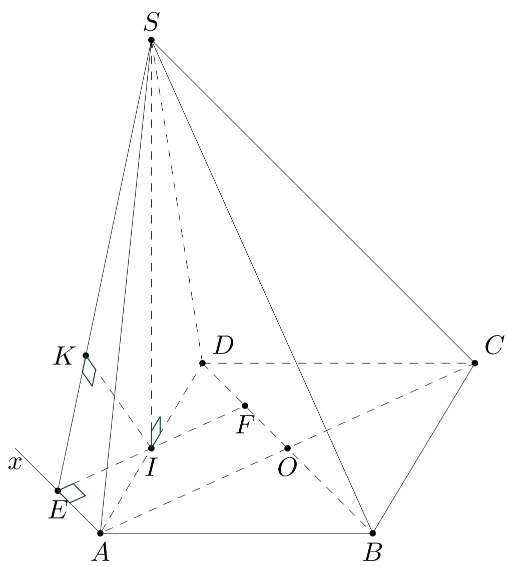
Gọi I là trung điểm của $AD \Rightarrow SI \perp AD \Rightarrow SI \perp (ABCD)$.

Kẻ $Ax \parallel BD$. Ta có $\mathrm{d}(BD,SA) = \mathrm{d}(BD,(SAx)) = \mathrm{d}(D,(SAx)) = 2\mathrm{d}(I,(SAx))$.

Kẻ $IE \perp Ax$, kẻ $IK \perp SE$. Khi đó $d(I,(SAx)) = IK$. Gọi F là hình chiếu của I trên BD, ta có $IE = IF = \dfrac{AO}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{4}$.

Tam giác vuông SIE, có $IK = \dfrac{SI \cdot IE}{\sqrt{SI^2 + IE^2}} = \dfrac{a\sqrt{21}}{14}$.

Vậy $\mathrm{d}(BD,SA) = 2IK = \dfrac{a\sqrt{21}}{7}$.



Chọn đáp án (A) □

CÂU 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B với $AB = BC = a, AD = 2a$. Cạnh bên $SA = a$ và vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Tính khoảng cách d từ điểm A đến mặt phẳng (SCD).

Ⓐ $d = \dfrac{2a}{\sqrt{5}}$. Ⓑ $d = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. Ⓒ $d = a\sqrt{2}$. Ⓓ $d = 2a$.

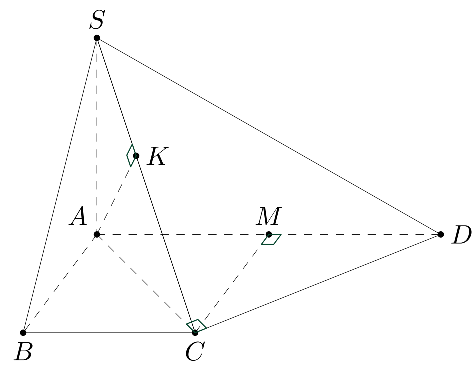
Lời giải.

Gọi M là trung điểm AD, suy ra $ABCM$ là hình vuông.

Do đó $CM = MA = \dfrac{AD}{2}$ nên tam gác ACD vuông tại C.

Kẻ $AK \perp SC$. Khi đó

$$\mathrm{d}\left(A,(SCD)\right) = AK = \frac{SA \cdot AC}{\sqrt{SA^2 + AC^2}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$



Chọn đáp án Ⓑ □

CÂU 5. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a và cạnh bên bằng $\dfrac{a\sqrt{21}}{6}$. Tính khoảng cách d từ đỉnh A đến mặt phẳng (SBC).

Ⓐ $d = \dfrac{a}{4}$. Ⓑ $d = \dfrac{3}{4}$. Ⓒ $d = \dfrac{3a}{4}$. Ⓓ $d = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$.

Lời giải.

Gọi O là tâm của tam giác đều ABC. Do hình chóp $S.ABC$ đều nên suy ra $SO \perp (ABC)$.

Ta có $\mathrm{d}\left(A,(SBC)\right) = 3\mathrm{d}\left(O,(SBC)\right)$.

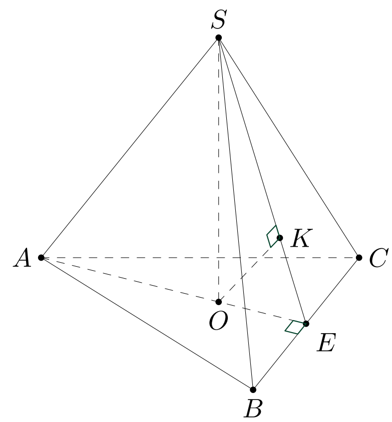
Gọi E là trung điểm BC; kẻ $OK \perp SE$.

Khi đó $\mathrm{d}\left(O,(SBC)\right) = OK$.

Tính được $SO = \dfrac{a}{2}$ và $OE = \dfrac{1}{3}AE = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$.

Tam giác vuông SOE, có $OK = \dfrac{SO \cdot OE}{\sqrt{SO^2 + OE^2}} = \dfrac{a}{4}$.

Vậy $\mathrm{d}\left(A,(SBC)\right) = 3OK = \dfrac{3a}{4}$.



Chọn đáp án Ⓒ □

CÂU 6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O, cạnh a. Cạnh bên $SA = \dfrac{a\sqrt{15}}{2}$ và vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$. Tính khoảng cách d từ O đến mặt phẳng (SBC).

Ⓐ $d = \dfrac{\sqrt{285}}{38}$. Ⓑ $d = \dfrac{a\sqrt{285}}{38}$. Ⓒ $d = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. Ⓓ $d = \dfrac{a\sqrt{285}}{19}$.

Lời giải.

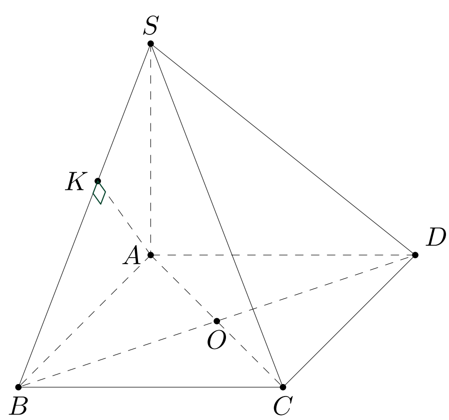
Ta có $\mathrm{d}\left(O,(SBC)\right) = \dfrac{1}{2}\mathrm{d}\left(A,(SBC)\right)$.

Gọi K là hình chiếu của A trên SB, suy ra $AK \perp SB$.

Khi đó $\mathrm{d}\left(A,(SBC)\right) = AK$.

Tam giác vuông SAB, có $AK = \dfrac{SA \cdot AB}{\sqrt{SA^2 + AB^2}} = \dfrac{a\sqrt{285}}{19}$.

Vậy $\mathrm{d}\left(O,(SBC)\right) = \dfrac{1}{2}AK = \dfrac{a\sqrt{285}}{38}$.



Chọn đáp án Ⓑ □

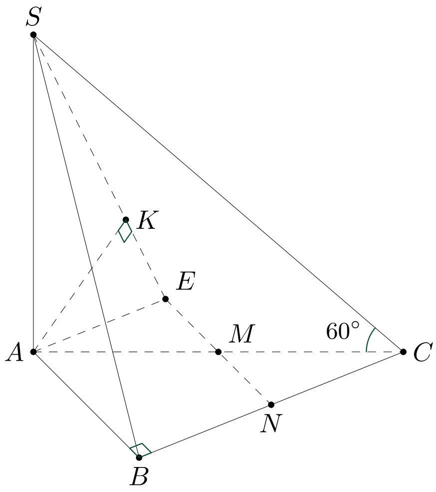
CÂU 7. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $AB = 3a$, $BC = 4a$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy. Góc tạo bởi giữa SC và đáy bằng $60°$. Gọi M là trung điểm của AC, tính khoảng cách d giữa hai đường thẳng AB và SM.

A $d = \dfrac{5a}{2}$. **B** $d = \dfrac{10a\sqrt{3}}{\sqrt{79}}$. **C** $d = a\sqrt{3}$. **D** $d = 5a\sqrt{3}$.

Lời giải.

Xác định $60° = (SC, (ABC)) = (SC, AC) = \widehat{SCA}$
và $SA = AC.\tan\widehat{SCA} = 5a\sqrt{3}$.
Gọi N là trung điểm BC, suy ra $MN \parallel AB$.
Lấy điểm E đối xứng với N qua M, suy ra $ABNE$ là hình chữ nhật.
Do đó $\mathrm{d}(AB, SM) = \mathrm{d}(AB, (SME)) = \mathrm{d}(A, (SME))$.
Kẻ $AK \perp SE$. Khi đó

$$\mathrm{d}(A, (SME)) = AK = \frac{SA.AE}{\sqrt{SA^2 + AE^2}} = \frac{10a\sqrt{3}}{\sqrt{79}}.$$



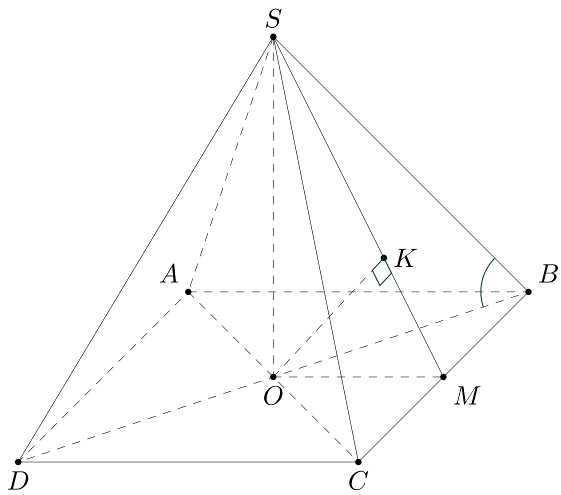
Chọn đáp án (B) □

CÂU 8. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng 1, cạnh bên hợp với mặt đáy một góc $60°$. Tính khoảng cách d từ O đến mặt phẳng (SBC).

A $d = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **B** $d = \dfrac{1}{2}$. **C** $d = \dfrac{\sqrt{7}}{2}$. **D** $d = \dfrac{\sqrt{42}}{14}$.

Lời giải.

Xác định $60° = (SB, (ABCD)) = (SB, OB) = \widehat{SBO}$
và $SO = OB \cdot \tan\widehat{SBO} = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$.
Gọi M là trung điểm BC, kẻ $OK \perp SM$.
Khi đó $\mathrm{d}(O, (SBC)) = OK$.
Tam giác vuông SOM, có $OK = \dfrac{SO \cdot OM}{\sqrt{SO^2 + OM^2}} = \dfrac{\sqrt{42}}{14}$.
Vậy $\mathrm{d}(O, (SBC)) = OK = \dfrac{\sqrt{42}}{14}$.



Chọn đáp án (D) □

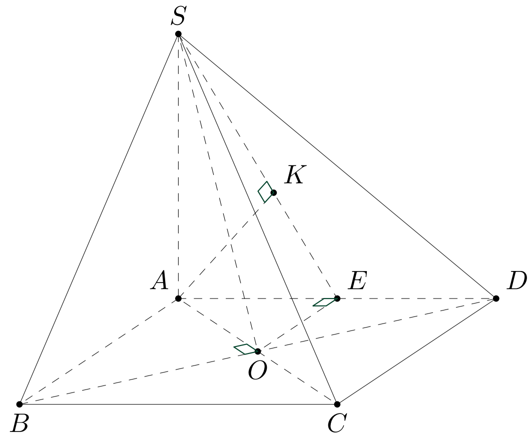
CÂU 9. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O, cạnh a. Cạnh bên SA vuông góc với đáy, góc $\widehat{SBD} = 60°$. Tính khoảng cách d giữa hai đường thẳng AB và SO.

A $d = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **B** $d = \dfrac{a\sqrt{6}}{4}$. **C** $d = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **D** $d = \dfrac{a\sqrt{5}}{5}$.

Lời giải.

Ta có $\triangle SAB = \triangle SAD$ (c.g.c), suy ra $SB = SD$.
Lại có $\widehat{SBD} = 60^\circ$, suy ra ΔSBD đều cạnh $SB = SD = BD = a\sqrt{2}$.
Tam giác vuông SAB, có $SA = \sqrt{SB^2 - AB^2} = a$.
Gọi E là trung điểm AD, suy ra $OE \parallel AB$ và $AE \perp OE$.
Do đó $\mathrm{d}(AB, SO) = \mathrm{d}(AB, (SOE)) = \mathrm{d}(A, (SOE))$.
Kẻ $AK \perp SE$. Khi đó

$$\mathrm{d}(A, (SOE)) = AK = \frac{SA \cdot AE}{\sqrt{SA^2 + AE^2}} = \frac{a\sqrt{5}}{5}.$$



Chọn đáp án (D) □

CÂU 10. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh có độ dài bằng $2a$. Hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trung điểm H của BC. Tính khoảng cách d giữa hai đường thẳng BB' và $A'H$.

(A) $d = a$. (B) $d = 2a$. (C) $d = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. (D) $d = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải.

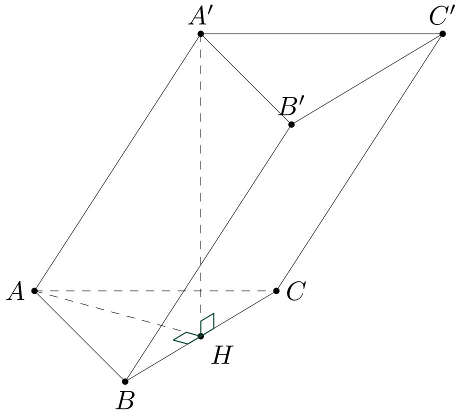
Do $BB' \parallel AA'$ nên

$$\mathrm{d}(BB', A'H) = \mathrm{d}(BB', (AA'H)) = \mathrm{d}(B, (AA'H)).$$

Ta có $\begin{cases} BH \perp AH \\ BH \perp A'H \end{cases} \Rightarrow BH \perp (AA'H)$ nên

$$\mathrm{d}(B, (AA'H)) = BH = \frac{BC}{2} = a.$$

Vậy $\mathrm{d}(BB', A'H) = a$.



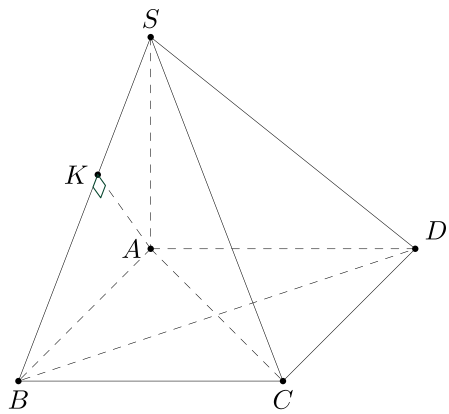
Chọn đáp án (A) □

CÂU 11. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật có $AB = a\sqrt{2}$. Cạnh bên $SA = 2a$ và vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$. Tính khoảng cách d từ D đến mặt phẳng (SBC).

(A) $d = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. (B) $d = \dfrac{a\sqrt{10}}{2}$. (C) $d = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$. (D) $d = a\sqrt{2}$.

Lời giải.

Do $AD \parallel BC$ nên $\mathrm{d}(D, (SBC)) = \mathrm{d}(A, (SBC))$.
Gọi K là hình chiếu của A trên SB, suy ra $AK \perp SB$.
Khi $\mathrm{d}(A, (SBC)) = AK = \dfrac{SA \cdot AB}{\sqrt{SA^2 + AB^2}} = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$.



Chọn đáp án (C) □

CÂU 12. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, các cạnh bên của hình chóp bằng nhau và bằng $2a$. Tính khoảng cách d từ A đến mặt phẳng (SCD).

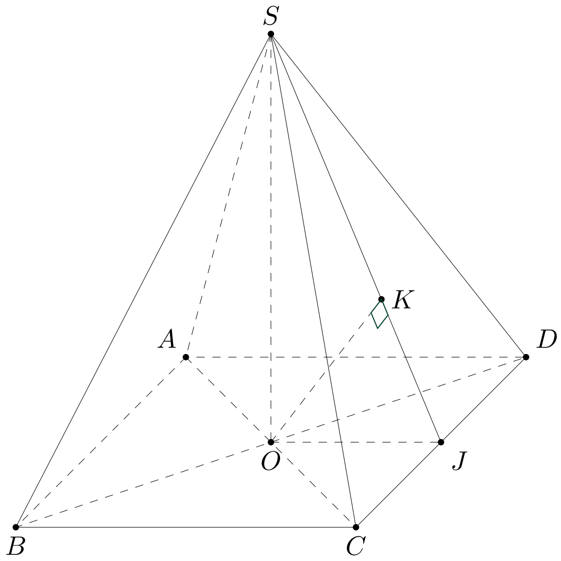
(A) $d = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. (B) $d = \dfrac{a}{2}$. (C) $d = \dfrac{2a\sqrt{7}}{\sqrt{30}}$. (D) $d = \dfrac{a\sqrt{7}}{\sqrt{30}}$.

Lời giải.

Gọi O là tâm của đáy, suy ra $SO \perp (ABCD)$.
Ta có $\mathrm{d}(A,(SCD)) = 2\mathrm{d}(O,(SCD))$.
Gọi J là trung điểm CD, suy ra $OJ \perp CD$. Gọi K là hình chiếu của O trên SJ, suy ra $OK \perp SJ$.

Khi đó $\mathrm{d}(O,(SCD)) = OK = \dfrac{SO \cdot OJ}{\sqrt{SO^2 + OJ^2}} = \dfrac{a\sqrt{7}}{\sqrt{30}}$.

Vậy $\mathrm{d}(A,(SCD)) = 2OK = \dfrac{2a\sqrt{7}}{\sqrt{30}}$.



Chọn đáp án (C) □

CÂU 13. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng 1. Tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy $(ABCD)$. Tính khoảng cách d từ A đến (SCD).

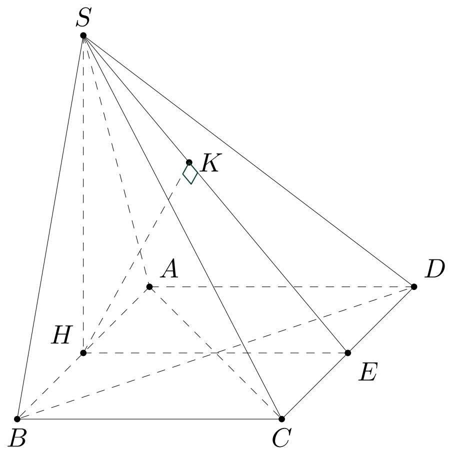
(A) $d = 1$. (B) $d = \dfrac{\sqrt{21}}{7}$. (C) $d = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$. (D) $d = \sqrt{2}$.

Lời giải.

Gọi H là trung điểm AB, suy ra $SH \perp AB$. Do đó $SH \perp (ABCD)$.
Do $AH \parallel CD$ nên $\mathrm{d}(A,(SCD)) = \mathrm{d}(H,(SCD))$.
Gọi E là trung điểm CD; K là hình chiếu vuông góc của H trên SE.

Khi đó $\mathrm{d}(H,(SCD)) = HK = \dfrac{SH \cdot HE}{\sqrt{SH^2 + HE^2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$.

Vậy $\mathrm{d}(A,(SCD)) = HK = \dfrac{\sqrt{21}}{7}$.



Chọn đáp án (B) □

CÂU 14. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a. Tam giác ABC đều, hình chiếu vuông góc H của đỉnh S trên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với trọng tâm của tam giác ABC. Đường thẳng SD hợp với mặt phẳng $(ABCD)$ góc 30°. Tính khoảng cách d từ B đến mặt phẳng (SCD) theo a.

(A) $d = a$. (B) $d = \dfrac{2a\sqrt{21}}{21}$. (C) $d = a\sqrt{3}$. (D) $d = \dfrac{a\sqrt{21}}{7}$.

Lời giải.

Xác định $30^\circ = (SD,(ABCD)) = (SD, HD) = \widehat{SDH}$

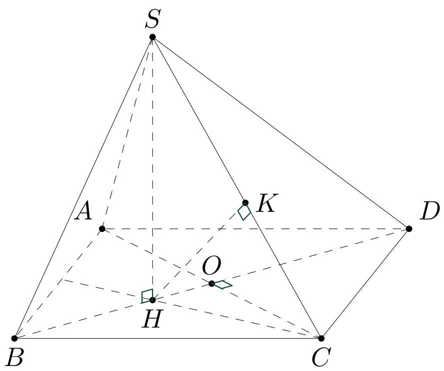
và $SH = HD \tan \widehat{SDH} = \dfrac{2a}{3}$.

Ta có $\mathrm{d}(B,(SCD)) = \dfrac{BD}{HD}\mathrm{d}(H,(SCD)) = \dfrac{3}{2}\mathrm{d}(H,(SCD))$.

Ta có $HC \perp AB \Rightarrow HC \perp CD$.
Kẻ $HK \perp SC$. Khi đó $\mathrm{d}(H,(SCD)) = HK$.

Tam giác vuông SHC, có $HK = \dfrac{SH \cdot HC}{\sqrt{SH^2 + HC^2}} = \dfrac{2a\sqrt{21}}{21}$.

Vậy $\mathrm{d}(B,(SCD)) = \dfrac{3}{2}HK = \dfrac{a\sqrt{21}}{7}$.



Chọn đáp án (D) □

CÂU 15. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a$, $AD = 2a$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy, góc giữa SD với đáy bằng 60°. Tính khoảng cách d từ điểm C đến mặt phẳng (SBD) theo a.

Ⓐ $d = \dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$. Ⓑ $d = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Ⓒ $d = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Ⓓ $d = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$.

Lời giải.

Xác định $60^\circ = (SD,(ABCD)) = (SD,AD) = \widehat{SDA}$ và $SA = AD \cdot \tan\widehat{SDA} = 2a\sqrt{3}$.

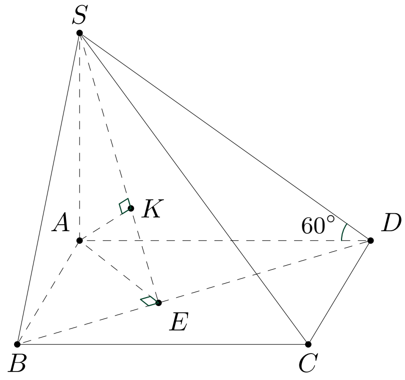
Ta có $\mathrm{d}\,(C,(SBD)) = \mathrm{d}\,(A,(SBD))$.

Kẻ $AE \perp BD$ và kẻ $AK \perp SE$. Khi đó $\mathrm{d}\,(A,(SBD)) = AK$.

Tam giác vuông BAD, có $AE = \dfrac{AB \cdot AD}{\sqrt{AB^2 + AD^2}} = \dfrac{2a}{\sqrt{5}}$.

Tam giác vuông SAE, có $AK = \dfrac{SA \cdot AE}{\sqrt{SA^2 + AE^2}} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Vậy $\mathrm{d}\,(C,(SBD)) = AK = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.



Chọn đáp án Ⓑ □

CÂU 16. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, tâm O. Cạnh bên $SA = 2a$ và vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$. Gọi H và K lần lượt là trung điểm của cạnh BC và CD. Tính khoảng cách d giữa hai đường thẳng HK và SD.

Ⓐ $d = 2a$. Ⓑ $d = \dfrac{a}{2}$. Ⓒ $d = \dfrac{2a}{3}$. Ⓓ $d = \dfrac{a}{3}$.

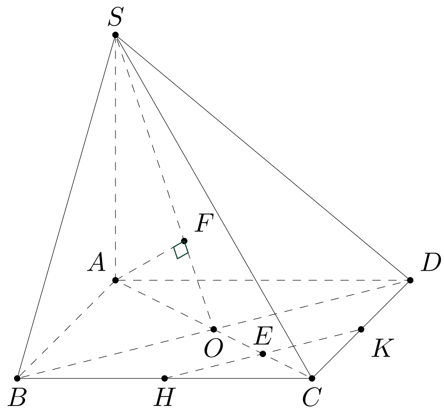
Lời giải.

Gọi $E = HK \cap AC$. Do $HK \parallel BD$ nên $\mathrm{d}\,(HK,SD) = \mathrm{d}\,(HK,(SBD)) = \mathrm{d}\,(E,(SBD)) = \dfrac{1}{2}\mathrm{d}\,(A,(SBD))$.

Kẻ $AF \perp SO$. Khi đó

$$\mathrm{d}\,(A,(SBD)) = AF = \frac{SA \cdot AO}{\sqrt{SA^2 + AO^2}} = \frac{2a}{3}.$$

Vậy $\mathrm{d}\,(HK,SD) = \dfrac{1}{2}AF = \dfrac{a}{3}$.



Chọn đáp án Ⓓ □

CÂU 17. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B, $AD = 2BC$, $AB = BC = a\sqrt{3}$. Đường thẳng SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi E là trung điểm của cạnh SC. Tính khoảng cách d từ điểm E đến mặt phẳng (SAD).

Ⓐ $d = \sqrt{3}$. Ⓑ $d = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Ⓒ $d = a\sqrt{3}$. Ⓓ $d = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.

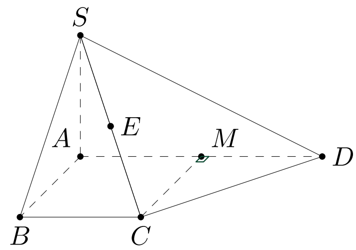
Ta có $\mathrm{d}\,(E,(SAD)) = \dfrac{1}{2}\mathrm{d}\,(C,(SAD))$.

Gọi M là trung điểm AD, suy ra $ABCM$ là hình vuông $\Rightarrow CM \perp AD$.

Do $\begin{cases} CM \perp AD \\ CM \perp SA \end{cases} \Rightarrow CM \perp (SAD)$

nên $\mathrm{d}\,(C,(SAD)) = CM = AB = a\sqrt{3}$.

Vậy $\mathrm{d}\,(E,(SAD)) = \dfrac{1}{2}CM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.



Chọn đáp án Ⓑ □

CÂU 18. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Cạnh bên $SA = a\sqrt{3}$ và vuông góc với mặt đáy (ABC). Tính khoảng cách d từ A đến mặt phẳng (SBC).

Ⓐ $d = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Ⓑ $d = a$. Ⓒ $d = \dfrac{a\sqrt{15}}{5}$. Ⓓ $d = \dfrac{a\sqrt{5}}{5}$.

Lời giải.

Gọi M là trung điểm BC, suy ra $AM \perp BC$ và $AM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

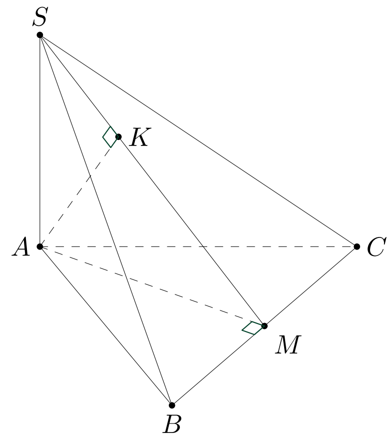
Gọi K là hình chiếu của A trên SM, suy ra $AK \perp SM$. (1)

Ta có $\begin{cases} AM \perp BC \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAM) \Rightarrow BC \perp AK$. (2)

Từ (1) và (2), suy ra $AK \perp (SBC)$ nên $\mathrm{d}(A, (SBC)) = AK$.

Trong $\triangle SAM$, có $AK = \dfrac{SA \cdot AM}{\sqrt{SA^2 + AM^2}} = \dfrac{3a}{\sqrt{15}} = \dfrac{a\sqrt{15}}{5}$.

Vậy $\mathrm{d}(A, (SBC)) = AK = \dfrac{a\sqrt{15}}{5}$.



Chọn đáp án (C) □

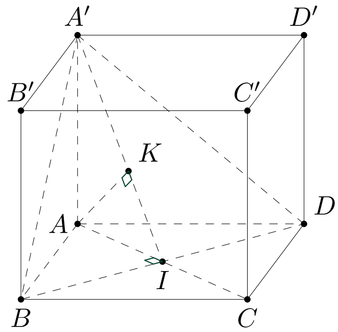
CÂU 19. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng 1. Tính khoảng cách d từ điểm A đến mặt phẳng (BDA').

(A) $d = \dfrac{\sqrt{6}}{4}$. (B) $d = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. (C) $d = \sqrt{3}$. (D) $d = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải.

Gọi I là tâm hình vuông $ABCD$, suy ra $AI \perp BD$.
Kẻ $AK \perp A'I$. Khi đó

$$\mathrm{d}(A, (BDA')) = AK = \frac{AA' \cdot AI}{\sqrt{AA'^2 + AI^2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$



Chọn đáp án (D) □

CÂU 20. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O, cạnh bằng $4a$. Cạnh bên $SA = 2a$. Hình chiếu vuông góc của đỉnh S trên mặt phẳng $(ABCD)$ là trung điểm của H của đoạn thẳng AO. Tính khoảng cách d giữa các đường thẳng SD và AB.

(A) $d = \dfrac{4a\sqrt{22}}{11}$. (B) $d = 2a$. (C) $d = 4a$. (D) $d = \dfrac{3a\sqrt{2}}{\sqrt{11}}$.

Lời giải.

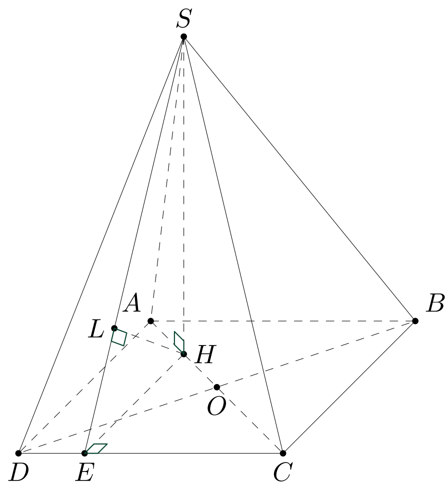
Do $AB \parallel CD$ nên $\mathrm{d}(SD, AB) = \mathrm{d}(AB, (SCD)) = \mathrm{d}(A, (SCD)) = \dfrac{4}{3}\mathrm{d}(H, (SCD))$.

Kẻ $HE \perp CD$, kẻ $HL \perp SE$, ta tính được:

$$SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = a\sqrt{2}, HE = \frac{3}{4}AD = 3a.$$

Khi đó $\mathrm{d}(H, (SCD)) = HL = \dfrac{SH \cdot HE}{\sqrt{SH^2 + HE^2}} = \dfrac{3a\sqrt{2}}{\sqrt{11}}$.

Vậy $\mathrm{d}(SD, AB) = \dfrac{4}{3}HL = \dfrac{4a\sqrt{22}}{11}$.



Chọn đáp án (A) □

CÂU 21. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AD = 2AB = 2a$. Cạnh bên $SA = 2a$ và vuông góc với đáy. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SB và SD. Tính khoảng cách d từ S đến mặt phẳng (AMN).

(A) $d = a\sqrt{5}$. (B) $d = 2a$. (C) $d = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. (D) $d = \dfrac{3a}{2}$.

Lời giải.

Thể tích khối chóp $V_{S.ABD}=\dfrac{1}{3}S_{\Delta ABD}\cdot SA=\dfrac{2a^3}{3}$.

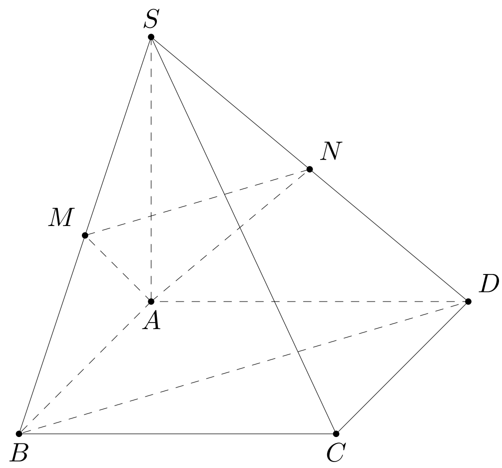
Vì $S_{\Delta SMN}=\dfrac{1}{4}S_{\Delta SBD}$ nên $V_{A.SMN}=\dfrac{1}{4}V_{A.SBD}=\dfrac{a^3}{6}$.

Ta có AM, AN là các đường trung tuyến trong tam giác vuông, MN là đường trung bình nên tính được:

$AM=\dfrac{a\sqrt{5}}{2}$, $AN=a\sqrt{2}$, $MN=\dfrac{a\sqrt{5}}{2}$.

Từ đó tính được $S_{\Delta AMN}=\dfrac{a^2\sqrt{6}}{4}$.

Vậy $\mathrm{d}\left(S,(AMN)\right)=\dfrac{3V_{S.AMN}}{S_{\Delta AMN}}=\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.



Chọn đáp án (C) □

CÂU 22. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AC=2a, BC=a$. Đỉnh S cách đều các điểm A,B,C. Tính khoảng cách d từ trung điểm M của SC đến mặt phẳng (SBD).

A $d=a$. **B** $d=\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$. **C** $d=a\sqrt{5}$. **D** $d=\dfrac{a\sqrt{5}}{2}$.

Lời giải.

Gọi O là trung điểm AC, suy ra O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

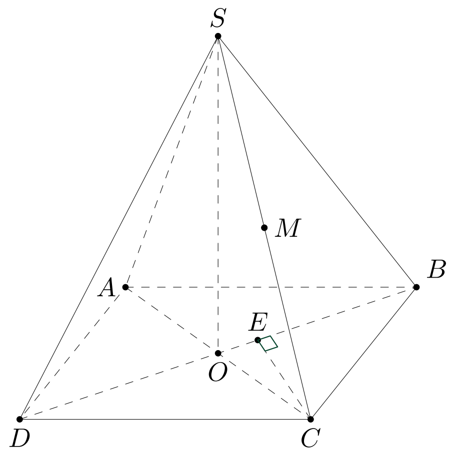
Do đỉnh S cách đều các điểm A,B,C nên $SO\perp(ABCD)$.

Ta có $\mathrm{d}\left(M,(SBD)\right)=\dfrac{1}{2}\mathrm{d}\left(C,(SBD)\right)$.

Kẻ $CE\perp BD$. Khi đó

$$\mathrm{d}\left(C,(SBD)\right)=CE=\frac{CB\cdot CD}{\sqrt{CB^2+CD^2}}=\frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Vậy $\mathrm{d}\left(M,(SBD)\right)=\dfrac{1}{2}CE=\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.



Chọn đáp án (B) □

CÂU 23. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a. Cạnh bên SA vuông góc với đáy, SB hợp với mặt đáy một góc 60°. Tính khoảng cách d từ điểm D đến mặt phẳng (SBC).

A $d=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **B** $d=a$. **C** $d=a\sqrt{3}$. **D** $d=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.

Xác định $60^\circ=(SB,(ABCD))=(SB,AB)=\widehat{SBA}$.

Suy ra $SA=AB\cdot\tan\widehat{SBA}=a\sqrt{3}$.

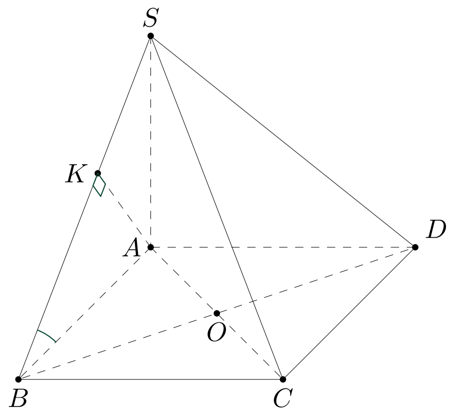
Ta có $AD\parallel BC\Rightarrow AD\parallel(SBC)$ nên

$$\mathrm{d}\left(D,(SBC)\right)=\mathrm{d}\left(A,(SBC)\right).$$

Kẻ $AK\perp SB$.

Khi đó $\mathrm{d}\left(A,(SBC)\right)=AK=\dfrac{SA\cdot AB}{\sqrt{SA^2+AB^2}}=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Vậy $\mathrm{d}\left(D,(SBC)\right)=AK=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.



Chọn đáp án (A) □

CÂU 24. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O, cạnh bằng 2. Đường thẳng SO vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$ và $SO=\sqrt{3}$. Tính khoảng cách d giữa hai đường thẳng SA và BD.

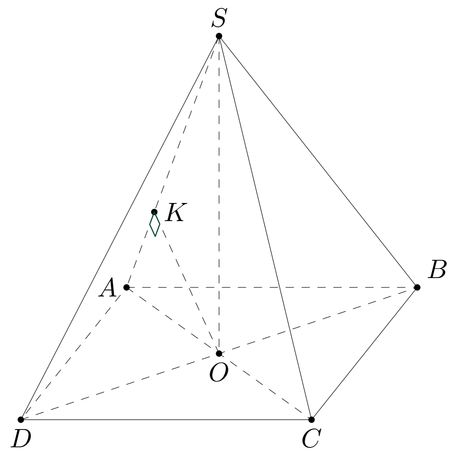
A $d=\sqrt{2}$. **B** $d=2$. **C** $d=\dfrac{\sqrt{30}}{5}$. **D** $d=2\sqrt{2}$.

Lời giải.

Ta có $BD \perp (SAC)$.

Kẻ $OK \perp SA$. Khi đó

$$\mathrm{d}\left(SA, BD\right) = \frac{SO \cdot OA}{\sqrt{SO^2 + OA^2}} = \frac{\sqrt{30}}{5}.$$



Chọn đáp án (C)

CÂU 25. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $AB = a, AC = a\sqrt{3}$. Tam giác SBC đều và nằm trong mặt phẳng vuông với đáy. Tính khoảng cách d từ B đến mặt phẳng (SAC).

(A) $d = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. (B) $d = \dfrac{a\sqrt{39}}{13}$. (C) $d = a$. (D) $d = \dfrac{2a\sqrt{39}}{13}$.

Lời giải.

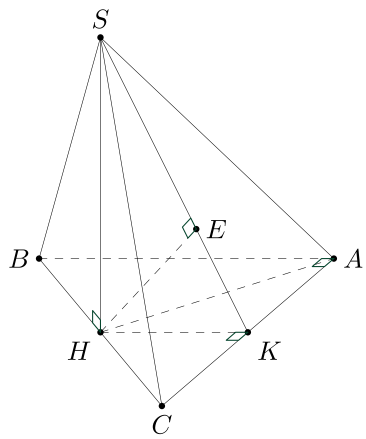
Gọi H là trung điểm của BC, suy ra $SH \perp BC \Rightarrow SH \perp (ABC)$.

Gọi K là trung điểm AC, suy ra $HK \perp AC$.

Kẻ $HE \perp SK\,(E \in SK)$.

Khi đó:

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\left(B, (SAC)\right) &= 2\mathrm{d}\left(H, (SAC)\right) = 2HE\\ &= 2 \cdot \frac{SH \cdot HK}{\sqrt{SH^2 + HK^2}} = \frac{2a\sqrt{39}}{13}.\end{aligned}$$

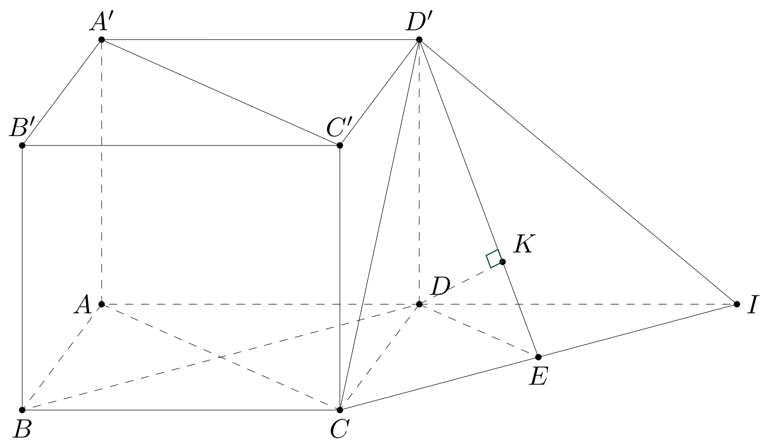


Chọn đáp án (D)

CÂU 26. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $a\sqrt{2}$, $AA' = 2a$. Tính khoảng cách d giữa hai đường thẳng BD và CD'.

(A) $d = a\sqrt{2}$. (B) $d = \dfrac{a\sqrt{5}}{5}$. (C) $d = \dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$. (D) $d = 2a$.

Lời giải.



Gọi I là điểm đối xứng của A qua D, suy ra $BCID$ là hình bình hành nên $BD \parallel CI$.

Do đó $\mathrm{d}\left(BD, CD'\right) = \mathrm{d}\left(BD, (CD'I)\right) = \mathrm{d}\left(D, (CD'I)\right)$.

Kẻ $DE \perp CI$ tại E, kẻ $DK \perp D'E$. Khi đó $\mathrm{d}\left(D, (CD'I)\right) = DK$.

Xét tam giác IAC, ta có $DE \parallel AC$ (do cùng vuông góc với CI) và có D là trung điểm của AI nên suy ra DE là đường trung bình của tam giác. Suy ra $DE = \dfrac{1}{2}AC = a$.

Tam giác vuông $D'DE$, có $DK = \dfrac{D'D \cdot DE}{\sqrt{D'D^2 + DE^2}} = \dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$.

Chọn đáp án (C) □

CÂU 27. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng 10. Cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SC = 10\sqrt{5}$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA và CD. Tính khoảng cách d giữa BD và MN.

A $d = \sqrt{5}$. **B** $d = 10$. **C** $d = 3\sqrt{5}$. **D** $d = 5$.

Lời giải.

Gọi P là trung điểm BC và $E = NP \cap AC$, suy ra $PN \parallel BD$ nên $BD \parallel (MNP)$. Do đó $\mathrm{d}\left(BD, MN\right) = \mathrm{d}\left(BD, (MNP)\right) = \mathrm{d}\left(O, (MNP)\right) = \dfrac{1}{3}\mathrm{d}\left(A, (MNP)\right)$.

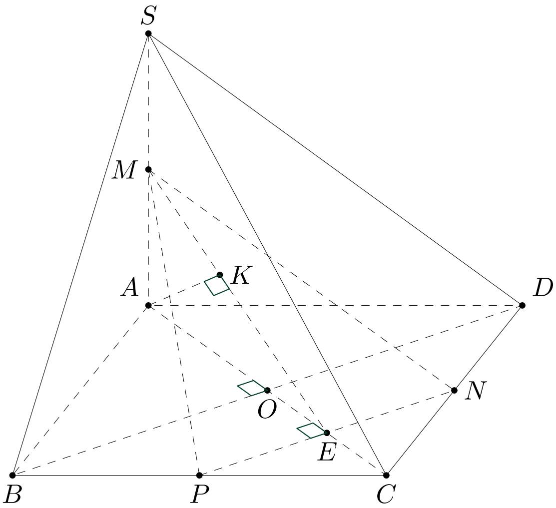
Kẻ $AK \perp ME$. Khi đó $\mathrm{d}\left(A, (MNP)\right) = AK$.

Tính được $SA = \sqrt{SC^2 - AC^2} = 10\sqrt{3}$

$\Rightarrow MA = 5\sqrt{3}$; $AE = \dfrac{3}{4}AC = \dfrac{15\sqrt{2}}{2}$.

Tam giác vuông MAE, có $AK = \dfrac{MA \cdot AE}{\sqrt{MA^2 + AE^2}} = 3\sqrt{5}$.

Vậy $\mathrm{d}\left(BD, MN\right) = \dfrac{1}{3}AK = \sqrt{5}$.



Chọn đáp án (A) □

CÂU 28. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, SA vuông góc với mặt phẳng (ABC); góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (ABC) bằng $60°$. Gọi M là trung điểm của cạnh AB. Tính khoảng cách d từ B đến mặt phẳng (SMC).

A $d = a\sqrt{3}$. **B** $d = \dfrac{a}{2}$. **C** $d = a$. **D** $d = \dfrac{a\sqrt{39}}{13}$.

Lời giải.

Xác định $60° = (SB, (ABC)) = (SB, AB) = \widehat{SBA}$

và $SA = AB \cdot \tan\widehat{SBA} = a\sqrt{3}$.

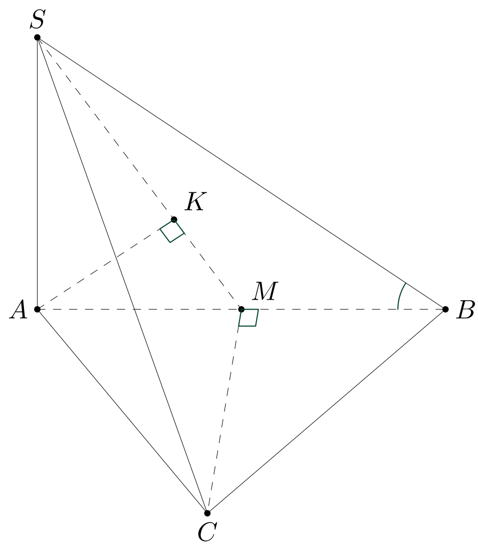
Do M là trung điểm của cạnh AB nên

$$\mathrm{d}\left(B, (SMC)\right) = \mathrm{d}\left(A, (SMC)\right).$$

Kẻ $AK \perp SM$. Khi đó $\mathrm{d}\left(A, (SMC)\right) = AK$.

Tam giác vuông SAM, có $AK = \dfrac{SA \cdot AM}{\sqrt{SA^2 + AM^2}} = \dfrac{a\sqrt{39}}{13}$.

Vậy $\mathrm{d}\left(B, (SMC)\right) = AK = \dfrac{a\sqrt{39}}{13}$.



Chọn đáp án (D) □

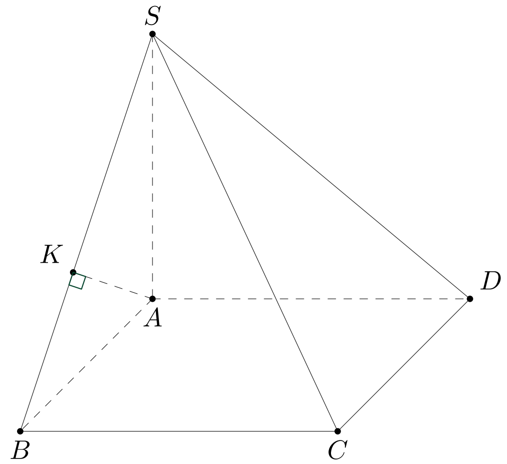
CÂU 29. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông với $AC = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy, SB hợp với đáy góc $60°$. Tính khoảng cách d giữa hai đường thẳng AD và SC.

A $d = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$. **B** $d = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **C** $d = \dfrac{a}{2}$. **D** $d = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải.

Ta có $\mathrm{d}(AD, SC) = \mathrm{d}(AD, (SBC)) = \mathrm{d}(A, (SBC))$.
Kẻ $AK \perp SB$. Khi đó

$$\mathrm{d}(A, (SBC)) = AK = \frac{SA \cdot AB}{\sqrt{SA^2 + AB^2}} = \frac{a\sqrt{3}}{4}.$$



Chọn đáp án (A) □

CÂU 30. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O cạnh a. Cạnh bên $SA = a\sqrt{2}$ và vuông góc với đáy $(ABCD)$. Tính khoảng cách d từ điểm B đến mặt phẳng (SCD).

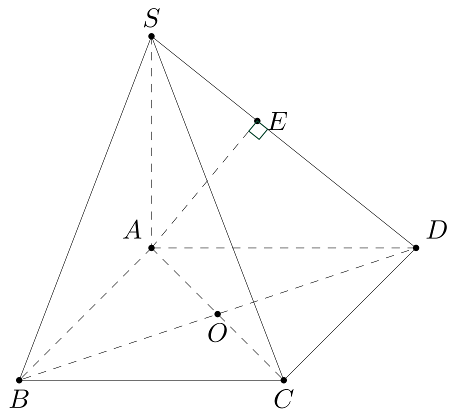
(A) $d = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. (B) $d = a\sqrt{3}$. (C) $d = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. (D) $d = a$.

Lời giải.

Do $AB \parallel CD$ nên $\mathrm{d}(B, (SCD)) = \mathrm{d}(A, (SCD))$.
Kẻ $AE \perp SD$ tại E. Khi đó $\mathrm{d}(A, (SCD)) = AE$.

Tam giác vuông SAD, có $AE = \dfrac{SA \cdot AD}{\sqrt{SA^2 + AD^2}} = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

Vậy $\mathrm{d}(B, (SCD)) = AE = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.



Chọn đáp án (A) □

MỤC LỤC