

Bài 3. PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU

QUICK NOTE

1

XÁC ĐỊNH CÁC YẾU TỐ CƠ BẢN MẶT CẦU

- ☑ Phương trình mặt cầu (S) có dạng $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$ thì mặt cầu có tâm $I(a; b; c)$ và có bán kính R .
- ☑ Phương trình mặt cầu (S) có dạng $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$ với $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$ thì để xác định tọa độ tâm $I(a; b; c)$ và bán kính R ta thực hiện như sau:

— Xác định tọa độ tâm I :
$$\begin{cases} -2a = \dots \\ -2b = \dots \\ -2c = \dots \end{cases}$$

— Xác định bán kính: $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$.

⚠ Chú ý:

- ☑ Có thể xác định tọa độ tâm $I(a; b; c)$ và bán kính R của phương trình mặt cầu (S) có dạng $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$ bằng cách nhóm nhân tử để đưa về dạng $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$.
- ☑ Để một phương trình là một phương trình mặt cầu, cần thỏa mãn hai điều kiện: Hệ số trước x^2, y^2, z^2 phải bằng 1 và $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$.
- ☑ Nếu $IM = R$ thì M nằm trên mặt cầu.
- ☑ Nếu $IM < R$ thì M nằm trong mặt cầu.
- ☑ Nếu $IM > R$ thì M nằm ngoài mặt cầu.

Phần I. Mỗi câu hỏi học sinh chọn một trong bốn phương án A, B, C, D.

CÂU 1. Cho điểm M nằm ngoài mặt cầu $S(O; R)$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

- (A) $OM < R$. (B) $OM = R$. (C) $OM > R$. (D) $OM \leq R$.

CÂU 2. Trong KG $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + (y - 2)^2 + (z + 1)^2 = 6$. Đường kính của (S) bằng

- (A) $\sqrt{6}$. (B) 12. (C) $2\sqrt{6}$. (D) 3.

CÂU 3. Mặt cầu $(S): 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 6x + 12y + 2 = 0$ có bán kính bằng

- (A) $\frac{\sqrt{7}}{3}$. (B) $\frac{2\sqrt{7}}{3}$. (C) $\frac{\sqrt{21}}{3}$. (D) $\sqrt{\frac{13}{3}}$.

CÂU 4. Trong KG $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x - 2)^2 + (y + 1)^2 + (z - 3)^2 = 4$. Tâm của (S) có tọa độ là

- (A) $(-2; 1; -3)$. (B) $(-4; 2; -6)$. (C) $(4; -2; 6)$. (D) $(2; -1; 3)$.

CÂU 5. Trong KG $Oxyz$, mặt cầu $(S): (x + 1)^2 + (y - 2)^2 + z^2 = 9$ có bán kính bằng

- (A) 3. (B) 81. (C) 9. (D) 6.

CÂU 6. Trong KG $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(1; -4; 0)$ và bán kính bằng 3. Phương trình của (S) là

- (A) $(x + 1)^2 + (y - 4)^2 + z^2 = 9$. (B) $(x - 1)^2 + (y + 4)^2 + z^2 = 9$.
(C) $(x - 1)^2 + (y + 4)^2 + z^2 = 9$. (D) $(x + 1)^2 + (y - 4)^2 + z^2 = 3$.

CÂU 7. Trong KG $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 16$. Bán kính của (S) là

- (A) 32. (B) 8. (C) 4. (D) 16.

CÂU 8. Trong KG $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x + 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 3)^2 = 9$. Tâm của (S) có tọa độ là

- (A) $(-2; -4; 6)$. (B) $(2; 4; -6)$. (C) $(-1; -2; 3)$. (D) $(1; 2; -3)$.

CÂU 9. Trong KG $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 10y - 6z + 49 = 0$. Tính bán kính R của mặt cầu (S) .

- (A) $R = 1$. (B) $R = 7$. (C) $R = \sqrt{151}$. (D) $R = \sqrt{99}$.

QUICK NOTE

CÂU 10. Trong KG $Oxyz$, cho mặt cầu có phương trình $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 4$. Tìm tọa độ tâm I và bán kính R của mặt cầu đó.

- (A) $I(-1; 2; -3); R = 2$. (B) $I(-1; 2; -3); R = 4$.
(C) $I(1; -2; 3); R = 2$. (D) $I(1; -2; 3); R = 4$.

CÂU 11. Trong KG $Oxyz$, trong các mặt cầu dưới đây, mặt cầu nào có bán kính $R = 2$?

- (A) $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y + 2z - 3 = 0$.
(B) $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y + 2z - 10 = 0$.
(C) $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y + 2z + 2 = 0$.
(D) $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y + 2z + 5 = 0$.

CÂU 12. Cho các phương trình sau

- a) $(x-1)^2 + y^2 + z^2 = 1$; b) $x^2 + (2y-1)^2 + z^2 = 4$;
c) $x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0$; d) $(2x+1)^2 + (2y-1)^2 + 4z^2 = 16$.

Số phương trình là phương trình mặt cầu là

- (A) 4. (B) 3. (C) 2. (D) 1.

CÂU 13. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, gọi I là tâm mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 4$. Độ dài $|OI|$ bằng

- (A) 2. (B) 4. (C) 1. (D) $\sqrt{2}$.

CÂU 14. Trong KG $Oxyz$ có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên m để phương trình $x^2 + y^2 + z^2 + 4mx + 2my - 2mz + 9m^2 - 28 = 0$ là phương trình mặt cầu?

- (A) 7. (B) 8. (C) 9. (D) 6.

CÂU 15. Trong KG $Oxyz$, có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để $x^2 + y^2 + z^2 + 2(m+2)x - 2(m-1)z + 3m^2 - 5 = 0$ là phương trình một mặt cầu?

- (A) 4. (B) 6. (C) 5. (D) 7.

CÂU 16. Cho phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2my + 3m^2 - 2m = 0$ với m là tham số. Tính tổng tất cả các giá trị nguyên của m để phương trình đã cho là phương trình mặt cầu.

- (A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

Phần II. Trong mỗi ý a), b), c) và d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.

CÂU 17. Trong KG $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + (z+2)^2 = 9$ có tâm I và bán kính R . Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

Mệnh đề	Đ	S
a) Tọa độ tâm mặt cầu (S) là $I(0; 0; 2)$.		
b) Bán kính mặt cầu (S) là $R = 9$.		
c) Khoảng cách từ tâm mặt cầu đến mặt phẳng $(P): x + y + z = 0$ bằng $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.		
d) Diện tích mặt cầu (S) bằng 36π .		

CÂU 18. Trong KG $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x+3)^2 + y^2 + (z-2)^2 = 16$ có tâm I và bán kính R . Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

Mệnh đề	Đ	S
a) Điểm $M(-1; 0; 3)$ nằm trong mặt cầu (S) .		
b) Bán kính mặt cầu (S) là $R = 4$.		
c) Tọa độ tâm mặt cầu (S) là $I(-3; 0; 2)$.		
d) Thể tích mặt cầu (S) là $V = \frac{16384\pi}{3}$.		

CÂU 19. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(2; 0; 2)$ và mặt cầu $(S): x^2 + (y+2)^2 + (z-2)^2 = 8$. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

QUICK NOTE

Mệnh đề	Đ	S
a) Điểm $M(2; 0; 2)$ thuộc mặt cầu (S) .		
b) Bán kính mặt cầu (S) là $R = 2\sqrt{2}$.		
c) Tọa độ tâm mặt cầu (S) là $I(0; -2; 2)$.		
d) Hình chiếu của tâm mặt cầu lên trục Ox là điểm có tọa độ $(0; 0; 2)$.		

CÂU 20. Trong KG $Oxyz$, mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-4)^2 = 20$. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

Mệnh đề	Đ	S
a) Bán kính mặt cầu (S) là 20.		
b) Diện tích mặt cầu (S) là 1600π .		
c) Tọa độ tâm mặt cầu (S) là $I(-1; 2; -4)$.		
d) Điểm đối xứng của tâm mặt cầu (S) qua mặt phẳng (Oyz) là $I(-1; -2; 4)$.		

CÂU 21. Trong KG $Oxyz$, cho các phương trình sau

- a) $(S_1): x^2 + y^2 + z^2 + x - 2y + 4z - 3 = 0$,
b) $(S_2): 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - x - y - z = 0$,
c) $(S_3): 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 4x + 8y + 6z + 3 = 0$,
d) $(S_4): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 4z + 10 = 0$.

Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

Mệnh đề	Đ	S
a) (S_1) là phương trình của một mặt cầu.		
b) (S_2) là phương trình của một mặt cầu.		
c) (S_3) không phải là phương trình của một mặt cầu.		
d) (S_4) không phải là phương trình của một mặt cầu.		

CÂU 22. Trong KG $Oxyz$, cho các phương trình sau

- a) $(S_1): x^2 + y^2 + z^2 - 2x = 0$, b) $(S_2): x^2 + y^2 - z^2 + 2x - y + 1 = 0$,
c) $(S_3): 2x^2 + 2y^2 = (x+y)^2 - z^2 + 2x - 1$, d) $(S_4): (x+y)^2 = 2xy - z^2 - 1$.

Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

Mệnh đề	Đ	S
a) (S_1) là phương trình của một mặt cầu.		
b) (S_2) là phương trình của một mặt cầu.		
c) (S_3) là phương trình của một mặt cầu.		
d) (S_4) không phải là phương trình của một mặt cầu.		

CÂU 23. Trong KG $Oxyz$, cho các phương trình sau

- a) $(S_1): x^2 + y^2 + z^2 - 2x = 0$, b) $(S_2): 2x^2 + 2y^2 = (x+y)^2 - z^2 + 2x - 1$,
c) $(S_3): x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2y + 1 = 0$, d) $(S_4): (x+y)^2 = 2xy - z^2 + 1 - 4x$.

Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

QUICK NOTE

Mệnh đề	Đ	S
a) (S_1) là phương trình của một mặt cầu.		
b) (S_2) là phương trình của một mặt cầu.		
c) (S_3) là phương trình của một mặt cầu.		
d) (S_4) là phương trình của một mặt cầu.		

CÂU 24. Trong KG $Oxyz$, cho các phương trình sau

a) $(S_1): (x-1)^2 + (2y-1)^2 + (z-1)^2 = 6$, b) $(S_2): (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 6$,

c) $(S_3): (2x-1)^2 + (2y-1)^2 + (2z+1)^2 = 6$, d) $(S_4): (x+y)^2 = 2xy - z^2 + 3 - 6x$.

Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

Mệnh đề	Đ	S
a) (S_1) không phải là phương trình của một mặt cầu.		
b) (S_2) không phải là phương trình của một mặt cầu.		
c) (S_3) không phải là phương trình của một mặt cầu.		
d) (S_4) không phải là phương trình của một mặt cầu.		

CÂU 25. Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho phương trình (S): $x^2 + y^2 + z^2 - 2(m + 2)x + 4my - 2mz + 5m^2 + 9 = 0$. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

Mệnh đề	Đ	S
a) Với $m = 0$ thì (S) là phương trình của một mặt cầu.		
b) Với $m = 1$ thì (S) là phương trình của một mặt cầu có tâm $I(3; -2; 1)$.		
c) Với $m = 3$ thì (S) là phương trình của một mặt cầu có bán kính là $R = 4$.		
d) Với $m < -5$ hoặc $m > 1$ thì (S) là phương trình của một mặt cầu.		

Phần III. Học sinh điền kết quả vào ô trống.

CÂU 26. Trong KG $Oxyz$, cho mặt cầu (S) : $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 3)^2 = 16$. Tọa độ tâm của mặt cầu (S) là $(a; b; c)$. Khi đó $a + b + c$ bằng bao nhiêu?

KQ:

--	--	--	--

CÂU 27. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, tất cả các giá trị của m để phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2(m+2)x + 4my + 19m - 6 = 0$ là phương trình mặt cầu là $S = (-\infty; a) \cup (b; +\infty)$. Giá trị $a + b$ bằng

KQ:				
-----	--	--	--	--

CÂU 28. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y + 2(m + 1)z + 2m^2 + 6 = 0$ là phương trình mặt cầu.

KQ:

--	--	--	--

CÂU 29. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, có bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2(m+2)x + 4my - 2mz + 5m^2 + 9 = 0$ không phải là phương trình mặt cầu.

KQ:				
-----	--	--	--	--

CÂU 30. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2(3 - m)x - 2(m + 1)y - 2mz + 2m^2 + 7 = 0$ không phải là phương trình mặt cầu.

KQ:

--	--	--	--

CÂU 31. Trong KG $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 2; 1)$, $B(3; 1; -2)$. Tập hợp điểm $M(x; y; z)$ sao cho thỏa mãn $MA^2 + MB^2 = 30$ là phương trình mặt cầu tâm $I(a; b; c)$. Giá trị $a + b + c$ bằng

KQ:

CÂU 32. Trong KG $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 2; 1)$, $B(3; 1; -2)$. Tập hợp điểm $M(x; y; z)$ sao cho thỏa mãn $\frac{MB}{MA} = 2$ là phương trình mặt cầu tâm $I(a; b; c)$. Giá trị $a + b + c$ gần bằng

KQ:

CÂU 33. Trong KG $Oxyz$, cho hai điểm $A(-1; 2; 0)$, $B(0; 1; -2)$. Tập hợp điểm $M(x; y; z)$ sao cho thỏa mãn $MA = MB$ là mặt phẳng có phương trình $x + ay + bz + c = 0$. Giá trị $a + b + c$ bằng

KQ:

CÂU 34. Trong KG $Oxyz$, cho hai điểm $A(-1; 0; 1)$, $B(1; -1; 2)$. Tập hợp điểm $M(x; y; z)$ sao cho thỏa mãn $\widehat{AMB} = 90^\circ$ là mặt cầu tâm $I(a; b; c)$ và bán kính $R = \sqrt{d}$. Giá trị $a + b + c + d$ bằng

KQ:

2

LẬP PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU DẠNG CƠ BẢN

Mặt cầu tâm $I(a; b; c)$ và có bán kính R có phương trình

$$(S): (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2.$$

Phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$ với $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$ là phương trình của mặt cầu tâm $I(a; b; c)$ và bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$.

Phần I. Mỗi câu hỏi học sinh chọn một trong bốn phương án A, B, C, D.

CÂU 1. Trong KG $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(-1; 3; 0)$ và bán kính bằng 2. Phương trình của mặt cầu (S) là

- (A) $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 + z^2 = 2$. (B) $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 + z^2 = 4$.
(C) $(x + 1)^2 + (y - 3)^2 + z^2 = 4$. (D) $(x + 1)^2 + (y - 3)^2 + z^2 = 2$.

CÂU 2. Trong KG $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(0; 0; -3)$ và đi qua điểm $M(4; 0; 0)$. Phương trình của (S) là

- (A) $x^2 + y^2 + (z + 3)^2 = 25$. (B) $x^2 + y^2 + (z + 3)^2 = 5$.
(C) $x^2 + y^2 + (z - 3)^2 = 25$. (D) $x^2 + y^2 + (z - 3)^2 = 5$.

CÂU 3. Trong KG $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; -2; 7)$, $B(-3; 8; -1)$. Mặt cầu đường kính AB có phương trình là

- (A) $(x + 1)^2 + (y - 3)^2 + (z - 3)^2 = \sqrt{45}$. (B) $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 + (z + 3)^2 = 45$.
(C) $(x - 1)^2 + (y - 3)^2 + (z + 3)^2 = \sqrt{45}$. (D) $(x + 1)^2 + (y - 3)^2 + (z - 3)^2 = 45$.

CÂU 4. Phương trình nào sau đây là phương trình mặt cầu (S) tâm $A(2; 1; 0)$, đi qua điểm $B(0; 1; 2)$?

- (A) $(S): (x + 2)^2 + (y + 1)^2 + z^2 = 8$. (B) $(S): (x - 2)^2 + (y - 1)^2 + z^2 = 8$.
(C) $(S): (x - 2)^2 + (y - 1)^2 + z^2 = 64$. (D) $(S): (x + 2)^2 + (y + 1)^2 + z^2 = 64$.

CÂU 5. Trong KG $Oxyz$ cho điểm $I(2; 3; 4)$ và $A(1; 2; 3)$. Phương trình mặt cầu tâm I và đi qua A có phương trình là

- (A) $(x + 2)^2 + (y + 3)^2 + (z + 4)^2 = 3$. (B) $(x + 2)^2 + (y + 3)^2 + (z + 4)^2 = 9$.
(C) $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 + (z - 4)^2 = 45$. (D) $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 + (z - 4)^2 = 3$.

CÂU 6. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 2; 3)$, $B(5; 4; -1)$. Phương trình mặt cầu đường kính AB là

- (A) $(x - 3)^2 + (y - 3)^2 + (z - 1)^2 = 9$. (B) $(x - 3)^2 + (y - 3)^2 + (z - 1)^2 = 6$.
(C) $(x + 3)^2 + (y + 3)^2 + (z + 1)^2 = 9$. (D) $(x - 3)^2 + (y - 3)^2 + (z - 1)^2 = 36$.

CÂU 7. Trong KG $Oxyz$, cho hai điểm $M(3; -2; 5)$, $N(-1; 6; -3)$. Mặt cầu đường kính MN có phương trình là

- (A) $(x + 1)^2 + (y + 2)^2 + (z + 1)^2 = 6$. (B) $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 1)^2 = 6$.

QUICK NOTE

QUICK NOTE

☐ $(x+1)^2 + (y+2)^2 + (z+1)^2 = 36.$
☐ $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 36.$

CÂU 8. Cho hai điểm A, B cố định trong không gian có độ dài AB là 4. Biết rằng tập hợp các điểm M trong không gian sao cho $MA = 3MB$ là một mặt cầu. Bán kính mặt cầu đó bằng

☐ 3.
 ☐ $\frac{9}{2}.$
☐ 1.
 ☐ $\frac{3}{2}.$

CÂU 9. Trong KG $Oxyz$, mặt cầu (S) qua bốn điểm $A(3; 3; 0), B(3; 0; 3), C(0; 3; 3), D(3; 3; 3)$. Phương trình mặt cầu (S) là

☐ $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$
☐ $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{27}{4}.$
☐ $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(z + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{27}{4}.$
☐ $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{27}{4}.$

CÂU 10. Trong KG $Oxyz$, cho tứ diện đều $ABCD$ có $A(0; 1; 2)$ và hình chiếu vuông góc của A trên mặt phẳng (BCD) là $H(4; -3; -2)$. Tìm tọa độ tâm I của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.

☐ $I(3; -2; -1).$
☐ $I(2; -1; 0).$
☐ $I(3; -2; 1).$
☐ $I(-3; -2; 1).$

CÂU 11. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, mặt cầu (S) đi qua điểm O và cắt các tia Ox, Oy, Oz lần lượt tại các điểm A, B, C khác O thỏa mãn tam giác ABC có trọng tâm là điểm $G(-6; -12; 18)$. Tọa độ tâm của mặt cầu (S) là

☐ $(9; 18; -27).$
☐ $(-3; -6; 9).$
☐ $(3; 6; -9).$
☐ $(-9; -18; 27).$

CÂU 12. Trong hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu

$$(S): (x - \cos \alpha)^2 + (y - \cos \beta)^2 + (z - \cos \gamma)^2 = 4$$

với α, β và γ lần lượt là ba góc tạo bởi tia Ot bất kì với 3 tia Ox, Oy và Oz . Biết rằng mặt cầu (S) luôn tiếp xúc với hai mặt cầu cố định. Tổng diện tích của hai mặt cầu cố định đó bằng

☐ $40\pi.$
☐ $4\pi.$
☐ $20\pi.$
☐ $36\pi.$

CÂU 13. Trong KG $Oxyz$, cho điểm $M(1; -2; 3)$. Gọi I là hình chiếu vuông góc của M trên trục Ox . Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt cầu tâm I bán kính IM ?

☐ $(x-1)^2 + y^2 + z^2 = 13.$
☐ $(x+1)^2 + y^2 + z^2 = 17.$
☐ $(x+1)^2 + y^2 + z^2 = 13.$
☐ $(x-1)^2 + y^2 + z^2 = \sqrt{13}.$

CÂU 14. Trong KG $Oxyz$, cho điểm $I(1; -2; 3)$. Viết phương trình mặt cầu tâm I , cắt trục Ox tại hai điểm A và B sao cho $AB = 2\sqrt{3}$

☐ $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 16.$
☐ $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 20.$
☐ $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 25.$
☐ $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 9.$

CÂU 15. Trong KG $Oxyz$, cho điểm $M(1; -2; 3)$. Gọi I là hình chiếu vuông góc của M trên trục Ox . Phương trình nào sau đây là phương trình mặt cầu tâm I bán kính IM ?

☐ $(x-1)^2 + y^2 + z^2 = \sqrt{13}.$
☐ $(x-1)^2 + y^2 + z^2 = 13.$
☐ $(x+1)^2 + y^2 + z^2 = 13.$
☐ $(x+1)^2 + y^2 + z^2 = 17.$

CÂU 16. Trong KG $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ có tọa độ đỉnh $A(2; 0; 0), B(0; 4; 0), C(0; 0; 6), A(2; 4; 6)$. Gọi (S) là mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$. Viết phương trình mặt cầu (S') có tâm trùng với tâm của mặt cầu (S) và có bán kính gấp 2 lần bán kính của mặt cầu (S) .

☐ $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 56.$
☐ $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z = 0.$
☐ $(x+1)^2 + (y+2)^2 + (z+3)^2 = 14.$
☐ $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 6z - 12 = 0.$

CÂU 17. Trong KG $Oxyz$, mặt cầu tâm $I(2; 1; -3)$ và tiếp xúc với trục Oy có phương trình là

☐ $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+3)^2 = 4.$
☐ $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+3)^2 = 13.$
☐ $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+3)^2 = 9.$
☐ $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+3)^2 = 10.$

CÂU 18. Trong KG $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 4$. Một mặt cầu (S') có tâm $I'(9; 1; 6)$ và tiếp xúc ngoài với mặt cầu (S) . Phương trình mặt cầu (S') là

☐ $(x-9)^2 + (y-1)^2 + (z-6)^2 = 64.$
☐ $(x-9)^2 + (y-1)^2 + (z-6)^2 = 144.$
☐ $(x-9)^2 + (y-1)^2 + (z-6)^2 = 36.$
☐ $(x+9)^2 + (y+1)^2 + (z+6)^2 = 25.$

CÂU 19. Trong KG $Oxyz$, cho điểm $H(1; 2; -2)$. Mặt phẳng (α) đi qua H và cắt các trục Ox, Oy, Oz tại A, B, C sao cho H là trực tâm tam giác ABC . Viết phương trình mặt cầu tâm O và tiếp xúc với mặt phẳng (α) .

A $x^2 + y^2 + z^2 = 81$.

B $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

C $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

D $x^2 + y^2 + z^2 = 25$.

Phần II. Trong mỗi ý a), b), c) và d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.

CÂU 20. Trong KG $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(0; -2; 1)$, bán kính bằng 2. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

Mệnh đề	Đ	S
a) Phương trình của mặt cầu (S) là $x^2 + (y + 2)^2 + (z - 1)^2 = 2$.		
b) Phương trình của mặt cầu (S) là $x^2 + (y - 2)^2 + (z + 1)^2 = 2$.		
c) Phương trình của mặt cầu (S) là $x^2 + (y - 2)^2 + (z + 1)^2 = 4$.		
d) Phương trình của mặt cầu (S) là $x^2 + (y + 2)^2 + (z - 1)^2 = 4$.		

CÂU 21. Trong KG $Oxyz$, cho hai điểm $I(1; 1; 1)$ và $A(1; 2; 3)$. Gọi (S) là mặt cầu tâm I và đi qua điểm A . Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

Mệnh đề	Đ	S
a) Phương trình mặt cầu (S) là $(x + 1)^2 + (y + 1)^2 + (z + 1)^2 = 5$.		
b) Phương trình mặt cầu (S) là $(x + 1)^2 + (y + 1)^2 + (z + 1)^2 = 29$.		
c) Phương trình mặt cầu (S) là $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 = 5$.		
d) Phương trình mặt cầu (S) là $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 = 25$.		

CÂU 22. Trong KG $Oxyz$, cho hai điểm $A(2; -1; -3); B(0; 3; -1)$. Gọi (S) là mặt cầu đường kính AB . Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

Mệnh đề	Đ	S
a) Phương trình của mặt cầu (S) là $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z + 2)^2 = 6$.		
b) Phương trình của mặt cầu (S) là $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z + 2)^2 = 24$.		
c) Phương trình của mặt cầu (S) là $(x + 1)^2 + (y + 1)^2 + (z - 2)^2 = 24$.		
d) Phương trình của mặt cầu có tâm là trung điểm AB và đi qua hai điểm A, B là $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z + 2)^2 = 6$.		

CÂU 23. Gọi (S) là mặt cầu đi qua bốn điểm $A(2; 0; 0), B(1; 3; 0), C(-1; 0; 3), D(1; 2; 3)$. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

Mệnh đề	Đ	S
a) Mặt cầu (S) có tọa độ tâm là $(1; -1; 1)$.		
b) Mặt cầu (S) có tọa độ tâm là $(0; 1; 1)$.		
c) Bán kính R của mặt cầu (S) là $R = 6$.		
d) Bán kính R của mặt cầu (S) là $R = \sqrt{6}$.		

CÂU 24. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm nằm trên mặt phẳng (Oxy) và đi qua ba điểm $A(1; 2; -4), B(1; -3; 1), C(2; 2; 3)$. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

Mệnh đề	Đ	S
a) Tọa độ tâm (I) của mặt cầu (S) là $(2; -1; 0)$.		
b) Tọa độ tâm (I) của mặt cầu (S) là $(-2; 1; 0)$.		
c) Bán kính R của mặt cầu (S) là $R = \sqrt{26}$.		

QUICK NOTE

QUICK NOTE

Mệnh đề	Đ	S
d) Bán kính R của mặt cầu (S) là $R = 26$.		

CÂU 25. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1; 1; 2)$, $B(3; 2; -3)$. Mặt cầu (S) có tâm I thuộc Ox và đi qua hai điểm A, B . Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

Mệnh đề	Đ	S
a) Tọa độ tâm (I) của mặt cầu (S) là $I(4; 0; 0)$.		
b) Bán kính R của mặt cầu (S) là $R = 14$.		
c) Mặt cầu (S) có phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 2 = 0$.		
d) Mặt cầu (S) có phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 2 = 0$.		

CÂU 26. Trong KG $Oxyz$, mặt cầu (S) đi qua điểm $A(1; -1; 4)$ và tiếp xúc với các mặt phẳng tọa độ. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

Mệnh đề	Đ	S
a) Mặt cầu (S) có phương trình $(x - 3)^2 + (y + 3)^2 + (z + 3)^2 = 16$.		
b) Mặt cầu (S) có phương trình $(x - 3)^2 + (y + 3)^2 + (z - 3)^2 = 9$.		
c) Mặt cầu (S) có phương trình $(x + 3)^2 + (y - 3)^2 + (z + 3)^2 = 36$.		
d) Mặt cầu (S) có phương trình $(x + 3)^2 + (y - 3)^2 + (z - 3)^2 = 49$.		

Phần III. Học sinh điền kết quả vào ô trống.

CÂU 27. Trong KG $Oxyz$, mặt cầu (S) có tâm $I(0; 1; -2)$ và bán kính bằng 3. Phương trình của (S) có dạng $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$. Tìm d .

KQ:

--	--	--	--

CÂU 28. Trong KG $Oxyz$, cho mặt cầu có tâm $I(1; -4; 3)$ và đi qua điểm $A(5; -3; 2)$. Tính bán kính của mặt cầu đã cho (làm tròn kết quả đến hàng phần nghìn).

KQ:

--	--	--	--

CÂU 29. Trong KG $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 1; 1)$ và $B(1; -1; 3)$. Phương trình mặt cầu có đường kính AB có dạng $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$. Tính tổng $S = a + b + c + d$.

KQ:

--	--	--	--

CÂU 30. Trong KG $Oxyz$, cho $A(-1; 0; 0)$, $B(0; 0; 2)$, $C(0; -3; 0)$. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$ (làm tròn đến hàng phần nghìn).

KQ:

--	--	--	--

CÂU 31. Trong KG $Oxyz$, gọi $I(a; b; c)$ là tâm mặt cầu đi qua điểm $A(1; -1; 4)$ và tiếp xúc với tất cả các mặt phẳng tọa độ. Tính $P = a - b + c$.

KQ:

--	--	--	--

CÂU 32. Trong không gian $Oxyz$, tìm giá trị dương của m (làm tròn đến hàng phần nghìn) sao cho mặt phẳng (Oxy) tiếp xúc với mặt cầu $(x - 3)^2 + y^2 + (z - 2)^2 = m^2 + 1$.

KQ:

--	--	--	--

CÂU 33. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1; 2; -4)$, $B(1; -3; 1)$, $C(2; 2; 3)$. Tính đường kính của mặt cầu (S) đi qua ba điểm trên và có tâm nằm trên mặt phẳng (Oxy) (Làm tròn kết quả đến hàng phần chục).

KQ:

--	--	--	--

CÂU 34. Trong không gian $Oxyz$, gọi (S) là mặt cầu đi qua điểm $D(0; 1; 2)$ và tiếp xúc với các trục Ox, Oy, Oz tại các điểm $A(a; 0; 0)$, $B(0; b; 0)$, $C(0; 0; c)$ trong đó $a, b, c \in \mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$. Tính bán kính của (S) (làm tròn kết quả đến hàng phần chục).

KQ:

--	--	--	--

CÂU 35. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1; 0; 0)$, $C(0; 0; 3)$, $B(0; 2; 0)$. Tập hợp các điểm M thỏa mãn $MA^2 = MB^2 + MC^2$ là mặt cầu có bán kính là bao nhiêu? (làm tròn kết quả đến hàng phần nghìn).

KQ:

CÂU 36. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, xét mặt cầu (S) có phương trình dạng $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 2az + 10a = 0$. Có tất cả bao nhiêu giá trị thực của a để (S) có chu vi đường tròn lớn bằng 8π .

KQ:

CÂU 37. Trong KG $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 25$ và hình nón (H) có đỉnh $A(3; 2; -2)$ và nhận AI làm trục đối xứng với I là tâm mặt cầu. Một đường sinh của hình nón (H) cắt mặt cầu tại M, N sao cho $AM = 3AN$. Tìm bán kính của mặt cầu đồng tâm với mặt cầu (S) và tiếp xúc với các đường sinh của hình nón (H) (làm tròn kết quả đến hàng phần nghìn).

KQ:

CÂU 38. Trong KG $Oxyz$, cho bốn điểm $A(0; -1; 2)$, $B(2; -3; 0)$, $C(-2; 1; 1)$, $D(0; -1; 3)$. Gọi (L) là tập hợp tất cả các điểm M trong không gian thỏa mãn đẳng thức $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MD} = 1$. Biết rằng (L) là một đường tròn, đường tròn đó có bán kính r bằng bao nhiêu? (Làm tròn kết quả đến hàng phần nghìn).

KQ:

3

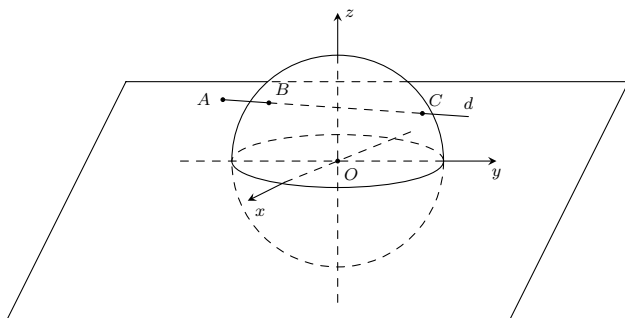
ỨNG DỤNG MẶT CẦU TRONG KHÔNG GIAN

BÀI 1. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục là kilômét) một trạm phát sóng radar của Nga được đặt trên bán đảo Crimea ở vị trí $I(-2; 1; -1)$ và được thiết kế phát hiện máy bay của địch ở khoảng cách tối đa 500 km.

- Sử dụng phương trình mặt cầu để mô tả ranh giới bên ngoài vùng phát sóng của radar trong không gian.
- Hai chiếc máy bay do thám của Mỹ và Anh đang bay ở vị trí có tọa độ lần lượt là $M(-200; 100; -250)$ và $N(350; -100; 300)$. Hỏi radar của Nga có thể phát hiện ra hai chiếc máy bay do thám của Mỹ và Anh không?

BÀI 2. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục là kilômét), đài kiểm soát không lưu sân bay Cam Ranh - Khánh Hòa ở vị trí $O(0; 0; 0)$ và được thiết kế phát hiện máy bay ở khoảng cách tối đa 600 km. Một máy bay của hãng Việt Nam Airlines đang ở vị trí $A(-1000; -200; 10)$, chuyển động theo đường thẳng d có phương trình

$$\begin{cases} x = -1000 + 100t \\ y = -200 + 80t \\ z = 10 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \text{ và hướng về đài kiểm soát không lưu (như hình vẽ).}$$



- Sử dụng phương trình mặt cầu để mô tả ranh giới bên ngoài vùng phát sóng của đài kiểm soát không lưu trong không gian.
- Xác định tọa độ vị trí sớm nhất mà máy bay xuất hiện trên màn hình radar và tọa độ vị trí mà máy bay bay ra khỏi màn hình radar.
- Tính khoảng cách ngắn nhất giữa máy bay với đài kiểm soát không lưu.

QUICK NOTE

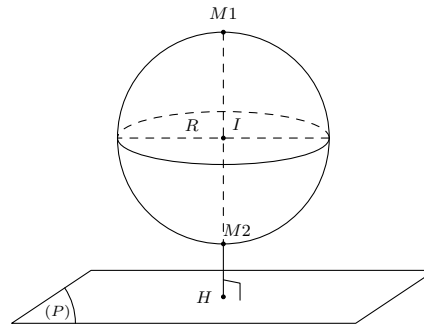
QUICK NOTE

4

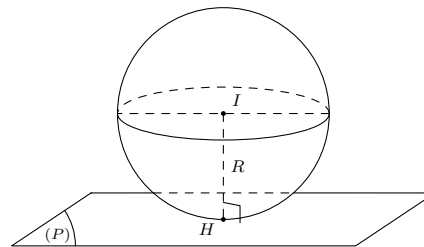
Vị trí tương đối giữa mặt phẳng với mặt cầu

Cho mặt cầu $S(I; R)$ và mặt phẳng (P) . Gọi H là hình chiếu vuông góc của I lên (P) và có $d = IH$ là khoảng cách từ I đến mặt phẳng (P) . Khi đó:

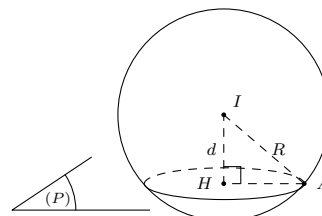
☑ Nếu $d > R$: Mặt cầu và mặt phẳng không có điểm chung.



☑ Nếu $d = R$: Mặt phẳng tiếp xúc mặt cầu. Lúc đó (P) là mặt phẳng tiếp diện của (S) và H là tiếp điểm.



☑ Nếu $d < R$: mặt phẳng (P) cắt mặt cầu theo thiết diện là đường tròn có tâm H và bán kính $r = \sqrt{R^2 - d^2}$.



Phần I. Mỗi câu hỏi học sinh chọn một trong bốn phương án A, B, C, D.

CÂU 1. Trong KG $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z - 22 = 0$ và mặt phẳng $(P): 3x - 2y + 6z + 14 = 0$. Khoảng cách từ tâm I của mặt cầu (S) đến mặt phẳng (P) bằng

- (A) 2. (B) 4. (C) 3. (D) 1.

CÂU 2. Trong KG $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 = 1$ và mặt phẳng $(P): x + 2y - 2z + 1 = 0$. Tìm bán kính r đường tròn giao tuyến của (S) và (P) .

- (A) $r = \frac{1}{3}$. (B) $r = \frac{2\sqrt{2}}{3}$. (C) $r = \frac{1}{2}$. (D) $r = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

CÂU 3. Trong KG $Oxyz$ cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z = 0$. Đường tròn giao tuyến của (S) với mặt phẳng (Oxy) có bán kính là

- (A) $r = 3$. (B) $r = \sqrt{5}$. (C) $r = \sqrt{6}$. (D) $r = \sqrt{14}$.

CÂU 4. Trong KG $Oxyz$, cho mặt cầu (S) tâm $I(a; b; c)$ bán kính bằng 1, tiếp xúc mặt phẳng (Oxz) . Khẳng định nào sau đây luôn đúng?

- (A) $|a| = 1$. (B) $a + b + c = 1$. (C) $|b| = 1$. (D) $|c| = 1$.

CÂU 5. Trong KG $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x - 2)^2 + (y + 1)^2 + (z + 2)^2 = 4$ và mặt phẳng $(P): 4x - 3y - m = 0$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để mặt phẳng (P) và mặt cầu (S) có đúng 1 điểm chung.

- (A) $m = 1$. (B) $m = -1$ hoặc $m = -21$.

QUICK NOTE

(C) $m = 1$ hoặc $m = 21$.

(D) $m = -9$ hoặc $m = 31$.

CÂU 6. Trong KG $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 2z - 3 = 0$. Viết phương trình mặt phẳng (Q) chứa trục Ox và cắt (S) theo một đường tròn bán kính bằng 3.

(A) $(Q): y + 3z = 0$.

(B) $(Q): x + y - 2z = 0$.

(C) $(Q): y - z = 0$.

(D) $(Q): y - 2z = 0$.

CÂU 7. Trong KG $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 45$ và mặt phẳng $(P): x + y - z - 13 = 0$. Mặt cầu (S) cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến là đường tròn có tâm $I(a; b; c)$ thì giá trị của $a + b + c$ bằng

(A) -11 .

(B) 5 .

(C) 2 .

(D) 1 .

CÂU 8. Trong KG $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2z - 7 = 0$, mặt phẳng $(P): 4x + 3y + m = 0$. Tìm tất cả các giá trị của m để mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) .

(A) $\begin{cases} m > 11 \\ m < -19 \end{cases}$.

(B) $-19 < m < 11$.

(C) $-12 < m < 4$.

(D) $\begin{cases} m > 4 \\ m < -12 \end{cases}$.

CÂU 9. Trong KG $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-a)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 9$ và mặt phẳng $(P): 2x + y + 2z = 1$. Tìm tất cả các giá trị của a để (P) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là đường tròn (C) .

(A) $-\frac{17}{2} \leq a \leq \frac{1}{2}$.

(B) $-\frac{17}{2} < a < \frac{1}{2}$.

(C) $-8 < a < 1$.

(D) $-8 \leq a \leq 1$.

CÂU 10. Trong KG $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y + 2z - 10 = 0$, mặt phẳng $(P): x + 2y - 2z + 10 = 0$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

(A) (P) tiếp xúc với (S) .

(B) (P) cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn khác đường tròn lớn.

(C) (P) và (S) không có điểm chung.

(D) (P) cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn lớn.

CÂU 11. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): mx + 2y - z + 1 = 0$ (m là tham số). Mặt phẳng (P) cắt mặt cầu $(S): (x-2)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 9$ theo một đường tròn có bán kính bằng 2. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m .

(A) $m = \pm 1$.

(B) $m = \pm 2 + \sqrt{5}$.

(C) $m = \pm 4$.

(D) $m = 6 \pm 2\sqrt{5}$.

CÂU 12. Trong KG $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x + 3y + z - 11 = 0$. Mặt cầu (S) có tâm $I(1; -2; 1)$ và tiếp xúc với mặt phẳng (P) tại điểm H , khi đó H có tọa độ là

(A) $H(-3; -1; -2)$.

(B) $H(-1; -5; 0)$.

(C) $H(1; 5; 0)$.

(D) $H(3; 1; 2)$.

CÂU 13. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho mặt phẳng (α) có phương trình $2x + y - z - 1 = 0$ và mặt cầu (S) có phương trình $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 4$. Xác định bán kính r của đường tròn giao tuyến của mặt phẳng (α) và mặt cầu (S) .

(A) $r = \frac{2\sqrt{42}}{3}$.

(B) $r = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

(C) $r = \frac{2\sqrt{15}}{3}$.

(D) $r = \frac{2\sqrt{7}}{3}$.

Phần III. Học sinh điền kết quả vào ô trống.

CÂU 14. Cho mặt cầu (S) có phương trình $(S): (x-3)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 100$ và mặt phẳng (α) có phương trình $2x - 2y - z + 9 = 0$. Tính bán kính của đường tròn là giao tuyến của mặt phẳng (α) và mặt cầu (S) .

KQ:

--	--	--	--

CÂU 15. Trong KG $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x - y - 2z - 1 = 0$ và điểm $M(1; -2; 0)$. Mặt cầu tâm M , bán kính bằng $\sqrt{3}$ cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính bằng bao nhiêu? (Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

KQ:

--	--	--	--

CÂU 16. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x + 2y + z - m^2 - 3m = 0$ và mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 = 9$. Gọi T là tập hợp tất cả các giá trị của m để (P) tiếp xúc với (S) . Tính tổng các phần tử của T .

KQ:

--	--	--	--

CÂU 17. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-2)^2 + (y-4)^2 + (z-1)^2 = 4$ và mặt phẳng $(P): x + my + z - 3m - 1 = 0$. Gọi T là tập hợp tất cả các giá trị của m để mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là đường tròn có đường kính bằng 2. Tính tổng các phần tử của T .

KQ:

--	--	--	--

QUICK NOTE

CÂU 18. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu có phương trình $(S) : x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 6z + m - 3 = 0$. Gọi T là tập hợp tất cả các giá trị của m để mặt phẳng $(\beta) : 2x - y + 2z - 8 = 0$ cắt (S) theo một đường tròn có chu vi bằng 8π . Tính tổng các phần tử của T .

KQ:

CÂU 19. Trong KG $Oxyz$ cho hai mặt phẳng $(P) : 2x - y + z - 2 = 0$ và $(Q) : 2x - y + z + 1 = 0$. Hỏi có bao nhiêu mặt cầu đi qua $A(1; -2; 1)$ và tiếp xúc với hai mặt phẳng $(P), (Q)$?

KQ:

CÂU 20. Trong KG $Oxyz$, cho mặt cầu $(S) : (x - 1)^2 + (y - 1)^2 + z^2 = 4$ và một điểm $M(2; 3; 1)$. Từ M kẻ được vô số các tiếp tuyến tới (S) , biết tập hợp các tiếp điểm là đường tròn (C) . Tính bán kính r của đường tròn (C) . (Kết quả làm tròn tới hàng phần trăm).

KQ:

CÂU 21. Trong KG $Oxyz$, xét các điểm $A(0; 0; 1)$, $B(m; 0; 0)$, $C(0; n; 0)$, $D(1; 1; 1)$ với $m > 0$; $n > 0$ và $m + n = 1$. Biết rằng khi m, n thay đổi, tồn tại một mặt cầu cố định tiếp xúc với mặt phẳng (ABC) và đi qua D . Tính bán kính R của mặt cầu đó.

KQ:

5

LẬP PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU LIÊN QUAN ĐẾN MẶT PHẪNG

Phần I. Mỗi câu hỏi học sinh chọn một trong bốn phương án A, B, C, D.

CÂU 1. Trong KG $Oxyz$, viết phương trình mặt cầu có tâm $I(2; 1; -4)$ và tiếp xúc với mặt phẳng $(\alpha) : x - 2y + 2z - 7 = 0$.

- (A) $x^2 + y^2 + z^2 + 4x + 2y - 8z - 4 = 0$. (B) $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y + 8z - 4 = 0$.
 (C) $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y + 8z - 4 = 0$. (D) $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y - 8z - 4 = 0$.

CÂU 2. Trong KG $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(3; 2; -1)$ và đi qua điểm $A(2; 1; 2)$. Mặt phẳng nào dưới đây tiếp xúc với (S) tại A ?

- (A) $x + y + 3z - 9 = 0$. (B) $x + y - 3z + 3 = 0$.
 (C) $x + y - 3z - 8 = 0$. (D) $x - y - 3z + 3 = 0$.

CÂU 3. Trong KG $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P) : x - 2y + 2z - 2 = 0$ và điểm $I(-1; 2; -1)$. Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm I và cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính bằng 5.

- (A) $(S) : (x + 1)^2 + (y - 2)^2 + (z + 1)^2 = 25$.
 (B) $(S) : (x + 1)^2 + (y - 2)^2 + (z + 1)^2 = 16$.
 (C) $(S) : (x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 1)^2 = 34$.
 (D) $(S) : (x + 1)^2 + (y - 2)^2 + (z + 1)^2 = 34$.

CÂU 4. Trong KG $Oxyz$, mặt cầu (S) có tâm $I(-1; 2; 1)$ và tiếp xúc với mặt phẳng $(P) : x - 2y - 2z - 2 = 0$ có phương trình là

- (A) $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 1)^2 = 3$. (B) $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z + 1)^2 = 9$.
 (C) $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 1)^2 = 9$. (D) $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 + (z + 1)^2 = 3$.

CÂU 5. Trong KG $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(1; 2; 1)$ và cắt mặt phẳng $(P) : 2x - y + 2z + 7 = 0$ theo một đường tròn có đường kính bằng 8. Phương trình mặt cầu (S) là

- (A) $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 1)^2 = 81$. (B) $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 1)^2 = 5$.
 (C) $(x + 1)^2 + (y + 2)^2 + (z + 1)^2 = 9$. (D) $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 1)^2 = 25$.

CÂU 6. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, phương trình nào dưới đây là phương trình của mặt cầu có tâm $I(3; 1; 0)$ và tiếp xúc với mặt phẳng $(P) : 2x + 2y - z + 1 = 0$?

- (A) $(x + 3)^2 + (y + 1)^2 + z^2 = 3$. (B) $(x + 3)^2 + (y + 1)^2 + z^2 = 9$.
 (C) $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 + z^2 = 3$. (D) $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 + z^2 = 9$.

CÂU 7. Trong KG $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(2; 1; 1)$ và mặt phẳng $(P) : 2x + y + 2z + 2 = 0$. Biết mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là một đường tròn có bán kính bằng 1. Viết phương trình của mặt cầu (S) .

- (A) $(S) : (x + 2)^2 + (y + 1)^2 + (z + 1)^2 = 8$.

QUICK NOTE

(B) $(S) : (x+2)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 10.$

(C) $(S) : (x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 8.$

(D) $(S) : (x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 10.$

CÂU 8. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, phương trình nào dưới đây là phương trình mặt cầu đi qua ba điểm $M(2; 3; 3)$, $N(2; -1; -1)$, $P(-2; -1; 3)$ và có tâm thuộc mặt phẳng $(\alpha) : 2x + 3y - z + 2 = 0$?

(A) $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y + 6z + 2 = 0.$

(B) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 2z - 2 = 0.$

(C) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 2z - 10 = 0.$

(D) $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 6z - 2 = 0.$

CÂU 9. Trong KG $Oxyz$, cho điểm $I(-3; 0; 1)$. Mặt cầu (S) có tâm I và cắt mặt phẳng $(P) : x - 2y - 2z - 1 = 0$ theo một thiết diện là một hình tròn. Diện tích của hình tròn này bằng π . Phương trình mặt cầu (S) là

(A) $(x+3)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 4.$

(B) $(x+3)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 25.$

(C) $(x+3)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 5.$

(D) $(x+3)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 2.$

CÂU 10. Trong KG $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P) : x - 2y + 2z - 2 = 0$ và điểm $I(-1; 2; -1)$. Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm I và cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính bằng 5.

(A) $(S) : (x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 25.$

(B) $(S) : (x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 16.$

(C) $(S) : (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 34.$

(D) $(S) : (x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 34.$

Phần III. Học sinh điền kết quả vào ô trống.

CÂU 11. Trong KG $Oxyz$, cho điểm $A(1; 2; 3)$. Tính bán kính của mặt cầu tâm A và tiếp xúc với mặt phẳng $x - 2y + 2z + 3 = 0$.

KQ:

--	--	--	--

CÂU 12. Trong KG $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P) : x + 2y - 2z + 3 = 0$ và mặt cầu (S) có tâm $I(0; -2; 1)$. Biết mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là một đường tròn có diện tích 2π . Tính bán kính mặt cầu (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

KQ:

--	--	--	--

CÂU 13. Trong không gian, cho bốn mặt cầu có bán kính lần lượt là 2, 3, 3, 2 (đơn vị độ dài) tiếp xúc ngoài với nhau. Mặt cầu nhỏ nhất tiếp xúc ngoài với cả bốn mặt cầu nói trên có bán kính bằng bao nhiêu? (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

KQ:

--	--	--	--

CÂU 14. Trong KG $Oxyz$, cho mặt cầu $(S) : x^2 + y^2 + (z - \sqrt{2})^2 = 3$. Có tất cả bao nhiêu điểm $A(a; b; c)$, (a, b, c là các số nguyên) thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho có ít nhất hai tiếp tuyến của (S) đi qua A và hai tiếp tuyến đó vuông góc với nhau?

KQ:

--	--	--	--

CÂU 15. Trong KG $Oxyz$, cho mặt cầu $(S) : x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 5$. Có tất cả bao nhiêu điểm $A(a, b, c)$ (a, b, c là các số nguyên) thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho có ít nhất hai tiếp tuyến của (S) đi qua A và hai tiếp tuyến đó vuông góc với nhau?

KQ:

--	--	--	--

CÂU 16. Trong KG $Oxyz$, cho điểm $H(1; 2; -2)$. Mặt phẳng (α) đi qua H và cắt các trục Ox , Oy , Oz lần lượt tại các điểm A , B , C sao cho H là trực tâm của tam giác ABC . Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$ (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

KQ:

--	--	--	--

CÂU 17. Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu (S) đi qua điểm $A(2; -2; 5)$ và tiếp xúc với ba mặt phẳng $(P) : x = 1$, $(Q) : y = -1$ và $(R) : z = 1$ có bán kính bằng bao nhiêu?

KQ:

--	--	--	--

CÂU 18. Trong KG $Oxyz$, xét số thực $m \in (0; 1)$ và hai mặt phẳng $(\alpha) : 2x - y + 2z + 10 = 0$ và $(\beta) : \frac{x}{m} + \frac{y}{1-m} + \frac{z}{1} = 1$. Biết rằng, khi m thay đổi có hai mặt cầu cố định tiếp xúc đồng thời với cả hai mặt phẳng (α) , (β) . Tổng bán kính của hai mặt cầu đó bằng bao nhiêu?

QUICK NOTE

KQ:

--	--	--	--

CÂU 19. Trong KG $Oxyz$, cho điểm $A(2; 11; -5)$ và mặt phẳng $(P): 2mx + (m^2 + 1)y + (m^2 - 1)z - 10 = 0$. Biết rằng khi m thay đổi, tồn tại hai mặt cầu cố định tiếp xúc với mặt phẳng (P) và cùng đi qua A . Tổng bán kính của hai mặt cầu đó bằng bao nhiêu? (kết quả làm tròn đến hàng phần chục).

KQ:

--	--	--	--

CÂU 20. Trong KG $Oxyz$ cho $A(-3; 1; 1)$, $B(1; -1; 5)$ và mặt phẳng $(P): 2x - y + 2z + 11 = 0$. Mặt cầu (S) đi qua hai điểm A, B và tiếp xúc với (P) tại điểm C . Biết C luôn thuộc một đường tròn (T) cố định. Tính bán kính r của đường tròn (T) .

KQ:

--	--	--	--

CÂU 21. Trong KG $Oxyz$, cho các điểm $M(2; 1; 4)$, $N(5; 0; 0)$, $P(1; -3; 1)$. Gọi $I(a; b; c)$ là tâm của mặt cầu tiếp xúc với mặt phẳng (Oyz) đồng thời đi qua các điểm M, N, P . Tìm c biết rằng $a + b + c < 5$.

KQ:

--	--	--	--

6

LẬP PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẪNG LIÊN QUAN ĐẾN MẶT PHẪNG, MẶT CẦU

Phần I. Mỗi câu hỏi học sinh chọn một trong bốn phương án A, B, C, D.

CÂU 1. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có đường kính AB với $A(6; 2; -5)$, $B(-4; 0; 7)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu (S) tại A .

- (A) $(P): 5x + y - 6z + 62 = 0$. (B) $(P): 5x + y - 6z - 62 = 0$.
 (C) $(P): 5x - y - 6z - 62 = 0$. (D) $(P): 5x + y + 6z + 62 = 0$.

CÂU 2. Trong KG $Oxyz$, cho mặt phẳng (Q) song song với mặt phẳng $(P): 2x - 2y + z + 7 = 0$. Biết mp (Q) cắt mặt cầu $(S): x^2 + (y + 2)^2 + (z - 1)^2 = 25$ theo một đường tròn có bán kính $r = 3$. Khi đó mặt phẳng (Q) có phương trình là

- (A) $x - y + 2z - 7 = 0$. (B) $2x - 2y + z + 17 = 0$.
 (C) $2x - 2y + z + 7 = 0$. (D) $2x - 2y + z - 17 = 0$.

CÂU 3. Trong KG $Oxyz$ cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 6z + 5 = 0$. Mặt phẳng tiếp xúc với (S) và song song với mặt phẳng $(P): 2x - y + 2z - 11 = 0$ có phương trình là

- (A) $2x - y + 2z - 7 = 0$. (B) $2x - y + 2z + 9 = 0$.
 (C) $2x - y + 2z + 7 = 0$. (D) $2x - y + 2z - 9 = 0$.

CÂU 4. Trong KG $Oxyz$, mặt phẳng (P) chứa trục Ox và cắt mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 2z - 3 = 0$ theo giao tuyến là đường tròn có bán kính bằng 3 có phương trình là

- (A) $y - 2z = 0$. (B) $y + 2z = 0$. (C) $y + 3z = 0$. (D) $y - 3z = 0$.

CÂU 5. Trong KG $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 + 2z - 2 = 0$ và điểm $K(2; 2; 0)$. Viết phương trình mặt phẳng chứa tất cả các tiếp điểm của các tiếp tuyến vẽ từ K đến mặt cầu (S) .

- (A) $2x + 2y + z - 4 = 0$. (B) $6x + 6y + 3z - 8 = 0$.
 (C) $2x + 2y + z + 2 = 0$. (D) $6x + 6y + 3z - 3 = 0$.

CÂU 6. Trong KG $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 6y - 4z - 2 = 0$ và mặt phẳng $(\alpha): x + 4y + z - 11 = 0$. Viết phương trình mặt phẳng (P) , biết (P) song song với giá của véc-tơ $\vec{v} = (1; 6; 2)$, vuông góc với (α) và tiếp xúc với (S) .

- (A) $\begin{cases} x - 2y + z + 3 = 0 \\ x - 2y + z - 21 = 0 \end{cases}$. (B) $\begin{cases} 3x + y + 4z + 1 = 0 \\ 3x + y + 4z - 2 = 0 \end{cases}$.
 (C) $\begin{cases} 4x - 3y - z + 5 = 0 \\ 4x - 3y - z - 27 = 0 \end{cases}$. (D) $\begin{cases} 2x - y + 2z + 3 = 0 \\ 2x - y + 2z - 21 = 0 \end{cases}$.

CÂU 7. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) có phương trình $x - 2y - 2z - 5 = 0$ và mặt cầu (S) có phương trình $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z + 3)^2 = 4$.

Tìm phương trình mặt phẳng song song với mặt phẳng (P) đồng thời tiếp xúc với mặt cầu (S) .

- (A) $x - 2y - 2z + 1 = 0$. (B) $-x + 2y + 2z + 5 = 0$.
(C) $x - 2y - 2z - 23 = 0$. (D) $-x + 2y + 2z + 17 = 0$.

CÂU 8. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 6y - 4z - 2 = 0$, mặt phẳng $(\alpha): x + 4y + z - 11 = 0$. Gọi (P) là mặt phẳng vuông góc với (α) , (P) song song với giá của véc-tơ $\vec{v} = (1; 6; 2)$ và (P) tiếp xúc với (S) . Lập phương trình mặt phẳng (P) .

- (A) $2x - y + 2z - 2 = 0$ và $x - 2y + z - 21 = 0$.
(B) $x - 2y + 2z + 3 = 0$ và $x - 2y + z - 21 = 0$.
(C) $2x - y + 2z + 3 = 0$ và $2x - y + 2z - 21 = 0$.
(D) $2x - y + 2z + 5 = 0$ và $2x - y + 2z - 2 = 0$.

CÂU 9. Trong KG $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu $(x - 1)^2 + y^2 + (z + 2)^2 = 6$ đồng thời song song với hai đường thẳng $d_1: \frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{-1}$, $d_2: \frac{x}{1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-2}{-1}$.

- (A) $\begin{cases} x - y + 2z - 3 = 0 \\ x - y + 2z + 9 = 0 \end{cases}$. (B) $\begin{cases} x + y + 2z - 3 = 0 \\ x + y + 2z + 9 = 0 \end{cases}$.
(C) $x + y + 2z + 9 = 0$. (D) $x - y + 2z + 9 = 0$.

CÂU 10. Trong KG $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) chứa đường thẳng $d: \frac{x-4}{3} = \frac{y}{1} = \frac{z+4}{-4}$ và tiếp xúc với mặt cầu $(S): (x - 3)^2 + (y + 3)^2 + (z - 1)^2 = 9$. Khi đó (P) song song với mặt phẳng nào sau đây?

- (A) $3x - y + 2z = 0$. (B) $-2x + 2y - z + 4 = 0$.
(C) $x + y + z = 0$. (D) Đáp án khác.

CÂU 11. Trong KG $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x + 1)^2 + (y - 1)^2 + (z + 2)^2 = 2$ và hai đường thẳng $d: \frac{x-2}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{-1}$; $\Delta: \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{-1}$. Phương trình nào dưới đây là phương trình của một mặt phẳng tiếp xúc với (S) , song song với d và Δ ?

- (A) $y + z + 3 = 0$. (B) $x + z + 1 = 0$. (C) $x + y + 1 = 0$. (D) $x + z - 1 = 0$.

CÂU 12. Trong KG $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 = 1$, đường thẳng $\Delta: \frac{x-6}{-3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-2}{2}$ và điểm $M(4; 3; 1)$. Trong các mặt phẳng sau mặt phẳng nào đi qua M , song song với Δ và tiếp xúc với mặt cầu (S) ?

- (A) $2x - 2y + 5z - 22 = 0$. (B) $2x + y + 2z - 13 = 0$.
(C) $2x + y - 2z - 1 = 0$. (D) $2x - y + 2z - 7 = 0$.

CÂU 13. Trong KG $Oxyz$ cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z - 2 = 0$ và mặt phẳng $(\alpha): 4x + 3y - 12z + 10 = 0$. Lập phương trình mặt phẳng (β) thỏa mãn đồng thời các điều kiện: Tiếp xúc với (S) ; song song với (α) và cắt trục Oz ở điểm có cao độ dương.

- (A) $4x + 3y - 12z - 78 = 0$. (B) $4x + 3y - 12z - 26 = 0$.
(C) $4x + 3y - 12z + 78 = 0$. (D) $4x + 3y - 12z + 26 = 0$.

CÂU 14. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2z + 1 = 0$ và đường thẳng $d: \frac{x}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{-1}$. Hai mặt phẳng (P) , (P') chứa d và tiếp xúc với (S) tại T , T' . Tìm tọa độ trung điểm H của TT' .

- (A) $H\left(-\frac{7}{6}; \frac{1}{3}; \frac{7}{6}\right)$. (B) $H\left(\frac{5}{6}; \frac{2}{3}; -\frac{7}{6}\right)$. (C) $H\left(\frac{5}{6}; \frac{1}{3}; -\frac{5}{6}\right)$. (D) $H\left(-\frac{5}{6}; \frac{1}{3}; \frac{5}{6}\right)$.

CÂU 15. Trong KG $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 0; 0)$, $B(0; 0; 2)$ và mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y + 1 = 0$. Số mặt phẳng chứa hai điểm A , B và tiếp xúc với mặt cầu (S) là

- (A) 1 mặt phẳng. (B) 2 mặt phẳng.
(C) 0 mặt phẳng. (D) vô số mặt phẳng.

Phần III. Học sinh điền kết quả vào ô trống.

CÂU 16. Trong KG $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x - 2y + z + 7 = 0$ và mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4z - 10 = 0$. Gọi (Q) là mặt phẳng song song với mặt phẳng (P) và cắt mặt cầu (S) theo một giao tuyến là đường tròn có chu vi bằng 6π . Biết phương trình của (Q) có dạng $ax + by + cz + d = 0$, giá trị của $a + b + c + d$ là

QUICK NOTE

QUICK NOTE

KQ:

--	--	--	--

CÂU 17. Trong KG $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z - 2 = 0$ và mặt phẳng $(\alpha): 4x + 3y - 12z + 10 = 0$. Lập phương trình mặt phẳng (β) thỏa mãn đồng thời các điều kiện: tiếp xúc với (S) ; song song với (α) và cắt trục Oz ở điểm có cao độ dương. Biết (β) có dạng $ax + by + cz + d = 0$, giá trị của $a + b + c + d$ là

KQ:

--	--	--	--

CÂU 18. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho mặt phẳng (Q) có phương trình $x - 2y + z - 5 = 0$ và mặt cầu S có phương trình $(x - 1)^2 + y^2 + (z + 2)^2 = 15$. Mặt phẳng (P) song song với mặt phẳng (Q) và cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là một đường tròn có chu vi bằng 6π . Gọi phương trình của mặt phẳng (Q) có dạng $x + by + cz + d = 0$, tính giá trị $V = a + b + c + d$.

KQ:

--	--	--	--

CÂU 19. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho mặt cầu (S) có phương trình $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 = 1$ và điểm $A(2; 3; 4)$. Biết tập hợp điểm M thuộc (S) sao cho đường thẳng AM tiếp xúc với (S) là mặt phẳng có phương trình $x + by + cz + d = 0$. Tính giá trị $V = a \cdot b \cdot c \cdot d$.

KQ:

--	--	--	--

CÂU 20. Trong không gian với hệ trục $Oxyz$ cho điểm $A(2; -2; 2)$ và mặt cầu (S) có phương trình $x^2 + y^2 + (z + 2)^2 = 1$. Điểm M di chuyển trên mặt cầu (S) đồng thời thỏa mãn $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{AM} = 6$. Biết tập hợp điểm M thỏa mãn điều kiện là mặt phẳng có phương trình $x + by + cz + d = 0$. Tính giá trị $V = 1 + b + c + d$.

KQ:

--	--	--	--

CÂU 21. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho mặt cầu (S) có phương trình $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 = 1$ và điểm $A(2; 2; 2)$. Xét các điểm M thuộc mặt cầu S sao cho đường thẳng AM luôn tiếp xúc với (S) . Gọi tập hợp điểm M thỏa mãn điều kiện là mặt phẳng có phương trình $2x + by + cz + d = 0$. Tính giá trị $V = 2 - b + c - 3d$.

KQ:

--	--	--	--

CÂU 22. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(a; 0; 0)$, $B(0; b; 0)$, $C(0; 0; c)$ với $a, b, c > 0$. Biết rằng (ABC) đi qua điểm $M\left(\frac{1}{7}; \frac{2}{7}; \frac{3}{7}\right)$ và tiếp xúc với mặt cầu (S) có phương trình $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 = \frac{72}{7}$. Tính $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$, (làm tròn kết quả đến hàng phần chục).

KQ:

--	--	--	--

CÂU 23. Trong không gian với hệ trục $Oxyz$ cho các điểm $M(2; 1; 4)$, $N(5; 0; 0)$, $P(1; -3; 1)$. Gọi $I(a, b, c)$ là tâm của mặt cầu tiếp xúc với mặt phẳng $Oxyz$ đồng thời đi qua các điểm M, N, P . Tìm c , biết rằng $a + b + c < 5$.

KQ:

--	--	--	--

CÂU 24. Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 4$ và điểm $A(2; 2; 2)$. Từ A kẻ ba tiếp tuyến AB, AC, AD với B, C, D là các tiếp điểm. Gọi phương trình mặt phẳng (BCD) là phương trình có dạng $2x + by + cz + d = 0$. Tính giá trị $V = 2 + b + c + d$.

KQ:

--	--	--	--

CÂU 25. Trong KG $Oxyz$, cho hai mặt cầu (S) và (S') có phương trình lần lượt là $x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 25$ và $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 = 1$. Mặt phẳng (P) tiếp xúc (S') và cắt (S) theo giao tuyến là một đường tròn có chu vi 6π . Viết khoảng cách từ O đến (P) dưới dạng số thập phân, lấy 2 chữ số sau dấu phẩy.

KQ:

--	--	--	--

CÂU 26. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho mặt cầu (S) có phương trình $x^2 + y^2 + z^2 + 2(a + 4b)x + 2(a - b + c)y + 2(b - c)z + d = 0$, tâm I nằm trên mặt phẳng (α) cố định.

Biết rằng $4a + b - 2c = 4$. Khoảng cách từ điểm $D(1; 2; -2)$ đến mặt phẳng (α) có dạng $\frac{1}{\sqrt{R}}$. Tìm R .

KQ:

CÂU 27. Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho ba điểm $A(1; 2; 1)$, $B(3; -1; 1)$ và $C(-1; -1; 1)$. Gọi (S_1) là mặt cầu có tâm A , bán kính bằng 2, (S_2) và (S_3) là hai mặt cầu có tâm lần lượt là B và C và có bán kính đều bằng 1. Hỏi có bao nhiêu mặt phẳng tiếp xúc với cả ba mặt cầu (S_1) , (S_2) , (S_3) ?

KQ:

CÂU 28. Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho hai điểm $A\left(\frac{5+\sqrt{3}}{2}; \frac{7-\sqrt{3}}{2}; 3\right)$ và $B\left(\frac{5-\sqrt{3}}{2}; \frac{7+\sqrt{3}}{2}; 3\right)$ và mặt cầu (S) có phương trình $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 6$.

Xét mặt phẳng (P) có phương trình $ax + by + cz + d = 0$ ($a, b, c, d \in \mathbb{Z}; d < -5$) là mặt phẳng thay đổi luôn đi qua hai điểm A và B . Gọi (N) là hình nón có đỉnh là tâm của mặt cầu (S) và đường tròn đáy là đường tròn giao tuyến của (P) và (S) . Tính giá trị của $|a + b + c + d|$ khi thiết diện qua trục của hình nón (N) có diện tích lớn nhất.

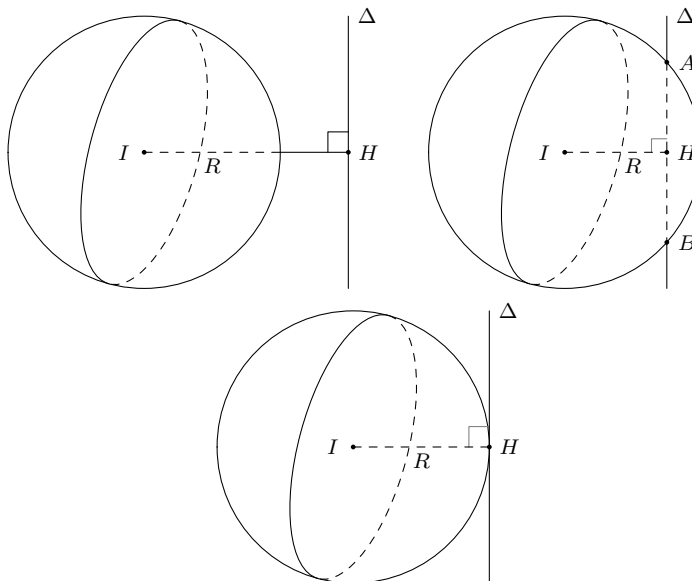
KQ:

CÂU 29. Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho ba mặt cầu $(S_1): (x+3)^2 + (y-2)^2 + (z-4)^2 = 1$; $(S_2): x^2 + (y-2)^2 + (z-4)^2 = 4$; $(S_3): x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 4y - 1 = 0$. Hỏi có bao nhiêu mặt phẳng tiếp xúc với cả ba mặt cầu (S_1) , (S_2) , (S_3) ?

KQ:

7

Vị trí tương đối của đường thẳng với mặt cầu



Cho mặt cầu (S) có tâm I , bán kính R và đường thẳng Δ . Để xét vị trí tương đối giữa Δ và (S) ta tính $d(I, \Delta)$ rồi so sánh với bán kính R .

- ☑ Nếu $d(I, \Delta) > R$ thì Δ không cắt (S) .
- ☑ Nếu $d(I, \Delta) = R$ thì Δ tiếp xúc với (S) tại H .
- ☑ Nếu $d(I, \Delta) < R$ thì Δ cắt (S) tại hai điểm phân biệt A, B .

A Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho $(P): A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ và $(Q): A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$, $(A_2, B_2, C_2, D_2 \neq 0)$. Lúc đó

- ☑ $(P) \equiv (Q) \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}$.
- ☑ $(P) \perp (Q) \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$.

QUICK NOTE

Phần I. Mỗi câu hỏi học sinh chọn một trong bốn phương án A, B, C, D.

CÂU 1. Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \frac{x+2}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z-3}{-1}$ và mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 6z - 67 = 0$. Số điểm chung của Δ và (S) là
 (A) 3. (B) 0. (C) 1. (D) 2.

CÂU 2. Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{-1}$ và mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4z + 1 = 0$. Số điểm chung của Δ và (S) là
 (A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

CÂU 3. Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + mt \\ z = -2t \end{cases}$ và mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y+3)^2 + (z-2)^2 = 1$. Tìm tất cả các giá trị thực của m để đường thẳng Δ không cắt mặt cầu (S) .
 (A) $m > \frac{15}{2}$ hoặc $m < \frac{5}{2}$. (B) $m = \frac{15}{2}$ hoặc $m = \frac{5}{2}$.
 (C) $\frac{5}{2} < m < \frac{15}{2}$. (D) $m \in \mathbb{R}$.

CÂU 4. Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + mt \\ z = -2t \end{cases}$ và mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y+3)^2 + (z-2)^2 = 1$. Tìm tất cả các giá trị thực của m để đường thẳng Δ tiếp xúc mặt cầu (S) .
 (A) $m > \frac{15}{2}$ hoặc $m < \frac{5}{2}$. (B) $m = \frac{15}{2}$ hoặc $m = \frac{5}{2}$.
 (C) $\frac{5}{2} < m < \frac{15}{2}$. (D) $m \in \mathbb{R}$.

CÂU 5. Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + mt \\ z = -2t \end{cases}$ và mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y+3)^2 + (z-2)^2 = 1$. Giá trị của m để đường thẳng Δ cắt mặt cầu (S) tại hai điểm phân biệt là
 (A) $m \in \mathbb{R}$. (B) $m > \frac{15}{2}$ hoặc $m < \frac{5}{2}$.
 (C) $m = \frac{15}{2}$ hoặc $m = \frac{5}{2}$. (D) $\frac{5}{2} < m < \frac{15}{2}$.

8

Lập phương trình mặt cầu liên quan đến đường thẳng

Phần I. Mỗi câu hỏi học sinh chọn một trong bốn phương án A, B, C, D.

CÂU 1. Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho điểm $I(1; -2; 3)$. Phương trình mặt cầu tâm I và tiếp xúc với trục Oy là
 (A) $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 9$. (B) $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = \sqrt{10}$.
 (C) $(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 10$. (D) $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 10$.

CÂU 2. Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, phương trình mặt cầu tâm $I(2; 3; -1)$ sao cho mặt cầu cắt đường thẳng d có phương trình $\begin{cases} x = 11 + 2t \\ y = t \\ z = -25 - 2t \end{cases}$ tại hai điểm A, B sao cho $AB = 16$ là
 (A) $(x-2)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = 280$. (B) $(x+2)^2 + (y+3)^2 + (z-1)^2 = 289$.
 (C) $(x-2)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = 17$. (D) $(x-2)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = 289$.

CÂU 3. Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, biết mặt cầu (S) có tâm O và tiếp xúc với mặt phẳng $(P): x - 2y + 2z + 9 = 0$ tại điểm $H(a; b; c)$. Giá trị của tổng $a + b + c$ bằng
 (A) 2. (B) -1. (C) 1. (D) -2.

CÂU 4. Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{1}$ và điểm $I(1; 0; 2)$. Gọi (S) là mặt cầu có tâm I , tiếp xúc với đường thẳng d . Bán kính của (S) bằng

QUICK NOTE

A $\frac{5}{3}$.

B $\frac{2\sqrt{5}}{3}$.

C $\frac{\sqrt{30}}{3}$.

D $\frac{4\sqrt{2}}{3}$.

CÂU 5. Trong KG $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z+2}{1}$. Gọi (S) là mặt cầu có bán kính $R = 5$, có tâm I thuộc đường thẳng d và tiếp xúc với trục Oy . Biết rằng I có tung độ dương. Điểm nào sau đây thuộc mặt cầu (S) ?

A $M(-1; -2; 1)$.

B $N(1; 2; -1)$.

C $P(-5; 2; -7)$.

D $Q(5; -2; 7)$.

CÂU 6. Trong KG $Oxyz$, cho hai điểm $A(4; 6; 2)$, $B(2; -2; 0)$ và mặt phẳng $(P): x+y+z = 0$. Xét đường thẳng d thay đổi thuộc (P) và đi qua B , gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên d . Biết rằng khi d thay đổi thì H thuộc một đường tròn cố định. Tính bán kính R của đường tròn đó.

A $R = \sqrt{3}$.

B $R = 2$.

C $R = 1$.

D $R = \sqrt{6}$.

CÂU 7. Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, mặt phẳng $(P): 2x + 6y + z - 3 = 0$ cắt trục Oz và đường thẳng $d: \frac{x-5}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-6}{-1}$ lần lượt tại A và B . Phương trình mặt cầu đường kính AB là

A $(x+2)^2 + (y-1)^2 + (z+5)^2 = 36$.

B $(x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-5)^2 = 9$.

C $(x+2)^2 + (y-1)^2 + (z+5)^2 = 9$.

D $(x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-5)^2 = 36$.

CÂU 8. Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-2}{1}$ và hai mặt phẳng $(P): x - 2y + 2z = 0$, $(Q): x - 2y + 3z - 5 = 0$. Mặt cầu (S) có tâm I là giao điểm của đường thẳng (d) và mặt phẳng (P) . Mặt phẳng (Q) tiếp xúc với mặt cầu (S) . Mặt cầu (S) có phương trình là

A $(S): (x+2)^2 + (y+4)^2 + (z+3)^2 = 1$.

B $(S): (x-2)^2 + (y-4)^2 + (z-3)^2 = 6$.

C $(S): (x-2)^2 + (y-4)^2 + (z-3)^2 = \frac{2}{7}$.

D $(S): (x-2)^2 + (y+4)^2 + (z+4)^2 = 8$.

CÂU 9. Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+2}{1}$ và điểm $I(1; 0; 0)$. Phương trình mặt cầu (S) có tâm I và cắt đường thẳng d tại hai điểm A, B sao cho tam giác IAB đều là

A $(x+1)^2 + y^2 + z^2 = \frac{20}{3}$.

B $(x-1)^2 + y^2 + z^2 = \frac{20}{3}$.

C $(x-1)^2 + y^2 + z^2 = \frac{16}{4}$.

D $(x-1)^2 + y^2 + z^2 = \frac{5}{3}$.

Phần III. Học sinh điền kết quả vào ô trống.

CÂU 10. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $I(1; -2; 3)$ và đường thẳng d có phương trình $\frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+3}{-1}$. Phương trình mặt cầu tâm A , tiếp xúc với d có dạng $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = d$. Tính $a + b + c - d$.

KQ:

--	--	--	--

CÂU 11. Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x+5}{2} = \frac{y-7}{-2} = \frac{z}{1}$ và điểm $M(4; 1; 6)$. Đường thẳng d cắt mặt cầu (S) có tâm M , tại hai điểm A, B sao cho $AB = 6$. Phương trình của mặt cầu (S) có dạng $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = d$. Tính $a \cdot b + c \cdot d$.

KQ:

--	--	--	--

CÂU 12. Trong KG $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x - 2y - z - 4 = 0$ và điểm $I(1; 2; 3)$. Mặt cầu tâm I tiếp xúc với (P) tại điểm $H(a; b; c)$. Tính $a + b + c$.

KQ:

--	--	--	--

CÂU 13. Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho hai mặt cầu (S_1) , (S_2) có phương trình lần lượt là $(S_1): x^2 + y^2 + z^2 = 25$ và $(S_2): x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 4$. Một đường thẳng d vuông góc với vectơ $\vec{u} = (1; -1; 0)$ tiếp xúc với mặt cầu (S_2) và cắt mặt cầu (S_1) theo một đoạn thẳng có độ dài bằng 8. Một vectơ chỉ phương của d có tọa độ là $(1; a; b)$. Tính $a \cdot b$.

KQ:

--	--	--	--

CÂU 14. Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 6y + m = 0$

QUICK NOTE

(m là tham số) và đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = 3 + t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$. Biết đường thẳng Δ cắt mặt cầu (S) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho $AB = 8$. Tìm giá trị của m .

KQ:

CÂU 15. Trong KG $Oxyz$ cho mặt phẳng (P): $z + 2 = 0$, điểm $K(0; 0; -2)$ và đường thẳng $d: \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1}$. Phương trình mặt cầu tâm thuộc đường thẳng d và cắt mặt phẳng (P) theo thiết diện là đường tròn tâm K , bán kính $r = \sqrt{5}$ có dạng $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = d$. Tính $a + b + c + d$.

KQ:

CÂU 16. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(-2; 0; 0)$, $B(0; -2; 0)$, $C(0; 0; -2)$. Gọi D là điểm khác O sao cho DA, DB, DC đôi một vuông góc nhau và $I(a; b; c)$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$. Tính $S = a + b + c$.

KQ:

CÂU 17. Trong không gian $Oxyz$, cho (P): $2x + y + 2z - 1 = 0$, $A(0; 0; 4)$, $B(3; 1; 2)$. Một mặt cầu (S) luôn đi qua A, B và tiếp xúc với (P) tại C . Biết rằng, C luôn thuộc một đường tròn cố định bán kính r . Bán kính r của đường tròn đó có dạng $\frac{a\sqrt{5}}{3}$, tính giá trị $a + b$.

KQ:

CÂU 18. Trong không gian cho mặt phẳng (P): $x - z + 6 = 0$ và hai mặt cầu (S_1): $x^2 + y^2 + z^2 = 25$, (S_2): $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 4z + 7 = 0$. Biết rằng tập hợp tâm I các mặt cầu tiếp xúc với cả hai mặt cầu (S_1), (S_2) và tâm I nằm trên (P) là một đường cong. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cong đó bằng $\frac{a}{b}\pi$, tính tổng $S = a + b$.

KQ:

CÂU 19. Trong KG $Oxyz$, mặt cầu (S) có tâm thuộc mặt (P): $x + 2y + z - 7 = 0$ và đi qua hai điểm $A(1; 2; 1)$ và $B(2; 5; 3)$. Bán kính nhỏ nhất của mặt cầu (S) bằng (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

KQ:

9

Lập PTĐT liên quan đến mặt cầu

Phần I. Mỗi câu hỏi học sinh chọn một trong bốn phương án A, B, C, D.

CÂU 1. Trong KG $Oxyz$, cho điểm $A(3; 1; 1)$, $d_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{2}$, $d_2: \begin{cases} x = 1 \\ y = t \\ z = 0 \end{cases}$. Mặt

cầu (S) đi qua A , có tâm I nằm trên d_1 , biết rằng (S) cắt d_2 tại hai điểm B, C sao cho $\widehat{BAC} = 90^\circ$. Tìm tọa độ điểm I .

- (A) $I(2; 3; 2)$. (B) $I(3; 4; 4)$. (C) $I(1; 2; 0)$. (D) $I(0; 0; 2)$.

CÂU 2. Trong KG $Oxyz$, cho mặt cầu (S): $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ và đường thẳng $d: \frac{x-3}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z}{1}$. Hai mặt phẳng (P), (P') chứa d và tiếp xúc với (S) tại A và B . Đường thẳng AB đi qua điểm có tọa độ là

- (A) $\left(\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}; -\frac{4}{3}\right)$. (B) $\left(1; 1; -\frac{4}{3}\right)$. (C) $\left(1; \frac{1}{3}; -\frac{4}{3}\right)$. (D) $\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; -\frac{4}{3}\right)$.

CÂU 3. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $E(1; 1; 1)$, mặt cầu (S): $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ và mặt phẳng (P): $x - 3y + 5z - 3 = 0$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua E , nằm trong (P) và cắt mặt cầu (S) tại hai điểm A, B sao cho tam giác OAB là tam giác đều. Phương trình của đường thẳng Δ là

- (A) $\frac{x-1}{-2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{-1}$. (B) $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{-1}$.
(C) $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{1}$. (D) $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{-1}$.

CÂU 4. Trong không gian hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 1; 1), B(2; 2; 1)$ và mặt phẳng $(P): x + y + 2z = 0$. Mặt cầu (S) thay đổi qua A, B và tiếp xúc với (P) tại H . Biết H chạy trên 1 đường tròn cố định. Tìm bán kính của đường tròn đó.

- (A) $3\sqrt{2}$. (B) $2\sqrt{3}$. (C) $\sqrt{3}$. (D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

CÂU 5. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2z + 1 = 0$ và đường thẳng $d: \frac{x}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{-1}$. Hai mặt phẳng $(P), (P')$ chứa d và tiếp xúc với (S) tại T, T' . Tìm tọa độ trung điểm H của TT' .

- (A) $H\left(-\frac{7}{6}; \frac{1}{3}; \frac{7}{6}\right)$. (B) $H\left(\frac{5}{6}; \frac{2}{3}; -\frac{7}{6}\right)$. (C) $H\left(\frac{5}{6}; \frac{1}{3}; -\frac{5}{6}\right)$. (D) $H\left(-\frac{5}{6}; \frac{1}{3}; \frac{5}{6}\right)$.

CÂU 6. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $E(1; 1; 1)$, mặt phẳng $(P): x - 3y + 5z - 3 = 0$ và mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 = 4$. Gọi Δ là đường thẳng qua E , nằm trong mặt phẳng (P) và cắt (S) tại 2 điểm phân biệt A, B sao cho $AB = 2$. PTĐT Δ là

- (A) $\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 2 - t \\ z = 1 - t \end{cases}$. (B) $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = 1 + t \end{cases}$. (C) $\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = -3 + t \\ z = 5 + t \end{cases}$. (D) $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = 1 - t \end{cases}$.

CÂU 7. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x - 2y + z + 3 = 0$ và mặt cầu $(S): (x - 1)^2 + (y + 3)^2 + z^2 = 9$ và đường thẳng $d: \frac{x}{-2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z+1}{2}$. Cho các phát biểu sau đây:

- I. Đường thẳng d cắt mặt cầu (S) tại 2 điểm phân biệt.
II. Mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu (S) .
III. Mặt phẳng (P) và mặt cầu (S) không có điểm chung.
IV. Đường thẳng d cắt mặt phẳng (P) tại một điểm.

Số phát biểu đúng là

- (A) 4. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

CÂU 8. Trong KG $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x - 2)^2 + (y - 3)^2 + (z - 4)^2 = 14$ và mặt phẳng $(\alpha): x + 3y + 2z - 5 = 0$. Biết đường thẳng Δ nằm trong (α) , cắt trục Ox và tiếp xúc với (S) . Vec-tơ nào sau đây là vec-tơ chỉ phương của Δ ?

- (A) $\vec{u} = (4; -2; 1)$. (B) $\vec{v} = (2; 0; -1)$. (C) $\vec{m} = (-3; 1; 0)$. (D) $\vec{n} = (1; -1; 1)$.

CÂU 9. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x - 2y - z + 9 = 0$ và mặt cầu $(S): (x - 3)^2 + (y + 2)^2 + (z - 1)^2 = 100$. Mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn (C) . Tìm tọa độ tâm K và bán kính r của đường tròn (C) là

- (A) $K(3; -2; 1), r = 10$. (B) $K(-1; 2; 3), r = 8$.
(C) $K(1; -2; 3), r = 8$. (D) $K(1; 2; 3), r = 6$.

CÂU 10. Trong KG $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x - 2y + 2z - 3 = 0$ và mặt cầu (S) tâm $I(5; -3; 5)$, bán kính $R = 2\sqrt{5}$. Từ một điểm A thuộc mặt phẳng (P) kẻ một đường thẳng tiếp xúc với mặt cầu (S) tại B . Tính OA biết $AB = 4$.

- (A) $OA = \sqrt{11}$. (B) $OA = 5$. (C) $OA = 3$. (D) $OA = \sqrt{6}$.

CÂU 11. Trong KG $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 = 9$ và điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ thuộc

$d: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + 2t \\ z = 2 - 3t \end{cases}$. Ba điểm A, B, C phân biệt cùng thuộc mặt cầu sao cho MA, MB, MC

là tiếp tuyến của mặt cầu. Biết rằng mặt phẳng (ABC) đi qua điểm $D(1; 1; 2)$. Tổng $T = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2$ bằng

- (A) 30. (B) 26. (C) 20. (D) 21.

CÂU 12. Trong KG $Oxyz$ cho hai điểm $A(0; 0; 3), B(-2; 0; 1)$ và mặt phẳng $(\alpha): 2x - y + 2z + 8 = 0$. Hỏi có bao nhiêu điểm C trên mặt phẳng (α) sao cho tam giác ABC đều?

- (A) 2. (B) 1. (C) 0. (D) Vô số.

CÂU 13. Trong KG $Oxyz$, cho mặt cầu (S) tâm $I(1; 3; 9)$ bán kính bằng 3. Gọi M, N là hai điểm lần lượt thuộc hai trục Ox, Oz sao cho đường thẳng MN tiếp xúc với (S) , đồng thời mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OIMN$ có bán kính bằng $\frac{13}{2}$. Gọi A là tiếp điểm của MN và (S) , giá trị $AM \cdot AN$ bằng

- (A) 39. (B) $12\sqrt{3}$. (C) 18. (D) $28\sqrt{3}$.

QUICK NOTE

QUICK NOTE

CÂU 14. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) tâm $I(4; 1; 2)$ bán kính bằng 2. Gọi $M; N$ là hai điểm lần lượt thuộc hai trục $Ox; Oy$ sao cho đường thẳng MN tiếp xúc với (S) , đồng thời mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OIMN$ có bán kính bằng $\frac{7}{2}$. Gọi A là tiếp điểm của MN và (S) , giá trị $AM \cdot AN$ bằng
(A) $6\sqrt{2}$. **(B)** 14. **(C)** 8. **(D)** $9\sqrt{2}$.

Phần III. Học sinh điền kết quả vào ô trống.

CÂU 15. Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 6z - 13 = 0$ và đường thẳng $d: \frac{x+1}{1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-1}{1}$. Điểm $M(a; b; c)$, $(a > 0)$ nằm trên đường thẳng d sao cho từ M kẻ được ba tiếp tuyến MA, MB, MC đến mặt cầu (S) (A, B, C là các tiếp điểm) và $\widehat{AMB} = 60^\circ, \widehat{BMC} = 60^\circ, \widehat{CMA} = 120^\circ$. Biết $a^3 + b^3 + c^3 = \frac{m}{n}$, tính $m + n$.

KQ:

--	--	--	--

CÂU 16. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) tâm $I(1; 4; 2)$, bán kính bằng 2. Gọi M, N là hai điểm lần lượt thuộc hai trục Ox, Oy sao cho đường thẳng MN tiếp xúc với (S) , đồng thời mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OIMN$ có bán kính bằng $\frac{7}{2}$. Gọi A là tiếp điểm của MN và (S) , tính giá trị $AM \cdot AN$ (làm tròn đến hàng phần trăm).

KQ:

--	--	--	--

CÂU 17. Trong KG $Oxyz$ cho mặt cầu (S) tâm $I(9; 3; 1)$ bán kính bằng 3. Gọi M, N là hai điểm lần lượt thuộc 2 trục Ox, Oz sao cho đường thẳng MN tiếp xúc với (S) , đồng thời mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OIMN$ có bán kính bằng $\frac{13}{2}$. Gọi A là tiếp điểm của MN và (S) . Tính giá trị $AM \cdot AN$ (làm tròn đến hàng phần chục).

KQ:

--	--	--	--

CÂU 18. Trong KG $Oxyz$, cho phương trình mặt cầu $(S_m): x^2 + y^2 + z^2 + (m+2)x + 2my - 2mz - m - 3 = 0$. Biết rằng với mọi số thực m thì (S_m) luôn chứa một đường tròn cố định. Tính bán kính r của đường tròn đó (làm tròn đến hàng phần trăm).

KQ:

--	--	--	--

CÂU 19. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = 3 + t \\ y = -1 - t, \\ z = -2 + t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$, điểm $M(1; 2; -1)$ và mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 10y + 14z + 64 = 0$. Gọi Δ' là đường thẳng đi qua M cắt đường thẳng Δ tại A , cắt mặt cầu tại B sao cho $\frac{AM}{AB} = \frac{1}{3}$ và điểm B có hoành độ là số nguyên. Phương trình mặt phẳng trung trực đoạn AB có dạng $2x + by + cz + d = 0$. Khi đó $b + c + d$ bằng

KQ:

--	--	--	--

CÂU 20. Một doanh nghiệp dự kiến lợi nhuận khi sản xuất x sản phẩm $(0 \leq x \leq 300)$ được cho bởi hàm số $y = -x^3 + 300x^2$ (đơn vị: đồng).

- Nêu ra các khoảng số lượng sản phẩm mà doanh nghiệp luôn có lợi nhuận?
- Nêu ra các khoảng số lượng sản phẩm mà doanh nghiệp luôn thiệt hại?
- So sánh lợi nhuận khi sản xuất 100 sản phẩm, 200 sản phẩm và 300 sản phẩm?
- Doanh nghiệp cần sản xuất bao nhiêu sản phẩm để đạt lợi nhuận lớn nhất? Lợi nhuận lớn nhất đó là bao nhiêu?
- Nếu doanh nghiệp muốn duy trì lợi nhuận không dưới 2.000.000 đồng, họ nên sản xuất ít nhất bao nhiêu sản phẩm và không vượt quá bao nhiêu sản phẩm?

CÂU 21. Trong KG $Oxyz$, cho phương trình mặt cầu $(S_m): x^2 + y^2 + z^2 + (m+2)x + 2my - 2mz - m - 3 = 0$. Biết rằng với mọi số thực m thì (S_m) luôn chứa một đường tròn cố định. Tính bán kính r của đường tròn đó (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

KQ:

--	--	--	--

CÂU 22. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = 3 + t \\ y = -1 - t, (t \in \mathbb{R}), \\ z = -2 + t \end{cases}$ điểm $M(1; 2; -1)$ và mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 10y + 14z + 64 = 0$. Gọi Δ' là đường thẳng đi qua M cắt đường thẳng Δ tại A , cắt mặt cầu (S) tại B sao cho $\frac{AM}{AB} = \frac{1}{3}$ và điểm B có hoành độ là số nguyên. Biết phương trình mặt phẳng trung trực đoạn AB có dạng $ax + by + cz + d = 0$. Tính $2a + b - 12c + d$.

KQ:

CÂU 23. Trong KG $Oxyz$, cho $(S): (x+3)^2 + (y-2)^2 + (z-5)^2 = 36$, điểm $M(7; 1; 3)$. Gọi Δ là đường thẳng đi động luôn đi qua M và tiếp xúc với mặt cầu (S) tại N . Tiếp điểm N đi động trên đường tròn (T) có tâm $J(a; b; c)$. Gọi $k = 2a - 5b + 10c$, tính giá trị của k .

KQ:

CÂU 24. Trong KG $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 4y - 2z - 7 = 0$ và đường thẳng d_m là giao tuyến của hai mặt phẳng $x + (1-2m)y + 4mz - 4 = 0$ và $2x + my - (2m+1)z - 8 = 0$. Khi đó m thay đổi các giao điểm của d_m và (S) nằm trên một đường tròn cố định. Tính bán kính r của đường tròn đó (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

KQ:

10

GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT LIÊN QUAN ĐẾN MẶT CẦU

Bài toán: Cho điểm A và mặt cầu (S) có tâm I , bán kính R , M là điểm di động trên (S) . Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của AM .

Lời giải:

Xét A nằm ngoài mặt cầu (S) .

Gọi M_1, M_2 lần lượt là giao điểm của đường thẳng AI với mặt cầu (S) ($AM_1 < AM_2$) và (α) là mặt phẳng đi qua M và đường thẳng AI .

Khi đó (α) cắt (S) theo một đường tròn lớn (C) .

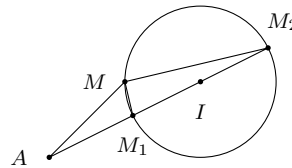
Ta có $\widehat{M_1MM_2} = 90^\circ$, nên AMM_2 và AM_1M là các góc tù.

Nên trong các tam giác AMM_1 và AMM_2 .

Ta có $AI - R = AM_1 \leq AM \leq AM_2 = AI + R$.

Tương tự với A nằm trong mặt cầu ta có $R - AI \leq AM \leq R + AI$.

Vậy $\min AM = |AI - R|$, $\max AM = R + AI$.



Phần I. Mỗi câu hỏi học sinh chọn một trong bốn phương án A, B, C, D.

CÂU 1. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(0; -1; 3)$, $B(-2; -8; -4)$, $C(2; -1; 1)$ và mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 14$. Gọi $M(x_M; y_M; z_M)$ là điểm trên (S) sao cho biểu thức $|\overrightarrow{3MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính $P = x_M + y_M$.

- (A) $P = 0$. (B) $P = 6$. (C) $P = \sqrt{14}$. (D) $P = 3\sqrt{14}$.

CÂU 2. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho ba điểm $A(8; 5; -11)$, $B(5; 3; -4)$, $C(1; 2; -6)$ và mặt cầu $(S): (x-2)^2 + (y-4)^2 + (z+1)^2 = 9$. Gọi điểm $M(a; b; c)$ là điểm trên (S) sao cho $|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Hãy tìm $a + b$.

- (A) 6. (B) 2. (C) 4. (D) 9.

CÂU 3. Cho mặt cầu $(S): (x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2 = 9$ và hai điểm $A(1; 1; 3)$, $B(21; 9; -13)$. Điểm $M(a; b; c)$ thuộc mặt cầu (S) sao cho $3MA^2 + MB^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó giá trị của biểu thức $T = abc$ bằng

- (A) 3. (B) 8. (C) 6. (D) -18.

CÂU 4. Trong không gian $Oxyz$ cho $A(0; 0; 2)$, $B(1; 1; 0)$ và mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + (z-1)^2 = \frac{1}{4}$. Xét điểm M thay đổi thuộc (S) . Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $MA^2 + 2MB^2$ bằng

- (A) $\frac{1}{2}$. (B) $\frac{3}{4}$. (C) $\frac{19}{4}$. (D) $\frac{21}{4}$.

QUICK NOTE

QUICK NOTE

CÂU 5. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho 2 điểm A, B thay đổi trên mặt cầu $x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 25$ thỏa mãn $AB = 6$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $OA^2 - OB^2$ là

- (A) 12. (B) 6. (C) 10. (D) 24.

CÂU 6. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z + 1)^2 = 9$ và hai điểm $A(4; 3; 1), B(3; 1; 3); M$ là điểm thay đổi trên (S) . Gọi m, n là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 2MA^2 - MB^2$. Xác định $m - n$.

- (A) 64. (B) 68. (C) 60. (D) 48.

CÂU 7. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC với $A(2; 1; 3), B(1; -1; 2), C(3; -6; 0), D(2; -2; -1)$. Điểm $M(x; y; z)$ thuộc mặt phẳng $(P): x - y + z + 2 = 0$ sao cho $S = MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính giá trị của biểu thức $P = x^2 + y^2 + z^2$.

- (A) 6. (B) 2. (C) 0. (D) -2.

CÂU 8. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z + 1)^2 = 9$ và hai điểm $A(4; 3; 1), B(3; 1; 3); M$ là điểm thay đổi trên (S) . Gọi m, n lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P^2 = 2MA^2 - MB^2$. Xác định $(m - n)$.

- (A) 64. (B) 68. (C) 60. (D) 48.

CÂU 9. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(2; -2; 4), B(-3; 3; -1)$ và mặt cầu $(S): (x - 1)^2 + (y - 3)^2 + (z - 3)^2 = 3$. Xét điểm M thay đổi thuộc mặt cầu (S) , giá trị nhỏ nhất của $2MA^2 + 3MB^2$ bằng

- (A) 103. (B) 108. (C) 105. (D) 100.

CÂU 10. Trong KG $Oxyz$, cho bốn điểm $A(1; 0; 0), B(2; 1; 3), C(0; 2; -3), D(2; 0; \sqrt{7})$. Gọi M là điểm thuộc mặt cầu $(S): (x + 2)^2 + (y - 4)^2 + z^2 = 39$ thỏa mãn $MA^2 + 2\vec{MB} \cdot \vec{MC} = 8$. Biết rằng đoạn thẳng MD đạt giá trị lớn nhất. Tìm giá trị lớn nhất đó.

- (A) $\sqrt{7}$. (B) $2\sqrt{7}$. (C) $3\sqrt{7}$. (D) $4\sqrt{7}$.

CÂU 11. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho 5 điểm $A(1; 0; 0), B(-1; 1; 0), C(0; -1; 0), D(0; 1; 0), E(0; 3; 0)$. M là điểm thay đổi trên mặt cầu $(S): x^2 + (y - 1)^2 + z^2 = 1$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = 2|\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}| + 3|\vec{MD} + \vec{ME}|$ là

- (A) 12. (B) $12\sqrt{2}$. (C) 24. (D) $24\sqrt{2}$.

CÂU 12. Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x + 1)^2 + (y - 4)^2 + z^2 = 8$ và điểm $A(3; 0; 0); B(4; 2; 1)$. Điểm M thay đổi nằm trên mặt cầu, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = MA + 2MB$.

- (A) $P = 2\sqrt{2}$. (B) $P = 3\sqrt{2}$. (C) $P = 4\sqrt{2}$. (D) $P = 6\sqrt{2}$.

CÂU 13. Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x + 1)^2 + (y - 4)^2 + z^2 = 8$ và điểm $A(3; 0; 0), B(4; 2; 1)$. Điểm M thay đổi nằm trên mặt cầu, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = MA + 2MB$.

- (A) $P = 2\sqrt{2}$. (B) $P = 3\sqrt{2}$. (C) $P = 4\sqrt{2}$. (D) $P = 6\sqrt{2}$.

CÂU 14. Trong KG $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x - 1)^2 + y^2 + (z - 2)^2 = 10$ và hai điểm $A(1; 2; -4)$ và $B(1; 2; 14)$. Điểm M thay đổi trên mặt cầu (S) . Giá trị nhỏ nhất của $(MA + 2MB)$ bằng

- (A) $2\sqrt{82}$. (B) $3\sqrt{79}$. (C) $5\sqrt{79}$. (D) $3\sqrt{82}$.

CÂU 15. Trong KG $Oxyz$, cho hai điểm $A(-1; 0; 0)$ và $B(2; 3; 4)$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa đường tròn giao tuyến của hai mặt cầu $(S_1): (x - 1)^2 + (y + 1)^2 + z^2 = 4$ và $(S_2): x^2 + y^2 + z^2 + 2y - 2 = 0$. Xét M, N là hai điểm bất kỳ thuộc mặt phẳng (P) sao cho $MN = 1$. Giá trị nhỏ nhất của $AM + BN$ bằng

- (A) 5. (B) 3. (C) 6. (D) 4.

CÂU 16. Trong KG $Oxyz$, cho các điểm $A(0; 0; 2)$ và $B(3; 4; 1)$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa đường tròn giao tuyến của hai mặt cầu $(S_1): (x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z + 3)^2 = 25$ với $(S_2): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 14 = 0$. M, N là hai điểm thuộc (P) sao cho $MN = 1$. Giá trị nhỏ nhất của $AM + BN$ là

- (A) $\sqrt{34} - 1$. (B) 5. (C) $\sqrt{34}$. (D) 3.

CÂU 17. Trong KG $Oxyz$ cho mặt cầu (S) có phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 2z - 3 = 0$ và điểm $A(5; 3; -2)$. Một đường thẳng d thay đổi luôn đi qua A và luôn cắt mặt cầu tại hai điểm phân biệt M, N . Tính giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = AM + 4AN$.

- (A) $S_{\min} = 30$. (B) $S_{\min} = 20$. (C) $S_{\min} = \sqrt{34} - 3$. (D) $S_{\min} = 5\sqrt{34} - 9$.

QUICK NOTE

CÂU 18. Trong KG $Oxyz$ cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{4}$ và mặt cầu $(S): (x+3)^2 + (y+4)^2 + (z+5)^2 = 729$. Cho biết điểm $A(-2; -2; -7)$, điểm B thuộc giao tuyến của mặt cầu (S) và mặt phẳng $(P): 2x + 3y + 4z - 107 = 0$. Khi điểm M di động trên đường thẳng d giá trị nhỏ nhất của biểu thức $MA + MB$ bằng

(A) $5\sqrt{30}$. (B) 27. (C) $5\sqrt{29}$. (D) $\sqrt{742}$.

CÂU 19. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt cầu $(S_1): x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $(S_2): x^2 + (y-4)^2 + z^2 = 4$ và các điểm $A(4; 0; 0)$, $B\left(\frac{1}{4}; 0; 0\right)$, $C(1; 4; 0)$, $D(4; 4; 0)$. Gọi M là điểm thay đổi trên (S_1) , N là điểm thay đổi trên (S_2) . Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $Q = MA + 2ND + 4MN + 4BC$ là

(A) $2\sqrt{265}$. (B) $\sqrt{265}$. (C) $3\sqrt{265}$. (D) $4\sqrt{265}$.

CÂU 20. Trong KG $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 4 = 0$ và hai điểm $A(4; 2; 4)$, $B(1; 4; 2)$. MN là dây cung của mặt cầu thỏa mãn \overrightarrow{MN} cùng hướng với $\vec{u} = (0; 1; 1)$ và $MN = 4\sqrt{2}$. Tính giá trị lớn nhất của $|AM - BN|$.

(A) $\sqrt{41}$. (B) $4\sqrt{2}$. (C) 7. (D) $\sqrt{17}$.

CÂU 21. Trong KG $Oxyz$, gọi điểm $M(a; b; c)$ (với a, b, c là các phân số tối giản) thuộc mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 4z - 7 = 0$ sao cho biểu thức $T = 2a + 3b + 6c$ đạt giá trị lớn nhất. Khi đó giá trị biểu thức $P = 2a - b + c$ bằng

(A) $\frac{12}{7}$. (B) 8. (C) 6. (D) $\frac{51}{7}$.

CÂU 22. Cho x, y, z, a, b, c là các số thực thay đổi thỏa mãn $(x+1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 1$ và $a + b + c = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2$.

(A) $\sqrt{3} - 1$. (B) $\sqrt{3} + 1$. (C) $4 - 2\sqrt{3}$. (D) $4 + 2\sqrt{3}$.

CÂU 23. Trong KG $Oxyz$, cho hai điểm $A(-2; 2; -2)$; $B(3; -3; 3)$. Điểm M trong không gian thỏa mãn $\frac{MA}{MB} = \frac{2}{3}$. Khi đó độ dài OM lớn nhất bằng

(A) $6\sqrt{3}$. (B) $12\sqrt{3}$. (C) $\frac{5\sqrt{3}}{2}$. (D) $5\sqrt{3}$.

CÂU 24. Trong KG $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 2z + \frac{9}{2} = 0$ và hai điểm $A(0; 2; 0)$, $B(2; -6; -2)$. Điểm $M(a; b; c)$ thuộc (S) thỏa mãn $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$ có giá trị nhỏ nhất. Tổng $a + b + c$ bằng

(A) -1. (B) 1. (C) 3. (D) 2.

CÂU 25. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 = 3$. Một mặt phẳng (α) tiếp xúc với mặt cầu (S) và cắt các tia Ox, Oy, Oz lần lượt tại A, B, C thỏa mãn $OA^2 + OB^2 + OC^2 = 27$. Phương trình mặt phẳng (α) là

(A) $x + y + z + 3 = 0$. (B) $x + y + z - 3 = 0$.
(C) $x + 2y + 3z - 3 = 0$. (D) $x + 2y + 3z + 3 = 0$.

CÂU 26. Trong KG $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x + y + z - 1 = 0$, đường thẳng $d: \frac{x-15}{1} = \frac{y-22}{2} = \frac{z-37}{2}$ và mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 6y + 4z + 4 = 0$. Một đường thẳng (Δ) thay đổi cắt mặt cầu (S) tại hai điểm A, B sao cho $AB = 8$. Gọi A', B' là hai điểm lần lượt thuộc mặt phẳng (P) sao cho AA', BB' cùng song song với d . Giá trị lớn nhất của biểu thức $AA' + BB'$ là

(A) $\frac{8 + 30\sqrt{3}}{9}$. (B) $\frac{24 + 18\sqrt{3}}{5}$. (C) $\frac{12 + 9\sqrt{3}}{5}$. (D) $\frac{16 + 60\sqrt{3}}{9}$.

CÂU 27. Trong KG $Oxyz$ cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Điểm $M \in (S)$ có tọa độ dương; mặt phẳng (P) tiếp xúc với (S) tại M cắt các tia $Ox; Oy; Oz$ tại các điểm A, B, C . Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = (1 + OA^2)(1 + OB^2)(1 + OC^2)$ là

(A) 24. (B) 27. (C) 64. (D) 8.

CÂU 28. Cho a, b, c, d, e, f là các số thực thỏa mãn $\begin{cases} (d-1)^2 + (e-2)^2 + (f-3)^2 = 1 \\ (a+3)^2 + (b-2)^2 + c^2 = 9. \end{cases}$ Gọi giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $F = \sqrt{(a-d)^2 + (b-e)^2 + (c-f)^2}$ lần lượt là M, m . Khi đó, $M - m$ bằng

(A) 10. (B) $\sqrt{10}$. (C) 8. (D) $2\sqrt{2}$.

QUICK NOTE

CÂU 29. Trong KG $Oxyz$, Cho điểm $A(2t; 2t; 0)$, $B(0; 0; t)$ (với $t > 0$). Điểm P di động thỏa mãn $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP} = 3$. Biết rằng có giá trị $t = \frac{a}{b}$ với a, b nguyên dương và $\frac{a}{b}$ tối giản sao cho OP đạt giá trị lớn nhất bằng 3. Khi đó giá trị của $Q = 2a + b$ bằng

(A) 5. (B) 13. (C) 11. (D) 9.

11

GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT LIÊN QUAN ĐẾN GÓC VÀ KHOẢNG CÁCH

Phần I. Mỗi câu hỏi học sinh chọn một trong bốn phương án A, B, C, D.

CÂU 1. Cho x, y, z là ba số thực thỏa $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y - 2z - 11 = 0$. Tìm giá trị lớn nhất của $P = 2x + 2y - z$.

- (A) $\max P = 20$. (B) $\max P = -18$. (C) $\max P = 18$. (D) $\max P = 12$.

CÂU 2. Trong KG $Oxyz$, cho $d: \begin{cases} x = 2 \\ y = t \\ z = 1 - t \end{cases}$ và mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 2z + 5 = 0$.

Tọa độ điểm M trên (S) sao cho $d(M, d)$ đạt giá trị lớn nhất là

- (A) $(1; 2; -1)$. (B) $(2; 2; -1)$. (C) $(0; 2; -1)$. (D) $(-3; -2; 1)$.

CÂU 3. Trong KG $Oxyz$, cho điểm $A(-3; 3; -3)$ thuộc mặt phẳng $(\alpha): 2x - 2y + z + 15 = 0$ và mặt cầu $(S): (x - 2)^2 + (y - 3)^2 + (z - 5)^2 = 100$. Đường thẳng Δ qua A , nằm trên mặt phẳng (α) cắt (S) tại A, B . Để độ dài AB lớn nhất thì PTĐT Δ là

- (A) $\frac{x+3}{1} = \frac{y-3}{4} = \frac{z+3}{6}$. (B) $\frac{x+3}{16} = \frac{y-3}{11} = \frac{z+3}{-10}$.
(C) $\begin{cases} x = -3 + 5t \\ y = 3 \\ z = -3 + 8t \end{cases}$. (D) $\frac{x+3}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+3}{3}$.

CÂU 4. Trong KG $Oxyz$, cho điểm $A(-3; 3; -3)$ thuộc mặt phẳng $(\alpha): 2x - 2y + z + 15 = 0$ và mặt cầu $(S): (x - 2)^2 + (y - 3)^2 + (z - 5)^2 = 100$. Đường thẳng Δ qua A , nằm trên mặt phẳng (α) cắt (S) tại A, B . Để độ dài AB nhỏ nhất thì PTĐT Δ là

- (A) $\frac{x+3}{16} = \frac{y-3}{11} = \frac{z+3}{-10}$. (B) $\frac{x+3}{1} = \frac{y-3}{4} = \frac{z+3}{6}$.
(C) $\begin{cases} x = -3 + 5t \\ y = 3 \\ z = -3 + 8t \end{cases}$. (D) $\frac{x+3}{16} = \frac{y-3}{-11} = \frac{z+3}{10}$.

CÂU 5. Trong KG $Oxyz$, cho hai điểm $A(3; 0; 2)$, $B(3; 0; 2)$ và mặt cầu $x^2 + (y + 2)^2 + (z - 1)^2 = 25$. Phương trình mặt phẳng (α) đi qua hai điểm A, B và cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn bán kính nhỏ nhất là

- (A) $x - 4y - 5z + 17 = 0$. (B) $3x - 2y + z - 7 = 0$.
(C) $x - 4y + 5z - 13 = 0$. (D) $3x + 2y + z - 11 = 0$.

CÂU 6. Trong KG $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x - 2y + 2z - 3 = 0$ và mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 2z + 5 = 0$. Giả sử $M \in (P)$ và $N \in (S)$ sao cho \overrightarrow{MN} cùng phương với vectơ $\vec{u} = (1; 0; 1)$ và khoảng cách giữa M và N lớn nhất. Tính MN .

- (A) $MN = 3$. (B) $MN = 1 + 2\sqrt{2}$. (C) $MN = 3\sqrt{2}$. (D) $MN = 14$.

CÂU 7. Cho $A(0; 8; 2)$ và mặt cầu $(S): (x - 5)^2 + (y + 3)^2 + (z - 7)^2 = 72$ và điểm $A(9; -7; 23)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua A và tiếp xúc với mặt cầu (S) sao cho khoảng cách từ B đến mặt phẳng (P) là lớn nhất. Giả sử $\vec{n} = (1; m; n)$ là một vectơ pháp tuyến của (P) . Lúc đó

- (A) $m \cdot n = 4$. (B) $m \cdot n = 2$. (C) $m \cdot n = -4$. (D) $m \cdot n = -2$.

12

GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT LIÊN QUAN ĐẾN BÁN KÍNH MẶT CẦU, ĐƯỜNG TRÒN

Phần I. Mỗi câu hỏi học sinh chọn một trong bốn phương án A, B, C, D.

QUICK NOTE

CÂU 1. Trong KG $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-3)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 4$ và đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + t, (t \in \mathbb{R}) \\ z = -t \end{cases}$. Mặt phẳng chứa d và cắt (S) theo một đường tròn có bán kính

nhỏ nhất có phương trình là

- (A) $y + z + 1 = 0$. (B) $x + 3y + 5z + 2 = 0$.
(C) $x - 2y - 3 = 0$. (D) $3x - 2y - 4z - 8 = 0$.

CÂU 2. Trong KG $Oxyz$, cho hai điểm $A(3; -2; 6)$, $B(0; 1; 0)$ và mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 25$. Mặt phẳng $(P): ax + by + cz - 2 = 0$ đi qua A, B và cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính nhỏ nhất. Tính $T = a + b + c$.

- (A) $T = 3$. (B) $T = 4$. (C) $T = 5$. (D) $T = 2$.

CÂU 3. Trong KG $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 2; 4)$, $B(0; 0; 1)$ và mặt cầu $(S): (x+1)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 4$. Mặt phẳng $(P): ax + by + cz - 4 = 0$ đi qua A, B và cắt (S) theo giao tuyến là một đường tròn có bán kính nhỏ nhất. Tính $T = a + b + c$?

- (A) $T = \frac{1}{5}$. (B) $T = \frac{3}{4}$. (C) $T = 1$. (D) $T = -2$.

CÂU 4. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 9$, điểm $A(0; 0; 2)$. Mặt phẳng (P) qua A và cắt mặt cầu (S) theo thiết diện là hình tròn (C) có diện tích nhỏ nhất, phương trình (P) là

- (A) $(P): x - 2y + 3z - 6 = 0$. (B) $(P): x + 2y + 3z - 6 = 0$.
(C) $(P): 3x + 2y + 2z - 4 = 0$. (D) $(P): x + 2y + z - 2 = 0$.

CÂU 5. Trong KG $Oxyz$ cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 27$. Gọi (α) là mặt phẳng đi qua 2 điểm $A(0; 0; -4)$, $B(2; 0; 0)$ và cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn (C) sao cho khối nón có đỉnh là tâm của (S) , là hình tròn (C) có thể tích lớn nhất. Biết mặt phẳng (α) có phương trình dạng $ax + by - z + c = 0$, khi đó $a - b + c$ bằng

- (A) 8. (B) 0. (C) 2. (D) -4.

CÂU 6. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình là $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 6z + 7 = 0$. Cho ba điểm A, M, B nằm trên mặt cầu (S) sao cho $AMB = 90^\circ$. Diện tích tam giác AMB có giá trị lớn nhất bằng?

- (A) 4. (B) 2. (C) 4π . (D) Không tồn tại.

CÂU 7. Trong KG $Oxyz$, cho điểm $M\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; 0\right)$ và mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 = 8$. Đường thẳng d thay đổi, đi qua điểm M , cắt mặt cầu (S) tại hai điểm phân biệt A, B . Tính diện tích lớn nhất S của tam giác OAB .

- (A) $S = \sqrt{7}$. (B) $S = 4$. (C) $S = 2\sqrt{7}$. (D) $S = 2\sqrt{2}$.

CÂU 8. Trong không gian với hệ trục $Oxyz$ cho hai đường thẳng $\Delta_1: \frac{x+1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+1}{2}$ và $\Delta_2: \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{1}$. Tính diện tích mặt cầu có bán kính nhỏ nhất, đồng thời tiếp xúc với cả hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 .

- (A) $R = \frac{\sqrt{17}}{2}$. (B) $R = \frac{\sqrt{17}}{3}$. (C) $R = \frac{\sqrt{17}}{6}$. (D) $R = \frac{\sqrt{17}}{17}$.

CÂU 9. Trong KG $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1: \begin{cases} x = 2t \\ y = t \\ z = 4 \end{cases}$ và $d_2: \begin{cases} x = 3 - t' \\ y = t' \\ z = 0 \end{cases}$. Viết phương trình mặt cầu có bán kính nhỏ nhất tiếp xúc với cả hai đường thẳng d_1 và d_2 .

- (A) $(S): (x+2)^2 + (y+1)^2 + (z+2)^2 = 4$. (B) $(S): (x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 16$.
(C) $(S): (x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 4$. (D) $(S): (x+2)^2 + (y+1)^2 + (z+2)^2 = 16$.

CÂU 10. Trong KG $Oxyz$ cho hai đường thẳng chéo nhau $d_1: \begin{cases} x = 4 - 2t \\ y = t \\ z = 3 \end{cases}$ và $d_2: \begin{cases} x = 1 \\ y = t' \\ z = -t' \end{cases}$ ($t, t' \in \mathbb{R}$). Phương trình mặt cầu có bán kính nhỏ nhất tiếp xúc với cả hai đường thẳng $(d_1), (d_2)$ là

- (A) $\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + y^2 + (z+2)^2 = \frac{9}{4}$. (B) $\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + y^2 + (z+2)^2 = \frac{3}{2}$.
(C) $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + y^2 + (z-2)^2 = \frac{9}{4}$. (D) $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + y^2 + (z-2)^2 = \frac{3}{2}$.

QUICK NOTE

CÂU 11. Trong KG $Oxyz$, cho hai đường thẳng $\Delta_1: \frac{x-4}{3} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+5}{-2}$ và $\Delta_2: \frac{x-2}{1} = \frac{y+3}{3} = \frac{z}{1}$. Trong tất cả mặt cầu tiếp xúc với cả hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 . Gọi (S) là mặt cầu có bán kính nhỏ nhất. Bán kính của mặt cầu (S) là

(A) $\sqrt{12}$. (B) $\sqrt{6}$. (C) $\sqrt{24}$. (D) $\sqrt{3}$.

CÂU 12. Trong KG $Oxyz$ cho mặt cầu $(x-3)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 4$ và đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + t, t \in \mathbb{R} \\ z = -t \end{cases}$. Mặt phẳng chứa d và cắt (S) theo một đường tròn có bán kính nhỏ nhất có phương trình là

(A) $y + z + 1 = 0$. (B) $x + 3y + 5z + 2 = 0$.
(C) $x - 2y - 3 = 0$. (D) $3x - 2y - 4z - 8 = 0$.

CÂU 13. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x - y + 2z + 2 = 0$ và mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y+2)^2 + z^2 = 4$ có tâm I . Gọi tọa độ điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ thuộc (P) sao cho đoạn IM ngắn nhất. Tổng $T = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2$ bằng

(A) $\frac{7}{3}$. (B) $\frac{11}{3}$. (C) 14. (D) $\frac{16}{3}$.

CÂU 14. Trong KG $Oxyz$, cho mặt cầu (S) tâm $I(1; -2; 1)$; bán kính $R = 4$ và đường thẳng $d: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+1}{-1}$. Mặt phẳng (P) chứa d và cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn có diện tích nhỏ nhất. Hỏi trong các điểm sau điểm nào có khoảng cách đến mặt phẳng (P) lớn nhất?

(A) $O(0; 0; 0)$. (B) $A\left(1; \frac{3}{5}; -\frac{1}{4}\right)$. (C) $B(-1; -2; -3)$. (D) $C(2; 1; 0)$.

MỤC LỤC

Bài 3. Phương trình mặt cầu	1
Dạng 1. XÁC ĐỊNH CÁC YẾU TỐ CƠ BẢN MẶT CẦU	1
Dạng 2. LẬP PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU DẠNG CƠ BẢN	5
Dạng 3. ỨNG DỤNG MẶT CẦU TRONG KHÔNG GIAN	9
Dạng 4. Vị trí tương đối giữa mặt phẳng với mặt cầu	10
Dạng 5. LẬP PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU LIÊN QUAN ĐẾN MẶT PHẪNG	12
Dạng 6. LẬP PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẪNG LIÊN QUAN ĐẾN MẶT PHẪNG, MẶT CẦU	14
Dạng 7. Vị trí tương đối của đường thẳng với mặt cầu	17
Dạng 8. Lập phương trình mặt cầu liên quan đến đường thẳng	18
Dạng 9. Lập PTĐT liên quan đến mặt cầu	20
Dạng 10. GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT LIÊN QUAN ĐẾN MẶT CẦU	23
Dạng 11. GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT LIÊN QUAN ĐẾN GÓC VÀ KHOẢNG CÁCH	26
Dạng 12. GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT LIÊN QUAN ĐẾN BÁN KÍNH MẶT CẦU, ĐƯỜNG TRÒN	26

