

QUICK NOTE

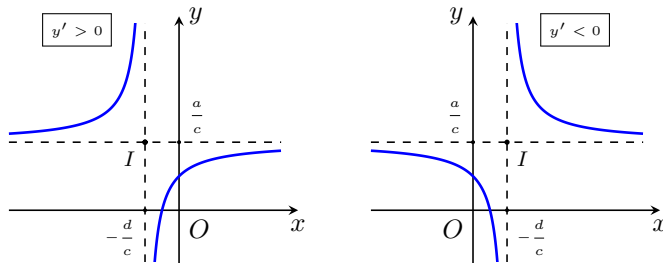
QUICK NOTE

3. Hàm số $y = \frac{ax + b}{cx + d}$ ($c \neq 0, ad - bc \neq 0$)

✔ Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{d}{c} \right\}$; Đạo hàm $y' = \frac{ad - bc}{(cx + d)^2}$.

✔ Đồ thị nhận giao điểm của hai đường tiệm cận làm tâm đối xứng.

✔ Hình dạng đồ thị:



GHI NHỚ

① Tiệm cận đứng $x = -\frac{d}{c}$.

② Tiệm cận ngang $y = \frac{a}{c}$.

③ Giao với $Ox: y = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{a}$.

④ Giao với $Oy: x = 0 \Rightarrow y = \frac{b}{d}$.

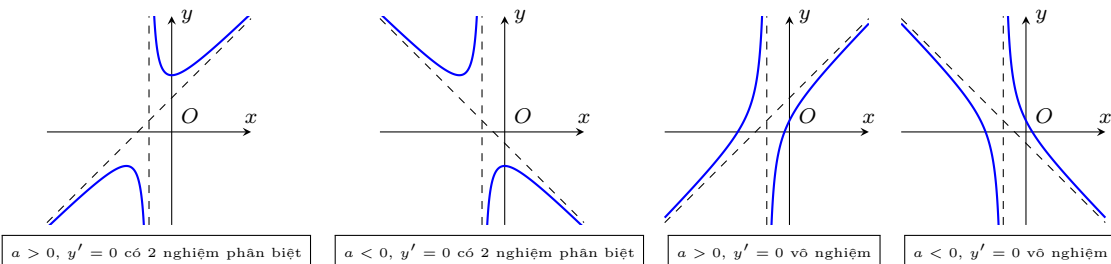
4. Hàm số $y = \frac{ax^2 + bx + c}{dx + e}$ ($a \neq 0, e \neq 0$) (đa thức tử không chia hết cho đa thức mẫu)

✔ Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{e}{d} \right\}$; Đạo hàm $y' = \frac{adx^2 + 2aex + be - cd}{(dx + e)^2}$.

✔ Hàm số 2 điểm cực trị khi $y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt; Hàm số không có cực trị khi $y' = 0$ vô nghiệm.

✔ Đồ thị nhận giao điểm của tiệm cận đứng và tiệm cận xiên làm tâm đối xứng.

✔ Hình dạng đồ thị:



B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Dạng 1. Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số bậc ba

Ta khảo sát theo sơ đồ đã nhắc đến ở phần lý thuyết.

BÀI TẬP TỰ LUẬN

VÍ DỤ 1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị các hàm số sau:

a) $y = x^3 - 3x^2 + 1$;

b) $y = -2x^3 - 3x^2 + 1$;

c) $y = x^3 + 3x^2 + 3x + 2$;

d) $y = x^3 - 3x^2 + 4x - 2$.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.

CÂU 1.

Bảng biến thiên ở hình bên là của một trong bốn hàm số sau đây. Hỏi đó là hàm số nào?

- ☐ A $y = -x^3 - 2x^2 + 5$.
☐ B $y = x^3 - 3x^2 + 5$.
☐ C $y = -x^3 - 3x + 5$.
☐ D $y = x^3 + 3x^2 + 5$.

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$	$-\infty$	5	1	$+\infty$

CÂU 2.

Bảng biến thiên ở hình bên là của một trong bốn hàm số sau đây. Hỏi đó là hàm số nào?

- ☐ A $y = -x^3 + 3x^2$.
☐ B $y = x^3 - 3x^2 - 1$.
☐ C $y = x^4 + 2x^2 + 1$.
☐ D $y = -x^3 + 3x^2 + 1$.

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
y'		-	0	+
y	$+\infty$	1	5	$-\infty$

CÂU 3.

Bảng biến thiên ở hình bên là của một trong bốn hàm số sau đây. Hỏi đó là hàm số nào?

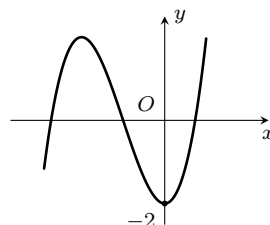
- ☐ A $y = x^3 - 3x^2 + x + 3$.
☐ B $y = x^3 - 3x + 4$.
☐ C $y = x^3 - 3x^2 + 3x + 1$.
☐ D $y = x^3 + 3x^2 + 5$.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y'	+	0	+
y	$-\infty$	<div><div></div><div>2</div><div></div></div>	$+\infty$

CÂU 4.

Đường cong bên là đồ thị của một trong bốn hàm số đã cho sau đây. Hỏi đó là hàm số nào?

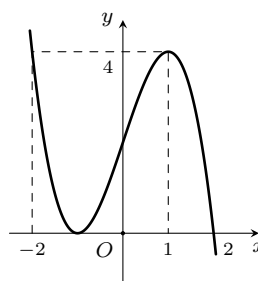
- ☐ A $y = -x^3 + x^2 - 2$.
☐ B $y = x^3 + 3x^2 - 2$.
☐ C $y = x^3 - 3x + 2$.
☐ D $y = x^2 - 3x - 2$.



CÂU 5.

Đường cong bên là đồ thị của một trong bốn hàm số đã cho sau đây. Hỏi đó là hàm số nào?

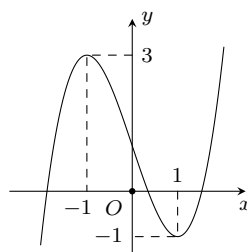
- ☐ A $y = x^3 + 3x - 2$.
☐ B $y = x^3 - 3x + 2$.
☐ C $y = -x^3 + 3x + 2$.
☐ D $y = -x^3 - 3x - 2$.



CÂU 6.

Đường cong bên là đồ thị của một trong bốn hàm số đã cho sau đây. Hỏi đó là hàm số nào?

- ☐ A $y = -x^3 + 3x^2 + 1$.
☐ B $y = -x^2 - 3x - 1$.
☐ C $y = x^4 + 2x^2 - 1$.
☐ D $y = x^3 - 3x + 1$.



QUICK NOTE

QUICK NOTE

CÂU 7.

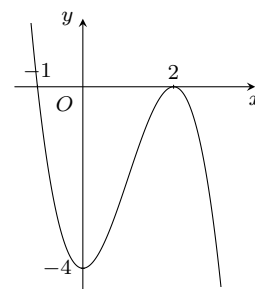
Đường cong bên là đồ thị của một trong bốn hàm số đã cho sau đây. Hỏi đó là hàm số nào?

A $y = x^3 - 3x^2 - 4.$

B $y = -x^3 - 4.$

C $y = -x^3 + 3x^2 - 4.$

D $y = -x^3 + 3x^2 - 4.$



CÂU 8.

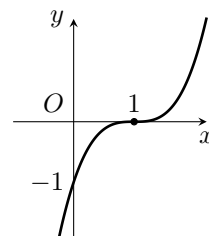
Đường cong bên là đồ thị của một trong bốn hàm số đã cho sau đây. Hỏi đó là hàm số nào?

A $y = x^3 - 1.$

B $y = (x + 1)^3.$

C $y = (x - 1)^3.$

D $y = x^3 + 1.$



CÂU 9.

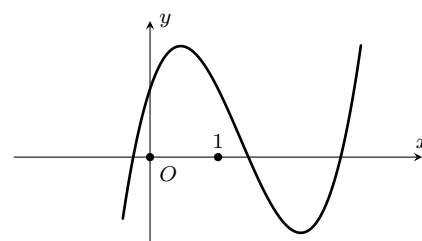
Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A $a > 0, b > 0, c > 0, d > 0.$

B $a < 0, b < 0, c > 0, d > 0.$

C $a > 0, b < 0, c < 0, d > 0.$

D $a > 0, b < 0, c > 0, d > 0.$



CÂU 10.

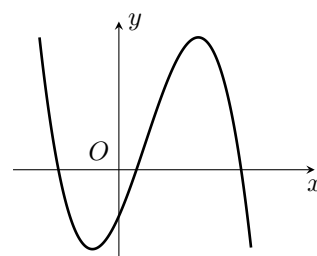
Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A $a < 0, b < 0, c < 0, d > 0.$

B $a < 0, b > 0, c < 0, d > 0.$

C $a < 0, b > 0, c > 0, d < 0.$

D $a < 0, b < 0, c > 0, d < 0.$



CÂU 11.

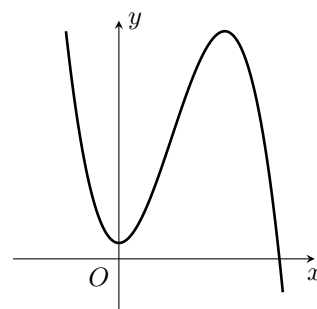
Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A $a < 0, b > 0, c > 0, d > 0.$

B $a < 0, b < 0, c = 0, d > 0.$

C $a < 0, b > 0, c = 0, d > 0.$

D $a > 0, b < 0, c > 0, d > 0.$



CÂU 12.

Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có bảng biến thiên như hình bên. Trong các hệ số a, b, c và d có bao nhiêu số âm?

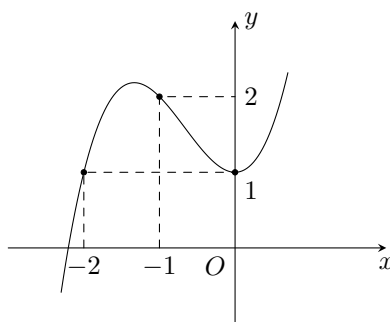
A 2. **B** 1. **C** 4. **D** 3.

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$		
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$						

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.

CÂU 13.

Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ.

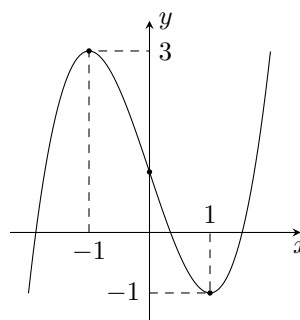


Mệnh đề	Đ	S
a) Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 1$.		
b) Đồ thị hàm số cắt trục Oy tại điểm $(0; 1)$.		
c) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -1)$.		
d) $2a + 3b + c = 9$.		

CÂU 14.

Cho hàm số bậc ba $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ.

Tính tổng $T =$.



Mệnh đề	Đ	S
a) Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm $(0; 1)$.		
b) Đường thẳng đi qua điểm $(0; 1)$ luôn cắt đồ thị tại ba điểm phân biệt có hoành độ lập thành 1 cấp số cộng.		
c) $a - b + c + d = -1$.		
d) Đồ thị hàm số đi qua điểm $(3; 18)$.		

CÂU 15.

Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có bảng biến thiên như hình bên.

Mệnh đề	Đ	S
a) Hàm số đạt giá trị lớn nhất là 4.		
b) Đường thẳng $y = 2$ cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại 3 điểm phân biệt.		
c) Trong bốn hệ số a, b, c, d có đúng hai số âm.		
d) Đồ thị hàm số đi qua điểm $(-4; 20)$.		

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$		
y'	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$		0	4		$-\infty$

Dạng 2. Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số phân thức hữu tỉ bậc I/I

Ta khảo sát theo sơ đồ

❖ **Bước 1.** Tìm tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{d}{c} \right\}$.

❖ **Bước 2.** Khảo sát sự biến thiên của hàm số

— Tính đạo hàm $y' = \frac{ad - cb}{(cx + d)^2}$.

— Tìm các giới hạn tại vô cực, giới hạn vô cực và tìm tiệm cận của đồ thị hàm số.

QUICK NOTE

QUICK NOTE

— Lập bảng biến thiên; xác định chiều biến thiên và cực trị của hàm số.

❖ **Bước 3.** Cho thêm điểm và vẽ đồ thị của hàm số dựa vào bảng biến thiên.

BÀI TẬP TỰ LUẬN

VÍ DỤ 1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị các hàm số sau:

a) $y = \frac{x-1}{x+1};$

b) $y = \frac{2x+1}{x-1};$

c) $y = \frac{5+x}{2-x}.$

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.

CÂU 1.

Hàm số nào trong bốn hàm số dưới đây có bảng biến thiên như hình bên?

Ⓐ $y = \frac{2x-1}{x+3}.$ Ⓑ $y = \frac{4x-6}{x-2}.$
 Ⓒ $y = \frac{3-x}{2-x}.$ Ⓓ $y = \frac{x+5}{x-2}.$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
y'	-		-
y	1		$+\infty$
			$-\infty$

CÂU 2.

Hàm số nào trong bốn hàm số dưới đây có bảng biến thiên như hình bên?

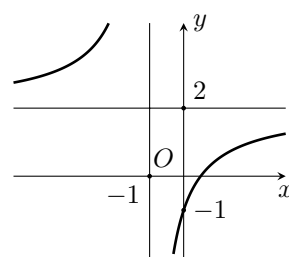
Ⓐ $y = \frac{x-1}{x-3}.$ Ⓑ $y = \frac{x-1}{-x-3}.$
 Ⓒ $y = \frac{x+5}{-x+3}.$ Ⓓ $y = \frac{1}{x-3}.$

x	$-\infty$	3	$+\infty$
y'	+		+
y	-1		$+\infty$
			$-\infty$

CÂU 3.

Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của một trong bốn hàm số sau. Hỏi đó là hàm số nào?

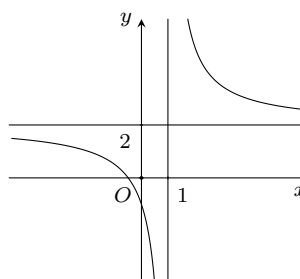
Ⓐ $y = \frac{2x-1}{x+1}.$ Ⓑ $y = \frac{1-2x}{x+1}.$
 Ⓒ $y = \frac{2x+1}{x-1}.$ Ⓓ $y = \frac{2x+1}{x+1}.$



CÂU 4.

Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của một trong bốn hàm số sau. Hỏi đó là hàm số nào?

Ⓐ $y = \frac{x-1}{x-2}.$ Ⓑ $y = x+2.$
 Ⓒ $y = x^4 - 3x^2 + 1.$ Ⓓ $y = \frac{2x+1}{x-1}.$



CÂU 5.

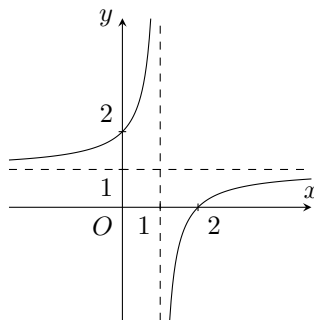
Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của một trong bốn hàm số sau. Hỏi đó là đồ thị của hàm số nào?

(A) $y = \frac{x-2}{x+1}$.

(B) $y = \frac{x+2}{x-2}$.

(C) $y = \frac{x-2}{x-1}$.

(D) $y = \frac{x+2}{x-1}$.



CÂU 6.

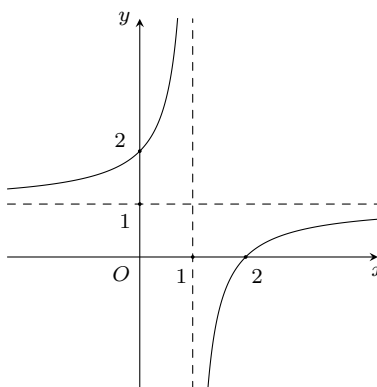
Cho hàm số $y = \frac{ax-b}{x+c}$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$) có đồ thị như hình vẽ bên. Giá trị của biểu thức $2a+b-3c$ bằng

(A) -3.

(B) 4.

(C) 7.

(D) -5.



CÂU 7.

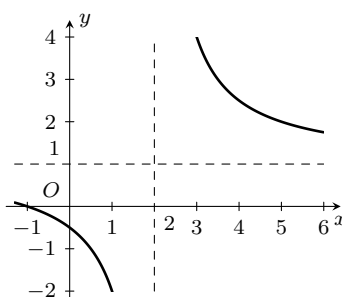
Cho hàm số $y = \frac{ax+1}{bx-2}$ có đồ thị như hình vẽ. Tính $T = a+b$

(A) $T = 2$.

(B) $T = 0$.

(C) $T = -1$.

(D) $T = 3$.



CÂU 8.

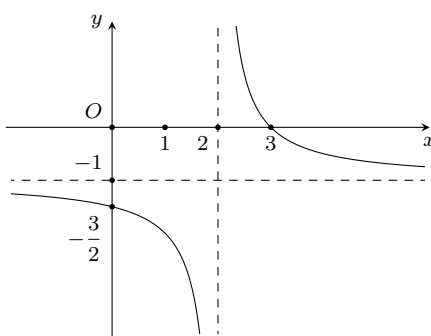
Cho hàm số $y = \frac{ax-b}{cx+2}$ ($a, b, c \in \mathbb{R}; c \neq 0$) có đồ thị như hình vẽ bên. Giá trị của biểu thức $a+b+c$ bằng

(A) -3.

(B) 5.

(C) -4.

(D) 3.



CÂU 9.

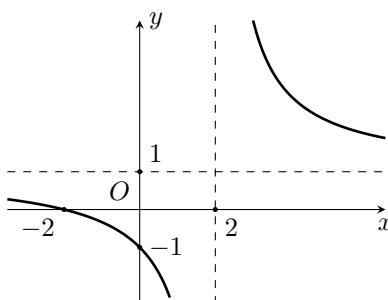
Hãy xác định a, b để hàm số $y = \frac{2-ax}{x+b}$ có đồ thị như hình vẽ?

(A) $a = 1; b = -2$.

(B) $a = b = 2$.

(C) $a = -1; b = -2$.

(D) $a = b = -2$.

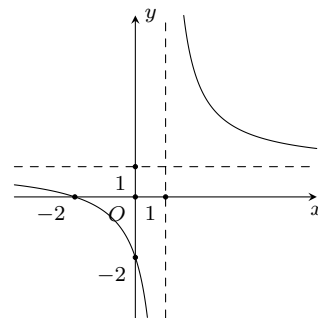


CÂU 10.

QUICK NOTE

Cho đồ thị hàm số $y = \frac{ax - b}{x - 1}$ như hình vẽ. Tìm khẳng định đúng?

- ☐ A $a < 0, b < 0$.
 ☐ B $0 < b < a$.
 ☐ C $b < 0 < a$.
 ☐ D $a < b < 0$.



CÂU 11.

Cho hàm số $y = \frac{ax + 4}{bx + c}$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$) có bảng biến thiên như sau. Trong các số a, b, c có bao nhiêu số dương?

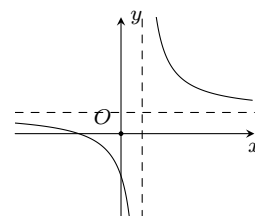
- ☐ A 0.
 ☐ B 1.
 ☐ C 2.
 ☐ D 3.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	+		+
$f(x)$	3	$+\infty$	3

CÂU 12.

Cho hàm số $y = \frac{ax + b}{cx + d}$ với $a > 0$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây đúng?

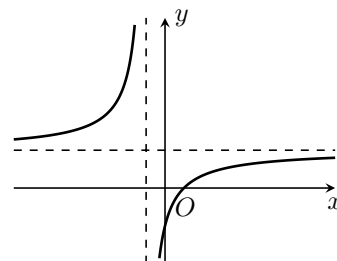
- ☐ A $b < 0, c < 0, d < 0$.
 ☐ B $b > 0, c < 0, d < 0$.
 ☐ C $b < 0, c > 0, d < 0$.
 ☐ D $b > 0, c > 0, d < 0$.



CÂU 13.

Hình vẽ bên là đồ thị của hàm số $y = \frac{ax + b}{cx + d}$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

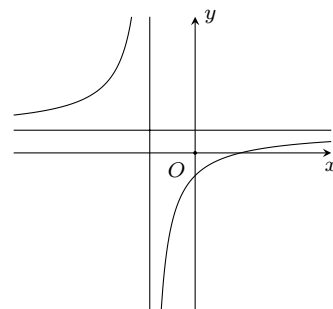
- ☐ A $ab > 0, bd < 0$.
 ☐ B $ab < 0, ad > 0$.
 ☐ C $ab < 0, ad < 0$.
 ☐ D $bd > 0, ad > 0$.



CÂU 14.

Hình vẽ dưới đây là đồ thị hàm số $y = \frac{ax + b}{cx + d}$ $ac \neq 0$, $ad - cb \neq 0$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- ☐ A $ad > 0$ và $ab < 0$.
 ☐ B $bd < 0$ và $ab > 0$.
 ☐ C $ad < 0$ và $ab < 0$.
 ☐ D $ad > 0$ và $bd > 0$.

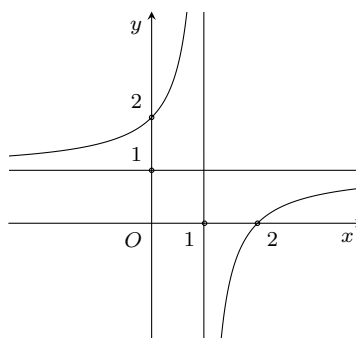


PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.

CÂU 15.

Cho hàm số $y = \frac{x+a}{bx+c}$, ($a, b, c \in \mathbb{Z}$).

Mệnh đề	Đ	S
a) Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = 1$.		
b) Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y = 0$.		
c) Hàm số đồng biến trên \mathbb{R} .		
d) $a - 3b - 2c = -3$.		



CÂU 16. Cho hàm số $f(x) = \frac{ax-1}{bx+c}$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$) có bảng biến thiên như sau.

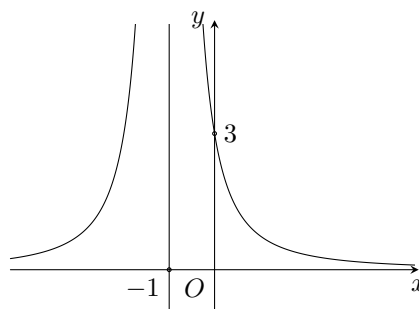
x	$-\infty$	3	$+\infty$
$f'(x)$		-	-
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$	$\frac{1}{2}$

Mệnh đề	Đ	S
a) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty, \frac{1}{2})$.		
b) Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = \frac{1}{2}$.		
c) Đồ thị giao với trục hoành tại điểm có hoành độ nhỏ hơn 3.		
d) $\begin{cases} b > \frac{2}{3} \\ b < 0 \end{cases}$		

CÂU 17.

Cho hàm số $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ với $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ nhận $x = -1$ làm tiệm cận đứng như hình vẽ bên. Biết rằng giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-3; -2]$ bằng 8.

Mệnh đề	Đ	S
a) $f'(0) = 3$.		
b) Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-1; +\infty)$.		
c) Giá trị của $f(-3)$ bằng 8.		
d) Giá trị của $f(2)$ bằng 4.		



Dạng 3. Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số phân thức hữu tỉ bậc II/I

❖ **Bước 1.** Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{n}{m} \right\}$.

❖ **Bước 2.** Khảo sát sự biến thiên của hàm số

— Tính đạo hàm $y' = \frac{am \cdot x^2 + 2an \cdot x + b \cdot n - m \cdot c}{(mx + n)^2}$. Giải $y' = 0 \Leftrightarrow am \cdot x^2 + 2an \cdot x + b \cdot n - m \cdot c = 0$, tìm nghiệm.

QUICK NOTE

QUICK NOTE

- Tìm các giới hạn tại vô cực, giới hạn vô cực và tìm tiệm cận của đồ thị hàm số.
- Lập bảng biến thiên; xác định chiều biến thiên và cực trị của hàm số.

❖ **Bước 3.** Cho thêm điểm và vẽ đồ thị của hàm số dựa vào bảng biến thiên.

BÀI TẬP TỰ LUẬN

VÍ DỤ 1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị các hàm số sau:

a) $y = \frac{x^2 + 2x - 2}{x - 1};$

b) $y = -x + 2 - \frac{1}{x + 1};$

c) $y = \frac{-x^2 - 3x + 4}{x + 2}.$

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.

CÂU 1.

Bảng biến thiên sau là của một trong bốn hàm số sau. Hỏi đó là hàm số nào?

A $y = \frac{x^2 - 3x + 4}{-x - 4}.$

B $y = \frac{x^2 - 4x + 4}{-x - 4}.$

C $y = \frac{x^2 - 5x + 4}{x + 4}.$

D $y = \frac{x^2 - 4x + 4}{x + 4}.$

x	$-\infty$	-10	-4	2	$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$		24		$-\infty$

CÂU 2.

Bảng biến thiên sau là của một trong bốn hàm số sau. Hỏi đó là hàm số nào?

A $y = \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 3}.$

B $y = \frac{-x^2 - x + 2}{x - 3}.$

C $y = \frac{-x^2 + x + 2}{x - 3}.$

D $y = \frac{x^2 - 4x + 4}{-x + 3}.$

x	$-\infty$	1	3	5	$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$		-1		$-\infty$

CÂU 3.

Bảng biến thiên sau là của một trong bốn hàm số sau. Hỏi đó là hàm số nào?

A $y = \frac{x^2 - 2x + 1}{x + 4}.$

B $y = \frac{x^2 - 4x + 2}{x + 4}.$

C $y = \frac{x^2 - x + 2}{-x - 4}.$

D $y = \frac{x^2 - 3x + 4}{-x - 4}.$

x	$-\infty$	-9	-4	1	$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	
y	$+\infty$		-20		$+\infty$

CÂU 4.

Bảng biến thiên sau là của một trong bốn hàm số sau. Hỏi đó là hàm số nào?

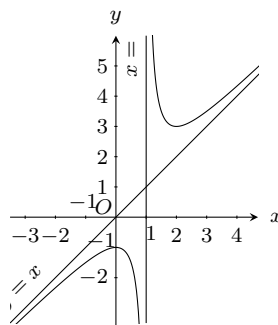
- A** $y = \frac{x^2 - 3}{x - 2}$.
B $y = \frac{x^2 - 4x + 2}{x - 2}$.
C $y = \frac{x^2 - x}{x - 2}$.
D $y = \frac{x^2 - 4x + 5}{x - 2}$.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
y'	+		+
y	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$

CÂU 5.

Đồ thị hình bên là của một trong bốn hàm số sau. Hỏi đó là hàm số nào?

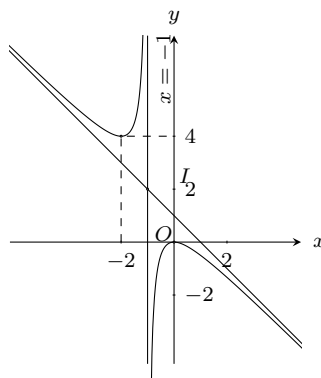
- A** $y = \frac{x^2 + x - 1}{x - 1}$.
B $y = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$.
C $y = \frac{x^2 - 4x - 1}{-x + 1}$.
D $y = \frac{x^2 - 3x - 1}{-x + 1}$.



CÂU 6.

Đồ thị hình bên là của một trong bốn hàm số sau. Hỏi đó là hàm số nào?

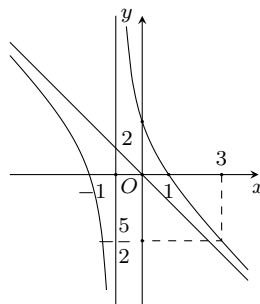
- A** $y = \frac{x^2 - x}{x + 1}$.
B $y = \frac{x^2 - 3x}{x + 1}$.
C $y = \frac{x^2 + 1x + 2}{x + 1}$.
D $y = \frac{-x^2}{x + 1}$.



CÂU 7.

Đồ thị hình bên là của một trong bốn hàm số sau. Hỏi đó là hàm số nào?

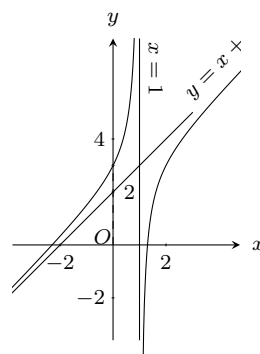
- A** $y = \frac{x^2 - x + 4}{x + 1}$.
B $y = \frac{x^2 - 2x + 3}{x + 1}$.
C $y = \frac{-x^2 - x + 2}{x + 1}$.
D $y = \frac{x^2 + x - 1}{x + 1}$.



CÂU 8.

Đồ thị hình bên là của một trong bốn hàm số sau. Hỏi đó là hàm số nào?

- A** $y = \frac{x^2 + 3}{x - 1}$.
B $y = \frac{x^2 + x - 3}{x - 1}$.
C $y = \frac{x^2 - 2x + 3}{-x + 1}$.
D $y = \frac{x^2 + 3}{-x + 1}$.



PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.

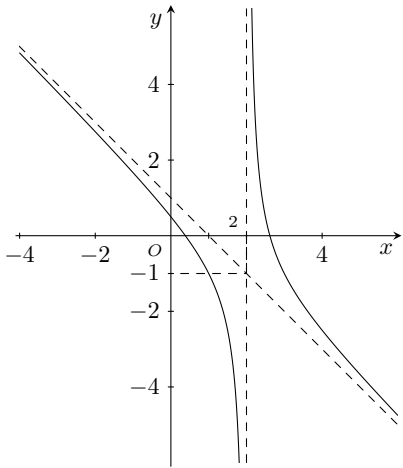
QUICK NOTE

QUICK NOTE

CÂU 9.

Cho hàm số $y = \frac{ax^2 + bx + c}{mx + n}$ có đồ thị như hình bên.

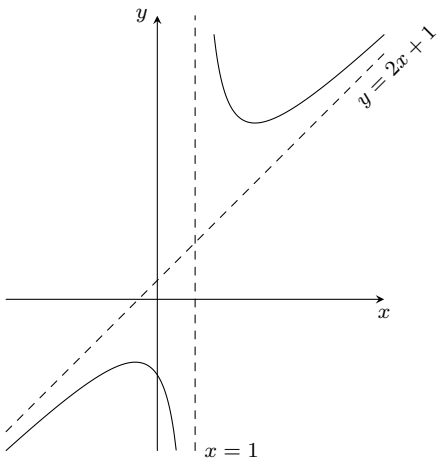
Mệnh đề	Đ	S
a) Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.		
b) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 2)$ và $(2; +\infty)$.		
c) Điểm $I(2; 1)$ là tâm đối xứng của đồ thị.		
d) Hệ số a và m trái dấu.		



CÂU 10.

Cho hàm số $y = \frac{ax^2 + bx + c}{x + n}$ có đồ thị như hình bên.

Mệnh đề	Đ	S
a) Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.		
b) Điểm $I(1; 2)$ là tâm đối xứng của đồ thị.		
c) $a + 2b = 4$.		
d) Đồ thị qua điểm $(2; 10)$ khi $c = 4$.		



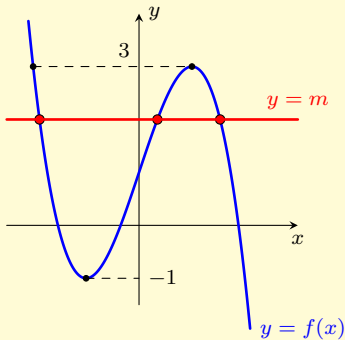
Dạng 4. Sự tương giao của hai đồ thị

✎ Xác định tọa độ giao điểm của hai đồ thị $y = f(x)$ và $y = g(x)$:

- Giải phương trình hoành độ giao điểm $f(x) = g(x)$, tìm các nghiệm $x_0 \in \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g$.
- Với x_0 vừa tìm, thay vào một trong hai hàm số ban đầu để tìm y_0 .
- Kết luận giao điểm $(x_0; y_0)$.

✎ Ứng dụng đồ thị để biện luận nghiệm phương trình:

- Xét phương trình $f(x) = m$, với m là tham số. Nghiệm của phương trình này có thể coi là hoành độ giao điểm của đồ thị $y = f(x)$ (cố định) với đường thẳng $y = m$ (nằm ngang).
- Từ đó, để biện luận nghiệm phương trình $f(x) = m$, ta có thể thực hiện các bước như sau:
 - Lập bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ trên miền xác định mà đề bài yêu cầu.
 - Tịnh tiến đường thẳng $y = m$ theo hướng "lên, xuống". Quan sát số giao điểm để quy ra số nghiệm tương ứng.



BÀI TẬP TỰ LUẬN

VÍ DỤ 1. Xác định tọa độ giao điểm của hai đồ thị hàm số sau:

a) $y = x^3 - 2x^2 + x - 1$ và $y = 1 - 2x$; b) $y = \frac{x+8}{x-2}$ và $y = x + 2$.

VÍ DỤ 2. Tìm tập hợp các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = (x-2)(x^2 + mx + m^2 - 3)$ cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt.

VÍ DỤ 3. Tìm tham số m để phương trình $x^3 - 3x + 2 - m = 0$ có ba nghiệm phân biệt.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

CÂU 1. Đường thẳng $y = x - 1$ cắt đồ thị hàm số $y = x^3 - x^2 + x - 1$ tại hai điểm. Tìm tổng tung độ các giao điểm đó.

- (A) -3. (B) 2. (C) 0. (D) -1.

CÂU 2. Số giao điểm của đồ thị hàm số $y = (x-1)(x^2 - 3x + 2)$ và trục hoành là

- (A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

CÂU 3. Đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2x - 1$ cắt đồ thị hàm số $y = x^2 - 3x + 1$ tại hai điểm phân biệt A, B . Tính độ dài AB .

- (A) $AB = 3$. (B) $AB = 2\sqrt{2}$. (C) $AB = 2$. (D) $AB = 1$.

CÂU 4. Đồ thị của hàm số $y = \frac{x-1}{x+1}$ cắt hai trục Ox và Oy tại A và B . Khi đó diện tích của tam giác OAB (với O là gốc tọa độ) bằng

- (A) 1. (B) $\frac{1}{4}$. (C) 2. (D) $\frac{1}{2}$.

CÂU 5. Biết đường thẳng $y = x - 2$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{x}{x-1}$ tại 2 điểm phân biệt A, B . Tìm hoành độ trọng tâm tam giác OAB với O là gốc tọa độ.

- (A) $\frac{2}{3}$. (B) 2. (C) $\frac{4}{3}$. (D) 4.

CÂU 6. Gọi M, N là giao điểm của đường thẳng $y = x + 1$ và đường cong $y = \frac{2x+4}{x-1}$. Tìm hoành độ trung điểm của đoạn thẳng MN .

- (A) $x = -1$. (B) $x = 1$. (C) $x = -2$. (D) $x = 2$.

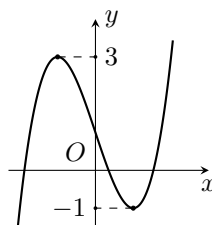
CÂU 7. Cho hàm số $y = \frac{2x}{x+1}$ có đồ thị (C) . Gọi A, B là giao điểm của đường thẳng $d: y = x$ với đồ thị (C) . Tính độ dài đoạn AB .

- (A) $AB = \sqrt{2}$. (B) $AB = \frac{\sqrt{2}}{2}$. (C) $AB = 1$. (D) $AB = 2$.

CÂU 8.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Số nghiệm của phương trình $2f(x) - 3 = 0$ là

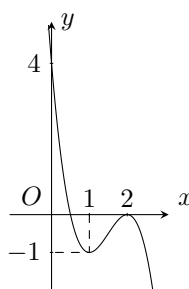
- (A) 2. (B) 1.
(C) 0. (D) 3.



CÂU 9.

Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($d \neq 0$) có đồ thị như hình vẽ bên. Số nghiệm của phương trình $3f(x) - 1 = 0$ bằng

- (A) 0. (B) 1.
(C) 2. (D) 3.



QUICK NOTE

QUICK NOTE

CÂU 10.

Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau. Số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ với trục hoành là

- (A) 1. (B) 0.
(C) 2. (D) 3.

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$			
y'	$-$	0	$+$	0	$-$		
y	$+\infty$	\searrow	-1	\nearrow	3	\searrow	$-\infty$

CÂU 11.

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $(-\infty; +\infty)$ và có bảng biến thiên như hình bên. Số nghiệm thực của phương trình $2|f(x)| = 7$ bằng

- (A) 3. (B) 2. (C) 4. (D) 2.

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$		
y'		+	0	-	0	+
y						
	$-\infty$			5		
					4	
						$+\infty$

CÂU 12.

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ và có bảng biến thiên như hình bên. Hỏi phương trình $3|f(x)| - 10 = 0$ có bao nhiêu nghiệm?

- (A) 2 nghiệm. (B) 4 nghiệm.
(C) 3 nghiệm. (D) 1 nghiệm.

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$		$- \quad 0 \quad +$	
$f(x)$	2 \searrow $-\infty$		$+\infty$ \searrow 3 \nearrow $+\infty$	

CÂU 13.

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên \mathbb{R} , có bảng biến thiên như sau. Số nghiệm của phương trình $2[f(x)]^2 - 3f(x) + 1 = 0$ là

- (A) 2. (B) 3.
(C) 6. (D) 0.

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$			
y'	$+$	0	$-$	0	$+$		
y	1	\nearrow	3	\searrow	$\frac{1}{3}$	\nearrow	1

CÂU 14.

Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như hình bên. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(x) = m + 1$ có ba nghiệm thực phân biệt.

- (A) $-3 \leq m \leq 3$.
(B) $-2 \leq m \leq 4$.
(C) $-2 < m < 4$.
(D) $-3 < m < 3$.

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$			
y'	$+$	0	$-$	0	$+$		
y	$-\infty$	\nearrow	4	\searrow	-2	\nearrow	$+\infty$

CÂU 15.

Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình bên. Phương trình $f(4x - x^2) - 2 = 0$ có bao nhiêu nghiệm thực?

- (A) 2. (B) 6.
(C) 0. (D) 4.

x	$-\infty$	0	4	$+\infty$			
y'	$-$	0	$+$	0	$-$		
y	$+\infty$	\searrow	-1	\nearrow	3	\searrow	$-\infty$

Bài 5. ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM VÀ KHẢO SÁT HÀM SỐ ĐỂ GIẢI QUYẾT MỘT SỐ BÀI TOÁN THỰC TIỄN

A. LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1. Tốc độ thay đổi của một đại lượng

Ta có đạo hàm $f'(a)$ là tốc độ thay đổi tức thời của đại lượng $y = f(x)$ đối với x tại điểm $x = a$. Dưới đây, chúng ta xem xét một số ứng dụng của ý tưởng này đối với vật lí, hoá học, sinh học và kinh tế:

- ☑ Nếu $s = s(t)$ là hàm vị trí của một vật chuyển động trên một đường thẳng thì $v = s'(t)$ biểu thị vận tốc tức thời của vật (tốc độ thay đổi của độ dịch chuyển theo thời gian). Tốc độ thay đổi tức thời của vận tốc theo thời gian là gia tốc tức thời của vật:

$$a(t) = v'(t) = s''(t).$$

- ☑ Nếu $C = C(t)$ là nồng độ của một chất tham gia phản ứng hoá học tại thời điểm t , thì $C'(t)$ là tốc độ phản ứng tức thời (tức là độ thay đổi nồng độ) của chất đó tại thời điểm t .
- ☑ Nếu $P = P(t)$ là số lượng cá thể trong một quần thể động vật hoặc thực vật tại thời điểm t , thì $P'(t)$ biểu thị tốc độ tăng trưởng tức thời của quần thể tại thời điểm t .
- ☑ Nếu $C = C(x)$ là hàm chi phí, tức là tổng chi phí khi sản xuất x đơn vị hàng hoá, thì tốc độ thay đổi tức thời $C'(x)$ của chi phí đối với số lượng đơn vị hàng được sản xuất được gọi là chi phí biên.
- ☑ Về ý nghĩa kinh tế, chi phí biên $C'(x)$ xấp xỉ với chi phí để sản xuất thêm một đơn vị hàng hoá tiếp theo, tức là đơn vị hàng hoá thứ $x + 1$ (xem SGK Toán 11 tập hai, trang 87, bộ sách Kết nối tri thức với cuộc sống).

2. Bài toán tối ưu hóa

Một trong những ứng dụng phổ biến nhất của đạo hàm là cung cấp một phương pháp tổng quát, hiệu quả để giải những bài toán tối ưu hoá. Trong mục này, chúng ta sẽ giải quyết những vấn đề thường gặp như tối đa hoá diện tích, khối lượng, lợi nhuận, cũng như tối thiểu hoá khoảng cách, thời gian, chi phí.

Khi giải những bài toán như vậy, khó khăn lớn nhất thường là việc chuyển đổi bài toán thực tế cho bằng lời thành bài toán tối ưu hoá toán học bằng cách thiết lập một hàm số phù hợp mà ta cần tìm giá trị lớn nhất hoặc giá trị nhỏ nhất của nó, trên miền biến thiên phù hợp của biến số.

Quy trình giải một số bài toán tối ưu hoá đơn giản:

- ☑ **Bước 1.** Xác định đại lượng Q mà ta cần làm cho giá trị của đại lượng ấy lớn nhất hoặc nhỏ nhất và biểu diễn nó qua các đại lượng khác trong bài toán.
- ☑ **Bước 2.** Chọn một đại lượng thích hợp nào đó, kí hiệu là x , và biểu diễn các đại lượng khác ở **Bước 1** theo x . Khi đó, đại lượng Q sẽ là hàm số của một biến x . Tìm tập xác định của hàm số $Q = Q(x)$.
- ☑ **Bước 3.** Tìm giá trị lớn nhất hoặc giá trị nhỏ nhất của hàm số $Q = Q(x)$ bằng các phương pháp đã biết và kết luận.

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Dạng 5. Bài toán về tốc độ thay đổi của một đại lượng

VÍ DỤ 1. Khi bỏ qua sức cản của không khí, độ cao (mét) của một vật được phóng thẳng đứng lên trên từ điểm cách mặt đất 2 m với vận tốc ban đầu 24,5 m/s là $h(t) = 2 + 24,5t - 4,9t^2$ (theo Vật lí đại cương, NXB Giáo dục Việt Nam, 2016).

- Tìm vận tốc của vật sau 2 giây.
- Khi nào vật đạt độ cao lớn nhất và độ cao lớn nhất đó là bao nhiêu?
- Khi nào thì vật chạm đất và vận tốc của vật lúc chạm đất là bao nhiêu?

VÍ DỤ 2. Xét phản ứng hóa học tạo ra chất C từ hai chất A và B : $A + B \rightarrow C$. Giả sử nồng độ của hai chất A và B bằng nhau $[A] = [B] = a$ (mol/l). Khi đó, nồng độ của chất C theo thời gian t ($t > 0$) được cho bởi công thức: $[C] = \frac{a^2 K t}{a K t + 1}$ (mol/l), trong đó K là hằng số dương.

QUICK NOTE

QUICK NOTE

- Tìm tốc độ phản ứng ở thời điểm $t > 0$.
- Chứng minh nếu $x = [C]$ thì $x'(t) = K(a - x)^2$.
- Nêu hiện tượng xảy ra với nồng độ các chất khi $t \rightarrow +\infty$.
- Nêu hiện tượng xảy ra với tốc độ phản ứng khi $t \rightarrow +\infty$.

VÍ DỤ 3. Giả sử số lượng của một quần thể nấm men tại môi trường nuôi cấy trong phòng thí nghiệm được mô hình hoá bằng hàm số $P(t) = \frac{a}{b + e^{-0,75t}}$, trong đó thời gian t được tính bằng giờ. Tại thời điểm ban đầu $t = 0$, quần thể có 20 tế bào và tăng với tốc độ 12 tế bào/giờ. Tìm các giá trị của a và b . Theo mô hình này, điều gì xảy ra với quần thể nấm men về lâu dài?

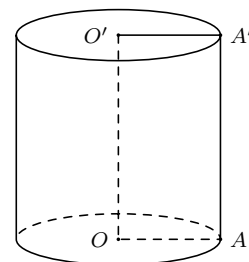
VÍ DỤ 4. Giả sử chi phí $C(x)$ (nghìn đồng) để sản xuất x đơn vị của một loại hàng hoá nào đó được cho bởi hàm số $C(x) = 30\,000 + 300x - 2,5x^2 + 0,125x^3$.

- Tìm hàm chi phí biên.
- Tìm $C'(200)$ và giải thích ý nghĩa.
- So sánh $C'(200)$ với chi phí sản xuất đơn vị hàng hoá thứ 201.

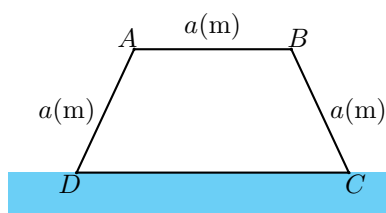
Dạng 6. Bài toán tối ưu hoá đơn giản

VÍ DỤ 1.

Một nhà sản xuất cần làm những hộp đựng hình trụ có thể tích 1 lít. Tìm các kích thước của hộp đựng để chi phí vật liệu dùng để sản xuất là nhỏ nhất (kết quả được tính theo centimet và làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai).

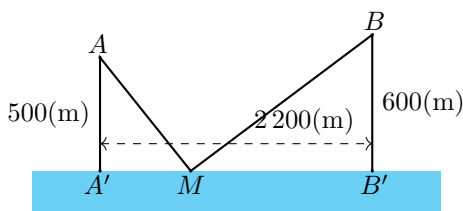


VÍ DỤ 2. Một bác nông dân có ba tấm lưới B40, mỗi tấm dài a (m) và muốn rào một mảnh vườn dọc bờ sông có dạng hình thang cân $ABCD$ như Hình 36 (bờ sông là đường thẳng CD không phải rào). Hỏi bác đó có thể rào được mảnh vườn có diện tích lớn nhất là bao nhiêu mét vuông?



Hình 36

VÍ DỤ 3. Có hai xã A, B cùng ở một bên bờ sông Lam, khoảng cách từ hai xã đó đến bờ sông lần lượt là $AA' = 500$ m, $BB' = 600$ m và người ta đo được $A'B' = 2\,200$ m Hình 37. Các kĩ sư muốn xây một trạm cung cấp nước sạch nằm bên bờ sông Lam cho dân hai xã. Để tiết kiệm chi phí, các kĩ sư cần phải chọn vị trí M của trạm cung cấp nước sạch đó trên đoạn $A'B'$ sao cho tổng khoảng cách từ hai xã đến vị trí M là nhỏ nhất. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của tổng khoảng cách đó.



Hình 37

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

BÀI 1. Một tàu đổ bộ tiếp cận Mặt Trăng theo cách tiếp cận thẳng đứng và đốt cháy các tên lửa hãm ở độ cao 250 km so với bề mặt của Mặt Trăng.

Trong khoảng 50 giây đầu tiên kể từ khi đốt cháy các tên lửa hãm, độ cao h của con tàu so với bề mặt của Mặt Trăng được tính (gần đúng) bởi hàm $h(t) = -0,01t^3 + 1,1t^2 - 30t + 250$, trong đó t là thời gian tính bằng giây và h là độ cao tính bằng kilômét.

(Nguồn: A. Bigalke et al., *Mathematik, Grundkurs ma-1*, Cornelsen 2016).

- Vẽ đồ thị của hàm số $y = h(t)$ với $0 \leq t \leq 50$ (đơn vị trên trục hoành là 10 giây, đơn vị trên trục tung là 10 km).
- Gọi $v(t)$ là vận tốc tức thời của con tàu ở thời điểm t (giây) kể từ khi đốt cháy các tên lửa hãm với $(0 \leq t \leq 50)$. Xác định hàm số $v(t)$.
- Vận tốc tức thời của con tàu lúc bắt đầu hãm phanh là bao nhiêu? Tại thời điểm $t = 25$ (giây) là bao nhiêu?
- Tại thời điểm $t = 25$ (giây), vận tốc tức thời của con tàu vẫn giảm hay đang tăng trở lại?
- Tìm thời điểm t ($0 \leq t \leq 50$) sao cho con tàu đạt khoảng cách nhỏ nhất so với bề mặt của Mặt Trăng. Khoảng cách nhỏ nhất này là bao nhiêu?

BÀI 2. Để loại bỏ $x\%$ chất gây ô nhiễm không khí từ khí thải của một nhà máy, người ta ước tính chi phí cần bỏ ra là

$$C(x) = \frac{300x}{100 - x} \text{ (triệu đồng), } 0 \leq x < 100.$$

Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = C(x)$. Từ đó, hãy cho biết:

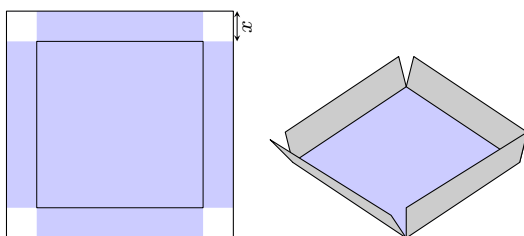
- Chi phí cần bỏ ra sẽ thay đổi như thế nào khi x tăng?
- Có thể loại bỏ được 100% chất gây ô nhiễm không khí không? Vì sao?

BÀI 3. Khi máu di chuyển từ tim qua các động mạch chính rồi đến các mao mạch và quay trở lại qua các tĩnh mạch, huyết áp tâm thu (tức là áp lực của máu lên động mạch khi tim co bóp) liên tục giảm xuống. Giả sử một người có huyết áp tâm thu P (tính bằng mmHg) được cho bởi hàm số

$$P(t) = \frac{25t^2 + 125}{t^2 + 1}, 0 \leq t \leq 10,$$

trong đó thời gian t được tính bằng giây. Tính tốc độ thay đổi của huyết áp sau 5 giây kể từ khi máu rời tim.

BÀI 4. Bạn Việt muốn dùng tấm bìa hình vuông cạnh 6 dm làm một chiếc hộp không nắp, có đáy là hình vuông bằng cách cắt bỏ đi 4 hình vuông nhỏ ở bốn góc của tấm bìa (Hình bên dưới).



Bạn Việt muốn tìm độ dài cạnh hình vuông cần cắt bỏ để chiếc hộp đạt thể tích lớn nhất.

- Hãy thiết lập hàm số biểu thị thể tích hộp theo x với x là độ dài cạnh hình vuông cần cắt đi.
- Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số tìm được.
Từ đó, hãy tư vấn cho bạn Việt cách giải quyết vấn đề và giải thích vì sao cần chọn giá trị này. (Làm tròn kết quả đến hàng phần mười.)

QUICK NOTE

MỤC LỤC

Bài 4. KHẢO SÁT SỰ BIẾN THIÊN VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ	1
(A) LÝ THUYẾT CẦN NHỚ	1
(B) PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN	2
Dạng 1. Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số bậc ba	2
Dạng 2. Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số phân thức hữu tỉ bậc I/I	5
Dạng 3. Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số phân thức hữu tỉ bậc II/I	9
Dạng 4. Sự tương giao của hai đồ thị	12
Bài 5. ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM VÀ KHẢO SÁT HÀM SỐ ĐỂ GIẢI QUYẾT MỘT SỐ BÀI TOÁN THỰC TIỄN	14
(A) LÝ THUYẾT CẦN NHỚ	14
(B) PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN	15
Dạng 5. Bài toán về tốc độ thay đổi của một đại lượng	15
Dạng 6. Bài toán tối ưu hoá đơn giản	16
(C) BÀI TẬP TỰ LUYỆN	17

