Bài 2. GIÁ TRỊ LỚN NHẤT - NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ

A. LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

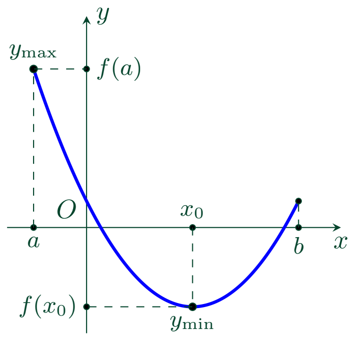
Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên tập $\mathscr{D}$. Ta có

① M là giá trị lớn nhất của hàm số nếu $\begin{cases} f(x) \le M, \forall x \in \mathscr{D} \\ \exists x_0 \in \mathscr{D} : f(x_0)=M. \end{cases}$

Kí hiệu $\boxed{\max\limits_{x\in\mathscr{D}} f(x)=M}$

② n là giá trị nhỏ nhất của hàm số nếu $\begin{cases} f(x) \ge n, \forall x \in \mathscr{D} \\ \exists x_0 \in \mathscr{D} : f(x_0)=n. \end{cases}$

Kí hiệu $\boxed{\min\limits_{x\in\mathscr{D}} f(x)=n}$



① *Khi yêu cầu tìm max min của hàm số mà không nói rõ xét trên tập nào, thì ta hiểu là tìm max min trên miền xác định của hàm số đó.*

② *Để tìm max min của hàm số $y=f(x)$ trên miền $\mathscr{D}$, ta thường lập bảng biến thiên của hàm số $y=f(x)$ trên $\mathscr{D}$. Từ bảng biến thiên, ta kết luận:*

- *Điểm ở vị trí cao nhất $\longrightarrow$ Kết luận max;*
- *Điểm ở vị trí thấp nhất $\longrightarrow$ Kết luận min.*

③ *Để tìm max min của hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $[a;b]$ ($f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ và có đạo hàm trên $(a;b)$ (có thể trừ một số hữu hạn các điểm) và $f'(x)=0$ chỉ tại một số hữu hạn các điểm trong $(a;b)$), thì ta có thể giải như sau:*

- *Giải $f'(x)=0$ tìm các nghiệm $x_0\in(a;b)$;*
- *Tìm các điểm $x_i\in(a;b)$ mà tại đó đạo hàm không xác định (nếu có).*
- *Tính toán $f(a)$, $f(x_0)$, $f(x_i)$, $f(b)$ $\quad(\star)$*
- *Gọi M, n lần lượt là số lớn nhất và số nhỏ nhất của các kết quả tính toán ở bước $(\star)$ thì*
$$M=\max_{[a;b]} f(x);\qquad n=\min_{[a;b]} f(x)$$

④ *Ta có thể dùng các bất đẳng thức có sẵn để đánh giá biểu thức cần tìm max, min.*

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Dạng 1. Bài toán tìm max, min của hàm số $y=f(x)$ trên miền $\mathscr{D}$

Phương pháp giải:

① Tính y'. Giải phương trình $y'=0$ tìm các nghiệm $x_i\in\mathscr{D}$ và tìm các điểm $x_j\in\mathscr{D}$ mà tại đó y' không xác định.

② Lập bảng biến thiên của hàm số trên $\mathscr{D}$.

③ Từ bảng biến thiên, kết luận:

- Điểm ở vị trí cao nhất $\longrightarrow$ Kết luận max;
- Điểm ở vị trí thấp nhất $\longrightarrow$ Kết luận min.

Lưu ý: Nếu $\mathscr{D}$ là đoạn $[a;b]$ và hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ thì ta có thể làm như sau:

① Giải $f'(x)=0$ tìm các nghiệm $x_0\in(a;b)$;

② Tìm các điểm $x_i\in(a;b)$ mà tại đó đạo hàm không xác định (nếu có).

③ Tính toán $f(a)$, $f(x_0)$, $f(x_i)$, $f(b)$ $\quad(\star)$

★ MATH TEACHER ★

ĐIỂM:

"It's not how much time you have, it's how you use it."

QUICK NOTE

QUICK NOTE

④ Gọi M, n lần lượt là số lớn nhất và số nhỏ nhất của các kết quả tính toán ở bước ($\star$) thì
$$M = \max_{[a;b]} f(x); \quad n = \min_{[a;b]} f(x)$$

- *Nếu hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên đoạn $[a;b]$ thì $\min\limits_{[a;b]} f(x) = f(a)$ và $\max\limits_{[a;b]} f(x) = f(b)$.*
- *Nếu hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên đoạn $[a;b]$ thì $\min\limits_{[a;b]} f(x) = f(b)$ và $\max\limits_{[a;b]} f(x) = f(a)$.*

BÀI TẬP TỰ LUẬN

VÍ DỤ 1. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất (nếu có) của hàm số sau trên đoạn đã chỉ ra.

a) $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 10$ trên đoạn $[-3;1]$.

b) $f(x) = \dfrac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 1$ trên đoạn $[-3;2]$.

c) $f(x) = -2x^4 + 4x^2 + 3$ trên đoạn $[0;2]$

d) $f(x) = \dfrac{2x+3}{x+1}$ trên đoạn $[0;4]$.

e) $f(x) = x + \dfrac{4}{x}$ trên khoảng $(0;+\infty)$;

f) $f(x) = 3x + \dfrac{4}{x^2}$ trên $(0;+\infty)$.

g) $f(x) = \dfrac{2x^2+4x+5}{x^2+1}$ trên $\mathbb{R}$.

h) $f(x) = \sqrt{-x^2+2x}$ trên miền xác định.

VÍ DỤ 2. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số sau trên miền đã chỉ ra.

a) $y = x - \sin 2x$ trên đoạn $\left[-\dfrac{\pi}{2};\pi\right]$

b) $y = \mathrm{e}^{x^3-3x+3}$ trên đoạn $[0;2]$

c) $y = \mathrm{e}^x(x^2-3)$ trên đoạn $[-2;2]$

d) $y = \dfrac{\ln^2 x}{x}$ trên đoạn $\left[1;\mathrm{e}^5\right]$

VÍ DỤ 3. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất (nếu có) của hàm số sau trên miền đã chỉ ra.

a) $f(x) = \dfrac{5\sin x + 1}{\sin x + 2}$ trên đoạn $\left[0;\dfrac{\pi}{6}\right]$.

b) $y = \cos^3 x + 2\sin^2 x + \cos x$ trên miền xác định.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.

CÂU 1. Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1;3]$ và có bảng biến thiên như sau.

x	-1		0		2		3
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	0	$\nearrow$	5	$\searrow$	1	$\nearrow$	4

Gọi M là giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-1;3]$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

Ⓐ $M = f(0)$.

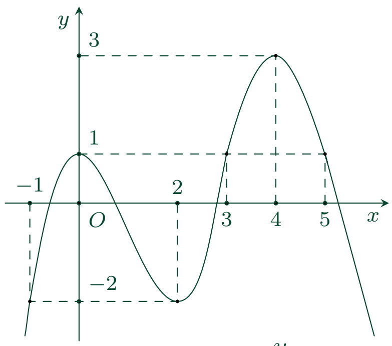
Ⓑ $M = f(-1)$.

Ⓒ $M = f(3)$.

Ⓓ $M = f(2)$.

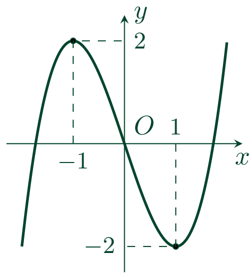
CÂU 2. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1;5]$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số đã cho trên $[-1;5]$. Giá trị của $M+m$ bằng

Ⓐ 5. Ⓑ 6. Ⓒ 3. Ⓓ 1.



CÂU 3. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong ở hình bên. Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $[-1;1]$.

Ⓐ $m=2$. Ⓑ $m=-2$.
Ⓒ $m=1$. Ⓓ $m=-1$.



CÂU 4. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên trên đoạn $[-2;3]$ như hình bên dưới.

x	$-\infty$		-2		-1		1		3		$+\infty$
$f'(x)$				$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$			
$f(x)$			0	$\nearrow$	1	$\searrow$	-2	$\nearrow$	5		

Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-1;3]$. Giá trị của biểu thức $M-m$ là

Ⓐ 5. Ⓑ 7. Ⓒ -1. Ⓓ 3.

CÂU 5. Giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y=x^3-12x+1$ trên đoạn $[-2;3]$ lần lượt là

Ⓐ $17,\ -15$. Ⓑ $10,\ -26$. Ⓒ $-15,\ 17$. Ⓓ $6,\ -26$.

CÂU 6. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x^3+3x^2-9x+1$ trên $[-4;4]$. Tính tổng $M+m$.

Ⓐ 12. Ⓑ 98. Ⓒ 17. Ⓓ 73.

CÂU 7. Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=-x^4+12x^2+1$ trên đoạn $[-1;2]$ bằng

Ⓐ 33. Ⓑ 37. Ⓒ 12. Ⓓ 1.

CÂU 8. Giá trị lớn nhất của hàm số $y=x^4-3x^2+2$ trên đoạn $[0;3]$ bằng

Ⓐ 57. Ⓑ 56. Ⓒ 54. Ⓓ 55.

CÂU 9. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{x-1}{x+1}$ trên đoạn $[0;3]$ là

Ⓐ $\min\limits_{[0;3]} y=\dfrac{1}{2}$. Ⓑ $\min\limits_{[0;3]} y=-3$. Ⓒ $\min\limits_{[0;3]} y=1$. Ⓓ $\min\limits_{[0;3]} y=-1$.

CÂU 10. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{2x+3}{x+1}$ trên đoạn $[0;4]$ là

Ⓐ 2. Ⓑ $\dfrac{7}{5}$. Ⓒ 3. Ⓓ $\dfrac{11}{5}$.

CÂU 11. Giá trị lớn nhất của hàm số $y=\dfrac{x^2-3x+3}{x-1}$ trên đoạn $\left[-2;\dfrac{1}{2}\right]$ bằng

Ⓐ 4. Ⓑ -3. Ⓒ $-\dfrac{7}{2}$. Ⓓ $-\dfrac{13}{3}$.

CÂU 12. Giá trị lớn nhất của hàm số $y=\sqrt{4-x^2}$ là

Ⓐ $M=-2$. Ⓑ $M=2$. Ⓒ $M=4$. Ⓓ $M=0$.

QUICK NOTE

QUICK NOTE

CÂU 13. Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số $y=\sqrt{7+6x-x^2}$.

Ⓐ $M=4$. Ⓑ $M=\sqrt{7}$. Ⓒ $M=7$. Ⓓ $M=3$.

CÂU 14. Tính giá trị lớn nhất của hàm số $y=x-\ln x$ trên $\left[\frac{1}{2};\mathrm{e}\right]$.

Ⓐ $\max\limits_{x\in\left[\frac{1}{2};\mathrm{e}\right]} y=1$. Ⓑ $\max\limits_{x\in\left[\frac{1}{2};\mathrm{e}\right]} y=\mathrm{e}-1$.

Ⓒ $\max\limits_{x\in\left[\frac{1}{2};\mathrm{e}\right]} y=\mathrm{e}$. Ⓓ $\max\limits_{x\in\left[\frac{1}{2};\mathrm{e}\right]} y=\frac{1}{2}+\ln 2$.

CÂU 15. Gọi M,N lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y=x^2-4\ln(1-x)$ trên đoạn $[-2;0]$. Tính $M-N$.

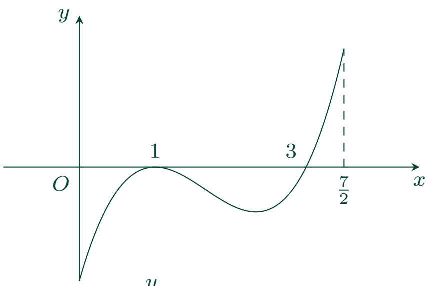
Ⓐ $M-N=4\ln 2$. Ⓑ $M-N=-1$.

Ⓒ $M-N=4\ln 2-1$. Ⓓ $M-N=4\ln 3-4$.

CÂU 16. Cho hàm số $f(x)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x)=\mathrm{e}^{3x^2-2x^3}-f(x)$ trên đoạn $[0;1]$ bằng

Ⓐ $\mathrm{e}-f(1)$. Ⓑ $f(1)$. Ⓒ $f(0)$. Ⓓ $1-f(0)$.

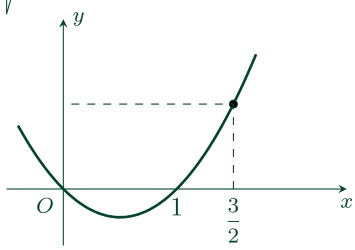
CÂU 17. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $\left[0;\frac{7}{2}\right]$, có đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ. Hỏi hàm số $y=f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $\left[0;\frac{7}{2}\right]$ tại điểm x_0 nào dưới đây?



Ⓐ $x_0=3$. Ⓑ $x_0=2$.

Ⓒ $x_0=1$. Ⓓ $x_0=0$.

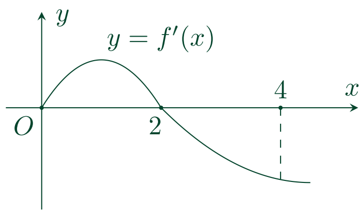
CÂU 18. Cho hàm số $y=f(x)$, biết hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Hàm số $y=f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $\left[\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right]$ tại điểm nào sau đây?



Ⓐ $x=\frac{3}{2}$. Ⓑ $x=\frac{1}{2}$.

Ⓒ $x=1$. Ⓓ $x=0$.

CÂU 19. Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ. Biết $f(0)+f(1)-2f(2)=f(4)-f(3)$. Giá trị nhỏ nhất m, giá trị lớn nhất M của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[0;4]$ là



Ⓐ $m=f(4)$, $M=f(1)$. Ⓑ $m=f(4)$, $M=f(2)$.

Ⓒ $m=f(1)$, $M=f(2)$. Ⓓ $m=f(0)$, $M=f(2)$.

CÂU 20. Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\sin^3 x-3\sin^2 x+2$ lần lượt là M, m. Tổng $M+m$ bằng

Ⓐ 0. Ⓑ 4. Ⓒ 1. Ⓓ 3.

CÂU 21. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)+2019$ là

Ⓐ 2017. Ⓑ 2020. Ⓒ 2018. Ⓓ 2019.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.

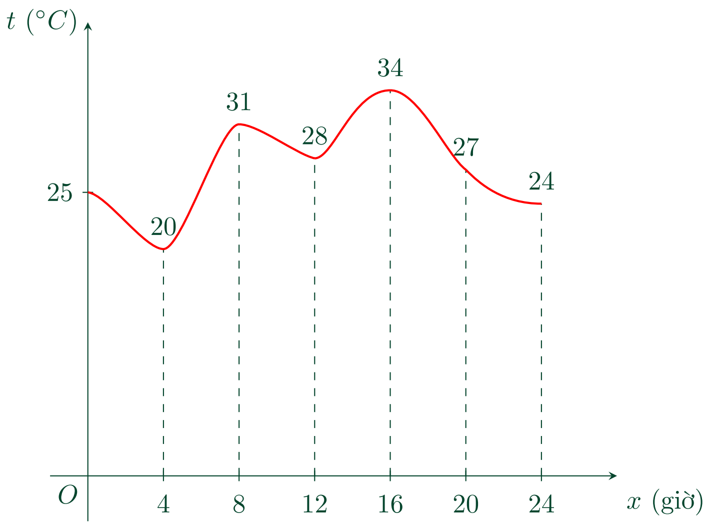
CÂU 22. Cho hàm số $y=f(x)$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	3	$\nearrow$	4	$\searrow$	$-\infty$

Xét tính đúng, sai của các khẳng định sau:

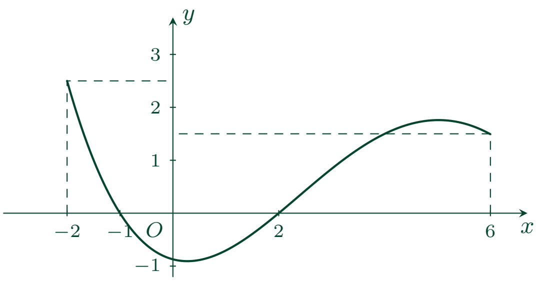
Mệnh đề	Đ	S
a) Cực đại của hàm số là 4.		
b) Cực tiểu của hàm số là 3.		
c) $\max\limits_{\mathbb{R}} y = 4$.		
d) $\min\limits_{\mathbb{R}} y = 3$.		

CÂU 23. Hình bên cho biết sự thay đổi của nhiệt độ ở một thành phố trong một ngày. Xét tính đúng, sai của các khẳng định sau:



Mệnh đề	Đ	S
a) Nhiệt độ cao nhất trong ngày là 28°C.		
b) Nhiệt độ thấp nhất trong ngày là 20°C.		
c) Thời điểm có nhiệt độ cao nhất trong ngày là lúc 16 giờ.		
d) Thời điểm có nhiệt độ thấp nhất trong ngày là lúc 4 giờ.		

CÂU 24. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $y = f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và đồ thị của hàm số $f'(x)$ trên đoạn $[-2; 6]$ như hình vẽ bên. Xét tính đúng, sai của các khẳng định sau:

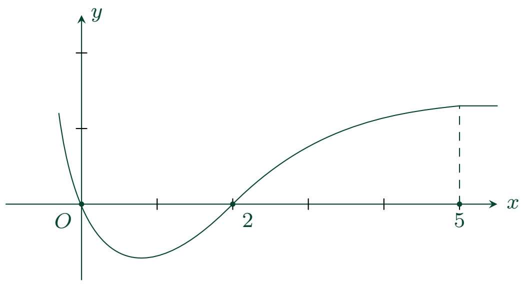


Mệnh đề	Đ	S
a) $\max\limits_{[-2;6]} f(x) = f(-1)$.		
b) $\max\limits_{[-2;6]} f(x) = f(6)$.		
c) $\max\limits_{[-2;6]} f(x) = f(-2)$.		
d) $\max\limits_{[-2;6]} f(x) = \max\{f(-1), f(6)\}$.		

QUICK NOTE

QUICK NOTE

CÂU 25. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)$. Đồ thị $y = f'(x)$ được cho như hình vẽ. Biết rằng $f(0) + f(3) = f(2) + f(5)$. Xét tính đúng, sai của các khẳng định sau:



Mệnh đề	Đ	S
a) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$.		
b) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$.		
c) $\min\limits_{[0;5]} f(x) = f(0)$ và $\max\limits_{[0;5]} f(x) = f(5)$.		
d) $\min\limits_{[0;5]} f(x) = f(2)$ và $\max\limits_{[0;5]} f(x) = f(5)$.		

Dạng 2. Bài toán max, min có chứa tham số m

BÀI TẬP TỰ LUẬN

VÍ DỤ 1. Tìm tất cả giá trị của tham số m để

a) giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = -x^3 - 3x^2 + m$ trên $[-1; 1]$ bằng 0.

b) giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \dfrac{x + 5m}{x - 3}$ trên $[1; 2]$ bằng 4.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

CÂU 1. Cho hàm số $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + m$ thoả mãn $\min\limits_{[0;5]} f(x) = 5$. Khi đó giá trị của m bằng

Ⓐ 10. Ⓑ 5. Ⓒ 6. Ⓓ 7.

CÂU 2. Tìm m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = 3x^3 - 4x^2 + 2(m - 10)$ trên đoạn $[1; 3]$ bằng -5.

Ⓐ $m = \dfrac{15}{2}$. Ⓑ $m = -15$. Ⓒ $m = 8$. Ⓓ $m = -8$.

CÂU 3. Tìm m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \dfrac{x - m^2 + m}{x + 1}$ trên đoạn $[0; 1]$ bằng -2.

Ⓐ $\left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = -2 \end{array}\right.$. Ⓑ $\left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = 2 \end{array}\right.$. Ⓒ $m = \dfrac{1 \pm \sqrt{21}}{2}$. Ⓓ $\left[\begin{array}{l} m = -1 \\ m = 2 \end{array}\right.$.

CÂU 4. Hàm số $y = \dfrac{x - m}{x + 2}$ thỏa mãn $\min\limits_{x \in [0;3]} y + \max\limits_{x \in [0;3]} y = \dfrac{7}{6}$. Hỏi giá trị m thuộc khoảng nào trong các khoảng dưới đây?

Ⓐ $(2; +\infty)$. Ⓑ $(0; 2)$. Ⓒ $(-\infty; -1)$. Ⓓ $(-1; 0)$.

CÂU 5. Cho hàm số $y = \dfrac{x + m}{x + 1}$ (m là tham số thực) thỏa mãn $\min\limits_{[1;2]} y + \max\limits_{[1;2]} y = \dfrac{16}{3}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

Ⓐ $m > 4$. Ⓑ $m \le 0$. Ⓒ $0 < m \le 2$. Ⓓ $2 < m \le 4$.

CÂU 6. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{x+m}{x-1}$ (m là tham số thực) thỏa mãn $\min\limits_{[2;4]} f(x)=3$. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

Ⓐ $1\le m<3$. Ⓑ $m<-1$. Ⓒ $3<m\le 4$. Ⓓ $m>4$.

CÂU 7. Gọi S là tổng giá trị của m để hàm số $f(x)=\dfrac{x-m^2-m}{x+1}$ có giá trị nhỏ nhất trên $[0;1]$ bằng -2. Mệnh đề nào sau đây đúng?

Ⓐ $S=-1$. Ⓑ $S=1$. Ⓒ $S=-2$. Ⓓ $S=-3$.

CÂU 8. Cho hàm số $f(x)=x^3+mx^2-m^2x+2$ với tham số $m>0$. Biết $\min\limits_{[-m;m]} f(x)=\dfrac{14}{27}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng

Ⓐ $m\in(-\infty;-3)$. Ⓑ $m\in(3;+\infty)$. Ⓒ $m\in(1;3)$. Ⓓ $m\in(-3;-1)$.

CÂU 9. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x^3+\left(m^2-m+1\right)x+m^3-4m^2+m+2025$ trên đoạn $[0;2]$ bằng 2019?

Ⓐ 0. Ⓑ 1. Ⓒ 2. Ⓓ 3.

CÂU 10. Gọi S là tập tất cả các giá trị của m sao cho giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\left(x^3-3x+m\right)^2$ trên đoạn $[-1;1]$ bằng 4. Tính tổng các phần tử của S.

Ⓐ 0. Ⓑ 6. Ⓒ -5. Ⓓ 3.

Dạng 3. Bài toán vận dụng, thực tiễn có liên quan đến max min

Bài toán chuyển động:

- Gọi $s(t)$ là hàm quãng đường; $v(t)$ là hàm vận tốc; $a(t)$ là hàm gia tốc;
- Khi đó $s'(t)=v(t)$; $v'(t)=a(t)$.

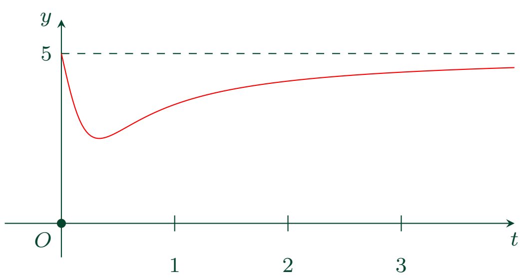
Bài toán thực tế – tối ưu:

- Biểu diễn dữ kiện cần đạt max – min qua một hàm $f(t)$.
- Khảo sát hàm $f(t)$ trên miền điều kiện của hàm và suy ra kết quả.

BÀI TẬP TỰ LUẬN

VÍ DỤ 1. Một chất điểm chuyển động có vận tốc tức thời $v(t)$ phụ thuộc vào thời gian t theo hàm số $v(t)=-t^4+24t^2+500$ (m/s). Trong khoảng thời gian từ $t=0$ (s) đến $t=5$ (s) chất điểm đạt vận tốc lớn nhất tại thời điểm nào?

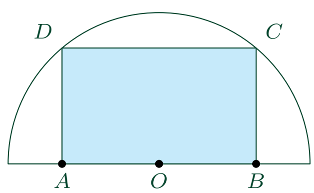
VÍ DỤ 2.
Sự phân huỷ của rác thải hữu cơ có trong nước sẽ làm tiêu hao oxygen hoà tan trong nước. Nồng độ oxygen (mg/l) trong một hồ nước sau t giờ ($t\ge 0$) khi một lượng rác thải hữu cơ bị xả vào hồ được xấp xỉ bởi hàm số (có đồ thị như đường màu đỏ ở hình bên)



$$y(t)=5-\frac{15t}{9t^2+1}.$$

Vào các thời điểm nào nồng độ oxygen trong nước cao nhất và thấp nhất?

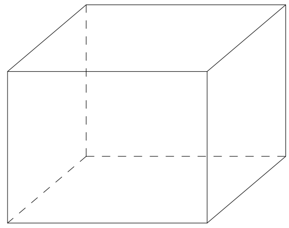
VÍ DỤ 3.
Tính diện tích lớn nhất $S_{\max}$ của một hình chữ nhật nội tiếp trong nửa đường tròn bán kính $R=6$ cm nếu một cạnh của hình chữ nhật nằm dọc theo đường kính của hình tròn mà hình chữ nhật đó nội tiếp.



VÍ DỤ 4.

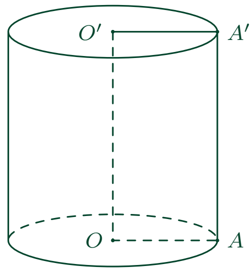
QUICK NOTE

Một người muốn xây một cái bể chứa nước, dạng một khối hộp chữ nhật không nắp có thể tích bằng 288 dm^3. Đáy bể là hình chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng, giá thuê nhân công để xây bể là 500000 đồng/ m^2. Nếu người đó biết xác định các kích thước của bể hợp lí thì chi phí thuê nhân công sẽ thấp nhất. Hỏi người đó trả chi phí thấp nhất để thuê nhân công xây dựng bể đó là bao nhiêu?



VÍ DỤ 5.

Một nhà sản xuất cần làm ra những chiếc bình có dạng hình trụ với dung tích 1000 cm^3. Mặt trên và mặt dưới của bình được làm bằng vật liệu có giá 1,2 nghìn đồng/cm^2, trong khi mặt bên của bình được làm bằng vật liệu có giá 0,75 nghìn đồng/cm^2. Tìm các kích thước của bình để chi phí vật liệu sản xuất mỗi chiếc bình là nhỏ nhất.



BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.

CÂU 1. Một chất điểm chuyển động với quãng đường $s(t)$ cho bởi công thức $s(t) = 6t^2 - t^3$, t (giây) là thời gian. Hỏi trong khoảng thời gian từ 0 đến 4 giây, vận tốc tức thời của chất điểm đạt giá trị lớn nhất tại thời điểm t (giây) bằng bao nhiêu?

A) $t = 3$ s. B) $t = 4$ s. C) $t = 2$ s. D) $t = 6$ s.

CÂU 2. Trong 3 giây đầu tiên, một chất điểm chuyển động theo phương trình $s(t) = -t^3 + 6t^2 + t + 5$, trong đó t tính bằng giây và s tính bằng mét. Chất điểm có vận tốc tức thời lớn nhất bằng bao nhiêu trong 3 giây đầu tiên đó?

A) 13 m/s. B) 10 m/s. C) 9 m/s. D) 12 m/s.

CÂU 3. Độ giảm huyết áp của một bệnh nhân được cho bởi công thức $G(x) = 0{,}025x^2(30 - x)$, trong đó x là liều lượng thuốc được tiêm cho bệnh nhân (x được tính bằng miligam). Liều lượng thuốc cần tiêm cho bệnh nhân là bao nhiêu để huyết áp được giảm nhanh nhất?

A) 24 mg. B) 20 mg. C) 15 mg. D) 10 mg.

CÂU 4. Trong thí nghiệm y học, người ta cấy 1 000 vi khuẩn vào môi trường dinh dưỡng. Bằng thực nghiệm, người ta xác định số lượng vi khuẩn thay đổi theo thời gian bởi công thức

$$N(t) = 1\,000 + \frac{100t}{100 + t^2}\ (con).$$

trong đó t là thời gian tính bằng giây. Tính số lượng vi khuẩn lớn nhất kể từ khi thực hiện cấy vi khuẩn vào môi trường dinh dưỡng.

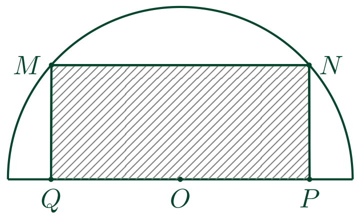
A) 1 008 con. B) 1 012 con. C) 1 005 con. D) 1 020 con.

CÂU 5. Tam giác vuông có cạnh huyền bằng 5 cm có thể có diện tích lớn nhất bằng bao nhiêu?

A) 25 cm^2. B) $\frac{125}{4}$ cm^2. C) $\frac{625}{4}$ cm^2. D) 125cm^2.

CÂU 6. Từ một tấm tôn có hình dạng là nửa hình tròn bán kính $R = 3$, người ta muốn cắt ra một hình chữ nhật (hình vẽ bên). Diện tích lớn nhất có thể của tấm tôn hình chữ nhật là

A) $\frac{9}{2}$. B) $6\sqrt{2}$. C) 9. D) $9\sqrt{2}$.



CÂU 7. Cho một tấm tôn hình chữ nhật có kích thước 10 cm × 16 cm. Người ta cắt bỏ 4 góc của tấm tôn 4 miếng hình vuông bằng nhau rồi gò lại thành một hình hộp chữ nhật không có nắp. Để thể tích của hình hộp đó lớn nhất thì độ dài cạnh hình vuông của các miếng tôn bị cắt bỏ bằng

A 3 m. **B** 4 m. **C** 5 m. **D** 2 m.

QUICK NOTE

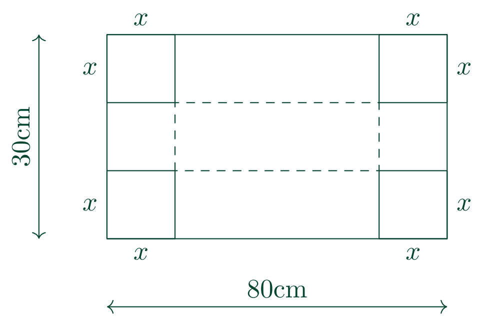
CÂU 8. Ông Bình dự định sử dụng hết $5,5\,\text{m}^2$ kính để làm một bể cá bằng kính có dạng hình hộp chữ nhật không nắp, chiều dài gấp đôi chiều rộng (các mối ghép có kích thước không đáng kể). Bể cá có dung tích lớn nhất bằng bao nhiêu (làm tròn đến hàng phần trăm)?

A $1{,}01\,\text{m}^3$. **B** $1{,}17\,\text{m}^3$. **C** $1{,}51\,\text{m}^3$. **D** $1{,}40\,\text{m}^3$.

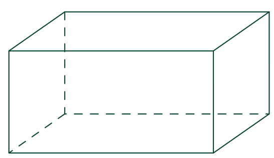
CÂU 9. Người ta muốn xây một chiếc bể nước có hình dạng là một khối hộp chữ nhật không nắp có thể tích bằng $\dfrac{500}{3}$ m^3. Biết đáy bể là một hình chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng và giá thuê thợ xây là 700.000 đồng/m^2. Để chi phí thuê nhân công ít nhất thì chi phí thuê nhân công là

A 120 triệu đồng. **B** 105 triệu đồng. **C** 115 triệu đồng. **D** 110 triệu đồng.

CÂU 10. Từ một tấm bìa hình chữ nhật có chiều rộng 30 cm và chiều dài 80 cm (Hình a), người ta cắt ở bốn góc bốn hình vuông có cạnh x(cm) với $5 \leq x \leq 10$ và gấp lại để tạo thành chiếc hộp có dạng hình hộp chữ nhật không nắp như Hình b. Tìm x để thể tích chiếc hộp là lớn nhất (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

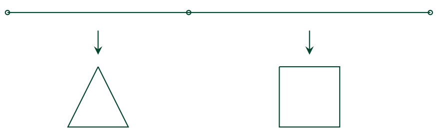


a)


b)

A $x = \dfrac{20}{3}$ cm. **B** $x = \dfrac{20}{7}$ cm. **C** $x = \dfrac{25}{3}$ cm. **D** $x = \dfrac{25}{7}$ cm.

CÂU 11. Một sợi dây có chiều dài là 6 m, được chia thành 2 phần. Phần thứ nhất được uốn thành hình tam giác đều, phần thứ hai uốn thành hình vuông. Hỏi độ dài của cạnh hình tam giác đều bằng bao nhiêu để tổng diện tích 2 hình thu được là nhỏ nhất?



A $\dfrac{12}{4+\sqrt{3}}$ m. **B** $\dfrac{18\sqrt{3}}{4+\sqrt{3}}$ m. **C** $\dfrac{36\sqrt{3}}{4+\sqrt{3}}$ m. **D** $\dfrac{18}{9+4\sqrt{3}}$ m.

CÂU 12. Một doanh nghiệp tư nhân A chuyên kinh doanh xe gắn máy các loại. Hiện nay doanh nghiệp đang tập trung vào chiến lược kinh doanh xe X với chi phí mua vào một chiếc là 27 triệu đồng và bán ra với giá 31 triệu đồng. Với giá bán này, số lượng xe mà khách hàng đã mua trong một năm là 600 chiếc. Nhằm mục tiêu đẩy mạnh hơn nữa lượng tiêu thụ dòng xe đang bán chạy này, doanh nghiệp dự định giảm giá bán. Bộ phận nghiên cứu thị trường ước tính rằng nếu giảm 1 triệu đồng mỗi chiếc xe thì số lượng xe bán ra trong một năm sẽ tăng thêm 200 chiếc. Hỏi theo đó, giá bán mới là bao nhiêu thì lợi nhuận thu được cao nhất?

A 30 triệu đồng. **B** $30,5$ triệu đồng. **C** $29,5$ triệu đồng. **D** 32 triệu đồng.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.

CÂU 13. Người ta bơm xăng vào bình xăng của một xe ô tô. Biết rằng thể tích V (lít) của lượng xăng trong bình xăng tính theo thời gian bơm xăng t (phút) được cho bởi công thức

$$V(t) = 300(t^2 - t^3) + 4 \text{ với } 0 \leq t \leq 0{,}5.$$

Gọi $V'(t)$ là tốc độ tăng thể tích tại thời điểm t với $0 \leq t \leq 0{,}5$.

QUICK NOTE

Mệnh đề	Đ	S
a) Lượng xăng trong bình ban đầu là 1 lít.		
b) Lượng xăng lớn nhất bơm vào bình xăng là 41,5 lít.		
c) $V'(t) = 300(2t - 3t^2) + 4$, với $0 \le t \le 0{,}5$.		
d) Xăng chảy vào bình xăng vào thời điểm ở giây thứ 30 có tốc độ tăng thể tích là lớn nhất.		

CÂU 14. Tại một xí nghiệp chuyên sản xuất vật liệu xây dựng, nếu trong một ngày xí nghiệp sản xuất x (m^3) sản phẩm thì phải bỏ ra các khoản chi phí bao gồm: 4 triệu đồng chi phí cố định; 0,2 triệu đồng chi phí cho mỗi mét khối sản phẩm và $0{,}001x^2$ triệu đồng chi phí bảo dưỡng máy móc. Biết rằng, mỗi ngày xí nghiệp sản xuất được tối đa 100 m^3 sản phẩm. Goi $C(x)$ là tổng chi phí để xí nghiệp sản xuất x (m^3) sản phẩm trong một ngày và $\overline{C}$ là chi phí trung bình trên mỗi mét khối sản phẩm.

Mệnh đề	Đ	S
a) $C = 0{,}2x + 0{,}001x^2$ với $0 \le x \le 100$.		
b) Tổng chi phí khi sản xuất 100 m^3 sản phẩm là 34 triệu đồng.		
c) $\overline{C} = 0{,}001x + \dfrac{4}{x} + 0{,}2$ với $0 < x \le 100$.		
d) $\overline{C}$ có giá trị thấp nhất bằng 0,326 triệu đồng (*kết quả làm tròn 3 chữ số thập phân*).		

CÂU 15. Nhà máy A chuyên sản xuất một loại sản phẩm cung cấp cho nhà máy B. Hai nhà máy thoả thuận rằng, hằng tháng A cung cấp cho B số lượng sản phẩm theo đơn đặt hàng của B (tối đa 100 tấn sản phẩm). Nếu số lượng đặt hàng là x tấn sản phẩm thì giá bán cho mỗi tấn sản phẩm là $P(x) = 45 - 0{,}001x^2$ (triệu đồng). Chi phí để A sản xuất x tấn sản phẩm trong một tháng là $C(x) = 100 + 30x$ (triệu đồng) (gồm 100 triệu đồng chi phí cố định và 30 triệu đồng cho mỗi tấn sản phẩm).

Mệnh đề	Đ	S
a) Chi phí để A sản xuất 10 tấn sảm phẩm trong một tháng là 400 triệu đồng.		
b) Số tiền A thu được khi bán 10 tấn sản phẩm cho B là 600 triệu đồng.		
c) Lợi nhuận mà A thu được khi bán x tấn sản phẩm ($0 \le x \le 100$) cho B là $-0{,}001x^3 + 15x - 100$.		
d) A bán cho B khoảng 70,7 tấn sản phẩm mỗi tháng thì thu được lợi nhuận lớn nhất.		

LỜI GIẢI CHI TIẾT

Bài 2. GIÁ TRỊ LỚN NHẤT - NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ

A. LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

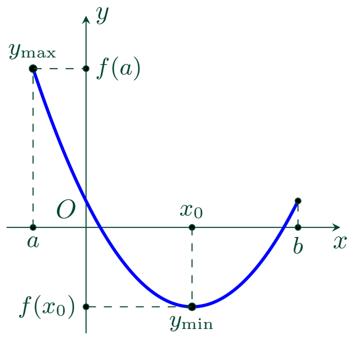
Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập $\mathscr{D}$. Ta có

① M là giá trị lớn nhất của hàm số nếu $\begin{cases} f(x) \leq M, \forall x \in \mathscr{D} \\ \exists x_0 \in \mathscr{D} : f(x_0) = M. \end{cases}$

Kí hiệu $\boxed{\max\limits_{x \in \mathscr{D}} f(x) = M}$

② n là giá trị nhỏ nhất của hàm số nếu $\begin{cases} f(x) \geq n, \forall x \in \mathscr{D} \\ \exists x_0 \in \mathscr{D} : f(x_0) = n. \end{cases}$

Kí hiệu $\boxed{\min\limits_{x \in \mathscr{D}} f(x) = n}$



① *Khi yêu cầu tìm max min của hàm số mà không nói rõ xét trên tập nào, thì ta hiểu là tìm max min trên miền xác định của hàm số đó.*

② *Để tìm max min của hàm số $y = f(x)$ trên miền $\mathscr{D}$, ta thường lập bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ trên $\mathscr{D}$. Từ bảng biến thiên, ta kết luận:*

- *Điểm ở vị trí cao nhất $\longrightarrow$ Kết luận max;*
- *Điểm ở vị trí thấp nhất $\longrightarrow$ Kết luận min.*

③ *Để tìm max min của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[a; b]$ ($f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ và có đạo hàm trên $(a; b)$ (có thể trừ một số hữu hạn các điểm) và $f'(x) = 0$ chỉ tại một số hữu hạn các điểm trong $(a; b)$), thì ta có thể giải như sau:*

- *Giải $f'(x) = 0$ tìm các nghiệm $x_0 \in (a; b)$;*
- *Tìm các điểm $x_i \in (a; b)$ mà tại đó đạo hàm không xác định (nếu có).*
- *Tính toán $f(a)$, $f(x_0)$, $f(x_i)$, $f(b)$ $\quad(\star)$*
- *Gọi M, n lần lượt là số lớn nhất và số nhỏ nhất của các kết quả tính toán ở bước $(\star)$ thì*

$$M = \max_{[a;b]} f(x); \quad n = \min_{[a;b]} f(x)$$

④ *Ta có thể dùng các bất đẳng thức có sẵn để đánh giá biểu thức cần tìm max, min.*

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Dạng 1. Bài toán tìm max, min của hàm số $y = f(x)$ trên miền $\mathscr{D}$

Phương pháp giải:

① Tính y'. Giải phương trình $y' = 0$ tìm các nghiệm $x_i \in \mathscr{D}$ và tìm các điểm $x_j \in \mathscr{D}$ mà tại đó y' không xác định.

② Lập bảng biến thiên của hàm số trên $\mathscr{D}$.

③ Từ bảng biến thiên, kết luận:

- Điểm ở vị trí cao nhất $\longrightarrow$ Kết luận max;
- Điểm ở vị trí thấp nhất $\longrightarrow$ Kết luận min.

Lưu ý: Nếu $\mathscr{D}$ là đoạn $[a; b]$ và hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ thì ta có thể làm như sau:

① Giải $f'(x) = 0$ tìm các nghiệm $x_0 \in (a; b)$;

② Tìm các điểm $x_i \in (a; b)$ mà tại đó đạo hàm không xác định (nếu có).

③ Tính toán $f(a)$, $f(x_0)$, $f(x_i)$, $f(b)$ $\quad(\star)$

④ Gọi M, n lần lượt là số lớn nhất và số nhỏ nhất của các kết quả tính toán ở bước $(\star)$ thì

$$M = \max_{[a;b]} f(x); \quad n = \min_{[a;b]} f(x)$$

- *Nếu hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên đoạn $[a;b]$ thì $\min\limits_{[a;b]} f(x) = f(a)$ và $\max\limits_{[a;b]} f(x) = f(b)$.*
- *Nếu hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên đoạn $[a;b]$ thì $\min\limits_{[a;b]} f(x) = f(b)$ và $\max\limits_{[a;b]} f(x) = f(a)$.*

BÀI TẬP TỰ LUẬN

VÍ DỤ 1. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất (nếu có) của hàm số sau trên đoạn đã chỉ ra.

a) $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 10$ trên đoạn $[-3;1]$.

b) $f(x) = \dfrac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 1$ trên đoạn $[-3;2]$.

c) $f(x) = -2x^4 + 4x^2 + 3$ trên đoạn $[0;2]$

d) $f(x) = \dfrac{2x+3}{x+1}$ trên đoạn $[0;4]$.

e) $f(x) = x + \dfrac{4}{x}$ trên khoảng $(0;+\infty)$;

f) $f(x) = 3x + \dfrac{4}{x^2}$ trên $(0;+\infty)$.

g) $f(x) = \dfrac{2x^2+4x+5}{x^2+1}$ trên $\mathbb{R}$.

h) $f(x) = \sqrt{-x^2+2x}$ trên miền xác định.

Lời giải.

a) Hàm số liên tục trên $[-3;1]$. Ta có $f'(x) = -3x^2 + 6x$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \in [-3;1] \\ x = 2 \notin [-3;1] \end{array}\right.$.

Ta có $f(-3) = 64$, $f(0) = 10$, $f(1) = 12$. Suy ra, $\max\limits_{[-3;1]} f(x) = f(-3) = 64$; $\min\limits_{[-3;1]} f(x) = f(0) = 10$.

b) Hàm số liên tục trên $[-3;2]$ Ta có $f'(x) = x^2 - 4x + 3$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \notin [-3;2] \end{cases}$.

$f(1) = \dfrac{7}{3}$, $f(3) = -35$, $f(2) = \dfrac{5}{3}$.

Vậy $\max\limits_{[-3;2]} f(x) = \dfrac{7}{3}$ và $\min\limits_{[-3;2]} f(x) = -35$.

c) Ta có $f'(x) = -8x^3 + 8x = -8x(x^2-1) = -8x(x-1)(x+1)$.
Xét $f(0) = 3$, $f(1) = 5$ và $f(2) = -13$.
Vậy $\max\limits_{[0;2]} f(x) = 5$ và $\min\limits_{[0;2]} f(x) = -13$.

d) Hàm số đã cho liên tục trên đoạn $[0;4]$.

Ta có $y' = -\dfrac{1}{(x+1)^2} < 0$, $\forall x \in [0;4]$. Suy ra hàm số đã cho nghịch biến trên đoạn $[0;4]$.

Vậy $\max\limits_{[0;4]} y = y(0) = 3$ và $\min\limits_{[0;4]} y = y(4) = \dfrac{11}{5}$.

e) Xét hàm số $f(x) = x + \dfrac{4}{x}$ trên khoảng $(0;+\infty)$.

Đạo hàm $f'(x) = 1 - \dfrac{4}{x^2} = \dfrac{x^2-4}{x^2}$.

Cho $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \in (0;+\infty) \\ x = -2 \notin (0;+\infty). \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-4	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	4	↗	$+\infty$

Căn cứ vào bảng biến thiên, ta có $\min\limits_{(0;+\infty)} f(x) = 4$.

f) Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho 3 số dương, ta có

$$y = \frac{3x}{2} + \frac{3x}{2} + \frac{4}{x^2} \geq 3\sqrt[3]{\frac{3x}{2}\cdot\frac{3x}{2}\cdot\frac{4}{x^2}} = 3\sqrt[3]{9}.$$

Đẳng thức xảy ra khi $\dfrac{3x}{2} = \dfrac{4}{x^2} \Leftrightarrow x = \dfrac{2}{\sqrt[3]{2}} = 2\sqrt[3]{2}$.

g) Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = \dfrac{-4x^2 - 6x + 4}{(x^2+1)^2}$, $y' = 0 \Leftrightarrow -4x^2 - 6x + 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 \\ x = \dfrac{1}{2}. \end{array}\right.$

x	$-\infty$		-2		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	2	$\searrow$	1	$\nearrow$	6	$\searrow$	2

Suy ra $M = 6$ và $m = 1$.

h) Hàm số $f(x) = \sqrt{-x^2 + 2x}$ liên tục trên $[0;2]$.
$f'(x) = \dfrac{1-x}{\sqrt{-x^2+2x}}$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$.
Ta có $f(0) = 0$, $f(2) = 0$, $f(1) = 1$.
Vậy $\max\limits_{x\in[0;2]} f(x) = 1$ và $\min\limits_{x\in[0;2]} f(x) = 0$.

VÍ DỤ 2. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số sau trên miền đã chỉ ra.

a) $y = x - \sin 2x$ trên đoạn $\left[-\dfrac{\pi}{2}; \pi\right]$

b) $y = \mathrm{e}^{x^3 - 3x + 3}$ trên đoạn $[0;2]$

c) $y = \mathrm{e}^x(x^2 - 3)$ trên đoạn $[-2;2]$

d) $y = \dfrac{\ln^2 x}{x}$ trên đoạn $[1;\mathrm{e}^5]$

Lời giải.

a) Ta có

- $y' = 1 - 2\cos 2x$.
- $\begin{cases} x \in \left(-\dfrac{\pi}{2}; \pi\right) \\ y' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \left(-\dfrac{\pi}{2}; \pi\right) \\ \cos 2x = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \left(-\dfrac{\pi}{2}; \pi\right) \\ x = \pm\dfrac{\pi}{6} + k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm\dfrac{\pi}{6} \\ x = \dfrac{5\pi}{6}. \end{array}\right.$
- $f\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = -\dfrac{\pi}{2}$, $f(\pi) = \pi$, $f\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) = -\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $f\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{\pi}{6} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $f\left(\dfrac{5\pi}{2}\right) = \dfrac{5\pi}{6} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Vậy giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x - \sin 2x$ trên đoạn $\left[-\dfrac{\pi}{2}; \pi\right]$ lần lượt là $\dfrac{5\pi + 3\sqrt{3}}{6}$ và $-\dfrac{\pi}{2}$.

b) Ta có $y' = (3x^2 - 3)\cdot \mathrm{e}^{x^3 - 3x + 3}$.
$y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ do $x \in [0;2]$.
Khi đó $y(0) = \mathrm{e}^3$; $y(2) = \mathrm{e}^5$; $y(1) = \mathrm{e}$. Vậy $\max\limits_{[0;2]} y = \mathrm{e}^5$ khi $x = 2$.

c) Ta có $y' = \mathrm{e}^x(x^2 + 2x - 3) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -3 \\ x = 1 \end{array}\right.$. Xét các giá trị: $f(-2) = \mathrm{e}^{-2}$; $f(1) = -2\mathrm{e}$; $f(2) = \mathrm{e}^2$, từ đó suy ra $y_{\min} = -2\mathrm{e}$.

d) $y' = \dfrac{2\ln x - \ln^2 x}{x^2}$, $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\ln x = 0\\ \ln x = 2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = 1\\ x = \mathrm{e}^2.\end{array}\right.$

Tính $y(1) = 0$, $y(\mathrm{e}^2) = \dfrac{4}{\mathrm{e}^2} \approx 0{,}54$, $y(\mathrm{e}^5) = \dfrac{9}{\mathrm{e}^5} \approx 0{,}16$.

Vậy $\max\limits_{x\in[1;\mathrm{e}^5]} y = \dfrac{4}{\mathrm{e}^2}$

VÍ DỤ 3. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất (nếu có) của hàm số sau trên miền đã chỉ ra.

a) $f(x) = \dfrac{5\sin x + 1}{\sin x + 2}$ trên đoạn $\left[0; \dfrac{\pi}{6}\right]$.

b) $y = \cos^3 x + 2\sin^2 x + \cos x$ trên miền xác định.

Lời giải.

a) Đặt $t = \sin x$, $x \in \left[0; \dfrac{\pi}{6}\right] \Rightarrow t \in \left[0; \dfrac{1}{2}\right]$.

Ta được hàm số $y = g(t) = \dfrac{5t+1}{t+2}$.

$g'(t) = \dfrac{9}{(t+2)^2} > 0, \forall t \in \left[0; \dfrac{1}{2}\right]$.

Vì $g(0) = \dfrac{1}{2}$, $g\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{7}{5}$ nên $\min\limits_{\left[0;\frac{1}{2}\right]} g(t) = g(0) = \dfrac{1}{2}$.

Vậy $\min\limits_{\left[0;\frac{\pi}{6}\right]} f(x) = \min\limits_{\left[0;\frac{1}{2}\right]} g(t) = \dfrac{1}{2}$

b) Ta có $y = \cos^3 x + 2\sin^2 x + \cos x = \cos^3 x + 2(1 - \cos^2 x) + \cos x = \cos^3 x - 2\cos^2 x + \cos x + 2$.
Đặt $t = \cos x$, $t \in [-1; 1]$. Ta được $f(t) = t^3 - 2t^2 + t + 2$.

Ta có $f'(t) = 3t^2 - 4t + 1$; $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t = 1 \in [-1;1]\\ t = \dfrac{1}{3} \in [-1;1].\end{array}\right.$

Mà $f(-1) = -2$, $f\left(\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{58}{27}$, $f(1) = 2$ nên $\max\limits_{x\in\mathbb{R}} y = \max\limits_{[-1;1]} f(t) = \dfrac{58}{27}$

c)

d)

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.

CÂU 1. Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1; 3]$ và có bảng biến thiên như sau.
Gọi M là giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-1; 3]$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

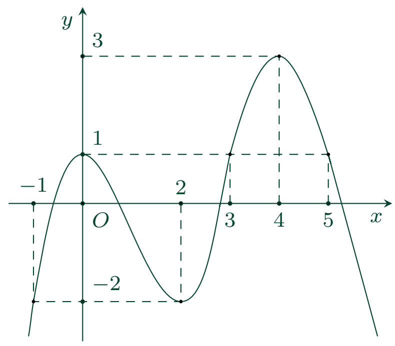
x	-1		0		2		3
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	0	$\nearrow$	5	$\searrow$	1	$\nearrow$	4

A $M = f(0)$.
B $M = f(-1)$.
C $M = f(3)$.
D $M = f(2)$.

Lời giải.
Dựa vào bảng biến thiên ta có $M = f(0) = 5$.
Chọn đáp án A .... □

CÂU 2. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1; 5]$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số đã cho trên $[-1; 5]$. Giá trị của $M + m$ bằng

A 5.
B 6.
C 3.
D 1.



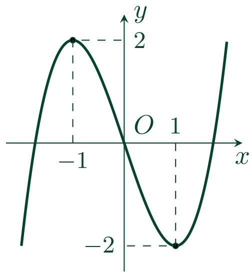
Lời giải.

Dựa vào đồ thị, suy ra $m = \min\limits_{[-1;5]} f(x) = f(-1) = -2$, $M = \max\limits_{[-1;5]} f(x) = f(4) = 3$.

Do đó $M + m = 3 - 2 = 1$.

Chọn đáp án D .... □

CÂU 3. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong ở hình bên. Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-1;1]$.



A) $m = 2$.
B) $m = -2$.
C) $m = 1$.
D) $m = -1$.

Lời giải.

Dựa vào đồ thị ta có giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[-1;1]$ bằng -2.

Chọn đáp án B .... □

CÂU 4. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên trên đoạn $[-2;3]$ như hình bên dưới.

x	$-\infty$	-2		-1		1		3	$+\infty$
$f'(x)$			$+$	0	$-$	||	$+$		
$f(x)$		0	$\nearrow$	1	$\searrow$	-2	$\nearrow$	5	

Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-1;3]$. Giá trị của biểu thức $M - m$ là

A) 5.
B) 7.
C) -1.
D) 3.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy giá trị lớn nhất của hàm số là $M = 5$ và giá trị nhỏ nhất của hàm số là $m = -2$ nên $M - m = 7$.

Chọn đáp án B .... □

CÂU 5. Giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y = x^3 - 12x + 1$ trên đoạn $[-2;3]$ lần lượt là

A) 17, -15.
B) 10, -26.
C) -15, 17.
D) 6, -26.

Lời giải.

Ta có $y' = 3x^2 - 12$, do đó $y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 12 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2 \in [-2;3]$.

Mặt khác $f(-2) = 17$, $f(2) = -15$, $f(3) = -8$.

Vậy giá trị lớn nhất và nhỏ nhất cần tìm lần lượt là 17, -15.

Chọn đáp án A .... □

CÂU 6. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 9x + 1$ trên $[-4;4]$. Tính tổng $M + m$.

A) 12.
B) 98.
C) 17.
D) 73.

Lời giải.

Ta có $y' = 3x^2 + 6x - 9 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -3. \end{array}\right.$

Khi đó: $y(-4) = 21$, $y(-3) = 28$, $y(1) = -4$, $y(4) = 77$.

Do đó $M + m = 77 + (-4) = 73$.

Chọn đáp án D .... □

CÂU 7. Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = -x^4 + 12x^2 + 1$ trên đoạn $[-1;2]$ bằng

A) 33.
B) 37.
C) 12.
D) 1.

Lời giải.

Hàm số $f(x) = -x^4 + 12x^2 + 1$ liên tục trên đoạn $[-1;2]$.

Ta có $f'(x) = -4x^3 + 24x = -4x(x^2 - 6)$.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\sqrt{6} \notin [-1;2] \\ x = 0 \in [-1;2] \\ x = \sqrt{6} \notin [-1;2]. \end{array}\right.$$

Ta có $f(-1) = 12; f(0) = 1; f(2) = 33$.
Vậy $\max\limits_{[-1;2]} f(x) = 33$.
Chọn đáp án (A)

CÂU 8. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = x^4 - 3x^2 + 2$ trên đoạn $[0;3]$ bằng

(A) 57. (B) 56. (C) 54. (D) 55.

Lời giải.

Hàm số y liên tục trên đoạn $[0;3]$ và có đạo hàm $y' = 4x^3 - 6x$.

Ta có $y' = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 6x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \in [0;3] \\ x = \sqrt{\dfrac{3}{2}} \in [0;3] \\ x = -\sqrt{\dfrac{3}{2}} \notin [0;3] \end{array}\right.$.

Ta có $y(0) = 2$, $y(3) = 56$, $y\left(\sqrt{\dfrac{3}{2}}\right) = -\dfrac{1}{4}$.

Do đó giá trị lớn nhất của hàm số $y = x^4 - 3x^2 + 2$ trên đoạn $[0;3]$ bằng 56.
Chọn đáp án (B)

CÂU 9. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \dfrac{x-1}{x+1}$ trên đoạn $[0;3]$ là

(A) $\min\limits_{[0;3]} y = \dfrac{1}{2}$. (B) $\min\limits_{[0;3]} y = -3$. (C) $\min\limits_{[0;3]} y = 1$. (D) $\min\limits_{[0;3]} y = -1$.

Lời giải.

Trên đoạn $[0;3]$ hàm số luôn xác định.

Ta có $y' = \dfrac{2}{(x+1)^2} > 0, \forall x \in [0;3]$ nên hàm số đã cho đồng biến trên đoạn $[0;3]$.

Do đó $\min\limits_{[0;3]} y = y(0) = -1$.

Chọn đáp án (D)

CÂU 10. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \dfrac{2x+3}{x+1}$ trên đoạn $[0;4]$ là

(A) 2. (B) $\dfrac{7}{5}$. (C) 3. (D) $\dfrac{11}{5}$.

Lời giải.

Ta có $y' = \dfrac{-1}{(x+1)^2} < 0$ nên $\min\limits_{[0;4]} y = y(4) = \dfrac{11}{5}$.

Chọn đáp án (D)

CÂU 11. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \dfrac{x^2 - 3x + 3}{x - 1}$ trên đoạn $\left[-2; \dfrac{1}{2}\right]$ bằng

(A) 4. (B) -3. (C) $-\dfrac{7}{2}$. (D) $-\dfrac{13}{3}$.

Lời giải.

Ta có $y' = \dfrac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$. Xét $y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \in \left[-2; \dfrac{1}{2}\right] \\ x = 2 \notin \left[-2; \dfrac{1}{2}\right] \end{array}\right.$.

Ta có $y(0) = -3$, $y(-2) = \dfrac{-13}{3}$, $y\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{-7}{2}$.

Suy ra $\max\limits_{x \in \left[-2; \frac{1}{2}\right]} y = -3$

Chọn đáp án (B)

CÂU 12. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \sqrt{4 - x^2}$ là

(A) $M = -2$. (B) $M = 2$. (C) $M = 4$. (D) $M = 0$.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathscr{D} = [-2;2]$.

Đạo hàm $y' = \dfrac{-x}{\sqrt{4 - x^2}}$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0 \in [-2;2]$.

Ta có $y(2) = y(-2) = 0$; $y(0) = 2$.
Vậy giá trị lớn nhất của hàm số đã cho bằng 2.
Chọn đáp án (B)

CÂU 13. Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số $y=\sqrt{7+6x-x^2}$.

(A) $M=4$. (B) $M=\sqrt{7}$. (C) $M=7$. (D) $M=3$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D}=[-1;7]$.

$y'=\dfrac{-x+3}{\sqrt{7+6x-x^2}}$.

Cho $y'=0\Leftrightarrow x=3\in\mathscr{D}$.

Có $y(3)=4, y(-1)=0, y(7)=0$. Vậy $M=4$.

Chọn đáp án (A) .... □

CÂU 14. Tính giá trị lớn nhất của hàm số $y=x-\ln x$ trên $\left[\dfrac{1}{2};\mathrm{e}\right]$.

(A) $\max\limits_{x\in\left[\frac{1}{2};\mathrm{e}\right]} y=1$. (B) $\max\limits_{x\in\left[\frac{1}{2};\mathrm{e}\right]} y=\mathrm{e}-1$. (C) $\max\limits_{x\in\left[\frac{1}{2};\mathrm{e}\right]} y=\mathrm{e}$. (D) $\max\limits_{x\in\left[\frac{1}{2};\mathrm{e}\right]} y=\dfrac{1}{2}+\ln 2$.

Lời giải.

Hàm số $y=x-\ln x$liên tục trên đoạn $\left[\dfrac{1}{2};\mathrm{e}\right]$.

Ta có $y'=1-\dfrac{1}{x}\Rightarrow y'=0\Leftrightarrow x=1\in\left[\dfrac{1}{2};\mathrm{e}\right]$.

Do $y\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{2}+\ln 2$; $y(\mathrm{e})=\mathrm{e}-1$; $y(1)=1$ nên $\max\limits_{x\in\left[\frac{1}{2};\mathrm{e}\right]} y=\mathrm{e}-1$.

Chọn đáp án (B) .... □

CÂU 15. Gọi M, N lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y=x^2-4\ln(1-x)$ trên đoạn $[-2;0]$. Tính $M-N$.

(A) $M-N=4\ln 2$. (B) $M-N=-1$. (C) $M-N=4\ln 2-1$. (D) $M-N=4\ln 3-4$.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathscr{D}=(-\infty;1)$.

Ta có $y'=2x+\dfrac{4}{1-x}=\dfrac{-2x^2+2x+4}{1-x}$.

Khi đó $y'=0\Leftrightarrow -2x^2+2x+4=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}x=-1 & \text{(nhận)}\\ x=2 & \text{(loại)}.\end{array}\right.$

Khi đó $\begin{cases}y(-2)=4-4\ln 3\approx -0{,}4\\ y(-1)=1-4\ln 2\approx -1{,}7\Rightarrow M=0, N=1-4\ln 2\\ y(0)=0.\end{cases}$

Vậy $M-N=4\ln 2-1$.

Chọn đáp án (C) .... □

CÂU 16. Cho hàm số $f(x)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x)=\mathrm{e}^{3x^2-2x^3}-f(x)$ trên đoạn $[0;1]$ bằng

(A) $\mathrm{e}-f(1)$. (B) $f(1)$. (C) $f(0)$. (D) $1-f(0)$.

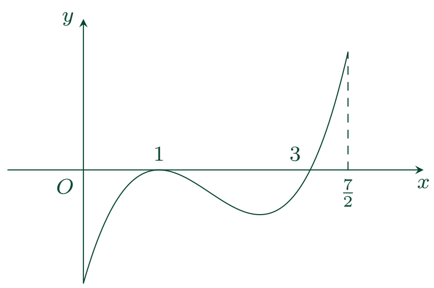
Lời giải.

Ta có $g'(x)=(6x-6x^2)\mathrm{e}^{3x^2-2x^3}-f'(x)$.

Trên đoạn $[0;1]$ thì $6x-6x^2\geq 0$, $f'(x)\leq 0$ nên $g'(x)\geq 0$, suy ra hàm số $g(x)$ đồng biến, suy ra giá trị nhỏ nhất là $g(0)=1-f(0)$.

Chọn đáp án (D) .... □

CÂU 17. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $\left[0;\dfrac{7}{2}\right]$, có đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ. Hỏi hàm số $y=f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $\left[0;\dfrac{7}{2}\right]$ tại điểm x_0 nào dưới đây?



(A) $x_0=3$. (B) $x_0=2$. (C) $x_0=1$. (D) $x_0=0$.

Lời giải.

Từ đồ thị hàm số ta có $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ x=3.\end{array}\right.$

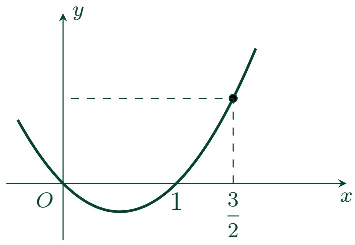
Bảng biến thiên của hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $\left[0;\dfrac{7}{2}\right]$

x	0		1		3		$\frac{7}{2}$
$f'(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$f(0)$	$\searrow$	$f(0)$	$\searrow$	$f(3)$	$\nearrow$	$f\left(\frac{7}{2}\right)$

Từ bảng biến thiên ta có hàm số $y = f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $\left[0; \frac{7}{2}\right]$ tại điểm $x_0 = 3$.

Chọn đáp án A .... □

CÂU 18. Cho hàm số $y = f(x)$, biết hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Hàm số $y = f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $\left[\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right]$ tại điểm nào sau đây?



A $x = \frac{3}{2}$.
B $x = \frac{1}{2}$.
C $x = 1$.
D $x = 0$.

Lời giải.

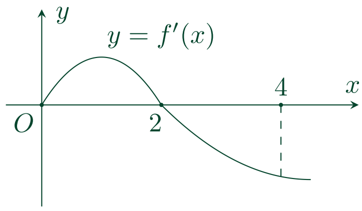
Dựa vào đồ thị hàm số $y = f'(x)$. Ta có bảng biến thiên

x	$\frac{1}{2}$		1		$\frac{3}{2}$
y'		$-$	0	$+$	0
y		$\searrow$		$\nearrow$	

Suy ra hàm số đạt giá trị nhỏ nhất trên $\left[\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right]$ tại $x = 1$.

Chọn đáp án C .... □

CÂU 19. Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ. Biết $f(0) + f(1) - 2f(2) = f(4) - f(3)$. Giá trị nhỏ nhất m, giá trị lớn nhất M của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[0; 4]$ là



A $m = f(4)$, $M = f(1)$.
B $m = f(4)$, $M = f(2)$.
C $m = f(1)$, $M = f(2)$.
D $m = f(0)$, $M = f(2)$.

Lời giải.

Từ đồ thị hàm số $y = f'(x)$ ta suy ra $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2. \end{array}\right.$

Ta có bảng biến thiên:

x	0		2		4
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$f(0)$	$\nearrow$	$f(2)$	$\searrow$	$f(4)$

Từ bảng biến thiên ta thấy $M = f(2)$.

Mặt khác, từ bảng biến thiên ta có $\begin{cases} f(1) < f(2) \\ f(3) < f(2) \end{cases} \Rightarrow f(1) + f(3) < 2f(2)$.

Do đó $f(4) = f(0) + f(1) + f(3) - 2f(2) < f(0) + f(2) + f(2) - 2f(2) = f(0) \Rightarrow m = f(4)$.

Chọn đáp án (B) .... □

CÂU 20. Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sin^3 x - 3\sin^2 x + 2$ lần lượt là M, m. Tổng $M + m$ bằng

(A) 0. (B) 4. (C) 1. (D) 3.

Lời giải.

Đặt $t = \sin x\, (-1 \le t \le 1)$. Ta có $y = f(t) = t^3 - 3t^2 + 2\, (-1 \le t \le 1)$.

$y' = 3t^2 - 6t = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0 \in [-1; 1] \\ t = 2 \notin [-1; 1]\,. \end{array}\right.$

Ta có $f(-1) = -2$, $f(1) = 0$, $f(0) = 2$. Vậy $M = 2$ và $m = -2 \Rightarrow M + m = 0$.

Chọn đáp án (A) .... □

CÂU 21. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = (x+1)(x+2)(x+3)(x+4) + 2019$ là

(A) 2017. (B) 2020. (C) 2018. (D) 2019.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.
Biến đổi $f(x) = (x+1)(x+2)(x+3)(x+4) + 2019 = (x^2 + 5x + 4)(x^2 + 5x + 6) + 2019$.

Đặt $t = x^2 + 5x + 4 \Rightarrow t = \left(x + \dfrac{5}{2}\right)^2 - \dfrac{9}{4} \Rightarrow t \ge -\dfrac{9}{4}\, \forall x \in \mathbb{R}$.

Hàm số đã cho trở thành $f(x) = t^2 + 2t + 2019 = (t+1)^2 + 2018 \ge 2018\, \forall t \ge -\dfrac{9}{4}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho bằng 2018 tại $t = -1 \in \left[-\dfrac{9}{4}; +\infty\right)$.

Chọn đáp án (C) .... □

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.

CÂU 22. Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	3	$\nearrow$	4	$\searrow$	$-\infty$

Xét tính đúng, sai của các khẳng định sau:

Mệnh đề	Đ	S
a) Cực đại của hàm số là 4.	X	
b) Cực tiểu của hàm số là 3.	X	

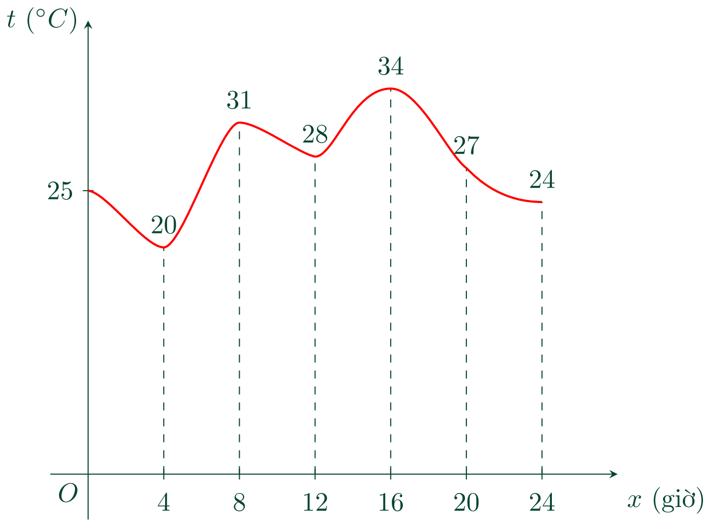
Mệnh đề	Đ	S
c) $\max\limits_{\mathbb{R}} y = 4$.	X	
d) $\min\limits_{\mathbb{R}} y = 3$.		X

Lời giải.

Từ bảng biến thiên ta thấy $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ nên hàm số không có giá trị nhỏ nhất trên $\mathbb{R}$.

Chọn đáp án | a đúng | b đúng | c đúng | d sai | .... □

CÂU 23. Hình bên cho biết sự thay đổi của nhiệt độ ở một thành phố trong một ngày. Xét tính đúng, sai của các khẳng định sau:

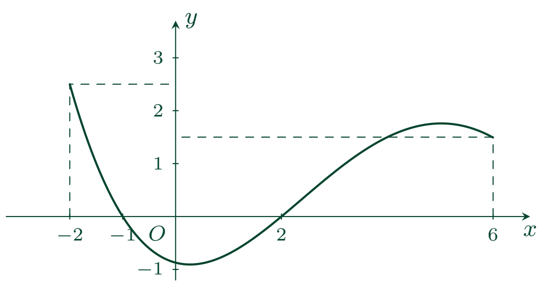


Mệnh đề	Đ	S
a) Nhiệt độ cao nhất trong ngày là 28°C.		X
b) Nhiệt độ thấp nhất trong ngày là 20°C.	X	
c) Thời điểm có nhiệt độ cao nhất trong ngày là lúc 16 giờ.	X	
d) Thời điểm có nhiệt độ thấp nhất trong ngày là lúc 4 giờ.	X	

Lời giải.

Chọn đáp án | a sai | b đúng | c đúng | d đúng | ....□

CÂU 24. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $y = f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và đồ thị của hàm số $f'(x)$ trên đoạn $[-2; 6]$ như hình vẽ bên. Xét tính đúng, sai của các khẳng định sau:



Mệnh đề	Đ	S
a) $\max\limits_{[-2;6]} f(x) = f(-1)$.		X
b) $\max\limits_{[-2;6]} f(x) = f(6)$.		X
c) $\max\limits_{[-2;6]} f(x) = f(-2)$.		X
d) $\max\limits_{[-2;6]} f(x) = \max\{f(-1), f(6)\}$.	X	

Lời giải.

x	-2		-1		2		6
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$f(-2)$	$\nearrow$	$f(-1)$	$\searrow$	$f(2)$	$\nearrow$	$f(6)$

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy

- Hàm số đồng biến trên $(-2; -1)$ và $(2; 6)$ do $f'(x) > 0$, suy ra

$$f(-1) > f(-2) \text{ và } f(6) > f(2) \text{ (1)}.$$

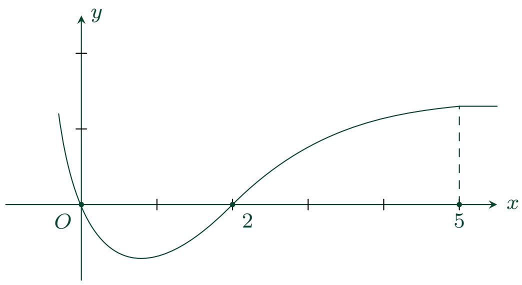
Hàm số nghịch biến trên $(-1;2)$ do $f'(x) < 0$, suy ra

$$f(-1) > f(2) \ (2).$$

Từ (1), (2) suy ra $\max\limits_{[-2;6]} f(x) = \max\{f(-2), f(-1), f(2), f(6)\} = \max\{f(-1), f(6)\}$.

Chọn đáp án | a sai | b sai | c sai | d đúng | .... □

CÂU 25. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)$. Đồ thị $y = f'(x)$ được cho như hình vẽ. Biết rằng $f(0) + f(3) = f(2) + f(5)$. Xét tính đúng, sai của các khẳng định sau:



Mệnh đề	Đ	S
a) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;0)$.		X
b) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;2)$.	X	
c) $\min\limits_{[0;5]} f(x) = f(0)$ và $\max\limits_{[0;5]} f(x) = f(5)$.		X
d) $\min\limits_{[0;5]} f(x) = f(2)$ và $\max\limits_{[0;5]} f(x) = f(5)$.	X	

Lời giải.

Bảng biến thiên của hàm số trên đoạn $[0;5]$

x	0		2		3		5
$f'(x)$		$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)$	$f(0)$	$\searrow$	$f(2)$	$\nearrow$	$f(3)$	$\nearrow$	$f(5)$

Từ bảng biến thiên suy ra $\min\limits_{[0;5]} f(x) = f(2)$ và $\max\limits_{[0;5]} f(x) = \max\{f(0); f(5)\}$.

Theo bảng biến thiên thì $f(3) > f(2)$ nên $f(3) - f(2) > 0$.

Theo giả thiết, ta có

$$f(0) + f(3) = f(2) + f(5) \Leftrightarrow f(5) = f(0) + [f(3) - f(2)] > f(0).$$

Suy ra $\max\limits_{[0;5]} f(x) = f(5)$.

Vậy $\min\limits_{[0;5]} f(x) = f(2)$ và $\max\limits_{[0;5]} f(x) = f(5)$.

Chọn đáp án | a sai | b đúng | c sai | d đúng | .... □

Dạng 2. Bài toán max, min có chứa tham số m

BÀI TẬP TỰ LUẬN

VÍ DỤ 1. Tìm tất cả giá trị của tham số m để

a) giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = -x^3 - 3x^2 + m$ trên $[-1;1]$ bằng 0.

b) giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \dfrac{x+5m}{x-3}$ trên $[1;2]$ bằng 4.

Lời giải.

a) Hàm số liên tục và xác định trên đoạn $[-1;1]$.
Ta có $f'(x) = -3x^2 - 6x$.
Cho $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \in [-1;1] \\ x = -2 \notin [-1;1]. \end{array}\right.$
Xét $f(-1) = -2 + m$; $f(1) = -4 + m$.
Suy ra $\max\limits_{[-1;1]} f(x) = -2 + m$.
Theo đề bài, $-2 + m = 0 \Leftrightarrow m = 2$.

b) Ta có $y' = \dfrac{-3 - 5m}{(x-3)^2}$.

- Trường hợp $-3 - 5m > 0 \Leftrightarrow m < -\dfrac{3}{5}$
$\Rightarrow y' > 0$ thì $\min\limits_{[1;2]} y = y(1) \Leftrightarrow -\dfrac{1}{2}(1 + 5m) = 4 \Leftrightarrow m = -\dfrac{9}{5}$ (nhận vì $-\dfrac{9}{5} < -\dfrac{3}{5}$).
- Trường hợp $-3 - 5m < 0 \Leftrightarrow m > -\dfrac{3}{5}$
$\Rightarrow y' < 0$ thì $\min\limits_{[1;4]} y = y(2) \Leftrightarrow -(2 + 5m) = 4 \Leftrightarrow m = -\dfrac{6}{5}$ (loại vì $-\dfrac{6}{5} < -\dfrac{3}{5}$).

Vậy $m = -\dfrac{9}{5}$.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

CÂU 1. Cho hàm số $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + m$ thoả mãn $\min\limits_{[0;5]} f(x) = 5$. Khi đó giá trị của m bằng

(A) 10. (B) 5. (C) 6. (D) 7.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = 6x^2 - 6x$.
Cho $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \in [0;5] \\ x = 1 \in [0;5]. \end{array}\right.$
Xét $f(0) = m$; $f(1) = -1 + m$; $f(5) = 175 + m$.
Suy ra $\min\limits_{[0;5]} f(x) = -1 + m$.
Theo giả thiết $-1 + m = 5 \Leftrightarrow m = 6$.
Chọn đáp án (C) .... □

CÂU 2. Tìm m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = 3x^3 - 4x^2 + 2(m - 10)$ trên đoạn $[1;3]$ bằng -5.

(A) $m = \dfrac{15}{2}$. (B) $m = -15$. (C) $m = 8$. (D) $m = -8$.

Lời giải.

- $f'(x) = 9x^2 - 8x$. Ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \dfrac{8}{9}. \end{array}\right.$
- Ta có bảng biến thiên

x	1	3
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	$2m - 21$ $\nearrow$	$2m + 25$

- Giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ trên đoạn $[1;3]$ bằng $-5 \Leftrightarrow 2m - 21 = -5 \Leftrightarrow m = 8$.

Chọn đáp án (C) .... □

CÂU 3. Tìm m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=\dfrac{x-m^2+m}{x+1}$ trên đoạn $[0;1]$ bằng -2.

(A) $\left[\begin{array}{l}m=1\\ m=-2\end{array}\right.$. (B) $\left[\begin{array}{l}m=1\\ m=2\end{array}\right.$. (C) $m=\dfrac{1\pm\sqrt{21}}{2}$. (D) $\left[\begin{array}{l}m=-1\\ m=2\end{array}\right.$.

Lời giải.

$\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

Ta có $f'(x)=\dfrac{m^2-m+1}{(x+1)^2}>0,\ \forall x\in\mathscr{D}$.

Khi đó $\min\limits_{x\in[0;1]} f(x)=f(0)\Leftrightarrow -2=-m^2+m\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m=-1\\ m=2\end{array}\right.$.

Chọn đáp án (D) .... □

CÂU 4. Hàm số $y=\dfrac{x-m}{x+2}$ thỏa mãn $\min\limits_{x\in[0;3]} y+\max\limits_{x\in[0;3]} y=\dfrac{7}{6}$. Hỏi giá trị m thuộc khoảng nào trong các khoảng dưới đây?

(A) $(2;+\infty)$. (B) $(0;2)$. (C) $(-\infty;-1)$. (D) $(-1;0)$.

Lời giải.

Do hàm số $y=\dfrac{x-m}{x+2}$ luôn đơn điệu trên đoạn $[0;3]$.

Do đó $\min\limits_{x\in[0;3]} y+\max\limits_{x\in[0;3]} y=y(0)+y(3)=\dfrac{-m}{2}+\dfrac{3-m}{5}=\dfrac{7}{6}\Leftrightarrow\dfrac{-7m}{10}=\dfrac{17}{30}\Leftrightarrow m=\dfrac{-17}{21}$.

Chọn đáp án (D) .... □

CÂU 5. Cho hàm số $y=\dfrac{x+m}{x+1}$ (m là tham số thực) thỏa mãn $\min\limits_{[1;2]} y+\max\limits_{[1;2]} y=\dfrac{16}{3}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

(A) $m>4$. (B) $m\le 0$. (C) $0<m\le 2$. (D) $2<m\le 4$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.

Ta có $y'=\dfrac{1-m}{(x+1)^2}$.

- Với $m=1$ thì $y=1$ nên $\min\limits_{[1;2]} y+\max\limits_{[1;2]} y=2$ (không thỏa mãn).
- Với $m\ne 1$ thì hàm số đơn điệu trên $[1;2]$ nên

$$\begin{aligned}&\min_{[1;2]} y+\max_{[1;2]} y=\frac{16}{3}\\ \Leftrightarrow\ & y(1)+y(2)=\frac{16}{3}\\ \Leftrightarrow\ & \frac{m+1}{2}+\frac{m+2}{3}=\frac{16}{3}\\ \Leftrightarrow\ & m=5>4.\end{aligned}$$

Chọn đáp án (A) .... □

CÂU 6. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{x+m}{x-1}$ (m là tham số thực) thỏa mãn $\min\limits_{[2;4]} f(x)=3$. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

(A) $1\le m<3$. (B) $m<-1$. (C) $3<m\le 4$. (D) $m>4$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Ta có $f'(x)=\dfrac{-1-m}{(x-1)^2}$.

TH1: $-1-m<0\Leftrightarrow m>-1$.

Ta có $\min\limits_{[2;4]} y=y(4)=\dfrac{4+m}{4-1}=3\Leftrightarrow m=5$ (thỏa mãn).

TH2: $-1-m>0\Leftrightarrow m<-1$.

Ta có $\min\limits_{[2;4]} y=y(2)=\dfrac{2+m}{2-1}=3\Leftrightarrow m=1$ (loại).

Vậy $m=5>4$.

Chọn đáp án (D) .... □

CÂU 7. Gọi S là tổng giá trị của m để hàm số $f(x)=\dfrac{x-m^2-m}{x+1}$ có giá trị nhỏ nhất trên $[0;1]$ bằng -2. Mệnh đề nào sau đây đúng?

(A) $S=-1$. (B) $S=1$. (C) $S=-2$. (D) $S=-3$.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = \dfrac{m^2 + m - 1}{(x+1)^2}$.

- Trường hợp 1: $y' < 0 \Leftrightarrow m^2 + m - 1 < 0$.
  Khi đó hàm số nghịch biến trên $[0;1]$.
  Suy ra $\min\limits_{[0;1]} f(x) = f(1) = \dfrac{-m^2 - m + 1}{2}$.
  Theo giả thiết $\dfrac{-m^2 - m + 1}{2} = -2 \Leftrightarrow m^2 + m = 5$ (không thoả điều kiện $m^2 + m < 1$).
- Trường hợp 2: $y' > 0 \Leftrightarrow m^2 + m - 1 > 0$.
  Khi đó $\min\limits_{[0;1]} f(x) = f(0) = -m^2 - m$.
  Theo giả thiết $-m^2 - m = -2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \text{ (nhận)} \\ m = -2 \text{ (nhận)}. \end{array}\right.$

Vậy tổng các giá trị của m là $-2 + 1 = -1$.
Chọn đáp án A .... □

CÂU 8. Cho hàm số $f(x) = x^3 + mx^2 - m^2x + 2$ với tham số $m > 0$. Biết $\min\limits_{[-m;m]} f(x) = \dfrac{14}{27}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng

A. $m \in (-\infty; -3)$.　B. $m \in (3; +\infty)$.　C. $m \in (1; 3)$.　D. $m \in (-3; -1)$.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = 3x^2 + 2mx - m^2 = (x+m)(3x-m)$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -m \\ x = \dfrac{m}{3} \end{array}\right.$. Suy ra $\begin{cases} f(-m) = m^3 + 2 \\ f(m) = m^3 + 2 \\ f\left(\dfrac{m}{3}\right) = -\dfrac{5m^3}{27} + 2. \end{cases}$

Vì $m > 0$ nên $f(m) = f(-m) > f\left(\dfrac{m}{3}\right)$, suy ra $\min\limits_{[-m;m]} f(x) = f\left(\dfrac{m}{3}\right) = \dfrac{14}{27}$.

Do đó $m = 2$, vậy $m \in (1; 3)$.
Chọn đáp án C .... □

CÂU 9. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^3 + \left(m^2 - m + 1\right)x + m^3 - 4m^2 + m + 2025$ trên đoạn $[0; 2]$ bằng 2019?

A. 0.　B. 1.　C. 2.　D. 3.

Lời giải.

Ta có $y' = f'(x) = 3x^2 + \left(m^2 - m + 1\right)$ trên đoạn $[0; 2]$.

Ta có $y' = 3x^2 + \left(m - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Do đó hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \Rightarrow$ ta có $\min\limits_{[0;2]} y = f(0) = m^3 - 4m^2 + m + 2025$.

Ta có $f(0) = 2019 \Leftrightarrow m^3 - 4m^2 + m + 2025 = 2019 \Leftrightarrow m^3 - 4m^2 + m + 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -1 \\ m = 2 \\ m = 3. \end{array}\right.$

Vậy tập các giá trị m thỏa mãn là $\{-1; 2; 3\}$. Hay có tất cả 3 giá trị m thỏa mãn.
Chọn đáp án D .... □

CÂU 10. Gọi S là tập tất cả các giá trị của m sao cho giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \left(x^3 - 3x + m\right)^2$ trên đoạn $[-1; 1]$ bằng 4. Tính tổng các phần tử của S.

A. 0.　B. 6.　C. -5.　D. 3.

Lời giải.

Ta có $\min\limits_{[-1;1]} \left(x^3 - 3x + m\right)^2 = 4 \Leftrightarrow \min\limits_{[-1;1]} \left|x^3 - 3x + m\right| = 2$.

Xét hàm số $y = f(x) = x^3 - 3x + m$ trên $[-1; 1]$.
Ta có $y' = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1)$, $y' = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$.
Bảng biến thiên hàm số như hình bên.

x	-1		1
y'	0	$-$	0
y	$m+2$	$\searrow$	$m-2$

Từ bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$, ta có $\min\limits_{[-1;1]} \left|x^3 - 3x + m\right| = 2$ khi và chỉ khi

TH1. $\begin{cases} m+2<0 \\ m+2=-2 \end{cases} \Leftrightarrow m=-4.$

TH2. $\begin{cases} m-2>0 \\ m-2=2 \end{cases} \Leftrightarrow m=4.$

Vậy $S=\{-4,4\} \Rightarrow$ Tổng các phần tử của S bằng 0.
Chọn đáp án A .... □

Dạng 3. Bài toán vận dụng, thực tiễn có liên quan đến max min

Bài toán chuyển động:

- Gọi $s(t)$ là hàm quãng đường; $v(t)$ là hàm vận tốc; $a(t)$ là hàm giá tốc;
- Khi đó $s'(t)=v(t)$; $v'(t)=a(t)$.

Bài toán thực tế – tối ưu:

- Biểu diễn dữ kiện cần đạt max – min qua một hàm $f(t)$.
- Khảo sát hàm $f(t)$ trên miền điều kiện của hàm và suy ra kết quả.

BÀI TẬP TỰ LUẬN

VÍ DỤ 1. Một chất điểm chuyển động có vận tốc tức thời $v(t)$ phụ thuộc vào thời gian t theo hàm số $v(t)=-t^4+24t^2+500$ (m/s). Trong khoảng thời gian từ $t=0$ (s) đến $t=5$ (s) chất điểm đạt vận tốc lớn nhất tại thời điểm nào?

Lời giải.

Ta có $v'(t)=-4t^3+48t=-4t(t^2-12)$

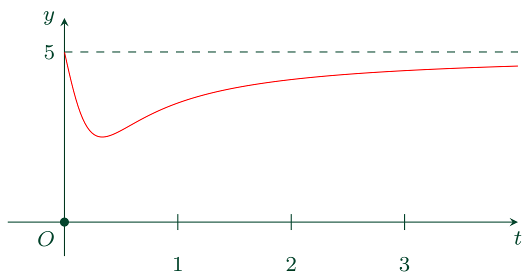
$v'(t)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=0 \\ t=\pm 2\sqrt{3} \end{array}\right.$.

Bài toán trở thành tìm giá trị lớn nhất của hàm số $v(t)$ trên đoạn $[0;10]$, ta có:
$v(0)=500$, $v(2\sqrt{3})=664$, $v(5)=475$.
Vậy vận tốc lớn nhất khi $t=2\sqrt{3}\approx 4$ (s).

VÍ DỤ 2.

Sự phân huỷ của rác thải hữu cơ có trong nước sẽ làm tiêu hao oxygen hoà tan trong nước. Nồng độ oxygen (mg/l) trong một hồ nước sau t giờ ($t\geq 0$) khi một lượng rác thải hữu cơ bị xả vào hồ được xấp xỉ bởi hàm số (có đồ thị như đường màu đỏ ở hình bên)

$$y(t)=5-\frac{15t}{9t^2+1}.$$



Vào các thời điểm nào nồng độ oxygen trong nước cao nhất và thấp nhất?

Lời giải.

Xét hàm số $y(t)=5-\dfrac{15t}{9t^2+1}$ xác định và liên tục trên khoảng $[0;+\infty)$.

Ta có $y'(t)=\dfrac{135t^2-15}{(9t^2+1)^2}=0 \Leftrightarrow t=\dfrac{1}{3}$ (giờ).

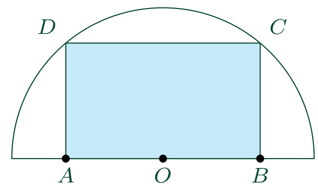
Mặt khác $\lim\limits_{t\to+\infty} y(t)=\lim\limits_{t\to+\infty}\left[5-\dfrac{15t}{9t^2+1}\right]=5$ và $\lim\limits_{t\to 0} y(t)=\lim\limits_{t\to 0}\left[5-\dfrac{15t}{9t^2+1}\right]=5$.

Bảng biến thiên

t	0		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$y'(t)$		$-$	0	$+$	
$y(t)$	5	$\searrow$	0	$\nearrow$	5

Từ bảng biến thiên, ta thấy $\min\limits_{[0;+\infty)} y(x)=0$ và $\max\limits_{[0;+\infty)} y(x)=5$.

VÍ DỤ 3.
Tính diện tích lớn nhất $S_{\max}$ của một hình chữ nhật nội tiếp trong nửa đường tròn bán kính $R = 6$ cm nếu một cạnh của hình chữ nhật nằm dọc theo đường kính của hình tròn mà hình chữ nhật đó nội tiếp.



Lời giải.

Cách 1.
Gọi chiều dài $AD = 2x$ $(0 < x < 6)$
$\Rightarrow AB = \sqrt{36 - x^2}$.
Diện tích hình chữ nhật là $S = 2x\sqrt{36 - x^2}$.
Xét $f(x) = x\sqrt{36 - x^2}$ trên $(0; 6)$, ta có

$$f'(x) = \sqrt{36 - x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{36 - x^2}} = 0 \Leftrightarrow x = \pm 3\sqrt{2}.$$

x	0		$3\sqrt{2}$		6
$f'(x)$	||	$+$	0	$-$	||
$f(x)$	0	$\nearrow$	36	$\searrow$	0

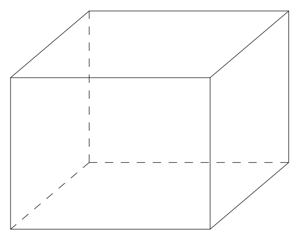
Bảng biến thiên hàm số $f(x)$ trên $(0, 6)$ ở hình bên
Vậy giá trị lớn nhất của diện tích hình chữ nhật $ABCD$ là 36 cm^2.

Cách 2.
Đặt $AB = CD = 2x$ $(0 < x < 6)$. Khi đó $AD = \sqrt{DO^2 - AO^2} = \sqrt{36 - x^2}$. Suy ra

$$S_{ABCD} = 2x\sqrt{36 - x^2} \leq 2 \cdot \frac{x^2 + 36 - x^2}{2} = 36.$$

Dấu bằng xảy ra khi $x = \sqrt{36 - x^2}$ hay $x = 3\sqrt{2}$.
Vậy giá trị lớn nhất của diện tích hình chữ nhật $ABCD$ là 36 cm^2.

VÍ DỤ 4.
Một người muốn xây một cái bể chứa nước, dạng một khối hộp chữ nhật không nắp có thể tích bằng 288 dm^3. Đáy bể là hình chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng, giá thuê nhân công để xây bể là 500000 đồng/ m^2. Nếu người đó biết xác định các kích thước của bể hợp lí thì chi phí thuê nhân công sẽ thấp nhất. Hỏi người đó trả chi phí thấp nhất để thuê nhân công xây dựng bể đó là bao nhiêu?



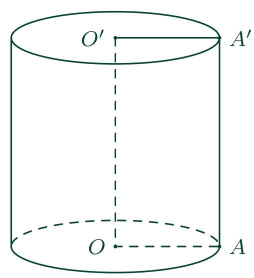
Lời giải.

Gọi $x (x > 0)$ là chiều rộng của đáy bể. Khi đó, chiều dài của bể là $2x$ và chiều cao của bể là $\dfrac{0,144}{x^2}$.
Diện tích cần xây $2x^2 + \dfrac{0,864}{x}$
Xét $f(x) = 2x^2 + \dfrac{0,864}{x}$, có $f'(x) = 4x - \dfrac{0,864}{x^2}$
$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x - \dfrac{0,864}{x^2} \Leftrightarrow x = 0,6$.
Bảng biến thiên

x	0		$0{,}6$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$2{,}16$	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta có $\min f(x) = 2,16$.
Vậy chi phí thấp nhất để thuê nhân công xây bể là $2,16 \times 500000 = 1080000$ đồng.

VÍ DỤ 5.
Một nhà sản xuất cần làm ra những chiếc bình có dạng hình trụ với dung tích 1000 cm^3. Mặt trên và mặt dưới của bình được làm bằng vật liệu có giá 1,2 nghìn đồng/cm^2, trong khi mặt bên của bình được làm bằng vật liệu có giá 0,75 nghìn đồng/cm^2. Tìm các kích thước của bình để chi phí vật liệu sản xuất mỗi chiếc bình là nhỏ nhất.



Lời giải.

Gọi bán kính đáy của bình là x (cm), ($x > 0$).

Chiều cao của bình là $\dfrac{1000}{\pi \cdot x^2}$ (cm).

Chi phí để sản xuất một chiếc bình là

$$T(x) = 2 \cdot 1{,}2 \cdot \pi \cdot x^2 + 0{,}75 \cdot \frac{2000}{x} = 2{,}4\pi \cdot x^2 + \frac{1500}{x} \text{ (nghìn đồng)}.$$

Để chi phí sản xuất mỗi chiếc bình là thấp nhất thì $T(x)$ là nhỏ nhất.

$T'(x) = 4,8\pi x - \dfrac{1500}{x^2}, T'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{\dfrac{625}{2\pi}}$ (thỏa mãn).

Bảng biến thiên:

x	0		$\sqrt[3]{\frac{625}{2\pi}}$		12
$T'(x)$		$-$	0	$+$	
$T(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$T\left(\sqrt[3]{\frac{625}{2\pi}}\right)$	$\nearrow$	$T(12)$

Để chi phí sản xuất mỗi chiếc bình là nhỏ nhất thì bán kính đáy của bình là $\sqrt[3]{\dfrac{625}{2\pi}}$ cm và chiều cao của bình là $\dfrac{1000}{\pi \cdot \left(\sqrt[3]{\dfrac{625}{2\pi}}\right)^2}$ cm.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.

CÂU 1. Một chất điểm chuyển động với quãng đường $s(t)$ cho bởi công thức $s(t) = 6t^2 - t^3$, t (giây) là thời gian. Hỏi trong khoảng thời gian từ 0 đến 4 giây, vận tốc tức thời của chất điểm đạt giá trị lớn nhất tại thời điểm t (giây) bằng bao nhiêu?

(A) $t = 3$ s. (B) $t = 4$ s. (C) $t = 2$ s. (D) $t = 6$ s.

Lời giải.

Ta có $v(t) = s'(t) = 12t - 3t^2$.

$v'(t) = 12 - 6t$, $v'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 2$.

Lập bảng biến thiên ta thấy $v(t)$ đạt giá trị lớn nhất tại $t = 2$.

Chọn đáp án C .... □

CÂU 2. Trong 3 giây đầu tiên, một chất điểm chuyển động theo phương trình $s(t) = -t^3 + 6t^2 + t + 5$, trong đó t tính bằng giây và s tính bằng mét. Chất điểm có vận tốc tức thời lớn nhất bằng bao nhiêu trong 3 giây đầu tiên đó?

(A) 13 m/s. (B) 10 m/s. (C) 9 m/s. (D) 12 m/s.

Lời giải.

Ta có $v(t) = s'(t) = -3t^2 + 12t + 1$. Xét hàm số $v(t) = -3t^2 + 12t + 1$ trên đoạn $[0; 5]$.

$v'(t) = -6t + 12$; $v'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 2$.

Tính các giá trị $v(0) = 1$, $v(2) = 13$, $v(3) = 10$.

So sánh các giá trị, ta có $\max\limits_{[0;3]} v(t) = 13$.

Chọn đáp án A .... □

CÂU 3. Độ giảm huyết áp của một bệnh nhân được cho bởi công thức $G(x) = 0{,}025x^2(30 - x)$, trong đó x là liều lượng thuốc được tiêm cho bệnh nhân (x được tính bằng miligam). Liều lượng thuốc cần tiêm cho bệnh nhân là bao nhiêu để huyết áp được giảm nhanh nhất?

(A) 24 mg. (B) 20 mg. (C) 15 mg. (D) 10 mg.

Lời giải.

Bài toán trở thành: Tìm $x \in [0; 30]$ để hàm số $G(x) = 0{,}025x^2(30 - x)$ đạt giá trị lớn nhất.

Ta có $G(x) = 0{,}025\left(30x^2 - x^3\right) \Rightarrow G'(x) = 0{,}025\left(60x - 3x^2\right)$.

Xét $G'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 20. \end{array}\right.$

Bảng biến thiên hàm số $G(x)$

x	0		20		30
$G'(x)$	0	$+$	0	$-$	
$G(x)$	0	$\nearrow$	100	$\searrow$	0

Từ bảng biến thiên ta có $\max\limits_{[0;30]} G(x) = G(20) = 100$.
Vậy liều lượng thuốc cần tiêm cho bệnh nhân để huyết áp giảm nhanh nhất là 20 mg.
Chọn đáp án B .... □

CÂU 4. Trong thí nghiệm y học, người ta cấy $1\,000$ vi khuẩn vào môi trường dinh dưỡng. Bằng thực nghiệm, người ta xác định số lượng vi khuẩn thay đổi theo thời gian bởi công thức

$$N(t) = 1\,000 + \frac{100t}{100+t^2}\ (con).$$

trong đó t là thời gian tính bằng giây. Tính số lượng vi khuẩn lớn nhất kể từ khi thực hiện cấy vi khuẩn vào môi trường dinh dưỡng.

A $1\,008$ con. **B** $1\,012$ con. **C** $1\,005$ con. **D** $1\,020$ con.

Lời giải.

Xét hàm số $N(t) = 1\,000 + \dfrac{100t}{100+t^2}$ $(t > 0)$.
Ta có $N'(t) = \dfrac{100\cdot(100+t^2) - 100t\cdot 2t}{(100+t^2)^2} = \dfrac{100\cdot(100-t^2)}{(100+t^2)^2}$.
Khi đó, với $t > 0$, $N'(t) = 0 \Leftrightarrow 100 - t^2 = 0 \Leftrightarrow t^2 = 100 \Leftrightarrow t = 10$.
Bảng biến thiên của hàm số $N(t)$ như sau

t	0		10		$+\infty$
$N'(t)$		$+$	0	$-$	
$N(t)$	$1\,000$	$\nearrow$	$1\,005$	$\searrow$	$1\,000$

Căn cứ vào bảng biến thiên, ta thấy trên khoảng $(0;+\infty)$, hàm số $N(t)$ đạt giá trị lớn nhất bằng $1\,005$ tại $t = 10$.
Vậy số lượng vi khuẩn lớn nhất kể từ khi thực hiện nuôi cấy vi khuẩn vào môi trường dinh dưỡng là $1\,005$ con.
Chọn đáp án C .... □

CÂU 5. Tam giác vuông có cạnh huyền bằng 5 cm có thể có diện tích lớn nhất bằng bao nhiêu?

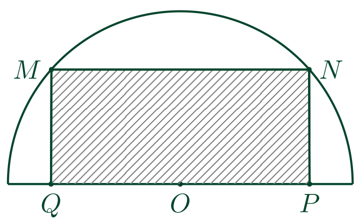
A 25 cm^2. **B** $\dfrac{125}{4}$ cm^2. **C** $\dfrac{625}{4}$ cm^2. **D** 125cm^2.

Lời giải.

Gọi một cạnh góc vuông là x $(0 < x < 5)$ thì cạnh góc vuông còn lại là $\sqrt{25-x^2}$.
Như vậy, diện tích tam giác là $S = \dfrac{x\cdot\sqrt{25-x^2}}{2}$. Đặt $f(x) = 25x^2 - x^4$.
Ta có $f'(x) = 50x - 4x^3$. Khi đó $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{5\sqrt{2}}{2}$.
Vì vậy $\max\limits_{(0;5)} f(x) = f\left(\dfrac{5\sqrt{2}}{2}\right) = \dfrac{625}{4}$.
Vậy tam giác vuông có cạnh huyền bằng 5 cm có thể có diện tích lớn nhất bằng $\dfrac{625}{4}$.

CÂU 6. Từ một tấm tôn có hình dạng là nửa hình tròn bán kính $R = 3$, người ta muốn cắt ra một hình chữ nhật (hình vẽ bên). Diện tích lớn nhất có thể của tấm tôn hình chữ nhật là

A $\dfrac{9}{2}$. **B** $6\sqrt{2}$. **C** 9. **D** $9\sqrt{2}$.



Lời giải.

Đặt $OQ = x$, $(0 < x < 3) \Rightarrow MQ = \sqrt{MO^2 - OQ^2} = \sqrt{9 - x^2}$.

Ta có $S_{MNPQ} = PQ \cdot MQ = 2x \cdot \sqrt{9 - x^2} \leq 2 \cdot \dfrac{x^2 + 9 - x^2}{2} = 9$.

Dấu $=$ xảy ra khi $x = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

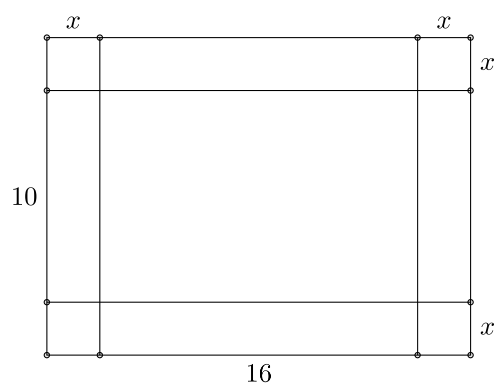
Chọn đáp án C .... □

CÂU 7. Cho một tấm tôn hình chữ nhật có kích thước 10 cm $\times$ 16 cm. Người ta cắt bỏ 4 góc của tấm tôn 4 miếng hình vuông bằng nhau rồi gò lại thành một hình hộp chữ nhật không có nắp. Để thể tích của hình hộp đó lớn nhất thì độ dài cạnh hình vuông của các miếng tôn bị cắt bỏ bằng

Ⓐ 3 m. Ⓑ 4 m. Ⓒ 5 m. Ⓓ 2 m.

Lời giải.

Giả sử độ dài cạnh hình vuông của các miếng tôn bị cắt bỏ bằng x $(0 < 2x < 10 \Leftrightarrow 0 < x < 5)$. Khi đó hình hộp chữ nhật có chiều cao bằng x, chiều rộng bằng $10 - 2x$ và chiều dài bằng $16 - 2x$. Suy ra hình hộp chữ nhật có thể tích $V = x(10 - 2x)(16 - 2x) = 4x^3 - 52x^2 + 160x$.



Xét hàm $f(x) = 4x^3 - 52x^2 + 160x$ trên $(0; 5)$. Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$,

$f'(x) = 12x^2 - 104x + 160 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = \dfrac{20}{3}. \end{array}\right.$ Bảng biến thiên hàm số $f(x)$ trên $(0; 5)$:

x	0		2		5
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

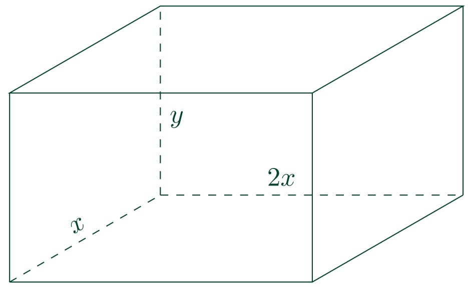
Dựa vào bảng biến thiên ta có hàm số đạt giá trị lớn nhất trên $(0; 5)$ tại $x = 2$ hay hình hộp chữ nhật có thể tích lớn nhất khi độ dài cạnh hình vuông của miếng tôn bị cắt bỏ bằng 2 m.

Chọn đáp án D .... □

CÂU 8. Ông Bình dự định sử dụng hết $5,5\,\mathrm{m}^2$ kính để làm một bể cá bằng kính có dạng hình hộp chữ nhật không nắp, chiều dài gấp đôi chiều rộng (các mối ghép có kích thước không đáng kể). Bể cá có dung tích lớn nhất bằng bao nhiêu (làm tròn đến hàng phần trăm)?

Ⓐ $1{,}01\,\mathrm{m}^3$. Ⓑ $1{,}17\,\mathrm{m}^3$. Ⓒ $1{,}51\,\mathrm{m}^3$. Ⓓ $1{,}40\,\mathrm{m}^3$.

Lời giải.



Gọi $x, 2x, y$ với $x, y > 0$ lần lượt là chiều rộng, chiều dài, chiều cao của bể cá.
Theo giả thiết ta có:

$$2 \cdot 2xy + 2 \cdot xy + 2x^2 = 5{,}5 \Leftrightarrow 6xy + 2x^2 = 5{,}5 \Rightarrow y = \frac{5{,}5 - 2x^2}{6x}.$$

Do $y > 0$ nên $5,5 - 2x^2 > 0 \Rightarrow 0 < x < \dfrac{\sqrt{11}}{2}$.
Thể tích bể cá là

$$V(x) = 2x^2y = 2x^2 \cdot \frac{5{,}5 - 2x^2}{6x} = -\frac{2}{3}x^3 + \frac{11}{6}x.$$

Khảo sát hàm số $V(x) = -\dfrac{2}{3}x^3 + \dfrac{11}{6}x$ trên khoảng $\left(0; \dfrac{\sqrt{11}}{2}\right)$

- $V'(x) = -2x^2 + \dfrac{11}{6}$; $V'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{\dfrac{11}{12}}$.
- Bảng biến thiên:

x	0		$\sqrt{\frac{11}{12}}$		$\frac{\sqrt{11}}{2}$
V'		$+$	0	$-$	
V		$\nearrow$	y_0	$\searrow$	

Thể tích lớn nhất của bể cá là $V\left(\sqrt{\dfrac{11}{12}}\right) = 1{,}17\,\text{m}^3$.

Chọn đáp án B ....

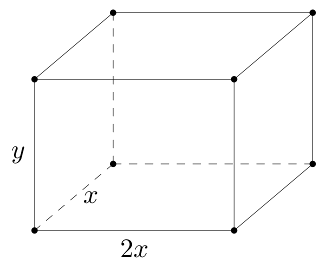
CÂU 9. Người ta muốn xây một chiếc bể nước có hình dạng là một khối hộp chữ nhật không nắp có thể tích bằng $\dfrac{500}{3}$ m^3. Biết đáy bể là một hình chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng và giá thuê thợ xây là 700.000 đồng/m^2. Để chi phí thuê nhân công ít nhất thì chi phí thuê nhân công là

A 120 triệu đồng. B 105 triệu đồng. C 115 triệu đồng. D 110 triệu đồng.

Lời giải.

Gọi x, y lần lượt là chiều rộng và chiều cao của bể cá (điều kiện $x, y > 0$).
Với giả thiết của bài toán, thể tích bể cá là

$$V = 2x^2y = \frac{500}{3} \Rightarrow y = \frac{250}{3x^2}.$$



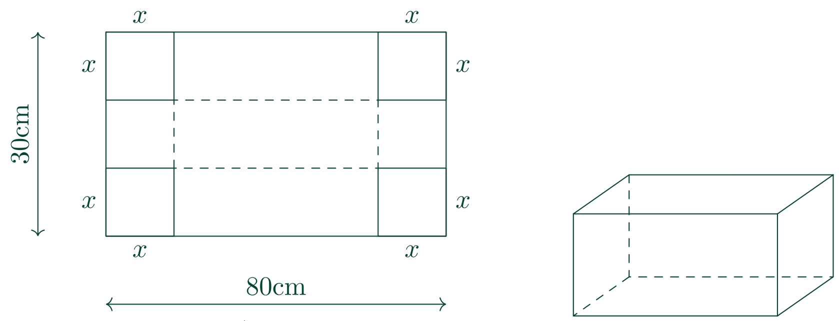
Để chi phí thuê nhân công ít nhất thì tổng diện tích các mặt của bể cá phải nhỏ nhất. Tổng diện tích các mặt của bể cá

$S = 2xy + 2 \cdot 2xy + 2x^2 = 6xy + 2x^2 = \dfrac{500}{x} + 2x^2$.
Xét hàm số $S(x) = \dfrac{500}{x} + 2x^2$ trên khoảng $(0; +\infty)$.
$\Rightarrow S'(x) = -\dfrac{500}{x^2} + 4x$.
$S'(x) = 0 \Leftrightarrow -500 + 4x^3 = 0 \Leftrightarrow x = 5$.
Bảng biến thiên

x	0		5		$+\infty$
$S'(x)$		$-$	0	$+$	
$S(x)$	$+\infty$	$\searrow$	150	$\nearrow$	$+\infty$

Do đó $\min S = 150$ tại $x = 5$.
Khi đó, chi phí thuê nhân công là $150 \cdot 700000 = 105$ triệu đồng.
Vậy chi phí thuê nhân công ít nhất là 105 triệu đồng.
Chọn đáp án (B) .... □

CÂU 10. Từ một tấm bìa hình chữ nhật có chiều rộng 30 cm và chiều dài 80 cm (Hình a), người ta cắt ở bốn góc bốn hình vuông có cạnh $x($ cm$)$ với $5 \leq x \leq 10$ và gấp lại để tạo thành chiếc hộp có dạng hình hộp chữ nhật không nắp như Hình b. Tìm x để thể tích chiếc hộp là lớn nhất (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).



a) b)

(A) $x = \dfrac{20}{3}$ cm. (B) $x = \dfrac{20}{7}$ cm. (C) $x = \dfrac{25}{3}$ cm. (D) $x = \dfrac{25}{7}$ cm.

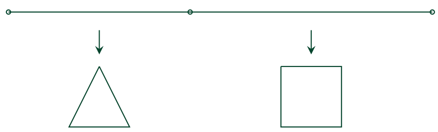
Lời giải.

Thể tích chiếc hộp là $V(x) = x(30-2x)(80-2x) = 2400x - 220x^2 + 4x^3$ với $5 \leq x \leq 10$.
Ta có: $V'(x) = 12x^2 - 440x + 2400$;
$V'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{20}{3}$ hoặc $x = 30$ (loại vì không thuộc $[5;10]$);

$$V(5) = 7000; V\left(\frac{20}{3}\right) = \frac{200000}{27}; V(10) = 6000.$$

Do đó $\max\limits_{[5;10]} V(x) = \dfrac{200000}{27}$ khi $x = \dfrac{20}{3}$. Vậy để thể tích chiếc hộp là lớn nhất thì $x = \dfrac{20}{3}$ cm.
Chọn đáp án (A) .... □

CÂU 11. Một sợi dây có chiều dài là 6 m, được chia thành 2 phần. Phần thứ nhất được uốn thành hình tam giác đều, phần thứ hai uốn thành hình vuông. Hỏi độ dài của cạnh hình tam giác đều bằng bao nhiêu để tổng diện tích 2 hình thu được là nhỏ nhất?



(A) $\dfrac{12}{4+\sqrt{3}}$ m. (B) $\dfrac{18\sqrt{3}}{4+\sqrt{3}}$ m. (C) $\dfrac{36\sqrt{3}}{4+\sqrt{3}}$ m. (D) $\dfrac{18}{9+4\sqrt{3}}$ m.

Lời giải.

Gọi độ dài cạnh hình tam giác đều là x (m). Khi đó độ dài cạnh hình vuông là $\dfrac{6-3x}{4}$.

Tổng diện tích khi đó là $S = \dfrac{\sqrt{3}}{4}x^2 + \left(\dfrac{6-3x}{4}\right)^2 = \dfrac{1}{16}\left[\left(9+4\sqrt{3}\right)x^2 - 36x + 36\right]$.

Xét hàm số $f(x) = \left(9+4\sqrt{3}\right)x^2 - 36x + 36, x \in (0;6)$.

Ta có $f(x)$ là tam thức bậc 2 có $-\dfrac{b}{2a} = \dfrac{18}{9+4\sqrt{3}} \in (0;6)$ và $a > 0$.

Suy ra $f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất tại $x = -\dfrac{b}{2a}\dfrac{18}{9+4\sqrt{3}}$.

Vậy diện tích nhỏ nhất khi $x = \dfrac{18}{9+4\sqrt{3}}$ m.

Chọn đáp án (D) .... □

CÂU 12. Một doanh nghiệp tư nhân A chuyên kinh doanh xe gắn máy các loại. Hiện nay doanh nghiệp đang tập trung vào chiến lược kinh doanh xe X với chi phí mua vào một chiếc là 27 triệu đồng và bán ra với giá 31 triệu đồng. Với giá bán này, số lượng xe mà khách hàng đã mua trong một năm là 600 chiếc. Nhằm mục tiêu đẩy mạnh hơn nữa lượng tiêu thụ dòng xe đang bán chạy này, doanh nghiệp dự định giảm giá bán. Bộ phận nghiên cứu thị trường ước tính rằng nếu giảm 1 triệu đồng mỗi chiếc xe thì số lượng xe bán ra trong một năm sẽ tăng thêm 200 chiếc. Hỏi theo đó, giá bán mới là bao nhiêu thì lợi nhuận thu được cao nhất?

(A) 30 triệu đồng. (B) $30,5$ triệu đồng. (C) $29,5$ triệu đồng. (D) 32 triệu đồng.

Lời giải.

Gọi giá bán mới là x (triệu đồng) với $x \in [27; 31]$.
Khi đó số xe bán ra là $600 + (31 - x) \cdot 200$.
Lợi nhuận thu được là

$$\begin{aligned} f(x) &= [600 + (31 - x) \cdot 200](x - 27) \\ &= (-200x + 6800)(x - 27) \\ &= -200x^2 + 12200x - 183600 \\ &= -200\left(x - \frac{61}{2}\right)^2 + 2450 \\ &\leq 2450. \end{aligned}$$

Vậy giá bán mới là $30,5$ triệu đồng thì lợi nhuận thu được là lớn nhất là 2 450 (triệu đồng).
Chọn đáp án (B) .... □

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.

CÂU 13. Người ta bơm xăng vào bình xăng của một xe ô tô. Biết rằng thể tích V (lít) của lượng xăng trong bình xăng tính theo thời gian bơm xăng t (phút) được cho bởi công thức

$$V(t) = 300(t^2 - t^3) + 4 \text{ với } 0 \leq t \leq 0{,}5.$$

Gọi $V'(t)$ là tốc độ tăng thể tích tại thời điểm t với $0 \leq t \leq 0{,}5$.

Mệnh đề	Đ	S
a) Lượng xăng trong bình ban đầu là 1 lít.		X
b) Lượng xăng lớn nhất bơm vào bình xăng là 41,5 lít.	X	
c) $V'(t) = 300(2t - 3t^2) + 4$, với $0 \leq t \leq 0{,}5$.		X
d) Xăng chảy vào bình xăng vào thời điểm ở giây thứ 30 có tốc độ tăng thể tích là lớn nhất.	X	

Lời giải.

a) Số xăng trong bình ban đầu là $V(0) = 4$ lít.

b) Lượng xăng lớn nhất bơm vào bình xăng là $V = V\left(\frac{1}{2}\right) = 41{,}5$ lít.

c) Xét hàm số $V(t) = 300(t^2 - t^3) + 4$ với $0 \leq t \leq 0{,}5$.
Đạo hàm $V'(t) = 300t(2 - 3t)$.

d) Cho $V'(t) = 0 \Leftrightarrow 300t(t - 3t) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0 \in [0; 0{,}5] \\ t = \frac{2}{3} \notin [0; 0,5]. \end{array}\right.$

Các giá trị $V(0) = 4$, $V\left(\frac{1}{2}\right) = 41{,}5$.

Xăng chảy vào bình xăng vào thời điểm ở giây thứ 30 có tốc độ tăng thể tích là lớn nhất.

Chọn đáp án | a sai | b đúng | c sai | d đúng | .... □

CÂU 14. Tại một xí nghiệp chuyên sản xuất vật liệu xây dựng, nếu trong một ngày xí nghiệp sản xuất x (m^3) sản phẩm thì phải bỏ ra các khoản chi phí bao gồm: 4 triệu đồng chi phí cố định; 0,2 triệu đồng chi phí cho mỗi mét khối sản phẩm và $0{,}001x^2$ triệu đồng chi phí bảo dưỡng máy móc. Biết rằng, mỗi ngày xí nghiệp sản xuất được tối đa 100 m^3 sản phẩm. Goi $C(x)$ là tổng chi phí để xí nghiệp sản xuất x (m^3) sản phẩm trong một ngày và $\overline{C}$ là chi phí trung bình trên mỗi mét khối sản phẩm.

Mệnh đề	Đ	S
a) $C = 0{,}2x + 0{,}001x^2 \quad$ với $0 \leq x \leq 100$.		X
b) Tổng chi phí khi sản xuất 100 m^3 sản phẩm là 34 triệu đồng.	X	

c) $\overline{C} = 0{,}001x + \dfrac{4}{x} + 0{,}2$ với $0 < x \leq 100$.	X	
d) $\overline{C}$ có giá trị thấp nhất bằng 0,326 triệu đồng (*kết quả làm tròn 3 chữ số thập phân*).	X	

Lời giải.

a) Tổng chi phí (triệu đồng) để xí nghiệp sản xuất x (m^3) sản phẩm trong một ngày là

$$C = C(x) = 4 + 0{,}2x + 0{,}001x^2 \text{ với } 0 \leq x \leq 100.$$

b) Thay $x = 100$ vào hàm $C(x)$, ta được kết quả 34 (triệu đồng).

c) Chi phí trung bình (triệu đồng) trên mỗi mét khối sản phẩm là

$$\overline{C} = \overline{C}(x) = \frac{C(x)}{x} = \frac{4 + 0{,}2x + 0{,}001x^2}{x} = 0{,}001x + \frac{4}{x} + 0{,}2 \text{ với } 0 < x \leq 100.$$

d) Ta có $\bar{C}'(x) = 0{,}001 - \dfrac{4}{x^2}$;

$$\overline{C}'(x) = 0 \Leftrightarrow 0{,}001 - \frac{4}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4\,000 \Leftrightarrow x = 20\sqrt{10} \in (0; 100].$$

Ta có $\overline{C}(20\sqrt{10}) = \dfrac{\sqrt{10}}{25} + \dfrac{1}{5} \approx 0,326$.

Bảng biến thiên

x	0		$20\sqrt{10}$		100
$\overline{C}'(x)$		$-$	0	$+$	
$\overline{C}(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\dfrac{\sqrt{10}}{25} + \dfrac{1}{5}$	$\nearrow$	$0{,}34$

Từ bảng biến thiên, ta thấy chi phí trung bình thấp nhất là $\bar{C}(20\sqrt{10}) \approx 0{,}326$ (triệu đồng/m^3 sản phẩm), đạt được khi $x = 20\sqrt{10} \approx 63$ (m^3).

Chọn đáp án | a sai | b đúng | c đúng | d đúng | ....□

CÂU 15. Nhà máy A chuyên sản xuất một loại sản phẩm cung cấp cho nhà máy B. Hai nhà máy thoả thuận rằng, hằng tháng A cung cấp cho B số lượng sản phẩm theo đơn đặt hàng của B (tối đa 100 tấn sản phẩm). Nếu số lượng đặt hàng là x tấn sản phẩm thì giá bán cho mỗi tấn sản phẩm là $P(x) = 45 - 0{,}001x^2$ (triệu đồng). Chi phí để A sản xuất x tấn sản phẩm trong một tháng là $C(x) = 100 + 30x$ (triệu đồng) (gồm 100 triệu đồng chi phí cố định và 30 triệu đồng cho mỗi tấn sản phẩm).

Mệnh đề	Đ	S
a) Chi phí để A sản xuất 10 tấn sảm phẩm trong một tháng là 400 triệu đồng.	X	
b) Số tiền A thu được khi bán 10 tấn sản phẩm cho B là 600 triệu đồng.		X
c) Lợi nhuận mà A thu được khi bán x tấn sản phẩm ($0 \leq x \leq 100$) cho B là $-0{,}001x^3 + 15x - 100$.	X	
d) A bán cho B khoảng 70,7 tấn sản phẩm mỗi tháng thì thu được lợi nhuận lớn nhất.	X	

Lời giải.

a) Chi phí để A sản xuất 10 tấn sảm phẩm trong một tháng là $C(10) = 100 + 30 \cdot 10 = 400$ (triệu)

b) Số tiền mà A thu được (gọi là doanh thu) từ việc bán x tấn sản phẩm ($0 \leq x \leq 100$) cho B là

$$R(x) = x \cdot P(x) = x\left(45 - 0{,}001x^2\right) = 45x - 0{,}001x^3 \text{ (triệu đồng)}.$$

Thay $x = 10$, ta được $R(10) = 449$ (triệu đồng).

c) Lợi nhuận (triệu đồng) mà A thu được là

$$P(x) = R(x) - C(x) = x\left(45 - 0{,}001x^2\right) - (100 + 30x) = -0{,}001x^3 + 15x - 100.$$

d) Xét hàm số $P(x) = -0{,}001x^3 + 15x - 100$ với $0 \le x \le 100$, ta có

$$P'(x) = -0{,}003x^2 + 15;$$
$$P'(x) = 0 \Leftrightarrow -0{,}003x^2 + 15 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 5\,000 \Leftrightarrow x = 50\sqrt{2} \in [0; 100].$$

Ta có $P(0) = -100$; $P(50\sqrt{2}) = 500\sqrt{2} - 100 \approx 607$; $P(100) = 400$.
Bảng biến thiên

x	0		$50\sqrt{2}$		100
y'		$+$	0	$-$	
y	100	$\nearrow$	$500\sqrt{2} - 100$	$\searrow$	400

Từ bảng biến thiên, ta có $\max\limits_{[0;100]} P = P(50\sqrt{2}) = 500\sqrt{2} - 100 \approx 607$.
Vậy A thu được lợi nhuận lớn nhất khi bán $50\sqrt{2} \approx 70{,}7$ tấn sản phẩm cho B mỗi tháng và lợi nhuận lớn nhất thu được khoảng 607 triệu đồng.

Chọn đáp án | a đúng | b sai | c đúng | d đúng | .... □

MỤC LỤC