

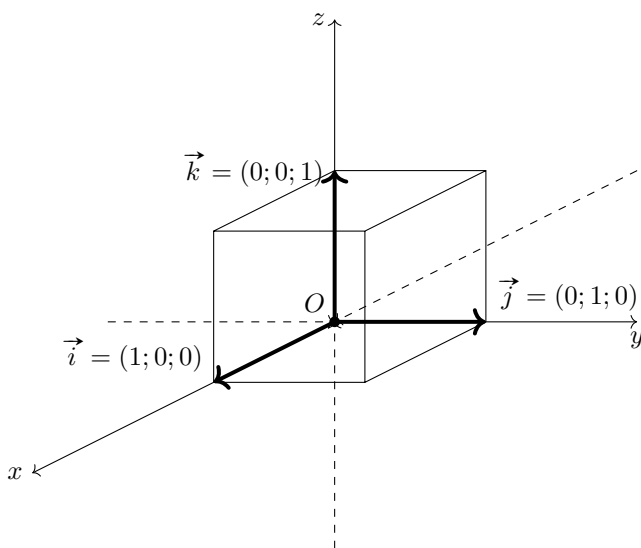
PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

Bài 1. HỆ TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Hệ trục tọa độ trong không gian

Trong không gian, xét ba trục tọa độ Ox, Oy, Oz vuông góc với nhau từng đôi một và chung một điểm gốc O . Gọi $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ là các véc-tơ đơn vị, tương ứng trên các trục Ox, Oy, Oz . Hệ ba trục như vậy gọi là hệ trục tọa độ vuông góc trong không gian.



- ✔ Điểm O gọi là gốc tọa độ.
- ✔ Trục Ox gọi là trục hoành; Trục Oy gọi là trục tung; Trục Oz gọi là trục cao.
- ✔ Các mặt phẳng chứa hai trục tọa độ gọi là các mặt phẳng tọa độ. Ta kí hiệu chúng lần lượt là $(Oxy), (Oyz), (Ozx)$.
- ✔ Véc-tơ đơn vị của trục Ox, Oy, Oz lần lượt là: $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.
- ✔ Các véc-tơ đơn vị đôi một vuông góc với nhau và có độ dài bằng 1: $\vec{i}^2 = \vec{j}^2 = \vec{k}^2 = 1$ và $\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{i} \cdot \vec{k} = 0$

2. Tọa độ của véc-tơ

⚡ ĐỊNH NGHĨA 1.1. $\vec{u} = (x; y; z) \Leftrightarrow \vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ với $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ là các véc-tơ đơn vị, tương ứng trên các trục Ox, Oy, Oz .

⚡ TÍNH CHẤT 1.1. Cho hai véc-tơ $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3), \vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$ và k là số thực tùy ý, ta có

a) $\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1; a_2 + b_2; a_3 + b_3).$

b) $\vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1; a_2 - b_2; a_3 - b_3).$

c) $k \cdot \vec{a} = (ka_1; ka_2; ka_3).$

d) $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2 \\ a_3 = b_3. \end{cases}$

e) \vec{a} cùng phương $\vec{b}, (\vec{b} \neq \vec{0}) \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = kb_1 \\ a_2 = kb_2 \\ a_3 = kb_3 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}$ với $b_1, b_2, b_3 \neq 0$.

QUICK NOTE

QUICK NOTE

$$f) \vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3.$$

$$g) \vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3 = 0.$$

$$h) \vec{a}^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2, \text{ suy ra } |\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.$$

$$i) \cos(\vec{a}; \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}} \text{ với } \vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0}.$$

3. Tọa độ của điểm

ĐỊNH NGHĨA 1.2. $M(x; y; z) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = (x; y; z) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ (x : hoành độ, y : tung độ, z : cao độ).

Chú ý: Trong hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(x; y; z)$ ta có các khẳng định sau:

$$a) M \equiv O \Leftrightarrow M(0; 0; 0).$$

$$b) M \in (Oxy) \Leftrightarrow z = 0, \text{ tức là } M(x; y; 0)$$

$$c) M \in (Oyz) \Leftrightarrow x = 0, \text{ tức là } M(0; y; z)$$

$$d) M \in (Oxz) \Leftrightarrow y = 0, \text{ tức là } M(x; 0; z)$$

$$e) M \in Ox \Leftrightarrow y = z = 0, \text{ tức là } M(x; 0; 0)$$

$$f) M \in Oy \Leftrightarrow x = z = 0, \text{ tức là } M(0; y; 0)$$

$$g) M \in Oz \Leftrightarrow x = y = 0, \text{ tức là } M(0; 0; z)$$

TÍNH CHẤT 1.2. Cho bốn điểm không đồng phẳng $A(x_A; y_A; z_A), B(x_B; y_B; z_B), C(x_C; y_C; z_C)$ và $D(x_D; y_D; z_D)$.

$$a) \overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A).$$

$$b) AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}.$$

c) Tọa độ trung điểm I của đoạn thẳng AB là

$$I\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}; \frac{z_A + z_B}{2}\right).$$

d) Tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC là

$$G\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}; \frac{y_A + y_B + y_C}{3}; \frac{z_A + z_B + z_C}{3}\right).$$

e) Tọa độ trọng tâm G của tứ diện $ABCD$ là

$$G\left(\frac{x_A + x_B + x_C + x_D}{4}; \frac{y_A + y_B + y_C + y_D}{4}; \frac{z_A + z_B + z_C + z_D}{4}\right).$$

4. Phương trình mặt cầu

a) Mặt cầu tâm $I(a; b; c)$, bán kính R có phương trình $(S): (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$.

b) Xét phương trình $x^2 + y^2 + z^2 + 2ax + 2by + 2cz + d = 0$. (*) Ta có

$$\begin{aligned} (*) &\Leftrightarrow (x^2 + 2ax) + (y^2 + 2by) + (z^2 + 2cz) = -d \\ &\Leftrightarrow (x+a)^2 + (y+b)^2 + (z+c)^2 = -d + a^2 + b^2 + c^2. \end{aligned}$$

Để phương trình (*) là phương trình mặt cầu $\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 > -d$.

Khi đó (S) có $\begin{cases} \text{tâm } I(-a; -b; -c) \\ \text{bán kính } R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}. \end{cases}$

c) Đặc biệt: $(S): x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, suy ra (S) có $\begin{cases} \text{tâm } O(0; 0; 0) \\ \text{bán kính } R. \end{cases}$

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Dạng 1. Tìm tọa độ điểm, véc-tơ liên quan đến hệ trục $Oxyz$

☑ Áp dụng các công thức tọa độ véc-tơ.

☑ Áp dụng các công thức tọa độ điểm.

⚠ Chú ý: Xét tam giác ABC , ta có các điểm đặc biệt sau:

☑ Tọa độ trọng tâm tam giác ABC là $G\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}; \frac{y_A + y_B + y_C}{3}; \frac{z_A + z_B + z_C}{3}\right)$.

☑ A' là chân đường cao kẻ từ A của tam giác $ABC \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AA'} \perp \overrightarrow{BC} \\ \overrightarrow{BA'} \text{ và } \overrightarrow{BC} \text{ cùng phương.} \end{cases}$

☑ H là trực tâm tam giác $ABC \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC} \\ \overrightarrow{BH} \perp \overrightarrow{AC} \\ \overrightarrow{AH}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \text{ đồng phẳng.} \end{cases}$

☑ D là chân đường phân giác trong của góc A của tam giác $ABC \Leftrightarrow \overrightarrow{DB} = -\frac{AB}{AC}\overrightarrow{DC}$.

☑ E là chân đường phân giác ngoài của góc A của tam giác $ABC \Leftrightarrow \overrightarrow{EB} = \frac{AB}{AC}\overrightarrow{EC}$.

☑ I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $ABC \Leftrightarrow \begin{cases} IA = IB = IC \\ \overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \text{ đồng phẳng.} \end{cases}$

☑ J là tâm đường tròn nội tiếp tam giác $ABC \Leftrightarrow J$ là chân đường phân giác trong của góc B của tam giác ABD , với D là chân đường phân giác trong của góc A của tam giác ABC .

QUICK NOTE

1. VÍ DỤ MINH HỌA

VÍ DỤ 1. Trong không gian $Oxyz$, cho các véc-tơ $\vec{a} = (5; -7; 2)$, $\vec{b} = (0; 3; 4)$, $\vec{c} = (-1; 2; 3)$. Tìm tọa độ các véc-tơ $\vec{u} = 2\vec{a} - \vec{b}$, $\vec{v} = 3\vec{a} + 4\vec{b} + 2\vec{c}$.

VÍ DỤ 2. Trong không gian $Oxyz$, cho các véc-tơ $\vec{u} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{v} = -\frac{3}{2}\vec{i} + \vec{j} - \frac{1}{2}\vec{k}$, $\vec{w} = 6\vec{i} + m\vec{j} - n\vec{k}$.

a) Chứng minh \vec{u} và \vec{v} cùng phương.

b) Tìm m và n để véc-tơ \vec{u} và \vec{w} cùng phương.

VÍ DỤ 3. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A = (1; -1; 0)$, $B = (3; -4; 1)$, $C = (-2; 0; 1)$.

a) Chứng minh ba điểm A, B, C là ba đỉnh của một tam giác.

b) Tìm tọa độ điểm D sao cho tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.

c) Tìm tọa độ giao điểm E của đường thẳng AB với mặt phẳng tọa độ Oyz .

VÍ DỤ 4. Trong không gian $Oxyz$, cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ biết $A(0; 1; 3)$, $B(-1; 2; 1)$, $B'(-2; 1; 0)$, $C'(5; 3; 2)$. Tìm tọa độ các đỉnh A' và C .

2. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

CÂU 1. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, tìm tọa độ điểm H là hình chiếu vuông góc của điểm $A(2; 1; -1)$ lên trục tung.

(A) $H(2; 0; -1)$.

(B) $H(0; 1; 0)$.

(C) $H(0; 1; -1)$.

(D) $H(2; 0; 0)$.

QUICK NOTE

CÂU 2. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1; 2; -1)$, $B(2; -1; 3)$, $C(-3; 5; 1)$. Tìm tọa độ điểm D sao cho tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.

- (A) $D(-2; 8; -3)$. (B) $D(-4; 8; -5)$. (C) $D(-2; 2; 5)$. (D) $D(-4; 8; -3)$.

CÂU 3. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxyz$, cho véc-tơ $\vec{a} = (2; -2; -4)$, $\vec{b} = (1; -1; 1)$. Mệnh đề nào dưới đây sai?

- (A) $\vec{a} + \vec{b} = (3; -3; -3)$. (B) \vec{a} và \vec{b} cùng phương.
(C) $|\vec{b}| = \sqrt{3}$. (D) $\vec{a} \perp \vec{b}$.

CÂU 4. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai véc-tơ $\vec{a} = (2; -3; 1)$ và $\vec{b} = (-1; 0; 4)$. Tìm tọa độ véc-tơ $\vec{u} = -2\vec{a} + 3\vec{b}$.

- (A) $\vec{u} = (-7; 6; -10)$. (B) $\vec{u} = (-7; 6; 10)$.
(C) $\vec{u} = (7; 6; 10)$. (D) $\vec{u} = (-7; -6; 10)$.

CÂU 5. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(2; 1; -1)$, $B(3; 3; 1)$, $C(4; 5; 3)$. Khẳng định nào đúng?

- (A) $AB \perp AC$. (B) A, B, C thẳng hàng.
(C) $AB = AC$. (D) O, A, B, C là 4 đỉnh của một tứ diện.

CÂU 6. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(-1; 5; 3)$ và $M(2; 1; -2)$. Tìm tọa độ điểm B biết M là trung điểm của đoạn AB .

- (A) $B\left(\frac{1}{2}; 3; \frac{1}{2}\right)$. (B) $B(-4; 9; 8)$. (C) $B(5; 3; -7)$. (D) $B(5; -3; -7)$.

CÂU 7. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1; 2; 3)$. Hình chiếu vuông góc của điểm A trên mặt phẳng (Oxy) là điểm

- (A) $P(1; 0; 0)$. (B) $N(1; 2; 0)$. (C) $Q(0; 2; 0)$. (D) $M(0; 0; 3)$.

CÂU 8. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(2; -1; 3)$. Hình chiếu của A trên trục Oz là

- (A) $Q(2; -1; 0)$. (B) $P(0; 0; 3)$. (C) $N(0; -1; 0)$. (D) $M(2; 0; 0)$.

CÂU 9. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(1; 0; 2)$, $B(-2; 1; 3)$, $C(3; 2; 4)$ và $D(6; 9; -5)$. Tọa độ trọng tâm của tứ diện $ABCD$ là

- (A) $(2; 3; 1)$. (B) $(2; 3; -1)$. (C) $(-2; 3; 1)$. (D) $(2; -3; 1)$.

CÂU 10. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2; 1; -2)$, $B(3; 0; -4)$. Tìm tọa độ điểm D là chân đường phân giác ngoài góc O của tam giác OAB .

- (A) $D\left(\frac{19}{8}; \frac{5}{8}; -\frac{11}{4}\right)$. (B) $D\left(\frac{1}{2}; \frac{5}{2}; 1\right)$.
(C) $D\left(\frac{9}{2}; -\frac{3}{2}; 1\right)$. (D) $D\left(\frac{21}{8}; \frac{3}{8}; -\frac{13}{8}\right)$.

Dạng 2. Tích vô hướng và ứng dụng

a) $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$.

b) $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3 = 0$.

c) $\vec{a}^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$, suy ra $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$.

d) $\cos(\vec{a}; \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$ với $\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$.

1. VÍ DỤ MINH HỌA

VÍ DỤ 1. Trong không gian $Oxyz$, cho vectơ $\vec{u} = (-2; -2; 0)$; $\vec{v} = (\sqrt{2}; \sqrt{2}; 2)$. Tính góc giữa vectơ \vec{u} và vectơ \vec{v} .

VÍ DỤ 2. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho các điểm $A(1; 2; 3)$, $B(2; 1; 5)$, $C(2; 4; 2)$. Tính góc giữa hai đường thẳng AB và AC .

VÍ DỤ 3. Trong không gian $Oxyz$, tìm số thực a để véc-tơ $\vec{u} = (a; 0; 1)$ vuông góc với véc-tơ $\vec{v} = (2; -1; 4)$.

VÍ DỤ 4. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; -2; -1)$, $B(1; 4; 3)$. Tính độ dài đoạn thẳng AB .

VÍ DỤ 5. Cho 2 véc-tơ \vec{a} và \vec{b} tạo với nhau một góc 120° . Tìm $|\vec{a} - \vec{b}|$, biết $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 5$.

2. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

CÂU 1. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai véc-tơ $\vec{u}(1; 2; 3)$ và $\vec{v}(-5; 1; 1)$. Khẳng định nào đúng?

- (A) $\vec{u} = \vec{v}$. (B) $\vec{u} \perp \vec{v}$. (C) $|\vec{u}| = |\vec{v}|$. (D) $\vec{u} \parallel \vec{v}$.

CÂU 2. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba véc-tơ $\vec{a} = (-1; 1; 0)$, $\vec{b} = (1; 1; 0)$, $\vec{c} = (1; 1; 1)$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

- (A) $|\vec{a}| = \sqrt{2}$. (B) $\vec{a} \perp \vec{b}$. (C) $|\vec{c}| = \sqrt{2}$. (D) $\vec{b} \perp \vec{c}$.

CÂU 3. Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{u} = (1; 0; -3)$ và $\vec{v} = (-1; -2; 0)$. Tính $\cos(\vec{u}; \vec{v})$.

- (A) $\cos(\vec{u}; \vec{v}) = -\frac{1}{5\sqrt{2}}$. (B) $\cos(\vec{u}; \vec{v}) = -\frac{1}{\sqrt{10}}$.
(C) $\cos(\vec{u}; \vec{v}) = \frac{1}{\sqrt{10}}$. (D) $\cos(\vec{u}; \vec{v}) = \frac{1}{5\sqrt{2}}$.

CÂU 4. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $M(2; 1; -2)$ và $N(4; -5; 1)$. Độ dài đoạn thẳng MN bằng

- (A) $\sqrt{41}$. (B) $\sqrt{7}$. (C) 49. (D) 7.

CÂU 5. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1; 1; 1)$, $B(-1; 1; 0)$, $C(3; 1; -1)$. Điểm M trên mặt phẳng (Oxz) cách đều ba điểm A , B , C có tọa độ là

- (A) $(0; \frac{5}{6}; \frac{7}{6})$. (B) $(\frac{7}{6}; 0; -\frac{5}{6})$. (C) $(\frac{5}{6}; 0; -\frac{7}{6})$. (D) $(\frac{6}{5}; 0; -\frac{6}{7})$.

CÂU 6. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $M(2; 3; -1)$, $N(-1; 1; 1)$, $P(1; m-1; 2)$. Với những giá trị nào của m thì tam giác MNP vuông tại N ?

- (A) $m = 3$. (B) $m = 2$. (C) $m = 1$. (D) $m = 0$.

CÂU 7. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(-1; -2; 3)$, $B(0; 3; 1)$, $C(4; 2; 2)$. Cosin của góc \widehat{BAC} là

- (A) $\frac{9}{\sqrt{35}}$. (B) $-\frac{9}{\sqrt{35}}$. (C) $-\frac{9}{2\sqrt{35}}$. (D) $\frac{9}{2\sqrt{35}}$.

CÂU 8. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(3; -4; 0)$, $B(-1; 1; 3)$, $C(3; 1; 0)$. Tìm tọa độ điểm D trên trục hoành sao cho $AD = BC$.

- (A) $D(-2; 0; 0)$ hoặc $D(-4; 0; 0)$. (B) $D(0; 0; 0)$ hoặc $D(-6; 0; 0)$.
(C) $D(6; 0; 0)$ hoặc $D(12; 0; 0)$. (D) $D(0; 0; 0)$ hoặc $D(6; 0; 0)$.

CÂU 9. Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC , biết $A(1; 1; 1)$, $B(5; 1; -2)$, $C(7; 9; 1)$. Tính độ dài đường phân giác trong AD của góc A .

- (A) $\frac{3\sqrt{74}}{2}$. (B) $2\sqrt{74}$. (C) $3\sqrt{74}$. (D) $\frac{2\sqrt{74}}{3}$.

CÂU 10. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $M(2; 0; -1)$, $N(1; -2; 3)$, $P(0; 1; 2)$. Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác MNP .

- (A) $\frac{7\sqrt{11}}{10}$. (B) $\frac{7\sqrt{7}}{10}$. (C) $\frac{7\sqrt{7}}{5}$. (D) $\frac{7\sqrt{11}}{5}$.

Dạng 3. Phương trình mặt cầu

a) Xác định tâm và bán kính mặt cầu.

☑ Phương trình mặt cầu $(S): (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$ có tâm $I(a; b; c)$ bán kính R .

☑ Phương trình: $x^2 + y^2 + z^2 + 2ax + 2by + 2cz + d = 0$ với điều kiện $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$ là phương trình mặt cầu tâm $I(-a; -b; -c)$, có bán kính là $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$.

b) Viết phương trình mặt cầu (S) .

QUICK NOTE

QUICK NOTE

Dạng 1. Biết (S) có tâm $I(a; b; c)$ và đi qua điểm A .

Bán kính $R = IA = \sqrt{(x_A - a)^2 + (y_A - b)^2 + (z_A - c)^2}$.

Dạng 2. Biết (S) có đường kính AB .

Bán kính $R = \frac{AB}{2} = \frac{\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}}{2}$.

Tâm $I\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}; \frac{z_A + z_B}{2}\right)$ là trung điểm AB .

Dạng 3. Mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.

Tâm $I(a; b; c)$ là nghiệm hệ phương trình
$$\begin{cases} IA = IB \\ IA = IC \\ IA = ID \end{cases}$$
. Bán kính $R = IA$.

Dạng 4. Mặt cầu có tâm $I(a; b; c)$ và tiếp xúc mặt phẳng $(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0$.

Tâm $I(a; b; c)$. Bán kính $R = d[I, (\alpha)] = \frac{|Aa + Bb + Cc + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$.

1. VÍ DỤ MINH HỌA

VÍ DỤ 1. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 9$. Tính tọa độ tâm I và bán kính R của (S) .

VÍ DỤ 2. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y + 6z - 2 = 0$. Tính tọa độ tâm I và bán kính R của (S) .

VÍ DỤ 3. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, Tính bán kính (S) mặt cầu tâm $I(6, 3, -4)$ và tiếp xúc với Ox .

VÍ DỤ 4. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z + 5 = 0$. Tính diện tích của mặt cầu (S) .

VÍ DỤ 5. Trong các phương trình sau, phương trình nào là phương trình của mặt cầu

A $x^2 + y^2 + z^2 - 10xy - 8y + 2z - 1 = 0$.

B $3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 2x - 6y + 4z - 1 = 0$.

C $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2x - 6y + 4z + 9 = 0$.

D $x^2 + (y-z)^2 - 2x - 4(y-z) - 9 = 0$.

VÍ DỤ 6. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - (2m-2)x + 3my + (6m-2)z - 7 = 0$. Gọi R là bán kính của (S) , tìm m để R đạt giá trị nhỏ nhất.

VÍ DỤ 7. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt cầu (S) có tâm $I(1; -2; 0)$, bán kính $R = 5$. Viết phương trình của mặt cầu (S) .

VÍ DỤ 8. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(2; 4; 1)$, $B(-2; 2; -3)$. Viết phương trình mặt cầu có đường kính AB .

VÍ DỤ 9. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt cầu (S) có tâm $I(-1; 4; 2)$ và có thể tích $V = 972\pi$. Viết phương trình của mặt cầu (S) .

VÍ DỤ 10. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt cầu (S) đi qua $A(0, 2, 0)$, $B(2; 3; 1)$, $C(0, 3; 1)$ và có tâm ở trên mặt phẳng (Oxz) . Viết phương trình của mặt cầu (S) .

VÍ DỤ 11. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(2, 0, 0)$, $B(0, 4, 0)$, $C(0, 0, 4)$. Viết phương trình mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$ (O là gốc tọa độ).

2. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

CÂU 1. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu có phương trình $(x+1)^2 + (y-3)^2 + z^2 = 16$. Tìm tọa độ tâm I và bán kính R của mặt cầu đó.

A $I(-1; 3; 0)$, $R = 4$.

B $I(1; -3; 0)$, $R = 4$.

C $I(-1; 3; 0)$, $R = 16$.

D $I(1; -3; 0)$, $R = 16$.

CÂU 2. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y + 6z - 1 = 0$. Tâm của mặt cầu là điểm

A $J(2; -1; -3)$.

B $I(2; -1; 3)$.

C $K(-2; 1; 3)$.

D $G(-2; 1; -3)$.

QUICK NOTE

CÂU 3. Trong không gian $Oxyz$, phương trình nào dưới đây là phương trình mặt cầu tâm $I(1; 0; -2)$, bán kính $r = 4$?

- (A) $(x-1)^2 + y^2 + (z+2)^2 = 16$. (B) $(x+1)^2 + y^2 + (z-2)^2 = 16$.
(C) $(x+1)^2 + y^2 + (z-2)^2 = 4$. (D) $(x-1)^2 + y^2 + (z+2)^2 = 4$.

CÂU 4. Điều kiện cần và đủ để $x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z + m^2 - 9m + 4 = 0$ là phương trình của một mặt cầu là

- (A) $m > 0$. (B) $m < -1$ hoặc $m > 10$.
(C) $-1 \leq m \leq 10$. (D) $-1 < m < 10$.

CÂU 5. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; -2; 7)$, $B(-3; 8; -1)$. Mặt cầu đường kính AB có phương trình là

- (A) $(x+1)^2 + (y-3)^2 + (z-3)^2 = \sqrt{45}$. (B) $(x-1)^2 + (y+3)^2 + (z+3)^2 = 45$.
(C) $(x-1)^2 + (y-3)^2 + (z+3)^2 = \sqrt{45}$. (D) $(x+1)^2 + (y-3)^2 + (z-3)^2 = 45$.

CÂU 6. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1; -2; 3)$. Gọi I là hình chiếu vuông góc của M trên trục Ox . Phương trình nào sau đây là phương trình của mặt cầu tâm I bán kính IM ?

- (A) $(x-1)^2 + y^2 + z^2 = \sqrt{13}$. (B) $(x-1)^2 + y^2 + z^2 = 13$.
(C) $(x+1)^2 + y^2 + z^2 = 13$. (D) $(x+1)^2 + y^2 + z^2 = 17$.

CÂU 7. Cho điểm $I(1; -2; 3)$. Phương trình mặt cầu tâm I và tiếp xúc với trục Oy là

- (A) $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = \sqrt{10}$. (B) $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 10$.
(C) $(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 10$. (D) $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 9$.

CÂU 8. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $M(2; 1; 4)$, $N(5; 0; 0)$, $P(1; -3; 1)$. Gọi $I(a; b; c)$ là tâm mặt cầu tiếp xúc với mặt phẳng (Oyz) đồng thời đi qua các điểm M, N, P . Tìm c biết $a + b + c < 5$.

- (A) 3. (B) 1. (C) 2. (D) 4.

CÂU 9. Trong không gian $Oxyz$, gọi $I(a; b; c)$ là tâm mặt cầu đi qua $A(1; -1; 4)$ và tiếp xúc với tất cả các mặt phẳng tọa độ. Tính $P = a - b + c$.

- (A) $P = 6$. (B) $P = -4$. (C) $P = -2$. (D) $P = 9$.

CÂU 10. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt cầu (S) đi qua điểm $O(0; 0; 0)$ và cắt các tia Ox, Oy, Oz lần lượt tại các điểm A, B, C khác O thỏa mãn tam giác ABC có trọng tâm là điểm $G(2; 4; 8)$. Tọa độ tâm mặt cầu (S) là

- (A) $(3; 6; 12)$. (B) $(\frac{2}{3}; \frac{4}{3}; \frac{8}{3})$. (C) $(1; 2; 3)$. (D) $(\frac{4}{3}; \frac{8}{3}; \frac{16}{3})$.

Dạng 4. Các bài toán cực trị

1. VÍ DỤ MINH HỌA

VÍ DỤ 1. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2; 1; 3)$, $B(4; 2; 1)$. Tìm tọa độ điểm M trên mặt phẳng tọa độ (Oyz) sao cho $S = MA + MB$ nhỏ nhất.

VÍ DỤ 2. Trong không gian $Oxyz$, lấy điểm C trên tia Oz sao cho $OC = 1$. Trên hai tia Ox, Oy lần lượt lấy hai điểm A, B thay đổi sao cho $OA + OB = OC$. Tìm giá trị nhỏ nhất của bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $O.ABC$?

VÍ DỤ 3. Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{OA} = \vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}$, $B(2; 2; 1)$. Tìm tọa độ điểm M thuộc trục tung sao cho $MA^2 + MB^2$ nhỏ nhất.

VÍ DỤ 4. Trong không gian tọa độ cho điểm $A = (0; 2; -1)$ và điểm $B = (2; 0; 1)$. Điểm M trong mặt phẳng Oyz sao cho $MA^2 + MB^2$ đạt giá trị bé nhất là

- (A) $M = (0; 1; 0)$. (B) $M = (0; 2; 0)$. (C) $M = (0; 1; 2)$. (D) $M = (0; -1; 1)$.

2. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

CÂU 1. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(0; 0; -1)$, $B(-1; 1; 0)$, $C(1; 0; 1)$. Tìm điểm M sao cho $3MA^2 + 2MB^2 - MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

- (A) $M(\frac{3}{4}; \frac{1}{2}; -1)$. (B) $M(-\frac{3}{4}; \frac{3}{2}; -1)$.
(C) $M(-\frac{3}{4}; \frac{1}{2}; -1)$. (D) $M(-\frac{3}{4}; \frac{1}{2}; 2)$.

QUICK NOTE

CÂU 2. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho ba điểm $A(-1; 2; 2)$, $B(3; -1; -2)$, $C(-4; 0; 3)$. Tọa độ điểm I trên mặt phẳng (Oxz) sao cho biểu thức $|\vec{IA} - 2\vec{IB} + 3\vec{IC}|$

đạt giá trị nhỏ nhất là

A $I\left(-\frac{19}{2}; 0; \frac{15}{2}\right)$.

B $I\left(-\frac{19}{2}; 0; -\frac{15}{2}\right)$.

C $I\left(\frac{19}{4}; 0; \frac{15}{4}\right)$.

D $I\left(\frac{19}{2}; 0; -\frac{15}{2}\right)$.

CÂU 3. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-2; 4; 2)$ và $B(1; 1; 4)$, điểm M nằm trên mặt phẳng (Oxy) sao cho $MA + MB$ nhỏ nhất. Khi đó độ dài đoạn thẳng OM bằng

A $2\sqrt{2}$.

B 3.

C $\sqrt{10}$.

D $\sqrt{34}$.

CÂU 4. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $A(1; 1; 1)$, $B(2; 1; -1)$, $C(0; 4; 6)$. Điểm M di chuyển trên trục Ox . Tìm tọa độ điểm M để $P = |\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}|$ có giá trị nhỏ nhất.

A $M(-2; 0; 0)$.

B $M(2; 0; 0)$.

C $M(-1; 0; 0)$.

D $M(1; 0; 0)$.

Bài 2. PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẪNG

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Tích có hướng của hai véc-tơ

ĐỊNH NGHĨA 2.1. Trong không gian $Oxyz$, cho hai véc-tơ $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$, $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$. Tích có hướng của hai véc-tơ \vec{a} và \vec{b} là một véc-tơ, kí hiệu là $[\vec{a}, \vec{b}]$ và được xác định như sau

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right) = (a_2b_3 - a_3b_2; a_3b_1 - a_1b_3; a_1b_2 - a_2b_1)$$

⚡ TÍNH CHẤT 2.1.

- \vec{a} cùng phương với $\vec{b} \Leftrightarrow [\vec{a}, \vec{b}] = \vec{0}$.
- $[\vec{a}, \vec{b}]$ vuông góc với cả hai véc-tơ \vec{a} và \vec{b} .
- $[\vec{b}, \vec{a}] = -[\vec{a}, \vec{b}]$.
- $|[\vec{a}, \vec{b}]| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\vec{a}, \vec{b})$.

2. Ứng dụng của tích có hướng của hai véc-tơ

a) Xét sự đồng phẳng của ba véc-tơ:

- ☑ Ba véc-tơ $\vec{a}; \vec{b}; \vec{c}$ đồng phẳng $\Leftrightarrow [\vec{a}, \vec{b}] \cdot \vec{c} = 0$.
- ☑ Bốn điểm A, B, C, D tạo thành tứ diện $\Leftrightarrow [\vec{AB}, \vec{AC}] \cdot \vec{AD} \neq 0$.

b) Diện tích hình bình hành: $S_{ABCD} = |[\vec{AB}, \vec{AD}]|$.

c) Tính diện tích tam giác: $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} |[\vec{AB}, \vec{AC}]|$.

d) Tính thể tích hình hộp: $V_{ABCD.A'B'C'D'} = |[\vec{AB}, \vec{AC}] \cdot \vec{AA'}|$.

e) Tính thể tích tứ diện: $V_{ABCD} = \frac{1}{6} |[\vec{AB}, \vec{AC}] \cdot \vec{AD}|$.

3. Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng

☑ Vectơ $\vec{n} \neq \vec{0}$ là vectơ pháp tuyến (VTPT) nếu giá của \vec{n} vuông góc với mặt phẳng (α) .

☑ *Chú ý:*

- Nếu \vec{n} là một VTPT của mặt phẳng (α) thì $k\vec{n} (k \neq 0)$ cũng là một VTPT của mặt phẳng (α) .
- Một mặt phẳng được xác định duy nhất nếu biết một điểm nó đi qua và một VTPT của nó.
- Nếu \vec{u}, \vec{v} có giá song song hoặc nằm trên mặt phẳng (α) thì $\vec{n} = [\vec{u}, \vec{v}]$ là một VTPT của (α) .

4. Phương trình tổng quát của mặt phẳng

☑ Trong không gian $Oxyz$, mọi mặt phẳng đều có phương trình dạng:

$$\boxed{Ax + By + Cz + D = 0} \text{ với } A^2 + B^2 + C^2 \neq 0.$$

☑ Nếu mặt phẳng (α) có phương trình $Ax + By + Cz + D = 0$ thì nó có một VTPT là $\vec{n} = (A; B; C)$.

☑ Phương trình mặt phẳng đi qua điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ và nhận vectơ $\vec{n} = (A; B; C)$ khác $\vec{0}$ là VTPT là

QUICK NOTE

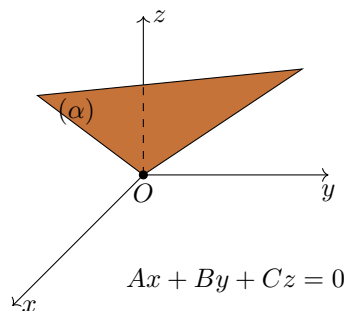
QUICK NOTE

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

🔍 Các trường hợp riêng:

Xét phương trình mặt phẳng (α) : $Ax + By + Cz + D = 0$ với $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$

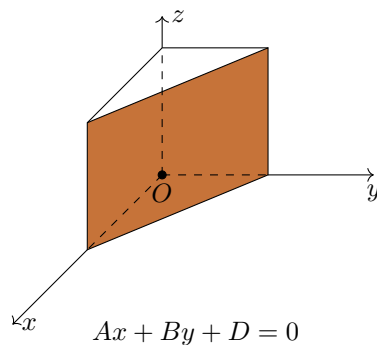
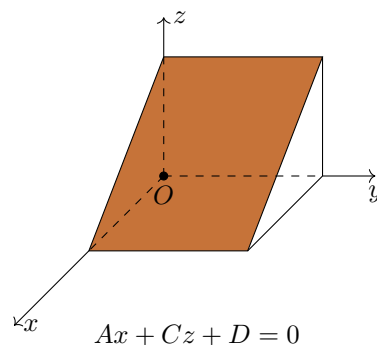
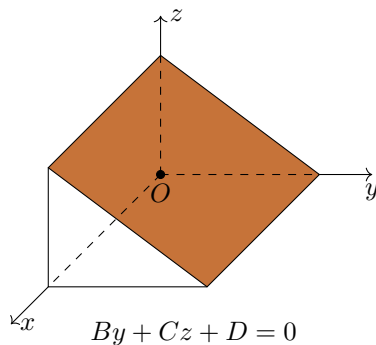
— Nếu $D = 0$ thì mặt phẳng (α) đi qua gốc tọa độ O .



— Nếu $A = 0, B \neq 0, C \neq 0$ thì mặt phẳng (α) song song hoặc chứa trục Ox .

— Nếu $A \neq 0, B = 0, C \neq 0$ thì mặt phẳng (α) song song hoặc chứa trục Oy .

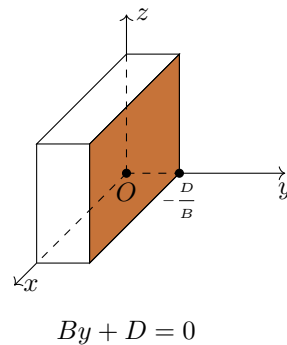
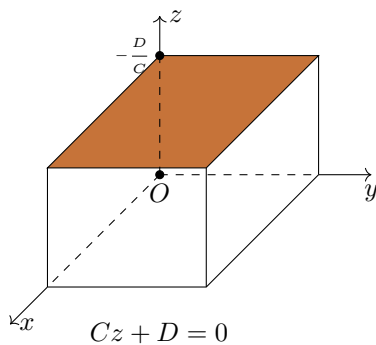
— Nếu $A \neq 0, B \neq 0, C = 0$ thì mặt phẳng (α) song song hoặc chứa trục Oz .

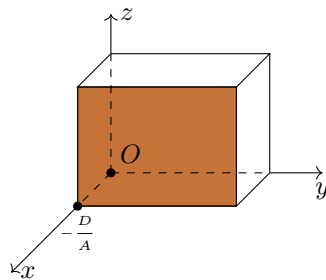


— Nếu $A = B = 0, C \neq 0$ thì mặt phẳng (α) song song hoặc trùng với (Oxy) .

— Nếu $A = C = 0, B \neq 0$ thì mặt phẳng (α) song song hoặc trùng với (Oxz) .

— Nếu $B = C = 0, A \neq 0$ thì mặt phẳng (α) song song hoặc trùng với (Oyz) .





$$Ax + D = 0$$

Chú ý:

- Nếu trong phương trình (α) không chứa ẩn nào thì (α) song song hoặc chứa trục tương ứng.
- Phương trình mặt phẳng theo đoạn chắn $(\alpha): \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$. Ở đây (α) cắt các trục tọa độ tại các điểm $(a; 0; 0)$, $(0; b; 0)$, $(0; 0; c)$ với $abc \neq 0$.

5. Vị trí tương đối giữa hai mặt phẳng

Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(\alpha): A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ và $(\beta): A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$.

- $(\alpha) \equiv (\beta) \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}$.
- $(\alpha) \parallel (\beta) \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}$.
- $(\alpha) \cap (\beta) \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$ hoặc $\frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$.
- $(\alpha) \perp (\beta) \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$.

6. Khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng

Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ và mặt phẳng $(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0$. Khi đó khoảng cách từ điểm M_0 đến mặt phẳng (α) được tính:

$$d(M_0, (\alpha)) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

7. Góc giữa hai mặt phẳng

Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(\alpha): A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ và $(\beta): A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$.

Khi đó Góc giữa (α) và (β) bằng hoặc bù với góc giữa hai VTPT $\vec{n}_\alpha, \vec{n}_\beta$. Tức là:

$$\cos((\alpha), (\beta)) = |\cos(\vec{n}_\alpha, \vec{n}_\beta)| = \frac{|\vec{n}_\alpha \cdot \vec{n}_\beta|}{|\vec{n}_\alpha| \cdot |\vec{n}_\beta|} = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

B. CÁC DẠNG TOÁN VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Dạng 1. Tích có hướng và ứng dụng

a) Xét sự đồng phẳng của ba véc-tơ:

- ☑ Ba véc-tơ $\vec{a}; \vec{b}; \vec{c}$ đồng phẳng $\Leftrightarrow [\vec{a}, \vec{b}] \cdot \vec{c} = 0$.
- ☑ Bốn điểm A, B, C, D tạo thành tứ diện $\Leftrightarrow [\vec{AB}, \vec{AC}] \cdot \vec{AD} \neq 0$.

b) Diện tích hình bình hành: $S_{ABCD} = |[\vec{AB}, \vec{AD}]|$.

c) Tính diện tích tam giác: $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} |[\vec{AB}, \vec{AC}]|$.

QUICK NOTE

QUICK NOTE

d) Tính thể tích hình hộp: $V_{ABCD.A'B'C'D'} = |[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \cdot \overrightarrow{AA'}|$.

e) Tính thể tích tứ diện: $V_{ABCD} = \frac{1}{6} |[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \cdot \overrightarrow{AD}|$.

1. Ví dụ minh họa

VÍ DỤ 1. Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a} = (1; 2; 1)$, $\vec{b} = (-1; 1; 2)$, $\vec{c} = (x; 3x; x+2)$. Tìm x để 3 véc-tơ \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} đồng phẳng.

VÍ DỤ 2. Trong không gian $Oxyz$, cho $A(1; 2; 0)$, $B(3; -1; 1)$ và $C(1; 1; 1)$. Tính diện tích tam giác ABC .

VÍ DỤ 3. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(1; 0; 1)$, $B(0; 2; 3)$, $C(2; 1; 0)$. Tính độ dài đường cao của tam giác ABC kẻ từ C .

VÍ DỤ 4. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hình bình hành $ABCD$. Biết $A(2; 1; -3)$, $B(0; -2; 5)$ và $C(1; 1; 3)$. Tính diện tích hình bình hành $ABCD$.

VÍ DỤ 5. Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ với $A(1; 2; 1)$, $B(0; 0; -2)$, $C(1; 0; 1)$, $D(2; 1; -1)$. Tính thể tích tứ diện $ABCD$.

VÍ DỤ 6. Cho tứ diện $ABCD$ có $A(0; 1; -1)$, $B(1; 1; 2)$, $C(1; -1; 0)$, $D(0; 0; 1)$. Tính độ dài đường cao AH của hình chóp $A.BCD$.

2. Bài tập trắc nghiệm

CÂU 5. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các véc-tơ $\vec{u} = (x; y; z)$, $\vec{v} = (x'; y'; z')$. Xác định mệnh đề đúng.

(A) $\vec{u} - \vec{v} = (x' - x; y' - y; z' - z)$.

(B) $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$.

(C) $\vec{u} + \vec{v} = (x' - x; y' - y; z' - z)$.

(D) $[\vec{u}, \vec{v}] = (xx'; yy'; zz')$.

CÂU 6. Cho $\vec{a} = (1; 2; -1)$, $\vec{b} = (-2; -1; 3)$. Tính $\vec{a} \wedge \vec{b}$.

(A) $\vec{a} \wedge \vec{b} = (-5; 1; -3)$.

(B) $\vec{a} \wedge \vec{b} = (5; 1; 3)$.

(C) $\vec{a} \wedge \vec{b} = (-5; -1; -3)$.

(D) $\vec{a} \wedge \vec{b} = (5; -1; 3)$.

CÂU 7. Trong không gian $Oxyz$, cho các vectơ $\vec{a} = (m; 1; 0)$, $\vec{b} = (2; m-1; 1)$, $\vec{c} = (1; m+1; 1)$. Tìm m để ba vectơ \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} đồng phẳng.

(A) $m = \frac{3}{2}$.

(B) $m = -2$.

(C) $m = -\frac{1}{2}$.

(D) $m = -1$.

CÂU 8. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(1; -2; 0)$, $B(1; 0; -1)$, $C(0; -1; 2)$ và $D(0; m; p)$. Tìm hệ thức liên hệ giữa m và p biết rằng bốn điểm A, B, C, D đồng phẳng.

(A) $2m + p = 0$.

(B) $m + p = 1$.

(C) $m + 2p = 3$.

(D) $2m - 3p = 0$.

CÂU 9. Trong không gian $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ với $A(1; 2; 1)$, $B(2; 1; 3)$, $C(3; 2; 2)$, $D(1; 1; 1)$. Độ dài chiều cao DH của tứ diện bằng

(A) $\frac{\sqrt{14}}{14}$.

(B) $\frac{3\sqrt{14}}{14}$.

(C) $\frac{3\sqrt{14}}{7}$.

(D) $\frac{4\sqrt{14}}{7}$.

CÂU 10. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(1; 0; 0)$, $B(0; 0; 1)$, $C(2; 1; 1)$. Diện tích của tam giác ABC bằng

(A) $\frac{\sqrt{11}}{2}$.

(B) $\frac{\sqrt{7}}{2}$.

(C) $\frac{\sqrt{6}}{2}$.

(D) $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

CÂU 11. Trong không gian $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ có thể tích bằng $\sqrt{35}$. Biết $B(1; -1; 2)$, $C(0; 1; 1)$, $D(-1; 0; -1)$. Đường cao AH của tứ diện bằng

(A) 3.

(B) 6.

(C) 12.

(D) 2.

CÂU 12. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(2; 3; 1)$, $B(-1; 2; 0)$, $C(1; 1; -2)$. H là trực tâm của tam giác ABC , độ dài đoạn OH bằng

(A) $\frac{\sqrt{870}}{12}$.

(B) $\frac{\sqrt{870}}{14}$.

(C) $\frac{\sqrt{870}}{15}$.

(D) $\frac{\sqrt{870}}{16}$.

CÂU 13. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ với $A(-3; 1; -1)$, $B(1; 2; m)$, $C(0; 2; -1)$, $D(4; 3; 0)$. Tìm tất cả các giá trị thực của m để thể tích khối tứ diện $ABCD$ bằng 10.

(A) $m = \pm 30$.

(B) $m = \pm 120$.

(C) $m = \pm 20$.

(D) $m = \pm 60$.

CÂU 14. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1; 2; -1)$, $B(2; 1; 1)$, $C(0; 1; 2)$. Gọi $H(a; b; c)$ là trực tâm của tam giác ABC . Giá trị của $a + b + c$ bằng

- A** 4. **B** 5. **C** 7. **D** 6.

Dạng 2. Xác định VTPT của mặt phẳng

- a) Tìm vec-tơ $\vec{n} \neq \vec{0}$ có giá của \vec{n} vuông góc với mặt phẳng (α) là vec-tơ pháp tuyến (VTPT) của (α) .
- b) Tìm hai vec-tơ \vec{u}, \vec{v} có giá song song hoặc nằm trên mặt phẳng (α) thì $\vec{n} = [\vec{u}, \vec{v}]$ là một VTPT của (α) .

A Nếu \vec{n} là một VTPT của mặt phẳng (α) thì $k\vec{n}$ ($k \neq 0$) cũng là một VTPT của mặt phẳng (α) .

☑ Nếu mặt phẳng (α) có phương trình $Ax + By + Cz + D = 0$ thì nó có một VTPT là $\vec{n} = (A; B; C)$.

1. Ví dụ minh họa

VÍ DỤ 1. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) có phương trình $3x + 2y - z + 1 = 0$. Tìm một vec-tơ pháp tuyến mặt phẳng (P) .

VÍ DỤ 2. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x - y + 3 = 0$. Véc-tơ nào dưới đây **không** phải là véc-tơ pháp tuyến của (P) ?

- A** $(3; -3; 0)$. **B** $(1; -1; 3)$. **C** $(1; -1; 0)$. **D** $(-1; 1; 0)$.

VÍ DỤ 3. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1; -2; 1)$, $B(-1; 3; 3)$, $C(2; -4; 2)$. Tìm vec-tơ pháp tuyến \vec{n} của mặt phẳng (ABC) .

VÍ DỤ 4. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): \frac{x}{3} + \frac{y}{2} + \frac{z}{1} = 1$. Tìm vec-tơ pháp tuyến của (P) .

VÍ DỤ 5. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 2; 3)$ và $B(2; 0; 2)$. Tìm vec-tơ pháp tuyến của mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB .

2. Bài tập trắc nghiệm

CÂU 1. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng $(P): 2x + z - 1 = 0$ có một véc-tơ pháp tuyến là

- A** $\vec{n}_3(2; 1; 0)$. **B** $\vec{n}_2(0; 2; 1)$. **C** $\vec{n}_1(2; 1; -1)$. **D** $\vec{n}_4(2; 0; 1)$.

CÂU 2. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x - z + 1 = 0$. Một véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) là

- A** $\vec{n} = (2; -1; 0)$. **B** $\vec{n} = (2; 0; 1)$. **C** $\vec{n} = (2; -1; 1)$. **D** $\vec{n} = (2; 0; -1)$.

CÂU 3. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $(P): 3x - y - 2 = 0$. Trong các vectơ sau, vectơ nào là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) ?

- A** $(3; 1; 2)$. **B** $(3; -1; -2)$. **C** $(3; 1; 0)$. **D** $(3; -1; 0)$.

CÂU 4. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho mặt phẳng $(P): 2x - 4y + 6z - 1 = 0$. Mặt phẳng (P) có một véc-tơ pháp tuyến là

- A** $\vec{n} = (1; -2; 3)$. **B** $\vec{n} = (2; 4; 6)$. **C** $\vec{n} = (1; 2; 3)$. **D** $\vec{n} = (-1; 2; 3)$.

CÂU 5. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, vectơ nào sau đây không phải là vec-tơ pháp tuyến của mặt phẳng $(P): x + 3y - 5z + 2 = 0$.

- A** $\vec{n}_1 = (-1; -3; 5)$. **B** $\vec{n}_2 = (-2; -6; -10)$.
C $\vec{n}_3 = (-3; -9; 15)$. **D** $\vec{n}_4 = (2; 6; -10)$.

CÂU 6. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 3x - 6y + 1 = 0$. Vectơ nào dưới đây là một vectơ pháp tuyến của (P) ?

- A** $\vec{n}_1 = (1; 0; -2)$. **B** $\vec{n}_2 = (1; -2; 1)$. **C** $\vec{n}_3 = (1; -2; 0)$. **D** $\vec{n}_4 = (-1; 2; 0)$.

CÂU 7. Tọa độ một véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (α) đi qua ba điểm $M(2; 0; 0)$, $N(0; -3; 0)$, $P(0; 0; 4)$ là

- A** $(2; -3; 4)$. **B** $(-6; 4; -3)$. **C** $(-6; -4; 3)$. **D** $(-6; 4; 3)$.

QUICK NOTE

QUICK NOTE

CÂU 8. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, mặt phẳng (Oxy) có một véc-tơ pháp tuyến là

- A** $(1; 1; 1)$. **B** $(0; 1; 0)$. **C** $(1; 0; 0)$. **D** $(0; 0; 1)$.

CÂU 9. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $M(1; 0; 0)$, $N(0; 2; 0)$, $P(0; 0; 3)$. Tìm một véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (MNP) .

- A** $\vec{n} = (6; 3; 2)$. **B** $\vec{n} = (1; 2; 3)$. **C** $\vec{n} = (-6; 1; 3)$. **D** $\vec{n} = (-1; -2; 6)$.

CÂU 10. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $P: y - 2z + 1 = 0$. Véc-tơ nào dưới đây là một véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) ?

- A** $\vec{n} = (1; -2; 1)$. **B** $\vec{n} = (1; -2; 0)$. **C** $\vec{n} = (0; 1; -2)$. **D** $\vec{n} = (0; 2; 4)$.

Dạng 3. Viết phương trình mặt phẳng

- ☑ Tìm một điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ thuộc $\text{mp}(P)$.
- ☑ Tìm một véc-tơ pháp tuyến của (P) là $\vec{n} = (A; B; C)$.
- ☑ Phương trình mặt phẳng đi qua điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ và nhận vectơ $\vec{n} = (A; B; C)$ khác $\vec{0}$ là VTPT là

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

! Trong trường hợp ta viết phương trình mặt phẳng (P) mà thiếu điểm đi qua hay thiếu véc-tơ pháp tuyến thì ta dùng dạng tổng quát :

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Ta đi xác định các hệ số A, B, C, D từ điều kiện bài toán.

1. Ví dụ minh họa

VÍ DỤ 1. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua điểm $M(1; 2; -3)$ và nhận $\vec{n} = (1; -2; 3)$ làm véc-tơ pháp tuyến.

VÍ DỤ 2. Viết phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB . Biết $A(2; 0; 1)$, $B(0; -2; 3)$.

VÍ DỤ 3. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua $M(-1; 2; 3)$ và vuông góc với đường thẳng d biết d đi qua hai điểm $A(2; -4; 3)$, $B(4; 5; 6)$.

VÍ DỤ 4. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua các điểm $A(-1; 0; 0)$, $B(0; 2; 0)$, $C(0; 0; -2)$.

VÍ DỤ 5. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(3; 3; 3)$ và song song với mặt phẳng $(Q): 2x - 3y + z - 6 = 0$.

VÍ DỤ 6. Viết phương trình mặt phẳng đi qua điểm $M(1; 2; -3)$ và song song với giá của mỗi véc-tơ $\vec{a} = (2; 1; 2)$, $\vec{b} = (3; 2; -1)$.

VÍ DỤ 7. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua ba điểm $A(2; -5; 1)$, $B(3; 4; -2)$, $C(0; 0; -1)$.

VÍ DỤ 8. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua hai điểm $A(0; 1; 0)$, $B(1; 2; -2)$ và vuông góc với mặt phẳng $(Q): 2x - y + 3z + 13 = 0$.

VÍ DỤ 9. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho điểm $M(1; -3; 2)$ và $(\alpha): x + 2y - 5z + 1 = 0$, $(\beta): 2x - 3y - z + 4 = 0$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm M , đồng thời vuông góc với hai mặt phẳng (α) và (β) .

2. Bài tập trắc nghiệm

CÂU 1. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $A(a; 0; 0)$, $B(0; b; 0)$, $C(0; 0; c)$, $(abc \neq 0)$. Khi đó phương trình mặt phẳng (ABC) là

- A** $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$. **B** $\frac{x}{b} + \frac{y}{a} + \frac{z}{c} = 1$. **C** $\frac{x}{a} + \frac{y}{c} + \frac{z}{b} = 1$. **D** $\frac{x}{c} + \frac{y}{b} + \frac{z}{a} = 1$.

CÂU 2. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(-1; 0; 1)$, $B(-2; 1; 1)$. Phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn AB là

- A** $x - y - 2 = 0$. **B** $x - y + 1 = 0$. **C** $x - y + 2 = 0$. **D** $-x + y + 2 = 0$.

QUICK NOTE

CÂU 3. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$. Phương trình mặt phẳng qua $A(2; 5; 1)$ và song song với mặt phẳng (Oxy) là

- (A) $2x + 5y + z = 0$. (B) $x - 2 = 0$. (C) $y - 5 = 0$. (D) $z - 1 = 0$.

CÂU 4. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(1; -1; 2)$; $B(2; 1; 1)$ và mặt phẳng $(P): x + y + z + 1 = 0$. Mặt phẳng (Q) chứa A, B và vuông góc với mặt phẳng (P) . Mặt phẳng (Q) có phương trình là

- (A) $3x - 2y - z - 3 = 0$. (B) $x + y + z - 2 = 0$.
(C) $-x + y = 0$. (D) $3x - 2y - z + 3 = 0$.

CÂU 5. Trong không gian với hệ tọa độ $(Oxyz)$, mặt phẳng (P) qua điểm $A(1; -3; 2)$ và vuông góc với hai mặt phẳng $(\alpha): x + 3 = 0$, $(\beta): z - 2 = 0$ có phương trình là

- (A) $y + 3 = 0$. (B) $y - 2 = 0$. (C) $2y - 3 = 0$. (D) $2x - 3 = 0$.

CÂU 6. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(1; -1; 5)$, $B(0; 0; 1)$. Mặt phẳng chứa A, B và song song với Oy có phương trình là

- (A) $2x + z - 3 = 0$. (B) $x - 4z + 2 = 0$. (C) $4x - z + 1 = 0$. (D) $4x - z - 1 = 0$.

CÂU 7. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(5; -4; 2)$ và $B(1; 2; 4)$. Mặt phẳng đi qua A và vuông góc với đường thẳng AB là

- (A) $3x - y + 3z - 25 = 0$. (B) $2x - 3y - z + 8 = 0$.
(C) $3x - y + 3z - 13 = 0$. (D) $2x - 3y - z - 20 = 0$.

CÂU 8. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho $A(1; -1; 2)$, $B(2; 1; 1)$ và mặt phẳng $P: x + y + z + 1 = 0$. Mặt phẳng (Q) chứa A, B và vuông góc với mặt phẳng (P) . Tìm phương trình mặt phẳng (Q) .

- (A) $-x + y = 0$. (B) $3x - 2y - x + 3 = 0$.
(C) $x + y + z - 2 = 0$. (D) $3x - 2y - x - 3 = 0$.

CÂU 9. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (α) đi qua điểm $A(2; -1; 5)$ và vuông góc với hai mặt phẳng $(P): 3x - 2y + z + 7 = 0$ và $(Q): 5x - 4y + 3z + 1 = 0$. Phương trình của mặt phẳng (α) là

- (A) $x + 2y + z - 5 = 0$. (B) $2x + 4y + 2z + 10 = 0$.
(C) $x + 2y - z + 5 = 0$. (D) $2x - 4y - 2z - 10 = 0$.

CÂU 10. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho điểm $H(2; 1; 1)$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua H và cắt các trục tọa độ tại A, B, C sao cho H là trọng tâm tam giác ABC . Hãy viết phương trình mặt phẳng (P) .

- (A) $2x + y + z - 6 = 0$. (B) $x + 2y + z - 6 = 0$.
(C) $x + 2y + 2z - 6 = 0$. (D) $2x + y + z + 6 = 0$.

CÂU 11. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2; -1; 1)$. Phương trình mặt phẳng (α) đi qua các hình chiếu của điểm A trên các trục tọa độ là

- (A) $\frac{x}{2} + \frac{y}{1} + \frac{z}{1} = 1$. (B) $\frac{x}{2} + \frac{y}{-1} + \frac{z}{1} = -1$.
(C) $\frac{x}{2} + \frac{y}{-1} + \frac{z}{1} = 1$. (D) $\frac{x}{2} + \frac{y}{-1} + \frac{z}{1} = 0$.

CÂU 12. Trong không gian hệ tọa độ $Oxyz$, cho phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z - 11 = 0$. Viết phương trình mặt phẳng (α) , biết (α) song song với $(P): 2x + y - 2z + 11 = 0$ và cắt mặt cầu (S) theo tiết diện là một đường tròn có chu vi bằng 8π .

- (A) $2x + y - 2x - 11 = 0$. (B) $2x - y - 2z - 7 = 0$.
(C) $2x + y - 2z - 5 = 0$. (D) $2x + y - 2z - 7 = 0$.

CÂU 13. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(-1; 0; 3)$. Hỏi có bao nhiêu mặt phẳng (P) đi qua điểm M và cắt các trục Ox, Oy, Oz lần lượt tại A, B, C sao cho $3OA = 2OB = OC \neq 0$?

- (A) 3. (B) 8. (C) 4. (D) 2.

CÂU 14. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z = 0$ và điểm $A(2; 2; 0)$. Viết phương trình mặt phẳng (OAB) , biết rằng điểm B thuộc mặt cầu (S) , có hoành độ dương và tam giác OAB đều.

- (A) $x - y - 2z = 0$. (B) $x - y + z = 0$. (C) $x - y - z = 0$. (D) $x - y + 2z = 0$.

CÂU 15. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(3; 2; -1)$ và đi qua điểm $A(2; 1; 2)$. Mặt phẳng nào dưới đây tiếp xúc với (S) tại A ?

QUICK NOTE

A $x + y - 3z - 8 = 0.$

C $x + y + 3z - 9 = 0.$

B $x - y - 3z + 3 = 0.$

D $x + y - 3z + 3 = 0.$

CÂU 16. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, Cho mặt phẳng $(Q) : x - y + 2z + 3 = 0$, hai điểm $A(0; 1; 2), B(3; 1; -4)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) song song mặt phẳng (Q) sao cho khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (P) gấp 2 lần khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (P) .

A $(P) : x - y + 2z - 12 = 0$ hoặc $(P) : x - y + 2z = 0.$

B $(P) : x - y + 2z + \frac{3}{2} = 0.$

C $(P) : x - y + 2z + 15 = 0$ hoặc $(P) : x - y + 2z + 3 = 0.$

D $(P) : x - y + 2z + 15 = 0.$

Dạng 4. Tìm tọa độ điểm liên quan đến mặt phẳng

Để tìm hình chiếu vuông góc H của điểm M trên mặt phẳng (P) ta làm như sau:

Cách 1:

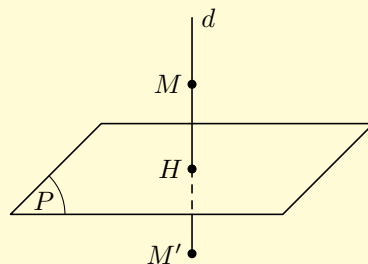
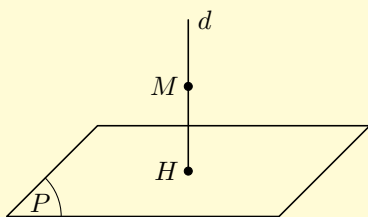
- ☑ Gọi $H(x; y; z)$ là hình chiếu vuông góc của M trên (P) .
- ☑ Tính $\overrightarrow{AH} = (x - x_0; y - y_0; z - z_0)$ và xác định VTPT \vec{n} của (P) .
- ☑ \overrightarrow{AH} và \vec{n} cùng phương $\Rightarrow \overrightarrow{AH} = t \cdot \vec{n} \Rightarrow$ Tọa độ H theo t .
- ☑ $H \in (P) \Rightarrow t = t_0$. Từ đó suy ra tọa độ điểm H .

Cách 2:

- ☑ Gọi d là đường thẳng đi qua M và vuông góc với (P) . Viết phương trình tham số của d

$$d: \begin{cases} x = x_M + at \\ y = y_M + bt \quad (*) \\ z = z_M + ct \end{cases}, \text{ trong đó } \vec{n} = (a; b; c) \text{ là véc-tơ pháp tuyến của } (P).$$

- ☑ Sử dụng $(*)$ để ghi thành tọa độ cho H , tức là $H(x_M + at; y_M + bt; z_M + ct)$.
- ☑ Thay tọa độ của H vào phương trình của (P) để tìm t , từ đó tìm được H .



! Nếu đề bài có thêm yêu cầu tìm điểm M' đối xứng với M qua (P) :

- ☑ Ta vẫn phải giải bài toán tìm hình chiếu vuông góc H của M trên (P) (như trên).
- ☑ Tiếp tục cho M' đối xứng với M qua H và tìm được M' bởi công thức:

$$\begin{cases} x_{M'} = 2x_H - x_M \\ y_{M'} = 2y_H - y_M \\ z_{M'} = 2z_H - z_M \end{cases}$$

1. Ví dụ minh họa

VÍ DỤ 1. Trong không gian $Oxyz$, điểm nào trong các điểm dưới đây nằm trên mặt phẳng $(P): 2x - y + z - 2 = 0$?

VÍ DỤ 2. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha) : 3x - 2y + z + 6 = 0$ và điểm $A(2; -1; 0)$. Tìm tọa độ hình chiếu vuông góc của điểm A lên mặt phẳng (α) .

VÍ DỤ 3. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P) : 2x + y + z = 0$ và các điểm $A(1; 1; 2)$, $B(0; -1; 1)$, $C(2; 0; 0)$. Tìm tọa độ điểm M biết M thuộc mặt phẳng (P) và $MA = MB = MC$.

VÍ DỤ 4. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-1; 3; -2)$, $B(-3; 7; -18)$ và mặt phẳng $(P) : 2x - y + z + 1 = 0$. Điểm $M(a; b; c)$ thuộc (P) sao cho mặt phẳng $(ABM) \perp (P)$ và $MA^2 + MB^2 = 246$. Tính $S = a + b + c$.

VÍ DỤ 5. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 2; 1)$, $B(2; -1; 3)$. Tìm điểm M trên mặt phẳng (Oxy) sao cho $MA^2 - 2MB^2$ lớn nhất.

2. Bài tập trắc nghiệm

CÂU 1. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P) : 2x - y + z - 1 = 0$. Điểm nào sau đây thuộc mặt phẳng (P) ?

- A** $M(2; -1; 1)$. **B** $N(0; 1; -2)$. **C** $Q(1; -3; -4)$. **D** $H(1; -2; 0)$.

CÂU 2. Tọa độ giao điểm của mặt phẳng $(P) : x - 2y + z - 2 = 0$ với trục hoành là

- A** $(2; 0; 0)$. **B** $(-2; 0; 0)$. **C** $(0; 0; 2)$. **D** $(0; -1; 0)$.

CÂU 3. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, hình chiếu của điểm $M(1; -3; 5)$ trên mặt phẳng (Oxy) có tọa độ là

- A** $(1; -3; 5)$. **B** $(1; -3; 0)$. **C** $(1; -3; 1)$. **D** $(1; -3; 2)$.

CÂU 4. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha) : x + y + z - 6 = 0$. Điểm nào dưới đây **không** thuộc mặt phẳng (α) ?

- A** $M(1; -1; 1)$. **B** $Q(3; 3; 0)$. **C** $N(2; 2; 2)$. **D** $P(1; 2; 3)$.

CÂU 5. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, tọa độ điểm đối xứng của $M(1; 2; 3)$ qua mặt phẳng (Oyz) là

- A** $(0; 2; 3)$. **B** $(-1; -2; -3)$. **C** $(-1; 2; 3)$. **D** $(1; 2; -3)$.

CÂU 6. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $M(3; 4; 5)$ và mặt phẳng $(P) : x - y + 2z - 3 = 0$. Hình chiếu vuông góc của M lên mặt phẳng (P) là

- A** $H(1; 2; 2)$. **B** $H(2; 5; 3)$. **C** $H(6; 7; 8)$. **D** $H(2; -3; -1)$.

CÂU 7. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(0; 0; -3)$, $B(2; 0; -1)$ và mặt phẳng (P) có phương trình $3x - 8y + 7z - 1 = 0$. Tìm tọa độ điểm C thuộc mặt phẳng (P) sao cho tam giác ABC đều.

- A** $\begin{bmatrix} C(2; -2; -3) \\ C\left(\frac{-2}{3}; \frac{-2}{3}; \frac{-1}{3}\right) \end{bmatrix}$. **B** $\begin{bmatrix} C(2; -2; -3) \\ C\left(\frac{2}{3}; \frac{-2}{3}; \frac{13}{21}\right) \end{bmatrix}$.
C $\begin{bmatrix} C\left(2; 2; \frac{11}{3}\right) \\ C\left(\frac{2}{3}; \frac{-2}{3}; \frac{13}{21}\right) \end{bmatrix}$. **D** $\begin{bmatrix} C\left(2; 2; \frac{11}{3}\right) \\ C\left(\frac{-2}{3}; \frac{-2}{3}; \frac{-1}{3}\right) \end{bmatrix}$.

CÂU 8. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(0; 0; 3)$, $B(-2; 0; 1)$ và mặt phẳng $(\alpha) : 2x - y + 2z + 8 = 0$. Hỏi có bao nhiêu điểm C nằm trên mặt phẳng (α) sao cho tam giác ABC đều?

- A** 2. **B** 0. **C** vô số. **D** 1.

CÂU 9. Trong không gian $Oxyz$ cho các điểm $A(1; -1; 3)$, $B(2; 1; 0)$, $C(-3; -1; -3)$ và mặt phẳng $(P) : x + y - z - 4 = 0$. Gọi $M(a; b; c)$ là điểm thuộc mặt phẳng (P) sao cho biểu thức $T = |3\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính giá trị của biểu thức $S = a + b + c$.

- A** $S = 3$. **B** $S = -1$. **C** $S = 2$. **D** $S = 1$.

CÂU 10. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $M(m; 0; 0)$, $N(0; n; 0)$, $P(0; 0; p)$ với m, n, p là các số dương thay đổi thỏa mãn $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p} = 3$. Mặt phẳng (MNP) luôn đi qua điểm

- A** $H\left(-\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}\right)$. **B** $G(1; 1; 1)$.
C $F(3; 3; 3)$. **D** $E\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$.

QUICK NOTE

QUICK NOTE

Dạng 5. Góc

Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(\alpha): A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ và $(\beta): A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$.

Khi đó góc giữa (α) và (β) bằng hoặc bù với góc giữa hai VTPT $\vec{n}_\alpha, \vec{n}_\beta$. Tức là:

$$\cos((\alpha), (\beta)) = |\cos(\vec{n}_\alpha, \vec{n}_\beta)| = \frac{|\vec{n}_\alpha \cdot \vec{n}_\beta|}{|\vec{n}_\alpha| \cdot |\vec{n}_\beta|} = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

1. Ví dụ minh họa

VÍ DỤ 1. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha): 2x - y + 2z - 1 = 0$; $(\beta): x + 2y - 2z - 3 = 0$. Tính Cosin góc giữa mặt phẳng (α) và mặt phẳng (β) .

VÍ DỤ 2. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $H(2; -1; 2)$. Biết rằng H là hình chiếu vuông góc của gốc tọa độ O xuống mặt phẳng (P) . Tính số đo góc giữa mặt phẳng (P) và mặt phẳng $(Q): x - y - 11 = 0$.

VÍ DỤ 3. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): x + (m + 1)y - 2z + m = 0$ và $(Q): 2x - y + 3 = 0$ với m là tham số thực. Tìm m để (P) vuông góc với (Q) .

VÍ DỤ 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và B , $AB = BC = a$, $AD = 2a$, SA vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$, $SA = a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SB và CD . Tính cosin của góc giữa MN và (SAC) .

2. Bài tập trắc nghiệm

CÂU 1. Trong không gian $Oxyz$ cho hai mặt phẳng $(P); (Q)$ có các véc tơ pháp tuyến là $\vec{a} = (a_1; b_1; c_1); \vec{b} = (a_2; b_2; c_2)$. Góc α là góc giữa hai mặt phẳng đó $\cos \alpha$ là biểu thức nào sau đây

A $\frac{a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$

B $\frac{|a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2|}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$

C $\frac{a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2}{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}$

D $\frac{|a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2|}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$

CÂU 2. Trong không gian $Oxyz$ cho hai mặt phẳng $(P): 2x - y - 2z - 9 = 0, (Q): x - y - 6 = 0$. Góc giữa hai mặt phẳng $(P), (Q)$ bằng

A 90° .

B 30° .

C 45° .

D 60° .

CÂU 3. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): (m - 1)x + y - 2z + m = 0$ và $(Q): 2x - z + 3 = 0$. Tìm m để (P) vuông góc với (Q) .

A $m = 0$.

B $m = \frac{3}{2}$.

C $m = 5$.

D $m = -1$.

CÂU 4. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(1; 0; 0), B(0; 2; 0), C(0; 0; m)$. Để mặt phẳng (ABC) hợp với mặt phẳng (Oxy) một góc 60° thì giá trị của m là

A $m = \pm \frac{12}{5}$.

B $m = \pm \frac{2}{5}$.

C $m = \pm \sqrt{\frac{12}{5}}$.

D $m = \pm \frac{5}{2}$.

CÂU 5. Trong không gian $Oxyz$, hai mặt phẳng nào dưới đây tạo với nhau một góc 60° .

A $(P): 2x + 11y - 5z + 3 = 0$ và $(Q): x + 2y - z - 2 = 0$.

B $(P): 2x + 11y - 5z + 3 = 0$ và $(Q): -x + 2y + z - 5 = 0$.

C $(P): 2x - 11y + 5z - 21 = 0$ và $(Q): 2x + y + z - 2 = 0$.

D $(P): 2x - 5y + 11z - 6 = 0$ và $(Q): -x + 2y + z - 5 = 0$.

CÂU 6. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba mặt phẳng $(P): 2x - y + 2z + 3 = 0, (Q): x - y - z - 2 = 1, (R): x + 2y + 2z - 2 = 0$. Gọi $\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3$ lần lượt là góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) , (Q) và (R) , (R) và (P) . Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng.

A $\alpha_1 > \alpha_3 > \alpha_2$.

B $\alpha_2 > \alpha_3 > \alpha_1$.

C $\alpha_3 > \alpha_2 > \alpha_1$.

D $\alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3$.

CÂU 7. Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh a . Trên hai tia Bt, Ds vuông góc và nằm cùng phía với mặt phẳng $(ABCD)$ lần lượt lấy hai điểm E, F sao cho $BE = \frac{a}{2}, DF = a$. Tính góc φ giữa hai mặt phẳng (AEF) và (CEF) .

QUICK NOTE

- A** $\varphi = 30^\circ$. **B** $\varphi = 90^\circ$. **C** $\varphi = 60^\circ$. **D** $\varphi = 45^\circ$.

CÂU 8. Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): x + 2y - 2z + 2018 = 0$, $(Q): x + my + (m - 1)z + 2017 = 0$ (m là tham số thực). Khi hai mặt phẳng (P) và (Q) tạo với nhau một góc nhỏ nhất thì điểm M nào dưới đây nằm trong (Q) ?

- A** $M(-2017; 1; 1)$. **B** $M(0; 0; 2017)$. **C** $M(0; -2017; 0)$. **D** $M(2017; 1; 1)$.

CÂU 9. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, biết mặt phẳng $(P): ax + by + cz - 1 = 0$ với $c < 0$ đi qua hai điểm $A(0; 1; 0)$, $B(1; 0; 0)$ và tạo với mặt phẳng (yOz) một góc 60° . Khi đó giá trị $a + b + c$ thuộc khoảng nào dưới đây?

- A** $(0; 3)$. **B** $(3; 5)$. **C** $(5; 8)$. **D** $(8; 11)$.

CÂU 10. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x}{-1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{1}$ và mặt phẳng $(P): 2x - y - 2z - 2 = 0$, (Q) là mặt phẳng chứa d và tạo với mặt phẳng (P) một góc nhỏ nhất. Gọi $\vec{n}_Q = (a; b; 1)$ là một véc-tơ pháp tuyến của (Q) . Đẳng thức nào đúng?

- A** $a - b = -1$. **B** $a + b = -2$. **C** $a - b = 1$. **D** $a + b = 0$.

Dạng 6. Khoảng cách

Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ và mặt phẳng $(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0$.

Khi đó khoảng cách từ điểm M_0 đến mặt phẳng (α) được tính:

$$d(M_0, (\alpha)) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

1. Ví dụ minh họa

VÍ DỤ 1. Trong không gian $Oxyz$, tính khoảng cách từ điểm $A(1; 2; 2)$ đến mặt phẳng $(\alpha): x + 2y - 2z - 4 = 0$.

VÍ DỤ 2. Trong không gian $Oxyz$, tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song $(\alpha): 2x - y - 2z - 4 = 0$ và $(\beta): 2x - y - 2z + 2 = 0$.

VÍ DỤ 3. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1; 2; 3)$, $B(3; 4; 4)$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m sao cho khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng $2x + y + mz - 1 = 0$ bằng độ dài đoạn thẳng AB .

VÍ DỤ 4. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $B(4; 2; -3)$ và mặt phẳng $(Q): -2x + 4y + z - 7 = 0$. Gọi B' là điểm đối xứng với B qua mặt phẳng (Q) . Tính khoảng cách từ B' đến (Q) .

VÍ DỤ 5. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, viết phương trình mặt cầu có tâm $I(1; 2; -1)$ và tiếp xúc với mặt phẳng $(P): x - 2y - 2z - 8 = 0$.

VÍ DỤ 6. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(2; 0; 0)$, $B(0; 4; 0)$, $C(0; 0; -2\sqrt{2})$. Tính khoảng cách từ $O(0; 0; 0)$ đến mặt phẳng (ABC) .

VÍ DỤ 7. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, tìm trên trục Oz điểm M cách đều điểm $A(2; 3; 4)$ và mặt phẳng $(\alpha): 2x + 3y + z - 17 = 0$.

1. Bài tập trắc nghiệm

CÂU 1. Trong không gian $Oxyz$, tính khoảng cách từ điểm $A(x_0; y_0; z_0)$ đến mặt phẳng $(P): Ax + By + Cz + D = 0$, với $A \cdot B \cdot C \neq 0$. Chọn khẳng định **đúng** trong các khẳng định sau

- A** $d(A, (P)) = Ax_0 + By_0 + Cz_0$. **B** $d(A, (P)) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$.
C $d(A, (P)) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + C^2}}$. **D** $d(A, (P)) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$.

CÂU 2. Trong không gian $Oxyz$, khoảng cách từ điểm $M(3; 2; 1)$ đến mặt phẳng $(P): Ax + Cz + D = 0$, $A \cdot C \neq 0$. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau

- A** $d(M, (P)) = \frac{|3A + C + D|}{\sqrt{A^2 + C^2}}$. **B** $d(M, (P)) = \frac{|A + 2B + 3C + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$.

QUICK NOTE

$$\textcircled{C} d(M, (P)) = \frac{|3A + C|}{\sqrt{A^2 + C^2}}.$$

$$\textcircled{D} d(M, (P)) = \frac{|3A + C + D|}{\sqrt{3^2 + 1^2}}.$$

CÂU 3. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ mặt cầu (S) có tâm $I(2; 1; -1)$ và tiếp xúc với mặt phẳng $(\alpha): 2x - 2y - z + 3 = 0$. Bán kính của (S) bằng

$$\textcircled{A} 2.$$

$$\textcircled{B} \frac{2}{3}.$$

$$\textcircled{C} \frac{4}{3}.$$

$$\textcircled{D} \frac{2}{9}.$$

CÂU 4. Trong không gian $Oxyz$, khoảng cách từ điểm $A(2; 4; 3)$ đến mặt phẳng $(\alpha): 2x + y + 2z + 1 = 0$ và $(\beta): x = 0$ lần lượt là $d(A, (\alpha)), d(A, (\beta))$. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau

$$\textcircled{A} d(A, (\alpha)) = 3 \cdot d(A, (\beta)).$$

$$\textcircled{B} d(A, (\alpha)) > d(A, (\beta)).$$

$$\textcircled{C} d(A, (\alpha)) = d(A, (\beta)).$$

$$\textcircled{D} 2 \cdot d(A, (\alpha)) = d(A, (\beta)).$$

CÂU 5. Trong không gian $Oxyz$, khoảng cách từ điểm $M(-4; -5; 6)$ đến mặt phẳng (Oxy) , (Oyz) lần lượt bằng

$$\textcircled{A} 6 \text{ và } 4.$$

$$\textcircled{B} 6 \text{ và } 5.$$

$$\textcircled{C} 5 \text{ và } 4.$$

$$\textcircled{D} 4 \text{ và } 6.$$

CÂU 6. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha): x + 2y + 2z + m = 0$ và điểm $A(1; 1; 1)$. Khi đó m nhận giá trị nào sau đây để khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (α) bằng 1?

$$\textcircled{A} -2.$$

$$\textcircled{B} -8.$$

$$\textcircled{C} -2 \text{ hoặc } -8.$$

$$\textcircled{D} 3.$$

CÂU 7. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(a; 0; 0)$, $B(0; b; 0)$, $C(0; 0; c)$ với a, b, c là những số thực dương sao cho $a^2 + 4b^2 + 16c^2 = 49$. Tính $F = a^2 + b^2 + c^2$ sao cho khoảng cách từ O đến mặt phẳng (ABC) là lớn nhất.

$$\textcircled{A} F = \frac{51}{5}.$$

$$\textcircled{B} F = \frac{51}{4}.$$

$$\textcircled{C} F = \frac{49}{5}.$$

$$\textcircled{D} F = \frac{49}{4}.$$

CÂU 8. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x + 2y + z - 4 = 0$ và điểm $D(1; 0; 3)$. Mặt phẳng (Q) song song với (P) và cách D một khoảng bằng $\sqrt{6}$ có phương trình là

$$\textcircled{A} x + 2y + z + 2 = 0.$$

$$\textcircled{B} \begin{cases} x + 2y + z + 2 = 0 \\ x + 2y + z - 10 = 0 \end{cases}$$

$$\textcircled{C} \begin{cases} x + 2y - z - 10 = 0 \\ x + 2y - z + 2 = 0 \end{cases}$$

$$\textcircled{D} x + 2y + z - 10 = 0.$$

CÂU 9. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(1; 0; 0)$, $B(0; 1; 0)$, $C(0; 0; 1)$, $D(0; 0; 0)$. Hỏi có bao nhiêu điểm cách đều 4 mặt phẳng (ABC) , (BCD) , (CDA) , (DAB) .

$$\textcircled{A} 4.$$

$$\textcircled{B} 5.$$

$$\textcircled{C} 1.$$

$$\textcircled{D} 8.$$

CÂU 10. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(-1; -4; 4)$, $B(1; 7; -2)$, $C(1; 4; -2)$. Mặt phẳng $(P): ax + by + cz + 62 = 0$ đi qua A , đặt $h_1 = d(B, (P))$; $h_2 = 2d(C, (P))$. Khi $h_1 + h_2$ đạt giá trị lớn nhất, tính $T = a + b + c$.

$$\textcircled{A} 4.$$

$$\textcircled{B} 6.$$

$$\textcircled{C} 7.$$

$$\textcircled{D} 5.$$

CÂU 11. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): x + y - z + 1 = 0$ và $(Q): x - y + z - 5 = 0$. Điểm M nằm trên trục Oy cách đều (P) và (Q) là

$$\textcircled{A} M(0; 2; 0).$$

$$\textcircled{B} M(0; 3; 0).$$

$$\textcircled{C} M(0; -3; 0).$$

$$\textcircled{D} M(0; -2; 0).$$

Dạng 7. Vị trí tương đối giữa hai mặt phẳng, giữa một cầu và một phẳng

a) Cho hai mặt phẳng $(\alpha): A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ và $(\beta): A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$.

$$\textcircled{✓} (\alpha) // (\beta) \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}.$$

$$\textcircled{✓} (\alpha) \equiv (\beta) \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}.$$

$$\textcircled{✓} (\alpha) \text{ cắt } (\beta) \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2} \text{ hoặc } \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2} \text{ hoặc } \frac{A_1}{A_2} \neq \frac{C_1}{C_2}.$$

$$\textcolor{red}{\Delta} \text{ Đặc biệt } (\alpha) \perp (\beta) \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.$$

b) Cho mặt cầu $(S): (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$ tâm $I(a; b; c)$ bán kính R

và mặt phẳng $(P): Ax + By + Cz + D = 0$.

- ☑ Nếu $d(I, (P)) > R$ thì mp (P) và mặt cầu (S) không có điểm chung.
- ☑ Nếu $d(I, (P)) = R$ thì mp (P) và mặt cầu (S) tiếp xúc nhau tại H .
Khi đó (P) gọi là tiếp diện của mặt cầu (S) và điểm H gọi là tiếp điểm.
- ☑ Nếu $d(I, (P)) < R$ thì mp (P) và mặt cầu (S) cắt nhau theo giao tuyến là đường tròn có phương trình:
$$\begin{cases} (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2 \\ Ax + By + Cz + D = 0 \end{cases}$$

Trong đó bán kính của đường tròn được tính theo công thức $r = \sqrt{R^2 - d^2(I, (P))}$ và tâm H của đường tròn là hình chiếu của tâm I của mặt cầu (S) lên mặt phẳng (P) .

QUICK NOTE

1. Ví dụ minh họa

VÍ DỤ 1. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): 2x - 3y + z - 4 = 0$; $(Q): 5x - 3y - 2z - 7 = 0$. Xét vị trí tương đối của (P) , (Q) .

VÍ DỤ 2. Trong hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) có phương trình $2x - 3y + 4z + 5 = 0$. Viết phương trình mặt phẳng đi qua $A(1; 1; 1)$ và song song với mặt phẳng (P) ?

VÍ DỤ 3. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) tâm $O(0; 0; 0)$ và tiếp xúc với mặt phẳng $(\alpha): 2x + y + 2z - 6 = 0$. Tính bán kính của (S) .

VÍ DỤ 4. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(\alpha): 2x + y + mz - 2 = 0$ và $(\beta): x + ny + 2z + 8 = 0$. Tính $S = m + n$ để (α) song song với (β) .

VÍ DỤ 5. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $I(1; -2; 3)$. Viết phương trình mặt cầu tâm I và tiếp xúc với mặt phẳng $(P): x + 2y - 2z - 6 = 0$.

VÍ DỤ 6. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y + 2z - 10 = 0$, mặt phẳng $(P): x + 2y - 2z + 10 = 0$. Xét vị trí tương đối giữa (P) và (S) .

VÍ DỤ 7. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $I(-3; 0; 1)$. Mặt cầu (S) có tâm I và cắt mặt phẳng $(P): x - 2y - 2z - 1 = 0$ theo một thiết diện là một hình tròn. Diện tích của hình tròn này bằng π . Viết phương trình mặt cầu (S) .

VÍ DỤ 8. Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm I và tiếp xúc với mặt phẳng (P) cho trước:

- a) $I(3; -5; 2)$, $(P): 2x - y - 3z + 1 = 0$ b) $I(1; 4; 7)$, $(P): 6x + 6y - 7z + 42 = 0$

VÍ DỤ 9. Viết phương trình mặt cầu (S) đi qua ba điểm A, B, C và tâm nằm trên mặt phẳng (P) , với:

- a) $\begin{cases} A(3; 1; 1), B(0; 1; 4) \\ C(-1; -3; 1) \\ (P): x + y - 2z + 4 = 0 \end{cases}$
- b) $\begin{cases} A(2; 0; 1), B(1; 3; 2) \\ C(3; 2; 0) \\ (P) = (Oxy) \end{cases}$
- c) $\begin{cases} A(2; 0; 1), B(1; 0; 0) \\ C(1; 1; 1) \\ (P): x + y + z - 2 = 0 \end{cases}$

2. Bài tập trắc nghiệm

CÂU 1. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng nào dưới đây song song với mặt phẳng (Oxy) ?

- (A)** $(\alpha): z + 1 = 0$. **(B)** $(\beta): x + z + 1 = 0$.
(C) $(\gamma): y + 1 = 0$. **(D)** $(\varphi): x + 1 = 0$.

CÂU 2. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng nào trong các mặt phẳng sau song song với trục Oz ?

- (A)** $(\alpha): z = 0$. **(B)** $(P): x + y = 0$.
(C) $(Q): x + 11y + 1 = 0$. **(D)** $(\beta): z = 1$.

QUICK NOTE

CÂU 3. Trong không gian $Oxyz$, phương trình mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu $(S): (x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 = 81$ tại điểm $P(-5; -4; 6)$ là

A $7x + 8y + 6z = 0.$

B $4x + 2y - 9z + 82 = 0.$

C $x - 4z + 29 = 0.$

D $2x + 2y - z + 24 = 0.$

CÂU 4. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(\alpha): x + 2y - z - 1 = 0$ và $(\beta): 2x + 4y - mz - 2 = 0$. Tìm m để hai mặt phẳng (α) và (β) song song với nhau.

A $m = 1.$

B Không tồn tại m .

C $m = -2.$

D $m = 2.$

CÂU 5. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt cầu (S) có tâm $I(1; -2; -1)$ và có tiếp diện là mặt phẳng $(P): 2x + y + 2z + 5 = 0$ có phương trình là

A $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z + 1)^2 = 4.$

B $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 1)^2 = 1.$

C $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 1)^2 = 4.$

D $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z + 1)^2 = 1.$

CÂU 6. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho mặt phẳng $(Q): x - 2y + z - 5 = 0$ và mặt cầu $(S): (x - 1)^2 + y^2 + (z + 2)^2 = 15$. Mặt phẳng (P) song song với mặt phẳng (Q) và cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là một đường tròn có chu vi bằng 6π đi qua điểm nào sau đây?

A $(0; -1; -5).$

B $(1; -2; 0).$

C $(2; -2; 1).$

D $(-2; 2; -1).$

CÂU 7. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x - y + 3z - 2 = 0$. Phương trình nào sau đây là phương trình của mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng (P) ?

A $4x - 2y + 6z + 1 = 0.$

B $x - 7y + 3z + 1 = 0.$

C $-x + 7y - 3z + 1 = 0.$

D $x - 7y - 3z + 1 = 0.$

CÂU 8. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $I(-3; 0; 1)$. Mặt cầu (S) có tâm I và cắt mặt phẳng $(P): x - 2y - 2z - 1 = 0$ theo một thiết diện là một hình tròn. Diện tích của hình tròn này bằng π . Phương trình mặt cầu (S) là

A $(x + 3)^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 4.$

B $(x + 3)^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 25.$

C $(x + 3)^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 5.$

D $(x + 3)^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 2.$

CÂU 9. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + (y - 4)^2 + z^2 = 25$ và mặt phẳng $(P): x + 2y - 2z - 11 = 0$. Hỏi khẳng định nào sau đây đúng?

A Mặt cầu (S) và mặt phẳng (P) không có điểm chung.

B Mặt cầu (S) và mặt phẳng (P) tiếp xúc với nhau.

C Mặt cầu (S) cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến là một đường tròn có bán kính bằng $2\sqrt{6}$.

D Mặt cầu (S) cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến là một đường tròn có bán kính bằng 2.

CÂU 10. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x - 3)^2 + (y + 2)^2 + (z - 1)^2 = 100$ và mặt phẳng $(P): 2x - 2y - z + 9 = 0$. Mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là đường tròn (C) . Tìm tọa độ tâm J và bán kính r của đường tròn (C) .

A $J(-1; 2; 3), r = 8.$

B $J(3; 2; 1), r = 8.$

C $J(-1; 2; 3), r = 64.$

D $J(3; 2; 1), r = 64.$

CÂU 11. Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 20 = 0$ và mặt phẳng $(\alpha): x + 2y - 2z + 4 = 0$ cắt nhau theo một đường tròn có chu vi bằng

A $10\pi.$

B $16\pi.$

C $4\pi.$

D $8\pi.$

CÂU 12. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $I(1; 2; 3)$ và mặt phẳng $(P): 2x - 2y - z - 4 = 0$. Mặt cầu tâm I tiếp xúc mặt phẳng (P) tại điểm H . Tìm tọa độ điểm H .

A $H(-3; 0; -2).$

B $H(3; 0; 2).$

C $H(-1; 4; 4).$

D $H(-1; 4; 1).$

CÂU 13. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x - 2y + 2z - 2 = 0$ và điểm $I(-1; 2; -1)$. Viết phương trình mặt cầu (S) tâm I , cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến là một đường tròn có bán kính bằng 5.

A $(S): (x + 1)^2 + (y - 2)^2 + (z + 1)^2 = 34.$

B $(S): (x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 1)^2 = 34.$

C $(S): (x + 1)^2 + (y - 2)^2 + (z + 1)^2 = 16.$

D $(S): (x + 1)^2 + (y - 2)^2 + (z + 1)^2 = 25.$

CÂU 14. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho mặt phẳng $(P): x + 2y + 2z + 3 = 0$ và mặt cầu $(S): x^2 + (y + 1)^2 + (z + 5)^2 = 9$. Biết rằng (P) tiếp xúc với (S) tìm tọa độ tiếp điểm.

- A** $A(1; 1; -3)$. **B** $A(-3; 0; 0)$. **C** $A(1; -1; -1)$. **D** $A(-3; 1; -1)$.

CÂU 15. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x + 2y - z - 4 = 0$ và mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z - 11 = 0$. Mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn có bán kính là

- A** $r = 3$. **B** $r = 5$. **C** $r = 4$. **D** $r = \sqrt{34}$.

CÂU 16. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 3x + 4y - 2 = 0$. Tìm bán kính r của mặt cầu (S) có tâm là gốc tọa độ và tiếp xúc với (P) .

- A** $r = 1$. **B** $r = \frac{2}{5}$. **C** $r = \frac{9}{5}$. **D** $r = \frac{3}{5}$.

CÂU 17. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x + y - 2z + m = 0$ và mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z - 2 = 0$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là đường tròn (T) có chu vi bằng $4\pi\sqrt{3}$.

- A** 3. **B** 4. **C** 2. **D** 1.

CÂU 18. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x + 2y - 2z + 3 = 0$ và mặt cầu (S) có tâm $I(0; -2; 1)$. Biết mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là một đường tròn có diện tích là 2π . Mặt cầu (S) có phương trình là

- A** $x^2 + (y + 2)^2 + (z + 1)^2 = 2$. **B** $x^2 + (y + 2)^2 + (z - 1)^2 = 3$.
C $x^2 + (y + 2)^2 + (z + 1)^2 = 3$. **D** $x^2 + (y + 2)^2 + (z + 1)^2 = 1$.

CÂU 19. Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 25$ và $(S'): (x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 = 1$. Mặt phẳng (P) tiếp xúc với (S') và cắt (S) theo giao tuyến là một đường tròn có chu vi bằng 6π . Khoảng cách từ O đến (P) bằng

- A** $\frac{14}{3}$. **B** $\frac{17}{7}$. **C** $\frac{8}{9}$. **D** $\frac{19}{2}$.

CÂU 20. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho ba điểm $S(0; 0; 1)$, $M(m; 0; 0)$, $N(0; n; 0)$ với $m, n > 0$ và $m + n = 1$. Mặt phẳng (SMN) luôn tiếp xúc với một mặt cầu cố định có bán kính là bao nhiêu biết mặt cầu đó đi qua điểm $A(1; 1; 1)$?

- A** 2. **B** $\sqrt{2}$. **C** 1. **D** $\sqrt{3}$.

Dạng 8. Các bài toán cực trị

1. Ví dụ minh họa

VÍ DỤ 1. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x + y - z + 2 = 0$ và hai điểm $A(3; 4; 1)$, $B(7; -4; -3)$. Điểm $M(a; b; c)$, với $a > 2$, thuộc mặt phẳng (P) sao cho tam giác ABM vuông tại M và có diện tích nhỏ nhất. Tính giá trị biểu thức $a + b + c$.

VÍ DỤ 2. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1; -6; 1)$ và mặt phẳng $(P): x + y + 7 = 0$. Điểm B thay đổi thuộc Oz ; điểm C thay đổi thuộc mặt phẳng (P) . Biết rằng tam giác ABC có chu vi nhỏ nhất. Tìm tọa độ điểm B .

VÍ DỤ 3. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(-3; 0; 0)$, $B(0; 0; 3)$, $C(0; -3; 0)$ và mặt phẳng $(P): x + y + z - 3 = 0$. Tìm trên (P) điểm M sao cho $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}|$ nhỏ nhất.

VÍ DỤ 4. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): x - y + z + 3 = 0$, $(Q): x + 2y - 2z - 5 = 0$ và mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z - 11 = 0$. Gọi M là điểm di động trên (S) và N là điểm di động trên (P) sao cho MN luôn vuông góc với (Q) . Tìm giá trị lớn nhất của độ dài đoạn thẳng MN .

VÍ DỤ 5. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(0; -2; -1)$, $B(-2; -4; 3)$, $C(1; 3; -1)$. Tìm điểm $M \in (Oxy)$ sao cho $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

2. Bài tập trắc nghiệm

CÂU 1. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba mặt phẳng $(P): x - 2y + z - 1 = 0$, $(Q): x - 2y + z + 8 = 0$, $(R): x - 2y + z - 4 = 0$. Một đường thẳng d thay đổi cắt ba mặt

QUICK NOTE

QUICK NOTE

phẳng $(P), (Q), (R)$ lần lượt tại A, B, C . Tìm giá trị nhỏ nhất của $T = AB^2 + \frac{144}{AC}$.

(A) $72\sqrt[3]{3}$.

(B) 96.

(C) 108.

(D) $72\sqrt[3]{4}$.

CÂU 2. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(1; 1; 1)$. Mặt phẳng (P) qua M cắt chiều dương của các trục Ox, Oy, Oz lần lượt tại A, B, C thỏa mãn $OA = 2OB$. Tính giá trị nhỏ nhất của thể tích khối chóp $OABC$.

(A) $\frac{64}{27}$.

(B) $\frac{10}{3}$.

(C) $\frac{9}{2}$.

(D) $\frac{81}{16}$.

CÂU 3. Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, xét mặt cầu (S) đi qua hai điểm $A(1; 6; 2), B(3; 0; 0)$ và có tâm thuộc mặt phẳng $(P) : x - y + 2 = 0$. Bán kính của mặt cầu (S) có giá trị nhỏ nhất là

(A) $\frac{\sqrt{462}}{6}$.

(B) $\frac{\sqrt{534}}{4}$.

(C) $\frac{\sqrt{218}}{6}$.

(D) $\frac{\sqrt{530}}{4}$.

CÂU 4. Trong không gian $Oxyz$, biết mặt phẳng (P) đi qua hai điểm $A(2; 0; 0), M(1; 1; 1)$ đồng thời (P) cắt các tia Oy, Oz theo thứ tự tại hai điểm B, C (B, C đều không trùng với gốc tọa độ). Khi diện tích tam giác ABC nhỏ nhất phương trình mặt phẳng (P) là

(A) $y - z = 0$.

(B) $y + z - 2 = 0$.

(C) $2x + y + z - 4 = 0$.

(D) $x + y - 2$.

CÂU 5. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $M(0; -1; 2)$ và $N(-1; 1; 3)$. Một mặt phẳng (P) đi qua M, N sao cho khoảng cách từ điểm $K(0; 0; 2)$ đến mặt phẳng P đạt giá trị lớn nhất. Tìm tọa độ véc-tơ pháp tuyến \vec{n} của mặt phẳng (P) .

(A) $\vec{n} = (1; -1; 1)$.

(B) $\vec{n} = (1; 1; -1)$.

(C) $\vec{n} = (2; -1; 1)$.

(D) $\vec{n} = (2; 1; -1)$.

Bài 3. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG TRONG KHÔNG GIAN

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. phương trình tham số của đường thẳng

ĐỊNH NGHĨA 3.1. Phương trình tham số của đường thẳng d qua $M(x_0; y_0; z_0)$ và có véc-tơ chỉ phương $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ là phương trình có dạng
$$\begin{cases} x = x_0 + a_1 t \\ y = y_0 + a_2 t \\ z = z_0 + a_3 t \end{cases}$$
 trong đó t là tham số.

⚠ Phương trình chính tắc của đường thẳng d qua $M(x_0; y_0; z_0)$ và có véc-tơ chỉ phương $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ là $d: \frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3}$ với $abc \neq 0$.

2. Điều kiện để hai đường thẳng song song, cắt nhau, chéo nhau

Cho đường thẳng d_1 có véc-tơ chỉ phương $\vec{u} = (u_1; u_2; u_3)$ và đi qua điểm M_1 và đường thẳng d_2 có véc-tơ chỉ phương $\vec{v} = (v_1; v_2; v_3)$ và đi qua điểm M_2 .

$$\begin{aligned} d_1 &\equiv d_2 &\Leftrightarrow &\begin{cases} [\vec{u}; \vec{v}] = \vec{0} \\ [\vec{u}; \overrightarrow{M_1 M_2}] = \vec{0} \end{cases} \\ d_1 &\parallel d_2 &\Leftrightarrow &\begin{cases} [\vec{u}; \vec{v}] = \vec{0} \\ [\vec{u}; \overrightarrow{M_1 M_2}] \neq \vec{0} \end{cases} \\ d_1 &\text{ cắt } d_2 &\Leftrightarrow &\begin{cases} [\vec{u}; \vec{v}] \neq \vec{0} \\ [\vec{u}; \vec{v}] \cdot \overrightarrow{M_1 M_2} = 0 \end{cases} \\ d_1 &\text{ chéo } d_2 &\Leftrightarrow &\begin{cases} [\vec{u}; \vec{v}] \neq \vec{0} \\ [\vec{u}; \vec{v}] \cdot \overrightarrow{M_1 M_2} \neq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

3. Góc

a) Cho đường thẳng d có véc-tơ chỉ phương \vec{u} và mặt phẳng (P) có véc-tơ pháp tuyến \vec{n} . Góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (P) :

$$\sin \varphi = |\cos(\vec{u}, \vec{n})| \quad \left(0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}\right)$$

b) Cho hai đường thẳng chéo nhau d_1 có véc-tơ chỉ phương \vec{u} và d_2 có véc-tơ chỉ phương \vec{v} . Góc giữa hai đường thẳng d_1 và d_2 :

$$(d_1, d_2) = \frac{|[\vec{u}; \vec{v}] \cdot \overrightarrow{M_1 M_2}|}{|[\vec{u}; \vec{v}]|}$$

4. Khoảng cách

a) Cho đường thẳng d có véc-tơ chỉ phương \vec{u} , đi qua điểm M_0 và điểm M . Khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng d :

$$d(M, d) = \frac{|[\vec{u}; \overrightarrow{M_0 M}]|}{|\vec{u}|}$$

b) Cho hai đường thẳng chéo nhau d_1 có véc-tơ chỉ phương \vec{u} , đi qua điểm M_1 và d_2 có véc-tơ chỉ phương \vec{v} , đi qua điểm M_2 . Khoảng cách giữa d_1 và d_2 :

$$(d_1, d_2) = \frac{|[\vec{u}; \vec{v}] \cdot \overrightarrow{M_1 M_2}|}{|[\vec{u}; \vec{v}]|}$$

B. DẠNG TOÁN VÀ BÀI TẬP

QUICK NOTE

QUICK NOTE

Dạng 1. Xác định vectơ chỉ phương

- Đường thẳng (d) đi qua hai điểm A, B , khi đó véc-tơ \overrightarrow{AB} là một chỉ phương của (d) .
- Đường thẳng (d) song song với đường thẳng (l) , khi đó véc-tơ chỉ phương của (l) cũng là một chỉ phương của (d) .
- Đường thẳng (d) vuông góc với mặt phẳng (α) , khi đó véc-tơ pháp tuyến của (α) là một chỉ phương của (d) .
- Đường thẳng (d) là giao tuyến của $(P): A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$, mặt phẳng $(Q): A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ có véc-tơ chỉ phương của (d) , $\vec{u} = [\vec{n}_P, \vec{n}_Q]$
- Đường thẳng (d) đi qua điểm M và vuông góc hai đường thẳng $(d_1), (d_2)$. Khi đó ta gọi \vec{u} là một véc-tơ chỉ phương của (d) thì $\begin{cases} \vec{u} \perp \vec{u}_1 \\ \vec{u} \perp \vec{u}_2 \end{cases}$ với \vec{u}_1, \vec{u}_2 lần lượt là chỉ phương của $(d_1), (d_2)$ nên ta chọn $\vec{u} = [\vec{u}_1, \vec{u}_2]$.
- Đường thẳng d đi qua điểm M , cắt và vuông góc với một đường thẳng d_1 cho trước. Gọi H là hình chiếu vuông góc của M lên đường thẳng d_1 cho trước. Dựa vào điều kiện $\overrightarrow{MH} \cdot \vec{u}_{d_1} = 0$ ta tìm được H . Khi đó \overrightarrow{MH} là VTCP cần tìm.
- Đường thẳng đi qua điểm M , vuông góc với (d_1) và cắt (d_2) . Gọi K là giao điểm của (d) và (d_2) . Ta có $\overrightarrow{MK} \perp (d_1)$ nên $\overrightarrow{MK} \cdot \vec{u}_{d_1} = 0$, từ đó ta tìm được véc-tơ \overrightarrow{MK} chính là chỉ phương của (d) .
- Đường thẳng d đi qua điểm M cắt cả hai đường thẳng (d_1) và (d_2) . Gọi (a) là mặt phẳng chứa (d_1) và đi qua điểm M , (b) là mặt phẳng chứa (d_2) và đi qua điểm M . Khi đó đường thẳng giao tuyến của hai mặt phẳng (a) và (b) là đường thẳng (d) cần tìm.
- Đường thẳng (d) nằm trong mặt phẳng (P) cắt cả hai đường thẳng $(d_1), (d_2)$. Ta cần tìm điểm M là giao điểm của (P) và (d_1) , điểm N là giao điểm của (P) và (d_2) . Khi đó đường thẳng (d) đi qua hai điểm M, N là đường thẳng cần tìm.

1. Ví dụ minh họa

VÍ DỤ 1. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x+8}{4} = \frac{y-5}{-2} = \frac{z}{1}$. Xác định một véc-tơ chỉ phương của đường thẳng d .

VÍ DỤ 2. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): 3x - 2y + 2z - 5 = 0$, $(Q): 4x + 5y - z + 1 = 0$. Gọi d là giao tuyến của hai mặt phẳng (P) và (Q) . Xác định một véc-tơ chỉ phương của đường thẳng d .

VÍ DỤ 3. Trong không gian $Oxyz$ cho hai mặt phẳng $(P): -x - 2y + 5z - 2017 = 0$, $(Q): 2x - y + 3z + 2018 = 0$. Gọi Δ là giao tuyến của (P) và (Q) . Xác định một véc-tơ chỉ phương của đường thẳng Δ ?

VÍ DỤ 4. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho đường thẳng $d: \frac{x+3}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{-3}$. Xác định véc-tơ chỉ phương của d' là hình chiếu vuông góc của d trên mặt phẳng (Oyz) .

2. Bài tập trắc nghiệm

CÂU 6. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 - t \\ y = -2 - 2t \\ z = 1 + t \end{cases}$. Véc-tơ nào dưới đây là véc-tơ chỉ phương của d ?

- A** $\vec{n} = (1; -2; 1)$. **B** $\vec{n} = (1; 2; 1)$. **C** $\vec{n} = (-1; -2; 1)$. **D** $\vec{n} = (-1; 2; 1)$.

CÂU 7. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC với $A(1; 1; 1)$, $B(-1; 1; 0)$, $C(1; 3; 2)$. Đường trung tuyến xuất phát từ đỉnh A của tam giác ABC nhận véc-tơ \vec{a} nào dưới đây làm một véc-tơ chỉ phương?

- A** $\vec{a} = (1; 1; 0)$. **B** $\vec{a} = (-2; 2; 2)$. **C** $\vec{a} = (-1; 2; 1)$. **D** $\vec{a} = (-1; 1; 0)$.

CÂU 8. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-2}{-1} = \frac{1-y}{2} = \frac{z}{1}$. Véc-tơ nào dưới đây là véc-tơ chỉ phương của đường thẳng d ?

- (A) $\vec{m} = (-1; 2; 1)$. (B) $\vec{n} = (1; 2; 1)$. (C) $\vec{p} = (-1; 2; -1)$. (D) $\vec{q} = (1; 2; -1)$.

CÂU 9. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = -2 + 4t \\ z = 1 \end{cases}$. Đường thẳng d có một véc-tơ chỉ phương là

- (A) $\vec{u}_4 = (-2; 4; 1)$. (B) $\vec{u}_1 = (2; 4; 0)$. (C) $\vec{u}_2 = (1; -2; 0)$. (D) $\vec{u}_3 = (1; -2; 1)$.

CÂU 10. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{-1}$. Gọi Δ' là đường thẳng đối xứng với đường thẳng Δ qua (Oxy) . Tìm một véc-tơ chỉ phương của đường thẳng Δ' .

- (A) $\vec{u} = (-1; 3; -1)$. (B) $\vec{u} = (1; 2; -1)$. (C) $\vec{u} = (1; 3; 0)$. (D) $\vec{u} = (1; 3; 1)$.

CÂU 11. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 2; 2)$, $B(3; -2; 0)$. Một véc-tơ chỉ phương của đường thẳng AB là

- (A) $\vec{u} = (-1; 2; 1)$. (B) $\vec{u} = (1; 2; -1)$. (C) $\vec{u} = (2; -4; 2)$. (D) $\vec{u} = (2; 4; -2)$.

CÂU 12. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 3 \\ z = 5 + 3t \end{cases}$. Trong các véc-tơ sau, véc-tơ nào là một véc-tơ chỉ phương của đường thẳng d ?

- (A) $\vec{a}_1 = (1; 3; 5)$. (B) $\vec{a}_2 = (2; 3; 3)$. (C) $\vec{a}_3 = (-2; 0; 3)$. (D) $\vec{a}_1 = (-2; 3; 3)$.

CÂU 13. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC có phương trình đường phân giác trong góc A là $\frac{x}{1} = \frac{y-6}{-4} = \frac{z-6}{-3}$. Biết rằng điểm $M(0; 5; 3)$ thuộc đường thẳng AB và điểm $N(1; 1; 0)$ thuộc đường thẳng AC . Véc-tơ nào sau đây là véc-tơ chỉ phương của đường thẳng AC ?

- (A) $\vec{u}(1; 2; 3)$. (B) $\vec{u}(0; -2; 6)$. (C) $\vec{u}(0; 1; -3)$. (D) $\vec{u}(0; 1; 3)$.

CÂU 14. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho đường thẳng $d: \frac{x+3}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{-3}$. Hình chiếu vuông góc của d trên mặt phẳng (Oyz) là một đường thẳng có véc-tơ chỉ phương là

- (A) $\vec{u} = (0; 1; 3)$. (B) $\vec{u} = (0; 1; -3)$. (C) $\vec{u} = (2; 1; -3)$. (D) $\vec{u} = (2; 0; 0)$.

CÂU 15. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các đường thẳng có phương trình sau

$$(d_1): \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -3t \\ z = -3 + 5t \end{cases}, \quad (d_2): \begin{cases} x = 2 - 4t \\ y = 6t \\ z = -3 - 10t \end{cases}, \quad (d_3): \begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = 3 - 6t \\ z = 2 + 5t \end{cases}$$

Trong các đường thẳng trên, đường thẳng nào đi qua điểm $M(2; 0; -3)$ và nhận véc-tơ $\vec{a} = (2; -3; 5)$ làm véc-tơ chỉ phương?

- (A) Chỉ có d_1, d_2 . (B) Chỉ có d_1, d_3 . (C) Chỉ có d_1 . (D) Chỉ có d_2 .

CÂU 16. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{5} = \frac{y-2}{-8} = \frac{z+3}{7}$. Véc-tơ nào dưới đây là một véc-tơ chỉ phương của đường thẳng d ?

- (A) $\vec{u}_2 = (-1; -2; 3)$. (B) $\vec{u}_4 = (7; -8; 5)$.
(C) $\vec{u}_3 = (5; -8; 7)$. (D) $\vec{u}_1 = (1; 2; -3)$.

CÂU 17. Cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{3-y}{3} = \frac{z+1}{-2}$. Một véc-tơ chỉ phương của đường thẳng d là

- (A) $\vec{u} = (2; 3; -2)$. (B) $\vec{u} = (2; -3; -2)$.
(C) $\vec{u} = (-2; -3; -2)$. (D) $\vec{u} = (2; -3; 2)$.

CÂU 18. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): (m^2 + 1)x - (2m^2 - 2m + 1)y + (4m + 2)z - m^2 + 2m = 0$ luôn chứa một đường thẳng Δ cố định khi m thay

QUICK NOTE

đổi. Đường thẳng d đi qua $M(1; -1; 1)$ vuông góc (Δ) và cách O một khoảng lớn nhất có véc-tơ chỉ phương $\vec{u} = (-1; b; c)$. Tính $b^2 - c^2$?

(A) 2.

(B) 23.

(C) 19.

(D) -1.

CÂU 19. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho 2 đường thẳng $\Delta_1: \begin{cases} x = 3 + t \\ y = 1 + t \\ z = 1 + 2t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$; $\Delta_2: \frac{x+2}{2} = \frac{y-2}{5} = \frac{z}{-1}$ và điểm $M(0; 3; 0)$. Đường thẳng d đi qua M , cắt Δ_1 và vuông

góc với Δ_2 có một véc-tơ chỉ phương là $\vec{u} = (4; a; b)$. Tính $T = a + b$

(A) $T = -2$.

(B) $T = 4$.

(C) $T = -4$.

(D) $T = 2$.

Dạng 2. Viết phương trình đường thẳng

☑ Tìm một điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ thuộc đường thẳng d .

☑ Tìm một véc-tơ chỉ phương của d là $\vec{u} = (a; b; c)$. (Chú ý xem cách tìm ở dạng 1).

☑ PTTS của d là $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$ trong đó t là tham số.

⚠ Phương trình chính tắc của đường thẳng d qua $M(x_0; y_0; z_0)$ và có véc-tơ chỉ phương $\vec{u} = (a; b; c)$ là $d: \frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$ với $abc \neq 0$.

1. Ví dụ minh họa

VÍ DỤ 1. Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, viết phương trình tham số của đường thẳng d đi qua điểm $M(1; 2; 3)$ và có véc-tơ chỉ phương $\vec{a} = (1; 3; 2)$.

VÍ DỤ 2. Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình chính tắc của đường thẳng đi qua hai điểm $A(1; 2; -3)$ và $B(3; -1; 1)$.

VÍ DỤ 3. Trong không gian $Oxyz$, cho 3 điểm $A(1; 2; 3)$, $B(2; 3; 4)$ và $C(0; 0; 1)$. Viết phương trình chính tắc của đường thẳng qua điểm C và nhận \overrightarrow{AB} làm véc-tơ chỉ phương.

VÍ DỤ 4. Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình chính tắc đường thẳng đi qua điểm $A(2; 3; 0)$ và vuông góc với mặt phẳng $(P): x + 3y - z + 5 = 0$.

VÍ DỤ 5. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, viết phương trình tham số đường thẳng đi qua $A(3; 5; 7)$ và song song với $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{4}$.

VÍ DỤ 6. Viết phương trình đường thẳng d đi qua điểm $A(1; -1; 1)$ và song song với hai mặt phẳng $(P): x + y - 3z - 1 = 0$ và $(Q): -2x + y - 4z + 1 = 0$.

VÍ DỤ 7. Cho điểm $A(2; -5; -1)$ và mặt phẳng $(P): x - y - z + 9 = 0$, đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+2}{3}$. Lập phương trình của đường thẳng Δ qua A , song song với (P) và vuông góc với d .

VÍ DỤ 8. Trong không gian cho đường thẳng $(d_1): \begin{cases} x = t \\ y = 1 - 4t \\ z = 2 + 6t \end{cases}$ và $(d_2): \begin{cases} x = 2t \\ y = 1 + t \\ z = 2 - 5t \end{cases}$.

Viết phương trình đường thẳng (d) đi qua $M(1; -1; 2)$ và vuông góc với cả hai đường thẳng (d_1) và (d_2) .

VÍ DỤ 9. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1; 2; -6)$, đường thẳng $d_1: \frac{x}{1} = \frac{y-6}{4} = \frac{z}{2}$ và đường thẳng $d_2: \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + t \\ z = 1 + 4t \end{cases}$. Viết phương trình đường thẳng d đi qua điểm A đồng thời cắt cả hai đường thẳng d_1 và d_2 .

VÍ DỤ 10. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1; 2; 0)$, đường thẳng

$d_1 : \frac{x+2}{3} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-1}{-1}$ và đường thẳng $d_2 : \begin{cases} x = 2+t \\ y = 1+2t \\ z = 3+2t \end{cases}$. Viết phương trình đường thẳng d đi qua điểm A , vuông góc với đường thẳng d_1 và cắt đường thẳng d_2 .

VÍ DỤ 11. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1; 2; -2)$ và đường thẳng $d_1 : \begin{cases} x = 2t \\ y = 1+t \\ z = -t \end{cases}$. Viết phương trình đường thẳng d đi qua điểm A , vuông góc và cắt đường thẳng d_1 .

VÍ DỤ 12. Trong không gian $Oxyz$, cho $(P) : y + 2z = 0$, $d_1 : \frac{x-1}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{4}$ và $d_2 : \begin{cases} x = 2-t \\ y = 4+2t \\ z = 1 \end{cases}$. Viết phương trình đường thẳng d nằm trong mặt phẳng (P) đồng thời cắt cả hai đường thẳng d_1 và d_2 .

VÍ DỤ 13. Trong không gian $Oxyz$, cho các đường thẳng $d' : \frac{x}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{2}$, $d_1 : \frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{2}$ và $d_2 : \begin{cases} x = 2+3t \\ y = -1+2t \\ z = -3+t \end{cases}$. Viết phương trình đường thẳng d song song với đường thẳng d' đồng thời cắt cả hai đường thẳng d_1 và d_2 .

VÍ DỤ 14. Viết phương trình đường vuông góc chung của hai đường thẳng sau $d_1 : \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1}$; $d_2 : \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{3}$.

VÍ DỤ 15. Viết phương trình hình chiếu vuông góc d' của đường thẳng $d : \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{2}$ lên mặt phẳng $(P) : x + y + z + 1 = 0$.

VÍ DỤ 16. Viết phương trình đường thẳng (d) là hình chiếu vuông góc của (a) lên mặt phẳng (P) , với $(a) : \frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-3}{1}$ và $(P) : x - y + z - 3 = 0$.

2. Bài tập trắc nghiệm

CÂU 1. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng Δ đi qua điểm $M(2; 0; -1)$ và véc-tơ chỉ phương $\vec{a} = (4; -6; 2)$. Phương trình tham số của Δ là

- A** $\begin{cases} x = -2+4t \\ y = -6t \\ z = 1+2t \end{cases}$
 B $\begin{cases} x = -2+2t \\ y = -3t \\ z = 1+t \end{cases}$
 C $\begin{cases} x = 4+2t \\ y = -6-3t \\ z = 2+t \end{cases}$
 D $\begin{cases} x = 2+2t \\ y = -3t \\ z = -1+t \end{cases}$

CÂU 2. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, đường thẳng đi qua điểm $M(1; 2; 3)$ và song song với trục Oy có phương trình tham số là

- A** $d : \begin{cases} x = 1+t \\ y = 2 \\ z = 3 \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$
 B $d : \begin{cases} x = 1 \\ y = 2+2t \\ z = 3 \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$
 C $d : \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 3+t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$
 D $d : \begin{cases} x = 1-t \\ y = 2+t \\ z = 3-t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$

CÂU 3. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $(d) : \begin{cases} x = 1-t \\ y = -1+2t \\ z = 2-t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$.

Đường thẳng đi qua điểm $M(0; 1; -1)$ và song song với đường thẳng (d) có phương trình là

- A** $\frac{x}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+1}{1}$
 B $\frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{2}$
 C $\frac{x}{-1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{-1}$
 D $\frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-1}{2}$

CÂU 4. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho hai mặt phẳng $(P) : 2x + y - z - 3 = 0$ và $(Q) : x + y + z - 1 = 0$. Phương trình chính tắc đường thẳng giao tuyến của hai mặt phẳng (P) và (Q) là

QUICK NOTE

QUICK NOTE

$$\textcircled{A} \frac{x+1}{-2} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-1}{1}.$$

$$\textcircled{C} \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z+1}{1}.$$

$$\textcircled{B} \frac{x}{2} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z+1}{1}.$$

$$\textcircled{D} \frac{x}{2} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z-1}{-1}.$$

CÂU 5. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, viết phương trình chính tắc của đường thẳng d đi qua $A(1; 2; -1)$ và vuông góc với mặt phẳng $(P): x + 2y - 3z + 1 = 0$.

$$\textcircled{A} d: \frac{x+1}{1} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z-1}{-3}.$$

$$\textcircled{B} d: \frac{x+1}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-1}{-3}.$$

$$\textcircled{C} d: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+1}{3}.$$

$$\textcircled{D} d: \frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z+1}{3}.$$

CÂU 6. Trong không gian với hệ tọa độ Oxy , cho điểm $A(1; 2; 3)$ và mặt phẳng $(P): 2x + y - 4z + 1 = 0$. Đường thẳng (d) qua điểm A , song song với mặt phẳng (P) , đồng thời cắt trục Oz . Viết phương trình tham số của đường thẳng (d) .

$$\textcircled{A} \begin{cases} x = 1 + 5t \\ y = 2 - 6t \\ z = 3 + t \end{cases}$$

$$\textcircled{B} \begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = 2 + t \end{cases}$$

$$\textcircled{C} \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2 + 2t \\ z = 3 + t \end{cases}$$

$$\textcircled{D} \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + 6t \\ z = 3 + t \end{cases}$$

CÂU 7. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(-1; 1; 2)$ và hai đường thẳng $d: \frac{x-2}{3} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-1}{1}$, $d': \frac{x+1}{1} = \frac{y}{3} = \frac{z}{-2}$. Phương trình nào dưới đây là phương trình đường thẳng đi qua điểm M , cắt d và vuông góc với d' .

$$\textcircled{A} \begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = 1 + t \\ z = 2 \end{cases}$$

$$\textcircled{B} \begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = 1 - t \\ z = 2 \end{cases}$$

$$\textcircled{C} \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 1 - t \\ z = 2 \end{cases}$$

$$\textcircled{D} \begin{cases} x = -1 - 7t \\ y = 1 + 7t \\ z = 2 + 7t \end{cases}$$

CÂU 8. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1; 2; 3)$ và hai mặt phẳng $(P): 2x + 3y = 0$, $(Q): 3x + 4y = 0$. Đường thẳng đi qua A và song song với hai mặt phẳng (P) , (Q) có phương trình là

$$\textcircled{A} \begin{cases} x = t \\ y = 2 \\ z = 3 + t \end{cases}$$

$$\textcircled{B} \begin{cases} x = 1 \\ y = t \\ z = 3 \end{cases}$$

$$\textcircled{C} \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + t \\ z = 3 + t \end{cases}$$

$$\textcircled{D} \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = t \end{cases}$$

CÂU 9. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, gọi Δ là đường thẳng đi qua điểm $M(2; 0; -3)$ và vuông góc với mặt phẳng $(\alpha): 2x - 3y + 5z + 4 = 0$. Viết phương trình chính tắc của đường thẳng Δ .

$$\textcircled{A} \Delta: \frac{x+2}{1} = \frac{y}{-3} = \frac{z-3}{5}.$$

$$\textcircled{B} \Delta: \frac{x+2}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z-3}{5}.$$

$$\textcircled{C} \Delta: \frac{x-2}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+3}{5}.$$

$$\textcircled{D} \Delta: \frac{x-2}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z+3}{5}.$$

CÂU 10. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(2; 1; 0)$ và đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{-1}$. Phương trình tham số của đường thẳng d đi qua điểm M , cắt và vuông góc với Δ là

$$\textcircled{A} d: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - 4t \\ z = -2t \end{cases}$$

$$\textcircled{B} d: \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 + t \\ z = t \end{cases}$$

$$\textcircled{C} d: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 - 4t \\ z = 2t \end{cases}$$

$$\textcircled{D} d: \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = -t \end{cases}$$

CÂU 11. Phương trình tham số của đường thẳng đi qua điểm $A(1; 4; 7)$ và vuông góc với mặt phẳng $(P): x + 2y - 2z - 3 = 0$ là

$$\textcircled{A} \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 4 + 4t \\ z = 7 - 4t \end{cases}$$

$$\textcircled{B} \begin{cases} x = -4 + t \\ y = 3 + 2t \\ z = -1 - 2t \end{cases}$$

$$\textcircled{C} \begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = 4 + 3t \\ z = 7 + t \end{cases}$$

$$\textcircled{D} \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + 4t \\ z = -2 + 7t \end{cases}$$

CÂU 12. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(-1; 1; 3)$ và hai đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{3} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-1}{1}$, $\Delta': \frac{x+1}{1} = \frac{y}{3} = \frac{z}{-2}$. Phương trình nào dưới đây là phương trình đường thẳng đi qua M , vuông góc với Δ và Δ' .

QUICK NOTE

A $\begin{cases} x = -1 - t \\ y = 1 + t \\ z = 3 + t \end{cases}$
 B $\begin{cases} x = -t \\ y = 1 + t \\ z = 3 + t \end{cases}$
 C $\begin{cases} x = -1 - t \\ y = 1 - t \\ z = 3 + t \end{cases}$
 D $\begin{cases} x = -1 - t \\ y = 1 + t \\ z = 1 + 3t \end{cases}$

CÂU 13. Phương trình nào sau đây là phương trình đường thẳng đi qua hai điểm $A(-1; 3; 2)$, $B(1; 4; -2)$?

A $\begin{cases} x = -1 - 2t \\ y = 3 + t \\ z = 2 + 4t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$
 B $\frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{1} = \frac{z+2}{-4}.$
 C $\frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-2}{4}.$
 D $\frac{x-1}{-2} = \frac{y-4}{-1} = \frac{z+2}{4}.$

CÂU 14. Trong không gian $Oxyz$, cho ba đường thẳng $d_1: \frac{x-3}{-1} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z+2}{1}$; $d_2: \frac{x-5}{-3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{1}$ và $\Delta: \frac{x+1}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-1}{3}$. Đường thẳng song song với Δ , cắt d_1 và d_2 có phương trình là

A $\frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{1}.$
 B $\frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-1}{3}.$
 C $\frac{x-3}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+2}{3}.$
 D $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{3}.$

CÂU 15. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(-4; -2; 4)$ và đường thẳng $d: \begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = -1 + 4t \end{cases}$.

Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua A cắt và vuông góc với đường thẳng d .

A $\Delta: \begin{cases} x = -4 + 3t \\ y = -2 + 2t \\ z = 4 - t \end{cases}$
 B $\Delta: \begin{cases} x = -4 + 3t \\ y = -2 - t \\ z = 4 - t \end{cases}$
 C $\Delta: \begin{cases} x = -4 - 3t \\ y = -2 + 2t \\ z = 4 - t \end{cases}$
 D $\Delta: \begin{cases} x = -4 + t \\ y = -2 + t \\ z = 4 + t \end{cases}$

CÂU 16. Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng Δ đi qua $A(1; 2; -1)$ và song song với đường thẳng $d: \frac{x-3}{1} = \frac{y-3}{3} = \frac{z}{2}$ có phương trình là

A $\frac{x-1}{-2} = \frac{y-2}{-6} = \frac{z+1}{-4}.$
 B $\frac{x+1}{1} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-1}{2}.$
 C $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z+1}{-2}.$
 D $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+1}{1}.$

CÂU 17. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): 3x - y - 3z + 2 = 0$ và $(Q): -4x + y + 2z + 1 = 0$. Phương trình đường thẳng đi qua gốc tọa độ O và song song với hai mặt phẳng (P) , (Q) là

A $\frac{x}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{6}.$
 B $\frac{x}{1} = \frac{y}{-6} = \frac{z}{-1}.$
 C $\frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{6}.$
 D $\frac{x}{1} = \frac{y}{6} = \frac{z}{-1}.$

CÂU 18. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{3}$ và mặt phẳng $(P): x + 3y + z = 0$. Đường thẳng Δ đi qua $M(1; 1; 2)$, song song với mặt phẳng (P) đồng thời cắt đường thẳng d có phương trình là

A $\frac{x-3}{1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-9}{2}.$
 B $\frac{x+2}{1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-6}{2}.$
 C $\frac{x-1}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{1}.$
 D $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-2}{2}.$

CÂU 19. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-2}{-3}$ và mặt phẳng $(P): x - y + 2z - 6 = 0$. Đường thẳng nằm trong mặt phẳng (P) , cắt và vuông góc với d có phương trình

A $\frac{x+2}{1} = \frac{y-2}{7} = \frac{z-5}{3}.$
 B $\frac{x-2}{1} = \frac{y-4}{7} = \frac{z+1}{3}.$
 C $\frac{x-2}{1} = \frac{y+2}{7} = \frac{z+5}{3}.$
 D $\frac{x+2}{1} = \frac{y+4}{7} = \frac{z-1}{3}.$

CÂU 20. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x - y + 3z + 10 = 0$ và điểm $M(2; -1; 2)$. Viết phương trình đường thẳng d đi qua điểm M , vuông góc với trục Oy và song song với mặt phẳng (P) .

QUICK NOTE

A $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -1 - t \\ z = 2 + 3t \end{cases}$

B $\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = -1 - 2t \\ z = 2 \end{cases}$

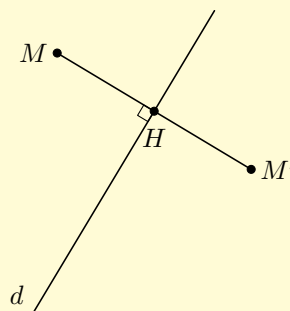
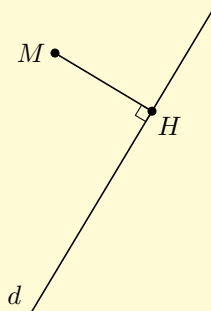
C $\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = -1 \\ z = 2 - 2t \end{cases}$

D $\begin{cases} x = 2 \\ y = -1 + 3t \\ z = 2 - 2t \end{cases}$

Dạng 3. Tìm tọa độ điểm liên quan đến đường thẳng

a) Tìm hình chiếu vuông góc H của điểm M trên đường thẳng d ta làm như sau:

- ☑ Tìm véc-tơ chỉ phương \vec{u}_d của đường thẳng d .
- ☑ Viết phương trình tham số của đường thẳng d : $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$ (*).
- ☑ Sử dụng (*) để ghi thành tọa độ cho H , tức là $H(x_0 + at; y_0 + bt; z_0 + ct)$.
- ☑ Tính \overrightarrow{MH} theo t . Cho $\overrightarrow{MH} \cdot \vec{u}_d = 0$, tìm t . Sau đó tìm được H .



⚠ Nếu đề bài có thêm yêu cầu tìm điểm M' đối xứng với M qua d :

- ☑ Ta vẫn phải giải bài toán tìm hình chiếu vuông góc H của M trên d (như trên).
- ☑ Tiếp tục cho M' đối xứng với M qua H và tìm được M' bởi công thức:

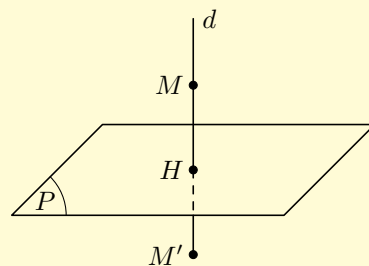
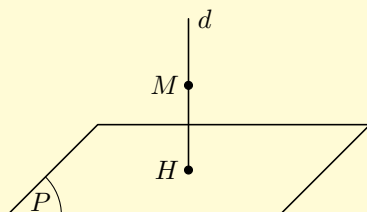
$$\begin{cases} x_{M'} = 2x_H - x_M \\ y_{M'} = 2y_H - y_M \\ z_{M'} = 2z_H - z_M \end{cases}$$

b) Để tìm hình chiếu vuông góc H của điểm M trên mặt phẳng (P) ta làm như sau:

- ☑ Gọi d là đường thẳng đi qua M và vuông góc với (P) . Viết phương trình tham số của d

$$d: \begin{cases} x = x_M + at \\ y = y_M + bt \\ z = z_M + ct \end{cases} \text{ (*), trong đó } \vec{n} = (a; b; c) \text{ là véc-tơ pháp tuyến của } (P).$$

- ☑ Sử dụng (*) để ghi thành tọa độ cho H , tức là $H(x_M + at; y_M + bt; z_M + ct)$.
- ☑ Thay tọa độ của H vào phương trình của (P) để tìm t , từ đó tìm được H .



QUICK NOTE

⚠ Nếu đề bài có thêm yêu cầu tìm điểm M' đối xứng với M qua (P) :

☑ Ta vẫn phải giải bài toán tìm hình chiếu vuông góc H của M trên (P) (như trên).

☑ Tiếp tục cho M' đối xứng với M qua H và tìm được M' bởi công thức:

$$\begin{cases} x_{M'} = 2x_H - x_M \\ y_{M'} = 2y_H - y_M \\ z_{M'} = 2z_H - z_M. \end{cases}$$

1. Ví dụ minh họa

VÍ DỤ 1. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng (d) có phương trình $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + 3t \\ z = 3 + 4t \end{cases}$.

Hỏi điểm nào trong các điểm sau nằm trên (d) : $A(-1; -2; -3)$, $B(2; 3; 4)$, $C(-1; -1; -1)$, $D(0; 0; 0)$?

VÍ DỤ 2. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = 1 + t \\ z = 3t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$

và hai điểm $A(5; 0; 2)$, $B(2; -5; 3)$. Tìm điểm M thuộc Δ sao cho $\triangle ABM$ vuông tại A .

VÍ DỤ 3. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(2; 0; 1)$ và đường thẳng $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-2}{1}$. Tìm tọa độ hình chiếu vuông góc của M lên đường thẳng d .

VÍ DỤ 4. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, tìm tọa độ điểm M' đối xứng với điểm $M(1; 4; -2)$ qua đường thẳng $(d): \begin{cases} x = 1 + 2t, \\ y = -1 - t, \\ z = 2t. \end{cases}$

VÍ DỤ 5. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(3; 4; 1)$, $B(-3; -2; -2)$. Đường thẳng qua A và B cắt mặt phẳng (Oxy) tại M . Tính tỉ số $k = \frac{MA}{MB}$.

(A) $k = -\frac{1}{2}$.

(B) $k = 2$.

(C) $k = -2$.

(D) $k = \frac{1}{2}$.

2. Bài tập trắc nghiệm

CÂU 1. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $(\Delta): \frac{x+1}{1} = \frac{y+4}{2} = \frac{z}{1}$ và điểm $A(2; 0; 1)$. Hình chiếu vuông góc của A trên (Δ) là điểm nào dưới đây?

(A) $Q(2; 2; 3)$.

(B) $M(-1; 4; -4)$.

(C) $N(0; -2; 1)$.

(D) $P(1; 0; 2)$.

CÂU 2. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1; 1; 1)$ và đường thẳng $d: \begin{cases} 6 - 4t \\ -2 - t \\ -1 + 2t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$. Hình chiếu của A trên d có tọa độ là

(A) $(-2; 3; 1)$.

(B) $(2; -3; 1)$.

(C) $(2; 3; 1)$.

(D) $(2; -3; -1)$.

CÂU 3. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-12}{4} = \frac{y-9}{3} = \frac{z-1}{1}$ và mặt phẳng $(P): 3x + 5y - z - 2 = 0$ cắt nhau tại điểm $M(a; b; c)$ khi đó $a + b + c$ có giá trị là

(A) 5.

(B) -2.

(C) 2.

(D) 3.

CÂU 4. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x+1}{1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z+2}{2}$ và điểm $A(3; 2; 0)$. Điểm đối xứng với điểm A qua đường thẳng d có tọa độ là

(A) $(-1; 0; 4)$.

(B) $(7; 1; -1)$.

(C) $(2; 1; -2)$.

(D) $(0; 2; -5)$.

CÂU 5. Gọi $H(a; b; c)$ là hình chiếu của $A(2; -1; 1)$ lên đường thẳng $(d): \begin{cases} x = 1 \\ y = 4 + 2t \\ z = -2t \end{cases}$

QUICK NOTE

Đẳng thức nào dưới đây đúng?

A $a + 2b + 3c = 10$.

B $a + 2b + 3c = 5$.

C $a + 2b + 3c = 8$.

D $a + 2b + 3c = 12$.

CÂU 6. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P) : x + y - z - 1 = 0$ và đường thẳng $d : \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{2}$. Tìm giao điểm M của d và (P) .

A $M(3; -3; -5)$.

B $M(3; 3; -5)$.

C $M(3; 3; 5)$.

D $M(-3; -3; -5)$.

CÂU 7. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d : \frac{x-4}{2} = \frac{y-5}{3} = \frac{z-6}{4}$. Điểm nào dưới đây thuộc đường thẳng d ?

A $M(2; 2; 2)$.

B $M(2; 2; 4)$.

C $M(2; 3; 4)$.

D $M(2; 2; 10)$.

CÂU 8. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng d có phương trình $\frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-3}{-4}$. Điểm nào sau đây **không** thuộc đường thẳng d ?

A $Q(-2; -4; 7)$.

B $P(7; 2; 1)$.

C $M(1; -2; 3)$.

D $N(4; 0; -1)$.

CÂU 9. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(2; -6; 3)$ và đường thẳng $d : \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -2 - 2t \\ z = t \end{cases}$. Tìm tọa độ hình chiếu vuông góc H của M trên d .

A $H(1; 2; 1)$.

B $H(1; -2; 0)$.

C $H(4; -4; 1)$.

D $H(2; 2; -2)$.

CÂU 10. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d : \begin{cases} x = 1 + 5t \\ y = 2t \\ z = -3 + t \end{cases}$. Điểm nào dưới đây **không** thuộc đường thẳng d ?

A $M(-4; -2; -4)$.

B $N(1; 0; -3)$.

C $P(6; 2; 2)$.

D $Q(51; 20; 7)$.

Dạng 4. Góc

a) Cho đường thẳng d có véc-tơ chỉ phương \vec{u} và mặt phẳng (P) có véc-tơ pháp tuyến \vec{n} . Góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (P) :

$$\sin \varphi = |\cos(\vec{u}, \vec{n})| \quad \left(0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}\right)$$

b) Cho hai đường thẳng chéo nhau d_1 có véc-tơ chỉ phương \vec{u} và d_2 có véc-tơ chỉ phương \vec{v} . Góc giữa hai đường thẳng d_1 và d_2 :

$$(d_1, d_2) = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| |\vec{v}|}$$

1. Ví dụ minh họa

VÍ DỤ 1. Trong không gian $Oxyz$, góc giữa đường thẳng $d : \frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-3}{1}$ và mặt phẳng $(P) : x + 2y - z + 5 = 0$ là

A 30° .

B 45° .

C 60° .

D 90° .

VÍ DỤ 2. Trong không gian $Oxyz$, góc giữa hai đường thẳng $d : \frac{x}{1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-1}{2}$ và $d' : \frac{x+1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-3}{1}$ là

A 30° .

B 45° .

C 60° .

D 90° .

VÍ DỤ 3. Trong không gian $Oxyz$, góc giữa hai đường thẳng $d : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \\ z = 0 \end{cases}$ và $d' : \frac{x}{-2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{-2}$ là

A 30° .

B 45° .

C 60° .

D 90° .

VÍ DỤ 4. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1; 0; 6)$. Biết rằng có hai điểm M, N phân biệt thuộc trục Ox sao cho các đường thẳng AM, AN cùng tạo với đường thẳng chứa trục Ox một góc 45° . Tính tổng các hoành độ hai điểm M, N .

2. Bài tập trắc nghiệm

CÂU 1. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng $(P): 3x + 4y + 5z + 8 = 0$ và đường thẳng d là giao tuyến của hai mặt phẳng $(\alpha): x - 2y + 1 = 0, (\beta): x - 2z - 3 = 0$. Góc giữa d và (P) bằng

- (A) 45° . (B) 90° . (C) 30° . (D) 60° .

CÂU 2. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $H(2; -1; -2)$ là hình chiếu vuông góc của gốc tọa độ O xuống mặt phẳng (P) , số đo góc giữa mặt phẳng (P) và mặt phẳng $(Q): x - y - 11 = 0$ bằng bao nhiêu?

- (A) 45° . (B) 30° . (C) 90° . (D) 60° .

CÂU 3. Trong không gian $Oxyz$, góc giữa đường thẳng $d: \frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-3}{1}$ và mặt phẳng $(P): x + 2y - z + 5 = 0$ là

- (A) 30° . (B) 45° . (C) 60° . (D) 90° .

CÂU 4. Trong không gian $Oxyz$, góc giữa đường thẳng $d: \frac{x-2}{1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-1}{1}$ và mặt phẳng $(P): -x + y + 2z + 5 = 0$ là

- (A) 30° . (B) 45° . (C) 60° . (D) 90° .

CÂU 5. Trong không gian $Oxyz$, góc giữa hai đường thẳng $d: \frac{x}{1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-1}{2}$ và $d': \frac{x+1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-3}{1}$ là

- (A) 30° . (B) 45° . (C) 60° . (D) 90° .

CÂU 6. Trong không gian $Oxyz$, góc giữa hai đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \\ z = 0 \end{cases}$ và $d': \frac{x}{-2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{-2}$ là

- (A) 30° . (B) 45° . (C) 60° . (D) 90° .

CÂU 7. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{-2} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{-1}$ và mặt phẳng $(P): 2x - y - 2z + 1 = 0$. Gọi α là góc giữa đường thẳng Δ và mặt phẳng (P) . Khẳng định nào sau đây đúng?

- (A) $\cos \alpha = \frac{4}{9}$. (B) $\cos \alpha = -\frac{4}{9}$. (C) $\sin \alpha = \frac{4}{9}$. (D) $\sin \alpha = -\frac{4}{9}$.

CÂU 8. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{-2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{3}$ và mặt phẳng $(\alpha): 4x - 2y - 6z + 5 = 0$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- (A) Δ song song với (α) . (B) Δ nằm trên (α) .
(C) Δ vuông góc với (α) . (D) Δ cắt và không vuông góc với (α) .

CÂU 9. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = 5 + t \\ y = -2 + t \\ z = 4 + \sqrt{2}t \end{cases}, (t \in \mathbb{R})$ và mặt phẳng $(P): x - y + \sqrt{2}z - 7 = 0$. Hãy xác định góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (P) .

- (A) 90° . (B) 45° . (C) 30° . (D) 60° .

CÂU 10. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x - y + 2z + 1 = 0$ và đường thẳng $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{-1}$. Tính góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (P) .

- (A) 60° . (B) 120° . (C) 150° . (D) 30° .

CÂU 11. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng $(P): 3x + 4y + 5z + 8 = 0$ và đường thẳng d là giao tuyến của hai mặt phẳng $(\alpha): x - 2y + 1 = 0, (\beta): x - 2z - 3 = 0$. Góc giữa d và (P) bằng

- (A) 45° . (B) 90° . (C) 30° . (D) 60° .

QUICK NOTE

QUICK NOTE

CÂU 12. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $H(2; -1; -2)$ là hình chiếu vuông góc của gốc tọa độ O xuống mặt phẳng (P) , số đo góc giữa mặt phẳng (P) và mặt phẳng $(Q): x - y - 11 = 0$ bằng bao nhiêu?

(A) 45° .**(B)** 30° .**(C)** 90° .**(D)** 60° .

Dạng 5. Khoảng cách

a) Cho đường thẳng d có véc-tơ chỉ phương \vec{u} , đi qua điểm M_0 và điểm M . Khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng d :

$$d(M, d) = \frac{|\left[\vec{u}; \overrightarrow{M_0M}\right]|}{|\vec{u}|}$$

b) Cho hai đường thẳng chéo nhau d_1 có véc-tơ chỉ phương \vec{u} , đi qua điểm M_1 và d_2 có véc-tơ chỉ phương \vec{v} , đi qua điểm M_2 . Khoảng cách giữa d_1 và d_2 :

$$(d_1, d_2) = \frac{|\left[\vec{u}; \vec{v}\right] \cdot \overrightarrow{M_1M_2}|}{|\left[\vec{u}; \vec{v}\right]|}$$

1. Ví dụ minh họa

VÍ DỤ 1. Trong không gian $Oxyz$, tính khoảng cách từ điểm $A(1; -2; 3)$ đến đường thẳng $(\Delta): \frac{x-10}{5} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+2}{1}$.

VÍ DỤ 2. Trong không gian $Oxyz$, khoảng cách từ điểm $N(-2; 1; -1)$ đến đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+2}{-2}$ bằng bao nhiêu?

VÍ DỤ 3. Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $\Delta_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{3}$ và $\Delta_2: \begin{cases} x = 2 - t \\ y = -1 + t \\ z = t \end{cases}$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 .

VÍ DỤ 4. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(1; 3; -2)$ và $B(3; 5; -12)$. Đường thẳng AB cắt mặt phẳng Oyz tại N . Tính tỉ số $\frac{BN}{AN}$.

2. Bài tập trắc nghiệm

CÂU 1. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, tính khoảng cách từ điểm $M(1; 3; 2)$ đến đường thẳng $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + t \\ z = -t \end{cases}$.

(A) $\sqrt{2}$.**(B)** 2.**(C)** $2\sqrt{2}$.**(D)** 3.

CÂU 2. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \\ z = -t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

và $d': \begin{cases} x = 2t' \\ y = -1 + t' \\ z = t' \end{cases}, t' \in \mathbb{R}$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng d và d' là

(A) $\frac{1}{\sqrt{14}}$.**(B)** $\sqrt{7}$.**(C)** $\sqrt{14}$.**(D)** $\frac{1}{\sqrt{7}}$.

CÂU 3. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1; 2; 3)$. Khoảng cách từ A đến trục Oy bằng

(A) 10.**(B)** $\sqrt{10}$.**(C)** 3.**(D)** 2.

CÂU 4. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z+1}{1}$ và mặt phẳng $(P): x - 2y - 2z + 5 = 0$. Điểm A nào dưới đây thuộc d và thỏa mãn khoảng cách từ A đến mặt phẳng (P) bằng 3?

QUICK NOTE

- (A) $A(4; -2; 1)$. (B) $A(2; -1; 0)$. (C) $A(-2; 1; -2)$. (D) $A(0; 0; -1)$.

CÂU 5. Trong không gian $Oxyz$, tính khoảng cách giữa đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-4} = \frac{z-4}{3}$ và trục Ox .

- (A) 1. (B) 4. (C) 3. (D) 2.

CÂU 6. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(3; 2; 1)$. Tính khoảng cách từ A đến trục Oy .

- (A) 2. (B) $\sqrt{10}$. (C) 3. (D) 10.

CÂU 7. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(2; 0; 0)$, $B(0; 3; 1)$, $C(-1; 4; 2)$. Độ dài đường cao từ đỉnh A của tam giác ABC là

- (A) $\sqrt{6}$. (B) $\sqrt{2}$. (C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$. (D) $\sqrt{3}$.

CÂU 8. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, khoảng cách h từ điểm $A(-4; 3; 2)$ đến trục Ox là

- (A) $h = 4$. (B) $h = \sqrt{13}$. (C) $h = 3$. (D) $h = 2\sqrt{5}$.

CÂU 9. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{2}$ và điểm $A(1; 6; 0)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của độ dài MA với $M \in d$.

- (A) $5\sqrt{3}$. (B) 6. (C) $4\sqrt{2}$. (D) $\sqrt{30}$.

CÂU 10. Trong không gian $Oxyz$, tính khoảng cách từ điểm $A(1; -2; 3)$ đến đường thẳng $(\Delta): \frac{x-10}{5} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+2}{1}$.

- (A) $\sqrt{\frac{1361}{27}}$. (B) 7. (C) $\sqrt{\frac{1358}{27}}$. (D) $\frac{13}{12}$.

CÂU 11. Trong không gian $Oxyz$, khoảng cách từ điểm $N(-2; 1; -1)$ đến đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+2}{-2}$ bằng bao nhiêu?

- (A) $\frac{5\sqrt{2}}{2}$. (B) $\frac{\sqrt{2}}{3}$. (C) $\frac{5\sqrt{2}}{3}$. (D) $\frac{5}{3}$.

CÂU 12. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \\ z = -t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

và $d': \begin{cases} x = 2t' \\ y = -1 + t' \\ z = t' \end{cases}, t' \in \mathbb{R}$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng d và d' là

- (A) $\frac{1}{\sqrt{14}}$. (B) $\sqrt{7}$. (C) $\sqrt{14}$. (D) $\frac{1}{\sqrt{7}}$.

CÂU 13. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1; 2; 3)$. Khoảng cách từ A đến trục Oy bằng

- (A) 10. (B) $\sqrt{10}$. (C) 3. (D) 2.

CÂU 14. Trong không gian $Oxyz$, tính khoảng cách giữa đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-4} = \frac{z-4}{3}$ và trục Ox .

- (A) 1. (B) 4. (C) 3. (D) 2.

CÂU 15. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(3; 2; 1)$. Tính khoảng cách từ A đến trục Oy .

- (A) 2. (B) $\sqrt{10}$. (C) 3. (D) 10.

Dạng 6. Vị trí tương đối giữa hai đường thẳng, giữa đường thẳng và mặt phẳng

Để xét vị trí tương đối của hai đường thẳng d_1 và d_2 , ta thực hiện theo các bước:

- a) ☒ Với đường thẳng d_1 chỉ ra vtcp $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ và điểm $M_1 \in d_1$.
☒ Với đường thẳng d_2 chỉ ra vtcp $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$ và điểm $M_2 \in d_2$.

QUICK NOTE

b) Kiểm tra:

- ☑ Nếu $\vec{a}, \vec{b}, \overrightarrow{M_1M_2}$ cùng phương thì kết luận d_1 và d_2 trùng nhau.
- ☑ Nếu \vec{a}, \vec{b} cùng phương và không cùng phương với $\overrightarrow{M_1M_2}$ thì kết luận d_1 và d_2 song song với nhau.
- ☑ Nếu \vec{a}, \vec{b} không cùng phương, thực hiện bước 3.

c) Xác định $[\vec{a}, \vec{b}] \cdot \overrightarrow{M_1M_2}$, khi đó:

- ☑ Nếu $[\vec{a}, \vec{b}] \cdot \overrightarrow{M_1M_2} = 0$ thì kết luận d_1 và d_2 cắt nhau.
- ☑ Nếu $[\vec{a}, \vec{b}] \cdot \overrightarrow{M_1M_2} \neq 0$ thì kết luận d_1 và d_2 chéo nhau.

1. Ví dụ minh họa

VÍ DỤ 1. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $(\Delta_1): \begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = -1 + 4t \end{cases}$

và $(\Delta_2): \frac{x+4}{3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-4}{-1}$. Xét vị trí tương đối của d_1 và d_2 .

VÍ DỤ 2. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x+1}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z-1}{-3}$ và mặt phẳng $(P): 3x - 3y + 2z + 1 = 0$. Xét vị trí tương đối của d và (P) .

VÍ DỤ 3. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 + mt \\ y = t \\ z = -1 + 2t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$

và $d': \begin{cases} x = 1 - t' \\ y = 2 + 2t' \\ z = 3 - t' \end{cases} (t' \in \mathbb{R})$. Giá trị của m để hai đường thẳng d và d' cắt nhau là

CÂU 1. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 3x + 5y - z - 2 = 0$ và đường thẳng $d: \frac{x-12}{4} = \frac{y-9}{3} = \frac{z-1}{1}$. Tọa độ giao điểm M của d và (P) là

VÍ DỤ 4. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(10; 2; -2)$ và $B(5; 1; -3)$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng AB vuông góc với mặt phẳng $(P): 10x + 2y + mz + 11 = 0$.

VÍ DỤ 5. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(0; -3; 1)$ và đường thẳng $d: \begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = 1 - 2t \\ z = 3 + t \end{cases}$.

Mặt phẳng (P) đi qua điểm M và vuông góc với đường thẳng d có phương trình

2. Bài tập trắc nghiệm

CÂU 1. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d: \frac{x+1}{2} = \frac{1-y}{-m} = \frac{2-z}{-3}$ và $d_1: \frac{x-3}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{1}$. Tìm tất cả các giá trị của m để $d \perp d_1$.

- (A) $m = -1$. (B) $m = 1$. (C) $m = -5$. (D) $m = 5$.

CÂU 2. Trong không gian $Oxyz$ cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z+1}{1}$. Trong các mặt phẳng dưới đây mặt phẳng nào vuông góc với đường thẳng d ?

- (A) $4x - 2y + 2z + 4 = 0$. (B) $4x + 2y + 2z + 4 = 0$.
(C) $2x - 2y + 2z + 4 = 0$. (D) $4x - 2y - 2z - 4 = 0$.

CÂU 3. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua hai điểm $A(2; 1; 3)$, $B(1; -2; 1)$ và song song với đường thẳng $d: \begin{cases} x = -1 + t \\ y = 2t \\ z = -3 - 2t \end{cases}$.

- (A) $2x + y + 3z + 19 = 0$. (B) $10x - 4y + z - 19 = 0$.
(C) $2x + y + 3z - 19 = 0$. (D) $10x - 4y + z + 19 = 0$.

CÂU 4. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1; 2; -1)$, $B(-3; 4; 3)$, $C(3; 1; -3)$. Số điểm D sao cho 4 điểm A, B, C, D là 4 đỉnh của một hình bình hành là

- A** 3. **B** 1. **C** 2. **D** 0.

CÂU 5. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, tìm tất cả giá trị tham số m để đường thẳng $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{1}$ song song với mặt phẳng $(P): 2x + y - m^2z + m = 0$.

- A** $m \in \{-2; 2\}$. **B** $m \in \emptyset$. **C** $m = -2$. **D** $m = 2$.

CÂU 6. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha): y + 2z - 1 = 0$. Khẳng định nào sau đây sai?

- A** $(\alpha) \perp (Oyz)$. **B** (α) cắt (Oxy) . **C** $(\alpha) \perp Ox$. **D** $(\alpha) \parallel Ox$.

CÂU 7. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(2; 1; -1)$, $B(0; -1; 3)$, $C(1; 2; 1)$. Mặt phẳng (P) qua B và vuông góc với AC có phương trình là

- A** $x + y + 2z + 5 = 0$. **B** $x - y - 2z + 5 = 0$.
C $x - y + 2z + 5 = 0$. **D** $x + y - 2z + 5 = 0$.

CÂU 8. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d: \frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-3}{5}$ và $d': \frac{x-4}{6} = \frac{y-6}{8} = \frac{z-8}{10}$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A** d vuông góc với d' . **B** d song song với d' .
C d trùng với d' . **D** d và d' chéo nhau.

CÂU 9. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(0; 1; 1)$ và hai đường thẳng $d_1: \begin{cases} x = -1 \\ y = -1 + t \\ z = t \end{cases}$

và $d_2: \frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{1}$. Gọi d là đường thẳng đi qua điểm A , cắt đường thẳng d_1 và vuông góc với đường thẳng d_2 . Đường thẳng d đi qua điểm nào trong các điểm dưới đây?

- A** $N(2; 1; -5)$. **B** $Q(3; 2; 5)$. **C** $P(-2; -3; 11)$. **D** $M(1; 0; -1)$.

CÂU 10. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-2}{-1} = \frac{y-8}{1} = \frac{z+4}{-1}$ và mặt phẳng $(P): x + y + z - 3 = 0$. Tọa độ giao điểm của đường thẳng d và mặt phẳng (P) là

- A** $(2; 8; -4)$. **B** $(0; 10; -7)$. **C** $(-1; 11; -7)$. **D** $(5; 5; -1)$.

CÂU 11. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x + y + z + 3 = 0$ và đường thẳng $d: \frac{x}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+2}{m}$, với $m \neq 0$. Tìm m để d song song (P) .

- A** $m = 5$. **B** $m = -5$. **C** $m = 1$. **D** $m = -1$.

CÂU 12. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d_1: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = 3t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$

và đường thẳng $d_2: \begin{cases} x = 2s \\ y = 1 - 2s \\ z = 6s \end{cases} (s \in \mathbb{R})$. Chọn khẳng định đúng.

- A** d_1, d_2 chéo nhau. **B** d_1, d_2 cắt nhau.
C $d_1 \parallel d_2$. **D** $d_1 \equiv d_2$.

CÂU 13. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha): x + y - 2z + 1 = 0$ đi qua điểm $M(1; -2; 0)$ và cắt đường thẳng $d: \begin{cases} x = 11 + 2t \\ y = 2t \\ z = -4t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$ tại N . Tính độ dài đoạn MN .

- A** $7\sqrt{6}$. **B** $3\sqrt{11}$. **C** $\sqrt{10}$. **D** $4\sqrt{5}$.

CÂU 14. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x - y - z + 3 = 0$, và đường thẳng $\Delta: \frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{2}$. Xét vị trí tương đối của (P) và Δ .

- A** (P) và Δ chéo nhau. **B** (P) song song Δ .
C (P) chứa Δ . **D** (P) cắt Δ .

QUICK NOTE

QUICK NOTE

CÂU 15. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 5 - 3mt \\ z = -1 + t. \end{cases}$ phẳng $(P): 4x - 4y + 2z - 5 = 0$. Giá trị nào của m để đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (P) .

A $m = \frac{3}{2}$. **B** $m = \frac{2}{3}$. **C** $m = -\frac{5}{6}$. **D** $m = \frac{5}{6}$.

Dạng 7. Bài toán liên quan giữa đường thẳng - mặt phẳng - mặt cầu

1. Ví dụ minh họa

VÍ DỤ 1. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua hai điểm $A(2; 1; 3), B(1; -2; 1)$ và song song với đường thẳng $d: \begin{cases} x = -1 + t \\ y = 2t \\ z = -3 - 2t. \end{cases}$

VÍ DỤ 2. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1; 0; 0)$ và đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-1}{2}$. Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa điểm A và đường thẳng d .

VÍ DỤ 3. Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho đường thẳng $(d): \frac{x-2}{-1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-1}{1}$ và mặt cầu $(S): (x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 25$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm $M(-1; -1; -2)$ cắt đường thẳng (d) và cắt mặt cầu (S) tại hai điểm A và B sao cho $AB = 8$.

VÍ DỤ 4. Cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y + 4z - 3 = 0$ và hai đường thẳng $\Delta_1: \begin{cases} x + 2y - 2 = 0 \\ x - 2z = 0 \end{cases}$ và $\Delta_2: \frac{x-1}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{-1}$.

a) Chứng minh Δ_1 và Δ_2 chéo nhau.

b) Viết phương trình tiếp diện của mặt cầu (S) biết tiếp diện đó song song với hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 .

VÍ DỤ 5. Trong không gian $Oxyz$, tìm điểm $M \in d: \frac{x-3}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{-2}$ sao cho mặt phẳng đi qua M và vuông góc với đường thẳng d cắt mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z - 19 = 0$ theo một đường tròn có chu vi bằng 8π .

VÍ DỤ 6. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x - 2y + 2z - 1 = 0$ và hai đường thẳng $\Delta_1: \frac{x-4}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{2}$, $\Delta_2: \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 + t \\ z = 2 + t \end{cases}$. Xác định tọa độ điểm $M \in \Delta_1$ sao cho khoảng cách từ M đến đường thẳng Δ_2 và khoảng cách từ M đến mặt phẳng (P) bằng nhau.

VÍ DỤ 7. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{-1}$ và mặt phẳng $(P): x + y + z - 3 = 0$. Gọi I là giao điểm của Δ và (P) . Tìm tọa độ điểm M thuộc (P) sao cho MI vuông góc với Δ và $MI = 4\sqrt{14}$.

VÍ DỤ 8. Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm I và tiếp xúc với đường thẳng Δ , với:

a) $I(1; 2; 3)$, $\Delta: \frac{x}{1} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z}{2}$

b) $I(-2; 3; -1)$, $\Delta: \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+2}{-2}$

VÍ DỤ 9. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x+1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-2}{1}$ và điểm $I(0; 0; 3)$. Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm I và cắt đường thẳng d tại hai điểm A, B sao cho tam giác IAB vuông tại I .

VÍ DỤ 10. Cho điểm $I(3; 4; 0)$ và đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{-4}$. Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm I và cắt đường thẳng Δ tại hai điểm A, B sao cho $S_{\triangle IAB} = 12$.

2. Bài tập trắc nghiệm

CÂU 1. Trong hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(2; 1; 1)$ và mặt phẳng $(P): 2x - y + 2z + 1 = 0$. Phương trình của mặt cầu tâm A và tiếp xúc với mặt phẳng (P) là

- (A) $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 = 9$. (B) $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 = 2$.
(C) $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 = 4$. (D) $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 = 36$.

CÂU 2. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $(P): x - 2y + 2z - 5 = 0$, $A(-3; 0; 1)$, $B(1; -1; 3)$. Viết phương trình đường thẳng d qua A , song song với (P) sao cho khoảng cách từ B đến d là lớn nhất.

- (A) $\frac{x+3}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z-1}{2}$. (B) $\frac{x+3}{3} = \frac{y}{-2} = \frac{z-1}{2}$.
(C) $\frac{x-1}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z-1}{2}$. (D) $\frac{x+3}{2} = \frac{y}{-6} = \frac{z-1}{-7}$.

CÂU 3. Trong không gian $Oxyz$ cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -3 + 2t \\ z = 1 + 3t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$. Gọi d' là hình chiếu vuông góc của d trên mặt phẳng tọa độ Oxz . Viết phương trình đường thẳng d' .

- (A) $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 - 2t \\ z = 1 + 3t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$. (B) $\begin{cases} x = 0 \\ y = -3 + 2t \\ z = 1 + 3t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$.
(C) $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -3 + 2t \\ z = 0 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$. (D) $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 0 \\ z = 1 + 3t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$.

CÂU 4. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = 4 - t \end{cases}$. Mặt phẳng đi qua $A(2; -1; 1)$ và vuông góc với đường thẳng d có phương trình là

- (A) $2x + y - z - 2 = 0$. (B) $x + 3y - 2z - 3 = 0$.
(C) $x - 3y - 2z + 3 = 0$. (D) $x + 3y - 2z - 5 = 0$.

CÂU 5. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y + 4z = 0$ và mặt phẳng $(P): x + 2y - 2z + 1 = 0$. Gọi (Q) là mặt phẳng song song với (P) và tiếp xúc với mặt cầu (S) . Phương trình của mặt phẳng (Q) là

- (A) $(Q): x + 2y - 2z - 17 = 0$. (B) $(Q): 2x + 2y - 2z + 19 = 0$.
(C) $(Q): x + 2y - 2z - 35 = 0$. (D) $(Q): x + 2y - 2z + 1 = 0$.

CÂU 6. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $(d): \frac{x+2}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+3}{2}$ và điểm $A(1; -2; 3)$. Mặt phẳng qua A và vuông góc với đường thẳng (d) có phương trình là

- (A) $x - y + 2z - 9 = 0$. (B) $x - 2y + 3z - 14 = 0$.
(C) $x - y + 2z + 9 = 0$. (D) $x - 2y + 3z - 9 = 0$.

CÂU 7. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) có phương trình $(P): -x + 3z - 2 = 0$. Tìm đáp án đúng

- (A) $(P) \parallel Oy$. (B) $(P) \parallel xOz$. (C) $(P) \supset Oy$. (D) $(P) \parallel Ox$.

CÂU 8. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = 2t \\ z = -2 - mt \end{cases}$ và mặt phẳng $(P): 2x - y - 2z - 6 = 0$. Giá trị của m để $d \subset (P)$ là

- (A) $m = 4$. (B) $m = -4$. (C) $m = 2$. (D) $m = -2$.

CÂU 9. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1; 0; 0)$ và đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-1}{2}$. Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa điểm A và đường thẳng d .

- (A) $(P): 5x + 2y + 4z - 5 = 0$. (B) $(P): 2x + y + 2z - 1 = 0$.
(C) $(P): 2x + 2y + z - 2 = 0$. (D) $(P): 5x - 2y - 4z - 5 = 0$.

QUICK NOTE

QUICK NOTE

CÂU 10. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z}{-2}$ và hai điểm $A(2;1;0)$, $B(-2;3;2)$. Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm thuộc d và đi qua hai điểm A, B .

(A) $(S): (x+1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 17.$

(B) $(S): (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 17.$

(C) $(S): (x-3)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 5.$

(D) $(S): (x+3)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 33.$

CÂU 11. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng d_1, d_2 lần lượt có phương trình $d_1: \frac{x-2}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{3}$, $d_2: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-1}{4}$. Phương trình mặt phẳng cách đều hai đường thẳng d_1, d_2 là

(A) $14x - 4y - 8z + 3 = 0.$

(B) $14x - 4y - 8z - 1 = 0.$

(C) $14x - 4y - 8z + 1 = 0.$

(D) $14x - 4y - 8z - 3 = 0.$

CÂU 12. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng d có phương trình $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = t \\ z = 2 - t \end{cases}$. Gọi đường thẳng d' là hình chiếu vuông góc của đường thẳng d trên mặt phẳng (Oxy) . Đường thẳng d' có một véc-tơ chỉ phương là

(A) $\vec{u}_1 = (2; 0; 1).$

(B) $\vec{u}_3 = (1; 1; 0).$

(C) $\vec{u}_2 = (-2; 1; 0).$

(D) $\vec{u}_4 = (2; 1; 0).$

CÂU 13. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt phẳng song song với 2 đường thẳng $\Delta_1: \frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z}{4}$ và $\Delta_2: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 + 2t \\ z = 1 - t \end{cases}$ có 1 véc-tơ pháp tuyến là

(A) $\vec{n} = (-5; 6; -7).$

(B) $\vec{n} = (5; -6; 7).$

(C) $\vec{n} = (-5; 6; 7).$

(D) $\vec{n} = (-5; -6; 7).$

CÂU 14. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 8$ và hai đường thẳng $d_1: \frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{2}$, $d_2: \frac{x+1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1}$. Viết phương trình tất cả các mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu (S) đồng thời song song với d_1, d_2 .

(A) $x - y + 2 = 0.$

(B) $x - y + 2 = 0$ hoặc $x - y + 6 = 0.$

(C) $x - y - 6 = 0.$

(D) $x - y + 6 = 0.$

CÂU 15. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $S(I; R)$ có tâm $I(1; 1; 3)$ và bán kính $R = \sqrt{10}$. Hỏi có bao nhiêu giao điểm giữa mặt cầu (S) với các trục Ox, Oy, Oz ?

(A) 1.

(B) 2.

(C) 4.

(D) 6.

CÂU 16. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $I(3; 4; -5)$ và mặt phẳng (P) có phương trình $2x + 6y - 3z + 4 = 0$. Phương trình mặt cầu (S) có tâm I và tiếp xúc với mặt phẳng (P) là

(A) $(x-3)^2 + (y-4)^2 + (z+5)^2 = \frac{361}{49}.$

(B) $(x-3)^2 + (y-4)^2 + (z+5)^2 = 49.$

(C) $(x+3)^2 + (y+4)^2 + (z-5)^2 = 49.$

(D) $(x+3)^2 + (y+4)^2 + (z-5)^2 = \frac{361}{49}.$

CÂU 17. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \frac{x+2}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{2}$ và mặt phẳng $(P): x + y + z = 0$. Đường thẳng Δ' là hình chiếu của đường thẳng Δ lên mặt phẳng (P) . Một véc-tơ chỉ phương \vec{u} của đường thẳng Δ' là

(A) $\vec{u} = (1; 1; -2).$

(B) $\vec{u} = (1; -1; 0).$

(C) $\vec{u} = (1; 0; -1).$

(D) $\vec{u} = (1; -2; 1).$

CÂU 18. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(0; 1; -1)$, $B(-2; 3; 1)$ và mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y = 0$. Đường thẳng AB và mặt cầu (S) có bao nhiêu điểm chung?

(A) 0.

(B) 1.

(C) 2.

(D) Vô số.

CÂU 19. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+5}{-1}$ và mặt phẳng $(P): 2x - 3y + z - 6 = 0$. Đường thẳng nằm trong mặt phẳng (P) , cắt và vuông góc với d có phương trình là

(A) $\frac{x+4}{2} = \frac{y+3}{5} = \frac{z+3}{11}.$

(B) $\frac{x-8}{2} = \frac{y-1}{5} = \frac{z+7}{11}.$

C $\frac{x-4}{2} = \frac{y-3}{5} = \frac{z-3}{11}.$

D $\frac{x+8}{2} = \frac{y+1}{5} = \frac{z-7}{11}.$

CÂU 20. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(0; 0; 2)$ và đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{1}$. Phương trình mặt phẳng (P) đi qua A và vuông góc với d là

A $2x - y + 2z + 5 = 0.$

B $2x - y + z + 2 = 0.$

C $2x - y + z - 2 = 0.$

D $2x - y + z - 4 = 0.$

Dạng 8. Các bài toán cực trị

1. Ví dụ minh họa

VÍ DỤ 1. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $E(2; 1; 3)$, mặt phẳng $(P): 2x + 2y - z - 3 = 0$ và mặt cầu $(S): (x-3)^2 + (y-2)^2 + (z-5)^2 = 36$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua E , nằm trong (P) và cắt (S) tại hai điểm có khoảng cách nhỏ nhất. Biết Δ có một vectơ chỉ phương $\vec{u} = (2018; y_0; z_0)$. Tính $T = z_0 - y_0$.

VÍ DỤ 2. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; 0\right)$ và mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 = 8$.

Đường thẳng d thay đổi, đi qua điểm M , cắt mặt cầu (S) tại hai điểm phân biệt. Tính diện tích lớn nhất S của tam giác OAB .

VÍ DỤ 3. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $E(1; 1; 2)$, mặt phẳng $(P): x + y + z - 4 = 0$ và mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 = 9$. Gọi Δ là đường thẳng qua E , nằm trong mặt phẳng (P) và cắt mặt cầu (S) tại hai điểm có khoảng cách nhỏ nhất. Lập phương trình của Δ .

VÍ DỤ 4. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $E(1; 1; 1)$, mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 = 4$ và mặt phẳng $(P): x - 3y + 5z - 3 = 0$. Gọi Δ là đường thẳng qua E , nằm trong (P) và cắt (S) tại hai điểm A, B sao cho tam giác OAB đều. Lập phương trình của Δ .

2. Bài tập trắc nghiệm

CÂU 1. Trong hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(-1; 2; 1), B(1; 2; -3)$ và đường thẳng $d: \frac{x+1}{2} = \frac{y-5}{2} = \frac{z}{-1}$. Tìm véc-tơ chỉ phương \vec{u} của đường thẳng Δ đi qua A và vuông góc với d đồng thời cách B một khoảng lớn nhất.

A $\vec{u} = (4; -3; 2).$

B $\vec{u} = (2; 0; -4).$

C $\vec{u} = (2; 2; -1).$

D $\vec{u} = (1; 0; 2).$

CÂU 2. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $M(0; 1; 3), N(10; 6; 0)$ và mặt phẳng $(P): x - 2y + 2z - 10 = 0$. Biết rằng tồn tại điểm $I(-10; a; b)$ thuộc (P) sao cho $|IM - IN|$ đạt giá trị lớn nhất. Tính $T = a + b$.

A $T = 5.$

B $T = 1.$

C $T = 2.$

D $T = 6.$

CÂU 3. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 = (y+2)^2 + z^2 = 4$ có tâm I và mặt phẳng $(P): 2x - y + 2z + 2 = 0$. Tìm tọa độ điểm M thuộc (P) sao cho đoạn thẳng IM ngắn nhất.

A $\left(-\frac{1}{3}; -\frac{4}{3}; -\frac{4}{3}\right).$

B $\left(-\frac{11}{9}; -\frac{8}{9}; -\frac{2}{9}\right).$

C $(1; -2; 2).$

D $(1; -2; -3).$

CÂU 4. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $E(1; -2; 4), F(1; -2; -3)$. Gọi M là điểm thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho tổng $ME + MF$ có giá trị nhỏ nhất. Tìm tọa độ điểm M .

A $M(-1; 2; 0).$

B $M(-1; -2; 0).$

C $M(1; -2; 0).$

D $M(1; 2; 0).$

CÂU 5. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x - 2y + z - 1 = 0$ và điểm $A(0; -2; 3), B(2; 0; 1)$. Điểm $M(a; b; c)$ thuộc (P) sao cho $MA + MB$ nhỏ nhất. Giá trị của $a^2 + b^2 + c^2$ bằng

A $\frac{41}{4}.$

B $\frac{9}{4}.$

C $\frac{7}{4}.$

D $3.$

CÂU 6. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(2; -1; -2)$ và đường thẳng (d) có phương trình $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{1}$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua điểm A , song song với đường thẳng (d) và khoảng cách từ đường thẳng (d) tới mặt phẳng (P) là lớn nhất. Khi đó, mặt phẳng (P) vuông góc với mặt phẳng nào sau đây?

QUICK NOTE

QUICK NOTE

A $x - y - z - 6 = 0$.

B $x + 3y + 2z + 10 = 0$.

C $x - 2y - 3z - 1 = 0$.

D $3x + z + 2 = 0$.

CÂU 7. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho điểm $A(3; -1; 0)$ và đường thẳng $d: \frac{x-2}{-1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{1}$. Mặt phẳng (α) chứa d sao cho khoảng cách từ A đến (α) lớn nhất có phương trình là

A $x + y - z = 0$.

B $x + y - z - 2 = 0$.

C $x + y - z + 1 = 0$.

D $-x + 2y + z + 5 = 0$.

CÂU 8. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(0; 1; 1)$, $B(1; 2; 1)$ và đường thẳng $d: \frac{x}{1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-2}{-2}$. Hoành độ của điểm M thuộc d sao cho diện tích tam giác MAB có giá trị nhỏ nhất có giá trị bằng

A 2.

B 0.

C -1.

D 1.

CÂU 9. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+2}{-1}$ và hai điểm $A(0; -1; 3)$, $B(1; -2; 1)$. Tìm tọa độ điểm M thuộc đường thẳng Δ sao cho $MA^2 + 2MB^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A $M(1; 0; -2)$.

B $M(3; 1; -3)$.

C $M(5; 2; -4)$.

D $M(-1; -1; -1)$.

CÂU 10. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2z - 4 = 0$ và mặt phẳng $(P): 2x + y - 2z + 61 = 0$. Điểm M thay đổi trên (S) , điểm N thay đổi trên (P) . Độ dài nhỏ nhất của MN bằng

A 24.

B 21.

C 3.

D 18.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12

PHIẾU ĐÓNG HỌC PHÍ CỦA HỌC SINH:

Bài 4. ỨNG DỤNG CỦA PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Phương pháp

- ❑ **Bước 1:** Chọn hệ trục tọa độ Oxyz trong không gian: Vì Ox , Oy , Oz vuông góc với nhau từng đôi một nên nếu hình vẽ bài toán cho có chứa các cạnh vuông góc thì ta ưu tiên chọn các cạnh đó làm trục tọa độ.
- ❑ **Bước 2:** Suy ra tọa độ của các đỉnh, điểm trên hệ trục tọa độ vừa ghép.
- ❑ **Bước 3:** Sử dụng các kiến thức về tọa độ không gian để giải quyết bài toán

B. DẠNG TOÁN VÀ BÀI TẬP

Dạng 1. Các bài toán liên quan đến góc

- ❑ Cho hai đường thẳng d_1 , d_2 lần lượt có các VTPT là \vec{u}_1 , \vec{u}_2 . Góc giữa d_1 và d_2 bằng hoặc bù với góc giữa \vec{u}_1 và \vec{u}_2 .
Tức là $\cos(d_1, d_2) = |\cos(\vec{u}_1, \vec{u}_2)| = \frac{|\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2|}{|\vec{u}_1| \cdot |\vec{u}_2|}$.
- ❑ Cho đường thẳng d có VTCP \vec{u}_d và mặt phẳng (α) có VTPT \vec{n}_α . Góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (α) bằng góc giữa đường thẳng d với hình chiếu d' của nó trên (α) . Tức là $\sin(d, (\alpha)) = |\cos(\vec{u}_d, \vec{n}_\alpha)| = \frac{|\vec{u}_d \cdot \vec{n}_\alpha|}{|\vec{u}_d| \cdot |\vec{n}_\alpha|}$.
- ❑ Giả sử $(\alpha) : Ax + By + Cz + D = 0$ và $(\beta) : A'x + B'y + C'z + D' = 0$ có các véc-tơ pháp tuyến tương ứng là $\vec{n}_\alpha = (A; B; C)$ và $\vec{n}_\beta = (A'; B'; C')$. Khi đó, góc φ giữa hai mặt phẳng (α) và (β) được tính theo công thức

$$\cos \varphi = |\cos(\vec{n}_\alpha, \vec{n}_\beta)| = \frac{|\vec{n}_\alpha \cdot \vec{n}_\beta|}{|\vec{n}_\alpha| \cdot |\vec{n}_\beta|}$$

1. Ví dụ minh họa

VÍ DỤ 1. Hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại B có $AB = a$, $AC = 2a$. SA vuông góc với mặt phẳng đáy, $SA = 2a$. Gọi ψ là góc tạo bởi hai mặt phẳng (SAC) và (SBC) . Tính $\cos \psi$.

- (A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$. (B) $\frac{\sqrt{15}}{5}$. (C) $\frac{\sqrt{3}}{5}$. (D) $\frac{1}{2}$.

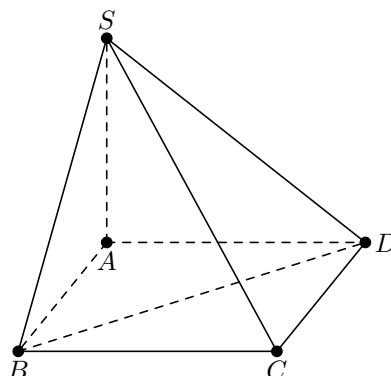
VÍ DỤ 2. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng nhau. Gọi E , M lần lượt là trung điểm của các cạnh BC và SA , α là góc tạo bởi đường thẳng EM và mặt phẳng (SBD) . Tính $\tan \alpha$.

- (A) $\sqrt{3}$. (B) 2. (C) $\sqrt{2}$. (D) 1.

VÍ DỤ 3.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật và cạnh bên SA vuông góc với đáy. Biết rằng $AB = a$, $AD = a\sqrt{2}$, $SA = 2a$. Gọi góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và mặt phẳng (SBD) là α . Tính $\cos \alpha$. (tham khảo hình vẽ bên)

- (A) $\cos \alpha = \sqrt{\frac{1}{5}}$. (B) $\cos \alpha = \frac{3\sqrt{119}}{34}$.
(C) $\cos \alpha = \sqrt{\frac{5}{7}}$. (D) $\cos \alpha = \sqrt{\frac{2}{3}}$.



VÍ DỤ 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật, $AB = 3$, $BC = 4$. Tam giác SAC nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy, khoảng cách từ điểm C đến đường thẳng SA bằng 4. Cô-sin góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) bằng bao nhiêu?

QUICK NOTE

QUICK NOTE

(A) $\frac{5\sqrt{34}}{17}$.

(B) $\frac{3\sqrt{34}}{34}$.

(C) $\frac{3\sqrt{17}}{17}$.

(D) $\frac{2\sqrt{34}}{17}$.

2. Bài tập rèn luyện

CÂU 11. Hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A với $AB = a$, $\widehat{ACB} = 30^\circ$ và $SA = SB = SD$ với D là trung điểm BC . Biết khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC bằng $\frac{3a}{4}$. Tính \cos góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (SBC) .

(A) $\frac{2\sqrt{5}}{11}$.

(B) $\frac{\sqrt{65}}{13}$.

(C) 3.

(D) $\frac{\sqrt{5}}{33}$.

CÂU 12. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh bằng $2a$, $AA' = a\sqrt{2}$. Hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trung điểm của cạnh BA . Tính \sin của góc tạo bởi hai mặt phẳng $(AB'C')$ và $(BA'C')$.

(A) $\frac{4\sqrt{31}}{31}$.

(B) $\frac{2\sqrt{31}}{31}$.

(C) $\frac{8\sqrt{3}}{\sqrt{217}}$.

(D) $\frac{3\sqrt{31}}{31}$.

CÂU 13.

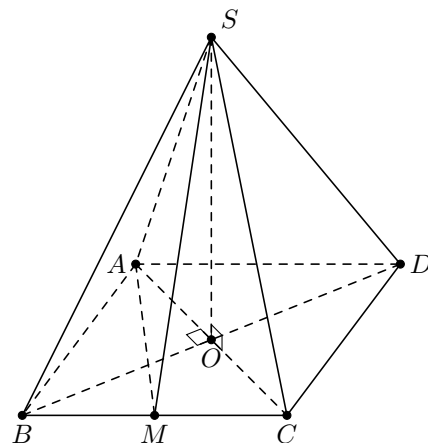
Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng a . Gọi M là trung điểm của cạnh BC , α là góc giữa đường thẳng SD và mặt phẳng (SAM) . Tính giá trị $\sin \alpha$.

(A) $\frac{2\sqrt{22}}{11}$.

(B) $\frac{\sqrt{22}}{11}$.

(C) $\frac{\sqrt{12}}{11}$.

(D) $\frac{\sqrt{21}}{11}$.



CÂU 14.

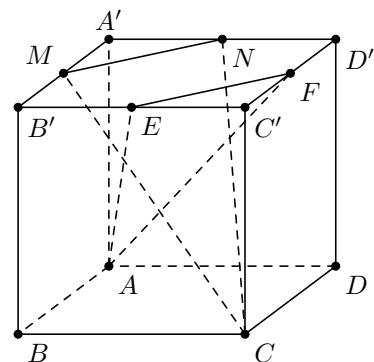
Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có M, N, E, F lần lượt là trung điểm của cạnh $A'B', A'D', B'C', C'D'$ (tham khảo hình bên). Tính \cos của góc tạo giữa hai mặt phẳng (CMN) và (AEF) .

(A) $\frac{1}{17}$.

(B) $\frac{1}{2}$.

(C) 0.

(D) $\frac{2}{17}$.



Dạng 2. Các bài toán tính khoảng cách

- ☑ Khoảng cách từ điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ đến mặt phẳng (P) có phương trình $Ax + By + Cz + D = 0$ là

$$d(M, (P)) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

- ☑ Cho đường thẳng Δ đi qua M_0 , có VTCP \vec{u} và điểm $M \notin \Delta$. Khi đó để tính khoảng cách từ M đến Δ ta có công thức $d[M, \Delta] = \frac{|\overrightarrow{MM_0} \times \vec{u}|}{|\vec{u}|}$.

- ☑ Cho hai đường thẳng chéo nhau Δ đi qua M_0 có VTCP \vec{u} và Δ' đi qua M'_0 có VTCP \vec{u}' . Khi đó khoảng cách giữa hai đường thẳng Δ và Δ' được tính theo công

$$\text{thức } d(\Delta, \Delta') = \frac{|\left[\vec{u}, \vec{u}' \right] \cdot \overrightarrow{M_0 M'_0}|}{\left| \left[\vec{u}, \vec{u}' \right] \right|}.$$

QUICK NOTE

1. Ví dụ minh họa

VÍ DỤ 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật, $AB = a$, $BC = 2a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng BD và SC bằng

- A** $\frac{4\sqrt{21}a}{21}$. **B** $\frac{\sqrt{30}a}{6}$. **C** $\frac{\sqrt{30}a}{12}$. **D** $\frac{2\sqrt{21}a}{21}$.

VÍ DỤ 6. Cho hình lăng trụ đứng $ABCD.A_1B_1C_1D_1$, đáy $ABCD$ là hình chữ nhật có $AB = a$, $AD = a\sqrt{3}$. Biết góc giữa đường thẳng A_1C và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 60° . Tính khoảng cách giữa đường thẳng B_1C và C_1D theo a .

- A** $\frac{4a\sqrt{51}}{17}$. **B** $\frac{a\sqrt{51}}{17}$. **C** $\frac{8a\sqrt{51}}{17}$. **D** $\frac{2a\sqrt{51}}{17}$.

VÍ DỤ 7. Cho hình chóp $S.MNPQ$ có đáy là hình vuông cạnh bằng 1, SM vuông góc với đáy và $SM = 2$. Tính khoảng cách h giữa hai đường thẳng SN và MP .

- A** $h = \frac{1}{3}$. **B** $h = 1$. **C** $h = 2$. **D** $h = \frac{2}{3}$.

VÍ DỤ 8. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh là $a > 0$. Khi đó khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau AB' và BC' là

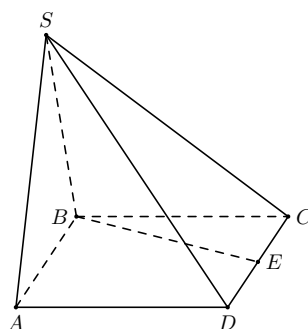
- A** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. **B** $\frac{a\sqrt{6}}{3}$. **C** $\frac{a\sqrt{2}}{3}$. **D** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

2. Bài tập rèn luyện

CÂU 15.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = 2a$, $BC = a$, tam giác SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi E là trung điểm của CD . Tính theo a khoảng cách giữa hai đường thẳng BE và SC .

- A** a . **B** $\frac{a\sqrt{15}}{5}$. **C** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **D** $\frac{a\sqrt{30}}{10}$.



CÂU 16. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, cạnh $AB = a$, $BC = 2a$. Cạnh SA vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$, $SA = 2a$. Tính khoảng cách d giữa hai đường thẳng BD và SC .

- A** $d = \frac{a\sqrt{2}}{3}$. **B** $d = \frac{3a}{2}$. **C** $d = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. **D** $d = \frac{2a}{3}$.

CÂU 17. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $2a$, hình chiếu của S trên mặt đáy trùng với điểm H thỏa mãn $\overrightarrow{BH} = \frac{2}{5}\overrightarrow{BD}$. Gọi M và N lần lượt là hình chiếu vuông góc của H trên các cạnh AB và AD . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng MN và SC biết $SH = 2a\sqrt{13}$.

- A** $\frac{19a\sqrt{26}}{26}$. **B** $\frac{19a\sqrt{2}}{13}$. **C** $\frac{a\sqrt{13}}{26}$. **D** $\frac{38a\sqrt{2}}{13}$.

3. Bài tập trắc nghiệm

CÂU 18. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của $CD, CB, A'B'$. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (MNP) bằng

- A** $a\sqrt{2}$. **B** $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. **C** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **D** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

CÂU 19. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B , $BC = 2a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = 2a\sqrt{3}$. Gọi M là trung điểm của AC . Khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SM bằng

- A** $\frac{2a\sqrt{39}}{13}$. **B** $\frac{a\sqrt{39}}{13}$. **C** $\frac{2a}{\sqrt{13}}$. **D** $\frac{2a\sqrt{3}}{13}$.

QUICK NOTE

CÂU 20. Cho tứ diện $ABCD$ đều có cạnh bằng $2\sqrt{2}$. Gọi G là trọng tâm của tứ diện $ABCD$ và M là trung điểm của AB . Khoảng cách giữa hai đường thẳng BG và CM bằng

(A) $\frac{2}{\sqrt{14}}$.

(B) $\frac{3}{2\sqrt{5}}$.

(C) $\frac{2}{\sqrt{5}}$.

(D) $\frac{2}{\sqrt{10}}$.

CÂU 21. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông tại B với $AB = 3$, $AA' = 2$. Gọi M là trung điểm cạnh $A'B$, G là trọng tâm $\triangle ABC$, (α) là mặt phẳng đi qua MG và song song với BC . Tính khoảng cách d từ điểm A đến mặt phẳng (α) .

(A) $d = \frac{2}{\sqrt{5}}$.

(B) $d = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

(C) $d = \frac{4}{\sqrt{5}}$.

(D) $d = \frac{10}{3\sqrt{5}}$.

Dạng 3. Các bài toán cực trị hình học

1. Ví dụ minh họa

VÍ DỤ 9. Tứ diện $ABCD$ có tam giác BCD vuông cân tại B , $BC = 4$, $AC = 4$, $AC \perp (BCD)$. M, N là các điểm lần lượt di động trên các tia BC, BD sao cho $\frac{BC}{BM} + \frac{BD}{BN} = 4$. Đặt d là khoảng cách từ C đến (AMN) . Tính giá trị lớn nhất của d .

(A) $\frac{4\sqrt{65}}{13}$.

(B) $\frac{4}{3}$.

(C) $\sqrt{3}$.

(D) $\frac{2\sqrt{65}}{10}$.

VÍ DỤ 10. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh bằng 1. Gọi M là điểm trên mặt phẳng $(A'BD)$ sao cho $CM^2 + C'M^2 + B'M^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính BM .

(A) $\frac{2\sqrt{6}}{9}$.

(B) $\frac{2}{9}$.

(C) $\frac{\sqrt{3}}{9}$.

(D) $\frac{2\sqrt{3}}{9}$.

VÍ DỤ 11. Cho ba số thực x, y, z thỏa mãn $4x^2 + y^2 + 9z^2 = 4x + 12z + 11$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = 4x + 2y + 3z$.

(A) $6 + 2\sqrt{15}$.

(B) $8 + 4\sqrt{3}$.

(C) 16.

(D) 20.

2. Bài tập rèn luyện

CÂU 22.

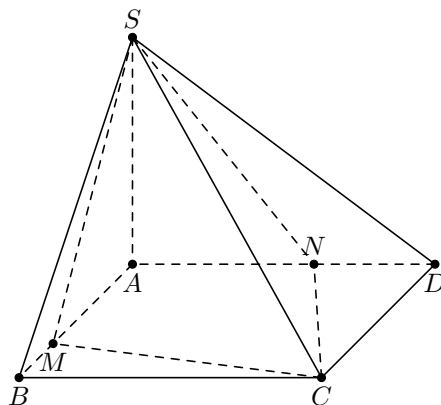
Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng 2, $SA = 2$ và SA vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$. Gọi M và N là hai điểm thay đổi trên hai cạnh AB, AD sao cho mặt phẳng (SMC) vuông góc với mặt phẳng (SNC) . Tính tổng $T = \frac{1}{AN^2} + \frac{1}{AM^2}$ khi thể tích hình chóp $S.AMCN$ đạt giá trị lớn nhất.

(A) $T = \frac{2 + \sqrt{3}}{4}$.

(B) $T = \frac{13}{9}$.

(C) $T = 2$.

(D) $T = \frac{5}{4}$.



CÂU 23. Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho tứ diện $ABCD$ có điểm $A(1; 1; 1)$, $B(2; 0; 2)$, $C(-1; -1; 0)$, $D(0; 3; 4)$. Trên các cạnh AB, AC, AD lần lượt lấy các điểm B', C', D' thỏa: $\frac{AB}{AB'} + \frac{AC}{AC'} + \frac{AD}{AD'} = 4$. Viết phương trình mặt phẳng $(B'C'D')$ biết tứ diện $AB'C'D'$ có thể tích nhỏ nhất?

(A) $16x + 40y + 44z - 39 = 0$.

(B) $16x - 40y - 44z + 39 = 0$.

(C) $16x + 40y - 44z + 39 = 0$.

(D) $16x - 40y - 44z - 39 = 0$.

CÂU 24. Trong không gian Oxyz, cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có A trùng với gốc tọa độ O . Biết rằng $B(m; 0; 0)$, $D(0; m; 0)$, $A'(0; 0; n)$ với m, n là các số dương và $m + n = 4$. Gọi M là trung điểm của cạnh CC' . Thể tích lớn nhất của khối tứ diện $BDA'M$ bằng

(A) $\frac{9}{4}$.

(B) $\frac{64}{27}$.

(C) $\frac{245}{108}$.

(D) $\frac{75}{32}$.

CÂU 25. Cho tứ diện $SABC$ có $SC = CA = AB = 3\sqrt{2}$, $SC \perp (ABC)$, tam giác ABC vuông tại A . Các điểm $M \in SA$, $N \in BC$ sao cho $AM = CN = t$ ($0 < t < 6$). Tìm t để MN ngắn nhất.

A $t = 4$.

B $t = 3$.

C $t = 2$.

D $t = 1$.

Dạng 4. Các bài toán tính thể tích, tỷ số,...

☑ Tính thể tích hình hộp: $V_{ABCD.A'B'C'D'} = \left| [\vec{AB}, \vec{AC}] \cdot \vec{AA'} \right|$.

☑ Tính thể tích tứ diện: $V_{ABCD} = \frac{1}{6} \left| [\vec{AB}, \vec{AC}] \cdot \vec{AD} \right|$.

1. Ví dụ minh họa

VÍ DỤ 12. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh bên bằng cạnh đáy. Đường thẳng MN ($M \in A'C, N \in BC'$) là đường vuông góc chung của $A'C$ và BC' . Tỷ số $\frac{NB}{NC'}$ bằng

A $\frac{3}{2}$.

B 1.

C $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

D $\frac{2}{23}$.

VÍ DỤ 13. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha): 2x - y - 3z = 4$. Gọi A, B, C lần lượt là giao điểm của mặt phẳng (α) với các trục tọa độ Ox, Oy, Oz . Thể tích tứ diện $OABC$ bằng

A $\frac{32}{9}$.

B $\frac{16}{9}$.

C 1.

D 2.

2. Bài tập rèn luyện

CÂU 26. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(1; 2; 3)$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua điểm M và cách gốc tọa độ O một khoảng lớn nhất, mặt phẳng (P) cắt các trục tọa độ tại các điểm A, B, C . Tính thể tích khối chóp $O.ABC$.

A $\frac{686}{9}$.

B $\frac{524}{3}$.

C $\frac{1372}{9}$.

D $\frac{343}{9}$.

CÂU 27. Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng a . M, N là hai điểm thỏa $\vec{MB} + 2\vec{MB'} = \vec{0}; \vec{NB'} = 3\vec{NC'}$. Biết hai mặt phẳng (MCA) và (NAB) vuông góc nhau. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A $\frac{9a^3\sqrt{2}}{16}$.

B $\frac{3a^3\sqrt{2}}{16}$.

C $\frac{9a^3\sqrt{2}}{8}$.

D $\frac{3a^3\sqrt{2}}{8}$.

CÂU 28. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , M là trung điểm của SA . Biết mặt phẳng (MCD) vuông góc với mặt phẳng (SAB) . Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ là

A $\frac{\sqrt{3}a^3}{6}$.

B $\frac{\sqrt{5}a^3}{2}$.

C $\frac{\sqrt{5}a^3}{6}$.

D $\frac{a^3}{\sqrt{3}}$.

CÂU 29.

Cho hình chóp $S.ABC$ có $AB = a, AC = a\sqrt{3}, SB > 2a$ và $\widehat{ABC} = \widehat{BAS} = \widehat{BCS} = 90^\circ$. Sin của góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (SAC) bằng $\frac{\sqrt{11}}{11}$.

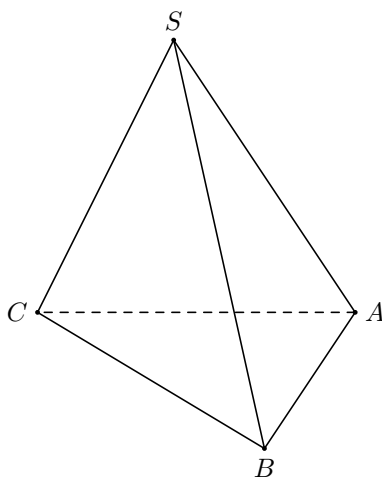
Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

A $\frac{2\sqrt{3}a^3}{9}$.

B $\frac{\sqrt{3}a^3}{9}$.

C $\frac{\sqrt{6}a^3}{6}$.

D $\frac{\sqrt{6}a^3}{3}$.



Dạng 5. Bài toán liên quan mặt cầu ngoại tiếp

☑ Mặt cầu tâm $I(a; b; c)$, bán kính R có phương trình $(S): (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$.

QUICK NOTE

QUICK NOTE

- ☑ Xét phương trình $x^2 + y^2 + z^2 + 2ax + 2by + 2cz + d = 0$. (*).
 Để phương trình (*) là phương trình mặt cầu $\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 > d$.
 Khi đó (S) có $\begin{cases} \text{tâm } I(-a; -b; -c) \\ \text{bán kính } R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}. \end{cases}$

1. Ví dụ minh họa

VÍ DỤ 14. Trong không gian, cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B với $AB = BC = a, AD = 2a$, cạnh bên $SA = a$ và SA vuông góc với đáy. Gọi E là trung điểm của AD . Tính diện tích S của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.CDE$.

- (A) $S = 11\pi a^2$. (B) $S = 12\pi a^2$. (C) $S = 8\pi a^2$. (D) $S = 9\pi a^2$.

VÍ DỤ 15. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông tại A , $AB = a, AC = a\sqrt{2}$. Biết góc giữa hai mặt phẳng $(AB'C')$ và (ABC) bằng 60° và hình chiếu của A lên $(A'B'C')$ là trung điểm H của đoạn thẳng $A'B'$. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $A.HB'C'$ theo a .

- (A) $\frac{3a\sqrt{6}}{8}$. (B) $\frac{a\sqrt{21}}{7}$. (C) $\frac{2a\sqrt{21}}{7}$. (D) $\frac{a\sqrt{62}}{8}$.

VÍ DỤ 16. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật $AB = 2AD = 2a$, SA vuông góc với đáy. Góc giữa cạnh bên SB và đáy là 45° . Bán kính mặt cầu tâm A cắt mặt phẳng (SBD) theo một đường tròn bán kính bằng a là

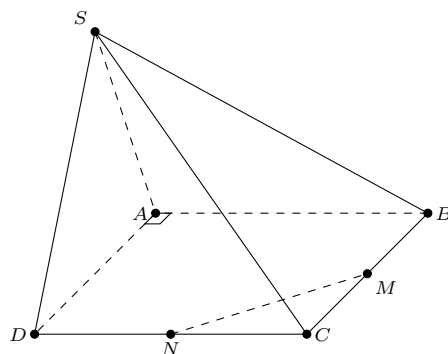
- (A) $\frac{a\sqrt{6}}{3}$. (B) $\frac{a\sqrt{15}}{3}$. (C) $\frac{a\sqrt{30}}{5}$. (D) $\frac{a\sqrt{11}}{2\sqrt{3}}$.

2. Bài tập rèn luyện

CÂU 30.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , SAD là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của BC và CD (tham khảo hình vẽ bên). Tính bán kính R của khối cầu ngoại tiếp hình chóp $S.CMN$.

- (A) $R = \frac{a\sqrt{93}}{12}$. (B) $R = \frac{5a\sqrt{3}}{12}$.
 (C) $R = \frac{a\sqrt{29}}{8}$. (D) $R = \frac{a\sqrt{37}}{6}$.



CÂU 31. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác ABC vuông cân tại C , $CC' = CA = x$. Gọi D, E, F lần lượt là trung điểm các cạnh $AB, B'C'$ và AA' . Tìm độ dài cạnh x sao cho bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối tứ diện $CDEF$ bằng $\frac{\sqrt{179}}{20}$.

- (A) $x = 1$. (B) $x = 2$. (C) $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$. (D) $x = \sqrt{3}$.

3. Bài tập trắc nghiệm

CÂU 32. Cho khối tứ diện $ABCD$ có $BC = 3, CD = 4, \widehat{ABC} = \widehat{BCD} = \widehat{ADC} = 90^\circ$. Góc giữa hai đường thẳng AD và BC bằng 60° , cô-sin góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (ACD) bằng

- (A) $\frac{\sqrt{43}}{86}$. (B) $\frac{\sqrt{43}}{43}$. (C) $\frac{4\sqrt{43}}{43}$. (D) $\frac{2\sqrt{43}}{43}$.

CÂU 33. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có các cạnh $AB = 2, AD = 3, AA' = 4$. Góc giữa hai mặt phẳng $(AB'D')$ và $(A'C'D)$ là α . Tính giá trị gần đúng của góc α .

- (A) $38,1^\circ$. (B) $53,4^\circ$. (C) $61,6^\circ$. (D) $45,2^\circ$.

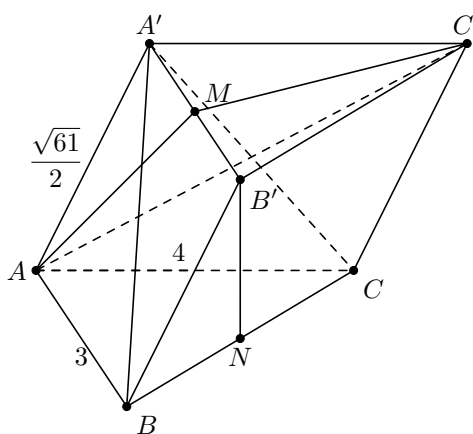
CÂU 34. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, $AD = 2 \text{ cm}, CD = 1 \text{ cm}, \widehat{ADC} = 120^\circ$. Cạnh bên $SB = \sqrt{3} \text{ cm}$, hai mặt phẳng (SAB) và (SBC) cùng vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi α là góc tạo bởi SD và mặt phẳng (SAC) . Tính $\sin \alpha$

- (A) $\sin \alpha = \frac{1}{4}$. (B) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{4}$. (C) $\sin \alpha = \frac{3}{4}$. (D) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{7}$.

CÂU 35.

Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A , $AB = 3$, $AC = 4$, $AA' = \frac{\sqrt{61}}{2}$; hình chiếu của B' trên mặt phẳng (ABC) là trung điểm cạnh BC . Gọi M là trung điểm cạnh $A'B'$ (tham khảo hình vẽ bên). Cô-sin của góc tạo bởi hai mặt phẳng (AMC') và $(A'BC)$ bằng

- (A) $\frac{33}{\sqrt{3157}}$ (B) $\frac{11}{\sqrt{3157}}$
(C) $\frac{33}{\sqrt{3517}}$ (D) $\frac{\sqrt{13}}{65}$



CÂU 36. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác ABC vuông tại A , $AB = 3$, $AC = 4$, $AA' = \frac{\sqrt{61}}{2}$. Hình chiếu của B' lên mặt phẳng (ABC) là trung điểm cạnh BC , M là trung điểm cạnh $A'B'$. Cosin của góc tạo bởi mặt phẳng (AMC') và mặt phẳng $(A'BC)$ bằng

- (A) $\frac{\sqrt{13}}{65}$ (B) $\frac{11}{\sqrt{3157}}$ (C) $\frac{33}{\sqrt{3517}}$ (D) $\frac{33}{\sqrt{3157}}$

CÂU 37. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại C , $AC = 3$, $BC = 1$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy, $SA = 4$. Gọi M là trung điểm của cạnh AB . H là điểm đối xứng với C qua M . Tính cô-sin của góc tạo bởi hai mặt phẳng (SHB) và (SBC) .

- (A) $\frac{3\sqrt{17}}{80}$ (B) $\frac{3\sqrt{10}}{85}$ (C) $\frac{3\sqrt{17}}{85}$ (D) $\frac{3\sqrt{10}}{80}$

CÂU 38. Cho hình chóp $S.ABC$ có $\triangle ABC$ vuông tại B , $AB = 1$, $BC = \sqrt{3}$, $\triangle SAC$ đều, mặt phẳng (SAC) vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi α là số đo của góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SBC) . Giá trị $\cos \alpha$ bằng

- (A) $\frac{\sqrt{65}}{65}$ (B) $\frac{\sqrt{65}}{10}$ (C) $\frac{2\sqrt{65}}{65}$ (D) $\frac{\sqrt{65}}{20}$

CÂU 39. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác ABC vuông cân tại A , cạnh $BC = a\sqrt{6}$. Góc giữa mặt phẳng $(AB'C')$ và mặt phẳng $(BCC'B')$ bằng 60° . Tính thể tích khối đa diện $AB'CA'C'$.

- (A) $\frac{\sqrt{3}a^3}{2}$ (B) $\sqrt{3}a^3$ (C) $\frac{\sqrt{3}a^3}{3}$ (D) $\frac{3\sqrt{3}a^3}{2}$

CÂU 40. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông, tam giác SAD vuông cân tại S và thuộc mặt phẳng vuông góc với $(ABCD)$. Gọi α là góc hợp bởi hai mặt phẳng (SBC) và (SCD) . Giá trị của $\tan \alpha$ là

- (A) $\frac{\sqrt{6}}{3}$ (B) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ (C) $\frac{\sqrt{6}}{2}$ (D) $\frac{\sqrt{5}}{3}$

CÂU 41. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng 2, $SA \perp (ABCD)$ và $SA = 2$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của AB, BC, CS . Tính cosin của góc tạo bởi mặt phẳng (MNP) và (SBD) .

- (A) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ (B) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (C) $\frac{1}{3}$ (D) $\frac{2}{3}$

CÂU 42. Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi M là trung điểm của BC và H là trung điểm của AM . Biết $HB = HC$, $\widehat{HBC} = 30^\circ$; góc giữa mặt phẳng (SHC) và mặt phẳng (HBC) bằng 60° . Tính cô-sin của góc giữa đường thẳng BC và mặt phẳng (SHC) .

- (A) $\frac{\sqrt{13}}{4}$ (B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (C) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ (D) $\frac{1}{2}$

CÂU 43. Cho hình lập phương $MNPQ.M'N'P'Q'$ có E, F, G lần lượt là trung điểm của $NN', PQ, M'Q'$. Tính góc giữa hai đường thẳng EG và $P'F$.

- (A) 60° (B) 30° (C) 90° (D) 45°

CÂU 44. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SC \perp (ABC)$ và tam giác ABC vuông tại B . Biết $AB = a$, $AC = a\sqrt{3}$, $SC = a\sqrt{12}$. Sin của góc giữa hai mặt phẳng (SAB) , (SAC) bằng

QUICK NOTE

QUICK NOTE

(A) $\sqrt{\frac{5}{7}}$.

(B) 1.

(C) $\frac{5\sqrt{14}}{42}$.

(D) $\sqrt{\frac{2}{3}}$.

CÂU 45. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC = AB = AC = a\sqrt{2}$ và $BC = 2a$. Góc giữa hai đường thẳng SC và AB là

(A) 30° .

(B) 60° .

(C) 90° .

(D) 45° .

CÂU 46. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a , $SO = a$ và SO vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$. Gọi M, N là trung điểm của SA, BC . Gọi α là góc giữa đường thẳng MN và mặt phẳng (SBD) . Tính $\cos \alpha$.

(A) $\frac{\sqrt{21}}{7}$.

(B) $\frac{2}{5}$.

(C) $\frac{\sqrt{5}}{10}$.

(D) $\frac{2}{\sqrt{7}}$.

CÂU 47. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = a, SA \perp (ABC)$, tam giác ABC vuông cân đỉnh A và $BC = a\sqrt{2}$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SB, SC . Cô-sin của góc tạo bởi hai mặt phẳng (MNA) và (ABC) bằng

(A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(B) $\frac{\sqrt{2}}{4}$.

(C) $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

(D) $\frac{\sqrt{2}}{6}$.

CÂU 48. Cho hình chóp $S.ABC$ có SA, SB, SC đôi một vuông góc với nhau và $SA = SB = SC = 2a$. Cosin của góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC) bằng

(A) $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(B) $\frac{2}{\sqrt{6}}$.

(C) $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

(D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

CÂU 49.

Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại $B, AB = a, BC = 2a$, cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy (ABC) và $SA = 3a$. Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (SBC) . Tính $\sin \alpha$.

(A) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{7}}{5}$.

(B) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{4138}}{120}$.

(C) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{13}}{7}$.

(D) $\sin \alpha = \frac{1}{3}$.

