Bài 2. LOGARIT

A. KIẾN THỨC SÁCH GIÁO KHOA CẦN CẦN NẮM

1. Định nghĩa

Cho hai số dương a, b với $a \neq 1$. Số α thỏa mãn đẳng thức $a^\alpha = b$ được gọi là lôgarit cơ số a của b và kí hiệu là $\log_a b$.
Ta viết $\alpha = \log_a b \Leftrightarrow a^\alpha = b$.

2. Các tính chất

Cho $a, b > 0, a \neq 1$, ta có

- $\log_a a = 1, \log_a 1 = 0$.
- $a^{\log_a b} = b, \log_a(a^\alpha) = \alpha$.

3. Lôgarit của một tích

Cho 3 số dương a, b_1, b_2 với $a \neq 1$, ta có

$$\log_a(b_1 \cdot b_2) = \log_a b_1 + \log_a b_2.$$

4. Lôgarit của một thương

Cho 3 số dương a, b_1, b_2 với $a \neq 1$, ta có

$$\log_a \frac{b_1}{b_2} = \log_a b_1 - \log_a b_2.$$

Đặc biệt, với a, $b > 0$, $a \neq 1$ ta có $\log_a \dfrac{1}{b} = -\log_a b$.

5. Lôgarit của lũy thừa

Cho $a, b > 0, a \neq 1$, với mọi α, ta có

$$\log_a b^\alpha = \alpha \log_a b.$$

Đặc biệt: $\log_a \sqrt[n]{b} = \dfrac{1}{n} \log_a b$.

6. Công thức đổi cơ số

Cho 3 số dương a, b, c với $a \neq 1, c \neq 1$, ta có

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}.$$

Đặc biệt: $\log_a c = \dfrac{1}{\log_c a}$ và $\log_{a^\alpha} b = \dfrac{1}{\alpha} \log_a b$ với $\alpha \neq 0$.

7. Lôgarit thập phân và Lôgarit tự nhiên

- Lôgarit thập phân là lôgarit cơ số 10. Viết $\log_{10} b = \log b = \lg b$.
- Lôgarit tự nhiên là lôgarit cơ số e. Viết $\log_e b = \ln b$.

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1. Công thức lôgarit

ĐIỂM:

"It's not how much time you have, it's how you use it."

QUICK NOTE

QUICK NOTE

1. Các ví dụ

VÍ DỤ 1. Tính giá trị của biểu thức $P = \log_a\left(a\cdot\sqrt[3]{a\sqrt{a}}\right)$ với $0 < a \neq 1$.

VÍ DỤ 2. Tính giá trị của biểu thức $P = 22\log_2 12 + 3\log_2 5 - \log_2 15 - \log_2 150$.

VÍ DỤ 3. Cho $a > 0$, $a \neq 1$. Tính giá trị biểu thức $A = (\ln a + \log_a \mathrm{e})^2 + \ln^2 a - \log_a^2 \mathrm{e}$.

VÍ DỤ 4. Cho các số dương a, b, c, d. Tính giá trị biểu thức $S = \ln\frac{a}{b} + \ln\frac{b}{c} + \ln\frac{c}{d} + \ln\frac{d}{a}$.

VÍ DỤ 5. Tính giá trị của biểu thức $P = \log_{a^2}\left(a^{10}b^2\right) + \log_{\sqrt{a}}\left(\frac{a}{\sqrt{b}}\right) + \log_{\sqrt[3]{b}} b^{-2}$ (với $0 < a \neq 1; 0 < b \neq 1$).

VÍ DỤ 6. Xét các số thực a, b thỏa mãn $a > b > 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của biểu thức $P = \log^2_{\frac{a}{b}}\left(a^2\right) + 3\log_b\left(\frac{a}{b}\right)$.

VÍ DỤ 7. Tính giá trị của biểu thức $P = \ln(\tan 1^\circ) + \ln(\tan 2^\circ) + \ln(\tan 3^\circ) + \cdots + \ln(\tan 89^\circ)$.

2. Các câu hỏi trắc nghiệm

CÂU 1. Cho a là số thực dương và khác 1. Tính giá trị biểu thức $P = \log_{\sqrt{a}} a$.

(A) $P = -2$. (B) $P = 0$. (C) $P = \frac{1}{2}$. (D) $P = 2$.

CÂU 2. Cho $a > 0$, $a \neq 1$, giá trị của biểu thức $A = a^{\log_{\sqrt{a}} 4}$ bằng bao nhiêu?

(A) 8. (B) 16. (C) 4. (D) 2.

CÂU 3. Giá trị của biểu thức $B = 2\log_2 12 + 3\log_2 5 - \log_2 15 - \log_2 150$ bằng bao nhiêu?

(A) 5. (B) 2. (C) 4. (D) 3.

CÂU 4. Cho $a > 0$, $a \neq 1$, biểu thức $P = \log_{a^3} a$ có giá trị bằng bao nhiêu?

(A) 3. (B) $\frac{1}{3}$. (C) -3. (D) $-\frac{1}{3}$.

CÂU 5. Giá trị của biểu thức $C = \frac{1}{2}\log_7 36 - \log_7 14 - 3\log_7 \sqrt[3]{21}$ bằng bao nhiêu?

(A) -2. (B) 2. (C) $-\frac{1}{2}$. (D) $\frac{1}{2}$.

CÂU 6. Cho $a > 0$, $a \neq 1$, biểu thức $E = a^{4\log_{a^2} 5}$ có giá trị bằng bao nhiêu?

(A) 5. (B) 625. (C) 25. (D) 5^8.

CÂU 7. Trong các số a thoã mãn điều kiện dưới đây. Số nào lớn hơn 1.

(A) $\log_2 a = -2$. (B) $\log_3 a = \pi$. (C) $\log_4 a^2 = -1$. (D) $\log_3 a = -0,3$.

CÂU 8. Trong các số a thoả mãn điều kiện dưới đây. Số nào nhỏ hơn 1.

(A) $\log_{\frac{1}{3}} a = -2$. (B) $\log_a 5 = 2$. (C) $\log_3 5 = a$. (D) $\log_{\frac{1}{\sqrt{3}}} a = 2$.

CÂU 9. Giá trị của biểu thức $A = \log_a\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a^3}}}$ $(1 \neq a > 0)$ là

(A) $a = \frac{4}{3}$. (B) $a = \frac{3}{4}$. (C) $a = \frac{8}{9}$. (D) $a = \frac{9}{8}$.

CÂU 10. Giá trị của biểu thức $A = \log_a\frac{\sqrt{a^3}}{a\sqrt[4]{a}}$ $(1 \neq a > 0)$ là

(A) $A = \frac{1}{4}$. (B) $A = \frac{1}{3}$. (C) $A = \frac{1}{2}$. (D) $A = \frac{3}{4}$.

CÂU 11. Giá trị của biểu thức $A = \log_a\left(a^3\sqrt{a}\sqrt[5]{a}\right)$ $(1 \neq a > 0)$ là

(A) $A = \frac{17}{5}$. (B) $A = \frac{37}{10}$. (C) $A = \frac{21}{5}$. (D) $A = \frac{39}{10}$.

CÂU 12. Cho $\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}} = x^a$ và $\log_y\sqrt{y\sqrt{y^3}} = b$ (với $x; y > 0; y \neq 1$). Vậy $A = a + b$ bằng

(A) $A = \frac{9}{4}$. (B) $A = \frac{3}{2}$. (C) $A = \frac{15}{8}$. (D) $A = \frac{17}{8}$.

CÂU 13. Cho $\sqrt{x\sqrt{x\sqrt[3]{x^4}}} = x^m$ và $\log_y\sqrt[3]{y^2\sqrt{y}} = n$ (với $x; y > 0; y \neq 1$). Vậy $A = m + n$ bằng

(A) $A = \frac{23}{12}$. (B) $A = \frac{7}{4}$. (C) $A = 3$. (D) $A = \frac{7}{3}$.

QUICK NOTE

CÂU 14. Thu gọn biểu thức $A=\left(a^3\sqrt{a}\right)^{\log_a b}+\left(\sqrt[3]{b^2}\right)^{\log_b a}$ $(1\neq a;b>0)$ ta được

Ⓐ $A=\sqrt{a^7}+\sqrt[3]{b^2}$. Ⓑ $A=\sqrt{a^3}+\sqrt[7]{b^2}$. Ⓒ $A=\sqrt{a^2}+\sqrt[3]{b^7}$. Ⓓ $A=\sqrt[3]{a^2}+\sqrt{b^7}$.

CÂU 15. Thu gọn biểu thức $A=(a\sqrt{a^3})^{\log_a b^2}+(b\sqrt{b})^{\log_b a^2}$ $(1\neq a;\ b>0)$ ta được

Ⓐ $A=a^5+b^3$. Ⓑ $A=a^3+b^5$. Ⓒ $A=a^3+b^3$. Ⓓ $A=a^5+b^5$.

CÂU 16. Thu gọn biểu thức $A=(a\cdot\sqrt[4]{a})^{\log_a\sqrt{b}}+\left(b\cdot\sqrt[3]{b}\right)^{\log_b a}$ $(1\neq a;b>0)$ ta được

Ⓐ $A=a^{\frac{5}{8}}+b^{\frac{4}{3}}$. Ⓑ $A=a^{\frac{5}{4}}+b^{\frac{4}{3}}$. Ⓒ $A=a^{\frac{4}{3}}+b^{\frac{5}{8}}$. Ⓓ $A=a^{\frac{4}{3}}+b^{\frac{5}{2}}$.

CÂU 17. Cho $\log_a b=2$ và $\log_a c=3$. Tính $P=\log_a\left(b^2c^3\right)$.

Ⓐ $P=108$. Ⓑ $P=13$. Ⓒ $P=31$. Ⓓ $P=30$.

CÂU 18. Cho $\log_3 x=4\log_3 a+2\log_3 b$ $(a;\ b>0)$. Khi đó

Ⓐ $x=8ab$. Ⓑ $x=a^4+b^2$. Ⓒ $x=\sqrt{a^2b}$. Ⓓ $x=a^4b^2$.

CÂU 19. Cho $\log_{\frac{1}{3}} x=\log_{\frac{1}{3}}\sqrt{a\sqrt{a}}+\log_{\frac{1}{3}}\dfrac{b}{\sqrt{b\sqrt{b}}}$ $(a;\ b>0)$. Khi đó

Ⓐ $x=\sqrt[4]{a^3b}$. Ⓑ $x=\sqrt[4]{ab^3}$. Ⓒ $x=\sqrt[4]{a^3b^3}$. Ⓓ $x=\sqrt[4]{ab}$.

CÂU 20. Cho $\log_4 x=2\log_2\sqrt[3]{a^2}+3\log_2\dfrac{1}{b^2\sqrt{b}}$ $(a;\ b>0)$. Khi đó

Ⓐ $x=6\cdot a^{\frac{2}{3}}\cdot b^{-\frac{5}{2}}$. Ⓑ $x=a^{\frac{4}{3}}\cdot b^{\frac{-15}{2}}$. Ⓒ $x=a^{\frac{4}{3}}\cdot b^{\frac{15}{2}}$. Ⓓ $x=-10ab$.

CÂU 21. Rút gọ biểu thức $A=\log_2\sqrt{a}+\log_4\dfrac{1}{a^2}-\log_{\sqrt{2}} a^8$ $(a>0)$ ta được

Ⓐ $A=\dfrac{33}{2}\log_2 a$. Ⓑ $A=-\dfrac{33}{2}\log_2 a$. Ⓒ $A=33\log_2 a$. Ⓓ $A=\dfrac{-1}{2}\log_2 a$.

CÂU 22. Rút gọn biểu thức $A=\log_4 a-\log_8 a+\log_{16} a^2$ $(a>0)$ ta được

Ⓐ $A=\log_2 a$. Ⓑ $A=\dfrac{13}{6}\log_2 a$. Ⓒ $A=\dfrac{3}{2}\log_2 a$. Ⓓ $A=\dfrac{2}{3}\log_2 a$.

CÂU 23. Cho $\log_2 x=\sqrt{2}$. Tính giá trị của biểu thức $A=\log_2 x^2+\log_{\frac{1}{2}} x^3+\log_4 x$.

Ⓐ $A=-\sqrt{2}$. Ⓑ $A=-2\sqrt{2}$. Ⓒ $A=\dfrac{-\sqrt{2}}{2}$. Ⓓ $A=\dfrac{-\sqrt{2}}{4}$.

CÂU 24. Cho $\log_x 2=3$. Tính giá trị của biểu thức $A=\log_4 x-2\log_2\sqrt{x}$.

Ⓐ $A=6$. Ⓑ $A=\dfrac{1}{6}$. Ⓒ $A=\dfrac{-1}{6}$. Ⓓ $A=-6$.

CÂU 25. Rút gọn biểu thức $A=\log_8 x\sqrt{x}-\log_{\frac{1}{4}} x^2$ $(x>0)$ ta được

Ⓐ $A=\dfrac{3}{2}\log_2 x$. Ⓑ $A=-\dfrac{1}{2}\log_2 x$. Ⓒ $A=2\log_2 x$. Ⓓ $A=\dfrac{2}{3}\log_2 x$.

CÂU 26. Rút gọn biểu thức $A=\log_3 x\cdot\log_2 3+\log_5 x\cdot\log_4 5$ $(x>0)$ ta được

Ⓐ $A=\dfrac{3}{2}\log_2 x$. Ⓑ $A=-\dfrac{1}{2}\log_2 x$. Ⓒ $A=2\log_2 x$. Ⓓ $A=\dfrac{2}{3}\log_2 x$.

CÂU 27. Cho $\log_2 x=\sqrt{3}$. Tính giá trị của biểu thức $B=\log_{\frac{1}{4}} x+\log_{\frac{1}{8}} x+\log_{\frac{1}{16}} x$.

Ⓐ $B=\sqrt{3}$. Ⓑ $B=\dfrac{-13\sqrt{3}}{12}$. Ⓒ $9\sqrt{3}$. Ⓓ $-9\sqrt{3}$.

CÂU 28. Cho $\log_3 x=1+\sqrt{2}$. Tính giá trị biểu thức $A=\log_3 x^3+\log_{\frac{1}{3}} x+\log_9 x^2$.

Ⓐ $A=2(1+\sqrt{2})$. Ⓑ $A=1+\sqrt{2}$.

Ⓒ $A=-2(1+\sqrt{2})$. Ⓓ $A=3(1+\sqrt{2})$.

CÂU 29. Tính giá trị của biểu thức $P=\log_a\dfrac{1}{b^3}\cdot\log_{\sqrt{b}} a^3$ $(1\neq a;b>0)$.

Ⓐ -18. Ⓑ $\dfrac{-1}{2}$. Ⓒ 18. Ⓓ $\dfrac{1}{2}$.

CÂU 30. Tính giá trị của biểu thức $P=\log_{\sqrt{a}} b^3\cdot\log_{\sqrt{b}} a$ $(1\neq a,b>0)$.

Ⓐ 3. Ⓑ 12. Ⓒ $\dfrac{3}{4}$. Ⓓ $\dfrac{4}{3}$.

CÂU 31. Cho $\ln x=2$. Tính giá trị của biểu thức $T=2\ln\sqrt{ex}-\ln\dfrac{e^2}{\sqrt{x}}+\ln 3\cdot\log_3 ex^2$

Ⓐ $T=21$. Ⓑ $T=12$. Ⓒ $T=13$. Ⓓ $T=7$.

QUICK NOTE

CÂU 32. Cho $\ln x = 3$. Tính giá trị của biểu thức $T = 2\ln\dfrac{x^2}{\sqrt{e}} + \ln 2 \cdot \log_2\left(x^3 \cdot e^2\right)$

Ⓐ $T = 16$. Ⓑ $T = 15$. Ⓒ $T = \dfrac{27}{2}$. Ⓓ $T = 22$.

CÂU 33. Cho $\log_a b = 3$; $\log_a c = -2$. Tính giá trị của $\log_a x$, biết rằng $x = \dfrac{a^2b^3}{\sqrt{c^5}}$.

Ⓐ $\log_a x = 16$. Ⓑ $\log_a x = 6$. Ⓒ $\log_a x = 13$. Ⓓ $\log_a x = \dfrac{5}{2}$.

CÂU 34. Cho $\log_a b = 2$; $\log_a c = 3$. Tính giá trị của biểu thức $\log_a x$, biết rằng $x = \dfrac{a\sqrt{b^3}}{c^2}$.

Ⓐ $\log_a x = -6$. Ⓑ $\log_a x = -4$. Ⓒ $\log_a x = -2$. Ⓓ $\log_a x = -1$.

1. D	2. B	3. D	4. B	5. A	6. C	7. B	8. D	9. D	10. A
11. B	12. D	13. A	14. D	15. B	16. C	17. B	18. D	19. A	20. B
21. B	22. D	23. C	24. C	25. A	26. A	27. B	28. D	29. A	30. B
			31. D	32. D	33. A	34. C			

Dạng 2. Biểu diễn logarit

1. Các ví dụ

VÍ DỤ 1. Cho $\log_{12} 27 = a$, tính $\log_6 16$ theo a.

VÍ DỤ 2. Cho $\log_2 3 = a$; $\log_2 7 = b$. Tính $\log_2 2016$ theo a và b.

VÍ DỤ 3. Biết $\log_{27} 5 = a$; $\log_8 7 = b$; $\log_2 3 = c$, tính $\log_{12} 35$ theo a, b, c.

VÍ DỤ 4. Cho $\dfrac{\log a}{p} = \dfrac{\log b}{q} = \dfrac{\log c}{r} = \log x \neq 0$; $\dfrac{b^2}{ac} = x^y$. Tính y theo p, q, r.

VÍ DỤ 5. Cho các số thực dương x; $y > 0$ thỏa mãn $x^2 + y^2 = 8xy$. Chứng minh rằng

$$2\log(x+y) = 1 + \log x + \log y.$$

2. Các câu hỏi trắc nghiệm

CÂU 1. Cho các số dương a; b $(a \neq 1)$. Khẳng định nào dưới đây là **sai**?

Ⓐ $\log_a\left(a^3b^4\right) = 3 + 4\log_a b$. Ⓑ $\log_a b = \dfrac{\log_a b}{\log_a 3}$.

Ⓒ $2 + 2\log_a b = \log_a\left(a^2 + b^2\right)$. Ⓓ $\log_a b \cdot \log_b 9 = 2\log_a 3$.

CÂU 2. Cho các số thực dương a, b, c với a, b, $ab \neq 1$. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

Ⓐ $\log_a c + \log_b c = \log_{ab} c$. Ⓑ $2\log_a b + 3\log_a c = \log_a\left(b^2c^3\right)$.

Ⓒ $\log_b c + \log_a b = \log_a c$. Ⓓ $\log_b c = \dfrac{\log_a c}{\log_a b}$.

CÂU 3. Cho các số dương $a > b > 0$ $(a \neq 1)$. Khẳng định nào dưới đây là **sai**?

Ⓐ $\log_a\left(a^2 - b^2\right) = \log_a(a-b) + \log_a(a+b)$.

Ⓑ $\log_a\left(a^2b^2\right) = 2 + 2\log_a b$.

Ⓒ $\log_a(a+b)^2 = 2(1 + \log_a b)$.

Ⓓ $\log_{a^2}\sqrt{ab} = \dfrac{1}{4}(1 + \log_a b)$.

CÂU 4. Cho các số dương a; $b > 0$ $(a \neq 1)$. Khẳng định nào dưới đây là **sai**?

Ⓐ $\log_{a^2}(a\sqrt{b}) = \dfrac{1}{4}(2 + \log_a b)$. Ⓑ $\log_{a^2}(\sqrt{ab}) = \dfrac{1}{4}(1 + 2\log_a b)$.

Ⓒ $\log_{\sqrt{a}}(ab) = 2(1 + \log_a b)$. Ⓓ $\log_{\sqrt{a}}(a\sqrt{b}) = 2 + 4log_a b$.

CÂU 5. Cho các số dương a; $b > 0$ $(a \neq 1)$. Khẳng định nào dưới đây là **sai**?

Ⓐ $3^{\log_a b} = b^{\log_a 3}$. Ⓑ $a^{\log_a ab} = ab$. Ⓒ $a^{\log_{\sqrt{a}} b} = b^2$. Ⓓ $a^{\log_{a^2} b} = b^2$.

QUICK NOTE

CÂU 6. Cho các số dương a; b; $c > 0$ $(a \neq 1)$. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

Ⓐ $\log_{a^c} b^c = \log_a b$.

Ⓑ $\log_{\frac{1}{a^c}} b^c = -\log_a b$.

Ⓒ $2\log_a b - 3\log_a c = \dfrac{2}{3}\log_a \dfrac{b}{c}$.

Ⓓ $\log_a b + \log_a c - 1 = \log_a \dfrac{bc}{a}$.

CÂU 7. Cho các số thực a, b, x, $y > 0$ với a, $b \neq 1$. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

Ⓐ $\log_a b \cdot \log_b a = 1$.

Ⓑ $\ln \dfrac{x}{\sqrt{y}} = \ln x - \dfrac{1}{2}\ln y$.

Ⓒ $\log_a x + \log_{\sqrt[3]{a}} y = \log_a \left(xy^3\right)$.

Ⓓ $\log_a (x+y) = \log_a x + \log_a y$.

CÂU 8. Đặt $a = \log_2 3$. Hãy tính $\log_2 48$ theo a.

Ⓐ $\log_2 48 = 3 + 2a$.

Ⓑ $\log_2 48 = 4 + 2a$.

Ⓒ $\log_2 48 = 4 + a$.

Ⓓ $\log_2 48 = 5 - a$.

CÂU 9. Đặt $a = \log_2 5$. Hãy tính $\log_4 10$ theo a.

Ⓐ $\log_4 10 = 2(1+a)$.

Ⓑ $\log_4 10 = \dfrac{a+1}{2}$.

Ⓒ $\log_4 10 = -2(1+a)$.

Ⓓ $\log_4 10 = \dfrac{-a-1}{2}$.

CÂU 10. Đặt $a = \log_2 3$. Hãy tính $\log_{12} 18$ theo a.

Ⓐ $\log_{12} 18 = \dfrac{a+2}{2a+1}$.

Ⓑ $\log_{12} 18 = \dfrac{2a-2}{2-a}$.

Ⓒ $\log_{12} 18 = \dfrac{2a+2}{2-a}$.

Ⓓ $\log_{12} 18 = \dfrac{2a+1}{2+a}$.

CÂU 11. Cho $\log_2 5 = a$. Hãy tính $\log_4 1250$ theo a

Ⓐ $\log_4 1250 = \dfrac{4+a}{2}$.

Ⓑ $\log_4 1250 = \dfrac{1+4a}{2}$.

Ⓒ $\log_4 1250 = \dfrac{4a+3}{2}$.

Ⓓ $\log_4 1250 = \dfrac{4a-1}{2}$.

CÂU 12. Cho $a = \log_{15} 3$ thì

Ⓐ $\log_{25} 15 = \dfrac{3}{5(1-a)}$.

Ⓑ $\log_{25} 15 = \dfrac{5}{3(1-a)}$.

Ⓒ $\log_{25} 15 = \dfrac{1}{2(1-a)}$.

Ⓓ $\log_{25} 15 = \dfrac{1}{5(1-a)}$.

CÂU 13. Cho $a = \log_2 7$. Hãy tính $\log_{14} 49$ theo a.

Ⓐ $\log_{14} 49 = \dfrac{2a}{1+a}$.

Ⓑ $\log_{14} 49 = \dfrac{2a}{2+a}$.

Ⓒ $\log_{14} 49 = \dfrac{2a}{2-a}$.

Ⓓ $\log_{14} 49 = \dfrac{2}{1+a}$.

CÂU 14. Cho $\log_{\sqrt{10}} 20 = a$. Hãy biểu diễn $\log_2 5$ theo a.

Ⓐ $\log_2 5 = \dfrac{a+4}{a+2}$.

Ⓑ $\log_2 5 = \dfrac{a-4}{2-a}$.

Ⓒ $\log_2 5 = \dfrac{a-4}{2a-1}$.

Ⓓ $\log_2 5 = \dfrac{2a-1}{a-4}$.

CÂU 15. Đặt $\log_3 4 = a$. Hãy tính $\log_3 \dfrac{27}{16}$ theo a.

Ⓐ $\log_3 \dfrac{27}{16} = 3 - 4a$.

Ⓑ $\log_3 \dfrac{27}{16} = 3(1-a)$.

Ⓒ $\log_3 \dfrac{27}{16} = 3 - 2a$.

Ⓓ $\log_3 \dfrac{27}{16} = \dfrac{3-2a}{2}$.

CÂU 16. Cho $\log_{18} 12 = a$. Hãy biểu diễn $\log_2 3$ theo a.

Ⓐ $\log_2 3 = \dfrac{a-2}{1-2a}$.

Ⓑ $\log_2 3 = \dfrac{a-2}{2a-1}$.

Ⓒ $\log_2 3 = \dfrac{a+2}{2a-1}$.

Ⓓ $\log_2 3 = \dfrac{a-1}{1-2a}$.

CÂU 17. Cho $a = \log_{20} 50$. Hãy biểu diễn $\log_2 5$ theo a.

Ⓐ $\log_2 5 = \dfrac{2a+1}{a-2}$.

Ⓑ $\log_2 5 = \dfrac{2a+1}{2-a}$.

Ⓒ $\log_2 5 = \dfrac{2a-1}{2-a}$.

Ⓓ $\log_2 5 = \dfrac{2a-1}{a+2}$.

CÂU 18. Đặt $\log_2 3 = a$, $b = \log_3 5$. Hãy biểu diễn $\log_2 45$ theo a và b.

Ⓐ $\log_2 45 = 2a + 2ab$.

Ⓑ $\log_2 45 = a + ab$.

Ⓒ $\log_2 45 = 3a + ab$.

Ⓓ $\log_2 45 = 2a + ab$.

CÂU 19. Đặt $\log_2 3 = a, b = \log_3 5$. Hãy biểu diễn $\log_{12} 15$ theo a và b.

Ⓐ $\log_{12} 15 = \dfrac{a+ab}{b+2}$.

Ⓑ $\log_{12} 15 = \dfrac{a+ab}{a+2}$.

Ⓒ $\log_{12} 15 = \dfrac{a+b}{ab+2a}$.

Ⓓ $\log_{12} 15 = \dfrac{a+b}{ab+2b}$.

QUICK NOTE

CÂU 20. Đặt $a = \log_2 3$, $b = \log_5 3$. Hãy biểu diễn $\log_6 45$ theo a và b.

Ⓐ $\log_6 45 = \dfrac{a+2ab}{ab}$. Ⓑ $\log_6 45 = \dfrac{2a^2-2ab}{ab}$.

Ⓒ $\log_6 45 = \dfrac{a+2ab}{ab+b}$. Ⓓ $\log_6 45 = \dfrac{2a^2-2ab}{ab+b}$.

CÂU 21. Đặt $a = \log_5 2$; $b = \log_5 3$. Hãy tính $\log_5 72$ theo a và b.

Ⓐ $\log_5 72 = 3a + 2b$. Ⓑ $\log_5 72 = 2a + 3b$.

Ⓒ $\log_5 72 = 3a + 3b$. Ⓓ $\log_5 72 = 2a + 2b$.

CÂU 22. Đặt $\log 3 = p$; $\log 5 = q$. Hãy biểu diễn $\log_{15} 30$ theo p; q.

Ⓐ $\log_{15} 30 = \dfrac{1+q}{p+q}$. Ⓑ $\log_{15} 30 = \dfrac{1+p}{p+q}$.

Ⓒ $\log_{15} 30 = \dfrac{p+q}{p+1}$. Ⓓ $\log_{15} 30 = \dfrac{p+q}{q+1}$.

CÂU 23. Cho $a = \log_3 15$; $b = \log_3 10$. Hãy tính $\log_{\sqrt{3}} 50$ theo a và b.

Ⓐ $\log_{\sqrt{3}} 50 = \dfrac{a+b+1}{2}$. Ⓑ $\log_{\sqrt{3}} 50 = \dfrac{a+b-1}{2}$.

Ⓒ $\log_{\sqrt{3}} 50 = 2a + 2b + 2$. Ⓓ $\log_{\sqrt{3}} 50 = 2a + 2b - 2$.

CÂU 24. Cho $a = \log_2 3$, $b = \log_7 2$. Hãy tính log $\log_{\sqrt{6}} 28$ theo a và b.

Ⓐ $A = \dfrac{b+1}{2a+2}$. Ⓑ $A = \dfrac{4b+2}{ab+b}$. Ⓒ $A = \dfrac{4b+2}{a+2}$. Ⓓ $A = \dfrac{b+1}{2ab+2b}$.

CÂU 25. Cho $a = \log_2 5$, $b = \log_7 5$. Hãy tính $\log_{14} 100$ theo a, b.

Ⓐ $\log_{14} 100 = \dfrac{2a+b}{a+b}$. Ⓑ $\log_{14} 100 = \dfrac{2ab+b}{a+b}$.

Ⓒ $\log_{14} 100 = \dfrac{2a+ab}{a+ab}$. Ⓓ $\log_{14} 100 = \dfrac{2ab+b}{a+b}$.

CÂU 26. Cho $\log_5 2 = a$; $b = \log_5 3$. Hãy biểu diễn $\log_{15} 36$ theo a, b.

Ⓐ $\log_{15} 36 = \dfrac{2a+b}{b+1}$. Ⓑ $\log_{15} 36 = \dfrac{a+2b}{b+1}$.

Ⓒ $\log_{15} 36 = \dfrac{2a+2b}{b+1}$. Ⓓ $\log_{15} 36 = \dfrac{2a+2b}{a+1}$.

CÂU 27. Đặt $a = \log_2 5$, $b = \log_2 3$. Hãy biểu diễn $\log_{40} 45$ theo a, b.

Ⓐ $\log_{40} 45 = \dfrac{2a+b}{b+3}$. Ⓑ $\log_{40} 45 = \dfrac{a+2b}{b+3}$.

Ⓒ $\log_{40} 45 = \dfrac{2a+2b}{b+3}$. Ⓓ $\log_{40} 45 = \dfrac{a+2b}{a+3}$.

CÂU 28. Cho $\log_2 6 = a$ và $\log_3 5 = b$. Hãy tính $\log_{12} \sqrt{20}$ theo a, b.

Ⓐ $\log_{12} \sqrt{20} = \dfrac{ab-b+2}{2(a+1)}$. Ⓑ $\log_{12} \sqrt{20} = \dfrac{ab+b-2}{2(a+1)}$.

Ⓒ $\log_{12} \sqrt{20} = \dfrac{ab+b-2}{2(a-1)}$. Ⓓ $\log_{12} \sqrt{20} = \dfrac{ab-b+2}{2(a-1)}$.

CÂU 29. Đặt $\log_2 7 = a$; $\log_3 7 = b$. Hãy tính $\log_{14} 12$ theo a, b.

Ⓐ $\log_{14} 12 = \dfrac{a+2b}{ab+a}$. Ⓑ $\log_{14} 12 = \dfrac{a+2b}{ab+b}$.

Ⓒ $\log_{14} 12 = \dfrac{2a+b}{ab+a}$. Ⓓ $\log_{14} 12 = \dfrac{2a+b}{ab+a}$.

CÂU 30. Đặt $a = \log_2 5$ và $b = \log_2 6$. Hãy biểu diễn $\log_3 90$ theo a và b.

Ⓐ $\log_3 90 = \dfrac{a+2b-1}{b-1}$. Ⓑ $\log_3 90 = \dfrac{a+2b-1}{a-1}$.

Ⓒ $\log_3 90 = \dfrac{a-2b+1}{b+1}$. Ⓓ $\log_3 90 = \dfrac{a-2b-1}{a+1}$.

CÂU 31. Đặt $\log_2 5 = a$, $\log_4 15 = b$. Hãy tính $\log_3 10$ theo a, b.

Ⓐ $\log_3 10 = \dfrac{1-a}{a+2b}$. Ⓑ $\log_3 10 = \dfrac{ab-a}{a+2b}$.

Ⓒ $\log_3 10 = \dfrac{ab+a}{a+2b}$. Ⓓ $\log_3 10 = \dfrac{1+a}{2b-a}$.

CÂU 32. Đặt $a = \log_2 3$; $b = \log_5 2$; $c = \log_2 7$. Hãy biểu diễn $\log_{42} 15$ theo a, b, c.

Ⓐ $\log_{42} 15 = \dfrac{ab+1}{b(a+c+1)}$. Ⓑ $\log_{42} 15 = \dfrac{ac+1}{c(a+c+1)}$.

QUICK NOTE

(C) $\log_{42} 15 = \dfrac{ab+1}{ab+b+c}$. (D) $\log_{42} 15 = \dfrac{a+c}{a+b+bc}$.

CÂU 33. Cho các số thực $a,\, b > 0;\ a \neq 1$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

(A) $\log_a\left(a^4+b\right) = 4 + \log_a b$. (B) $\log_a\left(a^2+a^2b^2\right) = 2 + \log_a\left(b^2+1\right)$.

(C) $\log_a(a+b) = 1 + \log_a b$. (D) $\log_a\left(a^3b+1\right) = 4 + \log_a b$.

CÂU 34. Cho các số thực $a,\, b > 0;\ a \neq 1$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

(A) $\log_{a^2}(ab) = \dfrac{1}{2}\log_a b$. (B) $\log_{a^2}(ab) = 2 + 2\log_a b$.

(C) $\log_{a^2}(ab) = \dfrac{1}{4}\log_a b$. (D) $\log_{a^2}(ab) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\log_a b$.

CÂU 35. Cho các số thực $a,\, b > 0;\ a;\ b;\ ab \neq 1$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

(A) $\log_{ab}\dfrac{a}{b} = \dfrac{1+\log_a b}{1-\log_a b}$. (B) $\log_{ab}\dfrac{a}{b} = \dfrac{1-\log_a b}{1+\log_a b}$.

(C) $\log_{ab}\dfrac{a}{b} = \dfrac{1+\log_b b}{1-\log_a b}$. (D) $\log_{ab}\dfrac{a}{b} = \dfrac{1+\log_a b}{1-\log_b b}$.

CÂU 36. Cho các số thực $a,\, b > 0;\ a;\ a\sqrt{b} \neq 1$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

(A) $\log_{a\sqrt{b}}(ab) = \dfrac{1+\log_a b}{2+\log_a b}$. (B) $\log_{a\sqrt{b}}(ab) = \dfrac{2+\log_a b}{1+\log_a b}$.

(C) $\log_{a\sqrt{b}}(ab) = \dfrac{2+2\log_a b}{2+\log_a b}$. (D) $\log_{a\sqrt{b}}(ab) = \dfrac{2+\log_a b}{2+2\log_a b}$.

CÂU 37. Cho các số thực dương $x;\ y > 0$ thỏa mãn $x^2+y^2 = 8xy$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

(A) $\log(x+y) = \dfrac{1+\log x+\log y}{2}$. (B) $\log(x+y) = \log x + \log y + 1$.

(C) $\log(x+y) = \log x + \log y - 1$. (D) $\log(x+y) = 10\cdot(\log x + \log y)$.

CÂU 38. Cho các số thực dương $x;\ y > 0$ thỏa mãn $x^2+y^2 = 14xy$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

(A) $\log_2\dfrac{x+y}{14} = \log_2 x + \log_2 y$. (B) $\log_2\dfrac{x+y}{16} = \log_2 x + \log_2 y$.

(C) $\log_2(x+y) = \dfrac{\log_2 x+\log_2 y}{2}$. (D) $\log_2(x+y) = 2 + \dfrac{\log_2 xy}{2}$.

CÂU 39. Cho các số $x,\, y \in \mathbb{R}$ và $x^2+y^2 = 3xy$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

(A) $\log_5(x+y) = \dfrac{1+\log_5 xy}{2}$. (B) $\log_5(x+y)^2 = 1 + \log_5 x + \log_5 y$.

(C) $\log_5(x+y)^2 = 1 + \log_5(xy)$. (D) Tất cả đều đúng.

CÂU 40. Cho $\log_a x = p;\ \log_b x = q;\ \log_c x = r\ (1 \neq a;\ b;\ c;\ x > 0)$. Hãy tính $\log_{abc} x$.

(A) $\log_{abc} x = \dfrac{pqr}{pq+qr+rp}$. (B) $\log_{abc} x = pqr$.

(C) $\log_{abc} x = \dfrac{pqr}{p+q+r}$. (D) $\log_{abc} x = \dfrac{pq+qr+rp}{p+q+r}$.

CÂU 41. Cho $\log_a x = m$ và $\log_{ab} x = n\ (1 \neq x;\ a;\ ab > 0)$. Khi đó $\log_b x$ bằng

(A) $\log_b x = \dfrac{mn}{n-m}$. (B) $\log_b x = \dfrac{mn}{m-n}$. (C) $\log_b x = \dfrac{mn}{m+n}$. (D) $\log_b x = \dfrac{1}{m} - \dfrac{1}{n}$.

CÂU 42. Thu gọn biểu thức $A = \dfrac{1}{\log_a b} + \dfrac{1}{\log_{a^2} b} + \dfrac{1}{\log_{a^2} b} + \cdots + \dfrac{1}{\log_{a^n} b}$ ta được

(A) $A = \dfrac{n(n+1)}{\log_a b}$. (B) $A = \dfrac{n+1}{2\log_a b}$. (C) $A = \dfrac{n(n+1)}{2\log_a b}$. (D) $A = \dfrac{n(n-1)}{\log_a b}$.

1. C	2. A	3. C	4. D	5. D	6. C	7. D	8. C	9. B	10. D
11. B	12. C	13. A	14. B	15. C	16. A	17. C	18. D	19. B	20. C
21. A	22. B	23. D	24. B	25. D	26. C	27. D	28. A	29. B	30. A
31. D	32. A	33. B	34. D	35. B	36. C	37. A	38. D	39. C	40. A
				41. B	42. C				

Bài 3. PHƯƠNG TRÌNH - BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ VÀ LOGARIT

CHUYÊN ĐỀ 1: PHƯƠNG TRÌNH MŨ

QUICK NOTE

A. KIẾN THỨC SÁCH GIÁO KHOA CẦN CẦN NẮM

1. Phương trình mũ cơ bản $a^x = b\,(a > 0, a \neq 1)$.

- Phương trình có một nghiệm duy nhất $x = \log_a b$ khi $b > 0$.
- Phương trình vô nghiệm khi $b \leq 0$.

2. Biến đổi, quy về cùng cơ số

$a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow a = 1$ hoặc $\begin{cases} 0 < a \neq 1 \\ f(x) = g(x). \end{cases}$

3. Đặt ẩn phụ

$f\left[a^{g(x)}\right] = 0,\ (0 < a \neq 1) \Leftrightarrow \begin{cases} t = a^{g(x)} > 0 \\ f(t) = 0. \end{cases}$

Ta thường gặp các dạng:

- $m.a^{2f(x)} + n \cdot a^{f(x)} + p = 0$.
- $m.a^{f(x)} + n \cdot b^{f(x)} + p = 0$, trong đó $a.b = 1$. Đặt $t = a^{f(x)}(t > 0)$, suy ra $b^{f(x)} = \dfrac{1}{t}$.
- $m.a^{2f(x)} + n \cdot (a \cdot b)^{f(x)} + p \cdot b^{2f(x)} = 0$. Chia hai vế cho $b^{2f(x)}$ và đặt $t = \left(\dfrac{a}{b}\right)^{f(x)} > 0$.

4. Logarit hóa

- Phương trình $a^{f(x)} = b \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < a \neq 1, b > 0 \\ f(x) = \log_a b. \end{cases}$
- Phương trình $a^{f(x)} = b^{g(x)} \Leftrightarrow \log_a a^{f(x)} = \log_a b^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x) \cdot \log_a b$.
  hoặc $\log_b a^{f(x)} = \log_b b^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) \cdot \log_b a = g(x)$.

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 3. Phương trình mũ cơ bản

Phương pháp: $a^{f(x)} = b$.
Nếu $b < 0$ thì phương trình vô nghiệm.
Nếu $b > 0$ thì phương trình có nghiệm duy nhất $f(x) = \log_a b$.

1. Các ví dụ

VÍ DỤ 1. Giải phương trình: $2^{2x-1} = 3$.

VÍ DỤ 2. Giải phương trình: $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x^2-3x+1} = 2$.

VÍ DỤ 3. Giải phương trình: $2^{x^2+3x-2} = \dfrac{1}{4}$.

VÍ DỤ 4. Giải phương trình sau: $5^x \cdot 2^{2x-1} = 50$.

2. Câu hỏi trắc nghiệm

CÂU 1. Tính tổng tất cả các nghiệm thực của phương trình $2^{2x^2-7x+5} = 1$.

(A) $\dfrac{2}{7}$. (B) $\dfrac{5}{2}$. (C) $\dfrac{2}{5}$. (D) $\dfrac{7}{2}$.

CÂU 2. Tìm tập nghiệm S của phương trình $3^{x^2-3x+4} = 9$.

(A) $S = \{-2, 1\}$. (B) $S = \{-1, 3\}$. (C) $S = \{1, 2\}$. (D) $S = \{1, 3\}$.

CÂU 3. Phương trình $(2 + \sqrt{3})^{x^2-2x-2} = 7 - 4\sqrt{3}$ có hai nghiệm x_1, x_2. Tính $P = x_1 + x_2$.

(A) $P = -1$. (B) $P = 4$. (C) $P = 3$. (D) $P = 2$.

CÂU 4. Tìm nghiệm của phương trình $2^{x+1} \cdot 5^x = 200$.

(A) $x = 3$. (B) $x = \log_2 5$. (C) $x = 2$. (D) $x = \log_5 2$.

QUICK NOTE

CÂU 5. Nghiệm của phương trình $3^{2x-1}=243$ là
(A) $x=1$. (B) $x=3$. (C) $x=7$. (D) $x=2$.

CÂU 6. Gọi x_1,x_2 là nghiệm của phương trình $8^{x^2+6x-3}=4096$, giá trị của $x_1\cdot x_2$ là bao nhiêu?
(A) 7. (B) 9. (C) -9. (D) -7.

CÂU 7. Biết phương trình $9^x-2^{x+\frac{1}{2}}=2^{x+\frac{3}{2}}-3^{2x-1}$ có nghiệm là a. Khi đó biểu thức $a+\frac{1}{2}\log_{\frac{9}{2}}2$ có giá trị bằng
(A) $1-\frac{1}{2}\log_{\frac{9}{2}}2$. (B) 1. (C) $1-\log_{\frac{9}{2}}2$. (D) $\frac{1}{2}\log_{\frac{9}{2}}2$.

CÂU 8. Tập hợp nghiệm của phương trình $3^{x^2-x-4}=\frac{1}{81}$ là
(A) $\{0;4\}$. (B) $\emptyset$. (C) $\{2;1\}$. (D) $\{0;1\}$.

CÂU 9. Phương trình $3^{x^2-5}-81=0$ có hai nghiệm $x_1;x_2$. Tính giá trị của tích x_1x_2
(A) -9. (B) 9. (C) 29. (D) -27.

CÂU 10. Cho phương trình $3^{x^2-4x+5}=9$ tổng lập phương các nghiệm thực của phương trình là
(A) 28. (B) 27. (C) 26. (D) 25.

CÂU 11. Tính tổng T tất cả các nghiệm của phương trình $(x-3)^{2x^2-5x}=1$.
(A) $T=0$. (B) $T=4$. (C) $T=\frac{13}{2}$. (D) $T=\frac{15}{2}$.

Dạng 4. Phương pháp đưa về cơ số

Phương pháp: Biến đổi phương trình về dạng: $a^{f(x)}=a^{g(x)}$ (1).
+ Nếu cơ số a là một số dương và khác 1 thì: (1) $\Leftrightarrow f(x)=g(x)$.
+ Nếu cơ số a thay đổi thì: (1) $\Leftrightarrow \begin{cases}a>0\\(a-1)[f(x)-g(x)]=0.\end{cases}$

1. Các ví dụ

VÍ DỤ 1. Giải phương trình sau: $2^{x^2-x+8}=4^{1-3x}$.

VÍ DỤ 2. Giải phương trình sau: $2^{x^2-6x-\frac{5}{2}}=16\sqrt{2}$.

VÍ DỤ 3. Giải phương trình sau: $2^{x+1}+2^{x-2}=36$.

VÍ DỤ 4. Giải phương trình sau: $2.3^{x+1}-6\cdot 3^{x-1}-3^x=9$.

VÍ DỤ 5. Giải phương trình sau: $2^{x^2-6}\cdot 3^{x^2-6}=\frac{1}{6^5}\cdot\left(6^{x-1}\right)^4$.

VÍ DỤ 6. Giải phương trình sau: $2^{x^2-1}-3^{x^2}=3^{x^2-1}-2^{x^2+2}$.

2. Câu hỏi trắc nghiệm

CÂU 1. Tìm nghiệm của phương trình $3^{x-4}=\left(\frac{1}{9}\right)^{3x-1}$
(A) $\frac{1}{3}$. (B) 1. (C) $\frac{6}{7}$. (D) $\frac{7}{6}$.

CÂU 2. Tìm nghiệm của phương trình $\left(\frac{1}{25}\right)^{x+1}=125^{2x}$.
(A) 1. (B) 4. (C) $-\frac{1}{4}$. (D) $-\frac{1}{8}$.

CÂU 3. Tìm nghiệm của phương trình $8^{\frac{2x-1}{x+1}}=0,25\cdot(\sqrt{2})^x$.
(A) $x=\frac{15\pm\sqrt{217}}{2}$. (B) $x=\frac{17\pm\sqrt{215}}{2}$. (C) $x=15\pm\sqrt{217}$. (D) $x=17\pm\sqrt{215}$.

CÂU 4. Tìm nghiệm của phương trình $\frac{3^{2x-6}}{27}=\frac{1}{3^x}$.
(A) $x=5$. (B) $x=4$. (C) $x=3$. (D) $x=2$.

QUICK NOTE

CÂU 5. Tìm nghiệm của phương trình $2^x = (\sqrt{3})^x$.

(A) $x = 3$. (B) $x = 5$. (C) $x = -1$. (D) $x = 0$.

CÂU 6. Tìm nghiệm của phương trình $(\sqrt{2}-1)^{x^2} = (\sqrt{2}+1)^{2x+1}$.

(A) $x = -1$. (B) $x = 1$. (C) $x = -2$. (D) $x = 2$.

CÂU 7. Tìm nghiệm của phương trình $2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} = 21$.

(A) $x = \log_3 2$. (B) $x = \log_2 3$. (C) $x = 2$. (D) $x = 3$.

CÂU 8. Tìm nghiệm của phương trình $\dfrac{2\cdot 3^x - 2^{x+2}}{3^x - 2^x} = 1$.

(A) $x = \log_{\frac{2}{3}} 3$. (B) $x = \log_{\frac{2}{3}} 2$. (C) $x = \log_{\frac{3}{2}} 3$. (D) $x = 1$.

CÂU 9. Nghiệm của phương trình $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{2x-1} = \left(\dfrac{9}{4}\right)^{2x+3}$ là

(A) $x = -\dfrac{5}{6}$. (B) $x = \dfrac{2}{3}$. (C) $x = 3$. (D) $x = \dfrac{5}{2}$.

CÂU 10. Phương trình $0,125\cdot 4^{x+4} = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{4}\right)^{-4x+2}$ có nghiệm là

(A) $x = 2$. (B) $x = 1$. (C) $x = -2$. (D) $x = -1$.

Dạng 5. Phương pháp đặt ẩn phụ

Phương pháp: $f\left[a^{g(x)}\right] = 0,\ (0 < a \neq 1) \Leftrightarrow \begin{cases} t = a^{g(x)} > 0 \\ f(t) = 0. \end{cases}$

Ta thường gặp các dạng:

- $m.a^{2f(x)} + n\cdot a^{f(x)} + p = 0$.
- $m.a^{f(x)} + n\cdot b^{f(x)} + p = 0$, trong đó $a.b = 1$. Đặt $t = a^{f(x)} (t > 0)$, suy ra $b^{f(x)} = \dfrac{1}{t}$.
- $m.a^{2f(x)} + n\cdot(a\cdot b)^{f(x)} + p\cdot b^{2f(x)} = 0$. Chia hai vế cho $b^{2f(x)}$ và đặt $t = \left(\dfrac{a}{b}\right)^{f(x)} > 0$.

1. Các ví dụ

VÍ DỤ 1. Giải các phương trình sau: $3^{2x+8} - 4\cdot 3^{x+5} + 27 = 0$.

VÍ DỤ 2. Giải các phương trình sau: $25^x - 2\cdot 5^x - 15 = 0$.

VÍ DỤ 3. Giải các phương trình sau: $3^{x+2} - 3^{2-x} = 24$.

VÍ DỤ 4. Giải phương trình sau:

a) $6.9^x - 13\cdot 6^x + 6\cdot 4^x = 0$.

b) $2.2^{2x} - 9\cdot 14^x + 7\cdot 7^{2x} = 0$.

c) $25^x + 10^x = 2^{2x+1}$.

VÍ DỤ 5. Giải phương trình sau: $(2+\sqrt{3})^x + (2-\sqrt{3})^x = 4$.

2. Câu hỏi trắc nghiệm

CÂU 1. Tìm nghiệm của phương trình $9^x - 3\cdot 3^x + 2 = 0$.

(A) $\left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \log_2 3 \end{array}\right.$. (B) $\left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \log_3 2 \end{array}\right.$. (C) $\left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -\log_2 3 \end{array}\right.$. (D) $\left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -\log_3 2 \end{array}\right.$.

CÂU 2. Biết phương trình $4^x - 2^{x+1} - 3 = 0$ có duy nhất một nghiệm là a. Tính $P = a\log_3 4 + 1$.

(A) $P = 2$. (B) $P = 4$. (C) $P = 3$. (D) $P = 5$.

CÂU 3. Cho phương trình $4^x + 2^{x+1} - 3 = 0$. Khi đặt $t = 2^x$, ta được phương trình nào dưới đây?

(A) $2t^2 - 3 = 0$. (B) $t^2 + t - 3 = 0$. (C) $4t - 3 = 0$. (D) $t^2 + 2t - 3 = 0$.

QUICK NOTE

CÂU 4. Tìm nghiệm của phương trình $e^{6x} - 3 \cdot e^{3x} + 2 = 0$

(A) $\left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \dfrac{1}{3}\ln 2 \end{array}\right.$. (B) $\left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = \dfrac{1}{3}\ln 2 \end{array}\right.$. (C) $\left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -1 \end{array}\right.$. (D) $\left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \end{array}\right.$.

CÂU 5. Số nghiệm của phương trình $7^{2x+1} - 8 \cdot 7^x + 1 = 0$ là

(A) 0. (B) 2. (C) 1. (D) 3.

CÂU 6. Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm thực của phương trình $(2+\sqrt{3})^x + 2(2-\sqrt{3})^x = 3$. Tính $P = x_1 + x_2$.

(A) $P = \log_{2+\sqrt{3}} 2$. (B) $P = 0$. (C) $P = \log_{2-\sqrt{3}} 2$. (D) $P = 2$.

CÂU 7. Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm thực của phương trình $\left(5-\sqrt{21}\right)^x + 7\left(5+\sqrt{21}\right)^x = 2^{x+3}$. Tính $P = x_1 + x_2$.

(A) $P = \log_{\frac{5+\sqrt{21}}{2}} 7$. (B) $P = -8$. (C) $P = 8$. (D) $P = \log_{\frac{5-\sqrt{21}}{2}} 7$.

CÂU 8. Số nghiệm của phương trình $6.9^{\frac{1}{x}} - 13 \cdot 6^{\frac{1}{x}} + 6 \cdot 4^{\frac{1}{x}} = 0$ là

(A) 3. (B) 2. (C) 1. (D) 0.

CÂU 9. Số nghiệm của phương trình $3.8^x + 4 \cdot 12^x - 18^x - 2 \cdot 27^x = 0$ là

(A) 1. (B) 2. (C) 0. (D) 3.

CÂU 10. Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình: $2^{2x^4+4x^2-6} - 2 \cdot 2^{x^4+2x^2-3} + 1 = 0$. Tính $P = x_1 \cdot x_2$.

(A) $P = -9$. (B) $P = -1$. (C) $P = 1$. (D) $P = 9$.

CÂU 11. Tìm nghiệm của phương trình $2.2^{\sin^2 x} - 2^{\cos^2 x} - 3 = 0$.

(A) $x = (2k+1)\pi$. (B) $x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi$. (C) $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$. (D) $x = k\pi$.

CÂU 12. Tìm nghiệm của phương trình: $4^{x^2-x} + 2^{x^2-x+1} = 3$.

(A) $\left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 2 \end{array}\right.$. (B) $\left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 1 \end{array}\right.$. (C) $\left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \end{array}\right.$. (D) $\left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -1 \end{array}\right.$.

CÂU 13. Cho phương trình $3^{1+x} + 3^{1-x} = 10$. Khẳng định nào dưới dây là đúng?

(A) Phương trình có hai nghiệm âm.
(B) Phương trình vô nghiệm.
(C) Phương trình có hai nghiệm dương.
(D) Phương trình có hai nghiệm trái dấu.

CÂU 14. Tìm nghiệm của phương trình $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-3x} - 2 \cdot 4^x - 3(\sqrt{2})^{2x} = 0$.

(A) $x = -1$. (B) $x = \log_2 5$. (C) $x = 0$. (D) $x = \log_2 3$.

CÂU 15. Số nghiệm của phương trình $4^{2x^2} - 2 \cdot 4^{x^2+x} + 4^{2x} = 0$ là

(A) 3. (B) 2. (C) 1. (D) 4.

CÂU 16. Tích các nghiệm thực của phương trình $2^{2x^4+2x^2-4} - 2^{x^4+x^2-1} + 1 = 0$ là

(A) -3. (B) -1. (C) 2. (D) 3.

CÂU 17. Số nghiệm của phương trình $12 \cdot 9^x - 35 \cdot 6^x + 18 \cdot 4^x = 0$ là

(A) 0. (B) 3. (C) 1. (D) 2.

CÂU 18. Phương trình $\left(3+2\sqrt{2}\right)^x + \left(3-2\sqrt{2}\right)^x = 6$ có nghiệm là

(A) $x = \pm 1$.
(B) $x = \pm 3$.
(C) $x = \pm 2$.
(D) Phương trình vô nghiệm.

CÂU 19. Gọi x_1, x_2 là 2 nghiệm của phương trình $4^x - 3 \cdot 2^x + 2 = 0$ với $x_1 < x_2$. Tính giá trị $P = 2x_2 - x_1$.

(A) $P = 3$. (B) $P = 1$. (C) $P = 2$. (D) $P = -1$.

CÂU 20. Phương trình $3^{2x+1} - 4 \cdot 3^x + 1 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 trong đó $x_1 < x_2$, chọn phát biểu đúng?

(A) $x_1 + x_2 = -2$. (B) $x_1 x_2 = -1$. (C) $2x_1 + x_2 = 0$. (D) $x_1 + 2x_1 = -1$.

CÂU 21. Cho phương trình $5^{x+1} + 5^{1-x} = 12$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

(A) Phương trình có một nghiệm âm và một nghiệm dương.

QUICK NOTE

(B) Phương trình có hai nghiệm âm.
(C) Phương trình vô nghiệm.
(D) Phương trình có hai nghiệm dương.

CÂU 22. Nghiệm của phương trình $5^{1+x^2} - 5^{1-x^2} = 24$ đồng thời cũng là nghiệm của phương trình nào sau đây?

(A) $x^2 + 5x - 6 = 0$. (B) $x^4 + 3x^2 - 4 = 0$.
(C) $\sin^2 x + 2\sin x - 3 = 0$. (D) $x^2 + 1 = 0$.

CÂU 23. Phương trình $3^{1-x} = 2 + \left(\frac{1}{9}\right)^x$ có bao nhiêu nghiệm âm?

(A) 3. (B) 1. (C) 2. (D) 0.

CÂU 24. Số nghiệm của phương trình $9^{\frac{x}{2}} + 9 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{2x+2} - 4 = 0$ là

(A) 2. (B) 4. (C) 1. (D) 0.

CÂU 25. Tổng lập phương các nghiệm của phương trình $2^x + 2 \cdot 3^x - 6^x = 2$ là

(A) $2\sqrt{2}$. (B) 25. (C) 7. (D) 1.

Dạng 6. Logarit 2 vế

VÍ DỤ 1. Giải phương trình sau: $8^x \cdot 5^{x^2-1} = \frac{1}{8}$.

VÍ DỤ 2. Giải phương trình sau: $3^x \cdot 2^{x^2} = 1$.

1. Câu hỏi trắc nghiệm

CÂU 1. Tìm nghiệm của phương trình $5^{x-2} \cdot 8^{\frac{x-1}{x}} = 20$.

(A) $\left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = -\log_2 5 \end{array}\right.$. (B) $\left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = -\log_5 2 \end{array}\right.$. (C) $\left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = -\log_5 3 \end{array}\right.$. (D) $\left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = \log_5 3 \end{array}\right.$.

CÂU 2. Tìm nghiệm của phương trình $3^{x-1} \cdot 5^{\frac{2x-2}{x}} = 15$.

(A) $x = 1$. (B) $\left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = -\log_5 3 \end{array}\right.$. (C) $x = 4$. (D) $\left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = \log_3 5 \end{array}\right.$.

CÂU 3. Phương trình $2^x \cdot 3^{\frac{2x-1}{x}} = 6$ có một nghiệm dạng $x = -\log_a b$, với a, b là các số nguyên dương lớn hơn 1 và nhỏ hơn 8. Khi đó $P = a + 2b$ có giá trị bằng

(A) 9. (B) 6. (C) 7. (D) 8.

CÂU 4. Phương trình $3^x \cdot 5^{\frac{2x-2}{x}} = 45$ có một nghiệm dạng $x = -\log_a b$, với a, b là các số nguyên dương lớn hơn 1 và nhỏ hơn 6. Khi đo $P = 2a - b$ có giá trị bằng

(A) 7. (B) -1. (C) 1. (D) 2.

Dạng 7. Bài toán chứa tham số

1. Các ví dụ

VÍ DỤ 1. Tìm m để phương trình $4^x - m \cdot 2^x + 2m = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + x_2 = 3$.

(A) $m = 4$. (B) $m = 2$. (C) $m = 1$. (D) $m = 3$.

VÍ DỤ 2. Tìm m để phương trình sau có 2 nghiệm phân biệt: $5^{2x} - 2 \cdot 5^x + m = 0$.

(A) $m > 0$. (B) $m = 1$. (C) $0 < m < 1$. (D) $m < 1$.

VÍ DỤ 3. Tìm m để tập nghiệm của phương trình sau có đúng 3 phần tử: $3^{2x^2} - 3^{x^2+2} + m + 4 = 0$.

(A) $m = 2$. (B) $2 < m < 4$. (C) $m > 4$. (D) $m = 4$.

VÍ DỤ 4. Tìm tất cả giá trị của tham số m để phương trình: $4^x - 2^{x+1} + m = 0$ có hai nghiệm trái dấu.

(A) $m < 0$. (B) $0 < m < 1$. (C) $-1 < m < 0$. (D) $m = 1$.

QUICK NOTE

2. Câu hỏi trắc nghiệm

CÂU 1. Tìm tất cả các giá trị thực của m để phương trình $3^x = m$ có nghiệm thực.

(A) $m \geq 1$. (B) $m \geq 0$. (C) $m > 0$. (D) $m \neq 0$.

CÂU 2. Tìm m để phương trình $4^x - m \cdot 2^x + 2m - 5 = 0$ có hai nghiệm trái dấu.

(A) $m > \dfrac{5}{3}$. (B) $\dfrac{2}{5} < m < \dfrac{5}{2}$. (C) $m > 0$. (D) $\dfrac{5}{2} < m < 4$.

CÂU 3. Tìm m để phương trình $9^x - 2 \cdot 3^{x+1} + m = 0$ có hai nghiệm thực x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + x_2 = 1$.

(A) $m = 3$. (B) $m = -3$. (C) $m = 1$. (D) $m = 6$.

CÂU 4. Phương trình $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{2x+4m} = \left(\dfrac{9}{4}\right)^x$ (m là tham số) có nghiệm là

(A) $x = 2m$. (B) $x = -m$. (C) $x = m$. (D) $x = 2m - 1$.

CÂU 5. Phương trình $9\left(\dfrac{9}{25}\right)^{2x+m} = 25\left(\dfrac{5}{3}\right)^{-2x}$ (m là tham số) có nghiệm là

(A) $x = m - 3$. (B) $x = m + 1$. (C) $x = -m - 1$. (D) $x = 2m - 4$.

CÂU 6. Tìm m để phương trình $2^{2x-1} + m^2 - 2m - 3 = 0$ có nghiệm

(A) $-1 < m < 3$. (B) $\left[\begin{array}{l} m > 3 \\ m < -1 \end{array}\right.$. (C) $-3 < m < 1$. (D) $\left[\begin{array}{l} m > 1 \\ m < -3 \end{array}\right.$.

CÂU 7. Tìm m để phương trình $2^{x^2+1} - m^2 - m = 0$ có nghiệm.

(A) $-1 < m < 0$. (B) $\left[\begin{array}{l} m \geq 1 \\ m \leq -2 \end{array}\right.$. (C) $-2 \leq m \leq 1$. (D) $\left[\begin{array}{l} m > 0 \\ m < -1 \end{array}\right.$.

CÂU 8. Tìm m để phương trình $2^{\sqrt{x-1}} + 2m^2 - 3m = 0$ có nghiệm.

(A) $0 \leq m \leq \dfrac{3}{2}$. (B) $0 < m < \dfrac{3}{2}$. (C) $\dfrac{1}{2} < m < 1$. (D) $\dfrac{1}{2} \leq m \leq 1$.

CÂU 9. Tìm m để tập nghiệm của phương trình sau có đúng 1 phần tử $4^x + m \cdot 2^{x+1} + m + 2 = 0$.

(A) $m < -2$. (B) $\left[\begin{array}{l} m \leq -2 \\ m = -1 \end{array}\right.$. (C) $-1 < m < 2$. (D) $m \leq -2$.

CÂU 10. Tìm m để phương trình sau vô nghiệm: $3^{2x} + 2 \cdot 3^{x+1} + m = 0$.

(A) $m \geq 0$. (B) $m > 9$. (C) $0 < m < 9$. (D) $m < 9$.

CÂU 11. Tìm m để phương trình sau có 4 nghiệm phân biệt: $2^{2x^2} - 2^{x^2+2} + m = 0$.

(A) $\begin{cases} 0 < m < 4 \\ m \neq 3 \end{cases}$. (B) $3 < m < 4$. (C) $0 < m < 4$. (D) $m < 4$.

CÂU 12. Tìm tất cả giá trị của tham số m để phương trình: $3^{2x+1} - 10 \cdot 3^x + m = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + x_2 = 0$.

(A) $m = 1$. (B) $m = 2$. (C) $m = -1$. (D) $m = 3$.

CÂU 13. Tìm tất cả giá trị của tham số m để phương trình: $4^x - m \cdot 2^x + 2m = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + x_2 = 3$.

(A) $m = 4$. (B) $m = 2$. (C) $m = 1$. (D) Không có m.

CÂU 14. Tìm tất cả giá trị của tham số m để phương trình: $3^{2x} - 4 \cdot 3^x + m = 0$ có hai nghiệm trái dấu.

(A) $m < 0$. (B) $0 < m < 4$. (C) $0 < m < 3$. (D) $m = 1$.

Dạng 8. Một số dạng khác

CÂU 1. Cho các số thực m, n, p khác 0 và thỏa mãn $4^m = 10^n = 25^p$. Tính $T = \dfrac{n}{m} + \dfrac{n}{p}$.

(A) $T = 1$. (B) $T = 2$. (C) $T = \dfrac{5}{2}$. (D) $T = \dfrac{1}{10}$.

CÂU 2. Cho x, y, z là các số thực khác 0 và thỏa mãn $2^x = 3^y = 6^{-z}$. Tính giá trị của biểu thức $Q = xy + yz + zx$.

(A) $Q = 3$. (B) $Q = 6$. (C) $Q = 0$. (D) $Q = 1$.

QUICK NOTE

CÂU 3. Biết rằng phương trình $2^{x^2-1}=3^{x+1}$ có hai nghiệm thực x_1, x_2. Tính giá trị của biểu thức $M=x_1+x_2+x_1\cdot x_2$.

(A) $M=-1$. (B) $M=-1+2\log_2 3$.
(C) $M=1+\log_2 3$. (D) $M=1$.

CÂU 4. Phương trình $6^x+6=3^{x+1}+2^{x+1}$ có hai nghiệm thực x_1, x_2. Tính $M=x_1\cdot x_2$.

(A) $M=1$. (B) $M=-1$. (C) $M=\log_2 3$. (D) $M=\log_3 2$.

CÂU 5. Số nghiệm của phương trình $8.3^x-6^x+3\cdot 2^x=24$ là

(A) 2. (B) 3. (C) 1. (D) 0.

CÂU 6. Biết rằng phương trình $2^{x+\sqrt{2x+5}}-2^{1+\sqrt{2x+5}}+2^{6-x}-32=0$ có hai nghiệm thực x_1, x_2. Tính giá trị của biểu thức $M=x_1\cdot x_2$.

(A) $M=-3$. (B) $M=3$. (C) $M=2$. (D) $M=-2$.

CÂU 7. Tính tổng các nghiệm của phương trình $5^{x-1}+5\cdot(0{,}2)^{x-2}=26$.

(A) 4. (B) 2. (C) 1. (D) 3.

CÂU 8. Số nghiệm của phương trình $4^{x^2+x}+2^{1-x^2}=2^{(x+1)^2}+1$ là

(A) 3. (B) 2. (C) 1. (D) 4.

CHUYÊN ĐỀ 2: PHƯƠNG TRÌNH LOGARIT

C. KIẾN THỨC SÁCH GIÁO KHOA CẦN CẦN NẮM

Điều kiện cho $\log_a f(x)$ là $\begin{cases}0<a\neq 1\\ f(x)>0\end{cases}$.

1. Dạng cơ bản

$\log_a f(x)=b\Leftrightarrow f(x)=a^b$.

2. Biến đổi, quy về cùng cơ số

$\log_a f(x)=\log_a g(x)\Leftrightarrow f(x)=g(x)$ với $f(x)>0$ hoặc $g(x)>0$.

3. Đặt ẩn phụ

Đặt $t=\log_a f(x)$ với a và $f(x)$ thích hợp để đưa phương trình logarit về phương trình đại số đối với t.

4. Logarit hóa

$$\log_a g(x)=f(x)\,(0<a\neq 1)\Leftrightarrow\begin{cases}g(x)>0\\ g(x)=a^{f(x)}.\end{cases}$$

Dạng 9. Phương trình logarit cơ bản và phương pháp mũ hóa

Phương pháp:
B1: Tìm điều kiện có nghĩa.
B2: $\log_a f(x)=b\Leftrightarrow f(x)=a^b$.

1. Các ví dụ

VÍ DỤ 1. Tập nghiệm của phương trình $\log_2(3x-7)=3$ là

VÍ DỤ 2. Phương trình $\log_2\left(x^2+2x+1\right)=0$ có bao nhiêu nghiệm?

VÍ DỤ 3. Giải phương trình sau $\log_2[x\cdot(x-1)]=1$.

VÍ DỤ 4. Giải phương trình sau $\log_3(2x+1)-\log_3(x-1)=1$.

VÍ DỤ 5. Giải phương trình $\log_3(x+2)=1-\log_3 x$.

VÍ DỤ 6. Giải phương trình $\log_2\left(5-2^x\right)=2-x$.

VÍ DỤ 7. Biết phương trình $\log_3\left(3^{x+1}-1\right)=2x+\log_3 2$ có hai nghiệm x_1,x_2. Tính tổng $S=27^{x_1}+27^{x_2}$.

2. Câu hỏi trắc nghiệm

CÂU 1. Nghiệm của phương trình $\log_3(2x+3)=3$ là

Ⓐ $x=3$. Ⓑ $x=12$. Ⓒ $x=24$. Ⓓ $x=6$.

CÂU 2. Phương trình $\ln x+\ln(2x-1)=0$ có bao nhiêu nghiệm?

Ⓐ 0. Ⓑ 1. Ⓒ 2. Ⓓ 3.

CÂU 3. Nghiệm của phương trình $\log_2(2-3x)=5$ là

Ⓐ $x=-10$. Ⓑ $x=2$. Ⓒ $x=-\dfrac{8}{3}$. Ⓓ $x=-\dfrac{7}{3}$.

CÂU 4. Số nghiệm của phương trình $\log_2\left(x^2-2x+4\right)=2$ là

Ⓐ 2. Ⓑ 1. Ⓒ 0. Ⓓ 3.

CÂU 5. Phương trình $\log x+\log(11x-10)=3$ có nghiệm là

Ⓐ 7. Ⓑ 8. Ⓒ 9. Ⓓ 10.

CÂU 6. Nghiệm của phương trình $2^{\log_2(x-2)}=x^2-2x-6$ là

Ⓐ $\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=4\end{array}\right.$. Ⓑ $x=-1$. Ⓒ $x=4$. Ⓓ $\left[\begin{array}{l}x=3\\x=2\end{array}\right.$.

CÂU 7. Số nghiệm của phương trình $3^{\log_3(x-1)}=x^2+x-5$ là

Ⓐ 1. Ⓑ 0. Ⓒ 2. Ⓓ 3.

CÂU 8. Tập nghiệm của phương trình $\log_6[x(5-x)]=1$ là

Ⓐ $\{2;3\}$. Ⓑ $\{4;6\}$. Ⓒ $\{1;-6\}$. Ⓓ $\{-1;6\}$.

CÂU 9. Số nghiệm của phương trình $\log_2\left(x-3\sqrt{x}+4\right)=3$ là

Ⓐ 0. Ⓑ 1. Ⓒ 2. Ⓓ 3.

CÂU 10. Biết phương trình $\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{x^2-3x+2}{x}=0$ có hai nghiệm x_1,x_2. Tích của hai nghiệm này là số nào dưới đây:

Ⓐ 4. Ⓑ $2\sqrt{2}$. Ⓒ 2. Ⓓ 0.

CÂU 11. Nghiệm của phương trình $\log_2 x^2+2\log_2(x+2)=6$ là

Ⓐ $x=-4$. Ⓑ $x=2$. Ⓒ $\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-4\end{array}\right.$. Ⓓ $\left[\begin{array}{l}x=2\\x=3\end{array}\right.$.

CÂU 12. Số nghiệm của phương trình $\log_2 x^2+2\log_2(x+2)=0$ bằng

Ⓐ 1. Ⓑ 2. Ⓒ 3. Ⓓ 0.

CÂU 13. Số nghiệm của phương trình $\log_2 x^2+2\log_2(x+4)=4$ là

Ⓐ 1. Ⓑ 0. Ⓒ 3. Ⓓ 2.

CÂU 14. Phương trình $\log x^2+2\log(x+2)=0$ trên tập số thực có nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1<x_2$ thì giá trị $S=x_1^6+(x_2+1)^6$ bằng

Ⓐ 1. Ⓑ 6. Ⓒ 9. Ⓓ 3.

CÂU 15. Phương trình $\log_3 x^2+2\log_3(x+6)=4$ trên tập số thực có nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1<x_2$ thì giá trị $S=[x_1(x_2+3)]^{100}$ bằng

Ⓐ 100^{100}. Ⓑ 162^{50}. Ⓒ 132^{50}. Ⓓ 132^{100}.

Dạng 10. Đưa về cùng cơ số

Phương pháp: $\log_a f(x)=\log_a g(x)\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)=g(x)\\f(x)>0\,(g(x)>0)\,.\end{cases}$

1. Các ví dụ

VÍ DỤ 1. Giải phương trình $\log_{\sqrt{5}}(x+2)=\log_5(4x+6)$.

VÍ DỤ 2. Tìm số nghiệm của phương trình $\log_{\sqrt{3}}x\cdot\log_3 x\cdot\log_9 x=8$.

VÍ DỤ 3. Tính tổng các nghiệm của phương trình: $\log_2(x-3)+2\log_4 3\cdot\log_3 x=2$.

VÍ DỤ 4. Giải phương trình: $\dfrac{1}{2}\ln\left(x^2-8x-5\right)=\ln 10x-\ln 5x$.

QUICK NOTE

QUICK NOTE

VÍ DỤ 5. Phương trình $\log_2(x+2)+\log_4 x^2=3$ có nghiệm là

2. Câu hỏi trắc nghiệm

CÂU 1. Phương trình $\log\left(72-x^2\right)=2\log x$ có nghiệm là

(A) 1. (B) 2. (C) 6. (D) 4.

CÂU 2. Phương trình $\ln x+\ln(2x-1)=0$ có bao nhiêu nghiệm?

(A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

CÂU 3. Phương trình $\ln\left(x^2-2x-7\right)=\ln(-x+5)$ có tập nghiệm là

(A) $\{4;-3\}$. (B) $\{3;4\}$. (C) $\{-4;3\}$. (D) $\emptyset$.

CÂU 4. Số nghiệm của phương trình $\log_6\left(x^2+x\right)-\log_{\frac{1}{6}}(x+2)=1$

(A) 2. (B) 0. (C) 1. (D) 3.

CÂU 5. Số nghiệm của phương trình $\log_2\dfrac{x-2}{x+2}+\log_2\left(x^2-4\right)=1$ là

(A) 2. (B) 0. (C) 3. (D) 1.

CÂU 6. Phương trình $\log x+\log(11x-10)=3$ có nghiệm là

(A) 7. (B) 8. (C) 9. (D) 10.

CÂU 7. Phương trình $\ln(x+1)+\ln(x-3)=\ln(x-5)$ có bao nhiêu nghiệm?

(A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

CÂU 8. Phương trình $\log_3 x+\log_9 x+\log_{27} x=\dfrac{11}{2}$ có nghiệm là

(A) 24. (B) 36. (C) 27. (D) 9.

CÂU 9. Số nghiệm của phương trình $\log_3(x+2)^2+2\log_3 x=2$ bằng

(A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 0.

CÂU 10. Nghiệm của phương trình $\log_2\left(x^2+2x\right)+\log_{\frac{1}{2}}(2x+1)=0$ là

(A) $x=2$. (B) $x=\pm1$. (C) $x=-2$. (D) $x=1$.

CÂU 11. Phương trình $\log_4\left(x^2+3x+1\right)+\dfrac{1}{2}\log_{\frac{1}{2}}\left(\sqrt{3x^2+6x}+2x\right)=0$ trên tập số thực có nghiệm x_1, x_2 thỏa $x_1>x_2$ thì giá trị $S=x_1^2+(x_2+1)^6$ bằng

(A) 1. (B) $\sqrt[3]{2}-1$. (C) 5. (D) 2.

CÂU 12. Gọi $x_1,x_2(x_1>x_2)$ là các nghiệm của phương trình $2\log_2(2x+2)+\log_{\frac{1}{2}}(9x-1)=1$. Khi đó giá trị của $M=(2x_1-2x_2)^{2017}$ là

(A) 1. (B) -1. (C) 2^{2017}. (D) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2017}$.

CÂU 13. Phương trình $\log_2(x-3)+2\log_4 3\cdot\log_3 x=2$ có số nghiệm là

(A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) Vô nghiệm.

CÂU 14. Phương trình $\log_4\left(x^2+3x+1\right)+\dfrac{1}{2}\log_{\frac{1}{2}}\left(\sqrt{3x^2+6x}+2x\right)=0$ trên tập số thực có nghiệm x_1, x_2 thỏa $x_1>x_2$ thì giá trị $S=x_1^2+(x_2+1)^6$ bằng

(A) 1. (B) $\sqrt[3]{2}-1$. (C) 5. (D) 2.

CÂU 15. Gọi x_1, x_2 với $x_1>x_2$ là các nghiệm của phương trình $2\log_2(2x+2)+\log_{\frac{1}{2}}(9x-1)=1$. Khi đó giá trị của $M=(2x_1-2x_2)^{2017}$ là

(A) 1. (B) -1. (C) 2^{2017}. (D) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2017}$.

CÂU 16. Phương trình $\log_2(x-3)+2\log_4 3\cdot\log_3 x=2$ có số nghiệm là

(A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) Vô nghiệm.

Dạng 11. Đặt ẩn phụ

Phương pháp: Đặt $t=\log_a f(x)$ với a và $f(x)$ thích hợp để đưa phương trình logarit về phương trình đại số đối với t.

QUICK NOTE

1. Các ví dụ

VÍ DỤ 1. Giải phương trình $\log_3^2 x + 2\log_3 x - 3 = 0$.

VÍ DỤ 2. Giải phương trình $\log_9 x + \log_x 3 = 3$.

VÍ DỤ 3. Tính tổng các nghiệm của phương trình $\dfrac{1}{5+\log_3 x} + \dfrac{2}{1+\log_3 x} = 1$.

VÍ DỤ 4. Giải phương trình: $\log_2^2 x + 2\log_2 \sqrt{x} - 2 = 0$.

VÍ DỤ 5. Giải phương trình $1 + \log_2(x-1) = \log_{x-1} 4$.

2. Câu hỏi trắc nghiệm

CÂU 1. Phương trình $\log_3 x - 3\log_x 3 = 2$ có tập nghiệm là

(A) $\left\{\dfrac{1}{3}; 27\right\}$. (B) $\{3; 27\}$. (C) $\left\{3; \dfrac{1}{27}\right\}$. (D) $\varnothing$.

CÂU 2. Phương trình $\dfrac{1}{4-\log x} + \dfrac{2}{2+\log x} = 1$ có tập nghiệm là

(A) $\{10; 100\}$. (B) $\{1; 20\}$. (C) $\left\{\dfrac{1}{10}; 10\right\}$. (D) $\varnothing$.

CÂU 3. Biết rằng bất phương trình $\log_2(5^x + 2) + 2 \cdot \log_{(5^x+2)} 2 > 3$ có tập nghiệm là $S = (\log_a b; +\infty)$, với a, b là các số nguyên dương nhỏ hơn 6 và $a \neq 1$. Tính $P = 2a + 3b$.

(A) $P = 16$. (B) $P = 7$. (C) $P = 11$. (D) $P = 18$.

CÂU 4. Gọi x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình $\log_2^2 x - 3\log_2 x + 2 = 0$. Giá trị của biểu thức $P = x_1^2 + x_2^2$ bằng bao nhiêu?

(A) 20. (B) 5. (C) 36. (D) 25.

CÂU 5. Cho phương trình $\log_4 x \cdot \log_2(4x) + \log_{\sqrt{2}}\left(\dfrac{x^3}{2}\right) = 0$. Nếu đặt $t = \log_2 x$, ta được phương trình nào sau đây?

(A) $t^2 + 14t - 4 = 0$. (B) $t^2 + 11t - 3 = 0$. (C) $t^2 + 14t - 2 = 0$. (D) $t^2 + 11t - 2 = 0$.

Dạng 12. Bài toán logarit chứa tham số

1. Các ví dụ

VÍ DỤ 1. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $\log_3^2 x + 2\log_3 x - m = 0$ có nghiệm

(A) $m < -1$. (B) $m \geq -1$. (C) $m \geq 0$. (D) $m \leq -2$.

VÍ DỤ 2. Tìm tất cả giá trị của tham số m để phương trình $\log_3^2 x + \sqrt{\log_3^2 x + 1} - m = 0$ có nghiệm

(A) $m \geq 1$. (B) $m \geq -\dfrac{5}{4}$. (C) $m \leq \dfrac{5}{4}$. (D) $m \leq -1$.

VÍ DỤ 3. Tìm tất cả giá trị của tham số m để phương trình $\log_2^2 x - 4\log_2 x - m = 0$ có nghiệm thuộc $[2; 4]$?

(A) $m \leq 3$. (B) $m \geq 1$. (C) $-4 \leq m \leq -3$. (D) $3 \leq m \leq 4$.

2. Câu hỏi trắc nghiệm

CÂU 1. Tìm tất cả giá trị của tham số m để phương trình $\log_3^2 x - 2\log_3 x - m = 0$ có nghiệm thuộc $[1; 3]$.

(A) $\left[\begin{array}{l} m > 0 \\ m < -1 \end{array}\right.$. (B) $\left[\begin{array}{l} m \geq 0 \\ m \leq -1 \end{array}\right.$. (C) $0 \leq m \leq 1$. (D) $-1 \leq m \leq 0$.

CÂU 2. Tìm tất cả giá trị của tham số m để phương trình $\log_2^2 x - 4\log_2 x - m = 0$ có nghiệm thuộc $[2; 4]$?

(A) $m \leq 3$. (B) $m \geq 1$. (C) $-4 \leq m \leq -3$. (D) $3 \leq m \leq 4$.

CÂU 3. Tìm tất cả giá trị của tham số m để phương trình $\log_2^2 x - 4\log_2 x - m = 0$ có nghiệm thuộc $\left[\dfrac{1}{4}; 4\right]$.

(A) $-4 \leq m \leq 12$. (B) $-12 \leq m \leq -4$. (C) $m \geq 0$. (D) $m \leq -1$.

QUICK NOTE

CÂU 4. Tìm tất cả giá trị của tham số m để phương trình $\log_2^2 x + 2\sqrt{log_2^2 x + 1} + m = 0$ có nghiệm thuộc $\left[1; 2^{\sqrt{3}}\right]$

(A) $-7 \leq m \leq -2$. (B) $7 \leq m \leq 2$. (C) $m \geq 1$. (D) $m \leq -2$.

CÂU 5. Tìm tất cả giá trị của tham số m để phương trình $\log_5^2 x + 2\sqrt{\log_5^2 x + 4} + m = 0$ có nghiệm thuộc $\left[\frac{1}{5}; 5^{\sqrt{5}}\right]$.

(A) $m \leq -4$. (B) $m \geq 0$. (C) $-11 \leq m \leq -4$. (D) $4 \leq m \leq 11$.

CÂU 6. Phương trình $\log_2\left(-x^2 - 3x - m + 10\right) = 3$ có 2 nghiệm trái dấu khi và chỉ khi

(A) $m > 2$. (B) $m < 2$. (C) $m > 4$. (D) $m < 4$.

CÂU 7. Tìm giá trị thực của tham số m để phương trình $\log_3^2 x - m\log_3 x + 2m - 7 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 \cdot x_2 = 81$.

(A) $m = -4$. (B) $m = 4$. (C) $m = 81$. (D) $m = 44$.

CÂU 8. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $\log_3\left(1 - x^2\right) + \log_{\frac{1}{3}}(x + m - 4) = 0$ có hai nghiệm thực phân biệt.

(A) $-\frac{1}{4} < m < 0$. (B) $5 \leq m \leq \frac{21}{4}$. (C) $5 < m < \frac{21}{4}$. (D) $-\frac{1}{4} \leq m \leq 2$.

CÂU 9. Có bao nhiêu giá trị nguyên m để phương trình $\log_{\sqrt{2}}(x-2) = \log_2(mx - 21)$ có số nghiệm nhiều nhất?

(A) vô số. (B) 1. (C) 4. (D) 5.

CÂU 10. Gọi a, b lần lượt là giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của số nguyên m thõa mãn phương trình $\log_{0.5}(m + 6x) + \log_2\left(3 - 2x - x^2\right) = 0$ có duy nhất một nghiệm. Khi đó hiệu $a - b$ bằng

(A) $a - b = 22$. (B) $a - b = 24$. (C) $a - b = 26$. (D) $a - b = 4$.

CÂU 11. Để phương trình $2\log_2\left(2x^2 - x + 2m - 4m^2\right) + \log_{\frac{1}{2}}\left(x^2 + mx - 2m^2\right) = 0$ có hai nghiệm phân biệt thì tập tất cả các giá trị của m là

(A) $m \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{3}\right\}$. (B) $m \in \mathbb{R} \setminus \left\{0; \frac{1}{3}\right\}$.

(C) $m \in \left(-1; \frac{1}{2}\right) \setminus \left\{\frac{1}{3}\right\}$. (D) $m \in \left(-1; \frac{1}{2}\right) \setminus \left\{0; \frac{1}{3}\right\}$.

CÂU 12. Gọi S là tập hợp số thực m để phương trình $\log_{\sqrt{5}-2}\left(x^2 + mx + m + 1\right) + \log_{\sqrt{5}-2} x = 0$ có nghiệm duy nhất. Biết a là giá trị lớn của S và b là giá trị trong các phần tử nguyên của S. Khi đó $a + b$ bằng bao nhiêu?

(A) $a + b = 3 - 3\sqrt{2}$. (B) $a + b = 4 - 2\sqrt{3}$.

(C) $a + b = -3 + 2\sqrt{3}$. (D) $a + b = 2 - 2\sqrt{3}$.

CÂU 13. Trong tất cả các số thực m để phương trình $\log_5\left(25^x - \log_5 m\right) = x$ có nghiệm duy nhất thì m_0 là giá trị nhỏ nhất. Khi đó giá trị nào sau đây gần m_0 nhất

(A) 0,7. (B) 0,5. (C) 1. (D) 1,6.

CÂU 14. Gọi S' là tập tất cả các số thực m để phương trình $\log_2\left(4^x - m\right) = x + 1$ có hai nghiệm phân biệt. Tập S' là

(A) $S = \left(-1; \frac{1}{2}\right)$. (B) $S = \left(0; \frac{1}{2}\right)$. (C) $S = \left(-1; -\frac{1}{2}\right)$. (D) $S = (-1; 0)$.

CÂU 15. Tìm m để phương trình $\log_{\sqrt{5}+2}\left(x^2 + mx + m + 1\right) + \log_{\sqrt{5}-2} x = 0$ có nghiệm duy nhất .

(A) $m \in (-\infty; -1] \cup \{3 - 2\sqrt{3}\}$. (B) $m \in (-\infty; -1) \cup \{3 - 2\sqrt{3}\}$.

(C) $m \in (-\infty; -2] \cup \{3 + 2\sqrt{3}\}$. (D) $m \in (-\infty; -1]$.

CÂU 16. Gọi $m = m_0$ là số nguyên nhỏ nhất để phương trình $\log_2\left(5^x - 1\right) \cdot \log_4\left(2 \cdot 5^x - 2\right) = m$ có nghiệm thuộc $[1; +\infty)$. Trong các số sau, đâu là số gần m_0 nhất?

(A) 5. (B) 2. (C) -1. (D) 8.

CÂU 17. Có tất cả bao nhiêu số nguyên m để phương trình $\log_3^2 x + \sqrt{\log_3^2 x + 1} - 2m - 1 = 0$ có ít nhất một nghiệm thuộc $\left[1; 3^{\sqrt{3}}\right]$.

(A) 1. (B) 5. (C) 3. (D) 7.

QUICK NOTE

CHUYÊN ĐỀ 3: Bất phương trình mũ

D. KIẾN THỨC SÁCH GIÁO KHOA CẦN CẦN NẮM

Ta có thể dùng các phương pháp biến đổi như phương trình mũ và các công thức sau:

- Nếu $a > 1$ thì: $a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) > g(x)$ và $a^{f(x)} \geq a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) \geq g(x)$.
- Nếu $0 < a < 1$ thì: $a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) < g(x)$ và $a^{f(x)} \geq a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) \leq g(x)$.

Tổng quát ta có:

- $a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ (a-1) \cdot [f(x) - g(x)] > 0. \end{cases}$
- $a^{f(x)} \geq a^{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ (a-1) \cdot [f(x) - g(x)] \geq 0. \end{cases}$

E. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 13. Phương pháp đưa về cơ số và logarit hóa

Phương pháp:

- Nếu $a > 1$ thì: $a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) > g(x)$ và $a^{f(x)} \geq a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) \geq g(x)$.
- Nếu $0 < a < 1$ thì: $a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) < g(x)$ và $a^{f(x)} \geq a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) \leq g(x)$.

1. Các ví dụ

VÍ DỤ 1. Tìm tập nghiệm của bất phương trình $\left(\frac{3}{4}\right)^{2x-1} \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{2-x}$.

VÍ DỤ 2. Giải bất phương trình $2^{-x^2+3x} < 4$.

VÍ DỤ 3. Tìm nghiệm của bất phương trình $2^{x^2+3x-2} \geq \frac{1}{4}$.

VÍ DỤ 4. Bất phương trình $2^{x^2-3x+4} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{2x-10}$ có bao nhiêu nghiệm nguyên dương?

VÍ DỤ 5. Tìm nghiệm của bất phương trình: $\left(\frac{3}{5}\right)^{x^2-2x-1} \geq \left(\frac{25}{9}\right)^{2x-1}$.

VÍ DỤ 6. Tìm nghiệm của bất phương trình: $(2-\sqrt{3})^{x^2-3x} > (2+\sqrt{3})^2$.

VÍ DỤ 7. Tìm tập nghiệm của bất phương trình $5^{x+1} - \frac{1}{5} > 0$.

VÍ DỤ 8. Bất phương trình $2^{x^2} \cdot 3^x < 1$ có bao nhiêu nghiệm nguyên?

2. Câu hỏi trắc nghiệm

CÂU 1. Cho $(2-\sqrt{3})^m > (2-\sqrt{3})^n \quad (m, n \in \mathbb{Z})$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

(A) $m > n$. (B) $m < n$. (C) $m = n$. (D) $m \geq n$.

CÂU 2. Cho $0 < a < 1$. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

(A) $a^x > 1 \Leftrightarrow x \geq 0$. (B) $a^x > 1 \Leftrightarrow x > 0$.
(C) $a^x > 1 \Leftrightarrow x < 0$. (D) $a^x > 1 \Leftrightarrow 0 < x < 1$.

CÂU 3. Nghiệm của bất phương trình $3^{2x+1} > 3^{3-x}$ là

(A) $x > \frac{3}{2}$. (B) $x < \frac{2}{3}$. (C) $x > -\frac{2}{3}$. (D) $x > \frac{2}{3}$.

CÂU 4. Cho α, β là hai số thực. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

(A) $\left(\frac{2}{\mathrm{e}}\right)^{\alpha} > \left(\frac{2}{\mathrm{e}}\right)^{\beta} \Leftrightarrow \alpha, \beta$ là hai số thực luôn luôn dương.

(B) $\left(\frac{2}{\mathrm{e}}\right)^{\alpha} > \left(\frac{2}{\mathrm{e}}\right)^{\beta} \Leftrightarrow \alpha > \beta$.

QUICK NOTE

C $\left(\frac{2}{e}\right)^{\alpha} > \left(\frac{2}{e}\right)^{\beta} \Leftrightarrow \alpha, \beta$ là hai số thực không âm.

D $\left(\frac{2}{e}\right)^{\alpha} > \left(\frac{2}{e}\right)^{\beta} \Leftrightarrow \alpha < \beta$.

CÂU 5. Cho $\left(3-2\sqrt{2}\right)^{m} > \left(3-2\sqrt{2}\right)^{n}$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A $m > n$. **B** $m = n$. **C** $m < n$. **D** $m \geq n$.

CÂU 6. Tìm tập nghiệm của bất phương trình $\left(\frac{1}{3}\right)^{x} > 9$.

A $(-\infty; 2)$. **B** $(2; +\infty)$. **C** $(-2; +\infty)$. **D** $(-\infty; -2)$.

CÂU 7. Tìm nghiệm của bất phương trình $\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-3x+1} < 3$.

A $-2 < x < 0$. **B** $-1 < x < 1$. **C** $\left[\begin{array}{l} x > 2 \\ x < 1 \end{array}\right.$. **D** $1 < x < 2$.

CÂU 8. Tìm nghiệm của bất phương trình: $\left(\frac{7}{11}\right)^{3x+2} \leq \left(\frac{11}{7}\right)^{x^2}$

A $\left[\begin{array}{l} x \geq 2 \\ x \leq 1 \end{array}\right.$. **B** $\left[\begin{array}{l} x \geq -1 \\ x \leq -2 \end{array}\right.$. **C** $-2 \leq x \leq 1$. **D** $1 \leq x \leq 2$.

CÂU 9. Tìm nghiệm của bất phương trình: $2^{x^2-x+8} < 4^{1-3x}$

A $-3 < x < -2$. **B** $\left[\begin{array}{l} x < -3 \\ x > -2 \end{array}\right.$. **C** $2 < x < 3$. **D** $-1 < x < 1$.

CÂU 10. Tập các số x thỏa mãn bất phương trình $\left(\frac{2}{3}\right)^{4x} \leq \left(\frac{3}{2}\right)^{2-x}$ là

A $\left[-\frac{2}{3}; +\infty\right)$. **B** $\left[\frac{2}{5}; +\infty\right)$. **C** $\left(-\infty; \frac{2}{3}\right]$. **D** $\left(-\infty; \frac{2}{5}\right]$.

CÂU 11. Giải bất phương trình $e^{2x+3} > e^{x+5}$. Kết quả tập nghiệm là

A $(4; +\infty)$. **B** $(2; +\infty)$. **C** $(3; +\infty)$. **D** $(-\infty; 3)$.

CÂU 12. Hệ phương trình $\begin{cases} 4^{x+1} \leq 8^{6-2x} \\ 3^{4x+5} \geq 27^{1+x} \end{cases}$ có tập nghiệm là

A $[2; +\infty)$. **B** $[-2; 2]$. **C** $(-\infty; 1]$. **D** $[2; 5]$.

CÂU 13. Tìm x biết $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-5x+4} > 4$.

A $\left[\begin{array}{l} x > \frac{5+\sqrt{17}}{2} \\ x < \frac{5-\sqrt{17}}{2} \end{array}\right.$. **B** $\frac{5-\sqrt{17}}{2} < x < \frac{5+\sqrt{17}}{2}$.

C $\left[\begin{array}{l} x > 3 \\ x < 2 \end{array}\right.$. **D** $2 < x < 3$.

CÂU 14. Tập nghiệm của bất phương trình $\frac{1}{9} \cdot 3^{2x} > 1$ là

A $[1; +\infty)$. **B** $(1; +\infty)$. **C** $(0; +\infty)$. **D** $[0; +\infty)$.

CÂU 15. Tìm nghiệm của bất phương trình $2^{x+1} \cdot 4^{x-1} \cdot \frac{1}{8^{1-x}} > 16^{x}$

A $x > 0$. **B** $x > 2$. **C** $x < 2$. **D** $x < 0$.

CÂU 16. Tìm nghiệm của bất phương trình $\frac{1}{8} \cdot 4^{2x-3} \leq \left(\frac{\sqrt{2}}{8}\right)^{-x}$.

A $x \geq 3$. **B** $x \leq 3$. **C** $x \leq 6$. **D** $x \geq 6$.

CÂU 17. Tìm nghiệm của bất phương trình $8^{\frac{2x-1}{x+1}} \geq 0{,}25(\sqrt{2})^{7x}$.

A $x \geq -1$. **B** $\left[\begin{array}{l} x < -1 \\ \frac{2}{7} \leq x \leq 1 \end{array}\right.$. **C** $-1 \leq x \leq 1$. **D** $\frac{2}{7} \leq x \leq 1$.

CÂU 18. Số nguyên nhỏ nhất thỏa mãn bất phương trình $4^{x} \cdot 3^{3} > 3^{x} \cdot 4^{3}$ là

A -3. **B** 3. **C** -4. **D** 4.

QUICK NOTE

CÂU 19. Có tất cả bao nhiêu số nguyên thỏa mãn bất phương trình $8^x \cdot 2^{1-x^2} > (\sqrt{2})^{2x}$?

(A) 2. (B) 3. (C) 4. (D) 5.

CÂU 20. Biết $S = [a;b]$ là tập nghiệm của bất phương trình $\left(\frac{1}{6}\right)^{x^2-x} \geq \left(\frac{1}{6}\right)^{x+3}$ (với $a, b \in \mathbb{R}$ và $a < b$). Khi đó hiệu $b - a$ bằng bao nhiêu?

(A) -4.
(B) 4.
(C) 2.
(D) Không xác định.

CÂU 21. Số nghiệm nguyên của bất phương trình $\left(3-2\sqrt{2}\right)^{x^2-x-3} \geq 3+2\sqrt{2}$ là

(A) 2. (B) 3. (C) 4. (D) Vô số.

CÂU 22. Cho bất phương trình $\left(\sqrt{10}+3\right)^{\frac{x-5}{x-1}} \leq \left(\sqrt{10}-3\right)^{\frac{x+1}{x+5}}$. Gọi x_1, x_2 lần lượt là nghiệm nguyên lớn nhất và nhỏ nhất của bất phương trình. Khi đó $x_1 + x_2$ bằng bao nhiêu?

(A) -2. (B) -1. (C) 0. (D) 4.

CÂU 23. Tập nghiệm của bất phương trình $(\sqrt{5}-2)^{\frac{2x}{x-1}} \leq (\sqrt{5}+2)^x$ là

(A) $S = (-\infty; -1] \cup [0; 1]$.
(B) $S = [-1; 0]$.
(C) $S = (-\infty; -1) \cup (0; +\infty)$.
(D) $S = [-1; 0] \cup (1; +\infty)$.

CÂU 24. Gọi x_0 là nghiệm nhỏ nhất của bất phương trình $\frac{1}{2^{\sqrt{x^2-2x}}} \leq 2^{x-1}$. Hỏi giá trị nào sau đây gần với x_0 nhất?

(A) 1. (B) $\frac{1}{2}$. (C) $\frac{3}{2}$. (D) 3.

CÂU 25. Một học sinh giải bất phương trình $\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^{-\frac{1}{x}} \leq \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^{-5}$ như sau

Bước 1: Điều kiện $x \neq 0$.

Bước 2: Vì $0 < \frac{2}{\sqrt{5}} < 1$ nên $\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^{-\frac{1}{x}} \leq \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^{-5} \Leftrightarrow \frac{1}{x} \leq 5$.

Bước 3: Từ đó suy ra $1 \leq 5x \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{5}$. Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = \left[\frac{1}{5}; +\infty\right)$.

(A) Sai ở bước 1. (B) Sai ở bước 2. (C) Sai ở bước 3. (D) Đúng.

CÂU 26. Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $3^x \cdot 5^{x^2} < 1$.

(A) $S = (-\log_5 3; 0]$.
(B) $S = [\log_3 5; 0)$.
(C) $S = (-\log_5 3; 0)$.
(D) $S = (\log_3 5; 0)$.

CÂU 27. Cho hàm số $f(x) = \frac{7^x}{3^{x-2}}$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

(A) $f(x) > 1 \Leftrightarrow x > (x-2)\log_7 3$.
(B) $f(x) > 1 \Leftrightarrow \frac{x}{1+\log_7 3} > \frac{x-2}{1+\log_3 7}$.
(C) $f(x) > 1 \Leftrightarrow x \log 7 > (x-2)\log 3$.
(D) $f(x) > 1 \Leftrightarrow x \log_{\frac{1}{5}} 7 > (x-2)\log_5 3$.

Dạng 14. Phương pháp đặt ẩn phụ

Phương pháp: $f\left[a^{g(x)}\right] > 0\,(0 < a \neq 1) \Leftrightarrow \begin{cases} t = a^{g(x)} > 0 \\ f(t) > 0. \end{cases}$

Ta thường gặp các dạng:

- $m \cdot a^{2f(x)} + n \cdot a^{f(x)} + p > 0$.
- $m \cdot a^{f(x)} + n \cdot b^{f(x)} + p > 0$, trong đó $a \cdot b = 1$. Đặt $t = a^{f(x)}$ $(t > 0)$, suy ra $b^{f(x)} = \frac{1}{t}$.
- $m \cdot a^{2f(x)} + n \cdot (a \cdot b)^{f(x)} + p \cdot b^{2f(x)} > 0$. Chia hai vế cho $b^{2f(x)}$ và đặt $t = \left(\frac{a}{b}\right)^{f(x)} > 0$.

QUICK NOTE

1. Các ví dụ

VÍ DỤ 1. Tìm nghiệm của bất phương trình $9^{x-1} - 36 \cdot 3^{x-3} + 3 \leq 0$.

VÍ DỤ 2. Giải bất phương trình $7^{2x} - 7^{x+1} + 6 > 0$ được tập nghiệm là

VÍ DỤ 3. Tìm nghiệm của bất phương trình: $3^x + 9 \cdot 3^{-x} - 10 < 0$.

VÍ DỤ 4. Tìm nghiệm của bất phương trình: $3 \cdot 4^x - 2 \cdot 6^x > 9^x$.

VÍ DỤ 5. Tìm nghiệm của bất phương trình: $\left(4+\sqrt{15}\right)^x + \left(4-\sqrt{15}\right)^x \leq 62$.

2. Câu hỏi trắc nghiệm

CÂU 1. Tập nghiệm của bất phương trình $8 \cdot 4^{x+1} - 18 \cdot 2^x + 1 < 0$ là

(A) $(2;4)$. (B) $(1;4)$. (C) $(-4;-1)$. (D) $\left(\frac{1}{16};\frac{1}{2}\right)$.

CÂU 2. Giải bất phương trình $9^x - 3^x - 6 < 0$.

(A) Tập nghiệm của bất phương trình là $(1;+\infty)$.
(B) Tập nghiệm của bất phương trình là $(-\infty;1)$.
(C) Tập nghiệm của bất phương trình là $(-2;3)$.
(D) Tập nghiệm của bất phương trình là $(0;3)$.

CÂU 3. Bất phương trình $9^x - 3^x - 6 > 0$ có tập nghiệm là

(A) $(-\infty;-1)$. (B) $(1;+\infty)$. (C) $(-1;1)$. (D) $(-\infty;1)$.

CÂU 4. Tìm nghiệm của bất phương trình: $3^{2x+1} - 9 \cdot 3^x + 6 > 0$.

(A) $0 < x < \log_3 2$. (B) $0 < x < 1$. (C) $\left[\begin{array}{l} x > 1 \\ x < 0. \end{array}\right.$ (D) $\left[\begin{array}{l} x > \log_3 2 \\ x < 0. \end{array}\right.$

CÂU 5. Tìm nghiệm của bất phương trình: $25^x - 6 \cdot 5^x + 5 \leq 0$.

(A) $\left[\begin{array}{l} x \geq 1 \\ x \leq -1. \end{array}\right.$ (B) $0 \leq x \leq 1$. (C) $-1 \leq x \leq 1$. (D) $\left[\begin{array}{l} x \geq 1 \\ x \leq 0. \end{array}\right.$

CÂU 6. Nghiệm của bất phương trình $\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x} < \frac{5}{2}$ là

(A) $x < -\ln 2$ hoặc $x > \ln 2$. (B) $-\ln 2 < x < \ln 2$.
(C) $x < \frac{1}{2}$ hoặc $x > 2$. (D) $\frac{1}{2} < x < 2$.

CÂU 7. Tìm nghiệm của bất phương trình: $7^x - 2 \cdot 7^{1-x} + 13 < 0$.

(A) $x > 0$. (B) $x < 0$. (C) $x > 1$. (D) $0 < x < 1$.

CÂU 8. Tìm nghiệm của bất phương trình: $6 \cdot 9^{\frac{1}{x}} - 13 \cdot 6^{\frac{1}{x}} + 6 \cdot 4^{\frac{1}{x}} \leq 0$.

(A) $0 \leq x \leq 2$. (B) $\left[\begin{array}{l} x \geq 2 \\ x \leq 0. \end{array}\right.$ (C) $\left[\begin{array}{l} x \geq 1 \\ x \leq -1. \end{array}\right.$ (D) $-1 \leq x \leq 1$.

CÂU 9. Tìm nghiệm của bất phương trình: $(\sqrt{2}-1)^x + (\sqrt{2}+1)^x - 2\sqrt{2} > 0$.

(A) $-2 < x < 2$. (B) $\left[\begin{array}{l} x > 2 \\ x < -2. \end{array}\right.$ (C) $\left[\begin{array}{l} x > 1 \\ x < -1. \end{array}\right.$ (D) $-1 < x < 1$.

CÂU 10. Có tất cả bao nhiêu số tự nhiên thỏa mãn bất phương trình $3^{1-x} + 2 \cdot (\sqrt{3})^{2x} \leq 7$.

(A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) Vô số.

CÂU 11. Tập nghiệm của bất phương trình $3 \cdot 9^x - 10 \cdot 3^x + 3 \leq 0$ có dạng $S = [a;b]$. Khi đó $b - a$ bằng

(A) 1. (B) $\frac{3}{2}$. (C) 2. (D) $\frac{5}{2}$.

CÂU 12. Tập nghiệm S của bất phương trình $\frac{3^x}{3^x - 2^x} < 3$ là

(A) $S = (-\infty;0) \cup (1;+\infty)$. (B) $S = (1;+\infty)$.
(C) $S = (-\infty;0)$. (D) $S = (0;1)$.

CÂU 13. Cho $f(x) = \frac{1}{2} \cdot 5^{2x+1}$ và $g(x) = 5^x + 4x \ln 5$. Giá trị nguyên lớn nhất của x sao cho $f'(x) < g'(x)$ là

(A) -2. (B) 1. (C) -1. (D) 2.

CÂU 14. Tìm nghiệm của bất phương trình: $\left(7+3\sqrt{5}\right)^x+\left(7-3\sqrt{5}\right)^x<7\cdot 2^x$.

Ⓐ $\left[\begin{array}{l}x>2\\x<-2.\end{array}\right.$ Ⓑ $-1<x<1$. Ⓒ $-2<x<2$. Ⓓ $\left[\begin{array}{l}x>1\\x<-1.\end{array}\right.$

CÂU 15. Tìm nghiệm của bất phương trình: $(3+\sqrt{5})^x+16\cdot(3-\sqrt{5})^x\le 2^{x+3}$.

Ⓐ $x\ge 2$. Ⓑ $x=2$.

Ⓒ $x=\log_{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} 4$. Ⓓ $0\le x\le \log_{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} 4$.

CÂU 16. Tìm nghiệm của bất phương trình: $4^x+4^{\sqrt{x}+1}\ge 3\cdot 2^{x+\sqrt{x}}$.

Ⓐ $\forall x\in\mathbb{R}$. Ⓑ $x\ge 0$. Ⓒ $x>0$. Ⓓ $x>1$.

Dạng 15. Bài toán chứa tham số

1. Các ví dụ

VÍ DỤ 1. Tìm tất cả giá trị thực của tham số m sao cho bất phương trình $9^x+2\cdot 3^x-m>0$ có nghiệm thuộc $(0;1)$.

VÍ DỤ 2. Tìm tất cả giá trị thực của tham số m sao cho bất phương trình $(3m+1)12^x+(2-m)6^x+3^x<0$ nghiệm đúng $\forall x>0$.

VÍ DỤ 3. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $9^x-2(m+1)\cdot 3^x-3-2m>0$ nghiệm đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$.

2. Câu hỏi trắc nghiệm

CÂU 1. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $4^x-2^x-m\ge 0$ có nghiệm đúng với mọi x thuộc $\mathbb{R}$.

Ⓐ $m<-1$. Ⓑ $m<-\dfrac{1}{2}$. Ⓒ $m\le-\dfrac{1}{4}$. Ⓓ $m\le 0$.

CÂU 2. Tìm tất cả giá trị thực của tham số m sao cho bất phương trình $9^x+2\cdot 3^x-m>0$ có nghiệm thuộc $(0;1]$?

Ⓐ $m<15$. Ⓑ $m<3$. Ⓒ $m\le 15$. Ⓓ $m\le 3$.

CÂU 3. Tìm tất cả giá trị thực của tham số m sao cho bất phương trình $9^x+2\cdot 3^x-m>0$ thỏa mãn với mọi $x\in[0;1)$?

Ⓐ $m<15$. Ⓑ $m<3$. Ⓒ $m\le 15$. Ⓓ $m\le 3$.

CÂU 4. Tìm tất cả giá trị thực của tham số m sao cho bất phương trình $4^{-x}-2^{1-x}-m\le 0$ thỏa mãn với mọi $x\in(0;1)$.

Ⓐ $m\ge-\dfrac{3}{4}$. Ⓑ $m\ge-1$. Ⓒ $m\le-\dfrac{3}{4}$. Ⓓ $m\le-1$.

CHUYÊN ĐỀ 4: BẤT PHƯƠNG TRÌNH LOGARIT

F. KIẾN THỨC SÁCH GIÁO KHOA CẦN CẦN NẮM

Ta có thể dùng các phương pháp biến đổi như phương trình logarit và các công thức sau

- Nếu $a>1$ thì
  - $\log_a f(x)>\log_a g(x)\Leftrightarrow f(x)>g(x)>0$.
  - $\log_a f(x)\ge\log_a g(x)\Leftrightarrow f(x)\ge g(x)>0$.
- Nếu $0<a<1$ thì
  - $\log_a f(x)>\log_a g(x)\Leftrightarrow 0<f(x)<g(x)$.
  - $\log_a f(x)\ge\log_a g(x)\Leftrightarrow 0<f(x)\le g(x)$.

QUICK NOTE

QUICK NOTE

G. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 16. Đưa về cùng cơ số

Phương pháp

- Nếu $a > 1$ thì
  - $\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow f(x) > g(x) > 0$.
  - $\log_a f(x) \geq \log_a g(x) \Leftrightarrow f(x) \geq g(x) > 0$.
- Nếu $0 < a < 1$ thì
  - $\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow 0 < f(x) < g(x)$.
  - $\log_a f(x) \geq \log_a g(x) \Leftrightarrow 0 < f(x) \leq g(x)$.

1. Các ví dụ

VÍ DỤ 1. Tìm tập nghiệm bất phương trình $\log_3(5x-1) > 2$.

VÍ DỤ 2. Tìm tập nghiệm bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(3x+1) > -2$.

VÍ DỤ 3. Cho hàm số $f(x) = \log(2x+4) - 1$. Tìm tất cả các giá trị thực của x để $f(x) \geq 0$.

VÍ DỤ 4. Tìm tập nghiệm bất phương trình $\log_{0,5}(4x+11) < \log_{0,5}\left(x^2+6x+8\right)$.

VÍ DỤ 5. Tìm tập nghiệm bất phương trình $\log_{\frac{1}{3}}(x+1) > \log_3(2-x)$.

VÍ DỤ 6. Tìm tập nghiệm bất phương trình $\log_{\frac{1}{3}}\left(x^2-6x+5\right) + 2\log_3(2-x) \geq 0$.

2. Câu hỏi trắc nghiệm

CÂU 1. Giải bất phương trình $\log_2(3x-1) > 3$.

Ⓐ $x > 3$. Ⓑ $\frac{1}{3} < x < 3$. Ⓒ $x < 3$. Ⓓ $x > \frac{10}{3}$.

CÂU 2. Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\log_2(3x-2) > \log_2(6-5x)$.

Ⓐ $S = \left(1; \frac{6}{5}\right)$. Ⓑ $S = \left(\frac{2}{3}; 1\right)$. Ⓒ $S = (1; +\infty)$. Ⓓ $S = \left(\frac{2}{3}; \frac{6}{5}\right)$.

CÂU 3. Tìm tập nghiệm T của bất phương trình $\log_{\frac{1}{4}}(4x-2) \geq -1$.

Ⓐ $\left[\frac{3}{2}; +\infty\right)$. Ⓑ $\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$. Ⓒ $\left[\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right]$. Ⓓ $\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right]$.

CÂU 4. Có bao nhiêu số nguyên trên $[0; 10]$ nghiệm đúng bất phương trình $\log_e(3x-4) > \log_e(x-1$

Ⓐ 10. Ⓑ 11. Ⓒ 9. Ⓓ 8.

CÂU 5. Tập nghiệm S của bất phương trình $\log_{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{x-1}{x+1}\right) > 0$ là

Ⓐ $S = (1; +\infty)$. Ⓑ $S = (-\infty; 1)$. Ⓒ $S = (-\infty; -1)$. Ⓓ $S = (-1; +\infty)$.

CÂU 6. Tập nghiệm S của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(x+1) < \log_{\frac{1}{2}}(2x-1)$ là

Ⓐ $S = (2; +\infty)$. Ⓑ $S = (-\infty; 2)$. Ⓒ $S = \left(\frac{1}{2}; 2\right)$. Ⓓ $S = (-1; 2)$.

CÂU 7. Nghiệm của bất phương trình $\log_2(x+1) + \log_{\frac{1}{2}}\sqrt{x+1} \leq 0$ là

Ⓐ $-1 < x \leq 0$. Ⓑ $-1 \leq x \leq 0$. Ⓒ $-1 < x \leq 1$. Ⓓ $x \leq 0$.

CÂU 8. Có bao nhiêu giá trị nguyên x thỏa mãn bất phương trình $\log(x-40) + \log(60-x) < 2$?

Ⓐ 10. Ⓑ 18. Ⓒ 15. Ⓓ Vô số.

CÂU 9. Nghiệm của bất phương trình $\log_5(3x+2) > 1$ là

Ⓐ $x < 1$. Ⓑ $x > 1$. Ⓒ $x > -\frac{2}{3}$. Ⓓ $x < -1$.

QUICK NOTE

CÂU 10. Giải bất phương trình $\log_2\left(x^2-4x+5\right)\le 4$.

Ⓐ $-7\le x\le -1$.
Ⓑ $-3\le x<-1$ hoặc $5<x\le 7$.
Ⓒ $-3\le x\le 7$.
Ⓓ $2-\sqrt{15}\le x\le 2+\sqrt{15}$.

CÂU 11. Giải bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}\left(x^2-3x+2\right)\ge -1$.

Ⓐ $x\in(-\infty;1)$.
Ⓑ $x\in[0;2)$.
Ⓒ $x\in[0;1)\cup(2;3]$.
Ⓓ $x\in[0;2)\cup(3;7]$.

CÂU 12. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(5x+1)<-5$ là

Ⓐ $\left(-\infty;-\dfrac{1}{5}\right)$.
Ⓑ $\left(-\dfrac{1}{5};\dfrac{31}{5}\right)$.
Ⓒ $\left(\dfrac{31}{5};+\infty\right)$.
Ⓓ $\left(-\infty;-\dfrac{1}{5}\right)\cup\left(\dfrac{31}{5};+\infty\right)$.

CÂU 13. Bất phương trình $\log_{\frac{2}{3}}\left(2x^2-x+1\right)<0$ có tập nghiệm là

Ⓐ $S=\left(0;\dfrac{3}{2}\right)$.
Ⓑ $S=\left(-1;\dfrac{3}{2}\right)$.
Ⓒ $S=(-\infty;0)\cup\left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)$.
Ⓓ $S=(-\infty;1)\cup\left(\dfrac{3}{2};+\infty\right)$.

CÂU 14. Giải bất phương trình $\log_2(3x-1)>3$.

Ⓐ $x>3$.
Ⓑ $\dfrac{1}{3}<x<3$.
Ⓒ $x<3$.
Ⓓ $x>\dfrac{10}{3}$.

CÂU 15. Tìm tập nghiệm của bất phương trình $\log_{0,2}(x-3)+2\ge 0$.

Ⓐ $(3,28]$.
Ⓑ $[28,+\infty)$.
Ⓒ $(3,+\infty)$.
Ⓓ $(-\infty;28)$.

CÂU 16. Tập nghiệm của bất phương trình $3<\log_2 x<4$ là:

Ⓐ $(8;16)$.
Ⓑ $(0;16)$.
Ⓒ $(8;+\infty)$.
Ⓓ $\mathbb{R}$.

CÂU 17. Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\log_{0,5}(x-1)>2$.

Ⓐ $S=\left(-\infty;\dfrac{5}{4}\right)$.
Ⓑ $S=\left(1;\dfrac{5}{4}\right)$.
Ⓒ $S=\left(\dfrac{5}{4};+\infty\right)$.
Ⓓ $S=(1;+\infty)$.

CÂU 18. Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\log_2\left(\log_{\frac{1}{2}} x\right)>0$.

Ⓐ $S=\left(1;\dfrac{3}{2}\right)$.
Ⓑ $S=(0;1)$.
Ⓒ $S=\left(-\infty;\dfrac{1}{2}\right)$.
Ⓓ $S=(1;+\infty)$.

CÂU 19. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_3\dfrac{4x+6}{x}\le 0$ là

Ⓐ $S=\left[-2;-\dfrac{3}{2}\right)$.
Ⓑ $S=[-2;0)$.
Ⓒ $S=(-\infty;2]$.
Ⓓ $S=\mathbb{R}\setminus\left[-\dfrac{3}{2};0\right]$.

CÂU 20. Cho hàm số $f(x)=\log_2(x-1)$. Tìm tập nghiệm của bất phương trình $f(x+1)>1$.

Ⓐ $S=(2;+\infty)$.
Ⓑ $S=(3;+\infty)$.
Ⓒ $S=(1;+\infty)$.
Ⓓ $S=(1;2)$.

CÂU 21. Tìm tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(x+1)\le\log_{\frac{1}{2}}(2x-1)$.

Ⓐ $S=(-\infty;1]$.
Ⓑ $S=(1;+\infty)$.
Ⓒ $(-1;1)$.
Ⓓ $\left(\dfrac{1}{2};1\right]$.

CÂU 22. Cho hàm số $f(x)=\log_2 x$ và $g(x)=\log_2(4-x)$. Tìm tập nghiệm của bất phương trình $f(x+1)<g(x+2)$.

Ⓐ $S=\left(-\infty;\dfrac{1}{2}\right)$.
Ⓑ $S=\left(-1;\dfrac{1}{2}\right)$.
Ⓒ $S=(0;2)$.
Ⓓ $S=(-\infty;2)$.

CÂU 23. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{0,8}\left(x^2+x\right)<\log_{0,8}(-2x+4)$ là

Ⓐ $(1;2)$.
Ⓑ $(-\infty;-4)\cup(1;2)$.
Ⓒ $(-\infty;-4)\cup(1;+\infty)$.
Ⓓ $(-4;1)$.

CÂU 24. Tìm nghiệm nguyên nhỏ nhất của bất phương trình $\log_3\left(1-x^2\right)\le\log_{\frac{1}{3}}(1-x)$

Ⓐ $x=0$.
Ⓑ $x=1$.
Ⓒ $x=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.
Ⓓ $x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

QUICK NOTE

CÂU 25. Điều kiện xác định của bất phương trình $\log_{0,5}(5x+15) \leq \log_{0,5}\left(x^2+6x+8\right)$ là

Ⓐ $x > -2$.

Ⓑ $\left[\begin{array}{l} x < -4 \\ x > -2 \end{array}\right.$.

Ⓒ $x > -3$.

Ⓓ $-2 < x \leq \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{29}-1\right)$.

CÂU 26. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{1}{3}}\left(x^2-6x+5\right)+\log_3(x-1) \geq 0$ là

Ⓐ $S=[1;6]$. Ⓑ $S=(5;6]$. Ⓒ $S=(5;+\infty)$. Ⓓ $S=(1;+\infty)$.

CÂU 27. Điều kiện xác định của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(4x+2)-\log_{\frac{1}{2}}(x-1) > \log_{\frac{1}{2}} x$ là

Ⓐ $x > -\dfrac{1}{2}$. Ⓑ $x > 0$. Ⓒ $x > 1$. Ⓓ $x > -1$.

CÂU 28. Điều kiện xác định của bất phương trình $\ln \dfrac{x^2-1}{x} < 0$ là

Ⓐ $\left[\begin{array}{l} -1 < x < 0 \\ x > 1 \end{array}\right.$. Ⓑ $x > -1$. Ⓒ $x > 0$. Ⓓ $\left[\begin{array}{l} x < -1 \\ x > 1 \end{array}\right.$.

CÂU 29. Nghiệm nguyên nhỏ nhất của bất phương trình $\log_{0,2} x+\log_{0.2}(x-2) < \log_{0,2} 3$ là

Ⓐ $x=6$. Ⓑ $x=3$. Ⓒ $x=5$. Ⓓ $x=4$.

CÂU 30. Nghiệm nguyên lớn nhất của bất phương trình $\log_3\left(4 \cdot 3^{x-1}\right) > 2x-1$ là

Ⓐ $x=3$. Ⓑ $x=2$. Ⓒ $x=1$. Ⓓ $x=-1$.

Dạng 17. Đặt ẩn phụ

Phương pháp: Đặt $t=\log_a f(x)$ với a và $f(x)$ thích hợp để đưa phương trình logarit về phương trình đại số đối với t.

1. Các ví dụ

VÍ DỤ 1. Bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}^2 x+3\log_{\frac{1}{2}} x+2 \leq 0$ có tập nghiệm $S=[a;b]$. Tính giá trị của $a^2\sqrt{b}$.

VÍ DỤ 2. Tìm tập nghiệm bất phương trình $\log_3^2\left(x-\dfrac{2x^2}{3}\right)+\log_{\frac{1}{3}}\left(x-\dfrac{2x^2}{3}\right) < 2$.

VÍ DỤ 3. Tìm nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}^2 x-\log_2(2x)-5 \geq 0$.

2. Câu hỏi trắc nghiệm

CÂU 1. Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\log_2^2 x-5\log_2 x+4 \geq 0$.

Ⓐ $S=(-\infty;-2] \cup [16;+\infty)$.

Ⓑ $S=[2;16]$.

Ⓒ $S=(0;2] \cup [16;+\infty)$.

Ⓓ $S=(-\infty;1] \cup [4;+\infty)$.

CÂU 2. Bất phương trình $\log_2\left(1+3^x\right)+\log_{\left(1+3^x\right)} 2-2 > 0$ có nghiệm là

Ⓐ $x > 0$. Ⓑ $x < 0$. Ⓒ $x \neq 0$. Ⓓ $x \in \mathbb{R}$.

CÂU 3. Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\log_{\frac{1}{3}}^2 x+3\log_{\frac{1}{3}} x+2 \leq 0$.

Ⓐ $S=[-2;-1]$. Ⓑ $S=\emptyset$. Ⓒ $S=[3;9]$. Ⓓ $S=[9;+\infty)$.

CÂU 4. Cho hàm số $f(x)=3\ln x-2$ và $g(x)=\ln^2 x$. Gọi S là tập tất cả các giá trị nguyên của x thỏa điều kiện $x < 10$ và $f(x) < g(x)$. Tính số phần tử của S ứng với

Ⓐ 10. Ⓑ 4. Ⓒ 6. Ⓓ 8.

CÂU 5. Cho hàm số $f(x)=\log_2 x$ và $g(x)=-\dfrac{2}{\log_2 x-3}$. Tìm tất cả các giá trị thực của x để $f(x) > g(x)$.

Ⓐ $\left[\begin{array}{l} x > 8 \\ 2 < x < 4 \end{array}\right.$. Ⓑ $\left[\begin{array}{l} 0 < x < 2 \\ 4 < x < 8 \end{array}\right.$. Ⓒ $2 < x < 4$. Ⓓ $4 < x < 8$.

QUICK NOTE

CÂU 6. Tìm nghiệm bất phương trình $4\log_9 x + \log_x 3 \geq 3$.

(A) $S = \left(0; \dfrac{1}{2}\right) \cup (1; +\infty)$. (B) $S = (1; \sqrt{3}) \cup (3; +\infty)$.
(C) $S = (1; +\infty)$. (D) $S = (3; +\infty)$.

CÂU 7. Tìm nghiệm bất phương trình $\log_5 x \geq \log_x 5$.

(A) $S = [5; +\infty)$. (B) $S = \left(0; \dfrac{1}{5}\right] \cup [1; +\infty)$.
(C) $S = \left[\dfrac{1}{5}; 5\right] \setminus \{1\}$. (D) $S = \left[\dfrac{1}{5}; 1\right) \cup [5; +\infty)$.

CÂU 8. Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\sqrt{x-2}\left(\log^2_{\sqrt{2}} x - 5\log_{\sqrt{2}} x + 4\right) < 0$

(A) $S = (2; 4)$. (B) $S = (\sqrt{2}; 4)$. (C) $S = [2; 4)$. (D) $S = (1; 2)$.

CÂU 9. Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\sqrt{5x-12}\left(\dfrac{\log_2^2 x + 3}{\log_2 x + 3} - 2\right) \geq 0$.

(A) $S = \left[\dfrac{5}{12}; \dfrac{1}{2}\right] \cup [8; +\infty)$. (B) $S = \left[\dfrac{1}{3}; \dfrac{1}{2}\right] \cup (8; +\infty)$.
(C) $S = \left(-\infty; \dfrac{1}{3}\right) \cup \left(\dfrac{1}{2}; 8\right)$. (D) $S = \left(\dfrac{5}{12}; \dfrac{1}{2}\right] \cup (8; +\infty)$.

CÂU 10. Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\log_3\left(\dfrac{x+1}{243}\right) + \log_{x+1} 729 \leq 0$.

(A) $S = (-1; 0) \cup [8; 26]$. (B) $S = [8; 26]$.
(C) $S = (-1; 8]$. (D) $S = (-1; 0) \cup (0; 8]$.

CÂU 11. Giải bất phương trình $\log_9(3^x - 1) \cdot \log_{\frac{1}{9}}\left(\dfrac{3^x - 1}{81}\right) \leq \dfrac{3}{4}$. Ta được tập nghiệm

(A) $S = (-\infty; 2\log_3 2] \cup [\log_3 28; +\infty)$. (B) $S = [2\log_3 2; \log_3 28]$.
(C) $S = (0; 2\log_3 2] \cup [\log_3 28; +\infty)$. (D) $S = (2\log_3 2; \log_3 28)$.

Dạng 18. Bài toán logarit chứa tham số

1. Các ví dụ

VÍ DỤ 1. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $\log_2^2 x - 2\log_2 x + 3m - 2 < 0$ có nghiệm thực.

VÍ DỤ 2. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để bất phương trình $\log_2^2 x + m\log_2 x - m \geq 0$ nghiệm đúng với mọi giá trị của $x \in (0; +\infty)$?

VÍ DỤ 3. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = \dfrac{1}{\sqrt{m\log_3^2 x - 4\log_3 x + m + 3}}$ xác định trên khoảng $(0; +\infty)$.

VÍ DỤ 4. Tìm tất cả giá trị thực của tham số m sao cho bất phương trình $\log_2^2 x - 2\log_2 x - m \geq 0$ có nghiệm thuộc $(1; 4)$?

2. Câu hỏi trắc nghiệm

CÂU 1. Bất phương trình $\lg^2 x - m\lg x + m + 3 \leq 0$ có nghiệm $x > 1$ khi giá trị của m là

(A) $(-\infty; -3) \cup [6; +\infty)$. (B) $(-\infty; -3)$.
(C) $[6; +\infty)$. (D) (3;6].

CÂU 2. Gọi S là tổng tất cả giá trị nguyên của tham số m, với $m < 3$ để bất phương trình $\log_{\frac{1}{5}}\left(mx - x^2\right) \leq \log_{\frac{1}{5}} 4$ vô nghiệm. Tính S.

(A) $S = -3$. (B) $S = -7$. (C) $S = 0$. (D) $S = -4$.

CÂU 3. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $\log_2(5^x - 1) \cdot \log_2(2 \cdot 5^x - 2) > m - 1$ có nghiệm $x \geq 1$?

(A) $m \geq 7$. (B) $m > 7$. (C) $m \leq 7$. (D) $m < 7$.

CÂU 4. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho khoảng $(2; 3)$ thuộc tập nghiệm của bất phương trình $\log_5\left(x^2 + 1\right) > \log_5\left(x^2 + 4x + m\right) - 1$ (1).

QUICK NOTE

Ⓐ $m \in [-12; 13]$. Ⓑ $m \in [12; 13]$. Ⓒ $m \in [-13; 12]$. Ⓓ $m \in [-13; -12]$.

CÂU 5. Tìm tất cả giá trị thực của tham số m sao cho bất phương trình $\log_2^2 x - 2\log_2 x - m \geq 0$ có nghiệm thuộc $[1; 4)$?

Ⓐ $m < 0$. Ⓑ $m \leq 0$. Ⓒ $m > 0$. Ⓓ $m \geq 0$.

CÂU 6. Tìm tất cả giá trị thực của tham số m sao cho bất phương trình $\log_2^2 x - 2\log_2 x - m \geq 0$ có nghiệm thuộc $[1; 4]$?

Ⓐ $m \leq 0$. Ⓑ $m < 0$. Ⓒ $m > 0$. Ⓓ $m \geq 0$.

CÂU 7. Tìm tất cả giá trị thực của tham số m sao cho bất phương trình $\log_2^2 x - 2\log_2 x - m \geq 0$ có mọi x thuộc $(1; 4)$ là nghiệm?

Ⓐ $m \geq -1$. Ⓑ $m < -1$. Ⓒ $m > -1$. Ⓓ $m \leq -1$.

CÂU 8. Tìm tất cả giá trị thực của tham số m sao cho bất phương trình $\log_2^2 x - 2\log_2 x - m \geq 0$ có mọi $x \in [1; 4)$ là nghiệm?

Ⓐ $m > -1$. Ⓑ $m \leq 0$. Ⓒ $m \leq -1$. Ⓓ $m \geq -1$.

CÂU 9. Tìm tất cả giá trị thực của tham số m sao cho bất phương trình $\log_2^2 x - 2\log_2 x - m \geq 0$ có mọi $x \in [1; 4]$ là nghiệm?

Ⓐ $m \leq 0$. Ⓑ $m \geq 0$. Ⓒ $m < -1$. Ⓓ $m \leq -1$.

CÂU 10. Tìm tất cả giá trị thực của tham số m sao cho bất phương trình $\log_2^x - \sqrt{\log_2 x} - m \leq 0$ có mọi $x \in (2; 16)$ là nghiệm?

Ⓐ $m \leq 0$. Ⓑ $m \geq 2$. Ⓒ $m \geq 0$. Ⓓ $m \leq 2$.

CÂU 11. Tìm tất cả giá trị thực của tham số m sao cho bất phương trình $\log_2^2 x - 1 + 2\sqrt{\log_2^2 x + 1} - m \leq 0$ thỏa mãn với mọi $\left[1; 2^{\sqrt{3}}\right]$?

Ⓐ $m < 1$. Ⓑ $m \geq 6$. Ⓒ $m > 6$. Ⓓ $m \leq 1$.

CÂU 12. Tìm tất cả giá trị thực của tham số m sao cho bất phương trình $(2x-1)\left[\log_2(x-1) + \log_3 x\right.$ m thỏa mãn với mọi $x \in [3; 9]$?

Ⓐ $m \leq 10$. Ⓑ $m \leq 85$. Ⓒ $m \geq 10$. Ⓓ $m \geq 85$.

CÂU 13. Tìm tất cả giá trị thực của tham số m sao cho bất phương trình $(3m+1)12^x + (2-m)6^x + 3^x < 0$ nghiệm đúng $\forall x > 0$ là

Ⓐ $(-2; +\infty)$. Ⓑ $(-\infty; -2]$. Ⓒ $\left(-\infty; -\dfrac{1}{3}\right]$. Ⓓ $\left(-2; -\dfrac{1}{3}\right)$.

CÂU 14. Tìm m để bất phương trình $1 + \log_5(x^2+1) \geq \log_5(mx^2 + 4x + m)$ thỏa mãn với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Ⓐ $-1 < m \leq 0$. Ⓑ $-1 < m < 0$. Ⓒ $2 < m \leq 3$. Ⓓ $2 < m < 3$.

CÂU 15. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $9^x - 2(m+1) \cdot 3^x - 3 - 2m > 0$ nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Ⓐ $m \in \mathbb{R}$. Ⓑ $m \neq \dfrac{-4}{3}$. Ⓒ $m < \dfrac{-3}{2}$. Ⓓ $m \leq \dfrac{-3}{2}$.

LỜI GIẢI CHI TIẾT

Bài 2. LOGARIT

A. KIẾN THỨC SÁCH GIÁO KHOA CẦN CẦN NẮM

1. Định nghĩa

Cho hai số dương a, b với $a \neq 1$. Số α thỏa mãn đẳng thức $a^\alpha = b$ được gọi là lôgarit cơ số a của b và kí hiệu là $\log_a b$.
Ta viết $\alpha = \log_a b \Leftrightarrow a^\alpha = b$.

2. Các tính chất

Cho $a, b > 0, a \neq 1$, ta có

- $\log_a a = 1, \log_a 1 = 0$.
- $a^{\log_a b} = b, \log_a(a^\alpha) = \alpha$.

3. Lôgarit của một tích

Cho 3 số dương a, b_1, b_2 với $a \neq 1$, ta có

$$\log_a(b_1 \cdot b_2) = \log_a b_1 + \log_a b_2.$$

4. Lôgarit của một thương

Cho 3 số dương a, b_1, b_2 với $a \neq 1$, ta có

$$\log_a \frac{b_1}{b_2} = \log_a b_1 - \log_a b_2.$$

Đặc biệt, với a, $b > 0$, $a \neq 1$ ta có $\log_a \dfrac{1}{b} = -\log_a b$.

5. Lôgarit của lũy thừa

Cho $a, b > 0, a \neq 1$, với mọi α, ta có

$$\log_a b^\alpha = \alpha \log_a b.$$

Đặc biệt: $\log_a \sqrt[n]{b} = \dfrac{1}{n} \log_a b$.

6. Công thức đổi cơ số

Cho 3 số dương a, b, c với $a \neq 1, c \neq 1$, ta có

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}.$$

Đặc biệt: $\log_a c = \dfrac{1}{\log_c a}$ và $\log_{a^\alpha} b = \dfrac{1}{\alpha} \log_a b$ với $\alpha \neq 0$.

7. Lôgarit thập phân và Lôgarit tự nhiên

- Lôgarit thập phân là lôgarit cơ số 10. Viết $\log_{10} b = \log b = \lg b$.
- Lôgarit tự nhiên là lôgarit cơ số e. Viết $\log_e b = \ln b$.

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 19. Công thức lôgarit

1. Các ví dụ

VÍ DỤ 1. Tính giá trị của biểu thức $P = \log_a \left(a \cdot \sqrt[3]{a\sqrt{a}}\right)$ với $0 < a \neq 1$.

Lời giải.

Ta có $P = \log_a \left[a \cdot \left(a \cdot a^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}\right] = \log_a \left(a^{\frac{3}{2}}\right) = \dfrac{3}{2} \log_a a = \dfrac{3}{2}$. □

VÍ DỤ 2. Tính giá trị của biểu thức $P = 22\log_2 12 + 3\log_2 5 - \log_2 15 - \log_2 150$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} P &= 2\log_2 12 + 3\log_2 5 - \log_2 15 - \log_2 150 \\ &= \log_2 12^2 + \log_2 5^3 - \log_2 (15 \cdot 150) \\ &= \log_2 \frac{12^2 . 5^3}{15 \cdot 150} = \log_2 8 = 3. \end{aligned}$$

$\square$

VÍ DỤ 3. Cho $a > 0$, $a \neq 1$. Tính giá trị biểu thức $A = (\ln a + \log_a \mathrm{e})^2 + \ln^2 a - \log_a^2 \mathrm{e}$.

Lời giải.

Ta có $A = \ln^2 a + 2\ln a \cdot \log_a \mathrm{e} + \log_a^2 e + \ln^2 a - \log_a^2 \mathrm{e} = 2\ln^2 a + 2\ln \mathrm{e} = 2\ln^2 a + 2$. $\square$

VÍ DỤ 4. Cho các số dương a, b, c, d. Tính giá trị biểu thức $S = \ln \dfrac{a}{b} + \ln \dfrac{b}{c} + \ln \dfrac{c}{d} + \ln \dfrac{d}{a}$.

Lời giải.

Ta có $S = \ln \dfrac{a}{b} + \ln \dfrac{b}{c} + \ln \dfrac{c}{d} + \ln \dfrac{d}{a} = \ln \left(\dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{b}{c} \cdot \dfrac{c}{d} \cdot \dfrac{d}{a} \right) = \ln 1 = 0$. $\square$

VÍ DỤ 5. Tính giá trị của biểu thức $P = \log_{a^2} \left(a^{10} b^2\right) + \log_{\sqrt{a}} \left(\dfrac{a}{\sqrt{b}} \right) + \log_{\sqrt[3]{b}} b^{-2}$ (với $0 < a \neq 1; 0 < b \neq 1$).

Lời giải.

Cách 1: Sử dụng các quy tắc biến đổi logarit. Ta có

$$\begin{aligned} P &= \log_{a^2} \left(a^{10} b^2\right) + \log_{\sqrt{a}} \left(\frac{a}{\sqrt{b}} \right) + \log_{\sqrt[3]{b}} b^{-2} \\ &= \frac{1}{2} \left[\log_a a^{10} + \log_a b^2 \right] + 2 \left[\log_a a - \log_a \sqrt{b} \right] + 3 \cdot (-2) \log_b b \\ &= \frac{1}{2} \left[10 + 2\log_a b \right] + 2 \left[1 - \frac{1}{2} \log_a b \right] - 6 = 1. \end{aligned}$$

Cách 2: Ta thấy các đáp án đưa ra đều là các hằng số, như vậy ta dự đoán giá trị của P không phụ thuộc vào giá trị của a, b.

Khi đó, sử dụng máy tính cầm tay, ta tính giá trị của biểu thức khi $a = 2$; $b = 2$, ta được

$$P = \log_4 \left(2^{10} \cdot 4\right) + \log_{\sqrt{2}} \left(\frac{2}{\sqrt{2}} \right) + \log_{\sqrt[3]{2}} 2^{-2} = 1.$$

$\square$

VÍ DỤ 6. Xét các số thực a, b thỏa mãn $a > b > 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của biểu thức $P = \log^2_{\frac{a}{b}} \left(a^2\right) + 3\log_b \left(\dfrac{a}{b} \right)$.

Lời giải.

Với điều kiện đề bài, ta có

$$\begin{aligned} P &= \log^2_{\frac{a}{b}} \left(a^2\right) + 3\log_b \left(\frac{a}{b} \right) = \left[2\log_{\frac{a}{b}} a \right]^2 + 3\log_b \left(\frac{a}{b} \right) \\ &= 4 \left[\log_{\frac{a}{b}} \left(\frac{a}{b} \cdot b \right) \right]^2 + 3\log_b \left(\frac{a}{b} \right) = 4 \left[1 + \log_{\frac{a}{b}} b \right]^2 + 3\log_b \left(\frac{a}{b} \right) \end{aligned}$$

Đặt $t = \log_{\frac{a}{b}} b > 0$ (vì $a > b > 1$), ta có

$$P = 4(1+t)^2 + \frac{3}{t} = 4t^2 + 8t + \frac{3}{t} + 4.$$

Đặt $f(t) = 4t^2 + 8t + \dfrac{3}{t} + 4$, $f'(t) = 8t + 8 - \dfrac{3}{t^2} = \dfrac{8t^3 + 8t^2 - 3}{t^2} = \dfrac{(2t-1)(4t^2+6t+3)}{t^2}$.

Ta có $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{1}{2}$.

x	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	15	$\nearrow$	$+\infty$

Khảo sát hàm số, ta có $P_{\min} = f\left(\frac{1}{2}\right) = 15$. □

VÍ DỤ 7. Tính giá trị của biểu thức $P = \ln(\tan 1^\circ) + \ln(\tan 2^\circ) + \ln(\tan 3^\circ) + \cdots + \ln(\tan 89^\circ)$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} P &= \ln(\tan 1^\circ) + \ln(\tan 2^\circ) + \ln(\tan 3^\circ) + \cdots + \ln(\tan 89^\circ) \\ &= \ln(\tan 1^\circ \cdot \tan 2^\circ \cdot \tan 3^\circ \cdots \tan 89^\circ) \\ &= \ln(\tan 1^\circ \cdot \tan 2^\circ \cdot \tan 3^\circ \cdots \tan 45^\circ \cdot \cot 44^\circ \cdot \cot 43^\circ \cdots \cot 1^\circ) \\ &= \ln(\tan 45^\circ) = \ln 1 = 0. \qquad (\text{vì } \tan\alpha \cdot \cot\alpha = 1). \end{aligned}$$

□

2. Các câu hỏi trắc nghiệm

CÂU 1. Cho a là số thực dương và khác 1. Tính giá trị biểu thức $P = \log_{\sqrt{a}} a$.

A. $P = -2$. B. $P = 0$. C. $P = \frac{1}{2}$. D. $P = 2$.

Lời giải.

Với $0 < a \neq 1$, ta có $P = \log_{\sqrt{a}} a = \log_{a^{\frac{1}{2}}} a = 2\log_a a = 2 \cdot 1 = 2$.

Chọn đáp án D □

CÂU 2. Cho $a > 0$, $a \neq 1$, giá trị của biểu thức $A = a^{\log_{\sqrt{a}} 4}$ bằng bao nhiêu?

A. 8. B. 16. C. 4. D. 2.

Lời giải.

Ta có $A = a^{\log_{\sqrt{a}} 4} = a^{\log_{a^{1/2}} 4} = a^{2\log_a 4} = a^{\log_a 16} = 16$.

Chọn đáp án B □

CÂU 3. Giá trị của biểu thức $B = 2\log_2 12 + 3\log_2 5 - \log_2 15 - \log_2 150$ bằng bao nhiêu?

A. 5. B. 2. C. 4. D. 3.

Lời giải.

Ta nhập vào máy tính biểu thức $2\log_2 12 + 3\log_2 5 - \log_2 15 - \log_2 150$, bấm =, được kết quả $B = 3$.

Chọn đáp án D □

CÂU 4. Cho $a > 0$, $a \neq 1$, biểu thức $P = \log_{a^3} a$ có giá trị bằng bao nhiêu?

A. 3. B. $\frac{1}{3}$. C. -3. D. $-\frac{1}{3}$.

Lời giải.

Ta có $P = \log_{a^3} a = \frac{1}{3}\log_a a = \frac{1}{3}$.

Chọn đáp án B □

CÂU 5. Giá trị của biểu thức $C = \frac{1}{2}\log_7 36 - \log_7 14 - 3\log_7 \sqrt[3]{21}$ bằng bao nhiêu?

A. -2. B. 2. C. $-\frac{1}{2}$. D. $\frac{1}{2}$.

Lời giải.

Ta nhập vào máy tính biểu thức: $\frac{1}{2}\log_7 36 - \log_7 14 - 3\log_7 \sqrt[3]{21}$ bấm =, được kết quả $C = -2$.

Chọn đáp án A □

CÂU 6. Cho $a > 0$, $a \neq 1$, biểu thức $E = a^{4\log_{a^2} 5}$ có giá trị bằng bao nhiêu?

A. 5. B. 625. C. 25. D. 5^8.

Lời giải.

Ta có $E = a^{4\log_{a^2} 5} = a^{\frac{4}{2}\log_a 5} = a^{\log_a 25} = 25$.

Chọn đáp án C □

CÂU 7. Trong các số a thoả mãn điều kiện dưới đây. Số nào lớn hơn 1.

A. $\log_2 a = -2$. B. $\log_3 a = \pi$. C. $\log_4 a^2 = -1$. D. $\log_3 a = -0,3$.

Lời giải.

Ta có $\log_3 a = \pi \Rightarrow a = 3^\pi > 1$.

Chọn đáp án B □

CÂU 8. Trong các số a thoả mãn điều kiện dưới đây. Số nào nhỏ hơn 1.

(A) $\log_{\frac{1}{3}} a = -2$. (B) $\log_a 5 = 2$. (C) $\log_3 5 = a$. (D) $\log_{\frac{1}{\sqrt{3}}} a = 2$.

Lời giải.

Ta có $\log_{\frac{1}{\sqrt{3}}} a = 2 \Leftrightarrow a = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{1}{3} < 1$.

Chọn đáp án (D) □

CÂU 9. Giá trị của biểu thức $A = \log_a \sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a^3}}}$ $(1 \neq a > 0)$ là

(A) $a = \frac{4}{3}$. (B) $a = \frac{3}{4}$. (C) $a = \frac{8}{9}$. (D) $a = \frac{9}{8}$.

Lời giải.

Cách 1: Ta có

$$\begin{aligned}\log_a \sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a^3}}} &= \log_a \sqrt{a\sqrt{a \cdot a^{\frac{3}{2}}}} = \log_a \sqrt{a\sqrt{a^{\frac{5}{2}}}} = \log_a \sqrt{a \cdot a^{\frac{5}{4}}}\\ &= \log_a \sqrt{a^{\frac{9}{4}}} = \log_a a^{\frac{9}{8}} = \frac{9}{8}.\end{aligned}$$

Cách 2: Cho $a = 2$. Nhập vào máy tính $\log_2\left(\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2^3}}}\right) =$ ta được kết quả bằng $\frac{9}{8}$.

Chọn đáp án (D) □

CÂU 10. Giá trị của biểu thức $A = \log_a \frac{\sqrt{a^3}}{a\sqrt[4]{a}}$ $(1 \neq a > 0)$ là

(A) $A = \frac{1}{4}$. (B) $A = \frac{1}{3}$. (C) $A = \frac{1}{2}$. (D) $A = \frac{3}{4}$.

Lời giải.

Cách 1: Ta có $\log_a \frac{\sqrt{a^3}}{a\sqrt[4]{a}} = \log_a \frac{a^{\frac{3}{2}}}{a \cdot a^{\frac{1}{4}}} = \log_a a^{\frac{3}{2}-\left(1+\frac{1}{4}\right)} = \frac{1}{4}$.

Cách 2: Cho $a = 2$ nhập vào máy tính $\log_2\left(\frac{\sqrt{2^3}}{2\sqrt[4]{2}}\right) =$ ta được $A = \frac{1}{4}$.

Chọn đáp án (A) □

CÂU 11. Giá trị của biểu thức $A = \log_a\left(a^3\sqrt{a}\sqrt[5]{a}\right)$ $(1 \neq a > 0)$ là

(A) $A = \frac{17}{5}$. (B) $A = \frac{37}{10}$. (C) $A = \frac{21}{5}$. (D) $A = \frac{39}{10}$.

Lời giải.

Ta có: $\log_a(a^3\sqrt{a}\sqrt[5]{a}) = \log_a\left(a^3 \cdot a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{5}}\right) = \log_a a^{3+\frac{1}{2}+\frac{1}{5}} = \log_a a^{\frac{37}{10}} = \frac{37}{10}$.

Chọn đáp án (B) □

CÂU 12. Cho $\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}} = x^a$ và $\log_y \sqrt{y\sqrt{y^3}} = b$ (với x; $y > 0$; $y \neq 1$). Vậy $A = a + b$ bằng

(A) $A = \frac{9}{4}$. (B) $A = \frac{3}{2}$. (C) $A = \frac{15}{8}$. (D) $A = \frac{17}{8}$.

Lời giải.

Ta có $\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}} = \sqrt{x\sqrt{x^{\frac{3}{2}}}} = \sqrt{x \cdot x^{\frac{7}{4}}} = x^{\frac{7}{8}} \Rightarrow a = \frac{7}{8}$.

Lại có $\log \sqrt{y\sqrt{y^3}} = \log_y \sqrt{y \cdot y^{\frac{3}{2}}} = \log_y \sqrt{y^{\frac{5}{2}}} = \log_y y^{\frac{5}{4}} = \frac{5}{4} = b \Rightarrow A = \frac{17}{8}$.

Chọn đáp án (D) □

CÂU 13. Cho $\sqrt{x\sqrt{x\sqrt[3]{x^4}}} = x^m$ và $\log_y \sqrt[3]{y^2\sqrt{y}} = n$ (với x; $y > 0$; $y \neq 1$). Vậy $A = m + n$ bằng

(A) $A = \frac{23}{12}$. (B) $A = \frac{7}{4}$. (C) $A = 3$. (D) $A = \frac{7}{3}$.

Lời giải.

Ta có $\sqrt{x\sqrt{x\sqrt[3]{x^4}}} = \sqrt{x\sqrt{x \cdot x^{\frac{4}{3}}}} = \sqrt{x\sqrt{x^{\frac{7}{6}}}} = \sqrt{x^{\frac{13}{6}}} = x^{\frac{13}{12}} \Rightarrow m = \frac{13}{12}$.

Lại có $\log_y \sqrt[3]{y^2\sqrt{y}} = \log_y \sqrt[3]{y^2 \cdot y^{\frac{1}{2}}} = \log_y \sqrt[3]{y^{\frac{5}{2}}} = \log_y y^{\frac{5}{6}} = \frac{5}{6} = n$.

Do đó $A = m + n = \frac{23}{12}$.

Chọn đáp án (A) □

CÂU 14. Thu gọn biểu thức $A=\left(a^3\sqrt{a}\right)^{\log_a b}+\left(\sqrt[3]{b^2}\right)^{\log_b a}$ $(1\neq a;b>0)$ ta được

(A) $A=\sqrt{a^7}+\sqrt[3]{b^2}$. (B) $A=\sqrt{a^3}+\sqrt[7]{b^2}$. (C) $A=\sqrt{a^2}+\sqrt[3]{b^7}$. (D) $A=\sqrt[3]{a^2}+\sqrt{b^7}$.

Lời giải.

Ta có $A=\left(a^3\cdot a^{\frac{1}{2}}\right)^{\log_a b}+\left(b^{\frac{2}{3}}\right)^{\log_b a}=\left(a^{\frac{7}{2}}\right)^{\log_a b}+\left(b^{\frac{2}{3}}\right)^{\log_b a}=a^{\log_a b^{\frac{7}{2}}}+b^{\log_b a^{\frac{2}{3}}}=b^{\frac{7}{2}}+a^{\frac{2}{3}}$.

Chọn đáp án (D) □

CÂU 15. Thu gọn biểu thức $A=(a\sqrt{a^3})^{\log_a b^2}+(b\sqrt{b})^{\log_b a^2}$ $(1\neq a;\ b>0)$ ta được

(A) $A=a^5+b^3$. (B) $A=a^3+b^5$. (C) $A=a^3+b^3$. (D) $A=a^5+b^5$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}A&=\left(a\cdot a^{\frac{3}{2}}\right)^{\log_a b^2}+\left(b\cdot b^{\frac{1}{2}}\right)^{\log_b a^2}=\left(a^{\frac{5}{2}}\right)^{\log_a b^2}+\left(b^{\frac{3}{2}}\right)^{\log_b a^2}\\&=(b^2)^{\log_a a^{\frac{5}{2}}}+(a^2)^{\log_b b^{\frac{3}{2}}}\\&=(b^2)^{\frac{5}{2}}+(a^2)^{\frac{3}{2}}=b^5+a^3.\end{aligned}$$

Chọn đáp án (B) □

CÂU 16. Thu gọn biểu thức $A=(a\cdot\sqrt[4]{a})^{\log_a\sqrt{b}}+\left(b\cdot\sqrt[3]{b}\right)^{\log_b a}$ $(1\neq a;b>0)$ ta được

(A) $A=a^{\frac{5}{8}}+b^{\frac{4}{3}}$. (B) $A=a^{\frac{5}{4}}+b^{\frac{4}{3}}$. (C) $A=a^{\frac{4}{3}}+b^{\frac{5}{8}}$. (D) $A=a^{\frac{4}{3}}+b^{\frac{5}{2}}$.

Lời giải.

Ta có: $A=\left(a^{\frac{5}{4}}\right)^{\log_a\sqrt{b}}+\left(b^{\frac{4}{3}}\right)^{lo_b a}=(\sqrt{b})^{\log_a a^{\frac{5}{4}}}+a^{\log_b b^{\frac{5}{4}}}=\left(b^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{5}{4}}+a^{\frac{4}{3}}=b^{\frac{5}{8}}+a^{\frac{4}{3}}$.

Chọn đáp án (C) □

CÂU 17. Cho $\log_a b=2$ và $\log_a c=3$. Tính $P=\log_a\left(b^2c^3\right)$.

(A) $P=108$. (B) $P=13$. (C) $P=31$. (D) $P=30$.

Lời giải.

Ta có $P=\log_a\left(b^2c^3\right)=2\log_a b+3\log_a c=13$.

Chọn đáp án (B) □

CÂU 18. Cho $\log_3 x=4\log_3 a+2\log_3 b$ $(a;\ b>0)$. Khi đó

(A) $x=8ab$. (B) $x=a^4+b^2$. (C) $x=\sqrt{a^2b}$. (D) $x=a^4b^2$.

Lời giải.

$\log_3 x=4\log_3 a+2\log_3 b=\log_3 a^4+\log_3 b^2=\log_3 a^4b^2$.

Do vậy $x=a^4b^2$.

Chọn đáp án (D) □

CÂU 19. Cho $\log_{\frac{1}{3}} x=\log_{\frac{1}{3}}\sqrt{a\sqrt{a}}+\log_{\frac{1}{3}}\dfrac{b}{\sqrt{b\sqrt{b}}}$ $(a;\ b>0)$. Khi đó

(A) $x=\sqrt[4]{a^3b}$. (B) $x=\sqrt[4]{ab^3}$. (C) $x=\sqrt[4]{a^3b^3}$. (D) $x=\sqrt[4]{ab}$.

Lời giải.

Ta có $\log_{\frac{1}{3}} x=\log_{\frac{1}{3}}\sqrt{a\sqrt{a}}+\log_{\frac{1}{3}}\dfrac{b}{\sqrt{b\sqrt{b}}}=\log_{\frac{1}{3}}\sqrt{a^{\frac{3}{2}}}+\log_{\frac{1}{3}}\dfrac{b}{\sqrt{b^{\frac{3}{2}}}}=\log_{\frac{1}{3}} a^{\frac{3}{4}}+\log_{\frac{1}{3}} b^{\frac{1}{4}}$.

Do đó $x=a^{\frac{3}{4}}\cdot b^{\frac{1}{4}}=\sqrt[4]{a^3b}$.

Chọn đáp án (A) □

CÂU 20. Cho $\log_4 x=2\log_2\sqrt[3]{a^2}+3\log_2\dfrac{1}{b^2\sqrt{b}}$ $(a;\ b>0)$. Khi đó

(A) $x=6\cdot a^{\frac{2}{3}}\cdot b^{-\frac{5}{2}}$. (B) $x=a^{\frac{4}{3}}\cdot b^{\frac{-15}{2}}$. (C) $x=a^{\frac{4}{3}}\cdot b^{\frac{15}{2}}$. (D) $x=-10ab$.

Lời giải.

Ta có $\log_4 x=2\log_2\sqrt[3]{a^2}+3\log_2\dfrac{1}{b^2\sqrt{b}}=2\log_2 a^{\frac{2}{3}}+3\log_2 b^{\frac{-5}{2}}=\log_2 a^{\frac{4}{3}}+\log_2 b^{\frac{-15}{2}}$.

Do đó $x=a^{\frac{4}{3}}\cdot b^{\frac{-15}{2}}$.

Chọn đáp án (B) □

CÂU 21. Rút gọ biểu thức $A = \log_2 \sqrt{a} + \log_4 \dfrac{1}{a^2} - \log_{\sqrt{2}} a^8$ $(a > 0)$ ta được

Ⓐ $A = \dfrac{33}{2}\log_2 a$. Ⓑ $A = -\dfrac{33}{2}\log_2 a$. Ⓒ $A = 33\log_2 a$. Ⓓ $A = \dfrac{-1}{2}\log_2 a$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} A &= \log_2 \sqrt{a} + \log_4 \frac{1}{a^2} - \log_{\sqrt{2}} a^8 \\ &= \log_2 a^{\frac{1}{2}} + \log_{2^2} a^{-2} - \log_{2^{\frac{1}{2}}} a^8 \\ &= \frac{1}{2}\log_2 a - \log_2 a - 16\log_2 a = \frac{-33}{2}\log_2 a \end{aligned}$$

Chọn đáp án Ⓑ □

CÂU 22. Rút gọn biểu thức $A = \log_4 a - \log_8 a + \log_{16} a^2$ $(a > 0)$ ta được

Ⓐ $A = \log_2 a$. Ⓑ $A = \dfrac{13}{6}\log_2 a$. Ⓒ $A = \dfrac{3}{2}\log_2 a$. Ⓓ $A = \dfrac{2}{3}\log_2 a$.

Lời giải.

Ta có $A = \log_4 a - \log_8 a + \log_{16} a^2 = \dfrac{1}{2}\log_2 a - \dfrac{1}{3}\log_2 a + \dfrac{2}{4}\log_2 a = \dfrac{2}{3}\log_2 a$.

Chọn đáp án Ⓓ □

CÂU 23. Cho $\log_2 x = \sqrt{2}$. Tính giá trị của biểu thức $A = \log_2 x^2 + \log_{\frac{1}{2}} x^3 + \log_4 x$.

Ⓐ $A = -\sqrt{2}$. Ⓑ $A = -2\sqrt{2}$. Ⓒ $A = \dfrac{-\sqrt{2}}{2}$. Ⓓ $A = \dfrac{-\sqrt{2}}{4}$.

Lời giải.

Ta có $A = \log_2 x^2 + \log_{\frac{1}{2}} x^3 + \log_4 x = 2\log_2 x - 3\log_2 x + \dfrac{1}{2}\log_2 x = -\dfrac{1}{2}\log_2 x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Vậy $A = \dfrac{-\sqrt{2}}{2}$.

Chọn đáp án Ⓒ □

CÂU 24. Cho $\log_x 2 = 3$. Tính giá trị của biểu thức $A = \log_4 x - 2\log_2 \sqrt{x}$.

Ⓐ $A = 6$. Ⓑ $A = \dfrac{1}{6}$. Ⓒ $A = \dfrac{-1}{6}$. Ⓓ $A = -6$.

Lời giải.

Ta có: $\log_x 2 = 3 \Rightarrow \dfrac{1}{\log_2 x} = 3 \Leftrightarrow \log_2 x = \dfrac{1}{3}$.

Mặt khác $A = \log_4 x - 2\log_2 \sqrt{x} = \log_{2^2} x - 2\log_2 x^{\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2}\log_2 x - \log_2 x = \dfrac{-1}{2}\log_2 x = \dfrac{-1}{6}$.

Chọn đáp án Ⓒ □

CÂU 25. Rút gọn biểu thức $A = \log_8 x\sqrt{x} - \log_{\frac{1}{4}} x^2$ $(x > 0)$ ta được

Ⓐ $A = \dfrac{3}{2}\log_2 x$. Ⓑ $A = -\dfrac{1}{2}\log_2 x$. Ⓒ $A = 2\log_2 x$. Ⓓ $A = \dfrac{2}{3}\log_2 x$.

Lời giải.

Ta có $A = \log_{2^3} x^{\frac{3}{2}} - \log_{2^{-2}} x^2 = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{3}{2}\log_2 x + \log_2 x = \dfrac{3}{2}\log_2 x$.

Chọn đáp án Ⓐ □

CÂU 26. Rút gọn biểu thức $A = \log_3 x \cdot \log_2 3 + \log_5 x \cdot \log_4 5$ $(x > 0)$ ta được

Ⓐ $A = \dfrac{3}{2}\log_2 x$. Ⓑ $A = -\dfrac{1}{2}\log_2 x$. Ⓒ $A = 2\log_2 x$. Ⓓ $A = \dfrac{2}{3}\log_2 x$.

Lời giải.

Ta có $A = \log_2 3 \cdot \log_3 x + \log_4 5 \cdot \log_5 x = \log_2 x + \log_4 x = \log_2 x + \dfrac{1}{2}\log_2 x = \dfrac{3}{2}\log_2 x$.

Chọn đáp án Ⓐ □

CÂU 27. Cho $\log_2 x = \sqrt{3}$. Tính giá trị của biểu thức $B = \log_{\frac{1}{4}} x + \log_{\frac{1}{8}} x + \log_{\frac{1}{16}} x$.

Ⓐ $B = \sqrt{3}$. Ⓑ $B = \dfrac{-13\sqrt{3}}{12}$. Ⓒ $9\sqrt{3}$. Ⓓ $-9\sqrt{3}$.

Lời giải.

Ta có $A = 3\log_3 x - \log_3 x + \log_3 x = 3\log_3 x = 3(1 + \sqrt{2})$.

Chọn đáp án Ⓑ □

CÂU 28. Cho $\log_3 x = 1 + \sqrt{2}$. Tính giá trị biểu thức $A = \log_3 x^3 + \log_{\frac{1}{3}} x + \log_9 x^2$.

Ⓐ $A = 2(1+\sqrt{2})$. Ⓑ $A = 1+\sqrt{2}$. Ⓒ $A = -2(1+\sqrt{2})$. Ⓓ $A = 3(1+\sqrt{2})$.

Lời giải.

Ta có $A = 3\log_3 x - \log_3 x + \log_3 x = 3\log_3 x = 3(1+\sqrt{2})$.

Chọn đáp án (D) □

CÂU 29. Tính giá trị của biểu thức $P = \log_a \dfrac{1}{b^3} \cdot \log_{\sqrt{b}} a^3$ $(1 \neq a; b > 0)$.

Ⓐ -18. Ⓑ $\dfrac{-1}{2}$. Ⓒ 18. Ⓓ $\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Ta có $P = \log_a b^{-3} \cdot \log_{b^{\frac{1}{2}}} a^3 = -3\log_a b \cdot 6\log_b a = -18$.

Chọn đáp án (A) □

CÂU 30. Tính giá trị của biểu thức $P = \log_{\sqrt{a}} b^3 \cdot \log_{\sqrt{b}} a$ $(1 \neq a, b > 0)$.

Ⓐ 3. Ⓑ 12. Ⓒ $\dfrac{3}{4}$. Ⓓ $\dfrac{4}{3}$.

Lời giải.

Ta có $P = \log_{a^{\frac{1}{2}}} b^3 \cdot \log_{b^{\frac{1}{2}}} a = 12\log_a b \cdot \log_b a = 12$.

Chọn đáp án (B) □

CÂU 31. Cho $\ln x = 2$. Tính giá trị của biểu thức $T = 2\ln\sqrt{\mathrm{e}x} - \ln\dfrac{\mathrm{e}^2}{\sqrt{x}} + \ln 3 \cdot \log_3 \mathrm{e}x^2$

Ⓐ $T = 21$. Ⓑ $T = 12$. Ⓒ $T = 13$. Ⓓ $T = 7$.

Lời giải.

Ta có: $T = \ln(\mathrm{e}x) - (2 - \ln\sqrt{x}) + \ln\left(\mathrm{e}x^2\right) = (1 + \ln x) - 2 + \dfrac{1}{2}\ln x + 1 + 2\ln x = \dfrac{7}{2}\ln x = 7$.

Chọn đáp án (D) □

CÂU 32. Cho $\ln x = 3$. Tính giá trị của biểu thức $T = 2\ln\dfrac{x^2}{\sqrt{\mathrm{e}}} + \ln 2 \cdot \log_2\left(x^3 \cdot \mathrm{e}^2\right)$

Ⓐ $T = 16$. Ⓑ $T = 15$. Ⓒ $T = \dfrac{27}{2}$. Ⓓ $T = 22$.

Lời giải.

Ta có: $T = 2\left(\ln x^2 - \ln\sqrt{e}\right) + \ln\left(x^3\mathrm{e}^2\right) = 4\ln x - 1 + 3\ln x + 2 = 7\ln x + 1 = 22$.

Chọn đáp án (D) □

CÂU 33. Cho $\log_a b = 3$; $\log_a c = -2$. Tính giá trị của $\log_a x$, biết rằng $x = \dfrac{a^2b^3}{\sqrt{c^5}}$.

Ⓐ $\log_a x = 16$. Ⓑ $\log_a x = 6$. Ⓒ $\log_a x = 13$. Ⓓ $\log_a x = \dfrac{5}{2}$.

Lời giải.

Ta có $\log_a x = \log_a \dfrac{a^2b^3}{\sqrt{c^5}} = \log_a a^2 + \log_a b^3 - \log_a c^{\frac{5}{2}} = 2 + 3\log_a b - \dfrac{5}{2}\log_a c = 16$.

Chọn đáp án (A) □

CÂU 34. Cho $\log_a b = 2$; $\log_a c = 3$. Tính giá trị của biểu thức $\log_a x$, biết rằng $x = \dfrac{a\sqrt{b^3}}{c^2}$.

Ⓐ $\log_a x = -6$. Ⓑ $\log_a x = -4$. Ⓒ $\log_a x = -2$. Ⓓ $\log_a x = -1$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}\log_a x &= \log_a \frac{a\sqrt{b^3}}{c^2} = \log_a a + \log_a b^{\frac{3}{2}} - \log_a c^2\\ &= 1 + \frac{3}{2}\log_a b - 2\log_a c\\ &= 1 + \frac{3}{2}\cdot 2 - 2\cdot 3 = -2.\end{aligned}$$

Chọn đáp án (C) □

1. D	**2. B**	**3. D**	**4. B**	**5. A**	**6. C**	**7. B**	**8. D**	**9. D**	**10. A**
11. B	**12. D**	**13. A**	**14. D**	**15. B**	**16. C**	**17. B**	**18. D**	**19. A**	**20. B**

21. B	22. D	23. C	24. C	25. A	26. A	27. B	28. D	29. A	30. B
			31. D	32. D	33. A	34. C			

Dạng 20. Biểu diễn logarit

1. Các ví dụ

VÍ DỤ 1. Cho $\log_{12} 27 = a$, tính $\log_6 16$ theo a.

Lời giải.

Ta có $a = \log_{12} 27 = \dfrac{\log_3 27}{\log_3 12} = \dfrac{3}{1 + 2\log_3 2} \Rightarrow \log_3 2 = \dfrac{3-a}{2a}$.

Do đó $\log_6 16 = \dfrac{\log_3 16}{\log_3 6} = \dfrac{4\log_3 2}{1+\log_3 2} = \dfrac{4\dfrac{3-a}{2a}}{1+\dfrac{3-a}{2a}} = \dfrac{4(3-a)}{a+3}$. □

VÍ DỤ 2. Cho $\log_2 3 = a$; $\log_2 7 = b$. Tính $\log_2 2016$ theo a và b.

Lời giải.

Ta có $\log_2 2016 = \log_2\left(2^5 3^2 7\right) = \log_2 2^5 + \log_2 3^2 + \log_2 7 = 5 + 2a + b$. □

VÍ DỤ 3. Biết $\log_{27} 5 = a$; $\log_8 7 = b$; $\log_2 3 = c$, tính $\log_{12} 35$ theo a, b, c.

Lời giải.

Ta có

$$\log_{27} 5 = \frac{1}{3}\log_3 5 = a \Leftrightarrow \log_3 5 = 3a$$
$$\log_8 7 = \frac{1}{3}\log_2 7 = b \Leftrightarrow \log_2 7 = 3b.$$

Do đó

$$\log_{12} 35 = \frac{\log_2(7\cdot 5)}{\log_2\left(3\cdot 2^2\right)} = \frac{\log_2 7 + \log_2 5}{\log_2 3 + 2} = \frac{\log_2 7 + \log_2 3\cdot\log_3 5}{\log_2 3 + 2} = \frac{3b + c\cdot 3a}{c+2} = \frac{3(b+ac)}{c+2}.$$

□

VÍ DỤ 4. Cho $\dfrac{\log a}{p} = \dfrac{\log b}{q} = \dfrac{\log c}{r} = \log x \neq 0$; $\dfrac{b^2}{ac} = x^y$. Tính y theo p, q, r.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}&\frac{b^2}{ac} = x^y \Leftrightarrow \log\frac{b^2}{ac} = \log x^y\\ \Rightarrow & y\log x = 2\log b - \log a - \log c = 2q\log x - p\log x - r\log x\\ &= \log x(2q - p - r)\end{aligned}$$

Suy ra $y = 2q - p - r$ (do $\log x \neq 0$). □

VÍ DỤ 5. Cho các số thực dương x; $y > 0$ thỏa mãn $x^2 + y^2 = 8xy$. Chứng minh rằng

$$2\log(x+y) = 1 + \log x + \log y.$$

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 = 8xy \quad &\Leftrightarrow \quad (x+y)^2 = 10xy \Rightarrow \log(x+y)^2 = \log(10xy)\\ &\Leftrightarrow \quad 2\log(x+y) = 1 + \log x + \log y.\end{aligned}$$

□

2. Các câu hỏi trắc nghiệm

CÂU 1. Cho các số dương a; b $(a \neq 1)$. Khẳng định nào dưới đây là **sai**?

(A) $\log_a\left(a^3 b^4\right) = 3 + 4\log_a b$.

(B) $\log_a b = \dfrac{\log_a b}{\log_a 3}$.

(C) $2 + 2\log_a b = \log_a\left(a^2 + b^2\right)$.

(D) $\log_a b\cdot\log_b 9 = 2\log_a 3$.

Lời giải.

Ta có $2 + 2\log_a b = 2\log_a a + 2\log_a b = 2\log_a ab = 2\log_a (ab)^2$.

Chọn đáp án (C) □

CÂU 2. Cho các số thực dương a, b, c với a, b, $ab \neq 1$. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

(A) $\log_a c + \log_b c = \log_{ab} c$.
(B) $2\log_a b + 3\log_a c = \log_a\left(b^2c^3\right)$.
(C) $\log_b c + \log_a b = \log_a c$.
(D) $\log_b c = \dfrac{\log_a c}{\log_a b}$.

Lời giải.

Ta chỉ có $\log_c a + \log_c b = \log_c(ab)$ $(c \neq 1)$.

Chọn đáp án (A) □

CÂU 3. Cho các số dương $a > b > 0$ $(a \neq 1)$. Khẳng định nào dưới đây là **sai**?

(A) $\log_a\left(a^2 - b^2\right) = \log_a(a-b) + \log_a(a+b)$.
(B) $\log_a\left(a^2b^2\right) = 2 + 2\log_a b$.
(C) $\log_a(a+b)^2 = 2(1+\log_a b)$.
(D) $\log_{a^2}\sqrt{ab} = \dfrac{1}{4}(1+\log_a b)$.

Lời giải.

Ta có $\log_a(a+b)^2 = 2\log_a(a+b) \neq 2(1+\log_a b)$.

Chọn đáp án (C) □

CÂU 4. Cho các số dương a; $b > 0$ $(a \neq 1)$. Khẳng định nào dưới đây là **sai**?

(A) $\log_{a^2}(a\sqrt{b}) = \dfrac{1}{4}(2+\log_a b)$.
(B) $\log_{a^2}(\sqrt{ab}) = \dfrac{1}{4}(1+2\log_a b)$.
(C) $\log_{\sqrt{a}}(ab) = 2(1+\log_a b)$.
(D) $\log_{\sqrt{a}}(a\sqrt{b}) = 2 + 4log_a b$.

Lời giải.

Ta có $\log_{\sqrt{a}}(a\sqrt{b}) = \log_{\sqrt{a}} a + \log_{\sqrt{a}}\sqrt{b} = 2 + \log_a b$.

Chọn đáp án (D) □

CÂU 5. Cho các số dương a; $b > 0$ $(a \neq 1)$. Khẳng định nào dưới đây là **sai**?

(A) $3^{\log_a b} = b^{\log_a 3}$.
(B) $a^{\log_a ab} = ab$.
(C) $a^{\log_{\sqrt{a}} b} = b^2$.
(D) $a^{\log_{a^2} b} = b^2$.

Lời giải.

Ta có $a^{\log_{a^2 b}} = (b)^{\log_{a^2} a} = b^{\frac{1}{2}} = \sqrt{b}$.

Chọn đáp án (D) □

CÂU 6. Cho các số dương a; b; $c > 0$ $(a \neq 1)$. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

(A) $\log_{a^c} b^c = \log_a b$.
(B) $\log_{\frac{1}{a^c}} b^c = -\log_a b$.
(C) $2\log_a b - 3\log_a c = \dfrac{2}{3}\log_a \dfrac{b}{c}$.
(D) $\log_a b + \log_a c - 1 = \log_a \dfrac{bc}{a}$.

Lời giải.

Ta có $2\log_a b - 3\log_a c = \log_a b^2 - \log_a c^3 = \log_a \dfrac{b^2}{c^3}$.

Chọn đáp án (C) □

CÂU 7. Cho các số thực a, b, x, $y > 0$ với a, $b \neq 1$. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

(A) $\log_a b \cdot \log_b a = 1$.
(B) $\ln\dfrac{x}{\sqrt{y}} = \ln x - \dfrac{1}{2}\ln y$.
(C) $\log_a x + \log_{\sqrt[3]{a}} y = \log_a\left(xy^3\right)$.
(D) $\log_a(x+y) = \log_a x + \log_a y$.

Lời giải.

Ta có $\log_a x + \log_a y = \log_a xy$.

Chọn đáp án (D) □

CÂU 8. Đặt $a = \log_2 3$. Hãy tính $\log_2 48$ theo a.

(A) $\log_2 48 = 3 + 2a$.
(B) $\log_2 48 = 4 + 2a$.
(C) $\log_2 48 = 4 + a$.
(D) $\log_2 48 = 5 - a$.

Lời giải.

Ta có $\log_2 48 = \log_2\left(2^4 \cdot 3\right) = 4 + \log_2 3 = 4 + a$.

Chọn đáp án (C) □

CÂU 9. Đặt $a = \log_2 5$. Hãy tính $\log_4 10$ theo a.

(A) $\log_4 10 = 2(1+a)$.
(B) $\log_4 10 = \dfrac{a+1}{2}$.
(C) $\log_4 10 = -2(1+a)$.
(D) $\log_4 10 = \dfrac{-a-1}{2}$.

Lời giải.

Ta có $\log_4 10 = \log_{2^2} 10 = \dfrac{1}{2}\log_2 10 = \dfrac{1}{2}(1+\log_2 5) = \dfrac{a+1}{2}$.

Chọn đáp án (B) □

CÂU 10. Đặt $a = \log_2 3$. Hãy tính $\log_{12} 18$ theo a.

Ⓐ $\log_{12} 18 = \dfrac{a+2}{2a+1}$. Ⓑ $\log_{12} 18 = \dfrac{2a-2}{2-a}$. Ⓒ $\log_{12} 18 = \dfrac{2a+2}{2-a}$. Ⓓ $\log_{12} 18 = \dfrac{2a+1}{2+a}$.

Lời giải.

Ta có $\log_{12} 18 = \dfrac{\log_2 18}{\log_2 12} = \dfrac{\log_2\left(2\cdot 3^2\right)}{\log_2\left(2^2\cdot 3\right)} = \dfrac{1+2\log_2 3}{2+\log_2 3} = \dfrac{1+2a}{2+a}$.

Chọn đáp án Ⓓ □

CÂU 11. Cho $\log_2 5 = a$. Hãy tính $\log_4 1250$ theo a

Ⓐ $\log_4 1250 = \dfrac{4+a}{2}$. Ⓑ $\log_4 1250 = \dfrac{1+4a}{2}$. Ⓒ $\log_4 1250 = \dfrac{4a+3}{2}$. Ⓓ $\log_4 1250 = \dfrac{4a-1}{2}$.

Lời giải.

Ta có $\log_4 1250 = \log_{2^2}\left(2\cdot 5^4\right) = \dfrac{1}{2}\log_2\left(2\cdot 5^4\right) = \dfrac{1}{2}\left(1+\log_2 5^4\right) = \dfrac{1+4\log_2 5}{2} = \dfrac{1+4a}{2}$.

Chọn đáp án Ⓑ □

CÂU 12. Cho $a = \log_{15} 3$ thì

Ⓐ $\log_{25} 15 = \dfrac{3}{5(1-a)}$. Ⓑ $\log_{25} 15 = \dfrac{5}{3(1-a)}$. Ⓒ $\log_{25} 15 = \dfrac{1}{2(1-a)}$. Ⓓ $\log_{25} 15 = \dfrac{1}{5(1-a)}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}\log_{25} 15 &= \dfrac{\log_3 15}{\log_3 25} = \dfrac{\log_3 15}{2\log_3 5} = \dfrac{\log_3 15}{2\left(\log_3 15 - \log_3 3\right)}\\ &= \dfrac{\log_3 15}{2(\log_3 15 - 1)} = \dfrac{\dfrac{1}{a}}{2\left(\dfrac{1}{a}-1\right)} = \dfrac{1}{2(1-a)}.\end{aligned}$$

Chọn đáp án Ⓒ □

CÂU 13. Cho $a = \log_2 7$. Hãy tính $\log_{14} 49$ theo a.

Ⓐ $\log_{14} 49 = \dfrac{2a}{1+a}$. Ⓑ $\log_{14} 49 = \dfrac{2a}{2+a}$. Ⓒ $\log_{14} 49 = \dfrac{2a}{2-a}$. Ⓓ $\log_{14} 49 = \dfrac{2}{1+a}$.

Lời giải.

Ta có $\log_{14} 49 = \dfrac{\log_2 49}{\log_2 (2\cdot 7)} = \dfrac{2a}{1+a}$.

Chọn đáp án Ⓐ □

CÂU 14. Cho $\log_{\sqrt{10}} 20 = a$. Hãy biểu diễn $\log_2 5$ theo a.

Ⓐ $\log_2 5 = \dfrac{a+4}{a+2}$. Ⓑ $\log_2 5 = \dfrac{a-4}{2-a}$. Ⓒ $\log_2 5 = \dfrac{a-4}{2a-1}$. Ⓓ $\log_2 5 = \dfrac{2a-1}{a-4}$.

Lời giải.

Ta có $a = \log\sqrt{10}20 = 2\log_{10} 20 = 2\dfrac{\log_2 20}{\log_2 10} = 2\dfrac{\log_2\left(2^2\cdot 5\right)}{\log_2 (2\cdot 5)} = 2\cdot\dfrac{2+\log_2 5}{1+\log_2 5}$.

Suy ra $a + a\log_2 5 = 4 + 2\log_2 5 \Rightarrow \log_2 5 = \dfrac{a-4}{2-a}$.

Chọn đáp án Ⓑ □

CÂU 15. Đặt $\log_3 4 = a$. Hãy tính $\log_3 \dfrac{27}{16}$ theo a.

Ⓐ $\log_3 \dfrac{27}{16} = 3-4a$. Ⓑ $\log_3 \dfrac{27}{16} = 3(1-a)$. Ⓒ $\log_3 \dfrac{27}{16} = 3-2a$. Ⓓ $\log_3 \dfrac{27}{16} = \dfrac{3-2a}{2}$.

Lời giải.

Ta có $\log_3 \dfrac{27}{16} = \log_3 27 - \log_3 16 = 3 - \log_3 4^2 = 3 - 2\log_3 4 = 3-2a$.

Chọn đáp án Ⓒ □

CÂU 16. Cho $\log_{18} 12 = a$. Hãy biểu diễn $\log_2 3$ theo a.

Ⓐ $\log_2 3 = \dfrac{a-2}{1-2a}$. Ⓑ $\log_2 3 = \dfrac{a-2}{2a-1}$. Ⓒ $\log_2 3 = \dfrac{a+2}{2a-1}$. Ⓓ $\log_2 3 = \dfrac{a-1}{1-2a}$.

Lời giải.

Ta có $a = \log_{18} 12 = \dfrac{\log_2 12}{\log_2 18} = \dfrac{\log_2\left(2^2\cdot 3\right)}{\log_2\left(2\cdot 3^2\right)} = \dfrac{2+\log_2 3}{1+2\log_2 3}$.

Suy ra $a + 2a\log_2 3 = 2 + \log_2 3$.

Do đó $\log_2 3 = \dfrac{a-2}{1-2a}$.

Chọn đáp án Ⓐ □

CÂU 17. Cho $a=\log_{20}50$. Hãy biểu diễn $\log_2 5$ theo a.

(A) $\log_2 5=\dfrac{2a+1}{a-2}$. (B) $\log_2 5=\dfrac{2a+1}{2-a}$. (C) $\log_2 5=\dfrac{2a-1}{2-a}$. (D) $\log_2 5=\dfrac{2a-1}{a+2}$.

Lời giải.

Ta có $a=\log_{20}50=\dfrac{\log_2 50}{\log_2 20}=\dfrac{\log_2\left(2\cdot 5^2\right)}{\log_2\left(2^2\cdot 5\right)}=\dfrac{1+2\log_2 5}{2+\log_2 5}$.

Suy ra $2a+a\log_2 5=1+2\log_2 5$.

Do đó $\log_2 5=\dfrac{2a-1}{2-a}$.

Chọn đáp án (C) □

CÂU 18. Đặt $\log_2 3=a$, $b=\log_3 5$. Hãy biểu diễn $\log_2 45$ theo a và b.

(A) $\log_2 45=2a+2ab$. (B) $\log_2 45=a+ab$. (C) $\log_2 45=3a+ab$. (D) $\log_2 45=2a+ab$.

Lời giải.

Ta có $\log_2 45=\log_2(3^2\cdot 5)=2\log_2 3+\log_2 5=2a+\log_2 3\cdot\log_3 5=2a+ab$.

Do đó $\log_2 5=\dfrac{2a-1}{2-a}$.

Chọn đáp án (D) □

CÂU 19. Đặt $\log_2 3=a, b=\log_3 5$. Hãy biểu diễn $\log_{12}15$ theo a và b.

(A) $\log_{12}15=\dfrac{a+ab}{b+2}$. (B) $\log_{12}15=\dfrac{a+ab}{a+2}$. (C) $\log_{12}15=\dfrac{a+b}{ab+2a}$. (D) $\log_{12}15=\dfrac{a+b}{ab+2b}$.

Lời giải.

Ta có $\log_{12}15=\dfrac{\log_2 15}{\log_2 12}=\dfrac{\log_2(3\cdot 5)}{\log_2\left(2^2\cdot 3\right)}=\dfrac{\log_2 3+\log_2 5}{2+\log_2 3}=\dfrac{a+\log_2 3\cdot\log_3 5}{2+a}=\dfrac{a+ab}{a+2}$.

Chọn đáp án (B) □

CÂU 20. Đặt $a=\log_2 3$, $b=\log_5 3$. Hãy biểu diễn $\log_6 45$ theo a và b.

(A) $\log_6 45=\dfrac{a+2ab}{ab}$. (B) $\log_6 45=\dfrac{2a^2-2ab}{ab}$. (C) $\log_6 45=\dfrac{a+2ab}{ab+b}$. (D) $\log_6 45=\dfrac{2a^2-2ab}{ab+b}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}\log_6 45&=\frac{\log_2 45}{\log_2 6}=\frac{\log_2(5\cdot 9)}{\log_2(2\cdot 3)}=\frac{\log_2 5+\log_2 9}{1+\log_2 3}\\&=\frac{\log_2 3\cdot\log_3 5+2\log_2 3}{1+a}\\&=\frac{\frac{a}{b}+2a}{1+a}=\frac{a+2ab}{(a+1)b}.\end{aligned}$$

Chọn đáp án (C) □

CÂU 21. Đặt $a=\log_5 2$; $b=\log_5 3$. Hãy tính $\log_5 72$ theo a và b.

(A) $\log_5 72=3a+2b$. (B) $\log_5 72=2a+3b$. (C) $\log_5 72=3a+3b$. (D) $\log_5 72=2a+2b$.

Lời giải.

Ta có $\log_5 72=\log_5\left(2^3{\cdot}3^2\right)=3\log_5 2+2\log_5 3=3a+2b$.

Chọn đáp án (A) □

CÂU 22. Đặt $\log 3=p$; $\log 5=q$. Hãy biểu diễn $\log_{15}30$ theo p; q.

(A) $\log_{15}30=\dfrac{1+q}{p+q}$. (B) $\log_{15}30=\dfrac{1+p}{p+q}$. (C) $\log_{15}30=\dfrac{p+q}{p+1}$. (D) $\log_{15}30=\dfrac{p+q}{q+1}$.

Lời giải.

Ta có $\log_{15}30=\dfrac{\log 30}{\log 15}=\dfrac{1+\log 3}{\log(3\cdot 5)}=\dfrac{1+3\log 3}{\log 3+\log_5}=\dfrac{1+p}{p+q}$.

Chọn đáp án (B) □

CÂU 23. Cho $a=\log_3 15$; $b=\log_3 10$. Hãy tính $\log_{\sqrt{3}}50$ theo a và b.

(A) $\log_{\sqrt{3}}50=\dfrac{a+b+1}{2}$. (B) $\log_{\sqrt{3}}50=\dfrac{a+b-1}{2}$. (C) $\log_{\sqrt{3}}50=2a+2b+2$. (D) $\log_{\sqrt{3}}50=2a+2b-2$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}\log_{\sqrt{3}}50&=2\log_3 50=2\left[\log_3(5\cdot 10)\right]=2\left(\log_3 5+\log_3 10\right)\\&=2\left(\log_3 15-\log_3 3+\log_3 10\right)=2(a+b-1).\end{aligned}$$

Chọn đáp án (D) □

CÂU 24. Cho $a=\log_2 3$, $b=\log_7 2$. Hãy tính log $\log_{\sqrt{6}} 28$ theo a và b.

(A) $A=\dfrac{b+1}{2a+2}$. (B) $A=\dfrac{4b+2}{ab+b}$. (C) $A=\dfrac{4b+2}{a+2}$. (D) $A=\dfrac{b+1}{2ab+2b}$.

Lời giải.

Ta có $\log_{\sqrt{6}} 28=2\log_6 28=2\cdot\dfrac{\log_2\left(2^2\cdot 7\right)}{\log_2(2\cdot 3)}=2\cdot\dfrac{2+\log_2 7}{1+\log_2 3}=2\cdot\dfrac{2+\dfrac{1}{b}}{1+a}=\dfrac{4b+2}{ab+b}$.

Chọn đáp án (B) □

CÂU 25. Cho $a=\log_2 5$, $b=\log_7 5$. Hãy tính $\log_{14} 100$ theo a, b.

(A) $\log_{14} 100=\dfrac{2a+b}{a+b}$. (B) $\log_{14} 100=\dfrac{2ab+b}{a+b}$. (C) $\log_{14} 100=\dfrac{2a+ab}{a+ab}$. (D) $\log_{14} 100=\dfrac{2ab+b}{a+b}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}\log_{14} 100 &= \frac{\log_2 100}{\log_2 14}=\frac{\log_2\left(2^2 . 5^2\right)}{\log_2(2\cdot 7)}=\frac{2+2\log_2 5}{1+\log_2 5\cdot\log_5 7}\\ &= \frac{2+2a}{1+\log_2 5\cdot\log_5 7}=\frac{2+2a}{a+\log_2 5\cdot\log_5 7}=\frac{2+2a}{1+\dfrac{a}{b}}\\ &= \frac{2ab+2b}{a+b}.\end{aligned}$$

Chọn đáp án (D) □

CÂU 26. Cho $\log_5 2=a$; $b=\log_5 3$. Hãy biểu diễn $\log_{15} 36$ theo a, b.

(A) $\log_{15} 36=\dfrac{2a+b}{b+1}$. (B) $\log_{15} 36=\dfrac{a+2b}{b+1}$. (C) $\log_{15} 36=\dfrac{2a+2b}{b+1}$. (D) $\log_{15} 36=\dfrac{2a+2b}{a+1}$.

Lời giải.

Ta có $\log_{15} 36=\dfrac{\log_5 36}{\log_5 15}=\dfrac{\log_5\left(2^2 . 3^2\right)}{\log_5(5\cdot 3)}=\dfrac{2\log_5 2+2\log_5 3}{1+\log_5 3}=\dfrac{2a+2b}{1+b}$.

Chọn đáp án (C) □

CÂU 27. Đặt $a=\log_2 5$, $b=\log_2 3$. Hãy biểu diễn $\log_{40} 45$ theo a, b.

(A) $\log_{40} 45=\dfrac{2a+b}{b+3}$. (B) $\log_{40} 45=\dfrac{a+2b}{b+3}$. (C) $\log_{40} 45=\dfrac{2a+2b}{b+3}$. (D) $\log_{40} 45=\dfrac{a+2b}{a+3}$.

Lời giải.

Ta có $\log_{40} 45=\dfrac{\log_2 45}{\log_2 40}=\dfrac{\log_2\left(3^2\cdot 5\right)}{\log_2\left(2^3\cdot 5\right)}=\dfrac{2\log_2 3+\log_2 5}{3+\log_2 5}=\dfrac{a+2b}{a+3}$.

Chọn đáp án (D) □

CÂU 28. Cho $\log_2 6=a$ và $\log_3 5=b$. Hãy tính $\log_{12}\sqrt{20}$ theo a, b.

(A) $\log_{12}\sqrt{20}=\dfrac{ab-b+2}{2(a+1)}$. (B) $\log_{12}\sqrt{20}=\dfrac{ab+b-2}{2(a+1)}$. (C) $\log_{12}\sqrt{20}=\dfrac{ab+b-2}{2(a-1)}$. (D) $\log_{12}\sqrt{20}=\dfrac{ab-b+2}{2(a-1)}$.

Lời giải.

Ta có $a=\log_2 6=1+\log_2 3$.

Mặt khác

$$\begin{aligned}\log_{12}\sqrt{20} &= \frac{1}{2}\log_{12} 20=\frac{1}{2}\frac{\log_2 20}{\log_2 12}=\frac{\log_2\left(2^2\cdot 5\right)}{2\cdot\log_2\left(2^2\cdot 3\right)}\\ &= \frac{2+\log_2 5}{2(2+\log_2 3)}=\frac{2+\log_2 3\cdot\log_3 5}{2(2+a-1)}=\frac{2+(a-1)b}{2(a+1)}\\ &= \frac{ab-b+2}{2(a+1)}.\end{aligned}$$

Chọn đáp án (A) □

CÂU 29. Đặt $\log_2 7=a$; $\log_3 7=b$. Hãy tính $\log_{14} 12$ theo a, b.

(A) $\log_{14} 12=\dfrac{a+2b}{ab+a}$. (B) $\log_{14} 12=\dfrac{a+2b}{ab+b}$. (C) $\log_{14} 12=\dfrac{2a+b}{ab+a}$. (D) $\log_{14} 12=\dfrac{2a+b}{ab+a}$.

Lời giải.

Ta có $\log_{14} 12=\dfrac{\log_2\left(2^2\cdot 3\right)}{\log_2(2\cdot 7)}=\dfrac{2+\log_2 3}{1+\log_2 7}=\dfrac{2+\log_2 7\cdot\log_7 3}{1+a}=\dfrac{2+\dfrac{a}{b}}{a+1}=\dfrac{a+2b}{ab+b}$.

Chọn đáp án (B)

CÂU 30. Đặt $a = \log_2 5$ và $b = \log_2 6$. Hãy biểu diễn $\log_3 90$ theo a và b.

(A) $\log_3 90 = \dfrac{a+2b-1}{b-1}$. (B) $\log_3 90 = \dfrac{a+2b-1}{a-1}$. (C) $\log_3 90 = \dfrac{a-2b+1}{b+1}$. (D) $\log_3 90 = \dfrac{a-2b-1}{a+1}$.

Lời giải.

Ta có $b = \log_2 6 = 1 + \log_2 3$.
Khi đó

$$\begin{aligned}\log_3 90 &= \frac{\log_2 90}{\log_2 3} = \frac{\log_2\left(3^2\cdot 2\cdot 5\right)}{\log_2 3} = \frac{2\log_2 3 + 1 + \log_2 5}{\log_2 3}\\ &= \frac{2(b-1)+a+1}{b-1} = \frac{a+2b-1}{b-1}.\end{aligned}$$

Chọn đáp án (A)

CÂU 31. Đặt $\log_2 5 = a$, $\log_4 15 = b$. Hãy tính $\log_3 10$ theo a, b.

(A) $\log_3 10 = \dfrac{1-a}{a+2b}$. (B) $\log_3 10 = \dfrac{ab-a}{a+2b}$. (C) $\log_3 10 = \dfrac{ab+a}{a+2b}$. (D) $\log_3 10 = \dfrac{1+a}{2b-a}$.

Lời giải.

Ta có $\log_4 15 = b \Rightarrow \dfrac{1}{2}(\log_2 5 + \log_2 3) = b \Rightarrow \log_2 3 = 2b - a$.

Khi đó $\log_3 10 = \dfrac{\log_2 10}{\log_2 3} = \dfrac{1+\log_2 5}{2b-a} = \dfrac{1+a}{2b-a}$.

Chọn đáp án (D)

CÂU 32. Đặt $a = \log_2 3$; $b = \log_5 2$; $c = \log_2 7$. Hãy biểu diễn $\log_{42} 15$ theo a, b, c.

(A) $\log_{42} 15 = \dfrac{ab+1}{b(a+c+1)}$. (B) $\log_{42} 15 = \dfrac{ac+1}{c(a+c+1)}$. (C) $\log_{42} 15 = \dfrac{ab+1}{ab+b+c}$. (D) $\log_{42} 15 = \dfrac{a+c}{a+b+bc}$.

Lời giải.

Ta có $\log_{42} 15 = \dfrac{\log_2 15}{\log_2 42} = \dfrac{\log_2 3 + \log_2 5}{\log_2 2 + \log_2 3 + \log_2 7} = \dfrac{a+\dfrac{1}{b}}{1+a+c} = \dfrac{ab+1}{b(a+c+1)}$.

Chọn đáp án (A)

CÂU 33. Cho các số thực a, $b > 0$; $a \neq 1$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

(A) $\log_a\left(a^4+b\right) = 4 + \log_a b$.
(B) $\log_a\left(a^2+a^2b^2\right) = 2 + \log_a\left(b^2+1\right)$.
(C) $\log_a(a+b) = 1 + \log_a b$.
(D) $\log_a\left(a^3b+1\right) = 4 + \log_a b$.

Lời giải.

Ta có

$$\log_a\left(a^2+a^2b^2\right) = \log_a\left[a^2\left(b^2+1\right)\right] = \log_a a^2 + \log_a\left(b^2+1\right) = 2 + \log_a\left(b^2+1\right).$$

Chọn đáp án (B)

CÂU 34. Cho các số thực a, $b > 0$; $a \neq 1$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

(A) $\log_{a^2}(ab) = \dfrac{1}{2}\log_a b$. (B) $\log_{a^2}(ab) = 2 + 2\log_a b$. (C) $\log_{a^2}(ab) = \dfrac{1}{4}\log_a b$. (D) $\log_{a^2}(ab) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\log_a b$.

Lời giải.

Ta có $\log_{a^2} ab = \dfrac{1}{2}\log_a ab = \dfrac{1}{2}(\log_a a + \log_a b) = \dfrac{1}{2}(1+\log_a b)$.

Chọn đáp án (D)

CÂU 35. Cho các số thực a, $b > 0$; a; b; $ab \neq 1$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

(A) $\log_{ab}\dfrac{a}{b} = \dfrac{1+\log_a b}{1-\log_a b}$. (B) $\log_{ab}\dfrac{a}{b} = \dfrac{1-\log_a b}{1+\log_a b}$. (C) $\log_{ab}\dfrac{a}{b} = \dfrac{1+\log_b b}{1-\log_a b}$. (D) $\log_{ab}\dfrac{a}{b} = \dfrac{1+\log_a b}{1-\log_b b}$.

Lời giải.

Ta có $\log_{ab}\dfrac{a}{b} = \dfrac{\log_a\dfrac{a}{b}}{\log_a ab} = \dfrac{1-\log_a b}{1+\log_a b}$.

Chọn đáp án (B)

CÂU 36. Cho các số thực a, $b > 0$; a; $a\sqrt{b} \neq 1$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

(A) $\log_{a\sqrt{b}}(ab) = \dfrac{1+\log_a b}{2+\log_a b}$.
(B) $\log_{a\sqrt{b}}(ab) = \dfrac{2+\log_a b}{1+\log_a b}$.
(C) $\log_{a\sqrt{b}}(ab) = \dfrac{2+2\log_a b}{2+\log_a b}$.
(D) $\log_{a\sqrt{b}}(ab) = \dfrac{2+\log_a b}{2+2\log_a b}$.

Lời giải.

Ta có $\log_{a\sqrt{a}}(ab) = \dfrac{\log_a(ab)}{\log_a(a\sqrt{b})} = \dfrac{1+\log_a b}{1+\dfrac{1}{2}\log_a b} = \dfrac{2+2\log_a b}{2+\log_a b}$.

Chọn đáp án (C) □

CÂU 37. Cho các số thực dương $x; y > 0$ thỏa mãn $x^2 + y^2 = 8xy$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A $\log(x+y) = \dfrac{1+\log x + \log y}{2}$.

B $\log(x+y) = \log x + \log y + 1$.

C $\log(x+y) = \log x + \log y - 1$.

D $\log(x+y) = 10 \cdot (\log x + \log y)$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} x^2+y^2=8xy &\Leftrightarrow (x+y)^2 = 10xy \\ &\Rightarrow \log(x+y)^2 = \log(10xy) \\ &\Leftrightarrow 2\log(x+y) = 1+\log x+\log y. \end{aligned}$$

Chọn đáp án (A) □

CÂU 38. Cho các số thực dương $x; y > 0$ thỏa mãn $x^2 + y^2 = 14xy$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A $\log_2 \dfrac{x+y}{14} = \log_2 x + \log_2 y$.

B $\log_2 \dfrac{x+y}{16} = \log_2 x + \log_2 y$.

C $\log_2(x+y) = \dfrac{\log_2 x + \log_2 y}{2}$.

D $\log_2(x+y) = 2 + \dfrac{\log_2 xy}{2}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} x^2+y^2=14xy &\Leftrightarrow (x+y)^2 = 16xy \\ &\Leftrightarrow \log_2(x+y)^2 = \log_2(16xy) \\ &\Leftrightarrow 2\log_2(x+y) = 4+\log_2 x+\log_2 y \\ &\Leftrightarrow \log_2(x+y) = 2+\dfrac{\log_2 xy}{2}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án (D) □

CÂU 39. Cho các số x, $y \in \mathbb{R}$ và $x^2 + y^2 = 3xy$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A $\log_5(x+y) = \dfrac{1+\log_5 xy}{2}$.

B $\log_5(x+y)^2 = 1 + \log_5 x + \log_5 y$.

C $\log_5(x+y)^2 = 1 + \log_5(xy)$.

D Tất cả đều đúng.

Lời giải.

Khẳng định "$\log_5(x+y) = \dfrac{1+\log_5 xy}{2}$" sai vì chưa thể khẳng định $x + y > 0$.

Khẳng định "$\log_5(x+y)^2 = 1+\log_5 x+\log_5 y$" sai vì chưa thể khẳng định x, $y > 0$.

Ta có

$$\begin{aligned} x^2+y^2=3xy &\Leftrightarrow (x+y)^2 = 5xy \\ &\Leftrightarrow \log_5(x+y)^2 = \log_5(5xy) \\ &\Leftrightarrow 2\log_5|x+y| = 1+\log_5 xy. \end{aligned}$$

Nên khẳng định "$\log_5(x+y)^2 = 1+\log_5(xy)$" đúng.

Chọn đáp án (C) □

CÂU 40. Cho $\log_a x = p$; $\log_b x = q$; $\log_c x = r$ $(1 \neq a;\ b;\ c;\ x > 0)$. Hãy tính $\log_{abc} x$.

A $\log_{abc} x = \dfrac{pqr}{pq+qr+rp}$.

B $\log_{abc} x = pqr$.

C $\log_{abc} x = \dfrac{pqr}{p+q+r}$.

D $\log_{abc} x = \dfrac{pq+qr+rp}{p+q+r}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} \log_{abc} x &= \dfrac{1}{\log_x abc} = \dfrac{1}{\log_x a+\log_x b+\log_x c} = \dfrac{1}{\dfrac{1}{\log_a x}+\dfrac{1}{\log_b x}+\dfrac{1}{\log_c x}} \\ &= \dfrac{1}{\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}+\dfrac{1}{r}} = \dfrac{pqr}{pq+qr+rp}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án (A) □

CÂU 41. Cho $\log_a x = m$ và $\log_{ab} x = n$ $(1 \neq x;\, a;\, ab > 0)$. Khi đó $\log_b x$ bằng

A $\log_b x = \dfrac{mn}{n-m}$. **B** $\log_b x = \dfrac{mn}{m-n}$. **C** $\log_b x = \dfrac{mn}{m+n}$. **D** $\log_b x = \dfrac{1}{m} - \dfrac{1}{n}$.

Lời giải.

Ta có $\log_b x = \dfrac{1}{\log_x b} = \dfrac{1}{\log x \dfrac{ab}{a}} = \dfrac{1}{\log_x ab - \log_x b} = \dfrac{1}{\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{m}} = \dfrac{mn}{m-n}$.

Chọn đáp án (B) □

CÂU 42. Thu gọn biểu thức $A = \dfrac{1}{\log_a b} + \dfrac{1}{\log_{a^2} b} + \dfrac{1}{\log_{a^2} b} + \cdots + \dfrac{1}{\log_{a^n} b}$ ta được

A $A = \dfrac{n(n+1)}{\log_a b}$. **B** $A = \dfrac{n+1}{2\log_a b}$. **C** $A = \dfrac{n(n+1)}{2\log_a b}$. **D** $A = \dfrac{n(n-1)}{\log_a b}$.

Lời giải.

Ta có $\log_{a^n} b = \dfrac{1}{n}\log_a b \Rightarrow \dfrac{1}{\log_{a^n} b} = \dfrac{n}{\log_a b}$.

Do đó

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{\log_a b} + \frac{2}{\log_a b} + \cdots + \frac{n}{\log_a b} \\ &= \frac{1+2+3+\cdots+n}{\log_a b} = \frac{n(n+1)}{2\log_a b}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án (C) □

1. C	2. A	3. C	4. D	5. D	6. C	7. D	8. C	9. B	10. D
11. B	12. C	13. A	14. B	15. C	16. A	17. C	18. D	19. B	20. C
21. A	22. B	23. D	24. B	25. D	26. C	27. D	28. A	29. B	30. A
31. D	32. A	33. B	34. D	35. B	36. C	37. A	38. D	39. C	40. A
				41. B	42. C				

Bài 3. PHƯƠNG TRÌNH - BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ VÀ LOGARIT

CHUYÊN ĐỀ 1: PHƯƠNG TRÌNH MŨ

A. KIẾN THỨC SÁCH GIÁO KHOA CẦN CẦN NẮM

1. Phương trình mũ cơ bản $a^x = b\,(a > 0, a \neq 1)$.

- Phương trình có một nghiệm duy nhất $x = \log_a b$ khi $b > 0$.
- Phương trình vô nghiệm khi $b \leq 0$.

2. Biến đổi, quy về cùng cơ số

$a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow a = 1$ hoặc $\begin{cases} 0 < a \neq 1 \\ f(x) = g(x). \end{cases}$

3. Đặt ẩn phụ

$f\left[a^{g(x)}\right] = 0,\ (0 < a \neq 1) \Leftrightarrow \begin{cases} t = a^{g(x)} > 0 \\ f(t) = 0. \end{cases}$

Ta thường gặp các dạng:

- $m.a^{2f(x)} + n \cdot a^{f(x)} + p = 0$.
- $m.a^{f(x)} + n \cdot b^{f(x)} + p = 0$, trong đó $a.b = 1$. Đặt $t = a^{f(x)} (t > 0)$, suy ra $b^{f(x)} = \dfrac{1}{t}$.
- $m.a^{2f(x)} + n \cdot (a \cdot b)^{f(x)} + p \cdot b^{2f(x)} = 0$. Chia hai vế cho $b^{2f(x)}$ và đặt $t = \left(\dfrac{a}{b}\right)^{f(x)} > 0$.

4. Logarit hóa

- Phương trình $a^{f(x)} = b \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < a \neq 1, b > 0 \\ f(x) = \log_a b. \end{cases}$
- Phương trình $a^{f(x)} = b^{g(x)} \Leftrightarrow \log_a a^{f(x)} = \log_a b^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x) \cdot \log_a b$.
  hoặc $\log_b a^{f(x)} = \log_b b^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) \cdot \log_b a = g(x)$.

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 21. Phương trình mũ cơ bản

Phương pháp: $a^{f(x)} = b$.
Nếu $b < 0$ thì phương trình vô nghiệm.
Nếu $b > 0$ thì phương trình có nghiệm duy nhất $f(x) = \log_a b$.

1. Các ví dụ

VÍ DỤ 1. Giải phương trình: $2^{2x-1} = 3$.

Lời giải.

$2^{2x-1} = 3 \Leftrightarrow 2x - 1 = \log_2 3 \Leftrightarrow x = \dfrac{\log_2 3 + 1}{2}$. □

VÍ DỤ 2. Giải phương trình: $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x^2-3x+1} = 2$.

Lời giải.

$\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x^2-3x+1} = 2 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 1 = \log_{\frac{1}{2}} 2 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 1 = -1 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 2. \end{array}\right.$ □

VÍ DỤ 3. Giải phương trình: $2^{x^2+3x-2} = \dfrac{1}{4}$.

Lời giải.

$2^{x^2+3x-2} = \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow x^2 + 3x - 2 = \log_2 \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow x^2 + 3x - 2 = -2 \Leftrightarrow x^2 + 3x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -3. \end{array}\right.$

Vậy phương trình có nghiệm: $x = 0, x = -3$. □

VÍ DỤ 4. Giải phương trình sau: $5^x \cdot 2^{2x-1} = 50$.

Lời giải.

$5^x \cdot 2^{2x-1} = 50 \Leftrightarrow 5^x \cdot \dfrac{4^x}{2} = 50 \Leftrightarrow 20^x = 100 \Leftrightarrow x = \log_{20} 100$.

Vậy phương trình có nghiệm: $x = \log_{20} 100$. □

2. Câu hỏi trắc nghiệm

CÂU 1. Tính tổng tất cả các nghiệm thực của phương trình $2^{2x^2-7x+5} = 1$.

Ⓐ $\dfrac{2}{7}$. Ⓑ $\dfrac{5}{2}$. Ⓒ $\dfrac{2}{5}$. Ⓓ $\dfrac{7}{2}$.

Lời giải.

$2^{2x^2-7x+5} = 1 \Leftrightarrow 2x^2 - 7x + 5 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = \dfrac{5}{2} \end{array}\right.$.

Chọn đáp án D □

CÂU 2. Tìm tập nghiệm S của phương trình $3^{x^2-3x+4} = 9$.

Ⓐ $S = \{-2, 1\}$. Ⓑ $S = \{-1, 3\}$. Ⓒ $S = \{1, 2\}$. Ⓓ $S = \{1, 3\}$.

Lời giải.

$3^{x^2-3x+4} = 9 \Leftrightarrow 3^{x^2-3x+4} = 3^2 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 4 = 2 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 2 \end{array}\right.$.

Chọn đáp án C □

CÂU 3. Phương trình $(2 + \sqrt{3})^{x^2-2x-2} = 7 - 4\sqrt{3}$ có hai nghiệm x_1, x_2. Tính $P = x_1 + x_2$.

Ⓐ $P = -1$. Ⓑ $P = 4$. Ⓒ $P = 3$. Ⓓ $P = 2$.

Lời giải.

$(2 + \sqrt{3})^{x^2-2x-2} = 7 - 4\sqrt{3} = (2 - \sqrt{3})^2 = (2 + \sqrt{3})^{-2} \Leftrightarrow x^2 - 2x - 2 = -2 \Leftrightarrow x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2. \end{array}\right.$

Chọn đáp án D □

CÂU 4. Tìm nghiệm của phương trình $2^{x+1} \cdot 5^x = 200$.

A $x = 3$. **B** $x = \log_2 5$. **C** $x = 2$. **D** $x = \log_5 2$.

Lời giải.

$2^{x+1} \cdot 5^x = 200 \Leftrightarrow 2 \cdot 2^x \cdot 5^x = 200 \Leftrightarrow 10^x = 10^2 \Leftrightarrow x = 2$.

Chọn đáp án C □

CÂU 5. Nghiệm của phương trình $3^{2x-1} = 243$ là

A $x = 1$. **B** $x = 3$. **C** $x = 7$. **D** $x = 2$.

Lời giải.

Cách 1: $3^{2x-1} = 243 \Leftrightarrow 3^{2x-1} = 3^5 \Leftrightarrow 2x - 1 = 5 \Leftrightarrow x = 3$.

Cách 2: Học sinh có thể thay từng giá trị x ở đáp án vào phương trình. Giá trị nào thoả mãn thì lấy.

Để cho tiện, học sinh dùng chức năng $CALC$ trong máy tính: Nhập 3^{2x-1} rồi $CALC$ từng giá trị. Giá trị nào bằng 243 thì thoả mãn.

Chọn đáp án B □

CÂU 6. Gọi x_1, x_2 là nghiệm của phương trình $8^{x^2+6x-3} = 4096$, giá trị của $x_1 \cdot x_2$ là bao nhiêu?

A 7. **B** 9. **C** -9. **D** -7.

Lời giải.

$$8^{x^2+6x-3} = 4096 \Leftrightarrow x^2 + 6x - 3 = \log_8 4096 = 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -7 \\ x = 1 \end{array}\right.$$

$\Rightarrow p = x_1 x_2 = -7$.

Chọn đáp án D □

CÂU 7. Biết phương trình $9^x - 2^{x+\frac{1}{2}} = 2^{x+\frac{3}{2}} - 3^{2x-1}$ có nghiệm là a. Khi đó biểu thức $a + \dfrac{1}{2}\log_{\frac{9}{2}} 2$ có giá trị bằng

A $1 - \dfrac{1}{2}\log_{\frac{9}{2}} 2$. **B** 1. **C** $1 - \log_{\frac{9}{2}} 2$. **D** $\dfrac{1}{2}\log_{\frac{9}{2}} 2$.

Lời giải.

Ta có $9^x - 2^{x+\frac{1}{2}} = 2^{x+\frac{3}{2}} - 3^{2x-1} \Leftrightarrow \dfrac{4}{3} \cdot 9^x = 3\sqrt{2} \cdot 2^x \Leftrightarrow \left(\dfrac{9}{2}\right)^x = \dfrac{9}{2\sqrt{2}} \Leftrightarrow x = \log_{\frac{9}{2}} \dfrac{9}{2\sqrt{2}}$.

Suy ra $a + \dfrac{1}{2}\log_{\frac{9}{2}} 2 = \log_{\frac{9}{2}} \dfrac{9}{2} = 1$.

Chọn đáp án B □

CÂU 8. Tập hợp nghiệm của phương trình $3^{x^2-x-4} = \dfrac{1}{81}$ là

A $\{0; 4\}$. **B** $\emptyset$. **C** $\{2; 1\}$. **D** $\{0; 1\}$.

Lời giải.

$$3^{x^2-x-4} = \frac{1}{81} \Leftrightarrow 3^{x^2-x-4} = 3^{-4} \Leftrightarrow x^2 - x - 4 = -4 \Leftrightarrow x^2 - x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1. \end{array}\right.$$

Chọn đáp án D □

CÂU 9. Phương trình $3^{x^2-5} - 81 = 0$ có hai nghiệm $x_1; x_2$. Tính giá trị của tích $x_1 x_2$

A -9. **B** 9. **C** 29. **D** -27.

Lời giải.

$$3^{x^2-5} - 81 = 0 \Leftrightarrow 3^{x^2-5} = 3^4 \Leftrightarrow x^2 - 5 = 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = -3. \end{array}\right.$$

Vậy tích $x_1 x_2 = -9$.

Chọn đáp án A □

CÂU 10. Cho phương trình $3^{x^2-4x+5} = 9$ tổng lập phương các nghiệm thực của phương trình là

A 28. **B** 27. **C** 26. **D** 25.

Lời giải.

Ta có: $3^{x^2-4x+5} = 9 \Leftrightarrow 3^{x^2-4x+5} = 3^2 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 5 = 2 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 3. \end{array}\right.$

Suy ra $1^3 + 3^3 = 28$.

Chọn đáp án A □

CÂU 11. Tính tổng T tất cả các nghiệm của phương trình $(x-3)^{2x^2-5x} = 1$.

A $T = 0$. **B** $T = 4$. **C** $T = \dfrac{13}{2}$. **D** $T = \dfrac{15}{2}$.

Lời giải.
Ta xét các trường hợp sau:
TH1. $x-3=1 \Leftrightarrow x=4$ thỏa mãn phương trình.
TH2. $\begin{cases} x-3\neq 0 \\ 2x^2-5x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\dfrac{5}{2}. \end{array}\right.$
Vậy phương trình đã cho có ba nghiệm $x=0; x=\dfrac{5}{2}; x=4 \Rightarrow T=\dfrac{13}{2}$.
Chọn đáp án (C) □

Dạng 22. Phương pháp đưa về cơ số

Phương pháp: Biến đổi phương trình về dạng: $a^{f(x)}=a^{g(x)}$ (1).
+ Nếu cơ số a là một số dương và khác 1 thì: (1) $\Leftrightarrow f(x)=g(x)$.
+ Nếu cơ số a thay đổi thì: (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} a>0 \\ (a-1)[f(x)-g(x)]=0. \end{cases}$

1. Các ví dụ

VÍ DỤ 1. Giải phương trình sau: $2^{x^2-x+8}=4^{1-3x}$.
Lời giải.
$$\begin{aligned} & 2^{x^2-x+8}=4^{1-3x} \Leftrightarrow 2^{x^2-x+8}=(2^2)^{1-3x} \\ \Leftrightarrow\ & 2^{x^2-x+8}=2^{2\cdot(1-3x)} \Leftrightarrow 2^{x^2-x+8}=2^{2-6x} \\ \Leftrightarrow\ & x^2-x+8=2-6x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=-3. \end{array}\right. \end{aligned}$$
□

VÍ DỤ 2. Giải phương trình sau: $2^{x^2-6x-\frac{5}{2}}=16\sqrt{2}$.
Lời giải.
$$\begin{aligned} & 2^{x^2-6x-\frac{5}{2}}=16\sqrt{2} \Leftrightarrow 2^{x^2-6x-\frac{5}{2}}=2^{\frac{9}{2}} \\ \Leftrightarrow\ & x^2-6x-\frac{5}{2}=\frac{9}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=7. \end{array}\right. \end{aligned}$$
□

VÍ DỤ 3. Giải phương trình sau: $2^{x+1}+2^{x-2}=36$.
Lời giải.
$$\begin{aligned} & 2^{x+1}+2^{x-2}=36 \Leftrightarrow 2\cdot 2^x+\frac{2^x}{4}=36 \\ \Leftrightarrow\ & \frac{8\cdot 2^x+2^x}{4}=36 \Leftrightarrow 9\cdot 2^x=36\cdot 4 \\ \Leftrightarrow\ & 2^x=16 \Leftrightarrow 2^x=2^4 \Leftrightarrow x=4. \end{aligned}$$
Vậy phương trình có nghiệm: $x=1, x=2$. □

VÍ DỤ 4. Giải phương trình sau: $2.3^{x+1}-6\cdot 3^{x-1}-3^x=9$.
Lời giải.
$$\begin{aligned} 2.3^{x+1}-6\cdot 3^{x-1}-3^x=9 \quad & \Leftrightarrow \quad 6\cdot 3^x-2\cdot 3^x-3^x=9 \\ & \Leftrightarrow \quad 3\cdot 3^x=9 \Leftrightarrow 3^x=3 \Leftrightarrow x=1. \end{aligned}$$
□

VÍ DỤ 5. Giải phương trình sau: $2^{x^2-6}\cdot 3^{x^2-6}=\dfrac{1}{6^5}\cdot\left(6^{x-1}\right)^4$.
Lời giải.
$$\begin{aligned} & 2^{x^2-6}3^{x^2-6}=\frac{1}{6^5}\cdot\left(6^{x-1}\right)^4 \Leftrightarrow (2\cdot 3)^{x^2-6}=\frac{6^{4x-4}}{5} \\ \Leftrightarrow\ & 6^{x^2-6}=6^{4x-9} \Leftrightarrow x^2-6=4x-9 \\ \Leftrightarrow\ & x^2-4x+3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=3. \end{array}\right. \end{aligned}$$

VÍ DỤ 6. Giải phương trình sau: $2^{x^2-1}-3^{x^2}=3^{x^2-1}-2^{x^2+2}$.

Lời giải.

$$\begin{aligned}
&2^{x^2-1}-3^{x^2}=3^{x^2-1}-2^{x^2+2}\Leftrightarrow \frac{2^{x^2}}{2}-3^{x^2}=\frac{3^{x^2}}{3}-4\cdot 2^{x^2}\\
\Leftrightarrow\quad &2^{x^2}\cdot\left(\frac{1}{2}+4\right)=3^{x^2}\cdot\left(\frac{1}{3}+1\right)\Leftrightarrow 2^{x^2}\cdot\frac{9}{2}=3^{x^2}\cdot\left(\frac{4}{3}\right)\\
\Leftrightarrow\quad &\left(\frac{2}{3}\right)^{x^2}=\left(\frac{2}{3}\right)^{3}\Leftrightarrow x^2=3\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{3}.
\end{aligned}$$

□

2. Câu hỏi trắc nghiệm

CÂU 1. Tìm nghiệm của phương trình $3^{x-4}=\left(\frac{1}{9}\right)^{3x-1}$

(A) $\frac{1}{3}$. (B) 1. (C) $\frac{6}{7}$. (D) $\frac{7}{6}$.

Lời giải.

$$\begin{aligned}
&3^{x-4}=\left(\frac{1}{9}\right)^{3x-1}=3^{-2(3x-1)}\\
\Leftrightarrow\quad &x-4=-2(3x-1)\\
\Leftrightarrow\quad &7x=6\Leftrightarrow x=\frac{6}{7}.
\end{aligned}$$

Chọn đáp án (C) □

CÂU 2. Tìm nghiệm của phương trình $\left(\frac{1}{25}\right)^{x+1}=125^{2x}$.

(A) 1. (B) 4. (C) $-\frac{1}{4}$. (D) $-\frac{1}{8}$.

Lời giải.

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{25}\right)^{x+1}=125^{2x}\Leftrightarrow 5^{-2(x+1)}=5^{6x}\\
\Leftrightarrow\quad &-2(x+1)=6x\Leftrightarrow 4x=-1\Leftrightarrow x=-\frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

Chọn đáp án (C) □

CÂU 3. Tìm nghiệm của phương trình $8^{\frac{2x-1}{x+1}}=0,25\cdot(\sqrt{2})^x$.

(A) $x=\frac{15\pm\sqrt{217}}{2}$. (B) $x=\frac{17\pm\sqrt{215}}{2}$. (C) $x=15\pm\sqrt{217}$. (D) $x=17\pm\sqrt{215}$.

Lời giải.

$$\begin{aligned}
&8^{\frac{2x-1}{x+1}}=0,25\cdot(\sqrt{2})^x\Leftrightarrow 2^{\frac{3(2x-1)}{x+1}}=2^{-2}\cdot 2^{\frac{x}{2}}\\
\Leftrightarrow\quad &2^{\frac{3(2x-1)}{x+1}}=2^{\frac{x-4}{2}}\Leftrightarrow\frac{3(2x-1)}{x+1}=\frac{x-4}{2}\\
\Leftrightarrow\quad &6(2x-1)=(x+1)(x-4)\Leftrightarrow x^2-15x+2=0\Leftrightarrow x=\frac{15\pm\sqrt{217}}{2}.
\end{aligned}$$

Chọn đáp án (A) □

CÂU 4. Tìm nghiệm của phương trình $\frac{3^{2x-6}}{27}=\frac{1}{3^x}$.

(A) $x=5$. (B) $x=4$. (C) $x=3$. (D) $x=2$.

Lời giải.

Cách 1: $\frac{3^{2x-6}}{27}=\frac{1}{3^x}\Leftrightarrow 3^{2x-9}=3^{-x}\Leftrightarrow 2x-9=-x\Leftrightarrow x=3$.

Cách 2: Lần lượt thử các phương án vào phương trình đã cho, ta thấy $x=3$ thỏa mãn.

Chọn đáp án (C) □

CÂU 5. Tìm nghiệm của phương trình $2^x = (\sqrt{3})^x$.

Ⓐ $x = 3$. Ⓑ $x = 5$. Ⓒ $x = -1$. Ⓓ $x = 0$.

Lời giải.

Cách 1: $2^x = (\sqrt{3})^x \Leftrightarrow \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$.

Cách 2: Lần lượt thử các phương án vào phương trình đã cho, ta thấy $x = 0$ thỏa mãn.

Chọn đáp án Ⓓ □

CÂU 6. Tìm nghiệm của phương trình $(\sqrt{2}-1)^{x^2} = (\sqrt{2}+1)^{2x+1}$.

Ⓐ $x = -1$. Ⓑ $x = 1$. Ⓒ $x = -2$. Ⓓ $x = 2$.

Lời giải.

Cách 1:

$$\begin{aligned} & (\sqrt{2}-1)^{x^2} = (\sqrt{2}+1)^{2x+1} = (\sqrt{2}-1)^{-(2x+1)} \\ \Leftrightarrow\quad & x^2 = -(2x+1) \Leftrightarrow (x+1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -1. \end{aligned}$$

Cách 2: Lần lượt thử các phương án vào phương trình đã cho, ta thấy $x = -1$ thỏa mãn.

Chọn đáp án Ⓐ □

CÂU 7. Tìm nghiệm của phương trình $2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} = 21$.

Ⓐ $x = \log_3 2$. Ⓑ $x = \log_2 3$. Ⓒ $x = 2$. Ⓓ $x = 3$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} & 2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} = 21 \Leftrightarrow 2^x + 2\cdot 2^x + 4\cdot 2^x = 21 \\ \Leftrightarrow\quad & 7\cdot 2^x = 21 \Leftrightarrow 2^x = 3 \Leftrightarrow x = \log_2 3. \end{aligned}$$

Chọn đáp án Ⓑ □

CÂU 8. Tìm nghiệm của phương trình $\dfrac{2\cdot 3^x - 2^{x+2}}{3^x - 2^x} = 1$.

Ⓐ $x = \log_{\frac{2}{3}} 3$. Ⓑ $x = \log_{\frac{2}{3}} 2$. Ⓒ $x = \log_{\frac{3}{2}} 3$. Ⓓ $x = 1$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} & \frac{2\cdot 3^x - 2^{x+2}}{3^x - 2^x} = 1,\ (x \neq 0) \Leftrightarrow 2\cdot 3^x - 2^{x+2} = 3^x - 2^x \\ \Leftrightarrow\quad & 2\cdot 3^x - 4\cdot 2^x = 3^x - 2^x \Leftrightarrow 3^x = 3\cdot 2^x \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^x = 3 \Leftrightarrow x = \log_{\frac{3}{2}} 3. \end{aligned}$$

Chọn đáp án Ⓒ □

CÂU 9. Nghiệm của phương trình $\left(\frac{2}{3}\right)^{2x-1} = \left(\frac{9}{4}\right)^{2x+3}$ là

Ⓐ $x = -\frac{5}{6}$. Ⓑ $x = \frac{2}{3}$. Ⓒ $x = 3$. Ⓓ $x = \frac{5}{2}$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} & \left(\frac{2}{3}\right)^{2x-1} = \left(\frac{9}{4}\right)^{2x+3} \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{2x-1} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-4x-6} \\ \Leftrightarrow\quad & 2x - 1 = -4x - 6 \Leftrightarrow x = -\frac{5}{6}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án Ⓐ □

CÂU 10. Phương trình $0,125\cdot 4^{x+4} = \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^{-4x+2}$ có nghiệm là

Ⓐ $x = 2$. Ⓑ $x = 1$. Ⓒ $x = -2$. Ⓓ $x = -1$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} & 0,125\cdot 4^{x+4} = \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^{-4x+2} \Leftrightarrow \frac{1}{8}\cdot 2^{2x+8} = \frac{2^{-2x+1}}{2^{-8x+4}} \\ \Leftrightarrow\quad & 2^{2x+5} = 2^{6x-3} \Leftrightarrow 2x + 5 = 6x - 3 \Leftrightarrow x = 2. \end{aligned}$$

Chọn đáp án Ⓐ □

Dạng 23. Phương pháp đặt ẩn phụ

Phương pháp: $f\left[a^{g(x)}\right]=0,\ (0<a\neq 1)\Leftrightarrow\begin{cases}t=a^{g(x)}>0\\ f(t)=0.\end{cases}$

Ta thường gặp các dạng:

- $m.a^{2f(x)}+n\cdot a^{f(x)}+p=0.$
- $m.a^{f(x)}+n\cdot b^{f(x)}+p=0$, trong đó $a.b=1$. Đặt $t=a^{f(x)}(t>0)$, suy ra $b^{f(x)}=\dfrac{1}{t}$.
- $m.a^{2f(x)}+n\cdot(a\cdot b)^{f(x)}+p\cdot b^{2f(x)}=0$. Chia hai vế cho $b^{2f(x)}$ và đặt $t=\left(\dfrac{a}{b}\right)^{f(x)}>0$.

1. Các ví dụ

VÍ DỤ 1. Giải các phương trình sau: $3^{2x+8}-4\cdot 3^{x+5}+27=0$.

Lời giải.

$3^8\cdot 3^{2x}-4\cdot 3^5\cdot 3^x+27=0$

$\Leftrightarrow 6561\cdot(3^x)^2-972\cdot 3^x+27=0\quad(*)$.

Đặt $t=3^x>0$ (các em có thể đặt t = 3x+4).

Phương trình (*) $\Leftrightarrow 6561t^2-972t+27=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=\dfrac{1}{9}\\ t=\dfrac{1}{27}.\end{array}\right.$

Với $t=\dfrac{1}{9}\Leftrightarrow 3^x=3^{-2}\Leftrightarrow x=-2$.

Với $t=\dfrac{1}{27}\Leftrightarrow 3^x=3^{-3}\Leftrightarrow x=-3$.

Vậy phương trình có nghiệm: $x=-2, x=-3$. □

VÍ DỤ 2. Giải các phương trình sau: $25^x-2\cdot 5^x-15=0$.

Lời giải.

$25^x-2\cdot 5^x-15=0\Leftrightarrow(5^x)^2-2\cdot 5^x-15=0\quad(*)$.

Đặt $t=5^x>0$.

Phương trình (*) $\Leftrightarrow t^2-2t-15=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=5\\ t=-3\ \text{(loại)}.\end{array}\right.$

Với $t=5\Leftrightarrow 5^x=5\Leftrightarrow x=1$.

Vậy phương trình có nghiệm: $x=1$. □

VÍ DỤ 3. Giải các phương trình sau: $3^{x+2}-3^{2-x}=24$.

Lời giải.

$3^{x+2}-3^{2-x}=24\Leftrightarrow 9\cdot 3^x-\dfrac{9}{3^x}-24=0\Leftrightarrow 9\cdot(3^x)^2-24\cdot 3^x-9=0\quad(*)$.

Đặt $t=3^x>0$.

$(*)\Leftrightarrow 9t^2-24t-9=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=3\\ t=-\dfrac{1}{3}\ \text{(loại)}.\end{array}\right.$

Với $t=3\Leftrightarrow 3^x=3\Leftrightarrow x=1$.

Vậy phương trình có nghiệm: $x=1$. □

VÍ DỤ 4. Giải phương trình sau:

a) $6.9^x-13\cdot 6^x+6\cdot 4^x=0$.

b) $2.2^{2x}-9\cdot 14^x+7\cdot 7^{2x}=0$.

c) $25^x+10^x=2^{2x+1}$.

Lời giải.

a) $6.9^x-13\cdot 6^x+6\cdot 4^x=0\Leftrightarrow 6\cdot\left(\dfrac{3}{2}\right)^{2x}-13\cdot\left(\dfrac{3}{2}\right)^x+6=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left(\dfrac{3}{2}\right)^x=\dfrac{3}{2}\\ \left(\dfrac{3}{2}\right)^x=\dfrac{2}{3}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ x=-1.\end{array}\right.$

b) $2.2^{2x}-9\cdot 14^x+7\cdot 7^{2x}=0\Leftrightarrow 2-9\left(\dfrac{7}{2}\right)^x+7\cdot\left(\dfrac{7}{2}\right)^{2x}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left(\dfrac{7}{2}\right)^x=1\\ \left(\dfrac{7}{2}\right)^x=\dfrac{2}{7}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=-1.\end{array}\right.$

c) $25^x+10^x=2^{2x+1}\Leftrightarrow 25^x+10^x-2\cdot 4^x=0\Leftrightarrow\left(\dfrac{5}{2}\right)^{2x}+\left(\dfrac{5}{2}\right)^x-2=0\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\left(\dfrac{5}{2}\right)^x=1\\ \left(\dfrac{5}{2}\right)^x=-2(l)\end{array}\right.\Leftrightarrow x=0.$

□

VÍ DỤ 5. Giải phương trình sau: $(2+\sqrt{3})^x+(2-\sqrt{3})^x=4$.

Lời giải.

Để ý: $(2+\sqrt{3})\cdot(2-\sqrt{3})=1$.

Đặt $t=(2+\sqrt{3}),t>0\Rightarrow(2-\sqrt{3})^x=\left(\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}\right)^x=\dfrac{1}{(2+\sqrt{3})^x}=\dfrac{1}{t}$.

Ta có: $t+\dfrac{1}{t}=4\Leftrightarrow t^2-4t+1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=2+\sqrt{3}\\ t=2-\sqrt{3}\end{array}\right.\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}(2+\sqrt{3})^x=2+\sqrt{3}\\ (2+\sqrt{3})^x=2-\sqrt{3}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x=1\\ x=-1.\end{array}\right.$ □

2. Câu hỏi trắc nghiệm

CÂU 1. Tìm nghiệm của phương trình $9^x-3\cdot 3^x+2=0$.

(A) $\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=\log_2 3\end{array}\right.$. (B) $\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=\log_3 2\end{array}\right.$. (C) $\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=-\log_2 3\end{array}\right.$. (D) $\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=-\log_3 2\end{array}\right.$.

Lời giải.

$9^x-3\cdot 3^x+2=0\Leftrightarrow 3^{2x}-3\cdot 3^x+2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3^x=1\\ 3^x=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=\log_3 2.\end{array}\right.$

Chọn đáp án (B) □

CÂU 2. Biết phương trình $4^x-2^{x+1}-3=0$ có duy nhất một nghiệm là a. Tính $P=a\log_3 4+1$.

(A) $P=2$. (B) $P=4$. (C) $P=3$. (D) $P=5$.

Lời giải.

$4^x-2^{x+1}-3=0\Leftrightarrow 2^{2x}-2\cdot 2^x-3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2^x=-1\ (\text{vô nghiệm})\\ 2^x=3\end{array}\right.\Leftrightarrow x=\log_2 3.$

$\Rightarrow P=\log_2 3\cdot\log_3 4+1=\log_2 4+1=3.$

Chọn đáp án (C) □

CÂU 3. Cho phương trình $4^x+2^{x+1}-3=0$. Khi đặt $t=2^x$, ta được phương trình nào dưới đây?

(A) $2t^2-3=0$. (B) $t^2+t-3=0$. (C) $4t-3=0$. (D) $t^2+2t-3=0$.

Lời giải.

$4^x+2^{x+1}-3=0\Leftrightarrow 2^{2x}+2\cdot 2^x-3=0.$

Chọn đáp án (D) □

CÂU 4. Tìm nghiệm của phương trình $\mathrm{e}^{6x}-3\cdot\mathrm{e}^{3x}+2=0$

(A) $\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=\dfrac{1}{3}\ln 2\end{array}\right.$. (B) $\left[\begin{array}{l}x=-1\\ x=\dfrac{1}{3}\ln 2\end{array}\right.$. (C) $\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=-1\end{array}\right.$. (D) $\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=1\end{array}\right.$.

Lời giải.

$\mathrm{e}^{6x}-3\cdot\mathrm{e}^{3x}+2=0\Leftrightarrow\left(\mathrm{e}^{3x}\right)^2-3\cdot\mathrm{e}^{3x}+2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\mathrm{e}^{3x}=1\\ \mathrm{e}^{3x}=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3x=0\\ 3x=\log_e 2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=\dfrac{1}{3}\ln 2.\end{array}\right.$

Chọn đáp án (A) □

CÂU 5. Số nghiệm của phương trình $7^{2x+1}-8\cdot 7^x+1=0$ là

(A) 0. (B) 2. (C) 1. (D) 3.

Lời giải.

$7^{2x+1}-8\cdot 7^x+1=0\Leftrightarrow 7\cdot 7^x-8\cdot 7^x+1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}7^x=1\\ 7^x=\dfrac{1}{7}=7^{-1}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=-1\end{array}\right.$.

Chọn đáp án (B) □

CÂU 6. Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm thực của phương trình $(2+\sqrt{3})^x + 2(2-\sqrt{3})^x = 3$.
Tính $P = x_1 + x_2$.

(A) $P = \log_{2+\sqrt{3}} 2$. (B) $P = 0$. (C) $P = \log_{2-\sqrt{3}} 2$. (D) $P = 2$.

Lời giải.

Vì $(2+\sqrt{3})^x \cdot (2-\sqrt{3})^x = 1$, nên ta đặt $(2+\sqrt{3})^x = t \Rightarrow (2-\sqrt{3})^x = \dfrac{1}{t}$.

Thay vào phương trình ta được $t + 2\cdot\dfrac{1}{t} = 3 \Leftrightarrow t^2 - 3t + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=2 \end{array}\right.$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} (2+\sqrt{3})^x = 1 \\ (2+\sqrt{3})^x = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\log_{2+\sqrt{3}} 2 \end{array}\right. \Rightarrow P = \log_{2+\sqrt{3}} 2.$

Chọn đáp án (A) □

CÂU 7. Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm thực của phương trình $\left(5-\sqrt{21}\right)^x + 7\left(5+\sqrt{21}\right)^x = 2^{x+3}$.
Tính $P = x_1 + x_2$.

(A) $P = \log_{\frac{5+\sqrt{21}}{2}} 7$. (B) $P = -8$. (C) $P = 8$. (D) $P = \log_{\frac{5-\sqrt{21}}{2}} 7$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} & \left(5-\sqrt{21}\right)^x + 7\left(5+\sqrt{21}\right)^x = 2^{x+3} \\ \Leftrightarrow\ & \left(5-\sqrt{21}\right)^x + 7\left(5+\sqrt{21}\right)^x = 8\cdot 2^x \\ \Leftrightarrow\ & \left(\frac{5-\sqrt{21}}{2}\right)^x + 7\left(\frac{5+\sqrt{21}}{2}\right)^x = 8. \end{aligned}$$

Đặt $\left(\dfrac{5-\sqrt{21}}{2}\right)^x = t (t>0) \Rightarrow \left(\dfrac{5+\sqrt{21}}{2}\right)^x = \dfrac{1}{t}$.

Thay vào phương trình, ta được $t + 7\cdot\dfrac{1}{t} = 8 \Leftrightarrow t^2 - 8t + 7 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=7 \end{array}\right.$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \left(\dfrac{5-\sqrt{21}}{2}\right)^x = 1 \\ \left(\dfrac{5-\sqrt{21}}{2}\right)^x = 7 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\log_{\frac{5-\sqrt{21}}{2}} 7 \end{array}\right. \Rightarrow P = \log_{\frac{5-\sqrt{21}}{2}} 7.$

Chọn đáp án (D) □

CÂU 8. Số nghiệm của phương trình $6.9^{\frac{1}{x}} - 13\cdot 6^{\frac{1}{x}} + 6\cdot 4^{\frac{1}{x}} = 0$ là

(A) 3. (B) 2. (C) 1. (D) 0.

Lời giải.

$$\begin{aligned} & 6.9^{\frac{1}{x}} - 13\cdot 6^{\frac{1}{x}} + 6\cdot 4^{\frac{1}{x}} = 0,\ (x\neq 0) \\ \Leftrightarrow\ & 6\cdot\frac{9^{\frac{1}{x}}}{4^{\frac{1}{x}}} - 13\cdot\frac{6^{\frac{1}{x}}}{4^{\frac{1}{x}}} + 6 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & 6\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{2\cdot\frac{1}{x}} - 13\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x}} + 6 = 0. \end{aligned}$$

Đặt $\left(\dfrac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = t,\ (t>0)$.

Thay vào phương trình ta được: $6t^2 - 13t + 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\dfrac{3}{2} \\ t=\dfrac{2}{3}. \end{array}\right.$

Với 2 giá trị của t thay vào $\left(\dfrac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = t$ ta được 2 giá trị của x.

Chọn đáp án (B) □

CÂU 9. Số nghiệm của phương trình $3.8^x + 4\cdot 12^x - 18^x - 2\cdot 27^x = 0$ là

(A) 1. (B) 2. (C) 0. (D) 3.

Lời giải.

$3.8^x+4\cdot 12^x-18^x-2\cdot 27^x=0 \Leftrightarrow 3+4\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^x-\left(\frac{3}{2}\right)^{2x}-2\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{3x}=0.$

Đặt $\left(\frac{3}{2}\right)^x=t,\ (t>0)$.

Thay vào phương trình, ta được:

$2t^3+t^2-4t-3=0 \Leftrightarrow (t+1)\left(2t^2-t-3\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-1 \text{ (loại)} \\ t=\frac{3}{2}. \end{array}\right.$

Với $t=\frac{3}{2} \Rightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^x=\frac{3}{2} \Leftrightarrow x=1.$

Chọn đáp án (A) □

CÂU 10. Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình: $2^{2x^4+4x^2-6}-2\cdot 2^{x^4+2x^2-3}+1=0$.
Tính $P=x_1\cdot x_2$.

(A) $P=-9$. **(B)** $P=-1$. **(C)** $P=1$. **(D)** $P=9$.

Lời giải.

Đặt $2^{x^4+2x^2-3}=t,\ (t>0)$.
Thay vào phương trình, ta được: $t^2-2t+1=0 \Leftrightarrow t=1$.
Với $t=1$, ta có: $2^{x^4+2x^2-3}=1 \Leftrightarrow x^4+2x^2-3=0 \Leftrightarrow x^2=1 \Leftrightarrow x=\pm 1$
$\Rightarrow P=(-1)\cdot 1=-1$.
Chọn đáp án (B) □

CÂU 11. Tìm nghiệm của phương trình $2.2^{\sin^2 x}-2^{\cos^2 x}-3=0$.

(A) $x=(2k+1)\pi$. **(B)** $x=\frac{\pi}{2}+k2\pi$. **(C)** $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$. **(D)** $x=k\pi$.

Lời giải.

$2.2^{\sin^2 x}-2^{\cos^2 x}-3=0 \Leftrightarrow 2\cdot 2^{\sin^2 x}-2^{1-\sin^2 x}-3=0 \Leftrightarrow 2\cdot 2^{\sin^2 x}-\frac{2}{2^{\sin^2 x}}-3=0.$

Đặt $2^{\sin^2 x}=t(t>0)$.

Thay vào phương trình ta được $2t^2-3t-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-\frac{1}{2} \text{ (loại)} \\ t=2. \end{array}\right.$

Với $t=2 \Rightarrow 2^{\sin^2 x}=2 \Leftrightarrow \sin^2 x=1 \Leftrightarrow \sin x=\pm 1 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi.$

Chọn đáp án (C) □

CÂU 12. Tìm nghiệm của phương trình: $4^{x^2-x}+2^{x^2-x+1}=3$.

(A) $\left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=2 \end{array}\right.$. **(B)** $\left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=1 \end{array}\right.$. **(C)** $\left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \end{array}\right.$. **(D)** $\left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-1 \end{array}\right.$.

Lời giải.

Cách 1: $4^{x^2-x}+2^{x^2-x+1}=3 \Leftrightarrow 2^{2\left(x^2-x\right)}+2^{x^2-x+1}-3=0$
$\Leftrightarrow 2^{x^2-x}=1 \Leftrightarrow x^2-x=0 \Leftrightarrow x=0, x=1.$
Cách 2: lần lượt thử các giá trị của x, ta thấy $x=0, x=1$ thỏa mãn.
Chọn đáp án (C) □

CÂU 13. Cho phương trình $3^{1+x}+3^{1-x}=10$. Khẳng định nào dưới dây là đúng?

(A) Phương trình có hai nghiệm âm. **(B)** Phương trình vô nghiệm.
(C) Phương trình có hai nghiệm dương. **(D)** Phương trình có hai nghiệm trái dấu.

Lời giải.

$3^{1+x}+3^{1-x}=10 \Leftrightarrow 3\cdot 3^x+\frac{3}{3^x}-10=0 \Leftrightarrow 3\cdot 3^{2x}-10\cdot 3^x+3=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3^x=3 \\ 3^x=\frac{1}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-1 \end{array}\right.$.

Chọn đáp án (D) □

CÂU 14. Tìm nghiệm của phương trình $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3x}-2\cdot 4^x-3(\sqrt{2})^{2x}=0$.

(A) $x=-1$. **(B)** $x=\log_2 5$. **(C)** $x=0$. **(D)** $x=\log_2 3$.

Lời giải.

$\left(\frac{1}{2}\right)^{-3x}-2\cdot 4^x-3(\sqrt{2})^{2x}=0 \Leftrightarrow 2^{3x}-2\cdot 2^{2x}-3\cdot 2^x=0 \Leftrightarrow 2^x=3 \Leftrightarrow x=\log_2 3.$

Chọn đáp án (D) □

CÂU 15. Số nghiệm của phương trình $4^{2x^2}-2\cdot 4^{x^2+x}+4^{2x}=0$ là

Ⓐ 3. Ⓑ 2. Ⓒ 1. Ⓓ 4.

Lời giải.

$4^{2x^2}-2\cdot 4^{x^2+x}+4^{2x}=0\Leftrightarrow \dfrac{4^{2x^2}}{4^{2x}}-2\cdot\dfrac{4^{x^2+x}}{4^{2x}}+1=0$

$\Leftrightarrow 4^{2\left(x^2-x\right)}-2\cdot 4^{x^2-x}+1=0\Leftrightarrow 4^{x^2-x}=1\Leftrightarrow x^2-x=0\Leftrightarrow x=0,x=1.$

Chọn đáp án Ⓑ □

CÂU 16. Tích các nghiệm thực của phương trình $2^{2x^4+2x^2-4}-2^{x^4+x^2-1}+1=0$ là

Ⓐ -3. Ⓑ -1. Ⓒ 2. Ⓓ 3.

Lời giải.

Cách 1: $2^{2x^4+2x^2-4}-2^{x^4+x^2-1}+1=0\Leftrightarrow 2^{2\left(x^4+x^2+1\right)-2}-2^{x^4+x^2-1}+1=0\quad(1).$

Đặt $2^{x^4+x^2-1}=t$, $(t>0)$

$(1)\Leftrightarrow\dfrac{t^2}{4}-t+1=0\Leftrightarrow t=2$

$\Rightarrow 2^{x^4+x^2-1}=2\Leftrightarrow x^4+x^2-1=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2=1\\x^2=-2\end{array}\right.\Leftrightarrow x=\pm1$

$\Rightarrow x_1x_2=-1.$

Chọn đáp án Ⓑ □

CÂU 17. Số nghiệm của phương trình $12\cdot 9^x-35\cdot 6^x+18\cdot 4^x=0$ là

Ⓐ 0. Ⓑ 3. Ⓒ 1. Ⓓ 2.

Lời giải.

Cách 1: $12\cdot 9^x-35\cdot 6^x+18\cdot 4^x=0\Leftrightarrow 12\cdot\left(\dfrac{9}{4}\right)^x-35\cdot\left(\dfrac{3}{2}\right)^x+18=0\quad(1)$. Đặt $\left(\dfrac{3}{2}\right)^x=t$, $(t>0)$

$(1)\Leftrightarrow 12t^2-35t+18=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=\dfrac{9}{4}\\t=\dfrac{2}{3}\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\left(\dfrac{3}{2}\right)^x=\dfrac{9}{4}\\\left(\dfrac{3}{2}\right)^x=\dfrac{2}{3}\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\x=-1\end{array}\right.$. Phương trình có 2 nghiệm.

Chọn đáp án Ⓓ □

CÂU 18. Phương trình $\left(3+2\sqrt{2}\right)^x+\left(3-2\sqrt{2}\right)^x=6$ có nghiệm là

Ⓐ $x=\pm1$. Ⓑ $x=\pm3$.

Ⓒ $x=\pm2$. Ⓓ Phương trình vô nghiệm.

Lời giải.

$\left(3+2\sqrt{2}\right)^x+\left(3-2\sqrt{2}\right)^x=6.$

Ta có $\left(3+2\sqrt{2}\right)\left(3-2\sqrt{2}\right)=9-8=1\Rightarrow\left(3-2\sqrt{2}\right)=\dfrac{1}{3+2\sqrt{2}}=\left(3+2\sqrt{2}\right)^{-1}.$

Đặt $\left(3+2\sqrt{2}\right)^x=t(t>0)\Rightarrow\left(3-2\sqrt{2}\right)^x=\dfrac{1}{t}.$

Phương trình trở thành $t+\dfrac{1}{t}-6=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}t=3-2\sqrt{2}\\t=3+2\sqrt{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=1.\end{array}\right.$

Chọn đáp án Ⓐ □

CÂU 19. Gọi x_1,x_2 là 2 nghiệm của phương trình $4^x-3\cdot 2^x+2=0$ với $x_1<x_2$. Tính giá trị $P=2x_2-x_1$.

Ⓐ $P=3$. Ⓑ $P=1$. Ⓒ $P=2$. Ⓓ $P=-1$.

Lời giải.

Cách 1. Đặt $2^x=t(t>0)\Rightarrow 4^x=t^2$.

Phương trình trở thành $t^2-3t+2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=2\\t=1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=0\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x_2=1\\x_1=0\end{array}\right.\Rightarrow P=2.$

Chọn đáp án Ⓒ □

CÂU 20. Phương trình $3^{2x+1}-4\cdot 3^x+1=0$ có hai nghiệm x_1, x_2 trong đó $x_1<x_2$, chọn phát biểu đúng?

Ⓐ $x_1+x_2=-2$. Ⓑ $x_1x_2=-1$. Ⓒ $2x_1+x_2=0$. Ⓓ $x_1+2x_1=-1$.

Lời giải.

$3^{2x+1}-4\cdot 3^x+1=0\Leftrightarrow 3\cdot 3^{2x}-4\cdot 3^x+1=0.$

Đặt $3^x=t$ $(t>0)\Rightarrow 3^{2x}=t^2.$

Phương trình trở thành $3t^2-4t+1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=\dfrac{1}{3}. \end{array}\right.$

Khi đó $\left[\begin{array}{l} 3^x=1 \\ 3^x=\dfrac{1}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=-1 \\ x_2=0. \end{array}\right.$

Học sinh có thể dùng máy tính giải ra nghiệm.

Chọn đáp án (D) □

CÂU 21. Cho phương trình $5^{x+1}+5^{1-x}=12$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

(A) Phương trình có một nghiệm âm và một nghiệm dương.

(B) Phương trình có hai nghiệm âm.

(C) Phương trình vô nghiệm.

(D) Phương trình có hai nghiệm dương.

Lời giải.

$5^{1+x}+5^{1-x}=12 \Leftrightarrow 5\cdot 5^x+\dfrac{5}{5^x}=12.$

Đặt $5^x=t$ $(t>0)$.

Phương trình trở thành $5t+\dfrac{5}{t}-12=0 \Leftrightarrow 5t^2-12t+5=0 \Leftrightarrow t=\dfrac{6\pm\sqrt{11}}{6}.$

Khi đó $\left[\begin{array}{l} 5^x=\dfrac{6+\sqrt{11}}{6} \\ 5^x=\dfrac{6-\sqrt{11}}{6} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\log_5\dfrac{6+\sqrt{11}}{6}>0 \\ x=\log_5\dfrac{6-\sqrt{11}}{6}<0. \end{array}\right.$

Chọn đáp án (A) □

CÂU 22. Nghiệm của phương trình $5^{1+x^2}-5^{1-x^2}=24$ đồng thời cũng là nghiệm của phương trình nào sau đây?

(A) $x^2+5x-6=0$. (B) $x^4+3x^2-4=0$. (C) $\sin^2 x+2\sin x-3=0$. (D) $x^2+1=0$.

Lời giải.

$5\cdot 5^{x^2}-\dfrac{5}{5^{x^2}}-24=0 \Leftrightarrow 5\cdot 5^{2x^2}-24\cdot 5^x-5=0.$

Đặt $t=5^{x^2}$ $(t\geq 1)$.

Phương trình trở thành $5t^2-24t-5=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=5 \\ t=-\dfrac{1}{5}\text{ (loại)}. \end{array}\right.$

Với $t=5 \Rightarrow 5^{x^2}=5 \Leftrightarrow x^2=1 \Leftrightarrow x=\pm 1$.

Chọn đáp án (B) □

CÂU 23. Phương trình $3^{1-x}=2+\left(\dfrac{1}{9}\right)^x$ có bao nhiêu nghiệm âm?

(A) 3. (B) 1. (C) 2. (D) 0.

Lời giải.

$3^{1-x}=2+\left(\dfrac{1}{9}\right)^x \Leftrightarrow \dfrac{3}{3^x}=2+\left(\dfrac{1}{9}\right)^x \Leftrightarrow 3\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^x=2+\left(\dfrac{1}{3}\right)^{2x}.$

Đặt $t=\left(\dfrac{1}{3}\right)^x$ $(t>0)$.

Phương trình trở thành $3t=2+t^2 \Leftrightarrow t^2-3t+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=2. \end{array}\right.$

Với $t=1 \Rightarrow \left(\dfrac{1}{3}\right)^x=1 \Leftrightarrow x=0$.

Với $t=2 \Rightarrow \left(\dfrac{1}{3}\right)^x=2 \Leftrightarrow x=\log_{\frac{1}{3}} 2$.

Chọn đáp án (B) □

CÂU 24. Số nghiệm của phương trình $9^{\frac{x}{2}}+9\cdot\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^{2x+2}-4=0$ là

(A) 2. (B) 4. (C) 1. (D) 0.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}
9^{\frac{x}{2}}+9\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{2x+2}-4=0 &\Leftrightarrow 3^x+9\left(\frac{1}{3}\right)^{x+1}-4=0\\
&\Leftrightarrow 3^x+9\left(\frac{1}{3}\right)^{x+1}-4=0\\
&\Leftrightarrow 3^x+3\cdot\frac{1}{3^x}-4=0\\
&\Leftrightarrow 3^{2x}-4\cdot 3^x+3=0.
\end{aligned}$$

Đặt $t=3^x$ $(t>0)$.

Phương trình trở thành $t^2-4t+3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1\\ t=3.\end{array}\right.$

Với $t=1 \Rightarrow 3^x=1 \Leftrightarrow x=0$.
Với $t=3 \Rightarrow 3^x=3 \Leftrightarrow x=1$.
Vậy phương trình có nghiệm $x=0$, $x=1$.
Chọn đáp án (A) □

CÂU 25. Tổng lập phương các nghiệm của phương trình $2^x+2\cdot 3^x-6^x=2$ là

(A) $2\sqrt{2}$. (B) 25. (C) 7. (D) 1.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}
2^x-6^x=2-2\cdot 3^x &\Leftrightarrow 2^x\left(1-3^x\right)=2\left(1-3^x\right)\\
&\Leftrightarrow \left(1-3^x\right)\left(2^x-2\right)=0\\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3^x=1\\ 2^x=2\end{array}\right.\\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0\\ x=1.\end{array}\right.
\end{aligned}$$

Vậy phương trình có hai nghiệm $x=0$, $x=1$.
Chọn đáp án (D) □

Dạng 24. Logarit 2 vế

VÍ DỤ 1. Giải phương trình sau: $8^x\cdot 5^{x^2-1}=\dfrac{1}{8}$.

Lời giải.

Lấy logarit hai vế với cơ số 8, ta được:

$$\begin{aligned}
8^x\cdot 5^{x^2-1}=\frac{1}{8} &\Leftrightarrow \log_8(8^x\cdot 5^{x^2-1})=\log_8(\frac{1}{8})\\
&\Leftrightarrow \log_8 8^x+\log_8 5^{x^2-1}=\log_8 8^{-1}\\
&\Leftrightarrow x+\left(x^2-1\right)\log_8 5=-1\\
&\Leftrightarrow x+1+\left(x^2-1\right)\log_8 5=0\\
&\Leftrightarrow (x+1)+(x+1)(x-1)\log_8 5=0\\
&\Leftrightarrow (x+1)\left[1+(x-1)\log_8 5\right]=0\\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+1=0\\ 1+(x-1)\log_8 5=0\end{array}\right.\\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1\\ x\cdot\log_8 5=\log_8 5-1\end{array}\right.\\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1\\ x=1-\log_5 8.\end{array}\right.
\end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm: $x=-1$, $x=1-\log_5 8$. □

VÍ DỤ 2. Giải phương trình sau: $3^x\cdot 2^{x^2}=1$.

Lời giải.

Lấy logarit hai vế với cơ số 3, ta được:

$$\begin{aligned} 3^x\cdot 2^{x^2}=1 &\Leftrightarrow \log_3(3^x\cdot 2^{x^2})=\log_3 1\\ &\Leftrightarrow x+x^2\log_3 2=0\\ &\Leftrightarrow x(1+x\log_3 2)=0\\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0\\ 1+x\log_3 2=0\end{array}\right.\\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0\\ x=-\dfrac{1}{\log_3 2}\end{array}\right.\\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0\\ x=-\log_2 3.\end{array}\right.\end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm: $x=0$, $x=-\log_2 3$. □

1. Câu hỏi trắc nghiệm

CÂU 1. Tìm nghiệm của phương trình $5^{x-2}\cdot 8^{\frac{x-1}{x}}=20$.

Ⓐ $\left[\begin{array}{l} x=2\\ x=-\log_2 5\end{array}\right.$. Ⓑ $\left[\begin{array}{l} x=3\\ x=-\log_5 2\end{array}\right.$. Ⓒ $\left[\begin{array}{l} x=2\\ x=-\log_5 3\end{array}\right.$. Ⓓ $\left[\begin{array}{l} x=3\\ x=\log_5 3\end{array}\right.$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} 5^{x-2}\cdot 8^{\frac{x-1}{x}}=20 &\Leftrightarrow 5^{x-2}\cdot 2^{\frac{3\cdot(x-1)}{x}}=5\cdot 2^2\\ &\Leftrightarrow 5^{x-3}\cdot 2^{\frac{x-3}{x}}=1\\ &\Leftrightarrow \log_5\left(5^{x-3}\cdot 2^{\frac{x-3}{x}}\right)=\log_5 1\\ &\Leftrightarrow \log_5 5^{x-3}+\log_5 2^{\frac{x-3}{x}}=0\\ &\Leftrightarrow x-3+\frac{x-3}{x}\log_5 2=0\\ &\Leftrightarrow (x-3)\left(1+\frac{1}{x}\log_5 2\right)=0\\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3\\ x=-\log_5 2.\end{array}\right.\end{aligned}$$

Chọn đáp án Ⓑ □

CÂU 2. Tìm nghiệm của phương trình $3^{x-1}\cdot 5^{\frac{2x-2}{x}}=15$.

Ⓐ $x=1$. Ⓑ $\left[\begin{array}{l} x=2\\ x=-\log_5 3\end{array}\right.$. Ⓒ $x=4$. Ⓓ $\left[\begin{array}{l} x=3\\ x=\log_3 5\end{array}\right.$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} 3^{x-1}\cdot 5^{\frac{2x-2}{x}}=15 &\Leftrightarrow 3^{x-2}\cdot 5^{\frac{x-2}{x}}=1\\ &\Leftrightarrow \log_5\left(3^{x-2}\cdot 5^{\frac{x-2}{x}}\right)=\log_5 1\\ &\Leftrightarrow \log_5 3^{x-2}+\log_5 5^{\frac{x-2}{x}}=0\\ &\Leftrightarrow (x-2)\log_5 3+\frac{x-2}{x}=0\\ &\Leftrightarrow (x-2)\left(\log_5 3+\frac{1}{x}\right)=0\\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2\\ x=-\log_3 5.\end{array}\right.\end{aligned}$$

Chọn đáp án Ⓑ □

CÂU 3. Phương trình $2^x\cdot 3^{\frac{2x-1}{x}}=6$ có một nghiệm dạng $x=-\log_a b$, với a, b là các số nguyên dương lớn hơn 1 và nhỏ hơn 8. Khi đó $P=a+2b$ có giá trị bằng

Ⓐ 9. Ⓑ 6. Ⓒ 7. Ⓓ 8.

Lời giải.

$2^x \cdot 3^{\frac{2x-1}{x}} = 6 \Leftrightarrow \log_2 2^x + \log_2 3^{\frac{2x-1}{x}} = \log_2 6$.
Điều kiện: $x \neq 0$.
Khi đó phương trình tương đương

$$\begin{aligned} x + \frac{2x-1}{x}\log_2 3 = 1 + \log_2 3 &\Leftrightarrow (x-1)\left(1 + \frac{\log_2 3}{x}\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ 1 + \dfrac{\log_2 3}{x} = 0 \end{array}\right. \\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -\log_2 3. \end{array}\right. \end{aligned}$$

Suy ra $\begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \end{cases} \Rightarrow P = 8$.

Chọn đáp án D □

CÂU 4. Phương trình $3^x \cdot 5^{\frac{2x-2}{x}} = 45$ có một nghiệm dạng $x = -\log_a b$, với a, b là các số nguyên dương lớn hơn 1 và nhỏ hơn 6. Khi đó $P = 2a - b$ có giá trị bằng

A 7. **B** -1. **C** 1. **D** 2.

Lời giải.

$$\begin{aligned} 3^x \cdot 5^{\frac{2x-2}{x}} = 45 &\Leftrightarrow \log_3 3^x + \log_3 5^{\frac{2x-2}{x}} = \log_3 9 + \log_3 5 \\ &\Leftrightarrow x - 2 + \left(\frac{2x-2}{x} - 1\right)\log_3 5 = 0 \\ &\Leftrightarrow x - 2 + \frac{x-2}{x}\log_3 5 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-2)\left(1 + \frac{\log_3 5}{x}\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = -\log_3 5. \end{array}\right. \end{aligned}$$

Suy ra $\begin{cases} a = 3 \\ b = 5 \end{cases} \Rightarrow P = 2 \cdot 3 - 5 = 1$.

Chọn đáp án C □

Dạng 25. Bài toán chứa tham số

1. Các ví dụ

VÍ DỤ 1. Tìm m để phương trình $4^x - m \cdot 2^x + 2m = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + x_2 = 3$.

A $m = 4$. **B** $m = 2$. **C** $m = 1$. **D** $m = 3$.

Lời giải.

$4^x - m \cdot 2^x + 2m = 0 \Leftrightarrow 2^{2x} - m \cdot 2^x + 2m = 0$.
Đặt $2^x = t$, $t > 0$. Khi đó phương trình trở thành $t^2 - mt + 2m = 0 \quad (*)$.
Để phương trình đã cho có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + x_2 = 3$ thì phương trình $(*)$ phải có hai nghiệm thực dương t_1, t_2 thỏa mãn $t_1 \cdot t_2 = 2^{x_1} \cdot 2^{x_2} = 2^{x_1+x_2} = 2^3 = 8$. Khi đó

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ S > 0 \\ P = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 2m > 0 \\ 2m > 0 \\ 2m = 8 \end{cases} \Leftrightarrow m = 4.$$

Chọn đáp án A □

VÍ DỤ 2. Tìm m để phương trình sau có 2 nghiệm phân biệt: $5^{2x} - 2 \cdot 5^x + m = 0$.

A $m > 0$. **B** $m = 1$. **C** $0 < m < 1$. **D** $m < 1$.

Lời giải.

Cách 1: $5^{2x} - 2 \cdot 5^x + m = 0 \Leftrightarrow 5^{2x} - 2 \cdot 5^x = -m \quad (1)$.
Đặt $5^x = t$, $t > 0$. Phương trình trở thành $t^2 - 2t = -m \quad (2)$.
Phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình (2) có hai nghiệm dương phân biệt.

Khi đó đồ thị hàm số $f(t) = t^2 - 2t$, $t > 0$ và đường thẳng $y = -m$ có hai giao điểm phân biệt.
Xét $f(t) = t^2 - 2t$, $t \in (0; +\infty)$:
$f'(t) = 2t - 2 = 0 \Leftrightarrow t = 1$.
Bảng biến thiên:

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta thấy phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow -1 < -m < 0 \Leftrightarrow 0 < m < 1$.
Cách 2: Đặt $5^x = t$, $t > 0$. Phương trình trở thành $t^2 - 2t + m = 0 \quad (3)$.
Phương trình đã cho có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình (3) có hai nghiệm dương phân biệt.
Khi đó

$$\begin{cases} \Delta' > 0 \\ S = -\dfrac{b}{a} > 0 \\ P = \dfrac{c}{a} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 1 - m > 0 \\ 1 > 0 \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < 1.$$

Chọn đáp án (C) □

VÍ DỤ 3. Tìm m để tập nghiệm của phương trình sau có đúng 3 phần tử: $3^{2x^2} - 3^{x^2+2} + m + 4 = 0$.

A $m = 2$. **B** $2 < m < 4$. **C** $m > 4$. **D** $m = 4$.

Lời giải.

$3^{2x^2} - 3^{x^2+2} + m + 4 = 0 \Leftrightarrow 3^{2x^2} - 9 \cdot 3^{x^2} + m + 4 = 0 \quad (1)$.
Đặt $3^{x^2} = t$, vì $x^2 \geq 0$, $\forall x \Rightarrow 3^{x^2} \geq 3^{\circ} = 1$, $\forall x \Rightarrow t \geq 1$.
Phương trình trở thành $t^2 - 9t + m + 4 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 9t = -m - 4$.
Xét $f(t) = t^2 - 9t$, $t \in [1; +\infty)$:
$f'(t) = 2t - 9 \Leftrightarrow t = \dfrac{9}{2}$.
Bảng biến thiên:

x	1		$\frac{9}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\dfrac{81}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

Với $t = 1 \Rightarrow$ phương trình (1) có 1 nghiệm $x = 0$.
Với mỗi nghiệm $t > 1$ sẽ sinh ra 2 nghiệm phân biệt khác 0 của phương trình (1).
Phương trình (1) có đúng 3 nghiệm $\Leftrightarrow -m - 4 = -8 \Leftrightarrow m = 4$.
Chọn đáp án (D) □

VÍ DỤ 4. Tìm tất cả giá trị của tham số m để phương trình: $4^x - 2^{x+1} + m = 0$ có hai nghiệm trái dấu.

A $m < 0$. **B** $0 < m < 1$. **C** $-1 < m < 0$. **D** $m = 1$.

Lời giải.

$4^x - 2^{x+1} + m = 0 \Leftrightarrow 2^{2x} - 2 \cdot 2^x + m = 0 \quad (1)$.
Đặt $2^x = t$, $t > 0$.
Phương trình trở thành $t^2 - 2t + m = 0 \quad (2)$.
Phương trình (1) có hai nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow$ Phương trình (2) có 2 nghiệm t_1, t_2 thỏa mãn $0 < t_1 < 1 < t_2$.
Cách 1: (2) $\Leftrightarrow t^2 - 2t = -m$.
Xét $f(t) = t^2 - 2t$, $t \in (0; +\infty)$:
$f'(t) = 2t - 2 = 0 \Leftrightarrow t = 1$.
Bảng biến thiên:

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta thấy phương trình (2) có hai nghiệm t_1, t_2 thỏa mãn $0 < t_1 < 1 < t_2$ khi và chỉ khi $-1 < -m < 0 \Leftrightarrow 0 < m < 1$.

Cách 2: Để (2) có hai nghiệm t_1, t_2 thỏa mãn $0 < t_1 < 1 < t_2$ thì

$$\begin{aligned}\begin{cases}0 < t_1 < t_2\\ t_1 - 1 < 0 < t_2 - 1\end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases}0 < t_1 < t_2\\ (t_1 - 1)(t_2 - 1) < 0\end{cases}\\ &\Leftrightarrow \begin{cases}0 < t_1 < t_2\\ t_1 \cdot t_2 - (t_1 + t_2) + 1 < 0\end{cases}\\ &\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta' = 1 - m > 0\\ S = 2 > 0\\ P = m > 0\\ m - 2 + 1 < 0\end{cases}\\ &\Leftrightarrow \begin{cases}m < 1\\ m > 0\\ m < 1\end{cases}\\ &\Leftrightarrow 0 < m < 1.\end{aligned}$$

Chọn đáp án (B) □

2. Câu hỏi trắc nghiệm

CÂU 1. Tìm tất cả các giá trị thực của m để phương trình $3^x = m$ có nghiệm thực.

(A) $m \geq 1$. (B) $m \geq 0$. (C) $m > 0$. (D) $m \neq 0$.

Lời giải.

Ta có $3^x > 0$, $\forall x$ nên phương trình $3^x = m$ có nghiệm thực khi và chỉ khi $m > 0$.

Chọn đáp án (C) □

CÂU 2. Tìm m để phương trình $4^x - m \cdot 2^x + 2m - 5 = 0$ có hai nghiệm trái dấu.

(A) $m > \dfrac{5}{3}$. (B) $\dfrac{2}{5} < m < \dfrac{5}{2}$. (C) $m > 0$. (D) $\dfrac{5}{2} < m < 4$.

Lời giải.

$4^x - m \cdot 2^x + 2m - 5 = 0 \Leftrightarrow 2^{2x} - m \cdot 2^x + 2m - 5 = 0$.

Đặt $2^x = t$, $t > 0$.

Khi đó phương trình trở thành $t^2 - mt + 2m - 5 = 0 \quad (*)$.

Để phương trình đã cho có hai nghiệm x_1, x_2 trái dấu thì phương trình $(*)$ phải có hai nghiệm thực dương t_1, t_2 thỏa mãn $t_1 < 1 < t_2 \Leftrightarrow \begin{cases}t_1 < 1\\ t_2 > 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}t_1 - 1 < 0\\ t_2 - 1 > 0\end{cases} \Leftrightarrow (t_1 - 1)(t_2 - 1) < 0$.

(x_1, x_2 trái dấu tức $x_1 < 0 < x_2 \Rightarrow 2^{x_1} < 2^0 < 2^{x_2} \Leftrightarrow t_1 < 1 < t_2$)

Khi đó

$$\begin{cases}\Delta > 0\\ S = -\dfrac{b}{a} > 0\\ P = \dfrac{c}{a} > 0\\ (t_1 - 1)(t_2 - 1) < 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m^2 - 4(2m - 5) > 0\\ m > 0\\ m > \dfrac{5}{2}\\ m - (2m - 5) - 1 > 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m^2 - 8m + 20 > 0\\ m > 0\\ m > \dfrac{5}{2}\\ m - (2m - 5) - 1 > 0\end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{5}{2} < m < 4.$$

Chọn đáp án (D) □

CÂU 3. Tìm m để phương trình $9^x - 2 \cdot 3^{x+1} + m = 0$ có hai nghiệm thực x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + x_2 = 1$.

(A) $m = 3$. (B) $m = -3$. (C) $m = 1$. (D) $m = 6$.

Lời giải.

$9^x - 2 \cdot 3^{x+1} + m = 0 \Leftrightarrow 3^{2x} - 6 \cdot 3^x + m = 0 \quad (1)$.

Đặt $3^x = t$, $t > 0$.

Khi đó phương trình trở thành $t^2 - 6t + m = 0 \quad (2)$.

Để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình (2) có 2 nghiệm dương phân biệt.
Khi đó
$$\begin{cases} \Delta' = 9 - m > 0 \\ S = \dfrac{-b}{a} = 6 > 0 \\ P = \dfrac{c}{a} = m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < 9.$$

Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình (1) $\Rightarrow t_1 = 3^{x_1}$, $t_2 = 3^{x_2}$ là hai nghiệm của phương trình (2).
Theo đề bài có $x_1 + x_2 = 1 \Leftrightarrow 3^{x_1+x_2} = 3 \Leftrightarrow 3^{x_1} \cdot 3^{x_2} = 3 \Rightarrow t_1 \cdot t_2 = 3 \Leftrightarrow m = 3$ (thỏa mãn).
Chọn đáp án (A) □

CÂU 4. Phương trình $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{2x+4m} = \left(\dfrac{9}{4}\right)^{x}$ (m là tham số) có nghiệm là

A $x = 2m$. **B** $x = -m$. **C** $x = m$. **D** $x = 2m - 1$.

Lời giải.

Cách 1: $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{2x+4m} = \left(\dfrac{9}{4}\right)^{x} \Leftrightarrow \left(\dfrac{2}{3}\right)^{2x+4m} = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{-2x} \Leftrightarrow 2x + 4m = -2x \Leftrightarrow x = -m$.

Cách 2: Cho $m = 2$ ta được phương trình $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{2x+8} = \left(\dfrac{9}{4}\right)^{x}$ và 4 phương án: $x = 4$, $x = -2$, $x = 2$, $x = 3$.

Thử từng phương án ta được $x = -2$. Chọn $x = -m$.
Chọn đáp án (B) □

CÂU 5. Phương trình $9\left(\dfrac{9}{25}\right)^{2x+m} = 25\left(\dfrac{5}{3}\right)^{-2x}$ (m là tham số) có nghiệm là

A $x = m - 3$. **B** $x = m + 1$. **C** $x = -m - 1$. **D** $x = 2m - 4$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} 9\left(\dfrac{9}{25}\right)^{2x+m} = 25\left(\dfrac{5}{3}\right)^{-2x} &\Leftrightarrow \left(\dfrac{3}{5}\right)^{4x+2m} = \dfrac{25}{9}\left(\dfrac{3}{5}\right)^{2x} \\ &\Leftrightarrow \left(\dfrac{3}{5}\right)^{4x+2m} = \left(\dfrac{3}{5}\right)^{2x-2} \\ &\Leftrightarrow 4x + 2m = 2x - 2 \\ &\Leftrightarrow x = -m - 1. \end{aligned}$$

Chọn đáp án (C) □

CÂU 6. Tìm m để phương trình $2^{2x-1} + m^2 - 2m - 3 = 0$ có nghiệm

A $-1 < m < 3$. **B** $\left[\begin{array}{l} m > 3 \\ m < -1 \end{array}\right.$. **C** $-3 < m < 1$. **D** $\left[\begin{array}{l} m > 1 \\ m < -3 \end{array}\right.$.

Lời giải.
$2^{2x-1} + m^2 - 2m - 3 = 0 \Leftrightarrow 2^{2x-1} = -m^2 - 2m + 3$.
Phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow -m^2 + 2m + 3 > 0 \Leftrightarrow -1 < m < 3$.
Chọn đáp án (C) □

CÂU 7. Tìm m để phương trình $2^{x^2+1} - m^2 - m = 0$ có nghiệm.

A $-1 < m < 0$. **B** $\left[\begin{array}{l} m \geq 1 \\ m \leq -2 \end{array}\right.$. **C** $-2 \leq m \leq 1$. **D** $\left[\begin{array}{l} m > 0 \\ m < -1 \end{array}\right.$.

Lời giải.
$2^{x^2+1} - m^2 - m = 0 \Leftrightarrow 2^{x^2+1} = m^2 + m \Leftrightarrow 2^{x^2} = m^2 + m - 2$.
Ta có $x^2 \geq 0$, $\forall x \Leftrightarrow 2^{x^2} \geq 1$, $\forall x$.
Phương trình có nghiệm $m^2 + m - 2 \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \geq 1 \\ m \leq -2. \end{array}\right.$
Chọn đáp án (B) □

CÂU 8. Tìm m để phương trình $2^{\sqrt{x-1}} + 2m^2 - 3m = 0$ có nghiệm.

A $0 \leq m \leq \dfrac{3}{2}$. **B** $0 < m < \dfrac{3}{2}$. **C** $\dfrac{1}{2} < m < 1$. **D** $\dfrac{1}{2} \leq m \leq 1$.

Lời giải.
Điều kiện: $x \geq 1$.
$2^{\sqrt{x-1}} + 2m^2 - 3m = 0 \Leftrightarrow 2^{\sqrt{x-1}} = -2m^2 + 3m$.
Ta có $\sqrt{x-1} \geq 0$, $\forall x \geq 1 \Leftrightarrow 2^{\sqrt{x-1}} \geq 2^0 = 1$, $\forall x \geq 1$.
Phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow -2m^2 + 3m \geq 1 \Leftrightarrow 2m^2 - 3m + 1 \leq 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2} \leq m \leq 1$.

Chọn đáp án (D)

CÂU 9. Tìm m để tập nghiệm của phương trình sau có đúng 1 phần tử $4^x + m \cdot 2^{x+1} + m + 2 = 0$.

(A) $m < -2$. (B) $\left[\begin{array}{l} m \leq -2 \\ m = -1 \end{array}\right.$. (C) $-1 < m < 2$. (D) $m \leq -2$.

Lời giải.

Cách 1: $4^x + m \cdot 2^{x+1} + m + 2 = 0 \Leftrightarrow 4^x + 2m \cdot 2^x + m + 2 = 0 \quad (1)$.
Đặt $2^x = t$, $t > 0$.
Phương trình trở thành $t^2 + 2mt + m + 2 = 0 \Leftrightarrow t^2 + 2 = -m(2t+1) \quad (*)$.
Do $t > 0$ nên $2t + 1 > 0$. Suy ra $(*) \Leftrightarrow \dfrac{t^2+2}{2t+1} = -m \quad (2)$.
Số nghiệm của phương trình (1) bằng số nghiệm dương của phương trình (2).
Số nghiệm dương của phương trình (2) bằng số giao điểm của đồ thị $f(t) = \dfrac{t^2+2}{2t+1}$ trên $(0; +\infty)$ và đường thẳng $y = -m$.
Xét $f(t) = \dfrac{t^2+2}{2t+1}, t \in (0; +\infty)$:

$$f'(t) = \frac{2t(2t+1) - 2\left(t^2+2\right)}{(2t+1)^2} = \frac{2t^2+2t-4}{(2t+1)^2} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = -2\,(\text{loại}). \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên:

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy để phương trình (1) có đúng 1 nghiệm $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -m = 1 \\ -m > 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -1 \\ m < -2. \end{array}\right.$

Cách 2: $4^x + m \cdot 2^{x+1} + m + 2 = 0 \Leftrightarrow 4^x + 2m \cdot 2^x + m + 2 = 0 \quad (1)$.
Đặt $2^x = t (t > 0)$.
Phương trình trở thành $t^2 + 2mt + m + 2 = 0$.
Tập nghiệm của phương trình (1) có đúng 1 phần tử $\Leftrightarrow$ phương trình (2) có nghiệm kép dương hoặc phương trình (2) có 2 nghiệm trái dấu.
Khi đó

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \Delta' = m^2 - m - 2 = 0 \\ \dfrac{-b}{2a} = -m > 0 \end{cases} \\ a \cdot c = m + 2 < 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -1 \\ m < -2. \end{array}\right.$$

Chọn đáp án (B)

CÂU 10. Tìm m để phương trình sau vô nghiệm: $3^{2x} + 2 \cdot 3^{x+1} + m = 0$.

(A) $m \geq 0$. (B) $m > 9$. (C) $0 < m < 9$. (D) $m < 9$.

Lời giải.

Cách 1: $3^{2x} + 2 \cdot 3^{x+1} + m = 0 \Leftrightarrow 3^{2x} + 6 \cdot 3^x + m = 0 \quad (1)$.
Đặt $3^x = t$, $t > 0$.
Phương trình trở thành $t^2 + 6t + m = 0 \Leftrightarrow t^2 + 6t = -m \quad (2)$.
Số nghiệm của phương trình (1) bằng số nghiệm dương của phương trình (2) và bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $f(t) = t^2 + 6t$, $t > 0$ và đường thẳng $y = -m$.
Xét $f(t) = t^2 + 6t$, $t \in (0; +\infty)$:
$f'(t) = 2t + 6 = 0 \Leftrightarrow t = -3\,(\text{loại})$.
Bảng biến thiên:

x	0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy để phương trình (1) vô nghiệm $\Leftrightarrow -m \leq 0 \Leftrightarrow m \geq 0$.

Cách 2: $3^{2x} + 2 \cdot 3^{x+1} + m = 0 \Leftrightarrow 3^{2x} + 6 \cdot 3^x + m = 0 \quad (1)$.

Đặt $3^x = t$, $t > 0$.

Phương trình trở thành $t^2 + 6t + m = 0 \Leftrightarrow t^2 + 6t = -m(\quad (2)$.

Phương trình (1) vô nghiệm $\Leftrightarrow$ phương trình (2) vô nghiệm hoặc phương trình (2) chỉ có nghiệm không dương $t_1 \leq t_2 \leq 0$.

Khi đó

$$\left[\begin{array}{l} \Delta' = 9 - m < 0 \\ \begin{cases} \Delta' = 9 - m \geq 0 \\ S = -\dfrac{b}{a} = -6 \leq 0 \\ P = \dfrac{c}{a} = m \geq 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > 9 \\ 0 \leq m \leq 9 \end{array}\right. \Leftrightarrow m \geq 0.$$

Chọn đáp án (A) □

CÂU 11. Tìm m để phương trình sau có 4 nghiệm phân biệt: $2^{2x^2} - 2^{x^2+2} + m = 0$.

(A) $\begin{cases} 0 < m < 4 \\ m \neq 3 \end{cases}$. (B) $3 < m < 4$. (C) $0 < m < 4$. (D) $m < 4$.

Lời giải.

$2^{2x^2} - 2^{x^2+2} + m = 0 \Leftrightarrow 2^{2x^2} - 4 \cdot 2^{x^2} + m = 0 \quad (1)$.

Đặt $2^{x^2} = t$, vì $x^2 \geq 0, \forall x \Rightarrow 2^{x^2} \geq 2^0 = 1, \forall x \Rightarrow t \geq 1$.

Phương trình trở thành $t^2 - 4t = -m$.

Xét $f(t) = t^2 - 4t$, $t \in [1; +\infty)$:

$f'(t) = 2t - 4 \Leftrightarrow t = 2$.

Bảng biến thiên:

x	1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	-3	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

Với $t = 1 \Rightarrow$ phương trình (1) có 1 nghiệm $x = 0$.

Với mỗi nghiệm $t > 1$ sẽ sinh ra 2 nghiệm phân biệt khác 0 của phương trình (1).

Để phương trình (1) có đúng 4 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow -4 < -m < -3 \Leftrightarrow 3 < m < 4$.

Chọn đáp án (B) □

CÂU 12. Tìm tất cả giá trị của tham số m để phương trình: $3^{2x+1} - 10 \cdot 3^x + m = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + x_2 = 0$.

(A) $m = 1$. (B) $m = 2$. (C) $m = -1$. (D) $m = 3$.

Lời giải.

Cách 1: $3^{2x+1} - 10 \cdot 3^x + m = 0 \Leftrightarrow 3 \cdot 3^{2x} - 10 \cdot 3^x + m = 0 \quad (1)$.

Đặt $3^x = t$, $t > 0$.

Phương trình trở thành $3t^2 - 10t + m = 0 \quad (2)$.

Để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình (2) có 2 nghiệm dương phân biệt.

Khi đó

$$\begin{cases} \Delta' = 25 - 3m > 0 \\ S = \dfrac{-b}{a} = \dfrac{10}{3} > 0 \\ P = \dfrac{c}{a} = \dfrac{m}{3} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < \dfrac{25}{3}.$$

Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình (1) $\Rightarrow t_1 = 3^{x_1}$, $t_2 = 3^{x_2}$ là hai nghiệm của phương trình (2).

Theo đề bài có $x_1 + x_2 = 0 \Leftrightarrow 3^{x_1+x_2} = 1 \Leftrightarrow 3^{x_1} \cdot 3^{x_2} = 1 \Rightarrow t_1 \cdot t_2 = 1 \Leftrightarrow \dfrac{m}{3} = 1 \Leftrightarrow m = 3$ (thỏa mãn).

Cách 2: Thay từng giá trị m giải phương trình, phương trình nào có nghiệm thỏa mãn thì lấy giá trị m tương ứng.

Chọn đáp án (D) □

CÂU 13. Tìm tất cả giá trị của tham số m để phương trình: $4^x - m \cdot 2^x + 2m = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + x_2 = 3$.

(A) $m = 4$. (B) $m = 2$. (C) $m = 1$. (D) Không có m.

Lời giải.

Cách 1: $4^x - m \cdot 2^x + 2m = 0 \Leftrightarrow 2^{2x} - m \cdot 2^x + 2m = 0 \quad (1)$.
Đặt $2^x = t$, $t > 0$.
Phương trình trở thành $3t^2 - 10t + m = 0 \quad (2)$.
Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình (2) có 2 nghiệm dương phân biệt.
Khi đó

$$\begin{cases} \Delta' = m^2 - 8m > 0 \\ S = \dfrac{-b}{a} = m > 0 \\ P = \dfrac{c}{a} = 2m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 8.$$

Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình (1) $\Rightarrow t_1 = 3^{x_1}$, $t_2 = 3^{x_2}$ là hai nghiệm của phương trình (2).
Theo đề bài có $x_1 + x_2 = 3 \Leftrightarrow 2^{x_1+x_2} = 8 \Leftrightarrow 3^{x_1} \cdot 3^{x_2} = 8$.
Suy ra $t_1 \cdot t_2 = 8 \Leftrightarrow 2m = 8 \Leftrightarrow m = 4$ (không thoả mãn).
Cách 2: Thay từng giá trị m giải phương trình, phương trình nào có nghiệm thỏa mãn thì lấy giá trị m tương ứng.
Chọn đáp án D □

CÂU 14. Tìm tất cả giá trị của tham số m để phương trình: $3^{2x} - 4 \cdot 3^x + m = 0$ có hai nghiệm trái dấu.

A $m < 0$. **B** $0 < m < 4$. **C** $0 < m < 3$. **D** $m = 1$.

Lời giải.

$3^{2x} - 4 \cdot 3^x + m = 0 \Leftrightarrow 3^{2x} - 4 \cdot 3^x + m = 0 \quad (1)$.
Đặt $3^x = t$, $t > 0$.
Phương trình trở thành $t^2 - 4t + m = 0 \quad (2)$.
Phương trình (1) có hai nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow$ phương trình (2) có 2 nghiệm t_1, t_2 thỏa mãn $0 < t_1 < 1 < t_2$.
Cách 1: $3^{2x} - 4 \cdot 3^x + m = 0 \Leftrightarrow t^2 - 4t = -m$.
Xét $f(t) = t^2 - 4t, t \in (0; +\infty)$:
$f'(t) = 2t - 4 = 0 \Leftrightarrow t = 2$.
Bảng biến thiên:

x	0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	-3	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta thấy phương trình (2) có hai nghiệm t_1, t_2 thỏa mãn $0 < t_1 < 1 < t_2$ khi và chỉ khi $-3 < -m < 0 \Leftrightarrow 0 < m < 3$.
Cách 2: (2) có hai nghiệm t_1, t_2 thỏa mãn $0 < t_1 < 1 < t_2$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} 0 < t_1 < t_2 \\ t_1 - 1 < 0 < t_2 - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < t_1 < t_2 \\ (t_1 - 1)(t_2 - 1) < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 < t_1 < t_2 \\ t_1 \cdot t_2 - (t_1 + t_2) + 1 < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 4 - m > 0 \\ S = 4 > 0 \\ P = m > 0 \\ m - 4 + 1 < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m < 4 \\ m > 0 \\ m < 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 < m < 3.$$

Chọn đáp án C □

Dạng 26. Một số dạng khác

CÂU 1. Cho các số thực m, n, p khác 0 và thỏa mãn $4^m = 10^n = 25^p$. Tính $T = \dfrac{n}{m} + \dfrac{n}{p}$.

Ⓐ $T=1$. Ⓑ $T=2$. Ⓒ $T=\dfrac{5}{2}$. Ⓓ $T=\dfrac{1}{10}$.

Lời giải.

Đặt $4^m=10^n=25^p=t\Rightarrow m=\log_4 t,\ n=\log_{10} t,\ p=\log_{25} t$.
Khi đó

$$\begin{aligned}T=\frac{n}{m}+\frac{n}{p} &= \frac{\log_{10} t}{\log_4 t}+\frac{\log_{10} t}{\log_{25} t}\\ &= \log_{10} t\cdot\log_t 4+\log_{10} t\cdot\log_t 25\\ &= \log_{10} 4+\log_{10} 25\\ &= \log_{10} 100=2.\end{aligned}$$

Chọn đáp án Ⓑ □

CÂU 2. Cho x, y, z là các số thực khác 0 và thỏa mãn $2^x=3^y=6^{-z}$. Tính giá trị của biểu thức $Q=xy+yz+zx$.

Ⓐ $Q=3$. Ⓑ $Q=6$. Ⓒ $Q=0$. Ⓓ $Q=1$.

Lời giải.

Ta có $2^x=3^y=6^{-z}\Leftrightarrow 2^x=3^y=\dfrac{1}{6^z}\Leftrightarrow\begin{cases}2^x=\dfrac{1}{6^z}\\ 3^y=\dfrac{1}{6^z}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2^x.6^z=1\\ 3^y.6^z=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(2^x.6^z)^y=1\\ (3^y.6^z)^x=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2^{xy}.6^{zy}=1\\ 3^{yx}.6^{zx}=1.\end{cases}$

Suy ra $2^{xy}\cdot 6^{zy}\cdot 3^{yx}\cdot 6^{zx}=1\Leftrightarrow 6^{xy}6^{zy}6^{zx}=1\Leftrightarrow 6^{xy+zy+zx}=1\Leftrightarrow xy+zy+zx=0$.
Chọn đáp án Ⓒ □

CÂU 3. Biết rằng phương trình $2^{x^2-1}=3^{x+1}$ có hai nghiệm thực x_1, x_2. Tính giá trị của biểu thức $M=x_1+x_2+x_1\cdot x_2$.

Ⓐ $M=-1$. Ⓑ $M=-1+2\log_2 3$. Ⓒ $M=1+\log_2 3$. Ⓓ $M=1$.

Lời giải.

Cách 1: $2^{x^2-1}=3^{x+1}\Leftrightarrow x^2-1=\log_2 3^{x+1}=(x+1)\log_2 3\Leftrightarrow x^2-x\log_2 3-1-\log_2 3=0$.
Vì phương trình có hai nghiệm x_1, x_2, nên theo định lý Vi-ét ta có:

$$\begin{cases}x_1+x_2=\log_2 3\\ x_1\cdot x_2=-1-\log_2 3\end{cases}\Rightarrow M=x_1+x_2+x_1\cdot x_2=-1.$$

Cách 2:

$$\begin{aligned}2^{x^2-1}=3^{x+1} &\Leftrightarrow 2^{(x-1)(x+1)}=3^{x+1}\\ &\Leftrightarrow \left(\frac{2^{x-1}}{3}\right)^{x+1}=1\\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x+1=0\\ \dfrac{2^{x-1}}{3}=1\end{array}\right.\\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-1\\ x-1=\log_2 3\end{array}\right.\\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-1\\ x=1+\log_2 3\end{array}\right..\end{aligned}$$

Suy ra $M=-1$.
Chọn đáp án Ⓐ □

CÂU 4. Phương trình $6^x+6=3^{x+1}+2^{x+1}$ có hai nghiệm thực x_1, x_2. Tính $M=x_1\cdot x_2$.

Ⓐ $M=1$. Ⓑ $M=-1$. Ⓒ $M=\log_2 3$. Ⓓ $M=\log_3 2$.

Lời giải.

$$\begin{aligned}6^x+6=3^{x+1}+2^{x+1} &\Leftrightarrow 2^x\cdot 3^x+6=3\cdot 3^x+2\cdot 2^x\\ &\Leftrightarrow 2^x\cdot 3^x-3\cdot 3^x=2\cdot 2^x-6\\ &\Leftrightarrow 3^x\left(2^x-3\right)=2\left(2^x-3\right)\\ &\Leftrightarrow \left(2^x-3\right)\left(3^x-2\right)=0\\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2^x=3\\ 3^x=2\end{array}\right.\\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\log_2 3\\ x=\log_3 2.\end{array}\right.\end{aligned}$$

Suy ra $M = x_1 \cdot x_2 = 1$.

Chọn đáp án (A) □

CÂU 5. Số nghiệm của phương trình $8.3^x - 6^x + 3 \cdot 2^x = 24$ là

(A) 2. (B) 3. (C) 1. (D) 0.

Lời giải.

$$\begin{aligned}
8 \cdot 3^x - 6^x + 3 \cdot 2^x = 24 &\Leftrightarrow 8 \cdot 3^x - 2^x \cdot 3^x + 3 \cdot 2^x - 24 = 0\\
&\Leftrightarrow 8 \cdot 3^x - 24 - 2^x\left(3^x - 3\right) = 0\\
&\Leftrightarrow 8\left(3^x - 3\right) - 2^x\left(3^x - 3\right) = 0\\
&\Leftrightarrow \left(3^x - 3\right)\left(8 - 2^x\right) = 0\\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3^x = 3 \\ 2^x = 8 = 2^3 \end{array}\right.\\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 3. \end{array}\right.
\end{aligned}$$

Chọn đáp án (A) □

CÂU 6. Biết rằng phương trình $2^{x+\sqrt{2x+5}} - 2^{1+\sqrt{2x+5}} + 2^{6-x} - 32 = 0$ có hai nghiệm thực x_1, x_2. Tính giá trị của biểu thức $M = x_1 \cdot x_2$.

(A) $M = -3$. (B) $M = 3$. (C) $M = 2$. (D) $M = -2$.

Lời giải.

$$\begin{aligned}
&2^{x+\sqrt{2x+5}} - 2^{1+\sqrt{2x+5}} + 2^{6-x} - 32 = 0,\ x \geq -\frac{5}{2}\\
\Leftrightarrow\ &2^x \cdot 2^{\sqrt{2x+5}} - 2 \cdot 2^{\sqrt{2x+5}} + \frac{2^6}{2^x} - 32 = 0\\
\Leftrightarrow\ &2^x \cdot 2^x \cdot 2^{\sqrt{2x+5}} - 2 \cdot 2^x \cdot 2^{\sqrt{2x+5}} + 2^6 - 32 \cdot 2^x = 0\\
\Leftrightarrow\ &2^x \cdot 2^{\sqrt{2x+5}}\left(2^x - 2\right) - 32\left(2^x - 2\right) = 0\\
\Leftrightarrow\ &\left(2^x - 2\right)\left(2^{x+\sqrt{2x+5}} - 32\right) = 0\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l} 2^x = 2 \\ 2^{x+\sqrt{2x+5}} = 32 = 2^5 \end{array}\right.\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x + \sqrt{2x+5} = 5. \end{array}\right.
\end{aligned}$$

Ta có

$$\begin{aligned}
x + \sqrt{2x+5} = 5 &\Leftrightarrow \sqrt{2x+5} = 5 - x\\
&\Leftrightarrow \begin{cases} 5 - x \geq 0 \\ 2x + 5 = (5-x)^2 \end{cases}\\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 5 \\ x^2 - 12x + 20 = 0 \end{cases}\\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 5 \\ \left[\begin{array}{l} x = 10 \\ x = 2. \end{array}\right. \end{cases}
\end{aligned}$$

Kết hợp điều kiện $x \geq -\frac{5}{2} \Rightarrow x = 2$.

Vậy phương trình có hai nghiệm $x = 1$, $x = 2 \Rightarrow M = 3$.

Chọn đáp án (B) □

CÂU 7. Tính tổng các nghiệm của phương trình $5^{x-1} + 5 \cdot (0{,}2)^{x-2} = 26$.

(A) 4. (B) 2. (C) 1. (D) 3.

Lời giải.

$$\begin{aligned}5^{x-1}+5\cdot(0{,}2)^{x-2}=26 &\Leftrightarrow \frac{5^x}{5}+5\cdot\frac{2^x}{2^2}\cdot\frac{10^2}{10^x}=26\\ &\Leftrightarrow 5^x+25\cdot\frac{2^x}{2^2}\cdot\frac{10^2}{10^x}=5\cdot 26\\ &\Leftrightarrow 5^x\cdot 10^x+25^2\cdot 2^x=5\cdot 26\cdot 10^x\\ &\Leftrightarrow 25^2\cdot 2^x=25\cdot 5\cdot 10^x\\ &\Leftrightarrow \frac{25}{5}=\frac{10^x}{2^x}\\ &\Leftrightarrow 5=5^x\\ &\Leftrightarrow x=1.\end{aligned}$$

Chọn đáp án (C) □

CÂU 8. Số nghiệm của phương trình $4^{x^2+x}+2^{1-x^2}=2^{(x+1)^2}+1$ là

(A) 3. (B) 2. (C) 1. (D) 4.

Lời giải.

$$\begin{aligned}4^{x^2+x}+2^{1-x^2}=2^{(x+1)^2}+1 &\Leftrightarrow 2^{2x^2+2x}+2^{1-x^2}=2^{x^2+2x+1}+1\\ &\Leftrightarrow 2^{2x^2+2x}-2^{x^2+2x+1}=1-2^{1-x^2}\\ &\Leftrightarrow 2^{2x^2+2x}\left(1-2^{1-x^2}\right)=1-2^{1-x^2}\\ &\Leftrightarrow \left(1-2^{1-x^2}\right)\left(2^{2x^2+2x}-1\right)=0\\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2^{1-x^2}=1\\ 2^{2x^2+2x}=1\end{array}\right.\\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}1-x^2=0\\ 2x^2+2x=0\end{array}\right.\\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\pm 1\\ x=0\\ x=-1.\end{array}\right.\end{aligned}$$

Chọn đáp án (D) □

CHUYÊN ĐỀ 2: PHƯƠNG TRÌNH LOGARIT

C. KIẾN THỨC SÁCH GIÁO KHOA CẦN CẦN NẮM

Điều kiện cho $\log_a f(x)$ là $\begin{cases}0<a\neq 1\\ f(x)>0\end{cases}$.

1. Dạng cơ bản

$\log_a f(x)=b\Leftrightarrow f(x)=a^b$.

2. Biến đổi, quy về cùng cơ số

$\log_a f(x)=\log_a g(x)\Leftrightarrow f(x)=g(x)$ với $f(x)>0$ hoặc $g(x)>0$.

3. Đặt ẩn phụ

Đặt $t=\log_a f(x)$ với a và $f(x)$ thích hợp để đưa phương trình logarit về phương trình đại số đối với t.

4. Logarit hóa

$\log_a g(x)=f(x)\,(0<a\neq 1)\Leftrightarrow\begin{cases}g(x)>0\\ g(x)=a^{f(x)}.\end{cases}$

Dạng 27. Phương trình logarit cơ bản và phương pháp mũ hóa

Phương pháp:
B1: Tìm điều kiện có nghĩa.
B2: $\log_a f(x)=b\Leftrightarrow f(x)=a^b$.

1. Các ví dụ

VÍ DỤ 1. Tập nghiệm của phương trình $\log_2(3x-7)=3$ là

Lời giải.

Điều kiện $3x-7>0 \Leftrightarrow x>\dfrac{7}{3}$.

Phương trình $\log_2(3x-7)=3 \Leftrightarrow 3x-7=2^3 \Leftrightarrow x=5$ thỏa mãn điều kiện.
Vậy phương trình có tập nghiệm là $S=\{5\}$. □

VÍ DỤ 2. Phương trình $\log_2\left(x^2+2x+1\right)=0$ có bao nhiêu nghiệm?

Lời giải.

Điều kiện $x^2+2x+1>0 \Leftrightarrow x\neq -1$.

Phương trình $\log_2\left(x^2+2x+1\right)=0 \Leftrightarrow x^2+2x+1=1 \Leftrightarrow x^2+2x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\x=-2\end{array}\right.$ thỏa mãn điều kiện. Vậy phương trình có 2 nghiệm. □

VÍ DỤ 3. Giải phương trình sau $\log_2[x\cdot(x-1)]=1$.

Lời giải.

$\log_2[x\cdot(x-1)]=1 \Leftrightarrow x\cdot(x-1)=2^1 \Leftrightarrow x^2-x=2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-1\\x=2\end{array}\right.$. □

VÍ DỤ 4. Giải phương trình sau $\log_3(2x+1)-\log_3(x-1)=1$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases}2x+1>0\\x-1>0\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x>\dfrac{-1}{2}\\x>1\end{array}\right. \Leftrightarrow x>1$.

$\log_3(2x+1)-\log_3(x-1)=1 \Leftrightarrow \log_3\dfrac{2x+1}{x-1}=1$

$\Leftrightarrow \dfrac{2x+1}{x-1}=3 \Leftrightarrow 2x+1=3x-3 \Leftrightarrow x=4$ (thỏa). □

VÍ DỤ 5. Giải phương trình $\log_3(x+2)=1-\log_3 x$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases}x>-2\\x>0\end{cases} \Leftrightarrow x>0$.

$\log_3(x+2)=1-\log_3 x \Leftrightarrow \log_3(x+2)+\log_3 x=1 \Leftrightarrow \log_3[(x+2)\cdot x]=1$

$\Leftrightarrow x^2+2x=3^1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\x=-3(l)\end{array}\right.$. □

VÍ DỤ 6. Giải phương trình $\log_2\left(5-2^x\right)=2-x$.

Lời giải.

Điều kiện $5-2^x>0$.

$+$ Phương trình đã cho tương đương $5-2^x=2^{2-x} \Leftrightarrow 5-2^x=\dfrac{4}{2^x} \Leftrightarrow 2^{2x}-5\cdot 2^x+4=0$.

Đặt $t=2^x$, điều kiện: $t>0$.

Phương trình trở thành: $t^2-5t+4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t=1\\t=4\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2^x=1 \Leftrightarrow x=0\\2^x=4 \Leftrightarrow x=2.\end{array}\right.$ □

VÍ DỤ 7. Biết phương trình $\log_3\left(3^{x+1}-1\right)=2x+\log_3 2$ có hai nghiệm x_1, x_2. Tính tổng $S=27^{x_1}+27^{x_2}$.

Lời giải.

Điều kiện $3^{x+1}-1>0 \Leftrightarrow x>-1$.

Ta có

$\log_3\left(3^{x+1}-1\right)=2x+\log_3 2 \Leftrightarrow \log_3\left(3^{x+1}-1\right)-\log_3 2=2x \Leftrightarrow \log_3\dfrac{\left(3^{x+1}-1\right)}{2}=2x$

$\Leftrightarrow \dfrac{\left(3^{x+1}-1\right)}{2}=3^{2x} \Leftrightarrow 3^{x+1}-1=2\cdot 3^{2x} \Leftrightarrow 2\cdot 3^{2x}-3\cdot 3^x+1=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}3^x=1\\3^x=\dfrac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\x=\log_3\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$

$\Rightarrow 270+27^{\log_3\frac{1}{2}}=1+\dfrac{1}{8}=\dfrac{9}{8}$ □

2. Câu hỏi trắc nghiệm

CÂU 1. Nghiệm của phương trình $\log_3(2x+3)=3$ là

Ⓐ $x=3$. Ⓑ $x=12$. Ⓒ $x=24$. Ⓓ $x=6$.

Lời giải.

Ta có $\log_3(2x+3)=3 \Leftrightarrow \log_3(2x+3)=\log_3 27 \Leftrightarrow 2x+3=27 \Leftrightarrow x=12$.

Chọn đáp án Ⓑ □

CÂU 2. Phương trình $\ln x+\ln(2x-1)=0$ có bao nhiêu nghiệm?

Ⓐ 0. Ⓑ 1. Ⓒ 2. Ⓓ 3.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} x>0 \\ 2x-1>0 \end{cases} \Leftrightarrow x>\dfrac{1}{2}$.

Khi đó, phương trình tương đương với:

$\ln[x(2x-1)]=0 \Leftrightarrow 2x^2-x-1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-\dfrac{1}{2}. \end{array}\right.$

So sánh với điều kiện ta được $x=1$ là nghiệm.

Chọn đáp án Ⓑ □

CÂU 3. Nghiệm của phương trình $\log_2(2-3x)=5$ là

Ⓐ $x=-10$. Ⓑ $x=2$. Ⓒ $x=-\dfrac{8}{3}$. Ⓓ $x=-\dfrac{7}{3}$.

Lời giải.

Điều kiện $2-3x>0 \Leftrightarrow x<\dfrac{2}{3}$.

Ta có $\log_2(2-3x)=5 \Leftrightarrow \log_2(2-3x)=\log_2 32 \Leftrightarrow x=-10$.

So sánh với điều kiện ta được $x=-10$ là nghiệm.

Chọn đáp án Ⓐ □

CÂU 4. Số nghiệm của phương trình $\log_2\left(x^2-2x+4\right)=2$ là

Ⓐ 2. Ⓑ 1. Ⓒ 0. Ⓓ 3.

Lời giải.

Ta có $x^2-2x+4>0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Khi đó $\log_2\left(x^2-2x+4\right)=2 \Leftrightarrow x^2-2x+4=4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$

Chọn đáp án Ⓐ □

CÂU 5. Phương trình $\log x+\log(11x-10)=3$ có nghiệm là

Ⓐ 7. Ⓑ 8. Ⓒ 9. Ⓓ 10.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} x>0 \\ 11x-10>0 \end{cases} \Leftrightarrow x>\dfrac{10}{11}$.

Khi đó phương trình tương đương với

$\log[x(11x-10)]=3 \Leftrightarrow x(11x-10)=1000 \Leftrightarrow 11x^2-10x-1000=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=10 \\ x=-\dfrac{100}{11}. \end{array}\right.$

So sánh với điều kiện ta có $x=10$ là nghiệm của phương trình.

Chọn đáp án Ⓓ □

CÂU 6. Nghiệm của phương trình $2^{\log_2(x-2)}=x^2-2x-6$ là

Ⓐ $\left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=4 \end{array}\right.$. Ⓑ $x=-1$. Ⓒ $x=4$. Ⓓ $\left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=2 \end{array}\right.$.

Lời giải.

Điều kiện $x-2>0 \Leftrightarrow x>2$.

Khi đó phương trình tương đương với:

$x-2=x^2-2x-6 \Leftrightarrow x^2-3x-4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=4. \end{array}\right.$

So sánh với điều kiện ta có $x=4$ là nghiệm của phương trình.

Chọn đáp án Ⓒ □

CÂU 7. Số nghiệm của phương trình $3^{\log_3(x-1)}=x^2+x-5$ là

Ⓐ 1. Ⓑ 0. Ⓒ 2. Ⓓ 3.

Lời giải.

Điều kiện $x-1>0 \Leftrightarrow x>1$.
Khi đó phương trình tương đương với:
$x-1=x^2+x-5 \Leftrightarrow x^2=4 \Leftrightarrow x=\pm 2$.
So sánh với điều kiện ta có $x=2$ là nghiệm của phương trình.
Chọn đáp án (A) □

CÂU 8. Tập nghiệm của phương trình $\log_6[x(5-x)]=1$ là

A $\{2;3\}$. **B** $\{4;6\}$. **C** $\{1;-6\}$. **D** $\{-1;6\}$.

Lời giải.

Điều kiện $x(5-x)>0 \Leftrightarrow x(x-5)<0 \Leftrightarrow 0<x<5$.

Phương trình tương đương với $x(5-x)=6 \Leftrightarrow x^2-5x+6=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=2\\x=3\end{array}\right.$ (thỏa mãn điều kiện).

Vậy phương trình có tập nghiệm là $S=\{2;3\}$.
Chọn đáp án (A) □

CÂU 9. Số nghiệm của phương trình $\log_2\left(x-3\sqrt{x}+4\right)=3$ là

A 0. **B** 1. **C** 2. **D** 3.

Lời giải.

Điều kiện $x\geq 0$.
Phương trình tương đương với
$x-3\sqrt{x}+4=8 \Leftrightarrow x-3\sqrt{x}-4=0 \Leftrightarrow (\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-4)=0 \Leftrightarrow \sqrt{x}=4 \Leftrightarrow x=16$ (thỏa mãn điều kiện).
Vậy phương trình có một nghiệm $x=16$.
Chọn đáp án (B) □

CÂU 10. Biết phương trình $\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{x^2-3x+2}{x}=0$ có hai nghiệm x_1,x_2. Tích của hai nghiệm này là số nào dưới đây:

A 4. **B** $2\sqrt{2}$. **C** 2. **D** 0.

Lời giải.

Điều kiện: $\dfrac{x^2-3x+2}{x}>0$.
Với điều kiện trên phương trình đã cho trở thành
$\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{x^2-3x+2}{x}=\log_{\frac{1}{2}}1 \Leftrightarrow \dfrac{x^2-3x+2}{x}=1$ (thỏa mãn)
$\Leftrightarrow x^2-4x+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x_1=2-\sqrt{2}\\x_2=2+\sqrt{2}.\end{array}\right.$
Vậy $x_1x_2=(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})=4-2=2$.
Chọn đáp án (C) □

CÂU 11. Nghiệm của phương trình $\log_2 x^2+2\log_2(x+2)=6$ là

A $x=-4$. **B** $x=2$. **C** $\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-4\end{array}\right.$. **D** $\left[\begin{array}{l}x=2\\x=3\end{array}\right.$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases}x^2>0\\x+2>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\neq 0\\x>-2.\end{cases}$
Khi đó phương trình tương đương với
$2\log_2|x|+2\log_2(x+2)=6 \Leftrightarrow \log_2|x|+\log_2(x+2)=3$
$\Leftrightarrow \log_2[|x|(x+2)]=3 \Leftrightarrow |x|(x+2)=8$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x>0\\x^2+2x-8=0\end{cases}\\ \begin{cases}-2<x<0\\-x^2-2x-8=0\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x>0\\ \left[\begin{array}{l}x=2\\x=-4\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow x=2.$$

So sánh với điều kiện ta có $x=2$ là nghiệm của phương trình.
Học sinh có thể dùng máy tính cầm tay để kiểm tra nghiệm của phương trình.
Chọn đáp án (B) □

CÂU 12. Số nghiệm của phương trình $\log_2 x^2+2\log_2(x+2)=0$ bằng

A 1. **B** 2. **C** 3. **D** 0.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} x^2 > 0 \\ x+2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x > -2. \end{cases}$

Khi đó phương trình tương đương với

$2\log_2|x| + 2\log_2(x+2) = 0 \Leftrightarrow \log_2|x| + \log_2(x+2) = 0 \Leftrightarrow \log_2[|x|(x+2)] = 0 \Leftrightarrow |x|(x+2) = 1$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > 0 \\ x^2 + 2x - 1 = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} -2 < x < 0 \\ -x^2 - 2x - 1 = 0 \end{cases} \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > 0 \\ x = -1 \pm \sqrt{2} \end{cases} \\ \begin{cases} -2 < x < 0 \\ x = -1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 + \sqrt{2} \\ x = -1. \end{array}\right.$

Vậy phương trình hai nghiệm là $x = -1$ và $x = -1 + \sqrt{2}$.

Chọn đáp án B □

CÂU 13. Số nghiệm của phương trình $\log_2 x^2 + 2\log_2(x+4) = 4$ là

A 1. **B** 0. **C** 3. **D** 2.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} x^2 > 0 \\ x+4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x > -4. \end{cases}$

Khi đó phương trình tương đương với

$2\log_2|x| + 2\log_2(x+4) = 4 \Leftrightarrow \log_2[|x|(x+4)] = 2 \Leftrightarrow |x|(x+4) = 4$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > 0 \\ x^2 + 4x - 4 = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} -4 < x < 0 \\ -x^2 - 4x - 4 = 0 \end{cases} \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > 0 \\ x = -2 \pm 2\sqrt{2} \end{cases} \\ \begin{cases} -4 < x < 0 \\ x = -2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 + 2\sqrt{2} \\ x = -2. \end{array}\right.$

Vậy phương trình có hai nghiệm.

Chọn đáp án D □

CÂU 14. Phương trình $\log x^2 + 2\log(x+2) = 0$ trên tập số thực có nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 < x_2$ thì giá trị $S = x_1^6 + (x_2+1)^6$ bằng

A 1. **B** 6. **C** 9. **D** 3.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} x \neq 0 \\ x > -2. \end{cases}$

Khi đó phương trình tương đương với

$2\log|x| + 2\log(x+2) = 0 \Leftrightarrow \log|x| + \log(x+2) = 0 \Leftrightarrow \log[|x|(x+2)] = 0 \Leftrightarrow |x|(x+2) = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > 0 \\ x^2 + 2x - 1 = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} -2 < x < 0 \\ x^2 + 2x + 1 = 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > 0 \\ x = -1 \pm \sqrt{2} \end{cases} \\ \begin{cases} -2 < x < 0 \\ x = -1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 + \sqrt{2} \\ x = -1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = -1 \\ x_2 = -1 + \sqrt{2}. \end{array}\right.$

Vậy $S = x_1^6 + (x_2+1)^6 = 1 + (\sqrt{2})^6 = 9$.

Chọn đáp án C □

CÂU 15. Phương trình $\log_3 x^2 + 2\log_3(x+6) = 4$ trên tập số thực có nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 < x_2$ thì giá trị $S = [x_1(x_2+3)]^{100}$ bằng

A 100^{100}. **B** 162^{50}. **C** 132^{50}. **D** 132^{100}.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases}x^2>0\\x+6>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq 0\\x>-6.\end{cases}$

Khi đó phương trình tương đương với:

$2\log_3|x|+2\log_3(x+6)=4\Leftrightarrow\log_3|x|+\log_3(x+6)=2$

$\Leftrightarrow\log_3[|x|(x+6)]=2\Leftrightarrow|x|(x+6)=9$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x>0\\x^2+6x-9=0\end{cases}\\\begin{cases}-6<x<0\\x^2+6x+9=0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x>0\\x=-3\pm3\sqrt{2}\end{cases}\\\begin{cases}-6<x<0\\x=-3\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-3+3\sqrt{2}\\x=-3\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x_1=-3\\x_2=-3+3\sqrt{2}.\end{array}\right.$$

Vậy $S=[x_1(x_2+3)]^{100}=\left[-3(3\sqrt{2})\right]^{100}=162^{50}$.

Chọn đáp án (B) □

Dạng 28. Đưa về cùng cơ số

Phương pháp: $\log_a f(x)=\log_a g(x)\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)=g(x)\\f(x)>0\,(g(x)>0)\end{cases}.$

1. Các ví dụ

VÍ DỤ 1. Giải phương trình $\log_{\sqrt{5}}(x+2)=\log_5(4x+6)$.

Lời giải.

Điều kiện $x>-\dfrac{3}{2}$.

Ta có $\log_{\sqrt{5}}(x+2)=\log_5(4x+6)\Leftrightarrow\log_5(x+2)^2=\log_5(4x+6)$

$\Leftrightarrow(x+2)^2=4x+6\Leftrightarrow x^2=2\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{2}$. □

VÍ DỤ 2. Tìm số nghiệm của phương trình $\log_{\sqrt{3}}x\cdot\log_3x\cdot\log_9x=8$.

Lời giải.

Điều kiện $x>0$.

Với đkxđ, $\log_{\sqrt{3}}x\cdot\log_3x\cdot\log_9x=8\Leftrightarrow(\log_3x)^3=2^3\Leftrightarrow\log_3x=2\Leftrightarrow x=9$.

Vậy phương trình có 1 nghiệm. □

VÍ DỤ 3. Tính tổng các nghiệm của phương trình: $\log_2(x-3)+2\log_4 3\cdot\log_3x=2$.

Lời giải.

Điều kiện $x>3$.

$\log_2(x-3)+2\log_4 3\cdot\log_3x=2\Leftrightarrow\log_2(x-3)+2\log_4x=2\Leftrightarrow\log_2(x-3)+\log_2x=2$

$\Leftrightarrow\log_2(x-3)\cdot x=2\Leftrightarrow x^2-3x=4\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1(\text{loại})\\x=4\end{array}\right.$.

Vậy tổng các nghiệm $S=4$. □

VÍ DỤ 4. Giải phương trình: $\dfrac{1}{2}\ln\left(x^2-8x-5\right)=\ln10x-\ln5x$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases}x^2-8x-5>0\\x>0.\end{cases}$

$\dfrac{1}{2}\ln\left(x^2-8x-5\right)=\ln10x-\ln5x\Leftrightarrow\dfrac{1}{2}\ln\left(x^2-8x-5\right)=\ln\dfrac{10x}{5x}$

$\Leftrightarrow\dfrac{1}{2}\ln\left(x^2-8x-5\right)=\ln2\Leftrightarrow\ln\left(x^2-8x-5\right)=2\ln2\Leftrightarrow\ln\left(x^2-8x-5\right)=\ln2^2$

$\Leftrightarrow x^2-8x-5=4\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1(\text{loại})\\x=9\end{array}\right.$

Vậy $S=\{9\}$. □

VÍ DỤ 5. Phương trình $\log_2(x+2)+\log_4x^2=3$ có nghiệm là

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases}x>-2\\x\neq0.\end{cases}$

$\log_2(x+2)+\log_4 x^2=3 \Leftrightarrow \log_4(x+2)^2\cdot x^2=3$

$\Leftrightarrow (x+2)^2\cdot x^2=64$

$\Leftrightarrow \left[\begin{aligned}&x^2+2x=8\\&x^2+2x=-8\end{aligned}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{aligned}&x=2\\&x=-4(l)\end{aligned}\right. \Leftrightarrow x=2.$ □

2. Câu hỏi trắc nghiệm

CÂU 1. Phương trình $\log\left(72-x^2\right)=2\log x$ có nghiệm là

(A) 1. (B) 2. (C) 6. (D) 4.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases}72-x^2>0\\x>0\end{cases} \Leftrightarrow 0<x<\sqrt{72}.$

Khi đó, phương trình tương đương với

$\log\left(72-x^2\right)=\log x^2 \Leftrightarrow 2x^2=72 \Leftrightarrow x=\pm 6.$

So sánh với điều kiện ta có $x=6$ thỏa mãn.

Học sinh có thể dùng máy tính cầm tay để kiểm tra nghiệm của phương trình.

Chọn đáp án (C) □

CÂU 2. Phương trình $\ln x+\ln(2x-1)=0$ có bao nhiêu nghiệm?

(A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases}x>0\\2x-1>0\end{cases} \Leftrightarrow x>\dfrac{1}{2}$

Khi đó, phương trình tương đương với

$$\ln[x(2x-1)]=0 \Leftrightarrow 2x^2-x-1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{aligned}&x=1\\&x=-\frac{1}{2}.\end{aligned}\right.$$

So sánh với điều kiện ta được $x=1$ là nghiệm.

Chọn đáp án (B) □

CÂU 3. Phương trình $\ln\left(x^2-2x-7\right)=\ln(-x+5)$ có tập nghiệm là

(A) $\{4;-3\}$. (B) $\{3;4\}$. (C) $\{-4;3\}$. (D) $\emptyset$.

Lời giải.

Điều kiện $-x+5>0$

Khi đó phương trình tương đương với

$x^2-2x-7=-x+5 \Leftrightarrow x^2-x-12=0 \Leftrightarrow \left[\begin{aligned}&x=4\\&x=-3.\end{aligned}\right.$

So sánh với điều kiện ta có $x=-3$ và $x=4$ là nghiệm của phương trình.

Chọn đáp án (C) □

CÂU 4. Số nghiệm của phương trình $\log_6\left(x^2+x\right)-\log_{\frac{1}{6}}(x+2)=1$

(A) 2. (B) 0. (C) 1. (D) 3.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases}x^2+x>0\\x+2>0.\end{cases}$

Khi đó phương trình tương đương với

$\log_6\left(x^2+x\right)+\log_6(x+2)=1 \Leftrightarrow \left(x^2+x\right)(x+2)=1 \Leftrightarrow x^3+3x^2+2x-1=0.$

Bấm máy có một nghiệm xấp xỉ $x\approx 0,32$ thỏa mãn điều kiện.

Vậy phương trình có một nghiệm.

Chọn đáp án (C) □

CÂU 5. Số nghiệm của phương trình $\log_2\dfrac{x-2}{x+2}+\log_2\left(x^2-4\right)=1$ là

(A) 2. (B) 0. (C) 3. (D) 1.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases}\dfrac{x-2}{x+2}>0\\x^2-4>0\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{aligned}&x>2\\&x<-2.\end{aligned}\right.$

Khi đó phương trình tương đương với

$\log_2\left[\dfrac{x-2}{x+2}\left(x^2-4\right)\right]=1 \Leftrightarrow \left[\dfrac{x-2}{x+2}\left(x^2-4\right)\right]=2 \Leftrightarrow (x-2)^2=2 \Leftrightarrow x^2-4x+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=2+\sqrt{6}\\x=2-\sqrt{6}.\end{array}\right.$

So sánh với điều kiện ta có $x=2+\sqrt{6}$ là nghiệm của phương trình.

Chọn đáp án (D) □

CÂU 6. Phương trình $\log x+\log(11x-10)=3$ có nghiệm là

(A) 7. (B) 8. (C) 9. (D) 10.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases}x>0\\11x-10>0\end{cases} \Leftrightarrow x>\dfrac{10}{11}.$

Khi đó phương trình tương đương với

$\log[x(11x-10)]=3 \Leftrightarrow x(11x-10)=1000 \Leftrightarrow 11x^2-10x-1000=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=10\\x=-\dfrac{100}{11}\end{array}\right..$

So sánh với điều kiện ta có $x=10$ là nghiệm của phương trình.

Chọn đáp án (D) □

CÂU 7. Phương trình $\ln(x+1)+\ln(x-3)=\ln(x-5)$ có bao nhiêu nghiệm?

(A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases}x+1>0\\x-3>0\\x-5>0\end{cases} \Leftrightarrow x>5.$

Khi đó phương trình tương đương với

$\ln\dfrac{(x+1)(x-3)}{x-5}=0 \Leftrightarrow \dfrac{(x+1)(x-3)}{x-5}=1 \Leftrightarrow x^2-2x-3=x-5 \Leftrightarrow x^2-3x+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\x=2.\end{array}\right.$

So sánh với điều kiện ta có phương trình vô nghiệm.

Chọn đáp án (A) □

CÂU 8. Phương trình $\log_3 x+\log_9 x+\log_{27} x=\dfrac{11}{2}$ có nghiệm là

(A) 24. (B) 36. (C) 27. (D) 9.

Lời giải.

Điều kiện $x>0$.

Khi đó phương trình đã cho tương đương với

$\log_3 x+\dfrac{1}{2}\log_3 x+\dfrac{1}{3}\log_3 x=\dfrac{11}{2} \Leftrightarrow \log_3 x=3 \Leftrightarrow x=27.$

So sánh với điều kiện ta có $x=27$ là nghiệm của phương trình.

Chọn đáp án (C) □

CÂU 9. Số nghiệm của phương trình $\log_3(x+2)^2+2\log_3 x=2$ bằng

(A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 0.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases}(x+2)^2>0\\x>0\end{cases} \Leftrightarrow x>0.$

Khi đó phương trình tương đương với

$2\log_3(x+2)+2\log_3 x=2 \Leftrightarrow \log_3(x+2)+\log_3 x=1 \Leftrightarrow \log_3[(x+2)x]=1 \Leftrightarrow x^2+2x=3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\x=-3.\end{array}\right.$

So sánh với điều kiện ta có $x=1$ là nghiệm của phương trình.

Chọn đáp án (A) □

CÂU 10. Nghiệm của phương trình $\log_2\left(x^2+2x\right)+\log_{\frac{1}{2}}(2x+1)=0$ là

(A) $x=2$. (B) $x=\pm1$. (C) $x=-2$. (D) $x=1$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases}x^2+2x>0\\2x+1>0\end{cases} \Leftrightarrow x>0.$

Khi đó phương trình tương đương với

$\log_2\left(x^2+2x\right)-\log_2(2x+1)=0 \Leftrightarrow \dfrac{x^2+2x}{2x+1}=1 \Leftrightarrow x^2-1=0 \Leftrightarrow x=\pm1.$

So sánh với điều kiện ta có $x=1$ là nghiệm của phương trình.

Chọn đáp án (D) □

CÂU 11. Phương trình $\log_4\left(x^2+3x+1\right)+\dfrac{1}{2}\log_{\frac{1}{2}}\left(\sqrt{3x^2+6x}+2x\right)=0$ trên tập số thực có nghiệm x_1, x_2 thỏa $x_1>x_2$ thì giá trị $S=x_1^2+(x_2+1)^6$ bằng

(A) 1. (B) $\sqrt[3]{2}-1$. (C) 5. (D) 2.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} x^2+3x+1>0 \\ 3x^2+6x\geq 0 \\ \sqrt{3x^2+6x}+2x>0. \end{cases}$

Khi đó phương trình tương đương với

$\dfrac{1}{2}\log_2\left(x^2+3x+1\right)-\dfrac{1}{2}\log_2\left(\sqrt{3x^2+6x}+2x\right)=0$

$\Leftrightarrow \log_2\left(x^2+3x+1\right)-\log_2\left(\sqrt{3x^2+6x}+2x\right)=0$

$\Leftrightarrow \log_2\dfrac{x^2+3x+1}{\sqrt{3x^2+6x}+2x}=0 \Leftrightarrow \dfrac{x^2+3x+1}{\sqrt{3x^2+6x}+2x}=1$

$\Leftrightarrow x^2+3x+1=\sqrt{3x^2+6x}+2x \Leftrightarrow x^2+x+1=\sqrt{3x^2+6x}$

$\Leftrightarrow x^4+x^2+1+2x^3+2x+2x^2=3x^2+6x$

$\Leftrightarrow x^4+2x^3-4x+1=0 \Leftrightarrow (x-1)\left(x^3+3x^2+3x-1\right)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x^3+3x^2+3x-1=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ (x+1)^3=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=\sqrt[3]{2}-1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=1 \\ x_2=\sqrt[3]{2}-1. \end{array}\right.$

Vậy $S=x_1^2+(x_2+1)^6=1+(3\sqrt{2})^6=5$.

Chọn đáp án (C) □

CÂU 12. Gọi $x_1,x_2(x_1>x_2)$ là các nghiệm của phương trình $2\log_2(2x+2)+\log_{\frac{1}{2}}(9x-1)=1$. Khi đó giá trị của $M=(2x_1-2x_2)^{2017}$ là

(A) 1. (B) -1. (C) 2^{2017}. (D) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2017}$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} 2x+2>0 \\ 9x-1>0 \end{cases} \Leftrightarrow x>\dfrac{1}{9}.$

$2\log_2(2x+2)+\log_{\frac{1}{2}}(9x-1)=1$

$\Leftrightarrow \log_2(2x+2)^2-\log_2(9x-1)=\log_2 2$

$\Leftrightarrow \dfrac{(2x+2)^2}{9x-1}=2 \Leftrightarrow (2x+2)^2=18x-2$

$\Leftrightarrow 4x^2-10x+6=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{3}{2} \\ x=1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=\dfrac{3}{2} \\ x_2=1. \end{array}\right.$

$M=(2x_1-2x_2)^{2017}=\left(2\cdot\dfrac{3}{2}-2\cdot 1\right)^{2017}=1.$

Chọn đáp án (A) □

CÂU 13. Phương trình $\log_2(x-3)+2\log_4 3\cdot\log_3 x=2$ có số nghiệm là

(A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) Vô nghiệm.

Lời giải.

Điều kiện: $\begin{cases} x-3>0 \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow x>3.$

Với điều kiện trên phương trình đã cho trở thành: $\log_2(x-3)+2\log_4 x=2$.

$\Leftrightarrow \log_2(x-3)+2\log_4 x=2 \Leftrightarrow \log_2[(x-3)x]=\log_2 4]$

$\Leftrightarrow (x-3)x=4 \Leftrightarrow x^2-3x-4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1(\text{loại}) \\ x=4(\text{thỏa mãn}) \end{array}\right..$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=4$.

Chọn đáp án (A) □

CÂU 14. Phương trình $\log_4\left(x^2+3x+1\right)+\dfrac{1}{2}\log_{\frac{1}{2}}\left(\sqrt{3x^2+6x}+2x\right)=0$ trên tập số thực có nghiệm x_1, x_2 thỏa $x_1>x_2$ thì giá trị $S=x_1^2+(x_2+1)^6$ bằng

(A) 1. (B) $\sqrt[3]{2}-1$. (C) 5. (D) 2.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} x^2+3x+1>0 \\ 3x^2+6x \geq 0 \\ \sqrt{3x^2+6x}+2x>0. \end{cases}$

Khi đó phương trình tương đương với

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2}\log_2\left(x^2+3x+1\right)-\frac{1}{2}\log_2\left(\sqrt{3x^2+6x}+2x\right)=0 \\
\Leftrightarrow\ & \log_2\left(x^2+3x+1\right)-\log_2\left(\sqrt{3x^2+6x}+2x\right)=0 \\
\Leftrightarrow\ & \log_2\frac{x^2+3x+1}{\sqrt{3x^2+6x}+2x}=0 \\
\Leftrightarrow\ & \frac{x^2+3x+1}{\sqrt{3x^2+6x}+2x}=1 \\
\Leftrightarrow\ & x^2+3x+1=\sqrt{3x^2+6x}+2x \\
\Leftrightarrow\ & x^2+x+1=\sqrt{3x^2+6x} \\
\Leftrightarrow\ & x^4+x^2+1+2x^3+2x+2x^2=3x^2+6x \\
\Leftrightarrow\ & x^4+2x^3-4x+1=0 \\
\Leftrightarrow\ & (x-1)\left(x^3+3x^2+3x-1\right)=0 \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x^3+3x^2+3x-1=0 \end{array}\right. \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x=1 \\ (x+1)^3=2 \end{array}\right. \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=\sqrt[3]{2}-1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=1 \\ x_2=\sqrt[3]{2}-1. \end{array}\right.
\end{aligned}$$

Vậy $S=x_1^2+(x_2+1)^6=1+(3\sqrt{2})^6=5$.

Chọn đáp án Ⓒ □

CÂU 15. Gọi x_1, x_2 với $x_1>x_2$ là các nghiệm của phương trình $2\log_2(2x+2)+\log_{\frac{1}{2}}(9x-1)=1$. Khi đó giá trị của $M=(2x_1-2x_2)^{2017}$ là

A 1. **B** -1. **C** 2^{2017}. **D** $\left(\frac{1}{2}\right)^{2017}$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} 2x+2>0 \\ 9x-1>0 \end{cases} \Leftrightarrow x>\frac{1}{9}$.

Khi đó phương trình tương đương với

$$\begin{aligned}
& 2\log_2(2x+2)+\log_{\frac{1}{2}}(9x-1)=1 \\
\Leftrightarrow\ & \log_2(2x+2)^2-\log_2(9x-1)=\log_2 2 \\
\Leftrightarrow\ & \frac{(2x+2)^2}{9x-1}=2 \\
\Leftrightarrow\ & (2x+2)^2=18x-2 \\
\Leftrightarrow\ & 4x^2-10x+6=0 \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x=\frac{3}{2} \\ x=1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=\frac{3}{2} \\ x_2=1. \end{array}\right.
\end{aligned}$$

Vậy $M=(2x_1-2x_2)^{2017}=\left(2\cdot\frac{3}{2}-2\cdot 1\right)^{2017}=1$.

Chọn đáp án Ⓐ □

CÂU 16. Phương trình $\log_2(x-3)+2\log_4 3\cdot\log_3 x=2$ có số nghiệm là

A 1. **B** 2. **C** 3. **D** Vô nghiệm.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} x-3>0 \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow x>3$.

Với điều kiện trên phương trình đã cho trở thành

$$\begin{aligned}
&\log_2(x-3)+2\log_4 x=2\\
\Leftrightarrow\ &\log_2(x-3)+2\log_4 x=2\\
\Leftrightarrow\ &\log_2[(x-3)x]=\log_2 4\\
\Leftrightarrow\ &(x-3)x=4\\
\Leftrightarrow\ &x^2-3x-4=0\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{ll} x=-1 & \text{loại}\\ x=4 & \text{nhận.}\end{array}\right.
\end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=4$.
Chọn đáp án (A) □

Dạng 29. Đặt ẩn phụ

Phương pháp: Đặt $t=\log_a f(x)$ với a và $f(x)$ thích hợp để đưa phương trình logarit về phương trình đại số đối với t.

1. Các ví dụ

VÍ DỤ 1. Giải phương trình $\log_3^2 x+2\log_3 x-3=0$.

Lời giải.

Với điều kiện $x>0$ đặt $t=\log_3 x$ ta được phương trình

$t^2+2t-3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\\t=-3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\log_3 x=1\\\log_3 x=-3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3\\x=\dfrac{1}{27}.\end{array}\right.$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x=3$ và $x=\dfrac{1}{27}$. □

VÍ DỤ 2. Giải phương trình $\log_9 x+\log_x 3=3$.

Lời giải.

Điều kiện $0<x\neq 1$.

Ta có $\log_9 x+\log_x 3=3\Leftrightarrow 2\log_3 x+\dfrac{1}{\log_3 x}=3$.

Đặt $t=\log_3 x$ và $t\neq 0$ Ta được phương trình

$2t+\dfrac{1}{t}=3\Leftrightarrow 2t^2-3t+1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\\t=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\log_3 x=1\\\log_3 x=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3\\x=\sqrt{3}.\end{array}\right.$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x=3$ và $x=\sqrt{3}$. □

VÍ DỤ 3. Tính tổng các nghiệm của phương trình $\dfrac{1}{5+\log_3 x}+\dfrac{2}{1+\log_3 x}=1$.

Lời giải.

Điều kiện $x>0$, $\log_3 x\neq 5$, $\log_3 x\neq -1$.

Đặt $t=log_3 x$, (điều kiện $t\neq 5$, $t\neq -1$), ta được phương trình

$\dfrac{1}{5+t}+\dfrac{2}{1+t}=1\Leftrightarrow t^2-5t+6=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=2\\t=3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\log_3 x=2\\\log_3 x=3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=9\\x=27.\end{array}\right.$

Vậy $x_1+x_2=9+27=36$. □

VÍ DỤ 4. Giải phương trình: $\log_2^2 x+2\log_2\sqrt{x}-2=0$.

Lời giải.

$\log_2^2 x+2\log_2\sqrt{x}-2=0$ (1).

Điều kiện $x>0$ Phương trình (1) $\Leftrightarrow\log_2^2 x+\log_2 x-2=0$.

Đặt $t=\log_2 x$ ta có

$\log_2^2 x+\log_2 x-2=0\Leftrightarrow t^2+t-2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\\t=-2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\log_2 x=1\\\log_2 x=-2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\x=\dfrac{1}{4}.\end{array}\right.$

Vậy phương trình có nghiệm $x=2, x=\dfrac{1}{4}$. □

VÍ DỤ 5. Giải phương trình $1+\log_2(x-1)=\log_{x-1}4$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases}x-1>0\\x-1\neq 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>1\\x\neq 2\end{cases}(*)$.

Ta có

$$\begin{aligned}&1+\log_2(x-1)=\log_{x-1}4\\ \Leftrightarrow\quad&1+\log_2(x-1)=\frac{\log_2 4}{\log_2(x-1)}\\ \Leftrightarrow\quad&1+\log_2(x-1)=\frac{2}{\log_2(x-1)}\\ \Leftrightarrow\quad&[\log_2(x-1)]^2+\log_2(x-1)-2=0.\end{aligned}$$

Đặt $t=\log_2(x-1)$ phương trình trở thành

$\Leftrightarrow t^2+t-2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\\t=-2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\log_2(x-1)=1\\\log_2(x-1)=-2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x-1=2\\x-1=\frac{1}{4}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3\\x=\frac{5}{4}.\end{array}\right.$

Vậy phương trình có nghiệm $x=3$, $x=\frac{5}{4}$. □

2. Câu hỏi trắc nghiệm

CÂU 1. Phương trình $\log_3 x-3\log_x 3=2$ có tập nghiệm là

Ⓐ $\left\{\frac{1}{3};27\right\}$. Ⓑ $\{3;27\}$. Ⓒ $\left\{3;\frac{1}{27}\right\}$. Ⓓ $\varnothing$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases}x>0\\x\neq 1.\end{cases}$

Khi đó phương trình tương đương với $\log_3 x-\frac{3}{\log_3 x}=2$.

Đặt $t=\log_3 x$. Ta có

$t-\frac{3}{t}=2\Leftrightarrow t^2-2t-3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-1\\t=3\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\log_3 x=-1\\\log_3 x=3\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{1}{3}\\x=27.\end{array}\right.$

Vậy phương trình có hai nghiệm là $x=27$, $x=\frac{1}{27}$.

Chọn đáp án Ⓐ □

CÂU 2. Phương trình $\frac{1}{4-\log x}+\frac{2}{2+\log x}=1$ có tập nghiệm là

Ⓐ $\{10;100\}$. Ⓑ $\{1;20\}$. Ⓒ $\left\{\frac{1}{10};10\right\}$. Ⓓ $\varnothing$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases}x>0\\4-\log x\neq 0\\2+\log x\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\x\neq 10^4\\x\neq\frac{1}{10^2}.\end{cases}$

Đặt $t=\log x$. Khi đó ta có phương trình

$\frac{1}{4-t}+\frac{2}{2+t}=1\quad(1)$ với $\begin{cases}t\neq 4\\t\neq -2.\end{cases}$

Khi đó $(1)\Leftrightarrow 2+t+8-2t=-t^2+2t+8\Leftrightarrow t^2-3t+2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\\t=2\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\log x=1\\\log x=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=10\\x=100.\end{array}\right.$

So sánh với điều kiện ta có $x=10$ và $x=100$ là nghiệm của phương trình.

Chọn đáp án Ⓐ □

CÂU 3. Biết rằng bất phương trình $\log_2(5^x+2)+2\cdot\log_{(5^x+2)}2>3$ có tập nghiệm là $S=(\log_a b;+\infty)$, với a, b là các số nguyên dương nhỏ hơn 6 và $a\neq 1$. Tính $P=2a+3b$.

Ⓐ $P=16$. Ⓑ $P=7$. Ⓒ $P=11$. Ⓓ $P=18$.

Lời giải.

Ta có $\log_2(5^x+2)+2\cdot\log_{(5^x+2)}2>3\Leftrightarrow\log_2(5^x+2)+2\cdot\frac{1}{log_2(5^x+2)}>3\quad(*)$.

Đặt $t=\log_2(5^x+2)>1$. Khi đó $(*)$ thành $t+\frac{2}{t}>3\Leftrightarrow t^2-3t+2>0\Leftrightarrow t>2$ (do $t>1$).

Với $t > 2$ thì $\log_2(5^x + 2) > 2 = \log_2 2^2 \Leftrightarrow 5^x > 2 \Leftrightarrow x > \log_5 2$.

Suy ra $\begin{cases} a = 5 \\ b = 2 \end{cases} \Rightarrow P = 2a + 3b = 16$.

Chọn đáp án (A) □

CÂU 4. Gọi x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình $\log_2^2 x - 3\log_2 x + 2 = 0$. Giá trị của biểu thức $P = x_1^2 + x_2^2$ bằng bao nhiêu?

(A) 20. (B) 5. (C) 36. (D) 25.

Lời giải.

Điều kiện $x > 0$. Giải phương trình bậc hai với ẩn là $\log_2 x$ ta được

$\log_2^2 x - 3\log_2 x + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_2 x = 1 \\ \log_2 x = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = 4. \end{array}\right.$

Khi đó $P = x_1^2 + x_2^2 = 2^2 + 4^2 = 20$.

Chọn đáp án (A) □

CÂU 5. Cho phương trình $\log_4 x \cdot \log_2(4x) + \log_{\sqrt{2}}\left(\frac{x^3}{2}\right) = 0$. Nếu đặt $t = \log_2 x$, ta được phương trình nào sau đây?

(A) $t^2 + 14t - 4 = 0$. (B) $t^2 + 11t - 3 = 0$. (C) $t^2 + 14t - 2 = 0$. (D) $t^2 + 11t - 2 = 0$.

Lời giải.

Với điều kiện $x > 0$ phương trình đã cho trở thành

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\log_2 x \cdot (\log_2 4 + \log_2 x) + 2\log_2\left(\frac{x^3}{2}\right) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \frac{1}{2}\log_2 x \cdot (2 + \log_2 x) + 2\left(\log_2 x^3 - \log_2 2\right) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \frac{1}{2}\log_2 x \cdot (2 + \log_2 x) + 2(3\log_2 x - 1) = 0. \end{aligned}$$

Đặt $t = \log_2 x$, ta được phương trình $\frac{1}{2}t \cdot (2 + t) + 2(3t - 1) = 0 \Leftrightarrow t^2 + 14t - 4 = 0$.

Chọn đáp án (A) □

Dạng 30. Bài toán logarit chứa tham số

1. Các ví dụ

VÍ DỤ 1. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $\log_3^2 x + 2\log_3 x - m = 0$ có nghiệm

(A) $m < -1$. (B) $m \geq -1$. (C) $m \geq 0$. (D) $m \leq -2$.

Lời giải.

$\log_3^2 x + 2\log_3 x - m = 0 \quad (1)$.
Điều kiện $x > 0$. Đặt $t = \log_3 x$ với $t \in \mathbb{R}$.
Phương trình đã cho trở thành $t^2 + 2t - m = 0 \quad (2)$.
Để phương trình (1) có nghiệm $\Leftrightarrow$ phương trình (2) có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta = 1 + m \geq 0 \Leftrightarrow m \geq -1$.

Chọn đáp án (B) □

VÍ DỤ 2. Tìm tất cả giá trị của tham số m để phương trình $\log_3^2 x + \sqrt{\log_3^2 x + 1} - m = 0$ có nghiệm

(A) $m \geq 1$. (B) $m \geq -\frac{5}{4}$. (C) $m \leq \frac{5}{4}$. (D) $m \leq -1$.

Lời giải.

Điều kiện $x > 0$.
$\log_3^2 x + \sqrt{\log_3^2 x + 1} - m = 0 \Leftrightarrow \log_3^2 x + 1 + \sqrt{\log_3^2 x + 1} - 1 = m \quad (1)$.
Đặt $\sqrt{\log_3^2 x + 1} = t$. Vì $\log_3^2 x \geq 0$, $\forall x \geq 0 \Rightarrow \sqrt{\log_3^2 x + 1} \geq 1, \forall x > 0 \Rightarrow t \geq 1$.
Phương trình trở thành $t^2 + t - 1 = m \quad (2)$ với $t \geq 1$.
Xét hàm số $f(t) = t^2 + t - 1, t \geq 1$ có:
$f'(t) = 2t + 1 = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{1}{2}$.
Bảng biến thiên

x	1	$+\infty$
$f'(t)$	$+$	
$f(t)$	1 ↗	$+\infty$

Để phương trình (1) có nghiệm $\Leftrightarrow$ phương trình (2) có nghiệm $t \in [1; +\infty) \Leftrightarrow m \geq 1$.
Chọn đáp án (A) □

VÍ DỤ 3. Tìm tất cả giá trị của tham số m để phương trình $\log_2^2 x - 4\log_2 x - m = 0$ có nghiệm thuộc $[2; 4]$?

A $m \leq 3$. **B** $m \geq 1$. **C** $-4 \leq m \leq -3$. **D** $3 \leq m \leq 4$.

Lời giải.

$\log_2^2 x - 4\log_2 x - m = 0 \Leftrightarrow \log_2^2 x - 4\log_2 x = m \quad (1)$.
Điều kiện $x > 0$.
Đặt $\log_2 x = t$ với $x \in [2; 4] \Rightarrow t \in [1; 2]$.
Khi đó phương trình trở thành $t^2 - 4t = m$.
Xét hàm số $f(t) = t^2 - 4t$ trên $[1; 2]$.
$f'(x) = 2t - 4 = 0 \Rightarrow t = 2$.
Bảng biến thiên

x	1	2
$f'(t)$	$-$	
$f(t)$	-3 ↘	-4

$\Rightarrow$ (1) có nghiệm $\Leftrightarrow -4 \leq m \leq -3$.
Chọn đáp án (C) □

2. Câu hỏi trắc nghiệm

CÂU 1. Tìm tất cả giá trị của tham số m để phương trình $\log_3^2 x - 2\log_3 x - m = 0$ có nghiệm thuộc $[1; 3]$.

A $\left[\begin{array}{l} m > 0 \\ m < -1 \end{array}\right.$. **B** $\left[\begin{array}{l} m \geq 0 \\ m \leq -1 \end{array}\right.$. **C** $0 \leq m \leq 1$. **D** $-1 \leq m \leq 0$.

Lời giải.

Điều kiện: $x > 0$.
phương trình $\Leftrightarrow \log_3^2 x - 2\log_3 x = m \quad (1)$.
Đặt $\log_3 x = t$ với $x \in [1; 3] \Rightarrow t \in [0; 1]$.
Phương trình đã cho trở thành: $t^2 - 2t = m \quad (2)$.
Xét $f(t) = t^2 - 2t$ khi $t \in [0; 1]$ có
$f'(t) = 2t - 2 = 0 \Leftrightarrow t = 1$.
Bảng biến thiên

t	0	1
$f'(t)$	$-$	
$f(t)$	0 ↘	-1

Để phương trình (1) có nghiệm $\Leftrightarrow$ phương trình (2) có nghiệm $t \in [0; 1] \Leftrightarrow -1 \leq m \leq 0$.
Chọn đáp án (D) □

CÂU 2. Tìm tất cả giá trị của tham số m để phương trình $\log_2^2 x - 4\log_2 x - m = 0$ có nghiệm thuộc $[2; 4]$?

A $m \leq 3$. **B** $m \geq 1$. **C** $-4 \leq m \leq -3$. **D** $3 \leq m \leq 4$.

Lời giải.

$\log_2^2 x - 4\log_2 x - m = 0 \Leftrightarrow \log_2^2 x - 4\log_2 x = m \quad (1)$.
Điều kiện $x > 0$.
Đặt $\log_2 x = t$ với $x \in [2;4] \Rightarrow t \in [1;2]$.
Khi đó phương trình trở thành $t^2 - 4t = m$.
Xét hàm số $f(t) = t^2 - 4t$ trên $[1;2]$; $f'(x) = 2t - 4 = 0 \Rightarrow t = 2$.
Bảng biến thiên

x	1		2
$f'(t)$		$-$	
$f(t)$	-3	$\searrow$	-4

Vậy phương trình (1) có nghiệm $\Leftrightarrow -4 \leq m \leq -3$.
Chọn đáp án C

CÂU 3. Tìm tất cả giá trị của tham số m để phương trình $\log_2^2 x - 4\log_2 x - m = 0$ có nghiệm thuộc $\left[\dfrac{1}{4};4\right]$.

(A) $-4 \leq m \leq 12$. (B) $-12 \leq m \leq -4$. (C) $m \geq 0$. (D) $m \leq -1$.

Lời giải.

$\log_2^2 x - 4\log_2 x - m = 0 \Leftrightarrow \log_2^2 x - 4\log_2 x = m \quad (1)$.
Điều kiện $x > 0$.
Đặt $\log_2 x = t$ với $x \in \left[\dfrac{1}{4};4\right] \Rightarrow t \in [-2;2]$.
Khi đó phương trình trở thành $t^2 - 4t = m$.
Xét hàm số $f(t) = t^2 - 4t$ trên $[-2;2]$ có $f'(x) = 2t - 4 = 0 \Rightarrow t = 2$.
Bảng biến thiên

t	-2		2
$f'(t)$		$-$	
$f(t)$	12	$\searrow$	-4

Vậy phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow -4 \leq m \leq 12$.
Chọn đáp án A

CÂU 4. Tìm tất cả giá trị của tham số m để phương trình $\log_2^2 x + 2\sqrt{log_2^2 x + 1} + m = 0$ có nghiệm thuộc $\left[1;2^{\sqrt{3}}\right]$

(A) $-7 \leq m \leq -2$. (B) $7 \leq m \leq 2$. (C) $m \geq 1$. (D) $m \leq -2$.

Lời giải.

$\log_2^2 x + 2\sqrt{\log_2^2 x + 1} + m = 0 \Leftrightarrow \log_2^2 x + 1 + 2\sqrt{\log_2^2 x + 1} - 1 = -m \quad (1)$.
Đặt $\sqrt{\log_2^2 x + 1} = t$ với $x \in \left[1;2^{\sqrt{3}}\right] \Rightarrow t \in [1;2]$.
Khi đó phương trình trở thành $t^2 + 2t - 1 = m$.
Xét hàm số $f(t) = t^2 + 2t - 1$ trên $[1;2]$.
$f'(x) = 2t + 2 = 0 \Rightarrow t = -1$.
Bảng biến thiên

t	1		2
$f'(t)$		$+$	
$f(t)$	2	$\nearrow$	7

Vậy phương trình (1) có nghiệm thuộc $\left[1;2^{\sqrt{3}}\right] \Leftrightarrow 2 \leq -m \leq 7 \Leftrightarrow -7 \leq m \leq -2$.
Chọn đáp án A

CÂU 5. Tìm tất cả giá trị của tham số m để phương trình $\log_5^2 x + 2\sqrt{\log_5^2 x + 4} + m = 0$ có nghiệm thuộc $\left[\frac{1}{5}; 5^{\sqrt{5}}\right]$.

A $m \le -4$. **B** $m \ge 0$. **C** $-11 \le m \le -4$. **D** $4 \le m \le 11$.

Lời giải.

$\log_5^2 x + 2\sqrt{\log_5^2 x + 4} + m = 0 \Leftrightarrow \log_5^2 x + 4 + 2\sqrt{\log_5^2 x + 4} - 4 = -m \quad (1)$.

Đặt $\sqrt{\log_5^2 x + 4} = t$ với $x \in \left[\frac{1}{5}; 5^{\sqrt{5}}\right] \Rightarrow \log_5 x \in [-1; \sqrt{5}] \Rightarrow \log_5^2 x \in [0; 5] \Rightarrow t \in [2; 3]$.

Khi đó phương trình trở thành $t^2 + 2t - 4 = -m$.

Xét hàm số $f(t) = t^2 + 2t - 4$ trên $[2; 3]$; $f'(x) = 2t + 2 = 0 \Rightarrow t = -1$.

Bảng biến thiên

t	2		3
$f'(t)$		$+$	
$f(t)$	4	$\nearrow$	11

Phương trình (1) có nghiệm thuộc $\left[\frac{1}{5}; 5^{\sqrt{5}}\right] \Leftrightarrow 4 \le -m \le 11 \Leftrightarrow -11 \le m \le -4$.

Chọn đáp án C □

CÂU 6. Phương trình $\log_2\left(-x^2 - 3x - m + 10\right) = 3$ có 2 nghiệm trái dấu khi và chỉ khi

A $m > 2$. **B** $m < 2$. **C** $m > 4$. **D** $m < 4$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} & \log_2\left(-x^2 - 3x - m + 10\right) = 3 \\ \Leftrightarrow\ & \log_2\left(-x^2 - 3x - m + 10\right) = \log_2 8 \\ \Leftrightarrow\ & -x^2 - 3x - m + 10 = 8 \\ \Leftrightarrow\ & -x^2 - 3x - m + 2 = 0. \end{aligned}$$

Phương trình có 2 nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow ac = -1 \cdot (-m + 2) < 0 \Leftrightarrow m < 2$.

Chọn đáp án B □

CÂU 7. Tìm giá trị thực của tham số m để phương trình $\log_3^2 x - m\log_3 x + 2m - 7 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thõa mãn $x_1 \cdot x_2 = 81$.

A $m = -4$. **B** $m = 4$. **C** $m = 81$. **D** $m = 44$.

Lời giải.

Đặt $t = \log_3 x$, khi đó phương trình trở thành $t^2 - mt + 2m - 7 = 0. \quad (*)$

Ta có $t_1 + t_2 = \log_3 x_1 + \log_3 x_2 = \log_3(x_1 x_2) = \log_3 81 = 4. \quad (1)$

Mà theo Vi-ét phương trình $(*)$ có $t_1 + t_2 = m \quad (2)$

Từ (1) và (2), suy ra: $m = 4$.

Chú ý: Với những dạng toán như này, nếu tìm từ 2 giá trị m trở lên ta cần kiểm tra thêm điều kiện có 2 nghiệm của $(*)$ (ở câu hỏi này do tìm được 1 giá trị của m, trong khi đáp án cũng chỉ có 1 nên ta không cần kiểm tra điều này – mặc dù thực tế phương trình $(*)$ trong câu hỏi này luôn có 2 nghiệm).

Chọn đáp án B □

CÂU 8. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $\log_3\left(1 - x^2\right) + \log_{\frac{1}{3}}(x + m - 4) = 0$ có hai nghiệm thực phân biệt.

A $-\frac{1}{4} < m < 0$. **B** $5 \le m \le \frac{21}{4}$. **C** $5 < m < \frac{21}{4}$. **D** $-\frac{1}{4} \le m \le 2$.

Lời giải.

Ta có $\log_3\left(1 - x^2\right) = \log_3(x + m - 4) \Leftrightarrow x + m - 4 = 1 - x^2 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-1; 1) \\ m = -x^2 - x + 5 \end{cases} (*)$.

Xét $f(x) = -x^2 - x + 5$ với $x \in (-1; 1)$.

Số nghiệm của $(*)$ là số giao điểm của đồ thị $y = f(x)$ (với $x \in (-1; 1)$) và đường thẳng $y = m$.

Ta có $f'(x) = -2x - 1$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$.

x	-1		$-\frac{1}{2}$		1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	5	$\nearrow$	$\frac{21}{4}$	$\searrow$	3

Vậy $5 < m < \dfrac{21}{4}$.

Chọn đáp án C

CÂU 9. Có bao nhiêu giá trị nguyên m để phương trình $\log_{\sqrt{2}}(x-2) = \log_2(mx-21)$ có số nghiệm nhiều nhất?

A vô số. B 1. C 4. D 5.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} x > 2 \\ mx - 21 > 0 \end{cases}$.

Ta có

$$\begin{aligned} & \log_{\sqrt{2}}(x-2) = \log_2(mx-21) \\ \Leftrightarrow\ & 2\log_2(x-2) = \log_2(mx-21) \\ \Leftrightarrow\ & \log_2(x-2)^2 = \log_2(mx-21) \\ \Leftrightarrow\ & (x-2)^2 = mx - 21 \\ \Leftrightarrow\ & m = x - 4 + \frac{25}{x}. \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(x) = x - 4 + \dfrac{25}{x}$ với $x > 2$.

Bài toán có thể phát biểu lại là "Có bao nhiêu giá trị của m để đồ thị hàm số $f(x) = x - 4 + \dfrac{25}{x}$ với $x > 2$ cắt đường thẳng $y = m$ tại nhiều giao điểm nhất".

Ta có $f'(x) = 1 - \dfrac{25}{x^2}$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 5$.

x	2		5		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$\frac{21}{2}$	$\searrow$	6	$\nearrow$	$+\infty$

Phương trình có nhiều nhất 2 nghiệm khi và chỉ khi $6 < m < \dfrac{21}{2}$.

Vậy $m \in \{7; 8; 9; 10\}$.

Chọn đáp án C

CÂU 10. Gọi a, b lần lượt là giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của số nguyên m thõa mãn phương trình $\log_{0.5}(m+6x) + \log_2\left(3 - 2x - x^2\right) = 0$ có duy nhất một nghiệm. Khi đó hiệu $a - b$ bằng

A $a - b = 22$. B $a - b = 24$. C $a - b = 26$. D $a - b = 4$.

Lời giải.

Phương trình tương đương

$$\begin{aligned} & \log_{0.5}(m+6x) + \log_2\left(3 - 2x - x^2\right) \\ \Leftrightarrow\ & \log_2\left(3 - 2x - x^2\right) = \log_{0.5}(m+6x) \\ \Leftrightarrow\ & \begin{cases} 3 - 2x - x^2 > 0 \\ m + 6x = 3 - 2x - x^2 \end{cases} \\ \Leftrightarrow\ & \begin{cases} -3 < x < 1 \\ m = -x^2 - 8x + 3 = f(x). \end{cases} \end{aligned}$$

Ta đi giải bài toán sau "Tìm m để đồ thị hàm số $f(x) = -x^2 - 8x + 3$ (với $x \in (-3; 1)$) cắt đường thẳng $y = m$ tại một điểm duy nhất".
Ta có
$f'(x) = -2x - 8 < 0, \forall x \in (-3; 1)$.
Suy ra hàm số nghịch biến trên $(-3; 1)$.
Bảng biến thiên

x	-3 $\qquad\qquad$ 1
$f'(x)$	$-$
$f(x)$	$18 \searrow -6$

Phương trình có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi $-6 < m < 18 \Rightarrow \begin{cases} m_{\max} = 17 = a \\ m_{\min} = -5 = b \end{cases} \Rightarrow a - b = 22$.

Chọn đáp án (A) □

CÂU 11. Để phương trình $2\log_2\left(2x^2 - x + 2m - 4m^2\right) + \log_{\frac{1}{2}}\left(x^2 + mx - 2m^2\right) = 0$ có hai nghiệm phân biệt thì tập tất cả các giá trị của m là

(A) $m \in \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{1}{3}\right\}$. (B) $m \in \mathbb{R} \setminus \left\{0; \dfrac{1}{3}\right\}$. (C) $m \in \left(-1; \dfrac{1}{2}\right) \setminus \left\{\dfrac{1}{3}\right\}$. (D) $m \in \left(-1; \dfrac{1}{2}\right) \setminus \left\{0; \dfrac{1}{3}\right\}$.

Lời giải.

Phương trình tương đương
$2\log_2\left(2x^2 - x + 2m - 4m^2\right) = \log_2\left(x^2 + mx - 2m^2\right)$
$\Leftrightarrow 2x^2 - x + 2m - 4m^2 = x^2 + mx - 2m^2 > 0$
$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - (m+1)x + 2m - 2m^2 = 0 (*) \\ x^2 + mx - 2m^2 > 0 \end{cases}$.

Từ $(*) \Leftrightarrow (x + m - 1)(x - 2m) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 - m \\ x = 2m. \end{array}\right. \quad (2)$

Yêu cầu bài toán tương đương (2) có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn (1).

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - m \neq 2m \\ (1-m)^2 + m(1-m) - 2m^2 > 0 \\ 4m^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq \dfrac{1}{3} \\ -2m^2 - m + 1 > 0 \\ m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq \dfrac{1}{3} \\ m \neq 0 \\ -1 < m < \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Vậy $m \in \left(-1; \dfrac{1}{2}\right) \setminus \left\{0; \dfrac{1}{3}\right\}$.

Chọn đáp án (D) □

CÂU 12. Gọi S là tập hợp số thực m để phương trình $\log_{\sqrt{5}-2}\left(x^2 + mx + m + 1\right) + \log_{\sqrt{5}-2} x = 0$ có nghiệm duy nhất. Biết a là giá trị lớn của S và b là giá trị trong các phần tử nguyên của S. Khi đó $a + b$ bằng bao nhiêu?

(A) $a + b = 3 - 3\sqrt{2}$. (B) $a + b = 4 - 2\sqrt{3}$. (C) $a + b = -3 + 2\sqrt{3}$. (D) $a + b = 2 - 2\sqrt{3}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} & \log_{\sqrt{5}-2}\left(x^2 + mx + m + 1\right) + \log_{\sqrt{5}-2} x = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \log_{\sqrt{5}-2}\left(x^2 + mx + m + 1\right) = \log_{\sqrt{5}-2} x \\ \Leftrightarrow\ & x^2 + mx + m + 1 = x > 0 \\ \Leftrightarrow\ & \begin{cases} x > 0 \\ m = \dfrac{-x^2 + x - 1}{x + 1} = f(x). \end{cases} \end{aligned}$$

Bài toán phát biểu lại là "Tìm m để đồ thị hàm số.
$f(x) = \dfrac{-x^2 + x - 1}{x + 1}$ (với $x \in (0; +\infty)$) cắt đường thẳng $y = m$ tại một điểm duy nhất".
Ta có $f'(x) = \dfrac{-x^2 - 2x + 2}{(x+1)^2}$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1 \pm \sqrt{3}$.

x	0		$-1+\sqrt{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	-1	$\nearrow$	$3-2\sqrt{3}$	$\searrow$	$-\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, yêu cầu bài toán tương đương $m \le -1$ hoặc $m = 3-2\sqrt{3}$.

Vậy $S = (-\infty; -1] \cup \{3-2\sqrt{3}\} \Rightarrow \begin{cases} a = 3-2\sqrt{3} \\ b = -1 \end{cases} \Rightarrow a+b = 2-2\sqrt{3}$.

Chọn đáp án (D) □

CÂU 13. Trong tất cả các số thực m để phương trình $\log_5\left(25^x - \log_5 m\right) = x$ có nghiệm duy nhất thì m_0 là giá trị nhỏ nhất. Khi đó giá trị nào sau đây gần m_0 nhất

A 0,7. **B** 0,5. **C** 1. **D** 1,6.

Lời giải.

Ta có $\log_5\left(25^x - \log_5 m\right) = x \Leftrightarrow 25^x - \log_5 m = 5^x$.

$\log_5 m = 25^x - 5^x \xrightarrow{t=5^x>0} \log_5 m = t^2 - t \quad (*)$.

Xét $f(t) = t^2 - t$ với $t > 0$.

Ta có $f'(t) = 2t-1$; $f'(t) = 0 \Leftrightarrow 2t-1 = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{1}{2}$

t	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

Do $t = 5^x > 0$ nên ứng với 1 giá trị $t > 0$ cho ta một nghiệm $\mathcal{X}$.

Do đó yêu cầu bài toán tương đương $(*)$ có nghiệm duy nhất

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_5 m = -\dfrac{1}{4} \\ \log_5 m \ge 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = \dfrac{1}{\sqrt[4]{5}} \\ m \ge 1 \end{array}\right. \Rightarrow m_{\min} = m_0 = \dfrac{1}{\sqrt[4]{5}} \approx 0{,}67 \text{ gần } 0{,}7 \text{ nhất.}$$

Chọn đáp án (D) □

CÂU 14. Gọi S' là tập tất cả các số thực m để phương trình $\log_2\left(4^x - m\right) = x+1$ có hai nghiệm phân biệt. Tập S' là

A $S = \left(-1; \dfrac{1}{2}\right)$. **B** $S = \left(0; \dfrac{1}{2}\right)$. **C** $S = \left(-1; -\dfrac{1}{2}\right)$. **D** $S = (-1; 0)$.

Lời giải.

Ta có $\log_2\left(4^x - m\right) = x+1 \Leftrightarrow 4^x - m = 2^{x+1} \Leftrightarrow 4^x - 2\cdot 2^x - m = 0$.

Đặt $t = 2^x$ với $t > 0$. Khi đó phương trình có dạng $t^2 - 2t - m = 0 \quad (1)$.

Để phương trình có hai nghiệm phân biệt thì (1) có hai nghiệm dương phân biệt

$$\begin{cases} \Delta' = 1+m > 0 \\ S = 2 > 0 \\ P = -m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -1 \\ m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < m < 0.$$

Vậy $S = (-1; 0)$.

Chọn đáp án (D) □

CÂU 15. Tìm m để phương trình $\log_{\sqrt{5}+2}\left(x^2 + mx + m + 1\right) + \log_{\sqrt{5}-2} x = 0$ có nghiệm duy nhất .

A $m \in (-\infty; -1] \cup \{3-2\sqrt{3}\}$. **B** $m \in (-\infty; -1) \cup \{3-2\sqrt{3}\}$.

C $m \in (-\infty; -2] \cup \{3+2\sqrt{3}\}$. **D** $m \in (-\infty; -1]$.

Lời giải.

Ta có

$$\log_{\sqrt{5}+2}\left(x^2 + mx + m + 1\right) + \log_{\sqrt{5}-2} x = 0$$

$$
\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \quad \log_{\sqrt{5}+2}\left(x^2+mx+1\right)=\log_{\sqrt{5}+2}x\\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x>0 \\ x^2+mx+m+1=x. \end{cases}
\end{aligned}
$$

Cách 1: $(*)$ có nghiệm duy nhất khi phương trình $x^2+mx+m+1=x$ hay $f(x)=x^2+(m-1)x+m+1=0$ có nghiệm kép dương hoặc có hai nghiệm trong đó có một nghiệm bằng 0 và một nghiệm dương.

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \Delta=m^2-6m-3=0 \\ 1-m>0 \end{cases} \\ \begin{cases} f(0)=0 \\ S=1-m>0 \end{cases} \\ P=m+1<0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} m=3\pm 2\sqrt{3} \\ m<1 \end{cases} \\ m<-1 \\ \begin{cases} m=-1 \\ m<1 \end{cases} \end{array}\right. . \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=3-2\sqrt{3} \\ m\le -1 \end{array}\right. \Rightarrow m\in(-\infty;-1]\cup\{3-2\sqrt{3}\}.$$

Cách 2: $(*) \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ m=\dfrac{-x^2+x-1}{x+1}\cdot \end{cases}$

Xét hàm số $f(x)=\dfrac{-x^2+x-1}{x+1}$ với $x>0$.

Ta có $f'(x)=\dfrac{-x^2-2x-2}{x+1}$; $f'(x)=0\Leftrightarrow x=-1\pm\sqrt{3}$

x	0		$-1+\sqrt{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	-1	$\nearrow$	$3-2\sqrt{3}$	$\searrow$	$-\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, yêu cầu bài toán tương đương $m\le -1$ hoặc $m=3-2\sqrt{3}$.

Chọn đáp án (A) □

CÂU 16. Gọi $m=m_0$ là số nguyên nhỏ nhất để phương trình $\log_2\left(5^x-1\right)\cdot\log_4\left(2\cdot 5^x-2\right)=m$ có nghiệm thuộc $[1;+\infty)$. Trong các số sau, đâu là số gần m_0 nhất?

(A) 5. (B) 2. (C) -1. (D) 8.

Lời giải.

Ta có

$$
\begin{aligned}
&\log_2\left(5^x-1\right)\cdot\log_4\left(2\cdot 5^x-2\right)=m\\
\Leftrightarrow\ &\log_2\left(5^x-1\right)\cdot\frac{1}{2}\log_2\left[2\left(5^x-1\right)\right]=m\\
\Leftrightarrow\ &\log_2\left(5^x-1\right)\cdot\left[1+\log_2\left(5^x-1\right)\right]=2m
\end{aligned}
$$

Đặt $t=\log_2\left(5^x-1\right)$ ta có phương trình $t(1+t)=2m\Leftrightarrow t^2+t=2m \quad (*)$.

Với $x\ge 1\Rightarrow 5^x\ge 5\Rightarrow \log_2\left(5^x-1\right)\ge\log_2(5-1)=2$ hay $t\ge 2$.

Khi đó bài toán được phát biểu lại là Tìm m để phương trình $(*)$ có nghiệm $t\ge 2$.

Xét hàm số $f(t)=t^2+t$ với $t\ge 2$; $f'(t)=2t+1>0,\forall t>2$.

Suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến với $t\ge 2$.

Vậy $2m=f(t)\ge f(2)=6\Leftrightarrow m\ge 3\Rightarrow m_0=3$.

Chọn đáp án (B) □

CÂU 17. Có tất cả bao nhiêu số nguyên m để phương trình $\log_3^2 x+\sqrt{\log_3^2 x+1}-2m-1=0$ có ít nhất một nghiệm thuộc $\left[1;3^{\sqrt{3}}\right]$.

(A) 1. (B) 5. (C) 3. (D) 7.

Lời giải.

Điều kiện $x>0$.

Đặt $t=\sqrt{\log_3^2 x+1}\ge 1\Rightarrow \log_3^2 x=t^2-1$.

Phương trình trở thành $t^2+t-2m-2=0 \quad (*)$.

Với $x\in\left[1;3^{\sqrt{3}}\right]$ hay $1\le x\le 3^{\sqrt{3}}\Rightarrow \sqrt{\log_3^2 1+1}\le\sqrt{\log_3^2 x+1}\le\sqrt{\log_3^2 3^{\sqrt{3}}+1}\Rightarrow 1\le t\le 2$.

Khi đó, bài toán được phát biểu lại là "Tìm m để phương trình $(*)$ có ít nhất một nghiệm thuộc $[1;2]$".

Ta có $(*)\Leftrightarrow 2m=t^2+t-2$.

Xét hàm số $f(t)=t^2+t-2$ với $t\in[1;2]$.
Ta có $f'(t)=2t+1>0, \forall t\in[1;2]$ suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên $[1;2]$.
Suy ra $f(1)\le f(t)\le f(2)\Leftrightarrow 0\le 2m\le 4\Leftrightarrow 0\le m\le 2$.
Mà $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\in\{0;1;2\}$ có ba số nguyên thỏa mãn.
Chọn đáp án C □

CHUYÊN ĐỀ 3: Bất phương trình mũ

D. KIẾN THỨC SÁCH GIÁO KHOA CẦN CẦN NẮM

Ta có thể dùng các phương pháp biến đổi như phương trình mũ và các công thức sau:

- Nếu $a>1$ thì: $a^{f(x)}>a^{g(x)}\Leftrightarrow f(x)>g(x)$ và $a^{f(x)}\ge a^{g(x)}\Leftrightarrow f(x)\ge g(x)$.
- Nếu $0<a<1$ thì: $a^{f(x)}>a^{g(x)}\Leftrightarrow f(x)<g(x)$ và $a^{f(x)}\ge a^{g(x)}\Leftrightarrow f(x)\le g(x)$.

Tổng quát ta có:

- $a^{f(x)}>a^{g(x)}\Leftrightarrow \begin{cases}a>0\\(a-1)\cdot[f(x)-g(x)]>0.\end{cases}$
- $a^{f(x)}\ge a^{g(x)}\Leftrightarrow \begin{cases}a>0\\(a-1)\cdot[f(x)-g(x)]\ge 0.\end{cases}$

E. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 31. Phương pháp đưa về cơ số và logarit hóa

Phương pháp:

- Nếu $a>1$ thì: $a^{f(x)}>a^{g(x)}\Leftrightarrow f(x)>g(x)$ và $a^{f(x)}\ge a^{g(x)}\Leftrightarrow f(x)\ge g(x)$.
- Nếu $0<a<1$ thì: $a^{f(x)}>a^{g(x)}\Leftrightarrow f(x)<g(x)$ và $a^{f(x)}\ge a^{g(x)}\Leftrightarrow f(x)\le g(x)$.

1. Các ví dụ

VÍ DỤ 1. Tìm tập nghiệm của bất phương trình $\left(\frac{3}{4}\right)^{2x-1}\le\left(\frac{3}{4}\right)^{2-x}$.

Lời giải.

Ta có $\left(\frac{3}{4}\right)^{2x-1}\le\left(\frac{3}{4}\right)^{2-x}\Leftrightarrow 2x-1\ge 2-x\Leftrightarrow x\ge 1$. □

VÍ DỤ 2. Giải bất phương trình $2^{-x^2+3x}<4$.

Lời giải.

Do $2>1$ nên $2^{-x^2+3x}<4\Leftrightarrow -x^2+3x<2\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x<1\\x>2.\end{array}\right.$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $(-\infty;1)\cup(2;+\infty)$. □

VÍ DỤ 3. Tìm nghiệm của bất phương trình $2^{x^2+3x-2}\ge\frac{1}{4}$.

Lời giải.

Ta có $2^{x^2+3x-2}\ge\frac{1}{4}\Leftrightarrow 2^{x^2+3x-2}\ge 2^{-2}\Leftrightarrow x^2+3x-2\ge -2$

$\Leftrightarrow x^2+3x\ge 0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x\ge 0\\x\le -3.\end{array}\right.$ □

VÍ DỤ 4. Bất phương trình $2^{x^2-3x+4}\le\left(\frac{1}{2}\right)^{2x-10}$ có bao nhiêu nghiệm nguyên dương?

Lời giải.

Bất phương trình tương đương với

$$\begin{aligned}&2^{x^2-3x+4}\le 2^{10-2x}\Leftrightarrow x^2-3x+4\le 10-2x\\ \Leftrightarrow\ &x^2-x-6\le 0\Leftrightarrow -2\le x\le 3.\end{aligned}$$

Do $x>0$ nên $0<x\le 3$.
Mà $x\in\mathbb{Z}^+$ nên $x\in\{1;2;3\}$. Vậy có 3 giá trị nguyên dương thỏa mãn yêu cầu bài toán. □

VÍ DỤ 5. Tìm nghiệm của bất phương trình: $\left(\dfrac{3}{5}\right)^{x^2-2x-1} \geq \left(\dfrac{25}{9}\right)^{2x-1}$.

Lời giải.

Bất phương trình $\Leftrightarrow \left(\dfrac{3}{5}\right)^{x^2-2x-1} \geq \left(\dfrac{3}{5}\right)^{-4x+2} \Leftrightarrow x^2+2x-3 \leq 0 \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 1$. □

VÍ DỤ 6. Tìm nghiệm của bất phương trình: $(2-\sqrt{3})^{x^2-3x} > (2+\sqrt{3})^2$.

Lời giải.

Có $(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3}) = 1 \Rightarrow 2+\sqrt{3} = \dfrac{1}{2-\sqrt{3}} = (2-\sqrt{3})^{-1}$.

Bất phương trình $\Leftrightarrow (2-\sqrt{3})^{x^2-3x} > (2-\sqrt{3})^{-2} \Leftrightarrow x^2-3x+2 < 0 \Leftrightarrow 1 < x < 2$. □

VÍ DỤ 7. Tìm tập nghiệm của bất phương trình $5^{x+1} - \dfrac{1}{5} > 0$.

Lời giải.

Ta có: $5^{x+1} - \dfrac{1}{5} > 0 \Leftrightarrow 5^{x+1} - 5^{-1} > 0 \Leftrightarrow x+1 > -1 \Leftrightarrow x > -2 \Rightarrow S = (-2;+\infty)$. □

VÍ DỤ 8. Bất phương trình $2^{x^2} \cdot 3^x < 1$ có bao nhiêu nghiệm nguyên?

Lời giải.

Ta có $2^{x^2} \cdot 3^x < 1 \Leftrightarrow x^2 + x \cdot \log_2 3 < 0 \Leftrightarrow x(x+\log_2 3) < 0 \Leftrightarrow -\log_2 3 < x < 0$.

Suy ra bất phương trình có một nghiệm nguyên $x = -1$. □

2. Câu hỏi trắc nghiệm

CÂU 1. Cho $(2-\sqrt{3})^m > (2-\sqrt{3})^n \quad (m,n \in \mathbb{Z})$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

(A) $m > n$. (B) $m < n$. (C) $m = n$. (D) $m \geq n$.

Lời giải.

Ta có $0 < 2-\sqrt{3} < 1 \Rightarrow (2-\sqrt{3})^m > (2-\sqrt{3})^n \Rightarrow m < n$.

Chọn đáp án (B) □

CÂU 2. Cho $0 < a < 1$. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

(A) $a^x > 1 \Leftrightarrow x \geq 0$. (B) $a^x > 1 \Leftrightarrow x > 0$. (C) $a^x > 1 \Leftrightarrow x < 0$. (D) $a^x > 1 \Leftrightarrow 0 < x < 1$.

Lời giải.

Do $0 < a < 1$ nên $a^x > 1 \Leftrightarrow a^x > a^\circ \Leftrightarrow x < 0$.

Chọn đáp án (C) □

CÂU 3. Nghiệm của bất phương trình $3^{2x+1} > 3^{3-x}$ là

(A) $x > \dfrac{3}{2}$. (B) $x < \dfrac{2}{3}$. (C) $x > -\dfrac{2}{3}$. (D) $x > \dfrac{2}{3}$.

Lời giải.

$3^{2x+1} > 3^{3-x} \Leftrightarrow 2x+1 > 3-x \Leftrightarrow x > \dfrac{2}{3}$.

Chọn đáp án (D) □

CÂU 4. Cho α, β là hai số thực. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

(A) $\left(\dfrac{2}{e}\right)^\alpha > \left(\dfrac{2}{e}\right)^\beta \Leftrightarrow \alpha, \beta$ là hai số thực luôn luôn dương.

(B) $\left(\dfrac{2}{e}\right)^\alpha > \left(\dfrac{2}{e}\right)^\beta \Leftrightarrow \alpha > \beta$.

(C) $\left(\dfrac{2}{e}\right)^\alpha > \left(\dfrac{2}{e}\right)^\beta \Leftrightarrow \alpha, \beta$ là hai số thực không âm.

(D) $\left(\dfrac{2}{e}\right)^\alpha > \left(\dfrac{2}{e}\right)^\beta \Leftrightarrow \alpha < \beta$.

Lời giải.

Do hàm số $y = \left(\dfrac{2}{e}\right)^x$ nghịch biến nên $\left(\dfrac{2}{e}\right)^\alpha > \left(\dfrac{2}{e}\right)^\beta \Leftrightarrow \alpha < \beta$.

Chọn đáp án (D) □

CÂU 5. Cho $\left(3-2\sqrt{2}\right)^m > \left(3-2\sqrt{2}\right)^n$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

(A) $m > n$. (B) $m = n$. (C) $m < n$. (D) $m \geq n$.

Lời giải.

Vì $0 < 3-2\sqrt{2} < 1$ nên $y = \left(3-2\sqrt{2}\right)^x$ là hàm số nghịch biến.

Do đó $\left(3-2\sqrt{2}\right)^m > \left(3-2\sqrt{2}\right)^n \Leftrightarrow m < n$.

Chọn đáp án (C) □

CÂU 6. Tìm tập nghiệm của bất phương trình $\left(\dfrac{1}{3}\right)^x > 9$.

Ⓐ $(-\infty;2)$. Ⓑ $(2;+\infty)$. Ⓒ $(-2;+\infty)$. Ⓓ $(-\infty;-2)$.

Lời giải.

Ta có $\left(\frac{1}{3}\right)^x > 9 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^x > \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} \Leftrightarrow x < -2$.

Chọn đáp án D □

CÂU 7. Tìm nghiệm của bất phương trình $\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-3x+1} < 3$.

Ⓐ $-2 < x < 0$. Ⓑ $-1 < x < 1$. Ⓒ $\left[\begin{array}{l}x > 2\\ x < 1\end{array}\right.$. Ⓓ $1 < x < 2$.

Lời giải.

Ta có

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-3x+1} < 3 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-3x+1} < \left(\frac{1}{3}\right)^{-1} \Leftrightarrow x^2-3x+1 > -1$$

$$\Leftrightarrow x^2-3x+2 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x > 2\\ x < 1.\end{array}\right.$$

Chọn đáp án C □

CÂU 8. Tìm nghiệm của bất phương trình: $\left(\frac{7}{11}\right)^{3x+2} \le \left(\frac{11}{7}\right)^{x^2}$

Ⓐ $\left[\begin{array}{l}x \ge 2\\ x \le 1\end{array}\right.$. Ⓑ $\left[\begin{array}{l}x \ge -1\\ x \le -2\end{array}\right.$. Ⓒ $-2 \le x \le 1$. Ⓓ $1 \le x \le 2$.

Lời giải.

Bất phương trình $\Leftrightarrow \left(\frac{11}{7}\right)^{-3x-2} \le \left(\frac{11}{7}\right)^{x^2} \Leftrightarrow x^2+3x+2 \ge 0 \Leftrightarrow -2 \le x \le -1$.

Chọn đáp án C □

CÂU 9. Tìm nghiệm của bất phương trình: $2^{x^2-x+8} < 4^{1-3x}$

Ⓐ $-3 < x < -2$. Ⓑ $\left[\begin{array}{l}x < -3\\ x > -2\end{array}\right.$. Ⓒ $2 < x < 3$. Ⓓ $-1 < x < 1$.

Lời giải.

Bất phương trình $\Leftrightarrow 2^{x^2-x+8} < 2^{2-6x} \Leftrightarrow x^2+5x+6 < 0 \Leftrightarrow -3 < x < -2$.

Chọn đáp án A □

CÂU 10. Tập các số x thỏa mãn bất phương trình $\left(\frac{2}{3}\right)^{4x} \le \left(\frac{3}{2}\right)^{2-x}$ là

Ⓐ $\left[-\frac{2}{3};+\infty\right)$. Ⓑ $\left[\frac{2}{5};+\infty\right)$. Ⓒ $\left(-\infty;\frac{2}{3}\right]$. Ⓓ $\left(-\infty;\frac{2}{5}\right]$.

Lời giải.

Ta có: $\left(\frac{2}{3}\right)^{4x} \le \left(\frac{3}{2}\right)^{2-x} \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{4x} \le \left(\frac{2}{3}\right)^{x-2} \Leftrightarrow 4x \ge x-2 \Leftrightarrow x \ge -\frac{2}{3}$.

Chọn đáp án A □

CÂU 11. Giải bất phương trình $e^{2x+3} > e^{x+5}$. Kết quả tập nghiệm là

Ⓐ $(4;+\infty)$. Ⓑ $(2;+\infty)$. Ⓒ $(3;+\infty)$. Ⓓ $(-\infty;3)$.

Lời giải.

Ta có $e^{2x+3} > e^{x+5} \Leftrightarrow 2x+3 > x+5 \Leftrightarrow x > 2$.

Chọn đáp án B □

CÂU 12. Hệ phương trình $\begin{cases}4^{x+1} \le 8^{6-2x}\\ 3^{4x+5} \ge 27^{1+x}\end{cases}$ có tập nghiệm là

Ⓐ $[2;+\infty)$. Ⓑ $[-2;2]$. Ⓒ $(-\infty;1]$. Ⓓ $[2;5]$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{cases}4^{x+1} \le 8^{6-2x}\\ 3^{4x+5} \ge 27^{1+x}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2^{2x+2} \le 2^{18-6x}\\ 3^{4x+5} \ge 3^{3+3x}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}2x+2 \le 18-6x\\ 4x+5 \ge 3+3x\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x \le 2\\ x \ge -2\end{cases} \Leftrightarrow -2 \le x \le 2.$$

Chọn đáp án (B) □

CÂU 13. Tìm x biết $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x^2-5x+4} > 4$.

(A) $\left[\begin{array}{l} x > \dfrac{5+\sqrt{17}}{2} \\ x < \dfrac{5-\sqrt{17}}{2} \end{array}\right.$.

(B) $\dfrac{5-\sqrt{17}}{2} < x < \dfrac{5+\sqrt{17}}{2}$.

(C) $\left[\begin{array}{l} x > 3 \\ x < 2 \end{array}\right.$.

(D) $2 < x < 3$.

Lời giải.

Ta có

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-5x+4} > 4 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-5x+4} > \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$$
$$\Leftrightarrow \quad x^2-5x+4 < -2 \Leftrightarrow x^2-5x+6 < 0 \Leftrightarrow 2 < x < 3.$$

Chọn đáp án (D) □

CÂU 14. Tập nghiệm của bất phương trình $\dfrac{1}{9}\cdot 3^{2x} > 1$ là

(A) $[1;+\infty)$. (B) $(1;+\infty)$. (C) $(0;+\infty)$. (D) $[0;+\infty)$.

Lời giải.

Ta có $\dfrac{1}{9}\cdot 3^{2x} > 1 \Leftrightarrow 3^{2x-2} > 1 \Leftrightarrow 2x-2 > 0 \Leftrightarrow x > 1$.

Chọn đáp án (B) □

CÂU 15. Tìm nghiệm của bất phương trình $2^{x+1}\cdot 4^{x-1}\cdot \dfrac{1}{8^{1-x}} > 16^x$

(A) $x > 0$. (B) $x > 2$. (C) $x < 2$. (D) $x < 0$.

Lời giải.

Bất phương trình $\Leftrightarrow 2^{6x-4} > 2^{4x} \Leftrightarrow 2x > 4 \Leftrightarrow x > 2$.

Chọn đáp án (B) □

CÂU 16. Tìm nghiệm của bất phương trình $\dfrac{1}{8}\cdot 4^{2x-3} \le \left(\dfrac{\sqrt{2}}{8}\right)^{-x}$.

(A) $x \ge 3$. (B) $x \le 3$. (C) $x \le 6$. (D) $x \ge 6$.

Lời giải.

Bất phương trình $\Leftrightarrow 2^{-3+4x-6} \le 2^{\frac{5}{2}x} \Leftrightarrow \dfrac{3}{2}x \le 9 \Leftrightarrow x \le 6$.

Chọn đáp án (C) □

CÂU 17. Tìm nghiệm của bất phương trình $8^{\frac{2x-1}{x+1}} \ge 0{,}25(\sqrt{2})^{7x}$.

(A) $x \ge -1$. (B) $\left[\begin{array}{l} x < -1 \\ \dfrac{2}{7} \le x \le 1 \end{array}\right.$. (C) $-1 \le x \le 1$. (D) $\dfrac{2}{7} \le x \le 1$.

Lời giải.

Ta có

$$8^{\frac{2x-1}{x+1}} \ge 0{,}25(\sqrt{2})^{7x} \Leftrightarrow 2^{\frac{3(2x-1)}{x+1}} \ge 2^{-2}\cdot 2^{\frac{7x}{2}}$$
$$\Leftrightarrow \quad \frac{6x-3}{x+1} \ge -2+\frac{7x}{2} \Leftrightarrow \frac{12x-6}{2(x+1)} \ge \frac{-4(x+1)+7x(x+1)}{2(x+1)}$$
$$\Leftrightarrow \quad \frac{7x^2-9x+2}{2(x+1)} \le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < -1 \\ \dfrac{2}{7} \le x \le 1. \end{array}\right.$$

Chọn đáp án (B) □

CÂU 18. Số nguyên nhỏ nhất thỏa mãn bất phương trình $4^x\cdot 3^3 > 3^x\cdot 4^3$ là

(A) -3. (B) 3. (C) -4. (D) 4.

Lời giải.

Bất phương trình đã cho $\Leftrightarrow \left(\dfrac{4}{3}\right)^x > \left(\dfrac{4}{3}\right)^3 \Leftrightarrow x > 3$.

Mà x là số nguyên nhỏ nhất nên $x = 4$.

Chọn đáp án (D) □

CÂU 19. Có tất cả bao nhiêu số nguyên thỏa mãn bất phương trình $8^x \cdot 2^{1-x^2} > (\sqrt{2})^{2x}$?

(A) 2. (B) 3. (C) 4. (D) 5.

Lời giải.

Bất phương trình đã cho $\Leftrightarrow 2^{3x+1-x^2} > 2^x \Leftrightarrow x^2 - 2x - 1 < 0 \Leftrightarrow 1 - \sqrt{2} < x < 1 + \sqrt{2}$.
Mà x là số nguyên nên tập nghiệm của bất phương trình $S = \{0; 1; 2\}$.
Chọn đáp án (B) □

CÂU 20. Biết $S = [a; b]$ là tập nghiệm của bất phương trình $\left(\dfrac{1}{6}\right)^{x^2-x} \geq \left(\dfrac{1}{6}\right)^{x+3}$ (với $a, b \in \mathbb{R}$ và $a < b$). Khi đó hiệu $b - a$ bằng bao nhiêu?

(A) -4. (B) 4. (C) 2. (D) Không xác định.

Lời giải.

Ta có $\left(\dfrac{1}{6}\right)^{x^2-x} \geq \left(\dfrac{1}{6}\right)^{x+3} \Leftrightarrow x^2 - x \leq x + 3 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 3$.

Suy ra $S = [-1; 3] \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 3 \end{cases} \Rightarrow b - a = 4$.

Chọn đáp án (B) □

CÂU 21. Số nghiệm nguyên của bất phương trình $\left(3 - 2\sqrt{2}\right)^{x^2-x-3} \geq 3 + 2\sqrt{2}$ là

(A) 2. (B) 3. (C) 4. (D) Vô số.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} & \left(3 - 2\sqrt{2}\right)^{x^2-x-3} \geq 3 + 2\sqrt{2} \Leftrightarrow \left(3 - 2\sqrt{2}\right)^{x^2-x-3} \geq \left(3 - 2\sqrt{2}\right)^{-1} \\ \Leftrightarrow\ & x^2 - x - 3 \leq -1 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 \leq 0 \\ \Leftrightarrow\ & -1 \leq x \leq 2 \xrightarrow{x \in \mathbb{Z}} x \in \{-1; 0; 1; 2\}. \end{aligned}$$

Vậy có 4 giá trị nguyên.
Chọn đáp án (C) □

CÂU 22. Cho bất phương trình $\left(\sqrt{10} + 3\right)^{\frac{x-5}{x-1}} \leq \left(\sqrt{10} - 3\right)^{\frac{x+1}{x+5}}$. Gọi x_1, x_2 lần lượt là nghiệm nguyên lớn nhất và nhỏ nhất của bất phương trình. Khi đó $x_1 + x_2$ bằng bao nhiêu?

(A) -2. (B) -1. (C) 0. (D) 4.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} & \left(\sqrt{10} + 3\right)^{\frac{x-5}{x-1}} \leq \left(\sqrt{10} - 3\right)^{\frac{x+1}{x+5}} \Leftrightarrow \left(\sqrt{10} + 3\right)^{\frac{x-5}{x-1}} \leq \left(\sqrt{10} + 3\right)^{-\frac{x+1}{x+5}} \\ \Leftrightarrow\ & \frac{x-5}{x-1} \leq -\frac{x+1}{x+5} \Leftrightarrow \frac{2x^2 - 26}{(x-1)(x+5)} \leq 0 \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} -5 < x \leq -\sqrt{13} \\ 1 < x \leq \sqrt{13} \end{array}\right. \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -4 \end{cases} \Rightarrow x_1 + x_2 = -1. \end{aligned}$$

Chọn đáp án (B) □

CÂU 23. Tập nghiệm của bất phương trình $(\sqrt{5} - 2)^{\frac{2x}{x-1}} \leq (\sqrt{5} + 2)^x$ là

(A) $S = (-\infty; -1] \cup [0; 1]$. (B) $S = [-1; 0]$.
(C) $S = (-\infty; -1) \cup (0; +\infty)$. (D) $S = [-1; 0] \cup (1; +\infty)$.

Lời giải.

Bất phương trình tương đương

$$\begin{aligned} & (\sqrt{5} + 2)^{-\frac{2x}{x-1}} \leq (\sqrt{5} + 2)^x \Leftrightarrow -\frac{2x}{x-1} \leq x \\ \Leftrightarrow\ & \frac{x^2 + x}{x - 1} \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1 \leq x \leq 0 \\ x > 1 \end{array}\right. \Rightarrow S = [-1; 0] \cup (1; +\infty). \end{aligned}$$

Chọn đáp án (D) □

CÂU 24. Gọi x_0 là nghiệm nhỏ nhất của bất phương trình $\dfrac{1}{2^{\sqrt{x^2-2x}}} \le 2^{x-1}$. Hỏi giá trị nào sau đây gần với x_0 nhất?

Ⓐ 1. Ⓑ $\dfrac{1}{2}$. Ⓒ $\dfrac{3}{2}$. Ⓓ 3.

Lời giải.

Bất phương trình tương đương

$$2^{-\sqrt{x^2-2x}} \le 2^{x-1} \Leftrightarrow -\sqrt{x^2-2x} \le x-1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2-2x} \ge 1-x$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 1-x<0 \\ x^2-2x \ge 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 1-x \ge 0 \\ x^2-2x \ge (1-x)^2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} x>1 \\ \left[\begin{array}{l} x \le 0 \\ x \ge 2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x \ge 2.$$

Vậy $x_0 = 2$ gần $\dfrac{3}{2}$ nhất.

Chọn đáp án Ⓒ □

CÂU 25. Một học sinh giải bất phương trình $\left(\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)^{-\frac{1}{x}} \le \left(\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)^{-5}$ như sau

Bước 1: Điều kiện $x \ne 0$.

Bước 2: Vì $0 < \dfrac{2}{\sqrt{5}} < 1$ nên $\left(\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)^{-\frac{1}{x}} \le \left(\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)^{-5} \Leftrightarrow \dfrac{1}{x} \le 5$.

Bước 3: Từ đó suy ra $1 \le 5x \Leftrightarrow x \ge \dfrac{1}{5}$. Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = \left[\dfrac{1}{5}; +\infty\right)$.

Ⓐ Sai ở bước 1. Ⓑ Sai ở bước 2. Ⓒ Sai ở bước 3. Ⓓ Đúng.

Lời giải.

Ở bước 3: Từ $\dfrac{1}{x} \le 5 \Leftrightarrow \dfrac{1-5x}{x} \le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<0 \\ x \ge \dfrac{1}{5} \end{array}\right. \Rightarrow S = (-\infty; 0) \cup \left[\dfrac{1}{5}; +\infty\right)$.

Vậy sai ở bước 3.

Chọn đáp án Ⓒ □

CÂU 26. Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $3^x \cdot 5^{x^2} < 1$.

Ⓐ $S = (-\log_5 3; 0]$. Ⓑ $S = [\log_3 5; 0)$. Ⓒ $S = (-\log_5 3; 0)$. Ⓓ $S = (\log_3 5; 0)$.

Lời giải.

Ta có

$$3^x \cdot 5^{x^2} < 1 \Leftrightarrow \log_5\left(3^x . 5^{x^2}\right) < \log_5 1$$
$$\Leftrightarrow x^2 + x\log_5 3 < 0 \Leftrightarrow -\log_5 3 < x < 0.$$

Vậy $S = (-\log_5 3; 0)$.

Chọn đáp án Ⓒ □

CÂU 27. Cho hàm số $f(x) = \dfrac{7^x}{3^{x-2}}$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

Ⓐ $f(x) > 1 \Leftrightarrow x > (x-2)\log_7 3$.

Ⓑ $f(x) > 1 \Leftrightarrow \dfrac{x}{1+\log_7 3} > \dfrac{x-2}{1+\log_3 7}$.

Ⓒ $f(x) > 1 \Leftrightarrow x\log 7 > (x-2)\log 3$.

Ⓓ $f(x) > 1 \Leftrightarrow x\log_{\frac{1}{5}} 7 > (x-2)\log_5 3$.

Lời giải.

Từ 4 đáp án, ta có $f(x) > 1 \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{5}} 7^x < \log_{\frac{1}{5}} 3^{x-2} \Leftrightarrow x\log_{\frac{1}{5}} 7 < -(x-2)\log_5 3$.

Vậy đáp án **sai** là $f(x) > 1 \Leftrightarrow x\log_{\frac{1}{5}} 7 > (x-2)\log_5 3$.

Chọn đáp án Ⓓ □

Dạng 32. Phương pháp đặt ẩn phụ

Phương pháp: $f\left[a^{g(x)}\right] > 0\,(0 < a \ne 1) \Leftrightarrow \begin{cases} t = a^{g(x)} > 0 \\ f(t) > 0. \end{cases}$

Ta thường gặp các dạng:

- $m \cdot a^{2f(x)} + n \cdot a^{f(x)} + p > 0$.

- $m\cdot a^{f(x)}+n\cdot b^{f(x)}+p>0$, trong đó $a\cdot b=1$. Đặt $t=a^{f(x)}$ $(t>0)$, suy ra $b^{f(x)}=\dfrac{1}{t}$.
- $m\cdot a^{2f(x)}+n\cdot(a\cdot b)^{f(x)}+p\cdot b^{2f(x)}>0$. Chia hai vế cho $b^{2f(x)}$ và đặt $t=\left(\dfrac{a}{b}\right)^{f(x)}>0$.

1. Các ví dụ

VÍ DỤ 1. Tìm nghiệm của bất phương trình $9^{x-1}-36\cdot 3^{x-3}+3\le 0$.

Lời giải.

Bất phương trình tương đương với

$$\begin{aligned}&3^{2(x-1)}-4\cdot 3^{x-1}+3\le 0\Leftrightarrow 1\le 3^{x-1}\le 3\\ \Leftrightarrow\ &0\le x-1\le 1\Leftrightarrow 1\le x\le 2.\end{aligned}$$

□

VÍ DỤ 2. Giải bất phương trình $7^{2x}-7^{x+1}+6>0$ được tập nghiệm là

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}&7^{2x}-7^{x+1}+6>0\Leftrightarrow 7^{2x}-7\cdot 7^x+6>0\\ \Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l}0<7^x<1\\ 7^x>6\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x<0\\ x>\log_7 6.\end{array}\right.\end{aligned}$$

□

VÍ DỤ 3. Tìm nghiệm của bất phương trình: $3^x+9\cdot 3^{-x}-10<0$.

Lời giải.

Đặt $t=3^x$, $(t>0)$. Bất phương trình trở thành

$$\begin{aligned}&t+\frac{9}{t}-10<0\Leftrightarrow t^2-10t+9<0\\ \Leftrightarrow\ &1<t<9\Rightarrow 1<3^x<9\Leftrightarrow 0<x<2.\end{aligned}$$

□

VÍ DỤ 4. Tìm nghiệm của bất phương trình: $3\cdot 4^x-2\cdot 6^x>9^x$.

Lời giải.

Chia cả hai vế của bất phương trình cho $4^x>0$ ta được $3-2\cdot\left(\dfrac{3}{2}\right)^x>\left(\dfrac{9}{4}\right)^x$.

Đặt $t=\left(\dfrac{3}{2}\right)^x$, $t>0$. Bất phương trình trở thành

$$3-2t>t^2\Leftrightarrow t^2+2t-3<0\Leftrightarrow 0<t<1\Leftrightarrow\left(\frac{3}{2}\right)^x<1\Leftrightarrow x<0.$$

□

VÍ DỤ 5. Tìm nghiệm của bất phương trình: $\left(4+\sqrt{15}\right)^x+\left(4-\sqrt{15}\right)^x\le 62$.

Lời giải.

Ta có $\left(4+\sqrt{15}\right)\cdot\left(4-\sqrt{15}\right)=1$.

$\left(4+\sqrt{15}\right)^x+\left(4-\sqrt{15}\right)^x\le 62\Leftrightarrow\left(4+\sqrt{15}\right)^x+\left(\dfrac{1}{4+\sqrt{15}}\right)^x\le 62.$

Đặt $t=\left(4+\sqrt{15}\right)^x$, $t>0$.

Bất phương trên trở thành $t+\dfrac{1}{t}\le 62\Leftrightarrow t^2-62t+1\le 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=31+8\sqrt{15}\\ t=31-8\sqrt{15}.\end{array}\right.$

$\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\left(4+\sqrt{15}\right)^x=31+8\sqrt{15}\\ \left(4+\sqrt{15}\right)^x=31-8\sqrt{15}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\ x=-2.\end{array}\right.$ □

2. Câu hỏi trắc nghiệm

CÂU 1. Tập nghiệm của bất phương trình $8\cdot 4^{x+1}-18\cdot 2^x+1<0$ là

Ⓐ $(2;4)$. Ⓑ $(1;4)$. Ⓒ $(-4;-1)$. Ⓓ $\left(\dfrac{1}{16};\dfrac{1}{2}\right)$.

Lời giải.

Ta có $8\cdot 4^{x+1}-18\cdot 2^x+1<0 \Leftrightarrow 32\cdot 4^x-18\cdot 2^x+1<0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{16}<2^x<\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow -4<x<-1$.

Chọn đáp án (C) □

CÂU 2. Giải bất phương trình $9^x-3^x-6<0$.

(A) Tập nghiệm của bất phương trình là $(1;+\infty)$.
(B) Tập nghiệm của bất phương trình là $(-\infty;1)$.
(C) Tập nghiệm của bất phương trình là $(-2;3)$.
(D) Tập nghiệm của bất phương trình là $(0;3)$.

Lời giải.

Ta có phương trình $9^x-3^x-6<0 \Leftrightarrow (3^x)^2-3^x-6<0 \Leftrightarrow -2<3^x<3 \Leftrightarrow x<1$.
Suy ra tập nghiệm của bất phương trình là $(-\infty;1)$.
Chọn đáp án (B) □

CÂU 3. Bất phương trình $9^x-3^x-6>0$ có tập nghiệm là

(A) $(-\infty;-1)$. (B) $(1;+\infty)$. (C) $(-1;1)$. (D) $(-\infty;1)$.

Lời giải.

Bất phương trình đã cho tương đương $3^{2x}-3^x-6>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}3^x<-2 \text{ (loại)}\\ 3^x>3\end{array}\right. \Leftrightarrow x>1$.

Chọn đáp án (B) □

CÂU 4. Tìm nghiệm của bất phương trình: $3^{2x+1}-9\cdot 3^x+6>0$.

(A) $0<x<\log_3 2$. (B) $0<x<1$. (C) $\left[\begin{array}{l}x>1\\ x<0.\end{array}\right.$ (D) $\left[\begin{array}{l}x>\log_3 2\\ x<0.\end{array}\right.$

Lời giải.

Đặt $t=3^x$, $(t>0)$. Bất phương trình trở thành

$$3t^2-9t+6>0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l}t>2\\ 0<t<1\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}3^x>2\\ 3^x<1\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}x>\log_3 2\\ x<0.\end{array}\right.$$

Chọn đáp án (D) □

CÂU 5. Tìm nghiệm của bất phương trình: $25^x-6\cdot 5^x+5\le 0$.

(A) $\left[\begin{array}{l}x\ge 1\\ x\le -1.\end{array}\right.$ (B) $0\le x\le 1$. (C) $-1\le x\le 1$. (D) $\left[\begin{array}{l}x\ge 1\\ x\le 0.\end{array}\right.$

Lời giải.

Đặt $t=5^x$, $(t>0)$. Bất phương trình có dạng

$$t^2-6t+5\le 0 \Leftrightarrow 1\le t\le 5 \Leftrightarrow 1\le 5^x\le 5 \Leftrightarrow 0\le x\le 1.$$

Chọn đáp án (B) □

CÂU 6. Nghiệm của bất phương trình $e^x+e^{-x}<\dfrac{5}{2}$ là

(A) $x<-\ln 2$ hoặc $x>\ln 2$. (B) $-\ln 2<x<\ln 2$. (C) $x<\dfrac{1}{2}$ hoặc $x>2$. (D) $\dfrac{1}{2}<x<2$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} e^x+e^{-x}<\frac{5}{2} \quad &\Leftrightarrow \quad e^x+\frac{1}{e^x}<\frac{5}{2} \Leftrightarrow 2e^{2x}-5e^x+2<0\\ &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}<e^x<2 \Leftrightarrow -\ln 2<x<\ln 2.\end{aligned}$$

Chọn đáp án (B) □

CÂU 7. Tìm nghiệm của bất phương trình: $7^x-2\cdot 7^{1-x}+13<0$.

(A) $x>0$. (B) $x<0$. (C) $x>1$. (D) $0<x<1$.

Lời giải.

Đặt $t=7^x$, $(t>0)$. Bất phương trình trở thành

$$t-\frac{14}{t}+13<0 \Leftrightarrow t^2+13t-14<0 \Leftrightarrow 0<t<1 \Rightarrow 7^x<1 \Leftrightarrow x<0.$$

Chọn đáp án (B) □

CÂU 8. Tìm nghiệm của bất phương trình: $6 \cdot 9^{\frac{1}{x}} - 13 \cdot 6^{\frac{1}{x}} + 6 \cdot 4^{\frac{1}{x}} \leq 0$.

Ⓐ $0 \leq x \leq 2$. Ⓑ $\left[\begin{array}{l} x \geq 2 \\ x \leq 0. \end{array}\right.$ Ⓒ $\left[\begin{array}{l} x \geq 1 \\ x \leq -1. \end{array}\right.$ Ⓓ $-1 \leq x \leq 1$.

Lời giải.

Chia cả hai vế của bất phương trình cho $4^{\frac{1}{x}} > 0$ ta được $6 \cdot \left(\frac{9}{4}\right)^{\frac{1}{x}} - 13 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x}} + 6 \leq 0$.

Đặt $t = \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$, $t > 0$. Bất phương trình trở thành

$$6t^2 - 13t + 6 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{2}{3} \leq t \leq \frac{3}{2} \Rightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{-1} \leq \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x}} \leq \left(\frac{3}{2}\right)^{1} \Leftrightarrow -1 \leq \frac{1}{x} \leq 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \geq 1 \\ x \leq -1 \end{array}\right..$$

Chọn đáp án Ⓒ □

CÂU 9. Tìm nghiệm của bất phương trình: $(\sqrt{2}-1)^x + (\sqrt{2}+1)^x - 2\sqrt{2} > 0$.

Ⓐ $-2 < x < 2$. Ⓑ $\left[\begin{array}{l} x > 2 \\ x < -2. \end{array}\right.$ Ⓒ $\left[\begin{array}{l} x > 1 \\ x < -1. \end{array}\right.$ Ⓓ $-1 < x < 1$.

Lời giải.

Đặt $t = (\sqrt{2}+1)^x$, $t > 0 \Rightarrow (\sqrt{2}-1)^x = \frac{1}{t}$.

Bất phương trình đã cho trở thành

$$\frac{1}{t} + t - 2\sqrt{2} > 0 \Leftrightarrow t^2 - 2\sqrt{2}t + 1 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t > \sqrt{2}+1 \\ 0 < t < \sqrt{2}-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (\sqrt{2}+1)^x > \sqrt{2}+1 \\ (\sqrt{2}+1)^x < \sqrt{2}-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 1 \\ x < -1. \end{array}\right.$$

Chọn đáp án Ⓒ □

CÂU 10. Có tất cả bao nhiêu số tự nhiên thỏa mãn bất phương trình $3^{1-x} + 2 \cdot (\sqrt{3})^{2x} \leq 7$.

Ⓐ 1. Ⓑ 2. Ⓒ 3. Ⓓ Vô số.

Lời giải.

Bất phương trình đã cho $\Leftrightarrow \frac{3}{3^x} + 2 \cdot 3^x \leq 7$.

Đặt $t = 3^x$, $t > 0$. Bất phương trình có dạng

$$\frac{3}{t} + 2t \leq 7 \Rightarrow 2t^2 - 7t + 3 \leq 0 \Rightarrow \frac{1}{2} \leq t \leq 3 \Rightarrow \frac{1}{2} \leq 3^x \leq 3 \Rightarrow \log_3 \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \text{ hay } -0{,}63 \leq x \leq 1.$$

Mà x là số tự nhiên nên tập nghiệm của bất phương trình là $S = \{0; 1\}$.

Chọn đáp án Ⓑ □

CÂU 11. Tập nghiệm của bất phương trình $3 \cdot 9^x - 10 \cdot 3^x + 3 \leq 0$ có dạng $S = [a; b]$. Khi đó $b - a$ bằng

Ⓐ 1. Ⓑ $\frac{3}{2}$. Ⓒ 2. Ⓓ $\frac{5}{2}$.

Lời giải.

Đặt $t = 3^x$, $t > 0$. Bất phương trình có dạng

$$3 \cdot t^2 - 10t + 3 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{3} \leq t \leq 3 \Rightarrow 3^{-1} \leq 3^x \leq 3^1 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1.$$

Hay $S = [-1; 1] \Rightarrow b - a = 1 - (-1) = 2$.

Chọn đáp án Ⓒ □

CÂU 12. Tập nghiệm S của bất phương trình $\frac{3^x}{3^x - 2^x} < 3$ là

Ⓐ $S = (-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$. Ⓑ $S = (1; +\infty)$. Ⓒ $S = (-\infty; 0)$. Ⓓ $S = (0; 1)$.

Lời giải.

Ta có $\frac{3^x}{3^x - 2^x} < 3 \Leftrightarrow \frac{1}{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^x} < 3 \xrightarrow{t=\left(\frac{2}{3}\right)^x} \frac{1}{1-t} < 3 \Leftrightarrow \frac{3-2t}{t-1} > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t < \frac{2}{3} \\ t > 1. \end{array}\right.$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \left(\frac{2}{3}\right)^x < \frac{2}{3} \\ \left(\frac{2}{3}\right)^x > 1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x > 1 \\ x < 0. \end{array}\right.$

Chọn đáp án Ⓐ □

CÂU 13. Cho $f(x)=\dfrac{1}{2}\cdot 5^{2x+1}$ và $g(x)=5^x+4x\ln 5$. Giá trị nguyên lớn nhất của x sao cho $f'(x)<g'(x)$ là

Ⓐ -2. Ⓑ 1. Ⓒ -1. Ⓓ 2.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} f(x)=\dfrac{1}{2}\cdot 5^{2x+1} \\ g(x)=5^x+4x\ln 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'(x)=5^{2x+1}\ln 5 \\ g'(x)=5^x\ln 5+4\ln 5=(5^x+4)\ln 5. \end{cases}$

Khi đó

$$\begin{aligned} f'(x)<g'(x) &\Leftrightarrow 5^{2x+1}\ln 5<(5^x+4)\ln 5 \\ &\Leftrightarrow 5^{2x+1}<5^x+4 \Leftrightarrow 5\cdot 5^{2x}-5^x-4<0 \\ &\Leftrightarrow -\frac{4}{5}<5^x<1 \Leftrightarrow x<0 \xrightarrow{x\in\mathbb{Z}} x_{\max}=-1. \end{aligned}$$

Chú ý: Ở bài toán này do phương trình $5\cdot 5^{2x}-5^x-4<0$ đơn giản nên ta bỏ qua bước đặt $t=5^x$.

Chọn đáp án Ⓒ □

CÂU 14. Tìm nghiệm của bất phương trình: $\left(7+3\sqrt{5}\right)^x+\left(7-3\sqrt{5}\right)^x<7\cdot 2^x$.

Ⓐ $\left[\begin{array}{l} x>2 \\ x<-2. \end{array}\right.$ Ⓑ $-1<x<1$. Ⓒ $-2<x<2$. Ⓓ $\left[\begin{array}{l} x>1 \\ x<-1. \end{array}\right.$

Lời giải.

Thử $x=0$ thấy là nghiệm của bất phương trình nên loại $\left[\begin{array}{l} x>2 \\ x<-2 \end{array}\right.$ và $\left[\begin{array}{l} x>1 \\ x<-1. \end{array}\right.$

Thử $x=2$ thấy không phải là nghiệm của bất phương trình nên loại $-2<x<2$.

Chọn đáp án Ⓑ □

CÂU 15. Tìm nghiệm của bất phương trình: $(3+\sqrt{5})^x+16\cdot(3-\sqrt{5})^x\le 2^{x+3}$.

Ⓐ $x\ge 2$. Ⓑ $x=2$. Ⓒ $x=\log_{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} 4$. Ⓓ $0\le x\le \log_{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} 4$.

Lời giải.

Thử $x=0$ thấy không phải là nghiệm của bất phương trình nên loại $0\le x\le \log_{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} 4$.

Thử $x=2$ thấy là nghiệm của bất phương trình nên loại $x=\log_{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} 4$.

Thử $x=3$ thấy không phải là nghiệm của bất phương trình nên loại $x\ge 2$.

Chọn đáp án Ⓑ □

CÂU 16. Tìm nghiệm của bất phương trình: $4^x+4^{\sqrt{x}+1}\ge 3\cdot 2^{x+\sqrt{x}}$.

Ⓐ $\forall x\in\mathbb{R}$. Ⓑ $x\ge 0$. Ⓒ $x>0$. Ⓓ $x>1$.

Lời giải.

Bất phương trình có điều kiện xác định là $x\ge 0$ nên loại $\forall x\in\mathbb{R}$.

Thử $x=0$ thấy là nghiệm của bất phương trình nên loại $x>0$ và $x>1$.

Chọn đáp án Ⓑ □

Dạng 33. Bài toán chứa tham số

1. Các ví dụ

VÍ DỤ 1. Tìm tất cả giá trị thực của tham số m sao cho bất phương trình $9^x+2\cdot 3^x-m>0$ có nghiệm thuộc $(0;1)$.

Lời giải.

$9^x+2\cdot 3^x-m>0 \Leftrightarrow 9^x+2\cdot 3^x>m$.

Đặt $3^x=t$, $(t>0) \Rightarrow 9^x=t^2$ với $x\in(0;1)\Rightarrow t\in(1;3)$.

Khi đó, bất phương trình trở thành $t^2+2t>m$ (1).

Xét hàm số $f(t)=t^2+2t$ trên $(1;3)$; $f'(x)=2t+2=0\Rightarrow t=-1$.

Bảng biến thiên

t	1		3
$f'(t)$		$+$	
$f(t)$	3	$\nearrow$	15

$\Rightarrow$ (1) có nghiệm thuộc $(0;1) \Leftrightarrow m < 15$. □

VÍ DỤ 2. Tìm tất cả giá trị thực của tham số m sao cho bất phương trình $(3m+1)12^x + (2-m)6^x + 3^x < 0$ nghiệm đúng $\forall x > 0$.

Lời giải.

$(3m+1)12^x + (2-m)6^x + 3^x < 0 \Leftrightarrow (3m+1)4^x + (2-m)2^x + 1 < 0$.
Đặt $2^x = t$. Do $x > 0 \Rightarrow t > 1$.
Khi đó, bất phương trình trở thành $(3m+1)t^2 + (2-m)t + 1 < 0,\ \forall t > 1$

$\Leftrightarrow \left(3t^2 - t\right)m < -t^2 - 2t - 1,\ \forall t > 1 \Leftrightarrow m < \dfrac{-t^2-2t-1}{3t^2-t},\ \forall t > 1$ (do $3t^2 - t > 0,\ \forall t > 1$).

Xét hàm số $f(t) = \dfrac{-t^2-2t-1}{3t^2-t}$ trên $(1;+\infty)$; $f'(t) = \dfrac{7t^2+6t-1}{\left(3t^2-t\right)^2} > 0,\ \forall t \in (1;+\infty)$.

Bảng biến thiên

t	1		$+\infty$
$f'(t)$		$+$	
$f(t)$	-2	$\nearrow$	$-\dfrac{1}{3}$

Dựa vào bảng biến thiên ta suy ra $m \le \max\limits_{t \to 1^+} f(t) = -2$. □

VÍ DỤ 3. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $9^x - 2(m+1)\cdot 3^x - 3 - 2m > 0$ nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Lời giải.

Đặt $3^x = t$ với $t > 0$, khi đó phương trình đã cho tương đương với $t^2 - 2(m+1)t - 3 - 2m > 0,\ \forall t > 0 \Leftrightarrow m < \dfrac{t^2-2t-3}{2t+2}$, $\forall t > 0 \Leftrightarrow m < \dfrac{1}{2}(t-3),\ \forall t > 0$.

Xét $f(t) = \dfrac{1}{2}(t-3),\ \forall t > 0$ là hàm số đồng biến trên $(0;+\infty)$.

Suy ra yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow m < f(t),\ \forall t > 0 \Leftrightarrow m \le f(0) = -\dfrac{3}{2}$. □

2. Câu hỏi trắc nghiệm

CÂU 1. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $4^x - 2^x - m \ge 0$ có nghiệm đúng với mọi x thuộc $\mathbb{R}$.

(A) $m < -1$. (B) $m < -\dfrac{1}{2}$. (C) $m \le -\dfrac{1}{4}$. (D) $m \le 0$.

Lời giải.

Đặt $t = 2^x \xrightarrow{x \in \mathbb{R}} t \in (0;+\infty)$.
Khi đó bất phương trình có dạng $m \le t^2 - t = f(t)$ với $\forall t \in (0;+\infty)$ (*).
Ta có $f'(t) = 2t - 1 = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{1}{2}$

t	0		$\dfrac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	0	$\searrow$	$-\dfrac{1}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

Khi đó (*) $\Leftrightarrow m \le \min\limits_{t \in (0;+\infty)} f(t) = -\dfrac{1}{4}$.

Chọn đáp án (C) □

CÂU 2. Tìm tất cả giá trị thực của tham số m sao cho bất phương trình $9^x + 2\cdot 3^x - m > 0$ có nghiệm thuộc $(0;1]$?

(A) $m < 15$. (B) $m < 3$. (C) $m \le 15$. (D) $m \le 3$.

Lời giải.

$9^x + 2\cdot 3^x - m > 0 \Leftrightarrow 9^x + 2\cdot 3^x > m$.
Đặt $3^x = t\ (t > 0) \Rightarrow 9^x = t^2$ với $x \in (0;1) \Rightarrow t \in (1;3]$.

Khi đó, bất phương trình trở thành $t^2+2t>m \quad (1)$.
Xét hàm số $f(t)=t^2+2t$ trên $(1;3]$; $f'(x)=2t+2=0 \Rightarrow t=-1$.
Bảng biến thiên

t	1	3
$f'(t)$	$+$	
$f(t)$	$3 \nearrow$	15

$\Rightarrow$ (1) có nghiệm thuộc $(0;1] \Leftrightarrow m<15$.
Chọn đáp án (A) □

CÂU 3. Tìm tất cả giá trị thực của tham số m sao cho bất phương trình $9^x+2\cdot3^x-m>0$ thỏa mãn với mọi $x\in[0;1)$?

(A) $m<15$. (B) $m<3$. (C) $m\le15$. (D) $m\le3$.

Lời giải.

$9^x+2\cdot3^x-m>0 \Leftrightarrow 9^x+2\cdot3^x>m$.
Đặt $3^x=t(t>0) \Rightarrow 9^x=t^2$ với $x\in[0;1) \Rightarrow t\in[1;3)$.
Khi đó, bất phương trình trở thành $t^2+2t>m \quad (1)$.
Xét hàm số $f(t)=t^2+2t$ trên $[1;3)$; $f'(x)=2t+2=0 \Leftrightarrow t=-1$.
Bảng biến thiên

t	1	3
$f'(t)$	$+$	
$f(t)$	$3 \nearrow$	15

$\Rightarrow$ bất phương trình thỏa mãn với mọi $x\in(0;1) \Leftrightarrow m<3$.
Chọn đáp án (B) □

CÂU 4. Tìm tất cả giá trị thực của tham số m sao cho bất phương trình $4^{-x}-2^{1-x}-m\le0$ thỏa mãn với mọi $x\in(0;1)$.

(A) $m\ge-\dfrac{3}{4}$. (B) $m\ge-1$. (C) $m\le-\dfrac{3}{4}$. (D) $m\le-1$.

Lời giải.

Đặt $2^{-x}=t\ (t>0) \Rightarrow 4^{-x}=t^2$ với $x\in(0;1) \Rightarrow t\in\left(\dfrac{1}{2};1\right)$.
Khi đó, bất phương trình trở thành $t^2-2t\le m \quad (1)$.
Xét hàm số $f(t)=t^2-2t$ trên $\left(\dfrac{1}{2};1\right)$; $f'(x)=2t-2=0 \Leftrightarrow t=1$.
Bảng biến thiên

t	$\frac{1}{2}$	1
$f'(t)$	$-$	
$f(t)$	$-\frac{3}{4} \searrow$	-1

$\Rightarrow$ bất phương trình thỏa mãn với mọi $x\in(0;1) \Leftrightarrow m\ge-\dfrac{3}{4}$.
Chọn đáp án (A) □

CHUYÊN ĐỀ 4: BẤT PHƯƠNG TRÌNH LOGARIT

F. KIẾN THỨC SÁCH GIÁO KHOA CẦN CẦN NẮM

Ta có thể dùng các phương pháp biến đổi như phương trình logarit và các công thức sau

- Nếu $a > 1$ thì
  - $\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow f(x) > g(x) > 0$.
  - $\log_a f(x) \geq \log_a g(x) \Leftrightarrow f(x) \geq g(x) > 0$.
- Nếu $0 < a < 1$ thì
  - $\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow 0 < f(x) < g(x)$.
  - $\log_a f(x) \geq \log_a g(x) \Leftrightarrow 0 < f(x) \leq g(x)$.

G. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 34. Đưa về cùng cơ số

Phương pháp

- Nếu $a > 1$ thì
  - $\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow f(x) > g(x) > 0$.
  - $\log_a f(x) \geq \log_a g(x) \Leftrightarrow f(x) \geq g(x) > 0$.
- Nếu $0 < a < 1$ thì
  - $\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow 0 < f(x) < g(x)$.
  - $\log_a f(x) \geq \log_a g(x) \Leftrightarrow 0 < f(x) \leq g(x)$.

1. Các ví dụ

VÍ DỤ 1. Tìm tập nghiệm bất phương trình $\log_3(5x-1) > 2$.

Lời giải.

Ta có $\log_3(5x-1) > 2 \Leftrightarrow \begin{cases} 5x-1 > 0 \\ 5x-1 > 9 \end{cases} \Leftrightarrow x > 2$. □

VÍ DỤ 2. Tìm tập nghiệm bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(3x+1) > -2$.

Lời giải.

Ta có $\log_{\frac{1}{2}}(3x+1) > -2 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+1 > 0 \\ 3x+1 < 4 \end{cases} \Leftrightarrow -\dfrac{1}{3} < x < 1$. □

VÍ DỤ 3. Cho hàm số $f(x) = \log(2x+4) - 1$. Tìm tất cả các giá trị thực của x để $f(x) \geq 0$.

Lời giải.

Ta có

$$f(x) \geq 0 \Leftrightarrow \log(2x+4) \geq 1 \Leftrightarrow 2x+4 \geq 10 \Leftrightarrow x \geq 3.$$

□

VÍ DỤ 4. Tìm tập nghiệm bất phương trình $\log_{0,5}(4x+11) < \log_{0,5}\left(x^2+6x+8\right)$.

Lời giải.

Ta có

$$\log_{0,5}(4x+11) < \log_{0,5}\left(x^2+6x+8\right) \Leftrightarrow \begin{cases} 4x+11 > 0 \\ x^2+6x+8 > 0 \\ 4x+11 > x^2+6x+8 \end{cases} \Leftrightarrow -3 < x < 1.$$

□

VÍ DỤ 5. Tìm tập nghiệm bất phương trình $\log_{\frac{1}{3}}(x+1) > \log_3(2-x)$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} \log_{\frac{1}{3}}(x+1) > \log_3(2-x) &\Leftrightarrow \log_3(2-x) + \log_3(x+1) < 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x < 2 \\ (2-x)(x+1) < 1 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1 < x < \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \\ \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} < x < 2. \end{array}\right.$$

□

VÍ DỤ 6. Tìm tập nghiệm bất phương trình $\log_{\frac{1}{3}}\left(x^2-6x+5\right)+2\log_3(2-x) \geq 0$.

Lời giải.

Ta có

$$\log_{\frac{1}{3}}\left(x^2-6x+5\right)+2\log_3(2-x) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-6x+5>0 \\ 2-x>0 \\ \log_3 \dfrac{(2-x)^2}{x^2-6x+5} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<1 \\ \dfrac{(2-x)^2}{x^2-6x+5} \geq 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x<1 \\ \left[\begin{array}{l} \dfrac{1}{2}<x<1 \\ x>5 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq x < 1.$$

□

2. Câu hỏi trắc nghiệm

CÂU 1. Giải bất phương trình $\log_2(3x-1)>3$.

Ⓐ $x>3$. Ⓑ $\dfrac{1}{3}<x<3$. Ⓒ $x<3$. Ⓓ $x>\dfrac{10}{3}$.

Lời giải.

Ta có $\log_2(3x-1)>3 \Leftrightarrow \log_2(3x-1)>\log_2 8 \Leftrightarrow 3x-1>8 \Leftrightarrow x>3$.

Chọn đáp án (A) □

CÂU 2. Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\log_2(3x-2)>\log_2(6-5x)$.

Ⓐ $S=\left(1;\dfrac{6}{5}\right)$. Ⓑ $S=\left(\dfrac{2}{3};1\right)$. Ⓒ $S=(1;+\infty)$. Ⓓ $S=\left(\dfrac{2}{3};\dfrac{6}{5}\right)$.

Lời giải.

Điều kiện: $\begin{cases} 3x-2>0 \\ 6-5x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{2}{3}<x<\dfrac{6}{5}$.

Ta có $\log_2(3x-2)>\log_2(6-5x) \Leftrightarrow 3x-2>6-5x \Leftrightarrow x>1$.

Kết hợp điều kiện suy ra $1<x<\dfrac{6}{5} \Rightarrow S=\left(1;\dfrac{6}{5}\right)$.

Chọn đáp án (A) □

CÂU 3. Tìm tập nghiệm T của bất phương trình $\log_{\frac{1}{4}}(4x-2) \geq -1$.

Ⓐ $\left[\dfrac{3}{2};+\infty\right)$. Ⓑ $\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{2}\right)$. Ⓒ $\left[\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{2}\right]$. Ⓓ $\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{2}\right]$.

Lời giải.

Bất phương trình tương đương $0<4x-2 \leq \left(\dfrac{1}{4}\right)^{-1} \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}<x \leq \dfrac{3}{2}$.

Vậy tập nghiệm là $T=\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{2}\right]$.

Chọn đáp án (D) □

CÂU 4. Có bao nhiêu số nguyên trên $[0;10]$ nghiệm đúng bất phương trình $\log_e(3x-4)>\log_e(x-1)$?

Ⓐ 10. Ⓑ 11. Ⓒ 9. Ⓓ 8.

Lời giải.

Ta có $\log_e(3x-4)>\log_e(x-1) \Leftrightarrow \begin{cases} x-1>0 \\ 3x-4>x-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>1 \\ x>\dfrac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x>\dfrac{3}{2}$.

Mà $\begin{cases} x \in \mathbb{Z} \\ x \in [0;10] \end{cases}$ nên $x \in \{2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$.

Vậy có 9 số.

Chọn đáp án (C) □

CÂU 5. Tập nghiệm S của bất phương trình $\log_{\frac{\pi}{3}}\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)>0$ là

(A) $S=(1;+\infty)$. (B) $S=(-\infty;1)$. (C) $S=(-\infty;-1)$. (D) $S=(-1;+\infty)$.

Lời giải.

Ta có $\log_{\frac{\pi}{3}}\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)>0\Leftrightarrow\log_{\frac{\pi}{3}}\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)>\log_{\frac{\pi}{3}}1\Leftrightarrow\dfrac{x-1}{x+1}>1\Leftrightarrow\dfrac{-2}{x+1}>0\Leftrightarrow x<-1$.
$\Rightarrow S=(-\infty;-1)$.
Chọn đáp án (C) □

CÂU 6. Tập nghiệm S của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(x+1)<\log_{\frac{1}{2}}(2x-1)$ là

(A) $S=(2;+\infty)$. (B) $S=(-\infty;2)$. (C) $S=\left(\dfrac{1}{2};2\right)$. (D) $S=(-1;2)$.

Lời giải.

Ta có $\log_{\frac{1}{2}}(x+1)<\log_{\frac{1}{2}}(2x-1)\Leftrightarrow x+1>2x-1>0\Leftrightarrow\begin{cases}x<2\\x>\dfrac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow S=\left(\dfrac{1}{2};2\right)$.

Chọn đáp án (C) □

CÂU 7. Nghiệm của bất phương trình $\log_2(x+1)+\log_{\frac{1}{2}}\sqrt{x+1}\le 0$ là

(A) $-1<x\le 0$. (B) $-1\le x\le 0$. (C) $-1<x\le 1$. (D) $x\le 0$.

Lời giải.

Bất phương trình tương đương

$$\begin{aligned}\log_2(x+1)\le\log_2\sqrt{x+1}&\Leftrightarrow 0<x+1\le\sqrt{x+1}\Leftrightarrow\begin{cases}x>-1\\\sqrt{x+1}\le 1\end{cases}\\&\Leftrightarrow\begin{cases}x>-1\\x\le 0\end{cases}\Leftrightarrow -1<x\le 0.\end{aligned}$$

Chọn đáp án (A) □

CÂU 8. Có bao nhiêu giá trị nguyên x thỏa mãn bất phương trình $\log(x-40)+\log(60-x)<2$?

(A) 10. (B) 18. (C) 15. (D) Vô số.

Lời giải.

Điều kiện: $40<x<60$. Khi đó, bất phương trình tương đương

$$\begin{aligned}\log\left[(x-40)(60-x)\right]<\log 10^2&\Leftrightarrow (x-40)(60-x)<100\Leftrightarrow x^2-100x+2500>0\\&\Leftrightarrow (x-50)^2>0\Leftrightarrow x\ne 50.\end{aligned}$$

Kết hợp với điều kiện suy ra $x\in\{41,42,\ldots,49,51,52,\ldots,59\}$.
Vậy có $(59-41+1)-1=18$ số nguyên x.
Chọn đáp án (B) □

CÂU 9. Nghiệm của bất phương trình $\log_5(3x+2)>1$ là

(A) $x<1$. (B) $x>1$. (C) $x>-\dfrac{2}{3}$. (D) $x<-1$.

Lời giải.

Ta có $\log_5(3x+2)>1\Leftrightarrow 3x+2>5\Leftrightarrow x>1$.
Chọn đáp án (B) □

CÂU 10. Giải bất phương trình $\log_2\left(x^2-4x+5\right)\le 4$.

(A) $-7\le x\le -1$. (B) $-3\le x<-1$ hoặc $5<x\le 7$.
(C) $-3\le x\le 7$. (D) $2-\sqrt{15}\le x\le 2+\sqrt{15}$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.
Ta có

$$\log_2\left(x^2-4x+5\right)\le 4\Leftrightarrow x^2-4x-11\le 0\Leftrightarrow 2-\sqrt{15}\le x\le 2+\sqrt{15}.$$

Chọn đáp án (D) □

CÂU 11. Giải bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}\left(x^2-3x+2\right)\ge -1$.

(A) $x\in(-\infty;1)$. (B) $x\in[0;2)$. (C) $x\in[0;1)\cup(2;3]$. (D) $x\in[0;2)\cup(3;7]$.

Lời giải.

Điều kiện: $x^2-3x+2>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>2 \\ x<1. \end{array}\right.$

Ta có $\log_{\frac{1}{2}}\left(x^2-3x+2\right) \geq -1 \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{2}}\left(x^2-3x+2\right) \geq \log_{\frac{1}{2}} 2$

$$\Leftrightarrow x^2-3x+2 \leq 2 \Leftrightarrow x^2-3x \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 3.$$

Kết hợp với điều kiện ta được: $x \in [0;1) \cup (2;3]$.

Chọn đáp án (C) □

CÂU 12. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(5x+1)<-5$ là

(A) $\left(-\infty;-\dfrac{1}{5}\right)$.
(B) $\left(-\dfrac{1}{5};\dfrac{31}{5}\right)$.
(C) $\left(\dfrac{31}{5};+\infty\right)$.
(D) $\left(-\infty;-\dfrac{1}{5}\right) \cup \left(\dfrac{31}{5};+\infty\right)$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} 5x+1>0 \\ 5x+1>\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x+1>0 \\ 5x+1>32 \end{cases} \Leftrightarrow 5x+1>32 \Leftrightarrow x>\dfrac{31}{5}$.

VẬy $S=\left(\dfrac{31}{5};+\infty\right)$.

Chọn đáp án (C) □

CÂU 13. Bất phương trình $\log_{\frac{2}{3}}\left(2x^2-x+1\right)<0$ có tập nghiệm là

(A) $S=\left(0;\dfrac{3}{2}\right)$.
(B) $S=\left(-1;\dfrac{3}{2}\right)$.
(C) $S=(-\infty;0) \cup \left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)$.
(D) $S=(-\infty;1) \cup \left(\dfrac{3}{2};+\infty\right)$.

Lời giải.

Phương pháp tự luận

$\log_{\frac{2}{3}}\left(2x^2-x+1\right)<0 \Leftrightarrow 2x^2-x+1>1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<0 \\ x>\dfrac{1}{2}. \end{array}\right.$

Phương pháp trắc nghiệm

Nhập vào màn hình máy tính $\log_{\frac{2}{3}}\left(2X^2-X+1\right)$.

— Nhấn CALC và cho $X=-5$ máy tính hiển thị $-9{,}9277\ldots$.
Suy ra loại đáp án $S=\left(0;\dfrac{3}{2}\right)$ và $S=\left(-1;\dfrac{3}{2}\right)$.

— Nhấn CALC và cho $X=1$ máy tính hiển thị – 1,709511291.

Chọn đáp án (C) □

CÂU 14. Giải bất phương trình $\log_2(3x-1)>3$.

(A) $x>3$.
(B) $\dfrac{1}{3}<x<3$.
(C) $x<3$.
(D) $x>\dfrac{10}{3}$.

Lời giải.

Ta có $\log_2(3x-1)>3 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-1>0 \\ 3x-1>8 \end{cases} \Leftrightarrow x>3$.

Chọn đáp án (A) □

CÂU 15. Tìm tập nghiệm của bất phương trình $\log_{0,2}(x-3)+2 \geq 0$.

(A) $(3,28]$.
(B) $[28,+\infty)$.
(C) $(3,+\infty)$.
(D) $(-\infty;28)$.

Lời giải.

Ta có $\log_{0,2}(x-3)+2 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x>3 \\ x-3 \geq 0 \cdot 2^{-2} \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 28$.

Chọn đáp án (B) □

CÂU 16. Tập nghiệm của bất phương trình $3<\log_2 x<4$ là:

(A) $(8;16)$.
(B) $(0;16)$.
(C) $(8;+\infty)$.
(D) $\mathbb{R}$.

Lời giải.

Ta có $3 < \log_2 x < 4 \Leftrightarrow 8 < x < 16$.
Chọn đáp án (A) □

CÂU 17. Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\log_{0,5}(x-1) > 2$.

(A) $S = \left(-\infty; \frac{5}{4}\right)$. (B) $S = \left(1; \frac{5}{4}\right)$. (C) $S = \left(\frac{5}{4}; +\infty\right)$. (D) $S = (1; +\infty)$.

Lời giải.

Ta có $\log_{0,5}(x-1) > 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x - 1 < 0 \cdot 5^2 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < x < \frac{5}{4}$.

Chọn đáp án (B) □

CÂU 18. Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\log_2\left(\log_{\frac{1}{2}} x\right) > 0$.

(A) $S = \left(1; \frac{3}{2}\right)$. (B) $S = (0; 1)$. (C) $S = \left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$. (D) $S = (1; +\infty)$.

Lời giải.

Ta có $\log_{0,5}(x-1) > 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x - 1 < 0 \cdot 5 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < x < \frac{3}{2}$.

Chọn đáp án (A) □

CÂU 19. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_3 \frac{4x+6}{x} \leq 0$ là

(A) $S = \left[-2; -\frac{3}{2}\right)$. (B) $S = [-2; 0)$. (C) $S = (-\infty; 2]$. (D) $S = \mathbb{R} \setminus \left[-\frac{3}{2}; 0\right]$.

Lời giải.

Phương pháp tự luận

$$\log_3 \frac{4x+6}{x} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{4x+6}{x} > 0 \\ \frac{4x+6}{x} \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -\frac{3}{2} \vee x > 0 \\ -2 \leq x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow -2 \leq x < -\frac{3}{2}.$$

Phương pháp trắc nghiệm

Nhập vào màn hình máy tính $\log_3 \frac{4X+6}{X}$.

— Nhấn CALC và cho $X = 1$ máy tính hiển thị $2,095903274$.
Suy ra loại đáp án $S = (-\infty; 2]$ và $S = \mathbb{R} \setminus \left[-\frac{3}{2}; 0\right]$.

— Nhấn CALC và cho $X = -1$ máy tính không tính được nên loại đáp án $S = [-2; 0)$.

Chọn đáp án (A) □

CÂU 20. Cho hàm số $f(x) = \log_2(x-1)$. Tìm tập nghiệm của bất phương trình $f(x+1) > 1$.

(A) $S = (2; +\infty)$. (B) $S = (3; +\infty)$. (C) $S = (1; +\infty)$. (D) $S = (1; 2)$.

Lời giải.

Ta có $f(x+1) > 1 \Leftrightarrow \log_2 x > 1 \Leftrightarrow x > 2$.
Chọn đáp án (A) □

CÂU 21. Tìm tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(x+1) \leq \log_{\frac{1}{2}}(2x-1)$.

(A) $S = (-\infty; 1]$. (B) $S = (1; +\infty)$. (C) $(-1; 1)$. (D) $\left(\frac{1}{2}; 1\right]$.

Lời giải.

Ta có $\log_{\frac{1}{2}}(x+1) \leq \log_{\frac{1}{2}}(2x-1) \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{1}{2} \\ x + 1 \geq 2x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{1}{2} \\ x \leq 1 \end{cases}$.

Chọn đáp án (D) □

CÂU 22. Cho hàm số $f(x) = \log_2 x$ và $g(x) = \log_2(4-x)$. Tìm tập nghiệm của bất phương trình $f(x+1) < g(x+2)$.

(A) $S = \left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$. (B) $S = \left(-1; \frac{1}{2}\right)$. (C) $S = (0; 2)$. (D) $S = (-\infty; 2)$.

Lời giải.

Ta có $f(x+1) < g(x+2) \Leftrightarrow \log_2(x+1) < \log_2(2-x) \Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 > 0 \\ 2 - x > 0 \\ x + 1 < 2 - x \end{cases} \Leftrightarrow -1 < x < \frac{1}{2}$.

Chọn đáp án (B) □

CÂU 23. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{0,8}\left(x^2+x\right) < \log_{0,8}(-2x+4)$ là

(A) $(1;2)$. (B) $(-\infty;-4)\cup(1;2)$. (C) $(-\infty;-4)\cup(1;+\infty)$. (D) $(-4;1)$.

Lời giải.

Ta có $\log_{0,8}\left(x^2+x\right) < \log_{0,8}(-2x+4) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+x>0 \\ -2x+4>0 \\ x^2+x>-2x+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x<-1 \\ x>0 \end{array}\right. \\ x<2 \\ \left[\begin{array}{l} x<-4 \\ x>1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<-4 \\ 1<x<2. \end{array}\right.$

Chọn đáp án (B) □

CÂU 24. Tìm nghiệm nguyên nhỏ nhất của bất phương trình $\log_3\left(1-x^2\right) \le \log_{\frac{1}{3}}(1-x)$

(A) $x=0$. (B) $x=1$. (C) $x=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$. (D) $x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Lời giải.

Ta có $\log_3\left(1-x^2\right) \le \log_{\frac{1}{3}}(1-x) \Leftrightarrow \begin{cases} 1-x^2>0 \\ 1-x>0 \\ \log_3\left[\left(1-x^2\right)(1-x)\right] \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1<x<1 \\ \left[\begin{array}{l} x \le \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 0 \le x \le \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \end{array}\right. \end{cases}$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1<x\le \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 0 \le x \le 1. \end{array}\right.$

Chọn đáp án (A) □

CÂU 25. Điều kiện xác định của bất phương trình $\log_{0,5}(5x+15) \le \log_{0,5}\left(x^2+6x+8\right)$ là

(A) $x>-2$. (B) $\left[\begin{array}{l} x<-4 \\ x>-2 \end{array}\right.$. (C) $x>-3$. (D) $-2<x\le \frac{1}{2}\left(\sqrt{29}-1\right)$.

Lời giải.

Điều kiện: $\begin{cases} 5x+15>0 \\ x^2+6x+8>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-3 \\ \left[\begin{array}{l} x<-4 \\ x>-2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x>-2.$

Chọn đáp án (A) □

CÂU 26. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{1}{3}}\left(x^2-6x+5\right)+\log_3(x-1) \ge 0$ là

(A) $S=[1;6]$. (B) $S=(5;6]$. (C) $S=(5;+\infty)$. (D) $S=(1;+\infty)$.

Lời giải.

Ta có $\log_{\frac{1}{3}}\left(x^2-6x+5\right)+\log_3(x-1) \ge 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-6x+5>0 \\ x-1>0 \\ \log_3 \dfrac{x-1}{x^2-6x+5} \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow 5<x\le 6.$

Chọn đáp án (B) □

CÂU 27. Điều kiện xác định của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(4x+2)-\log_{\frac{1}{2}}(x-1) > \log_{\frac{1}{2}} x$ là

(A) $x>-\dfrac{1}{2}$. (B) $x>0$. (C) $x>1$. (D) $x>-1$.

Lời giải.

Bất phương trình xác định khi và chỉ khi $\begin{cases} x>0 \\ 4x+2>0 \\ x-1>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ x>-\dfrac{1}{2} \\ x>1 \end{cases} \Leftrightarrow x>1.$

Chọn đáp án (C) □

CÂU 28. Điều kiện xác định của bất phương trình $\ln \dfrac{x^2-1}{x} < 0$ là

(A) $\left[\begin{array}{l} -1<x<0 \\ x>1 \end{array}\right.$. (B) $x>-1$. (C) $x>0$. (D) $\left[\begin{array}{l} x<-1 \\ x>1 \end{array}\right.$.

Lời giải.

Điều kiện: $\dfrac{x^2-1}{x} > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1 < x < 0 \\ x > 1. \end{array}\right.$

Chọn đáp án (A) □

CÂU 29. Nghiệm nguyên nhỏ nhất của bất phương trình $\log_{0,2} x + \log_{0.2}(x-2) < \log_{0,2} 3$ là

(A) $x = 6$. (B) $x = 3$. (C) $x = 5$. (D) $x = 4$.

Lời giải.

Điều kiện: $x > 2$.

Ta có $\log_{0,2} x + \log_{0.2}(x-2) < \log_{0,2} 3 \Leftrightarrow \log_{0,2}[x(x-2)] < \log_{0,2} 3 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < -1 \\ x > 3. \end{array}\right.$

So điều kiện suy ra $x > 3$.

Chọn đáp án (D) □

CÂU 30. Nghiệm nguyên lớn nhất của bất phương trình $\log_3\left(4 \cdot 3^{x-1}\right) > 2x - 1$ là

(A) $x = 3$. (B) $x = 2$. (C) $x = 1$. (D) $x = -1$.

Lời giải.

Ta có

$$\log_3\left(4 \cdot 3^{x-1}\right) > 2x - 1 \Leftrightarrow 4 \cdot 3^{x-1} > 3^{2x-1} \Leftrightarrow 3^{2x} - 4 \cdot 3^x < 0 \Leftrightarrow 0 < 3^x < 4 \Leftrightarrow x < \log_3 4.$$

Chọn đáp án (C) □

Dạng 35. Đặt ẩn phụ

Phương pháp: Đặt $t = \log_a f(x)$ với a và $f(x)$ thích hợp để đưa phương trình logarit về phương trình đại số đối với t.

1. Các ví dụ

VÍ DỤ 1. Bất phương trình $\log^2_{\frac{1}{2}} x + 3\log_{\frac{1}{2}} x + 2 \le 0$ có tập nghiệm $S = [a; b]$. Tính giá trị của $a^2\sqrt{b}$.

Lời giải.

Ta có $\log^2_{\frac{1}{2}} x + 3\log_{\frac{1}{2}} x + 2 \le 0 \Leftrightarrow -2 \le \log_{\frac{1}{2}} x \le -1 \Leftrightarrow 2 \le x \le 4$. □

VÍ DỤ 2. Tìm tập nghiệm bất phương trình $\log_3^2\left(x - \dfrac{2x^2}{3}\right) + \log_{\frac{1}{3}}\left(x - \dfrac{2x^2}{3}\right) < 2$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \log_3^2\left(x - \dfrac{2x^2}{3}\right) + \log_{\frac{1}{3}}\left(x - \dfrac{2x^2}{3}\right) < 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x - \dfrac{2x^2}{3} > 0 \\ -1 < \log_3\left(x - \dfrac{2x^2}{3}\right) < 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < \dfrac{3}{2} \\ \dfrac{1}{2} < x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{1}{2} < x < 1.$$

Vậy tập nghiệm $S = \left(\dfrac{1}{2}; 1\right)$. □

VÍ DỤ 3. Tìm nghiệm của bất phương trình $\log^2_{\frac{1}{2}} x - \log_2(2x) - 5 \ge 0$.

Lời giải.

Ta có

$$\log^2_{\frac{1}{2}} x - \log_2(2x) - 5 \ge 0 \quad \Leftrightarrow \quad \log_2^2 x - \log_2 x - 6 \ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_2 x \le -2 \\ \log_2 x \ge 3 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x > 0 \\ \left[\begin{array}{l} x \le \dfrac{1}{4} \\ x \ge 8 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 < x \le \dfrac{1}{4} \\ x \ge 8. \end{array}\right.$$

□

2. Câu hỏi trắc nghiệm

CÂU 1. Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\log_2^2 x - 5\log_2 x + 4 \geq 0$.

(A) $S = (-\infty; -2] \cup [16; +\infty)$.
(B) $S = [2; 16]$.
(C) $S = (0; 2] \cup [16; +\infty)$.
(D) $S = (-\infty; 1] \cup [4; +\infty)$.

Lời giải.

Đặt $t = \log_2 x$, khi đó bất phương trình có dạng:

$$t^2 - 5t + 4 \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t \leq 1 \\ t \geq 4 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \log_2 x \leq 1 \\ \log_2 x \geq 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 < x \leq 2 \\ x \geq 16 \end{array}\right. \Rightarrow S = (0; 2] \cup [16; +\infty).$$

Chú ý: Vì bất phương trình ở dạng đơn giản nên ta có thể bỏ qua bước đặt ẩn phụ mà biến đổi được luôn:

$$\log_2^2 x - 5\log_2 x + 4 \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_2 x \leq 1 \\ \log_2 x \geq 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 < x \leq 2 \\ x \geq 16 \end{array}\right. \Rightarrow S = (0; 2] \cup [16; +\infty).$$

Chọn đáp án (C) □

CÂU 2. Bất phương trình $\log_2(1 + 3^x) + \log_{(1+3^x)} 2 - 2 > 0$ có nghiệm là

(A) $x > 0$.
(B) $x < 0$.
(C) $x \neq 0$.
(D) $x \in \mathbb{R}$.

Lời giải.

Điều kiện: $x \in \mathbb{R}$.

Đặt $t = \log_2(1 + 3^x)$, do $1 + 3^x > 1$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ nên $t = \log_2(1 + 3^x) > 0$.

Bất phương trình ban đầu trở thành.

$$t + \frac{1}{t} - 2 > 0 \Leftrightarrow \quad t^2 - 2t + 1 > 0 \quad (t > 0)$$

$$\Leftrightarrow \quad (t-1)^2 > 0 \Leftrightarrow t \neq 1 \Leftrightarrow \log_2(1 + 3^x) \neq 1 \Leftrightarrow 1 + 3^x \neq 2 \Leftrightarrow x \neq 0.$$

Chọn đáp án (C) □

CÂU 3. Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\log_{\frac{1}{3}}^2 x + 3\log_{\frac{1}{3}} x + 2 \leq 0$.

(A) $S = [-2; -1]$.
(B) $S = \emptyset$.
(C) $S = [3; 9]$.
(D) $S = [9; +\infty)$.

Lời giải.

$$\log_{\frac{1}{3}}^2 x + 3\log_{\frac{1}{3}} x + 2 \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ -2 \leq \log_{\frac{1}{3}} \leq -1 \end{cases} \Leftrightarrow 3 \leq x \leq 9.$$

Chọn đáp án (C) □

CÂU 4. Cho hàm số $f(x) = 3\ln x - 2$ và $g(x) = \ln^2 x$. Gọi S là tập tất cả các giá trị nguyên của x thỏa điều kiện $x < 10$ và $f(x) < g(x)$. Tính số phần tử của S ứng với

(A) 10.
(B) 4.
(C) 6.
(D) 8.

Lời giải.

Điều kiện $x > 0$.

$$f(x) < g(x) \Leftrightarrow 3\ln x - 2 < \ln^2 x \Leftrightarrow \ln^2 x - 3\ln x + 2 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \ln x < 1 \\ \ln x > 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < \mathrm{e} \\ x > \mathrm{e}^2. \end{array}\right.$$

$\Rightarrow 0 < x < \mathrm{e}$ hoặc $x > \mathrm{e}^2$.

Kết hợp điều kiện $x < 10$ suy ra $x \in \{1; 2; 8; 9\}$.

Chọn đáp án (B) □

CÂU 5. Cho hàm số $f(x) = \log_2 x$ và $g(x) = -\dfrac{2}{\log_2 x - 3}$. Tìm tất cả các giá trị thực của x để $f(x) > g(x)$.

(A) $\left[\begin{array}{l} x > 8 \\ 2 < x < 4 \end{array}\right.$.
(B) $\left[\begin{array}{l} 0 < x < 2 \\ 4 < x < 8 \end{array}\right.$.
(C) $2 < x < 4$.
(D) $4 < x < 8$.

Lời giải.

$$f(x) > g(x) \Leftrightarrow \log_2 x > -\frac{2}{\log_2 x - 3} \Leftrightarrow \quad \frac{\log_2^2 x - 3\log_2 x + 2}{\log_2 x - 3} > 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1 < \log_2 x < 2 \\ \log_2 x > 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2 < x < 4 \\ x > 8. \end{array}\right.$$

Chọn đáp án (A) □

CÂU 6. Tìm nghiệm bất phương trình $4\log_9 x + \log_x 3 \geq 3$.

(A) $S = \left(0; \dfrac{1}{2}\right) \cup (1; +\infty)$.
(B) $S = (1; \sqrt{3}) \cup (3; +\infty)$.
(C) $S = (1; +\infty)$.
(D) $S = (3; +\infty)$.

Lời giải.

$$4\log_9 x+\log_x 3>3 \Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{2\log_3^2 x-3\log_3 x+1}{\log_3 x}>0\\ 1\neq x>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}0<\log_3 x<\dfrac{1}{2} \text{ hoặc } \log_3 x>1\\ 1\neq x>0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}1<x<\sqrt{3} \text{ hoặc } x>3\\ 1\neq x>0.\end{cases}$$

Chọn đáp án (B) □

CÂU 7. Tìm nghiệm bất phương trình $\log_5 x \geq \log_x 5$.

(A) $S=[5;+\infty)$. (B) $S=\left(0;\dfrac{1}{5}\right]\cup[1;+\infty)$. (C) $S=\left[\dfrac{1}{5};5\right]\setminus\{1\}$. (D) $S=\left[\dfrac{1}{5};1\right)\cup[5;+\infty)$.

Lời giải.

$$\log_5 x\geq\log_x 5 \Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{\log_5^2 x-1}{\log_5 x}\geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-1\leq\log_5 x<0\\ \log_5 x\geq 1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\dfrac{1}{5}\leq x<1\\ x\geq 5\end{array}\right.\\ 1\neq x>0\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\dfrac{1}{5}\leq x<1\\ x\geq 5.\end{array}\right.$$

Chọn đáp án (D) □

CÂU 8. Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\sqrt{x-2}\left(\log^2_{\sqrt{2}} x-5\log_{\sqrt{2}} x+4\right)<0$

(A) $S=(2;4)$. (B) $S=(\sqrt{2};4)$. (C) $S=[2;4)$. (D) $S=(1;2)$.

Lời giải.

Điều kiện $x>2$.

$\sqrt{x-2}\left(\log^2_{\sqrt{2}} x-5\log_{\sqrt{2}} x+4\right)<0 \Rightarrow 1<\log_{\sqrt{2}} x<4 \Leftrightarrow \sqrt{2}<x<4$.

Vậy $2<x<4$.

Chọn đáp án (A) □

CÂU 9. Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\sqrt{5x-12}\left(\dfrac{\log_2^2 x+3}{\log_2 x+3}-2\right)\geq 0$.

(A) $S=\left[\dfrac{5}{12};\dfrac{1}{2}\right]\cup[8;+\infty)$. (B) $S=\left[\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{2}\right]\cup(8;+\infty)$. (C) $S=\left(-\infty;\dfrac{1}{3}\right)\cup\left(\dfrac{1}{2};8\right)$. (D) $S=\left(\dfrac{5}{12};\dfrac{1}{2}\right]\cup(8;+\infty)$.

Lời giải.

Điều kiện $x\geq\dfrac{5}{12}$.

Bất phương trình đã cho tương đương

$$\frac{\log_2^2 x+3}{\log_2 x+3}-2\geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-3<\log_2 x\leq -1\\ \log_2 x\geq 3\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\dfrac{1}{8}<x\leq\dfrac{1}{2}\\ x\geq 8.\end{array}\right.$$

Vậy $\dfrac{5}{12}\leq x\leq\dfrac{1}{2}$ hay $x\geq 8$.

Chọn đáp án (A) □

CÂU 10. Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\log_3\left(\dfrac{x+1}{243}\right)+\log_{x+1} 729\leq 0$.

(A) $S=(-1;0)\cup[8;26]$. (B) $S=[8;26]$. (C) $S=(-1;8]$. (D) $S=(-1;0)\cup(0;8]$.

Lời giải.

ĐKXĐ: $\begin{cases}x+1>0\\ x+1\neq 1\end{cases}\Rightarrow x>-1$.

Bất phương trình đã cho tương đương

$$\log_3\left(\frac{x+1}{243}\right)+\log_{x+1}729\leq 0 \Leftrightarrow \log_3(x+1)-5+\frac{6}{\log_3(x+1)}\leq 0.$$

$$\Leftrightarrow \frac{\log_3^2(x+1)-5\log_3(x+1)+6}{\log_3(x+1)}\leq 0.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\log_3(x+1)<0\\ 2\leq\log_3(x+1)\leq 3\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x<0\\ 8\leq x\leq 26.\end{array}\right.$$

Kết hợp điều kiện ta được $\left[\begin{array}{l}-1<x<0\\ 8\leq x\leq 26.\end{array}\right.$

Vậy tập nghiệm là $S=(-1;0)\cup[8;26]$.

Chọn đáp án (A) □

CÂU 11. Giải bất phương trình $\log_9\left(3^x-1\right)\cdot\log_{\frac{1}{9}}\left(\dfrac{3^x-1}{81}\right)\leq\dfrac{3}{4}$. Ta được tập nghiệm

(A) $S=(-\infty;2\log_3 2]\cup[\log_3 28;+\infty)$. (B) $S=[2\log_3 2;\log_3 28]$.

Ⓒ $S=(0;2\log_3 2]\cup[\log_3 28;+\infty)$. Ⓓ $S=(2\log_3 2;\log_3 28)$.

Lời giải.

Điều kiện $x>0$.

Ta có

$\log_9(3^x-1)\cdot\log_{\frac{1}{9}}\left(\dfrac{3^x-1}{81}\right)\le\dfrac{3}{4}\Leftrightarrow\log_9(3^x-1)\cdot\left(\log_9 9^2-\log_9(3^x-1)\right)\le\dfrac{3}{4}$.

Đặt $t=\log_9(3^x-1)$. Khi đó, bất phương trình trên trở thành.

$-t^2+2t-\dfrac{3}{4}\le 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t\ge\dfrac{3}{2}\\ t\le\dfrac{1}{2}\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\log_9(3^x-1)\ge\dfrac{3}{2}\\ \log_9(3^x-1)\le\dfrac{1}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}(3^x-1)\ge 9^{\frac{3}{2}}\\ 0<(3^x-1)\le 9^{\frac{1}{2}}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\ge\log_3 28\\ 0<x\le 2\log_3 2.\end{array}\right.$

Chọn đáp án Ⓒ □

Dạng 36. Bài toán logarit chứa tham số

1. Các ví dụ

VÍ DỤ 1. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $\log_2^2 x-2\log_2 x+3m-2<0$ có nghiệm thực.

Lời giải.

Đặt $t=\log_2 x\xrightarrow{x>0}t\in\mathbb{R}$, khi đó bất phương trình có dạng:

$$t^2-2t+3m-2<0\Leftrightarrow 3m<-t^2+2t+2=f(t)\ (*).$$

Ta có $f(t)=-t^2+2t+2=-(t-1)^2+3\le 3\Rightarrow\max\limits_{t\in\mathbb{R}}f(t)=3$.

Để (*) có nghiệm thì $3m<\max\limits_{t\in\mathbb{R}}f(t)=3\Leftrightarrow m<1$.

□

VÍ DỤ 2. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để bất phương trình $\log_2^2 x+m\log_2 x-m\ge 0$ nghiệm đúng với mọi giá trị của $x\in(0;+\infty)$?

Lời giải.

Đặt $t=\log_2 x\xrightarrow{x\in(0;+\infty)}t\in\mathbb{R}$.

Khi đó bài toán được phát biểu lại: "Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để bất phương trình $t^2+mt-m\ge 0$ nghiệm đúng với $\forall t\in\mathbb{R}$".

$\Leftrightarrow\Delta=m^2+4m\le 0\Leftrightarrow -4\le m\le 0\xrightarrow{m\in\mathbb{Z}}m\in\{-4;-3;-2;-1;0\}$: có 5 giá trị nguyên. □

VÍ DỤ 3. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=\dfrac{1}{\sqrt{m\log_3^2 x-4\log_3 x+m+3}}$ xác định trên khoảng $(0;+\infty)$.

Lời giải.

Đặt $t=\log_3 x$, khi đó $x\in(0;+\infty)\Leftrightarrow t\in\mathbb{R}$.

$y=\dfrac{1}{\sqrt{m\log_3^2 x-4\log_3 x+m+3}}$ trở thành $y=\dfrac{1}{\sqrt{mt^2-4t+m+3}}$.

Hàm số $y=\dfrac{1}{\sqrt{m\log_3^2 x-4\log_3 x+m+3}}$ xác định trên khoảng $(0;+\infty)$

khi $y=\dfrac{1}{\sqrt{mt^2-4t+m+3}}$ xác định trên $\mathbb{R}\Leftrightarrow mt^2-4t+m+3>0,\forall x\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow\Delta'=4-m^2-3m<0\Leftrightarrow m<-4$ hay $m>1$. □

VÍ DỤ 4. Tìm tất cả giá trị thực của tham số m sao cho bất phương trình $\log_2^2 x-2\log_2 x-m\ge 0$ có nghiệm thuộc $(1;4)$?

Lời giải.

Đặt: $\log_2 x=t$ với $x\in(1;4)\Rightarrow t\in(0;2)$.

Khi đó, bất phương trình trở thành: $t^2-2t-m\ge 0\Leftrightarrow t^2-2t\ge m$.

Xét hàm số: $f(t)=t^2-2t$ trên $(0;2)$; $f'(t)=2t-2=0\Rightarrow t=1$.

Bảng biến thiên:

t	0		1		2
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0

Bất phương trình có nghiệm thuộc $(1;4)\Rightarrow m<0$. □

2. Câu hỏi trắc nghiệm

CÂU 1. Bất phương trình $\lg^2 x - m\lg x + m + 3 \le 0$ có nghiệm $x > 1$ khi giá trị của m là

(A) $(-\infty; -3) \cup [6; +\infty)$. (B) $(-\infty; -3)$. (C) $[6; +\infty)$. (D) $(3;6]$.

Lời giải.

Điều kiện: $x > 1$. Đặt $t = \lg x$, với $x > 1 \Rightarrow t = \lg x > 0$.
Khi đó phương trình đã cho trở thành $t^2 - mt + m + 3 \le 0 \Leftrightarrow t^2 + 3 \le m(t-1)$ (*).
Với $t = 1$ thì bất phương trình vô nghiệm.

TH1: Với $t - 1 > 0 \Leftrightarrow t > 1$. Khi đó (*) $m \ge f(t) = \dfrac{t^2+3}{t-1}$ (I).

Xét hàm số $f(t) = \dfrac{t^2+3}{t-1}$ với $t > 1$, có $f'(t) = \dfrac{t^2-2t-3}{(t-1)^2} = 0 \Rightarrow t = 3$.

Suy ra $\max\limits_{(1;+\infty)} f(t) = f(3) = 6$. Khi đó để (I) có nghiệm khi $m \ge \max\limits_{(1;+\infty)} f(t) = 6$.

TH2: Với $t - 1 < 0 \Rightarrow 0 < t < 1$, khi đó (*) $\Leftrightarrow m \le f(t) = \dfrac{t^2+3}{t-1}$ (II).

Xét hàm số $f(t) = \dfrac{t^2+3}{t-1}$ với $t \in (0;1)$, có $f'(t) = \dfrac{t^2-2t-3}{(t-1)^2} < 0; \forall t \in (0;1)$.

Suy ra $\max\limits_{(1;+\infty)} f(t) = f(0) = -3$. Khi đó để (II) có nghiệm khi $m < \max\limits_{(1;+\infty)} f(t) = -3$.

Vậy $m \in (-\infty; -3) \cup [6; +\infty)$ là giá trị cần tìm của bài toán.

Chọn đáp án (A) □

CÂU 2. Gọi S là tổng tất cả giá trị nguyên của tham số m, với $m < 3$ để bất phương trình $\log_{\frac{1}{5}}\left(mx - x^2\right) \le \log_{\frac{1}{5}} 4$ vô nghiệm. Tính S.

(A) $S = -3$. (B) $S = -7$. (C) $S = 0$. (D) $S = -4$.

Lời giải.

$\log_{\frac{1}{5}}\left(mx - x^2\right) \le \log_{\frac{1}{5}} 4 \Leftrightarrow mx - x^2 \ge 4 \Leftrightarrow x^2 - mx + 4 \le 0$.
$x^2 - mx + 4 \le 0$ vô nghiệm $\Leftrightarrow x^2 - mx + 4 > 0\ \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta < 0 \Leftrightarrow -2 < m < 2$.

Chọn đáp án (A) □

CÂU 3. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $\log_2(5^x - 1) \cdot \log_2(2 \cdot 5^x - 2) > m - 1$ có nghiệm $x \ge 1$?

(A) $m \ge 7$. (B) $m > 7$. (C) $m \le 7$. (D) $m < 7$.

Lời giải.

$\log_2(5^x - 1) \cdot \log_2(2 \cdot 5^x - 2) > m - 1 \Leftrightarrow \log_2(5^x - 1) \cdot [1 + \log_2(5^x - 1)] > m - 1$.
Đặt $t = \log_2(5^x - 1)$ do $x \ge 1 \Rightarrow t \in [2; +\infty)$.
Khi đó bất phương trình trở thành: $t(1+t) > m - 1 \Leftrightarrow t^2 + t > m - 1 \Leftrightarrow f(t) \ge m - 1$.
Với $f(t) = t^2 + t$.
$f'(t) = 2t + 1 > 0$ với $t \in [2; +\infty)$ nên hàm đồng biến trên $t \in [2; +\infty)$.
Nên $\min f(t) = f(2) = 6$ với $t \in [2; +\infty)$.
Do đó để bất phương trình $\log_2(5^x - 1) \cdot \log_2(2 \cdot 5^x - 2) > m - 1$ có nghiệm $x \ge 1$ thì

$$m - 1 \le \min f(t) \Leftrightarrow m \le 7.$$

Chọn đáp án (C) □

CÂU 4. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho khoảng $(2;3)$ thuộc tập nghiệm của bất phương trình $\log_5\left(x^2+1\right) > \log_5\left(x^2+4x+m\right) - 1$ (1).

(A) $m \in [-12; 13]$. (B) $m \in [12; 13]$. (C) $m \in [-13; 12]$. (D) $m \in [-13; -12]$.

Lời giải.

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 1 > \dfrac{x^2+4x+m}{5} \\ x^2 + 4x + m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -x^2 - 4x = f(x) \\ m < 4x^2 - 4x + 5 = g(x). \end{cases}$$

Hệ trên thỏa mãn $\forall x \in (2;3) \Leftrightarrow \begin{cases} m \ge \max\limits_{2<x<3} f(x) = -12 \text{ khi } x = 2 \\ m \le \min\limits_{2<x<3} f(x) = 13 \text{ khi } x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow -12 \le m \le 13$.

Chọn đáp án (A) □

CÂU 5. Tìm tất cả giá trị thực của tham số m sao cho bất phương trình $\log_2^2 x - 2\log_2 x - m \ge 0$ có nghiệm thuộc $[1;4)$?

(A) $m < 0$. (B) $m \le 0$. (C) $m > 0$. (D) $m \ge 0$.

Lời giải.

Đặt: $\log_2 x = t$ với $x \in [1;4) \Rightarrow t \in [0;2)$.
Khi đó, bất phương trình trở thành: $t^2 - 2t - m \ge 0 \Leftrightarrow t^2 - 2t \ge m$.

Xét hàm số: $f(t) = t^2 - 2t$ trên $[0;2)$; $f'(t) = 2t - 2 = 0 \Rightarrow t = 1$.
Bảng biến thiên:

t	0		1		2
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0

Bất phương trình có nghiệm thuộc $[1;4) \Rightarrow m \leq 0$.
Chọn đáp án (B)

CÂU 6. Tìm tất cả giá trị thực của tham số m sao cho bất phương trình $\log_2^2 x - 2\log_2 x - m \geq 0$ có nghiệm thuộc $[1;4]$?

A $m \leq 0$. **B** $m < 0$. **C** $m > 0$. **D** $m \geq 0$.

Lời giải.

Đặt: $\log_2 x = t$ với $x \in [1;4] \Rightarrow t \in [0;2]$.
Khi đó, bất phương trình trở thành: $t^2 - 2t - m \geq 0 \Leftrightarrow t^2 - 2t \geq m$.
Xét hàm số: $f(t) = t^2 - 2t$ trên $[0;2]$; $f'(t) = 2t - 2 = 0 \Rightarrow t = 1$.
Bảng biến thiên:

t	0		1		2
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0

Bất phương trình có nghiệm thuộc $[1;4] \Rightarrow m \leq 0$.
Chọn đáp án (A)

CÂU 7. Tìm tất cả giá trị thực của tham số m sao cho bất phương trình $\log_2^2 x - 2\log_2 x - m \geq 0$ có mọi x thuộc $(1;4)$ là nghiệm?

A $m \geq -1$. **B** $m < -1$. **C** $m > -1$. **D** $m \leq -1$.

Lời giải.

Đặt: $\log_2 x = t$ với $x \in (1;4) \Rightarrow t \in (0;2)$.
Khi đó, bất phương trình trở thành: $t^2 - 2t - m \geq 0 \Leftrightarrow t^2 - 2t \geq m$.
Xét hàm số: $f(t) = t^2 - 2t$ trên $(0;2)$; $f'(t) = 2t - 2 = 0 \Rightarrow t = 1$.
Bảng biến thiên:

t	0		1		2
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0

Bất phương trình có nghiệm thuộc $(1;4) \Rightarrow m \leq -1$.
Chọn đáp án (D)

CÂU 8. Tìm tất cả giá trị thực của tham số m sao cho bất phương trình $\log_2^2 x - 2\log_2 x - m \geq 0$ có mọi $x \in [1;4)$ là nghiệm?

A $m > -1$. **B** $m \leq 0$. **C** $m \leq -1$. **D** $m \geq -1$.

Lời giải.

Đặt: $\log_2 x = t$ với $x \in [1;4) \Rightarrow t \in [0;2)$.
Khi đó, bất phương trình trở thành: $t^2 - 2t - m \geq 0 \Leftrightarrow t^2 - 2t \geq m$.
Xét hàm số: $f(t) = t^2 - 2t$ trên $[0;2)$; $f'(t) = 2t - 2 = 0 \Rightarrow t = 1$.
Bảng biến thiên:

t	0		1		2
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0

Bất phương trình có nghiệm thuộc $[1;4) \Rightarrow m \leq -1$.
Chọn đáp án C

CÂU 9. Tìm tất cả giá trị thực của tham số m sao cho bất phương trình $\log_2^2 x - 2\log_2 x - m \geq 0$ có mọi $x \in [1;4]$ là nghiệm?

A $m \leq 0$. **B** $m \geq 0$. **C** $m < -1$. **D** $m \leq -1$.

Lời giải.

Đặt: $\log_2 x = t$ với $x \in [1;4] \Rightarrow t \in [0;2]$.
Khi đó, bất phương trình trở thành: $t^2 - 2t - m \geq 0 \Leftrightarrow t^2 - 2t \geq m$.
Xét hàm số: $f(t) = t^2 - 2t$ trên $[0;2]$; $f'(t) = 2t - 2 = 0 \Rightarrow t = 1$.
Bảng biến thiên:

t	0		1		2
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0

Bất phương trình có nghiệm thuộc $[1;4] \Rightarrow m \leq -1$.
Chọn đáp án D

CÂU 10. Tìm tất cả giá trị thực của tham số m sao cho bất phương trình $\log_2^x - \sqrt{\log_2 x} - m \leq 0$ có mọi $x \in (2;16)$ là nghiệm?

A $m \leq 0$. **B** $m \geq 2$. **C** $m \geq 0$. **D** $m \leq 2$.

Lời giải.

Điều kiện: $\begin{cases} x > 0 \\ \log_2 x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 1$.
Đặt: $\sqrt{\log_2 x} = t$ với $x \in (2;16) \Rightarrow t \in (1;2)$.
Khi đó, bất phương trình trở thành: $t^2 - t - m \leq 0 \Leftrightarrow t^2 - t \leq m$.
Xét hàm số: $f(t) = t^2 - t$ trên $(1;2)$; $f'(t) = 2t - 1 = 0 \Rightarrow t = \dfrac{1}{2}$.
Bảng biến thiên:

t	1		2
$f'(t)$		$+$	
$f(t)$	0	$\nearrow$	2

Bất phương trình có nghiệm với mọi x thuộc $(2;16) \Leftrightarrow m \geq 2$.
Chọn đáp án B

CÂU 11. Tìm tất cả giá trị thực của tham số m sao cho bất phương trình $\log_2^2 x - 1 + 2\sqrt{\log_2^2 x + 1} - m \leq 0$ thỏa mãn với mọi $\left[1;2^{\sqrt{3}}\right]$?

A $m < 1$. **B** $m \geq 6$. **C** $m > 6$. **D** $m \leq 1$.

Lời giải.

Điều kiện: $x > 0$.
$\log_2^2 x - 1 + 2\sqrt{log_2^2 x + 1} - m \leq 0 \Leftrightarrow \log_2^2 x + 1 + 2\sqrt{log_2^2 x + 1} - 2 \leq m \quad (1)$.
Đặt: $\sqrt{\log_2^2 x + 1} = t$ với $x \in \left[1;2^{\sqrt{3}}\right] \Rightarrow t \in [1;2]$.

Khi đó, $(1) \Leftrightarrow t^2 + 2t - 2 \le m$.
Xét hàm số: $f(t) = t^2 + 2t - 2$ trên $[1; 2]$; $f'(t) = 2t + 2 = 0 \Rightarrow t = -1$.
Bảng biến thiên:

t	1		2
$f'(t)$		$+$	
$f(t)$	1	$\nearrow$	6

Bất phương tình thoả mãn với mọi x thuộc $\left[1; 2^{\sqrt{3}}\right] \Rightarrow m \ge 6$.

Chọn đáp án B

CÂU 12. Tìm tất cả giá trị thực của tham số m sao cho bất phương trình $(2x-1)\left[\log_2(x-1) + \log_3 x\right] \ge m$ thỏa mãn với mọi $x \in [3; 9]$?

A $m \le 10$. **B** $m \le 85$. **C** $m \ge 10$. **D** $m \ge 85$.

Lời giải.

$(2x-1)\left[\log_2(x-1) + \log_3 x\right] \ge m \quad (1)$.
Ta có: $f(x) = 2x - 1$ đồng biến trên $(3; 9)$.

$g(x) = \log_2(x-1) + \log_3 x$; $g'(x) = \dfrac{1}{(x-1)\ln 2} + \dfrac{1}{x \ln 3} > 0, \forall x \in (2; 3)$

$\Rightarrow$ hàm số đồng biến trên $(2; 3)$.

Mà $\begin{cases} f(x) > 0, \forall x \in (2; 3) \\ g(x) > 0, \forall x \in (2; 3). \end{cases}$

Suy ra $f(x) \cdot g(x)$ là hàm số đồng biến trên $(2; 3) \Rightarrow \min\limits_{[3;9]}[f(x) \cdot g(x)] = f(3) \cdot g(3) = 10$.

Khi đó, bpt $\Leftrightarrow \min\limits_{[3;9]}[f(x) \cdot g(x)] \ge m \Leftrightarrow 10 \ge m$.

Chọn đáp án A

CÂU 13. Tìm tất cả giá trị thực của tham số m sao cho bất phương trình $(3m+1)12^x + (2-m)6^x + 3^x < 0$ nghiệm đúng $\forall x > 0$ là

A $(-2; +\infty)$. **B** $(-\infty; -2]$. **C** $\left(-\infty; -\frac{1}{3}\right]$. **D** $\left(-2; -\frac{1}{3}\right)$.

Lời giải.

$(3m+1)12^x + (2-m)6^x + 3^x < 0 \Leftrightarrow (3m+1)4^x + (2-m)2^x + 1 < 0$.
Đặt: $2^x = t$. Do $x > 0 \Rightarrow t > 1$.
Khi đó, bất phương trình trở thành: $(3m+1)t^2 + (2-m)t + 1 < 0, \forall t > 1$

$\Leftrightarrow \left(3t^2 - t\right) m < -t^2 - 2t - 1,\ \forall t > 1 \Leftrightarrow m < \dfrac{-t^2 - 2t - 1}{3t^2 - t}, \forall t > 1$ (do $3t^2 - t > 0\ \forall t > 1$).

Xét hàm số: $f(t) = \dfrac{-t^2 - 2t - 1}{3t^2 - t}$ trên $(1; +\infty)$; $f'(t) = \dfrac{7t^2 + 6t - 1}{\left(3t^2 - t\right)^2} > 0,\ \forall t \in (1; +\infty)$.

Bảng biến thiên:

t	1		$+\infty$
$f'(t)$		$+$	
$f(t)$	-2	$\nearrow$	$-\frac{1}{3}$

Do đó $m \le \lim\limits_{t \to 1^+} f(t) = -2$ thỏa yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án B

CÂU 14. Tìm m để bất phương trình $1 + \log_5(x^2 + 1) \ge \log_5(mx^2 + 4x + m)$ thỏa mãn với mọi $x \in \mathbb{R}$.

A $-1 < m \le 0$. **B** $-1 < m < 0$. **C** $2 < m \le 3$. **D** $2 < m < 3$.

Lời giải.

Bất phương trình thỏa mãn với mọi $x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} mx^2 + 4x + m > 0 \\ 5(x^2+1) \geq mx^2 + 4x + m \end{cases} (\forall x \in \mathbb{R})$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} mx^2 + 4x + m > 0 \\ (5-m)x^2 - 4x + 5 - m \geq 0 \end{cases} (\forall x \in \mathbb{R}) \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ 16 - 4m^2 < 0 \\ 5 - m > 0 \\ 16 - 4(5-m)^2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ \left[\begin{array}{l} m > 2 \\ m < -2 \end{array}\right. \\ m < 5 \\ \left[\begin{array}{l} m \geq 7 \\ m \leq 3 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow 2 < m \leq 3.$$

Chọn đáp án (C) □

CÂU 15. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $9^x - 2(m+1)\cdot 3^x - 3 - 2m > 0$ nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$.

(A) $m \in \mathbb{R}$. **(B)** $m \neq \dfrac{-4}{3}$. **(C)** $m < \dfrac{-3}{2}$. **(D)** $m \leq \dfrac{-3}{2}$.

Lời giải.

Đặt $3^x = t$ với $t > 0$. Khi đó phương trình đã cho tương đương:

$t^2 - 2(m+1)t - 3 - 2m > 0, \forall t > 0 \Leftrightarrow m < \dfrac{t^2 - 2t - 3}{2t + 2}, \forall t > 0 \Leftrightarrow m < \dfrac{1}{2}(t-3), \forall t > 0.$

Xét $f(t) = \dfrac{1}{2}(t-3), \forall t > 0 \Rightarrow f'(t) = \dfrac{1}{2} > 0, \forall t > 0$ suy ra hàm số đồng biến trên $(0; +\infty)$.

Suy ra yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow m < f(t), \forall t > 0 \Leftrightarrow m < f(0) = -\dfrac{3}{2}$.

Chọn đáp án (D) □

MỤC LỤC