

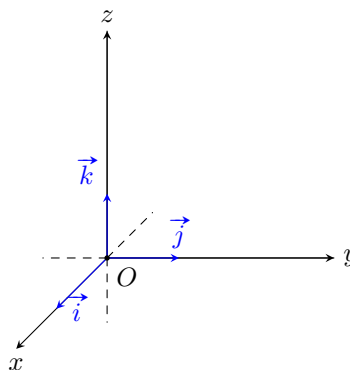
## Bài 2. TỌA ĐỘ CỦA VÉC TƠ TRONG KHÔNG GIAN

## A. LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

## 1. Hệ tọa độ trong không gian

Trong không gian, ba trục  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$  đôi một vuông góc với nhau tại gốc  $O$  của mỗi trục. Gọi  $i$ ,  $\vec{j}$ ,  $\vec{k}$  lần lượt là các véc-tơ đơn vị trên các trục  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$ .

- ☑ Hệ ba trục như vậy được gọi là hệ trục tọa độ Descartes vuông góc  $Oxyz$ , hay đơn giản là hệ tọa độ  $Oxyz$ . Điểm  $O$  được gọi là gốc tọa độ.
- ☑ Các mặt phẳng  $(Oxy)$ ,  $(Oyz)$ ,  $(Ozx)$  đôi một vuông góc với nhau được gọi là các mặt phẳng tọa độ.
- ☑  $\vec{i}^2 = \vec{j}^2 = \vec{k}^2 = 1$   
và  $\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{i} = 0$

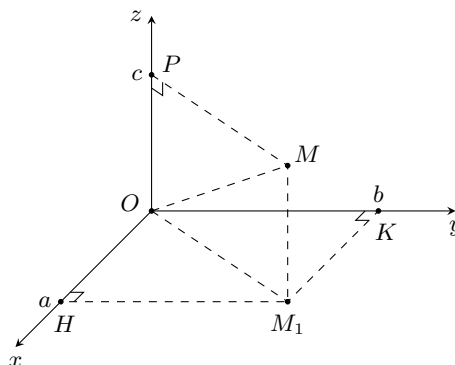


Không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$  còn được gọi là không gian  $Oxyz$ .

## 2. Toa đô của điểm

Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho điểm  $M$ . Tọa độ điểm  $M$  được xác định như sau:

- ☑ Xác định hình chiếu  $M_1$  của điểm  $M$  trên mặt phẳng  $Oxy$ . Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , tìm hoành độ  $a$ , tung độ  $b$  của điểm  $M_1$ .
- ☑ Xác định hình chiếu  $P$  của điểm  $M$  trên trục cao  $Oz$ , điểm  $P$  ứng với số  $c$  trên trục  $Oz$ . Số  $c$  là cao độ của điểm  $M$ .



Bộ số  $(a; b; c)$  là toạ độ của điểm  $M$  trong không gian với hệ toạ độ  $Oxyz$ , kí hiệu là  $M(a; b; c)$ .

### 3. Tọa độ của vectơ

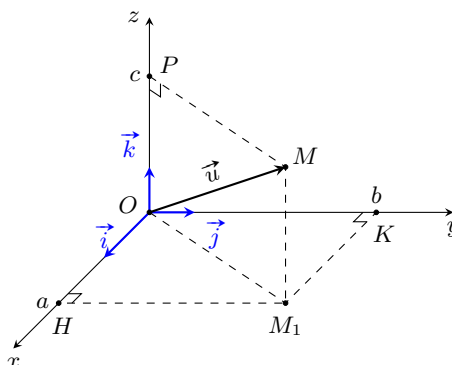
Trong không gian  $Oxyz$ :

- ☑ Toạ độ của điểm  $M$  cũng là toạ độ của vectơ  $\overrightarrow{OM}$ .
- ☑ Cho  $\vec{u}$ . Dựng điểm  $M(a; b; c)$  thỏa  $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$  thì toạ độ của điểm  $M$  là toạ độ của  $\vec{u}$ . Theo hình vẽ thì

$$\vec{u} = \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{OK} + \overrightarrow{OP} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}.$$

Suy ra

$$\vec{u} = (a; b; c) \Leftrightarrow \vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}.$$



ĐIỂM: \_\_\_\_\_

“It’s not how much time you have, it’s how you use it.”

## QUICK NOTE

QUICK NOTE

## B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

### Dạng 1. Tọa độ điểm, tọa độ vec tơ

Khi xác định tọa độ điểm, tọa độ vec tơ ta chú ý các kết quả sau:

a)  $\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k} \Leftrightarrow \vec{u} = (a; b; c).$

b)  $\vec{u}(u_1; u_2; u_3) = \vec{v}(v_1; v_2; v_3) \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = v_1 \\ u_2 = v_2 \\ u_3 = v_3 \end{cases}$

c)  $\overrightarrow{OM} = (a; b; c)$  thì  $M(a; b; c).$

d)  $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A).$

e) Chiếu điểm  $M(a; b; c)$  lên mặt phẳng tọa độ (hoặc trục tọa độ) thì "thành phần bị khuyết" bằng 0. Chẳng hạn:  $M(1; 2; 3)$  chiếu lên  $(Oxy)$  thì  $z = 0$ . Suy ra hình chiếu là  $M_1(1; 2; 0).$

f) Tứ giác  $ABCD$  là hình bình hành khi và chỉ khi

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$$

### BÀI TẬP TỰ LUẬN TRẢ LỜI NGẮN

**VÍ DỤ 1.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho  $A(3; -2; -1)$ . Gọi  $A_1, A_2, A_3$  lần lượt là hình chiếu của điểm  $A$  trên các mặt phẳng tọa độ  $(Oxy), (Oyz), (Oxz)$ . Tìm tọa độ của các điểm  $A_1, A_2, A_3$ .

**VÍ DỤ 2.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho  $A(-2; 3; 4)$ . Gọi  $H, K, P$  lần lượt là hình chiếu của điểm  $A$  trên các trục  $Ox, Oy, Oz$ . Tìm tọa độ của các điểm  $H, K, P$ .

**VÍ DỤ 3.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho  $A(1; 1; -2), B(4; 3; 1)$  và  $C(-1; -2; 2)$ .

a) Tìm tọa độ của vec tơ  $\overrightarrow{AB}$ .

b) Tìm tọa độ của điểm  $D$  sao cho  $ABCD$  là hình bình hành.

**VÍ DỤ 4.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hình hộp  $ABCD \cdot A'B'C'D'$  có  $A(4; 6; -5), B(5; 7; -4), C(5; 6; -4), D'(2; 0; 2)$ . Tìm tọa độ các đỉnh còn lại của hình hộp  $ABCD \cdot A'B'C'D'$ .

### BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM 4 PHƯƠNG ÁN

**CÂU 1.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho  $\vec{a} = -2\vec{i} + 3\vec{j} + 5\vec{k}$ . Tọa độ của vec tơ  $\vec{a}$  là  
**(A)**  $(2; -3; -5)$ . **(B)**  $(2; 3; -5)$ . **(C)**  $(-2; 3; 5)$ . **(D)**  $(2; 3; 5)$ .

**CÂU 2.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho vec tơ  $\vec{u} = 3\vec{i} + 4\vec{k} - \vec{j}$ . Tọa độ của vec tơ  $\vec{u}$  là  
**(A)**  $(3; -1; 4)$ . **(B)**  $(3; 4; -1)$ . **(C)**  $(4; -1; 3)$ . **(D)**  $(4; 3; -1)$ .

**CÂU 3.** Trong không gian  $Oxyz$ , điểm nào sau đây thuộc trục  $Oz$ ?  
**(A)**  $M(1; 0; 0)$ . **(B)**  $M(1; 0; 2)$ . **(C)**  $M(1; 2; 0)$ . **(D)**  $M(0; 0; -2)$ .

**CÂU 4.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho điểm  $M$  thỏa  $\overrightarrow{OM} = 2\vec{i} + \vec{j}$ . Tọa độ điểm  $M$  là  
**(A)**  $M(0; 2; 1)$ . **(B)**  $M(1; 2; 0)$ . **(C)**  $M(2; 0; 1)$ . **(D)**  $M(2; 1; 0)$ .

**CÂU 5.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho vectơ  $\overrightarrow{OA} = \vec{j} - 2\vec{k}$ . Tọa độ điểm  $A$  là  
**(A)**  $(1; 0; -2)$ . **(B)**  $(0; 1; -2)$ . **(C)**  $(0; -1; 2)$ . **(D)**  $(1; -2; 0)$ .

**CÂU 6.** Trong không gian  $Oxyz$ , xác định tọa độ của điểm  $A$  biết  $A$  nằm trên tia  $Ox$  và  $OA = 2$ .  
**(A)**  $A(0; 0; 2)$ . **(B)**  $A(2; 2; 0)$ . **(C)**  $A(0; 2; 0)$ . **(D)**  $A(2; 0; 0)$ .

**CÂU 7.** Trong không gian  $Oxyz$ , xác định tọa độ của điểm  $A$  biết  $A$  nằm trên tia đối của tia  $Oy$  và  $OA = 3$ .  
**(A)**  $A(0; 3; 0)$ . **(B)**  $A(0; -3; 0)$ . **(C)**  $A(0; -9; 0)$ . **(D)**  $A(3; -3; 0)$ .

QUICK NOTE

**CÂU 8.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai điểm  $A(1; -1; 2)$  và  $B(2; 1; -4)$ . Véc-tơ  $\overrightarrow{AB}$  có tọa độ là

- (A)**  $(-1; -2; 6)$ . **(B)**  $(3; 0; -2)$ . **(C)**  $(1; 0; -6)$ . **(D)**  $(1; 2; -6)$ .

**CÂU 9.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai điểm  $A(1; 3; -2)$ ,  $B(3; -2; 4)$ . Véc-tơ  $\overrightarrow{AB}$  có tọa độ là

- (A)**  $(2; 5; 6)$ . **(B)**  $(4; 1; 2)$ . **(C)**  $(2; -5; 6)$ . **(D)**  $(-2; 5; 6)$ .

**CÂU 10.** Cho hai điểm  $A, B$  thỏa mãn  $\overrightarrow{OA} = (2; -1; 3)$  và  $\overrightarrow{OB} = (5; 2; -1)$ . Tìm tọa độ véc-tơ  $\overrightarrow{AB}$ .

- (A)**  $\overrightarrow{AB} = (2; -1; 3)$ . **(B)**  $\overrightarrow{AB} = (3; 3; -4)$ . **(C)**  $\overrightarrow{AB} = (7; 1; 2)$ . **(D)**  $\overrightarrow{AB} = (3; -3; 4)$ .

**CÂU 11.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai điểm  $M$  và  $N$  biết  $M(2; 1; -1)$  và  $\overrightarrow{MN} = (-1; 2; 3)$ . Tọa độ  $N$  là

- (A)**  $N(1; -3; -4)$ . **(B)**  $N(1; 3; -4)$ . **(C)**  $N(-1; 3; -4)$ . **(D)**  $N(1; 3; 4)$ .

**CÂU 12.** Hình chiếu vuông góc của điểm  $A(3; -4; 5)$  trên mặt phẳng  $(Oxz)$  là điểm

- (A)**  $M(3; 0; 0)$ . **(B)**  $M(0; -4; 5)$ . **(C)**  $M(0; 0; 5)$ . **(D)**  $M(3; 0; 5)$ .

**CÂU 13.** Hình chiếu vuông góc của điểm  $A(1; 2; 3)$  trên mặt phẳng  $(Oxy)$  là điểm

- (A)**  $M(0; 0; 3)$ . **(B)**  $N(1; 2; 0)$ . **(C)**  $Q(0; 2; 0)$ . **(D)**  $P(1; 0; 0)$ .

**CÂU 14.** Hình chiếu vuông góc của điểm  $M(2; 1; -3)$  lên mặt phẳng  $(Oyz)$  có tọa độ là

- (A)**  $(2; 0; 0)$ . **(B)**  $(2; 1; 0)$ . **(C)**  $(0; 1; -3)$ . **(D)**  $(2; 0; -3)$ .

**CÂU 15.** Hình chiếu vuông góc của điểm  $A(3; 2; 1)$  trên trục  $Ox$  có tọa độ là

- (A)**  $(0; 2; 1)$ . **(B)**  $(0; 2; 0)$ . **(C)**  $(3; 0; 0)$ . **(D)**  $(0; 0; 1)$ .

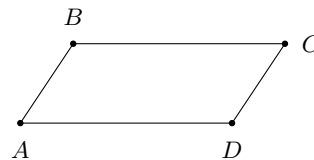
**CÂU 16.** Hình chiếu của điểm  $M(2; 3; -2)$  trên trục  $Oy$  có tọa độ là

- (A)**  $(2; 0; 0)$ . **(B)**  $(0; 3; 0)$ . **(C)**  $(0; 0; -2)$ . **(D)**  $(2; 0; -2)$ .

**CÂU 17.**

Trong không gian  $Oxyz$ , cho hình bình hành  $ABCD$  với  $A(-2; 3; 1)$ ,  $B(3; 0; -1)$ ,  $C(6; 5; 0)$ . Tọa độ đỉnh  $D$  là

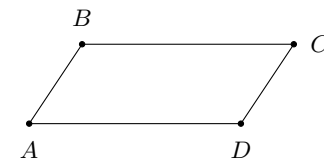
- (A)**  $D(11; 2; 2)$ . **(B)**  $D(1; 8; 2)$ .  
**(C)**  $D(11; 2; -2)$ . **(D)**  $D(1; 8; -2)$ .



**CÂU 18.**

Trong không gian  $Oxyz$ , cho các điểm  $A(1; 0; 3)$ ,  $B(2; 3; -4)$ ,  $C(-3; 1; 2)$ . Tìm tọa độ điểm  $D$  sao cho tứ giác  $ABCD$  là hình bình hành.

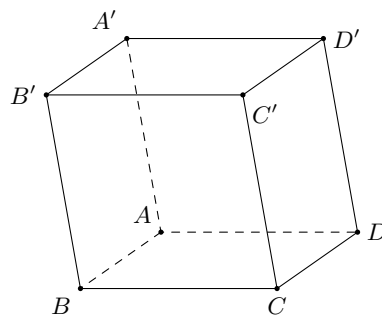
- (A)**  $D(4; 2; 9)$ . **(B)**  $D(-2; 4; -5)$ .  
**(C)**  $D(6; 2; -3)$ . **(D)**  $D(-4; -2; 9)$ .



**CÂU 19.**

Cho hình hộp  $ABCD.A'B'C'D'$  có  $A(1; 0; 1)$ ,  $B(2; 1; 2)$ ,  $D(1; -1; 1)$ ,  $C'(4; 5; -5)$ . Tìm tọa độ đỉnh  $C$  của hình hộp.

- (A)**  $C(2; 0; 2)$ . **(B)**  $C(2; 0; 2)$ .  
**(C)**  $C(2; 0; 2)$ . **(D)**  $C(2; 0; 2)$ .



**CÂU 20.** Cho hình hộp  $ABCD.A'B'C'D'$  có  $A(1; 0; 1)$ ,  $B(2; 1; 2)$ ,  $D(1; -1; 1)$ ,  $C'(4; 5; -5)$ . Tìm tọa độ đỉnh  $A'$  của hình hộp.

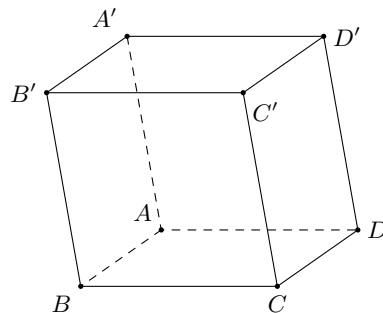
- (A)**  $A'(-1; -5; 8)$ . **(B)**  $A'(-1; -5; 8)$ . **(C)**  $A'(-1; -5; 8)$ . **(D)**  $A'(-1; -5; 8)$ .

**CÂU 21.**

QUICK NOTE

Cho hình hộp  $ABCD.A'B'C'D'$  có  $A(1; 0; 1)$ ,  $B(2; 1; 2)$ ,  $D(1; -1; 1)$ ,  $C'(4; 5; -5)$ . Tìm tọa độ đỉnh  $D'$  của hình hộp.

- Ⓐ  $D'(-1; -6; 8)$ . Ⓑ  $D'(-1; -6; 8)$ .  
Ⓒ  $D'(-1; -6; 8)$ . Ⓓ  $D'(-1; -6; 8)$ .



BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM ĐÚNG SAI

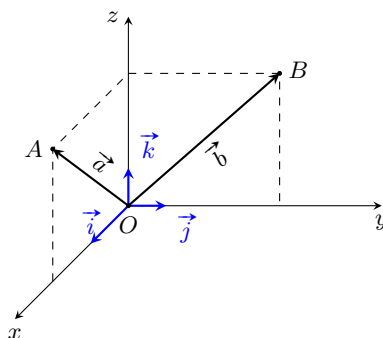
**CÂU 22.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho  $\vec{a} = \vec{i} + 3\vec{k} - 4\vec{j}$  và  $\vec{b} = (m - n; 4m - 6n; n^2 - 3m + 2)$ , với  $m, n$  là tham số.

Mệnh đề	Đ	S
a) Tọa độ $\vec{a} = (1; 3; -4)$ .		
b) Dựng điểm $A$ thỏa $\vec{OA} = \vec{a}$ thì $A(1; -4; 3)$ .		
c) Tồn tại giá trị của $m$ và $n$ để $\vec{b} = \vec{0}$ .		
d) Nếu $\vec{a} = \vec{b}$ thì $m + n = 9$ .		

**CÂU 23.**

Trong không gian  $Oxyz$ , cho  $\vec{a} = (2; 2; 0)$ ,  $\vec{b} = 2\vec{j} + 2\vec{k}$ . Dựng  $\vec{OA} = \vec{a}$  và  $\vec{OB} = \vec{b}$ .

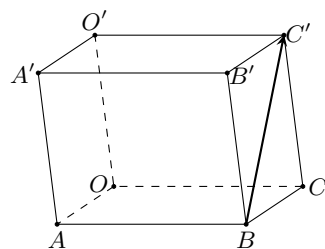
Mệnh đề	Đ	S
a) $\vec{a} = 2\vec{i} + 2\vec{k}$ .		
b) Tọa độ $\vec{b} = (0; 2; 2)$ .		
c) Tọa độ $\vec{AB} = (-2; 2; 0)$ .		
d) Góc $\widehat{AOB} = 45^\circ$ .		



**CÂU 24.**

Trong không gian  $Oxyz$ , cho hình hộp  $OABC.O'A'B'C'$  có  $A(1; 1; -1)$ ,  $B(0; 3; 0)$ ,  $\vec{BC'} = (2; -6; 6)$ . Gọi  $H, K$  lần lượt là trọng tâm của tam giác  $OA'O'$  và  $CB'C'$ .

Mệnh đề	Đ	S
a) Tọa độ điểm $C'$ là $(2; -3; 6)$ .		
b) Tọa độ điểm $O'$ là $(3; -5; 5)$ .		
c) Tọa độ véc tơ $\vec{AB'} = (-2; 3; -6)$ .		
d) Tọa độ véc tơ $\vec{HK} = (-1; 2; -1)$ .		



Dạng 2. Tọa độ hóa một số hình không gian

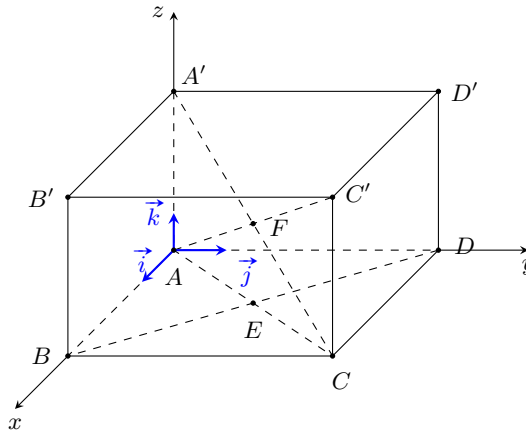
- Chọn một điểm mà từ đó có ba đường đôi một vuông góc nhau làm gốc tọa độ.
- Xây dựng tọa độ các điểm trên hình đã cho tương ứng với hệ trục vừa chọn.
- Tọa độ các điểm đặc biệt:

- $M \in Ox \Rightarrow M(x; 0; 0).$
- $M \in Oy \Rightarrow M(0; y; 0).$
- $M \in Oz \Rightarrow M(0; 0; z).$
- $M \in (Oxy) \Rightarrow M(x; y; 0).$
- $M \in (Oxz) \Rightarrow M(x; 0; z).$
- $M \in (Oyz) \Rightarrow M(0; y; z).$

### BÀI TẬP TỰ LUẬN TRẢ LỜI NGẮN

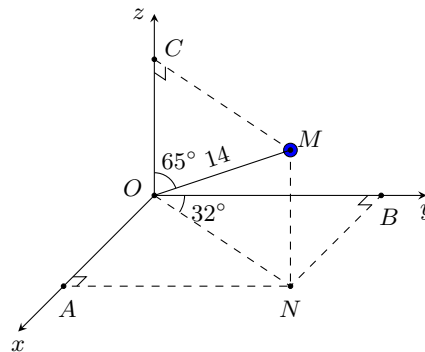
#### VÍ DỤ 1.

Cho hình hộp chữ nhật  $ABCD.A'B'C'D'$  có cạnh  $AB = AA' = 2$ ,  $AD = 4$ . Gọi  $E$  là tâm của hình chữ nhật  $ABCD$ ,  $F$  là trung điểm  $AC'$ . Với hệ tọa độ  $Oxyz$  được thiết lập như hình bên (gốc tọa độ  $O$  trùng với  $A$ ), hãy xác định tọa độ các đỉnh của hình hộp chữ nhật và tọa độ hai điểm  $E, F$ .



#### VÍ DỤ 2.

Một máy bay  $M$  đang cất cánh từ phi trường. Với hệ tọa độ  $Oxyz$  được thiết lập như Hình bên, cho biết  $M$  là vị trí của máy bay với  $OM = 14$ ,  $\angle NOB = 32^\circ$ ,  $\angle MOC = 65^\circ$ . Tính tọa độ điểm  $M$ .

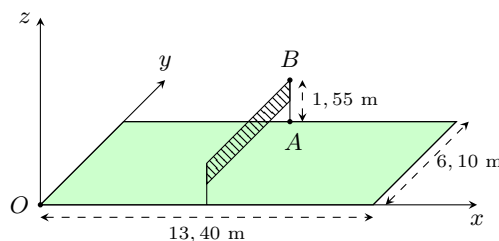


### BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM 4 PHƯƠNG ÁN

#### CÂU 1.

Hình bên mô tả một sân cầu lông với kích thước theo tiêu chuẩn quốc tế. Với hệ tọa độ  $Oxyz$  được thiết lập như hình bên (đơn vị trên mỗi trục là mét), giả sử  $AB$  là một trụ cầu lông để căng lưới, hãy xác định tọa độ của  $B$ .

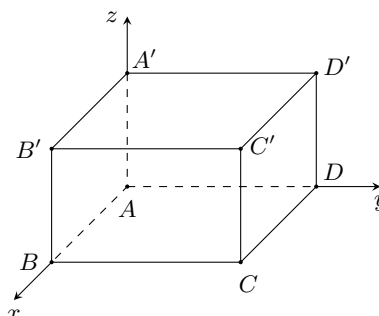
- ☐ A (6; 1; 6; 7; 1,55).    ☐ B (6; 7; 6; 1; 1,55).  
☐ C (6; 1; 0; 1,55).    ☐ D (0; 6; 7; 1,55).



#### CÂU 2.

Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$  có cạnh bằng 2. Với hệ tọa độ  $Oxyz$  được thiết lập như hình bên (gốc tọa độ  $O$  trùng với điểm  $A$ ), tọa độ điểm  $B'$  là

- ☐ A  $B(0; 2; 0).$     ☐ B  $B(2; 2; 2).$   
☐ C  $B(2; 2; 0).$     ☐ D  $B(2; 0; 2).$

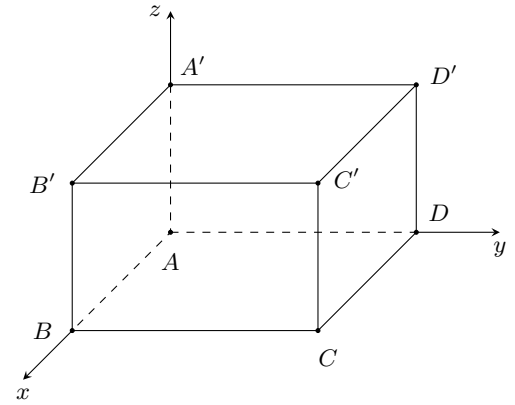


QUICK NOTE

CÂU 3.

Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$  có cạnh bằng 2. Với hệ tọa độ  $Oxyz$  được thiết lập như hình bên (gốc tọa độ  $O$  trùng với điểm  $A$ ), tọa độ điểm  $C'$  là

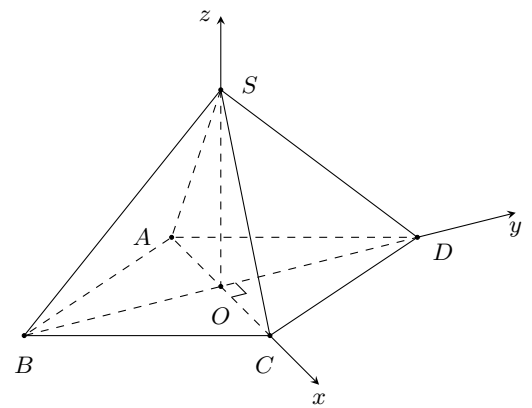
- ☐ A  $C'(2; 2; 0)$ .      ☐ B  $C'(2; 2; 2)$ .  
☐ C  $C'(2; 2; 0)$ .      ☐ D  $C'(2; 0; 2)$ .



CÂU 4.

Cho hình chóp tứ giác đều  $S.ABCD$  có cạnh đáy bằng  $a\sqrt{2}$ , cạnh bên bằng  $a\sqrt{5}$ . Gọi  $O$  là tâm của hình vuông  $ABCD$ . Với hệ tọa độ  $Oxyz$  được thiết lập như hình bên (gốc tọa độ  $O$  trùng với tâm hình vuông  $ABCD$ ), tọa độ  $\vec{SC}$  là

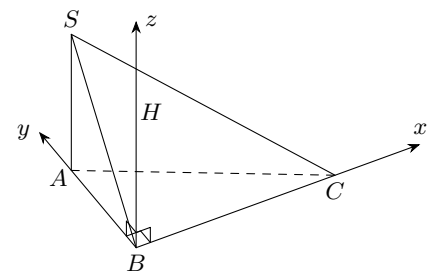
- ☐ A  $\vec{SC} = (2a; 0; -2a)$ .  
☐ B  $\vec{SC} = (2a; -a; -2a)$ .  
☐ C  $\vec{SC} = (a; 0; -2a)$ .  
☐ D  $\vec{SC} = (a; 0; 2a)$ .



CÂU 5.

Cho tứ diện  $SABC$  có  $ABC$  là tam giác vuông tại  $B$ ,  $BC = 3$ ,  $BA = 2$ ,  $SA$  vuông góc với mặt phẳng  $(ABC)$  và có độ dài bằng 2. Với hệ tọa độ  $Oxyz$  được thiết lập như hình bên (gốc tọa độ  $O$  trùng với điểm  $B$ ), tìm khẳng định sai.

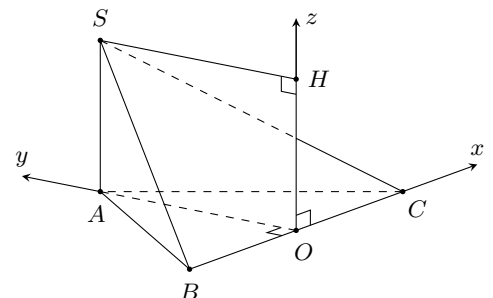
- ☐ A  $A(0; 2; 0)$ .      ☐ B  $B(0; 0; 0)$ .  
☐ C  $C(0; 0; 3)$ .      ☐ D  $S(-2; 2; 2)$ .



CÂU 6.

Cho hình chóp  $S.ABC$  có đáy  $ABC$  là tam giác đều cạnh bằng 2,  $SA$  vuông góc với đáy và  $SA = 1$ . Với hệ tọa độ  $Oxyz$  được thiết lập như hình bên (gốc tọa độ  $O$  trùng với trung điểm của đoạn  $BC$ ), hãy tìm tọa độ điểm  $S$ .

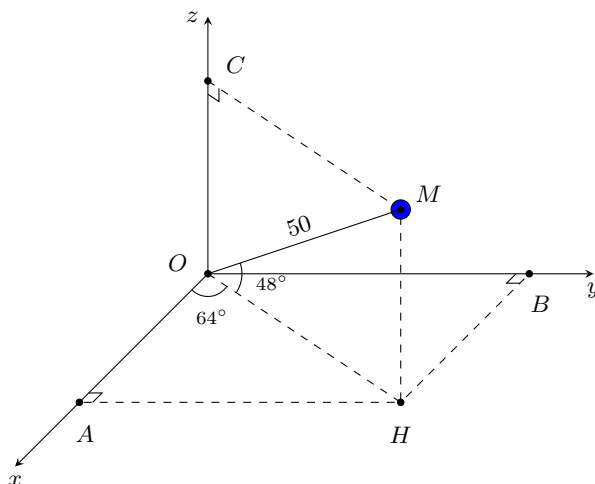
- ☐ A  $S(0; \sqrt{3}; 1)$ .      ☐ B  $S(0; \sqrt{3}; 1)$ .  
☐ C  $S(0; \sqrt{3}; 1)$ .      ☐ D  $S(0; \sqrt{3}; 1)$ .



CÂU 7.

Ở một sân bay, vị trí của máy bay được xác định bởi điểm  $M$  trong không gian  $Oxyz$  như hình bên. Gọi  $H$  là hình chiếu vuông góc của  $M$  xuống mặt phẳng  $(Oxy)$ . Cho biết  $OM = 50$ ,  $(\vec{i}, \vec{OH}) = 64^\circ$ ,  $(\vec{OH}, \vec{OM}) = 48^\circ$ . Tìm toạ độ của điểm  $M$ .

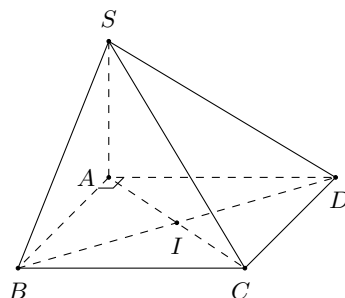
- Ⓐ  $M(14,7; 30,1; 37,2)$ .  
 Ⓑ  $M(14,7; 30,1; 37,2)$ .  
 Ⓒ  $M(14,7; 30,1; 37,2)$ .  
 Ⓓ  $M(14,7; 30,1; 37,2)$ .



**BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM ĐÚNG SAI**

**CÂU 8.**

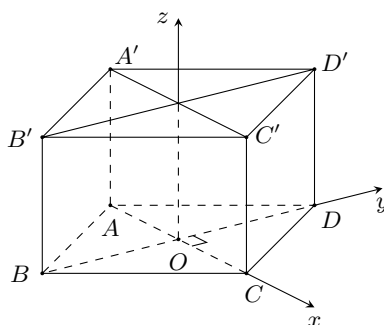
Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình chữ nhật,  $AB = 1$ ,  $AD = 2$ ,  $SA$  vuông góc với mặt đáy và  $SA = 3$ . Với hệ toạ độ  $Oxyz$  được thiết lập như sau: Gốc toạ độ  $O$  trùng với điểm  $A$ , các véc tơ  $\vec{AB}$ ,  $\vec{AD}$ ,  $\vec{AS}$  lần lượt cùng hướng với  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  và  $\vec{k}$ . Xét tính đúng sai của các khẳng định sau



Mệnh đề	Đ	S
a) Tọa độ $D(0; 2; 0)$ .		
b) Tọa độ $C(1; 2; 3)$ .		
c) Tọa độ $S(2; 0; 0)$ .		
d) Tọa độ $I(1; 1; 0)$ .		

**CÂU 9.**

Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$  có cạnh bằng 2. Với hệ toạ độ  $Oxyz$  được thiết lập như hình bên (gốc toạ độ  $O$  trùng với tâm hình vuông  $ABCD$ ), hãy xét tính đúng sai của các khẳng định sau:



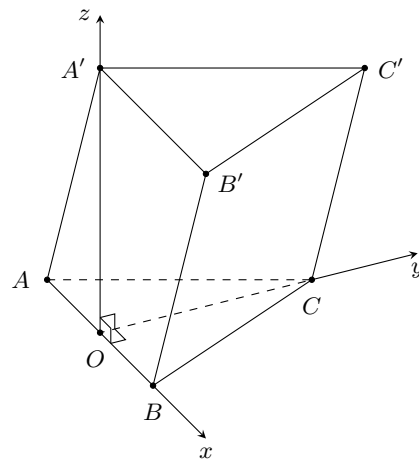
Mệnh đề	Đ	S
a) Tọa độ $A(-1; 0; 0)$ .		
b) $\vec{AC'} = (2\sqrt{2}; 0; 2)$ .		
c) Tọa độ $D'(0; \sqrt{2}; 2)$ .		
d) $\vec{BD'} = (0; 0; 2)$ .		

**CÂU 10.**

**QUICK NOTE**

QUICK NOTE

Cho hình lăng trụ  $ABC.A'B'C'$  có đáy  $ABC$  là tam giác đều cạnh bằng 2 như hình vẽ. Hình chiếu vuông góc của  $A'$  lên  $(ABC)$  trùng với trung điểm cạnh  $AB$ , góc  $\widehat{A'AO} = 60^\circ$ . Với hệ tọa độ  $Oxyz$  được thiết lập như hình bên (gốc tọa độ  $O$  trùng với trung điểm của đoạn  $BC$ ), hãy xét tính đúng sai của các khẳng định sau:



Mệnh đề	Đ	S
a) Tọa độ điểm $A(-1; 0; 0)$ .		
b) Tọa độ điểm $C(0; \sqrt{3}; 0)$ .		
c) Tọa độ điểm $A'(0; -1; \sqrt{3})$ .		
d) Tọa độ điểm $C'(1; \sqrt{3}; \sqrt{3})$ .		

### Bài 3. BIỂU THỨC TỌA ĐỘ CỦA CÁC PHÉP TOÁN VECTO

#### A. LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

##### 1. Biểu thức tọa độ của phép toán cộng, trừ, nhân một số thực với một vectơ

Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai véc-tơ  $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ ,  $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$  và số  $k$ . Khi đó

$$\textcircled{1} \quad \vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1; a_2 + b_2; a_3 + b_3);$$

$$\textcircled{2} \quad \vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1; a_2 - b_2; a_3 - b_3);$$

$$\textcircled{3} \quad k\vec{a} = (ka_1; ka_2; ka_3).$$

**A** Cho hai véc-tơ  $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ ,  $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$ ,  $\vec{b} \neq \vec{0}$ . Hai véc-tơ  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  cùng phương khi và chỉ khi tồn tại một số thực  $k$  sao cho

$$\begin{cases} a_1 = kb_1 \\ a_2 = kb_2 \\ a_3 = kb_3. \end{cases}$$

##### 2. Biểu thức tọa độ của tích vô hướng hai vectơ

Trong không gian  $Oxyz$ , tích vô hướng của hai véc-tơ  $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$  và  $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$  được xác định bởi công thức

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3.$$

**A**  $\textcircled{1} \quad \vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0;$

$$\textcircled{2} \quad |\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}; \quad AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}.$$

$$\textcircled{3} \quad \cos(\vec{a}; \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}} \quad (\text{với } \vec{a} \neq \vec{0} \text{ và } \vec{b} \neq \vec{0}).$$

##### 3. Biểu thức tọa độ của tích có hướng hai vectơ

Cho hai véc-tơ  $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$  và  $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$  không cùng phương. Khi đó véc-tơ

$$\vec{w} = (a_2b_3 - b_2a_3; a_3b_1 - b_3a_1; a_1b_2 - b_1a_2)$$

vuông góc với cả hai véc-tơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$ .

**A**  $\textcircled{1}$  Véc-tơ  $\vec{w}$  xác định như trên còn gọi là **tích có hướng** của hai véc-tơ  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ , kí hiệu  $\vec{w} = [\vec{a}, \vec{b}]$ .



② Quy ước  $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$  thì

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \left( \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right) = (a_2b_3 - b_2a_3; a_3b_1 - b_3a_1; a_1b_2 - b_1a_2).$$

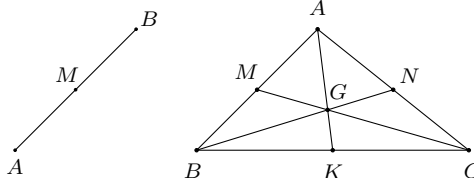
③  $\vec{a}$  không cùng phương với  $\vec{b} \Leftrightarrow [\vec{a}, \vec{b}] \neq \vec{0}$ .

#### 4. Biểu thức tọa độ trung điểm đoạn thẳng, trọng tâm tam giác

Trong không gian  $Oxyz$ , tọa độ trung điểm và trọng tâm được xác định như sau:

- ① Tọa độ trung điểm  $M$  của đoạn thẳng  $AB$  là

$$M\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}; \frac{z_A + z_B}{2}\right).$$



- ② Tọa độ trọng tâm  $G$  của tam giác  $ABC$  là

$$G\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}; \frac{y_A + y_B + y_C}{3}; \frac{z_A + z_B + z_C}{3}\right).$$

## B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

**Dạng 1. Tọa độ của các phép toán vec tơ, tọa độ điểm, độ dài đoạn thẳng**

### BÀI TẬP TỰ LUẬN TRẢ LỜI NGẮN

**VÍ DỤ 1.** Cho  $\vec{a} = (-2; 3; 2)$ ,  $\vec{b} = (2; 1; -1)$ ,  $\vec{c} = (1; 2; 3)$ . Tính tọa độ của mỗi vectơ sau:

- a)  $3\vec{a}$ ;                      b)  $2\vec{a} - \vec{b}$ ;                      c)  $\vec{a} + 2\vec{b} - \frac{3}{2}\vec{c}$ .

**VÍ DỤ 2.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho các véc-tơ  $\vec{u} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$ ,  $\vec{v} = -\frac{3}{2}\vec{i} + \vec{j} - \frac{1}{2}\vec{k}$ ,  $\vec{w} = 6\vec{i} + m\vec{j} - n\vec{k}$ .

- a) Chứng minh  $\vec{u}$  và  $\vec{v}$  cùng phương.  
b) Tìm giá trị của  $m$  và  $n$  để véc-tơ  $\vec{u}$  và  $\vec{w}$  cùng phương.

**VÍ DỤ 3.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho ba điểm  $A(3; -1; 2)$ ,  $B(1; 2; 3)$ ,  $C(4; -2; 1)$ .

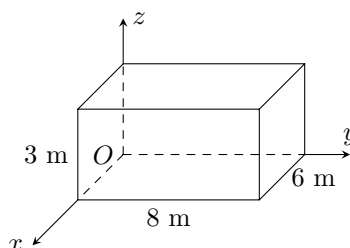
- a) Chứng minh ba điểm  $A, B, C$  không thẳng hàng. Xác định tọa độ trọng tâm tam giác  $ABC$ .  
b) Tìm tọa độ điểm  $D$  biết  $ABCD$  là hình bình hành.  
c) Tìm tọa độ giao điểm  $E$  của đường thẳng  $BC$  với mặt phẳng tọa độ  $(Oxz)$ .

**VÍ DỤ 4.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho ba điểm  $A(5; -3; 0)$ ,  $B(2; 1; -1)$ ,  $C(4; 1; 2)$ .

- a) Tìm tọa độ của vectơ  $\vec{u} = 2\vec{AB} + \vec{AC} - 5\vec{BC}$ .  
b) Tìm tọa độ điểm  $N$  sao cho  $2\vec{NA} = -\vec{NB}$ .

### VÍ DỤ 5.

Một phòng học có thiết kế dạng hình hộp chữ nhật với chiều dài là 8 m, chiều rộng là 6 m và chiều cao là 3 m. Một chiếc đèn được treo tại chính giữa trần nhà của phòng học. Xét hệ trục tọa độ  $Oxyz$  có gốc  $O$  trùng với một góc phòng và mặt phẳng  $(Oxy)$  trùng với mặt sàn, đơn vị đo được lấy theo mét (Hình minh họa bên). Hãy tìm tọa độ của điểm treo đèn.



### QUICK NOTE

QUICK NOTE

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM 4 PHƯƠNG ÁN

Các câu hỏi sau đều xét trong không gian  $Oxyz$ .

**CÂU 1.** Cho  $\vec{a} = (1; 2; -3)$ ,  $\vec{b} = (-2; -4; 6)$ . Khẳng định nào sau đây đúng?

- (A)  $\vec{a} = 2\vec{b}$ . (B)  $\vec{b} = 2\vec{a}$ . (C)  $\vec{b} = -2\vec{a}$ . (D)  $\vec{a} = -2\vec{b}$ .

**CÂU 2.** Cho hai véc-tơ  $\vec{x} = (2; 1; -3)$ ,  $\vec{y} = (1; 0; -1)$ . Tìm tọa độ của véc-tơ  $\vec{a} = \vec{x} + 2\vec{y}$ .

- (A)  $\vec{a}(4; 1; -5)$ . (B)  $\vec{a}(4; 1; -1)$ . (C)  $\vec{a}(3; 1; -4)$ . (D)  $\vec{a}(0; 1; -1)$ .

**CÂU 3.** Cho  $\vec{a} = (1; -1; 3)$ ,  $\vec{b} = (2; 0; -1)$ . Tìm tọa độ véc-tơ  $\vec{u} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$ .

- (A)  $\vec{u} = (-4; -2; 9)$ . (B)  $\vec{u} = (4; 2; -9)$ . (C)  $\vec{u} = (-4; -5; 9)$ . (D)  $\vec{u} = (1; 3; -11)$ .

**CÂU 4.** Cho hai véc-tơ  $\vec{a} = (3; 0; 1)$ ,  $\vec{c} = (1; 1; 0)$ . Tìm tọa độ của véc-tơ  $\vec{b}$  thỏa mãn biểu thức  $\vec{b} - \vec{a} + 2\vec{c} = \vec{0}$ .

- (A)  $\vec{b} = (-2; 1; -1)$ . (B)  $\vec{b} = (-1; 2; -1)$ . (C)  $\vec{b} = (5; 2; 1)$ . (D)  $\vec{b} = (1; -2; 1)$ .

**CÂU 5.** Cho vectơ  $\vec{a} = (1; -3; 4)$ . Vectơ nào sau đây cùng phương với  $\vec{a}$ ?

- (A)  $\vec{b} = (-2; -6; 8)$ . (B)  $\vec{c} = (-2; 6; -8)$ . (C)  $\vec{d} = (-2; 6; 8)$ . (D)  $\vec{m} = (2; -6; -8)$ .

**CÂU 6.** Hai véc-tơ  $\vec{a} = (m; 2; 3)$  và  $\vec{b} = (1; n; 2)$  cùng phương khi

- (A)  $\begin{cases} m = \frac{1}{2} \\ n = \frac{4}{3} \end{cases}$ . (B)  $\begin{cases} m = \frac{3}{2} \\ n = \frac{4}{3} \end{cases}$ . (C)  $\begin{cases} m = \frac{3}{2} \\ n = \frac{2}{3} \end{cases}$ . (D)  $\begin{cases} m = \frac{2}{3} \\ n = \frac{4}{3} \end{cases}$ .

**CÂU 7.** Cho hai điểm  $A(2; 3; 1)$  và  $B(3; 1; 5)$ . Tính độ dài đoạn thẳng  $AB$ .

- (A)  $AB = \sqrt{21}$ . (B)  $AB = 2\sqrt{3}$ . (C)  $AB = 2\sqrt{5}$ . (D)  $AB = \sqrt{13}$ .

**CÂU 8.** Cho hai điểm  $M(3; -2; 1)$  và  $N(0; 1; -1)$ . Tính độ dài đoạn thẳng  $MN$ .

- (A)  $MN = \sqrt{17}$ . (B)  $MN = 22$ . (C)  $MN = \sqrt{22}$ . (D)  $MN = \sqrt{19}$ .

**CÂU 9.** Cho hai điểm  $A(-1; 1; 2)$  và  $B(3; -5; 0)$ . Tọa độ trung điểm của đoạn thẳng  $AB$  là

- (A)  $(1; -2; 1)$ . (B)  $(4; -6; 2)$ . (C)  $(2; -3; -1)$ . (D)  $(2; -4; 2)$ .

**CÂU 10.** Cho hai điểm  $A(1; 1; 0)$ ,  $B(3; -1; 2)$ . Tọa độ điểm  $C$  sao cho  $B$  là trung điểm của đoạn  $AC$  là

- (A)  $C(5; -3; 4)$ . (B)  $C(4; -3; 5)$ . (C)  $C(-1; 3; -2)$ . (D)  $C(2; 0; 1)$ .

**CÂU 11.** Cho tam giác  $ABC$  với  $A(0; -1; 3)$ ,  $B(2; 1; 1)$ ,  $C(1; 0; -1)$ . Tọa độ trọng tâm của tam giác  $ABC$  là

- (A)  $(1; 0; 1)$ . (B)  $(-1; 0; 1)$ . (C)  $(0; 1; 1)$ . (D)  $(1; 1; 0)$ .

**CÂU 12.** Cho  $\vec{OA} = \vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$ , điểm  $B(3; -4; 1)$  và  $C(2; 0; -1)$ . Tọa độ trọng tâm của tam giác  $ABC$  là

- (A)  $(1; -2; 3)$ . (B)  $(-1; 2; -3)$ . (C)  $(2; -2; 1)$ . (D)  $(-2; 2; -1)$ .

**CÂU 13.** Cho tam giác  $ABC$  trọng tâm  $G$ . Biết  $A(0; 2; 1)$ ,  $B(1; -1; 2)$ ,  $G(1; 1; 1)$ . Khi đó điểm  $C$  có tọa độ là

- (A)  $(2; 2; 4)$ . (B)  $(-2; 0; 2)$ . (C)  $(-2; -3; -2)$ . (D)  $(2; 2; 0)$ .

**CÂU 14.** Cho bốn điểm  $A(1; 0; 3)$ ,  $B(2; -1; 1)$ ,  $C(-1; 3; -4)$ ,  $D(2; 6; 0)$  tạo thành một hình tứ diện. Gọi  $M$ ,  $N$  lần lượt là trung điểm các đoạn thẳng  $AB$ ,  $CD$ . Tìm tọa độ trung điểm  $G$  của đoạn  $MN$ .

- (A)  $G\left(\frac{4}{3}; \frac{8}{3}; 0\right)$ . (B)  $G(2; 4; 0)$ . (C)  $G(1; 2; 0)$ . (D)  $G(4; 8; 0)$ .

**CÂU 15.** Cho hai điểm  $B(1; 2; -3)$ ,  $C(7; 4; -2)$ . Nếu  $E$  là điểm thỏa mãn đẳng thức  $\vec{CE} = 2\vec{EB}$  thì tọa độ điểm  $E$  là

- (A)  $\left(3; \frac{8}{3}; \frac{8}{3}\right)$ . (B)  $\left(1; 2; \frac{1}{3}\right)$ . (C)  $\left(3; 3; -\frac{8}{3}\right)$ . (D)  $\left(\frac{8}{3}; 3; -\frac{8}{3}\right)$ .

**CÂU 16.** Cho các điểm  $A(1; -1; 0)$ ,  $B(0; 2; 0)$ ,  $C(2; 1; 3)$  và  $M$  là điểm thỏa mãn hệ thức  $\vec{MA} - \vec{MB} + \vec{MC} = \vec{0}$ . Khi đó điểm  $M$  có tọa độ là

- (A)  $(3; 2; 3)$ . (B)  $(3; -2; -3)$ . (C)  $(3; -2; 3)$ . (D)  $(3; 2; -3)$ .

**CÂU 17.** Cho tọa độ các điểm  $A(-1;3); B(2;-2)$  và  $C(m;1)$ . Tìm  $m$  để 3 điểm  $A, B, C$  thẳng hàng.

- (A)**  $m = \frac{2}{5}$ ,     
 **(B)**  $m = \frac{1}{5}$ ,     
 **(C)**  $m = -\frac{1}{3}$ ,     
 **(D)**  $m = -\frac{1}{5}$ .

**CÂU 18.** Cho ba điểm  $A(-1; 1; 2)$ ,  $B(0; 1; -1)$ ,  $C(x + 2; y; -2)$  thẳng hàng. Tổng  $x + y$  bằng

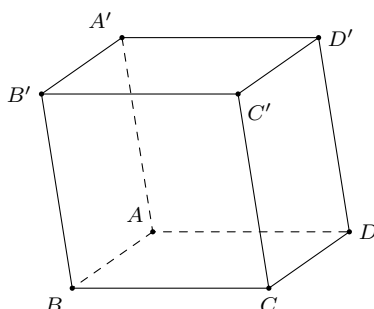
- Ⓐ  $\frac{7}{33}$       Ⓑ  $-\frac{8}{33}$       Ⓒ  $-\frac{2}{33}$       Ⓓ  $-\frac{1}{33}$

**CÂU 19.** Tứ giác  $ABCD$  là hình bình hành, biết  $A(1; 0; 1)$ ,  $B(2; 1; 2)$ ,  $D(1; -1; 1)$ . Tìm tọa độ điểm  $C$ .

- (A)**  $(0; -2; 0)$ .      **(B)**  $(2; 2; 2)$ .      **(C)**  $(2; 0; 2)$ .      **(D)**  $(2; -2; 2)$ .

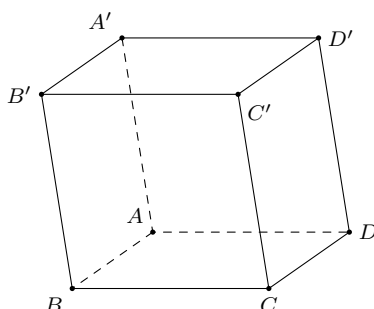
**CÂU 20.** Cho hình hộp  $ABCD.A'B'C'D'$  có  $A(0;0;0)$ ,  $B(a;0;0)$ ,  $D(0;2a;0)$ ,  $A'(0;0;2a)$ ,  $a \neq 0$ . Tính độ dài đoạn thẳng  $AC'$ .

- ☐ **A**  $|a|$ .
 ☐ **B**  $2|a|$ .
- ☐ **C**  $3|a|$ .
 ☐ **D**  $\frac{3|a|}{2}$ .



**CÂU 21.** Cho hình hộp  $ABCD.A'B'C'D'$  có  $A(0;0;1)$ ,  $B'(1;0;0)$ ,  $C'(1;1;0)$ . Tìm tọa độ của điểm  $D$ .

- ☐ **A**  $D(0; -1; 1)$ .
 ☐ **B**  $D(0; 1; 1)$ .
- ☐ **C**  $D(0; 1; 0)$ .
 ☐ **D**  $D(1; 1; 1)$ .



## BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM ĐÚNG SAI

**CÂU 22.** Cho các điểm  $A(1; -2; 3), B(-2; 1; 2), C(3; -1; 2)$ .

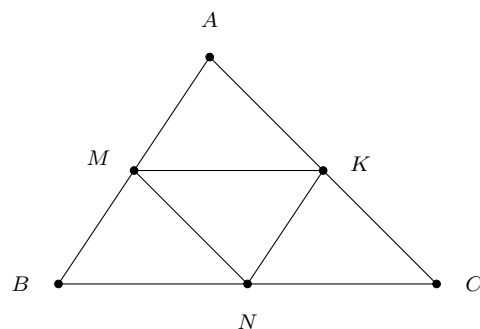
Mệnh đề	Đ	S
a) $\overrightarrow{AB} = (-3; 3; -1)$ .		
b) $\overrightarrow{AC} = (-2; -1; 1)$ .		
c) $\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AC}$ .		
d) Ba điểm $A, B, C$ không thẳng hàng.		

## QUICK NOTE

## QUICK NOTE

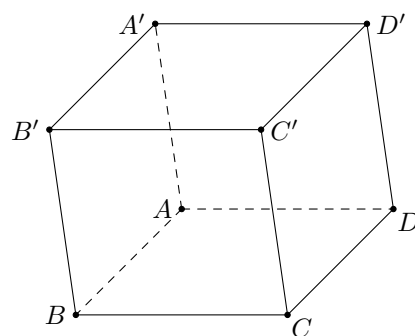
**CÂU 23.** Cho ba điểm  $A(3; 3; -6)$ ,  $B(1; 3; 2)$  và  $C(-1; -3; 1)$ . Gọi  $M$ ,  $N$ ,  $K$  lần lượt là trung điểm của  $AB$ ,  $BC$  và  $CA$ .

Mệnh đề	Đ	S
a) Tọa độ $M(2; 3; 2)$ .		
b) Với $G$ là trọng tâm tam giác $ABC$ thì $GC = 2\sqrt{5}$ .		
c) Trọng tâm tam giác $MNK$ là $E(1; 1; -1)$ .		
d) Với $D(-3; -3; 9)$ thì tứ giác $ABDC$ là hình bình hành.		

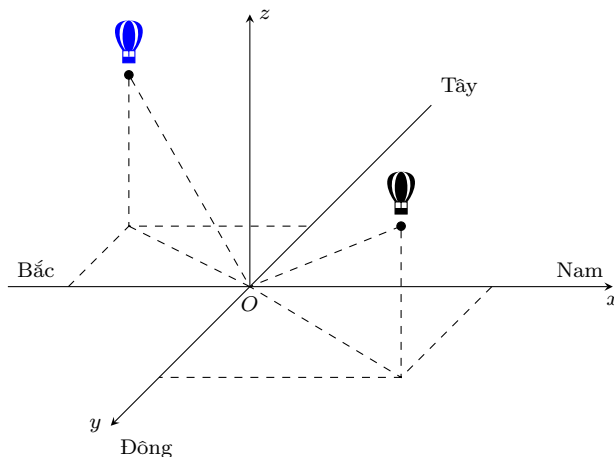


**CÂU 24.** Cho hình hộp  $ABCD.A'B'C'D'$ , biết điểm  $A(0; 0; 0)$ ,  $B(1; 0; 0)$ ,  $C(1; 2; 0)$ ,  $D'(-1; 3; 5)$ . Gọi  $M$ ,  $N$  là tâm của các hình bình hành  $ABB'A'$ ,  $ADD'A'$ .

Mệnh đề	Đ	S
a) Tọa độ $D(0; 2; 0)$ .		
b) Tọa độ $A'(-1; 1; 5)$ .		
c) Tọa độ $\overrightarrow{MN} = (-1; 1; 0)$ .		
d) $ \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CC'}  = \sqrt{29}$ .		



**CÂU 25.** Hai chiếc khinh khí cầu bay lên từ cùng một địa điểm. Chiếc thứ nhất cách điểm xuất phát 2 km về phía nam và 1 km về phía đông, đồng thời cách mặt đất 0,5 km. Chiếc thứ hai nằm cách điểm xuất phát 1 km về phía bắc và 1,5 km về phía tây, đồng thời cách mặt đất 0,8 km. Chọn hệ trục  $Oxyz$  với gốc  $O$  đặt tại điểm xuất phát của hai khinh khí cầu, mặt phẳng  $(Oxy)$  trùng với mặt đất với trục  $Ox$  hướng về phía nam, trục  $Oy$  hướng về phía đông và trục  $Oz$  hướng thẳng đứng lên trời (Hình bên dưới), đơn vị đo lấy theo kilomet.



Mệnh đề	Đ	S
a) Với hệ tọa độ đã chọn, tọa độ khinh khí cầu thứ nhất là $(2; 1; 0,5)$ .		
b) Với hệ tọa độ đã chọn, tọa độ khinh khí cầu thứ hai là $(-1,5; -1; 0,8)$ .		
c) Khoảng cách từ điểm xuất phát đến khinh khí cầu thứ nhất bằng $\sqrt{21}$ km.		
d) Khoảng cách hai chiếc khinh khí cầu là 3,92 km (Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).		

## Dạng 2. Tích vô hướng, tích có hướng hai vec tơ và ứng dụng

BÀI TẬP TỰ LUẬN TRẢ LỜI NGẮN

**VÍ DỤ 1.** Cho ba véc-tơ  $\vec{a} = (3; 0; 1)$ ,  $\vec{b} = (1; -1; -2)$ ,  $\vec{c} = (2; 1; -1)$ ,  $\vec{d} = (1; 7; -3)$ .

- a) Tính  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ ,  $\vec{b} \cdot \vec{c}$ . b) Tính  $|\vec{a}|$ ,  $|\vec{b}|$ ,  $\cos(\vec{a}, \vec{b})$ . c) Chứng minh  $\vec{d} \perp \vec{a}$ .

**VÍ DỤ 2.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho  $\vec{a} = (1; 0; 1)$ ,  $\vec{b} = (1; 1; 0)$  và  $\vec{c} = (-4; 3; m)$ .

- a) Tính góc giữa hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$ .  
b) Tìm  $m$  để vectơ  $\vec{d} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$  vuông góc với  $\vec{c}$ .

**VÍ DỤ 3.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho tam giác  $ABC$  có  $A(-1; 0; 2)$ ,  $B(0; 4; 3)$  và  $C(-2; 1; 2)$ .

- a) Chỉ ra tọa độ một véc-tơ (khác  $\vec{0}$ ) vuông góc với hai véc-tơ  $\vec{AB}$ ,  $\vec{AC}$ .  
b) Tính chu vi tam giác  $ABC$ .  
c) Tính  $\cos \widehat{BAC}$ .  
d) Tìm độ dài đường phân giác trong  $AD$  của tam giác  $ABC$ .

**VÍ DỤ 4.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho 3 điểm  $A(0; 1; -2)$ ;  $B(3; 0; 0)$  và điểm  $C$  thuộc trục  $Oz$ . Biết  $ABC$  là tam giác cân tại  $C$ . Tìm tọa độ điểm  $C$ .

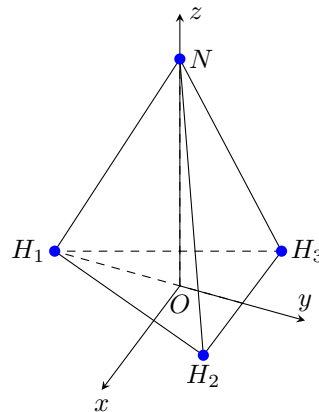
**VÍ DỤ 5.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho ba điểm  $M(2; 3; -1)$ ,  $N(-1; 1; 1)$ ,  $P(1; m-1; 2)$ . Với những giá trị nào của  $m$  thì tam giác  $MNP$  vuông tại  $N$ ?

**VÍ DỤ 6.** Cho hai điểm  $A(2, -1, 1)$ ;  $B(3, -2, -1)$ . Tìm điểm  $N$  trên trục  $Ox$  cách đều  $A$  và  $B$ .

**VÍ DỤ 7.**

Trong Hóa học, cấu tạo của phân tử ammoniac ( $\text{NH}_3$ ) có dạng hình chóp tam giác đều mà đỉnh là nguyên tử nitrogen ( $N$ ) và đáy là tam giác  $H_1H_2H_3$  với  $H_1, H_2, H_3$  là vị trí của ba nguyên tử hydrogen ( $H$ ). Góc tạo bởi liên kết  $H-N-H$ , có hai cạnh là hai đoạn thẳng nối  $N$  với hai trong ba điểm  $H_1, H_2, H_3$  (chẳng hạn  $\widehat{H_1NH_2}$ ), gọi là góc liên kết của phân tử  $\text{NH}_3$ . Góc này xấp xỉ  $107^\circ$ .

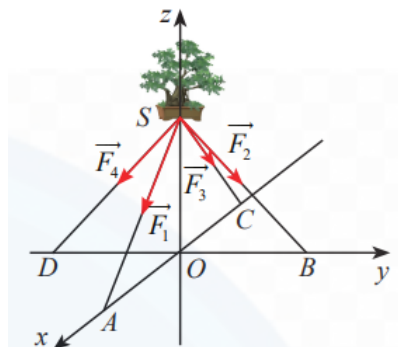
Trong không gian  $Oxyz$ , cho một phân tử  $\text{NH}_3$  được biểu diễn bởi hình chóp tam giác đều  $N.H_1H_2H_3$  với  $O$  là tâm của đáy. Nguyên tử nitrogen được biểu diễn bởi điểm  $N$  thuộc trục  $Oz$ , ba nguyên tử hydrogen ở các vị trí  $H_1, H_2, H_3$  trong đó  $H_1(0; -2; 0)$  và  $H_2H_3$  song song với trục  $Ox$  (Hình bên).



- a) Tính khoảng cách giữa hai nguyên tử hydrogen.  
b) Tính khoảng cách giữa hai nguyên tử nitrogen với mỗi nguyên tử hydrogen.

**VÍ DỤ 8.**

Một chậu cây được đặt trên một giá đỡ có bốn chân với điểm đặt  $S(0; 0; 20)$  và các điểm chạm mặt đất của bốn chân lần lượt là  $A(20; 0; 0)$ ,  $B(0; 20; 0)$ ,  $C(-20; 0; 0)$ ,  $D(0; -20; 0)$  (đơn vị cm). Cho biết trọng lực tác dụng lên chậu cây có độ lớn  $40(N)$  và được phân bố thành bốn lực  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4$  có độ lớn bằng nhau như Hình 4. Tìm tọa độ của các lực nói trên (mỗi centimet biểu diễn 1 N).



BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM 4 PHƯƠNG ÁN

**CÂU 1.** Tích vô hướng của hai vectơ  $\vec{u} = (3; 0; 1)$  và  $\vec{v} = (2; 1; 0)$  là

- (A) 0. (B) 6. (C) 8. (D) -6.

QUICK NOTE

QUICK NOTE

- CÂU 2.** Tích vô hướng của hai vectơ  $\vec{u} = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$  và  $\vec{v} = (0; 1; -2)$  bằng  
 (A) -4. (B) 0. (C) 4. (D) -2.
- CÂU 3.** Cho các véc-tơ  $\vec{a} = (1; 2; 1)$  và  $\vec{b} = (2; 2; 1)$ . Tính tích vô hướng  $\vec{a} \cdot (\vec{a} - \vec{b})$ .  
 (A) -1. (B) -2. (C) 2. (D) 1.
- CÂU 4.** Một thiết bị thăm dò đáy biển được đẩy bởi một lực  $\vec{f} = (5; 4; -2)$  (đơn vị: N) giúp thiết bị thực hiện độ dời  $\vec{a} = (70; 20; -40)$  (đơn vị: m). Tính công sinh bởi lực  $\vec{f}$ .  
 (A) 480 (J). (B) 530 (J). (C) 510 (J). (D) 500 (J).
- CÂU 5.** Góc giữa hai véc-tơ  $\vec{i}$  và  $\vec{u} = (-\sqrt{3}; 0; 1)$  bằng  
 (A)  $60^\circ$ . (B)  $120^\circ$ . (C)  $150^\circ$ . (D)  $30^\circ$ .
- CÂU 6.** Cho hai véc-tơ  $\vec{u} = (-1; 1; 0)$  và  $\vec{v} = (0; -1; 0)$ . Góc hợp bởi hai véc-tơ  $\vec{u}$  và  $\vec{v}$  bằng  
 (A)  $60^\circ$ . (B)  $45^\circ$ . (C)  $135^\circ$ . (D)  $120^\circ$ .
- CÂU 7.** Cho hai véc-tơ  $\vec{a}(-2; -3; 1)$  và  $\vec{b}(1; 0; 1)$ . Tính  $\cos(\vec{a}, \vec{b})$ .  
 (A)  $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = -\frac{1}{2\sqrt{7}}$ . (B)  $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = -\frac{3}{2\sqrt{7}}$ .  
 (C)  $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{1}{2\sqrt{7}}$ . (D)  $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{3}{2\sqrt{7}}$ .
- CÂU 8.** Cho  $\vec{a} = (3; 2; 1)$ ,  $\vec{b} = (-2; 2; -4)$ . Giá trị của  $|\vec{a} - \vec{b}|$  bằng  
 (A)  $5\sqrt{2}$ . (B) 50. (C)  $2\sqrt{5}$ . (D) 3.
- CÂU 9.** Cho hai véc-tơ  $\vec{u} = (-1; 0; 2)$  và  $\vec{v} = (x; -2; 1)$ . Biết rằng  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 4$ . Khi đó  $|\vec{v}|$  bằng  
 (A)  $\sqrt{21}$ . (B) 2. (C) 3. (D) 5.
- CÂU 10.** Tìm số thực  $a$  để véc-tơ  $\vec{u} = (a; 0; 1)$  vuông góc với véc-tơ  $\vec{v} = (2; -1; 4)$ .  
 (A)  $a = -2$ . (B)  $a = -4$ . (C)  $a = 4$ . (D)  $a = 2$ .
- CÂU 11.** Tìm  $x$  để hai véc-tơ  $\vec{a} = (x; x - 2; 2)$  và  $\vec{b} = (x; 1; -2)$  vuông góc với nhau.  
 (A)  $x = 3$ . (B)  $x = 1$ . (C)  $\begin{cases} x = 2 \\ x = -3 \end{cases}$ . (D)  $\begin{cases} x = -2 \\ x = 3 \end{cases}$ .
- CÂU 12.** Cho hai véc-tơ  $\vec{u} = (1; -2; 1)$  và  $\vec{v} = (2; 1; -1)$ . Véc-tơ nào dưới đây vuông góc với cả hai véc-tơ  $\vec{u}$  và  $\vec{v}$ ?  
 (A)  $\vec{w}_2 = (1; 3; 5)$ . (B)  $\vec{w}_3 = (1; -4; 7)$ . (C)  $\vec{w}_4 = (1; 4; 7)$ . (D)  $\vec{w}_1 = (1; -3; 5)$ .
- CÂU 13.** Tích có hướng của hai véc-tơ  $\vec{a} = (-1; 2; 0)$  và  $\vec{b} = (0; 4; -3)$  có tọa độ là  
 (A)  $(-6; 3; -4)$ . (B)  $(6; -3; 4)$ . (C)  $(6; 3; 4)$ . (D)  $(-6; -3; -4)$ .
- CÂU 14.** Cho  $A(2; 1; 4)$ ,  $B(-2; 2; -6)$ ,  $C(6; 0; -1)$ . Tính tích vô hướng  $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$ .  
 (A)  $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 67$ . (B)  $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = -67$ . (C)  $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 33$ . (D)  $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 65$ .
- CÂU 15.** Cho  $A(1; -2; 3)$ ,  $B(2; -4; 1)$ ,  $C(2; 0; 2)$ , khi đó tích vô hướng  $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$  bằng  
 (A) 4. (B) -1. (C) 7. (D) -5.
- CÂU 16.** Cho tam giác  $ABC$  với  $A(8; 9; 2)$ ,  $B(3; 5; 1)$ ,  $C(11; 10; 4)$ . Số đo góc  $A$  của tam giác  $ABC$  là  
 (A)  $60^\circ$ . (B)  $150^\circ$ . (C)  $30^\circ$ . (D)  $120^\circ$ .
- CÂU 17.** Cho điểm  $A(3; -1; 5)$ ,  $B(m; 2; 7)$ . Tìm tất cả các giá trị của  $m$  để độ dài đoạn  $AB = 7$ .  
 (A)  $m = 3$  hoặc  $m = -3$ . (B)  $m = 9$  hoặc  $m = -3$ .  
 (C)  $m = -3$  hoặc  $m = -9$ . (D)  $m = 9$  hoặc  $m = 3$ .
- CÂU 18.** Cho ba điểm  $A(3; 2; 8)$ ,  $B(0; 1; 3)$  và  $C(2; m; 4)$ . Tìm  $m$  để tam giác  $ABC$  vuông tại  $B$ .  
 (A)  $m = 4$ . (B)  $m = -10$ . (C)  $m = 25$ . (D)  $m = -1$ .
- CÂU 19.** Cho ba điểm  $M(2; 3; -1)$ ,  $N(-1; 1; 1)$  và  $P(1; m - 1; 2)$ . Tìm  $m$  để tam giác  $MNP$  vuông tại  $N$ .  
 (A)  $m = 0$ . (B)  $m = -4$ . (C)  $m = 2$ . (D)  $m = -6$ .

**CÂU 20.** Cho tam giác  $ABC$  có  $A(7; 3; 3)$ ,  $B(1; 2; 4)$ ,  $C(2; 3; 5)$ . Tìm tọa độ điểm  $H$  là chân đường cao kẻ từ  $A$  của tam giác  $ABC$ .

- (A)  $H(3; 4; 6)$ . (B)  $H(-3; 4; 7)$ . (C)  $H(2; 4; 1)$ . (D)  $H(2; -4; 3)$ .

**CÂU 21.** Cho hai điểm  $A(1; 1; 0)$ ,  $B(2; -1; 2)$ . Gọi  $M(0; 0; z)$  là điểm thuộc trục  $Oz$  sao cho  $MA^2 + MB^2$  nhỏ nhất. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- (A)  $z \in (0; 1]$ . (B)  $z \in (1; 2]$ . (C)  $z \in (-1; 0]$ . (D)  $z \in (-2; -1]$ .

**BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM ĐÚNG SAI**

**CÂU 22.** Cho ba vec-tơ  $\vec{a} = (-1; 1; 0)$ ,  $\vec{b} = (1; 1; 0)$  và  $\vec{c} = (1; 1; 1)$ .

Mệnh đề	Đ	S
a) $ \vec{a}  = 2$ .		
b) $ \vec{c}  = \sqrt{3}$ .		

Mệnh đề	Đ	S
c) $\cos(\vec{a}, \vec{c}) = \frac{2}{\sqrt{5}}$ .		
d) $\vec{b} \perp \vec{c}$ .		

**CÂU 23.** Cho hai vectơ  $\vec{u} = (0; 2; 3)$  và  $\vec{v} = (m - 1; 2m; 3)$ .

Mệnh đề	Đ	S
a) $ \vec{u}  = \sqrt{13}$ .		
b) $ \vec{u}  =  \vec{v}  \Leftrightarrow m = -\frac{3}{5}$ .		

Mệnh đề	Đ	S
c) $\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow m = 1$ .		
d) $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow m = \frac{9}{4}$ .		

**CÂU 24.** Trong không gian với hệ trục tọa độ  $Oxyz$ , cho ba vectơ  $\vec{a}(1; 2; 3)$ ,  $\vec{b}(2; 2; -1)$ ,  $\vec{c}(4; 0; -4)$ .

Mệnh đề	Đ	S
a) Tọa độ của vectơ $\vec{x} = \vec{a} + \vec{b}$ là $\vec{x} = (3; 4; 2)$ .		
b) Tọa độ của vectơ $\vec{y} = \vec{a} + \vec{c}$ là $\vec{y} = (5; 2; 1)$ .		
c) Tọa độ của vectơ $\vec{z} = \vec{b} + \vec{c}$ là $\vec{z} = (6; -2; -5)$ .		
d) Vectơ $\vec{k} = (7; 4; -2)$ thỏa mãn đẳng thức $\vec{k} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ .		

**CÂU 25.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai vectơ  $\vec{a}(1; -1; 5)$ ,  $\vec{b}(3; 2; -1)$ .

Mệnh đề	Đ	S
a) $\vec{a} + \vec{b} \neq \vec{0}$ .		
b) $\vec{a} - \vec{b} = (-2; -3; 4)$ .		
c) $\vec{v} = \vec{b} - \vec{a}$ có tung độ âm.		
d) Xét $\vec{x}$ thỏa $\vec{a} - \vec{x} = \vec{b}$ . Hoành độ của vectơ $\vec{x}$ thuộc khoảng $(-3; 1)$ .		

**CÂU 26.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho điểm  $D(4; -1; 3)$  và các điểm  $M, N, P$  lần lượt thuộc các trục  $Ox, Oy, Oz$  sao cho  $DM, DN, DP$  đôi một vuông góc với nhau

Mệnh đề	Đ	S
a) Tung độ của điểm $N$ bằng 13.		
b) Cao độ của điểm $P$ bằng $\frac{13}{4}$ .		
c) $V_{DMNP} > 29$ .		
d) Gọi $\vec{x}$ là vectơ thỏa $\vec{x} \cdot \overrightarrow{DM} = 1$ ; $\vec{x} \cdot \overrightarrow{DN} = 2$ ; $\vec{x} \cdot \overrightarrow{DP} = -3$ thì tổng hoành độ, tung độ và cao độ của vectơ $\vec{x}$ thuộc khoảng $(3; 7)$ .		

**CÂU 27.** Cho tam giác  $ABC$  có  $A(1; 2; 0)$ ,  $B(0; 1; 1)$ ,  $C(2; 1; 0)$ .

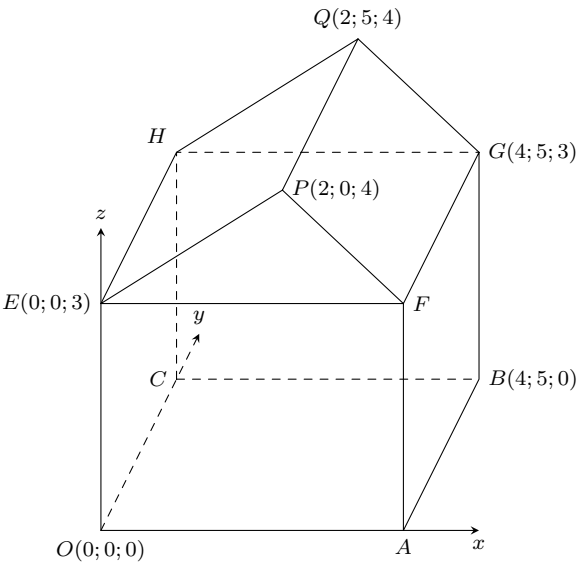
**QUICK NOTE**

QUICK NOTE

Mệnh đề	Đ	S
a) Tam giác $ABC$ vuông tại $A$ .		
b) Chu vi tam giác là $\sqrt{7} + \sqrt{3} + \sqrt{2}$ .		
c) Diện tích tam giác $ABC$ là $\sqrt{6}$ .		
d) Tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $ABC$ là $I\left(1; 1; \frac{1}{2}\right)$ .		

**CÂU 28.** Hình minh họa sơ đồ một ngôi nhà trong hệ trục tọa độ  $Oxyz$ , trong đó nền nhà, bốn bức tường và hai mái nhà đều là hình chữ nhật.

Mệnh đề	Đ	S
a) Tọa độ của các điểm $A(5; 0; 0)$ .		
b) Tọa độ của các điểm $H(0; 5; 3)$ .		
c) Góc nhị diện có cạnh là đường thẳng $FG$ , hai mặt lần lượt là $(FGQP)$ và $(FGHE)$ gọi là góc dốc của mái nhà. Số đo của góc dốc của mái nhà bằng $26,6^\circ$ (làm tròn kết quả đến hàng phần mười của độ).		
d) Chiều cao của ngôi nhà là 4.		



BÀI TẬP TỰ LUẬN TRẢ LỜI NGẮN

- CÂU 29.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai vectơ  $\vec{a} = (1; 2; -3)$ ;  $\vec{b} = (-1; -2; z)$ . Tìm giá trị  $z$  sao cho  $\vec{a} + \vec{b} = \vec{0}$
- CÂU 30.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai vectơ  $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 6\vec{k}$  và  $\vec{b} = 6\vec{j} + \vec{k}$ . Khi đó độ dài của  $\vec{a} - 2\vec{b}$  (làm tròn đến hàng phần mười)
- CÂU 31.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho các vectơ  $\vec{a} = (1; 0; -2)$ ,  $\vec{b} = (-2; 1; 3)$ ,  $\vec{c} = (3; 2; -1)$ ,  $\vec{d} = (9; 0; -11)$  và 3 số thực  $m, n, p$  thỏa  $m \cdot \vec{a} + n \cdot \vec{b} + p \cdot \vec{c} = \vec{d}$ . Tính giá trị biểu thức  $T = m + n + p$ .



# MỤC LỤC

<b>Bài 2. TỌA ĐỘ CỦA VEC TƠ TRONG KHÔNG GIAN</b>	<b>1</b>
(A) LÝ THUYẾT CẦN NHỚ	1
(B) PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN	2
Dạng 1. Tọa độ điểm, tọa độ vec tơ	2
Dạng 2. Tọa độ hóa một số hình không gian	4
<b>Bài 3. BIỂU THỨC TỌA ĐỘ CỦA CÁC PHÉP TOÁN VECTƠ</b>	<b>8</b>
(A) LÝ THUYẾT CẦN NHỚ	8
(B) PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN	9
Dạng 1. Tọa độ của các phép toán vec tơ, tọa độ điểm, độ dài đoạn thẳng	9
Dạng 2. Tích vô hướng, tích có hướng hai vec tơ và ứng dụng	12

