

Bài 1. KHẢO SÁT SỰ BIẾN THIÊN VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ

A. KIẾN THỨC SÁCH GIÁO KHOA CẦN CẦN NẮM

1. Khảo sát một số hàm đa thức và phân thức

a) Hàm số bậc 3: $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$)

Trường hợp	$a > 0$	$a < 0$
$y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt ($b^2 - 3ac > 0$)		
$y' = 0$ có nghiệm kép hoặc vô nghiệm ($b^2 - 3ac \leq 0$)		

b) Hàm số trùng phương $y = ax^4 + bx^2 + c$ ($a \neq 0$).

Trường hợp	$a > 0$	$a < 0$
Phương trình $y' = 0$ có 3 nghiệm phân biệt ($a.b < 0$)		
Phương trình $y' = 0$ có 1 nghiệm ($a.b \geq 0$)		

c) Hàm phân thức $y = \frac{ax + b}{cx + d}$, ($ab - bc \neq 0$).

Khi $ad - bc > 0$	Khi $ad - bc < 0$

QUICK NOTE

QUICK NOTE

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1. Các phép biến đổi đồ thị

a) $f(x) \xrightarrow{\text{tịnh tiến trái phải } m \text{ đơn vị}} f(x+m).$

b) $f(x) \xrightarrow{\text{tịnh tiến lên xuống } m \text{ đơn vị}} f(x)+m.$

c) $f(x) \xrightarrow[\text{giữ phải, bỏ trái } Oy]{\text{đối xứng phải sang trái}} f(|x|).$

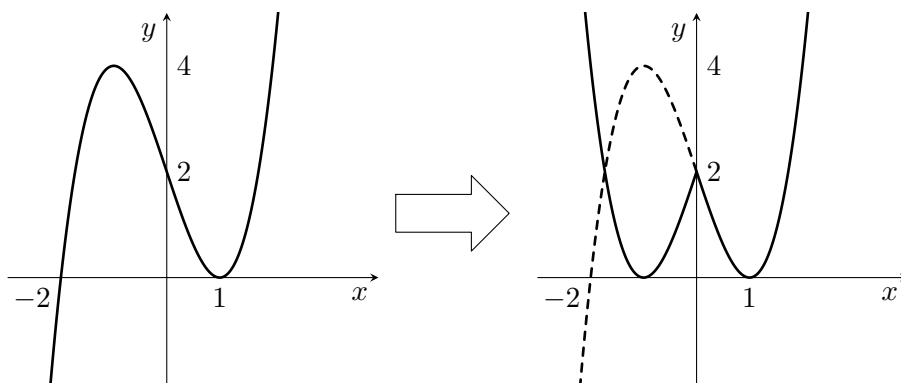
d) $f(x) \xrightarrow[\text{giữ trên } Ox]{\text{đối xứng dưới lên trên}} |f(x)|.$

⚠ Nếu vừa xuất hiện đối xứng, vừa tịnh tiến thì thực hiện theo quy tắc x ngoài vào, y trong ra.

1. Các ví dụ

VÍ DỤ 1. Từ đồ thị $(C): y = f(x) = x^3 - 3x + 2$ suy ra đồ thị $(C'): y = |x|^3 - 3|x| + 2$.
Biến đổi (C) :

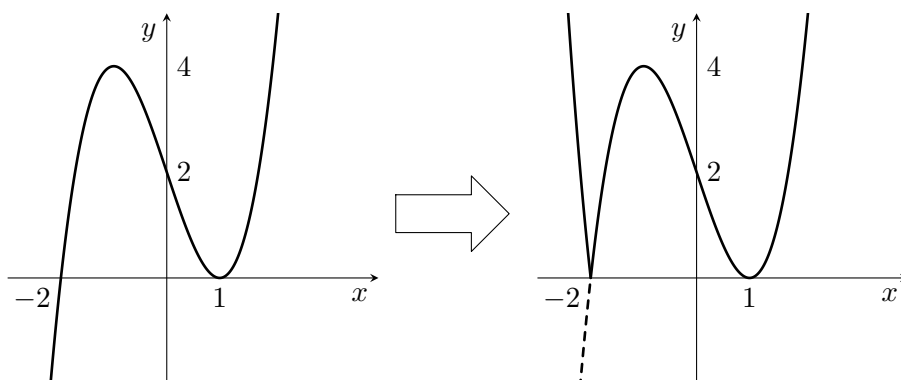
- + Bỏ phần đồ thị (C) bên trái Oy , giữ nguyên (C) bên phải Oy .
- + Lấy đối xứng phần đồ thị được giữ lại qua Oy .



VÍ DỤ 2. Từ đồ thị $(C): y = f(x) = x^3 - 3x + 2$ suy ra đồ thị hàm số $y = |x^3 - 3x + 2|$.

Biến đổi (C) :

- + Bỏ phần đồ thị (C) dưới Ox , giữ nguyên (C) phía trên Ox .
- + Lấy đối xứng phần đồ thị bị bỏ qua Ox .

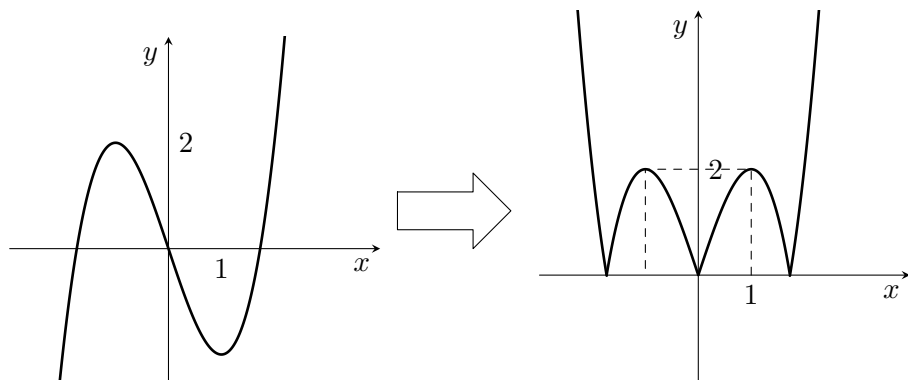


Chú ý: Với dạng $y = |f(|x|)|$ ta lần lượt biến đổi 2 đồ thị $y = f(|x|)$ và $y = |f(x)|$.

VÍ DỤ 3. Từ đồ thị $(C): y = f(x) = x^3 - 3x$ suy ra đồ thị $y = ||x|^3 - 3|x||$.

Biến đổi (C) để được đồ thị $(C'): y = |x|^3 - 3|x|$.

Biến đổi $(C'):$ $y = |x|^3 - 3|x|$ ta được đồ thị $(C''): y = ||x|^3 - 3|x||$



VÍ DỤ 4.

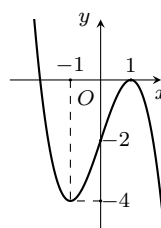
Đường cong trong hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

A. $y = -x^3 + 3x^2 - 2.$

B. $y = x^3 - 3x - 2.$

C. $y = -x^3 + x^2 - 2.$

D. $y = -x^3 + 3x - 2.$



VÍ DỤ 5.

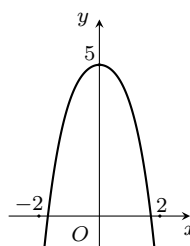
Đồ thị hình bên là đồ thị của một trong bốn đồ thị của hàm số ở các phương án A, B, C, D dưới đây. Hãy chọn phương án đúng

A. $y = \frac{1}{4}x^4 + 2x^2 + 5.$

B. $y = -\frac{1}{4}x^4 + 2x^2 + 5.$

C. $y = -\frac{1}{4}x^4 + 5.$

D. $y = -\frac{1}{4}x^4 - x^2 + 5.$



VÍ DỤ 6.

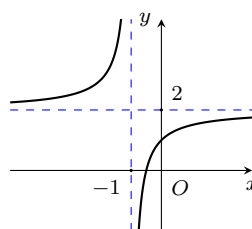
Đồ thị sau đây là của hàm số nào?

A. $y = \frac{2x+1}{x+1}.$

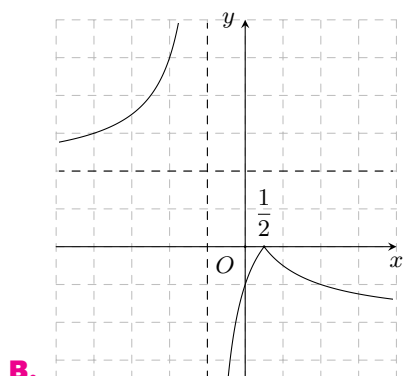
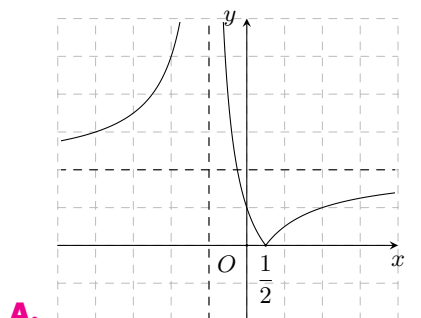
B. $y = \frac{x+3}{1-x}.$

C. $y = \frac{x+2}{x+1}.$

D. $y = \frac{x-1}{x+1}.$

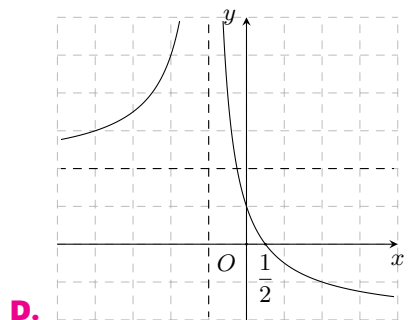
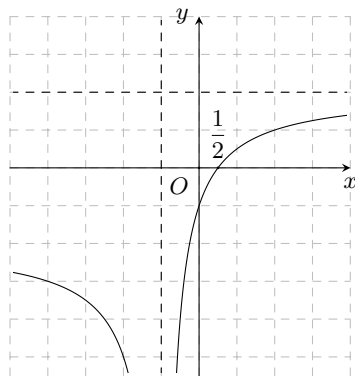


VÍ DỤ 7. Hàm số $y = \frac{|2x-1|}{x+1}$ có đồ thị là hình vẽ nào trong bốn phương án A, B, C, D dưới đây?

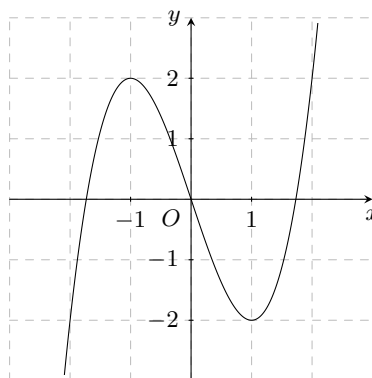


QUICK NOTE

QUICK NOTE



VÍ DỤ 8. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-2; 2]$ và có đồ thị là đường cong như hình vẽ bên. Tìm số nghiệm của phương trình $|f(x)| = 1$ trên đoạn $[-2; 2]$.



A. 5.

B. 3.

C. 4.

D. 6.

VÍ DỤ 9. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$+\infty$		2		$-\infty$
		-2			

Hỏi đồ thị hàm số $y = |f(x) + 2|$ có tất cả bao nhiêu điểm cực trị?

A. 2.

B. 5.

C. 3.

D. 4.

VÍ DỤ 10. Bảng biến thiên sau là của hàm số nào dưới đây?

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$		
y'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$+\infty$		-3		$+\infty$		
		-4		-4			

A. $y = \frac{1}{2}x^4 - x^2 - 3$.

B. $y = 2x^4 - 4x^2 - 3$.

C. $y = 2|x|^3 - 3|x| - 3$.

D. $y = 2|x^3| - 3x^2 - 3$.

VÍ DỤ 11. Cho hàm số $f(x) = |x^3 - 3x^2 + m|$ với $m \in [-5; 5]$ là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $f(x)$ có đúng ba điểm cực trị.

A. 3.

B. 0.

C. 8.

D. 6.

VÍ DỤ 12. Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 + x + \frac{3}{2}$. Phương trình $\frac{f(f(x))}{2f(x) - 1} = 1$ có

bao nhiêu nghiệm thực phân biệt?

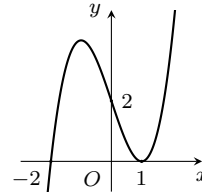
- A.** 4 nghiệm. **B.** 9 nghiệm. **C.** 6 nghiệm. **D.** 5 nghiệm.

1. Câu hỏi trắc nghiệm

CÂU 1.

Đường cong như hình vẽ là đồ thị của một trong các hàm số dưới đây. Hàm số đó là hàm số nào?

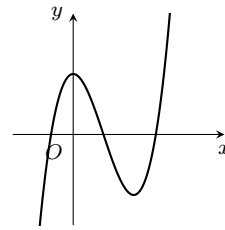
- A.** $y = (x - 1)(x - 2)^2$. **B.** $y = (x + 1)(x + 2)^2$.
C. $y = (x - 1)(x + 2)^2$. **D.** $y = (x - 1)^2(x + 2)$.



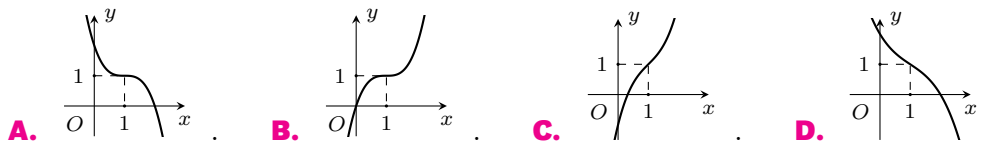
CÂU 2.

Đường cong hình bên dưới là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

- A.** $y = x^3 + 3x^2 + 2$. **B.** $y = -x^3 - 3x^2 + 2$.
C. $y = \frac{2x + 1}{x - 1}$. **D.** $y = x^3 - 3x^2 + 2$.



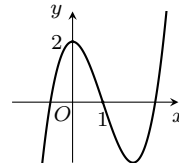
CÂU 3. Đồ thị của hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 4x - 1$ là hình nào dưới đây?



CÂU 4.

Đây là đồ thị của hàm số nào?

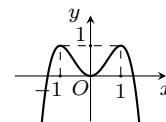
- A.** $y = -x^3 + 3x^2 + 2$. **B.** $y = x^3 - 3x^2 + 2$.
C. $y = -x^3 + 3x^2 - 2$. **D.** $y = x^3 - 3x^2 - 2$.



CÂU 5.

Đường cong trong hình bên là đồ thị của một trong bốn hàm số nào sau đây?

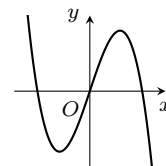
- A.** $y = -x^4 + 2x^2$. **B.** $y = x^4 - 2x^2$.
C. $y = -x^2 + 2x$. **D.** $y = x^3 + 2x^2 - x - 1$.



CÂU 6.

Đường cong trong hình bên dưới là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

- A.** $y = -x^3 + 3x + 2$. **B.** $y = x^3 - 3x$.
C. $y = -x^3 + 3x$. **D.** $y = x^4 - x^2 + 2$.



CÂU 7. Bảng biến thiên sau đây là của hàm số

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
y'	-		-
y	2	$+\infty$	2

- A.** $y = \frac{2x - 1}{x - 1}$. **B.** $y = \frac{2x - 2}{x + 1}$. **C.** $y = \frac{2x + 3}{x + 1}$. **D.** $y = \frac{x + 2}{2x + 2}$.

QUICK NOTE

QUICK NOTE

CÂU 8. Bảng biến thiên sau đây là của hàm số nào?

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y'	+	0	+
y	$-\infty$	1	$+\infty$

A. $y = -x^3 + 3x^2 - 3x.$

B. $y = -x^3 - 3x^2 - 3x.$

C. $y = x^3 + 3x^2 - 3x.$

D. $y = x^3 - 3x^2 + 3x.$

CÂU 9.

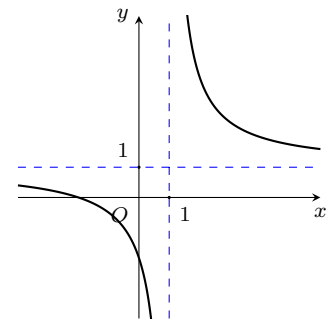
Hình vẽ sau đây là hình dạng đồ thị của hàm số nào

A. $y = \frac{x+2}{x+1}.$

B. $y = \frac{x+2}{x-1}.$

C. $y = \frac{x-2}{x-1}.$

D. $y = \frac{x}{x-1}.$

**CÂU 10.**

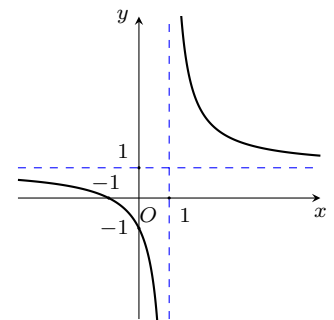
Đường cong trong hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

A. $y = \frac{2x+1}{2x-2}.$

B. $y = \frac{-x}{1-x}.$

C. $y = \frac{x-1}{x+1}.$

D. $y = \frac{x+1}{x-1}.$

**CÂU 11.**

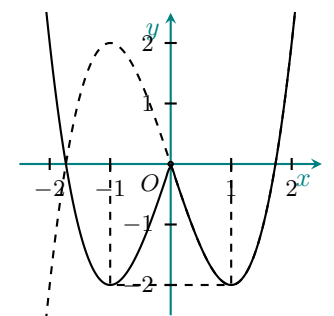
Đồ thị hình bên là đồ thị hàm số nào?

A. $y = |x^3 + 3x|.$

B. $y = |x|^3 - 3|x|.$

C. $y = |x|^3 + 3|x|.$

D. $y = |x^3 - 3x|.$

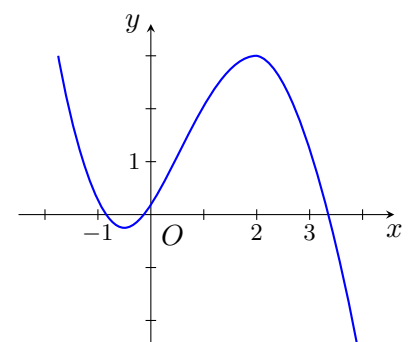
**CÂU 12.**Hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ sau (đồ thị không đi qua gốc tọa độ). Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

A. $a < 0; b < 0; c < 0; d > 0.$

B. $a < 0; b > 0; c < 0; d > 0.$

C. $a < 0; b > 0; c > 0; d > 0.$

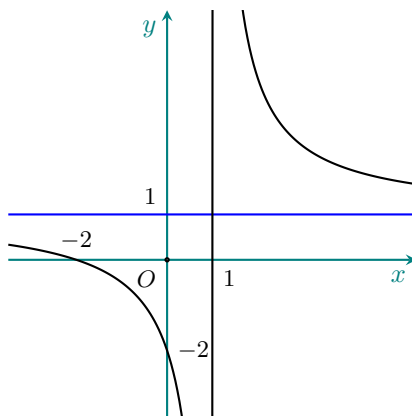
D. $a < 0; b < 0; c > 0; d > 0.$

**CÂU 13.**

Giá trị a, b để hàm số $y = \frac{ax+b}{x-1}$ có đồ thị như

hình bên là

- A. $a = -1, b = 2$. B. $a = -1, b = -2$.
C. $a = 1, b = 2$. D. $a = -1, b = -2$.



CÂU 14. Bảng biến thiên dưới đây là của hàm số nào?

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$	0	$+$
y	$+\infty$		-3		$+\infty$

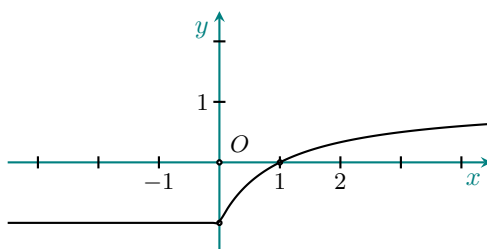
Arrows indicate the function values at the critical points: $y(-1) = -4$ and $y(1) = -4$.

- A. $y = x^4 + 2x^2 - 3$. B. $y = -x^4 - 2x^2 - 3$.
C. $y = x^4 - 2x^2 - 3$. D. $y = x^4 + 2x^2 + 3$.

CÂU 15.

Hình vẽ bên dưới là một phần đồ thị của hàm số nào?

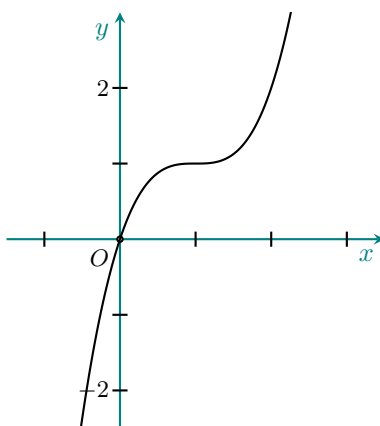
- A. $y = \frac{x-1}{|x|+1}$. B. $y = \frac{x-1}{|x+1|}$.
C. $y = \frac{x}{|x|+1}$. D. $y = \frac{-x-1}{|x|+1}$.



CÂU 16.

Cho hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = a^2 + c^2 + b + 1$ là

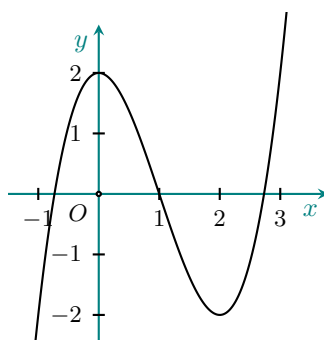
- A. $\frac{1}{5}$. B. 1. C. $\frac{5}{8}$. D. $\frac{1}{3}$.



CÂU 17.

Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ. Tính $S = a + b$?

- A. $S = 0$. B. $S = 1$.
C. $S = -1$. D. $S = -2$.



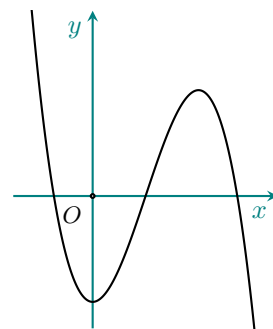
QUICK NOTE

QUICK NOTE

CÂU 18.

Đồ thị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + c$ cho như hình bên. Mệnh đề nào sau đây là **đúng**?

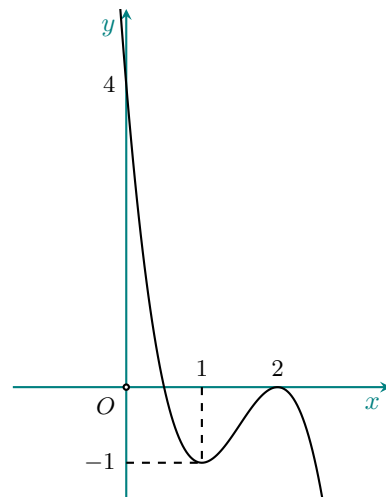
- A.** $a < 0, b > 0, c > 0$. **B.** $a < 0, b > 0, c < 0$.
C. $a > 0, b > 0, c > 0$. **D.** $a > 0, b > 0, c < 0$.



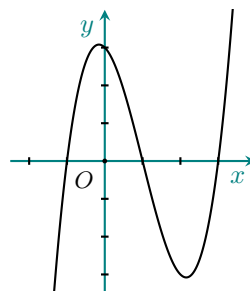
CÂU 19.

Cho hàm số $y = -2x^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình dưới. Khẳng định nào sau đây **đúng**?

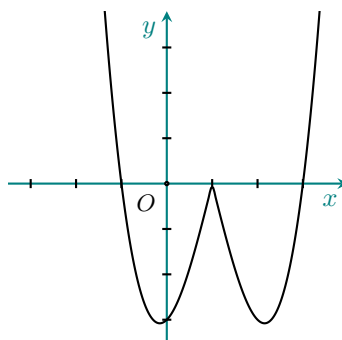
- A.** $bcd = -144$. **B.** $c^2 < b^2 + d^2$.
C. $b + c + d = 1$. **D.** $b + d < c$.



CÂU 20. Cho hàm số $y = f(x) = (x-1)(x^2 - 2x - 3)$ có đồ thị như hình vẽ.



Hình vẽ dưới đây là đồ thị của hàm số nào?



- A.** $y = |(x-1)(x^2 - 2x - 3)|$. **B.** $y = (x-1)|x^2 - 2x - 3|$.
C. $y = |x-1|(x^2 - 2x - 3)$. **D.** $y = (|x|-1)(x^2 - 2|x| - 3)$.

CÂU 21. Cho hàm số bậc bốn $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$, $a \neq 0$. Biết rằng các hệ số a, b, c, d, e là các số nguyên không âm và không lớn hơn 8 và $f(9) = 32078$. Tính tổng các hệ số $S = a + b + c + d + e$.

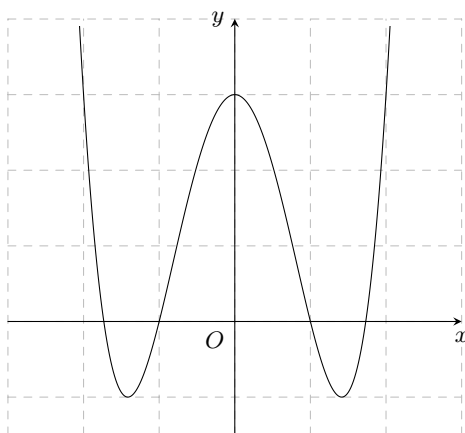
- A.** $S = 4$. **B.** $S = 10$. **C.** $S = 12$. **D.** $S = 14$.

CÂU 22. Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 4$ có đồ thị (C_1) và hàm số $y = -x^3 + 3x^2 - 4$ có đồ thị (C_2) . Khẳng định nào sau đây là đúng?

QUICK NOTE

- A.** (C_1) và (C_2) đối xứng nhau qua Ox .
B. (C_1) và (C_2) đối xứng nhau qua gốc tọa độ.
C. (C_1) và (C_2) trùng nhau.
D. (C_1) và (C_2) đối xứng nhau qua Oy .

CÂU 23. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên.



Số điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ là

- A.** 3. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 7.

CÂU 24. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} và có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	5	1	$+\infty$	

Đồ thị của hàm số $y = |f(x)|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

- A.** 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

CÂU 25. Cho hàm số $y = x^3 - 6x^2 + 9x + m$ có đồ thị là (C) . Giả sử (C) cắt trục hoành tại ba điểm có hoành độ x_1, x_2, x_3 (với $x_1 < x_2 < x_3$). Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

- A.** $x_1 < 0 < 1 < x_2 < 3 < x_3 < 4$. **B.** $1 < x_1 < x_2 < 3 < x_3 < 4$.
C. $0 < x_1 < 1 < x_2 < 3 < x_3 < 4$. **D.** $1 < x_1 < 3 < x_2 < 4 < x_3$.

CÂU 26. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ.

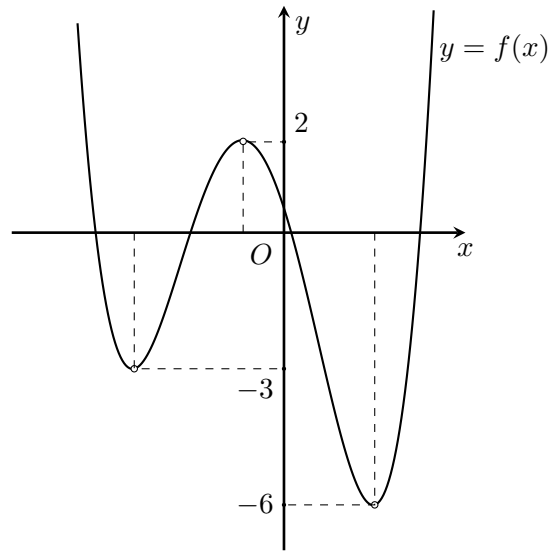
x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
y'	$-$	$-$	0	$+$
y	$+\infty$	$+\infty$	3	$+\infty$

Số nghiệm của phương trình $3|f(2x - 1)| - 10 = 0$.

- A.** 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

CÂU 27. (THPT Chu Văn An - Hà Nội - Lần 1 - 2018) Hình vẽ dưới đây là đồ thị của hàm số $y = f(x)$.

QUICK NOTE



Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y = |f(x+1) + m|$ có 5 điểm cực trị?

A. 2.

B. 3.

C. 1.

D. 0.

CÂU 28. (PTNK - Cơ sở 2 - 2018) Cho hàm số $y = f(x) = x^3 - 3x + 2$ có bảng biến thiên như hình bên. Hàm số $y = |f(x)|$ có bảng biến thiên nào dưới đây?

A.

x	$-\infty$	-2	0	1	$+\infty$	
y'	$-$	$ $	$+$	$-$	0	$+$
y	$+\infty$	0	4	0	$+\infty$	

B.

x	$-\infty$	-2	0	1	$+\infty$	
y'	$-$	$ $	$+$	$-$	0	$+$
y	$+\infty$	0	2	0	$+\infty$	

C.

x	$-\infty$	-2	0	1	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$	0	$+$
y	$+\infty$	0	2	0	$+\infty$

C.

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	2	0	$+\infty$	

D.

CÂU 29. Tìm số nghiệm thực của phương trình $2|x|^3 - 9x^2 + 12|x| - \frac{9}{2} = 0$.

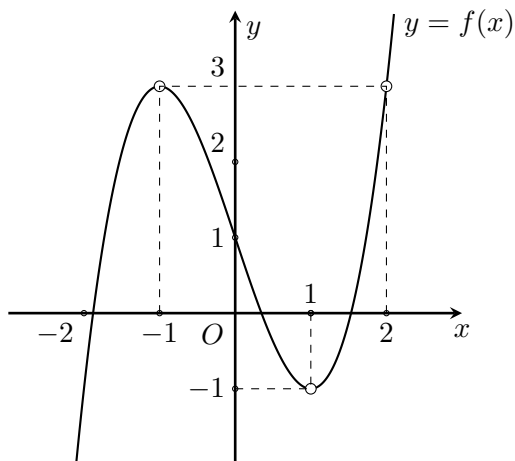
A. 4.

B. 2.

C. 6.

D. 3.

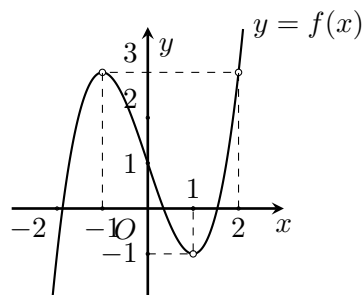
CÂU 30. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên \mathbb{R} và có đồ thị như hình vẽ.



Đặt hàm số $y = g(x) = f(2x^3 + x - 1) + m$. Tìm m để $\max_{[0;1]} g(x) = -10$.

- A.** $m = -13$. **B.** $m = 3$. **C.** $m = -12$. **D.** $m = -1$.

CÂU 31. Hình vẽ dưới là đồ thị của hàm số $y = f(x)$.



Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên dương của tham số m để đồ thị hàm số $y = |f(x - 2) + m|$ có 5 điểm cực trị. Tổng giá trị tất cả các phần tử của S bằng

- A.** 15. **B.** 18. **C.** 9. **D.** 12.

CÂU 32. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên \mathbb{R} và có bảng biến thiên như hình vẽ sau:

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$			
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$		0		-1		$+\infty$

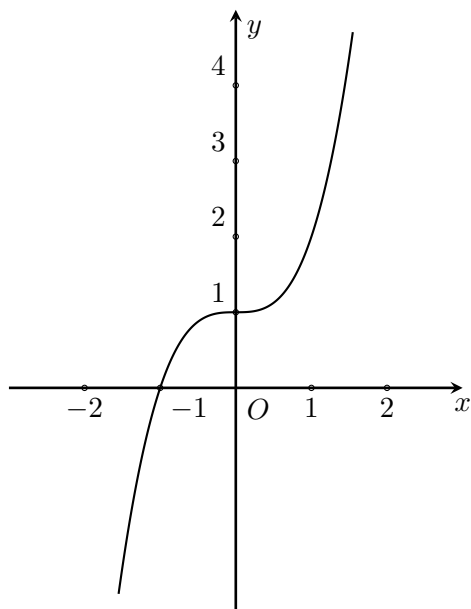
Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị của hàm số $y = |f(|x|) + m|$ có 11 điểm cực trị.

- A.** $m \geq 0$. **B.** $m \leq 0$. **C.** $0 \leq m \leq 1$. **D.** $0 < m < 1$.

CÂU 33. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $f(6 \sin x + 8 \cos x) = f(m(m+1))$ có nghiệm $x \in \mathbb{R}$.

QUICK NOTE

QUICK NOTE



A. 5.

B. 2.

C. 4.

D. 6.