

QUICK NOTE

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP

Dạng 1. Tính đạo hàm của hàm số bằng định nghĩa

Ta sử dụng một trong hai cách tính sau:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \text{hoặc} \quad f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

1. Ví dụ minh họa

VÍ DỤ 1. Tính (bằng định nghĩa) đạo hàm của các hàm số sau:

- | | |
|---|--|
| a) $y = 2x - 3$ tại điểm $x_0 = 1$; | b) $y = x^2$ tại điểm $x_0 = 2$; |
| c) $y = x^2 + 1$ tại điểm $x_0 = -1$; | d) $y = x^2 + 2x$ tại điểm $x_0 = 3$; |
| e) $y = x^2 - 2x + 1$ tại điểm $x_0 = -2$; | f) $y = 2x^3$ tại điểm $x_0 = 1$; |
| g) $y = x^3 + 1$ tại điểm $x_0 = 2$; | h) $y = x^3 - x$ tại điểm $x_0 = 3$. |

VÍ DỤ 2. Tính (bằng định nghĩa) đạo hàm của các hàm số sau:

- | | |
|--|---|
| a) $f(x) = \frac{2}{x}$ tại điểm $x_0 = 3$; | b) $f(x) = \sqrt{x}$ tại điểm $x_0 = 1$; |
| c) $f(x) = \frac{1}{x-1}$ tại điểm $x_0 = 2$; | d) $f(x) = \sqrt{x-1}$ tại điểm $x_0 = 5$. |

VÍ DỤ 3. Sử dụng định nghĩa, tìm đạo hàm của các hàm số sau:

- | | | | |
|-------------------------|-----------------|--------------------|---------------------|
| a) $y = 2x - 3$; | b) $y = x^2$; | c) $y = x^2 + 1$; | d) $y = x^2 + 2x$; |
| e) $y = x^2 - 2x + 1$; | f) $y = 2x^3$; | g) $y = x^3 + 1$; | h) $y = x^3 - x$. |

VÍ DỤ 4. Sử dụng định nghĩa, tìm đạo hàm của các hàm số sau:

- | | | | |
|---------------------------|------------------------|-----------------------------|--------------------------|
| a) $f(x) = \frac{2}{x}$; | b) $f(x) = \sqrt{x}$; | c) $f(x) = \frac{1}{x-1}$; | d) $f(x) = \sqrt{x-1}$. |
|---------------------------|------------------------|-----------------------------|--------------------------|

2. Bài tập áp dụng

BÀI 1. Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{x}$ tại $x_0 = 2$ bằng định nghĩa.

BÀI 2. Tính đạo hàm của hàm số $y = -x^2 + 3x - 2$ tại điểm $x_0 = 2$ bằng định nghĩa.

BÀI 3. Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{x-3}$ tại $x_0 = 4$.

BÀI 4. Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = \sin 3x$ tại $x_0 = \frac{\pi}{6}$.

BÀI 5. Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = 4x - x^2$ tại điểm $x = 2$.

BÀI 6. Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{3x+1}$ tại điểm $x = 1$.

BÀI 7. Sử dụng định nghĩa, tìm đạo hàm của các hàm số sau:

- | | |
|----------------------------------|--|
| a) $f(x) = C$ (C là hằng số); | b) $f(x) = \frac{1}{x}$ với $x \neq 0$; |
| c) $f(x) = x^2$; | d) $f(x) = cx^2$ với c là hằng số; |
| e) $f(x) = x^3$; | f) $f(x) = 3x - 5$; |
| g) $f(x) = \sqrt{x+2}$; | h) $f(x) = \cos x$. |

BÀI 8. Quãng đường rơi tự do của một vật được biểu diễn bởi công thức $s(t) = 4,9t^2$ với t là thời gian tính bằng giây và s tính bằng mét. Tính vận tốc tức thời của chuyển động lúc $t = 2$.

Dạng 2. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số

QUICK NOTE

1. Ví dụ minh họa

VÍ DỤ 1. Cho hàm số $y = -x^2$ có đồ thị (C) .

- a) Xác định hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm có hoành độ bằng 3.
b) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm $M(3; -9)$.

VÍ DỤ 2. Cho (C) là đồ thị của hàm số $f(x) = \frac{1}{x}$ và điểm $M(1; 1) \in (C)$. Tính hệ số góc của tiếp tuyến của (C) tại điểm M và viết phương trình tiếp tuyến đó.

VÍ DỤ 3. Cho (C) là đồ thị của hàm số $y = \sqrt{x}$. Viết phương trình tiếp tuyến của (C) , biết:

- a) Tiếp điểm có hoành độ $x_0 = 4$; b) Tiếp điểm có tung độ $y_0 = 3$.

VÍ DỤ 4. Viết phương trình tiếp tuyến của parabol $y = x^2 + 2x$, biết:

- a) Tiếp điểm có hoành độ $x_0 = 2$; b) Tiếp điểm có tung độ $y_0 = 3$.

2. Bài tập áp dụng

BÀI 1. Cho hàm số $y = x^2$ có đồ thị (C) .

- a) Xác định hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm có hoành độ bằng 2.
b) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm $M(2; 4)$.

BÀI 2. Cho (C) là đồ thị của hàm số $f(x) = \frac{1}{x-1}$ và điểm $M(2; 1) \in (C)$. Tính hệ số góc của tiếp tuyến của (C) tại điểm M và viết phương trình tiếp tuyến đó.

BÀI 3. Cho (C) là đồ thị của hàm số $y = \sqrt{x-1}$. Viết phương trình tiếp tuyến của (C) , biết:

- a) Tiếp điểm có hoành độ $x_0 = 2$; b) Tiếp điểm có tung độ $y_0 = 3$.

BÀI 4. Viết phương trình tiếp tuyến của parabol $y = x^2 + 1$, biết:

- a) Tiếp điểm có hoành độ $x_0 = 3$; b) Tiếp điểm có tung độ $y_0 = 5$.

C. BÀI TẬP RÈN LUYỆN

BÀI 5. Tính (bằng định nghĩa) đạo hàm của các hàm số sau:

- a) $y = x^2 - x$ tại $x_0 = 1$;
b) $y = -x^3$ tại $x_0 = -1$;
c) $f(x) = 3x^3 - 1$ tại $x_0 = 1$.

BÀI 6. Sử dụng định nghĩa, tìm đạo hàm của các hàm số sau:

- a) $y = kx^2 + c$ (với k, c là hằng số);
b) $y = x^3$. c) $f(x) = -x^2$;
d) $f(x) = x^3 - 2x$; e) $f(x) = \frac{4}{x}$.

BÀI 7. Một chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $s(t) = 4t^3 + 6t + 2$, trong đó s tính bằng mét và t là thời gian tính bằng giây. Tính vận tốc tức thời của chuyển động tại $t = 2$.

BÀI 8. Trên Mặt Trăng, quãng đường rơi tự do của một vật được cho bởi công thức $h(t) = 0,81t^2$, với t được tính bằng giây và h tính bằng mét. Hãy tính vận tốc tức thời của vật được thả rơi tự do trên Mặt Trăng tại thời điểm $t = 2$.

QUICK NOTE

BÀI 9. Một vật được phóng theo phương thẳng đứng lên trên từ mặt đất với vận tốc ban đầu là $19,6 \text{ m/s}$ thì độ cao h của nó (tính bằng mét) sau t giây được cho bởi công thức $h = 19,6t - 4,9t^2$. Tìm vận tốc của vật khi nó chạm đất.

BÀI 10. Tìm hệ số góc của tiếp tuyến của parabol $y = x^2$ tại điểm có hoành độ $x_0 = -1$.

BÀI 11. Viết phương trình tiếp tuyến của parabol $(P): y = 3x^2$ tại điểm có hoành độ $x_0 = 1$.

BÀI 12. Cho hàm số $f(x) = -2x^2$ có đồ thị (C) và điểm $A(1; -2) \in (C)$. Tính hệ số góc của tiếp tuyến với (C) tại điểm A .

BÀI 13. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3$.

- Tại điểm $(-1; 1)$;
- Tại điểm có hoành độ bằng 2.

BÀI 14. Cho hàm số $y = -2x^2 + x$ có đồ thị (C) .

- Xác định hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm có hoành độ bằng 2.
- Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm $M(2; -6)$.

BÀI 15. Viết phương trình tiếp tuyến của parabol $y = -x^2 + 4x$, biết:

- Tiếp điểm có hoành độ $x_0 = 1$;
- Tiếp điểm có tung độ $y_0 = 0$.

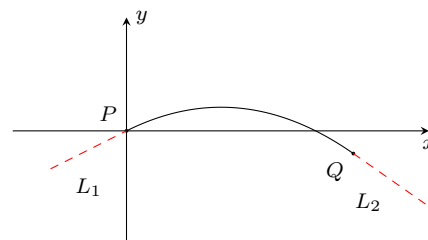
BÀI 16. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2(C)$. Viết phương trình tiếp tuyến của (C) :

- Tại giao điểm của đồ thị hàm số với trục Oy
- Tại điểm có tung độ bằng 2
- Tại điểm M mà tiếp tuyến tại M song song với đường thẳng $y = 6x + 1$
- Tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $y = \frac{-1}{9}x + 3$

BÀI 17. Chứng minh rằng hàm số $f(x) = |x|$ không có đạo hàm tại điểm $x_0 = 0$, nhưng có đạo hàm tại mọi điểm $x \neq 0$.

BÀI 18. Một kỹ sư thiết kế một đường ray tàu lượn, mà mặt cắt của nó gồm một cung đường cong có dạng parabol, đoạn dốc lên L_1 và đoạn dốc xuống L_2 là những phần đường thẳng có hệ số góc lần lượt là $0,5$ và $-0,75$. Để tàu lượn chạy êm và không bị đổi hướng đột ngột, L_1 và L_2 phải là những tiếp tuyến của cung parabol tại các điểm chuyển tiếp P và Q . Giả sử gốc tọa độ đặt tại P và phương trình của parabol là $y = ax^2 + bx + c$, trong đó x tính bằng mét.

- Tìm c .
- Tính $y'(0)$ và tìm b .
- Giả sử khoảng cách theo phương ngang giữa P và Q là 40m .
Tìm a .
- Tìm chênh lệch độ cao giữa hai điểm chuyển tiếp P và Q .



BÀI 19. Giả sử chi phí C (USD) để sản xuất Q máy vô tuyến là $C(Q) = Q^2 + 80Q + 3500$.

- Ta gọi chi phí biên là chi phí gia tăng để sản xuất thêm 1 sản phẩm từ Q sản phẩm lên $Q + 1$ sản phẩm. Giả sử chi phí biên được xác định bởi hàm số $C'(Q)$. Tìm hàm chi phí biên.
- Tìm $C'(90)$ và giải thích ý nghĩa kết quả tìm được.
- Hãy tính chi phí sản xuất máy vô tuyến thứ 100.

Bài 32. CÁC QUY TẮC TÍNH ĐẠO HÀM

A. TÓM TẮT KIẾN THỨC

1. Đạo hàm của một số hàm số thường gặp

1.1. Đạo hàm của hàm số $y = x^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$)

⚡ ĐỊNH LÍ 32.1. Hàm số $y = x^n$ ($n \in \mathbb{N}$) có đạo hàm trên \mathbb{R} và $(x^n)' = nx^{n-1}$.

1.2. Đạo hàm của hàm số $y = \sqrt{x}$

⚡ ĐỊNH LÍ 32.2. Hàm số $y = \sqrt{x}$ có đạo hàm trên khoảng $(0; +\infty)$ và $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

2. Đạo hàm của tổng hiệu tích thương

⚡ ĐỊNH LÍ 32.3. Giả sử các hàm số $u = u(x)$, $v = v(x)$ có đạo hàm trên khoảng $(a; b)$. Khi đó

$$\odot (u + v)' = u' + v';$$

$$\odot (u - v)' = u' - v';$$

$$\odot (u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v';$$

$$\odot \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2} \quad (v = v(x) \neq 0).$$

⚠ \odot Quy tắc tính đạo hàm của tổng, hiệu có thể áp dụng cho tổng, hiệu của hai hay nhiều hàm số.

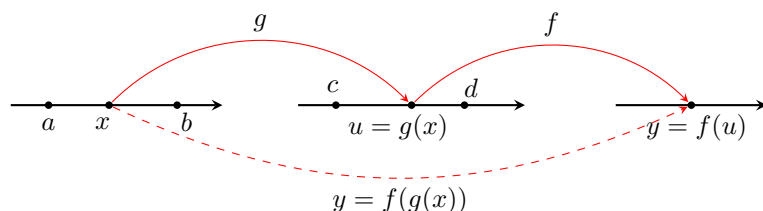
\odot Với k là một hằng số, ta có $(ku)' = k \cdot u'$.

\odot Đạo hàm của hàm số nghịch đảo: $\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$ ($v = v(x) \neq 0$).

3. Đạo hàm của hàm số hợp

3.1. Khái niệm hàm số hợp

⚡ ĐỊNH LÍ 32.4. Giả sử $u = g(x)$ là hàm số xác định trên khoảng $(a; b)$, có tập giá trị chứa trong khoảng $(c; d)$ và $y = f(u)$ là hàm số xác định trên khoảng $(c; d)$. Hàm số $y = f(g(x))$ được gọi là hàm số hợp của hàm số $y = f(u)$ với $u = g(x)$.



3.2. Đạo hàm của hàm số hợp

⚡ ĐỊNH LÍ 32.5. Nếu hàm số $u = g(x)$ có đạo hàm u'_x tại x và hàm số $y = f(u)$ có đạo hàm y'_u tại u thì hàm số hợp $y = f(g(x))$ có đạo hàm y'_x tại x là

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x.$$

4. Đạo hàm của hàm số lượng giác

4.1. Đạo hàm của hàm số $y = \sin x$

⚡ ĐỊNH LÍ 32.6.

\odot Hàm số $y = \sin x$ có đạo hàm trên \mathbb{R} và $(\sin x)' = \cos x$.

\odot Đối với hàm số hợp $y = \sin u$, với $u = u(x)$, ta có $(\sin u)' = u' \cdot \cos u$.

4.2. Đạo hàm của hàm số $y = \cos x$

⚡ ĐỊNH LÍ 32.7.

\odot Hàm số $y = \cos x$ có đạo hàm trên \mathbb{R} và $(\cos x)' = -\sin x$.

\odot Đối với hàm số hợp $y = \cos u$, với $u = u(x)$, ta có $(\cos u)' = -u' \cdot \sin u$.

QUICK NOTE

QUICK NOTE

4.3. Đạo hàm của hàm số $y = \tan x$ và $y = \cot x$

⚡ ĐỊNH LÝ 32.8.

☉ Hàm số $y = \tan x$ có đạo hàm tại mọi $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) và $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$.

☉ Hàm số $y = \cot x$ có đạo hàm tại mọi $x \neq k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) và $(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$.

☉ Đối với hàm số hợp $y = \tan u$ và $y = \cot u$ với $u = u(x)$, ta có

$$(\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}; (\cot u)' = -\frac{u'}{\sin^2 u}$$

(giả thiết $\tan u$ và $\cot u$ có nghĩa).

5. Đạo hàm của hàm số mũ và hàm số lôgarit

5.1. Giới hạn liên quan đến hàm số mũ và hàm số lôgarit

⚡ NHẬN XÉT. Ta có các giới hạn sau:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

5.2. Đạo hàm của hàm số mũ

⚡ ĐỊNH LÝ 32.9.

☉ Hàm số $y = e^x$ có đạo hàm trên \mathbb{R} và $(e^x)' = e^x$.

Đối với hàm số hợp $y = e^u$, với $u = u(x)$, ta có $(e^u)' = u' \cdot e^u$.

☉ Hàm số $y = a^x$ ($0 < a \neq 1$) có đạo hàm trên \mathbb{R} và $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$.

Đối với hàm số hợp $y = a^u$, với $u = u(x)$, ta có $(a^u)' = u' \cdot a^u \cdot \ln a$.

5.3. Đạo hàm của hàm số lôgarit

⚡ ĐỊNH LÝ 32.10.

☉ Hàm số $\ln x$ có đạo hàm trên khoảng $(0; +\infty)$ và $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.

Đối với hàm số hợp $y = \ln u$, với $u = u(x)$, ta có $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$.

☉ Hàm số $\log_a x$ có đạo hàm trên khoảng $(0; +\infty)$ và $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$.

Đối với hàm số hợp $y = \log_a u$, với $u = u(x)$, ta có $(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a}$.

▲ Với $x < 0$, ta có:

$$\ln |x| = \ln(-x) \text{ và } [\ln(-x)]' = \frac{(-x)'}{-x} = \frac{1}{x}.$$

Từ đó ta có:

$$(\ln |x|)' = \frac{1}{x}, \forall x \neq 0$$

Bảng đạo hàm

Đạo hàm của hàm số sơ cấp cơ bản thường gặp	Đạo hàm của hàm hợp (ở đây $u = u(x)$)
$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$	$(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$
$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$	$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$
$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$

QUICK NOTE

$(\sin x)' = \cos x$	$(\sin u)' = u' \cdot \cos u$
$(\cos x)' = -\sin x$	$(\cos u)' = -u' \cdot \sin u$
$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$(\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$
$(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$(\cot u)' = -\frac{u'}{\sin^2 u}$
$(e^x)' = e^x$	$(e^u)' = u' \cdot e^u$
$(a^x)' = a^x \ln a$	$(a^u)' = u' \cdot a^u \ln a$
$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$
$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$	$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a}$

6. Đạo hàm cấp hai

6.1. Khái niệm đạo hàm cấp 2

ĐỊNH NGHĨA 32.1. Giả sử hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại mỗi điểm $x \in (a; b)$. Nếu hàm số $y' = f'(x)$ lại có đạo hàm tại x thì ta gọi đạo hàm của y' là đạo hàm cấp hai của hàm số $y = f(x)$ tại x . Kí hiệu là $y''(x)$.

6.2. Ý nghĩa cơ học của đạo hàm cấp hai

ĐỊNH NGHĨA 32.2. Một chuyển động có phương trình $s = f(t)$ thì đạo hàm cấp hai (nếu có) của hàm số $f(t)$ là gia tốc tức thời của chuyển động. Ta có

$$a(t) = f''(t).$$

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP

Dạng 3. Tính đạo hàm cơ bản

1. Ví dụ minh họa

VÍ DỤ 1. Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = \sin x$ tại điểm $x_0 = \frac{\pi}{3}$.

VÍ DỤ 2. Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = \tan x$ tại điểm $x_0 = \frac{\pi}{4}$.

VÍ DỤ 3. Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = \cot x$ tại điểm $x_0 = \frac{\pi}{2}$.

VÍ DỤ 4. Tính đạo hàm của hàm số $y = x^5$ tại điểm $x = 2$ và $x = -\frac{1}{2}$.

VÍ DỤ 5. Tính đạo hàm của hàm số $y = \sqrt{x}$ tại điểm $x = 1$ và $x = \frac{1}{4}$.

VÍ DỤ 6. Tìm đạo hàm của các hàm số

a) $y = \sqrt[4]{x}$ tại $x = 1$;

b) $y = \frac{1}{x}$ tại $x = -\frac{1}{4}$.

VÍ DỤ 7. Tìm đạo hàm của các hàm số

a) $y = 9^x$ tại $x = 1$;

b) $y = \ln x$ tại $x = \frac{1}{3}$.

VÍ DỤ 8. Tìm đạo hàm của các hàm số

a) $y = e^x$ tại $x = 2 \ln 3$;

b) $y = \log_5 x$ tại $x = 2$.

QUICK NOTE

2. Bài tập áp dụng

BÀI 1. Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = \cos x$ tại điểm $x_0 = \frac{\pi}{6}$.

BÀI 2. Tính đạo hàm của hàm số $y = \tan x$ tại $x = \frac{3\pi}{4}$.

BÀI 3. Tính đạo hàm của hàm số $y = x^{10}$ tại điểm $x = -1$ và $x = \sqrt[3]{2}$.

BÀI 4. Tính đạo hàm của hàm số $y = \sqrt{x}$ tại các điểm $x = 4$ và $x = \frac{1}{9}$.

BÀI 5. Tìm đạo hàm của các hàm số

a) $y = \sqrt[3]{x}$ tại điểm $x = 8$; b) $y = \frac{2}{x}$ tại $x = \frac{1}{5}$.

BÀI 6. Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = 2^x$ tại điểm $x_0 = 1$.

BÀI 7. Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = \ln x$ tại điểm $x_0 = 1$.

BÀI 8. Cho hàm số $f(x) = x^{10}$.

a) Tính đạo hàm của hàm số trên tại điểm x bất kì.

b) Tính đạo hàm của hàm số trên tại điểm $x_0 = 1$.

Dạng 4. Tính đạo hàm hàm hợp

1. Ví dụ minh họa

VÍ DỤ 1. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = (2x^3 + 3)^2$; b) $y = \cos 3x$; c) $y = \log_2(x^2 + 2)$; d) $y = e^{x^2+1}$.

VÍ DỤ 2. Tính đạo hàm của hàm số sau

a) $y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{8}\right)$; b) $y = \cos\left(4x - \frac{\pi}{3}\right)$; c) $y = \tan\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$; d) $y = \cot\left(3x - \frac{\pi}{6}\right)$.

VÍ DỤ 3. Tính đạo hàm của hàm số sau

a) $y = \sqrt{x^2 + 1}$; b) $\frac{1}{2x - 3}$.

VÍ DỤ 4. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = 2 \tan^2 x$. b) $y = 3 \cot^3 x$.

VÍ DỤ 5. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = 3 \sin x + \cos x$. b) $y = 4 \sin x - 5 \cos x$.

VÍ DỤ 6. Tính đạo hàm của các hàm số $y = \tan 3x + 2 \tan x$.

VÍ DỤ 7. Tính đạo hàm của các hàm số $y = \cot 5x \cos 4x$.

2. Bài tập áp dụng

BÀI 1. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = (3x^2 + x)^3$; b) $y = \sin 2x$; c) $y = \ln(x^2 + 1)$; d) $y = 2^{x^2-x}$.

BÀI 2. Tính đạo hàm của hàm số sau

a) $y = \sin(10x - 5)$; b) $y = \cos(3 - x)$; c) $y = \tan(5x + 7)$; d) $y = \cot(4 - 2x)$.

BÀI 3. Tính đạo hàm của hàm số sau

a) $y = \sqrt{3x - 5}$; b) $\frac{1}{3 - x}$.

BÀI 4. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = \tan^2 3x$.

b) $y = \cot^3 4x$.

BÀI 5. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = \sin 2x - 3 \sin x$.

b) $y = \cos 3x - 4 \cos x$.

BÀI 6. Tính đạo hàm của các hàm số $y = \cot 5x - 4 \cot x$.

BÀI 7. Tính đạo hàm của các hàm số $y = \sin x \cos 3x$.

Dạng 5. Tính đạo hàm tổng, hiệu, tích, thương

1. Ví dụ minh họa

VÍ DỤ 1. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 2x + 1$;

b) $y = 3x^2 - 4x + 2$.

VÍ DỤ 2. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = 2x^4 - \frac{1}{3}x^3 + 2\sqrt{x} - 5$.

b) $y = (x^3 - 1)(1 - x^2)$.

VÍ DỤ 3. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = x^2 \cdot 3^x$;

b) $y = \frac{\sqrt{x}}{\cos x}$.

VÍ DỤ 4. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = \frac{2x + 1}{1 - 3x}$.

b) $y = \frac{x^2 - 3x + 3}{x - 1}$.

c) $y = \frac{1 + x - x^2}{1 - x + x^2}$.

2. Bài tập áp dụng

BÀI 1. Tính đạo hàm của mỗi hàm số sau:

a) $f(x) = x^3 + x$;

b) $g(x) = x^4 - x^2$.

BÀI 2. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = x \cdot \log_2 x$;

b) $y = x^3 \cdot e^x$.

BÀI 3. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = \frac{2x + 1}{x - 1}$;

b) $y = x \sin x$;

c) $y = \frac{3x + 2}{2x - 1}$.

BÀI 4. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = \frac{1}{2}x^5 + \frac{2}{3}x^4 - x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 4x - 5$.

c) $y = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - x$.

b) $y = \frac{1}{4} - \frac{1}{3}x + x^2 - 0,5x^4$.

d) $y = x^5 - 4x^3 + 2x - 3\sqrt{x}$.

BÀI 5. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = (2x - 3)(x^5 - 2x)$.

d) $y = \frac{2x - 1}{x - 1}$.

g) $y = x + 1 - \frac{2}{x + 1}$.

b) $y = x(2x - 1)(3x + 2)$.

e) $y = \frac{x^2 + x - 1}{x - 1}$.

h) $y = \frac{5x - 3}{x^2 + x + 1}$.

c) $y = (\sqrt{x} + 1)\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - 1\right)$.

f) $y = \frac{2x^2 - 4x + 5}{2x + 1}$.

i) $y = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1}$.

QUICK NOTE

QUICK NOTE

Dạng 6. Một số ứng dụng của đạo hàm

1. Ví dụ minh họa

VÍ DỤ 1. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \sqrt{x}$ tại điểm có hoành độ bằng 4.

VÍ DỤ 2. Cho đường cong $(C) : y = f(x) = \frac{x^2}{2} - 4x + 1$.

a) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ $x_0 = -2$.

b) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) , biết tiếp tuyến có hệ số góc $k = 1$.

VÍ DỤ 3. Cho hàm số $y = f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ có đồ thị (C) . Viết phương trình tiếp tuyến của (C) biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $\Delta : 3x + y = 2$.

VÍ DỤ 4. Cho hàm số $y = 4x^3 - 6x^2 + 1$ (1). Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số (1), biết rằng tiếp tuyến đó đi qua điểm $M(-1; -9)$.

VÍ DỤ 5. Một vật chuyển động thẳng không đều xác định bởi phương trình $s(t) = t^2 - 4t + 3$, trong đó s là quãng đường tính bằng mét và t là thời gian tính bằng giây. Tính gia tốc của chuyển động tại thời điểm $t = 4$.

VÍ DỤ 6. Một vật chuyển động theo quy luật $s = -\frac{2}{3}t^3 + 4t^2 - 1$ với t (giây) là khoảng thời gian tính từ khi vật bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật di chuyển được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 5 giây, kể từ khi bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu?

2. Bài tập tự luận

BÀI 1. Viết phương trình tiếp tuyến của đường cong $(C) : y = f(x) = x(x^2 + x - 1) + 1$ tại điểm có tung độ bằng -1 .

BÀI 2. Viết phương trình tiếp tuyến của parabol $(P) : y = f(x) = -x^2 + 4x - 3$ tại các giao điểm của (P) với trục hoành.

BÀI 3. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị $(C) : y = \frac{x-1}{x+2}$ biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $\Delta : 3x + y - 2 = 0$.

BÀI 4. Một vật được phóng lên theo phương thẳng đứng lên trên từ mặt đất với vận tốc ban đầu $v_0 = 20$ m/s. Trong vật lí, ta biết rằng khi bỏ qua sức cản của không khí, độ cao h so với mặt đất (tính bằng mét) của vật tại thời điểm t (giây) sau khi ném được cho bởi công thức sau: $h = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$, trong đó v_0 là vận tốc ban đầu của vật, $g = 9,8$ m/s² là gia tốc rơi tự do. Hãy tính vận tốc của vật khi nó đạt độ cao cực đại và khi nó chạm đất.

BÀI 5. Một hòn sỏi rơi tự do có quãng đường rơi tính theo thời gian t là $s(t) = 4,9t^2$, trong đó s tính bằng mét và t tính bằng giây. Tính gia tốc rơi của hòn sỏi lúc $t = 3$.

Dạng 7. Chứng minh đẳng thức hoặc giải phương trình

1. Ví dụ minh họa

VÍ DỤ 1. Cho hàm số $y = \tan x$. Chứng minh rằng $y' - y^2 - 1 = 0$.

VÍ DỤ 2. Cho hàm số $y = \cot 2x$. Chứng minh rằng $y' + 2y^2 + 2 = 0$.

VÍ DỤ 3. Cho hàm số $y = \sin^6 x + \cos^6 x + 3\sin^2 x \cos^2 x$. Chứng minh rằng $y' = 0$.

VÍ DỤ 4. Cho hàm số $y = \cos^2 x - \sin x$. Giải phương trình $y' = 0$.

VÍ DỤ 5. Giải phương trình $y' = 0$ với $y = 3\cos x + 4\sin x + 5x$.

VÍ DỤ 6. Giải phương trình $y' = 0$ với $y = \tan x + \cot x$.

VÍ DỤ 7. Cho hàm số $f(x) = \frac{\sin 3x}{3} - \cos x - \sqrt{3} \left(\sin x - \frac{\cos 3x}{3} \right)$. Giải phương trình $f'(x) = 0$.

2. Bài tập tự luận

BÀI 1. Cho hàm số $y = \cos^2\left(\frac{\pi}{3} - x\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{3} + x\right) + \cos^2\left(\frac{2\pi}{3} - x\right) + \cos^2\left(\frac{2\pi}{3} + x\right) - 2\sin^2 x$. Chứng minh rằng $y' = 0$.

BÀI 2. Cho hàm số $y = x \sin x$. Chứng minh rằng

a) $xy - 2(y' - \sin x) + x(2 \cos x - y) = 0$. b) $\frac{y'}{\cos x} - x = \tan x$.

BÀI 3. Giải phương trình $y' = 0$ với $y = 1 - \sin(\pi + x) + 2 \cos\left(\frac{2\pi + x}{2}\right)$.

BÀI 4. Giải phương trình $y' = 0$ với $y = \sin 2x - 2 \cos x$.

BÀI 5. Cho hàm số $f(x) = a \sin x + b \cos x + 1$ có đạo hàm là $f'(x)$. Tìm a, b biết $f'(0) = \frac{1}{2}$ và $f'\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 1$.

Dạng 8. Tính đạo hàm cấp hai

1. Ví dụ minh họa

VÍ DỤ 1. ☺ Gọi $g(x)$ là đạo hàm của hàm số $y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$. Tìm $g(x)$.

☺ Tính đạo hàm của hàm số $y = g(x)$.

VÍ DỤ 2. Cho hàm số $f(x) = x^4 - 4x^2 + 3$.

- a) Tìm đạo hàm cấp hai của hàm số tại điểm x bất kì.
b) Tính đạo hàm cấp hai của hàm số tại điểm $x_0 = -1$.

VÍ DỤ 3. Tính đạo hàm cấp hai của các hàm số:

- a) $y = 3x^2 + 5x + 1$; b) $y = \sin x$; c) $y = x \cdot e^{2x}$; d) $y = \ln(2x + 3)$.

VÍ DỤ 4. Tìm đạo hàm cấp hai của các hàm số sau:

- a) $y = (x^2 + 1)^3$. b) $y = \frac{x}{x - 2}$. c) $y = \frac{x^2 + x + 1}{x + 1}$.

VÍ DỤ 5. Tìm đạo hàm cấp hai của các hàm số sau:

- a) $y = \sqrt{2x + 5}$. b) $y = x\sqrt{x^2 + 1}$. c) $y = \sin x$. d) $y = \tan x$.

VÍ DỤ 6. Tính đạo hàm cấp hai của hàm số $y = x^2 + e^{2x-1}$. Từ đó tính $y''(0)$.

VÍ DỤ 7. Cho hàm số $h(x) = 5(x + 1)^3 + 4(x + 1)$. Giải phương trình $h''(x) = 0$.

2. Bài tập áp dụng

BÀI 1. Cho hàm số $f(x) = \frac{1}{x + 2}$.

- a) Tìm đạo hàm cấp hai của hàm số tại điểm $x \neq -2$.
b) Tính đạo hàm cấp hai của hàm số tại điểm $x_0 = 2$.

BÀI 2. Tính đạo hàm cấp hai của các hàm số sau:

- a) $y = x^2 - x$; b) $y = \cos x$; c) $y = 2x^4 - 5x^2 + 3$; d) $y = x \cdot e^x$.

BÀI 3. Tìm đạo hàm cấp hai của các hàm số sau:

- a) $y = -3x^4 + 4x^3 + 5x^2 - 2x + 1$. b) $y = \frac{4}{5}x^5 - 3x^2 - x + 4$.

BÀI 4. Tìm đạo hàm cấp hai của các hàm số sau:

QUICK NOTE

QUICK NOTE

$$\text{a) } y = -\frac{1}{x}. \quad \text{b) } y = \frac{1}{x-3} \quad \text{c) } y = \frac{-2x^2 + 3x}{1-x}. \quad \text{d) } y = \frac{5x^2 - 3x - 20}{x^2 - 2x - 3}.$$

BÀI 5. Tìm đạo hàm cấp hai của các hàm số sau:

$$\text{a) } y = \sqrt{2x+1}. \quad \text{b) } y = x^2 \cdot \sqrt{x^3-x}. \quad \text{c) } f(x) = (x+1)^3.$$

BÀI 6. Tìm đạo hàm cấp hai của các hàm số sau:

$$\text{a) } y = \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right). \quad \text{b) } y = \sin 2x. \quad \text{c) } y = \sin^2 2x. \quad \text{d) } y = 3 \sin x + 2 \cos x.$$

BÀI 7. Tìm đạo hàm cấp hai của các hàm số sau:

$$\text{a) } y = x \cdot \sin x. \quad \text{b) } y = x^2 \cdot \cos^2 x. \quad \text{c) } y = \frac{\cos x}{x^3 + 1}.$$

BÀI 8. Cho hàm số $f(x) = \sin^3 x + x^2$. Tính giá trị $f''\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

Dạng 9. Ý nghĩa của đạo hàm cấp hai

1. Ví dụ minh họa

VÍ DỤ 1. Một hòn sỏi rơi tự do có quãng đường rơi tính theo thời gian t là $s(t) = 4,9t^2$, trong đó s tính bằng mét và t tính bằng giây. Tính gia tốc rơi của hòn sỏi lúc $t = 3$.

2. Bài tập vận dụng

BÀI 1. Xét dao động điều hòa có phương trình chuyển động $S(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$, trong đó A, ω, φ là các hằng số. Tìm gia tốc tức thời tại thời điểm t của chuyển động đó.

BÀI 2. Chuyển động của một vật gắn trên con lắc lò xo (khi bỏ qua ma sát và sức cản không khí) được cho bởi phương trình sau: $x(t) = 4 \cos\left(2\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$. Trong đó x tính bằng centimet và thời gian t tính bằng giây. Tìm gia tốc tức thời của vật tại thời điểm $t = 5$ giây (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

BÀI 3. Cho chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $s = t^3 - 3t^2 - 9t + 2$ (t tính bằng giây; s tính bằng mét). Tính gia tốc của chuyển động tại thời điểm $t = 2$ s.

BÀI 4. Cho chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $s = t^3 - 3t^2$ (t tính bằng giây; s tính bằng mét). Tính gia tốc của chuyển động tại thời điểm $t = 4$ s.

Dạng 10. Chứng minh đẳng thức chứa đạo hàm cấp 2

- ☑ Tìm các đạo hàm đến cấp cao nhất có mặt trong đẳng thức cần chứng minh.
- ☑ Thay thế vào vị trí tương ứng và biến đổi về này cho bằng về kia. Từ đó suy ra đẳng thức cần chứng minh.

1. Ví dụ minh họa

VÍ DỤ 1. Cho hàm số $y = \sqrt{2x - x^2}$. Chứng minh rằng: $y^3 \cdot y'' + 1 = 0$.

VÍ DỤ 2. Cho hàm số $y = \frac{x^2 + 2x + 2}{2}$. Chứng minh rằng: $2y \cdot y'' - 1 = (y')^2$.

VÍ DỤ 3. Cho hàm số $y = x \sin x$. Chứng minh rằng: $x \cdot y - 2(y' - \sin x) + x \cdot y'' = 0$.

VÍ DỤ 4. Cho hàm số $y = \frac{x+2}{x-1}$. Chứng minh biểu thức sau không phụ thuộc x .
 $P = 2(y')^2 - y''(y-1)$ (Giả sử các biểu thức đều có nghĩa).

VÍ DỤ 5. Cho hàm số $y = \tan x$. Chứng minh rằng: $\frac{6y}{y''} - \frac{1}{y'} - \cos 2x = 1$.

2. Bài tập áp dụng

BÀI 1. Chứng minh rằng hàm số $y = \sqrt{4x - 2x^2}$ thỏa hệ thức: $y^3 y'' + 4 = 0$.

BÀI 2. Cho hàm số $y = -2 + \frac{5}{x}$. Chứng minh rằng: $\frac{2y'}{x} + y'' = 0$.

BÀI 3. Cho $y = \frac{x-3}{x+4}$. Chứng minh rằng: $2(y')^2 = (y-1)y''$.

BÀI 4. Cho hàm số $y = x \cos x$. Chứng minh rằng: $x \cdot y - 2(y' - \cos x) + x \cdot y'' = 0$.

BÀI 5. Cho hàm số $y = x \sin x$. Chứng minh $xy - 2y' + xy'' = -2 \sin x$.

BÀI 6. Cho hàm số $y = \sin^2 x$. Chứng minh rằng: $2y + y' \tan x + y'' - 2 = 0$.

C. BÀI TẬP RÈN LUYỆN

BÀI 7. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = x^3 - 3x^2 + 2x + 1$;

b) $y = x^2 - 4\sqrt{x} + 3$.

BÀI 8. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = \frac{2x-1}{x+2}$;

b) $y = \frac{2x}{x^2+1}$.

BÀI 9. Tính đạo hàm của các hàm số sau

a) $y = 2x^3 - \frac{x^2}{2} + 4x - \frac{1}{3}$;

b) $y = \frac{-2x+3}{x-4}$;

c) $y = \frac{x^2-2x+3}{x-1}$;

d) $y = \sqrt{5x}$.

BÀI 10. Tính đạo hàm của các hàm số sau

a) $y = (x^2 - x) \cdot 2^x$;

b) $y = x^2 \cdot \log_3 x$;

c) $y = e^{3x+1}$.

BÀI 11. Tính đạo hàm của các hàm số sau

a) $y = 2x^4 - 5x^2 + 3$;

b) $y = x \cdot e^x$.

BÀI 12. Tính đạo hàm của các hàm số sau

a) $y = \sin 3x$;

b) $y = \cos^3 2x$;

c) $y = \tan^2 x$;

d) $y = \cot(4 - x^2)$.

BÀI 13. Tìm đạo hàm của mỗi hàm số sau

a) $y = 4x^3 - 3x^2 + 2x + 10$;

b) $y = \frac{x+1}{x-1}$;

c) $y = -2x\sqrt{x}$;

d) $y = 3 \sin x + 4 \cos x - \tan x$;

e) $y = 4^x + 2e^x$;

f) $y = x \ln x$.

BÀI 14. Cho hàm số $f(x) = 2^{3x+2}$.

a) Hàm số $f(x)$ là hàm hợp của các hàm số nào?

b) Tìm đạo hàm của $f(x)$.

BÀI 15. Tìm đạo hàm của mỗi hàm số sau:

a) $y = \sin 3x + \sin^2 x$;

b) $y = \log_2(2x+1) + 3^{-2x+1}$.

BÀI 16. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = x \sin^2 x$;

b) $y = \cos^2 x + \sin 2x$;

c) $y = \sin 3x - 3 \sin x$;

d) $y = \tan x + \cot x$.

BÀI 17. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = 2^{3x-x^2}$;

b) $y = \log_3 x$.

BÀI 18. Cho hàm số $f(x) = 2 \sin^2 \left(3x - \frac{\pi}{4} \right)$. Chứng minh rằng $|f'(x)| \leq 6$ với mọi x .

BÀI 19. Một vật chuyển động rơi tự do có phương trình $h(t) = 100 - 4,9t^2$, ở đó độ cao h so với mặt đất tính bằng mét và thời gian t tính bằng giây. Tính vận tốc của vật:

a) Tại thời điểm $t = 5$ giây;

QUICK NOTE

QUICK NOTE

b) Khi vật chạm đất.

BÀI 20. Chuyển động của một hạt trên một dây rung được cho bởi $s(t) = 12 + 0,5 \sin(4\pi t)$, trong đó s được tính bằng centimét và t tính bằng giây. Tính vận tốc của hạt sau t giây. Vận tốc cực đại của hạt là bao nhiêu?

BÀI 21. Cho $u = u(x), v = v(x), w = w(x)$ là các hàm số có đạo hàm tại điểm x thuộc khoảng xác định. Chứng minh rằng $(u \cdot v \cdot w)' = u' \cdot v \cdot w + u \cdot v' \cdot w + u \cdot v \cdot w'$.

BÀI 22. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị mỗi hàm số sau:

a) $y = x^3 - 3x^2 + 4$ tại điểm có hoành độ $x_0 = 2$;

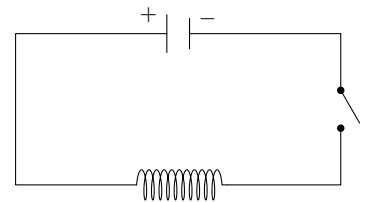
b) $y = \ln x$ tại điểm có hoành độ $x_0 = e$;

c) $y = e^x$ tại điểm có hoành độ $x_0 = 0$.

BÀI 23. Một viên đạn được bắn lên từ mặt đất theo phương thẳng đứng với tốc độ ban đầu $v_0 = 196 \text{ m/s}$ (bỏ qua sức cản của không khí). Tìm thời điểm tại đó tốc độ của viên đạn bằng 0. Khi đó viên đạn cách mặt đất bao nhiêu mét (lấy $g = 9,8 \text{ m/s}^2$)?

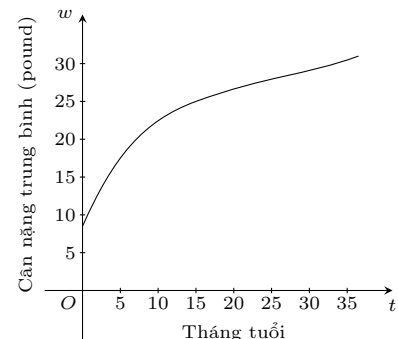
BÀI 24. Cho mạch điện như hình bên. Lúc đầu tụ điện có điện tích Q_0 .

Khi đóng khoá K , tụ điện phóng điện qua cuộn dây; điện tích q của tụ điện phụ thuộc vào thời gian t theo công thức $q(t) = Q_0 \sin \omega t$, trong đó ω là tốc độ góc. Biết rằng cường độ $I(t)$ của dòng điện tại thời điểm t được tính theo công thức $I(t) = q'(t)$. Cho biết $Q_0 = 10^{-8}$ (C) và $\omega = 10^6 \pi$ (rad/s).



Tính cường độ của dòng điện tại thời điểm $t = 6(\text{s})$ (tính chính xác đến 10^{-5} (mA)).

BÀI 25. Cân nặng trung bình của một bé gái trong độ tuổi từ 0 đến 36 tháng có thể được tính gần đúng bởi hàm số $w(t) = 0,000758t^3 - 0,0596t^2 + 1,82t + 8,15$, trong đó t được tính bằng tháng và w được tính bằng pound (nguồn: <https://www.cdc.gov.growthcharts/data/who/GrChrBoys>). Tính tốc độ thay đổi cân nặng của bé gái đó tại thời điểm 10 tháng tuổi.



BÀI 26. Một công ty xác định rằng tổng chi phí của họ, tính theo nghìn đô-la, để sản xuất x mặt hàng là $C(x) = \sqrt{5x^2 + 60}$ và công ty lên kế hoạch nâng sản lượng trong t tháng kể từ nay theo hàm số $x(t) = 20t + 40$. Chi phí sẽ tăng thế nào sau 4 tháng kể từ khi công ty thực hiện kế hoạch đó?

BÀI 27. Trên Mặt Trăng, quãng đường rơi tự do của một vật được cho bởi công thức $s(t) = 0,81t^2$, trong đó t là thời gian được tính bằng giây và s tính bằng mét. Một vật thả rơi từ độ cao 200 m phía trên Mặt Trăng. Tại thời điểm $t = 2$ sau khi thả vật đó, tính quãng đường vật đã rơi.

BÀI 28. Cho hàm số $f(x) = x^2 \cdot e^x$. Tính $f''(0)$.

BÀI 29. Tính đạo hàm cấp hai của các hàm số sau

a) $y = \ln(x + 1)$.

b) $y = \tan 2x$.

BÀI 30. Tìm đạo hàm cấp hai của mỗi hàm số sau

a) $y = \frac{1}{2x+3}$.

b) $y = \log_3 x$.

c) $y = 2^x$.

BÀI 31. Tính đạo hàm cấp hai của mỗi hàm số sau

QUICK NOTE

a) $y = 3x^2 - 4x + 5$ tại điểm $x_0 = -2$.

b) $y = \log_3(2x + 1)$ tại điểm $x_0 = 3$.

c) $y = e^{4x+3}$ tại điểm $x_0 = 1$.

d) $y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ tại điểm $x_0 = \frac{\pi}{6}$.

e) $y = \cos\left(3x - \frac{\pi}{6}\right)$ tại điểm $x_0 = 0$.

BÀI 32. Cho hàm số $P(x) = ax^2 + bx + 3$, (a, b là các hằng số). Tìm a, b biết $P'(1) = 0$, $P''(1) = -2$.

BÀI 33. Cho hàm số $f(x) = 2\sin^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$. Chứng minh rằng $|f''(x)| \leq 4$ với mọi x .

BÀI 34. Cho hàm số $y = \cos^2 4x$. Chứng minh rằng: $32(2y - 1) + y'' = 0$.

BÀI 35. Cho hàm số $y = x \tan x$. Chứng minh rằng: $x^2 y'' - 2(x^2 + y^2)(1 + y) = 0$.

BÀI 36. Cho hàm số $y = \frac{\sin^3 x + \cos^3 x}{1 - \sin x \cos x}$. Chứng minh rằng: $y'' + y = 0$.

BÀI 37. Phương trình chuyển động của một hạt được cho bởi công thức $s(t) = 10 + 0,5 \sin\left(2\pi t + \frac{\pi}{5}\right)$, trong đó s tính bằng centimét, t tính bằng giây. Gia tốc của hạt tại thời điểm $t = 5$ giây (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất).

BÀI 38. Một vật rơi tự do theo phương thẳng đứng có phương trình $s = \frac{1}{2}gt^2$, trong đó g là gia tốc rơi tự do, $g \approx 9,8 \text{ m/s}^2$.

a) Tính vận tốc tức thời của vật tại thời điểm $t_0 = 2$ (s).

b) Tính gia tốc tức thời của vật tại thời điểm $t_0 = 2$ (s).

BÀI 39. Một chất điểm chuyển động theo phương trình $s(t) = t^3 - 3t^2 + 8t + 1$, trong đó $t > 0$, t tính bằng giây và $s(t)$ tính bằng mét. Tìm vận tốc tức thời, gia tốc tức thời của chất điểm

a) Tại thời điểm $t = 3$ (s).

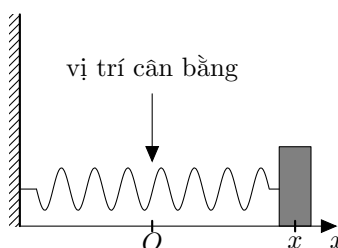
b) Tại thời điểm mà chất điểm di chuyển được 7 (m).

BÀI 40.

Một con lắc lò xo dao động điều hòa theo phương ngang trên mặt phẳng không ma sát như hình 7, có phương trình chuyển động $x = 4\sin t$, trong đó t tính bằng giây và x tính bằng centimét.

a) Tìm vận tốc tức thời và gia tốc tức thời của con lắc tại thời điểm t (s).

b) Tìm vị trí, vận tốc tức thời và gia tốc tức thời của con lắc tại thời điểm $t = \frac{2\pi}{3}$ (s). Tại thời điểm đó, con lắc di chuyển theo hướng nào?



Hình 7

MỤC LỤC

Bài 31. ĐẠO HÀM	1
Ⓐ Tóm tắt kiến thức.....	1
Ⓑ Các dạng bài tập.....	2
Dạng 1. Tính đạo hàm của hàm số bằng định nghĩa.....	2
Dạng 2. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số.....	3
Ⓒ Bài tập rèn luyện.....	3
Bài 32. CÁC QUY TẮC TÍNH ĐẠO HÀM	5
Ⓐ Tóm tắt kiến thức.....	5
Ⓑ Các dạng bài tập.....	7
Dạng 3. Tính đạo hàm cơ bản.....	7
Dạng 4. Tính đạo hàm hàm hợp.....	8
Dạng 5. Tính đạo hàm tổng, hiệu, tích, thương.....	9
Dạng 6. Một số ứng dụng của đạo hàm.....	10
Dạng 7. Chứng minh đẳng thức hoặc giải phương trình.....	10
Dạng 8. Tính đạo hàm cấp hai.....	11
Dạng 9. Ý nghĩa của đạo hàm cấp hai.....	12
Dạng 10. Chứng minh đẳng thức chứa đạo hàm cấp 2.....	12
Ⓒ Bài tập rèn luyện.....	13

